



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO**

**PROGRAMA DE POSGRADO  
EN INGENIERÍA**

**FACULTAD DE INGENIERÍA**

**DISTRIBUCIÓN DE ESFUERZOS Y DESPLAZAMIENTOS ALREDEDOR DE UN  
TÚNEL CIRCULAR Y EN SU REVESTIMIENTO**

**T E S I S**

Que para optar por el grado de  
**MAESTRO EN INGENIERÍA**  
Ingeniería Civil - Geotecnia

**P R E S E N T A**

**MARCO ANTONIO PÉREZ ÁNGELES**

Director de tesis:

**DR. GABRIEL AUVINET GUICHARD**  
Instituto de Ingeniería, UNAM

México D.F., septiembre de 2013

## **JURADO ASIGNADO**

Presidente: DR. RIGOBERTO RIVERA CONSTANTINO  
Secretario: M.I. AGUSTÍN DEMÉNEGHI COLINA  
Vocal: DR. GABRIEL AUVINET GUICHARD  
1<sup>er</sup> Suplente: DR. JUAN FELIX RODRÍGUEZ REBOLLEDO  
2<sup>do</sup> Suplente: M.I. FERMÍN ANTONIO SÁNCHEZ REYES

Lugar donde se realizó la tesis:

INSTITUTO DE INGENIERÍA, UNAM.

### **TUTOR DE TESIS:**

DR. GABRIEL AUVINET GUICHARD

-----  
**FIRMA**

## DEDICATORIA

A mi hijo Saúl.

Gracias Dios mío porque en su mirada y en su sonrisa he sido testigo de tu gracia e infinita misericordia.

A mis sobrinos Abraham, Edgar y Valeria

A todos mis primos y a sus hijos

## AGRADECIMIENTOS

A quién vive y a quién reina en mi vida y en mi corazón.

A quién he amado con todas mis fuerzas.

A mis padres quienes me han conducido con gran amor en toda mi vida y por creer en mí siempre.

A mi hermana por ser mi alegría.

A mis madrinas por su cariño y el apoyo desinteresado que siempre me ofrecieron.

A mis hermanos Zhaby, Oscar y Daniel por los grandes momentos.

A mi padre espiritual por enseñarme el camino.

A la Universidad Nacional Autónoma de México.

Al Instituto de Ingeniería de la UNAM.

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología por su programa de becas para estudios de posgrado.

A mis compañeros y amigos de la maestría, en especial a Jenny Ramírez, Alfredo Coliente, Gilberto Flores, Miguel Ortega, Antonio Martínez y Miguel Mánica.

A mis profesores: Dr. Gabriel Auvinet, Dra. Norma Patricia López, Dr. Rigoberto Rivera, Dr. Juan Félix Rodríguez, M.I. Agustín Deméneghi, M.I. Fermín Sánchez y M.I. Ricardo Padilla.

Al Dr. Gabriel Auvinet por enseñarme a no dejarme alcanzar por las circunstancias de la vida.

# **DISTRIBUCIÓN DE ESFUERZOS Y DESPLAZAMIENTOS ALREDEDOR DE UN TÚNEL CIRCULAR Y EN SU REVESTIMIENTO**

## **RESUMEN**

En esta tesis se analiza el problema del estado de esfuerzos y de desplazamientos en un terreno afectado por la construcción de un túnel circular y en su revestimiento. Se revisan aspectos relevantes de la mecánica del medio continuo y de la teoría de la elasticidad, utilizados por diversos autores para obtener soluciones analíticas para túneles circulares. Se evalúan las soluciones analíticas de Kirsch (1898), Wood (1975), Einstein y Schwartz (1979), Alberro (1983) y Bobet (2001).

Se proponen dos nuevas soluciones analíticas para túneles circulares, una para el terreno y otra para el revestimiento (Pérez y Auvinet, 2012). Con la solución para el terreno se obtienen campos de esfuerzos y de desplazamientos alrededor de un túnel circular. Esta solución considera un medio infinito y toma en cuenta como condiciones de frontera en la interfaz terreno-revestimiento, dos polinomios de cuarto grado que representan distribuciones de esfuerzos radiales y cortantes, correspondientes a determinados valores de interés para realizar análisis paramétricos y/o a resultados de mediciones de campo. Con la solución para el revestimiento se obtienen distribuciones de esfuerzos y de desplazamientos en el interior del revestimiento, bajo las mismas condiciones de frontera que considera la solución para el terreno. En esta solución, la geometría del problema está totalmente definida.

Con las soluciones es posible evaluar el efecto de dos condiciones en la interfaz terreno-revestimiento: esfuerzos cortantes nulos y esfuerzos cortantes diferentes de cero. Bajo la condición de esfuerzos cortantes nulos se puede analizar el efecto de una presión de inyección, uniforme o no uniforme, en el espacio anular que existe entre el terreno y el revestimiento, cuando se construyen túneles con máquinas tuneladoras. Bajo la condición de esfuerzos cortantes diferentes de cero, se puede analizar el efecto de inyecciones locales cercanas al túnel. Ambos tipos de análisis son útiles para definir estrategias de inyección para prevenir, controlar o corregir deformaciones excesivas de un revestimiento sometido a condiciones de esfuerzos marcadamente anisótropas.

Las nuevas soluciones analíticas permiten realizar análisis paramétricos con determinados valores de esfuerzos radiales de interés, en la interfaz terreno-revestimiento. También es posible incorporar resultados de mediciones de campo cercanas al túnel o en el revestimiento.

Las soluciones analíticas se aplican a dos casos:

1. Un túnel circular profundo que se analiza con las soluciones analíticas presentadas en este trabajo y bajo las dos condiciones de análisis antes mencionadas. Los resultados sirven para comparar entre sí las soluciones analíticas existentes y para validar las nuevas.
2. Un túnel circular construido en la Ciudad de México que se analiza con las nuevas soluciones analíticas y el método del elemento finito. Los análisis se realizan bajo la condición de esfuerzos cortantes diferentes de cero en la interfaz terreno-revestimiento. Se evalúa la utilidad de una presión de inyección local para controlar las deformaciones que un terreno, en proceso de consolidación, induce en el revestimiento de un túnel.

Se concluye que las nuevas soluciones propuestas pueden ser de utilidad tanto en el análisis y diseño de túneles circulares como en la evaluación de su comportamiento durante su vida útil. También son una herramienta para definir estrategias de inyección para el mantenimiento de túneles que estén construidos en terrenos sujetos a procesos de consolidación.

## ABSTRACT

This thesis deals with the problem of the stress and displacement states in a ground affected by the construction of a circular tunnel and its lining. Relevant aspects of continuum mechanics and elasticity theory, used by various authors to obtain analytical solutions for circular tunnels are reviewed. Special attention is paid to analytical solutions by Kirsch (1898), Wood (1975), Einstein and Schwartz (1979), Alberro (1983) and Bobet (2001).

Two new analytical solutions for circular tunnels are proposed, one for the ground and another one for the lining (Pérez and Auvinet, 2012). The solution for the ground provides an assessment of the stress and displacements fields around a circular tunnel. This solution considers an infinite medium and takes into account as boundary conditions in the ground-lining interface two fourth-degree polynomial representing distributions of radial and shear stresses corresponding to certain values of interest for a parametric analysis or to field measurement results. With the solution for lining, the stress and displacements distributions inside the lining under the same boundary conditions considered in the solution for the ground are evaluated. In this solution, the geometry of the problem is fully defined.

The solutions can evaluate the effect of two conditions in ground-lining interface: null shear stress and shear different from zero. Under the condition of null shear it is possible to analyze the effect of injection pressure, uniform or nonuniform, in the annular space between the ground and the lining, when constructing tunnels with tunnel boring machines. Under the condition of different from zero shear stress, the effect of local injections near the tunnel can be analyzed. Both types of analysis are useful to define injection strategies to prevent, control or correct excessive deformation of a liner submitted to markedly anisotropic stress conditions.

The new analytical solutions allow performing parametric analyses for certain radial stress values of interest in the ground-lining interface. It is also possible to incorporate results of field measurements near the tunnel or in the lining.

Analytical solutions are applied to two cases:

1. A deep circular tunnel is analyzed with the analytical solutions presented in this work and under the two above mentioned conditions. The results are used to compare existing analytical solutions and to validate the new ones.
2. A circular tunnel built in Mexico City which is analyzed with the new analytical solutions and the finite element method. The analyses were performed under the condition of different from zero shear stress on ground-lining interface. The utility of local injection pressure is assessed for controlling the deformations that the ground, in consolidation process, induces in the tunnel lining

It is concluded that the new proposed solutions may be useful both for the analysis and design of circular tunnels and for the evaluation of their behavior during its service life. They also provide a tool for defining injection strategies for maintenance of tunnels to be constructed in ground subjected to a consolidation processes.

## CONTENIDO

<b>RESUMEN</b> .....	<b>v</b>
<b>ABSTRACT</b> .....	<b>vi</b>
<b>CONTENIDO</b> .....	<b>7</b>
<b>CAPITULO 1. INTRODUCCIÓN</b> .....	<b>9</b>
1.1. ANTECEDENTES.....	10
1.2. OBJETIVOS .....	10
<b>CAPITULO 2. MARCO TEÓRICO</b> .....	<b>11</b>
2.1. ECUACIONES DE EQUILIBRIO .....	11
2.2. RELACIONES DEFORMACIÓN-DESPLAZAMIENTO Y CONDICIÓN DE COMPATIBILIDAD DE DEFORMACIONES .....	12
2.3. RELACIONES ESFUERZO-DEFORMACIÓN .....	14
2.4. CONDICIONES DE FRONTERA .....	15
2.5. ESTADO PLANO DE ESFUERZOS .....	15
2.6. ESTADO PLANO DE DEFORMACIONES .....	15
2.7. REPRESENTACIÓN EN COORDENADAS POLARES.....	16
2.8. FUNCIÓN POTENCIAL DE ESFUERZOS EN COORDENADAS POLARES ....	18
<b>CAPÍTULO 3. SOLUCIONES ANALÍTICAS EXISTENTES PARA TÚNELES CIRCULARES</b> .....	<b>19</b>
3.1. PLACA INFINITA CON ORIFICIO CIRCULAR (KIRSCH, 1898).....	19
3.1.1. Esfuerzo inicial isótropo.....	19
3.1.2. Esfuerzo inicial unidireccional .....	20
3.1.3. Consideraciones adicionales.....	22
3.2. TÚNEL CIRCULAR EN MATERIAL ELÁSTICO (WOOD, 1975).....	25
3.2.1. Fuerzas cortantes nulas entre el terreno y el revestimiento.....	26
3.2.2. Efecto de las fuerzas cortantes entre el terreno y el revestimiento.....	27
3.2.3. Comentarios .....	29
3.3. ANÁLISIS SIMPLIFICADO PARA SOPORTES DE TÚNELES (EINSTEIN Y SCHWARTZ, 1979).....	31
3.3.1. Etapa 1. Desplazamientos iniciales en el medio .....	32
3.3.2. Etapa 2. Esfuerzos y desplazamientos en la interfaz terreno-revestimiento .....	33
3.3.3. Etapa 3. Elementos mecánicos sobre el revestimiento .....	35
3.3.4. Comentarios.....	35
3.4. PRESIONES DE ROCA EN TÚNELES E INTERACCIÓN ROCA- REVESTIMIENTO (ALBERRO, 1983).....	36
3.4.1. Estado unidimensional de esfuerzos .....	36
3.4.2. Estado bidimensional de esfuerzos .....	38
3.4.3. Comentarios.....	39
3.5. SOLUCIÓN ANALÍTICA PARA TÚNELES POCO PROFUNDOS EN TERRENO SECO (BOBET, 2001).....	41
3.5.1. Solución para terreno seco .....	41
3.5.2. Comentarios.....	44

<b>CAPÍTULO 4. SOLUCIONES ANALÍTICAS PARA TÚNELES CIRCULARES (PÉREZ Y AUVINET, 2012)</b> .....	<b>45</b>
4.1. SOLUCIÓN ANALÍTICA PARA EL TERRENO .....	47
4.1.1. Condiciones de frontera .....	47
4.1.2. Función potencial de esfuerzos .....	49
4.1.3. Esfuerzos y desplazamientos .....	49
4.2. SOLUCIÓN ANALÍTICA PARA EL REVESTIMIENTO .....	50
4.2.1. Condiciones de frontera .....	50
4.2.2. Función potencial de esfuerzos .....	50
4.2.3. Esfuerzos y desplazamientos .....	50
4.3. COMENTARIOS ADICIONALES .....	51
<b>CAPÍTULO 5. APLICACIONES</b> .....	<b>53</b>
5.1 TÚNEL PROFUNDO EN MEDIO ELÁSTICO .....	53
5.1.1 Condición de esfuerzos cortantes nulos en la interfaz terreno-revestimiento .....	54
5.1.2 Condición de esfuerzos cortantes diferentes de cero en la interfaz terreno-revestimiento .....	61
5.2 TÚNEL CONSTRUIDO EN LA CIUDAD DE MÉXICO .....	67
5.2.1 Estado inicial de esfuerzos .....	68
5.2.2 Condiciones piezométricas .....	68
5.2.3 Etapas de análisis .....	69
5.2.3.1 <i>Parámetros para las etapas de análisis 1 y 2</i> .....	70
5.2.3.2 <i>Parámetros para las etapas de análisis 3 y 4</i> .....	70
5.2.4 Modelado numérico .....	71
5.2.4.1 <i>Análisis en esfuerzos totales</i> .....	71
5.2.4.2 <i>Análisis en esfuerzos efectivos</i> .....	73
5.2.5 Presiones requeridas y estrategia de mantenimiento a base de inyecciones para la corrección de deformaciones en el revestimiento del túnel .....	73
<b>CAPÍTULO 6. CONCLUSIONES</b> .....	<b>77</b>
<b>BIBLIOGRAFÍA</b> .....	<b>81</b>
<b>ANEXOS</b> .....	<b>85</b>
ANEXO A. SOLUCIÓN ANALÍTICA PARA LA DETERMINACIÓN DEL CAMPO DE ESFUERZOS ALREDEDOR DE UNA EXCAVACIÓN CIRCULAR CON PRESIÓN INTERNA UNIFORME (PÉREZ Y AUVINET, 2012a) .....	85
ANEXO B. CONSIDERACIÓN DE REVESTIMIENTO INCOMPRESIBLE BAJO LAS CONDICIONES DE ESFUERZO PLANO Y DEFORMACIÓN PLANA .....	88
ANEXO C. SOLUCIÓN ANALÍTICA PARA REVESTIMIENTOS DE TÚNELES CIRCULARES (PÉREZ Y AUVINET, 2012c) .....	89



## CAPÍTULO 1

### INTRODUCCIÓN

Actualmente, se construyen túneles circulares con máquinas tuneladoras en todo el mundo y la tendencia a trabajar con dichas máquinas va en aumento. La construcción de este tipo de túneles ha promovido recurrir a soluciones analíticas que habían quedado en desuso debido al desarrollo de herramientas numéricas poderosas como el método del elemento finito. Sin embargo, las soluciones analíticas siguen siendo de gran interés, en particular para validar soluciones numéricas, en estudios de sensibilidad y para análisis de confiabilidad, principalmente por el método de Monte Carlo, que requieren la repetición de un gran número de cálculos.

En la literatura existen soluciones analíticas con las que es posible analizar diferentes aspectos del diseño de túneles. En este trabajo se revisan las soluciones analíticas de Kirsch (1898), Wood (1975), Einstein y Schwartz (1979), Alberro (1983) y Bobet (2001). Las ventajas de estas soluciones sobre los métodos numéricos, son que permiten desarrollar análisis paramétricos sencillos y en menor tiempo. Su uso es práctico y no requiere personal especializado en su aplicación, sólo profesionales con sensibilidad y experiencia para interpretar los resultados obtenidos.

Se proponen nuevas soluciones analíticas para calcular campos de esfuerzos y de desplazamientos, tanto en el terreno circundante a un túnel como en el interior de su revestimiento. Las nuevas soluciones analíticas adoptan como condiciones de frontera en la interfaz terreno-revestimiento distribuciones de esfuerzos radiales y cortantes representadas por polinomios de cuarto grado, correspondientes a determinados valores de esfuerzos radiales de interés en la interfaz terreno-revestimiento y/o a resultados de mediciones de campo cercanas al túnel. Los polinomios dan a la solución mayor generalidad.

Los valores propuestos de esfuerzos radiales sobre la interfaz terreno-revestimiento, pueden representar condiciones críticas en la vida útil del túnel. Con estos valores es posible realizar análisis paramétricos para modelar el comportamiento del túnel. Las mediciones de campo permiten conocer valores puntuales de esfuerzos, deformaciones y/o desplazamientos en determinados lugares geométricos, tanto en el terreno como en el revestimiento del túnel. Las nuevas soluciones analíticas permiten incorporar, sobre la interfaz terreno-revestimiento, los valores correspondientes a dichas mediciones. El objetivo es obtener campos de esfuerzos y de desplazamientos tanto en el terreno circundante al túnel como en el interior de su revestimiento y, de esta manera, conocer su comportamiento ante sollicitaciones, constantemente medibles, que impone el terreno al revestimiento durante su vida útil.

Las componentes de esfuerzos de las nuevas soluciones analíticas son independientes de los parámetros de rigidez del terreno (módulo de Young,  $E$  y relación de Poisson,  $\nu$ ). La influencia sobre el estado de esfuerzos, tanto en el terreno como en el revestimiento, de los valores puntuales de esfuerzos radiales propuestos o medidos, sobre la interfaz terreno-revestimiento, es estrictamente geométrica. Solo las componentes de desplazamientos dependen de los parámetros de rigidez, ya que para obtener sus correspondientes ecuaciones se establecen relaciones esfuerzo-deformación, bajo la condición de deformación plana.

Con las nuevas soluciones analíticas propuestas es posible estudiar la interacción terreno-revestimiento bajo la condición de esfuerzos cortantes nulos en la interfaz terreno-revestimiento. Esta condición simplifica la deducción de las soluciones analíticas; sin embargo, se obtiene una solución aproximada debido a que en algunas etapas de la vida útil del túnel, el esfuerzo cortante se desarrolla y puede ser considerable (Schmid, 1926). A partir de esta condición, es posible estudiar el efecto de elevar la presión de una inyección radial dentro del espacio anular entre terreno y revestimiento, de manera uniforme o no uniforme, sobre el estado de esfuerzos tanto en el terreno circundante como en el revestimiento. El objetivo es determinar el estado de esfuerzos más adecuado para minimizar el efecto de un eventual proceso de consolidación del terreno sobre el revestimiento y de esta manera, proponer estrategias de inyección durante la construcción del túnel.

Cuando el túnel ya está construido también es posible definir estrategias de inyección en zonas cercanas al revestimiento, para controlar o corregir deformaciones excesivas. En este trabajo se evalúan los efectos de inyecciones locales bajo la condición de esfuerzos cortantes diferentes de cero, en la interfaz terreno-revestimiento.

Ambas condiciones son útiles para definir estrategias de inyección con la finalidad de controlar o corregir deformaciones excesivas de un revestimiento, que puede estar sometido a condiciones de esfuerzos marcadamente anisótropas, inducidas a largo plazo por procesos de consolidación.

## 1.1. ANTECEDENTES

Marston (1930) y Spangler (1941) utilizaron información de mediciones de campo y desarrollaron relaciones empíricas para definir el efecto de los rellenos sobre alcantarillas de carreteras. Burns y Richard (1964), estudiaron el problema del fenómeno de arqueamiento en relación a alcantarillas flexibles y rígidas, utilizando las teorías de pared delgada y de la elasticidad. Las suposiciones de esta teoría proporcionan información limitada con respecto a la distribución de esfuerzos en la estructura.

Bernard (1957), consideró un anillo elástico susceptible de presentar falla por fluencia a la compresión. Meyerhoff y Fisher (1963) y Luscher (1965) en sus estudios con información empírica e histórica, concluyeron que el modo de falla es la flexión en lugar de la fluencia por compresión.

Autores como Terzaghi (1936, 1943), Peck (1969), Schmidt (1974), Attewell y Farmer (1974), Attewell (1977), Cording y otros (1978), Attewell y otros (1986), Macklin (1999), proporcionan procedimientos para estimar la magnitud del volumen perdido. Sus estimaciones dependen de correlaciones empíricas.

Estos trabajos han hecho aportaciones importantes en los análisis de túneles. En el presente trabajo se revisan las soluciones analíticas de Kirsch (1898), Wood (1975), Einstein y Schwartz (1979), Alberro (1983) y Bobet (2001). Estas soluciones son comunes en la práctica y proporcionan ecuaciones para obtener campos de esfuerzos y de desplazamientos y realizar análisis de interacción terreno-revestimiento, bajo las condiciones de frontera en la interfaz terreno-revestimiento, de esfuerzos cortantes nulos y diferentes de cero.

## 1.2. OBJETIVOS

1. Presentar los principales elementos de la mecánica del medio continuo y de la teoría de la elasticidad, utilizados en la obtención de soluciones analíticas para túneles circulares.
2. Revisar y comparar soluciones analíticas existentes con las que sea posible obtener campos de esfuerzos y de desplazamientos, inducidos por la construcción de un túnel circular, tanto en el terreno circundante al túnel como sobre su revestimiento.
3. Proponer nuevas soluciones analíticas con las que sea posible obtener campos de esfuerzos y de desplazamientos, tanto en el terreno circundante a un túnel circular como en su revestimiento, y realizar análisis de interacción terreno-revestimiento a partir de mediciones de campo o de valores puntuales de esfuerzos radiales, ambos en la interfaz terreno-revestimiento.
4. Realizar análisis para validar las nuevas soluciones analíticas y presentar su aplicación a un caso práctico para observar la utilidad de las nuevas soluciones y el alcance de las mismas.

## CAPÍTULO 2

### MARCO TEÓRICO

El problema fundamental de la mecánica del medio continuo es determinar para cada punto “P” dentro de un cuerpo deformable, cuya materia se halla distribuida de forma continua en todo su volumen  $V$ , los estados de esfuerzo y de deformación. Es necesario conocer la geometría y las fuerzas por unidad de volumen debidas al peso propio de dicho cuerpo, así como las condiciones de frontera en lugares geométricos determinados.

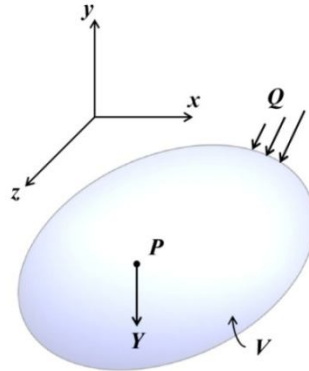


Figura 2a. Cuerpo deformable de volumen  $V$  y peso propio  $Y$ , sometido a una carga  $Q$  en su frontera.

#### 2.1. ECUACIONES DE EQUILIBRIO

La figura 2.1a es un cubo diferencial que representa el entorno cercano al punto  $P$  de la figura 2a.

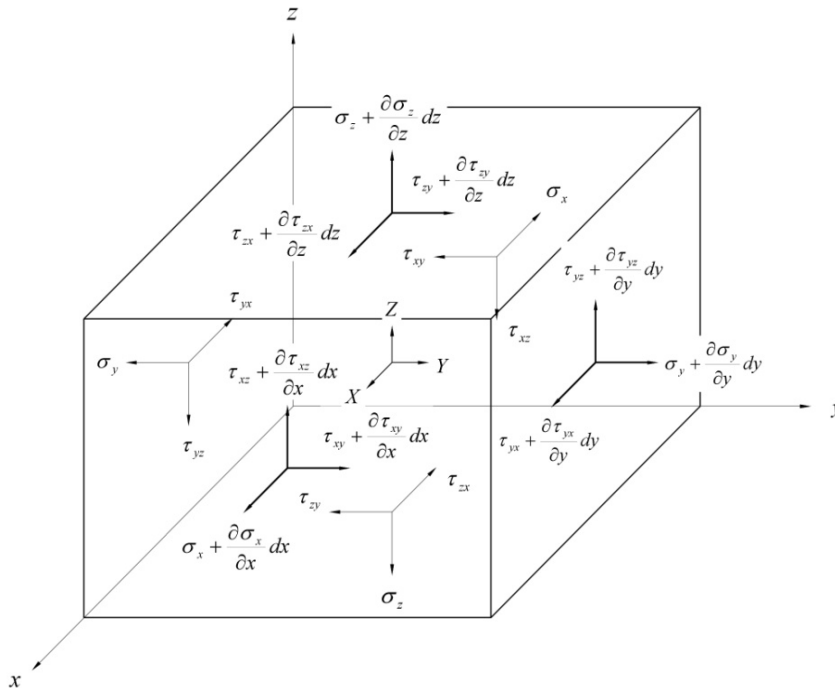


Figura 2.1a. Esfuerzos en las caras de un cubo diferencial

En la figura anterior  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$  y  $X, Y, Z$  son los esfuerzos normales y las fuerzas de cuerpo, en las direcciones  $x, y$  y  $z$ , respectivamente;  $\tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$  son esfuerzos cortantes sobre planos definidos por la dirección indicada con el primer subíndice y que actúan en la dirección que indica el segundo subíndice.

El cubo diferencial de la figura 2.1a, se asume en equilibrio; por lo tanto, se debe cumplir lo siguiente:

$$\sum F_x = \sum F_y = \sum F_z = 0 \quad (2.1a)$$

Los esfuerzos en el cubo diferencial son funciones continuas de las coordenadas  $x$ ,  $y$  y  $z$ . Las diferencias de esfuerzos en caras opuestas se representan por incrementos de esfuerzos. Sumando fuerzas en la dirección  $x$ :

$$\begin{aligned} \sum F_x = & \left( \sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx \right) dy dz - \sigma_x dy dz + \left( \tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy \right) dz dx - \\ & \tau_{yx} dz dx + \left( \tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} dz \right) dx dy - \tau_{zx} dx dy + X dx dy dz = 0 \end{aligned} \quad (2.1b)$$

Se pueden escribir ecuaciones similares en las direcciones  $y$  y  $z$ . Simplificando y dividiendo entre  $dx dy dz$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + X &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + Y &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z &= 0 \end{aligned} \quad (2.1c)$$

Si se consideran momentos respecto a los ejes  $x$ ,  $y$  y  $z$ , se obtienen los siguientes pares de esfuerzos cortantes, los cuales son ortogonales entre sí e iguales en magnitud y signo (figura 2.1a):

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} ; \tau_{yz} = \tau_{zy} ; \tau_{zx} = \tau_{xz} \quad (2.1d)$$

## 2.2. RELACIONES DEFORMACIÓN-DESPLAZAMIENTO Y CONDICIÓN DE COMPATIBILIDAD DE DEFORMACIONES

A partir de las configuraciones inicial y deformada de un cuerpo (figura 2.2a), es posible establecer una matriz gradiente de deformación  $\mathbf{D}$ . Esta matriz representa la suma de matrices, tensor de deformación unitaria y tensor de rotación:  $\mathbf{D} = \mathbf{E} + \mathbf{\Omega}$ .

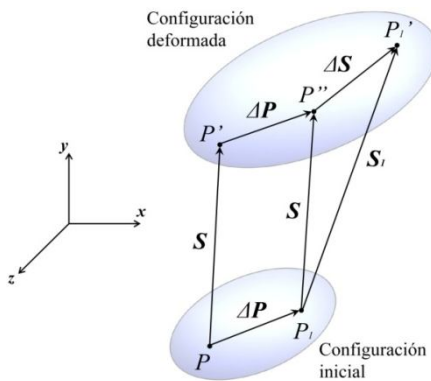


Figura 2.2a. Deformación de un cuerpo (Deméneghi *et al.*, 2003)

Si la matriz de rotación es nula, entonces las relaciones deformación-desplazamiento se obtienen del tensor de deformación unitaria. Los vectores desplazamiento de los puntos  $P$  y  $P_1$  son  $\mathbf{S}$  y  $\mathbf{S}_1$ , respectivamente.

$$\mathbf{S} = [u \quad v \quad w]^T ; \quad \mathbf{S}_1 = [u_1 \quad v_1 \quad w_1]^T \quad (2.2a)$$

donde  $u_i$ ,  $v_i$  y  $w_i$ , son las componentes de desplazamiento en las direcciones  $x$ ,  $y$  y  $z$ , respectivamente.

El vector deformación entre los puntos  $P$  y  $P_1$  es:

$$\Delta \mathbf{S} = \mathbf{S}_1 - \mathbf{S} = \begin{bmatrix} u_1 - u \\ v_1 - v \\ w_1 - w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta u \\ \Delta v \\ \Delta w \end{bmatrix} \quad (2.2b)$$

El vector de deformación unitaria se define como:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \lim_{|\Delta P| \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{S}}{|\Delta P|} = \frac{d\mathbf{S}}{dP} \quad (2.2c)$$

Aplicando la definición de deformación unitaria en la ecuación 2.2b, se tiene que:

$$\frac{d\mathbf{S}}{dP} = \begin{bmatrix} \frac{du}{dp} & \frac{dv}{dp} & \frac{dw}{dp} \end{bmatrix}^T \quad (2.2e)$$

Los diferenciales  $du$ ,  $dv$  y  $dw$  en forma extendida son:

$$\begin{aligned} du &= \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) dx + \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right) dy + \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right) dz \\ dv &= \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right) dx + \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right) dy + \left( \frac{\partial v}{\partial z} \right) dz \\ dw &= \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right) dx + \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right) dy + \left( \frac{\partial w}{\partial z} \right) dz \end{aligned} \quad (2.2f)$$

De lo anterior, la deformación unitaria puede ser escrita de la siguiente forma:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{bmatrix} = \mathbf{D} \mathbf{e} \quad (2.2g)$$

donde  $\mathbf{D}$  es la matriz gradiente de deformación (Malvern, 1969).

De la matriz gradiente de deformación, las relaciones deformación-desplazamientos son:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x}, & \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y}, & \varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z} \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, & \gamma_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}, & \gamma_{zx} &= \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \end{aligned} \quad (2.2h)$$

donde  $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_y$  y  $\varepsilon_z$  son deformaciones unitarias normales en las direcciones  $x$ ,  $y$  y  $z$ ;  $\gamma_{xy}$ ,  $\gamma_{yz}$  y  $\gamma_{zx}$  son deformaciones unitarias angulares, sus subíndices indican el plano donde actúan y su dirección, respectivamente.

Las ecuaciones de compatibilidad de deformaciones se establecen para asegurar que los desplazamientos sean funciones continuas de las variables espaciales; es decir, se garantiza que el medio es continuo.

Para asegurar que los desplazamientos sean compatibles, se establecen relaciones adicionales a las ecuaciones 2.2h. Tomando segundas derivadas parciales de las componentes de deformación y combinando resultados (Obert y Duvall, 1967), las relaciones deformación-desplazamiento adicionales son:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} & 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z} &= \frac{\partial}{\partial x} \left( -\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right) \\
 \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z} & 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z \partial x} &= \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right) \\
 \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{zx}}{\partial z \partial x} & 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right)
 \end{aligned} \tag{2.2i}$$

### 2.3. RELACIONES ESFUERZO-DEFORMACIÓN

La ley constitutiva de Hooke, admite que existen las siguientes relaciones entre esfuerzos y deformaciones:

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] \\
 \varepsilon_y &= \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)] \\
 \varepsilon_z &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)]
 \end{aligned} \tag{2.3a}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}; \quad \gamma_{yx} = \frac{\tau_{yz}}{G}; \quad \gamma_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{G} \tag{2.3b}$$

donde  $E$ ,  $\nu$  y  $G$ , son el módulo de elasticidad, la relación de Poisson y el módulo de corte, respectivamente.

Las constantes elásticas se relacionan de la siguiente forma:

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \tag{2.3c}$$

Por medio de estas constantes se establecen nuevas relaciones de esfuerzos y deformaciones:

$$\begin{aligned}
 \sigma_x &= \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} e + \frac{E}{1+\nu} \varepsilon_x \\
 \sigma_y &= \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} e + \frac{E}{1+\nu} \varepsilon_y \\
 \sigma_z &= \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} e + \frac{E}{1+\nu} \varepsilon_z
 \end{aligned} \tag{2.3d}$$

$$\tau_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{xy}; \quad \tau_{yz} = \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{yz}; \quad \tau_{zx} = \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{zx} \tag{2.3e}$$

donde  $e$  es la deformación volumétrica:  $e = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$  (2.3f)

Se llama constante de Lamé a:  $\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$  (2.3g)

Las ecuaciones 2.3d y 2.3e, se pueden describir utilizando las ecuaciones 2.3c, 2.3f y 2.3g, de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \lambda e + 2G\varepsilon_x, & \tau_{xy} &= G\gamma_{xy} \\ \sigma_y &= \lambda e + 2G\varepsilon_y, & \tau_{yz} &= G\gamma_{yz} \\ \sigma_z &= \lambda e + 2G\varepsilon_z, & \tau_{zx} &= G\gamma_{zx}\end{aligned}\quad (2.3h)$$

Para un material elástico e isótropo, solo hay dos constantes elásticas independientes  $E$  y  $\nu$ . A partir de estas se conocen  $G$  y  $\lambda$ .

## 2.4. CONDICIONES DE FRONTERA.

Las condiciones de frontera son valores prescritos o funciones conocidas para esfuerzos, deformaciones o desplazamientos, que se establecen en lugares geométricos bien conocidos de un problema específico. Son utilizadas para evaluar las constantes de integración que resultan del planteamiento del problema por resolver.

## 2.5. ESTADO PLANO DE ESFUERZOS

La condición de esfuerzo plano prevalece cuando la variación de esfuerzos respecto a una dirección, por ejemplo  $z$  ( $\sigma_z$ ,  $\tau_{xz}$  y  $\tau_{yz}$ ), son nulas. Las relaciones esfuerzo-deformación, dadas por las ecuaciones 2.3a y 2.3b, se reducen a las siguientes:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_y); \quad \varepsilon_y = \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu\sigma_x); \quad \varepsilon_z = -\frac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y); \quad \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} \quad (2.5a)$$

Las condiciones de equilibrio, las relaciones deformación-desplazamiento y las condiciones de compatibilidad de deformaciones, quedan respectivamente como:

$$\frac{\partial\sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y} + X = 0 \quad (2.5b)$$

$$\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_y}{\partial y} + Y = 0$$

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}; \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}; \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad (2.5c)$$

$$\frac{\partial^2\varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2\gamma_{xy}}{\partial x\partial y} \quad (2.5d)$$

La ecuación 2.5e, integra las ecuaciones de equilibrio (ecuación 2.1c) y de compatibilidad (ecuación 2.2i), en términos de los esfuerzos y cuando las fuerzas de cuerpo son iguales a cero.

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) (\sigma_x + \sigma_y) = 0 \quad (2.5e)$$

Para obtener la solución de un problema, las componentes de esfuerzos  $\sigma_x$  y  $\sigma_y$  deben cumplir con la ecuación 2.5e y con las condiciones de frontera del problema.

## 2.6. ESTADO PLANO DE DEFORMACIONES

Si las deformaciones en todos los puntos de un cuerpo, se dan en planos normales a su mayor dimensión, existe un estado de deformación plana. Dicho estado prevalece, por ejemplo, cuando las variaciones de

deformaciones respecto a  $z$  ( $\gamma_{xz}$ ,  $\gamma_{yz}$  y  $\varepsilon_z$ ), son nulas. Así, de la ecuación correspondiente a  $\varepsilon_z$  del conjunto de ecuaciones 2.3a, se tiene que:

$$\sigma_z = \nu(\sigma_x + \sigma_y) \quad (2.6a)$$

Sustituyendo 2.6a en las relaciones correspondientes a  $\varepsilon_x$  y  $\varepsilon_y$ , del conjunto de ecuaciones 2.3a, se tiene:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E} [(1 - \nu^2)\sigma_x - \nu(1 + \nu)\sigma_y] \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} [(1 - \nu^2)\sigma_y - \nu(1 + \nu)\sigma_x] \\ \gamma_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{G} = \frac{2(1 + \nu)}{E} \tau_{xy} \end{aligned} \quad (2.6b)$$

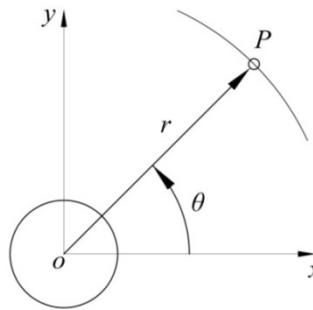
Las condiciones de equilibrio y de compatibilidad de deformaciones, son las mismas para deformación plana y esfuerzo plano; por lo tanto, en ambos casos, se cumple la ecuación:

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) (\sigma_x + \sigma_y) = 0 \quad (2.6c)$$

Las ecuaciones 2.5e y 2.6c no contienen las constantes elásticas; por lo tanto, las distribuciones de esfuerzos son las mismas en materiales isótropos siempre que el estado de esfuerzos o de deformaciones sea bidimensional.

## 2.7. REPRESENTACIÓN EN COORDENADAS POLARES

Los planteamientos matemáticos se simplifican si se utiliza un sistema de coordenadas apropiado. Para la sección de un túnel circular, se utiliza un sistema de coordenadas polares con origen en el centro del túnel.



**Figura 2.7a. Sistema de coordenadas polares con centro en el origen de un túnel**

donde  $r$  es el radio al centro del túnel;  $\theta$  es el ángulo polar medido sobre el eje horizontal y en sentido contrario a las manecillas del reloj y  $P$  es el punto de interés.

A partir de las ecuaciones 2.7a, es posible establecer relaciones entre coordenadas polares y cartesianas:

$$x = r \cos \theta; \quad y = r \sin \theta \quad (2.7a)$$

En la figura 2.7b, se muestran las componentes positivas de los esfuerzos normales y cortantes que actúan sobre un elemento radial diferencial en coordenadas polares.



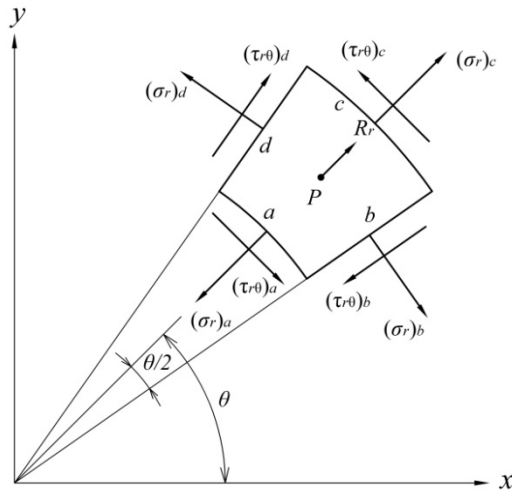


Figura 2.7b. Construcción geométrica para obtener ecuaciones de equilibrio (Obert y Duvall, 1967)

La posición del punto  $P$  en el elemento diferencial de la figura 2.7b, está dada por  $r$  y  $\theta$ . Los esfuerzos actuantes en este punto son:  $\sigma_r$ ,  $\sigma_\theta$  y  $\tau_{r\theta}$ , que son los esfuerzos radial, tangencial y cortante, respectivamente. Los esfuerzos actuando en las caras del elemento alrededor del punto son diferentes debido a la variación de esfuerzos con la posición. Los esfuerzos normales y cortantes se designan con un subíndice para asociar los esfuerzos con los lados del elemento. Las ecuaciones de equilibrio, en coordenadas polares son:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + R_r &= 0 \\ \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{2\tau_{r\theta}}{r} &= 0 \end{aligned} \tag{2.7b}$$

donde  $\sigma_r$  y  $\sigma_\theta$  son los esfuerzos normales en la dirección radial y tangencial, respectivamente;  $\tau_{r\theta}$  es el esfuerzo cortante que actúa en una cara perpendicular al eje radial y su dirección es  $\theta$ .  $R_r$  es la fuerza de cuerpo en la dirección radial.

Mediante suma de momentos se puede demostrar que  $\tau_{r\theta} = \tau_{\theta r}$ .

Las relaciones deformación-desplazamiento se pueden determinar con ayuda de la siguiente figura:

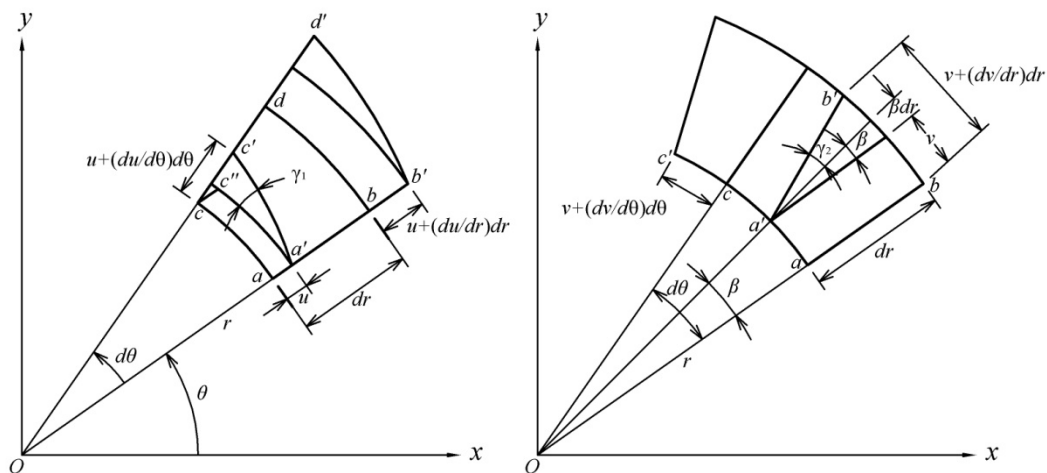


Figura 2.7c. Construcción geométrica para obtener relaciones deformación-desplazamiento (Obert y Duval, 1967)

Las deformaciones radial, tangencial y angular en función de los desplazamientos son:

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r}; \quad \varepsilon_\theta = \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta}; \quad \gamma_{r\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} \quad (2.7c)$$

Las ecuaciones de compatibilidad en coordenadas polares se obtienen a partir de las ecuaciones 2.7c y son:

$$\frac{\partial^2 r \gamma_{r\theta}}{\partial \theta \partial r} = \frac{\partial^2 \varepsilon_r}{\partial \theta^2} + r \frac{\partial^2 r \varepsilon_\theta}{\partial r^2} - r \frac{\partial \varepsilon_r}{\partial r} \quad (2.7d)$$

La ecuación 2.7d es la ecuación que debe cumplirse para que las deformaciones sean compatibles con los desplazamientos. Esta ecuación puede expresarse en términos de esfuerzos mediante el uso de las relaciones esfuerzo-deformación. Las relaciones esfuerzo-deformación en el plano de las coordenadas polares, son:

$$\varepsilon_r = \frac{1}{E} (\sigma_r - \nu \sigma_\theta); \quad \varepsilon_\theta = \frac{1}{E} (\sigma_\theta - \nu \sigma_r); \quad \gamma_{r\theta} = \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{r\theta} \quad (2.7e)$$

La ecuación que representa las condiciones de equilibrio y de compatibilidad en términos de esfuerzos, para fuerzas de cuerpo nulas, es:

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) (\sigma_r + \sigma_\theta) = 0 \quad (2.7f)$$

La ecuación 2.7f corresponde a las ecuaciones 2.5e y 2.6c. Esta ecuación más las condiciones de frontera, proporcionan las ecuaciones necesarias para obtener soluciones a problemas en coordenadas polares de dos dimensiones y con fuerzas de cuerpo nulas.

## 2.8. FUNCIÓN POTENCIAL DE ESFUERZOS DE AIRY

El método usual de solución de las ecuaciones de equilibrio y la ecuación diferencial de compatibilidad, cuando las fuerzas de cuerpo son nulas, es introducir una función  $\varphi$  conocida como función potencial de esfuerzos de Airy (Timoshenko y Goodier, 1934). Una expresión general para esta función es:

$$\begin{aligned} \varphi(r, \theta) = & A_0 r^2 + B_0 r^2 \log r + C_0 \log r + D_0 + (E_0 r^2 + F_0 r^2 \log r + G_0 \log r + H_0) \theta + \\ & (A_1 r + B_1 r^{-1} + C_1 r^3 + D_1 r \log r) \sin \theta + (E_1 r + F_1 r^{-1} + G_1 r^3 + H_1 r \log r) \cos \theta + \\ & (J_1 r + K_1 r \log r) \theta \sin \theta + (L_1 r + M_1 r \log r) \theta \cos \theta + \\ & \sum_{n=2}^{\infty} [A_n r^n + B_n r^{-n} + C_n r^{2-n} + D_n r^{2+n}] \sin n \theta + \sum_{n=2}^{\infty} [E_n r^n + F_n r^{-n} + G_n r^{2-n} + H_n r^{2+n}] \cos n \theta \end{aligned} \quad (2.8a)$$

Los términos de esta función se pueden utilizar para obtener soluciones a problemas en coordenadas polares. Las condiciones de frontera para cada problema específico, se utilizan para evaluar las constantes desconocidas  $A, B, C$ , etc. Un número suficiente de términos de la función potencial de esfuerzos deberá ser utilizado para satisfacer las condiciones de frontera del problema bajo estudio.

A partir de esta función, los esfuerzos pueden obtenerse por derivación de la misma. Las componentes de esfuerzo en coordenadas polares se definen como:

$$\sigma_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2}; \quad \sigma_\theta = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2}; \quad \tau_{r\theta} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r \partial \theta} \quad (2.8b)$$

Por sustitución directa de las componentes de esfuerzo normal de la ecuación 2.8b en 2.7f, se comprueba que las componentes de esfuerzos satisfacen las condiciones de equilibrio y de compatibilidad; Los problemas en mecánica del medio continuo se resuelven mediante la búsqueda de una función potencial de esfuerzos  $\varphi$  que satisfaga la ecuación 2.7f y cuyas componentes de esfuerzo satisfagan las condiciones de frontera.

## CAPÍTULO 3

### SOLUCIONES ANALÍTICAS EXISTENTES PARA TÚNELES CIRCULARES.

En este capítulo se revisan las soluciones analíticas de Kirsch (1898), Wood (1975), Einstein y Schwartz (1979), Alberro (1983) y Bobet (2001). Estas soluciones analíticas son de aplicación práctica en los análisis de túneles circulares. Con estas soluciones se obtienen campos de esfuerzos y de desplazamientos inducidos en el terreno por la construcción de un túnel.

Actualmente se cuenta con herramientas numéricas poderosas como el método del elemento finito; sin embargo, las soluciones analíticas siguen siendo de gran interés, en particular para verificar los resultados de modelos numéricos, para estudios de sensibilidad o para análisis de confiabilidad, realizados por ejemplo, con el método de Monte Carlo, que requieren la repetición de un gran número de cálculos.

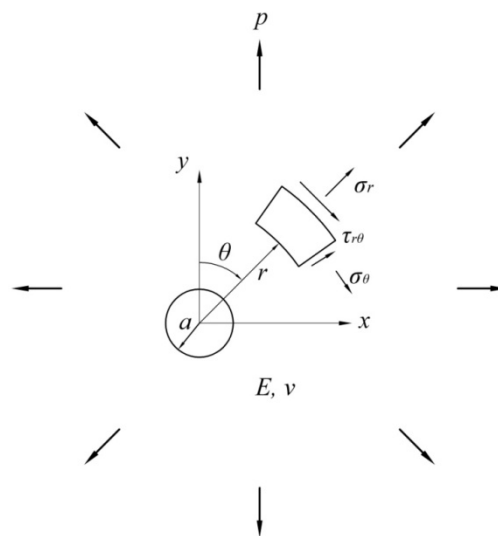
Una ventaja de estas soluciones sobre los métodos numéricos, es que permiten desarrollar análisis paramétricos sencillos en menor tiempo; además, su uso es práctico y no requiere personal especializado en su aplicación, sólo profesionales con sensibilidad y experiencia para interpretar los resultados obtenidos. La desventaja que tienen este tipo de soluciones es que se considera que tanto el terreno donde se construye un túnel como su revestimiento, son materiales homogéneos y continuos, con comportamiento elástico-lineal e isótropos en cuanto a sus propiedades. Estas características corresponden a un material ideal y se toman en cuenta con la finalidad de simplificar el problema.

#### 3.1. PLACA INFINITA CON ORIFICIO CIRCULAR (KIRSCH, 1898)

La solución de Kirsch fue una de las primeras soluciones analíticas utilizadas para estudiar el efecto de excavaciones circulares, sobre el medio. La solución considera una placa delgada e infinita, sometida a un determinado estado inicial de esfuerzo, donde se perfora un orificio circular.

##### 3.1.1. Esfuerzos iniciales isótropos

La siguiente figura representa una placa infinita sujeta a un esfuerzo isótropo  $p$ . Cuando se perfora el orificio, el nuevo estado de esfuerzos en cualquier punto del medio se define por  $\sigma_r$ ,  $\sigma_\theta$  y  $\tau_{r\theta}$ , que son los esfuerzos radial, tangencial y cortante, respectivamente.



**Figura 3.1.1a. Placa infinita sometida a un estado de esfuerzos isótropos iniciales  $p$ , en la que se perfora un orificio circular de radio  $a$ , cuyo centro coincide con el origen del sistema cartesiano.**

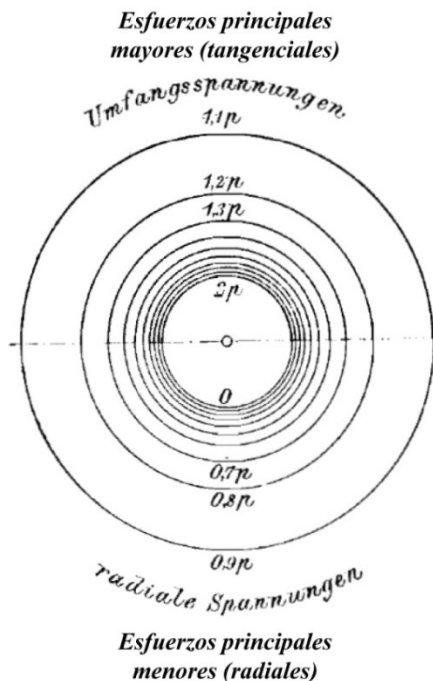
En la figura anterior,  $a$  es el radio del orificio;  $r$  es la distancia del centro del orificio a un determinado punto en el medio circundante;  $\theta$  es el ángulo polar medido del eje vertical al eje horizontal en sentido horario;  $E$  y  $\nu$  son los parámetros elásticos de la placa infinita.

Las ecuaciones para calcular los esfuerzos radiales y tangenciales, son las siguientes:

$$\begin{aligned}\sigma_r &= p \left( 1 - \frac{a^2}{r^2} \right) \\ \sigma_\theta &= p \left( 1 + \frac{a^2}{r^2} \right)\end{aligned}\tag{3.1.1a}$$

En las ecuaciones anteriores, se observa que los esfuerzos no dependen del ángulo  $\theta$ . Kirsch mostró que los esfuerzos radiales y tangenciales corresponden a los esfuerzos principales menor y mayor en cada punto. Los esfuerzos cortantes son iguales a cero.

En la figura 3.3.1b se muestran curvas de isovalores de esfuerzos tangenciales y radiales para múltiplos de  $0.1p$ , que resultan ser circulares. Se observa que, conforme los círculos convergen al hueco, los esfuerzos tangenciales aumentan y los esfuerzos radiales disminuyen. La suma de los dos esfuerzos principales en cualquier punto siempre es  $2p$ ; por ejemplo, en  $r = a$ :  $\sigma_\theta = 2p$  y  $\sigma_r = 0$ ; por lo que la placa podría sufrir agrietamientos en la periferia del orificio, donde se presenta el mayor esfuerzo tangencial.

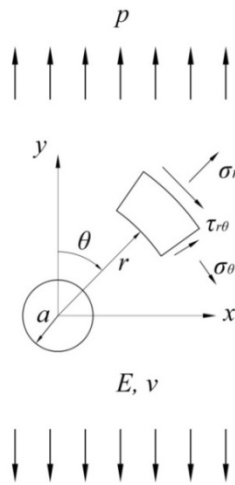


**Figura 3.1.1b. Solución de Kirsch. Círculos concéntricos de esfuerzos normales, separados por distancias correspondientes a  $0.1p$ .**

### 3.1.2. Esfuerzo inicial unidireccional

La figura 3.1.2a, representa una placa infinita donde el estado inicial de esfuerzos corresponde a un esfuerzo inicial  $p$  aplicado en la dirección vertical.

La perforación de un orificio circular en la placa, cuyo centro coincide con el origen de coordenadas, provoca un nuevo estado de esfuerzos definido por las expresiones 3.1.2a.



**Figura 3.1.2a. Placa infinita sometida a un estado unidireccional de esfuerzos iniciales, donde se perfora un orificio circular.**

$$\begin{aligned}
 \sigma_r &= \frac{1}{2} p \left( 1 - \frac{a^2}{r^2} \right) + \frac{1}{2} p \left( 1 - \frac{a^2}{r^2} \right) \left( 1 - \frac{3a^2}{r^2} \right) \cos 2\theta \\
 \sigma_\theta &= \frac{1}{2} p \left( 1 + \frac{a^2}{r^2} \right) - \frac{1}{2} p \left( 1 + \frac{3a^2}{r^2} \right) \cos 2\theta \\
 \tau_{r\theta} &= -\frac{1}{2} p \left( 1 - \frac{a^2}{r^2} \right) \left( 1 + \frac{3a^2}{r^2} \right) \sin 2\theta
 \end{aligned} \tag{3.1.2a}$$

donde  $p$  es el esfuerzo en la placa en dirección  $\theta=0^\circ$  (figura 3.1.2a).

En este caso  $\sigma_r$ ,  $\sigma_\theta$  y  $\tau_{r\theta}$ , dependen del ángulo  $\theta$ ; por lo tanto, los esfuerzos normales ( $\sigma_r$  y  $\sigma_\theta$ ) ya no son esfuerzos principales. Sólo cuando  $r=a$ , el esfuerzo cortante es nulo; es decir, en el perímetro de la excavación los esfuerzos normales son principales.

De las ecuaciones 3.1.2a podemos observar que, para  $r = a$ :

- Los esfuerzos radiales y cortantes son nulos.
- El esfuerzo tangencial es igual a:

$$p[1 - 2\cos(2\theta)] \tag{3.1.2b}$$

Cuando:

$$\theta = 0^\circ \rightarrow \sigma_\theta = -p$$

$$\theta = 30^\circ \rightarrow \sigma_\theta = 0$$

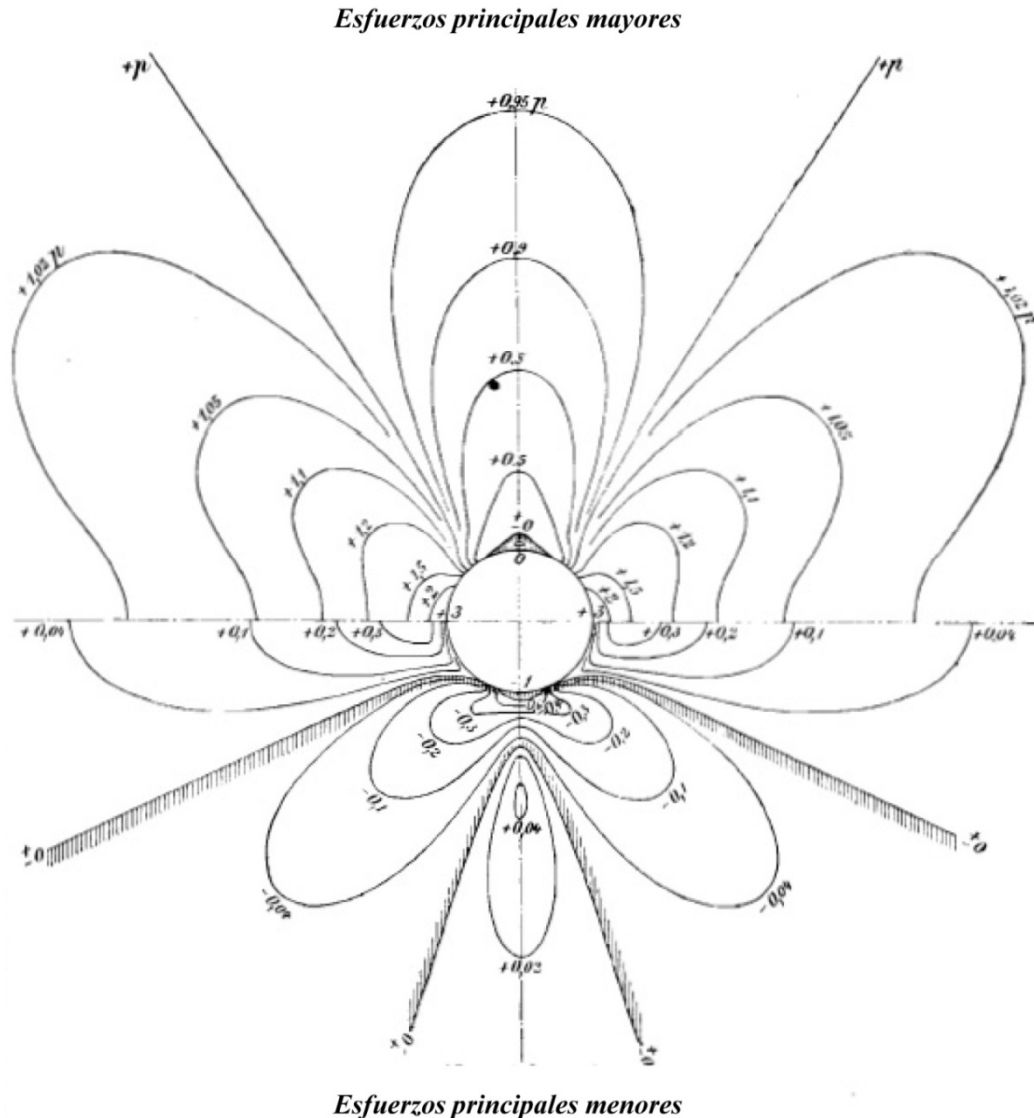
$$\theta = 90^\circ \rightarrow \sigma_\theta = 3p$$

Kirsch calculó los esfuerzos principales y determinó, aproximadamente, las líneas de isovalores que se observan en la figura 3.1.2b. Las curvas de isovalores por encima del eje horizontal, representan los esfuerzos principales mayores en proporción al esfuerzo unidireccional  $p$ . Se observa que estos esfuerzos son de tensión, salvo una pequeña zona por encima de la clave donde se presentan esfuerzos principales de compresión. Esta zona queda limitada de la siguiente forma:

Cuando:  $r = a \rightarrow -30^\circ \leq \theta \leq 30^\circ$

Cuando:  $\theta = 0^\circ \rightarrow a \leq r \leq \sqrt{\frac{3}{2}}a$

En la sección media inferior, las curvas de isovalores representan los esfuerzos principales menores y se observa que los esfuerzos en el tercio medio de cada cuadrante (aproximadamente) son de compresión, incluyendo la zona por debajo de la cubeta.



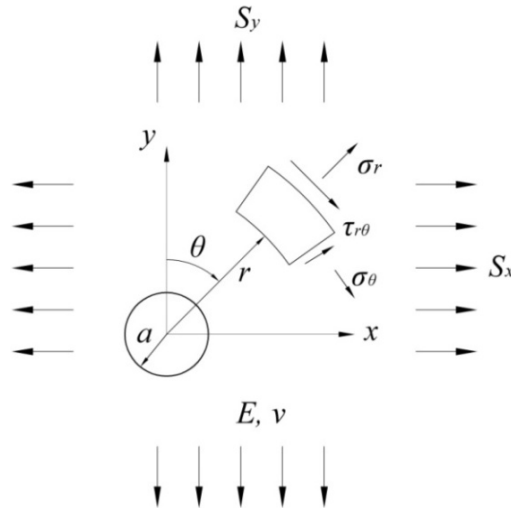
**Figura 3.1.2b. Distribución de esfuerzos principales alrededor de la excavación circular (Kirsch, 1898)**

La solución de Kirsch no depende de los parámetros de rigidez del terreno. Si en la deducción de una solución se establece una función potencial de esfuerzos y condiciones de frontera en términos de esfuerzos, sus factores de influencia serán exclusivamente geométricos. Para calcular deformaciones en secciones transversales de túneles, se deben plantear relaciones esfuerzo-deformación bajo la condición de deformación plana.

### 3.1.3. Consideraciones adicionales.

Es posible utilizar la solución de Kirsch para estudiar la respuesta elástica de un medio semi-infinito afectado por la construcción de un túnel circular, tomando en cuenta lo siguiente:

- a) La solución original considera dos estados de esfuerzos iniciales: isótropo (inciso 3.1.1) y unidireccional (inciso 3.1.2). Esta solución ha sido extendida al caso bidimensional (Obert y Duval, 1967), lo que le da mayor generalidad. La siguiente figura representa dicho caso:

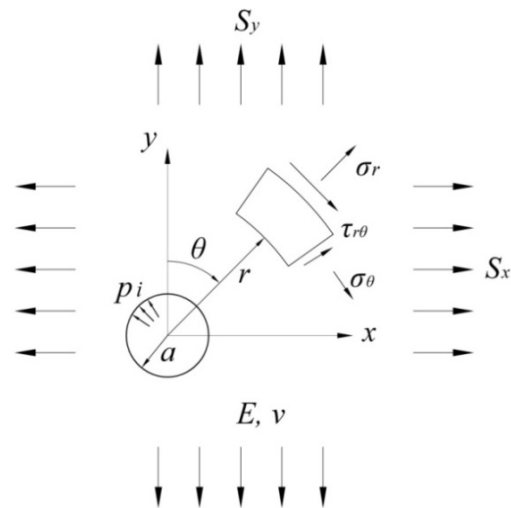


**Figura 3.1.3a. Orificio circular en placa infinita. Estado inicial de esfuerzos bidimensionales**

Las ecuaciones de la solución de Kirsch extendida, son las siguientes:

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{S_x + S_y}{2} \left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right) + \frac{S_x - S_y}{2} \left(1 + 3\frac{a^4}{r^4} - 4\frac{a^2}{r^2}\right) \cos 2\theta \\ \sigma_\theta &= \frac{S_x + S_y}{2} \left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right) - \frac{S_x - S_y}{2} \left(1 + 3\frac{a^4}{r^4}\right) \cos 2\theta \\ \tau_{r\theta} &= -\frac{S_x - S_y}{2} \left(1 - \frac{3a^4}{r^4} + \frac{2a^2}{r^2}\right) \sin 2\theta \end{aligned} \quad (3.1.3a)$$

- b) La solución de Kirsch no considera revestimiento. En este trabajo se modifican las ecuaciones de la solución de Kirsch extendida, introduciendo una distribución de esfuerzos radiales uniforme  $p_i$  en la interfaz terreno-revestimiento (Pérez y Auvinet 2012a).



**Figura 3.1.3b. Orificio con presión interna  $p_i$  en placa infinita con esfuerzos iniciales bidimensionales**

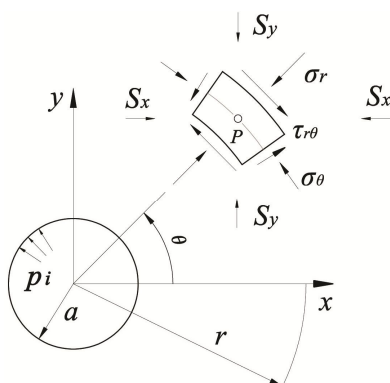
La deducción de esta solución se presenta en el Anexo A. Las nuevas ecuaciones de la solución de Kirsch extendida y modificada, son:

$$\begin{aligned}\sigma_r &= \frac{S_x + S_y}{2} \left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right) + \frac{S_x - S_y}{2} \left(1 + 3\frac{a^4}{r^4} - 4\frac{a^2}{r^2}\right) \cos 2\theta + p_i \frac{a^2}{r^2} \\ \sigma_\theta &= \frac{S_x + S_y}{2} \left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right) - \frac{S_x - S_y}{2} \left(1 + 3\frac{a^4}{r^4}\right) \cos 2\theta - p_i \frac{a^2}{r^2} \\ \tau_{r\theta} &= -\frac{S_x - S_y}{2} \left(1 - \frac{3a^4}{r^4} + \frac{2a^2}{r^2}\right) \operatorname{sen} 2\theta\end{aligned}\quad (3.1.3b)$$

Los factores de influencia de esta solución no dependen de los parámetros de rigidez del material. Sus factores de influencia son exclusivamente geométricos.

- c) La solución de Kirsch considera un medio infinito y esfuerzos iniciales aplicados en fronteras alejadas. En una excavación real el medio no es infinito y en muchos casos, los esfuerzos iniciales se deben al peso propio del material.

Para obtener aproximadamente los campos de esfuerzos bajo estas condiciones se propone utilizar las ecuaciones 3.1.3b, considerando que en cada punto del medio los valores  $S_x$  y  $S_y$ , corresponden a los esfuerzos iniciales horizontal y vertical, respectivamente, asociados a dicho peso (Pérez y Auvinet, 2012a), como se ilustra en la figura 3.1.3c. Esta suposición garantiza que los esfuerzos calculados son correctos en la cercanía inmediata de la excavación.



**Figura 3.1.3c. Esfuerzos iniciales bidimensionales corespondientes al peso propio del material.**

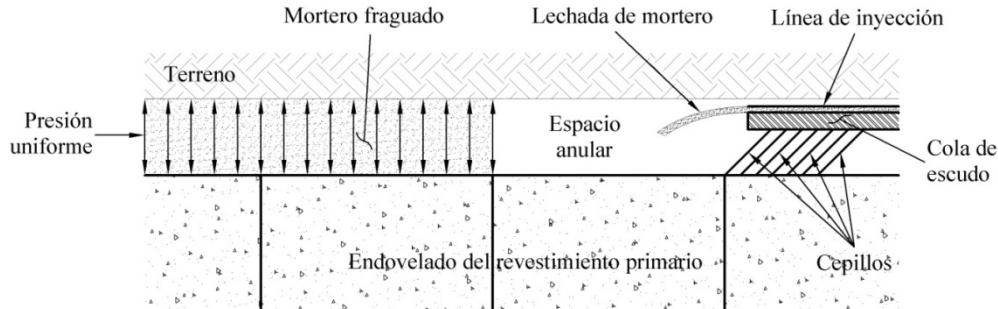
- d) Kirsch considera una placa plana (condición de esfuerzo plano). Esta condición no es apropiada para determinar desplazamientos en secciones transversales de túneles.

En este trabajo se plantean las relaciones esfuerzo-deformación de la Ley de Hooke bajo la condición de deformación plana (ecuaciones 2.6b) y en base a los incrementos de esfuerzos correspondientes a las ecuaciones 3.1.3b, se obtienen las ecuaciones para calcular desplazamientos (Pérez y Auvinet 2012a).

$$\begin{aligned}u &= \frac{1-\nu^2}{E} \left[ \frac{S_x + S_y}{2} \frac{a^2}{r} + \frac{S_x - S_y}{2} \left(4\frac{a^2}{r} - \frac{a^4}{r^3}\right) \cos 2\theta - p_i \frac{a^2}{r} \right] + \\ &\quad \frac{\nu(1+\nu)}{E} \left[ \frac{S_x + S_y}{2} \frac{a^2}{r} - \frac{S_x - S_y}{2} \frac{a^4}{r^3} \cos 2\theta - p_i \frac{a^2}{r} \right] \\ v &= \frac{1-\nu^2}{E} \left[ -\frac{S_x - S_y}{2} \left(\frac{a^4}{r^3} + 2\frac{a^2}{r}\right) \operatorname{sen} 2\theta \right] - \frac{\nu(1+\nu)}{E} \left[ \frac{S_x - S_y}{2} \left(\frac{a^4}{r^3} - 2\frac{a^2}{r}\right) \operatorname{sen} 2\theta \right]\end{aligned}\quad (3.1.3c)$$



La deducción de esta solución se presenta en el Anexo A. Con las ecuaciones 3.1.3b y 3.1.3c, es posible simular la interacción terreno-revestimiento, cuando sea posible considerar despreciables los esfuerzos cortantes y la variación de los esfuerzos radiales en la interfaz terreno-revestimiento. Además, es posible modelar el efecto sobre el terreno, de una presión de inyección uniforme aplicada dentro del espacio anular que existe entre el revestimiento y el terreno (figura 3.1.3d), cuando se construye un túnel con máquina tuneladora.



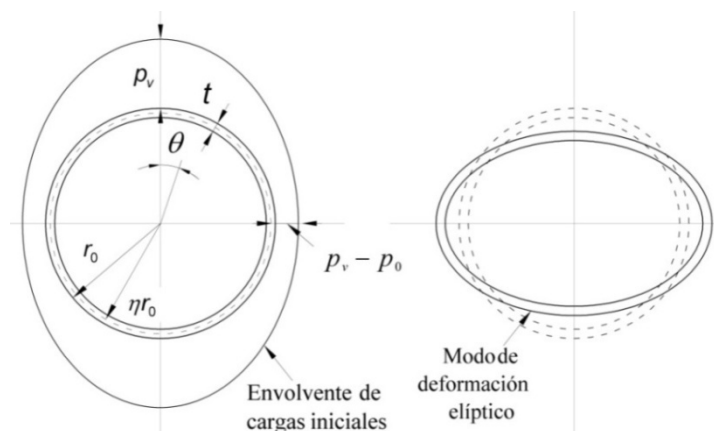
**Figura 3.1.3d. Presión uniforme generada a partir de la presión de inyección en el espacio anular**

Esta solución puede ser útil para definir estrategias de inyección durante la construcción del túnel, para prevenir deformaciones excesivas de un revestimiento sometido a un proceso de consolidación del terreno. Los resultados son válidos en la cercanía del túnel ya que no se consideran los efectos de superficie y de una frontera inferior donde se restringen los desplazamientos.

Es posible utilizar criterios de falla y/o de fractura, para determinar a qué niveles de presión interna, se presentan zonas de plastificación o de fracturamiento.

### 3.2. TÚNEL CIRCULAR EN MATERIAL ELÁSTICO (MUIR WOOD, 1970)

La solución de Muir Wood, a diferencia de la solución de Kirsch, acepta que la excavación circular está revestida. Dicho revestimiento se materializa y desarrolla toda su resistencia inmediatamente después de la excavación. La solución considera que sobre el revestimiento existe una distribución elíptica de cargas radiales iniciales. Esta distribución provoca en el revestimiento un modo de deformación elíptico como el que se muestra en la siguiente figura:



**Figura 3.2a. Distribución de carga inicial en forma elíptica**

En la figura anterior,  $p_v$  es la carga vertical en el centro del túnel;  $p_0$  es la diferencia entre  $p_v$  y la carga horizontal  $p_h$  en el centro del túnel;  $t$  es el espesor del revestimiento;  $r_0$  es el radio del perímetro exterior del revestimiento;  $\eta$  es la relación entre el radio al centroide del revestimiento y  $r_0$ ;  $\theta$  es el ángulo polar medido en sentido horario, a partir del eje vertical.

El modo de deformación elíptico permite evaluar una deformación simétrica (por compresión axial) y asimétrica (por flexión). Un modo superior de deformación se aplica a revestimientos muy flexibles. Además se acepta lo siguiente:

- a) Condición de deformación plana.
- b) Compatibilidad de esfuerzos y desplazamientos radiales en la interfaz terreno-revestimiento.

La solución toma en cuenta el concepto de momento de flexión máximo en el modo de deformación elíptico de Morgan (1961) y modifica el concepto original de coeficiente de reacción que relaciona los esfuerzos y desplazamientos radiales en la interfaz terreno-revestimiento.

Se establece un potencial de esfuerzos con elementos de la función general de Airy (ecuación 2.8a)

$$\varphi = (ar^2 + br^4 + cr^{-2} + d)\cos 2\theta \quad (3.2a)$$

donde  $r$  es la distancia radial del centro del túnel a cualquier punto alrededor del mismo;  $a$ ,  $b$ ,  $c$  y  $d$  son constantes que permiten integrar las condiciones de frontera del problema en la solución.

$$\sigma_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} = -(2a + 6cr^{-4} + 4dr^{-2})\cos 2\theta \quad (3.2b)$$

$$\sigma_\theta = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} = (2a + 12br^2 + 6cr^{-4})\cos 2\theta \quad (3.2c)$$

$$\tau_{r\theta} = -\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right) = -(6cr^{-4} + 2dr^{-2})\sin 2\theta \quad (3.2d)$$

El efecto de fuerzas cortantes en la interfaz terreno-revestimiento es inicialmente ignorado y después introducido en forma explícita. Se acepta que el terreno donde se construye el túnel y su revestimiento, son materiales homogéneos, continuos, isótropos y con comportamiento elástico-lineal.

### 3.2.1. Fuerzas cortantes nulas entre el terreno y el revestimiento

Si las fuerzas cortantes en el contacto entre el terreno y el revestimiento se consideran nulas, entonces:

$$\text{Cuando:} \quad r = r_0 \rightarrow \tau_{r\theta} = 0 \quad (3.2.1a)$$

Sustituyendo 3.2.1a en la ecuación 3.2d, se tiene que:

$$d = -3cr_0^{-2} \quad (3.2.1b)$$

Si  $r$  es muy grande los esfuerzos tienden a cero, entonces:

$$a = b = 0 \quad (3.2.1c)$$

Sustituyendo 3.2.1b y 3.2.1c en la ecuación 3.2b, se tiene que:

$$\sigma_r = -6c(r^{-4} - 2r_0^{-2}r^{-2})\cos 2\theta \quad (3.2.1d)$$

En un problema de deformación plana la deformación radial se calcula:

$$\varepsilon_r = \frac{1}{E_s} \left[ (1 - \nu_s^2)\sigma_r - \nu_s(1 + \nu_s)\sigma_\theta \right] \quad (3.2.1e)$$

donde  $E_s$  y  $\nu_s$  son el módulo elástico y la relación de Poisson del terreno, respectivamente.

Los desplazamientos radiales  $u$  se obtienen integrando la expresión 3.2.1e en la dirección radial y evaluando la constante de integración cuando  $r \rightarrow \infty$ . Cuando  $r = r_0$ , los desplazamientos son:

$$u_0 = \left(2cr_0^{-3}/E_s\right)(1 + \nu_s)(5 - 6\nu_s)\cos 2\theta$$

$$\text{ó} \quad u_0 = \pm \bar{u}_0 \cos 2\theta \quad (3.2.1f)$$

donde  $\pm \bar{u}_0$  representa el desplazamiento radial máximo.

La relación entre esfuerzos y desplazamientos radiales se llama coeficiente de reacción del terreno:

$$\lambda = \frac{\sigma_r(r = r_0)}{u_0} = \frac{3E_s}{(1 + \nu_s)(5 - 6\nu_s)r_0} \quad (3.2.1g)$$

Con el cambio de la curvatura del túnel y la distribución de cargas iniciales en forma elíptica, el momento de flexión máximo inducido (Morgan, 1961), es:

$$M_{max} = \pm 3\bar{u}_0 \frac{EI}{\eta^2 r_0^2} \quad (3.2.1h)$$

donde  $E$  e  $I$  son el módulo de elasticidad y el momento de inercia en el revestimiento, respectivamente.

El momento máximo que corresponde al esfuerzo aplicado por el terreno y a  $\bar{u}_0$  en función de la rigidez del revestimiento, conducen a la siguiente relación entre  $M_{max}$  y  $p_0$ :

$$M_{max} = \pm \frac{p_0 r_0^2 \eta^2 EI (1 + \nu_s)(5 - 6\nu_s)}{6EI(1 + \nu_s)(5 - 6\nu_s) + 2\eta^3 r_0^3 E_s} \quad (3.2.1i)$$

El momento de flexión se relaciona con un factor de rigidez  $R_s$  (Muir Wood, 1970), que representa la relación entre la rigidez del revestimiento (para modo elíptico) y la del terreno; por lo tanto:

$$R_s = \frac{3EI(1 + \nu_s)(5 - 6\nu_s)}{E_s \eta^3 r_0^3} = \frac{9EI}{\lambda \eta^3 r_0^4} \quad (3.2.1j)$$

Entonces, la ecuación 3.2.1i, puede ser rescrita como:

$$M_{max} = \pm \frac{1}{6} p_0 r_0^2 \eta^2 \left[ \frac{R_s}{(1 + R_s)} \right] \quad (3.2.1k)$$

### 3.2.2. Efecto de las fuerzas cortantes entre el terreno y el revestimiento

Se introduce un valor explícito para el esfuerzo cortante en la interfaz terreno-revestimiento.

$$\text{Cuando:} \quad r = r_0 \rightarrow \tau_{r\theta} = T \sin(2\theta) \quad (3.2.2a)$$

donde  $T$  es el valor del esfuerzo cortante en  $\theta = \frac{\pi}{4}$ , el cual se determina más adelante.

Sustituyendo 3.2.2a en la ecuación 3.2d, se tiene:

$$d = -\left(3cr_0^{-2} + \frac{1}{2}Tr_0^2\right) \quad (3.2.2b)$$

Entonces las nuevas componentes de esfuerzos son:

$$\sigma_r = -2(3cr^{-4} - 6cr^{-2}r_0^{-2} - Tr^{-2}r_0^2)\cos 2\theta \quad (3.2.2c)$$

$$\sigma_\theta = 6cr^{-4}\cos 2\theta \quad (3.2.2d)$$

$$\tau_{r\theta} = -(6cr^{-4} - 6cr^{-2}r_0^{-2} - Tr^{-2}r_0^2)\sin 2\theta \quad (3.2.2e)$$

Los nuevos desplazamientos radiales se calculan como:

$$u_0 = \frac{2cr_0^{-3}}{E_s}(1 + \nu_s) \left[ (5 - 6\nu_s) + \frac{1}{2c}Tr_0^4(1 - \nu_s) \right] \cos 2\theta \quad (3.2.2f)$$

El nuevo coeficiente de reacción del terreno es:

$$\lambda = \frac{\left( 3 + \frac{Tr_0^4}{2c} \right) E_s}{r_0(1 + \nu_s) \left[ (5 - 6\nu_s) + \frac{T(1 - \nu_s)r_0^4}{2c} \right]} \quad (3.2.2g)$$

Se establecen los siguientes criterios:

- a) Su valor máximo admisible no debe superar los esfuerzos cortantes permisibles entre el túnel y el terreno. Este criterio implica que:

$$T < c' + \bar{p} \tan \varphi' \quad (3.2.2h)$$

donde  $c'$  y  $\varphi'$  son los parámetros de resistencia efectivos del terreno;  $\bar{p}$  es el valor medio de la presión normal  $p$  entre el terreno y el revestimiento.

La presión normal inicial  $p$  entre el terreno y el revestimiento se calcula con la siguiente expresión:

$$p = p_v - \frac{P_0}{2}(1 - \cos 2\theta) \quad (3.2.2i)$$

La componente variable de la ecuación 3.2.2i es  $(p_0/2)\cos 2\theta$ . Se puede demostrar, utilizando la expresión 3.2.1k, que la componente variable también se puede escribir como:

$$\frac{\hat{p}}{2} = \frac{p_0}{2} \frac{R_s}{1 + R_s}$$

y también por definición:  $\hat{p}$  es el máximo valor de  $\pm(p - \bar{p})$  (3.2.2j)

Es posible obtener  $T$  en función de la componente variable  $\hat{p}$ , utilizando la siguiente expresión:

$$T < \frac{\hat{p}}{2} \frac{6\nu_s - 1}{5 - 9\nu_s} \quad (3.2.2k)$$

A partir de la ecuación 3.2.2g, la expresión general para  $\lambda$  está dada por:

$$\lambda = \frac{3(\hat{p} + 5T)E_s}{r_0(1 + \nu_s) \left[ (5 - 6\nu_s)\hat{p} + 2(13 - 15\nu_s)T \right]} \quad (3.2.2l)$$

- b) El desplazamiento circunferencial relativo del terreno  $u_{0\theta}$  en  $r = r_0$ , que es causado por arrastre del anillo conforme se deforma, no excederá al del punto correspondiente en el revestimiento.

El desplazamiento circunferencial de un punto en el contacto entre el terreno y el revestimiento está dado por:

$$u_{0\theta} = \int_{r_0}^{\infty} \frac{\tau_{r\theta}}{G_s} dr = -\frac{2(1+\nu_s)}{E_s} (4cr_0^{-3} + Tr_0) \quad (3.2.2m)$$

donde  $G_s$  es el módulo de la rigidez al corte del terreno.

Considerando al revestimiento inextensible, tenemos:

$$u_{0\theta} = \int_0^{\pi/4} (ds_\phi) - \frac{\pi r_0}{4} \quad (3.2.2n)$$

donde:  $ds_\phi = \left[ \left( \frac{dr_1}{d\theta} \right)^2 + r_1^2 \right]^{1/2} d\theta$  y  $r_1 = r_0 + \hat{u}_0 \cos 2\theta$ ; por lo tanto:

$$u_{0\theta} \approx -\frac{\bar{u}_0}{2} \quad (3.2.2o)$$

De las ecuaciones 3.2.2m y 3.2.2o, tenemos:

$$\frac{2(1+\nu)}{E_s} (4cr_0^{-3} + Tr_0) > \frac{\bar{u}_0}{2} \quad (3.2.2p)$$

### 3.2.3. Comentarios

Esta solución puede utilizarse cuando se acepte, en una etapa de análisis determinada, que el estado de esfuerzos sobre el revestimiento le genera un modo de deformación como el de la figura 3.2a. Un modo de deformación elíptico puede presentarse en revestimientos que se consideren rígidos. Un modo de deformación superior se atribuye a revestimientos flexibles. La suposición de un modo de deformación elíptico en un túnel y no considerar los efectos de la superficie libre y el de una frontera inferior, obligan a que los resultados de estas soluciones sean aproximadamente válidos sólo en la cercanía del túnel.

En la solución del inciso 3.2.1, las ecuaciones para calcular incrementos de esfuerzos radiales y tangenciales, cuando  $r = r_0$ , son iguales. En el Anexo B se comprueba que estos esfuerzos sólo pueden ser iguales si se toma en cuenta lo siguiente:

- Se aplica la Ley de Hooke bajo la condición de deformación plana.
- Se considera que el revestimiento es incompresible ( $\varepsilon_\theta=0$ ).
- Sólo se llevan a cabo análisis donde no se consideren cambios de volumen en el medio (análisis a corto plazo:  $\nu=0.5$ ).

La solución 3.2.1 considera la Ley de Hooke bajo la condición de deformación plana, pero no considera al revestimiento incompresible ya que afirma que la solución permite deformación simétrica (compresión axial). Además, no se especifica que la solución debe ser utilizada únicamente en medios donde no se consideren cambios de volumen. Por lo tanto, los resultados en cuanto a esfuerzos radiales y tangenciales no deberían ser iguales. Este resultado se debe a los elementos de la función potencial (3.2a), utilizados en la deducción de la solución y a la condición de frontera (3.2.1a), en cuanto a esfuerzos cortantes nulos en la interfaz terreno-revestimiento. Para corregir esta situación es necesario proponer elementos adicionales de la función potencial que cumplan con las condiciones de frontera del problema.

Con las ecuaciones de este inciso es posible analizar el problema de interacción terreno-revestimiento de un túnel circular, cuando se acepta que los esfuerzos cortantes en la interfaz terreno-revestimiento, son

despreciables. Se sabe que los esfuerzos cortantes desarrollados pueden ser considerables (Schmid, 1926; Engelbreth, 1961). Para aplicar esta solución se propone seguir los siguientes pasos:

- Con los parámetros de rigidez del terreno y el radio del túnel, calcular el coeficiente de reacción  $\lambda$  (ecuación 3.2.1g).
- Con  $\lambda$ , los parámetros de rigidez del revestimiento, el radio del túnel y la relación  $\eta$ , calcular el factor de rigidez  $R_s$  (ecuación 3.2.1j).
- Con  $R_s$ , el radio del túnel, la relación  $\eta$  y la diferencia  $p_0$ , calcular el momento de flexión máximo  $M_{m\acute{a}x}$  (ecuación 3.2.1k).
- Con  $M_{m\acute{a}x}$ , el radio del túnel, la relación  $\eta$  y los parámetros de rigidez del revestimiento, calcular el desplazamiento radial máximo  $\bar{u}_0$  (ecuación 3.2.1h).
- Con  $\bar{u}_0$ , el radio del túnel y los parámetros de rigidez del terreno, se obtiene el valor de la constante  $c$  (ecuación 3.2.1f).
- Con la ecuación 3.2.1b y c, se calculan las componentes de esfuerzos (ecuaciones 3.2b, 3.2c y 3.2d).

Para la deducción de la solución del inciso 3.2.2 se utilizan los mismos elementos de la función potencial de esfuerzos de la solución anterior y se establece como condición de frontera en la interfaz terreno-revestimiento, que los esfuerzos cortantes no son nulos. Esto permite que matemáticamente, las componentes de incrementos de esfuerzos radial y tangencial, no sean iguales.

En el criterio del inciso b) de esta solución se hace la consideración de revestimiento inextensible, por lo que los incrementos de esfuerzos radiales y tangenciales deberían ser iguales para valores de la relación de Poisson de 0.5. Sin embargo, la consideración de revestimiento incompresible no se utiliza para determinar el valor de la constante  $c$  y obtener con ella los incrementos de esfuerzos; por lo tanto, esta solución si considera compresión axial del revestimiento.

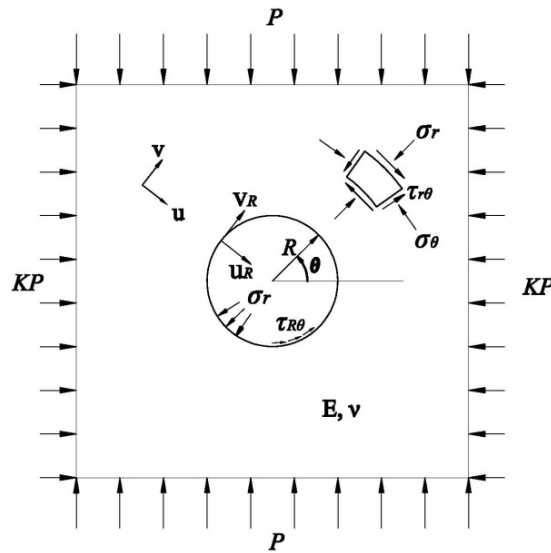
Para aplicar esta solución se propone seguir los siguientes pasos:

- A partir de las definiciones  $p_v$  y  $p_0$  calcular la presión normal inicial  $p$  (ecuación 3.2.2i) y el valor medio  $\bar{p}$
- Con la ecuación 3.2.2j calcular la componente variable  $\hat{p}$
- Con  $\hat{p}$  y la relación de Poisson del terreno, calcular el esfuerzo cortante  $T$  (ecuación 3.2.2k).
- Con  $\hat{p}$ ,  $T$ , el radio y los parámetros de rigidez del terreno, calcular el coeficiente de reacción del terreno  $\lambda$  (ecuación 3.2.2l)
- Con  $\lambda$ , los parámetros de rigidez del revestimiento, el radio del túnel y la relación  $\eta$ , calcular el factor de rigidez  $R_s$  (ecuación 3.2.1j).
- Con  $R_s$ , el radio del túnel, la relación  $\eta$  y la diferencia  $p_0$ , calcular el momento de flexión máximo  $M_{m\acute{a}x}$  (ecuación 3.2.1k).
- Con  $M_{m\acute{a}x}$ , el radio del túnel, la relación  $\eta$  y los parámetros de rigidez del revestimiento, calcular el desplazamiento radial máximo  $\bar{u}_0$  (ecuación 3.2.1h).
- Con  $\bar{u}_0$ ,  $T$ , el radio del túnel y los parámetros de rigidez del terreno, se obtiene el valor de la constante  $c$  (ecuación 3.2.2f).
- Con  $c$  se calculan las componentes de esfuerzos (ecuaciones 3.2.2c, 3.2.2d y 3.2.2e).

### 3.3. ANÁLISIS SIMPLIFICADO PARA SOPORTES DE TÚNELES (EINSTEIN Y SCHWARTZ 1979)

Esta solución parte del método de la rigidez relativa de Richard y Burns (1964). Se acepta que tanto el terreno como el revestimiento, son medios continuos, homogéneos, isótropos y elástico-lineales.

Al igual que en la solución de Kirsch, el medio está sometido a un estado inicial de esfuerzos; sin embargo, dicho estado es bidimensional y se define por un esfuerzo vertical  $p$  igual al peso del terreno en el centro del túnel y por un esfuerzo horizontal  $Kp$  en el mismo lugar.  $K$  es la relación entre esfuerzos horizontal y vertical. La figura 3.3a muestra un esquema del planteamiento del problema.



**Figura 3.3a. Túnel circular en un medio infinito sometido a un estado bidimensional de esfuerzos inicial**

En la figura anterior:  $\sigma_r$ ,  $\sigma_\theta$  y  $\tau_{r\theta}$  son los esfuerzos radial, tangencial y cortante, respectivamente;  $u$  y  $v$  son los desplazamientos radial y circunferencial en el medio;  $R$  es el radio exterior del revestimiento;  $\theta$  es el ángulo polar que se mide a partir del eje horizontal y en sentido anti horario;  $\sigma_R$  y  $\tau_{R\theta}$  son los esfuerzos radial y cortante en la interfaz terreno-revestimiento;  $u_R$  y  $v_R$  son los desplazamientos radial y circunferencial en la interfaz terreno-revestimiento;  $E$  y  $\nu$  son los parámetros de rigidez del medio.

Al igual que en la solución de Muir Wood, se considera:

- Una función potencial de esfuerzos para obtener incrementos de esfuerzos.
- Las condiciones de deslizamiento completo y deslizamiento nulo.
- La condición de deformación plana
- Un revestimiento que se materializa y desarrolla su resistencia inmediatamente.
- Compatibilidad de esfuerzos y desplazamientos radiales en la interfaz terreno-revestimiento.
- Deformaciones circunferencial y a la flexión del revestimiento.

A diferencia de la solución de Muir Wood, se toma en cuenta lo siguiente:

- El medio está sometido a un estado de esfuerzos inicial bidimensional.
- Se aceptan las relaciones esfuerzo-desplazamiento para el soporte de Flüegge (1966).
- Se aceptan las ecuaciones de Hoeg (1968), para obtener elementos mecánicos en el soporte.

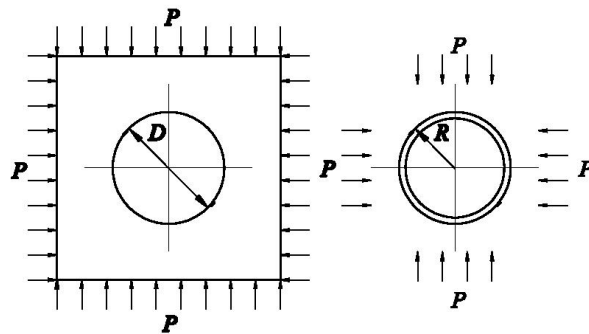
Para tomar en cuenta la rigidez relativa entre la masa del terreno y el soporte del túnel se establecen dos parámetros adimensionales: las relaciones de compresibilidad y flexibilidad (figura 3.3b).

La relación de compresibilidad  $C^*$  (ecuación 3.3a), es una medida de la rigidez relativa del sistema terreno-revestimiento, bajo una condición de carga uniforme o simétrica (esfuerzo horizontal igual al vertical). Refleja la rigidez circunferencial del sistema. La relación de flexibilidad  $F^*$  (ecuación 3.3b), es una medida de la rigidez relativa del sistema terreno-revestimiento bajo la condición de carga anti-simétrica (esfuerzo horizontal igual pero de signo opuesto al vertical). Refleja la rigidez a la flexión del sistema.

$$C^* = \frac{ER(1 - \nu_s^2)}{E_s A_s (1 - \nu^2)} \quad (3.3a)$$

$$F^* = \frac{ER^3(1 - \nu_s^2)}{E_s I_s (1 - \nu^2)} \quad (3.3b)$$

donde  $E$ ,  $\nu$  y  $E_s$ ,  $\nu_s$ , son las constantes elásticas para el terreno y el revestimiento, respectivamente;  $A_s$  es el área media de la sección transversal del revestimiento por unidad de longitud del túnel;  $R$  es el radio exterior del revestimiento;  $I_s$ , es el momento de inercia del revestimiento del túnel por unidad de longitud.



$$\frac{P}{\Delta D/D} \propto \frac{E}{1 - \nu^2}$$

$$\frac{P}{\Delta D/D} = \frac{E_s A_s}{(1 - \nu_s^2)R}$$

$$C^* = \frac{ER(1 - \nu_s^2)}{E_s A_s (1 - \nu^2)}$$

$$\frac{P}{\Delta D/D} \propto \frac{E}{1 - \nu^2}$$

$$\frac{P}{\Delta D/D} = \frac{E_s I_s}{(1 - \nu_s^2)R^3}$$

$$F^* = \frac{ER^3(1 - \nu_s^2)}{E_s I_s (1 - \nu^2)}$$

**Figura 3.3b. Relaciones de rigideces adimensionales para el soporte del túnel**

La deducción de la solución sigue tres etapas básicas:

- Se establecen las ecuaciones para los desplazamientos iniciales, en un medio sometido a un estado inicial de esfuerzos bidimensionales.
- Se obtienen las ecuaciones para esfuerzos y desplazamientos en la interfaz terreno-revestimiento, después de la excavación. En esta etapa se plantean las siguientes condiciones de frontera en la interfaz terreno-revestimiento: deslizamiento libre (esfuerzos cortantes nulos) y no deslizamiento (desarrollo de esfuerzos cortantes por interacción). Se obtiene una solución para cada condición.
- Se calculan los elementos mecánicos sobre el revestimiento.

### 3.3.1. Etapa 1. Desplazamientos iniciales en el medio.

Los esfuerzos existentes en el terreno antes de la construcción del túnel son:



$$\begin{aligned}\sigma_r &= \frac{P}{2} [(1+K) - (1-K)\cos 2\theta] \\ \sigma_\theta &= \frac{P}{2} [(1+K) + (1-K)\cos 2\theta] \\ \tau_{r\theta} &= \frac{P}{2} (1-K)\sin 2\theta\end{aligned}\quad (3.3.1a)$$

Las relaciones esfuerzo-deformación-desplazamiento bajo la condición de deformación plana son:

$$\begin{aligned}\varepsilon_r &= \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{E} [(1-\nu^2)\sigma_r - \nu(1+\nu)\sigma_\theta] \\ \varepsilon_\theta &= \frac{u}{r} + \frac{\partial v}{r\partial\theta} = \frac{1}{E} [(1-\nu^2)\sigma_\theta - \nu(1+\nu)\sigma_r]\end{aligned}\quad (3.3.1b)$$

donde  $\varepsilon_r$  y  $\varepsilon_\theta$  son las deformaciones radial y tangencial en el medio;  $r$  es la distancia radial a cualquier punto del medio circundante al túnel.

Sustituyendo las ecuaciones 3.3.1a en las ecuaciones 3.3.1b e integrando se obtienen los desplazamientos iniciales radiales y circunferenciales  $u_i$  y  $v_i$ , respectivamente, en el terreno.

$$\begin{aligned}u_i &= \frac{Pr(1+\nu)}{2E} [(1-2\nu)(1+K) - (1-K)\cos 2\theta] \\ v_i &= \frac{Pr(1+\nu)}{2E} (1-K)\sin 2\theta\end{aligned}\quad (3.3.1c)$$

### 3.3.2. Etapa 2. Esfuerzos y desplazamientos en la interfaz terreno-revestimiento

Los esfuerzos en el medio se expresan en términos de un potencial de esfuerzos  $\varphi$  (ecuación 2.8a):

$$\begin{aligned}\varphi &= a_0 \ln(r) + \frac{1}{4} Pr^2 (1+K) + a'_0 \theta + \frac{1}{4} Pr^2 (1-K) \cos 2\theta + \\ &\quad \sum_{n=2,4,6}^{\infty} (a'_n r^{-n} + b'_n r^{-n+2}) \cos(n\theta)\end{aligned}\quad (3.3.2a)$$

donde  $a_0$ ,  $a'_0$ ,  $a'_n$  y  $b'_n$  son constantes que permiten incluir las condiciones de frontera en la solución.

Utilizando las ecuaciones 2.8b, 3.3.1b y 3.3.2a, se obtienen desplazamientos en el medio que corresponden a los esfuerzos iniciales y a la redistribución de esfuerzos por construcción del túnel. Los desplazamientos iniciales (ecuaciones 3.3.1c), deben ser sustraídos. Los desplazamientos en el terreno debidos a la construcción del túnel se calculan con las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned}u &= \frac{1+\nu}{E} \left\{ -a_0 r^{-1} + \sum_{n=2,4,6}^{\infty} [na'_n r^{-n-1} + (n+2-4\nu)b'_n r^{-n+1}] \cos(n\theta) \right\} \\ v &= \frac{1+\nu}{E} \left\{ \sum_{n=2,4,6}^{\infty} [na'_n r^{-n-1} - 4(1-\nu)b'_n r^{-n+1}] \sin(n\theta) \right\}\end{aligned}\quad (3.3.2b)$$

Las condiciones de frontera en la interfaz terreno-revestimiento para  $r = R$ , son:

$$\text{Deslizamiento completo:} \quad \sigma_r = \sigma_R; \quad \tau_{r\theta} = 0; \quad u = u_s \quad (3.3.2c)$$

$$\text{Deslizamiento nulo: } \sigma_r = \sigma_R; \quad \tau_{r\theta} = \tau_{R\theta}; \quad u = u_s; \quad v = v_s \quad (3.3.2d)$$

Considerando las relaciones esfuerzo-desplazamiento para el soporte (Flüegge, 1966).

$$\frac{d^2 v_s}{d\theta^2} + \frac{du_s}{d\theta} = -\frac{R^2}{D_c} \tau_{R\theta} \quad (3.3.2e)$$

$$\frac{dv_s}{d\theta} + u_s + \frac{D_F}{D_c R^2} \left( \frac{d^4 u_s}{d\theta^4} + 2 \frac{d^2 u_s}{d\theta^2} + u_s \right) = \frac{R^2}{D_c} \sigma_R$$

$$\text{donde: } D_c = \frac{E_s A_s}{1 - \nu_s^2}; \quad D_F = \frac{E_s I_s}{1 - \nu_s^2} \quad (3.3.2f)$$

Para el caso de deslizamiento completo, se combinan las ecuaciones 3.3.2b, 3.3.2c, 3.3.2e y 3.3.2f y se obtienen los siguientes esfuerzos en la interfaz terreno-revestimiento:

$$\begin{aligned} \sigma_R &= \frac{1}{2} P(1+K)(1-a_0^*) - \frac{1}{2} P(1-K)(3-6a_2^*) \cos 2\theta \\ \tau_{R\theta} &= 0 \end{aligned} \quad (3.3.2g)$$

Los desplazamientos en el soporte (en forma adimensional), son:

$$\frac{u_s E}{PR(1+\nu)} = \frac{1}{2} (1+K)a_0^* - (1-K)[(5-6\nu)a_2^* - (1-\nu)] \cos 2\theta \quad (3.3.2h)$$

$$\frac{v_s E}{PR(1+\nu)} = \frac{1}{2} (1-K)[(5-6\nu)a_2^* - (1-\nu)] \sin 2\theta$$

$$\text{donde: } a_0^* = \frac{C^* F^* (1-\nu)}{C^* + F^* + C^* F^* (1-\nu)}; \quad a_2^* = \frac{(F^* + 6)(1-\nu)}{2F^* (1-\nu) + 6(5-6\nu)} \quad (3.3.2i)$$

Similarmente, para el caso de deslizamiento nulo y utilizando las ecuaciones 3.3.2b, 3.3.2d, 3.3.2e y 3.3.2f, se obtienen los esfuerzos en la interfaz terreno-revestimiento:

$$\begin{aligned} \sigma_R &= \frac{1}{2} P(1+K)(1-a_0^*) - \frac{1}{2} P(1-K)(1-6a_2^* + 4b_2^*) \cos 2\theta \\ \tau_{R\theta} &= \frac{1}{2} P(1-K)(1+6a_2^* - 2b_2^*) \sin 2\theta \end{aligned} \quad (3.3.2j)$$

Los desplazamientos del soporte son:

$$\frac{u_s E}{PR(1+\nu)} = \frac{1}{2} (1+K)a_0^* + \frac{1}{2} (1-K)[4(1-\nu)b_2^* - 2a_2^*] \cos 2\theta \quad (3.3.2k)$$

$$\frac{v_s E}{PR(1+\nu)} = -(1-K)[a_2^* + (1-2\nu)b_2^*] \sin 2\theta$$

donde:

$$\begin{aligned} a_0^* &= \frac{C^* F^* (1-\nu)}{C^* + F^* + C^* F^* (1-\nu)}; & \beta &= \frac{(6+F^*)C^*(1-\nu) + 2F^*\nu}{3F^* + 3C^* + 2C^* F^* (1-\nu)} \\ b_2^* &= \frac{C^*(1-\nu)}{2[C^*(1-\nu) + 4\nu - 6\beta - 3\beta C^*(1-\nu)]}; & a_2^* &= \beta b_2^* \end{aligned} \quad (3.3.2l)$$

### 3.3.3. Etapa 3. Elementos mecánicos sobre el revestimiento

Las ecuaciones diferenciales para obtener el esfuerzo axial  $T$  y el momento  $M$ , en el soporte del túnel bajo la condición de deformación plana (Hoeg, 1968), son:

$$R \frac{dT}{d\theta} - \frac{dM}{d\theta} = -R^2 \tau_{R\theta}; \quad RT + \frac{d^2M}{d\theta^2} = R^2 \sigma_R \quad (3.3.3a)$$

Sustituyendo las expresiones  $\sigma_R$  y  $\tau_{R\theta}$  obtenidas en la etapa 2, resolviendo simultáneamente las ecuaciones diferenciales y expresando los resultados en forma adimensional, las fuerzas de soporte para el caso de deslizamiento completo, son:

$$\begin{aligned} \frac{T}{PR} &= \frac{1}{2}(1+K)(1-a_0^*) + \frac{1}{2}(1+K)(1-2a_2^*)\cos 2\theta \\ \frac{M}{PR^2} &= \frac{1}{2}(1-K)(1-2a_2^*)\cos 2\theta \end{aligned} \quad (3.3.3b)$$

donde  $a_0^*$  y  $a_2^*$  se dan en las ecuaciones 3.3.2j.

Para el caso de deslizamiento nulo:

$$\begin{aligned} \frac{T}{PR} &= \frac{1}{2}(1+K)(1-a_0^*) + \frac{1}{2}(1-K)(1+2a_2^*)\cos 2\theta \\ \frac{M}{PR^2} &= \frac{1}{4}(1-K)(1-2a_2^* + 2b_2^*)\cos 2\theta \end{aligned} \quad (3.3.3c)$$

donde  $a_0^*$ ,  $a_2^*$  y  $b_2^*$ , se dan en las ecuaciones 3.3.2m.

### 3.3.4. Comentarios

En la solución se acepta que el estado inicial de esfuerzos en el medio corresponde a los esfuerzos vertical y horizontal por peso propio del terreno, al centro del túnel. Esto significa que en cualquier punto del medio el estado de esfuerzos inicial es el mismo. Esta suposición es válida para túneles profundos y/o de diámetro pequeño, donde pueda aceptarse que el esfuerzo en la clave es prácticamente igual al esfuerzo en la cubeta del túnel.

El aceptar que estos esfuerzos son iguales y cuando la relación de esfuerzos  $K$  es menor que uno, conduce a una distribución de esfuerzos iniciales sobre el revestimiento similar a la considerada por Muir Wood (figura 3.2a). Cuando  $K=1$ , los esfuerzos en la interfaz terreno-revestimiento son uniformes como en la solución de Kirsch modificada (inciso 3.1.3h).

Para considerar una distribución de esfuerzos más realista, se propone que en cada punto sobre la interfaz terreno-revestimiento, el esfuerzo vertical inicial  $P$  corresponda al esfuerzo inicial vertical asociado al peso propio del material en ese mismo punto. Esta suposición permite una mayor aproximación de los esfuerzos calculados y que esta solución pueda ser utilizada incluso en túneles menos profundos.

Las relaciones de rigidez adimensionales  $C^*$  y  $F^*$ , provienen de la expresión correspondiente a las deformaciones tangenciales bajo la condición de deformación plana (Reséndiz y Romo, 1981). No se explica porque no intervienen las deformaciones radiales en las relaciones de rigidez. Se piensa que dichas relaciones deben tomar en cuenta tanto las deformaciones tangenciales como las deformaciones radiales, ya que ambas provocan flexión y compresión en el revestimiento.

### 3.4. PRESIONES DE ROCA EN TÚNELES E INTERACCIÓN ROCA-REVESTIMIENTO (ALBERRO, 1983)

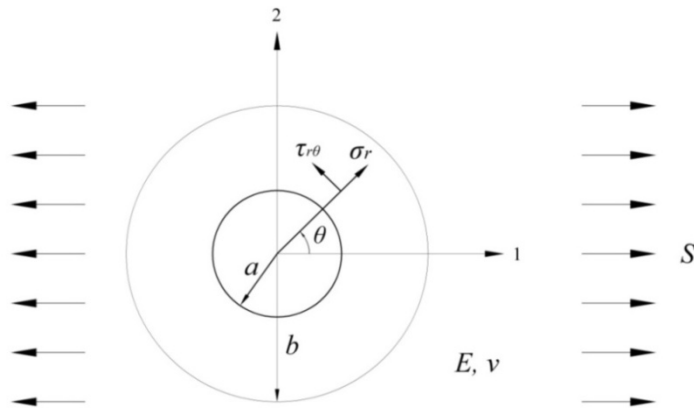
Al igual que en las soluciones anteriores, el terreno y el revestimiento son medios continuos, homogéneos, isótropos y elástico-lineales. Como en las soluciones de Kirsch y Einstein y Schwartz, el medio está sometido a un estado inicial de esfuerzos. A diferencia de las soluciones de Muir Wood y Einstein y Schwartz, se considera la condición de esfuerzo plano y se aceptan las ecuaciones de equilibrio, en el revestimiento, de Radenkovic (1954).

Del mismo modo que en estas últimas soluciones, se acepta lo siguiente:

- El revestimiento se materializa y desarrolla su resistencia inmediatamente.
- Un potencial de esfuerzos permite obtener los incrementos de esfuerzos bidimensionales.
- Los esfuerzos y desplazamientos, en la interfaz terreno-revestimiento, actúan del mismo modo tanto en el terreno como en el revestimiento.
- Se considera la deformación a la flexión del revestimiento.
- Se considera el efecto de las fuerzas cortantes entre el terreno y el revestimiento.

#### 3.4.1. Estado unidimensional de esfuerzos

La siguiente figura representa un medio infinito sometido a un estado unidimensional de esfuerzos:



**Figura 3.4.1a. Excavación circular en un medio infinito, sometido a un estado de esfuerzos unidireccional**

Inicialmente, los esfuerzos actuantes en el perímetro del túnel se expresan como:

$$\sigma_r = \frac{S_1}{2}(1 + \cos 2\theta); \quad \tau_{r\theta} = -\frac{S_1}{2} \sin 2\theta \quad (3.4.1a)$$

donde  $S_1$  es el esfuerzo principal horizontal aplicado lejos del contorno del túnel;  $\theta$  es el ángulo polar;  $\sigma_r$  es el esfuerzo radial;  $\tau_{r\theta}$  es el esfuerzo cortante en coordenadas polares.

Posteriormente se realiza un orificio circular. La excavación induce el siguiente estado de esfuerzos:

$$\Delta\sigma_r = \left(p - \frac{S_1}{2}\right) + \left(q - \frac{S_1}{2}\right) \cos 2\theta; \quad \Delta\tau_{r\theta} = \left(t + \frac{S_1}{2}\right) \sin 2\theta \quad (3.4.1b)$$

donde  $t$ ,  $p$  y  $q$ , se determinan estableciendo equilibrio y compatibilidad del sistema roca-revestimiento.

El término de las ecuaciones 3.4.1b que no está en función de  $\theta$ , se resuelve con las fórmulas de Lamé:

$$\sigma_r = \frac{B}{r^2} - A; \quad \sigma_\theta = \frac{B}{r^2} + A \quad (3.4.1c)$$

Los términos de las ecuaciones 3.4.1b que dependen del ángulo polar, tienen solución a partir de una función potencial de esfuerzos de Airy, como la siguiente:

$$\varphi = (Ar^2 + Br^4 + Cr^{-2} + D)\cos 2\theta \quad (3.4.1d)$$

De esta manera, los incrementos de esfuerzos son:

$$\begin{aligned} \Delta\sigma_r &= \left(p - \frac{S_1}{2}\right) \frac{a^2}{r^2} - \left\{ \left[ q - 2t - \frac{3}{2}S_1 \right] \frac{a^4}{r^4} + 2[S_1 - q + t] \frac{a^2}{r^2} \right\} \cos 2\theta \\ \Delta\sigma_\theta &= -\left(p - \frac{S_1}{2}\right) \frac{a^2}{r^2} + \left( q - 2t - \frac{3}{2}S_1 \right) \frac{a^4}{r^4} \cos 2\theta \\ \Delta\tau_{r\theta} &= -\left\{ \left[ q - 2t - \frac{3}{2}S_1 \right] \frac{a^4}{r^4} + [S_1 - q + t] \frac{a^2}{r^2} \right\} \sen 2\theta \end{aligned} \quad (3.4.1e)$$

Considerando al revestimiento incompresible y la condición de esfuerzo plano, se tiene que para  $r=a$ :

$$\Delta\varepsilon_\theta = 0 \quad \therefore \Delta\sigma_\theta = \nu\Delta\sigma_r \quad (3.4.1f)$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones 3.4.1f, se obtienen:

$$p = \frac{S_1}{2}; \quad q = S_1 \frac{4m + 3 - \nu}{2(1 - \nu)}; \quad m = \frac{t}{S_1} \quad (3.4.1g)$$

Sustituyendo las ecuaciones 3.4.1g en 3.4.1e, se tienen incrementos de esfuerzos en función de  $S$ .

$$\begin{aligned} \Delta\sigma_r &= -\frac{S_1 \cos 2\theta(1 + 2m)}{1 - \nu} \left[ \nu \frac{a^4}{r^4} - (1 + \nu) \frac{a^2}{r^2} \right] \\ \Delta\sigma_\theta &= \frac{S_1 \cos 2\theta(1 + 2m)}{1 - \nu} \nu \frac{a^4}{r^4} \\ \Delta\tau_{r\theta} &= -\frac{S_1 \sen 2\theta(1 + 2m)}{2(1 - \nu)} \left[ 2\nu \frac{a^4}{r^4} - (1 + \nu) \frac{a^2}{r^2} \right] \end{aligned} \quad (3.4.1h)$$

El estado de esfuerzos que actúa sobre el revestimiento, es resultado de la superposición del estado inicial de esfuerzos (ecuaciones 3.4.1a), con las ecuaciones 3.4.1h.

$$\sigma_r = \frac{S_1}{2} \left( 1 + \frac{4m + 3 - \nu}{1 - \nu} \cos 2\theta \right); \quad \tau_{r\theta} = S_1 m \sen 2\theta \quad (3.4.1i)$$

Para determinar el parámetro  $m$ , se considera compatibilidad de los desplazamientos ente la roca y el revestimiento, a partir de las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_r}{\partial r} &= \frac{1}{E} (\sigma_r - \nu\sigma_\theta) = \varepsilon_r; & \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} &= \frac{r}{E} (\sigma_\theta - \nu\sigma_r) - u_r = r\varepsilon_\theta - u_r \\ \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} &= \gamma_{r\theta} \end{aligned} \quad (3.4.1j)$$

donde  $u_r$  es el desplazamiento radial,  $u_\theta$  es el desplazamiento tangencial y  $\gamma_{r\theta}$  es la distorsión angular.

Sustituyendo las ecuaciones 3.4.1h en 3.4.1j y realizando las integrales correspondientes, se obtiene:

$$\begin{aligned}
 u_r &= \frac{S_1 \cos 2\theta (1+2m)}{3E} \frac{1+\nu}{1-\nu} r \left( \nu \frac{a^4}{r^4} - 3 \frac{a^2}{r^2} \right) \\
 u_\theta &= \frac{S_1 r \operatorname{sen} 2\theta}{2E} (1+2m) \frac{1+\nu}{1-\nu} \left[ \frac{2\nu}{3} \frac{a^4}{r^4} + (1-\nu) \frac{a^2}{r^2} \right] \\
 \gamma_{r\theta} &= -\frac{S_1 \operatorname{sen} 2\theta}{E(1-\nu)} (1+2m)(1+\nu) \left[ 2\nu \frac{a^4}{r^4} - (1+\nu) \frac{a^2}{r^2} \right]
 \end{aligned} \tag{3.4.1k}$$

Por último es necesario introducir la ecuación de equilibrio para el revestimiento (Radenkovic, 1954):

$$\frac{d^5 u_r}{d\theta^5} + \frac{d^3 u_r}{d\theta^3} \left( 2 + \frac{S a^3}{2E_r I} \right) + \frac{d u_r}{d\theta} \left( 1 + \frac{S_1 a^3}{2E_r I} \right) - \frac{a^4}{E_r I} \left( V + \frac{dU}{d\theta} \right) = 0 \tag{3.4.1l}$$

donde  $U = \frac{S_1}{2} \left( 1 + \frac{4m+3-\nu}{1-\nu} \cos 2\theta \right)$ , es el esfuerzo radial sobre el revestimiento;  $V = S_1 m \operatorname{sen} 2\theta$  es el esfuerzo cortante sobre el revestimiento;  $E_r$  es el modulo de elasticidad del revestimiento;  $I$  módulo de inercia de la sección estructural del revestimiento.

Sustituyendo los desplazamientos de las ecuaciones 3.4.1k y los esfuerzos representados por  $U$  y  $V$ :

$$1 + 2m = -\frac{3(1-\nu)Ea^3}{(3+\nu)Ea^3 + 2(6E_r I - Sa^3)(1+\nu)(3-\nu)} \tag{3.4.1m}$$

### 3.4.2. Estado bidimensional de esfuerzos

En la figura 3.4.2a se representa la superposición de un esfuerzo  $S_2$  en la dirección del eje 2.

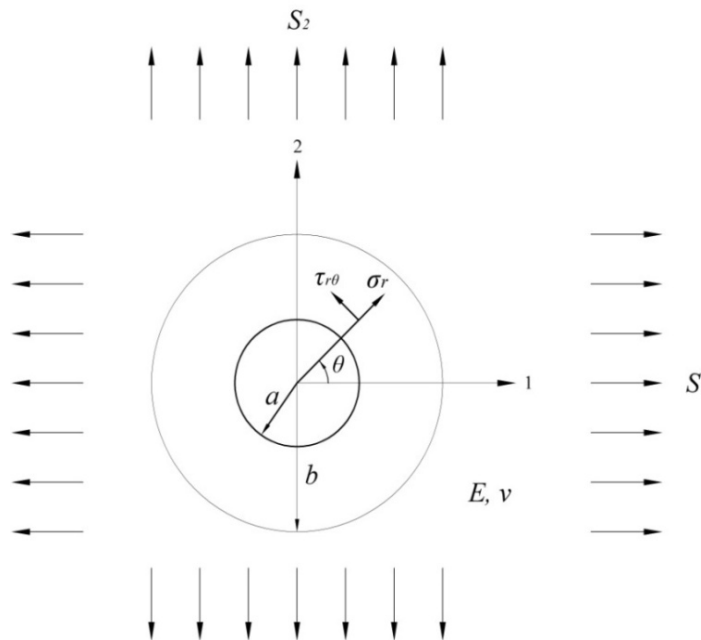


Figura 3.4.2a. Sobreposición de un esfuerzo  $S_2$  en la dirección del eje 2

Las variaciones de esfuerzo en la roca son:

$$\Delta\sigma_r = -2 \cos 2\theta_1 [S_1(1+2m_1) - S_2(1+2m_2)] \frac{1}{2(1-\nu)} \left[ \nu \frac{a^4}{r^4} - (1+\nu) \frac{a^2}{r^2} \right]$$

$$\Delta\sigma_\theta = 2 \cos 2\theta_1 [S_1(1+2m_1) - S_2(1+2m_2)] \frac{1}{2(1-\nu)} \nu \frac{a^4}{r^4} \quad (3.4.2a)$$

$$\Delta\tau_{r\theta} = -\text{sen}2\theta_1 [S_1(1+2m_1) - S_2(1+2m_2)] \frac{1}{2(1-\nu)} \left[ 2\nu \frac{a^4}{r^4} - (1+\nu) \frac{a^2}{r^2} \right]$$

donde:

$$1+2m_1 = -\frac{3(1-\nu)Ea^3}{(3+\nu)Ea^3 + 2(6E_r I - S_1 a^3)(1+\nu)(3-\nu)} \quad (3.4.2b)$$

$$1+2m_2 = -\frac{3(1-\nu)Ea^3}{(3+\nu)Ea^3 + 2(6E_r I - S_2 a^3)(1+\nu)(3-\nu)}$$

Los esfuerzos en la roca quedan entonces:

$$\sigma_r = \frac{S_1 + S_2}{2} + \frac{S_1 - S_2}{2} \cos 2\theta_1 + \Delta\sigma_r$$

$$\sigma_\theta = \frac{S_1 + S_2}{2} - \frac{S_1 - S_2}{2} \cos 2\theta_1 + \Delta\sigma_\theta \quad (3.4.2c)$$

$$\tau_{r\theta} = \frac{S_1 - S_2}{2} \text{sen}2\theta_1 + \Delta\tau_{r\theta}$$

Para un estado bidimensional de esfuerzos, los desplazamientos son:

$$u_r = 2 \cos 2\theta_1 [S_1(1+2m_1) - S_2(1+2m_2)] \frac{1+\nu}{1-\nu} \frac{r}{2E} \left( \frac{\nu}{3} \frac{a^4}{r^4} - \frac{a^2}{r^2} \right)$$

$$u_\theta = \text{sen}2\theta_1 [S_1(1+2m_1) - S_2(1+2m_2)] \frac{1+\nu}{1-\nu} \frac{r}{2E} \left( \frac{2\nu}{3} \frac{a^4}{r^4} + (1-\nu) \frac{a^2}{r^2} \right) \quad (3.4.2d)$$

$$\gamma_{r\theta} = -2 \text{sen}2\theta_1 [S_1(1+2m_1) - S_2(1+2m_2)] \frac{1+\nu}{1-\nu} \frac{1}{2E} \left( 2\nu \frac{a^4}{r^4} - (1+\nu) \frac{a^2}{r^2} \right)$$

El momento de flexión que se genera en el revestimiento está dado por:

$$M = -\frac{E_r I}{a^2} \left( \frac{d^2 u_r}{d\theta^2} + u_r \right) \quad (3.4.2e)$$

Por lo tanto:

$$M = \frac{E_r I}{E a} \cos 2\theta_1 [S_2(1+2m_2) - S_1(1+2m_1)] \frac{(1+\nu)(3-\nu)}{1-\nu} \quad (3.4.2f)$$

### 3.4.3. Comentarios

La solución del ingeniero Alberro es práctica, compacta y fácilmente programable. Tiene las siguientes ventajas sobre las soluciones anteriores:

- a) A diferencia del inciso 3.1.3c de la solución de Kirsch, las distribuciones de esfuerzos cortantes y la variación de esfuerzos radiales sobre la interfaz terreno-revestimiento no son nulas.
- b) Los resultados de esta solución no están condicionados a un determinado modo de deformación del túnel como en el caso de la solución de Muir Wood
- c) Aunque parte del concepto de esfuerzos iniciales alejados del túnel, no los restringe a un valor determinado como en la solución de Einstein y Schwartz.

Como en las soluciones de Kirsch y Einstein y Schwartz, la solución de Alberro considera un medio infinito y esfuerzos iniciales aplicados en fronteras alejadas. Para obtener aproximadamente los campos de esfuerzos se propone utilizar las ecuaciones del inciso 3.4.2, considerando que en cada punto del medio los valores  $S_1$  y  $S_2$ , corresponden a los esfuerzos iniciales horizontal y vertical, respectivamente, asociados al peso propio del medio como se describe en el inciso 3.1.3c.

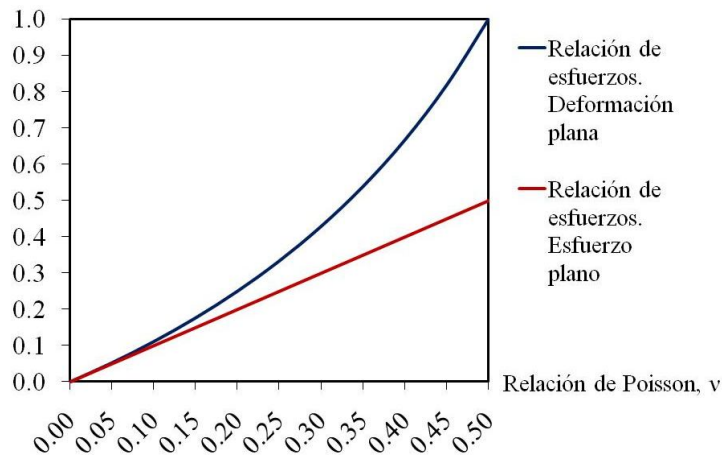
En esta solución, para obtener las constantes  $m$ ,  $p$ ,  $q$  y  $t$ , se establece la condición de esfuerzo plano (3.4.1f). Esta condición no es adecuada en los análisis de secciones transversales de túneles ya que considera que los esfuerzos en la dirección longitudinal al túnel son nulos. En este trabajo se realizó un análisis comparativo entre las condiciones de estados planos de esfuerzos y de deformaciones, considerando un revestimiento incompresible (Anexo B). Los resultados de este análisis son los siguientes:

$$\begin{array}{l}
 \text{Esfuerzo plano} \quad \Delta\sigma_\theta = \nu\Delta\sigma_r \\
 \text{Deformación plana} \quad \Delta\sigma_\theta = \frac{\nu}{1-\nu}\Delta\sigma_r
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 \text{Si } \nu = 0.5 \rightarrow \Delta\sigma_\theta = 0.5\Delta\sigma_r \\
 \text{Si } \nu = 0 \rightarrow \Delta\sigma_\theta = \Delta\sigma_r
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 \Delta\sigma_\theta = 0 \\
 \Delta\sigma_\theta = 0
 \end{array}$$

Si se acepta que la condición de deformación plana es válida en los análisis bidimensionales de secciones transversales de túneles, entonces de los resultados anteriores podemos concluir lo siguiente:

- a) La solución es aproximada en análisis donde se consideren cambios de volumen; es decir, donde el valor de la relación de Poisson sea pequeño ( $\nu \rightarrow 0$ ).
- b) Con esta solución los análisis no drenados ( $\nu=0.5$ ), subestiman el esfuerzo tangencial en un 50%.

Para determinar el rango de la relación de Poisson, para el cual la solución puede ser aproximada, es útil la siguiente gráfica:



**Figura 3.4.3a. Relaciones entre los esfuerzos tangenciales y radiales, para las condiciones de esfuerzo plano y deformación plana (Hernández R y Pérez A)**

En la gráfica de la figura 3.4.3a, la curva negra representa la relación entre los esfuerzos tangenciales y radiales, bajo la condición de deformación plana. La recta roja representa la misma relación bajo la condición de esfuerzo plano. Un valor de la relación de Poisson igual a 0.15, para la condición de deformación plana,



representa una relación entre esfuerzos de aproximadamente 0.18, mientras que para la condición de esfuerzo plano representa una relación entre esfuerzos de 0.15. Lo anterior significa que utilizando esta solución se comete un error del 15%. Este error podría ser aceptable en análisis preliminares.

### 3.5. SOLUCIÓN ANALÍTICA PARA TÚNELES POCO PROFUNDOS EN TERRENO SECO (BOBET, 2001)

Esta solución extiende el método de la rigidez relativa de Einstein y Schwartz (1979). Al igual que en las soluciones anteriores el terreno y el revestimiento son medios continuos, homogéneos, isótropos y elástico-lineales. Como en las soluciones de Muir Wood, Einstein y Schwartz y Alberro, se acepta lo siguiente:

- a) Un potencial de esfuerzos permite obtener incrementos de esfuerzos bidimensionales.
- b) La condición de deformación plana
- c) El revestimiento se materializa y desarrolla su resistencia inmediatamente.
- d) Las distribuciones radiales de esfuerzos y de desplazamientos, en la interfaz terreno-revestimiento, actúan del mismo modo tanto en el terreno como en el revestimiento.
- e) Se considera tanto la deformación a la flexión del revestimiento como la circunferencial.

Como en los incisos 3.1.3, 3.2.1 y 3.3.2, se consideran nulos los esfuerzos cortantes entre el terreno y el revestimiento. El medio está sometido a un estado inicial de esfuerzos que corresponde al peso del material. Adicionalmente se hacen las siguientes suposiciones:

- a) La relación profundidad-radio del túnel, es mayor que 1.5.
- b) Existe un espacio constante de magnitud  $w$  entre el terreno y el revestimiento.

El parámetro  $w$  se define como “pérdida equivalente de terreno” y se refiere a las deformaciones de la excavación cuando no hay contacto entre el terreno y el revestimiento.

$$w = \frac{\text{ground loss}(\%)}{100} \frac{\pi r_0^2}{2\pi r_0} = \frac{\text{ground loss}(\%)}{200} r_0 \quad (3.5a)$$

#### 3.5.1. Solución para terreno seco

La solución corresponde al túnel de la figura 3.5.1a. Se obtiene desacoplando el revestimiento y el terreno e imponiendo compatibilidad de deformaciones y de esfuerzos en la interfaz terreno-revestimiento.

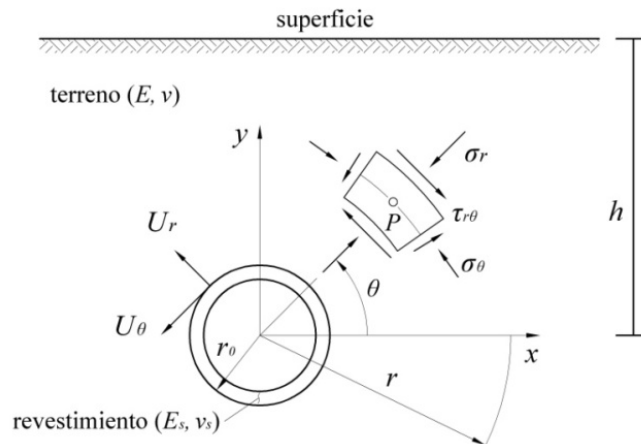


Figura 3.5.1a. Túnel circular poco profundo en medio elástico

En la figura anterior,  $\sigma_r$ ,  $\sigma_\theta$  y  $\tau_{r\theta}$  son los esfuerzos radial, tangencial y cortante, respectivamente;  $U_\theta$ ,  $U_r$  son los desplazamientos circunferencial y radial, respectivamente;  $h$  es la profundidad al centro del túnel, por debajo de la superficie;  $r$  y  $\theta$  son las coordenadas polares;  $r_0$  es el radio de la interfaz;  $P$  es un punto en el medio;  $E$  y  $\nu$  son los parámetros de rigidez del revestimiento;  $E_s$  y  $\nu_s$  son los parámetros de rigidez del terreno.

Se aplican las siguientes condiciones de frontera.

$$\begin{aligned} \tau|_{\theta=\pm\pi/2} &= 0; & \tau^{terreno}|_{r=r_0} &= \tau^{rev}|_{r=r_0} = 0 \\ U_\theta|_{\theta=\pm\pi/2} &= 0; & U_r^{terreno}|_{r=r_0} &= U_r^{rev}|_{r=r_0} - w \\ \sigma_r^{terreno}|_{r=r_0} &= \sigma_r^{rev}|_{r=r_0}; & \sigma_v|_{r\rightarrow\infty} &= -\gamma y = -\gamma(h - r \sin\theta); & \sigma_h|_{r\rightarrow\infty} &= k\sigma_v \end{aligned} \quad (3.5.1a)$$

donde  $\tau$  es el esfuerzo cortante;  $\sigma_v$  y  $\sigma_h$  son los esfuerzos vertical y horizontal, respectivamente;  $\gamma$  es el peso volumétrico del terreno;  $k$  es el coeficiente de tierras en reposo.

Las relaciones esfuerzo-desplazamiento para el revestimiento (Flügge, 1966), son:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 U_\theta^s}{d\theta^2} + \frac{dU_\theta^s}{d\theta} &= -\frac{C(1-\nu^2)}{E} r_0 \tau_{r\theta}^s \\ \frac{dU_r^s}{d\theta} + U_r^s + \frac{C}{F} \left( \frac{d^4 U_r^s}{d\theta^4} + 2 \frac{d^2 U_r^s}{d\theta^2} + U_r^s \right) &= \frac{C(1-\nu^2)}{E} r_0 \sigma_r^s \end{aligned} \quad (3.5.1b)$$

donde:  $U_r^s$  y  $U_\theta^s$  son los desplazamientos radial y circunferencial sobre el soporte, respectivamente;  $\sigma_r^s$  y  $\tau_{r\theta}^s$  son los esfuerzos radial y cortante sobre el soporte, respectivamente;  $E$  y  $\nu$  son el módulo de Young y la relación de Poisson, respectivamente, en el terreno;  $C$  y  $F$  son las relaciones de compresibilidad y flexibilidad, respectivamente, definidas como:

$$C = \frac{Er_0(1-\nu_s^2)}{E_s A_s(1-\nu^2)}; \quad F = \frac{Er_0^3(1-\nu_s^2)}{E_s I_s(1-\nu^2)} \quad (3.5.1c)$$

donde:  $E_s$  y  $\nu_s$  son el módulo de Young y la relación de Poisson, respectivamente, en el revestimiento;  $A_s$  e  $I_s$  son el área y el momento de inercia de la sección transversal del revestimiento. La solución es:

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{a_0}{r^2} - \frac{1}{2} \gamma h(1+k) + \left[ \frac{1}{4} \gamma r(k+3) - 2c_1' r^{-3} + c_1' r^{-1} + d_1' r^{-1} \right] \sin\theta \\ &+ \left[ \frac{1}{2} \gamma h(1-k) - 6a_2' r^{-4} - 4b_2' r^{-2} \right] \cos 2\theta + \left[ -\frac{1}{4} \gamma r(1-k) - 12c_3' r^{-5} - 10d_3' r^{-3} \right] \sin 3\theta \\ \sigma_\theta &= -\frac{a_0}{r^2} - \frac{1}{2} \gamma h(1+k) + \left[ \frac{1}{4} \gamma r(3k+1) + 2c_1' r^{-3} + d_1' r^{-1} \right] \sin\theta \\ &+ \left[ -\frac{1}{2} \gamma h(1-k) + 6a_2' r^{-4} \right] \cos 2\theta + \left[ \frac{1}{4} \gamma r(1-k) + 12c_3' r^{-5} + 2d_3' r^{-3} \right] \sin 3\theta \\ \tau &= \frac{a_0'}{r^2} + \left[ \frac{1}{4} \gamma r(1-k) - 2c_1' r^{-3} - d_1' r^{-1} \right] \cos\theta \\ &- \left[ \frac{1}{2} \gamma h(1-k) + 6a_2' r^{-4} + 2b_2' r^{-2} \right] \sin 2\theta - \left[ \frac{1}{4} \gamma r(1-k) - 12c_3' r^{-5} - 6d_3' r^{-3} \right] \cos 3\theta \end{aligned} \quad (3.5.1d)$$

$$\begin{aligned}
 U_r &= \frac{1+\nu}{E} \left\{ -\frac{a_0}{r} + [c_1' r^{-2} + c_1(1-\nu) \ln r + d_1'(1-2\nu) \ln r] \operatorname{sen} \theta \right. \\
 &\quad \left. + [2a_2' r^{-3} + 4(1-\nu)b_2' r^{-1}] \cos 2\theta + [3c_3' r^{-4} + (5-4\nu)d_3' r^{-2}] \operatorname{sen} 3\theta \right\} \\
 U_\theta &= \frac{1+\nu}{E} \left\{ -[c_1' r^{-2} - c_1((1-\nu) \ln r + \nu) - d_1'(1-2\nu)(\ln r - 1)] \cos \theta \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{2} [-4a_2' r^{-3} + 4(1-2\nu)b_2' r^{-1}] \operatorname{sen} 2\theta + [3c_3' r^{-4} + (1-4\nu)d_3' r^{-2}] \cos 3\theta \right\}
 \end{aligned} \tag{3.5.1e}$$

donde:

$$\begin{aligned}
 a_0 &= \frac{1}{2} \frac{\gamma h(1+k)(1-\nu^2)CF + 2E(C+F) \frac{w}{r_0}}{(C+F)(1+\nu) + (1-\nu^2)CF} r_0^2 \\
 c_1 &= -\gamma r_0^2 \quad c_1' = \frac{1}{8} \left( k - \frac{\nu}{1-\nu} \right) \gamma r_0^4 \quad d_1' = \frac{1}{4} \frac{1-2\nu}{1-\nu} \gamma r_0^2 \\
 a_2' &= -\frac{1}{4} \frac{(F+6)(1-\nu)}{(1-\nu)F + 3(5-6\nu)} \gamma h(1-k) r_0^4 \quad b_2' = \frac{1}{4} \frac{2(1-\nu)F + 3}{(1-\nu)F + 3(5-6\nu)} \gamma h(1-k) r_0^2 \\
 c_3' &= \frac{1}{12} \frac{(1-\nu)F + 4(5-4\nu)}{(1-\nu)F + 8(7-8\nu)} \gamma (1-k) r_0^6 \quad d_3' = -\frac{1}{8} \frac{(1-\nu)F + 8}{(1-\nu)F + 8(7-8\nu)} \gamma (1-k) r_0^4
 \end{aligned} \tag{3.5.1f}$$

Del documento “*Stresses in shells*”, de Flügge (1966), se tiene:

$$r_0 \frac{dT}{d\theta} - \frac{dM}{d\theta} = -r_0^2 \tau_{r\theta}^s; \quad r_0 T + \frac{d^2 M}{d\theta^2} = r_0^2 \sigma_r^s \tag{3.5.1g}$$

donde  $T$  y  $M$  son la fuerza axial y el momento actuante sobre una sección transversal del revestimiento.

Resolviendo el sistema de ecuaciones anterior:

$$\begin{aligned}
 T &= \frac{1}{2} \left[ \frac{2E \frac{w}{r_0} - \gamma h(1+k)(1+\nu)}{(C+F)(1+\nu) + (1-\nu^2)CF} (C+F) \right] r_0 - \frac{3}{2} \frac{3-4\nu}{(1-\nu)F + 3(5-6\nu)} \gamma h(1-k) r_0 \cos 2\theta \\
 &\quad + \frac{3-4\nu}{(1-\nu)F + 8(7-8\nu)} \gamma (1-k) r_0^2 \operatorname{sen} 3\theta
 \end{aligned} \tag{3.5.1h}$$

$$M = -\frac{3}{2} \frac{3-4\nu}{(1-\nu)F + 3(5-6\nu)} \gamma h(1-k) r_0^2 \cos 2\theta + \frac{3-4\nu}{(1-\nu)F + 8(7-8\nu)} \gamma (1-k) r_0^3 \operatorname{sen} 3\theta \tag{3.5.1i}$$

Con propiedades típicas para el terreno y el revestimiento, la relación de flexibilidad  $F$  es muy grande. Se puede obtener una solución aproximada suponiendo un revestimiento muy flexible ( $F \rightarrow \infty$ ) e incompresible ( $C=0$ ). En este caso, el esfuerzo radial en la interfaz terreno-revestimiento, es constante.

$$\sigma_r|_{r=r_0} = \frac{E}{1+\nu} \frac{w}{r_0} - \frac{1}{2} \gamma h(1+k) \tag{3.5.1j}$$

Cuando  $w=0$ , la ecuación 3.5.1j coincide con la propuesta por Peck (1969).

El máximo asentamiento de la superficie del terreno ocurre cuando  $r=h$  y  $\theta=90^\circ$ . Suponiendo un revestimiento muy flexible ( $F \rightarrow \infty$ ) e incompresible ( $C=0$ ), el asentamiento máximo  $\delta_{\text{máx}}$  está dado por:

$$\delta_{\text{máx}} = -\frac{wr_0}{h} + \frac{1+\nu}{E} \left\{ \begin{array}{l} \gamma r_0^2 \left[ \frac{1}{8} \left( k - \frac{\nu}{1-\nu} \left( \frac{r_0}{h} \right)^2 - \frac{1}{4} \frac{3-4\nu}{1-\nu} \ln h \right) \right] + \\ \gamma h(1-k)r_0 \left[ -2(1-\nu) \frac{r_0}{h} + \frac{1}{8} (9-4\nu) \left( \frac{r_0}{h} \right)^3 - \frac{1}{4} \left( \frac{r_0}{h} \right)^5 \right] \end{array} \right\} \quad (3.5.1k)$$

### 3.5.2. Comentarios

Como en el caso de la solución de Einstein y Schwartz, la solución de Bobet utiliza los parámetros de rigidez relativa. Estos parámetros consideran la descarga correspondiente a la excavación del túnel. Además, permiten tomar en cuenta las deformaciones del revestimiento por flexión y compresión.

La solución de Bobet considera que los esfuerzos cortantes en la interfaz terreno-revestimiento son iguales a cero (ecuación 3.2.1a); sin embargo, cuando se calculan los esfuerzos cortantes en dicho lugar geométrico, a partir de la ecuación 3.5.1d, no se obtienen valores de esfuerzos cortantes iguales a cero. Este resultado limita el uso de esta solución ya que no cumple cabalmente con una de sus condiciones de frontera.

## CAPÍTULO 4.

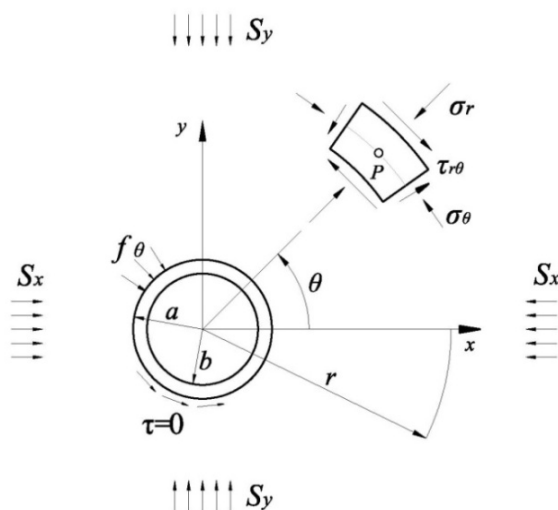
## SOLUCIONES ANALÍTICAS PARA TÚNELES CIRCULARES (PÉREZ Y AUVINET, 2012).

En este capítulo se proponen dos soluciones analíticas con las que es posible estudiar el problema de interacción terreno-revestimiento para túneles circulares en un medio infinito y sin peso. Con estas soluciones se pueden obtener campos de esfuerzos y de desplazamientos tanto en el terreno como en el revestimiento.

Las soluciones se obtienen desacoplando el problema e imponiendo, como condiciones de frontera en la interfaz terreno-revestimiento, polinomios de cuarto grado que representan distribuciones de esfuerzos radiales y cortantes, correspondientes a determinados valores de interés para realizar análisis paramétricos ó a resultados de mediciones de campo.

Se acepta que tanto el terreno como el revestimiento, son medios continuos, homogéneos e isótropos en cuanto a sus propiedades, que tienen un comportamiento elástico-lineal, que existe compatibilidad de deformaciones y que rige la condición de deformación plana. La convención de signos utilizada es la de la mecánica del medio continuo, la cual considera que los esfuerzos de compresión son negativos y que los esfuerzos de tensión son positivos.

Con las soluciones es posible evaluar el efecto de dos condiciones en la interfaz terreno-revestimiento: esfuerzos cortantes nulos y esfuerzos cortantes diferentes de cero. La condición de esfuerzos cortantes nulos en la interfaz terreno-revestimiento (figura 4a), simplifica la deducción de las soluciones analíticas. Esto conduce a una solución aproximada debido a que en algunas etapas de la vida útil del túnel, el esfuerzo cortante se desarrolla y puede ser considerable (Schmid, 1926).

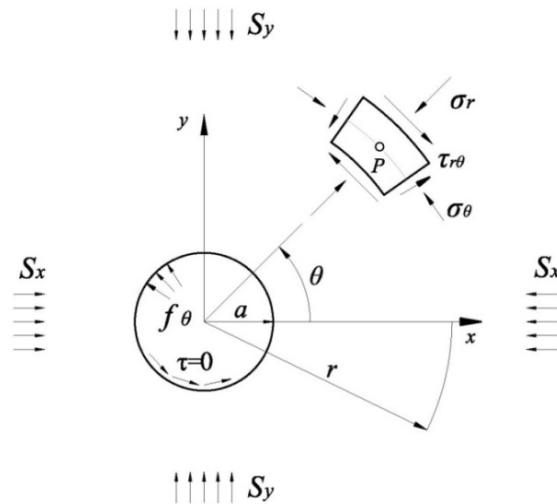


**Figura 4a. Interacción terreno-revestimiento bajo la condición de esfuerzos cortantes nulos.**

En la figura 4a,  $P$  es el punto de análisis en el terreno;  $S_x$  y  $S_y$  son los esfuerzos principales iniciales en el punto  $P$ , en coordenadas cartesianas;  $\sigma_r$ ,  $\sigma_\theta$  y  $\tau_{r\theta}$  son los esfuerzos radial, tangencial y cortante en el punto  $P$ , en coordenadas polares;  $f_\theta$  es la distribución de esfuerzos radiales sobre el revestimiento;  $\tau$  es el esfuerzo cortante;  $a$  y  $b$  son los radios del perímetro externo e interno del revestimiento, respectivamente;  $r$  y  $\theta$  son las coordenadas polares del punto  $P$ .

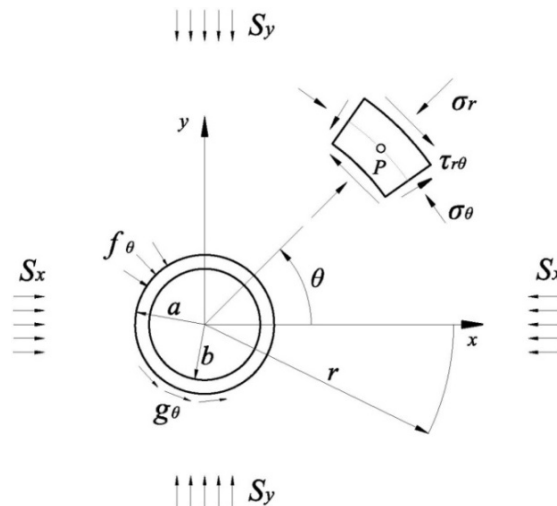
Cuando el túnel es construido con maquina tuneladora, se genera un espacio anular entre el terreno y el revestimiento, donde se inyecta un mortero con la finalidad de rellenar dicho espacio y provocar así, la

interacción de ambos materiales (figura 4.1.1a). Bajo la condición de esfuerzos cortantes nulos, es posible estudiar el efecto tanto en el terreno como en el revestimiento, de elevar la presión de dicha inyección de manera uniforme o no uniforme (figura 4c). Este caso se establece con la finalidad de estudiar estados de esfuerzos en el terreno generados por dichas presiones de inyección, con la finalidad de minimizar el efecto de un eventual proceso de consolidación sobre el revestimiento.



**Figura 4c. Efecto de una distribución de esfuerzos, uniforme o no uniforme, en la interfaz terreno-revestimiento, sobre cualquier punto P del terreno.**

La condición de esfuerzos cortantes diferentes de cero (figura 4d), implica generar una expresión matemática que represente la distribución de esfuerzos cortantes en la interfaz terreno-revestimiento. Bajo esta condición se obtienen campos de esfuerzos y de desplazamientos, tanto en el terreno como en el revestimiento, más realistas. Además, es posible analizar el efecto de inyecciones locales, en determinadas zonas sobre la interfaz terreno-revestimiento y realizar los análisis de interacción correspondientes.



**Figura 4c. Interacción terreno-revestimiento bajo la condición de esfuerzos cortantes diferentes de cero.**

En la figura anterior,  $g_\theta$  es la distribución de esfuerzos cortantes en la interfaz terreno-revestimiento.

Ambas condiciones son útiles para definir estrategias de inyección con la finalidad de prevenir, controlar o corregir deformaciones excesivas de un revestimiento, que puede estar sometido a condiciones de esfuerzos marcadamente anisótropas (procesos de consolidación; condiciones a largo plazo).

## 4.1. SOLUCIÓN ANALÍTICA PARA EL TERRENO

### 4.1.1 Condiciones de frontera

En el presente trabajo se sugiere representar la distribución de esfuerzos radiales ( $f_\theta$ ), en la interfaz terreno-revestimiento de un túnel, con el siguiente polinomio de cuarto grado:

$$f_\theta = f_4 \cos 4\theta + f_3 \sin 3\theta + f_2 \cos 2\theta + f_1 \sin \theta + f_0 \quad (4.1.1a)$$

donde  $f_4, f_3, f_2, f_1$  y  $f_0$ , son constantes del polinomio, por el momento desconocidas.

Para resolver el polinomio representado por la ecuación 4.1.1a, se utilizan valores de esfuerzos radiales correspondientes a mediciones de instrumentos instalados sobre la interfaz terreno-revestimiento ó se proponen valores de esfuerzos radiales en puntos de interés. La figura 4.1.1a, muestra una posible ubicación de instrumentos de medición (celdas de presión), instalados en el perímetro exterior del revestimiento primario que es el lugar geométrico de la interfaz terreno-revestimiento.

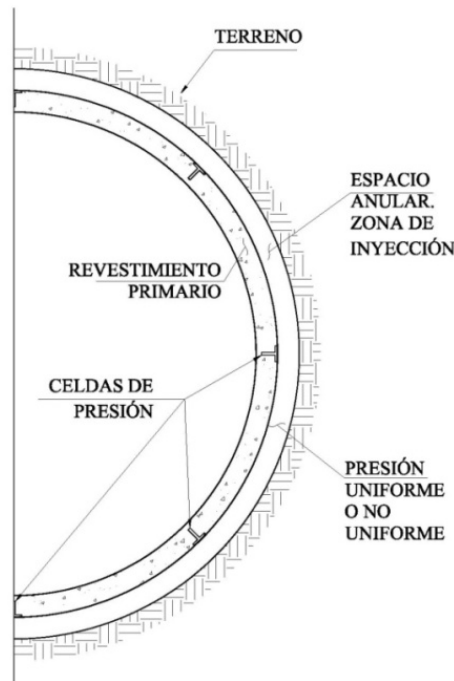


Figura 4.1.1a. Celdas de presión sobre el revestimiento primario y espacio anular.

Las expresiones para calcular las constantes  $f_4, f_3, f_2, f_1$  y  $f_0$ , son las siguientes:

$$\begin{aligned} f_4 &= \frac{1}{8}(f_{90^\circ} + f_{-90^\circ}) + \frac{1}{4}(f_{0^\circ} - f_{45^\circ} - f_{-45^\circ}) \\ f_3 &= \frac{1}{4}(f_{-90^\circ} - f_{90^\circ}) + \frac{\sqrt{2}}{4}(f_{45^\circ} - f_{-45^\circ}) \\ f_2 &= \frac{1}{2}f_{0^\circ} - \frac{1}{4}(f_{90^\circ} + f_{-90^\circ}) \\ f_1 &= \frac{1}{4}(f_{90^\circ} - f_{-90^\circ}) + \frac{\sqrt{2}}{4}(f_{45^\circ} - f_{-45^\circ}) \\ f_0 &= \frac{1}{8}(f_{90^\circ} + f_{-90^\circ}) + \frac{1}{4}(f_{0^\circ} + f_{45^\circ} + f_{-45^\circ}) \end{aligned} \quad (4.1.1b)$$

donde  $f_{90^\circ}$ ,  $f_{45^\circ}$ ,  $f_0$ ,  $f_{-45^\circ}$  y  $f_{-90^\circ}$ , son valores puntuales de esfuerzos radiales (medidos o propuestos), sobre el perímetro externo del revestimiento primario y en los ángulos indicados por los subíndices.

Se sugiere un segundo polinomio para representar la distribución de esfuerzos cortantes en la interfaz terreno-revestimiento.

$$g_\theta = g_4 \text{sen}4\theta + g_3 \text{cos}3\theta + g_2 \text{sen}2\theta + g_1 \text{cos}\theta \quad (4.1.1c)$$

donde  $g_\theta$  representa la distribución de esfuerzos cortantes en la interfaz terreno-revestimiento;  $g_4$ ,  $g_3$ ,  $g_2$  y  $g_1$  son constantes del polinomio, por el momento desconocidas.

Si se considera que el medio es infinito, entonces por simetría los esfuerzos cortantes en  $\theta=90^\circ$ ,  $0^\circ$  y  $-90^\circ$ , son iguales a cero. De esta manera, las variables  $g_1$ ,  $g_2$  y  $g_3$ , se calculan como:

$$\begin{aligned} g_1 &= \frac{\sqrt{2}}{4} (g_{45^\circ} + g_{-45^\circ}) \\ g_2 &= \frac{1}{2} (g_{45^\circ} - g_{-45^\circ}) \\ g_3 &= -\frac{\sqrt{2}}{4} (g_{45^\circ} + g_{-45^\circ}) \end{aligned} \quad (4.1.1d)$$

donde  $g_{45^\circ}$ ,  $g_0$  y  $g_{-45^\circ}$ , son valores puntuales de esfuerzos radiales (medidos o propuestos), sobre el perímetro externo del revestimiento primario y en los ángulos indicados por los subíndices.

Sin embargo, no es común medir esfuerzos cortantes en la interfaz terreno-revestimiento. En este trabajo se proponen las siguientes relaciones entre los esfuerzos cortantes y las constantes del polinomio  $f_\theta$ :

$$\begin{aligned} g_4 &= f_4 \\ g_{45^\circ} &= -\sqrt{2}f_3 - f_2 = \tau_{45^\circ} \\ g_{-45^\circ} &= -\sqrt{2}f_3 + f_2 = \tau_{-45^\circ} \end{aligned} \quad (4.1.1e)$$

De esta manera se pueden calcular los esfuerzos cortantes  $\tau_{45^\circ}$  y  $\tau_{-45^\circ}$ , a partir de valores de esfuerzos radiales medidos o propuestos, en la interfaz terreno revestimiento.

La representación en coordenadas polares del estado inicial de esfuerzos es la siguiente:

$$\sigma_r = \frac{S_x + S_y}{2} + \frac{S_x - S_y}{2} \text{cos}2\theta \quad (4.1.1f)$$

$$\sigma_\theta = \frac{S_x + S_y}{2} - \frac{S_x - S_y}{2} \text{cos}2\theta \quad (4.1.1g)$$

$$\tau_{r\theta} = -\frac{S_x - S_y}{2} \text{sin}2\theta \quad (4.1.1h)$$

donde  $S_x$  y  $S_y$  son los esfuerzos principales iniciales, horizontales y verticales, respectivamente; es decir, representan el estado inicial de esfuerzos en coordenadas cartesianas, en el medio antes de la excavación.

Se acepta que cuando el túnel ha sido construido, el estado inicial de esfuerzos en el medio se encuentra suficientemente alejado del túnel; por lo tanto, las ecuaciones 4.1.1f, 4.1.1g y 4.1.1h, representan la condición de frontera cuando  $r \rightarrow \infty$ .



### 4.1.2 Función potencial de esfuerzos

La función potencial de esfuerzos utilizada para determinar la solución, se forma con elementos de la función potencial general de esfuerzos de Airy (ecuación 2.8a) y es la siguiente:

$$\begin{aligned} \varphi = & (Ar^{-2} + Br^{-4})\cos 4\theta + (Cr^{-3} + Dr^{-1})\text{sen}3\theta + (Er^2 + F + Gr^{-2})\cos 2\theta \\ & + Hr[\theta \cos \theta + \ln r \text{sen} \theta] + Ir^{-1}\text{sen} \theta + J \ln r + Lr^2 \end{aligned} \quad (4.1.2a)$$

La expresión 4.1.2a es una función potencial de esfuerzos que cumple con la compatibilidad de deformaciones y las ecuaciones de equilibrio, representadas por la ecuación 2.7h. La forma y cantidad de constantes involucradas en cada término, permiten satisfacer las condiciones de frontera del problema.

### 4.1.3 Esfuerzos y desplazamientos

Las componentes de esfuerzos radiales, tangenciales y cortantes, se obtienen sustituyendo la ecuación 4.1.2a en las ecuaciones 2.8b.

$$\begin{aligned} \sigma_r = & \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} = -2(9Ar^{-4} + 10Br^{-6})\cos(4\theta) - 2(6Cr^{-5} + 5Dr^{-3})\text{sen}(3\theta) \\ & - 2(E + 2Fr^{-2} + 3Gr^{-4})\cos(2\theta) - (Hr^{-1} + 2Ir^{-3})\text{sen}(\theta) \\ & + Jr^{-2} + 2L \\ \sigma_\theta = & \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} = +2(3Ar^{-4} + 10Br^{-6})\cos(4\theta) + 2(6Cr^{-5} + Dr^{-3})\text{sen}(3\theta) \\ & + 2(E + 3Gr^{-4})\cos(2\theta) + (Hr^{-1} + 2Ir^{-3})\text{sen}(\theta) \\ & - Jr^{-2} + 2L \\ \tau_{r\theta} = & \frac{1}{r^2} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r \partial \theta} = -4(3Ar^{-4} + 5Br^{-6})\text{sen}(4\theta) + 6(2Cr^{-5} + Dr^{-3})\cos(3\theta) \\ & + 2(E - Fr^{-2} - 3Gr^{-4})\text{sen}(2\theta) - (Hr^{-1} - 2Ir^{-3})\cos(\theta) \end{aligned} \quad (4.1.3a)$$

Considerando un medio elástico lineal y aplicando la ley de Hooke bajo la condición de deformación plana, los desplazamientos radiales y circunferenciales son los siguientes:

$$\begin{aligned} u_r = & \frac{1+\nu}{E} \left\{ \begin{aligned} & 2[Ar^{-3}(3-2\nu) + 2Br^{-5}]\cos(4\theta) + [3Cr^{-4} + Dr^{-2}(5-4\nu)]\text{sen}(3\theta) \\ & - \{2[Er - 2Fr^{-1}(1-\nu) - Gr^{-3}] + 1/2(S_x - S_y)r\}\cos(2\theta) \\ & - (H \ln r - Ir^{-2})\text{sen}(\theta) - \frac{1}{2}[2Jr^{-1} + (S_x + S_y - 4L)(1-2\nu)r] \end{aligned} \right\} \quad (4.1.3b) \\ v_\theta = & \frac{1+\nu}{E} \left\{ \begin{aligned} & 4(Ar^{-3}\nu + Br^{-5})\text{sen}(4\theta) - [3Cr^{-4} - Dr^{-2}(1-4\nu)]\cos(3\theta) \\ & + \{2[Er - Fr^{-1}(1-2\nu) + Gr^{-3}] + 1/2(S_x - S_y)r\}\text{sen}(2\theta) \\ & - [H(1 + \ln r) + Ir^{-2}]\cos(\theta) \end{aligned} \right\} \end{aligned}$$

El procedimiento para obtener la solución se puede ver en el Anexo C de este trabajo. Las constantes involucradas en las ecuaciones 4.1.3a y 4.1.3b, se calculan a partir de las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned}
 A &= -\frac{1}{6}a^4(f_4 - g_4); \quad B = \frac{1}{20}a^6(2f_4 - 3g_4); \quad C = \frac{1}{24}a^5(3f_3 + 5g_3); \quad D = -\frac{1}{4}a^3(f_3 + g_3) \\
 E &= -\frac{1}{4}(S_x - S_y); \quad F = \frac{1}{2}a^2(S_x - S_y - f_2 + g_2); \quad G = -\frac{1}{12}a^4[3(S_x - S_y) - 2f_2 + 4g_2] \\
 H &= -\frac{1}{2}a(f_1 + g_1); \quad I = -\frac{1}{4}a^3(f_1 - g_1); \quad J = -\frac{1}{2}a^2(S_x + S_y - 2f_0); \quad L = \frac{1}{4}(S_x + S_y)
 \end{aligned} \quad (4.1.3c)$$

A partir de los conjuntos de expresiones 4.1.3a, 4.1.3b y sus constantes definidas en 4.1.3c, es posible determinar campos de esfuerzos radiales, tangenciales y cortantes, así como distribuciones de desplazamientos radiales y circunferenciales, en un terreno afectado por la construcción de un túnel circular.

## 4.2. SOLUCIÓN PARA EL REVESTIMIENTO

### 4.2.1. Condiciones de frontera

Los esfuerzos que se desarrollan en la interfaz terreno-revestimiento, actúan de igual manera tanto en el terreno como en el revestimiento. Para el revestimiento, las condiciones de frontera cuando  $r=a$ , son las que se representan mediante las expresiones 4.1.1a y 4.1.1c. Las condiciones de frontera para  $r=b$  (ecuación 4.2.1a), son esfuerzos radiales y cortantes iguales a cero.

$$\sigma_r = 0; \quad \tau_{r\theta} = 0 \quad (4.2.1a)$$

### 4.2.2. Función potencial de esfuerzos

La función potencial de esfuerzos que satisface las nuevas condiciones de frontera del problema es:

$$\begin{aligned}
 \phi &= (Ar^4 + Br^{-4} + Cr^{-2} + Dr^6)\cos(4\theta) + (Er^3 + Fr^{-3} + Gr^{-1} + Hr^5)\sen(3\theta) \\
 &+ (Ir^2 + Jr^{-2} + K + Lr^4)\cos(2\theta) + (Mr^{-1} + Nr^3)\sen(\theta) \\
 &+ Or(\ln(r)\sen(\theta) + 2\theta\cos(\theta)) + Pr(\theta^2 - \ln(r)^2)\sen(\theta) + Qr^2 + R\ln(r)
 \end{aligned} \quad (4.2.2a)$$

El término  $Pr[\theta^2 - \ln(r)^2]\sen(\theta)$  no pertenece a la función general de esfuerzos de Airy. Este término se propone en este trabajo, con la finalidad de satisfacer una de las condiciones de frontera de este problema.

### 4.2.3. Esfuerzos y desplazamientos

A partir de la función potencial de esfuerzos (ecuación 4.2.2a) y utilizando las ecuaciones 2.8b, se obtienen las componentes de esfuerzos radiales, tangenciales y cortantes.

$$\begin{aligned}
 \sigma_r &= -2(6Ar^2 + 10Br^{-6} + 9Cr^{-4} + 5Dr^4)\cos(4\theta) - 2(3Er + 6Fr^{-5} + 5Gr^{-3} + 2Hr^3)\sen(3\theta) - \\
 &2(I + 3Jr^{-4} + 2Kr^{-2})\cos(2\theta) - [2(Mr^{-3} - Nr) + 3Or^{-1}]\sen(\theta) + \\
 &2Pr^{-1}[\sen(\theta) + 2\theta\cos(\theta) - \ln(r)\sen(\theta)] + 2Q + Rr^{-2} \\
 \sigma_\theta &= 2(6Ar^2 + 10Br^{-6} + 3Cr^{-4} + 15Dr^4)\cos(4\theta) + 2(3Er + 6Fr^{-5} + Gr^{-3} + 10Hr^3)\sen(3\theta) + \\
 &2(I + 3Jr^{-4} + 6Lr^2)\cos(2\theta) + \{2[Mr^{-3} + 3Nr - Pr^{-1}(1 + \ln r)] + Or^{-1}\}\sen(\theta) + \\
 &2Q - Rr^{-2} \\
 \tau_{r\theta} &= 4(3Ar^2 - 5Br^{-6} - 3Cr^{-4} + 5Dr^4)\sen(4\theta) - 6(Er - 2Fr^{-5} - Gr^{-3} + 2Hr^3)\cos(3\theta) + \\
 &2(I - 3Jr^{-4} - Kr^{-2} + 3Lr^2)\sen(2\theta) + [2(Mr^{-3} - Nr + Pr^{-1}\ln r) - Or^{-1}]\cos(\theta)
 \end{aligned} \quad (4.2.3a)$$

Bajo la condición de deformación plana, se obtienen los campos de desplazamientos radiales y circunferenciales, en el interior del revestimiento:

$$u_r = -\frac{1+\nu}{E} \left\{ \begin{array}{l} 2[2(Ar^3 - Br^{-5}) - Cr^{-3}(3-2\nu) + Dr^5(1+2\nu)]\cos(4\theta) \\ + [3(Er^2 - Fr^{-4}) - Gr^{-2}(5-4\nu) + Hr^4(1+4\nu)]\sen(3\theta) \\ + 2\{Ir - Jr^{-3} - 2[Kr^{-1}(1-\nu) - Lr^3\nu]\}\cos(2\theta) \\ - \{Mr^{-2} + Nr^2(1-2\nu) - O \ln r(3-2\nu) + P[2-(1-2\nu)\ln r]\ln r\}\sen(\theta) \\ - 4P \ln r(1-\nu)\theta \cos(\theta) - 2Qr(1-2\nu) + Rr^{-1} \end{array} \right\} \quad (4.2.3b)$$

$$v_\theta = \frac{1+\nu}{E} \left\{ \begin{array}{l} 4[Ar^3 + Br^{-5} + Cr^{-3}\nu + Dr^5(2-\nu)]\sen(4\theta) \\ - [3(Er^2 + Fr^{-4}) - Gr^{-2}(1-4\nu) + Hr^4(7-4\nu)]\cos(3\theta) \\ + 2[Ir + Jr^{-3} - Kr^{-1}(1-2\nu) + Lr^3(3-2\nu)]\sen(2\theta) \\ - \{Mr^{-2} + Nr^2(5-4\nu) + O[1+2\nu+(3-2\nu)\ln r] - P[2-4\nu-(1-2\nu)\ln^2 r]\}\cos(\theta) \\ + 4P[\nu+(1-\nu)\ln r]\theta \sen(\theta) \end{array} \right\}$$

El procedimiento para determinar las constantes que intervienen en los conjuntos de ecuaciones 4.2.3a y 4.2.3b, puede consultarse en el Anexo C de este trabajo.

### 4.3. CONSIDERACIONES ADICIONALES

Se puede observar que en las componentes de esfuerzos, representadas por las ecuaciones 4.1.3a y 4.2.3a, no intervienen los parámetros de rigidez del terreno. Lo anterior se debe al uso de funciones potenciales de esfuerzos y a que se logra establecer, en ambos casos, condiciones de frontera en términos de esfuerzos; por lo tanto, los factores de influencia de las soluciones sólo dependen de factores geométricos y de los esfuerzos tanto en el medio como en la interfaz terreno-revestimiento.

Las soluciones pueden tomar en cuenta esfuerzos radiales medidos, por ejemplo, en celdas de presión instaladas en el perímetro exterior del revestimiento (Figura 4b). También es posible proponer valores puntuales de esfuerzos radiales en el mismo perímetro para realizar análisis paramétricos con diferentes distribuciones alrededor del túnel.

Las soluciones analíticas de este capítulo pueden representar diferentes etapas de análisis en un túnel circular; por ejemplo:

- En el caso de túneles construidos con tuneladoras, solamente es posible medir la deformación de la excavación cuando el revestimiento primario y la inyección con mortero en el espacio anular ya interactúan con el terreno. Para estudiar configuraciones de la deformación de la excavación antes de esta etapa, es posible proponer valores puntuales de esfuerzos para determinar distribuciones de esfuerzos radiales en el perímetro de la misma, con el objetivo de representar una “relajación de esfuerzos” producto de la excavación y realizar análisis paramétricos, considerando el espacio anular.
- Considerando la condición de esfuerzos cortantes nulos, se puede representar el efecto, tanto en el terreno como en el revestimiento, de elevar la presión de inyección que se aplica en el espacio anular entre el terreno y el revestimiento. La presión de inyección se puede considerar uniforme o no uniforme.

- c) Cuando la inyección ha alcanzado cierta resistencia y permite el contacto entre terreno y revestimiento, entonces se puede analizar la interacción considerando el desarrollo de esfuerzos cortantes o bajo la condición de esfuerzos cortantes nulos en la interfaz de ambos materiales
- d) En general, si se cuenta con mediciones de instrumentos instalados en la interfaz terreno-revestimiento (celdas de presión), en el revestimiento primario del túnel (deformímetros de acero o concreto) o en el terreno cercano al revestimiento (extensómetros de barra, inclinómetros, celdas de carga, etc.), es posible obtener campos de esfuerzos y de desplazamientos tanto en el terreno como en el revestimiento, en el instante correspondiente a la toma de lecturas.

Para obtener aproximadamente los campos de esfuerzos y desplazamientos, se propone considerar que en cada punto del medio los valores  $S_x$  y  $S_y$ , corresponden a los esfuerzos iniciales horizontal y vertical, respectivamente, asociados al peso propio del medio.

## CAPÍTULO 5.

### APLICACIONES

En este capítulo se analizarán las secciones de túneles circulares que a continuación se describen:

- Primera sección. Corresponde a un túnel circular profundo. Se analiza con todas las soluciones analíticas presentadas en los capítulos 3 y 4. Los análisis se realizan bajo las condiciones de frontera, en la interfaz terreno-revestimiento, que presenta cada solución: esfuerzos cortantes nulos y diferentes de cero. Los resultados servirán para comparar las soluciones analíticas y validar la solución del capítulo 4 (SA-C4).
- Segunda sección. Corresponde a un túnel circular construido en la Ciudad de México. Esta sección se analiza con las soluciones del capítulo 4 (SA-C4) y bajo la condición de frontera de esfuerzos cortantes diferentes de cero, en la interfaz terreno-revestimiento. Los análisis se realizan a corto y largo plazo. Se evalúa el efecto de una presión de inyección local para controlar las deformaciones que un proceso de consolidación del terreno, puede inducir sobre el revestimiento.

Ambas secciones se modelan además con el método de elementos finitos, para la condición de esfuerzos cortantes diferentes de cero, en la interfaz terreno-revestimiento.

#### 5.1. PRIMERA SECCIÓN. TÚNEL CIRCULAR PROFUNDO EN MEDIO ELÁSTICO

Esta sección corresponde a un túnel circular de 5m de diámetro y 50m de profundidad. El túnel está construido en un medio elástico-lineal. La geometría y propiedades del medio y del revestimiento del túnel, se muestran en la figura 5.1a.

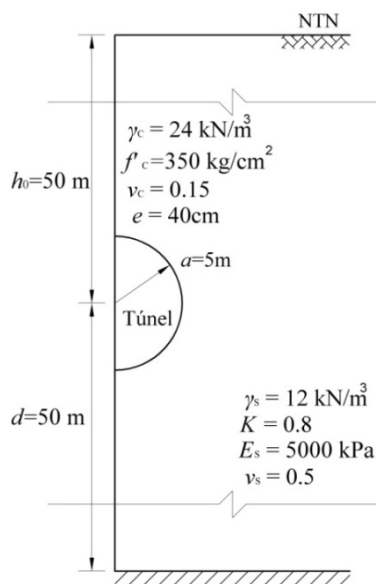


Figura 5.1a. Primera sección de análisis

En la figura 5.1a,  $\gamma_c$  y  $\gamma_s$  son los pesos volumétricos del concreto y del terreno, respectivamente;  $f'_c$  es la resistencia a la compresión simple del concreto,  $K$  es la relación de esfuerzos totales en el terreno;  $E_s$  es el módulo de Young del terreno;  $\nu_c$  y  $\nu_s$  son las relaciones de Poisson del concreto y del terreno, respectivamente;  $a$  es el radio exterior del revestimiento (lugar geométrico de la interfaz terreno-revestimiento);  $e$  es el espesor del revestimiento; NTN es el nivel del terreno natural;  $h_0$  es la profundidad al centro del túnel y  $d$  es la distancia del centro del túnel a la frontera inferior donde se restringen los desplazamientos.

### 5.1.1. Condición de esfuerzos cortantes nulos en la interfaz terreno-revestimiento

Las soluciones analíticas bajo esta condición son las de Kirsch modificada (KM), Muir Wood (MW), Einstein y Schwartz (ES), Bobet (B) y las ecuaciones correspondientes a la solución analítica del capítulo 4 (SA-C4).

En la deducción de estas soluciones se consideró un medio infinito, por lo que los resultados obtenidos sólo son aproximados en la vecindad inmediata del túnel. En la tabla 5.1.1a, se presentan las distribuciones de esfuerzos radiales y tangenciales, en la interfaz terreno-revestimiento, tanto iniciales como las obtenidas con cada una de las soluciones mencionadas.

La distribución de esfuerzos radiales con la solución KM se determinó considerando una presión uniforme en la interfaz terreno-revestimiento (como se indica en el inciso 3.1.3), de 550kPa. Para utilizar las soluciones analíticas SA-C4, se propusieron valores puntuales de esfuerzos radiales en los puntos de la interfaz terreno-revestimiento, como se indica en el inciso 4.1.1. Estos valores corresponden al promedio de los resultados obtenidos con las soluciones KM, MW, ES y B.

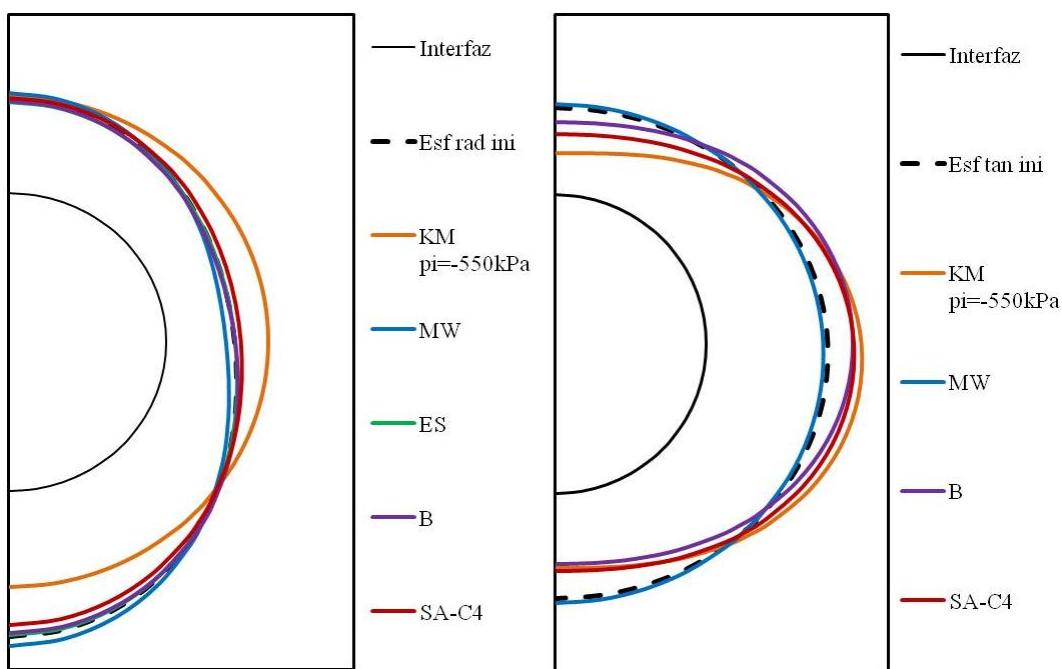
En todas las soluciones se consideró que el estado inicial de esfuerzos corresponde al peso propio del material en cada punto de la interfaz terreno-revestimiento.

En este trabajo, los resultados obtenidos se rigen bajo la convención de signos de la mecánica del medio continuo, la cual considera que los esfuerzos de compresión son negativos y los esfuerzos de tensión son positivos.

**Tabla 5.1.1a. Esfuerzos radiales y tangenciales, en la interfaz terreno-revestimiento.**

$\theta$ °	Esf. Iniciales		KM		MW		ES		B		SA-C4	
	$\sigma_{r0}$ kPa	$\sigma_{\theta 0}$ kPa	$\sigma_r$ kPa	$\sigma_{\theta}$ kPa	$\sigma_r$ kPa	$\sigma_{\theta}$ kPa	$\sigma_r$ kPa	$\sigma_{\theta}$ kPa	$\sigma_r$ kPa	$\sigma_{\theta}$ kPa	$\sigma_r$ kPa	$\sigma_{\theta}$ kPa
90	-540.00	-432.00	-550.00	-206.00	-557.58	-449.58	-536.81	-540.32	-362.08	-546.18	-303.92	
80	-537.65	-435.99	-550.00	-220.32	-554.20	-452.54	-534.60	-537.63	-372.96	-544.11	-314.87	
70	-530.90	-447.61	-550.00	-261.94	-544.46	-461.17	-528.24	-529.99	-404.29	-538.17	-346.68	
60	-520.64	-465.83	-550.00	-326.86	-529.56	-474.75	-518.57	-518.57	-452.32	-529.18	-396.29	
50	-508.25	-489.01	-550.00	-408.78	-511.39	-492.14	-506.94	-505.19	-511.28	-518.38	-458.84	
45	-501.82	-501.82	-550.00	-453.63	-501.82	-501.82	-500.91	-498.43	-542.67	-512.79	-493.04	
40	-495.54	-515.04	-550.00	-499.58	-492.37	-511.86	-495.04	-492.01	-574.08	-507.35	-528.03	
30	-484.50	-541.50	-550.00	-590.00	-475.22	-532.22	-484.79	-481.29	-633.14	-497.82	-596.68	
20	-477.14	-565.92	-550.00	-670.62	-462.69	-551.47	-478.09	-475.06	-681.32	-491.46	-657.39	
10	-475.22	-586.03	-550.00	-732.86	-457.18	-567.99	-476.63	-474.88	-712.74	-489.67	-703.40	
0	-480.00	-600.00	-550.00	-770.00	-460.47	-580.47	-481.59	-481.59	-723.54	-493.41	-729.39	
-10	-492.02	-606.74	-550.00	-778.20	-473.34	-588.06	-493.47	-495.22	-712.32	-503.01	-732.29	
-20	-510.93	-606.00	-550.00	-757.08	-495.46	-590.53	-511.95	-514.99	-680.34	-518.10	-711.82	
-30	-535.50	-598.50	-550.00	-710.00	-525.24	-588.24	-535.82	-539.32	-631.38	-537.60	-670.69	
-40	-563.62	-585.80	-550.00	-643.78	-560.01	-582.19	-563.06	-566.09	-571.28	-559.79	-614.42	
-45	-578.18	-578.18	-550.00	-606.37	-578.18	-578.18	-577.14	-579.61	-539.28	-571.23	-582.94	
-50	-592.58	-570.15	-550.00	-567.86	-596.24	-573.80	-591.05	-592.80	-507.27	-582.52	-550.67	
-60	-619.36	-554.17	-550.00	-493.14	-629.98	-564.78	-616.91	-616.91	-447.07	-603.45	-488.29	
-70	-641.03	-540.46	-550.00	-430.36	-657.39	-556.83	-637.81	-636.06	-397.96	-620.31	-436.06	
-80	-655.11	-531.25	-550.00	-388.62	-675.28	-551.41	-651.39	-648.36	-365.89	-631.26	-401.40	
-90	-660.00	-528.00	-550.00	-374.00	-681.49	-549.49	-656.11	-652.60	-354.75	-635.05	-389.26	

En la siguiente figura se muestran gráficamente las distribuciones de esfuerzos radiales y tangenciales correspondientes a la tabla 5.1.1a.



**Figura 5.1.1a. Distribuciones de esfuerzos radiales y tangenciales, en la interfaz terreno-revestimiento.**

En las gráficas de la figura 5.1.1a, se observa que los resultados obtenidos con cada solución son muy similares; sin embargo existen diferencias importantes al analizar los resultados. De esta manera es posible distinguir las hipótesis establecidas en los planteamientos iniciales de cada solución.

En cuanto a las distribuciones de esfuerzos radiales (gráfica izquierda, figura 5.1.1a), se observa lo siguiente:

- a) Con la solución KM se obtienen esfuerzos radiales uniformes (curva amarilla), que corresponden al valor de presión interna, supuesto inicialmente. Esta presión uniforme es mayor que los esfuerzos radiales iniciales (curva negra discontinua), desde la clave del túnel hasta la zona del hastial y es menor en la zona de la cubeta del túnel.
- b) Con la solución MW se obtienen una distribución de esfuerzos radiales aproximadamente elíptica (curva azul). Esta distribución es mayor que los esfuerzos radiales iniciales tanto en la zona de la clave como en la zona de la cubeta del túnel y es menor en la zona del hastial.
- c) Con las soluciones ES (curva verde) y B (curva morada) se obtienen distribuciones de esfuerzos radiales muy similares. Las diferencias respecto a los esfuerzos radiales iniciales son pequeñas. Sin embargo, se observan esfuerzos radiales menores a los iniciales, tanto en la zona de la clave como en la zona de la cubeta del túnel y esfuerzos radiales mayores a los iniciales en la zona del hastial. Los resultados de esta solución son opuestos a los obtenidos con la solución MW.
- d) Con la solución SA-C4 (curva roja), se obtiene una distribución de esfuerzos radiales correspondiente a los valores puntuales propuestos en puntos de la interfaz terreno-revestimiento (como se indica en el inciso 4.1.1). Las zonas donde los esfuerzos radiales aumentan y disminuyen, respecto a la distribución de esfuerzos radiales iniciales, son las mismas que en la solución de KM. Sin embargo, la distribución de esfuerzos radiales obtenida con la solución SA-C4, no es uniforme.

En cuanto a las distribuciones de esfuerzos tangenciales (gráfica derecha, figura 5.1.1a), se observa lo siguiente:

- a) Con las soluciones KM, B y SA-C4, los esfuerzos tangenciales, tanto en la clave como en la cubeta del túnel, disminuyen respecto a los esfuerzos tangenciales iniciales. En la zona del hastial, los esfuerzos tangenciales aumentan.

- b) Con la solución MW, los esfuerzos tangenciales, tanto en la clave como en la cubeta del túnel, aumentan respecto a los esfuerzos tangenciales iniciales. En la zona del hastial, los esfuerzos tangenciales disminuyen. La variación de los esfuerzos tangenciales con respecto a los esfuerzos tangenciales iniciales es pequeña comparada con las variaciones obtenidas con las demás soluciones. Los resultados de esta solución son opuestos a los resultados obtenidos con las demás soluciones.
- c) La solución ES no proporciona ecuaciones para determinar esfuerzos tangenciales.

Las distribuciones de esfuerzos obtenidas con las soluciones ES, B y SA-C4, representan la descarga correspondiente a la excavación del túnel (efecto burbuja; Rodríguez y Auvinet, 2010). En las soluciones ES y B, el concepto de la descarga está implícito en los parámetros de rigidez relativa. En la solución SA-C4, la descarga se representa con los valores puntuales de esfuerzos radiales propuestos, siempre y cuando dichos valores no correspondan a una distribución de esfuerzos simétrica. La distribución de esfuerzos uniformes obtenida con la solución KM es simétrica y no permite representar la descarga. Las distribuciones de esfuerzos obtenidas con la solución MW son elípticas y aproximadamente simétricas; por lo tanto, esta solución no representa la descarga correspondiente a la excavación del túnel.

La tabla 5.1.1b, muestra resultados de incrementos de esfuerzos radiales y tangenciales en la interfaz terreno revestimiento. Los incrementos negativos son de compresión y los positivos de tensión. Con esta tabla se identifica claramente las zonas cargadas y descargadas alrededor del túnel, obtenidas con cada solución.

**Tabla 5.1.1b. Incrementos de esfuerzos radiales y tangenciales, en la interfaz terreno-revestimiento.**

$\theta$ °	KM		MW		ES	B		SA-C4	
	$\Delta\sigma_r$ kPa	$\Delta\sigma_\theta$ kPa	$\Delta\sigma_r$ kPa	$\Delta\sigma_\theta$ kPa	$\Delta\sigma_r$ kPa	$\Delta\sigma_r$ kPa	$\Delta\sigma_\theta$ kPa	$\Delta\sigma_r$ kPa	$\Delta\sigma_\theta$ kPa
90	-10,00	226,00	-17,58	-17,58	3,19	-0,32	69,92	-6,18	128,08
80	-12,35	215,67	-16,55	-16,55	3,05	0,02	63,04	-6,46	121,12
70	-19,10	185,67	-13,56	-13,56	2,66	0,91	43,32	-7,27	100,94
60	-29,36	138,97	-8,92	-8,92	2,06	2,06	13,51	-8,54	69,55
50	-41,75	80,23	-3,13	-3,13	1,31	3,07	-22,27	-10,12	30,17
45	-48,18	48,18	-0,00	-0,00	0,91	3,39	-40,86	-10,97	8,77
40	-54,46	15,46	3,17	3,17	0,50	3,53	-59,04	-11,81	-13,00
30	-65,50	-48,50	9,28	9,28	-0,29	3,21	-91,64	-13,32	-55,18
20	-72,86	-104,70	14,45	14,45	-0,95	2,08	-115,40	-14,32	-91,47
10	-74,78	-146,83	18,04	18,04	-1,41	0,35	-126,72	-14,45	-117,37
0	-70,00	-170,00	19,53	19,53	-1,59	-1,59	-123,54	-13,41	-129,39
-10	-57,98	-171,46	18,67	18,67	-1,46	-3,21	-105,58	-10,99	-125,55
-20	-39,07	-151,07	15,48	15,48	-1,02	-4,05	-74,34	-7,17	-105,82
-30	-14,50	-111,50	10,26	10,26	-0,32	-3,82	-32,88	-2,10	-72,19
-40	13,62	-57,98	3,61	3,61	0,57	-2,47	14,52	3,83	-28,62
-45	28,18	-28,18	0,00	0,00	1,05	-1,43	38,90	6,95	-4,75
-50	42,58	2,28	-3,65	-3,65	1,53	-0,22	62,88	10,06	19,48
-60	69,36	61,03	-10,61	-10,61	2,45	2,45	107,10	15,92	65,88
-70	91,03	110,10	-16,37	-16,37	3,22	4,97	142,50	20,71	104,40
-80	105,11	142,62	-20,16	-20,16	3,72	6,75	165,35	23,86	129,85
-90	110,00	154,00	-21,49	-21,49	3,89	7,40	173,25	24,95	138,74

De la tabla anterior se puede comentar lo siguiente:

- a) Los resultados de la solución KM indican que los incrementos de esfuerzos radiales, desde la clave del túnel hasta el punto correspondiente a un ángulo igual a  $-30^\circ$ , son de compresión. De este punto y hasta la cubeta del túnel, son de tensión. Los incrementos de esfuerzos tangenciales son de tensión en las zonas de la clave y la cubeta del túnel y son de compresión, en la zona del hastial.



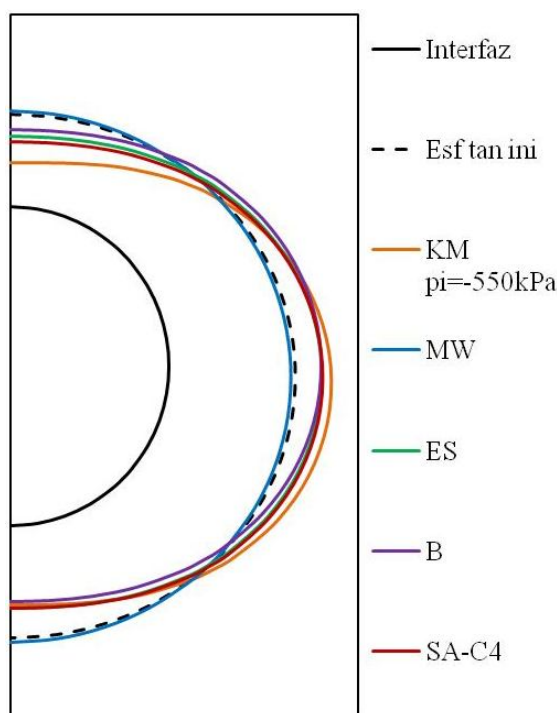
- b) Los resultados obtenidos con la solución MW indican incrementos de esfuerzos radiales y tangenciales de compresión, en las zonas de la clave y la cubeta. En la zona del hastial se tienen incrementos de esfuerzos de tensión, radiales y tangenciales. Los incrementos de esfuerzos radiales y tangenciales obtenidos son iguales en magnitud y sentido, esto se debe a los elementos de la función potencial utilizados en la deducción de la solución (ecuación 3.2a) y a la condición de frontera, en la interfaz terreno-revestimiento, correspondiente a esfuerzos cortantes nulos (ecuación 3.2.1a).
- c) Los resultados obtenidos con la solución ES indican incrementos de esfuerzos radiales de tensión, en la cubeta del túnel y en la clave, e incrementos de esfuerzos radiales de compresión, en el hastial.
- d) Los resultados obtenidos con la solución B indican incrementos de esfuerzos radiales similares a los de la solución ES. Los incrementos de esfuerzos tangenciales son similares a los de la solución KM.
- e) Los resultados obtenidos con la solución SA-C4 indican: incrementos de esfuerzos radiales y tangenciales de tensión, en la zona de la cubeta del túnel; incrementos de esfuerzos radiales y tangenciales de compresión, en la zona del hastial; incrementos de esfuerzos radiales de compresión e incrementos de esfuerzos tangenciales de tensión, en la clave del túnel.

Con la solución SA-C4 es posible obtener una distribución de esfuerzos tangenciales correspondiente a la solución ES, utilizando los valores puntuales de esfuerzos radiales de esta última en la solución SA-C4. Los resultados se muestran a continuación:

**Tabla 5.1.1c. Distribución de esfuerzos tangenciales en la interfaz terreno-revestimiento, calculados con la solución SA-C4, a partir de esfuerzos radiales puntuales, obtenidos con la solución ES.**

$\theta$ °	ES	SA-C4		
	$\sigma_r$ kPa	$\sigma_\theta$ kPa	$\Delta\sigma_r$ kPa	$\Delta\sigma_\theta$ kPa
90	-536,81	-328,32	3,19	103,68
80	-534,60	-338,70	3,05	97,29
70	-528,24	-368,83	2,66	78,78
60	-518,57	-415,73	2,06	50,11
50	-506,94	-474,66	1,31	14,35
45	-500,91	-506,79	0,91	-4,97
40	-495,04	-539,56	0,50	-24,52
30	-484,79	-603,52	-0,29	-62,02
20	-478,09	-659,51	-0,95	-93,59
10	-476,63	-701,16	-1,41	-115,13
0	-481,59	-723,54	-1,59	-123,54
-10	-493,47	-723,91	-1,46	-117,17
-20	-511,95	-702,15	-1,02	-96,15
-30	-535,82	-661,00	-0,32	-62,50
-40	-563,06	-605,80	0,57	-20,00
-45	-577,14	-575,17	1,05	3,01
-50	-591,05	-543,89	1,53	26,26
-60	-616,91	-483,67	2,45	70,50
-70	-637,81	-433,42	3,22	107,04
-80	-651,39	-400,15	3,72	131,10
-90	-656,11	-388,51	3,89	139,49

En la figura 5.1.1b se compara la distribución de esfuerzos tangenciales correspondiente a ES, con las distribuciones de esfuerzos tangenciales obtenidas con las otras soluciones. Esta distribución es similar a la distribución de esfuerzos tangenciales obtenida con B. El resultado es válido porque las soluciones ES y B parten de la misma teoría.



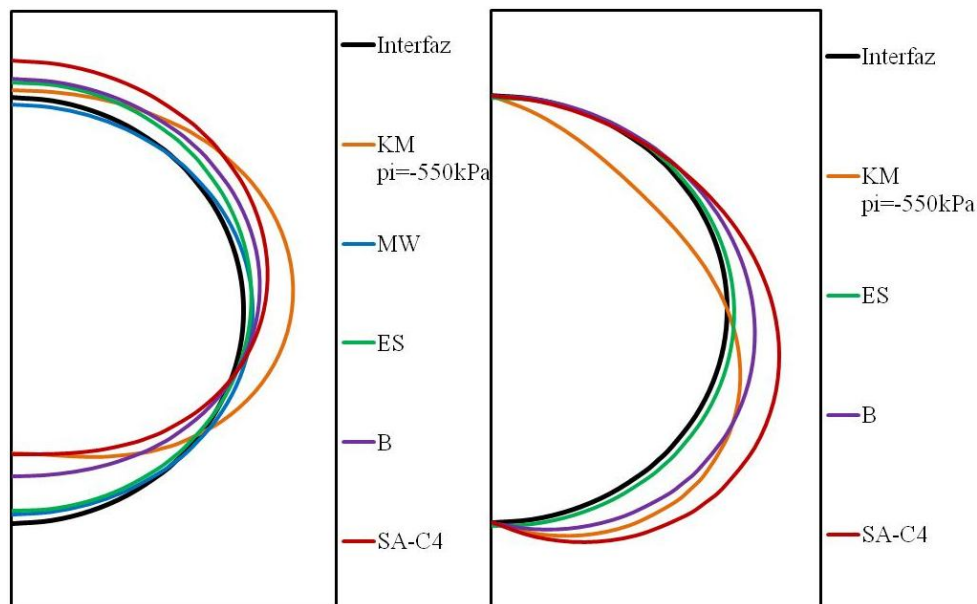
**Figura 5.1.1b. Distribución de esfuerzos tangenciales en la interfaz terreno revestimiento**

La tabla 5.1.1d muestra las distribuciones de desplazamientos radiales y circunferenciales en la interfaz terreno-revestimiento, obtenidas con las soluciones analíticas utilizadas en este análisis.

**Tabla 5.1.1d. Desplazamientos radiales y circunferenciales, en la interfaz terreno-revestimiento**

$\theta$ °	KM		MW		ES		B		SA-C4	
	u m	v m	u m	v m	u m	v m	u m	v m	u m	v m
90	0,015	-0,000	-0,018	0,034	-0,006	0,044	0,000	0,086	-0,000	
80	0,019	-0,028	-0,017	0,036	-0,004	0,044	0,003	0,087	-0,002	
70	0,029	-0,052	-0,014	0,037	-0,001	0,046	0,007	0,087	-0,003	
60	0,044	-0,071	-0,009	0,037	0,001	0,048	0,013	0,087	-0,000	
50	0,063	-0,082	-0,003	0,036	0,004	0,051	0,021	0,087	0,006	
45	0,072	-0,084	-0,000	0,035	0,005	0,052	0,027	0,086	0,011	
40	0,082	-0,083	0,003	0,034	0,007	0,052	0,033	0,085	0,017	
30	0,098	-0,074	0,009	0,031	0,009	0,052	0,049	0,081	0,034	
20	0,109	-0,056	0,014	0,027	0,011	0,048	0,068	0,073	0,054	
10	0,112	-0,030	0,018	0,022	0,013	0,042	0,090	0,061	0,077	
0	0,105	0,000	0,020	0,017	0,015	0,031	0,112	0,044	0,100	
-10	0,087	0,031	0,019	0,011	0,016	0,017	0,132	0,023	0,122	
-20	0,059	0,060	0,015	0,004	0,017	-0,002	0,147	-0,004	0,138	
-30	0,022	0,082	0,010	-0,002	0,017	-0,022	0,155	-0,033	0,147	
-40	-0,020	0,094	0,004	-0,008	0,017	-0,044	0,154	-0,065	0,147	
-45	-0,042	0,096	0,000	-0,011	0,016	-0,055	0,150	-0,080	0,143	
-50	-0,064	0,095	-0,004	-0,014	0,016	-0,065	0,142	-0,095	0,136	
-60	-0,104	0,085	-0,011	-0,019	0,014	-0,084	0,119	-0,123	0,113	
-70	-0,137	0,063	-0,016	-0,024	0,013	-0,099	0,085	-0,144	0,082	
-80	-0,158	0,034	-0,020	-0,028	0,010	-0,109	0,045	-0,158	0,043	
-90	-0,165	0,000	-0,021	-0,031	0,007	-0,112	0,000	-0,163	0,000	

La figura 5.1.1c muestra las gráficas correspondientes a los desplazamientos radiales  $u$  y circunferenciales  $v$ .



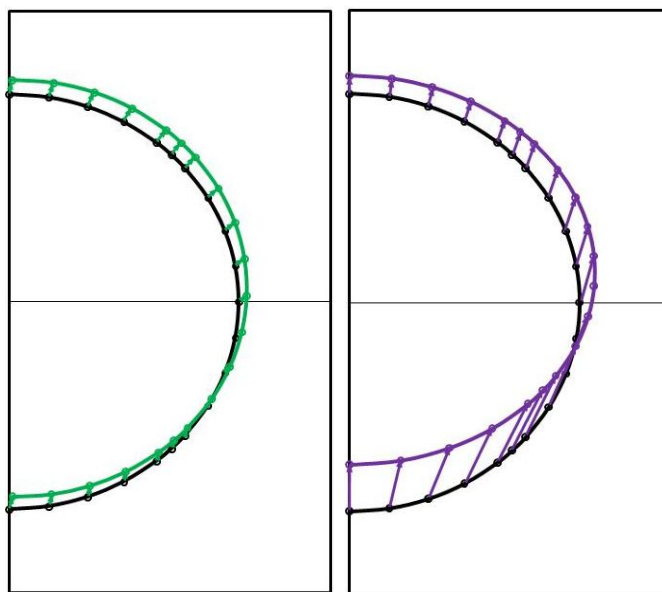
**Figura 5.1.1c. Distribuciones de desplazamientos radiales y circunferenciales, en la interfaz terreno-revestimiento.**

La curva negra en ambas gráficas de la figura 5.1.1c, representa la interfaz terreno-revestimiento. En cuanto a desplazamientos radiales (gráfica izquierda), las curvas de colores por fuera de la línea negra, indican incrementos de la distancia radial al centro del túnel y por dentro, acortamientos de la distancia radial. En cuanto a desplazamientos circunferenciales (gráfica derecha), las curvas de colores por fuera de la línea negra representan la magnitud de los desplazamientos circunferenciales positivos (sentido anti-horario) y por dentro la magnitud de los desplazamientos circunferenciales negativos (sentido horario). De la tabla 5.1.1d y las gráficas de la figura 5.1.1c, se observa lo siguiente:

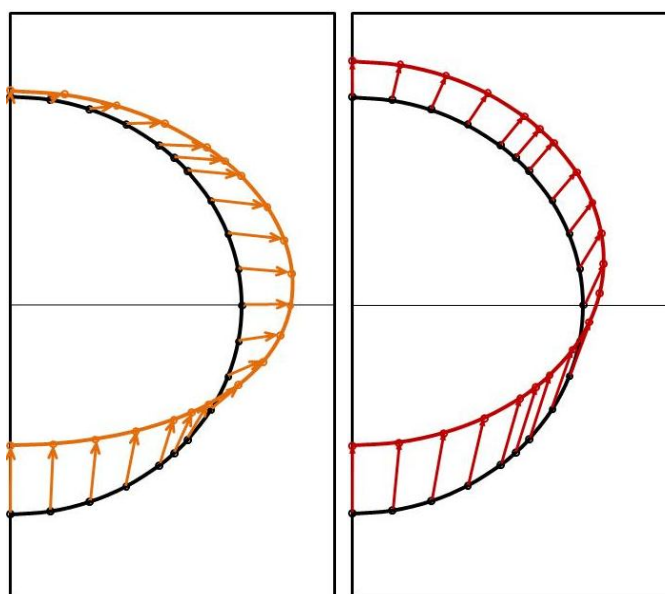
- a) La forma de la distribución de desplazamientos radiales, obtenida con la solución de MW (curva azul), es elíptica. Como ya se comentó, Muir Wood establece una distribución de esfuerzos para generar un modo de deformación elíptico del túnel. Los incrementos de esfuerzos radiales en la clave y la cubeta del túnel inducen una reducción del diámetro vertical. La descarga de esfuerzos radiales en la zona del hastial permite que el diámetro horizontal aumente. La solución MW, para la condición de esfuerzos cortantes nulos en la interfaz terreno-revestimiento, no proporciona ecuaciones para calcular los desplazamientos circunferenciales. En este caso no es posible utilizar la solución SA-C4 con valores puntuales de esfuerzos radiales obtenidos con la solución MW, para determinar la correspondiente distribución de desplazamientos circunferenciales, porque el resultado indicaría un movimiento vertical ascendente del túnel. Lo anterior debido a que la solución SA-C4 considera la descarga que representa la excavación. Esto no sería consistente con la suposición de incrementar los esfuerzos radiales para generar el modo de deformación elíptico del túnel, que hace la solución MW. Por lo tanto, no es posible calcular la deformada de la interfaz terreno-revestimiento.
- b) Las soluciones ES y B si consideran la descarga que implica la excavación del túnel; por lo tanto, sus distribuciones de desplazamientos radiales y circunferenciales representan movimientos ascendentes del túnel (curvas verde y morada, figura 5.1.1c). En la figura 5.1.1d, se muestran las deformadas obtenidas con la solución ES (grafica izquierda) y con la solución B (gráfica derecha).
- c) La forma de la distribución de desplazamientos radiales, obtenida con la solución de KM (curva amarilla), coincide con la forma de su distribución de incrementos de esfuerzos radiales (tabla 5.1.1b). Cuando el incremento de esfuerzo radial en un punto sobre la interfaz terreno-revestimiento indica compresión, los desplazamientos radiales indican incremento de la distancia radial en ese

mismo punto. Cuando el incremento de esfuerzo radial es de tensión, los desplazamientos radiales indican una disminución de la distancia radial, también en ese mismo punto. Los desplazamientos circunferenciales en la interfaz terreno-revestimiento, son aproximadamente simétricos y la dirección de todos ellos es hacía la zona del hastial. El túnel no se desplaza verticalmente en la zona del hastial. El túnel se deforma como se muestra en la grafica izquierda de la figura 5.1.1e.

- d) La forma de la distribución de desplazamientos radiales, obtenida con la solución SA-C4 (curva roja, figura 5.1.1c), coincide con la forma de la distribución de incrementos de esfuerzos radiales (tabla 5.1.1b). Los resultados indican que los desplazamientos circunferenciales en la interfaz terreno-revestimiento tienen sentido anti-horario; es decir, hacía la clave del túnel. Esto coincide con los incrementos de esfuerzos tangenciales de tensión, en la zona de la cubeta del túnel y la zona de compresión tangencial desde la zona del hastial y hasta la clave del túnel. El túnel se desplaza y se deforma como se muestra en la gráfica derecha de la figura 5.1.1e.



**Figura 5.1.1d. Deformadas de la interfaz terreno-revestimiento. Soluciones ES y B**



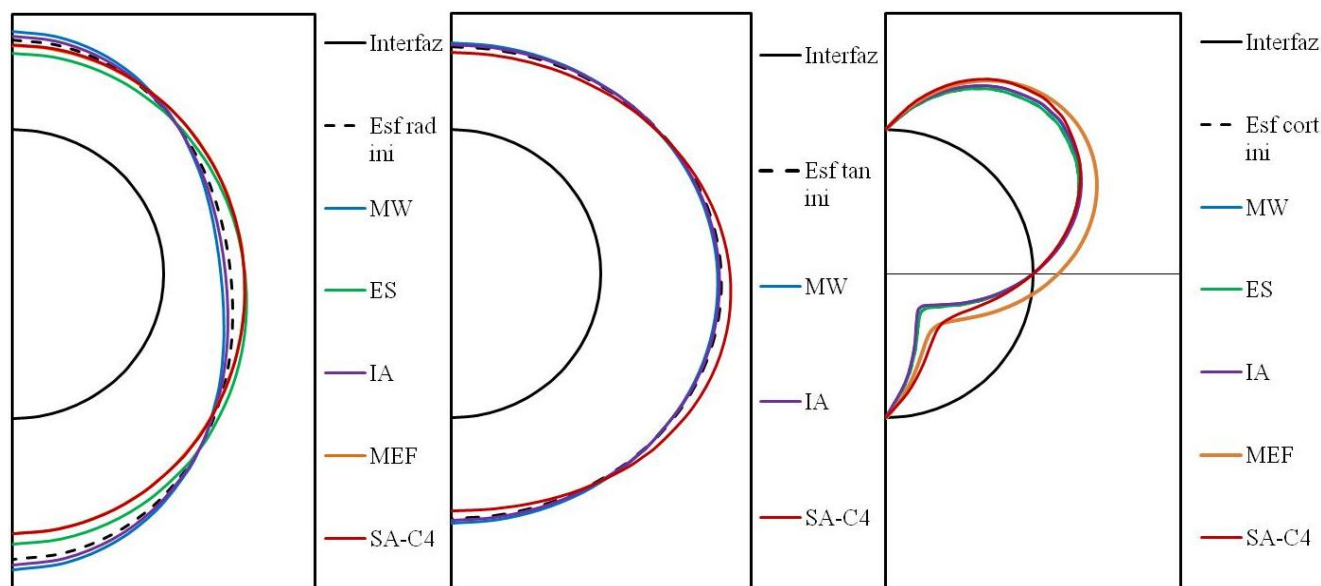
**Figura 5.1.1e. Deformadas de la interfaz terreno-revestimiento. Soluciones KM y SA-C4**

### 5.1.2. Condición de esfuerzos cortantes diferentes de cero en la interfaz terreno-revestimiento

Las soluciones que presentan ecuaciones para esta condición, son Muir Wood (MW), Einstein y Schwartz (ES), Alberro (A) y las del capítulo 4 (SA-C4). En la tabla 5.1.2a, se muestran esfuerzos radiales, tangenciales y cortantes, con cada una de las soluciones, en la interfaz terreno-revestimiento. En la figura 5.1.2a, se muestran gráficamente la distribución de estos resultados. Para utilizar las soluciones analíticas del capítulo 4, se utilizaron valores puntuales, similares a los obtenidos con el método del elemento finito (MEF).

**Tabla 5.1.2a. Esfuerzos radiales, tangenciales y cortantes, en la interfaz terreno-revestimiento**

$\theta$ °	Esf. Iniciales			MW			ES			A			MEF		SA-C4	
	$\sigma_{r0}$ kPa	$\sigma_{\theta 0}$ kPa	$\tau_{r\theta 0}$ kPa	$\sigma_r$ kPa	$\sigma_\theta$ kPa	$\tau_{r\theta}$ kPa	$\sigma_r$ kPa	$\tau_{r\theta}$ kPa	$\sigma_r$ kPa	$\sigma_\theta$ kPa	$\tau_{r\theta}$ kPa	$\sigma_r$ kPa	$\tau_{r\theta}$ kPa	$\sigma_r$ kPa	$\sigma_\theta$ kPa	$\tau_{r\theta}$ kPa
90	-540.0	-432.0	0.0	-560.6	-447.9	0.0	-509.8	0.0	-549.7	-436.8	0.0	-527.5	0.0	-530.0	-397.4	0.0
80	-537.6	-436.0	-18.5	-557.0	-450.9	-19.3	-509.2	-18.5	-546.8	-440.6	-19.4	-526.5	-20.7	-529.1	-401.8	-22.0
70	-530.9	-447.6	-34.9	-546.7	-459.9	-36.4	-507.4	-34.9	-538.4	-451.4	-36.7	-524.3	-39.4	-526.4	-415.1	-41.1
60	-520.6	-465.8	-47.5	-531.0	-473.9	-49.5	-504.9	-47.4	-525.6	-468.3	-49.8	-521.2	-54.2	-522.3	-437.0	-54.8
50	-508.3	-489.0	-54.6	-511.9	-491.8	-56.9	-502.1	-54.5	-510.0	-489.9	-57.2	-516.9	-63.3	-517.5	-466.8	-61.4
45	-501.8	-501.8	-55.8	-501.8	-501.8	-58.1	-500.9	-55.7	-501.8	-501.8	-58.5	-514.9	-65.7	-515.0	-484.1	-61.7
40	-495.5	-515.0	-55.3	-491.8	-512.2	-57.6	-499.9	-55.2	-493.8	-514.2	-57.9	-512.6	-66.2	-512.6	-502.8	-60.2
30	-484.5	-541.5	-49.4	-473.7	-533.1	-51.4	-499.0	-49.3	-479.4	-538.9	-51.7	-509.2	-62.3	-508.6	-542.5	-51.8
20	-477.1	-565.9	-37.2	-460.4	-552.8	-38.8	-500.3	-37.2	-469.1	-561.9	-39.0	-506.9	-51.9	-506.4	-582.3	-37.5
10	-475.2	-586.0	-20.2	-454.4	-569.6	-21.0	-504.3	-20.1	-465.2	-581.0	-21.1	-507.0	-36.3	-506.7	-618.0	-19.4
0	-480.0	-600.0	0.0	-457.5	-582.2	0.0	-511.6	0.0	-469.2	-594.6	0.0	-510.1	-17.1	-510.0	-645.0	0.0
-10	-492.0	-606.7	20.9	-470.5	-589.7	21.7	-522.1	20.9	-481.7	-601.6	21.8	-516.1	3.3	-516.7	-659.7	18.2
-20	-510.9	-606.0	39.9	-493.2	-591.8	41.4	-535.7	39.9	-502.3	-601.7	41.6	-525.5	22.3	-526.5	-659.7	33.3
-30	-535.5	-598.5	54.6	-523.7	-589.1	56.6	-551.6	54.5	-529.8	-595.7	56.9	-537.7	37.8	-538.9	-645.0	43.5
-40	-563.6	-585.8	62.9	-559.5	-582.5	65.2	-568.6	62.8	-561.6	-584.8	65.6	-551.2	47.5	-552.8	-617.8	48.1
-45	-578.2	-578.2	64.2	-578.2	-578.2	66.6	-577.1	64.2	-578.2	-578.2	67.0	-558.8	49.9	-560.0	-600.9	48.3
-50	-592.6	-570.1	63.6	-596.8	-573.5	65.9	-585.4	63.6	-594.6	-571.2	66.3	-565.6	50.2	-567.1	-582.6	47.0
-60	-619.4	-554.2	56.5	-631.5	-563.9	58.5	-600.6	56.4	-625.3	-557.1	58.8	-579.2	45.9	-580.2	-545.5	40.5
-70	-641.0	-540.5	42.2	-659.7	-555.5	43.7	-612.7	42.2	-650.1	-545.0	43.9	-589.4	34.8	-590.8	-512.8	29.6
-80	-655.1	-531.2	22.5	-678.1	-549.8	23.3	-620.5	22.5	-666.3	-536.9	23.5	-596.5	18.7	-597.6	-490.5	15.6
-90	-660.0	-528.0	0.0	-684.5	-547.8	0.0	-623.1	0.0	-672.0	-534.0	0.0	-599.5	0.0	-600.0	-482.6	0.0



**Figura 5.1.2a. Esfuerzos radiales, tangenciales y cortantes, en la interfaz terreno-revestimiento.**

En cuanto a las distribuciones de esfuerzos radiales de la figura 5.1.2a, se observa lo siguiente:

- a) Con las soluciones MW (curva azul) y A (curva morada), se obtienen distribuciones de esfuerzos similares y aproximadamente elípticas. Los resultados indican que los esfuerzos aumentan en las zonas de la clave y la cubeta. En la zona del hastial se observa que los esfuerzos disminuyen.
- b) Con el MEF y las soluciones ES y SA-C4, se obtienen distribuciones de esfuerzos similares entre si y opuestas a las soluciones MW y A. Los esfuerzos disminuyen en las zonas de la clave y la cubeta del túnel y aumentan en la zona del hastial. Debido a que en la solución SA-C4 se propusieron valores puntuales similares a los obtenidos con el MEF, las distribuciones son prácticamente iguales.

En cuanto a las distribuciones de esfuerzos tangenciales de la figura 5.1.2a, se observa lo siguiente:

- a) Los resultados obtenidos con las soluciones MW y A, indican distribuciones de esfuerzos con la misma forma que las distribuciones de esfuerzos radiales (aproximadamente elípticas). Los resultados de estas soluciones son muy parecidos entre sí e indican que los esfuerzos aumentan en la clave y la cubeta del túnel y que disminuyen en la zona del hastial.
- b) Con la solución analítica SA-C4, se obtienen nuevamente distribuciones de esfuerzos opuestas a las soluciones MW y A. Los esfuerzos disminuyen en la clave y la cubeta y aumentan en el hastial.
- c) La solución ES no proporciona ecuaciones para determinar esfuerzos tangenciales. El MEF no genera resultados para este tipo de esfuerzos.

Las distribuciones de esfuerzos radiales y tangenciales obtenidas con las soluciones analíticas ES, SA-C4 y MEF, representan el efecto de la descarga correspondiente a la excavación del túnel (efecto burbuja; Rodríguez y Auvinet, 2010). Las distribuciones de esfuerzos radiales y tangenciales obtenidas con las soluciones MW y A, son elípticas y aproximadamente simétricas; por lo tanto con estas soluciones, no es posible considerar la descarga que representa la excavación del túnel. En el caso de la solución MW, las distribuciones de esfuerzos radiales deben ser elípticas para generar el modo de deformación elíptico en la interfaz terreno-revestimiento. En el caso de la solución A, los resultados obtenidos corresponden a la condición de esfuerzo plano utilizada en la deducción de esta solución (ecuación 3.4.1f). Los resultados de un primer análisis realizado en el inciso 3.4.3, respecto a la condición de esfuerzo plano, indican que esta condición subestima los esfuerzos tangenciales. Esto se agrava si el valor de la relación de Poisson es de 0.5.

En cuanto a las distribuciones de esfuerzos cortantes de la figura 5.1.2a, se observa lo siguiente:

- a) Todas las soluciones analíticas consideran como condición de frontera que los esfuerzos cortantes son nulos, cuando el ángulo polar  $\theta$  es igual  $0^\circ$ .
- b) Los esfuerzos cortantes obtenidos con las soluciones MW, ES y A, son prácticamente iguales a los esfuerzos cortantes iniciales.
- c) Los resultados obtenidos con la solución SA-C4 indican que los esfuerzos cortantes, cuando  $\theta = 45^\circ$  y  $-45^\circ$ , son mayores y menores a los iniciales, respectivamente.
- d) Los resultados obtenidos con el MEF son similares a los resultados obtenidos con la solución SA-C4. La diferencia es que el esfuerzo cortante en  $\theta = 0^\circ$ , obtenido con el MEF, es diferente de cero.

Los esfuerzos cortantes diferentes de cero, cuando  $\theta = 0^\circ$ , corresponden a la descarga que representa la excavación del túnel. Considerar que los esfuerzos cortantes son nulos, cuando  $\theta = 0^\circ$ , es una condición de frontera válida cuando se considera que el medio es infinito y además simplifica el problema. En etapas de análisis donde se consideran los efectos de la consolidación del terreno, esta condición es muy aproximada.

La tabla 5.1.2b muestra los incrementos de esfuerzos radiales, tangenciales y cortantes en la interfaz terreno revestimiento, obtenidos con las soluciones analíticas empleadas en este análisis y el MEF. Los incrementos de esfuerzos normales negativos son de compresión. Los incrementos de esfuerzos normales positivos son de tensión. En esta tabla se identifica con claridad las zonas cargadas y descargadas alrededor del túnel.

**Tabla 5.1.2b. Incrementos de esfuerzos radiales, tangenciales y cortantes, en la interfaz terreno-revestimiento**

$\theta$ °	MW			ES			A			MEF		SA-C4		
	$\Delta\sigma_r$ kPa	$\Delta\sigma_\theta$ kPa	$\Delta\tau_{r\theta}$ kPa	$\Delta\sigma_r$ kPa	$\Delta\tau_{r\theta}$ kPa	$\Delta\sigma_r$ kPa	$\Delta\sigma_\theta$ kPa	$\Delta\tau_{r\theta}$ kPa	$\Delta\sigma_r$ kPa	$\Delta\tau_{r\theta}$ kPa	$\Delta\sigma_r$ kPa	$\Delta\sigma_\theta$ kPa	$\Delta\tau_{r\theta}$ kPa	
90	-20.56	-15.88	0.00	30.16	0.00	-9.69	-4.85	0.00	12.46	0.00	10.00	34.64	0.00	
80	-19.35	-14.95	-0.80	28.44	-0.02	-9.12	-4.56	-0.92	11.13	-2.19	8.59	34.17	-3.52	
70	-15.84	-12.25	-1.51	23.47	-0.03	-7.48	-3.74	-1.73	6.61	-4.45	4.52	32.47	-6.17	
60	-10.41	-8.07	-2.03	15.75	-0.04	-4.92	-2.46	-2.33	-0.55	-6.69	-1.68	28.79	-7.33	
50	-3.65	-2.84	-2.31	6.12	-0.05	-1.73	-0.86	-2.65	-8.62	-8.78	-9.22	22.23	-6.80	
45	0.00	0.00	-2.34	0.91	-0.05	0.00	0.00	-2.70	-13.09	-9.94	-13.18	17.68	-5.99	
40	3.69	2.88	-2.31	-4.37	-0.05	1.75	0.88	-2.66	-17.06	-10.93	-17.09	12.25	-4.91	
30	10.77	8.43	-2.03	-14.53	-0.04	5.13	2.56	-2.34	-24.70	-12.94	-24.14	-1.00	-2.40	
20	16.74	13.15	-1.51	-23.13	-0.03	7.99	4.00	-1.74	-29.77	-14.60	-29.24	-16.41	-0.20	
10	20.84	16.44	-0.80	-29.08	-0.02	9.98	4.99	-0.92	-31.78	-16.10	-31.43	-31.95	0.79	
0	22.52	17.84	0.00	-31.56	0.00	10.82	5.41	0.00	-30.07	-17.08	-30.00	-45.00	0.00	
-10	21.48	17.08	0.80	-30.11	0.02	10.35	5.18	0.93	-24.08	-17.61	-24.65	-52.92	-2.63	
-20	17.77	14.18	1.51	-24.77	0.04	8.59	4.29	1.74	-14.60	-17.61	-15.55	-53.70	-6.63	
-30	11.75	9.41	2.03	-16.06	0.05	5.69	2.85	2.35	-2.25	-16.73	-3.36	-46.50	-11.06	
-40	4.13	3.32	2.31	-4.97	0.06	2.01	1.00	2.67	12.40	-15.43	10.80	-32.01	-14.76	
-45	0.00	0.00	2.34	1.05	0.06	0.00	0.00	2.71	19.40	-14.35	18.18	-22.68	-15.99	
-50	-4.17	-3.36	2.31	7.13	0.06	-2.03	-1.02	2.67	27.00	-13.41	25.51	-12.47	-16.65	
-60	-12.11	-9.77	2.03	18.74	0.05	-5.90	-2.95	2.35	40.16	-10.53	39.18	8.71	-15.99	
-70	-18.66	-15.07	1.51	28.34	0.04	-9.11	-4.55	1.75	51.60	-7.40	50.27	27.64	-12.60	
-80	-22.98	-18.57	0.80	34.66	0.02	-11.22	-5.61	0.93	58.63	-3.85	57.49	40.70	-6.94	
-90	-24.48	-19.80	0.00	36.86	0.00	-11.96	-5.98	0.00	60.52	0.00	60.00	45.36	0.00	

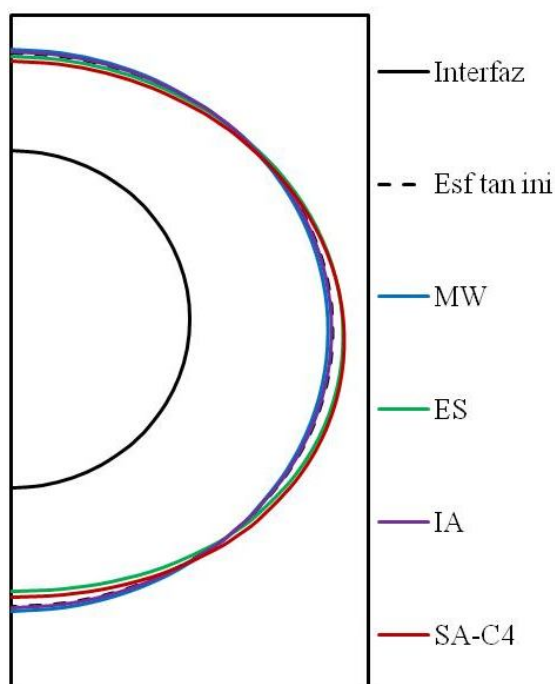
De la tabla 5.1.2b, se observa lo siguiente:

- a) Los resultados obtenidos con la solución MW indican incrementos de esfuerzos de compresión, tanto radiales como tangenciales, en la clave y la cubeta. En el hastial los incrementos de esfuerzos, radiales y tangenciales, son de tensión. En este caso, los incrementos de esfuerzos radiales y tangenciales no son iguales. Lo anterior se debe a la condición de frontera correspondiente a esfuerzos cortantes nulos (ecuación 3.2.2b). Los resultados correspondientes a esfuerzos cortantes indican un ligero aumento respecto a los iniciales.
- b) Los resultados obtenidos con la solución ES, en cuanto a esfuerzos radiales, indican incrementos de esfuerzos de tensión, tanto en la cubeta del túnel como en su clave. En el hastial se observan incrementos de esfuerzos de compresión. Esta solución no proporciona ecuaciones para calcular los esfuerzos tangenciales. Los incrementos de esfuerzos cortantes obtenidos con esta solución indican un aumento, respecto a los esfuerzos cortantes iniciales, sin embargo son prácticamente nulos.
- c) Los resultados obtenidos con la solución A son similares a los obtenidos con la solución MW (incrementos de esfuerzos de compresión, radiales y tangenciales, en la clave y la cubeta; incrementos de esfuerzos de tensión, radiales y tangenciales, en el hastial; pequeños incrementos de esfuerzos cortantes respecto a los iniciales). Los incrementos de esfuerzos tangenciales son la mitad de los esfuerzos radiales y los incrementos de esfuerzos radiales son menores comparados con los obtenidos con las demás soluciones. Esto se debe a la condición de esfuerzo plano.
- d) Los resultados de la solución SA-C4 indican: incrementos de esfuerzos radiales y tangenciales de tensión en la cubeta; incrementos de esfuerzos de compresión, radial y tangencial, en el hastial; incrementos de esfuerzos radiales de compresión y tangenciales de tensión en la clave.

Se proponen valores puntuales de esfuerzos radiales en SA-C4, obtenidos con ES. Se obtiene aproximadamente la distribución de esfuerzos tangenciales correspondiente a ES. Los resultados se muestran la tabla 5.1.2c. La figura 5.1.2b muestra la comparación con las demás soluciones.

**Tabla 5.1.2c. Esfuerzos tangenciales en la interfaz terreno-revestimiento, calculados con la solución SA-C4, a partir de esfuerzos radiales puntuales, obtenidos con la solución ES**

$\theta$ °	ES	SA-C4	$\Delta\sigma_r$ kPa	$\Delta\sigma_\theta$ kPa
	$\sigma_r$ kPa	$\sigma_\theta$ kPa		
90	-509.84	-416.44	30.16	15.56
80	-509.21	-420.72	28.44	15.27
70	-507.43	-433.48	23.47	14.13
60	-504.88	-454.37	15.75	11.46
50	-502.13	-482.52	6.12	6.50
45	-500.91	-498.84	0.91	2.98
40	-499.91	-516.29	-4.37	-1.25
30	-499.03	-553.09	-14.53	-11.59
20	-500.27	-589.37	-23.13	-23.45
10	-504.30	-620.96	-29.08	-34.94
0	-511.56	-643.66	-31.56	-43.66
-10	-522.13	-653.97	-30.11	-47.23
-20	-535.70	-649.90	-24.77	-43.90
-30	-551.56	-631.55	-16.06	-33.05
-40	-568.59	-601.32	-4.97	-15.52
-45	-577.14	-583.11	1.05	-4.93
-50	-585.45	-563.78	7.13	6.37
-60	-600.62	-524.91	18.74	29.26
-70	-612.69	-491.15	28.34	49.31
-80	-620.46	-468.26	34.66	62.99
-90	-623.14	-460.16	36.86	67.84



**Figura 5.1.2b. Distribución de esfuerzos tangenciales en la interfaz terreno-revestimiento**

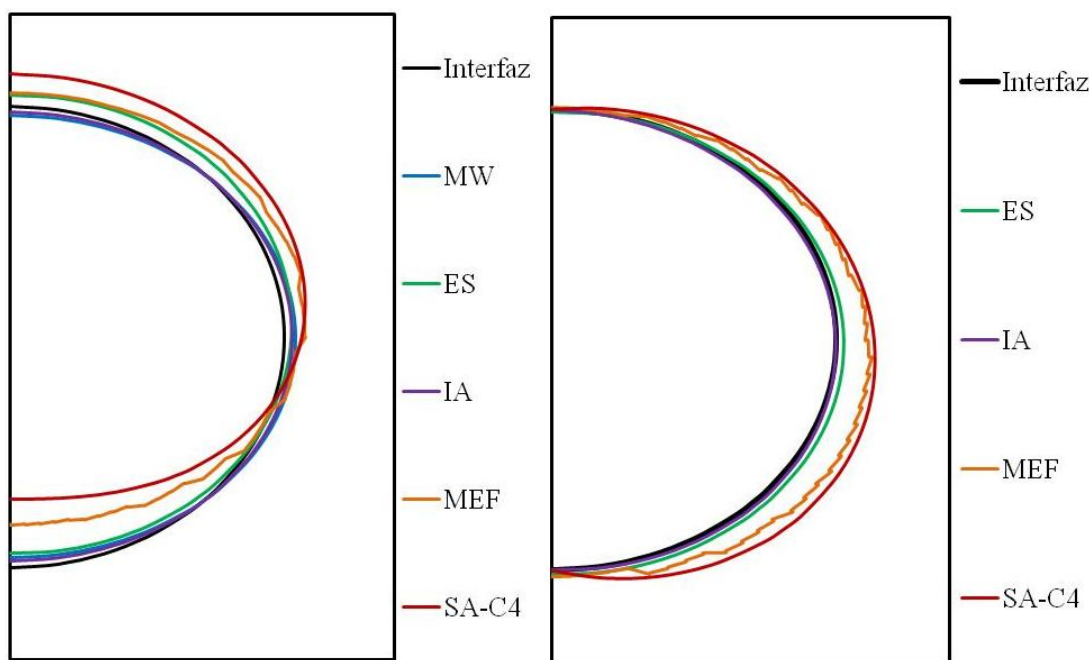


La nueva distribución de esfuerzos tangenciales correspondiente a ES, es similar a la distribución de esfuerzos tangenciales de la solución SA-C4, ya que las distribuciones de esfuerzos radiales son similares.

La tabla 5.1.2d muestra las distribuciones de desplazamientos radiales y circunferenciales en la interfaz terreno-revestimiento. La figura 5.1.2c muestra las gráficas de desplazamientos radiales y circunferenciales.

**Tabla 5.1.2d. Desplazamientos radiales y circunferenciales, en la interfaz terreno-revestimiento**

$\theta$ °	MW		ES		A		MEF		SA-C4	
	$u$ m	$v$ m	$u$ m	$v$ m	$u$ m	$v$ m	$u$ m	$v$ m	$u$ m	$v$ m
90	-0.018	0.009	0.025	-0.006	-0.012	0.000	0.029	0.004	0.072	0.000
80	-0.017	0.009	0.027	-0.004	-0.011	-0.002	0.030	0.004	0.071	0.009
70	-0.014	0.009	0.028	-0.001	-0.009	-0.004	0.032	0.012	0.071	0.018
60	-0.009	0.009	0.028	0.001	-0.006	-0.005	0.038	0.012	0.070	0.026
50	-0.003	0.009	0.028	0.004	-0.002	-0.006	0.041	0.021	0.069	0.033
45	0.000	0.009	0.027	0.005	0.000	-0.006	0.045	0.022	0.068	0.037
40	0.003	0.009	0.026	0.007	0.002	-0.006	0.042	0.032	0.066	0.040
30	0.009	0.009	0.024	0.009	0.006	-0.006	0.039	0.041	0.062	0.046
20	0.014	0.009	0.021	0.011	0.010	-0.004	0.045	0.043	0.055	0.053
10	0.018	0.010	0.017	0.013	0.012	-0.002	0.036	0.055	0.045	0.060
0	0.020	0.010	0.013	0.015	0.014	0.000	0.038	0.057	0.031	0.068
-10	0.019	0.010	0.008	0.016	0.013	0.002	0.020	0.062	0.013	0.075
-20	0.016	0.010	0.003	0.017	0.011	0.005	-0.001	0.067	-0.009	0.081
-30	0.010	0.010	-0.003	0.017	0.007	0.006	-0.008	0.064	-0.035	0.083
-40	0.004	0.010	-0.009	0.017	0.003	0.007	-0.033	0.061	-0.062	0.082
-45	0.000	0.010	-0.012	0.016	0.000	0.007	-0.051	0.053	-0.075	0.079
-50	-0.004	0.011	-0.014	0.016	-0.003	0.007	-0.056	0.052	-0.089	0.075
-60	-0.011	0.011	-0.020	0.014	-0.007	0.006	-0.075	0.035	-0.113	0.063
-70	-0.016	0.011	-0.024	0.013	-0.011	0.005	-0.082	0.034	-0.132	0.045
-80	-0.020	0.011	-0.028	0.010	-0.014	0.003	-0.092	0.012	-0.145	0.024
-90	-0.022	0.011	-0.031	0.007	-0.015	0.000	-0.094	0.012	-0.149	0.000



**Figura 5.1.2c. Distribuciones de desplazamientos radiales y circunferenciales, en la interfaz terreno-revestimiento.**

Las curvas negras de las gráficas de la figura 5.1.2c, representan el perímetro del túnel (interfaz terreno-revestimiento).

En cuanto a los desplazamientos radiales, las curvas de colores por fuera de la línea negra, indican un incremento de la distancia radial al centro del túnel de cualquier punto sobre la interfaz terreno-revestimiento. Cuando las líneas de colores pasan por dentro de la línea negra, indican un acortamiento de la distancia radial de los puntos correspondientes.

En cuanto a desplazamientos circunferenciales, las curvas de colores representan la magnitud de dichos desplazamientos. Las curvas de colores por fuera de la curva negra representan desplazamientos circunferenciales positivos (sentido anti-horario) y por dentro de la curva negra, representan desplazamientos circunferenciales negativos (sentido horario).

De la tabla 5.1.2d y las gráficas de la figura 5.1.2c, se observa lo siguiente:

- a) La forma de las distribuciones de desplazamientos radiales obtenidas con la soluciones MW y A son elípticas, simétricas y muy similares entre sí. Esta forma tiene que ver con las distribuciones de esfuerzos obtenidas con estas soluciones, las cuales no consideran la descarga que representa la excavación del túnel.

La ecuación para determinar la distribución de desplazamientos circunferenciales (ecuación 3.2.2m) de la solución MW, sólo se establece para revisar el criterio del inciso b) de esta solución. Esta ecuación no interviene en la determinación de la constante  $c$ , que está involucrada en las ecuaciones de esta solución; por lo tanto, no se pueden calcular los desplazamientos circunferenciales ni la deformada del túnel.

La ecuación para determinar el desplazamiento circunferencial de la solución A interviene en la determinación de los parámetros involucrados en las ecuaciones de esta solución; por lo que es posible calcular los desplazamientos circunferenciales y la deformada del túnel (Figura 5.1.2d).

- b) Las distribuciones de desplazamientos radiales y circunferenciales, obtenidas a partir de las soluciones ES, SA-C4 y el MEF tienen formas similares y corresponden a la descarga que representa la excavación de un túnel.

Como ya se mencionó, la solución ES considera la descarga correspondiente a la excavación del túnel, en los parámetros de rigidez relativa.

Los desplazamientos obtenidos con la solución SA-C4 corresponden a los valores puntuales propuestos de esfuerzos radiales. Estos valores son similares a los esfuerzos obtenidos con el MEF y representan una distribución de esfuerzos radiales no uniforme en la interfaz terreno-revestimiento, que corresponde a la descarga del túnel.

Los desplazamientos obtenidos con la solución ES son menores a los obtenidos con el MEF. Esto está relacionado con los parámetros de rigidez relativa que sólo consideran, en su deducción, las deformaciones tangenciales. Se considera que estos parámetros deberían incluir las deformaciones radiales. Por lo tanto, los desplazamientos obtenidos con esta solución pueden estar subestimados.

Los desplazamientos obtenidos con SA-C4 son mayores a los obtenidos con el MEF. Esto tiene que ver con el valor de esfuerzo cortante que en la solución SA-C4 es igual a cero, cuando el ángulo polar es cero. Este resultado corresponde a la condición de frontera en la solución del polinomio que representa los esfuerzos cortantes en la interfaz terreno-revestimiento. Actualmente se trabaja en una solución que elimine dicha condición.

Para cada solución el túnel se deforma como se muestra en la figura 5.1.2d.

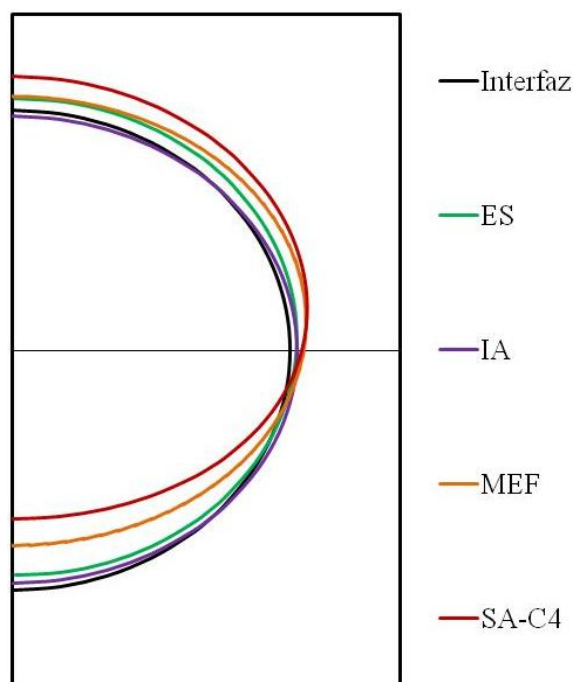


Figura 5.1.1d. Deformadas de la interfaz terreno-revestimiento.

## 5.2. SEGUNDA SECCIÓN. TÚNEL CONSTRUIDO EN LA CIUDAD DE MÉXICO

Esta sección corresponde a un túnel circular construido en la Ciudad de México (figura 5.2a). Se analiza con las soluciones del capítulo 4 (SA-C4), bajo la condición de frontera en la interfaz terreno-revestimiento correspondiente a esfuerzos cortantes diferentes de cero y con el método del elemento finito (MEF). En la tabla 5.2a, se presentan las propiedades de los materiales de los diferentes estratos.

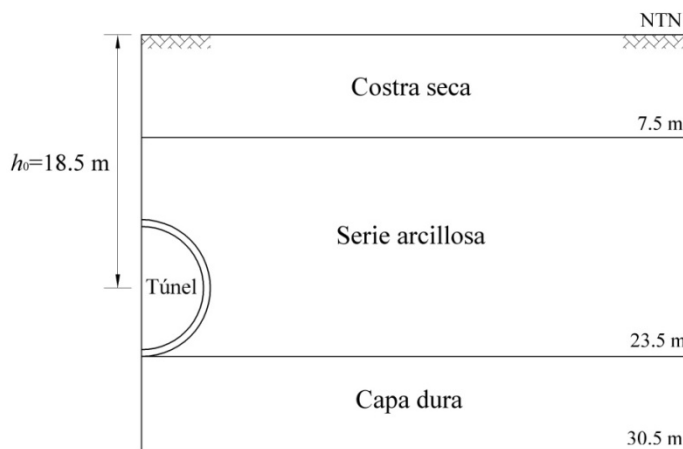


Figura 5.2a. Segunda sección de análisis.

Tabla 5.2a. Propiedades geotécnicas de los materiales de los estratos de la segunda sección de análisis

Estrato	Profundidad		w %	$\gamma$ kN/m <sup>3</sup>	$K_0$	$\nu'$	$E'$ kPa	$e_0$	$C_r$	$C_c$	OCR	$c'$ kPa	$\phi'$ °
	de	a											
Costra seca	0	7.5	83	14.4	0.398	0.33	6476	2.1	0.051	0.320	2.0	0	50
SAS	7.5	23.5	238	12.0	0.443	0.30	824	5.6	0.200	2.770	1.4	0	40
Capa dura	23.5	30.5	53	16.4	0.293	0.33	7041	1.4	0.030	0.228	1.0	0	45

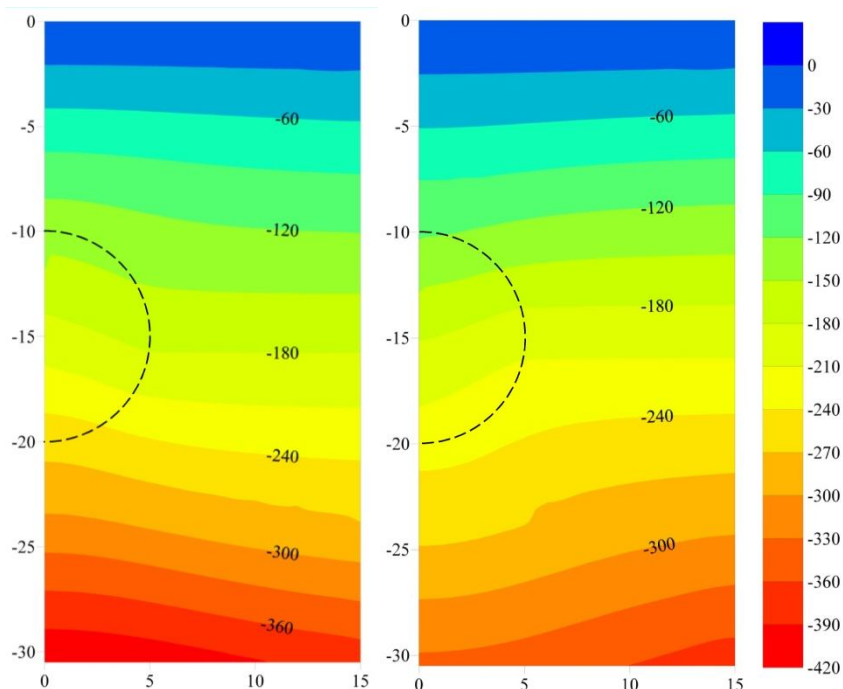
En la tabla 5.2a,  $w$  es el contenido de agua en el terreno;  $\gamma$  es el peso volumétrico del terreno;  $K_0$  es el coeficiente de presión de tierras en reposo;  $\nu'$  y  $E'$  son los parámetros de rigidez efectivos del terreno;  $e_0$  es la relación de vacíos;  $C_r$  y  $C_c$  son los índices de recompresión y compresión, respectivamente, de una curva de compresibilidad;  $OCR$  es la relación de preconsolidación =  $\sigma'_p/\sigma'_{y0}$ , cuando  $OCR=1$  el terreno está normalmente consolidado, cuando  $OCR>1$  el terreno está preconsolidado;  $\sigma'_p$  y  $\sigma'_{y0}$  son los esfuerzos de preconsolidación y vertical efectivo inicial;  $c'$  y  $\phi'$  son los parámetros de resistencia efectivos del terreno.

### 5.2.1. Estado inicial de esfuerzos

La correcta determinación del estado inicial de esfuerzos tiene gran relevancia en los resultados obtenidos a partir de cualquier solución analítica o método numérico. Tomando en cuenta el principio de los esfuerzos efectivos y el coeficiente de presión de tierras en reposo, la relación de esfuerzos totales  $K$ , puede calcularse de la siguiente manera:

$$K = \frac{\sigma_{x0}}{\sigma_{y0}} = \frac{\sigma'_{y0}K_0 + u}{\sigma'_{y0} + u} \tag{5.2.1a}$$

En la figura 5.2.1a, se muestra el estado inicial de esfuerzos en coordenadas polares, correspondiente al problema descrito en el inciso anterior.



**Figura 5.2.1a. Campos de esfuerzos radiales y tangenciales iniciales. Los valores del código de colores son en kPa. Sobre los ejes los valores son en metros (m)**

### 5.2.2. Condiciones piezométricas.

Las presiones intersticiales iniciales se determinaron a partir de mediciones de estaciones piezométricas (figura 5.2.2.a). El perfil considerado como representativo es el del piezocono SPC-3. El nivel de aguas freáticas (NAF) se localiza a 2.5m de profundidad.

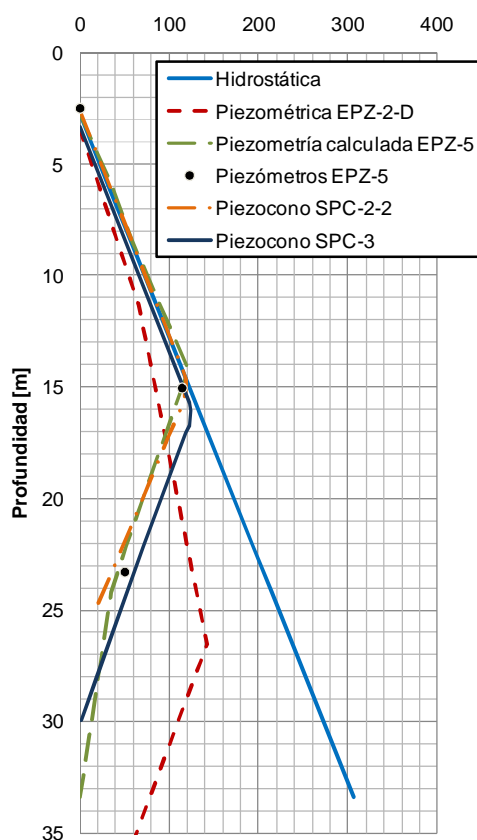


Figura 5.2.2a. Condiciones piezométricas iniciales en kPa.

### 5.2.3. Etapas de análisis

- Etapa 1 (E1). Excavación del túnel y construcción del revestimiento primario. Se considera que el revestimiento primario es colocado inmediatamente después de la excavación. Para tomar en cuenta el efecto de las juntas de las dovelas, se utiliza el denominado parámetro de reducción de la rigidez a la flexión del anillo ( $\alpha$ ). Se acepta que este parámetro es igual a 0.2.
- Etapa 2 (E2). Consolidación del terreno debida al exceso de presión de poro generado por la construcción del revestimiento primario. Se admite que el exceso de presión de poro se alcanza a disipar poco después de la colocación del revestimiento primario (Gutiérrez y Schmitter, 2010)
- Etapa 3 (E3). Construcción del revestimiento definitivo. Se modela la construcción del revestimiento definitivo y el abatimiento de las presiones intersticiales.
- Etapa 4 (E4). Consolidación del medio debida al abatimiento total de las presiones intersticiales. Se modela el comportamiento del túnel a largo plazo. Se considera la disminución del módulo de elasticidad del concreto por flujo plástico ( $F_R$ ). Se acepta que  $F_R$  es igual a 0.57.

Se admite una relación de Poisson en el concreto  $\nu_c$  igual a 0.15 y una resistencia a la compresión simple  $f'_c$  igual a 450 kg/cm<sup>2</sup>. El radio exterior del revestimiento  $a$  es igual a 5m y su espesor  $e$  es igual a 40cm. Se propone utilizar la siguiente ecuación para obtener el módulo elástico del concreto  $E_c$ , en kPa:

$$E_c = 100 \times 12000 \sqrt{f'_c} \quad (5.2.3a)$$

En la tabla 5.2.3a, se presentan las etapas de análisis. En la tabla 5.2.3b, se muestran las propiedades de los revestimientos.

**Tabla 5.2.3a. Etapas del análisis**

Etapa	Tipo de análisis	Descripción
1	Plástico: no drenado (con medición del exceso de presión de poro)	Excavación y colocación del revestimiento primario
2	Consolidación	Hasta que se disipe por completo el exceso de presión de poro (U=100%)
3	Plástico: no drenado (con medición del exceso de presión de poro)	Colocación del revestimiento definitivo
		Abatimiento piezométrico total (consolidación regional)
4	Consolidación	Hasta que se disipe por completo el exceso de presión de poro (U=100%)

**Tabla 5.2.3b. Propiedades de los revestimientos**

Etapa	Revestimiento	Tipo de elemento	e m	f'c kg/cm <sup>2</sup>	E kPa	v	α	FR
1 y 2	Primario	Placa	0.4	45	29.7E06	0.15	0.2	1.00
3 y 4	Definitivo	Elemento de volumen	0.2	45			1.0	0.57

En la tabla anterior: *e* es el espesor del revestimiento, *f'c* es la resistencia a la compresión simple del concreto, *E* y *v* son los parámetros elásticos del concreto, *α* es el parámetro de reducción de la rigidez a la flexión del anillo de dovelas y *FR* es el factor de reducción del módulo de elasticidad del concreto por flujo plástico.

**5.2.3.1. Parámetros para las etapas de análisis 1 y 2.**

En estas etapas, por el orden de magnitud de la permeabilidad de la serie arcillosa donde se encuentra embebido el túnel (*k* = 8.6x10-6 m/s), las condiciones de drenaje son no drenadas, el tipo de análisis será en esfuerzos totales y los parámetros a utilizar serán no drenados; por lo tanto, se considera una relación de Poisson *vu*, igual a 0.49 y el ángulo de fricción interna no drenado del terreno *φu* es igual a 0°, en todos los estratos.

Los parámetros no drenados *Eu* y *cu*, a partir de los parámetros drenados de la tabla 5a, se obtienen a partir de las siguientes expresiones:

De la teoría de la elasticidad:

$$E_u = \frac{1 + v_u}{1 + v'} E' \tag{5.2.3.1a}$$

Del círculo de Mohr:

$$c_u = \frac{\sigma'_{xx} + \sigma'_{yy}}{2} \cdot \sin \phi' + c \cdot \cos \phi' \tag{5.2.3.1b}$$

Para el estrato arcilloso no aplica la relación 5.2.3.1a, por lo que se acepta un módulo no drenado de 4000kPa el cuál es representativo de las arcillas lacustres de la cuenca hidrológica de la Ciudad de México.

**5.2.3.2. Parámetros para las etapas de análisis 3 y 4**

Para los análisis a largo plazo, se consideran las propiedades y parámetros efectivos del terreno, mostrados en la tabla 5.2a.

### 5.2.4. Modelado numérico

#### 5.2.4.1. Análisis en esfuerzos totales

En la figura 5.2.4.1a, se muestra la malla de elementos finitos empleada en el modelo numérico. Se efectuó un refinado de la malla alrededor del túnel. La frontera lateral se colocó a una distancia de 50m, suficiente para no afectar los resultados. La frontera inferior se restringió en ambos sentidos. El revestimiento primario se modeló con elementos tipo placa y el secundario con elementos de volumen.

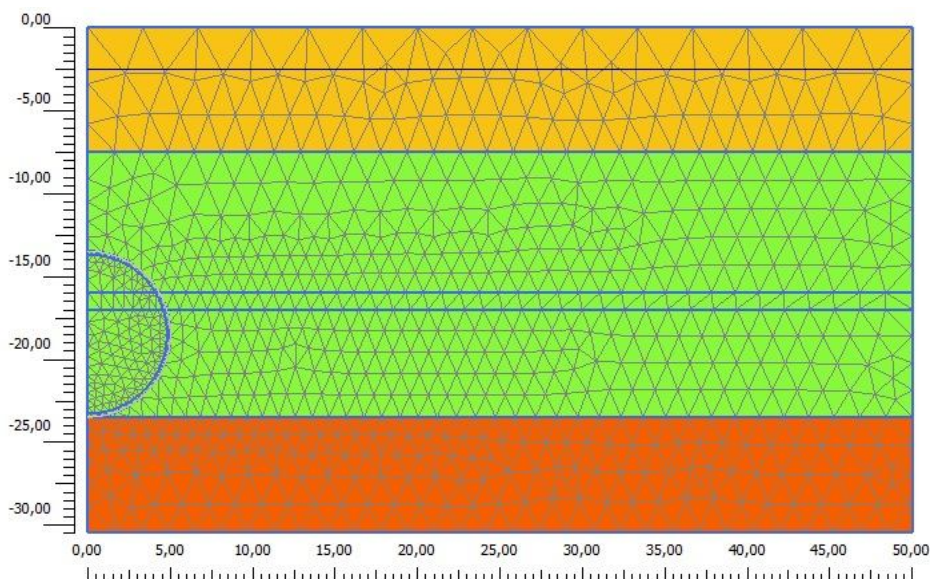


Figura 5.2.4.1a. Malla de elementos finitos

En las figuras 5.2.4.1b y 5.2.4.1c, se presentan campos de esfuerzos verticales y horizontales, respectivamente, para el estado inicial de esfuerzos y para E2. Se utiliza el modelo Mohr-Coulomb (MC).

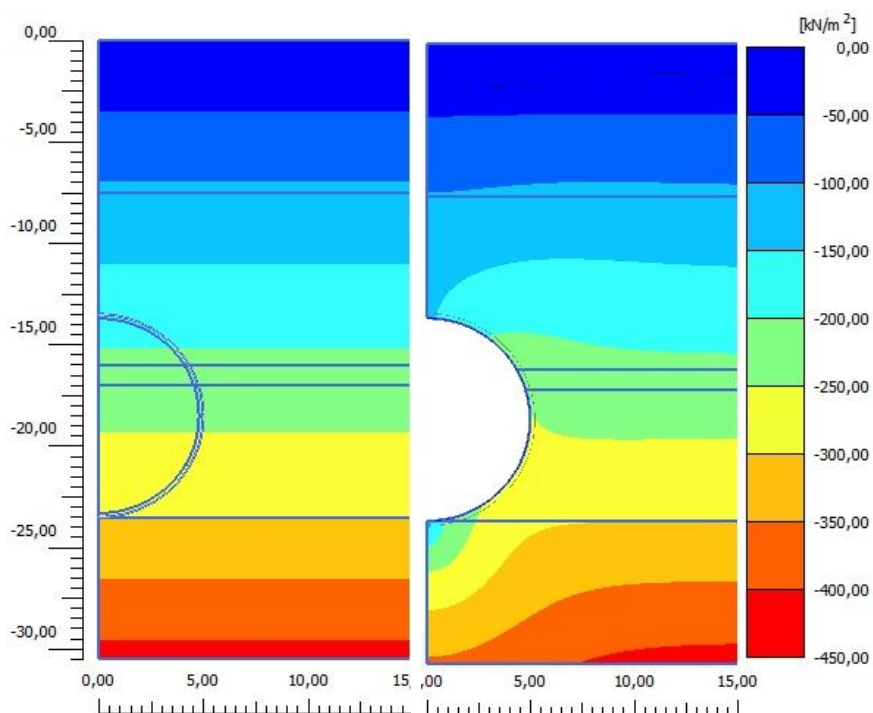
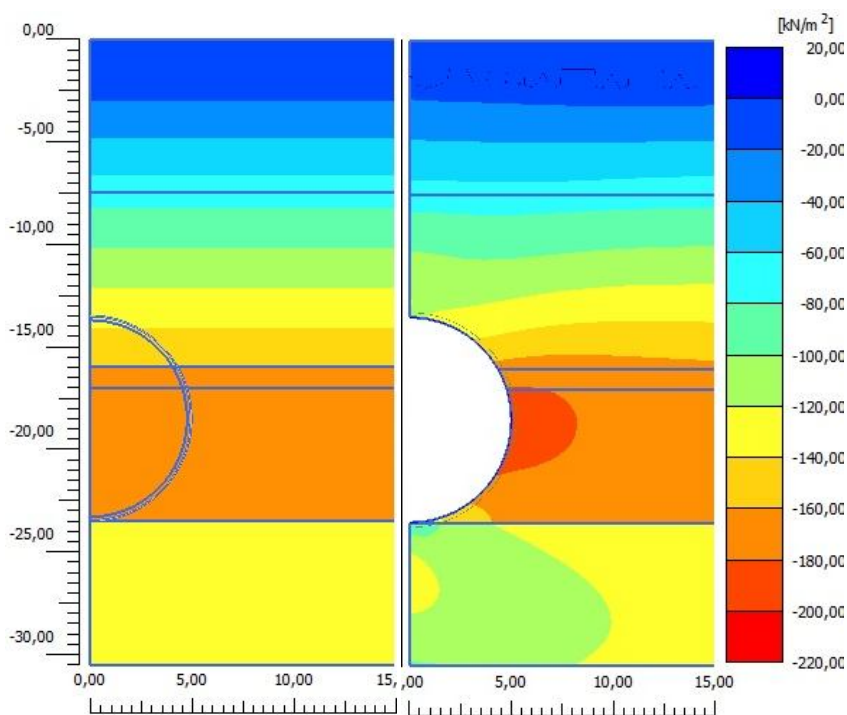
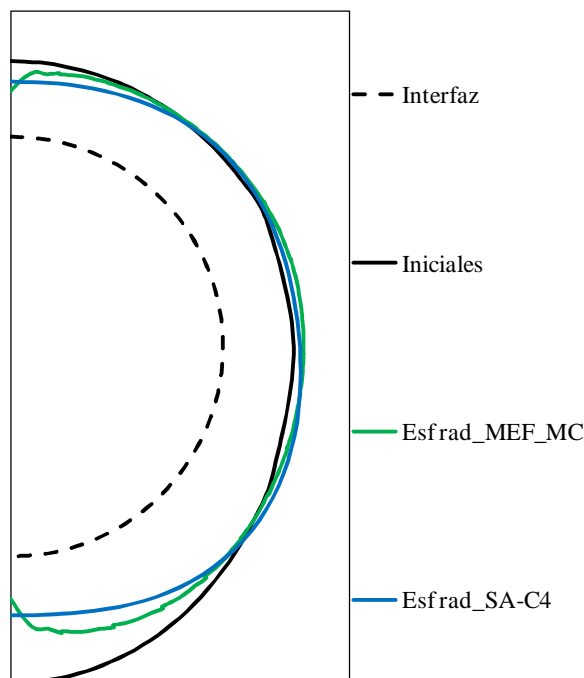


Figura 5.2.4.1b. Campos de esfuerzos verticales, iniciales y para E2. Utilizando MC.



**Figura 5.2.4.1c. Campos de esfuerzos horizontales, iniciales y para E2, utilizando MC.**

En la gráfica de la figura 5.2.4.1d, se presentan las distribuciones de esfuerzos radiales totales en la interfaz terreno-revestimiento para E2, obtenidas a partir de la solución analítica SA-C4 y el MEF con el modelo MC. Representan los esfuerzos a los que está sometido el revestimiento primario al final de su etapa constructiva.



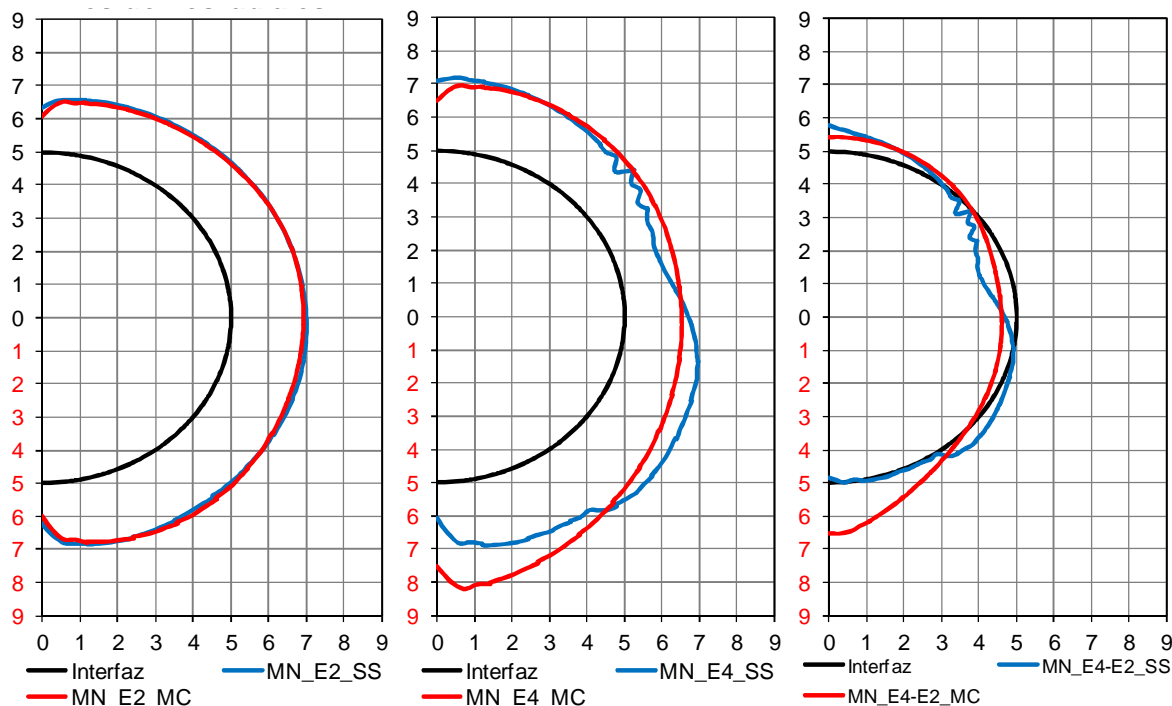
**Figura 5.2.4.1d. Distribuciones de esfuerzos radiales en la interfaz terreno-revestimiento, para E2, a partir de la solución SA-C4 y el MEF.**

La diferencia entre las distribuciones de esfuerzos radiales de la grafica de la figura 5.2.4.1d, radica en los valores puntuales propuestos en la solución SA-C4.



### 5.2.4.2. Análisis en esfuerzos efectivos

En las gráficas de la figura 5.2.4.2a, se muestran las distribuciones de esfuerzos radiales en la interfaz terreno-revestimiento, para las etapas E2, E4 y para una nueva etapa que representa el incremento de esfuerzos de la etapa 2 a la etapa 4 (E4-E2), a partir del MEF y utilizando los modelos MC y Soft Soil (SS).



**Figura 5.2.4.2a. Distribuciones de esfuerzos radiales en la interfaz terreno-revestimiento para E2, E4 y E4-E2, respectivamente.**

En las graficas de la figura 5.2.4.2 se tiene que: las escalas en los ejes son en metros (m) y cada metro corresponde a 100kPa; la curva negra representa la interfaz terreno-revestimiento; las curvas de colores representan las distribuciones de esfuerzos radiales en la interfaz terreno-revestimiento.

En la gráfica E4-E2 se observa la descarga horizontal debida a la consolidación del terreno por abatimiento total de las presiones de poro, a partir de los modelos constitutivos utilizados. Esta descarga es de 50kPa, aproximadamente. Con ambos modelos, se observa un incremento de esfuerzos radiales en la zona de la clave del túnel. Sólo con el modelo MC, se presentan incrementos de esfuerzos radiales en la zona de la cubeta.

### 5.2.5. Presiones requeridas y estrategia de mantenimiento a base de inyecciones para la corrección de deformaciones en el revestimiento del túnel

Los incrementos de esfuerzos radiales que actúan sobre el revestimiento del túnel, debidos a la consolidación del terreno, lo someten a un importante desviador de esfuerzos (Rodríguez, *et al.* 2012), que obliga a diseñar revestimientos definitivos muy robustos. La presión de inyección requerida para minimizar el efecto del proceso de consolidación sobre el túnel, tendría que ser igual al valor de la descarga horizontal.

Con el modelo constitutivo MC, la presión de inyección en la zona de los hastiales, correspondiente a un abatimiento total, sería  $p_{i,h} = 50\text{kPa}$  aproximadamente. Se ha observado que la tendencia de la descarga de presión horizontal, debida al proceso de consolidación, es prácticamente lineal (Rodríguez *et al.*, 2012 y Pérez y Auvinet, 2012b); por lo que se acepta que para un abatimiento del 50%, se tendría que aplicar  $p_{i,h} = 25\text{kPa}$ , aproximadamente.

A continuación se utilizan las soluciones analíticas SA-C4 para analizar la etapa E2, una nueva etapa de análisis 4 con abatimiento del 50% (E4A50) y para esta última etapa pero aplicando una presión de inyección  $p_{i,h}=25\text{kPa}$  (E4PIH25). Se obtienen campos de esfuerzos radiales y tangenciales en el terreno, además de distribuciones de esfuerzos tangenciales y cortantes al interior del revestimiento. Las unidades del código de colores son en kPa y sobre los ejes son en metros.

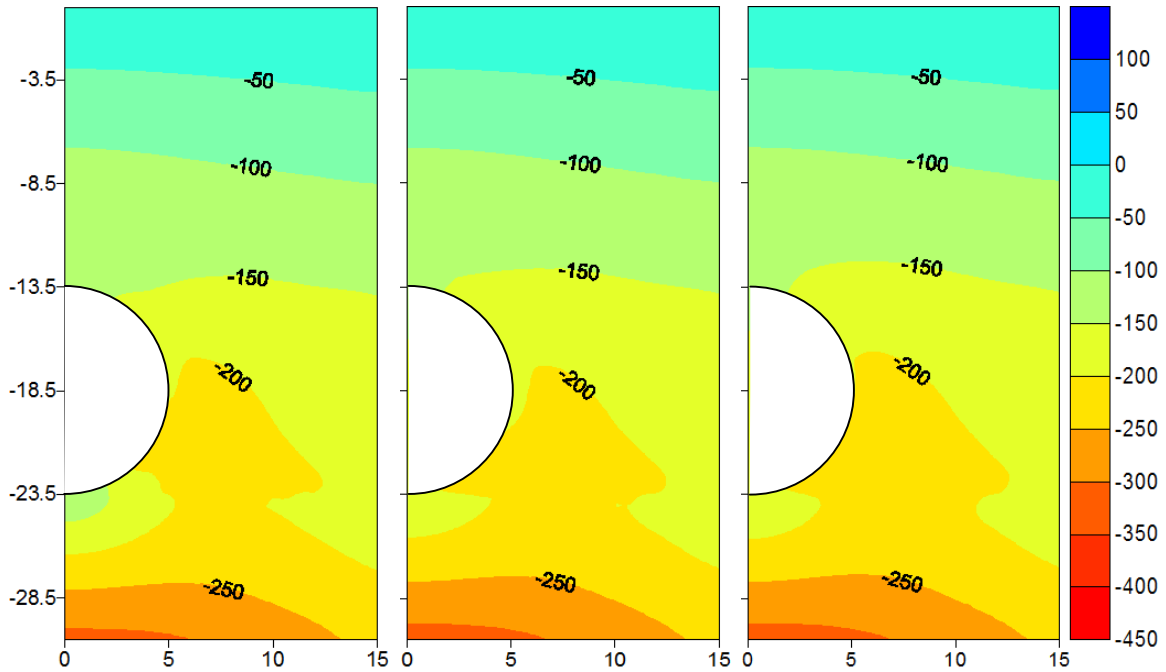


Figura 5.2.5a. Campos de esfuerzos radiales en el terreno, para las etapas de análisis E2, E4A50 y E4PIH25, respectivamente.

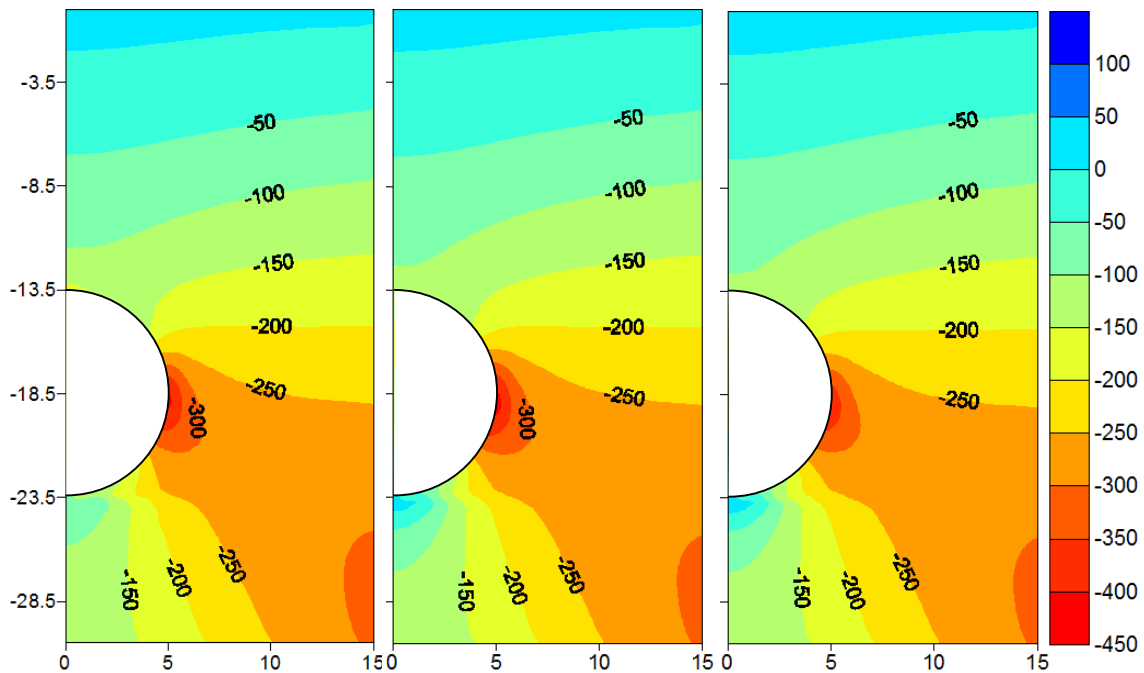
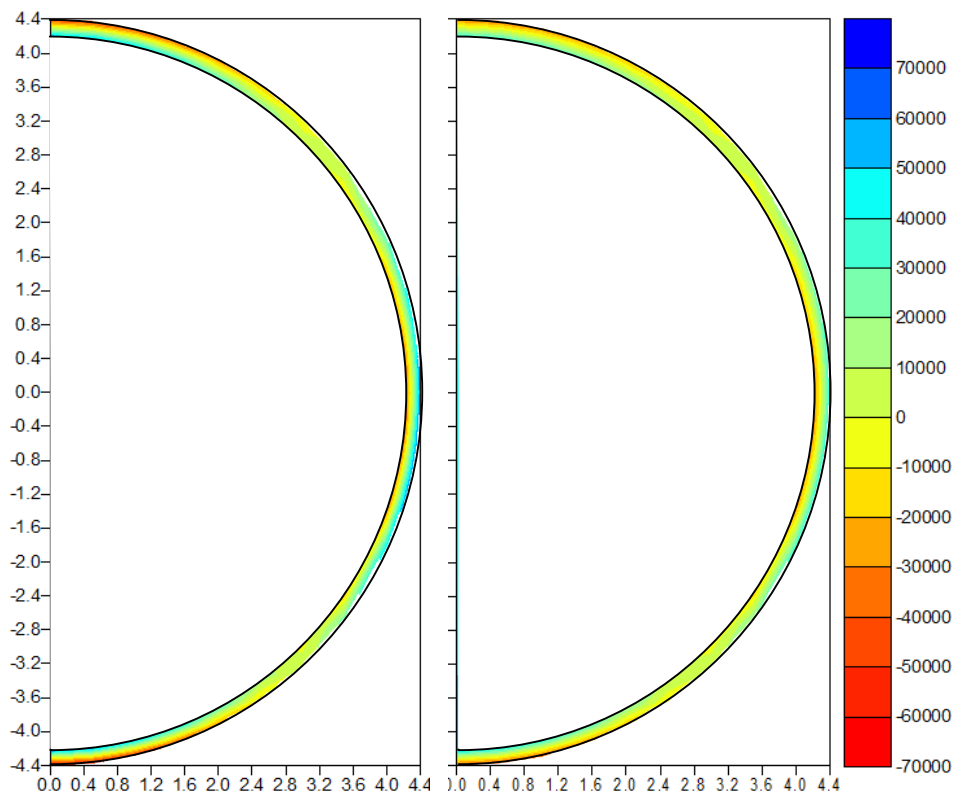
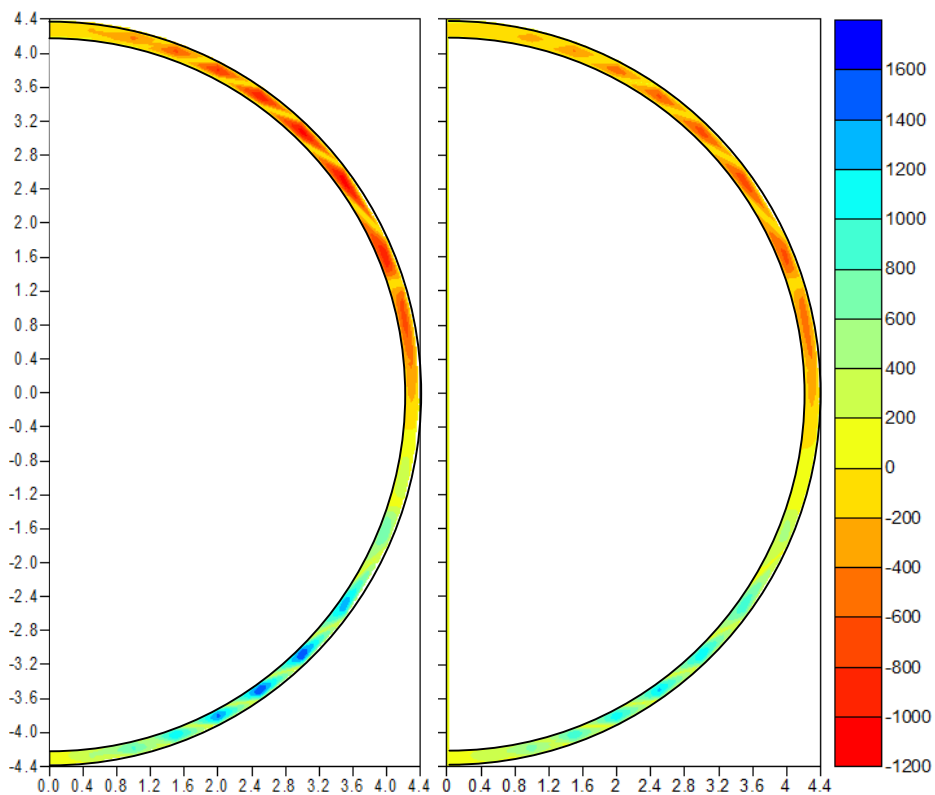


Figura 5.2.5b. Campos de esfuerzos tangenciales en el terreno, para las etapas de análisis E2, E4A50 y E4PIH25, respectivamente.



**Figura 5.2.5c. Distribuciones de esfuerzos tangenciales en el revestimiento definitivo del túnel, para las etapas de análisis E4A50 y E4PIH25, respectivamente.**

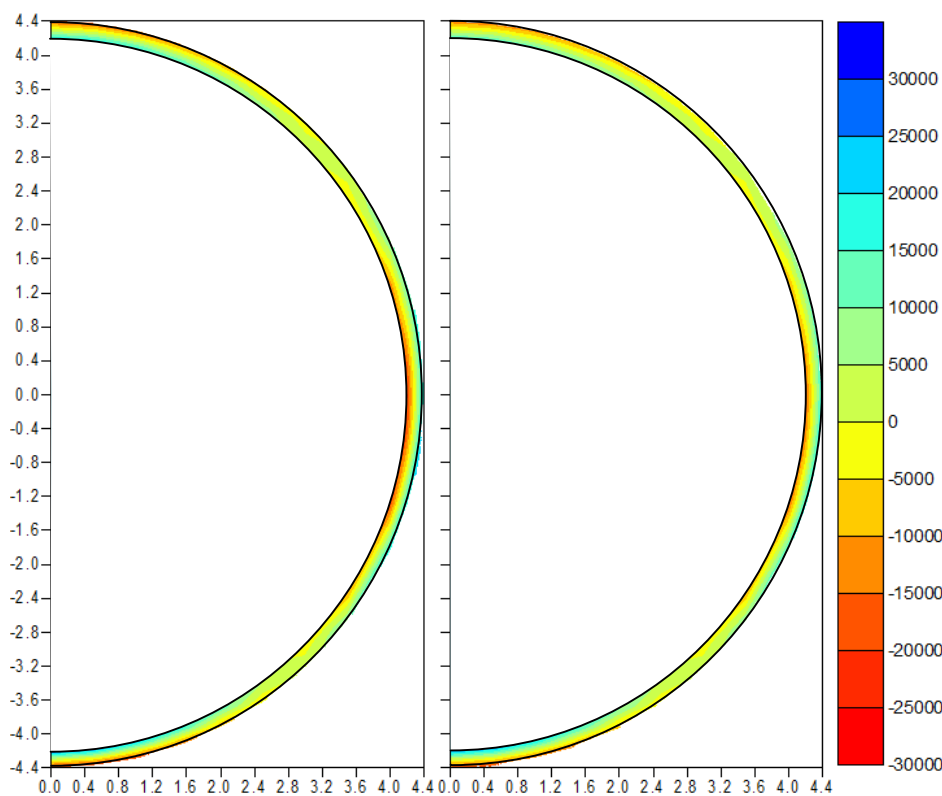


**Figura 5.2.5d. Distribuciones de esfuerzos cortantes en el revestimiento definitivo del túnel, para las etapas de análisis E4A50 y E4PIH25, respectivamente.**

En las graficas correspondientes a la etapa E4A50 de las figuras 5.2.5a y 5.2.5b, se observa que el proceso de consolidación debido a un abatimiento del 50% de la presión de poro, genera una descarga radial en la zona del hastial y una zona de tensiones debajo de la cubeta del túnel, respectivamente. En las graficas correspondientes a la E4PIH25 de las mismas figuras, se observa que la presión de inyección horizontal,  $p_{i,h}=25\text{kPa}$ , restituye el estado de esfuerzos inicial, que en ambos casos corresponde a la etapa E2.

En la grafica correspondiente a la etapa E4A50 de la figura 5.2.5c, se observa un alto nivel de esfuerzos tangenciales tanto de tensión como de compresión sobre el revestimiento definitivo, que podría provocar zonas de agrietamiento y/o aplastamiento. En la grafica correspondiente a la misma etapa pero de la figura 5.2.5d, se aprecian zonas de importantes concentraciones de esfuerzos cortantes en el revestimiento, lo que podría provocar superficies de falla. En las graficas correspondientes a la E4PIH25 de las mismas figuras, se observa que la presión de inyección horizontal, disminuye el nivel de esfuerzos sobre el revestimiento.

Se concluye que una presión de inyección aplicada en la zona de los hastiales puede revertir el efecto de la consolidación del terreno sobre el revestimiento definitivo del túnel. Por lo tanto, si se determina el nivel de desconfinamiento lateral que puede soportar el revestimiento, es posible determinar a qué nivel de consolidación del terreno se debe aplicar una medida de corrección para que la estabilidad del túnel no quede en riesgo. En la figura 5.2.5e se presenta la distribución de esfuerzos tangenciales en el interior del revestimiento por un abatimiento del 10% y por el efecto de una  $p_{i,h}$  de 5kPa en la zona del hastial.



**Figura 5.2.5e. Distribuciones de esfuerzos tangenciales en el revestimiento definitivo del túnel, para las etapas de análisis E4A10 y E4PIH5, respectivamente.**

En la figura 5.2.5e se observa que para el proceso de consolidación por un abatimiento del 10%, el nivel de esfuerzos tangenciales disminuye prácticamente la mitad respecto al nivel de esfuerzos correspondiente al abatimiento del 50%. Este nuevo nivel de esfuerzos podría llevar al revestimiento definitivo al límite de su resistencia, tomando en cuenta su refuerzo estructural. La presión de inyección aplicada, nuevamente disminuye notablemente el nivel de esfuerzos en el revestimiento.

## CAPÍTULO 6

### CONCLUSIONES

En este trabajo se revisaron aspectos relevantes de la mecánica del medio continuo y de la teoría de la elasticidad utilizados por diversos autores para obtener soluciones analíticas para túneles circulares. Se revisaron las soluciones analíticas de Kirsch (1898), Wood (1975), Einstein y Schwartz (1979), Alberro (1983) y Bobet (2001), con las que es posible realizar análisis de interacción terreno-revestimiento.

La solución de Kirsch no fue concebida para analizar túneles; para utilizarla y estudiar la respuesta elástica de un medio semi-infinito afectado por la construcción de un túnel circular, es necesario tomar en cuenta lo siguiente: la solución extendida al caso bidimensional (Obert y Duval, 1967); una distribución de esfuerzos radiales uniforme  $p_i$  en la interfaz terreno-revestimiento (Pérez y Auvinet 2012a); considerar que en cada punto del medio las variables  $S_x$  y  $S_y$ , corresponden a los esfuerzos iniciales horizontal y vertical, respectivamente, asociados al peso propio del terreno (Pérez y Auvinet, 2012a); plantear las relaciones esfuerzo-deformación de la Ley de Hooke tomando en cuenta la condición de deformación plana y en base a los incrementos de esfuerzos, obtener ecuaciones para calcular desplazamientos (Pérez y Auvinet 2012a).

De esta manera es posible simular la interacción terreno-revestimiento, cuando sea válido considerar despreciables tanto los esfuerzos cortantes como la variación de los esfuerzos radiales en la interfaz terreno-revestimiento. También es posible analizar el efecto sobre el terreno, de una presión de inyección uniforme aplicada dentro del espacio anular que existe entre el terreno y el revestimiento, cuando se construye un túnel con máquina tuneladora. Por lo tanto, esta solución puede ser útil para definir estrategias de inyección durante la construcción del túnel, con la finalidad de prevenir deformaciones excesivas de un revestimiento sometido a un eventual proceso de consolidación del terreno. En estos análisis es necesario implementar criterios de falla y/o de fractura, para determinar a qué niveles de presión interna, se presentan zonas de plastificación o de fracturamiento hidráulico.

Los factores de influencia de esta solución son exclusivamente geométricos. No dependen de los parámetros de rigidez del material. Los resultados obtenidos únicamente son válidos en la cercanía del túnel ya que no se consideran los efectos de superficie y de una frontera inferior donde se restringen los desplazamientos.

Las soluciones de Muir Wood pueden utilizarse cuando se acepte que el estado de esfuerzos sobre el revestimiento le genera un modo de deformación elíptico. Este modo de deformación puede presentarse en revestimientos que se consideren rígidos. Un modo de deformación superior se atribuye a revestimientos flexibles. La suposición del modo de deformación elíptico de un túnel obliga a que los resultados de estas soluciones sólo sean aproximadamente válidos en la cercanía del túnel.

Las ecuaciones de esta solución para calcular esfuerzos radiales y tangenciales, que consideran la condición de esfuerzos cortantes nulos en la interfaz terreno revestimiento, son iguales cuando  $r = r_0$ . Esto se debe a los elementos de la función potencial utilizados en la deducción de estas ecuaciones y a la condición de frontera mencionada. Para corregir esta situación es necesario proponer otros elementos de la función potencial que cumplan con las condiciones de frontera del problema. Los esfuerzos radiales y tangenciales sólo pueden ser iguales sí, en el proceso de deducción de la solución, se trabaja la Ley de Hooke bajo la condición de deformación plana, sí se considera que el revestimiento es incompresible ( $\varepsilon_\theta=0$ ) y sí sólo se llevan a cabo análisis donde no se consideren cambios de volumen en el medio (análisis a corto plazo:  $\nu=0.5$ ).

La solución considera la Ley de Hooke bajo la condición de deformación plana, pero no considera al revestimiento incompresible, ya que afirma que se permite deformación simétrica (compresión axial). Además, no se especifica que la solución debe ser utilizada sólo en medios donde no se consideren cambios de volumen. Por lo tanto, los resultados en cuanto a esfuerzos radiales y tangenciales no deberían ser iguales.

Las ecuaciones para calcular esfuerzos radiales y tangenciales que consideran la condición de esfuerzos cortantes diferentes de cero, en la interfaz terreno revestimiento, no son iguales. En la deducción de esta solución se utilizan los mismos elementos de la función potencial de esfuerzos que se utilizan en la solución anterior; sin embargo, la nueva condición de frontera permite que matemáticamente, las componentes de esfuerzos radial y tangencial, no sean iguales.

Para revisar el criterio correspondiente al deslizamiento relativo de esta solución, se plantea la condición de revestimiento inextensible, por lo que los incrementos de esfuerzos radiales y tangenciales deberían ser iguales para valores de la relación de Poisson de 0.5. Sin embargo, esta condición no se utiliza para determinar el valor de la única constante que interviene en las ecuaciones; por lo tanto, los esfuerzos radiales y tangenciales no son iguales y esta solución si considera compresión axial del revestimiento.

En la solución de Einstein y Schwartz se acepta que el estado inicial de esfuerzos en el medio corresponde a los esfuerzos vertical y horizontal por peso propio del terreno, al centro del túnel. Esto significa que en cualquier punto del medio el estado de esfuerzos inicial es el mismo. Esta suposición es válida para túneles profundos y/o de diámetro pequeño, donde pueda aceptarse que el esfuerzo en la clave es prácticamente igual al esfuerzo en la cubeta del túnel. El aceptar que estos esfuerzos son iguales y cuando la relación de esfuerzos  $K$  es menor que uno, nos conduce a una distribución de esfuerzos inicial sobre el revestimiento similar a la considerada por Muir Wood (elíptica). Cuando  $K=1$ , los esfuerzos en la interfaz terreno-revestimiento son uniformes como en la solución de Kirsch modificada.

Para considerar una distribución de esfuerzos más realista, se propuso que en cada punto sobre dicha interfaz, el esfuerzo vertical inicial  $P$  corresponda al esfuerzo inicial vertical asociado al peso propio del terreno en ese mismo punto. Esta suposición permite una mayor aproximación de los esfuerzos calculados y que esta solución pueda ser utilizada incluso en túneles menos profundos.

Los parámetros de rigidez relativa  $C^*$  y  $F^*$ , provienen de la expresión correspondiente a las deformaciones tangenciales bajo la condición de deformación plana. En esta solución no se explica porque no intervienen las deformaciones radiales en los parámetros de rigidez relativa. Se piensa que estos parámetros deberían tomar en cuenta tanto las deformaciones tangenciales como las deformaciones radiales, ya que ambas provocan flexión y compresión al revestimiento.

Con la solución de Alberro se obtienen distribuciones de esfuerzos radiales y cortantes no uniformes sobre la interfaz terreno-revestimiento. Los análisis no están condicionados a un determinado modo de deformación del túnel. Aunque parte del concepto de esfuerzos iniciales alejados del túnel, dichos esfuerzos no están restringidos a un valor determinado. Para obtener aproximadamente los campos de esfuerzos se propone que en cada punto del medio los valores  $S_1$  y  $S_2$ , corresponden a los esfuerzos iniciales horizontal y vertical, respectivamente, asociados al peso propio del terreno.

En el proceso de deducción de esta solución, para obtener las constantes involucradas, se establece la condición de esfuerzo plano. Sin embargo, esta condición no es adecuada en los análisis de secciones transversales de túneles ya que considera que los esfuerzos en la dirección longitudinal al túnel son nulos. Los resultados de un análisis comparativo entre las condiciones de estados planos de esfuerzos y de deformaciones considerando un revestimiento incompresible, indican que la solución no debe aplicarse en análisis donde la relación de Poisson  $\nu$  sea igual a 0.5, ya que se estaría subestimando el esfuerzo tangencial en un 50%.

La solución es aproximada para valores pequeños de la relación de Poisson ( $\nu \rightarrow 0$ ). Un valor de la relación de Poisson igual a 0.15, representa una relación entre esfuerzos radiales y tangenciales de aproximadamente 0.18 para la condición de deformación plana, mientras que para esfuerzo plano esta relación es de 0.15. Lo anterior significa que utilizando la solución de Alberro, se comete un error del 15% con este valor de  $\nu$ . Este error podría ser aceptable en análisis preliminares.

Como en el caso de la solución de Einstein y Schwartz, la solución de Bobet utiliza los parámetros de rigidez relativa. Estos parámetros consideran la descarga correspondiente a la excavación del túnel. Además permiten tomar en cuenta las deformaciones del revestimiento por flexión y compresión; sin embargo, esta solución considera que los esfuerzos cortantes en la interfaz terreno-revestimiento son iguales a cero y cuando se calculan los esfuerzos cortantes en dicho lugar geométrico, los esfuerzos cortantes no son nulos. Este resultado limita el uso de esta solución ya que no cumple cabalmente con una de sus condiciones de frontera.

Se propusieron nuevas soluciones analíticas para calcular campos de esfuerzos y de desplazamientos, tanto en el terreno circundante a un túnel como en el interior de su revestimiento. Las nuevas soluciones se obtuvieron desacoplando el problema e imponiendo, como condiciones de frontera en la interfaz terreno-revestimiento, polinomios de cuarto grado que representan distribuciones de esfuerzos radiales y cortantes. Dichas distribuciones corresponden a valores de esfuerzos radiales puntuales de interés, en la interfaz terreno-revestimiento. Con los valores propuestos es posible realizar análisis paramétricos. Estos valores pueden representar condiciones críticas que pueden presentarse en la vida útil del túnel y de esta manera, modelar su comportamiento e interacción con el terreno.

También es posible utilizar resultados de mediciones de campo obtenidas con instrumentos instalados en la interfaz terreno-revestimiento (celdas de presión), en el revestimiento primario del túnel (deformímetros de acero o concreto) y/o en el terreno cercano al revestimiento (extensómetros de barra, inclinómetros, celdas de carga, etc.). El objetivo es utilizar estas mediciones en las nuevas soluciones analíticas para obtener el comportamiento del túnel ante solicitaciones que impone el terreno al revestimiento durante su vida útil.

A diferencia de las soluciones analíticas existentes, las componentes de esfuerzos de las nuevas soluciones analíticas son independientes de los parámetros de rigidez del terreno (módulo de Young,  $E$  y relación de Poisson,  $\nu$ ). Lo anterior se debe al uso de funciones potenciales de esfuerzos y a que se logra establecer, en ambos casos, condiciones de frontera en términos de esfuerzos; por lo tanto, los factores de influencia de las soluciones sólo dependen de factores geométricos, de los esfuerzos iniciales en el medio y los propuestos o medidos en la interfaz terreno-revestimiento. Solo las componentes de desplazamientos dependen de los parámetros de rigidez, ya que para obtener sus correspondientes ecuaciones, fue necesario establecer relaciones esfuerzo-deformación (Ley de Hooke), bajo la condición de deformación plana.

Con las nuevas soluciones analíticas es posible estudiar la interacción terreno-revestimiento bajo la condición de esfuerzos cortantes nulos en la interfaz terreno-revestimiento. Bajo esta condición es posible modelar el efecto tanto en el terreno como en el revestimiento, de elevar la presión de inyección en el espacio anular, de manera uniforme o no uniforme, con la finalidad de minimizar el efecto de un eventual proceso de consolidación sobre el revestimiento. Es posible proponer estrategias de inyección durante la construcción.

También es posible estudiar la interacción terreno-revestimiento bajo la condición de esfuerzos cortantes diferentes de cero, en la interfaz terreno-revestimiento. Cuando el túnel ya está construido es posible definir estrategias de inyección en zonas cercanas al revestimiento donde sea necesario controlar o corregir deformaciones excesivas.

Para obtener aproximadamente los campos de esfuerzos y desplazamientos, se propuso considerar que en cada punto del medio los valores  $S_x$  y  $S_y$ , corresponden a los esfuerzos iniciales horizontal y vertical, respectivamente, asociados al peso propio del medio. Si la superficie libre se encuentra suficientemente alejada, esta suposición garantiza que los esfuerzos calculados son correctos en la cercanía inmediata de la excavación y, al mismo tiempo, en puntos alejados horizontalmente de la misma.

Las nuevas soluciones analíticas se aplicaron a dos casos. El primero corresponde a un túnel profundo y se analizó con todas las soluciones analíticas disponibles. Los análisis se realizaron bajo dos condiciones de frontera en la interfaz terreno-revestimiento: esfuerzos cortantes nulos y esfuerzos cortantes diferentes de cero. Los resultados sirvieron para comparar las soluciones analíticas existentes y para validar las nuevas.

El segundo caso corresponde a un túnel construido en la Ciudad de México que se analizó con las nuevas soluciones analíticas. Los análisis se realizaron bajo la condición de esfuerzos cortantes diferentes de cero en la interfaz terreno-revestimiento y con el método de elementos finitos. En este caso se evaluó la utilidad de una presión de inyección local para controlar las deformaciones que un terreno, en proceso de consolidación, induce en el revestimiento de un túnel.

A partir del método numérico y los modelos constitutivos Mohr-Coulomb y Soft Soil, se obtuvieron distribuciones de esfuerzos radiales en la interfaz terreno-revestimiento debidas a un proceso de consolidación con la presión de poro totalmente abatida. La distribución de esfuerzos a partir del modelo constitutivo Mohr-Coulomb representó las condiciones más desfavorables.

El incremento de esfuerzos para un abatimiento total de la presión de poro debido a la consolidación del terreno, respecto al final de la etapa de construcción del túnel cuando se ha disipado el exceso de presión de poro, es utilizado en el diseño del revestimiento secundario. Este incremento de esfuerzos permite obtener la descarga horizontal de esfuerzos totales que sufre el revestimiento secundario. Se acepta que la presión de inyección que podría ayudar a revertir el efecto de la consolidación sobre el revestimiento secundario, debe ser del mismo orden de la descarga de esfuerzos horizontales totales, que se presenta en la zona de los hastiales. Para el abatimiento total, se determinó una presión de inyección  $p_{i,h}=50\text{kPa}$ .

La descarga de esfuerzos totales por consolidación del terreno al nivel de los hastiales, tiene un comportamiento lineal, lo que permite proponer valores de una presión de inyección horizontal  $p_{i,h}$  para un cierto porcentaje de abatimiento. A partir de las nuevas soluciones analíticas se analizó el efecto de una presión de inyección en la zona de los hastiales  $p_{i,h}=25\text{kPa}$ , para una consolidación correspondiente a un abatimiento del 50%. En los resultados se observó que la presión de inyección ayuda a revertir el efecto de la consolidación sobre el terreno y el revestimiento. Las nuevas soluciones analíticas permiten obtener distribuciones de esfuerzos radiales, tangenciales y cortantes al interior del revestimiento y con ello estudiar las posibles zonas de falla y/o agrietamiento en el mismo. Para el caso en estudio, un proceso de consolidación correspondiente a un abatimiento del 50%, pondría en riesgo la estabilidad del túnel.

Se analizó el efecto de un proceso de consolidación sobre el revestimiento, correspondiente a un abatimiento del 10% de la presión de poro. La presión de inyección en la zona de los hastiales a partir de estos análisis se determinó que tenía que ser de 5kPa. El estado de esfuerzos sobre el revestimiento debido a este abatimiento de la presión de poro, se considera aceptable para no poner en riesgo la estabilidad del túnel. Este resultado debe corroborarse con mediciones de campo.

Se debe determinar constantemente la distribución de esfuerzos en la interfaz terreno-revestimiento y tomar como referencia la distribución de esfuerzos al final de la construcción del túnel, con la finalidad de obtener los incrementos de esfuerzos por consolidación del terreno. Es indispensable la determinación del NAF y las distribuciones piezométricas del terreno, para determinar los abatimientos in situ.

Los diseños pueden ser menos conservadores si se definen estrategias claras de mantenimiento de los túneles que incluyen la realización de inyecciones en el suelo circundante orientadas a volver a crear un estado de presiones menos crítico para el revestimiento. Esta estrategia busca compensar el desconfinamiento lateral que afecta a los túneles, sin exceder las presiones que pueden generar movimientos en la superficie o fracturamiento del suelo. Las intervenciones también podrían tener lugar cuando las convergencias rebasen ciertos umbrales críticos, apoyándose en las mediciones de campo.

Los resultados obtenidos son de gran utilidad para la definición de una política de mantenimiento o de correcciones en caso de comportamiento inadecuado para túneles existentes. Las nuevas soluciones pueden ser de utilidad tanto en el análisis y diseño de túneles circulares como en su comportamiento durante su vida útil.



## BIBLIOGRAFÍA

- Alberro, J. (1983), "Presiones de roca en túneles e interacción roca-revestimiento", Series de Investigación del Instituto de Ingeniería, UNAM.
- Allgood J.R. (1971), "Structures in soil under high loads", Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division, ASCE, Vol. 97, No. SM3, Proc. Paper 8006, pp. 565-579.
- Auvinet G., y Rodríguez-Rebolledo, J.F. (2010), "Análisis, diseño, construcción y comportamiento de obras subterráneas en suelos", XXV Reunión Nacional de Ingeniería Geotécnica, Vol. 1, Acapulco, pp. 33-42.
- Bernard, R.E. (1957), "Design and deflection control of buried steel pipe supporting earth loads and live loads", Proceedings of the American Society of Testing Materials, Vol 57, 1957, pp. 1233-1256.
- Bobet, A. (2001), "Analytical solutions for shallow tunnels in saturated ground", Journal of Engineering Mechanics, ASCE Vol. 127 (12), pp. 1258–1266.
- Curtis, D.J. (1976), "Discussion on the circular tunnel in elastic ground", Geotechnique, Vol. 26, No. 1, pp. 231-237.
- Deméneghi, A., *et al.* (2003), "Fundamentos de mecánica del medio continuo", Departamento de Geotecnia de la División de Ingeniería Civil, Topográfica y Geodésica de la Facultad de ingeniería, UNAM.
- Deere, D. U., *et al.*, (1969), "Desing of tunnel liners and support systems", Final Report, Departament of Civil Engineering, University of Illinois Urbana, I11.
- Einstein, H.H., y Schwartz, C.W (1979), "Simplified Analysis for Tunnel Supports", Journal of the Geotechnical Engineering Division, ASCE, 105(4), pp. 499-518.
- Equihua, L.N. (2000). "Túneles en suelos blandos con hundimiento regional". Tesis para obtener el grado de Maestro en Ingeniería. División de Estudios de Posgrado, UNAM.
- Farjeat, E., y Delgado, S. (1988), "Diseño de dovelas para túneles del metro alojadas en arcillas compresibles de la Ciudad de México", Tunnels and Water, Serrando (ed), Balkema, Rotterdam, pp. 117-135.
- Flores, F.A. (2010), "Análisis del comportamiento estático de túneles excavados en suelos blandos". Tesis para obtener el grado de Maestro en Ingeniería. Programa de Maestría y Doctorado en Ingeniería, UNAM.
- Flügge, W. (1966), "Stresses in shells", Springer-Verlag, Inc., New York, N.Y.
- Gabriel, L.H., y Dabaghian, L. (1967), "An analytical experimental method for determining interfall traction for buried structures subjected to static loads", Highway Research Record, No. 185, pp. 51-72.
- Gutiérrez, L.E. y Schmitter, J.J. (2010), "Variación de la relación  $K_0$  en un subsuelo arcilloso, durante el paso de un escudo presurizado", Memorias de la XXV RNMSelG, Acapulco, pp. 613-617.
- Hoeg, K. (1968), "Stresses against underground structural cylinders". Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division, ASCE, Vol 94, No. SM4, Proc. Paper 6022, Apr., pp. 833-858.
- Kirsch (1898), "Die Theorie der Elastizität und die Bedürfnisse der Festigkeitslehre", Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure, Vol. 42, pp. 797–807.

- Loganathan, N., y Poulos, H. G. (1998), "Analytical prediction for tunneling-induced ground movements in clays", *J. Geotech. and Geoenviron. Engrg.*, ASCE, 124(9), pp. 846-856.
- Luscher, U. (1965), "Behavior of flexible underground cylinders", AD 621-145, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, Mass., pp. 66.
- Matsumoto, Y., y Nishioka, T. (1991), *Theoretical Tunnel Mechanics*, University of Tokyo Press, Tokyo.
- Malvern, L. E., (1969), "Introduction to the mechanics of a continuous medium", Prentice-Hall
- Mase, G. (1970), "Theory and problems of continuum mechanics", McGRAW-HILL BOOK, Co., INC., U.S.A.
- Meyerhoff, G.G., y Fisher, C. L. (1963), "Composite design of underground steel structures", *Engineering Journal*, Vol. 46, No. 9, pp. 36-41.
- Morgan, H. (1961) "A contribution to the analysis of stress in a circular tunnel". *Géotechnique*, Vol. 11, pp. 37-46.
- Moody, W.T. (1964), "Importance of geological information as a factor in a tunnel-lining design", *Engineering Geology Case Histories*, No. 1-5, 1964, pp. 151-161.
- Muir Wood, A. M. "The circular tunnel in elastic ground", *Geotechnique*, London, England, Vol. 25, No. 1, Mar., 1975, pp. 115-127.
- Obert, L., y Duvall, W. I., "Rock mechanics and the design of structures in rock", New York, John Wiley and Sons (1967).
- Pender, M. J. (1980), "Elastic solutions for a deep circular tunnel", Civil Engineering Department, University of Auckland, N.Z.
- Pérez, M.A. y Auvinet G., (2012a), "Solución analítica para la determinación del campo de esfuerzos alrededor de una excavación circular con presión interna uniforme", 2º Simposio Internacional sobre túneles y lumbreras en suelos y roca, Ciudad de México.
- Pérez, M.A. y Auvinet G., (2012b), "Interacción terreno-revestimiento de un túnel, bajo la condición de deslizamiento completo", 2º Coloquio de Jóvenes Geotecnistas, Torre de Ingeniería, UNAM, Ciudad de México.
- Pérez, M.A. y Auvinet G., (2012c), "Solución analítica para la determinación de campos de esfuerzos y desplazamientos alrededor de un túnel circular", XXVI Reunión Nacional de Mecánica de Suelos e Ingeniería Geotécnica, Cancún Quintana Roo, México.
- Poulos, H.G. y Davis, E.H. (1974), "Elastic solutions for soils and rock mechanics", New York, John Wiley and Sons.
- Reséndiz, D., y Romo, M. P. (1981), "Settlements upon soft-ground tunneling: theoretical solution", *Soft-ground Tunneling: Failure and displacements*, D. Reséndiz and M. P. Romo, eds., Balkema, Rotterdam, The Netherlands, pp. 65-74.
- Rivera, C., (2005), "Fundamentos de mecánica del medio continuo", Apuntes de la Facultad de Ingeniería, UNAM.

- Rodríguez, J.F., y Auvinet, G., (2008), "Modelling the construction of deep tunnel shafts in Mexico City soft clays with 2D Plaxis FEM", Seminar: Introduction to Geotechnical Finite Element Analysis, Wilde Finite Element Analysis, Glasgow, UK.
- Rodríguez, J.F., *et al.* (2012), "Análisis y diseño del revestimiento definitivo de túneles en suelos blandos", 2º Simposio Internacional sobre túneles y lumbreras en suelos y roca, Ciudad de México.
- Sagaseta, C. (1987), "Analysis of undrained soil deformation due to ground loss", *Geotechnique*, London, 37, pp. 301-320.
- Spangler, M.G. (1941), "The Structural Design of Flexible Pipe Culverts", Bulletin 153, Iowa Engineering Experiment Station, Ames, Iowa, pp. 84.
- Standing, J. R., Farina, M., y Potts, D. M. (1998), "The prediction of tunneling induced building settlements a case study", *Tunnels and Metropolises, Proc., World Tunnel Congr. '98*, Balkema, Rotterdam, The Netherlands, 1053-1057.
- Szechy, K. (1967), "The art of tunneling". *Academiai Kiado*, Budapest, Hungary, pp. 365-378.
- Tamez, E., Rangel, J. L. y Holguín, E (1997). "Diseño geotécnico de túneles", TGC Geotecnia S.A. de C.V., pp. 62-95.
- Terzaghi, K. (1943), "Liner plate tunnels on chicao subway", *Transactions, ASCE*, Vol. 108, pp. 970.
- Timoshenko, S. P., y Goodier, J. N, "Theory of elasticity". New York: McGraw-Hill, 3rd Edition (1970).
- Verruijt, A., y Booker, J. R. (1966), "Surface settlements due to deformation of a tunnel in an elastic half plane", *Geotechnique*, London, 46, pp. 753-756.
- Vesic, A. S. (March, 1972 ), "Expansion of cavities in infinite soil mass", *Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division, ASCE*, Vol. 98, No. SM3.
- Westergaard, H M, "Theory of elasticity and plasticity", New York (1964).
- Wood, M. (1975), "The circular tunnel in elastic ground", *Géotechnique*, No. 1, pp. 115-127.
- Zaldívar, S.F., Rodríguez, J.F. y Auvinet, G. (2012), "Esfuerzos y desplazamientos alrededor de un túnel considerando el "efecto burbuja", 2º Simposio Internacional sobre túneles y lumbreras en suelos y roca, Ciudad de México.
- Zienkiewicz, O.C., Best, B., Dullage, C., y Stagg, K. C. (1970), "Analysis of non-linear problems in rock mechanics with particular reference to jointed rock systems", *Proc. 2nd Congr. of the Int. Society for Rock Mech.*, Beograd, 3, pp. 501-509.



## ANEXOS

### ANEXO A. SOLUCIÓN ANALÍTICA PARA LA DETERMINACIÓN DEL CAMPO DE ESFUERZOS ALREDEDOR DE UNA EXCAVACIÓN CIRCULAR CON PRESIÓN INTERNA UNIFORME (PÉREZ Y AUVINET, 2012a)

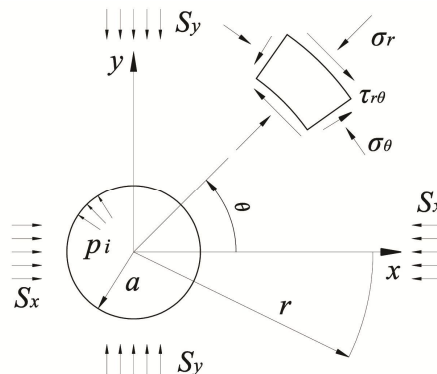
Condiciones iniciales:

- a) El medio es infinito
- b) En el medio, antes de la excavación, existen esfuerzos verticales y horizontales principales.

Condiciones finales:

- a) En la pared de la excavación podrán existir esfuerzos radiales, asociados a una presión interna uniforme
- b) Cuando la distancia del centro del orificio a un punto de interés sea mucho mayor que el radio del mismo orificio, los esfuerzos en dicho punto serán iguales a los esfuerzos iniciales en el medio.

Las consideraciones anteriores se ilustran con la figura A1.



**Figura A1. Influencia de un orificio en un medio elástico, sobre el estado de esfuerzos en un punto del medio a una distancia r del origen.**

donde:  $S_x$  y  $S_y$  son los esfuerzos principales, horizontales y verticales respectivamente, que existen en el medio antes de la excavación;  $\sigma_r$ ,  $\sigma_\theta$  y  $\tau_{r\theta}$ , son las componentes de esfuerzo radial, tangencial y cortante, respectivamente, después de la excavación;  $a$  es el radio de la excavación;  $r$  es la distancia del centro de la excavación a un punto de interés;  $\theta$  es el ángulo polar, medido del eje  $x$  hacia el eje  $y$ ;  $p_i$  es la presión al interior de la excavación.

De las condiciones anteriores se desprenden las siguientes condiciones de frontera:

$$\text{Cuando } r \rightarrow \infty: \quad \sigma_r = \frac{S_x + S_y}{2} + \frac{S_x - S_y}{2} \cos 2\theta \quad (\text{A1})$$

$$\tau_{r\theta} = -\frac{S_x - S_y}{2} \sin 2\theta \quad (\text{A2})$$

Para  $r = a$ : 
$$\sigma_r = p_i \quad (A3)$$

$$\tau_{r\theta} = 0 \quad (A4)$$

Para resolver este problema, se propone una función potencial de esfuerzos  $\varphi$ , con algunas componentes de la función potencial general obtenida por Airy (Timoshenko y Goodier, 1970):

$$\varphi = A \log r + Br^2 + (Cr^2 + Dr^{-2} + E)\cos 2\theta \quad (A5)$$

donde  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  y  $E$  son constantes que se plantean con la finalidad de satisfacer las condiciones de frontera.

Se sustituye la función de esfuerzos  $\varphi$  (ecuación A5), en las siguientes ecuaciones para determinar las componentes de esfuerzos en coordenadas polares

$$\sigma_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} = \frac{A}{r^2} + 2B - 2C \cos 2\theta - 6 \frac{D}{r^4} \cos 2\theta - 4 \frac{E}{r^2} \cos 2\theta \quad (A6)$$

$$\sigma_\theta = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} = -\frac{A}{r^2} + 2B + 2C \cos 2\theta + 6 \frac{D}{r^4} \cos 2\theta \quad (A7)$$

$$\tau_{r\theta} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r \partial \theta} = 2 \left( C - 3 \frac{D}{r^4} - \frac{E}{r^2} \right) \sin 2\theta \quad (A8)$$

Se igualan las expresiones A6 y A8 con las condiciones de frontera cuando  $r \rightarrow \infty$  y para  $r=a$  (ecuaciones A1, A2, A3 y A4).

Cuando  $r \rightarrow \infty$ : 
$$2B - 2C \cos 2\theta = \frac{S_x + S_y}{2} + \frac{S_x - S_y}{2} \cos 2\theta \quad (A9)$$

$$2C \sin 2\theta = -\frac{S_x - S_y}{2} \sin 2\theta \quad (A10)$$

Por lo tanto: 
$$2B = \frac{S_x + S_y}{2} \quad (A11)$$

$$2C = -\frac{S_x - S_y}{2} \quad (A12)$$

Para  $r = a$ : 
$$\frac{A}{a^2} + \frac{S_x + S_y}{2} + \frac{S_x - S_y}{2} \cos 2\theta - 6 \frac{D}{a^4} \cos 2\theta - 4 \frac{E}{a^2} \cos 2\theta = p_i \quad (A13)$$

$$-\frac{S_x - S_y}{2} - 6 \frac{D}{a^4} - 2 \frac{E}{a^2} = 0 \quad (A14)$$

Por lo tanto: 
$$A = \left( p_i - \frac{S_x + S_y}{2} \right) a^2 \quad (A15)$$

$$6\frac{D}{a^4} + 4\frac{E}{a^2} = \frac{S_x - S_y}{2} \quad (\text{A16})$$

$$6\frac{D}{r^4} + 2\frac{E}{r^2} = -\frac{S_x - S_y}{2} \quad (\text{A17})$$

Resolviendo el sistema conformado por (A16) y (A17) y se obtienen las constantes  $D$  y  $E$ .

$$D = \frac{S_x - S_y}{2} a^2 \quad (\text{A18})$$

$$E = -\frac{S_x - S_y}{4} a^4 \quad (\text{A19})$$

Se sustituyen los valores de los parámetros  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  y  $E$  en las expresiones para las componentes de esfuerzos (A6, A7 y A8) y se reordenan los términos, para llegar a la forma final de la expresión como se muestra a continuación:

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{S_x + S_y}{2} \left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right) + \frac{S_x - S_y}{2} \left(1 + 3\frac{a^4}{r^4} - 4\frac{a^2}{r^2}\right) \cos 2\theta + p_i \frac{a^2}{r^2} \\ \sigma_\theta &= \frac{S_x + S_y}{2} \left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right) - \frac{S_x - S_y}{2} \left(1 + 3\frac{a^4}{r^4}\right) \cos 2\theta - p_i \frac{a^2}{r^2} \\ \tau_{r\theta} &= -\frac{S_x - S_y}{2} \left(1 - \frac{3a^4}{r^4} + \frac{2a^2}{r^2}\right) \operatorname{sen} 2\theta \end{aligned} \quad (\text{A20})$$

Las ecuaciones A1 y A2, representan los esfuerzos radiales y cortantes iniciales. Si sustraemos estas ecuaciones de las correspondientes al conjunto de ecuaciones A20, obtenemos los incrementos de esfuerzos inducidos por la excavación del túnel.

$$\begin{aligned} \Delta\sigma_r &= -\frac{S_x + S_y}{2} \left(\frac{a^2}{r^2}\right) + \frac{S_x - S_y}{2} \left(3\frac{a^4}{r^4} - 4\frac{a^2}{r^2}\right) \cos 2\theta + p_i \frac{a^2}{r^2} \\ \Delta\sigma_\theta &= \frac{S_x + S_y}{2} \left(\frac{a^2}{r^2}\right) - \frac{S_x - S_y}{2} \left(3\frac{a^4}{r^4}\right) \cos 2\theta - p_i \frac{a^2}{r^2} \\ \Delta\tau_{r\theta} &= \frac{S_x - S_y}{2} \left(\frac{3a^4}{r^4} - \frac{2a^2}{r^2}\right) \operatorname{sen} 2\theta \end{aligned} \quad (\text{A21})$$

Para obtener las expresiones que definen los desplazamientos radiales y circunferenciales, es necesario establecer la ley de Hooke bajo la condición de deformación plana

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial r} &= \frac{1}{E} \left[ (1 - \nu^2) \Delta\sigma_r - \nu(1 + \nu) \Delta\sigma_\theta \right] \\ \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} &= \frac{1}{E} \left[ (1 - \nu^2) \Delta\sigma_\theta - \nu(1 + \nu) \Delta\sigma_r \right] \\ \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} &= \frac{2(1 - \nu)}{E} \tau_{r\theta} \end{aligned} \quad (\text{A22})$$

Sustituyendo en las ecuaciones (A22) los incrementos de esfuerzos (A21), se obtiene:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial r} &= \frac{1-\nu^2}{E} \left[ -\left(\frac{S_x + S_y}{2}\right)\left(\frac{a^2}{r^2}\right) + \left(\frac{S_x - S_y}{2}\right)\left(\frac{3a^4}{r^4} - \frac{4a^2}{r^2}\right)\cos 2\theta + p_i \frac{a^2}{r^2} \right] \\
&\quad - \frac{\nu(1+\nu)}{E} \left[ \left(\frac{S_x + S_y}{2}\right)\left(\frac{a^2}{r^2}\right) - \left(\frac{S_x - S_y}{2}\right)\left(\frac{3a^4}{r^4}\right)\cos 2\theta - p_i \frac{a^2}{r^2} \right] \\
\frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} &= \frac{1-\nu^2}{E} \left[ \left(\frac{S_x + S_y}{2}\right)\left(\frac{a^2}{r^2}\right) - \left(\frac{S_x - S_y}{2}\right)\left(\frac{3a^4}{r^4}\right)\cos 2\theta - p_i \frac{a^2}{r^2} \right] \\
&\quad - \frac{\nu(1+\nu)}{E} \left[ -\left(\frac{S_x + S_y}{2}\right)\left(\frac{a^2}{r^2}\right) + \left(\frac{S_x - S_y}{2}\right)\left(\frac{3a^4}{r^4} - \frac{4a^2}{r^2}\right)\cos 2\theta + p_i \frac{a^2}{r^2} \right] \\
\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{\nu}{r} &= -\frac{2(1-\nu)}{E} \left(\frac{S_x - S_y}{2}\right)\left(\frac{3a^4}{r^4} + \frac{2a^2}{r^2}\right)\sin 2\theta
\end{aligned} \tag{A23}$$

Realizando las integrales correspondientes, se obtienen los desplazamientos radiales,  $u$  y circunferenciales,  $v$ :

$$\begin{aligned}
u &= \frac{1-\nu^2}{E} \left[ \frac{S_x + S_y}{2} \frac{a^2}{r} + \frac{S_x - S_y}{2} \left(4 \frac{a^2}{r} - \frac{a^4}{r^3}\right)\cos 2\theta - p_i \frac{a^2}{r} \right] \\
&\quad + \frac{\nu(1+\nu)}{E} \left[ \frac{S_x + S_y}{2} \frac{a^2}{r} - \frac{S_x - S_y}{2} \frac{a^4}{r^3}\cos 2\theta - p_i \frac{a^2}{r} \right] \\
v &= \frac{1-\nu^2}{E} \left[ -\frac{S_x - S_y}{2} \left(\frac{a^4}{r^3} + 2 \frac{a^2}{r}\right)\sen 2\theta \right] - \frac{\nu(1+\nu)}{E} \left[ \frac{S_x - S_y}{2} \left(\frac{a^4}{r^3} - 2 \frac{a^2}{r}\right)\sen 2\theta \right]
\end{aligned} \tag{A24}$$

## ANEXO B. CONSIDERACIÓN DE REVESTIMIENTO INCOMPRESIBLE BAJO LAS CONDICIONES DE ESFUERZO PLANO Y DEFORMACIÓN PLANA

La ley de Hooke bajo la condición de esfuerzo plano y en coordenadas polares, es la siguiente:

$$\varepsilon_r = \frac{1}{E}(\sigma_r - \nu\sigma_\theta) \tag{B1}$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{1}{E}(\sigma_\theta - \nu\sigma_r) \tag{B2}$$

$$\varepsilon_L = -\frac{\nu}{E}(\sigma_r + \sigma_\theta) \tag{B3}$$

La condición de revestimiento incompresible significa que las deformaciones tangenciales son nulas; por lo tanto, de la ecuación B2 tenemos:

$$\sigma_\theta = \nu\sigma_r \tag{B4}$$

De la ecuación B4 tenemos que la relación entre esfuerzos tangenciales y radiales es:



$$K_{EP} = \frac{\sigma_{\theta}}{\sigma_r} = \nu \quad (\text{B5})$$

La ley de Hooke bajo la condición de deformación plana y en coordenadas polares, es la siguiente:

$$\varepsilon_r = \frac{1}{E} \left[ (1-\nu^2)\sigma_r - \nu(1+\nu)\sigma_{\theta} \right] \quad (\text{B6})$$

$$\varepsilon_{\theta} = \frac{1}{E} \left[ (1-\nu^2)\sigma_{\theta} - \nu(1+\nu)\sigma_r \right] \quad (\text{B7})$$

Aplicando la condición de revestimiento incompresible en la ecuación B7, tenemos:

$$\sigma_{\theta} = \frac{\nu}{1-\nu} \sigma_r \quad (\text{B8})$$

Entonces, la relación entre esfuerzos tangenciales y radiales es:

$$K_{DP} = \frac{\sigma_{\theta}}{\sigma_r} = \frac{\nu}{1-\nu} \quad (\text{B9})$$

A continuación se obtienen intervalos de las relaciones de esfuerzos (ecuaciones B5 y B9), correspondientes al siguiente rango de valores de la relación de Poisson:

$$\nu \in [0-0.5] \quad (\text{B10})$$

En este trabajo se acepta que la condición de deformación plana representa adecuadamente los análisis de una sección transversal de un túnel. Se calcula el error que se comete al utilizar la condición de esfuerzo plano, como condición de análisis de secciones de este tipo de estructuras.

**Tabla B1. Intervalos de las relaciones de esfuerzos para las condiciones de esfuerzo plano y deformación plana**

$\nu$	$K_{EP}$	$K_{DP}$	error, %
0.00	0.00	0.00	0
0.05	0.05	0.05	5
0.10	0.10	0.11	10
0.15	0.15	0.18	15
0.20	0.20	0.25	20
0.25	0.25	0.33	25
0.30	0.30	0.43	30
0.35	0.35	0.54	35
0.40	0.40	0.67	40
0.45	0.45	0.82	45
0.50	0.50	1.00	50

## ANEXO C. SOLUCIÓN ANALÍTICA PARA TÚNELES CIRCULARES (PÉREZ Y AUVINET, 2012c)

La distribución de esfuerzos radiales en la interfaz terreno-revestimiento de un túnel depende de variables como: parámetros de resistencia y rigidez del material, diámetro y profundidad de la excavación, estado de esfuerzos inicial en el terreno y, a largo plazo, de procesos de consolidación y/o

creep. En el presente trabajo se sugiere representar dicha distribución con el siguiente polinomio de cuarto grado:

$$f_{\theta} = N\text{sen}^4\theta + O\text{sen}^3\theta + P\text{sen}^2\theta + Q\text{sen}\theta + R \quad (\text{C1})$$

donde:  $f_{\theta}$  representa la distribución de esfuerzos radiales en la interfaz terreno-revestimiento;  $N$ ,  $O$ ,  $P$ ,  $Q$  y  $R$  son constantes del polinomio, por el momento desconocidas.

La condición de frontera representada por la ecuación C1, no se adapta a la forma de la función potencial de esfuerzos (ecuación 2.8a). Es posible cambiar la forma de la ecuación C1, utilizando las siguientes identidades trigonométricas:

$$\begin{aligned} \text{sen}^2\theta &= \frac{1 - \cos 2\theta}{2} \\ \text{sen}^3\theta &= \frac{3}{4}\text{sen}\theta - \frac{1}{4}\text{sen}3\theta \end{aligned} \quad (\text{C2})$$

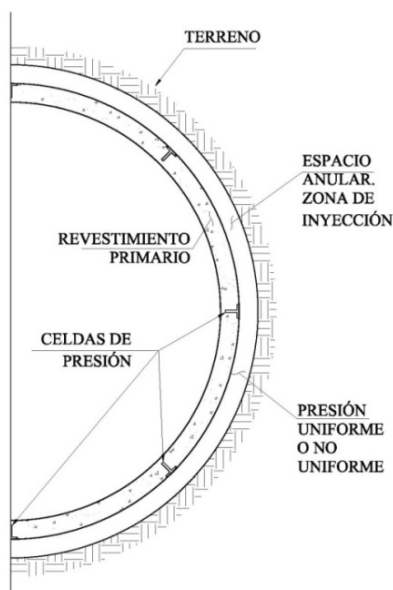
A partir de las ecuaciones C1 y C2, se llega a la siguiente forma del polinomio:

$$f_{\theta} = f_4 \cos 4\theta + f_3 \text{sen} 3\theta + f_2 \cos 2\theta + f_1 \text{sen}\theta + f_0 \quad (\text{C3})$$

donde  $f_4$ ,  $f_3$ ,  $f_2$ ,  $f_1$  y  $f_0$ , son las nuevas constantes aún desconocidas.

La ecuación C3, representa la misma distribución de esfuerzos que C1, pero con la forma de la ecuación 2.8a. De esta manera resulta más fácil proponer una función potencial que satisfaga las condiciones de frontera.

Para resolver esta ecuación se proponen valores de esfuerzos radiales en puntos de interés o en puntos correspondientes a la ubicación de instrumentos instalados, sobre la interfaz terreno-revestimiento. La figura C1, muestra una posible ubicación de instrumentos de medición (celdas de presión), instalados en el perímetro exterior del revestimiento primario (lugar geométrico de la interfaz terreno-revestimiento).



**Figura C1. Celdas de presión sobre el revestimiento primario y espacio anular.**

Los valores del ángulo polar  $\theta$ :  $90^\circ$ ,  $45^\circ$ ,  $0^\circ$ ,  $-45^\circ$  y  $-90^\circ$ , corresponden a la ubicación de las celdas de presión mostradas en la figura C1. Estos valores se sustituyen uno por uno en la ecuación C3. De esta manera se establece la ecuación matricial C4. Para cada valor de  $\theta$  corresponde un valor de esfuerzo radial  $f_\theta$ .

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_4 \\ f_3 \\ f_2 \\ f_1 \\ f_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{\theta=90^\circ} \\ f_{\theta=45^\circ} \\ f_{\theta=0^\circ} \\ f_{\theta=-45^\circ} \\ f_{\theta=-90^\circ} \end{bmatrix} \quad (C4)$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones C4, se obtienen las constantes  $f_4, f_3, f_2, f_1$  y  $f_0$ :

$$\begin{aligned} f_4 &= \frac{1}{8}(f_{90^\circ} + f_{-90^\circ}) + \frac{1}{4}(f_{0^\circ} - f_{45^\circ} - f_{-45^\circ}) \\ f_3 &= \frac{1}{4}(f_{-90^\circ} - f_{90^\circ}) + \frac{\sqrt{2}}{4}(f_{45^\circ} - f_{-45^\circ}) \\ f_2 &= \frac{1}{2}f_{0^\circ} - \frac{1}{4}(f_{90^\circ} + f_{-90^\circ}) \\ f_1 &= \frac{1}{4}(f_{90^\circ} - f_{-90^\circ}) + \frac{\sqrt{2}}{4}(f_{45^\circ} - f_{-45^\circ}) \\ f_0 &= \frac{1}{8}(f_{90^\circ} + f_{-90^\circ}) + \frac{1}{4}(f_{0^\circ} + f_{45^\circ} + f_{-45^\circ}) \end{aligned} \quad (C5)$$

donde  $f_{90^\circ}$ ,  $f_{45^\circ}$ ,  $f_{0^\circ}$ ,  $f_{45^\circ}$  y  $f_{-90^\circ}$ , son valores puntuales de incrementos de esfuerzos radiales sobre el perímetro externo del revestimiento primario y en los ángulos indicados por los subíndices.

Se sugiere un segundo polinomio para representar la distribución de esfuerzos cortantes en la interfaz terreno-revestimiento.

$$g_\theta = g_4 \text{sen}4\theta + g_3 \text{cos}3\theta + g_2 \text{sen}2\theta + g_1 \text{cos}\theta \quad (C6)$$

donde  $g_\theta$  representa la distribución de esfuerzos cortantes en la interfaz terreno-revestimiento;  $g_4$ ,  $g_3$ ,  $g_2$  y  $g_1$  son constantes del polinomio, por el momento desconocidas.

Para determinar las constantes anteriores, es necesario resolver un sistema de ecuaciones como en el caso de  $f_\theta$ . Por simetría los esfuerzos cortantes en  $\theta=90^\circ$ ,  $0^\circ$  y  $-90^\circ$ , son iguales a cero; entonces, para valores de  $\theta$  igual a  $45^\circ$  y  $-45^\circ$ , se tiene:

$$g_1 = \frac{\sqrt{2}}{4}(g_{45^\circ} + g_{-45^\circ}); g_2 = \frac{1}{2}(g_{45^\circ} - g_{-45^\circ}); g_3 = -\frac{\sqrt{2}}{4}(g_{45^\circ} + g_{-45^\circ}) \quad (C7)$$

No es común medir esfuerzos cortantes en la interfaz terreno-revestimiento, por lo que en este trabajo se proponen relaciones entre los esfuerzos cortantes y las constantes del polinomio  $f_\theta$ . Una distribución

de esfuerzos cortantes en la interfaz terreno-revestimiento del túnel puede obtenerse por derivación a partir de la ecuación C3.

$$g_{\theta} = -\frac{\partial f_{\theta}}{\partial \theta} = f_4 \operatorname{sen}(4\theta) - f_3 \cos(3\theta) + f_2 \operatorname{sen}(2\theta) - f_1 \cos(\theta) \quad (\text{C8})$$

Con las ecuaciones C6, C7 y C8, se establecen relaciones entre los esfuerzos cortantes y las constantes del polinomio  $f_{\theta}$ , las cuales son:

$$\begin{aligned} g_4 &= f_4 \\ g_{45^\circ} &= -\sqrt{2}f_1 + f_2 = \tau_{45^\circ}; & g_{-45^\circ} &= -\sqrt{2}f_2 - f_2 = \tau_{-45^\circ} \\ g_{0^\circ} &= 0 = \tau_{0^\circ}; & g_{90^\circ} &= g_{-90^\circ} = 0 = \tau_{\pm 90^\circ} \end{aligned} \quad (\text{C9})$$

De esta manera se pueden calcular los esfuerzos cortantes  $\tau_{45^\circ}$  y  $\tau_{-45^\circ}$ , a partir de valores de esfuerzos radiales medidos o propuestos, en la interfaz terreno revestimiento.

La representación en coordenadas polares del estado inicial de esfuerzos es la siguiente:

$$\sigma_r = \frac{S_x + S_y}{2} + \frac{S_x - S_y}{2} \cos 2\theta \quad (\text{C10})$$

$$\sigma_{\theta} = \frac{S_x + S_y}{2} - \frac{S_x - S_y}{2} \cos 2\theta \quad (\text{C11})$$

$$\tau_{r\theta} = -\frac{S_x - S_y}{2} \sin 2\theta \quad (\text{C12})$$

donde  $S_x$  y  $S_y$  son los esfuerzos principales iniciales, horizontales y verticales, respectivamente; es decir, representan el estado inicial de esfuerzos en coordenadas cartesianas, en el medio antes de la excavación.

Se acepta que cuando el túnel ha sido construido, el estado inicial de esfuerzos en el medio se encuentra suficientemente alejado del túnel; por lo tanto, las ecuaciones C10, C11 y C12, representan la condición de frontera cuando  $r \rightarrow \infty$ .

La función potencial de esfuerzos utilizada para obtener la solución, se forma con los siguientes elementos de la función potencial general de esfuerzos de Airy (ecuación 2.8a):

$$\begin{aligned} \varphi &= (Ar^{-2} + Br^{-4}) \cos 4\theta + (Cr^{-3} + Dr^{-1}) \operatorname{sen} 3\theta + (Er^2 + F + Gr^{-2}) \cos 2\theta \\ &+ Hr[\theta \cos \theta + \ln r \operatorname{sen} \theta] + Ir^{-1} \operatorname{sen} \theta + J \ln r + Lr^2 \end{aligned} \quad (\text{C13})$$

La forma y cantidad de constantes involucradas en cada término permiten satisfacer las condiciones de frontera del problema. La solución se obtiene por derivación de la ecuación C13, a partir de las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} = -2(9Ar^{-4} + 10Br^{-6}) \cos(4\theta) - 2(6Cr^{-5} + 5Dr^{-3}) \operatorname{sen}(3\theta) \\ &- 2(E + 2Fr^{-2} + 3Gr^{-4}) \cos(2\theta) - (Hr^{-1} + 2Ir^{-3}) \operatorname{sen}(\theta) + Jr^{-2} + 2L \end{aligned} \quad (\text{C14})$$

$$\sigma_{\theta} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} = 2(3Ar^{-4} + 10Br^{-6})\cos(4\theta) + 2(6Cr^{-5} + Dr^{-3})\text{sen}(3\theta) + 2(E + 3Gr^{-4})\cos(2\theta) + (Hr^{-1} + 2Ir^{-3})\text{sen}(\theta) - Jr^{-2} + 2L \quad (C15)$$

$$\tau_{r\theta} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r \partial \theta} = -4(3Ar^{-4} + 5Br^{-6})\text{sen}(4\theta) + 6(2Cr^{-5} + Dr^{-3})\cos(3\theta) + 2(E - Fr^{-2} - 3Gr^{-4})\text{sen}(2\theta) - (Hr^{-1} - 2Ir^{-3})\cos(\theta) \quad (C16)$$

Se igualan las expresiones C14 y C16 con las condiciones de frontera C10 y C12, cuando  $r \rightarrow \infty$  y con las condiciones de frontera C3 y C6, cuando  $r=a$ . Resolviendo los sistemas de ecuaciones, se obtienen las siguientes constantes involucradas de las ecuaciones C14, C15 y C16:

$$A = -\frac{1}{6}a^4(f_4 - g_4); \quad B = \frac{1}{20}a^6(2f_4 - 3g_4); \quad C = \frac{1}{24}a^5(3f_3 + 5g_3); \quad D = -\frac{1}{4}a^3(f_3 + g_3)$$

$$E = -\frac{1}{4}(S_x - S_y); \quad F = \frac{1}{2}a^2(S_x - S_y - f_2 + g_2); \quad G = -\frac{1}{12}a^4[3(S_x - S_y) - 2f_2 + 4g_2]$$

$$H = -\frac{1}{2}a(f_1 + g_1); \quad I = -\frac{1}{4}a^3(f_1 - g_1); \quad J = -\frac{1}{2}a^2(S_x + S_y - 2f_0); \quad L = \frac{1}{4}(S_x + S_y)$$

Para obtener las expresiones que definen los desplazamientos radiales y circunferenciales, es necesario establecer la ley de Hooke bajo la condición de deformación plana y tomar en cuenta los incrementos de esfuerzos.

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{E} [(1 - \nu^2)\Delta\sigma_r - \nu(1 + \nu)\Delta\sigma_{\theta}]$$

$$\frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} = \frac{1}{E} [(1 - \nu^2)\Delta\sigma_{\theta} - \nu(1 + \nu)\Delta\sigma_r] \quad (C17)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{\nu}{r} = \frac{2(1 - \nu)}{E} \tau_{r\theta}$$

Realizando las integrales correspondientes, se obtienen los desplazamientos radiales  $u$  y circunferenciales  $v$ , en el terreno circundante al túnel circular:

$$u_r = \frac{1 + \nu}{E} \left\{ \begin{array}{l} 2[Ar^{-3}(3 - 2\nu) + 2Br^{-5}]\cos(4\theta) + [3Cr^{-4} + Dr^{-2}(5 - 4\nu)]\text{sen}(3\theta) \\ - \{2[Er - 2Fr^{-1}(1 - \nu) - Gr^{-3}] + 1/2(S_x - S_y)r\}\cos(2\theta) \\ - (H \ln r - Ir^{-2})\text{sen}(\theta) - \frac{1}{2}[2Jr^{-1} + (S_x + S_y - 4L)(1 - 2\nu)r] \end{array} \right\} \quad (C18)$$

$$v_{\theta} = \frac{1 + \nu}{E} \left\{ \begin{array}{l} 4(Ar^{-3}\nu + Br^{-5})\text{sen}(4\theta) - [3Cr^{-4} - Dr^{-2}(1 - 4\nu)]\cos(3\theta) \\ + \{2[Er - Fr^{-1}(1 - 2\nu) + Gr^{-3}] + 1/2(S_x - S_y)r\}\text{sen}(2\theta) \\ - [H(1 + \ln r) + Ir^{-2}]\cos(\theta) \end{array} \right\} \quad (C19)$$

Los esfuerzos que se desarrollan en la interfaz terreno-revestimiento, afectan de igual manera al terreno y al revestimiento. Para el revestimiento, las condiciones de frontera cuando  $r=a$  son las que se representan mediante las expresiones C3 y C6. Las condiciones de frontera para  $r=b$  (ecuación C20), son esfuerzos radiales y cortantes iguales a cero.

$$\sigma_r = 0; \quad \tau_{r\theta} = 0 \quad (C20)$$

La función potencial de esfuerzos que satisface las nuevas condiciones de frontera del problema es:

$$\begin{aligned} \phi = & (Ar^4 + Br^{-4} + Cr^{-2} + Dr^6)\cos(4\theta) + (Er^3 + Fr^{-3} + Gr^{-1} + Hr^5)\text{sen}(3\theta) \\ & + (Ir^2 + Jr^{-2} + K + Lr^4)\cos(2\theta) + (Mr^{-1} + Nr^3)\text{sen}(\theta) \\ & + Or(\ln(r)\text{sen}(\theta) + 2\theta \cos(\theta)) + Pr(\theta^2 - \ln(r)^2)\text{sen}(\theta) + Qr^2 + R\ln(r) \end{aligned} \quad (C21)$$

El término  $Pr[\theta^2 - \ln(r)^2]\text{sen}(\theta)$  no pertenece a la función general de esfuerzos de Airy. Este término se propone en este trabajo con la finalidad de hacer linealmente independiente el sistema de ecuaciones correspondiente y para satisfacer una de las condiciones de frontera de este problema.

A partir de la función potencial de esfuerzos (ecuación C21) y utilizando las ecuaciones 2.8b, se obtienen las componentes de esfuerzos radiales, tangenciales y cortantes.

$$\begin{aligned} \sigma_r = & -2(6Ar^2 + 10Br^{-6} + 9Cr^{-4} + 5Dr^4)\cos(4\theta) - 2(3Er + 6Fr^{-5} + 5Gr^{-3} + 2Hr^3)\text{sen}(3\theta) \\ & - 2(I + 3Jr^{-4} + 2Kr^{-2})\cos(2\theta) - [2(Mr^{-3} - Nr) + 3Or^{-1}]\text{sen}(\theta) \\ & + 2Pr^{-1}[\text{sen}(\theta) + 2\theta \cos(\theta) - \ln(r)\text{sen}(\theta)] + 2Q + Rr^{-2} \end{aligned} \quad (C22)$$

$$\begin{aligned} \sigma_\theta = & 2(6Ar^2 + 10Br^{-6} + 3Cr^{-4} + 15Dr^4)\cos(4\theta) + 2(3Er + 6Fr^{-5} + Gr^{-3} + 10Hr^3)\text{sen}(3\theta) \\ & + 2(I + 3Jr^{-4} + 6Lr^2)\cos(2\theta) + \{2[Mr^{-3} + 3Nr - Pr^{-1}(1 + \ln r)] + Or^{-1}\}\text{sen}(\theta) \\ & + 2Q - Rr^{-2} \end{aligned} \quad (C23)$$

$$\begin{aligned} \tau_{r\theta} = & 4(3Ar^2 - 5Br^{-6} - 3Cr^{-4} + 5Dr^4)\text{sen}(4\theta) - 6(Er - 2Fr^{-5} - Gr^{-3} + 2Hr^3)\cos(3\theta) \\ & + 2(I - 3Jr^{-4} - Kr^{-2} + 3Lr^2)\text{sen}(2\theta) + [2(Mr^{-3} - Nr + Pr^{-1}\ln r) - Or^{-1}]\cos(\theta) \end{aligned} \quad (C24)$$

Para obtener las expresiones que definen los desplazamientos radiales  $u$  y circunferenciales  $v$ , en el interior del revestimiento, es necesario establecer la ley de Hooke bajo la condición de deformación plana y tomar en cuenta los incrementos de esfuerzos, como en el caso de la solución para el terreno (ecuación C17). Realizando las integrales correspondientes, se obtienen:

$$u_r = -\frac{1+v}{E} \left\{ \begin{aligned} & 2[2(Ar^3 - Br^{-5}) - Cr^{-3}(3 - 2v) + Dr^5(1 + 2v)]\cos(4\theta) \\ & + [3(Er^2 - Fr^{-4}) - Gr^{-2}(5 - 4v) + Hr^4(1 + 4v)]\text{sen}(3\theta) \\ & + 2\{Ir - Jr^{-3} - 2[Kr^{-1}(1 - v) - Lr^3v]\}\cos(2\theta) \\ & - \{Mr^{-2} + Nr^2(1 - 2v) - O\ln r(3 - 2v) + P[2 - (1 - 2v)\ln r]\ln r\}\text{sen}(\theta) \\ & - 4P\ln r(1 - v)\theta \cos(\theta) - 2Qr(1 - 2v) + Rr^{-1} \end{aligned} \right\} \quad (C25)$$

$$v_\theta = \frac{1+v}{E} \left\{ \begin{aligned} & 4[Ar^3 + Br^{-5} + Cr^{-3}v + Dr^5(2 - v)]\text{sen}(4\theta) \\ & - [3(Er^2 + Fr^{-4}) - Gr^{-2}(1 - 4v) + Hr^4(7 - 4v)]\cos(3\theta) \\ & + 2[Ir + Jr^{-3} - Kr^{-1}(1 - 2v) + Lr^3(3 - 2v)]\text{sen}(2\theta) \\ & - \left\{ \begin{aligned} & Mr^{-2} + Nr^2(5 - 4v) + O[1 + 2v + (3 - 2v)\ln r] - \\ & P[2 - 4v - (1 - 2v)\ln^2 r] \end{aligned} \right\} \cos(\theta) \\ & + 4P[v + (1 - v)\ln r]\theta \text{sen}(\theta) \end{aligned} \right\} \quad (C26)$$

Igualando las expresiones C22 y C24, con las condiciones de frontera C20 cuando  $r \rightarrow b$ , con las condiciones de frontera C3 y C6 cuando  $r=a$  y resolviendo los sistemas de ecuaciones correspondientes, se obtienen las siguientes constantes involucradas en las ecuaciones C22 a la C26.

$$\begin{aligned}
 A &= -\frac{(a^{12} + a^{10}b^2 + a^8b^4 + a^6b^6 - 2a^4b^8)f_1}{3(a^{14} + a^{12}b^2 + a^{10}b^4 - 15a^8b^6 + 15a^6b^8 - a^4b^{10} - a^2b^{12} - b^{14})} \\
 B &= \frac{(a^{10}b^{10} - 5a^{12}b^8 + a^8b^{12} + a^6b^{14})f_1}{5(a^{14} + a^{12}b^2 + a^{10}b^4 - 15a^8b^6 + 15a^6b^8 - a^4b^{10} - a^2b^{12} - b^{14})} \\
 C &= -\frac{(a^{10}b^8 - 8a^{12}b^6 + a^8b^{10} + a^6b^{12} + a^4b^{14})f_1}{6(a^{14} + a^{12}b^2 + a^{10}b^4 - 15a^8b^6 + 15a^6b^8 - a^4b^{10} - a^2b^{12} - b^{14})} \\
 D &= \frac{a^4(3a^8 - 8a^2b^6 + 5b^8)f_1}{10(a^{16} - 16a^{10}b^6 + 30a^8b^8 - 16a^6b^{10} + b^{16})} \\
 E &= -\frac{a^3[(a^6 + a^4b^2 + a^2b^4)(3f_2 - g_2) + 9b^6(f_2 + g_2)]}{12(a^2 - b^2)^3(a^4 + 4a^2b^2 + b^4)} \\
 F &= -\frac{a^5b^6[4a^4(3f_2 - g_2) + (b^4 + a^2b^2)(3f_2 + 5g_2)]}{24(a^2 - b^2)^3(a^4 + 4a^2b^2 + b^4)} \\
 G &= \frac{a^3b^4[a^6(3f_2 - g_2) + (b^6 + a^2b^4 + a^4b^2)(f_2 + g_2)]}{4(a^2 - b^2)^3(a^4 + 4a^2b^2 + b^4)} \\
 H &= \frac{a^3[a^6/4(f_2 - g_2) - b^6(f_2 + g_2) + a^2b^4/4(3f_2 + 5g_2)]}{2(a^2 - b^2)^4(a^4 + 4a^2b^2 + b^4)} \\
 I &= -\frac{a^2[(a^4 + 2b^4 + a^2b^2)f_3 - 2b^4g_3]}{2(a^2 - b^2)^3}; & J &= -\frac{a^4b^4[(3a^2 + b^2)f_3 - 2b^2g_3]}{6(a^2 - b^2)^3} \\
 K &= \frac{a^2b^2[(2a^4 + b^4 + a^2b^2)f_3 - (b^4 + a^2b^2)g_3]}{2(a^2 - b^2)^3}; & L &= \frac{a^2[(a^2 + 3b^2)f_3 + (a^2 - 3b^2)g_3]}{6(a^2 - b^2)^3} \\
 M &= -\frac{[a^3b^4(1 - 4\ln a + \ln b - \ln r + 2\theta \cot \theta) - a^5b^2(1 - 3\ln b - \ln r + 2\theta \cot \theta)]f_4}{8(a^4 - b^4)(\ln a - \ln b)} \\
 &\quad - \frac{[a^3b^4(1 - 3\ln b - \ln r + 2\theta \cot \theta) - a^5b^2(1 - 3\ln b - \ln r + 2\theta \cot \theta)]g_4}{8(a^4 - b^4)(\ln a - \ln b)} \\
 N &= -\frac{[a^3(1 - 4\ln a + \ln b - \ln r + 2\theta \cot \theta) - ab^2(1 - 3\ln b - \ln r + 2\theta \cot \theta)]f_4}{8(a^4 - b^4)(\ln a - \ln b)} \\
 &\quad - \frac{[a^3(1 - 3\ln b - \ln r + 2\theta \cot \theta) - ab^2(1 - 3\ln b - \ln r + 2\theta \cot \theta)]g_4}{8(a^4 - b^4)(\ln a - \ln b)} \\
 O &= \frac{a(f_4 + g_4)[2\theta + \tan \theta(1 + \ln b - \ln r)]}{4\tan \theta(\ln a - \ln b)}; & P &= \frac{a(f_4 + g_4)}{2(\ln a - \ln b)}; & Q &= \frac{a^2f_5}{2(a^2 - b^2)}; & R &= -\frac{a^2b^2f_5}{a^2 - b^2}
 \end{aligned}$$