CAPÍTULO II

ANTECEDENTES DE TEORÍA ELECTROMAGNÉTICA.

En este capítulo se busca aportar los conocimientos básicos de la teoría electromagnética, la cual constituye el marco teórico de referencia del trabajo expuesto. Se inician los antecedentes con las ecuaciones de Maxwell, que rigen el comportamiento de los campos electromagnéticos, seguido de las propiedades del medio como la permitividad eléctrica, la conductividad eléctrica y la permeabilidad magnética, y cuyo vínculo con los campos se conoce como relaciones constitutivas. Se exponen también las condiciones de frontera, las cuales expresan el comportamiento de las componentes de los campos en una interfaz, continuando con la ecuación de onda, de cuya solución se obtienen características relevantes, finalizando con los modos de propagación.

II.1. Ecuaciones de Maxwell.

Las expresiones matemáticas que explican la relación existente entre los campos eléctrico, magnético y sus fuentes son conocidas como las ecuaciones de Maxwell. Vale la pena definir de manera simplificada que un campo es una función en el espacio de tres dimensiones. Aunque las ecuaciones son producto de múltiples investigaciones hechas por científicos como Faraday, Ampere, Gauss, Lenz, Volta y Weber, reciben el nombre de ecuaciones de Maxwell por ser este último quien las lleve a su forma final. Estas ecuaciones pueden ser escritas de forma diferencial o integral, para fines de este trabajo se utilizarán principalmente las ecuaciones de Maxwell en su forma diferencial.

II.1.1. Ecuaciones de Maxwell en Forma Diferencial.

La forma diferencial de las ecuaciones de Maxwell es comúnmente la forma más utilizada para resolver problemas de electromagnetismo con valores en la frontera. Son usadas para describir el campo electromagnético en función de sus fuentes, como son densidad de corriente y densidad de carga, en cualquier punto del espacio. Las ecuaciones de Maxwell pueden ser representadas también en el dominio de la frecuencia, siendo en el dominio del tiempo la representación que prevalecerá para este trabajo, y que a continuación se presenta:

$$\nabla \times \bar{E} = -\frac{\partial \bar{B}}{\partial t} \tag{2.1}$$

$$\nabla \times \bar{H} = \frac{\partial \bar{D}}{\partial t} + \bar{J} \tag{2.2}$$

$$\nabla \cdot \bar{D} = \rho_v \tag{2.3}$$

$$\nabla \cdot \bar{B} = 0 \tag{2.4}$$

$\bar{E}$: Campo eléctrico [**V**olts/**m**etros]

$\bar{H}$: Campo magnético [**A**mperes/**m**etros]

$\bar{B}$: Densidad de flujo magnético [**W**e**b**er/**m**etros^2]

$\bar{D}$: Densidad de flujo eléctrico [**C**oulombs/**m**etros^2]

$\bar{J}$: Densidad de corriente eléctrica [**A**mperes/**m**etros^2]

ρ: Densidad volumétrica de carga [**C**oulombs/**m**etros^3]

La ecuación (2.1) es conocida como la ley de inducción de Faraday, la cual muestra que la variación respecto al tiempo de la densidad de flujo magnético $\overline{\boldsymbol{B}}$ genera un campo eléctrico $\overline{\boldsymbol{E}}$ de forma rotacional, o alternativamente una fuente rotacional de campo eléctrico produce una variación de densidad de flujo magnético cambiante en el tiempo. Figura 2.1.

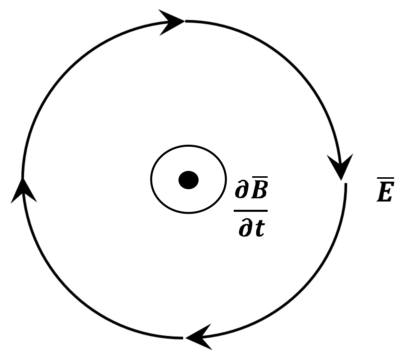

Figura 2.1. Representación de la circulación del campo eléctrico alrededor de la densidad de flujo magnético (Ley de Faraday).

La ecuación (2.2) es conocida como la ley de Ampere. Esta expresa que la variación en el tiempo de la densidad de flujo eléctrico $\overline{\boldsymbol{D}}$ o de la densidad de corriente eléctrica $\overline{\boldsymbol{J}}$ genera un campo magnético $\overline{\boldsymbol{H}}$ de forma rotacional. Alternativamente se puede interpretar que una fuente rotacional de campo magnético produce una variación de densidad de flujo eléctrico y de corriente. Figura 2.2

La ecuación (2.3) es conocida como la ley de Gauss. Nos explica que las cargas eléctricas son fuentes puntuales del campo eléctrico. Representa también que el número de líneas de densidad de flujo eléctrico es proporcional a la carga total encerrada por la superficie en estudio “S”. Figura 2.3

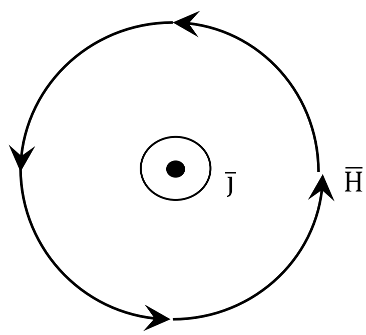

Figura 2.2. Representación de la circulación del campo magnético alrededor de la corriente de conducción $\bar{J}$ (Ley de Ampere).

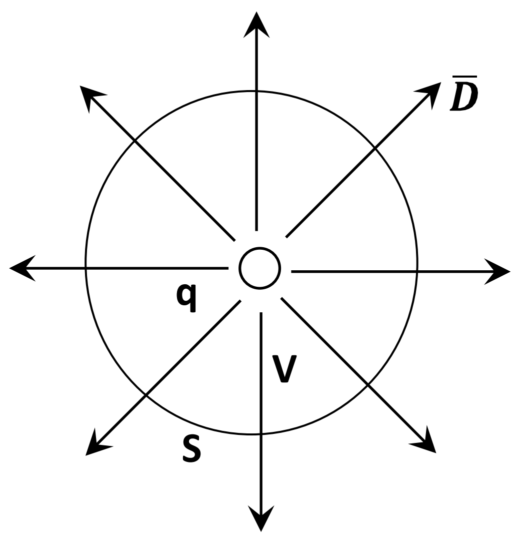

Figura 2.3. Relación de las líneas de flujo eléctrico que atraviesan la superficie **S** que encierra la carga **q** en el volumen **V** (Ley de Gauss).

La ecuación (2.4) explica que no existen fuentes puntuales de campo magnético debido a que no se ha comprobado la existencia de una carga magnética. Consecuentemente el flujo magnético entrante es igual al flujo magnético que sale en un volumen **V**.

II.2. Relaciones Constitutivas.

Los materiales tienen propiedades magnéticas y eléctricas. Estas propiedades bajo el efecto de un campo electromagnético tienden a modificar algunas características del mismo en comparación al caso donde no existe ningún material (vacio). Estos cambios se describen a través de un conjunto de expresiones que son mejor conocidas como relaciones constitutivas. La primera relación constitutiva involucra la densidad de flujo eléctrico con el campo eléctrico:

$$\overline{\mathrm{D}} = \overline{\overline{\varepsilon}} * \overline{\mathrm{E}} \tag{2.5}$$

Donde $\overline{\overline{\varepsilon}}$ es la permitividad eléctrica del medio en forma de tensor y en el dominio del tiempo $*$ representa una convolución. La permitividad eléctrica del medio equivale para el espacio libre a ε_0=8.854X10^{-12} [**F**arads/**m**etros]. En general las propiedades de los medios dependen de la posición, dirección, la frecuencia y la intensidad de los campos. De manera simplificada, si omitimos la dependencia anterior considerando que el medio en estudio es homogéneo, isotrópico, no dispersivo y lineal, se puede escribir la ecuación anterior como:

$$\overline{\mathrm{D}} = \varepsilon\overline{\mathrm{E}} \tag{2.6}$$

En la expresión anterior se puede substituir ε por ε_0 cuando se trata del espacio libre el medio de propagación. Pero si se trata de un medio diferente, la polarización de las cargas del material no es despreciable. Se ha probado que cuando los materiales son sometidos a campos eléctricos estáticos, los centroides de las cargas positivas y negativas son desplazados relativamente el uno al otro formando un dipolo eléctrico lineal. Cuando un material es examinado macroscópicamente, la presencia de todos los dipolos eléctricos es integrada por medio de un vector de polarización, lo cual da como resultado que (2.6) se exprese como:

$$\overline{D} = \varepsilon_0 \overline{E} + \overline{P} \tag{2.7}$$

Cuando el vector de polarización es proporcional al campo eléctrico, entonces se tiene:

$$\overline{D} = \varepsilon_0 (1 + \chi_e) \overline{E} \tag{2.8}$$

Donde χ_e es una cantidad adimensional llamada susceptibilidad eléctrica del medio. Tomando el término (1+ χ_e) y sustituyéndolo por ε_r se tiene:

$$\overline{D} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \overline{E} \tag{2.9}$$

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r$$

La siguiente relación constitutiva, corresponde a la densidad de flujo magnético con la intensidad del campo magnético, siguiendo con la consideración que el medio es lineal, isotrópico y homogéneo se tiene:

$$\overline{B} = \mu \overline{H} \tag{2.10}$$

Donde μ es la permeabilidad magnética del medio y que para el espacio libre equivale a $\mu_0 = 4\pi 10^{-7}$ [**H**enrios/**m**etros]. De forma similar a la densidad de flujo eléctrico con el vector de polarización, existe un vector de magnetización el cual puede hacer cambios en el campo magnético. El campo magnético generado por un material es debido al spin o giro del electrón, la suma de todos estos giros genera un campo magnético interno. Si este se encuentra alineado con el campo magnético externo aplicado al material, puede amplificarlo o atenuarlo y por consiguiente la ecuación (2.10) puede ser escrita como:

$$\overline{B} = \mu_0 \overline{H} + \overline{M} \tag{2.11}$$

$$\overline{\mathrm{B}} = \mu_0(1 + \chi_m)\overline{\mathrm{H}} \tag{2.12}$$

Donde χ_m es una cantidad adimensional llamada susceptibilidad magnética del medio. Tomando el término (1+ χ_m) y sustituyéndolo por μ_r se tiene:

$$\overline{\mathrm{B}} = \mu_0\mu_r\overline{\mathrm{H}} \tag{2.13}$$

$$\mu = \mu_0\mu_r$$

La tercera relación involucra la densidad de corriente eléctrica con la intensidad de campo eléctrico, y es equivalente en circuitos a la ley de Ohm, y se define como:

$$\overline{\mathrm{J}} = \sigma\overline{\mathrm{E}} \tag{2.14}$$

Donde σ, la conductividad, representa la disposición de un material a conducir una corriente eléctrica bajo la influenza de un campo eléctrico cuando hay cargas libres que se puedan mover. Se debe mencionar que la conductividad puede ser dependiente del campo, pero siempre lo es de la temperatura, y varía de un material a otro.

Las ecuaciones (2.6), (2.10) y (2.14) son referidas como relaciones constitutivas, σ, μ y ε son conocidos como parámetros constitutivos.

II.3. Medio Lineal, Homogéneo, No Dispersivo e Isotrópico.

La interacción de los campos con los diferentes materiales es caracterizada por sus parámetros constitutivos (ε, μ y σ).

Los materiales en los cuales sus parámetros constitutivos están en función del campo eléctrico, magnético, o de ambos (bianisotrópicos) son conocidos como no lineales. En el caso contrario son conocidos como lineales. Por ejemplo $\varepsilon(\bar{E},\bar{H}), \mu(\bar{E},\bar{H})\ y\ \sigma(\bar{E},\bar{H})$.

Cuando los parámetros constitutivos de los materiales no son función de la posición, son conocidos como materiales homogéneos. En el caso contrario son conocidos como materiales no homogéneos. Propiamente $\varepsilon(x,y,z), \mu(x,y,z)$ y $\sigma(x,y,z)$. En la mayoría de los casos en los materiales usados para la experimentación la no homogeneidad es muy pequeña, por lo que se les da el tratamiento como materiales homogéneos.

Si los parámetros constitutivos varían en función de la frecuencia, $\varepsilon(\omega), \mu(\omega)$ y $\sigma(\omega)$, son conocidos como materiales dispersivos. En el caso contrario son conocidos como no dispersivos.

Anisotrópicos son aquellos materiales cuyos parámetros constitutivos están en función de la dirección, en el caso opuesto son conocidos como materiales isotrópicos. Por ejemplo, muchos materiales especialmente los cristales tienen un grado alto en anisotropía, por lo que la permitividad eléctrica no puede ser representada como un escalar, si no como una matriz de 3 X 3 o mejor dicho en forma de tensor:

$$\overline{\mathrm{D}} = \overline{\overline{\varepsilon}}\overline{\mathrm{E}} \tag{2.15}$$

$$\begin{bmatrix} D_x \\ D_y \\ D_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{bmatrix} \tag{2.16}$$

Teniendo en cuenta las propiedades antes mencionadas en este subtema, el presente trabajo considerará principalmente medios lineales, no dispersivos e isotrópicos, excepto en algunas regiones donde se especificará, y en general serán no homogéneos. Expuesto lo anterior se puede escribir las relaciones constitutivas como:

$$\bar{D} = \varepsilon(x, y, z)\, \bar{E}$$

$$\bar{B} = \mu(x, y, z)\, \bar{H}$$

$$\bar{J} = \sigma(x, y, z)\, \bar{E}$$

Se puede concluir que las relaciones constitutivas definen la interacción de los materiales con el campo electromagnético.

II.4. Condiciones de Frontera.

Las ecuaciones de Maxwell en forma diferencial representan derivadas con respecto al espacio coordenado del campo. En algunos puntos del campo en donde existe discontinuidad, las derivadas del vector del campo no pueden usarse de forma adecuada para definir el comportamiento de este a través de la frontera entre un medio y otro. Por lo que son utilizadas las ecuaciones de Maxwell en su forma integral.

Considérese inicialmente una interfaz, superficie de separación entre dos medios diferentes, como se muestra en la figura (2.4), y que además en ella existen cargas.

Los medios 1 y 2 son definidos por sus parámetros constitutivos $\varepsilon_1, \mu_1, \sigma_1$ y $\varepsilon_2, \mu_2, \sigma_2$. Se selecciona el perímetro *Co* que delimita la superficie *So*, y utilizando la ecuación de Faraday en su forma integral se tiene:

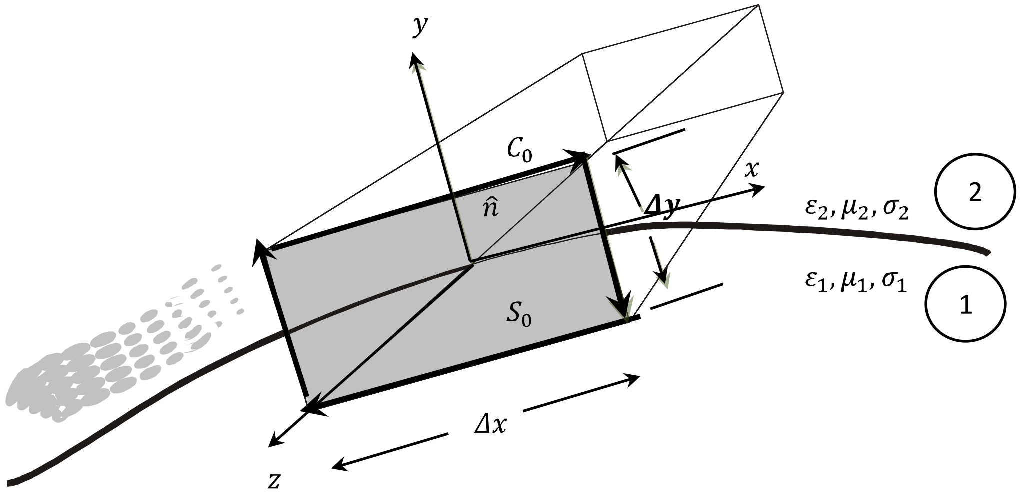

Figura 2.4. Interfaz de dos medios para obtención de las componentes tangenciales.

$$\oint_{C_0} \bar{E} \cdot \overline{dl} = -\iint_S \bar{M}_i \cdot \overline{ds} - \frac{\partial}{\partial t} \iint_S \bar{B} \cdot \overline{ds} \tag{2.17}$$

Considerando que Δy tiende a cero, la superficie S_0 se vuelve cada vez más pequeña, así que la aportación de la superficie en la integral del último término se vuelve despreciable, no así la de la densidad de corriente magnética que permanece en la superficie, por lo que (2.17) se puede escribir como:

$$\bar{E}_1 \cdot \hat{a}_x \Delta_x - \bar{E}_2 \cdot \hat{a}_x \Delta_x = \bar{M}_S \cdot \hat{a}_z \Delta_x$$

$$E_{1t} - E_{2t} = M_{sz} \tag{2.18}$$

Siguiendo el procedimiento mostrado en [4]:

$$-\hat{n} \times (\bar{E}_1 - \bar{E}_2) = \bar{M}_S \tag{2.19}$$

Considerando que no existe densidad de corriente magnética impresa, es decir $\bar{M}_s = 0$ tenemos:

$$\hat{n}\times (\bar{E}_1 - \bar{E}_2) = 0 \quad (2.20)$$

De la ecuación (2.20) se interpreta que las componentes tangenciales del campo eléctrico a través de una interfaz entre dos medios son continuas.

Usando de manera similar la forma integral de la ecuación de Ampere se tiene:

$$\oint_{C_0} \bar{H} \cdot \overline{dl} = \iint_S \bar{J}_{ic} \cdot \overline{ds} + \frac{\partial}{\partial t} \iint_S \bar{D} \cdot \overline{ds} \quad (2.21)$$

Considerando nuevamente que Δy tiende a cero, la superficie S_0 se vuelve cada vez más pequeña, así que la aportación de la superficie en la integral se vuelve despreciable, por lo que la integral de la ecuación de Ampere se puede escribir como:

$$-\hat{n} \times (\bar{H}_1 - \bar{H}_2) = \bar{J}_S \quad (2.22)$$

Nuevamente, si se considera que la densidad de corriente eléctrica impresa es cero, (2.22) se puede escribir como:

$$\hat{n} \times (\bar{H}_1 - \bar{H}_2) = 0 \quad (2.23)$$

La expresión (2.23) expresa que las componentes tangenciales del campo magnético a través de una interfaz entre dos medios, en el cual ninguno de los dos medios es un conductor, son continuas.

Del resultado anterior en el producto cruz, los cálculos nos arrojan solución para componentes tangenciales; para componentes normales se utilizará la figura (2.5).

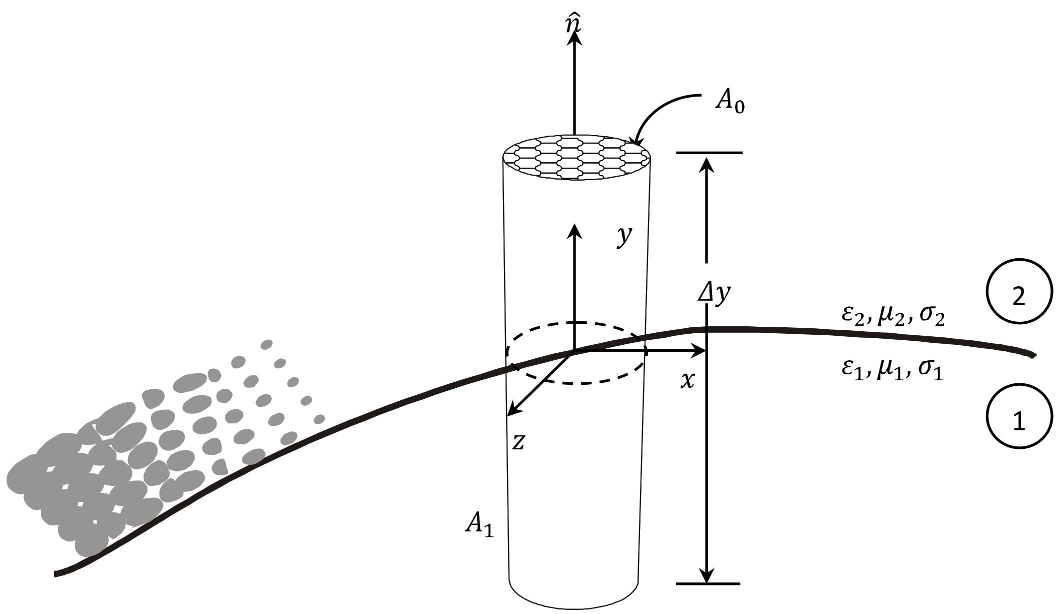

Figura 2.5. Interfaz de dos medios para la obtención de componentes normales.

Para componentes normales se utilizará la figura (2.5) y la ley de Gauss en forma integral. Se considerará que ninguno de los medios es conductor por lo que se tiene:

$$\oiint_S \overline{D} \cdot \overline{ds} = \iiint_V q_{ev}\, dv \tag{2.24}$$

Considerando nuevamente que Δy tiende a cero, la superficie A_1 se vuelve cada vez más pequeña, así que la aportación de la superficie en la integral se vuelve despreciable, por lo que (2.24) se puede escribir como:

$$\hat{n} \cdot (\overline{D}_2 - \overline{D}_1) = q_{es} \tag{2.25}$$

Utilizando la ecuación (2.6) se puede expresar (2.25) en función de la intensidad del campo eléctrico.

$$\hat{n} \cdot (\varepsilon_2 \bar{E}_2 - \varepsilon_1 \bar{E}_1) = q_{es} \qquad (2.26)$$

Considerando que no existen fuentes a lo largo de la interfaz (2.26) puede reescribirse como:

$$\hat{n} \cdot (\varepsilon_2 \bar{E}_2 - \varepsilon_1 \bar{E}_1) = 0 \quad \sigma_1, \sigma_2 \neq \infty \qquad (2.27)$$

La expresión (2.27) declara que las componentes normales de la densidad de flujo eléctrico a través de una interfaz, en donde los materiales son conductores imperfectos y además de no haber fuentes, son continuas.

Usando un procedimiento similar con la superficie cilíndrica. Para la ecuación de flujo magnético en forma integral se tiene:

$$\oiint_S \bar{B} \cdot \overline{ds} = 0 \qquad (2.28)$$

$$\bar{B}_1 \cdot \hat{a}_y A_0 - \bar{B}_2 \cdot \hat{a}_y A_0 = 0 \qquad (2.29)$$

$$\hat{n} \cdot (\bar{B}_2 A_0 - \bar{B}_1 A_0) = 0 \qquad (2.30)$$

Usando (2.10) se puede expresar (2.30) en función de la intensidad de campo magnético.

$$\hat{n} \cdot (\mu_2 \bar{H}_2 - \mu_1 \bar{H}_1) = 0 \qquad (2.31)$$

La expresión (2.31) declara que las componentes normales de la densidad de flujo magnético a través de una interfaz en la cual no existen fuentes, son continuas.

Los resultados anteriores se enlistan en la tabla (2.4.1) los cuales se conocen como las condiciones de frontera. Donde los resultados en la columna número tres se expresan únicamente en función de $\bar{\boldsymbol{E}}_{\boldsymbol{2}}$ debido a la tercera relación constitutiva (2.14) que produce que $\bar{\boldsymbol{E}}_{\boldsymbol{1}}$ tienda a cero, es decir:

$$\bar{J} = \sigma_1 \bar{E}_1 \tag{2.32}$$

$$\lim_{\sigma_1 \to \infty} \frac{\bar{J}}{\sigma_1} = 0 = \bar{E}_1$$

Condiciones de frontera.	General	Medio con conductividad finita sin fuentes ni cargas $\sigma_1, \sigma_2 \neq \infty, q_{es}, q_{ms}, M_s, J_s = 0$	Medio 1 con conductividad infinita $\sigma_1 = \infty, \sigma_2 \neq \infty, M_s, q_{ms} = 0$
Componentes Tangenciales de $\bar{\boldsymbol{E}}$	$\hat{n} \times (\bar{E}_1 - \bar{E}_2) = \bar{M}_s$	$\hat{n} \times (\bar{E}_1 - \bar{E}_2) = 0$	$\hat{n} \times \bar{E}_2 = 0$
Componentes Tangenciales de $\bar{\boldsymbol{H}}$	$-\hat{n} \times (\bar{H}_1 - \bar{H}_2) = \bar{J}_S$	$-\hat{n} \times (\bar{H}_1 - \bar{H}_2) = 0$	$-\hat{n} \times -\bar{H}_2 = \bar{J}_S$
Componentes Normales de $\bar{\boldsymbol{D}}$	$\hat{n} \,.(\bar{D}_{2n} - \bar{D}_{1n}) = q_{es}$	$\hat{n} \,.(\bar{D}_{2n} - \bar{D}_{1n}) = 0$	$\hat{n} \,.\bar{D}_{2n} = q_{es}$
Componentes Normales de $\bar{\boldsymbol{H}}$	$\hat{n} \,.(\bar{B}_2 - \bar{B}_1) = q_{ms}$	$\hat{n} \,.(\bar{B}_2 - \bar{B}_1) = 0$	$\hat{n} \,.\bar{B}_2 = 0$

Tabla 2.4.1. Condiciones de frontera.

II.5. Ecuación de Onda.

Las diferentes ecuaciones de Maxwell están interrelacionadas formando un sistema de ecuaciones acopladas. La ecuación de onda es el resultado de desacoplar las ecuaciones de Maxwell con la consecuencia de incrementar su orden. Tiene una profunda importancia dado que describe la manera en la cual la energía electromagnética es distribuida y transportada, por lo que su estudio no debe ser omitido.

II.5.1. Ecuación Helmholtz.

Sea un medio lineal, isotrópico, homogéneo y libre de fuentes, se pueden escribir las ecuaciones de Maxwell que cuentan con el producto cruz en forma fasorial expresadas en función de $\overline{\boldsymbol{E}}$ y $\overline{\boldsymbol{H}}$ por medio de sus parámetros constitutivos como:

$$\nabla \times \overline{\mathrm{E}} = -j\omega\mu\overline{\mathrm{H}} \tag{2.33}$$

$$\nabla \times \overline{\mathrm{H}} = j\omega\varepsilon\overline{\mathrm{E}} \tag{2.34}$$

El sistema de ecuaciones anterior puede ser resuelto ya sea para $\overline{\boldsymbol{E}}$ o $\overline{\boldsymbol{H}}$. Aplicando el rotacional a (2.33) en ambos lados de la igualdad, y sustituyendo (2.34) en (2.33) se tiene:

$$\nabla \times \nabla \times \overline{\mathrm{E}} = -j\omega\mu\nabla \times \overline{\mathrm{H}} = \omega^2\varepsilon\mu\overline{\mathrm{E}} \tag{2.35}$$

El resultado anterior es una ecuación únicamente en función de $\overline{\boldsymbol{E}}$. Este resultado se puede simplificar a través del uso de la identidad vectorial $\nabla \times \nabla \times \overline{A} = \nabla(\nabla \cdot \overline{A}) - \nabla^2 \cdot \overline{A}$, la cual es valida para componentes rectangulares para un vector arbitrario $\bar{A}$. Entonces se tiene:

$$\nabla^2\overline{\mathrm{E}} + \omega^2\varepsilon\mu\overline{\mathrm{E}} = 0 \tag{2.36}$$

Dado que $\nabla \cdot \bar{E} = 0$ para una región sin fuentes. La ecuación (2.36) es conocida como la ecuación de Helmholtz para $\bar{\boldsymbol{E}}$. Una ecuación idéntica para $\bar{\boldsymbol{H}}$ puede ser derivada de la misma manera.

$$\nabla^2 \overline{\mathrm{H}} + \omega^2 \varepsilon\mu \overline{\mathrm{H}} = 0 \qquad (2.37)$$

La constante $k = \omega\sqrt{\varepsilon\mu}$ es definida y llamada el número de onda o constante de propagación del medio, y sus unidades son $[{}^{1}/_{\mathrm{m}}]$.

A manera de explicar el comportamiento de la onda, se estudiará la solución de la ecuación de Helmholtz en su forma más simple en un medio sin perdidas.

En un medio sin perdidas ε y μ son números reales, por lo que k lo es también y es conocida como relación de dispersión. Una solución de onda plana para la ecuación anterior puede ser encontrada considerando un campo eléctrico con una sola de sus componentes, por ejemplo $\hat{x}$, y sin variación en la dirección de x y y, $\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} = 0$. Entonces la ecuación de Helmholtz se reduce a:

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} + k^2 E_x = 0 \qquad (2.38)$$

La solución para (2.36) es fácil de ver, por sustitución debe tener la forma:

$$E_x(z) = E^+ e^{-jkz} + E^- e^{jkz} \qquad (2.39)$$

Donde E^+ y E^- son amplitudes constantes.

La solución expuesta es para el caso del tiempo armónico a una frecuencia ω. En el dominio del tiempo este resultado es escrito como:

$$E_x(z,t) = E^+ \cos(\omega t - kz) + E^- \cos(\omega t + kz) \qquad (2.40)$$

Donde se ha asumido que E^{+} y E^{-} son constantes reales. Considérese el primer término de (2.40). Este término representa la onda viajera en la dirección $+z$. Fijándose un punto sobre la onda $(\omega t - kz) = constante$, uno debe moverse en la dirección $+z$ conforme el tiempo se incrementa. De forma similar, el segundo término en (2.40) representa la onda viajera en la dirección $-z$ lo que produce la notación E^{+} y E^{-} para las amplitudes de onda. La velocidad de la onda en este sentido es llamado velocidad de fase, porque es la velocidad en la cual el punto de fase fijado se mueve con la onda viajera, y es dado por:

$$v_p = \frac{dz}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\omega t - constante}{k}\right) = \frac{\omega}{k} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}} \qquad (2.41)$$

En el espacio libre tenemos $v_p = 1/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0} = 2.998 \times 10^{8}[\,m/seg]$ la cual es la velocidad de la luz.

La longitud de onda λ es definida como la distancia entre dos máximos sucesivos o mínimos como puntos de referencia de la onda en un instante fijado en el tiempo.

$$[\omega t - kz] - [\omega t - k(z + \lambda)] = 2\pi$$

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi v_p}{\omega} = \frac{v_p}{f} \qquad (2.42)$$

Una especificación completa del campo electromagnético de onda plana debe incluir el campo magnético. En general cualquiera que sea el vector conocido $\overline{\boldsymbol{E}}$ o $\overline{\boldsymbol{H}}$ el otro vector puede ser fácilmente encontrado usando las ecuaciones de Maxwell que contengan el producto cruz. Aplicando este concepto, y usando (2.33) en (2.38) se produce $H_x = H_z = 0$, y

$$H_y = \frac{1}{\eta}[E^{+}e^{-jkz} - E^{-}e^{jkz}] \tag{2.43}$$

Donde $\eta = {}^{\omega\mu}/_{k} = \sqrt{{}^{\mu}/_{\varepsilon}}$ es la impedancia de onda para la onda plana, definida como la relación entre el campo $\overline{\boldsymbol{E}}$ y $\overline{\boldsymbol{H}}$. Para ondas planas, esta impedancia es inclusive la impedancia intrínseca del medio. En el espacio libre se tiene $\eta_0 = \sqrt{{}^{\mu_0}/_{\varepsilon_0}} = 377\ [\Omega]$. Se debe notar que $\overline{\boldsymbol{E}}$ y $\overline{\boldsymbol{H}}$ son vectores ortogonales entre sí, además de serlo también a la dirección de propagación $\pm\hat{z}$. Esta es una característica de las ondas transversales electromagnéticas (TEM) [5].

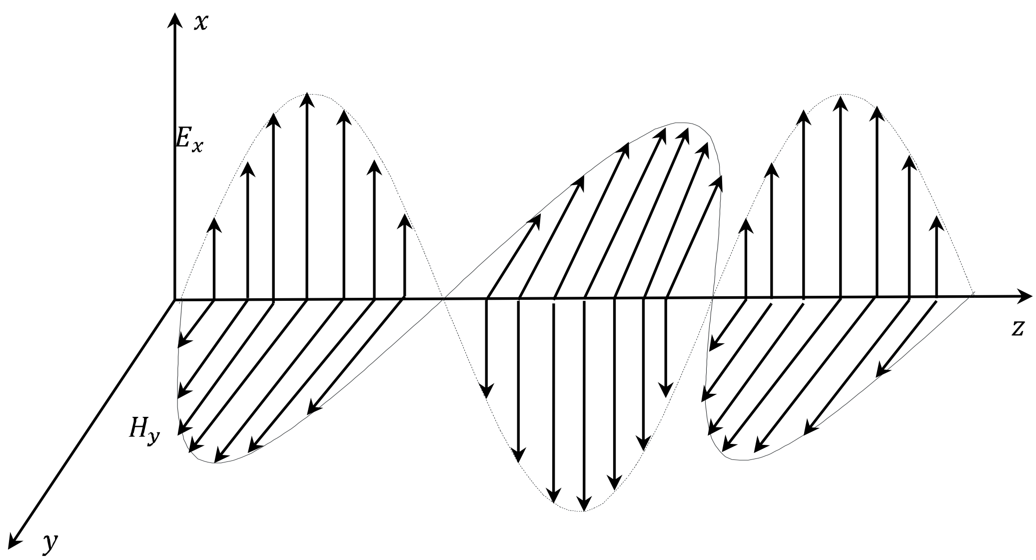

Figura 2.6. Componentes del campo eléctrico y magnético ambos perpendiculares a la dirección de propagación.

II.6. Modo Transversal Electromagnético.

Un modo es una configuración particular del campo electromagnético. Para problemas de electromagnetismo valuados en la frontera, las soluciones que satisfacen las condiciones de frontera para las ecuaciones de Maxwell son referidas como modos de propagación.

Un modo TEM es aquel en el cual las intensidades de campo $\bar{\boldsymbol{E}}$ y $\bar{\boldsymbol{H}}$ en cada punto del espacio están contenidas en un plano local referido como plano equifásico que es independiente del tiempo, es decir a cualquier instante y en cualquier punto del espacio, las componentes del campo eléctrico y magnético están contenidas en planos.

En general la orientación de los planos locales asociados con la onda TEM es diferente en diferentes puntos del espacio, es decir no deben ser forzosamente paralelos, lo anterior se ilustra en la figura 2.7.

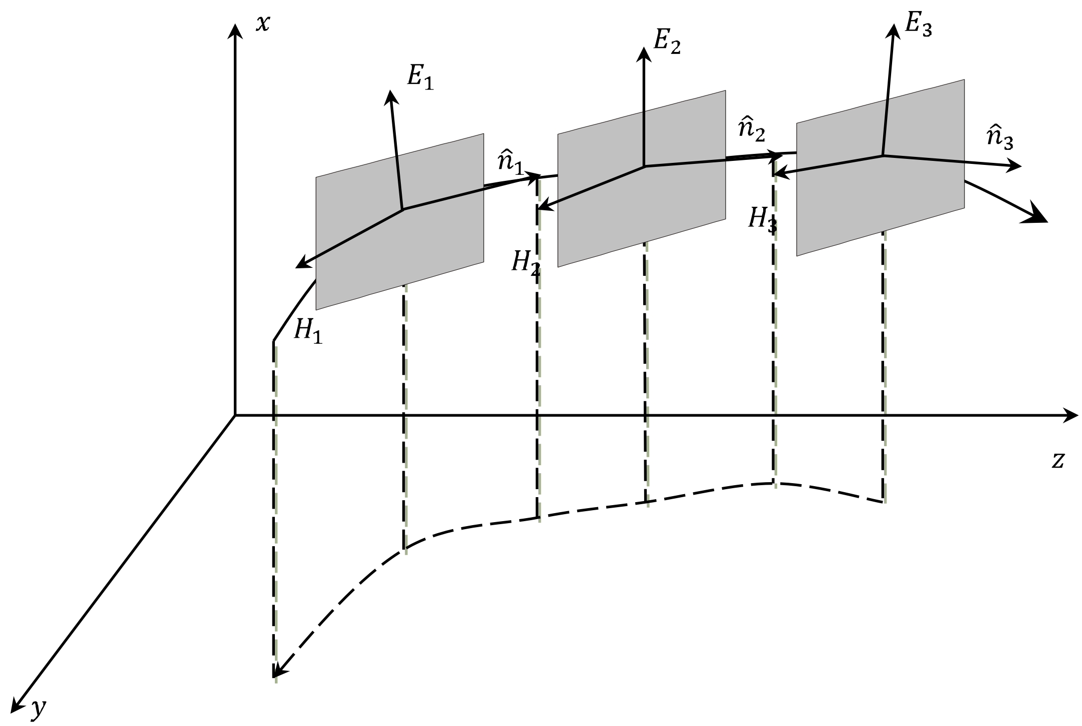

Figura 2.7. Frente de fase de una onda TEM (Advanced Engineering Electromagnetics. Constantine A. Balanis 1998).

Si la orientación espacial de los planos para un modo TEM es la misma, planos equifásicos paralelos, como se muestran en la figura (2.8), entonces el campo forma ondas planas. Adicionalmente si la onda consta de la misma amplitud en cada plano equifásico entonces el campo es llamado onda plana uniforme.

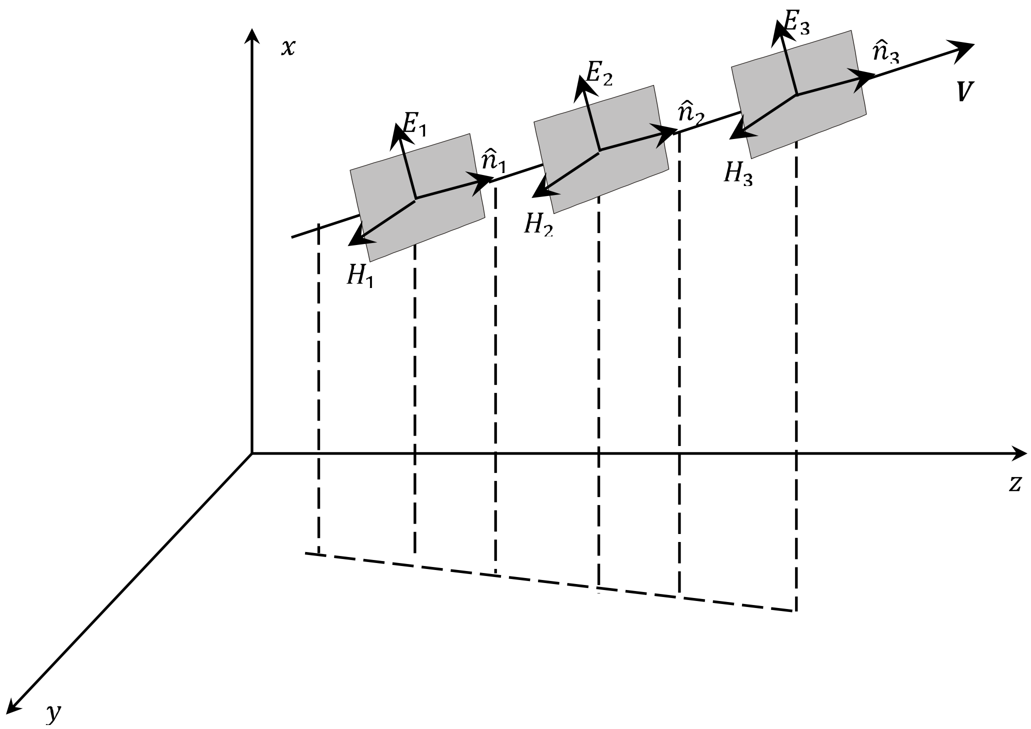

Figura 2.8. Planos equifásicos característica de las ondas planas uniformes TEM (Advanced Engineering Electromagnetics. Constantine A. Balanis 1998).

Una vez mostrado el marco teórico se procederá a exponer en el siguiente capítulo el algoritmo de Diferencias Finitas en el Dominio del Tiempo *FDTD (Finite Difference Time Domain),* mediante el cual se resolverán numéricamente las ecuaciones de Maxwell. Este algoritmo es la base para la solución de los problemas tratados en el presente trabajo.