



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO**

PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN INGENIERÍA

INGENIERÍA MECÁNICA-DISEÑO MECÁNICO

**INFLUENCIA DE LA MANIPULABILIDAD CINEMÁTICA Y DINÁMICA EN**

**LA DEMANDA DE ENERGÍA EN ROBOTS SERIALES**

**TESIS**

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:

DOCTOR EN INGENIERÍA

PRESENTA:

M.I. OCIEL FLORES DÍAZ

TUTOR DE TESIS:

DR. JORGE CARRERA BOLAÑOS, FACULTAD DE INGENIERÍA

MÉXICO, D. F., NOVIEMBRE 2013

JURADO ASIGNADO:

Presidente: Dr. Cuenca Jiménez Francisco

Secretario: Dr. Rocha Cózatl Edmundo Gabriel

1er. Vocal: Dr. Carrera Bolaños Jorge

2do. Vocal: Dr. Juárez Campos Ignacio

3er. Vocal: Dr. Gudiño Lau Jorge

Posgrado de Ingeniería, Ciudad Universitaria, UNAM.

---

## Agradecimientos

Dedico este trabajo de tesis a mi madre la Sra. Angelina Díaz López.

Agradezco:

- A mi hermano Guillermo, por la confianza y apoyo que me brindó para la terminación de este trabajo.
- A los miembros del jurado, por las observaciones hechas durante el desarrollo y conclusión de este trabajo.
- A todos los profesores y profesoras, y al personal administrativo que me apoyaron durante el desarrollo y conclusión del mismo.

De manera especial hago un reconocimiento al Dr. Ángel Alfonso Rojas Salgado (q.e.p.d) quien inicio la dirección de esta investigación y que lamentablemente no pudo concluir.

---

## RESUMEN

El problema general en que este trabajo se ubica, es el consumo de energía mecánica de robots manipuladores seriales. Dentro de esta problemática tan amplia, la investigación que aquí se presenta se enfoca en el análisis de criterios cinemáticos y dinámicos para explicar la demanda energética de los mecanismos seriales.

Se determinan los modelos cinemáticos directo e inverso de posición, velocidad y aceleración. También se obtienen los modelos dinámicos inversos de los manipuladores considerados, utilizando el método de Euler-Lagrange. Se aplican los conceptos matemáticos de valores y vectores propios, y de número de condición en las matrices relacionadas con dichos modelos, y se determinan mapas de manipulabilidad cinemática y dinámica.

Se calcula el consumo de la energía mecánica de un manipulador serial de 2 grados de libertad en dos casos de estudio con marcada diferencia en los tiempos de recorrido. Las trayectorias utilizadas pertenecen a la misma familia pero con ubicación diferente.

Los resultados obtenidos en este trabajo consisten en: a). La creación de un mapa de torque estático, el cual permite ver claramente la demanda de torque en las juntas. Permite también ubicar trayectorias predefinidas cuando los tiempos de recorrido son relativamente grandes, por ejemplo para minimizar la demanda de torque y el consumo de energía en el robot manipulador; b). También se crearon mapas de elipses (o elipsoides) de velocidad y aceleración para el órgano terminal del manipulador, además se propusieron y calcularon medidas que indican de forma cuantitativa el comportamiento de la demanda de velocidad y aceleración en las juntas del manipulador, que para el caso cuando el tiempo de recorrido es relativamente corto permite, por ejemplo, determinar la ubicación de la trayectoria predefinida que demandará menos energía.

Las aportaciones presentadas son: a). Un procedimiento completo y eficiente para calcular las elipses de velocidad para cualquier punto del espacio de trabajo de manipuladores seriales, con la característica que es geoméricamente y numéricamente más simple; b). Se explica el consumo de la energía mecánica en un manipulador serial a través de los mapas de torque estático, de elipses velocidad y aceleración lineal, así como también con las medidas propuestas para la velocidad y aceleración .

---

# Índice general

<b>RESUMEN</b>	<b>I</b>
<b>Nomenclatura</b>	<b>IV</b>
<b>1. INTRODUCCIÓN</b>	<b>1</b>
1.1. Aspectos generales y relevancia de la investigación. . . . .	1
1.2. Definición del problema . . . . .	4
1.3. Objetivos . . . . .	4
1.4. Hipótesis . . . . .	5
<b>2. MODELACIÓN CINEMÁTICA DE ROBOTS MANIPULADORES SERIALES</b>	<b>6</b>
2.1. Introducción . . . . .	6
2.2. Análisis de posición con el método de Denavit-Hartenberg . . . . .	6
2.3. Determinación de los modelos cinemáticos directo e inverso de posición, velocidad y aceleración . . . . .	8
2.3.1. Manipulador de 2GdL con juntas rotatorias . . . . .	8
2.3.2. Manipulador PUMA 600 para sus 3 primeros GdL . . . . .	12
<b>3. MODELACIÓN DINÁMICA DE ROBOTS MANIPULADORES SERIALES CON EL MÉTODO DE EULER-LAGRANGE</b>	<b>19</b>
3.1. Introducción . . . . .	19
3.2. Dinámica inversa del manipulador de 2GdL . . . . .	19
3.3. La dinámica de Euler-Lagrange . . . . .	21
3.4. Representación equivalente de las ecuaciones de movimiento de Euler-Lagrange . . . . .	23
3.5. Representación genérica de las ecuaciones de movimiento de Euler-Lagrange . . . . .	27
3.6. Dinámica inversa de la arquitectura mecánica del PUMA . . . . .	28
<b>4. MANIPULABILIDAD CINEMÁTICA EN ROBOTS SERIALES</b>	<b>30</b>
4.1. Introducción . . . . .	30
4.2. Medida de la manipulabilidad cinemática . . . . .	31

4.2.1.	Configuraciones singulares de los manipuladores casos de estudio . . . . .	31
4.2.2.	Reacción de los manipuladores seriales a cambios arbitrarios de posición . . . . .	34
4.2.2.1.	Determinación y análisis de las elipses de velocidad lineal: Manipulador de 2GdL . . . . .	35
4.2.2.2.	Determinación y análisis de las elipses de velocidad lineal: Manipulador PUMA para sus 3 primeros GdL . . . . .	43
<b>5.</b>	<b>MANIPULABILIDAD DINÁMICA EN ROBOTS SERIALES</b>	<b>55</b>
5.1.	Introducción . . . . .	55
5.2.	La matriz generalizada de inercia: 2GdL . . . . .	56
5.3.	Medida de la manipulabilidad dinámica . . . . .	58
5.3.1.	Determinación y análisis de las elipses de aceleración lineal: Manipulador de 2GdL	62
5.3.2.	Análisis estático: Manipulador de 2GdL . . . . .	66
<b>6.</b>	<b>LA ENERGÍA MECÁNICA EN ROBOTS MANIPULADORES SERIALES</b>	<b>71</b>
6.1.	Introducción . . . . .	71
6.2.	Ecuaciones para calcular la energía mecánica en robots manipuladores . . . . .	72
6.3.	Formulación de la trayectoria . . . . .	73
6.4.	Determinación de la energía mecánica: Casos de estudio . . . . .	74
	<b>CONCLUSIONES</b>	<b>89</b>
	<b>Bibliografía</b>	<b>91</b>

# Nomenclatura

## Escalares

Símbolo	Significado
$b_i$ :	Distancia que se encuentra en la dirección de la coordenada $\mathbf{z}_i$ hasta la intersección de los ejes $\mathbf{x}_{i+1}$ y $\mathbf{z}_i$ . Es constante si el par es de rotación y variable si el par es prismático $b_i \in \mathbb{R}$ .
$d_i$ :	Distancia entre los ejes $\mathbf{z}_i$ y $\mathbf{z}_{i+1}$ , es positiva y medida sobre $\mathbf{x}_{i+1}$ ; $d_i \in \mathbb{R}^+$ .
$E_j$ :	Energía demandada por la j-ésima junta del manipulador, $E_i \in \mathbb{R}^+$ .
$f_j^*$ :	Fuerza generalizada en la j-ésima junta del manipulador; $f_j^* \in \mathbb{R}$
$g$ :	Aceleración de la gravedad, $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ .
$I_i$ :	Momento de inercia en el centro de masa de masa del i-ésimo eslabón; $I_i \in \mathbb{R}$ .
$m_i$ :	Masa del i-ésimo eslabón.
$p(t)$ :	Perfil de trayectoria, $p(t) \in [0, 1]$ ; t: tiempo de recorrido.
$P_j(t)$ :	Potencia demandada por la j-ésima junta del manipulador, $P_i(t) \in \mathbb{R}$ .
$(r, \Phi)$ :	Radio y ángulo correspondientes a las coordenadas polares de un punto en el espacio trabajo, $r \in \mathbb{R}$ , $\Phi \in [0, 2\pi]$ .
$T$ :	Función correspondiente a la energía cinética del sistema robótico; $T \in \mathbb{R}^+$ .
$V$ :	Función correspondiente a la energía potencial del sistema robótico; $V \in \mathbb{R}$ .
$v_{cm_i}$ :	Velocidad en el centro de masa del i-ésimo eslabón, medido en la base inercial; $v_{cm_i} \in \mathbb{R}$ .
$W_i$ :	Peso del i-ésimo eslabón con ubicación en el centro de masa; $W_i \in \mathbb{R}$
$\alpha_i$ :	Es el ángulo entre $\mathbf{z}_i$ y $\mathbf{z}_{i+1}$ , medida en la dirección positiva de $\mathbf{x}_{i+1}$ ; $\alpha_i \in \mathbb{R}$ .
$\kappa$ :	Número de condición de una matriz, $\kappa \in [1, \infty)$ .
$\bar{\kappa}$ :	Medida promedio del número de condición sobre toda la trayectoria, $\bar{\kappa} \in [1, \infty)$ .
$\kappa_r$ :	Recíproco del número de condición de una matriz, $\kappa \in (0, 1]$ .
$\lambda_i$ :	Valores propios de una matriz, $\lambda_i \in \mathbb{R}$ .
$\mu$ :	Índice de condicionamiento dinámico, $\mu \in \mathbb{R}$ .
$\Psi$ :	Ángulo entre semieje mayor y vector de la base inercial, $\Psi \in \mathbb{R}$ .
$\sigma_i$ :	Valores singulares de una matriz, $\sigma_i \in \mathbb{R}^+$ .
$\tau_{e_j}$ :	Torque estático en la j-ésima junta del manipulador; $\tau_{e_j} \in \mathbb{R}$ .
$\tau_{in_j}$ :	Torque en la j-ésima junta debido a las fuerzas inerciales; $\tau_{in_j} \in \mathbb{R}$ .
$\theta_i$ :	Es el ángulo entre los ejes $\mathbf{x}_i$ y $\mathbf{x}_{i+1}$ , medido en la dirección positiva de $\mathbf{z}_i$ , es constante cuando el par es prismático y variable si el par es de rotación; $\theta_i \in \mathbb{R}$ .

## Vectores

Símbolo	Significado
$[\mathbf{a}_{i,i+1}]_i = \mathbf{a}_i$	Función vectorial que parte del origen del sistema $(\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_i, \mathbf{z}_i)$ y llega al origen del sistema $(\mathbf{x}_{i+1}, \mathbf{y}_{i+1}, \mathbf{z}_{i+1})$ ; $\mathbf{a}_i \in \mathbb{R}^3$ .
$\mathbf{e}_i$	Vector unitario paralelo al eje $\mathbf{z}_i$ ; $\mathbf{e}_i \in \mathbb{R}^3$ .
$\mathbf{f}^*$	Fuerza generalizada en las juntas del sistema robótico; $\mathbf{f}^* \in \mathbb{R}^n$ .
$\mathbf{g}$	Aceleración de la gravedad, $\mathbf{g} \in \mathbb{R}^3$ .
$\mathbf{q}$	Desplazamiento generalizado en las juntas articulares del manipulador, $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$ .
$\mathbf{p}_{ot}$	Punto ocupado por el órgano terminal del manipulador, $\mathbf{p}_{ot} \in \mathbb{R}^m$ .
$\mathbf{r}_i$	Vector de posición que parte del origen de la base inercial y se dirige hacia el centro de masa del i-ésimo eslabón; $\mathbf{r}_i \in \mathbb{R}^m$ .
$\mathbf{s}_i$	Vector de posición determinado a través de una recursión regresiva, parte del centro de masa del i-ésimo eslabón y se dirige hacia la base inercial; $\mathbf{s}_i \in \mathbb{R}^m$ .
$\mathbf{u}$	Función vectorial que parte del origen de la base inercial y llega al origen de la base del órgano terminal; $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$ .
$\hat{\mathbf{v}}_i$	Vectores propios unitarios de la matriz, $\hat{\mathbf{v}}_i \in \mathbb{R}^m$ .
$\mathbf{T}(t)$	Función vectorial correspondiente a la trayectoria; $\mathbf{T}(t) \in \mathbb{R}^m$ .
$(\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_i, \mathbf{z}_i)$	Base fija al i-ésimo eslabón de acuerdo al método de Denavit-Hartenberg; $\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_i, \mathbf{z}_i \in \mathbb{R}^3$ .
$\boldsymbol{\omega}_i$	Velocidad angular en la i-ésima junta, medido en la base inercial; $\boldsymbol{\omega}_i \in \mathbb{R}^3$ .
$\boldsymbol{\theta}$	Desplazamiento angular en las juntas articulares; $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^n$ .

## Matrices

Símbolo	Significado
$\mathbf{A}$	Matriz definida positiva obtenida de la matriz Jacobiana, $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ .
$\mathbf{A}_i$	Matriz de 3xi cuya j-ésima columna es el vector unitario paralelo al eje j-ésimo par cinemático, $\mathbf{A}_i \in \mathbb{R}^{m \times n}$ .
$\mathbf{B}$	Matriz simétrica semidefinida positiva, obtenida a partir de la matriz Jacobiana y la matriz generalizada de inercia, $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ .
$\mathbf{I}_{ci}$	Matriz de inercia de masa del i-ésimo eslabón medido en su centro de masa; $\mathbf{I}_{ci} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ .
$\mathbf{I}_i$	Matriz de inercia de masa centroidal del i-ésimo eslabón medido en la base inercial; $\mathbf{I}_i \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ .
$\mathbf{I}(\mathbf{q}) = \mathbf{I}_g$	Matriz generalizada de inercia correspondiente al manipulador; $\mathbf{I}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ .
$\mathbf{I}_d$	Matriz identidad, $\mathbf{I}_d \in \mathbb{R}^{m \times n}$ .
$\mathbf{J}$	Matriz Jacobiana, $\mathbf{J} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ .
$\mathbf{E}_i = \mathbf{e}_i \times$	Matriz antisimétrica con componentes sobre el eje de rotación; $\mathbf{E}_i \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ .
$\mathbf{P}_i$	Producto de matrices de rotación, esto es, $\mathbf{Q}_1 \mathbf{Q}_2 \dots \mathbf{Q}_i$ ; $\mathbf{P}_i \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ .
$[\mathbf{Q}_{i,i+1}]_i = \mathbf{Q}_i$	Matriz rotación que gira al sistema coordinado $(\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_i, \mathbf{z}_i)$ a una orientación paralela el sistema $(\mathbf{x}_{i+1}, \mathbf{y}_{i+1}, \mathbf{z}_{i+1})$ , referida al sistema coordinado $(\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_i, \mathbf{z}_i)$ ; $\mathbf{Q}_i \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ .
$\mathbf{R}_i$	Matriz de transformación correspondientes a las derivadas parciales de los vectores $\mathbf{s}_i$ ; $\mathbf{R}_i \in \mathbb{R}^{m \times n}$ .



## Operaciones

Símbolo	Significado
$( \dot{\phantom{x}} )$	$\frac{d(\phantom{x})}{dt}$
$( \ddot{\phantom{x}} )$	$\frac{d^2(\phantom{x})}{dt^2}$
$[ \ ]^{-1}$	inversa de $[ \ ]$
$[ \ ]^T$	transpuesta de $[ \ ]$
$tr[ \ ]$	traza de $[ \ ]$
$\det[ \ ]$	determinante de $[ \ ]$
$\mathbf{a} \times \mathbf{b}$	producto vectorial de $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$
$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$	producto escalar de $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$
$\  \cdot \ $	norma de la matriz
$ \mathbf{p}(r, \Phi) $	longitud de $\mathbf{p}(r, \Phi)$

## INTRODUCCIÓN

### 1.1. Aspectos generales y relevancia de la investigación.

La modelación de robots o partes de ellos puede ser enfocada desde muy diversos aspectos, tanto desde el punto de vista físico como matemático. La investigación presentada en esta tesis parte del concepto tecnológico de manipulabilidad para enfocarse en el concepto físico de energía y su optimización para llegar al desarrollo de modelos matemáticos eficientes como herramientas práctico-conceptuales de análisis de robots manipuladores seriales y su desempeño eficiente desde el punto de vista energético.

En los capítulos 2 y 3 se procede al desarrollo de los modelos cinemáticos y dinámicos que permiten plantear adecuadamente el problema para los efectos aquí considerados. En el primer caso se utiliza el método de Denavit-Hartenberg para establecer la cinemática directa e inversa de posición, velocidad y aceleración para un posicionador de dos grados de libertad con juntas rotatorias, así como el manipulador PUMA para sus tres primeros grados de libertad(GdL). En el segundo caso, la dinámica inversa, los modelos de los sistemas considerados se tratan mediante la ecuación de Euler-Lagrange, lo que establece dicha dinámica en el contexto adecuado para el estudio de los aspectos relacionados con la energía. Además se realiza una representación genérica de las ecuaciones de Euler-Lagrange correspondientes al problema; una vez realizado esto, se procede a obtener el modelo dinámico para el manipulador PUMA con sus tres primeros GdL.

Una vez determinados los modelos cinemáticos y dinámicos de los manipuladores robóticos, en los capítulos 4 y 5 se procede al análisis de los elementos principales de éstos a través de conceptos matemáticos tales como número de condición, valores y vectores propios, y determinante de una matriz, generándose gráficos que indican el comportamiento cinemático y dinámico de los manipuladores sobre el área de trabajo de éstos.

En el capítulo 6, se procede a la determinación de la energía mecánica en los robots manipuladores casos de estudio sobre una familia de trayectorias específicas que tienen las mismas características (mismo lugar geométrico y perfil de trayectoria) con la finalidad de comparar a éstas bajo condiciones semejantes y de esta forma identificar los principales factores que influyen en la demanda de energía. Finalmente se emiten las conclusiones de este trabajo de tesis.

Con respecto a trabajos existentes que se relacionan con el tema de investigación, por ejemplo, se pueden citar: El artículo publicado por Li y Bone[1], que realizan una evaluación energética entre un robot paralelo espacial de 3GdL de la Universidad de Maryland, semejante en la estructura al robot DELTA y un robot serial de 3GdL del tipo antropomórfico con el objetivo de comparar ambas arquitecturas, que guardan características semejantes, por ejemplo: el espacio de trabajo de 1 m diámetro, además que tienen los mismos drivers en los motores, ambos tipos de robots transportan una carga de 10 kg. El Órgano Terminal (OT) sigue una trayectoria lineal en la dirección de uno de los ejes coordenados  $(x,y,z)$ , comenzando en una posición de descanso, con un periodo de aceleración constante seguido por un periodo igual de desaceleración constante. Dentro de los resultados que presentan, es que los robots paralelos consumen en promedio únicamente el 26 % de la energía de lo que consumen los robots seriales,

esto se debe al movimiento de masa atribuido al diseño mecánico de los robots paralelos que es de un 70 % con respecto a los robots seriales, también se debe a la presencia de gravedad (o la ausencia de balance estático) que causa un consumo de energía de aproximadamente el doble. Con el efecto de la gravedad, la potencia demandada aumentó casi linealmente con la velocidad promedio, mientras que sin gravedad ésta se incrementa de forma aproximada linealmente con el producto de la aceleración y velocidad promedio.

Diken[2], en su artículo realiza una búsqueda de la trayectoria que demanda menos energía, para lo cual propone una trayectoria que tiene como lugar geométrico una media senoide y como perfil de trayectoria una función armónica, por lo que las dos variables son la amplitud correspondiente a la media senoide y el tiempo. Lo aplica, a un manipulador de arquitectura antropomórfica (PUMA 600) tomando en consideración únicamente sus tres GdL. En el cual, las coordenadas cartesianas de los puntos inicial y final de la trayectoria son  $\mathbf{p}_i = (0.6, -0.6, 0.5)$  y  $\mathbf{p}_f = (0.5, 0.1, 0.5)$  respectivamente. La amplitud de la trayectoria varía de valores positivos a negativos en el plano xy y en el plano zy, y el tiempo los fija para 6 y 9 segundos. Dentro de los resultados que presenta es que la trayectoria sinusoidal hacia fuera del cuerpo del manipulador en el plano xy con amplitud de  $A_x = 0.27 m$  y la trayectoria sinusoidal hacia abajo en el plano zy con amplitud de  $A_z = -0.22 m$ , completan la tarea con el consumo mínimo de energía, con los valores de  $E = 72.59 J$  y  $E = 88.9 J$  correspondientes. La explicación que da sobre estos hechos, es que cuando la estructura del robot se mueve de manera descendente, las fuerzas gravitacionales ayudan a reducir los torques de los actuadores.

Chou y Song [3] realizan la planeación del lugar geométrico de las trayectorias en un manipulador de 2GdL a través del estudio del “trabajo geométrico” con el objetivo de minimizar el consumo de energía. Este concepto, lo definen como “la suma del valor absoluto del trabajo consumido por todos los actuadores del sistema robótico menos el valor absoluto del trabajo de salida hecho por el sistema al medio”. Mencionan que la eficiencia de los robots de la generación actual en general son muy pobres debido a la existencia de este concepto y es dependiente de la geometría el cual puede ser eliminado adoptando una geometría especial, el cual desacopla el movimiento gravitacional del movimiento horizontal; para la posición del OT, se determina analíticamente las zonas de cero trabajo geométrico, generando con ello un mapa en el espacio de trabajo de estas zonas, que son las direcciones más recomendables a seguir. Por otro lado, realizan la planeación del lugar geométrico para el menor consumo de energía por medio del método de la programación dinámica y los resultados son comparados con el mapa de las zonas de cero trabajo geométrico, en el cual, encuentran que el OT del robot tiende a moverse hacia las zonas de cero trabajo geométrico tanto como le es posible.

En el artículo de Santos et al.[4] proponen y desarrollan una estrategia que maximice la precisión y que minimice el consumo de potencia mecánica. La estrategia propuesta define una función que contiene la manipulabilidad cinemática y la potencia mecánica relacionadas a través de un factor de peso  $k \in [0, 1]$ , cuando  $k=0$  se busca el óptimo únicamente de la manipulabilidad y cuando  $k=1$  el óptimo corresponde a potencia mecánica, estableciendo con esto un índice de desempeño en los manipuladores robóticos para ubicar un cuerpo rígido (lugar geométrico de la trayectoria predefinida) a través de la optimización de la función multiobjetivo. Presentan los dos primeros casos de estudio con el manipulador SCARA y el tercer caso de estudio con el manipulador PUMA 560, ambos para los tres primeros grados de libertad. Para realizar los experimentos propone que el OT del manipulador pase por 7 y 8 puntos cartesianos que se encuentran dentro del espacio de trabajo, los cuales los une a través de funciones polinomiales de tercer grado. En el primer experimento propone 7 puntos y el tiempo total de recorrido de 07 s. Obtiene que los mejores resultados son proporcionados con los factores de peso,  $k=0.2, 0.5, 0.6$  y  $0.9$ . Para el caso de  $k=0.9$ , se mejora en un 28 % el índice total, la manipulabilidad mejora en un 62 % y la potencia mecánica

mejora un 18 %. En el segundo experimento propone 8 puntos, diferentes a los del primer experimento, con un tiempo de recorrido de 07 s. Obtiene que los mejores resultados son proporcionados por los factores de peso  $k=0.3, 0.4$  y  $0.7$ . Para el caso donde  $k=0.7$ , el índice total mejoró 17 %, la manipulabilidad mejoró un 46 % y la potencia mecánica mejora 3 %. De forma equivalente realiza el tercer experimento proponiendo puntos y tiempo de recorrido, y obtiene los factores de peso que proporcionan mejores resultados en cuanto a incrementar el valor de la manipulabilidad y disminuir la potencia mecánica demandada por el manipulador. Concluyen que, en efecto, el reposicionamiento de las trayectorias incrementa exitosamente la manipulabilidad y disminuye la potencia mecánica consumida, de forma simultánea. Concluyen además que no existe una clara dependencia entre las dos variables.

Realizando un análisis de los aspectos importantes en dichos trabajos y sus respectivas limitaciones, se comenta lo siguiente: En el artículo de Li y Bone [1], estos autores realizan la evaluación de la potencia mecánica demandada por los actuadores para seguir trayectorias semejantes dentro del espacio de trabajo de los manipuladores paralelo y serial. Con las evaluaciones obtienen resultados con los cuales confirman que los manipuladores paralelos consumen menos energía que los seriales con excepción de trayectorias verticales; sin embargo, en el mismo espacio de trabajo de los propios manipuladores las condiciones cambian, por lo que los resultados presentados no reflejan realmente la demanda de energía por parte de los manipuladores, además que no introducen algún concepto matemático adicional a los modelos cinemáticos y dinámicos para sustentar lo determinado.

En el artículo de Diken[2], lo interesante es la proposición de la trayectoria sinusoidal, dado que con ello se genera una familia de trayectorias que tienen las mismas características con excepción del lugar geométrico, lo cual permite evaluar y comparar a éstas en circunstancias semejantes. Sin embargo, no se da una explicación clara del porqué en determinada trayectoria con cierta amplitud se demanda menos energía y cuáles son los principales factores que influyeron para que la demanda de energía fuera mínima.

Con respecto al artículo de Chou y Song[3], lo interesante es la utilización del concepto de “trabajo geométrico” para generar mapas con direcciones de trabajo geométrico cero con la finalidad de explicar el por qué cierto lugar geométrico de una trayectoria minimiza la energía demanda al seguir cierta ruta. Sin embargo, dada su formulación, esto se aplica únicamente a casos cuasiestáticos.

En el artículo de Santos et al.[4], un aspecto importante que realizan es la proposición de la función multiobjetivo para maximizar manipulabilidad cinemática y minimizar al mismo tiempo la energía mecánica del manipulador cuando el OT sigue una trayectoria predefinida, y que en efecto lo logran reubicando dicha trayectoria; sin embargo no dan una explicación del motivo por el cual en esa nueva posición, la descripción de la trayectoria por parte del robot manipulador, éste demanda menos energía. De forma equivalente con la manipulabilidad, no dan una explicación del por qué en esa nueva posición de la trayectoria, al aumentar la manipulabilidad cinemática disminuye la potencia mecánica demandada por el robot manipulador.

Por otro lado, realizando una revisión en la literatura sobre la aplicación del concepto de manipulabilidad cinemática en sus múltiples acepciones, se encontró que básicamente lo han aplicado para evaluar el desempeño cinemático y/o para el diseño de las diferentes arquitecturas mecánicas [17], [18], [19], [20] [21],[22], [23], y [24]. En el capítulo 4 de este trabajo, se presenta una introducción de lo analizado por estos autores y se aborda con detalle dicho concepto; de forma similar para el concepto de manipulabilidad dinámica se encontró que lo han aplicado para diseñar y/o evaluar el desempeño dinámico de las arquitecturas mecánicas [32], [33], [34] y [35]. En el capítulo 5 se da una introducción de lo presentado por dichos autores y se aborda con detalle dicho concepto.

Dado lo anterior, se puede ver que aún existen aspectos importantes que se requieren contestar en cuanto a la minimización de la energía en robots manipuladores seriales, como por ejemplo: ¿que sucede con la ubicación de la estructura del manipulador cuando una trayectoria demanda la menor energía para su seguimiento?, ¿Que tanto depende la demanda de energía con respecto al tiempo?, ¿Se pueden aplicar conceptos matemáticos en los modelos cinemáticos y dinámicos para explicar la demanda de energía?.

## 1.2. Definición del problema

Dados conceptos matemáticos relacionados a los modelos cinemáticos y dinámicos de los robots manipuladores del tipo serial, determinar la influencia que tiene la posición y el tiempo en la demanda de energía mecánica dentro del espacio de trabajo de éstos.

### Restricciones del problema

1. Las arquitecturas mecánicas de los robots manipuladores que se estudian se consideran existentes.
2. Las arquitecturas mecánicas de los manipuladores que se analizan con respecto al consumo de energía están libres de configuraciones singulares.
3. En la determinación de los modelos dinámicos de los robots manipuladores se asume que los eslabones son cuerpos rígidos y la masa de éstos se pueden concentrar en un punto llamado centro de masa.
4. No existen restricciones en cuanto a los límites máximo y mínimo en velocidad, aceleración y torque que pueden suministrar los actuadores de los robots manipuladores en estudio.
5. Para la determinación de la energía mecánica demandada por el manipulador se consideran las fuerzas gravitatorias e inerciales debido a las masas de los eslabones.
6. Las conclusiones emitidas aplican a los casos de estudio presentados.

## 1.3. Objetivos

### Objetivo general

Realizar el análisis de la influencia que tiene la posición y el tiempo en la demanda de la energía mecánica en robots manipuladores del tipo serial a través de conceptos matemáticos relacionados con sus modelos cinemáticos y dinámicos.

### Objetivos específicos

1. En el modelo cinemático de velocidad analizar el comportamiento de la matriz Jacobiana sobre el área de trabajo de los manipuladores que se presentan como casos de estudio.
2. Con el modelo dinámico de los manipuladores, calcular el torque total y analizar el comportamiento del torque demandado por las fuerzas gravitatorias. Asimismo, analizar el comportamiento de la aceleración e inercia de masa del sistema robótico.
3. Sobre una trayectoria específica, introducir los elementos de análisis obtenidos en los objetivos 1 y 2 para explicar la influencia que tiene la posición y tiempo en la demanda de energía mecánica en los robots manipuladores del tipo serial.

## 1.4. Hipótesis

1. Las transformaciones cinemáticas (específicamente de velocidad) sobre el espacio de trabajo del manipulador tienen un comportamiento tal, que existe la posibilidad de que pueden ser representadas a través de funciones más sencillas, como por ejemplo, funciones polinomiales.
2. La transformación isotrópica de velocidad implica posiciones con buen desempeño cinemático en todas las direcciones del OT del sistema robótico pero no necesariamente implica posiciones donde el manipulador demande menos energía en el sistema.
3. Los factores tiempo, y posición del OT dentro del área de trabajo del manipulador están relacionadas de forma directa en la demanda de energía mecánica, tal que pueden explicarse en parte a través de las transformaciones de velocidad y aceleración, y torque debido a las fuerzas gravitacionales de los robots manipuladores.

# MODELACIÓN CINEMÁTICA DE ROBOTS MANIPULADORES SERIALES

## 2.1. Introducción

En este capítulo se presenta una introducción al método de Denavit-Hartenberg y se realiza el análisis cinemático directo de dos manipuladores seriales de 2 y 3 GdL con juntas rotatorias. También se determina el modelo inverso de posición con proyecciones geométricas. Y finalmente se realiza el análisis directo e inverso de velocidad y aceleración.

## 2.2. Análisis de posición con el método de Denavit-Hartenberg

De acuerdo a lo presentado por Rojas [8], el método de Denavit-Hartenberg [6] emplea ecuaciones de cerradura para realizar las transformaciones afines. Se basa en las siguientes consideraciones para definir **los ejes unitarios en cada uno de los eslabones** (ver figura 2.1).

$\mathbf{z}_i$  : Es el eje del par que conecta los eslabones  $i$  e  $i+1$ . Se elige como:

- a) el eje de rotación si el par asociado es rotatorio (R).
- b) la dirección de traslación si el par asociado es prismático (P).

$\mathbf{x}_i$  : Es la perpendicular común a  $\mathbf{z}_{i-1}$  y  $\mathbf{z}_i$  dirigida de  $\mathbf{z}_{i-1}$  a  $\mathbf{z}_i$ .

$\mathbf{y}_i$  : Completa el sistema coordenado dextrogiro del  $i$ -ésimo eslabón.

**Los parámetros del eslabonamiento  $i$  e  $i+1$ .**

$d_i$  : Es la distancia entre los ejes  $\mathbf{z}_i$  y  $\mathbf{z}_{i+1}$ , siempre positiva y medida sobre  $\mathbf{x}_{i+1}$ .

$\alpha_i$  : Es el ángulo entre  $\mathbf{z}_i$  y  $\mathbf{z}_{i+1}$ , medida en la dirección positiva de  $\mathbf{x}_{i+1}$ .

**Además se tienen las siguientes variables:**

$b_i$  : Es la distancia correspondiente a la coordenada  $\mathbf{z}_i$  hasta la intersección de los ejes  $\mathbf{x}_{i+1}$  y  $\mathbf{z}_i$ . Es constante si el par es de rotación y variable si el par es prismático.

$\theta_i$  : Es el ángulo entre los ejes  $\mathbf{x}_i$  y  $\mathbf{x}_{i+1}$ , medido en la dirección positiva de  $\mathbf{z}_i$ , es constante cuando el par es prismático y variable si el par es de rotación.

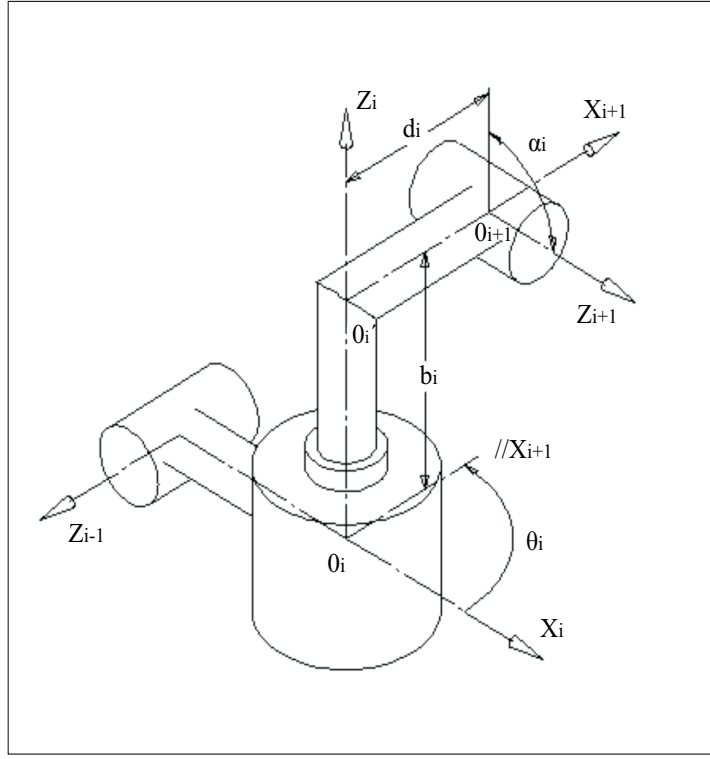


Figura 2.1: Parámetros y variables que definen una cadena cinemática [8].

La matriz  $[\mathbf{Q}_{i,i+1}]_i$  denota una rotación que lleva el sistema coordenado  $(\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_i, \mathbf{z}_i)$  a coincidir con el sistema  $(\mathbf{x}_{i+1}, \mathbf{y}_{i+1}, \mathbf{z}_{i+1})$ . El subíndice del paréntesis rectangular indica que esta matriz está representada en el sistema  $(\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_i, \mathbf{z}_i)$ . Esta matriz se obtiene mediante la composición de dos rotaciones, una de un ángulo  $\theta_i$  alrededor de  $\mathbf{z}_i$ , que transforma  $\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_i$  en  $\mathbf{x}'_i, \mathbf{y}'_i$  respectivamente, seguida de un ángulo  $\alpha_i$  alrededor de  $\mathbf{x}'_i$ . Así se obtiene:

$$[\mathbf{Q}_{i,i+1}]_i = \begin{bmatrix} c\theta_i & -s\theta_i & 0 \\ s\theta_i & c\theta_i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c\alpha_i & -s\alpha_i \\ 0 & s\alpha_i & c\alpha_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c\theta_i & -s\theta_i c\alpha_i & s\theta_i s\alpha_i \\ s\theta_i & c\theta_i c\alpha_i & -c\theta_i s\alpha_i \\ 0 & s\alpha_i & c\alpha_i \end{bmatrix}, \quad (2.1)$$

donde  $c()$  denota el coseno de  $()$  y  $s()$  denota el seno de  $()$ ; el vector de traslación se forma como:

$$[\mathbf{a}_{i,i+1}]_i = [\overrightarrow{O_i O'_i}]_i + [\mathbf{Q}_{i,i+1}]_i [\overrightarrow{O'_i O_{i+1}}]_{i+1}$$

con

$$\begin{aligned} [\overrightarrow{O_i O'_i}]_i &= [0, 0, b_i]^T \\ [\overrightarrow{O'_i O_{i+1}}]_{i+1} &= [d_i, 0, 0]^T \end{aligned}$$

por lo que

$$[\mathbf{a}_{i,i+1}]_i = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ b_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c\theta_i & -s\theta_i & 0 \\ s\theta_i & c\theta_i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_i \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_i c\theta_i \\ d_i s\theta_i \\ b_i \end{bmatrix}, \quad (2.2)$$

que es la expresión para el vector que une los orígenes de los sistemas  $i$  e  $i+1$ .



## Reglas para efectuar el modelado cinemático directo de los robots manipuladores.

1. Identificar cada de las juntas cinemáticas del robot manipulador y trazar líneas correspondientes a los ejes.
2. Enumerar cada uno de los eslabones del manipulador empezando por uno para el que no se mueve.
3. Enumerar cada una de las juntas cinemáticas que tiene el manipulador, esto es, entre la junta que forman los eslabones  $i$  e  $i+1$  se encuentra el eje de la junta  $i$ .
4. Fijar las bases locales  $(\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_i, \mathbf{z}_i)$  de los eslabones de acuerdo a las definiciones dadas para la formación de éstas.
5. Llenar la tabla 2.1 de parámetros y variables correspondientes a la cadena cinemática del manipulador. Para  $i=1, 2, \dots, n-1, n$ ;  $n$ : número de juntas del sistema.

Tabla 2.1: Tabla de parámetros y variables

$i$	$d_i$	$\alpha_i$	$b_i$	$\theta_i$
1				
2				
$\vdots$				
$n$				

6. Por cada uno de los renglones de la tabla obtenida en la regla 5, formar la matriz de rotación y el vector de traslación correspondiente.
7. El vector de desplazamiento  $\mathbf{u}$  que representa el modelo cinemático directo de posición del manipulador se forma sumando los vectores de desplazamiento  $[\mathbf{a}_{i,i+1}]_1$  referidos a la base inercial. Esto es, por ejemplo:  $\mathbf{u} = [\mathbf{a}_{1,n+1}]_1 = [\mathbf{a}_{1,2}]_1 + [\mathbf{a}_{2,3}]_1 + \dots + [\mathbf{a}_{n,n+1}]_1$ .

La matriz de rotación final referida a la base inercial se forma postmultiplicando las matrices de rotación, por ejemplo:  $[\mathbf{Q}_{1,n+1}]_1 = [\mathbf{Q}_{1,2}]_1 [\mathbf{Q}_{2,3}]_2 \dots [\mathbf{Q}_{n,n+1}]_n$ .

## 2.3. Determinación de los modelos cinemáticos directo e inverso de posición, velocidad y aceleración

### 2.3.1. Manipulador de 2GdL con juntas rotatorias

El problema cinemático directo de posición consiste en encontrar la función vectorial  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^2$  dada la función vectorial de posición  $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^2$  en las juntas articulares.

En la figura 2.2 se muestran las bases colocadas en dicho manipulador aplicando método de Denavit-Hartenberg(D-H), y en la tabla 2.2 se presentan los parámetros y variables obtenidos.

Tabla 2.2: Parámetros y variables de la arquitectura mecánica de 2GdL

$i$	$d_i$	$\alpha_i$	$b_i$	$\theta_i$
1	$l_1$	0	0	$\theta_1$
2	$l_2$	0	0	$\theta_2$

donde  $l_1 = l_2 = 0.25 \text{ m}$ .

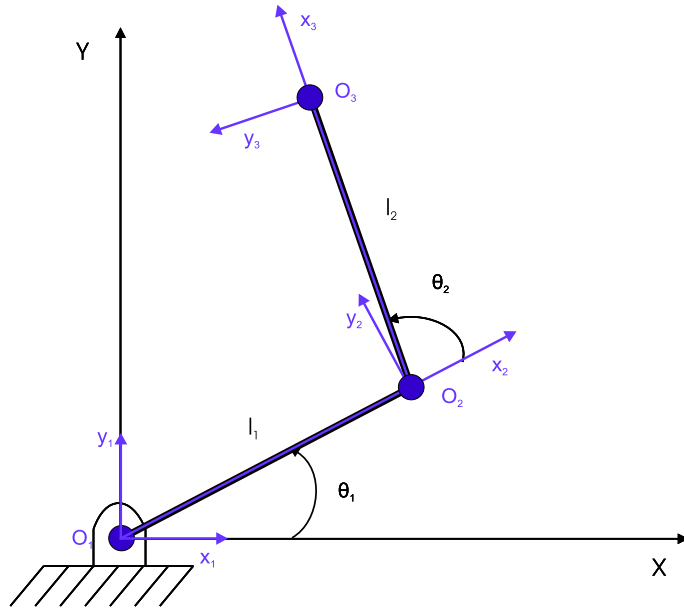


Figura 2.2: Fijación de bases en la arquitectura mecánica de 2GdL.

Los vectores de traslación y las matrices de rotación se obtienen sustituyendo los parámetros y variables en las ecuaciones 2.1 y 2.2, esto es

$$\begin{aligned}
 [\mathbf{a}_{1,2}]_1 &= \mathbf{a}_1 = [l_1 c\theta_1, l_1 s\theta_1, 0]^T \\
 [\mathbf{Q}_{1,2}]_1 &= \mathbf{Q}_1 = \begin{bmatrix} c\theta_1 & -s\theta_1 & 0 \\ s\theta_1 & c\theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 [\mathbf{a}_{2,3}]_2 &= \mathbf{a}_2 = [l_2 c\theta_2, l_2 s\theta_2, 0]^T \\
 [\mathbf{Q}_{2,3}]_2 &= \mathbf{Q}_2 = \begin{bmatrix} c\theta_2 & -s\theta_2 & 0 \\ s\theta_2 & c\theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Por lo que la función vectorial que va de la base inercial al OT es

$$\mathbf{u} = \mathbf{a}_1 + \mathbf{Q}_1 \mathbf{a}_2 \quad (2.3)$$

simplificando dicha función

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 c\theta_1 + l_2 c(\theta_1 + \theta_2) \\ l_1 s\theta_1 + l_2 s(\theta_1 + \theta_2) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

considerando únicamente las componentes x, y de la ec 2.4,

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 c\theta_1 + l_2 c(\theta_1 + \theta_2) \\ l_1 s\theta_1 + l_2 s(\theta_1 + \theta_2) \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

**El problema cinemático directo de velocidad** consiste en encontrar la función vectorial  $\dot{\mathbf{u}} \in \mathbb{R}^2$  del OT del manipulador dadas las posiciones y velocidades en las juntas articulares  $\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}} \in \mathbb{R}^2$

Dicha velocidad en el OT del manipulador ( $\dot{\mathbf{u}}$ ), es obtenida derivando con respecto al tiempo a la ecuación 2.5, es decir,

$$\dot{\mathbf{u}} = \begin{bmatrix} -l_1 s\theta_1 \dot{\theta}_1 - l_2 s(\theta_1 + \theta_2)(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \\ l_1 c\theta_1 \dot{\theta}_1 + l_2 c(\theta_1 + \theta_2)(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

La ec. 2.6 se puede representar de forma matricial

$$\dot{\mathbf{u}} = \underbrace{\begin{bmatrix} -l_1 s\theta_1 - l_2 s(\theta_1 + \theta_2) & -l_2 s(\theta_1 + \theta_2) \\ l_1 c\theta_1 + l_2 c(\theta_1 + \theta_2) & l_2 c(\theta_1 + \theta_2) \end{bmatrix}}_1 \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix}}_2 \quad (2.7)$$

donde los términos 1 y 2 de la ec. 2.7 son la matriz Jacobiana  $\mathbf{J}$  y la función vectorial  $\dot{\boldsymbol{\theta}}$  de velocidad en las juntas articulares respectivamente. Por lo que dicha ecuación se puede representar como

$$\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{J}\dot{\boldsymbol{\theta}} \quad (2.8)$$

**El problema cinemático directo de aceleración** consiste en encontrar la función vectorial  $\ddot{\mathbf{u}} \in \mathbb{R}^2$  del OT del manipulador dadas las posiciones, velocidades y aceleraciones en las juntas articulares, esto es,  $\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}}, \ddot{\boldsymbol{\theta}} \in \mathbb{R}^2$  del manipulador; ésta se obtiene derivando con respecto al tiempo a la ec. 2.8, esto es

$$\ddot{\mathbf{u}} = \dot{\mathbf{J}}\dot{\boldsymbol{\theta}} + \mathbf{J}\ddot{\boldsymbol{\theta}} \quad (2.9)$$

donde  $\dot{\mathbf{J}}$  es la derivada con respecto al tiempo de la matriz Jacobiana, que corresponde a

$$\dot{\mathbf{J}} = \begin{bmatrix} -l_1 c\theta_1 \dot{\theta}_1 - l_2 c(\theta_1 + \theta_2)(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) & -l_2 c(\theta_1 + \theta_2)(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \\ -l_1 s\theta_1 \dot{\theta}_1 - l_2 s(\theta_1 + \theta_2)(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) & -l_2 s(\theta_1 + \theta_2)(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

**El problema cinemático inverso de posición** consiste en encontrar la función vectorial en las juntas articulares  $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^2$  dada la función vectorial de posición  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^2$  del OT del manipulador. Los elementos de la función vectorial  $\boldsymbol{\theta}$  son  $\theta_1$  y  $\theta_2$ .

Realizando la determinación de los ángulos a través de proyecciones geométricas en la configuración codo abajo (cab) (fig. 2.3), se obtiene

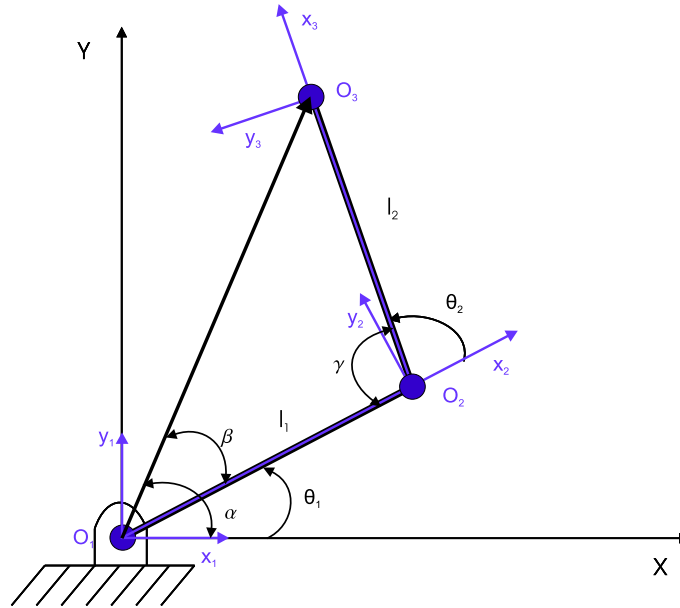


Figura 2.3: Ángulos de la arquitectura mecánica de 2GdL.

$$\theta_2^{cab} = \pi - \gamma = \pi - \arccos \left( \frac{-l_1^2 - l_2^2 + x^2 + y^2}{2l_1 l_2} \right) \quad (2.11)$$

$$\theta_1^{cab} = \alpha - \beta = \arctan \left( \frac{y}{x} \right) - \arccos \left( \frac{l_1^2 - l_2^2 + x^2 + y^2}{2l_1(x^2 + y^2)^{1/2}} \right). \quad (2.12)$$

Para el caso de la configuración codo arriba(car)

$$\theta_2^{car} = \pi + \gamma \quad (2.13)$$

$$\theta_1^{car} = \alpha + \beta. \quad (2.14)$$

La singularidad del brazo se puede determinar a través de la matriz Jacobiana,

$$\det(\mathbf{J}) = l_1 l_2 s \theta_2. \quad (2.15)$$

El determinante de la ec. 2.15 es cero para  $\theta_2 = 0$  y  $\theta_2 = \pi$ .

**El problema cinemático inverso de velocidad** consiste en encontrar la función vectorial en las juntas articulares  $\dot{\boldsymbol{\theta}} \in \mathbb{R}^2$  dadas las funciones vectoriales de posición y velocidad,  $\boldsymbol{\theta}, \dot{\mathbf{u}} \in \mathbb{R}^2$ , del manipulador. Esta función se puede obtener de 2.8

$$\dot{\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{J}^{-1} \dot{\mathbf{u}} \quad (2.16)$$

donde la inversa de la matriz Jacobiana es

$$\mathbf{J}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{l_1} c(\theta_1 + \theta_2) \csc \theta_2 & \frac{1}{l_1} s(\theta_1 + \theta_2) \csc \theta_2 \\ -\left(\frac{c\theta_1}{l_2} + \frac{c(\theta_1 + \theta_2)}{l_1}\right) \csc \theta_2 & -\left(\frac{s\theta_1}{l_2} + \frac{s(\theta_1 + \theta_2)}{l_1}\right) \csc \theta_2 \end{bmatrix}, \quad (2.17)$$

donde  $\csc()$  denota la cosecante de  $()$ .

**El problema cinemático inverso de aceleración** consiste en encontrar la función vectorial en las juntas articulares  $\ddot{\boldsymbol{\theta}} \in \mathbb{R}^2$  dadas las funciones vectoriales de posición, velocidad y aceleración  $\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}}, \dot{\mathbf{u}}, \ddot{\mathbf{u}} \in \mathbb{R}^2$  del manipulador.

Esta función se puede obtener de la ec. 2.9, esto es

$$\ddot{\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{J}^{-1} \ddot{\mathbf{u}} - \underbrace{\mathbf{J}^{-1} \dot{\mathbf{J}} \mathbf{J}^{-1}}_c \dot{\mathbf{u}} \quad (2.18)$$

donde el término “c” de la ec. 2.18 corresponde a

$$\mathbf{J}^{-1} \dot{\mathbf{J}} \mathbf{J}^{-1} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \quad (2.19)$$

$$\begin{aligned} A &= \frac{\csc \theta_2}{l_1} \left( s(\theta_1 + \theta_2) \dot{\theta}_1 + c\theta_1 \csc \theta_2 \dot{\theta}_2 \right) \\ B &= \frac{\csc \theta_2}{l_1 l_2} \left( -(l_1 s\theta_1 + l_2 s(\theta_1 + \theta_2)) \dot{\theta}_1 - c\theta_1 \csc \theta_2 (l_1 c\theta_2 + l_2) \dot{\theta}_2 \right) \\ C &= \frac{\csc \theta_2}{l_1} \left( -c(\theta_1 + \theta_2) \dot{\theta}_1 + s\theta_1 \csc \theta_2 \dot{\theta}_2 \right) \\ D &= \frac{\csc \theta_2}{l_1 l_2} \left( (l_1 c\theta_1 + l_2 c(\theta_1 + \theta_2)) \dot{\theta}_1 - s\theta_1 \csc \theta_2 (l_1 c\theta_2 + l_2) \dot{\theta}_2 \right) \end{aligned} \quad (2.20)$$

### 2.3.2. Manipulador PUMA 600 para sus 3 primeros GdL

La obtención del modelo cinemático directo de posición del manipulador PUMA, se realiza con el método de Denavit-Hartenberg tomando únicamente los tres primeros grados de libertad, dada la importancia que tienen en cuanto a las longitudes y las masas de los eslabones con respecto a las tres juntas restantes. También se determina el modelo cinemático inverso con proyecciones geométricas, finalmente se realiza el análisis cinemático directo e inverso de velocidad y aceleración.

Los parámetros y variables obtenidos para la configuración brazo izquierdo se muestran en la tabla 2.3. Para la configuración brazo derecho, el parámetro  $\alpha_1$  de la primer fila de dicha tabla, toma el valor de  $-\pi/2$ .

Tabla 2.3: Tabla de parámetros y variables del manipulador PUMA

$i$	$d_i$	$\alpha_i$	$b_i$	$\theta_i$
1	0	$\pi/2$	$h$	$\theta_1 + \pi$
2	$k$	0	$g$	$\theta_2 + \pi$
3	$l$	$-\pi/2$	0	$\theta_3 - \pi/2$
4	0	$\pi/2$	$f$	$\theta_4 = 0$

Las longitudes de los eslabones son:  $h = 0.6604, g = 0.14909, k = 0.432, f = 0.432, l = 0.02032$ , las unidades están dadas en metros.

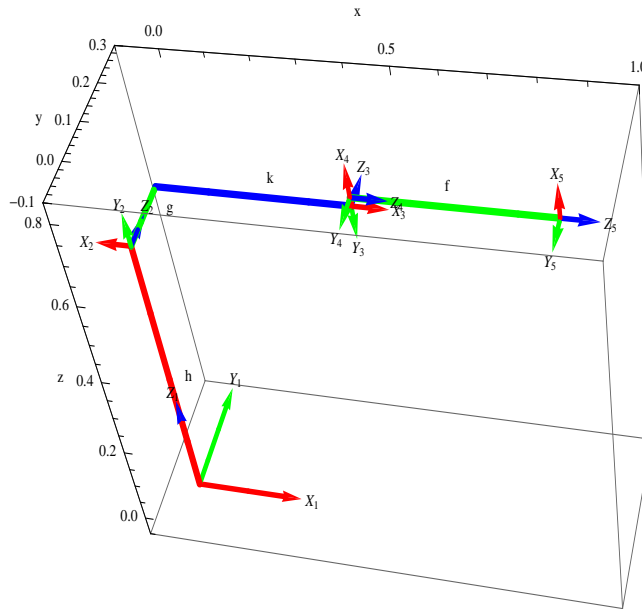


Figura 2.4: Fijación de bases en el robot manipulador PUMA.

Sustituyendo los parámetros y variables de la tabla 2.3 en las ecuaciones 2.1 y 2.2, se obtienen los vectores de traslación y las matrices de rotación

$$[\mathbf{a}_{1,2}]_1 = \mathbf{a}_1 = [0, 0, h]^T$$

$$[\mathbf{Q}_{1,2}]_1 = \mathbf{Q}_1 = \begin{bmatrix} -c\theta_1 & 0 & -s\theta_1 \\ -s\theta_1 & 0 & c\theta_1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[\mathbf{a}_{2,3}]_2 = \mathbf{a}_2 = [-kc\theta_2, -ks\theta_2, g]^T$$

$$\begin{aligned}
[\mathbf{Q}_{2,3}]_2 = \mathbf{Q}_2 &= \begin{bmatrix} -c\theta_2 & s\theta_2 & 0 \\ -s\theta_2 & -c\theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
[\mathbf{a}_{3,4}]_3 = \mathbf{a}_3 &= [ls\theta_3, -lc\theta_3, 0]^T \\
[\mathbf{Q}_{3,4}]_3 = \mathbf{Q}_3 &= \begin{bmatrix} s\theta_3 & 0 & c\theta_3 \\ -c\theta_3 & 0 & s\theta_3 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \\
[\mathbf{a}_{4,5}]_4 = \mathbf{a}_4 &= [0, 0, f]^T.
\end{aligned}$$

El vector que parte de la base inercial hacia el OT

$$\mathbf{u} = \mathbf{a}_1 + \mathbf{Q}_1\mathbf{a}_2 + \mathbf{Q}_1\mathbf{Q}_2\mathbf{a}_3 + \mathbf{Q}_1\mathbf{Q}_2\mathbf{Q}_3\mathbf{a}_4; \quad (2.21)$$

con la finalidad de simplificar operaciones se pueden realizar operaciones de **recursión regresiva**, que consiste en partir del OT e ir sumando las funciones vectoriales sobre la misma base hasta llegar al origen de la base inercial, esto es,

$$\begin{aligned}
\mathbf{s}_3 &= \mathbf{a}_3 + \mathbf{Q}_3\mathbf{a}_4 \\
\mathbf{s}_2 &= \mathbf{a}_2 + \mathbf{Q}_2\mathbf{s}_3 \\
\mathbf{s}_1 &= \mathbf{a}_1 + \mathbf{Q}_1\mathbf{s}_2.
\end{aligned} \quad (2.22)$$

La cerradura para la rotación resulta:

$$[\mathbf{Q}_{1,4}]_1 = [\mathbf{Q}_{1,2}]_1 [\mathbf{Q}_{2,3}]_2 [\mathbf{Q}_{3,4}]_3 = \mathbf{Q}_1\mathbf{Q}_2\mathbf{Q}_3 \quad (2.23)$$

para simplificar las operaciones de las matrices de rotación, se utiliza la siguiente notación,

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}_1 &= \mathbf{Q}_1 \\
\mathbf{P}_2 &= \mathbf{P}_1\mathbf{Q}_2 \\
\mathbf{P}_3 &= \mathbf{P}_2\mathbf{Q}_3
\end{aligned} \quad (2.24)$$

## Análisis cinemático directo de velocidad y aceleración

Derivando con respecto al tiempo la ec. 2.21, se tiene:

$$\dot{\mathbf{u}} = \dot{\mathbf{a}}_1 + \dot{\mathbf{Q}}_1\mathbf{a}_2 + \mathbf{Q}_1\dot{\mathbf{a}}_2 + \dot{\mathbf{Q}}_1\mathbf{Q}_2\mathbf{a}_3 + \mathbf{Q}_1\dot{\mathbf{Q}}_2\mathbf{a}_3 + \mathbf{Q}_1\mathbf{Q}_2\dot{\mathbf{a}}_3 + \dot{\mathbf{Q}}_1\mathbf{Q}_2\mathbf{Q}_3\mathbf{a}_4 + \mathbf{Q}_1\dot{\mathbf{Q}}_2\mathbf{Q}_3\mathbf{a}_4 + \mathbf{Q}_1\mathbf{Q}_2\dot{\mathbf{Q}}_3\mathbf{a}_4 + \mathbf{Q}_1\mathbf{Q}_2\mathbf{Q}_3\dot{\mathbf{a}}_4 \quad (2.25)$$

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{u}} &= \frac{\partial \mathbf{a}_1}{\partial \theta_1} \dot{\theta}_1 + \frac{\partial \mathbf{Q}_1}{\partial \theta_1} \dot{\theta}_1 \mathbf{a}_2 + \mathbf{Q}_1 \frac{\partial \mathbf{a}_2}{\partial \theta_2} \dot{\theta}_2 + \frac{\partial \mathbf{Q}_1}{\partial \theta_1} \dot{\theta}_1 \mathbf{Q}_2 \mathbf{a}_3 + \mathbf{Q}_1 \frac{\partial \mathbf{Q}_2}{\partial \theta_2} \dot{\theta}_2 \mathbf{a}_3 + \mathbf{Q}_1 \mathbf{Q}_2 \frac{\partial \mathbf{a}_3}{\partial \theta_3} \dot{\theta}_3 + \\
&\quad \frac{\partial \mathbf{Q}_1}{\partial \theta_1} \dot{\theta}_1 \mathbf{Q}_2 \mathbf{Q}_3 \mathbf{a}_4 + \mathbf{Q}_1 \frac{\partial \mathbf{Q}_2}{\partial \theta_2} \dot{\theta}_2 \mathbf{Q}_3 \mathbf{a}_4 + \mathbf{Q}_1 \mathbf{Q}_2 \frac{\partial \mathbf{Q}_3}{\partial \theta_3} \dot{\theta}_3 \mathbf{a}_4
\end{aligned}$$

$$\dot{\mathbf{u}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{a}_1}{\partial \theta_1} + \frac{\partial \mathbf{Q}_1}{\partial \theta_1} \mathbf{a}_2 + \frac{\partial \mathbf{Q}_1}{\partial \theta_1} \mathbf{Q}_2 \mathbf{a}_3 + \frac{\partial \mathbf{Q}_1}{\partial \theta_1} \mathbf{Q}_2 \mathbf{Q}_3 \mathbf{a}_4, \mathbf{Q}_1 \frac{\partial \mathbf{a}_2}{\partial \theta_2} + \mathbf{Q}_1 \frac{\partial \mathbf{Q}_2}{\partial \theta_2} \mathbf{a}_3 + \mathbf{Q}_1 \frac{\partial \mathbf{Q}_2}{\partial \theta_2} \mathbf{Q}_3 \mathbf{a}_4, \mathbf{Q}_1 \mathbf{Q}_2 \frac{\partial \mathbf{a}_3}{\partial \theta_3} + \mathbf{Q}_1 \mathbf{Q}_2 \frac{\partial \mathbf{Q}_3}{\partial \theta_3} \mathbf{a}_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \end{bmatrix}. \quad (2.26)$$

Las derivadas parciales pueden representarse de la siguiente forma. Por definición del método de Denavit-Hartenberg, por ejemplo  $\mathbf{a}_2$  se obtiene de la siguiente manera,

$$\mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ b_2 \end{bmatrix} + \mathbf{Q}_2 \begin{bmatrix} x_3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ b_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c\theta_2 & -s\theta_2 & 0 \\ s\theta_2 & c\theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_3 c\theta_2 \\ x_3 s\theta_2 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

además dado que  $\mathbf{Q}_2$  es una matriz ortonormal,

$$\mathbf{Q}_2^T \mathbf{Q}_2 = \mathbf{I}_d$$

por lo que la derivada de  $\mathbf{a}_2$  con respecto a la variable  $\theta_2$ , es igual

$$\frac{\partial \mathbf{a}_2}{\partial \theta_2} = \frac{\partial \mathbf{Q}_2}{\partial \theta_2} \mathbf{Q}_2^T \mathbf{Q}_2 \begin{bmatrix} x_3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

considerando

$$\mathbf{\Omega} = \frac{\partial \mathbf{Q}_2}{\partial \theta_2} \mathbf{Q}_2^T = \begin{bmatrix} -s\theta_2 & -c\theta_2 & 0 \\ c\theta_2 & -s\theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\theta_2 & s\theta_2 & 0 \\ -s\theta_2 & c\theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

a dicha matriz se le denotará como,

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

la matriz  $\mathbf{E}$  es la matriz antisimétrica cuya rotación es el eje  $z$ , además suponiendo que  $\mathbf{a} = [a_x, a_y, a_z]^T$  y  $\mathbf{b} = [b_x, b_y, b_z]^T$ , entonces

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (\mathbf{a} \times) \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 & -a_z & a_y \\ a_z & 0 & -a_x \\ -a_y & a_x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{bmatrix},$$

si el vector  $\mathbf{e} = [0, 0, 1]^T$ , entonces,

$$\mathbf{e} \times = \mathbf{E}$$

por lo que,

$$\frac{\partial \mathbf{a}_2}{\partial \theta_2} = \mathbf{\Omega} \mathbf{a}_2 = \mathbf{e} \times \mathbf{a}_2,$$

en general, las derivadas parciales de las funciones vectoriales pueden determinarse aplicando el producto vectorial entre el vector axial  $\mathbf{e}$  y la función vectorial. Por lo que la ec. 2.26 se puede determinar de la siguiente manera

$$\dot{\mathbf{u}} = \left[ \mathbf{e}_1 \times (\mathbf{a}_1 + \mathbf{Q}_1 \mathbf{a}_2 + \mathbf{Q}_1 \mathbf{Q}_2 \mathbf{a}_3 + \mathbf{Q}_1 \mathbf{Q}_2 \mathbf{Q}_3 \mathbf{a}_4), \mathbf{Q}_1 (\mathbf{e}_1 \times (\mathbf{a}_2 + \mathbf{Q}_2 \mathbf{a}_3 + \mathbf{Q}_2 \mathbf{Q}_3 \mathbf{a}_4)), \mathbf{Q}_1 \mathbf{Q}_2 (\mathbf{e}_1 \times (\mathbf{a}_3 + \mathbf{Q}_3 \mathbf{a}_4)) \right] \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \end{bmatrix} \quad (2.27)$$

aquí  $\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}$ . Sustituyendo la ec. 2.22 en 2.27,

$$\dot{\mathbf{u}} = [\mathbf{e}_1 \times \mathbf{s}_1, \mathbf{Q}_1 (\mathbf{e}_1 \times \mathbf{s}_2), \mathbf{Q}_1 \mathbf{Q}_2 (\mathbf{e}_1 \times \mathbf{s}_3)] \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \end{bmatrix} \quad (2.28)$$

sustituyendo la ec. 2.24 en 2.28:

$$\dot{\mathbf{u}} = \underbrace{[\mathbf{e}_1 \times \mathbf{s}_1, \mathbf{P}_1 (\mathbf{e}_1 \times \mathbf{s}_2), \mathbf{P}_2 (\mathbf{e}_1 \times \mathbf{s}_3)]}_{\mathbf{J}} \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \end{bmatrix}}_{\dot{\theta}} \quad (2.29)$$

esto es, la ec. 2.29 se representa como,

$$\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{J}\dot{\boldsymbol{\theta}}, \quad (2.30)$$

derivando con respecto al tiempo la ec. 2.30,

$$\ddot{\mathbf{u}} = \mathbf{J}\ddot{\boldsymbol{\theta}} + \dot{\mathbf{J}}\dot{\boldsymbol{\theta}}. \quad (2.31)$$

### Cinemática inversa de posición

**Junta 1.** Proyectando los elementos del manipulador PUMA sobre el plano horizontal (XY) con origen  $\mathbf{o}_1$ , se puede observar en la figura 2.5 que:  $\theta_1 = \phi - \alpha$ ,

$$r_A^2 = g^2 + r_1^2 \Rightarrow r_1^2 = r_A^2 - g^2 \quad (2.32)$$

además

$$r_A^2 = p_x^2 + p_y^2 \quad (2.33)$$

por lo que

$$r_1 = (p_x^2 + p_y^2 - g^2)^{1/2}, \quad (2.34)$$

de identidades trigonométricas

$$s\theta_1 = s(\phi - \alpha) = s\phi c\alpha - s\alpha c\phi \quad c\theta_1 = c(\phi - \alpha) = c\phi c\alpha + s\alpha s\phi$$

por lo que

$$s\theta_1 = \frac{p_y r_1}{r_A^2} - \frac{p_x g}{r_A^2} \quad c\theta_1 = \frac{p_x r_1}{r_A^2} + \frac{p_y g}{r_A^2}$$

de relaciones trigonométricas,

$$\tan\theta_1 = \frac{s\theta_1}{c\theta_1} \Rightarrow \theta_1 = \arctan\left(\frac{p_y r_1 - p_x g}{p_x r_1 + p_y g}\right) \quad (2.35)$$

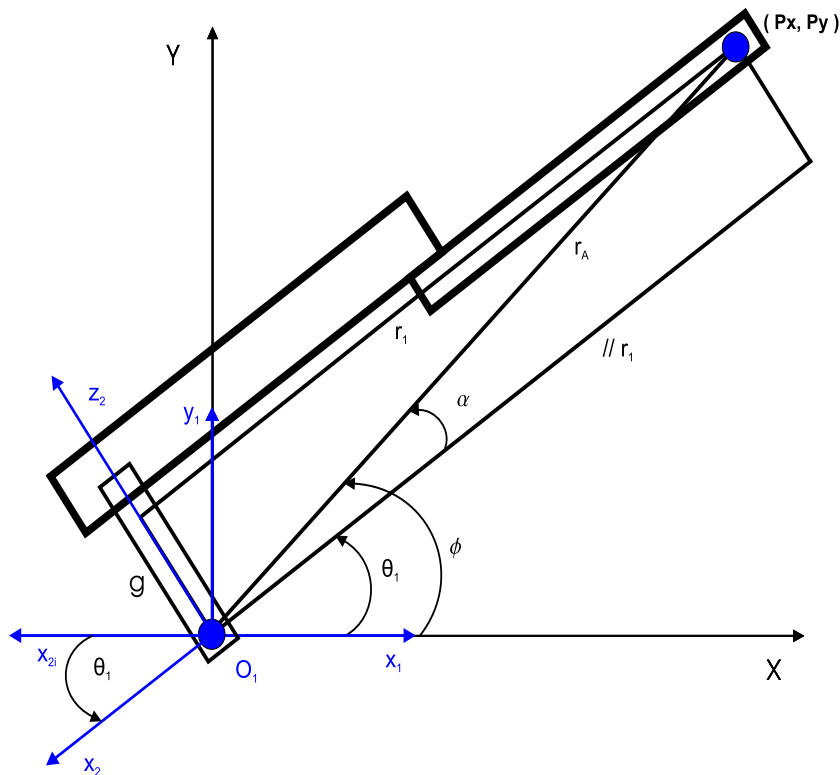


Figura 2.5: Junta 1: Configuración brazo izquierdo del manipulador PUMA.



**Junta 2.** Vista lateral del manipulador (plano XZ) en la configuración codo abajo del brazo.

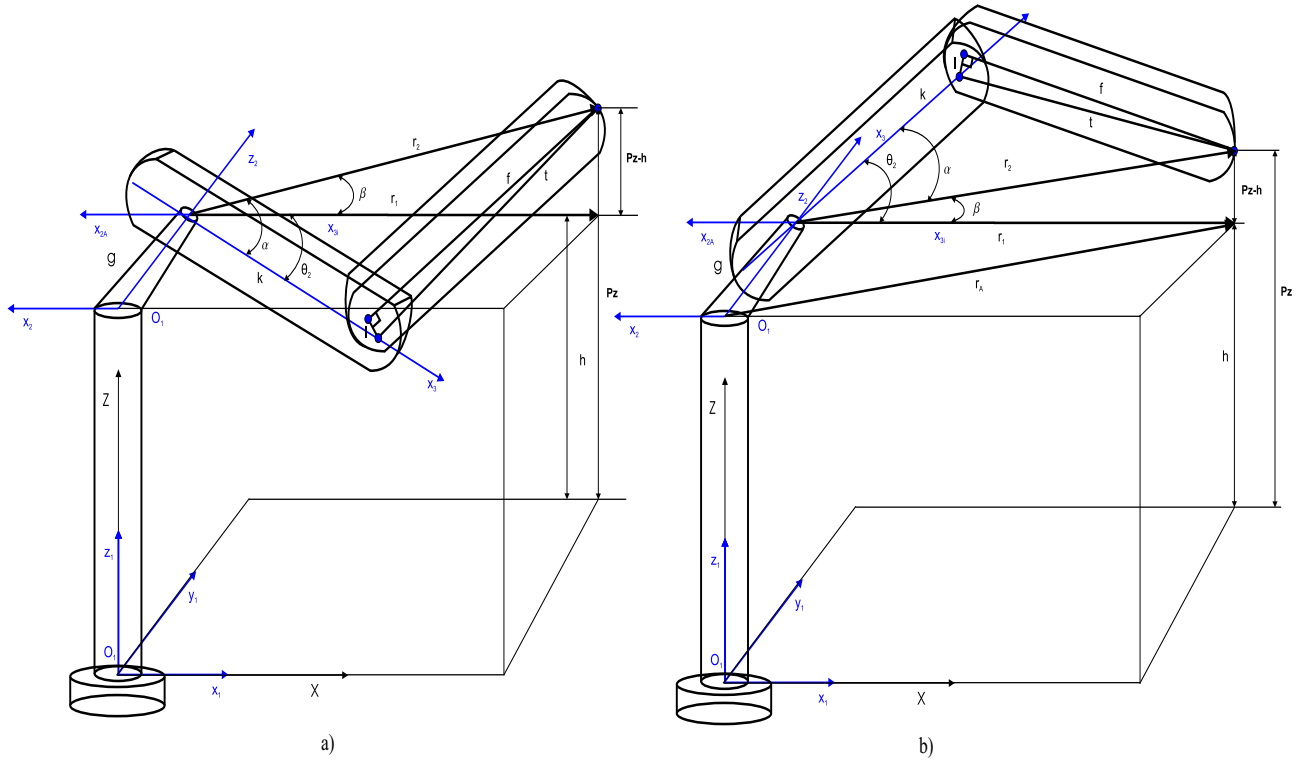


Figura 2.6: Junta 2: a). Configuración brazo izquierdo codo abajo y b). Codo arriba del manipulador PUMA.

De la figura 2.6 “a)” el ángulo de la segunda junta  $\theta_2$  para la configuración codo abajo es igual a

$$\theta_2^{cab} = \alpha - \beta, \quad (2.36)$$

además,

$$r_2^2 = r_1^2 + (p_z - h)^2 \quad (2.37)$$

sustituyendo la ec. 2.34 en 2.37, se tiene

$$r_2^2 = p_x^2 + p_y^2 - g^2 + (p_z - h)^2 \quad (2.38)$$

también

$$t^2 = l^2 + f^2. \quad (2.39)$$

Determinación de  $\alpha$ . Aplicando ley de los cosenos

$$t^2 = k^2 + r_2^2 - 2kr_2 \cos \alpha \Rightarrow \alpha = \arccos \left( \frac{k^2 + r_2^2 - t^2}{2kr_2} \right). \quad (2.40)$$

Determinación de  $\beta$ . Como el ángulo que se forma entre  $r_1$  y  $p_z - h$  es recto, entonces,

$$\tan \beta = \frac{p_z - h}{r_1} \Rightarrow \beta = \arctan \left( \frac{p_z - h}{r_1} \right) \quad (2.41)$$

sustituyendo 2.40 y 2.41 en 2.36, se tiene

$$\theta_2^{cab} = \arccos \left( \frac{k^2 + r_2^2 - t^2}{2kr_2} \right) - \arctan \left( \frac{p_z - h}{r_1} \right). \quad (2.42)$$

Para el caso de la configuración codo arriba del manipulador, se observa de la figura 2.6 “b)” que la junta  $\theta_2$  es igual a

$$\theta_2^{car} = -(\alpha + \beta), \quad (2.43)$$

**Junta 3.** Vista lateral del manipulador (plano vertical XZ) en la configuración codo abajo del brazo. De relaciones trigonométricas observadas en la figura 2.7 “a)” se tiene,

$$\tan \gamma = \frac{f}{l} \Rightarrow \gamma = \arctan\left(\frac{f}{l}\right) \quad (2.44)$$

además

$$\phi = \delta - \gamma \quad (2.45)$$

Determinación de  $\delta$ . Aplicando la ley de los cosenos

$$r_2^2 = k^2 + t^2 - 2k t \cos \delta \Rightarrow \delta = \arccos\left(\frac{k^2 + t^2 - r_2^2}{2k t}\right) \quad (2.46)$$

por tanto

$$\theta_3^{cab} = -(\pi - \phi) = -(\pi - \delta + \gamma) \quad (2.47)$$

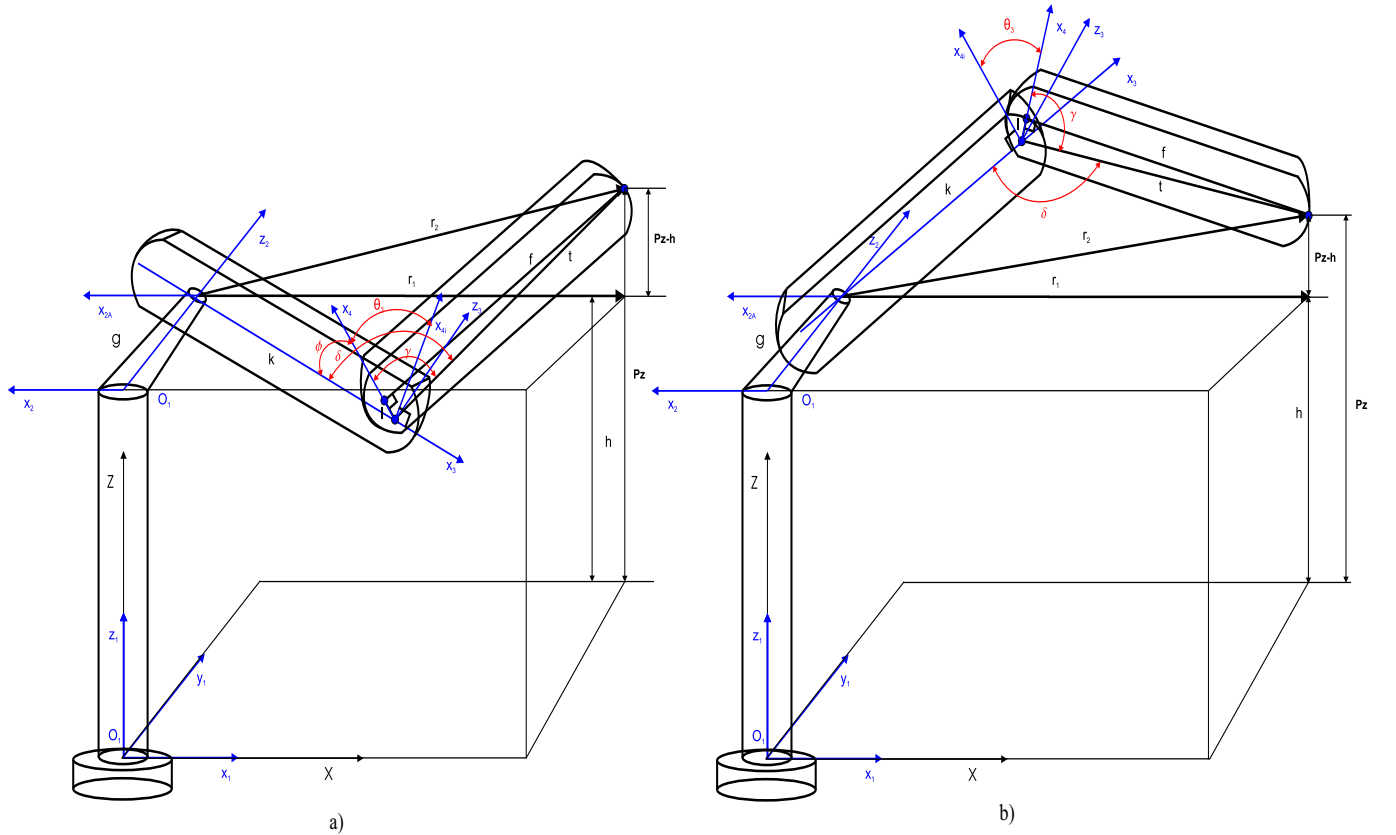


Figura 2.7: Junta 3: a). Configuración brazo izquierdo codo abajo y b). Codo arriba del manipulador PUMA.

Para el caso de la configuración codo arriba del manipulador, se observa de la figura 2.7 “b)” que la junta  $\theta_3$  es igual a

$$\theta_3^{car} = 3\pi/2 - \delta - \gamma, \quad (2.48)$$

**Análisis inverso de velocidad y aceleración.** Para que el OT del manipulador siga una trayectoria  $\mathbf{T}(t) = \mathbf{T}$  se impone la condición de que la trayectoria

$$\mathbf{T} = \mathbf{u}; \mathbf{T}, \mathbf{u} \in \mathbb{R}^3 \quad (2.49)$$

de igual forma para el caso de la velocidad y aceleración, esto es,

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{T}} &= \dot{\mathbf{u}}; \dot{\mathbf{T}}, \dot{\mathbf{u}} \in \mathbb{R}^3 \\ \ddot{\mathbf{T}} &= \ddot{\mathbf{u}}; \ddot{\mathbf{T}}, \ddot{\mathbf{u}} \in \mathbb{R}^3 \end{aligned} \quad (2.50)$$

por lo que la ec. 2.30 queda de la forma siguiente,

$$\dot{\mathbf{T}} = \mathbf{J}\dot{\boldsymbol{\theta}} \quad (2.51)$$

la ec. 2.31 queda de la siguiente forma,

$$\ddot{\mathbf{T}} = \mathbf{J}\ddot{\boldsymbol{\theta}} + \dot{\mathbf{J}}\dot{\boldsymbol{\theta}} \quad (2.52)$$

por lo que la **cinemática inversa de velocidad** se obtiene despejando  $\dot{\boldsymbol{\theta}}$  de la ec. 2.51, esto es,

$$\dot{\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{J}^{-1}\dot{\mathbf{T}} \quad (2.53)$$

y la **cinemática inversa aceleración** se obtiene despejando  $\ddot{\boldsymbol{\theta}}$  de la ec. 2.52, esto es,

$$\ddot{\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{J}^{-1}\ddot{\mathbf{T}} - \mathbf{J}^{-1}\dot{\mathbf{J}}\dot{\boldsymbol{\theta}}, \quad (2.54)$$

donde  $\dot{\mathbf{J}} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ , es la derivada con respecto al tiempo de la matriz Jacobiana, su representación de forma simplificada es

$$\dot{\mathbf{J}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 & \dot{\theta}_2 & \dot{\theta}_3 \end{bmatrix}}_{\dot{\boldsymbol{\theta}}^T} \begin{bmatrix} \mathbf{e} \times \frac{\partial \mathbf{s}_1}{\partial \theta_1} & \mathbf{e} \times \frac{\partial \mathbf{s}_1}{\partial \theta_2} & \mathbf{e} \times \frac{\partial \mathbf{s}_1}{\partial \theta_3} \\ \mathbf{e} \times \frac{\partial \mathbf{s}_2}{\partial \theta_1} & \mathbf{P}_1 \mathbf{e} \times \frac{\partial \mathbf{s}_2}{\partial \theta_2} & \mathbf{P}_1 \mathbf{e} \times \frac{\partial \mathbf{s}_2}{\partial \theta_3} \\ \mathbf{e} \times \frac{\partial \mathbf{s}_3}{\partial \theta_1} & \mathbf{P}_1 \mathbf{e} \times \frac{\partial \mathbf{s}_3}{\partial \theta_2} & \mathbf{P}_2 \mathbf{e} \times \frac{\partial \mathbf{s}_3}{\partial \theta_3} \end{bmatrix} \quad (2.55)$$

esto resulta,

$$\dot{\mathbf{J}} = \begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{\theta}} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{e} \times (\mathbf{e} \times \mathbf{s}_1) & \mathbf{e} \times \mathbf{P}_1(\mathbf{e} \times \mathbf{s}_2) & \mathbf{e} \times \mathbf{P}_2(\mathbf{e} \times \mathbf{s}_3) \\ \mathbf{e} \times \mathbf{P}_1(\mathbf{e} \times \mathbf{s}_2) & \mathbf{P}_1(\mathbf{e} \times (\mathbf{e} \times \mathbf{s}_2)) & \mathbf{P}_1 \mathbf{e} \times \mathbf{P}_2(\mathbf{e} \times \mathbf{s}_3) \\ \mathbf{e} \times \mathbf{P}_2(\mathbf{e} \times \mathbf{s}_3) & \mathbf{P}_1 \mathbf{e} \times \mathbf{P}_2(\mathbf{e} \times \mathbf{s}_3) & \mathbf{P}_2(\mathbf{e} \times (\mathbf{e} \times \mathbf{s}_3)) \end{bmatrix}. \quad (2.56)$$

MODELACIÓN DINÁMICA DE ROBOTS MANIPULADORES  
SERIALES CON EL MÉTODO DE EULER-LAGRANGE

3.1. Introducción

En este capítulo se realiza el análisis dinámico del manipulador de 2GdL con juntas rotatorias con las ecuaciones de Euler-Lagrange. También se parte de estas ecuaciones (Euler-Lagrange) para realizar una reformulación y simplificar términos, y de esta forma reducir operaciones. Finalmente se presenta el desarrollo del modelo dinámico con la arquitectura mecánica del manipulador PUMA para sus tres primeros grados de libertad.

3.2. Dinámica inversa del manipulador de 2GdL

Los eslabones del manipulador son modelados como alambres y sus centros de masas  $cm_1$  y  $cm_2$  se asume que están a la mitad de éstos, como se muestra en la figura 3.1.

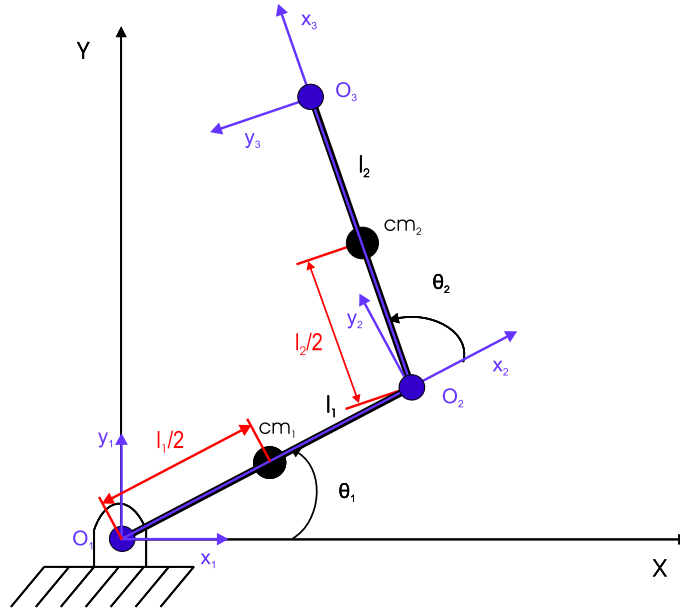


Figura 3.1: Localización de los centros de masa de los eslabones.

De la ecuación dinámica de Lagrange [14]

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial \theta_j} + \frac{\partial V}{\partial \theta_j} = f_j^*; j = 1, 2, \dots, n \quad (3.1)$$

donde, n: Grados de libertad del sistema.

T: Energía cinética total del sistema de cuerpos rígidos del robot manipulador.

V: Es la energía potencial total de los eslabones del manipulador, medidos desde la base inercial a los centros de masa de cada uno de estos cuerpos rígidos.

$\theta_j, \dot{\theta}_j$ : Posición y velocidad en las juntas articulares.

La energía cinética del eslabón 1,

$$T_1 = (1/2)m_1v_{cm1}^2 + (1/2)I_1\omega_1^2 \quad (3.2)$$

donde:  $\omega_1 = \dot{\theta}_1$ ,  $v_{cm1} = (1/2)l_1\dot{\theta}_1$  y  $I_1 = (1/12)m_1l_1^2$   
sustituyendo  $\omega_1, v_{cm1}$  e  $I_1$  en la ec. 3.2,

$$T_1 = (1/6)m_1l_1^2\dot{\theta}_1^2 \quad (3.3)$$

La energía cinética del eslabón 2,

$$T_2 = (1/2)m_2v_{cm2}^2 + (1/2)I_2\omega_2^2 \quad (3.4)$$

donde:  $\omega_2 = \theta_1 + \theta_2$ ,  $I_2 = (1/12)m_2l_2^2$  y  $v_{cm2}^2 = l_1^2\dot{\theta}_1^2 + 1/4l_2^2\dot{\theta}_1^2 + (1/2)l_2^2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 + 1/4l_2^2\dot{\theta}_2^2 + l_1l_2\dot{\theta}_1^2c\theta_2 + l_1l_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2c\theta_2$   
sustituyendo  $\omega_2$ ,  $I_2$  y  $v_{cm2}$  en la ec. 3.4, se obtiene

$$T_2 = \frac{1}{2}m_2l_1^2\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{6}m_2l_2^2\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}m_2l_1l_2\dot{\theta}_1^2c\theta_2 + \frac{1}{6}m_2l_2^2\dot{\theta}_2^2 + \frac{1}{3}m_2l_2^2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 + \frac{1}{2}m_2l_1l_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2c\theta_2 \quad (3.5)$$

por lo que de las ecs. 3.3 y 3.5, la energía cinética total del sistema es

$$T = \left( \frac{1}{6}m_1l_1^2 + \frac{1}{2}m_2l_1^2 + \frac{1}{6}m_2l_2^2 + \frac{1}{2}m_2l_1l_2c\theta_2 \right) \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{6}m_2l_2^2\dot{\theta}_2^2 + \left( \frac{1}{3}m_2l_2^2 + \frac{1}{2}m_2l_1l_2c\theta_2 \right) \dot{\theta}_1\dot{\theta}_2. \quad (3.6)$$

La energía potencial para el eslabón 1 ( $V_1$ ) y eslabón 2 ( $V_2$ ) son:

$$V_1 = \frac{1}{2}m_1gl_1s\theta_1 \quad (3.7)$$

$$V_2 = m_1gl_1s\theta_1 + \frac{1}{2}m_2gl_2s(\theta_1 + \theta_2) \quad (3.8)$$

de las ecs. 3.7 y 3.8, la energía potencial total del sistema es,

$$V = \frac{1}{2}m_1gl_1s\theta_1 + m_1gl_1s\theta_1 + \frac{1}{2}m_2gl_2s(\theta_1 + \theta_2). \quad (3.9)$$

Tomando las ecs. 3.6 y 3.9, y aplicando la ec. de movimiento de Lagrange a cada una de las juntas articulares

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_1} \right) - \frac{\partial T}{\partial \theta_1} + \frac{\partial V}{\partial \theta_1} = f_1^* \quad (3.10)$$

el torque en la junta 1 es,

$$f_1^* = \left( \frac{1}{3}m_1l_1^2 + m_2l_1^2 + \frac{1}{3}m_2l_2^2 + m_2l_1l_2c\theta_2 \right) \ddot{\theta}_1 + \left( \frac{1}{3}m_2l_2^2 + \frac{1}{2}m_2l_1l_2c\theta_2 \right) \ddot{\theta}_2 - m_2l_1l_2s\theta_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 - \frac{1}{2}m_2l_1l_2s\theta_2\dot{\theta}_2^2 + \left( \frac{1}{2}m_1 + m_2 \right) gl_1c\theta_1 + \frac{1}{2}m_2gl_2c(\theta_1 + \theta_2) \quad (3.11)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_2} \right) - \frac{\partial T}{\partial \theta_2} + \frac{\partial V}{\partial \theta_2} = f_2^* \quad (3.12)$$

el torque en la junta 2 es,

$$f_2^* = \left( \frac{1}{3}m_2l_2^2 + \frac{1}{2}m_2l_1l_2c\theta_2 \right) \ddot{\theta}_1 + \frac{1}{3}m_2l_2^2\ddot{\theta}_2 - \frac{1}{2}m_2l_1l_2s\theta_2\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}m_2gl_2c(\theta_1 + \theta_2). \quad (3.13)$$

Reescribiendo las ecs. 3.11 y 3.13, en forma matricial, resulta

$$\underbrace{\begin{bmatrix} f_1^* \\ f_2^* \end{bmatrix}}_{\mathbf{f}^*} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{3}m_1l_1^2 + m_2l_1^2 + \frac{1}{3}m_2l_2^2 + m_2l_1l_2c\theta_2 & \frac{1}{3}m_2l_2^2 + \frac{1}{2}m_2l_1l_2c\theta_2 \\ \frac{1}{3}m_2l_2^2 + \frac{1}{2}m_2l_1l_2c\theta_2 & \frac{1}{3}m_2l_2^2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{I}(\theta)} \underbrace{\begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix}}_{\ddot{\theta}} + \underbrace{\begin{bmatrix} -m_2l_1l_2s\theta_2\dot{\theta}_2 & -\frac{1}{2}m_2l_1l_2s\theta_2\dot{\theta}_2 \\ -\frac{1}{2}m_2l_1l_2s\theta_2\dot{\theta}_1 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{C}(\theta, \dot{\theta})} \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix}}_{\dot{\theta}} + \underbrace{\begin{bmatrix} (\frac{1}{2}m_1 + m_2) gl_1c\theta_1 + \frac{1}{2}m_2gl_2c(\theta_1 + \theta_2) \\ \frac{1}{2}m_2gl_2c(\theta_1 + \theta_2) \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}(\theta)} \quad (3.14)$$

por lo que, la ec. 3.14 se puede representar simbólicamente como:

$$\mathbf{I}(\boldsymbol{\theta})\ddot{\boldsymbol{\theta}} + \mathbf{C}(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}})\dot{\boldsymbol{\theta}} + \mathbf{b}(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{f}^* \quad (3.15)$$

donde,  $\mathbf{I}(\boldsymbol{\theta})$  : Es la matriz generalizada de inercia.

$\ddot{\boldsymbol{\theta}}$  : Es el vector de aceleración en las juntas del manipulador.

$\mathbf{C}(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}})$  : Es la matriz de Coriolis y fuerza centrífuga.

$\dot{\boldsymbol{\theta}}$  : Es el vector de velocidad en las juntas del manipulador.

$\mathbf{b}(\boldsymbol{\theta})$  : Es el vector de gravedad.

$\mathbf{f}^*$  : Es la fuerza generalizada en las juntas del manipulador.

### 3.3. La dinámica de Euler-Lagrange

La ecuación de Euler-Lagrange para un sistema con “n” grados de libertad descrito por coordenadas generalizadas  $q_1, q_2, \dots, q_n$  es[14]:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} + \frac{\partial V}{\partial q_j} = f_j^*; j = 1, 2, \dots, n \quad (3.16)$$

donde, V: Energía potencial del sistema de cuerpos rígidos medidos de un plano de referencia a los centros de masa de cada uno de los eslabones.

T: Energía cinética total del sistema de cuerpos rígidos, correspondientes a los eslabones del manipulador.

$f_j^*$ : Fuerza generalizada demandada en la j-ésima junta.

Tomando  $\mathbf{q} = [q_1, q_2, \dots, q_n]^T$  como el vector de coordenadas generalizadas, entonces la ec. 3.16, se puede representar como:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \mathbf{q}} + \frac{\partial V}{\partial \mathbf{q}} = \mathbf{f}^*. \quad (3.17)$$

La expresión general para la energía cinética del i-ésimo cuerpo rígido con masa  $m_i$ , que se mueve de tal forma que la velocidad de su centro de masa sea  $\dot{\mathbf{r}}_i$  y su velocidad angular sea  $\boldsymbol{\omega}_i$ , está dada por [9],[15]:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m (m_i \dot{\mathbf{r}}_i^T \dot{\mathbf{r}}_i + \boldsymbol{\omega}_i^T \mathbf{I}_i \boldsymbol{\omega}_i); \quad (3.18)$$

donde m: Número de eslabones móviles;

$\mathbf{r}_i$ :vector de posición que va de la base inercial al centro de masa del i-ésimo eslabón.

$\dot{\mathbf{r}}_i$ : velocidad lineal en el centro de masa del i-ésimo eslabón medido en la base inercial.

$\boldsymbol{\omega}_i$ : velocidad angular del i-ésimo eslabón medido en la base inercial.

$\mathbf{I}_i$ : matriz de inercia del del i-ésimo eslabón medido en su centro de masa y referenciado a la base inercial.

**Representación del cálculo de la velocidad y aceleración en los centros de masa de los eslabones**, por ejemplo, de acuerdo a lo descrito por Rojas [8] para el PUMA con sus tres primeros GdL, corresponde

$$\mathbf{r}_3 = \mathbf{a}_1 + \mathbf{Q}_1 \mathbf{a}_2 + \mathbf{Q}_1 \mathbf{Q}_2 \mathbf{a}_3 + \mathbf{Q}_1 \mathbf{Q}_2 \mathbf{Q}_3 \mathbf{a}_{4cm} \quad (3.19)$$

$$\mathbf{r}_2 = \mathbf{a}_1 + \mathbf{Q}_1 \mathbf{a}_{2cm}$$

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{a}_{1cm}.$$

aquí  $\mathbf{a}_{1cm}$ ,  $\mathbf{a}_{2cm}$ ,  $\mathbf{a}_{4cm}$  son los vectores que parten de la base local de los eslabones a los centros de masa de los eslabones 1, 2 y 3 respectivamente.

Derivando con respecto al tiempo a la ecuación de posición 3.19, se obtiene,

$$\dot{\mathbf{r}}_3 = \left[ \begin{array}{l} \mathbf{e}_1 \times (\mathbf{a}_1 + \mathbf{Q}_1 \mathbf{a}_2 + \mathbf{Q}_1 \mathbf{Q}_2 \mathbf{a}_3 + \mathbf{Q}_1 \mathbf{Q}_2 \mathbf{Q}_3 \mathbf{a}_{4cm}), \mathbf{Q}_1 (\mathbf{e}_1 \times (\mathbf{a}_2 + \mathbf{Q}_2 \mathbf{a}_3 + \mathbf{Q}_2 \mathbf{Q}_3 \mathbf{a}_{4cm})), \\ \mathbf{Q}_1 \mathbf{Q}_2 (\mathbf{e}_1 \times (\mathbf{a}_3 + \mathbf{Q}_3 \mathbf{a}_{4cm})) \end{array} \right] \left[ \begin{array}{l} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{array} \right] \quad (3.20)$$

si se considera a

$$\begin{aligned} \mathbf{s}_3 &= \mathbf{a}_3 + \mathbf{Q}_3 \mathbf{a}_{4cm} \\ \mathbf{s}_2 &= \mathbf{a}_2 + \mathbf{Q}_2 \mathbf{s}_3 \\ \mathbf{s}_1 &= \mathbf{a}_1 + \mathbf{Q}_1 \mathbf{s}_2 \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_1 &= \mathbf{Q}_1 \\ \mathbf{P}_2 &= \mathbf{P}_1 \mathbf{Q}_2 \end{aligned}$$

por tanto, el vector  $\dot{\mathbf{r}}_3$ , queda de la siguiente forma

$$\dot{\mathbf{r}}_3 = \underbrace{[\mathbf{e}_1 \times \mathbf{s}_1, \mathbf{P}_1 (\mathbf{e}_1 \times \mathbf{s}_2), \mathbf{P}_2 (\mathbf{e}_1 \times \mathbf{s}_3)]}_{\mathbf{R}_3} \underbrace{\left[ \begin{array}{l} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{array} \right]}_{\dot{\mathbf{q}}} \quad (3.21)$$

por lo que la ec. 3.21 de forma simbólica se representa como

$$\dot{\mathbf{r}}_3 = \mathbf{R}_3 \dot{\mathbf{q}}. \quad (3.22)$$

La ec. 3.22 de forma general, se puede representar como,

$$\dot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{R}_i \dot{\mathbf{q}}; \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (3.23)$$

derivando con respecto al tiempo a la ec. 3.23 se tiene,

$$\ddot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{R}_i \ddot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{R}}_i \dot{\mathbf{q}} \quad (3.24)$$

donde

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_i &= \left[ \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_1}, \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_2}, \dots, \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_n} \right] \\ \dot{\mathbf{R}}_i &= \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_1} \right), \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_2} \right), \dots, \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_n} \right) \right] \end{aligned} \quad (3.25)$$

esto es,

$$\dot{\mathbf{R}}_i = \left[ \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial q_1}, \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial q_2}, \dots, \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial q_n} \right].$$

**Representación del cálculo de la velocidad y aceleración angular.**

Considerando los vectores  $\mathbf{e}'_i$ s referidos a la base inercial

$$[\mathbf{e}'_i]_1 = \mathbf{Q}_1 \mathbf{Q}_2, \dots, \mathbf{Q}_{i-1} \mathbf{e} = \mathbf{e}_i \quad (3.26)$$

velocidad angular es

$$\boldsymbol{\omega}_i = \mathbf{e}_1 \dot{q}_1 + \mathbf{e}_2 \dot{q}_2 + \dots + \mathbf{e}_i \dot{q}_i = \underbrace{[\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_i]}_{\mathbf{A}_i} \underbrace{\left[ \begin{array}{l} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \vdots \\ \dot{q}_i \end{array} \right]}_{\dot{\mathbf{q}}} \quad (3.27)$$

por lo que la ec. 3.27 se representa de forma simbólica como,

$$\boldsymbol{\omega}_i = \mathbf{A}_i \dot{\mathbf{q}} \quad (3.28)$$

derivando con respecto al tiempo a la ec. 3.28,

$$\dot{\boldsymbol{\omega}}_i = \mathbf{A}_i \ddot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{A}}_i \dot{\mathbf{q}}, \quad (3.29)$$

donde,  $\ddot{\mathbf{q}}$  es el vector de aceleración en las juntas del robot, y  $\dot{\mathbf{A}}_i$  se puede obtener a través de:

Por ejemplo, para el caso de,  $i=2$ , entonces  $j=1,2$

$$\frac{\partial \boldsymbol{\omega}_2}{\partial \dot{q}_j} = \left[ \frac{\partial \boldsymbol{\omega}_2}{\partial \dot{q}_1}, \frac{\partial \boldsymbol{\omega}_2}{\partial \dot{q}_2}, \mathbf{0} \right] = [\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{0}] = \mathbf{A}_2,$$

para el caso de  $i=3$ , entonces,  $j=1,2,3$ .

$$\frac{\partial \boldsymbol{\omega}_3}{\partial \dot{q}_j} = \left[ \frac{\partial \boldsymbol{\omega}_3}{\partial \dot{q}_1}, \frac{\partial \boldsymbol{\omega}_3}{\partial \dot{q}_2}, \frac{\partial \boldsymbol{\omega}_3}{\partial \dot{q}_3} \right] = [\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3] = \mathbf{A}_3$$

generalizando, se tiene:

$$\frac{\partial \boldsymbol{\omega}_i}{\partial \dot{q}_j} = \mathbf{A}_i \quad (3.30)$$

por lo que,

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{A}_i) = \dot{\mathbf{A}}_i = [\dot{\mathbf{e}}_1, \dot{\mathbf{e}}_2, \dots, \dot{\mathbf{e}}_i] \quad (3.31)$$

que es equivalente a,

$$\dot{\mathbf{A}}_i = [\mathbf{0}, \boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{e}_2, \boldsymbol{\omega}_2 \times \mathbf{e}_3, \dots, \boldsymbol{\omega}_{i-2} \times \mathbf{e}_{i-1}, \boldsymbol{\omega}_{i-1} \times \mathbf{e}_i] \quad (3.32)$$

### 3.4. Representación equivalente de las ecuaciones de movimiento de Euler-Lagrange

**La energía cinética.** Es necesario conocer a lo que corresponden cada uno de los términos de la ec. 3.17, que corresponde al movimiento de los cuerpos.

Tomando a la ec. 3.18 y derivando con respecto a  $\dot{q}_j$ ,

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} = \sum_{i=1}^m (m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial \dot{q}_j} + \boldsymbol{\omega}_i \cdot \mathbf{I}_i \frac{\partial \boldsymbol{\omega}_i}{\partial \dot{q}_j} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{I}_i}{\partial \dot{q}_j} \boldsymbol{\omega}_i) \quad (3.33)$$

como  $\mathbf{I}_i$  es independiente de la velocidad generalizada, entonces  $\frac{\partial \mathbf{I}_i}{\partial \dot{q}_j} = \mathbf{0}$ ; por lo que,

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} = \sum_{i=1}^m (m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial \dot{q}_j} + \boldsymbol{\omega}_i \cdot \mathbf{I}_i \frac{\partial \boldsymbol{\omega}_i}{\partial \dot{q}_j}), \quad (3.34)$$

derivando con respecto al tiempo la ec. 3.34,

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) = \sum_{i=1}^m \left( m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial \dot{q}_j} + \underbrace{m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial \dot{q}_j} \right)}_a + \underbrace{\dot{\boldsymbol{\omega}}_i \cdot \mathbf{I}_i \frac{\partial \boldsymbol{\omega}_i}{\partial \dot{q}_j} + \boldsymbol{\omega}_i \cdot \dot{\mathbf{I}}_i \frac{\partial \boldsymbol{\omega}_i}{\partial \dot{q}_j}}_b + \underbrace{\boldsymbol{\omega}_i \cdot \mathbf{I}_i \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \boldsymbol{\omega}_i}{\partial \dot{q}_j} \right)}_c \right). \quad (3.35)$$

A continuación se encuentran las equivalencias de los términos “a”, “b”, y “c” de la ec. 3.35. Para el caso del término “a”, se tiene que

$$\frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \quad (3.36)$$



esto se debe a que la variación de la velocidad lineal es independiente de la variación de la velocidad generalizada. Además derivando con respecto al tiempo a la ec. 3.36, se tiene,

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \right) = \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial q_j}. \quad (3.37)$$

por tanto el termino “a” de la ec. 3.35, queda de la siguiente forma

$$m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \right) = m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial q_j}. \quad (3.38)$$

Tomando el término “b” de la ec. 3.35

$$\boldsymbol{\omega}_i \cdot \dot{\mathbf{I}}_i \frac{\partial \boldsymbol{\omega}_i}{\partial \dot{q}_j}, \quad (3.39)$$

determinación de  $\dot{\mathbf{I}}_i = \frac{d}{dt}(\mathbf{I}_i)$ . Donde  $\mathbf{I}_i$  es el momento de inercia referido a la base inercial, la cual es determinado a través del momento de inercia medido en el centro de masa,  $\mathbf{I}_{ci}$ , esto es,

$$\mathbf{I}_i = \mathbf{P}_i \mathbf{I}_{ci} \mathbf{P}_i^T. \quad (3.40)$$

Tomando la ec. 3.40 y derivando con respecto al tiempo a dicha ecuación,

$$\dot{\mathbf{I}}_i = \frac{d}{dt} (\mathbf{P}_i \mathbf{I}_{ci} \mathbf{P}_i^T) = \dot{\mathbf{P}}_i \mathbf{I}_{ci} \mathbf{P}_i^T + \mathbf{P}_i \mathbf{I}_{ci} \dot{\mathbf{P}}_i^T \quad (3.41)$$

donde,

$$\dot{\mathbf{P}}_i = (\boldsymbol{\omega}_i \times) \mathbf{P}_i \quad (3.42)$$

donde  $\boldsymbol{\omega}_i \times$ : representa a la matriz antisimétrica formada por  $\boldsymbol{\omega}_i$ . Sustituyendo la ecuación 3.42 en la ec. 3.41, se tiene,

$$\dot{\mathbf{I}}_i = (\boldsymbol{\omega}_i \times) \mathbf{P}_i \mathbf{I}_{ci} \mathbf{P}_i^T + \mathbf{P}_i \mathbf{I}_{ci} ((\boldsymbol{\omega}_i \times) \mathbf{P}_i)^T \quad (3.43)$$

además, representando de forma equivalente a  $\boldsymbol{\omega}_i \times = \boldsymbol{\Omega}_i$ , entonces

$$(\boldsymbol{\omega}_i \times) \mathbf{P}_i = \boldsymbol{\Omega}_i \mathbf{P}_i$$

por lo que,

$$((\boldsymbol{\omega}_i \times) \mathbf{P}_i)^T = (\boldsymbol{\Omega}_i \mathbf{P}_i)^T = \mathbf{P}_i^T \boldsymbol{\Omega}_i^T \quad (3.44)$$

como  $\boldsymbol{\Omega}_i$  es antisimétrica, entonces  $\boldsymbol{\Omega}_i^T = -\boldsymbol{\Omega}_i$ , por lo que sustituyendo en la ec. 3.44, se tiene,

$$((\boldsymbol{\omega}_i \times) \mathbf{P}_i)^T = -\mathbf{P}_i^T \boldsymbol{\Omega}_i = -\mathbf{P}_i^T \boldsymbol{\omega}_i \times \quad (3.45)$$

sustituyendo las ecuaciones 3.40 y 3.45 en 3.43, se tiene

$$\dot{\mathbf{I}}_i = \boldsymbol{\omega}_i \times \mathbf{P}_i \mathbf{I}_{ci} \mathbf{P}_i^T - \mathbf{P}_i \mathbf{I}_{ci} \mathbf{P}_i^T \boldsymbol{\omega}_i \times = \boldsymbol{\omega}_i \times \mathbf{I}_i - \mathbf{I}_i \boldsymbol{\omega}_i \times. \quad (3.46)$$

Sustituyendo la ec. 3.46 en 3.39

$$\boldsymbol{\omega}_i \cdot \dot{\mathbf{I}}_i \frac{\partial \boldsymbol{\omega}_i}{\partial \dot{q}_j} = \boldsymbol{\omega}_i \cdot (\boldsymbol{\omega}_i \times \mathbf{I}_i - \mathbf{I}_i \boldsymbol{\omega}_i \times) \frac{\partial \boldsymbol{\omega}_i}{\partial \dot{q}_j} = \boldsymbol{\omega}_i \cdot \left( \boldsymbol{\omega}_i \times \mathbf{I}_i \frac{\partial \boldsymbol{\omega}_i}{\partial \dot{q}_j} \right) - \boldsymbol{\omega}_i \cdot \mathbf{I}_i \boldsymbol{\omega}_i \times \frac{\partial \boldsymbol{\omega}_i}{\partial \dot{q}_j}, \quad (3.47)$$

de identidades se tiene,  $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$ , esto es,

$$\boldsymbol{\omega}_i \cdot \dot{\mathbf{I}}_i \frac{\partial \boldsymbol{\omega}_i}{\partial \dot{q}_j} = (\boldsymbol{\omega}_i \times \boldsymbol{\omega}_i) \cdot \mathbf{I}_i \frac{\partial \boldsymbol{\omega}_i}{\partial \dot{q}_j} - (\boldsymbol{\omega}_i \times \mathbf{I}_i \boldsymbol{\omega}_i) \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\omega}_i}{\partial \dot{q}_j} \quad (3.48)$$

lo cual se simplifica a

$$\boldsymbol{\omega}_i \cdot \dot{\mathbf{I}}_i \frac{\partial \boldsymbol{\omega}_i}{\partial \dot{q}_j} = -(\boldsymbol{\omega}_i \times \mathbf{I}_i \boldsymbol{\omega}_i) \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\omega}_i}{\partial \dot{q}_j}. \quad (3.49)$$

Tomando el término “c” de la ec. 3.35

$$\boldsymbol{\omega}_i \cdot \mathbf{I}_i \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \boldsymbol{\omega}_i}{\partial \dot{q}_j} \right). \quad (3.50)$$

De la identidad probada por Silver [10], pag. 69, se tiene que

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \boldsymbol{\omega}_i}{\partial \dot{q}_j} \right) = \boldsymbol{\omega}_i \times \left( \frac{\partial \boldsymbol{\omega}_i}{\partial \dot{q}_j} \right) + \frac{\partial \boldsymbol{\omega}_i}{\partial q_j}, \quad (3.51)$$

sustituyendo la ec. 3.51 en la ec. 3.50.

$$\boldsymbol{\omega}_i \cdot \mathbf{I}_i \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \boldsymbol{\omega}_i}{\partial \dot{q}_j} \right) = \boldsymbol{\omega}_i \cdot \mathbf{I}_i \left( \boldsymbol{\omega}_i \times \frac{\partial \boldsymbol{\omega}_i}{\partial \dot{q}_j} + \frac{\partial \boldsymbol{\omega}_i}{\partial q_j} \right). \quad (3.52)$$

Tomando las ecuaciones 3.38, 3.49, 3.52 y sustituyendo en la ec. 3.35

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) = \sum_{i=1}^m \left[ m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial \dot{q}_j} + m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial q_j} + \dot{\boldsymbol{\omega}}_i \cdot \mathbf{I}_i \frac{\partial \boldsymbol{\omega}_i}{\partial \dot{q}_j} - (\boldsymbol{\omega}_i \times \mathbf{I}_i \boldsymbol{\omega}_i) \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\omega}_i}{\partial \dot{q}_j} + \boldsymbol{\omega}_i \cdot \mathbf{I}_i \left( \boldsymbol{\omega}_i \times \frac{\partial \boldsymbol{\omega}_i}{\partial \dot{q}_j} + \frac{\partial \boldsymbol{\omega}_i}{\partial q_j} \right) \right] \quad (3.53)$$

Desarrollando términos de la ec. 3.53, se tiene

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) = \sum_{i=1}^m \left[ m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial \dot{q}_j} + m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial q_j} + \dot{\boldsymbol{\omega}}_i \cdot \mathbf{I}_i \frac{\partial \boldsymbol{\omega}_i}{\partial \dot{q}_j} - (\boldsymbol{\omega}_i \times \mathbf{I}_i \boldsymbol{\omega}_i) \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\omega}_i}{\partial \dot{q}_j} + \underbrace{\boldsymbol{\omega}_i \cdot \mathbf{I}_i \left( \boldsymbol{\omega}_i \times \frac{\partial \boldsymbol{\omega}_i}{\partial \dot{q}_j} \right)}_d + \boldsymbol{\omega}_i \cdot \mathbf{I}_i \left( \frac{\partial \boldsymbol{\omega}_i}{\partial q_j} \right) \right]. \quad (3.54)$$

Tomando el término “d” de la ec. 3.54, y aplicando la identidad,  $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$ , se tiene,

$$\boldsymbol{\omega}_i \cdot \mathbf{I}_i \left( \boldsymbol{\omega}_i \times \frac{\partial \boldsymbol{\omega}_i}{\partial \dot{q}_j} \right) = \boldsymbol{\omega}_i \cdot \left( \mathbf{I}_i \boldsymbol{\omega}_i \times \frac{\partial \boldsymbol{\omega}_i}{\partial \dot{q}_j} \right) = (\boldsymbol{\omega}_i \times \mathbf{I}_i \boldsymbol{\omega}_i) \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\omega}_i}{\partial \dot{q}_j} \quad (3.55)$$

sustituyendo 3.55 en la ec. 3.54 se tiene,

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) = \sum_{i=1}^m \left[ m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial \dot{q}_j} + m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial q_j} + \boldsymbol{\omega}_i \cdot \mathbf{I}_i \frac{\partial \boldsymbol{\omega}_i}{\partial \dot{q}_j} + \boldsymbol{\omega}_i \cdot \mathbf{I}_i \left( \frac{\partial \boldsymbol{\omega}_i}{\partial q_j} \right) \right]. \quad (3.56)$$

Tomando la ec. 3.18 y derivando con respecto a  $q_j$ ,

$$\frac{\partial T}{\partial q_j} = \sum_{i=1}^m \left( m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial q_j} + \boldsymbol{\omega}_i \cdot \mathbf{I}_i \frac{\partial \boldsymbol{\omega}_i}{\partial q_j} + \underbrace{\frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{I}_i}{\partial q_j} \boldsymbol{\omega}_i}_e \right) \quad (3.57)$$

Tomando la ec. 3.40 y derivando con respecto a  $q_j$ ,

$$\frac{\partial \mathbf{I}_i}{\partial q_j} = \frac{\partial \mathbf{P}_i}{\partial q_j} \mathbf{I}_{ci} \mathbf{P}_i^T + \mathbf{P}_i \mathbf{I}_{ci} \frac{\partial \mathbf{P}_i^T}{\partial q_j} \quad (3.58)$$

debido a que la matriz de inercia no es dependiente de la velocidad, entonces

$$\frac{\partial \mathbf{I}_i}{\partial q_j} = \frac{\partial \dot{\mathbf{I}}_i}{\partial \dot{q}_j} \quad (3.59)$$

sustituyendo la ec. 3.46 en 3.59

$$\frac{\partial \mathbf{I}_i}{\partial q_j} = \frac{\partial \dot{\mathbf{I}}_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} (\boldsymbol{\omega}_i \times \mathbf{I}_i - \mathbf{I}_i \boldsymbol{\omega}_i \times) = \frac{\partial \boldsymbol{\omega}_i}{\partial \dot{q}_j} \times \mathbf{I}_i - \mathbf{I}_i \frac{\partial \boldsymbol{\omega}_i}{\partial \dot{q}_j} \times \quad (3.60)$$

sustituyendo la ec. 3.60 en el término “e” de la ec. 3.57,

$$\frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{I}_i}{\partial q_j} \boldsymbol{\omega}_i = \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}_i \cdot \left( \frac{\partial \boldsymbol{\omega}_i}{\partial \dot{q}_j} \times \mathbf{I}_i - \mathbf{I}_i \frac{\partial \boldsymbol{\omega}_i}{\partial \dot{q}_j} \times \right) \boldsymbol{\omega}_i \quad (3.61)$$

$$\frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{I}_i}{\partial q_j} \boldsymbol{\omega}_i = \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}_i \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\omega}_i}{\partial \dot{q}_j} \times \mathbf{I}_i \boldsymbol{\omega}_i - \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}_i \cdot \mathbf{I}_i \frac{\partial \boldsymbol{\omega}_i}{\partial \dot{q}_j} \times \boldsymbol{\omega}_i = -\frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}_i \cdot \left( \mathbf{I}_i \boldsymbol{\omega}_i \times \frac{\partial \boldsymbol{\omega}_i}{\partial \dot{q}_j} \right) + \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}_i \cdot \mathbf{I}_i \left( \boldsymbol{\omega}_i \times \frac{\partial \boldsymbol{\omega}_i}{\partial \dot{q}_j} \right) \quad (3.62)$$

aplicando la identidad,  $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$ , a la ec. 3.62, se tiene,

$$\frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{I}_i}{\partial q_j} \boldsymbol{\omega}_i = -\frac{1}{2}(\boldsymbol{\omega}_i \times \mathbf{I}_i \boldsymbol{\omega}_i) \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\omega}_i}{\partial \dot{q}_j} - \frac{1}{2}(\boldsymbol{\omega}_i \times \mathbf{I}_i \boldsymbol{\omega}_i) \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\omega}_i}{\partial \dot{q}_j} = -(\boldsymbol{\omega}_i \times \mathbf{I}_i \boldsymbol{\omega}_i) \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\omega}_i}{\partial \dot{q}_j} \quad (3.63)$$

Sustituyendo la ec. 3.63 en la ec. 3.57

$$\frac{\partial T}{\partial q_j} = \sum_{i=1}^m \left( m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial q_j} + \boldsymbol{\omega}_i \cdot \mathbf{I}_i \frac{\partial \boldsymbol{\omega}_i}{\partial q_j} - (\boldsymbol{\omega}_i \times \mathbf{I}_i \boldsymbol{\omega}_i) \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\omega}_i}{\partial q_j} \right) \quad (3.64)$$

Realizando la resta entre 3.56 y 3.64

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} &= \sum_{i=1}^m \left[ m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial \dot{q}_j} + m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial q_j} + \dot{\boldsymbol{\omega}}_i \cdot \mathbf{I}_i \frac{\partial \boldsymbol{\omega}_i}{\partial \dot{q}_j} + \boldsymbol{\omega}_i \cdot \mathbf{I}_i \left( \frac{\partial \boldsymbol{\omega}_i}{\partial q_j} \right) \right] \\ &\quad - \sum_{i=1}^m \left[ m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial q_j} + \boldsymbol{\omega}_i \cdot \mathbf{I}_i \frac{\partial \boldsymbol{\omega}_i}{\partial q_j} - (\boldsymbol{\omega}_i \times \mathbf{I}_i \boldsymbol{\omega}_i) \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\omega}_i}{\partial \dot{q}_j} \right] \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} &= \sum_{i=1}^m \left[ m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial \dot{q}_j} + \dot{\boldsymbol{\omega}}_i \cdot \mathbf{I}_i \frac{\partial \boldsymbol{\omega}_i}{\partial \dot{q}_j} + (\boldsymbol{\omega}_i \times \mathbf{I}_i \boldsymbol{\omega}_i) \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\omega}_i}{\partial \dot{q}_j} \right] \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} &= \sum_{i=1}^n \left[ m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial \dot{q}_j} + (\mathbf{I}_i \dot{\boldsymbol{\omega}}_i + \boldsymbol{\omega}_i \times \mathbf{I}_i \boldsymbol{\omega}_i) \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\omega}_i}{\partial \dot{q}_j} \right] \end{aligned} \quad (3.65)$$

la ec. 3.65 también se representa de forma equivalente,

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = \sum_{i=1}^m \left[ m_i \left( \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \right)^T \ddot{\mathbf{r}}_i + \left( \frac{\partial \boldsymbol{\omega}_i}{\partial \dot{q}_j} \right)^T (\mathbf{I}_i \dot{\boldsymbol{\omega}}_i + \boldsymbol{\omega}_i \times \mathbf{I}_i \boldsymbol{\omega}_i) \right]. \quad (3.66)$$

**Energía potencial.** La energía potencial almacenada en el eslabón  $i$  del brazo de un robot es definido como la cantidad de trabajo requerido para elevar el centro de masa del eslabón  $i$  de un plano de referencia horizontal (ubicado en la base inercial) a su posición actual bajo la influencia de la gravedad. Con referencia a la base inercial, el trabajo requerido para desplazar el eslabón  $i$  a la posición  $\mathbf{r}_i$  que es dado por  $-m_i \mathbf{g}^T \mathbf{r}_i$ . Donde  $\mathbf{g}^T = [0, 0, -9,81]^T$  con unidades de  $[m/s^2]$ .

La energía potencial que es almacenada en el brazo del robot es,

$$V = -m_1 \mathbf{g}^T \mathbf{r}_1 - m_2 \mathbf{g}^T \mathbf{r}_2 - \dots - m_i \mathbf{g}^T \mathbf{r}_i = -\sum_{i=1}^m m_i \mathbf{g}^T \mathbf{r}_i \quad (3.67)$$

por tanto,

$$\frac{\partial V}{\partial q_j} = -\frac{\partial}{\partial q_j} \left( \sum_{i=1}^m m_i \mathbf{g}^T \mathbf{r}_i \right); j = 1, 2, \dots, n \quad (3.68)$$

o bien, de forma vectorial

$$\frac{\partial V}{\partial \mathbf{q}} = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} \left( \sum_{i=1}^m m_i \mathbf{g}^T \mathbf{r}_i \right). \quad (3.69)$$

### 3.5. Representación genérica de las ecuaciones de movimiento de Euler-Lagrange

La fuerza generalizada puede representarse como,

$$f_j^* = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} + \frac{\partial V}{\partial q_j} = \sum_{i=1}^m \left[ m_i \left( \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \right)^T \ddot{\mathbf{r}}_i + \left( \frac{\partial \boldsymbol{\omega}_i}{\partial \dot{q}_j} \right)^T (\mathbf{I}_i \dot{\boldsymbol{\omega}}_i + \boldsymbol{\omega}_i \times \mathbf{I}_i \boldsymbol{\omega}_i) \right] + \frac{\partial V}{\partial q_j}, \quad (3.70)$$

sustituyendo las ecuaciones 3.24,3.29 en la ec. 3.70, se tiene:

$$f_j^* = \sum_{i=1}^m \left[ m_i \left( \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \right)^T (\dot{\mathbf{R}}_i \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{R}_i \ddot{\mathbf{q}}) + \left( \frac{\partial \boldsymbol{\omega}_i}{\partial \dot{q}_j} \right)^T \mathbf{I}_i (\mathbf{A}_i \ddot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{A}}_i \dot{\mathbf{q}}) + \underbrace{\left( \frac{\partial \boldsymbol{\omega}_i}{\partial \dot{q}_j} \right) \cdot (\boldsymbol{\omega}_i \times \mathbf{I}_i \boldsymbol{\omega}_i)}_a \right] + \frac{\partial V}{\partial q_j}, \quad (3.71)$$

para  $j=1,2,\dots, n$ ,  $\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j}$  corresponde a

$$\mathbf{R}_i = \left[ \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_1}, \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_2}, \dots, \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_n} \right], \quad (3.72)$$

de forma equivalente el término  $\frac{\partial \boldsymbol{\omega}_i}{\partial \dot{q}_j}$  para  $j=1,2,\dots, n$ , corresponde a

$$\mathbf{A}_i = \left[ \frac{\partial \boldsymbol{\omega}_i}{\partial \dot{q}_1}, \frac{\partial \boldsymbol{\omega}_i}{\partial \dot{q}_2}, \dots, \frac{\partial \boldsymbol{\omega}_i}{\partial \dot{q}_n} \right] = [\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n], \quad (3.73)$$

tomando el término “a” de la ec. 3.71 y aplicando la identidad,  $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$

$$\frac{\partial \boldsymbol{\omega}_i}{\partial \dot{q}_j} \cdot (\boldsymbol{\omega}_i \times \mathbf{I}_i \boldsymbol{\omega}_i) = \left( \frac{\partial \boldsymbol{\omega}_i}{\partial \dot{q}_j} \times \boldsymbol{\omega}_i \right) \cdot \mathbf{I}_i \boldsymbol{\omega}_i, \quad (3.74)$$

para  $j=1,2,\dots, n$  el término  $\frac{\partial \boldsymbol{\omega}_i}{\partial \dot{q}_j} \times \boldsymbol{\omega}_i$ , corresponde a

$$\mathbf{A}_{iw} = \left[ \frac{\partial \boldsymbol{\omega}_i}{\partial \dot{q}_1} \times \boldsymbol{\omega}_i, \frac{\partial \boldsymbol{\omega}_i}{\partial \dot{q}_2} \times \boldsymbol{\omega}_i, \dots, \frac{\partial \boldsymbol{\omega}_i}{\partial \dot{q}_n} \times \boldsymbol{\omega}_i \right] = [\mathbf{e}_1 \times \boldsymbol{\omega}_i, \mathbf{e}_2 \times \boldsymbol{\omega}_i, \dots, \mathbf{e}_n \times \boldsymbol{\omega}_i] \quad (3.75)$$

sustituyendo la ec. 3.75 y 3.28 en la ec. 3.74

$$\left( \frac{\partial \boldsymbol{\omega}_i}{\partial \dot{q}_j} \times \boldsymbol{\omega}_i \right) \cdot \mathbf{I}_i \boldsymbol{\omega}_i = \mathbf{A}_{iw} \mathbf{I}_i \mathbf{A}_i \dot{\mathbf{q}}, \quad (3.76)$$

además el término  $\frac{\partial V}{\partial q_j}$  para  $j=1,2,\dots, n$ , corresponde a

$$\frac{\partial V}{\partial \mathbf{q}} = \left[ \frac{\partial V}{\partial q_1}, \frac{\partial V}{\partial q_2}, \dots, \frac{\partial V}{\partial q_n} \right]; \quad (3.77)$$

sustituyendo las ecs. 3.72, 3.73, 3.76 y 3.77 en la ec. 3.71, para  $j=1,2,\dots, n$ , se tiene

$$\mathbf{f}^* = \sum_{i=1}^m \left[ m_i \mathbf{R}_i^T (\dot{\mathbf{R}}_i \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{R}_i \ddot{\mathbf{q}}) + \mathbf{A}_i^T \mathbf{I}_i (\mathbf{A}_i \ddot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{A}}_i \dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{A}_{iw} \mathbf{I}_i \mathbf{A}_i \dot{\mathbf{q}} \right] + \frac{\partial V}{\partial \mathbf{q}}, \quad (3.78)$$

$$\mathbf{f}^* = \sum_{i=1}^m (m_i \mathbf{R}_i^T \mathbf{R}_i + \mathbf{A}_i^T \mathbf{I}_i \mathbf{A}_i) \ddot{\mathbf{q}} + \sum_{i=1}^n \left( m_i \mathbf{R}_i^T \dot{\mathbf{R}}_i + \mathbf{A}_i^T \mathbf{I}_i \dot{\mathbf{A}}_i + \mathbf{A}_{iw}^T \mathbf{I}_i \mathbf{A}_i \right) \dot{\mathbf{q}} + \frac{\partial V}{\partial \mathbf{q}}. \quad (3.79)$$

Donde el término,

$$\sum_{i=1}^m (m_i \mathbf{R}_i^T \mathbf{R}_i + \mathbf{A}_i^T \mathbf{I}_i \mathbf{A}_i) = \mathbf{I}(\mathbf{q}), \quad (3.80)$$

es conocido como la matriz generalizada de inercia; el término

$$\sum_{i=1}^m \left( m_i \mathbf{R}_i^T \dot{\mathbf{R}}_i + \mathbf{A}_i^T \mathbf{I}_i \dot{\mathbf{A}}_i + \mathbf{A}_{i\omega}^T \mathbf{I}_i \mathbf{A}_i \right) = \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \quad (3.81)$$

se le conoce como la matriz de Coriolis y fuerza centrífuga; y el término

$$\frac{\partial V}{\partial \mathbf{q}} = \mathbf{b}(\mathbf{q}) \quad (3.82)$$

es el torque debido a la fuerza de gravedad. Por tanto, la fuerza generalizada se representa como [8]:

$$\mathbf{f}^* = \mathbf{I}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{b}(\mathbf{q}) \quad (3.83)$$

### 3.6. Dinámica inversa de la arquitectura mecánica del PUMA

Se realiza el desarrollo de las ecuaciones de la dinámica para el manipulador PUMA con sus tres primeros GdL utilizando el método de Euler-Lagrange. Los centros de masa están ubicados de acuerdo a la fig.3.2

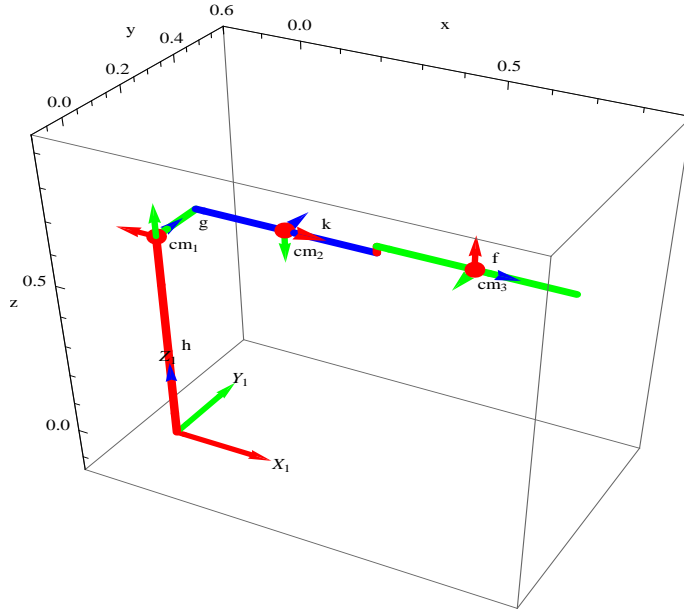


Figura 3.2: Localización de los centros de masa de los eslabones del manipulador PUMA.

Obtención de la matriz generalizada de inercia

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_1(\boldsymbol{\theta}) &= m_1 \mathbf{R}_1^T \mathbf{R}_1 + \mathbf{A}_1^T \mathbf{I}_1 \mathbf{A}_1 \\ \mathbf{I}_2(\boldsymbol{\theta}) &= m_2 \mathbf{R}_2^T \mathbf{R}_2 + \mathbf{A}_2^T \mathbf{I}_2 \mathbf{A}_2 \\ \mathbf{I}_3(\boldsymbol{\theta}) &= m_3 \mathbf{R}_3^T \mathbf{R}_3 + \mathbf{A}_3^T \mathbf{I}_3 \mathbf{A}_3 \\ \mathbf{I}_t(\boldsymbol{\theta}) &= \mathbf{I}_1(\boldsymbol{\theta}) + \mathbf{I}_2(\boldsymbol{\theta}) + \mathbf{I}_3(\boldsymbol{\theta}), \end{aligned} \quad (3.84)$$

donde

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_1 &= \left[ \frac{\partial \mathbf{r}_1}{\partial \theta_1}, \mathbf{0}, \mathbf{0} \right] \\ \mathbf{R}_2 &= \left[ \frac{\partial \mathbf{r}_2}{\partial \theta_1}, \frac{\partial \mathbf{r}_2}{\partial \theta_2}, \mathbf{0} \right] \\ \mathbf{R}_3 &= \left[ \frac{\partial \mathbf{r}_3}{\partial \theta_1}, \frac{\partial \mathbf{r}_3}{\partial \theta_2}, \frac{\partial \mathbf{r}_3}{\partial \theta_3} \right] \end{aligned} \quad (3.85)$$

determinación de cada uno de los términos de la ec. 3.85

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{r}_1}{\partial \theta_1} &= [0, 0, 0]^T \\ \frac{\partial \mathbf{r}_2}{\partial \theta_1} &= \mathbf{e}_1 \times \mathbf{r}_2, \quad \frac{\partial \mathbf{r}_2}{\partial \theta_2} = \mathbf{P}_1(\mathbf{e}_1 \times \mathbf{r}_2) \\ \frac{\partial \mathbf{r}_3}{\partial \theta_1} &= \mathbf{e}_1 \times \mathbf{r}_3, \quad \frac{\partial \mathbf{r}_3}{\partial \theta_2} = \mathbf{P}_1(\mathbf{e}_1 \times \mathbf{r}_3), \quad \frac{\partial \mathbf{r}_3}{\partial \theta_3} = \mathbf{P}_2(\mathbf{e}_1 \times \mathbf{r}_3). \end{aligned} \quad (3.86)$$

Formación de las  $\mathbf{e}$ 's

$$\mathbf{e}_1 = [0, 0, 1]^T \quad \mathbf{e}_2 = \mathbf{P}_1 \mathbf{e}_1 \quad \mathbf{e}_3 = \mathbf{P}_2 \mathbf{e}_1, \quad (3.87)$$

lo cual, permite la formación de las  $\mathbf{A}$ 's

$$\mathbf{A}_1 = [\mathbf{e}_1, \mathbf{0}, \mathbf{0}] \quad \mathbf{A}_2 = [\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{0}] \quad \mathbf{A}_3 = [\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3]. \quad (3.88)$$

Formación de las  $\mathbf{I}$ 's referidas a las bases correspondientes:

$$\mathbf{I}_1 = \mathbf{P}_1 \mathbf{I}_{c1} \mathbf{P}_1^T \quad \mathbf{I}_2 = \mathbf{P}_2 \mathbf{I}_{c2} \mathbf{P}_2^T \quad \mathbf{I}_3 = \mathbf{P}_3 \mathbf{I}_{c3} \mathbf{P}_3^T \quad (3.89)$$

donde  $\mathbf{I}_{c1}$ ,  $\mathbf{I}_{c2}$  y  $\mathbf{I}_{c3}$  son las matrices de inercia de los eslabones 1, 2 y 3 respectivamente. Los elementos, momentos de inercia principales de los eslabones, de dichas matrices son dados en la tabla 3.1[22].

Tabla 3.1: Tabla de masas y momentos de inercia de masa de los eslabones móviles

m	masa [kg]	Inercia( $I_x$ )[kg m <sup>2</sup> ]	Inercia( $I_y$ )[kg m <sup>2</sup> ]	Inercia( $I_z$ )[kg m <sup>2</sup> ]
1	2.27	0.00376	0.0169	0.00376
2	15.91	0.1237	0.9897	0.9897
3	11.36	0.7067	0.7067	0.0074

Formación de la matriz de Coriolis y fuerza centrífuga

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_1(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) &= m_1 \mathbf{R}_1^T \dot{\mathbf{R}}_1 + \mathbf{A}_1^T \mathbf{I}_1 \dot{\mathbf{A}}_1 + \mathbf{A}_{1\omega}^T \mathbf{I}_1 \mathbf{A}_1 \\ \mathbf{C}_2(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) &= m_2 \mathbf{R}_2^T \dot{\mathbf{R}}_2 + \mathbf{A}_2^T \mathbf{I}_2 \dot{\mathbf{A}}_2 + \mathbf{A}_{2\omega}^T \mathbf{I}_2 \mathbf{A}_2 \\ \mathbf{C}_3(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) &= m_3 \mathbf{R}_3^T \dot{\mathbf{R}}_3 + \mathbf{A}_3^T \mathbf{I}_3 \dot{\mathbf{A}}_3 + \mathbf{A}_{3\omega}^T \mathbf{I}_3 \mathbf{A}_3 \end{aligned} \quad (3.90)$$

donde:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{R}}_1 &= \left[ \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_1}{\partial \theta_1}, \mathbf{0}, \mathbf{0} \right] \\ \dot{\mathbf{R}}_2 &= \left[ \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_2}{\partial \theta_1}, \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_2}{\partial \theta_2}, \mathbf{0} \right] \\ \dot{\mathbf{R}}_3 &= \left[ \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_3}{\partial \theta_1}, \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_3}{\partial \theta_2}, \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_3}{\partial \theta_3} \right], \end{aligned} \quad (3.91)$$

determinación de cada uno de los términos de la ec. 3.91

$$\begin{aligned} \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_1}{\partial \theta_1} &= [0, 0, 0]^T \\ \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_2}{\partial \theta_1} &= \mathbf{e}_1 \times (\boldsymbol{\omega}_2 \times \mathbf{Q}_1 \mathbf{a}_{2cm}); \quad \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_2}{\partial \theta_2} = \boldsymbol{\omega}_2 \times \mathbf{P}_1 (\mathbf{e}_1 \times \mathbf{a}_{2cm}) \\ \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_3}{\partial \theta_1} &= \mathbf{e}_1 \times \left( \dot{\theta}_1 \mathbf{e}_1 \times \mathbf{s}_1 + \mathbf{P}_1 (\dot{\theta}_2 \mathbf{e}_1 \times \mathbf{s}_2) + \mathbf{P}_2 (\dot{\theta}_3 \mathbf{e}_1 \times \mathbf{s}_3) \right) \\ \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_3}{\partial \theta_2} &= \boldsymbol{\omega}_2 \times \mathbf{P}_1 (\mathbf{e}_1 \times \mathbf{s}_2) + \mathbf{e}_2 \times \mathbf{P}_2 (\mathbf{e}_1 \times \mathbf{s}_3); \quad \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_3}{\partial \theta_3} = \boldsymbol{\omega}_3 \times \mathbf{P}_2 (\mathbf{e}_1 \times \mathbf{s}_3). \end{aligned} \quad (3.92)$$

Formación de las  $\dot{\mathbf{A}}_i$ 's:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{A}}_1 &= [\mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}] \\ \dot{\mathbf{A}}_2 &= [\mathbf{0}, \boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{e}_2, \mathbf{0}] \\ \dot{\mathbf{A}}_3 &= [\mathbf{0}, \boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{e}_2, \boldsymbol{\omega}_2 \times \mathbf{e}_3]. \end{aligned} \quad (3.93)$$

Formación de las  $\mathbf{A}_{i\omega}$ 's:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{1\omega} &= [\mathbf{e}_1 \times \boldsymbol{\omega}_1, \mathbf{0}, \mathbf{0}] \\ \mathbf{A}_{2\omega} &= [\mathbf{e}_1 \times \boldsymbol{\omega}_2, \mathbf{e}_2 \times \boldsymbol{\omega}_2, \mathbf{0}] \\ \mathbf{A}_{3\omega} &= [\mathbf{e}_1 \times \boldsymbol{\omega}_3, \mathbf{e}_2 \times \boldsymbol{\omega}_3, \mathbf{e}_3 \times \boldsymbol{\omega}_3]. \end{aligned} \quad (3.94)$$

Formación del vector de gravedad:

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_1 &= -m_1 \left( \frac{\partial \mathbf{r}_1}{\partial \boldsymbol{\theta}} \right)^T \mathbf{g} \\ \mathbf{b}_2 &= -m_2 \left( \frac{\partial \mathbf{r}_2}{\partial \boldsymbol{\theta}} \right)^T \mathbf{g} \\ \mathbf{b}_3 &= -m_3 \left( \frac{\partial \mathbf{r}_3}{\partial \boldsymbol{\theta}} \right)^T \mathbf{g} \\ \mathbf{b}_t &= \mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2 + \mathbf{b}_3 \end{aligned} \quad (3.95)$$

# MANIPULABILIDAD CINEMÁTICA EN ROBOTS SERIALES

## 4.1. Introducción

En los sistemas mecánicos de los robots manipuladores, algunos autores han introducido conceptos matemáticos que permiten diseñar o medir el desempeño cinemático de las arquitecturas mecánicas, tal como el determinante, número de condición de una matriz, etc. El mismo concepto matemático puede ser usado en ambas etapas, que puede ser en la etapa de diseño del manipulador o en la etapa de evaluación del desempeño cinemático de éste en su espacio de trabajo. Por ejemplo: en la etapa de diseño, si se requiere que un manipulador tenga la mayor área de trabajo, se puede utilizar el concepto de determinante de una matriz (Jacobiana), dado que éste representa el área del paralelogramo formado por los elementos de dicha matriz, lo que implica un problema de diseño para determinar la proporcionalidad de los eslabones  $l_1$ ,  $l_2$  y de la magnitud del ángulo  $\theta_2$  que generan la máxima área. Por otro lado, éste mismo concepto puede ser usado para obtener las configuraciones singulares en el espacio de trabajo del manipulador o bien para saber que tan lejos o cerca se encuentra éste de una configuración singular. Algunos autores llaman al valor absoluto del determinante de esta matriz, manipulabilidad [20],[21], otros como índice de eficiencia local para el movimiento [23],[24].

Para el caso del concepto matemático de número de condición de una matriz, también se puede utilizar en la etapa de diseño cuando se requiere que el manipulador tenga un conjunto de posiciones con las mismas características de transformación de velocidad en todas las direcciones en el OT del manipulador. Dicho problema implica, por ejemplo en un manipulador de 2GdL, la determinación de las longitudes de los eslabones  $l_1$ ,  $l_2$  y el ángulo  $\theta_2$  que hace al número de condición de la matriz Jacobiana ( $\kappa$ ) mínimo, es decir  $\kappa = 1$ . También este mismo concepto (número de condición de una matriz) puede ser usado para evaluar el desempeño cinemático del manipulador sobre su área de trabajo con el propósito de determinar las características de transformación de velocidad en el OT o en las juntas del manipulador. Usando este concepto matemático, algunos autores realizan sus propias definiciones. Por ejemplo, al recíproco del número de condición de una matriz cuadrada (Jacobiana) multiplicado por 100, Angeles [17], Angeles y López-Cajún [22] lo llaman Índice de Condicionamiento Cinemático que por sus siglas en inglés lo denotan como KCI. Ellos comentan que esta cantidad mide el comportamiento del sistema con respecto a la transmisión de movimiento y fuerza. Por otro lado Lee et al. [23] nombran al recíproco del número de condición como Índice de Movilidad Local (LMI).

Otro concepto matemático utilizado en la cinemática son los valores y vectores propios. En la cual los vectores propios indican las direcciones de los ejes principales, y las longitudes de sus ejes principales son igual al recíproco de la raíz cuadrada de los valores propios de la matriz simétrica formada a partir de la Jacobiana. Dicha determinación se realiza de forma específica para cada punto en el área de trabajo. La dirección sobre el semieje mayor indica la dirección en la cual se debe dirigir el OT del manipulador para tener mayor ganancia de velocidad lineal y la dirección del semieje menor indica la dirección en la cual el OT tendrá la menor ganancia o bien una posición que no podrá alcanzar si en determinado caso opta ir por esa dirección. Sciavicco y Siciliano [18] construyen la *elipsoide de manipulabilidad de velocidad*, para representar la reacción de un manipulador a un cambio arbitrario de posición u orientación del OT. De

la misma forma Tsai [19], construye la *elipsoide de manipulabilidad de velocidad en las juntas articulares* para medir la velocidad requerida en las juntas dada una posición y la misma magnitud de velocidad en todas las direcciones que puede tomar el OT.

El objetivo que se persigue en este capítulo es utilizar los conceptos matemáticos de determinante, número de condición, valores y vectores propios de la matriz Jacobiana para evaluar el desempeño cinemático de los dos manipuladores seriales casos de estudio.

## 4.2. Medida de la manipulabilidad cinemática

Desde el punto de vista de la evaluación del desempeño cinemático de una arquitectura mecánica ya dada, la medida de la manipulabilidad cinemática puede ser abordado en dos formas: i) la capacidad de alcanzar una posición o grupo de posiciones dentro del espacio de trabajo, ii) la reacción del órgano terminal del robot manipulador para cambiar de posición sobre cierta dirección [18].

Con respecto a (i) este es definido por [20],[21] como

$$w = (\det \mathbf{J}\mathbf{J}^T)^{1/2}, \quad (4.1)$$

o bien, cuando  $m=n$  la medida de la manipulabilidad es dada por

$$w = |\det \mathbf{J}| \quad (4.2)$$

donde  $m$  es la dimensión del espacio de trabajo y  $n$  es el número de grados de libertad del manipulador robótico; aplicando la ecuación 4.1 o 4.2 en una arquitectura mecánica de 2GdL, la máxima manipulabilidad es obtenida cuando  $l_1 = l_2$ ; también las ecuaciones 4.1 o 4.2 son importantes dado que cuando  $\mathbf{J}$  es de rango deficiente, entonces  $w = 0$ , por lo que produce una singularidad cinemática. Encontrar las singularidades cinemáticas es de gran interés por las siguientes razones [18]:

- Las singularidades representan configuraciones en las cuales la movilidad de la estructura es reducida, esto es, no es posible imponer un movimiento arbitrario en el OT del manipulador.
- En la vecindad de una singularidad, pequeñas velocidades en el espacio operacional puede demandar grandes velocidades en las juntas articulares o viceversa.

### 4.2.1. Configuraciones singulares de los manipuladores casos de estudio

**Caso: 2GdL.** El determinante de la matriz Jacobiana para este manipulador es

$$w_1 = l_1 l_2 \sin \theta_2, \quad (4.3)$$

de la ecuación 4.3, se determina que las configuraciones singulares se producen cuando  $\theta_2 = 0$  o bien cuando  $\theta_2 = \pi$ , las cuales se pueden observar en la gráfica de la figura 4.1. Con respecto a la medida de la manipulabilidad ( $w_1$ ), ésta tiene la ventaja de ser fácil de calcular a través de las ecuaciones 4.1 o 4.2, sin embargo, su valor numérico no constituye una medida del valor absoluto de la cercanía del manipulador a una singularidad. Por ejemplo, si se consideran dos arquitecturas mecánicas de 2GdL con longitud de los eslabones de 1 m y la otra de 0.01 m, se obtienen dos valores diferentes de manipulabilidad, los cuales difieren en una magnitud de cuarto orden. Como se puede observar en la figura 4.1.



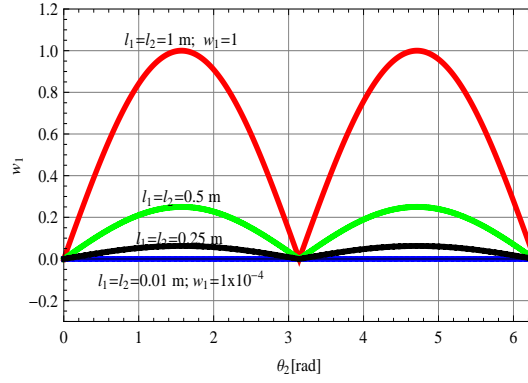


Figura 4.1: Medida de la manipulabilidad de la arquitectura mecánica de 2GdL.

**Caso: Manipulador PUMA para sus 3 primeros GdL.** El determinante de la matriz Jacobiana para este manipulador con brazo antropomórfico cuya Jacobiana ( $\mathbf{J}$ ) se determina a través de la ecuación 2.31, resulta

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} -gc\theta_1 - s\theta_1(A) & c\theta_1(lc(\theta_2 + \theta_3) - ks\theta_2 - fs(\theta_2 + \theta_3)) & c\theta_1(lc(\theta_2 + \theta_3) - fs(\theta_2 + \theta_3)) \\ -gs\theta_1 + c\theta_1(A) & s\theta_1(lc(\theta_2 + \theta_3) - ks\theta_2 - fs(\theta_2 + \theta_3)) & s\theta_1(lc(\theta_2 + \theta_3) - fs(\theta_2 + \theta_3)) \\ 0 & -kc\theta_2 - fc(\theta_2 + \theta_3) - ls(\theta_2 + \theta_3) & -ls(\theta_2 + \theta_3) - fc(\theta_2 + \theta_3) \end{bmatrix}, \quad (4.4)$$

donde  $A = kc\theta_2 + fc(\theta_2 + \theta_3) + ls(\theta_2 + \theta_3)$ . El determinante de la ec. 4.4 se muestra en la ec.4.5 y en la figura 4.2 se observa su correspondiente gráfica:

$$w_2 = k \underbrace{(-lc\theta_3 + fs\theta_3)}_a \underbrace{(kc\theta_2 + fc(\theta_2 + \theta_3) + ls(\theta_2 + \theta_3))}_b. \quad (4.5)$$

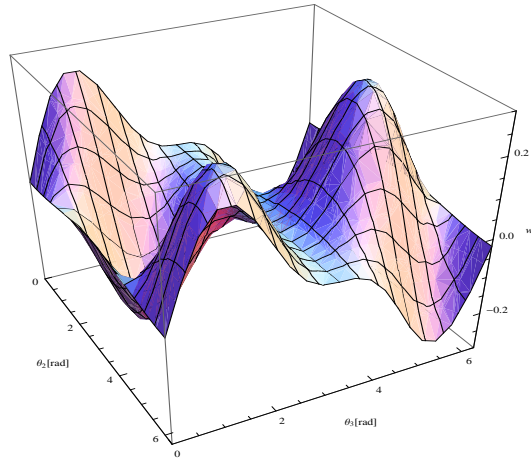


Figura 4.2: PUMA: Gráfica correspondiente al determinante de la matriz Jacobiana

Las configuraciones singulares en el brazo del manipulador ocurren cuando el determinante toma el valor de cero. De la ec. 4.5 se observa que el determinante no depende de la primera junta variable. Para el caso de la tercera junta se producen configuraciones singulares cuando el término “a” de la ec. 4.5 es cero, y ocurre cuando  $\theta_3^{c1} = 0.047002393468432234$  o bien cuando  $\theta_3^{c2} = 3.1885950470582256$ , el término “b” de la ec. 4.5 toma valores extremos, cuando los desplazamientos angulares corresponden a los mostrados en la tabla 4.1.

Tabla 4.1: *Configuraciones singulares del codo*

Csc	$(\theta_2, \theta_3)[rad]$
1	$(\theta_2^{c1}, \theta_3^{c1}) = (0, 0.047002393468432234)$
2	$(\theta_2^{c1}, \theta_3^{c2}) = (0, 3.1885950470582256)$
3	$(\theta_2^{c2}, \theta_3^{c1}) = (3.141592653589793, 0.047002393468432234)$
4	$(\theta_2^{c2}, \theta_3^{c2}) = (3.141592653589793, 3.1885950470582256)$

A estos cuatro tipo de singularidades se les conoce como: **Configuraciones singularidades del codo(Csc)[18]**. Para las configuraciones Csc 1 y Csc 2 la ec. 4.4 toma los siguientes valores,

$$\mathbf{J}(\theta_2^{c1}, \theta_3^{c1}) = \begin{bmatrix} -gc\theta_1 - 2.001106fs\theta_1 & 0 & 0 \\ -gs\theta_1 + 2.001106fc\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & -2.0011056f & -1.0011056f \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

$$\mathbf{J}(\theta_2^{c1}, \theta_3^{c2}) = \begin{bmatrix} -gc\theta_1 + 0.001106fs\theta_1 & 0 & 0 \\ -gs\theta_1 - 0.001106fc\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0011056f & 1.0011056f \end{bmatrix}. \quad (4.7)$$

En la figura 4.3 se muestra la gráfica de la parte “a” de la ec.4.5 correspondiente al determinante de la matriz Jacobiana.

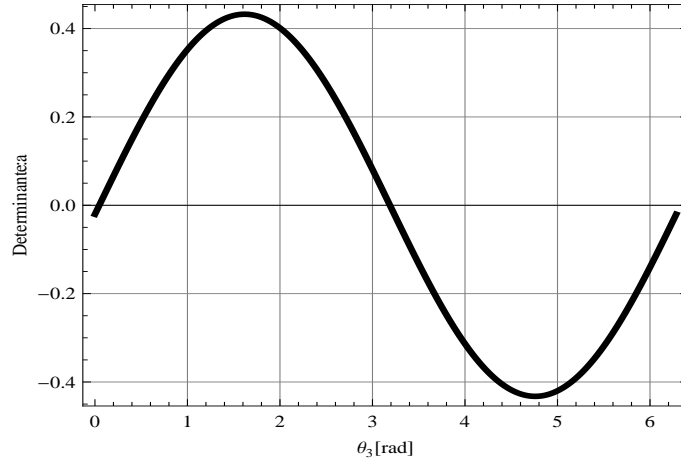


Figura 4.3: PUMA: Gráfica de la parte “a” correspondiente al determinante de la Jacobiana

Para el caso cuando los desplazamientos angulares corresponden a los mostrados en la tabla 4.2, ocurren **Configuraciones singulares del hombro(Csh)[18]**.

Tabla 4.2: *Configuraciones singulares del hombro*

Csh	$(\theta_2, \theta_3)[rad]$
1	$(\theta_2^{h1}, \theta_3^{h1}) = (-\pi/2, 0.047002393468432234)$
2	$(\theta_2^{h1}, \theta_3^{h2}) = (-\pi/2, 3.1885950470582256)$
3	$(\theta_2^{h2}, \theta_3^{h1}) = (\pi/2, 0.047002393468432234)$
4	$(\theta_2^{h2}, \theta_3^{h2}) = (\pi/2, 3.1885950470582256)$

Una rotación de  $\theta_1$  causa un movimiento circular de la posición del OT. Para las configuraciones Csh 1 y Csh 2 la ec. 4.4 en la tercera fila sus elementos valen cero, lo que implica que los vectores de dicha matriz son linealmente dependientes.

$$\mathbf{J}(\theta_2^{h1}, \theta_3^{h1}) = \begin{bmatrix} -gc\theta_1 & 2.001106fc\theta_1 & 1.001106fc\theta_1 \\ -gs\theta_1 & 2.001106fs\theta_1 & 1.001106fs\theta_1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

$$\mathbf{J}(\theta_2^{h1}, \theta_3^{h2}) = \begin{bmatrix} -gc\theta_1 & 0.0011056fc\theta_1 & -1.0011056fc\theta_1 \\ -gs\theta_1 & 0.0011056fs\theta_1 & -1.0011056fs\theta_1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

En la figura 4.4 se muestran las configuraciones singulares del manipulador PUMA correspondientes a las singularidades en el codo y en el hombro, calculados numéricamente (Newton-Raphson) con el determinante de dicha matriz Jacobiana.

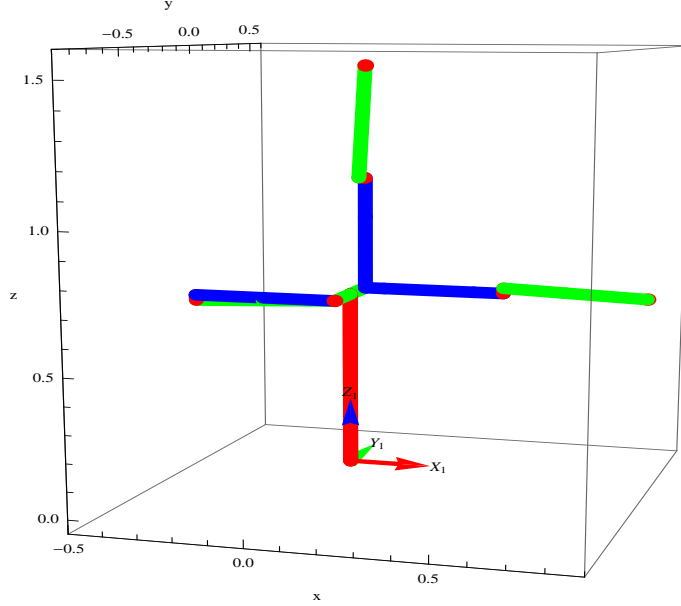


Figura 4.4: PUMA: Configuraciones singulares del manipulador.

#### 4.2.2. Reacción de los manipuladores seriales a cambios arbitrarios de posición

Con respecto a (ii), para medir la reacción del OT del manipulador a un cambio arbitrario de posición en las juntas articulares, es necesario evaluar las transformaciones características en velocidad [18],[19],[21] y [23]. Esto es importante porque es posible determinar la mejor y peor dirección del OT en una posición específica dentro del espacio de trabajo. En la mejor dirección del OT es posible obtener más ganancia de velocidad y viceversa con la peor dirección. En esta sección estamos interesados en determinar estas direcciones en el espacio de trabajo y analizarlas.

Para evaluar las transformaciones características se determinan las velocidades del OT del manipulador con  $n$  juntas cinemáticas a través de la normalización de las velocidades en las juntas una unidad, es decir,

$$\|\dot{\theta}\| = 1 \quad (4.10)$$

sustituyendo la estructura de la ecuación 2.16 en la ecuación 4.10 y considerando el espacio de trabajo de dimensión  $m$ , se tiene

$$\begin{aligned} (\dot{\theta}^T \dot{\theta})^{1/2} &= (\mathbf{J}^{-1} \dot{\mathbf{u}})^T (\mathbf{J}^{-1} \dot{\mathbf{u}}) = 1 \\ \dot{\mathbf{u}}^T \underbrace{(\mathbf{J}\mathbf{J}^T)^{-1}}_{\mathbf{A}} \dot{\mathbf{u}} &= 1. \end{aligned} \quad (4.11)$$

La ecuación 4.11 representa una elipsoide en el espacio en  $\mathbb{R}^m$ , la matriz  $\mathbf{A}$  de esta ecuación es simétrica definida positiva. Tomando como base, lo descrito por Tsai [19] y, Sciavicco y Siciliano [18], hay dos procedimientos para determinar las transformaciones características: a) Procedimiento Numérico (PN), b) Procedimiento Vectores Propios (VP).

El Procedimiento vectores propios es la forma más directa para establecer las elipsoides de velocidad correspondiente a las transformaciones características, tomando como base lo descrito por Flores et al.[31] se presenta el procedimiento VP para manipuladores de  $GdL \leq 3$ .

b1). Dada la matriz  $\mathbf{A}$  se determinan los valores propios,  $\lambda_1, \lambda_2$  y  $\lambda_3$ ;  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3$ ;  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}^+$ .

b2). Dados  $\lambda_1, \lambda_2$  y  $\lambda_3$ , entonces las longitudes de los semiejes de las elipsoides buscadas son dadas por

$$s_a = (\lambda_3)^{-1/2}; s_b = (\lambda_2)^{-1/2}; s_c = (\lambda_1)^{-1/2}. \quad (4.12)$$

b3). Los vectores propios de  $\mathbf{A}$  son determinados resolviendo la ecuación 4.13

$$(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I}_d) \mathbf{v}_i = \mathbf{0}, i = 1, 2, 3. \quad (4.13)$$

donde  $\hat{\mathbf{v}}_1 = \hat{\mathbf{s}}_c$ ,  $\hat{\mathbf{v}}_2 = \hat{\mathbf{s}}_b$  y  $\hat{\mathbf{v}}_3 = \hat{\mathbf{s}}_a$  son los vectores unitarios de  $\mathbf{v}_1$ ,  $\mathbf{v}_2$  y  $\mathbf{v}_3$  respectivamente, que corresponden a la direcciones de los ejes principales (semieje menor, intermedio y mayor).

b4). El número de condición de  $\mathbf{A}$  es definido como [29],[30]

$$\kappa = \|\mathbf{A}^{-1}\| \|\mathbf{A}\|; \kappa \in [1, \infty) \quad (4.14)$$

donde  $\|\cdot\|$  representa la norma de la matriz, para nuestros propósitos, puede ser determinado con la norma-2 o con la norma de Frobenius. Con el propósito de obtener un rango de (0,1] se determina el recíproco del número de condición,  $\kappa_r = 1/\kappa$ ;  $\kappa_r \in (0, 1]$ .

b5). Dado el vector propio correspondiente a la dirección del semieje mayor,  $\hat{\mathbf{s}}_a$ , los ángulos del semieje mayor  $\Psi$  con los ejes  $\mathbf{x}_1 = (1, 0, 0)^T$ ,  $\mathbf{y}_1 = (0, 1, 0)^T$  y  $\mathbf{z}_1 = (0, 0, 1)^T$  son dados por

$$\Psi_x = \arccos(\hat{\mathbf{s}}_a^T \mathbf{x}_1); \quad \Psi_y = \arccos(\hat{\mathbf{s}}_a^T \mathbf{y}_1) \quad y \quad \Psi_z = \arccos(\hat{\mathbf{s}}_a^T \mathbf{z}_1) \quad (4.15)$$

b6). Las elipsoides de velocidad lineal son construidas con las ecuaciones 4.12, los vectores propios unitarios y la ec. paramétrica de la elipse.

#### 4.2.2.1. Determinación y análisis de las elipses de velocidad lineal: Manipulador de 2GdL

El objetivo es la construcción de las elipses de velocidad lineal en el OT del manipulador en el espacio de trabajo y el análisis de los elementos principales de éstas con el propósito de obtener funciones en coordenadas polares que determinen el comportamiento de estas elipses tanto en la configuración codo abajo como codo arriba. Se utiliza el procedimiento VP.

Denote por  $\mathbf{p}_{ot}$  el punto ocupado por el OT como una función de  $\mathbf{p}(r, \Phi)$  en coordenadas polares y  $|\mathbf{p}_{ot}| = r$ . Llamemos M el conjunto de todos los  $\mathbf{p}_{ot}$  admisibles para un manipulador en específico.

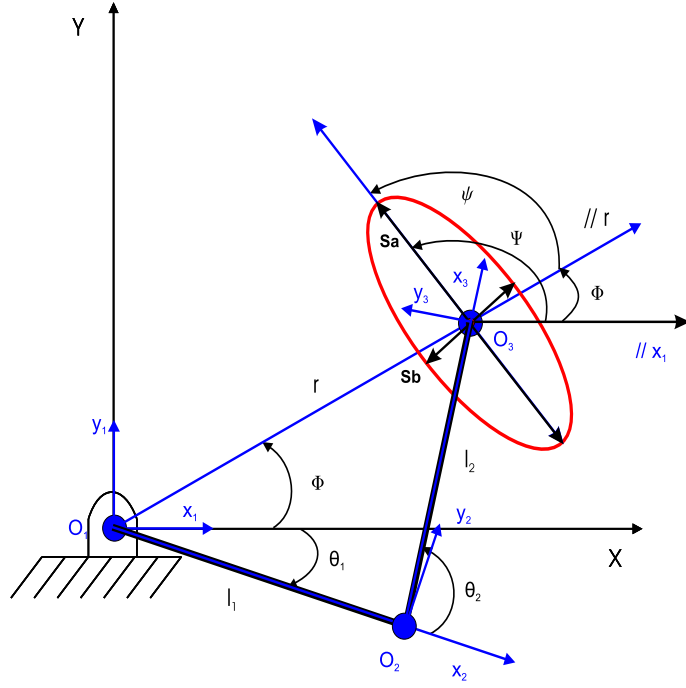


Figura 4.5: 2GdL: Arquitectura mecánica y elipse de velocidad lineal.

**Teorema 04.1.** Considere un manipulador de 2GdL (fig. 4.5) fijo sobre el punto  $\mathbf{o}_1$ . Dados  $l_1 + l_2 = L$  y  $N$  sea el conjunto de todas las coordenadas polares tal que

$$N = \{(r, \Phi) | 0 \leq r \leq L, 0 \leq \Phi \leq 2\pi\}$$

y suponga que el origen de  $N$  es coincidente con el punto  $\mathbf{o}_1$ . Para este caso  $M \subseteq N$ . Note que las fronteras de  $N$  no pertenecen a  $M$ , si la relación cinemática está dada por

$$\mathbf{u} = \mathbf{f}(\boldsymbol{\theta})$$

y así, como se ha visto

$$\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{J}(\boldsymbol{\theta})\dot{\boldsymbol{\theta}}.$$

Denotemos a  $\mathbf{p}_0 \in M$ , específicamente como un punto sobre la recta horizontal que pasa sobre  $\mathbf{o}_1$ ; y  $\mathbf{p}_1 \in M$ . La parte uno de este teorema expresa un resultado conocido (Angeles [17], página 205), sin embargo, aquí se realiza la explicitación de las ecuaciones.

**Parte 1.** Sean  $\lambda_{10}$  y  $\lambda_{20}$  los valores propios de  $\mathbf{A} = (\mathbf{J}\mathbf{J}^T)^{-1}$  para  $|\mathbf{p}_0| = c_1 = r$ . Entonces existe una relación funcional entre los valores propios  $(\lambda_{11}, \lambda_{21})$  de  $\mathbf{A}$  correspondientes a  $\mathbf{p}_1$ , tal que  $|\mathbf{p}_1| = c_1$ :

$$(\lambda_{11}, \lambda_{21}) = f(\lambda_{10}, \lambda_{20}) \quad (4.16)$$

**Parte 2.** Sean  $\mathbf{v}_{20}$  y  $\mathbf{v}_{21}$  los vectores propios de los semiejes principales de  $\mathbf{A}$  calculados para  $|\mathbf{p}_0| = c_1$  y  $|\mathbf{p}_1| = c_1$  respectivamente. Y sea  $\psi$  el ángulo entre el radio vector  $\mathbf{r}$  y  $\mathbf{v}_{20}$  y  $\Psi$  el ángulo entre  $\mathbf{v}_{21}$  y el eje  $\mathbf{x}_1$ . Entonces existe una relación funcional entre  $\psi$  y  $\Psi$  tal que,

$$\Psi = g(\psi) \quad (4.17)$$

**Prueba. Parte 1.** Los valores propios de  $\mathbf{A}$  se calculan canónicamente de la ecuación,

$$\mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v} \Rightarrow (\mathbf{A} - \mathbf{I}_d\lambda)\mathbf{v} = \mathbf{0} \quad (4.18)$$

se tiene que  $\lambda$  son los valores propios y  $\mathbf{v}$  los vectores propios de la matriz  $\mathbf{A}$ . Dado que  $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$  entonces  $\det(\mathbf{A} - \mathbf{I}_d \lambda) = 0$ , esto es

$$\lambda^2 - \underbrace{(\csc \theta_2)^2 (l_1^2 + 2l_1 l_2 \cos \theta_2 + 2l_2^2) / (l_1^2 l_2^2)}_b \lambda + \underbrace{\csc \theta_2^2 / (l_1^2 l_2^2)}_c = 0. \quad (4.19)$$

Esta ecuación (4.19) es el polinomio característico de segundo grado, la solución es determinada si se toman los coeficientes  $a=1$ ,  $b$  y  $c$ ,

$$\lambda_1(\theta_2) = \frac{-b + (b^2 - 4ac)^{1/2}}{2a} \quad (4.20)$$

$$\lambda_2(\theta_2) = \frac{-b - (b^2 - 4ac)^{1/2}}{2a}; \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}^+ \quad (4.21)$$

donde  $\lambda_1 \geq \lambda_2$ . Y los valores singulares son  $\sigma_1 = (\lambda_1(\theta_2))^{1/2}$  y  $\sigma_2 = (\lambda_2(\theta_2))^{1/2}$ . Tomando el recíproco del número de condición de la matriz  $\mathbf{A}$  con la norma-2, entonces

$$\kappa_r = \sigma_2 / \sigma_1, \kappa_r \in (0, 1] \quad (4.22)$$

de la cinemática inversa de posición para cualquier punto,  $\mathbf{p}_1$ , con  $|\mathbf{p}_1| = c_1$  la variable independiente ( $\theta_2$ ) no cambia, así el coeficiente ( $\kappa_r$ ) obtenido de  $\sigma_2$  y  $\sigma_1$ , ec. 4.22, tampoco cambia. Por tanto  $\lambda_{11}(\theta_2) = \lambda_{10}(\theta_2)$  y  $\lambda_{21}(\theta_2) = \lambda_{20}(\theta_2)$ .

Para el caso de las configuraciones codo abajo y codo arriba, de las ecuaciones 4.20 y 4.21,  $\theta_2$  es la variable independiente. Para ambas configuraciones **los valores de  $\theta_2$  son complementarios**. Por tanto los valores propios para la configuración codo abajo,  $\lambda_{11}^{cab}(\theta_2)$  y  $\lambda_{21}^{cab}(\theta_2)$ , son los mismos que para la configuración codo arriba,  $\lambda_{11}^{car}(\theta_2)$  y  $\lambda_{21}^{car}(\theta_2)$  respectivamente.  $\square$

**Prueba. Parte 2.** Las direcciones de los semiejes principales corresponden a los vectores propios de la matriz  $\mathbf{A}$ ,

$$(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I}_d) \mathbf{v}_i = \mathbf{0}; i = 1, 2 \quad (4.23)$$

donde

$$\mathbf{A} = (\mathbf{J}\mathbf{J}^T)^{-1} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \quad (4.24)$$

los coeficientes de la matriz son

$$a_{11} = \frac{(\csc \theta_2)^2 ((l_1 \cos \theta_1)^2 + 2l_1 l_2 \cos \theta_1 \cos(\theta_1 + \theta_2) + 2l_2^2 (\cos(\theta_1 + \theta_2))^2)}{l_1^2 l_2^2}$$

$$a_{12} = a_{21} = \frac{(\csc \theta_2)^2 (l_1^2 \sin(2\theta_1) + 2l_1 l_2 \sin(2\theta_1 + \theta_2) + 2l_2^2 \sin(2(\theta_1 + \theta_2)))}{2l_1^2 l_2^2}$$

$$a_{22} = \frac{(\csc \theta_2)^2 ((l_1 \sin \theta_1)^2 + 2l_1 l_2 \sin \theta_1 \sin(\theta_1 + \theta_2) + 2l_2^2 (\sin(\theta_1 + \theta_2))^2)}{l_1^2 l_2^2}.$$

Resolviendo la ecuación 4.23, se obtiene  $\mathbf{v}_1$  y  $\mathbf{v}_2$ ; de la matriz correspondiente a la ec. 4.24, los vectores propios tienen dos variables independientes  $\theta_1$  y  $\theta_2$ .

De la figura 4.5 la orientación del semieje mayor para  $|\mathbf{p}_1| = c_1 = r$  puede ser calculado a través de dos ángulos: el primero  $\psi$ , es el ángulo entre el radio vector  $\mathbf{r}$  y el semieje mayor  $\mathbf{s}_a$ , y el segundo,  $\Phi$ , es el ángulo que hay entre el eje  $\mathbf{x}_1$  y  $\mathbf{r}$ . Por tanto, si se determina el ángulo  $\psi_0$  calculado para  $\mathbf{p}_0$  tal que

$|\mathbf{p}_0| = c_1$  y  $\Phi_0 = 0$ . El ángulo  $\Psi_1$  entre  $\mathbf{x}_1$  y  $\mathbf{v}_{21}$  (vector en dirección del semieje mayor) calculado para  $|\mathbf{p}_1| = c_1$  y  $\Phi_1 \in (0, 2\pi]$ , es dado por

$$\Psi_1 = \psi_0 + \Phi_1, \Phi_1 \in (0, 2\pi] \quad (4.25)$$

□

### A. Longitud de semiejes

Estos elementos se determinan en función de las coordenadas polares  $(r, \Phi)$ , donde  $r \in (0.0, 0.5)$  y  $\Phi \in [0, 2\pi]$  en el espacio de trabajo del manipulador. En los casos de la frontera interior y exterior, los radios son  $r_i = 0.0$  y  $r_e = 0.5$  respectivamente, en consecuencia los ángulos sobre la segunda junta en el manipulador son  $\theta_2 = \pi$  y  $\theta_2 = 0$  y de las ecuaciones 4.20 y 4.21

$$\lim_{\theta_2 \rightarrow 0, \pi} \lambda_i(\theta_2) \text{ no existe, } i = 1, 2$$

por tanto  $s_a$  y  $s_b$  no pueden calcularse en  $r_i$  y  $r_e$ , por lo que se utiliza el radio inicial  $r_0 = 0.0001$  y radio final  $r_f = 0.4999$ , con un error relativo de 0.0002.

En la figura 4.6 se muestran las posiciones del manipulador en la configuración codo abajo (cab) conforme el OT toma posiciones a lo largo de la línea recta paralela al eje  $\mathbf{x}_1$ . De 251 calculadas, 11 fueron escogidos para la interpolación. En la tabla 4.3 se muestran las longitudes de los semiejes mayor ( $s_a^{cab}$ ) y menor ( $s_b^{cab}$ ).

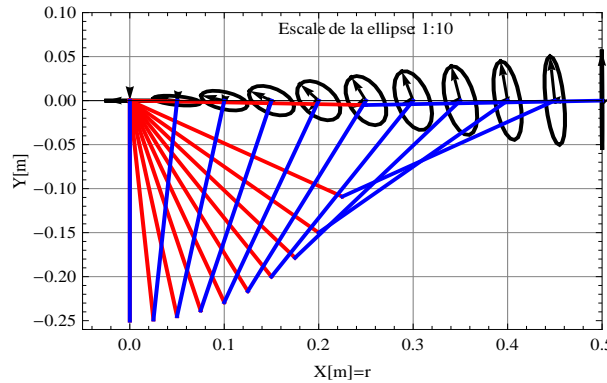


Figura 4.6: 2GdL: Elipses de velocidad lineal sobre la línea recta horizontal

Tabla 4.3: 2GdL: Elementos de las elipses de velocidad lineal

$r_i [m]$	$s_a^{cab}$	$s_b^{cab}$	$\psi^{cab} [rad]$	$\psi^{car} [rad]$
0.0001	0.250000	0.000100	3.14139	0.00020
0.05008	0.250052	0.049818	3.0371	0.10449
0.10006	0.250945	0.097667	2.90334	0.23825
0.15004	0.255833	0.139862	2.69447	0.44712
0.20002	0.272401	0.168242	2.38331	0.75828
0.2500	0.306186	0.176777	2.0944	1.04712
0.29998	0.351127	0.170873	1.91652	1.22507
0.34996	0.400836	0.155892	1.8088	1.33279
0.39994	0.452633	0.132573	1.73386	1.40773
0.44992	0.505476	0.097069	1.67116	1.47043
0.4999	0.55891	0.004472	1.5748	1.56679

En la figura 4.7 se muestra en líneas de color negro las longitudes  $s_a^{cab}$  versus radio (sobre línea recta horizontal), donde el radio inicial es  $r_0$  y el radio final  $r_f$ . Si se considera el radio  $r$  sin los casos

singulares, se puede obtener una función para describir la evolución de las longitudes de los semiejes mayores con variable independiente,  $r$ . Por tanto, para este caso se realiza una regresión polinomial. La función determinada es

$$S_a^{cab}(r) = a_0 + a_1r + a_2r^2 + a_3r^3 + a_4r^4 + a_5r^5 + a_6r^6, \forall r \in [r_0, r_f] \quad (4.26)$$

donde  $a_0 = 0.249816, a_1 = 0.105246, a_2 = -2.34181, a_3 = 12.4696, a_4 = 13.864, a_5 = -98.4433, a_6 = 95.5748$ .

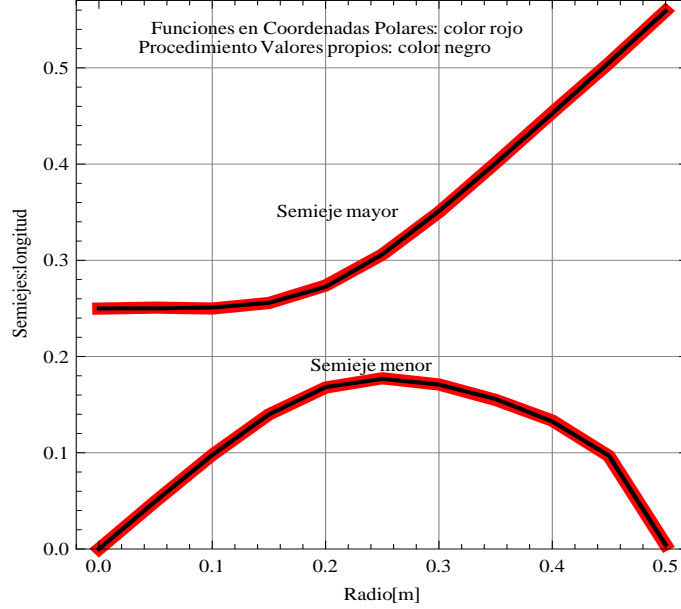


Figura 4.7: 2GdL: Radio ( $r$ ) vs Longitudes de los semiejes mayor y menor

La gráfica de esta función (ec. 4.26) se muestra también en la figura 4.7 en color rojo. Ambas gráficas son idénticas dado que su coeficiente de correlación es  $R^2 = 1$ .

En el caso de las longitudes de los semiejes menores  $s_b$ , se obtiene la siguiente ecuación una vez aplicada la regresión polinomial

$$S_b^{cab}(r) = b_0 + b_1r + b_2r^2 + b_3r^3 + b_4r^4 + b_5r^5 + b_6r^6, \forall r \in [r_0, r_f] \quad (4.27)$$

donde  $b_0 = 5.15876 \times 10^{-6}, b_1 = 1.04142, b_2 = -1.99285, b_3 = 29.8842, b_4 = -210.016, b_5 = 509.127, b_6 = -418.432$ . La gráfica de esta función (ec. 4.27) se muestra en la figura 4.7 en líneas de color rojo. El coeficiente de correlación es  $R^2 = 0.999$ .

Del teorema 04.1, las ecuaciones 4.26 y 4.27 son suficientes para determinar las longitudes de ambos semiejes en el espacio de trabajo del manipulador y en ambas configuraciones.

La ecuación 4.22 se gráfica en círculos concéntricos,  $\mathbf{p}_{ot} = \mathbf{p}(r_i, \Phi)$ , en el espacio de trabajo. El radio ( $r_i$ ) se muestra en la tabla 4.3 y  $\Phi \in [0, 2\pi]$ . Los resultados pueden observarse en la figura 4.8. El recíproco del número de condición,  $\kappa_r$ , se conserva sobre cada círculo, esto implica que las magnitudes de los semiejes mayores y menores se conservan sobre cada círculo como fue probado en el teorema 04.1. Cabe hacer mención que la posición del manipulador más cercana a la isotropía cinemática [27] es en  $\theta_2 = 2.30052 \text{ rad}$  y  $\theta_1 \in [0, 2\pi]$  con un valor de  $\kappa_r = 0.618034$ .



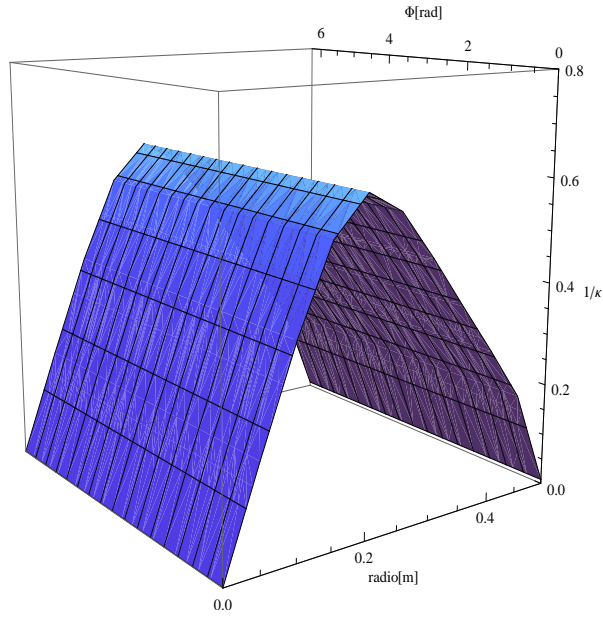


Figura 4.8: 2GdL: Radio,  $r \in [r_0, r_f]$  vs Ángulo,  $\Phi \in [0, 2\pi]$  vs  $1/\kappa$

### B. Orientación del semieje mayor sobre la línea recta horizontal( $\psi$ )

Sobre la línea recta horizontal se determinó, con el procedimiento VP, el ángulo de orientación entre el semieje mayor y el eje horizontal  $\mathbf{x}_1$ . Los datos que fueron calculados para la configuración codo abajo se muestran en la cuarta columna de la tabla 4.3.

En la figura 4.9 se muestra en líneas de color rojo la evolución del ángulo de orientación  $\psi^{cab}$  versus el radio sobre la línea horizontal,  $r \in [r_0, r_f]$ . Se puede ver que es posible obtener una función para describir la evolución del ángulo de orientación con variable independiente,  $r$ . Por tanto, para este caso se aplica una regresión polinomial. La función determinada es

$$\psi^{cab}(r) = c_0 + c_1 r + c_2 r^2 + c_3 r^3 + c_4 r^4 + c_5 r^5 + c_6 r^6, \forall r \in [r_0, r_f] \quad (4.28)$$

donde  $c_0 = 3.14236$ ,  $c_1 = -4.00683$ ,  $c_2 = 67.27816$ ,  $c_3 = -752.80418$ ,  $c_4 = 2999.04141$ ,  $c_5 = -5075.38988$ ,  $c_6 = 3128.53$ . En la misma figura 4.9 se muestra en líneas de color negro la gráfica de la ecuación 4.28, la cual es semejante a la curva original ya que el coeficiente de correlación es  $R^2 = 0.9998$ .

Para el caso de la configuración codo arriba el ángulo de orientación del semieje mayor  $\psi^{car}$  se muestra en la quinta columna de la tabla 4.3. Con estos datos, se determina

$$\psi_i^{car} = \pi - \psi_i^{cab}; i = 0, 1, \dots, n \quad (4.29)$$

donde  $n=10$ , número de radios. Por tanto, la función determinada para esta configuración con variable independiente a “r” es

$$\psi^{car}(r) = \pi - \psi^{cab}(r), \forall r \in [r_0, r_f]. \quad (4.30)$$

En la figura 4.9 también se muestra en líneas de color negro la gráfica de esta ecuación (4.30).

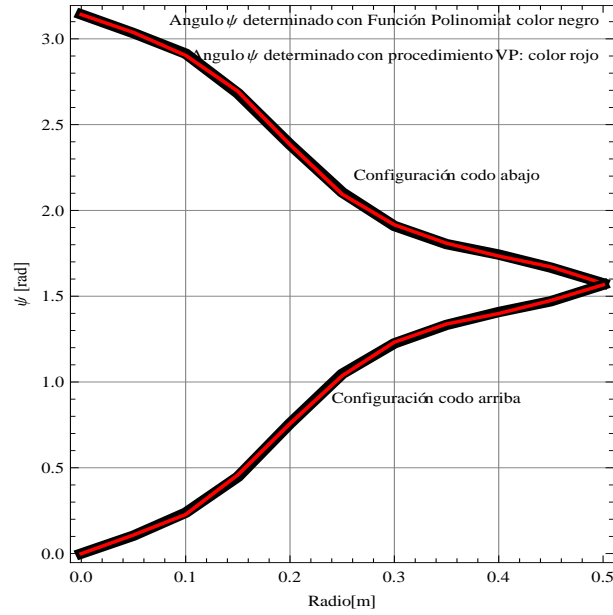


Figura 4.9: 2GdL: Ángulo de orientación  $\psi$  vs radio(r)

### C. Orientación del semieje mayor en el espacio de trabajo

Con el mismo procedimiento se determina el ángulo de orientación en el espacio de trabajo en la configuración codo abajo. Este ángulo  $\Psi_{ij}^{cab}$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$  y  $j = 0, 1, \dots, dc$  ( dc: discretización del perímetro del círculo), se muestran en la tabla 4.4 determinados en círculos concéntricos con los radios  $r_i$ (tabla 4.3) y el ángulo  $\Phi \in [0, 2\pi]$ .

Tabla 4.4: Orientación del semieje mayor

$\Phi [rad]$	$\Psi_{0j}^{cab} [rad]$	...	$\Psi_{10j}^{cab} [rad]$
0	3.14139	...	1.57480
$\pi/10$	3.45555	...	1.88896
$\pi/5$	3.76971	...	2.20312
$3\pi/10$	4.08387	...	2.51727
$2\pi/5$	4.39803	...	2.83143
$\pi/2$	4.71219	...	3.14559
$3\pi/5$	5.02635	...	3.45975
$7\pi/10$	5.34051	...	3.77391
$4\pi/5$	5.65467	...	4.08807
$9\pi/10$	5.96883	...	4.40223
$\pi$	6.28299	...	4.71639
$11\pi/10$	6.59714	...	5.03055
$6\pi/5$	6.9113	...	5.34471
$13\pi/10$	7.22546	...	5.65887
$7\pi/5$	7.53962	...	5.97303
$15\pi/10$	7.85378	...	6.28719
$8\pi/5$	8.16794	...	6.60135
$17\pi/10$	8.4821	...	6.91550
$9\pi/5$	8.79626	...	7.22966
$19\pi/10$	9.11042	...	7.54382
$2\pi$	9.42458	...	7.85798

En la figura 4.10 se muestra en líneas de color azul a color negro la evolución del ángulo orientación  $\Psi_{ij}^{cab}$  versus el ángulo  $\Phi$ . Se puede ver que los datos describen líneas rectas. Por tanto, para este caso se

puede aplicar una regresión lineal. La función determinada es

$$\Psi^{cab}(\Phi) = d_0 + d_1\Phi, \Phi \in [0, 2\pi]. \quad (4.31)$$

donde:  $d_0$  es el valor inicial de  $\psi_i^{cab}$  que se muestran en la tabla 4.4. Para el caso general, se representa a través de la función  $\psi^{cab}(r)$  y  $d_1 = 1$ , con un coeficiente de correlación,  $R^2 = 1$ ; por tanto, la ecuación 4.31 puede ser rescrita como,

$$\Psi^{cab}(r, \Phi) = \psi^{cab}(r) + \Phi, \Phi \in [0, 2\pi], r \in [r_0, r_f]. \quad (4.32)$$

En la misma figura 4.10 se muestra en líneas de color negro a líneas de color rojo la gráfica de la función  $\Psi^{cab}(r, \Phi)$  obtenida cuando se aplica la regresión lineal, la cual es semejante a la curva original ya que el coeficiente de correlación es igual a uno.

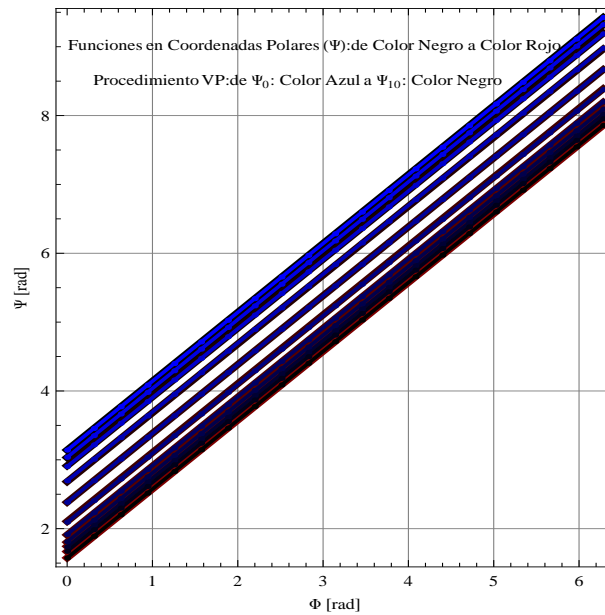


Figura 4.10: 2GdL: Ángulo ( $\Phi$ ) vs Ángulo de orientación ( $\Psi$ )

Para el caso de la configuración codo arriba. Sustituyendo la ecuación 4.30 en 4.31,

$$\Psi^{car}(r, \Phi) = \psi^{car}(r) + \Phi, \Phi \in [0, 2\pi]; r \in [r_0, r_f]. \quad (4.33)$$

En la figura 4.11 se muestran en líneas de color rojo el mapa de elipses de velocidad lineal que fue obtenido con las ecuaciones 4.26, 4.27, 4.28 y 4.32; dado que el coeficiente de correlación se aproxima a uno, estas elipses son muy similares a las obtenidas con el procedimiento VP (líneas en color negro).

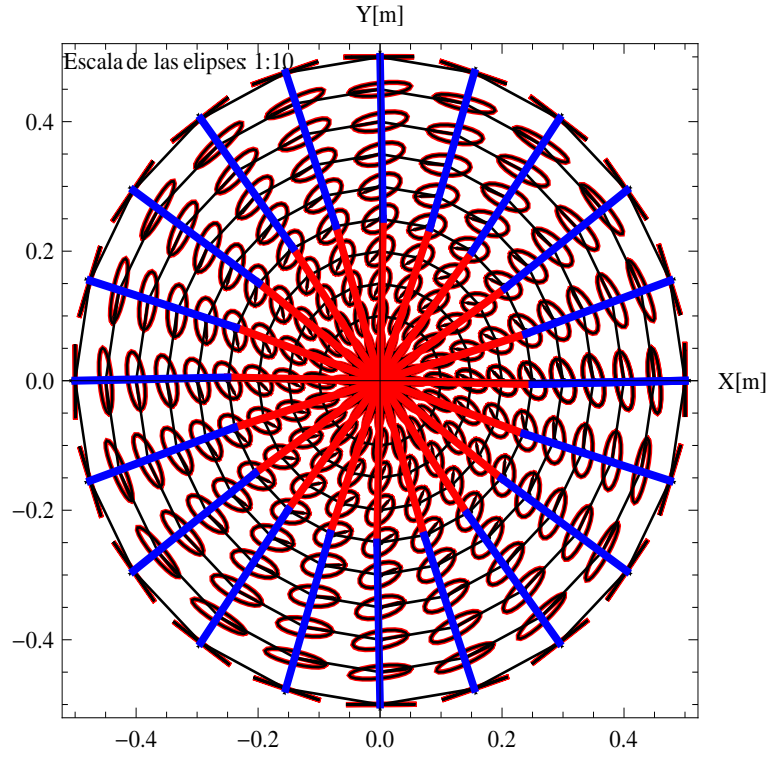


Figura 4.11: 2 GdL: Elipses de velocidad lineal en el espacio de trabajo

#### 4.2.2.2. Determinación y análisis de las elipses de velocidad lineal: Manipulador PUMA para sus 3 primeros GdL

##### 4.2.2.2.1. Plano vertical del manipulador PUMA

El objetivo es realizar la determinación de las mejores y peores direcciones cinemáticas sobre el espacio de trabajo del manipulador PUMA. La determinación de las direcciones, se realiza bajo el supuesto de que la primer junta de dicho manipulador es  $\theta_1 = 0$  para todo instante, lo que implica que dichas direcciones en el espacio de trabajo del manipulador tienen componentes  $(v_x, v_z)$  que se encuentran en el plano vertical. Por lo que la matriz Jacobiana que corresponde al gradiente de la función vectorial de posición es,

$$\mathbf{J}_e = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_x}{\partial \theta_1} & \frac{\partial f_x}{\partial \theta_2} & \frac{\partial f_x}{\partial \theta_3} \\ \frac{\partial f_y}{\partial \theta_1} & \frac{\partial f_y}{\partial \theta_2} & \frac{\partial f_y}{\partial \theta_3} \\ \frac{\partial f_z}{\partial \theta_1} & \frac{\partial f_z}{\partial \theta_2} & \frac{\partial f_z}{\partial \theta_3} \end{bmatrix} \quad (4.34)$$

que al imponer la restricción antes mencionada,  $\theta_1 = 0$  para todo instante, dicha matriz queda de la siguiente forma,

$$\mathbf{J}_e = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial f_x}{\partial \theta_2} & \frac{\partial f_x}{\partial \theta_3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial f_z}{\partial \theta_2} & \frac{\partial f_z}{\partial \theta_3} \end{bmatrix} \quad (4.35)$$

extrayendo de la matriz  $\mathbf{J}_e$  (ec. 4.35) los componentes que son diferentes de cero, se tiene

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} lc(\theta_2 + \theta_3) - ks\theta_2 - fs(\theta_2 + \theta_3) & lc(\theta_2 + \theta_3) - fs(\theta_2 + \theta_3) \\ -kc\theta_2 - fc(\theta_2 + \theta_3) - ls(\theta_2 + \theta_3) & -ls(\theta_2 + \theta_3) - fc(\theta_2 + \theta_3) \end{bmatrix}. \quad (4.36)$$

La matriz  $\mathbf{J}\mathbf{J}^T$  queda de la siguiente forma

$$\mathbf{J}\mathbf{J}^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}.$$

$$\begin{aligned}
a_{11} &= (l c(\theta_2 + \theta_3) - f s(\theta_2 + \theta_3))^2 + (-l c(\theta_2 + \theta_3) + k s(\theta_2) + f s(\theta_2 + \theta_3))^2 \\
a_{12} &= a_{21} = -2f l c(2(\theta_2 + \theta_3)) - k l c(2\theta_2 + \theta_3) + (f - l)(f + l)s(2(\theta_2 + \theta_3)) + k(k c\theta_2 s\theta_2 + f s(2\theta_2 + \theta_3)) \\
a_{22} &= (f c(\theta_2 + \theta_3) + l s(\theta_2 + \theta_3))^2 + (k c(\theta_2) + f c(\theta_2 + \theta_3) + l s(\theta_2 + \theta_3))^2
\end{aligned}$$

La inversa de la matriz  $\mathbf{J}\mathbf{J}^T$  queda de la siguiente forma

$$\mathbf{A} = (\mathbf{J}\mathbf{J}^T)^{-1} = \begin{bmatrix} ai_{11} & ai_{12} \\ ai_{21} & ai_{22} \end{bmatrix}. \quad (4.37)$$

donde

$$\begin{aligned}
ai_{11} &= \frac{2f^2+k^2+2l^2+k^2c(2\theta_2)+2(f k c\theta_3+(f-l)(f+l)c(2(\theta_2+\theta_3))+f k c(2\theta_2+\theta_3)+2l(kc\theta_2+2fc(\theta_2+\theta_3)s(\theta_2+\theta_3)))}{2k^2(lc\theta_3-fs\theta_3)^2} \\
ai_{12} &= ai_{21} = \frac{4f l c(2(\theta_2+\theta_3))+2k l c(2\theta_2+\theta_3)+2(-f^2+l^2)s(2(\theta_2+\theta_3))-k(k s(2\theta_2)+2f s(2\theta_2+\theta_3))}{2k^2(lc\theta_3-fs\theta_3)^2} \\
ai_{22} &= \frac{2f^2+k^2+2l^2-k^2c(2\theta_2)+2f k c\theta_3+2((f-l)(f+l)c(2(\theta_2+\theta_3))+f k c(2\theta_2+\theta_3)+2lc(\theta_2+\theta_3)(k s\theta_2+2f s(\theta_2+\theta_3)))}{2k^2(lc\theta_3-fs\theta_3)^2}.
\end{aligned}$$

Se calculan canónicamente los valores propios de la matriz  $\mathbf{A}$ . De la ecuación

$$\mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v} \Rightarrow (\mathbf{A} - \mathbf{I}_d\lambda)\mathbf{v} = 0, \quad (4.38)$$

donde  $\lambda$ : es el valor propio y  $\mathbf{v}$ : es el vector propio de dicha matriz; dado que  $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ , entonces

$$\begin{aligned}
&\lambda^2 \underbrace{(k^2(f^2 + l^2) - k^2(f - l)(f + l)c(2\theta_3) - 4f k^2 l c\theta_3 s\theta_3)}_a + \\
&\lambda \underbrace{(-2(2f^2 + k^2 + 2l^2) - 4f k c\theta_3 - 4k l s\theta_3)}_b + \underbrace{2}_c = 0, \quad (4.39)
\end{aligned}$$

la ec. 4.39 es el polinomio característico de segundo grado, la solución es determinada si se toma los coeficientes a,b y c de dicha ecuación,

$$\lambda_1(\theta_3) = \frac{-b + (b^2 - 4ac)^{1/2}}{2a}, \quad (4.40)$$

$$\lambda_2(\theta_3) = \frac{-b - (b^2 - 4ac)^{1/2}}{2a}, \lambda_1(\theta_3), \lambda_2(\theta_3) \in \mathbb{R}^+, \quad (4.41)$$

donde  $\lambda_1(\theta_3) \geq \lambda_2(\theta_3)$ ; los valores singulares se determinan como  $\sigma_1 = (\lambda_1(\theta_3))^{1/2}$  y  $\sigma_2 = (\lambda_2(\theta_3))^{1/2}$ . Por lo que el recíproco del número de condición con la norma-2 es

$$\kappa_r = \sigma_2/\sigma_1, \kappa_r \in (0, 1]. \quad (4.42)$$

### A. Longitud de los semiejes

Estos elementos son determinados en función de las coordenadas polares  $(r, \Phi)$ , donde  $r \in (-0.000478, 0.864477)$  y  $\Phi \in [0, 2\pi]$  en el plano vertical del espacio de trabajo del manipulador. En el caso de las fronteras interior y exterior, los radios son  $r_i = -0.000478$  y  $r_e = 0.864478$  respectivamente, en consecuencia los ángulos sobre la tercera junta en el manipulador son  $\theta_3^i = 3.188595$  y  $\theta_3^e = 0.047002$  por lo que,

$$\lim_{\theta_3 \rightarrow \theta_3^i, \theta_3^e} \lambda_i(\theta_3) \text{ no existe, } i = 1, 2$$

por tanto  $s_a$  y  $s_b$  no pueden calcularse en  $r_i$  y  $r_e$ . Por lo que se utiliza un radio inicial de  $r_0 = 0.008$  y un radio final  $r_f = 0.864477$  con un error en el interior de la frontera 0.008478 y un error relativo en la frontera exterior de  $1.16 \times 10^{-6}$ .

En la figura 4.12 se muestran las elipses de velocidad lineal y las posiciones del manipulador en configuración brazo izquierdo y codo abajo conforme el OT toma posiciones a lo largo de la línea recta paralela al eje  $x_1$

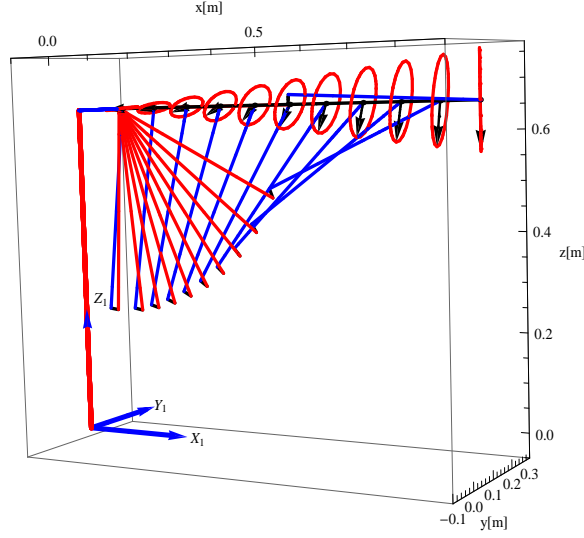


Figura 4.12: Plano vertical: Elipses de velocidad lineal sobre línea recta

Tabla 4.5: Plano vertical: Elementos de las elipses de velocidad lineal

$r_i$ [m]	$s_a^{cab}$	$s_b^{cab}$	$\psi^{cab}$ [rad]	$\psi^{car}$ [rad]
0.008000	0.432478	0.007981	3.07259	0.06900
0.093648	0.432614	0.093015	3.02245	0.11914
0.179295	0.434430	0.174511	2.88833	0.25327
0.264943	0.443707	0.245675	2.67529	0.46630
0.350591	0.473789	0.292361	2.3643	0.77730
0.436239	0.532957	0.305447	2.08386	1.05774
0.521886	0.610416	0.294610	1.91167	1.22992
0.607534	0.695723	0.268521	1.80644	1.33516
0.693182	0.784512	0.228206	1.73263	1.40896
0.778829	0.875065	0.166952	1.67052	1.47107
0.864477	0.966622	0.000468	1.57104	1.57055

En la tabla 4.5 se muestran las longitudes del semieje mayor ( $s_a^{cab}$ ) y semieje menor ( $s_b^{cab}$ ) en función del radio  $r_i$ . En la figura 4.13 se muestran en líneas de color negro la longitud del semieje ( $s_a^{cab}$ ) versus el radio,  $r \in [r_0, r_f]$ . La evolución de las longitudes de dicho semieje se puede describir a través de una función que tenga como variable independiente al radio ( $r$ ), por lo que realizando una regresión polinomial, se determina la función

$$S_a^{cab}(r) = a_0 + a_1r + a_2r^2 + a_3r^3 + a_4r^4 + a_5r^5 + a_6r^6, \forall r \in [r_0, r_f] \quad (4.43)$$

donde  $a_0 = 0.431177, a_1 = 0.138513, a_2 = -1.66375, a_3 = 5.42161, a_4 = 0.214741, a_5 = -8.68181, a_6 = 5.33911$ . La gráfica de esta función aparece también en la figura 4.13 en color rojo. Ambas gráficas son idénticas dado que el coeficiente de correlación es  $R^2 = 1$ . Para el caso de las longitudes de los semiejes menores ( $s_b^{cab}$ ) versus el radio  $r_i$ , aplicando una regresión polinomial se obtiene la siguiente función,

$$S_b^{cab}(r) = b_0 + b_1r + b_2r^2 + b_3r^3 + b_4r^4 + b_5r^5 + b_6r^6, \forall r \in [r_0, r_f] \quad (4.44)$$

donde  $b_0 = -0.000506818, b_1 = 1.07058, b_2 = -1.5429, b_3 = 12.0202, b_4 = -45.5283, b_5 = 62.522, b_6 = -29.4596$ . Esta función también se muestra en la figura 4.13 y el coeficiente de correlación es  $R^2 = 0.999$ .

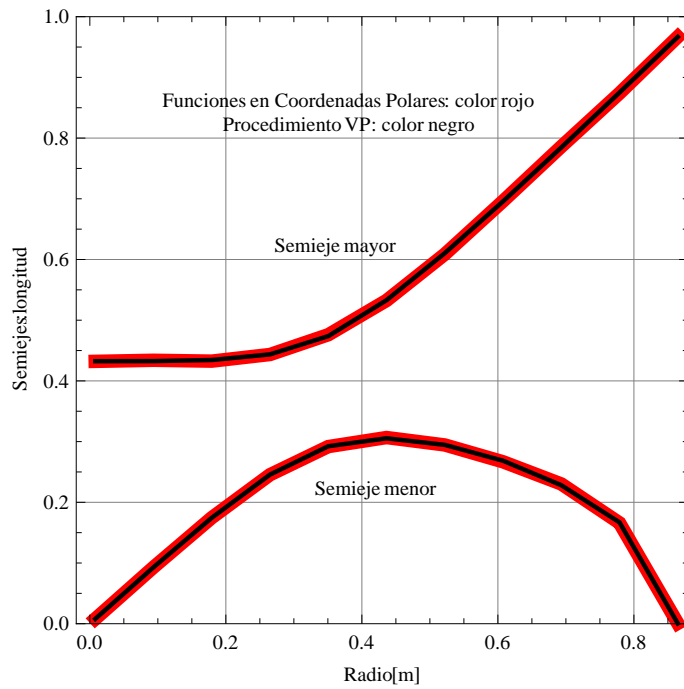


Figura 4.13: Plano vertical: Radio ( $r$ ) vs Longitud de los semiejes mayor y menor

Del teorema 01[31], las ecuaciones 4.43 y 4.44 son suficientes para determinar las longitudes de ambos semiejes sobre toda el área de trabajo en el plano vertical en ambas configuraciones.

La ecuación 4.42 es graficada en círculos concéntricos  $\mathbf{p}(r_i, \Phi)$  en el espacio de trabajo. Los radios  $r_i$  son mostrados en la tabla 4.5 y  $\Phi \in [0, 2\pi]$ . El recíproco del número de condición se conserva sobre cada círculo, implica que las magnitudes de los semiejes mayores y menores se conservan sobre cada círculo tal como indica el teorema 01.

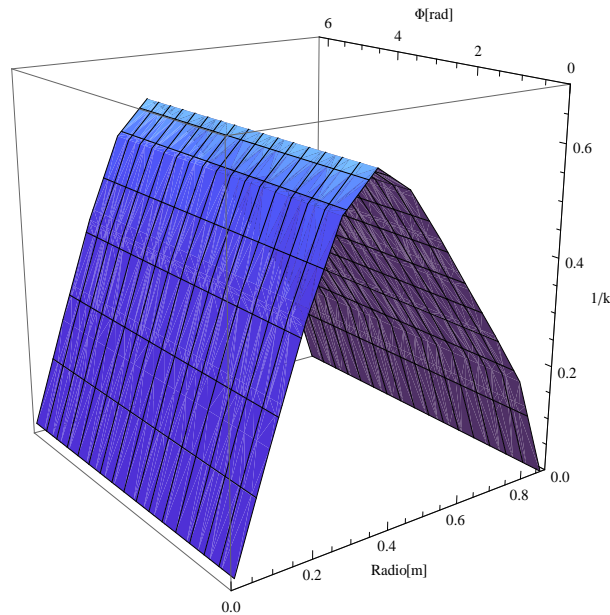


Figura 4.14: Plano vertical: Radio,  $r \in [r_0, r_f]$  vs Ángulo,  $\Phi \in [0, 2\pi]$  vs  $1/\kappa$

### B. Orientación del semieje mayor

Sobre la línea recta horizontal fueron determinados con el procedimiento VP, el ángulo de orientación del semieje mayor. Los datos fueron calculados para la configuración codo abajo como se muestra en la cuarta columna de la tabla 4.5.

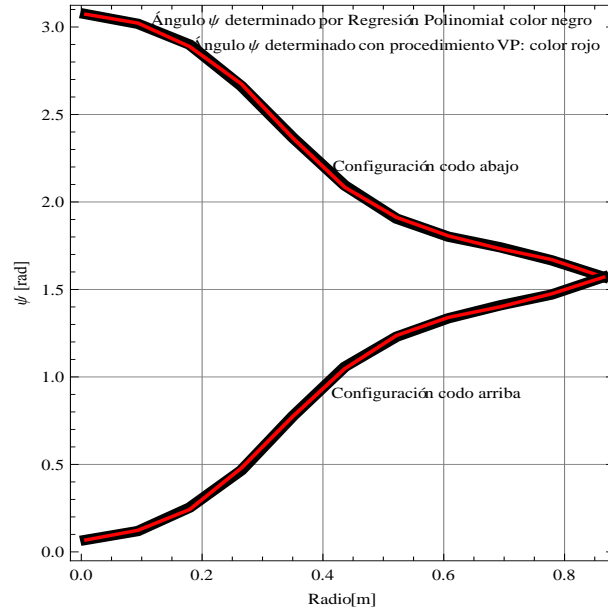


Figura 4.15: Plano vertical: Radio( $r$ ) vs Ángulo de orientación  $\psi$

En la figura 4.15 se muestra en líneas de color rojo la evolución del ángulo de orientación  $\psi^{cab}$  versus el radio en la posición horizontal,  $r \in [r_0, r_f]$ . Observando los datos de dicha tabla es posible obtener una función a través de una regresión polinomial, la cual es representada a través de

$$\psi^{cab}(r) = c_0 + c_1r + c_2r^2 + c_3r^3 + c_4r^4 + c_5r^5 + c_6r^6, \forall r \in [r_0, r_f] \quad (4.45)$$

donde  $c_0 = 3.08255, c_1 = -1.28373, c_2 = 15.4669, c_3 = -122.16, c_4 = 294.837, c_5 = -293.189, c_6 = 105.062$ . En la misma figura se muestra en líneas de color negro la gráfica de la ecuación 4.45 la cual es semejante a la curva original ya que el coeficiente de correlación es  $R^2 = 0.999$ .

Para el caso de la configuración codo arriba el ángulo de orientación del semieje mayor  $\psi^{car}$  son mostrados en la quinta columna de la tabla 4.5. De estos datos, se determina

$$\psi_i^{car} = \pi - \psi_i^{cab}; i = 0, 1, \dots, n \quad (4.46)$$

donde  $n=10$ , número de radios. Por tanto, la función determinada para ésta configuración es

$$\psi^{car}(r) = \pi - \psi^{cab}(r), \forall r \in [r_0, r_f]. \quad (4.47)$$

En la figura 4.15 se muestra también en líneas de color negro la gráfica de esta ecuación 4.47.

**C. Orientación del semieje mayor en el espacio de trabajo** Con el mismo procedimiento (VP) fueron determinados los ángulos de orientación de los semiejes mayor en la configuración codo abajo. Este ángulo  $\Psi_{ij}^{cab}$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$  y  $j = 0, 1, \dots, dc$  mostrado en la tabla 4.6 se determinó en círculos concéntricos con radios  $r_i$  mostrados en la tabla 4.5 y  $\Phi \in [0, 2\pi]$ .



Tabla 4.6: Plano vertical: Orientación del semieje mayor

$\Phi[\text{rad}]$	$\Psi_{0j}^{cab}[\text{rad}]$	...	$\Psi_{10j}^{cab}[\text{rad}]$
0	3.07259	...	1.571040
$\pi/10$	3.38675	...	1.885200
$\pi/5$	3.70091	...	2.199360
$3\pi/10$	4.01507	...	2.513520
$2\pi/5$	4.32923	...	2.827680
$\pi/2$	4.64339	...	3.141835
$3\pi/5$	4.95755	...	3.455994
$7\pi/10$	5.27171	...	3.770153
$4\pi/5$	5.58587	...	4.084313
$9\pi/10$	5.90003	...	4.398473
$\pi$	6.21418	...	4.712633
$11\pi/10$	6.52835	...	5.026793
$6\pi/5$	6.84251	...	5.340953
$13\pi/10$	7.15666	...	5.655113
$7\pi/5$	7.47083	...	5.969273
$15\pi/10$	7.78499	...	6.283427
$8\pi/5$	8.09915	...	6.597586
$17\pi/10$	8.41331	...	6.911745
$9\pi/5$	8.72747	...	7.225905
$19\pi/10$	9.04163	...	7.540065
$2\pi$	9.35578	...	7.854225

En la figura 4.16 es mostrada en líneas de color azul a color negro la evolución del ángulo de orientación  $\Psi_{ij}^{cab}$  versus el ángulo  $\Phi$ . Se observa que describe líneas rectas, por lo que se puede aplicar una regresión lineal

$$\Psi^{cab}(\Phi) = d_0 + d_1\Phi, \Phi \in [0, 2\pi] \quad (4.48)$$

donde:  $d_0$  es el valor inicial  $\psi_i^{cab}$  mostrado en la tabla 4.5. Para el caso general será representado por la función  $\psi^{cab}(r)$  y  $d_1 = 1$ , con un coeficiente de correlación  $R^2 = 1$ . Por tanto, la ec. 4.48 puede ser rescrita como

$$\Psi^{cab}(r, \Phi) = \psi^{cab}(r) + \Phi, \Phi \in [0, 2\pi], r \in [r_0, r_f]. \quad (4.49)$$

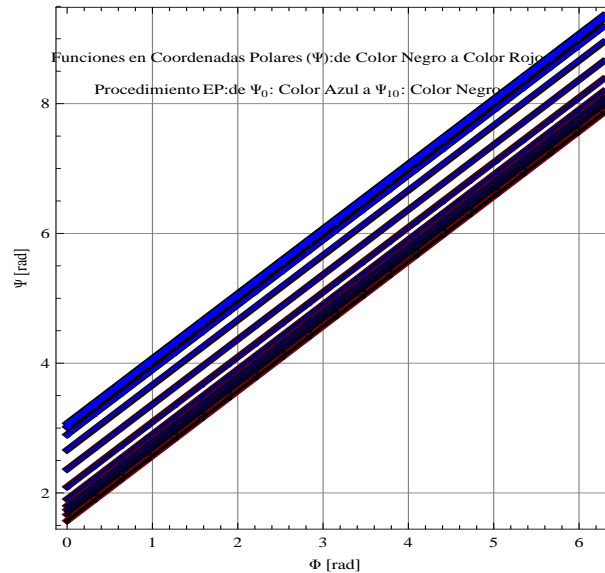


Figura 4.16: Plano vertical: El Ángulo ( $\Phi$ ) vs Ángulo de orientación( $\Psi$ )

En la misma figura 4.16 es mostrado en líneas de color negro a color rojo la gráfica de la función  $\Psi^{cab}(r, \Phi)$ . La cual es semejante a la curva original dado que el coeficiente de correlación es igual a uno; para el caso de la configuración codo arriba del brazo, se obtiene sustituyendo la ec. 4.47 en 4.48,

$$\Psi^{car}(r, \Phi) = \psi^{car}(r) + \Phi, \Phi \in [0, 2\pi]; r \in [r_0, r_f]. \quad (4.50)$$

En la figura 4.17 se muestran en líneas de color verde las elipses de velocidad lineal que fueron obtenidas con las ecuaciones 4.43, 4.44, 4.45 y 4.49. Las cuales son semejantes a las elipses obtenidas con el procedimiento VP dado que los coeficientes de correlación son semejantes a uno.

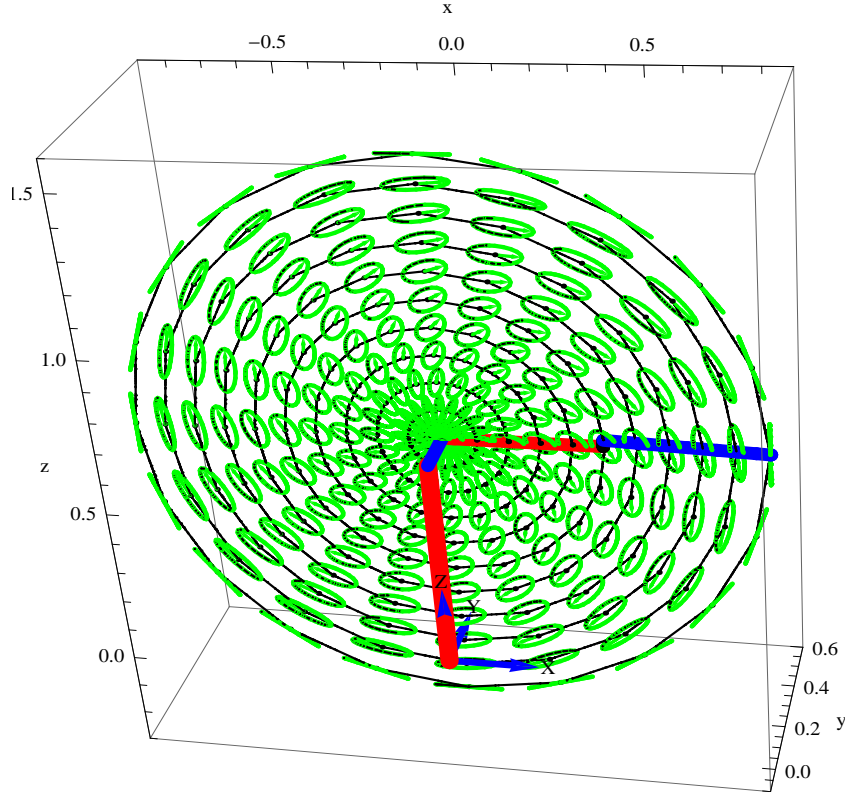


Figura 4.17: Plano vertical: Elipses de velocidad lineal en el espacio de trabajo

#### 4.2.2.2.2. Plano horizontal del manipulador PUMA

La determinación de las elipsoides de velocidad lineal se realiza bajo el supuesto de que el OT del manipulador se encuentra a una altura “h” para todo instante, es decir que los movimientos del OT se encuentran sobre el plano horizontal con altura “h”.

##### A. Longitud de los semiejes

Se realiza la determinación de las longitudes de los semiejes principales de las elipsoides a través de la ecuación 4.12, para la configuración codo abajo. En la tabla 4.7 se pueden observar los valores de los semiejes: mayor ( $s_a^{cab}$ ), intermedio ( $s_b^{cab}$ ) y menor ( $s_c^{cab}$ ). Determinados sobre la línea recta con punto de inicio:  $\mathbf{p}_0 = (x_0, y_0, z_0)^T = (0.15109, 0.0, 0.66040)^T$  y punto final:  $\mathbf{p}_f = (x_f, y_f, z_f)^T = (0.877239, 0.0, 0.66040)^T$ . Dado que el punto de la frontera interior es  $\mathbf{p}_i = (x_i, y_i, z_i)^T = (0.14909, 0.0, 0.66040)^T$  y el punto de la frontera exterior es  $\mathbf{p}_e = (x_e, y_e, z_e)^T = (0.87723965, 0.0, 0.66040)^T$ , entonces el error relativo en la frontera interior es de 0.0134147 y en la frontera exterior de 0.00000065. En la figura 4.18 se pueden observar las correspondientes gráficas de las longitudes de dichos semiejes: mayor, intermedio y menor, en función del radio  $r \in [r_0 = 0.15109, r_f = 0.15109]$ .

Tabla 4.7: Plano horizontal: Elementos de las elipses de velocidad lineal

$r_i[m]$	$s_a^{cab}$	$s_b^{cab}$	$s_c^{cab}$
0.15109	0.457476	0.0274998	0.0206149
0.223705	0.46119	0.17688	0.144618
0.29632	0.471361	0.270421	0.212393
0.368935	0.494481	0.354535	0.258511
0.44155	0.535881	0.433951	0.281531
0.514164	0.593604	0.510397	0.284022
0.586779	0.661478	0.585003	0.271381
0.659394	0.734728	0.658596	0.246652
0.732009	0.810759	0.731679	0.209281
0.804624	0.888275	0.804518	0.152866
0.15109	0.966621	0.877239	0.000470834

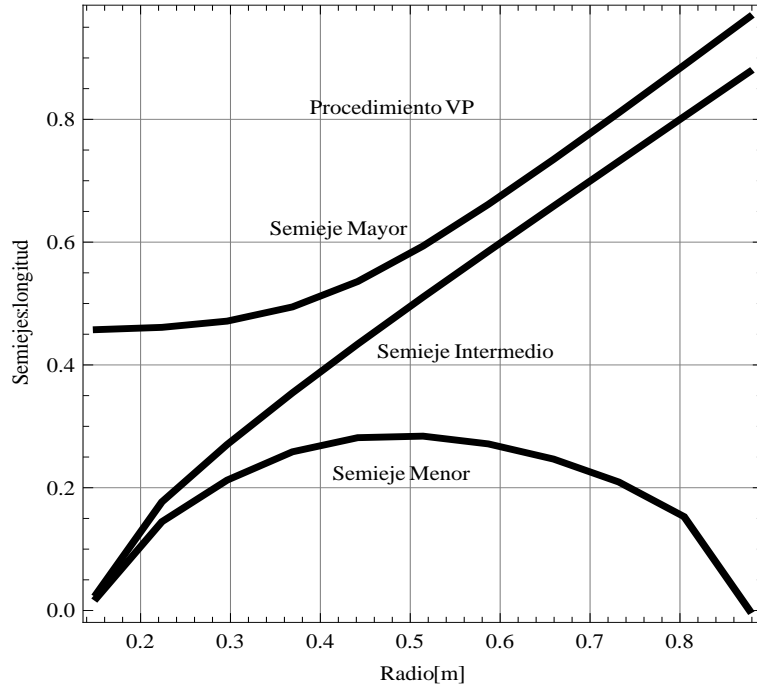


Figura 4.18: Plano horizontal:Radio (r) vs Longitud de los semiejes principales

Con el objeto de entender el comportamiento de las longitudes de los ejes principales de las elipsoides en todo el área de trabajo correspondiente al plano horizontal se realiza la determinación del número de condición de la matriz  $\mathbf{A}$  a través de la norma-2. Dicha graficación se realiza sobre círculos concéntricos  $\mathbf{p}(r_i, \Phi)$  que se encuentran dentro del área de trabajo del manipulador. Los radios ( $r_i$ ) se muestran en la tabla 4.7 y  $\Phi \in [0, 2\pi]$ . Los resultados se pueden observar en la figura 4.19. Los valores de  $1/\kappa$  se conservan sobre cada círculo, esto implica que las magnitudes de los semiejes mayor y menor se conservan sobre cada círculo. Además en la figura 4.20 se muestra el coeficiente correspondiente a los semiejes  $s_b^{cab}/s_a^{cab}$ , observándose que también se conserva sobre los círculos, esto implica que el semieje intermedio también se conserva.

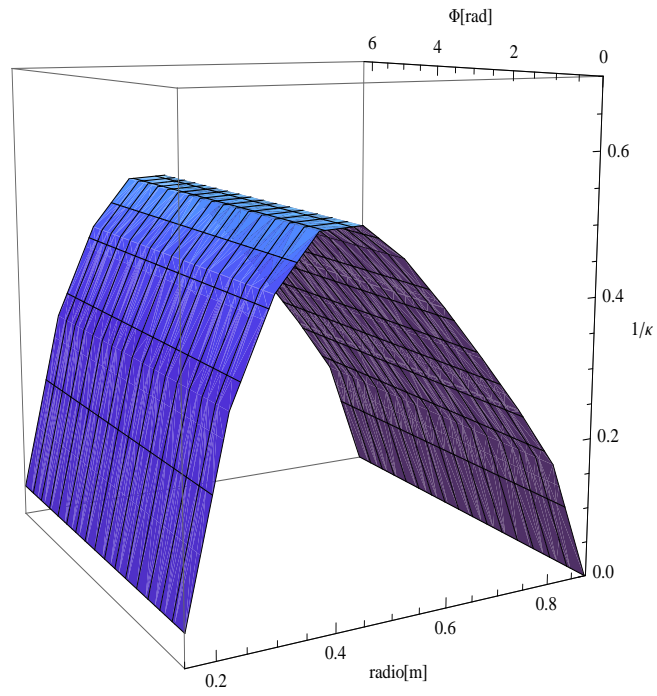


Figura 4.19: Plano horizontal: Radio,  $r \in [r_0, r_f]$  vs Ángulo,  $\Phi \in [0, 2\pi]$  vs  $1/\kappa$

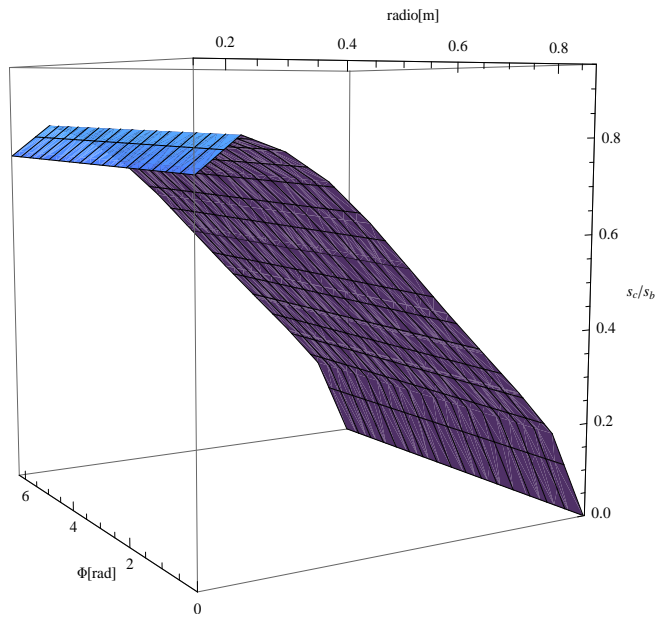


Figura 4.20: Plano horizontal: Radio,  $r \in [r_0, r_f]$  vs Ángulo,  $\Phi \in [0, 2\pi]$  vs  $s_c/s_b$

## B. Ángulos de orientación del semieje mayor

Se realiza la determinación de los ángulos de orientación del semieje mayor con respecto a los ejes  $\mathbf{x}_1 = (1, 0, 0)^T$ ,  $\mathbf{y}_1 = (0, 1, 0)^T$  y  $\mathbf{z}_1 = (0, 0, 1)^T$  a través de la ec. 4.15 en función del radio  $r_i$ . Los valores de dichos ángulos de orientación se muestran en la tabla 4.8 y en la figura 4.21 se muestra la gráfica de la evolución de los ángulos  $\psi_x$ ,  $\psi_y$  y  $\psi_z$  con variable independiente el radio  $r \in [r_0, r_f]$

Tabla 4.8: *Plano horizontal: Ángulos de los semiejes mayor*

$r_i[m]$	$\psi_x^{cab}$	$\psi_y^{cab}$	$\psi_z^{cab}$
0.15109	1.71605	0.151528	1.52794
0.223705	2.26193	0.730099	1.37325
0.29632	2.31294	0.862415	1.21718
0.368935	2.21788	0.926328	1.01808
0.44155	2.06801	1.008770	0.79689
0.514164	1.93606	1.122600	0.59630
0.586779	1.83962	1.237220	0.43521
0.659394	1.76879	1.333910	0.31121
0.732009	1.71226	1.411430	0.21391
0.804624	1.66028	1.476770	0.12999
0.877239	1.57104	01.570560	0.00034

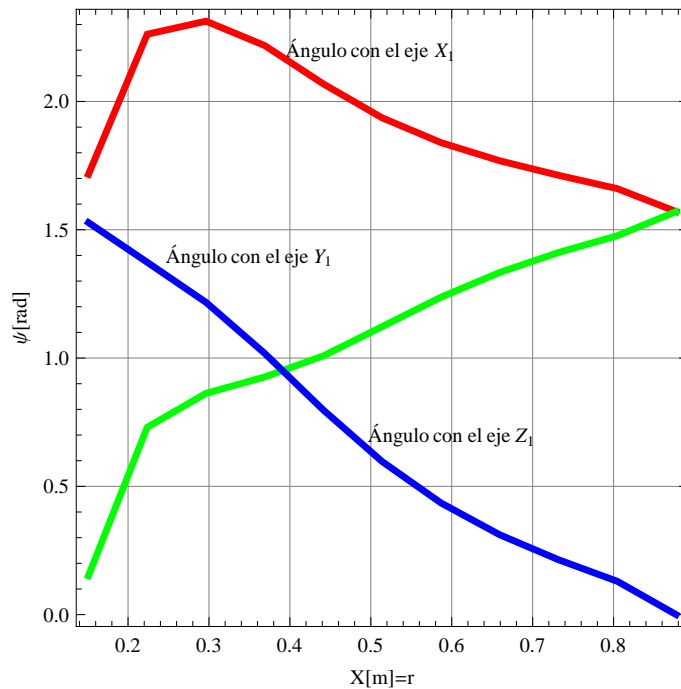


Figura 4.21: Plano horizontal: Ángulos de orientación ( $\psi_x, \psi_y, \psi_z$ ) vs Radio(r)

En la figura 4.22 se muestran las elipsoides de velocidad lineal cuyas longitudes de los semiejes están contenidas en la tabla 4.7 y cuyos ángulos de orientación se pueden ver en la tabla 4.8. Todas estas determinaciones se realizaron con el procedimiento VP.

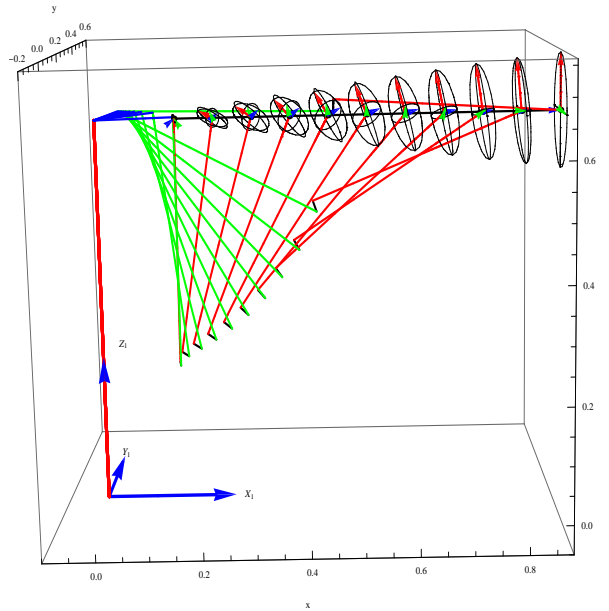


Figura 4.22: Plano horizontal: Elipsoides de velocidad lineal sobre línea recta

### C. Ángulos de orientación del semieje mayor en el espacio de trabajo

Con el mismo procedimiento (VP) fueron determinados los ángulos de orientación de los semiejes mayor en la configuración codo abajo. Las magnitudes de estos ángulos  $\Psi_x^{cab}$ ,  $\Psi_y^{cab}$  y  $\Psi_z^{cab}$  son mostrados en la tabla 4.9 los cuales fueron determinados en círculos concéntricos con radios  $r_i$  contenidos en la tabla 4.8 y  $\Phi \in [0, 2\pi]$ , y en la figura 4.23 se muestra la gráfica de dichos datos. En la figura 4.24 se muestran las elipsoides de velocidad lineal generadas sobre el plano horizontal correspondiente al espacio de trabajo del manipulador PUMA.

Tabla 4.9: Plano horizontal: Orientación del semieje mayor

$\Phi [rad]$	$\Psi_x^{1j}$	$\Psi_y^{1j}$	$\Psi_z^{1j}$	$\Psi_x^{2j}$	$\Psi_y^{2j}$	$\Psi_z^{2j}$	...	$\Psi_x^{10j}$	$\Psi_y^{10j}$	$\Psi_z^{10j}$
0	2.261930	1.2372	1.37325	2.312940	0.86242	1.21718	...	1.57104	1.57056	0.000341
$\pi/10$	2.561600	1.3394	1.37325	2.575190	1.14844	1.21718	...	1.57110	1.57065	0.000341
$\pi/5$	2.835900	1.4618	1.37325	2.763050	1.44135	1.21718	...	1.57113	1.57075	0.000341
$3\pi/10$	2.928900	1.5932	1.37325	2.748200	1.73592	1.21718	...	1.57113	1.57085	0.000341
$2\pi/5$	2.703610	1.7228	1.37325	2.545640	2.02833	1.21718	...	1.57110	1.57095	0.000341
$\pi/2$	2.411490	1.8396	1.37325	2.279180	2.31294	1.21718	...	1.57103	1.57104	0.000341
$3\pi/5$	2.107920	1.9324	1.37325	1.993150	2.57519	1.21718	...	1.57095	1.57110	0.000341
$7\pi/10$	1.800970	1.9903	1.37325	1.700240	2.76305	1.21718	...	1.57085	1.57113	0.000341
$4\pi/5$	1.493010	2.0054	1.37325	1.405680	2.74820	1.21718	...	1.57074	1.57113	0.000341
$9\pi/10$	1.185360	1.9752	1.37325	1.113260	2.54564	1.21718	...	1.57064	1.57110	0.000341
$\pi$	0.879663	1.9044	1.37325	0.828657	2.27918	1.21718	...	1.57055	1.57103	0.000341
$11\pi/10$	0.579996	1.8022	1.37325	0.566406	1.99315	1.21718	...	1.57049	1.57095	0.000341
$6\pi/5$	0.305689	1.6798	1.37325	0.378546	1.70024	1.21718	...	1.57046	1.57085	0.000341
$13\pi/10$	0.212693	1.5484	1.37325	0.393391	1.40568	1.21718	...	1.57046	1.57074	0.000341
$7\pi/5$	0.437978	1.4188	1.37325	0.595949	1.11326	1.21718	...	1.57049	1.57064	0.000341
$15\pi/10$	0.730099	1.3020	1.37325	0.862415	0.82866	1.21718	...	1.57056	1.57055	0.000341
$8\pi/5$	1.033670	1.2092	1.37325	1.148440	0.56641	1.21718	...	1.57065	1.57049	0.000341
$17\pi/10$	1.340620	1.1513	1.37325	1.441350	0.37855	1.21718	...	1.57075	1.57046	0.000341
$9\pi/5$	1.648590	1.1362	1.37325	1.735920	0.39339	1.21718	...	1.57085	1.57046	0.000341
$19\pi/10$	1.956230	1.1664	1.37325	2.028330	0.59595	1.21718	...	1.57095	1.57049	0.000341
$2\pi$	2.261930	1.2372	1.37325	2.312940	0.86242	1.21718	...	1.57104	1.57056	0.000341

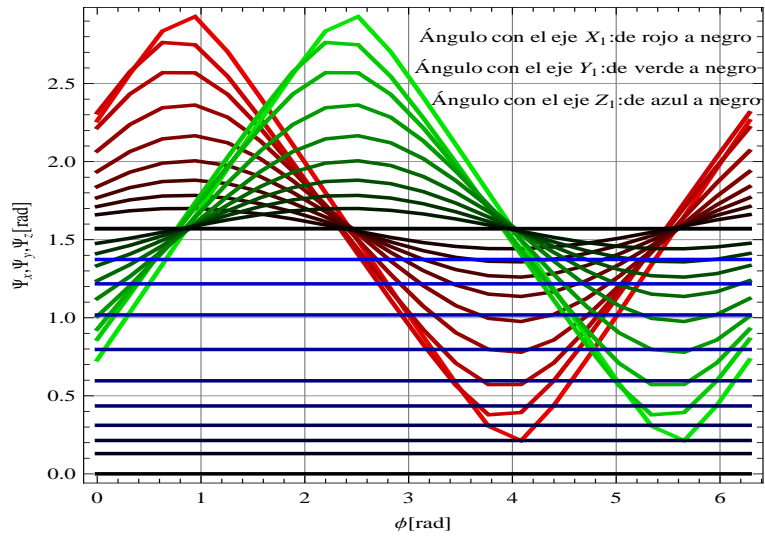


Figura 4.23: Plano horizontal: El Ángulo ( $\Phi$ ) vs Ángulos de orientación ( $\Psi_x, \Psi_y, \Psi_z$ )

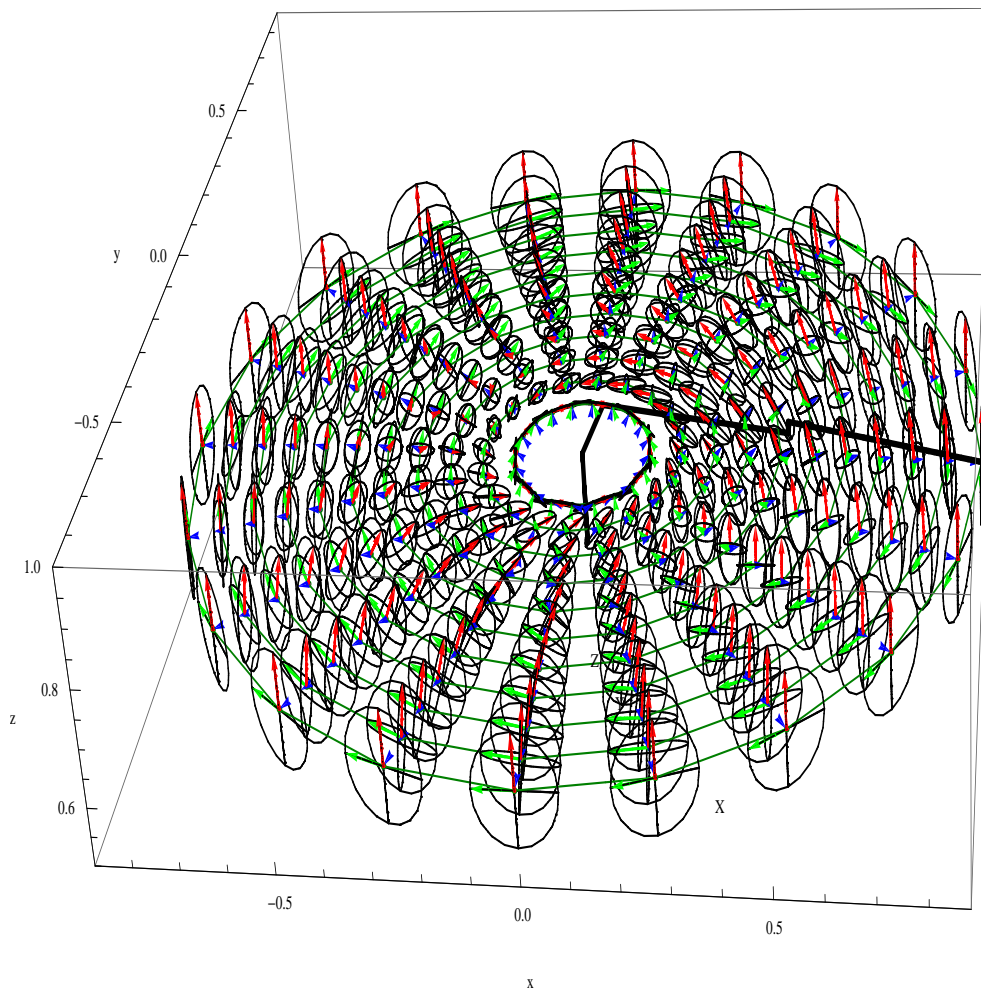


Figura 4.24: Plano horizontal: Elipsoides de velocidad lineal sobre el espacio de trabajo

# MANIPULABILIDAD DINÁMICA EN ROBOTS SERIALES

## 5.1. Introducción

De forma equivalente a la cinemática, en la dinámica de los sistemas mecánicos de los robots manipuladores, algunos autores han introducido conceptos matemáticos que permiten diseñar o medir el desempeño dinámico de las arquitecturas mecánicas.

Asada [35] introduce el concepto de **Elipsoide Generalizada de Inercia** (GIE) indica que representa las características del manipulador en su conjunto. Indica que se puede entender el efecto inercial y la no linealidad de los movimientos de los elementos con múltiples grados de libertad simplemente investigando la configuración de la GIE. Esto lo aplica para el diseño de las estructuras mecánicas, para determinar las dimensiones óptimas del brazo y la distribución de los centros de masa, a través de la evaluación y representación gráfica de la dinámica del brazo. Yoshikawa [34] propone el concepto de **medida de la manipulabilidad dinámica** como una medida de la habilidad de manipular la posición y orientación del OT. Esta medida es definida sobre la base de la relación entre las fuerzas generalizadas en las juntas y la aceleración en el OT.

Ma y Ángeles [33] introducen el concepto de **Índice de Condicionamiento Dinámico**, por sus siglas en inglés como DCI, el cual lo define como la diferencia en mínimos cuadrados entre la Matriz Generalizada de Inercia (MGI) y una Matriz Isotrópica (MI), este índice mide el acoplamiento dinámico y la estabilidad numérica de la MGI correspondiente al modelo dinámico del manipulador. La reducción de este índice debilita el acoplamiento dinámico mientras que incrementa la estabilidad del modelo dinámico, el cual produce un mejoramiento del desempeño del robot para el control y simulación bajo condiciones dinámicas. Para el caso cuando el DCI es igual a cero, la MGI asociada está perfectamente condicionada, adicionalmente los torques involucrados están completamente desacoplados. Y a tal situación lo nombra **isotropía dinámica**. Aplica este concepto para la planeación de trayectorias óptimas en un manipulador serial de 2GdL.

Chiacchio et al. [32] estudian la **influencia de la gravedad sobre las elipsoides de manipulabilidad dinámica** en robots seriales. Lo que tratan de demostrar es que cuando las fuerzas gravitacionales son propiamente introducidas en la determinación de la elipsoide, estas no causan una compresión en el volumen de dicha elipsoide, pero justamente producen una traslación de la elipsoide la cual en general ocurre a lo largo del espacio de tarea. La traslación de la elipsoide implica que las magnitudes y direcciones de los vectores de aceleración máximo y mínimo cambian y no coinciden con los ejes principales (vectores propios) de la elipsoide. Esto puede reconocerse dado que el manipulador puede acelerar más fácilmente hacia abajo que hacia arriba. De las restricciones cinemáticas impuestas por la estructura del manipulador sobre sus componentes inerciales, el sistema no se desarrolla isotrópicamente. Indica que el efecto de la gravedad es una traslación pura de la elipsoide mientras cambia la mínima y máxima aceleración. La presencia de una carga produce el mayor efecto para reducir el tamaño de la elipsoide y cambiar la orientación de sus ejes.



Los objetivos que se persiguen en este capítulo son: 1). Utilizar el concepto de índice de condicionamiento dinámico para obtener las posiciones con mayor y menor DCI, que implica posiciones con mayor y menor momento de inercia de masa, así como la determinación de este concepto sobre toda el área de trabajo. 2). Determinar elipses de manipulabilidad dinámica para obtener las direcciones en el OT que producen mayor y menor aceleración lineal, así como generar un mapa de dichas aceleraciones en el área de trabajo de dicho manipulador. 3). Determinar y generar un mapa de demanda de torque debido a las fuerzas gravitacionales en las juntas del manipulador con la finalidad de visualizar las regiones de mayor y menor demanda de torque bajo éstas condiciones.

## 5.2. La matriz generalizada de inercia: 2GdL

De la ecuación de torque, 3.14, se toma la matriz generalizada de inercia, la cual corresponde a

$$\mathbf{I}_g = \begin{bmatrix} \frac{1}{3}m_1l_1^2 + m_2l_1^2 + \frac{1}{3}m_2l_2^2 + m_2l_1l_2c\theta_2 & \frac{1}{3}m_2l_2^2 + \frac{1}{2}m_2l_1l_2c\theta_2 \\ \frac{1}{3}m_2l_2^2 + \frac{1}{2}m_2l_1l_2c\theta_2 & \frac{1}{3}m_2l_2^2 \end{bmatrix} \quad (5.1)$$

la cual es simétrica y definida positiva. El determinante de dicha matriz se presenta en la ec. 5.2, y en la figura 5.1 se muestra la gráfica correspondiente a dicha ecuación

$$w_{I_g}(\theta_2) = \frac{1}{36}l_1^2l_2^2m_2(4m_1 + 3m_2(4 - 3(c\theta_2)^2)) \quad (5.2)$$

observándose que cuando la variable independiente  $\theta_2$  toma los valores de  $0, \pi, 2\pi$  la función  $w_{I_g}(\theta_2)$  toma los valores mínimos, y cuando  $\theta_2$  toma los valores de  $\pi/2, 3\pi/2$  la función  $w_{I_g}(\theta_2)$  toma los valores máximos. Sin embargo, estos puntos extremos no indican de forma clara su relación con las posiciones con mayor y menor momento de inercia de masa.

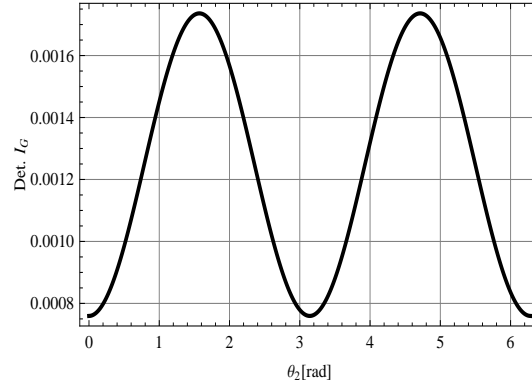


Figura 5.1: Determinante de la matriz generalizada de inercia

Con respecto a lo definido por Ma y Angeles [33], el índice de condicionamiento dinámico es

$$\mu = \frac{1}{2} \mathbf{e}_d^T \mathbf{W}_d \mathbf{e}_d \quad (5.3)$$

donde  $\mathbf{W}_d \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es la matriz diagonal de pesos y  $\mathbf{1} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es la matriz identidad,  $\mathbf{e}_d$  es un vector de dimensión  $n(n+1)/2$  formado a partir de las componentes triangulares superiores de la matriz de error  $\mathbf{E}_d(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ :

$$\mathbf{E}_d(\mathbf{q}) = \mathbf{I}(\mathbf{q}) - \mathbf{1}\sigma_d \quad (5.4)$$

donde  $\sigma_d$  es un escalar definido tal que la norma de la matriz de error  $\mathbf{E}_d$  es un mínimo para una  $\mathbf{q}$  fija. Así

$$\sigma_d = \frac{1}{n} \text{tr}[\mathbf{I}(\mathbf{q})] \quad (5.5)$$

donde  $tr[\cdot]$  denota la traza de la matriz. El vector  $\mathbf{e}_d$  consiste de  $n(n+1)/2$  componentes, los cuales están colocados como

$$\mathbf{e}_d \equiv \begin{pmatrix} I_{11} - \sigma_d \\ \vdots \\ I_{nn} - \sigma_d \\ I_{12} \\ \vdots \\ I_{1n} \\ I_{23} \\ \vdots \\ I_{n-1,n} \end{pmatrix} \quad (5.6)$$

donde  $I_{ij}$  denota la (i,j)ésima entrada de la matriz  $\mathbf{I}(\mathbf{q})$ .

Para el caso del manipulador de 2GdL el escalar  $\sigma_d$  se forma con los elementos de la matriz correspondiente a la ec. 5.1, esto es

$$\sigma_d = \frac{1}{2} (I_{11} + I_{22}) = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{3} l_1^2 m_1 + \frac{1}{3} l_2^2 m_2 + m_2 \left( l_1^2 + \frac{1}{3} l_2^2 + l_1 l_2 c\theta_2 \right) \right), \quad (5.7)$$

y el vector  $\mathbf{e}_d$  es formado también con los elementos de la matriz correspondiente a la ec. 5.1,

$$\mathbf{e}_d \equiv \begin{pmatrix} \frac{1}{6} l_1 (3c\theta_2 l_2 m_2 + l_1 (m_1 + 3m_2)) \\ -\frac{1}{6} l_1 (3c\theta_2 l_2 m_2 + l_1 (m_1 + 3m_2)) \\ \frac{1}{3} m_2 l_2^2 + \frac{1}{2} m_2 l_1 l_2 c\theta_2 \end{pmatrix}, \quad (5.8)$$

definiendo a la matriz diagonal de pesos como

$$\mathbf{W}_d = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (5.9)$$

Por lo que el DCI para el manipulador serial resulta,

$$\mu = \frac{1}{72} \left( l_2^2 (3c\theta_2 l_1 + 2l_2)^2 m_2^2 + 2l_1^2 (l_1 m_1 + 3m_2 (l_1 + c\theta_2 l_2))^2 \right). \quad (5.10)$$

Tomando las masas  $m_1 = m_2 = 1 \text{ kg}$  y las longitudes de los eslabones previamente definidas como  $l_1 = l_2 = 0.25 \text{ m}$ , y realizando el proceso de optimación para obtener los máximos y mínimos de la función correspondiente a la ec. 5.10,

$$\mu_{max} = \max_{\theta_2} \{\mu\}; \theta_2 \in [0, 2\pi)$$

$$\mu_{min} = \min_{\theta_2} \{\mu\}; \theta_2 \in [0, 2\pi)$$

resulta que  $\mu_{max} = 0.00667318$  en  $\theta_2 = 0$  y  $\mu_{min} = 0.00016276$  en  $\theta_2 = \pi$ . En la figura 5.2 se muestran las posiciones con máximo y mínimo DCI, los cuales corresponden efectivamente a las posiciones con máximo y mínimo momento de inercia de masa del sistema sobre toda el área de trabajo.

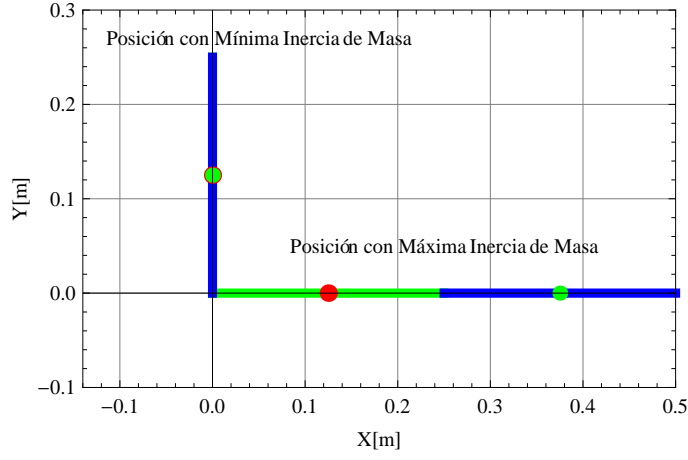


Figura 5.2: Máximo y mínimo momento de inercia de masa

### 5.3. Medida de la manipulabilidad dinámica

El concepto de medida de la manipulabilidad dinámica en robots es propuesto por Yoshikawa[34] como una medida cuantitativa de la habilidad de manipular la posición y orientación del OT, el cual toma en consideración la dinámica del sistema. Esta medida es definida sobre la base de la relación existente entre la fuerza generalizada en las juntas y la aceleración en el OT.

De la estructura de la ec. 3.83

$$\mathbf{f}^* = \mathbf{I}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{b}(\mathbf{q}) \quad (5.11)$$

donde  $\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^n$  son la posición, velocidad y aceleración en las juntas articulares respectivamente,  $\mathbf{I}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$  es la matriz generalizada de inercia,  $\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$  es la matriz de Coriolis y fuerza centrífuga,  $\mathbf{b}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^n$  es el vector de torque debido a las fuerzas gravitacionales y  $\mathbf{f}^* \in \mathbb{R}^n$  es la fuerza generalizada en las juntas.

Como ya se ha visto, la relación cinemática de velocidad en el espacio m-dimensional en el OT y el espacio n-dimensional en las juntas articulares es dado como

$$\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{J}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} \quad (5.12)$$

donde  $\dot{\mathbf{u}} \in \mathbb{R}^m$  es la velocidad en el OT,  $\dot{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^n$  y  $\mathbf{J}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$  es la matriz Jacobiana. De igual forma, se ha visto que la relación cinemática de aceleración entre el OT y las juntas articulares es descrita por

$$\ddot{\mathbf{u}} = \mathbf{J}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{J}}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} \quad (5.13)$$

donde  $\ddot{\mathbf{u}} \in \mathbb{R}^m$  es la aceleración en el OT,  $\dot{\mathbf{J}}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$  es la derivada con respecto al tiempo de la matriz Jacobiana.

Introduciendo nuevas funciones vectoriales  $\tilde{\mathbf{f}} \in \mathbb{R}^n$  y  $\tilde{\mathbf{u}} \in \mathbb{R}^m$  tal que

$$\tilde{\mathbf{f}} = \mathbf{f}^* - \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} - \mathbf{b}(\mathbf{q}) \quad (5.14)$$

$$\tilde{\mathbf{u}} = \ddot{\mathbf{u}} - \dot{\mathbf{J}}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} \quad (5.15)$$

de las ecuaciones 5.11, 5.12, 5.13 y 5.14, se tiene

$$\tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{J}(\mathbf{q})\mathbf{I}(\mathbf{q})^{-1}\tilde{\mathbf{f}}$$

de aquí en adelante  $\mathbf{J}(\mathbf{q})$  e  $\mathbf{I}(\mathbf{q})$  serán escritas como  $\mathbf{J}$  e  $\mathbf{I}$  respectivamente. Por tanto

$$\underset{\sim}{\ddot{\mathbf{u}}} = \mathbf{J}\mathbf{I}^{-1}\underset{\sim}{\mathbf{f}} \quad (5.16)$$

de aquí que

$$\underset{\sim}{\mathbf{f}} = \mathbf{I}\mathbf{J}^{-1}\underset{\sim}{\ddot{\mathbf{u}}}. \quad (5.17)$$

Dado que la idea básica que se tiene aquí es cuantificar el grado de arbitrariedad del cambio de aceleración  $\underset{\sim}{\ddot{\mathbf{u}}}$  bajo alguna restricción sobre el torque en las juntas sobre la base de la ec. 5.17 y tomar esta cantidad como una medida de la manipulabilidad del brazo. Para obtener las transformaciones características se normaliza el torque de las n-juntas a una unidad y se determinan las aceleraciones en el OT del manipulador, es decir

$$\|\underset{\sim}{\mathbf{f}}\| = 1 \quad (5.18)$$

sustituyendo la ecuación 5.17 en 5.18

$$\begin{aligned} (\underset{\sim}{\mathbf{f}}^T \underset{\sim}{\mathbf{f}})^{1/2} = 1 &\Rightarrow (\mathbf{I}\mathbf{J}^{-1}\underset{\sim}{\ddot{\mathbf{u}}})^T (\mathbf{I}\mathbf{J}^{-1}\underset{\sim}{\ddot{\mathbf{u}}}) = 1 \\ \underset{\sim}{\ddot{\mathbf{u}}}^T \underbrace{(\mathbf{I}\mathbf{J}^{-1})^T \mathbf{I}\mathbf{J}^{-1}}_i \underset{\sim}{\ddot{\mathbf{u}}} &= 1 \end{aligned} \quad (5.19)$$

la ecuación 5.19 representa una elipsoide en  $\mathbb{R}^m$ , el término “i” de la ecuación 5.19 es una matriz simétrica definida positiva y se le donotará como  $\mathbf{B}$ . Yoshikawa [34] lo llama **elipsoide de manipulabilidad dinámica**, comenta que puede ser un buen medio para el análisis, diseño y control de robots manipuladores.

Las elipses de aceleración se pueden obtener a través de a) Procedimiento Numérico (PNA), y b) Procedimiento Vectores Propios (PVA).

El procedimiento numérico es una forma simple pero con mucho cálculo para obtener las transformaciones características de las aceleraciones en el OT (para el caso del de 2GdL) consiste en:

a1). La condición dada por la ec. 5.18 implica que el círculo unitario de torques en las juntas es dado paramétricamente

$$\underset{\sim}{\mathbf{f}}(\phi) = \begin{pmatrix} f_1(\phi) \\ f_2(\phi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \phi \\ \sin \phi \end{pmatrix}, \phi \in [0, 2\pi]$$

donde  $\phi$  es dividido en N subintervalos tal que

$$[0, 2\pi] = \left[0, \frac{a}{N}\right] \cup \left(\frac{a}{N}, \frac{2a}{N}\right] \cup \dots \cup \left(\frac{(N-1)a}{N}, a\right]; a = 2\pi$$

Para  $\phi_j = \left(\frac{(j-1)a}{N}\right)$  es calculado

$$\underset{\sim}{\mathbf{f}}_j = \underset{\sim}{\mathbf{f}}(\phi_j), j = 1, 2, \dots, N, N+1 \quad (5.20)$$

a2). La aceleración del OT es calculado usando la ecuación (5.16) y (5.20)

$$\underset{\sim}{\ddot{\mathbf{u}}}(\underset{\sim}{\mathbf{f}}_j) = \mathbf{J}\mathbf{I}^{-1}\underset{\sim}{\mathbf{f}}_j, j = 1, 2, \dots, N, N+1 \quad (5.21)$$

a3). Determinar la norma máxima y mínima de las aceleraciones en el OT

$$\ddot{u}_{max} = \max_{\underset{\sim}{\mathbf{f}}_j} \left\{ \|\underset{\sim}{\ddot{\mathbf{u}}}(\underset{\sim}{\mathbf{f}}_j)\| \right\}; j = 1, 2, \dots, N, N+1$$

$$\ddot{u}_{\min} = \min_{\tilde{\mathbf{f}}_j} \left\{ \|\ddot{\mathbf{u}}(\tilde{\mathbf{f}}_j)\| \right\}; j = 1, 2, \dots, N, N + 1$$

donde  $\ddot{u}_{\max}$ : es interpretado como la longitud del semieje mayor de la elipse y  $\ddot{u}_{\min}$ : es la longitud del semieje menor,  $\tilde{\mathbf{f}}_j$ : es el vector de diseño correspondiente al torque en las juntas del manipulator.

a4). Los vectores con mayor ( $\ddot{\mathbf{u}}_{max}$ ) y menor norma ( $\ddot{\mathbf{u}}_{min}$ ) corresponden a la dirección de los ejes principales.

a5). Dados  $\ddot{u}_{\max}$  y  $\ddot{u}_{\min}$ ,

$$\kappa_r^a = \frac{\ddot{u}_{\min}}{\ddot{u}_{\max}}$$

donde  $\kappa_r^a$  es interpretado como el recíproco del número de condición de la matriz  $\mathbf{B}$  calculado con norma-2.

a6). El ángulo de orientación entre el vector correspondiente al semieje mayor y el vector  $\mathbf{x}_1 = (1, 0)^T$  es dado por

$$\Psi_a = \arccos \left( \frac{\ddot{\mathbf{u}}_{\max}^T \mathbf{x}_1}{\|\ddot{\mathbf{u}}_{\max}\|} \right) \quad (5.22)$$

El Procedimiento Vectores Propios (VPA) es la forma más directa para establecer las elipses de aceleración en el OT correspondiente a las transformaciones características (manipulador:  $GdL \leq 2$ ).

b1). Dada la matriz  $\mathbf{B}$  se determinan sus valores propios, es decir,  $\lambda_1^a$  y  $\lambda_2^a$ ;  $\lambda_1^a \geq \lambda_2^a$ ;  $\lambda_1^a, \lambda_2^a \in \mathbb{R}^+$

b2). Dados  $\lambda_1^a$  y  $\lambda_2^a$ , entonces las longitudes de los semiejes de las elipses buscadas son dadas por

$$s_a^a = (\lambda_2^a)^{-1/2}; s_b^a = (\lambda_1^a)^{-1/2} \quad (5.23)$$

b3). Los vectores propios de  $\mathbf{B}$  son determinados resolviendo la ecuación 5.24

$$(\mathbf{B} - \lambda_i^a \mathbf{I}_d) \mathbf{v}_i^a = \mathbf{0}, i = 1, 2. \quad (5.24)$$

donde  $\hat{\mathbf{v}}_1^a = \hat{\mathbf{s}}_b^a$  y  $\hat{\mathbf{v}}_2^a = \hat{\mathbf{s}}_a^a$  y son los vectores unitarios de  $\mathbf{v}_1^a$  y  $\mathbf{v}_2^a$  respectivamente, que corresponden a la direcciones de los semiejes menor y mayor.

b4). El número de condición de la matriz  $\mathbf{B}$  es definido como [29],[30]:

$$\kappa_a = \|\mathbf{B}^{-1}\| \|\mathbf{B}\|; \kappa_a \in [1, \infty) \quad (5.25)$$

donde  $\|\cdot\|$  representa la norma de la matriz, para nuestros propósitos, puede ser determinado con la norma-2 o con la norma de Frobenius. Con la finalidad de obtener un rango de (0,1] se determina el recíproco del número de condición,  $\kappa_r^a = 1/\kappa_a$ ;  $\kappa_r^a \in (0, 1]$ .

b5). Dado el vector propio correspondiente a la dirección del semieje mayor,  $\hat{\mathbf{s}}_a^a$ , los ángulos del semieje mayor  $\Psi$  con los ejes  $\mathbf{x}_1 = (1, 0)^T, \mathbf{y}_1 = (0, 1)^T$  son dados por

$$\Psi_x^a = \arccos((\hat{\mathbf{s}}_a^a)^T \mathbf{x}_1); \Psi_y^a = \arccos((\hat{\mathbf{s}}_a^a)^T \mathbf{y}_1) \quad (5.26)$$

b6). Las elipses de aceleración lineal son construidas con las ecuaciones 5.23, los vectores propios unitarios y la ec. paramétrica de la elipse.

Con la finalidad de comparar la formación de las elipses con ambos procedimientos se escoge un punto  $\mathbf{p} = (x, y)^T = (0.25, 0.0)^T$ . La arquitectura mecánica es la de 2GdL en la configuración codo abajo. Las longitudes y las masas de los eslabones han sido previamente definidos.

En la tabla 5.1 se muestran los vectores de los semiejes mayor y menor correspondientes a las aceleraciones en el OT obtenidas con ambos procedimientos.

Tabla 5.1: Valores máx. y mín. de aceleración en el OT

	Procedimiento PNA	Procedimiento VPA
$\ddot{\mathbf{u}}_{\text{máx}} = (\ddot{u}_x, \ddot{u}_y)^T$	(-1.40789, -2.72530)	(-1.404222,- 2.727189)
$\mathbf{f}_{\sim\text{máx}}^{\text{opt}} = (\mathbf{f}_{\sim 1}, \mathbf{f}_{\sim 2})^T$	(-0.998091,0.0617625)	(-0.998112, 0.0614147)
$\ddot{\mathbf{u}}_{\text{mín}} = (\ddot{u}_x, \ddot{u}_y)^T$	(-10.515819,5.412213)	(-10.514864, 5.414073)
$\mathbf{f}_{\sim\text{mín}}^{\text{opt}} = (\mathbf{f}_{\sim 1}, \mathbf{f}_{\sim 2})^T$	(0.0607344,0.998154)	(0.0614147,0.998112)

En la figura 5.3 se muestra el círculo unitario de torques correspondientes a las juntas del manipulador, donde  $\mathbf{f}_{\sim\text{max}}^{\text{opt}}$  y  $\mathbf{f}_{\sim\text{min}}^{\text{opt}}$  son los vectores de diseño del torque en las juntas del manipulador que producen las máximas y mínimas aceleraciones en el OT respectivamente.

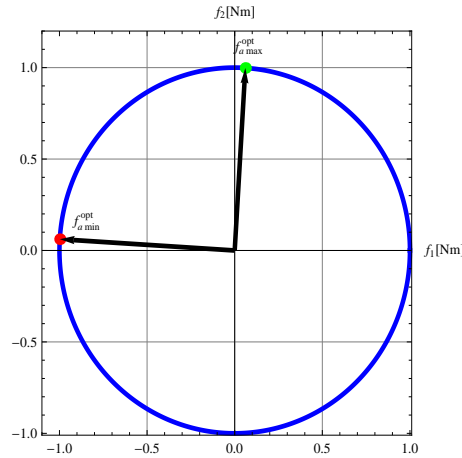


Figura 5.3: 2GdL: Círculo unitario de torques

En la figura 5.4 se muestran las dos elipses de aceleración con  $\ddot{\mathbf{u}}_{\text{max}}$  y  $\ddot{\mathbf{u}}_{\text{min}}$  calculados con ambos procedimientos. El procedimiento PVA tiene la ventaja que los semiejes principales (mayor y menor) se obtienen de forma directa y con precisión; para el caso del procedimiento PNA, para alcanzar un error relativo de  $RE \leq 1.88 \times 10^{-5}$  se realizaron 3050 iteraciones. Esto es una desventaja muy importante en dicho procedimiento, ya que se requieren muchos cálculos para obtener buena precisión.

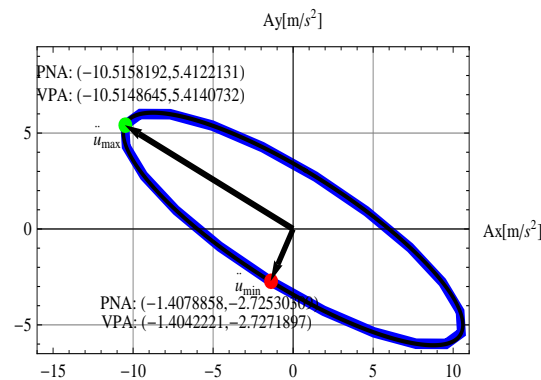


Figura 5.4: 2GdL: Aceleración en el OT con los procedimientos PNA y VPA

### 5.3.1. Determinación y análisis de las elipses de aceleración lineal: Manipulador de 2GdL

El objetivo es la construcción de las elipses de aceleración lineal en el OT del manipulador en el espacio de trabajo y el análisis de los elementos principales de éstas tanto en la configuración codo abajo como codo arriba. Se utiliza el procedimiento VPA.

#### A. Longitud de semiejes

En la figura 5.5 se muestran las posiciones del manipulador en la configuración codo abajo (cab) conforme el OT toma posiciones a lo largo de la línea recta paralela al eje  $x_1$ . Asimismo, se muestran las elipses de aceleración del OT; en la tabla 5.2 se muestran las longitudes de los semiejes mayor( $s_a^{cab}$ ) y menor( $s_b^{cab}$ ).

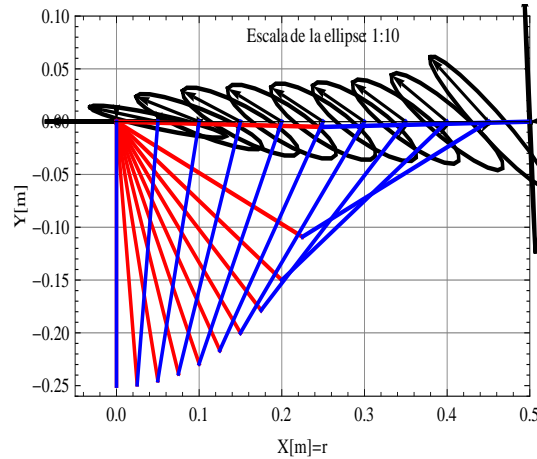


Figura 5.5: 2GdL: Elipses de aceleración en el OT sobre línea recta horizontal

Tabla 5.2: 2 GdL: Elementos de las elipses de aceleración lineal

$r_i[m]$	$s_a^{cab}$	$s_b^{cab}$	$a_\psi^{cab}[rad]$	$a_\psi^{car}[rad]$
0.00010	14.1364	0.0023283	3.14125	0.00034
0.05008	13.9042	1.12222	2.97649	0.16510
0.10006	13.3275	2.02147	2.84152	0.30007
0.15004	12.6571	2.61848	2.74919	0.39240
0.20002	12.1131	2.94517	2.69517	0.44643
0.25000	11.8269	3.06748	2.66610	0.47549
0.29998	11.8744	3.04476	2.64600	0.49559
0.34996	12.3388	2.91770	2.61851	0.52308
0.39994	13.4020	2.69766	2.56292	0.57867
0.44992	15.5796	2.31330	2.42943	0.71216
0.49990	20.8379	0.15759	1.62533	1.51626

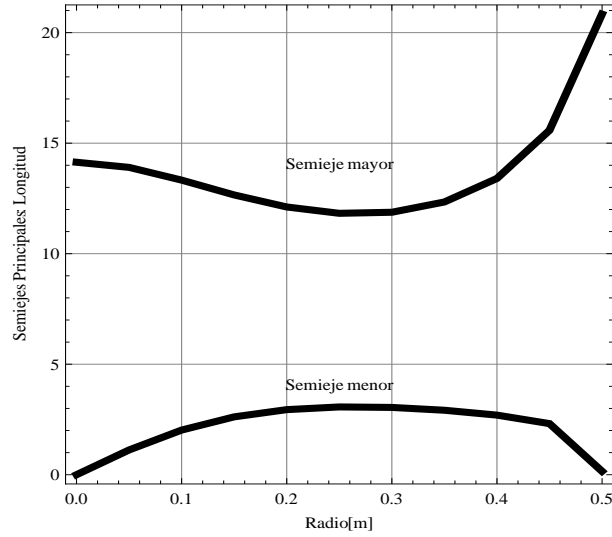


Figura 5.6: 2GdL: Radio ( $r$ ) vs Longitud del semieje mayor

En la figura 5.6, se muestra la evolución de las longitudes de los semiejes mayor conforme incrementa el radio  $r$  de  $r_0$  a  $r_f$ . Para determinar la relación que guardan las longitudes de los semiejes principales sobre toda el área de trabajo se determina el recíproco del número de condición de la matriz  $\mathbf{B}$ ,  $\kappa_r^a$ . El número de condición de dicha matriz se determina con la norma-2, por lo que el recíproco de ésta se determina como

$$\kappa_r^a = \sigma_2^a / \sigma_1^a, \kappa_r^a \in (0, 1] \quad (5.27)$$

donde  $\sigma_2^a$  y  $\sigma_1^a$  son los valores singulares de la matriz  $\mathbf{B}$ , los cuales se determinan como  $\sigma_1^a = (\lambda_1^a(\theta_2))^{1/2}$  y  $\sigma_2^a = (\lambda_2^a(\theta_2))^{1/2}$ .

La ecuación 5.27 se gráfica en círculos concéntricos,  $\mathbf{p}_{ot} = \mathbf{p}(r_i, \Phi)$ , en el espacio de trabajo. El radio ( $r_i$ ) se muestra en la tabla 5.2 y  $\Phi \in [0, 2\pi]$ . Los resultados pueden observarse en la figura 5.7. El recíproco del número de condición,  $k_r^a$ , se conserva sobre cada círculo, esto implica que las magnitudes de los semiejes mayores y menores se conservan sobre cada círculo. Además, se realiza el cálculo del DCI para toda el área trabajo sobre dichos círculos concéntricos y la graficación se muestra en la figura 5.8.

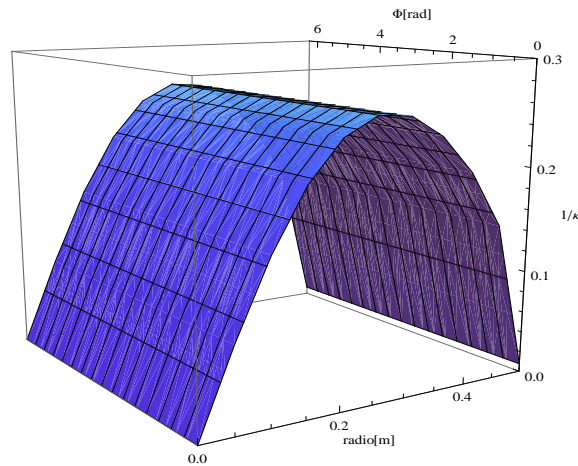


Figura 5.7: 2GdL:Radio,  $r \in [r_0, r_f]$  vs Ángulo,  $\Phi \in [0, 2\pi]$  vs  $1/\kappa^a$



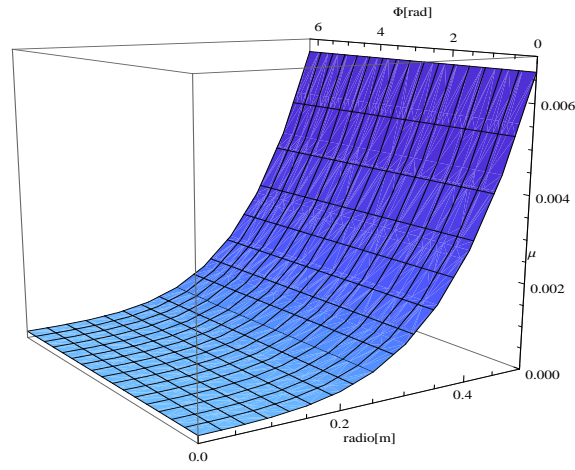


Figura 5.8: 2GdL: Radio,  $r \in [r_0, r_f]$  vs Ángulo,  $\Phi \in [0, 2\pi]$  vs  $\mu$

### B. Orientación del semieje mayor

Sobre la línea recta horizontal fueron determinados con el procedimiento VPA, el ángulo de orientación del semieje mayor y el eje horizontal  $\mathbf{x}_1$ . Los datos fueron calculados para la configuración codo abajo y se pueden observar en la cuarta columna de la tabla 5.2. En la figura 5.9 se muestra en líneas de color rojo la evolución del ángulo de orientación  ${}^a\psi^{cab}$  versus el radio horizontal,  $r \in [r_0, r_f]$ .

Para el caso de la configuración codo arriba el ángulo de orientación del semieje mayor  ${}^a\psi^{car}$  se muestra en la quinta columna de la tabla 5.2. De estos datos se determina que

$${}^a\psi_i^{car} = \pi - {}^a\psi_i^{cab}; i = 0, 1, \dots, n \quad (5.28)$$

donde  $n=10$ , número de radios.

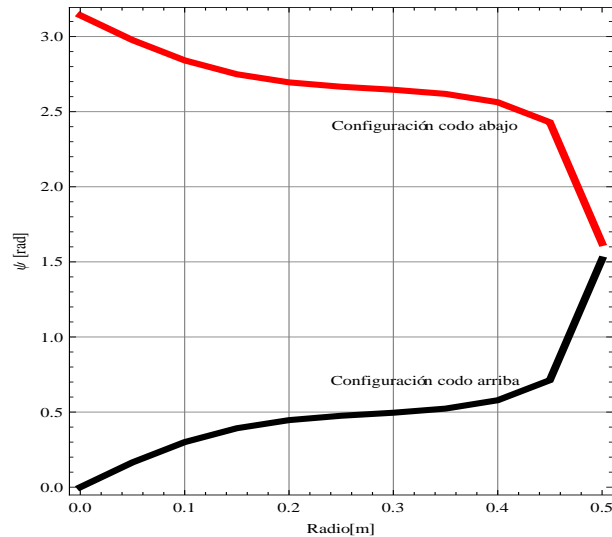


Figura 5.9: 2GdL:Radio,  $r \in [r_0, r_f]$  vs Ángulo de orientación del semieje mayor ( $\psi$ )

### C. Orientación del semieje mayor en el espacio de trabajo y elipses de aceleración sobre el área de trabajo

Con el mismo procedimiento (PVA) se determina el ángulo de orientación del semieje mayor con respecto al eje  $\mathbf{x}_1$  en el espacio de trabajo en la configuración codo abajo. Este ángulo  ${}^a\Psi_{ij}^{cab}$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$  y  $j = 0, 1, \dots, dc$  (discretización del perímetro del círculo), se muestran en la tabla 5.3 determinados en círculos concéntricos con los radios  $r_i$  (tabla 5.2) y el ángulo  $\Phi \in [0, 2\pi]$ .

Tabla 5.3: Orientación del semieje mayor de la elipse de aceleración

$\Phi[\text{rad}]$	${}^a\Psi_{0j}^{cab}[\text{rad}]$	...	${}^a\Psi_{10j}^{cab}[\text{rad}]$
0	3.1413	...	1.6253
$\pi/10$	3.4554	...	1.9395
$\pi/5$	3.7696	...	2.2537
$3\pi/10$	4.0837	...	2.5678
$2\pi/5$	4.3979	...	2.8820
$\pi/2$	4.7121	...	3.1961
$3\pi/5$	5.0262	...	3.5103
$7\pi/10$	5.3404	...	3.8245
$4\pi/5$	5.6545	...	4.1386
$9\pi/10$	5.9687	...	4.4528
$\pi$	6.2828	...	4.7669
$11\pi/10$	6.5970	...	5.0811
$6\pi/5$	6.9112	...	5.3952
$13\pi/10$	7.2253	...	5.7094
$7\pi/5$	7.5395	...	6.0236
$15\pi/10$	7.8536	...	6.3377
$8\pi/5$	8.1678	...	6.6519
$17\pi/10$	8.4820	...	6.9660
$9\pi/5$	8.7961	...	7.2802
$19\pi/10$	9.1103	...	7.5944
$2\pi$	9.4244	...	7.9085

En la figura 5.10 se muestra en líneas de color verde a color negro la evolución del ángulo de orientación  ${}^a\Psi_{ij}^{cab}$  del semieje mayor de la elipse de aceleración versus el ángulo  $\Phi$  y en color rojo a negro la evolución de dicho ángulo reorientado. Se puede observar en dicha figura que la evolución de los ángulos reorientados describen líneas rectas.

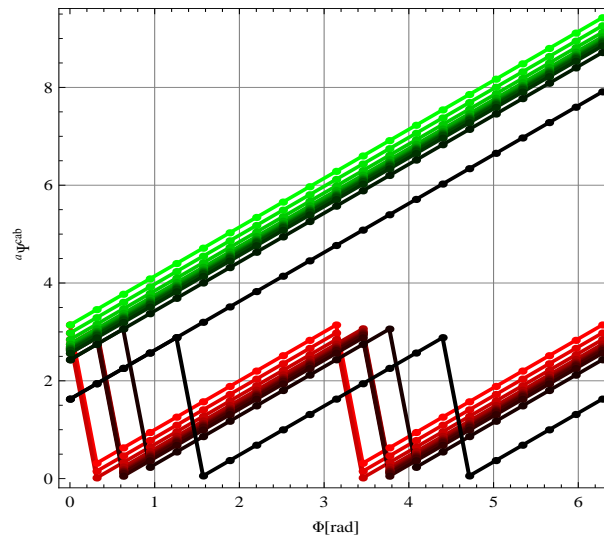


Figura 5.10: 2GdL:El ángulo ( $\Phi$ ) vs Ángulo de orientación ( $\Psi$ )

En la figura 5.11 se muestran las elipses de aceleración lineal del OT que fue obtenido con el procedimiento VPA.

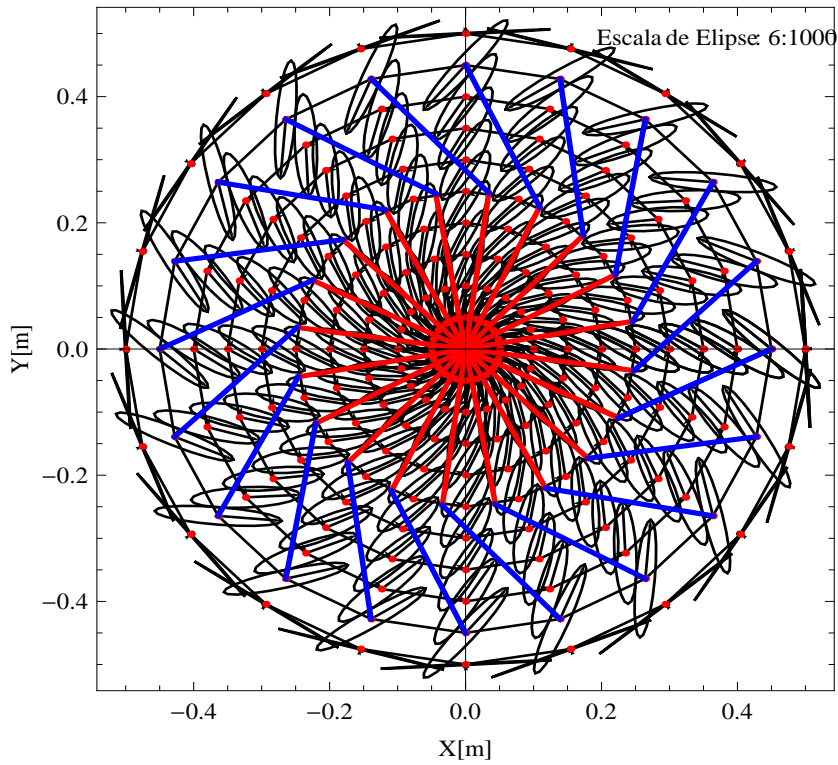


Figura 5.11: 2 GdL: Elipses de aceleración lineal en el espacio de trabajo

### 5.3.2. Análisis estático: Manipulador de 2GdL

Partiendo de las suposiciones del capítulo 3, correspondientes a la ubicación de los centros de masa de los eslabones. Se realiza el análisis estático del manipulador de 2GdL en puntos específicos del espacio de trabajo; este análisis servirá para determinar un mapa de torque estático sobre toda el área de trabajo.

**Caso a).** Considerando la ubicación del manipulador en el espacio de trabajo mostrado en la fig. 5.12, y aplicando las leyes de Newton a los eslabones de dicho manipulador para el caso estático. Del Diagrama de Cuerpo Libre(DCL) del eslabón 2, se tiene

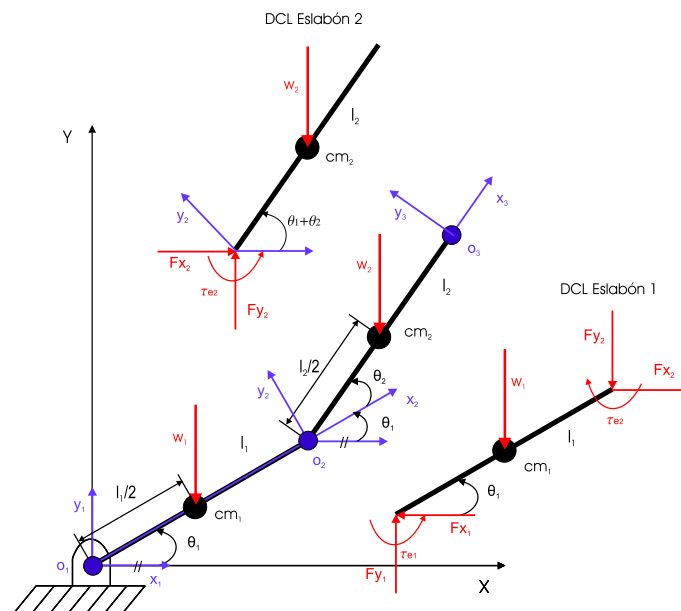


Figura 5.12: 2GdL: Diagrama de cuerpo libre para “caso a)”

$$+ \uparrow \sum F_y = 0; F_{y_2} = W_2 \quad (5.29)$$

$$+ \curvearrowright \sum M_{O_2} = 0; \quad \tau_{e_2} - W_2 \frac{l_2}{2} \cos(\theta_1 + \theta_2) = 0 \\ \Rightarrow \tau_{e_2} = \frac{l_2}{2} W_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \quad (5.30)$$

considerando el DCL del eslabón 1(fig. 5.12),

$$+ \uparrow \sum F_y = 0; F_{y_1} - F_{y_2} - W_1 = 0 \Rightarrow F_{y_1} = W_1 + W_2, \quad (5.31)$$

$$+ \curvearrowright \sum M_{O_1} = 0; \quad \tau_{e_1} - \tau_{e_2} - W_1 \frac{l_1}{2} \cos \theta_1 - F_{y_2} l_1 \cos \theta_1 = 0, \quad (5.32)$$

sustituyendo las ecs. 5.29, 5.30 en la ec. 5.32, se tiene,

$$\tau_{e_1} = \frac{l_1}{2} W_1 \cos \theta_1 + W_2 (l_1 \cos \theta_1 + \frac{l_2}{2} \cos(\theta_1 + \theta_2)) \quad (5.33)$$

**Caso b).** Considerando la ubicación del manipulador en el espacio de trabajo mostrado en la fig. 5.13, y aplicando las leyes de Newton a los eslabones de dicho manipulador. Del DCL del eslabón 2, se tiene

$$+ \uparrow \sum F_y = 0; F_{y_2} = W_2 \quad (5.34)$$

$$+ \curvearrowright \sum M_{O_2} = 0; \quad -\tau_{e_2} - W_2 \frac{l_2}{2} \cos(\pi - (\theta_1 + \theta_2)) = 0 \\ -\tau_{e_2} + W_2 \frac{l_2}{2} \cos(\theta_1 + \theta_2) = 0 \\ \Rightarrow \tau_{e_2} = \frac{l_2}{2} W_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \quad (5.35)$$

considerando el DCL del eslabón 1(fig. 5.13),

$$+ \uparrow \sum F_y = 0; F_{y_1} - F_{y_2} - W_1 = 0 \Rightarrow F_{y_1} = W_1 + W_2 \quad (5.36)$$

$$+ \curvearrowright \sum M_{O_1} = 0; \quad \tau_{e_1} + \tau_{e_2} - W_1 \frac{l_1}{2} \cos \theta_1 - F_{y_2} l_1 \cos \theta_1 = 0 \quad (5.37)$$

sustituyendo las ecs. 5.16, 5.18 en la ec. 5.3, se tiene

$$\tau_{e_1} = \frac{l_1}{2} W_1 \cos \theta_1 + W_2 (l_1 \cos \theta_1 - \frac{l_2}{2} \cos(\theta_1 + \theta_2)). \quad (5.38)$$

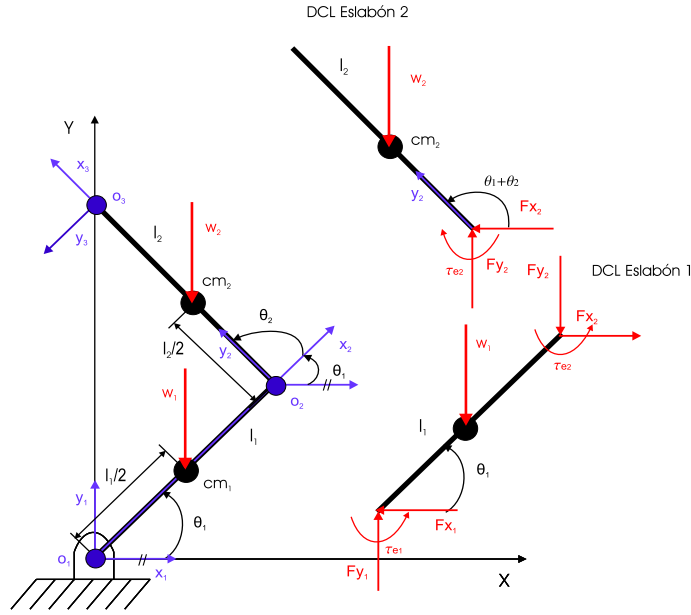


Figura 5.13: 2GdL: Diagrama de cuerpo libre para “caso b)”

De los dos casos analizados, se observa que para determinar el torque estático en las juntas del manipulador sobre toda el área de trabajo, es necesario identificar la ubicación que tienen los eslabones sobre los cuadrantes. Por lo que a continuación se presenta un algoritmo para realizar dichas determinaciones y poder así calcular el torque estático sobre toda el área de trabajo.

**Algoritmo para el cálculo del torque estático sobre el área de trabajo.** Para determinar el torque debido a la fuerza de gravedad ( $\tau_e$ ) sobre cualquier punto  $\mathbf{p}_{ot}$  elemento del área de trabajo ( $A_t$ ) se requiere ubicar los eslabones del manipulador en el cuadrante correspondiente al  $A_t$ , y de esta forma poder aplicar el “caso a)” o “caso b)”. Para realizar dicha ubicación, considere la figura 5.14.

Ubicación del eslabón 1 en los cuadrantes 1 y 4,

$$Si \quad \frac{-\pi}{2} \leq \theta_1 \leq \frac{\pi}{2} \quad o \quad \frac{3\pi}{2} \leq \theta_1 \leq \frac{5\pi}{2}, entonces \quad Compara1 = 114, \quad (5.39)$$

ubicación del eslabón 1 en los cuadrantes 2 y 3,

$$Si \quad \frac{\pi}{2} \leq \theta_1 \leq \frac{3\pi}{2} \quad o \quad \frac{-3\pi}{2} \leq \theta_1 \leq \frac{-\pi}{2}, entonces \quad Compara1 = 123, \quad (5.40)$$

ubicación del eslabón 2 en los cuadrantes 1 y 4

$$Si \quad \frac{-\pi}{2} \leq \Phi \leq \frac{\pi}{2} \quad o \quad \frac{3\pi}{2} \leq \Phi \leq \frac{5\pi}{2}, entonces \quad Compara2 = 214 \quad (5.41)$$

ubicación del eslabón 2 en los cuadrantes 2 y 3

$$Si \quad \frac{\pi}{2} \leq \Phi \leq \frac{3\pi}{2} \quad o \quad \frac{-3\pi}{2} \leq \Phi \leq \frac{-\pi}{2}, entonces \quad Compara2 = 223, \quad (5.42)$$

y para decidir si se aplica “caso a)” o “caso b)”,

$$Si \quad [(Compara1 = 114) \quad y \quad (Compara2 = 214)] \quad o \quad [(Compara1 = 123) \quad y \quad (Compara2 = 223)], \\ entonces \quad “caso a)” \quad sino \quad “caso b)” \quad (5.43)$$

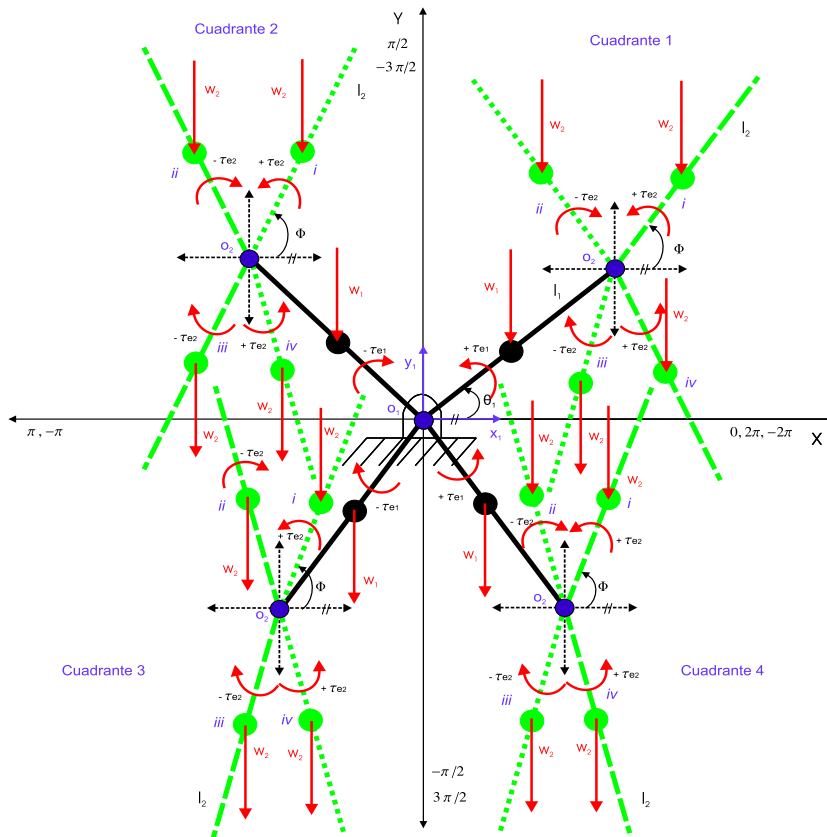


Figura 5.14: 2GdL: El sentido de los torques en las juntas del manipulador sobre los cuatro cuadrantes

En la figura 5.16 se muestra el mapa de torque estático sobre el área de trabajo del manipulador calculado a partir del algoritmo presentado para el cálculo del torque sobre toda el  $A_t$ , donde los puntos  $\mathbf{p}_{ot}(r_i, \Phi)$  son determinados sobre círculos concéntricos con radio  $r_i$  y  $\Phi \in [0, 2\pi]$ , en dicho mapa se representan las magnitudes y signos de los torques estáticos formando rectángulos, de acuerdo a lo definido en la figura 5.15, y en la figura 5.17 se muestran las curvas de torque estático correspondientes a cada una de las juntas del manipulador determinados sobre círculos concéntricos con radio  $r_i$  mostrados en la tabla 5.2, de donde se observa que los puntos dentro del área de trabajo, de mayor demanda de torque en las juntas del sistema, se produce cuando  $\mathbf{p}_{ot} = \mathbf{p}(r_f, 0), \mathbf{p}_{ot} = \mathbf{p}(r_f, \pi)$ , y los puntos del área de trabajo de menor demanda de torque estático son  $\mathbf{p}_{ot} = \mathbf{p}(r_f, \pi/2), \mathbf{p}_{ot} = \mathbf{p}(r_f, 3\pi/2), \mathbf{p}_{ot} = \mathbf{p}(r_0, \pi/2)$  y  $\mathbf{p}_{ot} = \mathbf{p}(r_0, 3\pi/2)$ , que corresponden a puntos de equilibrio estático.

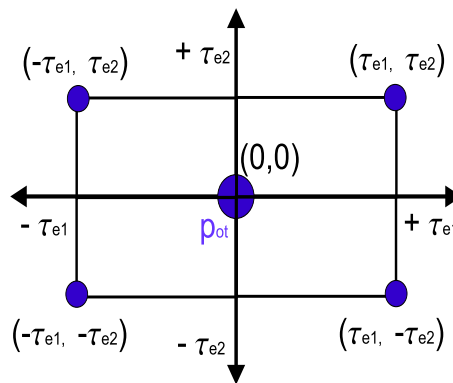


Figura 5.15: Definición de los rectángulos de torque estático en las juntas del manipulador.

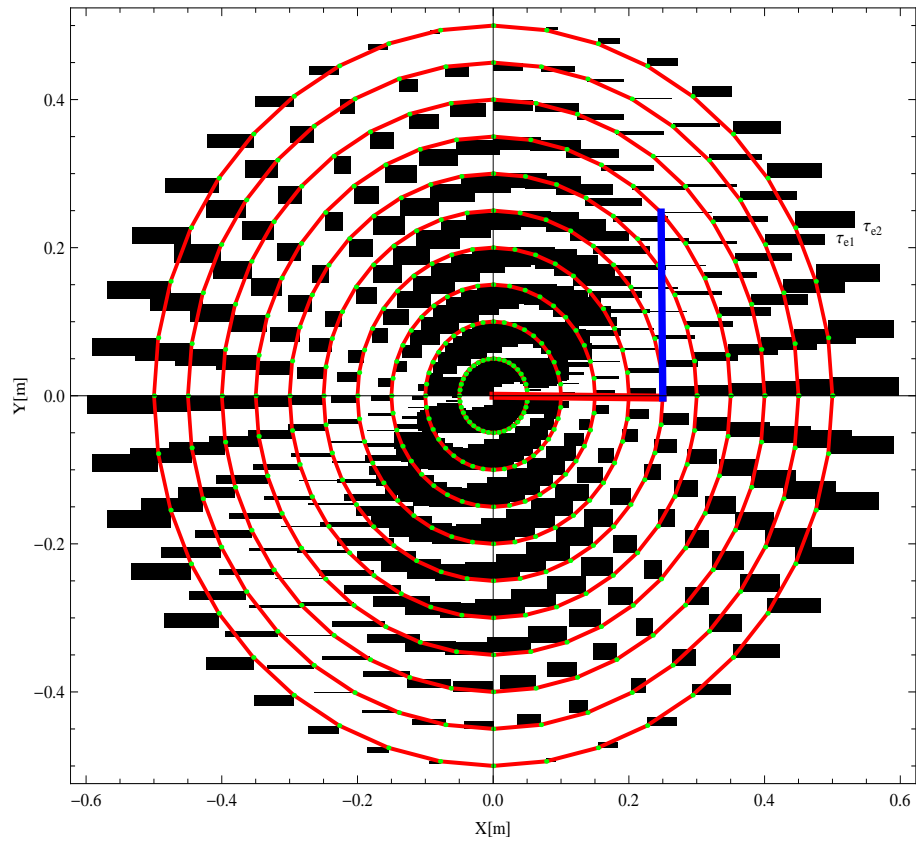


Figura 5.16: Mapa de torque estático en las juntas del manipulador.

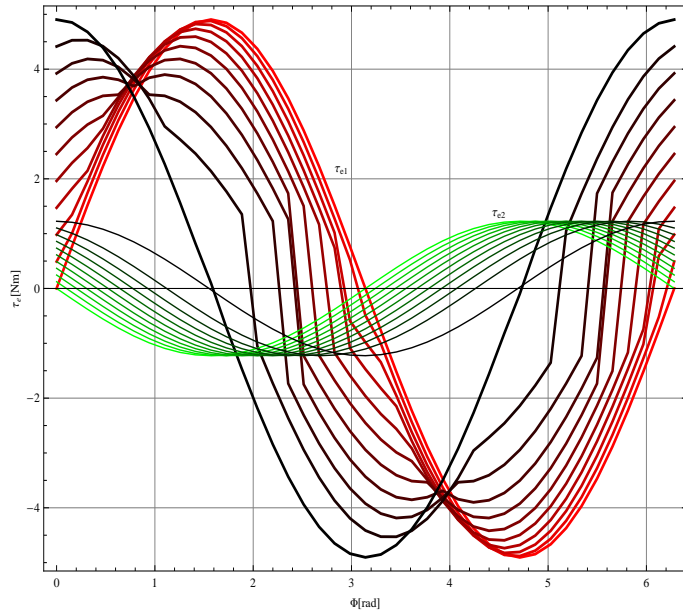


Figura 5.17: Curvas de torque estático en las juntas del manipulador.

# LA ENERGÍA MECÁNICA EN ROBOTS MANIPULADORES SERIALES

## 6.1. Introducción

El objetivo que se persigue en este capítulo, es realizar la determinación de la energía mecánica de los manipuladores casos de estudio con las restricciones impuestas en el capítulo 3, referentes a que en el modelo dinámico la masa de cada uno de los elementos se puede concentrar en un punto llamado centro de masa (cm), las fuerzas de fricción se consideran muy pequeñas de tal forma que se pueden omitir. Asimismo, se persigue el objetivo de analizar la influencia que tienen la velocidad, aceleración, inercia y la fuerza de gravedad en la demanda de la energía mecánica durante el seguimiento de trayectorias.

Se realiza la determinación de la energía mecánica para el manipulador de 2GdL sobre el plano vertical. Se omite la arquitectura del manipulador PUMA dado que se induce un comportamiento semejante ya que tienen la relación uno a uno en las longitudes de los eslabones “k” y “f”, y dado que la arquitectura de este manipulador para las dos juntas más importantes (las dos últimas juntas) con respecto a la demanda de energía, tienen una configuración semejante al manipulador de 2GdL.

Asimismo, es de especial interés analizar la influencia que tiene la velocidad en la demanda de energía. Para ello se toma como referencia lo definido por Gosselin y Angeles[39] como Índice de Condicionamiento Global por sus siglas en inglés CGI, el cual está basado sobre la distribución del número de condición de la matriz Jacobiana sobre todo el espacio de trabajo del manipulador; sobre esta base se propone determinar una *medida promedio del número de condición y su recíproco de la matriz  $\mathbf{A}$  (determinado a partir de la matriz Jacobiana) sobre toda la trayectoria  $\mathbf{T}(t)$ ,  $t \in [0, t_f]$ ,  $t_f$  :tiempo final de recorrido, a dichas medidas se le denota como  $\bar{\kappa}$  y  $\bar{\kappa}_r$ , respectivamente. Así como también se pretende obtener una medida promedio de la norma Euclidiana de la velocidad demandada por el sistema para seguir a cada una de las trayectorias pertenecientes a la misma familia, a dicha medida se le denota como  $\bar{\omega}$ . De igual forma, se propone una medida promedio para la aceleración angular, la cual se le denota como  $\bar{\alpha}$ .*

También se integran los mapas de velocidad y aceleración lineal, y de torque estático generados en el  $A_t$  del manipulador para analizar el comportamiento de la energía demandada por cada una de las trayectorias ( $\mathbf{T}(t)$ ) pertenecientes a la misma familia. Los puntos de inicio y final de cada trayectoria están sobre el mismo círculo de radio  $r_i$ , con la diferencia de que cada trayectoria tiene un radio  $r_i$  diferente. Específicamente se realiza la determinación y análisis de la energía demandada sobre seis trayectorias  $\mathbf{T}_i(t)$ ,  $i=5,6,\dots,9,10$ , elementos de la misma familia, es decir, mismo lugar geométrico(recto) y el mismo perfil de trayectoria ( $p(t)$ ) cicloidal, así como también el mismo tiempo de recorrido,  $t_f$ . De donde se desarrollan dos casos de estudio, referentes a la demanda de energía, el primero de ellos es para  $t_f = 9$  s y el segundo para  $t_f = 0.1$  s.



## 6.2. Ecuaciones para calcular la energía mecánica en robots manipuladores

Dados los puntos  $\mathbf{p}_0$  y  $\mathbf{p}_f$  ocupados por el OT correspondientes a los puntos de inicio y final de recorrido respectivamente, conectados por una trayectoria  $\mathbf{T}(t)$  que se encuentran en el espacio de trabajo del manipulador y dados también  $t_0$  y  $t_f$  como los tiempos de inicio y fin de recorrido, tal que la variable tiempo  $t_0 \leq t \leq t_f$ , donde  $t_0 = 0$  y  $t_f \in \mathbb{R}^+$ , y sea  $N$  el número de subintervalos finitos en los cuales se divide el tiempo, “ $t$ ”, entonces tenemos que el tiempo de avance del recorrido se determina como

$$t_i = \frac{i}{N}t_f, i = 0, 1, \dots, N - 1, N \quad (6.1)$$

donde para cada  $t_i$  se determina  $\mathbf{T}(t_i)$ ,  $\dot{\mathbf{T}}(t_i)$  y  $\ddot{\mathbf{T}}(t_i)$  correspondientes a la posición, velocidad y aceleración del OT respectivamente,  $\mathbf{T}(t_i), \dot{\mathbf{T}}(t_i)$  y  $\ddot{\mathbf{T}}(t_i) \in \mathbb{R}^m$ . Asimismo, se determinan las posiciones,  $\boldsymbol{\theta}_i$ , velocidades,  $\dot{\boldsymbol{\theta}}_i$ , y aceleraciones,  $\ddot{\boldsymbol{\theta}}_i$ , en las juntas articulares del manipulador,  $\boldsymbol{\theta}_i, \dot{\boldsymbol{\theta}}_i$  y  $\ddot{\boldsymbol{\theta}}_i \in \mathbb{R}^n$ . Y con la ecuación de la dinámica se determina la fuerza generalizada en las juntas articulares,  $\boldsymbol{\tau}_i$ . Por lo que, la potencia demanda por el manipulador con “ $n$ ” juntas articulares en cada  $t_i$  se determina como [2], [15]:

$$P(t_i) = |\boldsymbol{\tau}_i^T \dot{\boldsymbol{\theta}}_i| = |\tau_{1i} \dot{\theta}_{1i}| + |\tau_{2i} \dot{\theta}_{2i}| + \dots + |\tau_{ni} \dot{\theta}_{ni}|, i = 0, 1, \dots, N - 1, N; \quad (6.2)$$

donde  $n$ : grados de libertad del sistema. Se toman los valores absolutos del producto de la fuerza generalizada y velocidad, dado que aún para valores negativos de éstas se consume energía.

De acuerdo con [2] y [15] la energía ( $E$ ) demandada por el manipulador para ir de  $\mathbf{p}_0$  a  $\mathbf{p}_f$  con un intervalo de tiempo de  $t_0 \leq t \leq t_f$  es determinado por la ecuación integral

$$E = \int_{t_0}^{t_f} P(t) dt \quad (6.3)$$

donde  $P(t)$  : función analítica correspondiente a la potencia,  $dt$  : diferencial del tiempo. Dado que se tienen valores discretos de la potencia  $P(t_i)$ , en lugar de una función analítica  $P(t)$ , se requiere aplicar un método numérico para determinar la energía; para este caso se aplica el método de Simpson compuesto para determinar la energía total demandada por el manipulador.

El método de Simpson compuesto consiste en realizar la determinación, de forma aproximada, del área bajo una curva discreta con condiciones de frontera inicial y final conocidos, esto es  $P(t_0)$  y  $P(t_f)$ , a través de segmentos polinomiales de segundo grado (parábolas).

De acuerdo con [38], si se tiene una función real de variable real,  $f(x)$ , con el intervalo de integración  $[a, b]$  y si se divide en dos subintervalos,  $N=2$ , entonces la integral de dicha función se puede aproximar con el método de Simpson a través de la siguiente ecuación,

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}[f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)] \quad (6.4)$$

donde  $x_0 = a$ ,  $x_1 = \frac{1}{2}(a + b)$ ,  $x_2 = b$ ,  $h = x_1 - x_0 = x_2 - x_1$ . De lo anterior se observa que para cada aplicación de la regla de Simpson se requieren dos subintervalos. Si en una función se tiene  $2n$  subintervalos, entonces se aplicará “ $n$ ” número de veces la regla de Simpson para aproximar el área bajo la curva de dicha función. Por lo que aplicando “ $n$ ” número de veces la ec. 6.4 para aproximar la ecuación 6.3, se tiene

$$E = \int_{t_0}^{t_f} P(t) dt \approx \int_{a=t_0}^{t_2} P_1(t)dt + \int_{t_2}^{t_4} P_2(t)dt + \dots + \int_{t_{N-2}}^{b=t_N} P_n(t)dt \quad (6.5)$$

donde  $P_j(t), j=1,2,\dots,n-1,n$ , es el  $j$ -ésimo polinomio de segundo grado que pasa por tres puntos consecutivos. Considerando el lado derecho de la ecuación 6.4 y sustituyéndolo en la ec. 6.5, se tiene,

$$E \approx \frac{h_1}{3}[P(t_0)+4P(t_1)+P(t_2)] + \frac{h_2}{3}[P(t_2)+4P(t_3)+P(t_4)] + \dots + \frac{h_n}{3}[P(t_{N-2})+4P(t_{N-1})+P(t_N)] \quad (6.6)$$

donde

$$\begin{aligned} h_1 &= t_1 - t_0 = t_2 - t_1 \\ h_2 &= t_3 - t_2 = t_4 - t_3 \\ &\vdots \\ h_n &= t_{N-1} - t_{N-2} = t_N - t_{N-1}. \end{aligned}$$

Considerando  $h_1 = h_2 = \dots = h_n = h$ , la ecuación 6.6 queda como,

$$E \approx \frac{h}{3}[P(t_0)+4P(t_1)+P(t_2)] + \frac{h}{3}[P(t_2)+4P(t_3)+P(t_4)] + \dots + \frac{h}{3}[P(t_{N-2})+4P(t_{N-1})+P(t_N)]. \quad (6.7)$$

Haciendo uso de la notación de suma, la ec. 6.7 se simplifica a,

$$E \approx \frac{h}{3} \left[ P(t_0) + 4 \sum_{i=1}^{N-1} P(t_i) + 2 \sum_{i=2}^{N-2} P(t_i) + P(t_N) \right], \quad i = 0, 1, \dots, N-1, N \quad (6.8)$$

donde el incremento de  $i$  es  $\Delta i = 2$ .

### 6.3. Formulación de la trayectoria

La ecuación paramétrica de la recta que pasa por dos puntos  $\mathbf{p}_0 = (x_0, y_0)$  y  $\mathbf{p}_f = (x_f, y_f)$  es,

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 + (x_f - x_0)t \\ y(t) &= y_0 + (y_f - y_0)t \end{aligned}, \quad \forall t \in [0, 1] \quad (6.9)$$

o bien, dicha ecuación se puede representar de forma vectorial

$$\mathbf{T}(t) = \mathbf{p}_0 + (\mathbf{p}_f - \mathbf{p}_0)t, \quad (6.10)$$

donde  $\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_f, \mathbf{T}(t) \in \mathbb{R}^2$ . Si ahora a dicha ec. paramétrica de la recta (6.10), se le introduce una función cicloidal[40] como perfil de trayectoria  $p(t) \in \mathbb{R}^+$  de tal forma que permita obtener derivadas infinitas, entonces dicha ec. queda de la siguiente forma:

$$\mathbf{T}(p(t)) = \mathbf{p}_0 + (\mathbf{p}_f - \mathbf{p}_0)p(t), \quad \forall p(t) \in [0, 1] \quad (6.11)$$

donde  $t \in [0, t_f]$ ,  $t_f$ : tiempo final de traslado para ir de  $\mathbf{p}_0$  a  $\mathbf{p}_f$ .

Obteniendo la primera derivada de la ec. de posición:

$$\dot{\mathbf{T}}(\dot{p}(t)) = (\mathbf{p}_f - \mathbf{p}_0)\dot{p}(t), \quad (6.12)$$

la segunda derivada de la ec. de posición:

$$\ddot{\mathbf{T}}(\ddot{p}(t)) = (\mathbf{p}_f - \mathbf{p}_0)\ddot{p}(t), \quad (6.13)$$

donde la función del perfil de trayectoria cicloidal es  $p(t)$ , la cual corresponde a

$$p(t) = \frac{t}{t_f} - \frac{1}{2\pi} \text{sen}(2\pi t/t_f); \quad (6.14)$$

la primera derivada con respecto al tiempo de la ec. 6.14 resulta

$$\dot{p}(t) = \frac{1}{t_f} - \frac{1}{t_f} \cos(2\pi t/t_f); \quad (6.15)$$

la segunda derivada con respecto al tiempo de la ec. 6.14 resulta

$$\ddot{p}(t) = \frac{2\pi}{t_f^2} \text{sen}(2\pi t/t_f). \quad (6.16)$$

## 6.4. Determinación de la energía mecánica: Casos de estudio

**CASO 01.a.** Se realiza la determinación de la energía mecánica demandada por el manipulador de 2GdL ya estudiado en los capítulos anteriores. La trayectoria a seguir tiene lugar geométrico recto con una longitud de 0.20 m, el perfil de trayectoria es cicloidal con un tiempo de recorrido de  $t_f = 9$  s. El punto de inicio es  $\mathbf{p}_0 = \mathbf{p}_{int}$  (incognita) y el punto final es  $\mathbf{p}_f$  (conocido).

A continuación, se realiza la determinación del punto  $\mathbf{p}_{int}$  el cual es mostrado en la figura 6.1. Para realizar este cálculo, primero se determina el ángulo  $\alpha$ . Aplicando ley de cosenos al triángulo formado por los puntos  $\mathbf{o}_1 - \mathbf{p}_{int} - \mathbf{p}_f$

$$l^2 = r_i^2 + r_i^2 - 2r_i r_i \cos \alpha \Rightarrow \alpha = \arccos\left(\frac{l^2 - 2r_i^2}{-2r_i^2}\right) \quad (6.17)$$

por tanto  $\mathbf{p}_{int} = (x_{int}, y_{int})$  se determina como

$$\cos \alpha = y_{int}/r_i \Rightarrow y_{int} = r_i \cos \alpha \quad (6.18)$$

$$\text{sen } \alpha = x_{int}/r_i \Rightarrow x_{int} = r_i \text{sen} \alpha. \quad (6.19)$$

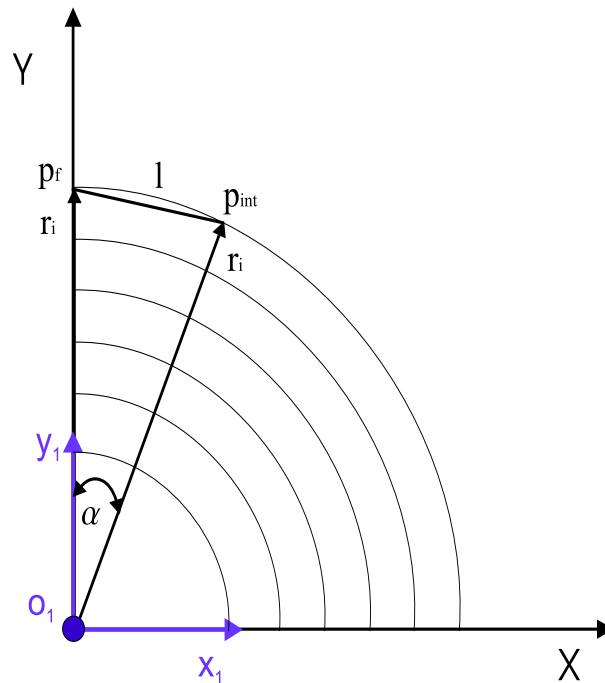


Figura 6.1: Determinación de los puntos de intersección  $\mathbf{p}_{int}$ .

Por lo que, tomando los radios  $r_i$  mostrados en la segunda columna de la tabla 6.1 y con las ecuaciones 6.17, 6.18 y 6.19 se determinan los puntos  $\mathbf{p}_{int} = (x_{int}, y_{int})$  que se muestran en la tercera columna de la misma tabla(6.1).

Dados los puntos de inicio  $\mathbf{p}_{int}$  y final  $\mathbf{p}_f$ , el tiempo de recorrido de 9 s, se realiza la determinación con las ecs. 6.11-6.16 de cada una de las trayectorias correspondientes a la misma familia, así como sus respectivas primera y segunda derivada correspondientes a las velocidades y aceleraciones del órgano terminal.

Tabla 6.1: *2GdL: Puntos de inicio y final de las rectas, unidades en metros*

$i$	$r_i$	$\mathbf{P}_{int} = \mathbf{P}_0$	$\mathbf{P}_f$
5	0.209307	(0.175697,0.113754)	(0.0,0.209307)
6	0.267426	(0.185491,0.192639)	(0.0,0.267426)
7	0.325544	(0.19033,0.264109)	(0.0,0.325544)
8	0.383663	(0.193087,0.331534)	(0.0,0.383663)
9	0.441781	(0.194809,0.39651)	(0.0,0.441781)
10	0.4999	(0.195958,0.459892)	(0.0,0.4999)

El resultado de la familia de trayectorias,  $\mathbf{T}_i(t)$ , generadas se puede observar en la figura 6.2, donde la trayectoria inicial ( $\mathbf{T}_5(t)$ ) es de color rojo y la trayectoria final ( $\mathbf{T}_{10}(t)$ ) de color negro.

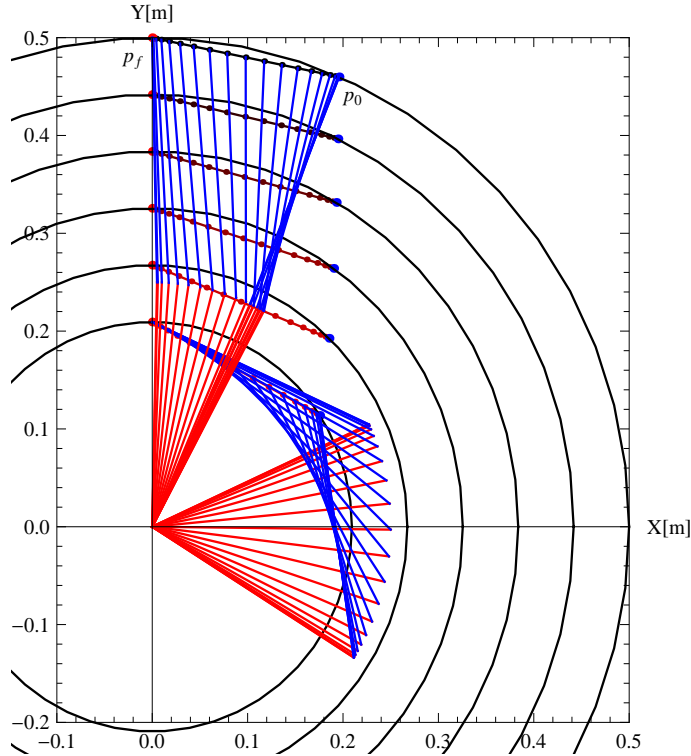


Figura 6.2: Familia de trayectorias con lugar geométrico recto y perfil cicloidal y configuración del manipulador.

Con respecto a las velocidades y aceleraciones en el OT requeridas para seguir la trayectoria  $\mathbf{T}(t)$  con los diferentes puntos de inicio y final, y con el tiempo  $t_f = 9$  s, las componentes de las velocidades  $(v_x, v_y)$  y de las aceleraciones  $(a_x, a_y)$  van cambiando en función de la pendiente del lugar geométrico de la trayectoria y el perfil de trayectoria. Sin embargo la norma de la magnitud de las velocidades y aceleraciones es exactamente la misma para todo el conjunto de trayectorias, dado que se trata de satisfacer la misma longitud de la trayectoria y el mismo tiempo de recorrido, como se pueden observar en las figuras 6.3 y 6.4 en líneas de color azul.

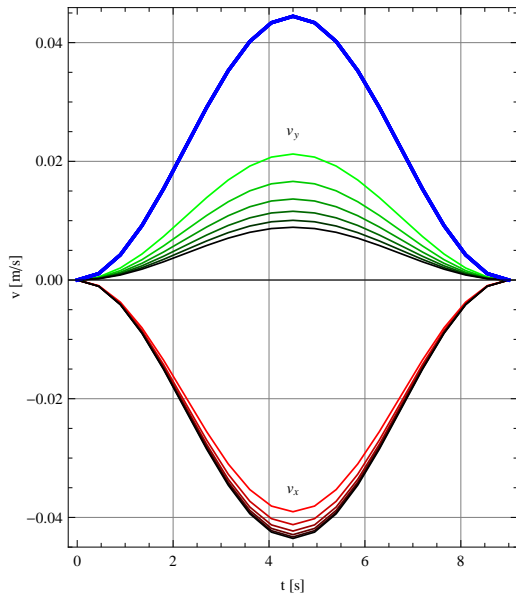


Figura 6.3: Velocidad de las trayectorias con lugar geométrico recto y perfil cicloidal

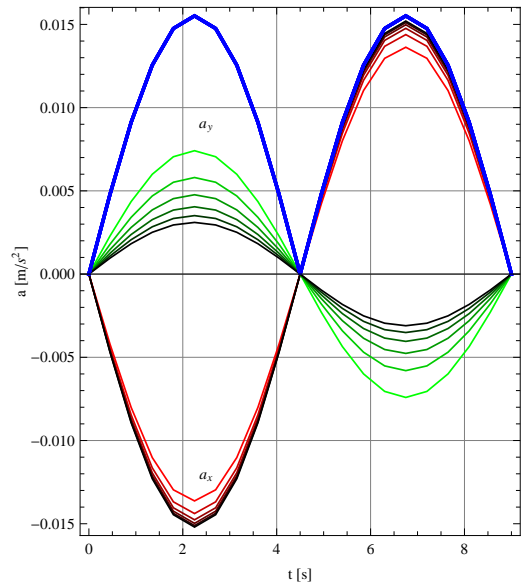


Figura 6.4: Aceleración de las trayectorias con lugar geométrico recto y perfil cicloidal

Se realizan las determinaciones de las posiciones de las juntas articulares con proyecciones geométricas (ecs. 2.11 y 2.12), de las velocidades y aceleraciones de las juntas con las ecs. 2.16 y 2.18 respectivamente.

Con respecto a las velocidades en la juntas cinemáticas del manipulador  $\dot{\theta} = (\dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2)$ , se muestra en la figura 6.5 en líneas de color rojo la velocidad de la primer junta  $\dot{\theta}_1$ , en color verde la velocidad de la segunda junta  $\dot{\theta}_2$  y en color azul la norma de la velocidad en las juntas del sistema,  $\|\dot{\theta}\|$ . Se puede observar que conforme va aumentando el radio  $r_i$  de los círculos(ver figura 6.6 ), va disminuyendo la magnitud de la velocidad en las juntas articulares y esto tiene sentido al observar el mapa de velocidad lineal mostrado en la figura 6.7, dado que entre más grande es el radio  $r_i$  con respecto al origen  $\mathbf{o}_1$  se tiene mayor ganancia de velocidad en el OT. Desde el punto de vista de las juntas, implica que si la **velocidad demanda por cada una de las trayectorias es la misma** entonces entre más grande es el radio  $r_i$ , menor es la demanda de velocidad en dichas juntas y esto se corrobora, de forma concreta, con el recíproco del número de condición  $\kappa_r$  determinado por cada trayectoria  $\mathbf{T}_i(t)$  en el cual se observa que va decreyendo (de color azul a negro) conforme el radio  $r_i$  incrementa, tal como se observa en la figura 6.8.

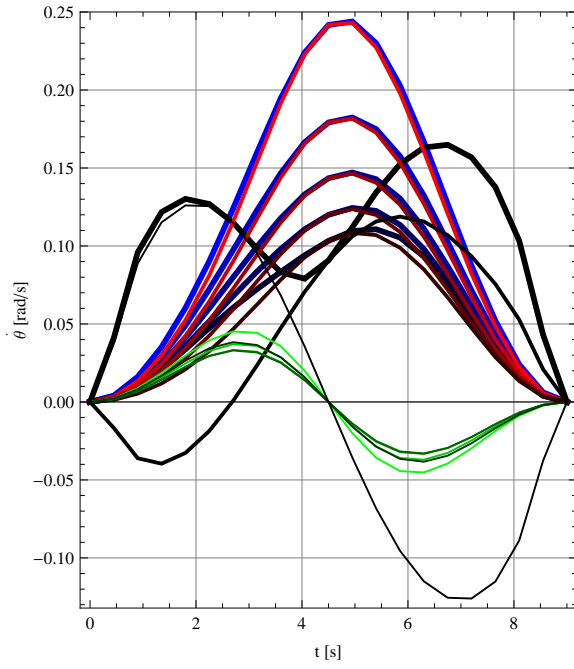


Figura 6.5: Velocidad en las juntas articulares

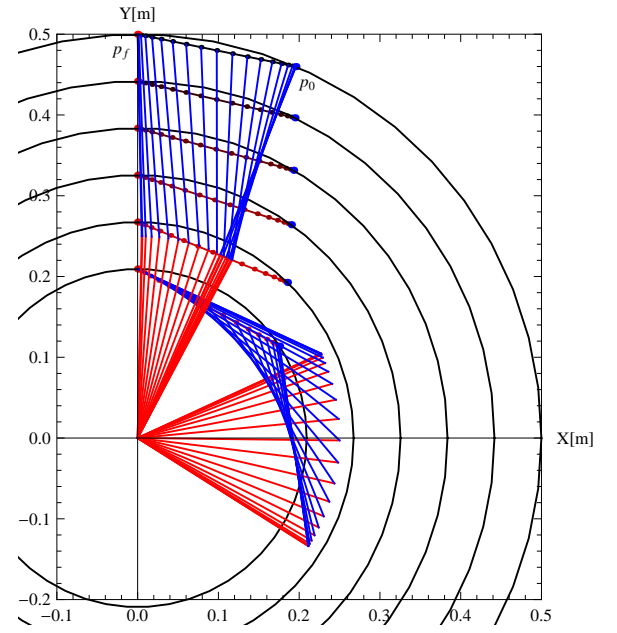


Figura 6.6: Familia de trayectorias y configuración de manipulador

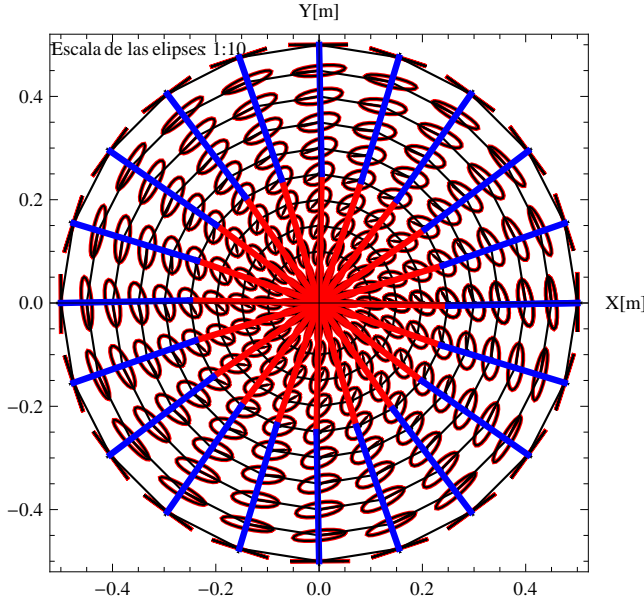


Figura 6.7: Elipses de velocidad lineal

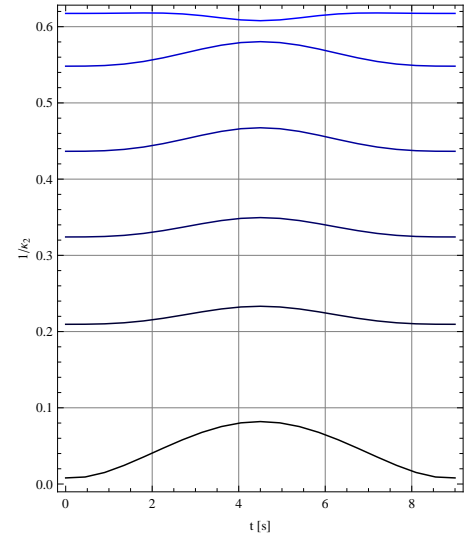


Figura 6.8: Recíproco del número de condición de  $\mathbf{A}$

Específicamente, para cuantificar los decrementos o incrementos de la velocidad angular requerida para seguir la trayectoria  $\mathbf{T}_i(t)$  conforme varía el recíproco del número de condición de la matriz  $\mathbf{A}$ ,  $(1/\kappa)$ , se proponen: a) Una medida promedio del recíproco del número de condición sobre la trayectoria  $\mathbf{T}_i(t)$  como

$$\bar{\kappa}_r = \frac{\int_t (1/\kappa) dt}{\int_t dt}. \quad (6.20)$$

b) Una medida promedio de  $\|\dot{\boldsymbol{\theta}}\|$ , la norma Euclidiana de la velocidad angular del sistema robótico, la cual se define como

$$\bar{\omega} = \frac{\int_t \|\dot{\boldsymbol{\theta}}\| dt}{\int_t dt}. \quad (6.21)$$

Para realizar la determinación de la integral  $\int_t (1/\kappa) dt$  correspondiente a la ec. 6.20, se utiliza el método de Simpson compuesto, dado que se tienen determinados los valores de  $\kappa_r$  a través de la norma-2 para cada

trayectoria. Los resultados obtenidos de  $\bar{\kappa}_r$  y  $\bar{\kappa}$  para cada trayectoria se muestran en la tercera y cuarta columna de la tabla 6.2. De forma semejante se realiza la determinación de  $\int_t \|\dot{\theta}\| dt$  correspondiente a la ec. 6.21, a través del mismo método, dado que también se tienen los valores discretos de  $\|\dot{\theta}\|$ . Los resultados obtenidos de  $\bar{\omega}$  para cada trayectoria se muestran también en la tabla 6.2, columna 5. En la fig. 6.27 se puede observar el comportamiento de  $\bar{\omega}$  con respecto a  $r_i$ , este resultado cuantitativo confirma lo observado en el mapa de elipses de velocidad lineal.

Tabla 6.2: *2GdL: Medidas promedio de la norma de la vel. y acel. ang., tiempo  $t_f = 9$  s*

$\mathbf{T}_i$	$r_i$	$\bar{\kappa}_r$	$\bar{\kappa}$	$\bar{\omega}$	$\bar{\kappa}_r^a$	$\bar{\kappa}^a$	$\bar{\alpha}$
$\mathbf{T}_5$	0.209307	0.615	1.626	0.115	0.242	4.132	0.061
$\mathbf{T}_6$	0.267426	0.562	1.779	0.088	0.260	3.846	0.046
$\mathbf{T}_7$	0.325544	0.449	2.227	0.073	0.251	3.984	0.038
$\mathbf{T}_8$	0.383663	0.335	2.985	0.062	0.218	4.587	0.033
$\mathbf{T}_9$	0.441781	0.219	4.566	0.056	0.164	6.098	0.032
$\mathbf{T}_{10}$	0.4999	0.046	21.739	0.108	0.042	23.810	0.071

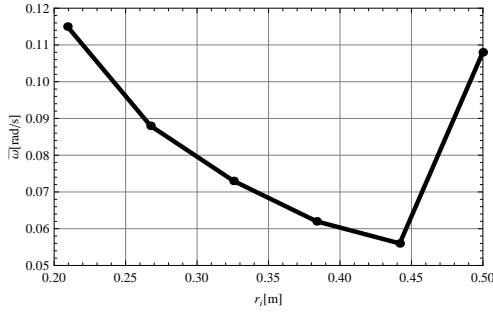


Figura 6.9: Promedio de la velocidad en las juntas articulares,  $t_f = 9$  s

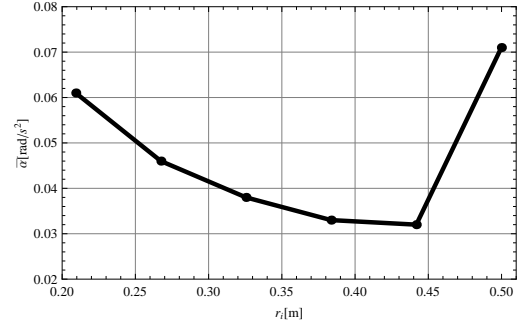


Figura 6.10: Promedio de la aceleración en las juntas articulares,  $t_f = 9$  s

Con respecto a las aceleraciones en las juntas cinemáticas del manipulador  $\ddot{\theta} = (\ddot{\theta}_1, \ddot{\theta}_2)$ , se muestra en la figura 6.11 en líneas de color rojo la aceleración de la primera junta  $\ddot{\theta}_1$ , en color verde la aceleración de la segunda junta  $\ddot{\theta}_2$  y en color azul la norma de la aceleración en las juntas del sistema,  $\|\ddot{\theta}\|$ . Se puede observar que conforme va aumentando el radio  $r_i$  del círculo (fig. 6.12), va disminuyendo la magnitud de la aceleración en las juntas articulares, con excepción de la última trayectoria a describir con radio  $r_{10}$  donde se observa que al inicio de la descripción de la trayectoria  $\mathbf{T}_{10}(t)$  se incrementa de forma muy grande las aceleraciones en las juntas (sobre todo en la segunda junta). De igual manera instante antes del punto final de la trayectoria, donde surge un decremento muy grande de la aceleración y esto se debe, a la cercanía con la frontera exterior que provoca singularidad en dicha configuración, lo cual se puede observar en el recíproco del número de condición de la matriz  $\mathbf{B}$  mostrado en la figura 6.14 el cual es semejante a cero.

De forma equivalente a las medidas promedio propuestas para la velocidad angular, se proponen para la aceleración angular las siguientes medidas

$$\bar{\kappa}_r^a = \frac{\int_t (1/\kappa^a) dt}{\int_t dt}; \quad \bar{\alpha} = \frac{\int_t \|\ddot{\theta}\| dt}{\int_t dt}, \quad (6.22)$$

para cuantificar los decrementos o incrementos de la aceleración angular. Donde  $\kappa^a$  es el número de condición de la matriz  $\mathbf{B}$  y  $\|\ddot{\theta}\|$  es la norma Euclidiana de la aceleración angular. Los resultados obtenidos de  $\bar{\kappa}_r^a$  y  $\bar{\kappa}^a$  para cada trayectoria, se muestran en la sexta y séptima columna de la tabla 6.2 respectivamente,

y los de  $\bar{\alpha}$  se muestran en la misma tabla, columna 8. Estos resultados indican de forma cuantitativa la demanda promedio de aceleración en las juntas, corroborando lo observado en el mapa de aceleración lineal (fig. 6.13). Cabe hacer mención que dichos resultados, también fueron determinados con el método de Simpson compuesto.

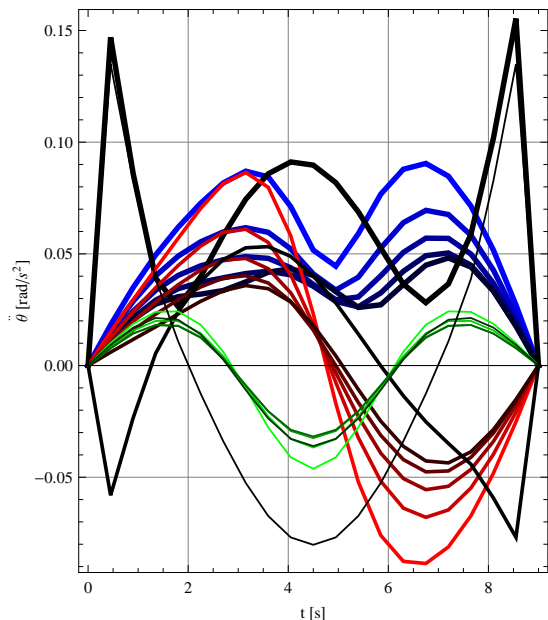


Figura 6.11: Aceleración en las juntas articulares

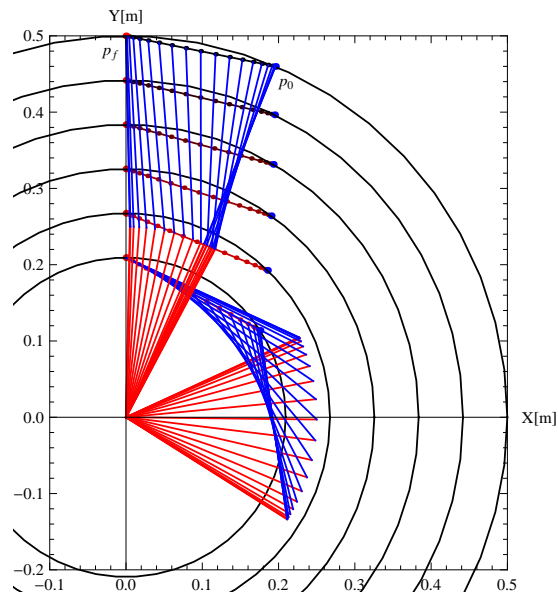


Figura 6.12: Familia de trayectorias y configuración de manipulador

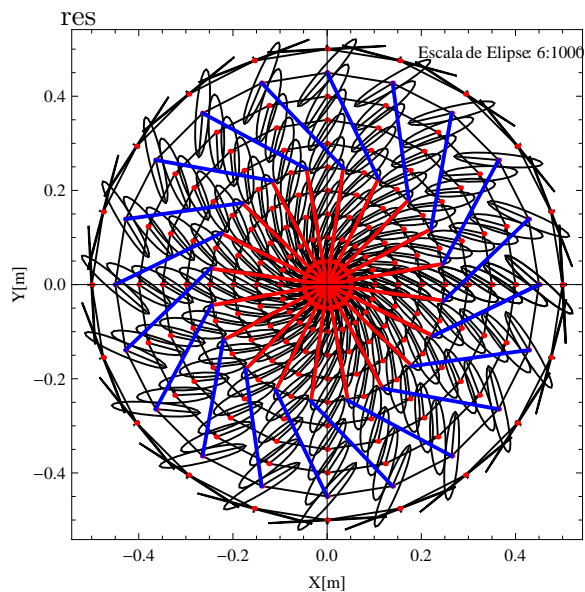


Figura 6.13: Elipses de aceleración lineal

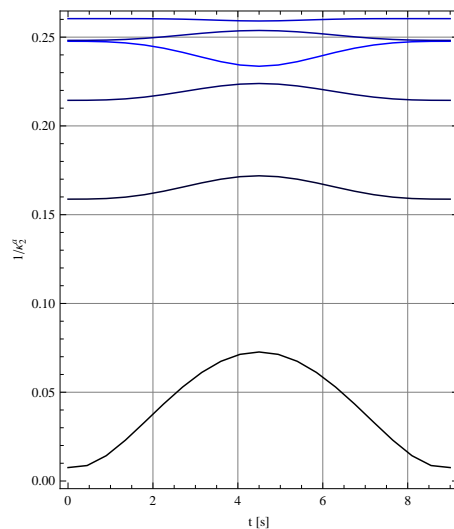


Figura 6.14: Recíproco del número de condición de  $\mathbf{B}$

Resuelta la cinemática directa e inversa de posición, velocidad y aceleración, se determinó la dinámica inversa con el modelo presentado en el capítulo 4 para dicho manipulador. Las curvas de torque para las juntas 1 y 2, para seguir cada una de las trayectorias en estudio, se pueden observar en las figuras 6.15 y 6.16 respectivamente. En líneas de color rojo a negro se muestra el torque estático ( $\tau_e$ ) demandado a cada una de las juntas por cada trayectoria, en color verde se muestra el torque demandado por las fuerzas inerciales ( $\tau_{in}$ ) de los eslabones y en color azul se muestra el torque total ( $\tau$ ) demandado por las juntas del manipulador. Se puede observar que conforme se incrementa el radio,  $r_i$ , las curvas de torque total demandado por cada una de las juntas van decreciendo. Este comportamiento se debe a



dos factores principalmente: 1) Tiempo de recorrido y 2) Ubicación de las trayectorias en el área de trabajo. Con respecto al primer factor, que es el tiempo de recorrido, debido a que el tiempo ( $t_f = 9 \text{ s}$ ) es relativamente grande, dado el manipulador y la longitud de la trayectoria, entonces el torque demandado por las fuerzas inerciales de los eslabones es bajo comparado con el torque estático y esto se puede observar en las líneas de color verde mostradas en las figuras 6.15 y 6.16. Por lo que, el torque total demandado por el sistema básicamente es lo demandado por el torque estático. Con respecto al segundo factor, que es la ubicación de las trayectorias en el espacio de trabajo, influye directamente en el calculo del torque estático ( $\tau_e$ ), el cual efectivamente, para ese conjunto de posiciones, decrece (líneas de color rojo a negro) conforme aumenta el radio  $r_i$ (fig. 6.17) y se puede confirmar en el mapa de torque estático que se muestra en la figura 6.18, es por ello que el torque total demandado (para dicha ubicación de las trayectorias) por cada una de las juntas decrecen conforme aumenta el radio,  $r_i$ .

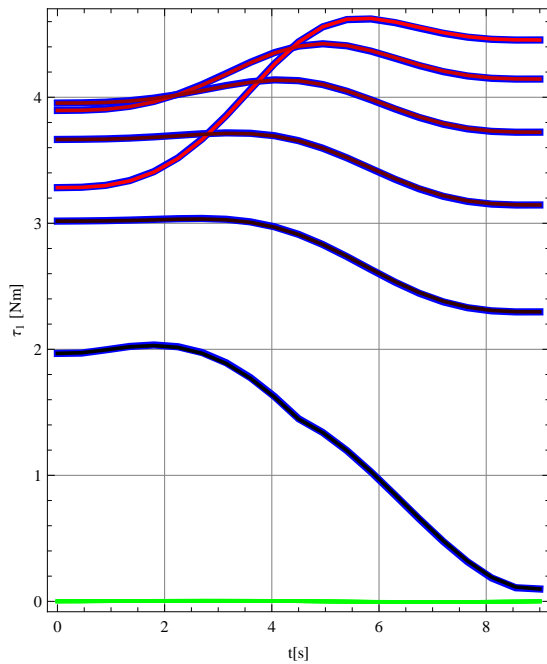


Figura 6.15: Torque demandado en la junta articular 1

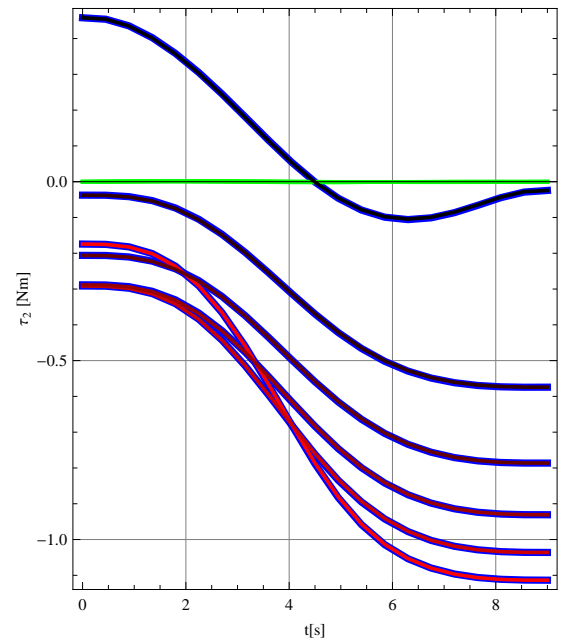


Figura 6.16: Torque demandado en la junta articular 2

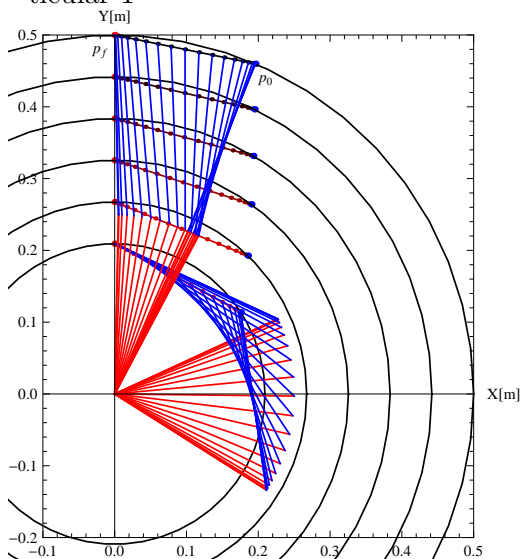


Figura 6.17: Familia de trayectorias y configuraciones del manipulador

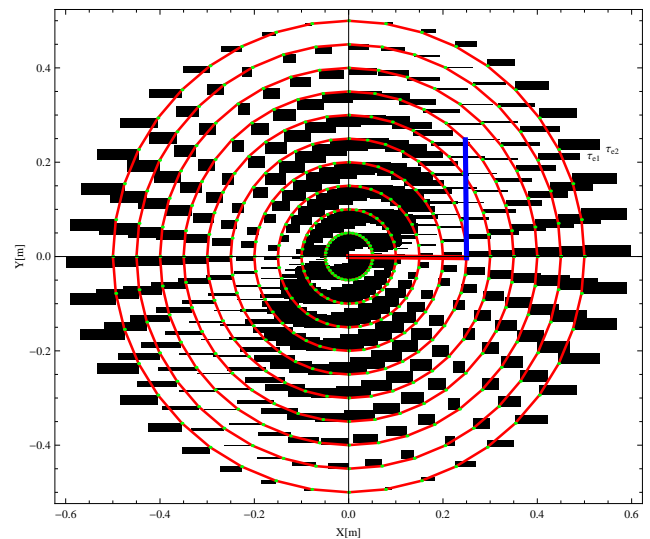


Figura 6.18: Torque estático demandado en las juntas 1 y 2

Con la ecuación 6.2, se realiza la determinación de la potencia demandada en las juntas 1 y 2, así como la demandada por dicho sistema de 2GdL. En la figura 6.19 se muestra en líneas de color rojo a negro la potencia demandada por la junta 1 ( $P_1$ ), en color verde a negro se muestra la potencia demandada por la junta 2 ( $P_2$ ), y en color azul lo demandado por el sistema de 2GdL ( $P$ ). De dicha figura se observan dos aspectos importantes: Primero, la potencia demanda por la junta 1 es generalmente mucho mayor que lo demandado por la segunda junta y esto es lógico dado que la primer junta tiene que cargar ambos eslabones. El segundo aspecto es que la potencia de ambas juntas o del sistema en su conjunto va disminuyendo conforme se incrementa el radio  $r_i$ , que esta acorde con la disminución de torque (observadas en las figuras 6.15 y 6.16) y de velocidad angular observada en la figura 6.5, conforme se incrementa dicho radio  $r_i$ .

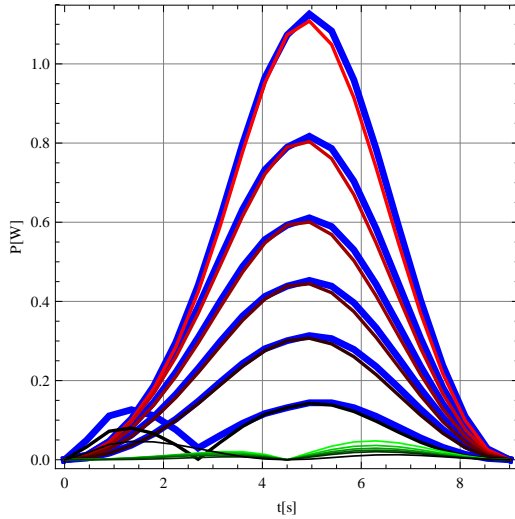


Figura 6.19: Potencia demandada por las juntas 1 y 2, y por el sistema

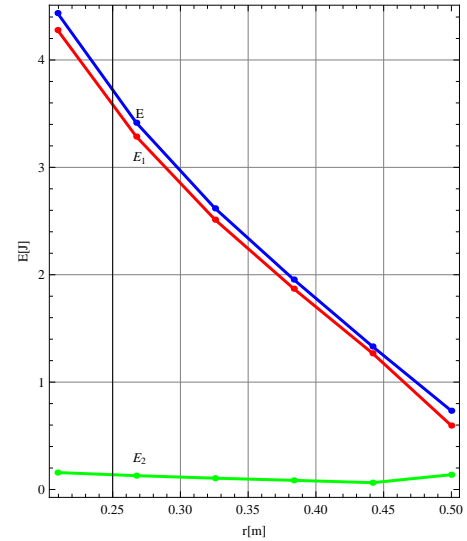


Figura 6.20: Energía demandada por las juntas 1 y 2, y por el sistema

La energía de las juntas 1 y 2, y de dicho sistema se determina aplicando la ecuación 6.8. La línea de color rojo muestra la energía demandada por la junta 1 ( $E_1$ ), la de color verde la energía demandada por la junta 2 ( $E_2$ ), y la de color azul la energía demandada por el sistema de 2GdL ( $E$ ). Corroborándose lo observado en las curvas de potencia determinadas por cada trayectoria, esto es, la energía demandada va disminuyendo conforme aumenta el radio  $r_i$ . Los valores de la energía demanda por cada junta y por el sistema se pueden observar en la tabla 6.3

Tabla 6.3: 2GdL: Energía demandada, tiempo,  $t_f = 9$  s

$\mathbf{T}_i$	$\mathbf{p}_0[m]$	$\mathbf{p}_f[m]$	$r_i[m]$	$E_1[J]$	$E_2[J]$	$E[J]$
$\mathbf{T}_5$	(0.175697,0.113754)	(0,0.209307)	0.209307	4.27885	0.157746	4.43659
$\mathbf{T}_6$	(0.185491,0.192639)	(0,0.267426)	0.267426	3.28693	0.128828	3.41576
$\mathbf{T}_7$	(0.19033,0.264109)	(0,0.325544)	0.325544	2.51305	0.10532	2.61837
$\mathbf{T}_8$	(0.193087,0.331534)	(0,0.383663)	0.383663	1.87003	0.0851854	1.95522
$\mathbf{T}_9$	(0.194809,0.39651)	(0,0.441781)	0.441781	1.26871	0.0633402	1.33205
$\mathbf{T}_{10}$	(0.195958,0.459892)	(0,0.499900)	0.49990	0.595667	0.137781	0.733447

**Análisis y discusión de resultados del caso 01.a:** El tiempo de recorrido fue de 09 s, un tiempo suficientemente grande si se considera que la longitud de la trayectoria es de 0.20 m y las longitudes de los eslabones son de  $l_1 = l_2 = 0.25$  m. Los resultados muestran que el torque demandado por las fuerzas inerciales correspondientes a los de inercia, Coriolis y fuerza centrífuga,  $\mathbf{I}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}}$ , prácticamente

son despreciables a comparación del torque demandado por las fuerzas gravitacionales,  $\mathbf{b}(\mathbf{q})$ . En el cual, para la ubicación específica de  $t = 0.45 \text{ s}$  que corresponde a un extremo máximo de aceleración en las juntas articulares (ver fig. 6.11) para seguir la trayectoria  $\mathbf{T}_{10}$ , el torque total demandado por la junta 1 es  $\tau_1 = 1.97011 \text{ Nm}$ , el 99.87% corresponde al torque debido a las fuerzas gravitacionales y solamente el 0.13% corresponde a las fuerzas inerciales, por lo que generalizando, la evolución del torque demandado por las juntas para seguir cada una de las trayectorias va a corresponder básicamente a la función vectorial  $\mathbf{b}(\mathbf{q})$ , determinado y presentado en las ecs. 3.15 y 3.83; para una mejor visualización del torque demandado por las fuerzas gravitacionales se presentó en la figura 6.18 un mapa de torque estático, en el cual se puede observar las zonas de mayor demanda de torque debido a esta fuerza, observándose claramente que conforme aumenta el radio de ubicación de los puntos de inicio y término de la trayectoria, disminuye dicho torque. Por lo que, se puede inducir que el elemento de la familia de la trayectoria que va a demandar menos potencia y en consecuencia menos energía es la trayectoria  $\mathbf{T}_{10}$  que en efecto resulta cierto dado que la junta 1 demanda  $E_1 = 0.595667 \text{ J}$  y la junta 2,  $E_2 = 0.137781 \text{ J}$  y el sistema en su conjunto  $E = 0.733447 \text{ J}$  a comparación de lo demandado por la trayectoria  $\mathbf{T}_5$ , donde  $E_1 = 4.27885 \text{ J}$ ,  $E_2 = 0.157746 \text{ J}$  y lo demandado por el sistema en su conjunto  $E = 4.43659 \text{ J}$ . Por lo que para la junta 1, si se considera  $4.27885 \text{ J}$  como el 100% entonces  $0.595667 \text{ J}$  corresponde a un 13.92%. Para la junta 2, considerando  $0.157746 \text{ J}$  como 100%, entonces  $0.137781 \text{ J}$  corresponde a un 87.34%, y para el sistema, tomando  $4.27885 \text{ J}$  como el 100%, entonces  $0.733447 \text{ J}$  corresponde a un 16.532% de lo consumido por el manipulador para seguir la trayectoria  $\mathbf{T}_5$ .

**CASO 01.b** De forma semejante al caso 01.a se realiza la determinación de la energía con el mismo manipulador de 2GdL. Donde la trayectoria tiene el lugar geométrico recto con la misma longitud de 0.20 m y el perfil de trayectoria es de igual forma el cicloidal, con tiempo un recorrido de recorrido  $t_f = 0.1 \text{ s}$ . El punto de inicio es  $\mathbf{p}_0 = \mathbf{p}_{int}$  y el punto final es  $\mathbf{p}_f$ .

Como ya se había comentado en el caso 01.a las normas de las velocidades y aceleraciones en el OT para los diferentes puntos de inicio y término se siguen conservando dado que se trata de realizar la misma trayectoria con el mismo tiempo de recorrido. Como se pueden observar en las figuras 6.21 y 6.22 en líneas de color azul. Destacándose las altas magnitudes en las velocidades y aceleraciones requeridas para satisfacer el tiempo de recorrido.

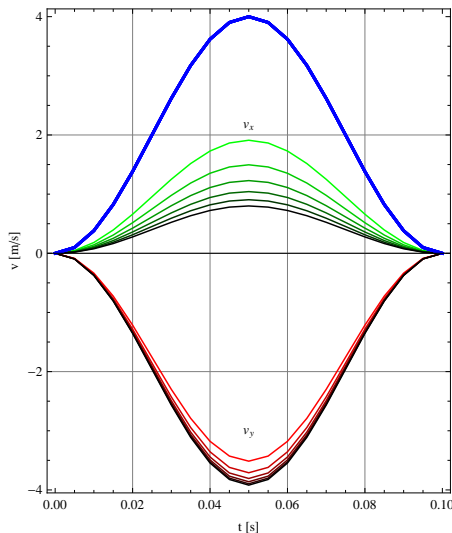


Figura 6.21: Velocidad de las trayectorias con lugar geométrico recto y perfil cicloidal

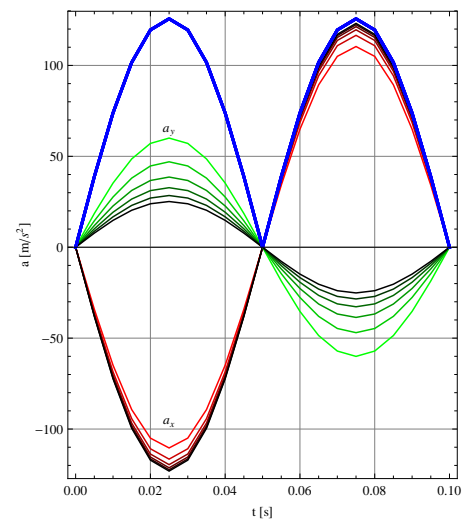


Figura 6.22: Aceleración de las trayectorias con lugar geométrico recto y perfil cicloidal

En la figura 6.23 se muestran en líneas de color rojo la velocidad de la primer junta  $\dot{\theta}_1$ , en color verde la segunda junta  $\dot{\theta}_2$  y en color azul la norma de la velocidad del sistema,  $\|\dot{\boldsymbol{\theta}}\|$ . Resulta que las velocidades en la juntas cinemáticas del manipulador  $\dot{\boldsymbol{\theta}} = (\dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2)$  disminuyen conforme el radio  $r_i$  del círculo aumenta, de forma equivalente como ocurrió en el “caso 01.a” y se comentó el motivo por el cual sucede esto.

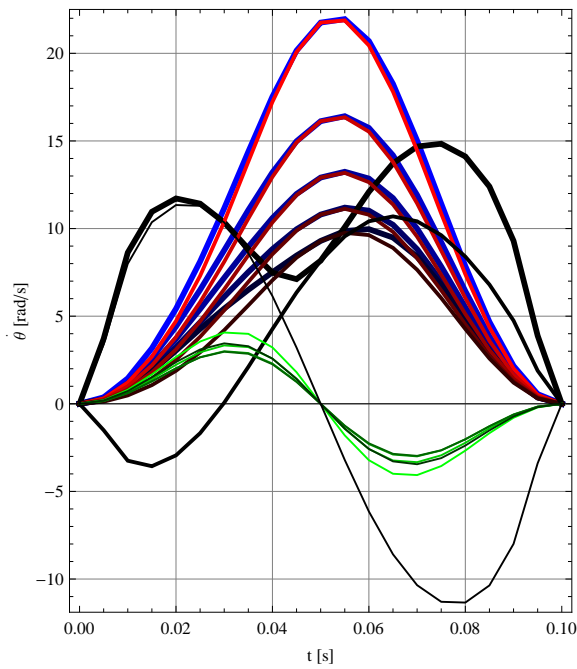


Figura 6.23: Velocidad en las juntas articulares

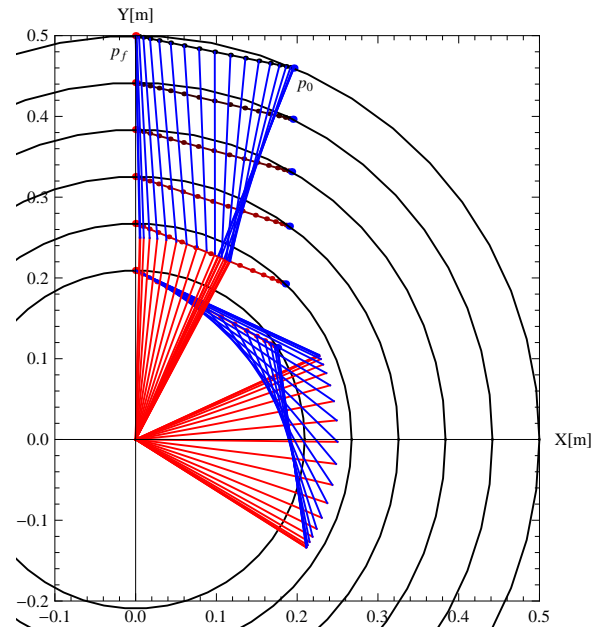


Figura 6.24: Familia de trayectorias y configuraciones del manipulador

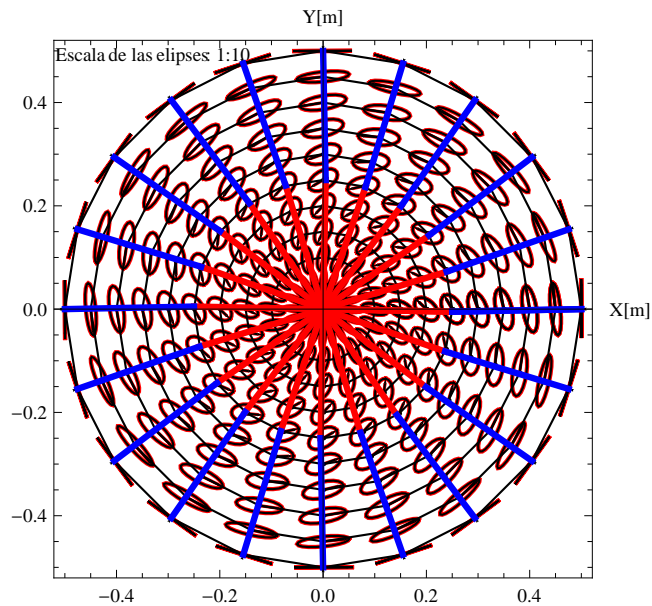


Figura 6.25: Elipses de velocidad lineal

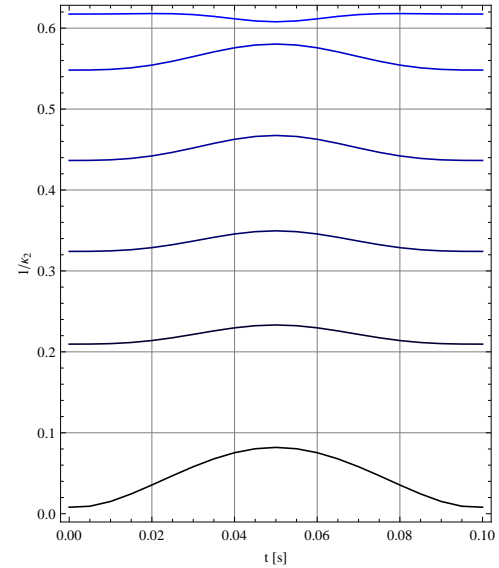


Figura 6.26: Recíproco del número de condición de  $\mathbf{A}$

De forma semejante al “caso 01.a” para cuantificar las variaciones promedio de las velocidades angulares requeridas para seguir cada una de las trayectorias  $\mathbf{T}(t)$  se aplica la ecuación 6.21. De igual forma para obtener el promedio del recíproco del número de condición de la matriz  $\mathbf{A}$  se aplica la ecuación 6.20. Los resultados obtenidos de  $\bar{\kappa}_r$  y  $\bar{\kappa}$  para cada trayectoria se muestran en la tercera y cuarta columna de la tabla 6.4, y en la quinta columna de la misma tabla los valores determinados para  $\bar{\omega}$ .

Tabla 6.4: 2GdL: Medidas promedio de la norma de la vel. y acel. ang., tiempo  $t_f = 0.1$  s

$i$	$r_i$	$\bar{\kappa}_r$	$\bar{\kappa}$	$\bar{\omega}$	$\bar{\kappa}_r^a$	$\bar{\kappa}^a$	$\bar{\alpha}$
$\mathbf{T}_5$	0.209307	0.615	1.626	10.306	0.242	4.132	490.231
$\mathbf{T}_6$	0.267426	0.562	1.779	7.958	0.26	3.846	371.136
$\mathbf{T}_7$	0.325544	0.449	2.227	6.534	0.251	3.984	305.375
$\mathbf{T}_8$	0.383663	0.335	2.985	5.608	0.218	4.587	267.46
$\mathbf{T}_9$	0.441781	0.219	4.566	5.081	0.164	6.098	255.836
$\mathbf{T}_{10}$	0.4999	0.046	21.739	9.683	0.042	23.810	574.075

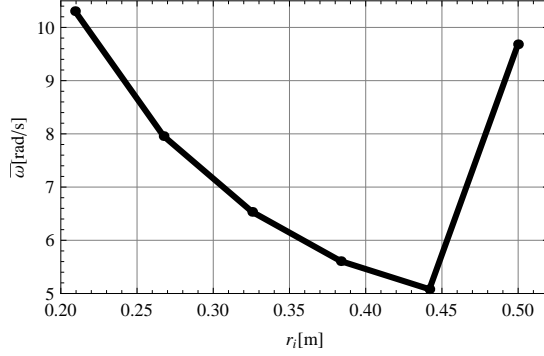


Figura 6.27: Promedio de la velocidad en las juntas articulares,  $t_f = 0.1$  s

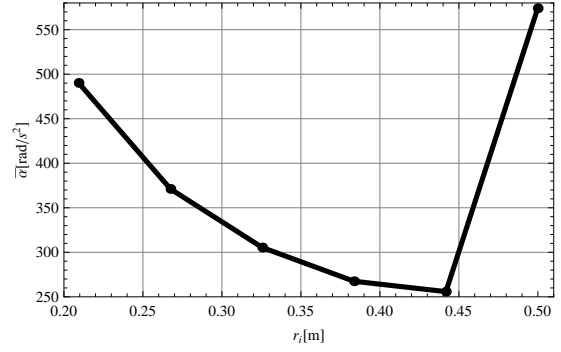


Figura 6.28: Promedio de la aceleración en las juntas articulares,  $t_f = 0.1$  s

Con respecto a las aceleraciones en las juntas cinemáticas del manipulador,  $\ddot{\theta} = (\ddot{\theta}_1, \ddot{\theta}_2)$ , se muestra en la figura 6.29 en líneas de color rojo la aceleración de la primera junta  $\ddot{\theta}_1$ , en color verde la aceleración de la segunda junta  $\ddot{\theta}_2$  y en azul la norma de la aceleración en las juntas del sistema  $\|\ddot{\theta}\|$ . De igual forma que el “caso 01.a” tienen el mismo comportamiento con respecto al decremento de la magnitud de la aceleración conforme aumenta el radio  $r_i$  (6.29 y fig. 6.30), destacándose las altas magnitudes requeridas para seguir la trayectoria, por lo que se puede prever que las demandas de torque debido a las fuerzas inerciales ( $\tau_{in}$ ) van a ser muy grandes con respecto al torque estático ( $\tau_e$ ), por lo que el torque total ( $\tau$ ) demandado, tendrá un comportamiento semejante a  $\tau_{in}$ , contrario al caso 01.a. También de forma equivalente al caso 01.a para el radio  $r_{10}$  en las aceleraciones angulares, instante después del inicio e instante antes de la terminación del recorrido de la trayectoria, surgen cambios muy grandes debido a la cercanía con la frontera exterior que provocan singularidades en dichas configuraciones, como se corrobora en la figura 6.32 con el recíproco del número de condición ( $\kappa_r^a$ ) de la matriz  $\mathbf{B}$ ; también se puede observar que  $\kappa_r^a$  se sigue conservando de igual forma al caso 01.a lo que implica que es independiente al tiempo de recorrido.

En las columnas seis y siete de la tabla 6.4 se muestran los resultados obtenidos de  $\bar{\kappa}_r^a$  y  $\bar{\kappa}^a$  respectivamente, y en la columna ocho de la misma tabla los resultados de  $\bar{\alpha}$ . Dichos resultados también fueron determinados con el método aplicado en el caso 01.a.

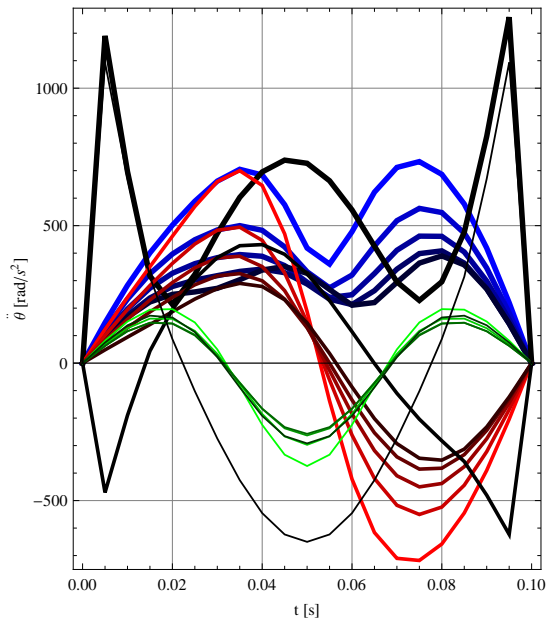


Figura 6.29: Aceleración en las juntas articulares

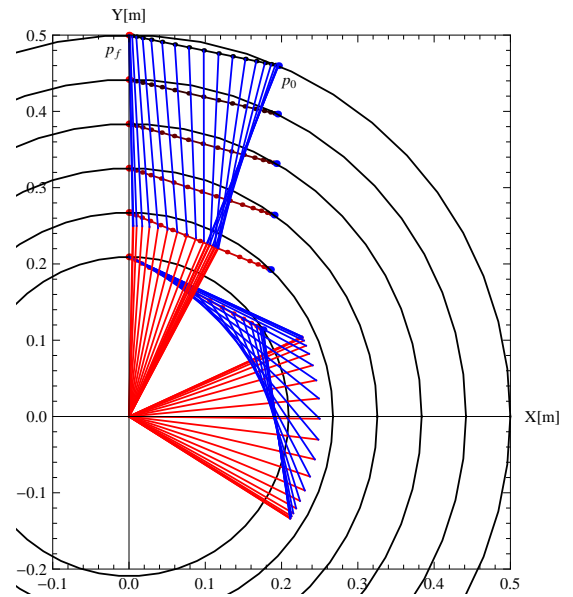


Figura 6.30: Familia de trayectorias y configuración del manipulador

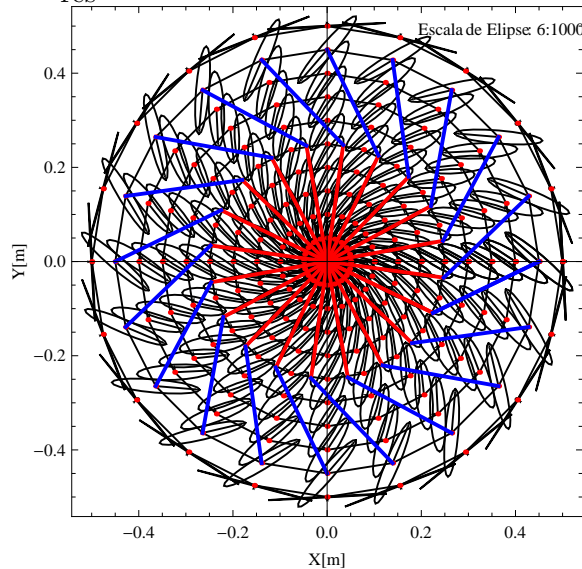


Figura 6.31: Elipses de aceleración lineal

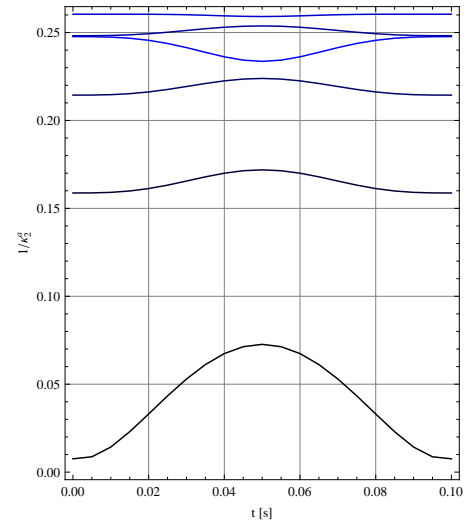


Figura 6.32: Recíproco del número de condición de **B**

En las figuras 6.33 y 6.34 se muestran las curvas de torque para las juntas 1 y 2 respectivamente para el conjunto de trayectorias en estudio. En líneas de color rojo a negro se muestra el torque estático ( $\tau_e$ ) demandado para cada una de las trayectorias, observándose que tienen las mismas magnitudes que lo obtenido en el caso 01.a dado que se tratan de las mismas configuraciones; en líneas de color verde a negro se muestra el torque demandado por las fuerzas inerciales ( $\tau_{in}$ ) de los eslabones, observándose que estas magnitudes son mucho más grandes que en el caso 01.a y por lo que su efecto en la demanda total de torque total resulta de mayor importancia que el torque estático y en líneas de color azul se muestra el torque total ( $\tau$ ) demandado por el manipulador. De dichos resultados se concluye que el torque inercial es más importante que el torque estático cuando se trata de tiempos de recorrido bajos. Se destaca también en la junta 1 que en la demanda de torque, instante después del inicio e instante antes del término del recorrido, se producen picos y esto se debe a que las curvas de aceleración en las juntas, mostrados en la figura 6.36, tienen éste comportamiento.

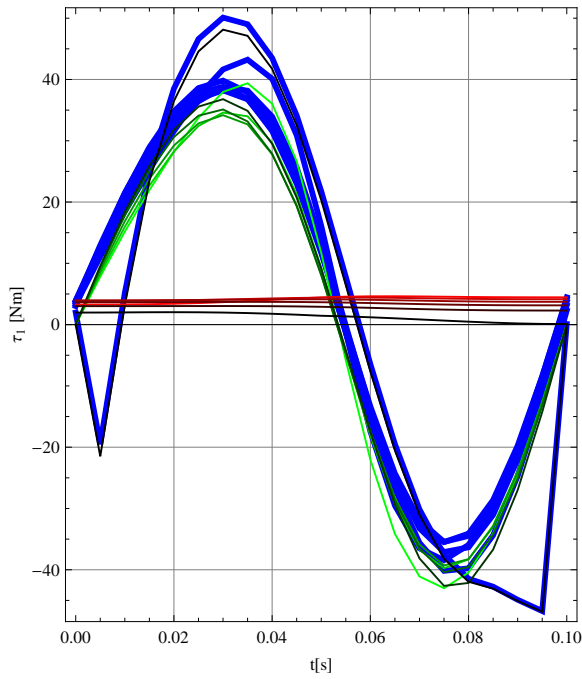


Figura 6.33: Torque demandado en la junta articular 1

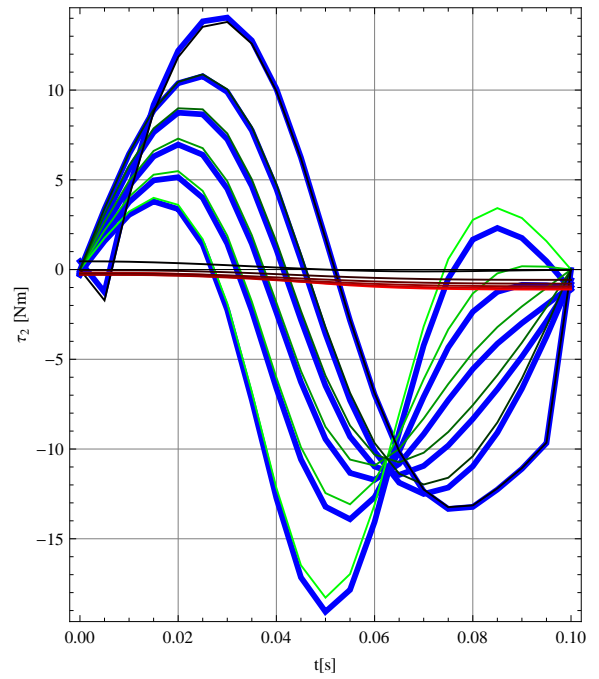


Figura 6.34: Torque demandado en la junta articular 2

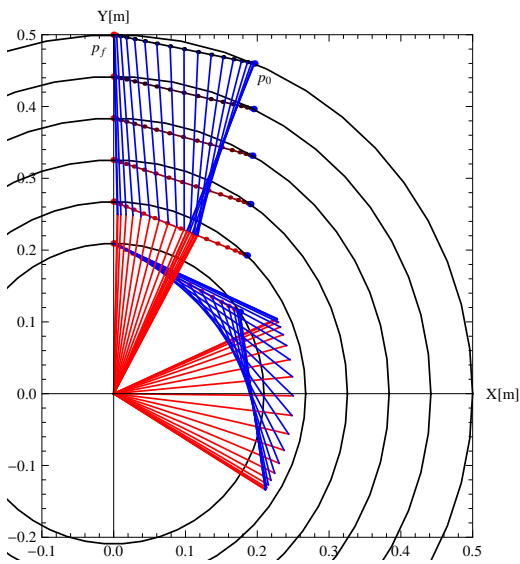


Figura 6.35: Familia de trayectorias y configuración de manipulador

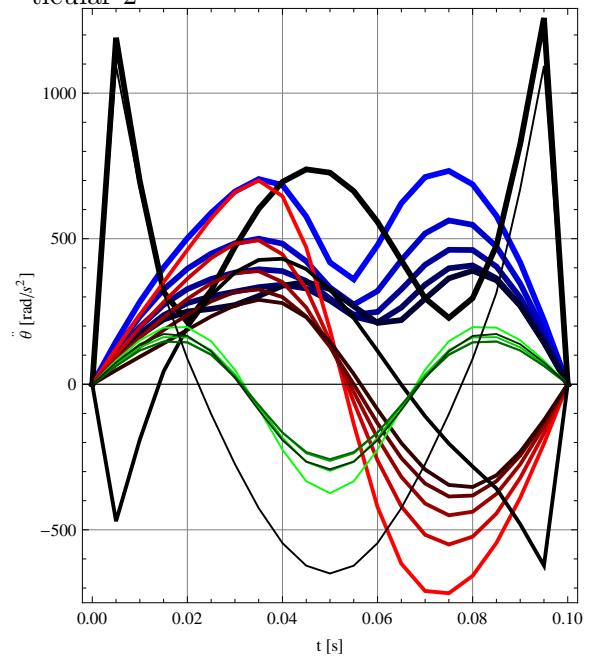


Figura 6.36: Aceleración en las juntas articulares

De forma equivalente al caso 01.a, con la ecuación 6.2 se determina la potencia demandada en las juntas 1 y 2, así como la demandada por dicho sistema de 2GdL. En la figura 6.37 se muestra en líneas de color rojo a negro la potencia demandada por la junta 1 ( $P_1$ ), en color verde a negro lo demandado por la junta 2 ( $P_2$ ), y en azul lo demandado por dicho sistema de 2GdL ( $P$ ). De estos resultados se observa que la potencia demanda en el sistema tiende a ser más pequeño conforme el radio  $r_i$  se incrementa, lo que es semejante al caso 01.a, con excepción del último radio  $r_{10}$  donde la potencia demandada tiene un fuerte incremento, llegando de forma aproximada a la potencia demandada para seguir la trayectoria con el radio  $r_5$ , debido al comportamiento que tiene la demanda de aceleración y torque para seguir dicha trayectoria.



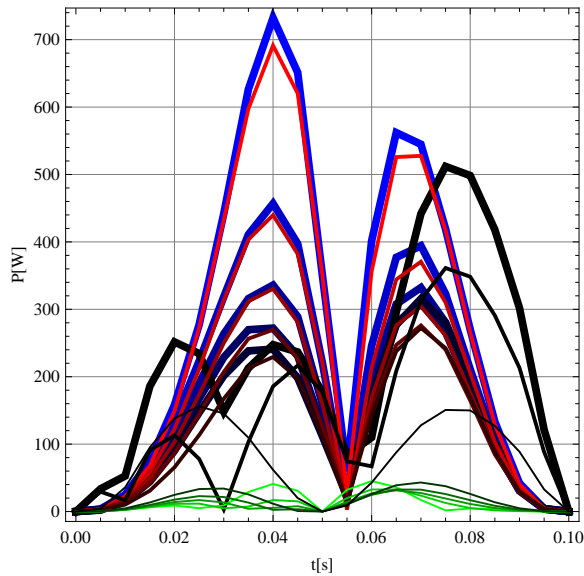


Figura 6.37: Potencia demandada por las juntas 1 y 2, y por el sistema

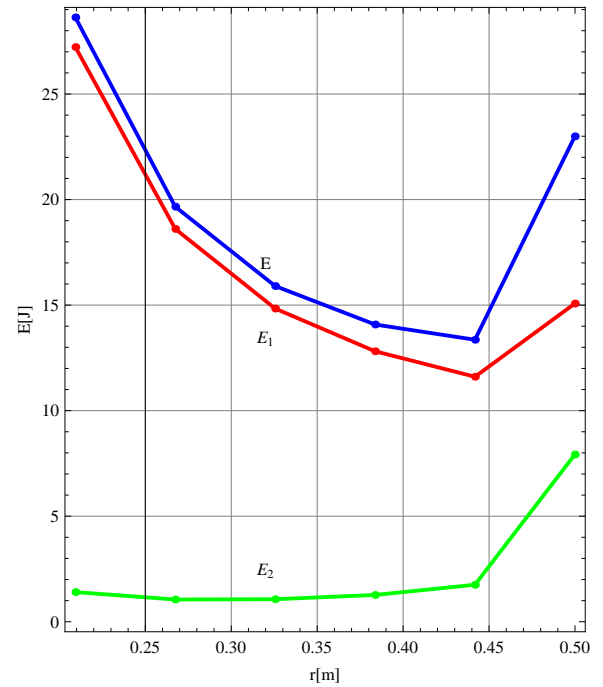


Figura 6.38: Energía demandada por las juntas 1 y 2, y por el sistema

Con la ecuación 6.8 se determinó la energía demandada por la juntas 1 y 2, y la demanda por el sistema. En la figura 6.38 se muestra en líneas de color rojo la energía demandada por la junta 1 ( $E_1$ ) y en color verde la energía demandada por la junta 2 ( $E_2$ ), y en color azul a negro la energía demandada por el sistema de 2GdL (E). Se corrobora lo observado en las curvas de potencia, esto es, que la energía demandada disminuye conforme aumenta el radio  $r_i$ , con excepción del último radio  $r_{10}$  donde la energía demanda aumenta a 22.9954 J y esto se debe a la cercanía con la configuración singular, donde las velocidades y aceleraciones demandadas en las juntas se amplifican en gran proporción con respecto a lo demandado por a las velocidades y aceleraciones demandadas por el OT, también el DCI( ver cap. 5) toma sus mayores valores, es decir donde los momentos de inercia de masa del sistema son más grandes. En la tabla 6.3 se muestran los valores de la energía demanda por cada junta y por el sistema.

Tabla 6.5: 2GdL: Energía demandada, tiempo,  $t_f = 0.1$  s.

$\mathbf{T}_i$	$\mathbf{p}_0[m]$	$\mathbf{p}_f[m]$	$r_i[m]$	$E_1[J]$	$E_2[J]$	$E[J]$
$\mathbf{T}_5$	(0.175697,0.113754)	(0,0.209307)	0.20931	27.2256	1.40382	28.6294
$\mathbf{T}_6$	(0.185491,0.192639)	(0,0.267426)	0.26743	18.6100	1.05327	19.6633
$\mathbf{T}_7$	(0.19033,0.264109)	(0,0.325544)	0.32554	14.8365	1.06673	15.9032
$\mathbf{T}_8$	(0.193087,0.331534)	(0,0.383663)	0.38366	12.8129	1.26851	14.0814
$\mathbf{T}_9$	(0.194809,0.39651)	(0,0.441781)	0.44178	11.6066	1.75212	13.3587
$\mathbf{T}_{10}$	(0.195958,0.459892)	(0,0.499900)	0.49990	15.0740	7.92143	22.9954

**Análisis y discusión de resultados del caso 01.b:** Las trayectorias que se generaron en este caso son semejantes al caso 01.a, con la diferencia de que el tiempo de recorrido disminuyó 90 veces, es decir, el tiempo fue de  $t_f = 0.1$  s; se observa de las figuras 6.33 y 6.34 que el torque demandado en las juntas 1 y 2 por parte de las fuerzas gravitacionales permanecen sin cambio, dado que se trata de los mismos lugares geométricos y del mismo perfil de trayectoria, y en cambio el torque demandado por las fuerzas inerciales se incrementó drásticamente comparado con el caso 01.a, resultando con mayor importancia el término  $\mathbf{I}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}}$  que el término  $\mathbf{b}(\mathbf{q})$  correspondientes a la ec. 3.14.



Se puede inducir que la velocidad y aceleración demandas en las juntas, son quienes influyen en mayor proporción en la demanda de torque. Se observa en la figura 6.29 que en sus puntos extremos generados para el tiempo  $t = 0.005$  s y  $t = 0.095$  s aumenta la demanda de aceleración en las juntas en una proporción aproximada de 8100 veces con respecto a lo demandado por el caso 01.a., es decir que la demanda de potencia y de energía por parte del manipulador va estar influenciado principalmente por la aceleración de las juntas, por lo que se descarta que la trayectoria  $\mathbf{T}_{10}$  sea quien va a demandar menos energía, que fue lo que resultó en el caso 01.a, dadas las altas demandas de aceleración que se registran en las juntas. Realizando las determinaciones de la energía demandada por el manipulador para seguir cada una de las trayectorias, resultó que la trayectoria  $\mathbf{T}_9$  es la que menor energía demanda dentro de la familia, dado que la junta 1 demanda  $E_1 = 11.6066$  J y la junta 2 demanda  $E_2 = 1.75212$  J y el sistema en su conjunto  $E = 13.3587$  J a comparación de lo demandado por la trayectoria  $\mathbf{T}_5$  (la de mayor demanda de energía), donde  $E_1 = 27.2256$  J,  $E_2 = 1.40382$  J y lo demandado por el sistema fue de  $E = 28.6294$  J. Por lo que, para la junta 1, si se considera 27.2256 J como el 100 % entonces 11.6066 J corresponde a un 57.3688 %. Para la junta 2, considerando 1.40382 J como 100 %, entonces 1.75212 J corresponde a un aumento de 24.81 %. Considerando al sistema, si se toma 28.6294 J como el 100 %, entonces 13.3587 J corresponde a una disminución de 53.34 %.

Comparando la trayectoria  $\mathbf{T}_{10}$ , que demanda en las juntas 1, 2 y por el sistema  $E_1 = 15.0740$ ,  $E_2 = 7.92143$  y  $E = 22.9954$  J respectivamente, con la trayectoria  $\mathbf{T}_9$ ; resulta que si se considera  $E_1 = 15.0740$  como el 100 % entonces 11.6066 J corresponde a un 23.003 %. Para la junta 2, considerando 7.92143 como 100 %, entonces 1.75212 J corresponde a un 77.881 %. Para el sistema, tomando 22.9954 J como el 100 %, entonces 13.3587 J corresponde a un 41.907 %. De estos resultados se corrobora que la aceleración es la principal influencia en la demanda de energía y con ello están inmiscuidos el tiempo de recorrido y la posición de la trayectoria, es decir, estos son los principales factores en la demanda de potencia y energía.

Finalmente, de las tablas 6.2 y 6.4, resulta que cada una de las velocidades angulares promedio obtenidas en el caso 01.b ( $\bar{\omega}_b$ ) guarda una relación con cada velocidad del caso 01.a ( $\bar{\omega}_a$ ), de tal manera que se puede determinar a cada  $\bar{\omega}_b$  de forma aproximada, a través de la siguiente relación:  $\bar{\omega}_b \approx \bar{\omega}_a \left( \frac{t_{f_a}}{t_{f_b}} \right)$ , donde  $t_{f_a}$  y  $t_{f_b}$  son los tiempos de recorrido para los casos 01.a y 01.b respectivamente. De forma semejante a las velocidades, cada aceleración angular promedio del caso 01.b ( $\bar{\alpha}_b$ ) guarda una relación con cada aceleración del caso 01.a ( $\bar{\alpha}_a$ ), tal que:  $\bar{\alpha}_b \approx \bar{\alpha}_a \left( \frac{t_{f_a}}{t_{f_b}} \right)^2$ .

---

## CONCLUSIONES

Se evaluó el efecto de las fuerzas gravitatorias e inerciales en la demanda de energía, se presentaron dos casos con marcada diferencia en el tiempo de recorrido de la trayectoria, siendo éstas de la misma familia (lugar geométrico recto y perfil de trayectoria cicloidal), lo que dio la oportunidad de comparar los requerimientos de velocidad, aceleración, torque, potencia y energía en cada una de las juntas y por el sistema.

En el caso donde las velocidades y aceleraciones son pequeñas, tal como el caso 01.a, la creación de un mapa de torque estático en el espacio de trabajo del manipulador robótico permitió visualizar y prever la demanda de torque en las juntas del manipulador y del sistema en su conjunto. En términos generales el mapa de torque estático permite ubicar y seleccionar la posición de una trayectoria que demandará menos torque y en consecuencia menos energía.

Para el caso donde las velocidades y aceleraciones demandadas en el OT del manipulador son grandes, tal como el caso 01.b, el torque demandado por las fuerzas inerciales fueron el principal factor en la demanda de torque total y en consecuencia en la demanda de energía. Dada la importancia de las velocidades y aceleraciones demandadas por el manipulador, una de las formas que se encontró para prever el desempeño cinemático de velocidad (manipulabilidad cinemática) independientemente del tiempo de recorrido que ejecuta el manipulador, es la aplicación de los conceptos de valores y vectores propios, y de número de condición de una matriz (obtenida a partir de la matriz Jacobiana) con lo cual se crearon mapas de velocidad en el OT del manipulador que indican las direcciones con mayor y menor ganancia de velocidad y la relación que guardan estas magnitudes. Con lo cual se pudo prever las posiciones de mayor y menor demanda de velocidad en las juntas del manipulador robótico. De igual forma los mapas de aceleración en el OT permitieron prever la demanda de aceleración en las juntas del manipulador (manipulabilidad dinámica). En general, con la selección de las posiciones de mayor ganancia de velocidad y aceleración, sin llegar a posiciones singulares, se obtiene menor demanda de torque y en consecuencia de energía mecánica.

Específicamente, de los resultados obtenidos en los casos 01.a y 01.b se concluye que efectivamente la ubicación de la trayectoria sobre el espacio de trabajo del manipulador, es el principal factor de consumo de energía mecánica, cuando el tiempo de recorrido es relativamente grande, dado que las fuerzas inerciales son prácticamente despreciables a comparación de las fuerzas gravitacionales. Sin embargo, cuando el tiempo de recorrido en la trayectoria es relativamente corto, las fuerzas inerciales debido a las velocidades y aceleraciones son los principales factores del consumo de energía. Resultando de esto, que la demanda de torque y la energía están en función del tiempo de recorrido y de la ubicación de la trayectoria, dado que en función de la posición de esta, se demanda mayor o menor velocidad y aceleración en las juntas del manipulador como lo observado en las figuras 6.23 y 6.29 respectivamente y esta demanda de velocidad y aceleración se pudo prever geoméricamente con la creación de mapas de manipulabilidad cinemática y dinámica, respondiendo así a la hipótesis número 3.

Con respecto a las transformaciones cinemáticas de velocidad obtenidas con los valores y vectores propios de la matriz  $\mathbf{A}$  sobre el área de trabajo (capítulo 4), se concluye que en efecto, estas tienen un comportamiento tal, que permiten ser representadas a través de funciones, como las obtenidas, del tipo polinomial, respondiendo de forma afirmativa la hipótesis número 1.

Además se puede concluir de los resultados obtenidos (capítulo 6), que el conjunto de posiciones con mejor desempeño cinemático de velocidad (más cercanos a la isotropía cinemática) que corresponden a la trayectoria  $\mathbf{T}_5$  no son los de menor demanda de energía, sino al contrario son los que más energía demandan de las trayectorias evaluadas, respondiéndose de esta forma la hipótesis número 2.

---

## Bibliografía

- [1] Li, Y., and Bone, G.M., 2001, "Are parallel manipulators more energy efficient?," Proceedings IEEE International Symposium on Computational Intelligence in Robotics and Automation, Banff, Alberta, Canada, pp. 41-46.
- [2] Diken, H., 1994, "Energy efficient sinusoidal path planning of robot manipulators," Mechanism and Machine Theory, Vol. 29, No. 6, pp. 785-792. Elsevier Science Ltd.
- [3] Chou, L. S., and Song S. M., 1992, "Geometric Work of Manipulators and Path Planning Based on Minimum Energy Consumption," Transactions of the ASME. Vol. 114. pp. 220-226.
- [4] Santos, R. R. d., Steffen, V., and Saramago, S. F. P., 2010, "Optimal Task Placement of a Serial Robot Manipulator for Manipulability and Mechanical Power Optimization," Scientific Research, 2, pp. 512-525.
- [5] Saramago, S. F. P., and Steffen, V. 1998, "Optimization of the trajectory planning of robot manipulators taking into account the dynamics of the system," Mechanism and Machine Theory, Vol. 33, No. 7, pp. 883-894. Elsevier Science Ltd.
- [6] Denavit, J. and Hartenberg, R.S., 1955, "A kinematic rotation for lower-pair mechanisms based on matrices," ASME Journal Applied Mechanics 22, pp. 215-221.
- [7] Fu, K.S., Gonzalez, R. C., and Lee, C.S.G., 1987, Robotics: control, sensing, vision, and intelligence. Ed. McGraw-Hill.
- [8] Rojas, S. A. A., 1989, "Dinámica de sistemas articulados de cuerpos rígidos," Tesis doctoral, DEPEFI, UNAM.
- [9] Kane, T.R., 1973, "Lagrange's Equations for a Rigid Body," Transactions of the ASME, Journal of Applied Mechanics. pp. 1118-1119.
- [10] Silver, W. M., 1982, "On the equivalence of Lagrangian and Newton-Euler Dynamics for Manipulators," The International Journal of Robotics Research. Vol. 1, No. 2, pp. 60-70.
- [11] Hollerbach, J. M., 1980, "A recursive Lagrangian Formulation of Manipulator Dynamics and a Comparative Study of Dynamics Formulation Complexity," IEEE Transactions on systems, man and cybernetics, vol. SMC-10, No. 11.
- [12] Goldstein, H., Poole, C., and Safko, J., 2002, Classical Mechanics, Third Edition, Ed. Addison Wesley.
- [13] Byung K. K., and Kang G. S., 1985, "Minimum-Time Path Planning for Robot Arms and Their Dynamics," IEEE Transactions on systems, man and cybernetics, vol. SMC-15, No. 2.
- [14] Meirovich, L., 1985, Introduction to dynamics and control, Ed. John Wiley and Sons, pag. 323-351.
- [15] Baruh, H., 1999, Analytical dynamics, Ed. McGraw-Hill, pag. 323-351.
- [16] Thorton, S. and Marion, J. B., 2004, Classical dynamics of particles and systems, Fifth edition, Ed. Thomson Learning, pag. 411-463.

- [17] Angeles, J., 2007, *Fundamentals of Robotic Mechanical Systems: Theory, Methods, and Algorithms*, Third edition, Ed. Springer, pag. 201-232.
- [18] Sciavicco, L., and Siciliano, B., 1999, *Modelling and Control of Robot Manipulators*, Second Edition, Ed. Springer, pag. 116-129.
- [19] Tsai, L. W., 1999, *Robot Analysis: the mechanics of serial and parallel manipulators*, Ed. John Wiley and Sons, pag. 211-221.
- [20] Yoshikawa, T., 1985, "Manipulability of Robotic Mechanisms," *The International Journal of Robotics Research* Vol. 4, No. 2, pp. 3-9.
- [21] Yoshikawa, T., 1985, "Manipulability and Redundancy Control of Robotic Mechanisms," *IEEE*, pp. 1004-1009.
- [22] Angeles, J., and Lopez-Cajun, C.S., 1992, "Kinematic Isotropy and Conditioning Index of Serial Robotic Manipulator," *The International Journal of Robotics Research* Vol. 11, No. 6, pp. 560-571.
- [23] Lee, M. Y., Erdman, A. G., and Gutman, Y., 1993, "Development of Kinematic/Kinetic Performance Tools in Synthesis of Multi-DOF Mechanisms," *Transactions of the ASME*. Vol. 115. pp. 462-471.
- [24] Lee, M.-Y., Erdman, A. G., and Gutman, Y., 1994, "Applications of Kinematic/Kinetic Performance Tools in Synthesis of Multi-DOF Mechanisms," *Transactions of the ASME*. Vol. 116. pp. 452-461.
- [25] Chiacchio, P., Chiaverini, S., Sciavicco, L., and Siciliano, B., 1991, "Global Task Space Manipulability Ellipsoids for Multiple-Arm Systems," *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, Vol. 7. No. 5. pp. 678-685.
- [26] Melchiorri, C., 1993, "Comments on 'Global Task Space Manipulability Ellipsoids for Multiple-Arm Systems' and further considerations," *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, Vol. 9. No. 2. pp. 232-236.
- [27] Salisbury, J. K., 1982, "Kinematic and force analysis of articulated hands," Ph. D. dissertation, Mechanical Engineering Department, Stanford University, Stanford, CA.
- [28] Lee, J., 1997, "A Study on the Manipulability Measures for Robot Manipulators," *IEEE Proc. IROS 97*, pp. 1458-1465.
- [29] Golub, G.H., and Van Loan, C.F., 1996, *Matrix Computations*, Third edition, The Johns Hopkins University Press, Baltimore. Pag. 54-59.
- [30] Strang, G., 2006, *Linear Algebra and its applications*, Fourth edition, Thomson Learning, Inc.
- [31] Flores D., O., Carrera B., J. and Cuenca J., F., 2013, "Functions in Polar Coordinates to determine the Kinematic Manipulability in Serial Robots," *International Journal of Engineering Innovation and Research*, Vol. 2, Issue 3, pp. 293-300.
- [32] Chiacchio, P., Chiaverini, S., Sciavicco, L., and Siciliano, B., 1992, "Influence of Gravity on the Manipulability Ellipsoid for Robot Arms," *ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, Vol. 114, pp. 723-727.
- [33] Ma, O. and Angeles, J., 1990, "The Concept of Dynamic Isotropy and Its Application to Inverse Kinematics and Trajectory Planning," *IEEE Proceedings of the International Conference on Robotics and Automation*, Cincinnati, OH., pp. 481-486.

- [34] Yoshikawa, T, 1985, "Dynamic Manipulability of Robot Manipulators," IEEE Proceedings 24th Conference on Decision and Control, pp. 1033-1038.
- [35] Asada, H, 1983, "A Geometrical Representation of Manipulator Dynamics and Its Application to Arm Design," ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control, Vol. 105, pp. 131-142.
- [36] Graettinger, T.J. and Krogh, B. H., 1988, "The Acceleration Radius: A Global Performance Measure for Robotic Manipulators," IEEE International Conference on Robotics and Automation, Vol. 4, pp.60-69.
- [37] Shiller, Z. and Dubowsky, S., 1987, "Time Optimal Paths and Acceleration Lines of Robotics Manipulators," IEEE Proceedings of the 26th Conference on Decision and Control, Los Angeles, CA., pp.199-204.
- [38] Nieves, H.A. y Dominguez, S. F., 1999, Métodos Numéricos aplicados a la Ingeniería, Ed. CECOSA, Quinta ed. México.
- [39] Gosselin, C., and Angeles, J., 1991, "A Global Performance Index for the Kinematic Optimization of Robotic Manipulators," Transactions of the ASME, Vol. 113, pp. 414-421.
- [40] Norton, R.L., 2004, Design of machinery: An introduction to the synthesis and analysis of mechanisms, Third edition, Ed. McGrawHill, pag. 388-421.