



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO**

**FACULTAD DE INGENIERÍA  
DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO**

**DETERMINACIÓN SIMULTÁNEA DE ESPESOR  
Y CONSTANTE DIELECTRICA DE  
RECUBRIMIENTOS UTILIZANDO SENSORES  
CAPACITIVOS**

**T E S I S**

**QUE PARA OBTENER EL GRADO DE**

**MAESTRÍA EN INGENIERÍA ELÉCTRICA**

**P R E S E N T A**

**ASUR GUADARRAMA SANTANA**



**DIRECTOR DE TESIS  
DR. AUGUSTO GARCÍA VALENZUELA**

**CD. UNIVERSITARIA, MÉXICO D.F.**

**NOVIEMBRE 2005**

## **Agradecimientos**

Al Dr. Augusto García Valenzuela que gracias a su apoyo y tutoría se realizó este trabajo.

A los Doctores Charles Neil Bruce Davison, Juan Arnaldo Hernández Cordero, Celia A. Sánchez Pérez y Gabriel Eduardo Sandoval Romero por sus sugerencias al trabajo escrito y por haber formado parte del jurado en el examen de grado.

Al Posgrado de Ingeniería Eléctrica.

Al Claustro de Instrumentación.

A la Subcomisión del PASPA del CCADET.

Al taller de Óptica especialmente al técnico en fabricación Blas Sánchez.

---

**ÍNDICE**

<b>Capítulo 1 Introducción</b>	<b>1</b>
<b>Capítulo 2 Electrostática</b>	<b>4</b>
2.1 Aproximaciones	4
2.2 Cargas y campos	5
2.3 La corriente de conducción y de desplazamiento	7
2.4 La ley de Gauss	8
2.5 La ecuación de Poisson y de Laplace	9
2.6 La carga inducida	10
2.7 Superposición	10
2.8 Imágenes de carga	10
2.10 Capacitancia	11
2.11 Cálculo de la capacitancia en placas paralelas	12
2.12 Soluciones aproximadas	12
Análisis de Elemento Finito (AEF)	12
<b>Capítulo 3 Sensores capacitivos</b>	<b>14</b>
3.1 Tipos de sensores capacitivos	14
3.2 Mediciones con sensores capacitivos	15
3.3 Guardas y capacitancias parásitas	18
3.4 Ventajas de los capacitores esféricos para medir espesor	21
<b>Capítulo 4 Método de imágenes</b>	<b>24</b>
4.1 Análisis de una carga puntual $Q$ próxima a una esfera conductora con potencial cero	25
La carga imagen	25
4.2 Análisis con dos esferas conductoras una de las cuales esta a potencial cero	26
Relaciones recursivas	29
4.3 Análisis con una esfera conductora cargada próxima a un plano conductor y a potencial cero	30
4.3.1 Esfera cargada próxima a un plano conductor a potencial cero	31
Relaciones recursivas	34
4.4 Imágenes en medios dieléctricos	35
4.5 Imágenes múltiples	37

---

<b>Capítulo 5 Planteamiento teórico del problema</b>	<b>39</b>
5.1 Aproximación analítica utilizando el método de imágenes en medios dieléctricos	40
5.2 Descripción del método gráfico	46
5.3 Simulación numérica con elemento finito	47
5.4 Resultados de la simulación en 2D	48
<b>Capítulo 6 Desarrollo experimental</b>	<b>51</b>
6.1 Diseño del sensor capacitivo	51
6.2 Sistema de medición	54
6.3 Selección de los electrodos	56
6.4 Curvas de calibración	58
6.5 Resultados	64
6.6 Características de los equipos de instrumentación para realizar las mediciones	67
<b>Capítulo 7 Diseño de la geometría de un electrodo no plano para sensor Capacitivo</b>	<b>68</b>
7.1 Criterios de diseño	68
<b>Capítulo 8 Conclusiones y discusión</b>	<b>77</b>
<b>Referencias</b>	<b>79</b>
<b>Apéndice 1 Fundamentos teóricos</b>	<b>82</b>
A1.1 Ley de Coulomb	82
A1.2 El campo eléctrico	84
Las líneas de fuerza	85
Cálculos de E	87
Una carga puntual en un campo eléctrico	88
Un dipolo en un campo eléctrico	89
A1.3 La ley de Gauss	90
El flujo	90
El flujo del campo eléctrico	92
La ley de Gauss	94
La ley de Gauss y la ley de Coulomb	95
A1.4 El potencial eléctrico	96
El potencial y el campo eléctrico	97
El potencial debido a una carga puntual	100
A1.5 Capacitores y dieléctricos	101
Cálculo de la capacitancia	102
Capacitor de placas paralelas con un dieléctrico	103
Capacitancia de una esfera aislada	105

---

**Apéndice 2 Análisis de potencial y campo eléctrico del capítulo 4** **107**

<b>A2.1</b> Análisis de potencial y campo eléctrico de una carga puntual $Q$ próxima a una esfera conductora con potencial cero (sección 4.1)	107
El potencial	107
Componente radial del campo	107
La carga inducida en el conductor esférico	108
<b>A2.2</b> Análisis de potencial y campo eléctrico con dos esferas conductoras y una a potencial cero (sección 4.2)	109
Campo y potencia producido por la sucesión de cargas	109
<b>A2.3</b> Análisis de potencial y campo eléctrico con una esfera conductora cargada próxima a un plano conductor y a potencial cero (sección 4.3)	110
Campo y potencial producido por el conjunto de cargas Puntuales	110
<b>A2.4</b> Análisis de potencial y campo eléctrico de imágenes en medios dieléctricos (sección 4.4)	112
Campo y potencial producido por la superposición de las cargas en dos medios $\epsilon_1$ y $\epsilon_2$	112

---

**Apéndice 3 La permitividad** **113**

<b>A3.1</b> Permitividad del vacío	113
<b>A3.2</b> Permitividad en el medio	113
<b>A3.3</b> Clasificación de materiales	114
<b>A3.4</b> Materiales reales	114
<b>A3.4</b> La constante dieléctrica	115

---

## 1. INTRODUCCIÓN

Los recubrimientos dieléctricos son elementos tecnológicos muy importantes que se utilizan como capas protectoras en metales, además varios dispositivos electrónicos y ópticos están basados en ellos. En microelectrónica, por ejemplo, los materiales con constante dieléctrica alta son muy importantes para aumentar la capacitancia de elementos capacitivos y por consecuencia aumentar la retención de carga eléctrica. Con esto se disminuye el consumo de corriente eléctrica en el circuito, el calentamiento de los componentes electrónicos y se consigue alargar la vida de la fuente de alimentación, usualmente baterías.

Dado que, la caracterización de recubrimientos dieléctricos es una necesidad común en laboratorios de investigación y en la industria, muy a menudo se requiere una técnica no destructiva. Existen varios métodos no destructivos disponibles para caracterizar recubrimientos dieléctricos y películas delgadas. Las técnicas utilizadas más comúnmente para caracterizar películas delgadas son elipsometría óptica y espectrometría de reflectancia [1]. Sin embargo existen otras como la fotoacústica .

La elipsometría [2] es una técnica de caracterización óptica que se basa en la medida del cambio de polarización del haz de luz incidente después de la reflexión superficial de una muestra. A partir de la medida del estado de polarización de la luz reflejada por la superficie de la muestra es posible determinar las constantes ópticas de la muestra. La medida de los parámetros ópticos (índice de refracción, coeficiente de extinción), en combinación con un modelo físico de la estructura de capas del material, permite determinar la respuesta dieléctrica del sistema. Es posible obtener el espesor y el índice de refracción para estructuras de una sola capa sobre un sustrato. El principal inconveniente de este método, cuando se utiliza un solo haz monocromático, es que se debe tener una idea previa aproximada del orden de magnitud del espesor de la capa que se está midiendo .

El método de la envolvente [3] es una técnica bastante precisa y de rápida aplicación, consiste en el análisis del espectro de transmisión, sin embargo solo sirve para sustratos transparentes y películas delgadas  $< 10 \mu\text{m}$ .

Otra técnica que puede ayudar en este proceso de caracterización se basa en el efecto fotoacústico (FA) [4], [5]. Este se presenta al radiar con luz, de manera periódica, a una muestra que puede ser sólida, líquida o gaseosa, ópticamente transparente u opaca. La luz periódica es absorbida y el proceso de desexcitación no radiativo da lugar a calentamiento periódico en la muestra, este calor puede ser transmitido a una delgada capa de aire que se encuentre en contacto con ella, causando cambios periódicos muy leves en la temperatura de la capa de aire y por lo tanto, también en la presión, creándose una onda sonora que puede ser detectada. Este efecto fue descubierto por primera vez en 1880 por Alexander Graham Bell, pero no fue hasta que Rosencwaig y Gersho argumentaron

sólidamente su teoría y se empezó a usar con mucha eficiencia como técnica de caracterización óptica y térmica. En espectroscopía este efecto ha permitido medir de manera muy exacta la absorbancia de materiales en diferentes estados, ya que la señal que se detecta, emana directamente de la muestra, evitando los problemas de dispersión de luz que se tienen en los espectrofotómetros. Sin embargo, en recubrimientos puede ser que la longitud de difusión térmica de la muestra sea menor que su espesor .

Aunque estas son técnicas muy bien establecidas, ellas requieren de equipo sofisticado y caro. Además las técnicas ópticas llegan a ser menos confiables para recubrimientos (muchas longitudes de onda de espesor) y están limitadas debido a inhomogeneidades del recubrimiento a escalas de la longitud de onda utilizada.

Por otro lado, la capacitancia de estructuras de diseño especial pueden ser muy sensibles al desplazamiento, forma, o constante dieléctrica de materiales. No obstante, en muchos casos, las medidas de capacitancia son relativamente simples. Existen varias formas para medir capacitancia. Están disponibles comercialmente varios circuitos o instrumentos electrónicos para medir capacitancia en el rango de los microfaradios ( $\mu\text{F}$ ) a los femtofaradios (fF). Generalmente, las mayores preocupaciones con las mediciones capacitivas son las capacitancias parásitas, las variaciones de temperatura y la humedad relativa, las cuales siempre están presentes en algún grado. En la mayoría de los casos, es posible controlar estos factores durante las mediciones.

Con las mediciones de capacitancia no es difícil medir el espesor de una película dieléctrica sobre un sustrato conductor si su constante dieléctrica es conocida o viceversa. Sin embargo, cuando no se conoce ni la constante dieléctrica ni el espesor, no existen metodologías reconocidas para caracterizar la película dieléctrica con mediciones capacitivas.

Este trabajo propone y estudia nuevas metodologías para la caracterización de recubrimientos dieléctricos delgados sobre sustratos conductivos por medio de un sensor capacitivo. Se trata de mostrar que es posible medir, por métodos no destructivos, la constante dieléctrica y el espesor de recubrimientos dieléctricos usando dos electrodos de medición con diferente geometría, al menos uno de los cuales debe ser no plano. Se analiza teóricamente una aproximación del problema utilizando el método de imágenes, se realizan simulaciones por medio del Análisis de Elemento Finito (AEF) y se comparan con resultados experimentales para corroborar la viabilidad del método. Se obtienen curvas de calibración en función de los espesores y constantes dieléctricas de diferentes recubrimientos dentro de un espacio de capacitancia  $C_1 - C_2$  que se utiliza para obtener el espesor y constante dieléctrica por medio de un punto de capacitancia ( $C_1, C_2$ ) generado por dos mediciones capacitivas, con dos electrodos de diferente geometría, de un recubrimiento dado. Finalmente, se propone una metodología para el diseño de la geometría de electrodos del sensor capacitivo basado en el electrodo esférico con ayuda del Análisis de Elemento Finito, con el fin de mejorar la respuesta del sensor capacitivo utilizado en la caracterización de recubrimientos dieléctricos.

Estas metodologías capacitivas de caracterización de recubrimientos y diseño de electrodos capacitivos propuestas en este trabajo requieren de muestras de calibración bien caracterizadas para mejorar la confiabilidad de las curvas de calibración el cual es una de las condiciones más importante antes de aplicar el método.

A comparación de los métodos mencionados anteriormente este método propuesto es relativamente sencillo de realizar puesto que solamente se realizan dos mediciones capacitivas. Además con este método no se ve problema en escalar las mediciones a las decenas de micras sin embargo, el equipo de medición deberá ser capaz de medir capacitancias en el orden de los femto Faradios ( $10^{-15}$  Faradios).

## 2. ELECTROSTÁTICA

La electrostática es el estudio de las cargas eléctricas, campos eléctricos y corrientes independientes del tiempo, los dieléctricos y las fuentes de potencial de DC. Un condensador eléctrico consiste en dos conductores separados por un dieléctrico (sólido líquido o gaseoso), o el vacío. La relación entre la carga  $Q$ , y la diferencia de potencial,  $V$ , entre ellos viene descrita por la capacitancia,  $C=Q/V$ . Esta capacitancia depende de la disposición geométrica de los electrodos y del material dieléctrico dispuesto entre ellos,  $C=C(\epsilon,G)$ . Por ejemplo, para un condensador formado por  $n$  placas planas paralelas iguales, con área  $A$ , distancia  $d$  entre cada par, y un material entre ellas con constante dieléctrica relativa  $\epsilon_r$ , la capacitancia aproximada es

$$C \approx \epsilon_0 \epsilon_r \frac{A}{d} (n-1), \quad (2.1)$$

donde  $\epsilon_0=8.85$  pF/m es la constante dieléctrica del vacío.

Algunas aplicaciones para sensores capacitivos pueden utilizar electrodos con geometría no plana; estos pueden necesitar un análisis más extenso del campo electrostático. Existen algunas herramientas de análisis como métodos numéricos de elemento finito para realizar simulaciones de estos campos [6].

### 2.1 Aproximaciones

El diseño de los sensores capacitivos en el mundo real involucran cargas en movimiento, superficies parcialmente conductoras, y fuentes de potencial de AC. Para un análisis preciso de los campos y las corrientes que se forman en el capacitor, se deberían utilizar las ecuaciones de Maxwell que relacionan los campos eléctricos y magnéticos, la densidad de carga, y la densidad de corriente. Pero una aproximación simplificada, la cual ignora los campos magnéticos, es casi siempre posible con pérdidas de precisión insignificantes. Los sistemas en los cuales esta aproximación es razonable están definidos como cuasi-electrostáticos.

Las ecuaciones de Maxwell describen el fenómeno más confuso de una onda electromagnética. Por supuesto, el análisis es difícil y no siempre necesario. El fenómeno de la onda ocurre en escalas de tiempo cortas o a altas frecuencias que a menudo no son de interés práctico. Si este es el caso, los campos se pueden describir por versiones truncadas de las ecuaciones de Maxwell aplicadas a escalas de tiempo relativamente largas y a bajas frecuencias. Encontraremos que un sistema compuesto de conductores perfectos y espacio libre es cuasi-electrostático si una onda electromagnética tiene una longitud de onda mucho menor que las dimensiones en el problema de interés. Las mediciones del sensor capacitivo que se propone en este trabajo son casi todas pequeñas y lentas en sus aplicaciones, además todos los electrodos son conductivos por lo que su

constante de tiempo es mucho menor que los tiempos de respuesta del circuito electrónico utilizado, de esta forma podemos utilizar versiones simplificadas de las ecuaciones de Maxwell:

$$\nabla \times E = -\frac{\partial}{\partial t} \mu_0 H \approx 0 \quad (2.1.1)$$

$$\nabla \times H = \frac{\partial}{\partial t} \epsilon_0 E + J \approx 0 \quad (2.1.2)$$

$$\nabla \cdot \epsilon_0 E = \rho \quad (2.1.3)$$

$$\nabla \cdot \mu_0 H = 0 \quad (2.1.4)$$

Una distribución de densidad de carga  $\rho$  dada produce la intensidad de campo eléctrico  $\mathbf{E}$ ; la intensidad de campo magnético  $\mathbf{H}$  es aproximadamente cero.

La permeabilidad magnética del vacío,  $\mu_0$ , es una constante física fundamental, definida en el SI de unidades como  $4\pi \times 10^{-7}$  N/A<sup>2</sup>. La permitividad eléctrica del vacío  $\epsilon_0$ , se define por  $\mu_0$  y  $c$ , la velocidad de la luz en el vacío, como  $\epsilon_0 = 1/\mu_0 c^2$ . Como  $c$  se define exactamente como 299,792,458 m/s, entonces

$$\epsilon_0 = 8.8541878 \times 10^{-12} \text{ F/m}$$

Cualquier material dieléctrico tiene una permitividad dieléctrica mayor que la del vacío; se mide como la constante dieléctrica relativa  $\epsilon_r$ , en el rango de 2 a 10 para la mayoría de materiales sólidos y a menudo mucho mayor para líquidos [6].

## 2.2 Cargas y campos

Con las ecuaciones de Maxwell simplificadas, el análisis electrostático se reduce a obtener el campo eléctrico producido por varias distribuciones de carga en sistemas de materiales con varias constantes dieléctricas.

Dos pequeños conductores cargados en un dieléctrico con cargas de  $Q_1$  y  $Q_2$  coulombs, separados por  $r$  metros, ejercen una fuerza entre estas en newtons

$$F = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi \epsilon_0 \epsilon_r r^2} \quad (2.2.1)$$

La fuerza es a lo largo de la línea que conecta a las cargas y tratará de atraer las cargas si el signo de su carga es opuesta.

El coulomb es una cantidad de carga grande. Es la carga transportada por una corriente de un Ampere en un segundo; como un electrón tiene una carga de

$1.60206 \times 10^{-19}$  C, un coulomb es alrededor de  $6 \times 10^{18}$  electrones. La fuerza entre dos cargas de 1 C espaciadas a 1 mm es  $9 \times 10^{15}$  N, aproximadamente 30 veces el peso de la tierra. Pero las fuerzas electrostáticas a menudo se pueden despreciar en sistemas prácticos, esto es porque la carga es usualmente mucho menor a un coulomb.

Con  $V$  volts aplicados al capacitor de placas paralelas con área de placa de  $A$  metros cuadrados y espaciadas  $d$  metros, la energía almacenada en el capacitor es

$$E = \frac{1}{2} CV^2 = \frac{1}{2} \epsilon_0 \epsilon_r \frac{A}{d} \cdot V^2, \quad (2.2.2)$$

y la fuerza en newtons es entonces la derivada parcial de la energía con respecto al espaciamiento de la placa

$$F = \frac{\partial E}{\partial d} = \frac{1}{2} \frac{C}{d} V^2 = \frac{-\epsilon_0 \epsilon_r}{2} \frac{A}{d^2} \cdot V^2 = -4.427 \times 10^{-12} \epsilon_r \frac{AV^2}{d^2}. \quad (2.2.3)$$

Las fuerzas transversales son pequeñas para las geometrías de una sola placa, y se pueden hacer insignificantes con placas sobrepuestas; para algunas estructuras interpuestas estas fuerzas pueden ser significativas y se pueden calcular utilizando la derivada parcial de la energía con movimiento transversal. Para un capacitor largo con dieléctrico de aire cargado a 1 V de DC y compuesto de dos placas cuadradas de 1 m espaciadas 1 mm, la fuerza entre las placas es de atracción a  $4.427 \times 10^{-6}$  N. Esta fuerza puede ser molesta en algunas aplicaciones sensitivas porque se puede presentar una deformación de las placas y esto causaría una variación en la distancia de separación de las placas provocando una variación de la capacitancia. La operación de AC no ofrece una solución a las fuerzas electrostáticas no deseadas porque ambos medios ciclos positivos y negativos son de atracción, pero la fuerza pequeña no afecta la mayoría de los diseños de sensores capacitivos, y se pueden balancear a cero por medio del uso preferido de la geometría de tres electrodos del sensor capacitivo.

Dos placas conductoras cargadas ilustran el concepto de campo eléctrico, como se muestra en la figura 2.2.1.

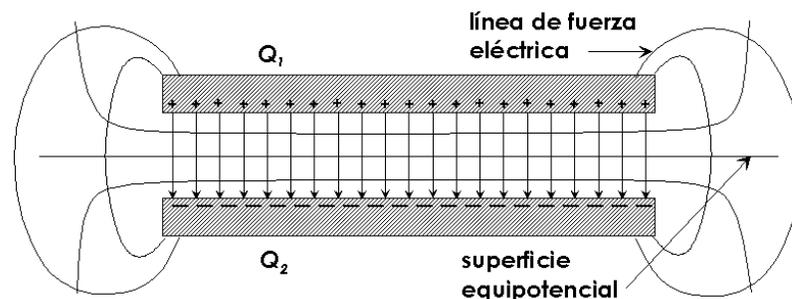


Figura 2.2.1. Campo eléctrico para placas paralelas.

Si a las placas se les asigna arbitrariamente un voltaje, por ejemplo, un potencial escalar  $V$  entre 0 y 1 volt, se puede asignar un voltaje en cualquier punto en el espacio. Las superficies equipotenciales son las superficies en donde el voltaje es el mismo. El campo eléctrico  $\mathbf{E}$ , un vector de cantidad, es el gradiente del voltaje  $V$  y se define como

$$E = -\frac{dv}{dn} = -\text{grad}V = -\nabla V \quad V/m, \quad (2.2.4)$$

en donde  $n$  es un elemento diferencial perpendicular a la superficie equipotencial en ese punto.

En la figura 2.2.1 se muestran el capacitor con los campos de las placas paralelas, las superficies de  $V$  constante son superficies equipotenciales y las líneas en la dirección del campo eléctrico máximo son las líneas de fuerza.

El voltaje a lo largo de cualquier camino entre dos puntos  $a$  y  $b$  se puede calcular como

$$V_{ab} = \int_a^b -E \cdot dn \quad V. \quad (2.2.5)$$

En la región lineal cerca del centro de las placas paralelas, figura 2.2.1, el campo eléctrico es constante y perpendicular a las placas; la ecuación 2.2.5 produce un voltaje  $V_{12} = Ed$  en donde  $d$  es la distancia entre las placas [6].

### 2.3 La corriente de conducción y de desplazamiento

Cuando se produce un campo eléctrico en cualquier material, una corriente fluye. Esta corriente es la suma de una densidad de corriente de conducción  $\mathbf{J}_c$  y una densidad de corriente de desplazamiento  $\mathbf{J}_d$ . Estos términos especifican la densidad de corriente en (ampere/metro<sup>2</sup>).

Para un conductor metálico, la corriente de conducción se produce por el movimiento de los electrones; para los electrolitos la corriente se debe a la migración de los iones. La densidad de corriente para la corriente de conducción es

$$J_c = \sigma E \quad A/m^2, \quad (2.3.1)$$

en donde  $\sigma$  es la conductividad en [mho/metro].

Para un buen dieléctrico de alta resistencia, la corriente de conducción es cercana a cero y la carga transferida por una reorientación de moléculas polares causan la corriente de desplazamiento. Las moléculas altamente polares como las del agua pueden transferir más carga que las sustancias menos polares o el vacío, y tendrán una constante dieléctrica  $\epsilon_r$  más grande. Además, la corriente de

desplazamiento se produce por el acumulamiento de cargas cerca de los electrodos bajo la influencia de un voltaje aplicado hasta cuando la fuerza repulsiva de cargas iguales balancea el voltaje aplicado. La definición de la corriente de desplazamiento es

$$J_d = \frac{\partial D}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}(\epsilon_0 \epsilon_r E) \text{ A/m}^2, \quad (2.3.2)$$

con una dirección elegida igual a la dirección del vector  $\mathbf{E}$ . La corriente de desplazamiento es transitoria en el caso en donde se aplica un voltaje de DC o un campo estático, y es alterna para campos de AC. Si un voltaje de DC se impone en un sistema de conductores y dieléctricos, la corriente de desplazamiento fluye brevemente para distribuir las cargas hasta que se satisface la ecuación de Laplace (2.5.3). Con un campo de AC, el desplazamiento de corriente alterno continua fluyendo con una magnitud proporcional al cambio de la tasa de tiempo del campo eléctrico [6].

## 2.4 La ley de Gauss

El flujo total de la carga debido al desplazamiento de corriente a través de una superficie se encuentra por medio de la integración de  $\mathbf{D}$  sobre esta superficie

$$\psi = \int_{\text{sup}} D_n ds \quad \text{C}, \quad (2.4.1)$$

con  $ds$  como un área elemental y  $\mathbf{D}$  el flujo de densidad normal a  $ds$ . La ley de Gauss establece que el desplazamiento total o flujo eléctrico a través de cualquier superficie cerrada, la cual encierra carga, es igual a la cantidad de carga encerrada.

El desplazamiento de carga  $\Psi$  es el total de las cargas en los electrodos y el desplazamiento de carga en las moléculas polares de un dieléctrico en el campo eléctrico. Moléculas altamente polares como las del agua, con una constante dieléctrica de 80, actúan como si una carga positiva se concentrara a un extremo de cada molécula y una carga negativa en el otro. Cuando se impone un campo eléctrico, las moléculas se alinean ellas mismas con el campo, y la suma de la carga desplazada durante este alineamiento es el desplazamiento de carga dieléctrica. Note que en un sistema de cargas finitas la conducción de la densidad de corriente  $\mathbf{J}_c$  puede ser cero para un aislante perfecto, pero el valor mínimo del desplazamiento de densidad de corriente  $\mathbf{J}_d$  no debe ser cero debido al valor de la constante dieléctrica del vacío diferente de cero.

Si la excitación del voltaje es senoidal y  $\epsilon_r$  y  $\epsilon_0$  son constantes,  $\mathbf{D}$  tendrá una forma de onda cosenoidal y el desplazamiento de corriente se puede encontrar por medio de

$$i = \frac{d\psi}{dt} \quad \text{A.} \quad (2.4.2)$$

## 2.5 La ecuación de Poisson y de Laplace

La relación entre la densidad de carga  $\rho$  y el desplazamiento de corriente  $\mathbf{D}$  está representada por la ecuación de Poisson

$$\text{div} \mathbf{D} = \rho \quad \text{C/m}^3, \quad (2.5.1)$$

$\text{div} \mathbf{D}$ , la divergencia de  $\mathbf{D}$ , el flujo de salida neto de  $\mathbf{D}$  por unidad de volumen, es igual a la carga encerrada por el volumen.

En un medio homogéneo e isotrópico con  $\epsilon_r$  constante, escalar y sin cargas libres, la ecuación de Poisson se puede describir como

$$\text{div} \epsilon_0 \mathbf{E} = \epsilon_0 \text{div} \mathbf{E} = \rho = 0. \quad (2.5.2)$$

Esta versión de la ecuación de Poisson para regiones de carga libre es la ecuación de Laplace, que es importante en la teoría del campo electromagnético. En coordenadas rectangulares, la ecuación de Laplace es

$$\nabla^2 V = \frac{\partial}{\partial x^2} V + \frac{\partial}{\partial y^2} V + \frac{\partial}{\partial z^2} V = 0. \quad (2.5.3)$$

La mayoría de los problemas en electrostática se ocupan en encontrar soluciones a esta ecuación, o sus equivalentes en coordenadas polares o cilíndricas.

La solución de los problemas en la electrostática es encontrar una distribución potencial que satisficará la ecuación de Laplace con una geometría de electrodo dada y sus voltajes. Generalmente, la distribución de potencial en el espacio del interelectrodo y la distribución de carga en los electrodos no se conocen. Las cargas en los electrodos se distribuirán ellas mismas hasta que los conductores lleguen a ser superficies equipotenciales y de esta forma se satisface la ecuación de Laplace en el espacio del interelectrodo.

Una solución de la ecuación de Laplace (o de Poisson) produce un campo de líneas de tres dimensiones en el caso de un capacitor de placas paralelas, figura 2.2.1. Desafortunadamente, la solución analítica de la ecuación de Laplace solamente es posible para algunos casos sencillos.

Las soluciones existen para algunos problemas en dos dimensiones o para problemas de tres dimensiones que se pueden simplificar a dos dimensiones [6].

## 2.6 La carga inducida

Cuando una carga positiva de prueba se lleva cerca de un conductor, los electrones libres en el conductor son atraídos a la superficie más cercana de la carga. Con un conductor puesto a tierra, los electrones fluyen a través de la conexión a tierra y el electrodo tiene una carga negativa neta. Las cargas vienen a un equilibrio en el cual la fuerza repulsiva de los electrones de la superficie se balancea por la atracción de los electrones de la superficie a la carga de prueba.

Los campos eléctricos dentro de un conductor son usualmente despreciables si la corriente que fluye es pequeña, de esta forma la superficie del conductor es una superficie equipotencial. Un campo eléctrico fuera del conductor pero cerca de su superficie tiene superficies equipotenciales paralelas al conductor y líneas de flujo que intersectan al conductor en ángulos rectos. La magnitud de la carga en la superficie del conductor es igual a la densidad de flujo en el dieléctrico adyacente,  $\sigma = |\mathbf{D}|$ .

El efecto de la carga inducida se ve en aplicaciones tales como la detección de proximidad capacitiva, como los efectos del campo lejano de un electrodo sensor capacitivo, además se debe incluir la contribución al campo  $\mathbf{E}$  de la carga que el electrodo induce sobre conductores flotantes cercanos [6].

## 2.7 Superposición

Así como para cualquier sistema lineal, el principio de superposición se puede aplicar al análisis del campo eléctrico. El campo eléctrico de un número de cargas se puede calcular como la suma vectorial del campo debido a cada carga individual. Además, el campo de un sistema de conductores cargados se puede determinar asumiendo que todos los conductores están descargados excepto uno, calculando el campo resultante y repitiendo el proceso con cada conductor y calculando la suma vectorial. La superposición es una técnica muy utilizada y poderosa para simplificar un problema complejo en varios problemas simples [6].

## 2.8 Imágenes de carga

La distribución de carga en los conductores se puede determinar, a menudo con considerable dificultad, resolviendo la ecuación de Laplace con condiciones en las fronteras específicas del problema.

Lord Kelvin sugirió un método gráfico simple para el caso de cargas en presencia de interfaces planas. Una carga  $+q$  en un dieléctrico cerca de un plano conductor produce una densidad de carga de signo opuesto cerca de la superficie del plano. El campo eléctrico producido en el dieléctrico es el mismo, como si la densidad de carga en la superficie del plano conductor fuese reemplazada por una sola carga  $-q$  dentro del plano en una locación simétrica.

La carga imagen es similar a una imagen óptica en un espejo, figura 2.8.1.

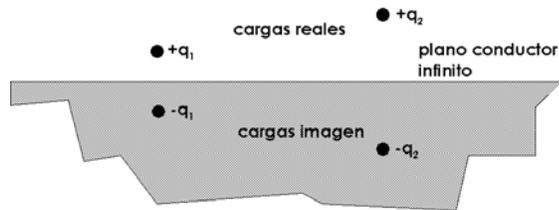


Figura 2.8.1 Cargas imagen.

El resultado de Lord Kelvin se puede derivar observando las líneas de campo alrededor de dos cargas de polaridad opuesta y notando que la línea  $SS$  es, por simetría, una superficie equipotencial, la cual se puede reemplazar por una superficie conductora, como se muestra en la figura 2.8.2. Entonces no se ve cambio en la estructura del campo en el lado de  $+q$  de  $S$  si la carga en  $-q$  se reemplaza con la carga superficial inducida en el conductor  $SS$  y se remueve  $-q$  [6].

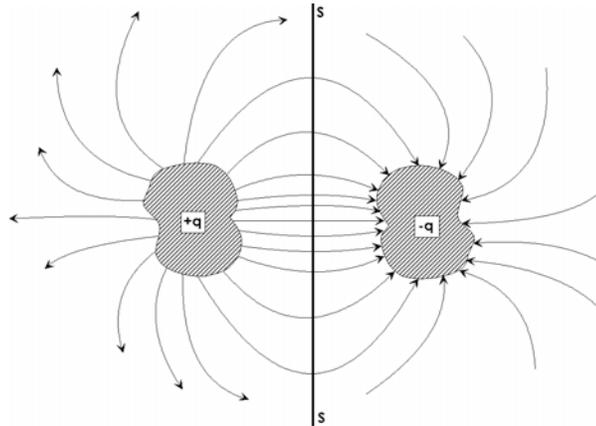


Figura 2.8.2 Campo de cargas opuestas.

## 2.9 Capacitancia

Para la geometría de placas paralelas, un voltaje  $V$  se puede aplicar a las placas para producir un flujo  $\psi$  total. Entonces, la cantidad del flujo en coulombs que se produce por  $V$  volts es

$$\psi = Q = CV. \quad (2.9.1)$$

El símbolo  $C$  es la capacitancia de las placas en coulombs/volt. La capacitancia se calcula evaluando

$$C = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r \psi}{\int D \cdot dl} = \frac{\psi}{\int E \cdot dl}, \quad (2.9.2)$$

con  $dl$  una longitud elemental a lo largo de la línea de flujo, y se debe de repetir para todas las líneas de flujo que emanan desde una de las placas y terminando en la otra placa. Para sistemas de dos electrodos, todas las líneas de flujo las cuales emanan desde una placa terminarán en la otra, pero con múltiples electrodos generalmente esto no se cumple.

## 2.10 Cálculo de la capacitancia para placas paralelas

Como un ejemplo del cálculo de la capacitancia, la ley de Gauss se puede aplicar a una superficie envolviendo una de las placas paralelas. Si la superficie es elegida correctamente y las líneas de flujo en los bordes de las placas se ignoran, la carga total  $Q$  dentro de la superficie es igual al flujo de desplazamiento total  $D$  veces el área de la superficie  $S$ , resultando en

$$C = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r S}{d} = 8.854 \times 10^{-12} \times \frac{\epsilon_r S}{d}, \quad (2.10.1)$$

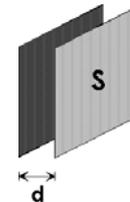
en donde

$C$  = capacitancia, faradios

$\epsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12}$ , faradios / metro

$S$  = área, metros cuadrados

$d$  = espaciamiento entre placas, metros



## 2.11 Soluciones aproximadas

Para la mayoría de los diseños de sensores capacitivos, las capacitancias en los bordes y las capacitancias parásitas se pueden ignorar o aproximar sin mucho problema, pero si se necesita una máxima exactitud es útil tener un método analítico para evaluar la capacitancia de varias configuraciones de electrodos. Usualmente es conveniente medir los valores de la capacitancia en los bordes y la capacitancia parásita, ya que las capacitancias parásitas asociadas con el equipo de medición son mucho mayores que las capacitancias que se tratan de medir. El cálculo de la capacitancia parásita es posible solamente por simple geometría con simetría espacial en un sistema coordenado dado. Pero una solución aproximada generalmente es adecuada; dos opciones que dan soluciones aproximadas son el trazado de líneas de campo y el análisis con elemento finito. Aquí solo se mencionará este último [6].

### Análisis de Elemento Finito (AEF)

Como la ecuación de Poisson no tiene solución analítica excepto para algunos casos simétricos, se utilizan métodos numéricos. El trazado de líneas de campo se ha utilizado anteriormente en experimentos, pero esto es más un arte que una ciencia y es una aproximación de cortar y pegar.

Una técnica más reciente, el análisis de elemento finito, se ha utilizado para una variedad de problemas, en los que los campos varían suavemente en un área o volumen, y los cuales no tienen solución analítica. El AEF primero se aplicó para análisis de esfuerzos en ingeniería civil e ingeniería mecánica, y ahora se utiliza para soluciones de electricidad estática y campos magnéticos, así como para soluciones en campos dinámicos.

El AEF divide un área en un número de polígonos, usualmente triángulos o tetrahedros, aunque algunas veces se utilizan los cuadrados o cubos. Entonces se supone el campo dentro del polígono para ser representado por un polinomio de orden inferior, y los coeficientes del polinomio se eligen para que encajen en las condiciones de frontera de los polígonos vecinos por medio de un método similar al ajuste de curva ranurada cúbica o regreso de superficie poligonal. La exactitud del ajuste se calcula, y en áreas en donde el ajuste es más pobre que una constante dada los polígonos se subdividen y el proceso se repite. Para un análisis de tres dimensiones, los polígonos se reemplazan por cubos o tetraedros [6].

La teoría de la electrostática es indispensable para entender los fenómenos eléctricos que se presentan en los sistemas capacitivos, sin embargo analizar matemáticamente un problema de esta naturaleza puede ser difícil. Para este trabajo el AEF fue una herramienta importante puesto que las simulaciones realizadas nos ayudaron a analizar los problemas de una forma rápida, a entender mejor estos fenómenos y por consiguiente a obtener resultados previos con aproximaciones a los resultados finales esperados.

### 3. SENSORES CAPACITIVOS

#### 3.1 Tipos de sensores capacitivos

Los sensores capacitivos se usan ampliamente en la industria y en laboratorios para medir diferentes variables físicas tales como la posición, velocidad y aceleración de objetos en movimiento, fuerza, presión, flujo, nivel de líquidos y propiedades dieléctricas de materiales, por nombrar algunos ejemplos. Algunos sensores y su aplicación se ilustran en la figura 3.1.1.

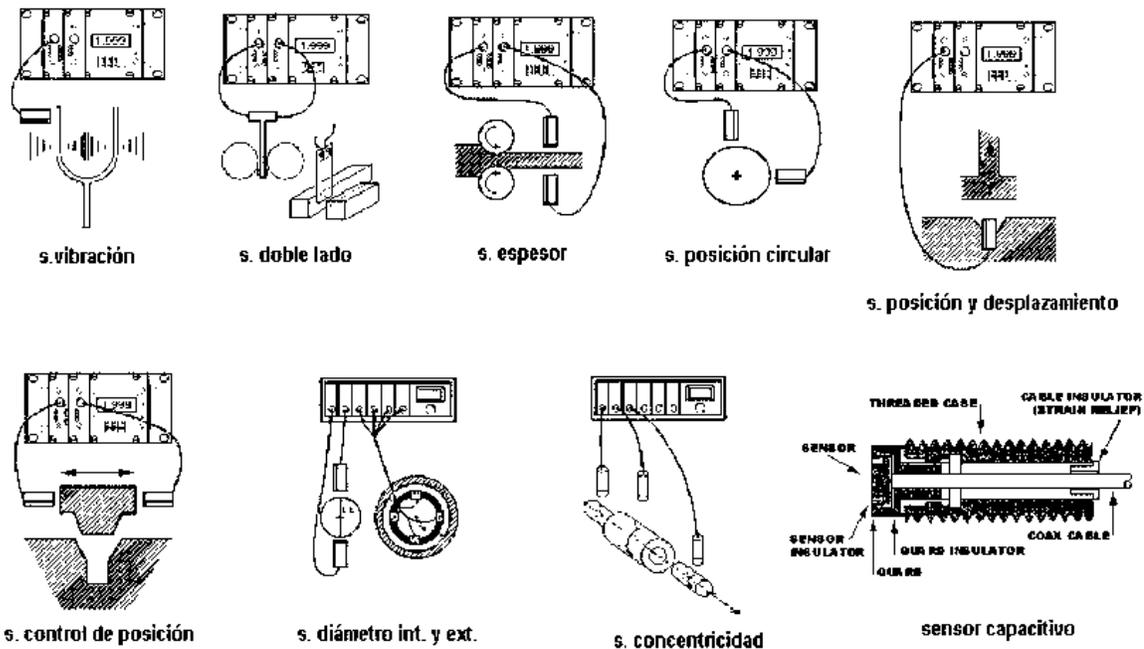


Figura 3.1.1. Tipos de sensores capacitivos para medir diferentes variables físicas.

Hay dos configuraciones de estructura para sensores capacitivos que son utilizadas frecuentemente, la de placas paralelas y el capacitor coaxial. Con estas, en principio, se pueden detectar cambios de capacitancia  $\Delta C$  provocados por estímulos físicos, químicos o biológicos que causan cambios en las dimensiones del material dieléctrico o de su constante dieléctrica  $\epsilon_r$ . Los cambios básicos medibles por los sensores capacitivos son la permitividad y las dimensiones físicas o desplazamientos en las direcciones  $x$ ,  $y$ , o  $z$ . La permitividad efectiva depende del material (elemento sencillo o mezcla de varios elementos) y de la temperatura.

El desplazamiento, semejante a movimientos lineales o rotacionales, vibraciones y expansiones debidos a cualquier causa química o física, se puede determinar directamente por medio de la medición de cambios de capacitancia  $\Delta C$ . Si la estructura del material es elástica, entonces el desplazamiento es proporcional a la fuerza aplicada  $f$  ( $\Delta x = kf$ , donde  $k$  es la constante elástica) o la presión, la cual

es fuerza normal por unidad de área. Por lo tanto, las fuerzas axiales o cortantes y las presiones estáticas o dinámicas se pueden medir con sensores capacitivos. La aceleración se puede calcular de las mediciones de las fuerzas inerciales que actúan en una masa sujeta a la aceleración. El flujo de fluidos se puede estimar de la caída de presión medida a través de un flujo resistivo, lineal o no lineal.

Por otra parte, la estructura del sensor capacitivo puede ser grande o pequeña, y se puede fabricar con varios tipos de conductores y materiales dieléctricos utilizando varias técnicas de fabricación dependiendo de los requerimientos de cada aplicación.

Una desventaja importante de los sensores capacitivos es su sensibilidad a la contaminación y a la condensación, lo que puede causar serios problemas de confiabilidad. En muchos de esos casos, el cambio en porcentaje de capacitancia es alto, sin embargo el valor absoluto de la capacitancia del sensor es pequeño. Usualmente, este tipo de cambio se puede medir con un medidor LCR de precisión. Pero, en el caso de un cambio en porcentaje muy pequeño, por ejemplo 100 ppm o aún menor, es difícil usar un medidor LCR ordinario, de esta forma se tiene que emplear un medidor de altísima estabilidad para monitorearlo. Estos medidores de alta resolución se pueden utilizar en experimentos de laboratorio, pero en el uso industrial tenemos que utilizar en su lugar circuitos de interfase de alta sensibilidad [7] y [8].

### 3.2 Mediciones con sensores capacitivos

Como se mencionó anteriormente en el capítulo 2, para un condensador formado por  $n$  placas planas paralelas iguales, con área  $A$ , distancia  $d$  entre cada par, y un material entre ellas con constante dieléctrica relativa  $\epsilon_r$ , la capacidad aproximada es

$$C \approx \epsilon_0 \epsilon_r \frac{A}{d} (n-1), \tag{3.2.1}$$

donde  $\epsilon_0=8.85$  [pF/m] es la constante dieléctrica del vacío.

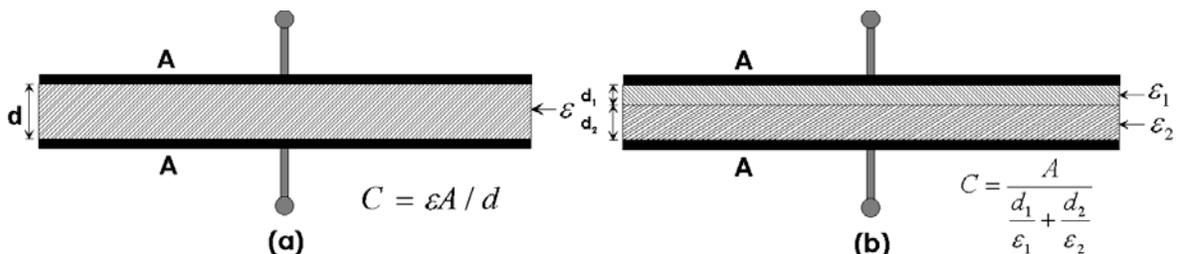


Figura 3.2.1. Expresiones de la capacitancia aproximada para el caso de placas paralelas. a) con un dieléctrico y b) con dos dieléctricos diferentes.

Así pues, cualquier fenómeno o magnitud que produzca una variación en  $\epsilon_r$ ,  $A$  o  $d$ , provocará un cambio en la capacitancia  $C$  y, en principio, puede ser detectado mediante el dispositivo anterior.

En general cualquier cambio en el dieléctrico o en la geometría puede ser considerado para la detección del fenómeno que lo provoca. En la figura 3.2.1 se muestra la capacitancia para el caso de placas paralelas. En [9] pueden encontrarse las expresiones exactas para alguna de estas configuraciones y sus variantes. Si, por ejemplo, se considera la permitividad relativa,  $\epsilon_r$ , para el aire que es prácticamente 1, mientras que para el agua varía entre 88 a 0°C y 55.33 a 1000°C. La sustitución de aire por agua como dieléctrico producirá un cambio apreciable, que se puede aplicar, por ejemplo, a la medida de nivel de agua en un depósito, o a la medida de humedad si se dispone de un dieléctrico que absorba y desabsorba agua sin histéresis.

En los materiales ferroeléctricos, por encima de la temperatura de Curie, la constante dieléctrica es proporcional al recíproco de la temperatura según

$$\epsilon = \frac{k}{T - T_c}, \quad (3.2.2)$$

donde  $T$  es la temperatura actual,  $T_c$  es la temperatura de Curie y  $k$  una constante. En este caso, es la variación de la temperatura produce un cambio importante en la capacidad de un condensador que incorpore un material de este tipo.

Los sensores capacitivos pueden o no ser lineales. Su linealidad depende del parámetro que varía y de si se mide la impedancia o admitancia del condensador. En un condensador plano, por ejemplo, con  $\epsilon_r$  o  $A$  variable, la salida es lineal si se mide la admitancia (proporcional a  $C$ ), pero es no lineal si varía la separación entre placas, de la forma  $C = \epsilon A/x$  o  $C = \epsilon A/(d+x)$ . En este segundo caso, se tiene

$$C = \epsilon \frac{A}{d(1+\alpha)}, \quad (3.2.3)$$

donde  $\alpha = x/d$ . Si se deriva 3.2.3 para encontrar la sensibilidad, se obtiene

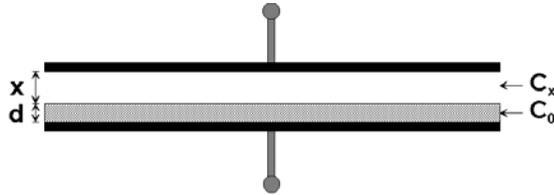
$$\frac{dC}{dx} = \frac{-\epsilon A}{d^2(1+\alpha)^2} = \frac{-C_0}{(1+\alpha)^2 d} \approx -\frac{C_0}{d} (1 - 2\alpha + 3\alpha^2 - 4\alpha^3 + \dots), \quad (3.2.4)$$

donde se ve que el sensor no es lineal pues la sensibilidad varía con  $x$  y es tanto mayor cuanto menores sean  $d$  y  $x$ . Esta última consideración podría sugerir el empleo de condensadores con  $d$  muy pequeña, pero hay que tener en cuenta el límite impuesto por la tensión de ruptura dieléctrica, que para el aire es de 30 kV/cm.

Para un sensor del tipo  $C=\epsilon A/x$ , la sensibilidad es

$$\frac{dC}{dx} = -\frac{\epsilon A}{x^2}, \quad (3.2.5)$$

donde su dependencia  $x$  y, por tanto, su no linealidad, queda manifiesta. Si en este condensador se añade un dieléctrico entre placas, de la forma indicada en la figura 3.3.6,



*Figura 3.3.6. Disminución de la no linealidad de un sensor capacitivo de placas planas paralelas mediante un dieléctrico adicional.*

la capacitancia respectiva de cada una de las partes es

$$C_0 = \epsilon_r \epsilon_0 \frac{A}{d}. \quad (3.2.6)$$

$$C_x = \epsilon_0 \frac{A}{x}. \quad (3.2.7)$$

La capacitancia total será la combinación en serie de la capacitancia de cada parte, de la forma

$$C = \frac{C_0 C_x}{C_0 + C_x}, \quad (3.2.8)$$

$$C = \frac{\epsilon_r \epsilon_0 \frac{A}{d} \epsilon_0 \frac{A}{x}}{\epsilon_r \epsilon_0 \frac{A}{d} + \epsilon_0 \frac{A}{x}} = \epsilon_r \epsilon_0 \frac{A}{d + \epsilon_r x}. \quad (3.2.9)$$

Derivando 3.2.9 para tener la nueva sensibilidad, se obtiene

$$\frac{dC}{dx} = -\epsilon_r \epsilon_0 \frac{A \epsilon_r}{(d + \epsilon_r x)^2} = -\frac{\epsilon_r^2 \epsilon_0 A}{d^2} \frac{1}{\left(1 + \frac{\epsilon_r x}{d}\right)^2} \quad (3.2.10)$$

$$\approx -\frac{C_0}{d} \epsilon_r \left[ 1 - \frac{2\epsilon_r x}{d} + 3\left(\frac{\epsilon_r x}{d}\right)^2 - 4\left(\frac{\epsilon_r x}{d}\right)^3 + \dots \right]. \quad (3.2.11)$$

Comparando esta ecuación con 3.2.11, se observa que el sistema es ahora lineal. Por otra parte, la ecuación 3.2.8 indica cual sería el efecto de la presencia, quizás inadvertida, de un dieléctrico entre las placas de un condensador de este tipo.

Una alternativa para tener una salida lineal en un sensor capacitivo plano basado en una variación de la distancia entre placas es medir, en vez de su admitancia, su impedancia,

$$Z = \frac{1}{j\omega C} . \quad (3.2.12)$$

Una última consideración relativa a las limitaciones de los condensadores eléctricos es su alta impedancia de salida. Si bien la impedancia decrece cuanto mayor sea la frecuencia de alimentación, la impedancia de las capacidades parásitas también decrece al aumentar la frecuencia. Una solución es poner cerca la electrónica de acondicionamiento de la señal. Otra es emplear un transformador de impedancias. También se puede medir la corriente a través del condensador en vez de la tensión en los bornes de éste, con lo que la exigencia de una impedancia de entrada alta desaparece. Frente a las limitaciones anteriores, los sensores capacitivos presentan una serie de ventajas que los hacen atractivos en muchas aplicaciones.

### 3.3 Guardas y capacitancias parásitas

El empleo de un condensador variable como sensor está sujeto a la interferencia de capacitancias parásitas. En primer lugar, en la expresión de la capacidad se suelen despreciar los efectos de los bordes, y ello puede que no sea aceptable como se ve en la figura 3.3.1.

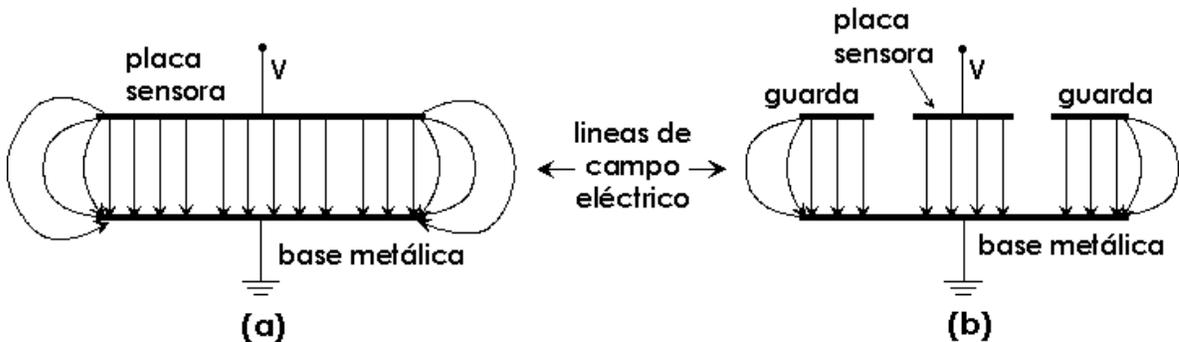


Figura 3.3.1. Efectos de borde en un sensor capacitivo visto de lado. a) Sin guarda y b) con guarda

En un condensador plano con placas paralelas, los efectos de los bordes son despreciables si la separación entre placas es mucho menor que la dimensión lineal de éstas. En caso contrario la ecuación 3.2.1 debe sustituirse por una

aproximación mejor. Si se trata de dos placas rectangulares finitas, con anchura  $a$ , longitud  $l$  y separación  $d$ , una fórmula más correcta es [10]

$$C \approx \epsilon_0 \epsilon_r \frac{la}{d} \left\{ 1 + \frac{l}{\pi} \left[ \ln \left( \frac{a\pi}{d} + 1 \right) + 1 + \ln 2 \right] \right\}, \quad (3.3.1)$$

donde se ve que el error relativo decrece efectivamente al aumentar la relación  $a/d$ .

Un método para reducir el efecto de los bordes sin alterar las relaciones geométricas consiste en emplear guardas, tal como se indica en la figura 3.3.2.

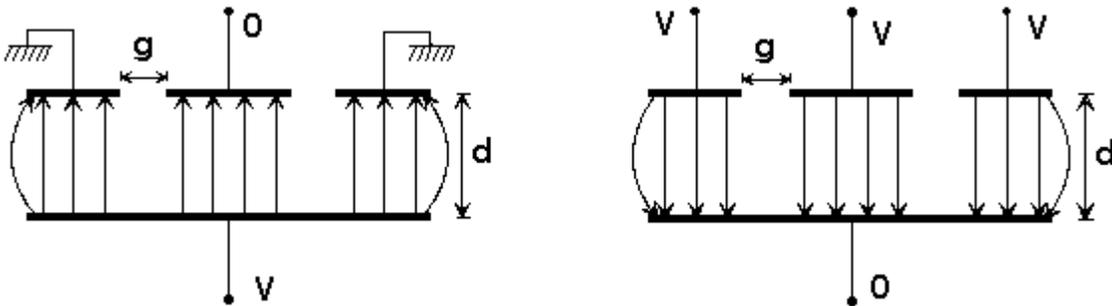


Figura 3.3.2 Empleo de guardas en sensores capacitivos para reducir los efectos de borde.

Consiste en rodear uno de los dos electrodos del condensador con un anillo puesto al mismo potencial que dicho electrodo [11], como se ve en la figura 3.3.3.

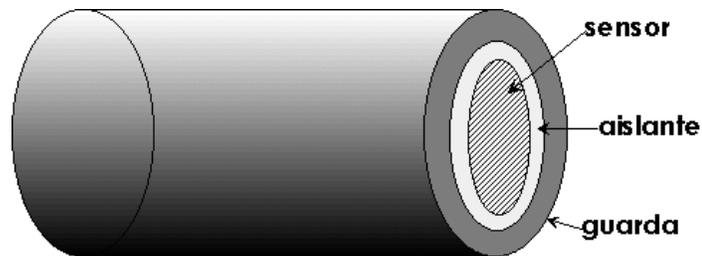


Figura 3.3.3. Configuración básica de un sensor capacitivo con anillo de guarda.

Si el otro electrodo del condensador se mantiene a un potencial conocido, las líneas de campo eléctrico en el centro quedan delimitadas a una zona bien definida como se muestra en la figura 3.3.4.

El efecto de la separación  $g$  entre la guarda y el electrodo, supuesta  $g \ll d/5$ , se puede tener en cuenta empleando como anchura (o radio) efectivo del electrodo el real más  $g/2$ . En [12] hay factores de corrección más precisos.

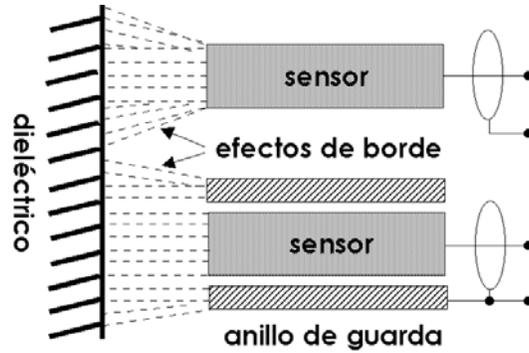


Figura 3.3.4. Efectos de borde en un sensor capacitivo actuando sobre una superficie dieléctrica con y sin anillo de guarda.

Otra consideración es el aislamiento entre placas, que debe ser alto y constante. Si, por ejemplo, en caso de humedad variable aparecieran resistencias parásitas en paralelo con  $C$  por variar el aislamiento ofrecido por el dieléctrico, se tendrían variaciones en la impedancia del condensador no atribuibles a un cambio de capacidad. Si la medida es sensible sólo al módulo de la impedancia, pero no a su fase, los errores pueden ser importantes. La conductividad es un problema a considerar en dieléctricos polares (que tienen momentos dipolares permanentes), pues suelen tenerla alta. Es el caso del agua, acetona y algunos alcoholes. La presencia de una componente resistiva en la impedancia, significará que hay una disipación de potencia que puede producir interferencias térmicas. En cambio, los dieléctricos no polares, como los aceites y los distintos derivados del petróleo, suelen tener una conductividad muy baja.

Dado que sólo una de las dos superficies puede ponerse a tierra, las interferencias capacitivas son otra fuente de error a considerar.

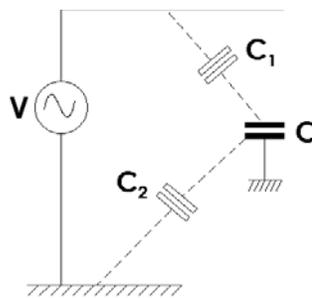


Figura 3.3.5. Interferencias en un sensor capacitivo debidas a campos eléctricos próximos.

Según en la figura 3.3.5, si otro conductor próximo, por ejemplo de la red de distribución eléctrica, esta a un determinado potencial respecto a tierra, la placa que no esté conectada a tierra alcanzará también un potencial que según su frecuencia puede interferir en el circuito hasta impedir la medida. Puede ser

necesario blindar eléctricamente esta placa y los cables conectados a ella respecto al entorno ajeno al sensor.

Los cables de conexión son otra fuente de error. Al ser blindados para evitar las interferencias capacitivas, añaden una capacidad en paralelo con el condensador, por lo que se pierde sensibilidad pues la magnitud a medir hará cambiar sólo la capacidad del sensor, que es ahora una parte de la capacidad total. Si además hay movimiento relativo entre los conductores del cable y el dieléctrico, se tiene una fuente de error adicional que puede ser muy grave si las variaciones de la geometría son importantes o si el dieléctrico del cable tiene propiedades piezoeléctricas notables.

### **3.4 Ventajas de los capacitores esféricos para medir espesor**

Las mediciones de capacitancia son a menudo relativamente sencillas y pueden ser muy sensibles al desplazamiento, forma o constante dieléctrica de materiales. Por ejemplo, la forma de la superficie de un conductor puede ser medida realizando un barrido con un apuntador metálico a través de una superficie conductora, midiendo la capacitancia entre la superficie y el apuntador metálico.

Cuando un sensor capacitivo se utiliza para medir recubrimientos delgados ocurren imprecisiones en las mediciones debido a algunos factores como son: la geometría y tamaño del sensor, el paralelismo del sensor con la superficie a sensar, la geometría de la superficie a sensar, la distancia del sensor con la superficie a sensar, los efectos de borde del sensor y la rugosidad de la superficie.

Cuando la punta de prueba es plana la variación aleatoria del ángulo de pendiente de la punta de prueba y de la capa de aire entre estas genera una imprecisión más crítica [13]. En estas situaciones se adoptan algunos métodos de medición destructivos para medir el espesor de un recubrimiento dieléctrico muy delgado. Se ha determinado teóricamente y experimentalmente que la geometría de un sensor capacitivo es un parámetro muy importante para la medición de espesores de recubrimientos dieléctricos sobre substratos conductores.

En trabajos previos se ha mostrado que los sensores capacitivos con electrodos esféricos presentan algunas ventajas sobre otras geometrías sobre todo con las planas [13], [14] y [15]. En particular, el paralelismo y los efectos de borde entre el electrodo plano y el recubrimiento es un problema en la medición como se muestra en la figura 3.4.1.

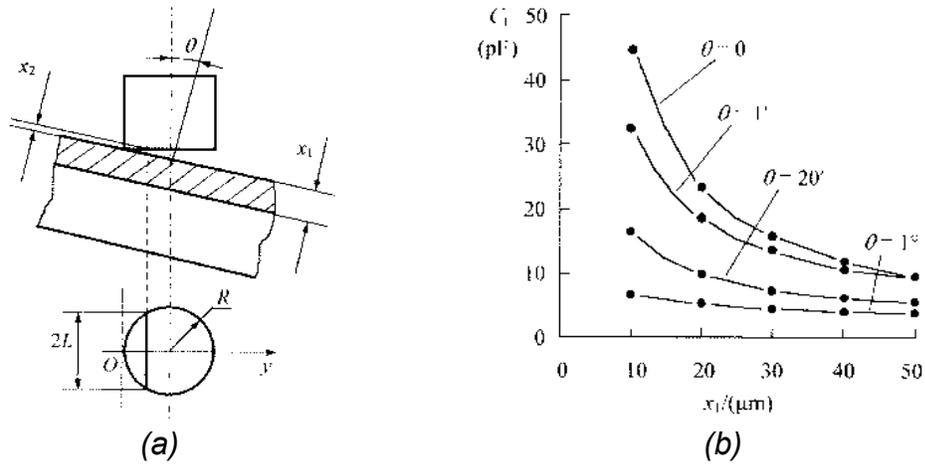


Figura 3.4.1. a) Ángulo de inclinación del sensor y la superficie a sensor, b) gráfica que muestra el cambio de la capacitancia con el ángulo de inclinación entre el sensor y la superficie a sensor.

Una forma de reducir estos efectos es la utilización de una punta de prueba esférica con la cual las imprecisiones en las mediciones se van a reducir considerablemente dado que el ángulo de inclinación formado entre la punta de medición y la superficie a sensor casi no afecta en la medición como se muestra en la figura 3.4.2.

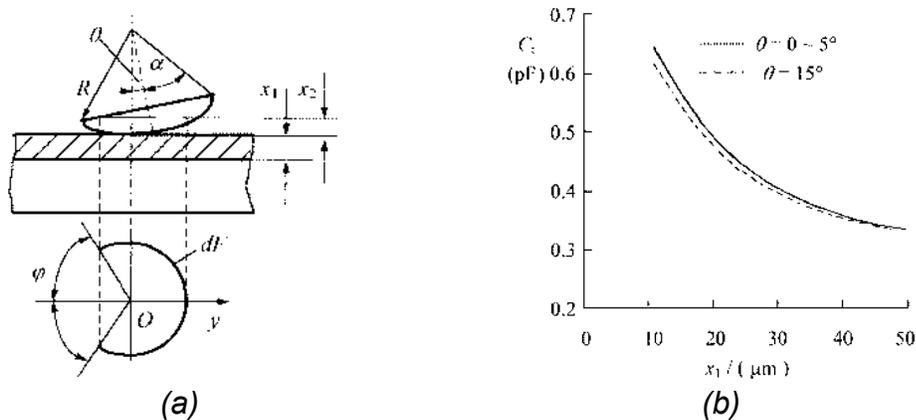


Figura 3.4.2. a) Ángulo de inclinación del sensor y la superficie a sensor. b) Gráfica que muestra el cambio de la capacitancia con el ángulo de inclinación entre el sensor y la superficie a sensor.

Como se puede apreciar en las figuras anteriores, la variación del ángulo de inclinación  $\theta$  es más significativa en los sensores con superficies planas que con las esféricas.

Un problema que se encuentra a menudo en la investigación y en la industria es la caracterización de películas delgadas dieléctricas sobre sustratos conductores

principalmente se requiere saber el espesor y la constante dieléctrica de la película, por lo tanto la rugosidad de la superficie puede ser importante.

La utilización de sensores capacitivos para la medición del espesor de recubrimientos sobre bases metálicas tienen más adaptabilidad en la práctica que los métodos de inducción magnética y corrientes de Eddy porque se pueden implementar convenientemente los campos eléctrico y magnético de un sensor capacitivo. Con la utilización de electrodos esféricos se pueden reducir errores en las mediciones generados por la rugosidad de los recubrimientos y el paralelismo entre estos con el substrato sobre el que se encuentran.

---

## 4. MÉTODO DE IMÁGENES

Las propiedades de unicidad y superposición de las soluciones de un problema de potencial llevan al desarrollo del método de imágenes que se utiliza para resolver problemas de potencial con conductores extensos y con condiciones de simetría. Cuando un cuerpo conductor extenso se encuentra en una región donde existe campo, su carga libre se redistribuye para anular el campo en su interior. Esto da origen a un nuevo campo (campo inducido) que altera las líneas de campo del campo original. Como sabemos, las líneas de campo deben ser perpendiculares a la superficie del cuerpo conductor, que es una equipotencial.

En general, la distribución de carga superficial sobre el conductor es de determinación muy difícil, lo que a su vez dificulta la resolución del problema pero en ciertos casos con geometrías sencillas el potencial resultante fuera de los conductores se puede obtener reemplazando la/s superficie/s conductora/s por un conjunto de cargas ficticias (cargas imagen) que, junto con las cargas verdaderas, dan el mismo potencial en las regiones no conductoras que el correspondiente a la configuración original.

Tal método es posible porque la solución de un problema de potencial es única. Por lo tanto no importa el método usado para obtener tal solución, siempre que satisfaga la ecuación de Laplace para el potencial electrostático en todo punto del espacio donde no haya carga y cumpla las condiciones de borde sobre las superficies conductoras.

El método de imágenes consiste en colocar las cargas imagen de valor y posición necesarias para reproducir las condiciones de contorno prescritas sobre las superficies conductoras suponiendo que éstas no estuvieran. La ubicación de las cargas imagen es análoga a la posición de las imágenes correspondientes a las cargas verdaderas si las superficies conductoras fueran espejos y usáramos la óptica geométrica, de donde surge el nombre de la técnica. El método de imágenes puede demostrarse rigurosamente a partir de las propiedades de las funciones de Green de la electrostática.

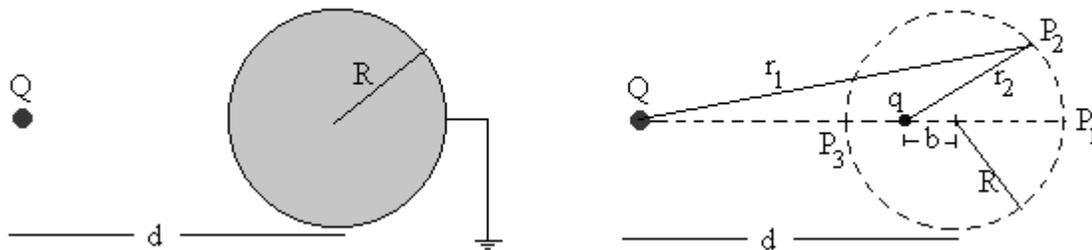
Veremos a continuación algunos ejemplos básicos de esta técnica inventada por William Thomson, posteriormente Lord Kelvin, en 1845, cuando analizó el problema de una carga puntual y una esfera conductora conectada a tierra. Thomson reemplazó la esfera por una carga puntual imagen que, junto con la carga puntual original volvían equipotencial a la superficie de la esfera. El potencial fuera de la esfera es entonces calculado simplemente como debido a las dos cargas puntuales [16].

#### 4.1 Análisis de una carga puntual $Q$ próxima a una esfera conductora con potencial cero.

El teorema de Gauss nos dice cómo es el campo eléctrico en las proximidades de un conductor cuando conocemos la distribución de la carga en su superficie. La situación inversa es la de preguntarnos cómo se distribuye la carga en un conductor cuando sobre él actúa un determinado campo.

##### La carga imagen

Supongamos un sistema formado por una carga puntual  $Q$  en las proximidades de una esfera conductora a potencial cero a una distancia  $d$  de su centro. El método de las imágenes nos permite sustituir el conductor por una carga "imagen"  $q$  que anulará el potencial sobre la superficie esférica de radio  $R$ .



El potencial en el punto  $P_1$  de la superficie esférica deberá ser cero

$$\frac{Q}{d+R} + \frac{q}{b+R} = 0. \quad (4.1.1)$$

El potencial en el punto  $P_3$  diametralmente opuesto deberá ser cero.

$$\frac{Q}{d-R} + \frac{q}{b-R} = 0. \quad (4.1.2)$$

Tenemos un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas de las que despejamos  $q$  y  $b$ .

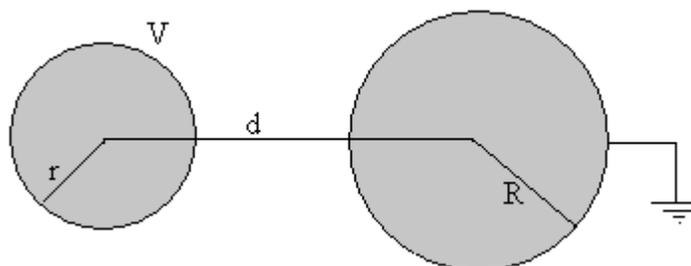
$$q = -\frac{R}{d}Q \quad \text{y} \quad b = \frac{R^2}{d}$$

Podemos demostrar haciendo algunas operaciones que estos valores de  $q$  y  $b$  hacen que el potencial en cualquier punto  $P_2$  de la superficie esférica, sea también cero.

$$\frac{Q}{r_1} + \frac{q}{r_2} = 0. \quad (4.1.3)$$

## 4.2 Análisis con dos esferas conductoras una de las cuales está a potencial cero

Consideremos el caso de dos esferas de radios  $r$  y  $R$  cuyos centros están separados una distancia  $d > r + R$ . La primera esfera está a una potencial  $V$  y la segunda esfera está conectada a Tierra,  $V=0$

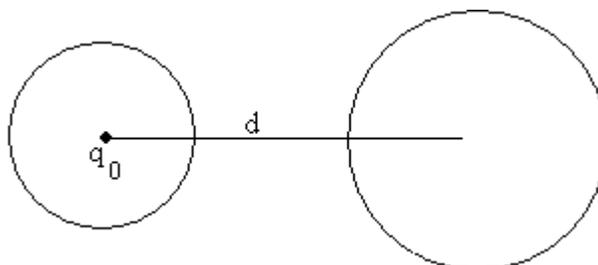


Sustituiremos las dos esferas por dos sucesiones de cargas puntuales que convergen rápidamente a cero, y que hacen que las dos superficies esféricas sean equipotenciales.

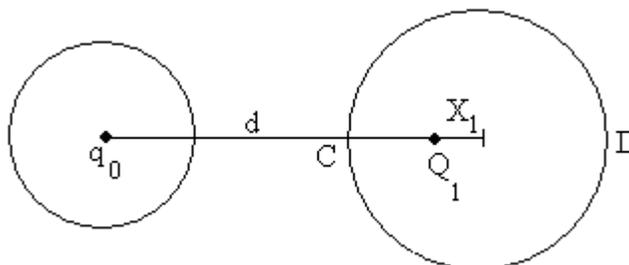
Los pasos para aplicar el método de las imágenes son los siguientes:

Colocamos en el centro de la primera esfera de radio  $r$  una carga  $q_0$ , de modo que el potencial de la esfera sea  $V$ .

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_0}{r} \quad (4.2.1)$$



La superficie esférica de radio  $R$  deja de ser equipotencial, por lo que ponemos una carga  $Q_1$  en el interior de la segunda esfera a una distancia  $X_1$  de su centro



Calculamos el valor de  $Q_1$  y su posición  $X_1$  para que la segunda esfera de radio  $R$  sea una superficie equipotencial, aunque deje de serlo la primera esfera de radio  $r$ .

El potencial en C ( $d - R, 0$ ) debido a las cargas  $q_0$  y  $Q_1$  lo hacemos cero

$$\frac{q_0}{d - R} + \frac{Q_1}{R - X_1} = 0 \quad (4.2.2)$$

El potencial en B ( $d + R, 0$ ) debido a las cargas  $q_0$  y  $Q_1$  lo hacemos cero

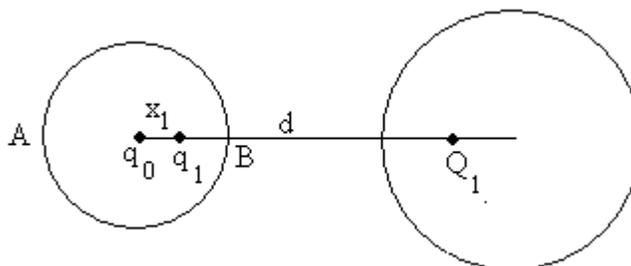
$$\frac{q_0}{d + R} + \frac{Q_1}{R + X_1} = 0 \quad (4.2.3)$$

Despejamos  $Q_1$  y  $X_1$  de este sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas

$$X_1 = \frac{R^2}{d} \quad \text{y} \quad Q_1 = -q_0 \frac{R}{d}$$

La superficie esférica de radio  $r$  deja de ser equipotencial, por lo que ponemos una carga  $q_1$  en el interior de primera esfera a una distancia  $x_1$  de su centro

Calculamos el valor de  $q_1$  y su posición  $x_1$  para que la primera esfera de radio  $r$  sea una superficie equipotencial, aunque deje de serlo la segunda esfera de radio  $R$ .



El potencial en A  $(-r, 0)$  debido a las cargas  $q_1$  y  $Q_1$  lo hacemos cero

$$\frac{q_1}{r+x_1} + \frac{Q_1}{d+r-X_1} = 0 \quad (4.2.4)$$

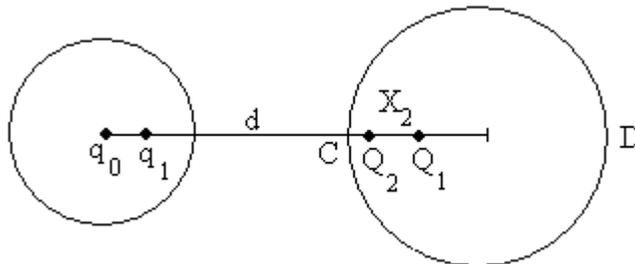
El potencial en B  $(r, 0)$  debido a las cargas  $q_1$  y  $Q_1$  lo hacemos cero

$$\frac{q_1}{r-x_1} + \frac{Q_1}{d-r-X_1} = 0 \quad (4.2.5)$$

Despejamos  $Q_1$  y  $X_1$  en este sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas

$$x_1 = \frac{r^2}{d-x_1} \quad \text{y} \quad q_1 = -Q_1 \frac{r}{d-X_1} = q_0 \frac{rR}{d^2-R^2}$$

La superficie esférica de radio  $R$  deja de ser equipotencial, por lo que ponemos una carga  $Q_2$  en el interior de la segunda esfera a una distancia  $X_2$  de su centro



Calculamos el valor de  $Q_2$  y su posición  $X_2$  para que la segunda esfera de radio  $R$  sea una superficie equipotencial, aunque deje de serlo la primera esfera de radio  $r$ .

El potencial en C  $(d-r, 0)$  debido a las cargas  $Q_2$  y  $q_1$  lo hacemos cero

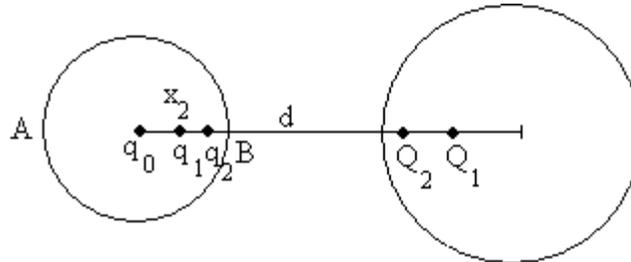
$$\frac{Q_2}{R-X_2} + \frac{q_1}{d-R-x_1} = 0 \quad (4.2.6)$$

El potencial en D  $(d+r, 0)$  debido a las cargas  $Q_2$  y  $q_1$  lo hacemos cero

$$\frac{Q_2}{R+X_2} + \frac{q_1}{d+R-x_1} = 0 \quad (4.2.7)$$

Despejamos  $Q_2$  y  $X_2$  en este sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas

$$X_2 = \frac{R^2}{d-x_1} \quad \text{y} \quad Q_2 = -q_1 \frac{R}{d-x_1} = -q_0 \frac{rR^2}{d^3 - dR^2 - dr^2}$$



Calculamos el valor de  $q_2$  y su posición  $x_2$  para que la primera esfera de radio  $r$  sea una superficie equipotencial, aunque deje de serlo la segunda esfera de radio  $R$ .

El potencial en A  $(-r, 0)$  debido a las cargas  $q_2$  y  $Q_2$  lo hacemos cero

$$\frac{q_2}{r+x_2} + \frac{Q_2}{d+r-X_2} = 0 \quad (4.2.8)$$

El potencial en B  $(r, 0)$  debido a las cargas  $q_2$  y  $Q_2$  lo hacemos cero

$$\frac{q_2}{r-x_2} + \frac{Q_2}{d-r-X_2} = 0 \quad (4.2.9)$$

Despejamos  $Q_2$  y  $X_2$  en este sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas

$$x_2 = \frac{r^2}{d-X_2}, \quad q_2 = -Q_2 \frac{r}{d-X_2} = -q_0 \frac{r^2 R^2}{d^4 - 2R^2 d^2 - r^2 d^2 + R^4}$$

y así, sucesivamente.

### Relaciones recursivas

$$X_{i+1} = \frac{R^2}{d-x_i}, \quad Q_{i+1} = -q_i \frac{R}{d-x_i}; \quad i=1,2,3,\dots$$

$$x_{i+1} = \frac{R^2}{d-X_{i+1}}, \quad q_{i+1} = -Q_{i+1} \frac{r}{d-X_{i+1}}; \quad x_0 = 0, \quad X_0 = 0, \quad Q_0 = 0$$

Podemos calcular la sucesión de cargas  $q_i$ ,  $Q_i$  y sus posiciones  $x_i$ ,  $X_i$  mediante las relaciones recursivas

### Ejemplo:

Sea  $d=5$ ,  $r=1$ ,  $R=0.5$ ,  $V_1=1$ ,  $V_2=0$

Ponemos una carga  $q_0$  en el centro de la primera esfera

$$V_1 = q_0 / r, \quad q_0 = 1$$

Paso $i$	Posición $x_i$	Carga $q_i$	Posición $X_i$	Carga $Q_i$
0	0	1	0	0
1	0.20202	0.020202	0.05	-0.1
2	0.20211	0.000425	0.05211	-0.002105
3	0.20211	0.000009	0.05211	-0.000044

### 4.3 Análisis con una esfera conductora cargada próxima a un plano conductor a potencial cero

El método de las imágenes implica la conversión de un campo eléctrico en otro equivalente más fácil de calcular. En ciertos casos es posible sustituir un conductor por una o más cargas puntuales, de modo que las superficies conductoras se sustituyen por superficies equipotenciales a los mismos potenciales.

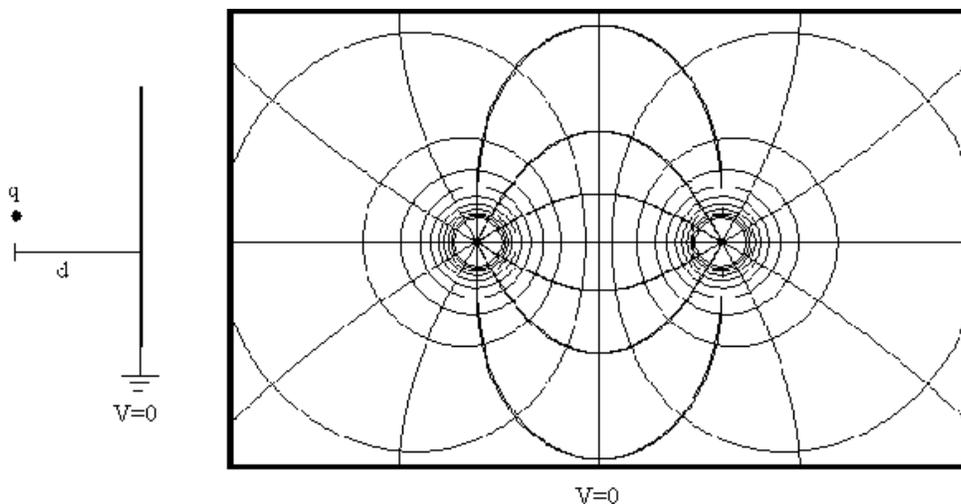


Figura 4.3.1. Campo eléctrico de un sistema de dos cargas

El caso más sencillo es el de una carga  $q$  situada a una distancia  $d$  de una placa conductora conectada a Tierra. La placa puede reemplazarse por una carga imagen  $-q$ , tal como se muestra en la figura 4.3.1.

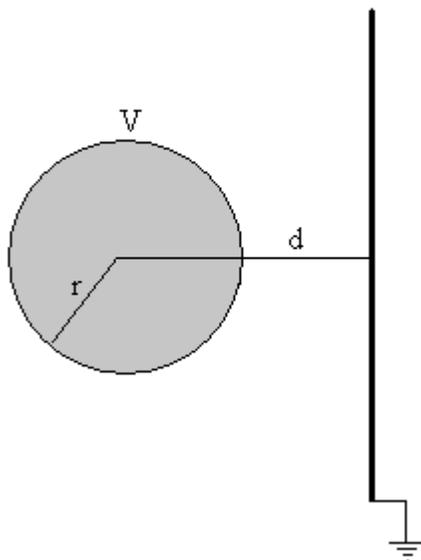
El plano que corta perpendicularmente a la línea que une las dos cargas y que está a la misma distancia de ambas, está a un potencial cero. Como se muestra en la parte derecha de la figura 4.3.1.

Se ha empleado el método de las imágenes para determinar el campo y el potencial de un sistema formado por una carga puntual  $Q$  próxima a una esfera conductora a potencial cero.

#### 4.3.1 Esfera cargada próxima a un plano conductor a potencial cero

Vamos a obtener el campo eléctrico de una esfera cargada próxima a un plano conductor a potencial cero por el método de las imágenes mediante aproximaciones sucesivas.

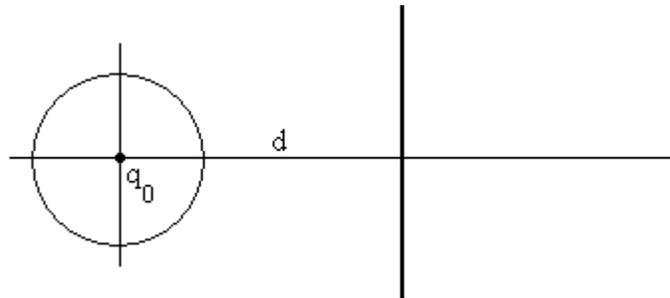
Sustituiremos la esfera y el plano por una sucesión de cargas puntuales de signos contrarios que converge a cero rápidamente, y que hacen que las dos superficies (esfera y plano) sean equipotenciales.



Supongamos que la esfera de radio  $r$ , está a un potencial  $V$ , y su centro dista  $d > r$  del plano a potencial cero.

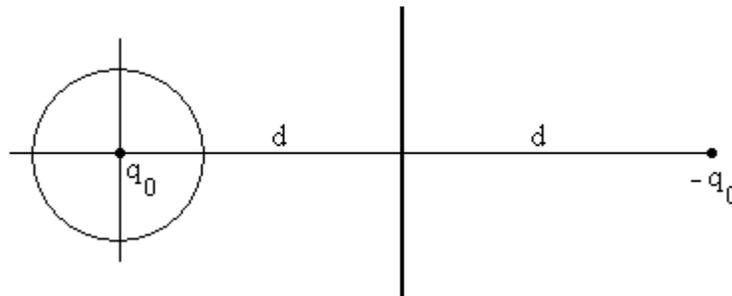
Los pasos para aplicar el método de las imágenes son los siguientes:

1. Colocamos una carga  $q_0$  en el centro de la esfera. Esto hace que la superficie esférica de radio  $r$  esté a un potencial  $V$ .

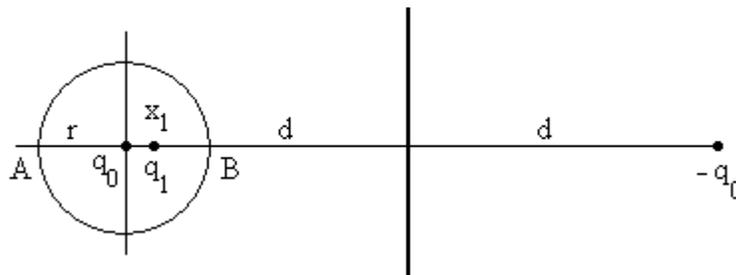


$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_0}{r} \quad (4.3.1.1)$$

2. Colocamos una carga  $-q_0$  a una distancia  $2d$  del centro de la esfera. Esto hace que el plano sea una superficie equipotencial, pero ya no lo es la esfera.



3. Colocamos una carga  $q_1$  en el interior de la esfera. Calculamos el valor de  $q_1$  y su posición  $x_1$  para que la esfera sea una superficie equipotencial, aunque deje de serlo el plano.



El potencial en A  $(-r, 0)$  debido a las cargas  $-q_0$  y  $q_1$  lo hacemos cero

$$\frac{-q_0}{2d+r} + \frac{q_1}{r+x_1} = 0 \quad (4.3.1.2)$$

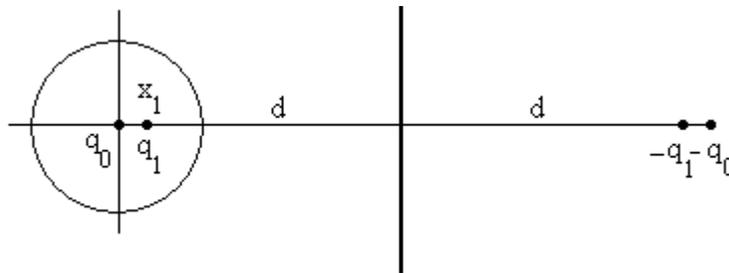
El potencial en B ( $r, 0$ ) debido a las cargas  $-q_0$  y  $q_1$  lo hacemos cero

$$\frac{-q_0}{2d-r} + \frac{q_1}{r-x_1} = 0 \quad (4.3.1.3)$$

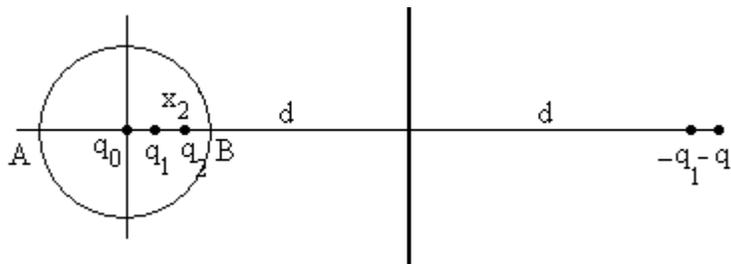
Despejamos  $q_1$  y  $x_1$  de este sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas

$$x_1 = \frac{r^2}{2d}, \quad q_1 = q_0 \frac{r}{2d}$$

4. Colocamos una carga  $-q_1$  simétrica a  $q_1$  para que el plano sea equipotencial, pero deja de serlo la superficie esférica



5. Colocamos una carga  $q_2$  en el interior de la esfera, para que esta sea equipotencial, aunque el plano deje de serlo



El potencial en A ( $-r, 0$ ) debido a las cargas  $-q_1$  y  $q_2$  lo hacemos cero

$$\frac{-q_1}{2d+r-x_2} + \frac{q_2}{r+x_2} = 0 \quad (4.3.1.4)$$

El potencial en B ( $r, 0$ ) debido a las cargas  $-q_1$  y  $q_2$  lo hacemos cero

$$\frac{-q_1}{2d-r-x_2} + \frac{q_2}{r-x_2} = 0 \quad (4.3.1.5)$$

Despejamos  $q_2$  y  $x_2$  en este sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas

$$x_2 = \frac{r^2}{2d-x_1}, \quad q_2 = q_1 \frac{r}{2d-x_1} = q_0 \frac{r^2}{4d^2-r^2}$$

Continuamos el proceso que converge rápidamente hasta que tenemos la precisión deseada.

### Relaciones recursivas

Podemos calcular la sucesión de cargas  $q_i$  y sus posiciones  $x_i$  mediante las relaciones recursivas

$$x_{i+1} = \frac{r^2}{2d-x_i}, \quad q_{i+1} = q_i \frac{r}{2d-x_i}; \quad i = 0, 1, 2, 3, \dots$$

$$x_0 = 0, \quad q_0 = q$$

### Ejemplo:

Tomamos  $d=3r$ ,  $q_0=1$ , y  $r=1$

Paso $i$	Posición $x_i$	Carga $q_i$
0	0	1
1	0.166667	0.16667
2	0.171429	0.02857
3	0.171569	0.00490
4	0.171573	0.00084
5	0.171573	0.00014

Podemos sustituir la distribución de carga formada por una esfera de radio  $r$  y un plano a potencial cero situado a una distancia  $d > r$  del centro de la esfera, por una sucesión de cargas puntuales positivas situadas en la esfera y sus correspondientes cargas negativas situadas simétricamente respecto del plano. Esta sucesión tiende a cero rápidamente.

Así la carga  $q_i$  está en la posición  $x_i$  y su simétrica  $-q_i$  está en la posición  $2d-x_i$

La carga total de la esfera es

$$Q = \sum_{i=0}^{\infty} q_i \quad (4.3.1.6)$$

Solamente  $q_1$  contribuye al potencial de la esfera, las cargas  $-q_1$ ,  $q_2$  anulan el potencial de la esfera, y lo mismo ocurre con todos los restantes pares de cargas. El potencial de la esfera es, por tanto,  $V=q_1/(4\pi\epsilon_0)$ .

#### 4.4 Imágenes en medios dieléctricos

El método de imágenes puede utilizarse en el caso de superficies de separación entre dieléctricos de alta simetría [17], como se ilustra en el siguiente ejemplo.

Una carga puntual de valor  $Q$  se halla frente a una interfase plana entre dos dieléctricos de permitividades  $\epsilon_1$  y  $\epsilon_2$ , como se indica en la figura 4.4.1.

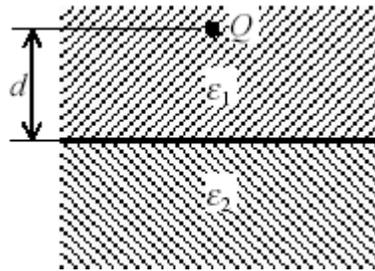


Figura 4.4.1. Carga puntual frente a una interfase plana entre dos dieléctricos.

Para encontrar el campo y el potencial en todo el espacio se aplica el método de imágenes. Primero debemos encontrar el conjunto de cargas que generen las mismas condiciones de contorno que el problema original. En este caso, las condiciones de contorno sobre la interfase entre los dos dieléctricos son la continuidad de la componente tangencial del vector  $E$  y de la componente normal del vector  $D$  al cruzar la interfase.

Surge que se pueden cumplir estas dos condiciones reemplazando el problema por la superposición de dos configuraciones:

- a) dos cargas, la real  $Q$  y una imagen  $q_1$  sumergidas en un medio de permitividad  $\epsilon_1$  que da el campo en el medio superior (plano  $z>0$ ), figura 4.4.2.

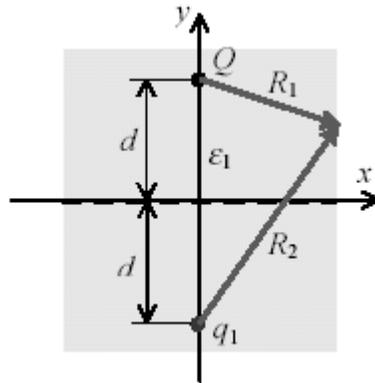


Figura 4.4.2. Carga real  $Q$  y carga imagen  $q_1$  en el medio  $\epsilon_1$ .

- b) una carga imagen  $q_2$  situada en la posición de la carga real, sumergida en un medio de permitividad  $\epsilon_2$  que da el campo en el medio inferior (plano  $z < 0$ ), figura 4.4.3.

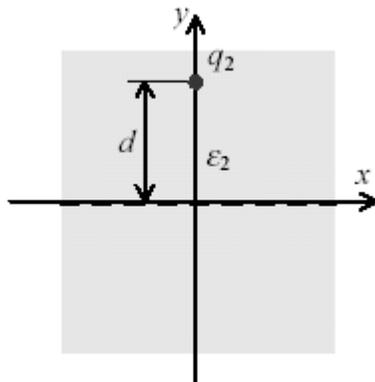


Figura 4.4.3. Carga imagen  $q_2$  en un medio  $\epsilon_2$  y en la posición de la carga real  $Q$ .

Del análisis de superposición de estas configuraciones tenemos que

$$q_1 = \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2} Q \quad (4.4.1)$$

y

$$q_2 = \frac{2\epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2} Q \quad (4.4.2)$$

Se observa que si  $\epsilon_1 = \epsilon_2$  (único medio),  $q_1 = 0$  y  $q_2 = Q$ , con lo que el potencial y el campo tienen una única expresión en todo el espacio. También se observa que el signo de la carga  $q_1$  depende de la relación de permitividades entre los medios. Además se pudieron obtener los resultados para el plano conductor, si el metal se hubiera tratado como un dieléctrico con una función dieléctrica infinita estática como  $\epsilon_1 = \infty$ ; entonces  $q' = -q$  y  $q'' = 2q$ . Note que  $q''$  no contribuye al potencial dentro del metal dado que el potencial está dividido por  $\epsilon_1$  lo cual da infinito.

#### 4.5 Imágenes múltiples

Otro caso es, por ejemplo, encontrar el potencial creado por una carga puntual de carga  $Q$  colocada entre dos planos conductores paralelos conectados a tierra, el problema se esquematiza en la figura 4.5.1.

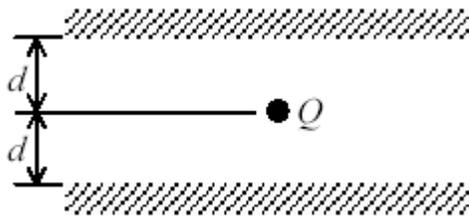


Figura 4.5.1. Carga puntual entre dos conductores.

Por comodidad suponemos que la carga se halla equidistante de ambas interfaces. Repetimos el procedimiento de colocación de cargas imagen para anular el potencial sobre las interfaces. Este proceso se esquematiza en la figura 4.5.2.

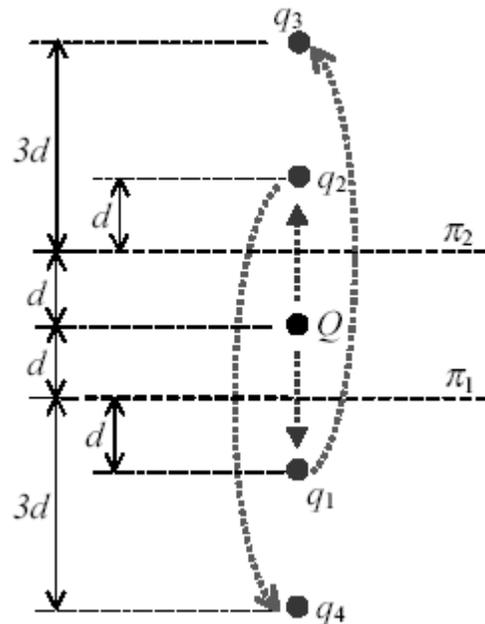


Figura 4.5.2. Procedimiento de colocación de cargas imagen para anular el potencial sobre las interfaces.

$Q$  genera con el plano  $\pi_1$  la imagen  $q_1 = -Q$  para anular el potencial sobre  $\pi_1$ . Análogamente,  $Q$  genera con el plano  $\pi_2$  la imagen  $q_2 = -Q$  para anular el potencial sobre  $\pi_2$ . Sin embargo, la presencia de la carga real y las dos cargas imagen ahora no satisfacen la condición de contorno sobre los planos  $\pi_1$  y  $\pi_2$ , por lo que hay que agregar nuevas cargas.

Por ejemplo,  $q_1$  genera  $q_3 = Q$  para anular el potencial sobre  $\pi_1$  y  $q_2$  genera  $q_4 = Q$  para anular el potencial sobre  $\pi_2$ . Se observa que estas imágenes están más alejadas de los planos interfase. Nuevamente, estas imágenes de segunda generación generarán imágenes de tercera generación más alejadas aún.

Se ve que este proceso es indefinido y se requieren infinitas imágenes para resolver el problema:

Cargas imagen	Valores	Distancia al plano más cercano		Cargas imagen	Valores	Distancia al plano más cercano
$q_1, q_2$	$-Q$	$d$		$q_7, q_8$	$-Q$	$7d$
$q_3, q_4$	$+Q$	$3d$		$q_9, q_{10}$	$+Q$	$9d$
$q_5, q_6$	$-Q$	$5d$		$q_{11}, q_{12}$	$-Q$	$11d$

Para realizar una aproximación analítica de un sistema electrostático dado se puede utilizar el método de las imágenes con el fin de simplificar un análisis teórico que podría ser más complicado de resolver [18], [19], y [20].

En nuestro caso tenemos un sistema capacitivo en el cual se aplican varias condiciones vistas anteriormente tomando en cuenta los medios dieléctricos del sistema, la geometría de los electrodos y por lo tanto la generación de múltiples imágenes para finalmente obtener una aproximación del sistema.

## 5. PLANTEAMIENTO TEÓRICO DEL PROBLEMA

Este trabajo propone y estudia nuevas metodologías para la caracterización de recubrimientos dieléctricos delgados sobre sustratos conductivos por medio de un sensor capacitivo. Se trata de mostrar que es posible medir, por métodos no destructivos, la constante dieléctrica y el espesor de recubrimientos dieléctricos usando una punta de medición esférica con un anillo de guarda equipotencial que permite reducir los efectos de borde en las fronteras de la superficie de esta. Solo se trata con el caso de una película dieléctrica uniforme sobre un conductor plano.

Para entender el problema planteado primero consideramos la capacitancia,  $C_{pe}$ , de un electrodo plano de área  $A$ , colocado en paralelo contra otro electrodo de área mayor y cubierto por una película dieléctrica de espesor  $h$  y constante dieléctrica  $\epsilon$ . Si ignoramos los efectos de borde se puede demostrar que,

$$C_{pe} = \frac{A}{(\epsilon_0^{-1}D + \epsilon^{-1}h)} \quad (5.1)$$

en donde  $D$  es la distancia desde la superficie de la película dieléctrica al electrodo superior y  $\epsilon_0$  es la permitividad eléctrica del vacío. Esta fórmula es válida para  $D \gg A^{1/2}$  y asume que el espacio entre la película dieléctrica y el electrodo superior está vacío. De la ecuación 5.1 podemos ver que la relación  $h / \epsilon$  se puede obtener de las mediciones de capacitancia con un electrodo plano y una separación  $D$  conocida. De esta forma, si conocemos  $h$  o  $\epsilon$  podemos obtener  $\epsilon$  o  $h$ . Sin embargo, si no conocemos ninguno de estos parámetros no existe ninguna diferencia si variamos  $D$ ; necesitamos una segunda medición que no solo dependa de la relación  $h / \epsilon$  o cualquiera de sus potencias. Es claro que, la segunda medición no puede ser hecha con un electrodo plano. Puesto que en el caso del electrodo plano las líneas del campo eléctrico son perpendiculares a las superficies del recubrimiento y de los electrodos, podemos concluir que una condición necesaria para un segundo electrodo es que las líneas de campo eléctrico entren al recubrimiento con ángulos oblicuos. Es razonable asumir que entre más largo el ángulo entre las líneas de campo eléctrico y la normal a la interfase del recubrimiento, mayor será la diferencia en la dependencia funcional de la capacitancia en  $h$  y  $\epsilon$  con respecto a la de un electrodo plano.

Supongamos que tenemos dos electrodos con diferentes geometrías, denotemos la capacitancia de uno de los electrodos con el sustrato metálico plano con recubrimiento como  $C_1$  y la capacitancia con el otro electrodo como  $C_2$ . Si la dependencia funcional de la capacitancia en  $h$  y  $\epsilon$  es diferente con un electrodo y con el otro, entonces en principio es posible encontrar  $h$  y  $\epsilon$  de las mediciones de  $C_1$  y  $C_2$ . Para ver esto, podemos considerar un método gráfico.

Si graficamos los valores de la capacitancia  $C_1$  versus  $C_2$  para un valor fijo de espesor de recubrimiento,  $h$ , y con diferentes valores de constante dieléctrica,  $\epsilon$ ,

obtenemos una curva que depende de la geometría y del tamaño de los electrodos. Entonces, supongamos que graficamos varias de estas curvas para diferentes valores de  $h$ , obtenemos una familia de curvas abarcando un rango de valores de  $\epsilon$  y  $h$ . Si estas curvas están separadas en un espacio  $C_1 - C_2$  podemos obtener los valores de  $\epsilon$  y  $h$  de un recubrimiento desconocido por medio de la medición de  $C_1$  y  $C_2$  localizando el punto correspondiente en el espacio  $C_1 - C_2$ . Primero podemos reconocer a cual curva pertenece y obtener  $h$ , después podemos localizar el punto a lo largo de la curva dada y obtener el valor de  $\epsilon$ . De esta manera, con el fin de demostrar la feasibility del método propuesto se debe mostrar que para un par dado de electrodos con diferentes geometrías existen curvas de  $C_1$  versus  $C_2$  que están separadas en el plano  $C_1 - C_2$ . Entre más grande la separación se obtendrá una mejor resolución.

### 5.1 Aproximación analítica utilizando el método de las imágenes en medios dieléctricos

Una forma de calcular la capacitancia entre una esfera conductora y una película dieléctrica sobre un substrato conductor es aplicando el método de las imágenes. Aunque en este sistema capacitivo resulten numerosas imágenes reflejadas podemos llegar a obtener una primera aproximación para obtener la carga eléctrica total del sistema.

La solución completa resulta ser una suma de sumas de sumas, etc. Nuestra intención es obtener una aproximación para el caso en que el radio de la esfera  $a$  sea pequeño comparado con la distancia a la superficie dieléctrica,  $s$ . En la Figura 5.1.1 mostramos la geometría del problema.

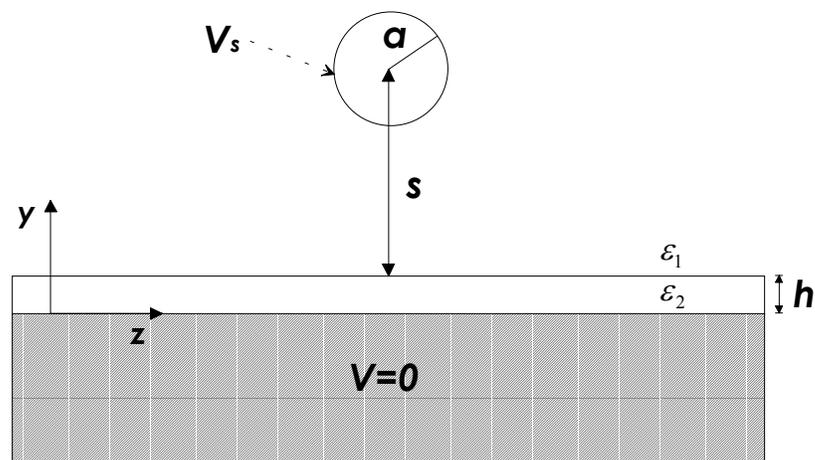


Figura 5.1.1. Geometría del sistema capacitivo propuesto.

Supondremos que la esfera conductora está a un potencial  $V_s$ , y que el substrato conductor está a un potencial  $V = 0$ .

Empezamos suponiendo a la esfera aislada inmersa en un material infinito con constante dieléctrica  $\epsilon_{r1}$ . En este caso, la esfera equipotencial corresponde a una carga imagen en el centro de la esfera con magnitud,

$$q_0^s = 4\pi\epsilon_0\epsilon_{r1}aV_s. \quad (5.1.1)$$

La estrategia que seguiremos es la siguiente. Vamos a obtener todas las cargas imagen de esta carga puntual inicial al acercar el sustrato conductor cubierto con el recubrimiento uniforme. Esto nos dará una serie infinita de cargas que después podemos “reflejar” sobre la esfera, dándonos una serie infinita de cargas imagen dentro de la esfera. Cada una de estas cargas será proporcional a un factor de la forma  $a / (ns + mh)$  donde  $n$  y  $m$  son enteros.

Una segunda iteración del procedimiento con cada una de la primera serie de cargas imagen en la esfera nos dará términos proporcionales a  $[a / (ns + mh)]^2$ . De manera que si ahí nos detenemos, el error en el cálculo de la capacitancia será de orden  $[a / (s + h)]^3$ .

Primero ponemos el punto de observación dentro del recubrimiento dieléctrico con el fin de poder obtener el campo eléctrico dentro del recubrimiento. Viendo hacia arriba, primero “vemos” una carga imagen sobre la carga original la cual se suma a la carga original dando una carga neta de

$$q_1^1 = \frac{2\epsilon_2}{\epsilon_2 + \epsilon_1} q_0^s. \quad (5.1.2)$$

Ahora, para satisfacer las condiciones de frontera en la interfase recubrimiento-sustrato, esto en  $y = 0$ , vemos hacia abajo y ponemos una carga imagen dentro del conductor de magnitud,

$$q_1^c = -q_1^1 = -\frac{2\epsilon_2}{\epsilon_2 + \epsilon_1} q_0^s, \quad (5.1.3)$$

y localizada en  $y = -s-h$ . (Recordemos que  $y = 0$  corresponde a la interfase entre el recubrimiento y el sustrato conductor). El campo eléctrico debido a esta nueva carga imagen viola las condiciones a la frontera en la primera interfase ( $\epsilon_1$  |  $\epsilon_2$ ) en  $y = s$ . Entonces vemos para arriba y ponemos otra carga imagen de magnitud

$$q_2^1 = \frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{\epsilon_2 + \epsilon_1} q_1^c = \frac{2\epsilon_2}{\epsilon_2 + \epsilon_1} \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\epsilon_2 + \epsilon_1} q_0^s, \quad (5.1.4)$$

y localizada en  $y = s + 3h$ . Esta carga imagen se refleja ahora en el sustrato como

$$q_2^c = -q_2^1 = -\frac{2\varepsilon_2}{\varepsilon_2 + \varepsilon_1} \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_2 + \varepsilon_1} q_0^s, \quad (5.1.5)$$

y localizada en  $y = -s-3h$ . Nuevamente, el observador dentro del recubrimiento ahora ve el reflejo de esta última carga imagen debido a la primera interfase ( $\varepsilon_1$  |  $\varepsilon_2$ ) con magnitud

$$q_3^1 = \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\varepsilon_2 + \varepsilon_1} q_2^c = \frac{2\varepsilon_2}{\varepsilon_2 + \varepsilon_1} \left( \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_2 + \varepsilon_1} \right)^2 q_0^s, \quad (5.1.6)$$

y localizada en  $y = s + 5h$ . Y a su vez aparece otro reflejo en el conductor de magnitud

$$q_3^c = -q_3^1 = -\frac{2\varepsilon_2}{\varepsilon_2 + \varepsilon_1} \left( \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_2 + \varepsilon_1} \right)^2 q_0^s, \quad (5.1.7)$$

y localizada en  $y = -s - 5h$  y así sucesivamente hasta infinito.

A partir de estos primeros “reflejos” podemos inferir la serie de cargas imagen dentro del conductor para  $n > 1$ . Tenemos:

$$\begin{aligned} q_1^c = -q_1^1 &= -\frac{2\varepsilon_2}{\varepsilon_2 + \varepsilon_1} q_0^s && \text{en} && y_1 = -s - h, \\ q_2^c = -q_2^1 &= -\frac{2\varepsilon_2}{\varepsilon_2 + \varepsilon_1} \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_2 + \varepsilon_1} q_0^s && \text{en} && y_2 = -s - 3h, \\ q_3^c = -q_3^1 &= -\frac{2\varepsilon_2}{\varepsilon_2 + \varepsilon_1} \left( \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_2 + \varepsilon_1} \right)^2 q_0^s && \text{en} && y_3 = -s - 5h, \\ &\dots && && \\ q_n^c = -q_n^1 &= -\frac{2\varepsilon_2}{\varepsilon_2 + \varepsilon_1} \left( \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_2 + \varepsilon_1} \right)^n q_0^s && \text{en} && y_n = -s - (2n-1)h. \end{aligned} \quad (5.1.8)$$

Esta serie de cargas imagen se ilustra en la Fig. 5.1.2.

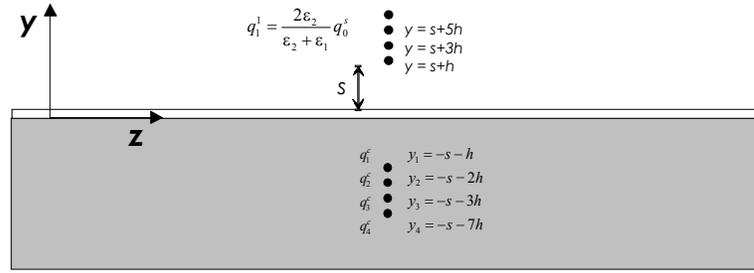


Figura 5.1.2. Cargas imagen vistas desde el interior del recubrimiento cuando hay una carga real,  $q_0^s$ , en  $y = s+h$ .

Ahora, un observador en el medio 1 ve sólo las cargas imagen que están dentro del conductor como si estuvieran en un medio de constante dieléctrica  $\varepsilon_2$ , pero a través de la interfase ( $\varepsilon_1 \mid \varepsilon_2$ ) las ve “apantalladas”, es decir le encima una carga imagen adicional a cada carga imagen. Lo que quiere decir que hay que multiplicarlas por el factor  $2\varepsilon_1/(\varepsilon_2 + \varepsilon_1)$ .

Ahora, esta serie de cargas imagen se “refleja” en la esfera conductora, una por una. Cada carga,  $[2\varepsilon_1/(\varepsilon_2 + \varepsilon_1)]q_n^c$ , genera una imagen dentro de la esfera de magnitud

$$q_n^s = -[2\varepsilon_1/(\varepsilon_2 + \varepsilon_1)]q_n^c \frac{a}{(s+h-y_n)}, \quad (5.1.9)$$

y localizada en  $y_n^s = s+h - a^2/(s+h-y_n)$ , donde  $y_n = -s - (2n-1)h$ . Esto es, para  $n = 1,2,3,\dots$  tenemos,

$$q_n^s = \frac{4\varepsilon_2\varepsilon_1}{(\varepsilon_2 + \varepsilon_1)^2} \left( \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_2 + \varepsilon_1} \right)^n \frac{a}{2(s+nh)} q_0^s, \quad (5.1.10)$$

$$q_s = \sum_{n=0}^{\infty} q_n^s, \quad (5.1.11)$$

y están localizadas en  $y_n^s = s+h - \frac{a^2}{(s+h-y_n)}$ . Sustituyendo la expresión para  $y_n$  tenemos,

$$y_n^s = s+h - \frac{a^2}{2(s+nh)}. \quad (5.1.12)$$

Esta serie de cargas imagen se ilustran en la Fig. 5.1.3.

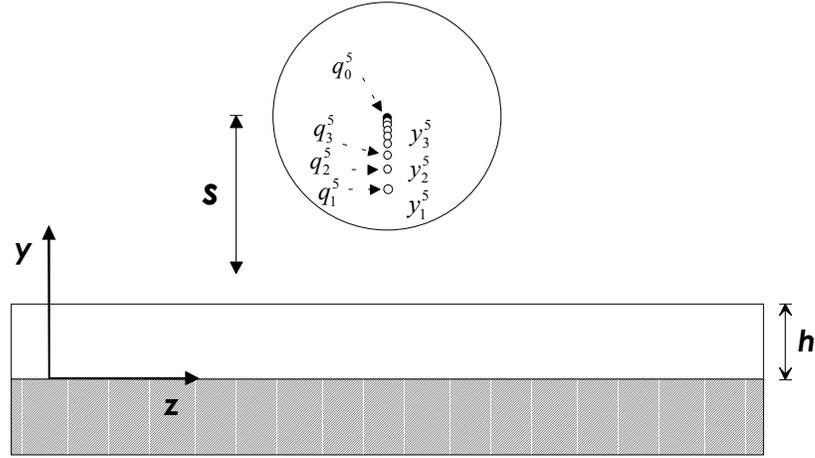


Figura 5.1.3. Primera serie de cargas dentro de la esfera conductora debido al reflejo de la carga imagen inicial  $q_0^s$  y sus imágenes dentro del substrato conductor.

Finalmente la capacitancia total del sistema se calcula como

$$C = \frac{q_s}{V_s} . \quad (5.1.13)$$

Y explícitamente tenemos,

$$C_s = \frac{q_s}{V_s} = \frac{q_0^s}{V_s} \left\{ 1 + \frac{4\epsilon_2\epsilon_1}{(\epsilon_2 + \epsilon_1)^2} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \left( \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\epsilon_2 + \epsilon_1} \right)^n \frac{a}{2(s + nh)} \right) \right\} . \quad (5.1.14)$$

Si tenemos un sistema capacitivo de placas paralelas con  $\epsilon_{r2}$  como dieléctrico entonces tenemos la siguiente expresión

$$C_p = \frac{\epsilon_0\epsilon_{r2}A}{h} . \quad (5.1.15)$$

Si podemos medir este valor entonces podemos despejar  $\epsilon_{r2}$  y obtenemos

$$\epsilon_{r2} = \frac{hC_p}{\epsilon_0A} . \quad (5.1.16)$$

Esta expresión se puede sustituir en la expresión 5.1.4 con el fin de obtener una expresión en función del espesor  $h$  de la capa dieléctrica y de constante dieléctrica  $\epsilon_{r2}$ ,

$$C_s = \frac{q_s}{V_s} = \frac{q_0^s}{V_s} \left\{ 1 + \frac{4(hC_p / \epsilon_0 A) \epsilon_{r1}}{(hC_p / \epsilon_0 A + \epsilon_{r1})^2} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{\epsilon_{r1} - (hC_p / \epsilon_0 A)}{(hC_p / \epsilon_0 A) + \epsilon_{r1}} \right)^n \frac{a}{2(s + nh)} \right\}. \quad (5.1.17)$$

Sustituyendo  $q_0^s$  tenemos la siguiente expresión

$$C_s = 4\pi\epsilon_0\epsilon_1 a \left\{ 1 + \frac{4(hC_p / \epsilon_0 A) \epsilon_{r1}}{(hC_p / \epsilon_0 A + \epsilon_{r1})^2} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{\epsilon_{r1} - (hC_p / \epsilon_0 A)}{(hC_p / \epsilon_0 A) + \epsilon_{r1}} \right)^n \frac{a}{2(s + nh)} \right\}. \quad (5.1.18)$$

Con esta expresión se puede obtener una curva de  $C_s$  versus  $h$ , por ejemplo si tenemos un sistema capacitivo de placas paralelas en el cual podemos medir su capacitancia con  $A = (2 \times 2) \text{ cm}^2$ ,  $h = 300 \text{ } \mu\text{m}$ ,  $\epsilon_{r2} = 4$ , obtenemos que  $C_p = 47.22 \text{ pF}$ , que sería la capacitancia medida experimentalmente.

Con un sistema capacitivo esférico como el de la figura 5.1.1 y con las variables  $\epsilon_{r1} = 1$ ,  $a = 0.1 \text{ mm}$ ,  $s = 0.5 \text{ mm}$ , y  $V_s = 1 \text{ V}$ , realizamos un barrido de  $h$  desde 100 hasta 1000  $\mu\text{m}$ . Sustituyendo las variables obtenemos la curva de la figura 5.1.4.

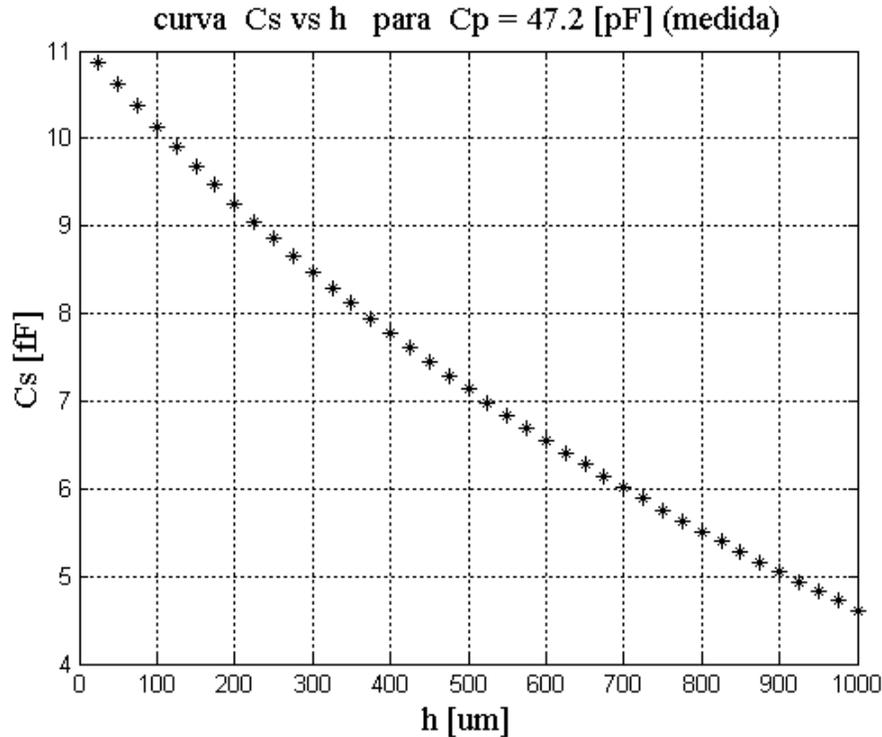


Figura 5.1.4. Curva de  $C_s$  vs  $h$  para una capacitancia de 47.2 pF, medida hipotéticamente, utilizando la expresión 5.1.18.

En la gráfica observamos que para una capacitancia  $C_s = 8.5$  fF corresponde un espesor  $h = 300$   $\mu\text{m}$ . Con este valor de  $h$  despejamos  $\epsilon_{r2}$  de la expresión 5.1.16, de placas paralelas, y se obtiene un valor de  $\epsilon_{r2} = 4$ .

Esta sería la forma de obtener una primera aproximación de estas variables utilizando el método de las imágenes de un sistema capacitivo con electrodo esférico. Se podría realizar una segunda iteración utilizando los resultados anteriores del método analítico y se obtendría una sumatoria de sumatorias infinita, pero el análisis se complicaría más con cada iteración. Una sola iteración da una buena aproximación cuando  $a / s \ll 1$ , esto es, cuando la esfera está a una distancia de varios radios de la capa dieléctrica. Esto no es suficiente para obtener una aproximación comparable con un resultado experimental, tendríamos que realizar otras iteraciones para poder realizar una comparación con resultados experimentales y realizar una estimación del método analítico descrito. Aunque este resultado está limitado para  $a / s \ll 1$ , nos da una primera demostración de que es factible medir  $\epsilon$  y  $h$  de un recubrimiento usando dos mediciones de capacitancia eléctrica con dos electrodos de diferente geometría.

A pesar de que los valores de capacitancia son del orden de los femto faradios [fF], actualmente existen puentes de impedancia digitales (LCRs) que pueden medir estos rangos de capacitancia. Sin embargo, lo mejor sería obtener valores de capacitancia mayores.

## 5.2 Descripción del método gráfico

El método consiste en generar un espacio de capacitancia  $C_1 - C_2$  por medio de dos mediciones capacitivas con dos electrodos de diferente geometría, una de las cuales es no plana, de un recubrimiento dieléctrico uniforme de espesor  $h$  y constante dieléctrica  $\epsilon_r$  sobre un substrato conductor plano. Manteniendo  $h$  constante y variando  $\epsilon_r$  del recubrimiento dieléctrico se realizan las mediciones capacitivas, con el fin de obtener un punto de capacitancia  $(C_1, C_2)$  para cada valor de  $\epsilon_r$  en el espacio  $C_1 - C_2$ . Con estos puntos se obtiene una curva característica del espesor  $h$  del recubrimiento dieléctrico. Si ahora variamos  $h$  y realizamos de nuevo dos mediciones capacitivas para cada valor de  $\epsilon_r$  obtendremos otros puntos  $(C_1, C_2)$ , en el espacio  $C_1 - C_2$ , con los cuales se obtendrá otra curva característica del nuevo valor de  $h$ . Si las dos curvas que representan dos espesores  $h$  diferentes se encuentran separadas una de la otra en el espacio  $C_1 - C_2$ , será posible obtener el valor de un espesor  $h_i$  intermedio entre las dos curvas de espesor  $h$  generadas anteriormente, y su correspondiente  $\epsilon_{ri}$  con un punto de capacitancia  $(C_{1i}, C_{2i})$  obtenido con dos mediciones de capacitancia de un recubrimiento dieléctrico. Esto será válido sólo si los valores de  $h_i$  y  $\epsilon_{ri}$  se encuentran dentro del rango de  $h$  y  $\epsilon_r$  con los que se generaron las primeras curvas de  $h$ .

Se pueden obtener varias curvas de  $h$  y  $\epsilon_r$  con diferentes materiales uniformes con  $h$  y  $\epsilon_r$  bien caracterizados para utilizarse como muestras de calibración, con el fin de generar una familia de curvas dentro de un rango de valores de  $h$  y  $\epsilon_r$  en el

espacio de capacitancia  $C_1 - C_2$ . Suponiendo que estas curvas fueran lineales se pueden realizar interpolaciones entre cada par de curvas características de  $h$  y entre cada par de valores de  $\epsilon_r$  con la finalidad de generar más curvas y así obtener una malla de calibración. De esta forma, si realizamos dos mediciones de capacitancia con dos electrodos de geometría diferente a una muestra de un recubrimiento dieléctrico uniforme, con  $h$  y  $\epsilon_r$  no conocido sobre un substrato conductor plano, obtendremos un punto de capacitancia. Si las coordenadas de este se encuentran ubicadas dentro de la malla de calibración se podrá estimar a qué curva de  $h$  y  $\epsilon_r$  corresponde ese punto obteniendo finalmente el valor de  $h$  y  $\epsilon_r$  del recubrimiento dieléctrico de la muestra.

Para electrodos de geometrías simples puede ser posible generar las curvas de capacitancia por métodos teóricos. Sin embargo, en la práctica siempre será necesario calibrar cualquier par de electrodos dado. Esto se puede hacer obteniendo curvas en el espacio ( $C_1, C_2$ ), por medio de mediciones de espesores constantes con muestras bien caracterizadas de constante dieléctrica.

### 5.3 Simulación numérica con elemento finito

Anteriormente se mencionó que en trabajos previos se ha mostrado que sensores capacitivos con electrodos esféricos ofrecen algunas ventajas sobre otras geometrías. Siendo una forma conveniente en la práctica, consideramos al menos uno de los electrodos esféricos. Para propósito de un ejemplo numérico consideramos un electrodo esférico. La geometría en este caso se describe en la figura 5.2.1.

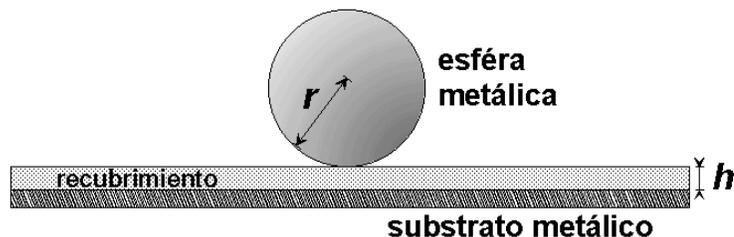


Figura 5.2.1. Capacitor formado por electrodo esférico, recubrimiento y substrato conductor.

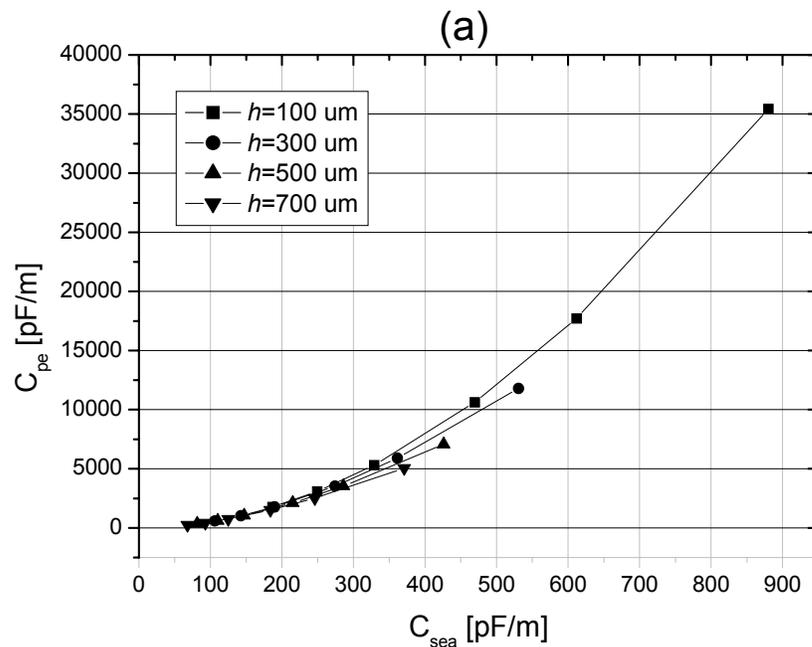
Denotamos a la capacitancia como  $C_{se}$ . Los valores exactos para  $C_{se}$  se pueden obtener numéricamente, por ejemplo, por algún método de diferencias finitas. Por simplicidad consideramos plana la geometría del segundo electrodo y en contacto con la superficie del recubrimiento. La capacitancia en este caso se denotará como  $C_{pe}$  y esta definida como

$$C_{pe} = \frac{\epsilon\epsilon_0 A}{h}, \quad (5.2.1)$$

Consideremos dimensiones cercanas utilizadas en los experimentos. Se utilizó un método numérico de elemento finito (FEMLAB) para obtener las curvas de  $C_{pe}$  versus  $C_{se}$ . Como los cálculos de la capacitancia con una esfera en 3D fueron muy lentos (varias horas por punto), se limitaron los cálculos a geometrías en 2D. Por lo tanto, en realidad consideramos un cilindro infinito arriba y una tira de recubrimiento más substrato conductor, se calculo la capacitancia en pF por unidad de longitud de la estructura (esto es por metro).

### 5.3 Resultados de la simulación en 2D

En las figuras 5.3.1a y 5.3.1b se muestran las graficas con curvas de  $C_{pe}$  versus  $C_{se}$  para un cilindro de 2.38 mm de radio ( $C_{esa}$ ) y 1 mm ( $C_{esb}$ ) respectivamente. El espesor de los recubrimientos para cada curva se muestra en el recuadro de cada gráfica. Las constantes dieléctricas están representadas por los símbolos de diferente geometría en cada curva. Estos valores de  $\epsilon$  son: 1, 1.75, 3, 6, 10 y 20.



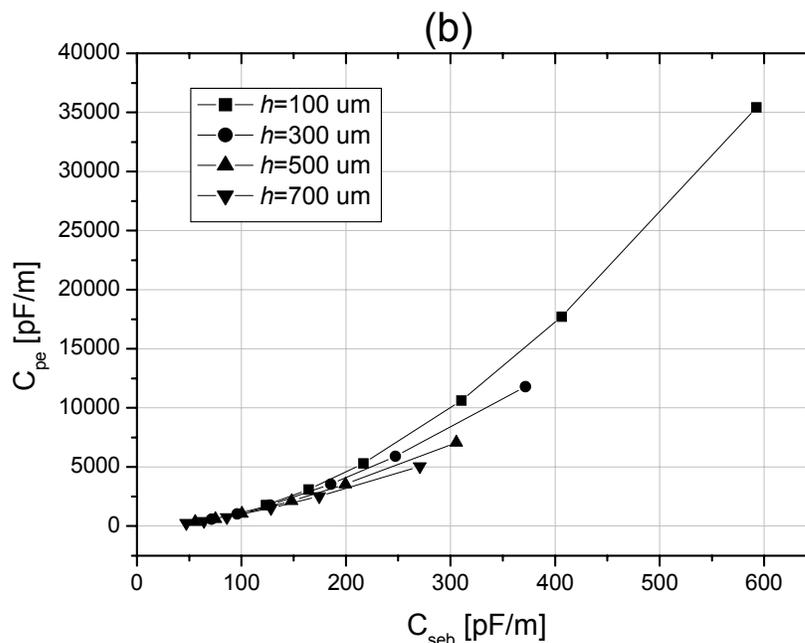
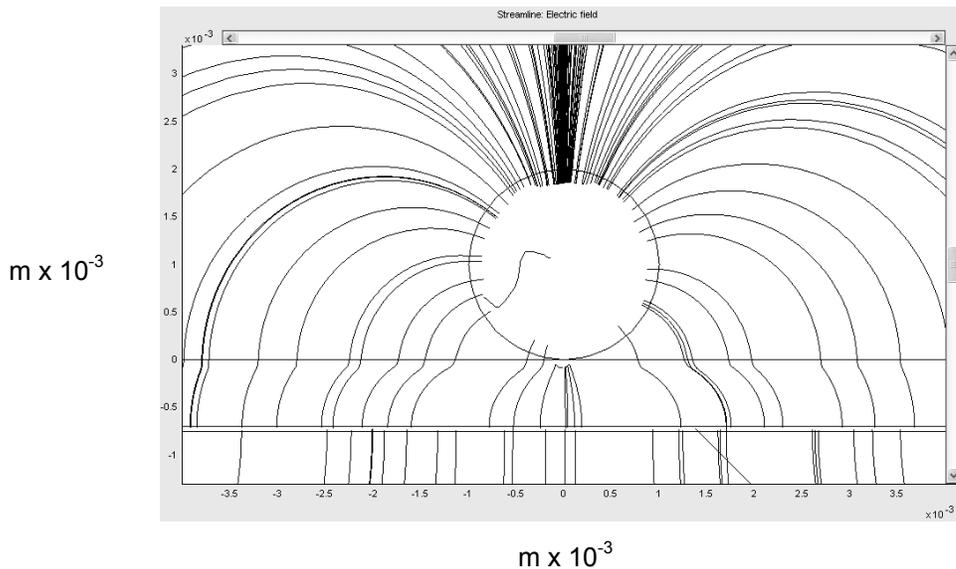


Figura 5.3.1 Curvas de  $C_{pe}$  versus  $C_{se}$  para: a)  $r=2.38$  mm y b)  $r=1$  mm. Los valores de  $h$  para las diferentes curvas son de 0.1 mm, 0.3 mm, 0.5 mm y 0.7 mm. Los valores de  $\epsilon$  en las marcas sobre las curvas son de 1, 1.75, 3, 6, 10 y 20, siendo  $\epsilon = 20$  el punto más alto en cada curva.

Como se puede apreciar en la figura 5.3.1, las curvas para diferentes valores de  $h$  se separan de cada una para valores de constante dieléctrica desde alrededor de 6 a 20. Esta separación se aprecia mejor en la figura 5.3.1b, esto es por tener un radio menor en el cilindro. La razón es porque, entre menor es el radio en el electrodo cilíndrico, mayor es la diferencia en la dependencia funcional de la capacitancia con la de un electrodo plano.

En la figura 5.3.2 se muestran las líneas de campo eléctrico alrededor del cilindro y dentro del recubrimiento cuando se aplica una diferencia de potencial. El substrato conductor es la capa delgada inferior de la figura. Se puede ver, en la figura, que las líneas de campo eléctrico pegan en la superficie interna del recubrimiento con un ángulo oblicuo y no perpendicular a la superficie del substrato.



*Figura 5.3.2 Líneas de campo eléctrico alrededor del cilindro conductor y dentro del recubrimiento dieléctrico (capa delgada inferior).*

Con el planteamiento teórico propuesto podemos obtener una aproximación de nuestro sistema capacitivo aplicando el método de imágenes y con la primera aproximación obtener los primeros resultados. Sin embargo, este método tiene sus restricciones, sobre todo con las dimensiones del espesor del recubrimiento y el radio de la esfera.

Con el AEF podemos obtener resultados más cercanos a la realidad con simulaciones en 3D pero el tiempo de procesamiento es tardado dado el número de condiciones de fronteras que se requiere en el sistema capacitivo. Aún así parece ser la mejor solución para obtener resultados más confiables.

## 6. DESARROLLO EXPERIMENTAL

Se desarrolló un experimento con el fin de probar la viabilidad del planteamiento teórico propuesto. La idea del experimento fue simplemente la de obtener una verificación experimental en la separación de las curvas  $C_{pe}$  versus  $C_{se}$  y ver si podríamos estimar el espesor de una placa de vidrio sin conocer su constante dieléctrica. Por simplicidad se eligió un electrodo con superficie periódica regular con dimensiones del orden de 1 mm, aunque el principio de medición se puede utilizar en escalas menores, presumiblemente en la escala de los micrómetros.

### 6.1 Diseño del sensor capacitivo

Se fabricaron 4 electrodos: i) un electrodo plano ( $C_{pe}$ ) de 2 cm x 2 cm de área, ii) un electrodo con superficie periódica regular ( $C_{pse}$ ) de 2 cm x 2 cm de área, iii) un electrodo semiesférico ( $C_{se1}$ ) con un radio de  $r = 2.38$  mm de curvatura, y iv) un electrodo semiesférico ( $C_{se2}$ ) con un radio de  $r = 4.76$  mm de curvatura. Ambos electrodos semiesféricos tienen un anillo de guarda como se propone en [6]. Las dimensiones de estos electrodos se describe en la siguiente figura 6.1.1.

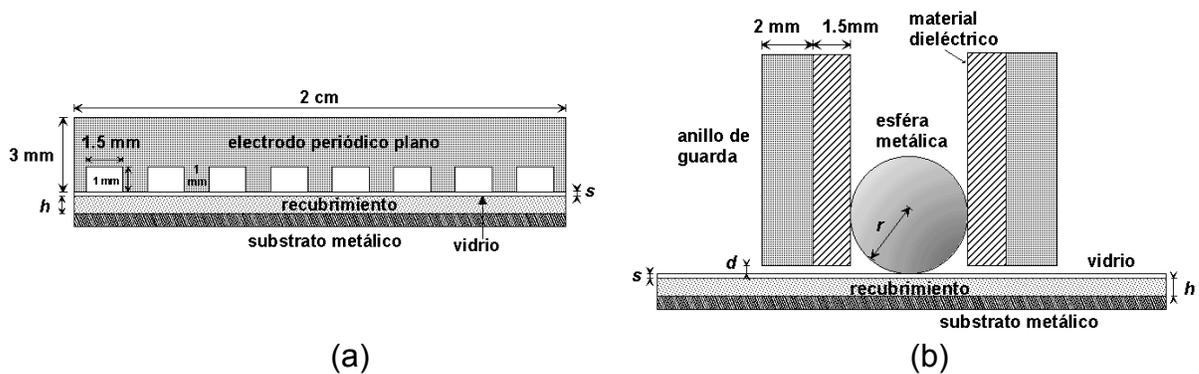
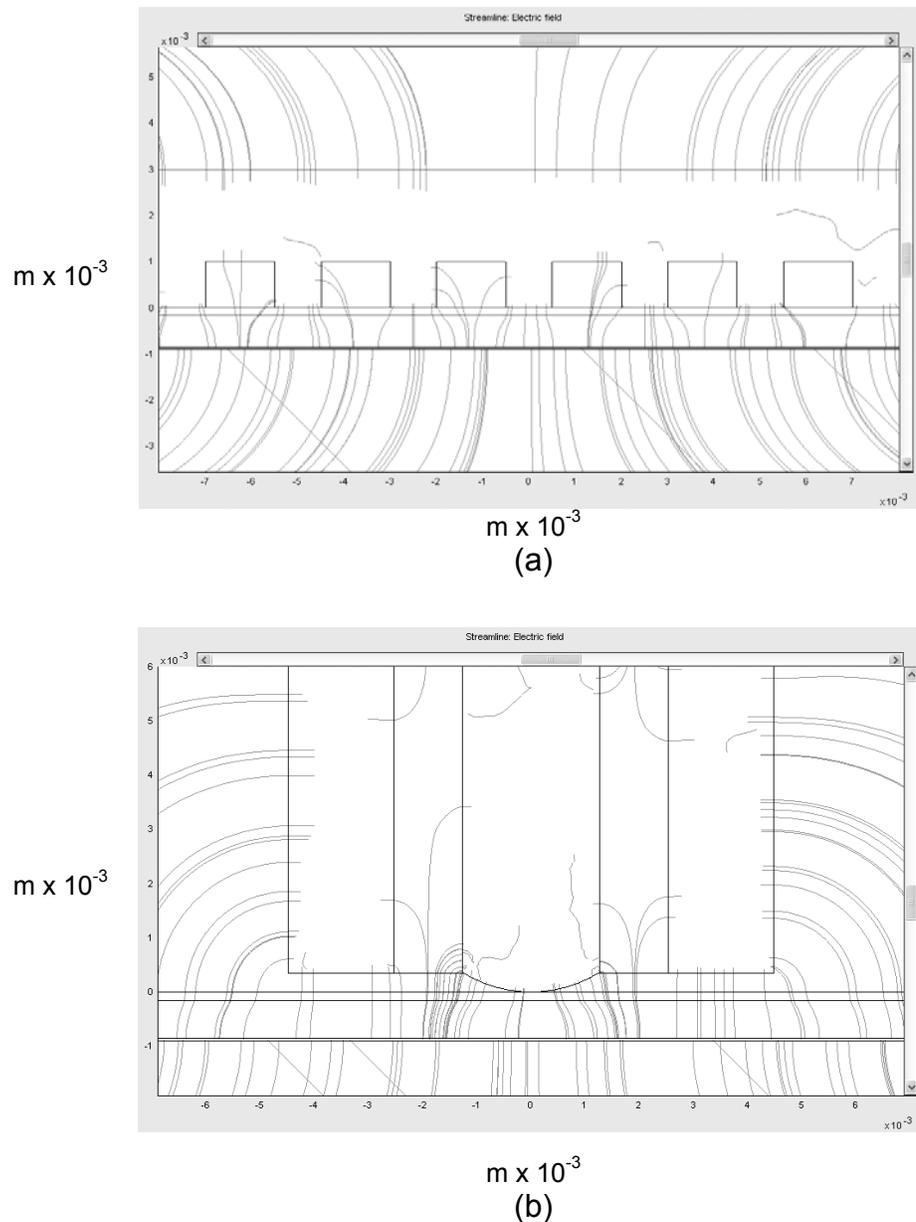


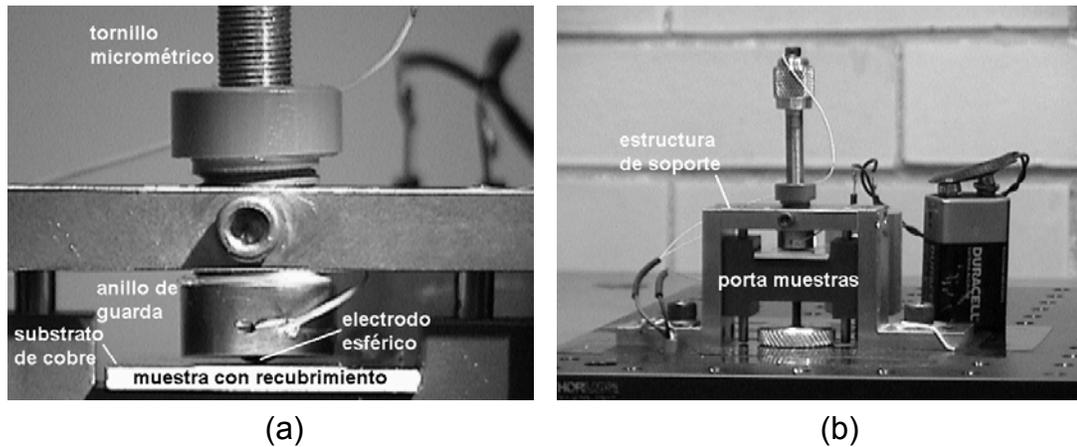
Figura 6.1.1. Geometría y dimensiones de: a) electrodo periódico plano y b) electrodo esférico.

Con estas dimensiones se realizaron simulaciones utilizando un método numérico de elemento finito para ver como se comportaban las líneas de campo eléctrico con la geometría propuesta, como se muestra en la figura 6.1.2.



**Figura 6.1.2. Líneas de campo eléctrico para a) electrodo periódico plano y b) electrodo semiesférico con guarda.**

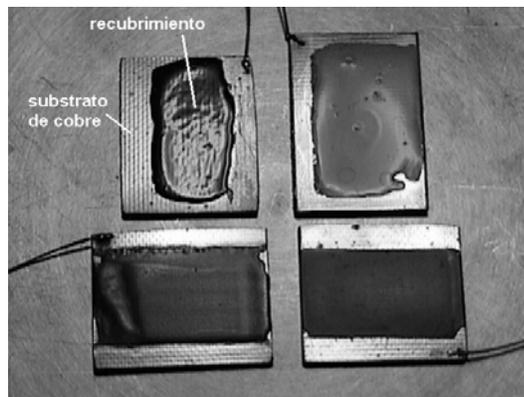
La estructura experimental del sensor capacitivo se fabricó en el taller del Laboratorio de Óptica del CCADET de la UNAM. Esta estructura cuadrada está formada por un tornillo de cuerda micrométrica que termina en uno de sus extremos con una curvatura de radio  $r = 2.38$  mm, el cual es un radio estándar, y que sirve como nuestro electrodo semiesférico. La estructura es de latón y esta fija a una plataforma óptica. Cuenta con un soporte de pvc para colocar las muestras de calibración como se describe en la figura 6.1.3.



*Figura 6.1.3. Estructura del sensor capacitivo, a) electrodo esférico con anillo de guarda y b) estructura completa del sensor montado sobre una plataforma óptica.*

Como muestras de calibración se prepararon recubrimientos sobre substratos de cobre con cuatro diferentes tipos de pintura, pintura de aceite COMEX, tinta para serigrafía Probst Marabu serie PY, pintura para retocar automóviles AUTO-RES pinauto y pintura aislante para alto voltaje Sili-VOLT.

Con estas pinturas se trataron de realizar muestras de calibración con diferentes espesores, sin embargo cuando la pintura alcanzó su estado sólido la superficie del recubrimiento no era uniforme como se muestra en la figura 6.1.4. Esto provocaba errores en las mediciones sobre todo con el electrodo periódico plano puesto que no existía un buen contacto con la superficie del recubrimiento.



*Figura 6.1.4. Superficie de los recubrimientos después de secarse.*

Debido a la dificultad de preparar recubrimientos dieléctricos de espesor uniforme y constante se decidió trabajar con películas de fluidos dentro de contenedores planos o celdas, construidas con una placa de vidrio de espesor de  $150\ \mu\text{m}$  paralela con una placa de cobre y separados por un espesor  $h$  conocido. Las

dimensiones de estas celdas rectangulares son de 2.5 cm x 2.8 cm y tres lados están sellados con silicón como se muestra en la figura 6.1.5.

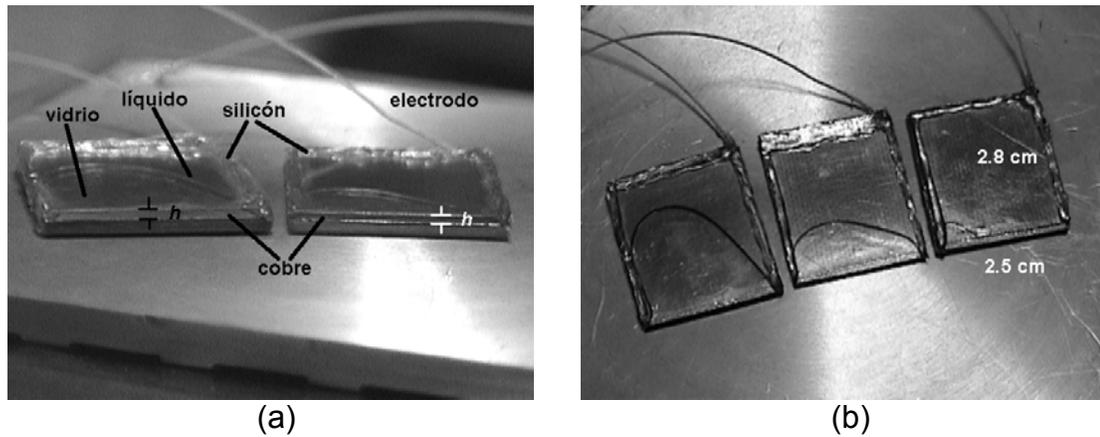
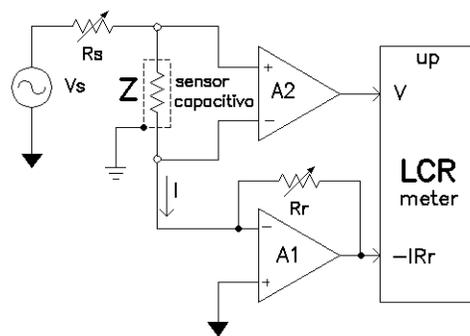


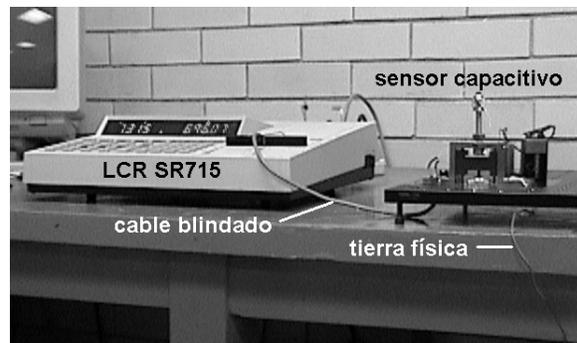
Figura 6.1.5. (a) Descripción de las celdas con fluido y b) vista superior de las celdas con fluido.

Se fabricaron diferentes celdas cada una con diferente separación  $h$  entre las placas de vidrio y cobre en donde se depositaron diferentes fluidos utilizando una jeringa para insulina del orden de  $300 \mu\text{m}$  de diámetro con el fin de obtener diferentes espesores y constantes dieléctricas como muestras de calibración. La presencia del vidrio complicó el modelo teórico de los experimentos pero ayudo a obtener muestras de calibración más uniformes que mejoraron las mediciones del experimento.

## 6.2 Sistema de medición



(a)

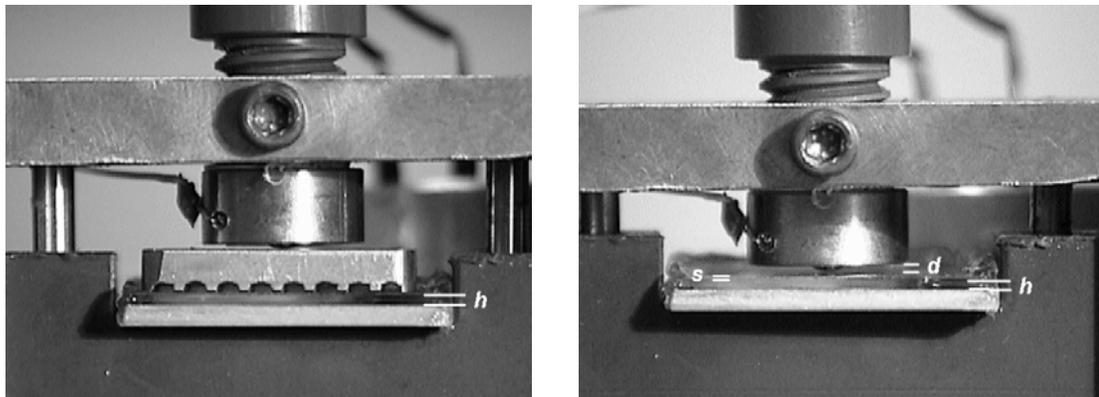


(b)

Figura 6.2.1 a) Diagrama a bloques de conexiones eléctricas del sensor capacitivo con el LCR digital, b) sistema completo de medición del sensor capacitivo y el LCR SR715.

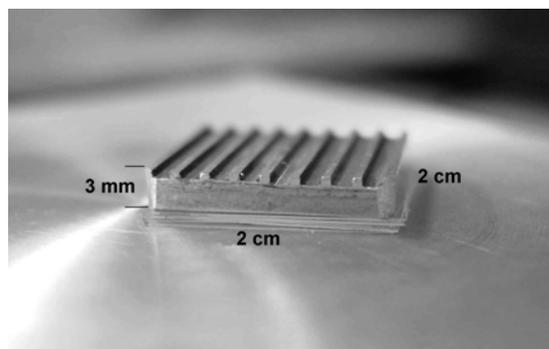
El sistema de medición completo está comprendido por un puente digital LCR Stanford Research Systems SR715 el cual alimenta al sensor capacitivo con una señal senoidal de amplitud de  $1 V_{pp}$  y a una frecuencia de 10 KHz, que es la frecuencia recomendada para el rango de capacitancia que se midió, entre 9 y 97 pF, [21]. La estructura del sensor está montado sobre una mesa óptica metálica conectada a tierra física y las conexiones al LCR se realizaron con cable blindado también aterrizado, esto con el fin de reducir ruido, capacitancias parásitas y mantener estas lo más constante posible [22] y [23]. El sistema de medición completo así como el diagrama eléctrico a bloques se muestra en la figura 6.2.1.

La forma de realizar las mediciones con las celdas y el electrodo periódico plano se muestra en la siguiente figura 6.2.2.



(a)

(b)

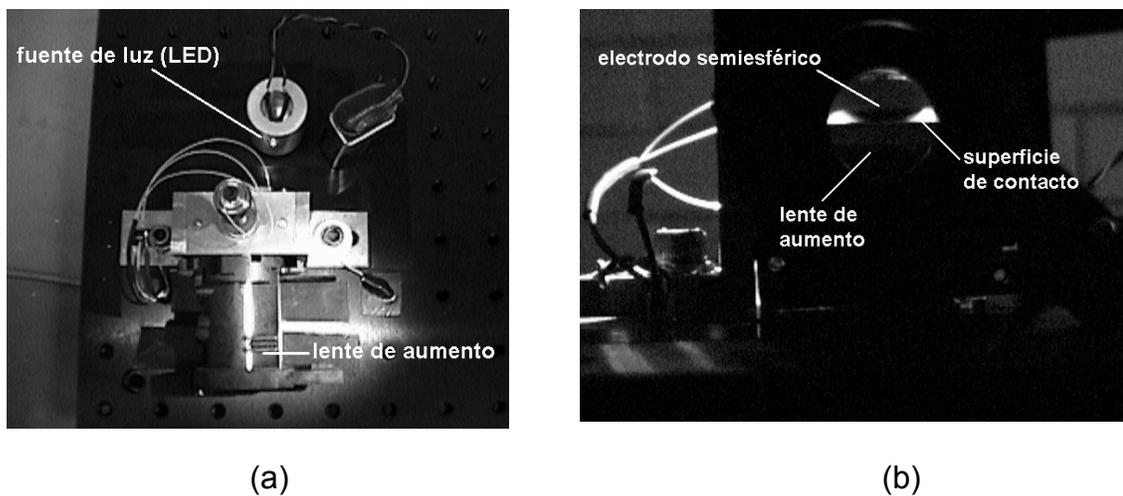


(c)

*Figura 6.2.2. a) Forma de obtener las mediciones de capacitancia  $C_{pse}$  con el electrodo periódico plano y una celda, b) forma de obtener las mediciones de capacitancia  $C_{se}$  con el electrodo semiesférico y una celda y c) electrodo periódico plano con sus medidas.*

En esta se ve que las celdas se colocan en el porta-muestras y arriba de esta se coloca el electrodo periódico plano o el electrodo semiesférico directamente, haciendo que este toque muy suavemente ya sea la superficie del electrodo periódico plano o la placa de vidrio para realizar las mediciones experimentales. Por lo tanto, en los experimentos la placa de vidrio de la celda se debe considerar como parte de los electrodos.

Para tener mejor control de la posición del electrodo semiesférico sobre la superficie del electrodo periódico plano y de la celda, se utilizó una lente de aumento junto con una fuente de luz de fondo para obtener un contraste con el electrodo semiesférico esto, con el fin de ver con más detalle el contacto con las superficies mencionadas, como se describe en la figura 6.2.3.



*Figura 6.2.3. a) Vista superior del sensor capacitivo con lente de aumento y fuente de luz (LED), b) vista frontal del electrodo semiesférico a través de una lente de aumento.*

De esta forma se controló la presión ejercida por el electrodo semiesférico sobre las celdas y se evitó una deformación significativa de la placa de vidrio, que en consecuencia, variaría el espesor  $h$  del fluido.

### 6.3 Selección de los electrodos

Se obtuvieron mediciones realizando combinaciones con los cuatro electrodos mencionados anteriormente y dos celdas planas con espesores  $h$  de 327  $\mu\text{m}$  y de 500  $\mu\text{m}$  llenadas con: i) aire, ii) aceite de oliva, y iii) agua destilada. Los valores de  $\epsilon_r$  en tablas [13] son de i) 1.000264, ii) 3.1, y iii) 48-88, respectivamente. Se graficaron dos curvas con tres puntos de diferentes valores de  $\epsilon_r$  en cada una para cada combinación de par de electrodos. En la figura 6.3.1 se muestran las curvas obtenidas.

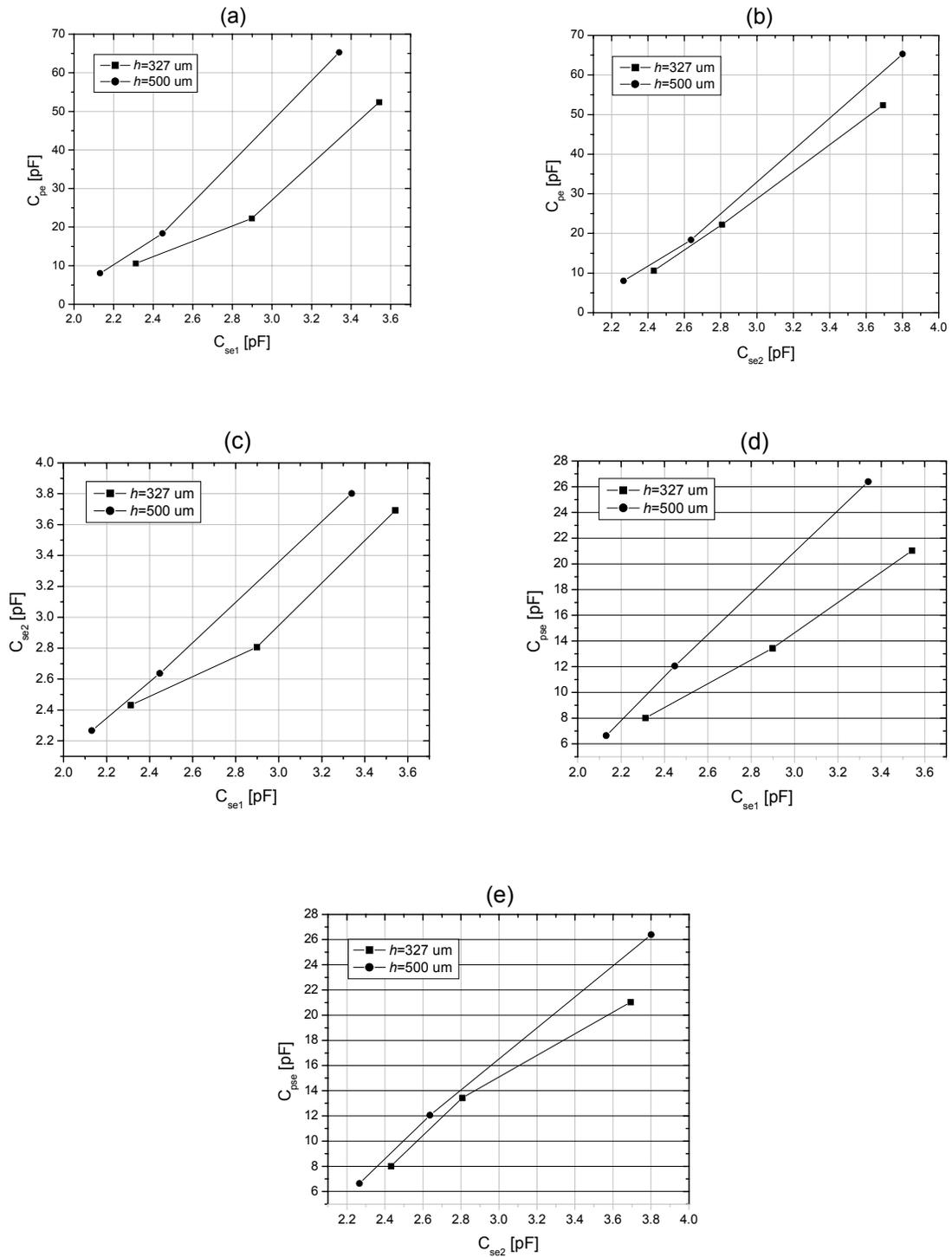


Figura 6.3.1. Gráficas obtenidas con la combinación de los electrodos plano (pe), periódico plano (pse), esférico 1 (se1,  $r = 2.38 \text{ mm}$ ) y esférico 2 (se2,  $r = 4.76 \text{ mm}$ ). Los puntos más bajos son para el aire, los intermedios son para el aceite de

*oliva y los más altos son para el agua. Los espesores de los contenedores para cada curva se muestran en el recuadro.*

Observando las gráficas claramente se ve que existe una separación en el espacio de capacitancia para cada electrodo además se puede observar que las gráficas (a) y (d) son las que presentan mayor separación entre curvas en el espacio de capacitancia. Si comparamos estas separaciones con las obtenidas en las simulaciones, figura 3.2.1, se nota que estas últimas son menores. Esto puede deberse a que la simulación esta hecha en 2D mientras que los experimentos son realizados en una estructura de 3D.

La mejor combinación resulta ser la de la gráfica (d) con el electrodo periódico plano (*pse*) versus el electrodo esférico de  $r = 2.38$  mm (*se1*). Con estos valores de capacitancia podemos generar el espacio  $C_{pse} - C_{es1}$ . En estas mediciones se ajustó la altura  $d = 0.5$  mm (distancia del extremo inferior del anillo de guarda a la superficie de la placa de vidrio de la celda), como se muestra en la figura 6.2.2b. Si variamos  $d$  los valores de capacitancia medidos también varían.

#### 6.4 Curvas de calibración

Para probar si se podría estimar el espesor de un recubrimiento sin conocer su constante dieléctrica, se fabricaron cuatro celdas de diferente espesor para utilizarlas como muestras de calibración: i) 120  $\mu\text{m}$ , ii) 314  $\mu\text{m}$ , iii) 501  $\mu\text{m}$  y iv) 730  $\mu\text{m}$ , figura 4.2.2. Se midió la capacitancia ( $C_{pse}$ ) con el electrodo periódico plano y la capacitancia ( $C_{se1}$ ) con el electrodo semiesférico 1 para cada celda de diferente espesor llenas con aire, aceite de oliva y agua destilada. La altura  $d$  del anillo de guarda del electrodo semiesférico fue en este caso de 3 mm.

Como la placa de vidrio ahora forma parte de nuestro sensor es necesario conocer su constante dieléctrica, el valor en tablas es entre 3.1 y 10. Primero se determinó la constante dieléctrica del vidrio  $\epsilon_{rv}$  con la fórmula de placas paralelas planas colocando una placa de vidrio como dieléctrico entre dos placas conductoras de 2 cm x 2 cm de área,  $A = 4$  cm<sup>2</sup>. El espesor de la placa de vidrio fue de  $s = 150$   $\mu\text{m}$ . La capacitancia medida por el puente LCR digital fue de  $C_v = 105.42$  pF descontando la capacitancia parásita de nuestro sensor, Con estos valores calculamos  $\epsilon_{rv}$  como sigue,

$$\epsilon_{rv} = \frac{C_v s}{\epsilon_0 A} = 4.4648 . \quad (6.4.1)$$

Se realizaron varias mediciones, con las celdas, obteniéndose una repetibilidad de alrededor del 1% para las películas de aire y de aceite de oliva mientras que para las películas de agua destilada la repetibilidad varió del 3% al 5%. Las probables fuentes de error fueron la diferencia de presión ejercida por el electrodo semiesférico sobre la celda, fugas del fluido en la celda, la evaporación del agua, sobre todo con las celdas más delgadas.

Las mediciones capacitivas son muy sensitivas a pequeños errores de alineamiento por lo tanto es difícil la reproducibilidad de estas con un porcentaje bajo. El parámetro  $d$  del electrodo semiesférico que fue utilizado en estas mediciones fue de 0.3 mm.

Después de varias mediciones de prueba se fabricaron cuatro celdas de calibración con los espesores  $h$  que se muestran en la tabla 6.4.1. Con estos valores primero se obtuvo el valor promedio de cuatro mediciones para cada fluido y para cada espesor  $h$ , después se restó la capacitancia parásita media de la estructura del sensor capacitivo a cada valor. Por ejemplo, la capacitancia parásita del sensor sin celda fue en promedio de 4.0942 pF a una temperatura promedio de 22.39 °C y con una humedad relativa promedio del 31% para una  $h = 122 \mu\text{m}$  con aire como dieléctrico, durante las mediciones.

Los valores de las mediciones promedio que se obtuvieron con el sensor capacitivo se muestran en la tabla 6.4.1.

DIELÉCTRICO	$h$ [ $\mu\text{m}$ ]	$f$ [KHz]	$C_{se1}^-$ [pF]	$C_{pse}^-$ [pF]	$C_{pe}^-$ [pF]	$C_s^-$ [pF]	$\bar{T}$ [°C]	$\% \bar{H}_R$	$\epsilon_r$
Aire	122	10	2.6757	14.7333	22.5723	4.0942	22.39	31	0.9894
Aceite de oliva	122	10	3.2114	22.7520	42.0052	4.1043	24.46	27	2.4054
Agua destilada	122	10	3.583	38.4332	92.2692	4.0811	24.04	27.33	25.4799
Aire	305	10	2.2489	9.1956	11.7311	4.0744	23.65	22	1.173
Aceite de oliva	305	10	3.0064	16.7487	25.3102	4.1043	24.65	27	2.868
Agua destilada	305	10	3.4133	37.2449	80.4354	4.0811	23.34	24	29.228
Aire	501	10	1.9122	6.7128	7.8643	4.0942	22.81	30	1.202
Aceite de oliva	501	10	2.6388	12.6066	18.4081	4.1049	24.5	27.33	3.155
Agua destilada	501	10	3.3383	37.0422	74.7516	4.0811	24.54	22	36.349
Aire	730	10	1.5843	5.3405	6.0713	4.0942	22.96	30.33	1.328
Aceite de oliva	730	10	2.3985	10.9202	14.7662	4.1043	24.7	27	3.539
Agua destilada	730	10	3.2829	36.2502	82.9412	4.0811	24.32	21.33	80.176

Tabla 6.4.1. Valores de capacitancia medidos con el par de electrodos elegidos.

En donde:

$h$  es el espesor del fluido dieléctrico.

$C_{se1}$  es la capacitancia con el electrodo semiesférico.

$C_{pse}$  es la capacitancia con el electrodo periódico plano.

$C_{pe}$  es la capacitancia con el electrodo plano.

$C_s$  es la capacitancia parásita de la estructura del sensor capacitivo.

El cálculo de la constante dieléctrica  $\epsilon_r$  de los fluidos se baso en la fórmula de la capacitancia para una estructura plana multicapa con los valores de  $C_{pe}$ , espesor  $h = 122 \mu\text{m}$ ,  $\epsilon_{rv} = 4.4648$ ,  $s = 150 \mu\text{m}$  y  $A = 4 \text{ cm}^2$ .

$$\epsilon_r = \frac{h}{\frac{A\epsilon_0}{C_{pe}} - \frac{s}{\epsilon_{rv}}} \quad (6.4.2)$$

Con esta expresión se obtuvo para el aceite de oliva una  $\epsilon_{rao} = 2.4 \pm 0.2$  y para el agua destilada  $\epsilon_{rao} = 25.5 \pm 0.03$ . Utilizando el mismo procedimiento para determinar la constante dieléctrica del aire, y asumiendo que es igual a 1.00, el error mostrado en nuestra medición de  $\epsilon_{ra}$  fue alrededor del 1%. Se calcularon estos valores con el espesor  $h = 122 \mu\text{m}$  porque al aumentar el espesor de la película dieléctrica el error en  $\epsilon_r$  tiende a incrementarse, como se muestra en la tabla 6.4.1, esto se debe a que los efectos de borde del campo eléctrico influyen más en las mediciones.

Sin embargo para el agua vemos que cuando  $h$  aumenta el valor de  $\epsilon_r$  también lo hace, esto se debe a que entre menor es el espesor  $h$  se forma una capa de polarización entre las fronteras de los electrodos con las fronteras del agua [24], [25]. Estas capas de polarización presentan el efecto de capas dieléctricas que se añaden al capacitor alterando el valor de la capacitancia medida. Conforme el espesor  $h$  aumenta este efecto disminuye, lo cual permite obtener un valor de capacitancia solo con los dieléctricos del vidrio y del agua. Esto se ve en la tabla 6.4.1, en donde el cálculo de  $\epsilon_r$  para el agua con  $h = 730 \mu\text{m}$  es de 80.176. Sin embargo para demostrar la validez del experimento el valor de  $\epsilon_r = 25.48$  se puede tomar como limite superior para la curva de  $h = 122 \mu\text{m}$  en el experimento.

Estas mediciones se realizaron varias veces y se observó que la reproducibilidad no fué la ideal. Se realizaron promedios de los resultados más parecidos. Se observó que los dos últimos puntos de cada curva que corresponden al aceite de oliva y al agua son los más confiables. Aún que la reproducibilidad ideal no fue buena si fué suficiente para obtener resultados probatorios.

La gráfica muestra las curvas de calibración que generan el espacio de capacitancia  $C_{pse} - C_{se1}$  como se muestra en la figura 6.4.1.

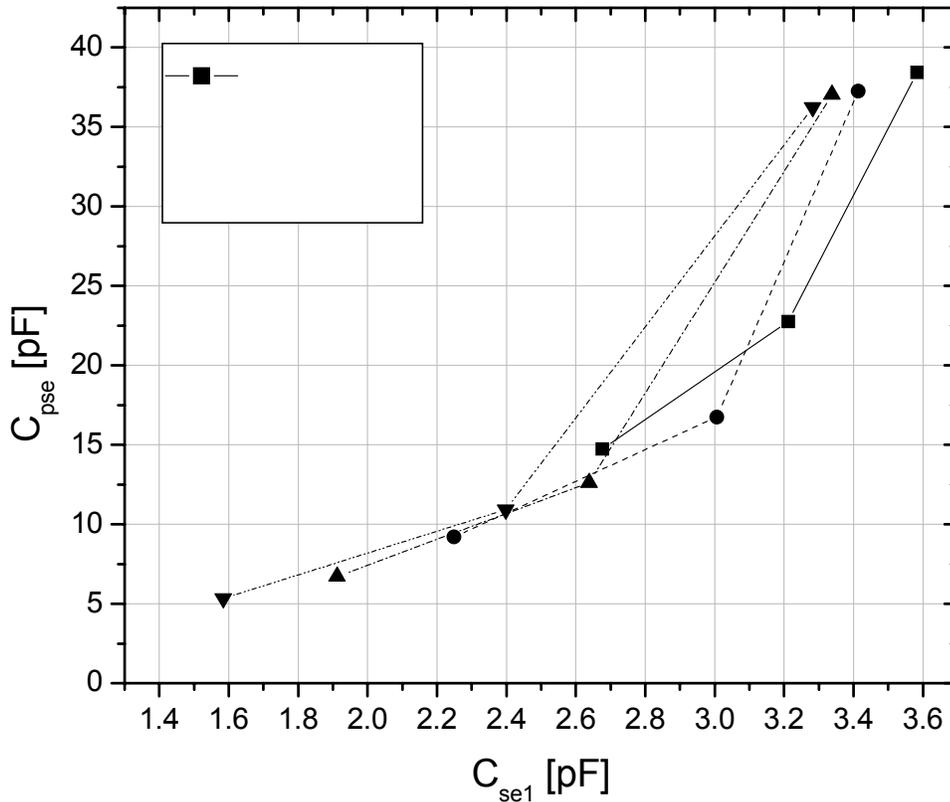


Figura 6.4.1. Curvas experimentales obtenidas con los valores de la tabla 6.4.1.

Aquí se muestran las curvas obtenidas en donde los valores más altos de capacitancia corresponden al agua destilada, los intermedios al aceite de oliva y los más bajos al aire. De la misma manera, en cada curva, existe la misma correspondencia de los valores de  $\epsilon_r$  para cada fluido utilizado.

También se puede observar que para los valores de capacitancia más bajos las curvas tienden a converger en una zona de capacitancia baja y por lo tanto es difícil definir un espacio de capacitancia, esto es, la separación entre curvas es muy pequeña en el rango del aire y el aceite de oliva. Sin embargo, si nos movemos a los valores intermedios de cada curva, entre el aceite de oliva y el agua, se nota que existe una separación entre estas hasta su valor máximo de capacitancia.

Suponiendo que las curvas que se forman con los valores intermedios y máximos de capacitancia son lineales entonces podemos utilizar estas curvas como fronteras del espacio de capacitancia  $C_{pse} - C_{se1}$ , como se muestra en la figura 6.4.2.

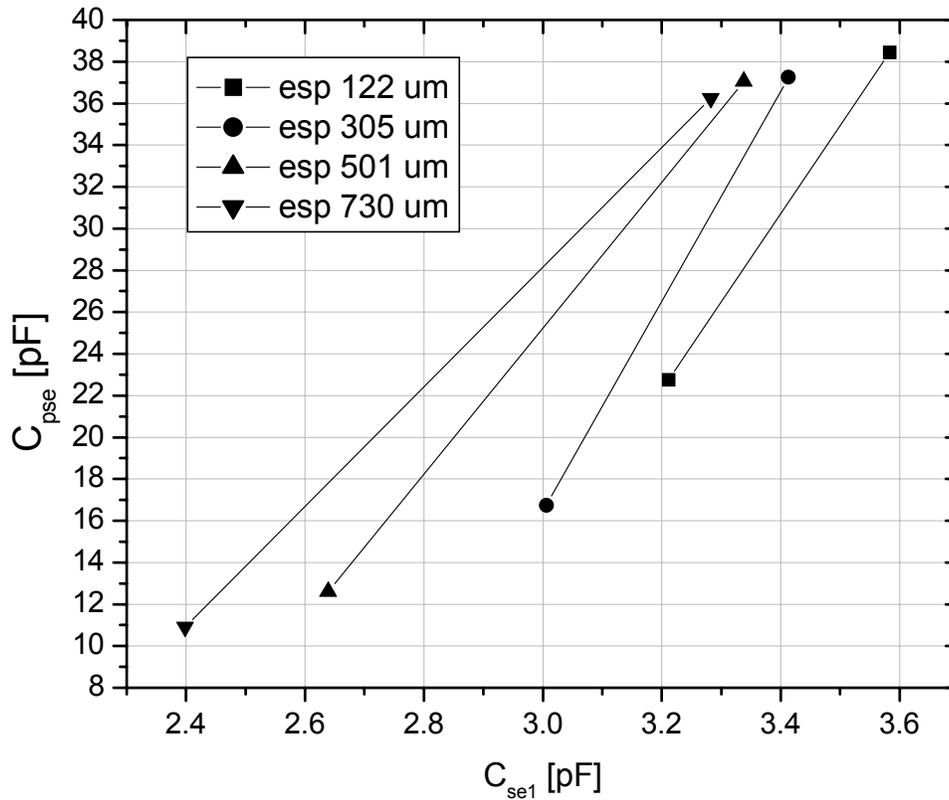


Figura 6..4.2. Curvas experimentales de los valores intermedios y máximos de capacitancia.

Para poder realizar una estimación de un recubrimiento dieléctrico uniforme sobre un sustrato metálico plano dentro de este espacio, se tiene que contar con más puntos dentro de las fronteras.

Para esto se realizaron interpolaciones entre los extremos de las curvas experimentales asumiendo una dependencia lineal con  $h$  y  $\epsilon_r$ , se unieron los puntos con el fin de obtener una malla de calibración de valores de capacitancia  $C_{pse} - C_{se1}$  como se muestra en la figura 6.4.3.

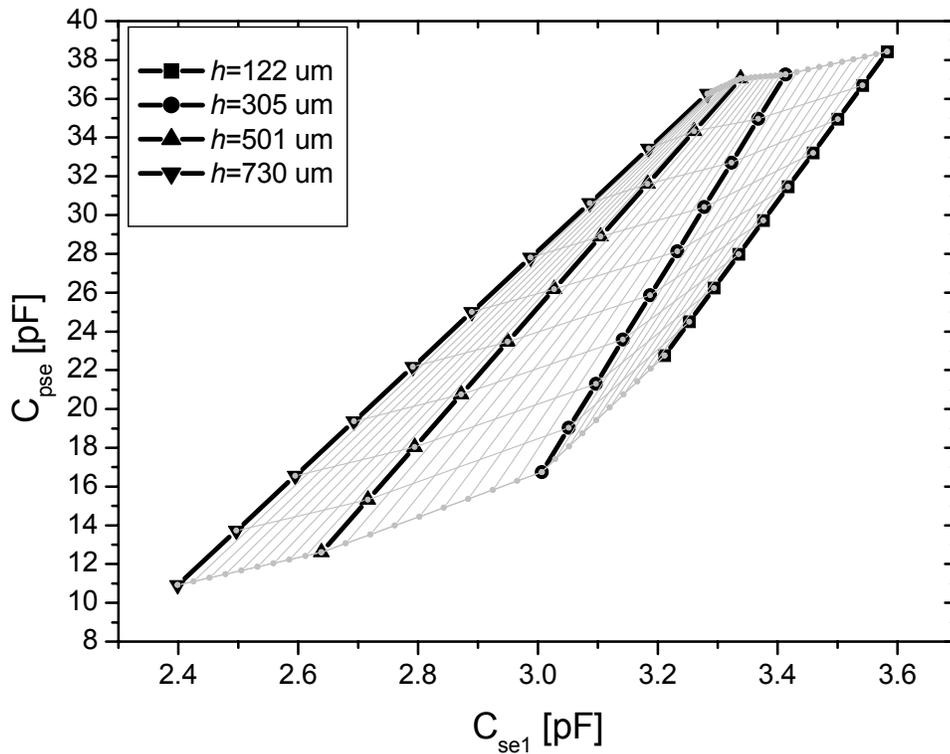


Figura 6.4.3. Carta de calibración del espacio  $C_{pse}-C_{se1}$  formado por los puntos experimentales obtenidos de las mediciones y la interpolación entre los extremos de estos.

Solo los puntos extremos de las líneas más gruesas son los datos experimentales, la malla resultante en el espacio  $C_{pse}-C_{se1}$  se puede considerar como una carta de calibración para el par de electrodos elegido y se puede utilizar para determinar el espesor y la constante dieléctrica de un recubrimiento dado si los valores caen dentro de esta. Probablemente se puedan extrapolar un poco las líneas y de esta forma, determinar el espesor y la constante dieléctrica fuera de la malla.



Punto en la carta	( $C_{se1}$ , $C_{pse}$ ) [pF]	T [°C]	% $H_R$	Carta de cal. $h$ [ $\mu\text{m}$ ]	Micrómetro $h$ [ $\mu\text{m}$ ]	% error
a	(3.1914,23.5304)	22.67	↓ 20	211 ± 10	151 ± 4	40
b	(3.081, 20.1204)	23.22	↓ 20	290 ± 10	305 ± 5	5
c	(2.8846,16.8364)	23.72	↓ 20	396 ± 10	456 ± 5	13
d	(2.6478,15.9914)	24.22	↓ 20	623 ± 10	605 ± 5	3
e	(2.5217,15.1874)	24.22	↓ 20	715 ± 12	756 ± 5	0.6

Tabla 6.5.1. Valores de  $h$  estimados con la carta de calibración y su error.

Entre las curvas de  $h = 314 \mu\text{m}$  y  $h = 211 \mu\text{m}$ , de la figura 4.5.1, se presenta el primer caso (a). Estas curvas representan los valores del espesor  $h$ , las cuales están separadas en  $h = 21.33 \mu\text{m}$ , esto hace que el primer punto se encuentre 4.2 divisiones de la primera curva que representa el valor de  $h = 122 \mu\text{m}$ . Salvo el error en el primer caso, el error en los siguientes casos es razonable dadas las limitaciones del experimento.

En la tabla 6.5.2 se muestran los valores calculados de  $\epsilon_r$  para cada valor de  $h$  estimado con el micrómetro y con la malla de calibración utilizando el valor de capacitancia  $C_{pe}$ , obtenido con el electrodo plano, a estos valores se les resta la capacitancia parásita  $C_s = 4.0856 \text{ pF}$ . Para calcular el valor de  $\epsilon_r$  se utilizó la ecuación 6.4.2, los valores de  $h$  experimentales y el valor de  $\epsilon_{rv} = 4.4648$  calculado anteriormente.

	Micrómetro $h$ [ $\mu\text{m}$ ]	T [°C]	% $H_R$	Carta cal. $h$ [ $\mu\text{m}$ ]	$\epsilon_r$	% error	$C_{pe}$ [pF]	$\epsilon_r$	% error
a	151 ± 4	22.67	↓ 20	211±10	6.672	49.4	54.3044	4.775	6.7
b	305 ± 5	23.22	↓ 20	290±10	4.723	5.8	37.2834	4.968	11.3
c	456 ± 5	23.72	↓ 20	396±10	4.372	2.1	28.5234	5.035	12.8
d	605 ± 5	24.22	↓ 20	623±10	5.308	18.9	23.4594	5.154	15.4
e	756 ± 5	24.22	↓ 20	715±12	5.382	21	21.2794	5.691	27.5

Tabla 6.5.2. Valores de  $\epsilon_r$  para cada espesor dado por la carta de calibración y medido con el micrómetro con su porcentaje de error respecto a  $\epsilon_{rv} = 4.4648$  calculado anteriormente.

En los valores obtenidos con la carta de calibración se ve que en el primer caso existe un error grande mientras que en los casos b y c el error disminuye. Esto también se puede observar en la carta de calibración, figura 6.5.1, en donde estos puntos están abajo de la curva transversal que corresponde a un valor de  $\epsilon_r = 4.969$  ya que la primera curva transversal corresponde a un valor de  $\epsilon_r = 2.4054$  que es la del aceite de oliva. Cada separación entre curvas transversales es de  $\epsilon_r$

= 2.564. Vemos que los valores mayores de 5 se encuentran arriba de esta curva. Para el caso de los espesores medidos con el micrómetro se ve que el valor más cercano a  $\epsilon_{rv} = 4.4648$  calculado anteriormente, es el primer caso (a) y con forme  $h$  aumenta también lo hace el error en  $\epsilon_r$ , como ya se había mencionado anteriormente en la sección 6.4.

Para el caso de los espesores obtenidos con la carta de calibración se ve que el menor error se presenta con el espesor  $h = 456 \mu\text{m}$ . Una vez más vemos que los errores presentados, salvo el primer caso, son consecuencia de las limitaciones del experimento.

Los errores se pueden reducir realizando algunas modificaciones en la estructura del sensor capacitivo y principalmente mejorando las muestras de calibración las cuales son un factor significativo para los resultados finales del experimento propuesto.

En la tabla 6.5.3 se muestran los valores de  $\epsilon_r$ , obtenidos experimentalmente, de los materiales dieléctricos utilizados en el experimento comparados con valores publicados en tablas.

dieléctrico	$\epsilon_r$ (experimental)	$\epsilon_r$ (tablas)
Aire	0.9894	1.000264
Aceite de oliva	2.4054	3.1
Agua destilada	25.4799	48 - 88
Vidrio	4.4648	3.1 - 10

*Tabla 6.5.3. Valores de  $\epsilon_r$  obtenidos experimentalmente y valores publicados en tablas.*

Los resultados obtenidos presentan errores experimentales debido a las muestras de calibración, principalmente la del agua. Sin embargo, se demostró la viabilidad del principio de operación del método obteniéndose una malla de calibración con curvas características, separadas entre sí, de diferentes espesores y diferentes constantes dieléctricas. Aunque esta no tiene la confiabilidad necesaria para aplicaciones inmediatas es posible mejorar las mediciones con muestras de calibración bien caracterizadas.

## 6.6 Características de los equipos utilizados para realizar las mediciones

### Puente digital LCR SR715 Stanford Research Systems

Modos de medición para capacitancia:	C+D, C+R
Circuito equivalente:	serie o paralelo
Promedio de mediciones:	2 – 10
Rango de medición	
C+D:	C 0.0001 pF – 99999 $\mu$ F D 0.00001 – 10
C+R:	C 0.0001 pF R 0.00001 – 99999 k $\Omega$
Frecuencia de prueba:	100Hz, 120Hz, 1kHz, 10KHz
Exactitud	
Al menos 30 minutos encendido,	23 °C $\pm$ 5 °C
Exactitud básica:	0.2%

### Higrómetro-Termómetro digital 63-1036 RadioShack

Temperatura	
Rango:	32 °F-122 °F ( $\pm$ 1.8 °F)
Resolución:	0.1 °F
Ciclo de percepción:	10segundos
Humedad	
Rango de medición:	20%-99% H <sub>R</sub> ( $\pm$ 15%)
Resolución:	1% H <sub>R</sub>

### Micrómetro electrónico Starrett 734XFL

Resolución:	0.001 mm
Precisión:	$\pm$ 0.003 mm

## 7. DISEÑO EN 2D DE LA GEOMETRÍA DE UN ELECTRODO NO PLANO PARA SENSOR CAPACITIVO

Como parte final de este trabajo se propone un diseño optimizado de la geometría de uno de los electrodos utilizados en el sensor capacitivo. Esto con el fin de mejorar las mediciones capacitivas y tratar de medir espesores de recubrimientos dieléctricos más delgados y reducir errores. Para realizar estas mediciones se tiene que incrementar el valor de la capacitancia medida y aumentar la resolución espacial en el área de medición con la geometría del electrodo propuesta. Para abordar este problema y siguiendo con la idea de utilizar electrodos con geometrías esféricas en vez de planas, por sus ventajas ya mencionadas anteriormente, se proponen algunos criterios de diseño con la ayuda de simulaciones de elemento finito en 2D.

### 7.1 Criterios de diseño

Se propone un electrodo con una geometría multi-esfera, con el fin de aprovechar las ventajas que presentan varias esferas distribuidas por toda la superficie a sensar. Estas esferas estarían unidas a un material flexible y conductor con el fin de que el electrodo se pueda adaptar a la superficie a sensar sin importar que esta no sea totalmente plana como puede apreciarse en la figura 7.1.1.

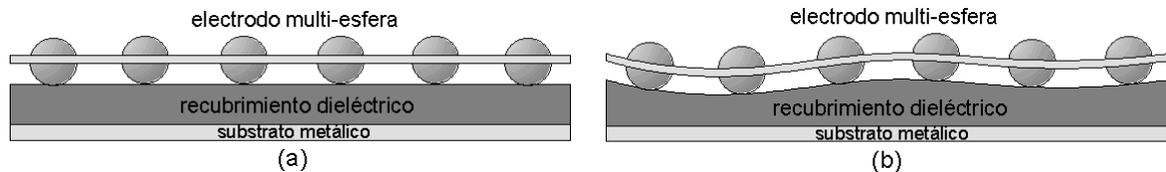


Figura 7.1.1. Electrodo multi-esfera, a) sobre un recubrimiento plano y b) sobre un recubrimiento no plano.

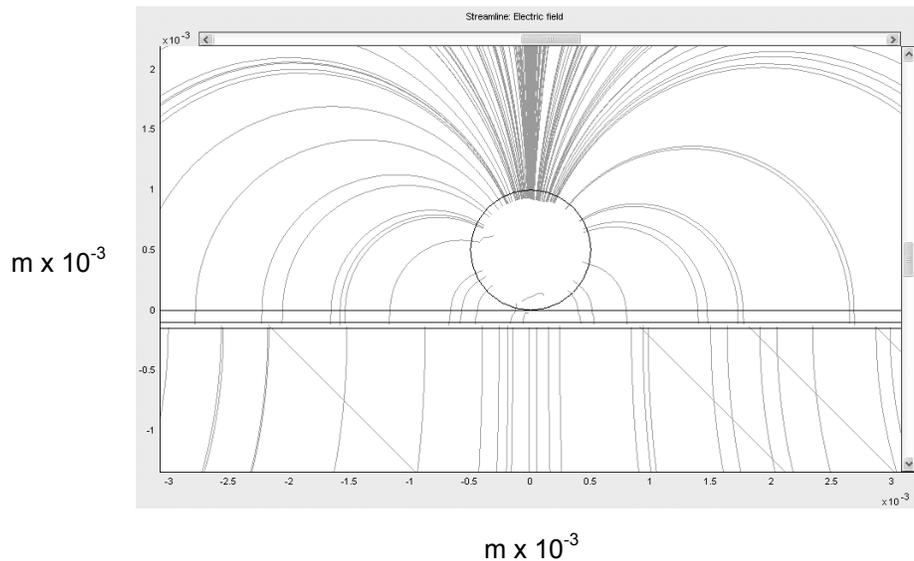
Además, la idea de este electrodo multi-esfera es que se pueda disminuir el radio de curvatura de las esferas o semiesferas para aumentar la resolución espacial de la superficie a sensar. De esta forma se aprovecharían las dimensiones de la geometría propuesta del electrodo para aumentar el valor de la capacitancia.

Con esto, podemos numerar los criterios de diseño para este electrodo:

- i) Determinar la distribución de varias esferas conductoras en un material flexible y conductor o no conductor.
- ii) Determinar el radio de las esferas.
- iii) Determinar la separación ideal de las esferas.
- iv) Obtener mediciones de capacitancia en pF o nF si es posible.
- v) Caracterizar gráficamente la respuesta del sensor.

Para fines prácticos se pensó en un radio menor al utilizado en el sensor esférico para realizar las mediciones experimentales. Este fue de  $r = 2.38$  mm, de esta forma, para determinar el radio de las esferas se tomaron en cuenta los tamaños que se encuentran disponibles en el mercado y la facilidad de poder maniobrarlos, con esta consideración se propuso un radio  $r = 0.5$  mm.

Para determinar la separación entre esferas se realizaron simulaciones en 2D de un sistema capacitivo formado con un electrodo esférico de radio  $r = 0.5$  mm, un material dieléctrico de espesor  $h = 100$   $\mu\text{m}$  y con  $\epsilon_r = 20$ , sobre una superficie plana de cobre, como se muestra en la figura 7.1.2. Con la simulación en 2D primero se obtuvo la densidad de carga  $\rho_c$  en la circunferencia del electrodo esférico.

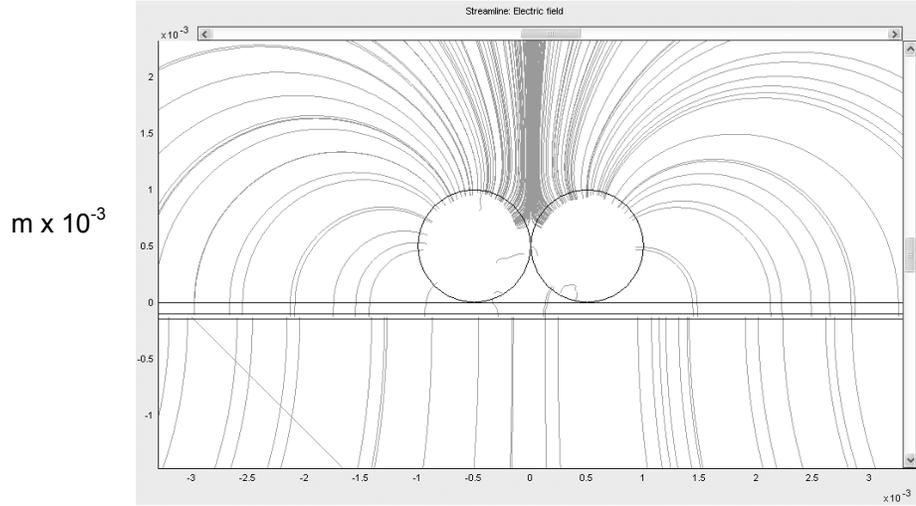


*Figura 7.1.2. Simulación de sistema capacitivo formado por electrodo esférico, dieléctrico y electrodo plano.*

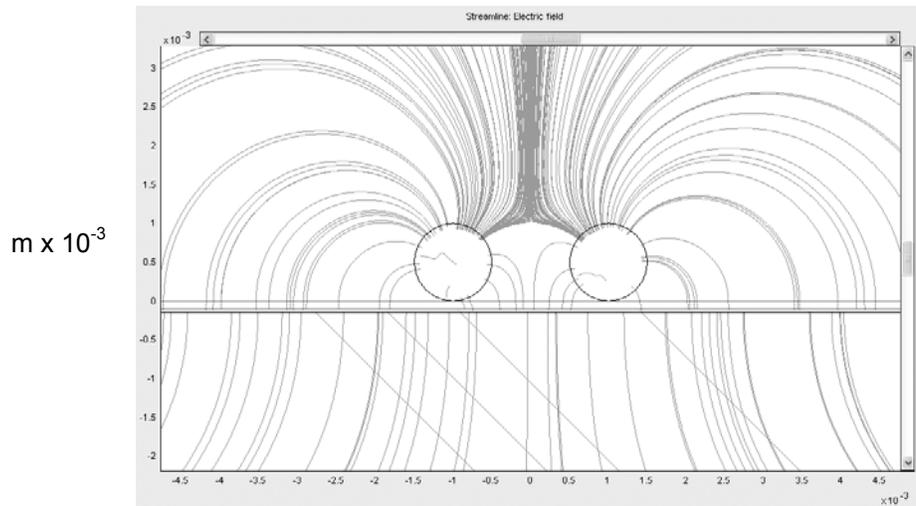
El valor fue de  $\rho_c = 4.95097 \times 10^{-10}$  C/m. De la misma forma se simuló el mismo sistema capacitivo pero con dos electrodos esféricos juntos y se obtuvo el valor de  $\rho_{0d}$ , después con la separación de un diámetro ( $\rho_{1d}$ ), dos diámetros ( $\rho_{2d}$ ), tres ( $\rho_{3d}$ ), cuatro ( $\rho_{4d}$ ), etc, como se muestra en la figura 7.1.3.

Siguiendo esta metodología se realizaron las simulaciones hasta con siete diámetros de separación entre esferas,  $\rho_{7d}$ . Se obtuvo la densidad de carga superficial  $\rho_{nd}$ , del substrato conductor, para cada par de esferas en cada caso. La idea de estas simulaciones era determinar la separación entre esferas con el fin de que las líneas de campo eléctrico, de cada una, no interfirieran entre sí.

Esto se puede ver obteniendo la densidad de carga superficial  $\rho_{nd}$  en cada par de esferas para cada caso y dividiendo esta entre dos con el fin de compararlas con la  $\rho_c$  del sistema capacitivo de una sola esfera.



$m \times 10^{-3}$   
(a)



$m \times 10^{-3}$   
(b)

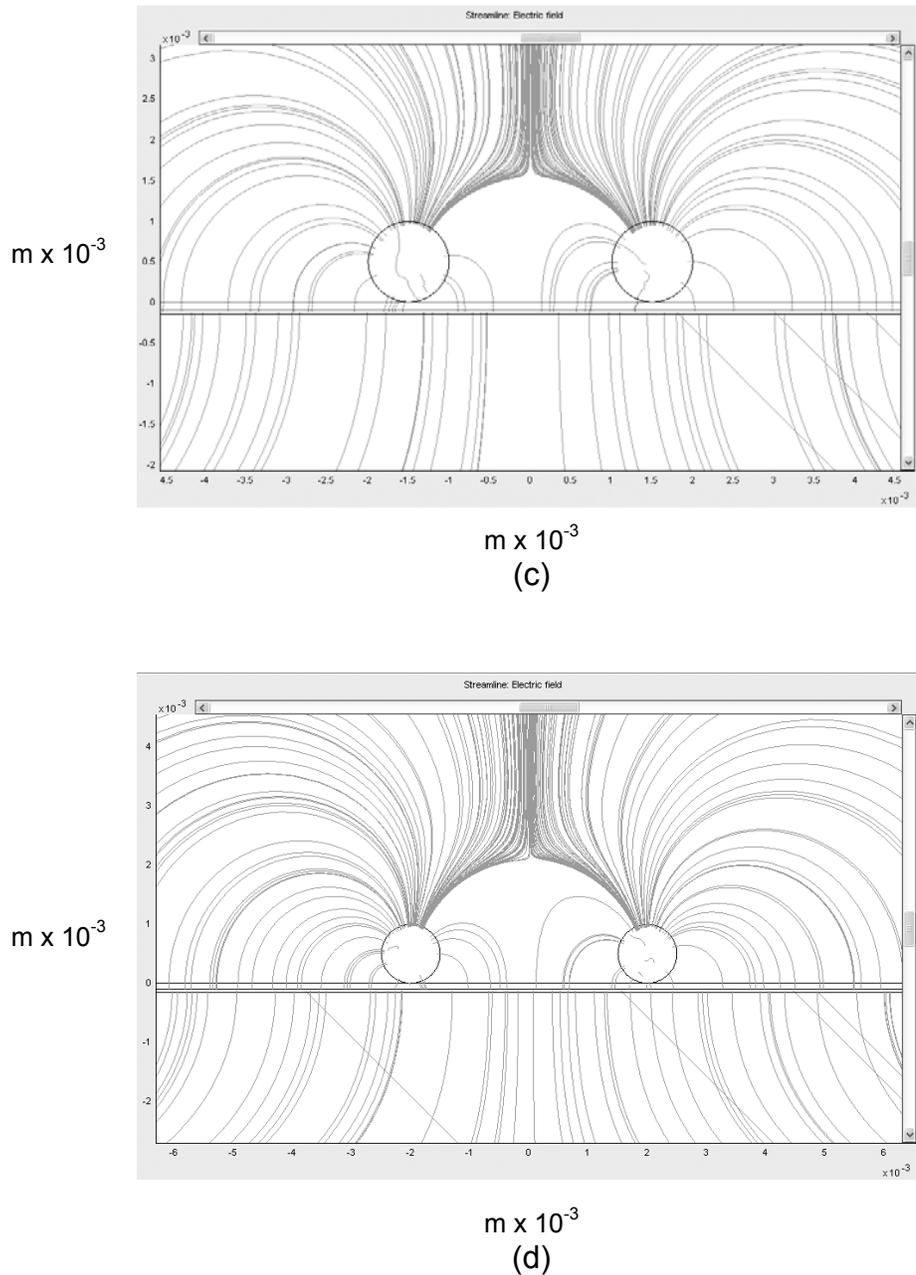


Figura 7.1.3. Simulación de la líneas de campo eléctrico de un sistema capacitivo con dos electrodos esféricos separados a diferentes distancias. a) Juntas, b) un diámetro, c) dos diámetros, d) tres diámetros.

La  $\rho_{nd} / 2$  que presenta una diferencia menor con la  $\rho_c$  es la separación ideal para nuestro electrodo multi-esfera, en donde  $\Delta\rho = \rho_c - \rho_{nd} / 2$ . Estos resultados se muestran en la tabla 7.1.1.

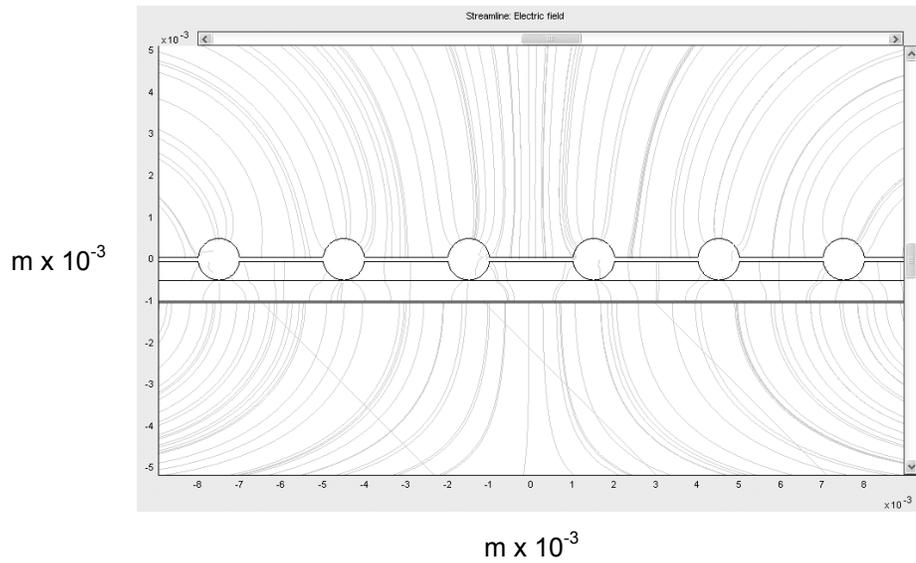
n diámetros de separación	$\rho_{nd} \times 10^{-10}$ [C/m]	$(\rho_{nd} / 2) \times 10^{-10}$	$\Delta\rho \times 10^{-10}$
0	9.382832	4.691416	0.259554
1	9.917049	4.9585245	-0.0075545
2	9.626298	4.813149	0.137821
3	9.679679	4.8398395	0.1111305
4	9.678839	4.8394195	0.1115505
5	9.672635	4.8363175	0.1146525
6	9.685865	4.8429325	0.1080375
7	9.668453	4.8342265	0.1167435

*Tabla 7.5.1. Resultados de  $\Delta\rho$  para determinar la separación de las esferas en el electrodo.*

En la última columna de la tabla se puede observar que la distancia ideal para la separación entre dos esferas, de un electrodo capacitivo, es de un diámetro porque el valor de  $\rho_{1d}$  dividido entre dos es el valor más cercano a  $\rho_c$  para el sistema capacitivo de una sola esfera. Aunque esto habría que corroborarlo con simulaciones en 3D.

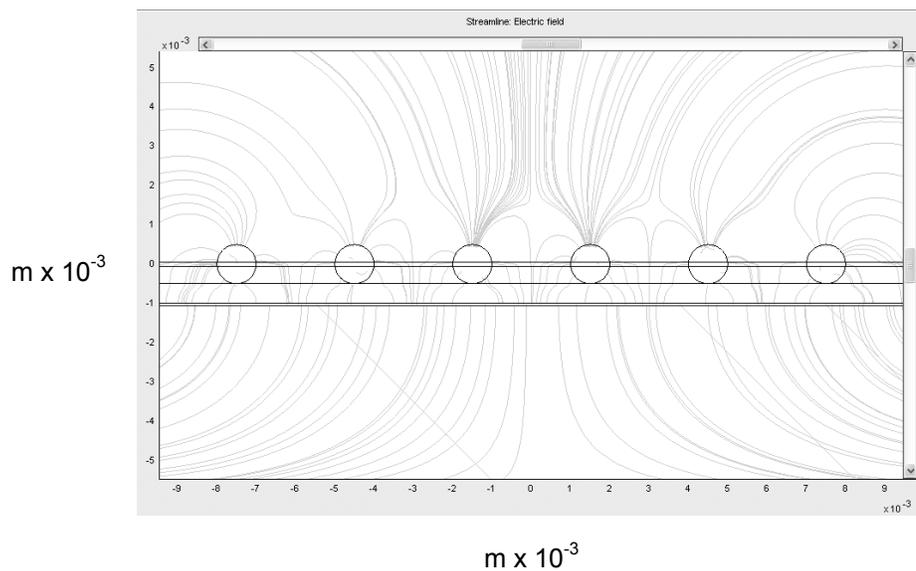
En el caso de 2D, se tiene que el electrodo multi-esfera debería tener una separación de un diámetro entre esferas para que la densidad de corriente  $\rho$  en cada esfera sea equivalente a la de un electrodo con una sola esfera. Sin embargo, por cuestiones prácticas vemos que en las demás distancias no existe una diferencia significativa salvo cuando las esferas están juntas. Pensando que el electrodo se puede fabricar se eligió una separación de dos diámetros por facilidad de manejo.

Tomando en cuenta estas consideraciones se propuso la geometría final del electrodo multi-esfera con la separación entre esferas de dos diámetros y se realizó la simulación en 2D del comportamiento de las líneas de campo eléctrico de un sistema capacitivo con este electrodo, las esferas están unidas con un material conductor flexible con espesor de 100  $\mu\text{m}$  (idealmente) y se encuentra sobre un recubrimiento dieléctrico con espesor  $h = 500 \mu\text{m}$  y una  $\epsilon_r = 20$ , como se muestra en la figura 7.1.4.



*Figura 7.1.4. Simulación en 2D de las líneas de campo eléctrico de un sistema capacitivo con el electrodo multi-esfera propuesto (mse1).*

Una variación del electrodo multi-esfera propuesto es mantener las esferas separadas con un material dieléctrico flexible de  $100 \mu\text{m}$  de espesor (idealmente), la simulación de las líneas de campo eléctrico en 2D, con los mismos parámetros del sistema capacitivo anterior, se muestra en la figura 7.1.5.

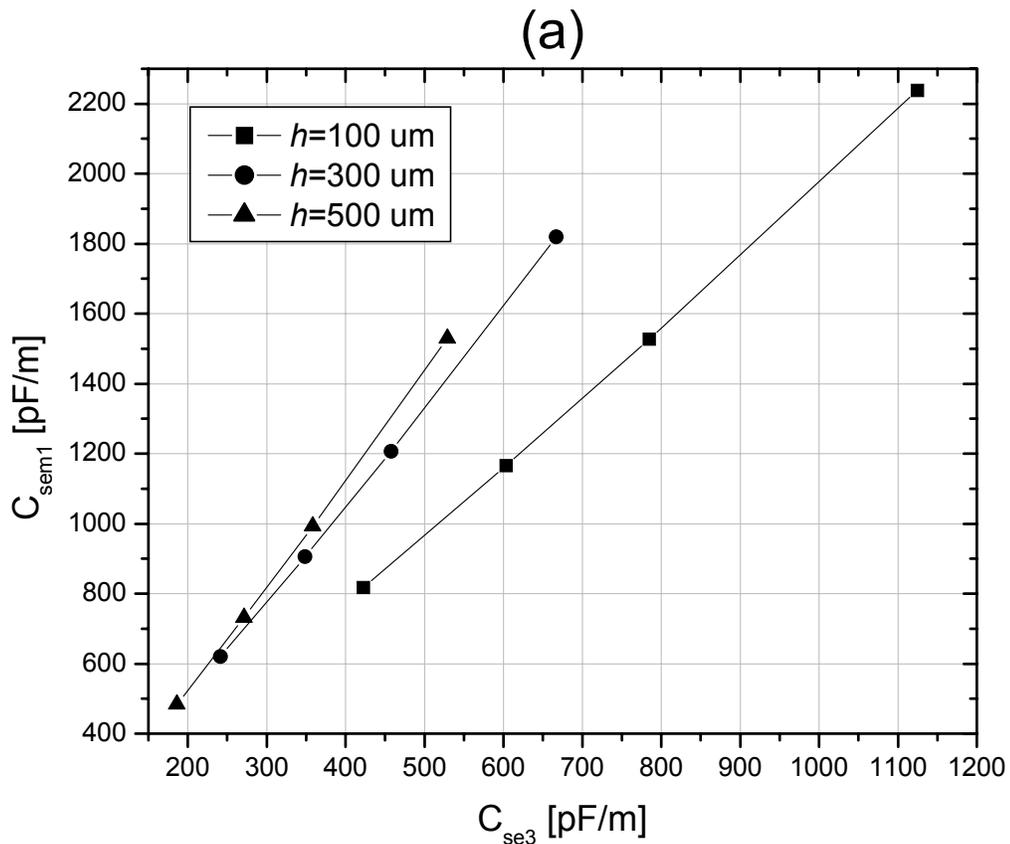


*Figura 7.1.5. Simulación en 2D de las líneas de campo eléctrico de un sistema capacitivo con el electrodo multi-esfera con material dieléctrico entre esferas (mse2).*

Para caracterizar la respuesta de cada electrodo y determinar las ventajas de cada uno se realizaron simulaciones en 2D siguiendo la misma metodología que en el planteamiento teórico del problema (capítulo 5).

Se realizaron gráficas de capacitancia con dos electrodos de diferente geometría variando el espesor  $h$  y la permitividad relativa  $\epsilon_r$  en un sistema capacitivo, formado por un recubrimiento uniforme sobre un electrodo metálico plano, en este caso el electrodo multi-esfera propuesto versus un electrodo esférico.

Se propuso aumentar el radio del electrodo esférico ( $se3$ ) a  $r = 4$  mm para aumentar el valor de la capacitancia ( $C_{se3}$ ). Los valores de  $\epsilon_r$  fueron de 3, 6, 10 y 20. Los de  $h$  de 100, 300 y 500  $\mu\text{m}$ . Así, se obtuvieron puntos de capacitancia ( $C_{se3}$ ,  $C_{sem1}$ ) y ( $C_{se3}$ ,  $C_{sem2}$ ), para generar las gráficas que se muestran en la figura 7.1.6.



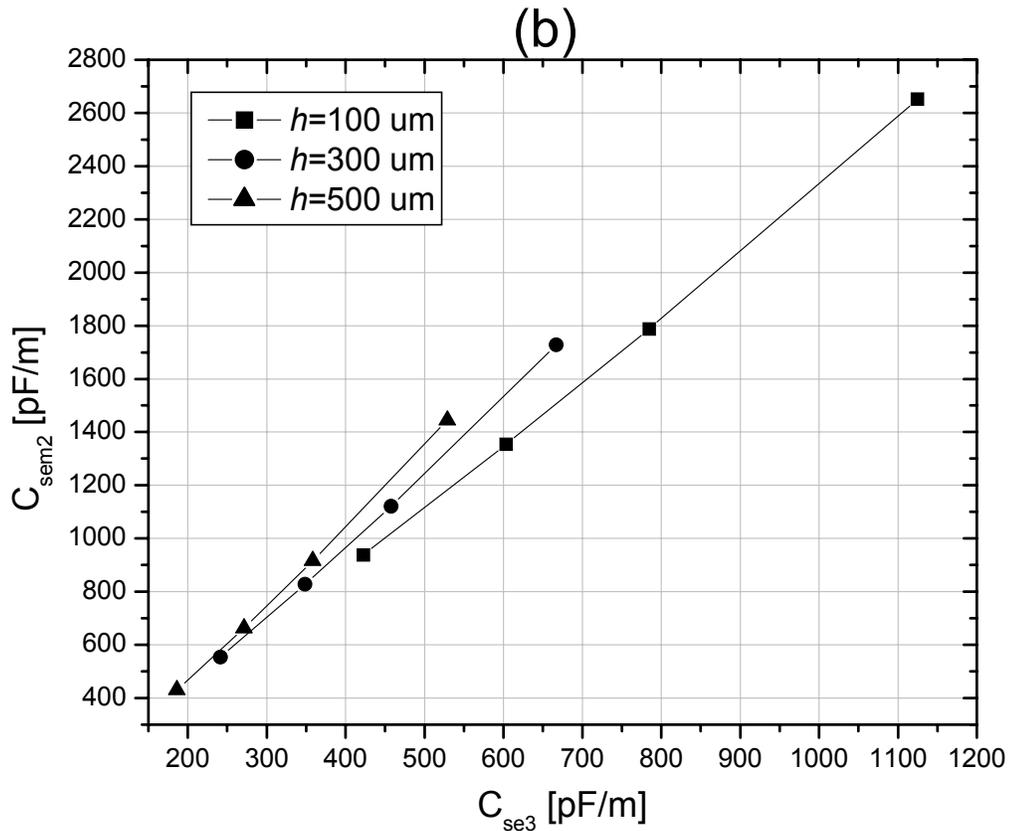


Figura 7.1.6. Gráficas obtenidas con las simulaciones de los electrodos multi-esfera (sem) versus electrodo esférico (se3). a) Electrodo multi-esfera metálico (sem1), b) electrodo multi-esfera con dieléctrico de separación entre esferas (sem2).

La primera característica que se ve en la gráficas es que la respuesta tiende a ser lineal, si comparamos estas con las graficas de la figura 5.2.1, en donde la respuesta obtenida no es lineal, vemos cierta ventaja que tenemos utilizando este tipo de electrodos. En la gráfica 7.1.6a se ve que hay una mayor separación entre las curvas que representan los espesores con  $h = 100 \mu m$  y  $h = 300 \mu m$  de los recubrimientos, conforme los espesores  $h$  aumentan las curvas tienden a juntarse.

En la grafica 7.1.6b se ve que la separación entre las curvas, con los mismos valores de la gráfica 7.1.6a, tienen menor separación. Sin embargo, mantienen la linealidad y la solución analítica en este caso parece ser más sencilla si se analiza cada esfera independientemente. Al final se podría aplicar el principio de superposición con todas las esferas que formen parte del electrodo multi-esfera de la figura 7.1.5.

En este momento, para nuestro caso, lo más importante es la separación entre las curvas aunque se complica la solución analítica del problema con el electrodo multi-esfera de la figura 7.1.4.

Un esquema en 3D del electrodo multi-esfera sobre un recubrimiento dieléctrico depositado en un substrato conductor plano se muestra en la figura 7.1.7.

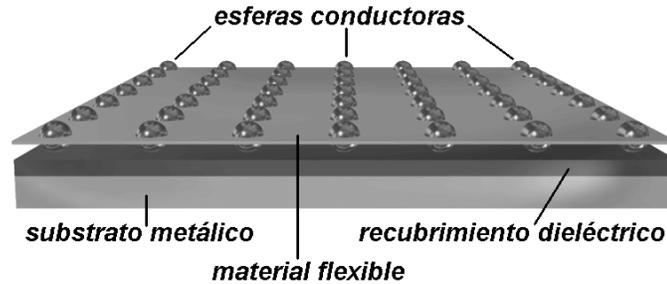


Figura 7.1.7. Esquema en 3D de un electrodo multi-esfera sobre un recubrimiento dieléctrico plano.

Otra ventaja que se tendría con este tipo de electrodo multi-esfera es que se podría adaptar en otras superficies con diferentes geometrías como la cilíndrica, por ejemplo, como se muestra en la figura 7.1.8.

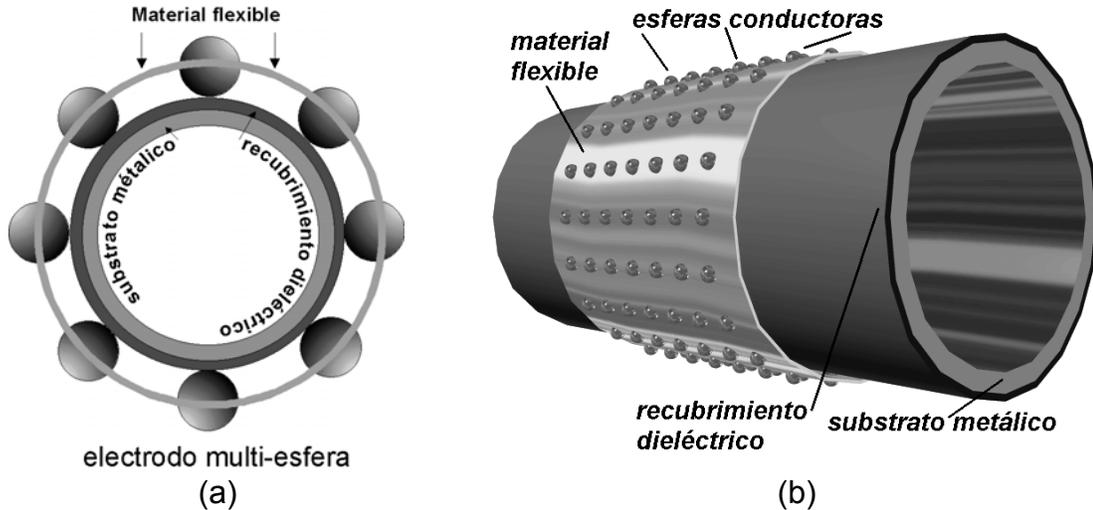


Figura 7.1.8. Electrodo multi-esfera sobre una superficie cilíndrica, a) vista de frente y b) vista en 3D.

En la figura 7.1.8 se muestra como se podría adaptar el electrodo multi-esfera a una superficie cilíndrica. Esta es una de las ventajas que se tendría al utilizar un material flexible que una a las esferas conductoras y que forme parte del electrodo propuesto.

## 8. CONCLUSIONES Y DISCUSIÓN

La finalidad de este trabajo fue la de proponer una metodología sencilla para medir el espesor y la constante dieléctrica de un recubrimiento uniforme por medio de mediciones capacitivas. El recubrimiento se encuentra sobre un sustrato conductor. Entonces, colocando un electrodo sobre el recubrimiento se forma un capacitor. Por medio de mediciones de capacitancia con dos electrodos de diferente geometría, puede ser posible determinar el espesor  $h$  y la constante dieléctrica  $\epsilon_r$  del recubrimiento. Se puede denotar a la capacitancia de uno de los electrodos como  $C_1$  y a la del otro como  $C_2$ . Se puede pensar en un par de mediciones  $(C_1, C_2)$  como coordenadas de un punto en el espacio de capacitancia  $C_1 - C_2$ . Para cualquier par de electrodos, habrá curvas de  $C_1$  versus  $C_2$  que correspondan a las mediciones de capacitancia de recubrimientos con espesor fijo y constante dieléctrica variable. Si estas curvas están separadas en el espacio  $C_1 - C_2$ , entonces se puede conocer el espesor del recubrimiento simplemente identificando a que coordenadas  $(C_1, C_2)$  de la curva de capacitancia pertenece; si se desea, también se puede conocer su constante dieléctrica con la ubicación del punto de capacitancia  $(C_1, C_2)$  a lo largo de la curva específica. Para electrodos de geometrías simples puede ser posible generar las curvas por métodos teóricos. Sin embargo, en la práctica siempre será necesario calibrar cualquier par de electrodos dado. Esto se puede hacer obteniendo curvas en el espacio  $C_1 - C_2$ , por medio de mediciones de espesores constantes con muestras bien caracterizadas de constante dieléctrica.

En este trabajo se desarrolló un experimento para probar este principio en el cual se obtuvieron algunas curvas de espesor  $h$  constante y constante dieléctrica  $\epsilon_r$  variable para un electrodo plano regular y otro esférico. Se utilizaron espesores de líquido en celdas planas fabricadas, cada una, con una placa superior de vidrio de espesor  $s = 150 \mu\text{m}$  y una placa inferior de cobre como sustrato, con el fin de obtener las curvas de calibración. La placa de vidrio fue considerada como parte de los electrodos. Se pudo mostrar que las curvas se separan en el espacio de capacitancia  $C_1 - C_2$ .

Por medio de la obtención de ocho puntos experimentales de capacitancia, pertenecientes a cuatro curvas de espesores constantes, fue posible estimar el espesor de la placa de vidrio con un error razonable. Seguramente los resultados presentados en este trabajo, se pueden mejorar. Sin embargo, se piensa que son suficientes para demostrar la viabilidad del método.

Se necesita optimizar la geometría del par de electrodos con el fin de aumentar la separación de las curvas que corresponden al espesor constante  $h$  en el espacio de capacitancia.

Se propusieron los criterios para el diseño de una geometría multi-esfera con todas las ventajas que tiene sobre las superficies planas, descritas anteriormente.

El electrodo tendría dos variantes, en la primera las esferas están unidas con un material conductor flexible con el fin de que se adapte a la superficie del recubrimiento a sensar, es decir todo el electrodo es conductor. En la segunda las esferas están unidas con un material dieléctrico flexible con el mismo fin de adaptación a la superficie a sensar.

Con ayuda de las simulaciones en 2D del análisis de elemento finito (AEF) se obtuvieron puntos de capacitancia  $C_1$  de un electrodo multi-esfera versus la capacitancia  $C_2$  de un electrodo esférico, con curvatura de  $r = 4$  mm, de un recubrimiento dieléctrico uniforme manteniendo  $h$  constante y  $\epsilon_r$  variable para los casos de un material conductor y no conductor entre esferas. En las curvas generadas, dentro del espacio de capacitancia  $C_1 - C_2$ , se ve que tienden a ser lineales en ambos casos pero en el caso del electrodo multi-esfera conductor se ve que existe una mayor separación entre las curvas que representan los espesores de 100 y 300 micras, figura 5.5.1a. Mientras que en el caso del electrodo multi-esfera con material dieléctrico la separación entre las mismas curvas es menor, figura 5.5.1b. De alguna forma lo que nos interesa en este momento es la separación entre las curvas con el fin de generar el espacio de capacitancia  $C_1 - C_2$  con las curvas de calibración, aunque se complique la solución analítica.

Por otro lado, en el segundo caso parece que la solución analítica tiende a ser menos complicada si se analizan las esferas individualmente y al final se aplica el principio de superposición, sin embargo, en la gráfica se ve que la separación de las curvas es menor.

Aunque probablemente la optimización de los electrodos en una geometría en 2D nos lleve a una geometría óptima de los electrodos, lo mejor será realizar las simulaciones en 3D con el fin de obtener resultados más cercanos a la realidad.

En la práctica sería muy conveniente que ambos electrodos tengan geometrías esféricas debido a sus inherentes ventajas para la alineación y resolución espacial. Además, se debe estudiar con más detalle el uso de un anillo de guarda para evitar interferencias de objetos cercanos en las mediciones.

No se ve un problema significativo en escalar el método hacia las decenas de micras, la respuesta del electrodo multi-esfera propuesto nos indica que esta geometría puede ser de gran utilidad en los objetivos propuestos; no obstante una limitación en la resolución espacial sería la capacidad de poder medir valores pequeños de capacitancia.

Posiblemente, la fabricación de un número de muestras bien calibradas y caracterizadas es el reto más laborioso para desarrollar el método propuesto en aplicaciones prácticas.

---

**REFERENCIAS**

1. H. G. Tompkins, W. A. McGahan, "Spectroscopic Ellipsometry and Reflectometry: A User's Guide" John Wiley & Sons, New York, 1998.
2. Caracterización de subóxidos de silicio obtenidos por la técnica PECVD, tesis doctoral Ali Benmessaoud, Universidad Autónoma de Barcelona, Bellaterra, Departamento de Física, diciembre del 2001.
3. E. Benavidez, R. Caruso, O. de Sanctis y N. Pellegrini, "Obtención y caracterización de recubrimientos de PZT por el proceso SOL-GEL", Laboratorio de Materiales Cerámicos, FCEIyA-UNR, IFIR. Fac. de Ciencias Bioquímicas y Farmacéuticas-UNR.
4. F. Gordillo-Delgado 1,2, J.A. Herrera-Cuartas, L. F. Marín-Ramírez 1, H. Ariza-Calderon, "Estudio de la pigmentación de café orgánico tostado y molido utilizando la técnica Fotoacústica", Revista Colombiana de Física, Vol. 36, No. 2.2004.
5. C. García-Segundo, M. Villagrán-Muniz and S. Jul, "Determination of thin films optical properties by the photoacoustic OPC technique", J. Phys. D: Appl. Phys. 31, pag. 165-171, 1998.
6. Capacitive Sensors design and Applications, Larry K. Baxter IEEE Press Series on Electronics Technology, Robert J. Herrick, Series Editor, 1997. ISBN 0-7803-1130-2.
7. Sensores y Acondicionadores de Señal, 3ª edición, Ramón Payas Arney 2001 ALFAOMEGA GRUPO EDITOR, S.A. de C.V. 3ª edición. ISBN 970-15-0577-8
8. C. Chang, W. Ko, "Capacitive Sensors; A Comprehensive Survey" ed W Göpel et al (Wienheim: VCH), 1994.
9. E. H. Higham. Pneumatic instrumentation. En: B. E. Noltingk (ed.), Instrument technology, vol. 4: Instrumentation systems. Londres: Butterworth and Co., 1987.
10. R. Bornet. Design of a high performance digital tachometer with a microcontroller. IEEE Trans. Instrum. Meas. vol. 38, núm.6, diciembre 1989, págs. 1104-1108.

- 
11. TRUCK Capacitive Sensor – Principles of Operation, Industrial Products and their Dielectrics Constants. [www.truck.com](http://www.truck.com)
  12. J. Valentich. Short range ratio telemetry for rotating applications. Pittsburg: Instrument Society of America, 1977.
  13. Ren-jie Zhang, Shu-guang Dai and Ping-an Mu., “A spherical capacitive probe for measuring the thickness of coatings on metals”, *Meas. Sci. Technol.* 8 (1997) pp. 1028-1033.
  14. John Grahm, Marlek Kryzeminiski and Zoran Popovic, “Capacitance based scanner for thickness mapping of thin dielectric films”, *Review of Scientific Instruments*, vol. 71, No. 5, pp. 2219-2223, 2000.
  15. A. García-Valenzuela and M. Tabib-Azar (1999), “Microwave evanescent probes and microscopy”, *Rev. Mex. Fis.* 45(6), pp. 539-550.
  16. E. Benito, “Problemas de campos electromagnéticos”, Ed. AC, Madrid, 1972  
ISBN:84-7288-007-9
  17. Alan M. Portis, “Electromagnetics Fields (sources and media)”, University of California, Berkeley, copyright 1978 by Wiley & Sons, Inc., ISBN 0-471-01906-2
  18. S. F. Lyuksyutov, R. A. Sharipov, G. Sigalov, P. B. Paramonov, “Exact analytical solution for electrostatic field produced by biased atomic force microscope tip dwelling above dielectric-conductor bi-layer”, arXiv:cond-mat/0408247 v2, 12 Aug 2004.
  19. A. Engel and R. F., “On the electromagnetic force on a polarizable body”, arXiv:cond-mat/01052265 v1, 14 May 2001.
  20. T. Sometan, “Image method for a dielectric plate and a point charge”, *Eur. J. Phys.* 21 (2000), 549-554. Printed in the UK.
  21. SRS Stanford Research Systems Operating Manual and Programming Reference, SR715/SR720 LCR Meters, 1991.

- 
22. Kim R. Fowler, "Electronic Instrument Design (Architecting for the life cycle)", Oxford University Press, 1996, ISBN 0-19-508371-7 (cl)
  23. F. N. Toth, G. C. M. Meijer, and HMM Kerkvliet, "A very accurate measurement system for multielectrode capacitive sensors" IEEE Trans. on Instrum. and Meas. 45 (2), pp. 531-535, 1996.
  24. A P Gregory and R N Clarke, "Traceable measurements of the static permittivity of dielectric reference liquids over the temperature range 5-50 °C", Meas. Sci. Technol. 16 (2005) 1506-1516.
  25. L. Nelson Buck, "Calibration of dielectric constant probes using salt of unknown conductivity" IEEE Trans. on Instrum. and Meas. 45 (1), pp. 84-88, 1996.
  26. David Halliday, Robert Resnick, "Física combinada partes 1 y 2", Compañía editorial continental, S.A. de C.V., México, segunda edición en español abril de 1983, ISBN 968-26-0360-9.

## APÉNDICE 1. FUNDAMENTOS TEÓRICOS

### A1.1 Ley de Coulomb

Charles Augustin de Coulomb fue el primero que midió cuantitativamente las atracciones y repulsiones eléctricas y dedujo la ley que las gobierna. Su aparato, balanza de torsión, sirvió para que dos pequeñas esferas,  $a$  y  $b$ , mostrarán este fenómeno físico, figura A1.1.1.

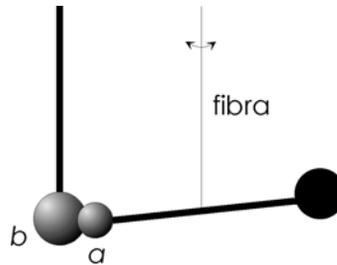


Figura A1.1.1. Balanza de torsión de Coulomb.

Si  $a$  y  $b$  están cargadas, la fuerza eléctrica en  $a$  tenderá a torcer una fibra de suspensión. Coulomb compensaba este efecto torsional volteando la cabeza de suspensión a través de un ángulo  $\theta$  necesario para mantener las dos cargas a una distancia específica que él había determinado. Entonces el ángulo  $\theta$  es una medida relativa de la fuerza eléctrica que actúa sobre la carga  $a$ .

Los primeros resultados experimentales de Coulomb pueden representarse mediante la expresión

$$F \propto \frac{1}{r^2}. \quad (\text{A1.1.1})$$

En donde  $F$  es la magnitud de la fuerza de interacción que actúa en cada una de las dos cargas  $a$  y  $b$ ;  $r$  es la distancia entre estas. Estas fuerzas, como la tercera ley de Newton lo requiere, actúan a lo largo de la línea que une a las cargas pero apuntan en direcciones opuestas. Nótese que la magnitud de la fuerza sobre cada carga es la misma, aunque las cargas sean diferentes.

Coulomb además estudio como variaba la fuerza eléctrica con el tamaño relativo de las cargas en las esferas de su balanza de torsión. Por ejemplo, si tocamos una esfera conductora cargada con otra esfera conductora idéntica pero descargada, la carga original se divide igualmente entre las dos esferas. Por medio de tales técnicas Coulomb extendió su relación cuadrada inversa a

$$F \propto \frac{q_1 q_2}{r^2}, \quad (\text{A1.1.2})$$

en donde  $q_1$  y  $q_2$  son las medidas relativas de las cargas en las esferas  $a$  y  $b$ . La ecuación A1.1.2, la cual se conoce como la *Ley de Coulomb*, se cumple sólo

cuando el tamaño de los objetos cargados es mucho menor que la distancia que los separa.

La unidad de carga en el sistema mks se define en términos de la unidad de corriente eléctrica. Si los extremos de un alambre largo se conectan a las terminales de una batería, es de conocimiento común que aparece una corriente eléctrica  $i$  en el alambre. Visualizamos esta corriente como un flujo de carga. La unidad de carga en el sistema mks es el coulomb (coul). Un coulomb se define como la cantidad de carga que fluye en un segundo a través de la sección transversal de un alambre dado si existe una corriente estable de un ampere en este.

$$q = i t. \quad (A1.1.3)$$

En donde  $q$  esta en coulombs,  $i$  esta en amperes y  $t$  esta en segundos. De esta forma, si un alambre esta conectado a una esfera metálica aislada, se puede poner una carga de  $10^{-6}$  coulombs si existe una corriente de 1 ampere en el alambre por  $10^{-6}$  segundos.

La ecuación A1.1.2 se puede escribir como una igualdad insertando una constante de proporcionalidad  $k$ . Usualmente se escribe de una forma más compleja como  $1/4\pi\epsilon_0$

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2}, \quad (A1.1.4)$$

en donde

$$\epsilon_0 = 8.85418 \times 10^{-12} \text{ coul}^2/\text{nt-m}^2.$$

Las cantidades  $q_1$ ,  $q_2$ ,  $r$  y  $F$  de la ecuación A1.1.4 pueden medirse, en el SI mediante procedimientos que no dependen de la ley de Coulomb. Es posible asignarles valores numéricos con unidades. No existe ninguna libertad para fijar la llamada *constante de permitividad*  $\epsilon_0$ ; debe tener un valor que haga que el miembro derecho de la ecuación A1.1.4 sea igual al miembro izquierdo. Este valor medido resulta ser  $\epsilon_0 = 8.854187818 \times 10^{-12} \text{ C}^2/\text{Nm}^2$ .

Si más de dos cargas están presentes, la ecuación A1.1.4 se aplica a cada par de cargas [26]. Si tenemos las cargas  $q_1$ ,  $q_2$  y  $q_3$ , etc; calculamos la fuerza ejercida en cualquiera de ellas (por ejemplo  $q_1$ ) por todas las demás de la ecuación vectorial

$$F_1 = F_{12} + F_{13} + F_{14} + \dots, \quad (A1.1.5)$$

Donde  $F_{12}$ , por ejemplo, es la fuerza ejercida en  $q_1$  por  $q_2$ .

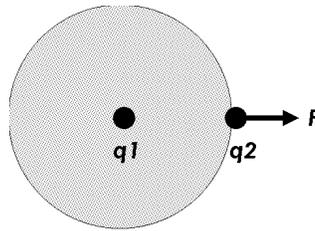
## A1.2 El Campo Eléctrico

Si se coloca una carga de prueba en la región cercana a una varilla cargada, aquella experimenta una fuerza electrostática. Entonces se habla de un campo eléctrico en este espacio.

De la misma forma se habla de un campo magnético en el espacio que rodea a una barra magnética. En la teoría clásica del electromagnetismo los campos eléctricos y magnéticos son conceptos centrales.

Antes de los tiempos de Faraday, se pensaba que la fuerza que actúa entre partículas cargadas era una interacción instantánea y directa entre ellas. También se tenía esta imagen de acción a distancia para las fuerzas gravitacionales y magnéticas. En la actualidad los campos eléctricos se interpretan de la siguiente manera:

1. La carga  $q_1$  establece un campo eléctrico en el espacio que la rodea a ella misma, como se muestra en la figura A1.2.1.
2. El campo actúa sobre la carga  $q_2$ ; esto se muestra en la fuerza  $F$  que experimenta  $q_2$ , como se muestra en la figura A1.2.1.



*Figura A1.2.1. La carga  $q_1$  establece un campo que ejerce una fuerza  $F$  sobre la carga  $q_2$ .*

El campo juega un papel intermediario de las fuerzas mutuas entre las cargas. Existen dos problemas independientes: (a) el cálculo de los campos que se generan debido a distribuciones dadas de carga y (b) el cálculo de las fuerzas que los campos dados ejercerán sobre cargas situadas en ellos. Por lo tanto, el fenómeno se interpreta en términos de

carga  $\Rightarrow$  campo  $\Rightarrow$  carga.

Y no, como se considera en la hipótesis de acción a distancia, en términos de

carga  $\Rightarrow$  carga

En la figura A1.2.1 además podemos imaginar que  $q_2$  genera un campo y que este campo actúa sobre  $q_1$ , produciendo una fuerza  $-\mathbf{F}$  en ella. La situación es completamente simétrica, cada carga es inmersa en un campo asociado con la otra carga.

Si el único problema en electromagnetismo fuera el de las fuerzas entre cargas estacionarias, las hipótesis de la formación de un campo y la de acción a distancia

serían equivalentes. Sin embargo, supóngase que  $q_1$  en la figura A1.2.1 se acelera súbitamente a la derecha. ¿Cómo detectará la carga  $q_2$  que  $q_1$  se ha movido y que la fuerza experimentada por ella ( $q_2$ ) debe aumentar? La teoría electromagnética predice que  $q_2$  experimenta el efecto del movimiento de  $q_1$  debido a una perturbación del campo que emana desde  $q_1$ , viajando a la velocidad de la luz. La hipótesis de la acción a distancia requiere que la información de la aceleración de  $q_1$ , se comunique instantáneamente a  $q_2$ ; Esto no concuerda con la experimentación. La aceleración de electrones en una antena de un radiotransmisor influye sobre los electrones de una antena receptora distante solo después de un tiempo  $l / c$  donde  $l$  es la separación de las antenas y  $c$  es la velocidad de la luz.

Para definir el campo eléctrico operacionalmente, situamos un pequeño cuerpo de prueba que tenga una carga  $q_0$  (que por conveniencia se supone positiva) en el punto del espacio que va a examinarse y se mide la fuerza eléctrica  $\mathbf{F}$  (si es que existe) que actúa sobre este cuerpo. El campo eléctrico  $\mathbf{E}$  en este punto queda definido como

$$E = \frac{F}{q_0}. \quad (\text{A1.2.1})$$

En este caso,  $\mathbf{E}$  es un vector debido a que  $\mathbf{F}$  es uno y  $q_0$  es un escalar. La dirección de  $\mathbf{E}$  es la misma que la de  $\mathbf{F}$ , esto es, su dirección es aquella en la cual tendería a moverse una carga positiva colocada en ese punto.

Al aplicar la ecuación A1.2.1, debe utilizarse una carga de prueba tan pequeña como sea posible. Si la carga de prueba es grande, puede perturbar a las cargas primarias que son responsables del campo, modificando así a la cantidad misma que se trata de medir. La ecuación A1.2.1 debe reemplazarse estrictamente por

$$E = \lim_{q_0 \rightarrow 0} \frac{F}{q_0}. \quad (\text{A1.2.2})$$

Esta ecuación indica que se deben utilizar cargas de prueba  $q_0$  cada vez más pequeñas, evaluando en cada paso la relación  $F/q_0$ . El campo eléctrico  $\mathbf{E}$  se calcula entonces como el límite de esta relación a medida que la magnitud de la carga de prueba se aproxima a cero [26].

### Las líneas de fuerza

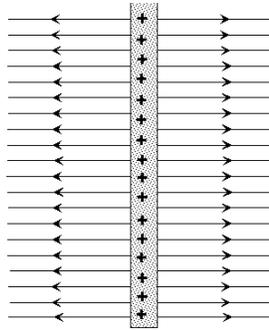
Michael Faraday nunca imaginó al campo eléctrico como un campo vectorial, sino que siempre pensó en términos de líneas de fuerza. Las líneas de fuerza todavía son una manera conveniente de visualizar la distribución del campo eléctrico.

La relación entre las líneas de fuerza (imaginarias) y el vector de campo eléctrico es la siguiente:

1. La tangente a una línea de fuerza en cualquier punto es la dirección de  $\mathbf{E}$  en ese punto.
2. Las líneas de fuerza se dibujan de tal forma que el número de líneas por unidad de área transversal (perpendicular a las líneas) es proporcional a la magnitud de  $\mathbf{E}$ . Cuando las líneas son próximas unas a las otras,  $\mathbf{E}$  es grande y cuando están separadas,  $\mathbf{E}$  es pequeña.

No resulta obvio que sea posible trazar un conjunto continuo de líneas que cumplan con estos requisitos. De hecho, si la ley de Coulomb no fuera cierta, esto no sería posible.

La figura A1.2.2 muestra las líneas de fuerza para una lámina uniforme de carga positiva.



*Figura A1.2.2. Líneas de fuerza para una sección de una lámina infinita con carga positiva.*

Se supone que la lámina es de tamaño infinito, lo cual, para una lámina de dimensiones finitas, es equivalente a considerar solamente aquellos puntos cuyas distancias a la lámina son pequeñas en comparación con las distancias a la orilla más cercana de la lámina. Si enfrente de la lámina se deja en libertad una carga de prueba positiva, ésta se alejará de aquella a lo largo de una línea perpendicular a la lámina. Por consiguiente, el vector de capo eléctrico en cualquier punto próximo a la lámina debe ser perpendicular ésta. Las líneas de fuerza están uniformemente espaciadas, lo cual significa que  $\mathbf{E}$  tiene la misma magnitud en todos los puntos cercanos a la lámina.

La figura A1.2.3 muestra las líneas de campo para una esfera con carga negativa. Por simetría, las líneas deben ser radiales.

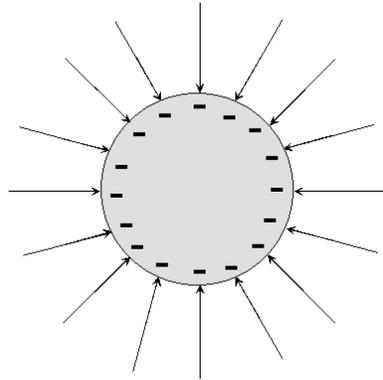


Figura A1.2.3. Líneas de fuerza para una esfera cargada negativamente.

Apuntan hacia adentro de la esfera porque una carga positiva en libertad se aceleraría en esta dirección. El campo eléctrico  $\mathbf{E}$  no es constante, sino que disminuye a medida que la distancia a la carga aumenta. Esto es evidente en las líneas de fuerza, que se separan a grandes distancias. Por simetría, el valor de  $\mathbf{E}$  es el mismo en cualquier posición que se encuentre a la misma distancia del centro e la carga [26].

### Cálculos de $\mathbf{E}$

Veremos la interacción entre cargas y campos, mostrando cómo se puede calcular  $\mathbf{E}$  en diferentes puntos cercanos a las distribuciones de carga. Empezando con el caso simple de una carga puntual  $q$ .

Supóngase que una carga de prueba  $q_0$  se coloca a una distancia  $r$  de una carga puntual  $q$ . La magnitud de la fuerza que actúa sobre  $q_0$  esta dada por la ley de Coulomb

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq_0}{r^2} \quad (\text{A1.2.3})$$

La magnitud del campo eléctrico en la posición de la carga de prueba está dada por la ecuación A1.2.3 o bien por

$$E = \frac{F}{q_0} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \quad (\text{A1.2.4})$$

La dirección de  $\mathbf{E}$  es la de una línea radial que se origina en  $q$  y que apunta hacia fuera si  $q$  es positiva y hacia adentro si  $q$  es negativa.

Para encontrar  $\mathbf{E}$  para un conjunto de cargas puntuales: (a) Calcular  $\mathbf{E}_n$  debido a cada carga en un punto dado, como si está fuese la única carga presente. (b) Sumar vectorialmente cada uno de estos campos, calculados por separado, para encontrar el campo resultante  $\mathbf{E}$  en ese punto. En forma de ecuación

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 + \mathbf{E}_3 + \dots = \sum \mathbf{E}_n \quad n=1,2,3,\dots \quad (\text{A1.2.5})$$

La suma vectorial incluye a todas las cargas. La ecuación A1.2.5 (como la ecuación A1.1.5) es un ejemplo del principio de superposición y en este contexto establece que, en un punto dado, los campos eléctricos debidos a distribuciones de carga separadas simplemente se suman (en forma vectorial), o se superponen de manera independiente. El principio de superposición es muy importante en la física. Por ejemplo, se aplica a situaciones gravitacionales y magnéticas.

Si la distribución de carga es continua, el campo en un punto  $P$  puede calcularse dividiendo a la carga en elementos infinitesimales  $dq$ . A continuación se calcula el campo  $d\mathbf{E}$  debido a cada uno de los elementos en el punto en cuestión, tratando a estos elementos como cargas puntuales. La magnitud de  $d\mathbf{E}$  esta dada por

$$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r^2}, \quad (\text{A1.2.6})$$

en donde  $r$  es la distancia del punto  $P$  a los elementos de carga  $dq$ . El campo resultante en el punto  $P$  se encuentra a partir del principio de superposición, sumando (esto es, integrando) las contribuciones al campo debidas a todos los elementos de carga, o

$$\mathbf{E} = \int d\mathbf{E} \quad (\text{A1.2.7})$$

Esta integración así como la suma en la ecuación A1.2.5, es una operación vectorial.

### Una carga puntual en un campo eléctrico

Ahora se estudia el otro aspecto de la interacción entre cargas y campos; específicamente, dado un campo  $\mathbf{E}$ , ¿qué fuerzas y torcas actúan sobre una configuración de cargas inmersas en él? Trataremos primero el caso de una carga puntual en un campo eléctrico uniforme.

La fuerza que ejerce un campo eléctrico sobre una partícula cargada es (ecuación A1.2.1)  $\mathbf{F} = \mathbf{E}q$ . Esta fuerza producirá una aceleración  $\mathbf{a} = \mathbf{F}/m$ , en donde  $m$  es la masa de la partícula. Este tipo de campo puede producirse conectando las terminales de una batería a dos placas metálicas que están aisladas entre sí. Si la separación entre las placas es pequeña comparada con las dimensiones de las mismas, el campo entre ellas será razonablemente uniforme, excepto cerca de las orillas.

Nótese que al calcular el movimiento de una partícula en un campo producido por cargas externas, se ignora el campo debido a la partícula misma (esto es, el autocampo). De manera semejante, el campo gravitacional terrestre no puede afectar a la Tierra misma, sino que solo afecta a objetos colocados en este campo, por ejemplo, a una piedra [26].

### Un dipolo en un campo eléctrico

Un momento dipolar eléctrico puede considerarse como un vector  $\mathbf{p}$  cuya magnitud  $p$ , es igual al producto  $2aq$  de la magnitud de cualesquiera de las cargas  $q$  y de la distancia  $2a$  entre ellas. La dirección de  $\mathbf{p}$  para tal dipolo va de la carga negativa a la carga positiva. La naturaleza vectorial del momento dipolar eléctrico permite, como se verá en seguida, idear muchas expresiones de forma concisa que incluyan a los dipolos eléctricos.

La figura A1.2.4a muestra un dipolo eléctrico formado por dos cargas  $+q$  y  $-q$  separadas por una distancia  $2aq$ .

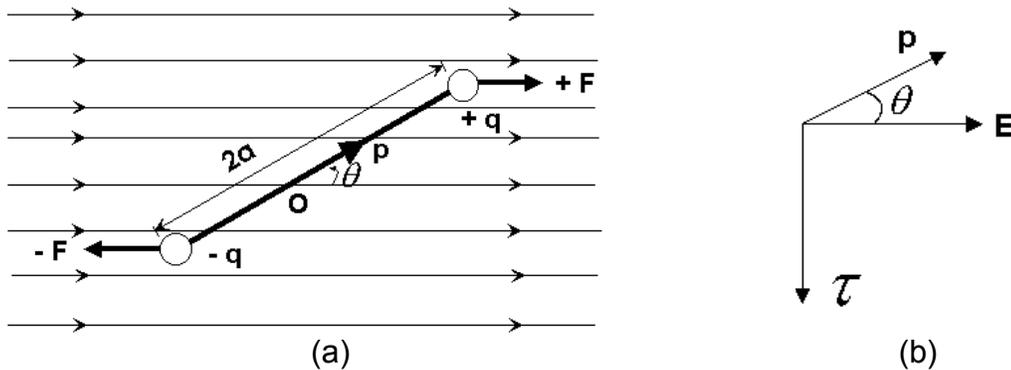


Figura A1.2.4. a) Un dipolo eléctrico en un campo externo uniforme, b) vista oblicua que ilustra que  $\tau = \mathbf{p} \times \mathbf{E}$ .

Este dispositivo se coloca en un campo eléctrico externo uniforme  $\mathbf{E}$ , de tal manera que el momento dipolar  $\mathbf{p}$  forma un ángulo  $\theta$  respecto al campo. Tal como se muestra, sobre el dipolo actúan dos fuerzas iguales y opuestas  $\mathbf{F}$  y  $-\mathbf{F}$ , en donde  $F = qE$ .

Claramente la fuerza neta es cero, pero existe una torca total con respecto a un eje a través de  $O$ , dada por  $\tau = 2F(asen\theta) = 2aFsen\theta$ .

Recordando que  $p = (2a)(q)$  entonces se obtiene

$$\tau = 2aqEsen\theta = pEsen\theta \quad (A1.2.8)$$

Por lo tanto, un dipolo eléctrico colocado en un campo eléctrico externo  $\mathbf{E}$  experimenta una torca que tiende a alinearlo con el campo. La ecuación A1.2.8 puede escribirse en forma vectorial como

$$\tau = \mathbf{p} \times \mathbf{E}, \quad (A1.2.9)$$

y en la figura A1.2.4b se muestran los vectores apropiados.

Para poder cambiar la orientación del dipolo eléctrico en un campo, algún agente externo deberá realizar un trabajo (positivo o negativo). Este trabajo se almacena como energía potencial  $U$  en el sistema formado por el dipolo y el agente que genera el campo eterno. Si el ángulo  $\theta$  de la figura A1.2.4a tiene como valor inicial

$\theta_0$ , el trabajo necesario para hacer girar el eje del dipolo hasta un ángulo  $\theta$  está dado por

$$W = \int dw = \int_{\theta_0}^{\theta} \tau d\theta = U, \quad (\text{A1.2.10})$$

en donde  $\tau$  es la torca ejercida por el agente que realiza el trabajo. Combinando esta igualdad con la ecuación A1.2.8, se obtiene

$$U = \int_{\theta_0}^{\theta} pE \sin \theta d\theta = pE \int_{\theta_0}^{\theta} \sin \theta d\theta = pE(-\cos \theta) \Big|_{\theta_0}^{\theta}.$$

Como únicamente interesan los cambios en la energía potencial, puede escogerse un valor conveniente para la orientación de referencia  $\theta_0$ , en este caso de  $90^\circ$ . Así se obtiene

$$U = -pE \cos \theta, \quad (\text{A1.2.11})$$

o, en forma vectorial,

$$U = -p \cdot E. \quad (\text{A1.2.12})$$

### A1.3 La ley de Gauss

Anteriormente se utilizó la ley de Coulomb para calcular  $\mathbf{E}$  en diferentes puntos partiendo del conocimiento de la distribución de cargas que establecen el campo. Este método siempre funciona y es directo, aunque laborioso, excepto en los casos más simples. Sin embargo, si se dispone de una computadora suficientemente versátil, siempre se puede encontrar la respuesta a tales tipos de problemas, sin importar que tan complicados sean.

La ley de Coulomb puede expresarse de otra forma, llamada la ley de Gauss. Utilizando esta formulación, los cálculos no son laboriosos. Aunque el número de problemas que se pueden resolver con la formulación de la ley de Gauss es pequeño. Por otra parte, la formulación de la ley de Gauss es mucho más útil, por el entendimiento que se logra con ella, que por su utilidad para resolver problemas prácticos.

#### El Flujo

El flujo ( $\Phi$ ) es una propiedad de todos los campos vectoriales. En este caso nos interesa el flujo  $\Phi_E$  del campo eléctrico  $\mathbf{E}$ . La palabra flujo proviene de la palabra latina *fluere* (que fluye).

La figura A1.3.1 muestra un campo uniforme estacionario de un flujo fluido (por ejemplo, de agua) caracterizado por un vector de flujo  $\mathbf{v}$ , constante, que representa la velocidad constante del fluido en cualquier punto dado.

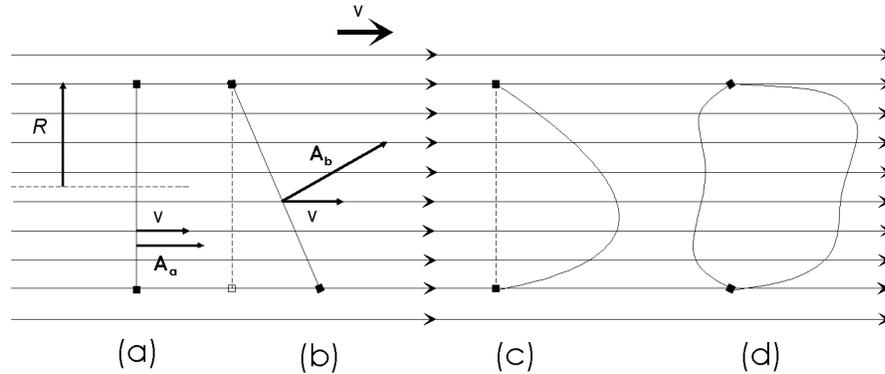


Figura A1.3.1. Se muestran cuatro superficies hipotéticas inmersas en un campo de flujo uniforme y estacionario de un fluido incompresible (por ejemplo, de agua) caracterizado por un vector de campo constante  $\mathbf{v}$ , que representa la velocidad del fluido en cualquier punto dado. Las líneas horizontales son líneas de corriente. En todos los casos,  $R$  es el radio de un círculo perpendicular a las líneas de corriente.

La figura A1.3.1a sugiere, en sección transversal, (una superficie plana hipotética), un círculo de radio  $R$  y área  $\mathbf{A}_a$ , inmerso en el campo del flujo y perpendicular a  $\mathbf{v}$ . El flujo de masa  $\Phi_{v,a}$  (kg/s) a través de esta superficie queda determinado por

$$\Phi_{a,v} = \rho v A_a . \quad (A1.3.1)$$

En donde  $\rho$  es la densidad del fluido ( $\text{kg/m}^3$ ). La ecuación anterior se puede escribir, en notación vectorial como

$$\Phi_{r,a} = \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{A}_a . \quad (A1.3.2)$$

Nótese que el flujo es una cantidad escalar.

La figura A1.3.1b sugiere una superficie plana cuya área proyectada ( $\mathbf{A}_b \cos \theta$ ), es igual a  $\mathbf{A}_a$ . Resulta claro que el flujo de masa  $\Phi_v$  (kg/s) a través de la superficie b debe ser igual al que cruza la superficie a. Para clarificar lo anterior podemos escribir

$$\Phi_{r,b} = \Phi_{r,a} = \rho v A_a = \rho v (A_b \cos \theta) = \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{A}_b . \quad (A1.3.3)$$

La figura A1.3.1c, sugiere una superficie curva hipotética cuya área proyectada es igual a  $\mathbf{A}_a$ , lo cual se afirma sin demostración. De nuevo resulta claro que  $\Phi_{v,c} = \Phi_{v,a}$ .

La figura A1.3.1d, sugiere una superficie cerrada, a diferencia de las tres anteriores, que eran abiertas. Afirmamos que, en este campo de flujo, el flujo  $\Phi_{v,d}$  en esta superficie cerrada es cero y se justifica notando que la cantidad de fluido (kg/s) que entra en la porción izquierda de la superficie por unidad de tiempo es igual a la que sale por la porción derecha por unidad de tiempo. En este caso, no se genera ni desaparece fluido (suponiendo que es incomprensible) dentro del volumen limitado por la superficie.

Después de estos preliminares, ya podemos considerar al flujo  $\Phi_v$  a  $\Phi_E$ , del campo eléctrico. Parecería que en este caso no hay nada que fluya. Sin embargo, en las ecuaciones A1.3.2 y A1.3.3 tampoco interviene formalmente flujo alguno, si no el vector de campo  $\mathbf{v}$  (que en este caso es constante). Si en la figura A1.3.1 se cambia  $\mathbf{v}$  por  $\mathbf{E}$  y se consideran a las líneas de corriente como líneas de fuerza, todo lo que se ha mencionado en esta sección sigue siendo cierto.

En general no es cierto que en el flujo de fluidos incomprensibles  $\Phi_v=0$  para toda superficie cerrada, como ocurría en el caso especial de la figura A1.3.1d. En el volumen encerrado por la superficie pueden existir fuentes o sumideros de fluido, y en tales casos  $\Phi_v \neq 0$ .

De la misma manera, tampoco es cierto que  $\Phi_E=0$  en toda superficie cerrada. Existen fuentes (que son las cargas positivas y, en este caso  $\Phi_E > 0$ ) y sumideros (que son las cargas negativas y  $\Phi_E < 0$ ) de  $\mathbf{E}$  que pueden encontrarse dentro de la superficie cerrada hipotética inmersa en el campo  $\mathbf{E}$ .

### El flujo del campo eléctrico

Cuando una superficie cerrada está en un campo eléctrico,  $\Phi_E$  es positivo si en toda la superficie las líneas de fuerza apuntan hacia fuera y negativo si apuntan hacia adentro. En la figura A1.3.2 se muestran dos cargas iguales y opuestas, así como sus líneas de fuerza.

Las curvas  $S_1$ ,  $S_2$ ,  $S_3$  y  $S_4$  son las intersecciones de cuatro superficies cerradas hipotéticas con el plano de la figura.

Según lo que se acaba de decir,  $\Phi_E$  es positivo para la superficie  $S_1$  y negativo para la superficie  $S_2$ . En la superficie  $S_3$ ,  $\Phi_E$  es cero (compárese con la figura A1.3.1d).

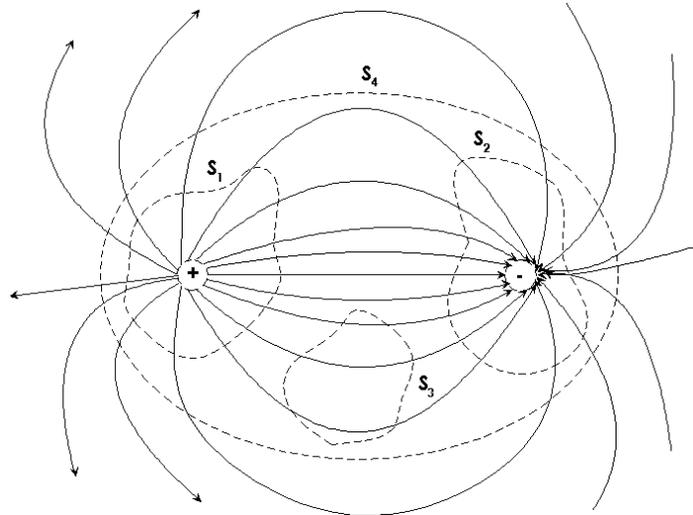


Figura A1.3.2. Dos cargas iguales y opuestas. Las líneas discontinuas representan a las intersecciones de las superficies cerradas hipotéticas con el plano de la figura.

Para poder definir con precisión a  $\Phi_E$  considérese la superficie cerrada arbitraria sumergida en un campo eléctrico no uniforme que se muestra en la figura A1.3.3.

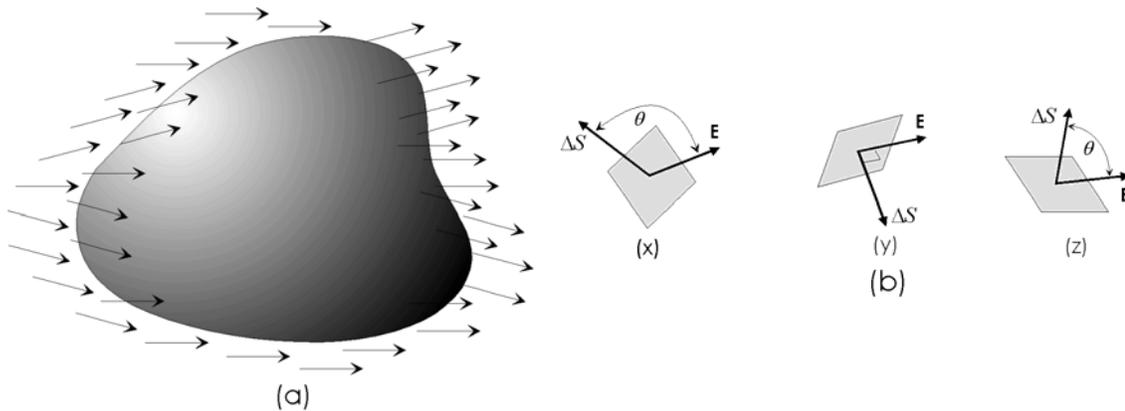


Figura A1.3.3. a) Una superficie hipotética inmersa en un campo eléctrico no uniforme, b) representación aumentada de tres elementos de área en esta superficie.

La superficie se divide en cuadros elementales  $\Delta S$ , cada uno de los cuales es lo suficientemente pequeño como para considerarlos planos. Tales elementos de área pueden representarse como vectores  $\Delta \mathbf{s}$ , cuya magnitud es el área  $\Delta S$  y la dirección de  $\Delta \mathbf{s}$  es perpendicular hacia fuera de la superficie. Con cada cuadrado de la figura A1.3.3b se puede asociar un vector de campo eléctrico  $\mathbf{E}$ . Se puede considerar que el vector de campo eléctrico  $\mathbf{E}$  es constante en cada uno de los cuadrados, ya que éstos se han tomado arbitrariamente pequeños.

Los vectores  $\mathbf{E}$  y  $\Delta\mathbf{s}$  que caracterizan a cada cuadrado forman entre sí un ángulo  $\theta$ . La figura A1.3.3b muestra una vista aumentada de tres de los cuadrados que en la superficie de la figura A1.3.3a están identificados como x, y y z. Observe que en x,  $\theta > 90^\circ$  ( $\mathbf{E}$  apunta hacia adentro); en y,  $\theta = 90^\circ$  ( $\mathbf{E}$  es paralelo a la superficie), y en z,  $\theta < 90^\circ$  ( $\mathbf{E}$  apunta hacia fuera).

Una definición cualitativa del flujo es

$$\Phi_E \cong \sum \mathbf{E} \cdot \Delta\mathbf{S}, \quad (\text{A1.3.4})$$

que indica que el procedimiento a seguir consiste en sumar las cantidades escalares  $\mathbf{E} \cdot \Delta\mathbf{S}$  de todos los elementos de área en los cuales se ha dividido la superficie. Para aquellos puntos tales como x en la figura A1.3.3. Reemplazando a la suma sobre la superficie por una integral de sobre la superficie se obtiene

$$\Phi_E = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}. \quad (\text{A1.3.5})$$

Esta integral de superficie implica que la superficie en cuestión debe dividirse en elementos infinitesimales de área  $d\mathbf{S}$  y que en toda la superficie se debe sumar el valor calculado de la cantidad escalar  $\mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}$  para cada elemento de área. El círculo en el signo de la integral indica que la superficie de integración es cerrada.

### La ley de Gauss

La ley de Gauss, que se aplica a cada superficie cerrada hipotética (llamada superficie gaussiana), establece una conexión entre  $\Phi_E$  en la superficie y la carga total  $q$  encerrada por ella. La ley se establece como

$$\epsilon_0 \Phi_E = q, \quad (\text{A1.3.6})$$

o utilizando la ecuación A1.3.5,

$$\epsilon_0 \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = q. \quad (\text{A1.3.7})$$

Nótese que la carga  $q$  en la ecuación A1.3.6 (o en la ecuación A1.3.7) es la carga total, incluido su signo algebraico. Si una superficie encierra cantidades iguales de carga de signo opuesto, el flujo  $\Phi_E$  es cero. La carga exterior a la superficie no contribuye al valor de  $q$ , así como tampoco afecta a su valor la localización de las cargas en el interior de la superficie.

Si la distribución de cargas tiene una simetría tal que se pueda calcular con facilidad la integral de la ecuación A1.3.7, escogiendo adecuadamente a la superficie gaussiana, la ley de Gauss puede utilizarse para calcular  $\mathbf{E}$ . A la inversa, si se conoce el valor de  $\mathbf{E}$  en todos los puntos en una superficie cerrada, la ley de Gauss se puede emplear para calcular la carga en el interior de la superficie.

Si  $\mathbf{E}$  tiene una componente dirigida hacia fuera de la superficie cerrada en todos sus puntos, entonces, por la ecuación A1.3.5,  $\Phi_E$  será positivo y, por la ecuación A1.3.7, debe existir una carga total positiva dentro de la superficie (véase la figura A1.3.2 superficie  $S_1$ ).

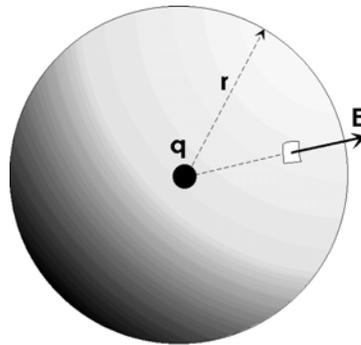
Si  $\mathbf{E}$  tiene una componente dirigida hacia adentro en todos los puntos de la superficie cerrada, debe existir una carga total negativa dentro de la superficie (véase la figura A1.3.2, superficie  $S_2$ ).

La superficie  $S_3$  de la figura A1.3.2 no encierra carga alguna, de tal forma que la ley de Gauss predice que  $\Phi_E=0$ . Este resultado concuerda con el hecho de que las líneas de  $\mathbf{E}$  atraviesan a la superficie  $S_3$ , ya que entonces la contribución a la integral en un lado anulan a la del otro lado.

En la superficie  $S_4$  de la figura A1.3.2,  $\Phi_E=0$  ya que la suma algebraica de las cargas dentro de la superficie es cero. En otras palabras, de la superficie salen tantas líneas como las que entran, como ocurre en la superficie  $S_3$ .

### La ley de Gauss y la Ley de Coulomb

La ley de Coulomb puede deducirse de la Ley de Gauss y de ciertas consideraciones de simetría. Para demostrar esto, se aplicará la ley de Gauss a una carga puntual aislada  $q$ , como la de la figura A1.3.4.



*Figura A1.3.4. Una superficie gaussiana esférica de radio  $r$  rodeando a una carga puntual  $q$ .*

Aunque la ley de Gauss es válida en cualquier tipo de superficie, será más fácil obtener la información si se considera una superficie esférica de radio  $r$  centrada en la carga. La ventaja de utilizar esta superficie es que, por simetría,  $\mathbf{E}$ , debe ser perpendicular a la superficie y debe tener la misma magnitud (todavía desconocida) en todos sus puntos. En la figura A1.3.4 se muestra que, en cualquier punto de la superficie gaussiana, tanto  $\mathbf{E}$  como  $d\mathbf{s}$  están dirigidos radialmente hacia fuera. El ángulo entre ellos es cero entonces la cantidad  $\mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}$  se transforma en  $E ds$ .

En este caso la ley de Gauss se reduce a

$$\varepsilon_0 \oint E \cdot ds = \varepsilon_0 \oint E ds = q . \quad (\text{A1.3.8})$$

Como  $E$  es constante en todos los puntos de la esfera, se le puede sacar del signo de integración y entonces se obtiene

$$\varepsilon_0 E \oint ds = q , \quad (\text{A1.3.9})$$

en donde la integral es simplemente el área de la esfera. Esta ecuación se convierte en

$$\varepsilon_0 E (4\pi r^2) = q , \quad (\text{A1.3.10})$$

o

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r^2} . \quad (\text{A1.3.11})$$

La ecuación A1.3.11 permite calcular la magnitud del campo eléctrico  $\mathbf{E}$  en cualquier punto a una distancia  $r$  de la carga aislada  $q$ ; compárese con la ecuación A1.2.4. La dirección de  $\mathbf{E}$  se conoce a partir de la simetría.

Considérese una segunda carga puntual  $q_0$  localizada en el punto en donde se ha calculado  $\mathbf{E}$ . La magnitud de la fuerza que actúa sobre esta carga es (véase la ecuación A1.2.1)  $F = Eq_0$ . Esta, al combinarse con la ecuación A1.3.11 se transforma en

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{qq_0}{r^2} ,$$

que es precisamente la ley de Coulomb. Por lo tanto, se ha deducido la ley de Coulomb a partir de la ley de Gauss y de consideraciones de simetría. Esta ley es una de las ecuaciones fundamentales de la teoría electromagnética [26].

#### A1.4 El potencial eléctrico

El campo eléctrico que rodea a una barra cargada no solo puede describirse con un campo eléctrico (vectorial)  $\mathbf{E}$  sino mediante una cantidad escalar, llamada *potencial eléctrico*  $V$ . Estas cantidades están íntimamente relacionadas y en general el decidir cuál de las dos se utiliza en un problema dado es sólo cuestión de conveniencia. Para calcular la *diferencia de potencial eléctrico* entre dos puntos  $A$  y  $B$  en un campo eléctrico, una carga de prueba  $q_0$  se desplaza desde  $A$  hasta  $B$ , manteniéndola constantemente en equilibrio, y se mide el trabajo  $W_{AB}$  que tiene que realizar el agente externo que mueve a la carga. La diferencia de potencial eléctrico se define entonces como

$$V_B - V_A = \frac{W_{AB}}{q_0}. \quad (\text{A1.4.1})$$

El trabajo  $W_{AB}$  puede ser (a) positivo, (b) negativo o (c) cero. En estos casos, el potencial eléctrico en  $B$  será (a) mayor, (b) menor o (c) igual al potencial eléctrico en  $A$ .

De la ecuación A1.4.1 se deduce que las unidades de diferencia de potencial en el SI son joule/coulomb. Esta combinación se presenta con tanta frecuencia que se utiliza una unidad especial, el *volt*, es decir  $\text{IV} = \text{J/C}$ .

Por lo general el punto  $A$  se elige muy alejado de todas las cargas (de modo escrito en el infinito) y el potencial eléctrico  $V_A$  para esta distancia infinita se toma arbitrariamente igual a cero. Esto permite definir al *potencial eléctrico en un punto*. Haciendo  $V_A = 0$  en la ecuación A1.4.1 y eliminando los subíndices se obtiene

$$V = \frac{W}{q_0}, \quad (\text{A1.4.2})$$

en donde  $W$  es el trabajo que realiza un agente externo para mover a la carga de prueba  $q_0$  desde el infinito hasta el punto en cuestión.

### El potencial y el campo eléctrico

En la figura A1.4.1,  $A$  y  $B$  representan a dos puntos separados por una distancia  $d$  en la misma dirección de un campo eléctrico uniforme  $\mathbf{E}$ , debido a una distribución de cargas no mostrada. *Supóngase* que un agente externo mueve, sin producir aceleraciones, a una carga de prueba positiva,  $q_0$ , desde  $A$  hasta  $B$  a lo largo de la recta que los une.

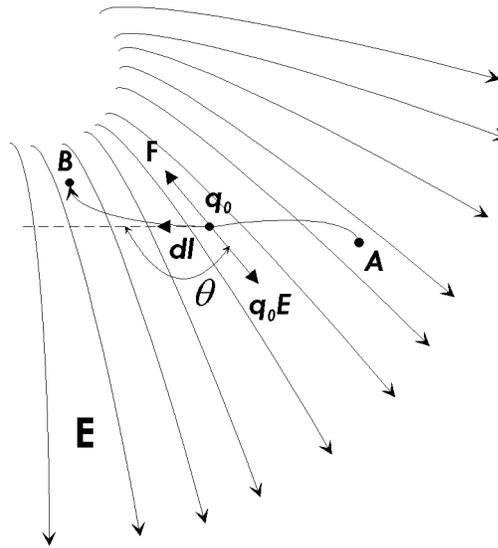
La fuerza eléctrica sobre la carga es  $q_0\mathbf{E}$  y apunta hacia abajo. Para mover a la carga en la forma descrita, se debe contrarrestar esta fuerza mediante la aplicación de una fuerza externa  $\mathbf{F}$  de la misma magnitud, pero dirigida hacia arriba.

El trabajo  $W$  realizado por el agente que proporciona esta fuerza es

$$W_{AB} = Fd = q_0Ed. \quad (\text{A1.4.3})$$

Sustituyendo esta expresión en la ecuación A1.4.1 se obtiene

$$V_B - V_A = \frac{W_{AB}}{q_0} = Ed. \quad (\text{A1.4.4})$$



*Figura A1.4.1. Una carga de prueba positiva  $q_0$  se mueve de A a B en un campo eléctrico uniforme  $E$  debido a la acción de un agente externo que ejerce una fuerza  $F$  sobre ella.*

Esta ecuación establece la relación entre la diferencia de potencial y el campo eléctrico en un caso especial simple. Nótese que esta ecuación proporciona otra unidad para  $E$  en el SI, a saber, el volt/metro [V/m] que es idéntico al newton/coulomb [N/C]; esta última unidad es la más utilizada para  $E$ . En la figura A1.4.1 el punto  $B$  tiene mayor potencial que el de  $A$ . Esto es razonable porque un agente externo debe realizar un trabajo positivo para llevar a la carga de prueba positiva desde  $A$  hasta  $B$ . Esta figura podría utilizarse para ilustrar el acto de levantar una piedra desde  $A$  hasta  $B$  en el campo gravitacional uniforme en las vecindades de la superficie terrestre.

¿Cuál será la relación entre  $V$  y  $E$  en el caso general en el que el campo eléctrico no es uniforme y en el que el cuerpo de prueba se mueve a lo largo de una trayectoria que no es rectilínea, tal como se muestra en la figura A1.4.2?

Como puede verse, el campo eléctrico ejerce una fuerza  $q_0E$  sobre la carga de prueba. Para evitar que la carga de prueba se acelere, un agente externo debe aplicar una fuerza  $F$  que sea exactamente igual a  $-q_0E$  en todas las posiciones del cuerpo de prueba. Si el agente externo produce un desplazamiento  $dl$  en el cuerpo de prueba a lo largo de la trayectoria que va de  $A$  a  $B$ , el elemento de trabajo realizado por el agente externo es  $F \cdot dl$ .

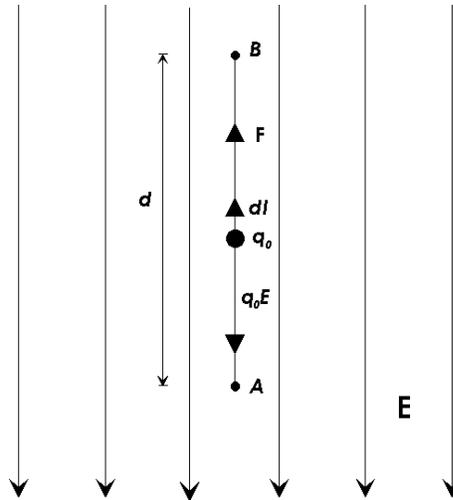


Figura A1.4.2. Una carga de prueba positiva  $q_0$  se mueve desde A hasta B en un campo eléctrico no uniforme debido a la acción de un agente externo que ejerce una fuerza  $F$  sobre ella.

Para encontrar el trabajo total de  $W_{AB}$  realizado por el agente externo al mover a la carga de prueba desde A hasta B, se deben sumar (esto es, integrar) las contribuciones al trabajo de todos los segmentos infinitesimales en los cuales se ha dividido la trayectoria. Esto conduce a

$$W_{AB} \int_A^B F \cdot dl = -q_0 \int_A^B E \cdot dl . \quad (A1.4.5)$$

Esta integral se llama integral de línea. Nótese que se ha sustituido a  $-q_0 \mathbf{E}$  por  $\mathbf{F}$ .

Sustituyendo la expresión de  $W_{AB}$  en la ecuación A1.4.1 se obtiene

$$V_B - V_A = \frac{W_{AB}}{q_0} = - \int_A^B E \cdot dl . \quad (A1.4.6)$$

Si el punto A se encuentra a una distancia infinita y si el potencial  $V_A$  en el infinito se toma como cero, esta ecuación da el potencial  $V$  en el punto B, o, eliminando el subíndice B,

$$V = - \int_{\infty}^B E \cdot dl . \quad (A1.4.7)$$

Estas dos ecuaciones permiten calcular la diferencia de potencial entre dos puntos cualesquiera (o el potencial en cualquier punto) si se conoce  $\mathbf{E}$  para diferentes puntos en el campo.

### Potencial debido a una carga puntual

La figura A1.4.3 muestra dos puntos  $A$  y  $B$  en las vecindades de una carga puntual aislada  $Q$ .

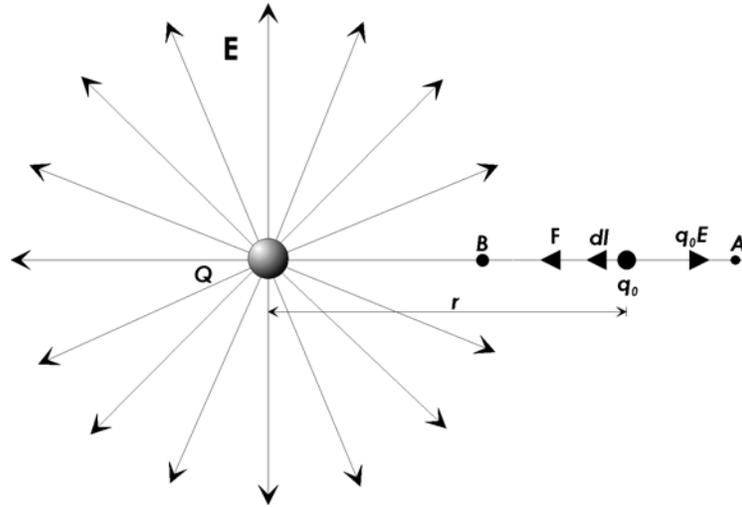


Figura A1.4.3. Debido a la acción de un agente externo, una carga de prueba  $q_0$  se mueve desde  $A$  hasta  $B$  en el campo establecido por una carga puntual  $Q$ .

Por simplicidad, se supondrá que  $A$ ,  $B$  y  $Q$  se encuentran a lo largo de una línea recta. Se calculará la diferencia de potencial entre los puntos  $A$  y  $B$ , suponiendo que una carga de prueba  $q_0$  se mueve, sin aceleración, a lo largo de una línea radial desde  $a$  hasta  $B$ . A lo largo de esta trayectoria, el campo  $\mathbf{E}$  apunta hacia la derecha y  $d\mathbf{l}$ , que siempre está en la dirección en la que  $r$  decrece, debido a que  $r$  se mide desde  $Q$ , que se considera el origen. Por lo tanto  $d\mathbf{l} = d\mathbf{r}$ .

Combinando estos dos resultados se obtiene  $\mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \mathbf{E} d\mathbf{r}$ . Sustituyendo este resultado en la ecuación A1.4.4 se obtiene

$$V_B - V_A = \frac{W_{AB}}{q_0} = -\int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\int_{r_A}^{r_B} E dr . \quad (\text{A1.4.8})$$

Y sustituyendo  $E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2}$ , tenemos que

$$V_B - V_A = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_{r_A}^{r_B} \frac{dr}{r^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A} \right) . \quad (\text{A1.4.9})$$

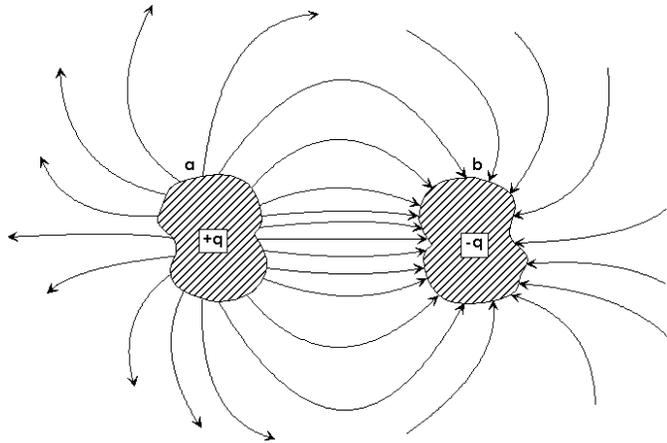
Escogiendo la posición de referencia  $A$  en el infinito (o sea, si  $r_A \rightarrow \infty$ ), escogiendo  $V_A = 0$  en esta posición y eliminando el subíndice  $B$  se obtendrá

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}. \quad (\text{A1.4.10})$$

Esta ecuación demuestra que las superficies equipotenciales de una carga puntual aislada son esferas concéntricas con la carga puntual. Un análisis de esta deducción demuestra que la relación se cumple también para aquellos puntos que se encuentran fuera de una distribución de carga con simetría esférica [26].

### A1.5 Capacitores y dieléctricos

En general un capacitor consta de dos conductores aislados  $a$  y  $b$ , como se muestra en la figura A1.5.1.



*Figura A1.5.1. Dos conductores aislados con cargas iguales y opuestas forman un capacitor.*

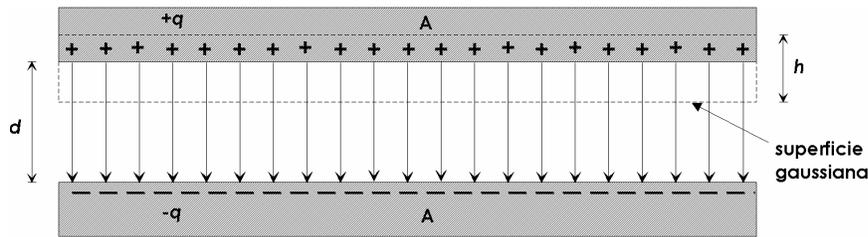
Se supondrá que los conductores están por completo aislados de los objetos que se encuentran en sus vecindades y que tienen cargas iguales y opuestas  $+q$  y  $-q$ , respectivamente. Toda línea de fuerza que se origine en  $a$  terminará en  $b$ . Más aún, por el momento se supondrá que los conductores  $a$  y  $b$  se encuentran en el vacío.

El capacitor de la figura A1.5.1 está caracterizado por la magnitud  $q$  de la carga en cualquiera de los conductores y por la diferencia de potencial  $V$  entre ellos. Note, a) que  $q$  no es la carga total del capacitor, la cual es cero y b) que  $V$  no es el potencial de cualquiera de los conductores, referido tal vez a  $V \rightarrow 0$  en  $\infty$ , sino que es la diferencia de potencial entre ellos. Se propondrá por el momento, sin prueba, que  $q$  y  $V$  en un capacitor son proporcionales entre sí, es decir

$$q = CV. \quad (\text{A1.5.1})$$

### Calculo de la capacitancia

La figura A1.5.2 muestra un capacitor de placas paralelas conductoras de área  $A$  separadas por una distancia  $d$ . Al conectar cada una de las placas momentáneamente a las terminales de una batería, en una de las placas aparecerá una carga  $+q$  y en otra una carga  $-q$ . Si la distancia  $d$  es pequeña comparada con las dimensiones de las placas, el campo eléctrico  $\mathbf{E}$  entre ellas será uniforme, lo cual significa que las líneas de fuerza serán paralelas y estarán igualmente espaciadas.



*Figura A1.5.2. Un capacitor de placas paralelas con placas conductoras de área  $A$ . La línea segmentada representa una superficie gaussiana de altura  $h$  cuyas tapas superior e inferior tienen la misma forma y tamaño que las placas del capacitor.*

Las leyes del electromagnetismo prevén cierta curvatura de las líneas en las orillas de las placas, que siempre puede ignorarse si  $d$  es suficientemente pequeña.

La capacitancia de este dispositivo puede calcularse utilizando la ley de Gauss, lo cual constituye otro ejemplo de la utilidad de esta ley en situaciones en las que la geometría es simple. La figura A1.5.2 muestra (con líneas segmentadas a una superficie gaussiana de altura  $h$ , cerrada por tapas planas de área  $A$ , que son del mismo tamaño y forma de las placas del capacitor). El flujo de  $\mathbf{E}$  es cero en la parte de la superficie gaussiana que está dentro de la placa superior del capacitor, debido a que el campo eléctrico interno en un conductor con carga estática es cero. El flujo de  $\mathbf{E}$  a través de la pared vertical de la superficie gaussiana es cero porque, en tanto que se desprece la curvatura de las líneas de fuerza se pueden considerar que  $\mathbf{E}$  es paralelo a la pared.

Sólo queda la cara de la superficie gaussiana que se encuentra entre las dos placas. En este caso  $\mathbf{E}$  es constante y el flujo  $\Phi_E$  es simplemente  $EA$ . La ley de Gauss resulta entonces

$$\epsilon_0 \Phi_E = \epsilon_0 EA = q. \quad (\text{A1.5.2})$$

El trabajo necesario para llevar a una carga de prueba  $q_0$  de una placa a la otra puede expresarse como  $q_0V$  o como el producto de la fuerza  $q_0E$  por la distancia  $d$ ; esto es  $q_0Ed$ . Estas expresiones deben ser iguales, o sea

$$V = Ed . \quad (A1.5.3)$$

Expresada en términos más formales, la ecuación A1.5.3 es un caso especial de la relación general

$$V = -\int E \cdot dl , \quad (A1.5.4)$$

en donde  $V$  es la diferencia de potencial entre las placas. La integral puede calcularse a lo largo de cualquier trayectoria que empiece en una de las placas y termine en otra, debido a que cada placa es una superficie equipotencial y la fuerza electrostática es independiente de la trayectoria seguida. Aunque la trayectoria más simple entre las dos placas es una línea perpendicular a ellas, la ecuación A1.5.3 se cumple independientemente de la trayectoria de integración escogida. Si se sustituyen las ecuaciones A1.5.2 y A1.5.3 en la relación  $C = q / V$ , se obtiene

$$C = \frac{q}{V} = \frac{\epsilon_0 EA}{Ed} = \frac{\epsilon_0 A}{d} . \quad (A1.5.5)$$

La ecuación A1.5.5 se cumple sólo para capacitores de placas tipo paralelas; para otros capacitores con diferentes geometrías se aplican fórmulas diferentes. Esta ecuación demuestra, en un caso particular, que de hecho  $C$  depende de la geometría de los conductores (placas). Tanto  $A$  como  $d$  son factores geométricos.

La ecuación A1.5.5 sugiere que  $\epsilon_0$ , puede medirse utilizando un capacitor cuya área y separación de placas se conozca con precisión, determinando experimentalmente su capacitancia mediante la medida de  $q$  y  $V$ , utilizando la relación  $C = q / V$ . Por consiguiente, se puede despejar a  $\epsilon_0$  de la ecuación A1.5.5 y su valor numérico se determina en términos de las cantidades medidas  $A$ ,  $d$  y  $C$ ; de esta manera se ha podido medir  $\epsilon_0$  con precisión.

### Capacitor de placas paralelas con un dieléctrico.

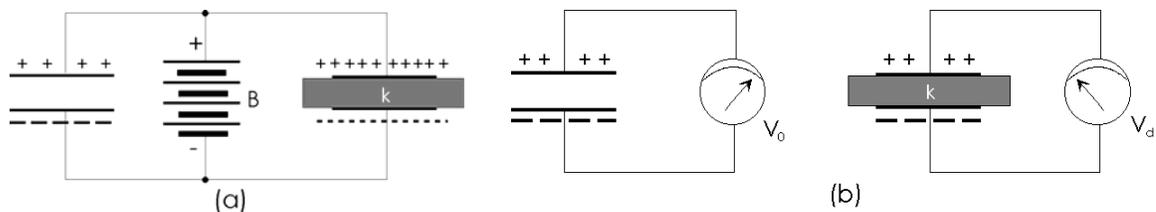
La ecuación A1.5.5 sólo se cumple en capacitores de placas paralelas cuando éstas están inmersas en el vacío. En 1837 Michael Faraday investigó por primera vez el efecto de llenar el espacio entre las placas con un dieléctrico (en la tabla A1.5.1 se enumeran algunos de los dieléctricos utilizados en la actualidad).

El problema se puede plantear de la siguiente manera: supóngase que una placa metálica electrificada  $A$  está suspendida en el aire y que existen dos placas  $B$  y  $C$  semejantes colocadas paralelamente a ambos lados de  $A$ , a iguales distancias y aisladas; entonces el efecto de inducción de  $A$  será igual sobre  $B$  y  $C$  [es decir, sobre cada una de las placas aparecerá la misma carga]. Si en tal posición de las placas se introduce entre  $A$  y  $C$  un dieléctrico diferente al aire, por ejemplo goma laca. ¿Seguirá siendo igual la inducción entre ellas?. ¿No cambiará la relación de  $C$  y  $B$  a  $A$ , a pesar de la diferencia de los dieléctricos interpuestos entre ellas?

Material	Constante Dieléctrica	Intensidad Dieléctrica KV/mm)
Vacío	1.00000	$\infty$
Aire	1.00054	0.8
Agua	78	-
Papel	3.5	14
Mica de rubí	5.4	160
Porcelana	6.5	4
Cuarzo fundido	3.8	8
Vidrio Pyrex	4.5	13
Baquelita	4.8	12
Polietileno	2.3	50
Ambar	2.7	90
Poliestireno	2.6	25
Teflón	2.1	60
Neopreno	6.9	12
Aceite de piranol	4.5	12
Bióxido de titanio	100	6

*Tabla A1.5.1 Propiedades de algunos dieléctricos. Estas propiedades corresponden aproximadamente igual a la del ambiente y en condiciones tales que el campo eléctrico  $E$  en el dieléctrico no varíe con el tiempo. La intensidad dieléctrica es el gradiente del potencial máximo que puede existir en el dieléctrico sin que se produzca un rompimiento eléctrico. Con frecuencia se coloca un dieléctrico entre placas paralelas, lo cual permite que se les aplique una diferencia de potencial mayor que en el caso en que el dieléctrico sea el aire.*

Faraday contestó esta pregunta fabricando dos capacitores idénticos, en uno de los cuales colocó un dieléctrico y el otro contenía aire a presión normal.



*Figura A1.5.3. a) La batería B suministra la misma diferencia de potencial a cada uno de los capacitores; el de la derecha tiene mayor carga. b) Los dos capacitores tienen la misma carga; el de la derecha tiene menor diferencia de potencial, tal como lo indica la posición de la aguja del medidor.*

Al cargar a los capacitores con la misma diferencia de potencial, Faraday encontró experimentalmente que la carga del que contenía al dieléctrico era mayor que la del otro; véase la figura A1.5.3a.

Como  $q$  es mayor, para un mismo valor de  $V$ , si existe un dieléctrico, la relación  $C = q / V$  indica que la capacitancia de un capacitor aumenta si se coloca un dieléctrico entre sus placas. La relación de la capacitancia con dieléctrico (suponiendo que llena perfectamente el espacio entre las placas), a aquella sin dieléctrico, se llama constante dieléctrica  $x$  del material; véase la tabla A1.5.1. En vez de mantener a los dos capacitores con la misma diferencia de potencial puede suministrárseles las mismas cargas, como se indica en la figura A1.5.3b. Los experimentos muestran que, entonces, la diferencia de potencial  $V_d$  entre las placas del capacitor de la derecha es menor que el del capacitor de la izquierda por un factor de  $1 / x$ , o bien

$$V_d = V_0 / k .$$

Nuevamente esto obliga a afirmar, que la relación  $C = q / V$ , que el efecto del dieléctrico es el de aumentar la capacitancia por un factor de  $x$ . En un capacitor de placas paralelas puede escribirse, como resultado experimental, que

$$C = \frac{k\epsilon_0 A}{d} . \quad (\text{A1.5.6})$$

La ecuación A1.5.5 es un caso especial de esta relación que se obtiene haciendo  $x = 1$ , lo que corresponde al hecho de que exista vacío entre las placas. Los experimentos demuestran que la capacitancia de cualquier capacitor aumenta por un factor  $x$  si el espacio entre sus placas se llena con un dieléctrico. De aquí que la capacitancia de un capacitor pueda escribirse como

$$C = k\epsilon_0 L ,$$

en donde  $L$  depende de la geometría y tiene dimensiones de longitud. Para un capacitor de placas paralelas  $L$  es  $A / d$ .

### Capacitancia de una esfera aislada

Anteriormente se demostró que el potencial de una esfera conductora aislada de radio  $R$  y carga  $q$  era

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R} . \quad (\text{A1.5.7})$$

Se puede considerar a esta esfera como un capacitor de una placa en la que la otra placa es una esfera conductora de radio infinito, en cuyo sitio se escoge  $V = 0$ .

La capacitancia de la esfera de radio  $R$  resulta, de la ecuación A1.4.10, por

$$C = \frac{q}{V} = 4\pi\epsilon_0 R . \quad (\text{A1.5.8})$$

Nuevamente, resulta que la capacitancia queda determinada por los factores geométricos de importancia; en este caso el radio  $R$  de la esfera [26].

## APÉNDICE 2. ANÁLISIS DE POTENCIAL Y CAMPO ELÉCTRICO

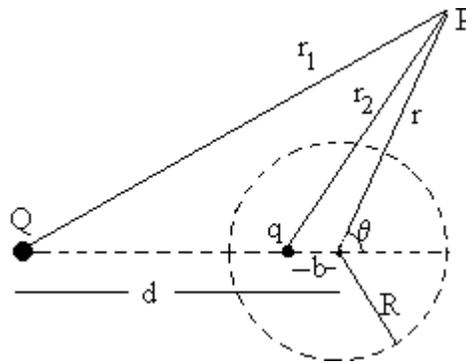
### A2.1 Análisis de una carga puntual Q próxima a una esfera conductora con potencial cero (sección 4.1).

#### El potencial

Vamos a calcular el campo en cualquier punto P exterior a la esfera conductora. Primero calculamos el potencial

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{Q}{r_1} + \frac{q}{r_2} \right). \quad (\text{A2.1.1})$$

Se expresa  $r_1$  y  $r_2$  en coordenadas polares en función de la distancia radial  $r$  del centro de la esfera al punto P y del ángulo  $\theta$ .



$$r_1 = \sqrt{d^2 + r^2 + 2dr \cos\theta}, \quad (\text{A2.1.2})$$

$$r_2 = \sqrt{b^2 + r^2 + 2br \cos\theta}, \quad (\text{A2.1.3})$$

De este modo  $V$  es una función de  $r$  y  $\theta$ .

#### Componente radial del campo

Para calcular el vector campo  $\mathbf{E}$  se halla el gradiente del potencial cambiado de signo. El valor de la componente radial del campo es

$$E_r = -\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{r + d \cos\theta}{r_1^3} Q + \frac{r + b \cos\theta}{r_2^3} q \right). \quad (\text{A2.1.4})$$

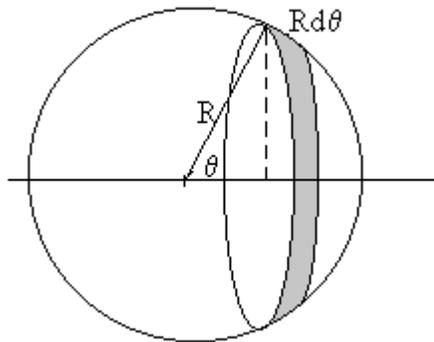
### La carga inducida en el conductor esférico

Según hemos mencionado el campo en las proximidades de una superficie conductora es perpendicular a dicha superficie luego, el campo en la superficie esférica conductora es radial.

Calculamos  $E_r$  para  $r = R$  y a continuación la densidad superficial de carga inducida en la esfera, teniendo en cuenta que el campo en las proximidades de la superficie de un conductor es  $E_r = \sigma / \epsilon_0$

$$\sigma = -\frac{Q(d^2 - R^2)}{4\pi R(d^2 + R^2 + 2dR \cos\theta)^{\frac{3}{2}}}. \quad (\text{A2.1.5})$$

Evidentemente, si integramos esta densidad de carga sobre la superficie de la esfera, obtenemos la carga total inducida  $q$ .



$$q = \int_0^\pi \sigma 2\pi R^2 \sin\theta d\theta = -\frac{R}{d} Q. \quad (\text{A2.1.6})$$

La carga total inducida sobre la esfera conductora es igual a la carga imagen que sustituye a la esfera.

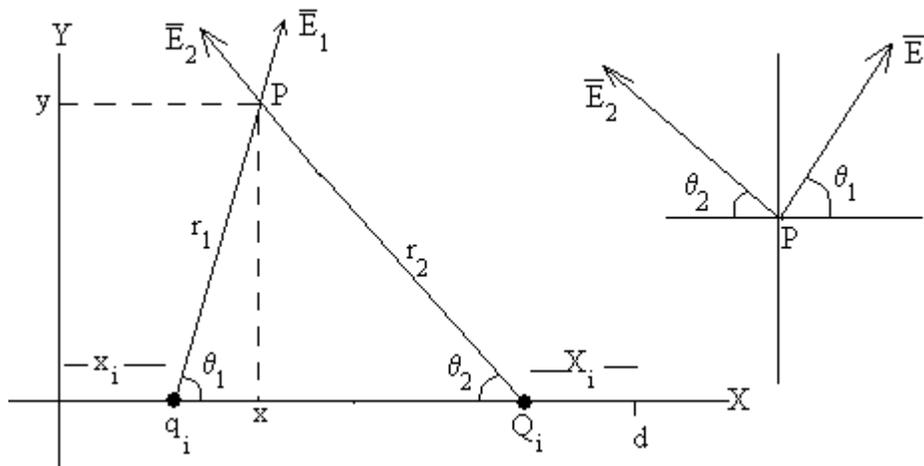
Este resultado es consecuencia de la ley de Gauss: si dibujamos una superficie cerrada que abarque a la esfera pero que esté muy próxima a ésta, el flujo del campo eléctrico a través de esta superficie debe ser la misma, independientemente, de que la carga esté distribuida sobre la esfera conductora o haya sido sustituida por la carga puntual imagen situada en su interior.

Si nos dan una esfera de radio  $R$  con una carga  $Q_s$  sobre ella y su centro se encuentra a una distancia  $d > a$  de la carga puntual  $Q$ , podemos sustituir la esfera por la carga imagen  $q = -QR/d$  a una distancia  $b=R^2/d$  del centro, más una carga  $Q_s - q$  en el centro. La densidad superficial de carga es, entonces,  $\sigma + \sigma'$  donde  $\sigma$  es la distribución no uniforme calculada anteriormente a partir de  $q$  y  $Q$ , y  $\sigma'$  es la distribución uniforme calculada a partir de  $(Q_s - q)$ .

**A2.2 Análisis con dos esferas conductoras y una a potencial cero (sección 4.2).**

**Campo y potencial producido por la sucesión de cargas**

Calculamos el campo y el potencial producido en el punto  $P(x, y)$  por el par de



cargas  $q_i$  situada en el punto  $x_i$  y  $Q_i$  en la posición  $d - X_i$

El campo  $E_1$  producido por la carga  $q_i$  es

$$E_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i}{(x - x_i)^2 + y^2} \tag{A2.2.1}$$

El campo  $E_2$  producido por la carga  $Q_i$  es

$$E_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_i}{(d - x - X_i)^2 + y^2} \tag{A2.2.2}$$

Las componentes del campo total  $\mathbf{E}_i$  son

$$E_{ix} = E_1 \cdot \cos\theta_1 - E_2 \cdot \cos\theta_2, \quad (\text{A2.2.3})$$

$$E_{iy} = E_1 \cdot \text{sen}\theta_1 + E_2 \cdot \text{sen}\theta_2, \quad (\text{A2.2.4})$$

$$E_{ix} = \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0} \frac{x - x_i}{((x - x_i)^2 + y^2)^{3/2}} - \frac{Q_i}{4\pi\epsilon_0} \frac{d - x - X_i}{((d - x - X_i)^2 + y^2)^{3/2}}, \quad (\text{A2.2.5})$$

$$E_{iy} = \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0} \frac{y}{((x - x_i)^2 + y^2)^{3/2}} - \frac{Q_i}{4\pi\epsilon_0} \frac{y}{((d - x - X_i)^2 + y^2)^{3/2}}. \quad (\text{A2.2.6})$$

El potencial  $V_i$  en el punto P debido a las dos cargas es

$$V_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i}{\sqrt{(x - x_i)^2 + y^2}} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_i}{\sqrt{(d - x - X_i)^2 + y^2}}. \quad (\text{A2.2.7})$$

El campo y el potencial total es la suma de todos los campos y potenciales producidos por los pares de cargas dispuestas simétricamente al plano

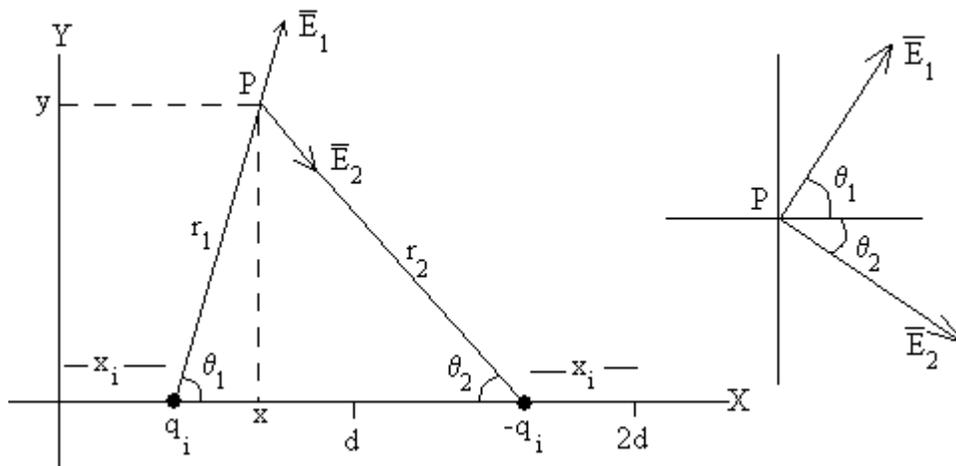
$$E = \sum_0^{\infty} E_i, \quad (\text{A2.2.8})$$

$$V = \sum_0^{\infty} V_i. \quad (\text{A2.2.9})$$

### A2.3 Análisis con una esfera conductora cargada próxima a un plano conductor y a potencial cero (sección 4.3).

#### Campo y potencial producido por el conjunto de cargas puntuales

Calculamos el campo y el potencial producido en el punto P (x, y) por el par de



cargas  $q_i$  situada en el punto  $x_i$  y su simétrica  $-q_i$  en la posición  $2d-x_i$

El módulo del campo  $E_1$  producido por la carga  $q_i$  es

$$E_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i}{(x-x_i)^2 + y^2}. \quad (\text{A2.3.1})$$

El módulo del campo  $E_2$  producido por la carga simétrica  $-q_i$  es

$$E_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_i}{(d-x-X_i)^2 + y^2}. \quad (\text{A2.3.2})$$

Las componentes del campo total  $E_i$  son

$$E_{ix} = E_1 \cdot \cos\theta_1 + E_2 \cdot \cos\theta_2, \quad (\text{A2.3.3})$$

$$E_{iy} = E_1 \cdot \text{sen}\theta_1 - E_2 \cdot \text{sen}\theta_2, \quad (\text{A2.3.4})$$

$$E_{ix} = \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0} \frac{x-x_i}{((x-x_i)^2 + y^2)^{3/2}} - \frac{Q_i}{4\pi\epsilon_0} \frac{d-x-X_i}{((d-x-X_i)^2 + y^2)^{3/2}}, \quad (\text{A2.3.5})$$

$$E_{iy} = \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0} \frac{y}{((x-x_i)^2 + y^2)^{3/2}} - \frac{Q_i}{4\pi\epsilon_0} \frac{y}{((d-x-X_i)^2 + y^2)^{3/2}}. \quad (\text{A2.3.6})$$

El potencial  $V_i$  en el punto P debido a las dos cargas es

$$V_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i}{\sqrt{(x-x_i)^2 + y^2}} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_i}{\sqrt{(d-x-X_i)^2 + y^2}}. \quad (\text{A2.3.7})$$

El campo y el potencial total es la suma de todos los campos y potenciales producidos por los pares de cargas dispuestas simétricamente al plano

$$E = \sum_0^{\infty} E_i, \quad (\text{A2.3.8})$$

$$V = \sum_0^{\infty} V_i. \quad (\text{A2.3.9})$$

## A2.4 Análisis de imágenes en medios dieléctricos (sección 4.4).

**Campo y potencial producido por la superposición de las cargas en dos medios  $\epsilon_1$  y  $\epsilon_2$ .**

Tenemos que

$$\Phi(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_1} \left( \frac{Q}{R_1} + \frac{q_1}{R_2} \right), \quad z \geq 0 \quad (\text{A2.4.1})$$

$$\Phi(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_1} \frac{q_2}{R_1}, \quad z \leq 0 \quad (\text{A2.4.2})$$

donde,

$$R_{1,2} = |R_{1,2}| = |x\hat{x} + (y \pm d)\hat{y}|, \quad (\text{A2.4.3})$$

de donde tenemos el campo:

$$E(r) = E_1(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_1} \left( \frac{QR_1}{R_1^3} + \frac{q_1R_2}{R_2^3} \right), \quad z \geq 0 \quad (\text{A2.4.4})$$

$$E(r) = E_2(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_2} \frac{q_2R_1}{R_1^3}, \quad z \leq 0, \quad (\text{A2.4.5})$$

Las condiciones de contorno nos permiten calcular los valores de las cargas  $q_1$  y  $q_2$ :

$$y = 0 \Rightarrow R_{1,2} = |R_{1,2}| = |x\hat{x} \pm d\hat{y}| \Rightarrow R_{1,2} = R = \sqrt{x^2 + d^2}, \quad (\text{A2.4.6})$$

$$E_{1x} = E_{2x} \Rightarrow \frac{1}{4\pi\epsilon_1} \left( \frac{Qx}{R^3} + \frac{q_1x}{R^3} \right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_2} \frac{q_2x}{R^3} \Rightarrow Q + q_1 = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} q_2, \quad (\text{A2.4.7})$$

$$D_{1x} = D_{2x} \Rightarrow \frac{1}{4\pi} \left( -\frac{Qd}{R^3} + \frac{q_1d}{R^3} \right) = -\frac{1}{4\pi} \frac{q_2d}{R^3} \Rightarrow -Q + q_1 = -q_2, \quad (\text{A2.4.8})$$

resolviendo estas ecuaciones se obtiene:  $q_1 = \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2} Q$  (A2.4.9)

y  $q_2 = \frac{2\epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2} Q.$  (A2.4.10)

## APÉNDICE 3. LA PERMITIVIDAD

En electromagnetismo, la permitividad  $\varepsilon$  es una medida que indica cuanto cambia un medio para absorber energía cuando esta sujeto a un campo eléctrico. Esta definido como la razón de  $\mathbf{D} / \mathbf{E}$ , en donde  $\mathbf{D}$  es el desplazamiento por el medio y  $\mathbf{E}$  es la fuerza del campo eléctrico. En el SI de unidades, el desplazamiento  $\mathbf{D}$  usualmente se da en unidades de coulombs por metro cuadrado  $C/m^2$ , mientras que el campo eléctrico esta dado como volts por metro  $V/m$ . La permitividad esta especificada entonces en faradios por metro  $F/m$ .

### A3.1 Permitividad del vacío

La permitividad del vacío es la razón de  $\mathbf{D} / \mathbf{E}$  en el vacío. Además aparece en la ley de Coulomb como una parte de la constante de fuerza de Coulomb,  $1 / 4\pi\varepsilon_0$ , la cual expresa la atracción entre dos cargas unitarias.

Uno puede definir la permitividad de un medio como una permitividad relativa adimensional,  $\varepsilon_r$ , o constante dieléctrica, normalizada a la permitividad del vacío absoluta,  $\varepsilon_0$ , tal que

$$\varepsilon = \varepsilon_r \varepsilon_0 . \quad (\text{A3.1.1})$$

En donde  $\varepsilon_0 = 8.85419 \times 10^{-12} \text{ F/m}$ .

### A3.2 La permitividad en el medio

En el caso común de un medio isotrópico,  $\mathbf{D}$  y  $\mathbf{E}$  son vectores paralelos y  $\varepsilon$  es un escalar, pero en el caso más general de un medio anisotrópico este no es el caso y  $\varepsilon$  es un tensor de segundo orden (el cual causa birefringencia).

La permitividad  $\varepsilon$  y la permeabilidad magnética  $\mu$  de un medio, juntas determinan la velocidad  $v$  de la radiación electromagnética a través del medio:

$$\varepsilon\mu = \frac{1}{v^2} . \quad (\text{A3.2.1})$$

Y en el vacío esto esta dado por

$$\varepsilon_0\mu_0 = \frac{1}{c^2} , \quad (\text{A3.2.2})$$

en donde  $\varepsilon_0$  es la permitividad en el espacio libre y  $\mu_0$  es la constante magnética o permeabilidad magnética en el espacio libre, igual a  $4\pi \times 10^{-7} \text{ N}\cdot\text{A}^{-2}$ ,  $c$  es la velocidad de la luz en el vacío, 299, 792,485 m/s.

Cuando un campo eléctrico se aplica, fluye una corriente. La corriente total que fluye en un medio real esta formado generalmente de dos partes: una corriente de conducción y una de desplazamiento. La corriente de desplazamiento se puede interpretar como una respuesta elástica la cual un material tiene al aplicarle un campo eléctrico. Conforme el campo eléctrico aumenta la corriente de desplazamiento se almacena en el material y cuando el campo eléctrico se reduce el material libera la corriente de desplazamiento.

### A3.3 Clasificación de materiales

Los comportamientos de los materiales se pueden clasificar de acuerdo a su permitividad. Los materiales cuya permitividad tiene una parte real negativa son considerados metales (en los cuales no existe la propagación de las ondas electromagnéticas), y aquellos con una parte real positiva son los dieléctricos.

Un dieléctrico perfecto es un material que solamente muestra corriente de desplazamiento, almacena y regresa energía eléctrica como si fuera una batería ideal. En el caso de medios con pérdidas (cuando las corrientes de conducción no son despreciables) la densidad de corriente total que fluye es:

$$J_{tot} = J_c + J_d = \sigma E + j\omega\epsilon_0\epsilon_d E = j\omega\epsilon_0\epsilon^* E, \quad (\text{A3.3.1})$$

en donde

$$j = \sqrt{-1}, \quad (\text{A3.3.2})$$

$\sigma$  es la conductividad (responsable por la corriente de conducción) del medio y  $\epsilon_d$  es la permitividad relativa (responsable de la corriente de desplazamiento). Se ve que el tamaño de la corriente de desplazamiento depende de la frecuencia  $\omega$  del campo  $\mathbf{E}$  aplicado; no existe corriente de desplazamiento en un campo constante. En este formalismo la permitividad compleja  $\epsilon^*$  se define como:

$$\epsilon^* = \epsilon_d - j \frac{\sigma}{\epsilon_0\omega}. \quad (\text{A3.3.3})$$

### A3.4 Materiales reales

Para los materiales reales, ambas partes, la real y la imaginaria, de la permitividad son funciones más complicadas de la frecuencia  $\omega$ ; ya que esto no lleva a la dispersión de señales que contienen múltiples frecuencias, tales materiales son llamados dispersivos. Esta dependencia de la frecuencia refleja el hecho de que la polarización de la materia no responde instantáneamente a un campo aplicado porque la respuesta siempre debe ser causal (que viene después del campo aplicado), la función dieléctrica  $\epsilon(\omega)$  debe tener polos solo para  $\omega$  con partes imaginarias positivas, y por lo tanto  $\epsilon(\omega)$  satisface la relaciones Kramers-Kronig.

Estas describen la relación entre las partes real e imaginaria de una cierta clase de funciones complejas.

Sin embargo, en los rangos estrechos de frecuencias que a menudo se estudian en la práctica, las constantes dieléctricas frecuentemente se pueden aproximar como independientes de la frecuencia.

A una frecuencia dada, la parte imaginaria de  $\epsilon$  nos lleva a pérdidas de absorción si es negativa (en la convención de signos para la frecuencia) y ganancia si es positiva. (Más generalmente, uno mira a las partes imaginarias de los eigenvalores del tensor dieléctrico anisotrópico.)

Los dieléctricos dependientes de la frecuencia, por ejemplo el agua, tienen muchas respuestas cambiantes. La electrodinámica clásica de John David Jackson tiene un buen argumento de la dependencia de la frecuencia natural de la permitividad eléctrica compleja, la cual se puede expresar alternativamente como el índice de refracción complejo o índice de refracción  $n(\omega)$  y el índice de absorción  $\alpha(\omega)$ .

En el límite de baja frecuencia, la permitividad compleja es equivalente a la constante de permitividad  $\epsilon_{DC}$ . En el límite de alta frecuencia, la permitividad compleja se refiere comúnmente como  $\epsilon_{\infty}$ . A la frecuencia del plasma y más arriba los dieléctricos se comportan como metales ideales, con el comportamiento de gas electrón.

### A3.5 La constante dieléctrica

En la física, la constante dieléctrica es una propiedad de un aislante. Especifica la permitividad relativa de un material. En donde  $\epsilon$  es la permitividad del material en cuestión, y  $\epsilon_0$  es la permitividad del espacio libre, la constante dieléctrica  $\epsilon_r$  se define como la razón:

$$\epsilon_r = \frac{\epsilon}{\epsilon_0}. \quad (\text{A3.5.1})$$

En el vacío (espacio libre), la permitividad  $\epsilon$  es solo  $\epsilon_0$ , de esta forma la constante dieléctrica es unitaria.

$$\epsilon_r = \frac{\epsilon_0}{\epsilon_0} = 1. \quad (\text{A3.5.2})$$

La constante dieléctrica es una pieza de información esencial para el diseño de capacitores, y en otras circunstancias donde se pueda esperar que un material pueda introducir capacitancia en un circuito. Si un material con una constante dieléctrica alta es puesta en un campo eléctrico, la magnitud de ese campo será reducida mensurablemente dentro del volumen del dieléctrico. Este hecho es

---

explotado comúnmente para incrementar la proporción de los capacitores. Además es crucial para la construcción de las guías de onda.

Los dieléctricos tienen la extraña propiedad de hacer que el espacio de un medio parezca mayor o menor de lo que realmente es. El valor de la constante dieléctrica nos dice que tan menor o mayor es ese espacio. El mismo se muestra en dos formas.

Primero, cuando se pone algún dieléctrico entre dos cargas eléctricas se reduce la fuerza que actúa entre ellas, como si estas se separaran.

Segundo, la constante dieléctrica de un material afecta el movimiento de las señales electromagnéticas (luz, ondas de radio, ondas milimétricas, etc.) a través de un material. Un valor alto de la constante dieléctrica hace que la distancia en un medio aparente ser mayor. Esto significa que la velocidad de la luz viaja más lentamente. Además las ondas se comprimen y por lo tanto se comportan como si la señal tuviera una longitud de onda menor.

Para las ondas electromagnéticas, como las fuerzas entre cargas eléctricas, el dieléctrico deforma el espacio que lo hace verse de diferente tamaño.

La estructura y la polaridad de la molécula de agua hacen que esta sea un disolvente capaz de reducir las fuerzas de atracción que existen entre partículas de cargas opuestas (o de reducir la repulsión entre partículas de cargas iguales). La constante dieléctrica no tiene unidades, pero es una medida de esa reducción y se define como:

Constante dieléctrica = (fuerza entre dos cargas en el vacío) / (fuerza entre dos cargas en el medio)

La constante dieléctrica es mayor de 1, si el medio reduce la fuerza entre las cargas comparada con el vacío. En el agua, la constante dieléctrica es de 78.5, una de las más elevadas de todas sustancias puras. Esa capacidad del agua para reducir las fuerzas entre partículas cargadas es un factor primordial como solvente de muchos compuestos iónicos.

Una propiedad importante de un dieléctrico es su habilidad para soportar un campo electrostático mientras disipa mínima energía en forma de calor. Entre menor la pérdida dieléctrica (porción pérdida de energía en forma de calor), más efectivo es el material dieléctrico. Otra consideración es la constante dieléctrica, hasta que punto una sustancia concentra las líneas de flujo electrostático. Las sustancias con una constante dieléctrica baja incluyen un vacío perfecto, aire seco, y más puro, los gases secos como el helio y el nitrógeno. Materiales con constantes dieléctricas moderadas incluyen a las cerámicas, agua destilada, papel, mica, polietileno, y vidrio. Los óxidos de metal, en general, tienen constantes dieléctricas grandes.