



Universidad Nacional Autónoma de México  
Facultad de Ingeniería

# Flujo viscoelástico alrededor de dos esferas cayendo bajo la misma trayectoria

Tesis

que para obtener el grado de

Ingeniero Mecánico

presenta

**Gerardo Emilio Pradillo Macías**

Tutor: Dr. Baltasar Mena Iniesta

México D.F., Septiembre de 2013

# CONTENIDO

RESUMEN .....	4
OBJETIVOS .....	6
Objetivo principal .....	6
Objetivos particulares .....	6
PREFACIO.....	7
1.1. INTRODUCCIÓN .....	7
1.2. ANTECEDENTES .....	9
1.2.1. Interacción entre esferas .....	9
1.2.2. Cauda negativa .....	15
1.3. HIPÓTESIS .....	17
DESARROLLO EXPERIMENTAL .....	19
2.1. ARREGLO EXPERIMENTAL .....	19
2.2. DISPOSITIVO LIBERADOR DE ESFERAS.....	20
2.3. ESFERAS.....	21
2.4. PREPARACION DE LOS FLUIDOS .....	22
2.5. CARACTERIZACIÓN REOLOGICA .....	24
2.6. DESCRIPCIÓN DEL EXPERIMENTO .....	27
2.7. TECNICAS DE VISUALIZACIÓN Y VELOCIDADES DE SEDIMENTACIÓN .....	28
2.8. CONDICIONES DE REFERENCIA.....	29
RESULTADOS EXPERIMENTALES.....	32
3.1. VELOCIDAD DE SEDIMENTACIÓN DE ESFERAS INDIVIDUALES.....	32
3.1.1. Fluido Viscoelástico – 1 (óxido de polietileno).....	32
3.1.2. Fluido Viscoelástico – 2 (poliacrilamida) .....	33
3.2. VELOCIDAD DE SEDIMENTACIÓN DE ESFERAS CONSECUTIVAS.....	36
3.2.1. Fluido Newtoniano .....	36
3.2.2. Fluido Viscoelástico – 1(óxido de polietileno).....	43
3.2.3. Fluido Viscoelástico – 2 (poliacrilamida) .....	50
3.3. DISTANCIA ENTRE CENTROS - FLUIDOS NO NEWTONIANOS .....	57

3.4.	NUMEROS ADIMENSIONALES .....	62
3.4.1.	Reynolds y Weissenberg .....	62
	DISCUSION.....	65
4.1.	FLUIDO VISCOELASTICO - 1 (óxido de polietileno).....	65
4.2.	FLUIDO VISCOELÁSTICO - 2 (poliacrilamida) .....	65
	CONCLUSIONES .....	67
	REFERENCIAS.....	69

## RESUMEN

Numerosas aplicaciones involucran el movimiento e interacción de partículas en fluidos complejos no Newtonianos. Entre algunos ejemplos se puede mencionar su uso dentro de la industria petrolera, específicamente en la extracción mejorada de petróleo; cuyo propósito, además de recuperar la presión de la reserva, es el de mejorar el desplazamiento del petróleo y su flujo utilizando una “inundación” polimérica.

A pesar de que el tema del transporte de partículas a través de fluidos no Newtonianos ha sido ampliamente estudiado, aun siguen existiendo dudas e inquietudes respecto a ciertos comportamientos característicos del fluido y su interacción con partículas inmersas en él.

El presente trabajo pretende contribuir con la literatura ya existente al estudiar las características del comportamiento de dos esferas que descienden bajo la misma trayectoria en dos fluidos viscoelásticos adelgazantes (óxido de polietileno y poliacrilamida) con distintas propiedades. Para lograr el propósito de este proyecto se realizaron experimentos en los que se tomaron videgrabaciones de esferas descendiendo consecutivamente y bajo la misma trayectoria dentro de los fluidos antes mencionados; variando entre eventos la densidad, distancia de separación inicial y tamaño de las esferas utilizadas.

Las videgrabaciones se convirtieron en imágenes que fueron analizadas utilizando un programa de rastreo de partículas elaborado en MATLAB. El programa permite calcular la distancia entre las esferas a lo largo de su recorrido vertical y consecuentemente realizar el cálculo de sus velocidades.

Los resultados muestran claras distinciones entre las propiedades de los fluidos en estudio. Para la solución de óxido de polietileno 0.5%wt en H<sub>2</sub>O, las velocidades de sedimentación son elevadas lo que consecuentemente genera flujos con  $Re > 1$  en donde la inercia empieza a tomar protagonismo en la interacción. Físicamente las esferas interaccionan de tal manera que la segunda esfera tiene una mayor velocidad pero se desplazará lateralmente antes de alcanzar a la esfera líder. El desplazamiento lateral podría ocurrir debido a los efectos viscoelásticos del fluido,  $We > 1$ , o a los posibles efectos de inercia.

Por otro lado el flujo en la solución de poliacrilamida 0.5% en H<sub>2</sub>O está caracterizado por menores números de Reynolds,  $Re < 1$ , y mayores números de Weissenberg,  $We > 8$ . En la interacción entre esferas ocurre que la segunda esfera alcanza a la esfera líder y se acoplan una

tras otra en dirección paralela a la gravedad. La estabilidad podría atribuirse a la alta elasticidad de éste fluido. Cuándo el número de Reynolds incrementa,  $Re > 1$ , comienzan a aparecer oscilaciones entre ambas esferas, la cuales se acercan y alejan periódicamente manteniéndose dentro del mismo eje de sedimentación.

# OBJETIVOS

## **Objetivo principal.**

Estudiar la interacción que se da entre dos esferas que se dejan caer consecutivamente, y bajo la misma trayectoria vertical en dos fluidos viscoelásticos de características distintas [óxido de polietileno POLYOX –UCARFLOC 308 y poliacrilamida Separan AP-30].

## **Objetivos particulares**

Observar y describir el comportamiento de un par de esferas descendiendo en dos fluidos adelgazantes y viscoelásticos.

Elaborar un programa de análisis de imágenes para determinar la posición de las esferas con respecto a una referencia, y consecuentemente calcular sus velocidades de sedimentación.

Explicar las condiciones de flujo que promueven el acercamiento de las dos esferas o el distanciamiento de las mismas en los fluidos viscoelásticos en estudio.

Contribuir con la literatura existente e intentar elucidar los mecanismos físicos que se encuentran detrás de los distintos patrones de interacción entre las esferas.

# **PREFACIO**

## **1.1. INTRODUCCIÓN**

El fenómeno de transporte por sedimentación de partículas ocurre de manera cotidiana en distintos procesos tanto naturales como artificiales de nuestro planeta. El movimiento de partículas sólidas se debe típicamente a una combinación de la fuerza de gravedad actuando sobre la partícula, y/o el movimiento del fluido en el cual se encuentra inmersa la partícula. El entendimiento de los mecanismos físicos de los fenómenos que se presentan en el flujo alrededor de partículas ha sido desde hace varios años de vital importancia, ya que a partir de su estudio es posible predecir y diseñar de manera apropiada ciertos procesos industriales; dentro de los cuales podemos mencionar los procesos que mantienen la calidad y durabilidad de bote de pintura común ya que éstos dependen de las propiedades de sedimentación de las partículas que se encuentran en suspensión con la pintura.

Podemos mencionar también la relevancia del entendimiento de flujo alrededor de partículas dentro de los campos de la medicina o ingeniería biomédica donde existe un creciente interés por entender la física del movimiento de células a través del cuerpo humano y su relación con algunas enfermedades, sus características y su comportamiento.

También en la industria petrolera tienen relevancia estos efectos. La extracción mejorada de petróleo cuyo propósito, además de recuperar la presión de la reserva, es el de mejorar el desplazamiento del petróleo y su flujo utilizando una “inundación” polimérica.

A pesar de que el estudio de dichos mecanismos lleva ya más de dos décadas, aún existen grandes interrogantes acerca de los fenómenos que gobiernan estos procesos. Anteriormente se han encontrado distancias críticas para el acercamiento o distanciamiento de esferas [2]; posteriormente Bird et al. [14] sugirieron que la separación de las partículas está asociada con la creación de un flujo en dirección opuesta detrás del descenso de la primera esfera. También se han observado los comportamientos que existen entre partículas cilíndricas en soluciones viscoelásticas [1] y el ángulo de descenso que éstos presentan al descender dependiendo en las concentraciones del fluido.

El presente proyecto pretende realizar un estudio experimental de la cinemática del flujo que se desarrolla en la sedimentación de esferas que caen consecutivamente y bajo la misma trayectoria en tres fluidos con propiedades físicas y químicas distintas. Dos de éstos fluidos

cuentan con propiedades viscoelásticas y consisten en una solución al 0.5%wt de poliacrilamida (Separan-AP30) en agua y una solución al 0.5%wt de óxido de polietileno (Ucarfloc 309) en agua. Como fluido de referencia se utilizó una solución de 98%wt de glicerina en agua, el cual al ser un fluido Newtoniano carece de propiedades elásticas. Los experimentos se realizaron a partir de la visualización del descenso de esferas, las cuales estaban compuestas por distintos materiales (i.e. distintas densidades), distintos diámetros y cuya distancia de liberación inicial fue cambiando a lo largo de distintos eventos.

De acuerdo con la literatura [32], la cinemática del flujo alrededor de esferas está compuesta de la siguiente manera:

- Flujo extensional biaxial en la parte frontal de la esfera
- Flujo cortante en la parte ecuatorial de la esfera.
- Flujo extensional uniaxial en la parte posterior de la esfera.

El diagrama que ilustra dicha cinemática de flujo se presenta a continuación:

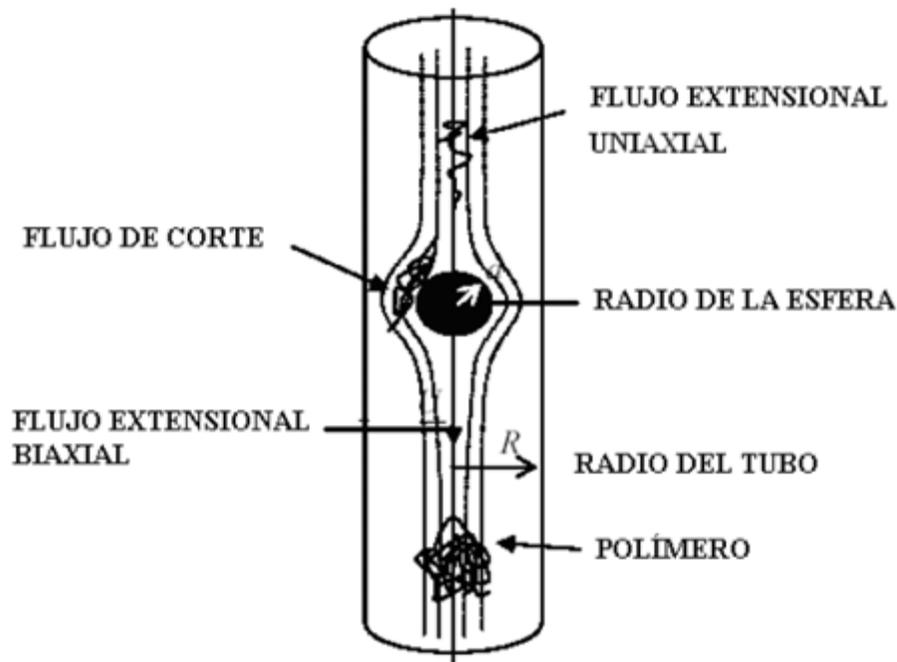


Figura 1.1. [32] Componentes de flujo alrededor de las esferas en el tubo de sedimentación

El flujo que se presenta en la parte inferior de la esfera es biaxial debido a que al descender la partícula se presenta la formación de dos trayectorias extensionales de flujo. Mientras que en la parte posterior a las partículas se presenta únicamente una trayectoria de flujo la cual corresponde a la dirección de la cauda generada por el movimiento descendente de la esfera.

La importancia que presenta cada componente de flujo depende del comportamiento reológico del fluido empleado, la proximidad de las paredes del tubo con las partículas en sedimentación (relación diámetros esfera-tubo) y la velocidad de sedimentación de las partículas.

El estudio realizado para la sedimentación de partículas consecutivas presentado en este trabajo tuvo como objetivos principales el análisis de los siguientes puntos:

- Efecto del distanciamiento de las esferas al ser liberadas.
- Comportamiento en relación con los distintos tamaños de las esferas.
- Efecto del número de Reynolds (distintas densidades y velocidades de sedimentación)
- Efecto del número de Weissenberg.

## **1.2. ANTECEDENTES**

### **1.2.1. Interacción entre esferas**

La interacción entre esferas que sedimentan en fluidos no Newtonianos constituye un campo de estudio vigente en la reología. La importancia de dicho conocimiento yace en la imperiosa necesidad de desarrollar procesos industriales más eficientes (cómo la separación líquido sólido y el transporte de sólidos en procesos de reciclaje de papel). En los cuales se conozcan las características del flujo de partículas tales como su velocidad terminal y las variables que influyen en su desplazamiento e interacción con partículas vecinas dentro del fluido. Estas variables incluyen la forma, el tamaño, la densidad y la orientación de las partículas al igual que las propiedades del fluido y el tamaño y forma del recipiente en el cual se desplazarán.

Respecto al tema abordado en esta tesis se han realizado ya diversos trabajos anteriormente; entre los cuales destacan lo documentado por Liu y Joseph [1] quienes realizaron experimentos de sedimentación de partículas cilíndricas principalmente en soluciones poliméricas moderadamente concentradas. Durante sus experimentos estudiaron los efectos causados por inercia y esfuerzos normales y las condiciones en las que uno predomina sobre el otro. Al dejar caer las partículas cilíndricas en fluidos newtonianos, se dieron cuenta que estas giraban y orientaban su lado más largo perpendicularmente al flujo, por lo que atribuyeron este movimiento a los efectos de inercia. Cuando los mismos objetos caen en un fluido viscoelástico, estos no ponen su lado más alargado perpendicular al flujo, si no realizan lo opuesto al alinear éste lado en dirección paralela al flujo. Notaron que la diferencia que existe entre objetos que caen en fluidos Newtonianos y viscoelásticos era realmente dramática.

Se dieron cuenta que en el caso de soluciones poliméricas muy diluidas, los efectos de inercia y viscoelasticidad entran en competencia y el resultado se verá reflejado en el ángulo de inclinación de los cilindros a lo largo del flujo. Posteriormente reportaron [31] la conocida interacción entre partículas consecutivas para fluidos Newtonianos como: *drafting, kissing and*

*tumbling* (acercamiento, toque y rebote) y para fluidos no Newtonianos viscoelásticos como: *Drafting, kissing and chaining* (acercamiento, toque y encadenamiento). Mencionaron que al ocurrir el “toque” de las dos esferas, éstas forman momentáneamente cuerpos alargados. Estos cuerpos, constituidos por las dos esferas, son inestables en fluidos Newtonianos y tienden a alinearse de manera perpendicular a la dirección del flujo por lo que ocurre el rebote y se separan. Este mecanismo implica entonces que globalmente la única configuración estable para dos esferas en sedimentación a través de un fluido Newtoniano es en dirección perpendicular al flujo.

El mecanismo por el cual ocurre esta interacción en fluidos Newtonianos es parecido al mecanismo por el cual un ciclista es ayudado por la baja presión que se genera en la estela de algún ciclista que lleve ventaja. Si la segunda esfera entra en la cauda de alguna esfera líder, ocurrirá un diferencial de presión que impulsará a la segunda esfera hacia la cauda de la esfera líder debido a la baja presión. Esto hace que la segunda esfera se aproxime y toque la esfera líder.

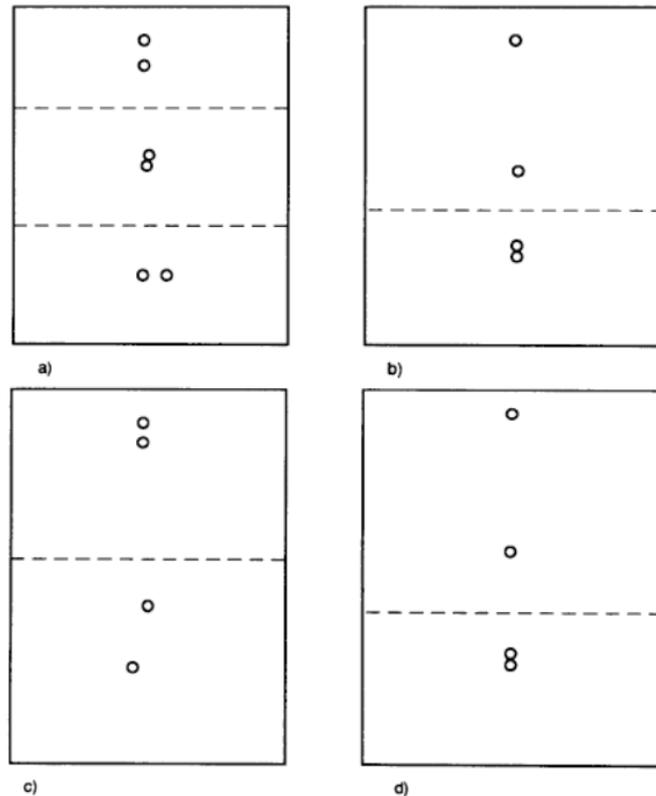
Para un fluido viscoelástico, los movimientos secundarios debidos a la viscoelasticidad son revertidos, lo que quiere decir que se forma una región de alta presión frente a la esfera, una de baja presión en la parte posterior de la esfera y dos regiones de alta presión en sus laterales, lo que lleva a la formación de una cauda negativa. Por lo que la atracción entre esferas es de una naturaleza distinta, que probablemente se deba a la inversión de la presión.

Riddle, Navarez y Bird [2] realizaron experimentos de sedimentación de esferas bajo la misma trayectoria en fluidos viscoelásticos y reportaron la existencia de ciertas distancias críticas que determinan el resultado de la interacción entre las esferas. Demostraron que existe una distancia de separación inicial crítica entre las dos esferas en sedimentación. Se demostró que para separaciones iniciales mayores a la distancia de separación crítica, las dos esferas eventualmente divergen y para las esferas soltadas a una distancia menor a la crítica las esferas eventualmente convergen.

Estos resultados sugieren que la atracción entre esferas ocurre gracias a un fenómeno de corto alcance (detrás de la primera esfera).

Debido a que la mayoría de los experimentos relacionados con el uso de soluciones poliméricas son altamente adelgazantes a corte, Gheissary y Van den Brule [3] decidieron conducir experimentos en donde pudieran separar los efectos elásticos de aquellos presentados por el adelgazamiento del fluido. Por lo que realizaron experimentos utilizando un fluido Newtoniano, un fluido de Boger, un fluido adelgazante inelástico y un fluido viscoelástico adelgazante. Sus experimentos arrojaron resultados parecidos a los obtenidos por Liu y Joseph [1] para la poliacrilamida (acercamiento, toque y encadenamiento). Sin embargo los resultados más interesantes fueron los observados con el Newtoniano y el Boger. En el Newtoniano, observaron el mecanismo de acercamiento, toque y rebote, sin embargo para el fluido de Boger cuándo la segunda esfera se encuentra en la cauda de la esfera líder, en vez de existir un acercamiento, la segunda esfera se aleja. Esto es particularmente interesante ya que la única diferencia entre el fluido de Boger y el fluido Newtoniano es la elasticidad que se presenta en el primero; por lo que concluyeron que lo único que puede estar causando la separación son las fuerzas elásticas. Luego

observaron que en su fluido adelgazante inelástico el acercamiento entre esferas consecutivas era aun mayor que el presentado utilizando el fluido elástico por lo que se contradecía lo que se había mencionado por Liu y Joseph [1] en donde la agregación de partículas es causada por la elasticidad. Un esquema de esta interacción [3], se presenta en la Figura 2.1.



**Figura 1.2. [3] Interacción hidrodinámica entre dos esferas que caen con un arreglo en serie a largo del eje vertical de un contenedor cilíndrico conteniendo: (a) fluido newtoniano, (b) fluido adelgazante con poca elasticidad (Shellflo), (c) fluido de Boger (PAA), (d) fluido adelgazante con un nivel intermedio de elasticidad (solución poliacrilamida)**

Cabe señalar que al utilizar el fluido inelástico adelgazante Shellflo y la poliacrilamida, las esferas siempre se acercaban, inclusive para separaciones iniciales grandes (i.e.  $> 50d$ ). Por lo que no observaron la separación inicial crítica descrita por Riddle et al. [2]. Por lo que consideraron que existen dos regiones importantes a considerar durante la interacción entre esferas sedimentando a lo largo del mismo eje. La región de campo cercano, en la que dos esferas interactúan únicamente en el sentido hidrodinámico y la de campo alejado en la que no están interactuando hidrodinámicamente. A lo que se refieren con campo alejado es que la segunda esfera es influenciada por la esfera líder en el sentido en el que la segunda esfera se encuentra viajando en un “hoyo” creado en el fluido por la líder. Esto quiere decir que en la ausencia de la interacción de campo cercano, las dos esferas eventualmente se juntarían en soluciones que

exhiben el efecto del “hoyo” (poliacrilamida, polyox, Shellflo). La interacción de campo cercano está influenciada por las características viscoelásticas del fluido; particularmente las propiedades elongacionales.

Bot y Hulsen [4] realizaron experimentos de partículas sedimentando en fluidos de Boger. Las esferas se dejaron caer simultáneamente variando la distancia inicial entre los centros de las mismas. Observaron que el mecanismo sujetador y liberador de esferas causaba una disminución en la velocidad en la segunda esfera por lo que esta se separaba de la primera. Después de este efecto, se dieron cuenta de que las esferas se atraían cuándo la distancia entre las esferas era grande y se alejaban cuando la distancia entre las mismas era pequeña. Notaron que eventualmente la distancia entre las esferas se estabilizaba a una distancia independiente de la separación inicial. Esto contrastaba drásticamente con las distancias críticas reportadas por Riddle [2], para fluidos adelgazantes. Bot y Hulsen observaron que al dejar caer dos esferas de forma consecutiva, la segunda tiende a incrementar su velocidad para intervalos de tiempo de sedimentación menores a dos minutos lo cual podría relacionarse con el hecho de que a distancias iniciales mayores la segunda esfera se siga acercando. Concluyeron que para su fluido de Boger las esferas logran una distancia final única de estabilidad. Este arreglo estable es el resultado de dos efectos. El primero debido a la velocidad aumentada de la segunda esfera que es más o menos independiente de la posición de la primera esfera. El segundo efecto es el que la velocidad de la esfera líder es dependiente de la distancia de separación; lo que quiere decir que la velocidad de esta esfera a largas distancias de separación es similar a la de la esfera individual pero incrementa para distancias pequeñas de separación.

La explicación que le atribuyeron a estos comportamientos fue la siguiente: Una esfera individual experimenta un incremento en su arrastre debido a los grandes esfuerzos elongacionales en la cauda de la esfera. Dos esferas a una distancia inicial de separación grande se atraen, esta atracción se debe a la incremento en la velocidad de la segunda esfera. Cuando la segunda esfera se aproxima a la esfera líder, se inhibe el desarrollo de la cauda de la esfera líder, que a su vez resulta en una reducción de arrastre sobre la primera esfera y por ende un incremento en su velocidad. Este efecto se presentará antes si la cauda es más larga lo que llevará a una distancia de separación estable mayor.

Joseph, Liu, Poletto y Feng [5] realizaron experimentos de sedimentación de esferas colocadas lado a lado a una distancia determinada. En fluidos Newtonianos, dos esferas lanzadas lado a lado que inicialmente están separadas por una distancia pequeña o que se encuentran totalmente juntas, terminarán por separarse. Si la distancia inicial entre las esferas es suficientemente grande las dos esferas entran a un régimen de no interacción. La sedimentación lado a lado es generalmente muy estable o ligeramente inestable y las esferas jamás se encadenarán en un régimen Newtoniano.

Para el caso de un fluido viscoelástico (no-Newtoniano), nos encontramos con un rango de distancias iniciales de separación que son mayores a aquellas para que el encadenamiento ocurra y menores para el caso en el que no existe interacción. La dinámica de agregación y dispersión

aquí es mucho más complicada y se describe a continuación. Dos esferas interactuarán inicialmente y la línea de los centroides entre las mismas cambiará a una dirección vertical. Las esferas no se tocan si no por el contrario, entran a un régimen de no interacción, o de lo contrario se separarán de tal manera que parecerá el comportamiento de esferas liberadas a mayor distancia.

En [34] se definen dos distancias claves en el asentamiento de las esferas. La primera distancia  $\delta_c$  es la distancia crítica más grande en la que se puede observar atracción entre las esferas y  $\delta_t$  que es la distancia de contacto crítica. Si  $\delta \leq \delta_c$  las esferas se atraerán inicialmente. Para  $\delta \leq \delta_c$  pequeños la línea entre centroides se volcará de tal manera que se alinean verticalmente y las esferas se atraerán, tocarán y luego caerán encadenadas de forma vertical. Para valores grandes de  $\delta \leq \delta_c$  las esferas se atraen inicialmente y la alineación se hará vertical pero las esferas eventualmente se separarán, o dejarán de interactuar y jamás se volverán a tocar o encadenar. El conjunto de valores pequeños  $\delta \leq \delta_t$  para los cuales las esferas que caen lado a lado se juntan, son definidos por una segunda distancia  $\delta_t \leq \delta_c$ , llamada la distancia crítica de toque.

Al momento de realizar las mediciones en los diferentes líquidos empleados [5] se observó que para la solución de óxido de polietileno, la distancia inicial requerida para que las esferas no se toquen es mayor en la solución de 1.25% que en una solución al 1.5%. Este resultado se atribuye a que el cociente de  $\frac{N_1}{\tau}$  es mayor en soluciones diluidas, indicando un nivel mayor de elasticidad.

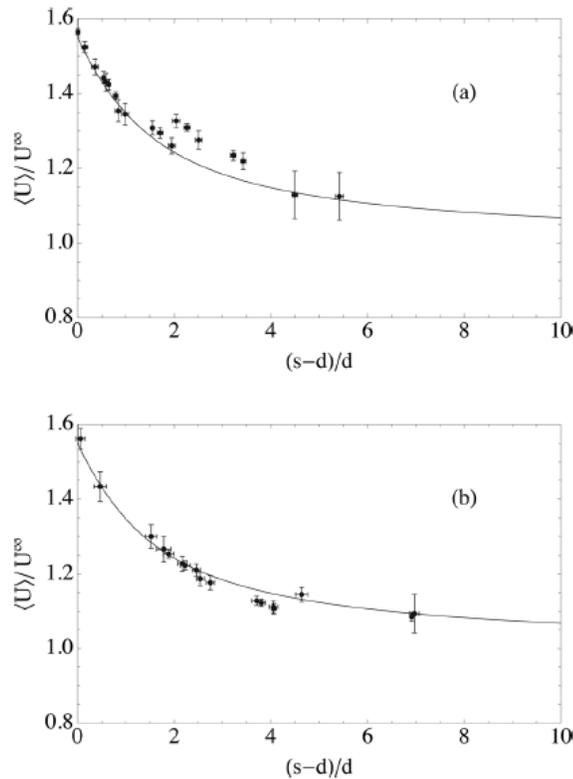
Para los experimentos que estos autores realizaron, se utilizó una solución diluida de  $S_1$  y STP donde  $S_1$  es la mezcla de poliisobutileno en polibuteno y STP (poliisobutileno en aceite de petróleo), los resultados obtenidos concuerdan con los obtenidos para las soluciones de polietileno; la distancia de contacto para el fluido  $S_1$  es de 17.5mm y para fluido STP es 11mm. El cociente de la primera diferencia de esfuerzos normales con el esfuerzo cortante es mayor para el fluido  $S_1$  que para el fluido de STP. Los efectos de adelgazamiento para los fluidos de  $S_1$  y STP son pequeños a baja rapidez de corte y tienen una menor producción de esfuerzos normales; siendo el caso contrario en las soluciones de óxido de polietileno, las cuales, sí presentan un efecto de adelgazamiento en el intervalo de las rapidez de corte de los experimentos y una mayor producción de  $N_1$ . En  $S_1$  y STP se observa una atracción lateral de las esferas y la formación de cadenas, lo cual indica que el adelgazamiento no es una condición necesaria para estos efectos. Lo anterior sugiere que los fluidos que tengan el mayor cociente de  $\frac{N_1}{\tau}$  serán los que manifiesten las mayores fuerzas entre partículas y la formación de cadenas de esferas.

Recientemente Eisenberg, Klink y Philips [6] realizaron un estudio sobre la interacción de esferas cayendo en fluidos viscoelásticos. Ellos utilizaron una solución polimérica adelgazante que consistía de 7% poliisobutileno (PIB) y 93% decalina (TD).

Reportan que las esferas eligen siempre entre dos opciones, la de juntarse o la de alejarse en vez de sedimentar en una posición de separación fija entre ambas esferas. Ellos se enfocaron

en el estudio de la tasa de acercamiento, obtenido a partir de la diferencia positiva de la velocidad de sedimentación de la segunda esfera y la velocidad de la esfera líder durante la sedimentación, y encontraron que en el caso de los fluidos Newtonianos la tasa de acercamiento es idénticamente cero, mientras que en la solución de PIB la tasa de acercamiento incrementa conforme las esferas se aproximan, reduciéndose a cero cuando la separación de las superficies es menor a un radio.

Las velocidades promedio de las esferas que utilizaron incrementaban conforme la separación entre las esferas era menor.



**Figura 1.3 et al. [6] Velocidad promedio para dos (a) esferas de acero y (b) carburo de tungsteno con diámetro  $d=0.318$  cm separados por una distancia  $s$  en un fluido adelgazante de PIB**

Al incrementar el diámetro de las esferas y consecuentemente incrementar el número de Deborah  $De$ , éstas interaccionan fuertemente, a tal grado que no se toma en cuenta por la normalización realizada. En otras palabras la tasa de acercamiento parece escalar de forma no lineal con la tasa de sedimentación.

Una predicción analítica para la tasa de acercamiento  $\Delta U$  puede encontrarse en el trabajo realizado por Phillips y Talini [30]. Para un bajo del número de Deborah y para una separación grande entre esferas. En su análisis, el efecto de la elasticidad en la trayectoria de las esferas está justificado a través de la contribución de dipolos de fuerza puntuales distribuidos en el fluido. El efecto de las esferas cayendo es el de producir una alteración por la velocidad que orienta y

extiende a estos dipolos mecánicos. Esto causa que en una sedimentación axisimétrica las esferas no roten, como ocurriría al dejarlas caer horizontalmente. Cuando las esferas se encuentran a varios diámetros de distancia, la interacción es aquella de dos dipolos verticalmente orientados que son atraídos por una fuerza que disminuye con el cuadrado de la separación entre esferas.

La ecuación en [30] da el efecto de una esfera sobre el desplazamiento de la otra, cuando dos esferas se encuentran orientadas perpendicularmente a la gravedad. Además, cada esfera altera la velocidad de la otra esfera en una proporción idéntica. Por lo que la tasa de acercamiento es el doble del cambio de la velocidad de cualquiera de las dos esferas.

### **1.2.2. Cauda negativa**

Sigli y Coutanceau [7] encontraron que existe una zona secundaria de circulación después del punto de estancamiento en la región de la cauda de la esfera. Reportaron que después de este punto en la cauda, el fluido se mueve en dirección opuesta al movimiento de la esfera. Ellos utilizaron una solución viscoelástica y adelgazante de óxido de polietileno. Fue Hassager [8] quién nombró al fenómeno encontrado por Sigli y Constanceau como “cauda negativa”, al encontrar dicho fenómeno de recirculación en las caudas generadas por burbujas que ascienden en líquidos de poliacrilamida y glicerol al 1%.

Sigli reportó que a medida en que aumenta la relación de diámetros esfera-columna aumentan los efectos elásticos. Por lo que la magnitud de la cauda negativa incrementa, y al aumentar la inercia disminuyen los efectos elásticos.

Sin embargo fue Bisgaard [9] quién reportó posteriormente que el valor de la cauda negativa es independiente del valor de la relación esfera-columna al realizar experimentos en soluciones adelgazantes de poliacrilamida en glicerol y relaciones de esfera-columna entre 0,04 y 0,18.

En los experimentos realizados por Maalouf y Sigli [10] se analizó el flujo alrededor de objetos con diferentes geometrías para cuatro fluidos distintos. Encontraron que la cauda negativa únicamente se formaba para aquellos objetos que sedimentaban en fluidos que presentaron adelgazamiento y propiedades elásticas.

La primera confirmación teórica de la aparición de la cauda negativa fue realizada por Jin [11] con el fluido adelgazante de Pan-Thien-Tanner. Sus soluciones numéricas confirmaron que la presencia de elasticidad y de adelgazamiento es necesaria para la formación de la cauda negativa.

En los estudios anteriores se llegó a la misma descripción cualitativa del fenómeno de la cauda negativa; no obstante, se utilizaron diferentes tipos de fluidos y diferentes relaciones de diámetros esfera-columna, lo que hace difícil la comparación entre casos.

Bush [12] realizó una serie de experimentos utilizando cuatro soluciones viscoelásticas adelgazantes de poliacrilamida. En estos experimentos, todos los fluidos tuvieron la misma concentración de poliacrilamida pero diferente concentración de jarabe glucosa, de tal forma que el comportamiento reológico fuera diferente para cada fluido. A medida que disminuye la concentración de jarabe de glucosa, se puede observar la formación de la cauda negativa; mientras que la magnitud del máximo en la velocidad y la posición del punto de estancamiento se alejan de la esfera a medida que la relación de diámetros esfera-tubo disminuye. Este comportamiento fue atribuido por Bush a la relación entre la elasticidad del fluido y la magnitud de los esfuerzos extensionales en la región de la cauda.

A través de simulaciones numéricas, Bush propuso que, cuando el efecto elástico es el que predomina, se puede observar la formación de la cauda negativa. Para el caso contrario, cuando los efectos extensionales son los que predominan, se observa un alargamiento de la cauda por detrás de la esfera sin que exista la aparición de la cauda negativa. Por lo tanto, Bush propuso que un valor grande de la relación de  $We/Tr$ , donde  $We$  es el número de Weissenberg y  $Tr$  es la relación de Trouton, ocasionará la aparición de la cauda negativa.

Satrape y Crochet [13] demostraron la existencia de la cauda negativa para el fluido de Boger. Los resultados muestran que la formación de la cauda se encuentra íntimamente relacionada con las propiedades extensionales del modelo constitutivo, particularmente con el parámetro de extensibilidad. Satrape y Crochet encontraron que, para valores pequeños de la longitud máxima de la mancuerna (modelo de dos esferas unidas por un resorte), es posible observar la formación de una cauda negativa en el fluido de Boger.

Contrario a lo mencionado por Maalouf y Jin [9, 10], la formación de la cauda negativa no se debe al efecto combinado de la presencia de elasticidad y adelgazamiento en el fluido. De acuerdo con los resultados de Bush, Feng y Harlen la formación de la cauda negativa parece estar más bien relacionada con las características extensionales del fluido.

La observación anterior fue explicada por Harlen [15] quien explica la existencia de dos fuerzas opuestas que actúan en la región de la cauda. Una de las fuerzas da lugar a la relajación de los esfuerzos de corte que se generan en la región ecuatorial de la esfera, los cuales ocasionan que el flujo se dirija en dirección opuesta al movimiento de la esfera, formándose, de esta manera, la cauda negativa. Esta primera fuerza es contrastada por los esfuerzos extensionales que se generan por el flujo extensional uniaxial en la región de la cauda, los cuales dirigen el flujo en la misma dirección de la esfera generando un alargamiento de la cauda. El parámetro que controla el balance entre estas dos fuerzas es la extensibilidad de las moléculas del polímero que, a su vez, limita la viscosidad extensional del polímero.

Siguiendo las ideas de Bush, Arigo y McKinley [16] realizaron una investigación de caudas negativas para esferas que sedimentan en un fluido adelgazante de poliacrilamida y proponen dos criterios, sin poder diferenciar entre ambos cuál es el factor clave para la formación de la cauda.

Dou y Phan-Thien [17] encontraron que la magnitud de los esfuerzos normales y su gradiente son los responsables de la formación de la cauda negativa, mientras que otros factores solo aumentan, disminuyen o retrasan la formación de la cauda negativa. El gradiente de esfuerzos normales propuesto por Dou y Phan-Thien se origina de un balance entre el esfuerzo de corte y la presión alrededor de la cauda. En su análisis, Dou y Phan-Thien encontraron que la formación de la cauda negativa no depende del desplazamiento de las líneas de corriente del fluido y que el adelgazamiento al corte debilita la formación de la cauda negativa; por otro lado, el tener un adelgazamiento cercano al valor del primer coeficiente de esfuerzos normales aumenta la formación de la cauda negativa. Dou y Phan-Thien propusieron que un valor poco espesante en el perfil de la viscosidad extensional ocasiona la formación de la cauda negativa.

J. Mendoza-Fuentes, R. Montiel, R. Zenit, O. Manero [28] publicaron resultados sobre un estudio de sedimentación de esferas individuales para varios fluido de HASE a distintos porcentajes de concentración. Se enfocaron principalmente en los efectos de número de Weissenberg y la variación de la proporción del radio de las esferas y el contenedor  $\left(\frac{a}{R}\right)$ . Sus resultados, en congruencia con aquellos encontrados por otros autores como Sigli y Coutanceau [8] y Dou y Phan Thien [29], verifican que al fijar una relación de radios esfera-tubo y variar el número de Weissenberg la velocidad de las esferas incrementarán al incrementar el número de Weissenberg. Reportan también que para una relación  $\left(\frac{a}{R} = 0.05\right)$  existirá una pequeña cauda negativa para un  $We > 1$  y no habrá cauda para  $We < 1$ . De igual forma, esta cauda tendrá una mayor magnitud en su velocidad negativa conforme el incremento del número de Weissenberg y la posición del punto de estancamiento se aproximará a la esfera,  $\frac{z}{a} = 33$

Para una relación de radios mayor, i.e.  $\frac{a}{R} = 0.1$ , la magnitud de la velocidad de la cauda negativa incrementa y en este caso la cauda se forma para valores del número de Weissenberg menores a 1,  $We > 0.6$  y  $We > 0.36$  para concentraciones de 1.5% y 2.0 % respectivamente.

Al fijar ahora el número de Weissenberg e incrementar la relación de radios esfera-tubo se reportó que la magnitud de la velocidad mínima de la cauda negativa incrementa. En cuanto a los efectos inerciales, éstos desplazan al punto de estancamiento más lejos de la esfera.

### 1.3. HIPÓTESIS

La velocidad terminal de la segunda esfera está relacionada con la naturaleza reológica de los fluidos; en particular con el tiempo de relajación, carácter viscoelástico y distancia entre las esferas. El efecto de la cauda generado por el movimiento descendente de la primera esfera genera un cambio estructural en el fluido el cual tendrá repercusiones en el movimiento de la segunda esfera descendente en la misma trayectoria. Este efecto se manifestará en el cambio de la velocidad de la segunda esfera de la siguiente manera:

- a) Atracción debido a un aumento en la velocidad de la segunda esfera causado por el desplazamiento del fluido generado por la primera esfera liberada, seguida de un posible encadenamiento estable de ambas esferas en su eje vertical.
- b) Atracción debido a un aumento en la velocidad de la segunda esfera causado por el desplazamiento del fluido generado por la primera esfera liberada, seguida de un rebote que volcará a la segunda esfera fuera de alineación vertical con el centroide de la primera.
- c) Repulsión generada debido a la posible presencia de cauda negativa que se manifestará en una desaceleración de la segunda esfera respecto a la primera y consecuentemente un distanciamiento entre ambas.
- d) En el último caso la segunda esfera obtendrá una velocidad terminal constante similar a la primera esfera debido a que el fluido se ha recuperado de la perturbación de la primera esfera. En este caso ambas esferas se convierten en un solo sistema que desciende de manera constante y con poca o nula interacción.

# DESARROLLO EXPERIMENTAL

## 2.1. ARREGLO EXPERIMENTAL

Para el desarrollo de estos experimentos, se utilizó el dispositivo que se presenta en el diagrama siguiente

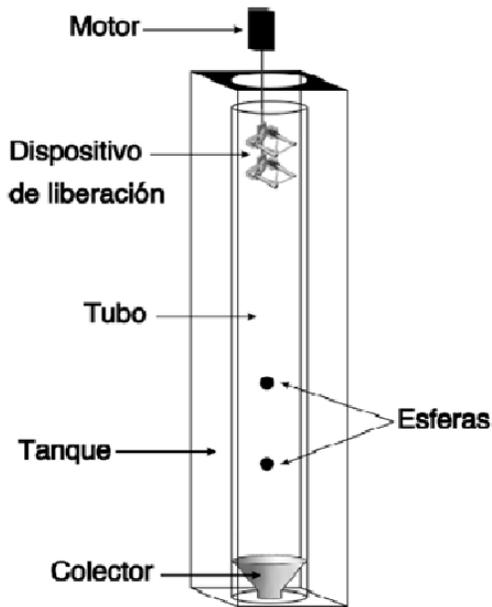


Figura 2.1.[32] Arreglo experimental

El dispositivo experimental consiste de un tubo de vidrio cilíndrico de 120 cm de longitud y de 12.7cm de diámetro interno en el cual se encuentran contenidos los distintos fluidos a través de los cuales se hacen descender las esferas (fluido viscoelástico de solución Polyox 0.5% UCARFLOC 309 en H<sub>2</sub>O, fluido viscoelástico de solución de Policarilamida 0.5%wt Separan AP-30 en H<sub>2</sub>O y un fluido Newtoniano constituido por una solución del 98%wt glicerina USP en agua). El tubo cilíndrico se encuentra dentro de un tanque rectangular de vidrio de 150 cm de altura y 20.5 cm de longitud en todas sus caras. El tanque contiene un fluido (H<sub>2</sub>O) con un índice de refracción muy similar al del material de construcción del tanque (vidrio) para eliminar los efectos de

refracción en la superficie curva de la interface cilindro-agua, de tal manera que no se distorsionen las imágenes tomadas con la cámara.

El liberador de esferas se coloca en la parte superior del tubo cilíndrico y las esferas son soltadas en el centro del tubo por debajo de la superficie del fluido. Para evitar la adhesión de burbujas de aire y con la intención de obtener una velocidad estacionaria, se deja que las esferas descendan 20 cm (10 diámetros) después de su liberación para comenzar el registro de datos. Además después de cada evento es necesario darle un tiempo de reposo al fluido de aproximadamente 5 minutos para asegurar que no exista flujo remanente el cuál pueda afectar el evento siguiente.

Se debe tomar en cuenta que según lo reportado por Bot y Hulsen [4] existen efectos relacionados con la proximidad entre las esferas y la superficie del fluido, y la proximidad entre la segunda esfera y el dispositivo liberador de esferas; que para éste último caso se reflejará en una disminución de su velocidad. Estos efectos podrían derivar también en un incremento de la velocidad de la esfera líder durante la caída de esferas consecutivas con respecto a la velocidad de la misma esfera cayendo individualmente. Además podríamos observar también que la segunda esfera puede entrar en el área de toma de datos con una distancia de separación mayor que la distancia inicial establecida entre esferas, lo cual querría decir que la velocidad inicial de la segunda esfera sí fue afectada por la fricción entre superficies debido a la cercanía del dispositivo liberador.

## **2.2. DISPOSITIVO LIBERADOR DE ESFERAS**

El dispositivo liberador de esferas cuenta con dos pinzas una fija en el inferior y otra móvil en la parte superior que permite variar la distancia de liberación entre las esferas. Ambas cuentan con un tornillo de ajuste para calibrar su apertura; de tal modo que las esferas puedan ser colocadas y el movimiento de la pinza de sujeción provoque la menor perturbación en el fluido y además, evitar así la rotación o desplazamiento de las esferas.

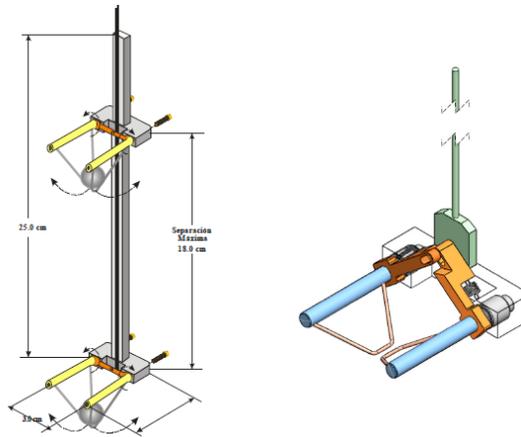


Figura 2.2. [33] Dispositivo liberador de esferas

Éste fue diseñado en acero inoxidable ya que el ambiente de trabajo es en medios que provocan la formación de sales y por lo tanto de óxido. También se eligió este material para evitar deformaciones a consecuencia del manejo del dispositivo.

La pinza se puede colocar a diferente alturas, lo que permite tener un tiempo de separación entre esferas suficiente para observar los efectos sobre la esfera posterior. La razón de separación dada por el diseño es desde 0.1cm hasta 18 cm; para este estudio se eligieron distancias distintas de liberación entre los centros de las esferas: 5.5 cm, 7.5 cm, 9.5 cm y 13.5 cm.

## 2.3. ESFERAS

Las esferas que se utilizaron para los experimentos realizados tienen las características físicas que se presentan a continuación:

Diámetro tubo [cm]						
12.7						
Esfers	Diámetro	Diámetro [cm]	Masa [g]	Vol	Densidad	Relación esfera-tubo
Acetal	1/2"	1.27	1.47	1.072531	1.37059	0.1
PTFE	1/2"	1.27	2.33	1.072531	2.172432	0.1
Neopreno	1/2"	1.27	1.54	1.072531	1.435856	0.1

Esfers	Diámetro	Diámetro [cm]	Masa[g]	Vol	Densidad	Relación esfera-tubo
Acetal	3/4"	1.9	4.84	3.591364	1.347677	0.149606299
PTFE	3/4"	1.9	7.82	3.591364	2.177446	0.149606299
Neopreno	3/4"	1.9	5.15	3.591364	1.433996	0.149606299

Tabla 2.1 Propiedades de las esferas elegidas

Se pretendió obtener un intervalo amplio de velocidades de descenso de esferas y de relaciones de diámetro esfera-tubo ( $a/R$ ); por lo que se utilizaron esferas de diferente densidad y tamaños. Sin embargo, fue prácticamente imposible colocar esferas de menor diámetro debido a que estas no eran sujetadas de manera adecuada por el liberador haciendo que la toma de imágenes fuera extremadamente complicada.

Para este conjunto de esferas que descienden en el fluido, los dos números adimensionales relevantes son el número de Weissenberg ( $We$ ) y el número de Reynolds ( $Re$ ) definidos como:

$$We = \frac{\lambda U}{a}$$

$$Re = \frac{aU\rho}{\eta(\dot{\gamma})}$$

Donde  $\rho$  es la densidad del fluido,  $a$  es el radio de la esfera  $U$  es la velocidad terminal,  $\eta(\dot{\gamma})$  es la viscosidad de corte y  $\lambda$  es el tiempo de relajación del fluido correspondiente a la frecuencia de cruce entre  $G'$  y  $G''$ . La rapidez de corte característica del flujo es :  $\dot{\gamma} = \frac{U}{a}$ . Estos números adimensionales y sus características serán explicados posteriormente en este trabajo.

## 2.4. PREPARACIÓN DE LOS FLUIDOS

Para llevar a cabo este proyecto se prepararon tres fluidos de estudio. Dos de estos fluidos tienen características específicas que los clasifican como fluidos no-Newtonianos. Esto quiere decir que como propiedad su tasa de deformación no está linealmente relacionada con el esfuerzo, por lo que su viscosidad podrá cambiar conforme aumenta la tasa de deformación del fluido. Todos los fluidos no-Newtonianos son viscoelásticos, que quiere decir que combinan propiedades elásticas y viscosas.

Por otra parte el tercer fluido cuenta con características que lo definen como fluido Newtoniano, que quiere decir que su tasa de deformación varía linealmente con el esfuerzo; por lo que su viscosidad no cambiará conforme incremente o disminuya su tasa de deformación, además dicho fluido únicamente cuenta con propiedades viscosas y carece de componentes elásticos.

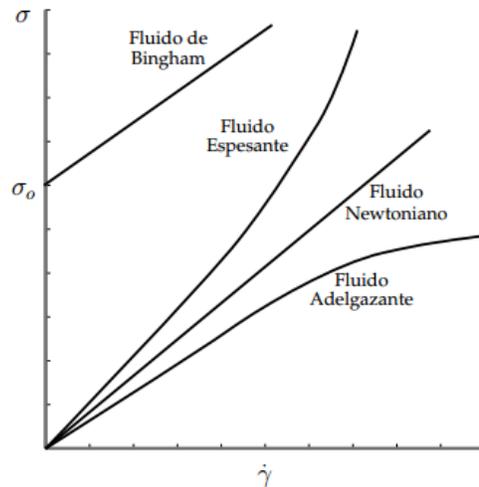


Figura 2.3.[33] Curvas esfuerzo – rapidez de deformación para fluidos característicos

El primer viscoelástico se realizó utilizando óxido de polietileno, éste es un polímero floculante de nombre comercial UCARFLOC-309 de la compañía Dow Chemical Co. Éste polímero se utiliza como floculante, que quiere decir que se utiliza como agente para que en los sistemas coloidales, aquellos constituidos generalmente por una fase continua (fluido) y una fase discontinua (en forma de partículas), las partículas se separen de ciertas suspensiones en forma de hojuelas. Más específicamente los floculantes se utilizan en la industria de reciclado de papel y de tratamiento de aguas de lluvia o residuales.

En la solución de Polyox, a la cual de ahora en adelante nos referiremos como **Fluido Viscoelástico – 1 (FV-1)** fue disuelto en agua en una concentración de 0.5% en peso. Para el llenado del tanque y para tener fluido de reserva se consideró mezclar una total de 30 litros. Su preparación se realizó con un pre mezclado a mano de la cantidad necesaria del polímero, que posteriormente se vertió en un contenedor en donde se le fue agregando agua mientras se mezclaba de manera continua durante 24 horas, utilizando un rotor y un mezclador. Finalmente, se adicionó un agente (benzoato de sodio) para retardar la generación de bacterias y se dejó al fluido reposar por el mismo tiempo de mezclado.

El segundo fluido viscoelástico se preparó agregando el polímero conocido como Separan de la compañía Wuhan Luoke Chemicals Co. La poliacrilamida se utiliza comúnmente como floculante al igual que el óxido de polietileno. Sus usos en la industria incluyen el tratamiento de agua, la fabricación de papel y como “acondicionador de tierra” el cual incrementa su aeración, porosidad y reduce su compactación. Durante la preparación de la solución de poliacrilamida al 0.5%wt en agua, **Fluido Viscoelástico – 2 (FV-2)**, se siguieron los mismos pasos que los realizados durante la preparación del FV-1.

Para la preparación del fluido Newtoniano se utilizó Glicerina USP. Igual que en el caso de los dos fluidos viscoelásticos se preparó un total de 30 litros, al 98%wt de glicerina, que fueron

mezclados en un contenedor de tal manera que, por ser una pequeña proporción, a la glicerina se le agregó el agua de manera directa.

## 2.5. CARACTERIZACIÓN REOLOGICA

La caracterización reológica de los fluidos se llevó a cabo mediante el empleo de un reómetro de esfuerzo controlado AR 1000-N de T.A. Instruments, cubriendo un intervalo de rapidez de corte de  $0.01 \text{ s}^{-1}$  hasta  $100 \text{ s}^{-1}$ . Se hicieron mediciones de flujo cortante simple y de flujo oscilatorio para obtener la viscosidad de corte y los módulos de almacenamiento y pérdida, respectivamente. Las pruebas fueron llevadas a cabo mediante el empleo de una geometría de cono y plato de 6cm de diámetro y ángulo de  $1^\circ$ .

No fue necesario realizar un pre corte. Antes de realizar cualquier tipo de medición reométrica, se aseguró que la muestra no contuviera burbujas de aire, ya que estas alteran las mediciones de viscosidad.

Fluido	Composición	$\rho$ [kg m <sup>-3</sup> ]	n	viscosidad [Pa.s]
Newtoniano	97 vol. % Glic - 2 vol. % H2O	1273	1	0.910382
Fluido Viscoelástico -1	Polyox 0.5 wt % 100 vol. % H2O	1023.2	0.608	2.8115
Fluido Viscoelástico - 2	Separan 0.5 wt % 100 vol. % H2O	1052	0.22	24.5348

Tabla 2.2. Propiedades de los fluidos

En las Figuras 2.4. y 2.5. se muestra la viscosidad de corte para los fluidos en estudio. En este tipo de fluidos es común encontrar diferentes tipos de regiones. En el caso del FV-1, para valores pequeños de la rapidez de corte se observa una región de viscosidad constante; a rapidez de corte más grandes se da un rompimiento de las asociaciones poliméricas formadas dando pie a una región de adelgazamiento del fluido con respecto a la rapidez de corte. Para el intervalo de rapidez de corte de  $10^{-2}$  y  $11^{-1} \text{ s}^{-1}$  se observa un comportamiento Newtoniano; mientras que para las rapidez de corte posteriores se observa una zona de adelgazamiento.

En el caso de FV-2 podemos observar que desde el inicio de la prueba, a valores de rapidez de corte pequeños se observa un adelgazamiento constante y muy pronunciado del fluido. A diferencia del FV - 1, aquí no existen zonas de comportamiento Newtoniano, desde el comienzo de la prueba existe un adelgazamiento de la viscosidad.

Como se reporta en la Tabla 2.2., a pesar de que la concentración en peso de ambos polímeros para los fluidos viscoelásticos es la misma, existe una diferencia de viscosidad muy acentuada. Esto probablemente se deba a que las cadenas poliméricas formadas en el FV-2 sean

mucho mayores a aquellas que ocurren para el FV-1. Una mayor viscosidad disminuirá considerablemente la velocidad de las esferas en sedimentación. Por lo que existirá una diferencia considerable entre las velocidades obtenidas para ambos fluidos viscoelásticos.

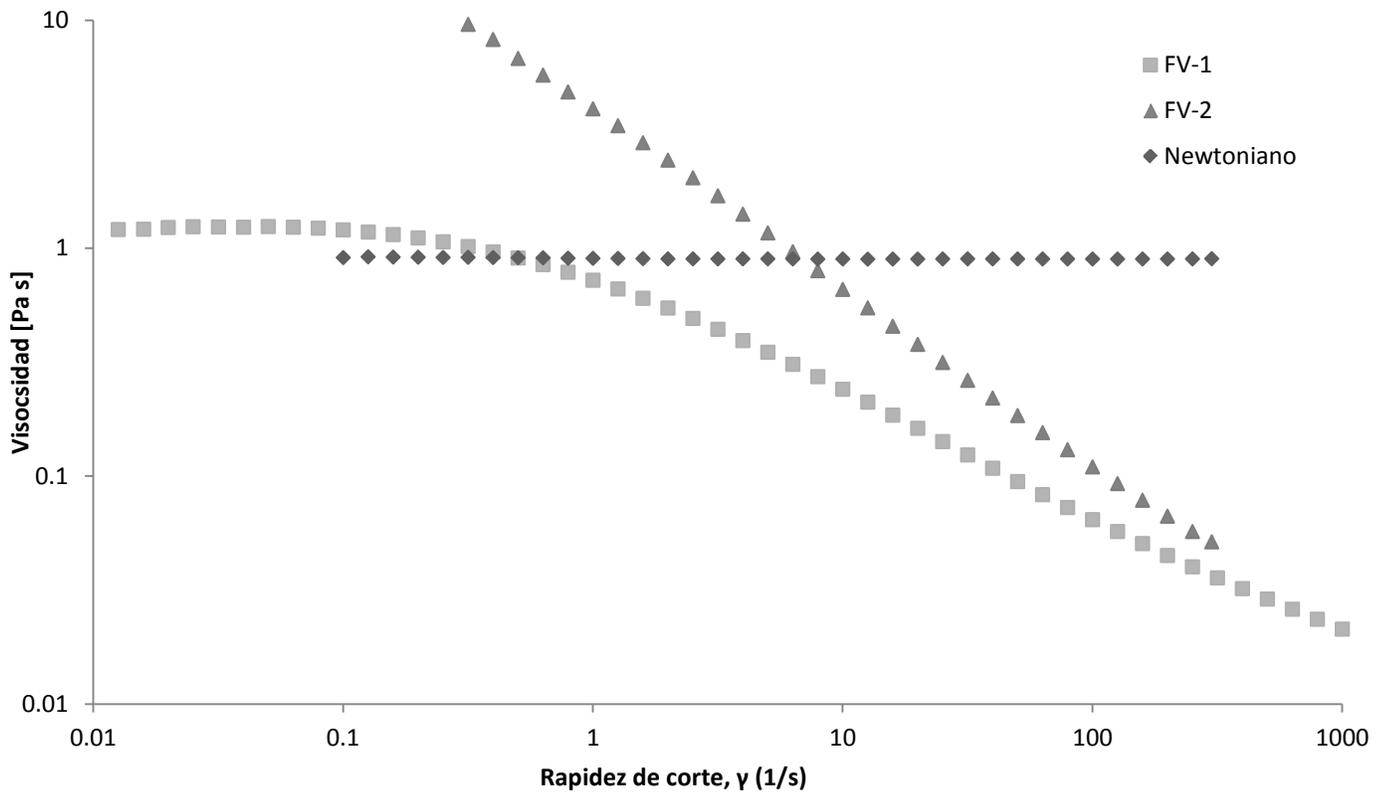


Figura 2.4 Viscosidad vs. Rapidez de corte para FV-1 (óxido de polietileno), FV-2 (poliacrilamida) y el fluido Newtoniano.

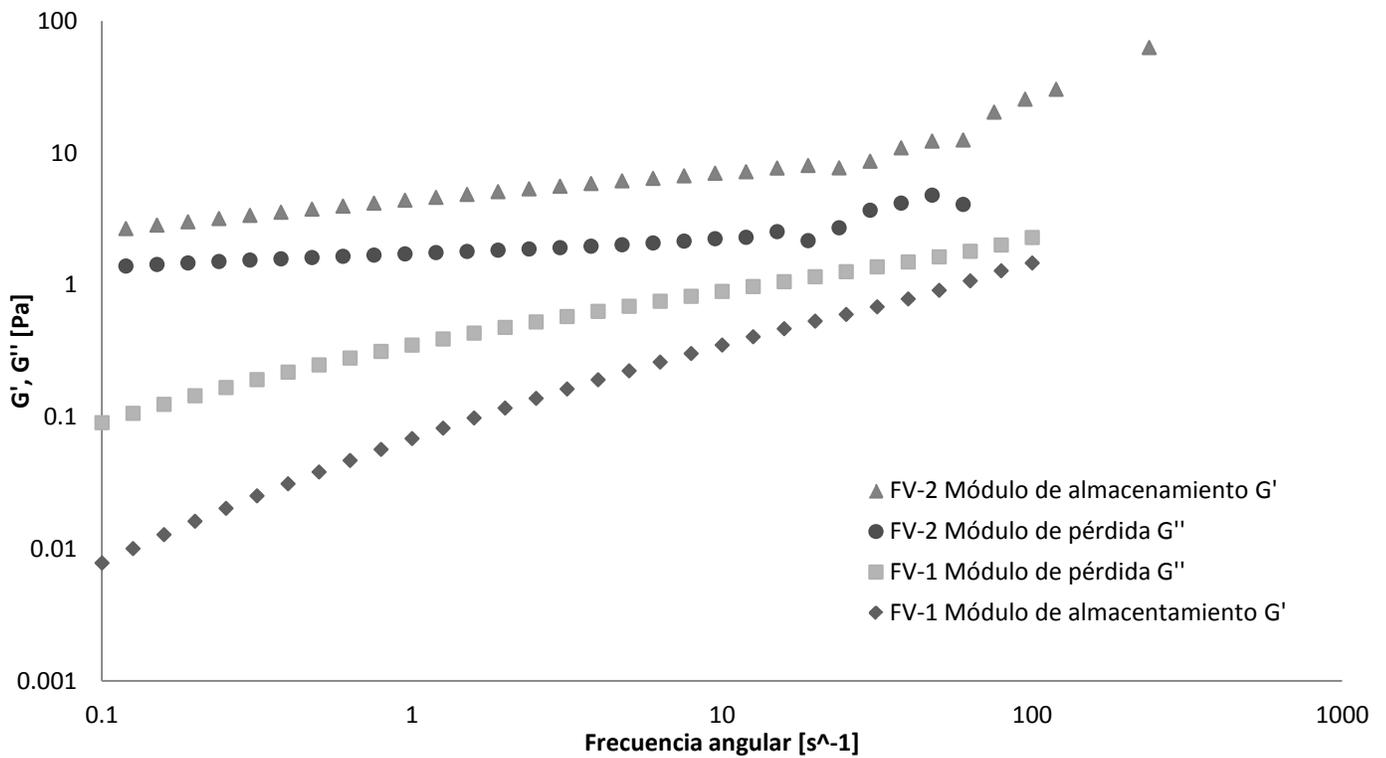


Figura 2.5 Módulo de almacenamiento vs módulo de pérdida FV-1 y FV-

## 2.6. DESCRIPCIÓN DEL EXPERIMENTO

El experimento se llevó a cabo como se describe a continuación:

Primero se debe asegurar que el tanque cilíndrico esté completamente limpio y ajeno de impurezas que puedan contaminar el fluido al ser vertido dentro de éste. Una vez que se introduce el fluido es necesario esperar hasta que las burbujas asciendan a la superficie y salgan del mismo.

A continuación se ajusta la pinza superior con la separación deseada respecto a los centros de las esferas en uso. El aparato liberador es colocado con extrema precaución dentro del tubo y se alinea de manera apropiada utilizando niveles para las distintas posibles direcciones de inclinación. El aparato liberador es introducido con las esferas previamente colocadas sobre el mismo. Es indispensable que al terminar de introducirse el aparato liberador se mantenga un tiempo de reposo de alrededor de 10 minutos para permitir que el fluido se asiente y estabilice. Una vez que este tiempo se ha cumplido es posible comenzar la obtención de datos.

Para comenzar con la adquisición de datos es necesario realizar una calibración de la cámara tomando en cuenta la velocidad de descenso de las esferas; de esta manera se elige una velocidad de disparo pertinente y correspondiente al tiempo de desplazamiento de las esferas a través de la zona de medición de interés. Una vez realizada esta calibración es posible comenzar con la obtención de datos. Para esto las esferas, al ser liberadas, se permite que desciendan aproximadamente 20cm (10 diámetros) para que alcancen el estado estacionario y se pueda iniciar la toma de imágenes. Se obtuvieron imágenes a lo largo de 50/60 cm del tubo, descartando distancias posteriores a esta debido a que pueden existir efectos causados por la superficie del fondo. Sin embargo la altura de la cámara fue modificada con la intención de observar de manera correcta la interacción entre las esferas en sedimentación, ya que a veces la interacción se llevaba a cabo antes de que las esferas entraran en el cuadro de la toma de datos. Al terminar de sedimentar las esferas, se extrae el dispositivo y se colocan dos esferas nuevas para realizar otro evento. Se vuelven a repetir los pasos anteriores para mantener las condiciones de medición en cada evento y para cada grupo de esferas.

Las primeras pruebas realizadas fueron de las esferas individuales, para de esta manera obtener su velocidad terminal de sedimentación. Después de haber realizado estas pruebas para todas las esferas seleccionadas, se procedió a realizar los experimentos con las esferas consecutivas, comenzando con la distancia de liberación más grande (i.e. 13.5 cm) y terminando con la distancia más pequeña (i.e. 5.5 cm).

Primero se realizaron los experimentos utilizando la solución de óxido de polietileno en  $H_2O$ , a continuación se utilizó el fluido Newtoniano i.e. la solución de glicerina en agua, y se finalizó con la solución de poliacrilamida en agua.

## 2.7. TECNICAS DE VISUALIZACIÓN Y VELOCIDADES DE SEDIMENTACIÓN

Al realizar los experimentos se obtuvieron imágenes por medio de una cámara digital. Cada secuencia de imágenes se analizó por medio de la técnica de análisis digital de imágenes. Se elaboró un programa en MATLAB el cual lee la secuencia de imágenes y le realiza una transformación a blanco y negro a partir de una separación de canales. Posteriormente se realizó una binarización de la imagen, en donde se selecciona la escala de grises en la cual los pixeles seleccionados se convertían en 1 y los demás en cero.



Figura 2.6..a) Imagen adquirida con cámara digital utilizada b) Imagen binarizada.

A continuación se utiliza una función predeterminada en MATLAB que permite determinar ciertas propiedades de las partículas que se logran detectar en la imagen obtenida posterior a la binarización. En este caso elegí encontrar el centroide de cada esfera de tal forma que se pudiera ubicar como una coordenada en pixeles dentro de la imagen.

Debido a que las imágenes obtenidas con las cámaras no corresponden al plano de sedimentación de las esferas fue necesario realizar una corrección. Lo que sucede es que la distancia aparente de las esferas es menor a la distancia real conforme éstas se alejan del centro de foco de la cámara. De haber sido mucho más minucioso, se pudo haber realizado una corrección debido al efecto de la curvatura de la lente y se pudieron haber calculado los índices de difracción de cada fluido. Sin embargo debido a que la cámara se encuentra en una posición no tan próxima al tubo de sedimentación y la zona de medición es relativamente pequeña (por lo que la curvatura del tubo puede ser ignorada) el error no es tan considerable. La corrección se realizó

simplemente utilizando una relación de triángulos similares ya que la distancia de la cámara al contenedor siempre se mantuvo igual. Por lo que al conocer la distancia al eje de caída de las esferas (el centro del cilindro) y la distancia al plano frontal del contenedor se puede calcular la distancia real de las esferas.

Al obtener la distancia real entre las esferas se utiliza una escala de dimensiones conocidas para cambiar de pixeles a milímetros.

Las velocidades de sedimentación  $U(t)$  se obtienen mediante la diferencia de las posiciones medidas en  $z_i = z(t_i)$  para cada esfera en el programa realizado en Matlab. Para lograr esto se utilizó la siguiente ecuación para la velocidad por diferencias centrales:

$$U_i = \frac{(Y_{n+1} - Y_{n-1})}{2\Delta t}$$

Donde  $Y_{n+1}$  y  $Y_{n-1}$  son las posiciones verticales en los cuadros  $n + 1$  y  $n - 1$ ;  $\Delta t$  es el tiempo entre los cuadros  $n + 1$  y  $n - 1$ .

## 2.8. CONDICIONES DE REFERENCIA

En el apartado anterior. Se describió el desarrollo experimental. El tiempo cero ( $t=0$ ) del experimento corresponde al momento justo en el que las esferas son liberadas y la distancia ( $d_i$ ) corresponde a la distancia inicial de separación establecida en el dispositivo de liberación.

Sin embargo como se había mencionado anteriormente en muchos de los experimentos realizados previamente por distintos autores [20,27,4] se reporta una perturbación producida por el aparato de liberación. En este proyecto podemos encontrar que la esfera líder está sujeta a la perturbación producida por la pinza inferior, provocando un súbito incremento en su velocidad al inicio de la sedimentación. Después de un tiempo la esfera alcanzará su estado estacionario. Lo mismo sucede con la segunda esfera; la cual se encontrará sometida a una serie de efectos producidos por el dispositivo de liberación que provocarán cambios en su velocidad y en su distancia de separación inicial con respecto a la esfera líder.

Para la esfera aveniente, las perturbaciones que afectan su sedimentación son:

- a) El desplazamiento del fluido por la pinza que provoca un súbito incremento en la velocidad de la esfera. Esto podría llevar a que el movimiento de la primera esfera pueda tener influencia sobre la segunda esfera desde el momento en que es liberado.
- b) Cuando la segunda esfera pasa junto al dispositivo y a través de la primera pinza, sufrirá un posible decremento en su velocidad debido a la fricción causada por el dispositivo mismo.

Esto lleva a establecer un nuevo tiempo cero donde el efecto del dispositivo liberador ya no sea se vea reflejado en el comportamiento de las esferas y por ende no sea cuantificable.

En la Figura 2.7. Se muestran los perfiles de velocidad para dos esferas liberadas consecutivamente sobre el mismo eje vertical cuantificados desde el momento en el que se liberan las esferas hasta el final de la sedimentación. Es evidente que el salto de velocidad de 0 a su valor máximo crea una discontinuidad en las gráficas que además reflejan una serie de perturbaciones e inestabilidades fácilmente visibles en la curva de la segunda esfera.

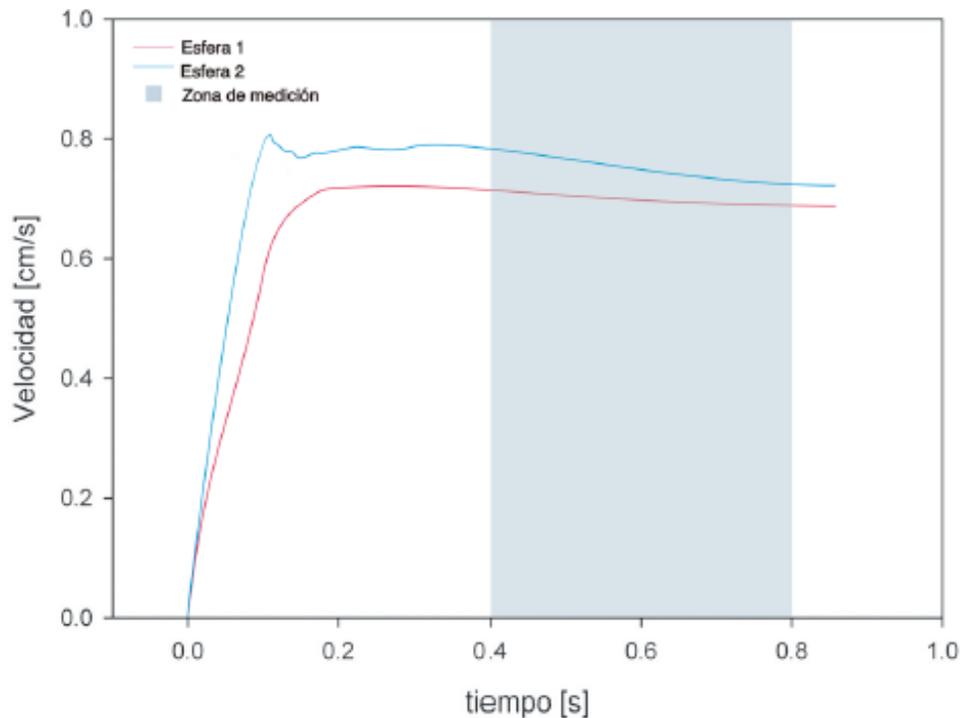


Figura 2.7.[33] Perfil de velocidad típico para esferas sedimentando en un fluido adelgazante.

La zona sombreada en la figura anterior corresponde a la región en dónde se obtuvieron los datos experimentales. Por lo tanto al no tener una historia previa de la velocidad de las esferas, aunado a los efectos del dispositivo liberador fue necesario definir un nuevo tiempo cero para las esferas individuales y consecutivas.

En el caso de las esferas individuales se re definió el tiempo cero como el momento en el que se obtiene el primer dato experimental, i.e. cuándo la esfera entra en el campo visual de la cámara (región de toma de datos).

Para las esferas consecutivas, el tiempo cero, se establece cuando ambas esferas se encuentran dentro del campo de visualización de la cámara y la distancia de separación entre sus centros justo en ese momento se toma con la distancia inicial ( $d_i$ ).

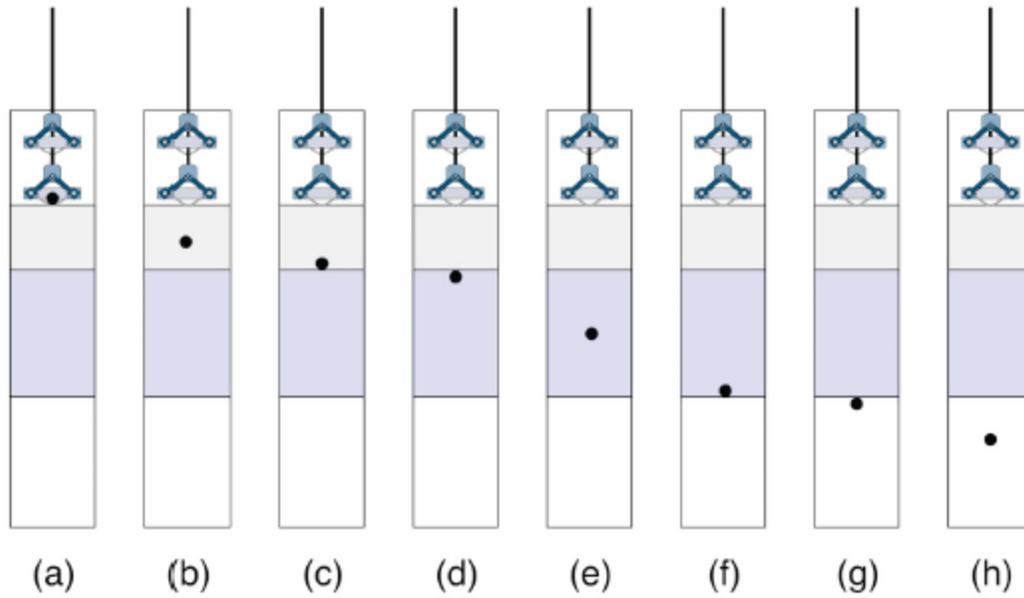


Figura 2.8 [33] (a) Esfera individual en la posición inicial, (b) esfera descendiendo en el fluido, (c) esfera un instante antes de iniciar la toma de datos, (d) esfera individual entrando a la zona de medición ( $t = 0$ ) para las esferas individuales, (e) zona de medición, (f) representa el momento donde es tomado el último dato, (g) instante posterior al finalizar la toma de datos, (h) no se toman datos de esta zona.

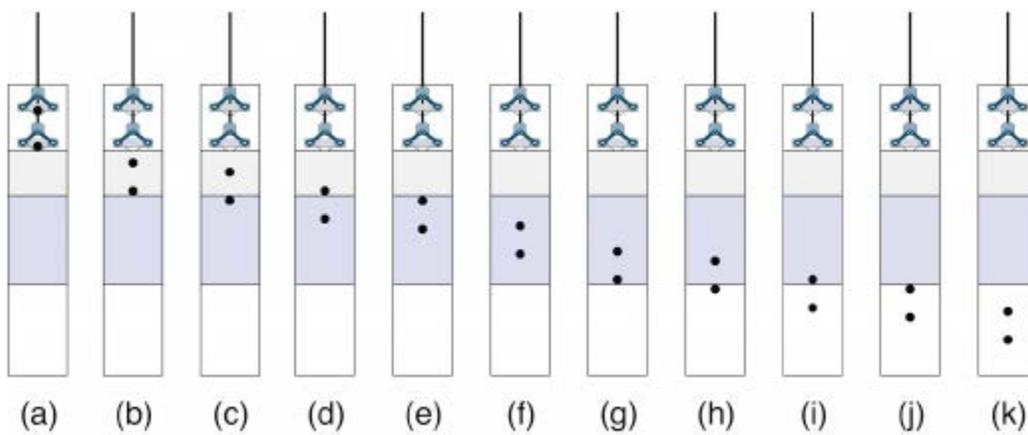


Figura 2.9 [33] (a) Par de esferas en la posición inicial la distancia entre esferas  $d_{ii}$ , (b) esferas descendiendo en el fluido, (c) inicio de toma de datos de la primera esfera, (d) esfera posterior entra a la zona de medición, (e) en este punto es donde se establece  $t = 0$  para ambas esferas y se establece la distancia de separación  $d_i$ , (f) esferas en zona de medición, (g) representa el momento donde es tomado el último dato para la esfera, (h) instante posterior al finalizar la toma de datos de la primera esfera, (i) representa el momento donde es tomado el último dato para la esfera posterior, (j) instante posterior al finalizar la toma de datos, (k) no se toman datos de esta zona.

## RESULTADOS EXPERIMENTALES

A continuación se presentan los resultados que se obtuvieron a partir de las pruebas realizadas bajo las distintas condiciones establecidas.

### 3.1. VELOCIDAD DE SEDIMENTACIÓN DE ESFERAS INDIVIDUALES

Para poder realizar una comparación en el comportamiento de las esferas que son lanzadas de manera simultánea, es necesario primero realizar un análisis de lo ocurrido durante la sedimentación de esferas individuales. Se realizaron dichos experimentos para cada fluido.

#### 3.1.1. Fluido Viscoelástico – 1 (óxido de polietileno)

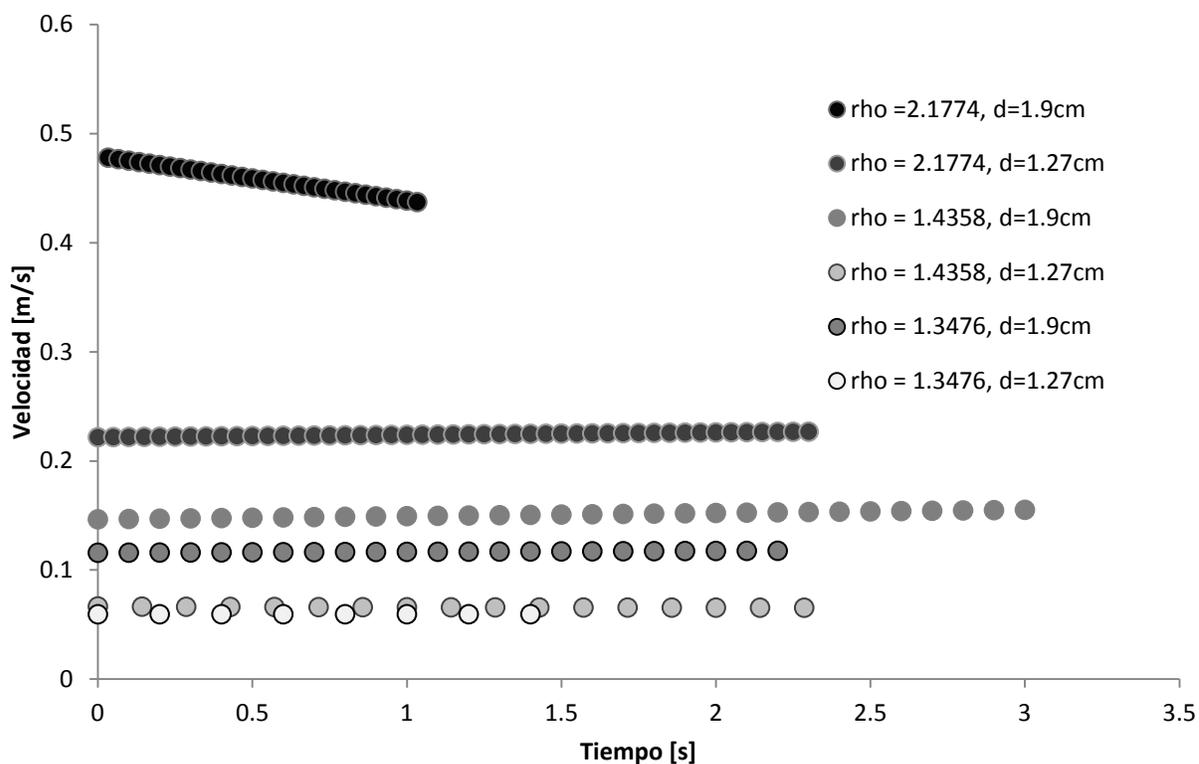


Figura 3.1. Esferas individuales sedimentando a través del FV-1(óxido de polietileno)

### 3.1.2. Fluido Viscoelástico - 2 (poliacrilamida)

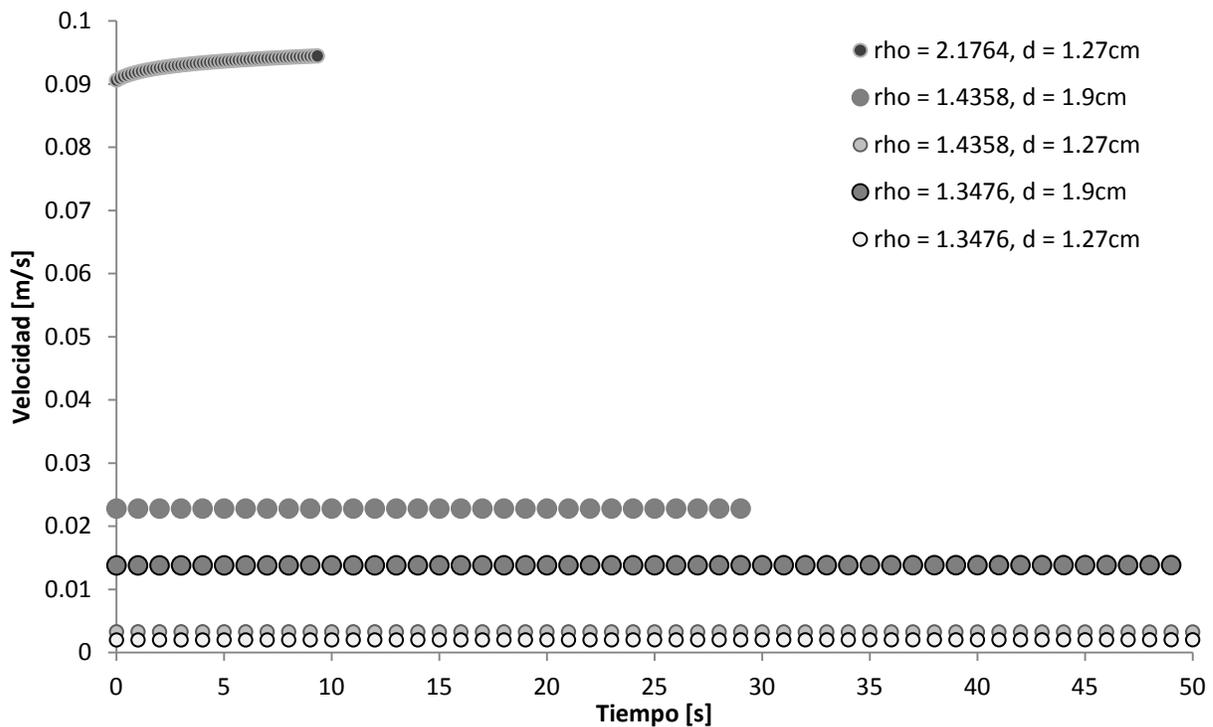


Figura 3.2 Esferas individuales sedimentando a través del FV-2 (poliacrilamida)

La sedimentación de esferas individuales a través del FV-1, representada en la Figura 3.1. refleja un comportamiento muy similar en cuanto a velocidades de sedimentación con respecto a lo ocurrido en el FV-2, Figura 3.2. Evidentemente, en el primer fluido las velocidades de descenso de las esferas son mayores, debido a que su viscosidad es menor comparada con la obtenida en la poliacrilamida (FV-2). Además es visible que las velocidades para las esferas con mayores radios no parecen estabilizarse si no que continúan alcanzando su velocidad terminal.

Durante la sedimentación de las esferas individuales a través del FV-2 podemos observar que las velocidades para el conjunto de esferas con menor densidad son relativamente estables. Para las esferas de mayor diámetro parece haber un pequeño pero constante incremento en la velocidad, mientras que la sedimentación de las esferas de menor densidad y con el menor diámetro ocurre de manera muy lenta y estable, cubriendo tiempos de hasta 160 segundos. El hecho de que las velocidades de sedimentación en el FV-2 sean tan bajas favorece la intensión de estos experimentos debido a que los Reynolds de estas esferas serán especialmente bajos permitiendo que el flujo durante la sedimentación sea gobernado principalmente por fuerzas viscosas y que puedan despreciarse los efectos de inercia, lo cual a su vez propiciará una mayor influencia de las propiedades elásticas de éste fluido.

En la tabla 3.1. que se presenta a continuación podemos apreciar que las velocidades terminales para el FV-2 son muy bajas por lo cual el número de Reynolds es menor, favoreciendo la presencia de las propiedades viscosas del fluido y no las inerciales. De manera opuesta, pareciera ser que tanto los tiempos característicos para cada densidad y tamaño al igual que los números de Weissenberg son mucho mayores para el FV-2; esto podría significar que en el flujo a través de las esferas para éste fluido en específico existirán predominantemente esfuerzos elásticos sobre los viscosos, los cuales propiciarán que las esferas consecutivas interactúen de forma muy particular.

Las velocidades de sedimentación para el óxido de polietileno (FV-1), son mayores por prácticamente un orden de magnitud en comparación con aquellas obtenidas para la poliacrilamida (FV-2). Esto propicia que el número de Reynolds se encuentre en un rango entre  $1.548 < Re < 45.724$  para el FV-1 y entre  $.00144 < Re < 1.2719$  para el FV-2; incrementando la probabilidad que existan efectos inerciales durante la sedimentación de las partículas a través del primer fluido. Por el contrario, el tiempo característico para cada esfera individual en el óxido de polietileno es mucho menor a los obtenidos para las mismas esferas en separan. Lo mismo sucede con el número de Weissenberg que para el FV-2 está entre  $7.914 < We < 14.68$  y disminuye considerablemente para el FV-1 a  $2.031 < We < 5.024$ , aunque aún se mantiene en el mismo orden de magnitud.

Algo que resulta muy positivo es el hecho de que las propiedades del Newtoniano y el FV-2 son muy similares lo que los hacen muy comparables debido a que su rango de velocidades se encuentra muy cercano.

Fluido	Composición	$\rho$ [kg m <sup>-3</sup> ]	$\emptyset_{ind}$ [m]	$U_{ind}$ [m/s]	$\lambda$ [s]	Cd	Re	We	$t_c$
Newtoniano	97 vol. % Glic - 2 vol. % H2O	1.347677	0.019	0.015406	N/A	30.618215	0.20676247	N/A	1.23328573
		1.347677	0.0127	0.01170325	N/A	35.4647425	0.10516329	N/A	1.08516865
		1.433996	0.019	0.0311675	N/A	16.1281273	0.4193766	N/A	0.60960937
		1.433996	0.0127	0.019133	N/A	28.6069697	0.17206517	N/A	0.66377463
		2.172432	0.019	0.15626381	N/A	3.6044468	2.10586933	N/A	0.12158925
		2.172432	0.0127	.07988	N/A	9.21996862	0.72025514	N/A	0.08127282
Fluido Viscoelástico - 1	Polyox 0.5 wt % 100 vol. % H2O	1.347677	0.019	0.117865	0.20126445	2.82784019	5.3667783	2.4970562	0.16120137
		1.347677	0.0127	0.059671	0.23481282	7.37476305	1.54841726	2.2065379	0.2128337
		1.433996	0.019	0.152535	0.14379341	2.13760698	8.04776724	2.3087923	0.12456158
		1.433996	0.0127	0.065411048	0.19717859	7.76988842	1.79033505	2.0311273	0.1941568
		2.172432	0.019	0.457753334	0.10426939	0.6640264	45.7243246	5.024175	0.04150707
		2.172432	0.0127	0.224655	0.12313611	1.84274957	12.4927186	4.3564004	0.05653113
Fluido Viscoelástico - 2	Separan 0.5 wt % 100 vol. % H2O	1.347677	0.019	0.0138265	7.03980678	182.12874	0.03766179	10.245883	1.37417278
		1.347677	0.0127	0.0020492	28.0710151	5542.22848	0.0014403	9.0587597	6.1975405
		1.433996	0.019	0.02280155	3.29744067	86.5198049	0.1071709	7.9143956	0.83327669
		1.433996	0.0127	0.0032367	16.841373	2870.05022	0.00320728	8.584326	3.9237495
		2.172432	0.019	N/A	N/A	N/A	N/A	N/A	N/A
		2.172432	0.0127	0.093114876	1.0014529	10.2169697	1.27195505	14.685065	0.13639067

Tabla 3.1. Datos de las esferas sedimentando individualmente. Donde  $\emptyset_{ind}$  es el diámetro de la esfera,  $U_{ind}$  es la velocidad terminal de la esfera individual y  $t_c$  es el tiempo característico de la esfera que se define como:  $t_c = \frac{\emptyset_{ind}}{U_{ind}}$

## 3.2. VELOCIDAD DE SEDIMENTACIÓN DE ESFERAS CONSECUTIVAS

Para facilitar el análisis de las esferas en sedimentación, definiremos a la esfera 1 como la esfera líder y a la segunda esfera como esfera 2.

Hemos ahora de definir los parámetros utilizados en los experimentos;  $d$  es la distancia entre las esferas a lo largo de la sedimentación. A partir de la  $d$  se define una distancia adimensional entre las esferas mismas. Esta distancia adimensional se define como:  $d^* = \frac{d}{\varnothing_{ind}}$ , donde  $\varnothing_{ind}$  es el diámetro de la esfera individual. Para realizar una adimensionalización del tiempo se utilizó el tiempo característico de cada esfera individual  $t_c$ . El tiempo adimensional se define entonces como  $t^* = \frac{t}{t_c}$ , en donde  $t$  es el tiempo para cada posición de la esfera obtenido en la adquisición de imágenes. Para adimensionalizar la velocidad se toma la velocidad en cada punto de cada esfera  $U$  y se realiza un cociente por la velocidad de las esferas individuales sedimentando en el mismo fluido i.e.  $U_{ind}$  por lo que  $v^* = \frac{U}{U_{ind}}$ , que se define como la velocidad adimensional.

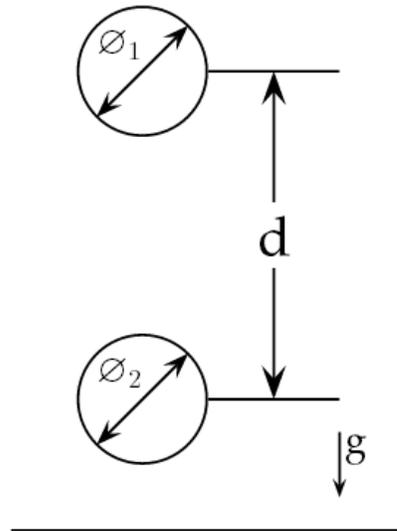


Figura 3.3. Esquema del sistema de esferas en línea. Donde  $\varnothing_1$  es el diámetro de la esfera líder y  $\varnothing_2$  es el diámetro de la esfera 2.

### 3.2.1. Fluido Newtoniano

La solución realizada a partir de la combinación entre glicerina en un 98%wt y agua fue utilizada como solución de referencia. Al ser éste un fluido Newtoniano es más sencillo predecir su comportamiento reológico por lo que funcionará como el fluido que calibrará los experimentos posteriores en donde se utilizarán los fluidos viscoelásticos.

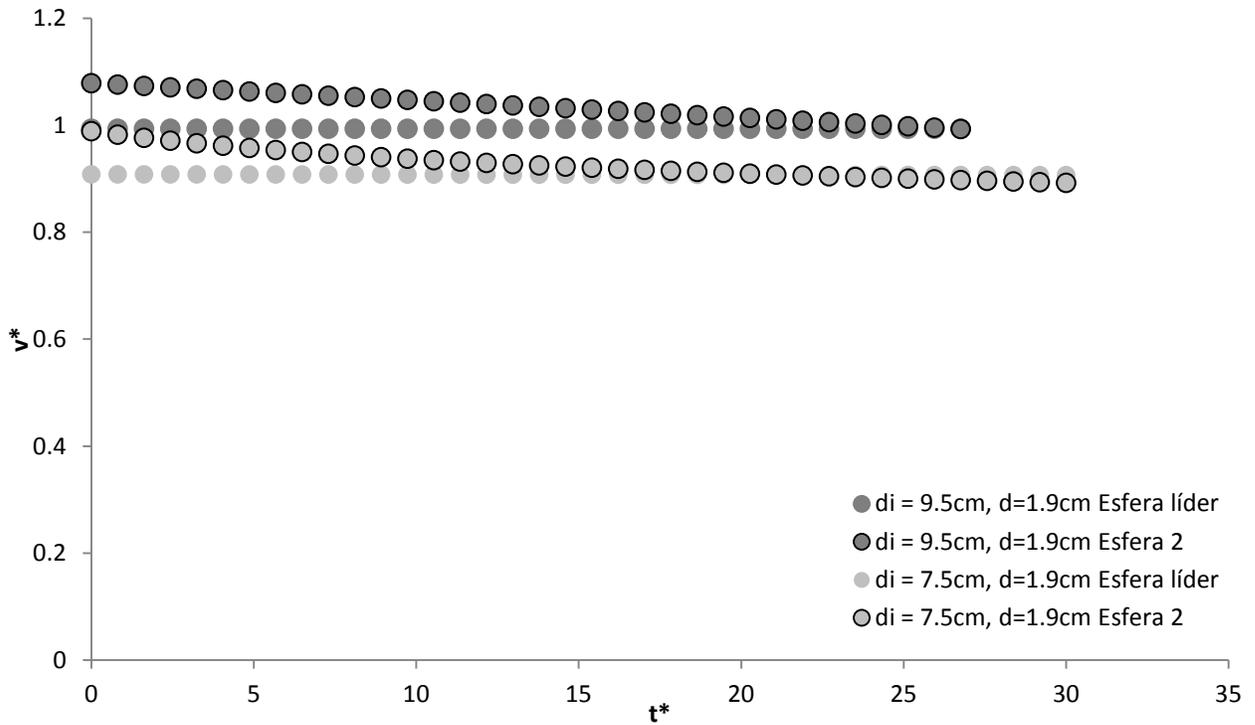


Figura 3.4 Esferas consecutivas Acetal,  $\rho = 1.3467$

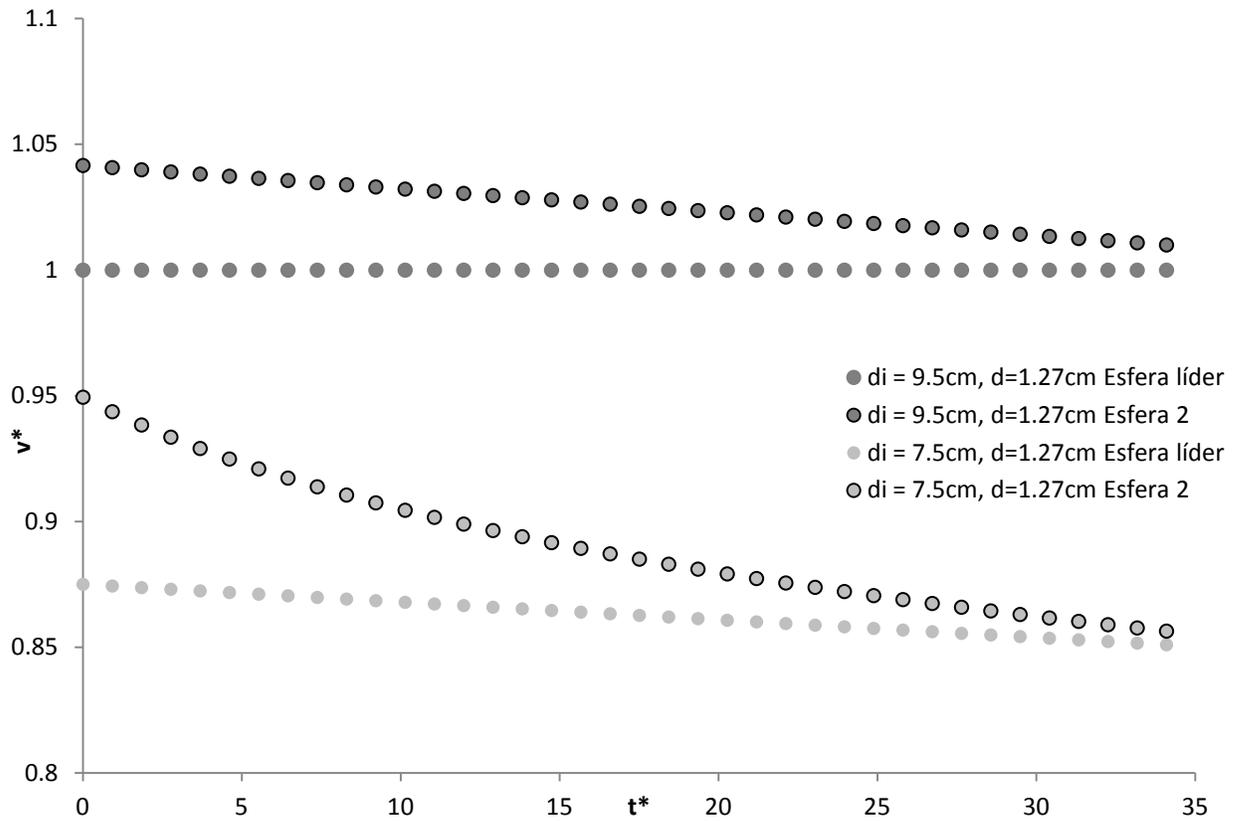


Figura 3.5 Esferas consecutivas Acetal,  $\rho = 1.3467$

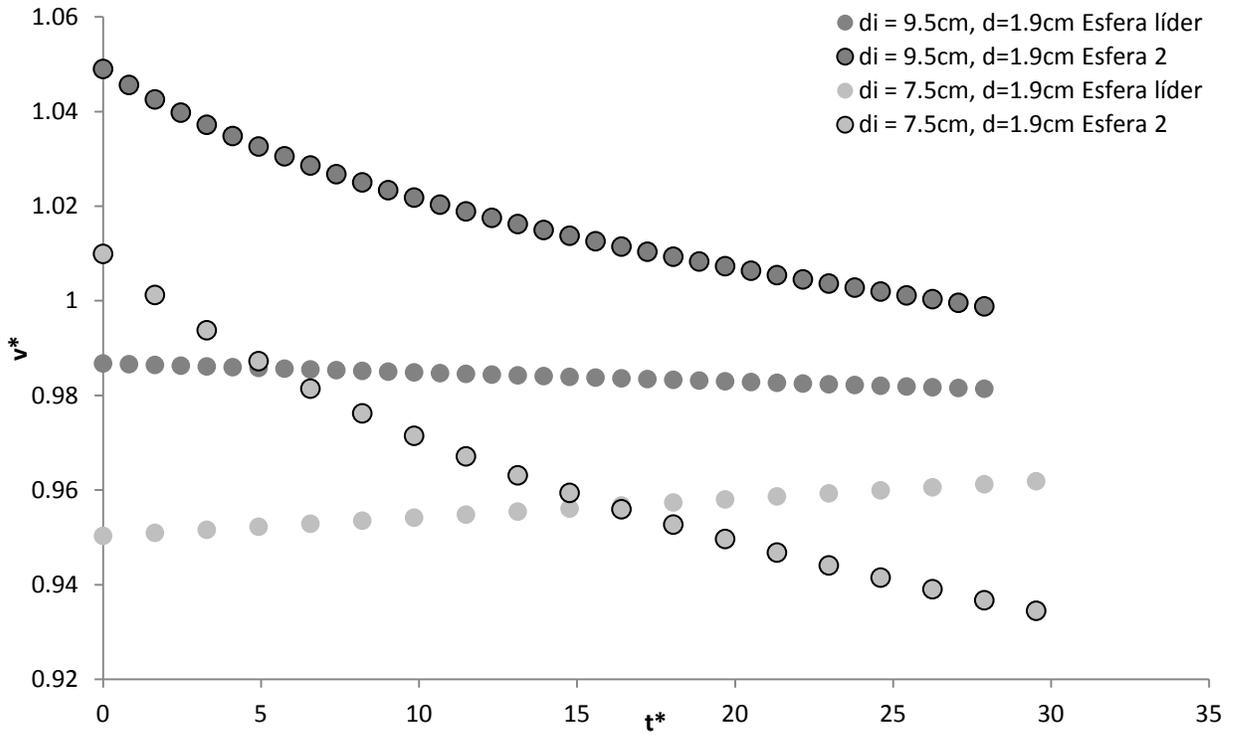


Figura 3.6 Esferas consecutivas Neopreno,  $\rho = 1.4319$

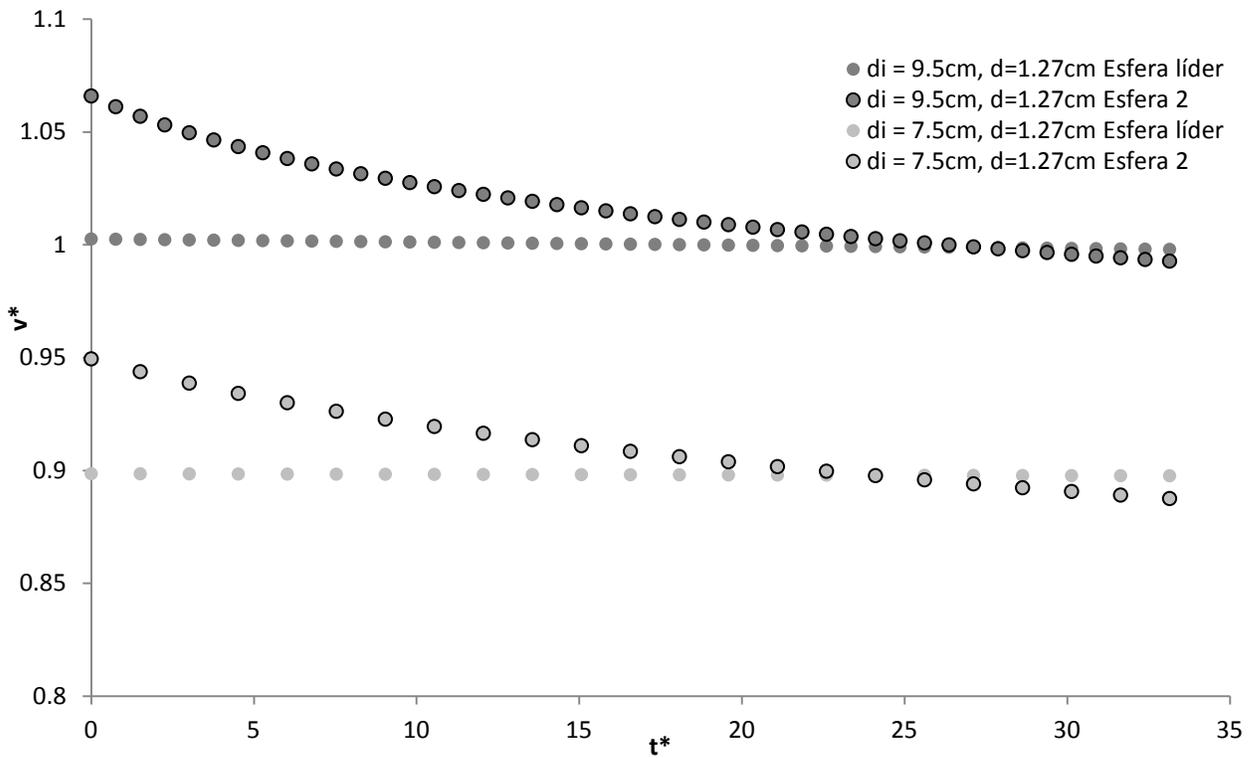


Figura 3.7 Esferas consecutivas Neopreno,  $\rho = 1.4319$

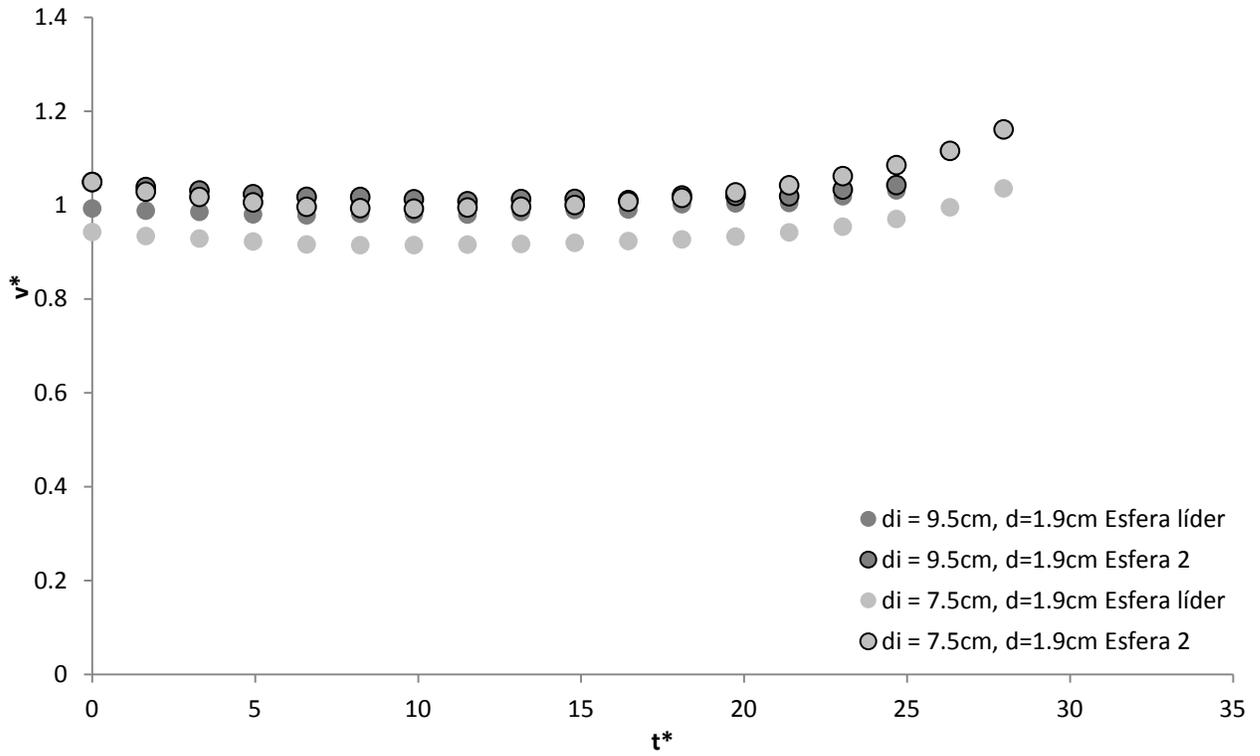


Figura 3.8 Esferas consecutivas PTFE,  $\rho = 2.1745$

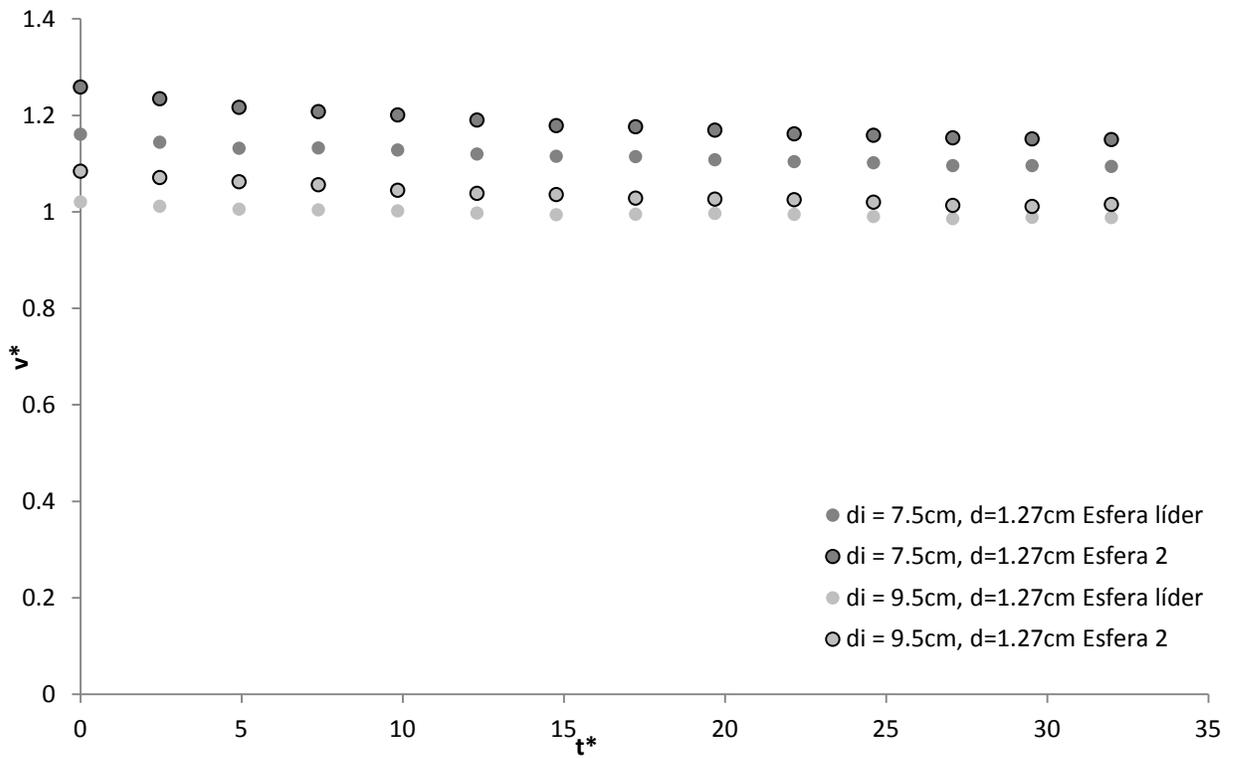


Figura 3.9 Esferas consecutivas PTFE,  $\rho = 2.1745$

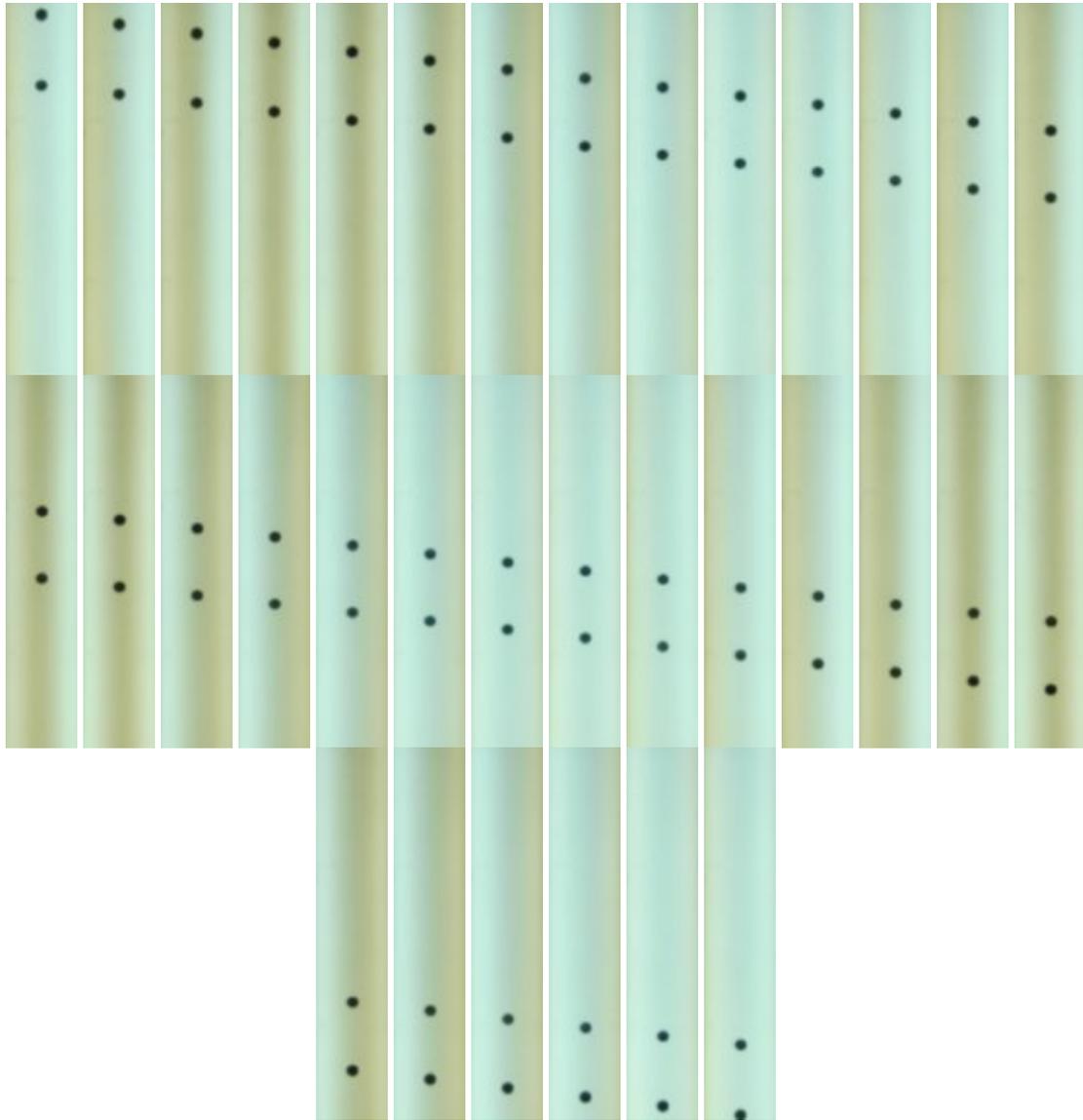
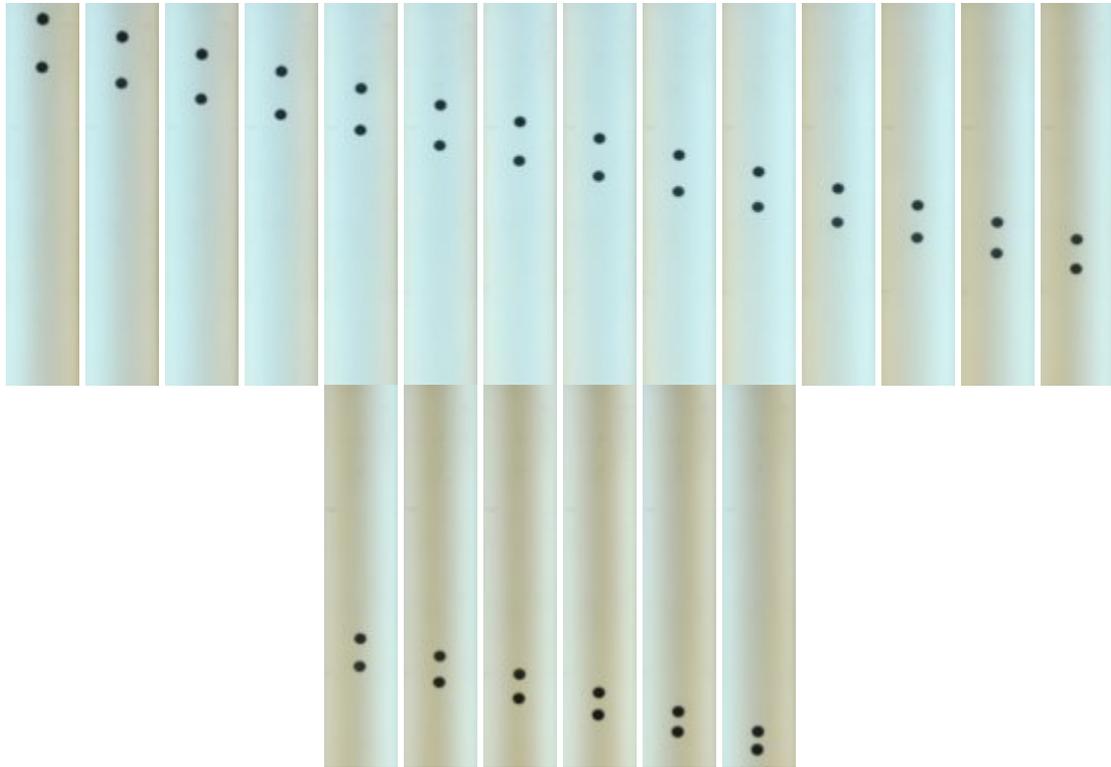


Figura 3.10 Imágenes esferas consecutivas cayendo en el fluido Newtoniano con una separación inicial  $d_i = 9.5\text{cm}$   
Acetal,  $\rho = 1.3467$



**Figura 3.11** Imágenes esferas consecutivas cayendo en el fluido Newtoniano con una separación inicial  $d_i = 9.5\text{cm}$  PTFE,  $\rho = 2.1745$

En las figuras anteriores se muestran los perfiles de velocidad de las distintas esferas dentro del fluido Newtoniano. Para la distancia inicial  $d_i = 9.5\text{cm}$ , las esferas en sus distintos tamaños y densidades presentaron un comportamiento de escasa o nula interacción. La primera esfera mantiene una velocidad prácticamente constante a lo largo de su recorrido mientras que la segunda comienza con una velocidad mayor pero parece tender a una velocidad muy parecida a la de su predecesora. La interacción puede observarse en la figura 3.10 que ilustra el movimiento predominante de las esferas de menor densidad, con excepción de las de mayor densidad y mayor diámetro i.e.  $\rho = 2.1745$ ,  $d = 1.9\text{cm}$ .

Debido a que una de las características de un fluido Newtoniano es que mantiene su viscosidad constante a cualquier rapidez de deformación, la segunda esfera no se encuentra con una cauda con una viscosidad disminuida a causa del paso de la esfera líder, por lo que no tiende a pegarse a ésta.

Al realizar un ajuste en la distancia inicial de liberación entre ambas esferas para el fluido Newtoniano a  $d_i = 7.5\text{cm}$ , podemos notar que la velocidad de sedimentación adquirida por las esferas es menor. También podemos notar que sigue la tendencia de poca o ninguna interacción, en donde la segunda esfera, de igual forma que a una distancia inicial de separación mayor, parece tender a una velocidad constante.

En el caso de las esferas más densas, podemos observar que para una distancia inicial de 3.94 diámetros éstas parecen no descender con la misma velocidad y por el contrario existe siempre una mayor velocidad presentada por la segunda esfera, lo que querría decir que eventualmente ésta alcanzará a la primera y lo hará mucho antes que en el caso de las dos esferas menos densas, Figura 3.11. Lo mismo sucede a una distancia inicial de 5 diámetros, la segunda esfera intentará alcanzar a la esfera líder.

Al realizar una tercer serie de pruebas y acercar ambas esferas a 2.89cm y 4.33 diámetros, para  $\varnothing=1.9\text{cm}$  y  $\varnothing=1.27\text{cm}$  respectivamente pudimos observar que para aquellas de mayor diámetro existe un toque y una alineación perpendicularmente a la dirección de sedimentación como lo reportado por [1], Figura 3.12. Mientras que las de menor diámetro solo presentan un mayor acercamiento el cual probablemente concluiría en un toque y un rebote si el tubo de sedimentación pudiese extenderse.

Evidentemente, para las esferas de menor densidad, menor velocidad y consecuentemente menor  $Re$  no existe interacción. Mientras que para  $Re$  más altos se crea una baja presión en la parte posterior a la esfera líder que propicia el acercamiento de la segunda esfera.



Figura 3.12 Imágenes esferas consecutivas cayendo en el fluido Newtoniano con una separación inicial  $d_i=5.5\text{cm}$  PTFE,  $\rho = 2.1745$

### 3.2.2. Fluido Viscoelástico - 1(óxido de polietileno)

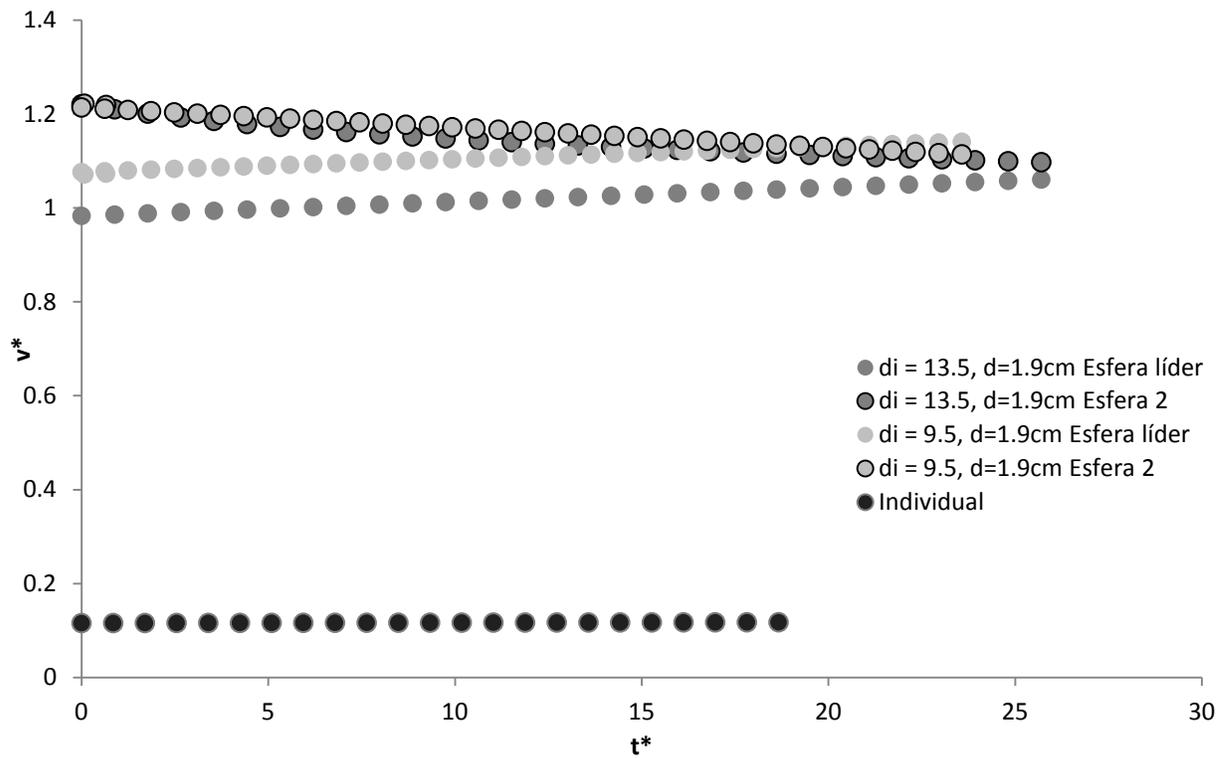


Figura 3.13 Esferas consecutivas Acetal,  $\rho = 1.3467, d = 1.9\text{cm}$

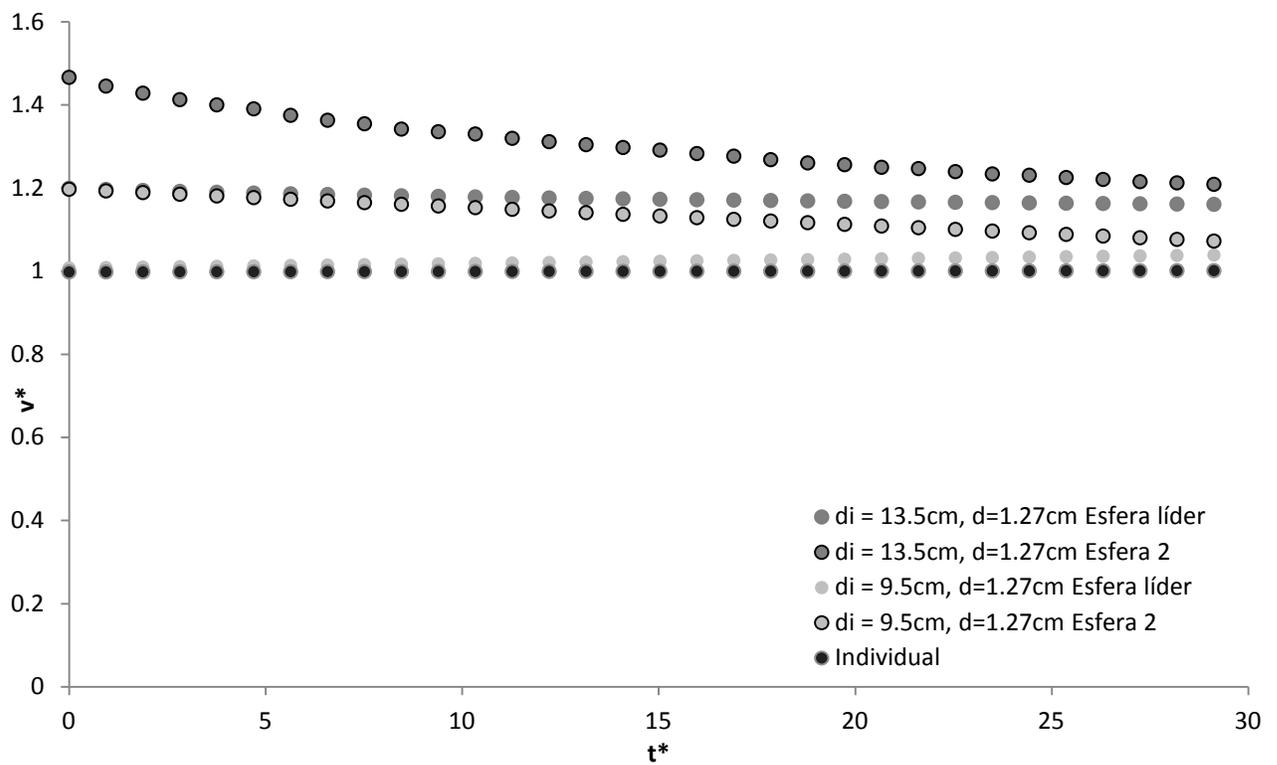


Figura 3.14 Esferas consecutivas Acetal,  $\rho = 1.3467, d = 1.27\text{cm}$

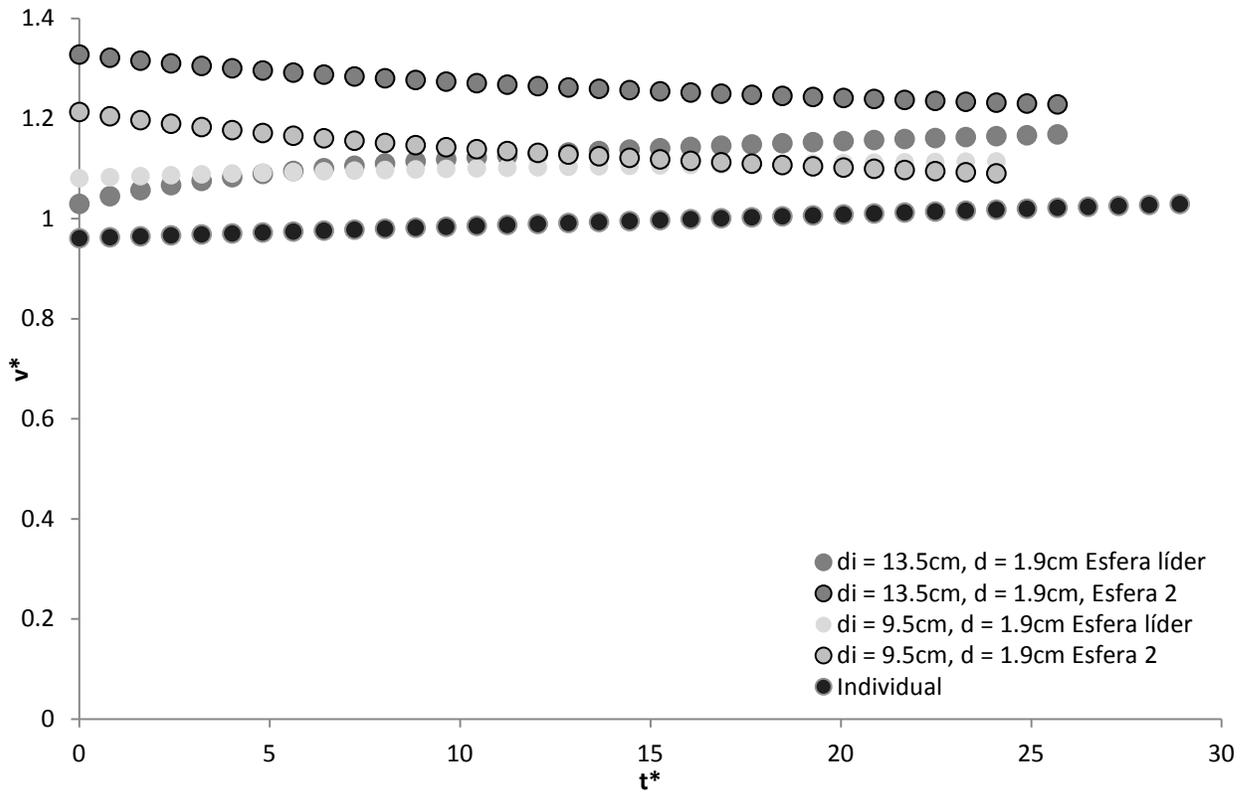


Figura 3.15 Esferas consecutivas Neopreno,  $\rho = 1.4319$

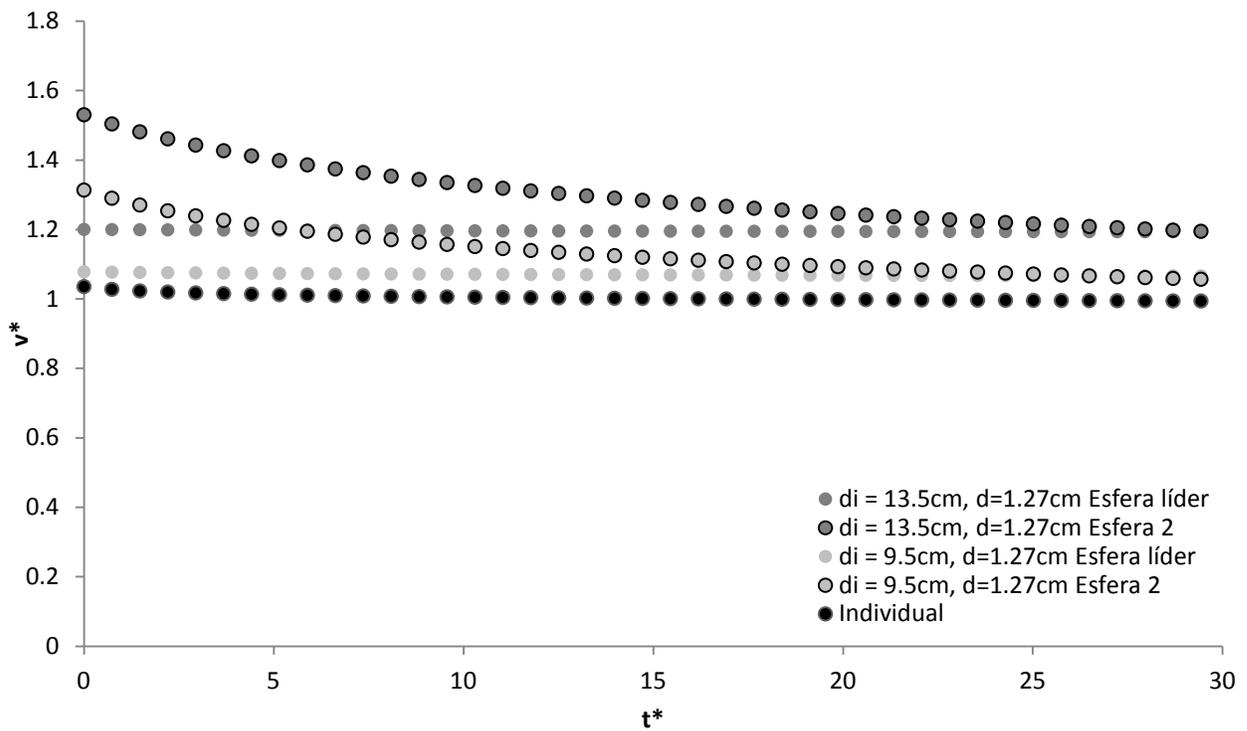


Figura 3.16 Esferas consecutivas Neopreno,  $\rho = 1.4319$

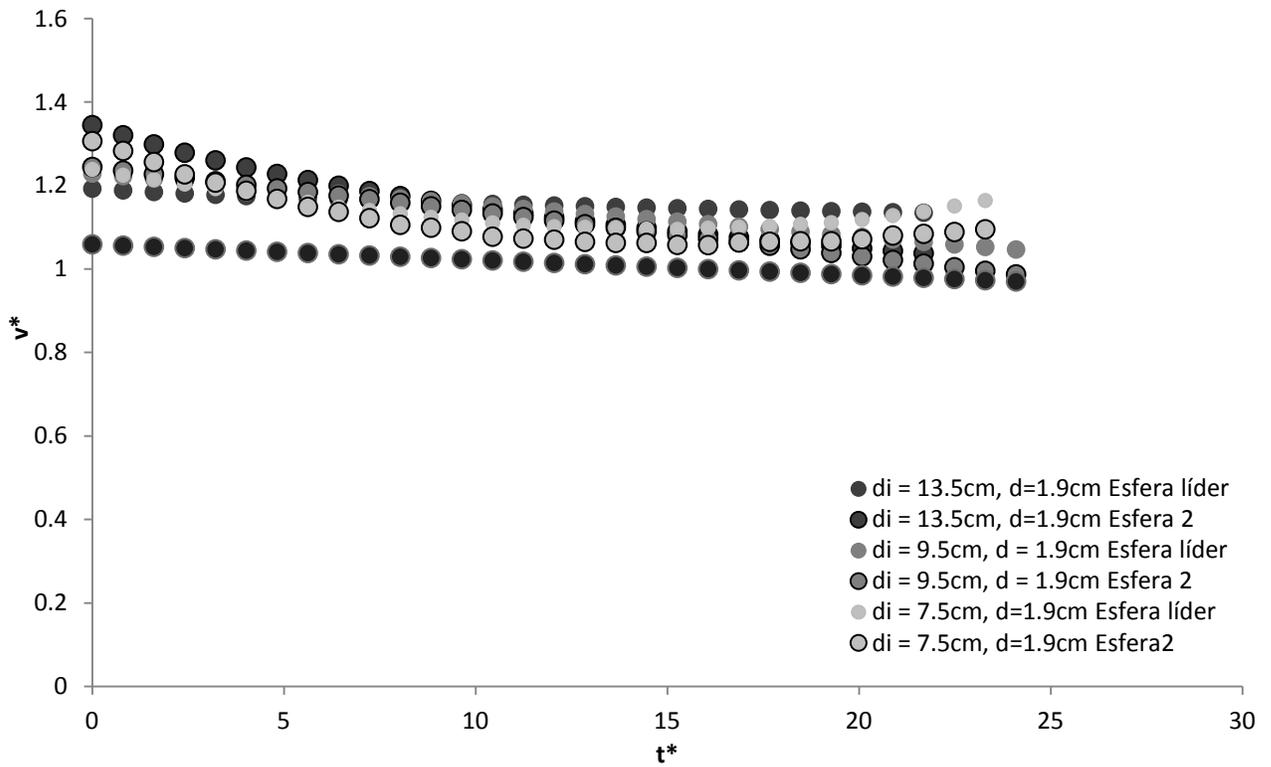


Figura 3.17 Esferas consecutivas PTFE,  $\rho = 2.1745$

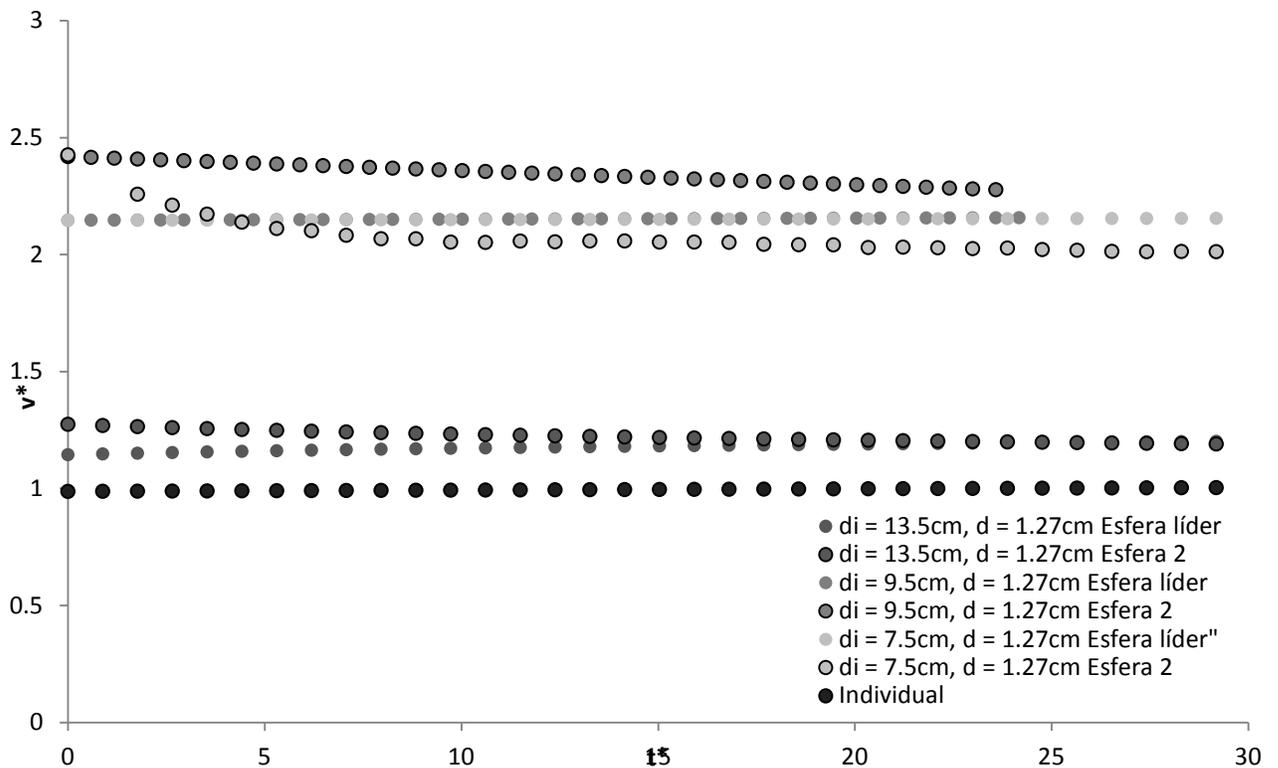


Figura 3.18 Esferas consecutivas PTFE,  $\rho = 2.1745$

Al describir la sedimentación de las esferas a través del FV-1 podríamos pensar que ésta es prácticamente igual a la ocurrida en el fluido Newtoniano. Los perfiles de velocidad y tiempo son muy parecidos entre ambos fluidos, aunque en este caso la velocidad de sedimentación es mayor. Sin embargo, lo que diferencia la interacción ocurrida en este fluido con aquella del fluido Newtoniano es que el acercamiento entre las esferas para el FV-1 es mucho mayor, la segunda esfera tiende siempre a acercarse a la esfera líder, lo que quiere decir que la segunda esfera lleva una mayor velocidad. De manera similar, las esferas que son liberadas a una menor diferencia de diámetros exhiben una velocidad final menor. Así mismo al disminuir la distancia inicial de liberación el acercamiento entre esferas es mayor.

Para esta solución de óxido de polietileno, la segunda esfera jamás tocará a la esfera líder independientemente de su distancia de separación inicial; además la segunda esfera comenzará a desplazarse o ladearse con respecto al eje vertical de sedimentación, parecido a lo ocurrido con la mayor densidad en fluido Newtoniano.

Es imposible percibirlo debido a la distancia de sedimentación limitada por el tubo del arreglo experimental; pero si las esferas pudiesen continuar probablemente optarían por un arreglo más estable y se alinearían de forma horizontal al eje de sedimentación similar a lo que sucede en el fluido Newtoniano. Se debe resaltar que a causa de la inestabilidad de la interacción en este fluido, lo cual posiblemente se deba a las altas velocidades, es difícil saber si las esferas descienden perfectamente bien alineadas, lo cual podría justificar el hecho de que la segunda se salga de su trayectoria detrás la esfera líder. Existe también la posibilidad de que la segunda esfera descienda con un giro que le genere un momento angular y propicie su movimiento lateral y distanciamiento del eje de sedimentación.

En ocasiones sucede que la segunda esfera interactúa con la primera de tal manera que la desplaza del eje vertical de sedimentación, como si la segunda esfera empujara la cauda de la esfera líder que a su vez empuja a ésta esfera. Las Figuras 3.19 y 3.20 muestran dos esferas de distintas densidades y diámetros sedimentando e interactuando como se acaba de describir. La segunda esfera primero intenta alcanzar a la esfera líder y encuentra un punto en el que comienza a desplazarse de forma lateral, es posible observar cómo la esfera líder también parece ser afectada y desplazada.

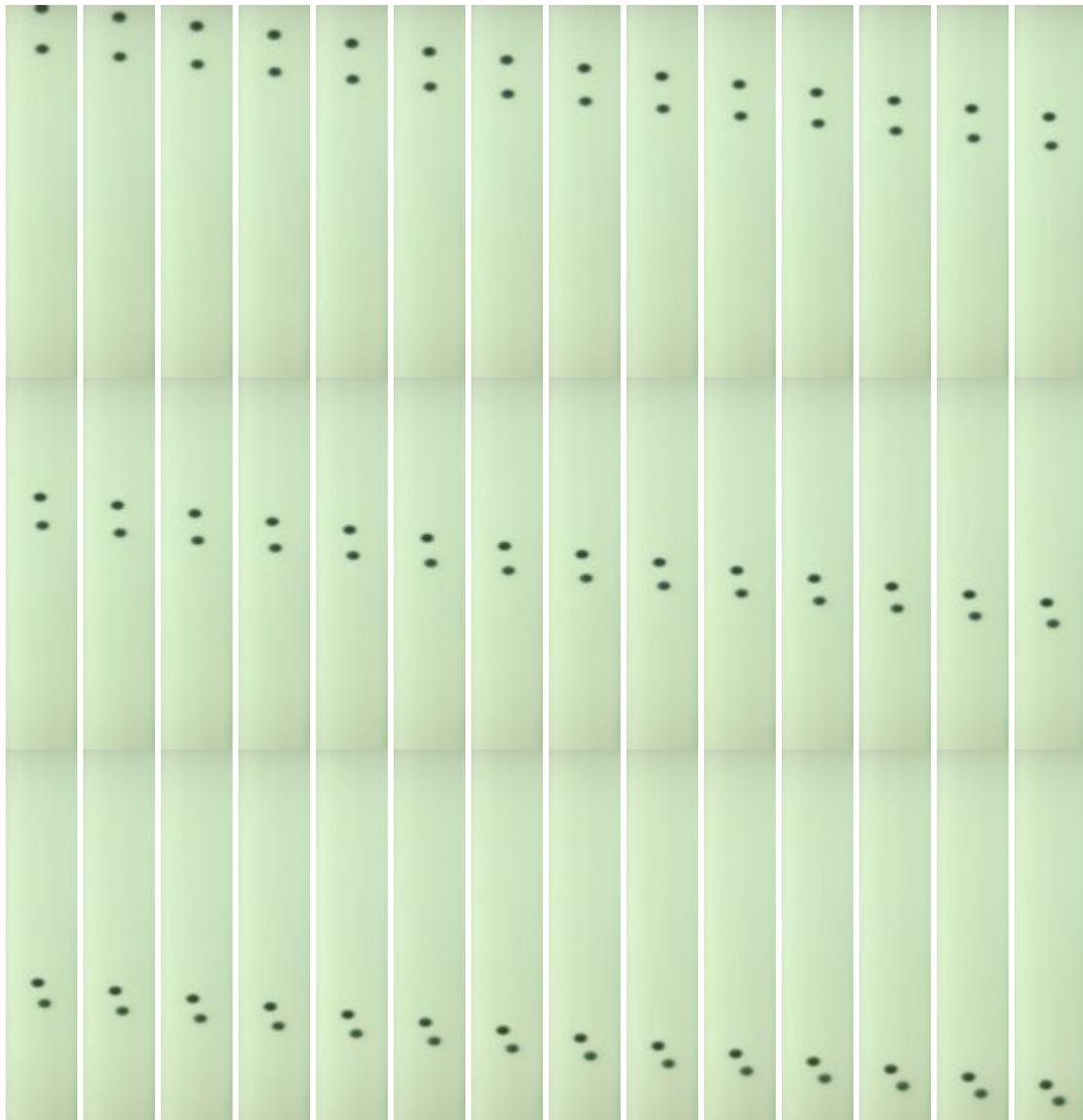
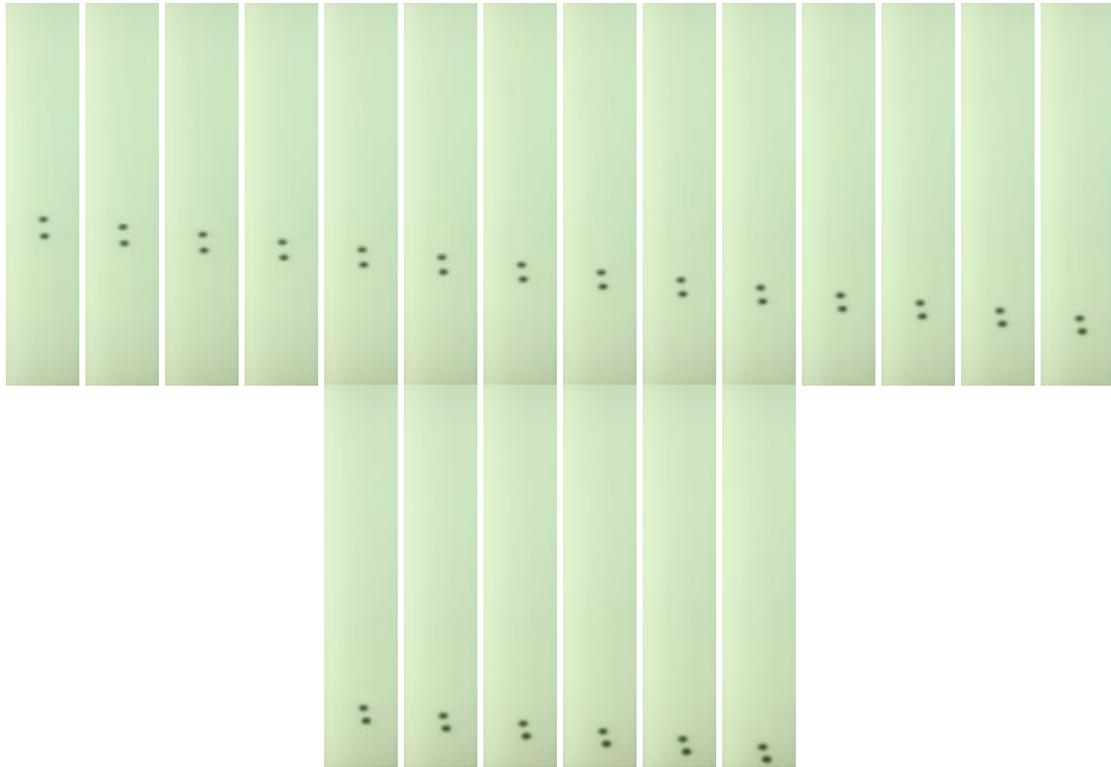


Figura 3.19 Imágenes esferas consecutivas cayendo en el FV-1 (óxido de polietileno) con una separación inicial  $d_i = 7.5\text{cm}$  Acetal,  $\rho = 1.3467$



**Figura 3.20** Imágenes esferas consecutivas cayendo en el FV-1 (óxido de polietileno) con una separación inicial  $d_i = 5.5\text{cm}$ , Acetal  $\rho = 1.4319$

Finalmente, como sucede en el fluido Newtoniano, la sedimentación de las esferas con mayor densidad y consecuentemente con mayor velocidad es distinta de todas las demás. Figura 3.21. Aparentemente la distancia a la que la segunda esfera comienza a ladearse es mayor que cualquiera de los casos de sedimentación de las esferas anteriores, lo que podría significar que la segunda esfera está afectada por la cauda de la primera prácticamente desde el inicio de su sedimentación, por lo que existe poco o ningún acercamiento de la segunda esfera a la esfera líder. Además en el caso de las esferas con mayor diámetro la segunda esfera se desplaza horizontalmente en tal magnitud que prácticamente toca la pared del tubo contenedor por lo que su velocidad comienza a disminuir debido a la fricción que se presenta entre sus superficies y consecuentemente comienza a separarse.

Los comportamientos hasta ahora analizados parecen ser muy similares a los reportados por Van den Brule [3] quien habla de una separación y ladeo de las esferas que son liberadas a distancias iniciales muy pequeñas en su fluido de Boger.

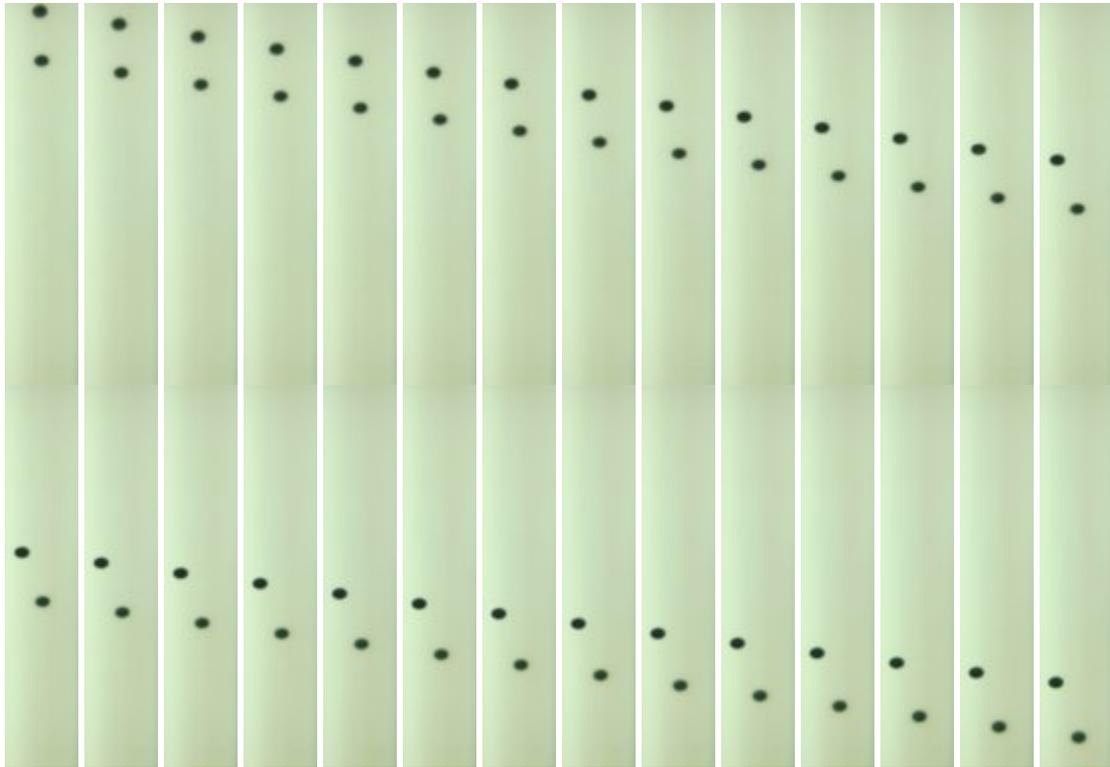


Figura 3.21 Imágenes esferas consecutivas cayendo en el FV-1 (óxido de polietileno) con una separación inicial  $d_i = 7.5\text{cm}$  PTFE,  $\rho = 2.1741$

### 3.2.3. Fluido Viscoelástico - 2 (poliacrilamida)

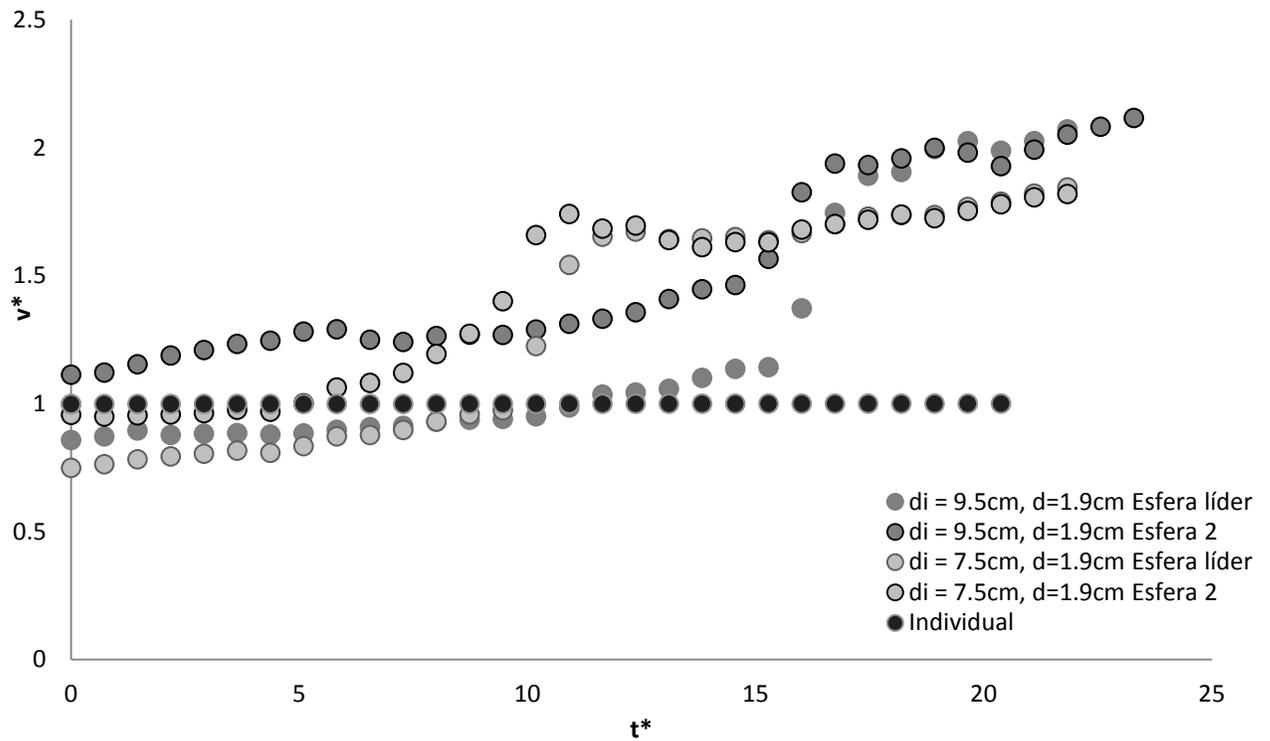


Figura 3.22 Esferas consecutivas Acetal,  $\rho = 1.3467$

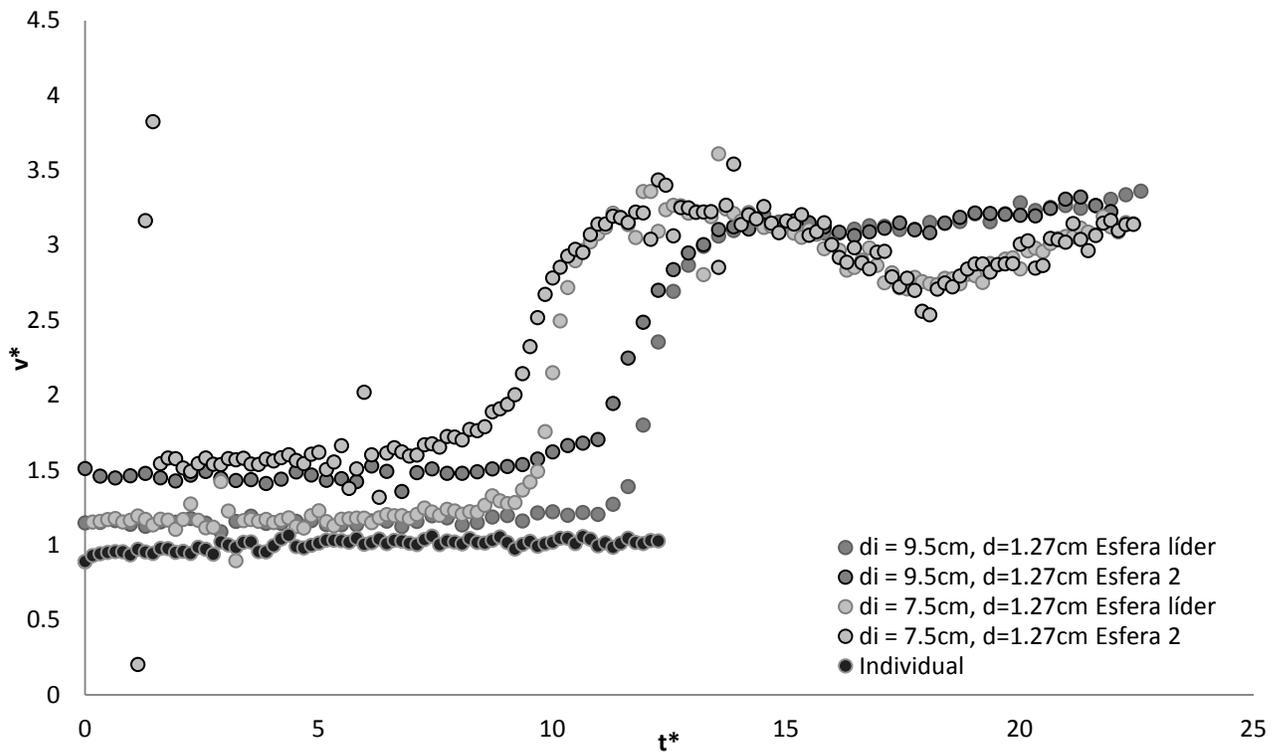


Figura 3.23 Esferas consecutivas Acetal,  $\rho = 1.3467$

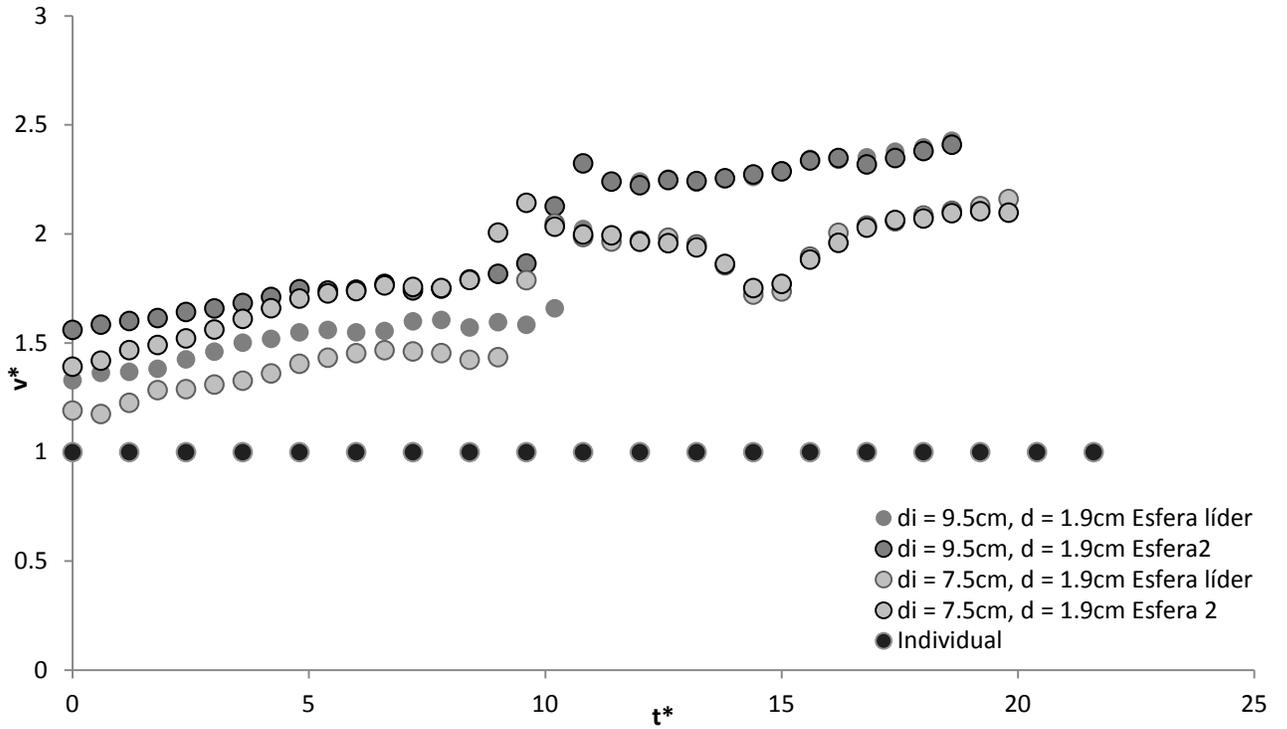


Figura 3.24 Esferas consecutivas Neopreno,  $\rho = 1.4319$

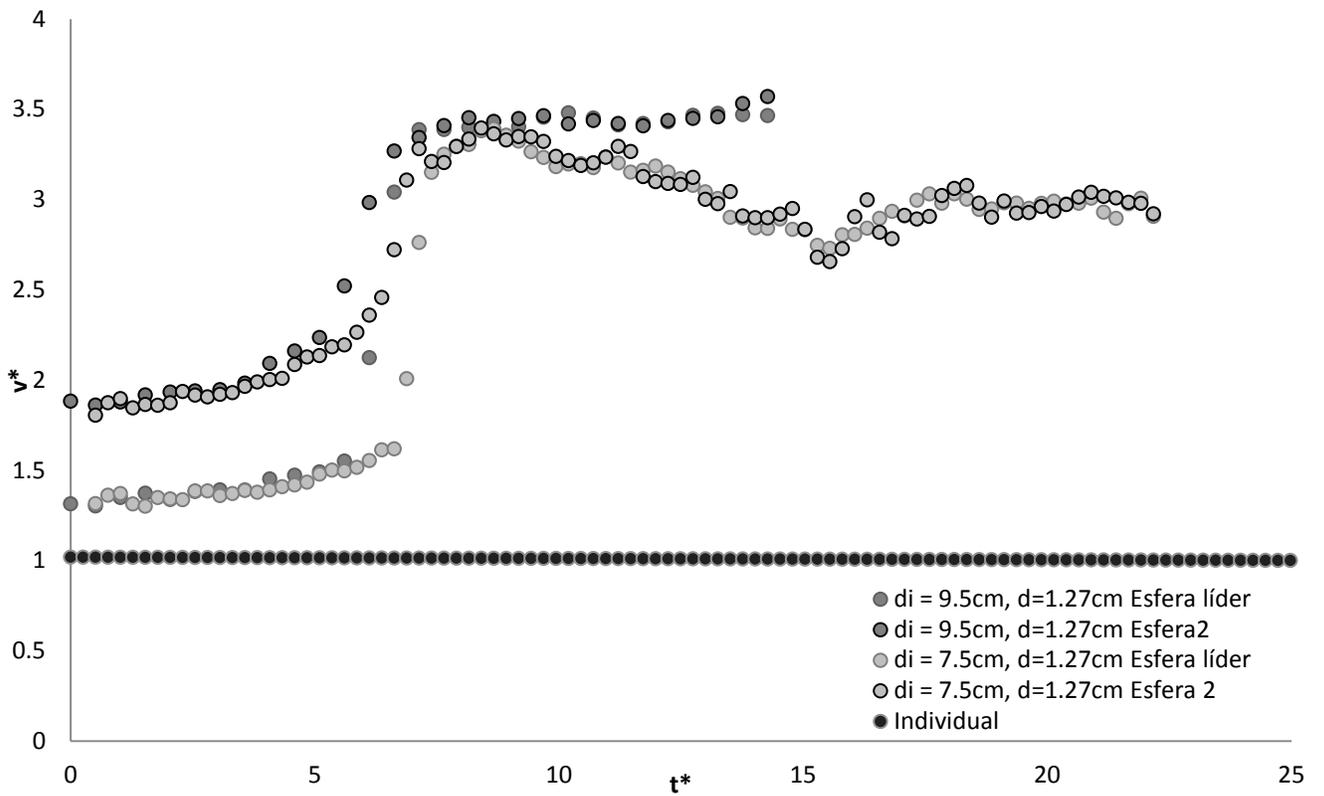


Figura 3.25 Esferas consecutivas Neopreno,  $\rho = 1.4319$

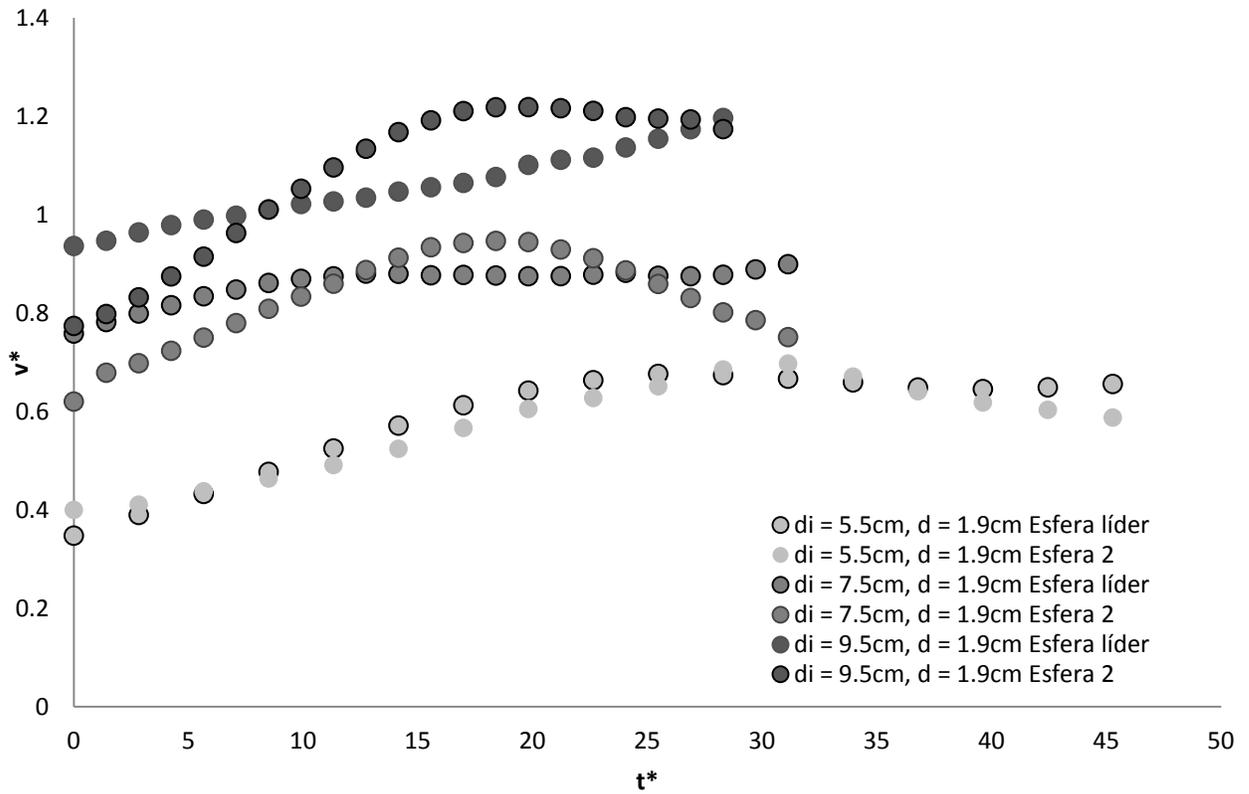


Figura 3.26 Esferas consecutivas PTFE,  $\rho = 2.1745$

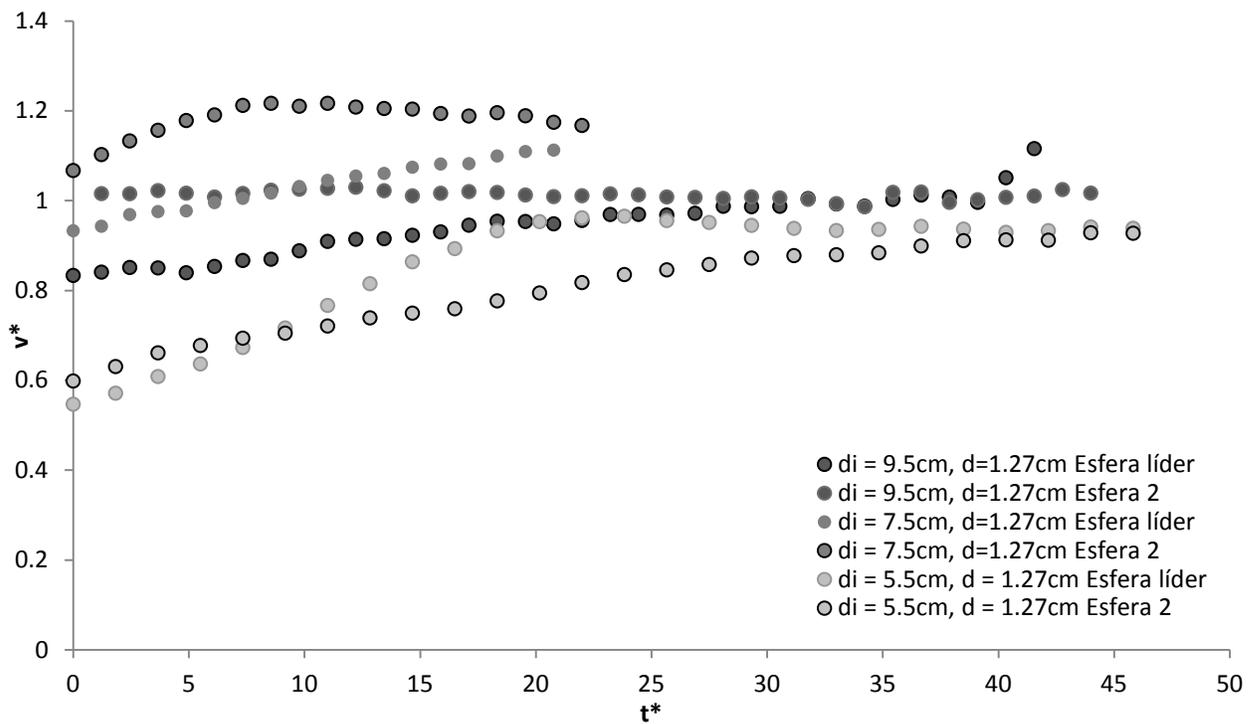


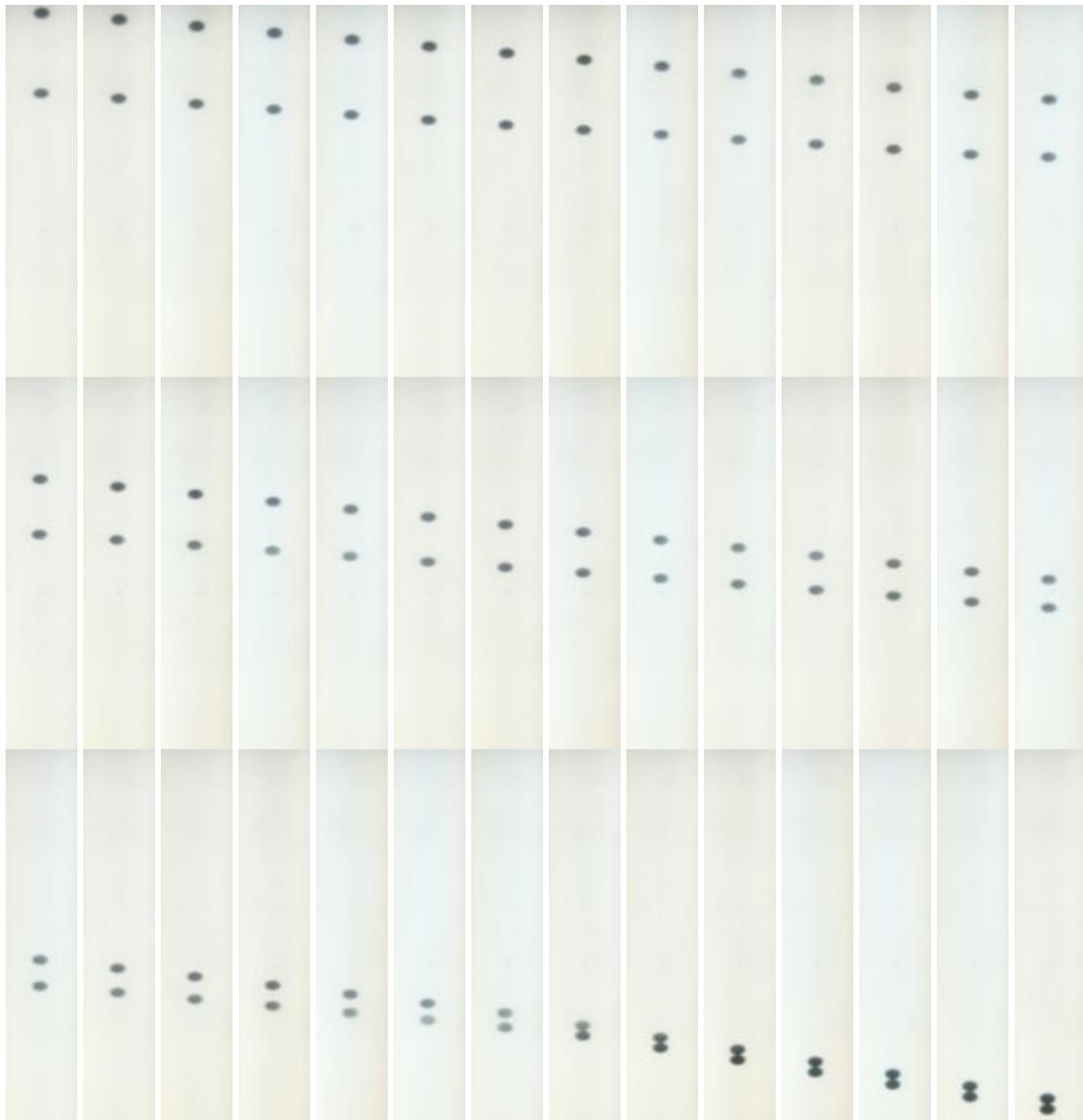
Figura 3.27 Esferas consecutivas PTFE,  $\rho = 2.1745$

Para los experimentos realizados utilizando el FV-2 (poliacrilamida), podemos comprobar, a partir de los perfiles de velocidad graficados, Figuras 3.22 a 3.27, que los cambios de velocidad de las esferas en sedimentación son completamente distintos a los presentados en el caso del FV-1. En los eventos de las esferas con menor densidad (acetato y neopreno) la velocidad presenta una especie de “salto” que ocurre a partir del momento en que la primera esfera “siente” la presencia de la segunda que se aproxima. Además, con excepción de las esferas con mayor velocidad de sedimentación i.e. mayor densidad, fue posible observar que a pesar de que la distancia inicial de sedimentación era afectada e incrementada por los efectos del dispositivo liberador de esferas sobre la segunda esfera, éstas siempre terminan por acercarse y formar un encadenamiento estable, lo que querría decir que el efecto causado por la cauda de la esfera líder es percibido por la segunda esfera prácticamente desde el comienzo de la sedimentación lo que impulsa a que ésta se acerque a cualquier distancia inicial de separación. Esto puede observarse en la Figura 3.28 en donde la distancia de separación que tiene las esferas es mayor a la distancia que se había establecido en el liberador. También podría ocurrir que el tiempo de sedimentación es mayor al tiempo de relajación del fluido por lo que la segunda esfera podría encontrar una zona que aun está desgastada por el transcurso de la primera.

Como se encuentra graficado en las figura anteriores, en el trascurso del evento en el que sedimentan las esferas de menores densidades ( $\rho = 1.3467$  y  $\rho = 1.4319$ ) existen tres etapas bien definidas. El comienzo de la sedimentación, etapa 1, está caracterizado por un tiempo en el que aparentemente la velocidad de ambas esferas se mantiene constante. En este caso la primera esfera sedimenta a una velocidad prácticamente igual a la velocidad de sedimentación de la esfera individual con las mismas características. En cambio, la segunda esfera sigue a la esfera líder a una mayor velocidad, de tal suerte que ésta se acercará a la primera hasta tocarla. Esta interacción es la misma que la descrita por los experimentos realizados por Joseph y Liu [1] en el que sus esferas presentaban un acercamiento, seguido de un toque y un encadenamiento estable, en el que las esferas se colocan una detrás de otra sin que exista un tambaleo que provoque que la segunda esfera se alinee paralela a la esfera líder y en dirección perpendicular a la dirección de sedimentación.

La segunda etapa tiene lugar antes de que ocurra el toque y el encadenamiento entre ambas esferas. En esta etapa la esfera líder, sin necesidad de ser tocada por la segunda esfera, comienza a incrementar su velocidad junto con la segunda esfera, hasta llegar a un máximo. Este cambio de velocidad ocurre en un lapso de aproximadamente dos segundos y es posible que exista una distancia crítica entre ambas esferas en la que sus velocidades comienzan a cambiar debido a su proximidad.

Finalmente, la tercera etapa de sedimentación para el caso del FV-2 ocurre después del máximo de velocidad adquirido por ambas esferas, en las que posteriormente a su encadenamiento descienden a una velocidad mayor que la que tenían cuando aun no se habían encadenado.



**Figura 3.28, Imágenes esferas consecutivas cayendo en el FV-2 (poliacrilamida) con una separación inicial  $d_i = 9.5\text{cm}$  Acetal,  $\rho = 1.4319$**

Sin embargo para las esferas con mayor densidad (PTFE), el perfil de velocidad a lo largo de la sedimentación es completamente diferente. En este caso, las esferas interactúan de manera que aparentemente la cauda de la esfera líder permite un primer acercamiento de la segunda esfera hasta un punto en el que parecería ser que la misma cauda empuja a la segunda esfera en dirección contraria a la sedimentación. Nótese que esta interacción sucede únicamente con las esferas de mayor diámetro y que la distancia inicial no cambia la interacción, que quiere decir, que a la distancia de liberación más cercana también existe una separación entre las esferas. Como se presentó para la mayor densidad en el caso del FV-1

Las esferas parecen no acercarse, sin embargo, en el FV-2 no existe una deflexión o lado por parte de la segunda esfera, únicamente existe una desaceleración y una aparente separación entre ambas, Figura 3.29

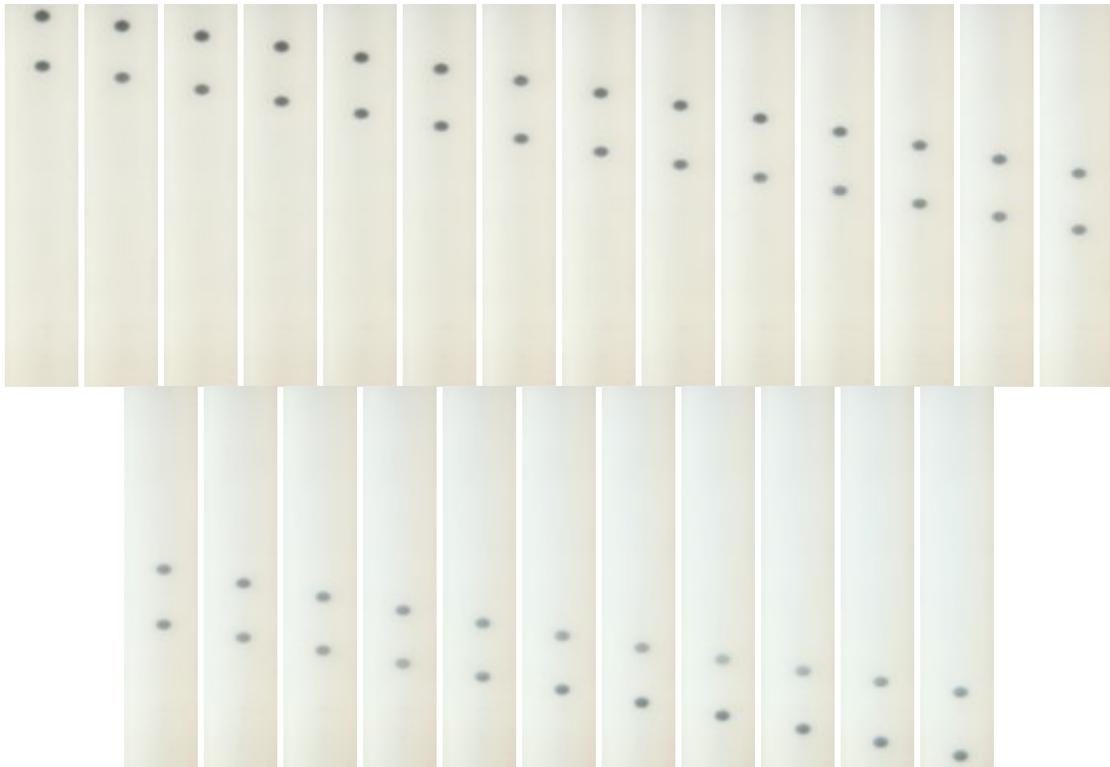


Figura 3.29 Esferas consecutivas PTFE,  $\rho = 2.1741$ ,  $d_i=5.5\text{cm}$

Fluido	Composición	$\rho$ [kg m <sup>-3</sup> ]	$\phi_{ind}$ [m]	$d_i$ [mm]	$d_i^*$	$d_f$ [mm]	$d_f^*$	Re	We		
Fluido Viscoelástico -1	Polyox 0.5 wt % 100 vol. % H2O	1.347677	0.019	131.3904955	6.91528924	82.3699682	4.335261482	6.1773141	1.43709127		
		1.347677	0.0127	137.827533	10.8525617	92.0588742	7.24873025	2.0914366	2.98035571		
		1.433996	0.019	136.525542	7.18555484	101.751824	5.355359184	10.233081	4.7940073		
		1.433996	0.0127	114.2881554	8.99906736	75.7394816	5.963738707	2.30351	2.61332203		
		2.172432	0.019	138.6488069	7.29730563	136.532957	7.185945094	52.834605	5.71917719		
		2.172432	0.0127	131.3545402	10.3428772	115.342967	9.082123411	15.224936	5.30916605		
		1.347677	0.019	98.85201655	5.20273771	71.6216888	3.769562567	6.26219	1.4568368		
		1.347677	0.0127	90.91748973	7.15885746	53.4087602	4.205414187	3.4574771	2.46350081		
		1.433996	0.019	104.386759	5.49403995	84.7538539	4.460729154	9.14431	2.6233752		
		1.433996	0.0127	98.61932932	7.76530152	74.8554558	5.894130378	2.0144727	1.84582431		
		2.172432	0.019	110.2780906	5.80411003	111.905483	5.889762262	51.314557	5.63842803		
		2.172432	0.0127	1.007265245	7.53466128	60.9918416	4.802507213	29.333436	10.2298561		
		2.172432	0.019	75.87880852	3.9936215	4.37997353	83.21949716	57.760512	6.34670767		
		2.172432	0.0127	101.5136516	7.99320091	4.80250721	60.9918416	29.382882	10.290182		
		Fluido Viscoelástico - 2	Separan 0.5 wt % 100 vol. % H2O	1.347677	0.019	116.5484536	6.13412914	17.3154302	0.911338431	0.165812	8.93104816
				1.347677	0.0127	63.21625401	4.9776578	11.6250612	0.915359146	0.0066905	8.49074809
				1.433996	0.019	62.58292281	3.29383804	19.958205	1.05043184	0.3871568	9.57990695
				1.433996	0.0127	62.11769359	4.89115698	11.5213524	0.907193102	0.021923	8.07110468
2.172432	0.019			130.5278984	6.86988939	120.220944	6.327418102	11.122232	19.3817842		
2.172432	0.0127			79.46216268	6.2568632	41.5563486	3.27215343	1.6686958	15.6396033		
1.347677	0.019			69.52983253	3.65946487	18.4129204	0.969101072	0.3140153	8.12866025		
1.347677	0.0127			59.07201117	4.65133946	11.7228222	0.923056867	0.008083	7.72104433		
1.433996	0.019			69.44348994	3.65492052	18.8422031	0.991694899	0.5844866	8.36181556		
1.433996	0.0127			61.68	4.85630122	10.5869524	0.833618302	0.0312521	10.9110603		
2.172432	0.019			86.36	4.54516934	109.564586	5.766557133	7.4248608	17.3596001		
2.172432	0.0127			81.30	6.40119708	36.6272282	2.884033714	1.811704	12.9433592		
2.172432	0.019			54.02	2.84	60.7110809	3.195320046	9.0121868	14.2662705		
2.172432	0.0127			55.70	4.39	25.6739374	2.021569875	1.038899	13.662628		

Tabla 3.2 resultados de esferas consecutivas para FV-1 y FV-2

### 3.3. DISTANCIA ENTRE CENTROS - FLUIDOS NO NEWTONIANOS

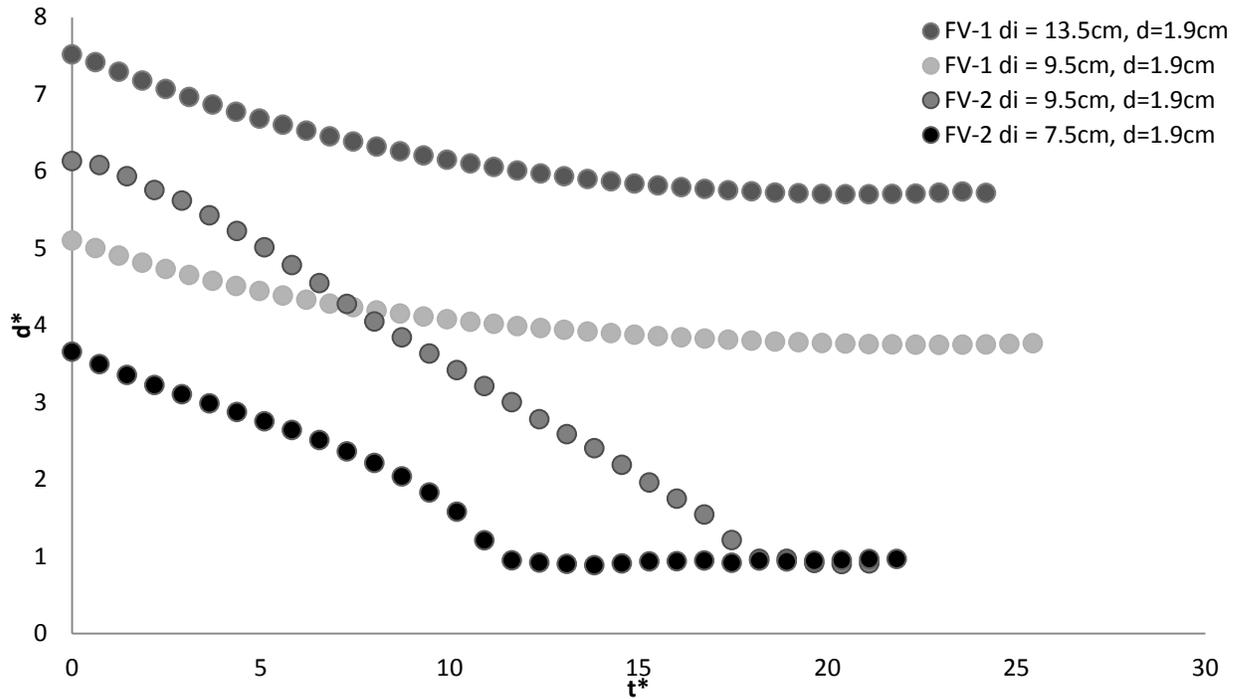


Figura 3.30 Esferas consecutivas Acetal,  $\rho = 1.3467$

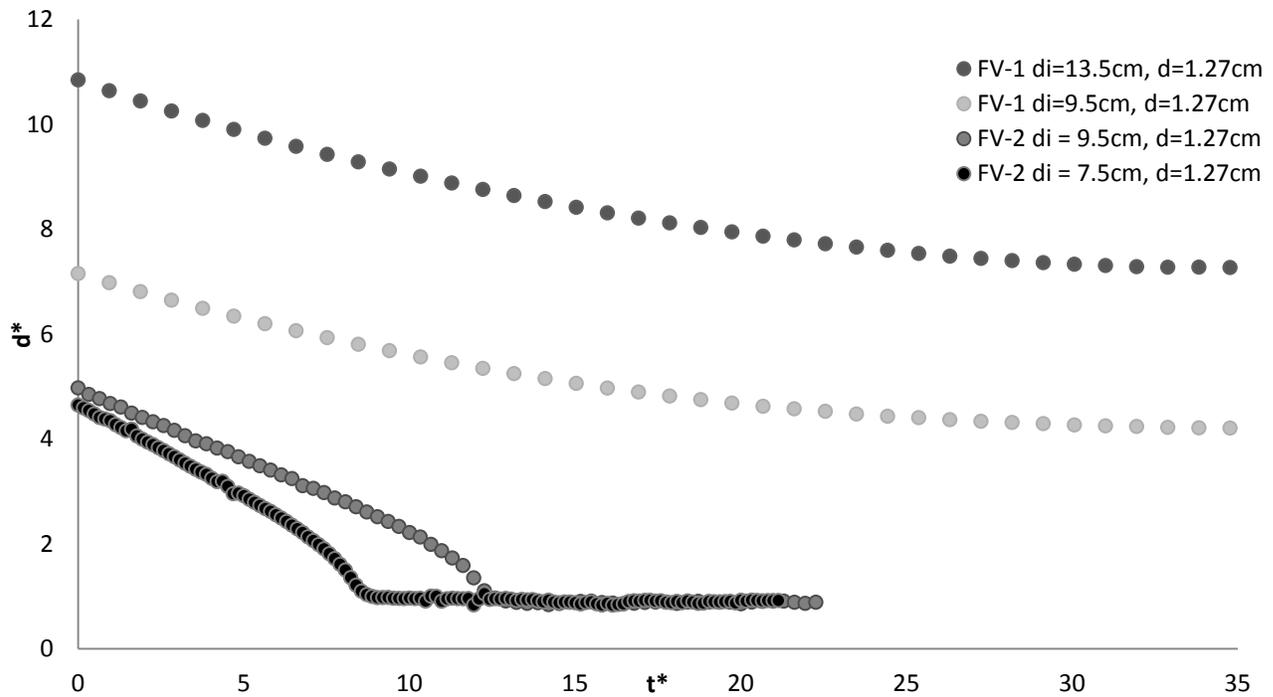


Figura 3.31 Esferas consecutivas Acetal,  $\rho = 1.3467$

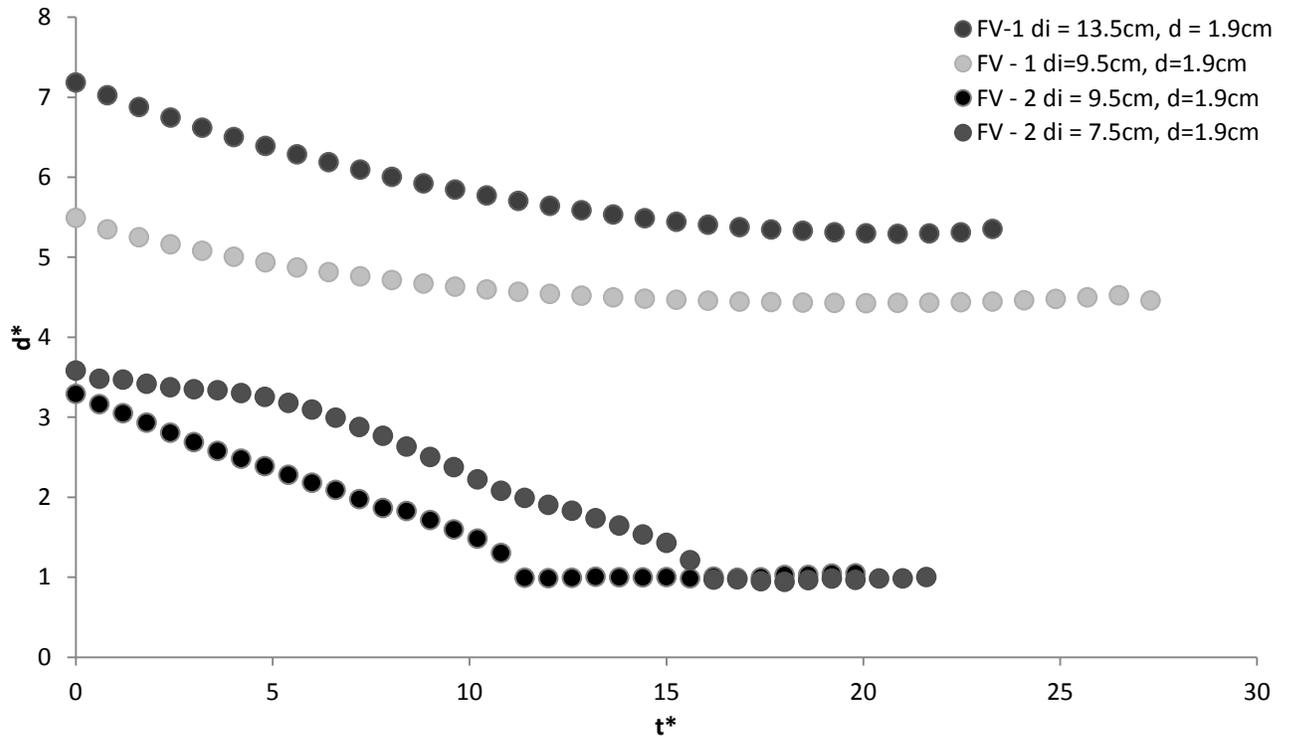


Figura 3.32 Esferas consecutivas Neopreno,  $\rho = 1.4319$

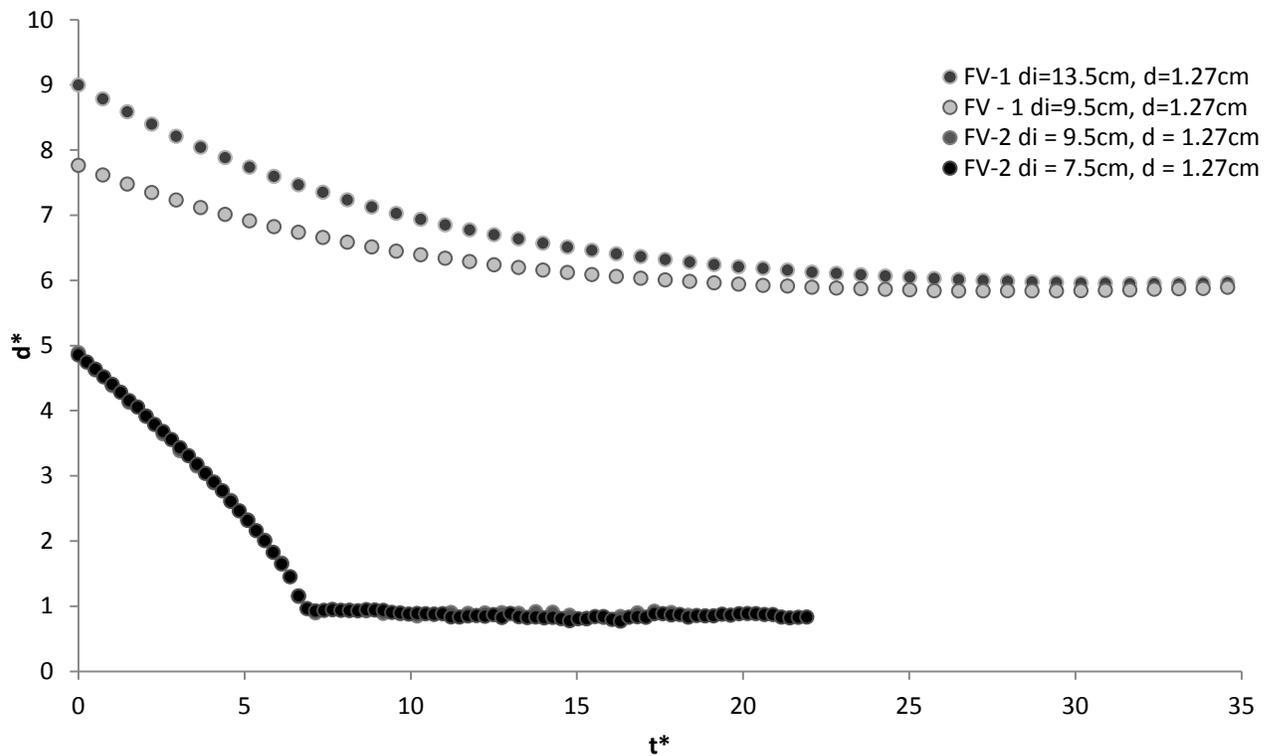


Figura 3.33 Esferas consecutivas Neopreno,  $\rho = 1.4319$

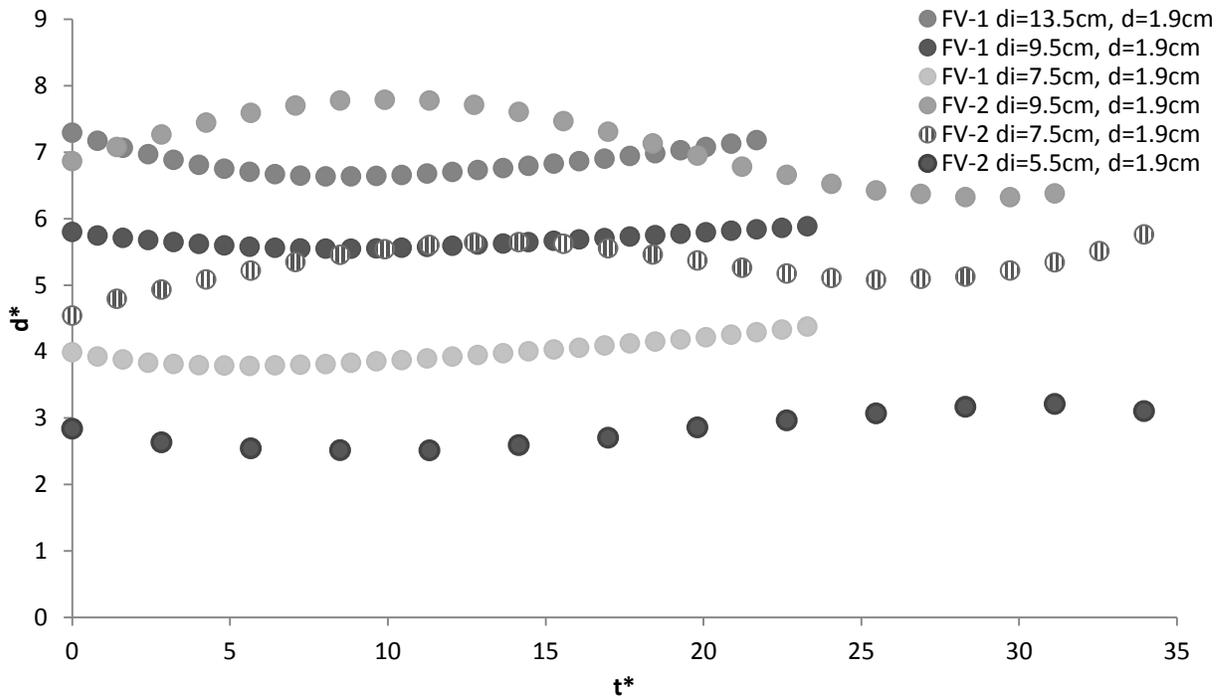


Figura 3.34 Distancia entre esferas consecutivas, PTFE,  $\rho = 2.1745$

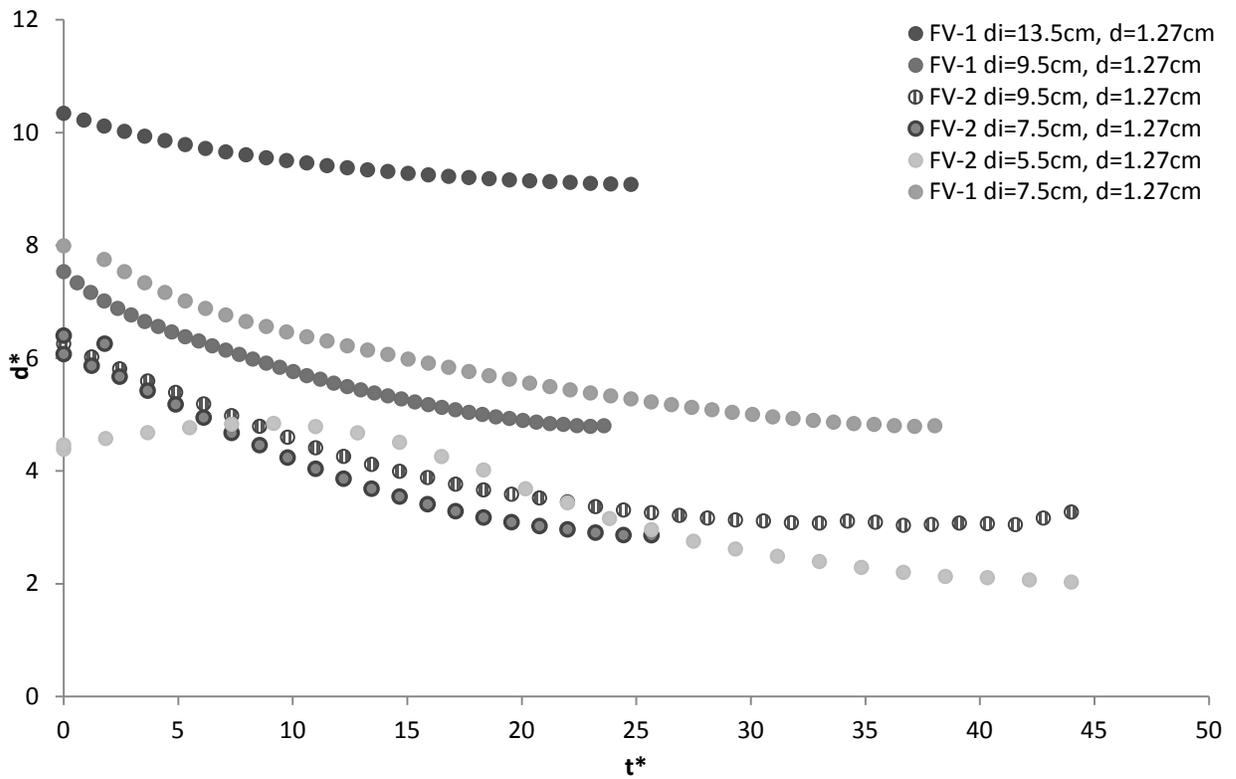


Figura 3.35 Distancia entre esferas consecutivas, PTFE,  $\rho = 2.1745$

En la tabla 3.2 se presentan los datos de los experimentos de esferas sedimentando consecutivamente en ambos fluidos, FV -1 y FV-2. Aquí podemos encontrar la tabulación para los valores de las distancias iniciales  $d_i$  [mm] dimensionales y  $d_i^*$  adimensionales al igual que los valores para las distancias finales dimensionales y adimensionales.

Para el caso del FV-1 la separación inicial y final entre esferas varía muy poco. En el caso de los números de Reynolds más bajos,  $2.09 \leq Re \leq 10.23$ , la diferencia entre distancia inicial y final oscila entre los 1.8 y 3 diámetros lo que podría significar que el punto de estancamiento generado en la estela de la esfera líder se encuentra aproximadamente a esta distancia en diámetros de su centro. Es dicha estela lo que inhibe y detiene el acercamiento de la segunda esfera y provoca su desplazamiento horizontal.

Para éste mismo fluido y a números de Reynolds mayores,  $6.26 \leq Re \leq 57.76$ , la diferencia entre distancia inicial y final para una  $d_i$  de 7 a 10 diámetros está en un rango de 1.43 a 2.95 lo que evidentemente significa que estas esferas también tienen un acercamiento, el cual se ve interrumpido por la cauda causada por la esfera líder, que posiblemente se encuentre en ese rango de diámetros. Mientras que en el caso de una distancia inicial menor i.e de 3.99 a 7 la diferencia entre distancia inicial y final arroja valores negativos. Lo que quiere decir que la segunda esfera está siendo alejada de la esfera líder. Esto está reflejado en las gráficas de la Figura 3.34. A pesar de que es imposible visualizarlo, la variación al incrementar el número de Reynolds, de los resultados de las posibles posiciones de los puntos de estancamiento es congruente con lo observado por [28] quien reporta un acercamiento de la región de estancamiento al incrementar la velocidad de la esfera. El problema de estos resultados radica en que los efectos inerciales están siendo partícipes en el flujo durante la sedimentación por lo que podrían justificar el comportamiento de las esferas.

En contraste, lo que sucede en el FV-2 es completamente diferente. Aquí para el rango de número de Reynolds entre  $0.006 \leq Re \leq 0.58$  las esferas siempre tendrán una distancia final menor o prácticamente igual a 1 diámetro, que quiere decir que éstas se juntan y se mantienen unidas para terminar la sedimentación. Esto es claramente visible en las figuras 3.30 a 3.33 donde las esferas del FV-2 muestran un acercamiento constante desde el inicio de la sedimentación que termina en una distancia final que se mantiene hasta el final de la trayectoria de las esferas.

En el rango de  $1.03 \leq Re \leq 11.12$  la distancia final entre las esferas no es estable. De hecho durante la sedimentación las esferas presentan una constante oscilación cuya amplitud disminuye en proporción a la reducción de distancias iniciales de liberación. Esto se presenta en la figura 3.34 y 3.35.

Algo que hay que remarcar es que para ambos fluidos  $We > 1$  lo que posiblemente sugiere la existencia de una cauda negativa. Sin embargo en el caso del FV-2 (poliacrilamida) la segunda esfera alcanza a la primera sin que exista una disminución perceptible de su velocidad. Por lo que

podría ocurrir que la separación que se presenta en el óxido de polietileno es de hecho por efectos de inercia.

## 3.4. NUMEROS ADIMENSIONALES

### 3.4.1. Reynolds y Weissenberg

Para el análisis comparativo del comportamiento de las esferas durante la sedimentación en ambos fluidos viscoelásticos se seleccionaron dos números adimensionales que mejor cumplen con las características que se presentan en estos experimentos: el número de Reynolds [Re] y el número de Weissenberg [We].

$$We = \frac{\lambda U}{a}$$

$$Re = \frac{aU\rho}{\eta(\dot{\gamma})}$$

Donde  $\rho$  es la densidad del fluido,  $a$  es el radio de la esfera  $U$  es la velocidad terminal,  $\eta(\dot{\gamma})$  es la viscosidad de corte y  $\lambda$  es el tiempo de relajación del. La rapidez de corte característica del flujo es :  $\dot{\gamma} = \frac{U}{a}$ .

El número de Reynolds es una cantidad adimensional que representa la proporción entre fuerzas viscosas y fuerzas inerciales por lo que consecuentemente cuantifica la importancia relativa de estas dos tipos de fuerza.

En un flujo cuyo tiempo a escala es mucho menor al tiempo de relajación de un material viscoelástico, entonces los efectos elásticos predominan. En cambio cuándo el tiempo el flujo es mucho mayor al tiempo de relajación del fluido entonces ocurre que los efectos viscosos predominan. La relación entre el tiempo de relajación y el tiempo característico del fluido describe un número adimensional, que dependiendo de las circunstancias se conoce como número de Deborah o número de Weissenberg.

A través de los perfiles de velocidad de las esferas en sedimentación para ambos fluidos viscoelásticos es relativamente fácil inferir u aproximar el Reynolds para las esferas consecutivas; sin embargo el número de Weissenberg es mucho menos intuitivo.

Los resultados obtenidos para los números adimensionales seleccionados muestran que en la interacción de esferas existen distintos comportamientos caracterizados por rangos definidos del número de Weissenberg y el número de Reynolds. La gráfica de la Figura 3.37 contiene estas regiones y su interacción característica.

La primera región 1) en orden descendiente del número de Weissenberg es aquella que sucede como parte de la sedimentación en el FV-2. Esta región se encuentra comprendida entre

$0.006 \leq Re \leq 0.584$  y  $8.07 \leq We \leq 10.19$ . Las bajas velocidades de sedimentación en este fluido generan un flujo con un número de Reynolds menor a uno. Es evidente que aquí existe un flujo de Stokes por lo que la cauda de la esfera tendrá muy pocas perturbaciones. Esto podría justificar el hecho de que el comportamiento de las esferas en ésta región sea el de un acercamiento y encadenamiento estable.

Para la segunda región 2) el número de Reynolds se encuentre entre  $1.66 \leq Re \leq 11.12$  mientras que el Weissenberg oscila entre  $12.94 \leq We \leq 19.38$ . Esta región evidentemente presenta una sedimentación que se rige bajo un número de Reynolds mayor a uno lo que quiere decir que la inercia está formando parte del flujo alrededor de las esferas. Además el número de Weissenberg ha disminuido por lo que probablemente las componentes elásticas del tensor de deformación del fluido están disminuyendo y perdiendo predominancia en el flujo. En esta región las esferas jamás se juntarán independientemente de la distancia inicial de liberación ( $d_i$ ). Sin embargo las esferas no caen de forma estable y continua, parece existir una oscilación de ambas esferas que se mantiene sobre el eje de sedimentación. Esta oscilación, que no concluye con un desplazamiento vertical de la segunda esfera, podría ocurrir debido a algún re flujo que pueda existir en la cauda de la esfera líder.

La tercera región 3), se caracteriza por estar en el rango de  $1.03 \leq Re \leq 1.81$  y  $12.94 \leq We \leq 15.63$ . La interacción que se lleva a cabo aquí parece ser un punto intermedio entre la primera región y la segunda región. Sucede que para las primeras distancias de liberación las esferas se acercan pero no se tocan y tienen una interacción que parece no oscilar, sin embargo para la distancia de liberación más próxima entre esferas éstas comienzan a oscilar antes de tocarse y encadenarse para precipitarse hacia el fondo del contenedor.

Estas tres primeras regiones identificables son parte de la sedimentación que se da en el FV-2 por lo que estas interacciones se dan en Reynolds de rangos relativamente bajos y Weissenbergs altos.

La cuarta y última región resume prácticamente en su totalidad lo ocurrido para todas las distancias y todas las esferas en el FV-1. En un rango de  $2.09 \leq Re \leq 57.76$  y  $1.84 \leq We \leq 10.29$  el flujo es predominantemente inercial por lo que la sedimentación se vuelve inestable y posiblemente sea el factor que cause el desplazamiento lateral de las esferas. El número de Weissenberg para esta región es mucho menor al de las otras regiones lo que sugiere que el fluido aunque es elástico el flujo a través del mismo es predominado por fuerzas de inercia debido a su baja viscosidad en comparación con el FV-2.

Las esferas, independientemente de su distancia inicial de liberación, jamás se tocarán y por el contrario comenzarán a sedimentar en ejes distintos.

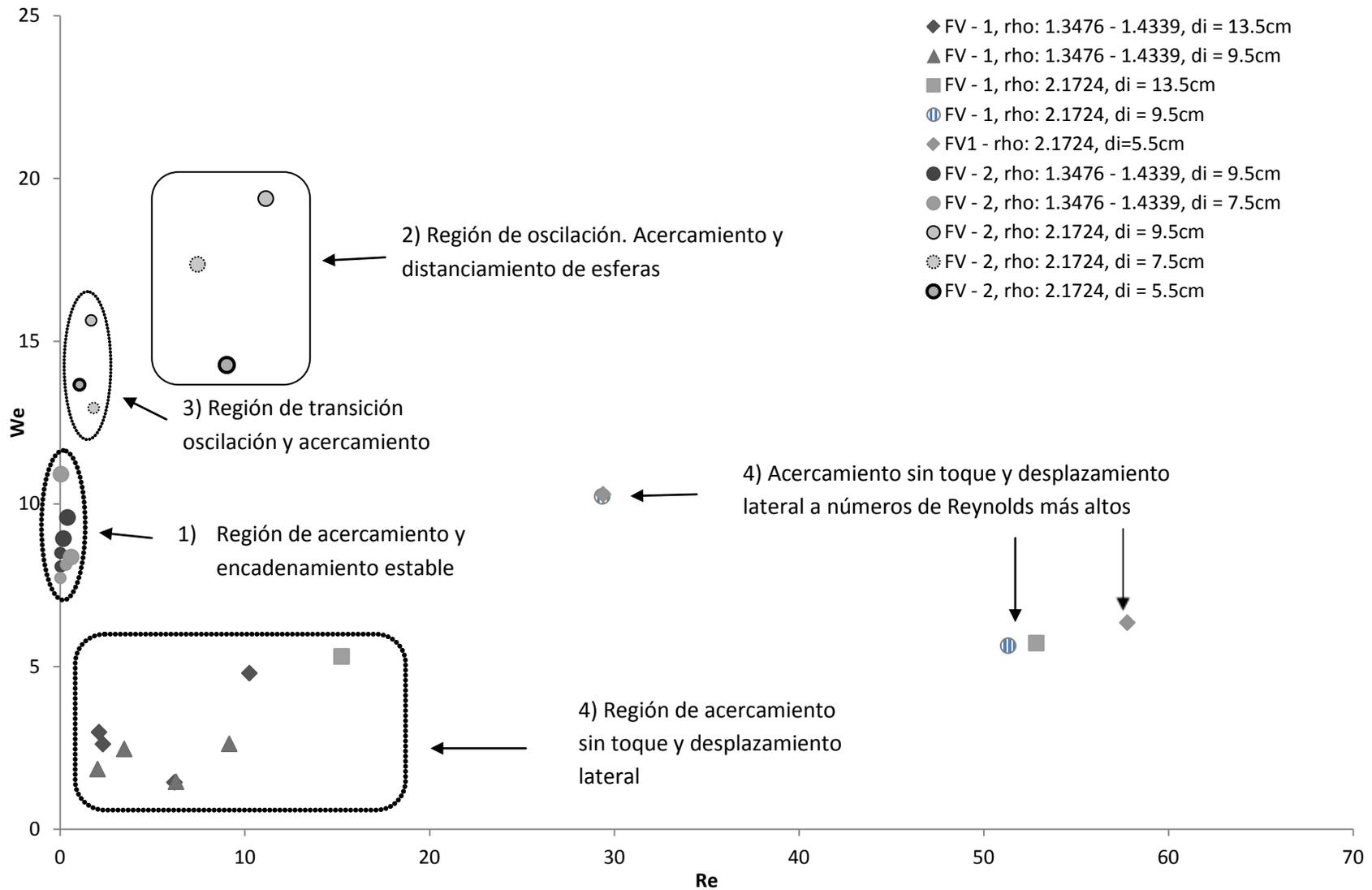


Figura 4.37 Distancia entre esferas consecutivas, PTFE,  $\rho = 2.1745$

## DISCUSION

### 4.1. FLUIDO VISCOELASTICO - 1 (óxido de polietileno)

Para analizar lo sucedido en el FV-1 es necesario realizar un hincapié en la interacción que se lleva a cabo en el fluido Newtoniano en donde los Reynolds gobernantes oscilan entre  $.105 \leq Re \leq 2.10$ , por lo que el flujo es predominantemente viscoso. Durante la interacción en éste fluido las esferas generalmente se mantienen a una distancia constante, con excepción del caso de las esferas de mayor densidad en donde éstas presentan el comportamiento reportado de drafting, kissing and tumbling en el que la segunda esfera alcanza a la primera la toca y luego se alinea a ella de forma horizontal o perpendicular a la dirección del flujo.

En el FV-1 y como se había mencionado anteriormente, el número de Reynolds oscila entre  $2.09 \leq Re \leq 57.76$ . Similarmente a lo que ocurre en el caso del fluido Newtoniano cuando el  $Re$  es mayor a 1 las esferas tienden a acercarse pero a diferencia del fluido Newtoniano en el FV-1 existe una interacción aparentemente elástica. En la que la secuencia del acercamiento, toque y rebote se omite la parte del toque y procede directamente al rebote. Es posible que la cauda que se genera en la parte posterior a la esfera líder genere una especie de colchón que inhibe que la segunda esfera se aproxime a ella en su totalidad. El acercamiento en este caso puede propiciarse debido a una zona de adelgazamiento detrás de la esfera líder la cual permite un mejor desplazamiento de la segunda esfera a través de su trayectoria.

### 4.2. FLUIDO VISCOELÁSTICO - 2 (poliacrilamida)

Por otra parte el FV-2 se caracteriza por tener un flujo mucho más viscoso y menos inercial. Su rango de números de Reynolds es de  $.0014 \leq Re \leq 11.27$  lo cual lo coloca en un régimen muy parecido al que predomina en el fluido Newtoniano. Sin embargo, como se había discutido antes, en esta sedimentación las esferas siempre se aproximan y se encadenan de manera estable. Esto es muy interesante debido a que uno esperaría que el acercamiento sucediera debido a altos números de Reynolds. Lo que podría justificar este acercamiento es que la segunda esfera encuentra un fluido previamente deformado o "adelgazado" por la esfera líder. El hecho de que

estas esferas se encadenen de manera estable sugiere que existe un efecto elástico como lo descrito por Joseph [1]. Y muy posiblemente el acercamiento final, en el que se da la aceleración para el acoplamiento de las esferas, sea a causa de efectos elásticos también.

Para el caso de los números de Reynolds mayores, que ocurren para la mayor densidad i.e.  $\rho = 2.1745$ , se presenta una interacción distinta. En estos casos se da lugar a una oscilación entre las esferas que podría presentarse por la siguiente interacción: ocurre un desplazamiento del fluido por parte de la esfera líder, la segunda esfera entra a ésta zona desgastada que la impulsa a alcanzar a la esfera líder, pero tan solo unos instantes después es detenida por la zona de la cauda en donde se encuentra el punto de estancamiento afectando y reduciendo su velocidad. Este mecanismo se vuelve a repetir y genera un movimiento oscilatorio que es transferido también a la esfera líder.

Lo que es extremadamente interesante es que para este caso la sedimentación es completamente estable y en vez de que exista una volcadura de la segunda esfera con respecto a su eje de sedimentación, ésta parece mantenerse en línea recta con la esfera líder. Este efecto podría atribuirse a las componentes elásticas del fluido que mantienen a la segunda esfera en el jefe vertical de descenso a través del centro del tubo.

## CONCLUSIONES

La interacción de dos esferas descendiendo en fluidos adelgazantes viscoelásticos, se estudió siguiendo la trayectoria de las esferas utilizando una cámara fija permitiendo la observación y estudio de la evolución de los patrones que existen en la sedimentación.

Las diferencias que existen entre los fluidos son evidentes y se manifiesta por números de Reynolds y de Weissenberg bien definidos.

En el caso del FV-1 (óxido de polietileno), las esferas presentan perfiles de velocidad mayores a aquellos encontrados para el FV-2 (poliacrilamida) debido a la diferencia de viscosidad que existe entre ambos fluidos. En este caso el número de Reynolds es mayor a 1,  $Re > 1$ . Físicamente existe un acercamiento de la segunda esfera, el cual en parte se debe al adelgazamiento del fluido cómo lo reportado por Joseph [1] en donde se describen corredores de viscosidad reducida, y en parte al hecho del que el régimen del flujo es inercial. Lo que parece acontecer en esta interacción es que la segunda esfera entra a la zona del fluido previamente adelgazada por la velocidad de la esfera líder lo cual propicia un acercamiento de la segunda esfera.

Antes de tocar a la esfera líder, la segunda esfera se encuentra con lo que parece ser la cauda de la esfera líder que aunado a la inercia del flujo provocan un desplazamiento lateral de la segunda esfera precipitándola hacia un costado del contenedor del fluido. Debido a la magnitud del  $Re$  es posible que se tenga un régimen de transición detrás de la esfera líder lo que en turno podría generar una zona de recirculación que actúa como colchón sobre la segunda esfera y detiene su acercamiento. A pesar de que los números de Weissenberg superan la unidad es difícil asegurar la existencia de una cauda negativa sin la ayuda de visualización a través de Particle Image Velocimetry (velocimetría de imagen de partículas).

Por otro lado, en el caso del FV-2 (Policarilamida), las esferas en sedimentación se acercan siempre y cuando se encuentren en un flujo caracterizado por  $Re < 1$ . Aquí el acercamiento es completamente estable y las esferas se encadenan y descienden, en congruencia con lo reportado por [31] Este acercamiento puede deberse a una zona desgastada debido al tránsito de la esfera líder, i.e. corredores de viscosidad reducida. Cuando el número de Reynolds rebasa la unidad las esferas deforman el fluido a una tasa de velocidad más alta de tal manera que provocan la aparición de los efectos elásticos del fluido. Esto provoca que las esferas se encuentren con lo que parece ser la cauda de la esfera líder la cual detiene a la segunda esfera pero en esta ocasión y a

diferencia del FV-1 no provocan su rebote y su desplazamiento lateral. En cambio la esfera entra en un régimen de oscilación que probablemente concluirá con el encadenamiento de ambas esferas. De igual forma, el alejamiento de la segunda esfera con respecto a la primera podría deberse a un cambio en la estructura de la cauda por los efectos inerciales o a la presencia de una cauda negativa que solo se comprobaría utilizando PIV.

La diferencia entre el newtoniano y ambos fluidos no newtonianos es la tendencia adelgazar y la elasticidad por lo que en la interacción en las esferas que caen dentro de los fluidos viscoelásticos hay una presencia de efectos elásticos que para el caso de FV-1 (óxido de polietileno) propician un desplazamiento lateral y en el caso del FV-2 (poliacrilamida) promueven un acercamiento y encadenamiento estable.

## REFERENCIAS

1. Daniel D. Joseph, Yaoqui Joe liu; "Orientetion of long bodies falling in a viscoelastic liquid". **JR**, 37 (6) (1993) 961-983.
2. M.J. Riddle, C. Narvaez, R.B. Bird; "Interactions between two spheres falling along their line of centers in a viscoelastic fluid". **JNNFM**. 2 (1977) 23-35.
3. B.H.A.A. van den Brule, G. Gheissary; " Effects of fluid elasticity on the static and dynamic settling of a spherical particle". **JNNFM**. 49 (1993) 123-132.
4. E.T.G. Bot, M.A. Hulsen, B.H.A.A. van den Brule; "The motion of two spheres falling along their line of centres in a boger fluid". **JNNFM** 79 (1998) 191-212.
5. D.D. Joseph, Y.J. Liu, M. Poletto, J. Feng; "Aggregation and dispersion of spheres falling in viscoelastic liquids". **JNNFM**. 54 (1994) 45-86
6. D. A. Eisenberg, I. M. Klink, and R. J. Phillips, "Axisimetric sedimentation of spherical particles Sphere-wall and sphere-sphere interactions". **JR** 57, 857 (2013)
7. O. Hassager. "Negative wake behind bubbles in non-Newtonian liquids. **NATURE.**, 279:402, 1979.
8. D. Sigli, M. Coutanceau; "Effect of finite boundaries on the slow laminar isothermal flow of a viscoelastic fluid around a spherical obstacle". **JNNFM**. 2 (1977) 1-21
9. C. Bisgaard; "Velocity fields around spheres and bubbles investigated by laser-doppler anemometry": **JNNFM**. 12 (1983) 283-302.
10. A. Maalouf, D. Sigli; "Effects of body shape and viscoelasticity on the slow flow around an obstacle". **RA** 23 (1984) 497-507
11. H. Jin, N. Phan –Thien, and R.I. Tanner. "A finite element analysis of the flow past a sphere in a cylindrical tube: PTT fluid model. **Comput. Mech.**, 8:409, 1991.
12. M.B. Bush; "On the stagnation flow behind a sphere in a shear-thinning viscoelastic liquid". **JNNFM** 55 (1994) 229-247.
13. J.V. Satrape, M.J. Crochet; "Numerical simulation of the motion of a sphere in a boger fluid". **JNNFM**, 55 (1994) 91-111.

14. Bird, Armstrong; "Dynamics of polymeris liquids vol. 2 ".
15. Oliver G. Harlen; "The negative wake generation behind a sphere sedimenting through a viscoelastic fluid". **JNNFM**, 108 (2002) 411-430.
16. M. T. Arigo, G. H. McKinley; "The effects of viscoelasticity on the transient motion of a sphere in a shear-thinning fluid". **JR**, 41(1) (1997).
17. Hua-Shu Dou, Nhan Phan-Thien; "Negative wake in the uniform flow past a cylinder". **RA**, 42 (2003) 383-409.
18. M. T. Arigo, G. H. McKinley; "The effects of viscoelasticity on the transient motion of a sphere in a shear-thinning fluid". **JR**, 41(1) (1997).
19. M.B. Bush; "The stagnation flow behind a sphere". **JNNFM** 49 (1993) 103-122.
20. B. Mena, O. Manero; "The influence of rheological properties on the slow flow past spheres". **JNNFM**. 26 (1987) 247-275.
21. G. Gheissary, B.H.A.A. van den Brule\*; " Unexpected phenomena observed in particle settling in non-Newtonian media". **JNNFM**. 67 (1996) 1-18.
22. Happel, Brenner; "Low Reynolds Number Hydrodynamics", Kluwer Academic publishers, 1991.
23. W.M. Jones, A.H. Price, K. Walters\*; "The motion of a sphere falling under gravity in a constant-viscosity elastic liquid". **JNNFM**. 53 (1994) 175-196.
24. 13.- V. Navez, K. Walters; "A note on settling in shear-thinning polymer solutions". **JNNFM**. 67 (1996) 325-334.
25. M.D. Chilcott, J.M. Rallison; "Creeping flow of dilute polymer solutions past cylinders and spheres". **JNNFM**. 29 (1988) 381-432.
26. H.A. Barnes, J.F. Hutton, K. Walters; "An introduction to rheology". Elsevier (1989)
27. W.M. Jones, A.H. Price, K. Walters\*; "The motion of a sphere falling under gravity in a constant-viscosity elastic liquid". **JNNFM**. 53 (1994) 175-196.
28. A. J. Mendoza-Fuentes, R. Montiel, R. Zenit, and O. Manero "On the flow of associative polymers past a sphere: Evaluation of negative wake criteria" **Phys. Fluids** 21, 033104 (2009)
29. 21H. S. Dou and N. Phan-Thien, "Criteria of negative wake generation behind a cylinder," **RA** 43, 203 \_2004\_.

30. Verneuil, E., R.J. Phillips, y L. Talini, "Axisymmetric two-sphere sedimentation in a shear-thinning viscoelastic fluid: Particle interactions and induced velocity fields," **JR.** 51, 1343-1359 (2007).
31. D.D. Joseph, Y.J. Liu "Motion of particles settling in a viscoelastic fluid". **Proceedings of the Second international conference on multiphase flow.** April 3-7 1995.
32. A. J. Mendoza-Fuentes, "Estudio de sedimentación de partículas en fluidos no Newtonianos". **Tesis de doctorado,** Universidad Nacional Autónoma de México, 2009.
33. I. M. Garduño-Olvera, "Sedimentación de esferas consecutivas en polímeros asociativos". **Tesis de maestría,** Universidad Nacional Autónoma de México, 2011.
34. Feng, J., Hu, H. H. & Joseph, D. D. "Direct simulation of initial value problems for the motion of solid bodies in a Newtonian fluid part 1. Sedimentation. **JFM,** 261, 95-134 (1994).