



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE  
MEXICO

Programa de Maestría y Doctorado en Ingeniería



## Control no Lineal de Robots Cooperativos sin Medición de Velocidad

**T E S I S**

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE  
Doctor En Ingeniería Eléctrica

AREA: ELÉCTRICA CAMPO: CONTROL

P R E S E N T A:

Jorge Gudiño Lau

ASESOR: DR. MARCO ANTONIO ARTEAGA PÉREZ

México, 2005



# Agradecimientos

*A Dios por darme vida para realizar mis metas.*

*A mi Esposa Ana Marisol Márquez Zuñiga por el amor, apoyo, paciencia que siempre me ha brindado. Esto es uno de nuestros éxitos juntos.*

*A mi Hijo Jorge Wah-Hing por todo el amor y cariño que me ha brindado y que por su puesto está siempre correspondido.*

*A mi Madre Teresa Lau Martínez que me apoya y me alienta. Gracias ¡Mamá! por el amor y cuidados hacia mi.*

*A mi Padre Jorge Gudiño Trillo que me enseñó el valor del trabajo y de la responsabilidad, gracias por tu eterno amor y tu apoyo.*

*A mi Hermana Teresa Gabriela por estar siempre conmigo*

*A mi Abuela Engracia Martínez Coronado(†) que le hubiera gustado estar aquí.*

*A mis Tíos Angel Lau, Graciela Lau y Elvira Lau por su eterno e incondicional apoyo.*

*A mis Primos Héctor, Fabiola y Paola.*

*A mis Sobrinos Gabriela Chuysing, Yenifer, Luis, Andrea y Evelin.*

*A Fidel, Trinidad, Hugo, Coty, Filemón y Luis por formar parte de mi familia.*

*A mis Amigos Juan, Adrian, Enrique, Angélica y Eduardo del Laboratorio de Robótica, que sin su ayuda hubiera sido más difícil lograr esto.*

*Al Dr. Gerardo Espinosa, Dr. Tang Yu, Dr. Luis Álvarez, Dr. Vicente Parra, Dr. Rafael Kelly y Dr. Luis Muñoz les agradezco inmensamente el haber aceptado formar parte del jurado, los comentarios que sobre él hicieron y sobre todo las facilidades otorgadas para la rápida realización del examen de grado.*

*A mi director de tesis, Dr. Marco Arteaga por su invaluable e indispensable ayuda y orientación en la realización de este trabajo. Que sin él, y los buenos y malos momentos que (siempre buscando obtener los mejores resultados) me hizo pasar, la finalización de este trabajo no hubiera sido posible. Va mi agradecimiento y admiración hacia él.*

*A la Universidad Nacional Autónoma de México por el orgullo de pertenecer a esta institución. A la DEPMI por mi formación como Doctor, un especial reconocimiento a esta FI.*

*A la Universidad de Colima por el apoyo para la realización del Doctorado.*

*Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología por el apoyo para la realización de este trabajo.*

*Espero no ofender a nadie por omitir su nombre, agradezco a todas las personas que he conocido en mi vida porque de todas ellas he aprendido algo ¡Gracias a todas ellas!*

# Índice General

Agradecimientos	iii
<b>1</b> Introducción	<b>1</b>
<b>2</b> Planteamiento del problema	<b>3</b>
<b>3</b> Antecedentes	<b>5</b>
3.1 Estado del arte . . . . .	5
3.2 Antecedentes matemáticos . . . . .	7
3.2.1 Sistema cooperativo holonómico homogéneo . . . . .	7
3.2.2 Modelo dinámico de un sistema cooperativo . . . . .	9
3.2.3 Posición y velocidad restringida . . . . .	10
3.2.4 Método de ortogonalización del espacio articular . . . . .	11
3.2.5 Propiedades de los robots cooperativos . . . . .	12
<b>4</b>	<b>17</b>
4.1 Objetivos . . . . .	17
4.2 Suposiciones del sistema cooperativo . . . . .	17
<b>5</b> Modelo dinámico del sistema cooperativo formado por brazos robots industriales	<b>21</b>
5.1 Cálculo de la dinámica del sistema cooperativo . . . . .	21
5.1.1 Descripción del sistema experimental . . . . .	22
5.1.2 Descripción del sistema cooperativo . . . . .	23
5.1.3 Modelo dinámico de un objeto rígido . . . . .	24
5.1.4 Acoplamiento dinámico . . . . .	25
5.1.5 Modelado de la fuerza para robots cooperativos . . . . .	26
<b>6</b> Control de posición/fuerza con observador de velocidad	<b>29</b>
6.1 Planteamiento del problema . . . . .	29
6.2 Control de seguimiento . . . . .	29
6.2.1 Definición del observador . . . . .	31
6.3 Observador con matriz de inercia . . . . .	33
6.3.1 Definición del observador . . . . .	36
6.4 Observador sin matriz de inercia . . . . .	39
6.4.1 Definición del observador . . . . .	41

<b>ÍNDICE GENERAL</b>	<b>vi</b>
<hr/>	
<b>7 Resultados experimentales</b>	<b>45</b>
7.1 Simulación de fuerzas y resultados experimentales . . . . .	45
7.2 Regulación de fuerza y seguimiento de posición . . . . .	54
7.3 Seguimiento de fuerza y posición . . . . .	60
<b>8 Conclusiones</b>	<b>67</b>
<b>A Parámetros dinámicos de los robots A465 y A255</b>	<b>69</b>
<b>B Pruebas de estabilidad</b>	<b>75</b>
B.1 Prueba del Lema 6.2.1 . . . . .	75
B.2 Prueba del Teorema 6.2.1 . . . . .	77
B.3 Prueba del Lema 6.3.1 . . . . .	78
B.4 Prueba del Teorema 6.3.1 . . . . .	85
B.5 Prueba del Lema 6.4.1 . . . . .	87
B.6 Prueba de $V_i(\mathbf{x}_i)$ en (6.98) . . . . .	88
B.7 Prueba del Teorema 6.4.1 . . . . .	88

# Capítulo 1

## Introducción

En los últimos años, el empleo de robots cooperativos ha recibido gran atención. Una de las razones es que este tipo de sistemas poseen alta capacidad de manipulación de movimientos finos y flexibilidad en tareas de ensamblado, manufactura, ambientes de trabajo complejos, manipulación de objetos, etc. En particular, cuando un objeto es demasiado grande o pesado, no es suficiente un sólo robot para manipularlo; por esta razón se emplean dos o más robots.

El análisis de la dinámica y control de robots cooperativos requiere de técnicas de modelado y teoría de control más sofisticadas que las que se usan en el caso de un manipulador trabajando aisladamente. Si se asume que todos los robots del sistema cooperativo son rígidos, entonces el problema principal tanto en el modelado como en el desarrollo de la teoría de control consiste en describir de manera adecuada la forma en que interactúan las dinámicas de todos los manipuladores. Una hipótesis común para describir dicha interacción es que los manipuladores sostiene rígidamente el objeto y que sólo existe un punto de contacto por cada robot. Las suposiciones anteriores facilitan notablemente el diseño de controladores, puesto que permiten aprovechar la estructura especial del modelo de un robot rígido (Murray *et al.* 1994).

Por otro lado, es importante hacer notar que la teoría que se emplea para robots cooperativos es independiente del tamaño de los mismos, por lo que se puede incluir en esta área el estudio de manos mecánicas, cuyos dedos pueden ser considerados como grupos de robots en miniatura. El estudio de manos mecánicas es importante no sólo porque estas pueden ser utilizadas como prótesis en seres humanos, sino también porque aumentan considerablemente la capacidad de manipulación de un robot al sustituir la pinza que poseen la mayoría de ellos por una mano con dos o más dedos.

Otro problema específico que debe ser considerado cuando se habla de trabajo cooperativo de robots, es que la manipulación de un objeto significa que este debe ser llevado de una posición inicial a una posición final. Durante el trayecto es necesario mantener un contacto firme entre los robots y el objeto. Este objetivo requiere planear la trayectoria que debe seguir cada manipulador. En Li y Sastry (1989) se presentan un algoritmo de control y uno de generación de trayectorias para robots coordinados, que puede extenderse fácilmente a cooperativos.

Con la finalidad de evitar ambigüedades, en esta tesis adoptaremos la convención de denominar a dos o más robots manipuladores sujetando el mismo objeto será determinado como un *sistema cooperativo*, y un *sistema coordinado* a dos o más robots desarrollando una misma tarea pero no tomando el mismo objeto. La Figura 1.1 ilustra dos robots sujetando el mismo objeto a manipular. Este es un ejemplo de un sistema cooperativo formado por dos robots, el cual puede ser generalizado a  $n$ . Con dicho esquema se trabajará en esta tesis.

Coordinar el trabajo de dos o más robots para manipular de manera conjunta un objeto no es labor fácil. Los algoritmos de control deben tomar en cuenta cómo interactúan las dinámicas de los robots al sujetar el objeto; además, estos deben aplicar suficiente fuerza para que no haya movimiento relativo entre el efector final y el objeto. Las fuerzas que actúan sobre el objeto no deben dañarlo. Para solucionar el problema debe considerarse cuál es la tarea a realizar, por ejemplo, introducir un objeto dentro de una ranura o un agujero. Esto puede ser trivial para un ser humano, pero es difícil de lograr de manera automática.

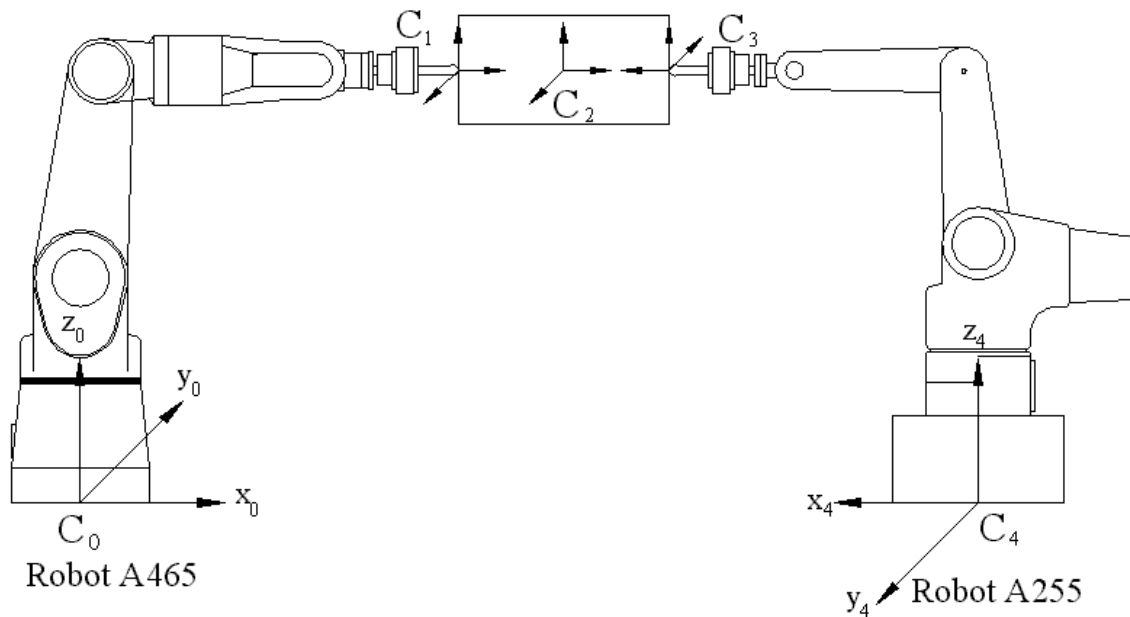


Figura 1.1: Sistema de robots cooperativos.



# Capítulo 2

## Planteamiento del problema

Recientemente los robots cooperativos han sido indispensables para el agarre y manipulación diestra de objetos. Además, para el análisis dinámico del sistema cooperativo se requieren técnicas más sofisticadas que para un robot trabajando aisladamente.

Por otro lado, en la mayoría de los esquemas propuestos hasta ahora (Parra-Vega y Arimoto 1996, Liu *et al.* 1997, Parra-Vega *et al.* 2001), se parte de la suposición de que el objeto está sujetado firmemente y no puede existir movimiento relativo entre el objeto y los puntos terminales de los manipuladores. Aunque esta suposición es la base del diseño, estos esquemas de control no pueden asegurar que el agarre del objeto se mantendrá durante de la ejecución de la tarea. Esto se consigue de manera implícita proponiendo regulación o seguimiento de fuerza calculada para obtener el agarre estable.

De lo anterior, se pueden formular los siguientes problemas a resolver:

- a) Realizar un análisis dinámico para un sistema cooperativo, debido a que existe poca literatura al respecto.
- b) Modelar la fuerza del sistema cooperativo, ya que en los últimos años son muy pocos los trabajos que hablan sobre este tema.
- c) Diseñar algoritmos de control descentralizados para robots cooperativos sin medición de la velocidad, tal que los errores de seguimiento de posición/fuerza y de observación tiendan a cero, durante toda la ejecución del movimiento restringido del sistema. Gran parte, de los trabajos previos necesitan tener disponible la posición, velocidad y la fuerza para diseñar el controlador.



# Capítulo 3

## Antecedentes

### 3.1 Estado del arte

A los manipuladores que no interaccionan con el ambiente se le conoce como robots en movimiento libre, y pueden ser modelados por un conjunto de ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales. El caso contrario son los que interaccionan con el ambiente y se conocen como robots en movimiento restringido, los cuales pueden ser modelados por un conjunto de ecuaciones diferenciales algebraicas no lineales. Una gran parte de los manipuladores industriales se encuentran en este grupo. En ambos casos estas ecuaciones pueden provenir de aplicar la formulación de Lagrange.

Para el caso de sistemas cooperativos no sólo se tiene una restricción, sino un conjunto de restricciones, las cuales describen la sujeción del objeto en cada punto de contacto y son impuestas a nivel cinemático sobre cada uno de los manipuladores. En conjunto se tiene un sistema de ecuaciones diferenciales algebraicas no lineales.

El agarre diestro de un objeto generalmente consiste de dos fases (Parra-Vega *et al.* 2001):

- a) *Planeación*. Consiste en seleccionar adecuadamente los puntos de contacto entre el objeto y los brazos robots.
- b) *Sujeción*. Consiste en sujetar el objeto con una fuerza suficiente para que no haya movimiento relativo entre el efector final y el objeto. Se debe maniobrar para procurar tener un sujeción suave, puesto que uno rígido puede producir daños al objeto.

En la literatura de robots cooperativos un agarre estable lo definen de dos maneras:

- a) El primer enfoque considera que un agarre estable es la capacidad que tienen los efectores finales para mantenerse en contacto con el objeto, sin que este resbale o gire (Spong *et al.* 1993).
- b) El segundo esquema considera que un agarre estable se presenta cuando las fuerzas de contacto permanecen en el cono de fricción todo el tiempo (Murray *et al.* 1994).

Por otra parte, en la literatura sobre el modelado de sistemas de multiple manipuladores sujetando un objeto es muy escasa. El análisis dinámico de un sistema de este tipo es presentado en Orin y Oh (1981), donde el formalismo de Newton-Euler para mecanismos de cadena abierta es extendido para sistemas de cadena cerrada. Otro enfoque que puede ser empleado es el método de Euler-Lagrange (Naniwa *et al.* 1997a), donde las ecuaciones de movimiento para cada brazo manipulador son desarrolladas en el espacio cartesiano y el impacto de la cadena cerrada es investigado cuando los manipuladores están sujetando el objeto y hacen contacto con un ambiente rígido. Otro método general para obtener el modelo dinámico de un sistema de múltiples manipuladores está basado en el mapeo entre las fuerzas de contacto y la fuerza del objeto, por medio de una matriz de sujeción, (Yoshikawa y Zheng 1991, Cole *et al.* 1992, Kuc *et al.* 1994, Murray *et al.* 1994, Liu *et al.* 2002). En este enfoque, la matriz de sujeción puede ser empleada para acoplar la dinámica de los manipuladores con el objeto, mientras este es modelado por la formulación de Newton-Euler. El análisis dinámico para robots cooperativos con articulaciones flexibles sujetando un objeto rígido es presentado en Jankowski *et al.* (1993).

Para el control de robots cooperativos se realizaron muchas investigaciones en la década de los 1980's. Por ejemplo, en Montana (1988), se estudia el problema de la evolución de contacto. Tal evolución del contacto requiere de una combinación perfecta del control de posición y fuerza. Algunas de las primeros enfoques son presentadas en Li y Sastry (1989) y Cole (1990), las cuales cumplen con el objetivo de combinar el control de posición y fuerza. En estos trabajos, la dinámica del objeto es considerada de manera explícita. En Parra-Vega y Arimoto (1996), Liu *et al.* (1997) y Parra-Vega *et al.* (2001) el esquema de control no toma en cuenta la dinámica del objeto, sino que se utilizan las restricciones de movimiento. Estas aproximaciones de control tienen la ventaja de no requerir del conocimiento exacto de los parámetros del sistema cooperativo, puesto que se emplea un esquema adaptable. Más recientemente, Schlegl *et al.* (2001) muestra algunas mejoras sobre el control híbrido (en términos de la combinación de los sistemas continuos y discretos).

A pesar de que Mason y Salisbury (1985) propusieron la manipulación con pocos sensores en los 1980's, existen pocos algoritmos de control para sistemas de robots cooperativos que tomen en cuenta la posible carencia de la medición de la velocidad. Vale la pena mencionar que usualmente se aproxima ésta por diferenciación numérica. Sin embargo, resultados experimentales recientes sugieren que un observador (digitalizado) en una ley de control tienen mejor desempeño (Gudiño-Lau *et al.* 2002, Arteaga Pérez y Kelly 2004).

## 3.2 Antecedentes matemáticos

En este capítulo se presentan algunas definiciones y conceptos útiles para el diseño de las leyes de control propuestas en el Capítulo 6. Además, se desarrolla la dinámica de sistemas cooperativos y algunas propiedades, que sirven como base para sintetizar el estudio de la ecuación dinámica y de la ley de control.

### 3.2.1 Sistema cooperativo holonómico homogéneo

Para desarrollar las ecuaciones que describen la dinámica de cada robot manipulador trabajando en un sistema cooperativo, es necesario incorporar un conjunto de restricciones holonómicas impuestas a nivel cinemático sobre los manipuladores. Entonces en conjunto se tiene la dinámica del sistema cooperativo descrita por ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales más otro conjunto de ecuaciones algebraicas que representan las restricciones, resultando de esta manera un sistema de ecuaciones diferenciales algebraicas.

En este trabajo se considera un sistema cooperativo formado por  $l$  robots manipuladores, de  $n_i$  grados de libertad y  $m_i$  restricciones originadas por el contacto del objeto sujetado. Por lo tanto, el número total de articulaciones está dado por  $n = \sum_{i=1}^l n_i$ ; de igual manera, el número total de restricciones está dado por  $m = \sum_{i=1}^l m_i$ , con  $n_i > m_i$ .

**Definición 3.2.1** *Una restricción holonómica se define como aquella ecuación algebraica que aparece en un sistema a nivel cinemático. Las restricciones holonómicas se pueden clasificar con respecto al tiempo, de la siguiente manera (Greenwood 1988, Arnold 1989, Liu et al. 1995, Liu y Arimoto 1996):*

- a) *Restricción escleronómica*. La variable de tiempo  $t$  no aparece de manera explícita; también se conoce como *esclero-holonómica*. Esta restricción es invariante en el tiempo, y la forma general se representa por una función en el espacio articular como

$$\varphi_i(\mathbf{q}_i) = \mathbf{0}. \quad (3.1)$$

donde  $\varphi_i \in \mathbb{R}^{m_i}$  y  $\mathbf{q}_i \in \mathbb{R}^{n_i}$  es el vector de coordenadas generalizadas de las articulaciones del  $i$ -ésimo manipulador.

- b) *Restricción rheonómica*. La variable de tiempo  $t$  aparece de manera explícita; también se conoce como *rheo-holonómica*. Esta restricción es variante en el tiempo, y la forma general se representa por

$$\varphi_i(t, \mathbf{q}_i) = \mathbf{0}. \quad (3.2)$$

△

**Definición 3.2.2** *Se dice que la cooperación es holonómica, si las restricciones de movimiento sobre un sistema cooperativo formado por dos o más robots manipuladores son holonómicas (Liu et al. 1997).*  $\triangle$

**Definición 3.2.3** *Se dice que las restricciones de movimiento impuestas sobre el sistema cooperativo son homogéneas, si las restricciones de movimiento dadas por (3.1) de un sistema cooperativo pueden ser escritas de la siguiente forma (Arnold 1989)*

$$\varphi(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \dots, \mathbf{q}_l) = \sum_{i=1}^l \varphi_i(\mathbf{q}_i) = \mathbf{0}, \quad (3.3)$$

donde  $\varphi_i(\mathbf{q}_i)$  depende sólo de las variables de articulación del robot  $i$ .  $\triangle$

El objeto a ser manipulado por el sistema cooperativo es modelado vía un conjunto de restricciones holonómicas homogéneas, las cuales restringen el movimiento del robot manipulador en cada punto de contacto. Con una definición adecuada de restricciones holonómicas homogéneas, la dinámica del objeto no tiene que ser calculada explícitamente para controlar un sistema cooperativo. Desde luego, implícitamente se debe de tomar en cuenta sus dimensiones, peso, etc.

En lo sucesivo se considerará en esta tesis que las restricciones de movimiento impuestas sobre el sistema cooperativo son del tipo escleronómica, pero se hará referencia a ellas como holonómica. Usando la relación de cinemática directa, que está en función de las variables de articulación  $\mathbf{q}_i \in \mathbb{R}^{n_i}$ ,

$$\mathbf{x}_i = \mathbf{f}_i(\mathbf{q}_i) \quad (3.4)$$

donde  $\mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^{k_i}$  denota las variables de posición cartesiana y  $k$  es la dimensión del espacio de la tarea.

La restricción holonómica descrita por (3.1), puede ser expresada como

$$\varphi_i(\mathbf{x}_i) = \mathbf{0}. \quad (3.5)$$

De este modo, se tiene que a nivel cinemático las velocidades cartesianas y velocidad articular están relacionadas por el jacobiano del manipulador  $\mathbf{J}_{x_i}(\mathbf{q}_i) \in \mathbb{R}^{3 \times n_i}$

$$\dot{\mathbf{x}}_i = \frac{\partial \mathbf{f}_i(\mathbf{q}_i)}{\partial \mathbf{q}_i} \dot{\mathbf{q}}_i = \mathbf{J}_i(\mathbf{q}_i) \dot{\mathbf{q}}_i \quad (3.6)$$

Por otro lado, para un sistema cooperativo formado por  $l$  robots manipuladores y con restricciones holonómicas, las restricciones de movimiento pueden ser expresadas en una forma general como

$$\varphi(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \dots, \mathbf{q}_l) = \mathbf{0}, \quad (3.7)$$

donde  $\varphi \in \mathbb{R}^m$  es un vector de funciones que depende de las variables de articulación del sistema cooperativo;  $m$  es el número de restricciones de movimiento sobre el sistema

cooperativo,  $\mathbf{q}_i \in \mathbb{R}^{n_i}$  ( $i = 1, \dots, l$ ) son las variables de articulación del robot  $i$ .

Si se considera que cada robot sostiene al objeto en un sólo punto de contacto, entonces el número de restricciones del sistema cooperativo es igual al número de manipuladores que lo forman, *i.e.*  $m = l$ .

Por otra parte, se tiene que el jacobiano de las restricciones se calcula diferenciando la ecuación (3.1) y está dado por

$$\mathbf{J}_{\varphi_i}(\mathbf{q}_i) = \frac{\partial \varphi_i(\mathbf{q}_i)}{\partial \mathbf{q}_i}. \quad (3.8)$$

Diferenciando (3.3) se tiene que las restricciones de movimiento a nivel velocidad toman la forma

$$\sum_{i=1}^l \mathbf{J}_{\varphi_i}(\mathbf{q}_i) \dot{\mathbf{q}}_i = \mathbf{0}. \quad i = 1, \dots, l.$$

### 3.2.2 Modelo dinámico de un sistema cooperativo

Un sistema cooperativo compuesto de múltiples robots manipuladores que sostienen a un objeto, la posición del efector final de cada uno de ellos queda geoméricamente restringido. Estas restricciones (3.3) modelan el objeto y causan una reducción de los grados de libertad del sistema cooperativo, debido a que el efector final de cada uno de los manipuladores deben mantener el contacto del objeto, por lo que no se puede mover en todas las direcciones. Los grados de libertad de movimiento perdidos, se convierten en fuerzas de contacto. Las fuerzas de contacto entre los manipuladores y el objeto deben ser incluidas dentro de la dinámica de cada uno de los robots que forman el sistema cooperativo.

El modelo dinámico para cada manipulador individual  $i$  con movimiento restringido, se obtiene empleando la formulación de Lagrange como (Liu *et al.* 1995, Parra-Vega *et al.* 2001)

$$\mathbf{H}_i(\mathbf{q}_i) \ddot{\mathbf{q}}_i + \mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i) \dot{\mathbf{q}}_i + \mathbf{D}_i \dot{\mathbf{q}}_i + \mathbf{g}_i(\mathbf{q}_i) = \boldsymbol{\tau}_i + \mathbf{J}_{\varphi_i}^T(\mathbf{q}_i) \boldsymbol{\lambda}_i. \quad (3.9)$$

En la ecuación (3.9) se tiene que  $\mathbf{q}_i \in \mathbb{R}^{n_i}$  es el  $i$ -ésimo vector de coordenadas generalizadas de las articulaciones,  $\mathbf{H}_i(\mathbf{q}_i) \in \mathbb{R}^{n_i \times n_i}$  es la matriz de inercia simétrica positiva definida,  $\mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i) \dot{\mathbf{q}}_i \in \mathbb{R}^{n_i}$  es el vector de torques centrífugos y de Coriolis,  $\mathbf{g}_i(\mathbf{q}_i) \in \mathbb{R}^{n_i}$  es el vector de torques gravitacionales,  $\mathbf{D}_i \in \mathbb{R}^{n_i \times n_i}$  es la matriz diagonal semidefinida positiva que considera los coeficientes de fricción viscosa de las articulaciones,  $\boldsymbol{\tau}_i \in \mathbb{R}^{n_i}$  es el vector de torques actuando en las articulaciones, y  $\boldsymbol{\lambda}_i \in \mathbb{R}^{m_i}$  es el vector de multiplicadores de Lagrange (físicamente representan la fuerza aplicada en el punto de contacto).  $\mathbf{J}_{\varphi_i}(\mathbf{q}_i) = \nabla \varphi_i(\mathbf{q}_i) \in \mathbb{R}^{m_i \times n_i}$  es una matriz ortogonal, cuyo rango se supone completo en esta tesis, debido a que se considera que todas las restricciones son independientes.  $\nabla \varphi_i(\mathbf{q}_i)$  denota el gradiente de la superficie del objeto  $\varphi_i \in \mathbb{R}^{m_i}$  que mapea un vector sobre el plano normal al plano tangente en el punto de contacto descrito por (3.7).

Cabe mencionar que la restricción holonómica juega un papel muy importante debido a que, si se calcula adecuadamente, es posible saber que debe satisfacer la trayectoria del robot para garantizar que el manipulador permanecerá en contacto con la superficie del objeto.

### 3.2.3 Posición y velocidad restringida

En esta sección se definen las variables de posición y velocidad restringida, que proporcionan información del comportamiento del sistema cooperativo a nivel cinemático. En un sistema cooperativo, la posición del efector final de cada robot está en contacto con el objeto (que se supone rígido), por lo que aparecen las restricciones de movimiento (3.1). Cabe mencionar que las restricciones impuestas sobre cada robot del sistema cooperativo es homogénea, es decir solo depende de las variables de articulación del mismo robot y no de los restantes. Además, al no existir movimiento relativo entre el punto terminal de cada manipulador y el objeto, se establece una constante que relaciona geoméricamente los puntos terminales de los manipuladores entre sí. Por ende, la posición del punto terminal de dicho manipulador puede ser definida en términos de las posiciones de los manipuladores restantes. Además, la velocidad del efector final de cada manipulador puede ser expresada también en términos de las velocidades de los restantes; esta consecuencia es lógica, ya que de no ser así se podría llegar al caso en que se perdiera el punto de contacto entre alguno de los manipuladores y el objeto.

La posición y velocidad restringida ya habían sido introducidas en algunos esquemas de control para sistemas cooperativos (Arimoto *et al.* 1993a, Naniwa *et al.* 1997b), pero estas eran usadas solamente para plantear el problema cinemático. Las definiciones de velocidad y posición restringidas así como su uso dentro de la ley de control para proporcionar mayor información sobre la cinemática restringida fueron introducidas en Liu *et al.* (1997).

**Definición 3.2.4** Dada la restricción holonómica homogénea (3.1), la velocidad restringida del  $i$ -ésimo manipulador es

$$\dot{\mathbf{p}}_i = \mathbf{J}_{\varphi_i}(\mathbf{q}_i)\dot{\mathbf{q}}_i = \mathbf{0}. \quad (3.10)$$

En vista de (3.3) se tiene además

$$\sum_{i=1}^l \dot{\mathbf{p}}_i = \mathbf{0}. \quad (3.11)$$

△

**Definición 3.2.5** La variable de posición restringida está dada por la integral de la velocidad restringida, esto es

$$\mathbf{p}_i = \int_0^t \mathbf{J}_{\varphi_i}(\mathbf{q}_i)\dot{\mathbf{q}}_i dt = \mathbf{0} \quad (3.12)$$

con  $\mathbf{p}_i(0) = \mathbf{0}$ .

△



Cuando una trayectoria de posición deseada es especificada para un sistema cooperativo, se tiene que las correspondientes variables de velocidad y posición restringida se calculan directamente en función de la variable del vector velocidad deseada  $\dot{\mathbf{q}}_{di}$  y del vector de posición deseada  $\mathbf{q}_{di}$ :

$$\sum_{i=1}^l \dot{\mathbf{p}}_{di} = \sum_{i=1}^l \mathbf{J}_{\varphi_i}(\mathbf{q}_{di}) \dot{\mathbf{q}}_{di} = \mathbf{0} \quad (3.13)$$

y

$$\sum_{i=1}^l \mathbf{p}_{di} = \sum_{i=1}^l \int_0^t \mathbf{J}_{\varphi_i}(\mathbf{q}_{di}) \dot{\mathbf{q}}_{di} dt = \mathbf{0}, \quad (3.14)$$

con  $\mathbf{p}_{di}(0) = \mathbf{0}$ . La trayectoria de posición deseada debe satisfacer las restricciones de movimiento dadas por la ecuación (3.3).

Para poder controlar los vectores de velocidad  $\dot{\mathbf{p}}_i$  y posición restringida  $\mathbf{p}_i$ , se definen los correspondientes errores

$$\Delta \dot{\mathbf{p}}_i \triangleq \dot{\mathbf{p}}_i - \dot{\mathbf{p}}_{di} \quad (3.15)$$

$$\Delta \mathbf{p}_i \triangleq \mathbf{p}_i - \mathbf{p}_{di}, \quad (3.16)$$

que satisfacen

$$\sum_{i=1}^l \Delta \dot{\mathbf{p}}_i = \mathbf{0} \quad \text{y} \quad \sum_{i=1}^l \Delta \mathbf{p}_i = \mathbf{0}. \quad (3.17)$$

Las trayectorias de posición deseada deben cumplirse con las restricciones (3.1) en todos instante de tiempo, para así asegurar el contacto entre el objeto y los manipuladores. Por está razón es importante controlar los errores de velocidad y posición restringida, estos errores son incluidos en la ley de control y en la señal de referencia nominal, para permitir asegurar que el objeto rígido esté en contacto con los efectores finales de los robots manipuladores involucrados en el sistema cooperativo.

### 3.2.4 Método de ortogonalización del espacio articular

El método de ortogonalización del espacio articular es un esquema general cuya finalidad es desacoplar las componentes de fuerza de las componentes de posición/velocidad (Arimoto *et al.* 1993b, Liu *et al.* 1996, Liu *et al.* 1997). El método de ortogonalización se sustenta en la propiedad física de que, cuando se aplica fuerza sobre una superficie rígida restringida, la resultante es perpendicular a la superficie y el vector de velocidad está contenido en el plano tangente al punto de contacto.

Suponiendo que la matriz  $\mathbf{J}_{\varphi_i}^T(\mathbf{q}_i)$  es de rango completo, debido a que se considera que todas las restricciones son independientes, se tiene que las fuerzas de reacción o contacto ejercidas sobre el manipulador  $i$  pertenecen al espacio de fuerza  $\Omega_i$  generado por los

vectores columna de  $\mathbf{J}_{\varphi_i}^T(\mathbf{q}_i)$ . La señal de trayectoria se proyecta dentro del espacio  $\mathbf{T}_i$ , el cual es ortogonal al espacio de fuerzas  $\mathbf{\Omega}_i$ .

Las matrices que proyectan un vector articular  $\dot{\mathbf{q}}_i$  dentro de los subespacios de posición y fuerza respectivamente, están dadas por (Arimoto *et al.* 1993a, Arimoto *et al.* 1993b, Liu *et al.* 1995)

$$\mathbf{Q}_i(\mathbf{q}_i) = \mathbf{I}_{n_i \times n_i} - \mathbf{J}_{\varphi_i}^+(\mathbf{q}_i)\mathbf{J}_{\varphi_i}(\mathbf{q}_i) \in \mathbb{R}^{n_i \times n_i} \quad (3.18)$$

$$\mathbf{P}_i(\mathbf{q}_i) = \mathbf{J}_{\varphi_i}^+(\mathbf{q}_i)\mathbf{J}_{\varphi_i}(\mathbf{q}_i) \in \mathbb{R}^{n_i \times n_i}. \quad (3.19)$$

donde la matriz  $\mathbf{Q}_i(\mathbf{q}_i)$  proyecta al subespacio ortogonal de posición  $\mathbf{T}_i$  y la matriz  $\mathbf{P}_i(\mathbf{q}_i)$  al de fuerza  $\mathbf{\Omega}_i$ ,  $\mathbf{I}_{n_i \times n_i}$  es la matriz de identidad y  $\mathbf{J}_{\varphi_i}^+(\mathbf{q}_i)$  es la pseudoinversa de Penrose del Jacobiano de la restricción  $\mathbf{J}_{\varphi_i}(\mathbf{q}_i)$ , que se define como

$$\mathbf{J}_{\varphi_i}^+ = \mathbf{J}_{\varphi_i}^T (\mathbf{J}_{\varphi_i} \mathbf{J}_{\varphi_i}^T)^{-1} \in \mathbb{R}^{n_i \times m_i}. \quad (3.20)$$

Dadas las propiedades de ortogonalidad entre los espacios de posición y fuerza, se tiene que

$$\mathbf{Q}_i(\mathbf{q}_i)\mathbf{J}_{\varphi_i}^T(\mathbf{q}_i) = \mathbf{0} \quad \text{y} \quad \mathbf{Q}_i(\mathbf{q}_i)\mathbf{J}_{\varphi_i}^+(\mathbf{q}_i) = \mathbf{0}; \quad (3.21)$$

además cumple con las siguientes relaciones

$$\mathbf{J}_{\varphi_i}(\mathbf{q}_i)\dot{\mathbf{q}}_i = \dot{\mathbf{p}}_i = \mathbf{0} \quad \implies \quad \mathbf{Q}_i(\mathbf{q}_i)\dot{\mathbf{q}}_i = \dot{\mathbf{q}}_i, \quad (3.22)$$

y

$$\mathbf{P}_i(\mathbf{q}_i)\mathbf{J}_{\varphi_i}^T(\mathbf{q}_i) = \mathbf{J}_{\varphi_i}^T(\mathbf{q}_i). \quad (3.23)$$

Usando las matrices de proyección  $\mathbf{Q}_i(\mathbf{q}_i)$  y  $\mathbf{J}_{\varphi_i}^T(\mathbf{q}_i)$  es posible descomponer el vector de velocidad angular  $\dot{\mathbf{q}}_i$  en sus componentes ortogonales de posición y fuerza, los cuales caen en los espacios  $\mathbf{T}_i$  y  $\mathbf{\Omega}_i$ , respectivamente. El uso del método de ortogonalización en el espacio articular permite desacoplar la ley de control en dos partes, una para posición y otra para fuerza, las cuales, aunque estén desacopladas, no pueden ser tratadas como problemas independientes, puesto que la fuerza aplicada por los manipuladores del sistema cooperativo es resultado del movimiento del manipulador, y los errores de movimiento son resultado de la fuerza de reacción sobre los efectores finales causada por los manipuladores.

### 3.2.5 Propiedades de los robots cooperativos

En esta sección se presentan varias propiedades del modelo (3.9). Las propiedades de un sistema cooperativo son las mismas que se emplean para los manipuladores en movimiento libre, debido a que las restricciones se reflejan en el modelo como una fuerza externa, y por lo tanto, las propiedades se siguen satisfaciendo. Algunas propiedades son físicas mientras, que otras surgen del procedimiento utilizado para obtener el modelo dinámico del sistema cooperativo (Ortega y Spong 1989, Arimoto *et al.* 1993a, Liu *et al.* 1995, Arteaga Pérez 1998). En adelante, se utilizará la norma euclidiana para vectores, es decir:

$$\|\mathbf{x}\| \triangleq (\mathbf{x}^T \mathbf{x})^{\frac{1}{2}}.$$

La norma de una matriz  $\mathbf{A}$  es la correspondiente norma inducida

$$\|\mathbf{A}\| \triangleq (\lambda_{\max}(\mathbf{A}^T \mathbf{A}))^{\frac{1}{2}}.$$

Asimismo,  $\lambda_{\max}(\cdot)$  ( $\lambda_{\min}(\cdot)$ ) denota el máximo (mínimo) valor propio de una matriz.

### Propiedades del modelo dinámico

Algunas propiedades del modelo dinámico de un sistema cooperativo son las siguientes:

**Propiedad 3.2.1** *El sistema cooperativo consta de  $n = \sum_{i=1}^l (n_i - m_i)$  grados de libertad de movimiento y de  $m = \sum_{i=1}^l m_i$  grados de fuerza.*  $\triangle$

**Propiedad 3.2.2** *La matriz de inercia generalizada  $\mathbf{H}_i(\mathbf{q}_i)$  es simétrica positiva definida.*  $\triangle$

La siguiente propiedad se relaciona con la estructura pasiva de un sistema cooperativo y se utiliza con frecuencia en la demostración de muchos esquemas de control (Ortega y Spong 1989, Liu *et al.* 1997, Arteaga Pérez 1998).

**Propiedad 3.2.3** *La matriz  $\mathbf{N}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i) \triangleq \dot{\mathbf{H}}_i(\mathbf{q}_i) - 2\mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i) \in \mathbb{R}^{n_i \times n_i}$  es antisimétrica.*  $\triangle$

Debe notarse que la Propiedad 3.2.3 es válida debido a la definición especial de la matriz  $\mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i)$  con base en los símbolos de Christoffel; pero, es posible introducir más de una matriz  $\mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i)$  que pueda servir para calcular el vector de Coriolis y fuerza centrífugas. Sin embargo, independientemente de la definición de  $\mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i)$ , siempre se cumple que (Ortega y Spong 1989):

$$\dot{\mathbf{q}}_i^T (\dot{\mathbf{H}}_i(\mathbf{q}_i) - 2\mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i)) \dot{\mathbf{q}}_i = 0. \quad (3.24)$$

**Propiedad 3.2.4** *El vector  $\dot{\mathbf{q}}_i$  puede ser escrito como*

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{q}}_i &= \dot{\mathbf{q}}_i + (\mathbf{J}_{\varphi_i}^+ \mathbf{J}_{\varphi_i} \dot{\mathbf{q}}_i - \mathbf{J}_{\varphi_i}^+ \mathbf{J}_{\varphi_i} \dot{\mathbf{q}}_i) \\ &= (\mathbf{I}_{n_i \times n_i} - \mathbf{J}_{\varphi_i}^+ \mathbf{J}_{\varphi_i}) \dot{\mathbf{q}}_i + \mathbf{J}_{\varphi_i}^+ \mathbf{J}_{\varphi_i} \dot{\mathbf{q}}_i \\ &\triangleq \mathbf{Q}_i(\mathbf{q}_i) \dot{\mathbf{q}}_i + \mathbf{J}_{\varphi_i}^+(\mathbf{q}_i) \dot{\mathbf{p}}_i, \end{aligned} \quad (3.25)$$

donde el rango( $\mathbf{Q}_i$ ) =  $n_i - m_i$ .  $\triangle$

**Propiedad 3.2.5** El vector  $\mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \mathbf{x})\mathbf{y}$  satisface la igualdad

$$\mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \mathbf{x})\mathbf{y} = \mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \mathbf{y})\mathbf{x} \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^{n_i}. \quad (3.26)$$

△

**Propiedad 3.2.6** La matriz  $\mathbf{D}_i$  es diagonal positiva semidefinida y satisface:

$$\lambda_{\min}(\mathbf{D}_i)\|\mathbf{y}_i\|^2 \leq \mathbf{y}_i^T \mathbf{D}_i \mathbf{y}_i \leq \lambda_{\max}(\mathbf{D}_i)\|\mathbf{y}_i\|^2 \quad \forall \mathbf{y}_i \in \mathbb{R}^{n_i}. \quad (3.27)$$

△

$\mathbf{D}_i$  es una matrix diagonal positiva semidefinida porque está definida con base en la función de disipación de Rayleigh.

### Propiedades relacionadas con las cotas de normas

Encontrar cotas de normas para las matrices del modelo cooperativo (3.9) juega un papel importante en el control de robots manipuladores. Estas son útiles para el diseño de muchos esquemas de control. Las cotas de normas ofrecen muchas ventajas, especialmente cuando se emplea la teoría de Lyapunov. De hecho, para cualquier sistema físico los vectores  $\mathbf{q}_i$  y  $\dot{\mathbf{q}}_i$  están acotados. Por simplicidad, puesto que se consideran articulaciones de revolución.

Las siguientes cuatro propiedades se relacionan con la matriz de inercia y pueden obtenerse con facilidad de la Propiedad 3.2.2.

**Propiedad 3.2.7** Cada matriz de inercia  $\mathbf{H}_i(\mathbf{q}_i)$  satisface  $\lambda_{hi}\|\mathbf{x}\|^2 \leq \mathbf{x}^T \mathbf{H}_i \mathbf{x} \leq \lambda_{Hi}\|\mathbf{x}\|^2$   $\forall \mathbf{q}_i, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n_i}$ , donde

$$\lambda_{hi} \triangleq \min_{\forall \mathbf{q}_i \in \mathbb{R}^{n_i}} \lambda_{\min}(\mathbf{H}_i),$$

$$\lambda_{Hi} \triangleq \max_{\forall \mathbf{q}_i \in \mathbb{R}^{n_i}} \lambda_{\max}(\mathbf{H}_i),$$

y

$$0 < \lambda_{hi} \leq \lambda_{Hi} < \infty. \quad \triangle$$

**Propiedad 3.2.8** La matriz  $\mathbf{H}_i^{-1}(\mathbf{q}_i)$  existe y satisface  $\sigma_{hi}\|\mathbf{x}\|^2 \leq \mathbf{x}^T \mathbf{H}_i^{-1}(\mathbf{q}_i)\mathbf{x} \leq \sigma_{Hi}\|\mathbf{x}\|^2$   $\forall \mathbf{q}_i, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n_i}$ , donde

$$\sigma_{hi} \triangleq \min_{\forall \mathbf{q}_i \in \mathbb{R}^{n_i}} \lambda_{\min}(\mathbf{H}_i^{-1}),$$

$$\sigma_{Hi} \triangleq \max_{\forall \mathbf{q}_i \in \mathbb{R}^{n_i}} \lambda_{\max}(\mathbf{H}_i^{-1}),$$

y

$$0 < \sigma_{hi} \leq \sigma_{Hi} < \infty. \quad \triangle$$

**Propiedad 3.2.9** *La matriz de inercia satisface  $0 < \lambda_{h_i} \leq \|\mathbf{H}_i(\mathbf{q}_i)\| \leq \lambda_{H_i} < \infty$ .*  $\triangle$

**Propiedad 3.2.10**  *$\mathbf{H}_i^{-1}(\mathbf{q}_i)$  satisface  $0 < \sigma_{h_i} \leq \|\mathbf{H}_i^{-1}(\mathbf{q}_i)\| \leq \sigma_{H_i} < \infty$ .*  $\triangle$

La siguiente propiedad es válida para todo vector  $\mathbf{y}_i \in \mathbb{R}^{n_i}$  y no sólo para  $\dot{\mathbf{q}}_i \in \mathbb{R}^{n_i}$ ; asimismo, facilita el diseño de observadores no lineales. Puesto que el vector de fuerzas gravitacionales  $\mathbf{g}_i(\mathbf{q}_i)$  sólo es función de  $\mathbf{q}_i$ , es posible encontrar algunas cotas para la norma de este vector.

**Propiedad 3.2.11** *La matriz  $\mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i)$  satisface  $\|\mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i)\| \leq k_{c_i} \|\dot{\mathbf{q}}_i\|$ ,  $k_{c_i} > 0$ .*  $\triangle$

**Propiedad 3.2.12** *El vector de fuerzas gravitacionales  $\mathbf{g}_i(\mathbf{q}_i)$  satisface  $\|\mathbf{g}_i(\mathbf{q}_i)\| \leq \sigma_{g_i}$ ,  $\sigma_{g_i} > 0$ .*  $\triangle$

**Propiedad 3.2.13** *El vector  $\mathbf{g}_i(\mathbf{q}_i)$  satisface*

$$\left\| \frac{\partial \mathbf{g}_i(\mathbf{q}_i)}{\partial \mathbf{q}_i} \right\| \leq \delta. \quad (3.28)$$

$\triangle$



# Capítulo 4

## 4.1 Objetivos

El propósito de este trabajo es presentar un estudio de la ecuación dinámica de un sistema cooperativo particular formado por dos brazos robots industriales, ya que estos son con los que cuenta el Laboratorio de Robótica de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional Autónoma de México; pero que pueda extenderse a  $l$  manipuladores.

Por otra parte, el objetivo de control de este trabajo es:

- a) Permitir un seguimiento de posición con un observador de velocidad en movimiento libre (sin restricciones). Que sirva para mover los manipuladores de la posición inicial hasta tocar el objeto a manipular y, después de concluir la manipulación, regresar a la posición original, que asegure convergencia a cero los errores de seguimiento de posición y de observación.
- b) Diseñar un algoritmo de control de seguimiento de posición/fuerza para un sistema cooperativo de robots rígidos sujetando un objeto sin deformación con un observador de velocidad.
- c) Diseñar un algoritmo consista en un controlador de seguimiento de posición/fuerza con un observador de velocidad para un sistema cooperativo, empleando un filtro de fuerza.

Los últimos dos algoritmos de control para sistemas cooperativos tienen que asegurar convergencia a cero los errores de seguimiento de posición y fuerza, así como de observación.

## 4.2 Suposiciones del sistema cooperativo

El modelo dinámico de cada robot manipulador involucrado en el sistema cooperativo se obtiene a partir de una formulación de Euler-Lagrange, y para facilitar la formulación de la dinámica de los robots manipuladores involucrados en el sistema cooperativo, se hacen las siguientes.

---

### Suposiciones relacionadas con los manipuladores

**Suposición 4.2.1** *Los robots están formados por articulaciones rotacionales.*  $\triangle$

**Suposición 4.2.2** *Los eslabones de los manipuladores cooperativos son rígidos.*  $\triangle$

**Suposición 4.2.3** *Los brazos robots no entran en configuraciones singulares durante toda la tarea.*  $\triangle$

**Suposición 4.2.4** *Los robots cooperativos son no redundantes.*  $\triangle$

### Suposiciones relacionadas con el objeto a manipular

**Suposición 4.2.5** *Los robots manipuladores sostienen rígidamente al objeto, por lo tanto no hay movimiento relativo entre los efectores finales y el objeto (condición de agarre estable).*  $\triangle$

**Suposición 4.2.6** *Como no existe movimiento relativo entre los efectores finales y el objeto, los efectos debidos a la fricción tangencial entre los efectores de los robots manipuladores y el objeto son cero.*  $\triangle$

**Suposición 4.2.7** *El objeto manipulado es rígido y no sufre deformaciones cuando es sujetado.*  $\triangle$

**Suposición 4.2.8** *Se conoce la cinemática directa del objeto rígido.*  $\triangle$

### Suposiciones relacionadas con las restricciones

**Suposición 4.2.9** *Se considera un sólo punto de contacto entre cada uno de los robots manipuladores y el objeto, por lo tanto el número de restricciones de movimiento sobre el sistema cooperativo  $m$  es igual al número de robots manipuladores que lo forman,  $l$ .*  $\triangle$

**Suposición 4.2.10** *Las restricciones de movimiento impuestas sobre el sistema cooperativo son holonómicas y homogéneas.*  $\triangle$

**Suposición 4.2.11** *Los  $l$  robots que componen el sistema satisfacen las restricciones (3.1).*  $\triangle$

**Suposición 4.2.12** *La matrix  $\mathbf{J}_{\varphi_i}$  es continuamente Lipschitz, i. e.*

$$\|\mathbf{J}_{\varphi_i}(\mathbf{q}_i) - \mathbf{J}_{\varphi_i}(\mathbf{q}_{di})\| \leq L_i \|\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_{di}\|, \quad (4.1)$$



para una constante positiva  $L_i$  y para todo  $\mathbf{q}_i, \mathbf{q}_{di} \in \mathbb{R}^{n_i}$ . Por otra parte, existen constantes positivas finitas  $c_{0i}$  y  $c_{1i}$ , que satisfacen

$$c_{0i} \triangleq \max_{\forall \mathbf{q}_i \in \mathbb{R}^{n_i}} \|\mathbf{J}_{\varphi_i}^+(\mathbf{q}_i)\| \quad (4.2)$$

$$c_{1i} \triangleq \max_{\forall \mathbf{q}_i \in \mathbb{R}^{n_i}} \|\mathbf{J}_{\varphi_i}(\mathbf{q}_i)\|. \quad (4.3)$$

△

Nótese que la suposición 4.2.12 considera que la restricción no incluye singularidades. Además 4.2 y 4.3 son bastante razonables para robots en revolución, puesto que los elementos de  $\mathbf{q}_i$  aparecen como argumentos de funciones trigonométricas (senos y cosenos). Esta es la razón de que 4.2 y 4.3 sean validas. Nótese que no solamente  $\mathbf{J}_{\varphi_i}^+(\mathbf{q}_i)$  está acotada, sino también  $\mathbf{J}_{\varphi_i}(\mathbf{q}_i)$  está acotada para cualquier  $\mathbf{q}_i$ .



# Capítulo 5

## Modelo dinámico del sistema cooperativo formado por brazos robots industriales

Este capítulo presenta el estudio de la ecuación dinámica de un sistema cooperativo particular formado por dos brazos robots industriales, ya que estos son con los que cuenta el Laboratorio de Robótica de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional Autónoma de México; pero puede extenderse a  $l$  manipuladores. Para el estudio del modelo dinámico del sistema cooperativo se consideran las suposiciones de la Sección 4.2.

### 5.1 Cálculo de la dinámica del sistema cooperativo

Un sistema cooperativo formado por dos o más brazos robots manipuladores tienen restricciones a nivel cinemático, estas se presentan cuando sostienen un objeto en común; además, aparecen fuerzas de reacción entre el objeto y el efector final de cada uno de los manipuladores involucrados en el sistema cooperativo, así como fuerzas internas ejercidas sobre el objeto. Para obtener la ecuación dinámica de robots cooperativos se plantean los siguientes problemas: resolver ecuaciones diferenciales algebraicas que aparecen al estar en contacto el efector final con el objeto; como segundo problema, es encontrar un modelo dinámico para el objeto rígido y el acoplamiento dinámico de éste con los manipuladores que forman el sistema cooperativo; por último, hallar el modelo de la fuerza del sistema cooperativo.

### 5.1.1 Descripción del sistema experimental



Figura 5.1: Sistema experimental.

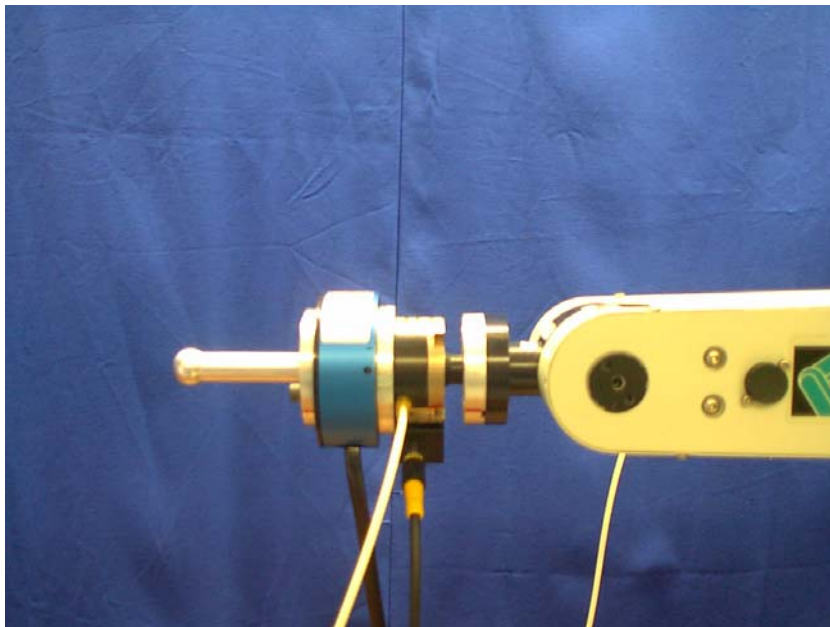


Figura 5.2: Efecto final para los experimentos del sistema cooperativo.

Los algoritmos de control de posición y fuerza fueron evaluados en los brazos robots industriales A465 y A255, de la firma canadiense *CRS Robotics*. El manipulador A465 es de seis grados de libertad y el A255 es de cinco. Los manipuladores son parte del sistema experimental del Laboratorio de Robótica de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional Autónoma de México (Figura 5.1). Ambos son del tipo rotacional; los actuadores

son servomotores de CD con codificadores ópticos. Además, cada uno de los brazos robots tiene un protector de impacto montado sobre la muñeca, un sensor de fuerza de la marca *JR3* y un dedo de aluminio, como se muestra en la Figura 5.2. Los algoritmos de control son ejecutados en una computadora personal Pentium IV a 1.5 GHz, que tiene instalada dos tarjetas *PCI-FlexMotion-6C* de *National Instruments* con un tiempo de muestreo de 9ms. Los controladores fueron escritos en lenguaje c y con herramientas de LabWindows CVI.

### 5.1.2 Descripción del sistema cooperativo

Un diagrama esquemático de los brazos robots sujetando un objeto se muestra en la Figura 5.3. Las coordenadas generalizadas del sistema cooperativo son la posición, velocidad y aceleración; también las fuerzas que aparecen por el contacto del efector final sobre el objeto rígido, y las fuerzas generalizadas de entrada (*i.e.*, torques) ejercidas por las articulaciones.

Para describir la relación cinemática entre los robots y el objeto, se selecciona un sistema de coordenadas estacionario  $C_0$  como marco de referencia, ubicado en la base del brazo robot A465. El sistema de coordenadas del objeto,  $C_2$ , está localizado en el centro de masa del mismo. El origen del marco de coordenadas  $C_1$  se localiza en el punto central del efector final del brazo robot A465. De la misma manera, el origen del sistema de coordenada  $C_3$  está localizado en el punto central del efector final del brazo robot A255. El marco de coordenadas  $C_0$  ha sido considerado como el marco de coordenadas inerciales de todo el sistema.

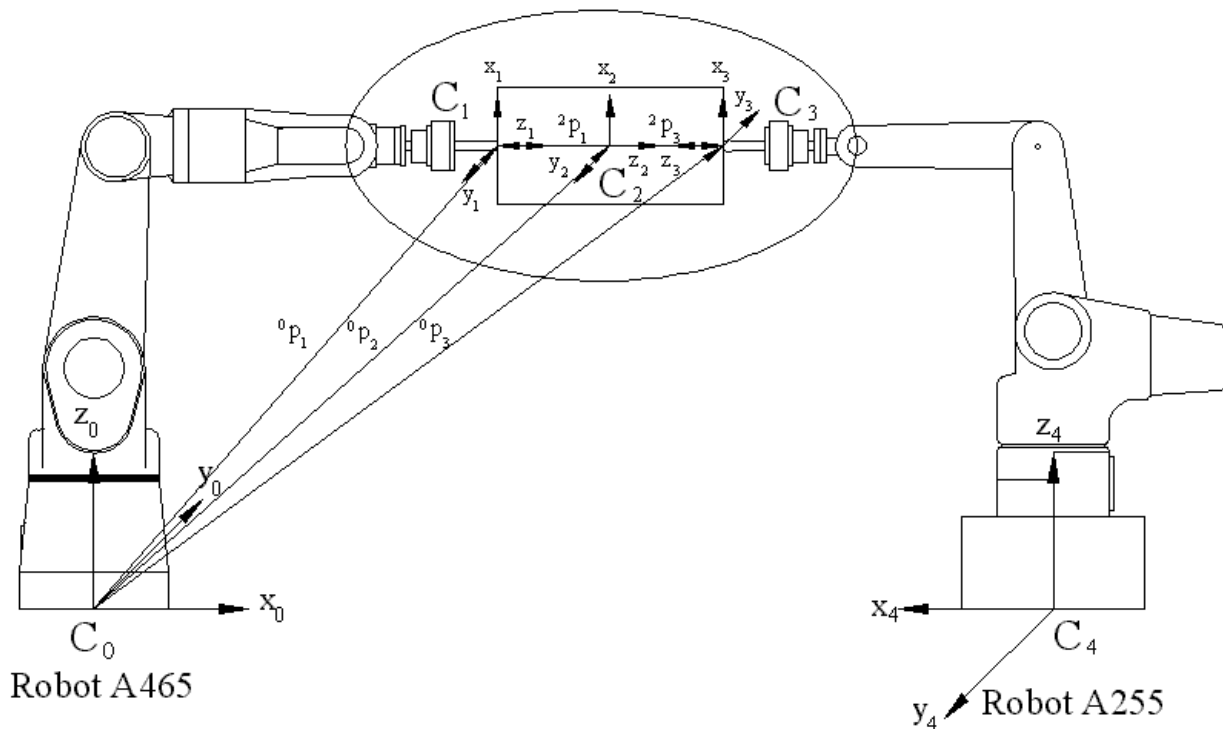


Figura 5.3: Diagrama esquemático de brazos robots sujetando un objeto.

Sea  ${}^0\mathbf{p}_2$  el vector de posición del centro de masa del objeto expresado en el sistema de coordenadas  $C_0$ .  ${}^0\mathbf{p}_1$  y  ${}^0\mathbf{p}_3$  son vectores que describen la posición de los puntos de contacto entre los efectores finales de los brazos robots A465, A255 y el objeto respectivamente, todo expresado en el sistema de coordenadas  $C_0$ . Por otra parte, el sistema cooperativo de la Figura 5.3 está sujeto a  $m=2$  restricciones holonómicas dadas por

$$\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{q}) = \mathbf{0}, \quad (5.1)$$

donde  $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{q}) = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2) \in \mathbb{R}^2$ . Esto significa que el objeto está siendo manipulado y el ambiente se describe por las restricciones (5.1). Si las restricciones holonómicas son calculadas correctamente se puede garantizar que los brazos robots no dejarán caer el objeto.

Como se muestra en Liu *et al.* (1997), si consideramos que las restricciones holonómicas son homogéneas, se pueden escribir las restricciones de posición, velocidad y aceleración de la siguiente forma

$$\boldsymbol{\varphi}_i(\mathbf{q}_i) = \mathbf{0} \quad (5.2)$$

$$\dot{\boldsymbol{\varphi}}_i(\mathbf{q}_i) = \mathbf{J}_{\boldsymbol{\varphi}_i}(\mathbf{q}_i)\dot{\mathbf{q}}_i = \mathbf{0} \quad (5.3)$$

$$\ddot{\boldsymbol{\varphi}}_i(\mathbf{q}_i) = \mathbf{J}_{\boldsymbol{\varphi}_i}(\mathbf{q}_i)\ddot{\mathbf{q}}_i + \dot{\mathbf{J}}_{\boldsymbol{\varphi}_i}(\mathbf{q}_i)\dot{\mathbf{q}}_i = \mathbf{0}, \quad (5.4)$$

respectivamente.

### 5.1.3 Modelo dinámico de un objeto rígido

El movimiento del sistema cooperativo formado por los dos brazos robots está dinámicamente acoplado por las fuerzas de contacto originadas por la interacción del objeto rígido. Para describir esta interacción, es necesario conocer la dinámica del objeto. Considerando las suposiciones 4.2.2, 4.2.5, 4.2.6 y 4.2.7 de la Sección 4.2; y de acuerdo con el diagrama de cuerpo libre de la Figura 5.4, la ecuación de movimiento de Newton es

$$\mathbf{m}_o\ddot{\mathbf{x}}_o - \mathbf{m}_o\mathbf{g}_o = \mathbf{f}_1 - \mathbf{f}_2, \quad (5.5)$$

donde  $\mathbf{m}_o \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  es la matriz diagonal de masa del objeto,  $\ddot{\mathbf{x}}_o \in \mathbb{R}^{3 \times 1}$  es el vector que describe la aceleración de traslación del centro de masa del objeto,  $\mathbf{f}_1 \in \mathbb{R}^{3 \times 1}$  y  $\mathbf{f}_2 \in \mathbb{R}^{3 \times 1}$  son las fuerzas ejercidas por los robots.

Todos los vectores se expresan con referencia al marco de coordenadas inerciales  $C_0$ . La fuerza de contacto está dada por

$$\mathbf{f}_i = \mathbf{n}_i\boldsymbol{\lambda}_i, \quad (5.6)$$

donde  $\mathbf{n}_i \in \mathbb{R}^{3 \times 1}$  representa la dirección de las fuerzas (normal a la restricción) y  $\boldsymbol{\lambda}_i$  es la magnitud, que es la misma que aparece en la ecuación (3.9).

Para obtener el modelo dinámico para robots cooperativos se toman en cuenta las suposiciones realizadas en la Sección 4.2.

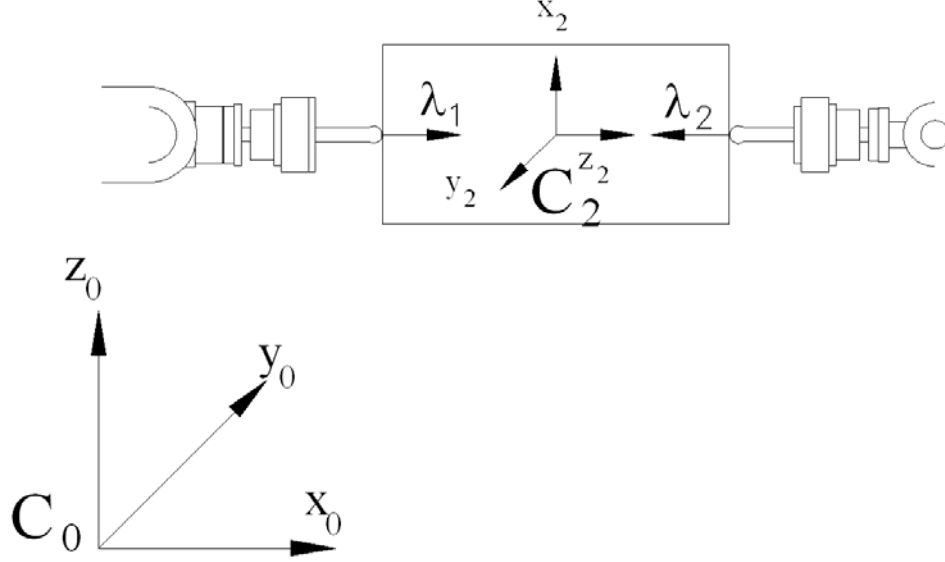


Figura 5.4: Diagrama de cuerpo libre de la fuerza.

### 5.1.4 Acoplamiento dinámico

La posición, velocidad y aceleración del centro de masa del objeto con referencia al sistema de coordenadas inerciales están dadas en coordenadas Cartesianas por:

$$\mathbf{x}_o = \mathbf{h}_i(\mathbf{q}_i) \quad (5.7)$$

$$\dot{\mathbf{x}}_o = \mathbf{J}_{oi}(\mathbf{q}_i)\dot{\mathbf{q}}_i \quad (5.8)$$

$$\ddot{\mathbf{x}}_o = \mathbf{J}_{oi}(\mathbf{q}_i)\ddot{\mathbf{q}}_i + \dot{\mathbf{J}}_o(\mathbf{q}_i)\dot{\mathbf{q}}_i, \quad (5.9)$$

respectivamente, con  $i = 1, 2$ .  $\mathbf{h}_i(\mathbf{q}_i) \in \mathbb{R}^{3 \times 1}$  es la cinemática directa del centro de masa del objeto rígido expresado en el sistema de coordenadas  $C_0$  y  $\mathbf{J}_{oi} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  corresponde a la matriz Jacobiana de  $\mathbf{h}_i$ . Substituyendo (5.9) en (5.5) se obtiene

$$\mathbf{m}_o \mathbf{J}_{oi}(\mathbf{q}_i)\ddot{\mathbf{q}}_i + \mathbf{m}_o \dot{\mathbf{J}}_{oi}(\mathbf{q}_i)\dot{\mathbf{q}}_i - \mathbf{m}_o \mathbf{g}_o = \mathbf{f}_1 - \mathbf{f}_2. \quad (5.10)$$

Ahora, reescribiendo (3.9) como

$$\mathbf{H}_i(\mathbf{q}_i)\ddot{\mathbf{q}}_i + \mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i)\dot{\mathbf{q}}_i + \mathbf{D}_i\dot{\mathbf{q}}_i + \mathbf{g}_i(\mathbf{q}_i) = \boldsymbol{\tau}_i + \mathbf{J}_{ai}^T(\mathbf{q}_i)\mathbf{f}_i, \quad (5.11)$$

se concluye que

$$\mathbf{J}_{\varphi_i}^T(\mathbf{q}_i) = \mathbf{J}_{ai}^T(\mathbf{q}_i)\mathbf{n}_i, \quad (5.12)$$

en vista de (5.6).  $\mathbf{J}_{ai}^T(\mathbf{q}_i)$  es el Jacobiano analítico de los brazos robots, el cual se obtiene a partir de la diferenciación de la función de cinemática directa (localización del efector final

expresada mediante una representación mínima en el espacio operacional) con respecto a las variables de las articulaciones. Por otra parte, de (5.10) se tiene

$$\mathbf{m}_o \mathbf{J}_{o_i}(\mathbf{q}_i) \ddot{\mathbf{q}}_i + \mathbf{m}_o \dot{\mathbf{J}}_{o_i}(\mathbf{q}_i) \dot{\mathbf{q}}_i - \mathbf{m}_o \mathbf{g}_o + \mathbf{f}_2 = \mathbf{f}_1. \quad (5.13)$$

Entonces, para  $i = 1$  de (5.11) se obtiene

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_1(\mathbf{q}_1) \ddot{\mathbf{q}}_1 + \mathbf{C}_1(\mathbf{q}_1, \dot{\mathbf{q}}_1) \dot{\mathbf{q}}_1 + \mathbf{D}_1 \dot{\mathbf{q}}_1 + \mathbf{g}_1(\mathbf{q}_1) \\ = \boldsymbol{\tau}_1 + \mathbf{J}_{a_1}^T(\mathbf{q}_1) \left\{ \mathbf{m}_o \mathbf{J}_{o_1}(\mathbf{q}_1) \ddot{\mathbf{q}}_1 + \mathbf{m}_o \dot{\mathbf{J}}_{o_1}(\mathbf{q}_1) \dot{\mathbf{q}}_1 - \mathbf{m}_o \mathbf{g}_o + \mathbf{f}_2 \right\} \\ = \boldsymbol{\tau}_1 + \mathbf{J}_{a_1}^T(\mathbf{q}_1) \mathbf{m}_o \mathbf{J}_{o_1}(\mathbf{q}_1) \ddot{\mathbf{q}}_1 + \mathbf{J}_{a_1}^T(\mathbf{q}_1) \mathbf{m}_o \dot{\mathbf{J}}_{o_1}(\mathbf{q}_1) \dot{\mathbf{q}}_1 \\ - \mathbf{J}_{a_1}^T(\mathbf{q}_1) \mathbf{m}_o \mathbf{g}_o + \mathbf{J}_{a_1}^T(\mathbf{q}_1) \mathbf{f}_2. \end{aligned} \quad (5.14)$$

Después de algunas manipulaciones algebraicas se obtiene

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau}_1 + \mathbf{J}_{a_1}^T(\mathbf{q}_1) \mathbf{f}_2 = \left\{ \mathbf{H}_1(\mathbf{q}_1) - \mathbf{J}_{a_1}^T(\mathbf{q}_1) \mathbf{m}_o \mathbf{J}_{o_1}(\mathbf{q}_1) \right\} \ddot{\mathbf{q}}_1 \\ + \left\{ \mathbf{C}_1(\mathbf{q}_1, \dot{\mathbf{q}}_1) + \mathbf{D}_1 - \mathbf{J}_{a_1}^T(\mathbf{q}_1) \mathbf{m}_o \dot{\mathbf{J}}_{o_1}(\mathbf{q}_1) \right\} \dot{\mathbf{q}}_1 \\ + \left\{ \mathbf{g}_1(\mathbf{q}_1) + \mathbf{J}_{a_1}^T(\mathbf{q}_1) \mathbf{m}_o \mathbf{g}_o \right\}. \end{aligned} \quad (5.15)$$

Definiendo

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_{T_1}(\mathbf{q}_1) &= \mathbf{H}_1(\mathbf{q}_1) - \mathbf{J}_{a_1}^T(\mathbf{q}_1) \mathbf{m}_o \mathbf{J}_{o_1}(\mathbf{q}_1) \\ \mathbf{C}_{T_1}(\mathbf{q}_1, \dot{\mathbf{q}}_1) &= \mathbf{C}_1(\mathbf{q}_1, \dot{\mathbf{q}}_1) + \mathbf{D}_1 - \mathbf{J}_{a_1}^T(\mathbf{q}_1) \mathbf{m}_o \dot{\mathbf{J}}_{o_1}(\mathbf{q}_1) \\ \mathbf{g}_{T_1}(\mathbf{q}_1) &= \mathbf{g}_1(\mathbf{q}_1) + \mathbf{J}_{a_1}^T(\mathbf{q}_1) \mathbf{m}_o \mathbf{g}_o, \end{aligned}$$

se tiene

$$\mathbf{H}_{T_1}(\mathbf{q}_1) \ddot{\mathbf{q}}_1 + \mathbf{C}_{T_1}(\mathbf{q}_1, \dot{\mathbf{q}}_1) \dot{\mathbf{q}}_1 + \mathbf{g}_{T_1}(\mathbf{q}_1) = \boldsymbol{\tau}_1 + \mathbf{J}_{a_1}^T(\mathbf{q}_1) \mathbf{f}_2. \quad (5.16)$$

De la misma manera, el análisis para el brazo robot A255 lleva a

$$\mathbf{H}_{T_2}(\mathbf{q}_2) \ddot{\mathbf{q}}_2 + \mathbf{C}_{T_2}(\mathbf{q}_2, \dot{\mathbf{q}}_2) \dot{\mathbf{q}}_2 + \mathbf{g}_{T_2}(\mathbf{q}_2) = \boldsymbol{\tau}_2 + \mathbf{J}_{a_2}^T(\mathbf{q}_2) \mathbf{f}_1, \quad (5.17)$$

con

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_{T_2}(\mathbf{q}_2) &= \mathbf{H}_2(\mathbf{q}_2) + \mathbf{J}_{a_2}^T(\mathbf{q}_2) \mathbf{m}_o \mathbf{J}_{o_2}(\mathbf{q}_2) \\ \mathbf{C}_{T_2}(\mathbf{q}_2, \dot{\mathbf{q}}_2) &= \mathbf{C}_2(\mathbf{q}_2, \dot{\mathbf{q}}_2) + \mathbf{D}_2 + \mathbf{J}_{a_2}^T(\mathbf{q}_2) \mathbf{m}_o \dot{\mathbf{J}}_{o_2}(\mathbf{q}_2) \\ \mathbf{g}_{T_2}(\mathbf{q}_2) &= \mathbf{g}_2(\mathbf{q}_2) - \mathbf{J}_{a_2}^T(\mathbf{q}_2) \mathbf{m}_o \mathbf{g}_o. \end{aligned}$$

El modelo dinámico en (5.16)-(5.17) describe el movimiento de todo el sistema cooperativo, donde cada uno de los manipuladores representa un subsistema acoplado a otro a través de las restricciones cinemáticas y dinámicas.

### 5.1.5 Modelado de la fuerza para robots cooperativos

Un robot manipulador en movimiento libre no tiene restricciones geométricas; por lo tanto, el modelo dinámico es descrito por Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (ODE por sus



siglas en inglés). Cuando el manipulador está sujeto a movimientos restringidos aparecen restricciones (holonómicas en nuestro caso); por esta razón, el modelo dinámico se describe por Ecuaciones Diferenciales Algebraicas (DAE). Para poder simular las fuerzas de contacto, se deben resolver las DAE. Primero, se despeja  $\ddot{\mathbf{q}}_i$  del modelo dinámico para robots cooperativos (3.9), por lo que se obtiene

$$\ddot{\mathbf{q}}_i = \mathbf{H}_i^{-1}(\mathbf{q}_i) \left\{ \boldsymbol{\tau}_i + \mathbf{J}_{\varphi_i}^T(\mathbf{q}_i) \boldsymbol{\lambda}_i - \mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i) \dot{\mathbf{q}}_i - \mathbf{D}_i \dot{\mathbf{q}}_i - \mathbf{g}_i(\mathbf{q}_i) \right\}. \quad (5.18)$$

Sin embargo, (5.2)-(5.4) deben cumplirse también. Sustituyendo el lado derecho de (5.18) en (5.4) se obtiene

$$\begin{aligned} \ddot{\varphi}_i(\mathbf{q}_i) &= \mathbf{J}_{\varphi_i}(\mathbf{q}_i) \mathbf{H}_i^{-1}(\mathbf{q}_i) \left\{ \boldsymbol{\tau}_i + \mathbf{J}_{\varphi_i}^T(\mathbf{q}_i) \boldsymbol{\lambda}_i - \mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i) \dot{\mathbf{q}}_i - \mathbf{D}_i \dot{\mathbf{q}}_i - \mathbf{g}_i(\mathbf{q}_i) \right\} \\ &\quad + \dot{\mathbf{J}}_{\varphi_i}(\mathbf{q}_i) \dot{\mathbf{q}}_i \\ &= \mathbf{J}_{\varphi_i}(\mathbf{q}_i) \mathbf{H}_i^{-1}(\mathbf{q}_i) \mathbf{J}_{\varphi_i}^T(\mathbf{q}_i) \boldsymbol{\lambda}_i + \dot{\mathbf{J}}_{\varphi_i}(\mathbf{q}_i) \dot{\mathbf{q}}_i \\ &\quad + \mathbf{J}_{\varphi_i}(\mathbf{q}_i) \mathbf{H}_i^{-1}(\mathbf{q}_i) \left\{ \boldsymbol{\tau}_i - \mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i) \dot{\mathbf{q}}_i - \mathbf{D}_i \dot{\mathbf{q}}_i - \mathbf{g}_i(\mathbf{q}_i) \right\} \\ &= \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (5.19)$$

De las ecuaciones anteriores se tiene

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\lambda}_i &= \left\{ \mathbf{J}_{\varphi_i}(\mathbf{q}_i) \mathbf{H}_i^{-1}(\mathbf{q}_i) \mathbf{J}_{\varphi_i}^T(\mathbf{q}_i) \right\}^{-1} \left[ \ddot{\varphi}_i(\mathbf{q}_i) - \dot{\mathbf{J}}_{\varphi_i}(\mathbf{q}_i) \dot{\mathbf{q}}_i \right. \\ &\quad \left. - \mathbf{J}_{\varphi_i}(\mathbf{q}_i) \mathbf{H}_i^{-1}(\mathbf{q}_i) \left\{ \boldsymbol{\tau}_i - \mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i) \dot{\mathbf{q}}_i - \mathbf{D}_i \dot{\mathbf{q}}_i - \mathbf{g}_i(\mathbf{q}_i) \right\} \right]. \end{aligned} \quad (5.20)$$

El sistema descrito por las ecuaciones (5.6),(5.16)-(5.17) y (5.20) podría ahora ser simulado como ecuaciones diferenciales de segundo orden. Sin embargo, la inclusión de las restricciones en la forma (5.20) no garantiza la convergencia de las restricciones de posición y velocidad a cero. Esto es debido a que  $\ddot{\varphi}_i(\mathbf{q}_i) = 0$  representa un doble integrador. De este modo, cualquier diferencia pequeña de  $\varphi_i(\mathbf{q}_i)$  ó  $\dot{\varphi}_i(\mathbf{q}_i)$  de cero en (5.2)-(5.4) divergirá. Este problema ha sido satisfactoriamente resuelto por el método de estabilización de las restricciones en la solución de ecuaciones diferenciales algebraicas (Baumgarte 1972). De acuerdo a esta aproximación, las restricciones son asintóticamente estabilizadas usando

$$\ddot{\varphi}_i(\mathbf{q}_i) + 2\alpha_i \dot{\varphi}_i(\mathbf{q}_i) + \beta_i \varphi_i(\mathbf{q}_i) = 0, \quad (5.21)$$

en lugar de  $\ddot{\varphi}_i(\mathbf{q}_i) = 0$ .  $\alpha_i$  y  $\beta_i$  son seleccionadas para asegurar una rápida convergencia de las restricciones de posición  $\varphi_i(\mathbf{q}_i)$  y las restricciones de velocidad  $\dot{\varphi}_i(\mathbf{q}_i)$  a cero (en caso de haber sesgo). Las ecuaciones (5.6),(5.16)-(5.17), (5.20)-(5.21) describen el movimiento del sistema cooperativo para ser simulado.



# Capítulo 6

## Control de posición/fuerza con observador de velocidad

Este capítulo presenta un algoritmo de control de seguimiento de posición con un observador de velocidad en movimiento libre (sin restricciones) y otros dos controladores de seguimiento de posición y fuerza empleando un estimador de velocidad (observador) para un sistema cooperativo. El primer controlador es usado para el movimiento desde la posición inicial de los robots hasta la posición inicial del movimiento restringido y los otros dos son empleados para manipular el objeto (movimiento restringido). Los algoritmos de control propuestos garantizan convergencia a cero de los errores de posición y de observación, así como de los errores de fuerza, en su caso.

Las propiedades de estabilidad del sistema cooperativo en lazo cerrado con la ley de control de posición/fuerza propuesta se prueban por medio de un análisis de estabilidad basado en el método directo de Lyapunov y en algunas propiedades del sistema cooperativo.

### 6.1 Planteamiento del problema

Los manipuladores que sujetan un objeto en común deben hacerlo de manera estable; es decir, las variables de posición, observación y fuerza deben ser controladas, de tal forma que se cumpla con la tarea o manipulación deseada. Para lograr esto se plantea el siguiente problema: a partir de la dinámica del sistema cooperativo, encontrar una ley de control de posición/fuerza sin medición de velocidad, de tal manera que el sistema en lazo cerrado sea estable y posea propiedades de convergencia en las variables de posición, observación y fuerza.

### 6.2 Control de seguimiento

En esta sección se presenta el análisis del algoritmo de control de seguimiento de posición con un observador de velocidad en movimiento libre (sin restricciones). La finalidad es mover los robots de la posición inicial hasta tocar el objeto y de regreso a su posición original una vez que termina la manipulación.

Considérese un robot en movimiento libre, cuya dinámica está dada por

$$\mathbf{H}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{D}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) = \boldsymbol{\tau}. \quad (6.1)$$

Los errores de seguimiento y observación se definen como

$$\tilde{\mathbf{q}} \triangleq \mathbf{q} - \mathbf{q}_d \quad (6.2)$$

$$\mathbf{z} \triangleq \mathbf{q} - \hat{\mathbf{q}}, \quad (6.3)$$

respectivamente, donde  $\mathbf{q}_d$  es una trayectoria deseada suave y acotada, y  $(\cdot)$  representa el valor estimado de  $(\cdot)$ . Otras definiciones útiles son

$$\dot{\mathbf{q}}_r \triangleq \dot{\mathbf{q}}_d - \boldsymbol{\Lambda}(\hat{\mathbf{q}} - \mathbf{q}_d) \quad (6.4)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{s} &\triangleq \dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}_r \\ &= \dot{\tilde{\mathbf{q}}} + \boldsymbol{\Lambda}\tilde{\mathbf{q}} - \boldsymbol{\Lambda}\mathbf{z} \end{aligned} \quad (6.5)$$

$$\dot{\mathbf{q}}_o \triangleq \dot{\hat{\mathbf{q}}} - \boldsymbol{\Lambda}\mathbf{z} \quad (6.6)$$

$$\mathbf{r} \triangleq \dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}_o = \dot{\mathbf{z}} + \boldsymbol{\Lambda}\mathbf{z}, \quad (6.7)$$

donde  $\boldsymbol{\Lambda} = k\mathbf{I} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  con  $k > 0$ . Para obtener (6.5), la igualdad  $\hat{\mathbf{q}} - \mathbf{q}_d = \tilde{\mathbf{q}} - \mathbf{z}$  se ha empleado. El controlador propuesto está dado por

$$\boldsymbol{\tau} \triangleq \mathbf{H}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}}_r + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}_r)\dot{\mathbf{q}}_r + \mathbf{D}\dot{\mathbf{q}}_r + \mathbf{g}(\mathbf{q}) - \mathbf{K}_R(\dot{\mathbf{q}}_o - \dot{\mathbf{q}}_r), \quad (6.8)$$

donde  $\mathbf{K}_R \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es una matriz diagonal positiva definida. Nótese que de (6.5) y (6.7) se tiene  $\dot{\mathbf{q}}_o - \dot{\mathbf{q}}_r = \mathbf{s} - \mathbf{r}$ . Por lo tanto, se tiene

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{H}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}}_r + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}_r)\dot{\mathbf{q}}_r + \mathbf{D}\dot{\mathbf{q}}_r + \mathbf{g}(\mathbf{q}) - \mathbf{K}_R(\mathbf{s} - \mathbf{r}). \quad (6.9)$$

Substituyendo (6.9) en (6.1), se puede calcular la dinámica en lazo cerrado como

$$\mathbf{H}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{s}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} - \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}_r)\dot{\mathbf{q}}_r + \mathbf{D}\mathbf{s} + \mathbf{K}_R(\mathbf{s} - \mathbf{r}) = 0 \quad (6.10)$$

despejando  $\mathbf{H}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{s}}$  de la ecuación (6.10)

$$\mathbf{H}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{s}} = \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}_r)\dot{\mathbf{q}}_r - \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} - \mathbf{D}\mathbf{s} - \mathbf{K}_R(\mathbf{s} - \mathbf{r}) \quad (6.11)$$

donde el término  $\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}_r)\dot{\mathbf{q}}_r - \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}}$  de (6.11) se ha manipulado por medio de la Propiedad 3.2.5 y se tiene

$$\begin{aligned} \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}_r)\dot{\mathbf{q}}_r - \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} &= \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}_r)\dot{\mathbf{q}}_r - \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}}_r - \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}}_r \\ &= -\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})(\dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}_r) - \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}_r)\dot{\mathbf{q}}_r \\ &= -\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\mathbf{s} - \mathbf{C}(\mathbf{q}, \mathbf{s})\dot{\mathbf{q}}_r \\ &= -\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\mathbf{s} - \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}_r)\mathbf{s}. \end{aligned} \quad (6.12)$$

Substituyendo (6.12) en (6.11) se tiene

$$\mathbf{H}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{s}} = -\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\mathbf{s} - \mathbf{K}_{DR}\mathbf{s} - \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}_r)\mathbf{s} + \mathbf{K}_R\mathbf{r} \quad (6.13)$$

donde  $\mathbf{K}_{DR} \triangleq \mathbf{K}_R + \mathbf{D}$ .

### 6.2.1 Definición del observador

La dinámica del observador propuesto está dada por

$$\dot{\hat{\mathbf{q}}} = \dot{\hat{\mathbf{q}}}_o + \mathbf{\Lambda}\mathbf{z} + k_d\mathbf{z} \quad (6.14)$$

$$\ddot{\hat{\mathbf{q}}}_o = \ddot{\hat{\mathbf{q}}}_r + k_d\mathbf{\Lambda}\mathbf{z}, \quad (6.15)$$

donde  $k_d$  es una constante positiva. Derivando (6.14) se tiene  $\ddot{\hat{\mathbf{q}}}_o = \ddot{\hat{\mathbf{q}}} - \mathbf{\Lambda}\dot{\mathbf{z}} - k_d\dot{\mathbf{z}}$  y sustituyendo en (6.15) se tiene

$$\dot{\mathbf{s}} = \dot{\mathbf{r}} + k_d\mathbf{r}, \quad (6.16)$$

Multiplicando ambos lados de (6.16) por  $\mathbf{H}(\mathbf{q})$ , y tomando en cuenta (6.13), se obtiene

$$\mathbf{H}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{r}} = -\mathbf{H}_{rd}\mathbf{r} - \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\mathbf{s} - \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}_r)\mathbf{s} - \mathbf{K}_{DR}\mathbf{s}, \quad (6.17)$$

donde  $\mathbf{H}_{rd} \triangleq k_d\mathbf{H}(\mathbf{q}) - \mathbf{K}_R$ . Finalmente, usando nuevamente la Propiedad 3.2.5 para manipular el término  $-\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\mathbf{s} - \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}_r)\mathbf{s}$  de (6.17) se tiene

$$\begin{aligned} & -\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\mathbf{s} - \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}_r)\mathbf{s} \quad (6.18) \\ &= -\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\mathbf{s} - \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}_r)\mathbf{s} - \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\mathbf{r} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\mathbf{r} \\ &= -\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})(\mathbf{s} - \mathbf{r}) - \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}_r)\mathbf{s} - \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\mathbf{r} \\ &= -\mathbf{C}(\mathbf{q}, \mathbf{s} + \dot{\mathbf{q}}_r)(\mathbf{s} - \mathbf{r}) - \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}_r)\mathbf{s} - \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\mathbf{r} \\ &= -\mathbf{C}(\mathbf{q}, \mathbf{s} + \dot{\mathbf{q}}_r)\mathbf{s} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \mathbf{s} + \dot{\mathbf{q}}_r)\mathbf{r} - \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}_r)\mathbf{s} - \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\mathbf{r} \\ &= -\mathbf{C}(\mathbf{q}, \mathbf{s})(\mathbf{s} + \dot{\mathbf{q}}_r) + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \mathbf{s} + \dot{\mathbf{q}}_r)\mathbf{r} - \mathbf{C}(\mathbf{q}, \mathbf{s})\dot{\mathbf{q}}_r - \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\mathbf{r} \\ &= -\mathbf{C}(\mathbf{q}, \mathbf{s})(\mathbf{s} + 2\dot{\mathbf{q}}_r) + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \mathbf{s} + \dot{\mathbf{q}}_r)\mathbf{r} - \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\mathbf{r} \\ &= -\mathbf{C}(\mathbf{q}, \mathbf{s} + 2\dot{\mathbf{q}}_r)\mathbf{s} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \mathbf{s} + \dot{\mathbf{q}}_r)\mathbf{r} - \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\mathbf{r}. \end{aligned}$$

Sustituyendo (6.18) en (6.17) se tiene

$$\begin{aligned} \mathbf{H}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{r}} &= -\mathbf{H}_{rd}\mathbf{r} - \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\mathbf{r} - \mathbf{C}(\mathbf{q}, \mathbf{s} + 2\dot{\mathbf{q}}_r)\mathbf{s} \quad (6.19) \\ &\quad + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \mathbf{s} + \dot{\mathbf{q}}_r)\mathbf{r} - \mathbf{K}_{DR}\mathbf{s}. \end{aligned}$$

El estado se define de la siguiente manera

$$\mathbf{x} \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{s} \\ \mathbf{r} \end{bmatrix}, \quad (6.20)$$

para (6.13) y (6.19). La idea principal del diseño del control/observador es mostrar que cuando  $\|\mathbf{x}\|$  converge a cero, los errores de posición  $\tilde{\mathbf{q}}$  y velocidad angular  $\dot{\tilde{\mathbf{q}}}$ , así como los errores de observación  $\mathbf{z}$  y  $\dot{\mathbf{z}}$  tenderán a cero también.

**Lema 6.2.1** *Si  $\mathbf{x}$  está acotado por  $x_{\max}$  y tiende a cero, entonces el siguiente hecho se satisface:  $\tilde{\mathbf{q}}$  y  $\dot{\tilde{\mathbf{q}}}$  permanecen acotados. Además, si la cota  $x_{\max}$  para  $\|\mathbf{x}\|$  es seleccionada suficientemente pequeña tal que garantice que  $\|\tilde{\mathbf{q}}\| \leq \eta$  para todo tiempo  $t$ , con  $\eta$  una constante positiva y suficientemente pequeña, entonces tanto  $\tilde{\mathbf{q}}$  como  $\dot{\tilde{\mathbf{q}}}$  tenderán a cero también.  $\triangle$*

La demostración del Lema 6.2.1 se muestra en el Apéndice B. La conclusión principal es que si  $\mathbf{x}$  está acotado, entonces  $\mathbf{s}$  y  $\mathbf{r}$  también lo están. Además, tenderán a cero si  $\mathbf{x}$  lo hace.

Considérese ahora la siguiente función candidata de Lyapunov

$$V(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \mathbf{x}^T \mathbf{M} \mathbf{x}, \quad (6.21)$$

donde  $\mathbf{M} \triangleq \text{block diag} \{ \mathbf{H}(\mathbf{q}), \mathbf{H}(\mathbf{q}) \}$ , y  $V(\mathbf{x})$  satisface

$$\lambda_1 \|\mathbf{x}\|^2 \leq V(\mathbf{x}) \leq \lambda_2 \|\mathbf{x}\|^2, \quad (6.22)$$

con

$$\begin{aligned} \lambda_1 &\triangleq \frac{1}{2} \min_{\forall \mathbf{q} \in \mathbb{R}^n} \lambda_{\min}(\mathbf{M}) \\ \lambda_2 &\triangleq \frac{1}{2} \max_{\forall \mathbf{q} \in \mathbb{R}^n} \lambda_{\max}(\mathbf{M}). \end{aligned} \quad (6.23)$$

Supóngase que se puede encontrar una región de atracción

$$S_a = \{ \mathbf{x} : \|\mathbf{x}\| \leq a \}, \quad (6.24)$$

tal que la derivada de la función candidata de Lyapunov  $\dot{V}(\mathbf{x}) \leq 0$  con  $\dot{V}(\mathbf{x}) = 0$  si y sólo si  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ . Si  $a$  es seleccionada de tal manera que  $\|\mathbf{x}\| \leq x_{\max}$  sea válida para todo tiempo y  $x_{\max}$  es suficientemente pequeña en el sentido del Lema 6.2.1, entonces de la discusión anterior se puede concluir la convergencia a cero de todas las señales de error.

El siguiente teorema establece las condiciones necesarias que deben de satisfacer los parámetros del controlador.

**Teorema 6.2.1** *Considérese la dinámica del robot rígido en movimiento libre dada por (6.1), en lazo cerrado con la ley de control (6.9) y el observador (6.14)–(6.15), donde  $\mathbf{q}_d$  es la trayectoria deseada acotada y suave en coordenadas articulares; las derivadas  $\dot{\mathbf{q}}_d$  y  $\ddot{\mathbf{q}}_d$ , también están acotadas. Considérese también (6.23) y una región definida por (6.24), donde la cota  $a$ , son seleccionadas de acuerdo con*

$$a_i \leq \frac{\eta k}{(1 + \sqrt{n})} \sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda_2}} \quad (6.25)$$

Entonces, toda señal de error permanece acotada y además se tiene convergencia a cero de los errores de posición y observación, i. e.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{\mathbf{q}} = \mathbf{0} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \dot{\tilde{\mathbf{q}}} = \mathbf{0} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{z} = \mathbf{0} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \dot{\mathbf{z}} = \mathbf{0} \quad (6.26)$$

si las siguientes condiciones se cumplen

$$\lambda_{\min}(\mathbf{K}_R) \geq \mu_1 + 1 + \delta \quad (6.27)$$

$$k_d \geq \frac{\lambda_{\max}(\mathbf{K}_R) + \omega}{\lambda_h}, \quad (6.28)$$

donde  $\omega = \mu_2 + \frac{1}{4}(\lambda_D + \mu_3)^2 + \delta$ ,  $\delta$  es una constante positiva y  $\mu_1$ ,  $\mu_2$ ,  $\mu_3$  y  $\lambda_D$  se definen como

$$\mu_1 \triangleq \max_{\|\mathbf{x}\| \leq x_{\max}} \|\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}_r)\| \quad (6.29)$$

$$\mu_2 \triangleq \max_{\|\mathbf{x}\| \leq x_{\max}} \|\mathbf{C}(\mathbf{q}, \mathbf{s} + \dot{\mathbf{q}}_r)\| \quad (6.30)$$

$$\mu_3 \triangleq \max_{\|\mathbf{x}\| \leq x_{\max}} \|\mathbf{C}(\mathbf{q}, \mathbf{s} + 2\dot{\mathbf{q}}_r)\| \quad (6.31)$$

$$\lambda_D \triangleq \lambda_{\max}(\mathbf{D}), \quad (6.32)$$

$$x_{\max} = a\sqrt{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}. \quad (6.33)$$

△

La demostración del Teorema 6.2.1 se encuentra en el Apéndice B.

## 6.3 Observador con matriz de inercia

En esta sección se estudia, el problema de control de posición y fuerza de un sistema cooperativo de robots rígidos con un observador de velocidad. Para el análisis del controlador de posición/fuerza, además de los errores de seguimiento de posición (6.2) y de observación (6.3) se definen los siguientes errores

$$\Delta \mathbf{p}_i \triangleq \mathbf{p}_i - \mathbf{p}_{di} \quad (6.34)$$

$$\Delta \boldsymbol{\lambda}_i \triangleq \boldsymbol{\lambda}_i - \boldsymbol{\lambda}_{di}, \quad (6.35)$$

donde  $\mathbf{p}_{di}$  es la posición deseada restringida que satisface (3.12).  $\boldsymbol{\lambda}_{di}$  es la fuerza deseada para ser aplicada por cada robot sobre el objeto. Cabe mencionar que, la trayectoria de posición deseada  $\mathbf{q}_{di}$  debe satisfacer la restricción (3.1).

Otras definiciones importantes son la señal de referencia nominal  $\dot{\mathbf{q}}_{ri}$ , la variable del error residual  $\mathbf{s}_i$  y  $\Delta \mathbf{F}_i$  es la integral del error de fuerza, que están dadas por:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{q}}_{ri} &\triangleq \mathbf{Q}_i(\mathbf{q}_i) (\dot{\mathbf{q}}_{di} - \boldsymbol{\Lambda}_i (\hat{\mathbf{q}}_i - \mathbf{q}_{di})) \\ &\quad + \mathbf{J}_{\varphi_i}^+(\mathbf{q}_i) (\dot{\mathbf{p}}_{di} - \beta_i \Delta \mathbf{p}_i + \boldsymbol{\xi}_i \Delta \mathbf{F}_i) \end{aligned} \quad (6.36)$$

$$\mathbf{s}_i \triangleq \dot{\mathbf{q}}_i - \dot{\mathbf{q}}_{ri} \quad (6.37)$$

$$\begin{aligned} &= \mathbf{Q}_i(\mathbf{q}_i) (\dot{\hat{\mathbf{q}}}_i + \boldsymbol{\Lambda}_i (\hat{\mathbf{q}}_i - \mathbf{q}_{di})) \\ &\quad + \mathbf{J}_{\varphi_i}^+(\mathbf{q}_i) (\Delta \dot{\mathbf{p}}_i + \beta_i \Delta \mathbf{p}_i - \boldsymbol{\xi}_i \Delta \mathbf{F}_i) \end{aligned}$$

$$\triangleq \mathbf{s}_{pi} + \mathbf{s}_{fi}$$

$$\Delta \mathbf{F}_i \triangleq \int_0^t \Delta \boldsymbol{\lambda}_i(\vartheta) d\vartheta, \quad (6.38)$$

donde  $\Lambda_i \in \mathbb{R}^{n_i \times n_i}$ ,  $\xi_i \in \mathbb{R}^{m_i \times m_i}$  son matrices diagonales definidas positivas, y  $\beta_i$  es una constante positiva. Nótese que  $\mathbf{s}_{pi}$  y  $\mathbf{s}_{fi}$  son vectores ortogonales, y que  $\mathbf{s}_i$  puede ser también escrito como

$$\mathbf{s}_i = \mathbf{Q}_i(\mathbf{q}_i) (\dot{\hat{\mathbf{q}}}_i + \Lambda_i \tilde{\mathbf{q}} - \Lambda_i \mathbf{z}_i) + \mathbf{J}_{\varphi_i}^+(\mathbf{q}_i) (\Delta \dot{\mathbf{p}}_i + \beta_i \Delta \mathbf{p}_i - \xi_i \Delta \mathbf{F}_i). \quad (6.39)$$

A continuación se analiza  $\ddot{\mathbf{q}}_{ri}$ :

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{q}}_{ri} \triangleq & \dot{\mathbf{Q}}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i) (\dot{\mathbf{q}}_{di} - \Lambda_i (\hat{\mathbf{q}}_i - \mathbf{q}_{di})) \\ & + \dot{\mathbf{J}}_{\varphi_i}^+(\mathbf{q}_i) (\dot{\mathbf{p}}_{di} - \beta_i \Delta \mathbf{p}_i + \xi_i \Delta \mathbf{F}_i) \\ & + \mathbf{Q}_i(\mathbf{q}_i) \left( \ddot{\mathbf{q}}_{di} - \Lambda_i (\dot{\hat{\mathbf{q}}}_i - \dot{\mathbf{q}}_{di}) \right) \\ & + \mathbf{J}_{\varphi_i}^+(\mathbf{q}_i) (\ddot{\mathbf{p}}_{di} - \beta_i (\dot{\mathbf{p}}_i - \dot{\mathbf{p}}_{di}) + \xi_i \Delta \lambda_i). \end{aligned} \quad (6.40)$$

Como se mostrará más adelante,  $\ddot{\mathbf{q}}_{ri}$  es necesario para la implementación del controlador y del observador. Sin embargo,  $\dot{\hat{\mathbf{q}}}_i$  no está disponible. Con la finalidad de superar este inconveniente, considérese

$$\dot{\mathbf{Q}}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i) = \begin{bmatrix} \frac{\partial a_{11}(\mathbf{q}_i)}{\partial \mathbf{q}_i} \dot{\mathbf{q}}_i & \cdots & \frac{\partial a_{1n_i}(\mathbf{q}_i)}{\partial \mathbf{q}_i} \dot{\mathbf{q}}_i \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial a_{n_i 1}(\mathbf{q}_i)}{\partial \mathbf{q}_i} \dot{\mathbf{q}}_i & \cdots & \frac{\partial a_{n_i n_i}(\mathbf{q}_i)}{\partial \mathbf{q}_i} \dot{\mathbf{q}}_i \end{bmatrix}, \quad (6.41)$$

donde  $a_{\alpha\beta}$  es el elemento  $\alpha\beta$  de  $\mathbf{Q}_i(\mathbf{q}_i)$ . Basado en (6.41), considérese la siguiente definición

$$\dot{\hat{\mathbf{Q}}}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_{oi}) \triangleq \begin{bmatrix} \frac{\partial a_{11}(\mathbf{q}_i)}{\partial \mathbf{q}_i} \dot{\mathbf{q}}_{oi} & \cdots & \frac{\partial a_{1n_i}(\mathbf{q}_i)}{\partial \mathbf{q}_i} \dot{\mathbf{q}}_{oi} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial a_{n_i 1}(\mathbf{q}_i)}{\partial \mathbf{q}_i} \dot{\mathbf{q}}_{oi} & \cdots & \frac{\partial a_{n_i n_i}(\mathbf{q}_i)}{\partial \mathbf{q}_i} \dot{\mathbf{q}}_{oi} \end{bmatrix}, \quad (6.42)$$

con

$$\dot{\mathbf{q}}_{oi} \triangleq \dot{\hat{\mathbf{q}}}_i - \Lambda_i \mathbf{z}_i. \quad (6.43)$$

Entonces, se puede calcular

$$\dot{\hat{\mathbf{Q}}}_i(\mathbf{r}_i) \triangleq \dot{\mathbf{Q}}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i) - \dot{\hat{\mathbf{Q}}}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_{oi}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial a_{11}(\mathbf{q}_i)}{\partial \mathbf{q}_i} \mathbf{r}_i & \cdots & \frac{\partial a_{1n_i}(\mathbf{q}_i)}{\partial \mathbf{q}_i} \mathbf{r}_i \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial a_{n_i 1}(\mathbf{q}_i)}{\partial \mathbf{q}_i} \mathbf{r}_i & \cdots & \frac{\partial a_{n_i n_i}(\mathbf{q}_i)}{\partial \mathbf{q}_i} \mathbf{r}_i \end{bmatrix}, \quad (6.44)$$

donde

$$\mathbf{r}_i \triangleq \dot{\mathbf{q}}_i - \dot{\mathbf{q}}_{oi} = \dot{\mathbf{z}}_i + \Lambda_i \mathbf{z}_i. \quad (6.45)$$



En vista de (6.42), se propone la siguiente sustitución para  $\ddot{\mathbf{q}}_{ri}$

$$\begin{aligned}\ddot{\mathbf{q}}_{ri} &\triangleq \dot{\mathbf{Q}}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_{oi}) (\dot{\mathbf{q}}_{di} - \mathbf{\Lambda}_i(\hat{\mathbf{q}}_i - \mathbf{q}_{di})) \\ &\quad + \dot{\mathbf{J}}_{\varphi_i}^+(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_{oi}) (\dot{\mathbf{p}}_{di} - \beta_i \Delta \mathbf{p}_i + \boldsymbol{\xi}_i \Delta \mathbf{F}_i) \\ &\quad + \mathbf{Q}_i(\mathbf{q}_i) \left( \ddot{\mathbf{q}}_{di} - \mathbf{\Lambda}_i \left( \dot{\hat{\mathbf{q}}}_i - \dot{\mathbf{q}}_{di} \right) \right) \\ &\quad + \mathbf{J}_{\varphi_i}^+(\mathbf{q}_i) (\ddot{\mathbf{p}}_{di} - \beta_i (\dot{\mathbf{p}}_i - \dot{\mathbf{p}}_{di}) + \boldsymbol{\xi}_i \Delta \boldsymbol{\lambda}_i),\end{aligned}\tag{6.46}$$

donde  $\dot{\mathbf{J}}_{\varphi_i}^+(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_{oi})$  se define de la misma manera que  $\dot{\mathbf{Q}}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_{oi})$  en (6.42). Nótese que  $\dot{\mathbf{p}}_i = 0$  es conocido.

$$\begin{aligned}&\mathbf{Q}_i(\mathbf{q}_i) \left( \ddot{\mathbf{q}}_{di} - \mathbf{\Lambda}_i \left( \dot{\hat{\mathbf{q}}}_i - \dot{\mathbf{q}}_{di} \right) \right) + \mathbf{J}_{\varphi_i}^+(\mathbf{q}_i) (\ddot{\mathbf{p}}_{di} - \beta_i (\dot{\mathbf{p}}_i - \dot{\mathbf{p}}_{di}) + \boldsymbol{\xi}_i \Delta \boldsymbol{\lambda}_i) \\ &= \ddot{\mathbf{q}}_{ri} - \dot{\mathbf{Q}}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_{oi}) (\dot{\mathbf{q}}_{di} - \mathbf{\Lambda}_i(\hat{\mathbf{q}}_i - \mathbf{q}_{di})) - \dot{\mathbf{J}}_{\varphi_i}^+(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_{oi}) (\dot{\mathbf{p}}_{di} - \beta_i \Delta \mathbf{p}_i + \boldsymbol{\xi}_i \Delta \mathbf{F}_i).\end{aligned}\tag{6.47}$$

Sustituyendo (6.47) en (6.85) se tiene

$$\begin{aligned}\ddot{\mathbf{q}}_{ri} &\triangleq \dot{\mathbf{Q}}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_{oi}) (\dot{\mathbf{q}}_{di} - \mathbf{\Lambda}_i(\hat{\mathbf{q}}_i - \mathbf{q}_{di})) + \dot{\mathbf{J}}_{\varphi_i}^+(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_{oi}) (\dot{\mathbf{p}}_{di} - \beta_i \Delta \mathbf{p}_i + \boldsymbol{\xi}_i \Delta \mathbf{F}_i) \\ &\quad + \ddot{\mathbf{q}}_{ri} - \dot{\mathbf{Q}}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_{oi}) (\dot{\mathbf{q}}_{di} - \mathbf{\Lambda}_i(\hat{\mathbf{q}}_i - \mathbf{q}_{di})) - \dot{\mathbf{J}}_{\varphi_i}^+(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_{oi}) (\dot{\mathbf{p}}_{di} - \beta_i \Delta \mathbf{p}_i + \boldsymbol{\xi}_i \Delta \mathbf{F}_i).\end{aligned}\tag{6.48}$$

Después de simplificar (6.48) se obtiene

$$\ddot{\mathbf{q}}_{ri} = \ddot{\mathbf{q}}_{ri} + \mathbf{e}_i(\mathbf{r}_i),\tag{6.49}$$

donde

$$\begin{aligned}\mathbf{e}_i(\mathbf{r}_i) &\triangleq -\dot{\mathbf{Q}}_i(\mathbf{q}_i) (\dot{\mathbf{q}}_{di} - \mathbf{\Lambda}_i(\hat{\mathbf{q}}_i - \mathbf{q}_{di})) \\ &\quad - \dot{\mathbf{J}}_{\varphi_i}^+(\mathbf{q}_i) (\dot{\mathbf{p}}_{di} - \beta_i \Delta \mathbf{p}_i + \boldsymbol{\xi}_i \Delta \mathbf{F}_i).\end{aligned}\tag{6.50}$$

El controlador propuesto está dado para cada uno de los robots por

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\tau}_i &\triangleq \mathbf{H}_i(\mathbf{q}_i) \ddot{\mathbf{q}}_{ri} + \mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_{ri}) \dot{\mathbf{q}}_{ri} + \mathbf{D}_i \dot{\mathbf{q}}_{ri} + \mathbf{g}_i(\mathbf{q}_i) \\ &\quad - \mathbf{K}_{R_i} (\dot{\mathbf{q}}_{oi} - \dot{\mathbf{q}}_{ri}) - \mathbf{J}_{\varphi_i}^T(\mathbf{q}_i) (\boldsymbol{\lambda}_{di} - k_{F_i} \Delta \mathbf{F}_i) \\ &= \mathbf{H}_i(\mathbf{q}_i) \ddot{\mathbf{q}}_{ri} + \mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_{ri}) \dot{\mathbf{q}}_{ri} + \mathbf{D}_i \dot{\mathbf{q}}_{ri} + \mathbf{g}_i(\mathbf{q}_i) \\ &\quad - \mathbf{K}_{R_i} (\mathbf{s}_i - \mathbf{r}_i) - \mathbf{J}_{\varphi_i}^T(\mathbf{q}_i) (\boldsymbol{\lambda}_{di} - k_{F_i} \Delta \mathbf{F}_i) + \mathbf{H}_i(\mathbf{q}_i) \mathbf{e}_i(\mathbf{r}_i)\end{aligned}\tag{6.51}$$

donde  $\mathbf{K}_{R_i} \in \mathbb{R}^{n_i \times n_i}$  es una matriz diagonal definida positiva. Substituyendo (6.51) en (3.9), se puede calcular la dinámica en lazo cerrado

$$\begin{aligned}\mathbf{H}_i(\mathbf{q}_i) \dot{\mathbf{s}}_i + \mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i) \dot{\mathbf{q}}_i &- \mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_{ri}) \dot{\mathbf{q}}_{ri} + \mathbf{D}_i \mathbf{s}_i + \mathbf{K}_{R_i} (\mathbf{s}_i - \mathbf{r}_i) = \\ &+ \mathbf{J}_{\varphi_i}^T(\mathbf{q}_i) (\Delta \boldsymbol{\lambda}_i + k_{F_i} \Delta \mathbf{F}_i) + \mathbf{H}_i(\mathbf{q}_i) \mathbf{e}_i(\mathbf{r}_i),\end{aligned}\tag{6.52}$$

despejando  $\mathbf{H}_i(\mathbf{q}_i) \dot{\mathbf{s}}_i$  de la ecuación (6.52)

$$\begin{aligned}\mathbf{H}_i(\mathbf{q}_i) \dot{\mathbf{s}}_i &= \mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_{ri}) \dot{\mathbf{q}}_{ri} - \mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i) \dot{\mathbf{q}}_i - \mathbf{D}_i \mathbf{s}_i - \mathbf{K}_{R_i} (\mathbf{s}_i - \mathbf{r}_i) \\ &\quad + \mathbf{J}_{\varphi_i}^T(\mathbf{q}_i) (\Delta \boldsymbol{\lambda}_i + k_{F_i} \Delta \mathbf{F}_i) + \mathbf{H}_i(\mathbf{q}_i) \mathbf{e}_i(\mathbf{r}_i),\end{aligned}\tag{6.53}$$

donde el término  $\mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i)\dot{\mathbf{q}}_i - \mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_{ri})\dot{\mathbf{q}}_{ri}$  de (6.53) se manipula por medio de la Propiedad 3.2.5 y se tiene

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i)\dot{\mathbf{q}}_i - \mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_{ri})\dot{\mathbf{q}}_{ri} &= \mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i)\dot{\mathbf{q}}_i - \mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_{ri})\dot{\mathbf{q}}_{ri} \\ &\quad + \mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i)\dot{\mathbf{q}}_{ri} - \mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i)\dot{\mathbf{q}}_{ri} \\ &= \mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i)(\dot{\mathbf{q}}_i - \dot{\mathbf{q}}_{ri}) + \mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i - \dot{\mathbf{q}}_{ri})\dot{\mathbf{q}}_{ri} \\ &= \mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i)\mathbf{s}_i + \mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \mathbf{s}_i)\dot{\mathbf{q}}_{ri} \\ &= \mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i)\mathbf{s}_i + \mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_{ri})\mathbf{s}_i. \end{aligned} \quad (6.54)$$

Sustituyendo (6.54) en (6.53) se obtiene

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_i(\mathbf{q}_i)\dot{\mathbf{s}}_i &= -\mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i)\mathbf{s}_i - \mathbf{K}_{\text{DR}_i}\mathbf{s}_i + \mathbf{H}_i(\mathbf{q}_i)\mathbf{e}_i(\mathbf{r}_i) \\ &\quad - \mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_{ri})\mathbf{s}_i + \mathbf{K}_{\text{R}_i}\mathbf{r}_i + \mathbf{J}_{\varphi_i}^{\text{T}}(\mathbf{q}_i)(\Delta\boldsymbol{\lambda}_i + k_{\text{Fi}}\Delta\mathbf{F}_i), \end{aligned} \quad (6.55)$$

donde  $\mathbf{K}_{\text{DR}_i} \triangleq \mathbf{K}_{\text{R}_i} + \mathbf{D}_i$ .

### 6.3.1 Definición del observador

La dinámica del observador propuesto está dada por

$$\dot{\hat{\mathbf{q}}}_i = \dot{\hat{\mathbf{q}}}_{oi} + \boldsymbol{\Lambda}_i\mathbf{z}_i + k_{\text{di}}\mathbf{z}_i \quad (6.56)$$

$$\ddot{\hat{\mathbf{q}}}_{oi} = \ddot{\hat{\mathbf{q}}}_{ri} + k_{\text{di}}\boldsymbol{\Lambda}_i\mathbf{z}_i + \mathbf{H}_i^{-1}(\mathbf{q}_i)\mathbf{J}_{\varphi_i}^{\text{T}}(\mathbf{q}_i)(\Delta\boldsymbol{\lambda}_i + k_{\text{Fi}}\Delta\mathbf{F}_i), \quad (6.57)$$

donde  $k_{\text{di}}$  es una constante positiva. Nótese que (6.57) puede ser reescrita como

$$\begin{aligned} \ddot{\hat{\mathbf{q}}}_{oi} &= \ddot{\hat{\mathbf{q}}}_{ri} + \mathbf{e}_i(\mathbf{r}_i) + k_{\text{di}}\boldsymbol{\Lambda}_i\mathbf{z}_i \\ &\quad + \mathbf{H}_i^{-1}(\mathbf{q}_i)\mathbf{J}_{\varphi_i}^{\text{T}}(\mathbf{q}_i)(\Delta\boldsymbol{\lambda}_i + k_{\text{Fi}}\Delta\mathbf{F}_i). \end{aligned} \quad (6.58)$$

Ahora bien, de (6.56) se tiene

$$\ddot{\hat{\mathbf{q}}}_{oi} = \ddot{\hat{\mathbf{q}}}_i - \boldsymbol{\Lambda}_i\dot{\mathbf{z}}_i - k_{\text{di}}\dot{\mathbf{z}}_i. \quad (6.59)$$

De este modo, de (6.57)

$$\dot{\mathbf{s}}_i = \dot{\mathbf{r}}_i + k_{\text{di}}\mathbf{r}_i + \mathbf{e}_i(\mathbf{r}_i) + \mathbf{H}_i^{-1}(\mathbf{q}_i)\mathbf{J}_{\varphi_i}^{\text{T}}(\mathbf{q}_i)(\Delta\boldsymbol{\lambda}_i + k_{\text{Fi}}\Delta\mathbf{F}_i). \quad (6.60)$$

Multiplicando ambos lados de (6.60) por  $\mathbf{H}_i(\mathbf{q}_i)$ , y tomando en cuenta (6.55) se obtiene

$$\mathbf{H}_i(\mathbf{q}_i)\dot{\mathbf{r}}_i = -\mathbf{H}_{\text{rd}_i}\mathbf{r}_i - \mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i)\mathbf{s}_i - \mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_{ri})\mathbf{s}_i - \mathbf{K}_{\text{DR}_i}\mathbf{s}_i, \quad (6.61)$$

donde  $\mathbf{H}_{\text{rd}_i} \triangleq k_{\text{di}}\mathbf{H}_i(\mathbf{q}_i) - \mathbf{K}_{\text{R}_i}$ . Finalmente, usando nuevamente la Propiedad 3.2.5 para manipular el término  $-\mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i)\mathbf{s}_i - \mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_{ri})\mathbf{s}_i$  de (6.61) se tiene

$$\begin{aligned} & -\mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i)\mathbf{s}_i - \mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_{ri})\mathbf{s}_i \\ &= -\mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i)\mathbf{s}_i - \mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_{ri})\mathbf{s}_i - \mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i)\mathbf{r}_i + \mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i)\mathbf{r}_i \\ &= -\mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i)(\mathbf{s}_i - \mathbf{r}_i) - \mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_{ri})\mathbf{s}_i - \mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i)\mathbf{r}_i \\ &= -\mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \mathbf{s}_i + \dot{\mathbf{q}}_{ri})(\mathbf{s}_i - \mathbf{r}_i) - \mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_{ri})\mathbf{s}_i - \mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i)\mathbf{r}_i \\ &= -\mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \mathbf{s}_i + \dot{\mathbf{q}}_{ri})\mathbf{s}_i + \mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \mathbf{s}_i + \dot{\mathbf{q}}_{ri})\mathbf{r}_i - \mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_{ri})\mathbf{s}_i - \mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i)\mathbf{r}_i \\ &= -\mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \mathbf{s}_i)(\mathbf{s}_i + \dot{\mathbf{q}}_{ri}) + \mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \mathbf{s}_i + \dot{\mathbf{q}}_{ri})\mathbf{r}_i - \mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \mathbf{s}_i)\dot{\mathbf{q}}_{ri} - \mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i)\mathbf{r}_i \\ &= -\mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \mathbf{s}_i)(\mathbf{s}_i + 2\dot{\mathbf{q}}_{ri}) + \mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \mathbf{s}_i + \dot{\mathbf{q}}_{ri})\mathbf{r}_i - \mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i)\mathbf{r}_i \\ &= -\mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \mathbf{s}_i + 2\dot{\mathbf{q}}_{ri})\mathbf{s}_i + \mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \mathbf{s}_i + \dot{\mathbf{q}}_{ri})\mathbf{r}_i - \mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i)\mathbf{r}_i. \end{aligned} \quad (6.62)$$

Sustituyendo (6.62) en (6.61) se tiene

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_i(\mathbf{q}_i)\dot{\mathbf{r}}_i &= -\mathbf{H}_{\text{rd}_i}\mathbf{r}_i - \mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i)\mathbf{r}_i - \mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \mathbf{s}_i + 2\dot{\mathbf{q}}_{ri})\mathbf{s}_i \\ &+ \mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \mathbf{s}_i + \dot{\mathbf{q}}_{ri})\mathbf{r}_i - \mathbf{K}_{\text{DR}_i}\mathbf{s}_i. \end{aligned} \quad (6.63)$$

A continuación se define

$$\mathbf{x}_i \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{s}_i^T & \mathbf{r}_i^T & \Delta\mathbf{F}_i^T \end{bmatrix}^T, \quad (6.64)$$

como estado para (6.38), (6.55), y (6.63). La idea principal del diseño del controlador/observador es mostrar que, cuando  $\|\mathbf{x}_i\|$  tiende a cero, los errores de seguimiento  $\tilde{\mathbf{q}}_i$ ,  $\check{\mathbf{q}}_i$ ,  $\Delta\mathbf{p}_i$ ,  $\Delta\dot{\mathbf{p}}_i$  y  $\Delta\boldsymbol{\lambda}_i$  y de observación  $\mathbf{z}_i$  y  $\dot{\mathbf{z}}_i$  tenderán a cero también. De (6.45), es claro que si  $\mathbf{r}_i$  está acotado y tiende a cero, también  $\mathbf{z}_i$  y  $\dot{\mathbf{z}}_i$  tenderán a cero. Sin embargo, esto no es evidente para las otras variables. El siguiente Lema muestra que este es el caso bajo algunas condiciones.

**Lema 6.3.1** *Si  $\mathbf{x}_i$  está acotado por  $x_{\max_i}$  y tiende a cero, entonces los siguientes hechos se satisfacen:*

- a)  $\Delta\mathbf{p}_i$  y  $\Delta\dot{\mathbf{p}}_i$  permanecen acotados y tienden a cero.
- b)  $\tilde{\mathbf{q}}_i$  y  $\check{\mathbf{q}}_i$  permanecen acotados. Además, si la cota  $x_{\max_i}$  para  $\|\mathbf{x}_i\|$  es seleccionada suficientemente pequeña tal que garantice que  $\|\tilde{\mathbf{q}}_i\| \leq \eta_i$  para todo tiempo  $t$ , con  $\eta_i$  una constante positiva y suficientemente pequeña, entonces tanto  $\tilde{\mathbf{q}}_i$  como  $\check{\mathbf{q}}_i$  tenderán a cero también.
- c) Si, además, el vector de velocidad  $\dot{\mathbf{q}}_i$  está acotado, entonces  $\Delta\boldsymbol{\lambda}_i$  permanecerá acotado y tenderá a cero. △

La demostración del Lema 6.3.1 se muestra en el Apéndice B. La conclusión principal es que si  $\mathbf{x}_i$  está acotado, entonces  $\mathbf{s}_i$ ,  $\mathbf{r}_i$  y  $\Delta\mathbf{F}_i$  también lo están. Además, tenderán a cero si  $\mathbf{x}_i$  lo hace. Es interesante notar que, si  $\|\mathbf{x}_i\|$  está acotado por  $x_{\max_i}$ , entonces es siempre posible encontrar una cota para  $\mathbf{e}_i(\mathbf{r}_i)$  en (6.50) que satisface

$$\|\mathbf{e}_i(\mathbf{r}_i)\| \leq M_{e_i}(x_{\max_i})\|\mathbf{r}_i\| < \infty. \quad (6.65)$$

Considérese la siguiente función candidata de Lyapunov para el sistema (6.38), (6.55), y (6.61)

$$V_i(\mathbf{x}_i) = \frac{1}{2}\mathbf{x}_i^T \mathbf{M}_i \mathbf{x}_i, \quad (6.66)$$

donde  $\mathbf{M}_i \triangleq \text{block diag}\{\mathbf{H}_i(\mathbf{q}_i), \mathbf{H}_i(\mathbf{q}_i), \boldsymbol{\xi}_i\}$ , y  $V_i(\mathbf{x}_i)$  satisface

$$\lambda_{1i}\|\mathbf{x}_i\|^2 \leq V_i(\mathbf{x}_i) \leq \lambda_{2i}\|\mathbf{x}_i\|^2, \quad (6.67)$$

con

$$\begin{aligned}\lambda_{1i} &\triangleq \frac{1}{2} \min_{\forall \mathbf{q}_i \in \mathbb{R}^{n_i}} \lambda_{\min}(\mathbf{M}_i) \\ \lambda_{2i} &\triangleq \frac{1}{2} \max_{\forall \mathbf{q}_i \in \mathbb{R}^{n_i}} \lambda_{\max}(\mathbf{M}_i),\end{aligned}\quad (6.68)$$

para  $i = 1, \dots, l$ . Supóngase que se puede encontrar una región de atracción

$$S_{ai} = \{\mathbf{x}_i : \|\mathbf{x}_i\| \leq a_i\}, \quad (6.69)$$

tal que la derivada de la función candidata de Lyapunov  $\dot{V}_i(\mathbf{x}_i) \leq 0$  con  $\dot{V}_i(\mathbf{x}_i) = 0$  si y sólo si  $\mathbf{x}_i = \mathbf{0}$ . Si  $a_i$  se selecciona de tal manera que  $\|\mathbf{x}_i\| \leq x_{\max_i}$  sea válida para todo tiempo y  $x_{\max_i}$  es suficientemente pequeña en el sentido del Lema 6.3.1, entonces de la discusión anterior se puede concluir con la convergencia a cero de todas las señales de error.

**Teorema 6.3.1** *Considérese la dinámica de un sistema cooperativo dado por (3.1) y (3.9), en lazo cerrado con la ley de control (6.51) y el observador (6.56)–(6.57), donde  $\mathbf{q}_{di}$  y  $\mathbf{p}_{di}$  son la posición deseada acotada en coordenadas articulares y la posición restringida; las derivadas  $\dot{\mathbf{q}}_{di}$ ,  $\ddot{\mathbf{q}}_{di}$ ,  $\dot{\mathbf{p}}_{di}$ , y  $\ddot{\mathbf{p}}_{di}$  están también acotadas, y todas satisfacen las restricciones (3.10) y (3.12). Considérese también (6.68), y  $l$  regiones de atracción definidas como en (6.69) para cada subsistema, donde las cotas  $a_i$ ,  $i = 1, \dots, l$ , son seleccionadas de acuerdo con*

$$a_i \leq \frac{\eta_i \alpha_i}{(1 + \lambda_{\max}(\boldsymbol{\xi}_i) c_{0i} + \sqrt{n_i})} \sqrt{\frac{\lambda_{1i}}{\lambda_{2i}}} \quad (6.70)$$

con  $\alpha_i$  definido en Apéndice B. Entonces, toda señal de error permanece acotada y además se tiene convergencia asintótica de los errores de seguimiento de posición, fuerza y observación, i. e.

$$\begin{aligned}\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{\mathbf{q}}_i &= \mathbf{0} & \lim_{t \rightarrow \infty} \dot{\tilde{\mathbf{q}}}_i &= \mathbf{0} & \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{z}_i &= \mathbf{0} \\ \lim_{t \rightarrow \infty} \dot{\tilde{\mathbf{z}}}_i &= \mathbf{0} & \lim_{t \rightarrow \infty} \Delta \boldsymbol{\lambda}_i &= \mathbf{0},\end{aligned}\quad (6.71)$$

si las siguientes condiciones son satisfechas

$$\lambda_{\min}(\mathbf{K}_{R_i}) = \mu_{1i} + 1 + \delta_i \quad (6.72)$$

$$k_{di} = \frac{\lambda_{\max}(\mathbf{K}_{R_i}) + \omega_i}{\lambda_{hi}}, \quad (6.73)$$

donde  $\omega_i = \mu_{2i} + \frac{1}{4}(\lambda_{Di} + \mu_{3i} + \mu_{4i})^2 + \delta_i$ , con  $\delta_i$  constante positiva y

$$\mu_{1i} \stackrel{\Delta}{=} \max_{\|\mathbf{x}_i\| \leq x_{\max_i}} \|\mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_{ri})\| \quad (6.74)$$

$$\mu_{2i} \stackrel{\Delta}{=} \max_{\|\mathbf{x}_i\| \leq x_{\max_i}} \|\mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \mathbf{s}_i + \dot{\mathbf{q}}_{ri})\| \quad (6.75)$$

$$\mu_{3i} \stackrel{\Delta}{=} \max_{\|\mathbf{x}_i\| \leq x_{\max_i}} \|\mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \mathbf{s}_i + 2\dot{\mathbf{q}}_{ri})\| \quad (6.76)$$

$$\mu_{4i} \stackrel{\Delta}{=} M_{ei}(x_{\max_i})\lambda_{Hi} \quad (6.77)$$

$$\lambda_{Di} \stackrel{\Delta}{=} \lambda_{\max}(\mathbf{D}_i), \quad (6.78)$$

$$x_{\max_i} = a_i \sqrt{\frac{\lambda_{2i}}{\lambda_{1i}}}, \quad (6.79)$$

donde (6.65) y la Propiedad 3.2.2 ha sido utilizada. △

La demostración del Teorema 6.3.1 puede encontrarse en el Apéndice B.

**Comentario 6.3.1** *El resultado del Teorema 6.3.1 es solamente local. Esto garantiza la convergencia a cero de los errores de seguimiento  $\tilde{\mathbf{q}}_i$  y  $\dot{\tilde{\mathbf{q}}}_i$  (porque se debe satisfacer  $\|\tilde{\mathbf{q}}_i\| \leq \eta_i$ ). Sin embargo, esto no representa un serio inconveniente puesto que para el agarre es usual dar una trayectoria suave con condiciones iniciales de error igual a cero. Por otro lado, el esquema de control es implementado en cada manipulador por separado, por lo que, solamente es necesario conocer cada restricción de la forma (3.1). △*

## 6.4 Observador sin matriz de inercia

En esta sección se presenta un controlador de seguimiento de posición y fuerza con un observador de velocidad para un sistema cooperativo, similar al mostrado en la sección anterior, pero con la diferencia de que ahora no contiene la matriz de inercia. Para eliminarla del observador, se empleó un filtro de fuerza y se modificaron las variables de error residual y la señal de referencia nominal.

La Suposición 4.2.12 es bastante razonable para los robots de revolución, puesto que los elementos de  $\mathbf{q}_i$  aparecen en argumentos de funciones de senos y cosenos.

*Ley de control*

A continuación, se analizará el problema de eliminar la matriz de inercia del obser-

vador. El primer paso consiste en redefinir (6.36)–(6.37) como

$$\dot{\mathbf{q}}_{ri} \triangleq \mathbf{Q}_i(\mathbf{q}_i) (\dot{\mathbf{q}}_{di} - \mathbf{\Lambda}_i (\hat{\mathbf{q}}_i - \mathbf{q}_{di})) + \mathbf{J}_{\varphi_i}^+(\mathbf{q}_i) (\dot{\mathbf{p}}_{di} - \beta_i \Delta \mathbf{p}_i + \bar{\boldsymbol{\xi}}_i \boldsymbol{\phi}_i + \boldsymbol{\xi}_i \Delta \mathbf{F}_i) \quad (6.80)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{s}_i &\triangleq \dot{\hat{\mathbf{q}}}_i - \dot{\mathbf{q}}_{ri} \\ &= \mathbf{Q}_i(\mathbf{q}_i) (\dot{\hat{\mathbf{q}}}_i + \mathbf{\Lambda}_i \tilde{\mathbf{q}} - \mathbf{\Lambda}_i \mathbf{z}_i) + \mathbf{J}_{\varphi_i}^+(\mathbf{q}_i) (\Delta \dot{\mathbf{p}}_i + \beta_i \Delta \mathbf{p}_i - \bar{\boldsymbol{\xi}}_i \boldsymbol{\phi}_i - \boldsymbol{\xi}_i \Delta \mathbf{F}_i). \\ &\triangleq \mathbf{s}_{pi} + \mathbf{s}_{fi} \end{aligned} \quad (6.81)$$

donde  $\mathbf{\Lambda}_i = k_i \mathbf{I} \in \mathbb{R}^{n_i \times n_i}$  con  $k_i > 0$ , y  $\bar{\boldsymbol{\xi}}_i, \boldsymbol{\xi}_i \in \mathbb{R}^{m_i \times m_i}$  son matrices diagonales definidas positivas, y  $\beta_i$  es una constante positiva.  $\boldsymbol{\phi}_i \in \mathbb{R}_i^n$  es la salida del filtro lineal dado por

$$\dot{\mathbf{w}}_i = -\mathbf{A}_i \mathbf{w}_i + \Delta \boldsymbol{\lambda}_i \quad \mathbf{w}_i(0) = \mathbf{0} \quad (6.82)$$

$$\boldsymbol{\phi}_i = \mathbf{B}_i \mathbf{w}_i. \quad (6.83)$$

$\mathbf{A}_i, \mathbf{B}_i \in \mathbb{R}^{n_i \times n_i}$  son matrices diagonales definidas positivas y  $\mathbf{w}_i \in \mathbb{R}_i^n$  es el estado del filtro. También, se define

$$\boldsymbol{\zeta}_i \triangleq \dot{\boldsymbol{\phi}}_i = -\mathbf{B}_i \mathbf{A}_i \mathbf{w}_i + \mathbf{B}_i \Delta \boldsymbol{\lambda}_i = -\mathbf{A}_i \boldsymbol{\phi}_i + \mathbf{B}_i \Delta \boldsymbol{\lambda}_i. \quad (6.84)$$

En este caso, se tiene

$$\begin{aligned} \ddot{\hat{\mathbf{q}}}_{ri} &\triangleq \dot{\hat{\mathbf{Q}}}_i(\mathbf{q}_i) (\dot{\mathbf{q}}_{di} - \mathbf{\Lambda}_i (\hat{\mathbf{q}}_i - \mathbf{q}_{di})) + \dot{\mathbf{J}}_{\varphi_i}^+(\mathbf{q}_i) (\dot{\mathbf{p}}_{di} - \beta_i \Delta \mathbf{p}_i + \bar{\boldsymbol{\xi}}_i \boldsymbol{\phi}_i + \boldsymbol{\xi}_i \Delta \mathbf{F}_i) \\ &\quad + \mathbf{Q}_i(\mathbf{q}_i) (\ddot{\mathbf{q}}_{di} - \mathbf{\Lambda}_i (\dot{\hat{\mathbf{q}}}_i - \dot{\mathbf{q}}_{di})) + \mathbf{J}_{\varphi_i}^+(\mathbf{q}_i) (\ddot{\mathbf{p}}_{di} - \beta_i (\dot{\mathbf{p}}_i - \dot{\mathbf{p}}_{di}) + \bar{\boldsymbol{\xi}}_i \boldsymbol{\zeta}_i + \boldsymbol{\xi}_i \Delta \boldsymbol{\lambda}_i), \end{aligned} \quad (6.85)$$

donde  $\dot{\mathbf{J}}_{\varphi_i}^+(\mathbf{q}_i)$  y  $\dot{\hat{\mathbf{Q}}}_i(\mathbf{q}_i)$  se definen como antes. De igual manera se tiene

$$\ddot{\hat{\mathbf{q}}}_{ri} = \ddot{\mathbf{q}}_{ri} + \mathbf{e}_i(\mathbf{r}_i), \quad (6.86)$$

donde

$$\mathbf{e}_i(\mathbf{r}_i) \triangleq -\dot{\hat{\mathbf{Q}}}_i(\mathbf{r}_i) (\dot{\mathbf{q}}_{di} - \mathbf{\Lambda}_i \tilde{\mathbf{q}}_i + \mathbf{\Lambda}_i \mathbf{z}_i) - \dot{\mathbf{J}}_{\varphi_i}^+(\mathbf{r}_i) (\dot{\mathbf{p}}_{di} - \beta_i \Delta \mathbf{p}_i + \bar{\boldsymbol{\xi}}_i \boldsymbol{\phi}_i + \boldsymbol{\xi}_i \Delta \mathbf{F}_i). \quad (6.87)$$

El controlador propuesto se define para cada manipulador como

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau}_i &\triangleq \mathbf{H}_i(\mathbf{q}_i) \ddot{\hat{\mathbf{q}}}_{ri} + \mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\hat{\mathbf{q}}}_{ri}) \dot{\hat{\mathbf{q}}}_{ri} + \mathbf{D}_i \dot{\hat{\mathbf{q}}}_{ri} + \mathbf{g}_i(\mathbf{q}_i) \\ &\quad - \mathbf{K}_{R_i} (\dot{\mathbf{q}}_{oi} - \dot{\mathbf{q}}_{ri}) - \mathbf{J}_{\varphi_i}^T(\mathbf{q}_i) (\boldsymbol{\lambda}_{di} + \mathbf{B}_i^{-1} \boldsymbol{\zeta}_i - \mathbf{K}_{F_i} \Delta \mathbf{F}_i), \end{aligned} \quad (6.88)$$

donde  $\mathbf{K}_{R_i} \in \mathbb{R}^{n_i \times n_i}$ ,  $\mathbf{K}_{F_i} \in \mathbb{R}^{m_i \times m_i}$  son matrices diagonales definidas positivas. Nótese que de (6.45) y (6.81) se obtiene  $\dot{\mathbf{q}}_{oi} - \dot{\mathbf{q}}_{ri} = \mathbf{s}_i - \mathbf{r}_i$ . Entonces, de (6.86)

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau}_i &= \mathbf{H}_i(\mathbf{q}_i) (\ddot{\mathbf{q}}_{ri} + \mathbf{e}_i(\mathbf{r}_i)) + \mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\hat{\mathbf{q}}}_{ri}) \dot{\hat{\mathbf{q}}}_{ri} + \mathbf{D}_i \dot{\hat{\mathbf{q}}}_{ri} + \mathbf{g}_i(\mathbf{q}_i) \\ &\quad - \mathbf{K}_{R_i} (\mathbf{s}_i - \mathbf{r}_i) - \mathbf{J}_{\varphi_i}^T(\mathbf{q}_i) (\boldsymbol{\lambda}_{di} + \mathbf{B}_i^{-1} \boldsymbol{\zeta}_i - \mathbf{K}_{F_i} \Delta \mathbf{F}_i). \end{aligned} \quad (6.89)$$

Substituyendo (6.89) en (3.9), la dinámica en lazo cerrado se convierte en

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_i(\mathbf{q}_i) \dot{\mathbf{s}}_i &= -\mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\hat{\mathbf{q}}}_i) \mathbf{s}_i - \mathbf{K}_{DR_i} \mathbf{s}_i \\ &\quad + \mathbf{K}_{R_i} \mathbf{r}_i + \mathbf{J}_{\varphi_i}^T(\mathbf{q}_i) (\mathbf{B}_i^{-1} \mathbf{A}_i \boldsymbol{\phi}_i + \mathbf{K}_{F_i} \Delta \mathbf{F}_i) \\ &\quad - \mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_{ri}) \mathbf{s}_i + \mathbf{H}_i(\mathbf{q}_i) \mathbf{e}_i(\mathbf{r}_i) \end{aligned} \quad (6.90)$$

después de algunas manipulaciones matemáticas, realizadas antes de manera similar en (6.52)–(6.54), y donde  $\mathbf{K}_{DR_i} \triangleq \mathbf{K}_{R_i} + \mathbf{D}_i$ . A fin de obtener (6.90), la Propiedad 3.2.5 ha sido empleada.

### 6.4.1 Definición del observador

La dinámica propuesta del observador está dada por

$$\dot{\hat{\mathbf{q}}}_i = \dot{\hat{\mathbf{q}}}_{oi} + \mathbf{\Lambda}_i \mathbf{z}_i + k_{di} \mathbf{z}_i \quad (6.91)$$

$$\ddot{\hat{\mathbf{q}}}_{oi} = \ddot{\hat{\mathbf{q}}}_{ri} + k_{di} \mathbf{\Lambda}_i \mathbf{z}_i, \quad (6.92)$$

donde  $k_{di}$  es una constante positiva. Nótese que ya no se requiere la matriz de inercia. La ecuación (6.91) es equivalente a  $\ddot{\hat{\mathbf{q}}}_{oi} = \ddot{\hat{\mathbf{q}}}_i - \mathbf{\Lambda}_i \dot{\mathbf{z}}_i - k_{di} \dot{\mathbf{z}}_i$ , de tal forma que (6.92) se convierte en

$$\dot{\mathbf{s}}_i = \dot{\mathbf{r}}_i + k_{di} \mathbf{r}_i + \mathbf{e}_i(\mathbf{r}_i), \quad (6.93)$$

en vista de (6.86). Multiplicando ambos lados de (6.93) por  $\mathbf{H}_i(\mathbf{q}_i)$ , y tomando en cuenta (6.90), se obtiene

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_i(\mathbf{q}_i) \dot{\mathbf{r}}_i &= -\mathbf{H}_{rd_i} \mathbf{r}_i - \mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i) \mathbf{s}_i - \mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_{ri}) \mathbf{s}_i - \mathbf{K}_{DR_i} \mathbf{s}_i \\ &+ \mathbf{J}_{\varphi_i}^T(\mathbf{q}_i) (\mathbf{B}_i^{-1} \mathbf{A}_i \phi_i + \mathbf{K}_{Fi} \Delta \mathbf{F}_i), \end{aligned} \quad (6.94)$$

donde  $\mathbf{H}_{rd_i} \triangleq k_{di} \mathbf{H}_i(\mathbf{q}_i) - \mathbf{K}_{R_i}$ . Finalmente, usando la Propiedad 3.2.5 y simplificando, se tiene

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_i(\mathbf{q}_i) \dot{\mathbf{r}}_i &= -\mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i) \mathbf{r}_i - \mathbf{H}_{rd_i} \mathbf{r}_i \\ &+ \mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \mathbf{s}_i + \dot{\mathbf{q}}_{ri}) \mathbf{r}_i - \mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \mathbf{s}_i + 2\dot{\mathbf{q}}_{ri}) \mathbf{s}_i \\ &- \mathbf{K}_{DR_i} \mathbf{s}_i + \mathbf{J}_{\varphi_i}^T(\mathbf{q}_i) (\mathbf{B}_i^{-1} \mathbf{A}_i \phi_i + \mathbf{K}_{Fi} \Delta \mathbf{F}_i). \end{aligned} \quad (6.95)$$

Ahora se define

$$\mathbf{x}_i \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{s}_i^T & \mathbf{r}_i^T & \Delta \mathbf{F}_i^T & \phi_i^T \end{bmatrix}^T, \quad (6.96)$$

como estado de (6.38), (6.84), (6.90) y (6.95).

Es interesante notar que el Lema 6.3.1 sigue siendo válido para el nuevo sistema. Por supuesto, la demostración es distinta, por lo que, por simplicidad, se reescribe como:

**Lema 6.4.1** *Si  $\mathbf{x}_i$  está acotado por  $x_{\max_i}$  y tiende a cero, entonces los siguientes hechos se satisfacen:*

- $\Delta \mathbf{p}_i$  y  $\Delta \dot{\mathbf{p}}_i$  permanecen acotados y tienden a cero.
- $\tilde{\mathbf{q}}_i$  y  $\dot{\tilde{\mathbf{q}}}_i$  permanecen acotados. Además, si la cota  $x_{\max_i}$  para  $\|\mathbf{x}_i\|$  es seleccionada suficientemente pequeña tal que se garantice  $\|\tilde{\mathbf{q}}_i\| \leq \eta_i$  para todo tiempo  $t$ , con  $\eta_i$  una constante positiva y suficientemente pequeña, entonces tanto  $\tilde{\mathbf{q}}_i$  como  $\dot{\tilde{\mathbf{q}}}_i$  tenderán a cero también.
- Si, además, el vector de velocidad  $\dot{\mathbf{q}}_i$  está acotado, entonces  $\Delta \mathbf{\lambda}_i$  permanecerá acotado y tenderá a cero.  $\triangle$

La demostración del Lema 6.4.1 se encuentra en el Apéndice B. Nótese que, como antes, para  $\mathbf{e}_i(\mathbf{r}_i)$  en (6.87) se tiene

$$\|\mathbf{e}_i(\mathbf{r}_i)\| \leq M_{ei}(x_{\max_i})\|\mathbf{r}_i\| < \infty. \quad (6.97)$$

Considérese ahora la siguiente función

$$V_i(\mathbf{x}_i) = \frac{1}{2}\mathbf{x}_i^T \mathbf{M}_i \mathbf{x}_i, \quad (6.98)$$

donde  $\mathbf{M}_i \triangleq \text{block diag}\{\mathbf{H}_i(\mathbf{q}_i), \mathbf{H}_i(\mathbf{q}_i), \mathbf{R}_i\}$ , y

$$\mathbf{R}_i \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{N}_i \mathbf{B}_i^{-1} & -\mathbf{N}_i \\ -\mathbf{N}_i & \mathbf{N}_i \mathbf{B}_i \end{bmatrix}, \quad (6.99)$$

con  $\mathbf{N}_i \triangleq (\boldsymbol{\xi}_i \mathbf{B}_i^{-1} \mathbf{A}_i + \bar{\boldsymbol{\xi}}_i \mathbf{K}_{Fi}) \mathbf{A}_i^{-1}$ . En el Apéndice B se muestra que  $V_i(\mathbf{x}_i)$  es una función definida positiva. Supóngase que se puede encontrar una región

$$\mathbb{D}_i = \{\mathbf{x}_i : \|\mathbf{x}_i\| \leq x_{\max_i}\}, \quad (6.100)$$

tal que para todo tiempo la derivada de  $\dot{V}_i(\mathbf{x}_i) \leq 0$  con  $\dot{V}_i(\mathbf{x}_i) = 0$  si y sólo si  $\mathbf{x}_i = \mathbf{0}$ . Si  $x_{\max_i}$  es suficiente pequeña en el sentido del Lema 6.4.1, entonces se puede concluir la convergencia a cero de todas las señales de los errores. El siguiente Teorema establece las condiciones para que los parametros del controlador/observador para garanticen esto.

**Teorema 6.4.1** *Considérese la dinámica del sistema cooperativo dado por (3.1), (3.9), (3.10) y (3.12), en lazo cerrado con el filtro (6.82)–(6.84), la ley de control (6.88) y el observador (6.91)–(6.92), donde  $\mathbf{q}_{di}$  y  $\mathbf{p}_{di}$  son la posición articular deseada y restringida, cuyas derivadas  $\dot{\mathbf{q}}_{di}$ ,  $\ddot{\mathbf{q}}_{di}$ ,  $\dot{\mathbf{p}}_{di}$ , y  $\ddot{\mathbf{p}}_{di}$  están acotadas también, y todas satisfacen las restricciones (3.10) y (3.12). Considérense las regiones definidas por (6.100) para cada subsistema, donde las cotas  $x_{\max_i}$ ,  $i = 1, \dots, l$ , se seleccionan de acuerdo con*

$$x_{\max_i} \leq \frac{\eta_i \alpha_i}{(1 + c_{0i} (\lambda_{\max}(\bar{\boldsymbol{\xi}}_i) + \lambda_{\max}(\boldsymbol{\xi}_i)) + \sqrt{n_i})} \quad (6.101)$$

con  $\alpha_i$  definido en el Apéndice B. Entonces, las señales de error permanecen acotadas, y se obtiene convergencia a cero, i. e.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{\mathbf{q}}_i = \mathbf{0} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \dot{\tilde{\mathbf{q}}}_i = \mathbf{0} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{z}_i = \mathbf{0} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \dot{\mathbf{z}}_i = \mathbf{0} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \Delta \boldsymbol{\lambda}_i = \mathbf{0}, \quad (6.102)$$

si las siguientes condiciones se satisfacen

$$\lambda_{\min}(\mathbf{K}_{R_i}) \geq \mu_{1i} + 1 + \delta_i \quad (6.103)$$

$$k_{di} \geq \frac{\lambda_{\max}(\mathbf{K}_{R_i}) + \omega_i}{\lambda_{hi}} \quad (6.104)$$

$$\lambda_{\min}(\mathbf{E}_i) \geq \delta_i + 1 \quad (6.105)$$

$$\lambda_{\min}(\boldsymbol{\xi}_i \mathbf{K}_{Fi}) \geq \delta_i + 1, \quad (6.106)$$

donde  $\omega_i = \mu_{2i} + \frac{1}{4}(\lambda_{Di} + \mu_{3i} + \mu_{4i})^2 + \delta_i + \frac{1}{4}c_{1i}^2 a_i^2 b_i^2 + \frac{1}{4}c_{1i}^2 \lambda_{\max}^2(\mathbf{K}_{Fi})$ ,  $\mathbf{E}_i = \bar{\boldsymbol{\xi}}_i \mathbf{B}_i^{-1} \mathbf{A}_i + \boldsymbol{\xi}_i \mathbf{B}_i^{-2} \mathbf{A}_i + \bar{\boldsymbol{\xi}}_i \mathbf{F}_{Fi} \mathbf{B}_i^{-1}$ ,  $\delta_i$  es una constante positiva y  $\mu_{1i}$ ,  $\mu_{2i}$ ,  $\mu_{3i}$ ,  $\mu_{4i}$  y  $\lambda_{Di}$  están definidas en el Apéndice B.  $\triangle$



---

La demostración del Teorema 6.4.1 se encuentra en el Apéndice B.

**Comentario 6.4.1** *El resultado del Teorema 6.4.1 es solamente local. Asimismo, es difícil encontrar analíticamente una región de atracción, pero debe notarse que no se puede hacer arbitrariamente grande.*

△



# Capítulo 7

## Resultados experimentales

En este capítulo se presentan las validaciones experimentales del modelo dinámico de un sistema cooperativo mostrados en el Capítulo 5 y de los algoritmos de control propuestos en el Capítulo 6. El sistema cooperativo experimental esta formado por dos manipuladores industriales, cada uno de ellos con  $n_i = 3$  grados de libertad y con  $m_i = 1$  restricciones originadas por el contacto producido al sujetar el objeto. Por lo tanto, el número total de grados de libertad del sistema cooperativo es  $n = \sum_{i=1}^2 n_i = 6$ , con un número total de

$$m = \sum_{i=1}^2 m_i = 2 \text{ restricciones.}$$

### 7.1 Simulación de fuerzas y resultados experimentales

Las técnicas de control propuestas en esta tesis requieren de un modelo exacto del sistema cooperativo. Si bien esto nunca es posible, si puede obtenerse una buena aproximación de la dinámica real del sistema. Con fines de validación, en esta sección, algunos resultados de simulación son presentados (Gudiño-Lau y Arteaga Pérez 2004). Para proteger los brazos robots del sistema cooperativo de posibles daños, se empleó el algoritmo de control de seguimiento de posición/fuerza para robots cooperativos dado en Gudiño-Lau *et al.* (2004). Para la ecuación de movimiento del objeto sujetado dado en (5.5),  $\mathbf{g}_o^T = \{g_x \ g_y \ g_z\} = \{0 \ 0 \ -9.81 \text{ m/s}^2\}$ ,  $\mathbf{m}_o = m_{\text{obj}}\mathbf{I}$  y  $m_{\text{obj}} = 0.400 \text{ kg}$ . En (5.21) se tiene  $\alpha_i = 10$  y  $\beta_i = 100$ . Finalmente, los modelos de los brazos robots se proporcionan en el Apéndice A.

El marco inercial de todo el sistema cooperativo es la base del robot A465, donde el eje  $x$  apunta hacia el otro manipulador. La tarea consiste en levantar el objeto y presionarlo con una fuerza deseada. Las restricciones en coordenadas cartesianas están dadas por

$$\varphi_i = x_i - b_i = 0, \tag{7.1}$$

para  $i = 1, 2$  y  $b_i$  una constante positiva. Las trayectorias deseadas de posición para el

primer y segundo experimento son las mismas:

$$x_{d1} = 0.554[\text{m}] \quad x_{d2} = 0.865[\text{m}] \quad (7.2)$$

$$y_{d1,2} = 0.05 \sin(\omega(t - t_i))[\text{m}] \quad (7.3)$$

$$z_{d1,2} = (0.635 + 0.05 \cos(\omega(t - t_i)) - 0.05)[\text{m}]. \quad (7.4)$$

Para el tercer y cuarto experimento se emplearon las siguientes trayectorias deseadas de posición

$$x_{d1} = 0.554[\text{m}] \quad x_{d2} = 0.865[\text{m}] \quad (7.5)$$

$$y_{d1,2} = 0.05[\text{m}] \quad (7.6)$$

$$z_{d1,2} = (0.635 + 0.05 \cos(\omega(t - t_i)) - 0.05)[\text{m}]. \quad (7.7)$$

Nótese que la cinemática inversa de los manipuladores ha sido empleada para calcular  $q_{di}$ , para  $i = 1, 2$ . Estas trayectorias son válidas desde el tiempo inicial  $t_i = 10$  al tiempo final  $t_f = 70$ , mientras que  $\omega$  es un polinomio de quinto orden que satisface  $\omega(t_i) = \omega(t_f) = 0$ . Las derivadas de  $\omega$  son cero también en  $t_i$  y  $t_f$ . Para el primer y segundo experimento, seleccionando las trayectorias (7.2)–(7.4), los robots realizarán un círculo en el plano  $y$ – $z$ . Para los dos últimos experimentos, con (7.5)–(7.7), los robots realizarán una recta en la dirección de  $z$ . La diferencia entre las trayectorias para los robots A465 y A255 es solamente el ancho del objeto, 0.311 [m]. Por supuesto, no hay control de fuerza cuando los robots no están sujetando el objeto, es decir, hasta que los manipuladores estén en la posición inicial (0.554, 0, 0.510)[m] para el primer manipulador y (0.865, 0, 0.510)[m] para el segundo. La fuerza deseada para el primer y tercer experimento, se define para  $t = t_i = 10$ s hasta  $t = t_f = 70$ s por

$$f_{dx1,2} = 15(t - t_i)/10[\text{N}] \quad t_i \leq t < 20\text{s} \quad (7.8)$$

$$f_{dx1,2} = 15 + 5 \sin(3\pi(t - 20)/40)[\text{N}] \quad 20 \leq t < 60\text{s} \quad (7.9)$$

$$f_{dx1,2} = 15 - 15(t - 60)/10[\text{N}] \quad 60 \leq t < t_f \quad (7.10)$$

Para el segundo y cuarto experimento, la fuerza deseada es

$$f_{dx1,2} = 15(t - t_i)/10[\text{N}] \quad t_i \leq t < 20\text{s} \quad (7.11)$$

$$f_{dx1,2} = 15[\text{N}] \quad 20 \leq t < 60\text{s} \quad (7.12)$$

$$f_{dx1,2} = 15 - 15(t - 60)/10[\text{N}] \quad 60 \leq t < t_f \quad (7.13)$$

y  $f_{dy1,2} = f_{dz1,2} = 0[\text{N}]$ . Nótese que, por simplicidad, las fuerzas deseadas son expresadas en el sistema de coordenadas de la base de cada robot.

El esquema de control ha sido programado con un tiempo de muestreo de 9ms. El experimento dura 80s. El objeto es sujetado a los  $t = 10$ s. Antes, los robots están en movimiento libre y no se tiene control de fuerza; para ello se emplea el algoritmo de control (6.9) y el observador (6.14)–(6.15), mientras que de  $t = 10$ s a  $t = 70$ s se emplea el control cooperativo. De  $t = 70$ s a  $t = 80$ s los robots regresan a su posición inicial en movimiento libre. De  $t = 10$ s a  $t = 15$ s los manipuladores empiezan a presionar y sujetar el objeto desde su posición inicial, y de  $t = 15$ s a  $t = 20$ s lo elevan a la posición donde inicia la tarea.

El primer experimento consiste en seguir las trayectorias de posición (7.2)–(7.4) y de fuerza (7.8)–(7.10). En el intervalo de tiempo de  $t = 20$ s hasta  $t = 60$ s, los manipuladores empiezan a hacer un círculo en el plano  $y$ - $z$  y la fuerza deseada es una señal senoidal, como se muestra en la Fig. 7.3. Para el segundo experimento se siguen las mismas trayectorias de posición que para el primero, pero con la fuerza deseada de (7.11)–(7.13), como se muestra en la Fig. 7.6. Por otra parte, para el tercer experimento con las trayectorias de posición (7.5)–(7.7) y de fuerza (7.8)–(7.10), empiezan los robots hacer una recta en el sistema de coordenada  $z$ , mientras la fuerza deseada es una señal senoidal, como se muestra en la Fig. 7.9. Por último, en el cuarto experimento se siguen las mismas trayectorias de posición que el anterior, pero con la trayectoria de fuerza (7.11)–(7.13) (Fig. 7.12).

Las Figuras 7.1, 7.4, 7.7 y 7.10, muestran los resultados de la simulación y los experimentales para el seguimiento en coordenadas articulares. Como se puede apreciar, los resultados de simulación son similares. Puesto que el objetivo es evaluar la calidad del modelo, no se muestran las trayectorias deseadas. De la misma manera, las Figuras 7.2, 7.5, 7.8 y 7.11, muestran los resultados en coordenadas cartesianas. Los resultados son muy buenos también. Además, para la simulación de la fuerza los resultados pueden ser considerados aceptables, comparados con la fuerza real. Veánse las Figuras 7.3, 7.6, 7.9 y 7.12. En resumen, se puede concluir que el modelo del sistema cooperativo es adecuado, aunque el hecho de que haya sido probado en lazo cerrado sin duda hace que la validación sea menos confiable. Por otro lado, puesto que no se tiene un método especial para simular el momento en que el objeto es sujetado, *i.e.*, cuando los manipuladores cambian de movimiento libre a restringido, hay un pico a los 10s en la simulación. De  $t = 60$ s a  $t = 65$ s el objeto es colocado sobre la mesa y de  $t = 65$ s a  $t = 70$ s, los manipuladores disminuyen la fuerza aplicada al objeto.

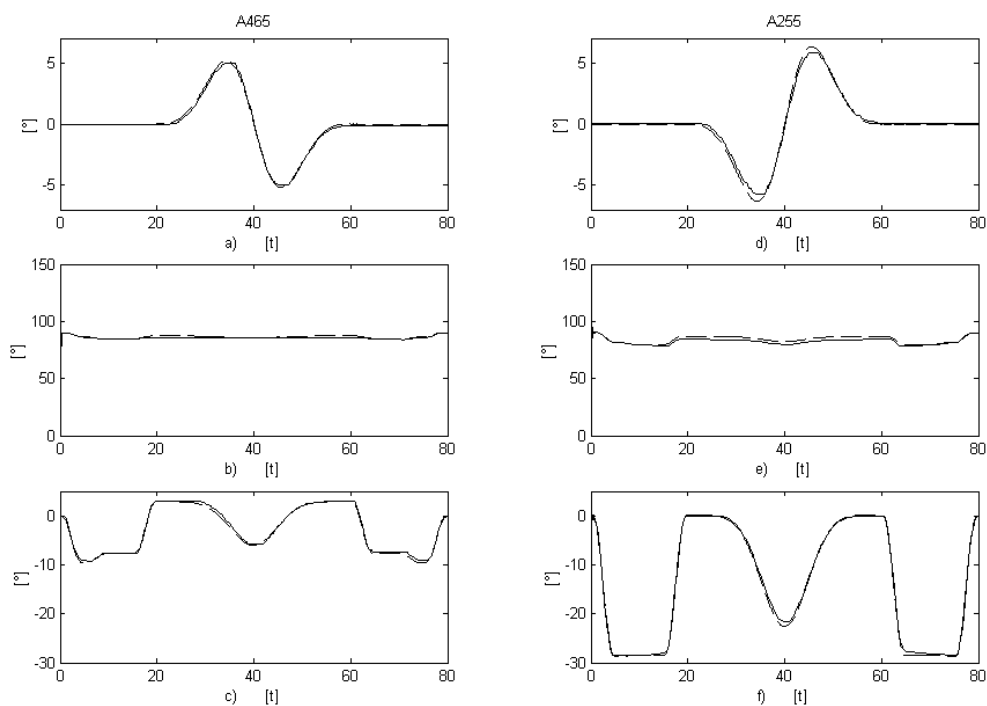


Figura 7.1: Seguimiento en coordenadas articulares a)  $q_{11}$ . b)  $q_{12}$ . c)  $q_{13}$ . d)  $q_{21}$ . e)  $q_{22}$ . f)  $q_{23}$ . — experimental - - - simulación. Experimento I.

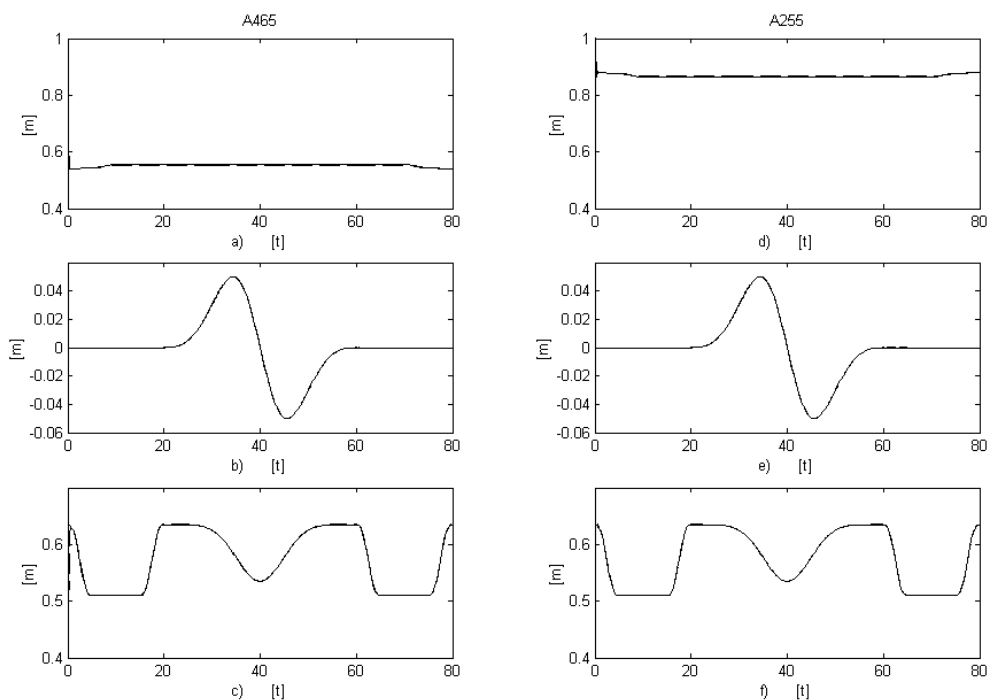


Figura 7.2: Seguimiento en coordenadas cartesianas a)  $x_1$ . b)  $y_1$ . c)  $z_1$ . d)  $x_2$ . e)  $y_2$ . f)  $z_2$ . — experimental - - - simulación. Experimento I.

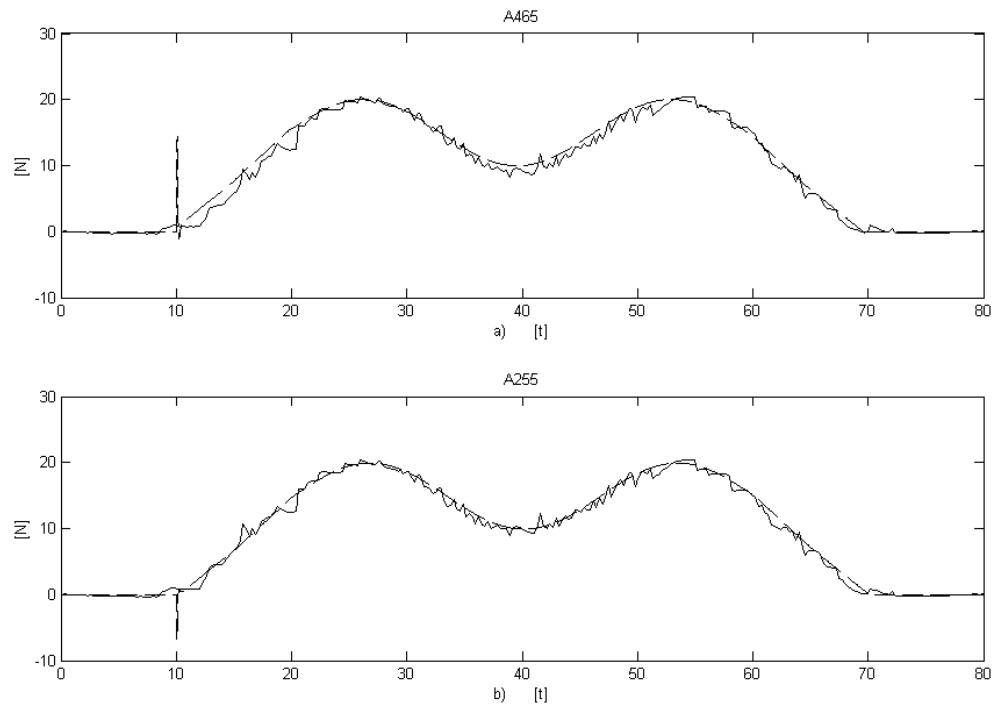


Figura 7.3: Medición de la fuerza a)  $\lambda_1$ . b)  $\lambda_2$ . — experimental - - - simulación. Experimento I.

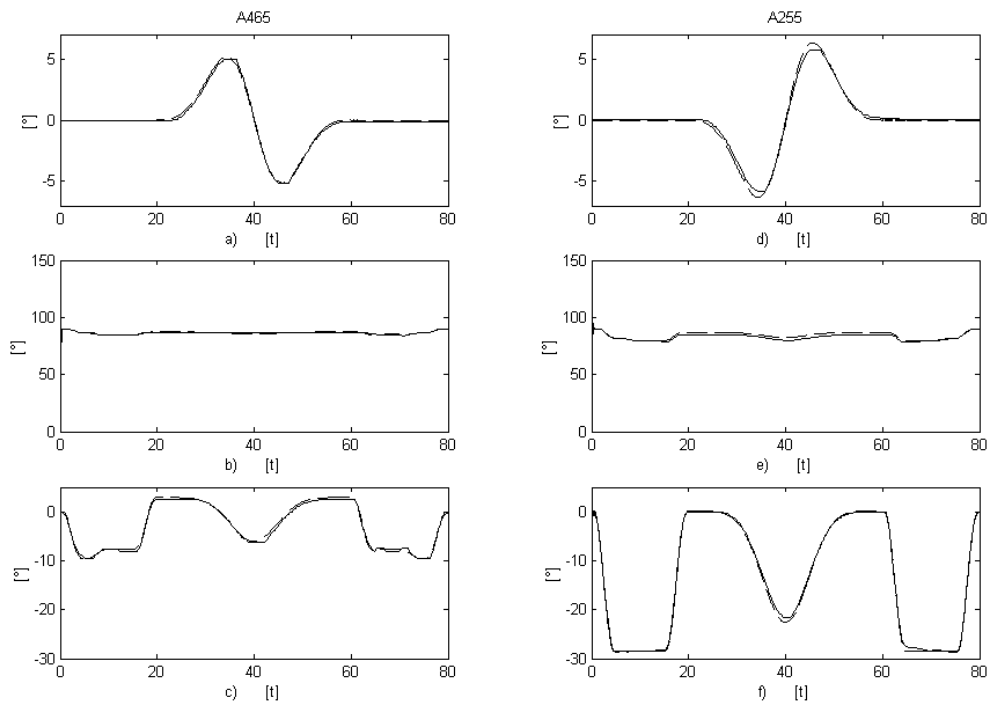


Figura 7.4: Seguimiento en coordenadas articulares a)  $q_{11}$ . b)  $q_{12}$ . c)  $q_{13}$ . d)  $q_{21}$ . e)  $q_{22}$ . f)  $q_{23}$ . — experimental - - - simulación. Experimento II.

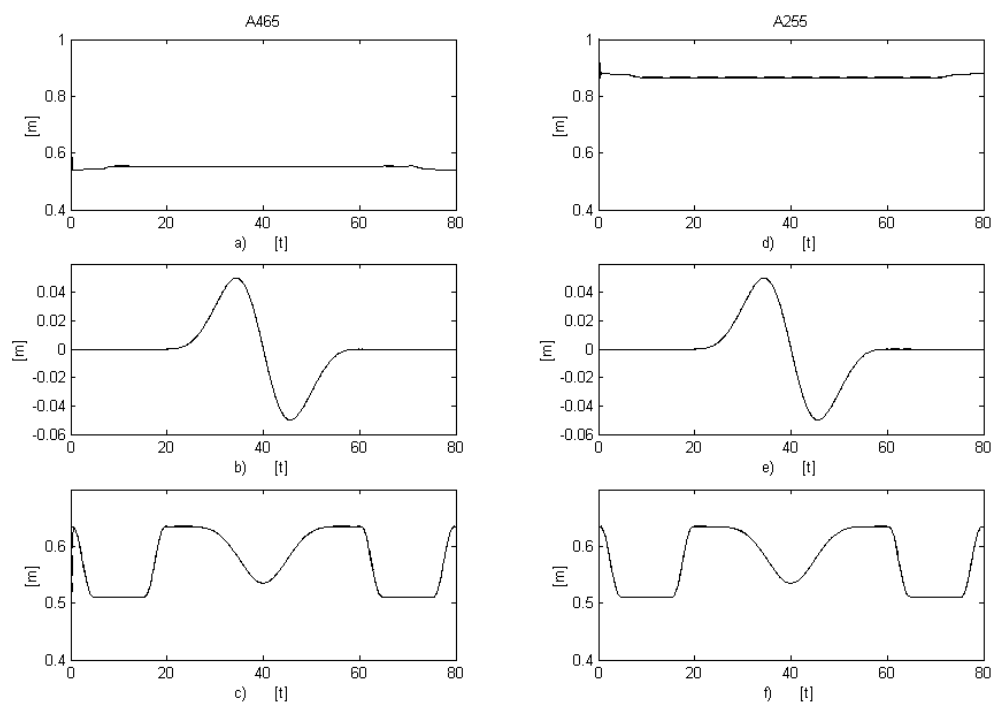


Figura 7.5: Seguimiento en coordenadas cartesianas a)  $x_1$ . b)  $y_1$ . c)  $z_1$ . d)  $x_2$ . e)  $y_2$ . f)  $z_2$ . — experimental - - - simulación. Experimento II.

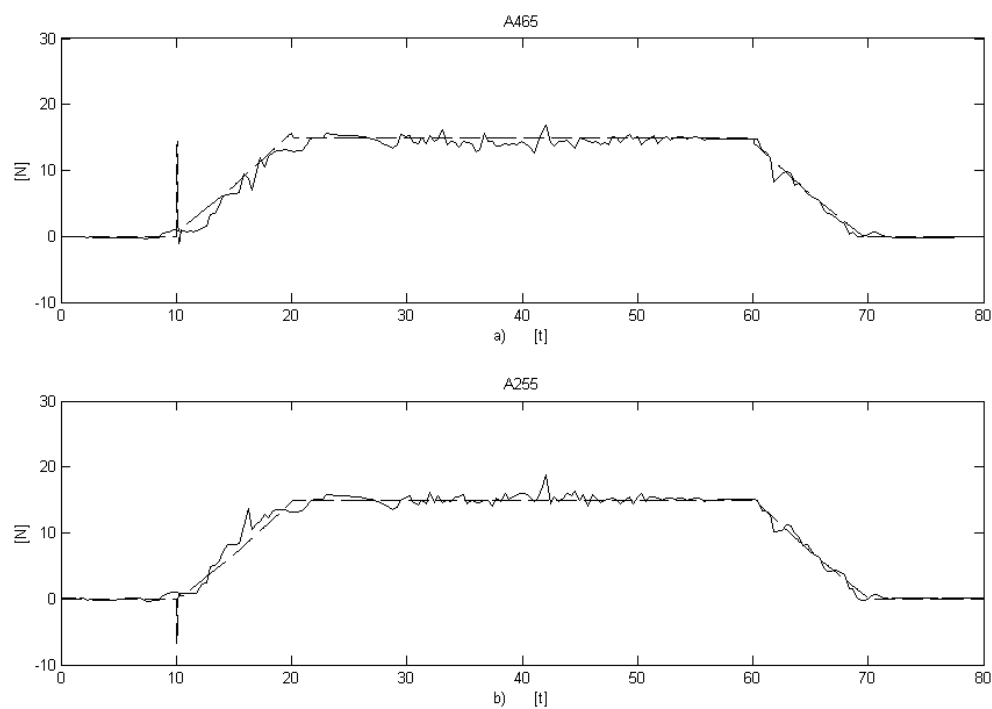


Figura 7.6: Medición de la fuerza a)  $\lambda_1$ . b)  $\lambda_2$ . — experimental - - - simulación. Experimento II.



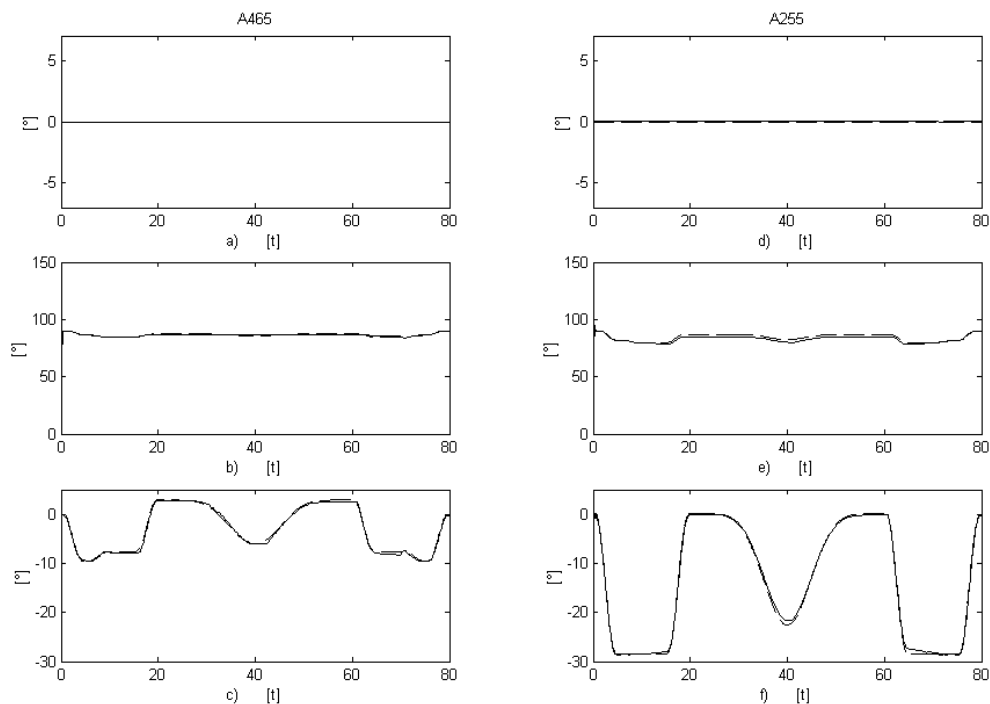


Figura 7.7: Seguimiento en coordenadas articulares a)  $q_{11}$ . b)  $q_{12}$ . c)  $q_{13}$ . d)  $q_{21}$ . e)  $q_{22}$ . f)  $q_{23}$ . — experimental - - - simulación. Experimento III.

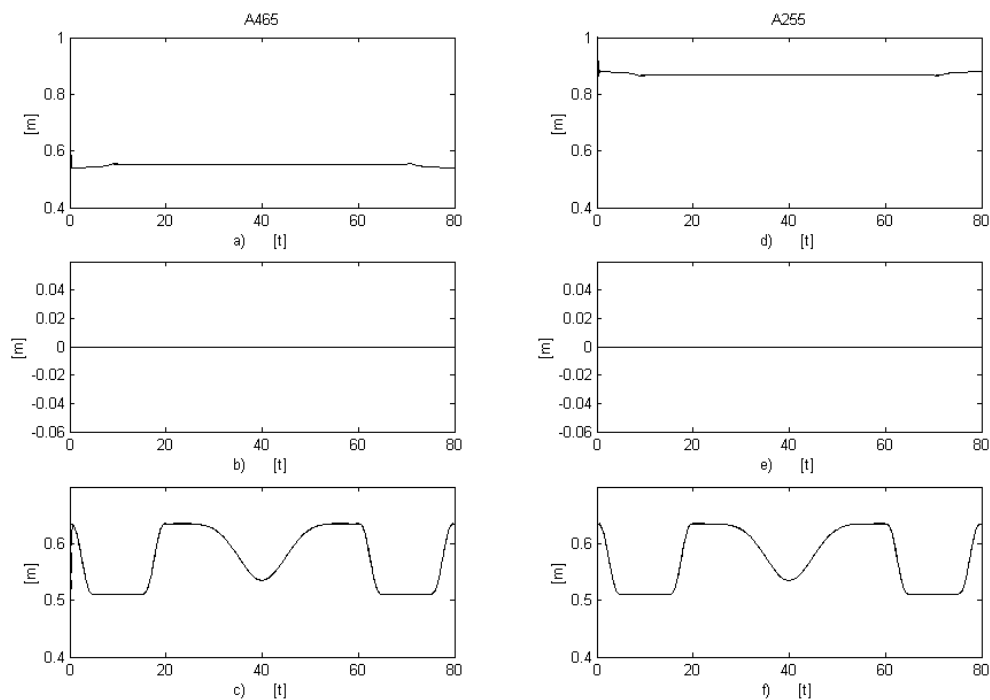


Figura 7.8: Seguimiento en coordenadas cartesianas a)  $x_1$ . b)  $y_1$ . c)  $z_1$ . d)  $x_2$ . e)  $y_2$ . f)  $z_2$ . — experimental - - - simulación. Experimento III.

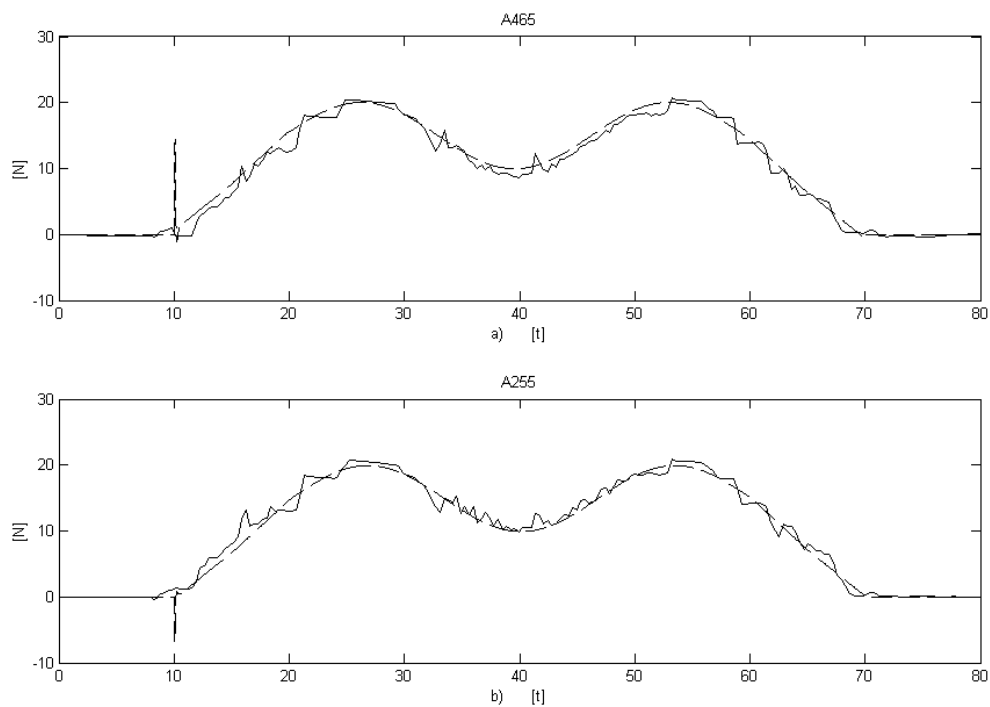


Figura 7.9: Medición de la fuerza a)  $\lambda_1$ . b)  $\lambda_2$ . — experimental - - - simulación. Experimento III.

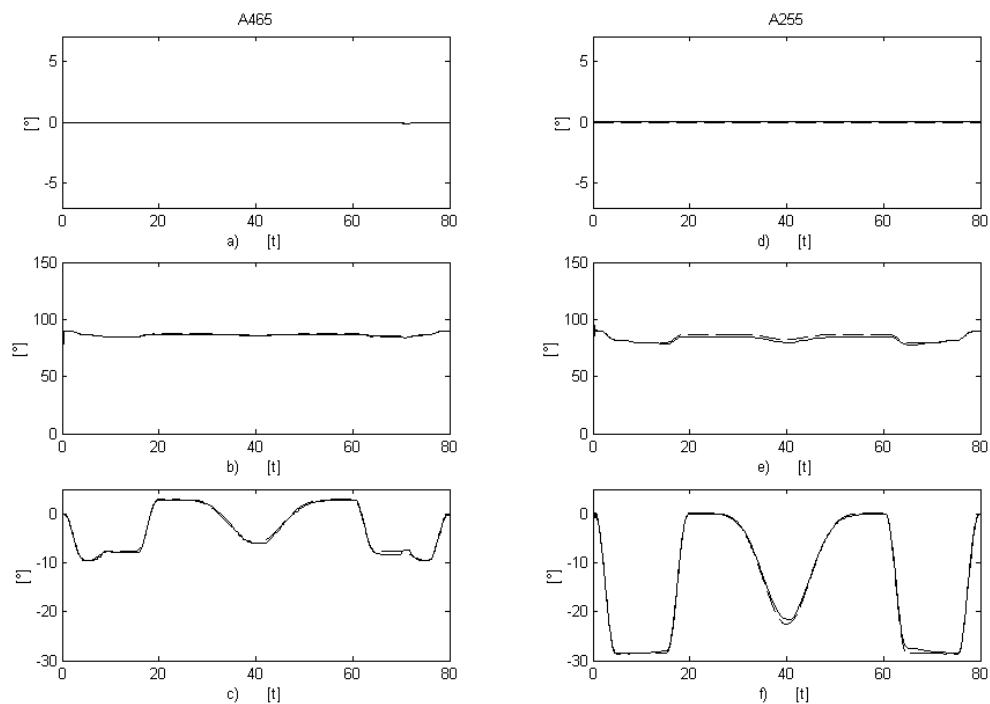


Figura 7.10: Seguimiento en coordenadas articulares a)  $q_{11}$ . b)  $q_{12}$ . c)  $q_{13}$ . d)  $q_{21}$ . e)  $q_{22}$ . f)  $q_{23}$ . — experimental - - - simulación. Experimento IV.

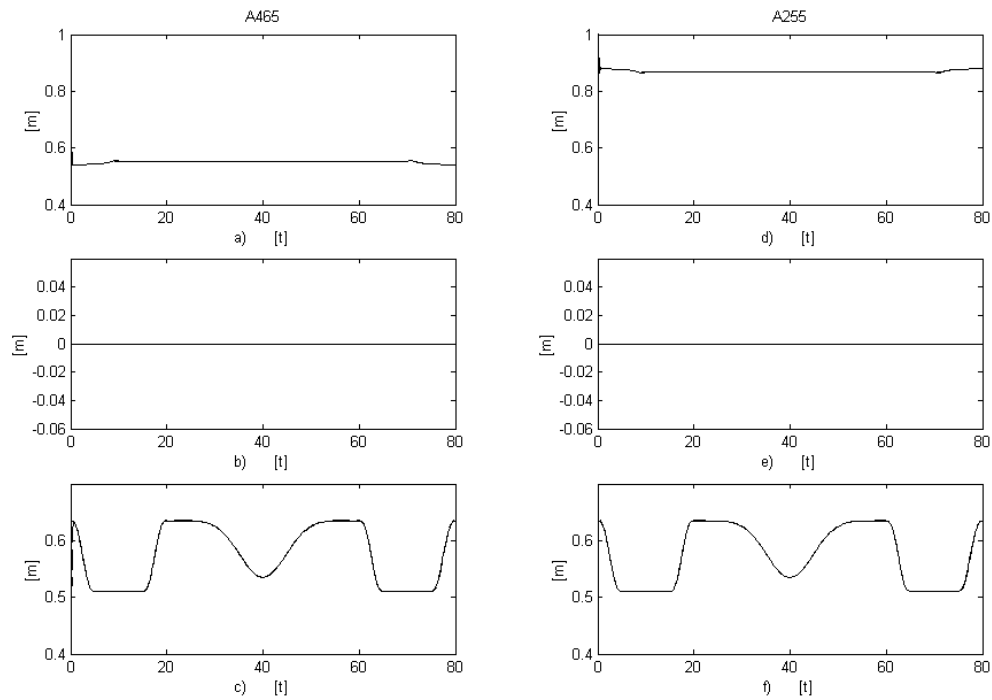


Figura 7.11: Seguimiento en coordenadas cartesianas a)  $x_1$ . b)  $y_1$ . c)  $z_1$ . d)  $x_2$ . e)  $y_2$ . f)  $z_2$ . — experimental - - - simulación. Experimento IV.

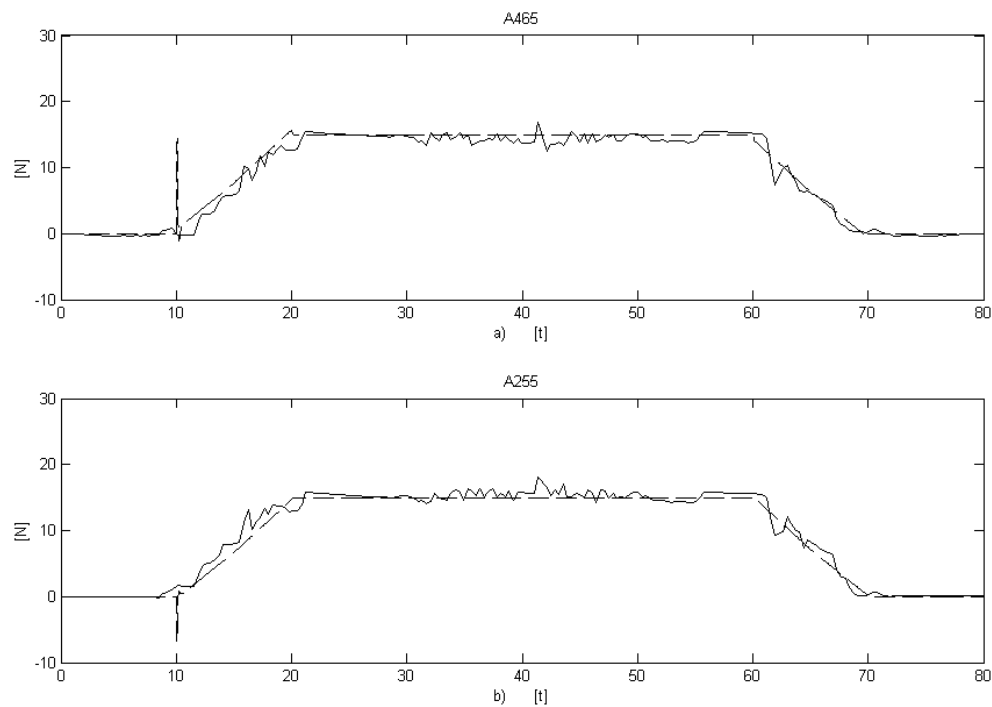


Figura 7.12: Medición de la fuerza a)  $\lambda_1$ . b)  $\lambda_2$ . — experimental - - - simulación. Experimento IV.

## 7.2 Regulación de fuerza y seguimiento de posición

Para respaldar la teoría desarrollada de los controladores (6.51) y (6.88); y los observadores (6.56)–(6.57) y (6.91)–(6.92), se realizaron dos experimentos. El primer experimento consiste en seguir las trayectorias de posición (7.2)–(7.4) y de fuerza (7.11)–(7.13). Una descripción detallada de estas labores se encuentra en la Sección 7.1. Para el segundo experimento se siguen las trayectorias de posición (7.5)–(7.7) y la misma fuerza deseada.

Para llevar a cabo el controlador en movimiento libre se utiliza la ley de control (6.9). Los parámetros del controlador (6.51) y del observador (6.56)–(6.57) son  $\mathbf{\Lambda}_1 = 21\mathbf{I}$ ,  $\mathbf{\Lambda}_2 = 23\mathbf{I}$ ,  $\mathbf{K}_{R_1} = \text{matriz diag } \{ 60 \ 60 \ 60 \}$ ,  $\mathbf{K}_{R_2} = \text{matriz diag } \{ 15 \ 13 \ 13 \}$ ,  $k_{d1} = k_{d2} = 4$ ,  $k_{f1} = k_{f2} = 5$ ,  $\boldsymbol{\xi}_1 = \boldsymbol{\xi}_2 = 0.001\mathbf{I}$ . Los parámetros adicionales del controlador (6.88) son  $A_1 = A_2 = 10$ ,  $B_1 = B_2 = 10$ .

Las Figuras 7.13, 7.14, 7.15, 7.16 y 7.17, corresponden al primer experimento y las Figuras 7.18, 7.19, 7.20, 7.21 y 7.22 al segundo.

Las Figuras 7.13 y 7.18 del primero y segundo experimento respectivamente, muestran los resultados comparativos de los errores de seguimiento en coordenadas articulares; como se puede apreciar, los resultados son muy similares, aunque no son tan cercanos a cero como se esperaba. Esto es debido principalmente al hecho de que se requiere el conocimiento exacto de la dinámica de los manipuladores y el modelo empleado en los experimentos no es suficientemente preciso. Aquí cabe hacer notar que la validación del modelo tuvo que ser hecha en lazo cerrado, por lo que no es muy confiable. De la misma forma, las Figuras 7.14 y 7.19, muestran los resultados en coordenadas cartesianas. Para el seguimiento de la fuerza deseada (7.11)–(7.13) los resultados pueden ser considerados buenos, según se puede apreciar en las Figuras 7.15 y 7.20. Esto demuestra la eficiencia del diseño del controlador descentralizado. Las Figuras 7.16 y 7.21 muestran los errores de observación. Como puede apreciarse los resultados son muy buenos en función de que el observador emplea poca o ninguna información de la dinámica de los robots; esto confirma que los errores de seguimiento podrían ser mejorados si se tuviera el modelo exacto de los manipuladores. Finalmente, las Figuras 7.17 y 7.22 muestran los voltajes de entrada. Como puede verse, no se tienen problemas de saturación.

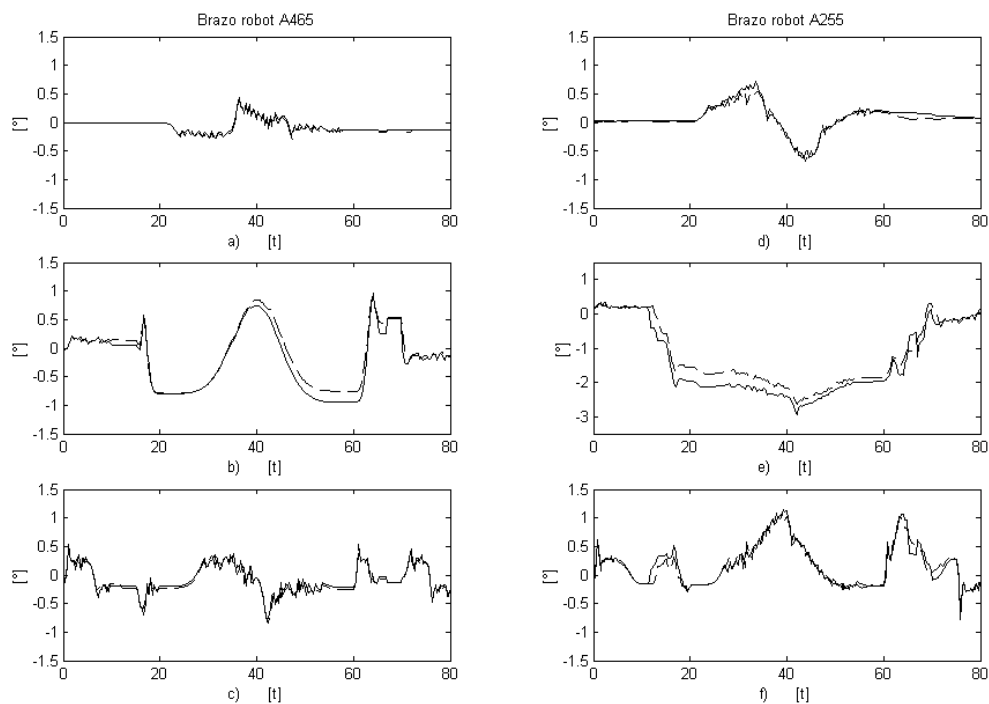


Figura 7.13: Errores de seguimiento en coordenadas articulares a)  $\tilde{q}_{11}$ . b)  $\tilde{q}_{12}$ . c)  $\tilde{q}_{13}$ . d)  $\tilde{q}_{21}$ . e)  $\tilde{q}_{22}$ . f)  $\tilde{q}_{23}$ . — controlador (6.51) - - - controlador (6.88). Experimento I.

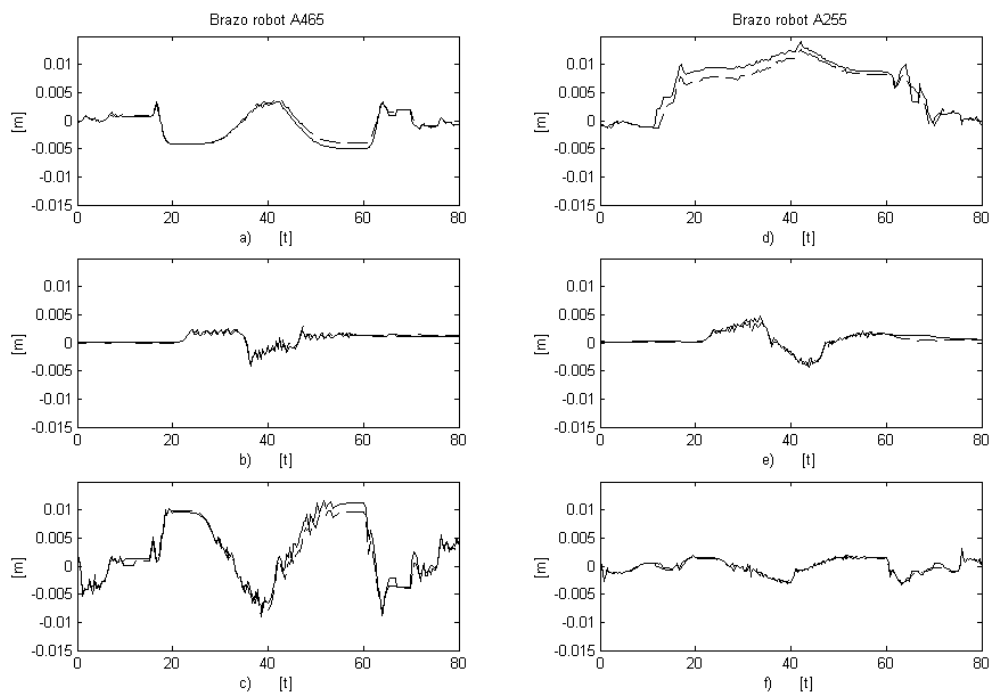


Figura 7.14: Errores de seguimiento en coordenadas cartesianas a)  $\tilde{x}_{11}$ . b)  $\tilde{x}_{12}$ . c)  $\tilde{x}_{13}$ . d)  $\tilde{x}_{21}$ . e)  $\tilde{x}_{22}$ . f)  $\tilde{x}_{23}$ . — controlador (6.51) - - - controlador (6.88). Experimento I.

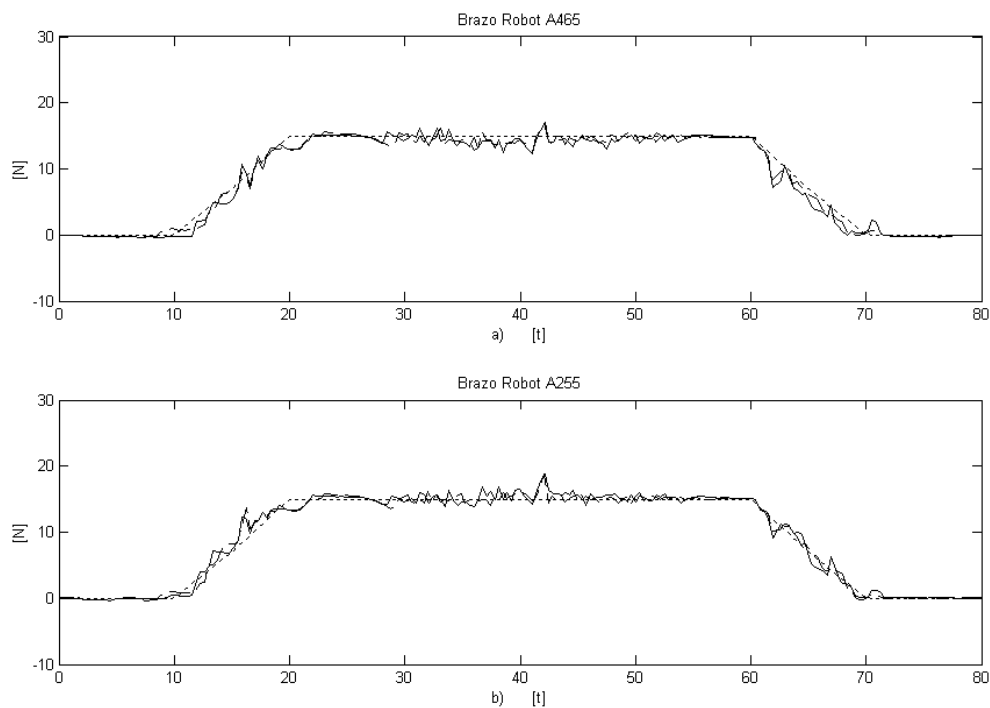


Figura 7.15: Medición de la fuerza a)  $\lambda_1$ . b)  $\lambda_2$ . ..... señal deseada — controlador (6.51) - - - controlador (6.88). Experimento I.

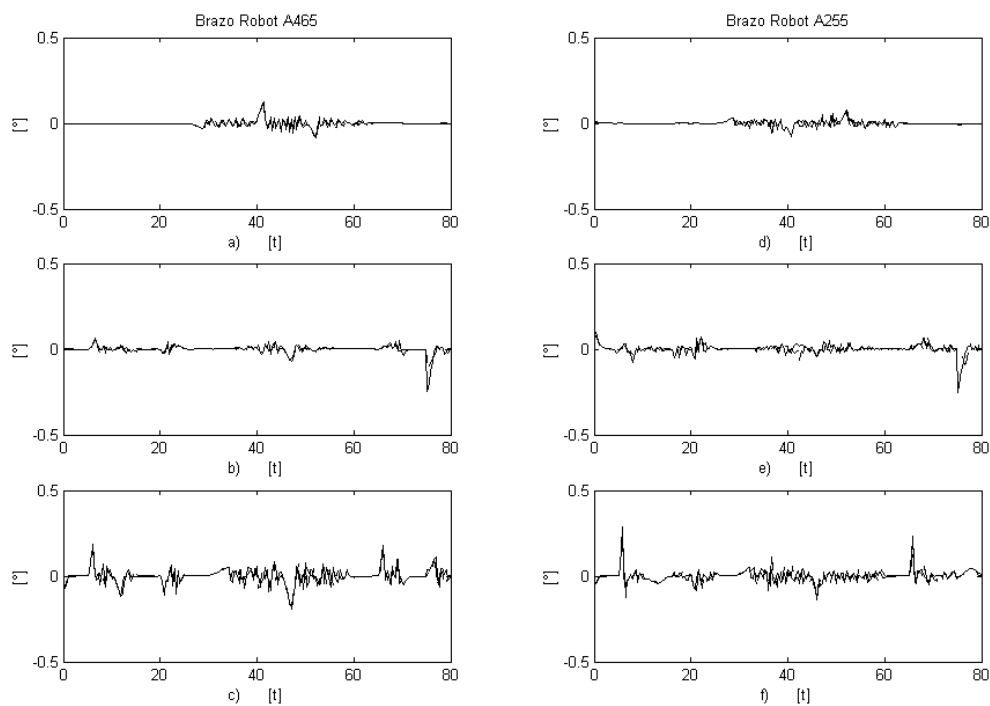


Figura 7.16: Errores de observación a)  $z_{11}$ . b)  $z_{12}$ . c)  $z_{13}$ . d)  $z_{21}$ . e)  $z_{22}$ . f)  $z_{23}$ . — controlador (6.51) - - - controlador (6.88). Experimento I.

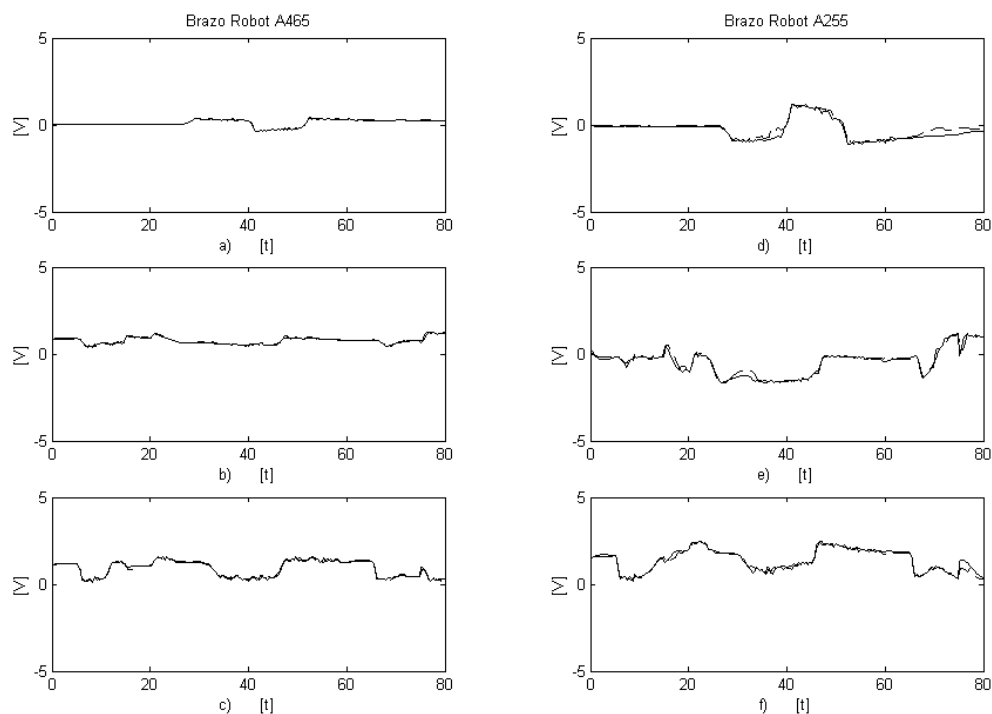


Figura 7.17: Voltajes de entrada a)  $v_{11}$ . b)  $v_{12}$ . c)  $v_{13}$ . d)  $v_{21}$ . e)  $v_{22}$ . f)  $v_{23}$ . — controlador (6.51) - - - controlador (6.88). Experimento I.

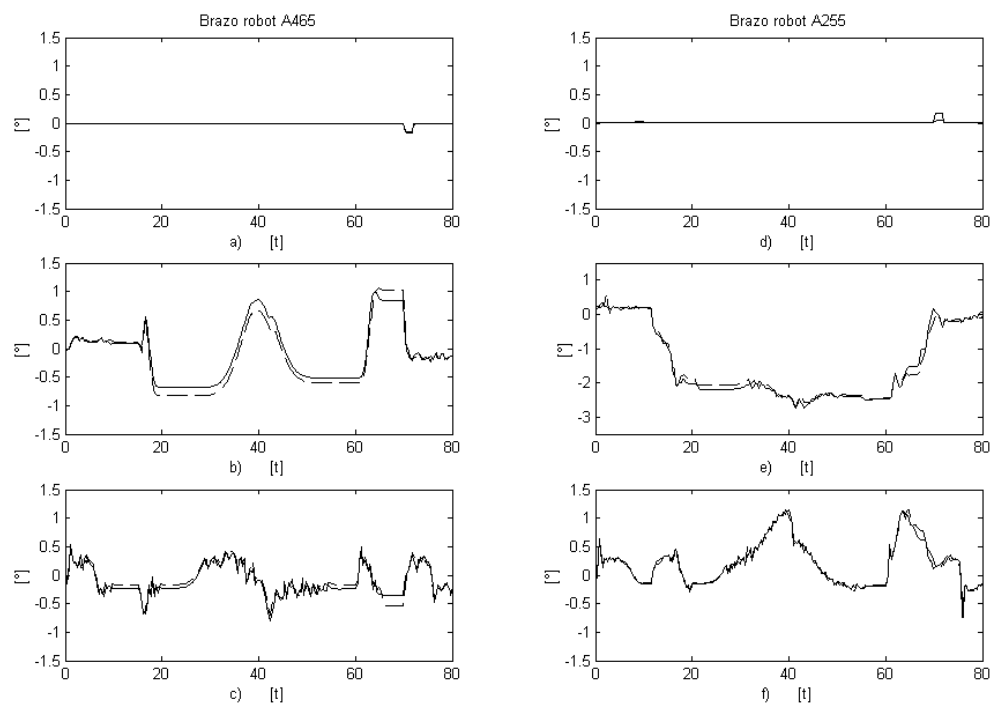


Figura 7.18: Errores de seguimiento en coordenadas articulares a)  $\tilde{q}_{11}$ . b)  $\tilde{q}_{12}$ . c)  $\tilde{q}_{13}$ . d)  $\tilde{q}_{21}$ . e)  $\tilde{q}_{22}$ . f)  $\tilde{q}_{23}$ . — controlador (6.51) - - - controlador (6.88). Experimento II.

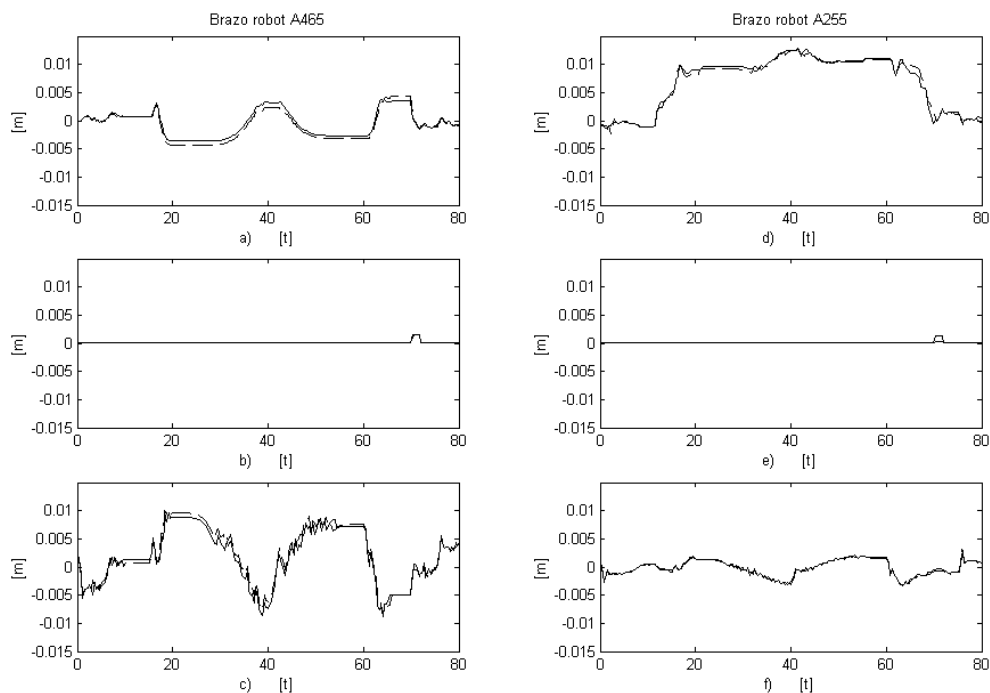


Figura 7.19: Errores de seguimiento en coordenadas cartesianas a)  $\tilde{x}_{11}$ . b)  $\tilde{x}_{12}$ . c)  $\tilde{x}_{13}$ . d)  $\tilde{x}_{21}$ . e)  $\tilde{x}_{22}$ . f)  $\tilde{x}_{23}$ . — controlador (6.51) - - - controlador (6.88). Experimento II.

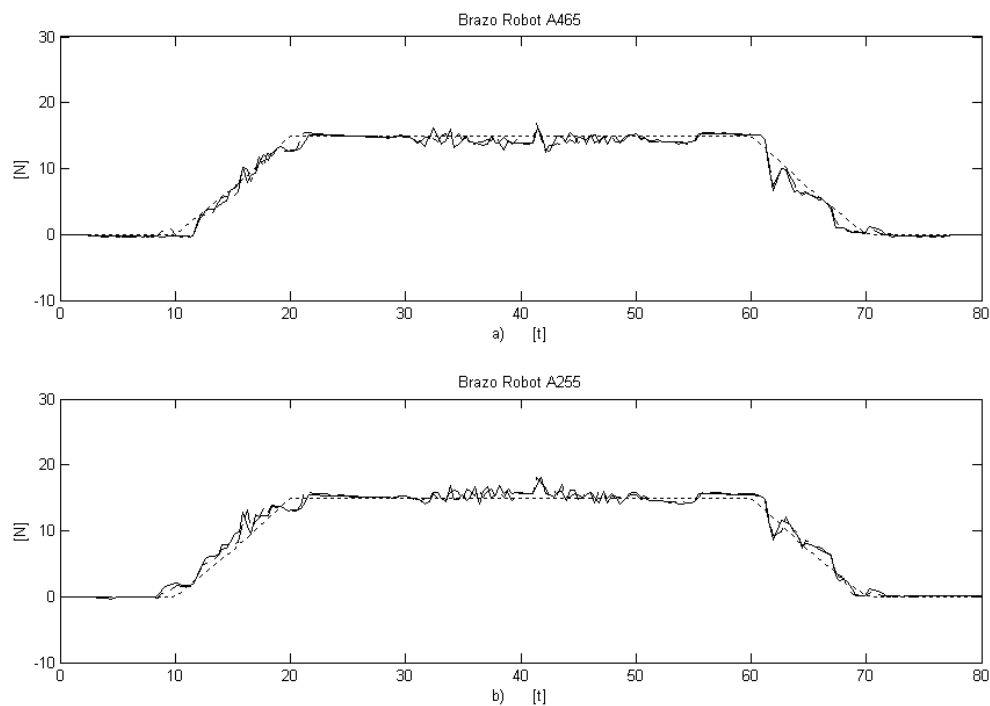


Figura 7.20: Medición de la fuerza a)  $\lambda_1$ . b)  $\lambda_2$ . ..... señal deseada — controlador (6.51) - - - controlador (6.88). Experimento II.



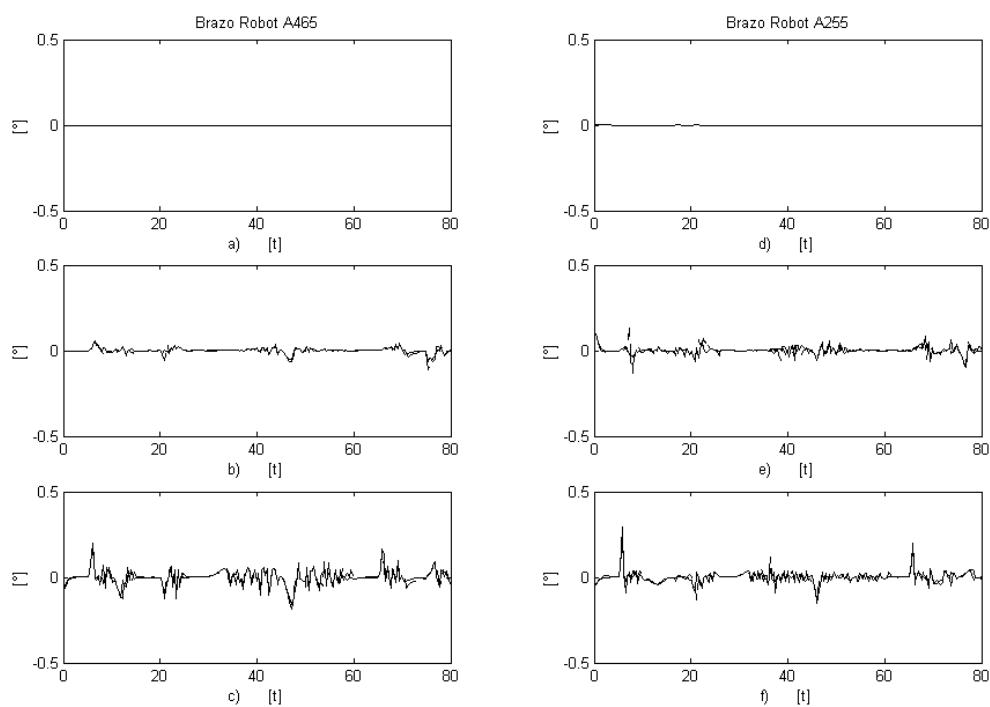


Figura 7.21: Errores de observación a)  $z_{11}$ . b)  $z_{12}$ . c)  $z_{13}$ . d)  $z_{21}$ . e)  $z_{22}$ . f)  $z_{23}$ . — controlador (6.51) - - - controlador (6.88). Experimento II.

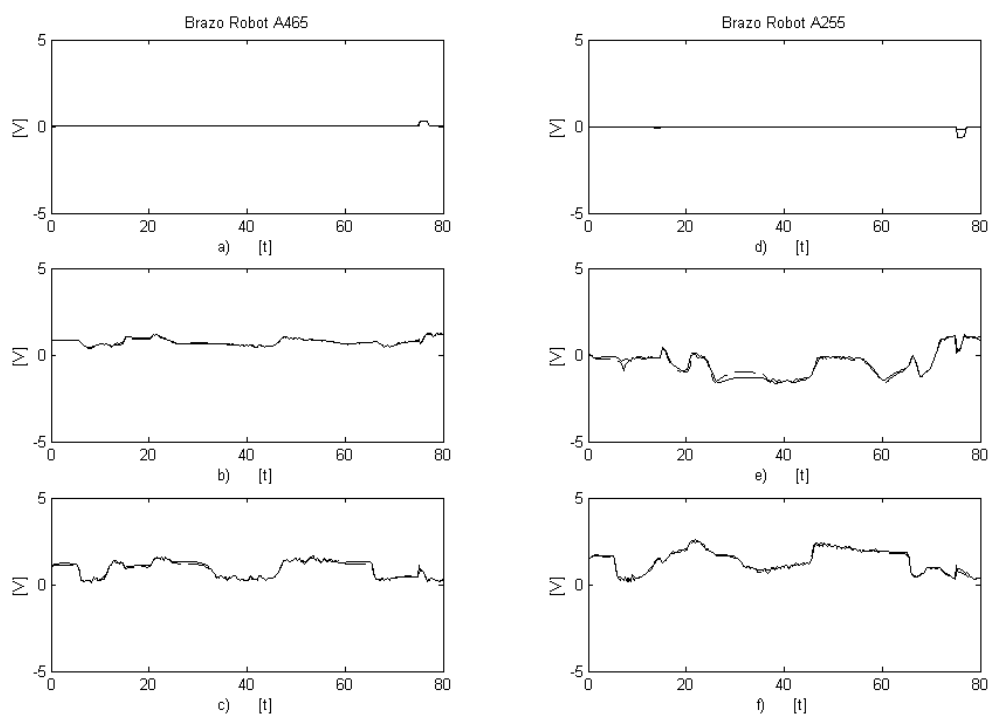


Figura 7.22: Voltajes de entrada a)  $v_{11}$ . b)  $v_{12}$ . c)  $v_{13}$ . d)  $v_{21}$ . e)  $v_{22}$ . f)  $v_{23}$ . — controlador (6.51) - - - controlador (6.88). Experimento II.

### 7.3 Seguimiento de fuerza y posición

Los últimos dos experimentos consisten en hacer seguimiento de posición y fuerza. La tarea consiste en seguir las trayectorias de posición (7.2)–(7.4) y fuerza (7.8)–(7.10) deseada. Por supuesto, los resultados son los mismos presentados en la Sección 7.1, sólo que ahora se muestran errores de seguimiento y la comparación contra fuerzas deseadas.

Las Figuras 7.23 y 7.28 del tercero y cuarto experimento respectivamente, muestran los resultados de los errores de seguimiento en coordenadas articulares; como se pueden apreciar, los resultados son muy similares nuevamente. De la misma forma, las Figuras 7.24 y 7.29 muestran los resultados en coordenadas cartesianas. Para el seguimiento de la fuerza deseada (7.8)–(7.10) los resultados pueden ser considerados buenos, como se muestra en las Figuras 7.25 y 7.30. Las Figuras 7.26 y 7.31 muestran los errores de observación. Como puede apreciarse, los resultados son muy buenos. Finalmente, las Figuras 7.27 y 7.32 muestran los voltajes de entrada.

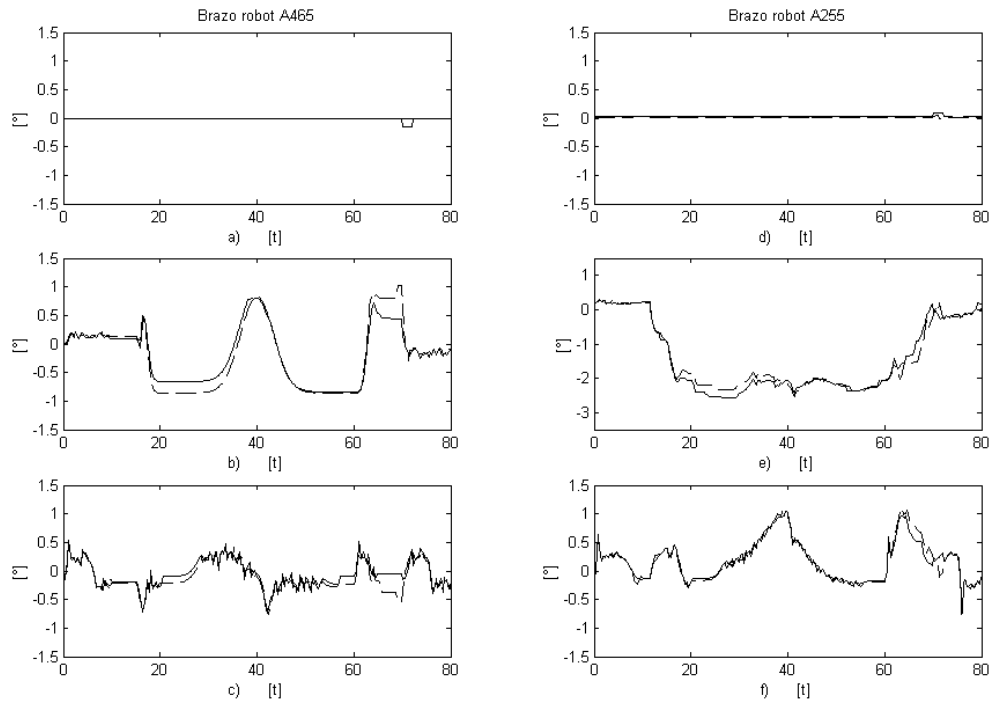


Figura 7.23: Errores de seguimiento en coordenadas articulares a)  $\tilde{q}_{11}$ . b)  $\tilde{q}_{12}$ . c)  $\tilde{q}_{13}$ . d)  $\tilde{q}_{21}$ . e)  $\tilde{q}_{22}$ . f)  $\tilde{q}_{23}$ . — controlador (6.51) - - - controlador (6.88). Experimento III.

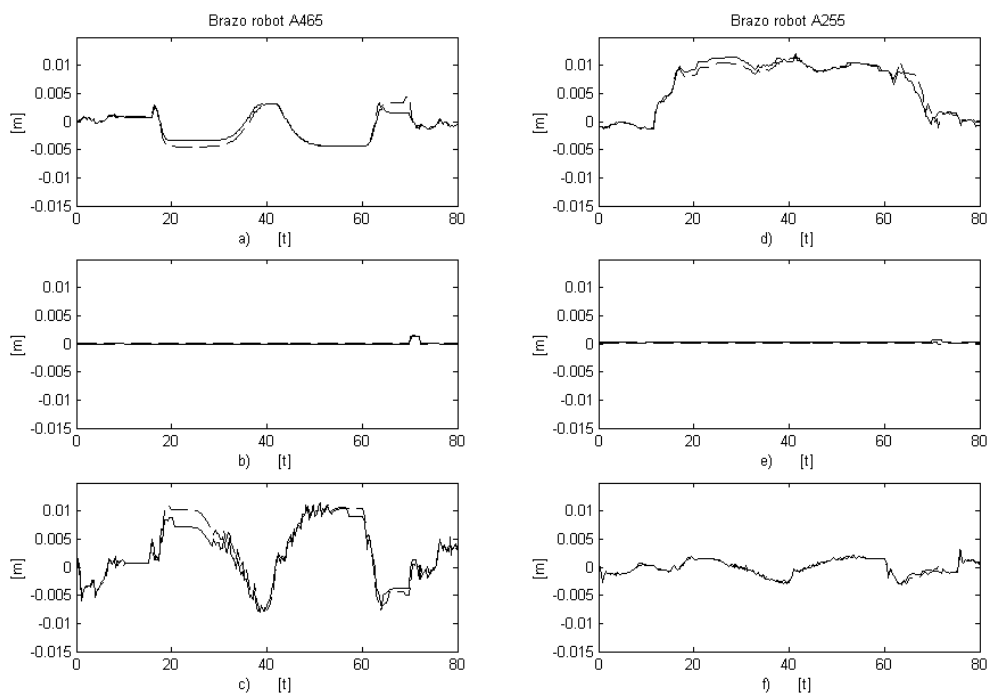


Figura 7.24: Errores de seguimiento en coordenadas cartesianas a)  $\tilde{x}_{11}$ . b)  $\tilde{x}_{12}$ . c)  $\tilde{x}_{13}$ . d)  $\tilde{x}_{21}$ . e)  $\tilde{x}_{22}$ . f)  $\tilde{x}_{23}$ . — controlador (6.51) - - - controlador (6.88). Experimento III.

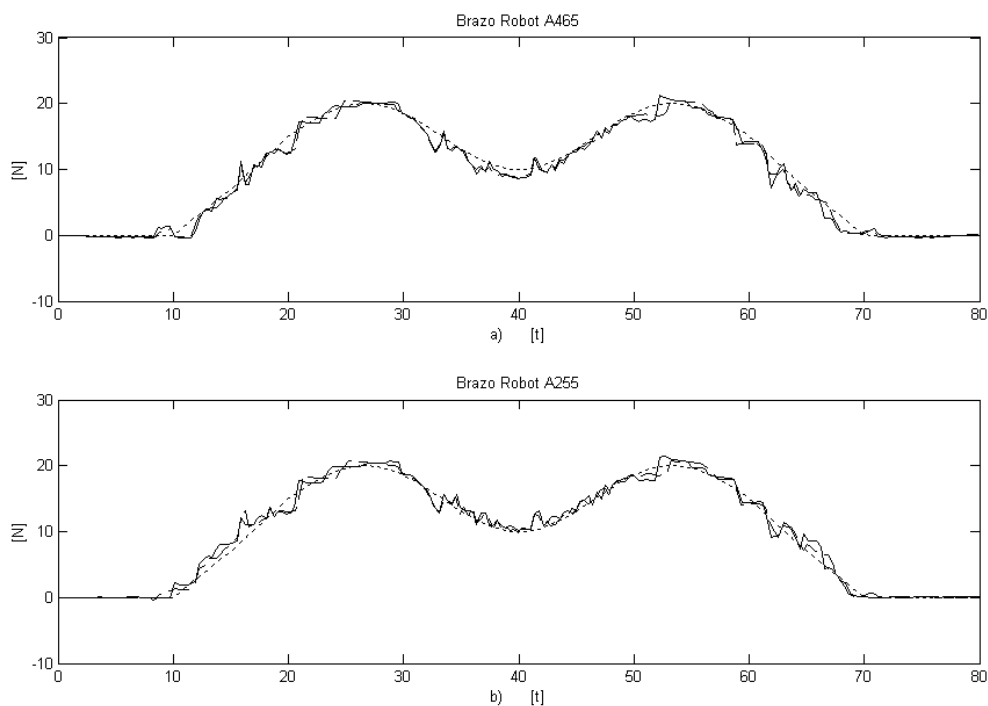


Figura 7.25: Medición de la fuerza a)  $\lambda_1$ . b)  $\lambda_2$ . ..... señal deseada — controlador (6.51) - - - controlador (6.88). Experimento III.

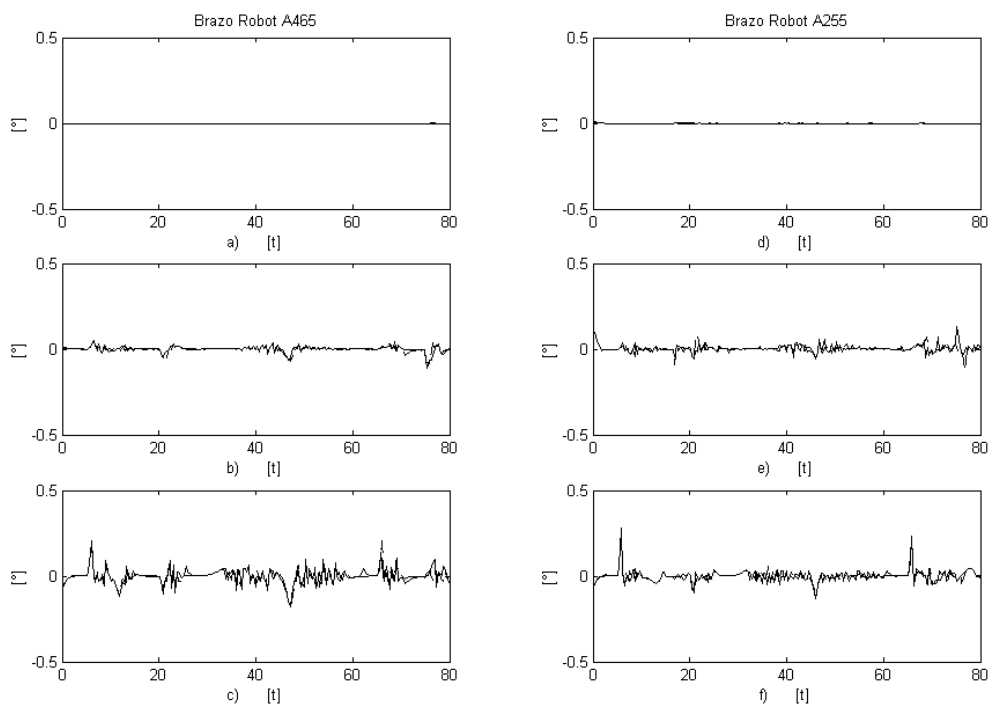


Figura 7.26: Errores de observación a)  $z_{11}$ . b)  $z_{12}$ . c)  $z_{13}$ . d)  $z_{21}$ . e)  $z_{22}$ . f)  $z_{23}$ . — controlador (6.51) - - - controlador (6.88). Experimento III.

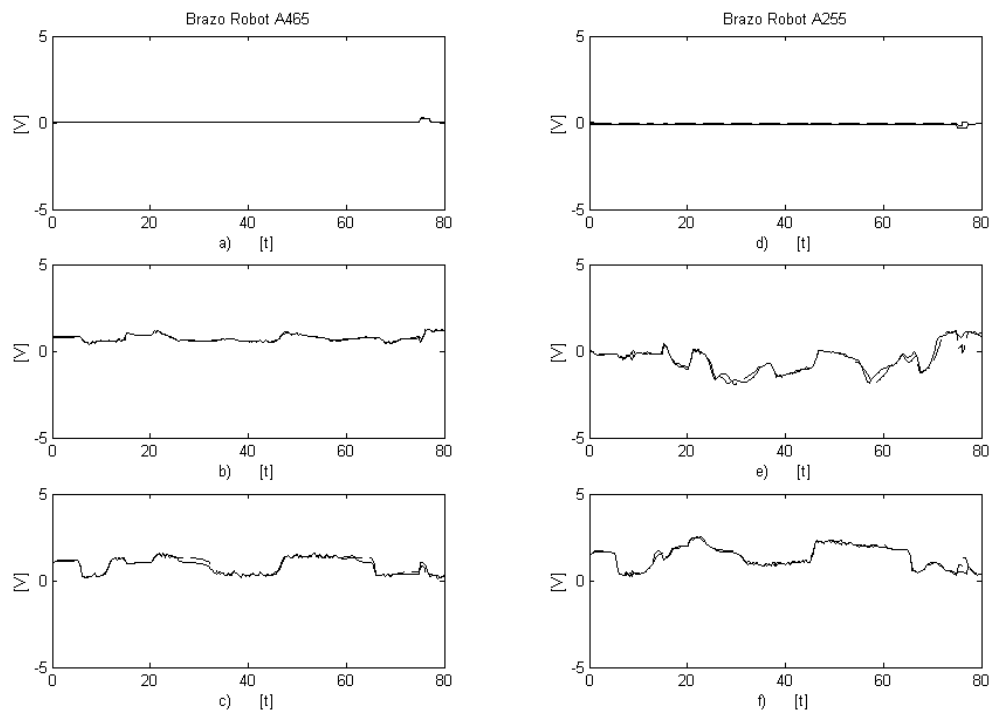


Figura 7.27: Voltajes de entrada a)  $v_{11}$ . b)  $v_{12}$ . c)  $v_{13}$ . d)  $v_{21}$ . e)  $v_{22}$ . f)  $v_{23}$ . — controlador (6.51) - - - controlador (6.88). Experimento III.

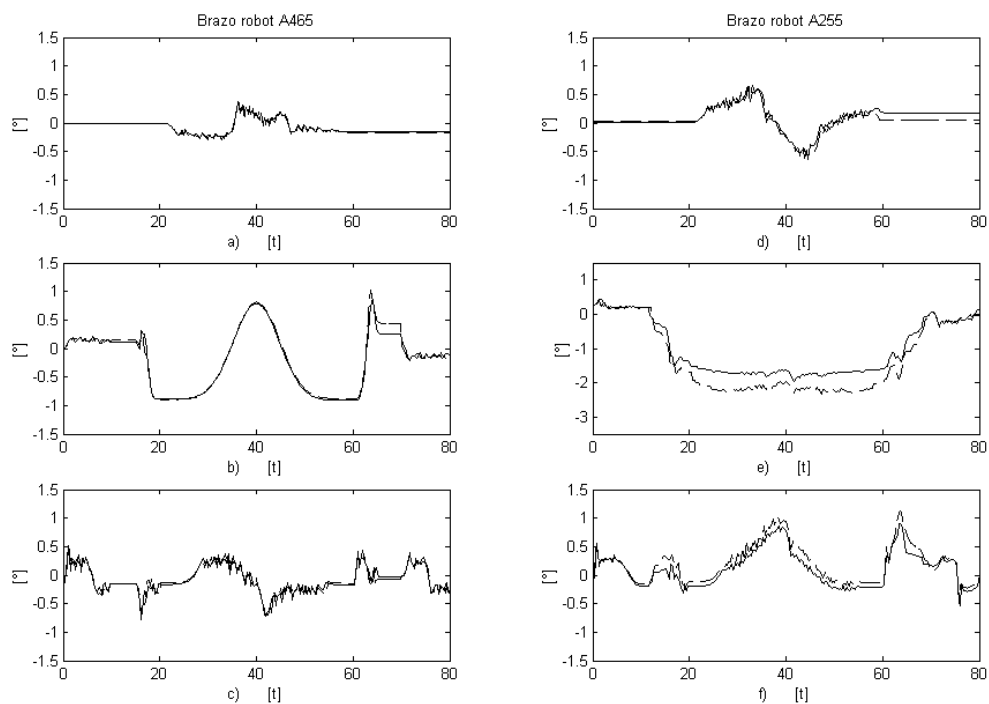


Figura 7.28: Errores de seguimiento en coordenadas articulares a)  $\tilde{q}_{11}$ . b)  $\tilde{q}_{12}$ . c)  $\tilde{q}_{13}$ . d)  $\tilde{q}_{21}$ . e)  $\tilde{q}_{22}$ . f)  $\tilde{q}_{23}$ . — controlador (6.51) - - - controlador (6.88). Experimento IV.

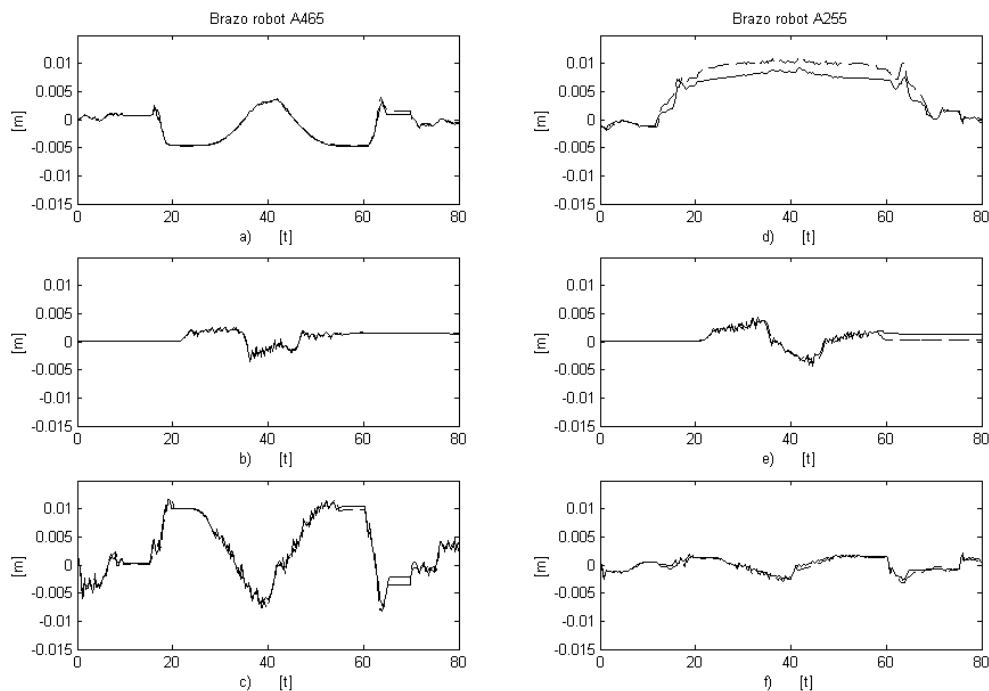


Figura 7.29: Errores de seguimiento en coordenadas cartesianas a)  $\tilde{x}_{11}$ . b)  $\tilde{x}_{12}$ . c)  $\tilde{x}_{13}$ . d)  $\tilde{x}_{21}$ . e)  $\tilde{x}_{22}$ . f)  $\tilde{x}_{23}$ . — controlador (6.51) - - - controlador (6.88). Experimento IV.

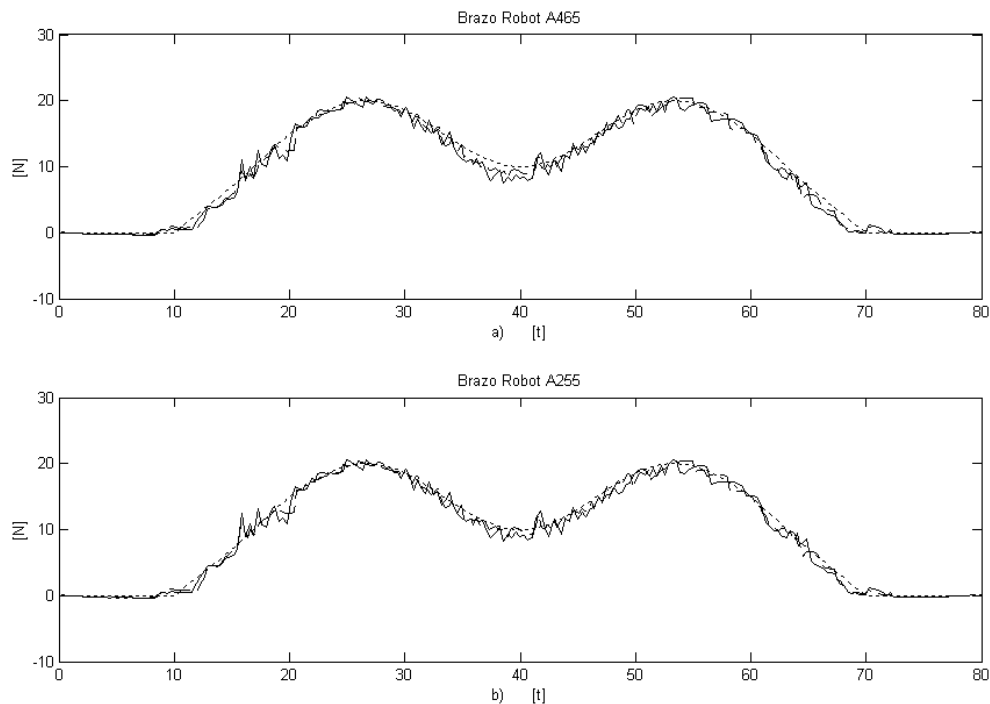


Figura 7.30: Medición de la fuerza a)  $\lambda_1$ . b)  $\lambda_2$ . ..... señal deseada — controlador (6.51) - - - controlador (6.88). Experimento IV.

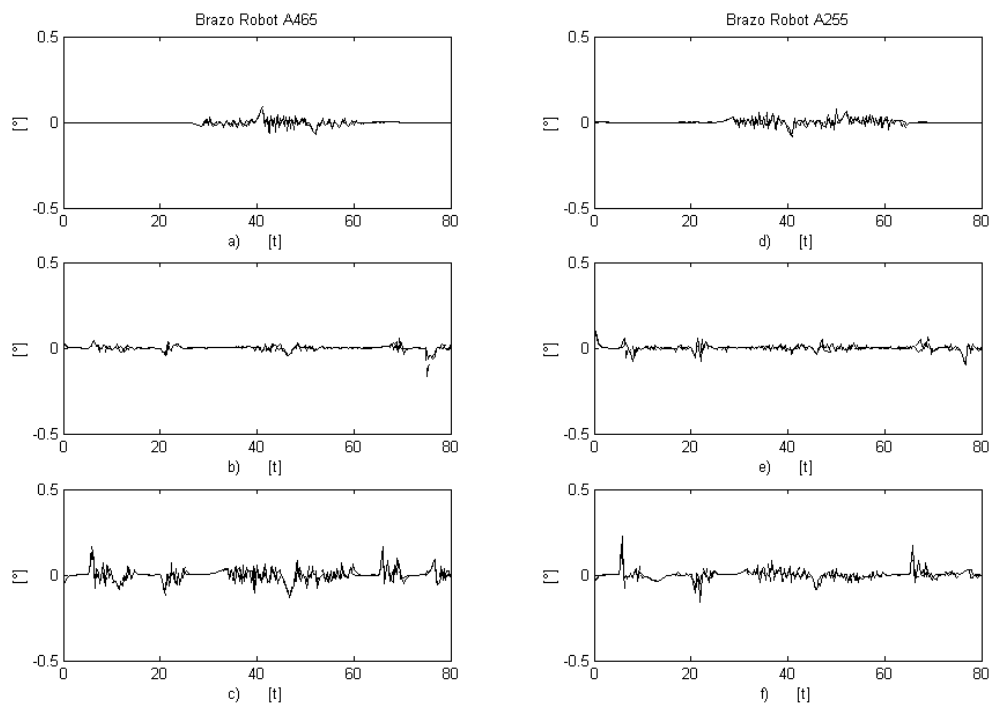


Figura 7.31: Errores de observación a)  $z_{11}$ . b)  $z_{12}$ . c)  $z_{13}$ . d)  $z_{21}$ . e)  $z_{22}$ . f)  $z_{23}$ . — controlador (6.51) - - - controlador (6.88). Experimento IV.

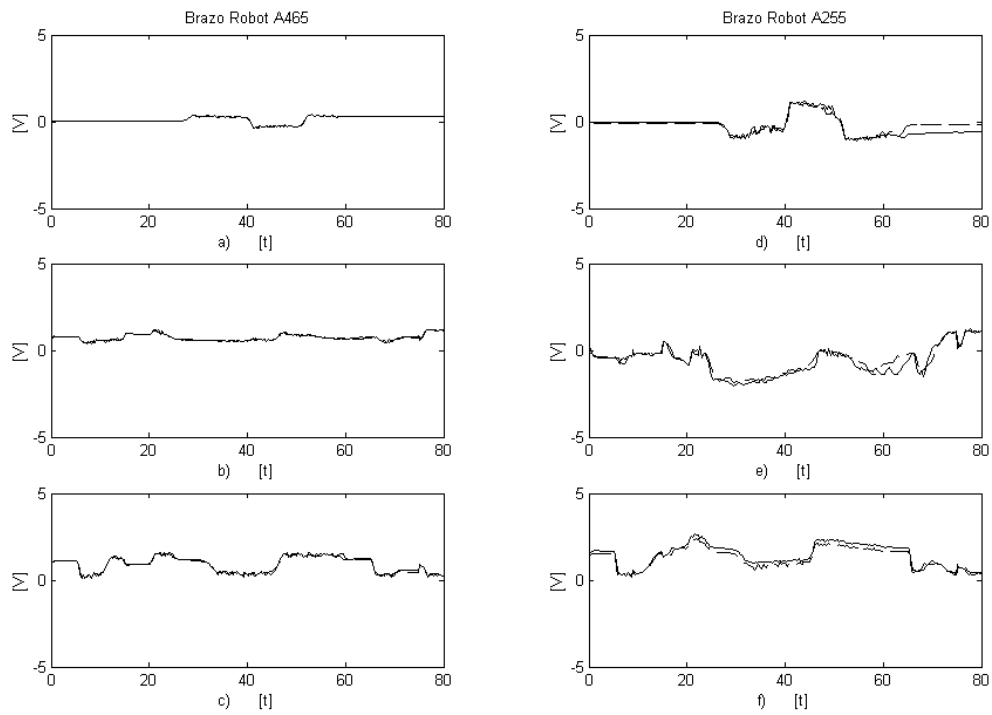


Figura 7.32: Voltajes de entrada a)  $v_{11}$ . b)  $v_{12}$ . c)  $v_{13}$ . d)  $v_{21}$ . e)  $v_{22}$ . f)  $v_{23}$ . — controlador (6.51) - - - controlador (6.88). Experimento IV.





# Capítulo 8

## Conclusiones

En el presente trabajo se obtuvieron dos leyes de control para robots cooperativos con estimación de velocidad. Como caso de estudio, se analizó un sistema con dos manipuladores. Además, se obtuvo el modelo matemático que describe el comportamiento dinámico de un sistema cooperativo formado por dos brazos robots industriales, que sujetan un objeto rígido sin fricción; dicho sistema puede extenderse a  $l$  robots rígidos. El modelo dinámico para cada uno de los robots se obtiene por medio del formalismo Lagrangiano. Una vez que los manipuladores sujetan el objeto, sus variables articulares son acopladas cinemática y dinámicamente. Las ecuaciones de acoplamiento son combinadas con el modelo dinámico del objeto rígido para obtener la descripción matemática del sistema cooperativo.

Se realizaron experimentos y simulaciones para probar los resultados teóricos del modelo dinámico. El resultado general puede ser considerado aceptable, si bien por razones de seguridad se tuvo que llevar a cabo la validación en lazo cerrado con un controlador, lo que la hace menos confiable. Se implementaron cuatro experimentos; el primero consiste en levantar el objeto a una determinada altura y hacer seguimiento de trayectoria de posición (círculo de radio  $r$ ) con regulación de fuerza y el segundo con seguimiento de fuerza (función seno). El tercer experimento consiste en levantar el objeto y hacer seguimiento de trayectoria de posición (levanta y baja el objeto) con regulación de fuerza y el cuarto con seguimiento de fuerza (función seno).

Las leyes de control que se proponen en esta tesis son del tipo descentralizado; *i.e.* toman en cuenta las restricciones de movimiento en lugar de la dinámica del objeto a manipular. Se asume que la dinámica de los robots es conocida y que se dispone de la medición de las fuerzas de contacto. Se proponen dos observadores. El primero requiere de la inversa de la matriz de inercia mientras que el segundo se diseña de tal forma que esto no es necesario. Para lograrlo, se implementa un filtro de fuerza. A pesar del hecho de que el análisis de estabilidad es complejo, el controlador y especialmente el observador no lo son.

Para probar los dos esquemas de control se realizaron cuatro experimentos. Los resultados fueron buenos tanto en seguimiento de trayectoria de posición/fuerza como en el de regulación de fuerza.



# Apéndice A

## Parámetros dinámicos de los robots A465 y A255

En este apéndice se muestran los modelos dinámicos de los brazos robots A465 y A255, con sus correspondientes valores de parámetros. Los modelos usados para la implementación así como para la simulación incluyen términos de fricción de Coulomb para ambos robots. El método para el cálculo de parámetros del modelo puede ser encontrado en Sciavicco y Siciliano (2000). Cabe recordar que solamente los tres primeros grados de libertad de cada manipulador han sido considerados. Además, puesto que los actuadores son motores de CD, se debe de tomar en cuenta su dinámica. De esta manera, para cada manipulador en movimiento libre, se tiene:

$$\mathbf{H}_i(\mathbf{q}_i)\ddot{\mathbf{q}}_i + \mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i)\dot{\mathbf{q}}_i + \mathbf{D}_i\dot{\mathbf{q}}_i + \mathbf{f}_{c_i}(\dot{\mathbf{q}}_i) + \mathbf{g}_i(\mathbf{q}_i) = \mathbf{D}_{n_i}^{-1}\mathbf{D}_{k_i}\mathbf{v}_i, \quad (\text{A.1})$$

donde  $\mathbf{f}_{c_i}(\dot{\mathbf{q}}_i) \in \mathbb{R}^3$  representa los terminos de fricción de Coulomb y  $\mathbf{D}_{n_i}$  y  $\mathbf{D}_{k_i} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  se definen más adelante. La inercia del rotor de los motores es incluida en la matriz  $\mathbf{H}_i(\mathbf{q}_i)$  para obtener un conjunto mínimo de parámetros. Los elementos de las matrices  $\mathbf{H}_1(\mathbf{q}_1)$ ,  $\mathbf{C}_1(\mathbf{q}_1, \dot{\mathbf{q}}_1)$ ,  $\mathbf{f}_{c_1}(\dot{\mathbf{q}}_1)$  y  $\mathbf{g}_1(\mathbf{q}_1)$  del modelo del brazo robot A465 *CRS Robotics* se muestran a continuación

$$\begin{aligned}
h_1(1, 1) &= \text{aux}_1 \cdot p_1 + \text{aux}_2 \cdot p_2 + \text{aux}_3 \cdot p_3 + \text{aux}_4 \cdot p_4 + \text{aux}_5 \cdot p_5 + \text{aux}_6 \cdot p_6 + \text{aux}_7 \cdot p_7 + p_8 \\
h_1(1, 2) &= 0 \\
h_1(1, 3) &= 0 \\
h_1(2, 1) &= 0 \\
h_1(2, 2) &= \frac{1}{2}p_1 + p_2 + 2s_3p_3 + p_4 + p_9 \\
h_1(2, 3) &= \frac{1}{2}p_1 + p_2 + s_3p_3 + p_4 + p_5 \\
h_1(3, 1) &= 0 \\
h_1(3, 2) &= \frac{1}{2}p_1 + p_2 + s_3p_3 + p_4 + p_5 \\
h_1(3, 3) &= \frac{1}{2}p_1 + p_2 + p_4 + p_{10} \\
c_1(1, 1) &= \text{aux}_8 \cdot p_3 + \text{aux}_9 \cdot p_5 - \frac{1}{2}\dot{q}_{12}\text{sen}(2q_{12})p_6 + \frac{1}{2}\dot{q}_{12}\text{sen}(2q_{12})p_7 \\
c_1(1, 2) &= \dot{q}_{11} \cos(2q_{12} + q_{13})p_3 + \frac{1}{2}\dot{q}_{11}\text{sen}(2q_{12} + 2q_{13})p_5 - \frac{1}{2}\dot{q}_{11}\text{sen}(q_{12})p_6 + \frac{1}{2}\dot{q}_{11}\text{sen}(2q_{12})p_7 \\
c_1(1, 3) &= \text{aux}_{10} \cdot p_3 + \frac{1}{2}\dot{q}_{11}\text{sen}(2q_{12} + 2q_{13})p_5 \\
c_1(2, 1) &= -\dot{q}_{11} \cos(2q_{12} + q_{13})p_3 - \frac{1}{2}\dot{q}_{11}\text{sen}(2q_{12} + 2q_{13})p_5 + \frac{1}{2}\dot{q}_{11}\text{sen}(2q_{12})p_6 \\
&\quad - \frac{1}{2}\dot{q}_{11}\text{sen}(2q_{12})p_7 \\
c_1(2, 2) &= \dot{q}_{13}c_3p_3 \\
c_1(2, 3) &= (\dot{q}_{12}c_3 + \dot{q}_{13}c_3)p_3 \\
c_1(3, 1) &= -\left(\frac{1}{2}\dot{q}_{11}c_3 + \frac{1}{2}\dot{q}_{11} \cos(2q_{12} + q_{13})\right)p_3 - \frac{1}{2}\dot{q}_{11}\text{sen}(2q_{12} + 2q_{13})p_5 \\
c_1(3, 2) &= -\dot{q}_{12}c_3p_3 \\
c_1(3, 3) &= 0 \\
f_{c1}(1) &= p_{14}\text{sgn}(\dot{q}_{11}) \\
f_{c1}(2) &= p_{15}\text{sgn}(\dot{q}_{12}) \\
f_{c1}(3) &= p_{16}\text{sgn}(\dot{q}_{13}) \\
g_1(1) &= 0 \\
g_1(2) &= p_{17}c_2 + p_{21}\text{sen}(q_{12} + q_{13}) \\
g_1(3) &= p_{18}\text{sen}(q_{12} + q_{13}).
\end{aligned}$$

Además,  $\mathbf{D}_1 = \text{matriz diag} \{ p_{11} \ p_{12} \ p_{13} \}$ .  $\mathbf{v}_1^T = \{ v_{11} \ v_{12} \ v_{13} \}$  es el voltaje de entrada. Los datos de la dinámica de los motores son  $\mathbf{D}_{n1} = \text{matriz diag} \left\{ \frac{1}{r_{11}^2} \ \frac{1}{r_{12}^2} \ \frac{1}{r_{13}^2} \right\}$  y  $\mathbf{D}_{k1} = \text{matriz diag} \left\{ \frac{K_{a11}}{R_{a11}r_{11}} \ \frac{K_{a12}}{R_{a12}r_{12}} \ \frac{K_{a13}}{R_{a13}r_{13}} \right\}$ .  $r$  es el radio de engranaje,  $K_a$  es la constante de torque y  $R_a$  es la resistencia de armadura. Los valores asociados son  $r_{11} = r_{12} = r_{13} = 100$ ,  $K_{a11} = K_{a12} = K_{a13} = 0.1424 \text{ Nm/A}$  y  $R_{a11} = R_{a12} = R_{a13} = 0.84 \ \Omega$ .

Los elementos de las matrices correspondientes al brazo robot A255 son

$$\begin{aligned}
h_2(1, 1) &= \cos(2q_{22})\bar{p}_1 + (2c_5 + 2c_6)\bar{p}_2 + \bar{p}_3 \\
h_2(1, 2) &= 0 \\
h_2(1, 3) &= 0 \\
h_2(2, 1) &= 0 \\
h_2(2, 2) &= \bar{p}_4 \\
h_2(2, 3) &= \cos(q_{22} - q_{23})\bar{p}_5 \\
h_2(3, 1) &= 0 \\
h_2(3, 2) &= \cos(q_{22} - q_{23})\bar{p}_5 \\
h_2(3, 3) &= \bar{p}_6 \\
c_2(1, 1) &= -\dot{q}_{22}\text{sen}(2q_{22})\bar{p}_1 - (s_5\dot{q}_{22} + s_6\dot{q}_{23})\bar{p}_2 \\
c_2(1, 2) &= -\dot{q}_{21}\text{sen}(2q_{22})\bar{p}_1 - \dot{q}_{21}s_5\bar{p}_2 \\
c_2(1, 3) &= -s_6\dot{q}_{21}\bar{p}_2 \\
c_2(2, 1) &= \dot{q}_{21}\text{sen}(2q_{22})\bar{p}_1 + \dot{q}_{21}s_5\bar{p}_2 \\
c_2(2, 2) &= 0 \\
c_2(2, 3) &= \text{sen}(q_{22} - q_{23})\dot{q}_{23}\bar{p}_5 \\
c_2(3, 1) &= s_6\dot{q}_{21}\bar{p}_2 \\
c_2(3, 2) &= -\text{sen}(q_{22} - q_{23})\dot{q}_{22}\bar{p}_5 \\
c_2(3, 3) &= 0 \\
f_{c2}(1) &= \bar{p}_{10}\text{sgn}(\dot{q}_{21}) \\
f_{c2}(2) &= \bar{p}_{11}\text{sgn}(\dot{q}_{22}) \\
f_{c2}(3) &= \bar{p}_{12}\text{sgn}(\dot{q}_{23}) \\
g_2(1) &= 0 \\
g_2(2) &= \bar{p}_{13}c_5 \\
g_2(3) &= \bar{p}_{14}c_6.
\end{aligned}$$

Para este manipulador se tiene  $\mathbf{D}_2 =$  matriz diag  $\{\bar{p}_7 \bar{p}_8 \bar{p}_9\}$ . El vector de voltaje de entrada está dado por  $\mathbf{v}_2^T = \{v_{21} \ v_{22} \ v_{23}\}$ . Los datos de la dinámica de los motores son  $\mathbf{D}_{n_2} =$  matriz diag  $\{\frac{1}{r_{21}^2} \ \frac{1}{r_{22}^2} \ \frac{1}{r_{23}^2}\}$  y  $\mathbf{D}_{k_2} =$  matriz diag  $\{\frac{K_{a21}}{R_{a21}r_{21}} \ \frac{K_{a22}}{R_{a22}r_{22}} \ \frac{K_{a23}}{R_{a23}r_{23}}\}$ . Con  $r_{21} = r_{22} = r_{23} = 72$ ,  $K_{a21} = K_{a22} = K_{a23} = 0.0657\text{Nm/A}$  y  $R_{a21} = R_{a22} = R_{a23} = 2.40\Omega$ . Nótese que en el modelo de ambos robots se seleccionaron los parámetros de una manera diferente para tener el menor conjunto de ellos. Sin embargo, se hacen las definiciones de acuerdo con los cálculos de las inercias de los eslabones. Los elementos del Jacobiano analítico  $\mathbf{J}_{a1}(\mathbf{q}_1)$  del brazo robot A465 están dados por

$$j_{a1}(1, 1) = -a_{12}s_1c_2 - (d_{13} + d_{14})s_1\text{sen}(q_{12} + q_{13}) \quad (\text{A.2})$$

$$j_{a1}(1, 2) = -a_{12}c_1s_2 + (d_{13} + d_{14})c_1 \cos(q_{12} + q_{13}) \quad (\text{A.3})$$

$$j_{a1}(1, 3) = (d_{13} + d_{14})c_1 \cos(q_{12} + q_{13}) \quad (\text{A.4})$$

$$j_{a1}(2, 1) = a_{12}c_1c_2 + (d_{13} + d_{14})c_1\text{sen}(q_{12} + q_{13}) \quad (\text{A.5})$$

$$j_{a1}(2, 2) = -a_{12}s_1s_2 + (d_{13} + d_{14})s_1 \cos(q_{12} + q_{13}) \quad (\text{A.6})$$

$$j_{a1}(2, 3) = (d_{13} + d_{14})s_1 \cos(q_{12} + q_{13}) \quad (\text{A.7})$$

$$j_{a1}(3, 1) = 0 \quad (\text{A.8})$$

$$j_{a1}(3, 2) = a_{12}c_2 + (d_{13} + d_{14})\text{sen}(q_{12} + q_{13}) \quad (\text{A.9})$$

$$j_{a1}(3, 3) = (d_{13} + d_{14})\text{sen}(q_{12} + q_{13}), \quad (\text{A.10})$$

y de la misma manera los elementos del Jacobiano  $\mathbf{J}_{a2}(\mathbf{q}_2)$  para el A255 son:

$$j_{a2}(1, 1) = -a_{22}s_4c_5 - a_{23}s_4c_6 - d_{24}s_4 \quad (\text{A.11})$$

$$j_{a2}(1, 2) = -a_{22}c_4s_5 \quad (\text{A.12})$$

$$j_{a2}(1, 3) = -a_{23}c_4s_6 \quad (\text{A.13})$$

$$j_{a2}(2, 1) = a_{22}c_4c_5 + a_{23}c_4c_6 + d_{24}c_4 \quad (\text{A.14})$$

$$j_{a2}(2, 2) = -a_{22}s_4s_5 \quad (\text{A.15})$$

$$j_{a2}(2, 3) = -a_{23}s_4s_6 \quad (\text{A.16})$$

$$j_{a2}(3, 1) = 0 \quad (\text{A.17})$$

$$j_{a2}(3, 2) = a_{22}c_5 \quad (\text{A.18})$$

$$j_{a2}(3, 3) = a_{23}c_6. \quad (\text{A.19})$$

La matriz Jacobiana de restricciones  $\mathbf{J}_{\varphi_1}(\mathbf{q}_1)$  del brazo robot A465 es:

$$\mathbf{J}_{\varphi_1}^T(\mathbf{q}_1) = \begin{bmatrix} -a_{12}s_1c_2 - (d_{13} + d_{14})s_1\text{sen}(q_{12} + q_{13}) \\ -a_{12}c_1s_2 + (d_{13} + d_{14})c_1 \cos(q_{12} + q_{13}) \\ (d_{13} + d_{14})c_1 \cos(q_{12} + q_{13}) \end{bmatrix}, \quad (\text{A.20})$$

y la matriz Jacobiana de restricciones  $\mathbf{J}_{\varphi_2}(\mathbf{q}_2)$  del brazo robot A255 es:

$$\mathbf{J}_{\varphi_2}^T(\mathbf{q}_2) = \begin{bmatrix} -a_{22}s_4c_5 - a_{23}s_4c_6 - d_{24}s_4 \\ -a_{22}c_4s_5 \\ -a_{23}c_4s_6 \end{bmatrix}. \quad (\text{A.21})$$

Nótese que, por simplicidad,  $\mathbf{J}_{a2}(\mathbf{q}_2)$  y  $\mathbf{J}_{\varphi_2}(\mathbf{q}_2)$  son expresados con respecto al sistema inercial fijo en la base del brazo robot A255.

Las Tablas A.1 y A.2 muestran los valores de los parámetros, y las Tablas A.3 y A.4 las variables auxiliares para ambos manipuladores. Los parámetros para las diferentes matrices Jacobianas son mostradas en la Tabla A.5.

$p_1 = 0.0055\text{kg m}^2$	$p_2 = 0.0080\text{kg m}^2$	$p_3 = 0.0024\text{kg m}^2$	$p_4 = 0.0118\text{kg m}^2$	$p_5 = 0.0041\text{kg m}^2$
$p_6 = 0.0009\text{kg m}^2$	$p_7 = 0.0007\text{kg m}^2$	$p_8 = 2.0007\text{kg m}^2$	$p_9 = 11.800\text{kg m}^2$	$p_{10} = 2.8000\text{kg m}^2$
$p_{11} = 25.000\text{N m s}$	$p_{12} = 35.000\text{N m s}$	$p_{13} = 36.000\text{N m s}$	$p_{14} = 0.2000\text{N m}$	$p_{15} = 2.5000\text{N m}$
$p_{16} = 2.5000\text{N m}$	$p_{17} = 22.000\text{N m}$	$p_{18} = 11.000\text{N m}$		

Tabla A.1: Parámetros físicos del brazo robot A465.

$\bar{p}_1 = 0.2500\text{kg m}^2$	$\bar{p}_2 = 0.0500\text{kg m}^2$	$\bar{p}_3 = 0.5750\text{kg m}^2$	$\bar{p}_4 = 1.1000\text{kg m}^2$	$\bar{p}_5 = 0.0300\text{kg m}^2$
$\bar{p}_6 = 0.5700\text{kg m}^2$	$\bar{p}_7 = 3.2000\text{N m s}$	$\bar{p}_8 = 1.8000\text{N m s}$	$\bar{p}_9 = 1.2000\text{N m s}$	$\bar{p}_{10} = 0.0150\text{N m}$
$\bar{p}_{11} = 0.8000\text{N m}$	$\bar{p}_{12} = 0.7000\text{N m}$	$\bar{p}_{13} = 0.0001\text{N m}$	$\bar{p}_{14} = 1.8000\text{N m}$	

Tabla A.2: Parámetros físicos del brazo robot A255.

$s_1 = \text{sen}(q_{11})$	$c_1 = \text{cos}(q_{11})$
$s_2 = \text{sen}(q_{12})$	$c_2 = \text{cos}(q_{12})$
$s_3 = \text{sen}(q_{13})$	$c_3 = \text{cos}(q_{13})$
$s_4 = \text{sen}(q_{21})$	$c_4 = \text{cos}(q_{21})$
$s_5 = \text{sen}(q_{22})$	$c_5 = \text{cos}(q_{22})$
$s_6 = \text{sen}(q_{23})$	$c_6 = \text{cos}(q_{23})$

Tabla A.3: Definiciones auxiliares.

$\text{aux}_1 = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cos(2q_{12} + 2q_{13})$
$\text{aux}_2 = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \cos(2q_{12} + 2q_{13})$
$\text{aux}_3 = s_3 + \text{sen}(2q_{12} + q_{13})$
$\text{aux}_4 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(2q_{12} + 2q_{13})$
$\text{aux}_5 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(2q_{12} + 2q_{13})$
$\text{aux}_6 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(2q_{12})$
$\text{aux}_7 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(2q_{12})$
$\text{aux}_8 = \left[ \dot{q}_{12} \cos(2q_{12} + q_{13}) + \frac{1}{2} \dot{q}_{13} c_3 + \frac{1}{2} \dot{q}_{13} \cos(2q_{12} + q_{13}) \right] \frac{1}{\text{seg}}$
$\text{aux}_9 = \left[ \frac{1}{2} \dot{q}_{13} \text{sen}(2q_{12} + 2q_{13}) + \frac{1}{2} \dot{q}_{12} \text{sen}(2q_{12} + 2q_{13}) \right] \frac{1}{\text{seg}}$
$\text{aux}_{10} = \left[ \frac{1}{2} \dot{q}_{11} c_3 + \frac{1}{2} \dot{q}_{11} \cos(2q_{12} + q_{13}) \right] \frac{1}{\text{seg}}$

Tabla A.4: Variables auxiliares para el modelo del brazo robot A465.

Brazo robot A465	Brazo robot A255
$d_{11} = 0.330 \text{ [m]}$	$d_{21} = 0.381 \text{ [m]}$
$a_{12} = 0.305 \text{ [m]}$	$a_{22} = 0.254 \text{ [m]}$
$d_{13} = 0.330 \text{ [m]}$	$a_{23} = 0.254 \text{ [m]}$
$d_{14} = 0.208 \text{ [m]}$	$d_{24} = 0.183 \text{ [m]}$

Tabla A.5: Datos de los diferentes matrices Jacobianas.





# Apéndice B

## Pruebas de estabilidad

### B.1 Prueba del Lema 6.2.1

En esta sección se demostrará el Lema 6.2.1.

Primero, se analizará el comportamiento de los errores de seguimiento  $\tilde{\mathbf{q}}$  y  $\dot{\tilde{\mathbf{q}}}$ . Claramente si  $\mathbf{x}$  está acotado, entonces  $\mathbf{s}$  y  $\mathbf{r}$  también están acotados. Nótese que

$$\mathbf{r} = \dot{\mathbf{z}} + \Lambda \mathbf{z}. \quad (\text{B.1})$$

El lado izquierdo de la ecuación (B.1) está acotado de acuerdo a la suposición principal sobre  $\mathbf{x}$ , mientras el lado derecho de (B.1) representa un filtro lineal estable, por lo que  $\mathbf{z}$  y  $\dot{\mathbf{z}}$  deben ser acotados. Además, si  $\mathbf{x}$  tiende a cero, entonces  $\mathbf{z}$  y  $\dot{\mathbf{z}}$  también tienden a cero. Por otra parte,  $\mathbf{s}$  puede describirse como

$$\dot{\tilde{\mathbf{q}}} + \Lambda \tilde{\mathbf{q}} = \mathbf{s} + \Lambda \mathbf{z}. \quad (\text{B.2})$$

Claramente si  $\mathbf{x}$  está acotado y tiende a cero, entonces el lado derecho de la ecuación (B.2) está acotado también, mientras el lado izquierdo de (B.2) es un filtro lineal estable, por lo que  $\tilde{\mathbf{q}}$  y  $\dot{\tilde{\mathbf{q}}}$  deben estar acotados y tender a cero también.

Para mostrar que los errores tienden a cero cuando  $\mathbf{x}$  lo hace también. Para ello, se empleará el siguiente enfoque. Si  $\mathbf{x} \equiv \mathbf{0}$ , entonces (6.5) se convierte en

$$0 = \dot{\tilde{\mathbf{q}}} + \Lambda \tilde{\mathbf{q}}, \quad (\text{B.3})$$

puesto que  $\mathbf{s}$  y  $\mathbf{r}$  son igual a cero. Supóngase ahora que  $\mathbf{q} \equiv \mathbf{q}_d$ , en otras palabras  $\tilde{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$ , entonces, la ecuación (B.3) se transforma en

$$\dot{\tilde{\mathbf{q}}} + \Lambda \tilde{\mathbf{q}} = \dot{\tilde{\mathbf{q}}} = 0. \quad (\text{B.4})$$

Esto muestra que si  $\|\tilde{\mathbf{q}}\|$  tiende a cero entonces  $\|\dot{\tilde{\mathbf{q}}}\|$  también tenderá a cero. En otras palabras, probando que  $\tilde{\mathbf{q}}$  tenderá a cero, se puede asegurar que  $\dot{\tilde{\mathbf{q}}}$  también lo hará.

Existe un valor positivo  $\eta$  lo suficientemente pequeño tal que si

$$\|\tilde{\mathbf{q}}\| \leq \eta. \quad (\text{B.5})$$

Para probar que  $\tilde{\mathbf{q}}$  tiende a cero, se requiere encontrar una ecuación dinámica que describa su comportamiento. Esta ecuación puede ser formada de la siguiente manera; de  $\mathbf{s}$  en (6.5) se tiene

$$\tilde{\mathbf{q}}^T \mathbf{s} = \tilde{\mathbf{q}}^T \dot{\tilde{\mathbf{q}}} + \tilde{\mathbf{q}}^T \Lambda \tilde{\mathbf{q}} - \tilde{\mathbf{q}}^T \Lambda \mathbf{z}. \quad (\text{B.6})$$

En vista del hecho de que

$$\tilde{\mathbf{q}}^T \dot{\tilde{\mathbf{q}}} = \|\tilde{\mathbf{q}}\| \frac{d}{dt} \|\tilde{\mathbf{q}}\|,$$

se puede reescribir (B.6) como

$$\|\tilde{\mathbf{q}}\| \frac{d}{dt} \|\tilde{\mathbf{q}}\| = -\tilde{\mathbf{q}}^T \Lambda \tilde{\mathbf{q}} + \tilde{\mathbf{q}}^T \Lambda \mathbf{z} + \tilde{\mathbf{q}}^T \mathbf{s}. \quad (\text{B.7})$$

Si  $\Lambda \triangleq k\mathbf{I}$ , entonces

$$\|\tilde{\mathbf{q}}\| \frac{d}{dt} \|\tilde{\mathbf{q}}\| = -k\|\tilde{\mathbf{q}}\|^2 + k\tilde{\mathbf{q}}^T \mathbf{z} + \tilde{\mathbf{q}}^T \mathbf{s}. \quad (\text{B.8})$$

Sacando normas en (B.8) se tiene

$$\|\tilde{\mathbf{q}}\| \frac{d}{dt} \|\tilde{\mathbf{q}}\| \leq \|\tilde{\mathbf{q}}\| \|\mathbf{s}\| - k\|\tilde{\mathbf{q}}\|^2 + k\|\tilde{\mathbf{q}}\| \|\mathbf{z}\|, \quad (\text{B.9})$$

dividiendo entre  $\|\tilde{\mathbf{q}}\|$  se obtiene

$$\frac{d}{dt} \|\tilde{\mathbf{q}}\| \leq \|\mathbf{s}\| - k\|\tilde{\mathbf{q}}\| + k\|\mathbf{z}\| \quad (\text{B.10})$$

La ecuación (B.10) es válida solamente si (B.5) se satisface. Se debe encontrar entonces una cota  $x_{\max}$  tal que (B.5) se cumpla. Para garantizar esto,  $x_{\max}$  debe aparecer en (B.10) explícitamente. Por supuesto, si  $\|\mathbf{x}\| \leq x_{\max}$ , se tiene

$$\|\mathbf{x}\|^2 = \|\mathbf{s}\|^2 + \|\mathbf{r}\|^2 \leq x_{\max}^2, \quad (\text{B.11})$$

con  $\mathbf{r} = \dot{\mathbf{z}} + \Lambda \mathbf{z}$ . Puesto que en (B.10) se tiene  $\mathbf{z}$  y no  $\mathbf{r}$ , se debe notar que cada elemento de  $\mathbf{r}$  está dado por  $r_j = \dot{z}_j + kz_j$ , para  $j = 1, \dots, n$ . Esto es un filtro lineal estable con ganancia  $\frac{1}{k}$ , *i. e.* se tiene  $|z_j| \leq \frac{1}{k} \max |r_j| \forall t$ . De esta manera se puede mostrar que

$$\|\mathbf{z}\| \leq \frac{\sqrt{n}}{k} x_{\max}, \quad (\text{B.12})$$

lo que permite reescribir (B.10) como

$$\frac{d}{dt} \|\tilde{\mathbf{q}}\| \leq -k\|\tilde{\mathbf{q}}\| + \sigma, \quad (\text{B.13})$$

con

$$\sigma \triangleq (1 + \sqrt{n}) x_{\max}. \quad (\text{B.14})$$

Del Lema de Comparación (Khalil 2002), se tiene

$$\|\tilde{\mathbf{q}}(t)\| \leq \frac{\sigma}{k} + e^{-kt} \left( \|\tilde{\mathbf{q}}(0)\| - \frac{\sigma}{k} \right), \quad (\text{B.15})$$

para todo tiempo. Por tanto, (B.5) se cumple si

$$\|\tilde{\mathbf{q}}(0)\| \leq \frac{\sigma}{k} = \frac{(1 + \sqrt{n}) x_{\max}}{k} \leq \eta. \quad (\text{B.16})$$

La ecuación (B.5) puede ser satisfecha si

$$x_{\max} \leq \frac{\eta k}{(1 + \sqrt{n})}. \quad (\text{B.17})$$

Esto significa que la cota de  $x_{\max}$  debe ser suficientemente pequeña para garantizar (B.5). En este caso, si  $\|\mathbf{x}\|$  tiende a cero, es claro de (B.10) que  $\|\tilde{\mathbf{q}}\|$  tenderá a cero también, lo que conlleva a la convergencia a cero de  $\|\dot{\tilde{\mathbf{q}}}\|$ .

## B.2 Prueba del Teorema 6.2.1

El Teorema 6.2.1 puede ser probado como sigue. Considérese la función candidata de Lyapunov (6.21), donde  $\mathbf{x}(0)$  pertenece a la región (6.24). Si  $\dot{V}(\mathbf{x}) \leq 0$  con  $\dot{V}(\mathbf{x}) = 0$  si y sólo si  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ , entonces el máximo valor que la norma de  $\mathbf{x}$  puede tener está dado por (6.33). A continuación se reescribe (6.21) como

$$V(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \mathbf{s}^T \mathbf{H}(\mathbf{q}) \mathbf{s} + \frac{1}{2} \mathbf{r}^T \mathbf{H}(\mathbf{q}) \mathbf{r}. \quad (\text{B.18})$$

Entonces, la derivada de (B.18) a lo largo de (6.13) y (6.19) está dada por

$$\begin{aligned} \dot{V}(\mathbf{x}) = & \frac{1}{2} \mathbf{s}^T \dot{\mathbf{H}}(\mathbf{q}) \mathbf{s} + \frac{1}{2} \mathbf{r}^T \dot{\mathbf{H}}(\mathbf{q}) \mathbf{r} - \mathbf{s}^T \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \mathbf{s} - \mathbf{s}^T \mathbf{K}_{\text{DR}} \mathbf{s} \\ & + \mathbf{s}^T \mathbf{K}_{\text{R}} \mathbf{r} - \mathbf{s}^T \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}_{\text{r}}) \mathbf{s} - \mathbf{r}^T \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \mathbf{r} - \mathbf{r}^T \mathbf{H}_{\text{rd}} \mathbf{r} \\ & + \mathbf{r}^T \mathbf{C}(\mathbf{q}, \mathbf{s} + \dot{\mathbf{q}}_{\text{r}}) \mathbf{r} - \mathbf{r}^T \mathbf{C}(\mathbf{q}, \mathbf{s} + 2\dot{\mathbf{q}}_{\text{r}}) \mathbf{s} - \mathbf{r}^T \mathbf{K}_{\text{DR}} \mathbf{s}. \end{aligned} \quad (\text{B.19})$$

Para simplificar (B.19) se debe tomar en cuenta que  $\mathbf{s}^T \mathbf{K}_{\text{R}} \mathbf{r} - \mathbf{r}^T \mathbf{K}_{\text{DR}} \mathbf{s} = -\mathbf{s}^T \mathbf{D} \mathbf{r}$ . Entonces, se tiene

$$\begin{aligned} \dot{V}(\mathbf{x}) \leq & - \mathbf{s}^T \mathbf{K}_{\text{R}} \mathbf{s} - \mathbf{r}^T \mathbf{H}_{\text{rd}} \mathbf{r} \\ & - \mathbf{s}^T \mathbf{D} \mathbf{r} - \mathbf{r}^T \mathbf{C}(\mathbf{q}, \mathbf{s} + 2\dot{\mathbf{q}}_{\text{r}}) \mathbf{s} \\ & - \mathbf{s}^T \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}_{\text{r}}) \mathbf{s} + \mathbf{r}^T \mathbf{C}(\mathbf{q}, \mathbf{s} + \dot{\mathbf{q}}_{\text{r}}) \mathbf{r}, \end{aligned} \quad (\text{B.20})$$

donde se ha tomado en cuenta la Propiedad 3.2.3. Puesto que interesa el comportamiento de  $\dot{V}$  sólo en la región (6.24), se tiene

$$\begin{aligned} \dot{V}(\mathbf{x}) \leq & - \lambda_{\min}(\mathbf{K}_{\text{R}}) \|\mathbf{s}\|^2 - \lambda_{\min}(\mathbf{H}_{\text{rd}}) \|\mathbf{r}\|^2 \\ & + \mu_1 \|\mathbf{s}\|^2 + \mu_2 \|\mathbf{r}\|^2 \\ & + (\lambda_{\text{D}} + \mu_3) \|\mathbf{s}\| \|\mathbf{r}\|. \end{aligned} \quad (\text{B.21})$$

Tomando las condiciones (6.27)–(6.28) en cuenta, se tiene

$$\begin{aligned} & - (\mu_1 + 1 + \delta) \|\mathbf{s}\|^2 + (\lambda_D + \mu_3) \|\mathbf{s}\| \|\mathbf{r}\| - \left( \lambda_h \left( \frac{\lambda_{\max}(\mathbf{K}_R) + \omega}{\lambda_h} \right) - \lambda_{\max}(\mathbf{K}_R) \right) \|\mathbf{r}\|^2 \leq \\ & - \delta \|\mathbf{s}\|^2 - \delta \|\mathbf{r}\|^2, \end{aligned}$$

porque  $\omega = \mu_2 + \frac{1}{4}(\lambda_D + \mu_3)^2 + \delta$ . De este modo (B.21) se convierte en

$$\dot{V}(\mathbf{x}) \leq - \delta \|\mathbf{s}\|^2 - \delta \|\mathbf{r}\|^2 \quad (\text{B.22})$$

o bien

$$\dot{V}(\mathbf{x}) \leq - \delta \|\mathbf{x}\|^2. \quad (\text{B.23})$$

Entonces, en  $\mathcal{S}_a$ ,  $\dot{V}(\mathbf{x}) \leq 0 \forall t \geq 0$ , y  $\dot{V}(\mathbf{x}) = 0$  solamente si  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ . Por tanto,  $\mathbf{x}$  tiende exponencialmente a cero y está acotado por  $x_{\max}$ . De la definición (6.7) se tiene directamente

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{z} = \mathbf{0} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \dot{\mathbf{z}} = \mathbf{0}.$$

y de (6.5)

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{\tilde{\mathbf{q}}} = \mathbf{0} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{\mathbf{q}} = \mathbf{0}.$$

### B.3 Prueba del Lema 6.3.1

Se demostrará el Lema 6.3.1 por partes.

- a) Para iniciar se mostrará que  $\Delta \mathbf{p}_i$  y  $\Delta \dot{\mathbf{p}}_i$  están acotados para todo tiempo con  $i = 1, \dots, l$ . Hay que hacer notar que esto se hace con el fin de formalizar la demostración, puesto que estos dos errores están siempre acotados en vista del hecho de que  $\mathbf{p}_i$  y  $\mathbf{p}_{di}$  son cero para las restricciones real y deseada. De la ecuación (6.39) se tiene

$$\mathbf{s}_i = \mathbf{Q}_i(\mathbf{q}_i) (\dot{\tilde{\mathbf{q}}}_i + \Lambda_i \tilde{\mathbf{q}} - \Lambda_i \mathbf{z}_i) + \mathbf{J}_{\varphi_i}^+(\mathbf{q}_i) (\Delta \dot{\mathbf{p}}_i + \beta_i \Delta \mathbf{p}_i - \boldsymbol{\xi}_i \Delta \mathbf{F}_i). \quad (\text{B.24})$$

Multiplicando ambos lados de (B.24) por  $\mathbf{J}_{\varphi_i}(\mathbf{q}_i)$  se tiene

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_{\varphi_i}(\mathbf{q}_i) \mathbf{s}_i &= \underbrace{\mathbf{J}_{\varphi_i}(\mathbf{q}_i) \mathbf{Q}_i(\mathbf{q}_i)}_{\mathbf{0}} (\dot{\tilde{\mathbf{q}}}_i + \Lambda_i \tilde{\mathbf{q}} - \Lambda_i \mathbf{z}_i) \\ &\quad + \underbrace{\mathbf{J}_{\varphi_i}(\mathbf{q}_i) \mathbf{J}_{\varphi_i}^+(\mathbf{q}_i)}_{\mathbf{I}} (\Delta \dot{\mathbf{p}}_i + \beta_i \Delta \mathbf{p}_i - \boldsymbol{\xi}_i \Delta \mathbf{F}_i) \\ &= \Delta \dot{\mathbf{p}}_i + \beta_i \Delta \mathbf{p}_i - \boldsymbol{\xi}_i \Delta \mathbf{F}_i, \end{aligned} \quad (\text{B.25})$$

o bien

$$\Delta \dot{\mathbf{p}}_i + \beta_i \Delta \mathbf{p}_i = \mathbf{J}_{\varphi_i}(\mathbf{q}_i) \mathbf{s}_i + \boldsymbol{\xi}_i \Delta \mathbf{F}_i. \quad (\text{B.26})$$

El lado derecho de la ecuación (B.26) está acotado y tiende a cero bajo la suposición de que  $\mathbf{x}_i$  está acotado y tiende a cero. Puesto que el lado izquierdo de la ecuación (B.26) es un filtro lineal estable, por lo que  $\Delta \mathbf{p}_i$  como  $\Delta \dot{\mathbf{p}}_i$  deben estar acotados y tender a cero.

- b) El siguiente paso es analizar el comportamiento de los errores de seguimiento  $\tilde{\mathbf{q}}_i$  y  $\dot{\tilde{\mathbf{q}}}_i$ . Supóngase primero que  $\mathbf{x}_i$  está solamente acotado. De acuerdo con la ecuación (6.37), tanto  $\mathbf{s}_{pi}$  como  $\mathbf{s}_{fi}$  están acotados en este caso, puesto que estos dos son vectores ortogonales. Nótese que  $\mathbf{s}_{pi}$  puede ser escrito como

$$\begin{aligned} \mathbf{s}_{pi} &= \mathbf{Q}_i(\mathbf{q}_i) (\dot{\tilde{\mathbf{q}}}_i + \Lambda_i \tilde{\mathbf{q}}_i - \Lambda_i \mathbf{z}_i) \\ &= (\mathbf{I} - \mathbf{J}_{\varphi_i}^+ \mathbf{J}_{\varphi_i}) (\dot{\tilde{\mathbf{q}}}_i + \Lambda_i \tilde{\mathbf{q}}_i - \Lambda_i \mathbf{z}_i), \end{aligned} \quad (\text{B.27})$$

de acuerdo con la definición de  $\mathbf{Q}_i(\mathbf{q}_i)$ . La ecuación (B.27) puede ser escrita como

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_i (\dot{\tilde{\mathbf{q}}}_i + \Lambda_i \tilde{\mathbf{q}}_i - \Lambda_i \mathbf{z}_i) &= (\mathbf{I} - \mathbf{J}_{\varphi_i}^+ \mathbf{J}_{\varphi_i}) (\dot{\tilde{\mathbf{q}}}_i + \Lambda_i \tilde{\mathbf{q}}_i - \Lambda_i \mathbf{z}_i) \\ &= \dot{\tilde{\mathbf{q}}}_i + \Lambda_i \tilde{\mathbf{q}}_i - \Lambda_i \mathbf{z}_i - \mathbf{J}_{\varphi_i}^+ \mathbf{J}_{\varphi_i} (\dot{\tilde{\mathbf{q}}}_i + \Lambda_i \tilde{\mathbf{q}}_i - \Lambda_i \mathbf{z}_i) \\ &= \dot{\tilde{\mathbf{q}}}_i + \Lambda_i \tilde{\mathbf{q}}_i - \Lambda_i \mathbf{z}_i - \mathbf{J}_{\varphi_i}^+ \mathbf{J}_{\varphi_i} (\dot{\tilde{\mathbf{q}}}_i + \Lambda_i \tilde{\mathbf{q}}_i) + \mathbf{J}_{\varphi_i}^+ \mathbf{J}_{\varphi_i} \Lambda_i \mathbf{z}_i, \end{aligned}$$

por lo tanto

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{\mathbf{q}}}_i + \Lambda_i \tilde{\mathbf{q}}_i &= \underbrace{\Lambda_i \mathbf{z}_i - \mathbf{J}_{\varphi_i}^+ \mathbf{J}_{\varphi_i} \Lambda_i \mathbf{z}_i}_{\text{acotado}} + \underbrace{\mathbf{Q}_i(\mathbf{q}_i) (\dot{\tilde{\mathbf{q}}}_i + \Lambda_i \tilde{\mathbf{q}}_i - \Lambda_i \mathbf{z}_i)}_{\text{acotado}} \\ &\quad + \underbrace{\mathbf{J}_{\varphi_i}^+ \mathbf{J}_{\varphi_i} (\dot{\tilde{\mathbf{q}}}_i + \Lambda_i \tilde{\mathbf{q}}_i)}_{\text{¿acotado?}}. \end{aligned} \quad (\text{B.28})$$

Los primeros dos términos del lado derecho de la ecuación (B.28) están acotados, considerando que se está analizando el caso donde  $\mathbf{x}$  en (6.64) está acotado. Esto se deduce de las ecuaciones (4.2) (cota de  $\mathbf{J}_{\varphi_i}^+$ ) y (4.3) (cota de  $\mathbf{J}_{\varphi_i}$ ) de la Suposición 4.2.12, de (6.45) y (6.64) (cota de  $\mathbf{z}_i$ ), y de la ecuación (B.27) (cota de  $\mathbf{Q}_i(\mathbf{q}_i) (\dot{\tilde{\mathbf{q}}}_i + \Lambda_i \tilde{\mathbf{q}}_i - \Lambda_i \mathbf{z}_i)$ ). Es claro que si el tercer término del lado derecho de la ecuación está acotado, entonces  $\tilde{\mathbf{q}}_i$  y  $\dot{\tilde{\mathbf{q}}}_i$  deben estar acotados puesto que el lado izquierdo de (B.28) representa un filtro lineal estable. Cabe notar que

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_{\varphi_i} \dot{\tilde{\mathbf{q}}}_i &= \mathbf{J}_{\varphi_i} (\dot{\mathbf{q}}_i - \dot{\mathbf{q}}_{di}) \\ &= \mathbf{J}_{\varphi_i} \dot{\mathbf{q}}_i - \mathbf{J}_{\varphi_i} \dot{\mathbf{q}}_{di} \end{aligned} \quad (\text{B.29})$$

sumando y restando el término  $\mathbf{J}_{\varphi_{di}} \dot{\mathbf{q}}_{di}$  a (B.29) se obtiene

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_{\varphi_i} \dot{\tilde{\mathbf{q}}}_i &= \underbrace{\mathbf{J}_{\varphi_i} \dot{\mathbf{q}}_i}_{\dot{\mathbf{p}}_i} - \mathbf{J}_{\varphi_i} \dot{\mathbf{q}}_{di} + \mathbf{J}_{\varphi_{di}} \dot{\mathbf{q}}_{di} - \underbrace{\mathbf{J}_{\varphi_{di}} \dot{\mathbf{q}}_{di}}_{\dot{\mathbf{p}}_{di}} \\ &= \dot{\mathbf{p}}_i - \dot{\mathbf{p}}_{di} - \mathbf{J}_{\varphi_i} \dot{\mathbf{q}}_{di} - \mathbf{J}_{\varphi_{di}} \dot{\mathbf{q}}_{di} \\ &= \dot{\mathbf{p}}_i - \dot{\mathbf{p}}_{di} - (\mathbf{J}_{\varphi_i} - \mathbf{J}_{\varphi_{di}}) \dot{\mathbf{q}}_{di} \end{aligned} \quad (\text{B.30})$$

Por lo tanto (B.30) está acotado, con  $\mathbf{J}_{\varphi_{di}} = \mathbf{J}_{\varphi_i}(\mathbf{q}_{di})$  acotado. Esto es en vista del hecho de que las articulaciones se consideran de revolución. De este modo, el lado izquierdo de (B.28) puede no estar acotado si

$$\mathbf{J}_{\varphi_i}^+ \mathbf{J}_{\varphi_i} \Lambda_i \tilde{\mathbf{q}}_i = \mathbf{J}_{\varphi_i}^+ \mathbf{J}_{\varphi_i} \Lambda_i (\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_{di})$$

no está acotado. Es claro que este término estará acotado si  $\mathbf{q}_i$  lo está. Puesto que de la Suposición 4.2.11,  $\mathbf{q}_i$  debe satisfacer la restricción  $\varphi_i(\mathbf{q}_i) = \mathbf{0}$ , y además se asumió que ningún robot es redundante, la restricción puede ser satisfecha solamente por un vector finito acotado  $\mathbf{q}_i$ . Entonces se puede concluir, de (B.28), que tanto  $\tilde{\mathbf{q}}_i$  y  $\dot{\tilde{\mathbf{q}}}_i$  permanecen acotados mientras el estado  $\mathbf{x}_i$  lo esté.

Para mostrar que los errores tienden a cero cuando  $\mathbf{x}_i$  lo hace también. Para ello, se empleará el siguiente enfoque. Si  $\mathbf{x}_i \equiv \mathbf{0}$ , entonces (6.37) se convierte en

$$\mathbf{Q}_i(\mathbf{q}_i) (\dot{\tilde{\mathbf{q}}}_i + \Lambda_i \tilde{\mathbf{q}}_i) + \mathbf{J}_{\varphi_i}^+(\mathbf{q}_i) (\Delta \dot{\mathbf{p}}_i + \beta_i \Delta \mathbf{p}_i) = \mathbf{0}, \quad (\text{B.31})$$

puesto que los errores de seguimiento  $\mathbf{s}_i$  y de observación  $\mathbf{r}_i$  son igual a cero. Tomando en consideración las ecuaciones (3.10) de la Definición 3.2.4, y de (3.15) y (3.16) de la Definición 3.2.5; la ecuación (B.31) se puede escribir como

$$\mathbf{Q}_i(\mathbf{q}_i) (\dot{\tilde{\mathbf{q}}}_i + \Lambda_i \tilde{\mathbf{q}}_i) + \mathbf{J}_{\varphi_i}^+(\mathbf{q}_i) (\mathbf{J}_{\varphi_i}(\mathbf{q}_i) \dot{\mathbf{q}}_i - \mathbf{J}_{\varphi_i}(\mathbf{q}_{di}) \dot{\mathbf{q}}_{di} + \beta_i (\varphi_i(\mathbf{q}_i) - \varphi_i(\mathbf{q}_{di}))) = \mathbf{0} \quad (\text{B.32})$$

Supóngase ahora que  $\mathbf{q}_i \equiv \mathbf{q}_{di}$ , en otras palabras  $\tilde{\mathbf{q}}_i = \mathbf{0}$ , entonces, la ecuación (B.32) se transforma en

$$\mathbf{Q}_i(\mathbf{q}_i) \dot{\tilde{\mathbf{q}}}_i + \mathbf{J}_{\varphi_i}^+(\mathbf{q}_i) \mathbf{J}_{\varphi_i}(\mathbf{q}_i) \dot{\tilde{\mathbf{q}}}_i = \dot{\tilde{\mathbf{q}}}_i = \mathbf{0}. \quad (\text{B.33})$$

Esto muestra que si  $\|\tilde{\mathbf{q}}_i\|$  tiende a cero entonces  $\|\dot{\tilde{\mathbf{q}}}_i\|$  también tenderá a cero. En otras palabras, probando que  $\tilde{\mathbf{q}}_i$  tenderá a cero, se puede asegurar que  $\dot{\tilde{\mathbf{q}}}_i$  también lo hará. Para esto, se hace notar que, puesto que se utilizan restricciones holonómicas, la siguiente relación se cumple

$$\Delta \mathbf{p}_i = \varphi(\mathbf{q}_i) - \varphi(\mathbf{q}_{di}). \quad (\text{B.34})$$

Desarrollando la serie de Taylor alrededor de la trayectoria deseada  $\mathbf{q}_{di}$ , para  $\varphi(\mathbf{q}_i)$  se tiene

$$\varphi(\mathbf{q}_i) = \varphi(\mathbf{q}_{di}) + \left. \frac{\partial \varphi_i}{\partial \mathbf{q}_i} \right|_{\mathbf{q}_i = \mathbf{q}_{di}} (\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_{di}) + \text{t. o. s.} \quad (\text{B.35})$$

Por lo tanto, existe un valor positivo  $\eta_i$  lo suficientemente pequeño tal que si

$$\|\tilde{\mathbf{q}}_i\| \leq \eta_i, \quad (\text{B.36})$$

los términos de orden superior en (B.35) pueden ser despreciados, de tal forma que de (B.34) se tiene

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{p}_i &= \left. \frac{\partial \varphi_i}{\partial \mathbf{q}_i} \right|_{\mathbf{q}_i = \mathbf{q}_{di}} (\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_{di}) \\ &= \mathbf{J}_{\varphi_i}(\mathbf{q}_{di}) \tilde{\mathbf{q}}_i \end{aligned} \quad (\text{B.37})$$

es válida. La siguiente discusión se llevará a cabo asumiendo que (B.36) se satisface para todo tiempo. Para probar que  $\tilde{\mathbf{q}}_i$  tiende a cero, se requiere encontrar una ecuación dinámica que describa su comportamiento. Esta ecuación puede ser formada de la siguiente manera; de  $\mathbf{s}_{pi}$  en (6.37) se tiene

$$\begin{aligned} \mathbf{s}_{pi} &= \mathbf{Q}_i(\mathbf{q}_i) (\dot{\tilde{\mathbf{q}}}_i + \Lambda_i \tilde{\mathbf{q}}_i - \Lambda_i \mathbf{z}_i) \\ &= (\mathbf{I} - \underbrace{\mathbf{J}_{\varphi_i}^+(\mathbf{q}_i) \mathbf{J}_{\varphi_i}(\mathbf{q}_i)}_{\bar{\mathbf{P}}_i}) (\dot{\tilde{\mathbf{q}}}_i + \Lambda_i \tilde{\mathbf{q}}_i - \Lambda_i \mathbf{z}_i) \\ &= \dot{\tilde{\mathbf{q}}}_i + \Lambda_i \tilde{\mathbf{q}}_i - \Lambda_i \mathbf{z}_i + \bar{\mathbf{P}}_i \dot{\tilde{\mathbf{q}}}_i + \bar{\mathbf{P}}_i \Lambda_i \tilde{\mathbf{q}}_i - \bar{\mathbf{P}}_i \Lambda_i \mathbf{z}_i, \end{aligned} \quad (\text{B.38})$$

con  $\bar{\mathbf{P}}_i \triangleq \mathbf{J}_{\varphi_i}^+(\mathbf{q}_i) \mathbf{J}_{\varphi_i}(\mathbf{q}_i)$ . Multiplicando  $\tilde{\mathbf{q}}_i^T$  en ambos lados de (B.38) se tiene

$$\tilde{\mathbf{q}}_i^T \mathbf{s}_{pi} = \tilde{\mathbf{q}}_i^T \dot{\tilde{\mathbf{q}}}_i + \tilde{\mathbf{q}}_i^T \Lambda_i \tilde{\mathbf{q}}_i - \tilde{\mathbf{q}}_i^T \Lambda_i \mathbf{z}_i - \tilde{\mathbf{q}}_i^T \bar{\mathbf{P}}_i \dot{\tilde{\mathbf{q}}}_i - \tilde{\mathbf{q}}_i^T \bar{\mathbf{P}}_i \Lambda_i \tilde{\mathbf{q}}_i + \tilde{\mathbf{q}}_i^T \bar{\mathbf{P}}_i \Lambda_i \mathbf{z}_i. \quad (\text{B.39})$$

En vista del hecho de que

$$\tilde{\mathbf{q}}_i^T \dot{\tilde{\mathbf{q}}}_i = \|\tilde{\mathbf{q}}_i\| \frac{d}{dt} \|\tilde{\mathbf{q}}_i\|,$$

se puede reescribir (B.39) como

$$\begin{aligned} \|\tilde{\mathbf{q}}_i\| \frac{d}{dt} \|\tilde{\mathbf{q}}_i\| &= - \tilde{\mathbf{q}}_i^T \Lambda_i \tilde{\mathbf{q}}_i + \tilde{\mathbf{q}}_i^T \bar{\mathbf{P}}_i \dot{\tilde{\mathbf{q}}}_i + \tilde{\mathbf{q}}_i^T \bar{\mathbf{P}}_i \Lambda_i \tilde{\mathbf{q}}_i \\ &\quad + \tilde{\mathbf{q}}_i^T \Lambda_i \mathbf{z}_i - \tilde{\mathbf{q}}_i^T \bar{\mathbf{P}}_i \Lambda_i \mathbf{z}_i + \tilde{\mathbf{q}}_i^T \mathbf{s}_{pi}. \end{aligned} \quad (\text{B.40})$$

Para desarrollar el lado derecho de esta ecuación se analizará en primer lugar el término  $\tilde{\mathbf{q}}_i^T \bar{\mathbf{P}}_i \dot{\tilde{\mathbf{q}}}_i$ . De (B.30) se tiene

$$\begin{aligned} \Delta \dot{\mathbf{p}}_i &= \dot{\mathbf{p}}_i - \dot{\mathbf{p}}_{di} = \mathbf{J}_{\varphi_i} \dot{\tilde{\mathbf{q}}}_i + \mathbf{J}_{\varphi_i} \dot{\mathbf{q}}_{di} - \mathbf{J}_{\varphi_{di}} \dot{\mathbf{q}}_{di} \\ &= \mathbf{J}_{\varphi_i} \dot{\tilde{\mathbf{q}}}_i + (\mathbf{J}_{\varphi_i} - \mathbf{J}_{\varphi_{di}}) \dot{\mathbf{q}}_{di} \end{aligned} \quad (\text{B.41})$$

Multiplicando (B.37) por  $\beta_i$  se tiene

$$\beta_i \Delta \mathbf{p}_i = \beta_i \mathbf{J}_{\varphi_i}(\mathbf{q}_{di}) \tilde{\mathbf{q}}_i. \quad (\text{B.42})$$

Sumando (B.42) a (B.41) se obtiene

$$\mathbf{J}_{\varphi_i} \dot{\tilde{\mathbf{q}}}_i + \beta_i \mathbf{J}_{\varphi_{di}} \tilde{\mathbf{q}}_i = \Delta \dot{\mathbf{p}}_i - (\mathbf{J}_{\varphi_i} - \mathbf{J}_{\varphi_{di}}) \dot{\mathbf{q}}_{di} + \beta_i \Delta \mathbf{p}_i. \quad (\text{B.43})$$

Sumando y restando a la parte derecha de (B.43) el término  $\beta_i \mathbf{J}_{\varphi_i} \tilde{\mathbf{q}}_i$  se tiene

$$\mathbf{J}_{\varphi_i} \dot{\tilde{\mathbf{q}}}_i = \Delta \dot{\mathbf{p}}_i + \beta_i \Delta \mathbf{p}_i - \beta_i \mathbf{J}_{\varphi_{di}} \tilde{\mathbf{q}}_i - (\mathbf{J}_{\varphi_i} - \mathbf{J}_{\varphi_{di}}) \dot{\mathbf{q}}_{di} + \beta_i \mathbf{J}_{\varphi_i} \tilde{\mathbf{q}}_i - \beta_i \mathbf{J}_{\varphi_i} \tilde{\mathbf{q}}_i. \quad (\text{B.44})$$

Premultiplicando (B.44) por  $\tilde{\mathbf{q}}_i^T \mathbf{J}_{\varphi_i}^+$  se tiene

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{q}}_i^T \bar{\mathbf{P}}_i \dot{\tilde{\mathbf{q}}}_i &= \tilde{\mathbf{q}}_i^T \mathbf{J}_{\varphi_i}^+ \Delta \dot{\mathbf{p}}_i + \beta_i \tilde{\mathbf{q}}_i^T \mathbf{J}_{\varphi_i}^+ \Delta \mathbf{p}_i - \beta_i \tilde{\mathbf{q}}_i^T \mathbf{J}_{\varphi_i}^+ \mathbf{J}_{\varphi_{di}} \tilde{\mathbf{q}}_i \\ &\quad - \tilde{\mathbf{q}}_i^T \mathbf{J}_{\varphi_i}^+ (\mathbf{J}_{\varphi_i} - \mathbf{J}_{\varphi_{di}}) \dot{\mathbf{q}}_{di} + \beta_i \tilde{\mathbf{q}}_i^T \mathbf{J}_{\varphi_i}^+ \mathbf{J}_{\varphi_i} \tilde{\mathbf{q}}_i - \beta_i \tilde{\mathbf{q}}_i^T \mathbf{J}_{\varphi_i}^+ \mathbf{J}_{\varphi_i} \tilde{\mathbf{q}}_i \\ &= \tilde{\mathbf{q}}_i^T \mathbf{J}_{\varphi_i}^+ \Delta \dot{\mathbf{p}}_i + \beta_i \tilde{\mathbf{q}}_i^T \mathbf{J}_{\varphi_i}^+ \Delta \mathbf{p}_i - \tilde{\mathbf{q}}_i^T \mathbf{J}_{\varphi_i}^+ (\mathbf{J}_{\varphi_i} - \mathbf{J}_{\varphi_{di}}) \dot{\mathbf{q}}_{di} \\ &\quad + \beta_i \tilde{\mathbf{q}}_i^T \mathbf{J}_{\varphi_i}^+ (\mathbf{J}_{\varphi_i} - \mathbf{J}_{\varphi_{di}}) \tilde{\mathbf{q}}_i - \beta_i \tilde{\mathbf{q}}_i^T \mathbf{J}_{\varphi_i}^+ \mathbf{J}_{\varphi_i} \tilde{\mathbf{q}}_i \\ &= -\beta_i \tilde{\mathbf{q}}_i^T \bar{\mathbf{P}}_i \tilde{\mathbf{q}}_i + \beta_i \tilde{\mathbf{q}}_i^T \mathbf{J}_{\varphi_i}^+ \Delta \mathbf{p}_i + \tilde{\mathbf{q}}_i^T \mathbf{J}_{\varphi_i}^+ \Delta \dot{\mathbf{p}}_i \\ &\quad - \tilde{\mathbf{q}}_i^T \mathbf{J}_{\varphi_i}^+ (\mathbf{J}_{\varphi_i} - \mathbf{J}_{\varphi_{di}}) (\dot{\mathbf{q}}_{di} - \beta_i \tilde{\mathbf{q}}_i). \end{aligned} \quad (\text{B.45})$$

De la definición de  $\bar{P}_i$  se tiene

$$\tilde{\mathbf{q}}_i^T \bar{P}_i \dot{\tilde{\mathbf{q}}}_i = \tilde{\mathbf{q}}_i^T \mathbf{J}_{\varphi_i}^+ (\mathbf{q}_i) \mathbf{J}_{\varphi_i} \dot{\tilde{\mathbf{q}}}_i \quad (\text{B.46})$$

De las ecuaciones (B.45) y (B.46) se obtiene

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{q}}_i^T \bar{P}_i \dot{\tilde{\mathbf{q}}}_i &= \tilde{\mathbf{q}}_i^T \mathbf{J}_{\varphi_i}^+ (\mathbf{q}_i) \mathbf{J}_{\varphi_i} \dot{\tilde{\mathbf{q}}}_i \\ &= -\beta_i \tilde{\mathbf{q}}_i^T \bar{P}_i \tilde{\mathbf{q}}_i + \beta_i \tilde{\mathbf{q}}_i^T \mathbf{J}_{\varphi_i}^+ \Delta \mathbf{p}_i + \tilde{\mathbf{q}}_i^T \mathbf{J}_{\varphi_i}^+ \Delta \dot{\mathbf{p}}_i \\ &\quad - \tilde{\mathbf{q}}_i^T \mathbf{J}_{\varphi_i}^+ (\mathbf{J}_{\varphi_i} - \mathbf{J}_{\varphi_{di}}) (\dot{\mathbf{q}}_{di} - \beta_i \tilde{\mathbf{q}}_i). \end{aligned} \quad (\text{B.47})$$

Substituyendo (B.47) en (B.40) se obtiene

$$\begin{aligned} \|\tilde{\mathbf{q}}_i\| \frac{d}{dt} \|\tilde{\mathbf{q}}_i\| &= -\tilde{\mathbf{q}}_i^T \Lambda_i \tilde{\mathbf{q}}_i - \beta_i \tilde{\mathbf{q}}_i^T \bar{P}_i \tilde{\mathbf{q}}_i + \beta_i \tilde{\mathbf{q}}_i^T \mathbf{J}_{\varphi_i}^+ \Delta \mathbf{p}_i + \tilde{\mathbf{q}}_i^T \mathbf{J}_{\varphi_i}^+ \Delta \dot{\mathbf{p}}_i \\ &\quad - \tilde{\mathbf{q}}_i^T \mathbf{J}_{\varphi_i}^+ (\mathbf{J}_{\varphi_i} - \mathbf{J}_{\varphi_{di}}) (\dot{\mathbf{q}}_{di} - \beta_i \tilde{\mathbf{q}}_i) \\ &\quad + \tilde{\mathbf{q}}_i^T \bar{P}_i \Lambda_i \tilde{\mathbf{q}}_i + \tilde{\mathbf{q}}_i^T \Lambda_i \mathbf{z}_i - \tilde{\mathbf{q}}_i^T \bar{P}_i \Lambda_i \mathbf{z}_i + \tilde{\mathbf{q}}_i^T \mathbf{s}_{pi}. \end{aligned} \quad (\text{B.48})$$

Si  $\Lambda_i \triangleq k_i \mathbf{I}$ , entonces

$$\tilde{\mathbf{q}}_i^T \Lambda_i \tilde{\mathbf{q}}_i = k_i (q_i^2 + \dots + q_{n_i}^2) = k_i \|\tilde{\mathbf{q}}_i\|^2 \quad (\text{B.49})$$

Substituyendo (B.49) en (B.48)

$$\begin{aligned} \|\tilde{\mathbf{q}}_i\| \frac{d}{dt} \|\tilde{\mathbf{q}}_i\| &= -k_i \|\tilde{\mathbf{q}}_i\|^2 + (k_i - \beta_i) \tilde{\mathbf{q}}_i^T \bar{P}_i \tilde{\mathbf{q}}_i \\ &\quad + \beta_i \tilde{\mathbf{q}}_i^T \mathbf{J}_{\varphi_i}^+ \Delta \mathbf{p}_i + \tilde{\mathbf{q}}_i^T \mathbf{J}_{\varphi_i}^+ \Delta \dot{\mathbf{p}}_i \\ &\quad - \tilde{\mathbf{q}}_i^T \mathbf{J}_{\varphi_i}^+ (\mathbf{J}_{\varphi_i} - \mathbf{J}_{\varphi_{di}}) (\dot{\mathbf{q}}_{di} - \beta_i \tilde{\mathbf{q}}_i) \\ &\quad + \tilde{\mathbf{q}}_i^T \Lambda_i \mathbf{z}_i - \tilde{\mathbf{q}}_i^T \bar{P}_i \Lambda_i \mathbf{z}_i + \tilde{\mathbf{q}}_i^T \mathbf{s}_{pi}. \end{aligned} \quad (\text{B.50})$$

Desarrollando el término  $\tilde{\mathbf{q}}_i^T \Lambda_i \mathbf{z}_i - \tilde{\mathbf{q}}_i^T \bar{P}_i \Lambda_i \mathbf{z}_i$  de (B.50)

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{q}}_i^T \Lambda_i \mathbf{z}_i - \tilde{\mathbf{q}}_i^T \bar{P}_i \Lambda_i \mathbf{z}_i &= \tilde{\mathbf{q}}_i^T (\mathbf{I}_i - \bar{P}_i) \Lambda_i \mathbf{z}_i \\ &= k_i \tilde{\mathbf{q}}_i^T (\mathbf{I}_i - \bar{P}_i) \mathbf{z}_i \\ &= k_i \tilde{\mathbf{q}}_i^T \mathbf{Q}_i \mathbf{z}_i. \end{aligned} \quad (\text{B.51})$$

Por lo tanto (B.50) se puede escribir como

$$\begin{aligned} \|\tilde{\mathbf{q}}_i\| \frac{d}{dt} \|\tilde{\mathbf{q}}_i\| &= -k_i \|\tilde{\mathbf{q}}_i\|^2 + (k_i - \beta_i) \tilde{\mathbf{q}}_i^T \bar{P}_i \tilde{\mathbf{q}}_i \\ &\quad - \tilde{\mathbf{q}}_i^T \mathbf{J}_{\varphi_i}^+ (\mathbf{J}_{\varphi_i} - \mathbf{J}_{\varphi_{di}}) (\dot{\mathbf{q}}_{di} - \beta_i \tilde{\mathbf{q}}_i) \\ &\quad + \tilde{\mathbf{q}}_i^T \mathbf{J}_{\varphi_i}^+ (\Delta \dot{\mathbf{p}}_i + \beta_i \Delta \mathbf{p}_i) + k_i \tilde{\mathbf{q}}_i^T \mathbf{Q}_i \mathbf{z}_i + \tilde{\mathbf{q}}_i^T \mathbf{s}_{pi}. \end{aligned} \quad (\text{B.52})$$

En vista de la Suposición 4.2.12, la siguiente cota puede ser establecida

$$\|\tilde{\mathbf{q}}_i^T \mathbf{J}_{\varphi_i}^+ (\mathbf{J}_{\varphi_i} - \mathbf{J}_{\varphi_{di}}) (\dot{\mathbf{q}}_{di} - \beta_i \tilde{\mathbf{q}}_i)\| \leq \gamma_i \|\tilde{\mathbf{q}}_i\|^2, \quad (\text{B.53})$$



con

$$\gamma_i \triangleq c_{0i} L_i (v_{mi} + \beta_i \eta_i). \quad (\text{B.54})$$

$v_{mi}$  es la cota del vector de velocidad  $\dot{\mathbf{q}}_{di}$ , i.e.,  $\|\dot{\mathbf{q}}_{di}\| \leq v_{mi}$  para todo tiempo. Nótese que se ha empleado (B.36). Por otra parte, de (6.37) se tiene

$$\mathbf{s}_{pi} = \mathbf{s}_i - \mathbf{J}_{\varphi_i}^+(\mathbf{q}_i) (\Delta \dot{\mathbf{p}}_i + \beta_i \Delta \mathbf{p}_i - \boldsymbol{\xi}_i \Delta \mathbf{F}_i). \quad (\text{B.55})$$

Substituyendo (B.53) y (B.55) en (B.52) y sacando normas se tiene

$$\begin{aligned} \|\tilde{\mathbf{q}}_i\| \frac{d}{dt} \|\tilde{\mathbf{q}}_i\| &= \tilde{\mathbf{q}}_i^T \mathbf{s}_i - k_i \|\tilde{\mathbf{q}}_i\|^2 + (k_i - \beta_i) \tilde{\mathbf{q}}_i^T \bar{\mathbf{P}}_i \tilde{\mathbf{q}}_i \\ &\quad - \tilde{\mathbf{q}}_i^T \mathbf{J}_{\varphi_i}^+ (\mathbf{J}_{\varphi_i} - \mathbf{J}_{\varphi_{di}}) (\dot{\mathbf{q}}_{di} - \beta_i \tilde{\mathbf{q}}_i) + k_i \tilde{\mathbf{q}}_i^T \mathbf{Q}_i \mathbf{z}_i + \tilde{\mathbf{q}}_i^T \mathbf{J}_{\varphi_i}^+ \boldsymbol{\xi}_i \Delta \mathbf{F}_i \\ &\leq \|\tilde{\mathbf{q}}_i\| \|\mathbf{s}_i\| - k_i \|\tilde{\mathbf{q}}_i\|^2 + |k_i - \beta_i| \|\tilde{\mathbf{q}}_i\| \|\bar{\mathbf{P}}_i \tilde{\mathbf{q}}_i\| \\ &\quad + \gamma_i \|\tilde{\mathbf{q}}_i\|^2 + k_i \|\tilde{\mathbf{q}}_i\| \|\mathbf{Q}_i \mathbf{z}_i\| + \|\tilde{\mathbf{q}}_i\| \|\mathbf{J}_{\varphi_i}^+ \boldsymbol{\xi}_i \Delta \mathbf{F}_i\|, \end{aligned} \quad (\text{B.56})$$

dividiendo entre  $\|\tilde{\mathbf{q}}_i\|$  se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \|\tilde{\mathbf{q}}_i\| &\leq \|\mathbf{s}_i\| - k_i \|\tilde{\mathbf{q}}_i\| + |k_i - \beta_i| \|\bar{\mathbf{P}}_i \tilde{\mathbf{q}}_i\| \\ &\quad + \gamma_i \|\tilde{\mathbf{q}}_i\| + k_i \|\mathbf{Q}_i \mathbf{z}_i\| + \lambda_{\max}(\boldsymbol{\xi}_i) c_{0i} \|\Delta \mathbf{F}_i\|. \end{aligned} \quad (\text{B.57})$$

Ahora bien,  $\bar{\mathbf{P}}_i$  y  $\mathbf{Q}_i$  son matrices de proyección, tal que

$$\|\mathbf{Q}_i \mathbf{z}_i\| \leq b_{1i} \|\mathbf{z}_i\| \quad \text{donde } 0 \leq b_{1i} \leq 1 \quad (\text{B.58})$$

$$\|\bar{\mathbf{P}}_i \tilde{\mathbf{q}}_i\| \leq b_{2i} \|\tilde{\mathbf{q}}_i\| \quad \text{donde } 0 \leq b_{2i} \leq 1 \quad (\text{B.59})$$

Considerando los casos críticos ( $b_{1i} = b_{2i} = 1$ ), la ecuación (B.57) se puede escribir como

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \|\tilde{\mathbf{q}}_i\| &\leq \|\mathbf{s}_i\| - k_i \|\tilde{\mathbf{q}}_i\| + |k_i - \beta_i| \|\tilde{\mathbf{q}}_i\| \\ &\quad + \gamma_i \|\tilde{\mathbf{q}}_i\| + k_i \|\mathbf{Q}_i \mathbf{z}_i\| + \lambda_{\max}(\boldsymbol{\xi}_i) c_{0i} \|\Delta \mathbf{F}_i\| \\ &\leq -\alpha_i \|\tilde{\mathbf{q}}_i\| + \|\mathbf{s}_i\| + \lambda_{\max}(\boldsymbol{\xi}_i) c_{0i} \|\Delta \mathbf{F}_i\| + k_i \|\mathbf{z}_i\|, \end{aligned} \quad (\text{B.60})$$

con

$$\alpha_i \triangleq k_i - |k_i - \beta_i| - \gamma_i. \quad (\text{B.61})$$

Cabe hacer notar que  $k_i$ ,  $\beta_i$ ,  $v_{mi}$  y  $\eta_i$  pueden ser seleccionados para garantizar que  $\alpha_i > 0$  y los últimos tres elementos del lado derecho de (B.60) están acotado puesto que  $\mathbf{x}_i$  está acotado. Sin embargo, la ecuación (B.60) es válida solamente si (B.36) se satisface. Se debe encontrar entonces una cota  $x_{\max_i}$  tal que (B.36) se cumpla. Para garantizar esto,  $x_{\max_i}$  debe aparecer en (B.60) explícitamente. Por supuesto, si  $\|\mathbf{x}_i\| \leq x_{\max_i}$ , se tiene

$$\|\mathbf{x}_i\|^2 = \|\mathbf{s}_i\|^2 + \|\mathbf{r}_i\|^2 + \|\Delta \mathbf{F}_i\|^2 \leq x_{\max_i}^2, \quad (\text{B.62})$$

con  $\mathbf{r}_i = \dot{\mathbf{z}}_i + \mathbf{\Lambda}\mathbf{z}_i$ . Puesto que en (B.60) se tiene  $\mathbf{z}_i$  y no  $\mathbf{r}_i$ , se debe notar que cada elemento de  $\mathbf{r}_i$  está dado por  $r_{ij} = \dot{z}_{ij} + k_i z_{ij}$ , para  $j = 1, \dots, n_i$ . Esto es un filtro lineal estable con ganancia  $\frac{1}{k_i}$ , *i. e.* se tiene  $|z_{ij}| \leq \frac{1}{k_i} \max |r_{ij}| \forall t$ . De esta manera se puede mostrar que

$$\|\mathbf{z}_i\| \leq \frac{\sqrt{n_i}}{k_i} x_{\max_i}, \quad (\text{B.63})$$

lo que permite reescribir (B.60) como

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \|\tilde{\mathbf{q}}_i\| &\leq -\alpha_i \|\tilde{\mathbf{q}}_i\| + x_{\max_i} + \lambda_{\max}(\boldsymbol{\xi}_i) c_{0i} x_{\max_i} + \sqrt{n_i} x_{\max_i} \\ &\leq -\alpha_i \|\tilde{\mathbf{q}}_i\| + \sigma_i, \end{aligned} \quad (\text{B.64})$$

con

$$\sigma_i \triangleq (1 + \lambda_{\max}(\boldsymbol{\xi}_i) c_{0i} + \sqrt{n_i}) x_{\max_i}. \quad (\text{B.65})$$

Del Lema de Comparación (Khalil 2002), se tiene

$$\|\tilde{\mathbf{q}}_i(t)\| \leq \frac{\sigma_i}{\alpha_i} + e^{-\alpha_i t} \left( \|\tilde{\mathbf{q}}_i(0)\| - \frac{\sigma_i}{\alpha_i} \right), \quad (\text{B.66})$$

para todo tiempo. Por tanto, (B.36) se cumple si

$$\|\tilde{\mathbf{q}}_i(0)\| \leq \frac{\sigma_i}{\alpha_i} = \frac{(1 + \lambda_{\max}(\boldsymbol{\xi}_i) c_{0i} + \sqrt{n_i}) x_{\max_i}}{\alpha_i} \leq \eta_i. \quad (\text{B.67})$$

La ecuación (B.67) puede ser satisfecha si

$$x_{\max_i} \leq \frac{\eta_i \alpha_i}{(1 + \lambda_{\max}(\boldsymbol{\xi}_i) c_{0i} + \sqrt{n_i})}. \quad (\text{B.68})$$

Esto significa que la cota de  $x_{\max_i}$  debe ser suficientemente pequeña para garantizar (B.36). En este caso, si  $\|\mathbf{x}_i\|$  tiende a cero, es claro de (B.60) que  $\|\tilde{\mathbf{q}}_i\|$  tenderá a cero también, lo que conlleva a la convergencia a cero de  $\|\dot{\tilde{\mathbf{q}}}_i\|$ .

- c) Cuando  $\mathbf{x}_i$  (y en consecuencia  $\Delta \mathbf{F}_i$ ) tiende a cero,  $\Delta \boldsymbol{\lambda}_i$  no necesariamente permanece acotada o tiende a cero. Con la finalidad de probar esto, se puede hacer el siguiente análisis. De (B.25) y con la restricción (3.1) satisfecha, se tiene

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_{\varphi_i}(\mathbf{q}_i) \mathbf{s}_i &= \Delta \dot{\mathbf{p}}_i + \beta_i \Delta \mathbf{p}_i - \boldsymbol{\xi}_i \Delta \mathbf{F}_i \\ &= -\boldsymbol{\xi}_i \Delta \mathbf{F}_i. \end{aligned} \quad (\text{B.69})$$

Derivando la ecuación (B.69)

$$\mathbf{J}_{\varphi_i}(\mathbf{q}_i) \dot{\mathbf{s}}_i = -\dot{\mathbf{J}}_{\varphi_i}(\mathbf{q}_i) \mathbf{s}_i - \boldsymbol{\xi}_i \Delta \boldsymbol{\lambda}_i. \quad (\text{B.70})$$

Empleando  $\dot{\mathbf{s}}_i$  de la ecuación (6.55) se tiene

$$\mathbf{H}_i(\mathbf{q}_i) \dot{\mathbf{s}}_i - \mathbf{J}_{\varphi_i}^T(\mathbf{q}_i) \Delta \boldsymbol{\lambda}_i = \mathbf{h}_i \quad (\text{B.71})$$

donde  $\mathbf{h}_i \triangleq -\mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i)\mathbf{s}_i - \mathbf{K}_{\text{DR}_i}\mathbf{s}_i + \mathbf{K}_{\text{R}_i}\mathbf{r}_i + k_{\text{Fi}}\mathbf{J}_{\varphi_i}^{\text{T}}(\mathbf{q}_i)\Delta\mathbf{F}_i - \mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_{\text{ri}})\mathbf{s}_i + \mathbf{H}_i(\mathbf{q}_i)\mathbf{e}_i(\mathbf{r}_i)$ . Cabe mencionar que  $\mathbf{h}_i(t)$  está acotado puesto que  $\dot{\mathbf{q}}_i$  se supone acotado y con  $\mathbf{x}_i$  también acotado. De (B.71) se tiene

$$\dot{\mathbf{s}}_i = \mathbf{H}_i^{-1}(\mathbf{q}_i)\mathbf{J}_{\varphi_i}^{\text{T}}(\mathbf{q}_i)\Delta\boldsymbol{\lambda}_i + \mathbf{H}_i^{-1}(\mathbf{q}_i)\mathbf{h}_i, \quad (\text{B.72})$$

sustituyendo (B.73) en (B.70)

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_{\varphi_i}\mathbf{H}_i^{-1}(\mathbf{q}_i)\mathbf{J}_{\varphi_i}^{\text{T}}\Delta\boldsymbol{\lambda}_i + \mathbf{J}_{\varphi_i}\mathbf{H}_i^{-1}(\mathbf{q}_i)\mathbf{h}_i &= -\dot{\mathbf{J}}_{\varphi_i}\mathbf{s}_i - \boldsymbol{\xi}_i\Delta\boldsymbol{\lambda}_i \\ (\mathbf{J}_{\varphi_i}\mathbf{H}_i^{-1}(\mathbf{q}_i)\mathbf{J}_{\varphi_i}^{\text{T}} + \boldsymbol{\xi}_i)\Delta\boldsymbol{\lambda}_i &= -\dot{\mathbf{J}}_{\varphi_i}\mathbf{s}_i - \mathbf{J}_{\varphi_i}\mathbf{H}_i^{-1}(\mathbf{q}_i)\mathbf{h}_i. \end{aligned} \quad (\text{B.73})$$

Finalmente

$$\Delta\boldsymbol{\lambda}_i = -(\mathbf{J}_{\varphi_i}(\mathbf{q}_i)\mathbf{H}_i^{-1}(\mathbf{q}_i)\mathbf{J}_{\varphi_i}(\mathbf{q}_i)^{\text{T}} + \boldsymbol{\xi}_i)^{-1} \left( \dot{\mathbf{J}}_{\varphi_i}(\mathbf{q}_i)\mathbf{s}_i + \mathbf{J}_{\varphi_i}(\mathbf{q}_i)\mathbf{H}_i^{-1}(\mathbf{q}_i)\mathbf{h}_i(t) \right) \quad (\text{B.74})$$

Puesto que la inversa siempre existe porque  $\mathbf{J}_{\varphi_i}(\mathbf{q}_i)$  es de rango completo, se concluye que  $\Delta\boldsymbol{\lambda}_i$  debe estar acotado porque el lado derecho de (B.74) está acotado. Nótese de (B.71), que  $\dot{\mathbf{s}}_i$  permanece acotado también. Finalmente, si  $\mathbf{x}_i$  tiende a cero entonces  $\mathbf{s}_i$ ,  $\mathbf{r}_i$  y  $\mathbf{h}_i(t)$  también tienden a cero, y de este modo se llega a la conclusión de que  $\Delta\boldsymbol{\lambda}_i$  tenderá a cero también.

## B.4 Prueba del Teorema 6.3.1

El Teorema 6.3.1 puede ser demostrado como sigue. Considérese la función candidata de Lyapunov (6.66), donde  $\mathbf{x}_i(0)$  pertenece a la región (6.69). Si  $\dot{V}_i(\mathbf{x}_i) \leq 0$  con  $\dot{V}_i(\mathbf{x}_i) = 0$  si y sólo si  $\mathbf{x}_i = \mathbf{0}$ , entonces el máximo valor que la norma de  $\mathbf{x}_i$  puede tener está dado por (6.79). De acuerdo con la demostración del Lema 6.3.1,  $x_{\text{max}_i}$  debe satisfacer (B.68) de tal forma que  $\tilde{\mathbf{q}}_i$  y  $\dot{\tilde{\mathbf{q}}}_i$  puedan tender a cero si  $\mathbf{x}_i$  lo hace. En vista de (6.79), la condición (B.68) puede ser satisfecha si (6.70) se cumple.

Por supuesto, falta mostrar que  $\dot{V}_i(\mathbf{x}_i) \leq 0$  es cierto. Reescribiendo (6.66) como

$$V_i(\mathbf{x}_i) = \frac{1}{2}\mathbf{s}_i^{\text{T}}\mathbf{H}_i(\mathbf{q}_i)\mathbf{s}_i + \frac{1}{2}\mathbf{r}_i^{\text{T}}\mathbf{H}_i(\mathbf{q}_i)\mathbf{r}_i + \frac{1}{2}\Delta\mathbf{F}_i^{\text{T}}\boldsymbol{\xi}_i\Delta\mathbf{F}_i. \quad (\text{B.75})$$

La derivada de (B.75) a lo largo de (6.38), (6.55), y (6.63) es

$$\begin{aligned} \dot{V}_i(\mathbf{x}_i) &= \frac{1}{2}\mathbf{s}_i^{\text{T}}\dot{\mathbf{H}}_i(\mathbf{q}_i)\mathbf{s}_i + \frac{1}{2}\mathbf{r}_i^{\text{T}}\dot{\mathbf{H}}_i(\mathbf{q}_i)\mathbf{r}_i + \Delta\mathbf{F}_i^{\text{T}}\boldsymbol{\xi}_i\Delta\boldsymbol{\lambda}_i - \mathbf{s}_i^{\text{T}}\mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i)\mathbf{s}_i \\ &\quad - \mathbf{s}_i^{\text{T}}\mathbf{K}_{\text{DR}_i}\mathbf{s}_i + \mathbf{s}_i^{\text{T}}\mathbf{H}_i(\mathbf{q}_i)\mathbf{e}_i(\mathbf{r}_i) - \mathbf{s}_i^{\text{T}}\mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_{\text{ri}})\mathbf{s}_i + \mathbf{s}_i^{\text{T}}\mathbf{K}_{\text{R}_i}\mathbf{r}_i \\ &\quad + \mathbf{s}_i^{\text{T}}\mathbf{J}_{\varphi_i}^{\text{T}}(\mathbf{q}_i)(\Delta\boldsymbol{\lambda}_i + k_{\text{Fi}}\Delta\mathbf{F}_i) - \mathbf{r}_i^{\text{T}}\mathbf{H}_{\text{rd}_i}\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_i^{\text{T}}\mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i)\mathbf{r}_i \\ &\quad - \mathbf{r}_i^{\text{T}}\mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \mathbf{s}_i + 2\dot{\mathbf{q}}_{\text{ri}})\mathbf{s}_i + \mathbf{r}_i^{\text{T}}\mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \mathbf{s}_i + \dot{\mathbf{q}}_{\text{ri}})\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_i^{\text{T}}\mathbf{K}_{\text{DR}_i}\mathbf{s}_i. \end{aligned} \quad (\text{B.76})$$

Para simplificar (B.76) se debe tomar en cuenta que

$$\begin{aligned} \mathbf{s}_i^{\text{T}}\mathbf{K}_{\text{R}_i}\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_i^{\text{T}}\mathbf{K}_{\text{DR}_i}\mathbf{s}_i &= \mathbf{s}_i^{\text{T}}\mathbf{K}_{\text{R}_i}\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_i^{\text{T}}\mathbf{K}_{\text{R}_i}\mathbf{s}_i - \mathbf{r}_i^{\text{T}}\mathbf{D}_i\mathbf{s}_i \\ &= -\mathbf{s}_i^{\text{T}}\mathbf{D}_i\mathbf{r}_i. \end{aligned} \quad (\text{B.77})$$

Además, nótese de (B.26) y que la restricción (3.12) debe cumplirse para  $\mathbf{p}_i$ ,  $\dot{\mathbf{p}}_i$ ,  $\mathbf{p}_{di}$  y  $\dot{\mathbf{p}}_{di}$ , se tiene

$$\begin{aligned}\Delta \dot{\mathbf{p}}_i + \beta_i \Delta \mathbf{p}_i &= \mathbf{J}_{\varphi_i}(\mathbf{q}_i) \mathbf{s}_i + \boldsymbol{\xi}_i \Delta \mathbf{F}_i \\ \mathbf{J}_{\varphi_i}(\mathbf{q}_i) \mathbf{s}_i &= -\boldsymbol{\xi}_i \Delta \mathbf{F}_i \\ \mathbf{s}_i^T \mathbf{J}_{\varphi_i}^T(\mathbf{q}_i) &= -\Delta \mathbf{F}_i^T \boldsymbol{\xi}_i,\end{aligned}\tag{B.78}$$

multiplicando  $(\Delta \boldsymbol{\lambda}_i + k_{Fi} \Delta \mathbf{F}_i)$  en ambos lados de (B.78)

$$\begin{aligned}\mathbf{s}_i^T \mathbf{J}_{\varphi_i}^T(\mathbf{q}_i) (\Delta \boldsymbol{\lambda}_i + k_{Fi} \Delta \mathbf{F}_i) &= -\Delta \mathbf{F}_i^T \boldsymbol{\xi}_i (\Delta \boldsymbol{\lambda}_i + k_{Fi} \Delta \mathbf{F}_i) \\ &= -\Delta \mathbf{F}_i^T \boldsymbol{\xi}_i \Delta \boldsymbol{\lambda}_i - k_{Fi} \Delta \mathbf{F}_i^T \boldsymbol{\xi}_i \Delta \mathbf{F}_i.\end{aligned}\tag{B.79}$$

Sustituyendo (B.77) y (B.79) en (B.76), y tomando en cuenta la Propiedad 3.2.3; la ecuación (B.76) se convierte en

$$\begin{aligned}\dot{V}_i(\mathbf{x}_i) &= -k_{Fi} \Delta \mathbf{F}_i^T \boldsymbol{\xi}_i \Delta \mathbf{F}_i - \mathbf{s}_i^T \mathbf{K}_{DR_i} \mathbf{s}_i - \mathbf{r}_i^T \mathbf{H}_{rd_i} \mathbf{r}_i \\ &\quad - \mathbf{s}_i^T \mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_{ri}) \mathbf{s}_i + \mathbf{r}_i^T \mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \mathbf{s}_i + \dot{\mathbf{q}}_{ri}) \mathbf{r}_i \\ &\quad - \mathbf{r}_i^T \mathbf{D}_i \mathbf{s}_i - \mathbf{r}_i^T \mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \mathbf{s}_i + 2\dot{\mathbf{q}}_{ri}) \mathbf{s}_i + \mathbf{s}_i^T \mathbf{H}_i(\mathbf{q}_i) \mathbf{e}_i(\mathbf{r}_i).\end{aligned}\tag{B.80}$$

Puesto que  $\mathbf{x}_i(0)$  esta dentro de la región (6.69), se tiene

$$\begin{aligned}\dot{V}_i(\mathbf{x}_i) &\leq -k_{Fi} \Delta \mathbf{F}_i^T \boldsymbol{\xi}_i \Delta \mathbf{F}_i - \mathbf{s}_i^T \mathbf{K}_{DR_i} \mathbf{s}_i - \mathbf{r}_i^T \mathbf{H}_{rd_i} \mathbf{r}_i \\ &\quad + \mu_1 \|\mathbf{s}_i\|^2 + \mu_2 \|\mathbf{r}_i\|^2 + (\mu_3 + \mu_4 + \lambda_{Di}) \|\mathbf{s}_i\| \|\mathbf{r}_i\| \\ &\leq -k_{Fi} \lambda_{\min}(\boldsymbol{\xi}_i) \|\Delta \mathbf{F}_i\|^2 - \lambda_{\min}(\mathbf{K}_{R_i}) \|\mathbf{s}_i\|^2 \\ &\quad - (k_{di} \lambda_{hi} - \lambda_{\max}(\mathbf{K}_{R_i})) \|\mathbf{r}_i\|^2 + \mu_1 \|\mathbf{s}_i\|^2 + \mu_2 \|\mathbf{r}_i\|^2 \\ &\quad + (\mu_3 + \mu_4 + \lambda_{Di}) \|\mathbf{s}_i\| \|\mathbf{r}_i\| \\ &\leq -k_{Fi} \lambda_{\min}(\boldsymbol{\xi}_i) \|\Delta \mathbf{F}_i\|^2 - (\lambda_{\min}(\mathbf{K}_{R_i}) - \mu_{1i}) \|\mathbf{s}_i\|^2 \\ &\quad - (k_{di} \lambda_{hi} - \lambda_{\max}(\mathbf{K}_{R_i}) - \mu_{2i}) \|\mathbf{r}_i\|^2 + (\mu_{3i} + \mu_{4i} + \lambda_{Di}) \|\mathbf{s}_i\| \|\mathbf{r}_i\|.\end{aligned}\tag{B.81}$$

Sumando y restando los términos  $\frac{1}{4} (\lambda_{Di} + \mu_{3i} + \mu_{4i})^2 \|\mathbf{r}_i\|^2$  y  $\|\mathbf{s}_i\|^2$  en (B.81)

$$\begin{aligned}\dot{V}_i(\mathbf{x}_i) &\leq -k_{Fi} \lambda_{\min}(\boldsymbol{\xi}_i) \|\Delta \mathbf{F}_i\|^2 - (\lambda_{\min}(\mathbf{K}_{R_i}) - \mu_{1i} - 1) \|\mathbf{s}_i\|^2 \\ &\quad - \left( k_{di} \lambda_{hi} - \lambda_{\max}(\mathbf{K}_{R_i}) - \mu_{2i} - \frac{1}{4} (\mu_{3i} + \mu_{4i} + \lambda_{Di})^2 \right) \|\mathbf{r}_i\|^2 \\ &\quad - \left( \|\mathbf{s}_i\| - \frac{1}{2} (\mu_{3i} + \mu_{4i} + \lambda_{Di}) \|\mathbf{r}_i\| \right)^2 \\ &\leq -k_{Fi} \lambda_{\min}(\boldsymbol{\xi}_i) \|\Delta \mathbf{F}_i\|^2 - (\lambda_{\min}(\mathbf{K}_{R_i}) - \mu_{1i} - 1) \|\mathbf{s}_i\|^2 \\ &\quad - \left( k_{di} \lambda_{hi} - \lambda_{\max}(\mathbf{K}_{R_i}) - \mu_{2i} - \frac{1}{4} (\mu_{3i} + \mu_{4i} + \lambda_{Di})^2 \right) \|\mathbf{r}_i\|^2.\end{aligned}\tag{B.82}$$

Tomando las condiciones (6.72)–(6.73) en cuenta se obtiene

$$\dot{V}_i(\mathbf{x}_i) \leq -\delta_i \|\mathbf{s}_i\|^2 - \delta_i \|\mathbf{r}_i\|^2 - k_{Fi} \lambda_{\min}(\boldsymbol{\xi}_i) \|\Delta \mathbf{F}_i\|^2.\tag{B.83}$$

Así  $\dot{V}_i(t)$  es negativa. Pero para continuar con la solución,  $\|\mathbf{x}_i\|$  no puede ser más grande que  $x_{\max_i}$  mientras  $\dot{V}_i(t)$  sea negativa. Puesto que el estado inicial está en la región  $S_a$

(6.69), en (B.83) se puede concluir que  $\dot{V}_i(\mathbf{x}_i) \leq 0 \forall t \geq 0$ , y que  $\dot{V}_i(\mathbf{x}_i) = 0$  si y sólo si  $\mathbf{x}_i = \mathbf{0}$ . Por tanto,  $\mathbf{x}_i$  tiende a cero y está acotado por  $x_{\max_i}$ . Entonces, de la definición (6.45) se tiene directamente

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{z}_i = \mathbf{0} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \dot{\mathbf{z}}_i = \mathbf{0}.$$

Del Lema 6.3.1 a) y b), se obtiene

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \Delta \dot{\mathbf{p}}_i = \mathbf{0} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \Delta \mathbf{p}_i = \mathbf{0} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \dot{\tilde{\mathbf{q}}}_i = \mathbf{0} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{\mathbf{q}}_i = \mathbf{0}.$$

Para utilizar c) del lema, solamente se necesita mostrar que  $\dot{\tilde{\mathbf{q}}}_i$  está acotado. Este es ciertamente el caso porque  $\dot{\tilde{\mathbf{q}}}_i$  y  $\dot{\mathbf{q}}_{di}$  están acotados. Por tanto

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \Delta \boldsymbol{\lambda}_i = \mathbf{0}.$$

Finalmente, la convergencia a cero de todo el sistema se puede demostrar usando

$$V = \sum_{i=1}^l V_i(\mathbf{x}_i).$$

## B.5 Prueba del Lema 6.4.1

En esta sección el Lema 6.4.1 es demostrado. La suposición principal es que  $\mathbf{x}_i \triangleq [\mathbf{s}_i^T \ \mathbf{r}_i^T \ \Delta \mathbf{F}_i^T \ \boldsymbol{\phi}_i^T]^T$  está acotado por  $x_{\max_i}$  y tiende a cero.

a) Se demuestra como el inciso a) del Lema 6.3.1, sólo que esta vez se tiene

$$\Delta \dot{\mathbf{p}}_i + \beta_i \Delta \mathbf{p}_i = \mathbf{J}_{\varphi_i}(\mathbf{q}_i) \mathbf{s}_i + \bar{\boldsymbol{\xi}}_i \boldsymbol{\phi}_i + \boldsymbol{\xi}_i \Delta \mathbf{F}_i. \quad (\text{B.84})$$

b) El análisis es completamente similar al inciso b) del Lema 6.3.1 sólo que, debido a la inclusión de  $\bar{\boldsymbol{\xi}}_i$  y  $\boldsymbol{\xi}_i$  se tiene

$$x_{\max_i} \leq \frac{\eta_i \alpha_i}{1 + \lambda_{\max}(\bar{\boldsymbol{\xi}}_i) c_{0i} + \lambda_{\max}(\boldsymbol{\xi}_i) c_{0i} + \sqrt{n_i}}, \quad (\text{B.85})$$

con

$$\alpha_i = k_i - |k_i - \beta_i| - \gamma_i, \quad (\text{B.86})$$

$$\gamma_i = c_{0i} L_i (v_{mi} + \beta_i \eta_i). \quad (\text{B.87})$$

c) Para probar que  $\Delta \boldsymbol{\lambda}_i$  está acotado y tiende a cero, se utiliza la relación  $\mathbf{J}_{\varphi_i}(\mathbf{q}_i) \mathbf{s}_i = \Delta \dot{\mathbf{p}}_i + \beta_i \Delta \mathbf{p}_i - \bar{\boldsymbol{\xi}}_i \boldsymbol{\phi}_i - \boldsymbol{\xi}_i \Delta \mathbf{F}_i = -\bar{\boldsymbol{\xi}}_i \boldsymbol{\phi}_i - \boldsymbol{\xi}_i \Delta \mathbf{F}_i$ . La última igualdad es válida puesto que las restricciones (3.10) y (3.12) deben ser satisfechas. Por lo tanto se tiene

$$\mathbf{J}_{\varphi_i}(\mathbf{q}_i) \dot{\mathbf{s}}_i + \dot{\mathbf{J}}_{\varphi_i}(\mathbf{q}_i) \mathbf{s}_i = -\bar{\boldsymbol{\xi}}_i \dot{\boldsymbol{\zeta}}_i - \boldsymbol{\xi}_i \Delta \boldsymbol{\lambda}_i = \bar{\boldsymbol{\xi}}_i \mathbf{A}_i \boldsymbol{\phi}_i - \bar{\boldsymbol{\xi}}_i \mathbf{B}_i \Delta \boldsymbol{\lambda}_i - \boldsymbol{\xi}_i \Delta \boldsymbol{\lambda}_i, \quad (\text{B.88})$$

donde (6.84) ha sido usado. De (B.88) se tiene

$$\Delta \boldsymbol{\lambda}_i = -(\bar{\boldsymbol{\xi}}_i \mathbf{B}_i + \boldsymbol{\xi}_i)^{-1} \left( \mathbf{J}_{\varphi_i}(\mathbf{q}_i) \dot{\mathbf{s}}_i + \dot{\mathbf{J}}_{\varphi_i}(\mathbf{q}_i) \mathbf{s}_i - \boldsymbol{\xi}_i \mathbf{A}_i \boldsymbol{\phi}_i \right), \quad (\text{B.89})$$

se concluye que  $\Delta \boldsymbol{\lambda}_i$  está acotada porque el lado derecho de (B.89) lo está, ya que de (6.90),  $\dot{\mathbf{s}}_i$  está acotado porque se supone que  $\dot{\tilde{\mathbf{q}}}_i$  está acotado. Finalmente, si  $\mathbf{x}_i$  tiende a cero entonces  $\mathbf{s}_i$ ,  $\dot{\mathbf{s}}_i$  y  $\boldsymbol{\phi}_i$  tienden a cero y se llega a la conclusión que  $\Delta \boldsymbol{\lambda}_i$  tiende a cero también.

## B.6 Prueba de $V_i(\mathbf{x}_i)$ en (6.98)

Para demostrar que  $V_i(\mathbf{x}_i) = \frac{1}{2}\mathbf{x}_i^T$  (bloc diag  $\{\mathbf{H}_i(\mathbf{q}_i), \mathbf{H}_i(\mathbf{q}_i), \mathbf{R}_i\}$ )  $\mathbf{x}_i$  en (6.98) es una función positiva, se debe recordar primero que una función de este tipo debe satisfacer que  $V_i(\mathbf{0}) = 0$  y  $V_i(\mathbf{x}_i) > 0$  para  $\mathbf{x}_i \neq \mathbf{0}$ . Puesto que  $\mathbf{H}_i(\mathbf{q}_i)$  es una matriz definida positiva, el problema consiste en analizar  $\mathbf{R}_i$  en (6.99), puesto que es solamente semidefinida positiva. Desarrollando el término en (6.98) que involucra  $\mathbf{R}_i$  se tiene

$$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} \phi_i^T & \Delta \mathbf{F}_i^T \end{bmatrix} \mathbf{R}_i \begin{bmatrix} \phi_i \\ \Delta \mathbf{F}_i \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \left( \mathbf{B}_i^{-\frac{1}{2}} \phi_i - \mathbf{B}_i^{\frac{1}{2}} \Delta \mathbf{F}_i \right)^T \mathbf{N}_i \left( \mathbf{B}_i^{-\frac{1}{2}} \phi_i - \mathbf{B}_i^{\frac{1}{2}} \Delta \mathbf{F}_i \right), \quad (\text{B.90})$$

puesto que  $\mathbf{B}_i$  es una matriz diagonal definida positiva. En vista del hecho tal que  $\mathbf{N}_i > \mathbf{0}$ , (B.90) puede ser solamente cero si

$$\phi_i = \mathbf{B}_i \Delta \mathbf{F}_i. \quad (\text{B.91})$$

Por otra parte, nótese que  $V_i(\mathbf{x}_i)$  incluye el término  $\frac{1}{2}\mathbf{s}_i^T \mathbf{H}_i(\mathbf{q}_i) \mathbf{s}_i$  que puede ser cero solamente si  $\mathbf{s}_i = \mathbf{0}$ ; de otra forma es positivo. Pero de (6.81) se tiene  $\mathbf{s}_i = \mathbf{s}_{pi} + \mathbf{s}_{fi}$ , donde  $\mathbf{s}_{pi}$  y  $\mathbf{s}_{fi}$  son ortogonales, es decir, ambos deben ser cero para que  $\mathbf{s}_i$  lo sea. En particular, se tiene  $\mathbf{s}_{fi} = \mathbf{J}_{\varphi_i}^+(\mathbf{q}_i) (\Delta \dot{\mathbf{p}}_i + \beta_i \Delta \mathbf{p}_i - \bar{\xi}_i \phi_i - \xi_i \Delta \mathbf{F}_i)$ , con  $\mathbf{J}_{\varphi_i}^+(\mathbf{q}_i)$  de rango completo. Entonces, en vista de las restricciones (3.10)-(3.12), se tiene que  $\mathbf{s}_{fi}$  es cero solamente si  $\bar{\xi}_i \phi_i + \xi_i \Delta \mathbf{F}_i$  lo es, esto es si

$$\phi_i = -\bar{\xi}_i^{-1} \xi_i \Delta \mathbf{F}_i. \quad (\text{B.92})$$

Comparando (B.91) con (B.92) se concluye que  $\frac{1}{2}\mathbf{s}_i^T \mathbf{H}_i(\mathbf{q}_i) \mathbf{s}_i$  y (B.90) no pueden ser simultáneamente cero a menos que tanto  $\phi_i$  como  $\Delta \mathbf{F}_i$  lo sean, porque  $\bar{\xi}_i$ ,  $\xi_i$  y  $\mathbf{B}_i$  son matrices diagonales definidas positivas. En otras palabras,  $V_i(\mathbf{x}_i) = 0$  si y sólo si  $\mathbf{x}_i = \mathbf{0}$ . Por ello, es una función continua definida positiva.

## B.7 Prueba del Teorema 6.4.1

Para poder emplear el Teorema 6.4.1, se tiene que encontrar un dominio  $\mathbb{D}_i$  para cada  $V_i(\mathbf{x}_i)$  tal que se satisfaga  $\dot{V}_i(\mathbf{x}_i) < 0$  en  $\mathbb{D}_i - \{\mathbf{0}\}$  (porque cada  $V_i(\mathbf{x}_i)$  es definida positiva en  $\mathbb{R}^{n_i}$ ). Haciendo esto, se puede probar que  $\mathbf{x}_i \rightarrow \mathbf{0}$  para toda  $i$ . Entonces, el Lema 6.4.1 puede ser empleado para analizar el comportamiento de las diferentes señales de los errores. Basado en la discusión de las Secciones 6.4 y B.5, se define cada dominio  $\mathbb{D}_i$  como

$$\mathbb{D}_i = \{\mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^{n_i} \mid \|\mathbf{x}_i\| \leq x_{\max_i}\}, \quad (\text{B.93})$$

donde  $x_{\max_i}$  se selecciona para satisfacer (B.85) y no se puede hacer arbitrariamente grande para garantizar  $\|\tilde{\mathbf{q}}_i\| \leq \eta_i$ . En  $\mathbb{D}_i$  se puede definir

$$\mu_{1i} \triangleq \max_{\|\mathbf{x}_i\| \leq x_{\max_i}} \|\mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_{ri})\| \quad (\text{B.94})$$

$$\mu_{2i} \triangleq \max_{\|\mathbf{x}_i\| \leq x_{\max_i}} \|\mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \mathbf{s}_i + \dot{\mathbf{q}}_{ri})\| \quad (\text{B.95})$$

$$\mu_{3i} \triangleq \max_{\|\mathbf{x}_i\| \leq x_{\max_i}} \|\mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \mathbf{s}_i + 2\dot{\mathbf{q}}_{ri})\| \quad (\text{B.96})$$

$$\mu_{4i} \triangleq M_{ei}(x_{\max_i})\lambda_{Hi} \quad (\text{B.97})$$

$$\lambda_{\mathbb{D}i} \triangleq \lambda_{\max}(\mathbf{D}_i). \quad (\text{B.98})$$

El siguiente paso es calcular la derivada de la función candidata de Lyapunov en (6.98), la cual puede ser reescrita como

$$V_i(\mathbf{x}_i) = \frac{1}{2}\mathbf{s}_i^T \mathbf{H}_i(\mathbf{q}_i)\mathbf{s}_i + \frac{1}{2}\mathbf{r}_i^T \mathbf{H}_i(\mathbf{q}_i)\mathbf{r}_i + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \phi_i^T & \Delta \mathbf{F}_i^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{N}_i \mathbf{B}_i^{-1} & -\mathbf{N}_i \\ -\mathbf{N}_i & \mathbf{N}_i \mathbf{B}_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_i \\ \Delta \mathbf{F}_i \end{bmatrix}.$$

Entonces, la derivada de (6.98) a lo largo de (6.38), (6.84), (6.90) y (6.95) puede ser calculada como

$$\begin{aligned} \dot{V}_i(\mathbf{x}_i) &= \frac{1}{2}\mathbf{s}_i^T \dot{\mathbf{H}}_i(\mathbf{q}_i)\mathbf{s}_i + \frac{1}{2}\mathbf{r}_i^T \dot{\mathbf{H}}_i(\mathbf{q}_i)\mathbf{r}_i \\ &\quad - \mathbf{s}_i^T \mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i)\mathbf{s}_i - \mathbf{s}_i^T \mathbf{K}_{\text{DR}i}\mathbf{s}_i \\ &\quad + \mathbf{s}_i^T \mathbf{K}_{\text{R}i}\mathbf{r}_i + \mathbf{s}_i^T \mathbf{J}_{\varphi_i}^T(\mathbf{q}_i) (\mathbf{B}_i^{-1} \mathbf{A}_i \phi_i + \mathbf{K}_{\text{Fi}} \Delta \mathbf{F}_i) \\ &\quad - \mathbf{s}_i^T \mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_{ri})\mathbf{s}_i + \mathbf{s}_i^T \mathbf{H}_i(\mathbf{q}_i)\mathbf{e}_i(\mathbf{r}_i) \\ &\quad - \mathbf{r}_i^T \mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i)\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_i^T \mathbf{H}_{\text{rd}i}\mathbf{r}_i \\ &\quad + \mathbf{r}_i^T \mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \mathbf{s}_i + \dot{\mathbf{q}}_{ri})\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_i^T \mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \mathbf{s}_i + 2\dot{\mathbf{q}}_{ri})\mathbf{s}_i \\ &\quad - \mathbf{r}_i^T \mathbf{K}_{\text{DR}i}\mathbf{s}_i + \mathbf{r}_i^T \mathbf{J}_{\varphi_i}^T(\mathbf{q}_i) (\mathbf{B}_i^{-1} \mathbf{A}_i \phi_i + \mathbf{K}_{\text{Fi}} \Delta \mathbf{F}_i) \\ &\quad + \begin{bmatrix} \phi_i^T & \Delta \mathbf{F}_i^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{N}_i \mathbf{B}_i^{-1} & -\mathbf{N}_i \\ -\mathbf{N}_i & \mathbf{N}_i \mathbf{B}_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \zeta_i \\ \Delta \lambda_i \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (\text{B.99})$$

Para simplificar (B.99) se debe tomar en cuenta que  $\mathbf{s}_i^T \mathbf{K}_{\text{R}i}\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_i^T \mathbf{K}_{\text{DR}i}\mathbf{s}_i = -\mathbf{s}_i^T \mathbf{D}_i\mathbf{r}_i$  y que  $\mathbf{s}_i^T \mathbf{J}_{\varphi_i}^T(\mathbf{q}_i) (\mathbf{B}_i^{-1} \mathbf{A}_i \phi_i + \mathbf{K}_{\text{Fi}} \Delta \mathbf{F}_i) = -\phi_i^T \bar{\boldsymbol{\xi}}_i \mathbf{B}_i^{-1} \mathbf{A}_i \phi_i - \phi_i^T (\bar{\boldsymbol{\xi}}_i \mathbf{K}_{\text{Fi}} + \bar{\boldsymbol{\xi}}_i \mathbf{B}_i^{-1} \mathbf{A}_i) \Delta \mathbf{F}_i - \Delta \mathbf{F}_i^T \bar{\boldsymbol{\xi}}_i \mathbf{K}_{\text{Fi}} \Delta \mathbf{F}_i$ . La última igualdad es válida en vista de la Propiedad 3.2.4, de (6.81) y por el hecho de que las restricciones (3.10) y (3.12) deben satisfacer a  $\mathbf{p}_i$ ,  $\dot{\mathbf{p}}_i$ ,  $\mathbf{p}_{di}$  y  $\dot{\mathbf{p}}_{di}$ . Además, se tiene

$$\begin{bmatrix} \phi_i^T & \Delta \mathbf{F}_i^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{N}_i \mathbf{B}_i^{-1} & -\mathbf{N}_i \\ -\mathbf{N}_i & \mathbf{N}_i \mathbf{B}_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \zeta_i \\ \Delta \lambda_i \end{bmatrix} = -\phi_i^T \mathbf{N}_i \mathbf{B}_i^{-1} \mathbf{A}_i \phi_i + \Delta \mathbf{F}_i^T \mathbf{N}_i \mathbf{A}_i \phi_i$$

en vista de (6.84). Recordando que  $\mathbf{N}_i = (\boldsymbol{\xi}_i \mathbf{B}_i^{-1} \mathbf{A}_i + \bar{\boldsymbol{\xi}}_i \mathbf{K}_{\text{Fi}}) \mathbf{A}_i^{-1}$  y definiendo  $\mathbf{E}_i \triangleq \bar{\boldsymbol{\xi}}_i \mathbf{B}_i^{-1} \mathbf{A}_i + \boldsymbol{\xi}_i \mathbf{B}_i^{-2} \mathbf{A}_i + \bar{\boldsymbol{\xi}}_i \mathbf{K}_{\text{Fi}} \mathbf{B}_i^{-1}$ , (B.99) puede ser simplificado a

$$\begin{aligned} \dot{V}_i(\mathbf{x}_i) \leq & - \mathbf{s}_i^\top \mathbf{K}_{\text{R}_i} \mathbf{s}_i - \mathbf{r}_i^\top \mathbf{H}_{\text{rd}_i} \mathbf{r}_i \\ & - \boldsymbol{\phi}_i^\top \mathbf{E}_i \boldsymbol{\phi}_i - \Delta \mathbf{F}_i^\top \boldsymbol{\xi}_i \mathbf{K}_{\text{Fi}} \Delta \mathbf{F}_i \\ & - \mathbf{s}_i^\top \mathbf{D}_i \mathbf{r}_i + \mathbf{s}_i^\top \mathbf{H}_i(\mathbf{q}_i) \mathbf{e}_i(\mathbf{r}_i) - \mathbf{r}_i^\top \mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \mathbf{s}_i + 2\dot{\mathbf{q}}_{\text{ri}}) \mathbf{s}_i \\ & + \mathbf{r}_i^\top \mathbf{J}_{\varphi_i}^\top(\mathbf{q}_i) \mathbf{B}_i^{-1} \mathbf{A}_i \boldsymbol{\phi}_i + \mathbf{r}_i^\top \mathbf{J}_{\varphi_i}^\top(\mathbf{q}_i) \mathbf{K}_{\text{Fi}} \Delta \mathbf{F}_i \\ & - \mathbf{s}_i^\top \mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_{\text{ri}}) \mathbf{s}_i + \mathbf{r}_i^\top \mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \mathbf{s}_i + \dot{\mathbf{q}}_{\text{ri}}) \mathbf{r}_i, \end{aligned} \quad (\text{B.100})$$

tomando en cuenta la Propiedad 3.2.3. Puesto que sólo se está interesado en el comportamiento de  $\dot{V}_i(\mathbf{x}_i)$  para  $\mathbf{x}_i$  en  $\mathbb{D}_i$ , se tiene de (B.94)–(B.98)

$$\begin{aligned} \dot{V}_i(\mathbf{x}_i) \leq & - \lambda_{\min}(\mathbf{K}_{\text{R}_i}) \|\mathbf{s}_i\|^2 - \lambda_{\min}(\mathbf{H}_{\text{rd}_i}) \|\mathbf{r}_i\|^2 \\ & - \lambda_{\min}(\mathbf{E}_i) \|\boldsymbol{\phi}_i\|^2 - \lambda_{\min}(\boldsymbol{\xi}_i \mathbf{K}_{\text{Fi}}) \|\Delta \mathbf{F}_i\|^2 \\ & + \mu_{1i} \|\mathbf{s}_i\|^2 + \mu_{2i} \|\mathbf{r}_i\|^2 \\ & + (\lambda_{\text{D}_i} + \mu_{3i} + \mu_{4i}) \|\mathbf{s}_i\| \|\mathbf{r}_i\| \\ & + c_{1i} b_i a_i \|\mathbf{r}_i\| \|\boldsymbol{\phi}_i\| + c_{1i} \lambda_{\max}(\mathbf{K}_{\text{Fi}}) \|\mathbf{r}_i\| \|\Delta \mathbf{F}_i\|, \end{aligned} \quad (\text{B.101})$$

donde  $c_{1i}$  está dado en (4.3) y

$$b_i \triangleq \max\{b_{jj}^{-1}\} \quad (\text{B.102})$$

$$a_i \triangleq \max\{a_{jj}\}. \quad (\text{B.103})$$

$a_{jj}$  y  $b_{jj}$ , con  $j = 1, \dots, n_i$ , son elementos de  $\mathbf{A}_i$  y  $\mathbf{B}_i$ , respectivamente. El siguiente paso es escoger las diferentes ganancias para garantizar que  $\dot{V}_i(\mathbf{x}_i) < 0$  en  $\mathbb{D}_i - \{\mathbf{0}\}$ . Primero, considérese  $\lambda_{\min}(\mathbf{K}_{\text{R}_i})$  en (6.103) y  $k_{\text{di}}$  en (6.104), de tal forma que se tiene de (B.101)

$$\begin{aligned} & - (\mu_{1i} + 1 + \delta_i) \|\mathbf{s}_i\|^2 - \left( \lambda_{\text{hi}} \left( \frac{\lambda_{\max}(\mathbf{K}_{\text{R}_i}) + \omega_i}{\lambda_{\text{hi}}} \right) - \lambda_{\max}(\mathbf{K}_{\text{R}_i}) \right) \|\mathbf{r}_i\|^2 \\ & + \mu_{1i} \|\mathbf{s}_i\|^2 + \mu_{2i} \|\mathbf{r}_i\|^2 + (\lambda_{\text{D}_i} + \mu_{3i} + \mu_{4i}) \|\mathbf{s}_i\| \|\mathbf{r}_i\| \leq \\ & - \delta_i \|\mathbf{s}_i\|^2 - \delta_i \|\mathbf{r}_i\|^2 - \left( \frac{1}{4} c_{1i}^2 a_i^2 b_i^2 + \frac{1}{4} c_{1i}^2 \lambda_{\max}^2(\mathbf{K}_{\text{Fi}}) \right) \|\mathbf{r}_i\|^2, \end{aligned}$$

porque  $\omega_i = \mu_{2i} + \frac{1}{4} (\lambda_{\text{D}_i} + \mu_{3i} + \mu_{4i})^2 + \delta_i + \frac{1}{4} c_{1i}^2 a_i^2 b_i^2 + \frac{1}{4} c_{1i}^2 \lambda_{\max}^2(\mathbf{K}_{\text{Fi}})$ . Entonces, de (B.101) se tiene

$$\begin{aligned} \dot{V}_i(\mathbf{x}_i) \leq & - \delta_i \|\mathbf{s}_i\|^2 - \delta_i \|\mathbf{r}_i\|^2 - \left( \frac{1}{4} c_{1i}^2 a_i^2 b_i^2 + \frac{1}{4} c_{1i}^2 \lambda_{\max}^2(\mathbf{K}_{\text{Fi}}) \right) \|\mathbf{r}_i\|^2 \\ & - \lambda_{\min}(\mathbf{E}_i) \|\boldsymbol{\phi}_i\|^2 - \lambda_{\min}(\boldsymbol{\xi}_i \mathbf{K}_{\text{Fi}}) \|\Delta \mathbf{F}_i\|^2 \\ & + c_{1i} b_i a_i \|\mathbf{r}_i\| \|\boldsymbol{\phi}_i\| + c_{1i} \lambda_{\max}(\mathbf{K}_{\text{Fi}}) \|\mathbf{r}_i\| \|\Delta \mathbf{F}_i\|. \end{aligned} \quad (\text{B.104})$$

Finalmente, considerando  $\lambda_{\min}(\mathbf{E}_i)$  in (6.105) y  $\lambda_{\min}(\boldsymbol{\xi}_i \mathbf{K}_{\text{Fi}})$  en (6.106) es fácil concluir que

$$\dot{V}_i(\mathbf{x}_i) \leq -\delta_i \|\mathbf{s}_i\|^2 - \delta_i \|\mathbf{r}_i\|^2 - \delta_i \|\boldsymbol{\phi}_i\|^2 - \delta_i \|\Delta \mathbf{F}_i\|^2, \quad (\text{B.105})$$



ó

$$\dot{V}_i(\mathbf{x}_i) \leq -\delta_i \|\mathbf{x}_i\|^2. \quad (\text{B.106})$$

Aplicando el Teorema 6.4.1 se concluye que  $\mathbf{x}_i \rightarrow \mathbf{0}$ . De la definición (6.45) se tiene directamente

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{z}_i = \mathbf{0} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \dot{\mathbf{z}}_i = \mathbf{0}.$$

Además, en vista de (B.93) se tiene  $\|\mathbf{x}_i\| \leq x_{\max_i}$  (y así  $\|\tilde{\mathbf{q}}_i\| \leq \eta_i$  de la discusión en las Secciones B.4 y B.5), por lo que del Lema 6.4.1 a) y b), se tiene

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \Delta \dot{\mathbf{p}}_i = \mathbf{0} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \Delta \mathbf{p}_i = \mathbf{0} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \dot{\tilde{\mathbf{q}}}_i = \mathbf{0} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{\mathbf{q}}_i = \mathbf{0}.$$

Para aplicar c) del Lema 6.4.1, se necesita solamente mostrar que  $\dot{\tilde{\mathbf{q}}}_i$  está acotado, lo que es cierto porque  $\ddot{\tilde{\mathbf{q}}}_i$  y  $\dot{\tilde{\mathbf{q}}}_{di}$  están acotados. De esta manera, se tiene

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \Delta \boldsymbol{\lambda}_i = \mathbf{0}.$$

Finalmente, la convergencia a cero de todo el sistema se puede demostrar usando

$$V = \sum_{i=1}^l V_i(\mathbf{x}_i).$$

Nótese que una región de atracción no ha sido calculada explícitamente. Sin embargo, el subconjunto  $\mathbb{D}_i$  no puede hacerse arbitrariamente grande dado que  $\|\tilde{\mathbf{q}}_i\| \leq \eta_i$  debe satisfacerse todo el tiempo.



# Bibliografía

- Arimoto, S., Y. Liu y T. Naniwa.** 1993a. Model-based adaptive hybrid control for geometrically constrained robots. *Proc. IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation* 618–623.
- Arimoto, S., Y. Liu y T. Naniwa.** 1993b. The orthogonalization principle for robot manipulators. *IFAC Congress on Automatic Control* 1. 507–512.
- Arnold, V.** 1989. *Mathematical Methods of Classical Mechanics*. Springer-Verlag.
- Arteaga Pérez, M.** 1998. On the properties of a dynamic model of flexible robot manipulators. *ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control* 120. 8–14.
- Arteaga Pérez, M. y R. Kelly.** 2004. Robot control without velocity measurements: New theory and experimental results.. *IEEE Transactions on Robotics and Automation* 20(2). 297–308.
- Baumgarte, J.** 1972. Stabilization of constraints and integrals of motion in dynamical systems. *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.* 1. 1–16.
- Cole, A.** 1990. Constrained motion of grasped objects by hybrid control. *Proceedings of the 1990 IEEE International Conference on Robotics and Automation* 1954–1960.
- Cole, A., P. Hsu y S. Sastry.** 1992. Dynamic control of sliding by robot hands for regrasping. *IEEE International Conference on Robotics and Automation* 8. 42–52.
- Greenwood, D.** 1988. *Principles of Dynamics*. : Prentice Hall.
- Gudiño-Lau, J., M. Arteaga Pérez, L. Muñoz y V. Parra-Vega.** 2004. On the control of cooperative robots without velocity measurements. *IEEE Transactions on Control Systems Technology* 12(4). 600–608.
- Gudiño-Lau, J. y M. A. Arteaga Pérez.** 2004. Dynamic model of cooperative robots: A case study. *Aceptado en Robotica*.
- Gudiño-Lau, J., J. Martínez, E. Pérez-Camacho y M. Arteaga.** 2002. Experimental comparison of different adaptive algorithms on an industrial robot. *Congreso Latinoamericano de Control Automático*. CLCA. Guadalajara, México.
- Jankowski, K., H. ElMaraghy y W. ElMaraghy.** 1993. Dynamic coordination of multiple robot arms with flexible joints. *International Journal of Robotics Research* 12(6). 505–528.

- Khalil, H.** 2002. *Nonlinear Systems Third Edition*. U.S.A.: Prentice Hall. 746p.
- Kuc, T., J. Lee y B. Park.** 1994. Learning control of cooperating robot manipulators handling an unknown object. *IEEE International Conference on System* 3. 3354–3339.
- Li, z. y S. Sastry.** 1989. Grasping and coordinated manipulation by a multifingered robot hand. *International Journal of Robotics Research* 8(4). 33–50.
- Liu, G., J. Li y Z. Li.** 2002. Coordinated manipulation of objects by multifingered robotic hand in contact space and active joint space. *IEEE International Conference on Robotics and Automation* 4. 3743–3748.
- Liu, Y. y S. Arimoto.** 1996. Implicit and explicit force controllers for rheo–holonomically constrained manipulators and their extention to distributed cooperation control. *IFAC. 13th Triennial World Congress* 1–6.
- Liu, Y., S. Arimoto y K. Kitagaki.** 1995. Adaptive control for holonomically constrained robots: time-invariant and time-variant cases. *IEEE International Conference on Robotics and Automation* 905–912.
- Liu, Y., S. Arimoto y T. Ogasawara.** 1996. Decentralized cooperation control: Non-communication object handling. *IEEE International Conference on Robotics and Automation* 2414–2419.
- Liu, Y., S. Arimoto, V. Parra-Vega y K. Kitagaki.** 1995. Adaptive distributed cooperation controller for multiple manipulators. *Proc. IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation* 489–494.
- Liu, Y., S. Arimoto, V. Parra-Vega y K. Kitagaki.** 1997. Decentralized adaptive control of multiple manipulators in cooperations. *International Journal of Control* 67(5). 649–673.
- Mason, M. y J. Salisbury.** 1985. *Robot Hands and the Mechanics of Manipulation*. London: The MIT Press.
- Montana, D.** 1988. The kinematics of contact and grasp. *International Journal of Robotics Research* 7(3). 743–748.
- Murray, R., Z. Li y S. Sastry.** 1994. *A Mathematical Introduction to Robotic Manipulation*. Boca Raton, Florida, U. S. A.: CRC Press.
- Naniwa, T., S. Arimoto y K. Wada.** 1997a. Learning and adaptive controls for coordination of multiple manipulators holding a geometrically constrained object. *IEEE International Conference on Intelligent Robots* 1. 484–494.
- Naniwa, T., S. Arimoto y K. Wada.** 1997b. Learning and adaptive controls for coordination of multiple manipulators without knowing physical parameters of a object. *IEEE International Conference on Robotics and Automation* 2. 1496–1502.

- Orin, D.** y **S. Oh.** 1981. Control of force distribution in robotic mechanisms containing closed kinematics chains. *ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control* 102. 134–141.
- Ortega, R.** y **M. W. Spong.** 1989. Adaptive motion control of rigid robots: a tutorial. *Automatica* 25(6). 877–888.
- Parra-Vega, V.** y **S. Arimoto.** 1996. A passivity–based adaptive sliding mode position–force control for robot manipulators. *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing* 10. 365–377.
- Parra-Vega, V., A. Rodríguez-Ángeles, S. Arimoto** y **G. Hirzinger.** 2001. High precision constrained grasping with cooperative adaptive control. *Journal of Intelligent and Robotic System* 32. 235–254.
- Schlegl, T., M. Buss, T. Omata** y **G. Schmidt.** 2001. Fast dextrous regrasping with optimal contact forces and contact sensor based impedance control. *IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation* 103–109.
- Sciavicco, L.** y **B. Siciliano.** 2000. *Modeling and Control of Robot Manipulators*. 2<sup>th</sup> Edition: McGraw-Hill.
- Spong, M., F. Lewis** y **C. Abdallah.** 1993. *Robot Control*. 1<sup>th</sup> Edition: IEEE Press.
- Yoshikawa, T.** y **X. Zheng.** 1991. Coordinated dynamic control for multiple robotic mechanisms handling an object. *IEEE/RSJ International Workshop on Intelligent Robots and Systems* 315–320.