



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA  
DE MÉXICO**

---

---

**FACULTAD DE INGENIERÍA**

**ANÁLISIS Y PROCESAMIENTO DE MALLAS DE  
GRADIOMETRÍA GRAVIMÉTRICA**

**T E S I S**

**QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:  
INGENIERO GEOFÍSICO**

**P R E S E N T A :**

**HUANTE ARANA FRANCISCO ENRIQUE**



**DIRECTOR DE TESIS:  
M.C. MAURICIO NAVA FLORES**

**MÉXICO D.F.      ENERO 2015**

# Agradecimientos

A la *Universidad Nacional Autónoma de México* por ser el lugar que me permitió desenvolverme intelectualmente, que me dotó de todo lo necesario para aprender la profesión que hoy en día sé. A la *Facultad de Ingeniería* por haberse convertido en un hogar para mí en donde aprendí a respetar a cada una de las personas que me rodeaba y a ser honesto conmigo mismo, pues sin esto ningún título tiene valor. A la *Facultad de Ciencias* por haberse convertido en mi segundo lugar de estudio, por haberme abierto las puertas para aprender y utilizar las herramientas que ahí enseñan sin poner ningún obstáculo. También al *Instituto de Geofísica* por haberme permitido la realización del Servicio Social en el *Departamento de Ciencias Espaciales* con el Dr. Héctor Durand-Manterola, quien fue una persona que me enseñó mucho dentro de esa rama de estudio y que tuvo la tolerancia para hacerlo. A cada uno de los profesores y académicos que me regalaron sus enseñanzas y conocimientos por la pura satisfacción de obsequiar su experiencia a los que seguimos después de ellos.

Se le reconoce y agradece a *Bell Geospace, Inc.*, *White Oak Energy, Inc.*, Mark Etheridge y Rick Zoss por su accesibilidad para el uso de los datos del *FTG* del Domo Vinton en Louisiana. Se le agradece al Dr. José Carlos Ortiz Alemán por ser el contacto entre el autor de la presente tesis y los antes mencionados.

A mi asesor de tesis, buen maestro y compañero M.C. Mauricio Nava Flores por haberme dado el tiempo adecuado en la preparación del trabajo y por haber tenido la tolerancia para saberme guiar y enseñar. También por haberme dado las herramientas necesarias para la realización de este tema de tesis, el cual cumplió todas mis expectativas. A cada uno de mis sinodales por haberme dedicado el tiempo y el esfuerzo en la revisión y corrección del trabajo, y por haberme obsequiado las enseñanzas de su experiencia: Dr. Jaime Urrutia Fucugauchi, Dr. José Carlos Ortiz Alemán, Dr. Osvaldo Sánchez Zamora y Dr. Mauricio Gabriel Orozco del Castillo.

A mi padre Rafael por haberme inculcado la disciplina y el esfuerzo mediante el ejemplo y enseñanza que es capaz de dar un padre al fruto que ha surgido de su amor. A mi madre Lupita que me ha dado su comprensión y confianza en las más difíciles circunstancias preocupándose cuando más la he necesitado, pues es la persona que siempre ha estado a mi lado. A mi hermano Chacho por ser una persona en la cual me puedo recargar cuando todo lo demás se derrumba, aquél en quien puedo confiar cada parte de mi vida y de mi mente. A mi hermano David por ser un ejemplo de vida, y que gracias a sus innumerables consejos he sabido apreciar las mejores partes de la vida con responsabilidad y conciencia. A su esposa Rosa y su familia por haber aceptado ser parte de nosotros a pesar de las dificultades que se presentan a lo largo de la vida.

A mis amigos Miguel y Fernando por estar conmigo en las situaciones más increíbles y asombrosas de la vida estando en lucha a su lado y cuidándonos el uno al otro. A mi amigo Julio por ser aquél que da su tiempo y esfuerzo en aconsejarme y guiarme para lograr tener tranquilidad y estabilidad en cada una de las situaciones de mi vida. A mis amigos Jazmany, Daniel, Víctor, Paula, Pedro, Abraham, Juan Carlos, Sebastián, Ana Lilia, César Emilio, Jesús Ángel, Fernando, Eunice, Juan, Miguel, Nadia, Nicole, Olivia, Mayabah, Karen, Luis y Gabriela por ser personas que me han dado la confianza de entrar en sus vidas y ser parte importante de ellas, agradeciendo los años de confianza y amistad.

A Brenda, porque aunque sea una persona que ya no está conmigo, acepto hoy en día que fue un gran parteaguas en mi vida, pues sin importar las circunstancias ella fue la tregua que me dio la vida en un momento de gran dificultad y que sin ello no habría llegado hasta donde estoy ahora, pues al desprenderme de ella sé que puedo llegar más alto y darle las gracias por todo lo que viví a su lado.

Al área de *Telecomunicaciones del Museo de las Ciencias, Universum*, no sólo por haberme dado el apoyo en todo momento en la realización de mi trabajo de tesis, pues fue en ese lugar donde tuve un espacio en donde lo realicé, sino también por haberme regalado su amistad durante el último año: Ing. Hiram Sánchez, Ing. Addina Cuervo, Ricardo Mata, Jesús Segovia, Luz Macías, Marco y Chucho.

Por último, aunque más importante, pues Su esencia engloba la totalidad, a Dios, porque en Él he encontrado la esencia de la vida al obrar en cada ser humano que pasa a mi lado dándome la oportunidad de volverlo a encontrar tal como en la niñez existía en mí.

# Contenido

<b>CONTENIDO</b>	<b>I</b>
<b>RESUMEN</b>	<b>II</b>
<b>ABSTRACT</b>	<b>III</b>
<b>1. INTRODUCCIÓN</b>	<b>1</b>
1.1. OBJETIVOS	1
1.2. ANTECEDENTES	2
1.2.1. GRADIOMETRÍA GRAVIMÉTRICA	2
<b>2. MARCO TEÓRICO</b>	<b>4</b>
2.1. GRAVIMETRÍA	4
2.1.1. CAMPOS POTENCIALES	5
2.1.2. CAMPO GRAVITATORIO	10
2.1.3. CAMPO GRAVITATORIO TERRESTRE	11
2.1.4. PROSPECCIÓN GRAVIMÉTRICA	12
2.2. TENSOR DE GRADIOMETRÍA GRAVIMÉTRICA	13
2.2.1. TENSORES	13
2.2.2. GRADIENTE GRAVIMÉTRICO	16
2.2.3. ANÁLISIS DE INVARIANTES	24
2.3. PROCESAMIENTO DE DATOS	27
2.3.1. OPERADORES DE REALCE DE FUENTES SOMERAS Y DE BORDES	27
2.3.2. MÉTODOS DE INTERPRETACIÓN SEMIAUTOMÁTICA DE ANOMALÍAS	48
<b>3. PROCEDIMIENTO Y RESULTADOS</b>	<b>75</b>
3.1. DOMO VINTON	75
3.2. ADQUISICIÓN DE DATOS	78
3.3. PROCESAMIENTO DE DATOS	80
<b>4. CONCLUSIONES</b>	<b>121</b>
<b>ANEXO I</b>	<b>124</b>
<b>REFERENCIAS</b>	<b>129</b>

# Resumen

En este trabajo se presenta un análisis del tensor de gradiometría gravimétrica y del procesamiento de datos para esta técnica de prospección. Se inicia con las bases de la gradiometría convencional explicando la teoría del campo gravitatorio terrestre. Se expone la teoría básica sobre tensores, que son herramientas matemáticas indispensables para la definición de la gradiometría gravimétrica. Se define al tensor de gradiometría gravimétrica como el gradiente del vector de gravedad y se realiza el análisis de sus invariantes. Se explica el procesamiento de datos del tensor de gradiometría gravimétrica, que se divide en dos principales secciones: la primera para la delimitación de fuentes someras y de bordes, y la segunda para la interpretación semiautomática de anomalías. Se plantea una secuencia general de procesamiento de mallas de datos de gradiometría gravimétrica para datos observados, la cual inicia con la entrada de datos de las seis componentes del tensor de gradiometría gravimétrica y termina con la obtención de mapas de cada uno de los procesos analizados. Estos procesos se ejemplifican con datos sintéticos y con datos observados adquiridos en el Domo Vinton, Louisiana. Los algoritmos para la interpretación semiautomática de anomalías en datos observados resultaron satisfactorios. Las soluciones aceptadas coincidieron con los modelos de estudios anteriores basados en la geología de la zona, estudios de prospección sísmica, registros de pozo y gravimetría.

# Abstract

In this work an analysis of gravity gradient tensor and data processing for this prospecting technique is presented. It starts with the foundations of conventional gravimetric explaining the theory of Earth's gravitational field. The basic theory of tensors, which are essential mathematical tools for defining gravity gradiometry is exposed. Gravity gradient tensor is defined as the gradient vector of gravity and their invariant analysis is performed. Data processing of gravity gradient tensor is explained, which is divided into two main sections: The first for delimitation of shallow sources and edges, and the second for semiautomatic interpretation of anomalies. A general processing sequence gravity gradiometry data grids to observed data is arises, which starts with the input of the six components of gravity gradient tensor and ends with obtaining maps of each of the analyzed processes. These processes are exemplified with synthetic data and observed data acquired at Vinton Dome, Louisiana. Semiautomatic interpretation of anomalies algorithms for observed data were satisfactory. The accepted solutions coincided with models from earlier studies based on the geology of the area, studies of seismic, well logs and gravimetry.

# 1. Introducción

La gravimetría puede ser utilizada como un método de prospección geofísica en el que se realizan mediciones de la componente vertical de la aceleración de la gravedad en distintos puntos de la superficie terrestre para que, mediante una serie de procesos, pueda obtenerse una señal que represente anomalías de gravedad. Estas anomalías de gravedad pueden ser debidas a distintos contrastes de densidad y a la geometría o distribución de las estructuras del subsuelo. Mediante el procesamiento de datos gravimétricos se pueden hacer interpretaciones y estimaciones de este tipo de estructuras.

Mediante la creación de gradiómetros gravimétricos se lograron realizar las mediciones de los gradientes de la gravedad en las tres direcciones cartesianas; es decir, tres gradientes en cada dirección. Con estas componentes gradiométricas el procesamiento de datos de la gravimetría convencional no era suficiente y se desarrollaron nuevos y mejores métodos para la delimitación y estimación de parámetros de fuentes del subsuelo.

El tratamiento y análisis de la gradiometría gravimétrica ha sido muy popular en los últimos 25 años dentro de la prospección geofísica con campos potenciales, por lo que este trabajo se enfoca en el análisis teórico detallado del tensor de gradiometría gravimétrica y en su aplicación en la interpretación estructural del subsuelo para la obtención de una secuencia óptima de procesamiento.

## 1.1. Objetivos

1. Realizar el análisis teórico detallado de los campos potenciales y de las herramientas matemáticas del tensor de gradiometría gravimétrica y su procesamiento.
2. Analizar las componentes del tensor de gradiometría gravimétrica para generar una secuencia de procesamiento eficiente que culmine con la obtención de la información útil para la interpretación de estructuras del subsuelo.
3. Aplicar la secuencia de procesado para la delimitación y estimación de los parámetros de las fuentes a datos observados provenientes del Domo Vinton, ubicado en Louisiana, E.U.A.

## 1.2. Antecedentes

### 1.2.1. Gradiometría gravimétrica

Fue en 1886 cuando Lorand Eötvös introdujo la balanza de torsión a la exploración de hidrocarburos (Bell & Hansen, 1998); este hecho puede ser considerado como el inicio de la gradiometría. Sin embargo, la balanza de torsión no fue utilizada posteriormente debido a la dificultad que presentó; de igual forma, los datos resultantes eran más difíciles de entender para los intérpretes (Mickus & Hinojosa, 2001). En 1970, *Bell Aerospace* desarrolló para la *Marina de los Estados Unidos de América* un gradiómetro móvil para posicionar submarinos con misiles nucleares, cuya tecnología fue desclasificada hasta 1994 y pudo usarse para la industria energética. Después de su desclasificación, *Bell Geospace* obtuvo la licencia del gradiómetro y lo modificó para el uso en la industria de los hidrocarburos (Coburn & Schneider, 2002). En 1983, le fue concedido a *Bell Aerospace/Textron* un contrato para construir un sistema para explorar el campo de gravedad local de la Tierra usando su gradiómetro gravimétrico. El contrato fue dado por el Laboratorio de Geofísica de la Fuerza Aérea (AFGL<sup>1</sup>). Fue particularmente pertinente que la *Marina de los Estados Unidos de América* haya seleccionado su gradiómetro como ayuda para la navegación (Jekeli, 1993). Así nació el Sistema de Exploración de la Gradiometría Gravimétrica.

En 1989, Vasco estudió la inversión de los datos gradiométricos de la gravedad mediante el problema lineal y no-lineal, obteniendo las relaciones para calcular las componentes del tensor de gradiometría gravimétrica para un prisma. En 1990, Pedersen & Rasmussen desarrollaron el análisis de invariantes de los tensores de gradiometría de gravedad y magnético, y los ejemplificaron en distintos tipos de fuentes. Posteriormente, fueron Zhang et al. (2000) quienes propusieron la deconvolución de Euler extendida y la aplicaron en mallas y perfiles de datos de gradiometría gravimétrica. Por otro lado, Gunn fue el primero en aplicar la *transformada rápida de Fourier (FFT<sup>2</sup>)* para calcular las componentes del gradiente gravimétrico en 1975. Sin embargo, la *FFT* todavía no había sido aplicada al tensor completo, sino hasta que Mickus & Hinojosa (2001) desarrollaron el análisis matemático para obtener todas las componentes del tensor de gradiometría gravimétrica derivadas únicamente de la componente vertical de la gravedad en el dominio del número de onda.

Desde 1999, *Bell Geospace* se especializó en la adquisición, procesamiento e interpretación de los datos del tensor de gradiometría gravimétrica. En ese tiempo, ellos fueron los únicos proveedores de datos del tensor completo para la industria de la exploración de hidrocarburos. Los datos marinos del tensor de gradiometría gravimétrica fueron recolectados en el Golfo de México, el Mar del Norte, el este de Asia y otros lugares del mundo (*Bell Geospace, Inc.*, 2008<sup>3</sup>). En 2001, *Bell Geospace* mejoró la plataforma del gradiómetro de gravedad para su uso en un aeroplano. Este sistema de gradiometría recibió el nombre de

---

<sup>1</sup> *Air Force Geophysics Laboratory.*

<sup>2</sup> *Fast Fourier Transform.*

<sup>3</sup> La información fue obtenida del reporte final del procesamiento y adquisición de los datos del *Air-FTG* para el Domo Vinton, Louisiana, por lo que no tiene autor ni propietario, más que *Bell Geospace, Inc.*

*Air-FTG*. La exploración en el *Air-FTG* fue completada en África, Nueva Zelanda, Australia, Norteamérica, Sudamérica y Europa (*Bell Geospace, Inc.*, 2008).

En 2002, Hinojosa & Mickus mostraron el desarrollo matemático de algunos casos particulares de *pares transformados de Hilbert* de las componentes del tensor de gradiometría gravimétrica para poder ser utilizadas con el método de la señal analítica. En 2007, Mikhailov et al. desarrollaron la deconvolución tensorial mediante el uso de los invariantes del tensor de gradiometría gravimétrica, llegando a unas ecuaciones de Euler análogas a la utilizada para el cálculo de la deconvolución de Euler de Thompson desarrollada en 1982.

En 2007, Coker et al. desarrollaron el análisis de las fallas y fracturas que se forman alrededor de un domo salino; particularmente, estudiaron el patrón de fracturas en los flancos del Domo Vinton. En 2008, *Bell Geospace* realizó la exploración sobre el Domo Vinton como prueba de la instalación de un gradiómetro en plataformas móviles aéreas.

En 2009, Casotto & Fantino hicieron un análisis minucioso de los tensores de gradiometría; particularmente, desarrollaron los gradientes de primero, segundo y tercer orden del potencial gravitatorio en coordenadas generalizadas. En 2010, Beiki mostró que algunas componentes del tensor de gradiometría gravimétrica son pares transformados de Hilbert del resto de ellas, y desarrolló el método de la deconvolución de la señal analítica direccional<sup>4</sup>, el cual puede estimar la ubicación de las fuentes y su índice estructural simultáneamente. Recientemente, Oruç et al. (2012) desarrollaron un nuevo método para el realce de bordes de fuentes del subsuelo, el cual consiste en el cálculo de los *eigenvalores* y el determinante del tensor de gradiometría gravimétrica de curvatura. Posteriormente, Zhou et al. (2013) mejoraron el método anterior al agregar también los datos de la componente vertical de la anomalía gravimétrica para compensar las interferencias de anomalías causadas por distintos signos en el contraste de densidad de las fuentes.

Para este trabajo se propone realizar una secuencia eficiente del procesamiento de mallas de gradiometría gravimétrica para la obtención de información útil en la interpretación de estructuras del subsuelo. Conjuntamente, se pretende realizar un algoritmo basado en los métodos de interpretación semiautomática de anomalías que utilice un método modificado de Barbosa et al. (2000) para la estimación del índice estructural y poder comparar los resultados obtenidos por estos métodos.

---

<sup>4</sup> En este trabajo no se hizo el análisis de dicho método.

# 2. Marco teórico

## 2.1. Gravimetría

El fenómeno conocido como *gravedad* ha sido uno de los más polémicos y estudiados en la historia de la Física. A inicios del siglo XVII, Johannes Kepler estableció el modelo heliocéntrico del universo basado en las mediciones astronómicas detalladas de Tycho Brahe realizadas a finales del siglo XVI. Kepler, con genialidad, logró obtener un modelo del movimiento planetario, el cual se describe por órbitas elípticas de los planetas alrededor del Sol, ubicado éste en uno de sus focos. A finales del siglo XVII, Isaac Newton tomó el modelo de Kepler y desarrolló una teoría para describir el movimiento planetario.

La *ley de gravitación universal* de Isaac Newton estableció que existe una fuerza central, ejercida por el Sol, que mantiene a los planetas en órbitas elípticas alrededor de éste. Es decir, existe una fuerza de atracción llamada *gravedad* que depende de la masa del cuerpo. La teoría newtoniana modela muy bien la dinámica de ciertos fenómenos clásicos, pero el hecho de que la fuerza de gravedad dependa de la masa del cuerpo que la siente dio indicios de que dicha fuerza en realidad era ficticia.

A inicios del siglo XX, Albert Einstein estudió el movimiento de cuerpos a velocidades cercanas a la velocidad de la luz en marcos de referencia inerciales mediante la teoría de la *relatividad especial*. Por el experimento de Michelson & Morley en 1887 se había demostrado que la velocidad de la luz era una constante en cualquier marco de referencia inercial. Posteriormente, Albert Einstein extendió la relatividad especial a marcos de referencia no inerciales con la teoría de la *relatividad general* mediante el estudio de la geometría en variedades riemannianas<sup>5</sup>. La teoría de Albert Einstein explicó que la gravedad en realidad no era una fuerza, sino que se trataba de algo más abstracto.

La relatividad general dice que los cuerpos tienden a seguir geodésicas<sup>6</sup> en una variedad riemanniana de 4 dimensiones (espacio-tiempo); es decir, el hecho de que los planetas sientan una atracción hacia el Sol no es porque haya una fuerza central, sino porque los planetas están siguiendo geodésicas debido a la “deformación” (curvatura) del espacio-tiempo provocada por el Sol (Schutz, 2009).

---

<sup>5</sup> Superficies  $n$ -dimensionales diferenciables de variable real con producto interno, tal que varían suavemente de punto a punto dotando al espacio de nociones métricas como longitudes de curvas, ángulos, áreas, curvatura, etc. (Schutz, 2009).

<sup>6</sup> Trayectorias más cortas en una superficie.

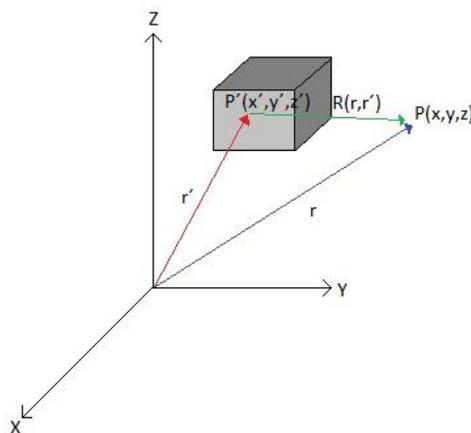
La mecánica newtoniana ha sido tomada actualmente como un modelo aproximado que explica satisfactoriamente la dinámica de partículas, sólidos y fluidos cuyas velocidades son mucho menores a la velocidad de la luz. Por otro lado, la *ley de gravitación universal* de Newton es considerada como un modelo clásico de la gravedad para campos débiles que arroja resultados favorables de la dinámica de cuerpos que se encuentran en un campo gravitatorio usual<sup>7</sup>.

Muchos de los estudios de la gravedad terrestre, donde las velocidades son pequeñas comparadas con la de la luz, no requieren del uso de la relatividad general. Es decir, la mecánica newtoniana contiene las herramientas físicas necesarias para el estudio de la geofísica de exploración utilizada en este trabajo. Por lo tanto, el tratamiento teórico de este trabajo está basado en la *ley de gravitación universal* de Newton, la cual es explicada con detalle en este capítulo.

## 2.1.1. Campos potenciales

### 2.1.1.1. Coordenadas de campo y de fuente

Sea un marco de referencia inercial en coordenadas rectangulares donde existe una fuente de campo con forma y volumen arbitrarios cuyas coordenadas son  $P(\vec{r}') = P(x', y', z')$ . Sea  $\vec{r}'$  el vector de posición que es función de las coordenadas *de fuente* (cuerpo) y que va desde el origen del marco de referencia hasta un punto cualquiera dentro de la fuente. Sea  $\vec{r}$  el vector de posición que es función de las coordenadas *de campo* (observación) y que va desde el origen del marco de referencia hasta un punto cualquiera en el espacio  $P(\vec{r}) = P(x, y, z)$ . El punto en el espacio definido por  $\vec{r}$  será aquél donde el campo producido por la fuente es medido u observado. Sea  $\vec{R}(\vec{r}, \vec{r}')$  la diferencia entre los dos vectores de posición, llamado *vector de posición relativa*; es decir,  $\vec{R}(\vec{r}, \vec{r}') = \vec{r} - \vec{r}'$ . El vector de posición relativa es función de ambos sistemas coordenados (figura 1).



**Figura 1.** Coordenadas *de campo* y *de fuente*.

<sup>7</sup> Campos gravitatorios ejercidos por cuerpos con escalas longitudinales y energéticas similares a las de planetas o cuerpos celestes comunes. Es decir, no pueden ser consideradas estrellas con magnitudes grandes de energía, agujeros negros u otros cuerpos astronómicos exóticos.

El operador diferencial vectorial *nabla* puede ser definido en ambos sistemas coordenados, tanto *de campo* como *de fuente*. Es decir, *nabla* aplicado en forma de gradiente sobre una función escalar  $A(x, y, z)$  que depende de las coordenadas *de campo* es  $\vec{\nabla}A(x, y, z) = \frac{\partial A(x, y, z)}{\partial x} \hat{x} + \frac{\partial A(x, y, z)}{\partial y} \hat{y} + \frac{\partial A(x, y, z)}{\partial z} \hat{z}$ , y aplicado sobre una función escalar  $A(x', y', z')$  que depende de las coordenadas *de fuente* es  $\vec{\nabla}'A(x', y', z') = \frac{\partial A(x', y', z')}{\partial x'} \hat{x}' + \frac{\partial A(x', y', z')}{\partial y'} \hat{y}' + \frac{\partial A(x', y', z')}{\partial z'} \hat{z}'$ . El operador *nabla* está relacionado en ambos sistemas coordenados sólo si es aplicado a una función que dependa tanto de  $\vec{r}$  como de  $\vec{r}'$ . Por lo tanto, las siguientes relaciones pueden ser aplicadas a la magnitud del *vector de posición relativa*:

$$\vec{\nabla}'R(\vec{r}, \vec{r}') = -\vec{\nabla}R(\vec{r}, \vec{r}'),$$

$$\vec{\nabla}' \cdot R(\vec{r}, \vec{r}') = -\vec{\nabla} \cdot R(\vec{r}, \vec{r}'),$$

$$\vec{\nabla}' \times R(\vec{r}, \vec{r}') = -\vec{\nabla} \times R(\vec{r}, \vec{r}'),$$

donde la primera ecuación es el gradiente, la segunda es la divergencia y la tercera es el rotacional del *vector de posición relativa* para ambos sistemas coordenados.

#### 2.1.1.2. Teorema de Helmholtz

Sea la divergencia de un campo vectorial  $\vec{F}$  en un volumen infinitesimal, tal que

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\oiint \vec{F} \cdot d\vec{S}}{\Delta V} = s,$$

y es llamada *generador de campo*, otorgando una fuente escalar  $s$ . Sea el rotacional de un campo vectorial  $\vec{F}$  en una superficie infinitesimal, tal que

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\oint \vec{F} \cdot d\vec{l}}{\Delta S} = \vec{c},$$

y es llamado *generador de vórtice*, otorgando una fuente vectorial  $\vec{c}$ . Si se conocen las ecuaciones de campo  $\vec{\nabla} \cdot \vec{F}(\vec{r}) = s(\vec{r})$  y  $\vec{\nabla} \times \vec{F}(\vec{r}) = \vec{c}(\vec{r})$ , entonces se puede conocer el campo mismo como

$$\vec{F}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}\varphi(\vec{r}) + \vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{r}),$$

donde

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{s(\vec{r}')}{R(\vec{r}, \vec{r}')} dV',$$

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\vec{c}(\vec{r}')}{R(\vec{r}, \vec{r}')} dV',$$

tal que  $\vec{c}(\vec{r}) \neq \vec{0}$  y  $s(\vec{r}) \neq 0$  en  $V'$ . Aquí  $V'$  representa el volumen de la fuente delimitado por la superficie  $S'$ , y  $V^0$  representa el volumen externo a la fuente (la fuente no pertenece a  $V^0$ ) delimitado por la superficie  $S$  en el infinito. Es decir, el volumen total del espacio es  $V = V^0 + V'$  delimitado por  $S \rightarrow \infty$ .

#### 2.1.1.3. Campo conservativo

A partir de las ecuaciones de campo, si  $\vec{\nabla} \cdot \vec{F}(\vec{r}) \neq 0$  y  $\vec{\nabla} \times \vec{F}(\vec{r}) = \vec{0}$ , entonces no habrá generadores de vórtice; es decir,

$$\oint_l \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{l} = 0.$$

A este tipo de campos se les llama *campos conservativos* y del teorema de Helmholtz se tiene la siguiente solución del campo  $\vec{F}$ :

$$\vec{F}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}\varphi(\vec{r}),$$

donde  $\varphi$  es el potencial escalar del campo vectorial  $\vec{F}$  (Blakely, 1996). Un ejemplo físico de un campo conservativo es el *campo gravitatorio*.

#### 2.1.1.4. Campo solenoidal

A partir de las ecuaciones de campo, si  $\vec{\nabla} \cdot \vec{F}(\vec{r}) = 0$  y  $\vec{\nabla} \times \vec{F}(\vec{r}) \neq \vec{0}$ , entonces no habrá generadores de campo; es decir,

$$\oiint_S \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{S} = 0.$$

A este tipo de campos se les llama *campos solenoidales* y del teorema de Helmholtz se tiene la siguiente solución del campo  $\vec{F}$ :

$$\vec{F}(\vec{r}) = \vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{r}),$$

donde  $\vec{A}$  es el potencial vectorial del campo vectorial  $\vec{F}$  (Blakely, 1996). Un ejemplo físico de un campo solenoidal es el *campo magnetostático*.

#### 2.1.1.5. Campo armónico

Existen ocasiones en que las ecuaciones de campo son nulas en cierta región del espacio (afuera de la fuente), pero sí existe una presencia de campo que lo “permea” en su totalidad. De las ecuaciones de campo, si  $\vec{\nabla} \cdot \vec{F}(\vec{r}) = 0$  y  $\vec{\nabla} \times \vec{F}(\vec{r}) = \vec{0}$ , pero sí existe  $\vec{F}(\vec{r})$ , entonces las observaciones se estarán haciendo afuera de la fuente y a este tipo de campos se les llama *campos armónicos* (Blakely, 1996).

Estos campos pueden ser tratados como *conservativos* o *solenoidales*, aunque tradicionalmente se les da un tratamiento *conservativo*. El problema es que, dado que las ecuaciones de campo son nulas, se desconoce a la fuente; por lo tanto, no puede usarse el teorema de Helmholtz para su resolución. En cambio, se busca una solución para el potencial escalar. Si se sustituye la ecuación obtenida del teorema de Helmholtz para un campo conservativo en la ecuación de campo  $\vec{\nabla} \cdot \vec{F}(\vec{r}) = 0$ . De esta manera, se obtiene

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{F}(\vec{r}) = -\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \varphi(\vec{r}) = 0 ;$$

$$\vec{\nabla}^2 \varphi(\vec{r}) = 0 ,$$

que es el *laplaciano* del potencial escalar del campo vectorial. A esta ecuación se le llama la *ecuación de Laplace*. Este caso es el que se utiliza normalmente en la prospección geofísica, pues las mediciones se hacen en la superficie terrestre (o por encima de ésta) y las fuentes están en el subsuelo (la medición no se hace adentro de la fuente).

#### 2.1.1.6. Campo complejo

Un *campo complejo* es la superposición de un campo *conservativo* y uno *solenoidal*, es decir que ambas ecuaciones de campo existen en la región de interés:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{F}(\vec{r}) \neq 0 ,$$

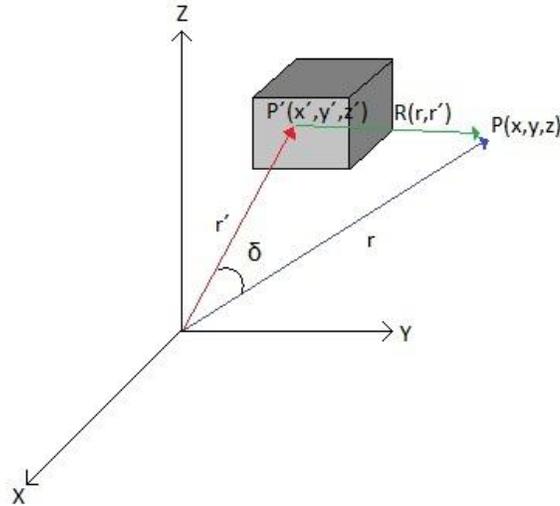
$$\vec{\nabla} \times \vec{F}(\vec{r}) \neq \vec{0} .$$

La solución del campo  $\vec{F}$  para este caso está dada por la ecuación completa del teorema de Helmholtz, pero es difícil de resolver. Normalmente para resolver este tipo de campos, se intenta buscar una región donde alguna de las dos ecuaciones sea nula y así resolverlo matemáticamente como un campo *conservativo* o *solenoidal* (o incluso *armónico*).

#### 2.1.1.7. Fuentes elementales

Sea el ángulo  $\delta$  formado entre el vector de posición de las coordenadas *de fuente* y el de coordenadas *de campo* (figura 2), tal que por la *ley de cosenos* se tiene que

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \delta}} = \frac{1}{r} \left[ 1 + \left( \frac{r'^2 - 2rr' \cos \delta}{r^2} \right) \right]^{-1/2} .$$



**Figura 2.** Ángulo entre los vectores de posición.

Aplicando el *teorema del binomio* a la ecuación anterior se obtiene

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{r} \left[ \left(\frac{r'}{r}\right)^0 \cos^0 \delta + \left(\frac{r'}{r}\right)^1 \cos^1 \delta + \left(\frac{r'}{r}\right)^2 \left(\frac{3}{2} \cos^2 \delta - \frac{1}{2}\right) + \dots \right];$$

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{r} \left[ \left(\frac{r'}{r}\right)^0 \mathcal{P}_0(\cos \delta) + \left(\frac{r'}{r}\right)^1 \mathcal{P}_1(\cos \delta) + \left(\frac{r'}{r}\right)^2 \mathcal{P}_2(\cos \delta) + \dots \right];$$

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{r} \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{r'}{r}\right)^l \mathcal{P}_l(\cos \delta),$$

donde  $\mathcal{P}_l(\cos \delta)$  son los *polinomios de Legendre* para  $\cos \delta$  de orden  $l$ , que pueden ser obtenidos de acuerdo a la fórmula de Rodrigues:

$$\mathcal{P}_l(x) = \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l (x^2 - 1)}{dx^l}.$$

De esta forma, los potenciales escalar y vectorial se pueden escribir mediante una serie infinita como

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi r} \int_V \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{r'}{r}\right)^l \mathcal{P}_l(\cos \delta) s(\vec{r}') dV',$$

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi r} \int_V \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{r'}{r}\right)^l \mathcal{P}_l(\cos \delta) \vec{c}(\vec{r}') dV',$$

donde los potenciales están escritos en términos de las *fuentes elementales* del campo.

Para  $l = 0$  se dice que el potencial y el campo son *monopolares*, para  $l = 1$  se dice que son *dipolares*, para  $l = 2$  son *cuadripolares*, para  $l = 3$  son *octapolares*, etc. De esta manera, el potencial total producido por un campo es la superposición infinita de los potenciales de distintos órdenes:

$$\varphi = \sum_{l=0}^{\infty} \varphi_l,$$

$$\vec{A} = \sum_{l=0}^{\infty} \vec{A}_l.$$

El monopolo es la fuente más intensa del campo, pues decae en  $1/r$ ; en cambio, las fuentes de orden superior decaen más rápidamente con la distancia. Por lo tanto, en regiones lejanas a la fuente, el campo monopolar prevalece por encima de los demás y el campo total puede ser aproximado como el producido por una sola fuente monopolar.

### 2.1.2. Campo gravitatorio

La *ley de gravitación universal de Newton* establece que la fuerza de gravedad entre dos masas puntuales estáticas ( $m_1$  y  $m_2$ ) en un marco de referencia inercial es

$$\vec{F}_{12}(\vec{r}) = -\frac{k}{4\pi} \frac{m_1 m_2}{R^2} \vec{r}_u,$$

donde los subíndices (12) denotan que la fuerza  $\vec{F}$  es debida a la masa  $m_1$  y sentida por la masa  $m_2$ ,  $k$  es una constante,  $R$  es la distancia entre ambas masas y  $\vec{r}_u$  es el vector de posición relativa unitario que va de la masa  $m_1$  a la masa  $m_2$ .

Se define al campo gravitatorio como la fuerza gravitatoria dividida por la masa  $m_2$  cuando ésta tiende a cero. Es decir, la masa  $m_2$  es una *masa de prueba* en donde se va a “sentir” el campo gravitatorio debido a la masa  $m_1$ , y se escribe de la siguiente forma:

$$\vec{g}(\vec{r}) = \lim_{m_2 \rightarrow 0} \frac{\vec{F}(\vec{r})}{m_2} = -\frac{k}{4\pi} \frac{m_1}{R^2} \vec{r}_u.$$

Esto quiere decir que la masa  $m_2$  debe ser despreciable para que no perturbe el campo creado por la masa  $m_1$ . Cabe señalar que a partir de la *segunda ley de Newton*, el campo gravitatorio es entendido como una aceleración debida a un efecto de la fuerza de gravedad. Si se tiene un volumen arbitrario con una distribución de masa no uniforme, el campo gravitatorio de una diferencial de masa en dicho volumen es

$$d\vec{g}(\vec{r}) = -\frac{k}{4\pi} \frac{dm}{R^2} \vec{r}_u.$$

Integrando en todo el volumen de la fuente gravitatoria (pues se cumple el *principio de superposición*), sabiendo que  $dm = \rho dV$ , donde  $\rho$  es la densidad volumétrica de masa, se obtiene el campo gravitatorio ejercido por la fuente de forma y volumen arbitrarios como

$$\vec{g}(\vec{r}) = -\frac{k}{4\pi} \int_V \frac{\rho(\vec{r}')}{R^2(\vec{r}, \vec{r}')}\vec{r}'_u dV,$$

donde las ecuaciones de campo para el caso gravitatorio son

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{g}(\vec{r}) = -k\rho(\vec{r}),$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{g}(\vec{r}) = \vec{0}.$$

Esto quiere decir que es un campo *conservativo* y, de acuerdo al teorema de Helmholtz, está compuesto por un potencial escalar:

$$\vec{g}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}\varphi(\vec{r}),$$

donde

$$\varphi(\vec{r}) = -\frac{k}{4\pi} \int_V \frac{\rho(\vec{r}')}{R(\vec{r}, \vec{r}')}\vec{r}'_u dV';$$

en este caso se cumple la *ecuación de Poisson* para el potencial gravitatorio:

$$\vec{\nabla}^2\varphi(\vec{r}) = k\rho(\vec{r}).$$

Cabe mencionar que la *ecuación de Poisson* se resuelve para regiones dentro de la fuente (donde hay densidad de masa); en cambio, si se trabaja en regiones externas a la fuente, se resuelve la *ecuación de Laplace* (Blakely, 1996).

### 2.1.3. Campo gravitatorio terrestre

En la sección anterior se derivaron las ecuaciones para un campo gravitatorio con masas estáticas en un marco de referencia inercial. Sin embargo, el campo gravitatorio terrestre (o de cualquier cuerpo en rotación) no corresponde a una masa estática, sino a una en rotación con rapidez angular  $\omega$ . La aceleración de la gravedad observada en la superficie terrestre será igual a la aceleración de la gravedad teórica de una masa estática correspondiente al valor de la masa terrestre más la aceleración correspondiente al efecto de la rotación de la Tierra:

$$\vec{g} = \vec{g}_{est} + \vec{g}_\omega,$$

donde  $\vec{g}_{est}$  va hacia el centro de la Tierra y  $\vec{g}_\omega$  va en dirección perpendicular al eje de rotación terrestre. Debido a esto, se observa que la rotación de la Tierra disminuye el efecto gravitatorio ejercido por la masa de la Tierra.

En coordenadas esféricas, el potencial y la aceleración debidos al efecto de la rotación de la Tierra son

$$\varphi_{\omega} = -\frac{1}{2}\omega^2 r^2 \sin^2 \theta ,$$

$$\vec{g}_{\omega} = (\omega^2 r \sin^2 \theta)\vec{r}_u + (\omega^2 r \sin \theta \cos \theta)\vec{\theta}_u ,$$

donde  $\vec{r}_u$  y  $\vec{\theta}_u$  son los vectores unitarios en dirección radial y tangencial (en sentido del ángulo de colatitud) a la Tierra, respectivamente. Las ecuaciones de campo de la aceleración de la gravedad total observada son

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{g} = -k\rho + 2\omega^2 ,$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{g} = \vec{0} ,$$

que siguen siendo de un campo *conservativo*. La *ecuación de Poisson* es  $\vec{\nabla}^2 \varphi = k\rho - 2\omega^2$ .

La *fórmula internacional de la gravedad* da la magnitud de la aceleración de la gravedad en la superficie del *elipsoide de referencia* (*Geodetic Reference System, 1967*) referido a la Tierra, y depende solamente de la latitud  $\vartheta$ :

$$g = 9.78031846 (1 + 0.0053024 \sin^2 \vartheta - 0.0000058 \sin^2 2\vartheta) \left[ \frac{m}{s^2} \right] .$$

El *elipsoide de referencia* es la superficie equipotencial de una tierra ideal casi elipsoidal achatada en los polos y alargada en el ecuador. El *geoide* es la superficie equipotencial real que coincide con el nivel medio del mar. La *topografía* es la forma real que tiene la Tierra (Blakely, 1996).

#### 2.1.4. Prospección gravimétrica

El fin de la prospección geofísica es determinar un modelo geofísico del subsuelo de una región mediante mediciones de distintas propiedades físicas en la superficie terrestre relacionadas a las rocas del subsuelo. La gravimetría es una prospección geofísica que mide la componente vertical de la aceleración de la gravedad en diferentes puntos de la superficie, donde se utiliza la *ecuación de Laplace*. Para una región definida por un cierto volumen, existe una densidad volumétrica de masa que es generadora de la aceleración de la gravedad. Como se sabe, el subsuelo no es homogéneo y no posee una densidad de masa única, sino que es una estructura compleja de distintos tipos de rocas y propiedades físicas. Es por ello que la componente vertical de la aceleración de la gravedad, en general, no es la misma en todos los puntos de medición. Estas mediciones varían de acuerdo a las estructuras y a las densidades que hay debajo. Lo que en realidad se busca son anomalías gravimétricas causadas por contrastes de densidad entre un medio casi homogéneo y cuerpos con diferentes densidades al mismo. Estos datos de medición se analizan mediante una serie de algoritmos para resaltar las estructuras de las fuentes causantes de una anomalía gravimétrica, estimar sus bordes y profundidades, así como sus formas.

## 2.2. Tensor de gradiometría gravimétrica

Los gradientes del potencial gravitatorio se usan en diferentes ramas de las ciencias geodésicas. Los gradientes de primer orden son usados para describir el campo gravitatorio y para el desarrollo de teorías orbitales de satélites. Los gradientes de segundo orden (tensor de gradiometría gravimétrica) aparecen en la aproximación de la gradiometría de gravedad para determinar el campo gravitatorio y también para determinar órbitas satelitales. El uso de los gradientes de tercer orden es también de interés, en particular para el propósito de cartografiar mediciones satelitales sobre una superficie de referencia esférica a una altitud orbital media (Casotto & Fantino, 2009). A partir de 1970, en que se desarrolla el primer sistema para medir todas las componentes del tensor de gradiometría gravimétrica, se tuvo que iniciar con una nueva rama de estudio dentro de la gravimetría. En 1989 (Vasco) y 1990 (Pedersen & Rasmussen) se inicia el análisis más detallado y completo del tensor de gradiometría gravimétrica. Posteriormente, como consecuencia, Vasco & Taylor (1991) mostraron que las componentes del tensor proporcionaban una mejor resolución en profundidad de cuencas que la gravimetría convencional.

A continuación se establece primero la definición de un tensor y su aplicación en el gradiente gravitatorio para, posteriormente, definir al tensor de gradiometría gravimétrica. La forma antigua de definir tensores es en términos de sus propiedades de transformación y de relacionar sus componentes covariantes y contravariantes a la idea geométrica de bases duales, aunque puede ser más satisfactoria una aproximación sofisticada y elegante por medio de mapeos multilineales de vectores y vectores duales (*1-formas*) en números reales (Casotto & Fantino, 2009).

### 2.2.1. Tensores

Sea un espacio *euclidiano* tridimensional parametrizado por coordenadas generalizadas  $u^p$ ;  $p = 1,2,3$ . Se define a la base *covariante*  $\vec{e}_p$  de las coordenadas generalizadas al conjunto de vectores obtenidos en cada punto  $P$ , identificado por su posición  $\vec{r}$  como  $\vec{e}_p = \partial\vec{r}/\partial u^p$ . Luego se define también a la base *contravariante*  $\tilde{\omega}^p$  como  $\tilde{\omega}^p = \vec{\nabla}u^p$ .

Matemáticamente, la base *contravariante* se encuentra en un espacio dual al espacio de la base *covariante* (Casotto & Fantino, 2009). Un vector  $\vec{a}$  puede ser expresado con respecto a la base *covariante*  $\vec{e}_p$  a través de su componente *contravariante*  $a^p$ , como  $\vec{a} = a^p \vec{e}_p$ . El mismo vector  $\vec{a}$  puede ser expresado también con respecto a la base *contravariante*  $\tilde{\omega}^p$  a través de su componente *covariante*  $a_p$ , como  $\vec{a} = a_p \tilde{\omega}^p$ . Note que en las dos expresiones se ha usado el *convenio de suma de Einstein*, el cual se seguirá usando en lo posterior a menos que se indique lo contrario.

En general, un *tensor*  $\binom{M}{N}$  [o también, tensor tipo  $(M, N)$ ] puede definirse formalmente usando lo antes visto de dos formas distintas: como una aplicación multilineal usando el producto tensorial de bases vectoriales o mediante una transformación lineal “adecuada” de las componentes del tensor en diferentes marcos de referencia (Schutz, 2009).

Dado un espacio vectorial  $V$  de dimensión  $n$  sobre un campo  $\mathbb{K}$  y su espacio dual  $V^*$  con la misma dimensión, tal que los elementos de  $V$  se llaman vectores y los de  $V^*$ , covectores (*1-formas*), entonces un tensor es una aplicación multilineal (aplicación lineal en cada uno de sus argumentos) de la forma:

$$T: V^* \times \dots \times V^* \times V \times \dots \times V \rightarrow \mathbb{K},$$

donde hay  $M$  espacios duales  $V^*$  y  $N$  espacios vectoriales  $V$ . De este modo, un tensor  $T$  asocia cada  $M$  covectores y  $N$  vectores a un escalar real mediante la yuxtaposición de las bases vectoriales como

$$T = T_{j_1 \dots j_M}^{i_1 \dots i_N} \tilde{\omega}^{j_1} \dots \tilde{\omega}^{j_M} \vec{e}_{i_1} \dots \vec{e}_{i_N}$$

o mediante el producto tensorial como

$$T = T_{j_1 \dots j_M}^{i_1 \dots i_N} \tilde{\omega}^{j_1} \otimes \dots \otimes \tilde{\omega}^{j_M} \otimes \vec{e}_{i_1} \otimes \dots \otimes \vec{e}_{i_N},$$

donde a los pares  $(\vec{e}^p \otimes \vec{e}^q)$  se les llaman *diadas*.

Por otra parte, si en un determinado marco de referencia  $S$  una magnitud tensorial está dada por un conjunto de componentes  $T_{j_1 \dots j_M}^{i_1 \dots i_N}$ , y al cambiar a otro marco de referencia  $S'$  la magnitud tensorial tiene otro conjunto de componentes  $\tilde{T}_{j'_1 \dots j'_M}^{i'_1 \dots i'_N}$ , la relación entre ambos conjuntos de componentes en los distintos marcos de referencia está dada por

$$\tilde{T}_{j'_1 \dots j'_M}^{i'_1 \dots i'_N} = (\alpha_{j'_1}^{j_1} \dots \alpha_{j'_M}^{j_M} \beta_{i'_1}^{i_1} \dots \beta_{i'_N}^{i_N}) T_{j_1 \dots j_M}^{i_1 \dots i_N},$$

donde  $\alpha_j^j = (A)_j^j$  son los elementos de matriz tal que  $\alpha_j^j = \partial u^j / \partial u'^j$ . La matriz de transformación  $A$  es también conocida como la *matriz jacobiana*. También  $\beta_i^i = (B)_i^i$  son los elementos de matriz de  $B$ , tal que  $B = A^{-1}$ . Esta ley de transformación es la que define el orden  $(M + N)$  del tensor.

Las coordenadas generalizadas están relacionadas con el tensor métrico, cuyas componentes *covariantes*  $g_{pq}$  se expresan de la forma  $g_{pq} = \vec{e}_p \cdot \vec{e}_q$ , donde las componentes de su diagonal son el cuadrado de la magnitud de los vectores base. Para coordenadas ortogonales, el tensor métrico es diagonal y los factores de escala métricos están definidos como  $h_q = \sqrt{g_{qq}} = |\vec{e}_q|$ . Las componentes *contravariantes* del tensor métrico son de igual forma definidas como  $g^{pq} = \tilde{\omega}^p \cdot \tilde{\omega}^q$ , mientras que las componentes mixtas del tensor métrico son  $g_q^p = \vec{e}_q \cdot \tilde{\omega}^p$ . El tensor métrico puede ser usado para “subir” o “bajar” los índices; es decir, para convertir las componentes *contravariantes* en *covariantes* y viceversa. En particular, se puede expresar la relación entre bases *covariantes* y *contravariantes* como  $\vec{e}_p = g_{pq} \tilde{\omega}^q$  y  $\tilde{\omega}^q = g^{pq} \vec{e}_p$ .

Cuando un vector  $V = V^p \vec{e}_p$  se deriva, normalmente sólo se deriva la componente del vector, pues en coordenadas rectangulares las bases vectoriales son constantes. Pero en coordenadas generalizadas las bases vectoriales no necesariamente son constantes, por lo que también deben derivarse. Entonces, en general,

$$\frac{\partial V}{\partial u^q} = \frac{\partial V^p}{\partial u^q} \vec{e}_p + V^p \frac{\partial \vec{e}_p}{\partial u^q},$$

donde se definen a los *símbolos de Christoffel* como

$$\Gamma_{pq}^s = \vec{e}^s \cdot \frac{\partial \vec{e}_p}{\partial u^q}.$$

Por lo tanto,

$$\frac{\partial \vec{e}_p}{\partial u^q} = \Gamma_{pq}^s \vec{e}_s,$$

donde  $\Gamma$  no es un tensor de tipo  $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ , pues no se transforma de manera “adecuada”, pero  $\Gamma_p$  sí es un tensor de tipo  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ . De esta manera, en coordenadas generalizadas, la derivada de un vector es

$$\frac{\partial V}{\partial u^q} = \left( \frac{\partial V^p}{\partial u^q} + V^s \Gamma_{sq}^p \right) \vec{e}_p,$$

donde se definen a

$$(DV)_q^p = \left( \frac{\partial V^p}{\partial u^q} + V^s \Gamma_{sq}^p \right)$$

como las componentes de la *derivada covariante* de un vector (Casotto & Fantino, 2009).

En el espacio *euclidiano*, el tensor métrico es constante y los símbolos de Christoffel son cero; de esta manera,

$$D_s g^{pq} = 0,$$

y por el *Principio de Covariancia General*<sup>8</sup>, esta ecuación es válida en cualquier sistema de referencia. Por lo tanto, los símbolos de Christoffel<sup>9</sup> también pueden ser expresados en función del tensor métrico como

$$\Gamma_{pq}^s = \frac{1}{2} g^{st} \left( \frac{\partial g_{qt}}{\partial u^p} + \frac{\partial g_{pt}}{\partial u^q} - \frac{\partial g_{pq}}{\partial u^t} \right).$$

<sup>8</sup> **Principio de Covariancia General:** Si las ecuaciones son *covariantes* ante transformaciones generales de coordenadas y son válidas en un sistema de coordenadas, entonces son válidas para todos (Schutz, 2009).

<sup>9</sup> Note que los símbolos de Christoffel son simétricos en la parte inferior de los índices.

### 2.2.2. Gradiente gravimétrico

El potencial gravitatorio  $\varphi(\vec{r})$  es una función escalar de la posición  $\vec{r}$  y, como tal, puede ser considerado como un tensor de orden cero [tensor de tipo  $\binom{0}{0}$ ]. El operador gradiente está definido como

$$\vec{\nabla} = \tilde{\omega}^p \frac{\partial}{\partial u^p},$$

así que el gradiente del potencial se obtiene como un tensor de orden uno (covector) [tensor de tipo  $\binom{1}{0}$ ] como

$$\vec{\nabla}\varphi = \tilde{\omega}^p \frac{\partial \varphi}{\partial u^p}.$$

Los gradientes de orden superior se obtienen por la aplicación consecutiva de este operador. Al hacerlo, debe tomarse en cuenta que este operador genera un tensor de un orden más alto que el tensor al cual fue aplicado. Para el gradiente de segundo orden se tiene

$$\vec{\nabla}\vec{\nabla} = \tilde{\omega}^q \frac{\partial}{\partial u^q} \left( \tilde{\omega}^p \frac{\partial}{\partial u^p} \right) = \tilde{\omega}^p \tilde{\omega}^q \frac{\partial^2}{\partial u^p \partial u^q} + \tilde{\omega}^q \frac{\partial \tilde{\omega}^s}{\partial u^q} \frac{\partial}{\partial u^s},$$

donde la derivada de la base local en coordenadas generalizadas es diferente de cero (Cassotto & Fantino, 2009). Utilizando los símbolos de Christoffel, el operador de segundo orden queda dado por

$$\vec{\nabla}\vec{\nabla} = \tilde{\omega}^p \tilde{\omega}^q \left( \frac{\partial^2}{\partial u^p \partial u^q} + \Gamma_{pq}^s \frac{\partial}{\partial u^s} \right).$$

De esta forma, se define al tensor de gradiometría gravimétrica en coordenadas generalizadas como el gradiente de segundo orden aplicado al potencial gravitatorio como

$$\Gamma \equiv -\vec{\nabla}\vec{\nabla}\varphi = - \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^p \partial u^q} + \Gamma_{pq}^s \frac{\partial \varphi}{\partial u^s} \right) \tilde{\omega}^p \otimes \tilde{\omega}^q,$$

que es un tensor de orden 2 [tensor de tipo  $\binom{2}{0}$ ]<sup>10</sup>. En la práctica, el tensor de gradiometría gravimétrica se mide con respecto a las tres coordenadas cartesianas, cuyas bases vectoriales son constantes. De esta forma, los símbolos de Christoffel son nulos:

$$\Gamma = \left( -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^p \partial x^q} \right) \hat{x}^p \otimes \hat{x}^q,$$

donde  $p, q = 1, 2, 3$  y  $(x^1, x^2, x^3) = (x, y, z)$ .

---

<sup>10</sup> Se debe tener cuidado en esta última ecuación de no confundir por notación al tensor de gradiometría gravimétrica con los símbolos de Christoffel.

El tensor de gradiometría gravimétrica se puede escribir también como

$$\Gamma = \Gamma_{pq} \hat{x}^p \otimes \hat{x}^q ,$$

donde las componentes *covariantes* del tensor son

$$\Gamma_{pq} = - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^p \partial x^q} .$$

Por otro lado, el producto tensorial de dos vectores (o covectores) sobre el campo  $\mathbb{K}$  es isomorfo al espacio de matrices de las mismas dimensiones sobre  $\mathbb{K}$  (en este caso,  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ); es decir,

$$\frac{\partial}{\partial x^p} \hat{x}^p \otimes \frac{\partial}{\partial x^q} \hat{x}^q = \left( \frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^m} \right) \otimes \left( \frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n} \right) \simeq \begin{pmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x^{1^2}} & \dots & \frac{\partial^2}{\partial x^1 \partial x^n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2}{\partial x^m \partial x^1} & \dots & \frac{\partial^2}{\partial x^m \partial x^n} \end{pmatrix} ,$$

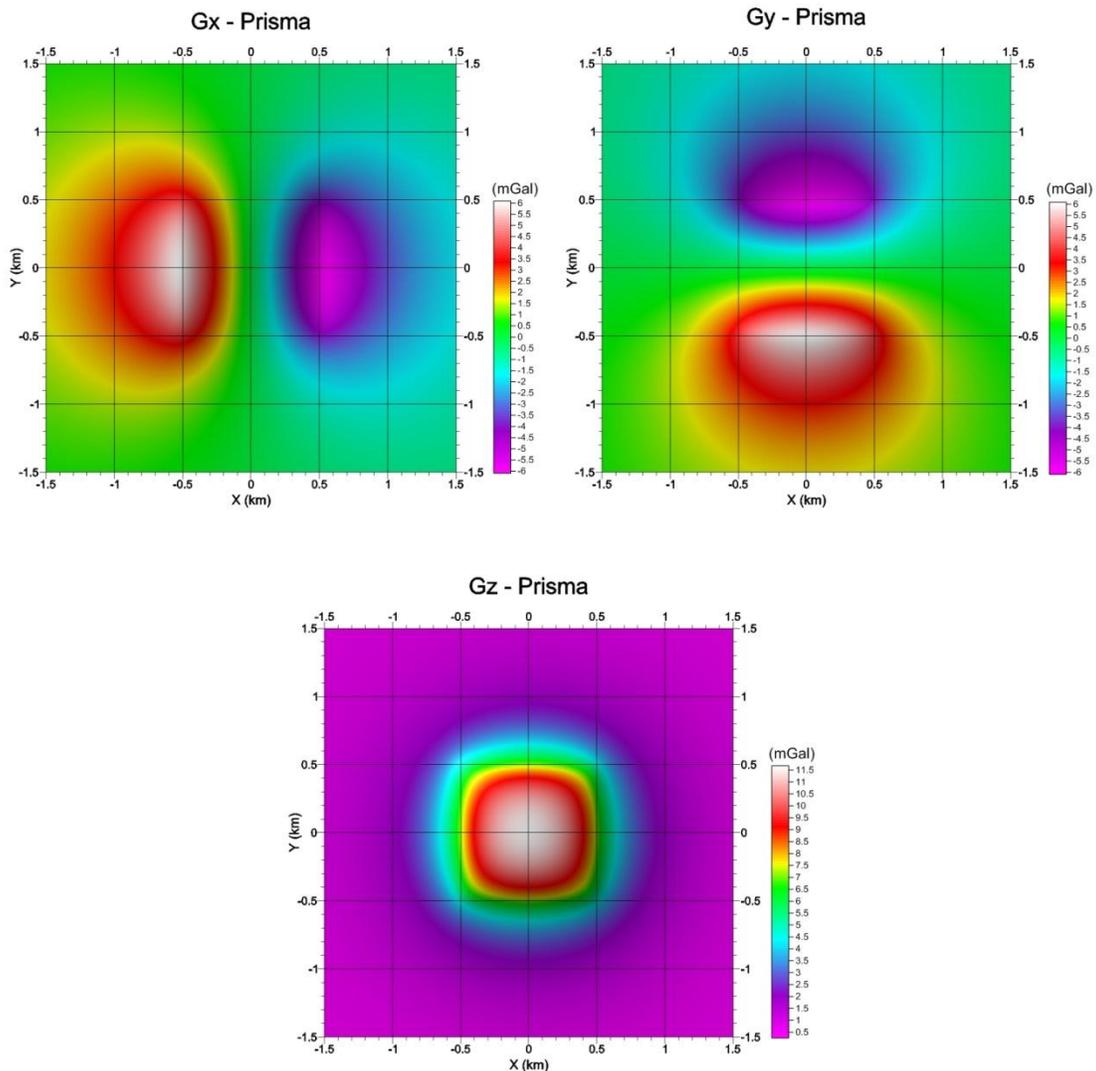
que para el caso *euclidiano* tridimensional queda una matriz cuadrada de tamaño  $3 \times 3$ , y aplicándolo al potencial gravitatorio con un signo negativo por convención, el tensor de gradiometría gravimétrica puede quedar definido en forma práctica como

$$\underline{\Gamma}(x, y, z) = - \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial x} & \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial y} & \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \end{pmatrix} ,$$

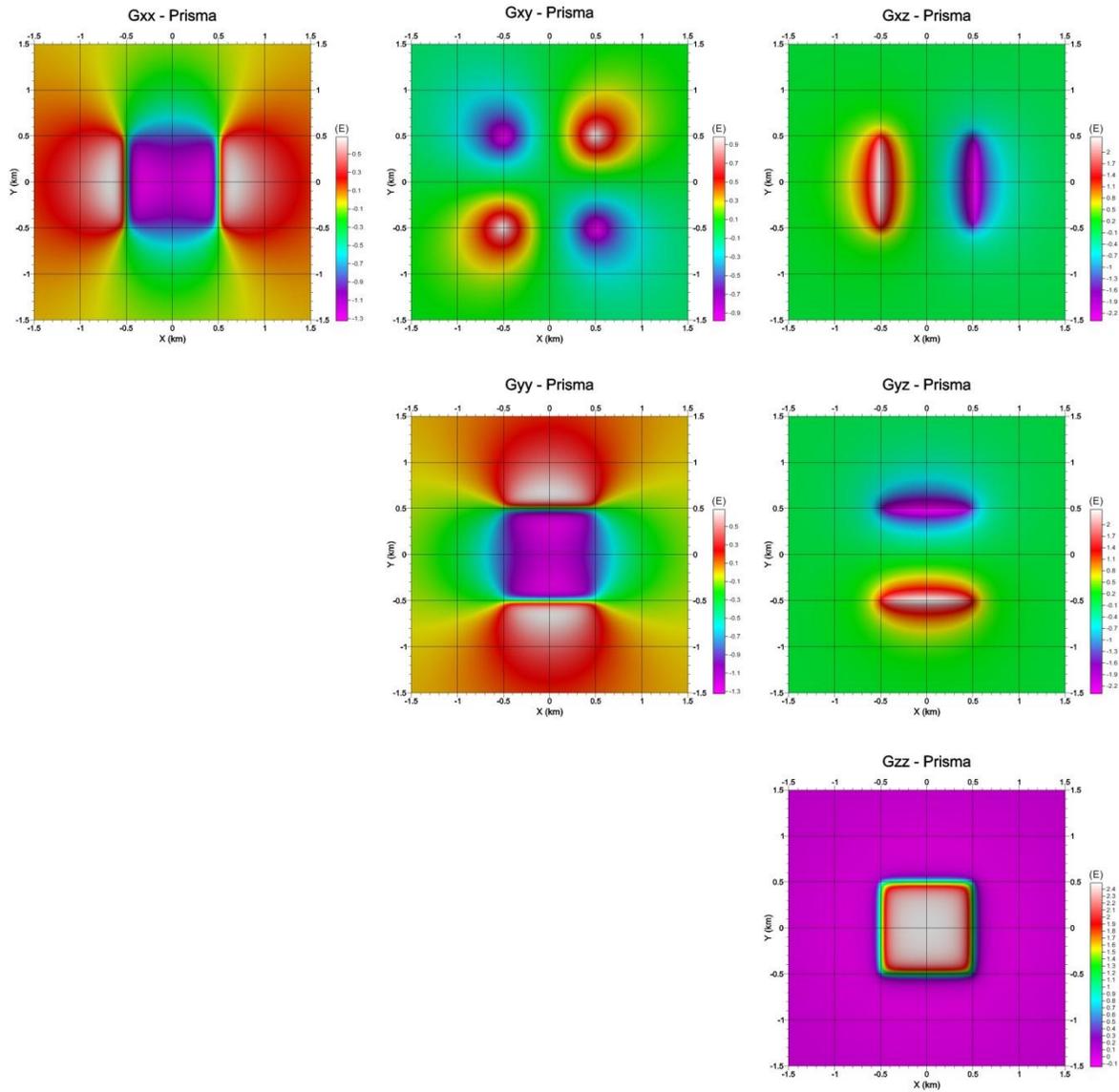
donde  $(x, y, z)$  son las coordenadas *de campo* (observación).

En este trabajo fueron calculadas las componentes del vector de gravedad y del tensor de gradiometría gravimétrica con datos sintéticos de tres cuerpos geométricos distintos: prisma rectangular, esfera y cilindro vertical. Los tres cuerpos geométricos fueron calculados en una malla de observación que se extiende de  $-1.5 (km)$  a  $1.5 (km)$  en las direcciones  $X$  e  $Y$  con un intervalo de muestreo de  $0.01 (km)$  en ambas direcciones, obteniéndose  $301 \times 301$  muestras.

El prisma (figuras 3 y 4) se extiende de  $-0.5 (km)$  a  $0.5 (km)$  en las direcciones  $X$  e  $Y$ , tal que mide  $1 (km)$  por lado en ambas direcciones y sus caras verticales son paralelas a los ejes coordenados. El prisma tiene una altura de  $1000 (m)$  y su cima está a una profundidad de  $0.05 (km)$ , con un contraste de densidad positivo de  $750 (kg/m^3)$ .

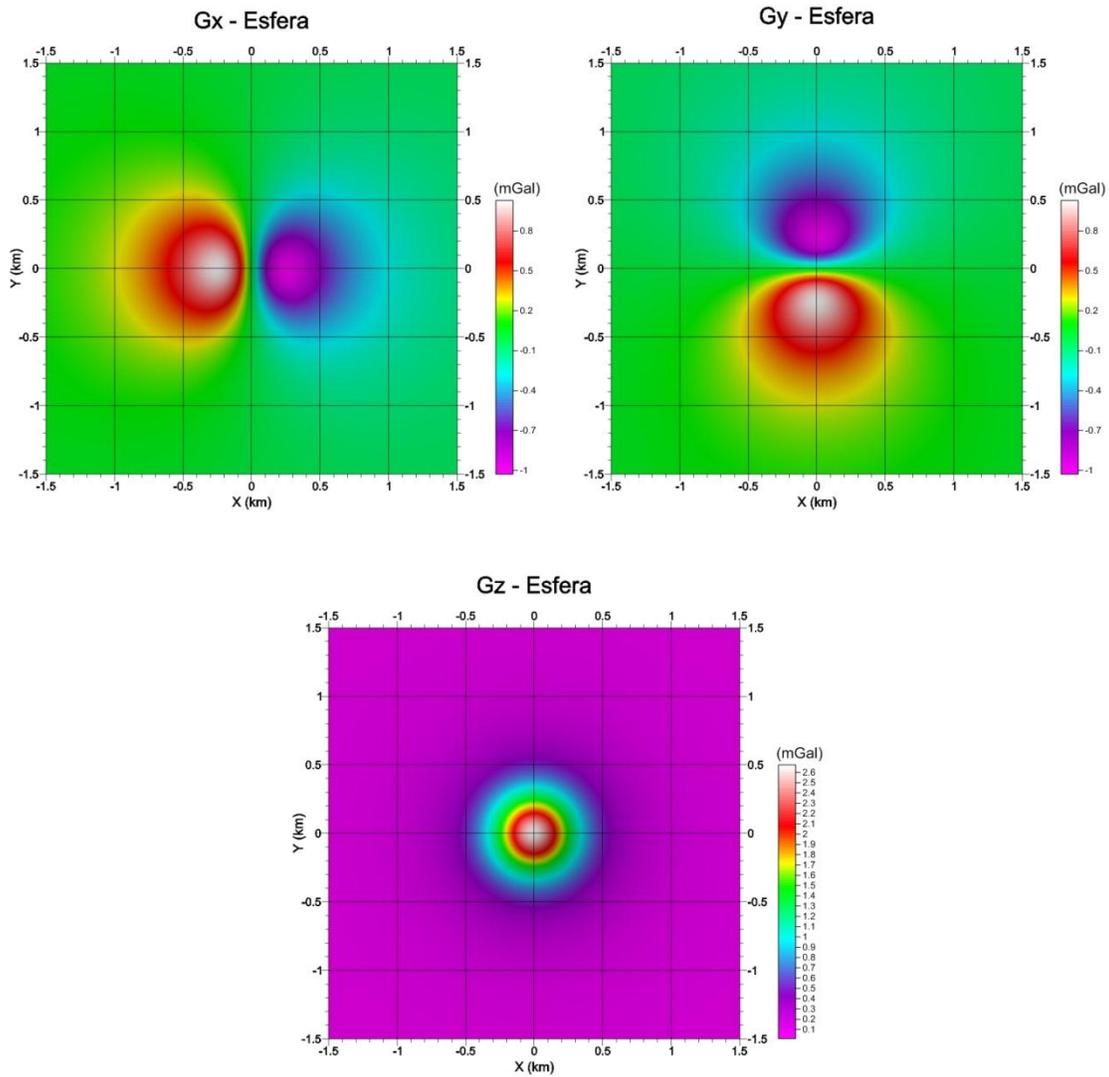


**Figura 3.** Componentes del vector de gravedad:  $g_x, g_y, g_z$ . Prisma rectangular.



**Figura 4.** Componentes del tensor de gradiometría gravimétrica:  $\Gamma_{xx}$ ,  $\Gamma_{xy}$ ,  $\Gamma_{xz}$ ,  $\Gamma_{yy}$ ,  $\Gamma_{yz}$ ,  $\Gamma_{zz}$ . Prisma rectangular.

La esfera (figuras 5 y 6) tiene un radio de  $0.25 \text{ (km)}$  y las coordenadas de su centro  $(0, 0, 0.35) \text{ (km)}$  y tiene un contraste de densidad de  $750 \text{ (kg/m}^3\text{)}$ .



**Figura 5.** Componentes del vector de gravedad:  $g_x, g_y, g_z$ . Esfera.

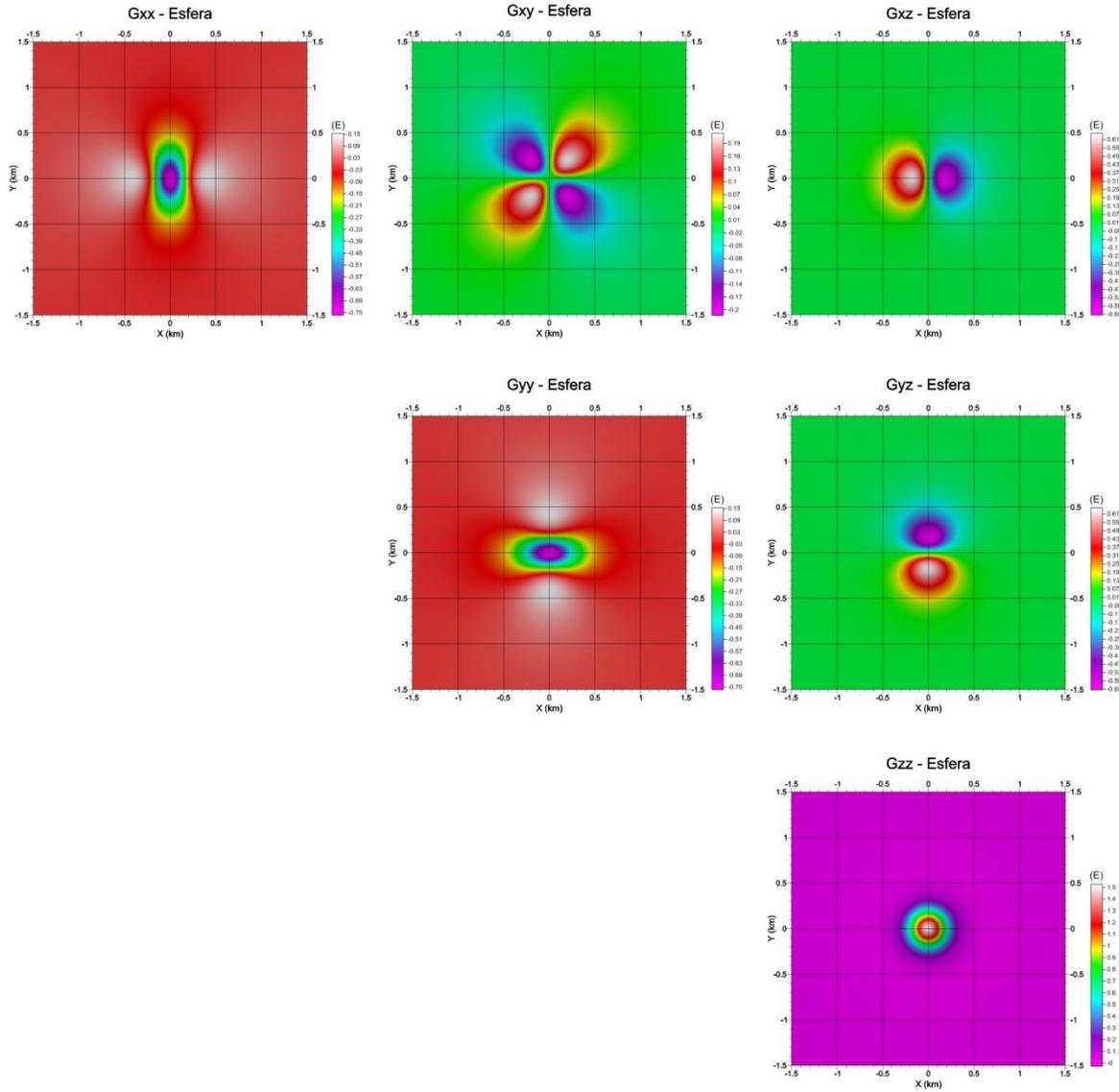
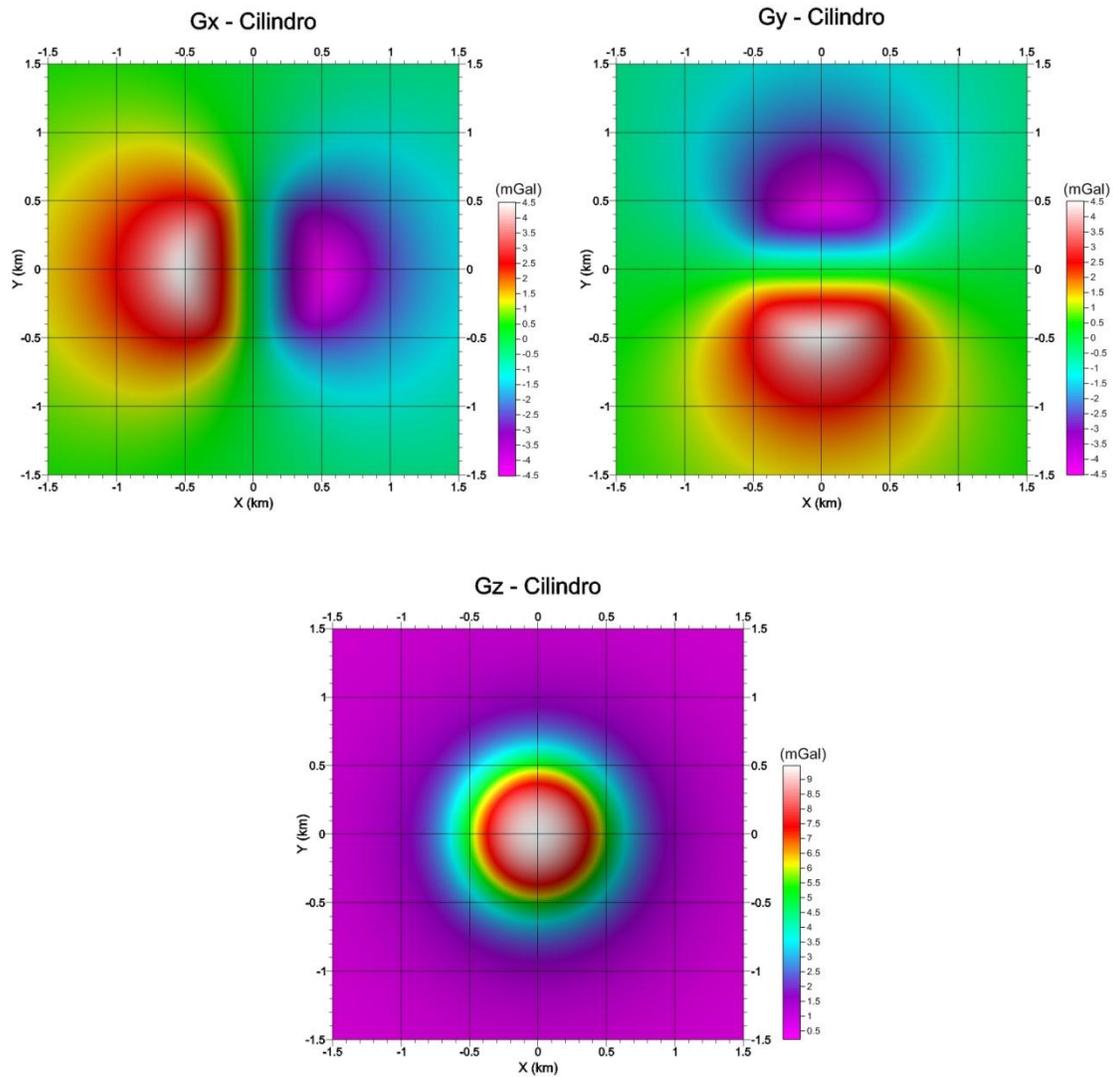
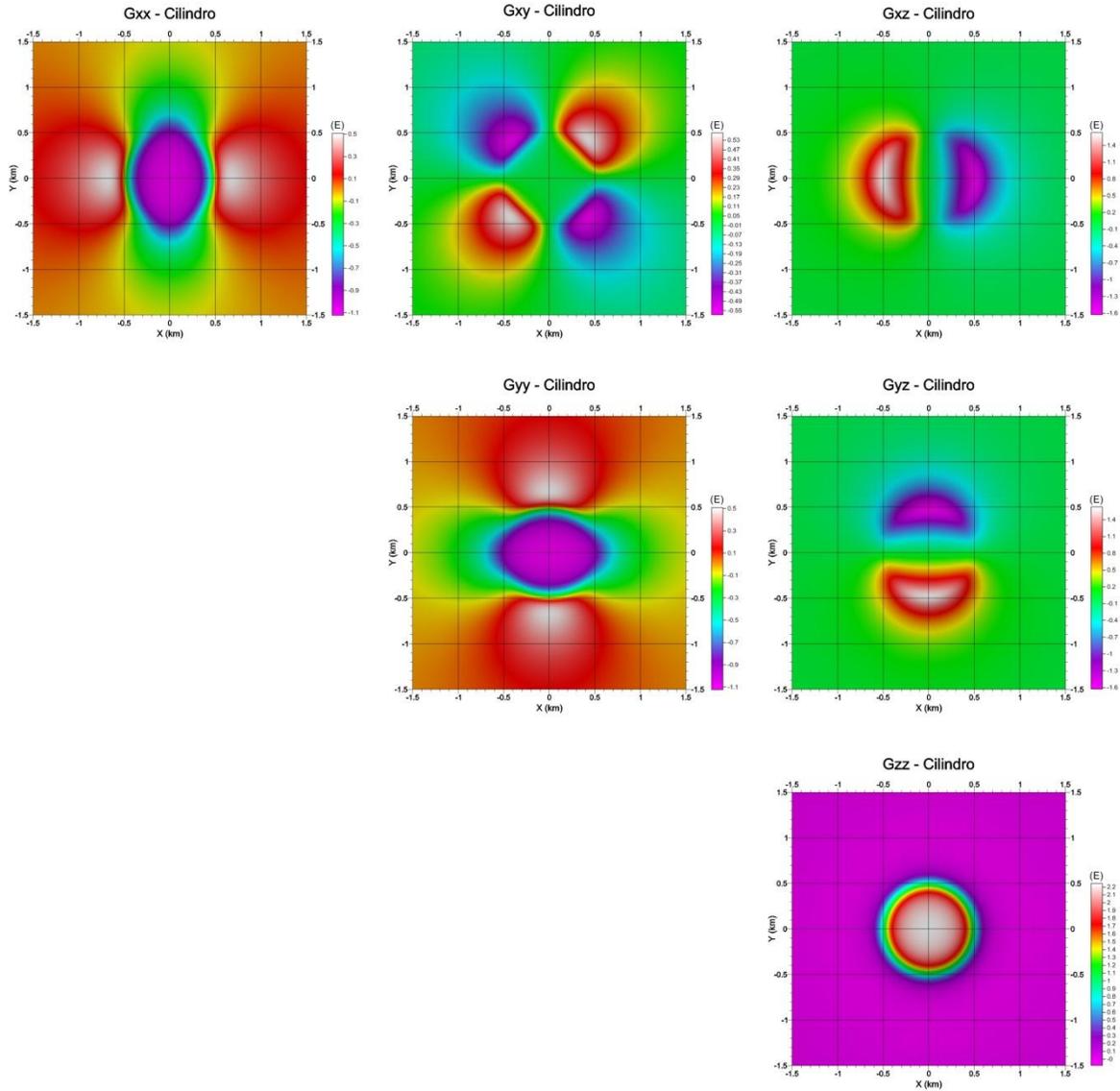


Figura 6. Componentes del tensor de gradiometría gravimétrica:  $\Gamma_{xx}$ ,  $\Gamma_{xy}$ ,  $\Gamma_{xz}$ ,  $\Gamma_{yy}$ ,  $\Gamma_{yz}$ ,  $\Gamma_{zz}$ . Esfera.

El cilindro vertical (figuras 7 y 8) tiene un radio de 0.5 (km) y una altura de 1 (km). El eje del cilindro coincide con el eje Z y está a una profundidad de 0.1 (km) con un contraste de densidad de 750 (kg/m<sup>3</sup>).



**Figura 7.** Componentes del vector de gravedad:  $g_x, g_y, g_z$ . Cilindro vertical.



**Figura 8.** Componentes del tensor de gradiometría gravimétrica:  $\Gamma_{xx}$ ,  $\Gamma_{xy}$ ,  $\Gamma_{xz}$ ,  $\Gamma_{yy}$ ,  $\Gamma_{yz}$ ,  $\Gamma_{zz}$ . Cilindro vertical.

En las gráficas anteriores se han visualizado para cada cuerpo geométrico a las tres componentes del vector de gravedad en miligales, cuya equivalencia es:  $1 (mGal) = 10^{-5} (m/s^2)$ . También se visualizaron las seis componentes del tensor de gradiometría gravimétrica en eötvös<sup>11</sup>, cuya equivalencia es:  $1 (E) = 0.1 (mGal/km)$ .

<sup>11</sup> Unidades de gradiometría gravimétrica en honor a Lorand Eötvös.

### 2.2.3. Análisis de invariantes

A partir de la definición de las componentes del tensor de gradiometría gravimétrica en coordenadas cartesianas, como son representadas en una matriz, se pueden obtener ciertas características de estos elementos. Como el potencial gravitatorio  $\varphi$  es continuo y diferenciable, entonces sus segundas derivadas también lo son; por lo tanto, las derivadas parciales cruzadas del potencial son iguales. Esto quiere decir que el tensor de gradiometría gravimétrica es *simétrico*:  $\Gamma_{pq} = \Gamma_{qp}$ . A partir de la *ecuación de Laplace* (en el espacio libre de fuentes), se puede observar que la traza del tensor es cero; esto quiere decir que cualquiera de las tres componentes diagonales se puede obtener mediante las otras dos:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2};$$

de esta forma, el tensor de gradiometría gravimétrica tiene solamente cinco componentes independientes.

Dado que  $\underline{\Gamma}$  es una matriz simétrica real, ésta puede ser diagonalizada con *eigenvalores* reales y *eigenvectores* mutuamente ortogonales. Físicamente, esto significa que en cualquier punto de medición es posible encontrar un sistema cartesiano en el cual el tensor de gradiometría gravimétrica es nulo en los términos externos a la diagonal. Bajo cualquier transformación de coordenadas  $\underline{\Gamma}$  contiene tres invariantes:

$$I_0 = Tr(\underline{\Gamma}) = \Gamma_{xx} + \Gamma_{yy} + \Gamma_{zz} = 0,$$

$$I_1 = \Gamma_{xx}\Gamma_{yy} + \Gamma_{yy}\Gamma_{zz} + \Gamma_{xx}\Gamma_{zz} - \Gamma_{xy}^2 - \Gamma_{yz}^2 - \Gamma_{xz}^2,$$

$$I_2 = \det(\underline{\Gamma}),$$

donde la ecuación característica para determinar los *eigenvalores* es

$$\lambda^3 - I_0\lambda^2 + I_1\lambda - I_2 = \lambda^3 + I_1\lambda - I_2 = 0.$$

Pedersen & Rasmussen (1990) determinaron las raíces de  $\lambda$  (los *eigenvalores*) como

$$\lambda_1 = C + D,$$

$$\lambda_2 = -\frac{C + D}{2} + i\sqrt{3} \frac{C - D}{2},$$

$$\lambda_3 = -\frac{C + D}{2} - i\sqrt{3} \frac{C - D}{2},$$

donde

$$C = \left[ \frac{I_2}{2} + \sqrt{\left(\frac{I_2}{2}\right)^2 + \left(\frac{I_1}{3}\right)^3} \right]^{1/3},$$

$$D = \left[ \frac{I_2}{2} - \sqrt{\left(\frac{I_2}{2}\right)^2 + \left(\frac{I_1}{3}\right)^3} \right]^{1/3}.$$

La condición para que todos los *eigenvalores* sean reales conduce a la siguiente restricción:

$$\left(\frac{I_2}{2}\right)^2 + \left(\frac{I_1}{3}\right)^3 \leq 0;$$

esto quiere decir que  $I_1 \leq 0$ , y la ecuación anterior puede ser expresada en términos de la razón de dimensionalidad  $I$ :

$$0 \leq I = -\frac{\left(I_2/2\right)^2}{\left(I_1/3\right)^3} \leq 1,$$

donde  $I$  es igual a cero si el campo es invariante a lo largo de una dirección particular; es decir, si el cuerpo causante es bidimensional (Pedersen & Rasmussen, 1990). Se ve también que  $I$  es igual a uno para un monopolo (fuente puntual).

Ahora, analizando las definiciones de  $C$  y  $D$ , se puede observar que el término que se encuentra en el interior de la raíz cuadrada es negativo o cero. Por lo tanto, en general,  $C$  y  $D$  serán complejos de la forma

$$C = \left[ \frac{I_2}{2} + i \sqrt{-\left(\frac{I_2}{2}\right)^2 - \left(\frac{I_1}{3}\right)^3} \right]^{1/3},$$

$$D = \left[ \frac{I_2}{2} - i \sqrt{-\left(\frac{I_2}{2}\right)^2 - \left(\frac{I_1}{3}\right)^3} \right]^{1/3},$$

donde ahora sí el término que se encuentra en el interior de la raíz cuadrada es positivo. Por otro lado, del análisis de variable compleja se sabe que

$$[r(\cos \theta + i \sen \theta)]^n = r^n(\cos n\theta + i \sen n\theta),$$

donde  $n$  es un entero positivo (Ayres, 2003). Entonces,  $z^n = A = \rho(\cos \varphi + i \operatorname{sen} \varphi)$ , donde  $A$  es cualquier número complejo y tiene exactamente  $n$  raíces. De esta forma,

$$r^n(\cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta) = \rho(\cos \varphi + i \operatorname{sen} \varphi).$$

Así,  $r = \rho^{1/n}$  y  $\theta = \frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n}$ , con  $k$  entero. El número de raíces distintas es el de ángulos del conjunto  $\left\{\frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right\}$  en una sola vuelta de la circunferencia en el plano complejo. Así, pues, hay exactamente  $n$  raíces distintas dadas por

$$z = A^{1/n} = \rho^{1/n} \left[ \cos \left( \frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n} \right) + i \operatorname{sen} \left( \frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n} \right) \right]; \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1.$$

Estas  $n$  raíces son coordenadas de  $n$  puntos equidistantes sobre la circunferencia con centro en el origen y de radio  $|A|^{1/n}$  (Ayres, 2003). Aplicando esto en los números complejos  $C$  y  $D$  y sustituyéndolos en los *eigenvalores* se tiene

$$\lambda_1 = 2 \sqrt{-\frac{I_1}{3}} \cos \left( \frac{\varphi}{3} + \frac{2k\pi}{3} \right),$$

$$\lambda_2 = -\sqrt{-\frac{I_1}{3}} \cos \left( \frac{\varphi}{3} + \frac{2k\pi}{3} \right) - \sqrt{-I_1} \operatorname{sen} \left( \frac{\varphi}{3} + \frac{2k\pi}{3} \right),$$

$$\lambda_3 = -\sqrt{-\frac{I_1}{3}} \cos \left( \frac{\varphi}{3} + \frac{2k\pi}{3} \right) + \sqrt{-I_1} \operatorname{sen} \left( \frac{\varphi}{3} + \frac{2k\pi}{3} \right),$$

donde

$$\varphi = \arctan \left( \frac{\sqrt{-\left(\frac{I_2}{2}\right)^2 - \left(\frac{I_1}{3}\right)^3}}{\frac{I_2}{2}} \right).$$

Se puede observar que los tres *eigenvalores* son reales, pues  $I_1 \leq 0$ . Posteriormente, en uno de los métodos de interpretación semiautomática de anomalías para el procesamiento de datos, los *eigenvalores* serán utilizados para estimar la ubicación de las fuentes del subsuelo; para este caso, se utilizará  $k = 0$ .

## 2.3. Procesamiento de datos

El procesamiento del tensor de gradiometría gravimétrica consta de una serie de algoritmos que utilizan a los datos del vector de anomalía gravimétrica y del tensor de gradiometría gravimétrica para realzar las fuentes someras o los bordes de las anomalías; también se pueden obtener estimaciones de la profundidad de dichas fuentes o de otros parámetros físicos o estructurales del subsuelo.

Primero se analizan los operadores de realce de fuentes someras, que constan de dos operadores distintos: la continuación de campo y las derivadas verticales. Posteriormente, se estudian los operadores de realce de bordes y delimitación de fuentes, que constan de las derivadas horizontales, así como del gradiente horizontal. Después se desarrolla la amplitud de la señal analítica direccional que utiliza todas las componentes del tensor de gradiometría gravimétrica y sirve para delimitar bordes de las fuentes más someras. Por último, se realiza el análisis del tensor de gradiometría gravimétrica de curvatura y de sus *eigenvalores* para la delimitación de bordes.

Los métodos más importantes del procesamiento del tensor de gradiometría gravimétrica son para la interpretación semiautomática de anomalías, los cuales otorgan estimaciones de la ubicación de las fuentes, así como de otros parámetros físicos o estructurales. Entre los más usuales e interesantes para este trabajo se encuentra la deconvolución de Euler que, aunque utiliza solamente la componente vertical de la anomalía de gravedad, ofrece buenos resultados para estimar la ubicación de fuentes; también se analizan un par de métodos que utilizan todas las componentes del vector de anomalía gravimétrica y del tensor de gradiometría gravimétrica que son análogos a la deconvolución de Euler.

### 2.3.1. Operadores de realce de fuentes someras y de bordes

#### 2.3.1.1. Continuación de campo

La continuación de campo ascendente o descendente es un operador en el dominio del número de onda que sirve para calcular el campo en distintas superficies a la de medición. En otras palabras, el campo se reconstruye para cualquier altura mediante la medición del mismo en una sola superficie. Este operador es usado también para filtrar señales. La continuación ascendente reproduce casi el mismo efecto que un filtro pasa-bajas, mientras que la continuación descendente reproduce el de un filtro pasa-altas. Es decir, con la continuación ascendente se realzan las anomalías más profundas (el campo regional), mientras que con la continuación descendente se realzan las más someras (el campo residual). Este operador puede ser aplicado a cualquier función armónica; por ejemplo, el potencial gravitatorio y sus primeras y segundas derivadas.

Si se conoce la función armónica en la superficie  $z = 0$ , entonces la misma función puede ser calculada para cualquier otra superficie  $z \neq 0$  de la forma

$$\psi(x, y, z) = \frac{|z|}{2\pi} \iint_{-\infty}^{\infty} \frac{\psi_0(x', y', 0)}{[(x - x')^2 + (y - y')^2 + z^2]^{3/2}} dx' dy' ,$$

donde  $\psi$  y  $\psi_0$  es la función armónica para una altura  $z$  y para la superficie  $z = 0$ , respectivamente. En esta ecuación  $\psi$  puede tomar los valores del potencial gravitatorio  $\varphi$ , las componentes del campo gravitatorio  $g_i$  (con  $i = 1,2,3$ ) y las componentes del tensor de gradiometría gravimétrica  $\Gamma_{ij}$  (con  $i = 1,2,3$  y  $j = 1,2,3$ ). La última expresión puede ser vista como una integral de *convolución*, entonces

$$\psi(x, y, z) = \psi_0(x, y, 0) * h_z(x, y) ,$$

donde  $*$  denota la operación *convolución* y  $h_z$  es el operador de continuación escrito de la siguiente forma:

$$h_z(x, y) = \frac{|z|}{2\pi} \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} .$$

Por el teorema de *convolución*, la función armónica reconstruida puede escribirse en el dominio del número de onda como un producto usual:

$$\Psi(p, q, z) = \Psi_0(p, q, 0) H_z(p, q, z) ,$$

donde las letras mayúsculas indican las transformadas de Fourier de las señales identificadas por sus respectivas letras minúsculas,  $p$  y  $q$  son los números de onda angulares en las direcciones  $X$  e  $Y$ , respectivamente. La transformada de Fourier de  $h_z$  es

$$H_z = \mathcal{F}\{h_z(x, y)\} = e^{-|z|\sqrt{p^2+q^2}} ;$$

de esta manera, la señal recuperada para cualquier superficie horizontal es

$$\psi(x, y, z) = \begin{cases} \mathcal{F}^{-1}\{\Psi_0(p, q, 0) e^{-|z|\sqrt{p^2+q^2}}\}; & \forall z; \text{ Campo ascendente} , \\ \mathcal{F}^{-1}\{\Psi_0(p, q, 0) e^{+|z|\sqrt{p^2+q^2}}\}; & \forall z; \text{ Campo descendente} . \end{cases}$$

El operador de continuación ascendente es con el signo negativo en la exponencial y la continuación descendente, con el signo positivo. Esto es para un marco de referencia inercial donde la dirección  $Z$  va hacia el centro de la Tierra (Blakely, 1996).

### 2.3.1.2. Derivadas horizontales y verticales

En el caso de la gravimetría convencional se calculan las derivadas direccionales para ayudar a la interpretación de las anomalías del campo. La derivada vertical del campo gravitatorio se calcula para realzar las fuentes someras, mientras que las derivadas horizontales se calculan para realzar los bordes de dichas fuentes de forma lateral.

Una vez teniendo los datos de medición de un campo (o de su gradiente) en un dominio espacial discreto interpolado en una malla rectangular, se pueden calcular las derivadas direccionales de dos formas distintas: en el dominio espacial con diferencias finitas y en el del número de onda al aplicar la transformada de Fourier. Para derivar en el dominio espacial por diferencias finitas se usa una aproximación mediante el truncamiento de la serie de Taylor. La serie de Taylor es una forma de representar una función infinitamente diferenciable mediante el cálculo de sus derivadas locales en el entorno de  $x_i$  para expresarla en forma de un polinomio de la forma

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d^n f(x_i)}{dx^n} \frac{(x - x_i)^n}{n!} = f(x_i) + \frac{df(x_i)}{dx} (x - x_i) + \frac{d^2 f(x_i)}{dx^2} \frac{(x - x_i)^2}{2} + \dots$$

Como sólo nos interesa la primera derivada de la función y no las de orden superior, se trunca la última ecuación hasta  $n = 1$  y se despeja la primera derivada. De esta forma, la derivada aproximada de una función queda de la siguiente forma:

$$\frac{df(x_i)}{dx} \approx \frac{f(x) - f(x_i)}{(x - x_i)}$$

Si  $x = x_{i-1}$ , donde  $x_{i-1} - x_i = -\Delta x$ , entonces se obtiene la *derivada a la izquierda* por diferencias finitas de la forma (para la anomalía gravimétrica observada  $g$ ):

$$\frac{\partial g(x_i, y_j)}{\partial x} \approx \frac{g(x_i, y_j) - g(x_{i-1}, y_j)}{\Delta x},$$

y lo mismo en la dirección  $Y$ :

$$\frac{\partial g(x_i, y_j)}{\partial y} \approx \frac{g(x_i, y_j) - g(x_i, y_{j-1})}{\Delta y}.$$

Si  $x = x_{i+1}$ , donde  $x_{i+1} - x_i = \Delta x$ , entonces se obtiene la *derivada a la derecha* por diferencias finitas de la forma (para la anomalía gravimétrica observada  $g$ ):

$$\frac{\partial g(x_i, y_j)}{\partial x} \approx \frac{g(x_{i+1}, y_j) - g(x_i, y_j)}{\Delta x},$$

y lo mismo en la dirección  $Y$ :

$$\frac{\partial g(x_i, y_j)}{\partial y} \approx \frac{g(x_i, y_{j+1}) - g(x_i, y_j)}{\Delta y}.$$

Si se suman las dos ecuaciones (la *derivada a la izquierda* y la *derivada a la derecha*) para cada una de las direcciones, entonces se obtienen las *derivadas centradas* por diferencias finitas de la forma:

$$\frac{\partial g(x_i, y_j)}{\partial x} \approx \frac{g(x_{i+1}, y_j) - g(x_{i-1}, y_j)}{2\Delta x},$$

$$\frac{\partial g(x_i, y_j)}{\partial y} \approx \frac{g(x_i, y_{j+1}) - g(x_i, y_{j-1})}{2\Delta y}.$$

La *derivada centrada* por diferencias finitas en un punto, se calcula mediante el uso de los puntos a su alrededor, pero como esto no es posible en los extremos de la malla se utilizan las *derivadas a la izquierda y a la derecha*, dependiendo del extremo a calcular.

La derivada vertical no se puede calcular de la misma forma, pues las mediciones son en una misma superficie horizontal ( $z = 0$ ). Se puede calcular la segunda derivada vertical mediante la *ecuación de Laplace* para la anomalía de campo potencial. La segunda derivada vertical queda de la siguiente forma:

$$\frac{\partial^2 g(x_i, y_j)}{\partial z^2} = -\frac{\partial^2 g(x_i, y_j)}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 g(x_i, y_j)}{\partial y^2}.$$

La forma para calcular la primera derivada vertical es en el dominio del número de onda al aplicar la transformada bidimensional de Fourier a la anomalía gravimétrica a partir del operador de continuación ascendente y descendente. Las derivadas horizontales y verticales calculadas en el dominio del número de onda quedan de la siguiente forma:

$$\frac{\partial^n g(x_{i1}, y_{i2})}{\partial x^n} = \mathcal{F}^{-1}\{(ip_{i1})^n G(p_{i1}, q_{i2})\},$$

$$\frac{\partial^n g(x_{i1}, y_{i2})}{\partial y^n} = \mathcal{F}^{-1}\{(iq_{i2})^n G(p_{i1}, q_{i2})\},$$

$$\frac{\partial^n g(x_{i1}, y_{i2})}{\partial z^n} = \mathcal{F}^{-1}\left\{\left(-\sqrt{p_{i1}^2 + q_{i2}^2}\right)^n G(p_{i1}, q_{i2})\right\},$$

donde  $G$  es la transformada de Fourier de  $g$ , que es la anomalía gravimétrica,  $p$  y  $q$  son los números de onda angulares correspondientes a las direcciones  $X$  e  $Y$ , respectivamente.

Hay ocasiones en que no se tienen todas las componentes del vector de gravedad, sino sólo la componente vertical; para realizar muchos de los métodos en este trabajo, se necesitan también las componentes horizontales. Para obtener  $g_x$ ,  $g_y$  y  $g_z$  a partir de algunas de las componentes del tensor de gradiometría gravimétrica, se usa la transformada inversa de Fourier. Hay tres opciones distintas para obtener cada una de las tres componentes del vector de gravedad. De esta forma,

$$\begin{aligned}
g_x(x_{i1}, y_{i2}) &= \mathcal{F}^{-1} \left\{ \frac{1}{ip_{i1}} \mathcal{F}\{\Gamma_{xx}(x_{i1}, y_{i2})\} \right\} = \mathcal{F}^{-1} \left\{ \frac{1}{iq_{i2}} \mathcal{F}\{\Gamma_{xy}(x_{i1}, y_{i2})\} \right\} \\
&= \mathcal{F}^{-1} \left\{ \frac{1}{-\sqrt{p_{i1}^2 + q_{i2}^2}} \mathcal{F}\{\Gamma_{xz}(x_{i1}, y_{i2})\} \right\}, \\
g_y(x_{i1}, y_{i2}) &= \mathcal{F}^{-1} \left\{ \frac{1}{ip_{i1}} \mathcal{F}\{\Gamma_{xy}(x_{i1}, y_{i2})\} \right\} = \mathcal{F}^{-1} \left\{ \frac{1}{iq_{i2}} \mathcal{F}\{\Gamma_{yy}(x_{i1}, y_{i2})\} \right\} \\
&= \mathcal{F}^{-1} \left\{ \frac{1}{-\sqrt{p_{i1}^2 + q_{i2}^2}} \mathcal{F}\{\Gamma_{yz}(x_{i1}, y_{i2})\} \right\}, \\
g_z(x_{i1}, y_{i2}) &= \mathcal{F}^{-1} \left\{ \frac{1}{ip_{i1}} \mathcal{F}\{\Gamma_{xz}(x_{i1}, y_{i2})\} \right\} = \mathcal{F}^{-1} \left\{ \frac{1}{iq_{i2}} \mathcal{F}\{\Gamma_{yz}(x_{i1}, y_{i2})\} \right\} \\
&= \mathcal{F}^{-1} \left\{ \frac{1}{-\sqrt{p_{i1}^2 + q_{i2}^2}} \mathcal{F}\{\Gamma_{zz}(x_{i1}, y_{i2})\} \right\}.
\end{aligned}$$

Ambas formas de derivación tienen su desventaja. La derivación en el dominio espacial es una aproximación para un caso discreto, mientras que en el del número de onda, la transformada de Fourier está definida para un dominio infinito y en la realidad la malla de observación es finita, y esto trae como consecuencia problemas al momento de cambiar de dominios dejando ruido en la señal (Beiki, 2010). La ventaja de utilizar las componentes del tensor de gradiometría gravimétrica es que son medidas directas y ya no se necesita del cálculo de las derivadas, evitando las aproximaciones por diferencias finitas y el ruido espectral debido a la transformada de Fourier.

### 2.3.1.3. Gradiente horizontal

El gradiente horizontal ( $HGA$ <sup>12</sup>) es un método sencillo que se aplica a una malla de datos de anomalía de campo potencial (como el gravitatorio) para realzar los bordes laterales de las fuentes del subsuelo. Normalmente sus máximos se ubican encima de los bordes de las fuentes, aunque eso no sucede cuando los bordes están inclinados. También se presentan problemas cuando hay cuerpos superpuestos. Esta operación se aplica directamente sobre las mallas de derivadas direccionales horizontales de la anomalía de campo gravitatorio y se escribe de la forma

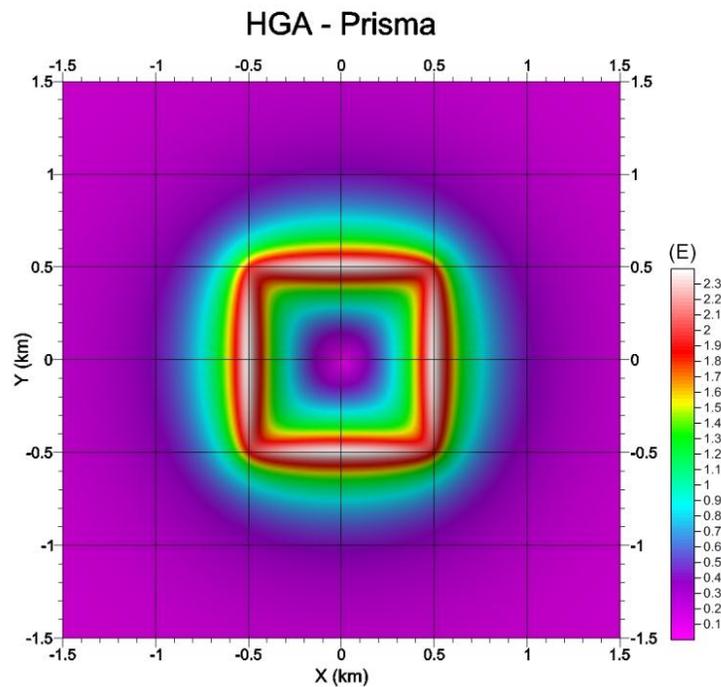
$$HGA(x_i, y_j) = \sqrt{\left[ \frac{\partial g_z(x_i, y_j)}{\partial x} \right]^2 + \left[ \frac{\partial g_z(x_i, y_j)}{\partial y} \right]^2},$$

---

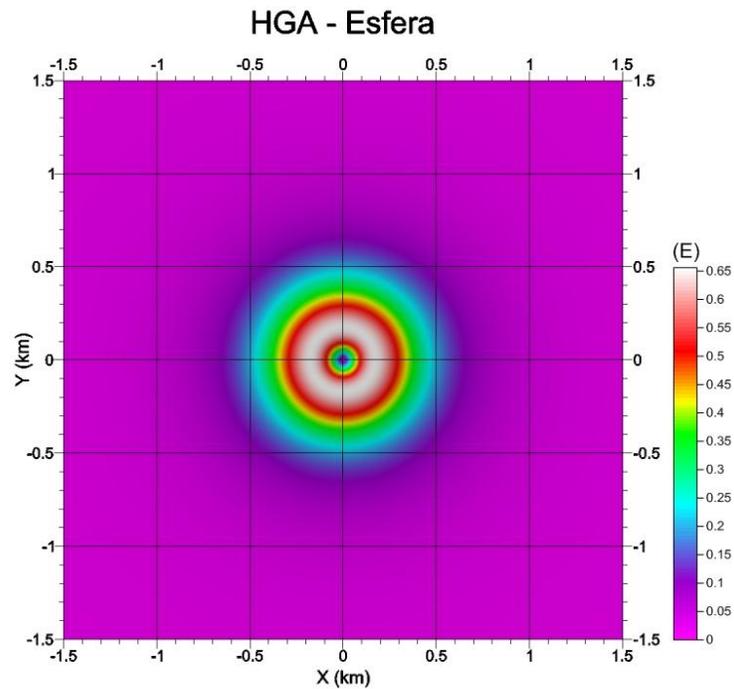
<sup>12</sup> Horizontal Gradient Amplitude.

donde las derivadas se pueden calcular por diferencias finitas o mediante la propiedad de derivación de la transformada de Fourier. En cambio, si se tienen las mediciones de las componentes del tensor de gradiometría gravimétrica, las derivadas direccionales ya no deben calcularse, sino que se usan directamente las mediciones del tensor.

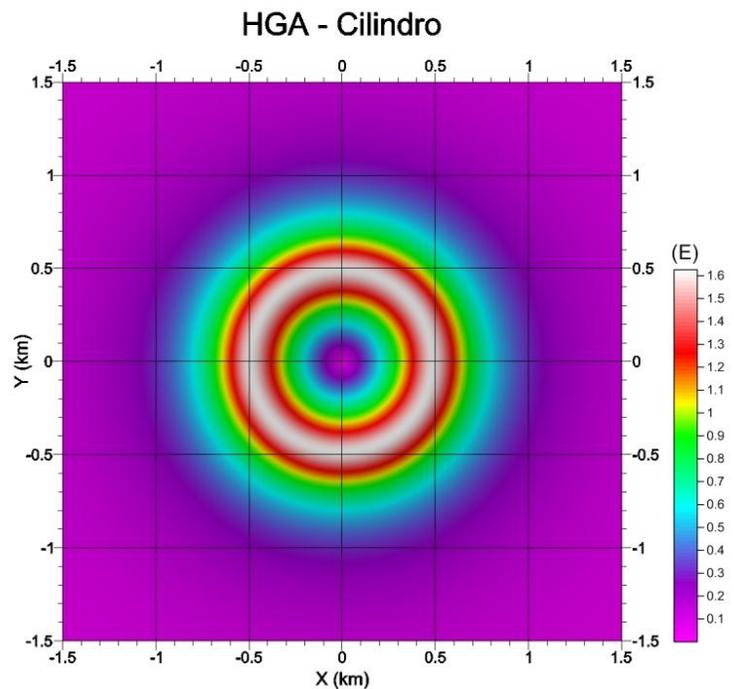
Se ilustra el operador de gradiente horizontal (figuras 9, 10 y 11) con datos sintéticos calculados para los tres cuerpos geométricos vistos anteriormente:



**Figura 9.** Gradiente horizontal. Prisma rectangular.



**Figura 10.** Gradiente horizontal. Esfera.



**Figura 11.** Gradiente horizontal. Cilindro vertical.

Se puede observar que este operador es la superposición de las derivadas horizontales de la componente vertical de la gravedad. En los tres casos, los máximos del *HGA* definen la proyección de sus bordes en el plano horizontal.

#### 2.3.1.4. Amplitud de la señal analítica direccional

Se define a una señal analítica de una función real  $f(x)$  como aquella cantidad compleja cuya parte real es la misma función  $f(x)$  y la parte imaginaria es la transformada de Hilbert de  $f(x)$ . La idea básica es que las componentes del número de onda negativas de la función real pueden ser descartadas sin pérdida de información. Sea  $f(x)$  una señal real con transformada de Fourier  $F(p)$ , donde  $p$  es el número de onda en dirección  $X$ , y  $u(p)$ , la función escalón unitario (o *Heaviside*), entonces

$$F_a(p) \equiv \begin{cases} 2F(p); & p > 0 \\ F(p); & p = 0 \\ 0; & p < 0 \end{cases} = [F(p)][2u(p)] = F(p) + F(p) \operatorname{sgn}(p),$$

donde  $\operatorname{sgn}(p) \equiv \begin{cases} 1; & p > 0 \\ 0; & p = 0 \\ -1; & p < 0 \end{cases}$ . La transformada inversa de Fourier de  $F_a(p)$

es la señal analítica:

$$f_a(x) = f(x) + i \mathcal{H}\{f(x)\},$$

donde  $\mathcal{H}\{f(x)\} = f(x) * (1/\pi x)$  es la transformada de Hilbert de  $f(x)$ , con  $*$  como la operación *convolución*. La señal analítica puede expresarse también en su forma polar como  $f_a(x) = A(x)e^{i\varphi(x)}$ , donde

$$A(x) = |f_a(x)| = \sqrt{[f(x)]^2 + [\mathcal{H}\{f(x)\}]^2},$$

$$\varphi(x) = \arg[f_a(x)].$$

Estas funciones se llaman la *amplitud envolvente* y la *fase instantánea* de la señal analítica  $f_a(x)$ , respectivamente, donde  $\arg[f_a(x)]$  es el argumento de la cantidad compleja. Una característica de la señal analítica es que su amplitud es una función no negativa que envuelve a la señal original definida como su parte real. En algunas aplicaciones, la amplitud y la fase son usadas para medir y detectar características locales de la señal original. Fue Nabighian (1972) quien propuso el uso de la señal analítica en una anomalía magnética bidimensional con sección transversal poligonal medida en una sola dirección a lo largo de un perfil. A partir de las características de la señal analítica logró obtener estimaciones de la profundidad de la anomalía.

Sea la *integral de Cauchy* definida en el plano complejo como

$$\oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - \zeta'} d\zeta = \begin{cases} 2\pi i f(\zeta'); & \text{para } \zeta' \text{ en el interior de } C, \\ \pi i f(\zeta'); & \text{para } \zeta' \text{ en } C, \\ 0; & \text{para } \zeta' \text{ en el exterior de } C, \end{cases}$$

donde  $f(\zeta')$  es una función analítica dentro y a lo largo de una curva cerrada  $C$ ,  $\zeta'$  es un punto en el plano complejo,  $f(\zeta) = u(\xi, \eta) + iv(\xi, \eta)$ , y  $\zeta = \xi + i\eta$ . Las funciones  $u$  y  $v$  satisfacen las condiciones de Cauchy-Riemann dadas por

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} = \frac{\partial v}{\partial \eta}; \quad \frac{\partial u}{\partial \eta} = -\frac{\partial v}{\partial \xi}.$$

Para un punto  $\zeta'$  en  $C$  y resolviendo para  $f(\zeta')$  se tiene

$$f(\zeta') = \frac{1}{\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - \zeta'} d\zeta.$$

Tomando como la curva de integración al eje real  $\xi$  y un semicírculo en el hemisferio superior, la ecuación anterior puede reescribirse como

$$f(\xi') = \frac{1}{\pi i} \wp \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\xi)}{\xi - \xi'} d\xi = \frac{1}{\pi i} \lim_{\delta \rightarrow 0} \left[ \int_{-\infty}^{\xi' - \delta} \frac{f(\xi)}{\xi - \xi'} d\xi + \int_{\xi' + \delta}^{\infty} \frac{f(\xi)}{\xi - \xi'} d\xi \right],$$

donde  $\wp$  denota el *valor principal de Cauchy* de la integral de línea debido a la singularidad en  $\xi = \xi'$  (Hinojosa & Mickus, 2002). Debe notarse que la función analítica ya sólo depende de una variable real  $\xi$  y no de la variable compleja  $\zeta$ . Pero como  $f(\xi) = u(\xi) + iv(\xi)$ , al sustituirla en la última ecuación e igualando partes reales e imaginarias, respectivamente, se tienen

$$u(\xi') = \frac{1}{\pi} \wp \int_{-\infty}^{\infty} \frac{v(\xi)}{\xi - \xi'} d\xi,$$

$$v(\xi') = -\frac{1}{\pi} \wp \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u(\xi)}{\xi - \xi'} d\xi,$$

que están en la forma de una transformada integral, donde  $u(\xi')$  y  $v(\xi')$  son las transformadas de Hilbert una de la otra, y forman un *par transformado de Hilbert* (Hinojosa & Mickus, 2002). Como  $\xi'$  es una variable real arbitraria, ésta puede ser considerada como una variable espacial en dirección  $X$ . Sea entonces la transformada de Fourier de  $u(x)$ :

$$U(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \frac{1}{\pi} \wp \int_{-\infty}^{\infty} \frac{v(\xi)}{\xi - x} d\xi \right] e^{-ipx} dx,$$

y cambiando el orden de las integrales y reacomodando se tiene

$$U(p) = \frac{1}{\pi} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{1}{\xi - x} \right) e^{-ipx} dx \right] v(\xi) d\xi ,$$

donde lo que está en el interior de los corchetes es la transformada de Fourier de  $1/(\xi - x)$ , que es  $\mathcal{F}\{1/(\xi - x)\} = i\sqrt{\pi/2} e^{-ip\xi}$ . Entonces, sustituyendo se obtiene

$$U(p) = i V(p) .$$

De forma análoga se puede demostrar que

$$V(p) = -i U(p) .$$

Se puede observar de estas últimas dos ecuaciones que las transformadas de Fourier de un *par transformado de Hilbert* están relacionadas solamente mediante una rotación en el plano complejo de  $\pm\pi/2$ . Este tipo de sistema es referido como un *transformador de Hilbert*. Hinojosa & Mickus (2002) demostraron cuatro *pares transformados de Hilbert* de las componentes del tensor de gradiometría gravimétrica en el espacio libre con anomalías bidimensionales, que son:

$$\mathcal{F}\{\Gamma_{xx}\} = -i \mathcal{F}\{\Gamma_{xz}\}; \text{ con rumbo en dirección del eje } Y ,$$

$$\mathcal{F}\{\Gamma_{yy}\} = -i \mathcal{F}\{\Gamma_{yz}\}; \text{ con rumbo en dirección del eje } X ,$$

$$\mathcal{F}\{\Gamma_{zz}\} = i \mathcal{F}\{\Gamma_{xz}\}; \text{ con rumbo en dirección del eje } Y ,$$

$$\mathcal{F}\{\Gamma_{zz}\} = i \mathcal{F}\{\Gamma_{yz}\}; \text{ con rumbo en dirección del eje } X .$$

El tercer *par transformado de Hilbert* es el que utilizó Nabighian (1972) para definir a la señal analítica en dos dimensiones. De esta manera, la señal analítica bidimensional es

$$A_a(x) = \frac{\partial g_z(x)}{\partial x} + i \frac{\partial g_z(x)}{\partial z} ,$$

cuya amplitud envolvente es

$$A(x) = \sqrt{\left[ \frac{\partial g_z(x)}{\partial x} \right]^2 + \left[ \frac{\partial g_z(x)}{\partial z} \right]^2} .$$

Posteriormente, en 1984, Nabighian generalizó la señal analítica bidimensional al caso tridimensional mediante las relaciones que guardan las transformadas de Hilbert bidimensionales entre derivadas direccionales de los campos potenciales (Nava, 2010). Luego, Roest et al. (1992) demostraron que la señal analítica tridimensional de la anomalía de campo potencial puede escribirse de forma vectorial como

$$\vec{A}_a(x, y) = \frac{\partial g_z(x, y)}{\partial x} \hat{x} + \frac{\partial g_z(x, y)}{\partial y} \hat{y} + i \frac{\partial g_z(x, y)}{\partial z} \hat{z},$$

donde  $\hat{x}$ ,  $\hat{y}$  y  $\hat{z}$  son los vectores unitarios en direcciones  $X, Y$  y  $Z$ , respectivamente. La amplitud de la señal analítica tridimensional es

$$A(x, y) = \sqrt{\left[\frac{\partial g_z(x, y)}{\partial x}\right]^2 + \left[\frac{\partial g_z(x, y)}{\partial y}\right]^2 + \left[\frac{\partial g_z(x, y)}{\partial z}\right]^2},$$

la cual es muy utilizada actualmente en el procesamiento de datos gravimétricos (componente vertical de la gravedad) medidos en una malla de observación.

Recientemente, Beiki (2010) extendió la definición de la señal analítica para la componente vertical de la gravedad a las de todas las componentes del tensor de gradiometría gravimétrica. Esto se logró al renombrar las relaciones de la transformada de Hilbert tridimensionales para datos de campos potenciales usando la notación de Nabighian & Hansen (2001). Ellos mostraron que la transformada de Hilbert tridimensional de un campo potencial puede escribirse de forma vectorial como

$$\vec{\mathcal{H}}\{g_i(x, y)\} = \mathcal{H}_x\{g_i(x, y)\}\hat{x} + \mathcal{H}_y\{g_i(x, y)\}\hat{y},$$

donde

$$\mathcal{H}_x\{g_i(x, y)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x - \xi}{r^3} g_i(\xi, \eta) d\xi d\eta,$$

$$\mathcal{H}_y\{g_i(x, y)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y - \eta}{r^3} g_i(\xi, \eta) d\xi d\eta,$$

donde  $r = \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2}$  y  $g_i$  es  $g_x, g_y$  o  $g_z$ . En el caso tridimensional, las componentes de la tercera columna del tensor de gradiometría gravimétrica son los *pares transformados de Hilbert* de las componentes de la primera y segunda columnas. Así, se puede definir una función analítica para cada fila, llamada señal analítica direccional en las direcciones  $X, Y$  y  $Z$  (Beiki, 2010), que en forma matricial puede escribirse como

$$\begin{pmatrix} A_{xa}(x, y) \\ A_{ya}(x, y) \\ A_{za}(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Gamma_{xx}(x, y) & \Gamma_{xy}(x, y) & \Gamma_{xz}(x, y) \\ \Gamma_{xy}(x, y) & \Gamma_{yy}(x, y) & \Gamma_{yz}(x, y) \\ \Gamma_{xz}(x, y) & \Gamma_{yz}(x, y) & \Gamma_{zz}(x, y) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ i \end{pmatrix},$$

donde los vectores columna contienen a los vectores unitarios en sus respectivas direcciones y cuyas amplitudes para la  $i,j$ -ésima componente de la malla de observación son

$$A_x(x_i, y_j) = \sqrt{[\Gamma_{xx}(x_i, y_j)]^2 + [\Gamma_{xy}(x_i, y_j)]^2 + [\Gamma_{xz}(x_i, y_j)]^2},$$

$$A_y(x_i, y_j) = \sqrt{[\Gamma_{xy}(x_i, y_j)]^2 + [\Gamma_{yy}(x_i, y_j)]^2 + [\Gamma_{yz}(x_i, y_j)]^2},$$

$$A_z(x_i, y_j) = \sqrt{[\Gamma_{xz}(x_i, y_j)]^2 + [\Gamma_{yz}(x_i, y_j)]^2 + [\Gamma_{zz}(x_i, y_j)]^2}.$$

Debe notarse que  $A_{za}(x, y)$  es la señal analítica para el caso tridimensional de la componente vertical de la gravedad. Las derivadas en las tres direcciones de las tres amplitudes son

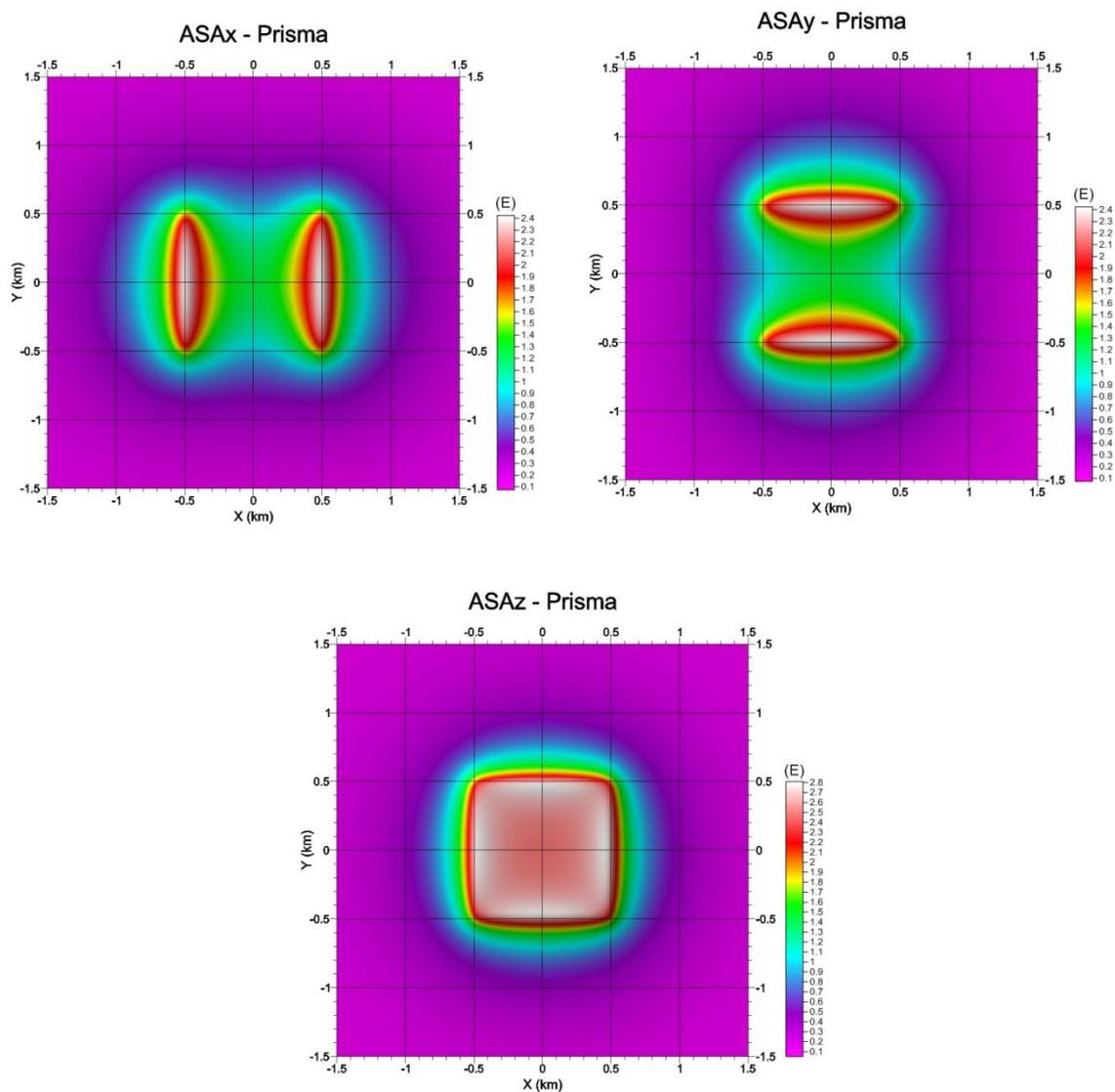
$$\frac{\partial A_\alpha}{\partial x} = \frac{\frac{\partial g_\alpha}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 g_\alpha}{\partial x^2} \right) + \frac{\partial g_\alpha}{\partial y} \left( \frac{\partial^2 g_\alpha}{\partial x \partial y} \right) + \frac{\partial g_\alpha}{\partial z} \left( \frac{\partial^2 g_\alpha}{\partial x \partial z} \right)}{A_\alpha},$$

$$\frac{\partial A_\alpha}{\partial y} = \frac{\frac{\partial g_\alpha}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 g_\alpha}{\partial x \partial y} \right) + \frac{\partial g_\alpha}{\partial y} \left( \frac{\partial^2 g_\alpha}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial g_\alpha}{\partial z} \left( \frac{\partial^2 g_\alpha}{\partial y \partial z} \right)}{A_\alpha},$$

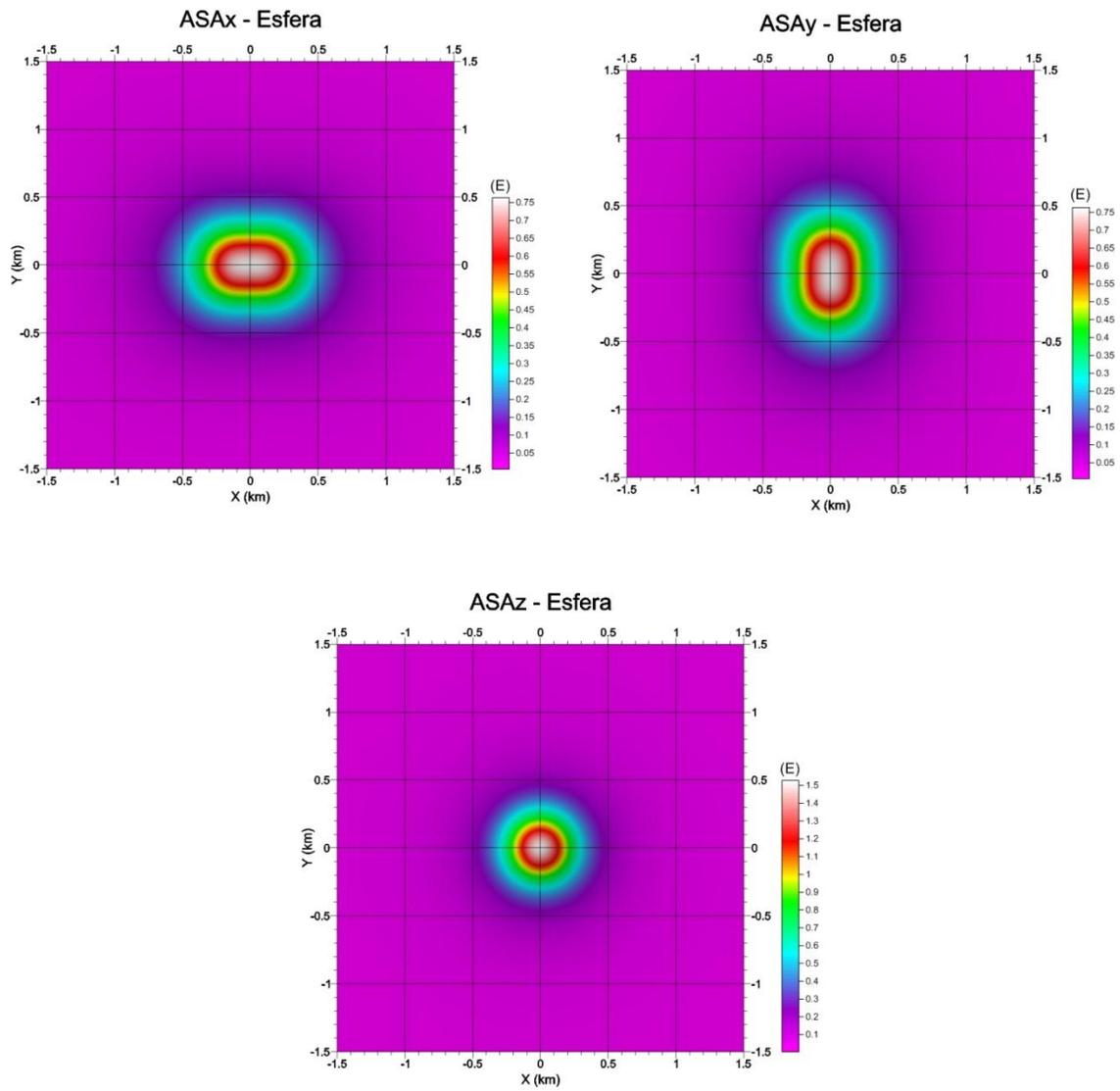
$$\frac{\partial A_\alpha}{\partial z} = \frac{\frac{\partial g_\alpha}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 g_\alpha}{\partial x \partial z} \right) + \frac{\partial g_\alpha}{\partial y} \left( \frac{\partial^2 g_\alpha}{\partial y \partial z} \right) + \frac{\partial g_\alpha}{\partial z} \left( \frac{\partial^2 g_\alpha}{\partial z^2} \right)}{A_\alpha},$$

donde  $\alpha$  es  $x, y$  o  $z$ . Las derivadas de la amplitud de la señal analítica dan una más eficiente separación de las anomalías causadas por interferencia de estructuras que la amplitud de la señal analítica (Beiki, 2010).

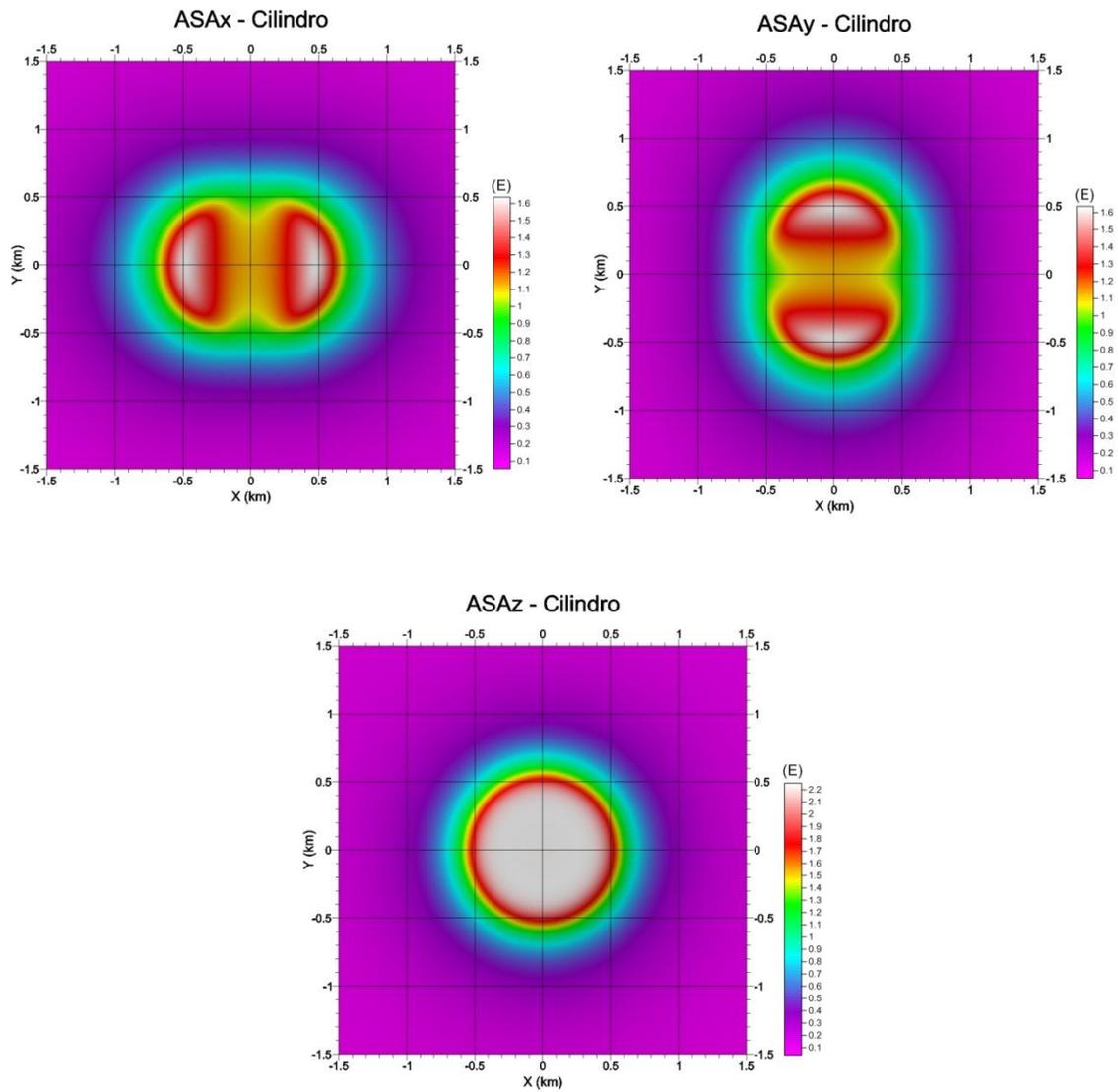
Las tres amplitudes de las señales analíticas (figuras 12, 13 y 14) asociadas a las componentes del tensor de gradiometría gravimétrica se visualizan para los distintos cuerpos geométricos vistos anteriormente:



**Figura 12.** Componentes de la amplitud de la señal analítica direccional:  $A_x, A_y, A_z$ . Prisma rectangular.



**Figura 13.** Componentes de la amplitud de la señal analítica direccional:  $A_x, A_y, A_z$ . Esfera.



**Figura 14.** Componentes de la amplitud de la señal analítica direccional:  $A_x$ ,  $A_y$ ,  $A_z$ . Cilindro vertical.

Se puede observar que las amplitudes de las señales analíticas horizontales delimitan mejor los bordes en sus respectivas direcciones. La amplitud de la señal analítica vertical es la que se calcula usualmente en todos los trabajos con gravimetría convencional, la cual muestra la delimitación de bordes de las fuentes más someras.

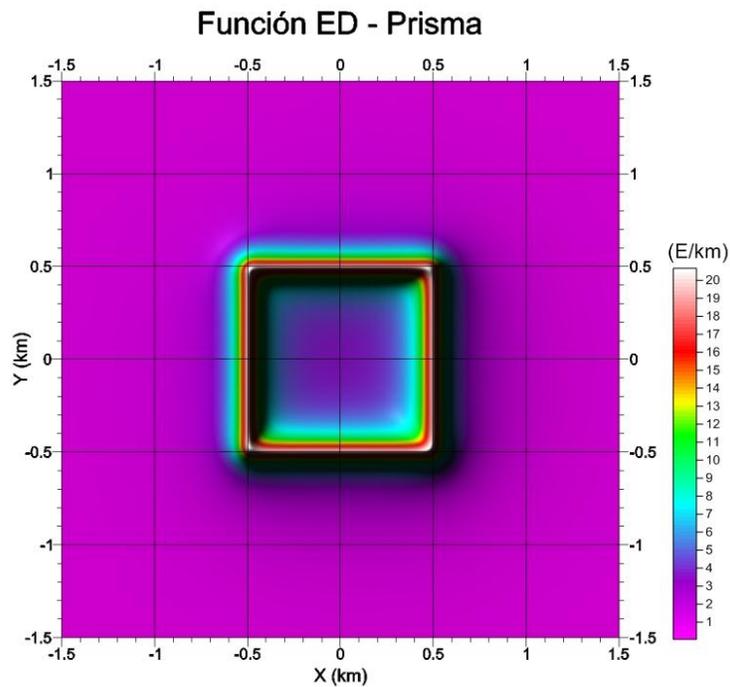
Para los casos del prisma y del cilindro, los máximos de sus amplitudes horizontales definen sus bordes en cada dirección y su amplitud vertical define la cima de cada cuerpo, mientras que para la esfera se define más a su centro de masa que se encuentra en el origen de coordenadas horizontales, por lo que no logra definir bien sus bordes.

### 2.3.1.5. Función *Edge-Detector* (ED)

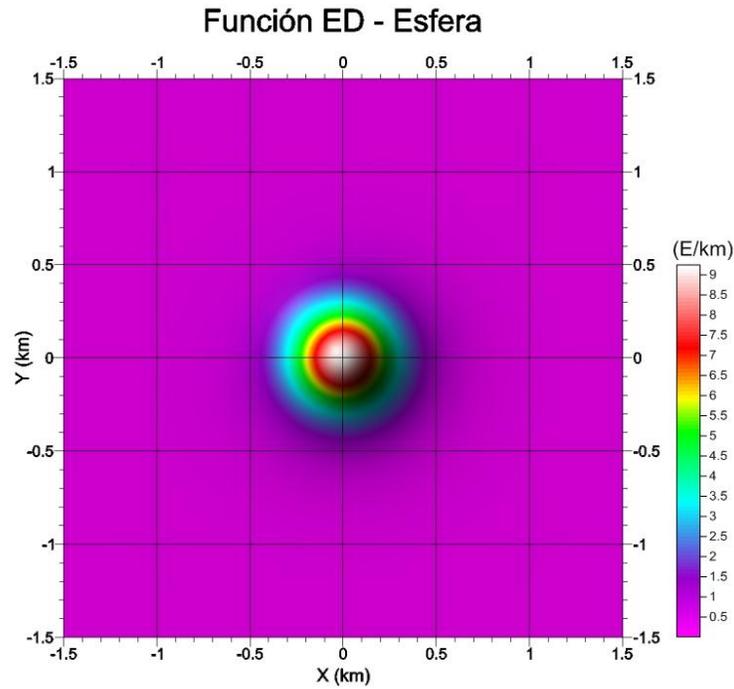
Un operador análogo al gradiente horizontal pero que utiliza las amplitudes de las componentes horizontales de la señal analítica direccional es la función de detección de bordes (*Edge-Detector*):

$$ED(x_i, y_j) = \sqrt{\left[\frac{\partial A_x(x_i, y_j)}{\partial z}\right]^2 + \left[\frac{\partial A_y(x_i, y_j)}{\partial z}\right]^2}.$$

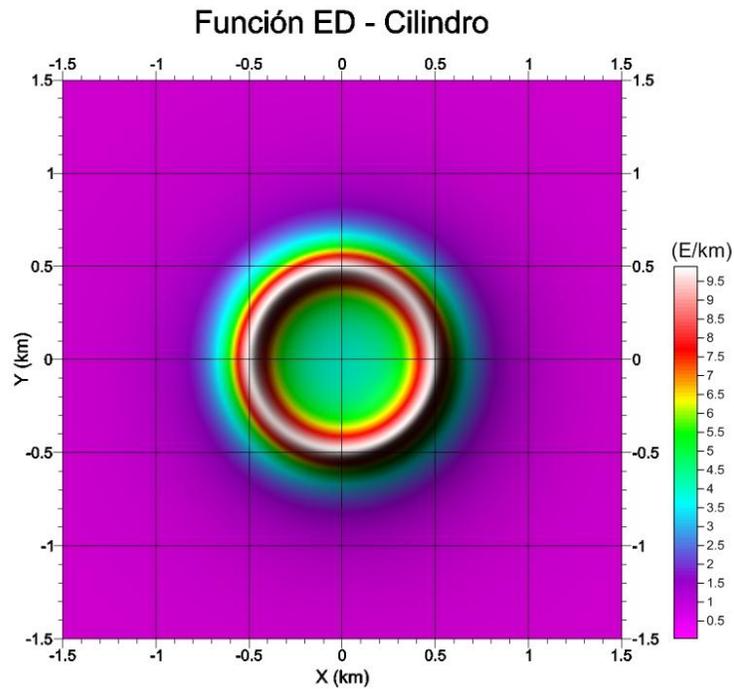
Las derivadas verticales de  $A_x$  y  $A_y$  mejoran los bordes del cuerpo en las direcciones  $X$  e  $Y$ . Uno puede concluir que la combinación de sus derivadas verticales puede ser una mejor función para detectar los bordes de un cuerpo (Beiki, 2010). Como ejemplo para este operador (figuras 15, 16 y 17) se utilizan los datos sintéticos de los cuerpos geométricos vistos anteriormente:



**Figura 15.** Función *Edge-Detector* (Detección de Bordes). Prisma rectangular.



**Figura 16.** Función *Edge-Detector* (Detección de Bordes). Esfera.



**Figura 17.** Función *Edge-Detector* (Detección de Bordes). Cilindro vertical.

Para los casos del prisma y del cilindro se puede ver que la delimitación de sus bordes mejoró de gran manera con respecto a los operadores anteriores, mientras que para la esfera se intensificó la ubicación de su centro de masa y no sus bordes.

### 2.3.1.6. Tensor de gradiometría gravimétrica de curvatura

La matriz hessiana, también llamada *matriz de curvatura*, describe cuán arqueada es una curva o superficie en un punto particular de la geometría (Oruç et al., 2012). De esta forma, se define al tensor de gradiometría gravimétrica de curvatura ( $CGGT^{13}$ ) como

$$\Gamma_C = \left( -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^i \partial x^j} \right) \hat{x}^i \otimes \hat{x}^j ,$$

donde  $x^i, x^j = x, y$  son las coordenadas horizontales cartesianas y  $\hat{x}^i, \hat{x}^j = \hat{x}, \hat{y}$  son los vectores unitarios en sus respectivas direcciones. De igual manera, el producto tensorial es isomorfo, en este caso, al espacio de matrices de tamaño  $2 \times 2$ , donde se obtiene a la matriz hessiana con las segundas derivadas parciales horizontales del potencial gravitatorio como

$$\underline{\Gamma_C} = - \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial x} \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \end{pmatrix} .$$

De la misma forma que en la definición del tensor de gradiometría gravimétrica,  $\underline{\Gamma_C}$  también es simétrica, por lo que las componentes que están afuera de la diagonal son iguales. Obteniendo los dos *eigenvalores* de  $\Gamma_C$  (Oruç et al., 2012) expresados con las componentes del tensor de gradiometría gravimétrica se tiene

$$\lambda_1 = \frac{1}{2} \left[ \Gamma_{xx} + \Gamma_{yy} + \sqrt{(\Gamma_{xx} - \Gamma_{yy})^2 + 4(\Gamma_{xy})^2} \right] ,$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{2} \left[ \Gamma_{xx} + \Gamma_{yy} - \sqrt{(\Gamma_{xx} - \Gamma_{yy})^2 + 4(\Gamma_{xy})^2} \right] .$$

Por otra parte, el determinante del  $CGGT$ , al ser un invariante, puede calcularse a partir de los *eigenvalores* como

$$\det(\Gamma_C) = \lambda_1 \lambda_2 .$$

Tanto los *eigenvalores* como el determinante del  $CGGT$  funcionan como operadores de realce de bordes, pero los *eigenvalores* tienen problemas al diferenciar entre estructuras con contraste de densidad negativo y positivo, por lo que se pierden los bordes cuando éstas se encuentran muy cerca unas de las otras (Zhou et al., 2013). Es decir, el *eigenvalor*  $\lambda_1$  delimita mejor los bordes de las fuentes con contraste de densidad positivo, mientras que el *eigenvalor*  $\lambda_2$  delimita mejor los de contraste de densidad negativa.

---

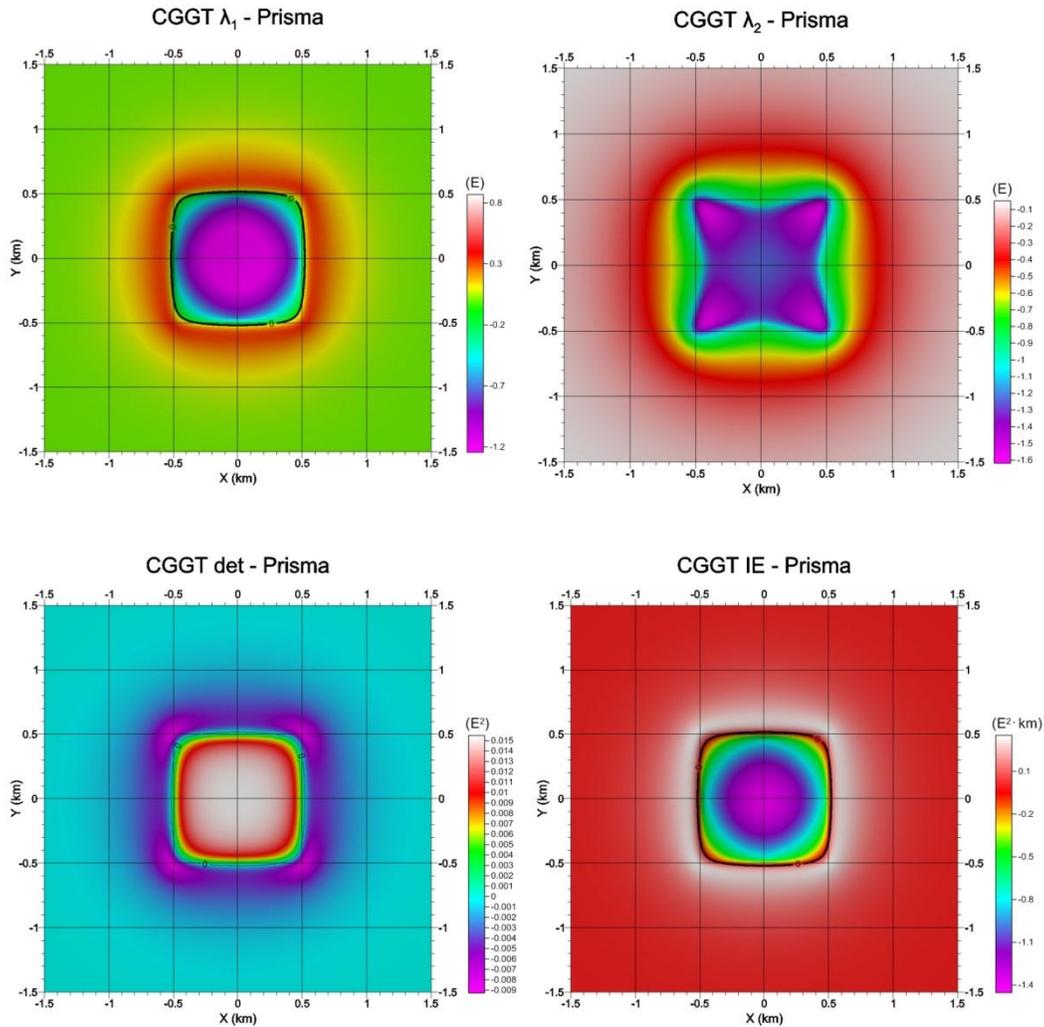
<sup>13</sup> *Curvature Gravity Gradient Tensor.*

Es por eso que para evitar la interferencia de anomalías por cuerpos con diferentes signos en el contraste de densidad, las respuestas que éstas den necesitan ser siempre positivas. Para esto, Zhou et al. (2013) propusieron utilizar el *eigenvalor*  $\lambda_1$  calculado para el *CGGT* multiplicando cada componente del tensor por la componente vertical de la anomalía de gravedad. El operador utilizado para la detección de bordes mediante el *CGGT* desarrollado por Zhou et al. (2013) queda expresado de la siguiente forma:

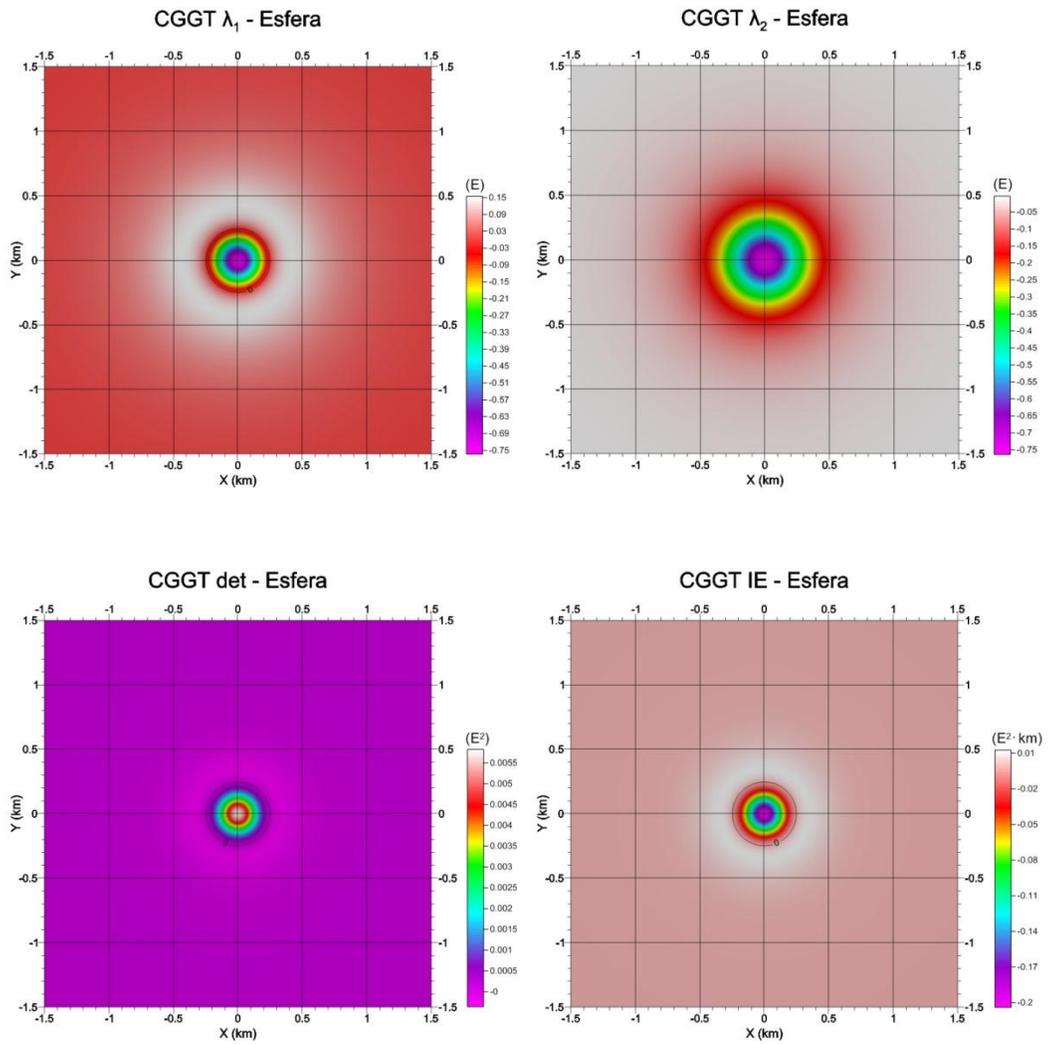
$$IE = \frac{1}{2} \left[ \Gamma_{xx}g_z + \Gamma_{yy}g_z + \sqrt{(\Gamma_{xx}g_z - \Gamma_{yy}g_z)^2 + 4(\Gamma_{xy}g_z)^2} \right],$$

cuya respuesta es siempre positiva para cualquier tipo de anomalía gravimétrica.

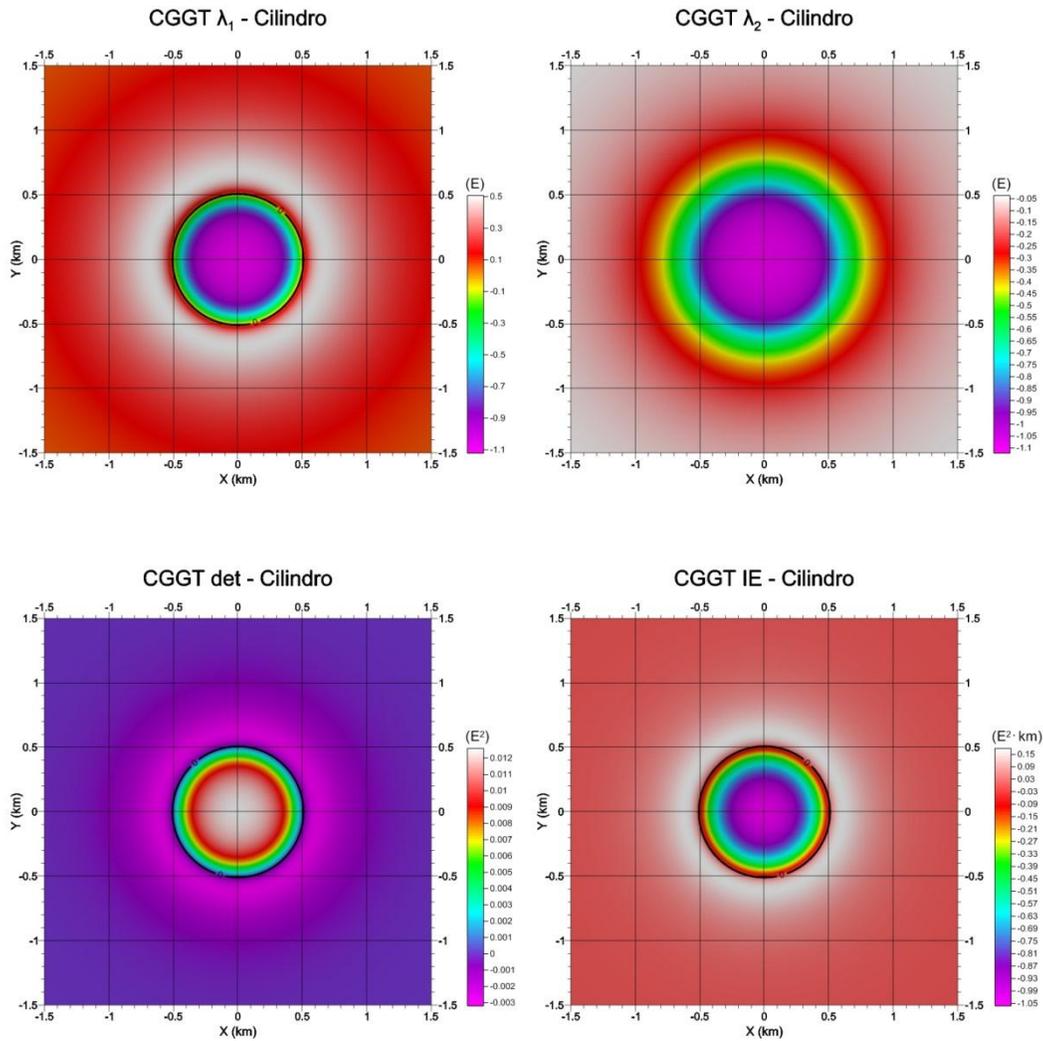
Los operadores obtenidos a partir del tensor de curvatura (figuras 18, 19 y 20) se ejemplifican para los tres cuerpos geométricos vistos anteriormente:



**Figura 18.** Operadores del tensor de curvatura (*CGGT*): *eigenvalor*  $\lambda_1$ , *eigenvalor*  $\lambda_2$ ,  $\det(\Gamma_C)$  y operador *IE*. Prisma rectangular.



**Figura 19.** Operadores del tensor de curvatura (CGGT): *eigenvalor*  $\lambda_1$ , *eigenvalor*  $\lambda_2$ ,  $\det(\Gamma_C)$  y operador *IE*. Esfera.



**Figura 20.** Operadores del tensor de curvatura (CGGT): *eigenvalor*  $\lambda_1$ , *eigenvalor*  $\lambda_2$ ,  $\det(\Gamma_C)$  y operador *IE*. Cilindro vertical.

Se puede observar que el *eigenvalor*  $\lambda_1$ , el determinante y el operador *IE* delimitan los bordes horizontales de los cuerpos en la curva de nivel con valor cero, mientras que el *eigenvalor*  $\lambda_2$  lo hace solamente para cuerpos con contrastes de densidad negativos, por lo que no puede observarse con estos datos sintéticos<sup>14</sup>. Para los tres casos se delimitan muy bien los bordes en la curva de nivel con valor cero.

<sup>14</sup> Más adelante, cuando se trabaje con datos reales, se podrá observar el funcionamiento del *eigenvalor*  $\lambda_2$  para delimitar los bordes de estructuras con contraste de densidad negativo.

## 2.3.2. Métodos de interpretación semiautomática de anomalías

### 2.3.2.1. Función homogénea

Una función homogénea es una función que presenta un comportamiento multiplicativo de escala tal que si todos los argumentos se multiplican por un factor constante, entonces el valor de la función resulta ser un cierto número de veces el factor multiplicativo elevado a una potencia. Dicha potencia es el grado de la función homogénea.

Sea una función  $f$  tal que toma un elemento de un campo vectorial  $V$  y en general lo transforma a un elemento de otro espacio vectorial  $W$  sobre el mismo campo  $\mathbb{K}$ ; es decir,  $f: V \rightarrow W$ . Entonces, se dice que  $f$  es homogénea de grado  $n$  si

$$f(\alpha x_1, \dots, \alpha x_k) = \alpha^n f(x_1, \dots, x_k) \quad ; \forall \alpha \in \mathbb{K} \neq 0 .$$

Suponiendo que la función  $f$  es diferenciable y homogénea de grado  $n$ , entonces

$$\frac{\partial f(\alpha x_1, \dots, \alpha x_k)}{\partial x_i} = \alpha^{n-1} \frac{\partial f(\alpha x_1, \dots, \alpha x_k)}{\partial x_i} ;$$

es decir, sus derivadas parciales de primer orden  $\partial f / \partial x_i$  son funciones homogéneas de grado  $n - 1$ .

### 2.3.2.2. Ecuación de homogeneidad de Euler

Sea  $f = f(x_1, \dots, x_k)$  una función homogénea de grado  $n$ , donde  $\{x_1, \dots, x_k\}$  es el conjunto completo de sus variables independientes y  $\vec{x} = (x_1, \dots, x_k)$  es el vector que las contiene. Derivando ambos lados de la definición de homogeneidad con respecto al parámetro  $\alpha$ ;  $\forall \alpha \in \mathbb{K} \neq 0$ , se tiene

$$\frac{\partial f(\alpha x_1, \dots, \alpha x_k)}{\partial \alpha} = \frac{\partial [\alpha^n f(x_1, \dots, x_k)]}{\partial \alpha} .$$

Al lado izquierdo de la igualdad se le aplica la regla de la cadena y el lado derecho simplemente se resuelve, quedando

$$\frac{\partial f(\alpha x_1, \dots, \alpha x_k)}{\partial (\alpha x_i)} \frac{\partial (\alpha x_i)}{\partial \alpha} = n \alpha^{n-1} f(x_1, \dots, x_k) .$$

Haciendo  $\alpha = 1$ , pues es un parámetro arbitrario, se tiene

$$x_i \frac{\partial f(x_1, \dots, x_k)}{\partial x_i} = n f(x_1, \dots, x_k) ,$$

en donde aplica el *convenio de suma de Einstein*. Entonces,

$$x_1 \frac{\partial f(x_1, \dots, x_k)}{\partial x_1} + \dots + x_k \frac{\partial f(x_1, \dots, x_k)}{\partial x_k} = n f(x_1, \dots, x_k);$$

$$\vec{x} \cdot \vec{\nabla} f(\vec{x}) = n f(\vec{x}),$$

que es la ecuación diferencial de homogeneidad de Euler.

### 2.3.2.3. El campo potencial como función homogénea

La ecuación diferencial de Euler para funciones homogéneas ha logrado tener grandes aplicaciones para la inversión de campos potenciales en términos de sus fuentes. El interés de usar la ecuación de homogeneidad para el campo potencial es que se puede obtener una estimación de las cantidades geométricas de las fuentes en función del campo potencial y sus gradientes. El campo de gravedad de una masa puntual tiene un potencial

$$\varphi(r) = \frac{Gm}{r},$$

donde  $G$  es la constante gravitatoria,  $m$  es la masa, y

$$r = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}$$

es la distancia entre un punto de observación  $P(x, y, z)$  y la ubicación  $M(x', y', z')$  de la masa. La distancia  $r$  es variable con la dimensión de longitud, que es definida por las variables independientes elementales  $(x, y, z, x', y', z')$ .

Escalando las variables con dimensión de longitud en el potencial gravitatorio se observa que

$$\varphi(tx, ty, yz, tx', ty', tz') = t^{-1} \varphi(x, y, z, x', y', z'),$$

donde se muestra que las coordenadas  $(x, y, z, x', y', z')$  forman el conjunto analítico completo de variables independientes de homogeneidad para el potencial gravitatorio  $\varphi$  con un grado de homogeneidad  $n = -1$  (Stavrev & Reid, 2007). El signo negativo implica que  $\varphi(tx, ty, yz, tx', ty', tz') < \varphi(x, y, z, x', y', z')$ . Físicamente, esta desigualdad se debe a que  $tr > r$ , pero  $m$  permanece sin cambio. Se asume que la masa lineal está distribuida continuamente en una constante o variable de densidad  $\lambda$  a lo largo de la curva  $l$ . Entonces, el potencial del campo gravitatorio puede ser expresado por

$$\varphi(r) = G \int_l \frac{dm}{r}$$

y

$$\varphi(r) = G \int_l \frac{\lambda dl}{r},$$

donde  $r$  es la distancia entre el punto de observación y un punto de la fuente lineal.

La primera integral es una función homogénea de la distancia  $r$ , al igual que el potencial de una masa puntual. Esta integral es la suma de un número infinito de términos infinitesimales de igual grado de homogeneidad  $n = -1$ ; es decir, la integral, tiene el mismo grado de homogeneidad. La segunda integral tiene una expresión que contiene dos elementos de dimensión de longitud,  $r$  y  $dl$ . Su razón es una cantidad adimensional, así que el grado de homogeneidad de la expresión es  $n = 0$ . En este caso, la densidad lineal  $\lambda(M)$  no cambia su valor en una transformada de similaridad; es decir,  $\lambda(M^*) = \lambda(M)$ , donde  $M^*$  es la imagen similar del punto  $M$  original de la fuente lineal. Si  $M = M^*$ ; es decir,  $M = cte.$  y  $\lambda = \lambda(x, y, z)$ , entonces

$$\varphi^*(r^*) = G \int_l \frac{dm^*}{r^*} = G \int_l \frac{dm}{tr} = t^{-1}\varphi(r); \quad n = -1,$$

$$\varphi^*(r^*) = G \int_l \frac{\lambda^* dl^*}{r^*} = G \int_l \frac{(t^{-1}\lambda)(tdl)}{tr} = t^{-1}\varphi(r); \quad n = -1,$$

pues,  $\lambda^* = dm^*/dl^* = dm/tdl = t^{-1}\lambda$ . Si  $\lambda = cte.$  y  $M = M(x, y, z)$ ; es decir,  $\lambda^* = \lambda$ , entonces

$$\varphi^*(r^*) = G \int_l \frac{\lambda^* dl^*}{r^*} = G \int_l \frac{\lambda(tdl)}{tr} = \varphi(r); \quad n = 0,$$

$$\varphi^*(r^*) = G \int_l \frac{dm^*}{r^*} = G \int_l \frac{tdm}{tr} = \varphi(r); \quad n = 0,$$

pues,  $\lambda^* = dm^*/dl^* = dm^*/tdl = dm/dl = \lambda; \quad \therefore dm^* = tdm$ .

La diferencia entre los dos posibles grados de homogeneidad es por la relación  $\lambda = dm/dl$  entre los dos parámetros físicos. Esta relación contiene un elemento de dimensión de longitud. Se puede demostrar de la misma forma que para una fuente superficial, el po-potencial tiene dos posibles grados de homogeneidad, tales son  $n = -1$  y  $n = 1$ . También pa-para una fuente volumétrica, el potencial tiene dos posibles grados de homogeneidad, tales son  $n = -1$  y  $n = 2$ . Como se puede observar, el grado de homogeneidad  $n = -1$  para to-dos los casos es debido a que la masa, en este caso, permanece constante ante una trans-formada de similaridad. De esta forma, todas las integrales de cada uno de los potenciales de distintos tipos de fuentes se pueden tomar como una superposición de muchas fuentes puntuales, donde la fuente puntual tiene un grado de homogeneidad igual a  $-1$ . Se van a utilizar los grados de homogeneidad  $n = -1$ ,  $n = 0$ ,  $n = 1$  y  $n = 2$  para una fuente puntual, lineal, superficial y volumétrica, respectivamente, debido a que ellos son calculados por los potenciales utilizando el conjunto completo de variables geométricas (Stavrev & Reid, 2007).

Si el potencial  $\varphi$  es homogéneo, entonces también lo es cualquiera de sus derivadas. El grado de homogeneidad de la derivada  $k$ -ésima decrece por el número  $k$  con respecto al grado  $n_0$  del potencial; es decir,  $n_k = n_0 - k$ . Esta relación muestra el incremento del exponente del recíproco de la distancia  $1/r$  como incrementa el orden  $k$ . Una expresión generalizada (Stavrev & Reid, 2007) para el grado de homogeneidad del potencial gravitatorio y sus derivadas es

$$n_g = p - k - 1 ,$$

donde  $k$  es el orden de la derivada del potencial, y  $p$  es un entero cuyo valor indica el tipo de parámetro físico en la expresión analítica del elemento de campo. Si un conjunto de datos de anomalía gravimétrica (o magnética)  $A(x, y, z)$  es dado, entonces su transformada de similitud  $A(tx, ty, tz)$  está dada por

$$A(tx, ty, tz) = t^n A(x, y, z) ;$$

aquí, asignar  $n$  es equivalente a escoger el índice  $p$ . Este aspecto físico de la transformada puede ser usado como base de las técnicas de inversión para campos potenciales.

#### 2.3.2.4. Deconvolución de Euler

La deconvolución de Euler es un método semiautomático de interpretación de anomalías, pues no es enteramente automático; es decir, no produce directamente un modelo geológico a partir del campo potencial dado (Thompson, 1982). Lo que se obtiene con este método es una estimación de la ubicación de las fuentes que producen el campo potencial. Este método fue primeramente utilizado con datos magnéticos, produciendo buenos resultados en la exploración de hidrocarburos para determinar el espesor de la sección sedimentaria y en la exploración minera para determinar la profundidad de los cuerpos de mena que contienen minerales magnéticos (Thompson, 1982). Teniendo el campo gravitatorio la misma estructura matemática que el campo magnetostático, éste puede recibir un tratamiento muy parecido al anterior debido a que ambos son considerados como campos potenciales en los que se satisface la *ecuación de Laplace* en el espacio libre. En múltiples trabajos en las últimas décadas, la deconvolución de Euler ha sido considerablemente aplicada también a los datos gravimétricos.

La deconvolución de Euler es un algoritmo desarrollado por Thompson (1982), llamado *EULDPH*; dicho acrónimo es utilizado debido al uso de la ecuación de homogeneidad de Euler. Sea  $\delta g_z$  la anomalía gravimétrica y sean las coordenadas *de campo*  $(x, y, z)$  y las *de fuente*  $(x', y', z')$ . La ecuación diferencial de Euler satisface la relación

$$\vec{r}^* \cdot \vec{\nabla}^* \delta g_z = n \delta g_z ,$$

donde  $\vec{r}^*$  es la diferencia entre los vectores de coordenadas *de campo* y *de fuente*,  $\vec{\nabla}^*$  es el operador diferencial vectorial *nabla* cuyas componentes son las derivadas parciales con respecto a las componentes del vector  $\vec{r}^*$ , y  $\delta g_z$  es la anomalía gravimétrica que depende de  $\vec{r}^*$ . De esta forma,

$$\vec{r}^* = (x - x', y - y', z - z') .$$

Entonces, la ecuación de homogeneidad de Euler para la anomalía gravimétrica es

$$(x - x') \frac{\partial \delta g_z}{\partial (x - x')} + (y - y') \frac{\partial \delta g_z}{\partial (y - y')} + (z - z') \frac{\partial \delta g_z}{\partial (z - z')} = n \delta g_z,$$

pero se puede ver que  $\frac{\partial}{\partial (x-x')} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial (x-x')} = \frac{\partial}{\partial x}$  y lo mismo para las otras componentes; entonces,

$$(x - x') \frac{\partial \delta g_z}{\partial x} + (y - y') \frac{\partial \delta g_z}{\partial y} + (z - z') \frac{\partial \delta g_z}{\partial z} = n \delta g_z.$$

Se puede suponer que un campo potencial  $f(x, y, z)$  tiene una forma funcional general

$$f(x, y, z) = \frac{G}{r^N},$$

donde  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ , y  $N = 1, 2, 3, \dots$ ;  $G$  no depende de las variables geométricas. Claramente esta funcional es homogénea de grado  $n = -N$  (Thompson, 1982). El número  $N$  es llamado índice estructural, el cual depende de la naturaleza de la fuente como de su dimensionalidad. Si  $N > 0$ , entonces  $f$  muestra una atenuación natural con la distancia  $r$ . Si  $N = 0$ , entonces  $f = G$ , que es posible para algunos modelos como el de la gravedad en una lámina horizontal semi-infinita. Pero el caso  $N < 0$  en todos los casos corresponde a los modelos teóricos con potencial y campo indeterminados (Stavrev & Reid, 2007). El índice estructural está dado entonces por

$$N = k + s - d,$$

donde  $s = 1$  para un elemento de campo gravitatorio, y  $s = 2$  para un elemento de campo magnetostático, y  $k$  es el orden de la derivada del potencial. Aquí,  $d = 0$  para una masa puntual, un dipolo puntual y las equivalentes fuentes esféricas;  $d = 1$  para líneas de masas, líneas de dipolos y equivalentes fuentes cilíndricas;  $d = 2$  para una superficie de masa, estrato equivalente y diques; y  $d = 3$  para el modelo de contacto. El índice  $d$  corresponde a la dimensión geométrica de las fuentes elementales (Stavrev & Reid, 2007). De esta forma, los índices estructurales para las distintas fuentes de campo gravitatorio son:  $N = 2$  para una masa puntual y las equivalentes fuentes esféricas,  $N = 1$  para líneas de masa y las equivalentes fuentes cilíndricas,  $N = 0$  para una superficie de masa, estrato equivalente y diques o un contacto vertical semi-infinito, y  $N = -1$  para un contacto vertical infinito.

Sustituyendo el grado de homogeneidad por el índice estructural para un campo potencial en la ecuación de homogeneidad de Euler, y reordenando se tiene

$$x' \frac{\partial \delta g_z}{\partial x} + y' \frac{\partial \delta g_z}{\partial y} + z' \frac{\partial \delta g_z}{\partial z} = x \frac{\partial \delta g_z}{\partial x} + y \frac{\partial \delta g_z}{\partial y} + N \delta g_z,$$

pues se asume que la componente vertical de medición es en  $z = 0$ .

Esta ecuación puede ser resuelta exactamente para  $x', y', z'$  y  $N$  evaluando las derivadas y la anomalía de campo en cuatro coordenadas diferentes de la malla de datos observados. Esto resulta en cuatro ecuaciones lineales con cuatro incógnitas, que en un principio pueden ser resueltas si el determinante de los coeficientes es distinto de cero. La aplicación de la última ecuación directamente de datos observados no es útil por tres razones (Thompson, 1982):

- 1) La mayoría de las anomalías prefieren altos índices estructurales; es decir, hay más dipolos<sup>15</sup> en la naturaleza. Sin embargo, los índices estructurales más bajos son mejores estimadores de profundidad.
- 2) El nivel absoluto del campo anómalo es raramente conocido. Los campos regionales o de compensación debido a anomalías someras están casi siempre presentes.
- 3) En datos actuales, las anomalías son muy pocas veces representadas exactamente por fuentes puntuales.

Estos factores hacen que la solución exacta de la última ecuación sea errática y poco fiable. El problema de remover apropiadamente el sesgo de los datos observados es resuelto de la siguiente forma (Thompson, 1982). Se asume que la anomalía de campo se encuentra dentro de un nivel base o regional uniforme dentro de una ventana de datos, tal que

$$g_z(x, y) = \delta g_z(x, y) + B_z,$$

donde  $g_z(x, y)$  son los datos observados. De esta forma, la ecuación de Euler queda

$$x' \frac{\partial g_z}{\partial x} + y' \frac{\partial g_z}{\partial y} + z' \frac{\partial g_z}{\partial z} + NB_z = x \frac{\partial g_z}{\partial x} + y \frac{\partial g_z}{\partial y} + Ng_z,$$

pues  $\partial B_z / \partial x = \partial B_z / \partial y = \partial B_z / \partial z = 0$ . Dado que las anomalías actuales son aproximadas solamente por modelos simples, el tercer mayor problema es resuelto al crear un conjunto sobrdeterminado de ecuaciones lineales. Si uno evalúa la última ecuación en seis o más puntos dentro de una ventana de una malla, resulta un conjunto de ecuaciones sobredeterminadas. Este método de solución es por medio de mínimos cuadrados. Para resolver las incógnitas  $x', y', z'$  y  $B_z$  se trabaja con un sistema de ecuaciones lineales con cada uno de los datos observados, que se puede expresar en forma matricial como

$$\underline{G}m = d;$$

es decir,

---

<sup>15</sup> Aquí Thompson (1982) se refiere a dipolos magnéticos, pues el trabajo original fue referido a anomalías magnéticas, pero haciendo referencia a este trabajo deberíamos referirnos a monopolos gravitatorios.

$$\begin{aligned}
& \begin{pmatrix} \frac{\partial g_z(x_1, y_1)}{\partial x} & \frac{\partial g_z(x_1, y_1)}{\partial y} & \frac{\partial g_z(x_1, y_1)}{\partial z} & N \\ \frac{\partial g_z(x_1, y_2)}{\partial x} & \frac{\partial g_z(x_1, y_2)}{\partial y} & \frac{\partial g_z(x_1, y_2)}{\partial z} & N \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial g_z(x_{xv}, y_{yv})}{\partial x} & \frac{\partial g_z(x_{xv}, y_{yv})}{\partial y} & \frac{\partial g_z(x_{xv}, y_{yv})}{\partial z} & N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ B_z \end{pmatrix} \\
& = \begin{pmatrix} x_1 \frac{\partial g_z(x_1, y_1)}{\partial x} + y_1 \frac{\partial g_z(x_1, y_1)}{\partial y} + N g_z(x_1, y_1) \\ x_1 \frac{\partial g_z(x_1, y_2)}{\partial x} + y_2 \frac{\partial g_z(x_1, y_2)}{\partial y} + N g_z(x_1, y_2) \\ \vdots \\ x_{xv} \frac{\partial g_z(x_{xv}, y_{yv})}{\partial x} + y_{yv} \frac{\partial g_z(x_{xv}, y_{yv})}{\partial y} + N g_z(x_{xv}, y_{yv}) \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

donde  $xv$  y  $yv$  representan el tamaño de la ventana móvil en que se aplicará la ecuación matricial en dirección  $X$  e  $Y$ , respectivamente. La solución del sistema mediante mínimos cuadrados es

$$\hat{m} = (\underline{G}^T \underline{G})^{-1} \underline{G}^T d.$$

De esta forma, se logra obtener una estimación para el vector  $m$ . Este vector es

$$\hat{m} = \begin{pmatrix} \hat{x}' \\ \hat{y}' \\ \hat{z}' \\ \hat{B}_z \end{pmatrix},$$

donde  $\hat{x}'$ ,  $\hat{y}'$ ,  $\hat{z}'$  y  $\hat{B}_z$  son las estimaciones de  $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$  y  $B_z$  en una sola posición de una ventana de datos. Para lograr obtener un conjunto fiable de estimaciones, el algoritmo anterior se aplica a todos los datos de la malla de observación, de tal forma que la ventana móvil (de menor tamaño que la malla de observación) corra en ambas direcciones hasta terminar de recorrer todos los datos. La solución por mínimos cuadrados del conjunto de ecuaciones sobredeterminado también otorga estimaciones de la desviación estándar del parámetro  $z'$ . Esta cantidad  $\sigma_z$  es tratada como una “franja de error” en la profundidad estimada y forma la base para un algoritmo que determine si una profundidad estimada es retenida o no (Thompson, 1982).

El criterio de aceptación actualmente usado es derivado empíricamente. Es obvio que éste debe depender de la profundidad de estimación, dado que las estimaciones más profundas son naturalmente menos certeras. El valor de la tolerancia a utilizar para el criterio de aceptación de soluciones debe ser otorgado por el usuario y puede depender de la calidad de los datos. Una estimación particular es aceptada para trazar si la siguiente desigualdad se satisface:

$$\alpha \leq \frac{\hat{z}'}{N\sigma_z}.$$

La forma de encontrar la desviación estándar de la profundidad estimada es con el método de Beiki (2010) definiendo el error residual de los datos como  $\Delta d = \hat{d} - d$ , donde  $\hat{d} = \underline{G}\hat{m}$ . Entonces, la matriz de covarianza del modelo estimado está dada por

$$[\underline{Covm}^{est}] = \sigma_d^2 (\underline{G}^T \underline{G})^{-1},$$

donde la varianza de los datos puede ser estimada como  $\sigma_d^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\Delta d_i)^2$ . La incertidumbre de la profundidad estimada de la fuente puede ser encontrada a partir de la raíz cuadrada del tercer elemento de la diagonal de la matriz de covarianza, debido a que el primer elemento corresponde a la incertidumbre de la ubicación en el eje  $X$ ; el segundo, a la del eje  $Y$ ; el tercero, a la del eje  $Z$ ; el cuarto, a la del nivel base; mientras que los demás son elementos cruzados. Es decir,

$$\sigma_z = \sqrt{[\underline{Covm}^{est}(3,3)]}.$$

La deconvolución de Euler no intenta construir modelos gravimétricos del subsuelo geológico. Sólo ayuda al intérprete a construir esos modelos presentando una serie de posibilidades. Los modelos simples (representados por el índice estructural) son capaces de resolverse y algunas veces de identificar una amplia variedad de situaciones geológicas. Existe otro criterio de aceptación, el cual debe implementarse junto con el visto anteriormente propuesto por Thompson y modificado de Beiki. En este criterio (corregido de Barbosa et al., 1999) se propone que solamente las soluciones que satisfacen la desigualdad

$$\gamma \geq \sqrt{\frac{\|d - \underline{G}\hat{m}\|^2}{[(xv)(yv) - 4]}}$$

pueden ser aceptadas<sup>16</sup>. El usuario debe fijar el escalar  $\gamma$  al número positivo más pequeño que siga produciendo soluciones más coherentes.

Uno de los mayores problemas de la deconvolución de Euler es la elección del índice estructural. Thompson (1982) presentó un criterio para estimar el índice estructural que consiste en seleccionar (para un índice estructural tentativo fijo) las estimaciones de la profundidad con la menor desviación estándar, y estimando el índice estructural como aquél que produce el conjunto de soluciones menos dispersadas. Como se puede observar, este criterio no es muy práctico y no es fiable. Posteriormente, Barbosa et al. (2000) demostraron que la estimación del nivel base  $\hat{B}_z$  como una función de la posición en la ventana de datos puede estar correlacionada con la anomalía de campo. Esta correlación es positiva para un índice estructural tentativo más pequeño que el correcto. El índice estructural correcto produce una mínima correlación entre la anomalía de campo y la estimación de su nivel base porque éste último es constante.

<sup>16</sup> El criterio original de Barbosa et al. (1999) es prácticamente igual sólo que en el denominador llevaba  $[(xv) - 3]$ , pues en ese caso se trataba de un perfil, donde el 3 indicaba el número de incógnitas y  $(xv)$  trata solamente de una dirección. En cambio, en este trabajo se trata de una malla de datos con cuatro incógnitas, por lo que la matriz  $\underline{G}$  tiene  $(xv)(yv)$  elementos; por eso,  $[(xv)(yv) - 4]$ .

Para cada índice tentativo  $\mu$ , deben calcularse las estimaciones de la ubicación de la fuente y del nivel base resolviendo el sistema de ecuaciones lineales mediante mínimos cuadrados usando las observaciones dentro de la ventana móvil. Para  $M$  posiciones de la ventana móvil a lo largo de la malla de observación, debe calcularse el coeficiente de correlación  $r^\mu$  dado por

$$r^\mu = \frac{\sum_{i=1}^M \hat{B}_{zi}^\mu g_{zi} - \frac{1}{M} (\sum_{i=1}^M \hat{B}_{zi}^\mu \sum_{i=1}^M g_{zi})}{\sqrt{\left\{ \sum_{i=1}^M \hat{B}_{zi}^{\mu 2} - \left[ \frac{1}{M} (\sum_{i=1}^M \hat{B}_{zi}^\mu)^2 \right] \right\} \left\{ \sum_{i=1}^M g_{zi}^2 - \left[ \frac{1}{M} (\sum_{i=1}^M g_{zi})^2 \right] \right\}}},$$

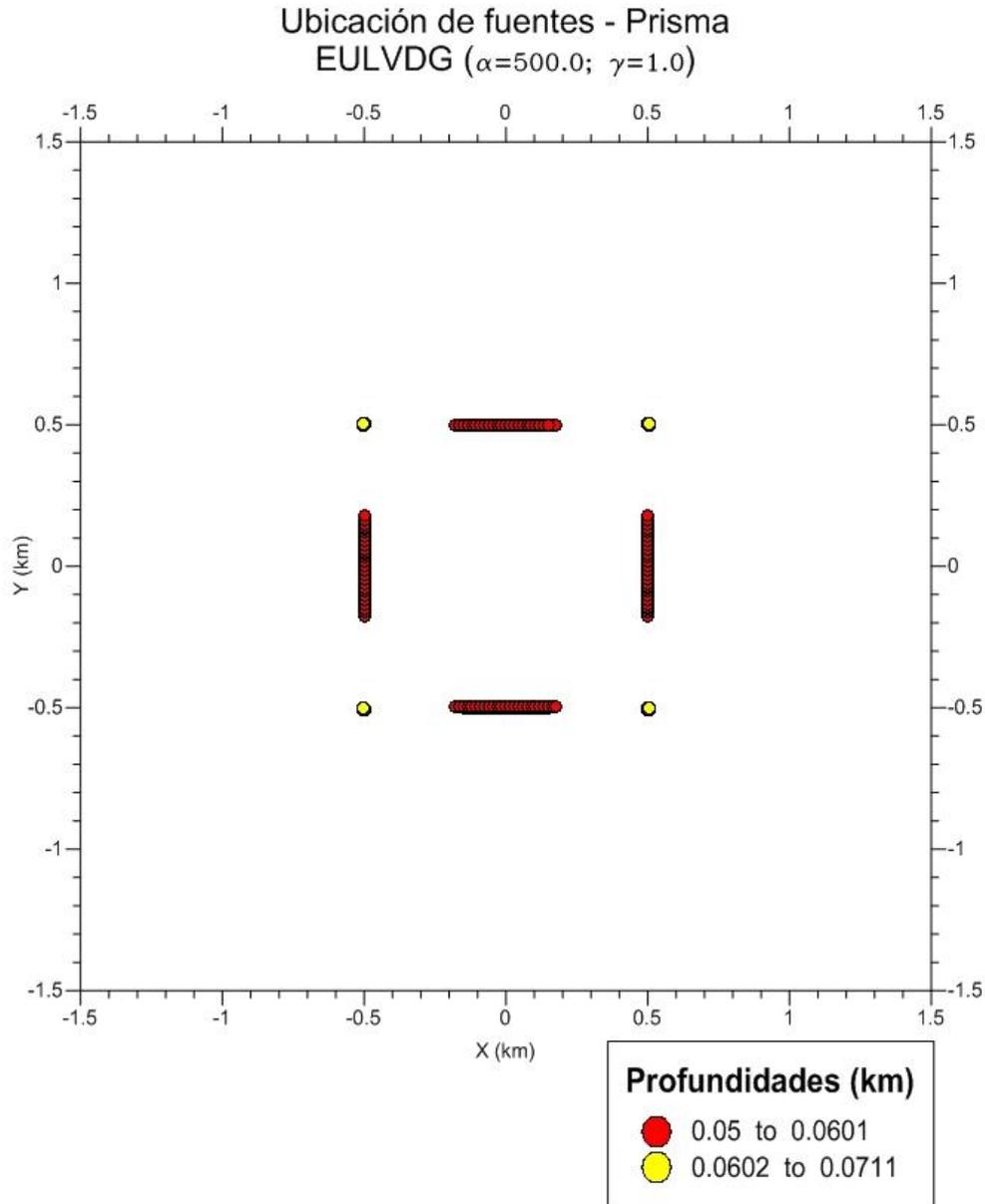
donde  $\hat{B}_{zi}^\mu$  es la estimación del nivel base asumiendo un índice estructural tentativo  $\mu$  y utilizando una ventana móvil en su  $i$ -ésima posición, y  $g_{zi}$  es la anomalía gravimétrica observada coincidente con el punto central de la ventana móvil en su  $i$ -ésima posición (Barbosa et al., 2000). De esta forma, se identifica el índice estructural estimado  $\hat{N}$  como el valor de  $\mu$  que produce el menor coeficiente de correlación en valor absoluto:  $|r^\mu|$ .

La deconvolución de Euler (*EULVDG*<sup>17</sup>) se probó con datos sintéticos de los tres cuerpos geométricos vistos anteriormente. Las respuestas gravimétricas del prisma rectangular no cumplen con la ecuación de homogeneidad de Euler (Mikhailov et al., 2007) y la estimación del índice estructural depende de múltiples factores, tales como son sus dimensiones, su densidad y la profundidad a la que se encuentra. Para un prisma de grandes dimensiones y cercano al plano de observación con bordes relativamente verticales, su índice estructural se acercará más al de un contacto vertical infinito ( $N = -1$ ) o al de un contacto vertical semi-infinito ( $N = 0$ ), tales como diques o fallas. En cambio, para un prisma muy profundo y no muy grande, su índice estructural tiende a aumentar ( $N = 1, \dots, 2$ ), debido a que la anomalía que genera es semejante a la de una fuente puntual.

Los datos sintéticos del prisma rectangular (figura 21) representan anomalías gravimétricas de un cuerpo de grandes dimensiones y muy cercano al plano de observación, por lo que se seleccionó un índice estructural de  $-0.5$ . Para los criterios de aceptación de soluciones se seleccionaron los parámetros:  $\alpha = 500.0$  y  $\gamma = 1.0$  definidos anteriormente. También fueron removidas las soluciones con mayor profundidad:

---

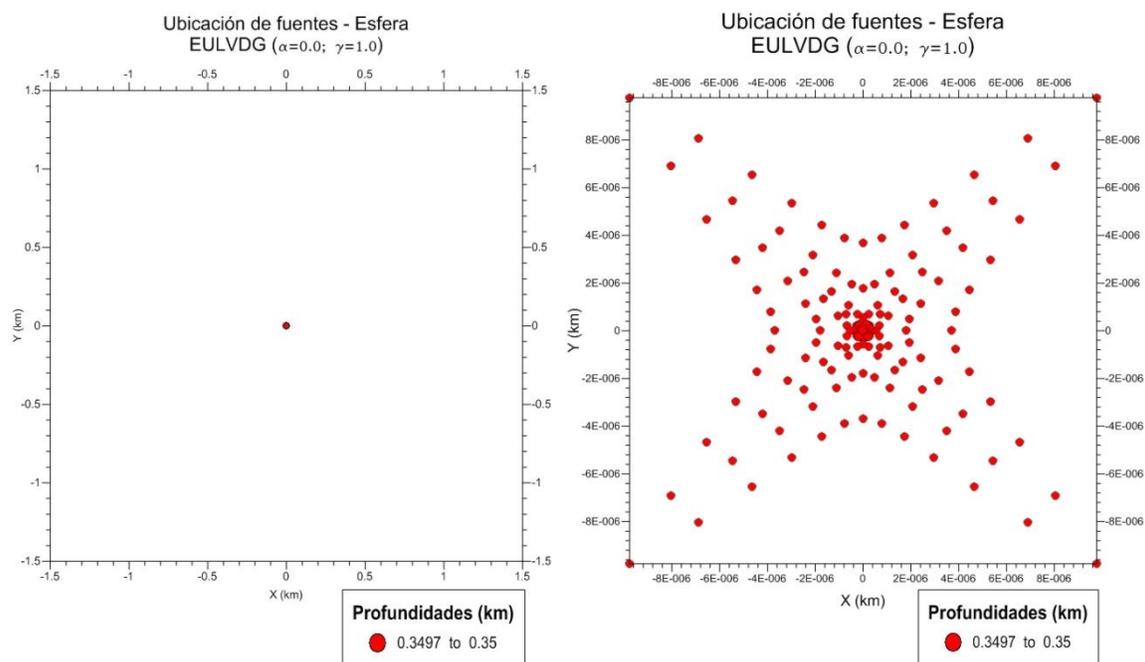
<sup>17</sup> *Euler Vector Deconvolution Grid.*



**Figura 21.** Estimaciones de ubicación de fuentes: Deconvolución de Euler (*EULVDG*). Prisma rectangular.

Se puede observar que las soluciones obtenidas delimitan muy bien los bordes horizontales del prisma, mientras que las profundidades estimadas son muy cercanas a la verdadera que es de 0.05 (*km*). Puede notarse que en las esquinas del prisma, las soluciones son un poco más profundas que en los bordes laterales.

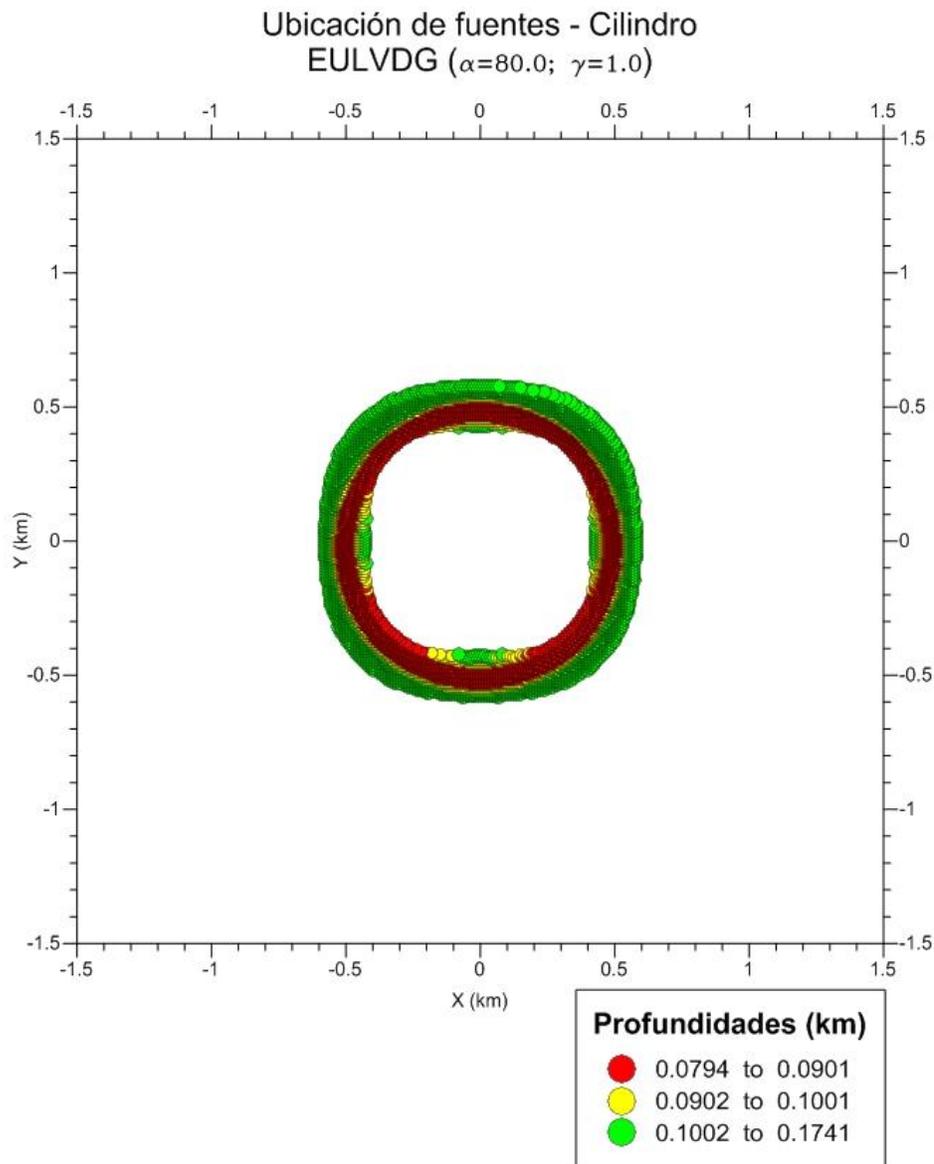
Para el caso de la esfera (figura 22) se seleccionó el índice estructural de  $N = 2$  correspondiente al de una fuente puntual. Para los criterios de aceptación de soluciones se seleccionaron los parámetros:  $\alpha = 0.0$  y  $\gamma = 1.0$ :



**Figura 22.** Estimaciones de ubicación de fuentes: Deconvolución de Euler (*EULVDG*). Lado izquierdo, sin acercamiento; lado derecho, con acercamiento. Esfera.

Las soluciones estimadas para el caso de la esfera corresponden a las de su centro de masa, por lo que todas las soluciones fueron estimadas en las cercanías del centro de la esfera y no de sus bordes, arrojando profundidades muy cercanas a la verdadera, que es de 0.35 (*km*).

Para el caso del cilindro vertical (figura 23), que es un caso muy parecido al del prisma rectangular, se seleccionó un índice estructural de  $N = -0.5$ . Para los criterios de aceptación de soluciones se seleccionaron los parámetros:  $\alpha = 80.0$  y  $\gamma = 1.0$ . También se removieron las soluciones con mayor profundidad:



**Figura 23.** Estimaciones de ubicación de fuentes: Deconvolución de Euler (*EULVDG*). Cilindro vertical.

Puede observarse en la figura que las soluciones más someras delimitan bien los bordes del cilindro, pero no corresponden a las profundidades más acertadas. Las soluciones de color amarillo son las que más se asemejan a la profundidad real del cilindro, que es de 0.1 (*km*).

### 2.3.2.5. Deconvolución de Euler extendida

Este método usa prácticamente el mismo algoritmo que la deconvolución de Euler, con la excepción de que aquí son utilizadas todas las componentes del tensor de gradiometría gravimétrica y del vector de anomalía de gravedad y no sólo las de la componente vertical (Zhang, 2000). Se puede demostrar que las otras dos componentes del vector de anomalía gravimétrica también son homogéneas de grado  $n = -N$ . De esta forma, se obtienen ahora tres ecuaciones de homogeneidad de Euler, que son

$$x'\Gamma_{xx} + y'\Gamma_{xy} + z'\Gamma_{xz} + NB_x = x\Gamma_{xx} + y\Gamma_{xy} + Ng_x ,$$

$$x'\Gamma_{xy} + y'\Gamma_{yy} + z'\Gamma_{yz} + NB_y = x\Gamma_{xy} + y\Gamma_{yy} + Ng_y ,$$

$$x'\Gamma_{xz} + y'\Gamma_{yz} + z'\Gamma_{zz} + NB_z = x\Gamma_{xz} + y\Gamma_{yz} + Ng_z ,$$

donde la tercera ecuación es la misma que se utiliza para la deconvolución de Euler. En estas ecuaciones aparecen otras dos incógnitas que pueden asumirse como las componentes horizontales del nivel base del campo gravitatorio que también se asumen uniformes dentro de una ventana de datos:  $B_x$  y  $B_y$ . Para resolver las seis incógnitas se procede de igual forma que en el algoritmo de la deconvolución de Euler, cuya solución es mediante mínimos cuadrados:  $\underline{G}m = d$ , donde

$$\underline{G} = \begin{pmatrix} \Gamma_{xx}(x_1, y_1) & \Gamma_{xy}(x_1, y_1) & \Gamma_{xz}(x_1, y_1) & N & 0 & 0 \\ \Gamma_{xx}(x_1, y_2) & \Gamma_{xy}(x_1, y_2) & \Gamma_{xz}(x_1, y_2) & N & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \Gamma_{xx}(x_{xv}, y_{yv}) & \Gamma_{xy}(x_{xv}, y_{yv}) & \Gamma_{xz}(x_{xv}, y_{yv}) & N & 0 & 0 \\ \Gamma_{xy}(x_1, y_1) & \Gamma_{yy}(x_1, y_1) & \Gamma_{yz}(x_1, y_1) & 0 & N & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \Gamma_{xy}(x_{xv}, y_{yv}) & \Gamma_{yy}(x_{xv}, y_{yv}) & \Gamma_{yz}(x_{xv}, y_{yv}) & 0 & N & 0 \\ \Gamma_{xz}(x_1, y_1) & \Gamma_{yz}(x_1, y_1) & \Gamma_{zz}(x_1, y_1) & 0 & 0 & N \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \Gamma_{xz}(x_{xv}, y_{yv}) & \Gamma_{yz}(x_{xv}, y_{yv}) & \Gamma_{zz}(x_{xv}, y_{yv}) & 0 & 0 & N \end{pmatrix}; \quad m = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ B_x \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix};$$

$$d = \begin{pmatrix} x_1\Gamma_{xx}(x_1, y_1) + y_1\Gamma_{xy}(x_1, y_1) + Ng_x(x_1, y_1) \\ x_1\Gamma_{xx}(x_1, y_2) + y_2\Gamma_{xy}(x_1, y_2) + Ng_x(x_1, y_2) \\ \vdots \\ x_{xv}\Gamma_{xx}(x_{xv}, y_{yv}) + y_{yv}\Gamma_{xy}(x_{xv}, y_{yv}) + Ng_x(x_{xv}, y_{yv}) \\ x_1\Gamma_{xy}(x_1, y_1) + y_1\Gamma_{yy}(x_1, y_1) + Ng_y(x_1, y_1) \\ \vdots \\ x_{xv}\Gamma_{xy}(x_{xv}, y_{yv}) + y_{yv}\Gamma_{yy}(x_{xv}, y_{yv}) + Ng_y(x_{xv}, y_{yv}) \\ x_1\Gamma_{xz}(x_1, y_1) + y_1\Gamma_{yz}(x_1, y_1) + Ng_z(x_1, y_1) \\ \vdots \\ x_{xv}\Gamma_{xz}(x_{xv}, y_{yv}) + y_{yv}\Gamma_{yz}(x_{xv}, y_{yv}) + Ng_z(x_{xv}, y_{yv}) \end{pmatrix}.$$

Como se puede observar, ha aumentado el tamaño de la matriz  $\underline{G}$  y de los vectores  $m$  y  $d$ . Si en la deconvolución de Euler la matriz  $\underline{G}$  tenía un tamaño de  $[(xv)(yv) \times 4]$ , ahora tiene  $[3(xv)(yv) \times 6]$ . De igual forma, el sistema de ecuaciones se puede resolver mediante mínimos cuadrados como

$$\hat{m} = (\underline{G}^T \underline{G})^{-1} \underline{G}^T d,$$

donde  $\hat{m}$  contiene las estimaciones de las seis incógnitas. El criterio de soluciones aceptadas de Thompson (1982) y modificado de Beiki (2010) seguirá usándose de igual manera; se calcula la desviación estándar de  $z'$  a partir de la matriz de covarianza (en este caso, la matriz de covarianza tiene un tamaño de  $[6 \times 6]$ ). Para el criterio de Barbosa et al. (2000) se hace una corrección a la ecuación, la cual queda como

$$\gamma \geq \sqrt{\frac{\|d - \underline{G}\hat{m}\|^2}{[3(xv)(yv) - 6]}}$$

donde el denominador es distinto debido a que el tamaño de la matriz aumenta y el número de incógnitas también.

En este trabajo se propuso utilizar también el método de estimación del índice estructural de Barbosa et al. (2000). En el caso de la deconvolución de Euler sólo era necesario un coeficiente de correlación, pues sólo existía la componente vertical de la anomalía de campo y del nivel base. En este caso se propone obtener los otros dos coeficientes de correlación de las componentes horizontales de la anomalía de campo y del nivel base:

$$r_x^\mu = \frac{\sum_{i=1}^M \hat{B}_{xi}^\mu g_{xi} - \frac{1}{M} (\sum_{i=1}^M \hat{B}_{xi}^\mu \sum_{i=1}^M g_{xi})}{\sqrt{\left\{ \sum_{i=1}^M \hat{B}_{xi}^{\mu 2} - \left[ \frac{1}{M} (\sum_{i=1}^M \hat{B}_{xi}^\mu)^2 \right] \right\} \left\{ \sum_{i=1}^M g_{xi}^2 - \left[ \frac{1}{M} (\sum_{i=1}^M g_{xi})^2 \right] \right\}}},$$

$$r_y^\mu = \frac{\sum_{i=1}^M \hat{B}_{yi}^\mu g_{yi} - \frac{1}{M} (\sum_{i=1}^M \hat{B}_{yi}^\mu \sum_{i=1}^M g_{yi})}{\sqrt{\left\{ \sum_{i=1}^M \hat{B}_{yi}^{\mu 2} - \left[ \frac{1}{M} (\sum_{i=1}^M \hat{B}_{yi}^\mu)^2 \right] \right\} \left\{ \sum_{i=1}^M g_{yi}^2 - \left[ \frac{1}{M} (\sum_{i=1}^M g_{yi})^2 \right] \right\}}},$$

$$r_z^\mu = \frac{\sum_{i=1}^M \hat{B}_{zi}^\mu g_{zi} - \frac{1}{M} (\sum_{i=1}^M \hat{B}_{zi}^\mu \sum_{i=1}^M g_{zi})}{\sqrt{\left\{ \sum_{i=1}^M \hat{B}_{zi}^{\mu 2} - \left[ \frac{1}{M} (\sum_{i=1}^M \hat{B}_{zi}^\mu)^2 \right] \right\} \left\{ \sum_{i=1}^M g_{zi}^2 - \left[ \frac{1}{M} (\sum_{i=1}^M g_{zi})^2 \right] \right\}}},$$

donde  $r_z^\mu$  es el mismo coeficiente de correlación que se utilizó en la deconvolución de Euler. Para poder aplicar este algoritmo y poder estimar el índice estructural se define un solo parámetro, el cual es llamado *amplitud de correlación*, que está dado por

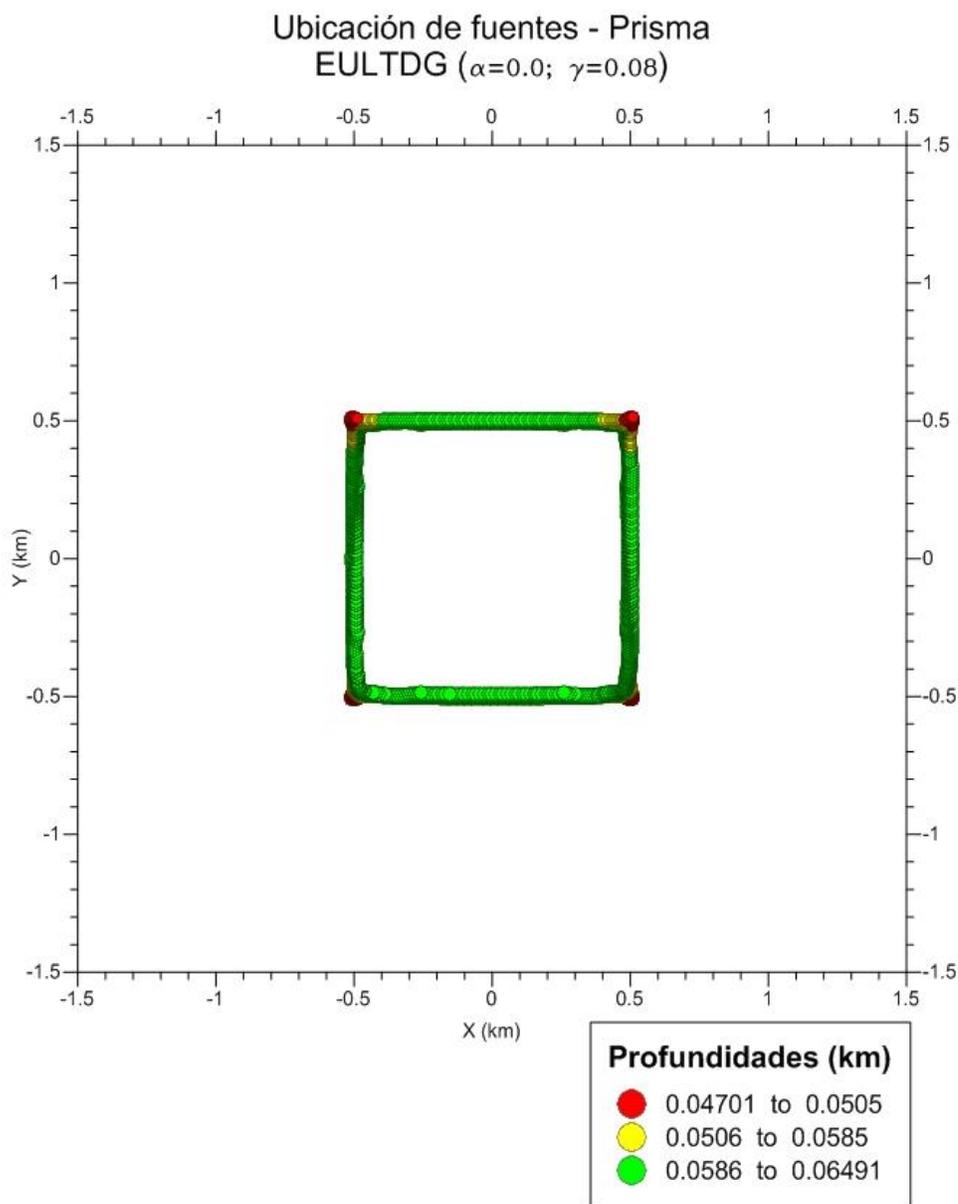
$$R^\mu = \sqrt{\frac{1}{3}(r_x^{\mu^2} + r_y^{\mu^2} + r_z^{\mu^2})},$$

cuya cantidad está normalizada a la unidad, dado que los tres coeficientes de correlación también lo están. De la misma manera, se identifica el índice estructural estimado  $\hat{N}$  como el valor de  $\mu$  que produce la menor amplitud de correlación, siendo ésta siempre positiva.

La deconvolución de Euler extendida (*EULTDG*<sup>18</sup>) se ha probado con datos sintéticos para los tres cuerpos geométricos vistos anteriormente. Para el caso del prisma (figura 24) se utilizó el mismo índice estructural de  $N = -0.5$  y fueron removidas las soluciones con mayor profundidad. Para los criterios de aceptación de soluciones se seleccionaron los parámetros:  $\alpha = 0.0$  y  $\gamma = 0.08$ :

---

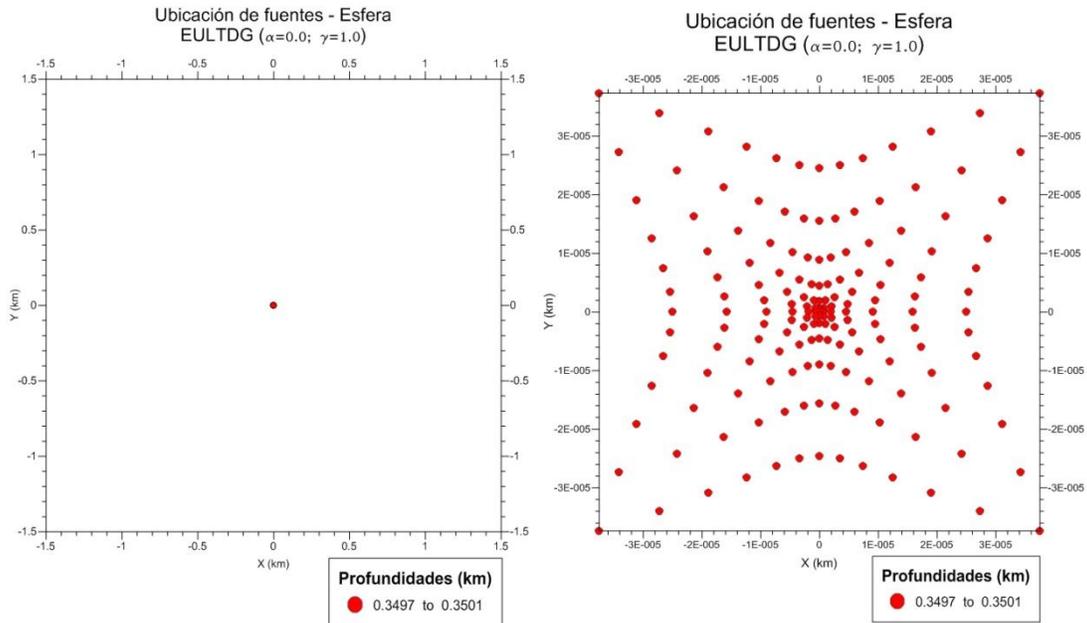
<sup>18</sup> *Euler Tensor Deconvolution Grid.*



**Figura 24.** Estimaciones de ubicación de fuentes: Deconvolución de Euler extendida (EULTDG). Prisma rectangular.

Se puede observar que con este método las soluciones obtenidas delimitan totalmente los bordes horizontales del prisma, mientras que las profundidades estimadas son muy cercanas a la verdadera que es de  $0.05 \text{ (km)}$ . Puede notarse que en este caso las esquinas del prisma son las que arrojan las soluciones más cercanas a la profundidad real de la fuente.

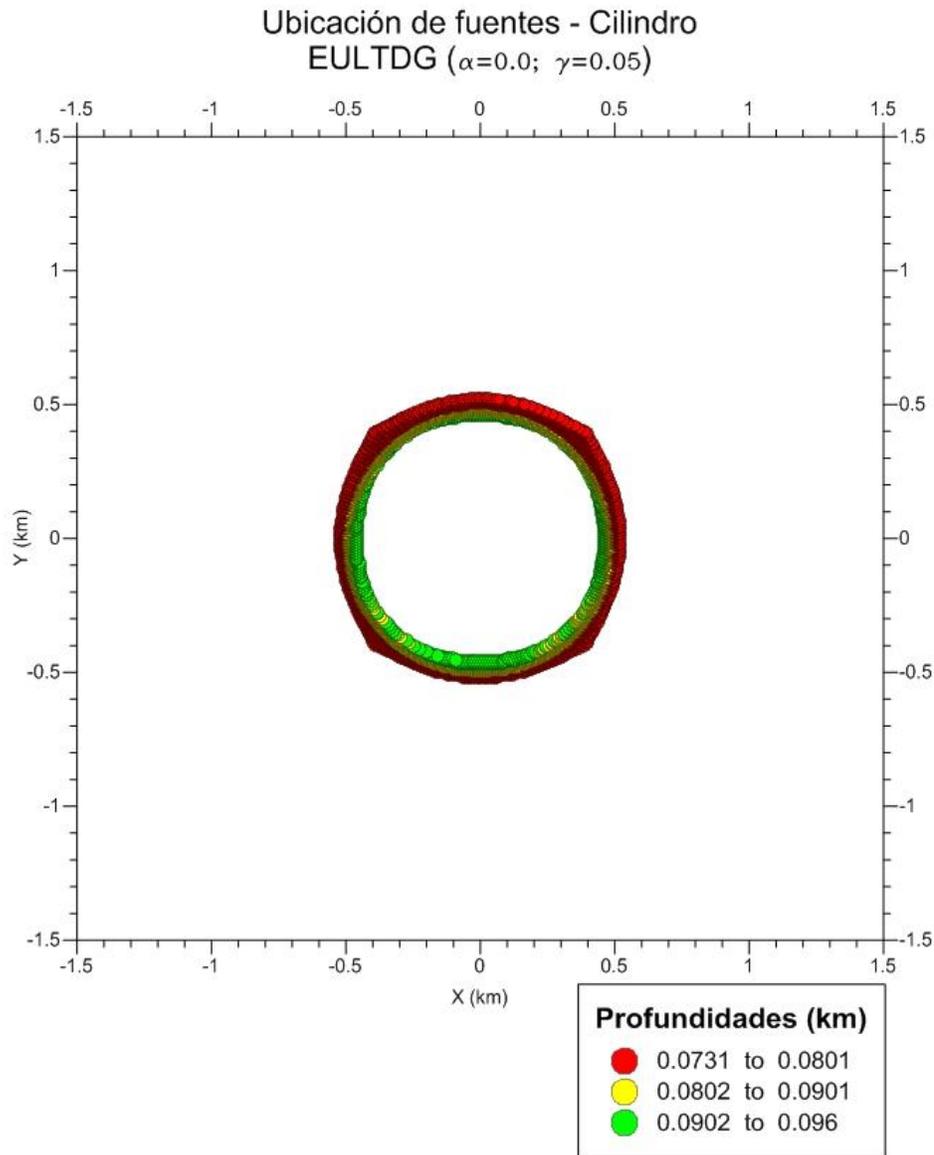
Para el caso de la esfera (figura 25) se seleccionó el mismo índice estructural de  $N = 2$  correspondiente al de una fuente puntual. Para los criterios de aceptación de soluciones se seleccionaron los parámetros:  $\alpha = 0.0$  y  $\gamma = 1.0$ :



**Figura 25.** Estimaciones de ubicación de fuentes: Deconvolución de Euler extendida (*EULTDG*). Lado izquierdo, sin acercamiento; lado derecho, con acercamiento. Esfera.

De la misma forma que en el método anterior, las soluciones estimadas para el caso de la esfera corresponden a las de su centro de masa, por lo que todas las soluciones fueron estimadas en las cercanías del centro de la esfera y no de sus bordes, arrojando profundidades muy cercanas a la verdadera, que es de 0.35 (*km*).

Para el caso del cilindro vertical (figura 26) se seleccionó el mismo índice estructural de  $N = -0.5$ . Para los criterios de aceptación de soluciones se seleccionaron los parámetros:  $\alpha = 0.0$  y  $\gamma = 0.05$ . También se removieron las soluciones con mayor profundidad:



**Figura 26.** Estimaciones de ubicación de fuentes: Deconvolución de Euler extendida (*EULTDG*). Cilindro vertical.

Puede observarse que las soluciones más cercanas al centro son las que se asemejan más a la ubicación horizontal real del cilindro vertical, y que corresponden también a las profundidades más cercanas a la verdadera, que es de  $0.1 \text{ (km)}$ .

### 2.3.2.6. Deconvolución tensorial

La deconvolución tensorial es un algoritmo que utiliza, al igual que la deconvolución de Euler extendida, todas las componentes del tensor de gradiometría gravimétrica y del vector de anomalía de gravedad. Comparado con los otros algoritmos, éste resulta muy distinto a ellos porque ya no se utiliza una ventana móvil para calcular la estimación de la ubicación de las fuentes. Además, tampoco es necesario asumir un nivel base a los datos observados. Lo novedoso de este método es que también se puede realizar la estimación del índice estructural para cada punto de la malla de observación. Este algoritmo fue realizado por Mikhailov et al. (2007), cuyo trabajo se basa en los invariantes del tensor de gradiometría gravimétrica llegando a una ecuación de homogeneidad de Euler. Para una fuente puntual se denota a

$$\lambda_1 = \frac{2GM}{r^3}$$

como el máximo *eigenvalor* en valor absoluto del tensor de gradiometría gravimétrica. Para encontrar la profundidad de la fuente se utiliza la ecuación de la componente vertical del campo gravitatorio para una masa puntual:

$$g_z = \frac{GM(z' - z)}{r^3},$$

y sustituyendo  $\lambda_1$  en esta última ecuación y sabiendo que la superficie de observación es  $z = 0$ , se tiene

$$z' = \frac{2g_z}{\lambda_1}.$$

Ahora, de manera análoga, para una fuente lineal se denota a la masa de la fuente lineal por unidad de longitud como  $M$ . Así, el máximo *eigenvalor* queda como

$$\lambda_1 = \frac{2GM}{r^2},$$

y calculando la componente vertical de la anomalía gravimétrica para dicha fuente lineal:

$$g_z = \frac{2GM(z' - z)}{r^2},$$

donde al sustituir el máximo *eigenvalor* en la anomalía gravimétrica, se encuentra la profundidad de la fuente lineal como

$$z' = \frac{g_z}{\lambda_1}.$$

Se puede observar que las dos ecuaciones para la estimación de la profundidad de una fuente puntual y otra lineal son análogas a la ecuación de homogeneidad de Euler con índices estructurales iguales a dos y a uno, respectivamente. Considerando estos dos resultados, se sugiere (Mikhailov et al., 2007) una fórmula general válida para cuerpos alargados e isométricos:

$$z' = \frac{(1 + I)g_z}{\lambda_1}$$

o, equivalentemente,

$$z' = \frac{Ng_z}{\lambda_1},$$

donde el cálculo de los *eigenvalores* se ha desarrollado en el apartado: 2.2.3. Análisis de invariantes, y a partir de ese desarrollo se puede justificar que el índice estructural pueda ser calculado a partir de la razón de dimensionalidad  $I$ . Esto es porque  $I = 0$  para una fuente lineal con un índice estructural de  $N = 1$ . Para una fuente puntual  $I = 1$  con un índice estructural de  $N = 2$ . Es por eso que Mikhailov et al. (2007) encontraron la relación entre el índice estructural y la razón de dimensionalidad de la forma  $N = 1 + I$ . El algoritmo para la deconvolución tensorial incluye los siguientes pasos:

- 1) El cálculo de los *eigenvalores*, *eigenvectores*, invariantes tensoriales, y de la razón de dimensionalidad  $I$  en cada punto de observación y la estimación del índice estructural de acuerdo a la ecuación:  $N = 1 + I$  (o también, más estrictamente,  $N = 1 + I^k$ ;  $k = 1, 2, \dots, 10$ ).
- 2) El cálculo de las coordenadas de una fuente equivalente usando el máximo *eigenvalor* en valor absoluto y su correspondiente *eigenvector*.
- 3) El filtro del total de soluciones calculadas utilizando criterios desarrollados para la deconvolución de Euler.

El algoritmo original de la deconvolución tensorial estima la ubicación completa de la fuente calculando los *eigenvectores*. Para este trabajo, más bien, se utilizaron las tres componentes del vector de anomalía gravimétrica para obtener la ubicación completa de las fuentes sin la necesidad de calcular los *eigenvectores*. De esta manera, la ubicación de la fuente queda como

$$\hat{x}'(x_i, y_j) = x_i + \frac{N(x_i, y_j)g_x(x_i, y_j)}{\lambda_1(x_i, y_j)},$$

$$\hat{y}'(x_i, y_j) = y_j + \frac{N(x_i, y_j)g_y(x_i, y_j)}{\lambda_1(x_i, y_j)},$$

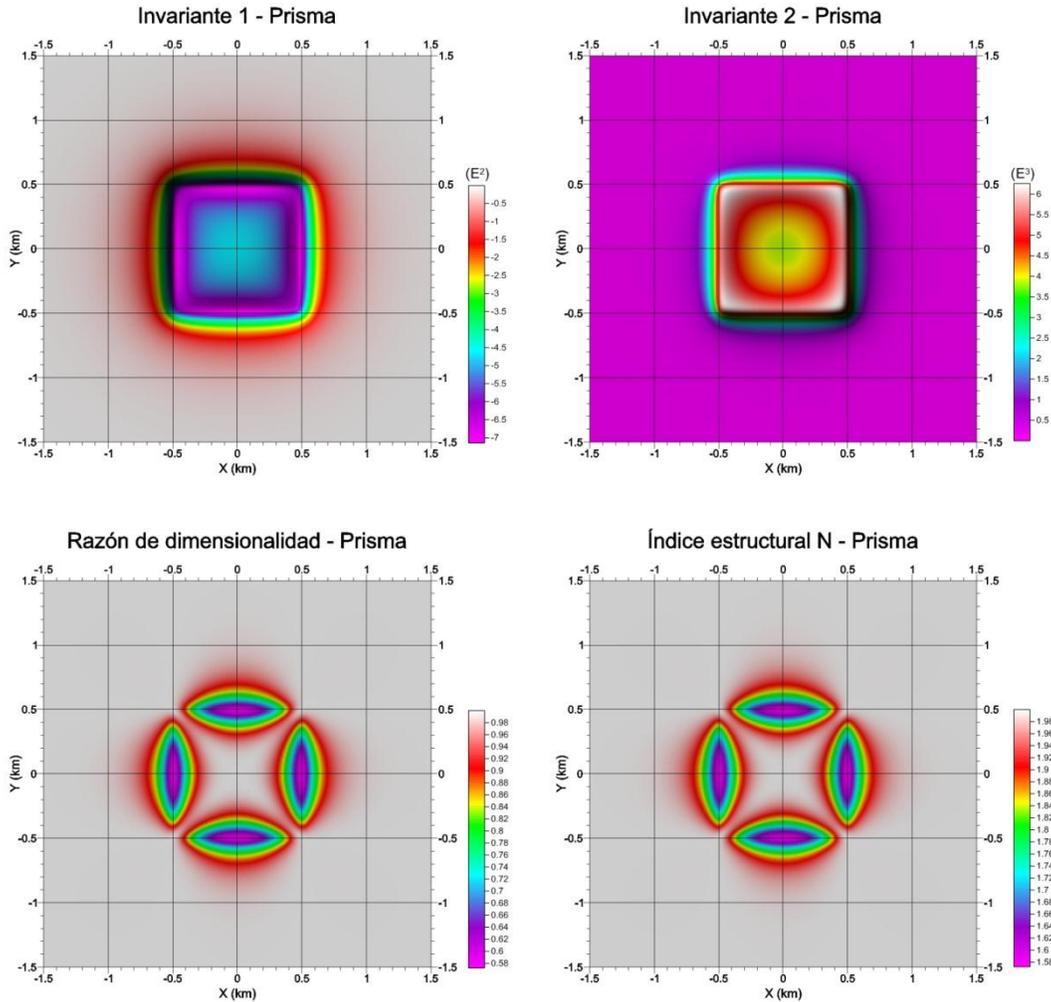
$$\hat{z}'(x_i, y_j) = \frac{N(x_i, y_j)g_z(x_i, y_j)}{\lambda_1(x_i, y_j)},$$

donde

$$N(x_i, y_j) = 1 + [I(x_i, y_j)]^k; \quad k = 1, 2, \dots, 10;$$

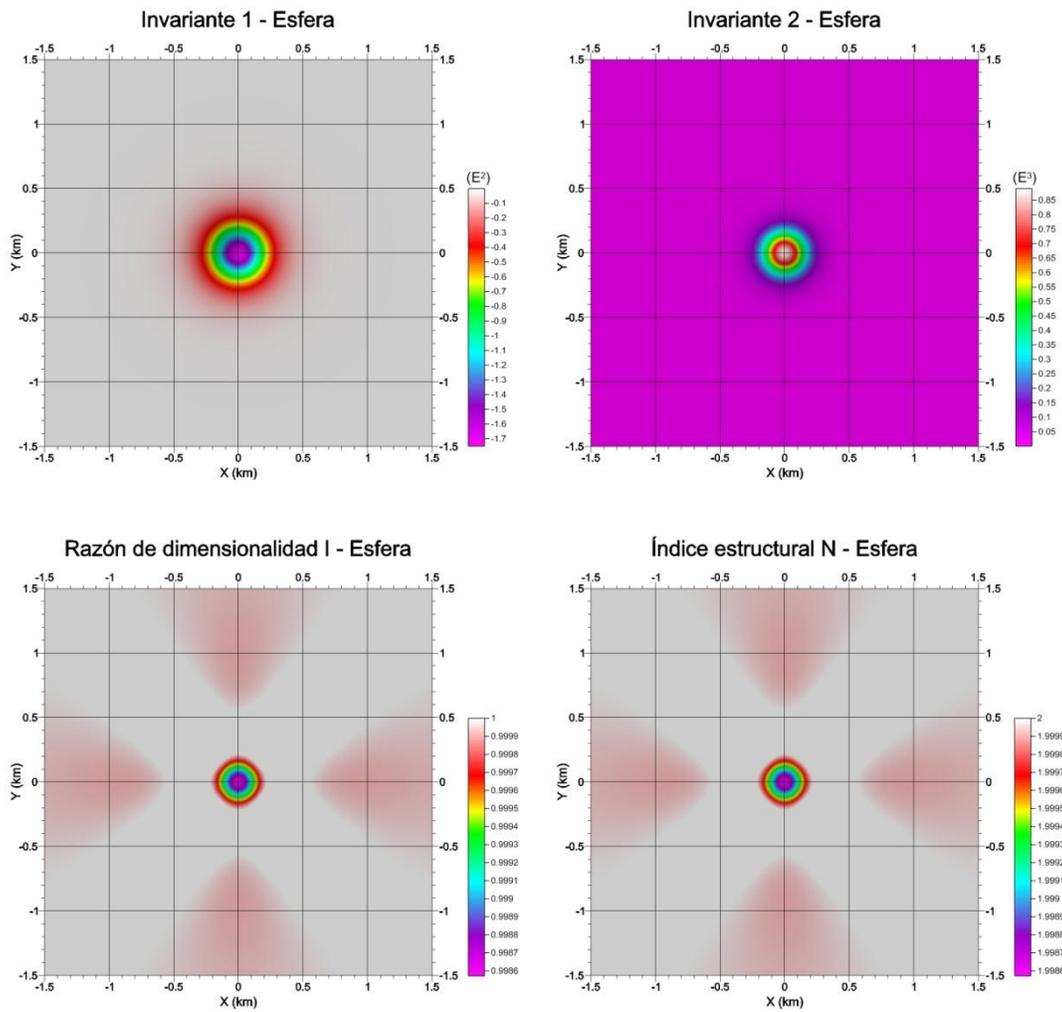
con estas ecuaciones se calculan las tres componentes de la ubicación de la fuente y el índice estructural para cada punto de observación de la malla.

Se ilustran los invariantes  $I_1$ ,  $I_2$ , la razón de dimensionalidad y el índice estructural (figuras 27, 28 y 29), de igual forma con los tres cuerpos geométricos vistos anteriormente:



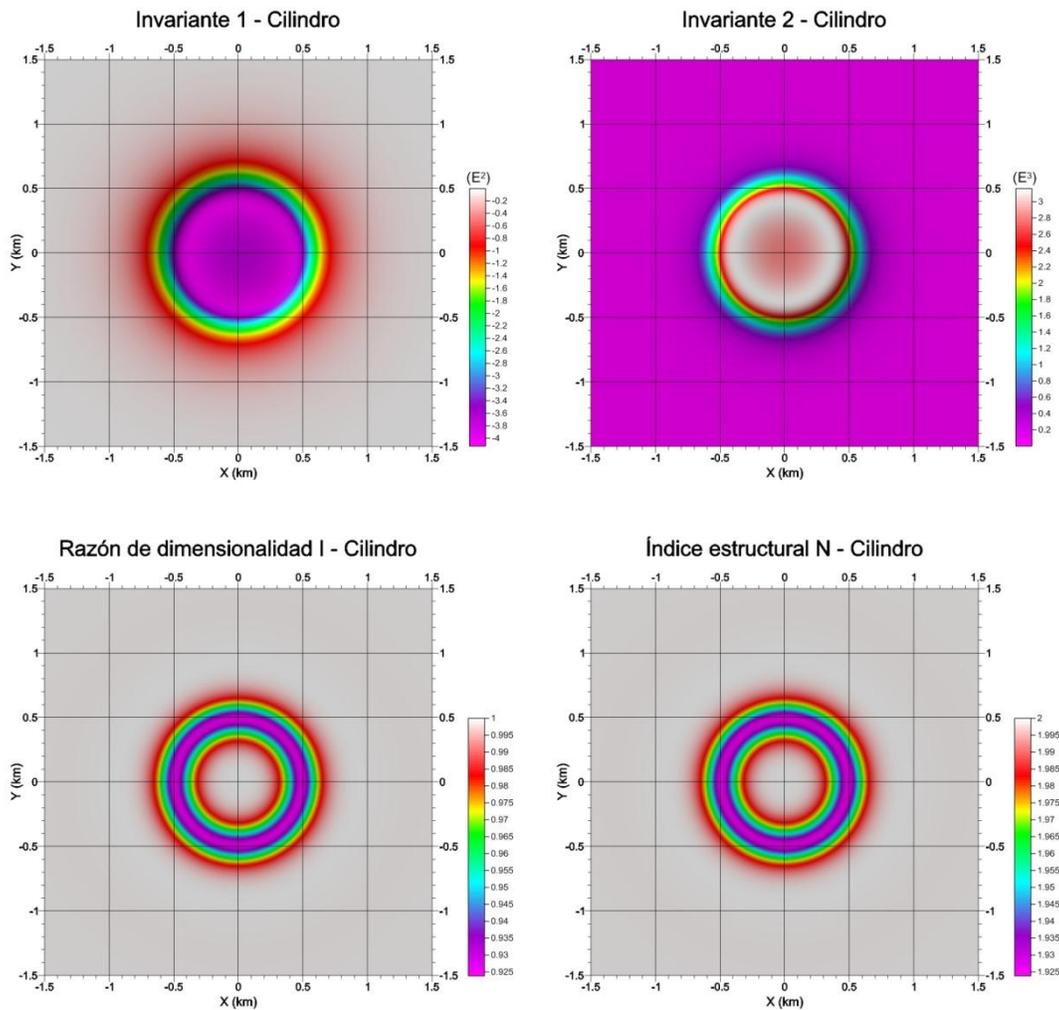
**Figura 27.** Invariantes del tensor de gradiometría gravimétrica, la razón de dimensionalidad y la estimación del índice estructural. Prisma rectangular.

Debe hacerse notar que el índice estructural estimado para la mayor parte de la malla de datos es igual a 2 excepto cuando se va acercando a los bordes de la fuente; justo encima de los bordes de la fuente, el índice estructural llegó a estimarse de 1.58.



**Figura 28.** Invariantes del tensor de gradiometría gravimétrica, la razón de dimensionalidad y la estimación del índice estructural. Esfera.

El índice estructural estimado para la mayor parte de la malla de datos es igual a 2 excepto encima de la misma fuente, que llega a bajar a 1.9986.



**Figura 29.** Invariantes del tensor de gradiometría gravimétrica, la razón de dimensionalidad y la estimación del índice estructural. Cilindro vertical.

El índice estructural estimado para la mayor parte de la malla de datos es igual a 2 excepto encima de sus bordes, donde llega a tomar el valor de 1.925, mientras que en el centro del cilindro también toma el valor de 2.

Se puede observar que en todos los casos el invariante  $I_1$  siempre es negativo, lo cual implica que todos los *eigenvalores* sean reales. Se puede observar también que el índice estructural estimado es exactamente igual a la razón de dimensionalidad sumada la unidad en cada punto de la malla de datos; esto es porque el exponente  $k$  que relaciona ambas cantidades se hizo igual a uno para este trabajo.

Para la deconvolución tensorial se utilizó el criterio de aceptación de soluciones de Thompson (1982):

$$\alpha(x_i, y_j) \leq \frac{\hat{z}'(x_i, y_j)}{N(x_i, y_j)\sigma_z},$$

con las diferencias de que aquí la profundidad estimada y el índice estructural varían para cada punto de observación; además, la desviación estándar ya no puede ser calculada a partir de una matriz de covarianza, sino que se hace de la manera usual:

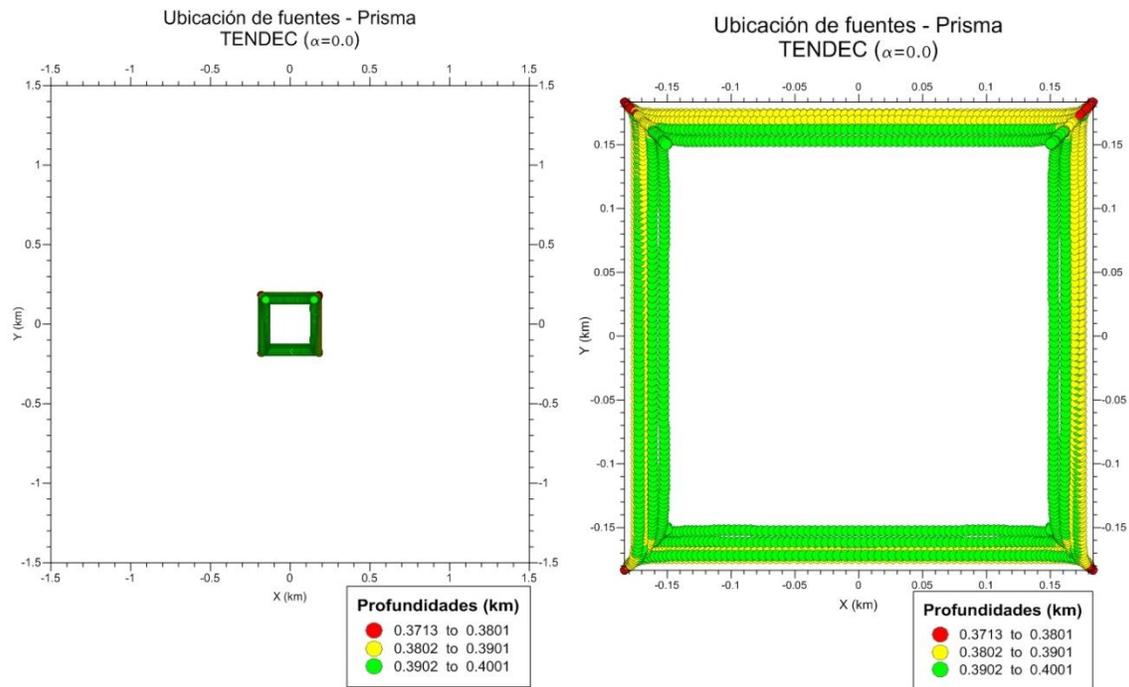
$$\sigma_z = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{xv} \sum_{j=1}^{yv} [\hat{z}'(x_i, y_j) - \bar{z}']^2}{(xv)(yv) - 1}},$$

donde

$$\bar{z}' = \frac{\sum_{i=1}^{xv} \sum_{j=1}^{yv} \hat{z}'(x_i, y_j)}{(xv)(yv)}$$

es el promedio de las profundidades estimadas.

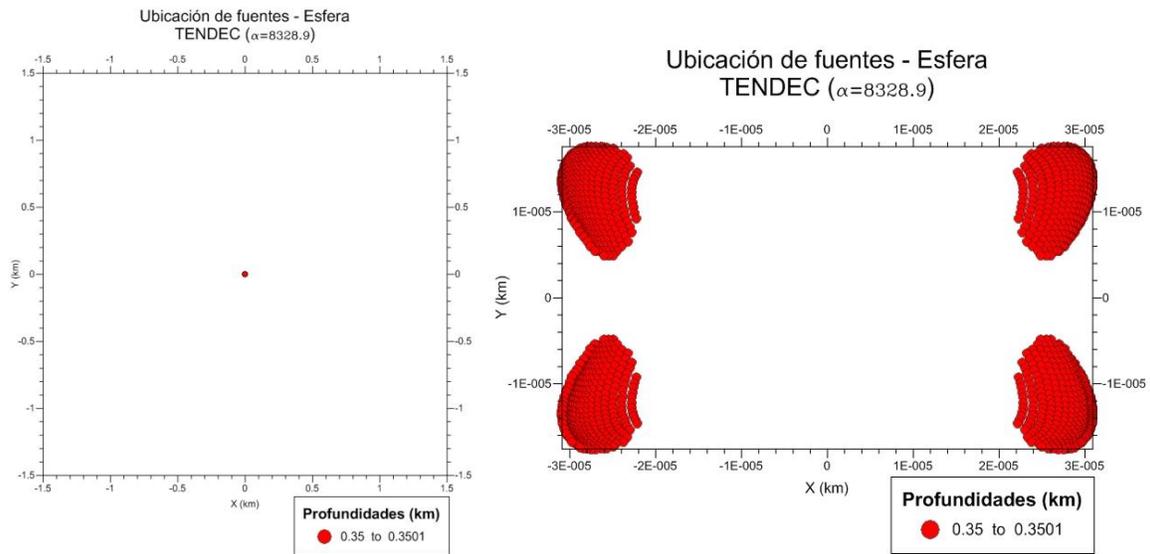
La deconvolución tensorial ( $TENDEC^{19}$ ) se ha probado con datos sintéticos de los tres cuerpos geométricos vistos anteriormente. Para el caso del prisma (figura 30) se seleccionó como parámetro del criterio de aceptación de soluciones a  $\alpha = 0.0$ :



**Figura 30.** Estimaciones de ubicación de fuentes: Deconvolución tensorial ( $TENDEC$ ). Lado izquierdo, sin acercamiento; lado derecho, con acercamiento. Prisma rectangular.

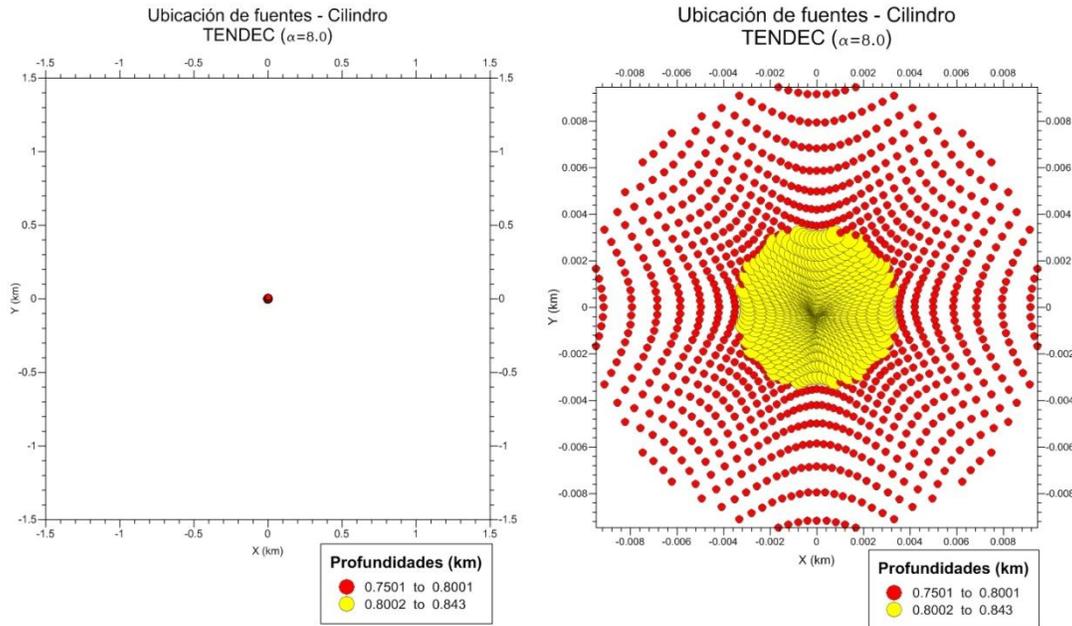
<sup>19</sup> Tensor Deconvolution.

Para el caso de la esfera (figura 31) se seleccionó como parámetro del criterio de aceptación de soluciones a  $\alpha = 8328.9$ :



**Figura 31.** Estimaciones de ubicación de fuentes: Deconvolución tensorial (*TENDEC*). Lado izquierdo, sin acercamiento; lado derecho, con acercamiento. Esfera.

Para el caso del cilindro (figura 32) se seleccionó como parámetro del criterio de aceptación de soluciones a  $\alpha = 8.0$ :



**Figura 32.** Estimaciones de ubicación de fuentes: Deconvolución tensorial (*TENDEC*). Lado izquierdo, sin acercamiento; lado derecho, con acercamiento. Cilindro vertical.

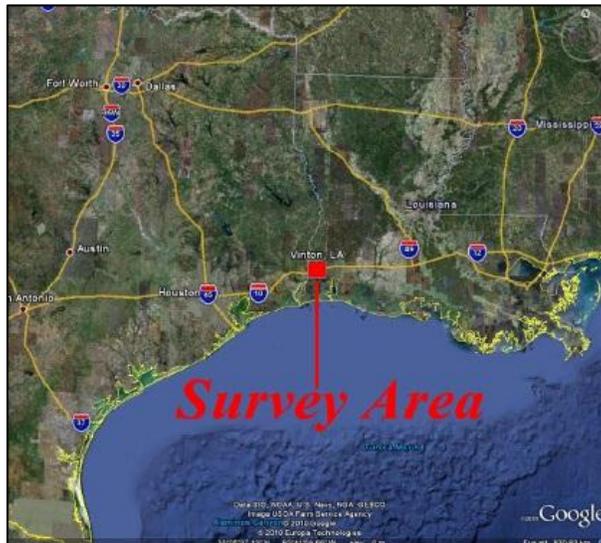
Las soluciones obtenidas mediante la *TENDEC* no dieron la ubicación correcta del prisma, pues existe la limitación del cálculo del índice estructural. Esto es porque el algoritmo de la *TENDEC* tiene restringido al índice estructural de 1 a 2, siendo que el índice estructural del prisma es cercano a  $-0.5$ . Una situación similar ocurre con el cilindro, donde la profundidad estimada excede demasiado a la verdadera, esto debido también a que el algoritmo tiene restringido el índice estructural que no coincide con el del cilindro. En cambio, con la esfera sí se obtienen soluciones cercanas a la verdadera que son estimadas para su centro de masa. Esto es debido a que la estimación de su índice estructural, aunque está restringido, es el correcto para este caso.

Como se mencionó antes, la *TENDEC* no necesita de una ventana móvil que barra todo el mapa para resolver sistemas de ecuaciones y entregue soluciones por cada posición de ésta, sino que otorga una solución en cada punto de la malla de datos sin necesidad de resolver algún sistema de ecuaciones. Solamente realiza sencillas operaciones en cada punto de la malla para estimar la ubicación de las fuentes y, asimismo, el índice estructural.

# 3. Procedimiento y resultados

## 3.1. Domo Vinton

El Domo Vinton está ubicado en el suroeste de Louisiana en la Parroquia de Calcasieu, cerca de la frontera con Texas (figura 33). El área de estudio está entre las latitudes  $30.07^{\circ}$  y  $30.23^{\circ}$  norte y longitudes  $-93.66^{\circ}$  y  $-93.53^{\circ}$  oeste (Bell Geospace, Inc., 2008).

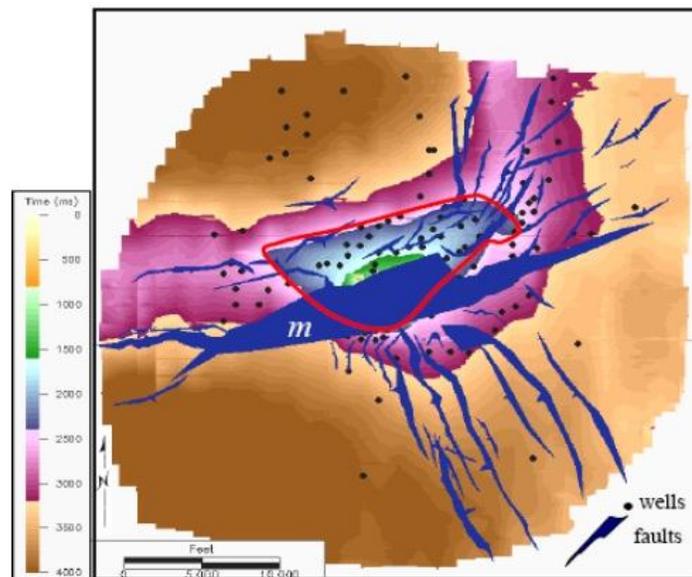


**Figura 33.** Ubicación del Domo salino Vinton en Louisiana, E.U.A. (Bell Geospace, Inc., 2008).

En mayo de 1901 se perforó en uno de los costados del Domo Vinton, siendo el primer domo salino donde se encontró petróleo (Gherasim, 2005). Las capas expuestas en la superficie pertenecen a las series *Port Hudson* del Pleistoceno, que en Texas son conocidas como las Arcillas *Beaumont*. Dichas series están compuestas de arenas y arcillas. El Domo Vinton es un característico domo salino con un núcleo de sal masiva y una roca envolvente bien definida. La roca envolvente consiste de calizas, seguida en profundidad por yeso y anhidrita, que contiene cavernas en ciertos lugares y son llenadas con agua sulfurosa (Gherasim, 2005). La parte más somera de la roca envolvente está a una profundidad de 130 metros de la superficie y tiene un rango desde 210 a 60 metros de espesor (Ennen, 2012). El núcleo del domo mide 1280 metros de longitud de norte a sur y 1520 metros de este a oeste (Ennen, 2012). Los sedimentos que se encuentran encima del domo consisten de arenas, gravas y arcillas del Pleistoceno (Gherasim, 2005). Las Arcillas *Beaumont* se extienden hasta 120 metros de profundidad. Debajo de éstas se encuentran las Gravas *Lafayette* del Plioceno tardío con un espesor de 180 metros y con una densidad que varía de  $2000 \text{ (kg/m}^3\text{)}$  a  $2200 \text{ (kg/m}^3\text{)}$ , las cuales contienen arenas y lutitas (Ennen, 2012).

La Formación *Fleming* del Mioceno se encuentra debajo de las gravas del Plioceno, la cual contiene areniscas masivas con descansos periódicos de esquisto. Después se encuentra una sucesión de formaciones del Oligoceno (*Anáhuac*, *Frío*, *Vicksburg* y *Hackberry*), que en su mayoría están compuestas de areniscas y esquisto arenoso. Es una región objetivo para la exploración de hidrocarburos en el Golfo de México. Estos campos consisten de trampas estructurales y estratigráficas en los flancos de los domos salinos. La Formación *Anáhuac* es en su mayoría esquisto con algunas areniscas y carbonatos (Ennen, 2012). Subyacente a la Formación *Anáhuac* se encuentra la Formación *Frío* que está dividida en tres miembros. La *Frío Superior* tiene un espesor de 240 metros; la *Frío Medio*, de 90 metros; y la *Frío Inferior*, de 120 metros. La Formación *Frío* está compuesta por esquisto oscuro con capas de areniscas. La subyacente a ésta es la Formación *Vicksburg* que contiene en su mayoría areniscas y esquisto arenoso. Esta formación marca el fin del Eoceno y el inicio del Oligoceno, y su espesor va de 60 a 90 metros (Ennen, 2012).

La estructura está caracterizada por un patrón de fallas de múltiples estilos. La falla principal es una falla regional que va tierra adentro hacia el norte en una dirección noreste-suroeste, y que divide al domo prácticamente en dos partes iguales, cuyo rumbo es  $N75^{\circ}E$  con un echado de  $45^{\circ}$  (Coker et al., 2007). Los conjuntos de fallas en la periferia del domo son normales con patrones de fallas divergentes y paralelas. Hay tres conjuntos de fallas en la periferia del domo, que son las del noreste, sureste y oeste (figura 34). Las fallas que se encuentran al noreste del domo tienen rumbos que van de  $N5^{\circ}W$  a  $N80^{\circ}E$ , donde éstas últimas son casi paralelas a la falla regional. Estas fallas tienen echados que van de  $45^{\circ}$  a  $60^{\circ}$  y en general son más someras que las del sureste. Las fallas que se encuentran al sureste del domo son todas casi paralelas entre ellas con rumbos que van de  $N5^{\circ}W$  a  $N40^{\circ}W$ . Las fallas que se encuentran al oeste del domo se ubican cercanamente al noroeste y oeste de la falla regional; son relativamente cortas, paralelas y parecen ser complementarias a la falla regional (Coker et al., 2007).



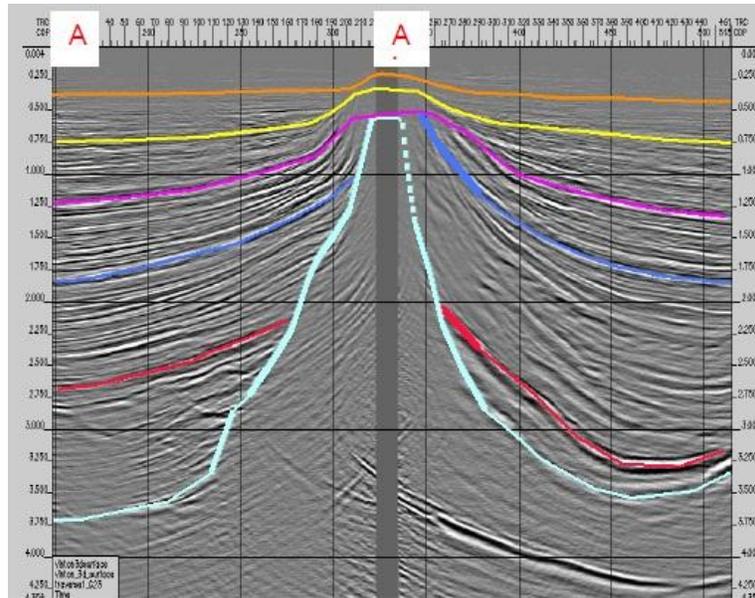
**Figura 34.** Mapa de tiempo obtenido por atributos sísmicos de la cima del Domo Vinton. La línea roja indica el borde de la sal del Mioceno temprano. Se muestran en azul los patrones de fallas en la zona. Obtenida de Coker et al. (2007).

Se muestra una columna estratigráfica generalizada de las formaciones descritas anteriormente (figura 35):

Miocene	Grand Gulf	Upper			
		Middle			
		Lower			
Oligocene	Anahuac	Discorbis Zone			
			Heterostegina Zone		Het Lime
				Marginulina Zone	First Marginulina Sand
		Second Marginulina Sand			
		Third Marginulina Sand			
		Frio	Upper	Welch Sand	
				Ortega Sand	
				Klumpp A, B, C, D Sands	
			Hackberry	Middle	Burleigh Sand
	Boaghi Sand				
	Homeseeker A Sand				
	Lower	First Nodosaria sand			
		Second Nodacaria Sand			
		Third Nodosaria Sand			
	Tweedel Sand	Fourth Nodosaria Sand			
Tweedel Sand					
Eocene	Jackson				
	Vicksburg				

**Figura 35.** Columna estratigráfica generalizada de la zona del Domo Vinton. Extraída de Ennen (2012).

Se muestra una sección sísmica (figura 36) en la región del Domo Vinton donde se muestran con diferentes colores a los límites superiores de las distintas formaciones descritas: Mioceno Superior (anaranjado), Mioceno Medio-Superior (amarillo), Mioceno Medio (púrpura), Formación *Frío* (azul), Formación *Hackberry* (rojo) y el Domo salino Vinton (azul claro).



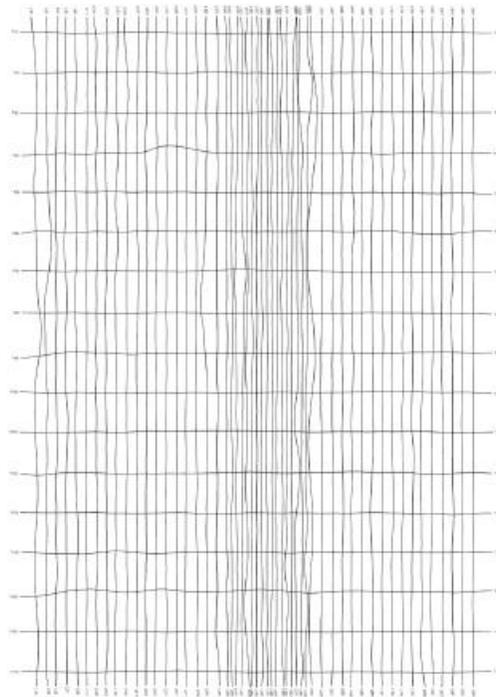
**Figura 36.** Sección sísmica en la región del Domo Vinton. La escala vertical está en tiempo, donde lo más profundo corresponde en profundidad a 4269 metros (Marfurt et al., 2004).

## 3.2. Adquisición de datos

En 2008, *Bell Geospace* voló sobre el Domo salino Vinton con el *Air-FTG* para hacer pruebas de una nueva instalación, esto fue del 3 al 6 de julio de ese año. Tuvo un total de 1087.5 metros lineales de adquisición, equivalentes a un área de 196.2 kilómetros cuadrados (*Bell Geospace, Inc.*, 2008). El *Air-FTG* voló a una altura promedio de 77 metros en líneas con dirección de norte a sur y con líneas perpendiculares de atadura (figura 37). Fueron 53 líneas de 16.7 kilómetros de norte a sur con una separación de 250 metros y en la parte central con una separación más reducida de 125 metros. Fueron 17 líneas de atadura de 11.7 kilómetros con separación de 1000 metros (*Bell Geospace, Inc.*, 2008). El sistema *FTG* (*Full Tensor Gradiometry*) es un acelerómetro múltiple de alta precisión y resolución con plataforma rotatoria que mide los gradientes del campo de gravedad. Contiene tres instrumentos de gradiometría gravimétrica, donde cada uno consiste de dos pares de acelerómetros ordenados en un disco rotatorio, el cual es instalado en una aeronave. Los datos gradiométricos son adquiridos inicialmente en un sistema de coordenadas interno que es referenciado a los tres instrumentos de gradiometría del *FTG*. Posteriormente, estos datos se transforman a un sistema coordinado “izquierdo” donde *X* e *Y* están en la superficie y *Z* es perpendicular a ellos y va hacia el centro de la Tierra (*Bell Geospace, Inc.*, 2008).

Después de asignarles un sistema coordenado, los datos son calibrados debido a causas del vuelo y son guardados en discos duros, donde se respaldan y son mandados a las oficinas de procesamiento de *Bell Geospace*. Uno de los respaldos es usado para el procesamiento final e ingeniería. Existen posteriores correcciones de los datos que son debidas a los gradientes generados de la aeronave y del instrumento mismo, esto para después aplicar una corrección por terreno donde se utiliza un paquete de cómputo que modela una base de prismas para definir capas con efecto gravitatorio con densidad de  $1 (g/cm^3)$ , que representa a la masa entre la superficie terrestre y el elipsoide (*Bell Geospace, Inc.*, 2008). Por último, se realiza la nivelación de los datos y se aplica un filtro *Butterworth* para eliminar el ruido restante. Este proceso se repite hasta que los errores queden removidos de los datos.

Las cinco componentes independientes del tensor de gradiometría gravimétrica están relacionadas entre sí por el hecho de que todas son medidas de la misma fuente geológica, por lo que tienen una ventaja sobre otros sistemas en la reducción del ruido. Si una señal en una componente del tensor no es confirmada en otra componente, entonces esa señal es removida de los datos. De este proceso se obtiene un conjunto de datos con una mejor relación *señal/ruido*. Un parámetro que se puede controlar con estos datos es la longitud de onda de corte. Ésta corresponde a la mínima longitud de onda en que los datos con ruido reducido se intentan correlacionar con los del tensor original (*Bell Geospace, Inc.*, 2008).



**Figura 37.** Líneas de vuelo con el Air-FTG. Obtenida de *Bell Geospace, Inc.* (2008).

Para el procesamiento posterior realizado en este trabajo se han utilizado los datos del Domo salino Vinton correspondientes a las seis componentes del tensor de gradiometría gravimétrica con ruido reducido con longitud de onda de corte de 150 kilómetros con una corrección por terreno con densidad de  $2.20 (g/cm^3)$ , que fue calculada a partir de la siguiente fórmula (*Bell Geospace, Inc.*, 2008):

$$T_{zz\_TC\_2200\_FTNR} = T_{zz\_FA\_FTNR} - TC\_T_{zz\_100} * 2.2 (g/cm^3),$$

donde  $T_{zz\_FA\_FTNR}$  son las componentes del tensor de gradiometría gravimétrica corregidas por *aire libre* con ruido reducido y  $TC\_T_{zz\_100}$  son las componentes con una corrección por terreno con densidad de  $1.0 (g/cm^3)$ <sup>20</sup>.

Las mallas de datos obtenidos de *Bell Geospace, Inc.* deben realizarse con un muestreo de  $1/2$  ó  $1/3$  del espaciamiento más pequeño entre líneas mediante el método de interpolación de *mínima curvatura* (*Bell Geospace, Inc., 2008*). El espaciamiento entre las líneas que se midieron de norte a sur es de 250 metros, pero en su parte central es de 125 metros, siendo éste el más pequeño. De esta manera, las mallas de gradiometría se realizaron con un intervalo de muestreo de 50 metros en ambas direcciones.

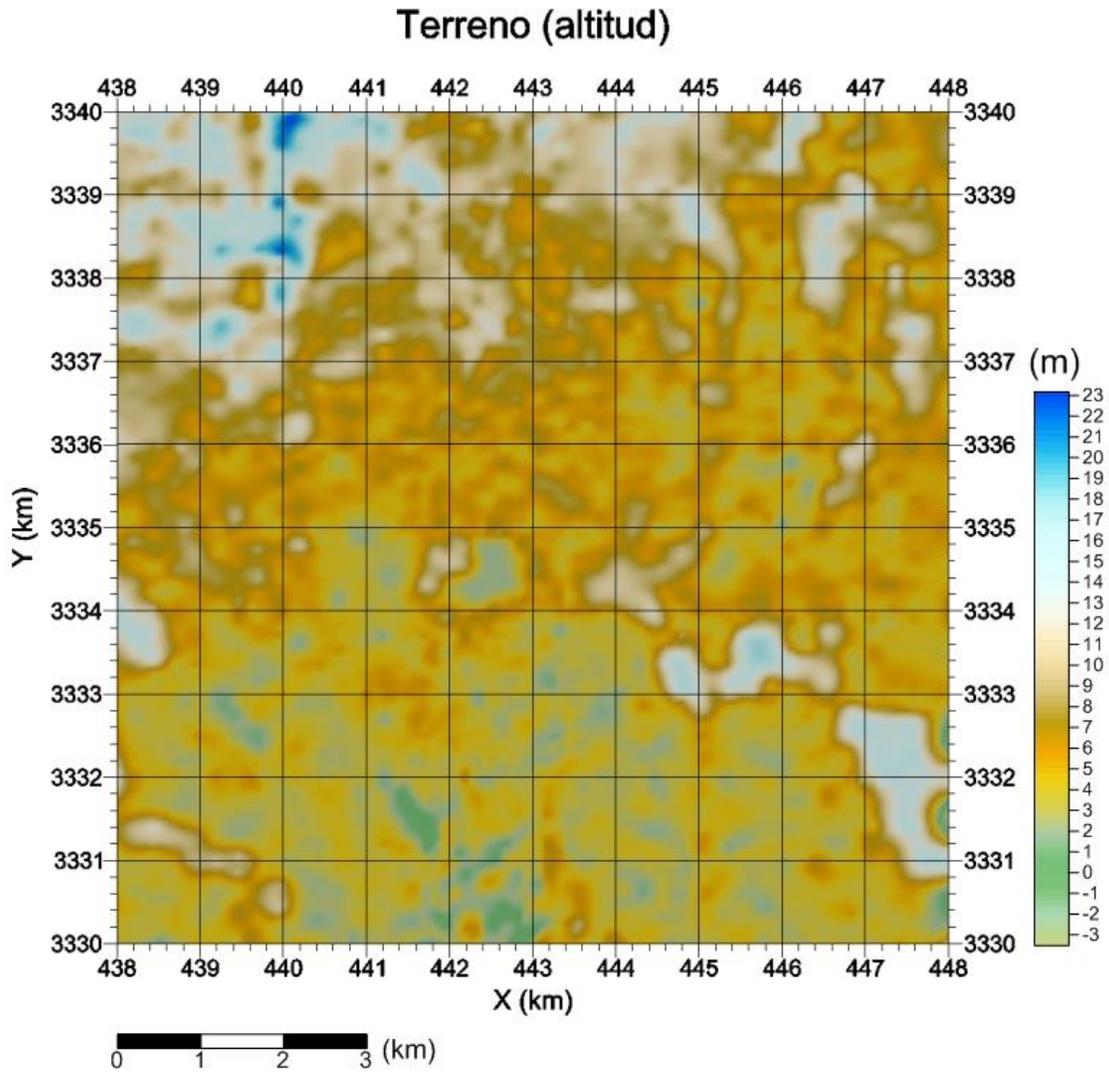
### 3.3. Procesamiento de datos

Para el procesamiento de datos observados del Domo Vinton del tensor de gradiometría gravimétrica se utilizó un programa de cómputo realizado en *FORTRAN 90* llamado *PROCESAMIENTO\_TG.f90* con un módulo llamado *SUBRUTINAS\_PTG.f90* que contiene todas las subrutinas utilizadas con cada operador y método visto anteriormente. En el *Anexo I* se explica más detalladamente el funcionamiento del programa. Una vez que se leen los archivos que contienen a las seis componentes del tensor de gradiometría gravimétrica, se procede a calcular el operador de continuación analítica ascendente para cada una de las seis mallas (figura 39, 40, 41, 42, 43 y 44). Las mallas con las que se trabajó para los datos del Domo Vinton fueron de los 438 a 448 kilómetros de oeste a este y de los 3330 a 3340 kilómetros de sur a norte; es decir, con  $201 \times 201$  datos.

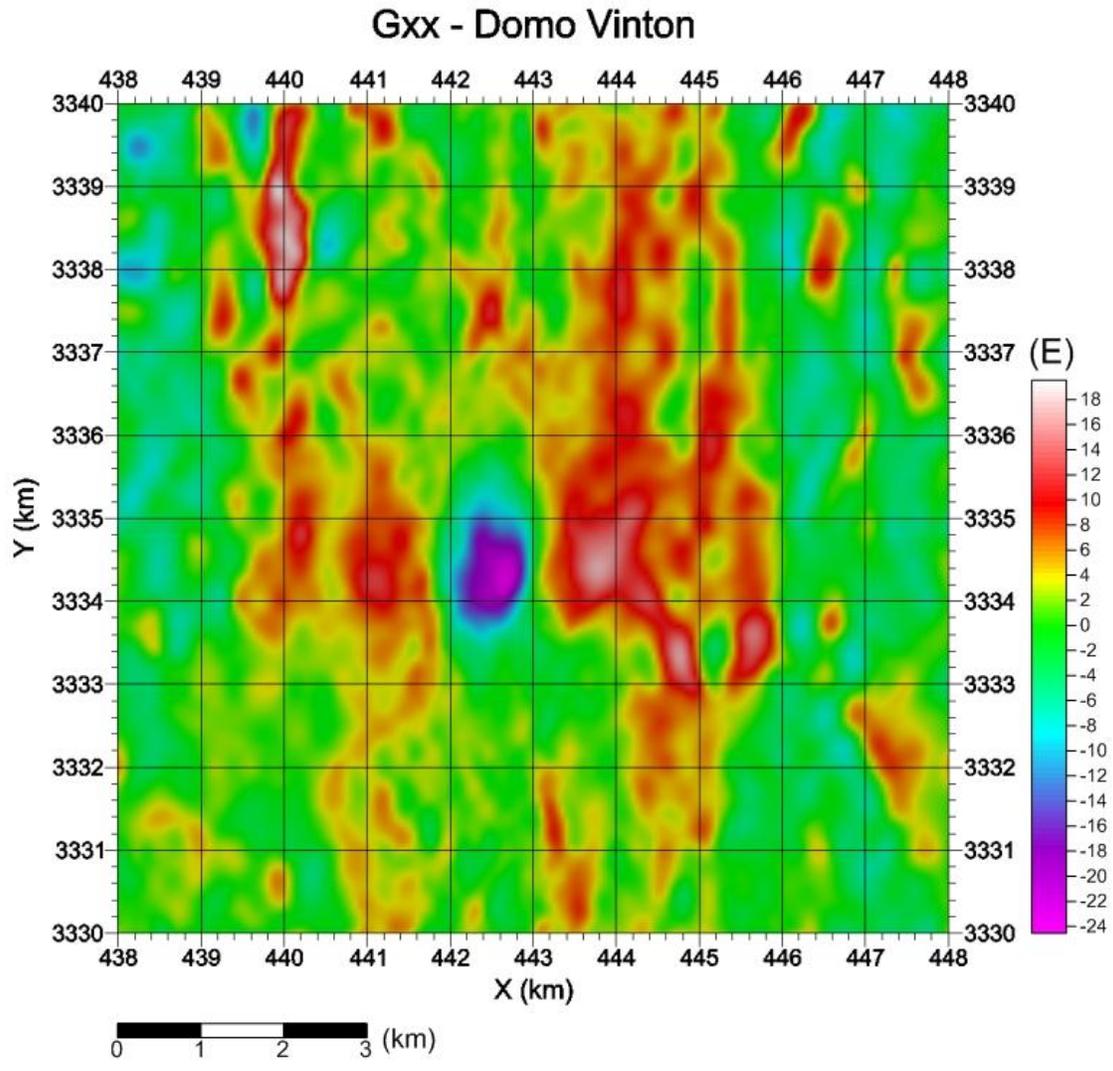
Sabiendo de trabajos anteriores (Ennen, 2012) que las señales de medición, donde la atenuación debería ser mínima, son de características del subsuelo a profundidades entre 130 (m) y 180 (m), se planteó realizar una continuación ascendente a una altura de 150 (m). Pero tomando en cuenta que el *Air-FTG* realizó las mediciones a una altura promedio de 77 (m), y tomándolo como 80 (m), para compensarlo se decidió realizar la continuación ascendente a una altura de 70 (m). Después de esto, se procedió a calcular las mallas de las tres componentes del vector de gravedad a partir  $\Gamma_{xz}$ ,  $\Gamma_{yz}$  y  $\Gamma_{zz}$  con los operadores de antiderivadas en  $Z$  (figura 45, 46 y 47).

---

<sup>20</sup> Esta corrección por terreno fue utilizada debido a que la componente  $\Gamma_{zz}$  presentaba una gran correlación con el terreno (figura 38). La densidad de  $2.2 (g/cm^3)$  fue la que mejor se comportaba y que coincidía con una densidad real de los sedimentos presentes en la zona (Ennen, 2012). En otros trabajos de esta misma zona también fue usada la misma corrección por terreno (Vanderlei & Barbosa, 2013).



**Figura 38.** Altitud del terreno del Domo Vinton.



**Figura 39.** Componente  $\Gamma_{xx}$  del Domo Vinton.

### Gxy - Domo Vinton

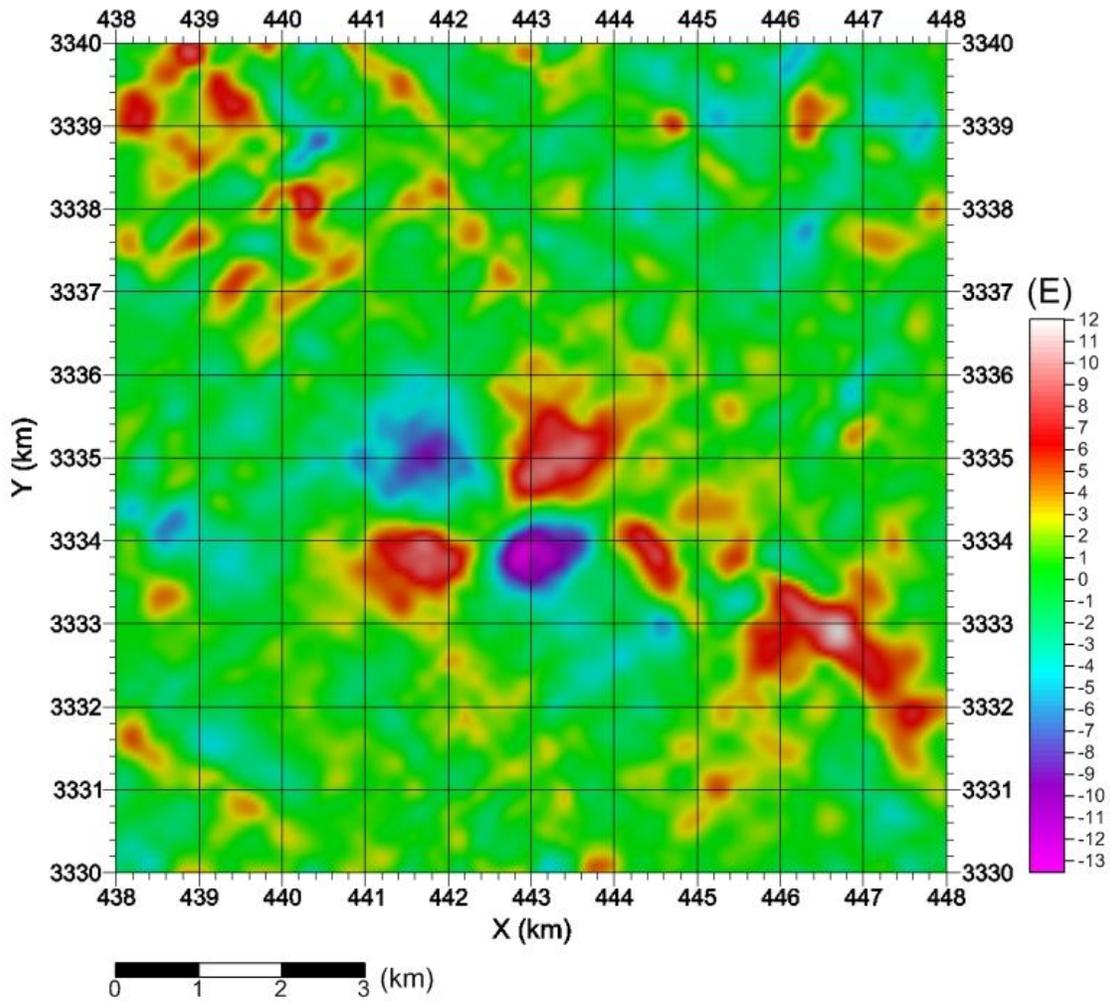
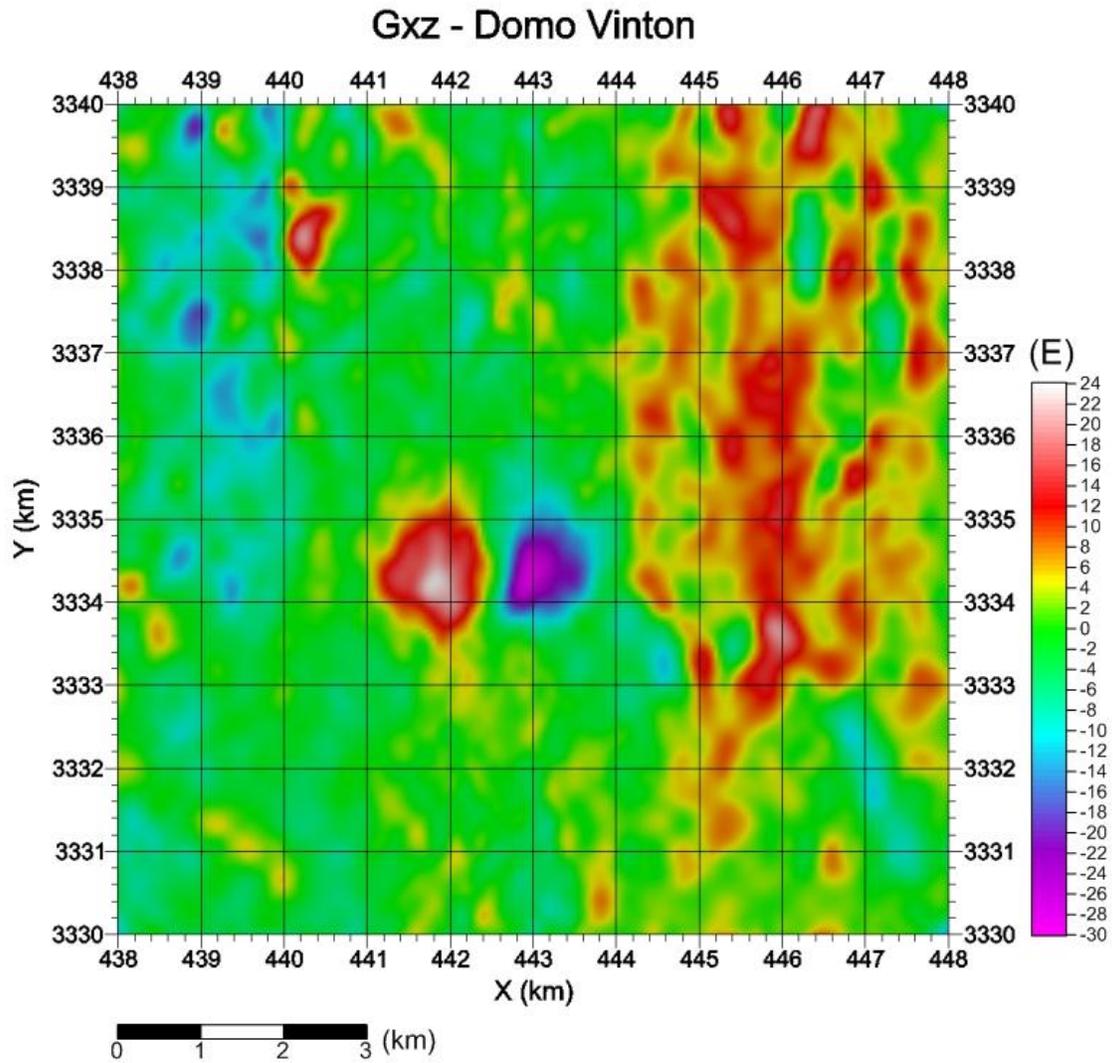


Figura 40. Componente  $\Gamma_{xy}$  del Domo Vinton.



**Figura 41.** Componente  $\Gamma_{xz}$  del Domo Vinton.

### Gyy - Domo Vinton

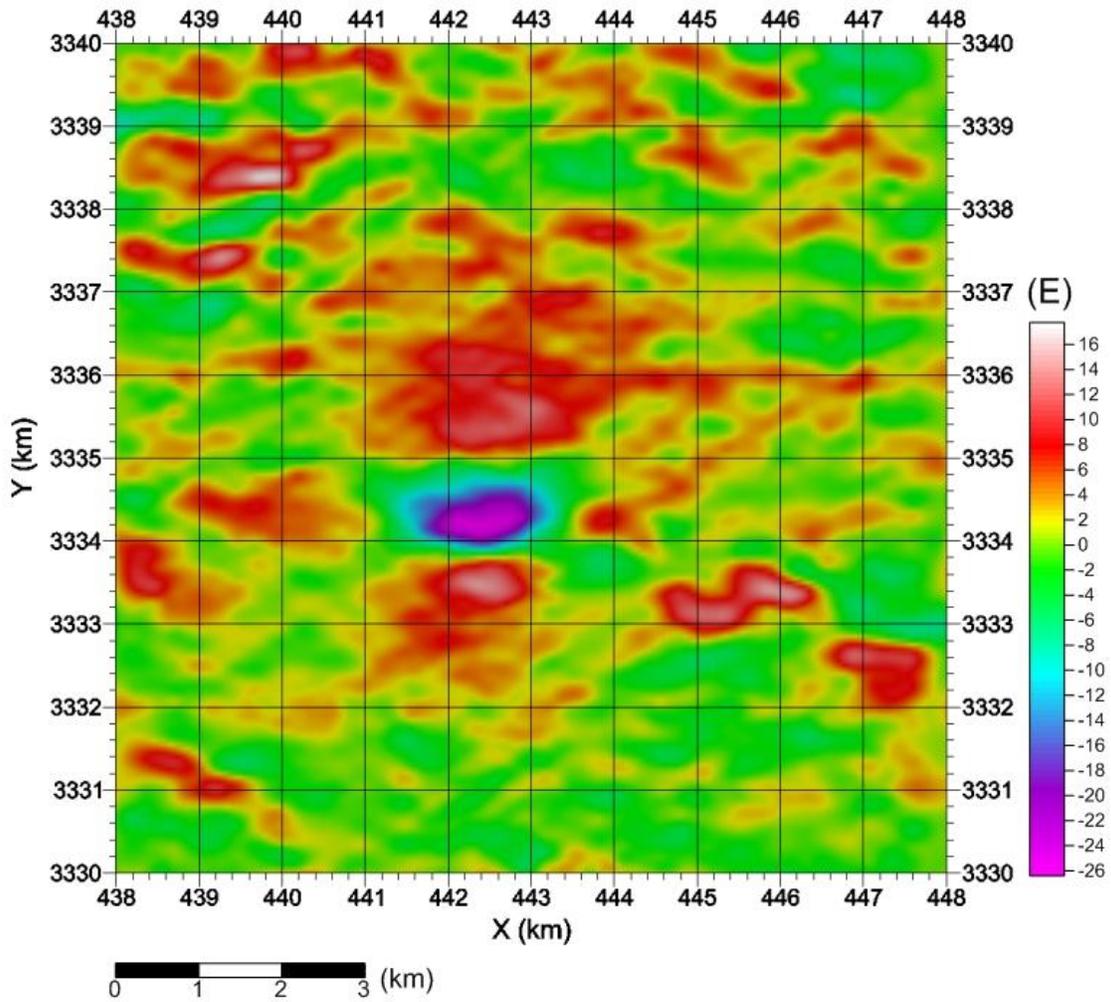


Figura 42. Componente  $\Gamma_{yy}$  del Domo Vinton.

### Gyz - Domo Vinton

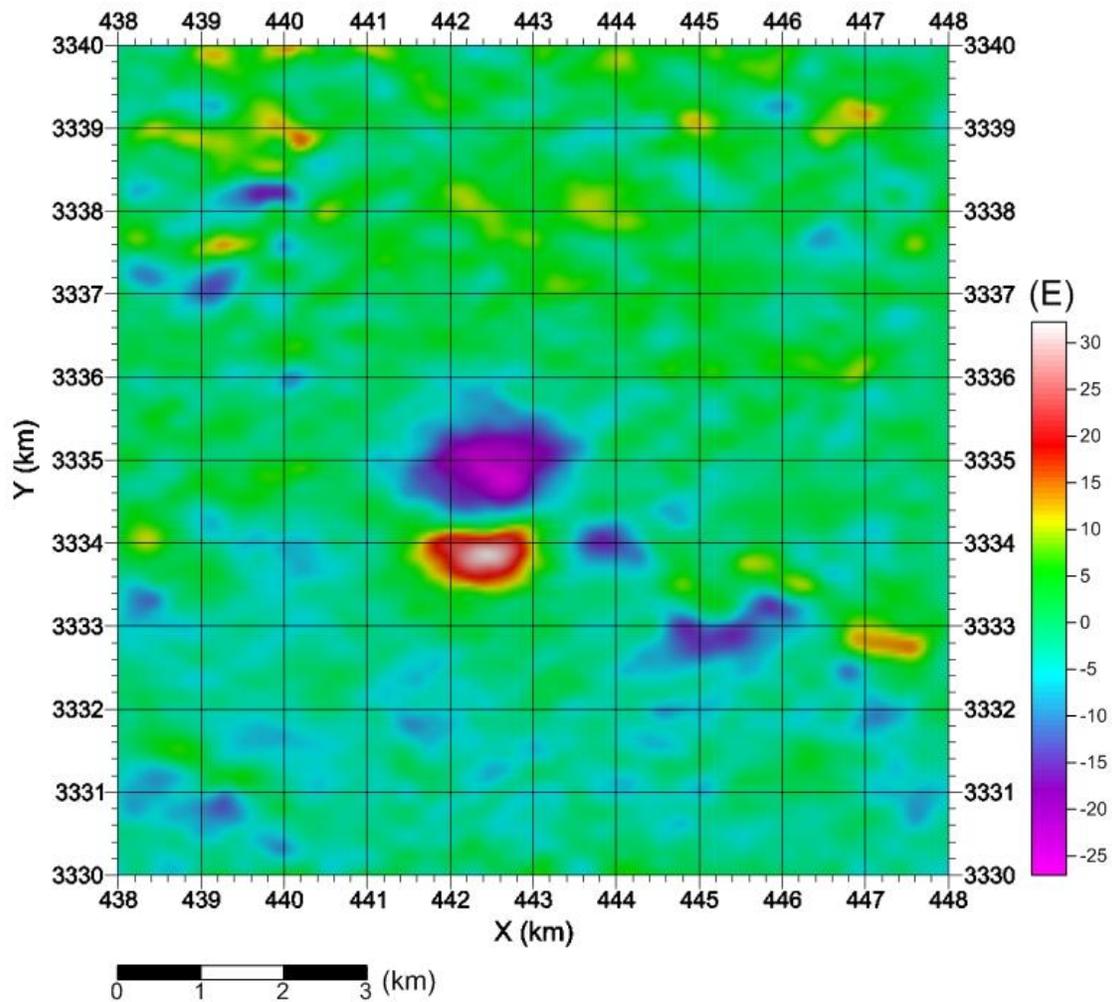
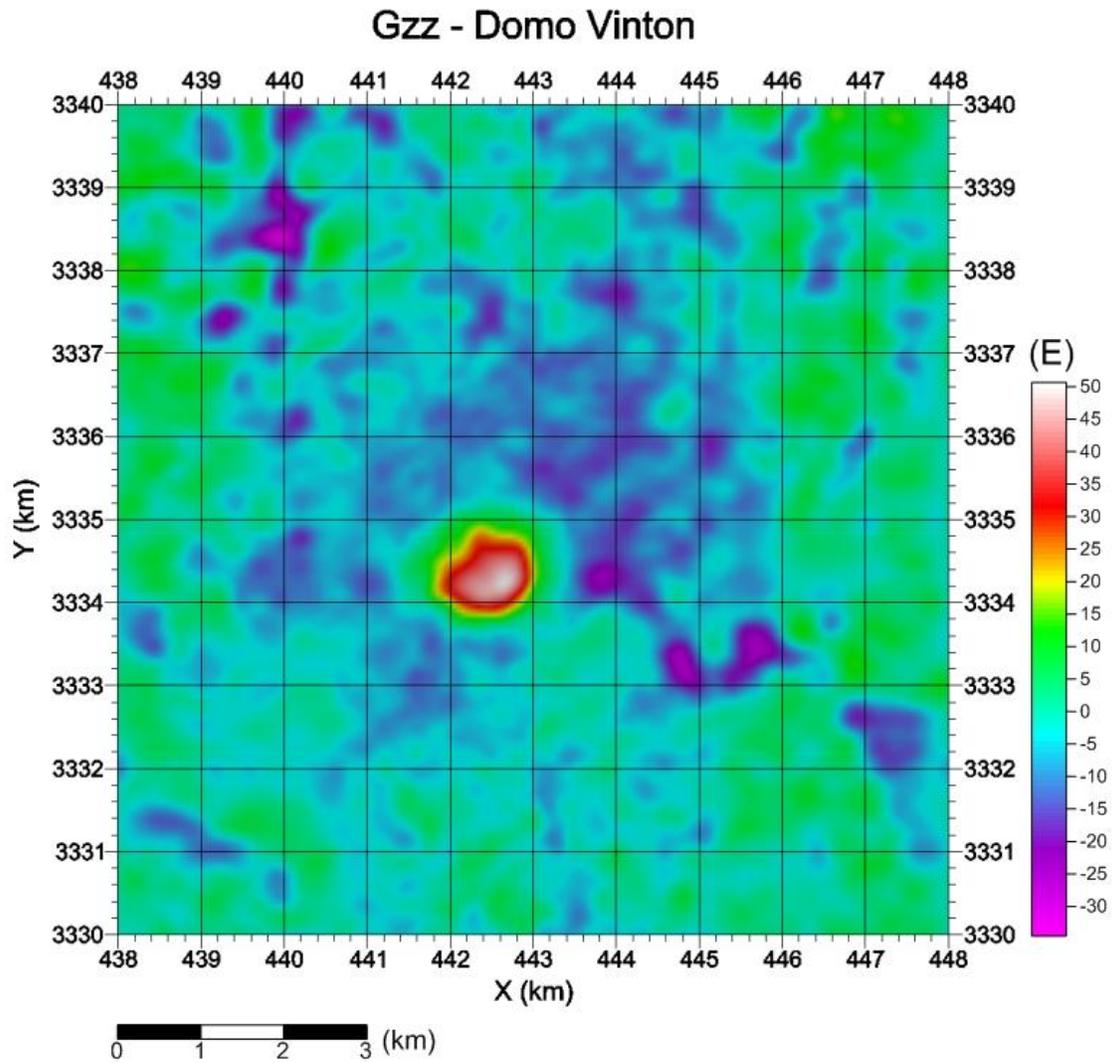


Figura 43. Componente  $\Gamma_{yz}$  del Domo Vinton.



**Figura 44.** Componente  $\Gamma_{zz}$  del Domo Vinton.

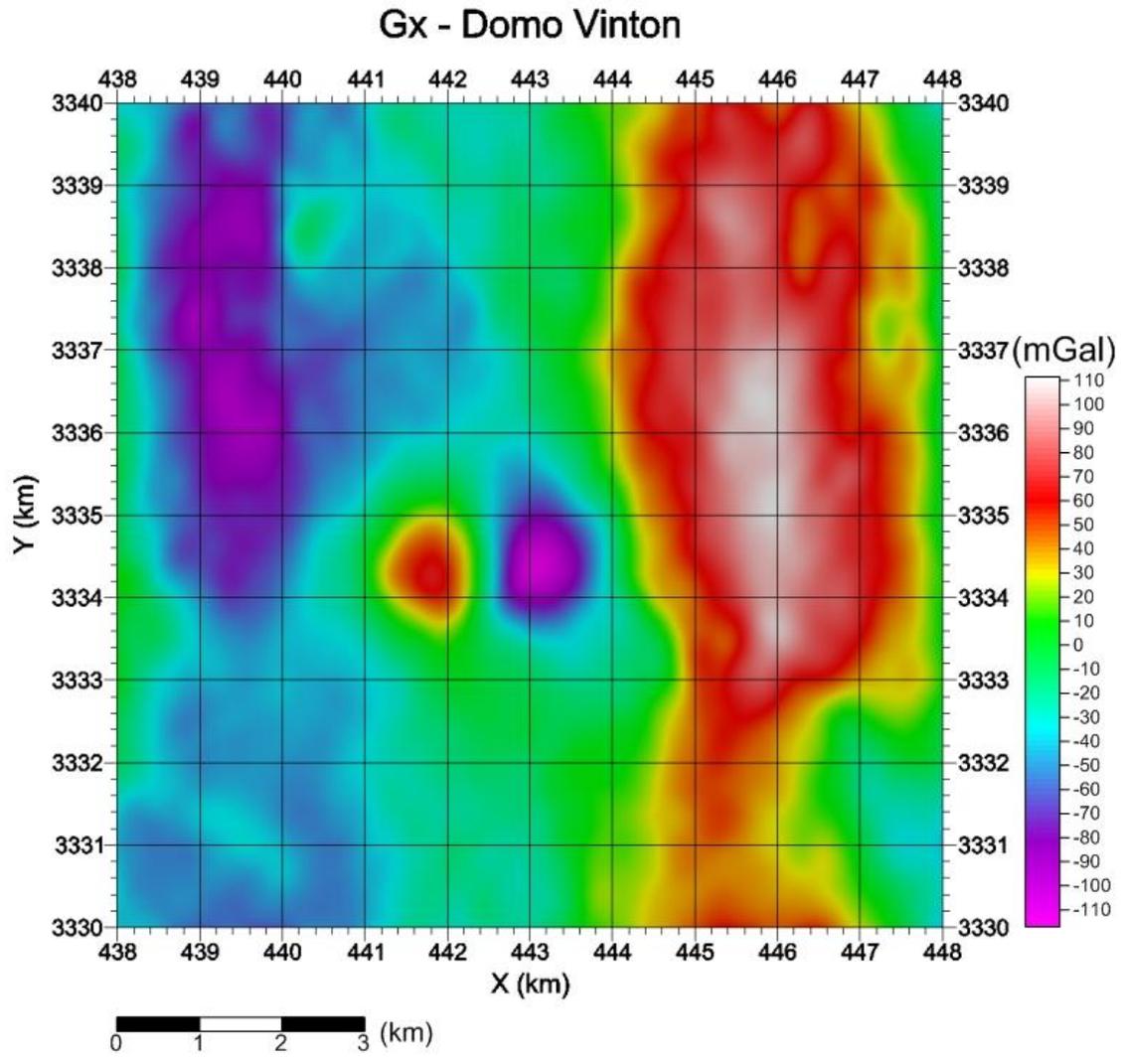


Figura 45. Componente  $g_x$  del Domo Vinton. Calculada a partir de la componente  $\Gamma_{xz}$ .

### Gy - Domo Vinton

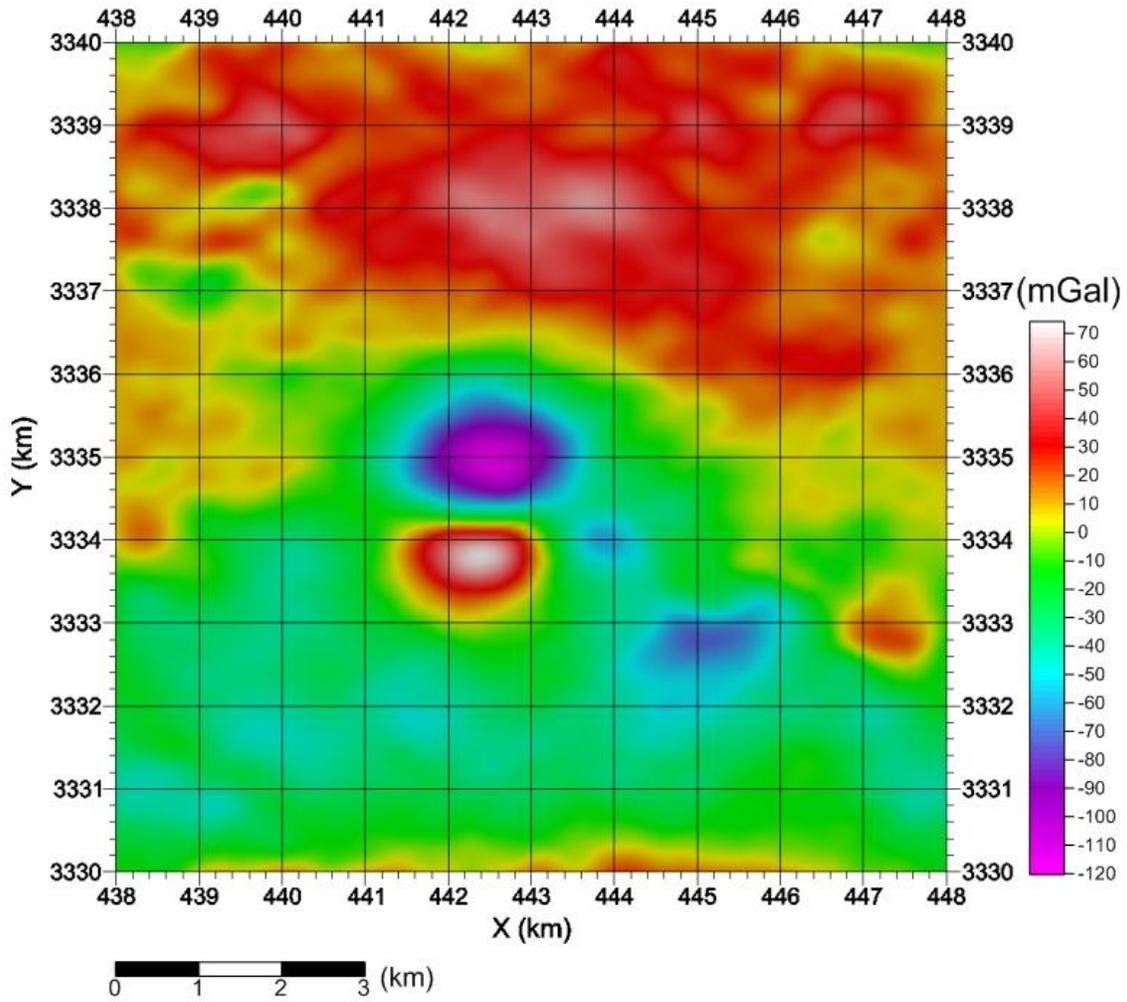


Figura 46. Componente  $g_y$  del Domo Vinton. Calculada a partir de la componente  $\Gamma_{yz}$ .

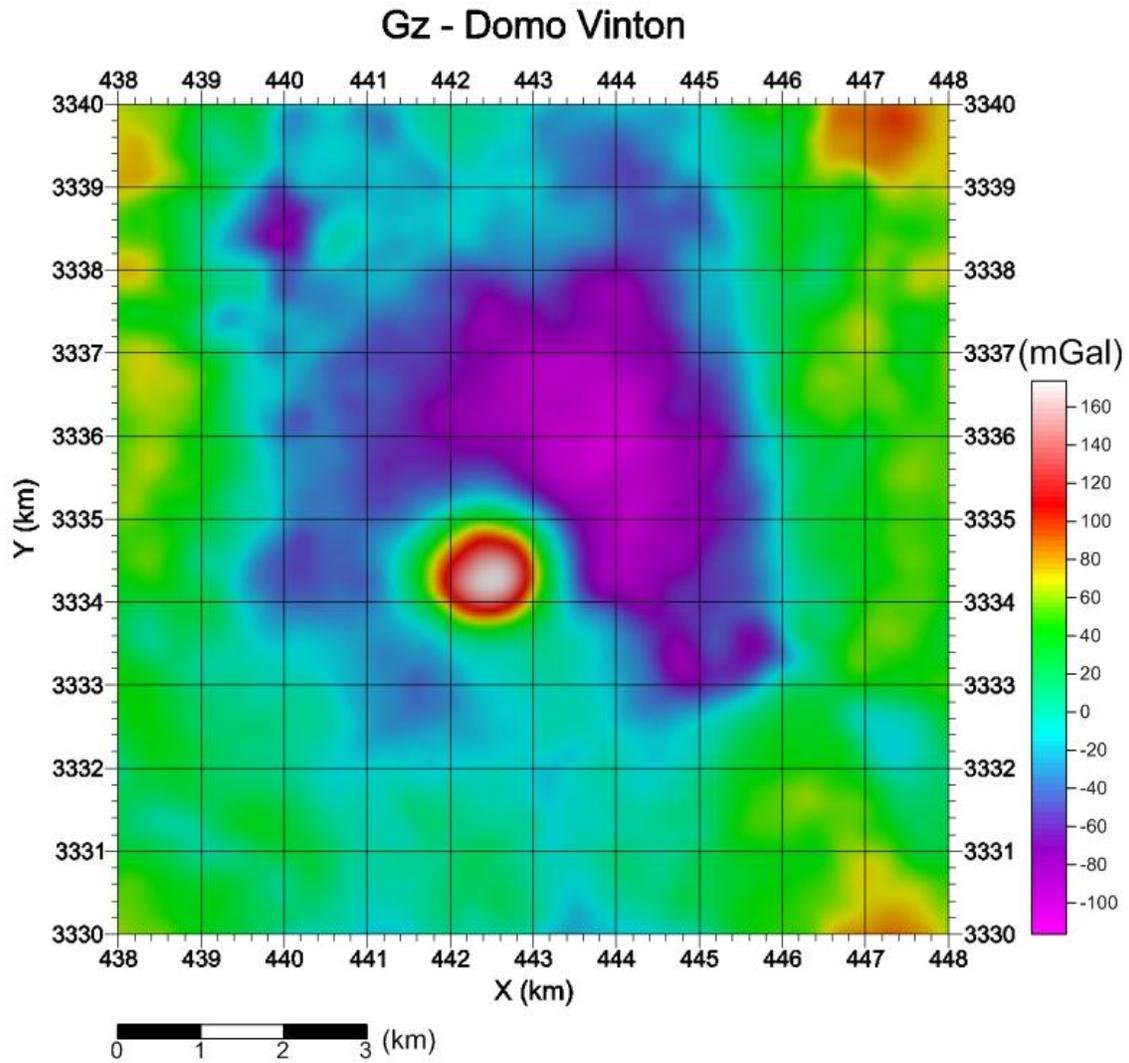
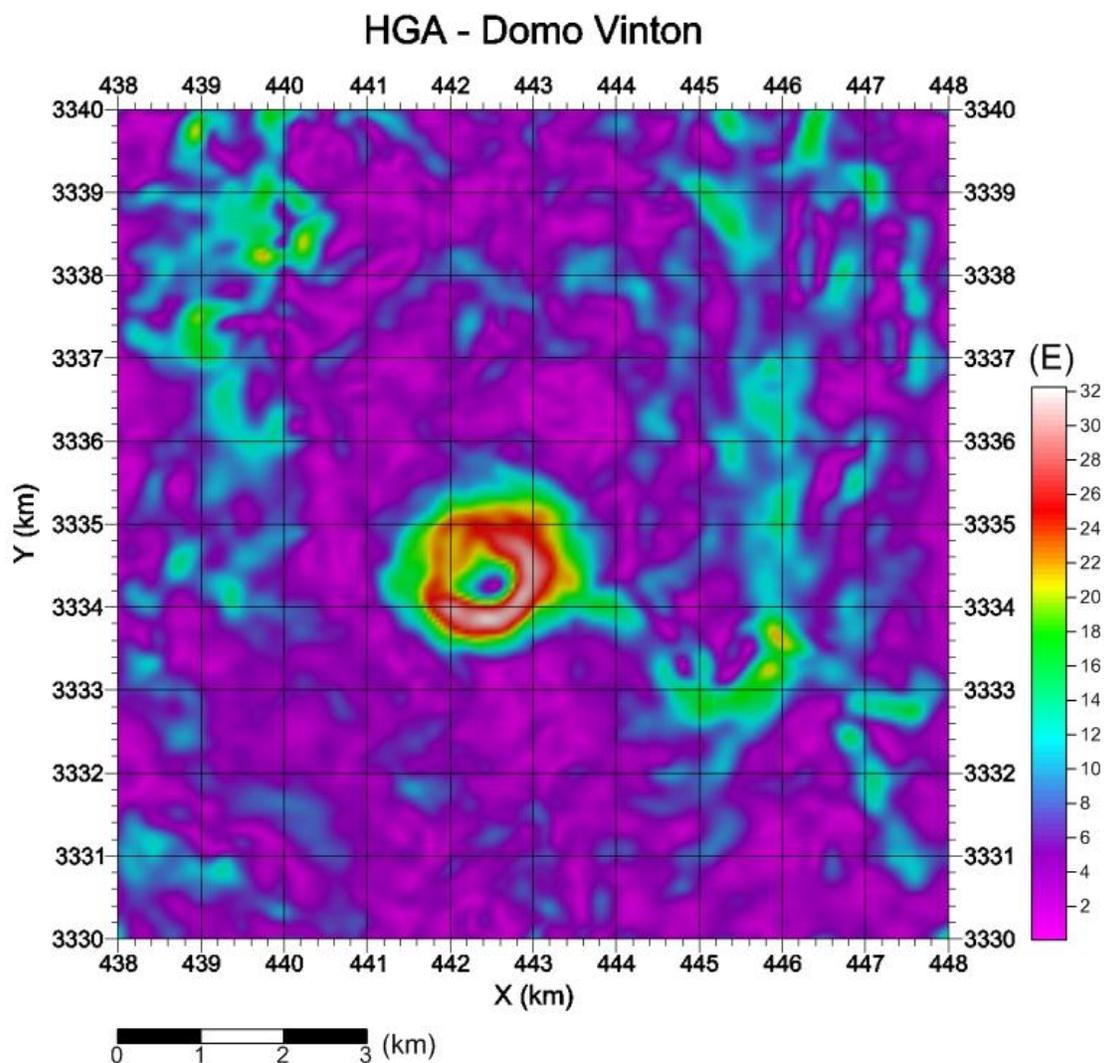


Figura 47. Componente  $g_z$  del Domo Vinton. Calculada a partir de la componente  $\Gamma_{zz}$ .

Posteriormente, se obtuvieron los operadores de realce de fuentes someras y de bordes. Se calculó el gradiente horizontal ( $HGA^{21}$ ) utilizando las mallas de datos de las componentes  $\Gamma_{xz}$  y  $\Gamma_{yz}$  (figura 48):

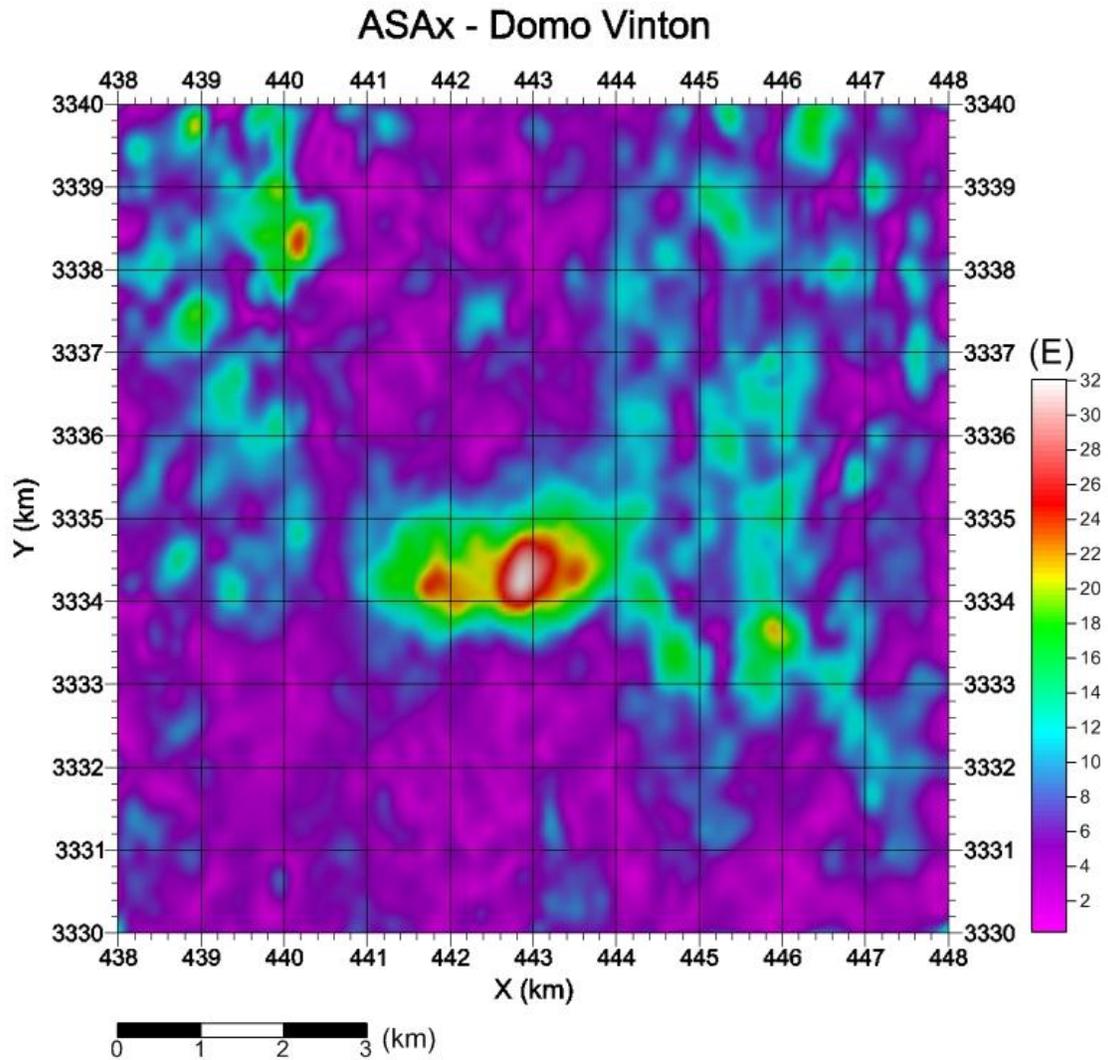


**Figura 48.** Gradiente horizontal ( $HGA$ ). Domo Vinton.

Como se observa en la figura, la  $HGA$  delimita los bordes del domo ubicado entre los 441.6 (km) y 443.4 (km) en  $X$  y entre los 3333.6 (km) y 3335.2 (km) en  $Y$ , aproximadamente.

<sup>21</sup> Horizontal Gradient Amplitude.

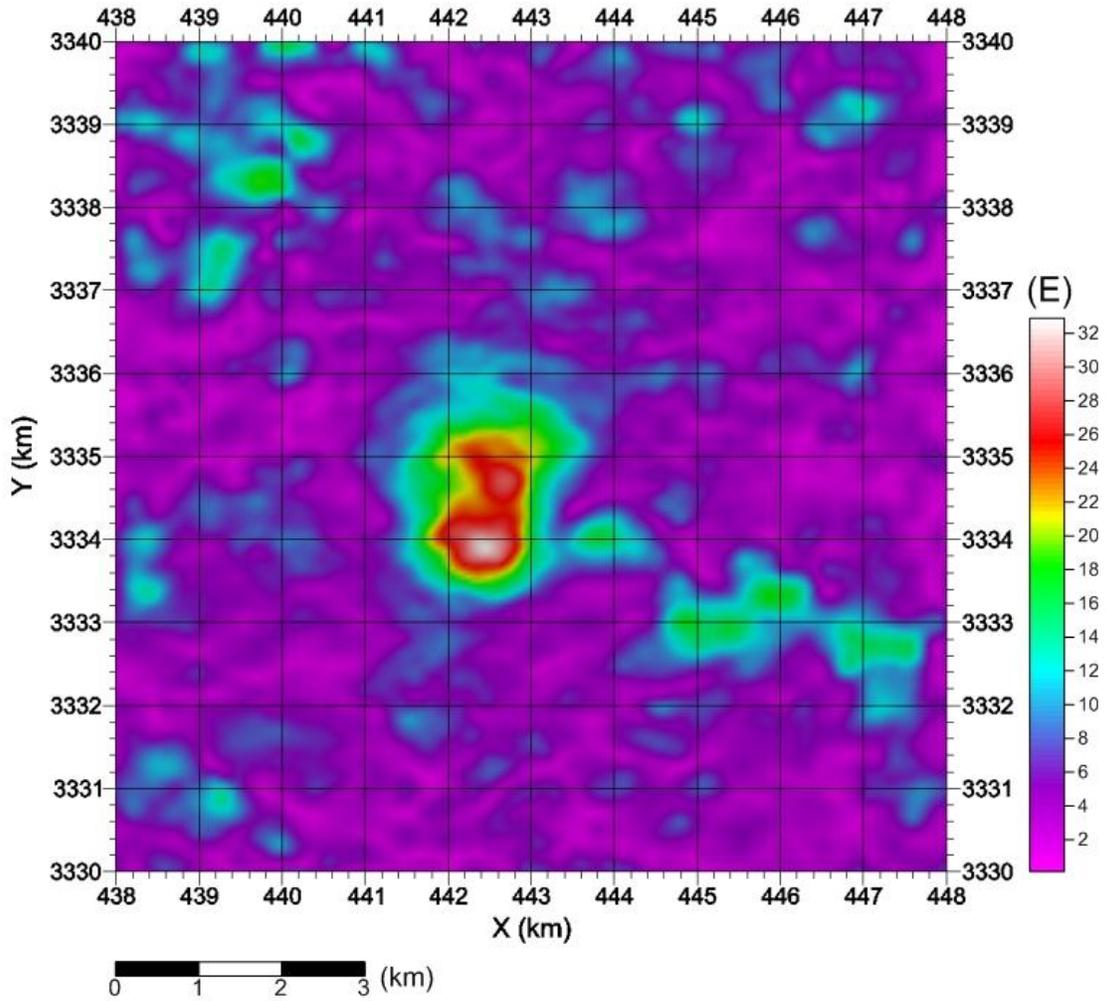
Luego se calcularon las amplitudes de las tres componentes de la señal analítica direccional ( $ASA_x$ ,  $ASA_y$  y  $ASA_z$ )<sup>22</sup> utilizando todas las mallas de las componentes del tensor de gradiometría gravimétrica (figura 49, 50 y 51):



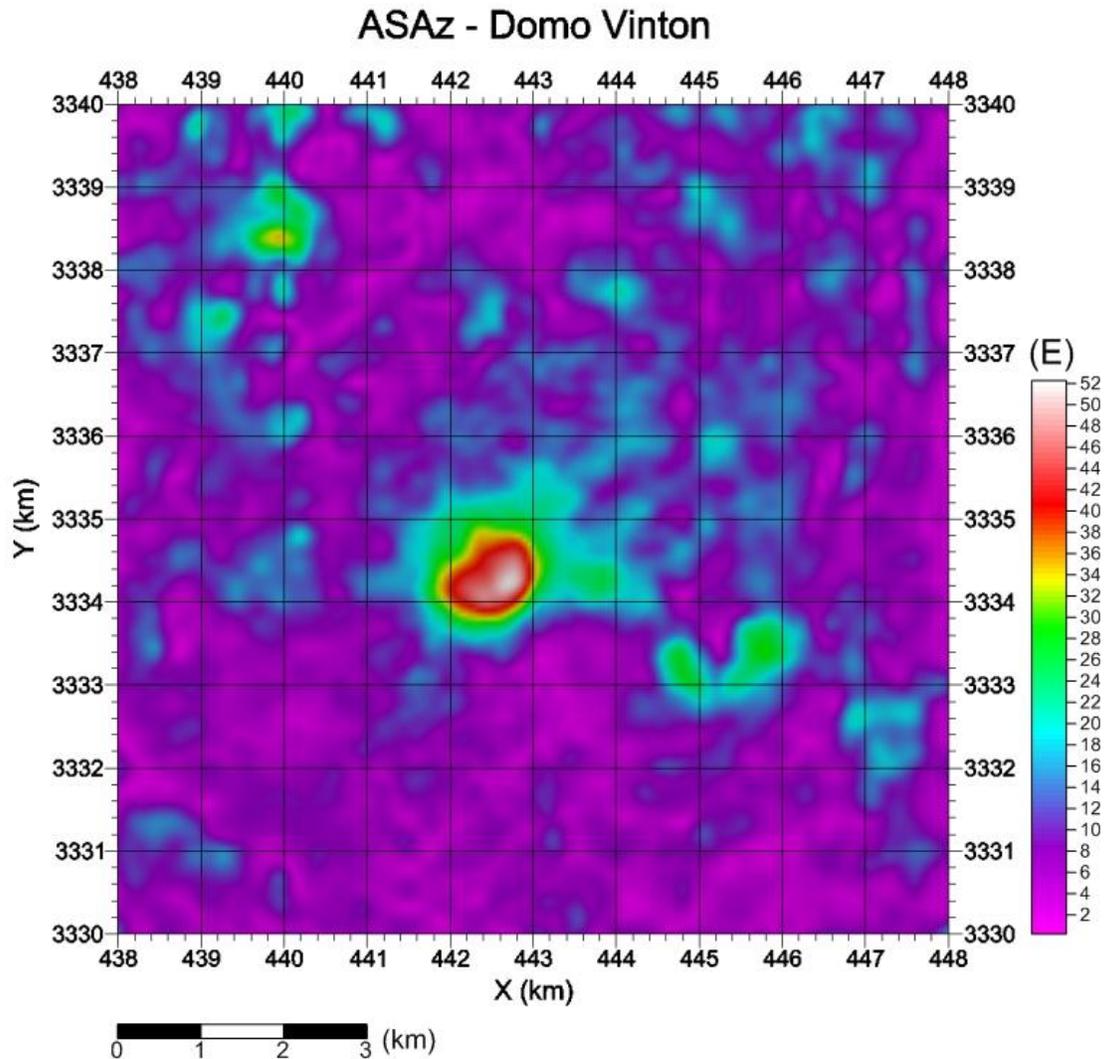
**Figura 49.** Amplitud de la señal analítica en dirección  $X$  ( $ASA_x$ ). Domo Vinton.

<sup>22</sup> *Analytic Signal Amplitude.*

### ASAy - Domo Vinton



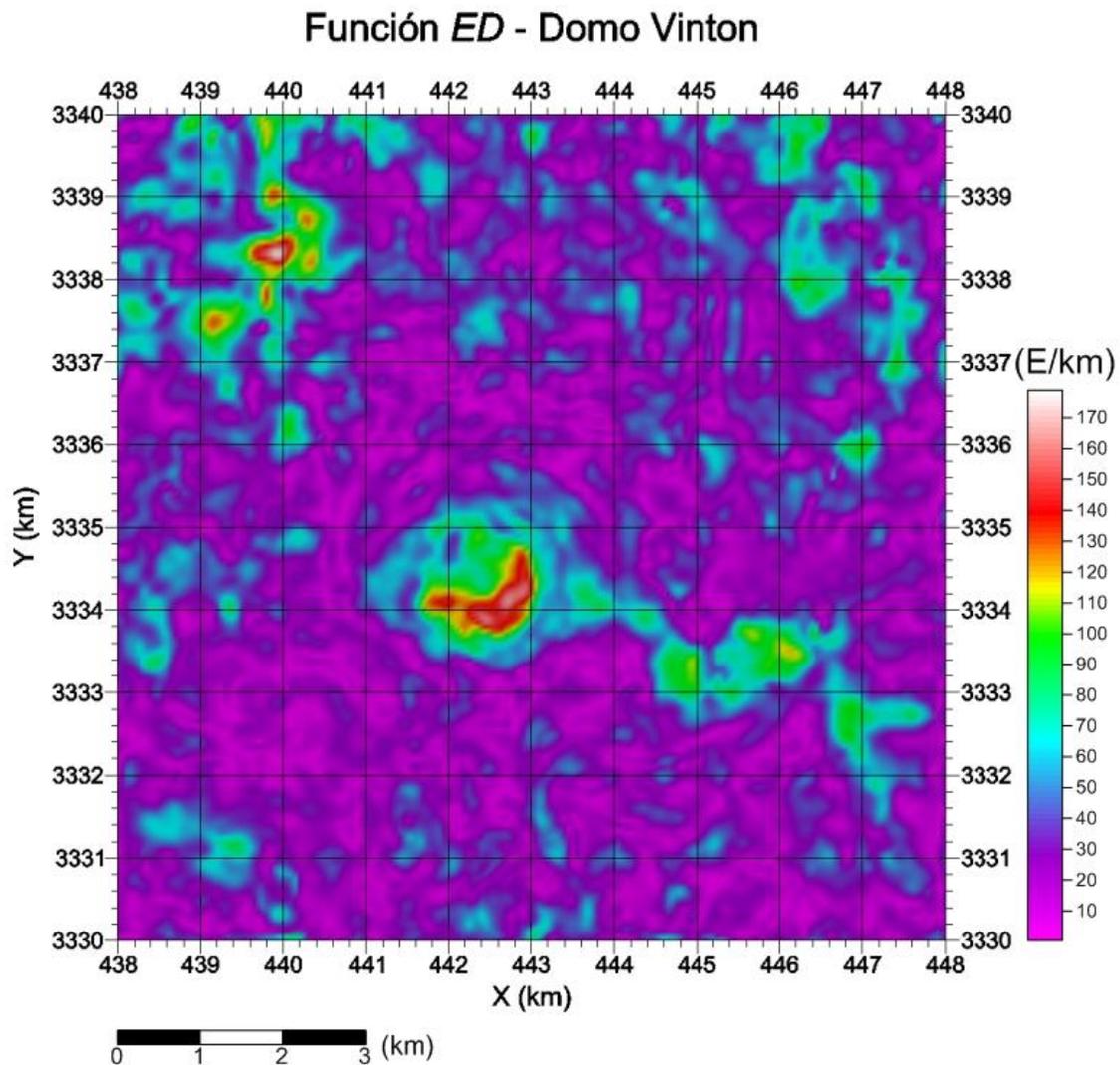
**Figura 50.** Amplitud de la señal analítica en dirección *Y* (ASAy). Domo Vinton.



**Figura 51.** Amplitud de la señal analítica en dirección Z (ASAz). Domo Vinton.

Como la  $ASAx$  utiliza las componentes  $\Gamma_{xx}$ ,  $\Gamma_{xy}$  y  $\Gamma_{xz}$ , ésta delimita mejor los bordes en la dirección  $X$ , pues  $\Gamma_{xx}$  y  $\Gamma_{xz}$  delimitan los bordes en esa dirección y  $\Gamma_{xy}$  delimita las esquinas horizontales de las fuentes. La  $ASAy$  delimita mejor los bordes en la dirección  $Y$ , pues utiliza las componentes  $\Gamma_{xy}$ ,  $\Gamma_{yy}$  y  $\Gamma_{yz}$ , donde  $\Gamma_{yy}$  y  $\Gamma_{yz}$  delimitan los bordes en esa dirección y  $\Gamma_{xy}$  delimita las esquinas horizontales de las fuentes. En cambio, la  $ASAz$ , que es la amplitud de la señal analítica convencional, utiliza las componentes verticales  $\Gamma_{xz}$ ,  $\Gamma_{yz}$  y  $\Gamma_{zz}$ , donde las primeras dos delimitan los bordes de las fuentes en sus respectivas direcciones y la última realza las fuentes más someras; es decir, la  $ASAz$  realza la forma de las fuentes someras.

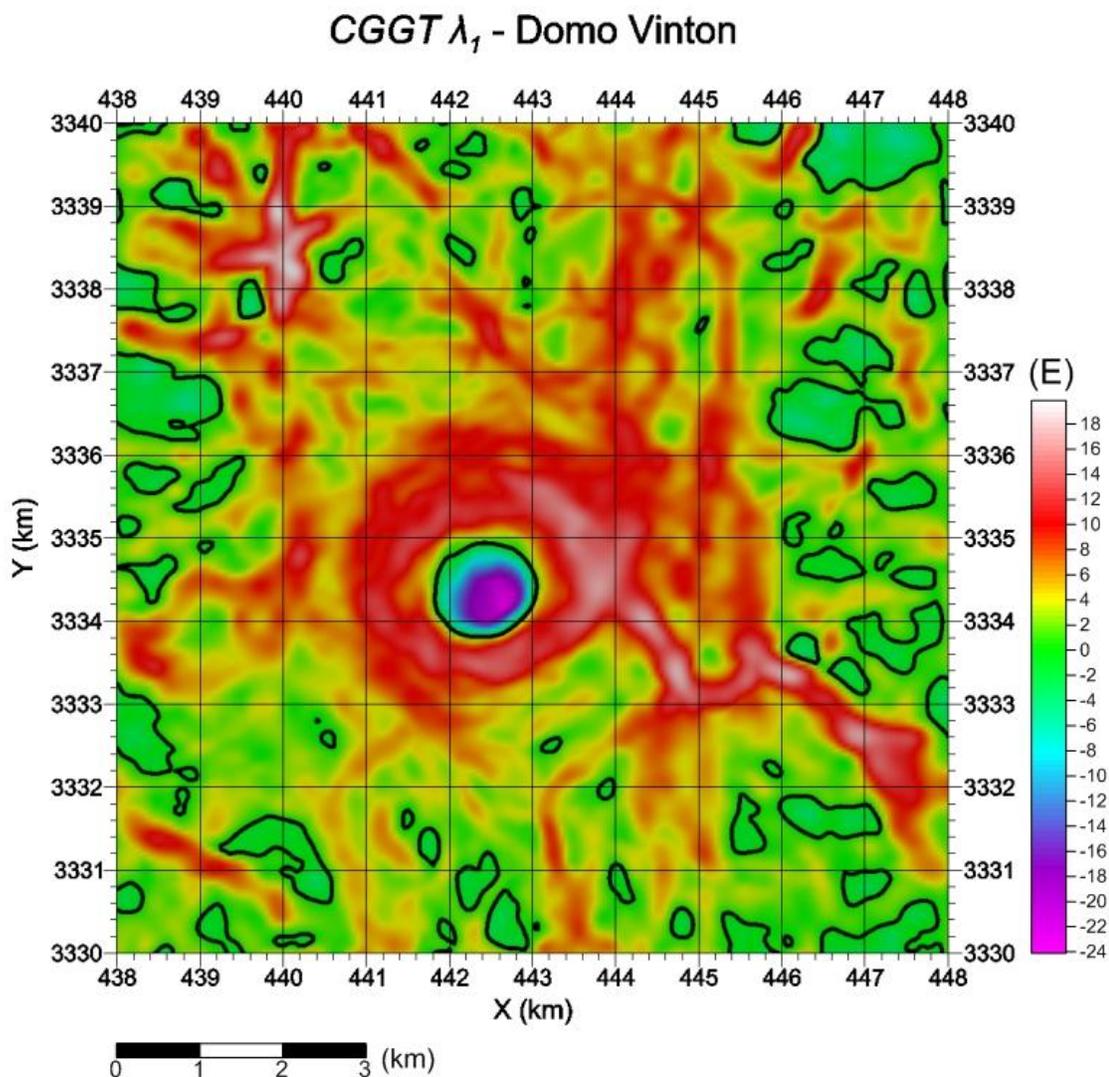
Luego se obtuvo la función *Edge-Detector* (*ED*) que calcula la derivada vertical de las amplitudes de las componentes horizontales de la señal analítica direccional (figura 52):



**Figura 52.** Función *Edge-Detector* (*ED*). Domo Vinton.

La función *Edge-Detector* delimita con mayor exactitud los bordes de las fuentes. La *ED* tiene mayor precisión en la delimitación de bordes que la *HGA*, aunque en algunos casos la *ED* por constar de derivadas de tercer orden del potencial gravitatorio también puede llegar a realzar el ruido. En este caso, sí se delimita bien el domo, aunque solamente en su parte sureste, pues en el otro extremo no se distinguen bien los bordes.

Por último, para esta primera parte del procesamiento, se calcularon los *eigenvalores* (figuras 53 y 54), el determinante (figura 55) y el operador  $IE$  (figura 56) del tensor de gradimetría gravimétrica de curvatura:



**Figura 53.** *Eigenvalor*  $\lambda_1$  del CGGT. Domo Vinton.

### CGGT $\lambda_2$ - Domo Vinton

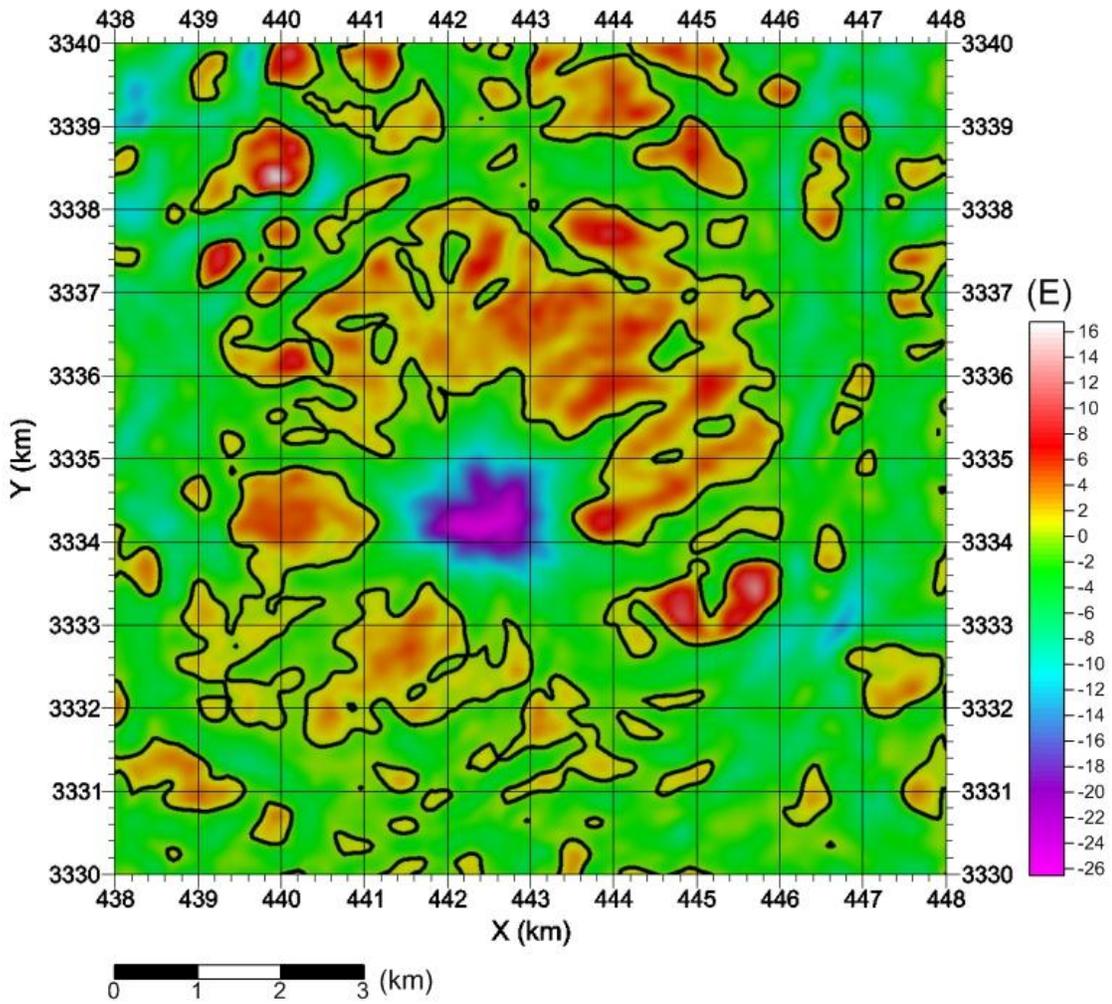


Figura 54. Eigenvalor  $\lambda_2$  del CGGT. Domo Vinton.

### CGGT det - Domo Vinton

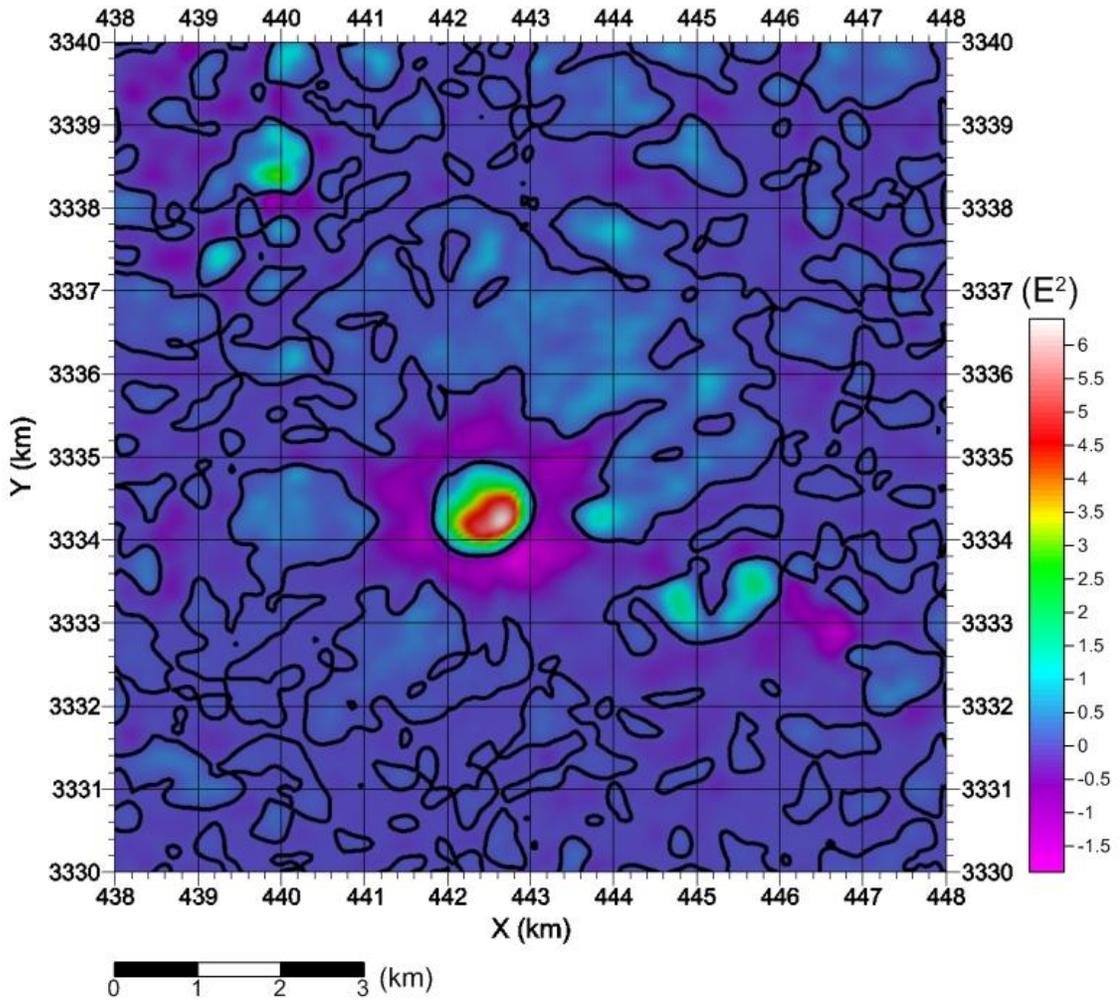
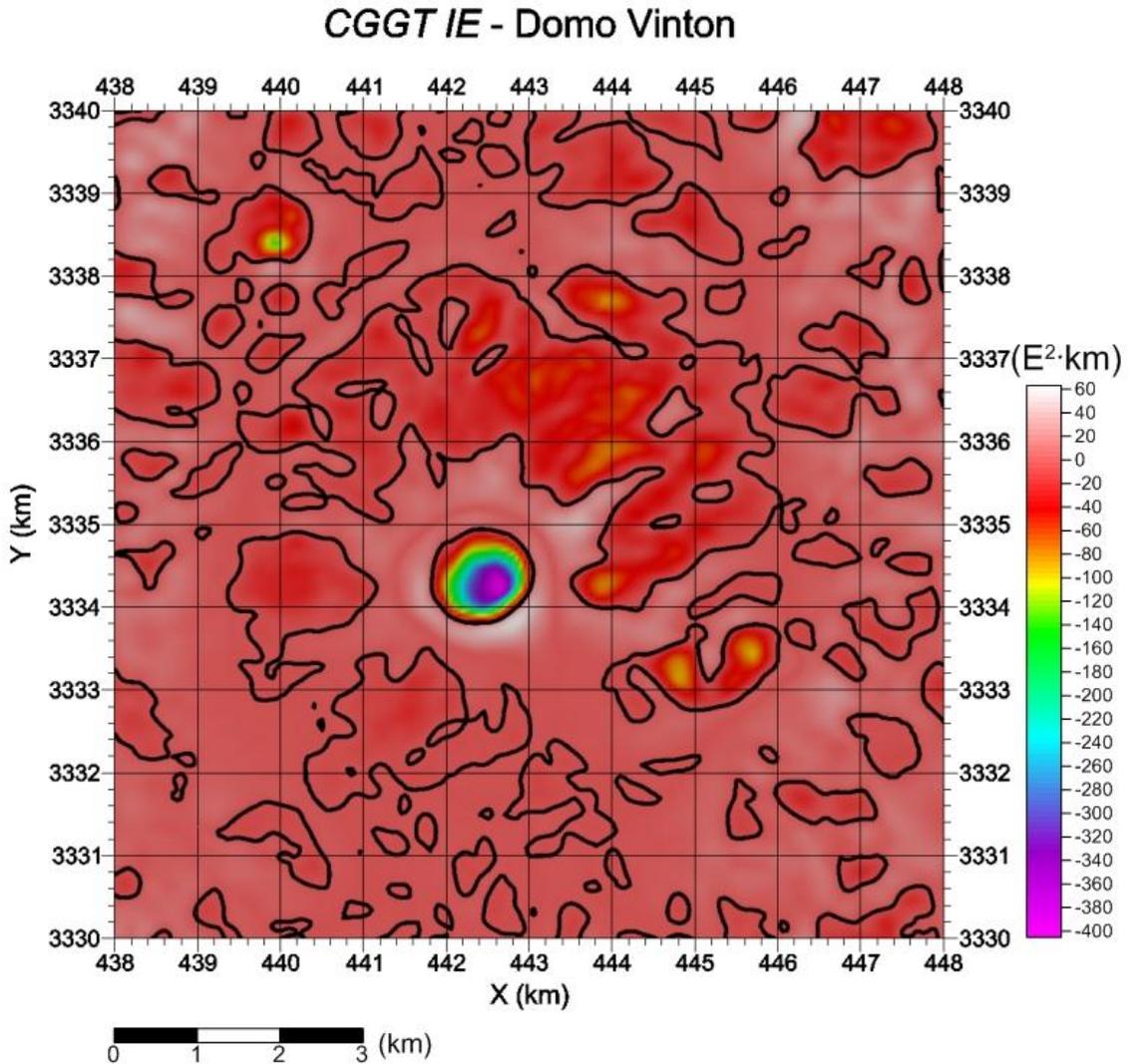


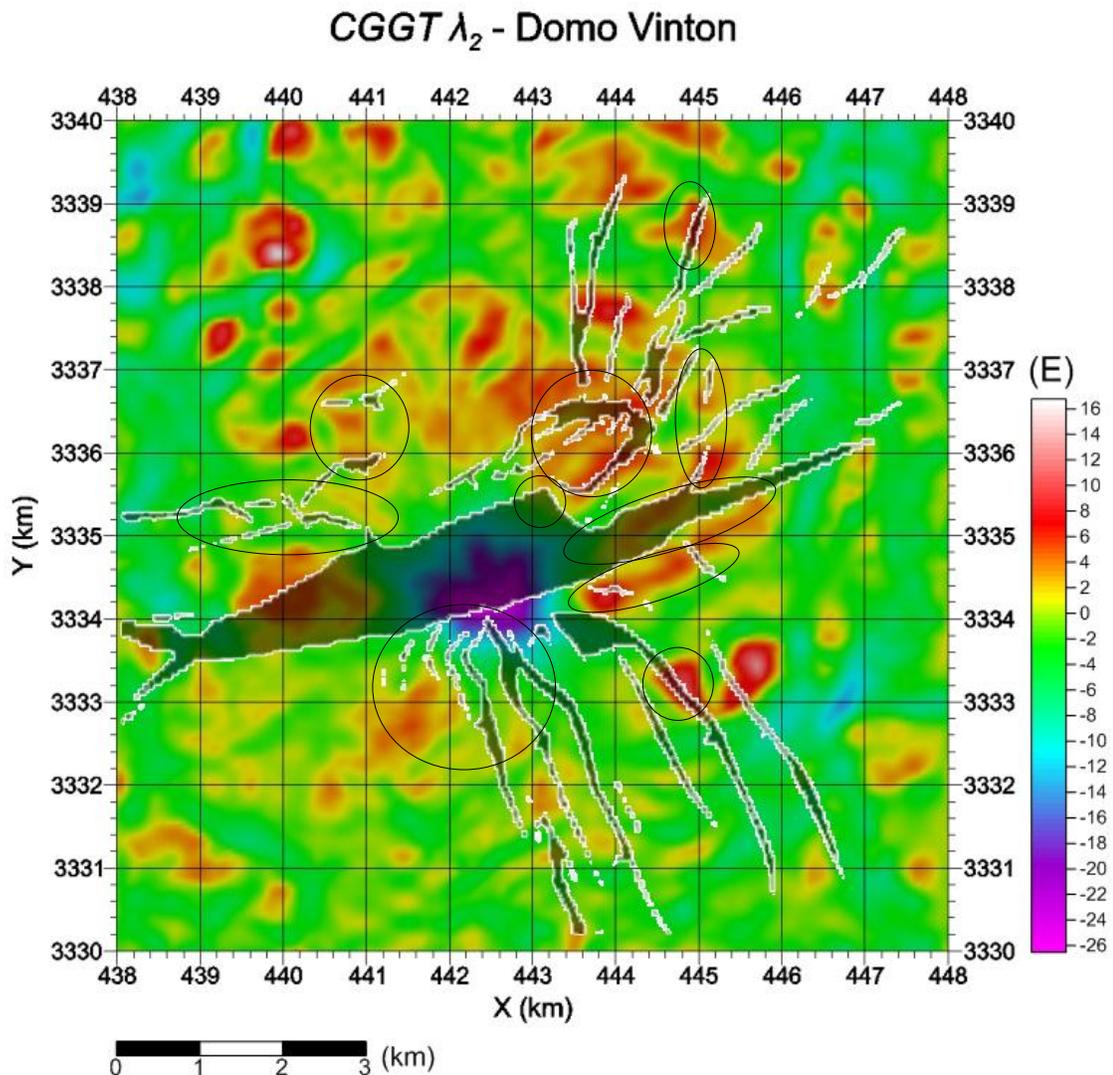
Figura 55. Determinante del CGGT. Domo Vinton.



**Figura 56.** Operador *IE* del *CGGT*. Domo Vinton.

Se puede observar de las últimas figuras que los *eigenvalores* del *CGGT* delimitaron mucho mejor los bordes del domo que los operadores anteriores, sobre todo el *eigenvalor* de mayor magnitud. El *eigenvalor*  $\lambda_1$  delimitó mejor los bordes de las fuentes con contrastes de densidad positivos, como es el caso de la roca envolvente del domo. El *eigenvalor*  $\lambda_2$  delimitó mejor los bordes de las fuentes con contrastes de densidad negativos, como posiblemente es el caso de la sal, aunque los bordes obtenidos pueden estar obstruidos por otras estructuras con contrastes de densidad positivos que se encuentran alrededor del domo. El determinante del *CGGT* resaltó mucho mejor el domo que la *ASAz* mostrándose una estructura con menor radio. El operador de Zhou et al. (2013) llamado *IE* mostró mejores resultados que cualquier otro operador de realce de bordes, pues delimitó muy bien al domo que se muestra con un radio mucho menor al de las demás figuras. La estructura del domo Salino presenta con este operador dimensiones más reducidas, que van de 441.8 (*km*) a 443.05 (*km*) de oeste a este y de 3333.8 (*km*) a 3335 (*km*) de sur a norte. Es decir, la roca envolvente mide 1.25 (*km*) de este a oeste y 1.2 (*km*) de norte a sur.

De acuerdo al patrón de fallas existente en la zona del Domo Vinton (Coker et al., 2007), se utilizó la malla con el *eigenvalor*  $\lambda_2$  para buscar una relación que muestre la ubicación y extensión de éstas (figura 57).



**Figura 57.** *Eigenvalor*  $\lambda_2$  del CGGT con el patrón de fallas superpuesto. Con curvas negras se observan los mejores atributos para el reconocimiento de los patrones de fallas. Domo Vinton.

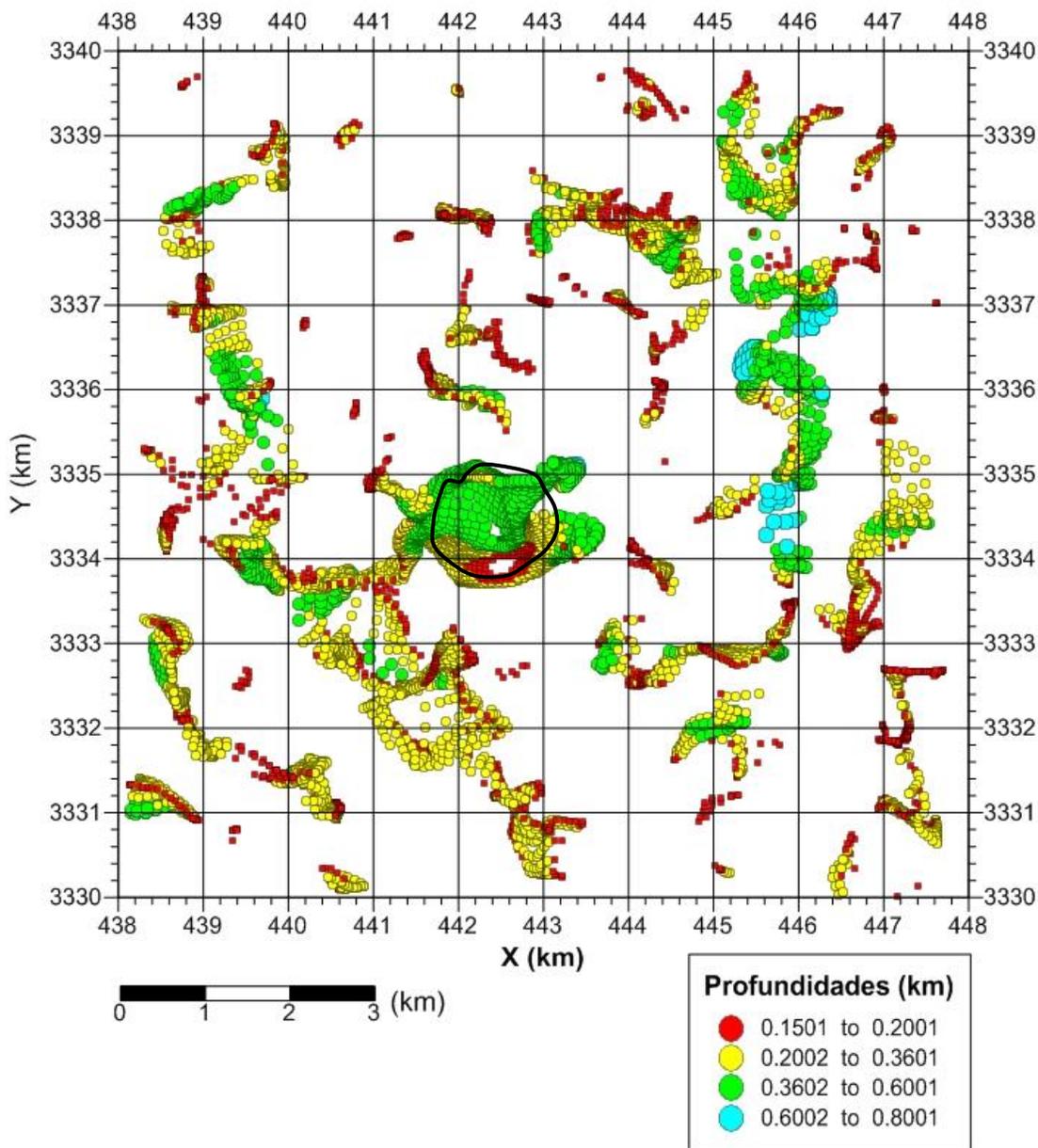
En esta figura se logran visualizar ciertos atributos debidos al *eigenvalor*  $\lambda_2$  que tienen relaciones con algunas de las fallas existentes en los alrededores de la zona del Domo Vinton. Con respecto a la falla regional, sólo se logró observar una relación al noreste que es identificada con los valores correspondientes al color verde y su tendencia SW-NE. Asimismo, el conjunto de fallas del noreste se identificó en ciertas zonas con las transiciones de los valores correspondientes a los colores verdes y rojos. En cuanto a las fallas del oeste, hubo algunas que se relacionaron con valores correspondientes al color verde, como las que se encuentran más hacia el oeste y la que está más hacia el norte, y al color rojo, como la que se encuentra al sur de la antes mencionada; también se puede observar un patrón de tendencia de dichas fallas con valores correspondientes al color verde en su misma

dirección. Por último, al sureste se pueden relacionar ciertos patrones de las fallas salientes inmediatas al domo; por ejemplo, en aquéllas que se encuentran más hacia el oeste se observa una tendencia NW-SE correspondiente a los valores con color verde.

La ambigüedad de las relaciones del *eigenvalor* con las fallas es porque dependen del material con el que éstas son rellenadas. Como se explicó anteriormente, este *eigenvalor* resalta los bordes de aquellas anomalías con contraste de densidad negativo, tal como es el caso de la sal. De esta forma, los valores correspondientes al color rojo pertenecen en su mayoría a la sal existente a grandes profundidades, pero las transiciones de los valores a otros colores pueden ser debidas a distintas estructuras provenientes de zonas más someras, tales como pueden ser ciertos patrones de fallas.

Para la segunda parte del procesamiento de los datos del tensor de gradiometría gravimétrica se utilizaron los métodos de interpretación semiautomática de anomalías. Es decir, se realizaron los tres métodos para la estimación de ubicación de fuentes y del índice estructural. El primer método que se utilizó fue la deconvolución de Euler (*EULVDG*), donde primero se trazaron las soluciones utilizando una ventana móvil de medio kilómetro por lado (figura 58). Con el método de Barbosa et al. (2000) se estimó un índice estructural de 0.6 de donde se obtuvo el menor coeficiente de correlación que fue de 0.24642:

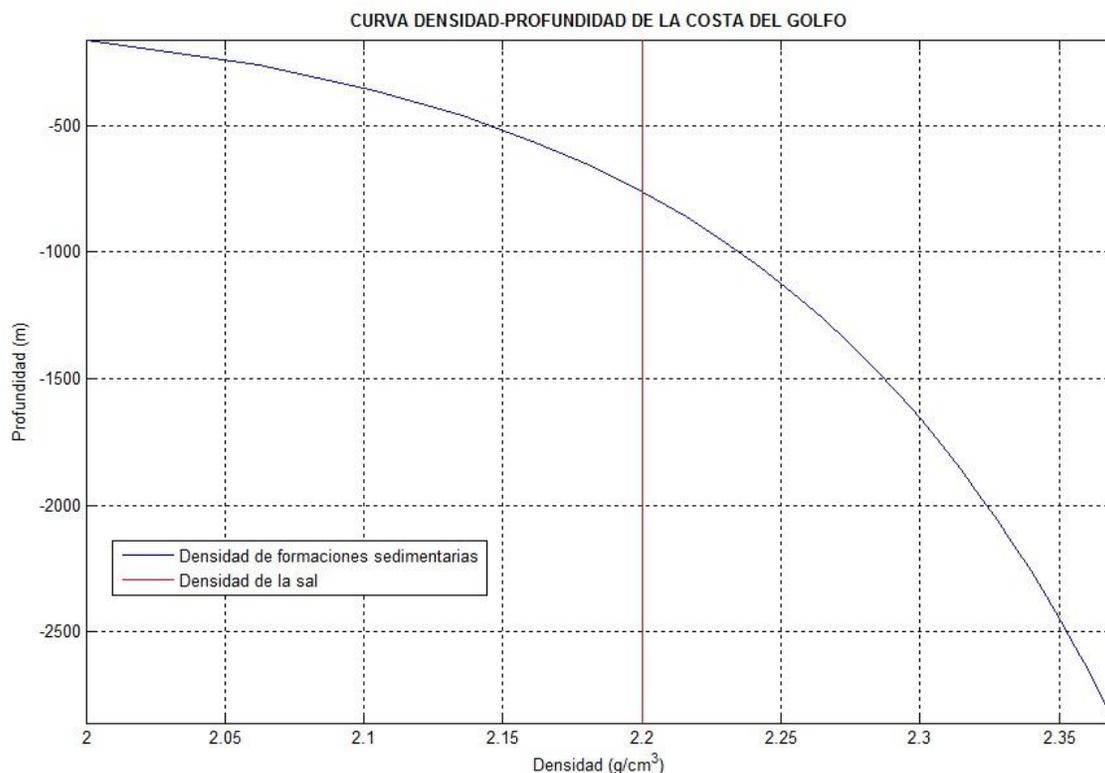
## Ubicación de fuentes - Domo Vinton *EULVDG* ( $\alpha=0.0$ ; $\gamma=100.0$ )



**Figura 58.** Deconvolución de Euler (*EULVDG*) con todas las soluciones. Domo Vinton.

Se obtuvo un total de 36481 soluciones y solamente fueron descartadas aquéllas que tuvieran profundidad menor o igual a cero. En la imagen se puede observar que, en la región donde se encuentra el domo, las profundidades más someras van de 150 (m) a 360 (m) que predominan en la parte sur del domo. Estas profundidades corresponden a la roca envolvente según el trabajo de Ennen (2012). En la parte noreste del domo se observan profundidades desde 360 (m) hasta 600 (m), lo cual indica que el domo se encuentra a mayores profundidades en esa zona.

De acuerdo a estudios anteriores en el Golfo de México, se sabe que la sal prácticamente no cambia de densidad aunque aumente su profundidad, mientras que las de las formaciones sedimentarias que se encuentran a su alrededor aumentan con la profundidad (figura 59). A profundidades menores a los 600 (m) el núcleo de sal tiene densidad mayor a la de las formaciones sedimentarias, mientras que a profundidades mayores la sal tiene una densidad menor a la de las formaciones sedimentarias que rodean al Domo Vinton.



**Figura 59.** Curva de densidades contra profundidad en la Costa del Golfo.

Por otro lado, se sabe de la génesis de los domos salinos o diapiros salinos que al subsuelo se infiltra agua meteórica llegando al casco del domo, lo cual desarrolla la formación de la roca envolvente, que tiene una densidad de  $2700 \text{ (kg/m}^3\text{)}$ , que es mucho mayor a la del núcleo de sal y de las formaciones sedimentarias que se encuentran a su alrededor.

Por lo tanto, la respuesta gravimétrica (componente vertical) que ejerce un domo salino con estas características es en forma de *sombrero*; es decir, un gran pico al centro correspondiente a la roca envolvente formada en el casco del domo<sup>23</sup> y una depresión a su alrededor debida al contraste de densidad negativo del núcleo de sal a mayores profundidades. Estas características de domos salinos corresponden a la respuesta gravimétrica del Domo Vinton (figuras 44 y 47). En la componente vertical de la anomalía de gravedad del domo (figura 47) se puede observar que el pico que va de 0 (*mGal*) a 170 (*mGal*) corresponde prácticamente a la roca envolvente, mientras que la depresión a su alrededor que va hasta -120 (*mGal*) corresponde al núcleo de sal a mayores profundidades. Ésta es la razón por la que todos los resultados antes obtenidos en las cercanías del domo (para la delimitación de bordes horizontales) deben corresponder a la roca envolvente y no al núcleo de sal, pues a bajas profundidades ésta no produce una fuerte respuesta gravimétrica.

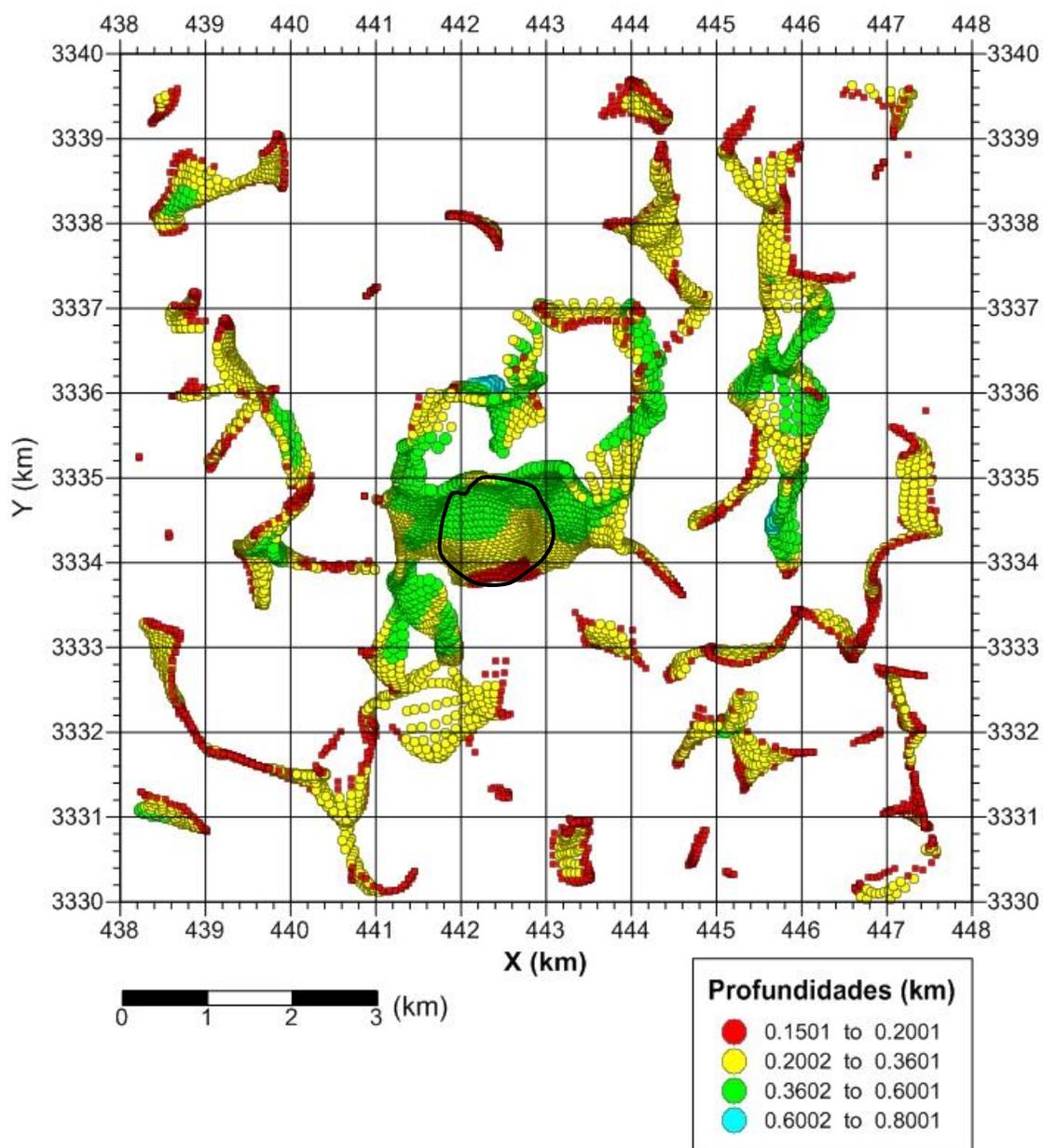
En la *EULVDG* se colocó con una línea negra la delimitación de la roca envolvente obtenida con el operador *IE*, donde ambos métodos otorgan buenos resultados. En la *EULVDG* se observan las soluciones de la roca envolvente de 150 (*m*) a 200 (*m*) de profundidad con las de color rojo, de 200 (*m*) a 360 (*m*) de color amarillo y de 360 (*m*) a 600 (*m*) de color verde, siendo las soluciones del sur las más someras y las del noreste las más profundas. En la *EULVDG* (figura 58) se puede notar que hay un espacio al centro de las soluciones con color rojo, que son las más someras con valores de 150 (*m*). Debido a que para este trabajo se realizó una continuación ascendente a 150 (*m*), se puede interpretar que las soluciones faltantes son debidas a que en esa zona son más someras las soluciones. Es decir, este pico máximo corresponde a soluciones para la roca envolvente a profundidades menores de 150 (*m*), siendo los puntos más someros del domo. La ubicación de la parte más somera del domo se encuentra en las coordenadas (442.5, 3333.9)(*km*).

---

<sup>23</sup> Por otro lado, si no existiera la roca envolvente en el casco del domo, la respuesta gravimétrica también correspondería a una de la misma forma, excepto de que el pico no sería tan pronunciado, pues el contraste de densidad sería más pequeño. Este contraste de densidad positivo correspondería al del núcleo de sal con respecto a las formaciones sedimentarias que lo rodean, estando a bajas profundidades cuando la sal es más densa que su alrededor.

El segundo método utilizado fue la deconvolución de Euler extendida (*EULTDG*), donde se trazaron las soluciones utilizando una ventana móvil de medio kilómetro por lado (figura 60). Con el método de Barbosa et al. (2000) se estimó un índice estructural de 0.6 de donde se obtuvo la menor amplitud de correlación que fue de 0.186697. Cabe señalar que el índice estructural estimado fue el mismo que para la *EULVDG*, por lo que el algoritmo creado con el método de Barbosa et al. (2000) se considera satisfactorio.

## Ubicación de fuentes - Domo Vinton *EULTDG* ( $\alpha=0.0$ ; $\gamma=100.0$ )

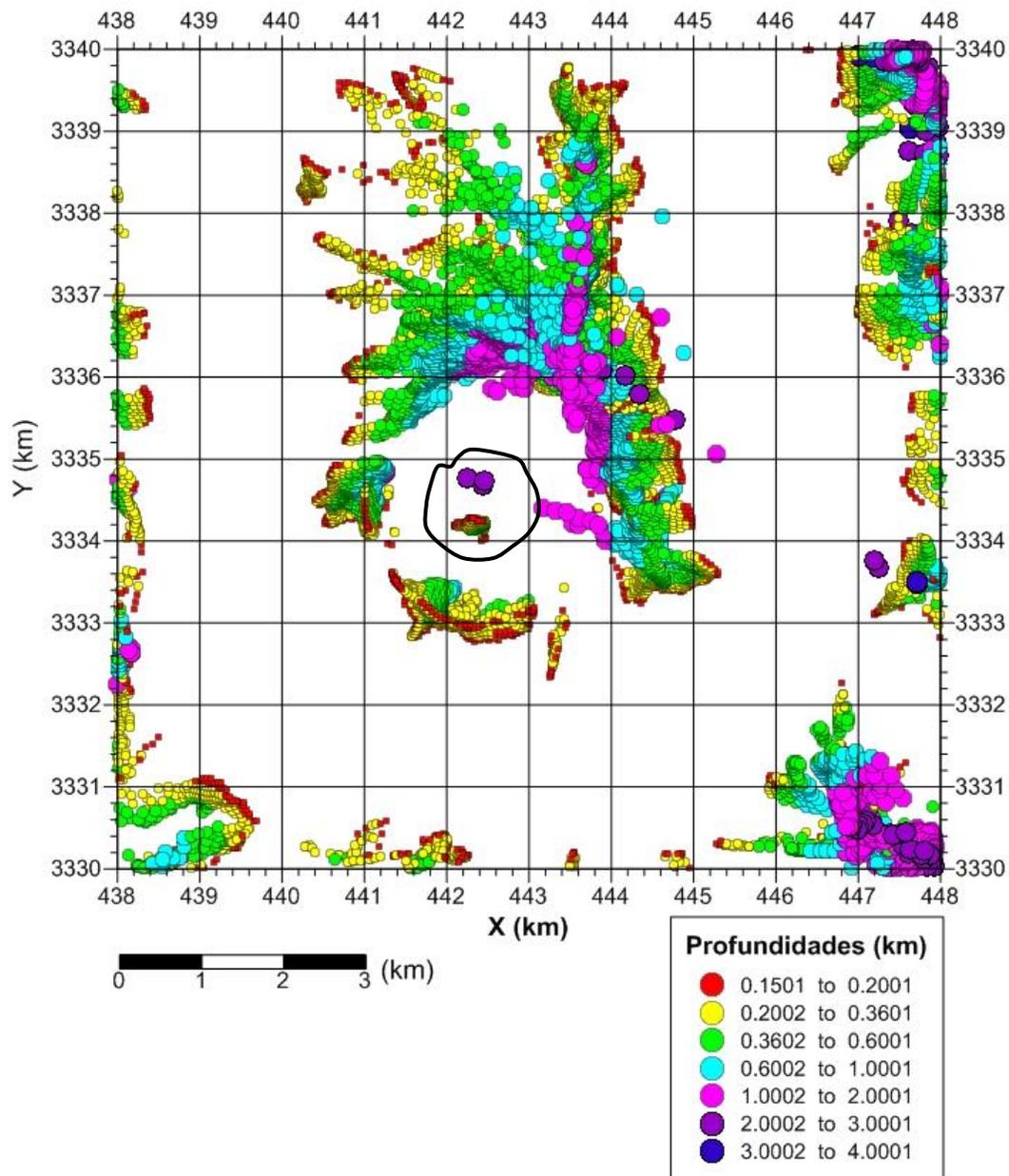


**Figura 60.** Deconvolución de Euler extendida (*EULTDG*) con todas las soluciones. Domo Vinton.

Se obtuvo un total de 36481 soluciones y solamente fueron descartadas aquéllas que tuvieran profundidad igual a cero o negativa. En la imagen se puede observar que las soluciones más someras en la región del domo se encuentran en la parte sur que van de 150 (*m*) a 200 (*m*), al centro de 200 (*m*) a 360 (*m*), y al noreste de 360 (*m*) a 600 (*m*), todas éstas correspondientes a la roca envolvente. La interpretación de esto es que el Domo Vinton se extiende hacia el noreste conforme aumenta la profundidad. En comparación con la *EULVDG*, este método da soluciones con profundidades un poco más someras y también mucho más agrupadas; es decir, las soluciones no presentan tanta dispersión como en la *EULVDG*. El hecho de que este método arroje soluciones un poco más someras que la *EULVDG* es porque los cálculos se hacen con todos los gradientes, los cuales siempre son referidos a las fuentes más someras.

El último método utilizado fue la deconvolución tensorial (*TENDEC*). Este método es muy distinto a los otros dos porque éste no resuelve sistemas de ecuaciones para una ventana móvil, sino que hace operaciones relativamente sencillas entre las distintas mallas de datos para cada punto; es decir, se arroja una solución por cada punto de la malla de datos. Por este motivo, el tiempo de cómputo empleado en este método es mucho menor al de los otros dos. Se trazaron todas las soluciones arrojadas por la *TENDEC* con datos observados del Domo Vinton (figura 61).

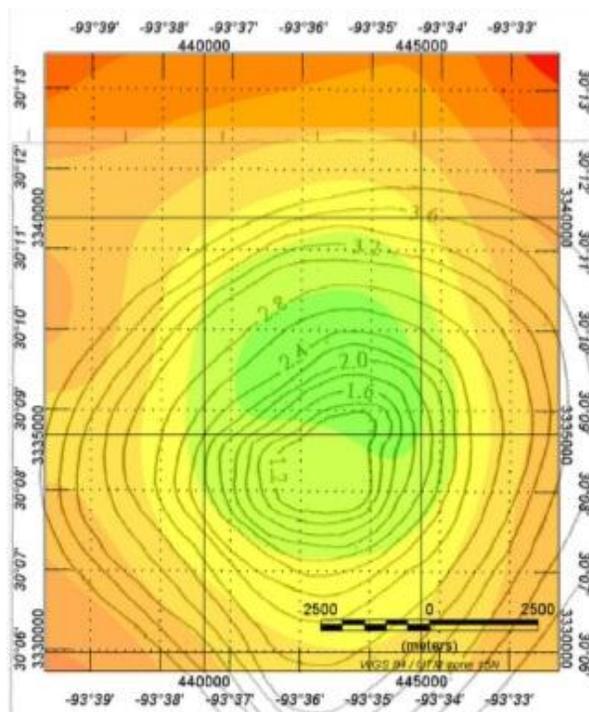
## Ubicación de fuentes - Domo Vinton *TENDEC* ( $\alpha=0.0$ )



**Figura 61.** Deconvolución tensorial (*TENDEC*) con todas las soluciones. Domo Vinton.

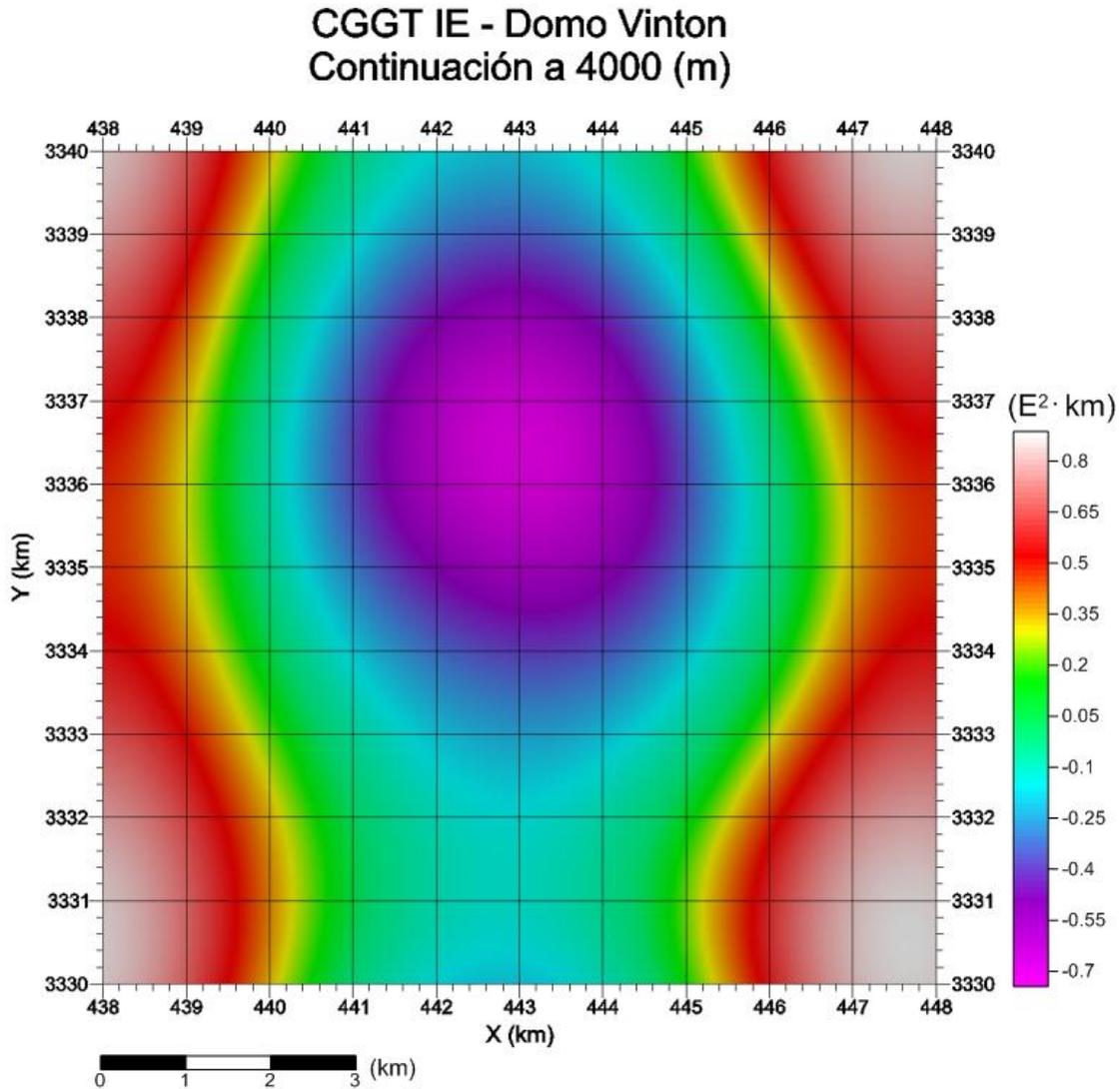
Se obtuvo un total de 40401 soluciones y solamente fueron descartadas aquéllas que tuvieran profundidades igual a cero o negativas y que estuvieran por encima de 4 kilómetros. En la imagen se puede observar que las soluciones obtenidas no están totalmente sesgadas hacia lo más somero como en los otros dos métodos en que las profundidades no exceden de 1 (*km*). En este caso, las profundidades abarcan hasta los 4 kilómetros debido a la constricción que se puso en el algoritmo. Se puede ver que las soluciones que van de 150 (*m*) a 1 (*km*) de profundidad no abarcan en su totalidad la zona de la cima del domo, sino que sólo se presentan algunas soluciones en su centro. Por esta razón, el Domo Vinton no se visualiza tan marcadamente como en los otros dos métodos. Por otro lado, las soluciones que van de 1 (*km*) a 4 (*km*) de profundidad están ubicadas a casi 2 (*km*) hacia el noreste de la cima del domo.

Según otros trabajos como el de Ennen (2012) sobre el Domo Vinton, el núcleo de sal se extiende hasta 2.8 (*km*) de profundidad, por lo que se puede esperar que las soluciones calculadas en la *TENDEC* que van de 2 (*km*) a 4 (*km*) sean debidas al núcleo de sal en esas profundidades. Como se observa, y con los resultados de los otros dos métodos, el núcleo de sal se estaría expandiendo hacia el noreste conforme aumenta la profundidad. De acuerdo a la máxima extensión de los límites del núcleo de sal mapeada por Eti (2004), se observa que es más amplio en la parte norte del domo y más estrecho en el sur (figura 62). Esto sugiere un amplio cuerpo de sal moviéndose de sur a norte, probablemente durante el emplazamiento inicial en el Eoceno (Ennen, 2012).



**Figura 62.** Curvas de nivel del top de la sal mapeadas por Eti (2004). Extraída de Ennen (2012).

Posteriormente, se calculó la malla del operador *IE* del *CGGT* con continuación ascendente a una altura de 4000 (*m*) (figura 63). Esto para observar una anomalía regional que corresponda a fuentes muy profundas.



**Figura 63.** Operador *IE* del *CGGT* con continuación ascendente a 4000 (*m*).

En esta imagen puede observarse que el efecto del máximo gravimétrico ha desaparecido quedando solamente la depresión debida al núcleo de sal. Se puede notar que el centro del núcleo de sal se encuentra aproximadamente a 2 (*km*) hacia el noreste de donde se ubica la cima del domo. Por lo tanto, se interpreta que el Domo Vinton se extiende hacia el noreste conforme aumenta la profundidad. Analizando las estimaciones obtenidas con la *TENDEC* se mostró que las mayores profundidades estimadas, de 2000 (*m*) a 4000 (*m*), coinciden con el núcleo de sal en el mapa de continuación ascendente (figura 64):

Ubicación de fuentes - Domo Vinton  
 TENDEC ( $\alpha=0.0$ )  
 CGGT IE - Domo Vinton  
 Continuación ascendente a 4000 (m)

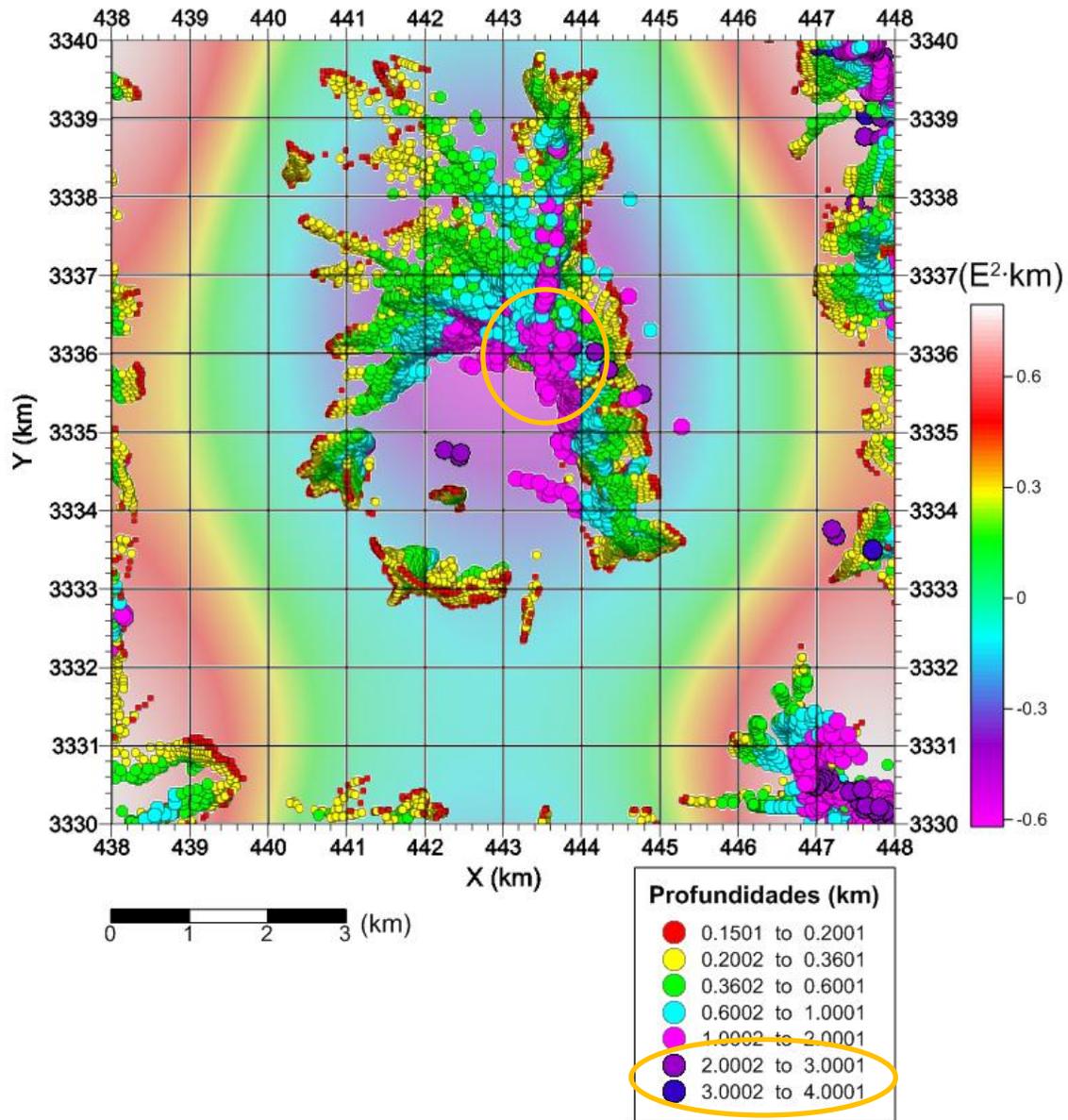
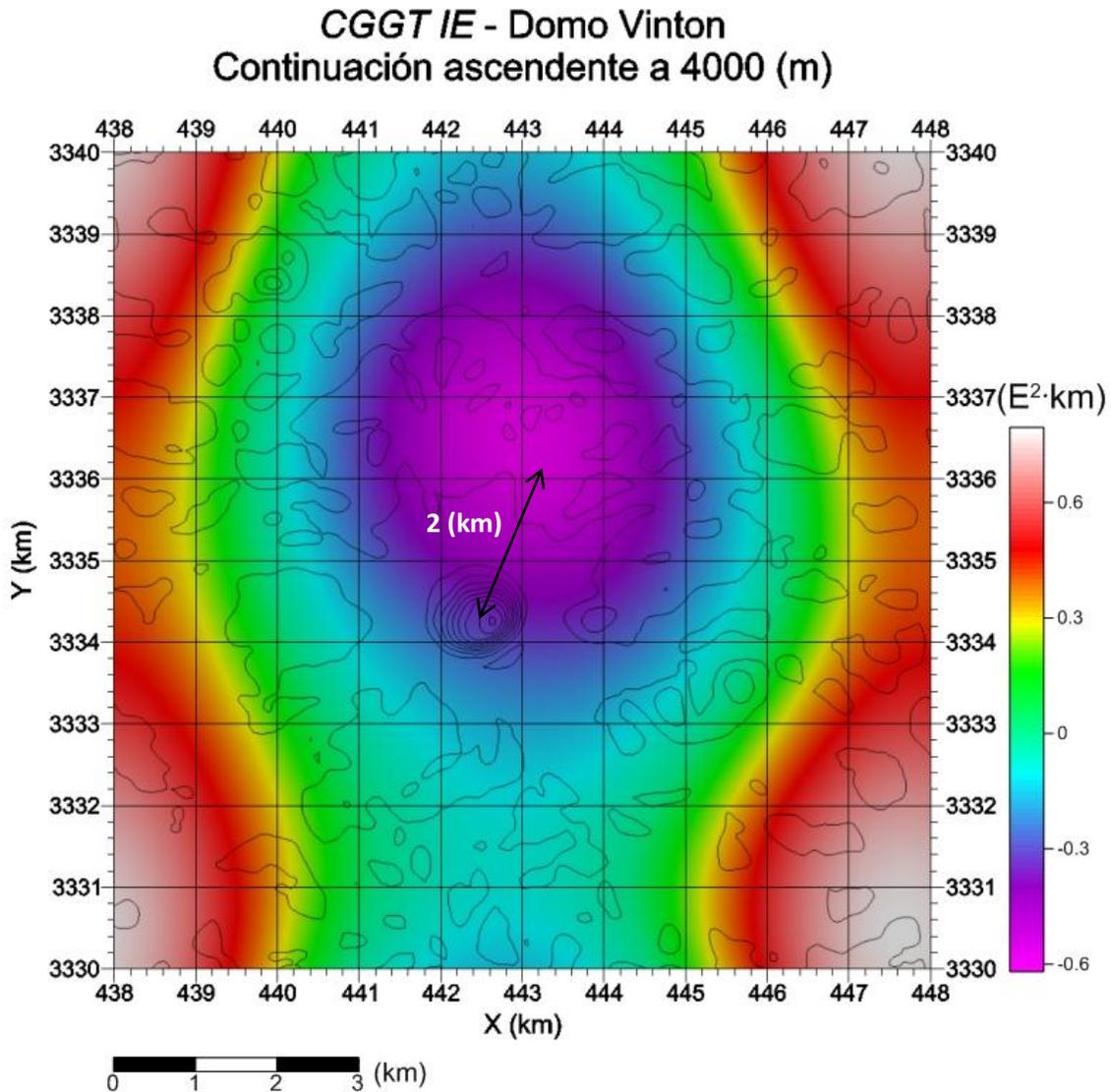


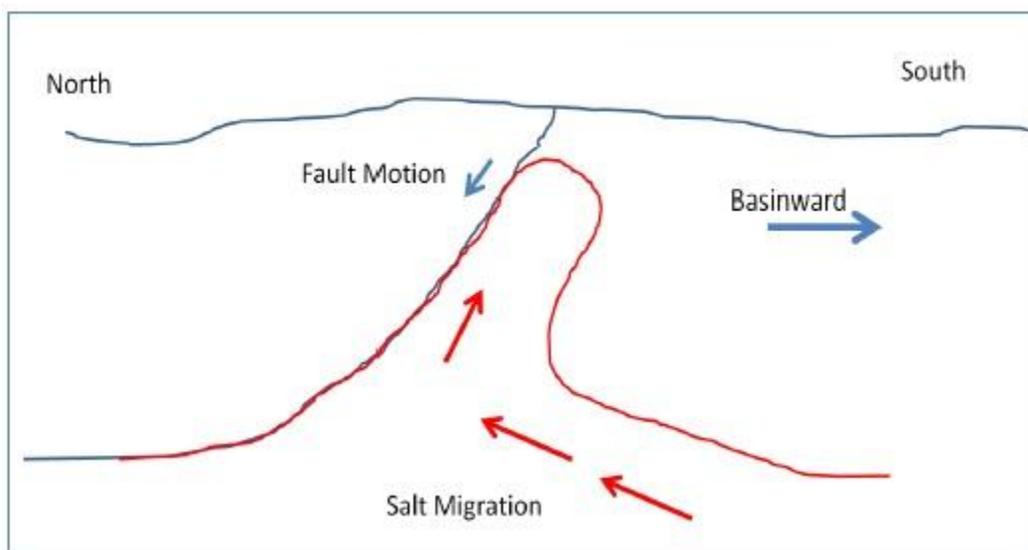
Figura 64. Operador IE del CGGT con continuación ascendente a 4000 (m) y soluciones de la TENDEC. Se observan las soluciones de 2 (km) a 4 (km) de profundidad encerradas en una curva de color amarillo.

Se puede notar que estos resultados coinciden con las curvas de nivel del tope de la sal mapeadas por Eti (2004) en la misma zona donde se observan profundidades de 2 (km) a 4 (km) encerradas en la circunferencia amarilla. Se interpreta que a una profundidad de 4000 (m), aproximadamente, el centro del núcleo de sal se encuentra a 2 kilómetros hacia el noreste del centro del domo en su parte más somera que es bien delimitado en los mapas de realce de bordes (figura 65).



**Figura 65.** Operador IE con continuación ascendente que muestra la ubicación de la sal a 4000 (m) de profundidad, aproximadamente. Curvas de contorno del operador IE que muestran la ubicación de la cima del Domo Vinton (roca envolvente). Se puede notar que el centro del domo está recorrido cerca de 2 (km) hacia el noreste.

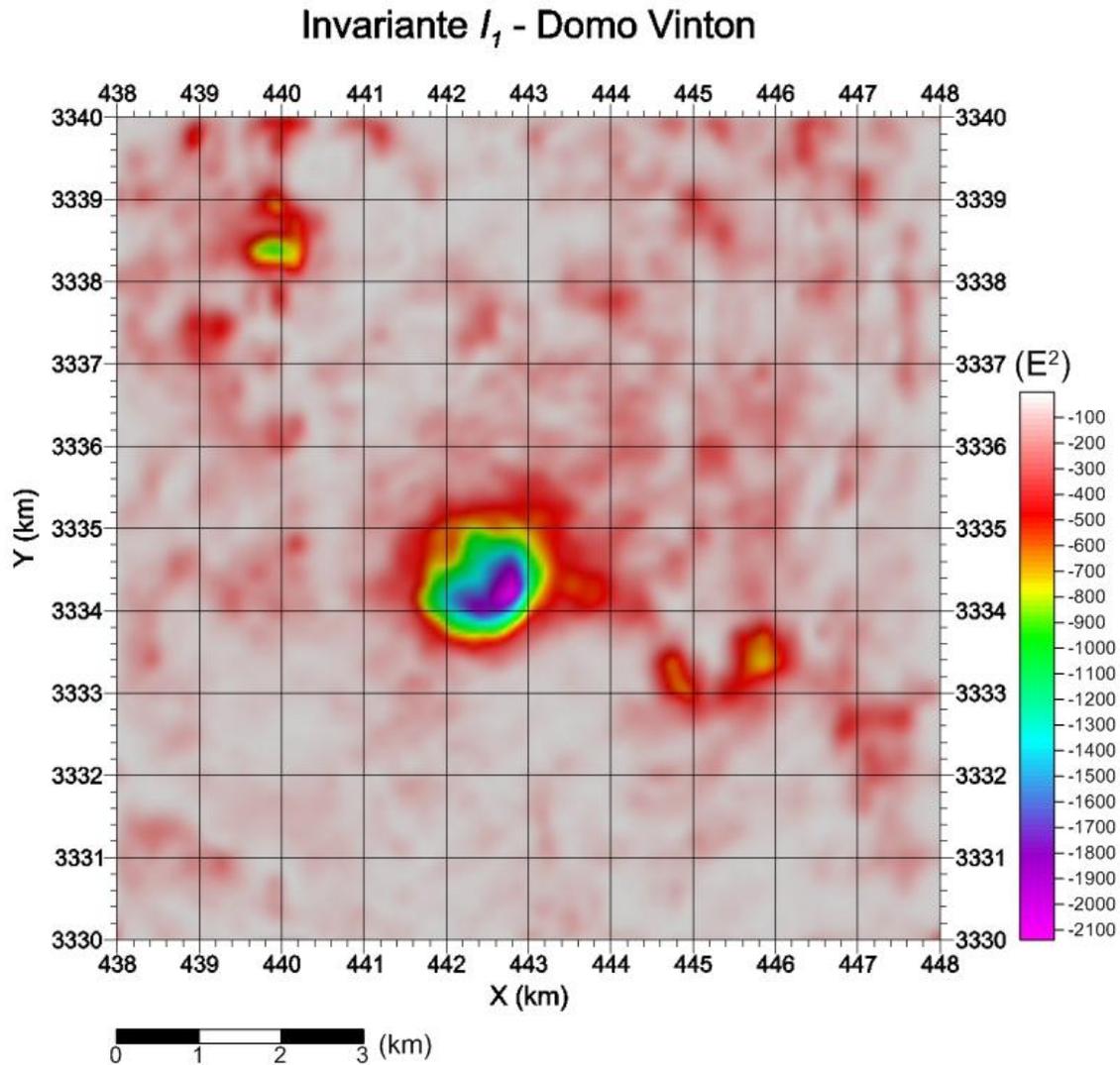
Se escogió utilizar el operador *IE* del *CGGT* porque éste delimita los bordes de las estructuras sin importar si la anomalía es positiva o negativa; es decir, sin importar si los contrastes de densidad son de diferentes signos. Por esta razón, la *IE* denota mejor los bordes del domo sin que interfiera la respuesta producida por la roca envolvente en la parte somera del domo. En esta última imagen se puede mostrar cómo el domo se extiende hacia el noreste conforme aumenta la profundidad. Las curvas de nivel del tope de la sal mapeadas por Eti (2004) y las soluciones obtenidas con la *TENDEC* muestran que la migración de sal pudo provenir desde el suroeste hacia el noreste topándose con una falla regional que obligó a la sal a inclinarse hacia el suroeste (Ennen, 2012) formando, así, el domo salino extendido en su parte noreste (figura 66).



**Figura 66.** Posible migración de sal ascendente. Extraída de Ennen (2012).

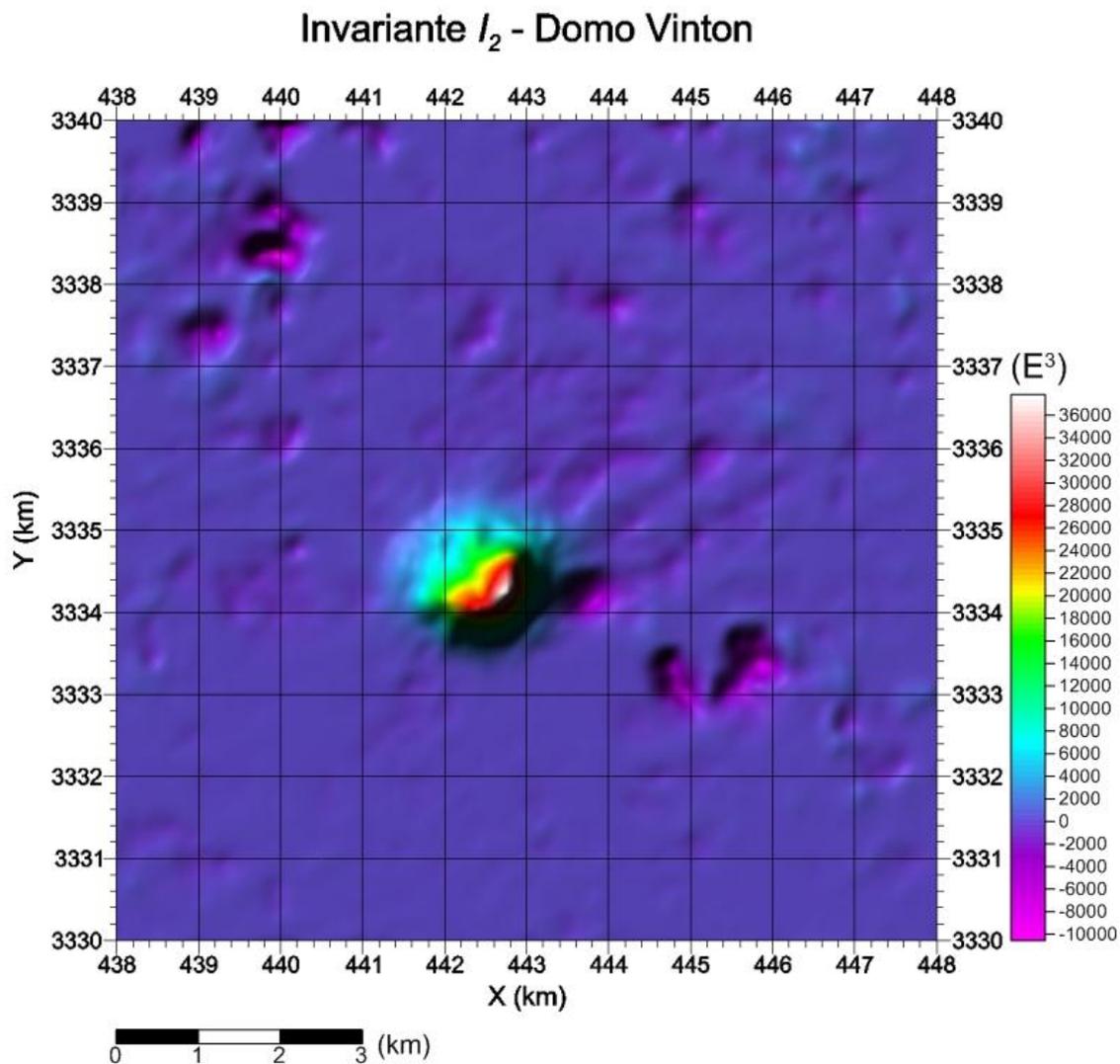
El hecho de que la *TENDEC* arroje soluciones con mayor profundidad que los otros dos métodos es porque éste no trabaja directamente con los gradientes del campo gravitatorio, sino con los invariantes del tensor de gradiometría gravimétrica y las componentes del vector de gravedad. Es por eso que las soluciones no tienen un sesgo hacia la superficie.

Con el método de la deconvolución tensorial también se obtuvieron mallas con los invariantes del tensor de gradiometría gravimétrica y la estimación del índice estructural para cada punto de la malla. Se calculó el invariante  $I_1$ , el cual delimitó muy bien a la roca envolvente (figura 67) sin hacer notar casi ninguna otra estructura a lo largo y ancho de la malla de datos:



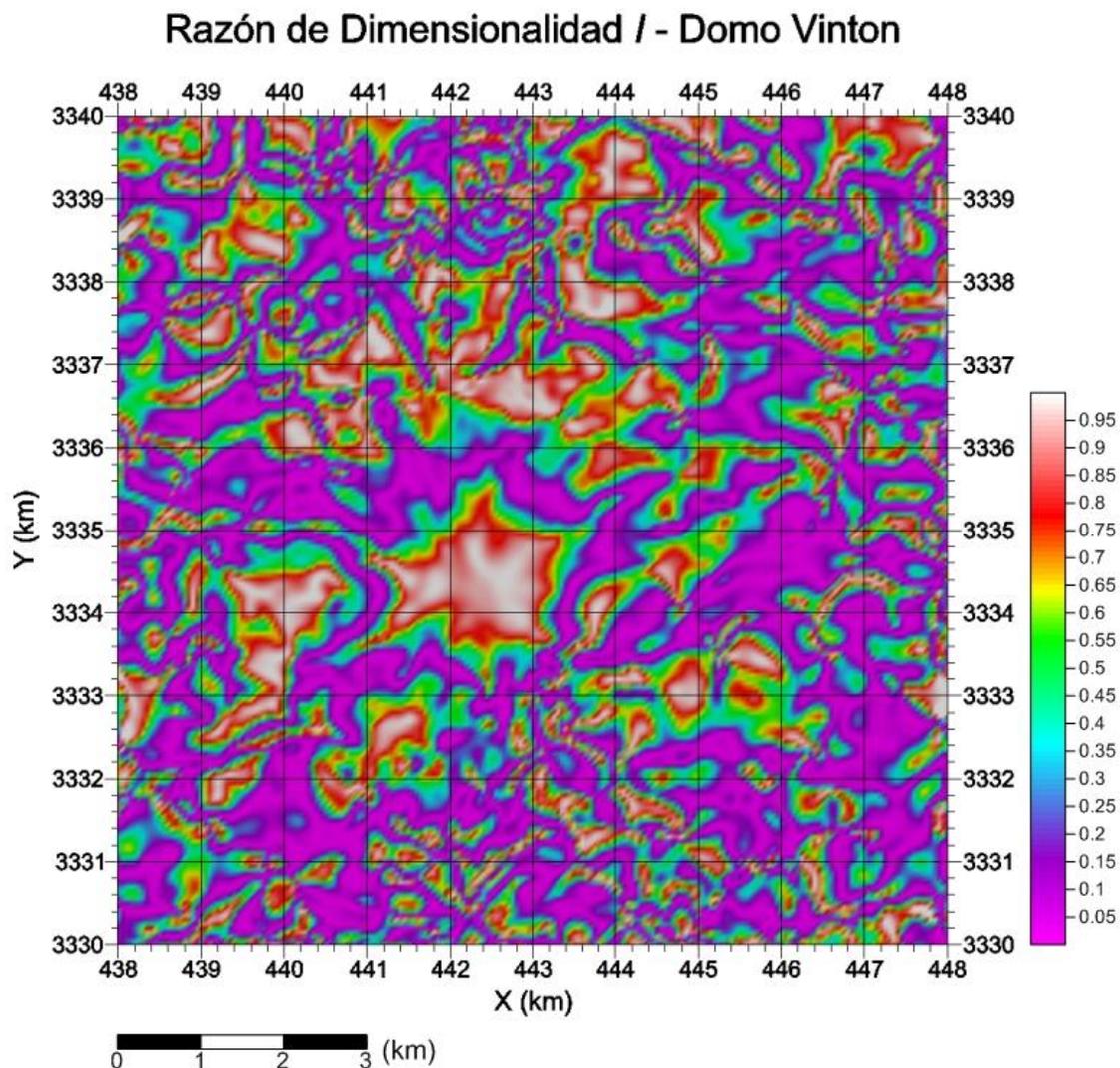
**Figura 67.** Invariante  $I_1$  del tensor de gradiometría gravimétrica. Domo Vinton.

Se calculó el invariante  $I_2$  que corresponde al determinante del tensor de gradiometría gravimétrica y que también realzó solamente a la roca envolvente (figura 68):



**Figura 68.** Invariante  $I_2$  del tensor de gradiometría gravimétrica. Domo Vinton.

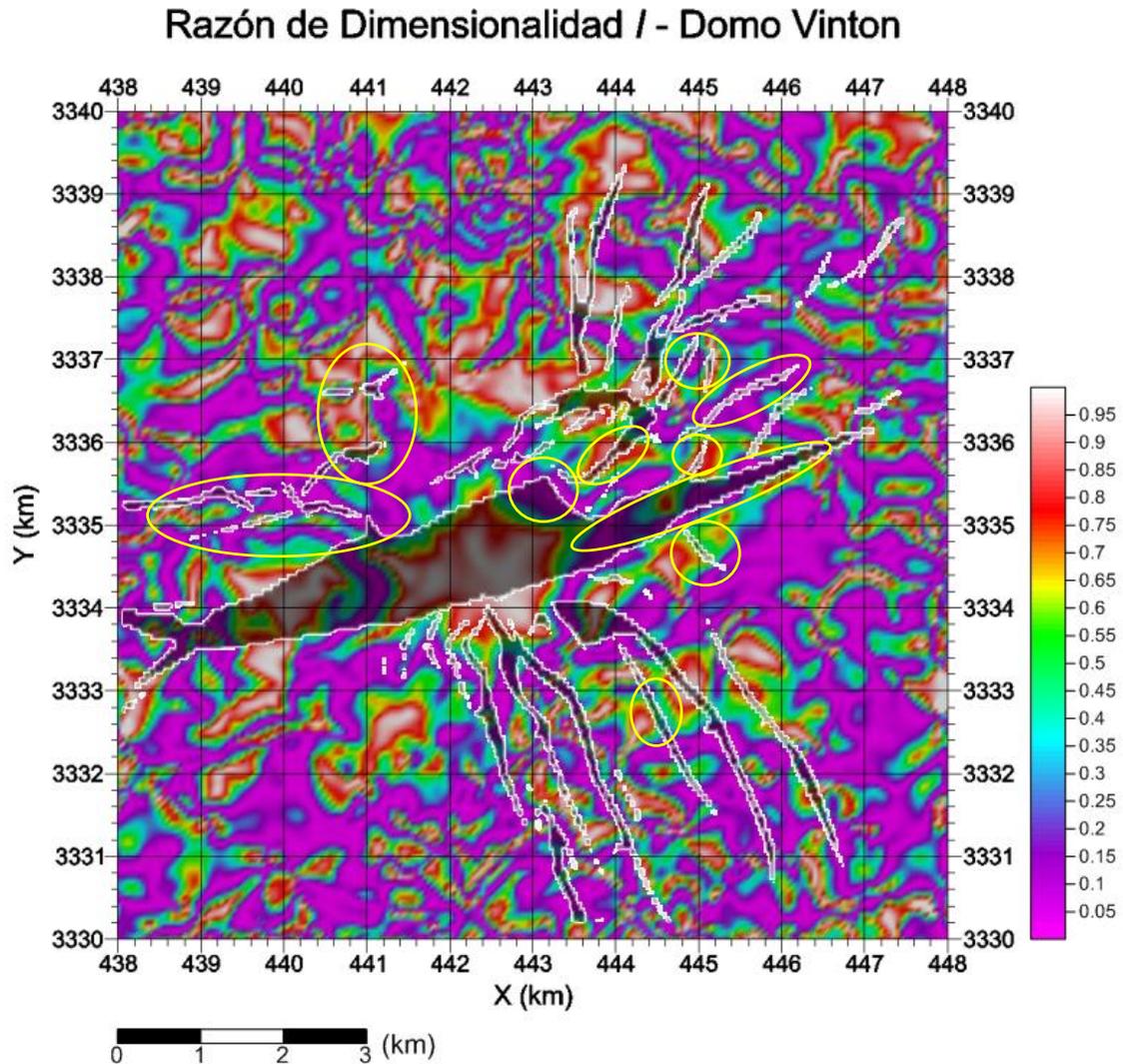
Después se calculó la razón de dimensionalidad  $I$  que realza parte de los bordes de las fuentes y que vale cero para una fuente bidimensional y uno para una fuente monopolar (figura 69):



**Figura 69.** Razón de dimensionalidad  $I$  del tensor de gradiometría gravimétrica. Domo Vinton.

Con esta malla de datos se puede observar bien delimitado a la roca envolvente, a la cual se le calcula un valor igual a 1, que corresponde a una fuente monopolar, y a su alrededor más próximo con valor igual a 0 correspondiente con fuentes bidimensionales.

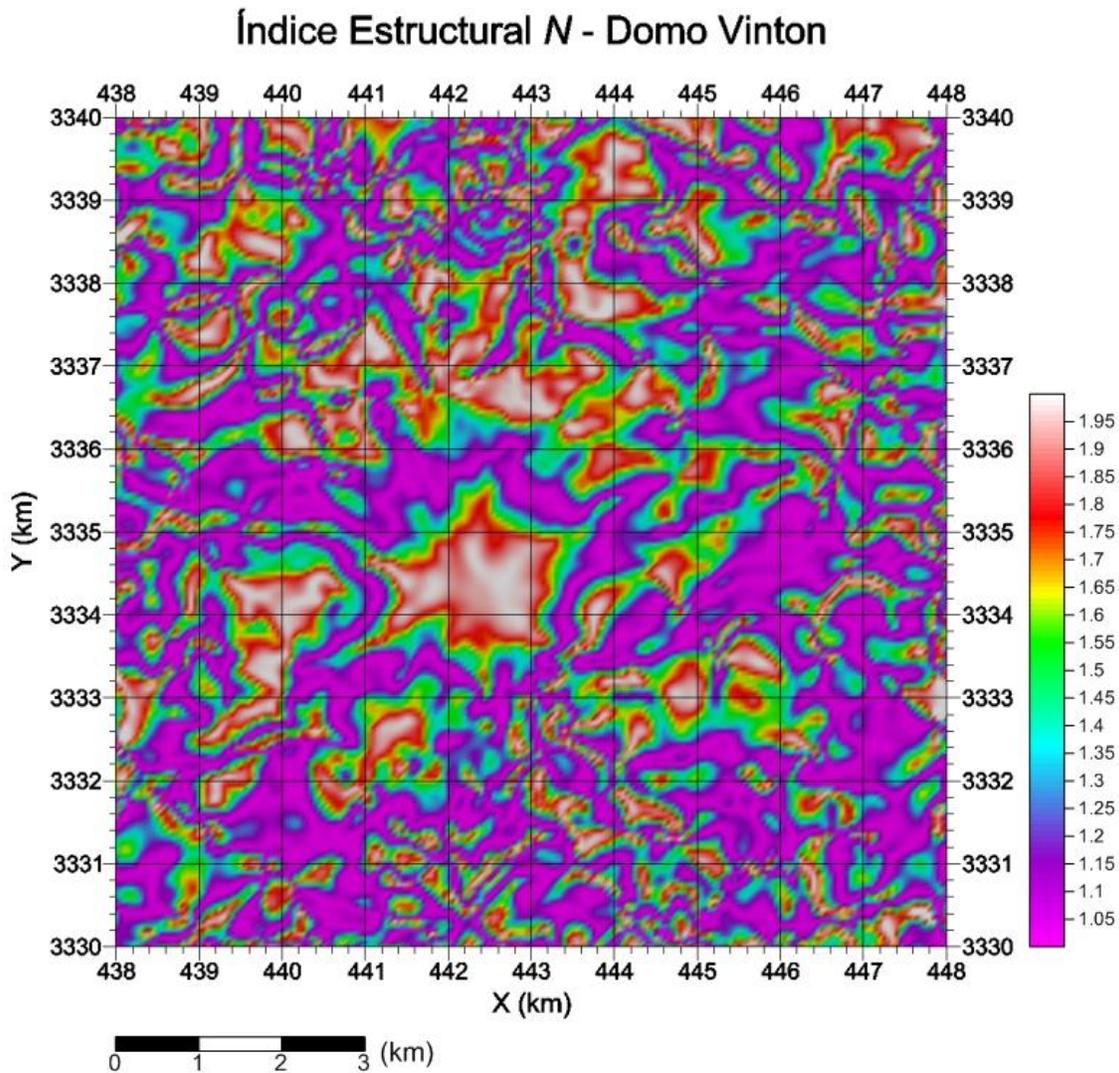
En esta malla de datos también se pudo observar una relación de sus valores con los patrones de fallas de la región (figura 70):



**Figura 70.** Razón de dimensionalidad  $I$  del tensor de gradiometría gravimétrica con el patrón de fallas superpuestas. Domo Vinton.

Se puede observar en la imagen que hay algunas fallas que sí corresponden muy bien con el valor de la razón de dimensionalidad que toman respecto a su entorno; por ejemplo, se marcan dos fallas en el patrón del sureste que cortan los valores de  $I = 1.0$  llegando a  $I = 0.5$  donde pasan las fallas. La falla regional se puede relacionar solamente al este del domo tomando valores de  $I = 0.0$ . Al noreste del domo sí se pueden observar muchas fallas relacionadas a la razón de dimensionalidad, solamente que algunas toman valores de  $I = 1.0$  y otras de  $I = 0.0$ . Por otra parte, al noroeste se logran observar ciertas relaciones como las fallas que tienen dirección E-W y que toman valores de  $I = 0.0$ .

Por último, se obtuvo la malla con la estimación de los índices estructurales para cada punto (figura 71). La malla del índice estructural es la misma que la de la razón de dimensionalidad pero sumada la unidad en cada punto.

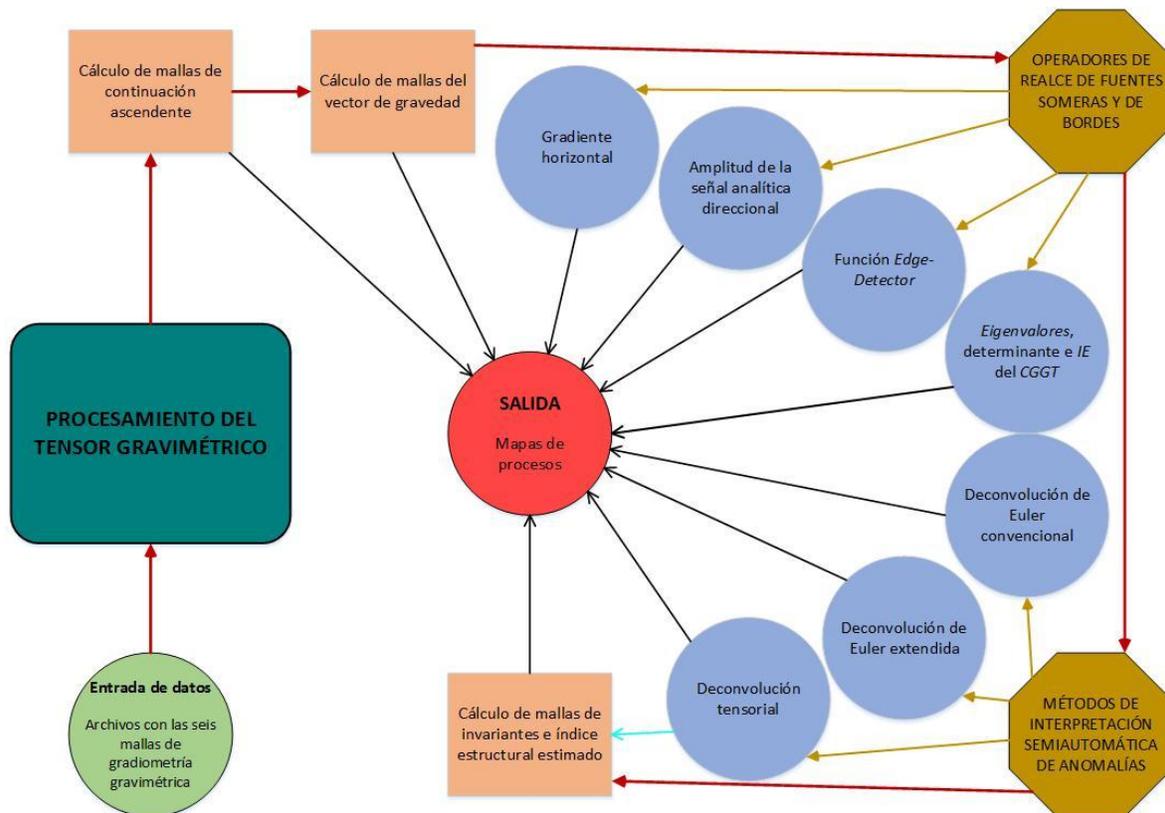


**Figura 71.** Índice estructural estimado  $N$  del tensor de gradiometría gravimétrica. Domo Vinton.

El índice estructural estimado con este método para la roca envolvente fue 2.0 el cual está muy por encima de los estimados con los otros dos métodos. Los resultados de esta malla ilustran que la cima o casco del domo es una fuente gravitatoria monopolar, lo cual no es del todo cierto pues no presenta una densidad uniformemente esférica, sino una más compleja.

Mediante cada uno de los procesos que se realizaron a los datos de gradiometría gravimétrica del Domo Vinton, se lograron obtener mapas que representaban distintas características gravimétricas de las estructuras de la zona; particularmente, la roca envolvente y el núcleo de sal del domo. Cada uno de estos procesos aplicados fue importante para el desarrollo total de los mapas. La secuencia de procesamiento utilizada para este trabajo fue realizada especialmente para los datos gradiométricos del Domo Vinton, aunque puede ser utilizada de igual forma para otros datos con estructuras distintas a las vistas en este trabajo.

Para esta parte del trabajo se ha planteado una secuencia general del procesamiento de mallas de gradiometría gravimétrica para datos observados (figura 72):



**Figura 72.** Secuencia general del procesamiento de mallas de gradiometría gravimétrica para datos observados.

El esquema muestra la secuencia sugerida para un procesamiento óptimo del tensor de gradiometría gravimétrica que es descrito a continuación.

## 1. Entrada de datos:

*Obtención de las seis mallas de las componentes del tensor de gradiometría gravimétrica con mallado regular mediante un método de interpolación, según sea indicado por quien realizó la medición de los datos. El muestreo de datos generalmente debe realizarse con 1/2 ó 1/3 del espaciamiento más pequeño entre líneas.*

En el caso de los datos del Domo Vinton, otorgados por *Bell Geospace, Inc.*, se utilizaron aquéllos descritos como ruido reducido con longitud de onda de corte de 150 kilómetros con una corrección por terreno con densidad de  $2.20 \text{ (g/cm}^3\text{)}$ . El espaciamiento entre líneas más pequeño que había en las mediciones era de 125 metros, por lo que se optó por hacer una interpolación mediante el método de interpolación de *mínima curvatura*, sugerido por *Bell Geospace*, con un intervalo de muestreo de 50 metros en ambas direcciones.

## 2. Cálculo de mallas de continuación analítica ascendente:

*Cálculo de las seis mallas de continuación analítica de campo ascendente de las componentes del tensor de gradiometría gravimétrica para la remoción tanto de ruido como de anomalías de estructuras muy someras que no sean de interés.*

En el caso de los datos del Domo Vinton, debido a que las mediciones del *Air-FTG* fueron realizadas a una altura promedio de 80 (m), aproximadamente, y tomando en cuenta de trabajos anteriores en esta zona que por debajo de 150 (m) de profundidad no hay estructuras de interés, se calcularon las mallas de continuación ascendente a una altura de 70 (m) para su compensación. Esto removió tanto el ruido que pudiera haber como las anomalías de estructuras muy someras.

## 3. Cálculo de mallas del vector de gravedad:

*Cálculo de las tres mallas de datos de las componentes del vector de gravedad mediante los operadores de antiderivadas.*

En el caso de los datos del Domo Vinton, se calcularon las componentes  $g_x$ ,  $g_y$  y  $g_z$  mediante las mallas de datos de las componentes  $\Gamma_{xz}$ ,  $\Gamma_{yz}$  y  $\Gamma_{zz}$ , respectivamente, mediante el operador de antiderivada en  $Z$ . Como las componentes del tensor ya estaban filtradas por la continuación de campo ascendente, las componentes vectoriales calculadas ya no necesitaban ningún proceso de filtrado.

#### 4. Operadores de realce de fuentes someras y de bordes:

- a) Cálculo del **gradiente horizontal** para delimitar horizontalmente con mediana precisión a las fuentes.
- b) Cálculo de las **amplitudes** de las tres componentes de la **señal analítica direccional** para delimitar en cada una de las dos direcciones con buena precisión a las fuentes y para delimitar y realzar a las fuentes más someras.
- c) Cálculo de la **función Edge-Detector** para delimitar horizontalmente con gran precisión a las fuentes.
- d) Cálculo de las mallas de los eigenvalores  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$ , del **determinante** y del operador **IE** del **CGGT** para delimitar horizontalmente con mucha más precisión a las fuentes mediante la curva de nivel con valor cero.

#### 5. Métodos de interpretación semiautomática de anomalías:

- a) Estimaciones medianamente dispersas de la ubicación de las fuentes someras mediante la **deconvolución de Euler** y del índice estructural mediante el método de Barbosa et al. (2000).
- b) Estimaciones muy poco dispersas de la ubicación de las fuentes más someras mediante la **deconvolución de Euler extendida** y del índice estructural mediante un método modificado de Barbosa et al. (2000).
- c) Estimaciones altamente dispersas de la ubicación de las fuentes más profundas mediante la **deconvolución tensorial**.

#### 6. Cálculo de mallas de invariantes e índice estructural estimado:

Cálculo de las mallas de los **invariantes** del tensor de gradiometría gravimétrica para el realce de fuentes someras, de la **razón de dimensionalidad** para observar cualitativamente la dimensionalidad de las estructuras y del **índice estructural** estimado mediante el método de la deconvolución tensorial.

#### 7. Productos de salida:

*Mapas* de cada uno de los procesos mencionados anteriormente con el propósito de su análisis tanto cuantitativo como cualitativo para facilitar la interpretación de las estructuras del subsuelo con la información y parámetros obtenidos.

Se recomienda realizar un mapa cada vez que se realice un proceso; esto para proponer parámetros de entrada que sirvan para los procesos consecutivos.

## 4. Conclusiones

Se puede concluir que todos los operadores de realce de fuentes someras y de bordes y los métodos de interpretación semiautomática de anomalías fueron en general satisfactorios tanto para los datos sintéticos de los cuerpos geométricos como para los datos observados del Domo Vinton. La función *Edge-Detector* delimitó con detalle los bordes de las fuentes, sobre todo para datos sintéticos; el problema que se presentó en el modelado del Domo Vinton es el realzar el ruido. Esta situación no ocurre con datos sintéticos sin ruido. Es por eso que la función *Edge-Detector* resultó efectiva para los cuerpos geométricos, pero no tanto para los datos observados. Los operadores obtenidos del tensor de gradiometría gravimétrica de curvatura (*CGGT*) fueron muy importantes para la delimitación de la roca envolvente del domo con la curva de nivel de valor cero, especialmente el operador *IE*.

La deconvolución de Euler (*EULVDG*) y la deconvolución de Euler extendida (*EULTDG*) arrojaron resultados muy parecidos. Ambos métodos tuvieron soluciones muy someras y poco dispersas con profundidades menores a 800 (*m*). Sin embargo, se pudo notar que la *EULTDG* tuvo mayor número de soluciones someras y menos dispersas que la *EULVDG*. Ambos métodos pudieron caracterizar la ubicación y profundidad de la roca envolvente del Domo Vinton; se tienen profundidades en la parte sur del domo menores a 200 (*m*), en la parte central entre 200 (*m*) y 360 (*m*), y en la parte noreste entre 360 (*m*) y 600 (*m*). Esto quiere decir que la cima de la roca envolvente se vuelve más profunda hacia el noreste. El índice estructural estimado resultó de 0.6 para ambos métodos, resultados que están entre  $N = 0$  y  $N = 1$ , correspondientes a una fuente de estrato equivalente o diques y a líneas de masas o fuentes cilíndricas, respectivamente, y que, según Thompson (1982), corresponden a índices estructurales que arrojan las mejores soluciones, aunque normalmente en la naturaleza se observan índices estructurales altos. Los índices estructurales estimados en estos casos pueden deberse a las formaciones sedimentarias que se encuentran alrededor del domo.

El algoritmo de la deconvolución tensorial (*TENDEC*) utilizó la estimación del índice estructural en forma lineal con la razón de dimensionalidad, por lo que resultó un índice estructural de 2.0 por encima del domo, que es un resultado muy distinto a los obtenidos en los primeros dos métodos. De acuerdo con Thompson (1982), en la naturaleza se encuentran más fuentes monopolares con altos índices estructurales, lo cual ocurre en este caso. En ningún momento se hicieron pruebas para cambiar la linealidad del índice estructural con la razón de dimensionalidad, por lo que se mantuvo la ecuación:  $N = 1 + I$ . Las soluciones obtenidas con la deconvolución tensorial resultaron mucho más dispersas que las de los otros dos métodos. Este método de estimación no calculó muchas soluciones someras, dejando profundidades de hasta 4000 (*m*), debido a la restricción utilizada en el cálculo. Las soluciones obtenidas fueron de gran importancia para determinar la distribución del Domo Vinton a grandes profundidades.

Con respecto a las respuestas gravimétricas de la zona y de acuerdo a la geología del Domo Vinton, los máximos de gravedad que muestran los mapas y los resultados obtenidos en el realce de bordes son debidos a la roca envolvente y no tanto al núcleo de sal. Esto es porque la anhidrita contenida en la roca envolvente produce un contraste de densidad positivo muy alto. Si la estructura consistiera solamente de sal, entonces la respuesta gravimétrica del domo sería también de un máximo pero mucho más pequeño debido al contraste de densidad positivo producido en la parte más somera entre la sal y las formaciones sedimentarias de su alrededor (figura 59). Pero la roca envolvente es la que da el máximo en la respuesta gravimétrica, pues está hecha de caliza, yeso y anhidrita, donde ésta última tiene una densidad de  $2700 \text{ (kg/m}^3\text{)}$ . Por lo tanto, el máximo de la respuesta gravimétrica observada en la componente calculada  $g_z$  es debida a la roca envolvente que se encuentra en el casco del domo y el mínimo que se observa al noreste del domo es por el núcleo de sal, que se extiende hacia el noreste a mayor profundidad.

Con respecto a la interpretación de los resultados se puede concluir que la roca envolvente del domo va de  $441.8 \text{ (km)}$  a  $443.05 \text{ (km)}$  de oeste a este y de  $3333.8 \text{ (km)}$  a  $3335 \text{ (km)}$  de sur a norte. Es decir, el domo mide  $1.25 \text{ (km)}$  de este a oeste y  $1.2 \text{ (km)}$  de norte a sur (figura 56). Por otro lado, con los resultados de la *EULVDG* (figura 58) se obtuvo la ubicación más somera del domo. La cima del domo se encuentra a una profundidad menor de  $150 \text{ (m)}$  y este punto está ubicado en las coordenadas  $(442.5, 3333.9) \text{ (km)}$ . Según los resultados obtenidos con la *TENDEC* y con el mapa obtenido de la continuación ascendente a  $4000 \text{ (m)}$  se pudo interpretar que el Domo Vinton se extiende hacia el noreste conforme aumenta la profundidad. Se interpreta que a una profundidad de  $4000 \text{ (m)}$ , aproximadamente, el centro del núcleo de sal se encuentra a 2 kilómetros hacia el noreste del centro del domo en su parte más somera donde es bien delimitado en los mapas de realce de bordes. Esto puede ser indicio de que la migración de sal provino desde el suroeste hacia el noreste topándose con una falla regional que obligó a ésta a inclinarse hacia el suroeste (Ennen, 2012) formando el domo salino extendido en su parte noreste (figura 67).

Se pudo observar que el *eigenvalor*  $\lambda_2$  del *CGGT*, que delimita los bordes de las estructuras con contraste de densidad negativo, y la razón de dimensionalidad, en el caso del Domo Vinton, delimitaron ciertos rasgos para la determinación de los patrones de fallas que se encuentran a los alrededores del domo, tanto para la falla regional como para las causadas por el diapirismo.

Con respecto a los criterios de aceptación de soluciones utilizados en la *EULVDG* y en la *EULTDG*, fue necesario modificarlos del original de Barbosa et al. (1999) debido a los algoritmos utilizados en donde el número de elementos de la matriz  $\underline{G}$  y de incógnitas aumentan en cada uno de los dos métodos. Por otro lado, se definió la amplitud de correlación, cuyo valor corresponde a un promedio normalizado de los coeficientes de correlación en las tres direcciones, que fue necesario definir para la implementación del método de estimación del índice estructural de Barbosa et al. (2000) en la *EULTDG*. Este parámetro resultó satisfactorio para este trabajo, pues estimó el mismo índice estructural que en la *EULVDG*.

Dado que los algoritmos implementados en la *EULVDG* y *EULTDG* consistieron en resolver un sistema de ecuaciones sobredeterminado en cada ventana móvil a lo largo de toda la malla de observación, los códigos consistían de tres ciclos iterativos. El ciclo externo fue para la variación del índice estructural y así poder estimarlo mediante el método de Barbosa et al. (2000); los otros dos ciclos fueron para el movimiento de la ventana móvil en ambas direcciones a lo largo de la malla de datos; dentro de estos ciclos se resolvía el sistema de ecuaciones mediante el método de mínimos cuadrados. Para trabajos posteriores se pretende aumentarle un ciclo externo cuya función sea realizar la variación del tamaño de la ventana móvil y así obtener el conjunto de soluciones óptimo, pues en este trabajo el tamaño de la ventana móvil era un parámetro fijo.

Una de las grandes ventajas de la *TENDEC* es que no resuelve un sistema de ecuaciones en una ventana móvil que recorra toda la malla de datos, sino que el cálculo de la ubicación de las fuentes lo hace directo para cada punto de observación, además de que arroja una malla de estimación del índice estructural. La gran desventaja de este método es que el índice estructural está restringido entre los valores 1 y 2, pues tiene una relación lineal con la razón de dimensionalidad:  $N = 1 + I$ . En trabajos posteriores se pretende hacer pruebas de índices estructurales modificando la última ecuación en la forma propuesta por Mikhailov et al. (2007):  $N = 1 + I^k$ , donde  $k = 1, 2, \dots, 10$ . De esta manera, se pretende tener una estimación más coherente del índice estructural.

# Anexo I

El programa de cómputo utilizado fue realizado en *FORTRAN 90* con un algoritmo de elaboración propia comprendido por el programa principal llamado *PROCESAMIENTO\_TG.f90* y un módulo con subrutinas llamado *SUBROUTINAS\_PTG.f90* que contiene todos los operadores y métodos vistos a lo largo del trabajo. Una vez corrido el programa, se presenta la carátula con los datos del trabajo y su elaborador (figura 73) mientras se leen los archivos que contienen los datos de las seis componentes del tensor de gradiometría gravimétrica. Una vez leídos los datos, aparece el número total de muestras que contienen cada uno de los archivos leídos.

```
=====
UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO
FACULTAD DE INGENIERIA
DIVISION DE INGENIERIA EN CIENCIAS DE LA TIERRA
DEPARTAMENTO DE GEOFISICA

TESIS

ANALISIS Y PROCESAMIENTO DE MALLAS
DE GRADIOMETRIA GRAUIMETRICA

HUANTE ARANA FRANCISCO ENRIQUE

PROCESAMIENTO DEL TENSOR DE GRADIOMETRIA GRAUIMETRICA

=====

LEYENDO ARCHIVOS DEL TENSOR DE GRADIOMETRIA GRAUIMETRICA...

NUMERO TOTAL DE MUESTRAS :      40401
```

Figura 73. Carátula del programa.

Luego procede a calcular las seis mallas de continuación de campo donde el usuario escoge si realizar la continuación ascendente o descendente introduciendo la altura o la profundidad de continuación, respectivamente. Para este trabajo, se realizó la continuación ascendente con una altura de 70 (m). Luego aparece una leyenda en la que se expresa que se están calculando las tres componentes del vector de gravedad, lo cual realiza mediante una subrutina que calcula las antiderivadas en el dominio del número de onda. Para este trabajo se utilizó la componente  $\Gamma_{xz}$  para calcular  $g_x$ , la  $\Gamma_{yz}$  para calcular  $g_y$ , y la  $\Gamma_{zz}$  para calcular  $g_z$  (figura 74).

```

OPERADOR DE CONTINUACION DE CAMPO

SELECCIONE LA OPCION QUE DESEA:
1.- CONTINUACION DE CAMPO ASCENDENTE
2.- CONTINUACION DE CAMPO DESCENDENTE

1
ESCRIBA LA ALTURA <VALOR ABSOLUTO> DE CONTINUACION <km>:
0.07

CALCULANDO LAS MALLAS DE CONTINUACION DE CAMPO...

CALCULANDO LAS MALLAS DEL VECTOR DE GRAVEDAD...

```

Figura 74. Mallas de continuación de campo y del vector de gravedad.

Posteriormente, aparece un menú en donde la primera parte contiene a los operadores de realce de fuentes someras y de bordes que pueden utilizarse, el cual incluye al gradiente horizontal, la amplitud de la señal analítica direccional, la función *Edge-Detector* y los operadores del *CGGT*. La segunda parte del menú consta de los métodos de interpretación semiautomática de anomalías, que contiene a la deconvolución de Euler, a la deconvolución de Euler extendida y a la deconvolución tensorial, dejando un apartado también para pasarse directo al criterio de aceptación de soluciones cuando ya se tiene un archivo con todas las soluciones de alguno de los dos primeros métodos (figura 75).

```

OPERADORES DE REALCE DE FUENTES SOMERAS Y DE BORDES

SELECCIONE LA OPCION QUE DESEA:
1.- GRADIENTE HORIZONTAL
2.- AMPLITUD DE LA SENAL ANALITICA DIRECCIONAL
3.- FUNCION EDGE-DETECTOR
4.- TENSOR DE GRADIOMETRIA GRAVIMETRICA DE CURVATURA
5.- TODAS
6.- NINGUNA

5
METODOS DE INTERPRETACION SEMIAUTOMATICA DE ANOMALIAS

SELECCIONE LA OPCION QUE DESEA:
1.- DECONVOLUCION DE EULER CONUENCIONAL
2.- DECONVOLUCION DE EULER EXTENDIDA
3.- DECONVOLUCION TENSORIAL
4.- TODAS
5.- CRITERIO DE ACEPTACION DE SOLUCIONES
6.- NINGUNA

1

```

Figura 75. Menú principal del programa.

En el caso de elegir la deconvolución de Euler se despliega una tabla que va siendo calculada para cada índice estructural que va de  $-2.0$  a  $2.0$  donde aparece el coeficiente de correlación y el índice estructural correspondiente (figura 76).

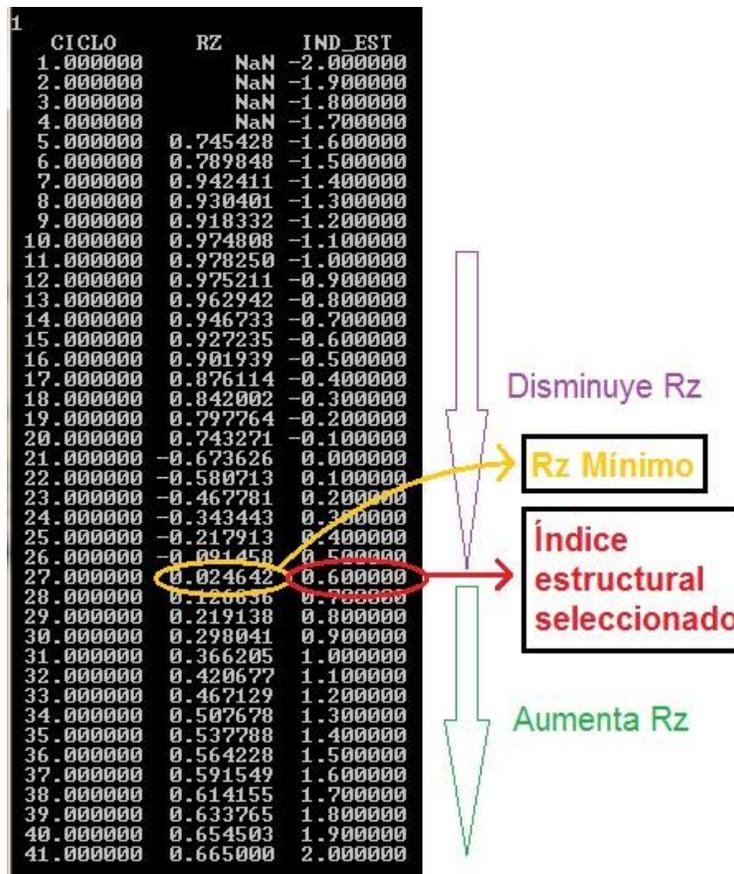


Figura 76. Tabla para la elección del índice estructural con el método de Barbosa et al. (2000) en la *EULVDG*.

El mismo algoritmo elige las soluciones correspondientes al de menor coeficiente de correlación y las guarda en un archivo para posteriormente ser leído en una subrutina donde se filtran los datos con el criterio de aceptación de soluciones. Después del criterio de aceptación de soluciones se despliega una tabla con la información de los datos aceptados y rechazados (figura 77).

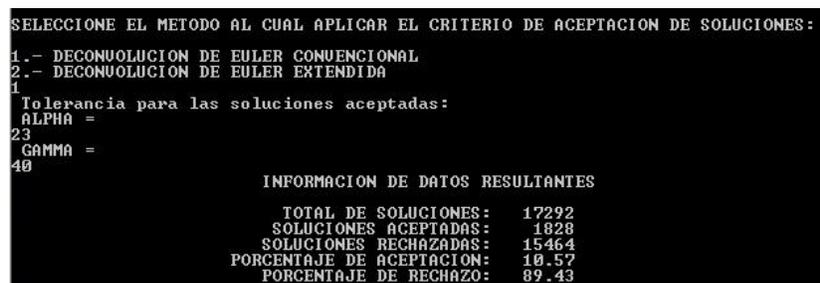


Figura 77. Tabla con la información de los datos resultantes en la *EULVDG*.

En el caso de elegir la deconvolución de Euler extendida se despliega una tabla que va siendo calculada para cada índice estructural que va de  $-2.0$  a  $2.0$  donde aparecen los coeficientes de correlación en cada una de las tres direcciones, la amplitud de correlación y el índice estructural correspondiente (figura 78).

CICLO	RX	RY	RZ	RXYZ	IND_EST
1.000000	NaN	NaN	NaN	NaN	-2.000000
2.000000	NaN	NaN	NaN	NaN	-1.900000
3.000000	NaN	NaN	NaN	NaN	-1.800000
4.000000	NaN	NaN	NaN	NaN	-1.700000
5.000000	NaN	NaN	NaN	NaN	-1.600000
6.000000	NaN	NaN	NaN	NaN	-1.500000
7.000000	NaN	NaN	NaN	NaN	-1.400000
8.000000	NaN	NaN	NaN	NaN	-1.300000
9.000000	NaN	NaN	NaN	NaN	-1.200000
10.000000	NaN	NaN	NaN	NaN	-1.100000
11.000000	NaN	NaN	NaN	NaN	-1.000000
12.000000	NaN	NaN	NaN	NaN	-0.900000
13.000000	0.999892	0.987216	0.990124	0.992426	-0.800000
14.000000	0.998098	0.978481	0.975125	0.983954	-0.700000
15.000000	0.991828	0.965708	0.957987	0.971949	-0.600000
16.000000	0.979508	0.970094	0.945272	0.965066	-0.500000
17.000000	0.961720	0.964858	0.925029	0.950707	-0.400000
18.000000	0.940307	0.945607	0.903112	0.929868	-0.300000
19.000000	0.910028	0.918068	0.878601	0.902393	-0.200000
20.000000	0.868612	0.882874	0.845608	0.865834	-0.100000
21.000000	-0.804394	-0.838405	-0.788339	0.810648	0.000000
22.000000	-0.703053	-0.770449	-0.700748	0.725471	0.000000
23.000000	-0.552272	-0.677666	-0.588024	0.608278	0.000000
24.000000	-0.350391	-0.560797	-0.464285	0.466486	0.000000
25.000000	-0.118617	-0.426699	-0.327278	0.317938	0.000000
26.000000	-0.105752	-0.279907	-0.189257	0.204409	0.000000
27.000000	-0.289129	-0.131905	-0.059766	0.186697	0.000000
28.000000	-0.430046	-0.004734	-0.057161	0.250186	0.000000
29.000000	-0.530784	-0.128045	-0.158740	0.328291	0.000000
30.000000	-0.601564	-0.228662	-0.238073	0.396167	0.000000
31.000000	-0.655708	-0.309472	-0.306436	0.454470	0.000000
32.000000	-0.696355	-0.380044	-0.359818	0.502929	0.000000
33.000000	-0.727048	-0.437845	-0.404649	0.542847	0.000000
34.000000	-0.751931	-0.485276	-0.443525	0.576659	0.000000
35.000000	-0.770796	-0.522949	-0.473255	0.603206	0.000000
36.000000	-0.787044	-0.554892	-0.499438	0.626307	0.000000
37.000000	-0.798665	-0.581876	-0.520858	0.644913	0.000000
38.000000	-0.809031	-0.603811	-0.538542	0.660592	0.000000
39.000000	-0.817285	-0.622538	-0.552565	0.673508	0.000000
40.000000	-0.824387	-0.639283	-0.563900	0.684661	0.000000
41.000000	-0.830880	-0.654800	-0.572398	0.694445	0.000000

Figura 78. Tabla para la elección del índice estructural con el método modificado de Barbosa et al. (2000) en la EULTDG.

De la misma forma, el algoritmo elige las soluciones que corresponden a la menor amplitud de correlación. Estos datos se guardan en un archivo que es leído por la misma subrutina que filtra los datos con el criterio de aceptación de soluciones. Después se despliega la tabla con la información de los datos aceptados y rechazados (figura 79).

```

SELECCIONE EL METODO AL CUAL APLICAR EL CRITERIO DE ACEPTACION DE SOLUCIONES:
1.- DECONVULSION DE EULER CONVENCIONAL
2.- DECONVULSION DE EULER EXTENDIDA
2
Tolerancia para las soluciones aceptadas:
ALPHA =
20
GAMMA =
20

INFORMACION DE DATOS RESULTANTES
TOTAL DE SOLUCIONES: 21489
SOLUCIONES ACEPTADAS: 6285
SOLUCIONES RECHAZADAS: 15204
PORCENTAJE DE ACEPTACION: 29.25
PORCENTAJE DE RECHAZO: 70.75

```

Figura 79. Tabla con la información de los datos resultantes en la EULTDG.

Para el caso de la deconvolución tensorial, si los datos no presentan ningún problema, entonces su cálculo es muy rápido en comparación con los otros dos y se pasa directamente al criterio de aceptación de soluciones. En cambio, si los datos presentan problemas, que no fue el caso de este trabajo con el Domo Vinton, se despliega una lista de los datos en los cuales el invariante  $I_1$  es positivo, indicando también el número total de éstos (figura 80). El algoritmo simplemente rechaza estos datos para que no sean tomados en cuenta en las soluciones estimadas.

```

528
El invariante I1 resulta positivo en los datos < 76 , 201 >.
529
El invariante I1 resulta positivo en los datos < 77 , 201 >.
530
El invariante I1 resulta positivo en los datos < 163 , 201 >.
531
El invariante I1 resulta positivo en los datos < 164 , 201 >.
532
El invariante I1 resulta positivo en los datos < 165 , 201 >.
533
El invariante I1 resulta positivo en los datos < 166 , 201 >.
534
El invariante I1 resulta positivo en los datos < 167 , 201 >.
535
El invariante I1 resulta positivo en los datos < 168 , 201 >.

```

**Figura 80.** Lista de datos que muestran errores con el invariante  $I_1$  en la *TENDEC*.

Por último, en este caso, se pasa al criterio de aceptación de soluciones y se despliega también una tabla con la información de los datos aceptados y rechazados (figura 81).

```

Tolerancia para las soluciones aceptadas:
ALPHA =
1.23
          INFORMACION DE DATOS RESULTANTES
          TOTAL DE SOLUCIONES: 40401
          SOLUCIONES ACEPTADAS: 4188
          SOLUCIONES RECHAZADAS: 36213
          PORCENTAJE DE ACEPTACION: 10.37
          PORCENTAJE DE RECHAZO: 89.63

```

**Figura 81.** Tabla con la información de los datos resultantes en la *TENDEC*.

# Referencias

- Ayres, F.** (2003). *Álgebra Moderna*. Dickinson College.
- Barbosa, V., Silva, J. & Medeiros, W.** (1999). *Stability analysis and improvement of structural index estimation in Euler deconvolution*. *Geophysics*, Vol. 64, No. 1, P. 48-60.
- Barbosa, V., Silva, J. & Medeiros, W.** (2000). *Making Euler deconvolution applicable to small ground magnetic surveys*. *Journal of Applied Geophysics*, 43: 55-68.
- Beiki, M.** (2010). *Analytic signals of gravity gradient tensor and their applications to estimate source location*. *Geophysics*, Vol. 75, No. 6, P. 159-174.
- Bell Geospace, Inc.** (2008). *Processing and acquisition of Air-FTG data. Vinton Dome. Vinton, Louisiana*. Non-Proprietary. Houston, Texas. Final report.
- Bell, R. & Hansen, R.** (1998). *The rise and fall of early oil-field technology: the torsion balance gradiometer*. *The Leading Edge*, 17: 81-83.
- Blakely, R.** (1996). *Potential Theory in Gravity & Magnetic Applications*. Cambridge University Press, Inglaterra.
- Casotto, S. & Fantino, E.** (2009). *Gravitational gradients by tensor analysis with applications to spherical coordinates*. *J Geod*, 83: 621-534.
- Coburn, G. & Schneider, J.** (2002). *Using gravity gradiometry in seismic interpretation in pre-SDM*. *World Oil*, P. 69-72.
- Coker, M., Bhattacharya, J. & Marfurt, K.** (2007). *Fracture patterns within mudstones on the flanks of a salt dome: Syneresis or slumping?* *Gulf Coast Association of Geological Societies Transactions*, v. 57, p. 125-137.
- Ennen, C.** (2012). *Mapping gas-charged fault blocks around the Vinton Salt Dome, Louisiana using gravity gradiometry data*. University of Houston. Master of Science in Geophysics Thesis.
- Gherasim, M.** (2005). *3-D VSP elastic Kirchhoff pre-stack depth migration – Vinton Dome, Louisiana*. University of Houston. Doctor of Philosophy Dissertation.
- Gunn, P.** (1975). *Linear transformations of gravity and magnetic fields*. *Geophysical Prospecting*, Vol. 23, Issue 2, P. 300-312.

**Hinojosa, J. & Mickus, K.** (2002). *Hilbert transform of gravity gradient profiles: Special cases of the general gravity gradient tensor in the Fourier transform domain*. *Geophysics*, Vol. 67, No. 3, P. 766-769. Short note.

**Jekeli, C.** (1993). *A review of gravity gradiometer survey system data analyses*. *Geophysics*, Vol. 58, No. 4, P. 508-514.

**Marfurt, K., Zhou, H. & Sullivan, C.** (2004). *Development and Calibration of New 3-D Vector VSP Imaging Technology: Vinton Salt Dome, LA*. University of Houston. Final report.

**Mickus, K. & Hinojosa, J.** (2001). *The complete gravity gradient tensor derived from the vertical component of gravity: a Fourier transform technique*. *Journal of Applied Geophysics*, 46: 159-174.

**Mikhailov, V., Pajot, G., Diamant, M. & Price, A.** (2007). *Tensor deconvolution: A method to locate equivalent sources from full tensor gravity data*. *Geophysics*, Vol. 72, No. 5, P. 161-169.

**Nabighian, M.** (1972). *The analytic signal of two-dimensional magnetic bodies with polygonal cross-section: Its properties and use for automated anomaly interpretation*. *Geophysics*, Vol. 37, No. 3, P. 507-517.

**Nabighian, M.** (1984). *Toward a three-dimensional automatic interpretation of potential field data via generalized Hilbert transforms – Fundamental relations*. *Geophysics*, Vol. 49, No. 6, P. 780-786.

**Nabighian, M. & Hansen, R.** (2001). *Unification of Euler and Werner deconvolution in three dimensions via the generalized Hilbert transform*. *Geophysics*, Vol. 66, No. 6, P. 1805-1810.

**Nava, M.** (2010). *Modelado por Métodos Potenciales de Estructuras Salinas Inferidas por Sismología de Reflexión*. Universidad Nacional Autónoma de México. Tesis de maestría.

**Oruç, B., Sertçelik, I., Kafadar, Ö. & Selim, H.** (2012). *Structural interpretation of the Erzurum Basin, eastern Turkey, using curvature gravity gradient tensor and gravity inversion of basement relief*. *Journal of Applied Geophysics*, 88:105-113.

**Pedersen, L. & Rasmussen, T.** (1990). *The gradient tensor of potential field anomalies: Some implications on data collection and data processing of maps*. *Geophysics*, Vol. 55, No. 12, P. 1558-1566.

**Roest, W., Verhoef, J. & Pilkington, M.** (1992). *Magnetic interpretation using the 3-D analytic signal*. *Geophysics*, Vol. 57, No. 1, P. 116-125.

**Schutz, B.** (2009). *A First Course in General Relativity*. Max Planck Institute for Gravitational Physics (Albert Einstein Institute) & Cardiff University.

**Silva, J. & Barbosa, V.** (2003). *3D Euler deconvolution: Theoretical basis for automatically selecting good solutions*. *Geophysics*, Vol. 68, No. 6, P. 1962-1968.

**Stavred, P. & Reid, A.** (2007). *Degrees of homogeneity of potential fields and structural indices of Euler deconvolution*. *Geophysics*, Vol. 72, No. 1, P. L1-L12.

**Thompson, D.** (1982). *EULDPH: A new technique for making computer-assisted depth estimates from magnetic data*. *Geophysics*, Vol. 47, No. 1, P. 31-37.

**Vanderlei, O. & Barbosa, V.** (2013). *3-D radial gravity gradient inversion*. *Geophysical Journal International*, 195: 883-902.

**Vasco, D.** (1989). *Resolution and variance operators of gravity and gravity gradiometry*. *Geophysics*, Vol. 54, No. 7, P. 889-899.

**Vasco, D. & Taylor, C.** (1991). *Inversion of airborne gravity gradient data, southwestern Oklahoma*. *Geophysics*, Vol. 56, No. 1, P. 90-101.

**Zhang, C., Mushayandevu, M., Reid, A., Fairhead, J. & Odegard, M.** (2000). *Euler deconvolution of gravity tensor gradient data*. *Geophysics*, Vol. 65, No. 2, P. 512-520.

**Zhou, W., Du, X. & Li, J.** (2013). *The limitations of curvature gravity gradient tensor for edge detection and a method for overcoming it*. *Journal of Applied Geophysics*, 98: 237-242.