Capítulo 3. Metodología

3.1 Programación lineal

La programación lineal es una técnica poderosa para tratar problemas de asignación de recursos escasos entre actividad, que compiten al igual que otros problemas cuya formulación matemática es parecida. Se ha convertido en una herramienta estándar de gran importancia para muchas organizaciones industriales y de negocios. Aún más, casi cualquier organización social tiene el problema de asignar recursos en algún contexto y cada vez es mayor el reconocimiento de la aplicación tan amplia de esta técnica.

Sin embargo, no todos los problemas de asignación de recursos limitados se pueden formular de manera que se ajusten a un modelo de programación lineal, ni siquiera como una aproximación razonable.

3.1.2 Modelo matemático de programación lineal

Generalmente, un modelo matemático de programación lineal implica la maximización o minimización de una función lineal de un conjunto de variables no negativas, sujeta a un conjunto de desigualdades también lineales, que relacionan a las variables.

No existe una norma en cuenta a tratar el problema como un caso, ya sea de maximización o minimización. Es necesario aclarar que no es esta una diferencia básica que implique que el tratamiento dado a un problema en un caso, tenga un tratamiento completamente diferente en otro, sino que por el contrario, el tratamiento es el mismo (salvo las diferencias debidas a Max. o Min.). Existe, además, una relación uno a uno entre los dos problemas (problema dual).

El punto de vista de la programación lineal, es el de considerar un sistema como factible de ser descompuesto en una serie de funciones elementales llamadas “actividades”. La cantidad de cada actividad se llama “nivel de la actividad” y lo representaremos por el valor que toman las variables $x_{j.}$

La forma general del modelo matemático de programación lineal, será:

Encontrar: x_1, x_2, ..., x_n (los niveles de n actividades), tales que maximicen la función lineal:

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_jx_j + \dots c_nx_n$$

que llamaremos “función objetivo”, satisfaciendo las m restricciones lineales:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1j}x_j + \ldots + a_{1n}x_n \leq \mathbf{b_1}$$
$$a_{11}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2j}x_j + \ldots + a_{2n}x_n \leq \mathbf{b_2}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{ij}x_j + \ldots + a_{in}x_n \leq \mathbf{b_i}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mj}x_j + \ldots + a_{mn}x_n \leq \mathbf{b_m}$$

tales que los niveles de actividad sean positivos o nulos, es decir:

$$x_1 >= 0,\ x_2 >= 0, \ldots\ldots,\ x_n >= 0$$

donde (a_{ij}), (c_j) y (b_i) son constantes conocidas

La misma generalización utilizando matrices, sería:

Dado $A = ||a_{ij}||$, $B = [b_1, b_2, \ldots , b_m]$ y $C = [c_1,c_2, \ldots , c_n]$, el problema general de programación lineal, es el de encontrar una o varias $X = (x_1,x_2, \ldots , x_n)$ no negativas, que maximicen:

$$Z = CX$$

Sujeta a la condición de que: $AX \leq B$

De aquí en adelante se supondrá que el modelo está en forma general, a menos que se especifique de otra manera.

3.1.3 Interpretación del modelo matemático de programación lineal

Consideraremos n actividades que están compitiendo por la obtención de ciertos recursos escasos.

Se mencionó que x_j representa la intensidad (o nivel) que tomará la actividad j, como por ejemplo la cantidad de mesas tipo j que deberá producir un carpintero que hace varios modelos de mesas, pero que está limitado respecto a la cantidad de madera que puede conseguir.

Z representará la medida total de efectividad (el valor de la función objetivo). La función objetivo deberá ser escogida de tal forma que refleje el dato que nos interesa maximizar (como por ejemplo utilidades).

C_j es el incremento que se obtendrá en el valor de la función objetivo (Z), por cada unidad que x_j se incremente. Por ejemplo C_j puede representar la ganancia obtenida al vender una mesa tipo j.

Hemos ya mencionado que existen recursos escasos que nos impiden desarrollar cada actividad de manera que se considera más efectiva. Sea “m” el número de recursos escasos. La forma que la programación lineal utiliza para indicar en que forma están restringidos cada uno de los recursos, es por medio de una desigualdad.

Debe tenerse mucho cuidado de no incurrir en ecuaciones redundantes, con el objeto de evitar más trabajo del necesario.

Cuando se incurre en ecuaciones redundantes, el método de solución las elimina, pero existe el peligro de que en lugar de este tipo de ecuaciones formemos un sistema inconsistente.

b_i es la cantidad del recurso i con que contamos para surtir a las n actividades.

a_{ij} es la cantidad del recurso i que es consumida por cada unidad de actividad j.

Vemos entonces, que las desigualdades no tienen otro significado que el de indicar matemáticamente que la suma de las cantidades de recurso escaso i utilizado en las n actividades, deberá ser menor o igual que la cantidad del mismo de que se dispone.

3.1.4 Ejemplo de formulación

Ejemplo 1

Supóngase que se tienen n posibles productos (actividades), los cuales podemos producir. Nos interesa saber cuáles de ellos y en qué cantidades debemos producirlos. Representaremos las cantidades a producir de cada una de ellos, por:

$$x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots, x_n$$

Para producir estos n productos tenemos que hacer uso de m operaciones.

Supóngase que la ganancia que obtendremos de cada producto es conocida por nosotros y que está representada por:

$$c_1, c_2, c_3, \ldots\ldots, c_n$$

donde:

$c_1 =$ ganancia obtenida al producir una unidad del producto 1

$c_2 =$ ganancia obtenida al producir una unidad del producto 2

etc.

Representaremos por Z la ganancia total obtenida de todos los productos producidos.

Es claro ahora que nuestro objetivo será el de maximizar nuestra ganancia total. Sin embargo, generalmente existen consideraciones practicas que limitan las cantidades x_j que pueden ser producidas, limitando a su vez la ganancia que podemos obtener de la producción, como por ejemplo el hecho de que nuestra planta tiene capacidades fijas y finitas para nuestras m operaciones, es decir, tenemos capacidades disponibles que son:

$$b_1,b_2,b_3, \ldots\ldots, b_m$$

También conocemos la cantidad de cada operación que cada uno de los productos requiere, de aquí que conozcamos que cada unidad del producto j que produzcamos requerirá a_{ij} minutos en la operación i, donde:

$$(j = 1,2, \ldots, n)\ (i = 1,2, \ldots, m)$$

Vemos que el problema es el de escoger cuidadosamente las cantidades de cada producto $(x_1,x_2, \ldots\ldots, x_n)$ que debemos producir, si deseamos que CX sea tan grande como sea posible.

Construyamos nuestro modelo matemático el cual deberá coincidir con nuestro modelo general dado con anterioridad.

Tratamos de encontrar los valores de $x_1,x_2,\ldots\ldots, x_n$ para:

$$\text{Maximizar } Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots. + c_jx_j + \ldots. c_nx_n$$

Y vemos que estamos sujetos a las siguientes restricciones:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots. + a_{1j}x_j + \ldots. + a_{1n}x_n \leq \mathbf{b_1}$$
$$a_{11}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots. + a_{2j}x_j + \ldots. + a_{2n}x_n \leq \mathbf{b_2}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots. + a_{ij}x_j + \ldots. + a_{in}x_n \leq \mathbf{b_i}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots. + a_{mj}x_j + \ldots. + a_{mn}x_n \leq \mathbf{b_m}$$

$$x_j >= 0 \quad \text{para } j = 1,2,\ldots, n$$

Vemos que los elementos en la columna j representan, cada uno, la capacidad usada de la operación i por el producto j.

El lado izquierdo de las desigualdades representa el uso total del recurso i, mientras que el derecho nos indica la capacidad total disponible para la operación i.

La restricción $x_j \geq 0$, solo nos indica que es imposible el producir cantidades negativas del producto j.

3.1.5 Terminología en Programación Lineal

Definición 1.

Una solución es un conjunto de n valores para las n x´js de las restricciones.

Definición 2.

Región de soluciones posibles es aquel conjunto de vectores que satisfacen todas las restricciones.

Definición 3.

Una solución factible (o posible), es cualquier solución (vector) que satisface todas las restricciones, es decir, cualquier vector de la región de soluciones posibles. Si existe una solución factible para un problema, éste se dice que es factible.

Definición 4.

Una solución básica factible es aquella que corresponde con un punto extremo de la región de soluciones posibles.

Una solución básica no factible es aquella que corresponde con la intersección de dos o más restricciones, fuera de la región de soluciones factibles.

Una solución básica factible es el conjunto de "m" cantidades x_i ($x_i \geq 0$) y de "n-m" cantidades x_t ($x_t \geq 0$), que satisfacen el sistema de restricciones.

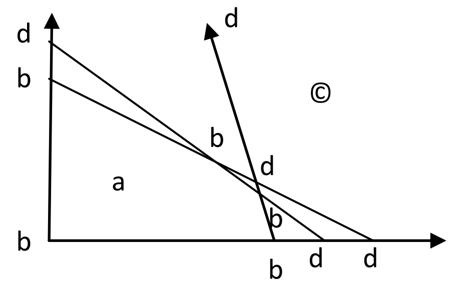

Figura 3.1 **Tipos de soluciones**

a) Soluciones factibles (∞)
b) Soluciones básicas factibles (5)
c) Soluciones no factibles (∞)
d) Soluciones básicas no factibles (5)

Definición 5.-

Una solución óptima, es la mejor de todas las soluciones factibles, esto es, aquella que maximiza la función objetivo.

Una solución óptima es aquel vector $X_{o,}$ tal que $CX_o \geq CX$, para todas las soluciones (vectores) X factibles.

3.2 Análisis de Inventarios

3.2.1 Modelo de la cantidad fija de la orden con existencias de reserva

Un sistema de la cantidad fija de la orden vigila permanentemente el nivel del inventario y coloca una nueva orden cuando las existencias llegan a cierto nivel R. El peligro de desabasto en este modelo solo se presenta durante el tiempo de entrega; es decir, en el tiempo que corre entre el momento en que se coloca una orden y en que se recibe. Como muestra la figura 3.1, se coloca una orden cuando la situación del inventario baja al punto de una nueva orden R. En ese tiempo de entrega, L, puede surgir una gama diversa de demandas. Establecemos esta gama de demandas con base en un análisis de los datos de la demanda pasada o en una estimación (si no hay datos del pasado).

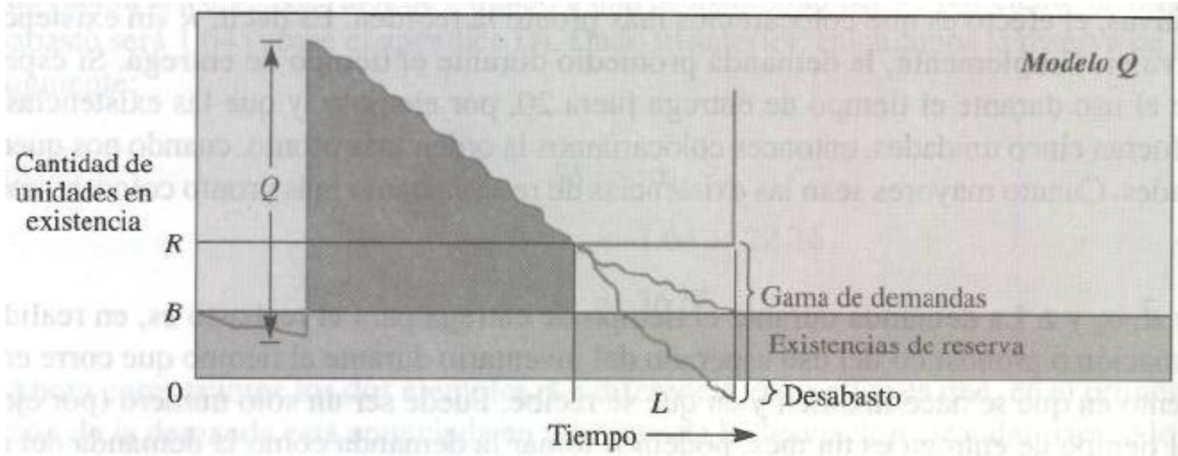

Figura 3.2 **Modelo de la cantidad fija de la orden con existencias de reserva**

El volumen de las existencias de reserva depende, como dijimos antes, del nivel de servicio deseado. Calculamos la cantidad de la orden Q, de la forma acostumbrada, considerando la demanda, el costo del desabasto, el costo de la orden, el costo por mantener el inventario, etc. Podemos usar el modelo de la cantidad fija de la orden para calcular Q, igual que con el modelo simple Qòpt. Luego, establecemos el punto de reorden para cubrir la demanda contemplada durante el tiempo de espera más las existencias de reserva determinadas por el nivel deseado de servicio. Por tanto, la diferencia central entre un modelo de la cantidad fija de la orden cuya demanda es conocida y una cuya demanda es desconocida está en calcular el punto de reorden. La cantidad de la orden es igual en los dos casos. El elemento incertidumbre está considerado en las existencias de reserva.

El punto de reorden es:

$$R = \mu L + z\sigma$$

donde:

R =Punto de reorden en unidades
μ = Demanda diaria promedio
L = Tiempo de entrega en días (tiempo que corre entre colocar la orden y recibir los artículos)
z = Número de desviaciones estándar para una probabilidad específica de servicio
σ = Desviación estándar de uso durante tiempo de entrega

El termino $z\sigma$ es la cantidad de existencias de reserva. Nótese que si las existencias de reserva son positivas, el efecto es que colocaremos más pronto la reorden. Es decir, R sin existencias de reserva es, simplemente, la demanda promedio durante el tiempo de entrega.

Calcular μ, σ y z. La demanda durante el tiempo de entrega para el reabasto es, en realidad, una estimación o pronóstico del uso esperado del inventario durante el tiempo que corre entre el momento en que se hace la orden y en que se recibe. En el caso de la demanda diaria (*di)*, podemos pronosticar la demanda (*d)* usando alguno de los modelos de pronóstico. Por ejemplo, si usamos un periodo de 30 días para calcular d, entonces un promedio simple sería:

$$\mu = \frac{\sum_{i=1}^{n} di}{n}$$

$$\mu = \frac{\sum_{i=1}^{30} di}{30}$$

donde n es el número de días.

La desviación estándar de la demanda diaria es:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(di - \mu)^2}{n}}$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{30}(di - \mu)^2}{30}}$$

3.3 Enfoque de Sistemas

3.3.1 Sistema

Podríamos encontrar diversas definiciones de sistema pero debemos considerar que todas ellas están desarrolladas de manera intuitiva debido al quehacer diario en nuestras vidas, sin embargo podemos tener una idea que describa a un sistema como un conjunto de elementos que interactúan con un objetivo común. Todo sistema está integrado por objetos o unidades agrupadas de tal manera que, constituya un todo lógico y funcional, que es mayor que la suma de esas unidades.

El cuerpo humano es un sistema, este se forma de órganos interrelacionados, entre los cuales están los pulmones, el corazón, los músculos, etc., pero el cuerpo humano como todo ciertamente es algo más que la suma de sus partes individuales.

Una empresa de negocios es un sistema, sus partes están representadas por las funciones de mercadotecnia, operaciones, finanzas, etc., pero la empresa como sistema puede tener mayores logros como un todo que los que podría realizar cada una de sus partes individuales.

Una sola función no es capaz de producir algo por sí misma. Una empresa no puede vender el producto que no puede elaborar. No sirve de nada fabricar un producto que no puede venderse. Cuando las diversas partes de un sistema trabajan en conjunto, se obtiene un efecto sinergético en el cual el producto del sistema es mayor que la suma de las contribuciones individuales de sus partes.

Existen sistemas cuyos elementos y objetivos son muy distintos, pero tienen el mismo tipo de interacción, este tipo de sistema se dice que son estructuralmente semejantes. Las conclusiones que se obtienen al estudiar uno de estos sistemas, se pueden aplicar a otro.

3.3.2 El Enfoque de Sistemas

Es un esquema metodológico que sirve como guía para la solución de problemas, en especial hacia aquellos que surgen en la dirección o administración de un sistema, al existir una discrepancia entre lo que se tiene y lo que se desea, su problemática, sus componentes y su solución.

El enfoque de sistemas son las actividades que determinan un objetivo general y la justificación de cada uno de los subsistemas, las medidas de actuación y estándares en términos del objetivo general, el conjunto completo de subsistemas y sus planes para un problema específico.

El proceso de transformación de un insumo (problemática) en un producto (acciones planificadas) requiere de la creación de una metodología organizada en tres grandes subsistemas:

- Formulación del problema
- Identificación y diseño de soluciones
- Control de resultados

Esto indica que los lineamientos básicos de trabajo son:

1. El desarrollo de conceptos y lineamientos para estudiar la realidad como un sistema (formulación del modelo conceptual).
2. El desarrollo de esquemas metodológicos para orientar el proceso de solución de problemas en sus distintas fases.
3. El desarrollo de técnicas y modelos para apoyar la toma de decisiones, así como para obtener y analizar la información requerida.

El enfoque de sistemas tiene como propósito hacer frente a los problemas cada vez más complejos que plantean la tecnología y las organizaciones modernas, problemas que por su naturaleza rebasan nuestra intuición y para lo que es fundamental comprender su estructura y proceso (subsistema, relaciones, restricciones del medio ambiente, etc.).

3.3.3 La Necesidad del Enfoque de Sistemas

El razonamiento común para justificar la necesidad del enfoque de sistemas, consiste en señalar que en la actualidad se enfrentan múltiples problemas en la dirección de sistemas cada vez más complejos. Esta complejidad se debe a que los elementos o partes del sistema bajo estudio están íntimamente relacionados ya que el sistema mismo interactúa en el medio ambiente y con otros sistemas.

Un ejemplo es el transporte, cuyo estudio lleva a considerar no sólo equipo, infraestructura, demanda y operación, sino también variables del entorno tan diversas como tecnología, contaminación, normatividad, seguridad, reordenación y uso del suelo, factibilidad financiera, etc.

El número de ejemplos de este tipo puede ampliarse fácilmente (una empresa, un centro de abasto, o un sistema de información) e incluso llevarse a niveles macro al citar la estrecha vinculación que existe entre factores como pobreza, delincuencia, educación, salud, empleo, productividad, inflación, votos electorales, etc.

3.3.4 Proceso de Solución de Problemas Utilizando el Enfoque de Sistemas

Subsistema Formulación del Problema. Tiene como función el identificar los problemas presentes y los previsibles para el futuro, además de explicar la razón de su existencia y para su comprensión se divide de la siguiente manera:

- Planteamiento de la problemática.
- Investigación de lo real.
- Formulación de lo deseado.
- Evaluación y diagnóstico.

Subsistema Identificación y Diseño de Soluciones. Su propósito es plantear y juzgar las posibles formas de intervención, así como la elaboración de los programas, presupuestos y diseños requeridos para pasar a la fase de ejecución, este punto está dividido en:

- Generación y evaluación de alternativas.
- Formulación de bases estratégicas.
- Desarrollo de la solución.

Subsistema Control de Resultados. Todo plan estrategia o programa está sujeto a ajustes o replanteamientos al detectar errores, omisiones, cambios en el medio ambiente, variaciones en la estructura de valores, etc.

Y este punto está dividido de la siguiente manera:

- Planeación del control.
- Evaluación de resultados y adaptación.

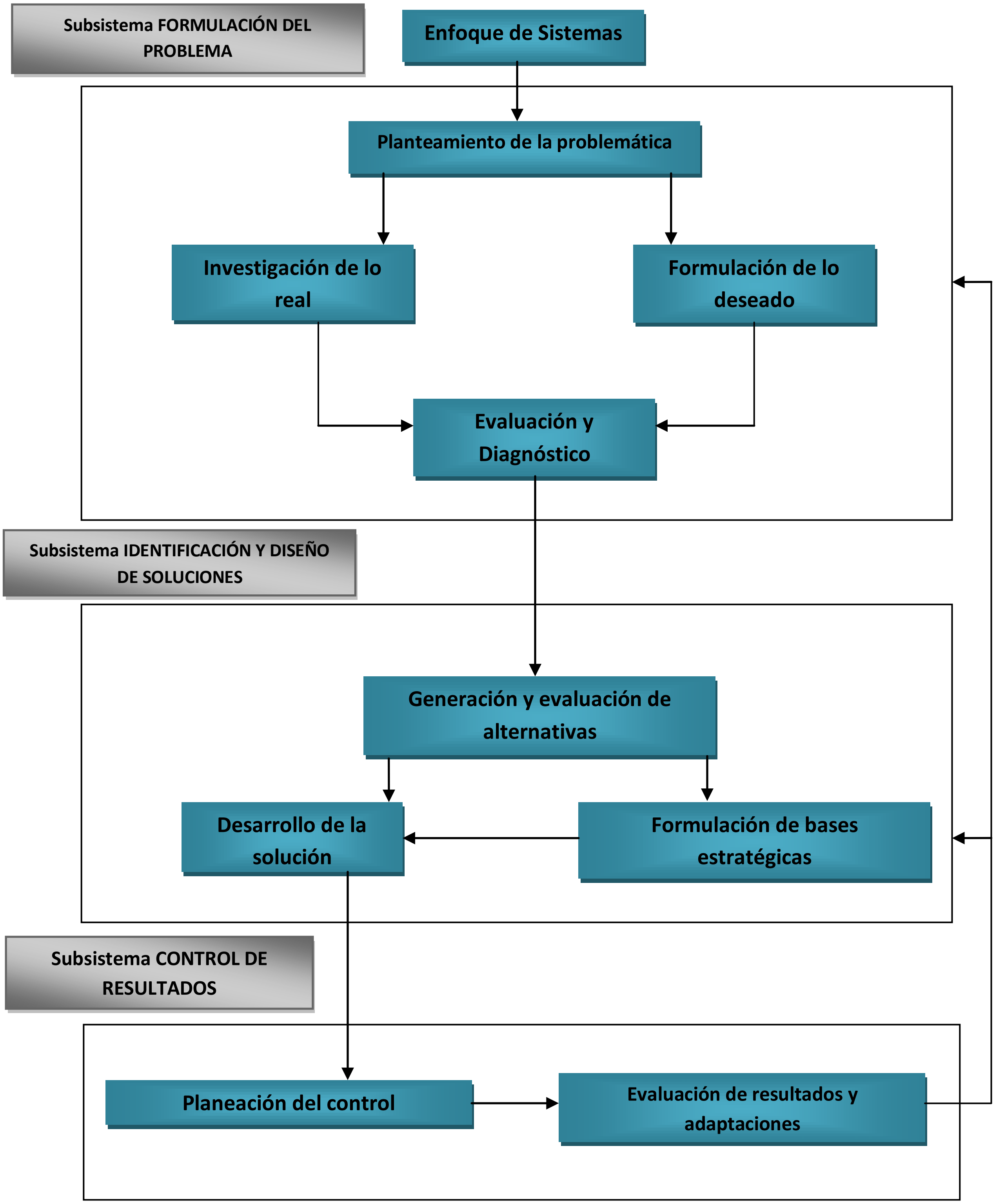

Figura 3.3 **Descripción del Enfoque de Sistemas**