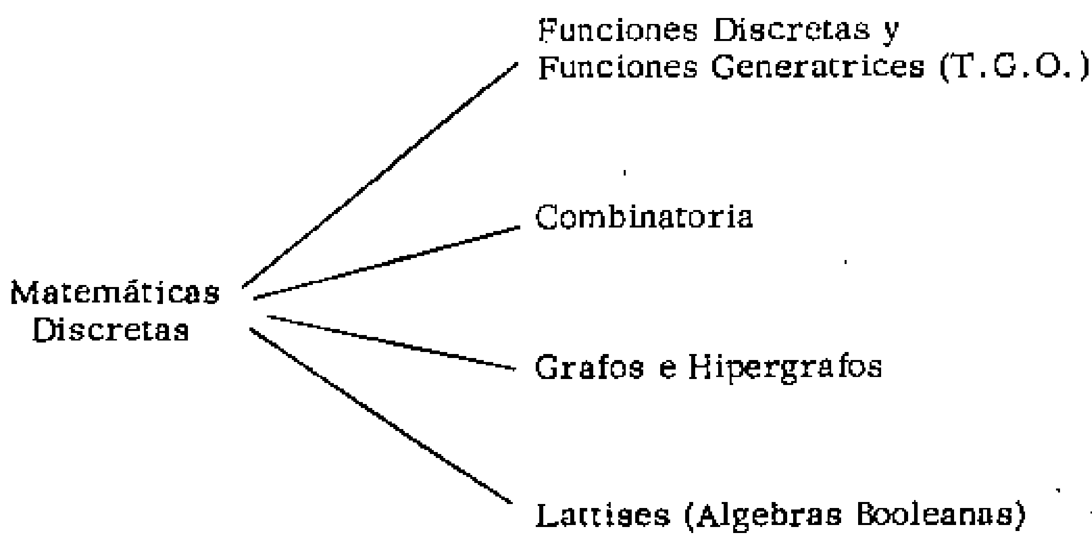
CURSOS DE SUPERACION ACADEMICO

MATEMATICAS DISCRETAS

TEMA: NOTAS DE LA CONFERENCIA SUSTENTADA POR EL ING. FRANCISCO J. JAUFFRED.

MARZO DE 1980.


Matemáticas Discretas
Funciones Discretas y Funciones Generatrices (T.G.O.)
Combinatoria
Grafos e Hipergrafos
Lattises (Algebras Booleanas)

FUNCIONES GENERATRICES

(Transformada Geométrica Ordinaria)

por

F. J. Jauffred

1 - TRANSFORMADA GEOMETRICA ORDINARIA

1.1. Introducción

1.2. Funciones discretas de una variable

Sea la variable natural n que representa a cualquiera de los enteros positivos, agréguese el cero de manera que el campo de n sea

$$n = \{0, 1, 2, \ldots\}$$

Si mediante f(n) se hace corresponder a estos enteros no negativos números reales cualesquiera (positivos, negativos o el cero) se define una función discreta.

Complementariamente se especifica

$$f(n) = 0 \quad \text{si } n < 0$$

Algunos ejemplos de estas funciones son:

1) $f(n) = c$ (escalón de altura c = cte)

2) $f(n) = u(n)$ (escalón unitario)

3) $f(n) = \delta(n)$ (pulso unitario en el origen)

4) $f(n) = \delta(n-m)$, $m > 0$ (pulso unitario en el punto m)

5) $f(n) = n$ (rampa unitaria)

6) $f(n) = n^2$ (rampa parabólica unitaria)

7) $f(n) = a^n$, $a = \text{cte}$ (sucesión geométrica, exponencial)

8) $f(n) = \binom{n}{j}$, $j \geq 0$ cte (función combinatoria)

9) $f(n) = \binom{j}{n}$, $j \geq 0$ cte (función combinatoria)

10) $f(n) = (n)_j$, $j \geq 0$ cte (función factorial descendente)

11) $f(n) = (n)^j$, $j \geq 0$ cte (función factorial ascendente)

12) $f(n) = \dfrac{1}{n!}$ (recíproca del factorial)

13) $f(n) = \cos(an)$ (función trigonométrica)

14) $f(n) = \operatorname{sen}(an)$ (función ~~hiperbólica~~)

1.3. Transformada geométrica ordinaria

Dada una función discreta f(n) varíese n y multiplíquense término a término los valores así obtenidos por una sucesión gométri ca en la variable de transformación z. A la suma de todos estos productos se le llama "Transformada Geométrica Ordinaria" de la función $f(n)$ y se le representa mediante $f^g(z)$.

$$f^g(z) = f(0) + f(1)z + f(2)z^2 + \cdots + f(n)z^n + \cdots$$

$$f^g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f(n)z^n \qquad (1.3.1.)$$

Se ha obtenido así, tal vez nada más formalmente, una serie de potencias.

1.4. El radio de convergencia de la serie

La transformada Geométrica Ordinaria es de hecho una serie de potencias como se afirmó en el inciso anterior, sin embargo, no se atacará el problema de definir intervalos de convergencia; para los fines que se persiguen en las notas la serie puede ser "verdadera" (radio de convergencia mayor que cero) o puede ser "formal" (radio de convergencia nulo). De hecho Mcbride [ ] sostiene "La relación entre la transformada geométrica y la función discreta es una relación cualitativa cuya validez no depende de la longitud del radio de convergencia". Por su parte E.T. Bell [ ] establece "la validez de los resultados al igualar coeficientes (de mismas potencias de z) después de una manipulación formal de las series". De ahí que no sea de interés determinar el radio de convergencia para la representación en serie de las transformadas.

1.5. Transformadas de diversas funciones discretas

1.5.1. Pulso unitario en el origen

La función $\delta(n)$ se define de la siguiente manera:

$$f(n) = \delta(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ 0 & \text{si } n \neq 0 \end{cases}$$

De ahí que su representación gráfica sea la que aparece en la figura 1.1.

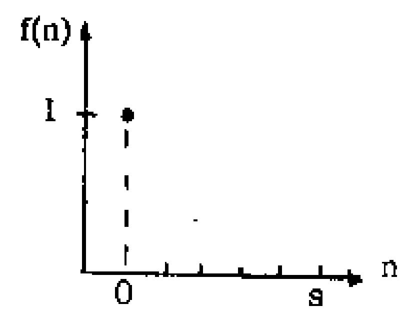


Figura 1.1.

Por la definición de T.G.O. (Transformada Geométrica Ordinaria) se tiene

$$f^{g}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \delta(n)\, z^{n} = 1.1 + 0.z + 0.z^{2} + \ldots + 0.z^{n} + \ldots = 1$$

De manera que se puede establecer la correspondencia

$$\boxed{\delta(n) \Longleftrightarrow 1} \qquad (1.5.1.)$$

1.5.2. Pulso unitario en m

Esta función se define también mediante la delta de Kronecker

$$f(n) = \delta(n-m) = \begin{cases} 1 \text{ si } n = m \\ 0 \text{ si } n \neq m \end{cases}$$

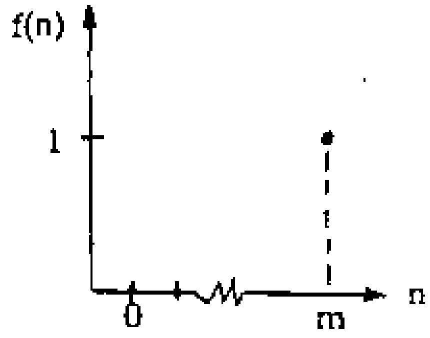


Figura 1.2.

Su gráfica aparece en fig. 1.2.

Por la definición de T.G.O.

$$f^g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \delta(n-m) z^n = 0.1+0.z+0.z^2 + \ldots +1.z^m +$$

$$+ \ldots + 0.z^n + \ldots = z^m$$

de manera que

$$\boxed{\delta(n-m) \Leftrightarrow z^m} \quad ; \; m > 0 \qquad (1.5.2.)$$

1.5.3. Escalón unitario

La función escalón unitario u(n) queda definida de la siguiente manera (fig. 1.3.)

$$f(n) = u(n) = \begin{cases} 1 \text{ si } n \geq 0 \\ 0 \text{ si } n < 0 \end{cases}$$

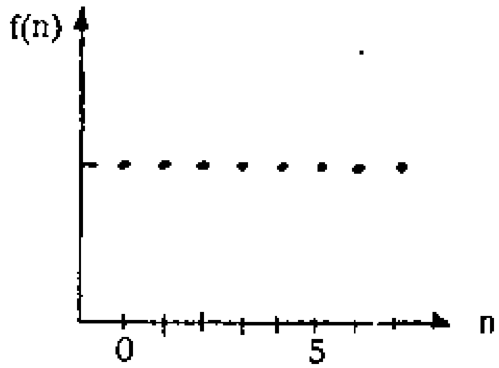


Figura 1.3.

En este caso

$$f^g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} u(n) z^n = 1.1+1.z+1.z^2 +$$

$$+ \ldots +1.z^n + \ldots$$

$$f^g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$$

por tanto

$$\boxed{u(n) \Leftrightarrow \frac{1}{1-z}} \qquad (1.5.3.)$$

1.5.4. Combinación lineal de funciones discretas

Sean las funciones f(n) y g(n) y $F(n) = af(n) + bg(n)$; a y b = ctes.

Por la definición de T.G.O.

$$F^{g}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} F(n) z^{n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left[af(n) + bg(n) \right] z^{n}$$

empleando la propiedad distributiva de la suma

$$F^{g}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} af(n) z^{n} + \sum_{n=0}^{\infty} bg(n) z^{n}$$

y al ser a y b constantes

$$F^{g}(z) = a \sum_{n=0}^{\infty} f(n) z^{n} + b \sum_{n=0}^{\infty} g(n) z^{n}$$

por la definición de T.G.O.

$$F^{g}(z) = af^{g}(z) = bg^{g}(z)$$

esto es

$$\boxed{af(n) + bg(n) \Longleftrightarrow af^{g}(z) + bg^{g}(z)} \qquad (1.5.4.)$$

1.5.5. Convolución entre dos funciones (Producto de Cauchy)

Dada la función f(n) y la g(n) se entiende por convolución entre ellas y se le representa mediante $f(n) * g(n)$ a la suma

$$f(n) * g(n) = \sum_{m=0}^{n} f(m)\, g(n-m)$$

Así por ejemplo sea

$$f(n) = a^{n}$$

$$g(n) = b^{n}$$

entonces

$$a^{n} * b^{n} = \sum_{m=0}^{n} a^{m}\, b^{n-m} = b^{n} \sum_{m=0}^{n} \left(\frac{a}{b} \right)^{m}$$

pero

$$\sum_{m=0}^{n}\left(\frac{a}{b}\right)^{m} = \frac{1-\left(\frac{a}{b}\right)^{n+1}}{1-\frac{a}{b}} = b\,\frac{1-\left(\frac{a}{b}\right)^{n+1}}{b-a}$$

De manera que:

$$a^{n} * b^{n} = b^{n+1}\,\frac{1-\left(\frac{a}{b}\right)^{n+1}}{b-a} = \frac{b^{n+1}-a^{n+1}}{b-a}$$

Una vez que se ha ilustrado el significado de la operación llamada convolución se aplicará la definición de T.G.O.

$$\sum_{n=0}^{\infty} f(n) * g(n)\, z^{n} = \sum_{n=0}^{\infty} z^{n} \sum_{m=0}^{n} f(m)\, f(n-m)$$

pero

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^{n} \sum_{m=0}^{n} f(m)\, g(n-m) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} f(m) z^{m}\, g(n-m) z^{n-m}$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} f(m) z^{m} \sum_{n=m}^{\infty} g(n-m) z^{n-m}$$

de donde si $n-m=r$

$$\sum_{n=0}^{\infty} f(n) * g(n)\, z^{n} = \sum_{m=0}^{\infty} f(m) z^{m} \sum_{r=0}^{\infty} g(r) z^{r}$$

y nuevamente por la definición de T.G.O.

$$\sum_{n=0}^{\infty} f(n) * g(n)\, z^{n} = f^{g}(z) \cdot g^{g}(z)$$

Se establece

$$\boxed{f(n) * g(n) \Longleftrightarrow f^{g}(z) \cdot g^{g}(z)} \qquad (1.5.5.)$$

1.5.6. Función retrasada

Sea la función $f(n)$ referida a un origen 0 arbitrario y traslá-dese este origen m unidades en el sentido negativo del eje n, la función referida a este nuevo origen 0', es $f(n-m)$. (Fig. 1.4.).

Pensando en términos de tiempo se puede suponer que la función "tardo" en presentarse m unidades, esto es, se retrasó m unidades de ahí el nombre.

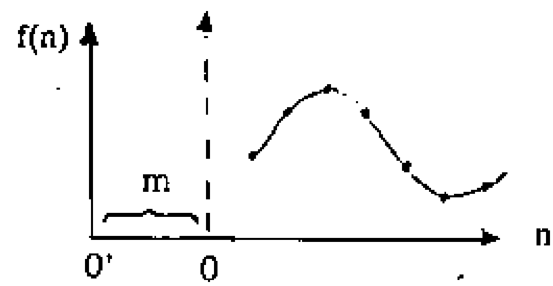


Figura 1.4.

Aplicando la definición de T.G.O. a $f(n-m)$

$$f^{g}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f(n-m)\, z^{n} = z^{m} \sum_{n=m}^{\infty} f(n-m)\, z^{n-m}$$

si $n-m=r$

$$f^{g}(z) = z^{m} \sum_{r=0}^{\infty} f(r)\, z^{r} = z^{m}\, f^{g}(z)$$

y la correspondencia es

$$\boxed{f(n-m) \Leftrightarrow z^{m}\, f^{g}(z)} \qquad (1.5.6.)$$

1.5.7. Función adelantada

Sea la función $f(n)$ referida a un origen arbitrario 0, trasládese este orígen m unidades en el sentido del eje n. La función referida al nuevo origen es $f(n+m)$ (Fig. 1.5.).

Nuevamente pensando en términos de tiempo puede suponerse que la función adelantó su presentación.

Sin embargo, el correr el orígen en el sentido del eje, implica dejar una porción de la función en la región negativa del eje n, lo cual debe corregirse para no caer en contradicción con la definición complementaria $f(n)=0$ si $n<0$.

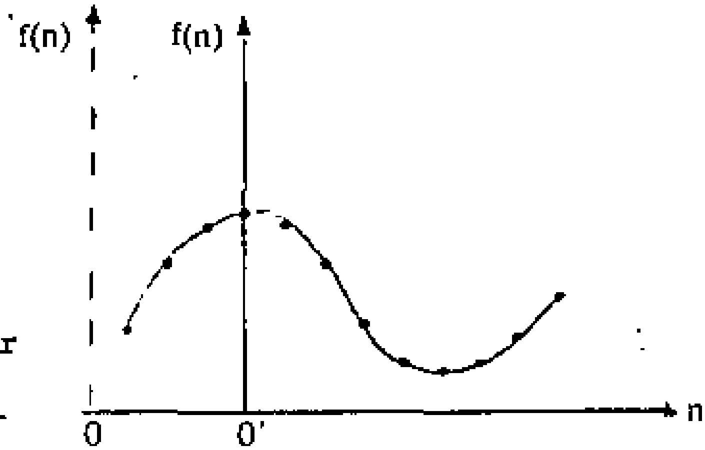


Figura 1.5.

Aplicando la definición de T.G.O. a $f(n+m)$

$$f^g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f(n+m)\, z^n \quad ; \quad \text{si } n+m = r$$

$$f^g(z) = \sum_{r=m}^{\infty} f(r)\, z^{r-m} = z^{-m} \sum_{r=m}^{\infty} f(r)\, z^r$$

pero

$$\sum_{r=m}^{\infty} f(r)\, z^r = \sum_{r=0}^{\infty} f(r) z^r - f(0) - f(1)z - f(2)z^2 - \dots - f(m-1) z^{m-1}$$

luego

$$f^g(z) = z^{-m} \left[f^g(z) - \sum_{r=0}^{m-1} f(r)\, z^r \right]$$

y se establece la correspondencia

$$\boxed{f(n+m) \Leftrightarrow z^{-m} \left[f^g(z) - \sum_{r=0}^{m-1} f(r)\, z^r \right]} \qquad (1.5.7.)$$

1.5.8. Sucesión geométrica

i) Sea $f(n)=a^n$, entonces aplicando la definición de T.G.O.

$$f^g(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a^n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} (az)^n = \frac{1}{1-az}$$

por consiguiente

$$\boxed{a^n \Longleftrightarrow \frac{1}{1-az}} \qquad a=\text{cte.} \qquad (1.5.8.)$$

ii) Por otra parte si

$$F(n)=a^n f(n)$$

Aplicando la definición de T.G.O.

$$F^g(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a^n f(n) z^n = \sum_{n=0}^{\infty} f(n)(az)^n$$

esto es

$$F^g(z)=f^g(az)$$

y se establece la correspondencia

$$\boxed{a^n f(n) \Longleftrightarrow f^g(az)} \qquad a=\text{cte.} \qquad (1.5.9.)$$

1.5.9. Productos sucesivos de la variable por la función

i) Sea la función $f(n)$ con T.G.O. $f^g(z)$, entonces

$$f^g(z)=\sum_{n=0}^{\infty} f(n) z^n$$

$$\frac{d}{dz} f^g(z)=\sum_{n=1}^{\infty} n\, f(n)\, z^{n-1}$$

$$\therefore z \frac{d}{dz} f^{g}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} n f(n) z^{n}$$

y por tanto

$$\boxed{n f(n) \Longleftrightarrow z \frac{d}{dz} f^{g}(z)} \qquad (1.5.10.)$$

ii) Si $f(n) = u(n)$, entonces

$$f^{g}(z) = \frac{1}{1-z}$$

$$\frac{d}{dz} f^{g}(z) = \frac{1}{(1-z)^2}$$

$$z \frac{d}{dz} f^{g}(z) = \frac{z}{(1-z)^2}$$

esto es:

$$n\, u(n) \Longleftrightarrow \frac{z}{(1-z)^2}$$

pero $u(n) = 1$ luego

$$\boxed{n \Longleftrightarrow \frac{z}{(1-z)^2}} \qquad (1.5.11.)$$

iii) Sea nuevamente la igualdad encontrada en el párrafo anterior (I)

$$z \frac{d}{dz} f^{g}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} n f(n) z^{n}$$

derívense nuevamente ambos miembros

$$\frac{d}{dz}\left[z \frac{d}{dz} f^{g}(z) \right] = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 f(n) z^{n-1}$$

luego

$$z\frac{d}{dz}\left[z\frac{d}{dz}\,f^{g}(z)\right]=\sum_{n=0}^{\infty} n^2 f(n)\, z^n$$

Al operador $z\frac{d}{dz}$ se le acostumbra designar con θ, esto es

$$\theta = z\frac{d}{dz}$$

operando nuevamente con θ :

$$\theta^2 = z\frac{d}{dz}\left(z\frac{d}{dz}\right) = z^2\frac{d^2}{dz^2} + z\frac{d}{dz}$$

y nuevamente

$$\theta^3 = z\frac{d}{dz}\left[z\frac{d}{dz}\left(z\frac{d}{dz}\right)\right]$$

$$\theta^3 = z\frac{d}{dz}\left[z\frac{d}{dz} + z^2\frac{d^2}{dz^2}\right]$$

$$= z\frac{d}{dz} + z^2\frac{d^2}{dz^2} + 2z^2\frac{d^2}{dz^2} + z^3\frac{d^3}{dz^3}$$

$$\theta^3 = z\frac{d}{dz} + 3z^2\frac{d^2}{dz^2} + z^3\frac{d^3}{dz^3}$$

en general

$$\theta^n = \sum_{\ell=1}^{n} S(n,\ell)\, z^{\ell}\frac{d^{\ell}}{dz^{\ell}} \qquad (1.5.12.)$$

en donde, $S(n,\ell)$ es el número de Stirling de segunda especie, (esta tabla figura en el anexo [ ]).

Se establece por tanto la correspondencia

$$\boxed{n^j f(n) \Longleftrightarrow \theta^j f^{g}(z)} \qquad j \geq 0 \text{ cte.} \qquad (1.5.13.)$$

iv) Si $f(n) = u(n)$ entonces

$$f^g(z) = \frac{1}{1-z}$$

luego

$$\boxed{n^j \Longleftrightarrow \theta^j \frac{1}{1-z}} \qquad j \geq 0 \text{ cte.} \qquad (1.5.14.)$$

v) Como caso particular sea $j = 2$

$$\theta^2 \frac{1}{1-z} = \left[z \frac{d}{dz} + z^2 \frac{d^2}{dz^2} \right] \frac{1}{1-z}$$

$$= z \frac{d}{dz} \frac{1}{1-z} + z^2 \frac{d^2}{dz^2} \frac{1}{1-z}$$

$$\theta^2 \frac{1}{1-z} = \frac{z}{(1-z)^2} + \frac{2z^2}{(1-z)} = \frac{z+z^2}{(1-z)}$$

luego

$$\boxed{n^2 \Longleftrightarrow \frac{z(1+z)}{(1-z)^3}} \qquad (1.5.15.)$$

1.5.10. Función factorial descendente

i) Sea la función $f(n)$ y aplíquesele la definición de T.G.O., se obtiene

$$f^g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f(n)\, z^n$$

derivando miembro a miembro j veces, resulta

$$\frac{d^j}{dz^j} f^g(z) = \sum_{n=j}^{\infty} n(n-1) \cdots (n-j+1)\, f(n)\, z^{n-j}$$

pero

$$n(n-1) \cdots (n-j+1) = (n)_j \ , \quad j \geq 0 \text{ cte.}$$

(notación de Riordan a partir de la de Pochammer).

la función factorial descendente, luego

$$\frac{d^j}{dz^j}\, f^g(z) = \sum_{n=j}^{\infty} (n)_j\, f(n)\, z^{n-j}$$

$$z^j \frac{d^j}{dz^j}\, f^g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (n) \quad f(n) z^n$$

la correspondencia establecida es:

$$\boxed{(n)_j\, f(n) \Leftrightarrow z^j \frac{d^j}{dz^j} \quad f^g(z)} \qquad j \geq 0 \text{ cte.}$$

(1.5.16.)

ii) Si $f(n) = u(n)$, $f^g(z) = \frac{1}{1-z}$

luego

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n)_j\, z^n = z^j \frac{d^j}{dz^j}\, \frac{1}{1-z}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n)_j\, z^n = \frac{j!\ z^j}{(1-z)^{j+1}}$$

y se establece la correspondencia

$$\boxed{(n)_j \Leftrightarrow \frac{j!\ z^j}{(1-z)^{j+1}}} \qquad j > 0 \quad \text{cte.} \qquad (1.5.17.)$$

1.5.11. Función factorial ascendente

Se define a la función factorial ascendente $(n)^j$ de la siguiente manera

$$(n)^j = n(n+1) \cdots (n+j-1) \ ; \qquad j \geq 0 \quad \text{cte.}$$

luego

$$(n)^j = (n+j-1)_j$$

Por otra parte, se encontró en el párrafo anterior

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n)_j \, z^n = \frac{j! \; z^j}{(1-z)^{j+1}}$$

luego por la expresión (1.5.7.)

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+j-1)_j \, z^n = z^{-(j-1)} \left[\frac{j! \; z^j}{(1-z)^{j+1}} - \sum_{r=0}^{j-2} (r)_j \, z^r \right]$$

pero

$$(r)_j = 0 \qquad \text{si} \quad r < j$$

luego

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n)^j \, z^n = \sum_{n=0}^{\infty} (n+j-1)_j \, z^n = z^{-(j-1)} \; \frac{j! \; z^j}{(1-z)^{j+1}}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n)^j \, z^n = \frac{j! \; z}{(1-z)^{j+1}}$$

y la correspondencia establecida es

$$\boxed{(n)^j \Longleftrightarrow \frac{j! \; z}{(1-z)^{j+1}}} \qquad j > 0 \;\; \text{cte.} \qquad (1.5.18.)$$

1.5.12. Función combinatoria (binomial)

1) Sea $f(n) = \binom{n}{j}$; $j \geq 0$ cte.

Se sabe que

$$\binom{n}{j} = \frac{n}{j!\,(n-j)!}$$

pero

$$\frac{n!}{(n-j)!} = n(n-1) \cdots (n-j+1) = (n)_j$$

luego

$$\binom{n}{j} = \frac{(n)_j}{j!}$$

Aplicando la definición de T.G.O. a $\binom{n}{j}$

$$f^g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n}{j} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n)_j}{j!} z^n$$

puesto que j es constante

$$f^g(z) = \frac{1}{j!} \sum_{n=0}^{\infty} (n)_j z^n$$

y por la expresión (1. .17.)

$$f^g(z) = \frac{1}{j!} \frac{j!\, z^j}{(1-z)^{j+1}} = \frac{z^j}{(1-z)^{j+1}}$$

y se establece la correspondencia

$$\binom{n}{j} \Longleftrightarrow \frac{z^j}{(1-z)^{j+1}}$$

por la expresión (1.5.9.)

$$\boxed{\binom{n}{j} a^n \Longleftrightarrow \frac{a^j z^j}{(1-az)^{j+1}}} \qquad j \geq 0 \text{ , cte.} \qquad (1.5.19.)$$

ii) Sea ahora

$$f(n) = \binom{n+j}{j}$$

Aplicando la definición de T.G.O. a f(n)

$$f^g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+j}{j} z^n$$

pero por la expresión (1.5.7.)

$$f^g(z)=z^{-j}\left[\frac{z^j}{(1-z)^{j+1}}-\sum_{r=0}^{j-1}\binom{r}{j}z^r\right]$$

pero

$$\binom{r}{j}=0 \qquad \text{si } r<j$$

luego

$$f^g(z)=z^{-j}\frac{z^j}{(1-z)^{j+1}}=\frac{1}{(1-z)^{j+1}}$$

y se establece

$$\binom{n+j}{j}\Leftrightarrow\frac{1}{(1-z)^{j+1}}$$

Por (1.5.9.)

$$\boxed{\binom{n+j}{j}a^n\Leftrightarrow\frac{1}{(1-az)^{j+1}}} \qquad a=\text{cte.} \qquad (1.5.20.)$$

iii) Sea $f(n)=\binom{j}{n}$; $j\geq 0$ cte.

Aplicando la definición de T.G.O. a f(n)

$$f^g(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{j}{n}z^n$$

pero

$$\binom{j}{n}=0 \qquad \text{si } n>j$$

luego

$$f^g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{j}{n} z^n = \sum_{n=0}^{j} \binom{j}{n} z^n = (1+z)^j$$

(teorema del Binomio).

y se establece la correspondencia

$$\binom{j}{n} \Longleftrightarrow (1+z)^j$$

y por (1.5.9.)

$$\boxed{\binom{j}{n} a^n \Longleftrightarrow (1+az)^j} \qquad j > 0 \text{ cte.} \quad (1.5.21.)$$

1.5.13. <u>Función combinatoria</u> (multinomial)

i) Sea

$$f(n) = \binom{n}{j_1, j_2, \ldots, j_{r-1}, j_r}$$

en donde

$$j_1 + j_2 + \cdots + j_{r-1} + j_r = n$$

$$j_1, j_2, \ldots, j_{r-1}, j_r \geq 0 \text{ enteros}$$

La función multinomial puede expresarse en términos de la binomial de diversas manera se tiene así:

$$\binom{n}{j_1, j_2, \ldots, j_{r-1}, j_r} = \binom{n}{j_1}\binom{n-j_1}{j_2} \cdots \binom{n-j_1-j_2-\cdots-j_{r-2}}{j_{r-1}}\binom{n-j_1-j_2-\cdots-j_{r-1}}{j_r}$$

pero

$$n - j_1 - j_2 - \cdots - j_{r-1} = j_r$$

luego

$$\binom{n}{j_1, j_2, \ldots, j_{r-1}, j_r} = \binom{n}{j_1}\binom{n-j_1}{j_2}\cdots\binom{n-j_1-j_2-\cdots-j_{r_2}}{j_{r-1}}$$

$$\boxed{\binom{n}{j_1, j_2, \ldots, j_{r-1}, j_r} = \binom{n}{j_1}\binom{n-j_1}{j_2}\binom{n-j_1-\cdots-j_{r-2}}{j_{r-1}}} \qquad (1.5.22.)$$

$r > 0$ entero

$j_1, j_2, \ldots j_r \geq 0$

enteros

ii) Otra forma de expresarla es como sigue:

$$\binom{n}{j_1, j_2, \ldots, j_{r-1}, j_r} = \binom{j_1+j_2}{j_2}\binom{j_1+j_2+j_3}{j_3}\cdots\binom{j_1+j_2+\cdots+j_{r-1}}{j_{r-1}}$$

$$\binom{j_1+j_2+\cdots+j_r}{j_r}$$

pero

$$j_1 + j_2 + \cdots + j_r = n$$

luego

$$\binom{n}{j_1, j_2, \ldots, j_{r-1}, j_r} = \binom{j_1+j_2}{j_2}\binom{j_1+j_2+j_3}{j_3}\cdots\binom{j_1+j_2+\cdots+j_{r-1}}{j_{r-1}}\binom{n}{j_r}$$

Pero todavía más:

$$\binom{j_1+j_2}{j_2}\binom{j_1+j_2+j_3}{j_3}\cdots\binom{j_1+j_2+\cdots+j_{r-1}}{j_{r-1}} =$$

$$= \frac{(j_1+j_2)!}{j_1!\,j_2!}\,\frac{(j_1+j_2+j_3)!}{(j_1+j_2)!\,j_3!}\cdots\frac{(j_1+j_2+\cdots+j_{r-1})!}{(j_1+j_2+\cdots+j_{r-2})!\,j_{r-1}!} = \frac{(j_1+j_2+\cdots+j_{r-1})!}{j_1!\,j_2!\cdots j_{r-1}!}$$

$$= \binom{j_1+j_2+\cdots+j_{r-1}}{j_1,j_2,\ldots,j_{r-1}}$$

De manera que

$$\boxed{\binom{n}{j_1,j_2,\ldots,j_{r-1},j_r} = \binom{j_1+j_2+\cdots+j_{r-1}}{j_1,j_2,\ldots,j_{r-1}}\binom{n}{j_r}} \quad (1.5.23.)$$

$r > 0$ entero

$j_1, j_2, \ldots, j_r \geq 0$ enteros

y

$$\binom{n}{j_r} = \binom{n}{n-j_r} = \binom{n}{j_1+j_2+\cdots+j_{r-1}}$$

iii) Sea nuevamente

$$f(n) = \binom{n}{j_1,j_2,\ldots,j_{r-1},j_r}$$

Por la definición de T.G.O.

$$f^g(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{n}{j_1,j_2,\ldots,j_{r-1},j_r} z^n$$

y por (1.5.23.)

$$f^g(z) = \binom{j_1+j_2+\cdots+j_{r-1}}{j_1,j_2,\ldots,j_{r-1}} \sum_{n=0}^{\infty}\binom{n}{j_1,j_2,\ldots,j_{r-1}} z^n$$

y por (1.5.19.)

$$f^g(z) \Leftrightarrow \binom{j_1+j_2+\cdots+j_{r-1}}{j_1, j_2, \ldots, j_{r-1}} \frac{z^{j_1+j_2+\cdots+j_{r-1}}}{(1-z)^{j_1+j_2+\cdots+j_{r-1}+1}}$$

y se establece

$$\boxed{\binom{n}{j_1, j_2, \ldots, j_{r-1}, j_r} \Leftrightarrow \binom{j_1+j_2+\cdots+j_{r-1}}{j_1, j_2, \ldots, j_{r-1}} \frac{z^{j_1+j_2+\cdots+j_{r-1}}}{(1-z)^{j_1+j_2+\cdots+j_{r-1}+1}}}$$

(1.5.24.)

$r > 0$ entero

$j_1, j_2, \ldots, j_r \geq 0$ enteros

iii) También es posible encontrar el equivalente multinomial de (1.5.21.)

Considérese para ello números multinomiales de la forma

$$\binom{j}{n_1, n_2, \ldots, n_r}$$

de manera que

$$n_1+n_2+\ldots+n_r = j; \qquad r, j > 0 \text{ enteros}$$

y fórmese la función

$$f(n) = \sum_{\substack{n_1+n_2+\cdots+n_r=j \\ a_1 n_1+a_2 n_2+\cdots+a_r n_r = n}} \binom{j}{n_1, n_2, \ldots, n_r}$$

en donde

$a_1, a_2, \ldots, a_r$ son enteros no negativos

Por la definición de T.G.O.

$$f^g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\sum_{\substack{n_1+n_2+\cdots+n_r=j \\ a_1 n_1+a_2 n_2+\cdots+a_r n_r=n}} \binom{j}{n_1, n_2, \ldots, n_r} \right] z^n$$

pero

$$n = a_1 n_1 + a_2 n_2 + \cdots + a_r n_r$$

luego

$$f^g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\substack{n_1+n_2+\cdots+n_r=j \\ a_1 n_1+a_2 n_2+\cdots+a_r n_r=n}} \binom{j}{n_1, n_2, \ldots, n_r} z^{(a_1 n_1+a_2 n_2+\cdots+a_r n_r)}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\substack{n_1+n_2+\cdots+n_r=j \\ a_1 n_1+a_2 n_2+\cdots+a_r n_r=n}} \binom{j}{n_1, n_2, \ldots, n_r} (z^{a_1})^{n_1} (z^{a_2})^{n_2} \cdots (z^{a_r})^{n_r}$$

y por el teorema multinomial

$$f^g(z) = (z^{a_1} + z^{a_2} + \cdots + z^{a_r})^j$$

Se establece

$$\boxed{\sum_{\substack{n_1+n_2+\cdots+n_r=j \\ a_1n_1+a_2n_2+\cdots+a_rn_r=n}} \binom{j}{n_1\; n_2 \;\ldots\; n_r} \Longleftrightarrow (z^{a_1}+z^{a_2}+\cdots+z^{a_r})^j} \qquad (1.5.25.)$$

$a_1, a_2, \ldots, a_r \geqslant 0$ enteros

$r, j > 0$ enteros

1.5.14. Recíproca del factorial

i) Sea $f(n) = \frac{1}{n!}$

Aplicando la definición de T.G.O. a $f(n)$

$$f^g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \cdots + \frac{z^n}{n!} + \cdots = e^z$$

luego

$$\frac{1}{n!} \Longleftrightarrow e^z$$

y por (1.4.9.)

$$\boxed{\frac{a^n}{n!} \Longleftrightarrow e^{az}} \qquad a = \text{cte.} \qquad (1.5.26.)$$

ii) Sea $f(n) = \frac{(L\, b)^n}{n!}$ $\qquad b > 0$ cte.

Si $L\, b = a$, por (1.5.22.)

$$\frac{a^n}{n!} \Longleftrightarrow e^{az} = (e^a)^z$$

por consiguiente

$$\frac{(L\,b)^n}{n!} \Longleftrightarrow (e^{L\,b})^z = b^z$$

finalmente

$$\boxed{\frac{(L\,b)^n}{n!} \Longleftrightarrow b^z} \qquad b > 0\,,\ \text{cte.} \qquad (1.5.27.)$$

1.5.15. Recíproca de la variable n.

Sea $f(n) = \frac{1}{n}$, $n = 1, 2, \ldots$

luego

$$f^g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} z^n$$

Pero por la expresión (1. 5. 3.)

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$$

sin embargo

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \sum_{n=1}^{\infty} z^{n-1}$$

luego

$$\sum_{n=1}^{\infty} z^{n-1} = \frac{1}{1-z}$$

antiderivando miembro a miembro

$$D^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} z^{n-1} = D^{-1} \frac{1}{1-z}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} z^n = - L(1-z)$$

(la constante arbitraria es nula).

Se establece

$$\boxed{\frac{1}{n} \Longleftrightarrow - L(1-z)} \qquad (1.5.28.)$$

Por (1.5.9.)

$$\boxed{\frac{a^n}{n} \Longleftrightarrow -L(1-az)} \qquad (1.5.29.)$$

1.5.16. La función $(j)^n$

i) Sea $f(n) = \frac{(j)^n}{n!}$; $j > 0$ entero

Se tiene:

$$\frac{(j)^n}{n!} = \frac{(j+n-1)!}{(j-1)!\, n!} = \binom{n+j-1}{j-1}$$

pero por (1.5.20)

$$\binom{n+j-1}{j-1} \Longleftrightarrow \frac{1}{(1-z)^j}$$

luego

$$\boxed{\frac{(j)^n}{n!} \Longleftrightarrow \frac{1}{(1-z)^j}} \qquad (1.5.30.1.)$$

$j > 0$ entero

ii) Sea $f(n) = \frac{1}{(j)^n}$; $j > 0$ entero

Se tiene:

$$\frac{1}{(j)^n} = \frac{(j-1)!}{(j+n-1)!}$$

pero por (1.5.26.) y (1.5.7.)

$$\frac{1}{(j+n-1)!} \Longleftrightarrow z^{-(j-1)} \left[e^z - \sum_{\ell=0}^{j-2} \frac{z^\ell}{\ell!} \right]$$

luego

$$\boxed{\frac{1}{(j)^n} \Longleftrightarrow (j-1)!\; z^{-(j-1)} \left\{ e^z - \sum_{\ell=0}^{j-2} \frac{z^\ell}{\ell!} \right.} \qquad (1.5.30.2)$$

$j > 0$ entero

1.5.17. Funciones trigonométricas

i) Sea $f(n) = \cos(an) + i \operatorname{sen}(an) = e^{ian}$

aplicando la definición de T.G.O. a $f(n)$

$$f^g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\cos(an) + i \operatorname{sen}(an)\right] z^n =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \cos(an) z^n + i \sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{sen}(an) z^n = \sum_{n=0}^{\infty} e^{ian} z^n$$

por consiguiente

$$\sum_{n=0}^{\infty} \cos(an)\, z^n + i \sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{sen}(an)\, z^n = \frac{1}{1-z e^{ia}}$$

pero

$$e^{ia} = \cos a + i \operatorname{sen} a$$

luego

$$\sum_{n=0}^{\infty} \cos(an)\, z^n + i \sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{sen}(an)\, z^n = \frac{1}{1-z(\cos a + i \operatorname{sen} a)} =$$

$$= \frac{1}{(1-z\cos a) - i z \operatorname{sen} a}$$

multiplicando, en el segundo miembro, numerador y denominador por $(1-z\cos a) + i z \operatorname{sen} a$, resulta

$$\sum_{n=0}^{\infty} \cos(an) z^n + i \sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{sen}(an)\, z^n = \frac{1 - z\cos a + i z \operatorname{sen} a}{(1-z\cos a)^2 - i^2 z^2 \operatorname{sen}^2 a}$$

$$= \frac{1 - z\cos a}{1 - 2z\cos a + z^2} + i\, \frac{z \operatorname{sen} a}{1 - 2z\cos a + z^2}$$

De donde se obtienen las correspondencias

$$\boxed{\cos(an) \Longleftrightarrow \frac{1 - z\cos a}{1 - 2z\cos a + z^2}} \qquad a = \text{cte.} \qquad (1.5.31.)$$

$$\boxed{\operatorname{sen}(an) \Longleftrightarrow \frac{z \operatorname{sen} a}{1 - 2z\cos a + z^2}} \qquad a = \text{cte.} \qquad (1.5.32.)$$

ii) Una generalización inmediata se obtiene considerando

$$f(n) = b^n \cos(an) + i\, b^n \operatorname{sen}(an)$$

entonces

$$f^g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{ian} (bz)^n$$

y por (1.5.9.)

$$\boxed{b^n \cos(an) \Longleftrightarrow \frac{1 - zb\cos a}{1 - 2zb\cos a + z^2 b^2}} \qquad a, b = \text{cte.} \qquad (1.5.33.)$$

$$\boxed{b^n \operatorname{sen}(an) \Longleftrightarrow \frac{zb \operatorname{sen} a}{1 - 2zb\cos a + z^2 b^2}} \qquad a, b = \text{cte.} \qquad (1.5.34.)$$

1.5.18. Funciones Hiperbólicas

Si $f(n) = \cosh(an) + \operatorname{senh}(an)$

o bien

$$f(n) = b^n \cosh(an) + b^n \operatorname{senh}(an)$$

se llega, razonando en forma similar al caso de las funciones circulares, a expresiones análogas para las hiperbólicas:

$$\boxed{\cosh(an) \Longleftrightarrow \frac{1 - z\cosh a}{1 - 2z\cosh a + z^2}} \qquad (1.5.35.)$$

$a = cte.$

$$\boxed{\operatorname{senh}(an) \Longleftrightarrow \frac{z \operatorname{senh} a}{1 - 2z\cosh a + z^2}} \qquad (1.5.36.)$$

$a = cte.$

$$\boxed{b^n \operatorname{senh}(an) \Longleftrightarrow \frac{1 - z\,b\cosh a}{1 - 2z\,b\cosh a + z^2 b^2}} \qquad (1.5.37.)$$

$a, b = cte.$

$$\boxed{b^n \cosh(an) \Longleftrightarrow \frac{z\,b \operatorname{senh} a}{1 - 2z\,b\cosh a + z^2 b^2}} \qquad (1.5.38.)$$

$a, b = cte.$

1.5.19. Funciones de Stirling

i) El número de Stirling de segunda especie $S(n,j)$ se define de la siguiente manera

$$S(n,j) = \frac{1}{j!}\sum_{\ell=0}^{j}(-1)^{\ell}\binom{j}{\ell}(j-\ell)^{n} \; ; \; j \geq 0 \text{ cte.}$$

Es claro que si j permanente constante y por el contrario n varía, se obtiene una función discreta $f(n)$

$$f(n) = S(n,j)$$

$$f(n) = 0 \quad \text{si} \quad j > n$$

Aplicando la definición de T.G.O. a $f(n)$:

$$f^{g}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} S(n,j)\, z^{n}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{j!}\sum_{\ell=0}^{j}(-1)\binom{j}{\ell}(j-\ell)^{n} z^{n}$$

intercambiando sumatorias

$$f^{g}(z) = \frac{1}{j!}\sum_{\ell=0}^{j}(-1)^{\ell}\binom{j}{\ell}\sum_{n=0}^{\infty}(j-\ell)^{n} z^{n}$$

$$f^{g}(z) = \frac{1}{j!}\sum_{\ell=0}^{j}(-1)^{\ell}\binom{j}{\ell}\frac{1}{1-z(j-\ell)}$$

Si $j = 1$

$$\sum_{n=0}^{\infty} S(n,1)z^n = \sum_{\ell=0}^{1} (-1)^{\ell} \binom{1}{\ell} \frac{1}{1-z(1-\ell)}$$

$$= \frac{1}{1-z} - 1 = \frac{z}{1-z}$$

Si $j = 2$

$$\sum_{n=0}^{\infty} S(n,2)z^n = \frac{1}{2!} \sum_{\ell=0}^{2} (-1)^{\ell} \binom{2}{\ell} \frac{1}{1-z(2-\ell)}$$

$$= \frac{1}{2!} \left(\frac{1}{1-2z} - \frac{2}{1-z} + 1 \right)$$

$$= \frac{z^2}{(1-z)(1-2z)}$$

y en general

$$f^g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} S(n,j)\, z^n = \frac{z^j}{(1-z)(1-2z)\cdots(1-\quad)}$$

se ha establecido la correspondencia

$$\boxed{S(n,j) \Longleftrightarrow \frac{z^j}{(1-z)(1-2z)\cdots(1-jz)}} \qquad (1.5.39)$$

$j > 0$ cte.

ii) Si ahora se considera

$$f(n) = S(n+j, j)$$

Aplicando la definición de T.G.O. a f(n) y tomando en cuenta (1.4.7.)

$$f^g(z) = z^{-j}\left[\frac{z^j}{(1-z)(1-2z)\cdots(1-jz)} - \sum_{\ell=0}^{j-1} S(\ell,j)z^\ell\right]$$

pero

$$S(\ell,j) = 0 \qquad \ell < j$$

luego

$$f^g(z) = \frac{1}{(1-z)(1-2z)\cdots(1-jz)}$$

y por tanto

$$\boxed{S(n+j,j) = \frac{1}{(1-z)(1-2z)\cdots(1-jz)}} \qquad (1.5.40.)$$

$j > 0$ cte.

iii) El número de Stirling de primera especie $s(n,k)$ se define como el coeficiente de z^k en el desarrollo de $(z)_n$, esto es:

$$(z)_n = s(n,1)z + s(n,2)z^2 + \cdots + s(n,k)z^k + \cdots + s(n,n)z^n$$

luego

$$\sum_{n=0}^{\infty} s(k,n)z^n = (z)_k$$

puesto que

$$s(k,n) = 0 \quad \text{si} \quad n > k$$

por consiguiente se establece la correspondencia

$$\boxed{s(k,n) \Longleftrightarrow (z)_k} \qquad (1.5.41.)$$

1.5.20. Cociente $\frac{n}{j}$ (j = cte.)

Sea $f\left(\frac{n}{j}\right)$, j = cte., entonces por la definición de T.G.O.

$$f^g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f\left(\frac{n}{j}\right) z^n$$

cambiando la variable bajo transformación:

$$\frac{n}{j} = m$$

$$n = mj$$

entonces

$$\sum_{n=0}^{\infty} f\left(\frac{n}{j}\right) z^n = \sum_{m=0}^{\infty} f(m) z^{mj}$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} f(m)(z^j)^m = f^g(z^j)$$

y se establece

$$\boxed{f\left(\frac{n}{j}\right) \Leftrightarrow f^g(z^j)} \qquad (1.5.42)$$

j = cte.

1.5.21. Diferencia $f(n) - f(n-1)$

Por la definición de incremento

$$\Delta f(n-1) = f(n) - f(n-1)$$

pero por la definición de T.G.O. y por (1.4.6.)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[f(n) - f(n-1) \right] z^n = f^g(z) - z f^g(z) = (1-z) f^g(z)$$

por consiguiente

$$\boxed{\Delta f(n-1) \Leftrightarrow (1-z) f^g(z)} \qquad (1.5.43.)$$

1.5.22. Suma definida (suma parcial)

i) Sea $f(n) = \sum_{m=0}^{n} f(m)$

entonces por la definición de T.G.O.

$$f^g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \left[\sum_{m=0}^{n} f(m) \right]$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} f(m)\, z^m \sum_{n=m}^{\infty} z^{n-m}$$

$$f^g(z) = f^g(z) \cdot \frac{1}{1-z}$$

luego

$$\boxed{\sum_{m=0}^{n} f(m) \Leftrightarrow \frac{f^g(z)}{1-z}} \qquad (1.5.44.)$$

ii) Sea la suma iterada

$$F_1(n) = \sum_{m=0}^{n} f(m)$$

$$F_2(n) = \sum_{m=0}^{n} F_1(m)$$

$$- - - - - - - - - - -$$

$$F_j(n) = \sum_{m=0}^{n} F_{j-1}(m)$$

Razonando como en el caso anterior se obtiene:

$$F_j^g(z) = \frac{f^g(z)}{(1-z)^j}$$

Por otra parte:

$$F_1(n) = f(n) + f(n-1) + f(n-2) + \cdots + f(0)$$

$$F_2(n) = \sum_{m=0}^{n} \left[f(m) + f(m-1) + \cdots + f(0) \right]$$

$$= f(n) + 2\, f(n-1) + 3\, f(n-2) + \ldots + (n+1)\, f(0)$$

y en general

$$F_j(n)=f(n)+jf(n-1)+\cdots+\binom{\ell+j}{\ell-1}f(n-\ell)+\cdots+\binom{n+j-1}{j-1}f(0)$$

luego

$$\boxed{f(n)+jf(n-1)+\cdots+\binom{\ell+j}{\ell-1}f(n-\ell)+\cdots+\binom{n+j-1}{j-1}f(0)\Longleftrightarrow \frac{f^g(z)}{(1-z)^j}}$$

(1.5.45.)

1.5.23. Suma total

Por la definición de T.G.O. de $f(n)$

$$f^g(z)=\sum_{n=0}^{\infty} f(n)\,z^n$$

entonces, si $z=1$

$$f^g(1)=\sum_{n=0}^{\infty} f(n)$$

y se ha obtenido la "suma" total de la función $f(n)$, esto es:

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} f(n)=f^g(1)} \qquad (1.5.46.)$$

Obsérvese que esta suma no necesariamente es finita.

1.5.24. Propiedad del valor inicial

Puesto que

$$f^g(z)=\sum_{n=0}^{\infty} f(n)z^n$$

esto es:

$$f^{g}(z) = f(0)+f(1)z+f(2)z^2+\cdots+f(n)z^n+\cdots$$

si $z = 0$

$$f^{g}(0)=f(0)+0+0+\cdots+0+\cdots$$

esto es

$$\boxed{f(0) = f^{g}(0)} \tag{1.5.47.}$$

1.5.25. Propiedad del valor final

En el inciso (1.4.20.) se encontró

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left[f(n) - f(n-1)\right] z^n = (1-z)\, f^{g}(z)$$

esto es:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left[f(n)-f(n-1)\right] z^n = \left[f(0)-f(-1)\right] + \left[f(1)-f(0)\right] z + \left[f(2)-f(1)\right] z^2 + \cdots + \left[f(n)-f(n-1)\right] z^n + \cdots = (1-z)\, f^{g}(z)$$

Por otra parte

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left[f(n)-f(n-1)\right] = \left[f(0)-f(-1)\right] + \left[f(1)-f(0)\right] + \left[f(2)-f(1)\right] + \cdots + \left[f(n)-f(n-1)\right] + \cdots = f(\infty) = \lim_{n\to\infty} f(n)$$

entonces

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} f(n) = \lim_{z\to 1} (1-z)\, f^{g}(z)} \tag{1.5.48.}$$

Los resultados (1.5.1.) a (1.5.48.) así como otros, aparecen resumidos en el anexo [ ]

1.6. Primeros métodos para antitransformar

1.6.1. Búsqueda en tablas

El método más directo y cómodo para antitransformar, consiste en llevar la función $f^g(z)$ a una de las formas que aparecen en tablas como las del anexo [ ] y leer directamente la función $f(n)$ que le corresponde. Así por ejemplo,

1) $$f^g(z) = \frac{z-3}{1-4z+4z^2} = \frac{z-3}{(1-2z)^2}$$

$$= \frac{z}{(1-2z)^2} - \frac{3}{(1-2z)^2}$$

Si

$$f_1^g(z) = \frac{z}{(1-2z)^2} \quad y \quad f_2^g(z) = -\frac{3}{(1-2z)^2}$$

$$f^g(z) = f_1^g(z) + f_2^g(z)$$

entonces:

$$f_1^g(z) = \frac{1}{2} \frac{2z}{(1-2z)^2}$$

por (1.5.11.) y (1.5.9.)

$$f_1(n) = \frac{1}{2} n \, 2^n$$

Por otra parte

$$f_2^g(z) = -3 \frac{1}{(1-2z)^2}$$

entonces, por (1.5.20.)

$$f_2(n) = -3 \binom{n+1}{1} 2^n = -3(n+1) 2^n$$

De donde, por (1.5.4.)

$$f(n) = n\,2^n - 3\,(n+1)\,2^n$$
$$= 2^n\,(n-3n-3)$$
$$f(n) = -\,(2n+3)\,2^n$$

2) $f^g(z) = 3z^2\,(1+5z)^4$

Por una parte, (1.5.21.) hace ver que

$$(1+5z)^4 \Leftrightarrow \binom{4}{n}\,5^n$$

sin embargo, al estar multiplicado el binomio por z^2, es necesario emplear además (1.4.6.), esto es, la función se encuentra retrasada en dos unidades, de manera que

$$f(n) = 3\,\binom{4}{n-2}\;5^{n-2}$$

3) $f^g(z) = e^{2z}\,(1+3z)^7$

Si
$$f_1^g(z) = e^{2z}$$
$$f_2^g(z) = (1+3z)^7$$

entonces

$$f^g(z) = f_1^g(z)\cdot f_2^g(z)$$

Se trata de un producto de transformadas y por (1.5.5.), la función original es una convolución.

$$f(n) = \sum_{m=0}^{n} f_1(m)\,f_2(n-m)$$

Se tiene por (1.5.22.) y (1.5.21.) respectivamente

$$f_1(n) = \frac{2^n}{n!}$$

$$f_2(n) = \binom{7}{n} 3^n$$

de manera que

$$f(n) = \sum_{m=0}^{n} \frac{2^m}{m!} \binom{7}{n-m} 3^{n-m}$$

$$f(n) = 3^n \sum_{m=0}^{n} \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^m}{m!} \binom{7}{n-m}$$

4) $f^g(z) = \dfrac{z^7}{(1+3z)^4}$

Se tiene

$$\frac{z^7}{(1+3z)^4} = \frac{z^4}{(-3)^3} \frac{(-3)^3 z^3}{\left[1-(-3z)\right]^4}$$

Por (1.5.19.)

$$\frac{(-3)^3 z^3}{\left[1-(-3z)\right]^4} \Longleftrightarrow \binom{n}{3} (-3)^n$$

luego por (1.5.6.)

$$f(n) = \frac{1}{(-3)^3} \binom{n-4}{3} (-3)^{n-4}$$

$$f(n) = (-1)^{n-7} \binom{n-4}{3} 3^{n-7}$$

5) $f^g(z) = 5z^4 + 3z^2 + 2z - 8$

Haciendo uso de (1.5.2.) y (1.4.1.) se tiene

$$f_1(n) = 5\delta(n-4)$$

$$f_2(n) = 3\delta(n-2)$$

$$f_3(n) = 2\delta(n-1)$$

$$f_4(n) = -8\delta(n)$$

entonces por (1.5.4.)

$$f(n) = 5\delta(n-4)+3\delta(n-2)+2\delta(n-1)-8\delta(n)$$

1.6.2. Fracciones racionales

Sea

$$f^g(z) = \frac{N(z)}{D(z)}$$

en donde N(z) y D(z) son polinomios sin raices en común y el grado m del denominador es mayor que el del numerador.

Para antitransformar se hace uso en primer lugar del método común de descomposición en fracciones simples y posteriormente se acude a la búsqueda en tablas. Así por ejemplo:

$$f^g(z) = \frac{6z^4 + z^3 - z^2 - \frac{88}{9}z + \frac{16}{9}}{27z^4 - 81z^3 + 90z^2 - 44z + 8}$$

Puesto que el grado del numerador no es menor que el del denominador se efectúa el cociente

$$f^g(z) = \frac{2}{9} + \frac{18z^3 - 21z^2}{27z^4 - 81z^3 + 90z^2 - 44z + 8}$$

entonces

$$f_1^g(z) = \frac{2}{9}$$

$$f_2^g(z) = \frac{18z^3 - 21z^2}{27z^4 - 81z^3 + 90z^2 - 44z + 8}$$

$$f^g(z) = f_1^g(z) + f_2^g(z)$$

Al factorizar el denominador de $f_2^g(z)$ se obtiene

$$27z^4 - 81z^3 + 90z^2 - 44z + 8 = (1-z)\,(2-3z)^3$$

de manera que

$$f_2^g(z) = \frac{18z^3 - 21z^2}{(1-z)\,(2-3z)^3}$$

dado que el grado del numerador es menor que el del denominador y no existen-factores-comunes entre ellos, se procede a la descomposición en fracciones simples

$$\frac{18z^3 - 21z^2}{(1-z)(2-3z)^3} = \frac{A}{1-z} + \frac{B}{(2-3z)^3} + \frac{C}{(2-3z)^2} + \frac{D}{(2-3z)}$$

se tiene la identidad

$$18z^3 - 21z^2 \equiv A(2-3z)^3 + B(1-z) + C(1-z)(2-3z) + D(1-z)(2-3z)^2$$

si $z = 1$

$$18 - 21 = -3 = A(2-3)^3 \;; \quad A = 3$$

Si $z = \frac{2}{3}$

$$18\left(\frac{2}{3}\right)^3 - 21\left(\frac{2}{3}\right)^2 = -4 = B\left(1 - \frac{2}{3}\right) ; \; B = -12$$

Derivando la idéntidad

$$54z^2 - 42z = -9A(2-3z)^2 - B + C\left[-(2-3z) - 3(1-z)\right] + D\left[-(2-3z)^2 + 6(2-3z)(1-z)\right]$$

si nuevamente $z = \frac{2}{3}$

$$54\left(\frac{2}{3}\right)^2 - 42\left(\frac{2}{3}\right) = -4 = -B + C(-3)\left(\frac{1}{3}\right)$$

pero B = - 12, luego C = 16

si de nuevo z = 1

$$54 - 42 = 12 = -9\,(3)\,(-1)^2 + 12 + 16\left[-(-1)\right] + D\left[-(-1)^2\right]$$

$$12 = -27+12+16-D \;;\quad D = -11$$

Se tiene

$$f^g(z) = \frac{3}{1-z} - \frac{12}{(2-3z)^3} + \frac{16}{(2-3z)^2} - \frac{11}{2-3z}$$

$$f^g(z) = \frac{3}{1-z} \quad \frac{\frac{3}{2}}{(1-\frac{3}{2}z)^3} \quad \frac{4}{(1-\frac{3}{2}z)^2} - \frac{\frac{11}{2}}{1-\frac{3}{2}z}$$

Ahora bien, por (1.5.3.)

$$\frac{1}{1-z} \Longleftrightarrow u\,(n)$$

por (1.5.20.)

$$\frac{1}{(1-\frac{3}{2}z)^3} \Longleftrightarrow \binom{n+2}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^n = \frac{n^2+3n+2}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^n$$

$$\frac{1}{(1-\frac{3}{2}z)^2} \Longleftrightarrow \binom{n+1}{1}\left(\frac{3}{2}\right)^n = (n+1)\left(\frac{3}{2}\right)^n$$

por (1.5.8.)

$$\frac{1}{1-\frac{3}{2}z} \Longleftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^n$$

y por (1.5.4.)

$$f(n) = 3u(n) - \frac{3n^2+9n+6}{4}\left(\frac{3}{2}\right)^n + (4n+4)\left(\frac{3}{2}\right)^n - \frac{11}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^n$$

$$f(n) = 3\,u(n) + \left(-\frac{3}{4}n^2 + \frac{25}{4}n\right)\left(\frac{3}{2}\right)^n$$

Para el caso de factores repetidos en el denominador, como el recién ejemplificado, Howard [ ] propone una expresión que facilita el cálculo de los coeficientes.

Sea

$$\frac{N(z)}{D(z)} = \frac{N(z)}{(1-az)^m\, D_1(z)} = \frac{A_0}{(1-az)^m} + \frac{A_1}{(1-az)^{m-1}} + \dots + \frac{A_{m-2}}{(1-az)^2} + \frac{A_{m-1}}{1-az} + g(z)$$

entonces

$$\boxed{A_k = \frac{1}{k!}\left(-\frac{1}{a}\right)^k \frac{d^k}{dz^k}\left[(1-az)^m \frac{N(z)}{D(z)}\right]_{z=\frac{1}{a}}}$$

$$k = 0, 1, \dots\ m-1$$

(1.6.1.)

Su aplicación al ejemplo anterior resulta:

$$f^g(z) = \frac{18z^3 - 21z^2}{(1-z)(2-3z)^3} = \frac{\frac{9}{4}z^3 - \frac{21}{8}z^2}{(1-z)(1-\frac{3}{2}z)^3}$$

luego

$$A_k = \frac{1}{k!}\left(-\frac{2}{3}\right)^k \frac{d^k}{dz^k}\left[\left(1-\frac{3}{2}z\right)^3 \frac{\frac{9}{4}z^3 - \frac{21}{8}z^2}{(1-z)(1-\frac{3}{2}z)^3}\right]_{z=\frac{2}{3}}$$

$$k = 0, 1, 2$$

esto es:

$$A_k = \frac{1}{k!}\left(-\frac{2}{3}\right)^k \frac{d^k}{dz^k}\left[-\frac{9}{4}z^2+\frac{3}{8}z+\frac{3}{8}-\frac{\frac{3}{8}}{1-z}\right]_{z=\frac{2}{3}} \quad ; k=0,1,2$$

luego

$$A_0 = -\frac{9}{4}\left(\frac{4}{9}\right)+\frac{3}{8}\left(\frac{2}{3}\right)+\frac{3}{8}-\frac{\frac{3}{8}}{1-\frac{2}{3}} = -\frac{3}{2}$$

$$A_1 = \left(-\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{9}{2}\left(\frac{2}{3}\right)+\frac{3}{8}-\frac{\frac{3}{8}}{\left(1-\frac{2}{3}\right)^2}\right) = 4$$

$$A_2 = \frac{1}{2}\left(-\frac{2}{3}\right)^2\left(-\frac{9}{2}-\frac{2\left(\frac{3}{8}\right)}{\left(1-\frac{2}{3}\right)^3}\right) = -\frac{11}{2}$$

Resultados que coinciden con los anteriormente obtenidos.

En el caso de que el denominador no tenga raices múltiples, es cómodo usar la expresión de Feller [ ]

Sean $z_1, z_2, \ldots, z_m$ las raíces del denominador $D(z)$, entonces

$$\frac{N(z)}{D(z)} = \frac{A_1}{z_1-z}+\frac{A_2}{z_2-z}+\cdots+\frac{A_m}{z_m-z}$$

Si $D'(z)$ es la derivada del denominador

$$\boxed{\begin{array}{l} A_k = \dfrac{-N(z_k)}{D'(z_k)}, \quad k=1,\ldots,m \\ \text{y} \\ f(n) = \displaystyle\sum_{k=1}^{m} \frac{A_k}{z_k^{\,n+1}} \end{array}} \qquad (1.6.2.)$$

A manera de ilustración, sea

$$f^g(z) = \frac{4z^2+6z+8}{6-17z+11z^2-2z^3}$$

factorizando el denominador

$$f^g(z) = \frac{2z^2+3z+4}{(2-z)(3-z)(\frac{1}{2}-z)}$$

$$D'(z) = -(3-z)(\frac{1}{2}-z)-(2-z)(\frac{1}{2}-z)-(2-z)(3-z)$$

$$D'(2) = \frac{3}{2}; \quad D^1(3) = -\frac{5}{2}, \quad D'(\frac{1}{2}) = -\frac{15}{4}$$

$$-N(2) = -18, \quad -N(3) = -31, \quad -N(\frac{1}{2}) = -6$$

$$A_1 = -12, \quad A_2 = \frac{62}{5}, \quad A_3 = \frac{8}{5}$$

$$f(n) = -\frac{12}{2^{n+1}} + \frac{62}{5}\,\frac{1}{3^{n+1}} + \frac{8}{5}(2)^{n+1}$$

$$f(n) = -6\,(\frac{1}{2})^n + \frac{62}{15}\,(\frac{1}{3})^n + \frac{16}{5}\,(2)^n$$

Por otra parte, dada la frecuencia con que se presenta en las aplicaciones antitransformar los cocientes

$$\frac{1}{(1-az)(1-bz)} \quad y \quad \frac{z}{(1-az)(1-bz)} \qquad a \neq b$$

es conveniente tener explícitamente la correspondencia.

Facilmente se comprueba que

$$\boxed{\frac{b^{n+1}-a^{n+1}}{b-a} \Longleftrightarrow \frac{1}{(1-az)(1-bz)}} \qquad (1.6.3.)$$

$$a \neq b$$

$$\boxed{\frac{b^n - a^n}{b - a} \Longleftrightarrow \frac{z}{(1-az)(1-bz)}} \qquad (1.6.4.)$$

$a \neq b$

1.6.3. Desarrollo de MacLaurin

Puesto que $f^g(z)$ es la suma de la serie de protencias cuyos coeficientes son $f(n)$, $n=0,1,2,\ldots$; por el teorema (1.4.v.) se tiene:

$$f(n) = \frac{1}{n!} \left. \frac{d^n}{dz^n} f^g(z) \right|_{z=0}$$

Este teorema suministra un método adicional para antitransformar. Así por ejemplo, sea

1) $f^g(z) = \dfrac{1}{1-az}$

entonces

$$\frac{d^n}{dz^n} \frac{1}{1-az} = \frac{n!\, a^n}{(1-az)^{n+1}}$$

de manera que

$$f(n) = \frac{1}{n!} \left[\frac{n!\ a^n}{(1-az)^{n+1}} \right]_{z=0} = a^n$$

$$f(n) = a^n$$

2) $f^g(z) = e^{az}$

entonces

$$\frac{d^n}{dz^n} e^{az} = a^n e^{az}$$

de manera que

$$f(n) = \frac{1}{n!}\left[a^n e^{az}\right]_{z=0} = \frac{a^n}{n!}$$

1.7. Transformadas de funciones matriciales

1.7.1. Funciones matriciales

Sea como en el inicio (1.2.) la variable natural n que representa a cualquiera de los enteros positivos y además al cero, si mediante $F(n)$ se le hace corresponder a estos enteros no negativos tablas de números reales cualesquiera, se dice que se ha definido una función matricial (discreta). Complementariamente se agrega la definición

$$\bar{F}(n) = 0 \qquad \text{si} \quad n < 0$$

Así, por ejemplo,

$$\bar{F}(n) = \begin{bmatrix} 2n+3 & \delta(n) \\ \delta(n-2) & n^2 \end{bmatrix}$$

es una función matricial y la correspondencia establecida obviamente es:

$$\bar{F}(0) = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \ \bar{F}(1) = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \ \bar{F}(2) = \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}, \ \bar{F}(3) = \begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}, \ldots$$

La definición de Transformada Geométrica Ordinaria de una función matricial es:

$$\boxed{\bar{F}^g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \bar{F}(n)\, z^n} \qquad (1.7.1.)$$

análoga a la de las funciones escalares. Obsérvese que la T.G.O. de una función matricial es la matriz de las T.G.O. de las funciones discretas que son los elementos de la matriz original. Así, para la matriz $\bar{F}(n)$ del ejemplo se tiene:

$$2n+3 \Longleftrightarrow \frac{2z}{(1-z)^2} + \frac{3}{1-z} \text{ ; por (1.5.3.) y (1.5.11.)}$$

$$(n) \Longleftrightarrow 1; \text{ por (1.5.1.)}$$

$$(n-2) \Longleftrightarrow z^2; \text{ por (1.5.2.)}$$

$$n^2 \Longleftrightarrow \frac{z(1+z)}{(1-z)^3} \text{ ; por (1.5.15.)}$$

luego

$$\bar{F}^g(z) = \begin{bmatrix} \frac{3-z}{(1-z)^2} & 1 \\ z^2 & \frac{z+z^2}{(1-z)^3} \end{bmatrix}$$

1.7.2. Potencia de una matriz

i) Posiblemente es en el problema de elevar una matriz a una potencia donde puede apreciarse con claridad la ventaja de la técnica de las transformadas geométricas en el área matricial.

Sea

$$\bar{F}(n) = \bar{A}^n$$

en donde $\bar{A}$ es una matriz cuadrada de constantes. La función matricial discreta $\bar{A}^n$ es análoga a la sucesión geométrica a^n de (1.5.8.).

Aplicando la definición de T.G.O. a $\bar{F}(n)$ se tiene:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \bar{F}(n)\, z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \bar{A}^n z^n = \bar{I} + \bar{A}z + \bar{A}^2 z^2 + \cdots = \left[\bar{I} - \bar{A}z\right]^{-1}$$

esto es:

$$\boxed{\bar{A}^n \Longleftrightarrow \left[\bar{I} - \bar{A}z\right]^{-1}} \qquad (1.7.2.)$$

expresión análoga a (1.5.8.).
($\bar{I}$: matriz identidad).

Por otra parte, la serie representa a la matriz inversa si el valor absoluto de z es menor que el recíproco del valor característico de $\bar{A}$ de mayor valor absoluto. Sin embargo, como se comentó en (1.4.), no es necesario estar calculando el intervalo de convergencia en cada caso.

ii) En forma semejante a la tratada en el inciso (1.5.) se encuentran expresiones para transformadas de diversas funciones matriciales, lo anterior es consecuencia directa de la definición de T.G.O. (1.7.1.). A manera de ilustración considérese

$$\bar{F}(n) = n\,\bar{A}^{n}$$

Se parte de

$$\left(\bar{I} - \bar{A}z\right)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} A^{n} z^{n}$$

derivando ambos miembros

$$\frac{d}{dz}\left[\bar{I} - \bar{A}z\right]^{-1} = \frac{d}{dz}\sum_{n=0}^{\infty} A^{n} z^{n}$$

$$\frac{d}{dz}\left[\bar{I} - \bar{A}z\right]^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} n\,A^{n} z^{n-1}$$

$$z\,\frac{d}{dz}\left[\bar{I} - \bar{A}z\right]^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} n\,A^{n} z^{n}$$

luego

$$\boxed{n\,\bar{A}^{n} \Longleftrightarrow z\,\frac{d}{dz}\left(\bar{I} - \bar{A}z\right)^{-1}} \qquad (1.7.3.)$$

centro de educación continua
división de estudios de posgrado
facultad de ingenieria unam

CURSOS DE SUPERACION ACADEMICA

MATEMATICAS DISCRETAS

NOTAS DE LA EXPOSICION SUSTENTADA POR EL

ING. FRANCISCO JAVIER JAUFRED MERCADO.
(Continuación).

MARZO DE 1980.

Palacio de Minería Calle de Tacuba 5 primer piso México 1, D. F. Tel: 521-40-20

A manera de ilustración, sea

$$f^g(z) = \frac{4z^2+6z+8}{6-17z+11z^2-2z^3}$$

factorizando el denominador

$$f^g(z) = \frac{2z^2+3z+4}{(2-z)(3-z)(\frac{1}{2}-z)}$$

$$D'(z) = -(3-z)(\tfrac{1}{2}-z) - (2-z)(\tfrac{1}{2}-z) - (2-z)(3-z)$$

$$D'(2) = \frac{3}{2};\; D^1(3) = -\frac{5}{2},\; D'(\tfrac{1}{2}) = -\frac{15}{4}$$

$$-N(2) = -18,\; -N(3) = -31,\; -N(\tfrac{1}{2}) = -6$$

$$A_1 = -12,\; A_2 = \frac{62}{5},\; A_3 = \frac{8}{5}$$

$$f(n) = -\frac{12}{2^n+1} + \frac{62}{5}\,\frac{1}{3^{n+1}} + \frac{8}{5}(2)^{n+1}$$

$$f(n) = -6(\tfrac{1}{2})^n + \frac{62}{15}(\tfrac{1}{3})^n + \frac{16}{5}(2)^n$$

También se dispone de la expresión Johnson-Kotz [ ] para el caso en que todos los factores del denominador son distintos entre sí.

$$f^g(z) = \frac{p(z)}{(1-a_1z)(1-a_2z)\cdots(1-a_mz)};\; a_1 \neq a_2 \neq \cdots \neq a_m$$

en donde p(z) es polinomio de grado r ($r < m$) sin factores comunes con el denominador.

Si

$$\frac{p(z)}{(1-a_1z)(1-a_2z)\cdots(1-a_mz)} = \frac{A_1}{1-a_1z} + \frac{A_2}{1-a_2z} + \cdots + \frac{A_m}{1-a_mz}$$

entonces

$$\boxed{\begin{aligned} A_k &= \frac{p\left(\frac{1}{a_k}\right)}{\prod\limits_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{m}\left(1-\frac{a_i}{a_k}\right)}, \quad k=1,\ldots,m \\ &\text{y} \\ f(n) &= \sum_{k=1}^{m} A_k\, a_k^{\,n} \end{aligned}} \qquad (1.6.2.1.)$$

Como ilustración sea

$$f^g(z) = \frac{2z+3}{(1-2z)(1-5z)(1-6z)}$$

en este caso

$$m=3,\ a_1=2,\ a_2=5,\ a_3=6$$

para $k=1$

$$A_1 = \frac{2\left(\frac{1}{2}\right)+3}{\left(1-\frac{5}{2}\right)\left(1-\frac{6}{2}\right)} = \frac{4}{\left(-\frac{3}{2}\right)(-2)} = \frac{4}{3}$$

para $k=2$

$$A_2 = \frac{2\left(\frac{1}{5}\right)+3}{\left(1-\frac{2}{5}\right)\left(1-\frac{6}{5}\right)} = \frac{\frac{17}{5}}{\left(\frac{3}{5}\right)\left(-\frac{1}{5}\right)} = -\frac{85}{3}$$

para $k=3$

$$A_3 = \frac{2\left(\frac{1}{6}\right)+3}{\left(1-\frac{3}{6}\right)\left(1-\frac{5}{6}\right)} = \frac{\frac{10}{3}}{\left(\frac{4}{6}\right)\left(\frac{1}{6}\right)} = 30$$

luego

$$f(n) = \frac{4}{3}(2)^n - \frac{85}{3}(5)^n + 30(6)^n$$

Por otra parte, dada la frecuencia con que se presenta en las aplicaciones antitransformar los cocientes

$$\frac{1}{(1-az)(1-bz)} \quad y \quad \frac{z}{(1-az)(1-bz)} \qquad\qquad a \neq b$$

es conveniente tener explícitamente la correspondencia.

Fácilmente se comprueba que

$$\boxed{\frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{b-a} \Longleftrightarrow \frac{1}{(1-az)(1-bz)}} \qquad (1.6.3.)$$

$$a \neq b$$

2.2.3. Eventos recurrentes

i) Considérese una urna con bolas blancas y negras en suficiente cantidad y supóngase que se extraen las bolas una a una, se registra el color de la bola sacada y se regresa a la uran. Es claro que si en alguna de las extracciones se obtuvo una bola blanca este hecho no impide que en alguna otra extracción posterior se vuelva a obtener una bola blanca. Se dice que el extraer una bola blanca (negra) de la urna es un evento recurrente.

Ahora bien, supóngase que en la urna hay una proporción de p bolas blancas y 1-p=q bolas negras, es inmediato que la probabilidad de obtener una bola blanca en cualquier extracción 1, 2, ..., n, ... es p y de obtener una bola negra es q.

Se distinguen los siguientes dos eventos:

A = extraer una bola blanca en la n=ésima extracción

B = extraer una bola blanca por primera vez en la n-ésima extracción.

Es obvio que el evento A tiene como probabilidad

p u(n-1) (no se considera la cero-ésima extracción) esto es, para cualquier extracción se tiene idéntica probabilidad, p, de obtener una bola blanca.

Por su parte el evento B para que se realice, requiere que en las (n-1) primeras extracciones se hayan obtenido bolas negras y en la n-ésima se obtenga bola blanca, su probabilidad es por tanto $p\,q^{n-1}$.

Si se conviene en representar con $\varphi(n)$ la probabilidad del evento A y con f(n) la del B se tiene

$$\varphi(n) = p\,u\,(n-1)$$
$$f(n) = p\,q^{n-1}$$

Se desea encontrar una expresión que permita obtener $\varphi(n)$ en función de f(n) y recíprocamente.

ii) Supóngase nuevamente el evento A con su probabilidad $\varphi(n)$. Ahora bien si cada vez que se obtiene una bola blanca se inicia una nueva serie de extracciones a partir de la siguiente, es claro que la obtención de una bola blanca siempre será <u>por primera vez</u> en dicha serie de extracciones. De manera que:

$\varphi(n) = f(n)$ (primera serie de extracciones)

$\varphi(n) = f(n) * f(n)$ (dos primeras series de extracciones)

$\varphi(n) = f(n) * f(n) * f(n)$ (tres primeras series de extracciones)

— — — — — — — — — — — — — —

y puesto que todos estos eventos son mutuamente exclusivos

$$\varphi(n) = f(n) + f(n) * f(n) + f(n) * f(n) * f(n) + \cdots$$

transformando miembro a miembro y tomando en cuenta (1.5.5.)

$$\phi^{g}(z) = f^{g}(z) + \left[f^{g}(z)\right]^{2} + \left[f^{g}(z)\right]^{3} + \cdots$$

pero en el segundo miembro se tiene

$$f^{g}(z) + \left[f^{g}(z)\right]^{2} + \left[f^{g}(z)\right]^{3} + \cdots = f^{g}(z)\left[1 + f^{g}(z) + \left[f^{g}(z)\right]^{2} + \cdots\right]$$

y $\quad 1 + f^{g}(z) + \left[f^{g}(z)\right]^{2} + \cdots = \dfrac{1}{1 - f^{g}(z)}$

luego

$$f^{g}(z) + \left[f^{g}(z)\right]^{2} + \left[f^{g}(z)\right]^{3} + \cdots = \frac{f^{g}(z)}{1 - f^{g}(z)}$$

esto es

$$\boxed{\phi^{g}(z) = \frac{f^{g}(z)}{1 - f^{g}(z)}} \qquad (2.2.7.)$$

De (2.2.7.)

$$\phi^{g}(z) - \phi^{g}(z)\, f^{g}(z) - f^{g}(z) = 0$$

$$-f^{g}(z)\left[\phi^{g}(z) + 1\right] = -\phi^{g}(z)$$

$$\boxed{f^{g}(z) = \frac{\phi^{g}(z)}{1 + \phi^{g}(z)}} \qquad (2.2.8.)$$

Aplicando (2.2.7.) al ejemplo anterior

$$f(n) = pq^{n-1}$$

por (1.5.6.) y (1.5.8.)

$$f^{g}(z) = \frac{pz}{1 - qz}$$

entonces

$$\varphi^{g}(z) = \frac{\frac{pz}{1-qz}}{1-\frac{pz}{1-qz}}$$

$$\varphi^{g}(z) = \frac{pz}{1-qz-pz} = \frac{pz}{1-z}$$

y por (1.5.6.) y (1.5.3.)

$$\varphi(n) = p\,u\,(n-1)$$

que es la expresión de partida.

2.3.4. Relaciones entre números combinatorios

i) Sea

$$f(n) = \binom{i+j}{n} \; ; \; i, j > 0 \text{ enteros}$$

Por (1.5.21.) se tiene:

$$f^g(z) = (1+z)^{i+j}$$
$$= (1+z)^i (1+z)^j$$

y por (1.5.5.) y (1.5.21.)

$$f(n) = \sum_{m=0}^{n} \binom{i}{m} \binom{j}{n-m}$$

luego

$$\boxed{\binom{i+j}{n} = \sum_{m=0}^{n} \binom{i}{m} \binom{j}{n-m}} \qquad (2.3.11.)$$

$i, j > 0$ enteros

ii) Sea

$$f(n) = \binom{n}{i+j}$$

por (1.5.19.)

$$f^g(z) = \frac{z^{i+j}}{(1-z)^{i+j+1}}$$
$$= \frac{z^i}{(1-z)^{i+1}} \; \frac{z^j}{(1-z)^j}$$

por (1.5.5.) y (1.5.20.)

$$f(n) = \sum_{m=0}^{n} \binom{m}{i} \binom{n-m-1}{j-1}$$

y por tanto

$$\boxed{\binom{n}{i+j} = \sum_{m=i}^{n} \binom{m}{i}\binom{n-m-1}{j-1}} \qquad (2.3.12.)$$

$i, j > 0$ enteros

iii) Sea

$$f(n) = \binom{n}{j} + \binom{n}{j-1}$$

Por (1.5.19.)

$$f^{g}(z) = \frac{z^{j}}{(1-z)^{j+1}} + \frac{z^{j-1}}{(1-z)^{j}}$$

$$= \frac{z^{j}+z^{j-1}-z^{j}}{(1-z)^{j+1}} = \frac{z^{j-1}}{(1-z)^{j+1}}$$

y por (1.5.20.)

$$f(n) = \binom{n+1}{j}$$

luego

$$\boxed{\binom{n}{j} + \binom{n}{j-1} = \binom{n+1}{j}} \qquad (2.3.13.)$$

$i, j > 0$ enteros

iv) Sea

$$f(n) = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k}\binom{n}{j-k}; \; p > 0 \text{ entero}$$

por (1.5.4.) y (1.5.19.)

$$f^g(z) = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} \frac{z^{j-k}}{(1-z)^{j-k+1}}$$

pero

$$\frac{z^{j-k}}{(1-z)^{j-k+1}} = \frac{z^j \; z^{-k}}{(1-z)^{j+1} \; (1-z)^{-k}}$$

$$= \frac{z^j}{(1-z)^{j+1}} \left(\frac{1-z}{z}\right)^k$$

luego

$$f^g(z) = \frac{z^j}{(1-z)^{j+1}} \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} \left(\frac{1-z}{z}\right)^k$$

por el teorema del binomio

$$\sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} \left(\frac{1-z}{z}\right)^k = \left(\frac{1-z}{z} + \right)^p = \left(\frac{1}{z}\right)^p$$

por tanto

$$f^g(z) = \frac{z^j}{(1-z)^{j+1}} \left(\frac{1}{z}\right)^p = \frac{z^{j-p}}{(1-z)^{j+1}}$$

y por (1.5.20.)

$$f(n) = \binom{n+p}{j}$$

por consiguiente:

$$\boxed{\sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} \binom{n}{j-k} = \binom{n+p}{j}} \qquad (2.3.14.)$$

$j, p > 0$ enteros

v) Sea

$$f(n) = \sum_{m=0}^{n} \binom{m+j-1}{j-1}$$

por (1.5.20.) y (1.5.44.)

$$f^{g}(z) = \frac{1}{1-z} \cdot \frac{1}{(1-z)^{j}} = \frac{1}{(1-z)^{j+1}}$$

y por (1.5.20.)

$$f(n) = \binom{n+1}{j}$$

de donde

$$\boxed{\sum_{m=0}^{n} \binom{m+j-1}{j-1} = \binom{n+j}{j}} \qquad (2.3.15.)$$

$j > 0$ entero

vi) Sea

$$f(n) = \sum_{m=0}^{n} \binom{m}{j}$$

por (1.5.19.) y (1.5.44.)

$$f^{g}(z) = \frac{1}{1-z} \frac{z^{j}}{(1-z)^{j+1}} = \frac{z^{j}}{(1-z)^{j+2}}$$

y por (1.5.20.)

$$f(n) = \binom{n+1}{j+1}$$

luego

$$\boxed{\sum_{m=0}^{n} \binom{m}{j} = \binom{n+1}{j+1}} \qquad (2.3.16.)$$

$j \nearrow 0$ entero

vii) Sea

$$f(n) = \sum_{m=0}^{n} \binom{m}{a} \binom{n-m}{c}$$

por (1.5.5.) y (1.5.19.)

$$f^{g}(z) = \frac{z^{a}}{(1-z)^{a+1}} \frac{z^{c}}{(1-z)^{c+1}} = \frac{z^{a+c}}{(1-z)^{a+c+2}}$$

y por (1.5.20.)

$$f(n) = \binom{n-a-c+a+c+1}{a+c+1} = \binom{n+1}{a+c+1}$$

luego

$$\sum_{m=0}^{n} \binom{m}{a} \binom{n-m}{c} = \binom{n+1}{a+c+1}$$

pero

$$\sum_{m=0}^{n} \binom{m}{a} \binom{n-m}{c} = \sum_{m=a}^{n-c} \binom{m}{a} \binom{n-m}{c}$$

de donde finalmente

$$\boxed{\sum_{m=a}^{n-c} \binom{m}{a} \binom{n-m}{c} = \binom{n+1}{a+c+1}} \qquad (2.3.17.)$$

2.3.5. Particiones de un entero positivo

i) Supóngase que se desea partir el entero positivo 5 en otros enteros no negativos cuya suma sea 5, esto puede realizarse de las siguientes maneras:

$$
\begin{aligned}
1+1+1+1+1 &= 5\\
2+1+1+1 &= 5\\
2+2+1 &= 5\\
3+1+1 &= 5\\
3+2 &= 5\\
4+1 &= 5\\
5 &= 5
\end{aligned}
$$

en total existen siete maneras de partir cinco.

Supóngase que se desea que solamente intervengan los enteros 1 y 2 en las particiones, se tiene entonces

$$
\begin{aligned}
1+1+1+1+1 &= 5\\
2+1+1+1 &= 5\\
2+2+1 &= 5
\end{aligned}
$$

en total tres maneras de realizarlo.

Si se desea que intervengan únicamente los enteros 1,2, y 3, se tiene

$$
\begin{aligned}
1+1+1+1+1 &= 5\\
2+1+1+1 &= 5\\
2+2+1 &= 5\\
3+1+1 &= 5\\
3+2 &= 5 .
\end{aligned}
$$

El ejemplo anterior permite comprobar el siguiente teorema: "Si $a, b, \ldots,$ son enteros positivos distintos, entonces el coeficiente de z^n en el producto

$$(1+z^a+z^{2a}+\cdots)\,(1+z^b+z^{2b}+\cdots)\cdots(1+z \quad + z^2 \quad +\cdots)$$

es el número de particiones de n con sumandos $a, b, \ldots$ ".

En efecto, para el ejemplo anterior se tiene:

$$(1+z+z^2+\cdots)(1+z^2+z^4+\cdots)(1+z^3+z^6+\cdots)(1+z^4+z^8+\cdots)$$
$$(1+z^5+z^{10}+\cdots) =$$

$$= 1+z+2z^2+4z^3+5z^4+7z^5+\cdots$$

y el coeficiente de z^5 es siete.

Por otra parte

$$(1+z+z^2+\cdots)(1+z^2+z^4+\cdots) = 1+z+2z^2+3z^3+3z^4+3z^5+\cdots$$

y el coeficiente de z^5 es tres.

Finalmente

$$(1+z+z^2+\cdots)(1+z^2+z^4+\cdots)(1+z^3+z^6+\cdots) =$$
$$1+z+2z^2+4z^3+4z^4+5z^5+\cdots$$

y el coeficiente de z^5 es cinco.

ii) Ahora bien

$$1+z^a+z^{3a}+\cdots = \frac{1}{1-z^a}$$
$$1+z^b+z^{2b}+\cdots = \frac{1}{1-z^b}$$

– – – – – –

$$1+z \quad + z^2 \quad +\cdots = \frac{1}{1-z}$$

luego

$$(1+z^a+z^{ca}+\cdots)(1+z^b+z^{2b}+\cdots)\cdots(1+z \quad +z^2 \quad +\cdots) =$$

$$= \frac{1}{(1-z^a)(1-z^b)\cdots(1-z \quad)}$$

y si se emplea la notación

$$p(n, a, b, \ldots, \quad)$$

para prepresentar el número de particiones de n con sumandos $a, b, \ldots, \ell$, resulta que

$$\boxed{p(n; a, b, \ldots, \ell) \Longleftrightarrow \prod_{j=a,b,\ldots,\ell} \frac{1}{(1-z^j)}} \qquad (2.3.18.)$$

Esto es, al contador $p(n;a,b,\ldots,\ell)$ le corresponde el enumerador ordinario

$$\frac{1}{\prod_{j=a,b,\ldots,\ell}(1-z^j)} = \prod_{j=a,b,\ldots,\ell} \frac{1}{(1-z^j)}$$

iii) En particular para $p(n;1,2,\ldots,m)$ se tiene

$$\boxed{p(n;1,2,\ldots,m) = \prod_{j=1}^{m} \frac{1}{(1-z^j)}} \qquad (2.3.19.)$$

Algunos valores de la función $p(n;1,2,\ldots,m)$ aparecen en la siguiente tabla.

m \ n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	2	2	3	3	4	4	5	5	6
3	1	2	3	4	5	7	8	10	12	14
4	1	2	3	5	6	9	11	15	18	23
5	1	2	3	5	7	10	13	18	23	40

iv) Por otra parte el enumerador ordinario de las particiones de n en r sumandos es

$$\prod_{j=1}^{r} \frac{z^r}{(1-z^j)}$$

pero

$$\prod_{j=1}^{r} \frac{z^r}{(1-z^j)} = z^r \prod_{j=1}^{r} \frac{1}{(1-z^j)}$$

y por (1.5.6.)

$$\boxed{p(n-r;1,2,\ldots,r) = \prod_{j=1}^{r} \frac{z^r}{(1-z^j)}} \qquad (2.3.20.)$$

En efecto, del ejemplo anterior se tiene

número de particiones de 5 con dos sumandos = 2

número de particiones de 5 con tres sumandos = 2

número de particiones de 5 con cuatro sumandos = 1

y de la tabla anterior se observa que

$p(5-2;1,2) = p(3;1,2) = 2$ $(n=3, m=2)$

$p(5-2;1,2,3) = p(2;1,2,3) = 2$ $(n=2, m=3)$

$p(5-4;1,2,3,4) = p(1;1,2,3,4) = 1$ $(n=1, m=4)$

2. APLICACIONES (Primera Parte)

2.2. Introducción

2.2. Aplicaciones a Probabilidad

2.2.1. Cuando $f(n)$ es la distribución de probabilidades de una variable aleatoria X, entonces $f^g(z)$ es la función generatriz de dicha variable aleatoria, esto es, si

$$P\{X=n\} = f(n)$$

entonces

$$\boxed{E\left[z^X\right] = f^g(z)} \qquad (2.2.1.)$$

i) Supóngase que X se encuentra distribuida en forma poissoniana, es decir

$$P\left\{X=n\right\}=\frac{\lambda^{n}}{n!}\ e^{-\lambda}$$

entonces

$$f(n)=\frac{\lambda^{n}}{n!}\ e^{-\lambda}$$

Entonces, la función generatriz es por definición

$$E\left[z^{X}\right]=\sum_{n=0}^{\infty} z^{n}\ P\left\{X=n\right\}=\sum_{n=0}^{\infty} z^{n}\ f(n)=f^{g}(z)$$

luego, para el caso particular de la distribución de Poisson

$$E\left[z^{X}\right]=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\lambda^{n}}{n!}\ e^{-\lambda}z^{n}=e^{-\lambda}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\lambda^{n}}{n!}\ z^{n}$$

y por (1.5.22.)

$$E\left[z^{X}\right]=e^{-\lambda}\,e^{\lambda z}=e^{-\lambda(1-z)}$$

que esta función generatriz para una variable aleatoria con distribución de Poisson con parámetro λ.

ii) Por la propiedad de la suma total (1.5.46.) se sabe que

$$\sum_{n=0}^{\infty} f(n)=f^{g}(1)$$

para la aplicación que se ilustra

$$\sum_{n=0}^{\infty} P\left\{X=n\right\}=1$$

puesto que la variable aleatoria es <u>propia</u>. Este resultado se comprueba con (1.5.46.)

$$\sum_{n=0}^{\infty} P\left\{X=n\right\} = f^g(1) = e^{-\lambda(1-z)}\Big|_{z=1} = 1$$

iii) La esperanza de la variable aleatoria X es por definición

$$\mu = \sum_{n=0}^{\infty} n\, P\left\{X=n\right\}$$

Por otra parte la T.G.O. de $n f(n)$ es por (1.5.10.)

$$\sum_{n=0}^{\infty} n\, f(n)\, z^n = z \frac{d}{dz} f^g(z)$$

luego

$$\mu = z \frac{d}{dz} f^g(z)\Big|_{z=1}$$

$$\mu = f^{g'}(1)$$

Puésto que para la distribución de Poisson

$$f^g(z) = e^{-\lambda(1-z)}$$

es claro que $\quad f^{g(1)}(z) = e^{-\lambda(1-z)}$

y $\quad \mu = f^{g(1)}(1) = \lambda$

y como es sabido λ es la esperanza de una variable aleatoria X con distribución de Poisson.

iv) Por (1.5.16.)

$$(n)_j\ f(n) \Longleftrightarrow z^j \frac{d^j}{dz^j} f^g(z)$$

esto es

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n)_j\ f(n)\ z^n = z^j \frac{d^j}{dz^j}\ f^g(z)$$

Por otra parte, el momento factorial de orden j, β_j, de la variable aleatoria X es por definición

$$\beta_j = \sum_{n=0}^{\infty} (n)_j\ P\left\{X = n\right\}$$

esto es:

$$\beta_j = \sum_{n=0}^{\infty} (n)_j\ f(n) = f^{g(j)}(1)$$

puesto que

$$\frac{d^j}{dz^j}\ e^{-\lambda(1-z)} = \lambda^j\ e^{-\lambda(1-z)}$$

$$\beta_j = f^{g(j)}(1) = \lambda^j$$

En particular el momento factorial de orden dos es

$$\beta_2 = \lambda^2$$

v) La variancia de la variable aleatoria X es el segundo momento centroidal esto es:

$$\mu_2 = \sum_{n=0}^{\infty} (n-\mu)^2\ P\left\{X = n\right\} \quad (\mu = \text{esperanza matemática})$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (n-\mu)^2\ f(n) = \sum_{n=0}^{\infty} (n^2 - 2\mu n + \mu^2)\ f(n)$$

$$\mu_2 = \sum_{n=0}^{\infty} n^2\ f(n) - 2\mu \sum_{n=0}^{\infty} n\ f(n) + \mu^2 \sum_{n=0}^{\infty} f(n)$$

Ahora bien,

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^2 f(n)\, z^n = \theta^2 f^g(z), \text{ por } (1.5.13.)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^2 f(n)\, z^n = z \frac{d}{dz} f^g(z) + z^2 \frac{d^2}{dz^2} f^g(z), \text{ por } (1.5.12.)$$

de manera que

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^2 f(n) = f^{g(1)}(1) + f^{g(2)}(1)$$

Ya se ha visto que

$$\sum_{n=0}^{\infty} n\, f(n) = f^{g(1)}(1) = \mu$$

y que

$$\sum_{n=0}^{\infty} f(n) = f^g(1) = 1$$

Luego

$$\mu_2 = f^{g(1)}(1) + f^{g(2)}(1) - 2\left[f^{g(1)}\right]^2 + \left[f^{g(1)}\right]^2$$

$$\mu_2 = f^{g(2)}(1) + f^{g(1)}(1) - \left[f^{g(1)}\right]^2$$

En resumen

$$\boxed{\begin{aligned} \mu &= E\left[X\right] = f^{g(1)}(1);\; f(n) = P\left\{X = n\right\} \\ \mu_2 &= \operatorname{Var}\left[X\right] = f^{g(2)}(1) + f^{g(1)}(1) - \left[f^{g(1)}(1)\right]^2 \end{aligned}} \qquad (2.2.2.)$$

Puesto que

$$f^{g(2)}(1) = \beta_2 = \lambda^2$$

$$f^{g(1)}(1) = \mu = \lambda$$

resulta para la distribución de Poisson

$$\operatorname{Var}\left[X\right] = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda$$

resultado ya conocido en probabilidad.

vi) Si α_j es el momento ordinario de orden j, esto es

$$\alpha_j = \sum_{n=0}^{\infty} n^j\, P\left\{X = n\right\} = \sum_{n=0}^{\infty} n^j\, f(n)$$

y por (1.5.13.)

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^j\, f(n)\, z^n = \theta^j\, f^g(z)$$

entonces

$$\boxed{\alpha_j = \theta^j f^g(z)\Big|_{z=1}} \qquad (2.2.3.)$$

Por otra parte en (iv) se obtuvo

$$\boxed{\beta_j = \frac{d^j}{dz^j}\, f^g(z)\Big|_{z=1}} \qquad (2.2.4.)$$

para el momento factorial.

vii) La distribución acumulada de la variable aleatoria X es por definición

$$P\left\{X \leq n\right\} = \sum_{m=0}^{n} P\left\{X = m\right\} = \sum_{m=0}^{n} f(m) = F(n)$$

por la propiedad de la suma parcial (1.5.44.)

$$\sum_{m=0}^{n} f(m) \iff \frac{f^g(z)}{1-z}$$

luego

$$\boxed{\begin{array}{l} F(n) = P\left\{X \leq n\right\} \Longleftrightarrow \dfrac{f^g(z)}{1-z} \\ \text{si} \\ \qquad P\left\{X = n\right\} = f(n) \end{array}} \qquad (1.7.5.)$$

1) Como ejemplo, supóngase que la variable aleatoria X tiene distribución de Bernoulli, esto es

$$P\left\{X=n\right\} = q\,\delta(n) + p\,\delta(n-1)\ ; \qquad q+p=1$$
$$0 \leq q,\ p \leq 1$$

entonces

$$f(n) = q\delta(n) + p\delta(n-1)$$
$$f^g(z) = q + pz$$

y por consiguiente la acumulada tiene como transformada

$$F^g(z) = \frac{q+pz}{1-z} = -p + \frac{1}{1-z}$$

Por (1.5.1.) y (1.5.3.)

$$F(n) = u(n) - p\delta(n)$$

$$P\left\{X \leq n\right\} = 1 - p\delta(n)$$

2) Si la variable aleatoria tiene distribución geométrica I.

$$P\left\{X = n\right\} = pq^{n-1} \quad ; \quad p + q = 1$$
$$0 \leq p, q \leq 1$$

$$f(n) = pq^{n-1}$$

$$f^{g}(z) = \frac{pz}{1-qz}$$

entonces

$$F^{g}(z) = \frac{pz}{(1-z)(1-qz)}$$

por (1.6.4.)

$$F(n) = p\,\frac{1-q^{n}}{1-q} = \frac{1}{p}(1-q^{n})$$

$$P\left\{X \leq n\right\} = 1-q^{n}$$

2.2.2. <u>La distribución acumulada complementaria de la variable aleatoria X es por definición</u>

$$P\left\{X > n\right\} = 1 - \sum_{m=0}^{n} P\left\{X = m\right\} = 1 - \sum_{m=0}^{n} f(m) = {}^{c}F(n)$$

esto es

$${}^{c}F(n) = u(n) - \sum_{m=0}^{n} f(m)$$

transformando mediante (1.5.3.) y (1.5.44.)

$${}^{c}F^{g}(z) = \frac{1}{1-z} - \frac{f^{g}(z)}{1-z}$$

luego

$$\boxed{\begin{array}{l} {}^{c}F(n) = P\left\{X > n\right\} \Longleftrightarrow \dfrac{1 - f^{g}(z)}{1-z} \\ \text{si} \\ \qquad P\left\{X = n\right\} = f(n) \end{array}} \qquad (2.2.6.)$$

1) Para la distribución de Bernoulli

$$P\left\{X=n\right\} = q\,\delta(n) + p\,\delta(n-1)$$

$$f^{g}(z) = q + pz$$

de manera que

$$^{c}F^{g}(z) = \frac{1-q-pz}{1-z} = \frac{p-pz}{1-z}$$

$$^{c}F^{g}(z) = p$$

$$^{c}F(n) = P\left\{X > n\right\} = p\,\delta(n)$$

2) Para la distribución geométrica 1

$$P\left\{X = n\right\} = pq^{n-1}$$

$$f^{g}(z) = \frac{pz}{1-qz}$$

luego

$$^{c}F^{g}(z) = \frac{1-\dfrac{pz}{1-qz}}{1-z} = \frac{1-z}{(1-z)(1-qz)}$$

$$^{c}F^{g}(z) = \frac{1}{1-qz}$$

por (1.5.8.)

$$^{c}F(n) = q^{n}$$

esto es

$$P\left\{X > n\right\} = q^{n}$$

2.3. Aplicaciones a la Combinatoria

2.3.1. Contadores

i) Conceptos Generales

Diversas funciones, cuya T.G.O. fue encontrada en incisos anteriores, desempeñan un importante papel en la Combinatoria. Tal es el caso, entre otras, de las funciones:

$$f(n) = (n)_j$$

$$f(n) = n$$

$$f(n) = n^j$$

$$f(n) = \binom{n}{j_1, j_2, \ldots, j_r}$$

$$f(n) = \binom{n}{j}$$

$$f(n) = (n)^j$$

$$f(n) = \delta(n-m)$$

$$f(n) = S(n, j)$$

Estas funciones son Contadores, esto es, determinan el número de maneras de permutar, combinar, distribuir, etc... objetos.

ii) De hecho en Combinatoria se demuestran los siguientes teoremas:

1) El número de maneras de ordener j objetos diferen-

tes de un total de n es

$$P(n, j) = (n)_j \qquad (2.3.1.)$$

Es también el número de maneras de realizar mapeos inyectivos de un conjunto $X \equiv (1, 2, \ldots)$ de cardinalidad $|X| = j$ en otro conjunto $A \equiv (1, b, c, \ldots)$ de cardinalidad $|A| = n$

2) Cuando uno de los n objetos se usa como referencia, tal es el caso de las permutaciones circulares, entonces el número de maneras de ordenar los j objetos del total n es

$$PC(n, j) = (n-1)_j \qquad (2.3.2.)$$

3) Cuando los arreglos no son de j objetos sino de la totalidad n, el contador de estos arreglos es

$$P(n, n) = n! \qquad (2.3.3.)$$

que es el número de mapeos biyectivos entre dos conjuntos de igual cardinalidad $|X| = |A| = n$ y en caso de que sean circulares

$$PC(n, n) = (n-1)! \qquad (2.3.4.)$$

4) Cuando se permite usar los objetos del conjunto n más de una vez, esto es existe repetición, entonces el número de arreglos de j objetos de entre un total de n es

$$PR(n, j) = n^j \qquad (2.3.5.)$$

Que es también el número total de mapeos (inyectivos, biyectivos y suryectivos) que puede realizarse entre dos conjuntos, uno de cardinalidad $|X| = j$ y otro de cardinalidad $|A| = n$.

A su vez PR (n,j) es el número de maneras de distribuir j objetos distintos en n celdas diferentes.

5) Si en el conjunto de objetos se distinguen r clases diferentes, cada una de ellas con respectivamente $j_1, j_2, \ldots j_r$ objetos, entonces el contador de las permutaciones por clases es

$$P(n; j_1, j_2, \ldots, j_r) = \binom{n}{j_1, j_2, \ldots, j_r} \qquad (2.3.6.)$$

6) Cuando el orden relativo entre los objetos no se toma en cuenta, entonces se habla de combinaciones y su contador es C (n,j).

$$C(n,j) = \binom{n}{j} \qquad (2.3.7.)$$

También es el contador del número de distribuciones de j objetos indistintos en n celdas diferentes cuando estas tienen capacidad para un sólo objeto.

7) Si se permite asignar más de una vez los n objetos, entonces se forman combinaciones con repetición; el contador CR (n,j) es

$$CR(n,j) = \frac{(n)^j}{j!} \qquad (2.3.8.)$$

Que es también el número de maneras de distribuir j objetos en n celdas diferentes pero con capacidad suficiente.

Además $(n)^j$ es el número de mapeos suryectivos de un conjunto X con $|X| = n$ en otro A con $|A| = j$.

8) El contador del número de maneras de distribuir j objetos distintos en n celdas diferentes sin que ninguna se quede vacia es

$$D_0(n,j) = S(n,j) \tag{2.3.9.}$$

cabe señalar que es también el contador del número de particiones de un conjunto de cardinalidad n con j clases.

2.3.2. Enumeradores ordinarios

i) Conceptos Generales

Considérese la función de la variable z, $(1+z)^n$. Por el teorema del binomio

$$(1+z)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} z^j$$

$$(1+z)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} z + \binom{n}{2} z^2 + \cdots + \binom{n}{j} z^j + \cdots + \binom{n}{n} z^n$$

Se observa que los coeficientes de las potencias de z son los contadores de las combinaciones que pueden llevarse a cabo a partir de n objetos. La función $(1+z)^n$ enumera los contadores.

En general una función $f^g(z)$ tal que

$$f^g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f(n)\, z^n$$

en donde $f(n)$ es un contador, recibe el nombre de <u>enumerador ordinario</u>.

Y es claro que se establece la correspondencia

$$\boxed{\text{contador} \Longleftrightarrow \text{enumerador ordinario}} \qquad (2.3.10.)$$

ii) <u>Algunos enumeradores ordinarios</u>

1) Con base en (1.5.17.) y (2.3.1.) se puede afirmar que

$$f^g(z) = \frac{j!\, z^j}{(1-z)^{j+1}}$$

es el enumerador ordinario del número de permutaciones de tamaño j.

2) Con base en (1.5.18.) puede afirmarse que

$$f^g(z) = \frac{j!\, z}{(1-z)^{j+1}}$$

es el enumerador ordinario de los mapeos suryectivos en conjuntos de cordinalidad $|A| = j$.

3) Con base en (1.5.18.) y (2.3.8.) puede afirmarse que

$$f^g(z) = \frac{z}{(1-z)^{j+1}}$$

es el enumerador ordinario de las combinaciones con repetición de tamaño (cardinalidad) j. También es el enumerador ordinario de las distribuciones de j objetos indistintos en celdas diferentes con capacidad suficiente.

4) Con base en (1.5.19.) y (2.3.7.)

$$f^g(z) = \frac{z^j}{(1-z)^{j+1}}$$

es el enumerador ordinario de las combinaciones de tamaño j. Así como de las distribuciones de j objetos indistintos en celdas diferentes con capacidad para un sólo objeto.

5) Con base en (1.5.21.) puede afirmarse que

$$f^g(z) = (1+z)^j$$

es el enumerador ordinario de las combinaciones que pueden efectuarse a partir de j objetos.

6) Por (1.5.24.) y (2.3.6.)

$$f^g(z) = \frac{(j_1+\cdots+j_{r-1})!}{j_1!\cdots j_{r-1}!} \quad \frac{z^{j_1+j_2+\cdots+j_{r-1}}}{(1-z)^{j_1+j_2+\cdots+j_{r-1}+1}}$$

es el enumerador ordinario de las permutaciones con r clases cada una de ellas con $j_1, \ldots, j_r$ objetos respectivamente.

7) Por (1.5.39.) y (2.3.9.)

$$f^{g}(z) = \frac{z^{j}}{(1-z)(1-2z)\cdots(1-jz)}$$

es el enumerador ordinario de la distribución de j objetos distintos en celdas diferentes sin que ninguna quede vacía, también de las particiones de un conjunto con j clases.

2.3.3. Mezclas

i) Sea un conjunto de n objetos distintos y otro de r objetos. Se desea formar combinaciones de tamaño j tomando objetos de uno y otro conjunto. El número de <u>mezclas</u> que pueden formarse es

$$\binom{n}{o}\binom{r}{j} + \binom{n}{1}\binom{r}{j-1} + \binom{n}{2}\binom{r}{j-2} + \cdots + \binom{n}{j}\binom{r}{o}$$

esto es

$$\sum_{k=0}^{j}\binom{n}{k}\binom{r}{j-k} = \binom{n}{j} * \binom{r}{j}$$

Pero por (1.5.5.) y (1.5.21.)

$$\binom{n}{j} * \binom{r}{j} \Longleftrightarrow (1+z)^{n}(1+z)^{r} = (1+z)^{n+r}$$

y por (1.5.21.) el contador buscado es

$$C(n+r, j) = \binom{n+r}{j}$$

ii) El método de las mezclas usado conjuntamente con los enumeradores proporciona una gran flexibilidad y comodidad en el cálculo de contadores, tal como puede apreciarse en el siguiente ejemplo:

De un conjunto de p objetos se permite asignar hasta dos veces el mismo objeto y además necesariamente debe usarse por lo menos un objeto del conjunto. De otro conjunto de q objetos pueden o no usarse sus objetos, pero no se permite la repetición. ¿Cuál es el contador para las combinaciones que pueden formarse mezclando los objetos?

El enumerador ordinario del primer conjunto es

$$(z+z^2)^p$$

El enumerador ordinario del segundo conjunto es

$$(1+z)^q$$

El enumerador ordinario de la mezcla es

$$(z+z^2)^p\,(1+z)^q$$

Ahora bien, el teorema del binomio suministra los siguientes resultados

$$(1+z^2)^p = \sum_{\ell=0}^{p} \binom{p}{\ell} z \quad (z^2)^{p-\ell}$$

$$= \sum_{\ell=0}^{p} \binom{p}{\ell} z^{2p-\ell}$$

pero por (1.5.2.)

$$z^{(2p-\ell)} \Longleftrightarrow \delta(j-2p+\ell)$$

esto es

$$(z+z^2)^p \Longleftrightarrow \sum_{\ell=0}^{p} \binom{p}{\ell} \delta(j-2p+\ell)$$

pero

$$\delta(j-2p+\ell) = \begin{cases} 0 & \text{si } \ell \neq 2p-j \\ 1 & \text{si } \ell = 2p-j \end{cases}$$

luego

$$(z+z^2)^p \Longleftrightarrow \binom{p}{2p-j} = \binom{p}{j-p}$$

Por otra parte por (1.5.2i.)

$$(1+z)^q \Longleftrightarrow \binom{q}{j}$$

Luego el contador buscado es

$$\binom{p}{j-p} * \binom{q}{j} = \sum_{k=0}^{j} \binom{p}{k-p} \binom{q}{j-k} = \binom{p+q}{j-p} \; ; \; p \leq j \leq 2p+q$$

2.4. Aplicación al Análisis Numérico

2.4.1. Diferencias

1) Se define como primera diferencia de la función $f(n)$ y se le representa mediante $\triangle f(n)$ a:

$$\triangle f(n) = f(n+1) - f(n)$$

entonces si

$$F(n) = \triangle f(n)$$

por (1.5.7.)

$$F^g(z) = z^{-1} \left[f^g(z) - f(0) \right] - f^g(z)$$

$$= \frac{1}{z} \left[(1-z) f^g(z) - f(0) \right]$$

y se establece

$$\boxed{\triangle f(n) \Longleftrightarrow \frac{1}{z} \left[(1-z) f^g(z) - f(0) \right]} \qquad (2.4.1.)$$

Empleando ésta expresión para diferentes funciones estudiadas resulta:

1) $f(n) = a^n$; $f^g(z) = \dfrac{1}{1-az}$ por (1.5.8.)

$$\triangle a^n \Longleftrightarrow \frac{1}{z} \left[\frac{1-z}{1-az} - 1 \right]$$

$$= \frac{1}{z} \left[\frac{(a-1)\,z}{1-az} \right]$$

y por (1.5.8.)

$$\boxed{\triangle\, a^n = (a-1)\, a^n} \qquad (2.4.2.)$$

2) $f(n) = n \;\; ; \;\; f^g(z) = \dfrac{z}{(1-z)^2}$ por (1.5.11.)

$$\triangle\, n \Longleftrightarrow \frac{1}{z} \left[\frac{(1-z)\, z}{(1-z)^2} \right]$$

$$\Longleftrightarrow \frac{1}{1-z}$$

por (1.5.3.)

$$\boxed{\triangle\, n = u(n)} \qquad (2.4.3.)$$

3) $f(n) = n^2 \; ; \;\; f^g(z) = \dfrac{z(1+z)}{(1-z)^3}$ por (1.5.15.)

$$\triangle n^2 \Longleftrightarrow \frac{1}{z} \left[(1-z)\, \frac{z(1+z)}{(1-z)^3} \right]$$

$$\Longleftrightarrow \frac{1+z}{(1-z)^2} = \frac{1}{(1-z)^2} + \frac{z}{(1-z)^2}$$

y por (1.5.20.) y (1.5.11.)

$$\triangle n^2 = \binom{n+1}{1} + n = n+1+n = 2n+1$$

$$\boxed{\triangle n^2 = 2n+1} \qquad (2.4.4.)$$

4) $f(n) = (n)_j \; ; \quad f^g(z) = j!\, \dfrac{z^j}{(1-z)^{j+1}}$ por (1.5.17.)

$$\triangle (n)_j \Longleftrightarrow \frac{1}{z} \left[j!\, \frac{(1-z)\, z^j}{(1-z)^{j+1}} \right]$$

$$\Longleftrightarrow \; j!\,\frac{z^{j-1}}{(1-z)^{j}}.$$

por (1.5.20.)

$$\triangle(n)j = j!\,\binom{n-j+1+j-1}{j-1} = j!\,\binom{n}{n-1}$$

$$= j!\,\frac{n!}{(j-1)(n-j+1)!}$$

$$\boxed{\triangle(n)_j = j\,(n)_{j-1}} \qquad (2.4.5.)$$

5) $f(n) = (n)^j$; $f^g(z) = j!\,\dfrac{z}{(1-z)^{j+1}}$ por (1.5.18.)

$$\triangle(n)^j \Longleftrightarrow \frac{1}{z}\left[j!\,\frac{(1-z)\,z}{(1-z)^{j+1}}\right] = j!\,\frac{1}{(1-z)^{j}}$$

y por (1.5.20)

$$\triangle(n)^j = j!\,\binom{n+j-1}{j-1} = j!\,\frac{(n+j-1)!}{(j-1)!\,n!}$$

$$\boxed{\triangle(n)^j = j\,((n+1))^{j-1}} \qquad (2.4.6.)$$

6) $f(n) = \binom{n}{j}$; $f^g(z) = \dfrac{z^j}{(1-z)^{j+1}}$ por (1.5.19.)

$$\triangle\binom{n}{j} \Longleftrightarrow \frac{1}{z}\left[(1-z)\,\frac{z^j}{(1-z)^{j+1}}\right] = \frac{z^{j-1}}{(1-z)^{j}}$$

y por (1.5.20.)

$$\binom{n}{j} = \binom{n}{j-1} \qquad (2.4.7.)$$

$j > 0$ entero

7) $f(n) = \binom{n+j}{j}$; $f^g(z) = \dfrac{1}{(1-z)^{j+1}}$ por (1.5.20.)

$$\triangle \binom{n+j}{j} \Longleftrightarrow \frac{1}{z} \left[\frac{(1-z)}{(1-z)^{j+1}} -1\right]$$

$$\Longleftrightarrow \frac{1}{z} \frac{1-(1-z)^j}{(1-z)^j} = \sum_{\ell=1}^{j} \binom{j}{\ell} \frac{z^{\ell-1}}{(1-z)^j}$$

y por (1.5.20.)

$$\boxed{\triangle \binom{n+j}{j} = \sum_{\ell=1}^{j} \binom{j}{\ell} \binom{n+j-\ell}{j-1}} \qquad (2.4.8.)$$

$j > 0$ entero

8) $f(n) = \binom{n}{j_1, \ldots, j_r}$; $f^g(z) = \dfrac{(j_1+\cdots+j_{r-1})!}{j_1! \cdots j_{r-1}!} \dfrac{z^{j_1+\cdots+j_{r-1}}}{(1-z)^{j_1+\cdots+j_{r-1}+1}}$

por (1.5.24.)

$$\triangle \binom{n}{j_1, \ldots, j_r} \Longleftrightarrow \frac{1}{z} \left[\frac{(j_1+\ldots+j_{r-1})!}{j_1! \ldots j_{r-1}!} \frac{(1-z)\, z^{j_1+\ldots+j_{r-1}}}{(1-z)^{j_1+\ldots+j_{r-1}+1}}\right]$$

$$\Longleftrightarrow \frac{(j_1+\ldots+j_{r-1})!}{j_1! \ldots j_{r-1}!} \frac{z^{j_1+\ldots+j_{r-1}+1}}{(1-z)^{j_1+\ldots+j_{r-1}}}$$

y por (1.5.20.)

$$\triangle \binom{n}{j_1, \ldots, j_r} = \frac{(j_1+\cdots+j_{r-1})!}{j_1! \ldots j_{r-1}!} \binom{n}{j_1+\cdots+j_{r-1}-1}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \triangle \binom{n}{j_1, \ldots, j_r} = \dfrac{(j_1+\cdots+j_{r-1})!}{n+1+j_1+\cdots+j_{r-1}} \binom{n}{j_1, \ldots, j_r} \\ j_1+\cdots+j_r = n \end{array}} \qquad (2.4.9.)$$

$r > 0$

$j_1, \ldots, j_r = 0$ enter

9) $f(n) = S(n,j)$; $f^g(z) = \dfrac{z^j}{(1-z)(1-2z)\cdots(1-jz)}$ por (1.5.39.)

$$\triangle S(n,j) \Longleftrightarrow \frac{1}{z}\left[\frac{(1-z)z^j}{(1-z)(1-2z)\cdots(1-jz)}\right]$$

$$\Longleftrightarrow \frac{z^{j-1}}{(1-2z)\cdots(1-jz)}$$

empleando el método de las fracciones racionales estudiado en el inciso (1.6.2.)

$$\frac{z^{j-1}}{(1-2z)\cdots(1-jz)} = \frac{A_2}{1-2z} + \frac{A_3}{1-3z} + \cdots + \frac{A_j}{1-jz}$$

resulta

$$A_\ell = \frac{(-1)^{j-\ell}}{\ell(\ell-2)!\,(j-\ell)!} \quad ; \ \ell = 2, \ldots, j$$

$$\frac{z^{j-1}}{(1-2z)\cdots(1-jz)} = \sum_{\ell=2}^{j} \frac{(-1)^{j-\ell}}{(\ell-2)!\,(j-\ell)!\,(1-\ell z)}$$

y por (1.5.8.)

$$\boxed{\triangle S(n,j) = \sum_{\ell=2}^{j} \frac{(-1)^{j-\ell}\,\ell^{n-1}}{(\ell-2)!\,(j-\ell)!}} \qquad (2.4.10.)$$

$j > 1$ entero

ii) <u>Diferencias sucesivas</u>

Se ha visto que para $f(n)$

$$\triangle f(n) = f(n+1) - f(n)$$

sin embargo, las diferencias pueden proseguirse

$$\Delta^2 f(n) = \quad f(n+1) - f(n)$$

$$= f(n+2) - f(n+1) - f(n+1) + f(n)$$

$$\Delta^2 f(n) = f(n+2) - 2\, f(n+1) + f(n)$$

y así sucesivamente

$$\Delta^3 f(n) = f(n+3) - 3f(n+2) + 3f(n+1) - f(n)$$

$$\Delta^4 f(n) = f(n+4) - 4f(n+3) + 6f(n+2) - 4f(n+1) + f(n)$$

- -

$$\Delta^m f(n) = \sum_{\ell=0}^{m} \binom{m}{\ell} (-1)^{\ell} f(n+m-\ell)$$

y por (1.5.7.)

$$\boxed{\Delta^m f(n) \Longleftrightarrow \sum_{\ell=0}^{m} \left\{ \binom{m}{\ell} (-1)^{\ell} z^{\ell-m} \left[f^g(z) - \sum_{r=0}^{m-\ell-1} f(r) z^r \right] \right\}}$$

(2.4.11.)

$m > 0$ entero

Así por ejemplo, sea $f(n) = (n)_j$; $f^g(z) = j!\, \dfrac{z^j}{(1-z)^{j+1}}$ por (1.5.17.)

entonces

$$\Delta^m (n)_j \Longleftrightarrow \sum_{\ell=0}^{m} \binom{m}{\ell} (-1)^{\ell} z^{\ell-m} j!\, \frac{z^j}{(1-z)^{j+1}} \quad ; \quad j > m$$

$$\Longleftrightarrow \sum_{\ell=0}^{m} \binom{m}{\ell} (-1)^{\ell} j!\, \frac{z^{j-m+\ell}}{(1-z)^{j+1}}$$

y por (1.5.20.)

$$\Delta^m (n)_j = j! \sum_{\ell=0}^{m} \binom{m}{\ell} (-1)^\ell \binom{n-j+m-\ell+j}{j}$$

$$= j! \sum_{\ell=0}^{m} \binom{m}{\ell} (-1)^\ell \binom{n+m-\ell}{j}$$

pero

$$\sum_{\ell=0}^{m} (-1)^\ell \binom{m}{\ell} \binom{n+m-\ell}{j} = \binom{n}{n+m-j} = \binom{n}{j-m}$$

luego

$$\Delta^m (n)_j = j! \binom{n}{j-m} = \frac{j! \quad n!}{(j-m)! \; (n+m-j)!}$$

$$\boxed{\Delta^m (n)_j = (j)_m \, (n)_{j-m}} \qquad (2.4.12.)$$

$j > m$ enteros

2.4.2. Corrimientos y medias

i) Se define como corrimiento de la función $f(n)$ y se le representa mediante $E f(n)$ a

$$E f(n) = f(n+1)$$

Es claro que por (1.5.7.)

$$\boxed{E f(n) \Longleftrightarrow z^{-1} \left[f^g(z) - f(0) \right]} \qquad (2.4.13.)$$

Para los corrimientos sucesivos se tiene:

$$E^2 f(n) = E\left[E f(n)\right] = E\left[f(n+1)\right] = f(n+2)$$

y en general

$$E^m f(n) = f(n+m)$$

entonces por (1.5.7.)

$$\boxed{E^m f(n) \Longleftrightarrow z^{-m}\left[f^g(z) - \sum_{r=0}^{m-1} f(r)\, z^r\right]} \qquad (2.4.14.)$$

$m > 0$ entero

ii) Se define como media de la función $f(n)$ y se le representa mediante $M f(n)$ a:

$$M f(n) = \frac{1}{2}\left[f(n) + f(n+1)\right]$$

Por (1.5.7.)

$$M f(n) \Longleftrightarrow \frac{1}{2}\left[\frac{1}{z} f^g(z) - \frac{f(0)}{z} + f^g(z)\right]$$

$$\boxed{M f(n) \Longleftrightarrow \frac{1}{2z}\left[(1+z) f^g(z) - f(0)\right]} \qquad (2.4.15.)$$

Las medias sucesivas son

$$M^2 f(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^2\left[f(n) + 2 f(n+1) + f(n+2)\right]$$

$$M^3 f(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^3\left[f(n) + 3 f(n+1) + 3 f(n+2) + f(n+3)\right]$$

$$M^m f(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^m \sum_{\ell=0}^{m} \binom{m}{\ell} f(n+\ell)$$

y por (1.5.7.)

$$\boxed{M^m f(n) \Longleftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^m \sum_{\ell=0}^{m} \binom{m}{\ell} z^{-\ell}\left[f^g(z) - \sum_{r=0}^{\ell-1} f(r)\, z^r\right]} \qquad (2.4.16.)$$

$m > 0$ entero

Así por ejemplo, sea $f(n) = \binom{n}{j}$; $f^g(z) = \dfrac{z^j}{(1-z)^{j+1}}$ por (1.5.19.)

entonces

$$M^m \binom{n}{j} \Longleftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^m \sum_{\ell=0}^{m} \binom{m}{\ell} z^{-\ell} \frac{z^j}{(1-z)^{j+1}} \quad ; \; j > m$$

por (1.5.20.)

$$M^m \binom{n}{j} = \left(\frac{1}{2}\right)^m \sum_{=0}^{m} \binom{m}{\ell} \binom{n-j+\ell+j}{j} .$$

$$\boxed{M^m \binom{n}{j} = \left(\frac{1}{2}\right)^m \sum_{\ell=0}^{m} \binom{m}{\ell} \binom{n+\ell}{j}} \qquad (2.4.17.)$$

$j > m$ enteros

2.4.3. Sumas definidas

i) En el inciso (1.5.21.) se tenía como transformada de la suma parcial

$$\sum_{m=0}^{n} f(m) \Longleftrightarrow \frac{f^g(z)}{1-z}$$

que es la expresión que permite obtener sumas definidas.

Aplicándola a diversas funciones ya estudiadas.

1) $f(n) = a^n$; $f^g(z) = \dfrac{1}{1-az}$ por (1.5.8.)

$$\sum_{m=0}^{n} a^m \Longleftrightarrow \frac{1}{(1-z)(1-az)}$$

por fracciones racionales

$$\frac{1}{(1-z)(1-az)} = \frac{\frac{1}{1-a}}{1-z} - \frac{\frac{a}{1-a}}{1-az}$$

y por (1.5.3.), (1.5.8.)

$$\sum_{m=0}^{n} a^m = \frac{1}{1-a} - \frac{a}{1-a}\, a^n$$

$$\boxed{\sum_{m=0}^{n} a^m = \frac{1-a^{n+1}}{1-a}} \qquad (2.4.18.)$$

2) $f(n) = n; \quad f^g(z) = \dfrac{z}{(1-z)^2}$ por (1.5.11.)

$$\sum_{m=0}^{n} m \Longleftrightarrow \frac{z}{(1-z)^2}$$

y por (1.5.20.)

$$\sum_{m=0}^{n} m = \binom{n-1+2}{2} = \binom{n+1}{2} = \frac{(n+1)!}{2!\ (n-1)!}$$

$$\boxed{\sum_{m=0}^{n} m = \frac{n(n+1)}{2}} \qquad (2.4.19.)$$

3) $f(n) = n^2; \quad f^g(z) = \dfrac{z(1+z)}{(1-z)^3}$ por (1.5.15.)

$$\sum_{m=0}^{n} m^2 \Longleftrightarrow \frac{z(1+z)}{(1-z)^4} = \frac{z}{(1-z)^4} + \frac{z^2}{(1-z)^4}$$

y por (1.5.20.)

$$\sum_{m=0}^{n} m^2 = \binom{n-1+3}{3} + \binom{n-2+3}{3} = \binom{n+2}{3} + \binom{n+1}{3}$$

$$= \frac{(n+2)!}{3!\,(n-1)!} + \frac{(n+1)!}{3!\ (n-2)!}$$

$$= \frac{1}{6}(n)(n+1)(n+2) + \frac{1}{6}(n-1)n(n+1)$$

$$= \frac{1}{6}\, n(n+1)(n+2+n-1)$$

$$\sum_{m=0}^{n} m^2 = \frac{1}{6}\, n(n+1)(2n+1) \qquad (2.4.20.)$$

4) $f(n) = (n)_j$; $f^g(z) = j!\, \frac{z^j}{(1-z)^{j+1}}$ por (1.5.17.)

$$\sum_{m=0}^{n} (m)_j \Longleftrightarrow j!\, \frac{z^j}{(1-z)^{j+2}}$$

y por (1.5.20.)

$$\sum_{m=0}^{n} (m)_j = j! \binom{n-j+j+1}{j+1} = j! \binom{n+1}{j+1}$$

$$= j!\, \frac{(n+1)!}{(j+1)!\,(n-j)!} = \frac{1}{j+1}((n+1))_{j+1}$$

$$\boxed{\sum_{m=0}^{n} (m)_j = \frac{((n+1))_{j+1}}{j+1}} \qquad (2.4.21.)$$

$j > 0$ entero

5) $f(n) = (n)^j$; $f^g(z) = j!\, \frac{z}{(1-z)^{j+1}}$ por (1.5.18.)

$$\sum_{m=0}^{n} (m)^j \Longleftrightarrow \frac{j!\; z}{(1-z)^{j+2}}$$

por (1.5.20.)

$$\sum_{m=0}^{n} (m)^j = j! \binom{n+j}{j+1} = \frac{j!\ (n+j)!}{(j+1)!\ (n-1)!}$$

$$\boxed{\sum_{m=0}^{n} (m)^j = \frac{(n)^{j+1}}{j+1}} \qquad (2.4.22.)$$

$j > 0$ entero

6) $f(n) = \binom{n}{j}$; $f^g(z) = \dfrac{z^j}{(1-z)^{j+1}}$ por (1.5.19.)

$$\sum_{m=0}^{n} \binom{m}{j} \Longleftrightarrow \frac{z^j}{(1-z)^{j+2}}$$

y por (1.5.20.)

$$\boxed{\sum_{m=0}^{n} \binom{m}{j} = \binom{n+1}{j+1}} \qquad (2.4.23.)$$

$j > 0$ entero

7) $f(n) = \binom{n+j}{j}$; $f^g(z) = \dfrac{1}{(1-z)^{j+1}}$ por (1.5.20.)

$$\sum_{m=0}^{n} \binom{m+j}{j} \Longleftrightarrow \frac{1}{(1-z)^{j+2}}$$

por (1.5.20.)

$$\boxed{\sum_{m=0}^{n} \binom{m+j}{j} = \binom{n+j+1}{j+1}} \qquad (2.4.24.)$$

$j > 0$ entero

8) $f(n) = \binom{n}{j_1, \ldots, j_r}$; $f^g(z) = \dfrac{(j_1 + \cdots + j_{r-1})!}{j_1! \cdots j_{r-1}!} \cdot \dfrac{z^{j_1 + \cdots + j_{r-1}}}{(1-z)^{j_1 + \cdots + j_{r-1} + 1}}$

por (1.5.24.)

$$\sum_{m=0}^{n} \binom{m}{j_1,\ldots,j_r} \Longleftrightarrow \frac{(j_1+\cdots+j_{r-1})!}{j_1!\cdots j_{r-1}!} \frac{z^{j_1+\cdots+j_{r-1}}}{(1-z)^{j_1+\cdots+j_{r-1}+2}}$$

y por (1.5.20.)

$$\sum_{m=0}^{n} \binom{m}{j_1,\ldots,j_r} = \frac{(j_1+\cdots+j_{r-1})}{j_1!\cdots j_{r-1}!} \binom{n+1}{j_1+\cdots+j_{r-1}+1}$$

$$\boxed{\begin{array}{ll} \displaystyle\sum_{m=0}^{n} \binom{m}{j_1,\ldots,j_r} = \frac{n+1-j_1-\cdots-j_{r-1}}{j_1+\cdots+j_{r-1}+1} \binom{n+1}{j_1\ldots j_r} & \\ j_r=m-j_1-\cdots-j_{r-1} & j_r=n+1-j_1-\cdots-j_{r-1} \end{array}} \qquad (2.4.25.)$$

$r > 0$ entero

$j_1,\ldots,j_r = 0$ enteros

9) $f(n)=S(n,j)$; $f^g(z)=\dfrac{z^j}{(1-z)\cdots(1-jz)}$ por (1.5.39.)

$$\sum_{m=0}^{n} S(m,j) \Longleftrightarrow \frac{z^j}{(1-z)^2(1-2z)\cdots(1-jz)}$$

por fracciones racionales, inciso (1.6.2.)

$$\frac{z^j}{(1-z)^2(1-2z)\cdots(1-jz)} = \frac{A_0}{(1-z)^2} + \frac{A_1}{1-z} + \frac{A_2}{1-2z} + \cdots + \frac{A_j}{1-jz}$$

de donde resulta

$$A_0 = \frac{(-1)^{j-1}}{(j-1)!} \; ; \quad A_1 = \frac{(-1)^j}{j!} - \sum_{\ell=2}^{j} \frac{(-1)^{j-\ }\binom{j}{\ }}{j!(\ -1)}$$

$$A_\ell = \frac{(-1)^{j-\ell}\binom{j}{\ell}\ell}{j!\,(\ell-1)}$$

y por consiguiente

$$\sum_{m=0}^{n} S(m,j) \Longleftrightarrow \frac{(-1)^{j-1}}{(j-1)!}\,\frac{1}{(1-z)^2} + \left[\frac{(-1)^j}{j!} = \sum_{\ell=2}^{j}\frac{(-1)^{j-\ell}\binom{j}{\ell}}{j!\,(\ell-1)}\right]\frac{1}{1-z} + \sum_{\ell=2}^{j}\frac{(-1)^{j-\ell}\binom{j}{\ell}\ell}{j!\,(\ell-1)}\,\frac{1}{1-\ell z}$$

y por (1.5.20.), (1.5.3.) y (1.5.8.)

$$\sum_{m=0}^{n} S(m,j) = \frac{(-1)^{j-1}}{(j-1)!}\binom{n+1}{1} + \left(\frac{(-1)^j}{j!} - \sum_{\ell=2}^{j}\frac{(-1)^{j-\ell}\binom{j}{\ell}}{j!\,(\ell-1)}\right) +$$

$$= \sum_{\ell=2}^{j}\frac{(-1)^{j-\ell}\binom{j}{\ell}\,\ell^{n+1}}{j!\,(\ell-1)}$$

$$\boxed{\sum_{m=0}^{n} S(m,j) = \frac{1}{j!}\left((-1)^j + (-1)^{j-1}j(n+1) + \sum_{\ell=2}^{j}(-1)^{j-\ell}\binom{j}{\ell}\frac{\ell^{n+1}-1}{\ell-1}\right)} \qquad (2.4.26.)$$

$j > 0$ entero

ii) Se ha encontrado en párrafos inmediatamente anteriores la primera suma de una función; sin embargo así como en las diferencias, a partir de la primera diferencia se encontraban diferencias sucesivas, aquí a partir de la primera suma se calculan sumas sucesivas. Así la segunda suma sucesiva es

$$F_2(n) = \sum_{m_1=0}^{n}\left(\sum_{m_2=0}^{m_1} f(m_2)\right)$$

la tercera suma sucesiva es

$$F_3(n) = \sum_{m_1=0}^{n} \left(\sum_{m_2=0}^{m_1} \left(\sum_{m_3=0}^{m_2} f(m_3) \right) \right)$$

y en general

$$F_j(n) = \sum_{m_1=0}^{n} \left(\sum_{m_2=0}^{m_1} \left(\cdots \left(\sum_{m_j=0}^{m_{j-1}} f(m_j) \right) \cdots \right) \right)$$

La transformada de esta suma iterada ya se había determinado en el inciso (1.5.19. ii) como

$$F_j^g(z) = \frac{f^g(z)}{(1-z)^j}$$

Así por ejemplo sea

$$f(n) = a^n \; ; \quad f^g(z) = \frac{1}{1-az} \quad \text{por (1.5.8.)}$$

$$\sum_{m_1=0}^{n} \left(\sum_{m_2=0}^{m_1} \left(\cdots \left(\sum_{m_j=0}^{m_{j-1}} a^{m_j} \right) \cdots \right) \right) \Longleftrightarrow \frac{1}{(1-z)^j (1-az)}$$

por fracciones racionales

$$\frac{1}{(1-z)^j (1-az)} = \frac{A_0}{(1-z)^j} + \frac{A_1}{(1-z)^{j-1}} + \cdots + \frac{A_{j-1}}{1-z} + \frac{A_j}{1-az}$$

empleando la expresión de Howard (1.6.1.) resulta

$$A_\ell = (-1)^\ell \frac{a^\ell}{(1-a)^{\ell+1}} \quad ; \quad \ell = 0, \ldots, j-1$$

$$A_j = \left(\frac{-a}{a-1} \right)^j$$

$$\frac{1}{(1-z)^j(1-az)} = \sum_{\ell=0}^{j-1} (-1)^{\ell} \frac{a^{\ell}}{(1-a)^{\ell+1}} \frac{1}{(1-z)^{j-\ell}} + \left(\frac{a}{a-1}\right)^j \frac{1}{1-az}$$

por (1.5.20.) y (1.5.8.)

$$\Longleftrightarrow \frac{1}{1-a} \sum_{\ell=0}^{j-1} \left(\frac{a}{a-1}\right)^{\ell} \binom{n+j-\ell-1}{j-\ell-1} + \left(\frac{a}{a-1}\right)^j a^n$$

resulta así:

$$\boxed{\sum_{m_1=0}^{n} \left(\sum_{m_2=0}^{m_1} \left(\cdots \left(\sum_{m_j=0}^{m_{j-1}} a^{m_j} \right) \cdots \right) \right) = \frac{1}{1-a} \sum_{\ell=0}^{j-1} \left(\frac{a}{a-1}\right)^{\ell} \binom{n+j-\ell-1}{j-\ell-1} + \left(\frac{a}{a-1}\right)^j a^n} \qquad (2.4.29.)$$

$a > 0$
$j > 0$ entero

2.4.4. Sumas indefinidas

i) La definición de primera diferencia de la función $f(n)$ es

$$\triangle f(n) = f(n+1) - f(n)$$

y obviamente se conoce la función pero se desconoce la diferencia $f(n)$.

Ahora se plantea el problema inverso, encontrar la función $f(n)$ cuya diferencia conocida es $\triangle f(n)$. A este proceso se le llama suma indefinida.

Siguiendo a Hilldebrand [ ] se planteará el problema de la siguiente manera

$$\sigma f(n) = F(n) + C$$

en donde σ es la suma indefinida y C es una constante arbitraria.

Es claro que

$$\Delta\left[F(n)+C\right] = f(n)$$

y F(n) es la función a determinar

Se tiene

$$\Delta\left[F(n)+C\right] = F(n+1)+C-F(n)-C$$

$$= F(n+1)-F(n)$$

y se tiene la igualdad

$$f(n) = F(n+1) - F(n)$$

transformando

$$f^{g}(z) = z^{-1}\left[F^{g}(z) - F(0)\right] - F^{g}(z)$$

$$z\,f^{g}(z) = (1-z)\,F^{g}(z) - F(0)$$

$$\boxed{F^{g}(z) = \frac{z\,f^{g}(z) + F(0)}{1-z}} \qquad (2.4.28.)$$

Aplicando esta expresión a las funciones estudiadas:

1) $f(n) = a^{n}$; $f^{g}(z) = \dfrac{1}{1-az}$ por (1.5.8.)

$$\sigma a^{n} \Longleftrightarrow \frac{z}{(1-z)(1-az)} + \frac{F(0)}{1-z}$$

pero

$$\frac{z}{(1-z)(1-az)} = \frac{1}{1-a}\,\frac{1}{1-z} + \frac{1}{a-1}\,\frac{1}{1-az}$$

luego

$$\sigma a^n \Longleftrightarrow \frac{1}{1-z} \quad \frac{1}{1-z} \quad \frac{1}{a-1} \quad \frac{1}{1-az} + \frac{F(0)}{1-z}$$

y por (1.5.3.) y (1.5.8.)

$$\sigma a^n = \frac{a^n}{a-1} + \frac{1}{1-a} + F(0) + C_1$$

$$\boxed{\sigma a^n = \frac{a^n}{a-1} + C} \tag{2.4.29.}$$

2) $f(n) = n$; $f^g(z) = \dfrac{z}{(1-z)^2}$ por (1.5.11.)

$$\sigma n \Longleftrightarrow \frac{z^2}{(1-z)^3} \quad \frac{F(0)}{1-z}$$

y por (1.5.20.) y (1.5.3.)

$$\sigma n = \binom{n-2+2}{2} + F(0) + C_1$$

$$\boxed{\sigma n = \frac{n(n-1)}{2} + C} \tag{2.4.30.}$$

$f(n) = n^2$; $f^g(z) = \dfrac{z(1+z)}{(1-z)^3}$ por (1.5.15.)

$$\sigma n^2 \Longleftrightarrow \frac{z^2(1+z)}{(1-z)^4} + \frac{F(0)}{1-z}$$

$$\Longleftrightarrow \frac{z^2}{(1-z)^4} + \frac{z^3}{(1-z)^4} + \frac{F(0)}{1-z}$$

y por (1.5.20.) y (1.5.3.)

$$\sigma n^2 = \binom{n-2+3}{3} + \binom{n-3+3}{3} + F(0) + C_1$$

$$= \binom{n+1}{3} + \binom{n}{3} + C$$

$$\boxed{\sigma n^2 = \frac{n}{6}(n-1)(2n-1) + C} \qquad (2.4.31.)$$

4) $f(n) = (n)_j \;;\; f^g(z) = \dfrac{j!\, z^j}{(1-z)^{j+1}}$ por (1.5.17.)

$$\sigma (n)_j \Longleftrightarrow \frac{j!\, z^{j+1}}{(1-z)^{j+2}} + \frac{F(0)}{1-z}$$

por (1.5.20.) y (1.5.3.)

$$\sigma (n)_j = j!\, \binom{n}{j+1} = \frac{j!\; n!}{(j+1)!\,(n-j-1)!} + F(0) + C_1$$

$$\boxed{\sigma (n)_j = \frac{(n)_{j+1}}{j+1} + C} \qquad (2.4.32.)$$

$j > 0$ entero

5)

5) $f(n) = (n)^j \;;\; f^g(z) = \dfrac{j!\, z}{(1-z)^{j+1}}$ por (1.5.18.)

$$\sigma (n)^j \Longleftrightarrow \frac{j!\, z^2}{(1-z)^{j+2}} + \frac{F(0)}{1-z}$$

por (1.5.20.) y (1.5.3.)

$$\sigma (n)^j = j!\, \binom{n+j-1}{j+1} + F(0) + C_1$$

$$= \frac{j!\ (n+j-1)!}{(j+1)!\ (n-2)!} + C$$

$$\boxed{\mathfrak{S}(n)^{j} = \frac{((n-1))^{j+1}}{j+1} + C} \qquad (2.4.33.)$$

$j > 0$ entero

6) $f(n) = \binom{n}{j}$; $f^{g}(z) = \dfrac{z^{j}}{(1-z)^{j+1}}$ por (1.5.19.)

$$\mathfrak{S}\binom{n}{j} \Longleftrightarrow \frac{z^{j+1}}{(1-z)^{j+2}} + \frac{F(0)}{1-z}$$

por (1.5.20.) y (1.5.3.)

$$\mathfrak{S}\binom{n}{j} = \binom{n}{j+1} + F(0) + C_1$$

$$\boxed{\mathfrak{S}\binom{n}{j} = \binom{n}{j+1} + C} \qquad (2.4.34.)$$

$j > 0$ entero

7) $f(n) = \binom{n+j}{j}$; $f^{g}(z) = \dfrac{1}{(1-z)^{j+1}}$ por (1.5.20.)

$$\mathfrak{S}\binom{n+j}{j} \Longleftrightarrow \frac{z}{(1-z)^{j+2}} + \frac{F(0)}{1-z}$$

por (1.5.20.) y (1.5.3.)

$$\mathfrak{S}\binom{n+j}{j} = \binom{n+j}{j+1} + F(0) + C_1$$

$$\boxed{\sigma\binom{n+j}{j} = \binom{n+j}{j+1} + C} \qquad (2.4.35.)$$

j 0 entero

8) $f(n) = \binom{n}{j_1,\ldots,j_r}$; $f^g(z) = \dfrac{(j_1+\cdots+j_{r-1})!}{j_1!\cdots j_{r-1}!} \quad \dfrac{z^{j_1+\cdots+j_{r-1}}}{(1-z)^{j_1+\cdots+j_{r-1}+1}}$

$$\sigma\binom{n}{j_1\ldots j_r} \Longleftrightarrow \frac{(j_1+\cdots+j_{r-1})!}{j_1!\cdots j_{r-1}!} \quad \frac{z^{j_1+\cdots+j_{r-1}+1}}{(1-z)^{j_1+\cdots+j_{r-1}+2}} + \frac{F(0)}{1-z}$$

por (1.5.20.) y (1.5.3.)

$$\sigma\binom{n}{j_1,\ldots,j_r} = \frac{(j_1+\cdots+j_{r-1})!}{j_1!\cdots j_{r-1}!} \binom{n}{j_1+\cdots+j_{r-1}+1} + F(0) + C_1$$

$$\boxed{\begin{array}{l}\sigma\binom{n}{j_1,\ldots,j_r} = \dfrac{n-j_1-\cdots-j_{r-1}}{j_1+\cdots+j_{r-1}+1}\binom{n}{j_1\ldots j_r} + C \\ j_r = n-j_1-\cdots-j_{r-1}\end{array}} \qquad (2.4.35.)$$

r > 0 entero

$j_1,\ldots,j_r = 0$ enteros

9) $f(n) = S(n,j)$; $f^g(z) = \dfrac{z^j}{(1-z)\cdots(1-jz)}$ por (1.5.39.)

$$\sigma S(n,j) \Longleftrightarrow \frac{z^{j+1}}{(1-z)^2(1-2z)\cdots(1-jz)} + \frac{F(0)}{1-z}$$

en (2.4.3.1.9.) se había encontrado

$$\frac{z^{j+1}}{(1-z)^2(1-2z)\cdots(1-jz)} = \frac{(-1)^{j-1}}{(j-1)!}\frac{z}{(1-z)^2} + \left\{\frac{(-1)^j}{j!} - \sum_{\ell=2}^{j}\frac{(-1)^{j-\ell}\binom{j}{\ell}}{j!\,(\ell-1)}\right\}\frac{z}{1-z} +$$

$$+ \sum_{\ell=2}^{j}\frac{(-1)^{j-\ell}\binom{j}{\ell}}{j!\,(\ell-1)} \quad \frac{z}{1-\ell z}$$

luego

$$\frac{z^{j+1}}{(1-z)^2(1-2z)\cdots(1-jz)} = \frac{(-1)^{j-1}\, z}{(j-1)!\,(1-z)^2} + \left[\frac{(-1)^j}{j!} - \sum_{\ell=2}^{j}\frac{(-1)^{j-\ell}\binom{j}{\ell}}{j!\,(\ell-1)}\right]\frac{z}{1-z} +$$

$$+\sum_{\ell=2}^{j}\frac{(-1)^{j-\ell}\binom{j}{\ell}}{j!\,(\ell-1)}\,\frac{z}{1-\ell z}$$

y por (1.5.20.), (1.5.3.), (1.5.8.) y (1.5.6.)

$$\boxed{\sigma S(n,j) = \frac{1}{j!}\left[(-1)^j+(-1)^{j-1}jn+\sum_{\ell=2}^{j}(-1)^{j-\ell}\binom{j}{\ell}\frac{\ell^n-1}{\ell-1}\right]+C} \qquad (2.4.37.)$$

$j > 0$ entero

ii) Las sumas indefinidas se emplean en el cálculo de las sumas definidas. En efecto:

$$\sum_{m=a}^{b} f(m) = f(a)+f(a+1)+f(a+2)+\ldots+f(b)\ ;\ a,\ b > 0 \text{ enteros}$$

pero

$$f(m) = \Delta\sigma f(m) = \Delta\left[F(m)+C\right]$$

$$f(m) = F(m+1)+C-F(m)-C = F(m+1)-F(m)$$

luego

$$\sum_{m=a}^{b} f(m) = F(a+1)-F(a)+F(a+2)-F(a+1)+F(a+3)-F(a+2)+\ldots$$

$$+F(b+1)-F(b)$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\sum_{m=a}^{b} f(m) = F(b+1) - F(a) \\ F(m) = \sigma f(m)\end{array}} \qquad (2.4.38.)$$

a, b > 0 enteros

que suele escribirse

$$\sum_{m=a}^{b} f(m) = \sigma f(m) \Big|_{a}^{b+1}$$

Considérense algunos ejemplos numéricos

1) $\sum_{m=5}^{10} 2^m$

por (2.4.29.)

$$\sum_{m=5}^{10} 2^m = \frac{2^m}{2-1} \Big|_{5}^{11} = 2^{11} - 2^5 = 2016$$

2) $\sum_{m=3}^{8} m$

por (2.4.30.)

$$\sum_{m=3}^{8} m = \frac{m(m-1)}{2} \Big|_{3}^{9} = 33$$

3) $\sum_{m=4}^{11} m^2$

por (2.4.31.)

$$\sum_{m=4}^{11} m^2 = \frac{m}{6} (m-1)(2m-1) \Big|_{4}^{2} = 492$$

4) $\sum_{m=7}^{15} (m)_4$

por (2.4.32.)

$$\sum_{m=7}^{15} (m)_4 = \frac{(m)_5}{5} \Bigg|_7^{16} = 104,\ 328$$

5) $\sum_{m=10}^{20} (m)^3$ -

por (2.4.33.)

$$\sum_{m=10}^{20} (m)^3 = \frac{((m-1))^4}{4} \Bigg|_{10}^{21} = 50,\ 160$$

6) $\sum_{m=2}^{13} \binom{m}{6}$

por (2.4.34.)

$$\sum_{m=2}^{13} \binom{m}{6} = \binom{m}{7} \Bigg|_2^{14} = 3432$$

7) $\sum_{m=12}^{18} \binom{m+5}{5}$

por (2.4.35.)

$$\sum_{m=12}^{18} \binom{m+5}{5} = \binom{m+5}{6} \Bigg|_{12}^{19} = 122,220$$

8) $\sum_{m=10}^{17} \binom{m}{3,5,(m-8)}$

por (2.4.36.)

$$\sum_{m=10}^{17} \binom{m}{35,(m-8)} = \frac{m-8}{9} \binom{m}{35,(m-8)} \Bigg|_{10}^{18} = 2,722,160$$

9) $\displaystyle\sum_{m=6}^{10} S(m,5)$

por (2.4.37.)

$$\sum_{m=6}^{10} S(m,5) = \frac{1}{5!}\left[(-1)^5 + (-1)^4\, 5m + \sum_{\ell=2}^{5} (-1)^{5-\ell} \binom{5}{\ell} \frac{\ell^m - 1}{\ell - 1} \right]\Bigg|_{6}^{11} = 50,682$$

iii) Con el auxilio de las sumas indefinidas se puede sumar por partes.

En efecto, sea $f(m) = u(m)\, v(m)$

$$\Delta\left[u(m)\, v(m)\right] = u(m+1)\, v(m+1) - u(m)\, v(m)$$

sumando y restando al segundo miembro $u(m)\, v(m+1)$

$$\Delta\left[u(m)\, v(m)\right] = u(m+1)\, v(m+1) - u(m)\, v(m+1) + u(m)\, v(m+1) - u(m)\, v(m)$$

$$= v(m+1)\left[u(m+1) - u(m)\right] + u(m)\left[v(m+1) - v(m)\right]$$

$$\left[u(m)\, v(m)\right]' = v(m+1)\Delta u(m) + u(m)\Delta v(m)$$

$$u(m)\Delta v(m) = \Delta\left[u(m)\, v(m)\right] - v(m+1)\Delta u(m)$$

sumando entre a y b (enteros)

$$\boxed{\sum_{m=a}^{b} u(m)\Delta v(m) = u(m)\, v(m)\Bigg|_{a}^{b+1} - \sum_{m=a}^{b} v(m+1)\Delta u(m)} \qquad (2.4.39.)$$

a, b enteros

Resulta conveniente seleccionar como la parte $\triangle v(m)$ a una función con suma indefinida conocida y simple.

A continuación se ilustra el método con algunos ejemplos

1) $\sum_{m=0}^{n} m \binom{m}{j}$

Como partes se eligen

$$\triangle v(m) = \binom{m}{j} \; ; \; u(m) = m$$

entonces por (2.4.34.) y (2.9.3.) respectivamente

$$v(m) = \binom{m}{j+1} \; ; \; \triangle u(m) = 1$$

Se tiene

$$\sum_{m=0}^{n} m \binom{m}{j} = m \binom{m}{j+1} \Bigg|_{0}^{n+1} - \sum_{m=0}^{n} \binom{m+1}{j+1} \cdot 1$$

pero por (2.4.23.)

$$\sum_{m=0}^{n} \binom{m+1}{j+1} = \binom{m+1}{j+2} \Bigg|_{0}^{n+1} = \binom{n+2}{j+2}$$

Por consiguiente

$$\boxed{\sum_{m=0}^{n} m \binom{m}{j} = (n+1) \binom{n+1}{j+1} - \binom{n+2}{j+2}} \qquad (2.4.40.)$$

$j > 0$ entero

así

$$\sum_{m=0}^{10} m \binom{m}{4} = (11) \binom{11}{5} - \binom{12}{6} = 4158$$

2) $\sum_{m=0}^{n} m^2 \binom{m}{j}$

Como partes se eligen

$$\Delta v(m) = \binom{m}{j} \; ; \; u(m) = m^2$$

por (2.4.34.) y (2.4.4.) respectivamente

$$v(m) = \binom{m}{j+1} \; ; \quad \Delta u(m) = 2m+1$$

Por consiguiente

$$\sum_{m=0}^{n} m^2 \binom{m}{j} = m^2 \binom{n_1}{j+1} \Bigg|_0^{n+1} - \sum_{m=0}^{n} (2m+1) \binom{m+1}{j+1}$$

$$= (n+1)^2 \binom{n+1}{j+1} \; -2 \sum_{m=0}^{n} m \binom{m+1}{j+1} - \sum_{m=0}^{n} \binom{m+1}{j+1}$$

pero por (2.4.40.)

$$-2 \sum_{m=0}^{n} m \binom{m+1}{j+1} = -2 \, (n+1) \binom{n+2}{j+2} + 2 \binom{n+3}{j+3}$$

por otra parte, por (2.4.23.)

$$- \sum_{m=0}^{n} \binom{m+1}{j+1} = - \binom{n+2}{j+2}$$

luego

$$\sum_{m=0}^{n} m^2 \binom{m}{j} = (n+1)^2 \binom{n+1}{j+1} - 2(n+1)\binom{n+2}{j+2} + 2\binom{n+3}{j+3} - \binom{n+2}{j+2}$$

y finalmente

$$\boxed{\sum_{m=0}^{n} m^2 \binom{m}{j} = (n+1)^2 \binom{n+1}{j+1} - (2n+3)\binom{n+2}{j+2} + 2\binom{n+3}{j+3}} \qquad (2.4.41.)$$

$j > 0$ entero

Como ilustración se tiene:

$$\sum_{m=0}^{10} m^2 \binom{m}{5} = (11)^2 \binom{11}{6} - (23)\binom{12}{7} + 2\binom{13}{8} = 40,260$$

3) $\sum_{m=0}^{n} (m)_j \binom{m+k}{k}$

Como partes se eligen

$$\Delta v(m) = \binom{m+k}{k} \ ; \ u(m) = (m)_j$$

por (2.4.35.) y (2.4.5.) se obtiene

$$v(m) = \binom{m+k}{k+1} \ ; \quad \Delta u(m) = j\,(m)_{j-1}$$

Estas partes se conservan para las diferentes sumas sucesivas.

Se tiene:

$$\sum_{m=0}^{n}(m)_j \binom{m+k}{k} = (m)_j \binom{m+k}{k+1} \Bigg|_0^{n+1} - \sum_{m=0}^{n} j\,(m)_{j-1} \binom{m+k+1}{k+1}$$

$$-j \sum_{m=0}^{n}(m)_{j-1} \binom{m+k+1}{k+1} = -j\,(m)_{j-1} \binom{m+k+1}{k+2} \Bigg|_0^{n+1} +$$

$$+ j \sum_{m=0}^{n}(j-1)(m)_{j-2} \binom{m+k+2}{k+2} .$$

$$j(j-1) \sum_{m=0}^{n}(m)_{j-2} \binom{m+k+2}{k+2} = j(j-1)(m)_{j-2} \binom{m+k+2}{k+3} \Bigg|_0^{n+1} -$$

$$-j(j-1) \sum_{m=0}^{n}(j-2)(m)_{j-3} \binom{m+k+3}{k+3}$$

- - - - - - - - - - - - - - - - - - -

$$(-1)^{j-1} j(j-1)\cdots 2 \sum_{m=0}^{n}(m)_1 \binom{m+k+j-1}{k+j-1} = (-1)^{j-1} j(j-1)\cdots 2\,(m)_1 \binom{m+k+j-1}{k+j} -$$

$$-(-1)^{j-1} j(j-1)\cdots 2 \sum_{m=0}^{n} \binom{m+k+j}{k+j}$$

$$(-1)^j j(j-1)\cdots 2\cdot 1 \sum_{m=0}^{n} \binom{m+k+j}{k+j} = (-1)^j j(j-1)\cdots 2\cdot 1 \binom{m+k+j}{k+j+1} \Bigg|_0^{n+1}$$

sumando miembro a miembro y sustituyendo extremos:

$$\binom{m+k}{k} = (n+1)_j \binom{n+k+1}{k+1} - j\,(n+1)_{j-1} \binom{n+k+2}{k+2} + j(j-1)(n+1)_{j-2} \binom{n+k+3}{k+3} + \cdots$$

$$\cdots + (-1)^{j-1} j(j-1)\cdots 2\,(n+1)_1 \binom{n+k+j}{k+j} + (-1)^j j(j-1)\cdots 2\cdot 1 \binom{n+k+j+1}{k+j+1}$$

esto es

$$\boxed{\sum_{m=0}^{n} (m)_j \binom{m+k}{k} = \sum_{\ell=0}^{j} (-1)^{\ell} (j)_{\ell} (n+1)_{j-\ell} \binom{n+k+\ell+1}{k+\ell+1}} \qquad (2.4.42.)$$

$j, k \quad 0$ enteros

La suma en el segundo miembro es más simple de calcular como puede apreciarse en el siguiente ejemplo numérico.

$$\sum_{m=0}^{50} (m)_2 \binom{m+3}{3} = \sum_{\ell=0}^{2} (-1)^{\ell} (2)_{\ell} (51)_{2-\ell} \binom{54+\ell}{4+\ell} =$$

$$= (51)_2 \binom{54}{4} - 2\,(51)_1 \binom{55}{5} + 2 \binom{56}{6} = 516,543,300$$

4) $\sum_{m=0}^{n} (m)_j\, (m)_k \ ; \ j > k$

Puesto que $j > k$, se eligen las siguientes partes:

$$\Delta v(m) = (m)_j \ ; \ u(m) = (m)_k$$

por (2.4.32.) y (2.4.5.) se tiene respectivamente

$$v(m) = \frac{(m)_{j+1}}{j+1} \ ; \quad \Delta u(m) = k\,(m)_{k-1}$$

partes que se conservan en las diferentes sumas sucesivas.

$$\sum_{m=0}^{n} (m)_j\,(m)_k = \frac{(m)_{j+1}}{j+1}\,(m)_k \Bigg|_{0}^{n+1} - \frac{1}{j+1} \sum_{m=0}^{n} (m+1)_{j+1}\, k\,(m)_{k-1}$$

$$-\frac{k}{j+1}\sum_{m=0}^{n}(m+1)_{j+1}(m)_{k-1}=-\frac{k}{j+1}\;\frac{(m+1)_{j+2}}{j+2}\;(m)_{k-1}\Bigg|_{0}^{n+1}+$$

$$+\frac{k}{(j+1)(j+2)}\sum_{m=0}^{n}(m+2)_{j+2}\,(k-1)\,(m)_{k-2}\;+$$

$$+\frac{k(k-1)}{(j+1)(j+2)}\sum_{m=0}^{n}(m+2)_{j+2}\,(m)_{k-2}=\frac{k(k-1)}{(j+1)(j+2)}\;\frac{(m+2)_{j+3}}{j+3}\;(m)_{k-2}\Bigg|_{0}^{n+1}$$

$$-\frac{k(k-1)}{(j+1)(j+2)(j+3)}\sum_{m=0}^{n}(m+3)_{j+3}\,(k-2)\,(m)_{k-3}$$

- -

$$(-1)^{k-1}\frac{k(k-1)\cdots 2}{(j+1)\cdots(j+k-1)}\sum_{m=0}^{n}(m+k-1)_{j+k-1}(m)_{1}=(-1)^{k-1}\frac{k(k-1)\cdots 2}{(j+1)\cdots(j+k-1)}\;\frac{(m+k-1)_{j+k}}{(j+k)}$$

$$(m)_{1}\Bigg|_{0}^{n+1}-(-1)^{k-1}\frac{k(k-1)\cdots 2}{(j+1)\cdots(j+k)}\sum_{m=0}^{n}(m+k)_{j+k}\,(m)_{0}$$

$$(-1)^{k}\frac{k(k-1)\cdots 2\cdot 1}{(j+1)\cdots(j+k)}\sum_{m=0}^{n}(m+k)_{j+k}=(-1)^{k}\;\frac{k(k-1)\cdots 2\cdot 1}{(j+1)\cdots(j+k)}\;\frac{(m+k)_{j+k+1}}{j+k+1}\Bigg|_{0}^{n+1}$$

sumando miembro a miembro y sustituyendo extremos:

$$\sum_{m=0}^{n}(m)_{j}\,(m)_{k}=\frac{1}{j+1}\;(n+1)_{j+1}\,(n+1)_{k}-\frac{k}{(j+1)(j+2)}\;(n+2)_{j+2}\,(n+1)_{k-1}+$$

$$+\frac{k(k-1)}{(j+1)(j+2)(j+3)}\;(n+3)_{j+3}\,(n+1)_{k-2}+\cdots$$

$$\ldots + (-1)^{k-1} \frac{k\,(k-1)\cdots 2}{(j+1)\cdots(j+k)} (n+k)_{j+k}\,(n+1)_1 + (-1)^k \frac{k\,(k-1)\cdots 2\cdot 1}{(j+1)\cdots(j+k+1)} (n+k+1)_{j+k+1}$$

esto es:

$$\boxed{\sum_{m=0}^{n} (m)_j (m)_k = \sum_{\ell=0}^{k} (-1)^{\ell} \frac{(k)_\ell}{((j+1))^{\ell+1}} (n+\ell+1)_{j+\ell+1} (n+1)_{k-\ell}} \qquad (2.4.43.)$$

$j > k > 0$ enteros

Nuevamente la suma en el segundo miembro es más simple de evaluar:

$$\sum_{m=0}^{30} (m)_3 (m)_2 = \sum_{\ell=0}^{2} (-1)^{\ell} \frac{(2)_\ell}{(4)^{\ell+1}} (31+\ell)_{4+\ell} (31)_{2-\ell} =$$

$$= \frac{1}{4} (31)_4 (31)_2 - \frac{2}{20} (32)_5 (31)_1 + \frac{2}{120} (33)_6 = 113,953,644$$

5) $\sum_{m=0}^{n} (m)^j (m)^k$; $j > k$

Como partes se eligen

$$\Delta v(m) = (m)^j \; ; \; u(m) = (m)^k$$

y por (2.4.33.) y (2.4.6.)

$$v(m) = \frac{((m-1))^{j+1}}{j+1} \; ; \; \Delta u(m) = k \quad ((m+1))^{k-1}$$

$$\sum_{m=0}^{n} (m)^j (m)^k = \frac{((m-1))^{j+1}}{j+1} (m)^k \Bigg|_0^{n+1} - \frac{1}{j+1} \sum_{m=0}^{n} (m)^{j+1} k\,((m+1))^{k-1}$$

$$-\frac{k}{j+1}\sum_{m=0}^{n}(m)^{j+1}((m+1))^{k-1} = -\frac{k}{j+1}\frac{((m-1))^{j+2}}{j+2}((m+1))^{k-1}\Bigg|_0^{n+1} +$$

$$+\frac{k}{(j+1)(j+2)}\sum_{m=0}^{n}(m)^{j+2}(k-1)((m+2))^{k-2} + \frac{k(k-1)}{(j+1)(j+2)}\sum_{m=0}^{n}(m)^{j+2}((m+2))^{k-2} =$$

$$= \frac{k(k-1)}{(j+1)(j+2)}\frac{((m-1))^{j+3}}{j+3}((m+2))^{k-2}\Bigg|_0^{n+1} - \frac{k(k-1)}{(j+1)(j+2)(j+3)}\sum_{m=0}^{n}(m)^{j+3}(k-2)((m+3))^{k-3}$$

- -

$$(-1)^{k-1}\frac{k(k-1)\cdots 2}{(j+1)\cdots(j+k-1)}\sum_{m=0}^{n}(m)^{j+k-1}((m+k-1))^{1} = (-1)^{k-1}\frac{k(k-1)\cdots 2}{(j+1)\cdots(j+k-1)}\frac{((m-1))^{j+k}}{j+k}$$

$$((m+k-1))^{1}\Bigg|_0^{n+1} - (-1)^{k-1}\frac{k(k-1)\cdots 2}{(j+1)\cdots(j+k)}\sum_{m=0}^{n}(m)^{j+k}((m+k-1))^{0}$$

$$(-1)^{k}\frac{k(k-1)\cdots 2.1}{(j+1)\cdots(j+k)}\sum_{m=0}^{n}(m)^{j+k} = (-1)^{k}\frac{k(k-1)\cdots 2.1}{(j+1)\cdots(j+k)}\frac{((m-1))^{j+k+1}}{j+k+1}\Bigg|_0^{n+1}$$

sumando miembro a miembro y sustituyendo extremos:

$$\sum_{m=0}^{n}(m)^{j}(m)^{k} = \frac{1}{j+1}(n)^{j+1}((n+1))^{k} - \frac{k}{(j+1)(j+2)}(n)^{j+2}((n+2))^{k-1} +$$

$$+\frac{k(k-1)}{(j+1)(j+2)(j+3)}(n)^{j+3}((n+3))^{k-2} + \cdots + (-1)^{k-1}\frac{k(k-1)\cdots 2}{(j+1)\cdots(j+k)}(n)^{j+k}((n+k))^{1} +$$

$$+(-1)^{k}\frac{k(k-1)\cdots 2\cdot 1}{(j+1)\cdots(j+k+1)}(n)^{j+k+1}$$

$$\boxed{\sum_{m=0}^{n} (m)^{j} (m)^{k} = \sum_{\ell=0}^{k} (-1)^{\ell} \frac{(k)_{\ell}}{((j+1))^{\ell+1}} (n)^{j+\ell+1} ((n+\ell+1))^{k-\ell}} \qquad (2.4.44.)$$

$j > k > 0$ enteros

$$\sum_{m=0}^{20} (m)^{3} (m)^{2} = \sum_{\ell=0}^{2} (-1)^{\ell} \frac{(2)_{\ell}}{(4)^{\ell+1}} (20)^{4+\ell} ((21+\ell))^{2-\ell}$$

$$= \frac{1}{4} (20)^{4} (21)^{2} - \frac{2}{20} (20)^{5} (22)^{1} + \frac{2}{120} (20)^{6} = 15,450,204$$

6) $\sum_{m=0}^{n} m^{2} \binom{m}{j_1, \ldots, j_r}$; $j_r = m - j_1 - \cdots - j_{r-1}$

Se tiene por (1.5.22.)

$$\binom{m}{j_1, j_2, \ldots, j_r} = \frac{(j_1 + \cdots + j_{r-1})!}{j_1! \cdots j_{r-1}!} \binom{m}{j_1 + \cdots + j_{r-1}} ; \quad \sum_{m=0}^{n} m^{2} \binom{m}{j_1 \ldots j_r} =$$

$$= \frac{(j_1 + \cdots + j_{r-1})!}{j_1! \cdots j_{r-1}!} \left[(n+1)^{2} \binom{n+1}{j_1 + \cdots + j_{r-1} + 1} - (2n+3) \binom{n+2}{j_1 + \cdots + j_{r-1} + 2} + \right.$$

$$\left. +2 \binom{n+3}{j_1 + \cdots + j_{r-1} + 3} \right]$$

$$\boxed{\sum_{m=0}^{n} m^{2} \binom{m}{j_1, \ldots, j_r} = \left[\frac{(n+1)^{3}}{((j_1 + \cdots + j_{r-1} + 1))^{1}} - \frac{(2n+3)((n+1))^{2}}{((j_1 + \cdots + j_{r-1} + 1))^{2}} + \frac{2}{((j_1 + \cdots + j_{r-1} + 1))^{3}} \right] \binom{n+3}{j_1 \ldots j_r}}$$

$j_r = m - j_1 - \cdots - j_{r-1}$ $\qquad$ $j_r = n - j_1 - \cdots - j_{r-1}$

$j_1, \ldots, j_r = 0$ enteros $\qquad$ (2.4.45.)

$$\sum_{m=0}^{20} m^2 \binom{m}{2\,3\,4\,(m-9)} = \frac{21^3}{(10)^1} - \frac{43 \times (21)(22)}{(10)(11)} + \frac{2}{(10)(11)(12)} \binom{20}{2\;3\;4\;11}$$

$$\sum_{m=0}^{20} m^2 \binom{m}{2\;3\;4\;(m-9)} = 157,\ 770,\ 187,\ 500$$

7) $\sum\limits_{m=0}^{n} m\, S(m,j)$

Como partes se eligen

$$\triangle v(m) = S(m,j)\ ;\ u(m) = m$$

por (2.4.37.) y (2.4.3.)

$$v(m) = \frac{1}{j!}\left[(-1)^j + (-1)^{j-1} jm - \sum_{\ell=2}^{j} (-1)^{j-\ell} \binom{j}{\ell} \frac{\ell^m - 1}{\ell - 1}\right];\ \triangle u(m) = 1$$

$$\sum_{m=0}^{n} m\, S(m,j) = \frac{m}{j!}\left[(-1)^j + (-1)^{j-1} jm - \sum_{\ell=2}^{j} (-1)^{j-\ell} \binom{j}{\ell} \frac{\ell^m - 1}{\ell - 1}\right]\Bigg|_0^{n+1}$$

$$- \sum_{m=0}^{n} \frac{1}{j!}\left[(-1)^j + (-1)^{j-1} j(m+1) - \sum_{\ell=2}^{j} (-1)^{j-\ell} \binom{j}{\ell} \frac{\ell^{m+1} - 1}{\ell - 1}\right] =$$

$$= \frac{(n+1)}{j!}\left[(-1)^j + (-1)^{j-1} j(n+1) - \sum_{=2}^{j} (-1)^{j-\ell} \binom{j}{\ell} \frac{\ell^{m+1} - 1}{\ell - 1}\right] -$$

$$- \frac{1}{j!}\left[(-1)^j (n+1) + (-1)^{j-1} j \frac{(n+1)(n+2)}{2} - \sum_{\ell=2}^{j} \frac{(-1)^{j-} \binom{j}{\ell}}{\ell - 1} \sum_{m=0}^{n} (\ell^{m+1} - 1)\right.$$

Haciendo operaciones se llega a:

$$\boxed{\sum_{m=0}^{n} m\,S(m,j) = \frac{1}{j!}\left\{(-1)^{j-1}\frac{j(n^2+n)}{2} + \sum_{\ell=2}^{j}\frac{(-1)^{j-\ell}\binom{j}{\ell}}{(\ell-1)^2}\left[(n+1)\ell^{n+2}-(n+2)\ell^{n+1}\right]\right\}}$$

(2.4.46.)

$$\sum_{m=0}^{10} m\,S(m,s) = \frac{1}{s!}\left\{\frac{5(110)}{2.} + \sum_{\ell=2}^{5}\frac{(-1)^{5-\ell}\binom{5}{\ell}}{(\ell-1)^2}\left[(11)\ell^{12}-(12)\ell^{11}\right]\right\}$$

$$\sum_{m=0}^{10} m\,S(m,5) = \frac{1}{5!}\left\{275-10\cdot(11\times 2^{12}-12\times 2^{11}) + \frac{10}{4}(11\times 3^{12}-12\times 3^{11}) -\right.$$

$$\left.-\frac{5}{9}(11\times 4^{12}-12\times 4^{12}) + \frac{1}{16}(11\times 5^{12}-125^{11})\right\} = 497,284$$

2.4.4. Ecuaciones en diferencias (problemas de valor inicial)

i) Ecuación lineal homogenea de segundo orden y con coeficientes constantes.

Sea

$$y(n+2)-5y(n+1)+4y(n)=0$$

con los siguientes valores iniciales

$$y(0)=10, \quad y(1)=20$$

Se tiene por (1.5.7.) al aplicar la T.G.O. a la ecuación en diferencias:

$$z^{-2}\left[y^g(z)-y(0)-z\,y(1)\right]-5z^{-1}\left[y^g(z)-y(0)\right]+4y^g(z)=0$$

$$y^g(z)-y(0)-zy(1)-5z\,y^g(z)+5zy(0)+4z^2\,y^g(z)=0$$

$$y^g(z)(1-5z+4z^2)-y(0)(1-5z)-z\,y(1)=0$$

$$y^g(z)=\frac{(1-5z)\,y(0)}{1-5z+4z^2}+\frac{z\,y(1)}{1-5z+4z^2}$$

factorizando el denominador

$$(1-5z+4z^2)=(1-4z)(1-z)$$

luego

$$y^g(z)=\frac{y(0)}{(1-4z)(1-z)}+\frac{y(1)-5y(0)}{(1-4z)(1-z)}\,z$$

antitransformando mediante (1.6.3.) y (1.6.4.)

$$y(n)=y(0)\,\frac{4^{n+1}-1}{4-1}+\left[y(1)-5y(0)\right]\frac{4^n-1}{4-1}$$

$$y(n)=\frac{4}{3}\,y(0)\,4^n-\frac{y_0}{3}+\frac{y(1)-5y(0)}{3}\,4^n-\frac{y(1)-5y(0)}{3}$$

$$y(n)=\frac{4y(0)+y(1)-5y(0)}{3}\,4^n-\frac{y(0)+y(1)-5y(0)}{3}$$

$$y(n)=\frac{y(1)-y(0)}{3}\,4^n-\frac{y(1)-4y(0)}{3}$$

sustituyendo los valores iniciales

$$\boxed{y(n) = \frac{10}{3}\, 4^n + \frac{20}{3}} \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

ii) Otra manera de resolver la ecuación en diferencias, sin acudir a la T.G.O.

A partir de

$$y(n+2) - 5y(n+1) + 4y(n) = 0$$

Se forma la ecuación auxiliar

$$\beta^2 - 5\beta + 4 = 0$$

cuyas raíces son

$$\beta_1 = 4, \quad \beta_2 = 1$$

y se plantea como solución general

$$y(n) = C_1 \beta_1^n + C_2 \beta_2^n$$

en el caso presente

$$y(n) = C_1\, 4^n + C_2$$

finalmente se acude a los valores iniciales para determinar el valor de las constantes arbitrarias.

$$\left.\begin{aligned} y(0) &= C_1 + C_2 \\ y(1) &= 4\,C_1 + C_2 \end{aligned}\right\}$$

esto es

$$\left.\begin{aligned} 10 &= C_1 + C_2 \\ 20 &= 4\,C_1 + C_2 \end{aligned}\right\}$$

resolviendo este sistema de ecuaciones resulta

$$C_1 = \frac{10}{3}, \quad C_2 = \frac{20}{3}$$

luego

$$y(n) = \frac{10}{3}\, 4^n + \frac{20}{3}$$

Tanto este método de la ecuación auxiliar como el visto en el inciso anterior son generales, así para la ecuación lineal homogénea de coeficientes constantes y k-ésimo orden, se tiene

$$y(n+k)+a_1\, y(n+k-1) + \ldots + a_{k-2}\, y(n+2)+a_{k-1}\, y(n+1)+a_k\, y(n) = 0$$

con condiciones iniciales

$$y(0)=b_0,\ y(1)=b_1\ \ldots,\ y(k) = b_k$$

la ecuación auxiliar resulta

$$\beta^k+a_1\beta^{k-1} + \ldots + a_{k-2}\beta^2+a_{k-1}\beta+a_k=0$$

con raices $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k$, la solución general es

$$\boxed{y(n) = C_1\beta_1^n + C_2\beta_2^n + \cdots + C_k\beta_k^n} \qquad n=0,1,2,\ldots$$

y mediante las condiciones iniciales se determinan el valor de las constantes arbitrarias $C_1, C_2, \ldots, C_k$.

III) Ecuación lineal completa con coeficientes constantes y de primer orden.

Sea

$$y(n+1) - a\, y(n) = f(n)$$

$$y(0) = \gamma$$

haciendo uso de (1.5.7.)

$$z^{-1}\left[y^{g}(z)-y(0)\right]-a\,y^{g}(z)=f^{g}(z)$$

$$y^{g}(z)-y(0)-az\;y^{g}(z)=z\,f^{g}(z)$$

$$y^{g}(z)(1-az)=y(0)+z\,f^{g}(z)$$

$$y^{g}(z)=\frac{y(0)}{1-az}+\frac{z}{1-az}\;f^{g}(z)$$

pero $Y(0)=\gamma$

luego

$$y^{g}(z)=\frac{\gamma}{1-az}+\frac{z}{1-az}\;f^{g}(z)$$

pero

$$\frac{\gamma}{1-az}\Longleftrightarrow \gamma a^{n} \quad \text{por (1.5.8.)}$$

$$\frac{z}{1-az}\;f^{g}(z)\Longleftrightarrow \sum_{m=1}^{n} a^{m-1}\,f(n-m) \quad \text{por (1.5.5.)}$$

luego

$$\boxed{y(n)=\gamma a^{n}+\sum_{m=1}^{n} a^{m-1}\,f(n-m)}$$

así, para

$$f(n)=(n)_j \quad ; \quad j>0 \text{ cte.}$$

$$y(n)=\gamma a^{n}+\sum_{m=1}^{n} a^{m-1}\,(n-m)_j \; ; \quad j>0 \text{ cte.}$$

$$n=0,1,2,\ldots$$

iv) Ecuación en diferencias lineal completa de <u>coeficientes variables</u> y de primer orden.

Sea

$$y(n+1)-\frac{n}{n+1}\;y(n)=\frac{a^{n}}{n+1} \quad ; \quad n=1,2,\ldots$$

$$y(0)=0$$

multiplicando ambos miembros por $n+1$

$$(n+1)\ y(n+1) - n\ y(n) = a^n$$

luego

$$n\,y(n+1) + y(n+1) - n\,y(n) = a^n$$

por (1.5.7.), (1.5.8.) y (1.5.10.)

$$z\frac{d}{dz}\left\{ z^{-1}\left[y^g(z) - y(0)\right]\right\} + z^{-1}\left[y^g(z) - y(0)\right] - z\frac{d}{dz}\, y^g(z) = \frac{1}{1-az}$$

$$z\frac{d}{dz}\ \frac{y^g(z) - y(0)}{z} + \frac{y^g(z) - y(0)}{z} - z\frac{d}{dz}\, y^g(z) = \frac{1}{1-az}$$

$$z\ \frac{z\,y^{g(1)}(z) - y^g(z) + y(0)}{z^2} + \frac{y^g(z) - y(0)}{z} - z\frac{d}{dz}\ y^g(z) = \frac{1}{1-az}$$

$$\frac{d}{dz}\ y^g(z) - \frac{y^g(z)}{z} + \frac{y(0)}{z} + \frac{y^g(z)}{z} - \frac{y(0)}{z} - z\frac{d}{dz}\ y^g(z) = \frac{1}{1-az}$$

$$(1-z)\frac{d}{dz}\ y^g(z) = \frac{1}{1-az}$$

$$\frac{d}{dz}\ y^g(z) = \frac{1}{(1-z)(1-az)}$$

$$\frac{d}{dz}\ y^g(z) = \frac{1}{1-a}\ \frac{1}{1-z} - \frac{a}{1-a}\ \frac{1}{1-az}$$

$$d\,y^g(z) = \frac{1}{1-a}\ \frac{dz}{1-z} - \frac{a}{1-a}\ \frac{dz}{1-az}$$

$$y^g(z) = -\frac{1}{1-a}\ L(1-z) + \frac{1}{1-a}\ L\,(1-az)$$

$$y^g(z) = \frac{1}{1-a}\ \left[-L\,(1-z) + L\,(1-az)\right]$$

por (1.5.24.) y (1.5.25.)

$$y(n) = \frac{1}{1-a}\left(\frac{1}{n} - \frac{a^n}{n}\right) \quad ; \quad n = 1, 2, \ldots$$

$$\boxed{\begin{cases} y(n) = \frac{1}{n} \, \frac{1-a^n}{1-a} \\ y(0) = 0 \end{cases}} \quad ; \quad n = 1, 2, \ldots$$

v) Ecuación diferencial en diferencias de primer orden y homogéneas

Sea

$$\frac{d}{dt} y(n+1, t) - 2t\, y(n, t) = 0$$

con el valor inicial

$$y(0, t) = f(t)$$

$$y(n, 0) = \varphi(n)$$

Por (1.5.7.)

$$z^{-1}\left[\frac{\partial}{\partial t} y^g(z,t) - \frac{d}{dt} y(0,t)\right] - 2zt\, y^g(z, t) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t} y^g(z, t) - \frac{d}{dt} y(0, t) - 2tz\, y^g(z, t) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t} y^g(z,t) - 2tz\, y^g(z,t) = \frac{d}{dt} y(0, t)$$

pero $\frac{d}{dt} y(0, t) = f^1(t)$ luego

$$\frac{\partial}{\partial t} y^g(z,t) - 2tz\, y^g(z,t) = f'(t)$$

que es una ecuación parcial lineal de primer orden en t,

de la forma

$$\frac{d}{dt} f(t) - M(t)\, f(t) = N(t)$$

si $f = uv$

entonces

$$u = e^{-\int M(t)\,dt}$$

$$v = \int N(t)\, e^{\int M(t)\,dt}\,dt + k$$

Para el caso particular en cuestión

$$u = e^{-\int -2tz\,dt} = e^{z t^2}$$

$$v = \int f^1(t)\, e^{-z t^2}\,dt + k$$

de manera que

$$y = e^{z t^2}\left[\int f'(t)\, e^{-z t^2}\,dt + k\right]$$

$$y = e^{z t^2}\int_0^t f'(u)\, e^{-z u^2}\,du + k e^{z t^2}$$

$$y^g(z,t) = \int_0^t e^{z(t^2 - u^2)}\, f'(u)\,du + k e^{z t^2}$$

pero $y(n,0) = \varphi(n)$; $y^g(z,0) = \varphi^g(z)$

luego

$$\varphi^g(z) = 0 + k\; e^0 = k$$

finalmente

$$y^g(z,t) = \int_0^t e^{z(t^2 - u^2)}\, f'(u)\,du + e^{z t^2}\cdot\varphi^g(z)$$

antitransformando con ayuda de (1.5.5.) y (1.5.22.)

$$\boxed{y(n,t) = \int_0^t \frac{(t^2 - u^2)^n}{n}\; f'(u)\,du + \sum_{m=0}^{n} \frac{t^{2m}}{m!}\;\varphi(n-m)}$$

2.4.5. Aplicación a sistemas de ecuaciones lineales y de primer orden en diferencias.

$$\left\{\begin{array}{l} y_1(n+1) = a_{11}\, y_1(n) + a_{12}\, y_2(n) + \cdots + a_{1k}\, y_k(n) + \emptyset_1(n) \\ y_2(n+1) = a_{21}\, y_1(n) + a_{22}\, y_2(n) + \cdots + a_{2k}\, y_k(n) + \emptyset_2(n) \\ - \\ y_k(n+1) = a_{k1}\, y_1(n) + a_{k2}\, y_2(n) + \cdots + a_{kk}\, y_k(n) + \emptyset_k(n) \end{array}\right.$$

que puede expresarse matricialmente en la forma

$$\bar{y}(n+1) = \bar{A}\ \bar{y}(n) + \bar{\Phi}(n)$$

en donde

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ - & - & - & - \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} \end{bmatrix} ; \quad \bar{y}(n) = \begin{bmatrix} y_1(n) \\ y_2(n) \\ --- \\ y_k(n) \end{bmatrix} ; \quad \bar{\emptyset}(n) = \begin{bmatrix} \emptyset_1(n) \\ \emptyset_2(n) \\ --- \\ \emptyset_k(n) \end{bmatrix}$$

Se demuestra que su solución general es:

$$\bar{y}(n)=\bar{A}^{n}\,\bar{y}(0)+\sum_{\ell=0}^{n-1}\bar{A}^{\ell}\;\bar{\emptyset}(n-\ell-1);\quad n=0,1,\ldots$$

en donde $\bar{y}(0)$ es el vector de"condición inicial".

Aquí nuevamente (1.16.2.) permite obtener la potencia $\bar{A}^{n}$ mediante el uso de la T.G.O.

Así por ejemplo, sea

$$\begin{cases} u(n+1) = 3u(n) + 2v(n) + n \\ v(n+1) = 2u(n) + 3v(n) + n^2 \end{cases}$$

y como condición inicial

$$u(0) = a,\quad v(0) = b$$

Se tiene:

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \;;\; \bar{y}(n) = \begin{bmatrix} u(n) \\ v(n) \end{bmatrix} \;;\; \bar{\emptyset}(n) = \begin{bmatrix} n \\ n^2 \end{bmatrix}$$

entonces

$$\left[\bar{I} - \bar{A}z =\right] \begin{bmatrix} 1-3z & 2z \\ 2z & 1-3z \end{bmatrix}$$

$$\left[\bar{I} - \bar{A}z\right]^{-1} = \begin{bmatrix} 1-3z & 2z \\ 2z & 1-3z \end{bmatrix} \frac{1}{(1-z)(1-3z)}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{1-z}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{1-5z}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\right\}$$

Haciendo uso de (1.5.3.) y (1.5.8.).

$$\bar{A}^n = \frac{1}{2}\left\{\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} + 5^n \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\right\}$$

por consiguiente:

$$\begin{bmatrix} u(n) \\ v(n) \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\left\{\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} + 5^n \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\right\}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} +$$

$$+ \frac{1}{2}\sum_{\ell=0}^{n=1}\left\{\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} + 5^{\ell} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\right\}\begin{bmatrix} n-\ell-1 \\ (n-\ell-1)^2 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\begin{cases} u(n) = \frac{1}{2}(a-b) + \frac{5^n}{2}(a+b) + \frac{1}{2}\sum_{\ell=0}^{n-1}\left[(n-\ell-1)(2+\ell-n) + 5^{\ell}\,(n-\ell-1)(n-\ell)\right] \\ v(n) = \frac{1}{2}(b-a) + \frac{5^n}{2}(b+a) + \frac{1}{2}\sum_{\ell=0}^{n-1}\left[(n-\ell-1)(n-\ell-2) + 5^{\ell}\,(n-\ell-1)(n-\ell)\right] \end{cases}} \quad n=0,$$

2.4.6. Aplicación de la doble transformada a las ecuaciones parciales en diferencias.

El tema se iniciará como se hizo en el inciso (2.4.4.) con un ejemplo de una ecuación parcial de primer orden tanto en j como en n, completa, lineal y con coeficientes constantes.

$$y(j+1,n+1)-2y(j,n+1)+3y(j,n)=f(j,n)$$

con los siguientes valores iniciales

$$y(0,n)=\psi(n)$$
$$y(j,0)=\varphi(j)$$
$$y(0,0)=\alpha$$

Transformando ambos miembros respecto a j:

$s^{-1}\left[y^{g^-}(s,n+1)-y(0,n+1)\right] -2y^{g^-}(s,n+1)+3y^{g^-}(s,n)=f^{g^-}(s,n)$, por

$$y^{g^-}(s,n+1)-y(0,n+1)-2sy^{g^-}(s,n+1)+3sy^{g^-}(s,n)=sf^{g^-}(s,n)$$
$$(1-2s)y^{g^-}(s,n+1)+3sy^{g^-}(s,n)-y(0,n+1)=sf^{g^-}(s,n)$$

transformando ahora respecto a n, haciendo uso nuevamente de (1.5.7.)

$$(1-2s)z^{-1}\left[y^{gg}(s,z)-y^{g^-}(s,0)\right]+3sy^{gg}(s,z)-z^{-1}\left[y^{-g}(0,z)-y(0,0)\right]=$$
$$=sf^{gg}(s,z)$$

$$(1-2s)\,y^{gg}(s,z)-(1-2s)\,y^{g-}(s,0)+3sz\,y^{gg}(s,z)-y^{-g}(0,z)+$$
$$+\,y(0,0)=sz\,f^{gg}(s,z)$$

$$y^{gg}(s,z)(1-2s+3sz)-(1-2s)\,y^{g-}(s,0)-y^{-g}(0,z)+y(0,0)=$$
$$=sz\,f^{gg}(s,z)\,.$$

$$y^{gg}(s,z)=\frac{sz\,f^{gg}(s,z)+(1-2s)y^{g-}(s,0)+y^{-g}(0,z)-y(0,0)}{1-2s+3sz}$$

pero

$$y^{g-}(s,0)=\varphi^{g}(s)$$
$$y^{-g}(0,z)=\psi^{g}(z)$$
$$y(0,0)=\alpha$$

luego

$$y^{gg}(s,z)=\frac{sz\,f^{gg}(s,z)=(1-2s)\,\varphi^{g}(s)+\psi^{g}(z)-\alpha}{1-2s+3sz}$$

dividiendo entre (1-2s) numerador y denominador

$$y^{gg}(s,z)=\frac{\frac{sz}{1-2s}\,f^{gg}(s,z)+\varphi^{g}(s)+\frac{1}{1-2s}\psi^{g}(z)-\frac{\alpha}{1-2s}}{1+\frac{3s}{1-2s}\,z}\,.$$

Empleando (1. 5. 5.) y (1. 5. 8.) se antitransformará respecto a z:

$$y^{g-}(s,n)=\sum_{m=0}^{n-1}(-1)^{m}\,\frac{s}{1-2s}\left(\frac{3s}{1-2s}\right)^{m}f^{g-}(s,n-m)+(-1)^{n}\left(\frac{3s}{1-2s}\right)^{n}\varphi^{g}(s)+$$

$$+\sum_{m=0}^{n}(-1)^{m}\,\frac{1}{1-2s}\left(\frac{3s}{1-2s}\right)^{m}\psi(n-m)+\,.$$

$$+(-1)^{n+1}\alpha\,\frac{1}{1-2s}\left(\frac{3s}{1-2s}\right)^{n}$$

$$y^{g^-}(s,n)=\sum_{m=0}^{n-1}(-1)^m\, 3^m\, \frac{s^{m+1}}{(1-2s)^{m+1}}\, f^{g^-}(s,n-m)\, +$$

$$+\,(-1)^n 3^n \frac{s^n}{(1-2s)^n}\,\varphi^{g}(s)+\sum_{m=0}^{n}(-1)^m\, 3^m\, \frac{s^m}{(1-2s)^{m+1}}\,\psi^{-}(n-m)\, +$$

$$+\,(-1)^{n+1}\alpha 3^n \frac{s^n}{(1-2s)^{n+1}}$$

haciendo uso ahora de (1.5.5.), (1.5.6.) y (1.5.20.) se antitransforma respecto a s, obteniéndose:

$$\boxed{\begin{aligned} y(j,n)=&\sum_{m=0}^{n-1}(-1)^m\left(\frac{3}{2}\right)^m\sum_{k=0}^{j}2^k\binom{k-1}{m-1}f(j-k,n-m)+\\ &+(-1)^n\left(\frac{3}{2}\right)^n\sum_{k=0}^{j}2^k\binom{k-1}{n-1}\varphi(j-k)+\\ &+2^j\sum_{m=0}^{n}(-1)^m\left(\frac{3}{2}\right)^m\binom{j}{m}\psi(n-m)+\alpha(-1)^{n+1}\binom{j}{n}2^j\left(\frac{3}{2}\right)^n\end{aligned}}$$

1.15.2. En ocasiones es más cómodo usar una transformada parcial en vez de la total y si la ecuación es lineal de coeficientes constantes y homogénea, acudir a la técnica de la ecuación auxiliar tal y como se mostró en el inciso (1.7.2.).

1) Sea el caso del Paseo Casual simple ($p+q=1$) tratado en (1.10.6.1.) si como ha sido costumbre $\varphi_j(n)$ es la probabilidad de que el proceso visite el estado j en la época n, resulta la ecuación (ver fig. 1.14.).

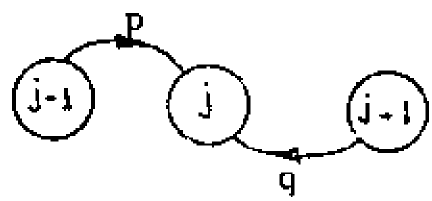


Fig. 1.14.

$$\varphi_j(n+1) = p\varphi_{j-1}(n) = q\varphi_{j+1}(n)$$

esto es

$$\varphi(j, n+1) = p\varphi(j-1, n) + q\varphi(j+1, n) \qquad -(A)$$

Con los siguientes valores iniciales

$$\varphi(0, n) = \binom{n}{\frac{n}{2}} p^{\frac{n}{2}} q^{\frac{n}{2}} \quad \text{(ver inciso 1.10.6.1.)}$$

$\varphi(j, 0) = \delta(j)$ (el proceso se inicia en $j=0$)

$$\varphi(0,0) = 1$$

Transformando la ecuación (A) respecto a n:

$$z^{-1}\left[\varphi^{-g}(j,z) - \varphi(j,0)\right] = p\varphi^{-g}(j-1,z) + q\varphi^{-g}(j+1,z)$$

$$\varphi^{-g}(j,z) - \varphi(j,0) = pz\varphi^{-g}(j-1,z) + qz\varphi^{-g}(j+1,z)$$

ordenando términos

$$qz\varphi^{-g}(j+1,z) - \varphi^{-g}(j,z) + pz\varphi^{-g}(j-1,z) = \varphi(j,0)$$

la ecuación auxiliar es:

$$qz\beta^2 - \beta + pz = 0$$

luego

$$\beta = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4pqz^2}}{2qz}$$

seleccionando el signo negativo del radical con objeto de que β sea acotada entorno del punto $z=0$.

entonces

$$\varphi^{-g}(j,z) = C(z)\left(\frac{1-\sqrt{1-4pqz}}{2qz}\right)^{j}$$

en donde $C(z)$ es una función arbitraria de z a determinar por medio de las condiciones iniciales.

Para $j=0$, la ecuación anterior resulta:

$$\varphi^{-g}(0,z) = C(z)$$

pero $\varphi^{-g}(0,z)$ es la transformada de $\varphi(0,n)$ luego por (1.10.25.)

$$\varphi^{-g}(z) = \frac{1}{\sqrt{1-4pqz^2}} = C(z)$$

por consiguiente

$$\varphi^{-g}(j,z) = \frac{1}{\sqrt{1-4pqz^2}}\left(\frac{1-\sqrt{1-4pqz^2}}{2qz}\right)^{j}$$

esto es:

$$\boxed{\varphi_j^{g}(z) = \frac{1}{\sqrt{1-4pqz^2}}\left(\frac{1-\sqrt{1-4pqz^2}}{2qz}\right)^{j}} \qquad (1.15.1.)$$

que es la solución de la integral (1.10.26.) .

2.5. Aplicación a Cadenas de Markov

2.5.1. Sea la función matricial $\bar{\emptyset}(n)$ tal que

$$\bar{\emptyset}(n) = \left[\varphi_{ij}(n)\right] \quad ; \quad i,j = 1, \ldots, N$$

en donde $\varphi_{ij}(n)$ es la probabilidad de que el proceso markoviano, iniciado en el estado i, visite el estado j al cabo de n épocas.

Si $\bar{P}$ es la matriz

$$\bar{P} = \left[p_{ij}\right] \quad ; \quad i,j = 1, \ldots, N$$

de probabilidades de transición del estado i al j en una época cualquiera, entonces

$$\begin{cases} \emptyset\,(n+1) = \bar{\emptyset}\,(n)\,\bar{P} \\ \emptyset\,(0) = \bar{I} \end{cases}$$

De manera que

$$\bar{\emptyset}\,(1) = \bar{\emptyset}\,(0)\,\bar{P}$$

$$\bar{\emptyset}\,(2) = \bar{\emptyset}\,(1)\,\bar{P} = \bar{\emptyset}\,(0)\,\bar{P}^2 = \bar{I}\;\bar{P}^2 = \bar{P}^2$$

$$- - - - - - - - -$$

$$\bar{\emptyset}\,(n) = \bar{P}^n$$

$$- - - - - - - - -$$

luego la probabilidad en n épocas de visitar un estado cualquiera del proceso, se obtiene elevando la matriz de probabilidades de transición entre estados $\overline{P}$ a la n-ésima potencia.

Así por ejemplo, sea

$$\overline{P} = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} & \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \end{array} \quad ; \; i, j = 1,2,3$$

Fig. 1.15.

(matriz estocástica)

Entonces

$$\overline{\phi}(n) = \overline{P}^{\,n}$$

y por (1.16.2.)

$$\overline{\phi}^{g}(z) = \left[\, \overline{I} - \overline{P}z \,\right]^{-1}$$

pero

$$\left[\, \overline{I} - \overline{P}z \,\right] = \begin{bmatrix} 1 - \frac{1}{2}z & -\frac{1}{2}z & 0 \\ -\frac{1}{3}z & 1 - \frac{1}{3}z & -\frac{1}{3}z \\ -\frac{1}{4}z & -\frac{1}{4}z & 1 - \frac{1}{2}z \end{bmatrix}$$

haciendo operaciones:

$$\left[\, \overline{I} - \overline{P}z \,\right]^{-1} = \frac{1}{1 - \frac{4}{3}z + \frac{1}{3}z^2} \begin{bmatrix} 1 - \frac{5}{6}z + \frac{1}{12}z^2 & \frac{1}{2}z - \frac{1}{4}z^2 & \frac{1}{6}z^2 \\ \frac{1}{3}z - \frac{1}{12}z^2 & 1 - z + \frac{1}{4}z^2 & \frac{1}{3}z - \frac{1}{6}z^2 \\ \frac{1}{4}z & \frac{1}{4}z & 1 - \frac{5}{6}z \end{bmatrix}$$

$$\left[\bar{I} - \bar{P}z\right]^{-1} = \frac{1}{1-z}\begin{bmatrix} \frac{3}{8} & \frac{3}{8} & \frac{1}{4} \\ \frac{3}{8} & \frac{3}{8} & \frac{1}{4} \\ \frac{3}{8} & \frac{3}{8} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} + \frac{1}{1-\frac{1}{3}z}\begin{bmatrix} \frac{3}{8} & \frac{3}{8} & -\frac{3}{4} \\ \frac{1}{8} & -\frac{1}{8} & \frac{1}{4} \\ -\frac{3}{8} & -\frac{3}{8} & \frac{3}{4} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

finalmente, por (1.5.1.) (1.5.3.) y (1.5.8.)

$$\bar{\phi}(n) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} \frac{3}{8} & \frac{3}{8} & \frac{1}{4} \\ \frac{3}{8} & \frac{3}{8} & \frac{1}{4} \\ \frac{3}{8} & \frac{3}{8} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} + \left(\frac{1}{3}\right)^n \begin{bmatrix} \frac{3}{8} & \frac{3}{8} & -\frac{3}{4} \\ -\frac{1}{8} & -\frac{1}{8} & \frac{1}{4} \\ -\frac{3}{8} & -\frac{3}{8} & \frac{3}{4} \end{bmatrix} + \delta(n)\begin{bmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

centro de educación continua
división de estudios superiores
facultad de ingeniería, unam

CURSOS DE SUPERACION ACADEMICA

MATEMATICAS DISCRETAS

ECUACIONES DIFRENCIALES ORDINARIAS

Marzo de 1980.

Capítulo 8

Ecuaciones diferenciales ordinarias

8-1. Introducción

Las ecuaciones diferenciales tienen importancia fundamental en las aplicaciones, ya que muchas leyes y relaciones físicas pueden idealizarse matemáticamente en la forma de estas ecuaciones. En particular, el estudio de problemas de equilibrio de sistemas continuos se encuentra dentro de este contexto.

A continuación se establece un conjunto de definiciones acerca de las ecuaciones diferenciales. En las siguientes secciones se dará un procedimiento numérico para resolver algunos tipos particulares de problemas en donde intervienen las ecuaciones diferenciales.

1. *Ecuación diferencial.* Es una ecuación que relaciona dos o más variables en términos de derivadas o diferenciales. Por ejemplo, las siguientes relaciones son ecuaciones diferenciales:

a) $\dfrac{dy}{dx} = \cos x$

b) $\dfrac{d^2y}{dx^2} + k^2y = 0$

c) $(x^2 + y^2)\,dx + 2xy\,dy = 0$

d) $\left[\dfrac{d^2w}{dx^2}\right]^3 - xy\dfrac{dw}{dx} + w = 0$

e) $\dfrac{d^2y}{dx^2} + \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^3 - 8y = 0$

f) $\dfrac{\partial^2V}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2V}{\partial y^2} = 0$

2. *Variables independientes y dependientes.* Se dice que una variable de una ecuación diferencial es *independiente*, si existen una o más derivadas con respecto a esa variable. Una variable es *dependiente* cuando existen derivadas de esa variable. En los ejemplos (a), (b) y (e), x es la variable independiente y y la dependiente; en el (c) puede considerarse indistintamente a x como variable independiente y a y como dependiente o en forma recíproca; en (d) x es la variable independiente, w la dependiente y y es un parámetro; (f) tiene dos variables independientes x y y, la dependiente es V.

3. *Ecuaciones diferenciales ordinarias y parciales.* Si en una ecuación diferencial hay una sola variable independiente, las derivadas son totales y a la ecuación diferencial se le llama *ordinaria*. Por el contrario, si en la ecuación aparecen dos o más variables independientes, las derivadas serán parciales y la ecuación será diferencial *parcial*. Los ejemplos (a) a (e) son de ecuaciones diferenciales ordinarias, la (f) es parcial.

4. *Orden de una ecuación diferencial.* Es la derivada de mayor *orden* que aparece en la ecuación. Las ecuaciones (a) y (c) son de primer orden; las demás de segundo.

5. *Grado de una ecuación diferencial.* Al *grado algebraico* de la derivada de mayor orden que aparece en la ecuación se le llama grado de una ecuación diferencial. Todos los ejemplos son de ecuaciones diferenciales de primer grado, excepto el (d) que es de tercero.

6. *Ecuación diferencial lineal.* Una ecuación diferencial es *lineal* si en ella no aparecen potencias de la variable dependiente y sus derivadas, ni productos de la variable dependiente por sus derivadas o productos entre derivadas. Las ecuaciones (a), (b) y (f) son lineales; las otras no.

7. *Solución de una ecuación diferencial.* Es cualquier relación funcional que no incluya derivadas o integrales de funciones desconocidas y que implique a la propia ecuación diferencial, en el sentido de que la verifique idénticamente por sustitución directa. Es obvio que $y = \operatorname{sen} x + c$, donde c es una constante arbitraria, es

solución de (a). Por sustitución directa puede hacerse ver que $y = A\ sen\ k + B \cos k\ x$ es la solución de (b), en donde A y B son constantes arbitrarias.

8. *Ecuación y condiciones homogéneas*. Una condición o ecuación es *homogénea* si, cuando es satisfecha por una función particular $y(x)$, también es satisfecha por $c\,y(x)$, donde c es una constante arbitraria. Por ejemplo, una condición homogénea puede obtenerse del requerimiento de que una función o una de sus derivadas (o alguna combinación lineal de la funcion y/o ciertas de sus derivadas) sea nula. Los ejemplos (b) y (f) son casos de ecuaciones diferenciales homogéneas.

8-2. Solución de una ecuación diferencial

Dada una ecuación diferencial ordinaria de orden n y cualquier grado, cuya forma más general es

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0, \qquad (8\text{-}1)$$

se establece en matemáticas que en su solución general deben aparecer n constantes arbitrarias. Entonces, puede aceptarse que la solución general de (8-1) es

$$G(x, y, c_1, c_2, \ldots, c_n) = 0 \qquad (8\text{-}2)$$

Gráficamente, la ecuación (8-2) representa a una familia de curvas planas, cada una de ellas obtenidas para valores particulares de las n constantes $c_1, c_2, \ldots, C_n$, como se muestra en la figura 8-1. Cada una de estas curvas corresponde a una solución particular de la ecuación diferencial (8-1), y analíticamente puede obtenerse sujetando la solución general (8-2) a n condiciones independientes que permitan valuar las constantes arbitrarias.

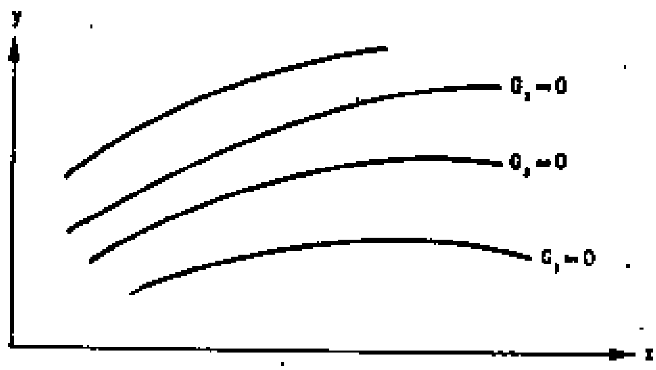


Fig. 8-1. Representación gráfica de la solución general de (8-1).

Dependiendo de cómo se establezcan estas condiciones, se distinguen dos tipos de problemas: los llamados de *valores iniciales* y los de *valores en la frontera*.

Un problema de valores iniciales está gobernado por una ecuación diferencial de orden n y un conjunto de n condiciones independientes, todas ellas válidas para el mismo punto *inicial*. Si (8-1) es la ecuación diferencial que define al problema y $x=a$ es el punto inicial, puede aceptarse que las n condiciones independientes son:

$$y(a) = y_0 \quad , \quad y'(a) = y'_0 \quad , \quad y''(a) = y''_0, \ldots,$$
$$y^{(n)}(a) = y_0^{(n)} \qquad (8\text{-}3)$$

y se tratará de obtener una solución particular de (8-1) que verifique (8-3), como se presenta en la figura 8-2.

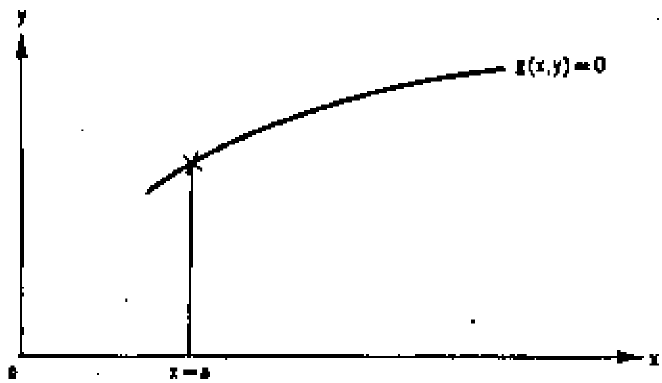


Fig. 8-2. Representación gráfica de la solución de un problema de valores iniciales.

Por el contrario, en los problemas de valores en la frontera deben establecerse condiciones de frontera en todos y cada uno de los puntos que constituyen la frontera del dominio de soluciones del problema. En particular, en el espacio de una dimensión, hay dos puntos fronteras, por ejemplo $x = a$ y $x = b$ si el dominio de soluciones es el intervalo cerrado $a \leqslant x \leqslant b$; por esto mismo el orden mínimo de la ecuación diferencial de un problema de valores en la frontera será dos, como se indica en la figura 8-3.

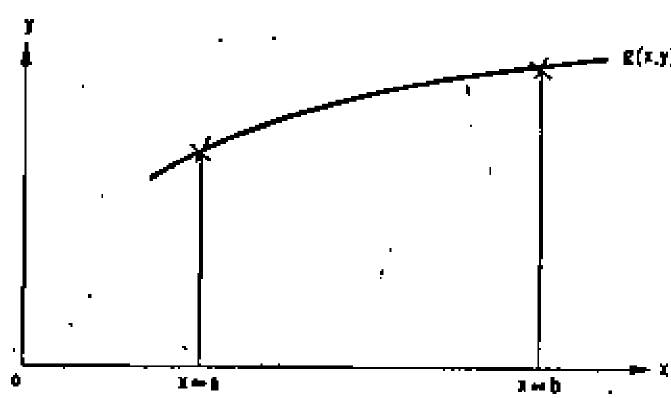
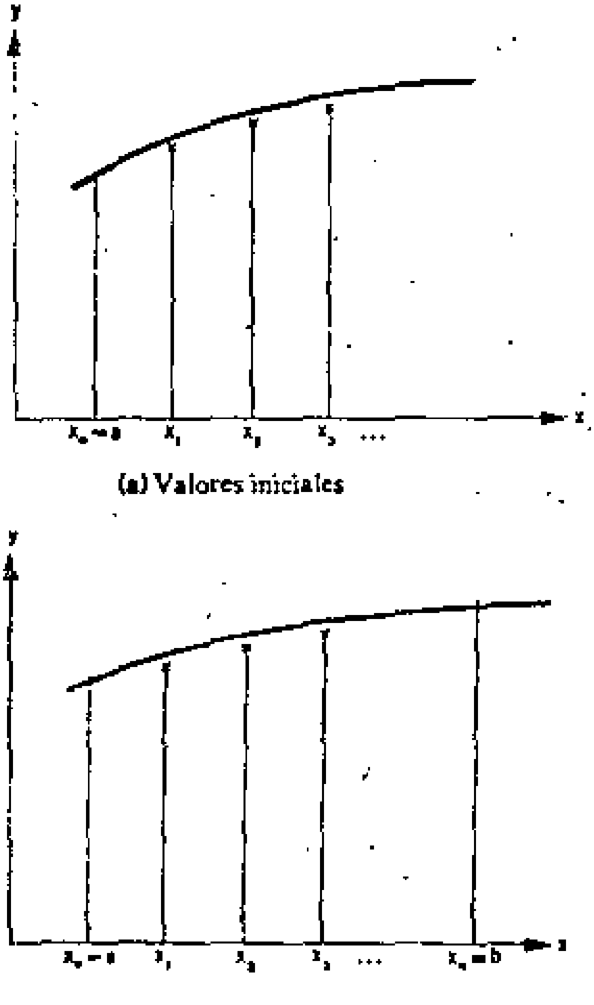


Fig. 8-3. Representación gráfica de un problema de valores en la frontera.

Básicamente, la solución numérica de ecuaciones diferenciales consiste en sustituir el dominio continuo de soluciones por uno discreto formado por puntos aislados igualmente espaciados entre sí. Así, en un problema de valores iniciales, el dominio de definición de soluciones $x \geq a$ se sustituye por el conjunto infinito numerable de puntos $x_0 = a,\ x_1 = x_0 + h,\ x_2 = x_0 + 2h,\ x_3 = x_0 + 3h + , \ldots$, y en el caso de valores en la frontera se sustituye el intervalo $a \leq x \leq b$ por el conjunto finito de puntos $x_0 = a,\ x_1 = x_0 + h,\ x_2 = x_0 + 2h,\ x_3 = x_0 + 3h, \ldots, x_n = x_0 + nh = b$, obtenidos al dividir el intervalo en n partes iguales. La presentación gráfica de estos dos casos se muestra en la figura 8-4.



(a) Valores iniciales

(b) Valores en la frontera

Fig. 8-4. Discretización del dominio de definición de soluciones.

Habiéndose discretizado el problema continuo, se tratará de obtener la solución para los puntos considerados, y esto se hará, en general, sustituyendo las derivadas que aparezcan en la ecuación diferencial y en sus condiciones iniciales o de frontera, por fórmulas numéricas de derivación que proporcionen aproximaciones a las derivadas o tratando de integrar la ecuación diferencial y reemplazando al proceso de integración por una fórmula numérica que se aproxime a la integral. Una vez hecho esto, la ecuación obtenida expresada en diferencias finitas (ya que se han sustituido diferenciales por incrementos finitos) se aplica repetidamente en todos los puntos pivotes donde se desconoce la solución para llegar a una solución aproximada del problema.

En el capítulo 6 se obtuvieron algunas fórmulas numéricas de derivación e integración de funciones discretas, como las que aquí se están considerando.

8-3. Solución numérica de problemas de valores iniciales

Un problema ordinario de valores iniciales está gobernado por una ecuación diferencial ordinaria y un conjunto de condiciones, todas ellas válidas para el mismo punto inicial, $x = x_0$. La solución numérica de este problema consiste en evaluar la integral de $y(x)$ en todos los puntos pivotes de su intervalo de definición, los que estarán igualmente espaciados en h unidades. Estos valores se obtienen, paso a paso, a partir del punto inicial, lo que da el nombre de *métodos de integración paso a paso.*

La evaluación de y en los puntos pivote $x_i = x_0 + ih$, $i = 1, 2, 3, \ldots$, se lleva a cabo usando "fórmulas de recurrencia", que usan los valores conocidos de y en las *estaciones* anteriores, x_{i-1}, x_{i-2}, $x_{i-3}, \ldots$ Así, para aplicar estas ecuaciones, es necesario entonces evaluar muy aproximadamente a $y(x)$ en algunos de los primeros puntos pivotes (uno a cuatro); y esto se hace usualmente desarrollando $f(x)$ en serie de potencias.

8-3.1. Iniciación de la solución por series de Taylor. La solución $y(x)$ de un problema de valores iniciales puede evaluarse formalmente en la vecindad inmediata del punto inicial $x = x_0$ en términos de la *serie de Taylor* (6-71), obteniéndose las derivadas de la función de las condiciones de frontera para $x = x_0$ y por derivaciones sucesivas de la ecuación diferencial misma.

Ejemplo 8-1.

Encontrar la solución del siguiente problema de valores iniciales, por medio de los cuatro primeros términos de la serie de Taylor, para $x = 0.1, 0.2, 0.3, 0.4$ y 0.5

$$y' = \frac{1}{2}(1 + x)y^2$$

$$y(0) = 1$$

De la ecuación diferencial y sus derivadas sucesivas se tiene:

$$y' = \frac{1}{2}(1 + x)y^2 \quad ; \quad y'(0) = \frac{1}{2}(1 + 0)(1^2) = \frac{1}{2}$$

$$y'' = \frac{1}{2}y^2 + (1+x)yy' \quad ;$$

$$y''(0) = \frac{1}{2}(1^2) + (1+0)(1)(\tfrac{1}{2}) = 1$$

$$y''' = 2yy' + (1+x)(y')^2 + (1+x)yy'' \quad ;$$

$$y'''(0) = 2(1)(\tfrac{1}{2}) + (1+0)(\tfrac{1}{2})^2 + $$

$$+ (1+0)(1)(1) = \frac{9}{4}$$

Por lo que

$$y(x) \doteq y_0 + \frac{x-x_0}{1!}y_0' + \frac{(x-x_0)^2}{2!}y_0'' + \frac{(x-x_0)^3}{3!}y_0'''$$

$$\doteq 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{2} + \frac{3}{8}x^3$$

En la tabla 8-1 se muestran tabulados los valores de la solución aproximada obtenida y también los de la exacta, que es

$$y = 4/(4-2x-x^2)$$

Tabla 8-1. Solución de $y' = \frac{1}{2}(1+x)y^2$, $y(0) = 1$, por series de Taylor.

x	y	Y
0.1	1.055375	1.055409
0.2	1.123000	1.123596
0.3	1.205125	1.208459
0.4	1.304000	1.315789
0.5	1.421875	1.454545

8-3.2 Métodos de integración de Euler. La solución de un problema de valores iniciales se obtiene generalmente paso a paso por métodos de integración hacia adelante, lo que permite valuar y_{i+1} tan pronto se conozcan los valores y_i, y_{i-1}, de y en uno o más pivotes anteriores. El más simple de estos métodos, debido a Euler, es aplicable a ecuaciones de primer orden y no quiere conocer la solución en los puntos pivotes anteriores.

Dado el problema de valores iniciales

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y) \quad , \quad y(x_0) = y_0. \qquad (8\text{-}4)$$

se debe integrar la ecuación diferencial en el intervalo $x_i \le x \le x_{i+1} = x_i + h$ y evaluar la integral aplicando la fórmula de integración numérica (6-86), o sea

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{dy}{dx}dx = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x,y)\,dx$$

$$y\Big|_{x_i}^{x_{i+1}} = hf(x_i, y_i) + 0(h^2)$$

entonces

$$y_{i+1} - y_i = hf(x_i, y_i) + 0(h^2)$$

de donde se obtiene la siguiente expresión aproximada llamada *fórmula de Euler*

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i) \qquad (8\text{-}5)$$

Ejemplo 8-2.

Resolver el problema del ejemplo 8-1 aplicando el método de Euler. Se tiene:

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i)$$

donde

$$h = 0.1 \quad . \quad f(x_i, y_i) = \frac{1}{2}(1+x_i)y_i^2 \quad y \quad y_0 = 1$$

Entonces

$$y_{i+1} = y_i + 0.05(1+x_i)y_i^2$$

En la tabla 8-2 aparecen tabulados los valores de la solución aproximada obtenida a partir de la condición inicial conocida $y_0 = 1$.

Tabla 8-2. Solución de $y' = \frac{1}{2}(1\ \ x)y^2$, $y(0) = 1$, con el método de Euler.

x_i	y_i	$0.05(1\ \ x_i)y_i^2$	Y (solución exacta)
0	1	0.050000	1
0.1	1.050000	0.060638	1.055409
0.2	1.110638	0.074011	1.123596
0.3	1.184649	0.091221	1.208459
0.4	1.275870	0.113949	1.315789
0.5	1.389819		1.454545

La pobre aproximación que se observá en la tabla 8-2, al aplicar el método de Euler, puede mejorarse si se evalúa la integral de $f(x,y)$ usando la fórmula trapecial (6-88). Se obtiene

$$y_{i+1} - y_i = \frac{h}{2}\,[f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1})] + 0(h^3)$$

es decir

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}\,[f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1})] \qquad (8\text{-}6)$$

Para determinar el valor de esta expresión se requiere conocer $f(x_{i+1}, y_{i+1})$ y éste se puede estimar usando como valor de y_{i+1} el dado por (8-5). Esta modificación al método de Euler es debida a Gauss. La expresión (8-5) se llama el *predictor* y la (8-6) el *corrector* de este método de Euler-Gauss. Desde luego, que es posible volver a sustituir en (8-6) el valor de y_{i+1} obtenido de la misma, sucesivamente, de manera de mejorar la aproximación hasta un grado de precisión preestablecido.

Ejemplo 8-3.

Resolver el problema de valores iniciales del ejemplo 8-1 aplicando el método de Euler-Gauss.

Se tiene, de (8-5), para predicción

$$y_{i+1,p} = y_i + hf(x_i, y_i)$$

o sea

$$y_{i+1,p} = y_i + 0.05(1 + x_i)y_i^2$$

Para corrección, de (8-6)

$$y_{i+1,c} = y_i + \frac{h}{2}\ [f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1})]$$

$$= y_i + 0.025\ [(1 + x_i)y_i^2 + (1 + x_{i+1})y_{i+1,p}^2]$$

...olución y_i obtenida aparece en la segunda columna de la tabla 8-3. El primer renglón de ésta se calcula en la siguiente forma:

Para $i = 0$, $x = 0$ y $y_0 = 1$, luego

$$(1 + x_0)y_0^2 = (1 + 0)1^2 = 1$$

de donde

$$y_{1,p} = 1 + 0.5(1 + 0)1^2 = 1.05$$

Además

$$(1 + x_1)y_{1,p}^2 = (1 + 0.1)1.05^2 = 1.21275$$

por lo que

$$y_{1,c} = 1 + 0.025[(1 + 0)1^2 + (1 + 0.1)1.05^2] = 1.055319$$

En forma semejante se calculan los otros renglones de la tabla 8-3.

Tabla 8-3. Solución de $y' = \frac{1}{2}(1+x)y^2$, $y(0) = 1$, con el método de Euler-Gauss.

x_i	y_i	$(1+x_i)y_i^2$	$y_{i+1,p}$	[illegible]	Y_i
0	1	1.000000	1.050000	1.212750	1
0.1	1.055319	1.225060	1.116572	1.496080	1.055409
0.2	1.121346	1.514292	1.190063	1.869078	1.123596
0.3	1.207912	1.890829	1.302773	2.376104	1.208459
0.4	1.314755	2.420012	1.435756	3.092093	1.315789
0.5	1.452558				1.454545

Ejemplo 8-4.

Resolver el problema anterior haciendo iteraciones.

En la tabla 8-4 se muestra el proceso para encontrar la solución del ejemplo considerado.

Tabla 8-4. Solución de $y' = \frac{1}{2}(1+x)y^2$, $y(0) = 1$, iterando el método de Euler-Gauss.

x_i	y_i	$(1+x_i)y_i^2$	$y_{i+1,p}$	$(1+x_{i+1})y_{i+1,p}^2$	Y_i
0	1	1.000000	1.050000	1.212750	1
			1.055319	1.225068	
			1.055627	1.225783	
0.1	1.055645	1.225825	1.116936	1.497055	1.055409
			1.123717	1.515287	
			1.124173	1.516517	
			1.124204	1.516601	
0.2	1.124206	1.516607	1.200036	1.872112	1.123596
			1.208924	1.899946	
			1.209620	1.902134	
0.3	1.209675	1.902307	1.304790	2.383466	1.208459
			1.316819	2.427617	
			1.317923	2.431689	
			1.318025	2.432065	
0.4	1.318034	2.432098	1.439639	3.106840	1.315789
			1.456557	3.182337	
			1.458395	3.190373	
			1.458596	3.191253	
			1.458618	3.191349	
0.5	1.458620				1.454545

8-3.3 Métodos de Runge-Kutta En la sección anterior se estableció que el método de Euler para resolver la ecuación diferencial ordinaria de primer orden

$$y' = f(x, y) \qquad (8\text{-}7)$$

con la condición inicial

$$y(x_0) = y_0 \qquad (8\text{-}8)$$

consiste en aplicar repetidamente la fórmula de recurrencia

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n),\ n = 1, 2, 3, \ldots \qquad (8\text{-}9)$$

para determinar la solución de la ecuación diferencial en $x = x_1, x_2, x_3, \ldots$.

Sustituyendo la función $f(x,y)$ dada en (8-7), en (8-9), se tiene que

$$y_{n+1} = y_n + hy_n' \qquad (8\text{-}10)$$

expresión que indica que el método de Euler consiste, gráficamente, en ir de un valor y_n conocido de la solución de la ecuación diferencial (8-7) en un punto, al siguiente por medio de la tangente T_1 a la curva integral $y = y(x)$ en

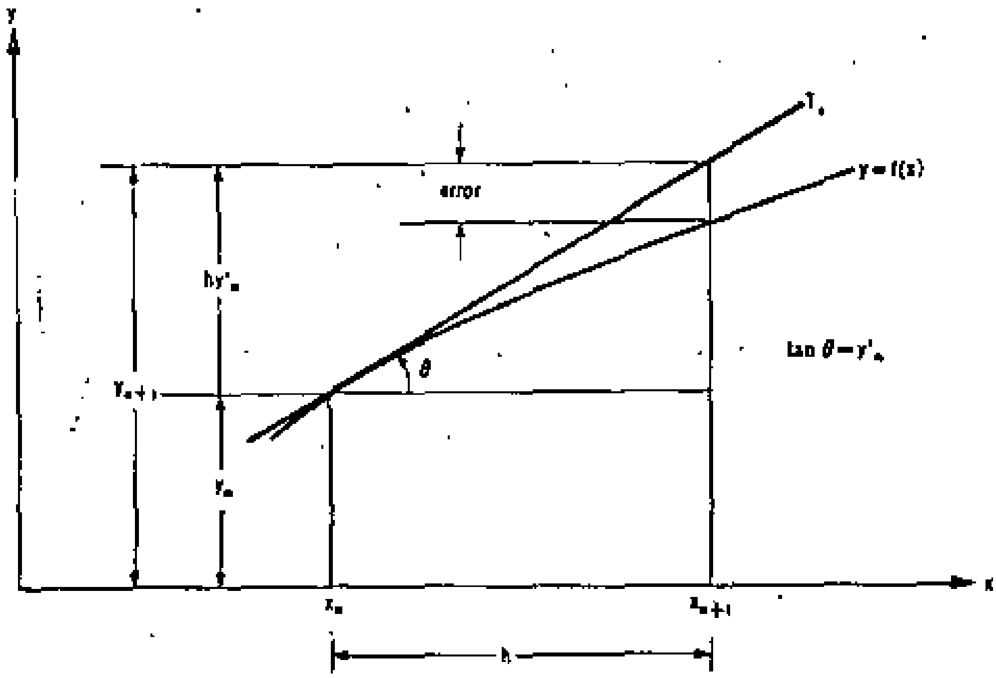


Fig. 8-5. Interpretación gráfica del método de Euler.

el mismo punto de solución conocida, como se muestra en la figura (8-5).

De este planteamiento gráfico puede verse que una mejor aproximación a la solución de la ecuación diferencial (8-7) se obtendría si, en vez de ir por la tangente T_1 para determinar la solución en el siguiente punto pivote, se utiliza una secante con pendiente igual al promedio de pendientes de la curva integral en los puntos de coordenadas (x_n, y_n) y (x_{n+1}, y_{n+1}), en donde $x_{n+1} = x_n + h$ y y_{n+1} puede estimarse con el procedimiento normal de Euler, como se muestra en la figura 8-6. Con lo anterior se obtendría un método mejorado de Euler con error del orden de h^3 definido por la expresión

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}[f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1})] \qquad (8\text{-}11)$$

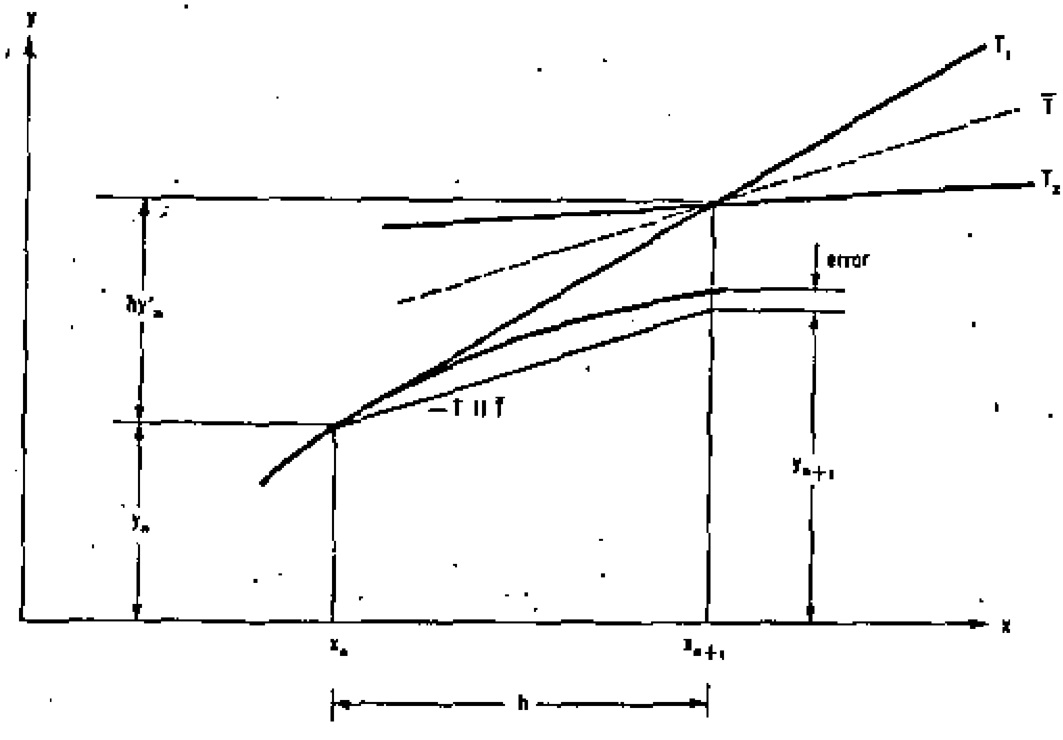


Fig. 8-6. Interpretación gráfica del método mejorado de Euler.

en donde $f(x_{n-1}, y_{n-1})$ es el valor de la función $f(x, y)$ para $x = x_n - h$ y $y = y_n + hf(x_n, y_n)$

Observando las expresiones (8-9) y (8-11) para resolver la ecuación diferencial (8-7), puede decirse que ambas consisten en aplicar la fórmula de recurrencia

$$y_{n+1} = y_n + h\,\phi\,(x_n, y_n) \qquad (8\text{-}12)$$

en donde

$$\phi(x, y) = f(x, y) \qquad (8\text{-}13)$$

en el método de Euler, y

$$\phi(x, y) = \frac{1}{2}[f(x, y) + f(x + h, y + hy')] \qquad (8\text{-}14)$$

en la que

$$y' = f(x, y) \qquad (8\text{-}15)$$

en el método mejorado de Euler.

Como se ve, estos dos métodos tienen los siguientes puntos comunes:

1. Son métodos de un paso; para determinar y_{n+1} se necesita conocer únicamente los valores de x_n y y_n del punto anterior, y
2. No requieren evaluar ninguna derivada, sino únicamente valores de la función $f(x, y)$.

Estas características dan origen a una gran variedad de métodos conocidos como de *Runge-Kutta*. La diferencia entre ellos consiste en la forma como se define la función $\phi(x,y)$ que aparece en la expresión (8-12).

La ventaja de los métodos de Runge-Kutta con respecto al uso de la serie de Taylor, que es también un método de un paso, está expresada en el punto 2 anterior; es decir, los métodos de Runge-Kutta requieren sólo de la función $f(x, y)$ y de ninguna derivada, mientras que la serie de Taylor si requiere de la evaluación de derivadas. Esto hace que, en la práctica, la aplicación de los métodos de Runge-Kutta sean más simples que el uso de la serie de Taylor.

Un método de Runge-Kutta para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden con error del orden de h^5, de uso tan frecuente que en la literatura sobre métodos numéricos se le llama simplemente *el método de Runge-Kutta*, se dará a conocer sin demostrar* y consiste en aplicar la ecuación de recurrencia (8-12), en donde la función $\phi(x,y)$ está dada por la expresión

$$\phi(x, y) = \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \qquad (8\text{-}16)$$

en la cual

$$k_1 = f(x, y)$$

$$k_2 = f(x + \frac{h}{2}\ ,\ y + \frac{hk_1}{2})$$

$$k_3 = f(x + \frac{h}{2}\ ,\ y + \frac{hk_2}{2}) \qquad (8\text{-}17)$$

$$k_4 = f(x + h\ ,\ y + hk_3)$$

La ecuación (8-16) se obtiene haciendo un promedio pesado de las cuatro pendientes k_1, k_2, k_3 y k_4 a la curva integral, en forma semejante a como se procedió con las pendientes de las tangentes T_1 y T_2 que dieron lugar a (8-11)

Ejemplo 8-5.

Resolver el ejemplo 8-1 aplicando el método de Runge-Kutta.

De la condición de inicial del problema se tiene que para $x=0$, $y=1$; además, $h=0.1$. Sustituyendo estos valores en (8-17) se obtiene

$$k_1 = \frac{1}{2}(1 + 0)(1)^2 = 0.5$$

$$k_2 = \frac{1}{2}\left[1 + (0 + \frac{0.1}{2})\right]\left[1 + \frac{(0.1)(0.5)}{2}\right]^2 = 0.5516$$

$$k_3 = \frac{1}{2}\left[1 + (0 + \frac{0.1}{2})\right]\left[1 + \frac{(0.1)(0.5516)}{2}\right]^2$$

$$= 0.5544$$

$$k_4 = \frac{1}{2}\left[1 + (0 + 0.1)\right]\left[1 + (0.1)(0.5544)\right]^2$$

$$= 0.6127$$

Llevando estos valores a (8-16) y el resultante a (8-12), se obtiene que para $x=0.1$ la solución del problema es

$$y(0.1) = 1 + \frac{0.1}{6}\{0.5 + 2\,(0.5516) + 2\,(0.5544)$$

$$+ 0.6127\} = 1.0554$$

Los valores de las k_i, para este punto obtenidos de la solución, son

$$k_1 = \frac{1}{2}(1 + 0.1)(1.0554)^2 = 0.6126$$

$$k_2 = \frac{1}{2}\left[1 + (0.1 + \frac{0.1}{2})\right]\left[1.0554 + \frac{(0.1)(0.6126)}{2}\right]^2$$

$$= 0.6782$$

$$k_3 = \frac{1}{2}\left[1 + (0.1 + \frac{0.1}{2})\right]\left[1.0554 + \frac{(0.1)(0.6782)}{2}\right]^2$$

* La demostración puede encontrarse en *Digital Computation and Numerical Methods* de Southworth y Deleew, editorial Mc Graw Hill.

$k_3 = 0.6823$

$$k_4 = \frac{1}{2}[1 + (0.1 + 0.1)][1.0554 + (0.1)(0.6823)]^2$$

$$= 0.7575$$

luego

$$y(0.2) = 1.0554 + \frac{0.1}{6}[0.6126 + 2(0.6782) + 2(0.6823)$$

$$+ 0.7575] = 1.1236$$

Continuando de la misma forma se obtiene la solución que se muestra en la tabla 8-5.

Tabla 8-5. Solución de $y' = \frac{1}{2}(1 + x)y^2$, $y(0) = 1$, con el método de Runge-Kutta.

x	y	k_1	k_2	k_3	k_4
0	1	0.5000	0.5516	0.5544	0.6127
0.1	1.0554	0.6126	0.6782	0.6823	0.7575
0.2	1.1236	0.7575	0.8431	0.8494	0.9494
0.3	1.2085	0.9492	1.0647	1.0745	1.2121
0.4	1.3158	1.2119	1.3735	1.3896	1.5872
0.5	1.4545	1.5868	1.8234	1.8517	2.1509

8-3.4 Método predictor-corrector de Milne. Un método predictor-corrector para ecuaciones diferenciales de primer orden con error del orden de h^5, es el método de *Milne*, que requiere conocer la solución y y el valor de su primera derivada y', en los primeros cuatro pivotes, para aplicarlo y continuar la solución con el mismo. Estos valores de y pueden obtenerse desarrollando la función en serie de potencias o aplicando alguno de los métodos de Euler o de Runge-Kutta.

Dada la ecuación diferencial y los cuatro valores pivotales

$$y' = f(x, y) \quad ; \quad y_0, y_1, y_2, y_3 \quad ; \quad f_0, f_1, f_2, f_3, \tag{8-18}$$

donde

$$f_i = f(x_i, y_i).$$

puede integrarse la ecuación diferencial entre x_{i-3} y x_{i+1} aplicando la fórmula de integración numérica (6-94), para obtener el predictor de Milne, o sea

$$\int_{x_{i-3}}^{x_{i+1}} y' dx = \int_{x_{i-3}}^{x_{i+1}} f(x, y)\, dx$$

entonces

$$y_{i+1} - y_{i-3} = \frac{4}{3}h(2f_{i-2} - f_{i-1} + 2f_i) + 0(h^5)$$

por lo tanto

$$y_{i+1,p} = y_{i-3} + \frac{4}{3}h(2f_{i-2} - f_{i-1} + 2f_i) \tag{8-19}$$

con lo que puede calcularse f_{i+1}. El valor correcto de y_{i+1} se puede obtener integrando la ecuación diferencial entre x_{i-1} y x_{i+1}, por medio de la fórmula de Simpson del 1/3 (6-92). Se tiene

$$\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} y' dx = \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} f(x, y)\, dx$$

$$y_{i+1} - y_{i-1} = \frac{h}{3}(f_{i-1} + 4f_i + f_{i+1}) + 0(h^5)$$

por lo que

$$y_{i+1,c} = y_{i-1} + \frac{h}{3}(f_{i-1} + 4f_i + f_{i+1}) \tag{8-20}$$

La ecuación (8-20) puede ser iterada usando $y_{i+1,c}$ para obtener valores mejores de f_{i+1}, pero esto es innecesario por el orden alto de error, siempre que h sea relativamente pequeña.

Ejemplo 8-6.

Resolver el problema de valores iniciales del ejemplo 8-1, aplicando el método de Milne para $x = 0.4, 0.5, 0.6$ y 0.7. Use la solución exacta dada para $x = 0, 0.1, 0.2$ y 0.3 en el mismo ejemplo.

Se tiene, de (8-19):

$$y_{i+1,p} = y_{i-3} + \frac{4}{3}h(2f_{i-2} - f_{i-1} + 2f_i)$$

$$= y_{i-3} + \frac{4}{30}(2f_{i-2} - f_{i-1} + 2f_i)$$

De (8-20)

$$y_{i+1,c} = y_{i-1} + \frac{h}{3}(f_{i-1} + 4f_i + f_{i+1})$$

$$= y_{i-1} + \frac{1}{30}(f_{i-1} + 4f_i + f_{i+1})$$

en donde

$$f_i = \frac{1}{2}(1 + x_i)y_i^2$$

La solución obtenida se encuentra en la cuarta columna de la tabla 8-6. Los renglones correspondientes a $x=0$, 0.1, 0.2 y 0.3, para los que se admite conocida la solución, se llenan todos en la misma forma. Por ejemplo, para los dos primeros se tiene:

$$f_{0,c} = \frac{1}{2}(1 + 0)1^2 = 0.5$$

$$f_{1,c} = \frac{1}{2}(1 + 0.1)1.055409^2 = 0.612638$$

La solución de la ecuación para $x = 0.4$ (quinto renglón de la tabla) se calcula como sigue:

Para $i = 3$, $f_1 = 0.612638$, $f_2 = 0.757480$, $f_3 = 0.949242$

y $y_0 = 1$, $y_2 = 1.12$

entonces

$$y_{4,p} = 1 + \frac{4}{30}[2(0.612638) - 0.757480 + 2(0.949242)]$$
$$= 1.315504$$
$$f_{4,p} = \frac{1}{2}(1 + 0.4)\ 1.315504^2 = 1.211385$$
$$y_{4,c} = 1.12 + \frac{1}{30}[0.757480 + 4(0.949242) + 1.211385]$$
$$= 1.315790$$
$$f_{4,c} = \frac{1}{2}(1 + 0.4)\ 1.315790^2 = 1.211912$$

La solución para los otros valores de x se calculan en la misma forma.

Tabla 8-6. Solución de $y' = \frac{1}{2}(1+x)y^2$, $y(0) = 1$, con el método predictor-corrector de Milne.

x_i	$y_{i,p}$	$f_{i,p}$	$y_{i,c}$	$f_{i,c}$	Y_i
0				0.500000	1
0.1				0.612638	1.055409
0.2				0.757480	1.123596
0.3				0.949242	1.208459
0.4	1.315504	1.211385	1.315790	1.211912	1.315789
0.5	1.454014	1.585618	1.454542	1.586771	1.454545
0.6	1.638277	2.147162	1.639328	2.149918	1.639344
0.7	1.893377	3.047147	1.895662		1.895734

8-3.5 Solución de sistemas de ecuaciones diferenciales. Cualquier método de integración hacia adelante de ecuaciones de primer orden puede ser extendido para integrar sistemas de ecuaciones de primer orden, o ecuaciones de orden superior.

Sea el sistema de dos ecuaciones diferenciales de primer orden

$$y' = f(x, y, z) \quad ; \quad z' = g(x, y, z) \qquad (8\text{-}21)$$

donde y y z son funciones de la misma variable independiente x, con las dos condiciones iniciales

$$y(x_0) = y_0 \quad ; \quad z(x_0) = z_0 \qquad (8\text{-}22)$$

Si se conocen los valores y_1, y_2, y_3, z_1, z_2, y z_3, al aplicar el método de Milne a ambas ecuaciones, se obtiene el siguiente conjunto de fórmulas:

$$y_{i+1,p} = y_{i-3} + \frac{4}{3}h(2f_{i-2} - f_{i-1} + 2f_i) \qquad (8\text{-}23)$$

$$z_{i+1,p} = z_{i-3} + \frac{4}{3}h(2g_{i-2} - g_{i-1} + 2g_i) \qquad (8\text{-}24)$$

que permiten determinar f_{i+1} y g_{i+1}. Además, se tienen

$$y_{i+1,c} = y_{i-1} + \frac{h}{3}(f_{i-1} + 4f_i + f_{i+1}) \qquad (8\text{-}25)$$

$$z_{i+1,c} = z_{i-1} + \frac{h}{3}(g_{i-1} + 4g_i + g_{i+1}) \qquad (8\text{-}26)$$

que constituyen una aproximación al sistema (8-21), con las condiciones iniciales (8-22)

Ejemplo 8-7.

Resolver el sistema de ecuaciones diferenciales $y' = y + z$; $z' = z - y$; con las condiciones iniciales $y(0)$ 0.1; $z(0) = 0.2$.

De las ecuaciones diferenciales se tiene:

$$y' = y + z \qquad z' = z - y$$
$$y'' = y' + z' \qquad z'' = z' - y'$$
$$y''' = y'' + z'' \qquad z''' = z'' - y''$$
$$\cdots \qquad \cdots$$
$$\cdots \qquad \cdots$$

Calculando el valor de éstas en el punto inicial, x 0, y teniendo en cuenta las condiciones iniciales, resulta

$$y'(0) = 0.3 \qquad z'(0) = 0.1$$
$$y''(0) = 0.4 \qquad z''(0) = -0.2$$
$$y'''(0) = 0.2 \qquad z'''(0) = -0.6$$
$$\cdots \qquad \cdots$$
$$\cdots \qquad \cdots$$

con lo que se obtienen los desarrollos de $y(x)$ y $z(x)$, en un entorno de $x = 0$, o sea

$$y = 0.1 + 0.3x + \frac{0.4}{2!}x^2 + \frac{0.2}{3!}x^3 + \ldots$$

$$z = 0.2 + 0.1x - \frac{0.2}{2!}x^2 - \frac{0.6}{3!}x^3 + \ldots$$

Tabulando estas funciones para $x = 0, 0.1, 0.2$ y 0.3, se obtienen los valores indicados en la tabla 8-7.

Para continuar la solución, se usan las expresiones (8-23) a (8-26); es decir,

$$y_{i+1,p} = y_{i-3} + \frac{4}{30}(2f_{i-2} - f_{i-1} + 2f_i)$$

$$z_{i+1,p} = z_{i-3} + \frac{4}{30}(2g_{i-2} - g_{i-1} + 2g_i)$$

$$y_{i+1,c} = y_{i-1} + \frac{1}{30}(f_{i-1} + 4f_i + f_{i+1})$$

$$z_{i+1,c} = z_{i-1} + \frac{1}{30}(g_{i-1} + 4g_i + g_{i+1})$$

en donde

$$f_i = y_i + z_i \quad ; \qquad g_i = z_i - y_i$$

Tabla 8-7. Iniciación de la solución para el ejemplo 8-7.

x_i	y_i	z_i
0	0.100	0.200
0.1	0.132	0.209
0.2	0.168	0.215
0.3	0.209	0.218

En la tabla 8-8 aparecen tabuladas estas expresiones para $x = 0.4$, 0.5 y 0.6. La solución del sistema aparece en las columnas $y_{i,c}$ y $z_{i,c}$, que se obtienen como se mostró en el ejemplo 8-6.

Tabla 8-8. Continuación de la solución para el ejemplo 8-7.

x_i	$y_{i,p}$	$z_{i,p}$	$f_{i,p}$	$g_{i,p}$	$y_{i,c}$	$z_{i,c}$	$f_{i,c}$	$g_{i,c}$
0					0.100	0.200	0.300	0.100
0.1					0.132	0.209	0.341	0.077
0.2					0.168	0.215	0.383	0.047
0.3					0.209	0.218	0.427	0.009
0.4	0.254	0.217	0.471	−0.037	0.253	0.217	0.470	−0.036
0.5	0.303	0.211	0.514	−0.092	0.303	0.210	0.513	−0.093
0.6	0.356	0.197	0.553	−0.159	0.356	0.198		

8-3.6 Solución de ecuaciones diferenciales de orden superior. Cualquier ecuación diferencial de orden alto puede escribirse como un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden. Por ejemplo, la ecuación de tercer orden,

$$y''' = f(x, y, y', y'') \tag{8-27}$$

es equivalente al sistema

$$\begin{aligned} y' &= u \\ (y'' =)\, u' &= v \\ (y''' = u'' =)\, v' &= f(x, y, u, v) \end{aligned} \tag{8-28}$$

Así, la ecuación diferencial de orden mayor de uno puede resolverse en la forma vista en la sección anterior, ya que una ecuación diferencial de orden n se transforma en n ecuaciones diferenciales de oden uno.

Ejemplo 8-8.

Resolver el problema de valores iniciales definidos por la ecuación diferencial $y'' - y' - 2y = 0$, con las condiciones de frontera $y(0) = 0.1$; $y'(0) = 0.2$

Primero, la ecuación $y'' = 2y + y'$ se transforma en el sistema de dos ecuaciones:

$$y' = z$$

$$(y'' =)\, z' = 2y + z$$

con las condiciones de frontera $y(0) = 0.1$; $z(0) = 0.2$. Derivando las funciones $y(x)$ y $z(x)$, para desarrollarlas por series de potencias, se tiene

$$\begin{aligned} y' &= z & z' &= 2y + z \\ y'' &= z' & z'' &= 2y' + z' \\ y''' &= z'' & z''' &= 2y'' + z'' \\ &\ldots & &\ldots \\ &\ldots & &\ldots \end{aligned}$$

Los valores de éstas en el punto inicial, son

$$\begin{aligned} y\ (0) &= 0.1 & z\ (0) &= 0.2 \\ y'\ (0) &= 0.2 & z'\ (0) &= 2(0.1) + 0.2 = 0.4 \\ y''\ (0) &= 0.4 & z''\ (0) &= 2(0.2) + 0.4 = 0.8 \\ y'''(0) &= 0.8 & z'''(0) &= 2(0.4) + 0.8 = 1.6 \\ &\ldots & &\ldots \\ &\ldots & &\ldots \end{aligned}$$

Sustituyendo valores en la expresión que define la serie de Taylor

$$y = 0.1 + 0.2x + 0.2x^2 + 0.133x^3 + \ldots$$

$$z = 0.2 + 0.4x + 0.4x^2 + 0.267x^3 + \ldots$$

y tabulándolas para $x = 0.1$, 0.2 y 0.3, se obtiene la tabla 8-9

Tabla 8-9. Iniciación de la solución para el ejemplo 8-8.

x_i	y_i	z_i
0	0.100	0.200
0.1	0.122	0.244
0.2	0.149	0.298
0.3	0.182	0.363

Sustituyendo ahora en las expresiones (8-23) a (8-26), se obtiene

$$y_{i+1,p} = y_{i-3} + \frac{4}{30}(2f_{i-2} - f_{i-1} + 2f_i)$$

$$z_{i+1,p} = z_{i-3} + \frac{4}{30}(2g_{i-2} - g_{i-1} + 2g_i)$$

$$y_{i+1,c} = y_{i-1} + \frac{1}{30}(f_{i-1} + 4f_i + f_{i+1})$$

$$z_{i+1,c} = z_{i-1} + \frac{1}{30}(g_{i-1} + g_i + g_{i+1})$$

en donde

$$f_i = z_i \quad ; \quad g_i = 2y_i + z_i$$

En la tabla 8-10 aparece la continuación de la solución de la ecuación obtenida, al tabular las expresiones anteriores.

Tabla 8-10. Continuación de la solución para el ejemplo 8-8.

x_i	$y_{i,p}$	$z_{i,p}$	$f_{i,p}$	$g_{i,p}$	$y_{i,c}$	$z_{i,c}$	$f_{i,c}$	$g_{i,c}$
0					0.100	0.200	0.200	0.400
0.1					0.122	0.244	0.244	0.488
0.2					0.149	0.298	0.298	0.596
0.3					0.182	0.363	0.363	0.727
0.4	0.222	0.445	0.445	0.689	0.222	0.444	0.444	0.888
0.5	0.271	0.543	0.543	1.085	0.271	0.542	0.542	1.084
0.6	0.331	0.663	0.663	1.325	0.331	0.662		

También es posible resolver ecuaciones diferenciales de orden mayor de uno en forma directa, sin tener que transformarlas en un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden. Por ejemplo, para la ecuación diferencial de segundo orden

$$y'' = f(x, y, y') \tag{8-29}$$

con las condiciones

$$y(x_0) = y_0 \quad , \quad y'(x_0) = y'_0$$

se debe desarrollar en serie de potencias la función $y(x)$, para calcular valores de y_i, y'_i y f_i en los cuatro primeros pivotes. La continuación de la solución puede obtenerse siguiendo el método de Milne, como se muestra a continuación.

Integrando la ecuación diferencial $y'' = f(x, y, y')$ entre x_{i-3} y x_{i+1}, usando la fórmula (6-94), se obtiene:

$$y'_{i+1,p} = y'_{i-3} + \frac{4}{3}h(2f_{i-2} - f_{i-1} + 2f_i) \tag{8-30}$$

Conociendo $y_{i+1,p}$ se puede predecir el valor de y_{i+1} al integrar la propia derivada entre y_{i-1} y y_{i+1} por medio de la fórmula de Simpson del 1/3 (6-92), o sea

$$y_{i+1,p} = y_{i-1} + \frac{h}{3}(y'_{i-1} + 4y'_i + y'_{i+1}) \tag{8-31}$$

Con los valores de predicción de y_{i+1} y y'_{i+1} se puede calcular el valor de f_{i+1}, y con éste corregir el valor de y'_{i+1}, integrando de nuevo la ecuación diferencial, ahora entre x_{i-1} y x_{i+1}, aplicando (6-92); es decir,

$$y'_{i+1,c} = y'_{i-1} + \frac{h}{3}(f_{i-1} + 4f_i + f_{i+1}) \tag{8-32}$$

Finalmente, el valor correcto de y_{i+1} se obtiene repitiendo el proceso de integración que originó (8-31)

$$y_{i+1,c} = y_{i-1} + \frac{h}{3}(y'_{i-1} + 4y'_i + y'_{i+1}) \tag{8-33}$$

Ejemplo 8-9.

Resolver el ejemplo 8-8 directamente, sin transformarlo a un sistema.

De la ecuación diferencial, se tiene que

$$y'' = y' + 2y$$

$$y''' = y'' + 2y'$$

$$y^{iv} = y''' + 2y'',$$

y en el punto inicial $x=0$, teniendo en cuenta las condiciones iniciales.

$$y \ (0) = 0.1$$

$$y' \ (0) = 0.2$$

$$y'' \ (0) = 0.2 + 2(0.1) = 0.4$$

$$y''' \ (0) = 0.4 + 2(0.2) = 0.8$$

$$y^{iv} \ (0) = 0.8 + 2(0.4) = 1.6$$

luego

$$y = 0.1 + 0.2x + 0.2x^2 + 0.133x^3$$

y derivando

$$y' = 0.2 + 0.4x + 0.4x^2 + 0.267x^3$$

Estas están tabuladas en la tabla 8-11 para $x=0, 0.1, 0.2$ y 0.3

Tabla 8-11. Iniciación de la solución para el ejemplo 8-9.

x_i	y_i	y'_i
0	0.100	0.200
0.1	0.122	0.244
0.2	0.149	0.298
0.3	0.182	0.363

Aplicando (8-30) a (8-33), resulta

$$y'_{i+1,p} = y'_{i-3} + \frac{4}{30}(2f_{i-2} - f_{i-1} + 2f_i)$$

$$y_{i+1,p} = y_{i-1,p} + \frac{1}{30}(y'_{i-1} + 4y'_i + y'_{i+1})$$

$$y'_{i+1,c} = y'_{i-1} + \frac{1}{30}(f_{i-1} + 4f_i + f_{i+1})$$

$$y_{i+1,c} = y_{i-1} + \frac{1}{30}(y'_{i-1} + 4y'_i + y'_{i+1})$$

en donde

$$f_i = y'_i + 2y_i$$

Tabulándolas para x 0.4, 0.5 y 0.6 se obtiene en la tabla 8-12 la solución de la ecuación diferencial

Tabla 8-12. Continuación de la solución para el ejemplo 8-9.

x_i	$y'_{i,p}$	$y_{i,p}$	$f_{i,p}$	$y'_{i,c}$	$y_{i,c}$	$f_{i,c}$
0				0.200	0.100	0.400
0.1				0.244	0.122	0.488
0.2				0.298	0.149	0.596
0.3				0.363	0.182	0.727
0.4	0.445	0.222	0.889	0.444	0.222	0.888
0.5	0.543	0.271	1.085	0.542	0.271	1.084
0.6	0.663	0.331	1.325	0.662	0.331	

8-3.7 Métodos de diferencias finitas. La integración hacia adelante paso a paso de ecuaciones diferenciales de orden superior puede también efectuarse sustituyendo en la ecuación diferencial, y sus condiciones iniciales, las derivadas por fórmulas numéricas de derivación *consistentes;* es decir, todas ellas con el mismo orden de error. La ecuación en diferencias finitas así obtenida, deberá aplicarse repetidamente en los puntos pivotes y resolverse en términos de la solución previamente obtenida, con el mismo procedimiento en los puntos pivotes anteriores. Este proceso puede llevarse a cabo sin necesidad de iniciar la solución por series de Taylor.

Ejemplo 8-10.

Resolver el ejemplo 8-8 por diferencias finitas. Se tiene,

$$y'' - y' - 2y = 0 \quad ; \quad y(0) = 0.1 \quad ; \quad y'(0) = 0.2$$

Sustituyendo la primera y segunda derivadas que aparecen en la ecuación diferencial, por fórmulas numéricas de derivación con errores del orden de h^2, expresiones (6-79) y (6-83), se obtiene, para el i-ésimo pivote:

$$\frac{1}{h^2}(y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}) - \frac{1}{2h}(-y_{i-1} + y_{i+1}) - 2y_i = 0$$

Teniendo en cuenta que $h = 0.1$, se llega a

$$100(y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}) - 5(-y_{i-1} + y_{i+1}) - 2y_i = 0$$

$$105y_{i-1} - 202y_i + 95y_{i+1} = 0$$

por lo que

$$y_{i+1} = 2.126y_i - 1.105y_{i-1} \tag{8-34}$$

Para las condiciones de frontera, se obtiene

$$y_0 = 0.1$$

$$\frac{1}{2h}(-y_{-1} + y_1) = 0.2 \tag{8-35}$$

entonces

$$y_{-1} = y_1 - 0.04 \tag{8-36}$$

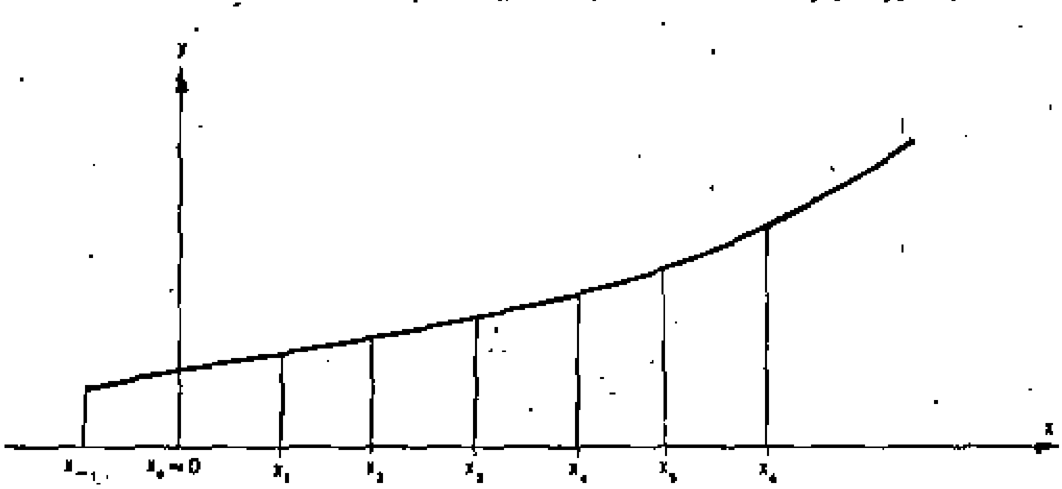


Fig. 8-7. Representación gráfica de la solución del ejemplo 8-10.

Aplicando (8-34) en los puntos $x_0, x_1, x_2, \ldots$, teniendo en cuenta (8-35) y (8-36), se tiene

Para $x_0 = 0$, $y_1 = 2.126y_0 - 1.105y_{-1}$

Teniendo en cuenta (8-35) y (8-36)

$$\begin{aligned} y_1 &= 2.126(0.1) - 1.105(y_1 - 0.04) \\ &= 0.213 - 1.105\,y_1 + 0.044 \\ 2.205y_1 &= 0.257 \end{aligned}$$

por lo tanto

$$y_1 = 0.117 \tag{8-37}$$

Para $x_1 = 0.1$, $y_2 = 2.126y_1 - 1.105y_0$

Teniendo en cuenta (8-35) y (8-37)

$$y_2 = 2.126(0.117) - 1.105(0.1)$$

$$= 0.138$$

Para $x_2 = 0.2$, $y_3 = 2.126(0.138) - 1.105(0.117)$

$$= 0.164$$

Para $x_3 = 0.3$, $y_4 = 2.126(0.164) - 1.105(0.138)$

$$= 0.196$$

Para $x_4 = 0.4$, $y_5 = 2.126(0.196) - 1.105(0.164)$

$$= 0.235$$

Para $x_5 = 0.5$, $y_6 = 2.126(0.235) - 1.105(0.196)$

$$= 0.283$$

8-4. Solución numérica de problemas de valores en la frontera

Un problema de valores en la frontera se definió como uno gobernado por una ecuación diferencial de orden mayor de uno con ciertas condiciones de frontera en cada borde. Si la ecuación diferencial es ordinaria de orden *2n*, en general habrá *n* condiciones de frontera en cada borde $x = a$ y $x = b$ del intervalo $a \leq x \leq b$ de definición de soluciones, y estas condiciones contendrán derivadas hasta de orden *2n—1*.

8-4.1 Integración paso a paso. Los problemas de valores en la frontera definidos por una ecuación diferencial ordinaria de orden *dos*, pueden resolverse usando los métodos de integración hacia adelante paso a paso de la sección anterior. Para hacerlo, debe considerarse a y_1, la solución desconocida de y en el primer punto pivote, como parámetro, y resolver el problema para diferentes valores supuestos de y_1 hasta que la solución correspondiente satisfaga la condición de frontera en el otro borde del intervalo de integración. El procedimiento para seleccionar los valores sucesivos de y_1 puede ser simplemente el de prueba y error y/o el de interpolación.

Los problemas de valores en la frontera de orden mayor de dos pueden resolverse con el mismo procedimiento, pero se requiere suponer el valor inicial de dos o más parámetros (y_1 y algunas de sus derivadas), lo que puede hacerlo bastante complejo.

Ejemplo 8-11.

Resolver el problema de valores en la frontera de orden dos

$$y'' + y^2 = 0 \quad ; \quad y(0) = 2 \quad ; \quad y(1) = 0.$$

Sustituyendo la derivada por la fórmula numérica de derivación (6-83), se tiene

$$\frac{1}{h^2}(y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}) + y_i^2 = 0$$

con pivote en x_i. Para $h = 0.25$ se obtiene la fórmula de recurrencia

$$y_{i+1} = 2y_i - \left(\frac{y_i}{4}\right)^2 - y_{i-1}.$$

Las condiciones de frontera son

$$y_0 = 2$$

$$y_4 = 0$$

las cuales se muestran en la figura 8-8.

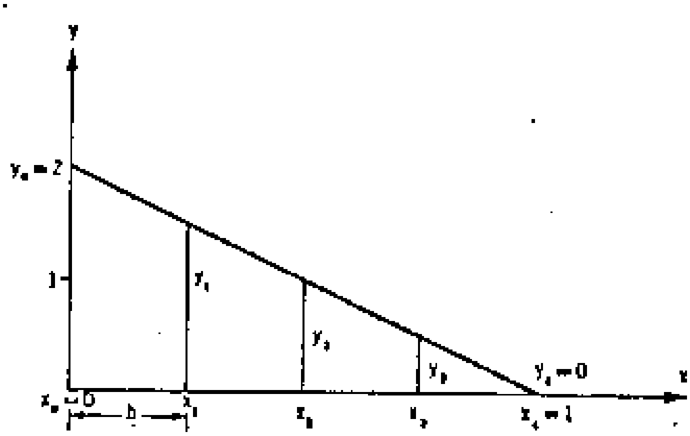


Fig. 8-8. Representación gráfica de la solución del ejemplo 8-11.

La solución se iniciará suponiendo que $y_1 = 1.5$ (obtenido al admitir que la solución estará cerca de la recta que une a la solución en los bordes del problema). El resultado de la integración hacia adelante se muestra en la segunda columna de la tabla 8-13.

Tabla 8-13. Solución del ejemplo 8-11 integrado paso a paso.

x_i \ y_i	$y_1 = 1.5$	$y_1 = 2.0$	$y_1 = 1.70$	$y_1 = 1.6825$
0	2.00	2.00	2.00	2.0000
0.25	1.50	2.00	1.70	1.6825
0.50	0.86	1.75	1.22	1.1881
0.75	0.17	1.31	0.65	0.6055
1	-0.52	0.76	0.05	0.0000

El valor $y_4 = -0.52$ obtenido, no verifica la condición de frontera $y_4 = 0$. Aparentemente el valor supuesto de y_1 fue demasiado pequeño. Suponiendo ahora $y_1 = 2.0$, se obtiene la solución mostrada en la tercera columna de la misma tabla, de la que se observa que el nuevo valor considerado fue grande. Haciendo una interpolación lineal entre estos valores para determinar cuánto debe valer aproximadamente y_1 para que $y_4 = 0$, se tiene

y_4	y_1
-0.52	1.50
0.76	2.00

$0 \rightarrow$

es decir

$$y_1 = \frac{0 \quad - 0.76}{-0.52 - 0.76}\, 1.50 + \frac{0 \quad + 0.52}{0.76 + 0.52}\, 2.00 = 1.70$$

La fórmula de recurrencia produce la quinta columna de la tabla 8-13 al usar $y_1 = 1.70$. Interpolando entre 1.50 y 1.70

y_1	y_4
-0.52	1.50
0.05	1.70

$0 \rightarrow$

se tiene

$$y_1 = \frac{0 \quad - 0.05}{-0.52 - 0.05}\, 1.50 + \frac{0 \quad + 0.52}{0.05 + 0.52}\, 1.70 = 1.6825$$

A partir de $y_1 = 1.6825$ resulta la solución mostrada en la última columna de la tabla 8-13.

8-4.2 Solución de problemas lineales. La solución de un problema ordinario *lineal* de cualquier orden de valores en la frontera, por diferencias finitas, reduce la integración de la ecuación diferencial a la evaluación de las raíces de un sistema de ecuaciones algebraicas simultáneas. Estas raíces son los valores de la solución requerida en los puntos pivotes de su intervalo de definición.

Considérese un problema ordinario lineal de valores en la frontera cualquiera, con ciertas condiciones de frontera en los extremos del intervalo de definición de su solución.

Para resolverlo por diferencias finitas, se debe:

1. Dividir el intervalo en definición de la solución $[x_0, x_1]$ en n partes iguales de longitud h. Cada uno de los puntos que definen los n subintervalos formados, se llaman pivotes o estaciones.

2. Sustituir, en la ecuación diferencial y sus condiciones de frontera, las derivadas por expresiones aproximadas de derivación numérica, todas ellas con el mismo orden de error (usualmente del orden de h^2).

3. Aplicar el operador diferencial lineal, obtenido de la ecuación diferencial, en los $n-1$ puntos pivotes $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$. Si en alguna de las fronteras no se conoce la solución, también en ésa se deberá aplicar el operador diferencial. Al centrar éste cerca de las fronteras, es posible que se recurra a puntos *ficticios* localizados fuera del rango de integración, los que pueden evaluarse usando las condiciones de fronteras.

4. Resolver el sistema de ecuaciones lineales algebraicas obtenidas en el párrafo previo. Este sistema dará los valores de $y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$, y de y_0 y y_n si no se conocen.

Ejemplo 8-12

Resolver el problema de valores en la frontera definido por la ecuación diferencial $\frac{d^2y}{dx^2} - y = 0$ en el intervalo $[0, 1]$, con las condiciones de frontera $y(0) = 0$, $y(1) = 1$

1. El problema se resolverá dividiendo el intervalo en 4 partes iguales; es decir, $h = 0.25$, como se presenta en la figura 8-9.

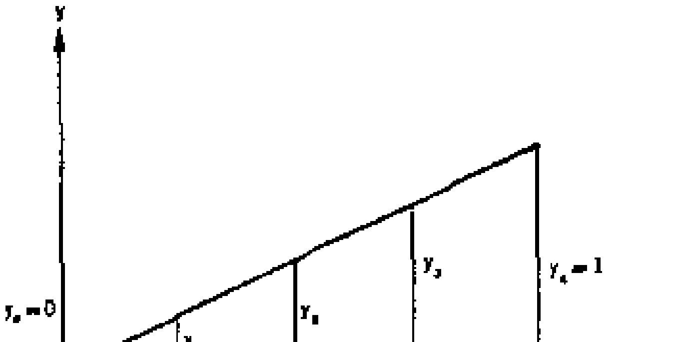


Fig. 8-9. Representación gráfica de la solución del ejemplo 8-12.

2. Usando fórmulas numéricas de derivación del orden de h^2, se tiene de la ecuación diferencial, que

$$\frac{1}{h^2}(y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}) - y_i = 0$$

con pivote en x_i. Sustituyendo el valor de h y simplificando, resulta

$$y_{i-1} - 2.0625y_i + y_{i+1} = 0 \qquad (8\text{-}38)$$

Las condiciones de frontera se transforman en

$$y_0 = 0 \qquad (8\text{-}39)$$

$$y_4 = 1 \qquad (8\text{-}40)$$

3. Aplicando (8-38) en los tres puntos pivotes, se tiene:

Para $x = 0.25$, $i = 1$ y de (8-38)

$$y_0 - 2.0625y_1 + y_2 = 0$$

pero por (8-39), $y_0 = 0$, luego

$$-2.0625y_1 + y_2 = 0 \qquad (8\text{-}41)$$

Para $x = 0.50$, $i = 2$ y se obtiene

$$y_1 - 2.0625y_2 + y_3 = 0 \qquad (8\text{-}42)$$

Para $x = 0.75$, $i = 3$ por lo que

$$y_2 - 2.0625y_3 + y_4 = 0$$

pero $y_4 = 1$ por (8-40), entonces

$$y_2 - 2.0625y_3 = -1 \qquad (8\text{-}43)$$

4. De las ecuaciones (8-41), (8-42) y (8-43) resulta el sistema

$$\begin{cases} -2.0625y_1 + y_2 = 0 \\ y_1 - 2.0625y_2 + y_3 = 0 \\ y_2 - 2.0625y_3 = -1 \end{cases}$$

el cual es apropiado para resolverlo con el método de Gauss-Seidel o de relajaciones. Se resolverá con el primero, a partir de $y_1 = 0.25$, $y_2 = 0.50$, $y_3 = 0.75$, obtenidos suponiendo que la solución puede estar cerca de la recta que pasa por los puntos conocidos, correspondientes a las fronteras. Se tiene,

$$\begin{cases} y_1 = 0.485y_2 \\ y_2 = 0.485y_1 + 0.485y_3 = 0.485(y_1 + y_3) \\ y_3 = 0.485y_2 + 0.485 \quad = 0.485(y_2 + 1) \end{cases}$$

Luego

$$y_0 = \begin{bmatrix} 0.250 \\ 0.500 \\ 0.750 \end{bmatrix};\ y_1 = \begin{bmatrix} 0.243 \\ 0.482 \\ 0.719 \end{bmatrix};\ y_2 = \begin{bmatrix} 0.234 \\ 0.462 \\ 0.709 \end{bmatrix}$$

$$y_3 = \begin{bmatrix} 0.224 \\ 0.453 \\ 0.705 \end{bmatrix};\ y_4 = \begin{bmatrix} 0.220 \\ 0.449 \\ 0.703 \end{bmatrix};\ y_5 = \begin{bmatrix} 0.218 \\ 0.447 \\ 0.702 \end{bmatrix};$$

$$y_6 = \begin{bmatrix} 0.217 \\ 0.446 \\ 0.701 \end{bmatrix};\ y_7 = \begin{bmatrix} 0.216 \\ 0.445 \\ 0.701 \end{bmatrix};\ y_8 = \begin{bmatrix} 0.216 \\ 0.445 \\ 0.701 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto

$$y_1 = 0.216 \qquad y_2 = 0.445 \qquad y_3 = 0.701$$

Procediendo en forma idéntica, puede resolverse el problema con $h = 0.50$ y resulta

$$y_0 - 2.0625y_2 + y_4 = 0$$

pero $y_0 = 0$ y $y_4 = 1$, luego

$$-2.0625y_2 + 1 = 0$$

de donde

$$y_2 = 0.485$$

Con las dos aproximaciones obtenidas para y_2, puede hacerse una extrapolación de Richardson para mejorar la solución en ese punto, o sea

$$y_2 = \frac{(0.50/0.25)^2 \quad 0.445 - 0.485}{(0.50/0.25)^2 - 1} = 0.432$$

Ejemplo 8-13

Resolver el problema

$$y^{iv} - 16y = x; \qquad y(0) = y''(0) = 0;$$

$$y(1) = y'(1) = 0$$

Dividiendo el intervalo [0, 1] en 4 partes y usando fórmulas de derivación numérica del orden de h^2, resulta la gráfica mostrada en la figura 8-10.

Para la ecuación diferencial, se tiene

$$\frac{1}{h^4}(y_{i-2} - 4y_{i-1} + 6y_i - 4y_{i+1} + y_{i+2}) - 16y_i = x_i$$

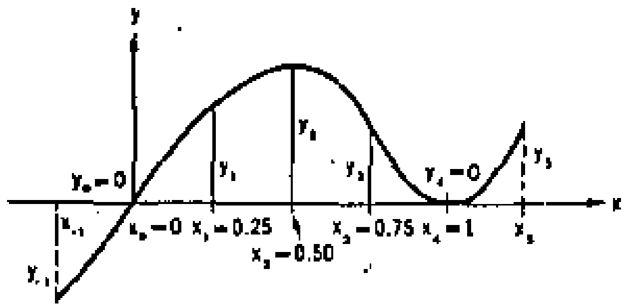


Fig. 8-10. Representación gráfica de la solución del ejemplo 8-13.

en donde $h = 0.25$, $h^4 = 0{,}0039625$ luego sustituyendo resulta

$$y_{i-2} - 4y_{i-1} + 5.9375y_i - 4y_{i+1} + y_{i+2} = \qquad (8\text{-}44)$$
$$= 0.00390625x_i$$

Para las condiciones de frontera:

de $y(0) = 0$, se obtiene

$$y_0 = 0 \qquad (8\text{-}45)$$

de $y''(0) = 0$,

$$\frac{1}{h^2}(y_{-1} - 2y_0 + y_1) = 0$$

por lo que

$$y_{-1} = -y_1 \qquad (8\text{-}46)$$

De $y(1) = 0$,

$$y_4 = 0 \qquad (8\text{-}47)$$

de $y'(1) = 0$,

$$\frac{1}{h}(-y_3 + y_5) = 0$$

de donde

$$y_5 = y_3 \qquad (8\text{-}48)$$

Al aplicar (8-44) en los puntos pivotes, se obtiene:

Para $i = 1$,

$$y_{-1} - 4y_0 + 5.9375y_1 - 4y_2 + y_3 = 0.00390625x_1$$

pero

$y_{-1} = -y_1$ por (8-46), $y_0 = 0$ por (8-45), y $x_1 = 0.25$

entonces

$$4.9375y_1 - 4y_2 + y_3 = 0.0009765625 \qquad (8\text{-}49)$$

Para $i = 2$,

$$y_0 - 4y_1 + 5.9375y_2 - 4y_3 + y_4 = 0.00390625x_2$$

pero $y_0 = 0$ por (8-45), $y_4 = 0$ por (8-47) y $x_2 = 0.50$

de donde

$$-4y_1 + 5.9375y_2 - 4y_3 = 0.001953125 \qquad (8\text{-}50)$$

Para $i = 3$,

$$y_1 - 4y_2 + 5.9375y_3 - 4y_4 + y_5 = 0.00390625x_3$$

pero $y_4 = 0$ por (8-47), $y_5 = y_3$ por (8-48) y $x_3 = 0.75$.

es decir

$$y_1 - 4y_2 + 6.9375y_3 = 0.0029296875 \qquad (8\text{-}51)$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones (8-49), (8-50) y (8-51) por relajaciones, se obtiene la tabla de relajaciones 8-14 y la solución en la tabla 8-15

Tabla 8-14. Tabla de relajaciones para el sistema de ecuaciones (8-49), (8-50) y (8-51), de la ecuación diferencial $y^{IV} - 16y = x$.

Ecuación	y_1	y_2	y_3	d_i	B_i
1	—1	0.810	—0.203	0.000198	—0.393
2	0.674	—1	0.674	0.000329	0.348
3	—0.144	0.577	—1	0.000422	—0.567

Tabla 8-15. Solución por relajaciones del ejemplo 8-13.

y_1	R_1	y_2	R_2	y_3	R_3
0	198	0	329	0	422
	96		666	500	— 78
	906	1000	—334		499
1000	513	1000	14	1000	— 68
500	13		351		—144
	418	500	—149		149
500	221	500	25	500	—135
200	21		160		—164
	183	200	— 40		— 49
200	— 17		95		— 78
	64	100	— 5		— 20
100	— 36		62		— 34
	13	60	2		1
10	3		10		0
2510		3360		2000	

Por lo tanto

$$y_1 = 0.0025,$$
$$y_2 = 0.0034,$$
$$y_3 = 0.0020$$

8-5. Solución numérica de problemas de valores característicos

Un problema de *valores característicos* es un problema de valores en la frontera definido por una ecuación diferencial homogénea, con condiciones homogéneas de frontera. Por ejemplo, la ecuación

$$\frac{d^2y}{dx^2} + ky = 0, \qquad (8\text{-}52)$$

en donde k es un parámetro, cuya solución debe verificar las condiciones de frontera.

$$y(0) = 0 \quad , \quad y(1) = 0 \qquad (8\text{-}53)$$

define un problema de valores característicos. Es obvio que cualquier problema de este tipo admite la solución trivial $y(x) = 0$. En estos problemas pueden existir soluciones $y(x)$ no idénticamente nulas (diferente de la trivial), para ciertos valores del parámetro k que aparece en la ecuación. Estos valores se llaman *valores característicos*, y la solución $y(x)$ correspondiente se denomina *vector característico*. Además, como la ecuación diferencial y las condiciones de frontera de un problema de valores característicos son homogéneas, debe cumplirse que $c.y(x)$ sea también solución del problema si se sabe que $y(x)$ es solución del mismo, y esto para cualquier constante c arbitraria.

8-5.1 Integración paso a paso. Los problemas de valores característicos ordinarios de orden *dos* pueden resolverse con los métodos de integración paso a paso, como se hizo con los problemas de valores en la frontera. Para iniciar la solución habrá que asignar a y_1 cualquier valor conveniente, por ejemplo uno, ya que, la solución puede estar multiplicada por cualquier factor de escala y sigue siendo solución. Al valor característico k se le darán valores arbitrarios sucesivos hasta que la solución correspondiente satisfaga la condición de frontera en el otro borde del intervalo de integración. Como antes, los valores sucesivos de k pueden mejorarse por interpolación.

Ejemplo 8-14.

Determinar el menor valor característico del problema definido por

$$\frac{d^2y}{dx^2} + ky = 0 \quad ; \quad y(0) = 0 \quad ; \quad y(1) = 0$$

Sustituyendo la derivada por fórmulas numéricas de derivación, se obtiene

$$\frac{1}{h^2}(y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}) + ky_i = 0$$

con pivote en x_i. Para h=0.25 resulta la fórmula de recurrencia

$$y_{i+1} = (2 - 0.0625k)y_i - y_{i-1}$$

Las condiciones de borde se transforman en

$$y_0 = 0$$
$$y_4 = 0$$

Las iteraciones se iniciarán con k=9. Para este valor arbitrario se tiene la fórmula de recurrencia.

$$y_{i+1} = (2 - 0.0625 \cdot 9)y_i - y_{i-1}$$
$$= 1.438y_i - y_{i-1}$$

Aplicándola en los diferentes puntos pivotes se obtiene la segunda columna de la tabla 8-16.

Tabla 8-16. Solución del ejemplo 8-14 integrando paso a paso.

x_i \ y_i	$k = 9$	$k = 10$	$k = 9.395$
0	0.000	0.000	0.000
0.25	1.000	1.000	1.000
0.50	1.438	1.375	1.413
0.75	1.068	0.891	0.997
1	0.098	−0.150	−0.004

Repitiendo el cálculo con k=10, se obtiene la tercera columna de la tabla, al aplicar la fórmula de recurrencia

$$y_{i+1} = (2 - 0.0625 \cdot 10)y_i - y_{i-1}$$
$$= 1.375y_i - y_{i-1}$$

Interpolando linealmente entre los valores supuestos de k, para obtener uno que haga que y_4=0, se tiene

	y_4	k
0 —	0.098	9
	−0.150	10

de donde

$$k = \frac{0 + 0.150}{0.098 + 0.150}\, 9 + \frac{0 - 0.098}{-0.150 - 0.098}\, 10 = 9.395$$

Para este valor de k resulta la cuarta columna de la tabla, al aplicar la fórmula de recurrencia correspondiente

$$y_{i+1} = (2 - 0.0625 \cdot 9.395)y_i - y_{i-1}$$
$$= 1.413y_i - y_{i-1}$$

Este último valor de k tiene un error de 5% con respecto al valor exacto $k = \pi^2$

8-5.2 Solución de problemas lineales. Las aproximaciones al *menor* valor característico de un problema de valores característicos *lineal* pueden obtenerse fácilmente, transformando la ecuación diferencial en la correspondiente ecuación de diferencias, como se hizo con los problemas de valores en la frontera en la sección anterior, y resolviendo el problema de valores característicos dado por el sistema de ecuaciones lineales así obtenido.

Ejemplo 8-15

Determinar el menor valor característico k del siguiente problema.

$$\frac{d^2y}{dx^2} + ky = 0 \quad ; \quad y(0) = 0 \quad ; \quad y(1) = 0$$

Dividiendo el intervalo de definición de soluciones $0 \leq x \leq 1$ en cuatro partes y usando fórmulas de derivación numérica con errores del orden h^2, se tiene la gráfica mostrada en la figura 8-11, y resulta

$$\frac{1}{h^2}(y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}) + ky_i = 0$$

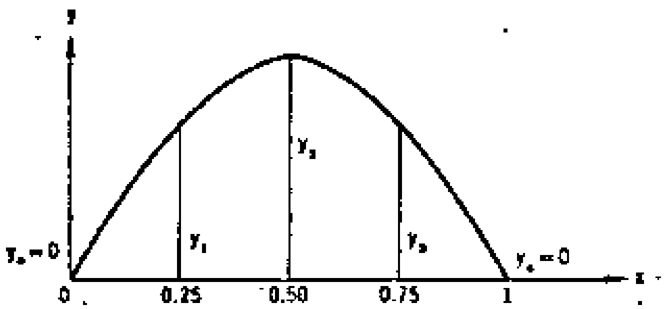


Fig. 8-11. Representación gráfica de la solución del ejemplo 8-15.

entonces

$$y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1} = -0.25^2\, ky_i \qquad (8\text{-}54)$$

$$y_0 = 0 \qquad (8\text{-}55)$$

$$y_4 = 0 \qquad (8\text{-}56)$$

Aplicando (8-54) en los puntos pivotes y teniendo en cuenta las condiciones (8-55) y (8-56), se genera el sistema

$$\begin{cases} -2y_1 + y_2 = -0.25^2 ky_1 \\ y_1 - 2y_2 + y_3 = -0.25^2 ky_2 \\ y_2 - 2y_3 = -0.25^2 ky_3 \end{cases}$$

que puede escribirse como

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = -0.25^2 k \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} \qquad (8\text{-}57)$$

De los tres valores característicos que puede tener el sistema (8-57), sólo interesa el menor, y el método de diferencias finitas proporciona aproximaciones a ese valor. Se usará el método de aproximaciones sucesivas para determinarlo, pero como este método converge al mayor valor característico, será necesario transformar el problema para poder usar el método.

La inversa de la matriz del sistema (8-57), es

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} -2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] ; \quad \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -0.50 & 0.00 & -0.50 & 0.00 & 0.00 \\ 0 & -1.50 & 1.00 & 0.50 & 1.00 & 0.00 \\ 0 & 1.00 & -2.00 & 0.00 & 0.00 & 1.00 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -0.50 & 0 & -0.50 & 0.00 & 0.00 \\ 0 & -1.00 & 0 & 0.50 & 1.00 & 0.50 \\ 0 & -0.50 & 1 & 0.00 & 0.00 & -0.50 \end{array}\right] ; \quad \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -0.75 & -0.50 & -0.25 \\ 0 & 1 & 0 & -0.50 & -1.00 & -0.50 \\ 0 & 0 & 1 & -0.25 & -0.50 & -0.75 \end{array}\right]$$

Premultiplicando ambos miembros de (8-57) por esta inversa

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = -0.25^{?}k \begin{bmatrix} -0.75 & -0.50 & -0.25 \\ -0.50 & -1.00 & -1.00 \\ -0.25 & -0.50 & -0.75 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = 0.25^{3}k \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

Haciendo $\lambda = \dfrac{1}{0.25^3 k}$ se obtiene el sistema

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

Las iteraciones se iniciarán con el vector $y_0 = \{0, 1, 0\}^t$ y se tiene

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.00 \\ 1.00 \\ 0.00 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.00 \\ 4.00 \\ 2.00 \end{bmatrix} = 4.00 \begin{bmatrix} 0.50 \\ 1.00 \\ 0.50 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.50 \\ 1.00 \\ 0.50 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4.00 \\ 6.00 \\ 4.00 \end{bmatrix} = 6.00 \begin{bmatrix} 0.67 \\ 1.00 \\ 0.67 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.67 \\ 1.00 \\ 0.67 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4.68 \\ 6.68 \\ 4.68 \end{bmatrix} = 6.68 \begin{bmatrix} 0.70 \\ 1.00 \\ 0.70 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.70 \\ 1.00 \\ 0.70 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4.80 \\ 6.80 \\ 4.80 \end{bmatrix} = 6.80 \begin{bmatrix} 0.71 \\ 1.00 \\ 0.71 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.71 \\ 1.00 \\ 0.71 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4.84 \\ 6.84 \\ 4.84 \end{bmatrix} = 6.84 \begin{bmatrix} 0.71 \\ 1.00 \\ 0.71 \end{bmatrix}$$

Entonces $\lambda = 6.84$, pero como $\lambda = \dfrac{1}{0.25^3 k}$, luego $k = 0.36$ y $y_1 = 0.71$, $y_2 = 1.00$, $y_3 = 0.71$

Resolviendo el mismo problema con $h = 0.50$, se obtiene:

$$\frac{1}{0.50^2}(y_0 - 2y_2 + y_4) + ky_2 = 0$$

pero $y_0 = 0$ y $y_4 = 0$, luego

$$-\frac{2}{0.25}y_2 + ky_2 = 0$$

$$(-8 + k)y_2 = 0$$

de donde $\qquad k = 8$

Haciendo una interpolación de Richardson con las dos aproximaciones obtenidas, resulta

$$k = \frac{(0.50/0.25)^2 \; 9.36 - 8}{(0.50/0.25)^2 - 1} = 9.81$$

valor que tiene un error del 0.4% con respecto al resultado exacto que es $k = \pi^2$.

Ejemplo 8-16.

Calcular el menor valor característico del siguiente problema.

$$\frac{d^4y}{dx^4} + kx(1-x)\frac{d^2y}{dx^2} = 0 \quad ;$$

$$y(0) = 0 \quad ; \quad y'(0) = 0$$

$$y(1) = 0 \quad ; \quad y'(1) = 0$$

El intervalo [0,1] se dividirá en cuatro partes y se usarán fórmulas de derivación numérica con errores del orden de h^2. La representación gráfica se muestra en la figura 8-12.

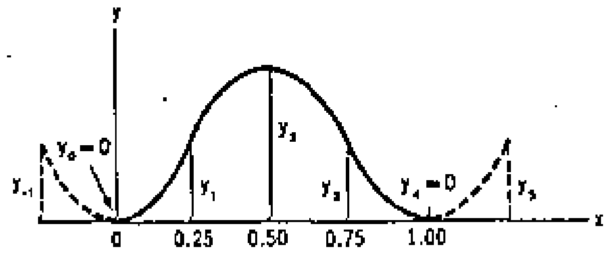


Fig. 8-12. Representación gráfica de la solución del ejemplo 8-16.

Para la ecuación diferencial, se obtiene:

$$\frac{1}{h^4}(y_{i-2} - 4y_{i-1} + 6y_i - 4y_{i+1} + y_{i+2})$$
$$+ kx_i(1 - x_i)\frac{1}{h^2}(y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}) = 0$$

por lo que

$$y_{i-2} - 4y_{i-1} + 6y_i - 4y_{i+1} + y_{i+2} =$$
$$- 0.25^2 kx_i(1 - x_i)(y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}) \qquad (8\text{-}58)$$

Las condiciones de frontera, son

$$y_0 = 0 \qquad (8\text{-}59)$$

$$y_{-1} = y_1 \qquad (8\text{-}60)$$

$$y_4 = 0 \qquad (8\text{-}61)$$

$$y_5 = y_3 \qquad (8\text{-}62)$$

Aplicando (8-58) en los puntos pivotes, teniendo en cuenta (8-59) a (8-62), se llega a

$$\begin{cases} 7y_1 - 4y_2 + y_3 = -3\cdot 0.25^4 k(-2y_1 + y_2) \\ -4y_1 + 6y_2 - 4y_3 = -4\cdot 0.25^4 k(y_1 - 2y_2 + y_3) \\ y_1 - 4y_2 + 7y_3 = -3\cdot 0.25^4 k(y_2 - 2y_3) \end{cases}$$

que puede escribirse matricialmente, como

$$\begin{bmatrix} 7 & -4 & 1 \\ -4 & 6 & -4 \\ 1 & -4 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = 0.25^4 k \begin{bmatrix} 6 & -3 & 0 \\ -4 & 8 & -4 \\ 0 & -3 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

La inversa de la matriz del primer miembro, es

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 7 & -4 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & 6 & -4 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 7 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \cdot \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -0.571 & 0.143 & 0.143 & 0 & 0 \\ 0 & 3.72 & -3.43 & 0.572 & 1 & 0 \\ 0 & -3.43 & 6.86 & -0.143 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -0.500 & 0 & 0.146 & 0 & -0.0209 \\ 0 & 2.01 & 0 & 0.501 & 1 & 0.501 \\ 0 & -0.500 & 1 & -0.0208 & 0 & 0.146 \end{array}\right] \quad \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0.271 & 0.249 & 0.104 \\ 0 & 1 & 0 & 0.249 & 0.498 & 0.249 \\ 0 & 0 & 1 & 0.104 & 0.249 & 0.271 \end{array}\right]$$

Premultiplicando ambos miembros de la ecuación matricial por esta inversa, resulta

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = 0.25^4 k \begin{bmatrix} 0.630 & 0.867 & -0.372 \\ -0.498 & 2.49 & -0.498 \\ -0.372 & 0.867 & 0.630 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

Haciendo $\lambda = 1/0.25^4 k$ se obtiene el sistema

$$\begin{bmatrix} 0.630 & 0.867 & -0.372 \\ -0.498 & 2.49 & -0.498 \\ -0.372 & 0.867 & 0.630 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

Iniciando las iteraciones con $y_0 = (\,0.500,\ 1.000,\ 0.500\,)^T$

$$\begin{bmatrix} 0.630 & 0.867 & -0.372 \\ -0.498 & 2.49 & -0.498 \\ -0.372 & 0.867 & 0.630 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.500 \\ 1.000 \\ 0.500 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.996 \\ 1.992 \\ 0.996 \end{bmatrix} = 1.992 \begin{bmatrix} 0.500 \\ 1.000 \\ 0.500 \end{bmatrix}$$

Entonces $\lambda = 1.992$ y $k = \dfrac{1}{1.992 \cdot 0.25^4} = 128$

8-6. Programas para resolver numéricamente ecuaciones diferenciales

A continuación se presenta una serie de programas elaborados para resolver numéricamente ecuaciones o sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias. Estos se dan sin diagrama de flujo, ya que son por demás simples de comprender y seguir, una vez conocido el método que se trata de aplicar. Todos tratan de ser generales, en el sentido que sólo habrá que sustituir la instrucción que define la función que determina la ecuación diferencial por cualquier otra, para tener un programa que resuelva la nueva ecuación diferencial.

Los primeros programas (ver figuras 8-13 a 8-18) sirven para resolver el problema de valores iniciales, dado en el ejemplo 8-1, con los métodos de Euler, Euler-Gauss, iterando hasta obtener un cierto grado de aproximación y de Milne. Como se indicó, basta sustituir en estos programas la instrucción

$$F(X,\ Y) = 0.5 * (1. + x) * Y ** 2$$

por alguna otra para tener programas que resuelvan otro problema de valores iniciales. En los programas, la condición inicial se introduce a través de tarjetas perforadas con datos, así como la amplitud y número de subintervalos considerados. Se consideraron 10 subintervalos de amplitud 0.1.

En la figura 8-13 aparece el programa que usa el método de Euler y las tarjetas de datos empleados. Las variables usadas tienen nombres obvios y son las que se presentan a continuación.

X = Variable independiente (contiene el valor para el que se calcula la solución del problema de valores iniciales)

Y = Variable dependiente (solución del problema de valores iniciales)

H = Incremento constante de la variable independiente

N = Número de puntos en los que se desea calcular la solución del problema de valores iniciales.

F(X,Y) = Función que define a la ecuación diferencial.

En la figura 8-14 se muestran los resultados obtenidos del programa para resolver el ejemplo 8-1. En el segundo resultado se usó una amplitud de subintervalos igual a 0.01 (la décima parte de la anterior) para ver la influencia de ella en la solución del problema. La solución exacta se encuentra en la tabla 8-1, con la que se podrá determinar esa influencia.

En la figura 8-15 se presenta el programa para resolver el mismo problema, usando el método de Euler-Gauss con iteraciones. En él se han usado las mismas variables antes indicadas, además de las siguientes:

NAPRØX = Número de cifras exactas con que se debe calcular el valor corregido de Y.

APROX = Aproximación relativa requerida; vale $10^{-NAPROX}$

REL = Variable que mide la aproximación relativa del valor corregido de Y en una iteración con respecto al anterior.

YP = Valor aproximado de Y (predictor).

YC = Valor corregido de Y (corrector).

Como en el programa anterior, el programa lee de tarjetas de datos la condición inicial impuesta (X = 0, Y = 1), la amplitud de subintervalos (H = 0.1), el número de ellos (N = 10) y, además, el número de cifras exactas con que se calcula el valor corregido de Y (NAPRØX = 8). La tarjeta de datos usada aparece en la misma figura 8-15 y las respuestas obtenidas en la 8-16.

Finalmente, en la figura 8-17 se muestra el listado del programa para resolver el mismo ejemplo 8-1, con el método de Milne. En éste las variables usadas son:

X (I) = Arreglo con los valores de la variable independiente (valores para los que se desea conocer la solución del problema de valores iniciales).

Y (I) = Arreglo con los valores de la variable dependiente (solución del problema de valores iniciales en los correspondientes valores de X (I)).

H = Incremento constante de la variable independiente.

N = Número de puntos en donde se desea calcular la solución del problema de valores iniciales.

F(X,Y) = Función que define a la ecuación diferencial.

FUN (I) = Arreglo con los valores de F(X,Y) para X = X(I) e Y = Y(I).

YP = Valor aproximado de Y (predictor).

En este caso, además de proporcionar la condición inicial, la amplitud de los subintervalos y el número de ellos como datos, se debe dar la solución del problema en los primeros tres puntos pivotes para conocer los valores que se indican en la ecuación (8-18). La tarjeta de datos usada aparece también listada en la figura 8-17 y corresponde a los valores señalados en el ejemplo 8-6. Las respuestas producidas se muestran en la figura 8-18.

Para resolver problemas de valores iniciales definidos por sistemas de ecuaciones diferenciales, como el del ejemplo 8-7, se elaboró el programa de la figura 8-19, que usa el método de Milne extendido. En éste se han usado dos postulados de definición de función para determinar el sistema de ecuaciones diferenciales por resolver. Se deben sustituir éstas, que en la figura 8-19 son

$$F(X, Y, Z) = Y + Z$$

$$G(X, Y, Z) = Z - Y$$

por aquellas que defina el sistema de dos ecuaciones que determine el problema de valores iniciales por resolver. Además, deberán adicionarse tantos postulados de definición de función como sean necesarios para tener definidas todas las ecuaciones del problema, si éstas son más de dos. En este caso deberán agregarse también algunas otras instrucciones para manejar las otras ecuaciones, las que serán evidentes al revisar el programa.

Las variables utilizadas en este programa son semejantes a las usadas en el programa que resuelve una ecuación diferencial con el método de Milne, aumentando las debidas al hecho de tener ahora dos ecuaciones diferenciales. Los nombres que hay que agregar o corregir son:

Z(I) = Arreglo con los valores de la segunda variable dependiente.

G(X,Y,Z) = Función que define a la segunda ecuación diferencial. La función que define a la primera tiene ahora un parámetro más.

FF(I) = En lugar de FUN (I).

GG(I) = Arreglo con los valores de G(X, Y, Z) para X = X(I), Y = Y(I) y Z = Z (I)

ZP = Valor aproximado de Z (predictor)

Las tarjetas de datos listados al final de la figura 8-19 corresponden a los datos del ejemplo 8-7, cuya solución obtenida se muestra en la figura 8-20.

Para resolver la ecuación diferencial de segundo orden del ejemplo 8-8, se sustituyó ésta por un sistema de ecuaciones, como se hizo en el mismo ejemplo 8-8 y se empleó el programa antes mencionado. En éste se sustituyeron las instrucciones que definían las funciones *F(X, Y, Z)* y *G(X, Y, Z)* por

$$F(X, Y, X) = Z$$

$$G(X, Y, Z) = 2. * Y + Z$$

y se usaron las tarjetas de datos que aparecen listadas en la parte superior de la figura 8-21. Los resultados son los que se muestran en la misma figura. La solución directa de este ejemplo, como se resolvió en el ejemplo 8-9, se deja como ejercicio al lector al final del capítulo.

De los tres primeros programas descritos puede afirmarse que están colocados en orden creciente de preferencia, ya que en el primero, que usa el método de Euler, se aplica una fórmula de integración con error del orden de h^1; el segundo, el de Euler-Gauss, una con error del orden de h^3; en el tercero el error es del orden de h^5, y corresponde al método de Milne.

En estos métodos mencionados se sustituyó el proceso de integración por una fórmula numérica de integración, a diferencia del método de diferencias finitas descrito en 8-3.7, en el cual lo que se reemplazó fue el proceso de derivación directamente. Esto hace que el método de diferencias finitas tenga errores considerables, motivo por el cual no se hizo programa usando este método.

Para resolver problemas de valores en la frontera se desarrolló el programa de la figura 8-22, usando el método de integración paso a paso descrito en 8-4.1, que permite resolver una ecuación diferencial ordinaria de

```
C
C     SOLUCION DE LA ECUACION DIFERENCIAL DE PRIMER ORDEN
C     DY/DX=F(X,Y) CON EL METODO DE EULER
C
  100 FORMAT (3F10.4,I5)
  101 FORMAT (≠1≠,5X,≠X≠,12X,≠Y≠)
  102 FORMAT (1X,23(≠-≠))
  103 FORMAT (F11.4,F13.4)
      F(X,Y)=0.5*(1.+X)*Y**2
    1 READ (5,100) X,Y,H,N
      IF (N.LT.1) CALL EXIT
      WRITE (6,101)
      WRITE (6,102)
      WRITE (6,103) X,Y
      DO 2 I=1,N
      Y=Y+H*F(X,Y)
      X=X+H
    2 WRITE (6,103) X,Y
      WRITE (6,102)
      GO TO 1
      END


   0.0000     1.0000     0.1000    10
   0.0000     1.0000     0.0100    20
                                    0
```

Fig. 8-13. Programa para resolver un problema de valores iniciales con el método de Euler.

X	Y
0.0000	1.0000
.1000	1.0500
.2000	1.1106
.3000	1.1846
.4000	1.2759
.5000	1.3898
.6000	1.5347
.7000	1.7231
.8000	1.9755
.9000	2.3267
1.0000	2.8410

X	Y
0.0000	1.0000
.0100	1.0050
.0200	1.0101
.0300	1.0153
.0400	1.0206
.0500	1.0260
.0600	1.0316
.0700	1.0372
.0800	1.0430
.0900	1.0488
.1000	1.0548
.1100	1.0609
.1200	1.0672
.1300	1.0736
.1400	1.0801
.1500	1.0867
.1600	1.0935
.1700	1.1005
.1800	1.1075
.1900	1.1148
.2000	1.1222

Fig. 8-14. Respuestas del programa de la figura 8-13.

```
C
C     SOLUCION DE LA ECUACION DIFERENCIAL DE PRIMER ORDEN
C     DY/DX=F(X,Y) CON EL METODO DE EULER-GAUSS
C
  100 FORMAT (3F10.4,2I5)
  101 FORMAT (≠1≠,5X,≠X≠,12X,≠Y≠)
  102 FORMAT (1X,23(≠-≠))
  103 FORMAT (F11.4,F13.4)
      F(X,Y)=0.5*(1.+X)*Y**2
    1 READ (5,100) X,Y,H,N,NAPROX
      IF (N.LT.1) CALL EXIT
      WRITE (6,101)
      WRITE (6,102)
      WRITE (6,103) X,Y
      APROX=10.**(-NAPROX)
      DO 4 I=1,N
      YP=Y+H*F(X,Y)
    2 YC=Y+0.5*H*(F(X,Y)+F(X+H,YP))
      REL=ABS((YP-YC)/YC)
      IF (REL.LE.APROX) GO TO 3
      YP=YC
      GO TO 2
    3 X=X+H
      Y=YC
    4 WRITE (6,103) X,Y
      WRITE (6,102)
      GO TO 1
      END


   0.0000     1.0000     0.1000    10     6
                                    0
```

Fig. 8-15. Programa para resolver un problema de valores iniciales con el método de Euler-Gauss.

X	Y
0.0000	1.0000
.1000	1.0556
.2000	1.1242
.3000	1.2097
.4000	1.3180
.5000	1.4586
.6000	1.6469
.7000	1.9105
.8000	2.3047
.9000	2.9598
1.0000	4.3008

Fig. 8-16. Resultados del programa de la figura 8-15

```
C
C     SOLUCION DE LA ECUACION DIFERENCIAL DE PRIMER ORDEN
C     DY/DX=F(X,Y) CON EL METODO DE MILNE
C
      DIMENSION X(100),Y(100),FUN(100)
  100 FORMAT (6F10.4,I5)
  101 FORMAT (≠1≠,5X,≠X≠,12X,≠Y≠)
  102 FORMAT (1X,23(≠-≠))
  103 FORMAT (F11.4,F13.4)
      F(X,Y)=0.5*(1.+X)*Y**2
    1 READ (5,100) X(1),(Y(I),I=1,4),H,N
      IF (N.LT.5) CALL EXIT
      WRITE (6,101)
      WRITE (6,102)
      DO 2 I=1,4
      WRITE (6,103) X(I),Y(I)
      FUN(I)=F(X(I),Y(I))
    2 X(I+1)=X(I)+H
      DO 3 I=4,N
      YP=Y(I-3)+(4./3.)*H*(2.*FUN(I-2)-FUN(I-1)+2.*FUN(I))
      X(I+1)=X(I)+H
      FUN(I+1)=F(X(I+1),YP)
      Y(I+1)=Y(I-1)+(H/3.)*(FUN(I-1)+4.*FUN(I)+FUN(I+1))
      FUN(I+1)=F(X(I+1),Y(I+1))
    3 WRITE (6,103) X(I+1),Y(I+1)
      WRITE (6,102)
      GO TO 1
      END

   0.0000    1.0000    1.0554    1.1236    1.2085    0.1000   10
```

Fig. 8-17. Programa para resolver un problema de valores iniciales con el método de Milne.

X	Y
0.0000	1.0000
.1000	1.0554
.2000	1.1236
.3000	1.2085
.4000	1.3158
.5000	1.4546
.6000	1.6394
.7000	1.8957
.8000	2.2725
.9000	2.8763
1.0000	3.9902

Fig. 8-18. Resultados del programa de la figura 8-17.

orden dos con condiciones de frontera conocidas. Al programa hay que darle como datos las condiciones de frontera, el valor y_1 de la solución supuesta del problema en el primer punto pivote, el número de subintervalos, el número máximo de iteraciones permitidas y la aproximación requerida. La ecuación de recurrencia que permite evaluar la solución en los siguientes puntos pivotes que aparece en el programa (dos veces) debe sustituirse por alguna otra si se desea usarlo para resolver algún otro problema de las mismas características.

Las variables usadas en el programa de la figura 8-22 son:

XO = Abscisa del borde izquierdo del intervalo de definición de soluciones.

YO = Condición de frontera en el borde izquierdo

XN = Abscisa del borde derecho del intervalo de definición de soluciones.

YN = Condición de frontera en el borde derecho.

```
C
C     SOLUCION DE UN SISTEMA DE ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS
C     DE PRIMER ORDEN CON EL METODO DE MILNE
C
      DIMENSION X(100),Y(100),Z(100),FF(100),GG(100)
  100 FORMAT (2F10.4,I5/8F10.4)
  101 FORMAT (≠1≠,5X,≠X≠,12X,≠Y≠,12X,≠Z≠)
  102 FORMAT (1X,36(≠-≠))
  103 FORMAT (F11.4,2F13.4)
      F(X,Y,Z)=Y+Z
      G(X,Y,Z)=Z-Y
    1 READ (5,100) X(1),H,N,(Y(I),Z(I),I=1,4)
      IF (N.LT.5) CALL EXIT
      WRITE (6,101)
      WRITE (6,102)
      DO 2 I=1,4
      WRITE (6,103) X(I),Y(I),Z(I)
      FF(I)=F(X(I),Y(I),Z(I))
      GG(I)=G(X(I),Y(I),Z(I))
    2 X(I+1)=X(I)+H
      DO 3 I=4,N
      YP=Y(I-3)+(4./3.)*H*(2.*FF(I-2)-FF(I-1)+2.*FF(I))
      ZP=Z(I-3)+(4./3.)*H*(2.*GG(I-2)-GG(I-1)+2.*GG(I))
      X(I+1)=X(I)+H
      FF(I+1)=F(X(I+1),YP,ZP)
      GG(I+1)=G(X(I+1),YP,ZP)
      Y(I+1)=Y(I-1)+(H/3.)*(FF(I-1)+4.*FF(I)+FF(I+1))
      Z(I+1)=Z(I-1)+(H/3.)*(GG(I-1)+4.*GG(I)+GG(I+1))
      FF(I+1)=F(X(I+1),Y(I+1),Z(I+1))
      GG(I+1)=G(X(I+1),Y(I+1),Z(I+1))
    3 WRITE (6,103) X(I+1),Y(I+1),Z(I+1)
      WRITE (6,102)
      GO TO 1
      END
```

```
 0.0000    0.1000    10
 0.1000    0.2000    0.1320    0.2090    0.1680    0.2150    0.2090    0.2160
 0.0000    0.0000    0
 0.0000    0.0000    0.0000    0.0000    0.0000    0.0000    0.0000    0.0000
```

Fig. 8-19. Programa para resolver un problema de valores iniciales, definido por un sistema de ecuaciones diferenciales, con el método de Milne.

```
      X            Y            Z
------------------------------------
   0.0000        .1000        .2000
    .1000        .1320        .2090
    .2000        .1680        .2150
    .3000        .2090        .2160
    .4000        .2534        .2165
    .5000        .3030        .2103
    .6000        .3559        .1977
    .7000        .4136        .1783
    .8000        .4741        .1502
    .9000        .5383        .1131
   1.0000        .6041        .0647
------------------------------------
```

Fig. 8-20. Resultados del programa de la figura 8-19, del ejemplo 8-7.

0.0000	0.1000	10					
0.1000	0.2000	0.1220	0.2440	0.1490	0.2980	0.1820	0.3630
0.0000	0.0000	0					
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

X	Y	Z
0.0000	.1000	.2000
.1000	.1220	.2440
.2000	.1490	.2980
.3000	.1820	.3630
.4000	.2222	.4444
.5000	.2715	.5419
.6000	.3313	.6629
.7000	.4049	.8088
.8000	.4942	.9887
.9000	.6039	1.2069
1.0000	.7372	1.4749

Fig. 8-21. Datos y resultados del programa de la figura 8-19, modificado para resolver el ejemplo 8-8.

N = Número de subintervalos en que se divide el intervalo $XO \leq X \leq XN$ de definición de soluciones.

H = Amplitud de los subintervalos.

NMI = Número máximo de iteraciones.

ITER = Contador de iteraciones.

NAPRØX = Número de cifras con que se desea la solución en el borde derecho.

APRØX = Aproximación relativa con que se desea la solución en el borde derecho.

REL = Aproximación relativa de la solución obtenida en el borde derecho.

I = Contador de pivotes.

X = Abscisa del punto pivote donde se desea calcular la solución del problema.

Y(I) = Arreglo con la solución del problema en el *I*-ésimo pivote.

YI = Solución supuesta del problema en el punto pivote para el cual $X=XO+H$.

YI1 = Solución supuesta del problema en el punto pivote para el cual $X=XO+H$ en la iteración anterior.

YNN = Solución del problema en el borde derecho obtenida en la iteración anterior.

Obsérvese que el primer valor supuesto de *YI* se obtiene de una tarjeta de datos, el segundo es igual al primero más 0.1, y del tercero en adelante, se obtiene haciendo una interpolación lineal entre esos valores y los obtenidos como solución del problema en el borde derecho del mismo, tal como se resolvió el ejemplo 8-11.

Como la condición de frontera en el borde derecho del ejemplo 8-11 establece que ahí la solución del problema debe ser nula, y existen graves problemas de convergencia hacia el valor cero y de la prueba de la misma convergencia (cualquier número por pequeño que sea es grande en comparación con cero), se modificó ese problema haciendo el cambio de variable

$$z = y + 1$$

con lo que se obtuvo el nuevo problema de valores en la frontera

$$z'' + (z - 1)^2 = 0 \quad ; \quad z(0) = 3 \quad ; \quad z(1) = 1$$

y quedó resuelto el problema de convergencia. Esta es la razón por la que en el programa de la figura 8-22, se codificó la ecuación de recurrencia

$$z_i = 2z_{i-1} - [h(z_{i-1} - 1)]^2 - z_{i-1}$$

en las instrucciones número 2 y dos antes de ésta, dando a la variable dependiente el nombre *Y*, en lugar de la usada directamente en el ejemplo 8-11.

Es obvio que después de resolver este nuevo problema de valores en la frontera, será necesario hacer la transformación inversa para obtener la solución del problema original.

En la misma figura 8-22 se encuentran listadas las tarjetas de datos usadas para resolver el ejemplo 8-11. Las respuestas se muestran en la figura 8-23, en donde se nota que los valores de *Y* obtenidos son mayores en uno que los ya antes determinados en el ejemplo, como era de esperarse.

El proceso de integración paso a paso de problemas característicos de orden dos, por medio de un programa de computadora, se muestra en la figura 8-24. El programa es casi idéntico al de la figura 8-22, ya que la única diferencia es que en éste se itera sobre el valor desconocido del valor característico representado por *V1* y a *Y1*, la solución de la ecuación diferencial en el primer punto pivote, se le asigna un valor inalterable (2 en el programa).

Las únicas variables que se adicionaron a este programa, son

V1 = valor supuesto del valor característico

V11 = valor supuesto del valor característico en la iteración anterior

V = valor característico obtenido por interpolación lineal y desaparece la variable *Y11*

Como un problema de valores característicos está definido por una ecuación diferencial homogénea con condiciones de fronteras homogéneas, se vuelve a presentar el caso de tratar de convergir a un valor nulo. Por esta razón se hizo el cambio de variable $z = y + 1$ en el programa de la figura 8-24 para resolver el ejemplo 8-14, y se admitió que la ordenada desconocida en el primer punto pivote valía 2 (si se hiciera $y_1 = 1$ se hubiera obtenido la solución trivial: $y_i = 1$ para todo valor de i)

```
C
C     SOLUCION DE UN PROBLEMA DE VALORES EN LA FRONTERA
C     DEFINIDO POR UNA ECUACION DE SEGUNDO ORDEN RESUELTO
C     CON EL METODO DE INTEGRACION PASO A PASO
C
      DIMENSION Y(100)
  100 FORMAT (5F10.4,3I5)
  101 FORMAT (*1SOLUCION DESPUES DE *,I5,* ITERACIONES*)
  102 FORMAT (*1*,5X,*X*,12X,*Y*)
  103 FORMAT (1X,23(*-*))
  104 FORMAT (F11.4,F13.4)
    1 READ (5,100) X0,Y0,XN,YN,Y1,N,NMI,NAPROX
      IF (N.LT.2) CALL EXIT
      APROX=10.**(-NAPROX)
      H=(XN-X0)/N
      DO 4 ITER=1,NMI
      Y(1)=Y1
      Y(2)=2.*Y1-(H*(Y1-1.))**2-Y0
      DO 2 I=3,N
    2 Y(I)=2.*Y(I-1)-(H*(Y(I-1)-1.))**2-Y(I-2)
      REL=ABS((Y(N)-YN)/YN)
      IF (REL.LE.APROX) GO TO 5
      IF (ITER.EQ.1) GO TO 3
      Y1=((YN-YNN)*Y1-(YN-Y(N))*Y11)/(Y(N)-YNN)
      Y11=Y(1)
      YNN=Y(N)
      GO TO 4
    3 Y1=Y1+0.1
      Y11=Y(1)
      YNN=Y(N)
    4 CONTINUE
      WRITE (6,101) NMI
    5 WRITE (6,102)
      WRITE (6,103)
      WRITE (6,104) X0,Y0
      X=X0
      DO 6 I=1,N
      X=X+H
    6 WRITE (6,104) X,Y(I)
      WRITE (6,103)
      GO TO 1
      END
```

```
0.0000    3.0000    1.0000    1.0000    1.0000     4    10    4
0.0000    3.0000    1.0000    1.0000    1.0000    10   100    6
0.0000    0.0000    0.0000    0.0000    0.0000     0     0    0
```

Fig. 8-22. Programa para resolver un problema de valores en la frontera, de orden dos, por integración paso a paso.

X	Y
0.0000	3.0000
.2500	2.6325
.5000	2.1681
.7500	1.6055
1.0000	.9999

X	Y
0.0000	3.0000
.1000	2.9000
.2000	2.7639
.3000	2.5967
.4000	2.4040
.5000	2.1916
.6000	1.9650
.7000	1.7291
.8000	1.4878
.9000	1.2442
1.0000	1.0000

Fig. 8-23. Resultados del programa de la figura 8-22.

```
C
C     SOLUCION DE UN PROBLEMA DE VALORES CARACTERISTIOOS
C     DEFINIDO POR UNA ECUACION DE SEGUNDO ORDEN RESUELTO
C     CON EL METODO DE INTEGRACION PASO A PASO
C
      DIMENSION Y(100)
  100 FORMAT (5F10.4,3I5)
  101 FORMAT (≠1SOLUCION DESPUES DE ≠,I5,≠ ITERACIONES≠)
  102 FORMAT (≠1≠,5X,≠X≠,12X,≠Y≠)
  103 FORMAT (1X,23(≠-≠))
  104 FORMAT (F11.4,F13.4)
  105 FORMAT (≠0VALOR CARACTERISTICO = ≠/11X,F13.4)
    1 READ (5,100) X0,Y0,XN,YN,V1,N,NMI,NAPROX
      IF (N.LT.2) CALL EXIT
      APROX=10.**(-NAPROX)
      H=(XN-X0)/N
      Y(1)=2.0
      DO 4 ITER=1,NMI
      Y(2)=2.*Y(1)-V1*H**2*(Y(1)-1.)-Y0
      DO 2 I=3,N
    2 Y(I)=2.*Y(I-1)-V1*H**2*(Y(I-1)-1.)-Y(I-2)
      REL=ABS((Y(N)-YN)/YN)
      IF (REL.LE.APROX) GO TO 5
      IF (ITER.EQ.1) GO TO 3
      V=((YN-YNN)*V1-(YN-Y(N))*V2)/(Y(N)-YNN)
      V2=V1
      V1=V
      GO TO 4
    3 V2=V1
      V1=V1+0.1
    4 YNN=Y(N)
      WRITE (6,101) NMI
    5 WRITE (6,102)
      WRITE (6,103)
      WRITE (6,104) X0,Y0
      X=X0
      DO 6 I=1,N
      X=X+H
    6 WRITE (6,104) X,Y(I)
      WRITE (6,103)
      WRITE (6,105) V
      GO TO 1
      END

0.0000    1.0000    1.0000    1.0000    1.0000    4
0.0000    1.0000    1.0000    1.0000    1.0000   10   1
0.0000    0.0000    0.0000    0.0000    0.0000    0
```

Fig. 8-24. Programa para resolver un problema de valores característicos, de orden dos, por integración paso a paso.

X	Y
0.0000	1.0000
.2500	2.0000
.5000	2.4142
.7500	2.0000
1.0000	1.0000

VALOR CARACTERISTICO =
9.3725

X	Y
0.0000	1.0000
.1000	2.0000
.2000	2.9021
.3000	3.6180
.4000	4.0777
.5000	4.2361
.6000	4.0777
.7000	3.6180
.8000	2.9021
.9000	2.0000
1.0000	1.0000

VALOR CARACTERISTICO =
9.7887

Fig. 8-25. Resultados del programa de la figura 8-24.