



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO**  
**PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN INGENIERÍA**  
**INGENIERÍA MECÁNICA – TERMOFLUIDOS**

**ANÁLISIS TEÓRICO DEL CONTROL TÉRMICO PARA UN SISTEMA DE  
REFRIGERACIÓN POR COMPRESIÓN MECÁNICA CON BIÓXIDO DE CARBONO EN  
ESTADO SUBCRÍTICO Y SUPERCRÍTICO**

**TESIS**  
**QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:**  
**DOCTOR EN INGENIERÍA**

**PRESENTA:**  
**MARTIN SALAZAR PEREYRA**

**TUTOR PRINCIPAL**  
**DR. FEDERICO MÉNDEZ LAVIELLE, FACULTAD DE INGENIERÍA, UNAM**  
**COMITÉ TUTOR**  
**DR. JAVIER FRANCISCO SOLORIO ORDAZ, FACULTAD DE INGENIERÍA, UNAM**  
**DR. ROGELIO GONZÁLEZ OROPEZA, FACULTAD DE INGENIERÍA, UNAM**  
**DR. JAVIER EDUARDO AGUILLON MARTÍNEZ, INSTITUTO DE INGENIERÍA, UNAM**

**MÉXICO, D. F. NOVIEMBRE 2013**

**JURADO ASIGNADO:**

Presidente: DR. JAIME CERVANTES DE GORTARI

Secretario: DR. FRANCISCO JAVIER SOLORIO ORDAZ

Vocal: DR. FEDERICO MENDEZ LAVIELLE

1<sup>er</sup>. Suplente: DR. ROGELIO GONZALEZ OROPEZA

2<sup>d</sup>o. Suplente: DR. JAVIER EDUARDO AGUILLON

Lugar o lugares donde se realizó la tesis: FACULTAD DE INGENIERIA DE LA UNAM

**TUTOR DE TESIS:**

DR. FEDERICO MENDEZ LAVIELLE

## RESUMEN

En este trabajo se desarrolla el modelo dinámico para realizar el control térmico “Tipo Lumped” de un sistema de refrigeración por compresión de vapor que opera en régimen subcrítico y supercrítico con bióxido de carbono. El modelo se plantea a partir de un balance de energía para un sistema abierto y debe de establecer una dependencia operacional con respecto a las temperaturas en el evaporador y el condensador, considerando la transferencia de calor y el comportamiento de las propiedades termofísicas del CO<sub>2</sub>: coeficiente global de transferencia de calor, la capacidad calorífica, densidad, entalpía de evaporización y la eficiencia volumétrica, cuando el sistema de refrigeración opera mediante los ciclos subcrítico y supercrítico. Los modelos matemáticos que describen el comportamiento dinámico del sistema de refrigeración son ecuaciones diferenciales no lineales de primer orden, las cuales son base para la aplicación del control térmico. Con la finalidad de establecer un comparativo de la no linealidad del sistema, primero se establecen modelos lineales a los cuales se les aplica la teoría de control clásico PID utilizando el método de asignación de polos y finalmente se utiliza la respuesta del sistema no lineal para aplicarle una compensación PID que permita obtener un menor tiempo de asentamiento de la respuesta de la temperatura en los intercambiadores de calor. Al comparar la respuesta del control lineal y del no lineal se tiene que al incluir los términos no lineales, el tiempo de asentamiento se incrementa en un 20%.

## **ABSTRACT**

In the present work, we have developed a theoretical model for analyzing the closed-loop thermal control of a subcritical and transcritical refrigeration cycle, which operates with CO<sub>2</sub> as working fluid. The physical parts of the cycle are composed, as usual, by a compressor, a condenser for subcritical cycle and gas cooler for transcritical cycle, a throttling valve and an evaporator. We propose a lumped energy balance model to derive a set of non-linear first order differential equations for the condenser, gas cooler and the evaporator, which are the heat exchangers where the output temperature controllability for each device is tested. The other components, i.e., the compressor and the throttling valve are modeled by simplified algebraic relationships base on simple considerations. The resulting governing equations are dimensionalized in order to reduce the number of physical parameters and are subjected to two control's criteria: first, we reduce the governing equations to a linear system and the well-known Proportional-Integral-Derivative (PID) control technique is used to find the best scenarios of control; second, the non-linear system is analyzed by using and a commercial numerical code to improve the general characteristics of the control. Comparing both methods, we conclude that a non linear controller is a more versatile technique for obtaining an adjustable control. In addition and even when it is easier to control the evaporator, the stable operation of this system can be drastically modified by the thermal performance of the condenser and gas cooler.

## **ÍNDICE GENERAL**

<b>ÍNDICE DE FIGURAS</b>	6
<b>ÍNDICE DE TABLAS</b>	10
<b>NOMENCLATURA</b>	12

### **CAPITULO I**

#### **MARCO TEORICO**

1.1 Antecedentes	14
1.2 Refrigerantes	16
1.3 Refrigerante CO <sub>2</sub>	20
1.4 Sistema de Refrigeración con CO <sub>2</sub>	21
1.5 Comportamiento del Ciclo de Refrigeración con CO <sub>2</sub>	23
1.6 Propiedades Termofísicas del Bióxido de Carbono	32
1.7 Conducción en estado transitorio	37

### **CAPITULO II**

#### **MODELO DINÁMICO DEL SISTEMA DE REFRIGERACIÓN**

2.1 Modelo Dinámico del sistema de refrigeración	40
2.2 Evaporador: Régimen Subcrítico y Supercrítico	41
2.3 Condensador: Regimen Subcrítico	46
2.4 Flujo en el Compresor	51

2.5 Enfriador: Ciclo Supercrítico	53
2.6 Parámetros de Simulación del Sistema de Refrigeración Subcrítico y Supercrítico	61

### **CAPITULO III**

#### **CONTROL TÉRMICO**

3.1 Control Térmico	65
3.2 Funciones de Transferencia en el dominio de la Variable s	65
3.2.1. Evaporador	66
3.2.2 Condensador	67
3.2.3 Enfriador	69
3.3 Control Lineal PID	71
3.4 Control no lineal	75
3.5 Resultados Control Lineal	79
3.5.1 Evaporador: Estado subcrítico y supercrítico	80
3.5.2 Condensador: Estado Subcrítico	83
3.5.3 Enfriador: Estado Supercrítico	87
3.6 Resultados Control no Lineal	91
3.6.1 Evaporador: Estado Subcrítico y Supercrítico	92
3.6.2 Condensador: Estado Subcrítico	93
3.6.3 Enfriador: Estado Supercrítico	99

<b>CONCLUSIONES</b>	105
---------------------	-----

<b>REFERENCIAS</b>	107
--------------------	-----

## INDICE DE FIGURAS

Figura 1.1. Degradación de la capa de ozono estratosférico por uso de CFCs.	17
Figura 1.2. Potencial de reducción del ozono y del calentamiento global.	19
Figura 1.3. Diagrama del sistema de refrigeración por compresión de vapor.	21
Figura 1.4. Comportamiento de la temperatura y presión con respecto al tiempo de operación [1].	23
Figura 1.5. Relación de la presión y temperatura de saturación del CO <sub>2</sub> y del HFC-134a.	24
Figura 1.6. Diagrama presión - entalpía para el CO <sub>2</sub> .	25
Figura 1.7. Presión entalpía del ciclo de refrigeración a condiciones subcríticas con CO <sub>2</sub> y HF-134a.	26
Figura 1.8. Ciclo de refrigeración utilizando CO <sub>2</sub> a condiciones supercríticas.	26
Figura 1.9. Presión entalpía del ciclo de refrigeración a condiciones supercríticas con CO <sub>2</sub> y subcríticas con HF-134a.	27
Figura 1.10. Presión volumen del ciclo de refrigeración con CO <sub>2</sub> a condiciones supercríticas: a) T <sub>enf</sub> =35°C y b) T <sub>enf</sub> =40°C.	28
Figura 1.11. Potencia suministrada al compresor en función de la temperatura y presión del enfriador a condiciones supercríticas.	30
Figura 1.12. COP en función de la temperatura y presión del enfriador a condiciones supercríticas.	30
Figura 1.13. Costos de operación del sistema de refrigeración para una carga térmica de 1 TR y una temperatura en el evaporador de -10°C.	31

Figura 1.14. Calor específico del CO <sub>2</sub> en función de la temperatura a una presión de 100 bar.	33
Figura 1.15. Densidad del CO <sub>2</sub> en función de la temperatura a una presión de 100 bar.	33
Figura 1.16. Coeficiente global de transferencia de calor del CO <sub>2</sub> en función de la temperatura a una presión de 100 bar.	34
Figura 1.17. Coeficiente global de transferencia de calor del CO <sub>2</sub> en función de la temperatura de saturación.	35
Figura 1.18. Eficiencia volumétrica del compresor en función de la temperatura de admisión para el CO <sub>2</sub> .	36
Figura 1.19. Tipos de serpentín a) Circular, b) Rectangular y c) Ovalado.	38
Figura 1.20. Serpentín del intercambiador de calor.	38
Figura 2.1. Diagrama esquemático del ciclo de refrigeración convencional.	41
Figura 2.2. Diagrama esquemático del evaporador.	42
Figura 2.3. Diagrama esquemático del condensador	46
Figura 2.4. Diagrama esquemático del enfriador.	54
Figura 3.1. Diagrama a bloques de la planta en Simulink de Matlab.	72
Figura 3.2. Diagrama la planta con control PID del evaporador.	77
Figura 3.3. Diagrama del control PID del condensador.	78
Figura 3.4. Diagrama de la planta con control PID para enfriador.	79
Figura 3.5. Respuesta del control PID para la temperatura del evaporador a diferentes constantes $k_p$ , $k_i$ y $k_d$ .	81
Figura 3.6. Respuesta del control PID para la temperatura del evaporador a diferente calidad del CO <sub>2</sub> con constantes $k_p=25.47$ , $k_i=8.49$ y $k_d=17.02$ .	82

Figura 3.7. Respuesta del control PID para la temperatura del evaporador a diferente parámetros $\alpha$ con constantes $k_p=25.47$ , $k_i=8.49$ y $k_d=17.02$ .	83
Figura 3.8. Respuesta del control PID para la temperatura del condensador a diferentes constantes $k_p$ , $k_i$ y $k_d$ .	84
Figura 3.9. Respuesta del control PID para la temperatura del condensador a diferente calidad del $\text{CO}_2$ con constantes $k_p=26.64$ , $k_i=8.24$ y $k_d=5.91$ .	85
Figura 3.10. Respuesta del control PID para la temperatura del condensador a diferentes parámetros $\alpha$ del $\text{CO}_2$ con constantes $k_p=26.64$ , $k_i=8.24$ y $k_d=5.91$ .	86
Figura 3.11. Respuesta del control PID para la temperatura del condensador a diferentes parámetros $\beta_{x1}$ del $\text{CO}_2$ con constantes $k_p=26.64$ , $k_i=8.24$ y $k_d=5.91$ .	87
Figura 3.12. Respuesta del control PID para la temperatura del enfriador a diferentes constantes $k_p$ , $k_i$ y $k_d$ .	88
Figura 3.13. Respuesta del control PID para la temperatura del enfriador a diferente calidad del $\text{CO}_2$ con constantes $k_p=30.87$ , $k_i=10.29$ y $k_d=23.57$ .	89
Figura 3.14. Respuesta del control PID para la temperatura del enfriador a diferente parámetros $\alpha$ con constantes $k_p=30.87$ , $k_i=10.29$ y $k_d=23.57$ .	90
Figura 3.15. Respuesta del control PID para la temperatura del enfriador a diferente parámetros $\beta_{x1}$ con constantes $k_p=30.87$ , $k_i=10.29$ y $k_d=23.57$ .	91
Figura 3.16. Respuesta del control PID no lineal para la temperatura del evaporador a diferentes constantes $k_p$ , $k_i$ y $k_d$ .	93
Figura 3.17. Respuesta del control PID no lineal para la temperatura del condensador con constantes $k_p=26.64$ , $k_i=8.24$ y $k_d=5.91$ .	94

Figura 3.18. Respuesta del control PID no lineal para la temperatura del condensador con diferentes constantes $k_d$ .	95
Figura 3.19. Respuesta del control PID no lineal para la temperatura del condensador con compensación PID del enfriador.	96
Figura 3.20. Respuesta del control PID no lineal para la temperatura del condensador con $4k_d$ para diferentes $\beta_{e1}$ .	97
Figura 3.21. Respuesta del control PID no lineal para la temperatura del condensador con compensación PID del enfriador para diferentes $\beta_{e1}$ .	97
Figura 3.22. Respuesta del control PID no lineal para la temperatura del condensador con $3k_d$ para diferentes $\beta_{e1}$ .	98
Figura 3.23. Respuesta del control PID no lineal para la temperatura del condensador con $k_d/3$ para diferentes $\beta_{e1}$ .	99
Figura 3.24. Respuesta del control PID no lineal para la temperatura del enfriador a diferentes constantes $k_p$ , $k_i$ y $k_d$ .	100
Figura 3.25. Respuesta del control PID no lineal para la temperatura del enfriador para valores fraccionarios de $k_p=30.87$ , $k_i=10.29$ y $k_d=23.57$ .	101
Figura 3.26. Respuesta del control PID no lineal para la temperatura del enfriador con $k_p=10.29$ , $k_i=3.43$ y $k_d=7.86$ .	102
Figura 3.27. Respuesta del control PID no lineal para la temperatura del enfriador con $k_p=5.14$ , $k_i=1.72$ y $k_d=3.92$ .	103

## INDICE DE TABLAS

Tabla 1.1. Clasificación de los refrigerantes.	18
Tabla 1.2. CO <sub>2</sub> sustituto aceptable para aplicaciones comerciales, EPA 2009.	19
Tabla 1.3. CO <sub>2</sub> sustituto aceptable para aplicaciones no comerciales, EPA 2009.	19
Tabla 1.4. Correlaciones de los parámetros para el CO <sub>2</sub> .	36
Tabla 2.1. Tabla de parámetros del sistema de refrigeración.	62
Tabla 2.2. Estados termodinámicos del sistema de refrigeración a condiciones subcríticas.	62
Tabla 2.3. Estados termodinámicos del sistema de refrigeración a condiciones supercríticas.	63
Tabla 2.4. Parámetros adimensionales del sistema de refrigeración.	64
Tabla 3.1. Constantes de control PID para el sistema de refrigeración con CO <sub>2</sub> a condiciones subcríticas.	75
Tabla 3.2. Constantes de control PID para el sistema de refrigeración con CO <sub>2</sub> a condiciones supercríticas.	75

## **OBJETIVO GENERAL**

Realizar teóricamente el control térmico de un sistema de refrigeración por compresión mecánica utilizando como fluido de trabajo al CO<sub>2</sub> operando a condiciones subcríticas y supercríticas.

## **OBJETIVOS PARTICULARES**

- Obtener el modelo dinámico del sistema de refrigeración por compresión de vapor utilizando CO<sub>2</sub> cuando se opera en régimen subcrítico y supercrítico considerando las propiedades termofísicas del fluido refrigerante.
- Aplicar la ley de control PID al modelo dinámico en su forma lineal y no lineal para controlar las temperaturas del condensador o enfriador y evaporador, obteniendo así las constantes de control PID con un modelo linealizado y utilizando el método de asignación de polos.
- Simular los modelos matemáticos para el control térmico de forma lineal y no lineal y obtener la respuesta del sistema utilizando Simulink de Matlab.

## Nomenclatura

$A$	área; [m <sup>2</sup> ],
$c_p$	capacidad calorífica; [J/kg K].
COP	coeficiente de operación; [-]
COE	costos exergoeconomicos; [\$/hr],
$\dot{E}$	flujo de energía; [kW],
$k$	índice isentrópico de compresión del CO <sub>2</sub> ; [-],
$k_d$	constante de derivación; [-]
$k_i$	constante de integración; [-],
$k_p$	constante de proporcionalidad; [-]
$h$	entalpía específica; [kJ/kg],
$h_{fg}$	entalpía específica de cambio de fase; [kJ/kg],
$m$	masa; [kg],
$\dot{m}$	flujo; [kg/s],
$N$	número de revoluciones; [rpm],
$P_c$	Potencia suministrada la compresor, [kW]
$\dot{Q}_D$	Flujo de calor de desecho; [W],
$\dot{Q}_R$	carga térmica; [W],
$R$	constante de los gases ideales; [J/kg K],
$s$	entropía específica, [kJ/kg K],
$T$	temperatura; [K],
$t$	tiempo; [s],

U	Coeficiente global de transferencia de calor; [W/m <sup>2</sup> K],
V	volumen; [m <sup>3</sup> ],
v	volumen específico; [m <sup>3</sup> /kg],
x	calidad del vapor; [-],
Z	factor de compresibilidad; [-],

### **Simbolos**

$\rho$	densidad; [kg/m <sup>3</sup> ],
$\pi$	relación de presiones; [-],
$\eta_v$	eficiencia volumétrica; [-],
$\theta$	temperatura adimensional; [-],
$\tau$	tiempo adimensional; [-].

### **Abreviaturas**

Cond	Condensador,
E	Evaporador,
enf	enfriador,
ER	espacio a refrigerar,
R	refrigeración en el evaporador.

# CAPÍTULO I

## MARCO TEORICO

### 1.1 Antecedentes

En México, la problemática que representa el área de la refrigeración sólo se limita a resolver los problemas de mantenimiento y reparación de equipos, olvidándose del alto consumo de energía de los compresores, de aquí la importancia de este tipo de estudios enfocados al área del uso eficiente de energía y desarrollo sustentable.

Las condiciones tecnológicas y ambientales determinan e influyen en gran medida la operación de los sistemas de refrigeración. La temperatura en el condensador se encuentra limitada por las condiciones ambientales y en el evaporador por la temperatura requerida en la cámara fría. Asimismo, la temperatura en el condensador determina la presión de descarga del compresor en el régimen subcrítico. A condiciones supercríticas con bióxido de carbono, CO<sub>2</sub>, para la temperatura de enfriamiento se debe de elegir una presión de descarga del compresor, donde se obtenga el mejor coeficiente de operación, COP. Sin embargo, en los sistemas de refrigeración, las condiciones de operación siempre oscilan, generando un mayor costo de mantenimiento y de consumo de energía [1, 2, 3]. Por consiguiente, estabilizar las temperaturas en el condensador y evaporador puede mejorar el desempeño del sistema.

En los procesos industriales donde se requiere refrigerar, enfriar o acondicionar, generalmente son los sistemas que realizan estas tareas los que más consumen energía, lo que dan la pauta para realizar estudios paramétricos y establecer el control térmico que permita manipular y mantener constante la temperatura de los intercambiadores de calor, que a su vez reduzca el suministro de potencia.

La energía hoy resulta hasta 1100% más cara que en el año 1995, debido a diversos factores, como son el aumento de costo de los combustibles fósiles, el incremento de la temperatura ambiente, el tiempo en operación de los sistemas, etc. Por tal motivo, disminuir los consumos de energía en las empresas e industrias es un reto que tiene la ingeniería, y las tres áreas principales en donde se debe mejorar es en: 1) motores eléctricos, 2) centro de datos y 3) aire acondicionado y refrigeración. El área del aire acondicionado y refrigeración puede representar entre el 9 al 50% del consumo total de energía dependiendo de los requerimientos del proceso o servicio. Por tal motivo, resulta de interés analizar los sistemas y componentes que conforman una instalación frigorífica, con la finalidad de establecer el control térmico que permita manipular y mantener constante la temperatura de los intercambiadores de calor, que a su vez reduzca el suministro de potencia en el sistema de refrigeración.

Asimismo, el uso alterno de sustancias refrigerantes naturales es un desafío para el área de la ingeniería, sobre todo en la implementación de sistemas de refrigeración que funcionen con CO<sub>2</sub>. Las investigaciones sobre CO<sub>2</sub> son orientadas a los sistemas de aire acondicionado automotriz, bombas de calor y sistemas de refrigeración a baja carga térmica, con la finalidad de impulsar la sustentabilidad y desarrollo tecnológico de estos sistemas [4, 5, 6, 7, 8, 9].

## 1.2 Refrigerantes

El éter-etil, (R-610) es el primer refrigerante comercial que fue utilizado en las máquinas de refrigeración. El primer refrigerador es diseñado en 1834 por Jacob Perkins y utilizaba el R-610; sin embargo, era explosivo y requería de un excesivo volumen en el compresor, por consiguiente, se utilizan otros refrigerantes de origen natural como el amoníaco (R-717), bióxido de carbono (R-744), cloroetano (R-160), isobutano (R-600a), clorometano (R-40), cloruro de metileno (R-30), dióxido de azufre (R-764) y el aire (R-729). Tres de estos refrigerantes fueron muy populares en su uso, el amoníaco y el dióxido de azufre para refrigeradores y otras pequeñas unidades frigoríficas y el dióxido de carbono que se utilizaba preferentemente para la refrigeración en buques marítimos [4].

En 1930, los sistemas de refrigeración y aire acondicionado tienen un mayor impulso comercial debido a la introducción de los refrigerantes clorofluorocarbonados (CFCs) que desplazan a los refrigerantes naturales. El principal argumento para utilizar los CFCs, fue que su uso era completamente seguro y no dañino con el medio ambiente, aunque con el tiempo se confirma que ambas aseveraciones eran falsas, ya que son los principales causantes de la degradación de la capa de ozono en la estratosfera y del calentamiento global [5, 6]. Los compuestos CFC en presencia de luz ultravioleta reaccionan, dejando libre uno de los átomos de cloro que a su vez reacciona con un átomo de oxígeno del ozono estratosférico, Figura 1.1.

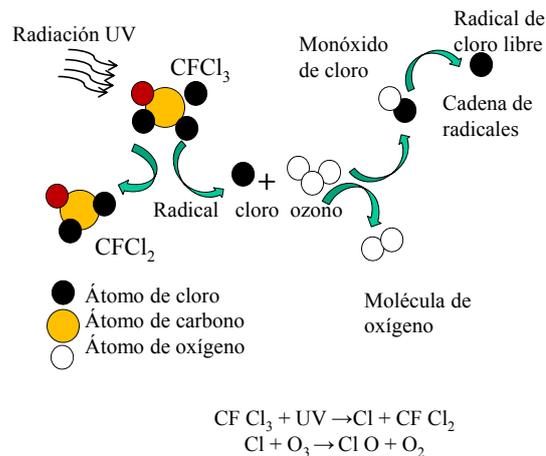


Figura 1.1. Degradación de la capa de ozono estratosférico por uso de CFCs.

Se considera que el efecto de los CFCs en el cambio climático es de aproximadamente del 15 - 20% en comparación al 50% atribuible al CO<sub>2</sub>; aunque es interesante analizar que es más fácil minimizar el cambio climático global, realizando una reducción o prohibición de la utilización de los CFCs que reducir el consumo de combustibles fósiles.

En 1984, 24 naciones pertenecientes a la Comunidad Económica Europea firman el protocolo de Montreal que regula la producción y comercio de las sustancias dañinas para la capa de ozono, entre estas, los CFCs o comúnmente conocidos como Freones. Este hecho es histórico en la refrigeración, ya que deben de ser sustituidos los CFCs y aparecen los sustitutos hidroclorofluorocarbonados (HCFCs) y posteriormente los hidrofluorocarbonados (HFCs), etc. [7, 8]. En la Tabla 1.1 se presenta la clasificación de los refrigerantes y el listado de los más usados en la refrigeración y aire acondicionado.

Tabla 1.1. Clasificación de los refrigerantes.

<b>Clasificación</b>	<b>Refrigerantes</b>	<b>Usos</b>
<b>Halocarbonados (Freones) Cl, F, Br.</b>	CFC-11 o R-11, CFC-12 o R-12, CFC-22 o R-22, CFC-113 o R-113, CFC-114 o R-114, CFC-115 o R-115	Refrigeración y aire acondicionado
	Metano, etano, propano, ciclopropano, butano, ciclopentano,	Refrigeración
<b>Hidrocarbonados C, H.</b>	Hidrobromofluorocarbonos (HBFCs),	Refrigeración
	Hidroclorocarbonos (HCFCs),	Refrigeración y aire acondicionado
	Hidrofluorocarbonos (HFCs),	Refrigeración y aire acondicionado
	CH <sub>3</sub> Br, CH <sub>3</sub> CCl <sub>3</sub>	Refrigeración
<b>Compuestos Inorgánicos</b>	Amoníaco (R-717), Bióxido de carbono (R-744), Aire (R-729)	Refrigeración y aire acondicionado (R-744), Refrigeración (R-717 y R-729)
<b>Mezclas Azeotrópicas</b>	R-502 ( 48.8% de R-22 + 51.2% de R-115), R-500 ( 73.8% de R-12 + 26.2% de R-152a)	Refrigeración

En la Figura 1.2 se muestra el potencial de la reducción de la capa de ozono (ODP por sus siglas en inglés) y el potencial de calentamiento global (GWP por sus siglas en inglés). El ODP se cuantifica en relación al efecto que produce el R-11; es decir, se asigna el valor de 1 para el R-11, así mismo, se asigna para el GWP el valor de 1 por el efecto que genera el CO<sub>2</sub>. Por tal motivo, para el año 1993, resurge la idea de regresar a la utilización de los refrigerantes naturales, principalmente el amoníaco, propano y CO<sub>2</sub>, propuesta finalmente aceptada en la Cumbre de Copenhague en el 2009.

En las Tablas 1.2 y 1.3 se presenta al CO<sub>2</sub> como refrigerante sustituto y sus posibles aplicaciones, bajo la evaluación del Programa de Nuevas Políticas Alternativas Significantes (SNAP) de la Agencia de protección ambiental (EPA en sus siglas en inglés) [10, 14].

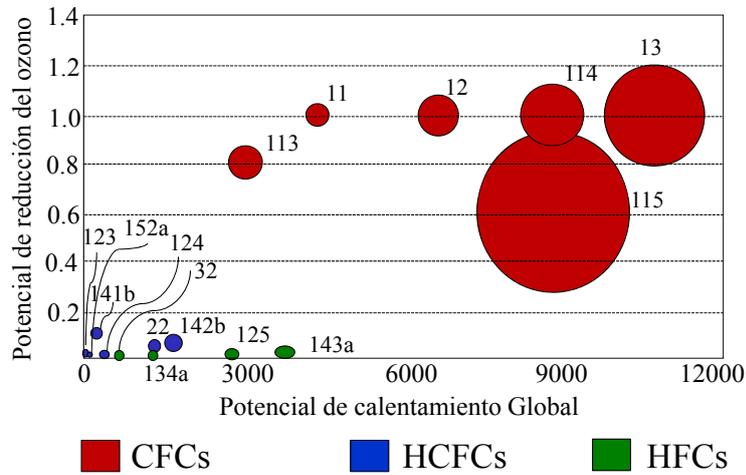


Figura 1.2. Potencial de reducción del ozono y del calentamiento global.

Tabla 1.2. CO<sub>2</sub> sustituto aceptable para aplicaciones comerciales, EPA 2009.

Sustituto	Reemplaza	Aplicaciones
CO <sub>2</sub>	11, 12, 13, 113, 114, 115, 13B1, 502, 503	Almacenes frigoríficos, cámaras frigoríficas de transporte, refrigeración para venta de alimentos, máquinas de hielo, máquinas expendedoras, enfriadores, refrigeración a bajas temperaturas (criogenia).

Tabla 1.3. CO<sub>2</sub> sustituto aceptable para aplicaciones no comerciales, EPA 2009.

Sustituto	Reemplaza	Aplicaciones
CO <sub>2</sub>	12, 13, 13B1, 502, 503	Refrigeración para procesos industriales y refrigeradores domésticos.

### 1.3 Refrigerante CO<sub>2</sub>

El bióxido de carbono, CO<sub>2</sub> como refrigerante se empezó a usar desde el siglo XIX en instalaciones frigoríficas de transporte de productos, ya que el amoníaco se utilizaba más en instalaciones estacionarias, pero el CO<sub>2</sub> fue rápidamente desplazado de sus aplicaciones por el Freón 12, una de las principales razones fue la falla en el diseño de los compresores para el uso del CO<sub>2</sub>, ya que se requerían más compactos y de mayor velocidad. Sin embargo, en las últimas décadas se ha considerado de nuevo como alternativa de sustitución de algunos refrigerantes comerciales ya sea en ciclo simple o en cascada con otro refrigerante [13, 14].

Algunas de las ventajas del CO<sub>2</sub> como refrigerantes son las siguientes:

- No es inflamable, no explosivo y no tóxico.
- Bajo costo y buena disponibilidad.
- Tiene bajo ODP y 1 en GWP.
- Estabilidad térmica.
- Reducción de la relación de presiones comparada con los refrigerantes convencionales [13].
- Completa compatibilidad con los aceites comunes de lubricación y con los materiales de construcción del sistema de refrigeración.
- Calor específico y coeficiente global de transferencia de calor con valores altos, en general tiene excelentes propiedades termodinámicas y de transporte, es decir, todas las propiedades deseables para un refrigerante [10].
- No presenta efectos de corrosión en instalaciones de tuberías de acero inoxidable [11, 12].

Técnicamente el  $\text{CO}_2$  tiene una desventaja como refrigerante y este es, el bajo punto crítico,  $31^\circ\text{C}$ . Desde el punto de vista de operación esta es una gran desventaja con respecto a los fluidos refrigerantes convencionales, debido a que el régimen de operación en la mayoría de los casos será supercrítico. Así mismo, además de la complejidad de utilizar el  $\text{CO}_2$ , se tiene inherentemente la operación misma del sistema de refrigeración.

#### 1.4 Sistema de Refrigeración con $\text{CO}_2$

La función principal del sistema de refrigeración es mantener la temperatura del espacio a refrigerar o cámara frigorífica a las condiciones requeridas para una determinada carga térmica; sin embargo, esta depende de las condiciones de las temperaturas del evaporador y condensador. Ambas temperaturas funcionalmente tienen una dependencia operacional; es decir, como máquina térmica dependen de los valores de la temperatura inferior y superior. En la Figura 1.3 se muestra el diagrama del sistema de refrigeración por compresión de vapor.

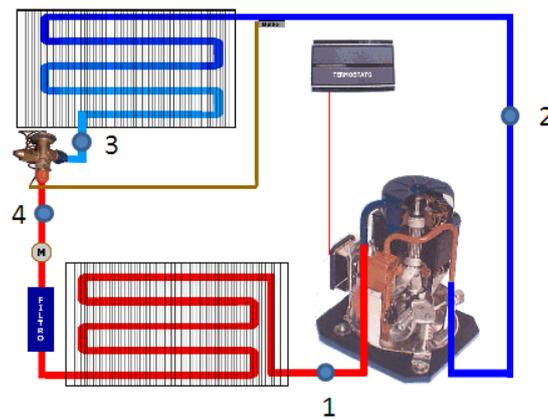
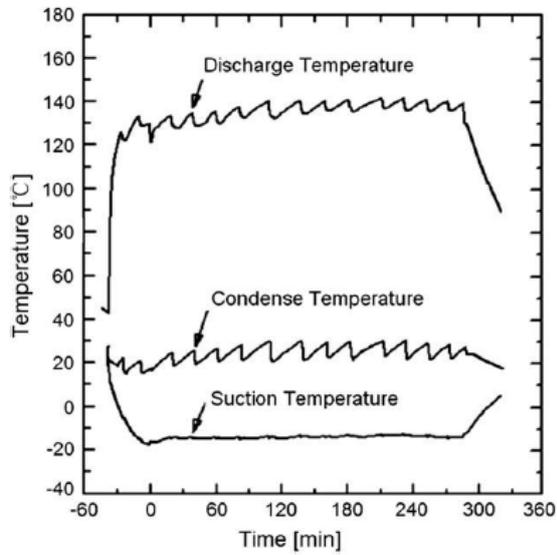


Figura 1.3. Diagrama del sistema de refrigeración por compresión de vapor.

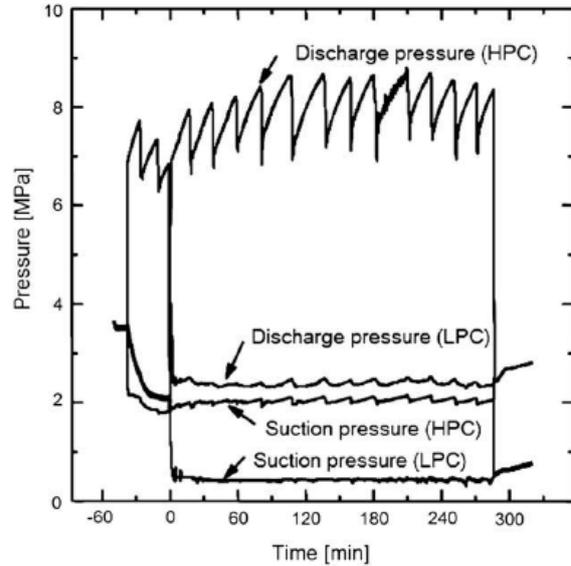
Los refrigeradores comerciales generalmente operan con sistemas de control de temperatura tipo On–Off, que sólo funcionan bajo el principio de mantener en un rango de operación la temperatura, aunque esta se encuentre oscilando entre un intervalo superior e inferior. No obstante, estas variaciones en la temperatura pueden provocar consumos excesivos de energía, además de generar daños estructurales y reducir el tiempo de vida útil.

Investigaciones recientes sobre la utilización del CO<sub>2</sub> y otros refrigerantes, se enfocan al análisis termodinámico del ciclo, que establecen el comportamiento teórico del coeficiente de operación, flujos másicos, etc. [16, 17, 17, 18, 19]; sin embargo, son mínimas las investigaciones que establecen el comportamiento termofísico de las propiedades del CO<sub>2</sub> y del comportamiento local de la transferencia de calor y en conjunto en el control térmico.

Hiroshi Yamaguchi presenta un sistema de refrigeración en cascada de dos etapas, que funciona con CO<sub>2</sub>. Uno de sus objetivos es monitorear las condiciones de temperatura y presión en las zonas de salida y entrada del evaporador, condensador y compresor, para establecer la variación del coeficiente de operación al variar las cargas térmicas en el evaporador de baja presión. El valor del COP es influenciado en gran medida por la temperatura de condensación correspondiente a una operación en estado subcrítico [1]. En la Figura 1.4 se muestra la sensibilidad de la temperatura y presión en la operación del sistema de refrigeración, debido a que se presentan oscilaciones en la presión en el rango de  $\pm 1$  MPa y  $\pm 6^\circ\text{C}$  en la temperatura en el condensador, lo que representa una gran variación en el suministro de potencia al compresor. A condiciones subcríticas las variaciones de la temperatura en el condensador afectan inherentemente a la presión, debido a que en esta región es de vapor saturado.



a)



b)

Figura 1.4. Comportamiento de la temperatura y presión con respecto al tiempo de operación [1].

En la Figura 1.5 se muestra que para el CO<sub>2</sub>, al variar la temperatura de saturación en  $\pm 6$  K, la presión cambia en forma proporcional de 7.5 a 10 bar, lo que coincide con los resultados de Hiroshi Yamagushi, *esto significa que al no controlar de forma adecuada la temperatura en condensador, la presión se afectará por la relación existente entre las condiciones de saturación.* Esta variación de la temperatura se atenúa, si el fluido de trabajo es el HFC-134a, ya que al considerar el mismo cambio de la temperatura, la presión se vería afectada en un cambio de 1.0 a 1.2 bar.

### 1.5 Comportamiento del Ciclo de Refrigeración con CO<sub>2</sub>

El comportamiento del sistema de refrigeración depende de las características termofísicas del fluido de trabajo, estas son las propiedades de termodinámicas: temperatura, presión, densidad,

entalpía de cambio de fase; térmicas: capacidad calorífica a presión constante, coeficiente global de transferencias de calor, etc.

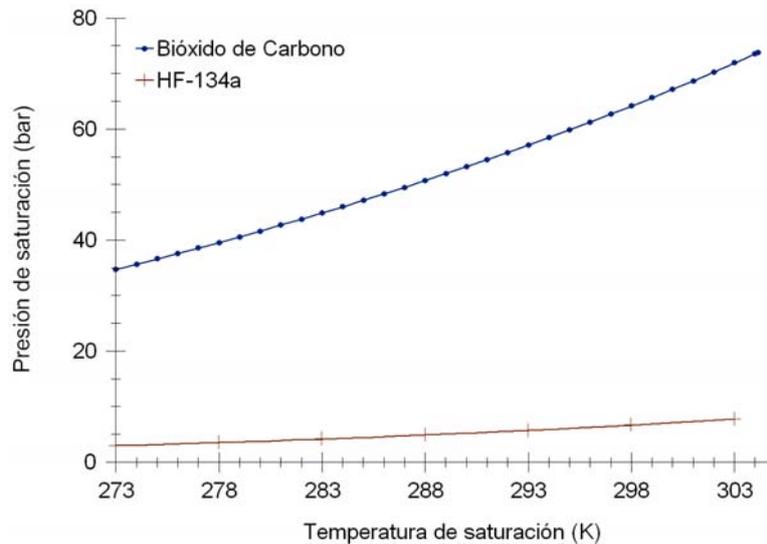


Figura 1.5. Relación de la presión y temperatura de saturación del CO<sub>2</sub> y del HFC-134a.

La Figura 1.6 muestra las fases termodinámicas del CO<sub>2</sub>. El punto crítico se presenta a la presión y temperatura de 73.773 bar y 31°C. El área delimitada a la derecha por la isobara e isoterma crítica se denomina zona supercrítica y a la izquierda se establece la fase transcítica [8]. Para los sistemas de refrigeración por compresión mecánica, la temperatura en el condensador se encuentra acotada por la temperatura ambiente, es decir, la  $T_{\text{cond}} = T_{\text{amb}} + 10^{\circ}\text{C} \dots 15^{\circ}\text{C}$ , para eficiencias térmicas del intercambiador de calor del 85% al 90%; por consiguiente, para mantener un régimen de operación subcrítico, la temperatura ambiente no debe de ser superior a los 20°C.

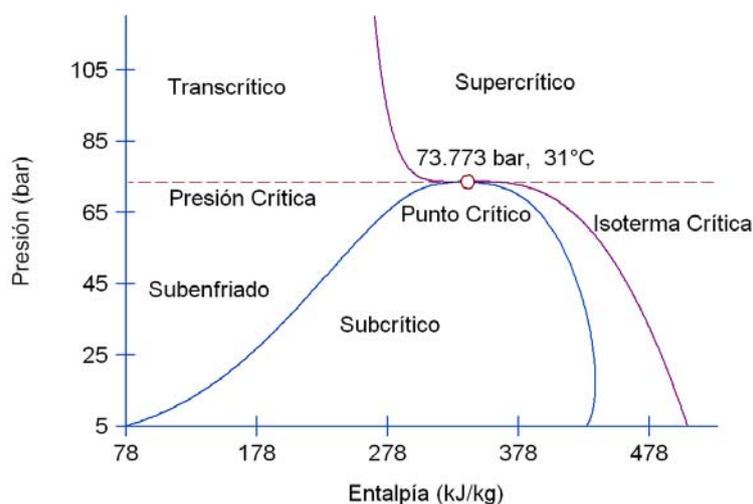


Figura 1.6. Diagrama presión - entalpía para el CO<sub>2</sub>.

La Figura 1.7 muestra el ciclo de refrigeración por compresión con CO<sub>2</sub> que opera a condiciones subcríticas y HF-134a. Para las condiciones de temperatura en el evaporador de -10 °C y de condensación de 30°C; las presiones de evaporación y de condensación para el CO<sub>2</sub> son de 28 y 72 bar, respectivamente, y para el HFC-134a son de 2 y 7.1 bar, lo que representa una relación de presiones menor para el CO<sub>2</sub> que para el HFC-134a, es decir, de 2.57 para el CO<sub>2</sub> y de 3.55 para el HFC-134a.

En los sistemas de refrigeración, las condiciones ambientales juegan un papel muy importante, ya que determinan el funcionamiento del sistema de enfriamiento del fluido de trabajo; es decir, de las condiciones de operación del condensador para las condiciones subcríticas y del enfriador para las supercríticas. [14].

La Figura 1.8 muestra el ciclo de refrigeración por compresión mecánica de CO<sub>2</sub> a condiciones supercríticas. El proceso de enfriamiento 2-3, se realiza a presión constante en estado supercrítico, pero a diferencia de la operación en régimen subcrítico, no se tiene definida la fase a

lo largo del descenso de la temperatura, sin embargo, las propiedades termodinámicas del  $\text{CO}_2$  cambian drásticamente [15, 24].

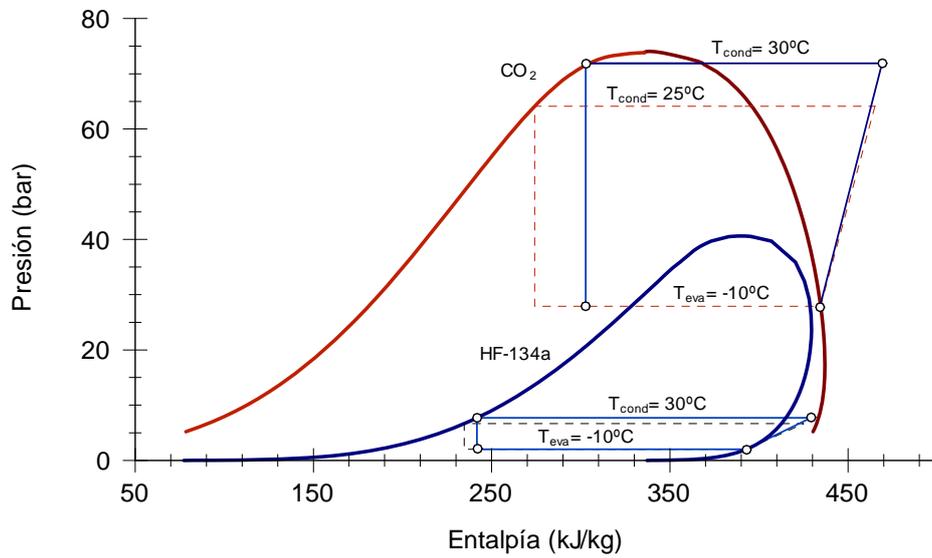


Figura 1.7. Presión entalpía del ciclo de refrigeración a condiciones subcríticas con  $\text{CO}_2$  y HF-134a.

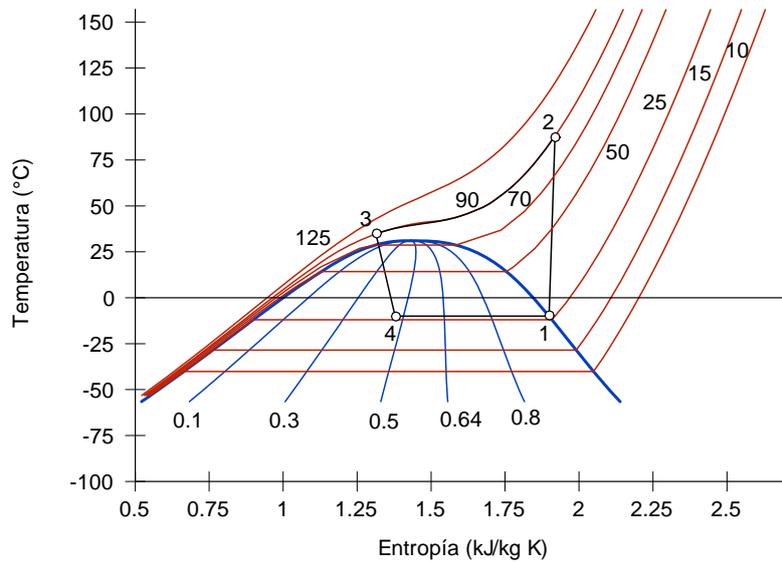


Figura 1.8. Ciclo de refrigeración utilizando  $\text{CO}_2$  a condiciones supercríticas.

El ciclo de refrigeración que utiliza el  $\text{CO}_2$  como refrigerante a condiciones supercríticas, dependiendo de la temperatura de enfriamiento se debe elegir de la presión de descarga del compresor; es decir, para una isoterma determinada por encima del punto crítico, existe la posibilidad de trabajar a diferentes presiones, para encontrar la presión de enfriamiento adecuada y así obtener el COP máximo a la  $T_3$  requerida, se debe de cuantificar el efecto refrigerante y el trabajo mecánico suministrado [39, 40], Figura 1.9.

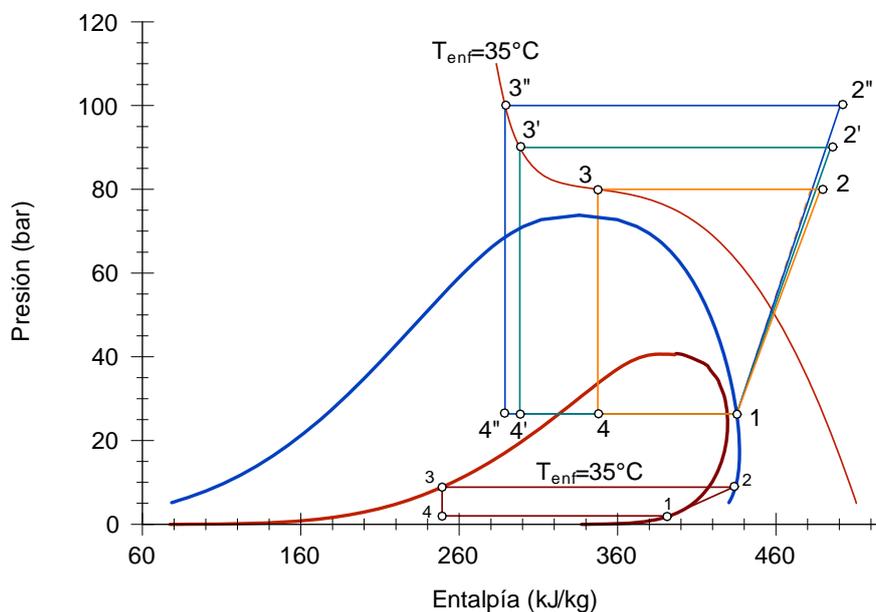
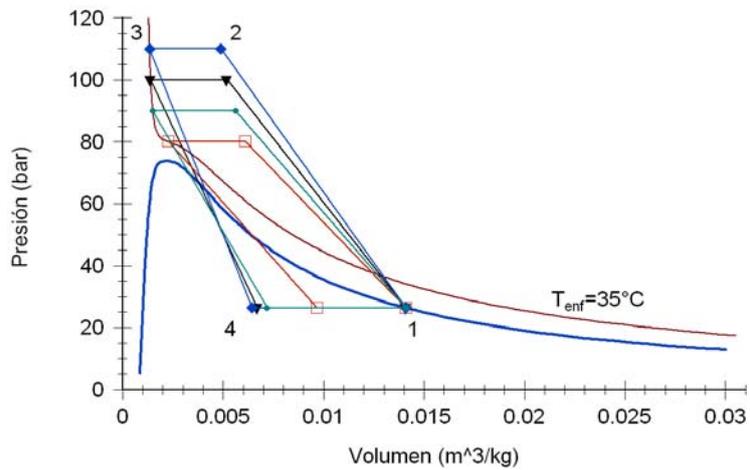


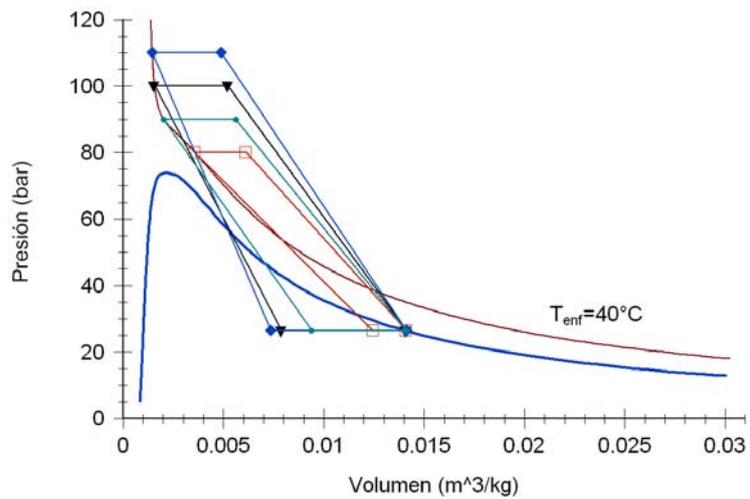
Figura 1.10. Presión entalpía del ciclo de refrigeración a condiciones supercríticas con  $\text{CO}_2$  y subcríticas con HF-134a.

En el diagrama presión volumen del ciclo de refrigeración con  $\text{CO}_2$  supercrítico de la Figura 1.10, se muestra que para una temperatura del enfriador de  $35^\circ\text{C}$ , el máximo COP se tiene para una presión cercana a los 90 bar. El incremento de la presión no asegura un mayor COP, debido a que el incremento del efecto refrigerante ya no es significativo; sin embargo, el incremento en el trabajo de compresión sí se lo es, considerablemente. Este comportamiento se debe a que las

isotermas en la región supercrítica tienden a ser pendientes verticales a partir de los 80 bar para una  $T_{enf}=35^{\circ}\text{C}$  y a 90 bar para una  $T_{enf}=40^{\circ}\text{C}$ .



a)



b)

Figura 1.10. Presión volumen del ciclo de refrigeración con  $\text{CO}_2$  a condiciones supercríticas: a)

$T_{enf}=35^{\circ}\text{C}$  y b)  $T_{enf}=40^{\circ}\text{C}$ .

Hiroshi Yamaguchi cuantifica las variaciones de la temperatura y presión en la zona del condensador a régimen subcrítico, sin embargo, no se establece el escenario a condiciones supercríticas [1]. Las fluctuaciones de la temperatura debidas a la naturaleza del sistema de trabajo, se reflejan en la variación de la temperatura que inherentemente afectan a la presión, ocasionadas por la condición de la fase del fluido es decir, de saturación. En la región supercrítica, la correspondencia en la variación de la temperatura en función de la presión o viceversa, no es cuantificable directamente, pero si indirectamente sobre la afectación en la potencia requerida para realizar el ciclo y el COP.

La potencia suministrada al compresor, se incrementa en 2.5% aproximadamente, al considerar una fluctuación de la presión de enfriamiento de  $\pm 5$  bar en el sistema de refrigeración, punto a) de la Figura 1.11, pero al comparar la variación de la temperatura de  $\pm 5^{\circ}\text{C}$ , a la misma presión seleccionada para obtener el máximo COP, el incremento en la potencia es de aproximadamente un 30% y combinadas ambas afectaciones sobre el sistema, se incrementa el suministro de potencia en un 50%. De manera análoga la variación de la temperatura y presión en el enfriador disminuyen el COP, Figura 1.12. *Por consiguiente, la variación más importante a controlar en el sistema de refrigeración a condiciones supercríticas es la temperatura en el enfriador.* Este comportamiento esencialmente se debe a que, la presión del enfriador se elige para obtener el mayor COP y en la vecindad de la presión elegida los efectos no son drásticos al presentarse esta variación en la operación, en cambio la variación de la temperatura si se refleja en una mayor perturbación en sistema incrementando la potencia y disminuyendo el COP.

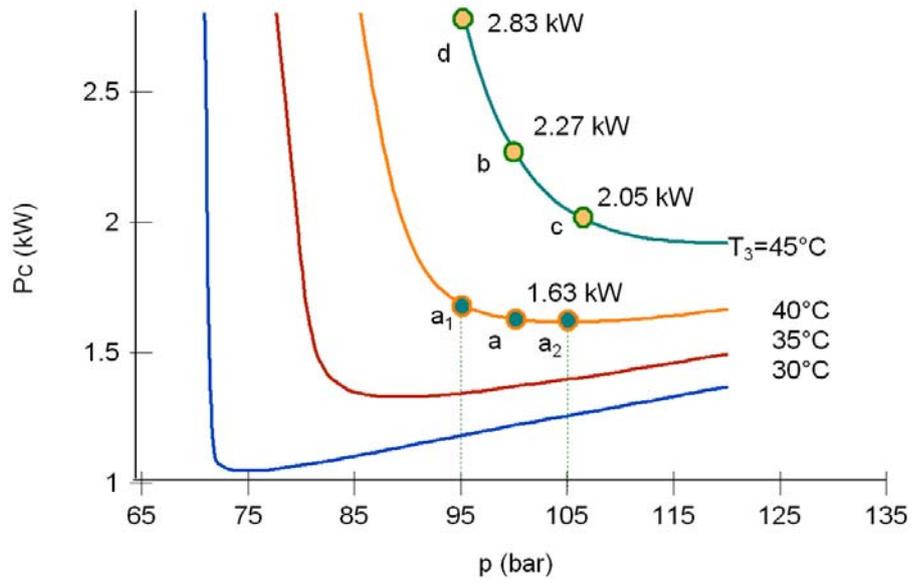


Figura 1.11. Potencia suministrada al compresor en función de la temperatura y presión del enfriador a condiciones supercríticas.

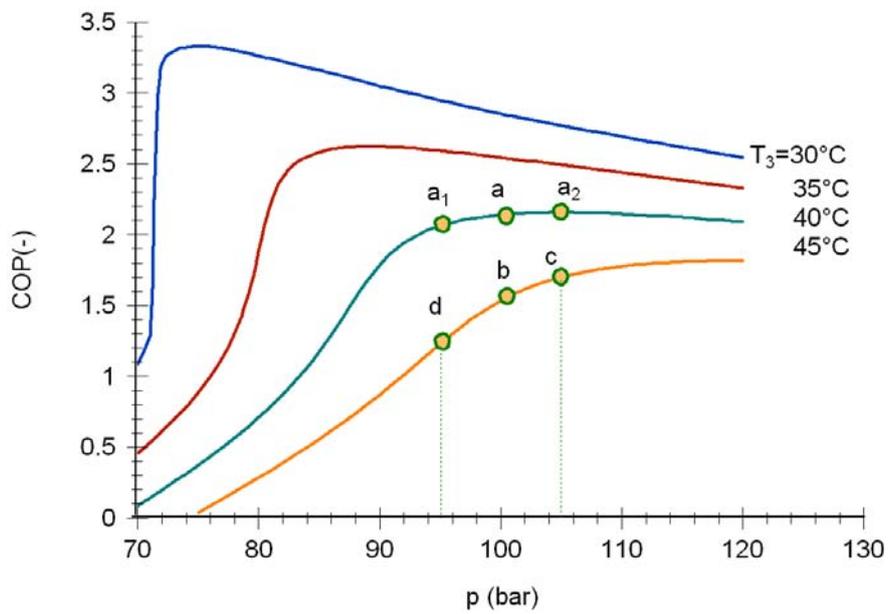


Figura 1.12. COP en función de la temperatura y presión del enfriador a condiciones supercríticas.

Las fluctuaciones en el comportamiento termodinámico en el sistema de refrigeración a condiciones supercríticas con CO<sub>2</sub>, se pueden cuantificar mediante el análisis exgoeconómico y establecer la variación de costos. Para las condiciones de 40°C en la temperatura del enfriador y de -10°C en el evaporador para una carga térmica de 1 TR, los costos exgoeconómicos son de 1.22 \$/hr, que se incrementan en un 20% al aumentar en 5°C la temperatura en el enfriador y así mismo, aumentan 5% al incrementarse de 5 bar la presión del enfriador, Figura 1.13 por consiguiente, la variación de la temperatura del enfriador a condiciones supercríticas es la que se debe de controlar, debido a que es la representa mayores costos de potencia y económicos [38].

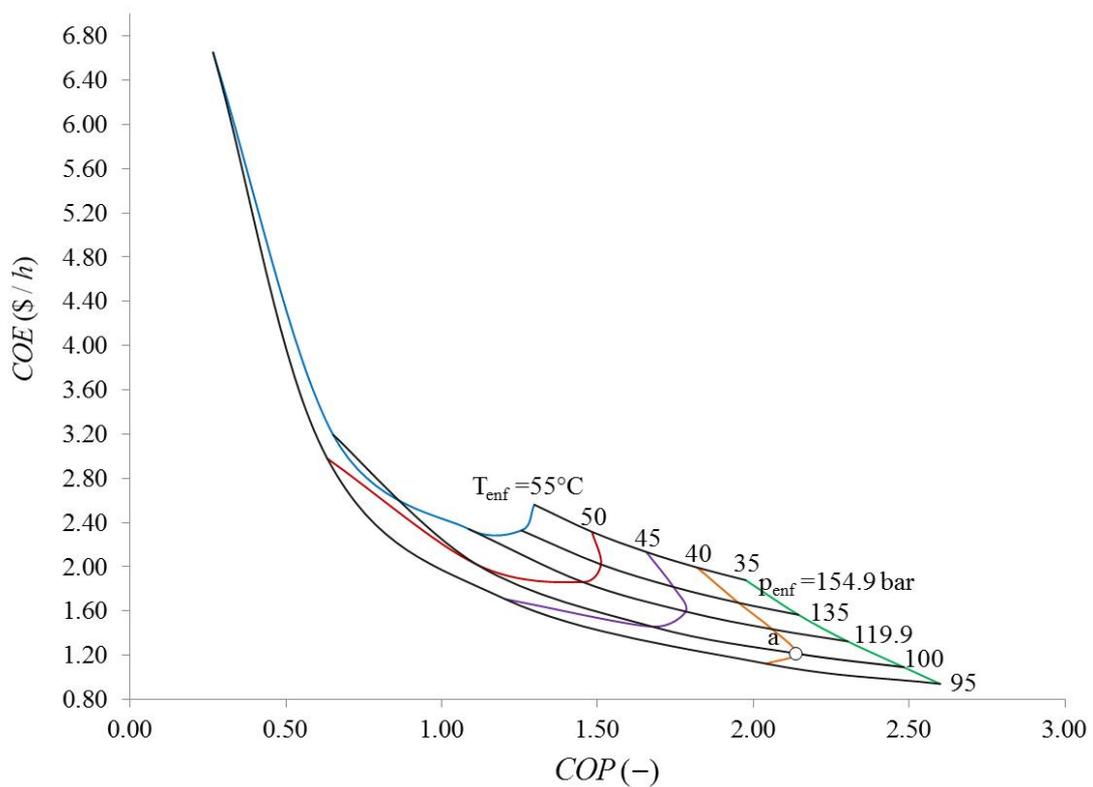


Figura 1.13. Costos de operación del sistema de refrigeración para una carga térmica de 1 TR y una temperatura en el evaporador de -10°C.

La temperatura del enfriador de 40°C es propuesta, así como una presión de 100 bar como caso base para el análisis de esta tesis. La temperatura en el enfriador de 40°C se selecciona debido a la temperatura ambiente promedio en la zona metropolitana. La presión en el enfriador se considera a 100 bar, debido a que es el valor de la presión óptima para obtener el máximo COP, asimismo, Srinivas S. Pitla obtuvo el comportamiento de las propiedades termofísicas del CO<sub>2</sub> a esta presión [15].

### **1.6 Propiedades Termofísicas del Bióxido de Carbono**

La evaluación del sistema de refrigeración además de contemplar el estudio termodinámico del ciclo, también debe incluir las características que definan el fenómeno de transferencia de calor, es decir, el calor específico y el coeficiente global de transferencia de calor en función de la temperatura. Asimismo, debido a que el sistema de refrigeración opera en régimen supercrítico también se debe de considerar el cambio en la densidad del CO<sub>2</sub> en función de la temperatura. Para tal efecto se utilizan resultados previos que permitan obtener correlaciones que puedan robustecer el modelo dinámico para el control térmico.

Srinivas S. Pitla et al presentan una revisión crítica de la literatura científica sobre el tópico de las propiedades termofísicas del bióxido de carbono, donde muestra que la conductividad térmica, la viscosidad, el calor específico a presión constante y la densidad muestran grandes variaciones cerca del punto crítico o también llamada pseudocrítica [15]. En las Figuras 1.14 y 1.15 se muestra el comportamiento del calor específico y de la densidad del CO<sub>2</sub> respectivamente en función de la temperatura a una presión de 100 bar.

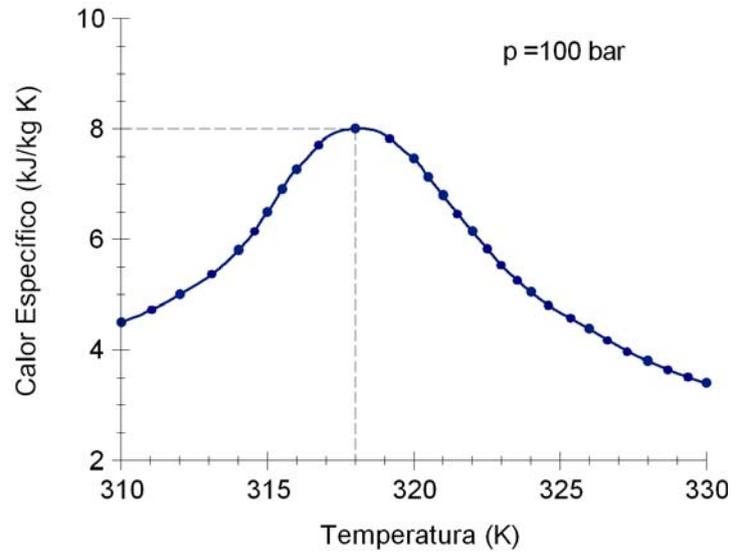


Figura 1.14. Calor específico del CO<sub>2</sub> en función de la temperatura a una presión de 100 bar.

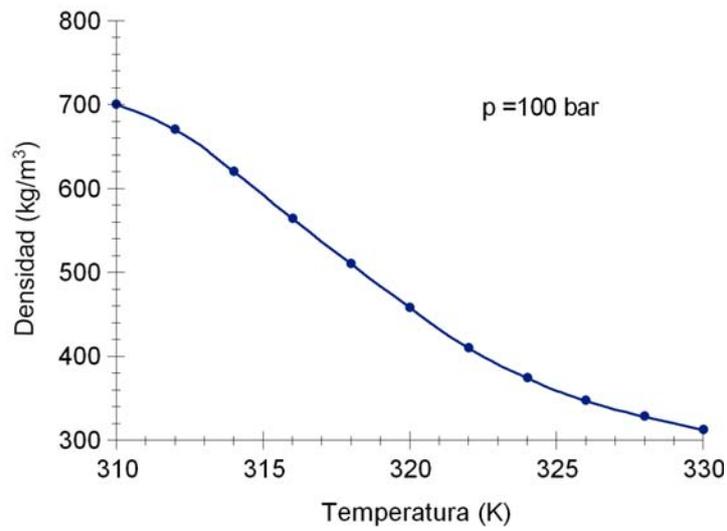


Figura 1.15. Densidad del CO<sub>2</sub> en función de la temperatura a una presión de 100 bar.

Con base a las propiedades termofísicas [15], Srinivas S. Pitla et al, plantean el problema de operar un sistema de refrigeración por compresión de vapor en la región supercrítica debido a que en el interior del enfriador se tiene un fluido compresible y turbulento generado por la variación

de la densidad con respecto a la temperatura. Por consiguiente, realizan un modelo matemático que simule al dióxido de carbono durante un proceso de enfriamiento a condiciones supercríticas con base al modelo de Favre-promedio, las ecuaciones de Navier Stokes y el de turbulencia, con el objetivo de predecir la variación del coeficiente de transferencia de calor. Para este análisis consideran acero como material del tubo [15, 20, 21]. En la Figura 1.16 se muestra el comportamiento del coeficiente global de transferencia de calor del CO<sub>2</sub> en función de la temperatura a una presión de 100 bar.

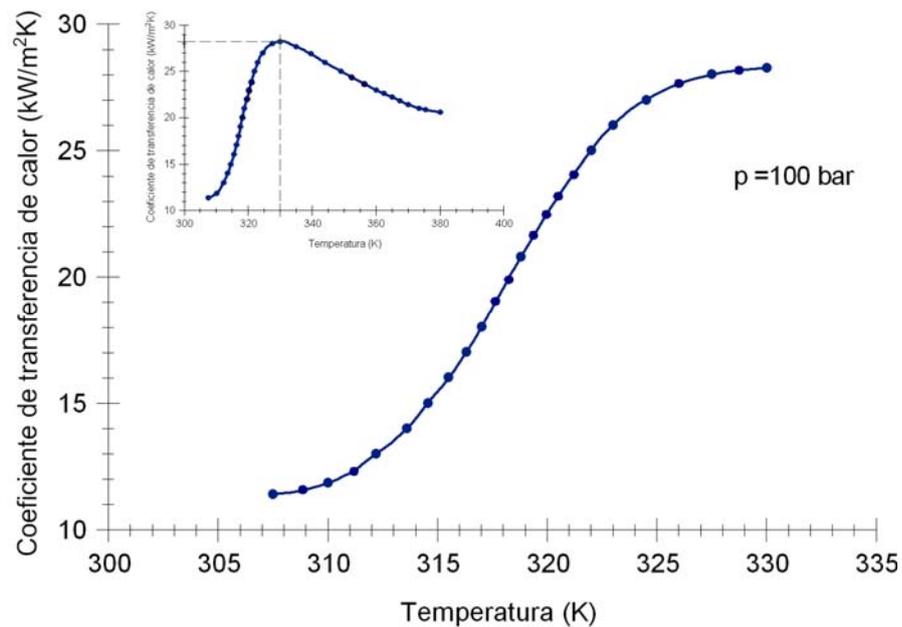


Figura 1.16. Coeficiente global de transferencia de calor del CO<sub>2</sub> en función de la temperatura a una presión de 100 bar.

El calor específico, densidad y el coeficiente global de calor del CO<sub>2</sub> presentan una tendencia al comportamiento lineal hasta una temperatura de 318 K o 45°C, después de esta temperatura el comportamiento de los términos no lineales de las propiedades se hacen más notables al evaluarlas.

Es posible que el comportamiento del calor específico tienda a tener una pendiente positiva en función de la temperatura debido a una mayor presencia de la fase líquida antes de los 45°C, y negativa para valores mayores de 45°C, y que la fase que empieza a dominar en el flujo de CO<sub>2</sub> sea vapor.

Para el coeficiente global de transferencia en función de la temperatura del CO<sub>2</sub> en régimen subcrítico, se utilizan correlaciones de los resultados obtenidos por Rin Yun et al [22]. En la Figura 1.17, se muestra que el coeficiente global de transferencia del CO<sub>2</sub> es linealmente dependiente con la temperatura de saturación.

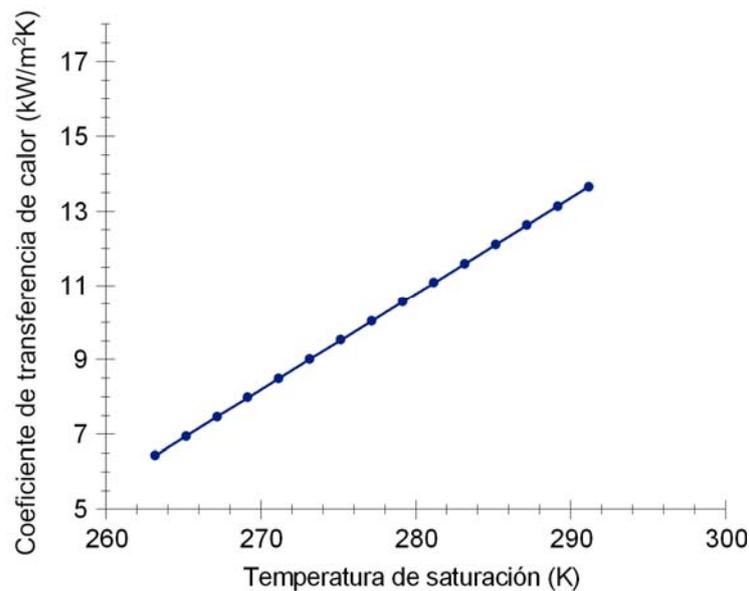


Figura 1.17. Coeficiente global de transferencia de calor del CO<sub>2</sub> en función de la temperatura de saturación.

En el modelo dinámico a desarrollar del sistema de refrigeración en esta tesis, se considera la relación de la eficiencia volumétrica en función de la temperatura de admisión del compresor. Trabajos sobre el fluido refrigerante de HFC-134a y CO<sub>2</sub> plantean correlaciones ajustadas a datos

experimentales que dependen en gran medida de las condiciones de diseño del compresor no del fluido [2, 3, 23, 35], Figura 1.18.

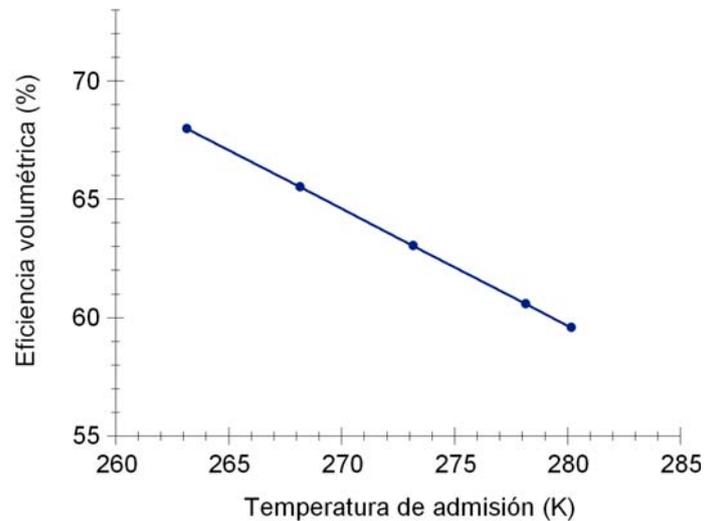


Figura 1.18. Eficiencia volumétrica del compresor en función de la temperatura de admisión para el CO<sub>2</sub>.

La correlación de la entalpía de cambio de fase del CO<sub>2</sub> se obtiene con base a las tablas de vapor saturado [33]. En la Tabla 4 se presenta la correlación de  $h_{fg}$  del CO<sub>2</sub>.

En la Tabla 1.4 se resumen las correlaciones para las propiedades del CO<sub>2</sub> en estado subcrítico y supercrítico [12, 20, 21].

Tabla 1.4. Correlaciones de los parámetros para el CO<sub>2</sub>.

Ecuación	Coefficientes
a) $U_E = aT_{ER} + b$	$a=258 \text{ W/m}^2\text{K}^2$
	$b=-61469.4 \text{ W/m}^2\text{K}$
b) $U_{enf} = a_y T_{enf}^2 + b_y T_{enf} + c_y$	$a_y=-6.4717 \text{ W/m}^2\text{K}^3$
	$b_y=5069 \text{ W/m}^2\text{K}^2$
	$c_y=-937715 \text{ W/m}^2\text{K}$

<b>c)</b>	$\eta_v = a_z + b_z T_R$	$a_z = 1.9811$ $b_z = -004945 \text{ K}^{-1}$
<b>d)</b>	$\rho_{enf} = \rho_{0enf} + \rho_{01enf} T_{enf}$	$\rho_{0enf} = 7196.273 \text{ kg/m}^3$ $\rho_{01enf} = -20.986 \text{ kg/m}^3 \text{ K}$
<b>e)</b>	$c_{p_{enf}} = c_{p_{0enf}} + c_{p_{01enf}} e^{-\left(\frac{(T_{enf}-T_0)^2}{2w^2}\right)}$	$c_{p_{0enf}} = 3613 \text{ J/kg K}$ $c_{p_{01enf}} = 4237 \text{ J/kg K}$ $T_0 = 318.139 \text{ K}$ $w = 4.016 \text{ K}$
<b>f)</b>	$h_{fg} = L - GT_R$	$L = 926860 \text{ J/kg}$ $G = 2551.5 \text{ J/kg K}$

## 1.7 Conducción en estado transitorio

Los intercambiadores de calor del sistema de refrigeración mecánica por compresión de vapor con CO<sub>2</sub>, se pueden modelar con base al método de resistencia interna despreciable.

El método de resistencia interna despreciable es la suposición de que la temperatura del sólido es espacialmente uniforme en cualquier instante durante el proceso transitorio. Esta suposición implica que los gradientes de temperatura dentro del sólido son insignificantes.

El modelo matemático debe de mostrar el comportamiento de la temperatura en función de la variable del tiempo, es decir,  $T=T(t)$ . Por tal motivo, se calcula el número de Biot equivalente al fenómeno de transferencia de calor.

Los intercambiadores de calor están constituidos por serpentines, con las formas geométricas que se muestran en la Figura 1.19. Son estructuras de diámetros o longitudes internas menores a 0.5

cm que recorren el intercambiador de calor por una longitud mayor a 1 m. El espesor del material es menor a 1 mm.

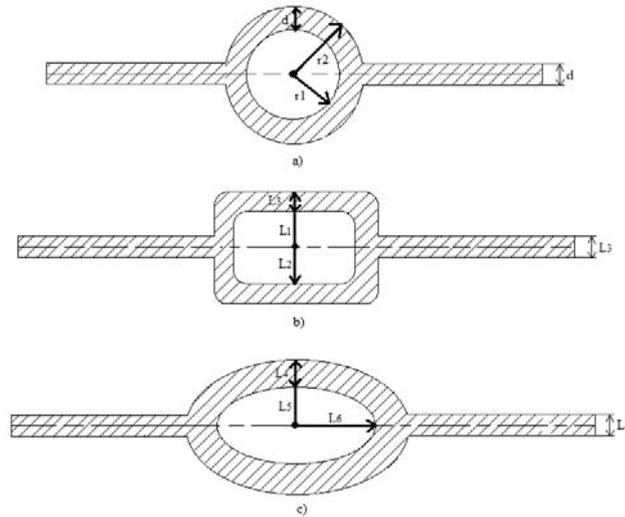


Figura 1.19. Tipos de serpentín a) Circular, b) Rectangular y c) Ovalado.

El flujo de calor es retirado por la cámara fría y desechado por el condensador o enfriador, el fenómeno convectivo es desarrollado por el flujo de refrigerante del  $\text{CO}_2$ , y el flujo de calor es rechazado a lo largo de la longitud del serpentín de material acero, Figura 1.20.

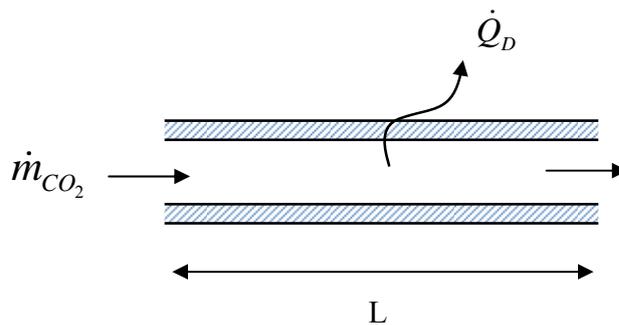


Figura 1.20. Serpentín del intercambiador de calor.

El número de Biot equivalente para este sistema, está determinado por la siguiente expresión matemática,

$$Bi_{eq} = \frac{k}{h_{CO_2} L} \quad (3.1)$$

Se evalúa considerando un coeficiente convectivo promedio del CO<sub>2</sub> de 20 kW/m<sup>2</sup> K y la conductividad térmica del acero, k, de 237 W/m K. La longitud, L=1m.

Por consiguiente, el número de Biot equivalente,  $Bi_{eq} < 0.1$ , por lo tanto, el comportamiento de la temperatura es función del tiempo y la suposición del método de resistencia interna despreciable es aplicable a los intercambiadores de calor del sistema de refrigeración por compresión mecánica del CO<sub>2</sub>.

# **CAPÍTULO II**

## **MODELO DINÁMICO DEL SISTEMA DE REFRIGERACIÓN**

### **2.1 Modelo Dinámico del sistema de refrigeración**

Mihir Sen presenta una introducción al control de sistemas térmicos, donde aborda los tópicos principales para aplicar el control. Desarrolla a partir de la ecuación de energía un modelo dinámico tipo Lumped simplificado, considerando las propiedades termofísicas constantes y el fluido de trabajo en una sola fase, que se utiliza para encontrar la función de transferencia y aplicar el control clásico, ya sea On–Off o PID [26, 27, 28, 29]. Con base a esta metodología se desarrolla el modelo dinámico del sistema de refrigeración por compresión mecánica con CO<sub>2</sub> considerando el comportamiento de las propiedades termofísicas del CO<sub>2</sub>: el coeficiente global de transferencia de calor, capacidad calorífica, densidad y entalpía de evaporización y la eficiencia volumétrica operando a condiciones subcríticas y supercríticas.

El modelo dinámico del control térmico de un sistema de refrigeración por compresión de vapor en una etapa, se plantea a partir de un balance de materia y energía para un sistema abierto. El modelo debe de establecer una dependencia operacional con respecto a las temperaturas en el evaporador y el condensador.

El sistema está constituido por tres equipos y un accesorio. La Figura 2.1 muestra el diagrama del ciclo de refrigeración por compresión de vapor en una etapa.

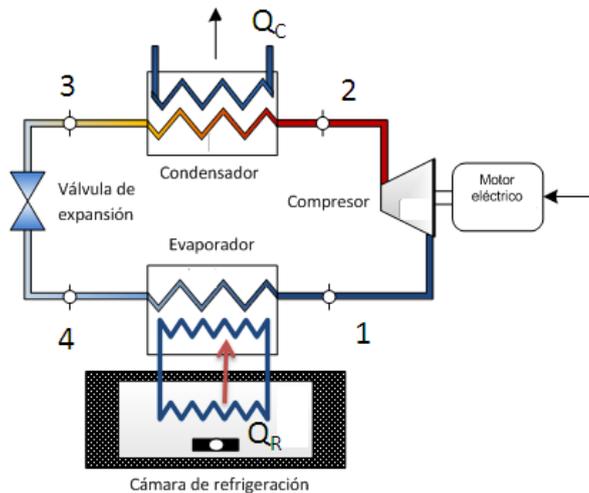


Figura 2.1. Diagrama esquemático del ciclo de refrigeración convencional.

El modelo dinámico del sistema de refrigeración se obtiene para la operación en régimen subcrítico y supercrítico. Para el régimen subcrítico se obtiene el modelo del evaporador y condensador y para el régimen supercrítico se obtiene el modelo del evaporador y enfriador. Para ambos casos, el modelo del evaporador se hace con base al mismo desarrollo matemático, ya que básicamente difiere en una propiedad o condición de operación que es la calidad,  $x$ .

Los modelos dinámicos del evaporador, condensador y enfriador se obtendrán en función de términos adimensionales, con la finalidad de tener un mejor manejo de las ecuaciones al aplicarles una ley de control.

## 2.2 Evaporador: Régimen Subcrítico y Supercrítico

El flujo de refrigerante proviene de la válvula de estrangulación, estado 4. La válvula reduce la presión del condensador, estado 3, a la del evaporador, estado 4. En el estado 4, se tiene una

correspondencia con la temperatura de saturación de la sustancia, además de que el fluido tiene presente las fases líquido- vapor; por consiguiente, se considera la calidad o cantidad de vapor contenida en la mezcla, “x”. La energía de salida, estado 1, se considera que sale como vapor saturado seco, es decir con calidad, x=1. En la Figura 2.2 se muestra el esquema del evaporador.

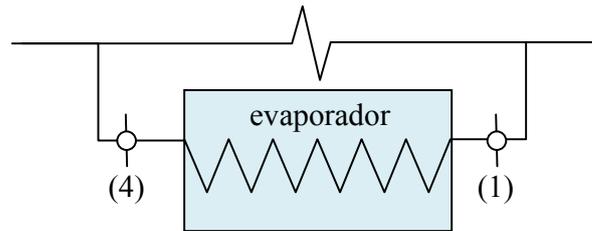


Figura 2.2. Esquema del evaporador.

El balance de materia y energía en el evaporador es el siguiente

$$\dot{E}_{entrada} + \dot{E}_{generada} - \dot{E}_{salida} = \dot{E}_{acomulada} \quad (2.1)$$

En términos de las propiedades termodinámicas y de transferencia de calor, se tiene la siguiente expresión

$$\dot{m}_4 h_4 + \dot{Q}_R - \dot{m}_1 h_1 = mc_p \frac{dT_R}{dt} \quad (2.2)$$

Considerando que no se tienen fugas, el flujo  $\dot{m}_4 = \dot{m}_1 = \dot{m}$

$$\dot{m}(h_4 - h_1) + \dot{Q}_R = \rho c_p V \frac{dT_R}{dt} \quad (2.3)$$

El calor retirado de la cámara de refrigeración o frigorífica,  $\dot{Q}_R$  está en función de las temperaturas del espacio a refrigerar,  $T_{ER}$  y la temperatura del flujo másico de CO<sub>2</sub> que absorbe el flujo de calor en el evaporador,  $T_R$ .

$$\dot{Q}_R = U_E A_E (T_{ER} - T_R) \quad (2.4)$$

El coeficiente global de transferencia de calor está determinado por las capas o paredes por donde se realiza la transferencia de calor,

$$U_E = a T_R + b \quad (2.5)$$

La entalpía del estado 4 se determina

$$h_4 = h_{f_4} + xh_{fg_4} \quad (2.6)$$

La correlación lineal de la entalpía de cambio de fase del CO<sub>2</sub> se tiene en la Tabla 1.4, ecuación f).

$$h_4 = h_{f_4} + xh_{fg_4} = h_{f_4} + x(L - GT_R) \quad (2.7)$$

De la ecuación (2.3), la entalpía por unidad de masa del estado 1, es

$$h_1 = h_{g_4} \quad (2.8)$$

El coeficiente global de transferencia está en función de la temperatura a la que se realiza la transferencia de calor por convección: para el estado subcrítico, se tiene de acuerdo a las investigaciones realizadas por Rin Yun, et al, Tabla 1.4 ecuación a) y sustituyendo las ec. (2.7) y (2.8), en la ecuación (2.3), se tiene

$$\dot{m} \left[ \left( h_{f_4}(T_R) + x(L - GT_R) \right) - h_{g_4}(T_R) \right] + U_E A_E (T_{ER} - T_R) = \rho c_p V \frac{dT_R}{dt} \quad (2.9)$$

Y como  $h_{fg} = h_{g_4} - h_{f_4} = L - GT_R$

$$\dot{m} \left[ x(L - GT_R) - (L - GT_R) \right] + U_E A_E (T_{ER} - T_R) = \rho c_p V \frac{dT_R}{dt} \quad (2.10)$$

El modelo físico del sistema en función de la temperatura de refrigeración y el tiempo, se expresa de la siguiente forma

$$\dot{m} \left[ (x - 1)(L - GT_R) \right] + U_E A_E (T_{ER} - T_R) = \rho c_p V \frac{dT_R}{dt} \quad (2.11)$$

Para obtener, el modelo matemático adimensional se establece dos términos adimensionales, temperatura característica,  $T_C$  y tiempo característico,  $t_C$ .

$$\theta_E = \frac{T_{ER} - T_R}{\Delta T_C} \quad (2.12)$$

$$\tau = \frac{t}{t_C} \quad (2.13)$$

Las variables físicas en función de las variables adimensionales

$$T_R = T_{ER} - \theta_E \Delta T_C \quad (2.14)$$

$$t = \tau t_C \quad (2.15)$$

Sustituyendo en la ec. (2.11), se tiene

$$\dot{m} \left[ (x-1) (L - G(T_{ER} - \theta_E \Delta T_C)) \right] + U_E A_E \theta_E \Delta T_C = \rho c_p V \frac{d(T_{ER} - \theta_E \Delta T_C)}{d(t_C \tau)} \quad (2.16)$$

Reescribiendo la ecuación diferencial ordinaria

$$\frac{\dot{m}(x-1)}{\rho c_p V} (L - G(T_{ER} - \theta_E \Delta T_C)) + \frac{U_E A_E \theta_E \Delta T_C}{\rho c_p V} = \frac{1}{t_C} \left[ \frac{dT_{ER}}{d\tau} - \frac{\Delta T_C d\theta_E}{d\tau} \right] \quad (2.17)$$

El modelo matemático del evaporador es función de la temperatura adimensional,  $\theta_E$  y la temperatura,  $T_{ER}$  es un parámetro constante, por consiguiente la ecuación diferencial resultante es,

$$\frac{\dot{m}(x-1)}{\rho c_p V} (L - G(T_{ER} - \theta_E \Delta T_C)) + \frac{U_E A_E \theta_E \Delta T_C}{\rho c_p V} = - \frac{\Delta T_C}{t_C} \frac{d\theta_E}{d\tau} \quad (2.18)$$

Reordenando algebraicamente la ecuación diferencial, se obtiene la siguiente ecuación,

$$\frac{t_C}{\Delta T_C} \frac{\dot{m}(x-1)L}{\rho c_p V} \left( 1 - \frac{G}{L} T_{ER} \left( 1 - \theta_E \frac{\Delta T_C}{T_{ER}} \right) \right) + \frac{t_C (aT_R + b) A_E}{\rho c_p V} \theta_E = - \frac{d\theta_E}{d\tau} \quad (2.19)$$

Sustituyendo en el término del coeficiente global de transferencia de calor,  $T_R$ ,

$$\frac{t_c}{\Delta T_C} \frac{\dot{m}(x-1)L}{\rho c_p V} \left( 1 - \frac{G}{L} T_{ER} \left( 1 - \theta_E \frac{\Delta T_C}{T_{ER}} \right) \right) + \frac{t_c [a(T_{ER} - \theta_E \Delta T_C) + b] A_E}{\rho c_p V} \theta_E = -\frac{d\theta_E}{d\tau} \quad (2.20)$$

Reordenado algebraicamente el término matemático del coeficiente global de transferencia de calor

$$\frac{t_c}{\Delta T_C} \frac{\dot{m}(x-1)L}{\rho c_p V} \left( 1 - \frac{G}{L} T_{ER} \left( 1 - \theta_E \frac{\Delta T_C}{T_{ER}} \right) \right) + \left[ \frac{t_c A_E (aT_{ER} + b)}{\rho c_p V} - \frac{a t_c \Delta T_C A_E}{\rho c_p V} \theta_E \right] \theta_E = -\frac{d\theta_E}{d\tau} \quad (2.21)$$

De la ec. (21) se pueden definir las expresiones del tiempo característico y la temperatura característica cuando el cambio de temperatura solo dependa de la cantidad de flujo de calor absorbido.

El tiempo característico

$$t_c = \frac{\rho c_p V}{A_E (aT_{ER} + b)} \quad (2.22)$$

La temperatura característica

$$\Delta T_C = \frac{\dot{m} L}{A_E (aT_{ER} + b)} \quad (2.23)$$

Sustituyendo estos términos en la ec. (2.21), se tiene

$$\frac{t_c}{\Delta T_C} \frac{(x-1)\Delta T_C}{t_c} \left( 1 - \frac{G}{L} T_{ER} \left( 1 - \theta_E \frac{\Delta T_C}{T_{ER}} \right) \right) + \left[ \frac{t_c}{t_c} - \frac{a A_E}{\rho c_p V} \frac{\dot{m} L}{A_E (aT_{ER} + b)} \frac{\rho c_p V}{A_E (aT_{ER} + b)} \theta_E \right] \theta_E = -\frac{d\theta_E}{d\tau} \quad (2.24)$$

Reordenado los términos algebraicos, se tiene,

$$(x-1) \left( 1 - \frac{G}{L} T_{ER} \left( 1 - \theta_E \frac{\Delta T_C}{T_{ER}} \right) \right) + \left[ 1 - \frac{a \dot{m} L}{A_E (aT_{ER} + b)^2} \theta_E \right] \theta_E = -\frac{d\theta_E}{d\tau} \quad (2.25)$$

Si se definen los parámetro  $\gamma = \frac{\Delta T_C}{T_{ER}} = \frac{\dot{m}L}{(aT_{ER} + b)A_E T_{ER}}$ ,  $\alpha = \frac{G}{L} T_{ER}$ ,  $\gamma_\varepsilon = \frac{a \dot{m}L}{(aT_{ER} + b)^2 A_E}$  y

sustituyendo en la ec. 21, se tiene el modelo dinámico del evaporador,

$$(x-1)(1-\alpha(1-\gamma\theta_E)) + [1-\gamma_\varepsilon\theta_E]\theta_E = -\frac{d\theta_E}{d\tau} \quad (2.26)$$

Ordenado los términos constantes, lineales y cuadráticos de la temperatura adimensional,  $\theta_E$ .

$$(x-1)(1-\alpha) + ((x-1)\alpha\gamma + 1)\theta_E - \gamma_\varepsilon\theta_E^2 = -\frac{d\theta_E}{d\tau} \quad (2.27)$$

Como puede apreciarse, la ecuación diferencial del evaporador es de primer orden no lineal.

### 2.3 Condensador: Regimen Subcrítico

En el estado subcrítico el fluido refrigerante, CO<sub>2</sub>, se condensa. El flujo de vapor de CO<sub>2</sub> se introduce al condensador, estado 2, donde cede su flujo de energía al medio ambiente, para condensarse a la salida y obtener líquido saturado a las condiciones de presión de saturación correspondientes a la temperatura de condensación, estado 3. En la Figura 2.3 se muestra el diagrama esquemático del condensador.

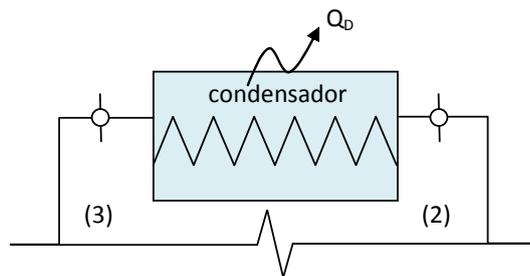


Figura 2.3. Diagrama esquemático del condensador.

El balance de energía en estado transitorio en el condensador, es:

$$\dot{m}_2 h_2 - \dot{Q}_D - \dot{m}_3 h_3 = mc_p \frac{dT_{Cond}}{dt} \quad (2.28)$$

En términos de las propiedades termodinámicas y de transferencia de calor, se tiene la siguiente expresión

$$\dot{m}_2 h_2 - U_{Cond} A_{Cond} (T_{Cond} - T_\infty) - \dot{m}_3 h_3 = \rho c_p V \frac{dT_{Cond}}{dt}. \quad (2.29)$$

Considerando que no se tienen fugas, el flujo  $\dot{m}_2 = \dot{m}_3 = \dot{m}$

$$\dot{m}(h_2 - h_3) - U_{Cond} A_{Cond} (T_{Cond} - T_\infty) = \rho c_p V \frac{dT_{Cond}}{dt}, \quad (2.30)$$

Donde la entalpía específica en el estado 3 se puede escribir como,

$$h_3 = h_4 = h_{f_4} + x h_{fg_4} = h_{f_4} + x(L - GT_R) \quad (2.31)$$

Para la temperatura a la entrada del condensador, se utiliza la relación de gas ideal

$$h_2 = h_1 + c_p (T_2 - T_1). \quad (2.32)$$

Además, el estado 1 se considera que  $h_1 = h_{g_4}$ , asumiendo que no existen caídas de presión. Para un proceso isoentrópico de compresión

$$\frac{T_2}{T_1} = \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{k-1}{k}} = (\pi)^{\frac{k-1}{k}} \quad (2.31)$$

Sustituyendo las ecuaciones (2.31), (2.32) y (2.33) en la ecuación (2.32), se tiene que,

$$\dot{m} \left( h_{g_4} + c_p \left( T_R \pi^{\frac{k-1}{k}} - T_R \right) - h_{f_4} - x(L - GT_R) \right) - U_{Cond} A_{Cond} (T_{Cond} - T_\infty) = \rho c_p V \frac{dT_{Cond}}{dt}, \quad (2.32)$$

donde  $h_{g_4} - h_{f_4} = L - GT_R$ .

Por consiguiente,

$$\dot{m} \left( c_p \left( T_R \pi^{\frac{k-1}{k}} - T_R \right) + (L - GT_R) - x(L - GT_R) \right) - U_{Cond} A_{Cond} (T_{Cond} - T_\infty) = \rho c_p V \frac{dT_{Cond}}{dt}. \quad (2.33)$$

Reordenando los términos algebraicos, se obtiene que,

$$\dot{m} \left( c_p T_R \left( \pi^{\frac{k-1}{k}} - 1 \right) + (1-x)(L - G T_R) \right) - U_{Cond} A_{Cond} (T_{Cond} - T_\infty) = \rho c_p V \frac{dT_{Cond}}{dt} \quad (2.34)$$

El modelo físico del sistema en función de la temperatura de condensación y el tiempo, también se puede expresar de la forma siguiente,

$$\dot{m} \left( c_p T_R \left( \pi^{\frac{k-1}{k}} - 1 \right) + (1-x) L \left( 1 - \frac{G}{L} T_R \right) \right) - U_{Cond} A_{Cond} (T_{Cond} - T_\infty) = \rho c_p V \frac{dT_{Cond}}{dt} . \quad (2.35)$$

Para obtener, el modelo dinámico del condensador se establece dos términos adimensionales, temperatura característica,  $T_C$  y tiempo característico,  $t_C$ , mediante las expresiones:

$$\theta_{Cond} = \frac{T_{Cond} - T_\infty}{\Delta T_C} , \quad (2.36)$$

$$\tau = \frac{t}{t_C} . \quad (2.37)$$

De esta manera, las variables físicas en función de las variables adimensionales, se pueden escribir como,

$$T_{Cond} = T_\infty + \theta_{Cond} \Delta T_C \quad (2.38)$$

y

$$t = \tau t_C . \quad (2.39)$$

Sustituyendo las ecuaciones (2.38) y (2.39) en la ec. (2.35), se tiene que,

$$\dot{m} \left( c_p T_R \left( \pi^{\frac{k-1}{k}} - 1 \right) + (1-x) L \left( 1 - \frac{G}{L} T_R \right) \right) - U_{Cond} A_{Cond} (T_\infty + \theta_{Cond} \Delta T_C - T_\infty) = \rho c_p V \frac{d(T_\infty + \theta_{Cond} \Delta T_C)}{dt_C \tau} \quad (2.40)$$

El modelo matemático del condensador es función de la temperatura adimensional,  $\theta_{Cond}$  y la temperatura ambiente.  $T_\infty$  es un parámetro constante, por consiguiente la ecuación diferencial resultante es,

$$\frac{\dot{m}t_C}{\rho c_p V \Delta T_C} \left( c_p T_R \left( \pi^{\frac{k-1}{k}} - 1 \right) + (1-x) L \left( 1 - \frac{G}{L} T_R \right) \right) - \frac{U_{Cond} A_{Cond} (\theta_{Cond} \Delta T_C) t_C}{\rho c_p V \Delta T_C} = \frac{d \theta_{Cond}}{d \tau}. \quad (2.41)$$

Reordenando términos algebraicos

$$\frac{\dot{m}t_C}{\rho c_p V \Delta T_C} \left( c_p T_R \left( \pi^{\frac{k-1}{k}} - 1 \right) + (1-x) L \left( 1 - \frac{G}{L} T_R \right) \right) - \frac{U_{Cond} A_{Cond} \theta_{Cond} t_C}{\rho c_p V} = \frac{d \theta_{Cond}}{d \tau}, \quad (2.42)$$

y sustituyendo  $T_R$  en el segundo término de la ecuación anterior, se tiene que,

$$\frac{\dot{m}t_C}{\rho c_p V \Delta T_C} \left( c_p T_R \left( \pi^{\frac{k-1}{k}} - 1 \right) + (1-x) L \left( 1 - \frac{G}{L} (T_{ER} - \theta_E \Delta T_C) \right) \right) - \frac{U_{Cond} A_{Cond} \theta_{Cond} t_C}{\rho c_p V} = \frac{d \theta_{Cond}}{d \tau}. \quad (2.43)$$

El coeficiente global de transferencia de calor es función de la  $T_{Cond}$  y de la Tabla 1.4, ecuación

a), se sustituye el  $U_{Cond}$  en la ec. (2.43)

$$\frac{\dot{m}t_C}{\rho c_p V \Delta T_C} \left( c_p T_R \left( \pi^{\frac{k-1}{k}} - 1 \right) + (1-x) L \left( 1 - \frac{G}{L} T_{ER} \left( 1 - \theta_E \frac{\Delta T_C}{T_{ER}} \right) \right) \right) - \frac{(aT_{Cond} + b) A_{Cond} t_C}{\rho c_p V} \theta_{Cond} = \frac{d \theta_{Cond}}{d \tau}. \quad (2.44)$$

Sustituyendo  $T_{Cond}$ , se obtiene la siguiente expresión matemática,

$$\frac{\dot{m}t_C}{\rho c_p V \Delta T_C} \left( c_p T_R \left( \pi^{\frac{k-1}{k}} - 1 \right) + (1-x) L \left( 1 - \frac{G}{L} T_{ER} \left( 1 - \theta_E \frac{\Delta T_C}{T_{ER}} \right) \right) \right) - \left[ \frac{(aT_{\infty} + b) A_{Cond} t_C}{\rho c_p V} + \frac{a \Delta T_C A_{Cond} t_C}{\rho c_p V} \theta_{Cond} \right] \theta_{Cond} = \frac{d \theta_{Cond}}{d \tau} \quad (2.45)$$

Sustituyendo  $t_C$  en la ec. (2.45)

$$\frac{\dot{m}t_C}{\rho c_p V \Delta T_C} \left( c_p T_R \left( \pi^{\frac{k-1}{k}} - 1 \right) + (1-x) L \left( 1 - \frac{G}{L} T_{ER} \left( 1 - \theta_E \frac{\Delta T_C}{T_{ER}} \right) \right) \right) - \left[ \frac{(aT_{\infty} + b) A_{Cond}}{\rho c_p V} \frac{\rho c_p V}{A_E (aT_{ER} + b)} + \frac{a \Delta T_C A_{Cond}}{\rho c_p V} \frac{\rho c_p V}{A_E (aT_{ER} + b)} \theta_{Cond} \right] \theta_{Cond} = \frac{d \theta_{Cond}}{d \tau}$$

(2.46)

Sustituyendo además la ec. (19) se tiene que,

$$\frac{\dot{m}L}{(aT_{ER} + b)A_E \Delta T_C} \left( \frac{c_p}{L} T_R \left( \pi^{\frac{k-1}{k}} - 1 \right) + (1-x) \left( 1 - \frac{G}{L} T_{ER} \left( 1 - \theta_E \frac{\Delta T_C}{T_{ER}} \right) \right) \right) - \left[ \frac{(aT_\infty + b)A_{Cond}}{(aT_{ER} + b)A_E} + \frac{a\Delta T_C A_{Cond}}{(aT_{ER} + b)A_E} \theta_{Cond} \right] \theta_{Cond} = \frac{d\theta_{Cond}}{d\tau} \quad (2.47)$$

Sustituyendo  $T_R = T_{ER} (1 - \gamma\theta_E)$ , se tiene,

$$\frac{\Delta T_C}{\Delta T_C} \left( \frac{c_p}{L} T_{ER} (1 - \gamma\theta_E) \left( \pi^{\frac{k-1}{k}} - 1 \right) + (1-x) \left( 1 - \frac{G}{L} T_{ER} \left( 1 - \theta_E \frac{\Delta T_C}{T_{ER}} \right) \right) \right) - \left[ \frac{(aT_\infty + b)A_{Cond}}{(aT_{ER} + b)A_E} + \frac{a A_{Cond} \dot{m}L}{(aT_{ER} + b)^2 A_E^2} \theta_{Cond} \right] \theta_{Cond} = \frac{d\theta_{Cond}}{d\tau} \quad (2.48)$$

En la ecuación anterior se pueden definir los siguientes parámetros adimensionales,

$$\beta_{\varepsilon 1} = \frac{(aT_\infty + b)A_{Cond}}{(aT_{ER} + b)A_E}, \quad (2.49)$$

$$\beta_{\varepsilon 2} = \frac{a A_{Cond} \dot{m}L}{(aT_{ER} + b)^2 A_E^2}, \quad (2.50)$$

y

$$\lambda = \frac{c_p}{L} T_{ER} \quad (2.51)$$

El término  $\beta_{\varepsilon 1}$  relaciona los coeficientes globales por área del condensador entre la del evaporador. La ecuación adimensional del condensador es:

$$\lambda (1 - \gamma\theta_E) \left( \pi^{\frac{k-1}{k}} - 1 \right) + (1-x) (1 - \alpha (1 - \gamma\theta_E)) - \beta_{\varepsilon 1} \theta_{Cond} - \beta_{\varepsilon 2} \theta_{Cond}^2 = \frac{d\theta_{Cond}}{d\tau} \quad (2.52)$$

Para establecer la funcionalidad de la relación de presiones del compresor con las temperaturas del sistema de refrigeración, se establece el análisis de la válvula de expansión y del flujo del compresor.

## 2.4 Flujo en el Compresor

La relación de presiones del compresor se obtiene utilizando la ecuación del flujo de refrigerante [25],

$$\dot{m} = NV_p \rho \eta_v \quad (2.53)$$

De la Tabla 1.4, ec. C) se obtiene la eficiencia volumétrica del compresor,  $\eta_v$ , sustituyendo

$$\dot{m} = NV_p \rho (a_z + b_z T_R) \quad (2.54)$$

En la válvula, el flujo de refrigerante se puede escribir a partir de la ecuación de Bernoulli, considerando que la densidad se tome a la salida de la válvula a la presión de evaporación,

$$\dot{m} = k \sqrt{\rho (p_2 - p_1)} \quad (2.55)$$

De esta manera, la ecuación anterior en términos de la relación de presiones se puede escribir como,

$$\dot{m} = k \rho^{1/2} p_1^{1/2} (\pi - 1)^{1/2} \quad (2.56)$$

El flujo de refrigerante es el mismo en la válvula y el compresor, por consiguiente, se tiene

$$NV_p \rho (a_z + b_z T_R) = k \rho^{1/2} p_1^{1/2} (\pi - 1)^{1/2} \quad (2.57)$$

Reescribiendo la ecuación (2.57), se tiene que

$$\frac{\rho}{p_1} \left( \frac{NV_p}{k} \right)^2 (a_z + b_z T_R)^2 = (\pi - 1) \quad (2.58)$$

Introduciendo el factor de compresibilidad promedio para las condiciones de operación del compresor, como una medida de la desviación del comportamiento del gas ideal [32], se tiene,

$$\frac{1}{ZRT_R} \left( \frac{NV_p}{k} \right)^2 (a_z^2 + 2a_z b_z T_R + b_z^2 T_R^2) = (\pi - 1) \quad . \quad (2.59)$$

y sustituyendo  $T_R$ ,

$$\frac{1}{ZRT_{ER} (1 - \gamma\theta_E)} \left( \frac{NV_p}{k} \right)^2 (a_z^2 + 2a_z b_z T_{ER} (1 - \gamma\theta_E) + b_z^2 T_{ER}^2 (1 - \gamma\theta_E)^2) = (\pi - 1), \quad (2.60)$$

y reordenando los términos algebraicos,

$$\frac{1}{ZRT_{ER}} \left( \frac{NV_p}{k} \right)^2 \left( \frac{a_z^2}{(1 - \gamma\theta_E)} + 2a_z b_z T_{ER} \frac{(1 - \gamma\theta_E)}{(1 - \gamma\theta_E)} + b_z^2 T_{ER}^2 \frac{(1 - \gamma\theta_E)^2}{(1 - \gamma\theta_E)} \right) = (\pi - 1), \quad (2.61)$$

o bien,

$$\frac{1}{ZRT_{ER}} \left( \frac{NV_p}{k} \right)^2 \left( \frac{a_z^2}{(1 - \gamma\theta_E)} + 2a_z b_z T_{ER} + b_z^2 T_{ER}^2 (1 - \gamma\theta_E) \right) = (\pi - 1) \quad . \quad (2.62)$$

Si se define el parámetro  $\varepsilon$  como

$$\varepsilon = \frac{1}{ZRT_{ER}} \left( \frac{NV_p}{k} \right)^2, \quad (2.63)$$

La relación de presiones se puede escribir de la forma siguiente,

$$\varepsilon \left( \frac{a_z^2}{(1 - \gamma\theta_E)} + 2a_z b_z T_{ER} + b_z^2 T_{ER}^2 (1 - \gamma\theta_E) \right) + 1 = \pi \quad ; \quad (2.64)$$

donde  $\varepsilon_1 = b_z^2 T_{ER}^2$

$$\varepsilon \left( \frac{a_z^2}{(1 - \gamma\theta_E)} + \varepsilon_1 (1 - \gamma\theta_E) \right) + 2\varepsilon a_z b_z T_{ER} + 1 = \pi \quad . \quad (2.65)$$

Renombrando los términos constantes de la ecuación de la relación de presiones, se tiene,

$$\varepsilon_2 = \frac{a_z^2}{ZRT_{ER}} \left( \frac{NV_p}{k} \right)^2 \quad , \quad (2.66)$$

$$\varepsilon_3 = \frac{b_z^2 T_{ER}^2}{ZRT_{ER}} \left( \frac{NV_p}{k} \right)^2 \quad (2.67)$$

y

$$\varepsilon_4 = \frac{2a_z b_z T_{ER}}{ZRT_{ER}} \left( \frac{NV_p}{k} \right)^2 + 1 \quad ; \quad (2.68)$$

y finalmente la relación de presiones sería:

$$\pi = \frac{\varepsilon_2}{(1-\gamma\theta_E)} + \varepsilon_3 (1-\gamma\theta_E) + \varepsilon_4 \quad . \quad (2.69)$$

Sustituyendo la relación de presiones,  $\pi$ , en la ec. (2.52), se tiene la ecuación del modelo dinámico del condensador en la región subcrítica, la ecuación obtenida es una ecuación diferencial de primer orden no lineal:

$$\lambda(1-\gamma\theta_E) \left( \left( \frac{\varepsilon_2}{(1-\gamma\theta_E)} + \varepsilon_3(1-\gamma\theta_E) + \varepsilon_4 \right)^{\frac{k-1}{k}} - 1 \right) + (1-x)(1-\alpha(1-\gamma\theta_E)) - \beta_{\varepsilon 1} \theta_{Cond} - \beta_{\varepsilon 2} \theta_{Cond}^2 = \frac{d\theta_{Cond}}{d\tau} \quad (2.70)$$

## 2.5 Enfriador: Ciclo Supercrítico

El ciclo de refrigeración por compresión mecánica en régimen de operación supercrítica, difiere esencialmente del subcrítico en la parte alta del ciclo; es decir, ya no se utiliza un condensador para realizar el cambio de fase de vapor a líquido, sino que se sustituye por un enfriador.

El evaporador retira la carga a las mismas condiciones de operación del ciclo subcrítico; es decir, para ambos ciclos, el evaporador trabaja a condiciones subcríticas, por consiguiente el modelo matemático de la ec. (2.27) es válido para ambos ciclos.

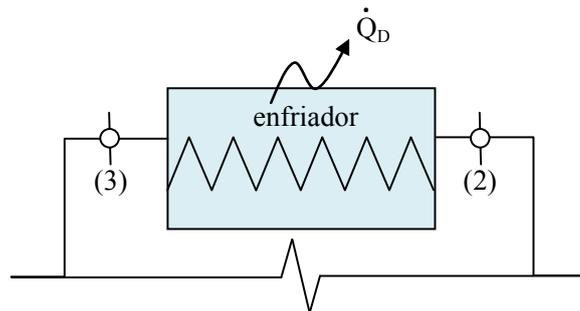


Figura 2.4. Diagrama esquemático del enfriador.

El balance de materia y energía en estado transitorio en el enfriador, de acuerdo a la Figura 2.4 es:

$$m h_2 - \dot{Q}_{enf} - m h_3 = m c_{p_{enf}} \frac{dT_{enf}}{dt} \quad (2.71)$$

En términos de las propiedades termodinámicas y de transferencia de calor, se tiene la siguiente expresión

$$m h_2 - U_{enf} A_{enf} (T_{enf} - T_{\infty}) - m h_3 = \rho_{enf} c_{p_{enf}} V \frac{dT_{enf}}{dt} \quad (2.72)$$

Considerando que no se tienen fugas, el flujo  $m_2 = m_3 = m$  y la ecuación anterior sería,

$$m(h_2 - h_3) - U_{enf} A_{enf} (T_{enf} - T_{\infty}) = \rho c_p V \frac{dT_{enf}}{dt} \quad (2.73)$$

El análisis para el sistema enfriador es análogo al del condensador; por lo tanto, tomando como base el procedimiento de la dinámica del condensador hasta la ecuación (2.41) se tiene que,

$$\frac{m t_C}{\rho_{enf} c_{p_{enf}} V \Delta T_C} \left( c_{p_{enf}} T_R \left( \pi^{\frac{k-1}{k}} - 1 \right) + (1-x) L \left( 1 - \frac{G}{L} (T_{ER} - \theta_E \Delta T_C) \right) \right) - \frac{U_{enf} A_{enf} \theta_{enf} t_C}{\rho_{enf} c_{p_{enf}} V} = \frac{d\theta_{enf}}{d\tau} \quad (2.74)$$

Sustituyendo  $T_R$  y reordenando términos

$$\frac{m L t_C}{\rho_{enf} c_{p_{enf}} V \Delta T_C} \left( \frac{c_{p_{enf}}}{L} T_{ER} (1 - \gamma \theta_E) \left( \pi^{\frac{k-1}{k}} - 1 \right) + (1-x)(1 - \alpha(1 - \gamma \theta_E)) \right) - \frac{U_{enf} A_{enf} \theta_{enf} t_C}{\rho_{enf} c_{p_{enf}} V} = \frac{d\theta_{enf}}{d\tau} \quad (2.75)$$

Al sustituir los parámetros adimensionales  $t_c$  y  $\Delta T_C$  se tiene que el término,

$$\frac{m L t_C}{\rho_{enf} c_{p_{enf}} V \Delta T_C} = \frac{m L \rho_E c_{p_E} V (a T_{ER} + b) A_E}{\rho_{enf} c_{p_{enf}} V (a T_{ER} + b) A_E m L} = \frac{\rho_E c_{p_E}}{\rho_{enf} c_{p_{enf}}} \quad (2.76)$$

y sustituyéndolo en la ec. (2.75) se tiene que,

$$\frac{\rho_E c_{p_E}}{\rho_{enf} c_{p_{enf}}} \left( \frac{c_{p_{enf}}}{L} T_{ER} (1 - \gamma \theta_E) \left( \pi^{\frac{k-1}{k}} - 1 \right) + (1-x)(1 - \alpha(1 - \gamma \theta_E)) \right) - \frac{U_{enf} A_{enf} \theta_{enf} t_C}{\rho_{enf} c_{p_{enf}} V} = \frac{d\theta_{enf}}{d\tau} \quad (2.77)$$

Donde la densidad y el calor específico en el enfriamiento presentan una mayor sensibilidad al cambio de temperatura, por lo que se determinan a partir de las correlaciones de la Tabla 1.4

$$\rho_{enf} = \rho_{0_{enf}} + \rho_{01_{enf}} T_{enf} \quad (2.78)$$

$$c_{p_{enf}} = c_{p0_{enf}} + c_{p01_{enf}} e^{-\left(\frac{(T_{enf}-T_0)^2}{2w^2}\right)} = c_{p0_{enf}} + c_{p01_{enf}} e^{-\left(\frac{(T_{enf}^2-2T_0T_{enf}+T_0^2)}{2w^2}\right)} \quad (2.79)$$

Sustituyendo la  $T_{enf} = T_\infty + \Delta T_C \theta_{enf}$ , en las ecuaciones (2.78) y (2.79), se obtiene que,

$$\rho_{enf} = \left(\rho_{0_{enf}} + \rho_{01_{enf}} T_\infty\right) + \rho_{01_{enf}} \Delta T_C \theta_{enf} \quad (2.80)$$

$$c_{p_{enf}} = c_{p0_{enf}} + c_{p01_{enf}} e^{-\left(\frac{(T_\infty + \Delta T_C \theta_{enf})^2 - 2T_0(T_\infty + \Delta T_C \theta_{enf}) + T_0^2}{2w^2}\right)} \quad (2.81)$$

Desarrollando el término exponencial

$$(T_{enf} - T_0)^2 = T_\infty^2 + 2\Delta T_C T_\infty \theta_{enf} + \Delta T_C^2 \theta_{enf}^2 - 2T_0 T_\infty - 2T_0 \Delta T_C \theta_{enf} + T_0^2, \quad (2.82)$$

y Agrupando los términos semejantes,

$$(T_{enf} - T_0)^2 = (T_\infty^2 - 2T_0 T_\infty + T_0^2) + (2\Delta T_C T_\infty - 2T_0 \Delta T_C) \theta_{enf} + \Delta T_C^2 \theta_{enf}^2, \quad (2.83)$$

que al sustituir en la ecuación (2.79) produce la siguiente expresión,

$$c_{p_{enf}} = c_{p0_{enf}} + c_{p01_{enf}} e^{-\left(\frac{(T_\infty^2 - 2T_0 T_\infty + T_0^2) + (2\Delta T_C T_\infty - 2T_0 \Delta T_C) \theta_{enf} + \Delta T_C^2 \theta_{enf}^2}{2w^2}\right)} \quad (2.84)$$

Aplicando la ley de los exponentes

$$c_{p_{enf}} = c_{p0_{enf}} + c_{p01_{enf}} e^{-\left(\frac{(T_\infty^2 - 2T_0 T_\infty + T_0^2)}{2w^2}\right)} e^{-\left(\frac{(2\Delta T_C T_\infty - 2T_0 \Delta T_C)}{2w^2}\right) \theta_{enf}} e^{-\left(\frac{\Delta T_C^2}{2w^2}\right) \theta_{enf}^2} \quad (2.85)$$

y renombrando los parámetros constantes

$$e_{01} = e^{-\left(\frac{(T_\infty^2 - 2T_0 T_\infty + T_0^2)}{2w^2}\right)}, \quad (2.86)$$

transforma la ecuación (2.84) en la siguiente expresión,

$$c_{p_{enf}} = c_{p0_{enf}} + c_{p01_{enf}} e_{01} e^{-\left(\frac{(2\Delta T_C T_\infty - 2T_0 \Delta T_C)}{2w^2}\right) \theta_{enf}} e^{-\left(\frac{\Delta T_C^2}{2w^2}\right) \theta_{enf}^2} \quad (2.87)$$

Además, la relación de densidades del evaporador y enfriador se puede escribir como,

$$\frac{\rho_E c_{pE}}{\rho_{enf} c_{p_{enf}}} = \frac{\rho_E c_{pE}}{\left[ (\rho_{0_{enf}} + \rho_{01_{enf}} T_\infty) + \rho_{01_{enf}} \Delta T_C \theta_{enf} \right] \left[ c_{p0_{enf}} + c_{p01_{enf}} e_{01} e^{-\left(\frac{2\Delta T_C T_\infty - 2T_0 \Delta T_C}{2w^2}\right) \theta_{enf}} e^{-\left(\frac{\Delta T_C^2}{2w^2}\right) \theta_{enf}^2} \right]} \quad (2.88)$$

Realizando los procedimientos algebraicos, desarrollando el término exponencial y renombrando constantes, la ecuación (2.88) se reescribe de la siguiente forma

$$\frac{\rho_E c_{pE}}{\rho_{enf} c_{p_{enf}}} = \frac{\rho_E c_{pE}}{y_{02} \left[ \frac{y_{01}}{y_{02}} \left( 1 + \frac{y_{01}^*}{y_{01}} e_{01} e^{-y_{03} \theta_{enf}} e^{-y_{04} \theta_{enf}^2} \right) + \left( 1 + \frac{y_{02}^*}{y_{02}} e_{01} e^{-y_{03} \theta_{enf}} e^{-y_{04} \theta_{enf}^2} \right) \theta_{enf} \right]} \quad , \quad (2.89)$$

donde

$$y_{01} = c_{p0_{enf}} (\rho_{0_{enf}} + \rho_{01_{enf}} T_\infty) \quad , \quad (2.90)$$

$$y_{01}^* = c_{p01_{enf}} (\rho_{0_{enf}} + \rho_{01_{enf}} T_\infty) \quad , \quad (2.91)$$

$$y_{02} = \rho_{01_{enf}} \Delta T_C c_{p0_{enf}} \quad , \quad (2.92)$$

$$y_{02}^* = \rho_{01_{enf}} \Delta T_C c_{p01_{enf}} \quad , \quad (2.93)$$

$$y_{03} = \frac{\Delta T_C (T_\infty - T_0)}{w^2} \quad , \quad (2.94)$$

y

$$y_{04} = \frac{\Delta T_C^2}{2w^2} \quad . \quad (2.95)$$

La relación que determina la ecuación (2.89) se puede expresar en una ecuación más compacta, renombrando las constantes, obteniendo la siguiente expresión matemática

$$\frac{\rho_E c_{pE}}{\rho_{enf} c_{p_{enf}}} = \frac{y_{05}}{(y_{06} + \theta_{enf}) \left( 1 + y_{07} e_{01} e^{-y_{03} \theta_{enf}} e^{-y_{04} \theta_{enf}^2} \right)} \quad , \quad (2.96)$$

donde

$$y_{05} = \frac{\rho_E c_{pE}}{\rho_{01_{enf}} \Delta T_C c_{p0_{enf}}} \quad , \quad (2.97)$$

$$y_{06} = \frac{c_{p0_{enf}} (\rho_{0_{enf}} + \rho_{01_{enf}} T_\infty)}{\rho_{01_{enf}} \Delta T_C c_{p0_{enf}}} \quad (2.98)$$

y

$$y_{07} = \frac{y_{01}^*}{y_{01}} = \frac{y_{02}^*}{y_{02}} = \frac{c_{p01_{enf}}}{c_{p0_{enf}}} \quad . \quad (2.99)$$

Sustituyendo en la ec. (2.77), la relación de densidades y calores específicos del evaporador y enfriador, se tiene la siguiente ecuación,

$$\frac{y_{05}}{(y_{06} + \theta_{enf}) \left[ 1 + y_{07} e_{01} e^{-y_{03} \theta_{enf}} e^{-y_{04} \theta_{enf}^2} \right]} \left( \frac{(c_{\rho_0} + c_{\rho_{01}} e_{01} e^{-y_{03} \theta_{enf}} e^{-y_{04} \theta_{enf}^2})}{L} T_{ER} (1 - \gamma \theta_E) \left( \pi^{\frac{k-1}{k}} - 1 \right) + (1-x)(1-\alpha(1-\gamma \theta_E)) \right) - \frac{U_{enf} A_{enf} \theta_{enf} t_C}{\rho_{enf} c_{p_{enf}} V} = \frac{d \theta_{enf}}{d \tau} \quad (2.100)$$

y renombrando términos adimensionales, se tiene que

$$\frac{y_{05}}{(y_{06} + \theta_{enf}) \left[ 1 + y_{07} e_{01} e^{-\gamma_{03} \theta_{enf}} e^{-\gamma_{04} \theta_{enf}^2} \right]} \left( \left( y_{08} + y_{09} e_{01} e^{-\gamma_{03} \theta_{enf}} e^{-\gamma_{04} \theta_{enf}^2} \right) (1 - \gamma \theta_E) \left( \pi^{\frac{k-1}{k}} - 1 \right) + (1-x)(1-\alpha(1-\gamma\theta_E)) \right) - \frac{U_{enf} A_{enf} \theta_{enf} t_c}{\rho_{enf} c_{p_{enf}} V} = \frac{d \theta_{enf}}{d \tau} \quad (2.101)$$

Donde

$$y_{08} = \frac{c_{p_0} T_{ER}}{L} \quad \text{y} \quad y_{09} = \frac{c_{p_{01}} T_{ER}}{L} \quad .$$

Ahora, sustituyendo en el segundo término de la ecuación el valor del  $t_c$ , se obtiene que,

$$\frac{U_{enf} A_{enf} \theta_{enf} t_c}{\rho_{enf} c_{p_{enf}} V} = \frac{U_{enf} A_{enf} \theta_{enf} \rho_E c_{p_E} V}{\rho_{enf} c_{p_{enf}} V (a T_{ER} + b) A_E} = \frac{U_{enf} A_{enf} \theta_{enf}}{(a T_{ER} + b) A_E} \frac{\rho_E c_{p_E}}{\rho_{enf} c_{p_{enf}}} \quad ; \quad (2.102)$$

donde

$$\frac{U_{enf} A_{enf} \theta_{enf} t_c}{\rho_{enf} c_{p_{enf}} V} = \frac{(a_y T_{enf}^2 + b_y T_{enf} + c_y) A_{enf}}{(a T_{ER} + b) A_E} \frac{\rho_E c_{p_E}}{\rho_{enf} c_{p_{enf}}} \theta_{enf} \quad . \quad (2.103)$$

Sustituyendo  $T_{enf} = T_{\infty} + \theta_{enf} \Delta T_c$ , en el segundo término de la ecuación; es decir, en la correlación del coeficiente global de transferencia de calor

$$a_y T_{enf}^2 + b_y T_{enf} + c_y = a_y (T_{\infty} + \Delta T_c \theta_{enf})^2 + b_y (T_{\infty} + \Delta T_c \theta_{enf}) + c_y \quad , \quad (2.104)$$

y desarrollando la ecuación

$$a_y T_{enf}^2 + b_y T_{enf} + c_y = a_y T_{\infty}^2 + 2a_y T_{\infty} \Delta T_c \theta_{enf} + a_y \Delta T_c^2 \theta_{enf}^2 + b_y T_{\infty} + b_y \Delta T_c \theta_{enf} + c_y \quad (2.105)$$

y agrupando términos semejantes

$$a_y T_{enf}^2 + b_y T_{enf} + c_y = (a_y T_{\infty}^2 + b_y T_{\infty} + c_y) + (2a_y T_{\infty} \Delta T_c \theta_{enf} + b_y \Delta T_c \theta_{enf}) + a_y \Delta T_c^2 \theta_{enf}^2 \quad (2.106)$$

Se tiene que

$$a_y T_{enf}^2 + b_y T_{enf} + c_y = (a_y T_\infty^2 + b_y T_\infty + c_y) + (2a_y T_\infty + b_y) \Delta T_c \theta_{enf} + a_y \Delta T_c^2 \theta_{enf}^2 ; \quad (2.107)$$

Con la expresión anterior, se obtiene

$$\frac{(a_y T_{enf}^2 + b_y T_{enf} + c_y) A_{enf}}{(a + b T_{ER}) A_E} = \frac{((a_y T_\infty^2 + b_y T_\infty + c_y) + (2a_y T_\infty + b_y) \Delta T_c \theta_{enf} + a_y \Delta T_c^2 \theta_{enf}^2) A_{enf}}{(a + b T_{ER}) A_E}, \quad (2.108)$$

y separando los términos del cociente

$$\frac{(a_y T_{enf}^2 + b_y T_{enf} + c_y) A_{enf}}{(a + b T_{ER}) A_E} = \frac{(a_y T_\infty^2 + b_y T_\infty + c_y) A_{enf}}{(a + b T_{ER}) A_E} + \frac{(2a_y T_\infty + b_y) \Delta T_c \theta_{enf} A_{enf}}{(a + b T_{ER}) A_E} + \frac{a_y \Delta T_c^2 \theta_{enf}^2 A_{enf}}{(a + b T_{ER}) A_E}. \quad (2.109)$$

Donde se definen los parámetros siguientes:

$$\beta_{x1} = \frac{(a_y T_\infty^2 + b_y T_\infty + c_y) A_{enf}}{(a T_{ER} + b) A_E}, \quad (2.110)$$

$$\beta_{x2} = \frac{(2a_y T_\infty + b_y) \Delta T_c A_{enf}}{(a T_{ER} + b) A_E} = \frac{m L (2a_y T_\infty + b_y) A_{enf}}{(a T_{ER} + b)^2 A_E^2} \quad (2.111)$$

y

$$\beta_{x3} = \frac{a_y \Delta T_c^2 A_{enf}}{(a T_{ER} + b) A_E} = \frac{a_y A_{enf} m^2 L^2}{(a T_{ER} + b)^3 A_E^3}. \quad (2.112)$$

Sustituyendo en la ecuación,

$$\frac{U_{enf} A_{enf} \theta_{enf} t_C}{\rho_{enf} c_{p_{enf}} V} = \frac{y_{05} (\beta_{x1} + \beta_{x2} \theta_{enf} + \beta_{x3} \theta_{enf}^2)}{(y_{06} + \theta_{enf}) \left[ 1 + y_{07} e_{01} e^{-y_{03} \theta_{enf}} e^{-y_{04} \theta_{enf}^2} \right]} \theta_{enf} \quad (2.113)$$

y en la ecuación (2.101), se obtiene la ecuación

$$\frac{y_{05}}{(y_{06} + \theta_{enf}) \left[ 1 + y_{07} e_{01} e^{-\gamma_{03} \theta_{enf}} e^{-\gamma_{04} \theta_{enf}^2} \right]} \left( \frac{(y_{08} + y_{09} e_{01} e^{-\gamma_{03} \theta_{enf}} e^{-\gamma_{04} \theta_{enf}^2})(1 - \gamma \theta_E) \left( \pi^{\frac{k-1}{k}} - 1 \right) + (1-x)(1 - \alpha(1 - \gamma \theta_E))}{(1-x)(1 - \alpha(1 - \gamma \theta_E))} \right) - \frac{y_{05} (\beta_{x1} + \beta_{x2} \theta_{enf} + \beta_{x3} \theta_{enf}^2)}{(y_{06} + \theta_{enf}) \left[ 1 + y_{07} e_{01} e^{-\gamma_{03} \theta_{enf}} e^{-\gamma_{04} \theta_{enf}^2} \right]} \theta_{enf} = \frac{d \theta_{enf}}{d \tau}. \quad (2.114)$$

Factorizando los términos semejantes

$$\frac{y_{05}}{(y_{06} + \theta_{enf}) \left[ 1 + y_{07} e_{01} e^{-\gamma_{03} \theta_{enf}} e^{-\gamma_{04} \theta_{enf}^2} \right]} \left( \frac{(y_{08} + y_{09} e_{01} e^{-\gamma_{03} \theta_{enf}} e^{-\gamma_{04} \theta_{enf}^2})(1 - \gamma \theta_E) \left( \pi^{\frac{k-1}{k}} - 1 \right) + (1-x)(1 - \alpha(1 - \gamma \theta_E)) - (\beta_{x1} + \beta_{x2} \theta_{enf} + \beta_{x3} \theta_{enf}^2) \theta_{enf}}{(1-x)(1 - \alpha(1 - \gamma \theta_E))} \right) = \frac{d \theta_{enf}}{d \tau} \quad (2.115)$$

Finalmente sustituyendo el valor de la relación de presiones, la ecuación para el enfriador en estado supercrítico es,

$$\frac{y_{05}}{(y_{06} + \theta_{enf}) \left[ 1 + y_{07} e_{01} e^{-\gamma_{03} \theta_{enf}} e^{-\gamma_{04} \theta_{enf}^2} \right]} \left( \frac{\left( \left( \frac{\varepsilon_2}{(1 - \gamma \theta_E)} + \varepsilon_3 (1 - \gamma \theta_E) + \varepsilon_4 \right)^{\frac{k-1}{k}} - 1 \right) (1 - \gamma \theta_E) (y_{08} + y_{09} e_{01} e^{-\gamma_{03} \theta_{enf}} e^{-\gamma_{04} \theta_{enf}^2}) + (1-x)(1 - \alpha(1 - \gamma \theta_E)) - (\beta_{x1} + \beta_{x2} \theta_{enf} + \beta_{x3} \theta_{enf}^2) \theta_{enf}}{(1-x)(1 - \alpha(1 - \gamma \theta_E))} \right) = \frac{d \theta_{enf}}{d \tau} \quad (2.116)$$

La ecuación dinámica del enfriador es una ecuación diferencial de primer orden no lineal.

*Los modelos matemáticos del evaporador, condensador y enfriador son la base del control térmico del sistema de refrigeración.* Los modelos resultantes son ecuaciones diferenciales de

primer orden no lineales; sin embargo, antes de proceder a un análisis de control no-lineal, existe la posibilidad de trabajar con la linealización de los modelos dinámicos de acuerdo al comportamiento de las propiedades termofísicas del CO<sub>2</sub> en el rango de operación del sistema. Para tal efecto se deben considerar la evaluación de los modelos con los parámetros de operación y las propiedades termofísicas de la Tabla 1.4.

## 2.6 Parámetros de Simulación del Sistema de Refrigeración Subcrítico y Supercrítico

En las Tablas 2.1, 2.2 y 2.3 se muestran las condiciones de operación para los sistemas de refrigeración por compresión mecánica con CO<sub>2</sub> en régimen subcrítico y supercrítico para realizar la aplicación de la ley de control PID al modelo linealizado y al no lineal.

En la Tabla 2.1 se muestran los parámetros de operación del sistema de refrigeración, que sirven para evaluar en las constantes adimensionales.

Tabla 2.1. Tabla de parámetros del sistema de refrigeración.

Parámetros	
Flujo de CO <sub>2</sub> supercrítico	0.0286 kg/s
Flujo de CO <sub>2</sub> subcrítico	0.0266 kg/s
Relación de áreas, $\frac{A_{Cond}}{A_E}, \frac{A_{enf}}{A_E}$	1.3
Número de revoluciones del motor, N	350 rpm
Volumen desplazado en el compresor, V	0.00006194 m <sup>3</sup> /rev
Constante característica de expansión	1.636x10 <sup>-5</sup> m <sup>2</sup>

Densidad en la zona del evaporador	983.76 kg/m <sup>3</sup>
Factor de compresibilidad	0.5
Constante del gas	0.1889 kJ/kg K
Calor específico promedio en la región subcrítica	Gas: 0.846 kJ/kg K Líquido: 2.43 kJ/kg K
Constante del CO <sub>2</sub> , k	1.289

En las Tablas 2.3 y 2.4 se muestran las condiciones de operación del sistema de refrigeración en estado subcrítico y supercrítico.

Tabla 2.2. Estados termodinámicos del sistema de refrigeración a condiciones subcríticas.

Estados	T (K)	P (bar)	v (m <sup>3</sup> /kg)	h (kJ/kg)	s (kJ/kg K)	x (-)
1	263	26.3	0.014115	435.18	1.8992	1
2	339.2	70	0.006761	481.03	1.9155	VSC
3	303	71.9	0.002949	303.05	1.3386	0
4	263	26.4	0.007698	303.05	1.4168	0.510

Tabla 2.3. Estados termodinámicos del sistema de refrigeración a condiciones supercríticas.

Estados	T (K)	P (bar)	v (m <sup>3</sup> /kg)	h (kJ/kg)	s (kJ/kg K)	x (-)
1	263	26.4	0.014115	435.18	1.8992	1
2	370.88	100	0.005219	500.59	1.9206	VSC
3	313	100	0.001582	312.20	1.3536	-
4	263	26.4	0.007895	312.20	1.4316	0.525

En la Tabla 2.4 se muestran los valores representativos de los parámetros adimensionales al evaluar, las condiciones de operación de las Tablas 2.1, 2.2 y 2.3.

Parámetro	Valor
$x$	0.52
$\alpha$	0.752
$\gamma$	0.011
$\gamma_\varepsilon$	0.103
$\beta_{x1}$	0.89
$\beta_{x2}$	0.59
$\beta_{x3}$	-0.01
$e_{01}$	0.002
$y_{03}$	-2.72
$y_{04}$	0.306
$y_{05}$	-10.032
$y_{06}$	-12.332
$y_{07}$	0.866
$y_{08}$	1.065
$y_{09}$	1.248
$\varepsilon_2$	0.0742
$\varepsilon_3$	0.0344
$\varepsilon_4$	0.8988

# **CAPITULO III**

## **CONTROL TÉRMICO**

### **3.1 Control Térmico**

Con base a los modelos dinámicos desarrollados del ciclo de refrigeración en régimen de operación subcrítico y supercrítico obtenidos en el Capítulo II, se hace la propuesta del método de control térmico. La ley de control que se aplica al sistema del evaporador, condensador y enfriador es el control clásico Proporcional Integral Derivativo, PID. Se comparan los resultados que se obtienen con la aplicación del método lineal y no lineal. Por tal motivo, se hace en primer término la linealización de las ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden no lineales, con la finalidad de aplicar el método de asignación de polos y obtener las constantes de control PID; asimismo, para el control no lineal se usará la aplicación de un compensador de control PID que trabaje sobre la respuesta del sistema; es decir, sobre la respuesta matemática de las ecuaciones diferenciales no lineales.

### **3.2 Funciones de Transferencia en el dominio de la Variable s**

El comportamiento dinámico del evaporador, condensador y enfriador son representadas por las ecuaciones (2.27), (2.70) y (2.116) respectivamente. Las ecuaciones matemáticas son ecuaciones diferenciales de primer orden no lineales. Uno de los objetivos de este trabajo es presentar un análisis comparativo del comportamiento de la respuesta del sistema ante la acción de un control

para su forma lineal y no lineal y establecer, cuál es la sensibilidad de la respuesta del sistema al linealizar las ecuaciones del enfriador, condensador y evaporador.

En primer término se evalúa las ecuaciones dinámicas del evaporador, condensador y enfriador con los valores de las condiciones de operación, que permita establecer el orden de las variables que intervienen, y así poder obtener las condiciones de linealidad y los puntos de estabilidad del sistema, asimismo, se utilizan las series de Taylor para obtener las ecuaciones diferenciales lineales.

Existen diversas teorías de control que se pueden aplicar a la respuesta de un sistema dinámico y una alternativa viable para modelos matemáticos lineales es el PID del control clásico. El método de control clásico PID aplicado a modelos lineales, se basa en obtener una solución de la E.D.O., en el dominio de la variable compleja “s”, también llamada función de transferencia, esto se realiza aplicando el método de la transformada de Laplace.

### 3.2.1. Evaporador

Para obtener la ecuación lineal del evaporador, ecuación (2.27), se evaluán las condiciones de operación y se observa que el término  $\gamma_\varepsilon$  es mucho menor al valor numérico de  $(x-1)\alpha\gamma + 1$ ; por consiguiente, para la primera parte del modelo lineal no se considera este término. Aplicando entonces la linealización, mediante el empleo de la serie de Taylor se obtiene la misma expresión de la E.D.O de primer orden,

$$\frac{d\theta_{E_0}}{d\tau} + ((x-1)\alpha\gamma + 1)\theta_{E_0} = -(x-1)(1-\alpha) \quad . \quad (3.1)$$

Aplicando la transformada de Laplace para encontrar la función de transferencia en el dominio de la variable compleja “s”, se obtiene la siguiente ecuación,

$$s \theta_{E_0}(s) + \theta_{E_0}(0) + ((x-1)\alpha\gamma + 1)\theta_{E_0}(s) = -(x-1)(1-\alpha)\frac{1}{s} \quad (3.2)$$

Para una condición inicial de  $\theta_{E_0}(0) = 0$ , se tiene que la función de transferencia del evaporador esta determinada por la siguiente ecuación,

$$\theta_{E_0}(s) = \frac{(1-x)(1-\alpha)}{s[s + ((x-1)\alpha\gamma + 1)]} \quad (3.3)$$

### 3.2.2 Condensador

La ecuación diferencial (2.70), que modela el comportamiento dinámico del condensador, al evaluar las condiciones de operación, se tiene que la constante  $\beta_{\varepsilon 2} \ll \beta_{\varepsilon 1}$ ; por consiguiente, este termino no se considera para el modelo lineal. De esta manera se tiene que,

$$\lambda(1-\gamma\theta_E) \left( \left( \frac{\varepsilon_2}{(1-\gamma\theta_E)} + \varepsilon_3(1-\gamma\theta_E) + \varepsilon_4 \right)^{\frac{k-1}{k}} - 1 \right) + (1-x)(1-\alpha(1-\gamma\theta_E)) - \beta_{\varepsilon 1}\theta_{Cond} = \frac{d\theta_{Cond}}{d\tau} \quad (3.4)$$

Aplicando la serie de Taylor, al término de la relación de presiones se tiene

$$\left( \left( \frac{\varepsilon_2}{(1-\gamma\theta_E)} + \varepsilon_3(1-\gamma\theta_E) + \varepsilon_4 \right)^{\frac{k-1}{k}} - 1 \right) = \left( (1+\gamma\theta_{E_0}) \left( \varepsilon_2 + \varepsilon_3(1-\gamma\theta_{E_0}) \right) + \varepsilon_4 \right)^{\frac{k-1}{k}} - 1, \quad (3.5)$$

y desarrollando los términos

$$\left( (1+\gamma\theta_{E_0}) \left( \varepsilon_2 + \varepsilon_3 \right) - 2\gamma\varepsilon_3\theta_{E_0} - \gamma^2\varepsilon_3\theta_{E_0}^2 + \gamma^3\varepsilon_3\theta_{E_0}^3 + \varepsilon_4 \right)^{\frac{k-1}{k}} - 1 \quad ; \quad (3.6)$$

El valor de  $\gamma^2$  y  $\gamma^3$  son valores que tienden a cero, por consiguiente se tiene la siguiente expresión,

y aplicando las series de Taylor para el exponente, se tiene que

$$\left( \left( \frac{\varepsilon_2}{(1-\gamma\theta_E)} + \varepsilon_3(1-\gamma\theta_E) + \varepsilon_4 \right)^{\frac{k-1}{k}} - 1 \right) = \left( (\varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4)^{\frac{k-1}{k}} - 1 \right) + \frac{k-1}{k} \frac{(\varepsilon_2 - \varepsilon_3)}{(\varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4)^{\frac{1}{k}}} \gamma\theta_{E_0} .$$

(3.7)

Realizando procedimientos algebraicos para agrupar términos semejantes y sustituyendo la ecuación (3.7) en la ecuación (3.4), se tiene la siguiente ecuación diferencial lineal de primer orden,

$$\frac{d\theta_{Cond_0}}{d\tau} + \beta_{\varepsilon_1}\theta_{Cond_0} = \left( \lambda \left( \frac{k-1}{k} \frac{(\varepsilon_2 - \varepsilon_3)}{(\varepsilon_3 + \varepsilon_2 + \varepsilon_4)^{\frac{1}{k}}} - \left( (\varepsilon_3 + \varepsilon_2 + \varepsilon_4)^{\frac{k-1}{k}} - 1 \right) \right) + \alpha(1-x) \right) \gamma\theta_{E_0} + \lambda \left( (\varepsilon_3 + \varepsilon_2 + \varepsilon_4)^{\frac{k-1}{k}} - 1 \right) + (1-x)(1-\alpha) .$$

(3.8)

Al aplicar también la transformada de Laplace se obtiene la siguiente ecuación

$$s\theta_{Cond_0}(s) + \beta_{\varepsilon_1}\theta_{Cond_0}(s) = \left[ \lambda \left( (\varepsilon_3 + \varepsilon_2 + \varepsilon_4)^{\frac{k-1}{k}} - 1 \right) + (1-x)(1-\alpha) \right] \frac{1}{s} + \left( \lambda \left( \frac{k-1}{k} \frac{(\varepsilon_2 - \varepsilon_3)}{(\varepsilon_3 + \varepsilon_2 + \varepsilon_4)^{\frac{1}{k}}} - \left( (\varepsilon_3 + \varepsilon_2 + \varepsilon_4)^{\frac{k-1}{k}} - 1 \right) \right) + \alpha(1-x) \right) \gamma\theta_{E_0}(s) ,$$

(3.9)

donde  $\theta_{E_0}(s)$  es la función de transferencia del evaporador, dada por la ecuación (3.3), y sustituyendo en la ecuación (3.9), la función de transferencia para el condensador es la siguiente

$$\theta_{Cond_0}(s) = \frac{\left[ \lambda \left( (\varepsilon_3 + \varepsilon_2 + \varepsilon_4)^{\frac{k-1}{k}} - 1 \right) + (1-x)(1-\alpha) \right] ((x-1)\alpha\gamma + 1) + A_0(x-1)(1-\alpha)}{s(s + \beta_{\varepsilon_1})(s + ((x-1)\alpha\gamma + 1))} + \frac{\left[ \lambda \left( (\varepsilon_3 + \varepsilon_2 + \varepsilon_4)^{\frac{k-1}{k}} - 1 \right) + (1-x)(1-\alpha) \right] s}{s(s + \beta_{\varepsilon_1})(s + ((x-1)\alpha\gamma + 1))} ; \quad (3.10)$$

donde

$$A_0 = \left( \lambda \left( \frac{k-1}{k} \frac{(\varepsilon_2 - \varepsilon_3)}{(\varepsilon_3 + \varepsilon_2 + \varepsilon_4)^{\frac{1}{k}}} - \left( (\varepsilon_3 + \varepsilon_2 + \varepsilon_4)^{\frac{k-1}{k}} - 1 \right) \right) + \alpha(1-x) \right) \gamma . \quad (3.11)$$

### 3.2.3 Enfriador

Para la ecuación (2.116) correspondiente al enfriador que opera a condiciones supercríticas, se utilizan también las series de Taylor para linealizar la ecuación. De igual forma, al evaluar las condiciones de operación, los términos  $\beta_{x2}$  y  $\beta_{x3} \lll 1$  y  $e_{01} \lll 1$ . La capacidad específica de calor del CO<sub>2</sub> tiene un comportamiento no lineal; sin embargo, en el rango en que opera el sistema de refrigeración, el comportamiento se aproxima a un comportamiento lineal; es decir, al sistema se le puede establecer con un rango máximo de oscilación de la temperatura antes de que el valor de  $e_{01}$  sea significativo, esto es sobre amortiguando la respuesta del sistema y de esta manera podemos escribir,

$$\frac{y_{05}}{(y_{06} + \theta_{enf})} \left( \left( \left( \frac{\varepsilon_2}{(1-\gamma\theta_E)} + \varepsilon_3(1-\gamma\theta_E) + \varepsilon_4 \right)^{\frac{k-1}{k}} - 1 \right) (1-\gamma\theta_E) y_{08} + (1-x)(1-\alpha(1-\gamma\theta_E)) - \beta_{x1}\theta_{enf} - \beta_{x2}\theta_{enf}^2 \right) = \frac{d\theta_{enf}}{d\tau} \quad (3.12)$$

y utilizando la relación de presiones linealizada de la ecuación (3.7), y aplicando las series de Taylor se encuentra la siguiente E.D.O:

$$\begin{aligned} & \left( (\varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4)^{\frac{k-1}{k}} - 1 + (1-x)(1-\alpha) \right) \frac{y_{05}}{y_{06}} - \frac{y_{05}}{y_{06}^2} \left[ \beta_{x1} y_{06} + (\varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4)^{\frac{k-1}{k}} - 1 + (1-x)(1-\alpha) \right] \theta_{enf_0} \\ & - \left[ \left( (\varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4)^{\frac{k-1}{k}} - 1 - \frac{k-1}{k} \frac{(\varepsilon_2 - \varepsilon_3)}{(\varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4)^{\frac{1}{k}}} \right) y_{08} - \alpha(1-x) \right] \frac{y_{05}}{y_{06}} \gamma \theta_{E_0} = \frac{d \theta_{enf_0}}{d \tau} . \end{aligned} \quad (3.13)$$

Al aplicar la transformada de Laplace se obtiene la siguiente ecuación

$$\begin{aligned} & \left( (\varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4)^{\frac{k-1}{k}} - 1 + (1-x)(1-\alpha) \right) \frac{y_{05}}{y_{06}} \frac{1}{s} - \frac{y_{05}}{y_{06}^2} \left[ \beta_{x1} y_{06} + (\varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4)^{\frac{k-1}{k}} - 1 + (1-x)(1-\alpha) \right] \theta_{enf_0}(s) \\ & - \left[ \left( (\varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4)^{\frac{k-1}{k}} - 1 - \frac{k-1}{k} \frac{(\varepsilon_2 - \varepsilon_3)}{(\varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4)^{\frac{1}{k}}} \right) y_{08} - \alpha(1-x) \right] \frac{y_{05}}{y_{06}} \gamma \theta_{E_0}(s) = s \theta_{enf_0}(s) , \end{aligned} \quad (3.14)$$

donde  $\theta_{E_0}(s)$  es la función de transferencia del evaporador, dada por la ecuación (3.3).

Sustituyendola en la ecuación (3.14), la función de transferencia para el enfriador es la siguiente

$$\theta_{enf}(s) = \frac{A_1((x-1)\alpha\gamma + 1) + A_2(x-1)(1-\alpha) + A_1s}{s(s + A_3)(s + ((x-1)\alpha\gamma + 1))} , \quad (3.15)$$

con

$$A_1 = \left[ (\varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4)^{\frac{k-1}{k}} - 1 + (1-x)(1-\alpha) \right] \frac{y_{05}}{y_{06}} , \quad (3.16)$$

$$A_2 = \left[ \left\{ \left( \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4 \right)^{(k-1)/k} - 1 - \frac{(k-1)}{k} \frac{(\varepsilon_2 - \varepsilon_3)}{(\varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4)^{1/k}} \right\} y_{08} - \alpha(1-x) \right] \frac{y_{05}}{y_{06}} \gamma \quad (3.17)$$

y

$$A_3 = \left[ \left( \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4 \right)^{(k-1)/k} - 1 + (1-x)(1-\alpha) + y_{06} \beta_1 \right] \frac{y_{05}}{y_{06}^2} \quad (3.18)$$

### 3.3 Control Lineal PID

Para calcular las constantes de control proporcional, integral y derivativa,  $k_p$ ,  $k_i$  y  $k_d$ ; se utiliza el método de asignación de polos para asegurar la estabilidad de la respuesta del sistema. Este procedimiento asegura que las raíces de la función de transferencia se ubiquen en la región de estabilidad [24, 30, 36, 37].

Con base a la teoría del control clásico se obtiene la relación de la función de entrada y salida para el evaporador, la representación de las constantes de integración y derivación,  $k_i$  y  $k_d$  se hacen en función de los tiempos de integración, derivación  $t_i$  y  $t_d$ , y de la constante proporcional,  $k_p$ , para poder aplicar el método de asignación de polos.

La ecuación (3.19) representa la dinámica de la entrada actuando sobre los parámetros de la misma para producir la respuesta  $E(s)$ ; es decir, es la representación matemática de la planta del sistema de la Figura 3.1.

$$\frac{U(s)}{E(s)} = \frac{G_0(s)}{1+G_0(s)} = \frac{k_p \left( \frac{t_i s + 1 + t_i t_d s^2}{t_i s} \right) \frac{-(x-1)(1-\alpha)}{[s^2 + ((x-1)\alpha\gamma + 1)s]}}{1 + k_p \left( \frac{t_i s + 1 + t_i t_d s^2}{t_i s} \right) \frac{-(x-1)(1-\alpha)}{[s^2 + ((x-1)\alpha\gamma + 1)s]}} \quad (3.19)$$

El metodo de asignación consiste en trabajar con el denominador de la ecuación, para encontrar encontrar los valores de las constantes de proporcionalidad, de integración y de derivación. El polinomio del denominador se iguala con el polinomio conocido con raices negativas que lleve a la zona de estabilidad, de acuerdo con el criterio de Routh Hurwitz [24, 30, 36, 37].

Los valores de las constantes de control en conjunto con la función de transferencia del evaporador,  $\theta_{E_0}(s)$ , se evaluan en el diagrama del control a lazo cerrado PID de la Figura 3.1, generado en Simulink de Matlab. La señal de entrada propuesta es de tipo escalon unitario ya que es fácil de generar y suficientemente drástica para ejemplificar la variación de temperatura.

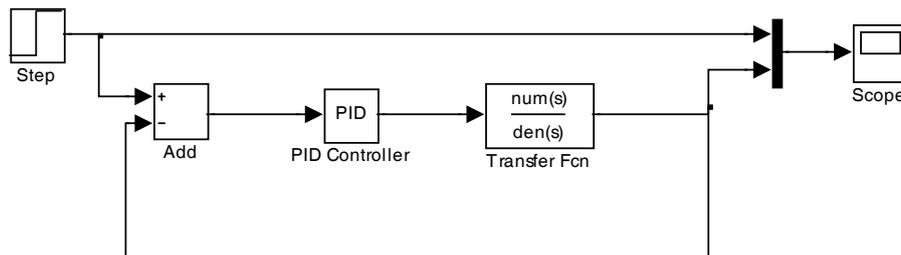


Figura 3.1. Diagrama a bloques de la planta en Simulink de Matlab.

Realizando el procedimiento algebraico, se obtiene la ecuación (3.20)

$$\frac{U(s)}{E(s)} = \frac{\frac{1}{t_i} k_p (1-x)(1-\alpha)(t_i s + 1 + t_i t_d s^2)}{s \left[ s^2 + ((x-1)\alpha\gamma + 1)s \right] + k_p (1-x)(1-\alpha) \left( s + \frac{1}{t_i} + t_d s^2 \right)} \quad (3.20)$$

El método de asignación de polos trabaja con base al denominador de la ecuación (3.20), asignando un polinomio de raíces conocidas del mismo orden, ecuación (3.21), esto es:

$$s^3 + (((x-1)\alpha\gamma + 1) + k_p (1-x)(1-\alpha)t_d)s^2 + k_p (1-x)(1-\alpha)s + \frac{k_p (1-x)(1-\alpha)}{t_i} = s^3 + 3s^2 + 3s + 1 \quad (3.21)$$

y de esta manera se obtienen tres ecuaciones de orden  $s^2$ ,  $s^1$  y  $s^0$ ,

$$\left( ((x-1)\alpha\gamma + 1) + k_p(1-x)(1-\alpha)t_d \right) s^2 = 3s^2 \quad , \quad (3.22)$$

$$k_p(1-x)(1-\alpha)s = 3s \quad , \quad (3.23)$$

y

$$\frac{k_p(1-x)(1-\alpha)}{t_i} = 1 \quad . \quad (3.24)$$

Con base en las ecuaciones (3.22), (3.23) y (3.24) se obtienen las constantes  $k_p$ ,  $k_i$  y  $k_d$  del evaporador,

$$k_p = \frac{3}{(1-x)(1-\alpha)} \quad , \quad (3.25)$$

$$k_i = \frac{k_p}{t_i} = \frac{1}{(1-x)(1-\alpha)} \quad (3.26)$$

y

$$k_d = t_d k_p = \frac{1}{(1-x)(1-\alpha)} - \frac{3((x-1)\alpha\gamma + 1)}{(1-x)(1-\alpha)} \quad . \quad (3.27)$$

Siguiendo el mismo procedimiento matemático se aplica la metodología del metodo de asignación de polos a la ecuación (3.10), se obtienen las constantes para el condensador

$$k_p = \frac{4}{\frac{\left[ \lambda \left( (\varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4)^{\frac{k-1}{k}} - 1 \right) + (1-x)(1-\alpha) \right] \left[ ((x-1)\alpha\gamma + 1) + A_0(x-1)(1-\alpha) \right]}{\lambda \left( (\varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4)^{\frac{k-1}{k}} - 1 \right) + (1-x)(1-\alpha)} \cdot \frac{1}{\left( \left[ \lambda \left( (\varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4)^{\frac{k-1}{k}} - 1 \right) + (1-x)(1-\alpha) \right] \left[ ((x-1)\alpha\gamma + 1) + A_0(x-1)(1-\alpha) \right] \right)^2}} \quad , \quad (3.28)$$

$$k_i = \frac{1}{\left[ \lambda \left( (\varepsilon_3 + \varepsilon_2 + \varepsilon_4)^{\frac{k-1}{k}} - 1 \right) + (1-x)(1-\alpha) \right] \left[ ((x-1)\alpha\gamma + 1) + A_0(x-1)(1-\alpha) \right]} \quad (3.29)$$

y

$$k_d = \frac{4 - \left[ ((x-1)\alpha\gamma + 1) + \beta_{\varepsilon_1} \right]}{\left[ \lambda \left( (\varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4)^{\frac{k-1}{k}} - 1 \right) + (1-x)(1-\alpha) \right]} \quad (3.30)$$

Realizando el mismo procedimiento matemático se obtienen las constantes para el enfriador, el polinomio deseado para encontrar las constantes es de cuarto orden. El método de control PID se aplica de forma similar al enfriador sustituyendo su respectiva función de transferencia en el dominio de la variable  $s$ , es decir,  $\theta_{enf_0}(s)$ , y las constantes de control,  $k_p$ ,  $k_i$  y  $k_d$  en el diagrama de la Figura 3.1.

Las constantes para el enfriador serían:

$$k_p = \frac{4 - \frac{A_1}{A_1((x-1)\alpha\gamma + 1) + A_2(x-1)(1-\alpha)}}{A_1((x-1)\alpha\gamma + 1) + A_2(x-1)(1-\alpha)} \quad (3.31)$$

$$k_i = \frac{1}{A_1((x-1)\alpha\gamma + 1) + A_2(x-1)(1-\alpha)} \quad (3.32)$$

y

$$k_d = \frac{4 - \left( ((1-x)\alpha\gamma + 1) + A_3 \right)}{A_1} \quad (3.33)$$

En la Tabla 3.1 y 3.2 se muestran las constantes  $k_p$ ,  $k_i$  y  $k_d$  para el sistema de refrigeración a condiciones subcríticas y supercríticas evaluadas con las condiciones establecidas en las Tablas 2.1, 2.2 y 2.3.

Tabla 3.1. Constantes de control PID para el sistema de refrigeración con CO<sub>2</sub> a condiciones subcríticas.

<b>Constantes</b>	<b>Evaporador</b>	<b>Condensador</b>
<b><math>k_p</math></b>	24.69	24.64
<b><math>k_i</math></b>	8.23	8.24
<b><math>k_d</math></b>	16.49	5.91

Tabla 3.2. Constantes de control PID para el sistema de refrigeración con CO<sub>2</sub> a condiciones supercríticas.

<b>Constantes</b>	<b>Evaporador</b>	<b>Enfriador</b>
<b><math>k_p</math></b>	25.47	30.87
<b><math>k_i</math></b>	8.49	10.29
<b><math>k_d</math></b>	17.04	23.57

### 3.4 Control no lineal

Al linealizar las ecuaciones dinámicas del sistema de refrigeración, es necesario ignorar ciertas no linealidades del sistema y sí los efectos que estas propiedades o características ignoradas tienen sobre la respuesta son pequeños, se puede decir que el modelo matemático establece una buena precisión de la dinámica del sistema. Para establecer la influencia de las no linealidades en

el sistema de refrigeración se plantea el control PID con base a la simulación de las respuestas de las ecuaciones diferenciales no lineales.

La estabilidad de las respuestas del evaporador y del enfriador depende de las características de los modelos no lineales y para establecer un estado estable y permanente se propone someterlo a una compensación de control PID [24, 30, 36, 37]. Para realizar el comparativo con la parte lineal, se utilizarán las constantes  $k_p$ ,  $k_i$  y  $k_d$ , obtenidas para los modelos lineales, Tabla 3.1 y 3.2. La planta del sistema del evaporador y enfriador se genera con base a la solución de las ecuaciones diferenciales utilizando la plataforma computacional de Simulink de Matlab.

Esta forma de solución propuesta para la parte no lineal se hace, debido a que el análisis numérico de la respuesta del evaporador y enfriador tiende a la estabilidad en un tiempo determinado, independiente de las condiciones iniciales propuestas para su solución, lo que establece la característica más importante del comportamiento dinámico de un sistema que es la estabilidad global y de atracción de soluciones, generando soluciones acotadas, tal como lo establece el Teorema del valor límite aplicado a la respuesta del sistema [24, 30, 36, 37]. En consecuencia, se aplica el control PID con base a la solución de las ecuaciones diferenciales del evaporador, condensador y enfriador.

La ecuación del evaporador con la compensación de control PID se representa por la siguiente expresión,

$$\frac{d\theta_E}{d\tau} - \gamma_\epsilon \theta_E^2 + ((x-1)\alpha\gamma + 1)\theta_E + (x-1)(1-\alpha) - K_p\theta_E - K_d\dot{\theta}_E - K_i \int \theta_E d\tau = 0 \quad (3.34)$$

Para el condensador, la ecuación diferencial no lineal aplicando la compensación PID, es:

$$\begin{aligned} \frac{d\theta_{Cond}}{d\tau} - \lambda(1-\gamma\theta_E) \left( \left( \frac{\varepsilon_2}{(1-\gamma\theta_E)} + \varepsilon_3(1-\gamma\theta_E) + \varepsilon_4 \right)^{\frac{k-1}{k}} - 1 \right) - (1-x)(1-\alpha(1-\gamma\theta_E)) + \beta_{\varepsilon_1}\theta_{Cond} + \beta_{\varepsilon_2}\theta_{Cond}^2 \\ - K_p\theta_{Cond} - K_d\dot{\theta}_{Cond} - K_i\int\theta_{Cond}d\tau = 0 \end{aligned} \quad (3.35)$$

La ecuación diferencial no lineal del enfriador, aplicando la compensación PID, es:

$$\begin{aligned} \frac{d\theta_{enf}}{d\tau} - \frac{y_{05}}{(y_{06} + \theta_{enf}) \left[ 1 + y_{07}e_{01} e^{-y_{03}\theta_{enf}} e^{-y_{04}\theta_{enf}^2} \right]} \left( \left( \frac{\varepsilon_2}{(1-\gamma\theta_E)} + \varepsilon_3(1-\gamma\theta_E) + \varepsilon_4 \right)^{\frac{k-1}{k}} - 1 \right) (1-\gamma\theta_E) \\ \left( y_{08} + y_{09}e_{01} e^{-y_{03}\theta_{enf}} e^{-y_{04}\theta_{enf}^2} \right) + (1-x)(1-\alpha(1-\gamma\theta_E)) \\ - (\beta_{x1} + \beta_{x2}\theta_{enf} + \beta_{x3}\theta_{enf}^2) \theta_{enf} \\ - K_p\theta_{enf} - K_d\dot{\theta}_{enf} - K_i\int\theta_{enf}d\tau = 0 \end{aligned} \quad (3.36)$$

En la Figura 3.2 se muestra la planta del evaporador, ecuación (3.34). El bloque ODE, representa la suma de los términos de la ecuación diferencial ordinaria más la compensación del control PID y PID control suma la acción del control proporcional, integral y derivativo. El término  $u^2$  representa el orden del término no lineal.

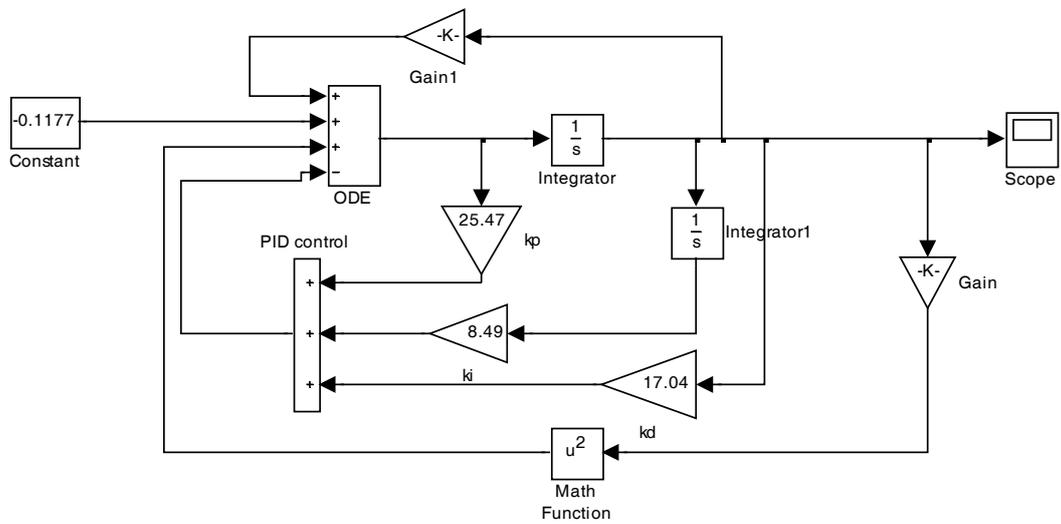


Figura 3.2. Diagrama la planta con control PID del evaporador.

La Figura 3.3 representa el diagrama a bloques de la ecuación del condensador (3.35). Tiene una estructura en el diagrama a bloques análoga al del evaporador ya que ambas ecuaciones contienen un exponente al cuadrado de la variable.

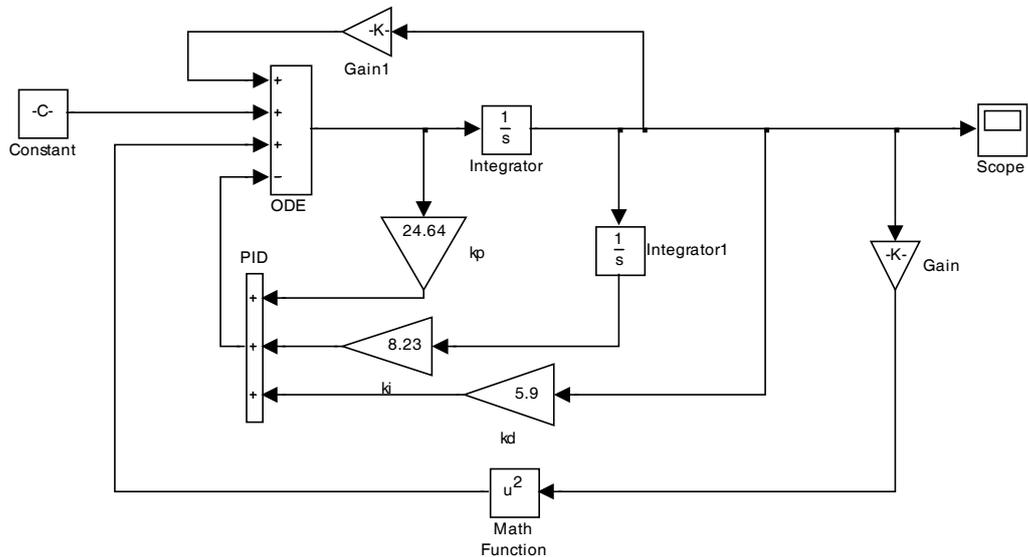


Figura 3.3. Diagrama del control PID del condensador.

En la Figura 3.4 se muestra la planta con control PID del enfriador. El término de la EDO es un cociente de dos funciones, definidas en el diagrama como numerador,  $u(1)$  y denominador,  $u(2)$ . El término cúbico está representado por la función  $u \cdot u \cdot u$  y las funciones exponenciales están agrupadas en los bloques  $f(u)$ . El control PID se encuentra ubicado en el bloque superior de la Figura 9. Las constantes  $k_p$ ,  $k_i$  y  $k_d$  son los valores obtenidos con la metodología lineal.

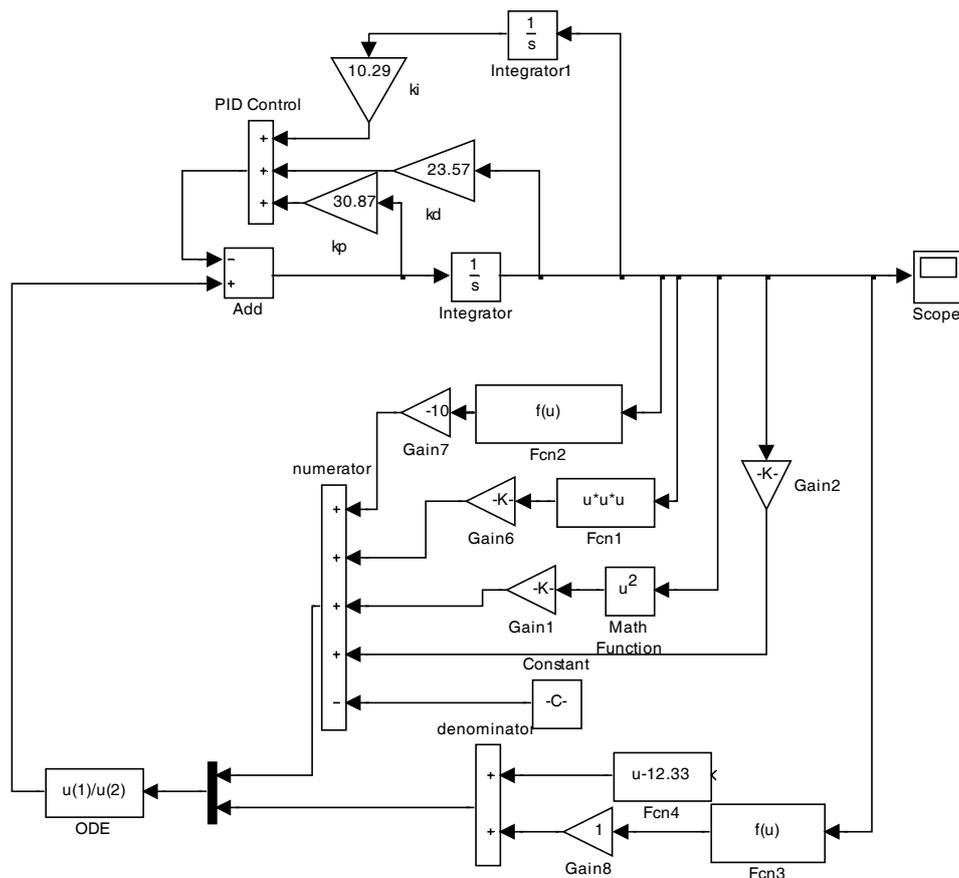


Figura 3.4. Diagrama de la planta con control PID para enfriador.

En el diagrama de la Figura (3.1), (3.2) y (3.3) se observa que la ecuación diferencial pasa de primer orden a una de segundo orden, debido al efecto de dos integradores que actúan sobre la variable,  $\theta_E$ ,  $\theta_{Cond}$  y  $\theta_{enf}$ . El incremento del orden de la ecuación diferencial que define a la

planta, genera un efecto de aceleración de la respuesta. Este cambio de orden se puede evitar si en lugar de proponer un control PID se utilizará un PD.

### **3.5 Resultados Control Lineal**

La simulación se realiza considerando los datos de operación propuestos en las Tablas 2 y 3. Así mismo, se evalúa el comportamiento de la respuesta del sistema lineal y no lineal variando los parámetros adimensionales que contribuyen en mayor proporción en la operación del sistema. Esta se realiza utilizando como base a las constantes de control  $k_p$ ,  $k_d$  y  $k_i$ , obtenidas para el sistema de refrigeración con CO<sub>2</sub> lineal, que se muestran en la Tabla 4.

#### **3.5.1 Evaporador: Estado subcrítico y supercrítico**

La respuesta del evaporador,  $\theta_E$ , se muestra en la Figura 3.5. La respuesta de la temperatura del evaporador tiende a la mejor estabilidad con las constantes de control  $k_p=25.47$ ,  $k_i=8.49$  y  $k_d=17.02$ ; obtenidas por el método de asignación de polos, con un sobretiro del 20% con respecto a la señal de referencia y un tiempo de asentamiento de  $\tau=12$ .

Al probar un control proporcional se tiene que la constante de proporcionalidad es una tercera parte de la  $k_p$  obtenida para un control PID, es decir, de 8.49, al proponer que las constantes sean iguales a este valor,  $k_p=8.49$ ,  $k_i=8.49$  y  $k_d=8.49$ , se observa que el sistema es muy inestable, con un sobretiro 48% mayor comparada con la mejor respuesta, además de presentar oscilaciones que no permiten asegurar la estabilidad del sistema. Considerando que el esfuerzo de control para alcanzar la mejor estabilidad del sistema se disminuyera, al tomar un tercio de la magnitud de las constantes, se tienen los valores  $k_p=8.49$ ,  $k_i=2.83$  y  $k_d=5.67$ , aunque la respuesta del sistema también alcanza la estabilidad con un  $\tau=15$  presenta un sobretiro del 40% con relación a la señal

de referencia, que representaría un menor esfuerzo de control pero un mayor desgaste en los componentes del evaporador ocasionado por el sobretiro.

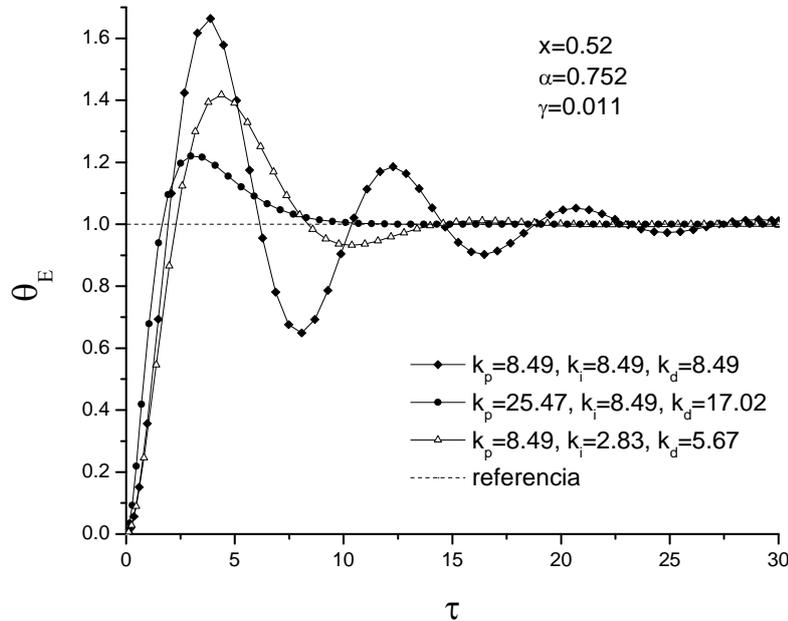


Figura 3.5. Respuesta del control PID para la temperatura del evaporador a diferentes constantes  $k_p$ ,  $k_i$  y  $k_d$ .

La calidad del vapor a la entrada del evaporador de acuerdo a las condiciones de operación debe ser de 0.52, cuando la estrangulación procede del régimen supercrítico. El comportamiento de la respuesta del control PID se muestra en la Figura 3.6 para esta calidad. También se muestra que la estabilidad de la respuesta del sistema disminuye al incrementarse la calidad del vapor; es decir, al incrementarse la calidad del  $\text{CO}_2$  a la entrada del evaporador, el sobretiro se puede incrementar al doble de la operación requerida y también aumenta el tiempo de asentamiento, al mantener el control PID con las constantes  $k_p=25.47$ ,  $k_i=8.49$  y  $k_d=17.02$ . Esto se debe

principalmente a la disminución de la capacidad de enfriamiento del evaporador, debido al incremento de la fase de vapor en el flujo del refrigerante.

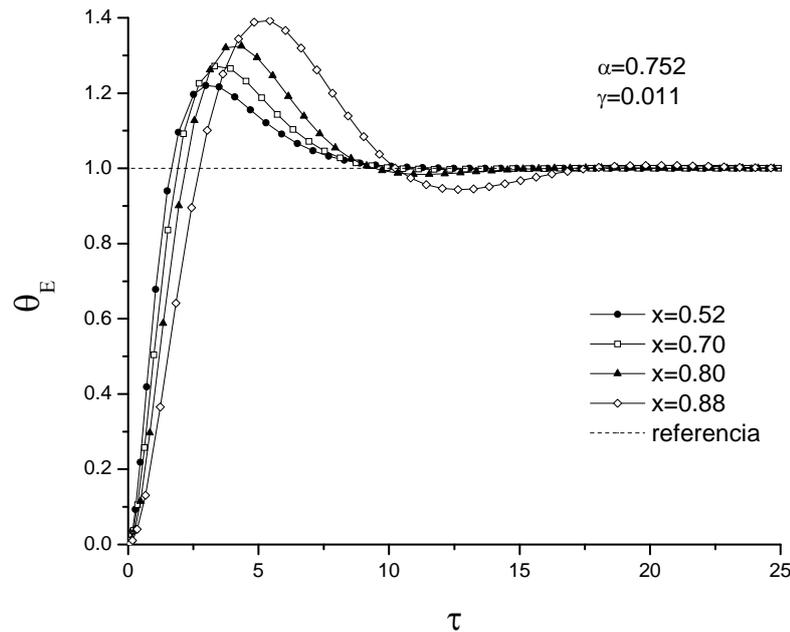


Figura 3.6. Respuesta del control PID para la temperatura del evaporador a diferente calidad del  $\text{CO}_2$  con constantes  $k_p=25.47$ ,  $k_i=8.49$  y  $k_d=17.02$ .

En la Figura 3.7 se muestra la respuesta del control PID para la temperatura del evaporador a diferente parámetros  $\alpha$  con constantes  $k_p=25.47$ ,  $k_i=8.49$  y  $k_d=17.02$ . Para las condiciones de operación del evaporador, la constante  $\alpha=0.752$ , este valor depende la temperatura del espacio a refrigerar. Al variar  $\alpha(T_{ER})$  dejando fija la calidad y  $\gamma$ , se observa que el sistema tiene una variación del sobretiro del  $\pm 2\%$ , con una ligera variación en el tiempo de asentamiento. Los

valores de  $\alpha(T_{ER})$  corresponden a un intervalo de temperatura del espacio a enfriamiento de  $-20$  a  $20^{\circ}\text{C}$ , que representan una refrigeración y acondicionamiento de aire.

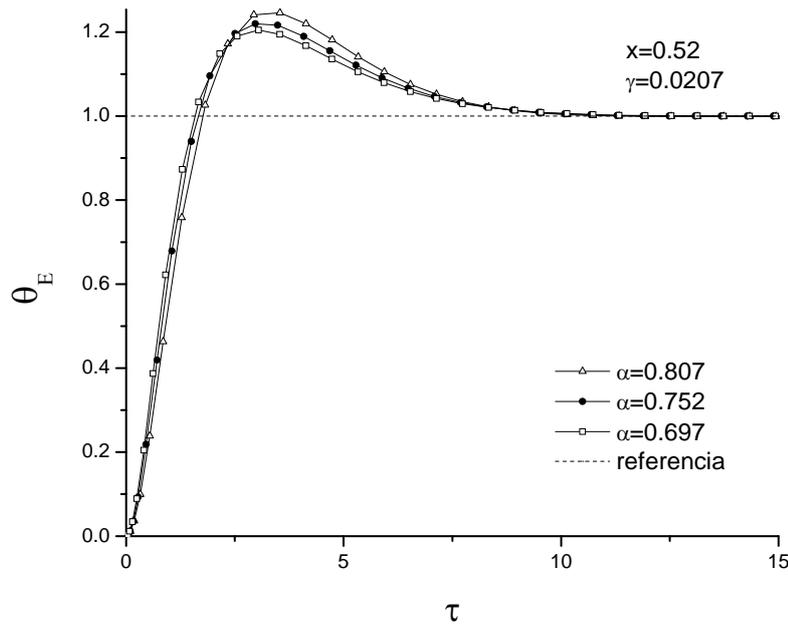


Figura 3.7. Respuesta del control PID para la temperatura del evaporador a diferentes parámetros  $\alpha$  con constantes  $k_p=25.47$ ,  $k_i=8.49$  y  $k_d=17.02$ .

### 3.5.2 Condensador: Estado Subcrítico

En el régimen subcrítico el ciclo de refrigeración rechaza el flujo de calor a través del condensador. En la Figura 3.8 se muestra la respuesta del control PID para la temperatura del condensador a diferentes constantes  $k_p$ ,  $k_i$  y  $k_d$ . La respuesta que se obtiene con las constantes calculadas por el método de asignación de polos,  $k_p=26.64$ ,  $k_i=8.24$  y  $k_d=5.91$ , resulta la mejor opción, debido a que la respuesta se estabiliza en un tiempo  $\tau=12$ , comparada con las otras opciones graficadas se obtiene que al reducir a la tercera parte las constantes, la  $k_d=1.96$ , no

disminuye los transitorios, ya que el valor de  $k_d$  calculado por el método de asignación de polos lo limita a un valor de 5.91. Por otra parte hacer constantes  $k_p=k_i=k_d= 8.21$  no resulta una buena opción ya que con estos valores se acerca la respuesta a los valores de su frecuencia natural, por consiguiente resulta demasiado oscilante.

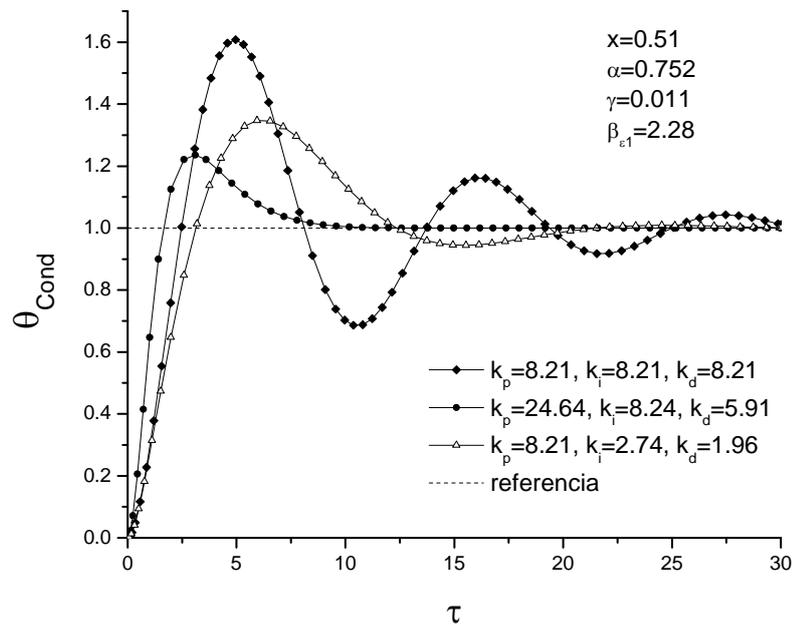


Figura 3.8. Respuesta del control PID para la temperatura del condensador a diferentes constantes  $k_p$ ,  $k_i$  y  $k_d$ .

En la Figura 3.9 se muestra la respuesta del control PID para la temperatura del condensador a diferente calidad del  $\text{CO}_2$  con constantes  $k_p=26.64$ ,  $k_i=8.24$  y  $k_d=5.91$ . La variación de la calidad sobre el control de la respuesta del condensador es más grande que la presentada por el evaporador. Los intervalos de los sobretiros al variar la calidad es similar a las observadas en el evaporador; sin embargo, el tiempo de estabilidad de la  $\theta_{\text{Cond}}$  aumenta considerablemente. Por ejemplo, para calidades mayores a 0.8, el tiempo de estabilidad es superior a  $\tau=25$ , también se

observa que los sobretiros se recorren haciendo más complicado el control de  $\theta_{\text{Cond}}$ . Es posible que este efecto se deba a que los intervalos de operación entre el evaporador y el condensador sea menor a  $50^{\circ}\text{C}$ , lo que ocasiona que inherentemente trascienda la variación de la calidad del vapor al condensador.

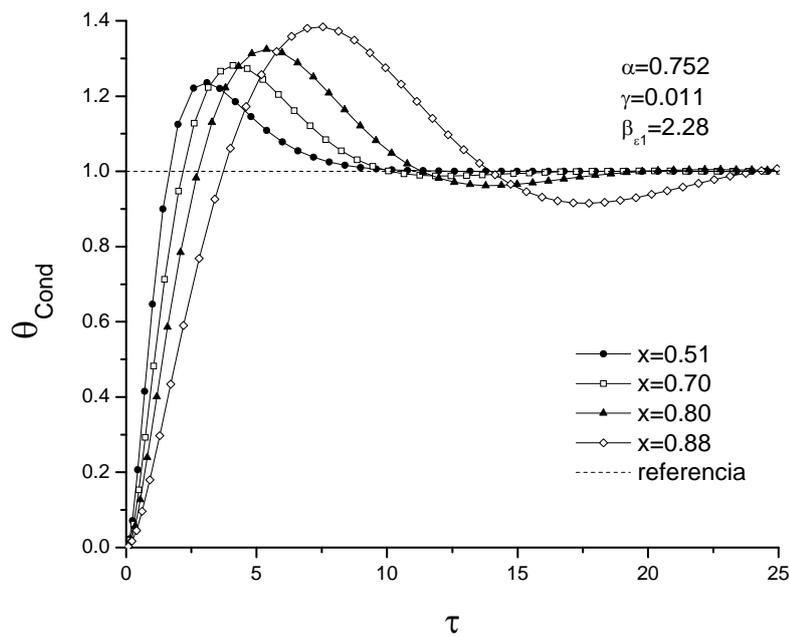


Figura 3.9. Respuesta del control PID para la temperatura del condensador a diferente calidad del  $\text{CO}_2$  con constantes  $k_p=26.64$ ,  $k_i=8.24$  y  $k_d=5.91$ .

La variación de los parámetros  $\alpha$  en el condensador incrementa al doble el porcentaje del sobretiro que ocasiona en la operación del evaporador; sin embargo, el tiempo de asentamiento de la señal no se ve afectado en un porcentaje mayor al 5%. En la Figura 3.10 se muestra la respuesta del control PID para la temperatura del condensador a diferentes parámetros  $\alpha$  del  $\text{CO}_2$  con constantes  $k_p=26.64$ ,  $k_i=8.24$  y  $k_d=5.91$ .

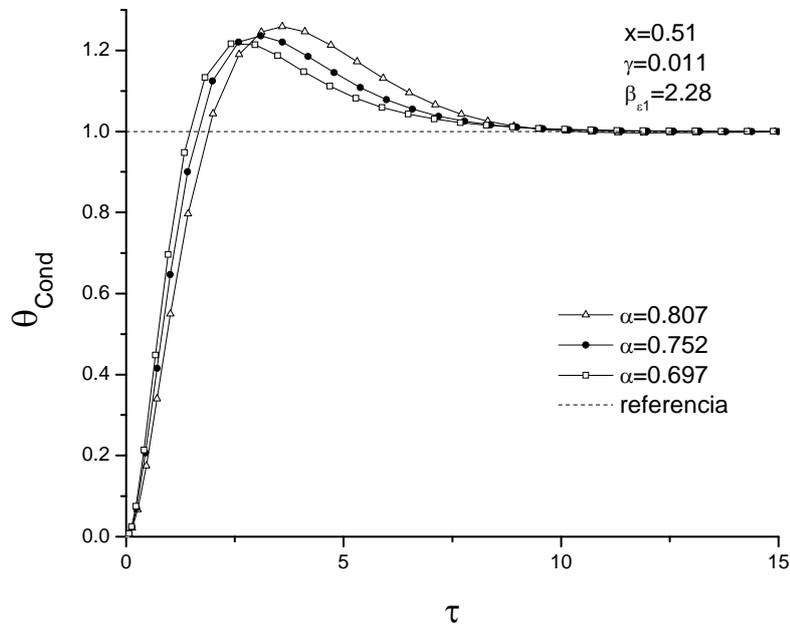


Figura 3.10. Respuesta del control PID para la temperatura del condensador a diferentes parámetros  $\alpha$  del  $\text{CO}_2$  con constantes  $k_p=26.64$ ,  $k_i=8.24$  y  $k_d=5.91$ .

En la Figura 3.11 se muestra la variación de  $\theta_{\text{Cond}}$  al variar el parámetro  $\beta_{\epsilon 1}$ . La variación del valor de  $\beta_{\epsilon 1}$  depende de la relación de los coeficientes globales de transferencia de calor del condensador y del evaporador y de sus respectivas áreas. Al variar  $\beta_{\epsilon 1}$  en un intervalo de 2.28 a 6.73 se observa que el sobretiro se recorre evitando que la estabilidad del sistema se alcance en menos de  $\tau=25$ . Este intervalo es representativo de un incremento de la temperatura ambiente de  $10^\circ\text{C}$ , o de la temperatura en la cámara fría de  $-20^\circ\text{C}$  o una variación de las áreas de los intercambiadores.

De acuerdo a este comportamiento de la respuesta del sistema se puede establecer que el sistema de refrigeración por compresión mecánica con CO<sub>2</sub> en régimen subcrítico para cargas de refrigeración grandes no es recomendable ya que sería más susceptible a presentar más daños en la operación.

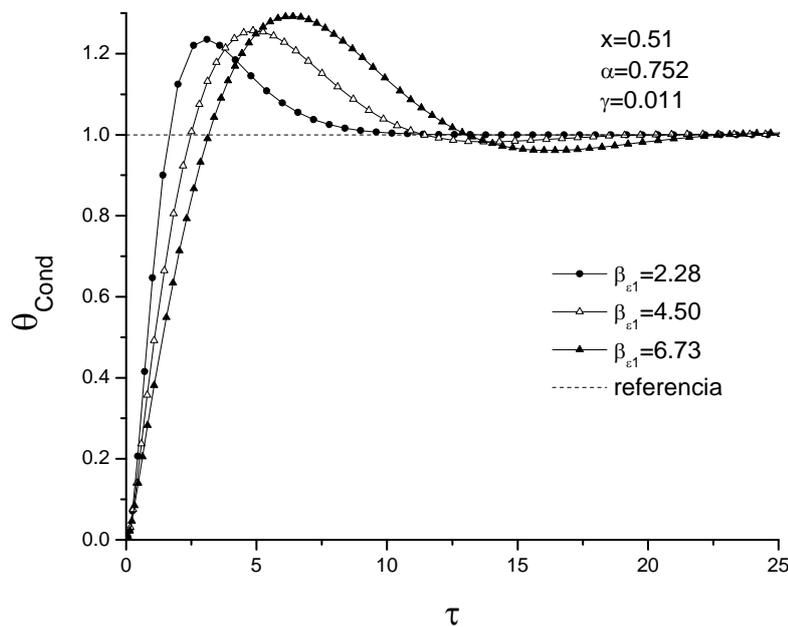


Figura 3.11. Respuesta del control PID para la temperatura del condensador a diferentes parámetros  $\beta_{x1}$  del CO<sub>2</sub> con constantes  $k_p=26.64$ ,  $k_i=8.24$  y  $k_d=5.91$ .

### 3.5.3 Enfriador: Estado Supercrítico

En la Figura 3.12 se muestra la respuesta del control PID para la temperatura del enfriador a diferentes constantes  $k_p$ ,  $k_i$  y  $k_d$ . La mejor respuesta del sistema se obtiene con las constantes de control  $k_p=30.87$ ,  $k_i=10.29$  y  $k_d=23.57$ , obtenidas por método de asignación de polos. Las constantes se incrementan en comparación a las obtenidas por el mismo método para el

evaporador, lo que implica un mayor esfuerzo de control; sin embargo, se consigue obtener el mismo comportamiento de la señal de respuesta. Al comparar esta respuesta con la obtenida con las constantes  $k_p=10.29$ ,  $k_i=10.29$  y  $k_d=10.29$ , se tiene un incremento del 48% en el sobretiro y un 20% mayor al compararla con la respuesta con las constantes  $k_p=10.29$ ,  $k_i=3.43$  y  $k_d=7.86$ .

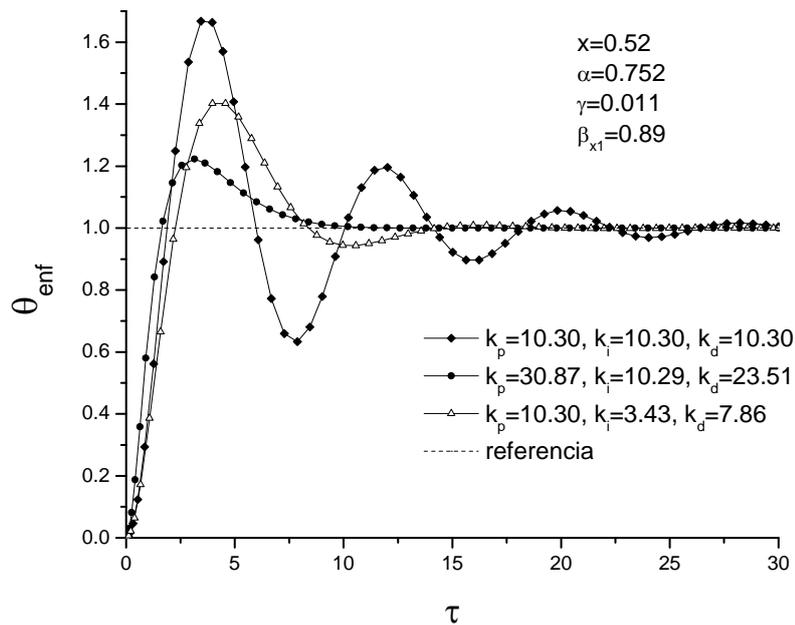


Figura 3.12. Respuesta del control PID para la temperatura del enfriador a diferentes constantes  $k_p$ ,  $k_i$  y  $k_d$ .

El comportamiento de la respuesta del control PID para la temperatura del enfriador a diferentes calidad del  $\text{CO}_2$  con constantes  $k_p=30.87$ ,  $k_i=10.29$  y  $k_d=23.57$ , es similar a la variación que presenta el evaporador al analizarlo en el mismo intervalo, esto se debe a que la variación de la calidad está determinada directamente por la temperatura de operación del enfriador. En la Figura 3.13 se muestra la respuesta del control PID para la temperatura del enfriador a diferente calidad del  $\text{CO}_2$  con constantes  $k_p=30.87$ ,  $k_i=10.29$  y  $k_d=23.57$ .

La respuesta del enfriador comparada con la del condensador al variar la calidad es menos drástica, debido a que el enfriador opera a una mayor temperatura de enfriamiento, disminuyendo los efectos de los transitorios; es decir, el control en el enfriador actúa mejor que en el condensador.

En la Figura 3.14 se muestra la respuesta del control PID para la temperatura del enfriador a diferentes parámetros  $\alpha$  con constantes  $k_p=30.87$ ,  $k_i=10.29$  y  $k_d=23.57$ . El comportamiento de la respuesta del enfriador difiere del evaporador para las condiciones de  $\alpha=0.807$  que corresponde a una temperatura de espacio a refrigerar de  $20^\circ\text{C}$ , este incremento del parámetro alfa aumenta en 9% el sobretiro con respecto a la operación de  $\alpha=0.752$ ; sin embargo, se puede apreciar que la señal de respuesta se estabiliza en el mismo tiempo,  $\tau$ .

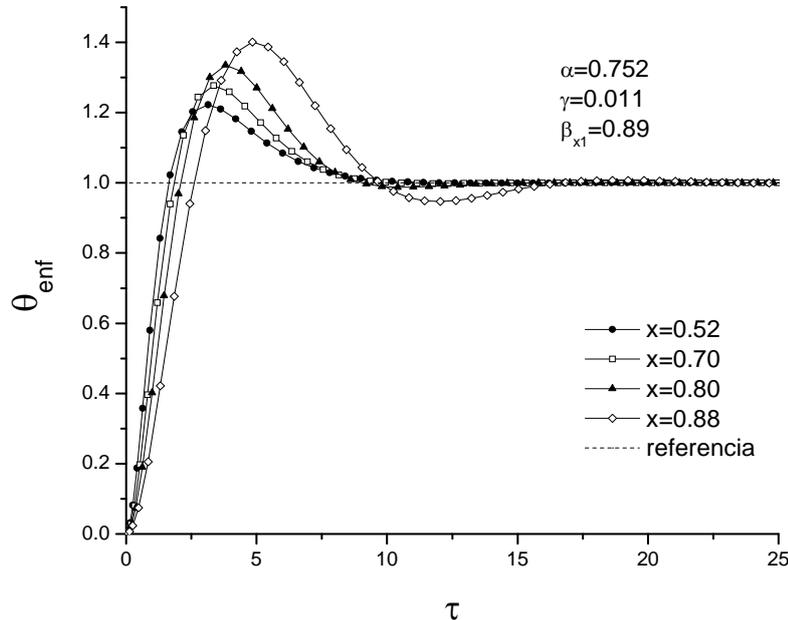


Figura 3.13. Respuesta del control PID para la temperatura del enfriador a diferente calidad del  $\text{CO}_2$  con constantes  $k_p=30.87$ ,  $k_i=10.29$  y  $k_d=23.57$ .

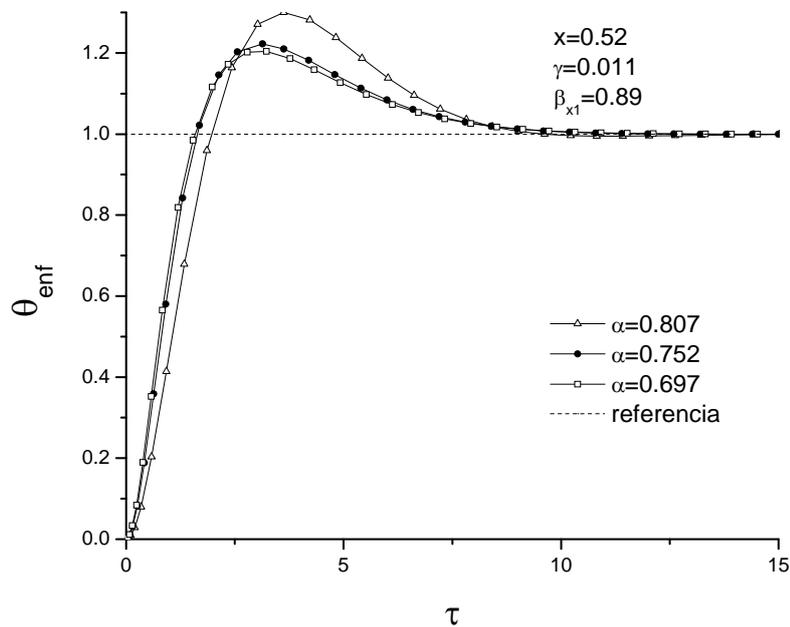


Figura 3.14. Respuesta del control PID para la temperatura del enfriador a diferentes parámetros  $\alpha$  con constantes  $k_p=30.87$ ,  $k_i=10.29$  y  $k_d=23.57$ .

En el enfriador el parámetro  $\beta_{x1}$  contribuye a incrementar el tiempo de asentamiento en el intervalo analizado, que corresponde a la variación de la temperatura ambiente de 31 a 40°C. Lo anterior se debe básicamente a la relación de los coeficientes globales de transferencia de calor; de igual forma, al aumentar la temperatura ambiente, la diferencia de temperatura con respecto a la condición de operación del enfriador disminuye, dificultando el retiro del flujo de calor hacia el exterior haciendo más inestable el sistema, Figura 3.15.

El coeficiente  $\beta_{x1}$  relaciona los coeficientes globales de transferencia de calor del enfriador y del evaporador y sus respectivas áreas, lo mismo que relaciona el coeficiente  $\beta_{\epsilon1}$  en el modelo del condensador; sin embargo, aunque el efecto de recorrer los sobretiros es el mismo, el control que

se aplica en el enfriador disminuye más los efectos de los transitorios, logrando la estabilidad de la respuesta más rápido, por consiguiente, el control de la  $\theta_{enf}$  ante la variación de la temperatura ambiente es mejor que el aplicado a  $\theta_{Cond}$ .

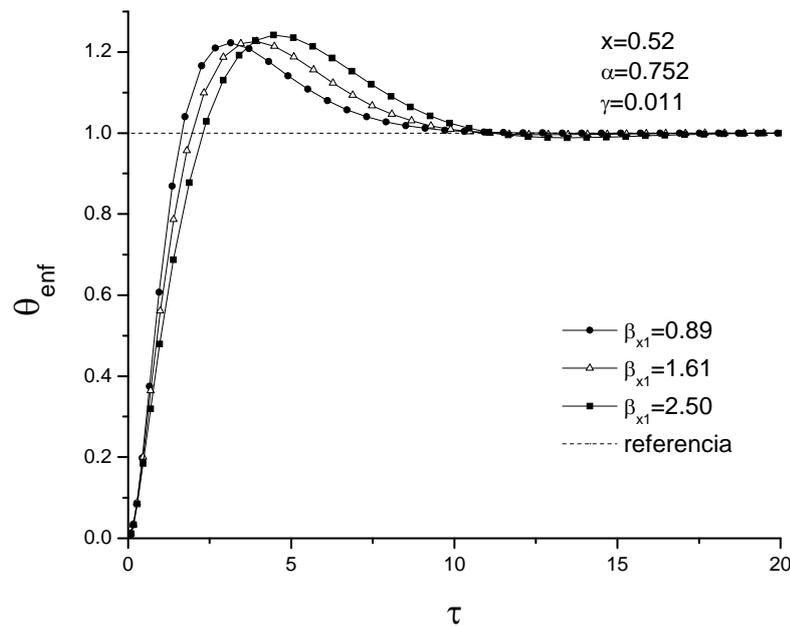


Figura 3.15. Respuesta del control PID para la temperatura del enfriador a diferentes parámetros  $\beta_{x1}$  con constantes  $k_p=30.87$ ,  $k_i=10.29$  y  $k_d=23.57$ .

### 3.6 Resultados Control no Lineal

El control no lineal del evaporador, condensador y enfriador se muestran en las Figuras 3.16 a la 3.27. La simulación se realiza con base a los mismos parámetros del control lineal. Las constantes de control PID,  $k_p$ ,  $k_i$  y  $k_d$ , que se utilizan para la simulación son las obtenidas por el método de asignación de polos para el sistema lineal, que se presentan en las Tablas 3.1 y 3.2.

Así mismo, se establece la condición inicial de  $\theta_E(0) = \theta_{\text{Cond}}(0) = \theta_{\text{enf}}(0) = 1$  y se fuerza a la respuesta que tienda a la zona de atracción de valor cero; es decir, que el error de la referencia de la temperatura  $\theta_E$  y  $\theta_{\text{enf}}$  tienda a cero.

### **3.6.1 Evaporador: Estado Subcrítico y Supercrítico**

El control no lineal del evaporador se muestra en la Figura 3.16 para diferentes constantes de control  $k_p$ ,  $k_i$  y  $k_d$ . La mejor estabilidad de  $\theta_E$  se obtiene para los valores de  $k_p=25.47$ ,  $k_i=8.49$  y  $k_d=17.02$ , en un tiempo,  $\tau=15$  que es 20% mayor al obtenido con el control lineal, al considerar el término cuadrático. La respuesta de  $\theta_E$  con las constantes  $k_p=8.49$ ,  $k_i=8.49$  y  $k_d=8.49$  generan una mayor oscilación en la respuesta del evaporador; sin embargo, se tiene el mismo tiempo de asentamiento de  $\tau=15$ . Cuando se utilizan las constantes con valores menores,  $k_p=8.49$ ,  $k_i=2.83$  y  $k_d=5.67$ , el tiempo de asentamiento se incrementa a  $\tau=20$  y los sobretiros se incrementan en un 8% con respecto al control propuesto por el método de asignación de polos. De esta manera, no resulta favorable disminuir el esfuerzo de control sobre  $\theta_E$ .

El control no lineal propuesto con las constantes de control PID por el método de asignación de polos, establecen una gran estabilidad en el intervalo analizado de los parámetros de  $x$ ,  $\alpha$ ,  $\gamma$  y  $\gamma_\epsilon$ , debido a que la respuesta de  $\theta_E$  sólo presenta una variación menor al 0.5% de los valores de oscilación y de tiempo de asentamiento; es decir, las constantes  $k_p$ ,  $k_i$  y  $k_d$  saturan la respuesta del evaporador,  $\theta_E$ , generado por los valores grandes de las constantes, obteniendo así un buen control del evaporador. Disminuir los valores de las constantes no resulta recomendable ya que se presentan mayor oscilación del sistema y son más sensibles a la variación de los parámetros, como se mostrara para el enfriador.

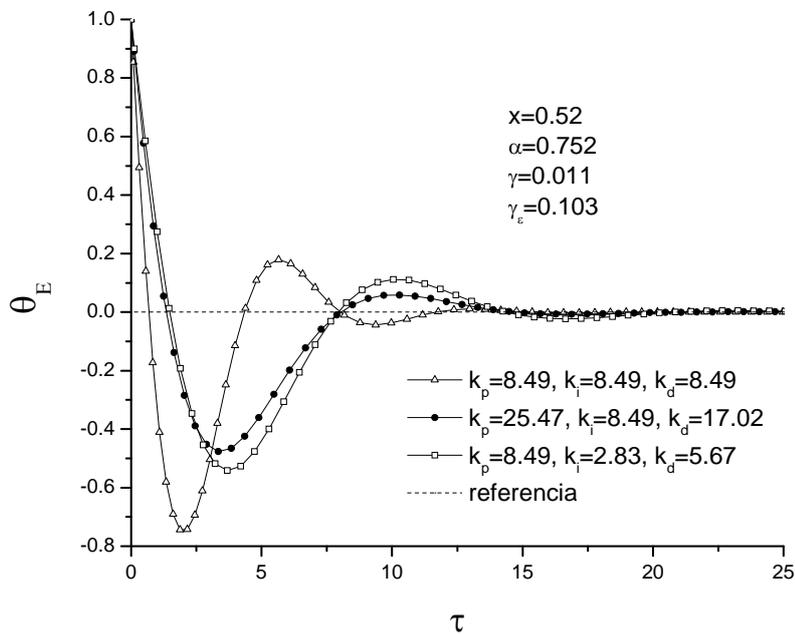


Figura 3.16. Respuesta del control PID no lineal para la temperatura del evaporador a diferentes constantes  $k_p$ ,  $k_i$  y  $k_d$ .

### 3.6.2 Condensador: Estado Subcrítico

En la Figura 3.17 se muestra la respuesta del control PID no lineal para la temperatura del condensador con constantes  $k_p=26.64$ ,  $k_i=8.24$  y  $k_d=5.91$ . Se observa que el control no lineal con las constantes calculadas con el método de asignación de polos no controla la respuesta del sistema no lineal. La respuesta del sistema después de  $\tau=15$  continua oscilando. Esto se debe principalmente a que la constante de derivación  $k_d$  es pequeña y no atenúa las oscilaciones y transitorios de la respuesta  $\theta_{\text{Cond}}$ , por consiguiente una alternativa será incrementar el valor de  $k_d$  manteniendo fijos  $k_p$  y  $k_i$ .

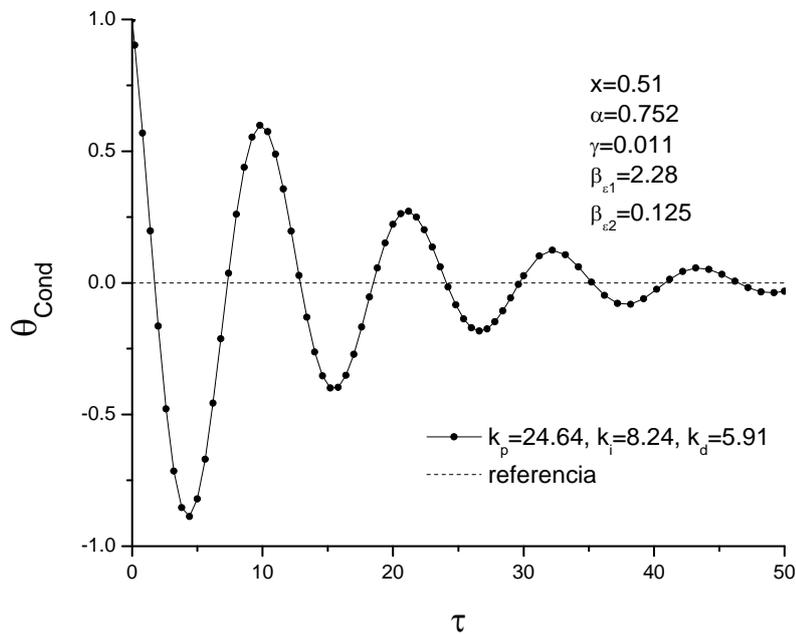


Figura 3.17. Respuesta del control PID no lineal para la temperatura del condensador con constantes  $k_p=26.64$ ,  $k_i=8.24$  y  $k_d=5.91$ .

Se observa en la Figura 3.18 que al incrementar el valor de  $k_d$  las oscilaciones de la respuesta del sistema disminuyen, atenuando los sobretiros y disminuyendo el tiempo de asentamiento. Para la respuesta del condensador con constantes  $k_p=26.64$ ,  $k_i=8.24$  y  $k_d=23.60$ , el tiempo de asentamiento es menor a  $\tau=15$ , lo que muestra la acción del efecto de la derivación sobre la señal de respuesta  $\theta_{\text{Cond}}$ .

En la Figura 3.19 se muestra que al aplicar a la respuesta del sistema del condensador  $\theta_{\text{Cond}}$ , la compensación PID del enfriador, también se tiene un buen control, análogo al obtenido con el múltiplo de 4  $k_d$ , ambas respuestas mejoran la respuesta obtenida con los valores del método de asignación de polos para el sistema lineal.

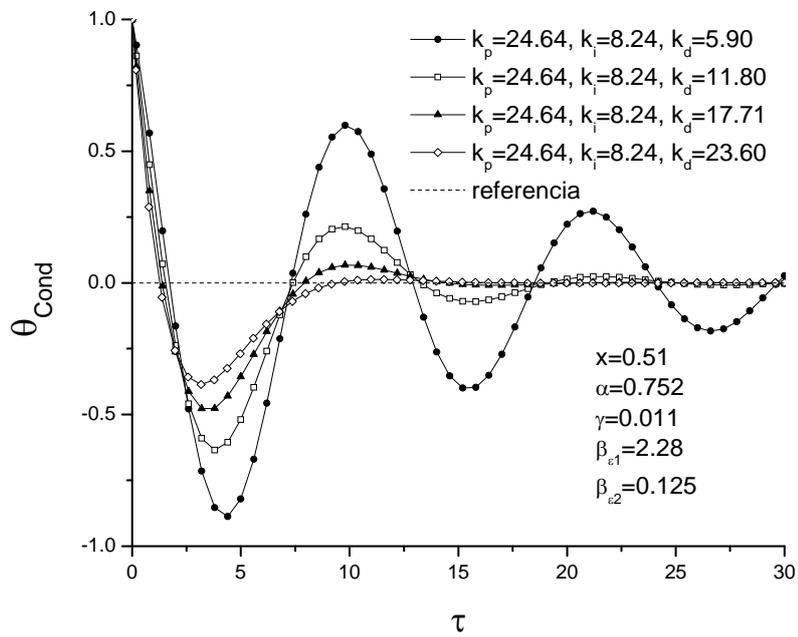


Figura 3.18. Respuesta del control PID no lineal para la temperatura del condensador con diferentes constantes  $k_d$ .

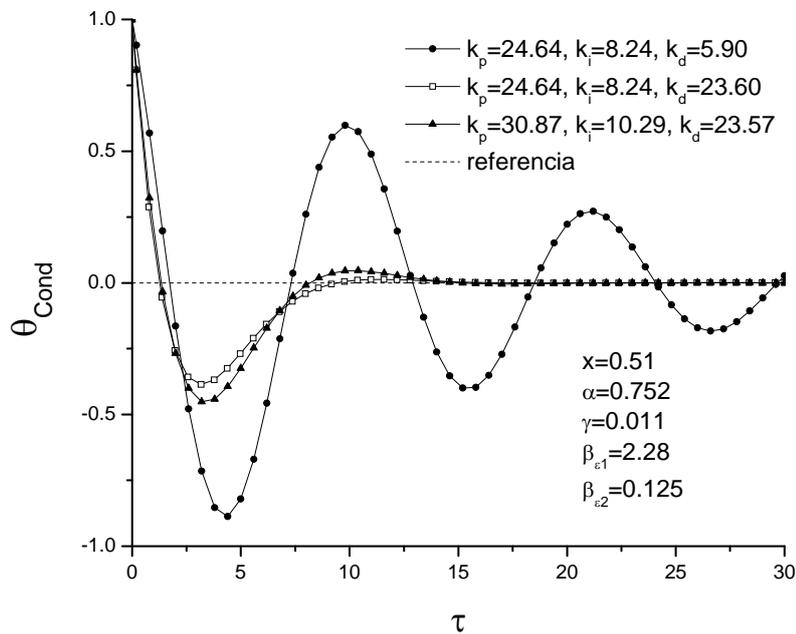


Figura 3.19. Respuesta del control PID no lineal para la temperatura del condensador con compensación PID del enfriador.

Al realizar la variación de los parámetros  $x$ ,  $\alpha$ ,  $\gamma$ ,  $\gamma_{\epsilon}$ ,  $\beta_{\epsilon 2}$ , que afectan la operación del sistema lineal del condensador, con el control PID con el múltiplo de  $4k_d$ ,  $k_p=26.64$ ,  $k_i=8.24$  y  $k_d=23.60$ ; con la compensación PID del enfriador y con un múltiplo de  $3k_p$ , se obtiene que sólo se muestra una variación menor al 1%; sin embargo, con respecto a la variable  $\beta_{\epsilon 1}$ , si se presentan variaciones significativas, que se muestran en las Figuras 3.20, 3.21 y 3.22.

El mejor amortiguamiento de los efectos provocados por el incremento de  $\beta_{\epsilon 1}$ , se obtiene cuando se aplica la compensación PID,  $k_p=26.64$ ,  $k_i=8.24$  y  $k_d=23.60$  con un tiempo máximo de asentamiento de  $\tau=15$ , seguido del compensador PID del enfriador con un tiempo máximo de asentamiento de  $\tau=20$  y con la compensación PID,  $k_p=26.64$ ,  $k_i=8.24$  y  $k_d=17.71$  se tiene un tiempo máximo de asentamiento de  $\tau=25$ .

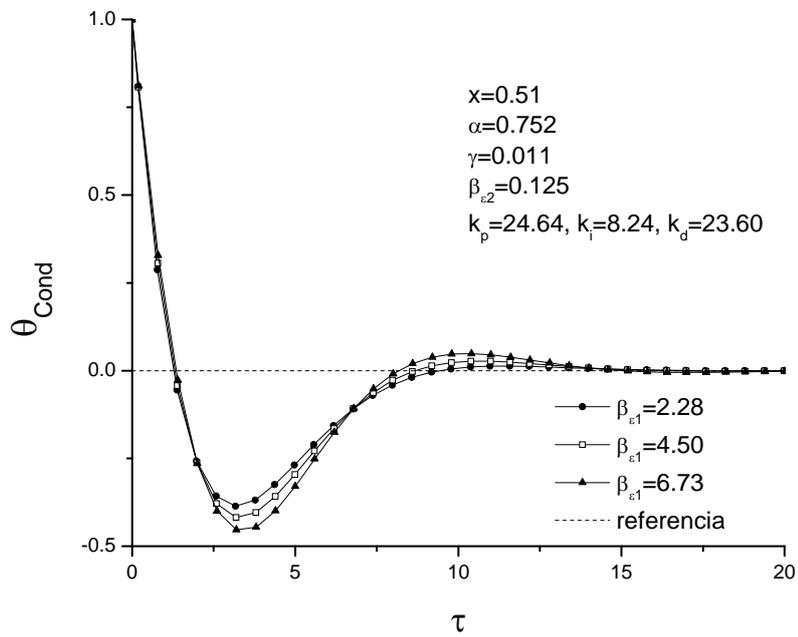


Figura 3.20. Respuesta del control PID no lineal para la temperatura del condensador con  $4k_d$  para diferentes  $\beta_{\varepsilon 1}$ .

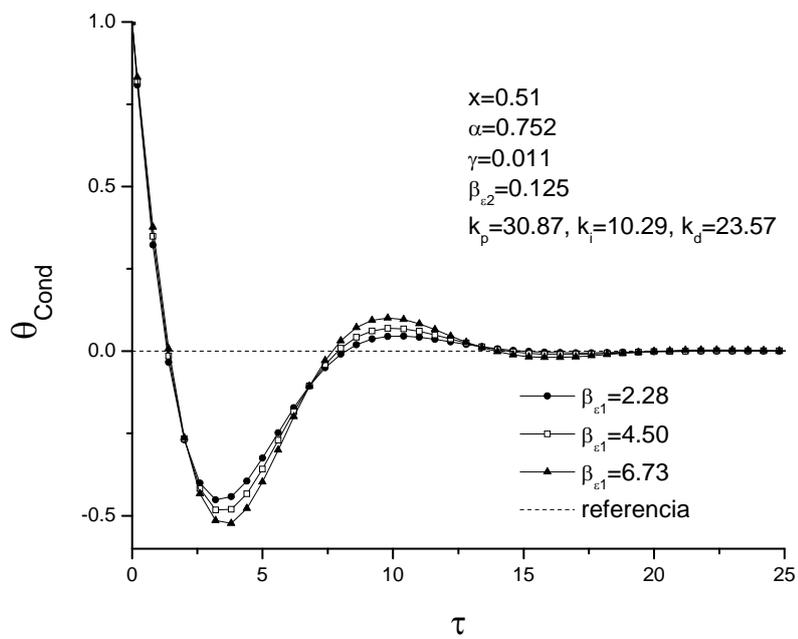


Figura 3.21. Respuesta del control PID no lineal para la temperatura del condensador con compensación PID del enfriador para diferentes  $\beta_{\varepsilon 1}$ .

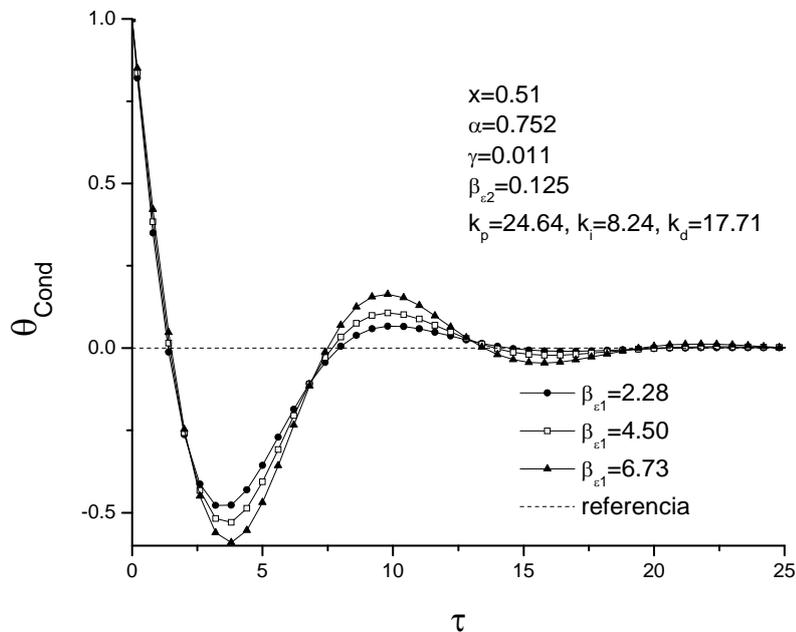


Figura 3.22. Respuesta del control PID no lineal para la temperatura del condensador con  $3k_d$  para diferentes  $\beta_{\varepsilon 1}$ .

Al realizar el control de la respuesta del condensador con constantes más pequeñas que impliquen menor esfuerzo de control, se prueba un valor fraccionario de  $k_p=26.64$ ,  $k_i=8.24$  y  $k_d=23.60$ ; es decir, con la tercera parte de los valores, debido a que con estos valores también se obtiene un buen control. No obstante lo anterior, es más sensible a la variación de  $\beta_{\varepsilon 1}$ , como se muestra en la Figura 3.23, por consiguiente esta opción no es recomendable.

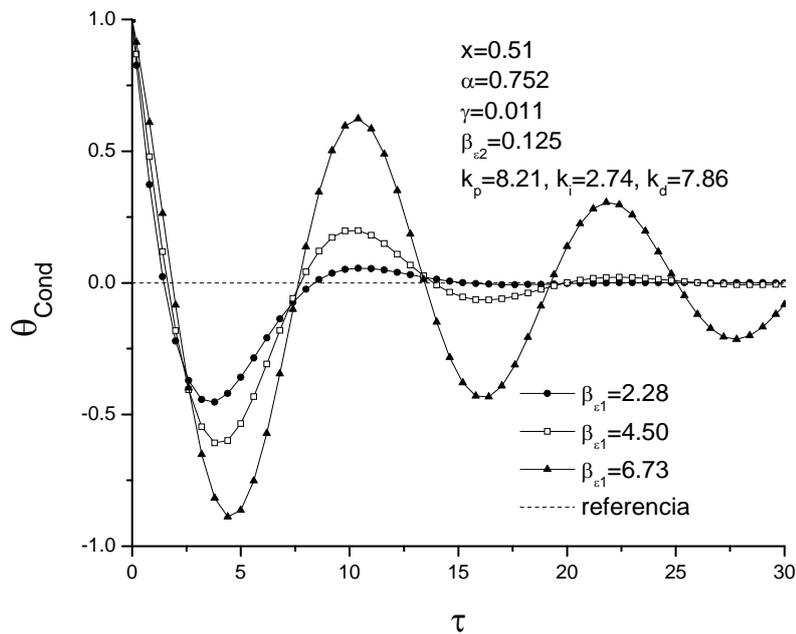


Figura 3.23. Respuesta del control PID no lineal para la temperatura del condensador con  $k_d/3$  para diferentes  $\beta_{\epsilon 1}$ .

### 3.6.3 Enfriador: Estado Supercrítico

El enfriador tiene un comportamiento similar al evaporador con respecto a las respuestas de  $\theta_E$  y  $\theta_{enf}$ , sin embargo, el enfriador presenta varios posibles conjuntos de constantes de control PID que pueden lograr el control sin incrementar drásticamente las oscilaciones del  $\theta_{enf}$ , con respecto al control propuesto con  $k_p=30.87$ ,  $k_i=10.29$  y  $k_d=23.57$ . Para valores fraccionarios hasta un tercio de las constantes, el tiempo de asentamiento es de  $\tau=15$  y para valores de las constantes en el intervalo de  $(1/3, 1/6]$ , el tiempo de asentamiento se incrementan hasta  $\tau=20$  pero disminuyen los sobretiros hasta en un 5%, tal como se muestra en las Figuras 3.24 y 3.25. Cuando los valores

de las constantes son menores a un 1/6 de los valores originales, el enfriador se vuelve más inestable en el control de la  $\theta_{enf}$ .

El control no lineal del enfriador con las constantes  $k_p=30.87$ ,  $k_i=10.29$  y  $k_d=23.57$ , garantiza la estabilidad de la temperatura  $\theta_{enf}$ , al variar los parámetros  $x$ ,  $\alpha$ ,  $\gamma$ ,  $\gamma_e$ ,  $\beta_{x1}$ ,  $\beta_{x2}$  y  $\beta_{x3}$ , tal como se obtuvo para el evaporador, ya que la variación de  $\theta_{enf}$  por efecto de estas variables sólo afecta en un porcentaje menor al 0.5% en los tiempos de asentamiento y de sobretiros.

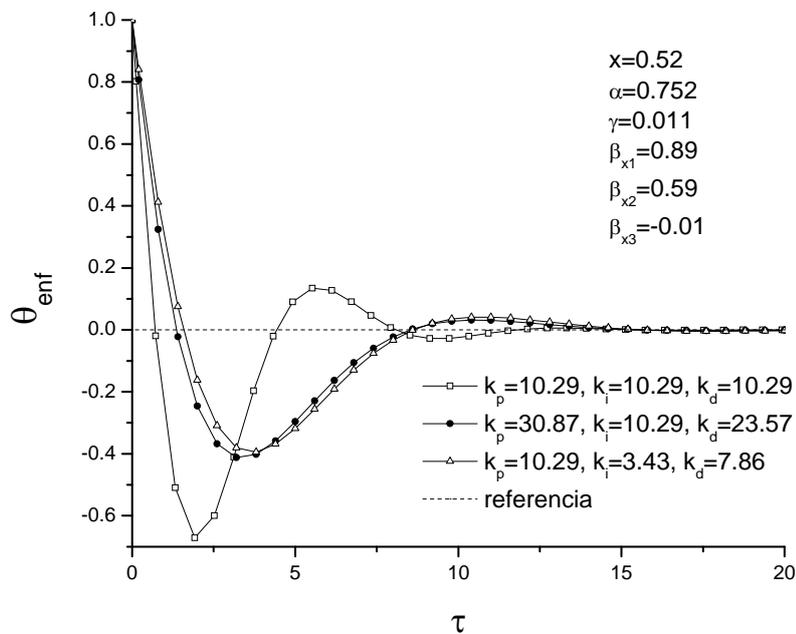


Figura 3.24. Respuesta del control PID no lineal para la temperatura del enfriador a diferentes constantes  $k_p$ ,  $k_i$  y  $k_d$ .

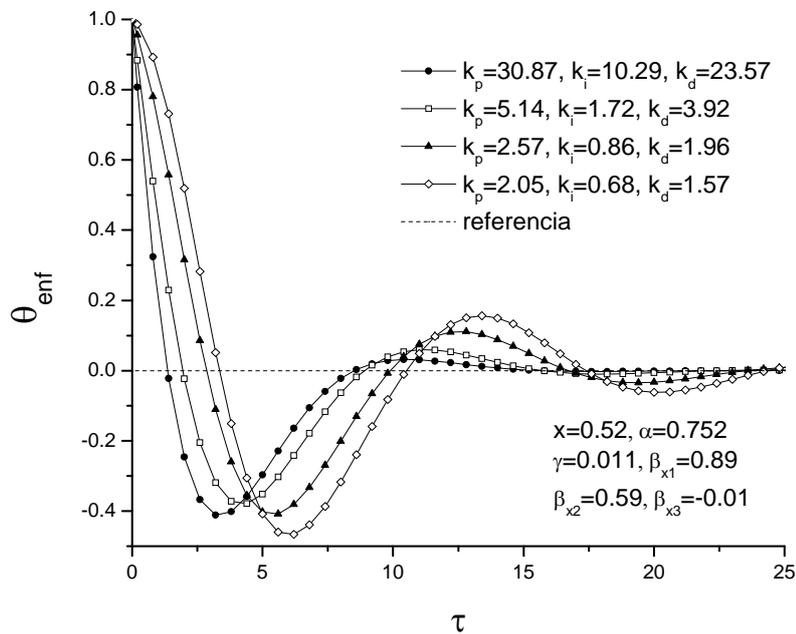


Figura 3.25. Respuesta del control PID no lineal para la temperatura del enfriador para valores fraccionarios de  $k_p=30.87$ ,  $k_i=10.29$  y  $k_d=23.57$ .

De acuerdo a la Figura 3.26, el control de la temperatura del enfriador con las constantes  $k_p=10.29$ ,  $k_i=3.43$  y  $k_d=7.86$ , también establece buenas condiciones de control térmico. Al variar los parámetros  $x$ ,  $\alpha$ ,  $\gamma$ ,  $\gamma_\varepsilon$ ,  $\beta_{x2}$  y  $\beta_{x3}$  no se presentan cambios significativos en la respuesta; sin embargo, con  $\beta_{x1}$  se tiene una variación de hasta un 8% en los sobretiros y se incrementa en un 15% el tiempo de asentamiento. Esta variación se debe principalmente al incremento de la temperatura ambiental que ejerce sobre el coeficiente global de transferencia de calor, el intervalo de variación de  $\beta_{x1}$  es representativo del incremento de la temperatura ambiente de 31°C a 45°C.

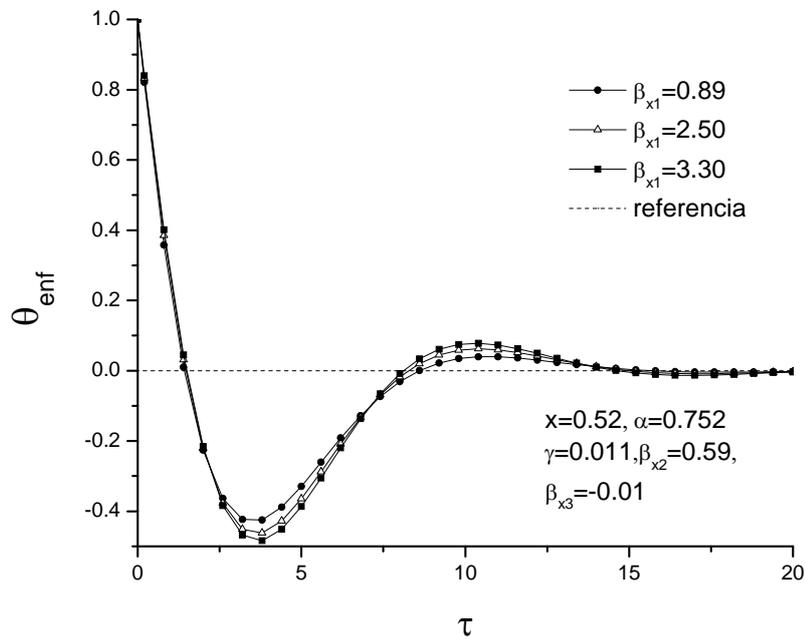


Figura 3.26. Respuesta del control PID no lineal para la temperatura del enfriador con  $k_p=10.29$ ,  $k_i=3.43$  y  $k_d=7.86$ .

El esfuerzo de control se puede disminuir aún más, utilizando los valores límites de  $k_p=5.14$ ,  $k_i=1.72$  y  $k_d=3.92$ ; pero el control térmico de  $\theta_{enf}$  es más sensible al efecto de la temperatura ambiente, reflejándose en el parámetro  $\beta_{x1}$ , tal como se muestra en la Figura 3.27. De acuerdo a las condiciones de operación se tiene  $\beta_{x1}=0.89$ , el comportamiento de la  $\theta_{enf}$ , es aceptable comparada con la respuesta con los valores  $k_p=30.87$ ,  $k_i=10.29$  y  $k_d=23.57$ . Sin embargo, es más sensible a la variación de  $\beta_{x1}$ , incrementando el estado transitorio; es decir, se aumenta hasta en un 30% los sobretiros y el tiempo de asentamiento no puede ser menor a  $\tau=30$ . Con respecto a los demás parámetros, no se presentan incrementos en los efectos de los transitorios mayores al 1%.

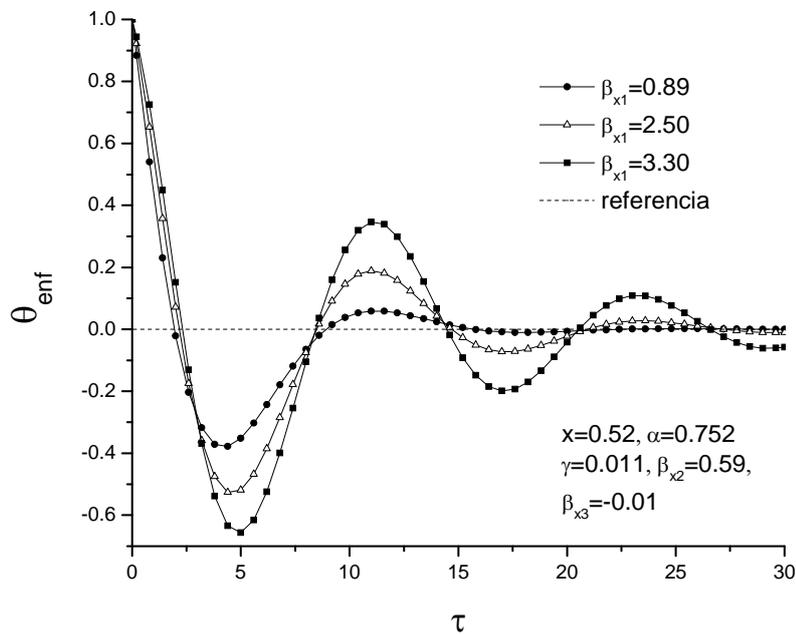


Figura 3.27. Respuesta del control PID no lineal para la temperatura del enfriador con  $k_p=5.14$ ,  $k_i=1.72$  y  $k_d=3.92$ .

Del análisis de las Figuras 3.22, 3.23, 3.24, 3.25, 3.26 y 3.27 se tiene que el control térmico del enfriador con las constantes  $k_p=30.87$ ,  $k_i=10.29$  y  $k_d=23.57$  es el mejor, ya que en el intervalo en que puede trabajar el sistema de refrigeración, los efectos de los parámetros de operación no reflejan alteraciones drásticas en el control de la temperatura,  $\theta_{enf}$ . Asimismo, el esfuerzo de control se puede disminuir, manteniendo un buen control térmico, hasta un valor de las constantes PID de  $k_p=5.14$ ,  $k_i=1.72$  y  $k_d=3.92$ , manteniendo un control estricto sobre el efecto de la temperatura ambiente sobre la temperatura de operación del enfriador.

El control térmico del enfriador se puede realizar con ganancias del controlador PID, utilizando constantes  $k_p=5.14$ ,  $k_i=1.72$  y  $k_d=3.92$ , disminuyendo así el esfuerzo de control, implicando tener

mayor cuidado en el monitoreo y control del efecto de la temperatura ambiente sobre la condición del operación del enfriador.

## CONCLUSIONES

El control térmico lineal del sistema de refrigeración presenta un buen desempeño al estabilizar la operación de los intercambiadores de calor, evaporador y enfriador. Debido a la linealización de los modelos dinámicos de los equipos, el control PID se hizo robusto, lo que permitió al aplicar las constantes  $k_p$ ,  $k_i$  y  $k_d$  al sistema no lineal, minimizar los efectos de las variaciones de los parámetros adimensionales de operación en un intervalo de  $-20^{\circ}\text{C}$  a  $20^{\circ}\text{C}$  en la temperatura del espacio a refrigerar y una temperatura ambiente de  $31^{\circ}\text{C}$  a  $45^{\circ}\text{C}$ . Al comparar la respuesta del control lineal y del no lineal se tiene que al incluir los términos no lineales, el tiempo de asentamiento se incrementa en un 20%, es decir, se incrementa al valor de  $\tau=15$ .

El comportamiento de las propiedades del  $\text{CO}_2$  en el estado supercrítico hasta una temperatura de  $45^{\circ}\text{C}$  y una presión constante de 100 bar, permite establecer la consideración de linealidad del sistema de refrigeración; por consiguiente, el control térmico lineal establece un buen control sobre  $\theta_E$  y  $\theta_{enf}$ , al compararlo con el control no lineal. El calor específico del  $\text{CO}_2$  después de los  $45^{\circ}\text{C}$  presenta un cambio de pendiente, donde el término exponencial toma valores significativos, lo que implicaría una mayor divergencia entre el control lineal y no lineal.

El evaporador por las características de operación tiene condiciones de mayor estabilidad, sin embargo, el control térmico del evaporador depende de la operación del condensador o enfriador, debido a que la variación de la temperatura de condensación por efectos de la temperatura ambiente ocasiona un incremento de la calidad del vapor a la entrada del evaporador, lo que genera una mayor inestabilidad. De esta manera se realiza un buen control sobre el condensador o enfriador inherentemente se conseguirá una mayor estabilidad en todo el sistema de refrigeración.

La metodología para realizar el control del sistema lineal establece bases firmes para realizar el control térmico del sistema de refrigeración con base al método de asignación de polos. Para el control del sistema no lineal, la utilización de las constantes de control obtenidas para el sistema lineal establece una buena estabilidad de la temperatura adimensional  $\theta_E$ ,  $\theta_{Cond}$  y  $\theta_{enf}$ , debido a que no presentan variaciones significativas al variar los parámetros adimensionales de operación del sistema.

## REFERENCIAS

- [1] Hiroshi Yamaguchi, Xin-Rong Zhang. A novel CO<sub>2</sub> refrigeration system achieved by CO<sub>2</sub> solid–gas two-phase fluid and its basic study on system performance. *International Journal of Refrigeration* 32, No. 7: 1683-1693, 2009.
- [2] J. Navarro-Esbrí, D. Ginestar, J.M. Belman, V. Milián, G. Verdú. Application of a lumped model for predicting energy performance of a variable-speed vapour compression system. *Applied Thermal Engineering* 30: 286–294, 2010.
- [3] M.N. Srinivas, Chandramouli Padmanabhan. Computationally efficient model for refrigeration compressor gas dynamics. *International Journal of Refrigeration* 25: 1083–1092, 2002.
- [4] Francois Billiard. Use of carbon dioxide in refrigeration and air conditioning. *International Journal of Refrigeration* 25: 1011–1013, 2002.
- [5] Vetter F.1, Memory S.2. Automotive AC/HP Systems Using R744 (CO<sub>2</sub>). European Central Research Modine Europe GmbH, Dept. ENT. 2 Research & Development Modine Manufacturing Co. Filderstadt, Stuttgart, Alemania. Racine, Wisconsin, E.U. 2001.
- [6] Hongsheng Liu, Jiangping Chen, Zhijiu Chen. Experimental investigation of a CO<sub>2</sub> automotive air conditioner. *International Journal of Refrigeration* 28: 1293–1301, 2005.
- [7] Evaluation of the Performance Potential of CO<sub>2</sub> as a Refrigerant in Air-To-Air Air Conditioners and Heat Pumps: System Modeling and Analysis. Air-Conditioning and Refrigeration Technology Institute. Arlington, Virginia, E.U. Diciembre 2003.
- [8] Zine Aidoun, Mohamed Ouzzane. A model application to study circuiting and operation in CO<sub>2</sub> refrigeration coils. *International Journal of Thermal Sciences* 29: 2544-2553, 2009.

- [9] Neksa P. CO<sub>2</sub> Heat Pump System. SINTEF Energy Research, Refrigeration and Air Conditioning. Trondheim, Noruega, 2000.
- [10] Srinivas S. Pitla, Eckhard A. Groll, Satish Ramadhyani. New correlation to predict the heat transfer coefficient during in-tube cooling of turbulent supercritical CO<sub>2</sub>. *International Journal of Refrigeration* 25: 887–895, 2002.
- [11] Donghong Zheng, Defu Che, Yinhe Liu. Experimental investigation on gas-liquid two phase slug enhanced carbon dioxide corrosion in vertical upward pipeline. *Corrosion Science* 50: 3005-3020, 2008.
- [12] Chaobin Dang, Koji Iino, Ken Fukuoka, Eiji Hihara. Effect of lubricating oil on cooling heat transfer of supercritical carbon dioxide. *International Journal of Refrigeration* 30: 724-731, 2007.
- [13] Björn Palm. Refrigeration systems with minimum charge of refrigerant. *Applied Thermal Engineering* 27: 1693–1701, 2007.
- [14] Ibrahim Dincer, Mehmet Kanoglu. *Refrigeration systems and applications*. Second Edition. Wiley 2010, 93-94.
- [15] Srinivas S. Pitla, Douglas M. Robinson, Eckhard A. Groll and Satish Ramadhyani. Heat transfer from supercritical carbon dioxide in tube flow: A critical review. *HVAC&R Research* 4, No. 3: 281-300, 1998.
- [16] Niu Yongming, Chen Jiangping, Chen Zhijiu, Chen Huanxin. Construction and testing of a wet-compression absorption carbon dioxide refrigeration system for vehicle air conditioner. *Applied Thermal Engineering* 27: 31–36, 2007.

- [17] Samer Sawalha. Theoretical evaluation of trans-critical CO<sub>2</sub> systems in supermarket refrigeration. Part I: Modeling, simulation and optimization of two system solutions. *International Journal of Refrigeration* 31(2008) 516–524.
- [18] Samer Sawalha. Theoretical evaluation of trans-critical CO<sub>2</sub> systems in supermarket refrigeration. Part II: Modeling, simulation and optimization of two system solutions. *International Journal of Refrigeration* 3: 1525–534, 2008.
- [19] Mortaza Yari. Performance analysis and optimization of a new two-stage ejector expansion transcritical CO<sub>2</sub> refrigeration cycle. *International Journal of Thermal Sciences* 48, No. 10: 1–9, 2009.
- [20] Srinivas S. Pitla, Eckhard A. Groll and Satish Ramadhyani. Convective heat transfer from in tube flow of turbulent supercritical carbon dioxide Part 1-Numerical analysis. *HVAC&R Research* 7, No. 4: 345-365, 2001.
- [21] Srinivas S. Pitla, Eckhard A. Groll and Satish Ramadhyani. Convective heat transfer from in tube cooling of turbulent supercritical carbon dioxide: Part 2 – Experimental data and numerical predictions. *HVA&R Research*. 7, No. 4: 367-382, 2001.
- [22] Rin Yun, Yongchan Kim, Min Soo Kim. Convective boiling heat transfer characteristics of CO<sub>2</sub> in microchannels. *International Journal of Heat and Mass Transfer* 48: 235–242, 2005.
- [23] Eric Winandy, Claudio Saavedra O., Jean Lebrun. Simplified modelling of an open-type reciprocating compressor. *Int. J. Therm. Sci.* 41: 183–192, 2002.
- [24] Diogo L. da Silva, Christian J.L. Hermes, Cláudio Melo, Joaquim M. Goncalves, Gustavo C. Weber. A study of transcritical carbon dioxide flow through adiabatic capillary tubes. *International Journal of Refrigeration*: 32, Issue 5: 978-987, 2009.

- [25] Koury R.N.N., Machado L., Ismael, K.A.R. Numerical simulation of a variable speed refrigeration system. *International Journal of refrigeration* 24: 192-200, 2001.
- [26] Lacoa, Ulises, Sen, Mihir, Yang Kwang-Tzu, Temperature control in two dimensional air-filled cavity. ASME, 35th National Heat Transfer Conference, California, 2001.
- [27] Sorour Alotaibi, Sen, Mihir, Yang Kwang-Tzu. Thermal control of heat exchangers. ASME, 35th National Heat Transfer Conference, California, 2001.
- [28] Sen, Mihir. Principles of thermal control. Department of Aerospace and Mechanical Engineering, University of Notre Dame, 2004.
- [29] Sen, Mihir. A review of principles and applications of thermal control. Department of Aerospace and Mechanical Engineering, University of Notre Dame, 2003.
- [30] Katsuhiko Ogata. *Ingeniería de Control Moderna*. Ed. Prentice Hall, 2003.
- [31] Golnaraghi Kuo. *Automatic control system*. Wiley, 2008.
- [32] Yunus A. Cengel, Michael A. Boles, 2009. *Termodinámica*. McGraw-Hill, Sexta Edición, México, pp. 139-143.
- [33] Sara Anwar, John J. Carroll, 2011. *Carbon Dioxide Thermodynamic Properties Handbook*. Ed. Wiley, U.S.A. pp 3-6.
- [34] R.N.N. Koury, L. Machado, K.A.R. Ismail. Numerical simulation of a variable speed refrigeration system. *International Journal of Refrigeration*. Vol. 24, Issue 2, 2001, pp 192–200.
- [35] J. Steven Brown, Samuel F. Yana-Motta, Piotr A. Domanski. Comparative analysis of an automotive air conditioning systems operating with CO<sub>2</sub> and R134a. *International Journal of Refrigeration* Vol. 25, 2002, pp 19–32.

- [36] Farid Golnaraghi and Benjamin C. Kuo, 2010. Automatic Control Systems. Ed. Wiley, U.S.A. Pp 1-786.
- [37] Richard C. Dorf, Robert H. Bishop, 2005. Modern control System. Spain. Ed. Prentice-Hall. Pp 1-826.
- [38] Martín Salazar-Pereyra et al. Análisis exergoeconómico de un ciclo de refrigeración con CO<sub>2</sub> supercrítico. Memorias del Congreso XXXIII Encuentro Nacional y II Congreso Internacional AMIDIQ, mayo de 2012, México. Pp 1658-1663.
- [39] Martín Salazar Pereyra, Raúl Lugo Leyte, Federico Méndez Levielle. Análisis Termodinámico de los Ciclos de Refrigeración con HF-134a y de una Etapa con CO<sub>2</sub>. XVI Congreso Internacional Anual de la SOMIM del 22 al 24 de Septiembre, 2010 Monterrey, Nuevo León, México. ISBN: 978-607-95309-3-8. A5\_117.
- [40] Martín Salazar Pereyra, Federico Méndez Levielle. Modelo Dinámico del Sistema de Refrigeración por Compresión con CO<sub>2</sub> en Régimen Supercrítico. Congreso Iberoamericano de Ingeniería Mecánica, CIBIM 10. Oporto, Portugal del 4 al 9 de septiembre de 2011.