



centro de educación continua
división de estudios de posgrado
facultad de ingeniería unam



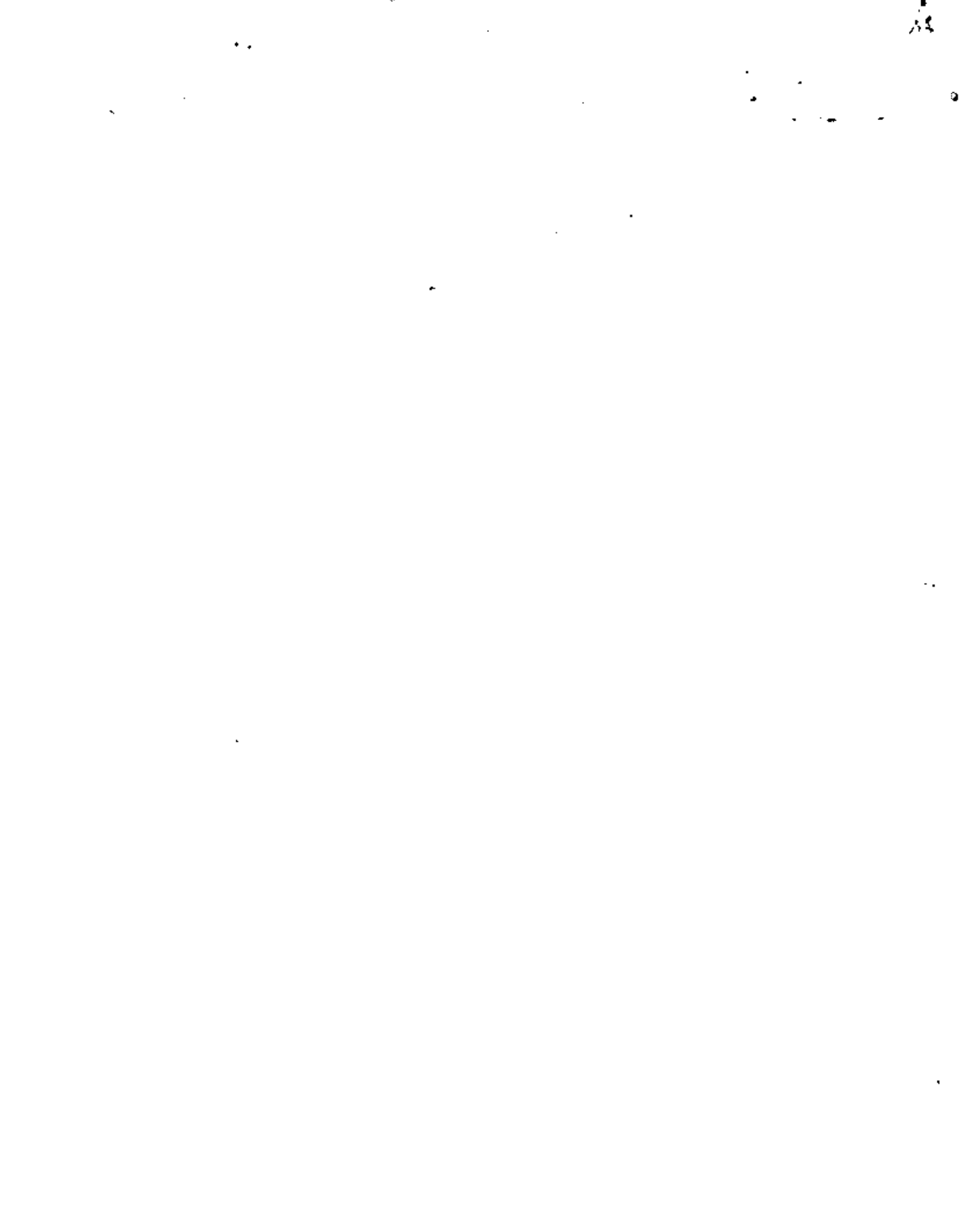
CURSO DE ACTUALIZACION EN MATEMATICAS

PARA INGENIEROS

C A L C U L O

II

agosto, 1980



I ALGEBRA VECTORIAL

TOMADO DE LOS APUNTES DE LA MATERIA DE MATEMATICAS III DE LA

FACULTAD DE INGENIERIA

U. N. A. M.

CAPITULO I.

ESPACIO EUCLIDIANO E INTRODUCCION AL ESTUDIO DE VECTORES.

1.1. PUNTO EN EL ESPACIO DE n DIMENSIONES.

Definimos a un punto en el espacio de n dimensiones, como un conjunto ordenado de n números reales. Así, un punto P en un espacio de n dimensiones está representado por:

$$P = (p_1, p_2, p_3, \dots, p_n) = \{ \{ p_i \} \}, i = 1, 2, \dots, n$$

donde los números $p_i \in \mathbb{R}$ se llaman "coordenadas del punto".

En un espacio de n dimensiones, cualquier punto tendrá exactamente n coordenadas.

En este curso, trabajaremos con puntos en espacios hasta de tres dimensiones.

1.2. SISTEMAS DE REFERENCIA, REPRESENTACION GEOMETRICA DE UN PUNTO.

Si sobre una recta tomamos un punto cualquiera O como origen y elegimos una longitud arbitraria que valga una unidad, la cual llevaremos a partir de O hacia ambos lados sucesivamente, los puntos de división así marcados nos representan los números enteros, los positivos en un sentido, el que

nosotros elijamos, y los negativos en sentido contrario. Más aún, todo punto de la recta representa a un número real, según sea su distancia al origen medida con la unidad previamente elegida. A tal recta se le conoce como "Eje numérico".

Inversamente, todo número positivo o negativo, queda representado geoméricamente por un punto de la recta. A estos números los llamaremos en lo sucesivo escalares. Por costumbre, el eje numérico suele dibujarse horizontalmente, como se muestra en la figura 1.1.

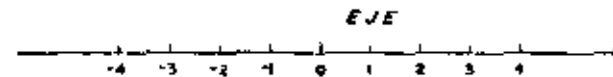


Figura 1.1

Dado que las coordenadas son números reales (escalares), pueden representarse geoméricamente puntos en un espacio de una dimensión, como puntos sobre un eje, de acuerdo con su distancia al origen y con la dirección del eje.

Así por ejemplo, los puntos $P = (4)$, $Q = (-5)$, $R = (2.7)$, pueden representarse geoméricamente como se indica en la figura 1.2.

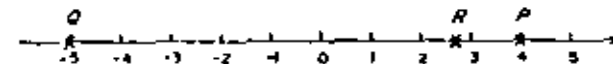


Figura 1.2

En un espacio de dos dimensiones ($n=2$), los puntos están definidos -- por una pareja ordenada de números reales; tienen dos coordenadas. Pueden representarse geoméricamente en un plano determinado por dos ejes llamados "coordenados", que se cortan en un origen común. Por facilidad, se acostumbra tomar ejes perpendiculares entre sí, con direcciones horizontal y vertical, hacia la derecha y hacia arriba respectivamente. Estos ejes dividen al espacio bidimensional en cuatro regiones llamadas cuadrantes. De acuerdo con las distancias de los puntos del plano a cada uno de los dos ejes, puede establecerse entonces una correspondencia entre dichos puntos, y las parejas ordenadas de valores (x,y) , donde x representa la distancia sobre el eje horizontal medida a partir del origen, llamada abscisa y y representa la distancia sobre el eje vertical medida también a partir del origen, llamada ordenada. A cada punto, puede hacerse corresponder una pareja ordenada de valores (x,y) y a cada pareja ordenada de valores (x,y) puede hacerse corresponder un punto del plano. Así por ejemplo, los puntos $P = (1,3)$, $Q = (-2,0)$, $R = (-1,-4)$ pueden representarse geoméricamente como se muestra en la figura 1.3.

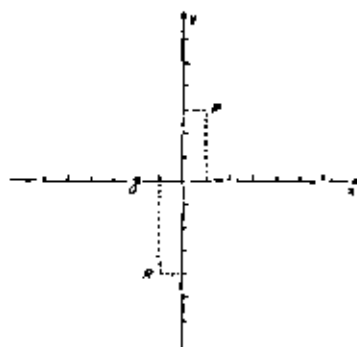


Figura 1.3

A este sistema de representación, lo llamaremos "sistema cartesiano rectangular en el espacio de dos dimensiones".

En el espacio de tres dimensiones ($n=3$) suele utilizarse como sistema de referencia, el definido por tres ejes perpendiculares entre sí (cada uno de ellos perpendicular a los otros dos), que se cortan en un origen común. A este sistema se le conoce como "Sistema cartesiano rectangular". Los ejes se llaman coordenados y se designan normalmente con las letras x, y y z . Los ejes x y y suelen dibujarse en un plano horizontal y el eje z queda, por tanto, vertical.

Si las direcciones positivas de los ejes coordenados corresponden a -- las mostradas en la figura 1.4, el sistema se llama derecho. Esta terminología, deriva del hecho de que si colocamos la mano derecha, de tal manera que el dedo medio apunte en la dirección positiva del eje x , el pulgar en la dirección positiva del eje y , entonces el dedo índice apuntará en la dirección positiva del eje z . Si el dedo índice apunta hacia la dirección negativa del eje z , entonces el sistema coordenado se llama izquierdo. La figura 1.5 muestra un sistema izquierdo. En general utilizaremos sistemas coordenados derechos.

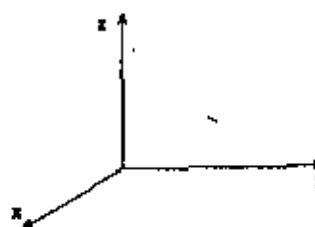


Figura 1.4. Sistema Derecho

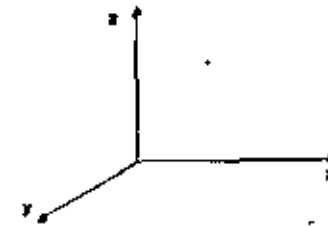


Figura 1.5. Sistema Izquierdo.

Los tres ejes definen tres planos, llamados "Planos Coordenados", que dividen al espacio tridimensional en ocho subespacios, llamados "octantes". El plano xy contiene a los ejes x y y, el plano xz contiene a los ejes x y z y el plano yz contiene a los ejes y y z. (Figura 1.6).

04

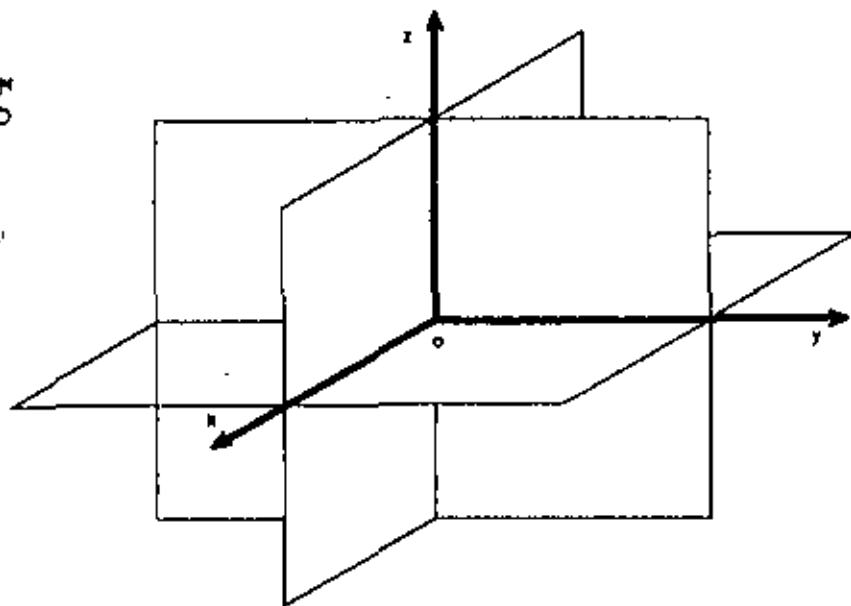


Figura 1.6

Un punto cualquiera del espacio tridimensional queda definido, si se conocen sus distancias dirigidas a los tres planos coordenados. La distancia del punto al plano yz se llama abscisa o coordenada x; su distancia al plano xz se llama ordenada o coordenada y; por último, su distancia al plano xy se llama cota o coordenada z. Puede establecerse una correspondencia mutua entre estas distancias y las ternas ordenadas de números reales (x,y,z).

Así por ejemplo, la representación geométrica del punto P de coordenadas (2,1,3), puede hacerse como se muestra en la figura 1.7.

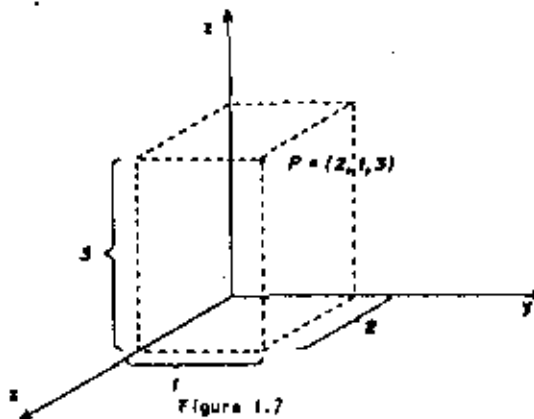


Figura 1.7

Para espacios de más de tres dimensiones, los puntos no pueden representarse geoméricamente.

1.3. IGUALDAD DE PUNTOS. SUMA DE PUNTOS. MULTIPLICACION DE UN ESCALAR POR UN PUNTO.

Sean los puntos $A = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ y $B = (b_1, b_2, \dots, b_n)$, o sea $A = \{(a_i)\}$ y $B = \{(b_i)\}$, $i = 1, 2, \dots, n$, en un espacio de n dimensiones.

Se dice que dos puntos en un espacio de n dimensiones son iguales, si y sólo si sus coordenadas correspondientes son iguales. Es decir:

$$A = B \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = b_1 \\ a_2 = b_2 \\ \vdots \\ a_n = b_n \end{cases} \quad \text{es decir } a_i = b_i \quad \forall i$$

Por definición, el resultado de la suma de dos puntos es otro punto -- cuyas coordenadas se obtienen sumando las coordenadas correspondientes de -- los dos puntos dados. Es decir:

$$C = A + B = \{(a_i + b_i)\} = \{(c_i)\}, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

El resultado de la multiplicación de un escalar (número real) por un -- punto, es otro punto cuyas coordenadas se obtienen multiplicando el escalar -- por cada una de las coordenadas del punto. Llamando λ al escalar, puede es-- cribirse:

$$C = \lambda A = \{(\lambda a_i)\} = \{(c_i)\}, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

1.4. ESPACIO EUCLIDIANO. PROPIEDADES.

Un conjunto cuyos elementos son puntos, y en el que están definidas -- las operaciones de suma de dos cualesquiera de sus elementos y de multiplica-- ción de un escalar por uno cualquiera de sus elementos, constituye un 'Espa-- cio Euclídeo'.

El Espacio Euclídeo de n dimensiones, que indicaremos por E_n , está -- formado por puntos de n coordenadas.

Sean los puntos $A = \{(a_i)\}$, $B = \{(b_i)\}$, $i = 1, 2, \dots, n$ y un es-- calar cualquiera λ . De acuerdo con la definición de Espacio Euclídeo, -- podemos escribir:

$$A + B = \{(a_i + b_i)\}$$

$$\text{y } \lambda A = \{(\lambda a_i)\}$$

Estas dos operaciones, cumplen con las propiedades que se enuncian a -- continuación:

Sean $A = \{(a_i)\}$, $B = \{(b_i)\}$ y $C = \{(c_i)\}$, $i = 1, 2, \dots, n$, tres puntos cualesquiera en E_n y α y β dos escalares cualesquiera; entonces:

- 1.- $A + B = B + A$ (Propiedad conmutativa)
- 2.- $(A + B) + C = A + (B + C)$ (Propiedad asociativa respecto a la suma de puntos).
- 3.- $\exists O = (0, 0, \dots, 0)$, $O \in E_n$ (A tal elemento lo llamaremos -- tal que $O + A = A + O = A$ neutro aditivo).
- 4.- Dado A , existe un punto -- $-A = \{(-a_i)\}$ tal que $A + (-A)$ (A este elemento lo llamaremos -- inverso aditivo),
 $= O$
- 5.- $\alpha(A+B) = \alpha A + \alpha B$ (Propiedad distributiva de la -- multiplicación de un escalar so-- bre la suma de puntos).
- 6.- $(\alpha + \beta) A = \alpha A + \beta A$ (Propiedad distributiva de la -- multiplicación de un escalar por un punto sobre la suma de esca-- les).
- 7.- $(\alpha\beta) A = \alpha(\beta A)$ (Propiedad asociativa respecto a la multiplicación por escalares)
- 8.- $1A = A$ (El escalar 1, representa al ele-- mento neutro multiplicativo).

Las ocho propiedades anteriores, pueden demostrarse partiendo de que --

Las coordenadas de los puntos son números reales y que éstos cumplen con ciertas propiedades que se tratan con detalle en el Capítulo V del curso de Álgebra.

A continuación se presenta la demostración de una de las propiedades enunciadas. Se deja al alumno, la verificación de las propiedades restantes.

Propiedad asociativa respecto a la suma de puntos: Hay que demostrar que $(A+B)+C = A+(B+C)$.

Calculemos primeramente $A+B$; por definición de suma de puntos tenemos $A+B = \{(a_i + b_i)\}$, $i = 1, 2, \dots, n$
sumando al punto $(A+B)$ el punto C , se tiene: $\{(A+B)+C\} = \{(a_i + b_i) + c_i\}$; se observa que la coordenada i -ésima de $(A+B)+C$ es $(a_i + b_i) + c_i$.

Dado que $a_i, b_i, c_i \in \mathbb{R}$ y cumplen con la propiedad asociativa respecto a la suma, puede concluirse: $(a_i + b_i) + c_i = a_i + b_i + c_i = a_i + (b_i + c_i)$
 $\therefore (a_i + b_i) + c_i = a_i + (b_i + c_i)$

La igualdad anterior es válida $\forall i$, por lo que puede escribirse:

$$(A+B)+C = A+(B+C)$$

con lo que queda demostrada esta propiedad.

Ejemplo 1.1

Dados los puntos $A = (1, -1, 0)$, $B = (4, -2, 3)$, $C = (0, 0, 2)$ y $D = (-3, 1, -4)$

a) Obtener $A+B+C+D$

Solución:

$$\begin{aligned} A+B+C+D &= (1, -1, 0) + (4, -2, 3) + (0, 0, 2) + (-3, 1, -4) = \\ &= (1+4+0-3, -1-2+0+1, 0+3-2-4) = \\ &= \boxed{(2, -2, -3)} \end{aligned}$$

b) Calcular el valor del escalar α para que se cumpla que:

$$\alpha(0) - 5(0) = (0, 0, 0)$$

Solución:

$$\alpha(-3, 1, -4) - 5(-3, 1, -4) = (0, 0, 0)$$

$$(-3\alpha, \alpha, -4\alpha) - (-15, 5, -20) = (0, 0, 0)$$

Por la definición de igualdad entre puntos podemos escribir:

$$\left. \begin{aligned} -3\alpha + 15 &= 0 \\ \alpha - 5 &= 0 \\ -4\alpha + 20 &= 0 \end{aligned} \right\} \rightarrow \boxed{\alpha = 5}$$

Ejemplo 1.2

Obtener las coordenadas del punto M si: $\alpha M - 6 + N = I$, siendo $6 = (2, 6, 3, 4)$, $N = (7, -2, 2, 1)$, $I = (-3, -1, 2, 5)$ y $\alpha = 3$

Solución:

$$3(m_1, m_2, m_3, m_4) - (2, 6, 3, 4) + (7, -2, 2, 1) = (-3, -1, 2, 5)$$

$$(3m_1 - 2 + 7, 3m_2 - 6 - 2, 3m_3 - 3 + 2, 3m_4 - 4 + 1) = (-3, -1, 2, 5)$$

$$(3m_1 - 1, 3m_2 - 8, 3m_3 - 1, 3m_4 - 3) = (-3, -1, 2, 5)$$

Por la definición de igualdad podemos escribir:

$$3m_1 - 1 = -3 \quad + \quad m_1 = -\frac{2}{3}$$

$$3m_2 - 8 = -1 \quad + \quad m_2 = \frac{7}{3}$$

$$3m_3 - 1 = 2 \quad + \quad m_3 = 1$$

$$3m_4 - 3 = 5 \quad + \quad m_4 = \frac{8}{3}$$

Por lo tanto:

$$M = \left\{ -\frac{2}{3}, \frac{7}{3}, 1, \frac{8}{3} \right\}$$

Ejemplo 1.3

Si $P = (\pi, 2\sqrt{2}, -1)$ y $Q = (1, -2, 3)$, obtener $P + 2Q$.

Solución:

$$\begin{aligned} P + 2Q &= (\pi, 2\sqrt{2}, -1) + 2(1, -2, 3) \\ &= (\pi, 2\sqrt{2}, -1) + (2, -4, 6) \\ &= \boxed{(\pi + 2, 2\sqrt{2}, -4, 5)} \end{aligned}$$

1.5. VECTOR EN UN ESPACIO DE TRES DIMENSIONES. CARACTERÍSTICAS. SEGMENTOS DIRIGIDOS.

En Ingeniería, es frecuente encontrarse con cantidades que poseen magnitud y dirección; entre éstas tenemos fuerza, velocidad, aceleración, desplazamiento, etc. A este tipo de cantidades se les denomina cantidades vectoriales. Así que, aunque como se verá en el curso de Álgebra, existen muchos-

entes matemáticos que se pueden clasificar como vectores, también las cantidades que tienen magnitud y dirección pueden clasificarse como tales. En este curso tomaremos los vectores en este sentido y estudiaremos principalmente sus propiedades geométricas.

Existen tres formas de introducir el concepto de vector, geoméricamente, analíticamente y axiomáticamente. Geométricamente los vectores se representan mediante segmentos dirigidos, con los que pueden efectuarse operaciones de suma, resta y multiplicación por escalar; analíticamente se estudian dichas operaciones y se deducen sus propiedades, introduciendo nuevos conceptos, como productos entre vectores. No se llegará en estos apuntes al tratamiento axiomático, el cual se estudia en el curso de Álgebra.

Puede representarse geoméricamente a un vector, mediante un segmento de recta entre dos puntos, al que se asigne un sentido de recorrido y se le llama "segmento dirigido".

Sea el segmento dirigido de la figura 1.8, entre los puntos P y Q; a este segmento dirigido se le designa como \overrightarrow{PQ} , en donde la primera letra indica el punto inicial llamado origen, y la segunda el punto final llamado extremo.

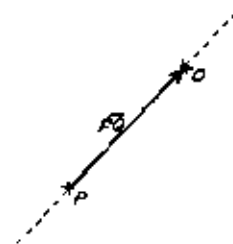


Figura 1.8

Es fácil ver que los segmentos dirigidos presentan las características de un vector a saber: dirección, dada por la dirección de la recta y por el sentido de recorrido (la flecha) y magnitud, dada por la longitud del segmento. Otra forma de representar el vector \overrightarrow{PQ} , es la siguiente: Sea $P = (p_1, p_2, p_3)$ el-

origen del segmento dirigido y $Q = (q_1, q_2, q_3)$ el extremo de dicho segmento; llamaremos componentes de este vector a los elementos de la terna ordenada $\{r_1, r_2, r_3\}$, donde $r_1 = q_1 - p_1$; $r_2 = q_2 - p_2$; $r_3 = q_3 - p_3$. Así pues, le llamaremos \vec{r} al vector (en general se usarán letras minúsculas con una raya encima para designar a los vectores) de componentes (r_1, r_2, r_3) .

La interpretación geométrica de las componentes del vector \vec{r} , se ilustra en la figura 1.9.

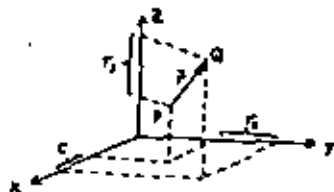


Figura 1.9.

1.6. IGUALDAD, SUMA Y DIFERENCIA DE VECTORES. MULTIPLICACIÓN POR UN ESCALAR INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA.

1.6.1. Igualdad de vectores.

Consideremos al vector $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ representado por el segmento dirigido \overline{PQ} , y el vector $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ representado por \overline{RS} (figura 1.10);

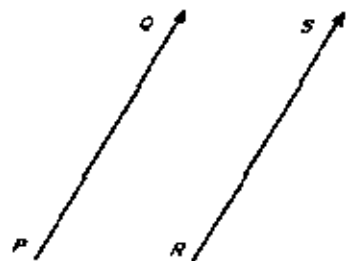


Figura 1.10

decimos que $\vec{a} = \vec{b}$, si y sólo si las componentes correspondientes son iguales, esto es: $a_1 = b_1$; $a_2 = b_2$; $a_3 = b_3$. en general $a_i = b_i$, $i = 1, 2, 3$, por

tanto, el segmento \overline{PQ} tendrá la misma magnitud y dirección que el segmento \overline{RS} .

De esto se puede concluir que un vector no se modifica si se traslada paralelamente a sí mismo; por esta razón a estos vectores les llamaremos libres. Conviene aclarar que existen también vectores deslizantes, o sea aquéllos que sólo tienen libertad de deslizar a lo largo de su línea de acción conservando su magnitud y su dirección, y vectores fijos, que son aquellos que además de tener magnitud y dirección, están ligados a un punto de aplicación; en este curso trataremos exclusivamente con vectores libres.

1.6.2. Suma de vectores.

La suma de los vectores $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ y $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$, se define como el vector $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} = (c_1, c_2, c_3)$ en donde $c_i = a_i + b_i$, $i = 1, 2, 3$. La interpretación geométrica de la suma de dos vectores se ilustra en la figura 1.11.

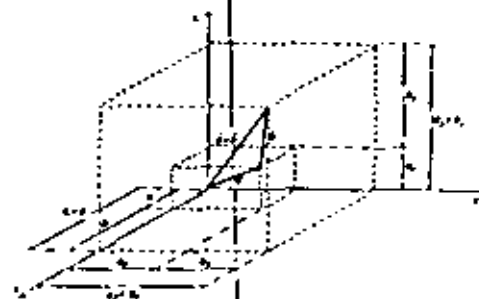


Figura 1.11

1.6.3. Diferencia de vectores.

sea el vector $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$; y el vector $(-b_1, -b_2, -b_3)$ al que llamaremos $-\vec{b}$, y el cual se define como el

"Inverso aditivo" del vector \vec{b} .

La diferencia entre los vectores $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ y $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ denotada $\vec{a} - \vec{b}$, se define como el vector que se obtiene al sumar a \vec{a} el inverso aditivo de \vec{b} :

$$\vec{c} = \vec{a} + (-\vec{b}) = (a_1, a_2, a_3) + (-b_1, -b_2, -b_3) = (a_1 - b_1, a_2 - b_2, a_3 - b_3)$$

$$\vec{c} = (c_1, c_2, c_3), \text{ es decir } c_i = a_i - b_i, \quad i = 1, 2, 3$$

entonces: $\vec{a} - \vec{b} = (a_1 - b_1, a_2 - b_2, a_3 - b_3)$

La interpretación geométrica de la diferencia de vectores, se ilustra en la figura 1.12.

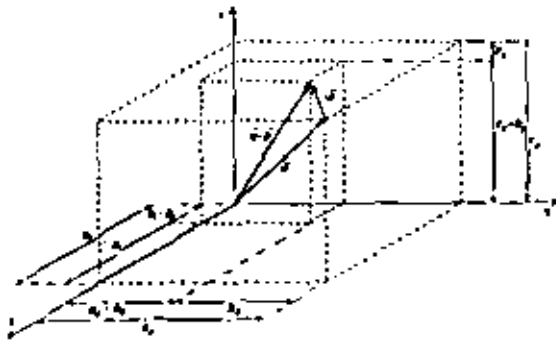


Figura 1.12.

Otra manera de interpretar la diferencia de vectores, se muestra en la figura 1.13, en donde, como se ve, los vectores \vec{a} y \vec{b} se dibujan con origen común y la diferencia $\vec{a} - \vec{b}$ es el vector que va del extremo de \vec{b} al de \vec{a} .

Es decir, se hace la suma $\vec{b} + (\vec{a} - \vec{b}) = \vec{a}$. Se observa que el vector

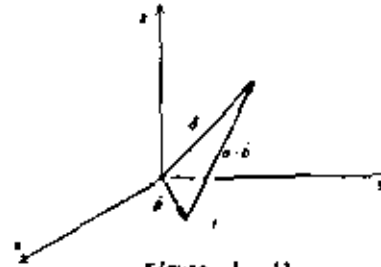


Figura 1.13.

$\vec{a} - \vec{b}$ de la figura 1.13 está trasladado con respecto al de la figura 1.11, lo cual se explica por tratarse de vectores libres.

1.6.4. Multiplicación por un escalar

Sea λ un escalar y \vec{a} un vector de componentes (a_1, a_2, a_3) ; definiremos el producto de un vector por un escalar, indicándolo $\lambda\vec{a}$, como el vector cuyas componentes son $\lambda\vec{a} = (\lambda a_1, \lambda a_2, \lambda a_3) = \{(\lambda a_i)\}, i = 1, 2, 3$. Su interpretación geométrica se muestra en la figura 1.14.

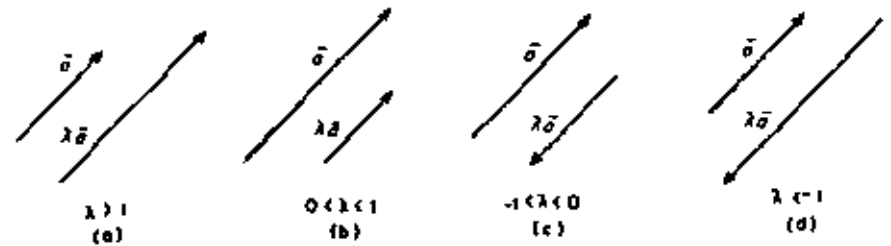


Figura 1.14.

Es importante hacer notar que se ha hablado del producto de un vector por un escalar; más adelante se tratarán los productos entre vectores.

1.7. VECTOR DE POSICIÓN DE UN PUNTO. RELACION ENTRE PUNTOS Y VECTORES.

Sea el punto P en E_3 , cuyas coordenadas son (x, y, z) ; llamaremos vector de posición de este punto a) representado por el segmento dirigido que

va del origen del sistema a dicho punto.

Designando por \vec{p} al segmento dirigido, sus componentes son: $\vec{OP} = \vec{p} = (x - 0, y - 0, z - 0) = (x, y, z)$. Como se ve, las componentes del vector de posición son siempre iguales a las coordenadas del punto, como se ilustra en la figura 1.15.

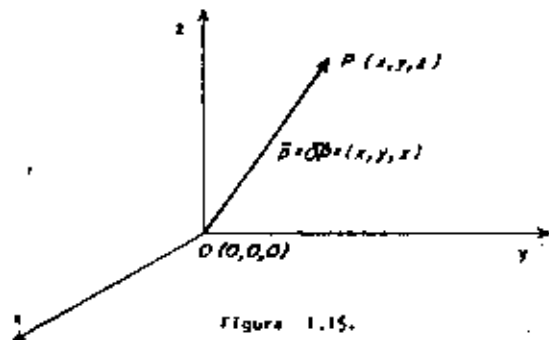


Figura 1.15.

Puede establecerse una relación de correspondencia uno a uno entre el Espacio Euclidiano y el conjunto de vectores con la misma dimensión. Es decir, a cada punto de E_3 le corresponde uno y sólo un vector de tres dimensiones y viceversa (Figura 1.16.)



Figura 1.16

El concepto de vector, puede extenderse a sistemas con más de tres dimensiones, no así su representación geométrica. Ahora bien, la correspondencia entre puntos y vectores de posición existe cualquiera que sea la dimensión en que se trabaje.

En general, podemos definir a un vector en un sistema de n dimensiones, como aquel representado por $\vec{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n) = \{a_i\} \quad i = 1, 2, \dots, n$, en donde las $a_i \in \mathbb{R}$ representan las componentes del vector \vec{a} . El concepto de vector será el punto de apoyo para desarrollar los cuatro primeros capítulos de estos apuntes.

Ejemplo 1.4.

Sean los puntos $A = (-7, 5, 8)$, $B = (1, -2, 8)$, $C = (5, -4, -2)$; encontrar las componentes de los segmentos dirigidos \vec{AB} , \vec{BA} , \vec{CA} y \vec{CB} .

Solución:

$$\vec{AB} = (1 + 7, -2 - 5, 8 - 8) = (8, -7, 2)$$

$$\vec{BA} = (-7 - 1, 5 + 2, 8 - 8) = (-8, 7, 0)$$

$$\vec{CA} = (-7 - 5, 5 + 4, 8 + 2) = (-12, 9, 10)$$

$$\vec{CB} = (1 - 5, -2 + 4, 8 + 2) = (-4, 2, 10)$$

Ejemplo 1.5.

Dados los vectores $\vec{a} = (-3, 0, 1)$, $\vec{b} = (2, -1, 4)$ y $\vec{c} = (0, 4, 4)$, encontrar: $\vec{a} - 3\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}$

Solución:

$$\begin{aligned} \vec{a} - 3\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c} &= (-3, 0, 1) - 3(2, -1, 4) + \frac{1}{2}(0, 4, 4) \\ &= (-3, 0, 1) - (6, -3, 12) + (0, 2, 2) \\ &= \boxed{(-9, 5, -9)} \end{aligned}$$

Ejemplo 1.6.

Dados los puntos $A = (2, -1, 3)$ y $B = (0, -5, -4)$ y los vectores -

$\vec{p} = (2, 2, -1)$ y $\vec{q} = (-2, 0, 3)$, encontrar: $3\vec{p} - 2\vec{q} + 5\vec{BA} + 3\vec{B} - 2\vec{A}$, --
siendo \vec{a} y \vec{b} los vectores de posición de los puntos A y B, respectivamente.

Solución:

$$3\vec{p} = (6, 6, -3)$$

$$2\vec{q} = (-4, 0, 6)$$

$$\vec{BA} = (2, 4, 7); 5\vec{BA} = (10, 20, 35)$$

$$3\vec{B} = (0, -15, -12)$$

$$2\vec{A} = (4, -2, 6)$$

$$\begin{aligned} 3\vec{p} - 2\vec{q} + 5\vec{BA} + 3\vec{B} - 2\vec{A} &= (6, 6, -3) - (-4, 0, 6) + (10, 20, 35) \\ &\quad + (0, -15, -12) - (4, -2, 6) = \\ &= (6 + 4 + 10 + 0 - 4, 6 - 0 + 20 - 15 + 2, -3 - 6 + 35 - 12 - 6) \\ &= \boxed{(16, 13, 8)} \end{aligned}$$

1.8. PRODUCTO ESCALAR DE DOS VECTORES. MÓDULO DE UN VECTOR.

1.8.1. Producto escalar de dos vectores.

El producto escalar de dos vectores $\vec{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ y $\vec{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$, denotado por $\vec{a} \cdot \vec{b}$, que se lee "a punto b" se define como:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \sum_{k=1}^n a_k b_k = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n$$

El resultado del producto escalar de dos vectores es precisamente un escalar (número real) y no un vector.

Al producto escalar también se le conoce como "producto interno" o "producto punto".

Ejemplo 1.7.

Sean los vectores $\vec{a} = (2, 1, 1)$, $\vec{b} = (3, -1, -2)$ y $\vec{c} = (-1, 4, 5)$. Encontrar $\vec{a} \cdot \vec{b}$, $\vec{a} \cdot \vec{c}$, $\vec{c} \cdot \vec{a}$ y $3\vec{b} \cdot 2\vec{c}$.

Solución:

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} &= (2, 1, 1) \cdot (3, -1, -2) = (2)(3) + (1)(-1) + (1)(-2) = \\ &= 6 - 1 - 2 = \underline{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{c} &= (2, 1, 1) \cdot (-1, 4, 5) = (2)(-1) + (1)(4) + (1)(5) = -2 \\ &\quad + 4 + 5 = \underline{7} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{c} \cdot \vec{a} &= (-1, 4, 5) \cdot (2, 1, 1) = (-1)(2) + (4)(1) + (5)(1) = -2 \\ &\quad + 4 + 5 = \underline{7} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3\vec{b} \cdot 2\vec{c} &= [3(3, -1, -2)] \cdot [2(-1, 4, 5)] = (9, -3, -6) \cdot (-2, \\ &8, 10) = (9)(-2) + (-3)(8) + (-6)(10) = -18 - 24 - 60 \\ &= \underline{-102} \end{aligned}$$

El producto escalar tiene las propiedades siguientes:

- 1.- $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ (Propiedad conmutativa)
- 2.- $a \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = a \cdot \vec{b} + a \cdot \vec{c}$ (Propiedad distributiva respecto a la suma de vectores).
- 3.- $(\alpha \vec{a}) \cdot \vec{b} = \alpha (\vec{a} \cdot \vec{b})$, $\alpha \in \mathbb{R}$ (Propiedad asociativa)
- 4.- $\vec{a} \cdot \vec{a} \geq 0$; $\vec{a} \cdot \vec{a} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{0}$, siendo $\vec{0}$ el vector cero.

Demostremos la segunda propiedad. Las demás pueden demostrarse en forma análoga, quedando este trabajo para el alumno.

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$$

Expresando los vectores en función de sus componentes:

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) &= (a_1, a_2, \dots, a_n) \cdot [(b_1 + c_1), (b_2 + c_2), \dots, \\ &\quad (b_n + c_n)] \\ &= a_1(b_1 + c_1) + a_2(b_2 + c_2) + \dots + a_n(b_n + c_n) \\ &= a_1 b_1 + a_1 c_1 + a_2 b_2 + a_2 c_2 + \dots + a_n b_n + a_n c_n \\ &= (a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n) + (a_1 c_1 + a_2 c_2 + \dots \\ &\quad + a_n c_n) \\ &= \sum_{k=1}^n a_k b_k + \sum_{k=1}^n a_k c_k = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c} \end{aligned}$$

$$\therefore \vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$$

con lo que queda demostrada esta propiedad.

1.8.2. Módulo de un vector.-

Llamemos módulo, norma o magnitud de un vector \vec{a} , que denotamos $|\vec{a}|$ al número

$$|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}}$$

Como $\vec{a} \cdot \vec{a} > 0$ (propiedad 4), siempre es posible extraer la raíz cuadrada.

En función de las componentes podemos escribir:

$$\begin{aligned} |\vec{a}| &= \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2} \\ &= \left[\sum_{k=1}^n a_k^2 \right]^{1/2} \end{aligned}$$

Para un espacio de tres dimensiones:

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

lo que coincide con la noción de longitud deducida del teorema de Pitágoras.

como se ilustra en la figura siguiente.

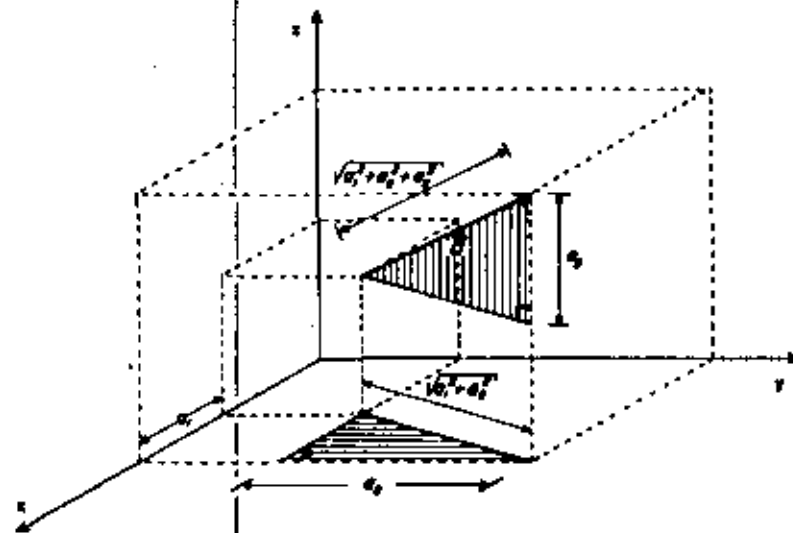


Figura 1.17

Ejemplo 1.8

Sean los vectores $\vec{a} = (3, 0, 5)$ y $\vec{b} = (2, -1, -3)$. Calcular a) $|\vec{a}|$,

b) $|\vec{b}|$, c) $|\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}|$, d) $\left| \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|} \right|$, e) $\left| \frac{\vec{a} + \vec{b}}{|\vec{a} + \vec{b}|} \right|$

Solución:

a) $|\vec{a}| = \sqrt{(3)^2 + (0)^2 + (5)^2} = \sqrt{9 + 0 + 25} = \sqrt{34}$

b) $|\vec{b}| = \sqrt{(2)^2 + (-1)^2 + (-3)^2} = \sqrt{4 + 1 + 9} = \sqrt{14}$

c) $|\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}| = \sqrt{(3 + 1)^2 + (0 - 0.5)^2 + (5 - 1.5)^2} = \sqrt{16 + 0.25 + 12.25} = \sqrt{28.5} = \sqrt{\frac{57}{2}}$

$$c) \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} = (3, 0, 5) + \frac{1}{2}(2, -1, -3) = (3, 0, 5) + (1, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}) = (4, -\frac{1}{2}, \frac{7}{2})$$

$$|\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}| = \sqrt{16 + \frac{1}{4} + \frac{49}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{174}$$

$$d) \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|} = \frac{(2, -1, -3)}{\sqrt{(2)^2 + (-1)^2 + (-3)^2}} = \frac{(2, -1, -3)}{\sqrt{14}}$$

$$\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|} = \left(\frac{2}{\sqrt{14}}, \frac{-1}{\sqrt{14}}, \frac{-3}{\sqrt{14}}\right)$$

$$e) \frac{\vec{a} + \vec{b}}{|\vec{a} + \vec{b}|} = \frac{(5, -1, 2)}{\sqrt{(5)^2 + (-1)^2 + (2)^2}} = \frac{(5, -1, 2)}{\sqrt{30}}$$

$$|\frac{\vec{a} + \vec{b}}{|\vec{a} + \vec{b}|}| = \sqrt{\left(\frac{5}{\sqrt{30}}\right)^2 + \left(\frac{-1}{\sqrt{30}}\right)^2 + \left(\frac{2}{\sqrt{30}}\right)^2} = \sqrt{\frac{25}{30} + \frac{1}{30} + \frac{4}{30}} = \sqrt{\frac{30}{30}} = 1$$

$$f) \frac{\vec{a} + \vec{b}}{|\vec{a} + \vec{b}|} = \left(\frac{5}{\sqrt{30}}, \frac{-1}{\sqrt{30}}, \frac{2}{\sqrt{30}}\right)$$

$$g) \frac{\vec{a} + \vec{b}}{|\vec{a} + \vec{b}|} = \left(\frac{5}{\sqrt{30}}, \frac{-1}{\sqrt{30}}, \frac{2}{\sqrt{30}}\right)$$

En el ejemplo anterior, podemos observar varias cosas interesantes:

1) Comparando los resultados de los incisos a) y b) podemos ver que $|\lambda\vec{a}| = |\lambda| |\vec{a}|$, para el vector \vec{a} dado; se sugiere al alumno que proponga una demostración general de la igualdad $|\lambda\vec{r}| = |\lambda| |\vec{r}|$, donde λ es un escalar cualquiera y $\vec{r} = (r_1, r_2, r_3)$.

2) Observamos también que el resultado de los incisos d) y e) en ambos casos es igual a 1. Los vectores cuyo módulo es igual a la unidad se llaman

"vectores unitarios"; entonces, para nuestro ejemplo los vectores $\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$ y $\frac{\vec{a} + \vec{b}}{|\vec{a} + \vec{b}|}$ son unitarios. Se propone al alumno que demuestre la igualdad $\frac{|\vec{p}|}{|\vec{p}|} = 1$, donde $\vec{p} = (p_1, p_2, p_3)$.

3) En los dos últimos incisos, se plantea el cociente de un vector entre un escalar (igual al módulo de un vector, operación que hasta ahora no ha sido definida, pero que es equivalente al producto del vector por el inverso del módulo (multiplicación de un vector por un escalar) que si podemos efectuar y, de hecho, así lo hicimos; es decir, para los vectores $\vec{q} = (q_1, q_2, q_3)$ y $\vec{r} = (r_1, r_2, r_3)$ se tiene que:

$$\frac{\vec{r}}{|\vec{q}|} = \frac{1}{|\vec{q}|} \vec{r} = \frac{1}{\sqrt{q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}} (r_1, r_2, r_3) =$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}} r_1, \frac{1}{\sqrt{q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}} r_2, \frac{1}{\sqrt{q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}} r_3 \right)$$

$$= \left(\frac{r_1}{\sqrt{q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}}, \frac{r_2}{\sqrt{q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}}, \frac{r_3}{\sqrt{q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}} \right)$$

1.8.3. Distancia entre dos puntos.

Sean dos puntos $A = (a_1, a_2, a_3)$ y $B = (b_1, b_2, b_3)$, cuyos vectores de posición son, respectivamente, $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ y $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$. El módulo del vector $(\vec{b} - \vec{a})$ será igual a la distancia entre A y B, como puede apreciarse en la figura 1.8.

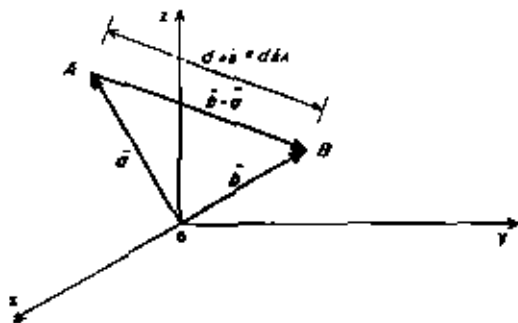


Figura 1.18

Podemos escribir:

$$d_{AB} = |\vec{b} - \vec{a}| = \sqrt{(\vec{b} - \vec{a}) \cdot (\vec{b} - \vec{a})}$$

En función de las componentes de los vectores:

$$d_{AB} = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}$$

$$d_{AB} = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}$$

que, como vemos, coincide con la definición de distancia entre dos puntos, deducida del Teorema de Pitágoras.

Ejemplo 1.9

Demstrar que los puntos $P = (3, 0, 3)$, $Q = (-3, 0, -3)$ y $R = (-3/\sqrt{3}, 0, 3/\sqrt{3})$ son vértices de un triángulo equilátero.

Solución:

$$d_{PQ} = \sqrt{(3 - (-3))^2 + (0 - 0)^2 + (3 - (-3))^2} = \sqrt{72} = 6\sqrt{2}$$

$$d_{PR} = \sqrt{(-3/\sqrt{3} - 3)^2 + (0 - 0)^2 + (3/\sqrt{3} - 3)^2} = \sqrt{27 + 18/\sqrt{3} + 9 + 0 + 27 - 18/\sqrt{3} + 9} = \sqrt{72} = 6\sqrt{2}$$

$$d_{RQ} = \sqrt{(-3 - (-3/\sqrt{3}))^2 + (0 - 0)^2 + (-3 - 3/\sqrt{3})^2} = \sqrt{72} = 6\sqrt{2}$$

$$\therefore d_{PQ} = d_{PR} = d_{RQ}$$

L. q. q. d.

1.9 PERPENDICULARIDAD.

Sean dos vectores \vec{a} y \vec{b} , que forman los lados de un paralelogramo, como se ve en la figura 1.19. Geométricamente podemos decir que \vec{a} y \vec{b} son perpendiculares si las diagonales del paralelogramo tienen la misma longitud, o sea, si el paralelogramo resulta ser un rectángulo.

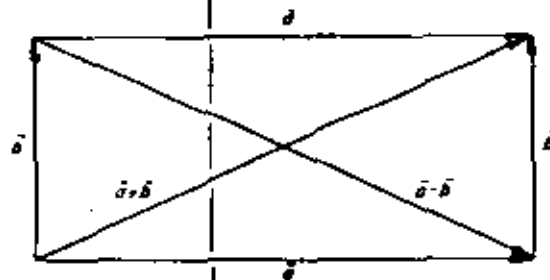


Figura 1.19

La condición de perpendicularidad e igualdad de las diagonales en el lenguaje algebraico puede expresarse como:

$$\vec{a} \perp \vec{b} \iff |\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}|$$

Así, por ejemplo, podemos afirmar que los vectores $\vec{a} = (5, -8, 3)$ y $\vec{b} = (-3, 4, 1)$ son perpendiculares.

$\vec{a} = (2, 5, 10)$ son perpendiculares, porque se cumple que el módulo de la suma de dos vectores es igual al módulo de su diferencia, como se justifica en seguida:

$$\vec{a} + \vec{b} = (5, -8, 3) + (2, 5, 10) = (7, -3, 13)$$

$$|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{7^2 + (-3)^2 + 13^2} = \sqrt{227}$$

$$\vec{a} - \vec{b} = (5, -8, 3) - (2, 5, 10) = (3, -13, -7)$$

$$|\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{3^2 + (-13)^2 + (-7)^2} = \sqrt{227}$$

$$\therefore |\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}| \Rightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$$

Teorema 1.1.

Dos vectores \vec{a} y \vec{b} son perpendiculares si y sólo si $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.

Demstración:

Sean los vectores $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ y $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$. Hemos visto -- que si \vec{a} y \vec{b} son perpendiculares se cumple que

$$|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}|$$

Expresando esto en función de las componentes podemos escribir:

$$\sqrt{(a_1 + b_1)^2 + (a_2 + b_2)^2 + (a_3 + b_3)^2} = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + (a_3 - b_3)^2}$$

Elevando al cuadrado a ambos miembros:

$$(a_1 + b_1)^2 + (a_2 + b_2)^2 + (a_3 + b_3)^2 = (a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + (a_3 - b_3)^2$$

Desarrollando los binomios:

$$a_1^2 + 2a_1b_1 + b_1^2 + a_2^2 + 2a_2b_2 + b_2^2 + a_3^2 + 2a_3b_3 + b_3^2 =$$

$$= a_1^2 - 2a_1b_1 + b_1^2 + a_2^2 - 2a_2b_2 + b_2^2 + a_3^2 - 2a_3b_3 + b_3^2$$

Cancelando los términos semejantes:

$$2a_1b_1 + 2a_2b_2 + 2a_3b_3 = -2a_1b_1 - 2a_2b_2 - 2a_3b_3$$

Es decir:

$$4a_1b_1 + 4a_2b_2 + 4a_3b_3 = 0$$

Dividiendo entre 4:

$$a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = 0$$

El primer miembro de esta ecuación es precisamente $\vec{a} \cdot \vec{b}$, por lo que podemos escribir:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

con lo que el teorema queda demostrado.

De acuerdo con este teorema podemos entonces escribir:

$$\vec{a} \perp \vec{b} \iff \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

es decir, la condición necesaria y suficiente para que dos vectores sean perpendiculares es que su producto escalar sea igual a cero.

Ejemplo 1.10

Determinar cuáles de los siguientes pares de vectores son perpendiculares:

a) $\vec{a} = (-2, 6, 4)$, $\vec{b} = (3, 1/2, 1)$

b) $\vec{a} = (2, -5, 1)$, $\vec{b} = (-3, 0, 6)$

c) $\vec{a} = (3, -1)$, $\vec{b} = (4, -12)$

Solución:

a) $\vec{a} \cdot \vec{b} = (-2, 6, 4) \cdot (3, 1/2, 1) = -6 + 3 + 4 = 1 \neq 0$

\therefore no existe perpendicularidad.

$$b) \vec{a} \cdot \vec{b} = (2, -5, 1) \cdot (-3, 0, 6) = -6 + 0 + 6 = 0$$

$$\therefore \vec{a} \perp \vec{b}$$

$$c) \vec{a} \cdot \vec{b} = (3, -1) \cdot (4, -12) = 12 + 12 = 24 \neq 0$$

\therefore no existe perpendicularidad.

Ejemplo 1.11

Encontrar el valor del escalar α , de manera que los vectores $\vec{a} = (3, -1, 2)$ y $\vec{b} = (-2, \alpha, 1)$ sean perpendiculares.

Solución:

Calculamos el producto escalar:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (3, -1, 2) \cdot (-2, \alpha, 1) = -6 + \alpha + 2 = \alpha - 4$$

Ahora bien, $\vec{a} \cdot \vec{b}$ debe ser igual a cero. Entonces:

$$\alpha - 4 = 0$$

$$\therefore \alpha = 4$$

1.10 INTERPRETACION GEOMETRICA DEL PRODUCTO ESCALAR. PROYECCION ORTOGONAL. COMPONENTES. ANGULO ENTRE DOS VECTORES.

Sean dos vectores cualesquiera \vec{a} y \vec{b} en un espacio de tres dimensiones. Pasemos por el origen del vector \vec{a} una recta paralela a \vec{b} y tracemos una perpendicular a dicha recta desde el extremo final de \vec{a} , tal como se muestra en la figura 1-20.

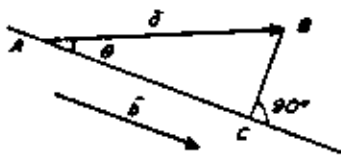


Figure 1-20

El vector \vec{a} forma la hipotenusa del triángulo rectángulo ABC y el segmento dirigido \overline{AC} puede expresarse como: $\overline{AC} = k\vec{b}$, siendo k un escalar.

El segmento dirigido \overline{CB} está dado entonces por: $\overline{CB} = \vec{a} - k\vec{b}$.

Ahora bien, \vec{b} y \overline{CB} son perpendiculares, por lo que debe cumplirse que $\vec{b} \cdot \overline{CB} = 0$, es decir:

$$\vec{b} \cdot (\vec{a} - k\vec{b}) = 0$$

desarrollando:

$$\vec{b} \cdot \vec{a} - k\vec{b} \cdot \vec{b} = 0$$

es decir:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = k\vec{b} \cdot \vec{b}$$

Finalmente el valor del escalar k está dado por:

$$k = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\vec{b} \cdot \vec{b}} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} \quad (1)$$

El vector $k\vec{b}$, alojado sobre el cateto \overline{AC} del triángulo rectángulo de la figura 1.20, se llama "proyección ortogonal de \vec{a} sobre \vec{b} ", y se representa como $\text{Proy}_{\vec{b}}\vec{a}$; de acuerdo con la expresión (1) podemos escribir:

$$\text{Proy}_{\vec{b}}\vec{a} = k\vec{b} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} \vec{b}$$

que también podemos expresar como:

$$\text{Proy}_{\vec{b}}\vec{a} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|} \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$$

El vector $\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$ es un vector unitario en la dirección de \vec{b} ; el escalar $\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|}$ nos representa entonces la magnitud dirigida del vector $\text{Proy}_{\vec{b}}\vec{a}$, se llama "componente de \vec{a} sobre \vec{b} " y se denota $\text{Comp}_{\vec{b}}\vec{a}$; es decir:

$$\text{Comp}_{\vec{b}}\vec{a} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|}$$

Por otra parte, volviendo a la figura 1-20, utilizando relaciones trigonométricas en el triángulo ABC podemos escribir:

$$\cos \phi = \frac{|AC|}{|AB|} = \frac{|kE|}{|\vec{a}|} = \frac{k|\vec{b}|}{|\vec{a}|} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|}$$

es decir:

$$\cos \phi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|}$$

La expresión anterior nos permite calcular el coseno del ángulo que forman los vectores \vec{a} y \vec{b} . De acuerdo con esta ecuación, otra manera de representar el producto escalar entre los vectores \vec{a} y \vec{b} es:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \phi$$

Ejemplo 1.12

En cada uno de los casos siguientes calcúlese $\text{Comp}_{\vec{b}} \vec{a}$ y $\text{Proy}_{\vec{b}} \vec{a}$

- a) $\vec{a} = (-5, 8)$; $\vec{b} = (1, 1)$
 b) $\vec{a} = (1, 2, -3)$; $\vec{b} = (0, 0, 1)$

Solución:

$$\text{a) } \text{Comp}_{\vec{b}} \vec{a} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|} = \frac{(-5, 8) \cdot (1, 1)}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{-5 + 8}{\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}}$$

$$\text{Proy}_{\vec{b}} \vec{a} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|} \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|} = \frac{3}{\sqrt{2}} \frac{(1, 1)}{\sqrt{2}} = \frac{3(1, 1)}{2} = \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2} \right)$$

$$\text{b) } \text{Comp}_{\vec{b}} \vec{a} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|} = \frac{(1, 2, -3) \cdot (0, 0, 1)}{\sqrt{0^2 + 0^2 + 1^2}} = \frac{0 + 0 - 3}{1} = -3$$

$$\text{Proy}_{\vec{b}} \vec{a} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|} \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|} = -3 \frac{(0, 0, 1)}{1} = (0, 0, -3)$$

Ejemplo 1.13

Calcular el ángulo que forman los vectores $\vec{a} = (3, 0, -1)$ y $\vec{b} = (6, -2, 0)$

Solución:

$$\cos \phi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{(3, 0, -1) \cdot (6, -2, 0)}{\sqrt{3^2 + 0^2 + (-1)^2} \sqrt{6^2 + (-2)^2 + 0^2}} = \frac{18}{\sqrt{10} \sqrt{40}} = \frac{18}{\sqrt{400}} = \frac{18}{20} = \frac{9}{10}$$

$$\phi = \arccos \frac{9}{10}$$

1.11 VECTORES UNITARIOS i, j, k . FORMA TRINOMICA DE UN VECTOR.

En algunas ocasiones es conveniente expresar un vector $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ en función de los vectores unitarios i, j, k , que se muestran en la figura 1-21; estos vectores tienen la dirección de los ejes coordenados, su módulo es igual a 1, y no se les acostumbra poner una raya encima.

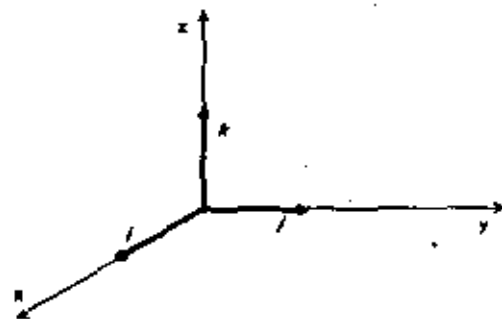


Figura 1.21.

En función de sus componentes, los vectores unitarios i, j, k pueden escribirse como:

$$i = (1, 0, 0)$$

$$j = (0, 1, 0)$$

$$k = (0, 0, 1)$$

Ahora bien, el vector $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ puede expresarse como:

$$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3) = (a_1, 0, 0) + (0, a_2, 0) + (0, 0, a_3) \\ = a_1 (1, 0, 0) + a_2 (0, 1, 0) + a_3 (0, 0, 1)$$

o sea:

$$\vec{a} = a_1 \mathbf{i} + a_2 \mathbf{j} + a_3 \mathbf{k} \quad (1)$$

La ecuación (1) define al vector \vec{a} en la llamada "forma trinómica". Así por ejemplo, la forma trinómica de los vectores $\vec{p} = (2, -1, 0)$, $\vec{q} = (2\sqrt{2}, 3\pi, -4)$ será, respectivamente, $\vec{p} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j}$, $\vec{q} = 2\sqrt{2}\mathbf{i} + 3\pi\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$. De aquí en adelante expresaremos indistintamente a un vector cualquiera \vec{r} , como $\vec{r} = (r_1, r_2, r_3)$ o bien $\vec{r} = r_1\mathbf{i} + r_2\mathbf{j} + r_3\mathbf{k}$. Ambas notaciones son equivalentes.

1.12. ANGULOS Y COSENOS DIRECTORES.

Sea un vector cualquiera $\vec{r} = (r_1, r_2, r_3)$. A los ángulos que forma el vector \vec{r} con la parte positiva de cada uno de los ejes coordenados se les llama ángulos directores del vector y a los cosenos de dichos ángulos se les llama cosenos directores del vector.

Ahora bien, los ángulos que forma el vector \vec{r} con la parte positiva de los ejes x , y y z , son iguales, respectivamente, a los ángulos entre \vec{r} y los vectores unitarios \mathbf{i} , \mathbf{j} y \mathbf{k} . Recordando la expresión para calcular el coseno del ángulo entre dos vectores podemos escribir:

$$\cos \alpha = \frac{\vec{r} \cdot \mathbf{i}}{|\vec{r}| |\mathbf{i}|} = \frac{(r_1, r_2, r_3) \cdot (1, 0, 0)}{\sqrt{r_1^2 + r_2^2 + r_3^2} \cdot 1} = \frac{r_1}{\sqrt{r_1^2 + r_2^2 + r_3^2}} \quad (1)$$

$$\cos \beta = \frac{\vec{r} \cdot \mathbf{j}}{|\vec{r}| |\mathbf{j}|} = \frac{(r_1, r_2, r_3) \cdot (0, 1, 0)}{\sqrt{r_1^2 + r_2^2 + r_3^2} \cdot 1} = \frac{r_2}{\sqrt{r_1^2 + r_2^2 + r_3^2}} \quad (2)$$

$$\cos \gamma = \frac{\vec{r} \cdot \mathbf{k}}{|\vec{r}| |\mathbf{k}|} = \frac{(r_1, r_2, r_3) \cdot (0, 0, 1)}{\sqrt{r_1^2 + r_2^2 + r_3^2} \cdot 1} = \frac{r_3}{\sqrt{r_1^2 + r_2^2 + r_3^2}} \quad (3)$$

donde la terna ordenada $(\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$ nos representa los cosenos de los ángulos directores del vector \vec{r} , siendo α , β y γ los ángulos directores.

Elevando al cuadrado las expresiones (1), (2) y (3)

$$\cos^2 \alpha = \frac{r_1^2}{r_1^2 + r_2^2 + r_3^2}$$

$$\cos^2 \beta = \frac{r_2^2}{r_1^2 + r_2^2 + r_3^2}$$

$$\cos^2 \gamma = \frac{r_3^2}{r_1^2 + r_2^2 + r_3^2}$$

Sumando miembro a miembro:

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = \frac{r_1^2}{r_1^2 + r_2^2 + r_3^2} + \frac{r_2^2}{r_1^2 + r_2^2 + r_3^2} + \frac{r_3^2}{r_1^2 + r_2^2 + r_3^2} \\ = \frac{r_1^2 + r_2^2 + r_3^2}{r_1^2 + r_2^2 + r_3^2} = 1$$

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1 \quad (4)$$

La ecuación (4) nos expresa la relación entre los tres cosenos directores de un vector en un espacio E_3 .

Veamos a continuación como podemos calcular el ángulo entre dos vectores, conocidos sus cosenos directores. Sean los vectores $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ y $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$; según hemos visto, el coseno del ángulo entre \vec{a} y \vec{b} está dado por:

$$\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{(a_1, a_2, a_3) \cdot (b_1, b_2, b_3)}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$$

$$= \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$$

$$= \frac{a_1}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}} \frac{b_1}{\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}} + \frac{a_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}} \frac{b_2}{\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}} + \frac{a_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}} \frac{b_3}{\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}} \quad (5)$$

Llamando $\cos \alpha_1, \cos \beta_1, \cos \gamma_1$ a los cosenos directores del vector \vec{a} y $\cos \alpha_2, \cos \beta_2, \cos \gamma_2$ a los cosenos directores del vector \vec{b} , tenemos que:

$$\cos \alpha_1 = \frac{a_1}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}} \quad \cos \alpha_2 = \frac{b_1}{\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$$

$$\cos \beta_1 = \frac{a_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}} \quad \cos \beta_2 = \frac{b_2}{\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$$

$$\cos \gamma_1 = \frac{a_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}} \quad \cos \gamma_2 = \frac{b_3}{\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$$

Sustituyendo estas ecuaciones en la expresión (5) podemos escribir finalmente:

$$\cos \theta = \cos \alpha_2 \cos \alpha_1 + \cos \beta_2 \cos \beta_1 + \cos \gamma_2 \cos \gamma_1 \quad (6)$$

La ecuación (6) nos sirve para calcular el ángulo entre dos vectores cuyos cosenos directores son $(\cos \alpha_1, \cos \beta_1, \cos \gamma_1)$ y $(\cos \alpha_2, \cos \beta_2, \cos \gamma_2)$.

Ejemplo 1.14

Dado el vector $\vec{r} = (6, -2, 1)$ encontrar sus cosenos directores.

Solución:

$$\cos \alpha = \frac{r_1}{\sqrt{r_1^2 + r_2^2 + r_3^2}} = \frac{6}{\sqrt{6^2 + (-2)^2 + 1^2}} = \frac{6}{\sqrt{36 + 4 + 1}} = \frac{6}{\sqrt{41}}$$

$$\cos \beta = \frac{r_2}{\sqrt{r_1^2 + r_2^2 + r_3^2}} = \frac{-2}{\sqrt{6^2 + (-2)^2 + 1^2}} = \frac{-2}{\sqrt{36 + 4 + 1}} = \frac{-2}{\sqrt{41}}$$

$$\cos \gamma = \frac{r_3}{\sqrt{r_1^2 + r_2^2 + r_3^2}} = \frac{1}{\sqrt{6^2 + (-2)^2 + 1^2}} = \frac{1}{\sqrt{36 + 4 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{41}}$$

Ejemplo 1.15

Dos de los cosenos directores de un vector son: $\cos \alpha = \frac{2}{3}$; $\cos \beta = -\frac{1}{3}$

Hallar el valor de $\cos \gamma$.

Solución:

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(-\frac{1}{3}\right)^2 + \cos^2 \gamma = 1$$

$$\cos^2 \gamma = 1 - \left(\frac{4}{9} + \frac{1}{9}\right) = 1 - \frac{5}{9} = \frac{4}{9}$$

$$\therefore \cos \gamma = \pm \frac{2}{3}$$

Ejemplo 1.16

Hallar los cosenos directores de un vector que forma ángulos iguales -

con los ejes coordenados.

Solución:

$$\alpha = \beta = \gamma$$

$$3 \cos^2 \alpha = 1; \cos \alpha = \pm \frac{1}{\sqrt{3}} = \pm \frac{\sqrt{3}}{3} = \cos \beta = \cos \gamma$$

1.13. PRODUCTO VECTORIAL DE DOS VECTORES. APLICACIONES.

El producto vectorial de dos vectores $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ y $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$, denotado por $\vec{a} \times \vec{b}$, que se lee "a cruz b" se define como:

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_2 b_3 - a_3 b_2) \mathbf{i} + (a_3 b_1 - a_1 b_3) \mathbf{j} + (a_1 b_2 - a_2 b_1) \mathbf{k} \quad (1)$$

El resultado del producto vectorial de dos vectores es precisamente un vector y como:

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) &= a_1(a_2 b_3 - a_3 b_2) + a_2(a_3 b_1 - a_1 b_3) + a_3(a_1 b_2 - a_2 b_1) \\ &= a_1 a_2 b_3 - a_1 a_3 b_2 + a_2 a_3 b_1 - a_2 a_1 b_3 + a_3 a_1 b_2 - a_3 a_2 b_1 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Y además:

$$\begin{aligned} \vec{b} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) &= b_1(a_2 b_3 - a_3 b_2) + b_2(a_3 b_1 - a_1 b_3) + b_3(a_1 b_2 - a_2 b_1) \\ &= b_1 a_2 b_3 - b_1 a_3 b_2 + b_2 a_3 b_1 - b_2 a_1 b_3 + b_3 a_1 b_2 - b_3 a_2 b_1 = 0 \end{aligned}$$

resulta que el vector $\vec{a} \times \vec{b}$ es perpendicular tanto a \vec{a} como a \vec{b} .

Una representación más fácil de recordar del producto vectorial $\vec{a} \times \vec{b}$ es por medio de un determinante de tercer orden. La ecuación (1) puede representarse también en la siguiente forma:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

Las propiedades básicas del producto vectorial son:

$$1.- \vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a} \quad (\text{Anticonmutatividad}).$$

$$2.- \lambda (\vec{a} \times \vec{b}) = (\lambda \vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (\lambda \vec{b}); \lambda \in \mathbb{R} \quad (\text{asociatividad})$$

$$3.- \vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c} \quad (\text{distributividad})$$

La demostración de las propiedades anteriores puede efectuarse fácilmente a partir de la definición de producto vectorial, trabajo que se recomienda al alumno.

Calculemos a continuación el módulo del vector $\vec{a} \times \vec{b}$. De acuerdo con la ecuación (1) y con la definición de módulo de un vector, puede escribirse:

$$\begin{aligned} |\vec{a} \times \vec{b}| &= \sqrt{(a_2 b_3 - a_3 b_2)^2 + (a_3 b_1 - a_1 b_3)^2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1)^2} \\ &= \sqrt{a_2^2 b_3^2 + a_3^2 b_2^2 - 2a_2 b_3 a_3 b_2 + a_3^2 b_1^2 + a_1^2 b_3^2 - 2a_3 b_1 a_1 b_3 + a_1^2 b_2^2 + a_2^2 b_1^2 - 2a_1 b_2 a_2 b_1} \\ &= \sqrt{a_1^2 b_2^2 + a_1^2 b_3^2 + a_2^2 b_1^2 + a_2^2 b_3^2 + a_3^2 b_1^2 + a_3^2 b_2^2 - 2a_1 a_2 b_1 b_2 - 2a_1 a_3 b_1 b_3 - 2a_2 a_3 b_2 b_3} \end{aligned}$$

Sumando y restando dentro del radical $a_1^2 b_1^2 + a_2^2 b_2^2 + a_3^2 b_3^2$:

$$\begin{aligned} |\vec{a} \times \vec{b}| &= \sqrt{a_1^2 b_1^2 + a_1^2 b_2^2 + a_1^2 b_3^2 + a_2^2 b_1^2 + a_2^2 b_2^2 + a_2^2 b_3^2 + a_3^2 b_1^2 + a_3^2 b_2^2 + a_3^2 b_3^2 - a_1^2 b_1^2 - a_2^2 b_2^2 - a_3^2 b_3^2 - 2a_1 a_2 b_1 b_2 - 2a_1 a_3 b_1 b_3 - 2a_2 a_3 b_2 b_3} \\ &= \sqrt{(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) - (a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3)^2 + 2a_1 a_2 b_1 b_2 + 2a_1 a_3 b_1 b_3 + 2a_2 a_3 b_2 b_3} \\ &= \sqrt{(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) - (a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3)^2} \\ &= \sqrt{|\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2} = \sqrt{|\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 - (|\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta)^2} \end{aligned}$$

u. 2u

$$\begin{aligned}
 &= \sqrt{|\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 - |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 \cos^2 \theta} = \sqrt{|\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 (1 - \cos^2 \theta)} \\
 &= \sqrt{|\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 \sin^2 \theta} = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \theta \quad 0 \leq \theta \leq \pi \\
 &\therefore \boxed{|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \theta} \quad (2)
 \end{aligned}$$

Para tener totalmente definido el producto vectorial $\vec{a} \times \vec{b}$, sólo nos falta mencionar que su sentido es tal que si llevamos el vector \vec{b} hacia el vector \vec{a} girando el menor ángulo posible, este giro se ve desde $\vec{a} \times \vec{b}$ en el mismo sentido que el giro de las manecillas del reloj, como se ilustra en la figura 1.22.

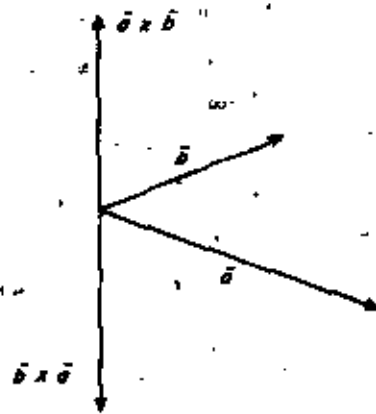


Figura 1.22.

Consideremos a continuación un paralelogramo que aloja en dos de sus lados concurrentes a los vectores \vec{a} y \vec{b} , tal como se muestra en la figura 1.

23.



Figura 1.23.

Observamos que la altura del paralelogramo está dada por $|\vec{b}| \sin \theta$, en tanto que su base es igual a $|\vec{a}|$. El área del paralelogramo será entonces igual a $|\vec{a}| |\vec{b}| \sin \theta$. De acuerdo con la expresión (2) se deduce que el módulo del producto vectorial $\vec{a} \times \vec{b}$ es igual al área del paralelogramo en cuyos lados se alojan los vectores \vec{a} y \vec{b} , es decir:

$$A = |\vec{a} \times \vec{b}|$$

El producto vectorial también es útil para estudiar el paralelismo entre dos vectores. En efecto, de acuerdo con la ecuación (2), podemos afirmar que dos vectores \vec{a} y \vec{b} en un espacio tridimensional, son paralelos si y sólo si su producto vectorial $\vec{a} \times \vec{b}$ es igual a cero; esta afirmación es válida, pues si consideramos en la ecuación (2) que los vectores \vec{a} y \vec{b} no son nulos, para que $|\vec{a} \times \vec{b}|$ resultará cero, la única posibilidad es que $\sin \theta$ fuera igual a cero, con lo que \vec{a} y \vec{b} serían paralelos.

Ejemplo 1.17.

Calcular el área del triángulo cuyos vértices son: $A = (1, -1, 2)$, $B = (4, 5, -7)$ y $C = (-1, 2, 1)$

Solución:

Hagamos:

$$\vec{a} = \vec{AB} = (4-1, 5+1, -7-2) = (3, 6, -9)$$

$$\vec{b} = \vec{AC} = (-1-1, 2+1, 1-2) = (-2, 3, -1)$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 3 & 6 & -9 \\ -2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 21 \hat{i} + 21 \hat{j} + 21 \hat{k}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \sqrt{21^2 + 21^2 + 21^2} = \sqrt{3(21)^2} = 21\sqrt{3}$$

Como el área del triángulo es igual a la mitad del área del paralelogramo podemos concluir:

$$A = \frac{21\sqrt{3}}{2} \text{ unidades cuadradas.}$$

Ejemplo 1.18

Un vector \vec{z} tiene como módulo 52 y es perpendicular común a los vectores $\vec{a} = 4\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$ y $\vec{b} = -4\mathbf{i} + 6\mathbf{j} + \mathbf{k}$. Determinar sus componentes.

Solución:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 4 & -3 & 0 \\ -4 & 6 & 1 \end{vmatrix} = -3\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 12\mathbf{k}$$

Determinaremos un vector unitario en la dirección de $\vec{a} \times \vec{b}$; este vector

será $\frac{\vec{a} \times \vec{b}}{|\vec{a} \times \vec{b}|}$:

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = \sqrt{9 + 16 + 144} = \sqrt{169} = 13$$

$$\frac{\vec{a} \times \vec{b}}{|\vec{a} \times \vec{b}|} = -\frac{3}{13}\mathbf{i} - \frac{4}{13}\mathbf{j} + \frac{12}{13}\mathbf{k}$$

y entonces:

$$\vec{z} = -\frac{3(52)}{13}\mathbf{i} - \frac{4(52)}{13}\mathbf{j} + \frac{12(52)}{13}\mathbf{k}$$

o sea:

$$\vec{z} = -12\mathbf{i} - 16\mathbf{j} + 48\mathbf{k}$$

Ejemplo 1.19

Usando el producto vectorial demostrar que los vectores $\vec{a} = 3\mathbf{i} - \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ y $\vec{b} = -9\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$ son paralelos.

Solución:

Si $\vec{a} \times \vec{b} = 0$, los vectores \vec{a} y \vec{b} son paralelos.

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 3 & -1 & -2 \\ -9 & 3 & 6 \end{vmatrix} = 0$$

Los vectores son paralelos.

1.15. PRODUCTO MIXTO, APLICACIONES.

Dados tres vectores cualesquiera $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ y $\vec{c} = (c_1, c_2, c_3)$, podemos formar el producto $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$ que da como resultado un escalar, pues \vec{a} y $(\vec{b} \times \vec{c})$ son vectores que se multiplican escalarmente. A este producto lo llamaremos producto mixto.

Nótese que al calcular el producto mixto debemos primero efectuar el producto $\vec{b} \times \vec{c}$, ya que si asociamos $(\vec{a} \cdot \vec{b}) \times \vec{c}$ la expresión no tiene significado alguno, pues $\vec{a} \cdot \vec{b}$ es un escalar y el producto vectorial sólo está definido para dos vectores.

El triple producto escalar $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$ puede expresarse en términos de un determinante de tercer orden. En efecto, veamos:

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = (a_1, a_2, a_3) \cdot (b_2c_3 - b_3c_2, b_3c_1 - b_1c_3, b_1c_2 - b_2c_1) =$$

$$= a_1 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \quad (1)$$

Mediante el cálculo directo puede demostrarse que:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} \times \vec{c} = \vec{b} \cdot \vec{c} \times \vec{a} = \vec{c} \cdot \vec{a} \times \vec{b}$$

En efecto, para calcular $\vec{b} \cdot \vec{c} \times \vec{a}$ usaríamos el determinante de la expresión (1) intercambiando dos veces sus renglones, lo cual nos lleva al mismo resultado; también obtenemos igual resultado al intercambiar dos veces más los renglones del determinante para calcular $\vec{c} \cdot \vec{a} \times \vec{b}$. Esto quiere decir que el resultado del producto mixto no se altera al cambiar cíclicamente el orden de los vectores, como se ilustra en la figura 1.24.



Figura 1.24.

Como el producto escalar es conmutativo, podemos escribir:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} \times \vec{c} = \vec{b} \times \vec{c} \cdot \vec{a} \quad (2)$$

Cambiando cíclicamente el orden de los vectores:

$$\vec{b} \times \vec{c} \cdot \vec{a} = \vec{c} \times \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \times \vec{b} \cdot \vec{c} \quad (3)$$

De las ecuaciones (2) y (3) puede concluirse que:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} \cdot \vec{c}$$

Es decir, en el producto mixto se pueden intercambiar el punto y la cruz, sin que se altere el resultado. Por esta razón, en ocasiones se utiliza la notación $[\vec{a} \ \vec{b} \ \vec{c}]$ para indicar el producto mixto de los vectores \vec{a} , \vec{b} y \vec{c} , o sea:

$$[\vec{a} \ \vec{b} \ \vec{c}] = \vec{a} \cdot \vec{b} \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} \cdot \vec{c}$$

Vemos a continuación cual es la interpretación geométrica del producto

mixto, para lo que consideraremos tres vectores cualesquiera \vec{a} , \vec{b} y \vec{c} , alojados en tres aristas concurrentes de un paralelepípedo, como se muestra en la figura 1.25.

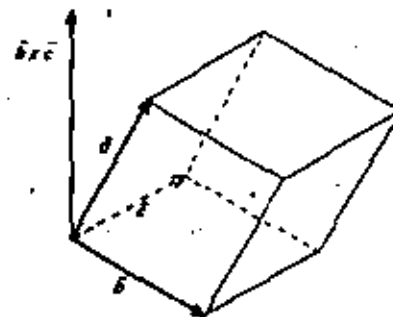


Figura 1.25.

Como ya vimos, el área del paralelogramo en cuyas aristas concurrentes se alojan los vectores \vec{b} y \vec{c} es igual a $|\vec{b} \times \vec{c}|$. El volumen del paralelepípedo puede calcularse entonces multiplicando el área del paralelogramo que aloja en sus aristas \vec{a} y \vec{c} , por la altura, medida perpendicularmente a estos dos vectores.

De la figura puede apreciarse que la altura es igual a $\text{Comp}_{(\vec{b} \times \vec{c})} \vec{a}$, por lo que el volumen del paralelepípedo queda finalmente como:

$$\begin{aligned} V &= |\vec{b} \times \vec{c}| \text{Comp}_{(\vec{b} \times \vec{c})} \vec{a} \\ V &= |\vec{b} \times \vec{c}| \frac{\vec{a} \cdot \vec{b} \times \vec{c}}{|\vec{b} \times \vec{c}|} \\ V &= \vec{a} \cdot \vec{b} \times \vec{c} = [\vec{a} \ \vec{b} \ \vec{c}] \end{aligned}$$

La expresión anterior nos indica que el resultado del producto mixto

$[\vec{a} \ \vec{b} \ \vec{c}]$ es igual al volumen del paralelepípedo en tres de cuyas aristas concu-
rentes se alojan los vectores \vec{a} , \vec{b} y \vec{c} .

La interpretación geométrica anterior nos lleva a la conclusión de que la condición necesaria y suficiente para que tres vectores llevados a un origen común estén en un mismo plano es que su producto mixto sea igual a cero.

Ejemplo 1.20

Dados los puntos $A = (-1, 1, 2)$, $B = (0, 2, 3)$, $C = (1, 1, 1)$ y $D = (-1, 3, 3)$, encuentre el volumen del paralelepípedo tres de cuyas aristas son \vec{AB} , \vec{AC} y \vec{AD} .

Solución:

Hagamos:

$$\vec{a} = \vec{AB} = (0 + 1, 2 - 1, 3 - 2) = (1, 1, 1)$$

$$\vec{b} = \vec{AC} = (1 + 1, 1 - 1, 1 - 2) = (2, 0, -1)$$

$$\vec{c} = \vec{AD} = (-1 + 1, 3 - 1, 3 - 2) = (0, 2, 1)$$

$$V = \vec{a} \cdot \vec{b} \times \vec{c} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 4$$

$$V = 4 \text{ unidades cúbicas.}$$

Ejemplo 1.21

Calcular el volumen del tetraedro de vértices $A = (1, 1, 0)$, $B = (3, 2, -1)$, $C = (-2, 1, 1)$ y $D = (2, -1, 0)$

Solución:

Como el volumen del tetraedro cuyas aristas concurrentes son \vec{AB} , \vec{AC} y \vec{AD} es igual a la sexta parte del volumen del paralelepípedo que tiene las

mismas aristas, hagamos:

$$\vec{a} = \vec{AB} = (3 - 1, 2 - 1, -1 - 0) = (2, 1, -1)$$

$$\vec{b} = \vec{AC} = (-2 - 1, 1 - 1, 1 - 0) = (-3, 0, 1)$$

$$\vec{c} = \vec{AD} = (2 - 1, -1 - 1, 0 - 0) = (1, -2, 0)$$

$$V = \frac{1}{6} \vec{a} \cdot \vec{b} \times \vec{c} = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -3 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{6} (-1) = -\frac{1}{6}$$

$$V = \frac{1}{6} \text{ unidades cúbicas.}$$

En este ejemplo, el volumen resultante estuvo afectado por un signo negativo. Se sugiere que se discuta en clase la interpretación de este signo.

Ejemplo 1.22

Demostre que los puntos $A = (2, 1, 3)$, $B = (3, -5, -1)$, $C = (-6, 7, -9)$ y $D = (-2, 4, -3)$ son coplanares.

Solución:

Hagamos:

$$\vec{a} = \vec{AB} = (3 - 2, -5 - 1, -1 - 3) = (1, -6, -4)$$

$$\vec{b} = \vec{AC} = (-6 - 2, 7 - 1, -9 - 3) = (-8, 6, -12)$$

$$\vec{c} = \vec{AD} = (-2 - 2, 4 - 1, -3 - 3) = (-4, 3, -6)$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} \times \vec{c} = \begin{vmatrix} 1 & -6 & -4 \\ -8 & 6 & -12 \\ -4 & 3 & -6 \end{vmatrix} = 0$$

Por lo tanto los cuatro puntos dados son coplanares.

Ejemplo 1.23

Calcular el volumen del prisma triangular, en tres de cuyas aristas

21

concurrentes se alojan los vectores $\vec{a} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j}$, $\vec{b} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\vec{c} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$.

Solución:

El volumen del prisma triangular, será igual a la mitad del volumen del paralelepípedo que tiene las mismas aristas concurrentes, por lo que podemos escribir:

$$V = 1/2 \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = 1/2 \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & -4 \end{vmatrix} = 1/2 (24) = 12$$

$$V = 12 \text{ unidades cúbicas.}$$

1.15. DOBLE PRODUCTO VECTORIAL.

Consideraremos los vectores $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ y $\vec{c} = (c_1, c_2, c_3)$. Podemos formar el producto $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$. Es importante hacer notar que el resultado, en general, no es el mismo que si se considera el producto $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$.

Calculemos el doble producto vectorial: $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$

Tendremos:

$$\vec{b} \times \vec{c} = (b_2c_3 - b_3c_2)\mathbf{i} + (b_3c_1 - b_1c_3)\mathbf{j} + (b_1c_2 - b_2c_1)\mathbf{k}$$

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_2c_3 - b_3c_2 & b_3c_1 - b_1c_3 & b_1c_2 - b_2c_1 \end{vmatrix}$$

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = [a_2(b_1c_2 - b_2c_1) - a_3(b_3c_1 - b_1c_3)]\mathbf{i} + [a_3(b_2c_3 - b_3c_2) - a_1(b_1c_2 - b_2c_1)]\mathbf{j}$$

$$+ [a_1(b_3c_1 - b_1c_3) - a_2(b_2c_3 - b_3c_2)]\mathbf{k}$$

$$= (a_2b_1c_2 - a_2b_2c_1 - a_3b_3c_1 + a_3b_1c_3)\mathbf{i}$$

$$+ (a_3b_2c_3 - a_3b_3c_2 - a_1b_1c_2 + a_1b_2c_1)\mathbf{j}$$

$$+ (a_1b_3c_1 - a_1b_1c_3 - a_2b_2c_3 + a_2b_3c_2)\mathbf{k}$$

$$= (a_1b_1c_1 + a_2b_1c_2 - a_2b_2c_1 - a_3b_3c_1 + a_3b_1c_3 - a_1b_1c_1)\mathbf{i}$$

$$+ (a_2b_2c_2 + a_3b_2c_3 - a_3b_3c_2 - a_1b_1c_2 + a_1b_2c_1 - a_2b_2c_2)\mathbf{j}$$

$$+ (a_3b_3c_3 + a_1b_3c_1 - a_1b_1c_3 - a_2b_2c_3 + a_2b_3c_2 - a_3b_3c_3)\mathbf{k}$$

$$= [(a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3)b_1 - (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)c_1]\mathbf{i}$$

$$+ [(a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3)b_2 - (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)c_2]\mathbf{j}$$

$$+ [(a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3)b_3 - (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)c_3]\mathbf{k}$$

$$= (a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3)(b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}) - (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)(c_1\mathbf{i} + c_2\mathbf{j} + c_3\mathbf{k})$$

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c} \quad (1)$$

De manera similar podemos demostrar que:

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{b} \cdot \vec{c})\vec{a} \quad (2)$$

Ejemplo 1.24

Si $\vec{a} = (2, 1, 3)$, $\vec{b} = (1, 0, -2)$ y $\vec{c} = (3, 2, 1)$ calcular $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$ y $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$.

Solución:

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{c} = 2(3) + 1(2) + 3(1) = 6 + 2 + 3 = 11$$

$$(\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{b} = 1(1, 0, -2) = (1, 0, -2)$$

26

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 2(1) + 1(0) + 3(-2) = 2 + 0 - 6 = -4$$

$$(\vec{a} \cdot \vec{b}) \vec{c} = -4(3, 2, 1) = (-12, -8, -4)$$

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (11, 0, -22) - (-12, -8, -4) = (23, 8, -18)$$

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = (\vec{a} \cdot \vec{c}) \vec{b} - (\vec{b} \cdot \vec{c}) \vec{a}$$

$$(\vec{a} \cdot \vec{c}) \vec{b} = (11, 10, -22)$$

$$\vec{b} \cdot \vec{c} = 1(3) + 0(2) - 2(1) = 3 + 0 - 2 = 1$$

$$(\vec{b} \cdot \vec{c}) \vec{a} = 1(2, 1, 3) = (2, 1, 3)$$

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = (11, 10, -22) - (2, 1, 3) = (9, 9, -25)$$

BIBLIOGRAFIA:

CALCULO
Apostol,
Editorial Reverte

MATEMATICAS UNIVERSITARIAS
Britton, Krieger, Rutland
C.E.C.S.A.

ALGEBRA LINEAL
Lang,
Fondo Educativo Interamericano.

EL CALCULO CON GEOMETRIA ANALITICA.
Leitchold,
Morio



UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTÓNOMA DE
MÉXICO

Estos apuntes han sido elaborados por un grupo de profesores de matemáticas III, y básicamente representan un cambio de enfoque con respecto a los anteriormente utilizados; ahora se ha aplicado, en general, el método inductivo a través de la resolución de algunos problemas particulares se llegan a establecer los conceptos generales.

El tratamiento de los temas ha sido más extenso que lo usual en este tipo de apuntes, en busca de que sean más accesibles al alumno; debido a esa extensión, el profesor no podrá exponer toda la teoría presentada ni discutir todos los ejemplos; pero el alumno tendrá a mano cómo hallar explicaciones o ejemplos que lo aclaran el tema en estudio. Ese esfuerzo de su parte le permitirá practicar otras de las facetas del proceso enseñanza-aprendizaje: la investigación.

Esta edición es la primera de estos apuntes; algunos profesores que han tenido acceso a ellos han hecho valiosas sugerencias o correcciones, algunas de las que se las incorporaron, como también se apreciaron todas las críticas y sugerencias que se hacen a partir de ahora, que nos permitan preparar una segunda edición acorde con la calidad que merece el cuerpo académico y el alumnado de esta materia.

La Coordinación de Matemáticas III



UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTÓNOMA DE
MÉXICO

La Coordinación de Matemáticas III agradece a los profesores siguientes, su colaboración en la redacción de estos apuntes:

- Ing. Eduardo Belamariano García
- Ing. Bernardo Fontana de la Cruz
- M. en I. Ricardo Gómez Sánchez
- Ing. Enrique González Gutiérrez
- M. en I. José A. Méndez Márquez
- Ing. Santiago Rivas Gómez

1.1.- Campos Escalares (Funciones Escalares de Variable Vectorial)

En la realidad que nos rodea es difícil encontrar fenómenos — que puedan ser modelados matemáticamente como funciones de una sola variable independiente, como las que estudiamos en Matemáticas I; generalmente son más de una las variables que encontramos involucradas en algún proceso físico o fenómeno matemático, y para ilustrar mejor este concepto veremos tres ejemplos:

Ejemplos:

1.1.1 En el curso de Matemáticas II tuvimos contacto con algunos temas referentes a las superficies. Como recordamos, la ecuación de una superficie tiene la forma $z = f(x, y)$ en donde x, y, z son respectivamente abscisa y ordenada de un punto del plano, y z la cota del punto de esa superficie, cuya proyección ortogonal es el punto (x, y) . En este caso se puede establecer una correspondencia biunívoca entre las parejas (x, y) y la cota correspondiente de la superficie. Podemos entonces, recordando nuestros antecedentes, afirmar que z es función del punto $P(x, y)$.

1.1.2 La temperatura en cada punto de un cuerpo puede establecerse de acuerdo a la posición del punto; más caliente — cerca de las ventanas, más caliente cerca del techo y del piso, etc. Entonces a cada punto corresponde un valor de T , o sea $T = F(x, y, z)$ y, como en el caso anterior, puede establecerse una correspondencia biunívoca entre cada punto y su temperatura. Entonces T es función del punto (x, y, z) .

1.1.3 En Física se anuncia la ley de Newton de la Gravitación Universal en los términos siguientes: "La magnitud de la fuerza de atracción ejercida entre dos cuerpos en el espacio, es directamente proporcional al producto de sus masas, e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que los separa". Matemáticamente escribimos $F = G \frac{m_1 m_2}{r^2}$ siendo G la constante de la gravitación universal ($G = 6.67 \times 10^{-8}$ newton m^2/seg^2 en el sistema mks). De una manera similar a como lo hicimos en los ejemplos anteriores, podemos observar que a cada terna de valores (m_1, m_2, r) corresponde sólo un valor de la fuerza, y se puede decir que la fuerza F es función de los ternas (m_1, m_2, r) .

En los ejemplos anteriores hemos hablado de conceptos físicos o matemáticos, representados por expresiones en las que más de uno de los parámetros que los componen pueden cambiar durante un proceso o fenómeno determinado. A estas expresiones, en las que la variable dependiente es de más de una variable independiente, se les denomina funciones escalares de varias variables independientes, o funciones escalares de variable vectorial.

Al conjunto ordenado de valores de las variables independientes (parejas ternas, etc.) para las cuales está definida la función, se denomina "dominio de la función" o simplemente "dominio".

Se acostumbra también nombrar a estos valores ordenados, ternas ordenadas, etc. de números reales como —

"VECTORES", SEGUN SE HA VISTO EN CURSOS ANTERIORES, DE ENI EL NOMBRE DE VARIABLE VECTORIAL.

Al conjunto de valores que toma la variable dependiente o función sobre todos los puntos de su dominio se le denomina "RANGE" de la función.

En la fig 1.1.1 se ilustran gráficamente los conceptos de función escalar de variable vectorial, dominio y rango para una función $F: R^n \rightarrow R^1$, concepto de correspondencia $F = F(x, y)$

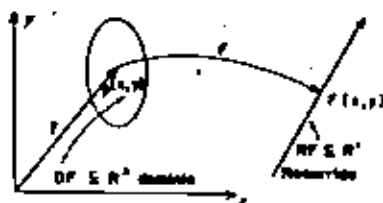


FIG. 1.1.1 Representación esquemática de: $F: R^n \rightarrow R^1$

Al recordar lo visto en el curso de álgebra, cabe definir una función de clase de n variables independientes como una transformación T

$$T: R^n \rightarrow R^1$$

no necesariamente lineal, cuya regla de correspondencia es $T(\vec{x}) = y$ donde \vec{x} es el vector n -dimensional de variables $\vec{x} = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\}$

Ejemplo 1.1.4

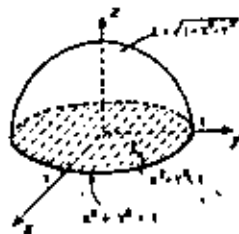


Fig. 1.1.2

$z = \sqrt{1-x^2-y^2}$ representa un hemisferio de radio unitario, con centro en el origen, ¿cuál es el dominio de z ?

Solución:

El radical $\sqrt{1-x^2-y^2}$ está definido cuando $1-x^2-y^2 \geq 0$ por las propiedades de las desigualdades de conjunción que $1 \geq x^2+y^2$; o sea $x^2+y^2 \leq 1$; esto es, el dominio es un conjunto de puntos dentro

de un círculo de radio 1 con centro en el origen, y los puntos de la circunferencia, según se muestra en la fig. 1.1.2. El intervalo de z es el intervalo $0 \leq z \leq 1$.

Con lo visto anteriormente estamos preparados ya para la siguiente

Definición 1.1

Se tiene un campo escalar o función real de variable vectorial cuando a cada punto de un dominio se le asocia un número real, o sea un escalar.

1.2 Límites y Continuidad de Funciones Escalares de Variable Vectorial.

1.2.1 Entornos y Regiones

Por lo que hemos visto en el tema anterior, una función escalar con variable vectorial está definida en un conjunto de puntos del plano o del espacio n -dimensional; así mismo, el análisis de continuidad se hace en dichos espacios, por lo que es preciso definir los siguientes conceptos:

1.2.1.1 Entornos

Definición 1.2.1

Un conjunto de puntos (x, y) que cumpla las desigualdades

$$|x - x_0| < \delta, |y - y_0| < \delta \text{ con } \delta > 0 \text{ se denomina}$$

entorno rectangular de radio δ al punto (x_0, y_0) .

En este entorno queda incluida la posibilidad de que $x = x_0, y = y_0$.

Definición 1.2.2
 Al conjunto de puntos (x, y) que cumple las desigualdades
 $0 < |x - x_0| < \delta$, $0 < |y - y_0| < \delta$ se los denomina **entorno reducido del punto** (x_0, y_0) .

Algunas veces se denomina también **entorno o vecindad agujerada** o **exceptuada**.

Definición 1.2.3
 El conjunto de puntos (x, y) que cumplen la desigualdad
 $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < \delta^2$
 es un **entorno circular** de radio δ del punto (x_0, y_0) . Un **entorno circular reducido** de (x_0, y_0) será: $0 < (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < \delta^2$

Équivalente puede generalizarse este concepto a 3 dimensiones, en donde los entornos serán **pelotas** o **esferas**, o a n dimensiones en donde el concepto se vuelve **entorno esférico**.

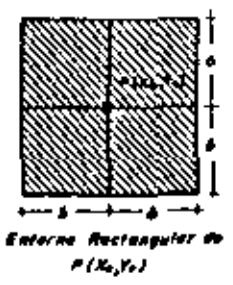


Fig. 1.2.1 a

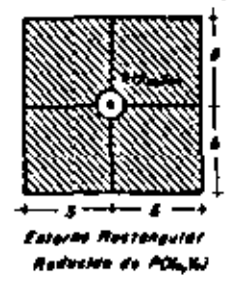


Fig. 1.2.1 b



Fig. 1.2.1 c

Definición 1.2.4
 Un conjunto de puntos $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in E^n$ que cumplen la desigualdad
 $|x_i - x_i^0| < \delta, \forall i (\delta > 0)$
 $(i = 1, 2, \dots, n)$
 se denomina **entorno del punto** $P_0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) \in E^n$.
 Si $0 < |x_i - x_i^0| < \delta \forall i$, el entorno se dice que es **reducido**.

Definición 1.2.5
 Un conjunto de puntos $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in E^n$ que cumplen la desigualdad
 $\sum_{i=1}^n (x_i - x_i^0)^2 < \delta^2$
 se denomina **entorno esférico** de radio δ del punto $P_0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) \in E^n$.
 Si $0 < \sum_{i=1}^n (x_i - x_i^0)^2 < \delta^2$, se dice que se trata de un **entorno esférico reducido**.

1.2.2. Regiones

Recordamos el círculo en que calculamos el dominio de la esfera de radio unitario. El dominio es el conjunto de puntos que cumplen: $x^2 + y^2 \leq 1$. Podemos describir este conjunto por complementación como sigue:

$$D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1; x, y \in \mathbb{R}\}$$

donde \mathbb{R} es el conjunto de los números reales. Fig. 1.2.2. Podemos también definir un conjunto E que represente solamente los puntos que están dentro del círculo y no en su periferia, o sea:

$$E = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 < 1; x, y \in \mathbb{R}\}$$

cuyo esquema mostramos en la Fig. 1.2.3.

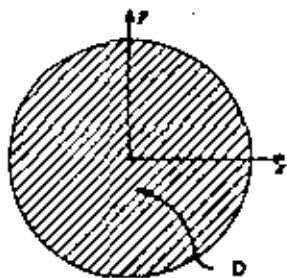


Fig. 1.2.2

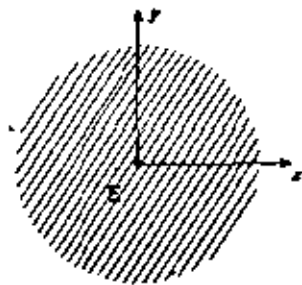


Fig. 1.2.3

Definición 1.2.6

- Un punto que pertenece a un conjunto D se denomina punto interior, si tiene un entorno reducido cuyos puntos pertenecen todos a ese conjunto.
- Un punto que no pertenece a ese conjunto, se denomina punto exterior si tiene un entorno reducido en el cual ninguno de sus puntos pertenece al conjunto.
- Un punto que pertenece a un conjunto se denomina punto frontera si en todo entorno reducido que lo contiene existen puntos que pertenecen al conjunto y puntos que no le pertenecen.

Definición 1.2.7

Se llaman conjuntos cerrados a los que están formados por puntos frontera e interiores (Fig. 1.2.2.) y a los conjuntos que contienen exclusivamente puntos interiores, los denominaremos conjuntos abiertos (Fig. 1.2.3).

Definición 1.2.8

- Si dos puntos cualesquiera de un conjunto de puntos, pueden ser unidos mediante una línea recta, cuyos puntos pertenecen todos al conjunto, decimos que es un conjunto convexo, o algebraicamente convexo (Fig. 1.2.4).
- Si la unión de dos puntos cualesquiera, se representa solamente mediante un arco de longitud finita, cuyos puntos pertenecen todos al conjunto, decimos que es un conjunto

CONJUNTO (FIG. 1.2.5).



Fig. 1.2.4
Conjunto Cerrado.



Fig. 1.2.5
Conjunto Cerrado.

Definición 1.2.9
 Región es un conjunto cerrado de puntos, abierto o cerrado.

Ejemplo 1.2.1 - Representar gráficamente, en el plano cartesiano, el conjunto cerrado de puntos limitado por las rectas $x=a$, $x=b$, $y=c$, $y=d$, y denotarlo por comprensión. ($a < b$, $c < d$).

Solución:

Todo punto que pertenece a R debe tener su abscisa mayor o igual a a y menor igual que b ; escribimos

$$x \geq a \tag{1.2.1a}$$

Esto nos da los puntos del plano a la derecha de la recta $x=a$ (Fig. 1.2.6). Limitamos ahora el conjunto por la derecha. Veamos que las abscisas de los puntos de R son menores o iguales más que $x=b$; escribimos $x \leq b$. Esto define el conjunto de puntos del plano a la izquierda de $x=b$ (Fig. 1.2.7).

Si obtenemos la intersección de los conjuntos

$$A = \{(x,y) / x \geq a\} \text{ y } B = \{(x,y) / x \leq b\} \tag{1.2.1b}$$

tendremos

$$A \cap B = \{(x,y) / x \geq a \text{ y } x \leq b\} \text{ o sea}$$

$$A \cap B = \{(x,y) / a \leq x \leq b\} \tag{1.2.1c}$$



FIG. 1.2.6

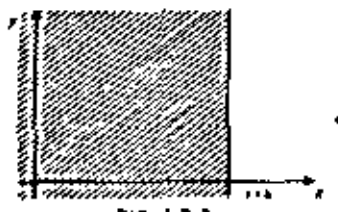


FIG. 1.2.7.

Veamos que áreas menos limitado el plano considerando a una línea de abscisa $0 \leq a$ superior al eje y (Fig. 1.2.8). Tenemos entonces que limitar superior e inferiormente para obtener la región deseada.

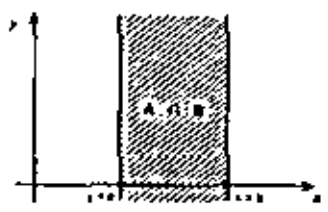


FIG. 1.2.8

El límite inferior de las ordenadas sea $y=c$ y todos los puntos de la región tienen ordenada

$$y \geq c ; C = \{(x,y) / y \geq c\} \tag{1.2.1d}$$

Asimismo, las y de la región de abscisa $y \leq d$

$$D = \{(x,y) / y \leq d\} \tag{1.2.1e}$$

Al intersectar los conjuntos

$$C \text{ y } D \text{ obtenemos } C \cap D = \{(x,y) / c \leq y \leq d\} \tag{1.2.1f}$$

La región deseada se da intersección de los conjuntos $A \cap B$ y $C \cap D$, o sea

$$R = (A \cap B) \cap (C \cap D)$$

$$R = \{(x,y) / a \leq x \leq b\} \cap \{(x,y) / c \leq y \leq d\} \tag{1.2.1g}$$

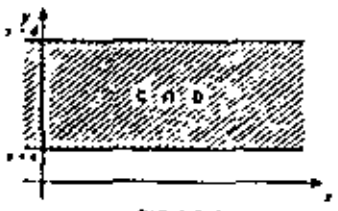


FIG. 1.2.9

$$P = \{(x, y) / a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$$

que representa la región sombreada. Fig. 1.2.10

1.2.1.A

Una región queda definida cuando de un punto se puede saber si pertenece o no a ella.

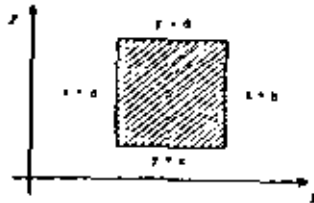


FIG. 1.2.10

1.2.3 LÍMITES

Como recordamos de nuestro curso de Matemáticas I, los conceptos de límite y continuidad están íntimamente ligados; para poder determinar la continuidad de una función de dos o más variables independientes, debemos definir antes la forma de determinar el límite de una función de dos variables independientes.

Ejemplo 1.2.2 -- Determinar el límite de la función $F(x, y) =$

$$4 - \frac{x^2}{8} + \frac{x}{4} - \frac{y^2}{8} \quad \text{al aproximarse al punto } P(x, y) =$$

$Q(2, 1)$. En este caso $F(x, y)$ representa la cara de un punto que pertenece a la superficie dibujada en la fig. 1.2.11 y cuya proyección en el plano es el punto $P(x, y)$.

$$F(x, y) = 4 - \frac{x^2}{8} + \frac{x}{4} - \frac{y^2}{8} \quad 1.2.2.a$$

1.2.1

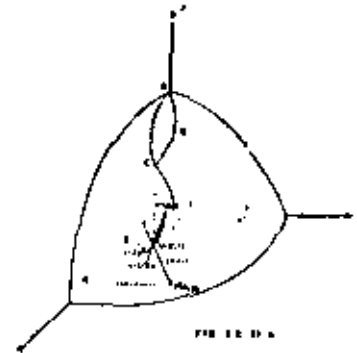


FIG. 1.2.11

Lo que se quiere es en otras: $\lim_{P \rightarrow Q} f(x, y)$

El punto $P(x, y)$ es un punto cualquiera, así que para acercarnos al punto en cuestión, vamos a tomar que lo hacemos desde el punto $P'(4, 3)$ siguiendo la recta $y = x - 1$ que une Q con P' en el plano x, y . Esta trayectoria se refleja en la superficie según la curva ABC de la figura 1.2.10a. Las ecuaciones paramétricas de la trayectoria en el plano aparecen así:

$$\begin{aligned} x &= t \\ y &= t - 1 \end{aligned} \quad 1.2.2.b$$

Las que sustituidas en la ecuación 1.2.2.a nos proporcionan la ecuación paramétrica de la curva ABC

$$f(t) = 4 - \frac{t^2}{8} + \frac{t}{4} - \frac{(t-1)^2}{8} \quad 1.2.2.c$$

que es función de una sola variable independiente. Calculamos el límite de esta cuando $t \rightarrow 2$ (para $x=2, y=1$; comprobación para $y=1, x=2$)

$$\lim_{t \rightarrow 2} f(t) = \lim_{t \rightarrow 2} [4] - \lim_{t \rightarrow 2} \left[\frac{t^2}{8} \right] + \lim_{t \rightarrow 2} \left[\frac{t}{4} \right] + \lim_{t \rightarrow 2} \left[\frac{(t-1)^2}{8} \right]$$

ecuación 1.2.2.d

1.2.2

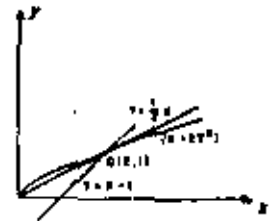


Fig. 1.2.11.b

y calculando los límites como lo hicimos en Matemáticas I:

$$\lim_{t \rightarrow 2} f(t) = 4 - \frac{4}{8} + \frac{1}{2} - \frac{1}{8} = 4 + \frac{1}{2} - \left(\frac{5}{8}\right) = \frac{31}{8} = 3.875 \quad (1.2.2.e)$$

Sin embargo esta no es la única manera de aproximarnos al punto Q ; podríamos haberlo hecho desde otro punto cualquiera por otra trayectoria recta o bien desde el mismo punto P sobre distinta trayectoria. Veamos las posibilidades más para este problema. Fig. 1.2.1b

Consideremos el punto $P^0(0,0)$ a partir del cual nos aproximamos al punto Q , siguiendo la recta que une P^0 y Q que tiene por ecuación cartesiana $y = 1/2x$, o bien ecuaciones paramétricas:

$$x = t \quad y = 1/2t \quad (1.2.2.f)$$

Substituyendo las ecuaciones (1.2.2.f) en (1.2.2.a) completamos las ecuaciones paramétricas de la curva:

$$f(t) = 4 - \frac{t^2}{8} + \frac{t}{4} - \frac{t^2}{32} \quad (1.2.2.g)$$

ahora tomamos el límite cuando $t \rightarrow 2$

$$\lim_{t \rightarrow 2} f(t) = 4 - \frac{4}{8} + \frac{2}{4} - \frac{4}{32} = 4 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{8} = 4 - \frac{1}{8} = \frac{31}{8} = 3.875 \quad (1.2.2.h)$$

el resultado obtenido en (1.2.2.h) es igual al de (1.2.2.e). Podemos otro camino, partamos ahora del punto $P^0(0,0)$ hacia $Q(2,1)$ siguiendo la parábola $x = 2t^2$ en el plano x,y cuyos parámetros son $x = 2t^2$; $y = t$ (1.2.2.i)

los cuales al ser substituidos en (1.2.2.a) definen

$$f(t) = 4 - \frac{4t^4}{8} + \frac{2t^2}{4} - \frac{t^2}{8} \quad (1.2.2.j)$$

en este caso $t \rightarrow 1$ para $x=2, y=1$

$$\lim_{t \rightarrow 1} f(t) = 4 - \frac{4}{8} + \frac{2}{4} - \frac{1}{8} = 3.875 \quad (1.2.2.k)$$

Como vimos, por los tres caminos elegidos al azar, el resultado obtenido fue el mismo, lo cual nos permite suponer que el límite de la función, cuando $P(x,y) \rightarrow Q(x,y)$ es $31/8$, o bien resolviéndolo algebraicamente,

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (2,1)} \left(4 - \frac{x^2}{8} + \frac{y}{4} - \frac{y^2}{8}\right) = \frac{31}{8} = 3.875 \quad (1.2.2.l)$$

La suposición anterior se basa en la condición necesaria y suficiente para la existencia del límite una en Matemáticas I, que requiere la igualdad de los límites a derecho e izquierdo para la existencia del límite. Demostremos esta afirmación de otra manera diciendo que para que exista el límite de $f(x,y)$ cuando $(x,y) \rightarrow (a,b)$ es necesario y suficiente que el límite sea el mismo sin importar el camino seguido para llegar a (a,b) .

Como corolario diremos que si el tender (x,y) a (a,b) por distintos caminos, en algunos obtenemos un valor L_1 para el límite, y en otros un valor diferente L_2 , el límite no existe.

Después de haber resuelto este problema nos adelantaremos a la definición de límite de una función de varias variables independientes. Con el objeto de tener una interpretación gráfica nos restringiremos a dos variables.

Sea $f(x,y)$ definida en un entorno rectangular reducido de todo z_0 de (x_0, y_0) .

Definición 1.2.10

Se dice que L es el límite de $f(x,y)$ cuando $x \rightarrow x_0$ y $y \rightarrow y_0$, lo cual se escribe

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x,y) = L$$

Si para todo número positivo ϵ se puede hacer corresponder un δ también positivo (que depende de ϵ y de (x_0, y_0) en general) tal que se cumplen las desigualdades siguientes:

$$|f(x,y) - L| < \epsilon$$

siempre que

$$|x - x_0| < \delta \quad ; \quad |y - y_0| < \delta$$

Explicamos e interpretamos la definición anterior.

Digamos que ϵ es la magnitud de la aproximación que se requiere al límite de la función, la cual podemos fijar de antemano, según nos conviene a un intervalo de amplitud 2ϵ en el recorrido de la función (eje Z); esto se representa geoméricamente por dos planos paralelos al plano (x,y) en la ecuación $Z = L + \epsilon$ y otro $Z = L - \epsilon$ (FIG. 12.12)

Una vez fijado el error, existirá el límite cuando sea posible de finir la magnitud de δ que representa la mitad del lado de un entorno rectangular en el dominio de la función en el que se cumple que para todo punto interior a él, su imagen en la super-

ficie se encuentra entre los planos descritos.

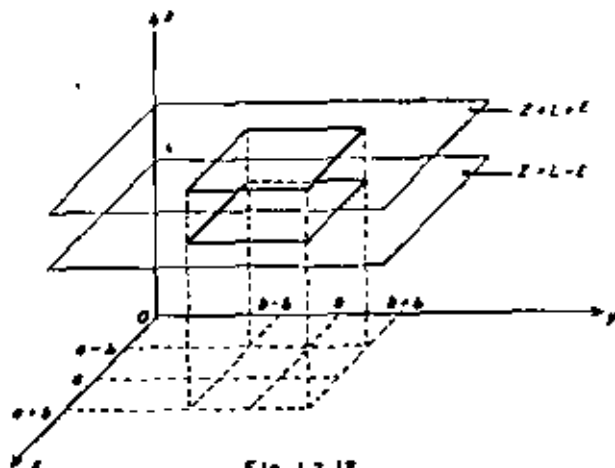


FIG. 12.12

Al igual que cuando estudiamos límites de funciones reales de variables reales, necesitaremos de una serie de propiedades de este nuevo tipo de límites. Estas propiedades se expresan en los teoremas que a continuación se enuncian, que como veremos, son una generalización de las que vimos en *Matemáticas I* y cuya demostración también muy semejante a la de aquellas, se encuentran en el apéndice 11.

Teorema 1.2.1) - (Teorema de unicidad)

Dada la función escalar de variables reales $f(x,y)$ y un entorno reducido del punto $P_0 \in D_f$. Si existe $\lim_{P \rightarrow P_0} f(P)$, éste es único.

Teorema 1.2.2)

Dadas las funciones escalares de variable vectorial $f(\vec{r}), F(\vec{r})$ tales que $f(\vec{r}) = F(\vec{r})$ en un entorno reducido del punto $\vec{r}_0 \in D_f, D_F$, si además existe $\lim_{\vec{r} \rightarrow \vec{r}_0} f(\vec{r}) = a$, entonces existe $\lim_{\vec{r} \rightarrow \vec{r}_0} F(\vec{r}) = a$.

Teorema 1.2.3)

Dada la función escalar de variable vectorial $f(\vec{r})$, tal que $f(\vec{r}) \geq 0$, en un entorno reducido del punto $\vec{r}_0 \in D_f$, entonces $\lim_{\vec{r} \rightarrow \vec{r}_0} f(\vec{r}) \geq 0$.

Teorema 1.2.4)

Dada la función escalar de variable vectorial $f(\vec{r})$, tal que $f(\vec{r}) \leq 0$, en un entorno reducido del punto $\vec{r}_0 \in D_f$, entonces $\lim_{\vec{r} \rightarrow \vec{r}_0} f(\vec{r}) \leq 0$.

Teorema 1.2.5)

Dadas las funciones escalares de variable vectorial $f(\vec{r}), F(\vec{r}), \phi(\vec{r})$, tales que $f(\vec{r}) = F(\vec{r}) = \phi(\vec{r})$ en un entorno reducido del punto $\vec{r}_0 \in D_f, D_F, D_\phi$; si además existen $\lim_{\vec{r} \rightarrow \vec{r}_0} f(\vec{r}) = \lim_{\vec{r} \rightarrow \vec{r}_0} \phi(\vec{r}) = a$, entonces también existe $\lim_{\vec{r} \rightarrow \vec{r}_0} F(\vec{r}) = a$.

Teorema 1.2.6)

El límite de toda función constante es el propio valor constante.

Teorema 1.2.7) - (Teorema de Adición)

Dadas las funciones escalares de variable vectorial $f_1(\vec{r}), f_2(\vec{r}), \dots, f_n(\vec{r})$ (n finita) y dado además un entorno reducido del punto $\vec{r}_0 \in D_{f_i}, \forall i=1, \dots, n$; si además existen

$$\lim_{\vec{r} \rightarrow \vec{r}_0} f_1(\vec{r}) = a_1$$

$$\lim_{\vec{r} \rightarrow \vec{r}_0} f_2(\vec{r}) = a_2$$

$$\lim_{\vec{r} \rightarrow \vec{r}_0} f_n(\vec{r}) = a_n$$

entonces, $\lim_{\vec{r} \rightarrow \vec{r}_0} [f_1(\vec{r}) + f_2(\vec{r}) + \dots + f_n(\vec{r})] = a_1 + a_2 + \dots + a_n$

Teorema 1.2.8) - (Teorema del Producto)

Cumplidas las hipótesis del teorema (1.2.7), entonces

$$\lim_{\vec{r} \rightarrow \vec{r}_0} [f_1(\vec{r}) f_2(\vec{r}) \dots f_n(\vec{r})] = a_1 a_2 \dots a_n$$

Teorema 1.2.9) - (Teorema del Cociente)

Dadas las funciones escalares de variable vectorial $f(\vec{r}), F(\vec{r})$, y dado además un entorno reducido del punto $\vec{r}_0 \in D_f, D_F$; si

además existen

$$\lim_{\vec{r} \rightarrow \vec{r}_0} f(\vec{r}) = a$$

$$\lim_{\vec{r} \rightarrow \vec{r}_0} \vec{F}(\vec{r}) = b \neq 0$$

entonces, $\lim_{\vec{r} \rightarrow \vec{r}_0} \frac{f(\vec{r})}{F(\vec{r})} = \frac{a}{b}$

1.19

Corolario de los teoremas (1.2.3), (1.2.4) y (1.2.7)

Dadas las funciones escalares de variable vectorial $f(\vec{r}), F(\vec{r})$, tales que $f(\vec{r}) \geq F(\vec{r})$ en un entorno reducido del punto $\vec{r}_0 \in D_f, D_F$; si además existen

$$\lim_{\vec{r} \rightarrow \vec{r}_0} f(\vec{r}) = a$$

$$\lim_{\vec{r} \rightarrow \vec{r}_0} F(\vec{r}) = b$$

entonces $a \geq b$.

Ejemplo 1.2.3

Demostrese que $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ y \rightarrow 1}} 4 - \frac{x^2}{3} + \frac{x}{4} - \frac{y^2}{3} = \frac{31}{3}$

Por definición debemos demostrar que el límite

significa de $|4 - \frac{x^2}{3} + \frac{x}{4} - \frac{y^2}{3} - \frac{31}{3}| < \epsilon$... 1.2.3.a

implica necesariamente la existencia de un número

$\delta > 0$ tal que $|x - 2| < \delta$
 $|y - 1| < \delta$

Operemos con la expresión (1.2.3.a); primero vamos a multiplicar por ϵ para simplificar la expresión.

$$|32 - x^2 + 2x - y^2 - 31| < 3\epsilon$$

$$|1 - x^2 + 2x - y^2| < 3\epsilon$$

$$|1 - (x^2 - 2x + 1) - y^2| < 3\epsilon$$

$$|2 - (x-1)^2 - y^2| < 3\epsilon$$

Multiplicamos, dentro del signo de valor absoluto, por (-1). Naturalmente, la expresión no se altera

$$|(x-1)^2 + y^2 - 2| < 3\epsilon$$

Ahora

$$-3\epsilon < (x-1)^2 + y^2 - 2 < 3\epsilon$$

$$2 - 3\epsilon < (x-1)^2 + y^2 < 2 + 3\epsilon \dots \dots \dots 1.2.3.b$$

La expresión (1.2.3.b) nos define la región marcada en la Fig. 1.2.13, comprendida entre las circunferencias concéntricas en (1,0) y con radios respectivamente iguales a $\sqrt{2+3\epsilon}$ y $\sqrt{2-3\epsilon}$; de hecho, todos los puntos de esa región cumplen con (1.2.3.a), por consiguiente, con (1.2.3). Notemos también que la circunferencia de radio $\sqrt{2}$ pasa por el punto (2,1). Ahora siempre podemos trazar un círculo con centro en (2,1) y tangente a la circunferencia exterior (la de +)

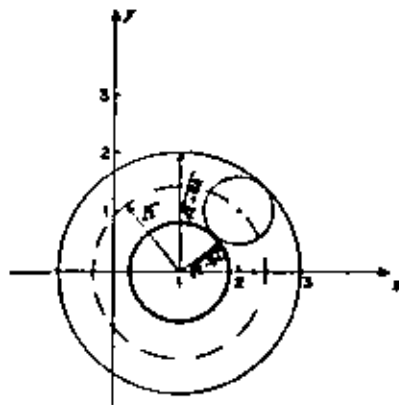


Fig. 1.2.13

tanca de la circumferència portada a la estroba, sempre serà menor que la distància a la circumferència interna. Todos los puntos interiores de este círculo quedarán dentro de la región definida por 1.2.3.b y comparación 1.2.3.a.

Luego, el cumplimiento de 1.2.3.a garantiza el cumplimiento de

$$\begin{aligned} & (x-2)^2 + (y-1)^2 < (\sqrt{2+\delta\epsilon} - \sqrt{2})^2 \\ \text{y que} & (x-2)^2 < (\sqrt{2+\delta\epsilon} - \sqrt{2})^2 \\ & (y-1)^2 < (\sqrt{2+\delta\epsilon} - \sqrt{2})^2 \end{aligned}$$

o bien

$$\begin{aligned} |x-2| & < \sqrt{2+\delta\epsilon} - \sqrt{2} \\ |y-1| & < \sqrt{2+\delta\epsilon} - \sqrt{2} \quad (\text{q.e.d.}) \end{aligned}$$

donde

$$\delta = \sqrt{2+\delta\epsilon} - \sqrt{2} > 0, \text{ que siempre existe.}$$

Ejemplo 1.2.4

Determinar el límite de $f(x,y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ cuando $(x,y) \rightarrow (0,0)$,

o sea

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$

Podemos proceder como en el ejemplo 1.2.2 partiendo de un punto cualquiera (x,y) y aproximándonos a $(0,0)$ por la recta de ecuación $y = mx$ que pasa por ambos puntos; substituyendo $y = mx$ en $f(x,y)$ obtenemos

$$f(x) = \frac{x^2 - m^2 x^2}{x^2 + m^2 x^2} \text{ que es sólo función de } x.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - m^2 x^2}{x^2 + m^2 x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2(1 - m^2)}{x^2(1 + m^2)} = \frac{1 - m^2}{1 + m^2}$$

Como podemos observar, el límite depende de la recta que usamos para aproximarnos al punto, así que el límite no será único en este caso, por lo que decimos que no existe.

Otra manera de resolver el problema sería calculando el límite de $f(x,y)$ como si solamente fuera función de x cuando $x \rightarrow 0$, y después calcular el límite cuando $y \rightarrow 0$, del resultado del límite anterior, o sea

$$\lim_{y \rightarrow 0} \left[\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \right] = \lim_{y \rightarrow 0} \left[\frac{-y^2}{y^2} \right] = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y^2}{y^2} \left[-\frac{1}{1} \right] = -1$$

o bien comenzando con $f(x,y)$ como si solamente fuera función de y , luego calcular el límite de ese resultado cuando $x \rightarrow 0$, que resulta

$$\text{sea } \lim_{x \rightarrow 0} \left[\lim_{y \rightarrow 0} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{x^2}{x^2} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} [1] = 1$$

Como observamos, los resultados son distintos, lo que confirma que el límite no existe.

A esta última forma de evaluar el límite de una función de dos variables independientes se le conoce con el nombre de límite iterado.

Es condición necesaria para la existencia del límite doble $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x,y)$ que los límites iterados

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left[\lim_{y \rightarrow y_0} f(x,y) \right] \quad \text{y} \quad \lim_{y \rightarrow y_0} \left[\lim_{x \rightarrow x_0} f(x,y) \right]$$

sean iguales, pero su igualdad no garantiza la existencia del límite doble.

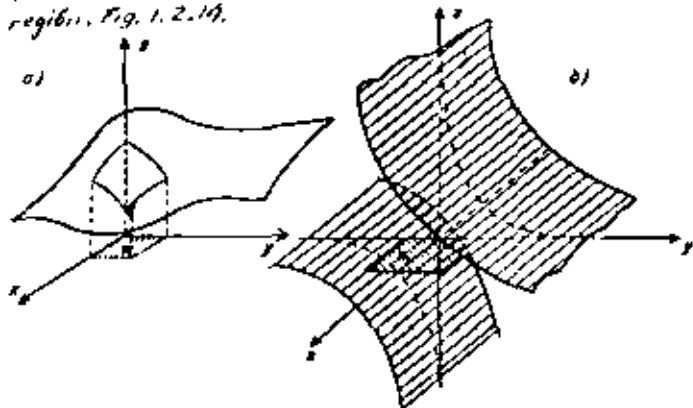
Como conclusión, añadimos recordar que para que el límite exista éste

1.23

debe ser único; la forma de determinar la existencia está calculado por alguno de los métodos propuestos e incluso, en caso de duda, verificarlo haciendo uso de la definición.

1.2.4. Continuidad.

Comenzamos por tratar de entender el concepto de continuidad. ¿Qué nos sugiere el término continuo?; ese término se usa para calificar algo que no tiene cortes ni saltos, que, en pocas palabras, tiene una secuencia ininterumpida. En esta misma forma usaremos para calificar a las funciones de varias variables independientes, y diremos que por ejemplo una función de dos variables independientes $z = f(x, y)$ que representa una superficie, es continua en una región, si no presenta interrupciones en su morfología sobre esa región. Fig. 1.2.14.



La superficie (a) es continua en tanto que (b) no lo es.

Fig. 1.2.14

Lo que necesitamos ahora es un criterio para definir cuándo una función es continua o no lo es.

Podríamos comenzar por definir la continuidad en un punto. Recordando nuestros antecedentes sabemos que para que una función de una variable independiente sea continua en un punto debe satisfacer 3 condiciones:

- La existencia del límite en el punto en cuestión.
- La existencia de la función en el punto mismo.
- La igualdad entre el valor de la función y el límite.

Es fácil entonces hacer la generalización para obtener la definición de continuidad.

Definición 1.2.11

Sea $f(x)$ en un entorno rectangular D' de x_0 . Se dice que $f(x)$ es continua en x_0 si se satisfacen las siguientes condiciones:

- $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$, o sea, que el límite doble exista.
- Que exista $f(x_0)$; o sea, $f(x_0)$ debe estar definida.
- Que $f(x_0) = L$; o sea, que el límite y el valor de la función en el punto sean iguales.

Si deja de cumplirse alguna de las condiciones anteriores la función es discontinua en el punto.

Definición 1.2.12
 Una función se dice continua en una región $R \subseteq E^n$ si es continua en todo punto de R .

Otra forma de definir la continuidad es en términos de δ y ϵ .

Ejemplo 1.2.5

Analizar si $f(x,y) = \frac{x-y}{x+y}$ es continua en $x=0, y=0$.

Solución:

$f(0,0)$ no está definido \Rightarrow la función es discontinua en $(0,0)$.

Ejemplo 1.2.6

Investigar si $f(x,y) = \sqrt{5-x^2-y^2}$ es continua en $(1,2)$.

Solución:

$f(1,2) = 0$; la función existe. Ahora veamos si existe el límite: para que exista, ya sabemos, debe existir un entorno de lado 2δ tal que, para cualquier punto de él, por ejemplo "q" se cumple:

$$|f(q) - L| < \epsilon \dots (1.2.6.3)$$

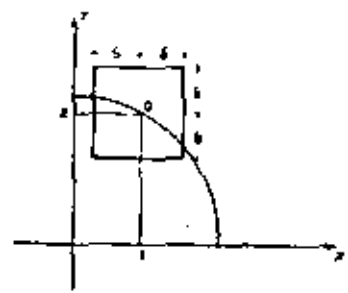


FIG. 1.2.18

Pero el dominio de la función es interior al círculo de la figura (1.2.15); entonces la función no existe en Q; la relación (1.2.6.3) no se cumple y el límite no existe. \Rightarrow la función es discontinua en $(1,2)$.

1.3.- Derivadas Parciales.

Introducción

En tu curso de Matemáticas I usas que la derivada de una función de una variable independiente representa la razón - instantánea de cambio de la función respecto a su variable, esto es, nos dice que tanto cambia la función cuando se incrementa uniformemente la variable. Ahora vamos a dar una definición de la extensión para una función con más de una variable independiente, que no necesariamente tendrá una interpretación geométrica, como en el siguiente problema

Problema 1.3.1

En una fábrica de artículos eléctricos se fabrican las siguientes bobinas:

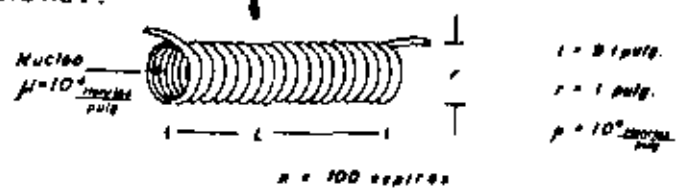


Fig. 1.3.1

Si la inductancia en este tipo de bobinas está dada por la función:

$$(I) \quad L = \frac{\mu_0 n^2 r^2}{9r + 10l} \quad \text{en donde} \quad \left\{ \begin{array}{l} L \text{ está en } \mu\text{H} = \text{henries} \\ n \text{ en espiras} \\ \text{(cte en este ejemplo)} \\ r, l \text{ en pulgadas} \\ \mu \text{ en } \frac{\text{Henryes}}{\text{pulgada}} \end{array} \right.$$

Suponiendo que somos los ingenieros que vamos a controlar la calidad de las bobinas nos haríamos la siguiente pregunta:

¿Cuál de estas las especificaciones debemos cuidar más para que la diferencia entre la inductancia de diseño y la obtenida mediante los procesos de fabricación se mantenga más aproximada a los estándares establecidos?

Nuestro problema es averiguar cuál de las variables que intervienen en la inductancia afecta más sensiblemente el valor de ésta. Para resolverlo necesitaremos haber que usar:

(1) bobina: es un enrollamiento de hilo conductor que recorrido por una corriente eléctrica, induce en el espacio circundante un efecto magnético, lo cual permite el almacenamiento de energía que puede ser utilizada para engendrar un voltaje en un circuito próximo.

por qué tanto cambia la inductancia al permitir que varíe alguna de las variables; es evidente que los demás los mantendremos constantes, de lo contrario, no sabríamos a cuál de ellos atribuir la variación.

Calculemos entonces el incremento de la inductancia debido a un incremento en la longitud l , esto es $\Delta_l L$.

$$\Delta_l L = \frac{\mu_0 n^2 r^2}{9r + 10(l + \Delta l)} - \frac{\mu_0 n^2 r^2}{9r + 10l} = \frac{\mu_0 n^2 r^2 [(9r + 10l) - (9r + 10(l + \Delta l))]}{(9r + 10(l + \Delta l))(9r + 10l)}$$

Al simplificar

$$\Delta_l L = \frac{-10 \mu_0 n^2 r^2 \Delta l}{(9r + 10(l + \Delta l))(9r + 10l)}$$

Para los valores de diseño usamos:

$$\Delta_l L = \frac{-10(10^6)(100^2)(1)^2 \Delta l}{(9(1) + 10(9.1 + \Delta l))(9(1) + 10(9.1))} = -\frac{10^6 \Delta l}{10 + \Delta l}$$

En este punto surge una duda: ¿cuál debe ser el valor de Δl para que el resultado sea comparable con los incrementos de la inductancia obtenida con las otras variables? Realmente no es posible precisar que valor deberá darse a Δl , así que lo mejor sería obtener una expresión que no dependa de los incrementos que se den a las variables.

Dividamos entonces entre Δl , con lo que obtenemos:

$$\frac{\Delta_l L}{\Delta l} = -\frac{10^6}{10 + \Delta l}$$

Esta última expresión aún depende de Δl ; consideremos entonces que $\Delta l \rightarrow 0$, y entonces el límite del cociente, entonces será:

$$\lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta L}{\Delta l} = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \left(-\frac{10^6}{10 \Delta l} \right) = -10^5 \frac{\text{henrios}}{\text{meters}}$$

Como ya habrás identificado el proceso seguido hasta aquí es el de la derivación, exactamente como aprendiste en Matemáticas I, claro que considerando que nuestra función L es sólo de l .

Hagamos ese proceso considerando ahora que l es constante, y que la función sólo depende de r .

Al sustituir los valores de M , n y l en la ecuación, obtenemos:

$$L = \frac{10^6 (100)^2 r^2}{9r + 91} = \frac{10^8 r^2}{9r + 91}$$

que es una función exclusiva de r .

Entonces, el derivado respecto a r , y utilizando para la derivada, no $\frac{dL}{dr}$ sino otro símbolo que nos indique la dependencia de la función de más de una variable independiente; por ejemplo sustituyendo $\frac{dL}{dr}$ por el símbolo $\frac{\partial L}{\partial r}$, al que denominaremos derivada parcial de L con respecto a r :

$$\frac{\partial L}{\partial r} = \frac{(9r + 91)(2 \times 10^8 r) - (10^8 r^2)9}{(9r + 91)^2}$$

El valor de esa derivada en $r=1$

$$\left. \frac{\partial L}{\partial r} \right|_{r=1} = \frac{(9(1) + 91)(2 \times 10^8 (1)) - 10^8 (1)^2 9}{(9(1) + 91)^2} = 1.9 \times 10^6 \frac{\text{henrios}}{\text{meters}}$$

Al comparar este resultado con el de

$$\lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta L}{\Delta l} = \frac{\partial L}{\partial l} = -10^5 \frac{\text{henrios}}{\text{meters}}$$

Veamos que la variable que mayor asociación produce a la inducción es el diámetro de las bobinas, así que eso es lo que se quiere de mayor control. Cuando hemos resuelto el problema.

1.3.1 Derivadas Parciales

En el desarrollo de la solución del problema anterior se han mencionado algunos conceptos que vale la pena formalizar y clarificar.

Cuando hablamos del incremento de una función $F(\bar{x})$ (en donde $\bar{x} = \{x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n\}$) respecto a la variable x_i escribiremos $\Delta x_i F$, y esto representa la variación que experimenta la función cuando x_i cambia y los restantes x permanecen constantes.

Esa variación "parcial" de la función la calculamos como aprendimos Matemáticas I:

1.- Incrementamos la variable x_i :

$$F(\bar{x} + \Delta \bar{x}) = F(x_1, x_2, \dots, x_i + \Delta x_i, \dots, x_n) \quad 1.3.1.1$$

$$\text{siendo } \Delta x_1 = \Delta x_2 = \dots = \Delta x_n = 0$$

$$\Delta x_i \neq 0$$

2.- Restamos la función original para obtener su incremento:

$$\Delta x_i F = F(\bar{x} + \Delta \bar{x}) - F(\bar{x}) \quad 1.3.1.2$$

Con esto tenemos ya el incremento de la función debido a x_i . Ahora completamos el proceso.

3.- Calculamos el cociente

$$\frac{\Delta x_i F}{\Delta x_i} = \frac{F(\bar{x} + \Delta \bar{x}) - F(\bar{x})}{\Delta x_i} \quad 1.3.1.3$$

4.- Tomamos el límite del cociente de los incrementos cuando $\Delta x_i \rightarrow 0$

$$\lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} \frac{\Delta x_i F}{\Delta x_i} = \lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} \frac{F(\bar{x} + \Delta x_i) - F(\bar{x})}{\Delta x_i} \quad 1.3.4$$

Si este límite existe, se denota, por definición la "derivada parcial" de la función $F(\bar{x})$ respecto a la variable x_i . Esto se denota: $\frac{\partial F(\bar{x})}{\partial x_i}$; $\frac{\partial F}{\partial x_i}$ según la notación de Jacobi,

F_{x_i} ; F_i según la notación de Lagrange,

o bien $D_{x_i} F$ según la notación de Cauchy.

Cuando se desea calcular el valor de una derivada parcial de un punto específico $\bar{x} = \bar{x}_0$, es muy útil la notación de Lagrange $F_{x_i}(\bar{x}_0)$

también se acostumbra utilizar la notación de Jacobi de la manera siguiente:

$$\left. \frac{\partial F}{\partial x_i} \right|_{\bar{x}_0}$$

$$\left. \frac{\partial F}{\partial x_i} \right|_{(x_1, x_2, \dots, x_n)}$$

Los pasos marcados del 1 al 4 corresponden a la "regla de los cuatro pasos" para calcular las derivadas.

De manera similar, se pueden definir las derivadas parciales respecto a las demás variables.

Como no es práctico aplicar la regla de los cuatro pasos, normalmente usamos las fórmulas de derivación asociadas en álgebra diferencial, considerando en cada momento

a la función con una sola variable independiente (sumando a la que se va a derivar) y las demás se consideran constantes, ya sea dándoseles un valor si lo tienen, como hicimos con $\frac{\partial F}{\partial x}$, o bien manejándolas como tales, según hicimos con $\frac{\partial F}{\partial x}$.

Problema 1.3.2

Encuentre las derivadas parciales de $Z = 2x^2 - 3xy + 4y^2$ respecto a las variables x, y .

Solución:

Si consideramos y constante y derivamos con respecto a x se tiene:

$$\frac{\partial Z}{\partial x} = 4x - 3y \quad \text{①}$$

En efecto, aplicando las propiedades de las derivadas:

$$\frac{\partial}{\partial x}(2x^2 - 3xy + 4y^2) = \frac{\partial}{\partial x}(2x^2) + \frac{\partial}{\partial x}(-3xy) + \frac{\partial}{\partial x}(4y^2)$$

al derivar el primer sumando, que es el producto de una constante por una función $\frac{\partial}{\partial x}(2x^2) = 4x$

Al derivar el segundo sumando, que es el producto de la constante $(3y)$ por x , tenemos $\frac{\partial}{\partial x}(-3xy) = -3y$

Finalmente, como el tercer sumando de la función es sólo "función de y ", al derivar respecto a x , se le considera constante; entonces: $\frac{\partial}{\partial x}(4y^2) = 0$

Al sumar las TRES derivadas obtenidas (1)

Si consideráramos ahora x constante, y seguiríamos un proceso análogo para derivar respecto a y , obteniéndolo:

$$\frac{\partial R}{\partial y} = -3x + 8y = \dots (2)$$

Problema 1.3.3

En hidráulica se define el "radio hidráulico" de un conducto por el que circula un fluido como el cociente $R = \frac{A}{P}$ en donde A es el área de la sección transversal que lleva fluido y P es el perímetro de la sección en contacto con el fluido, llamada "perímetro mojado". Para el canal de la fig. 1.3.2: $A = bt$, $P = b + 2t$. Calcular $\frac{\partial R}{\partial b}$ y $\frac{\partial R}{\partial t}$ cuando $b = 6\text{m}$, $t = 2\text{m}$ y decir a respecto a cuál de las variables mencionadas más sensible es el radio hidráulico.

Solución

Si sustituimos A y P por sus expresiones en función de b y t :

$$R = \frac{bt}{b+2t}$$

Al derivar respecto a b , tenemos la derivada mencionada.

$$R \quad \frac{\partial R}{\partial b} = \frac{(b+2t)t - bt(1)}{(b+2t)^2} = \frac{bt + 2t^2 - bt}{(b+2t)^2} = \frac{2t^2}{(b+2t)^2}$$

para $b = 6$, $t = 2$

$$\left. \frac{\partial R}{\partial b} \right|_{(6,2)} = \frac{2}{(6+4)^2} = \frac{2}{100} = 0.02$$

Si a derivar ahora respecto a t , manteniendo b constante

$$\frac{\partial R}{\partial t} = \frac{(b+2t)b - bt(2)}{(b+2t)^2} = \frac{b^2 + 2bt - 2bt}{(b+2t)^2} = \frac{b^2}{(b+2t)^2}$$

$$\left. \frac{\partial R}{\partial t} \right|_{(6,2)} = \frac{36}{(6+4)^2} = \frac{36}{100} = 0.36$$

La mayor variación del radio hidráulico se tiene al variar el parámetro t .

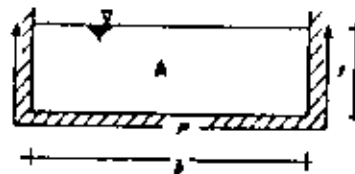


Fig. 1.3.2

Problema 1.3.4

Se desea calcular la pendiente de la curva de intersección de la superficie $z = 16 - x^2/4 - y^2/4$, con el plano $y = 2$ en el punto de la curva en que $x = 3$

Solución

La fig. 1.3.3 muestra las dos superficies del problema.

Por condición del problema, la tangente está contenida en el plano $y = 2$, en el cual también se encuentra la curva de intersección.

La curva dada tiene por ecuaciones:

$$z = 16 - \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{4} \quad (1)$$

$$y = 2 \quad (2)$$

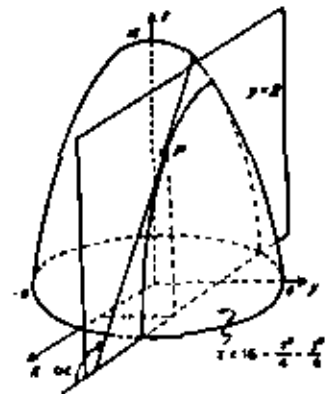


Fig. 1.3.3

Si sustituimos $y = 2$ en la ecuación (1), obtenemos

$$z = 16 - x^2/4 - (2)^2/4$$

que es la ecuación plana de la curva de intersección. Al derivar la ecuación respecto a x y evaluarla en el punto en que $x=3$, obtenemos la pendiente buscada como aprendimos en Matemáticas I

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{2x}{4} ; \left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{x=3} = -\frac{6}{4} = -3/2$$

Esta pendiente representa la tangente del ángulo α que forman la recta tangente a la superficie, contenida en el plano $y=2$, con el plano $z=0$, como se muestra en la fig. 1.3.3; ésta es entonces la solución al problema.

1.3.2 Interpretación Geométrica de la Derivada Parcial.

Según se verá en el último problema, la derivada parcial tiene una interpretación geométrica, la cual formalizaremos de inmediato.

Como ya hemos venido mencionando, una superficie es representada por una función $z = f(x, y)$ de dos variables independientes. Consideremos un punto de ella, por ejemplo $P(x_0, y_0, z_0)$ y por ese punto hagamos pasar un plano $y = y_0$. Este plano corta a la superficie en una curva C_1 que contiene al punto P . De la definición de derivada parcial vemos que $\left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{(x_0, y_0)}$ es la pendiente de la recta tangente

a la curva C_1 en el punto P . Esta recta tangente la llamaremos L_1 ; por supuesto, está contenida en el plano $y = y_0$. Al ángulo que forma esta recta con el plano $z=0$, lo denominaremos

α y podremos escribir:

$$\left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{(x_0, y_0)} = \tan \alpha$$

De una manera similar, por el punto P podemos hacer pasar un plano $x = x_0$ que cortará a la superficie en una curva C_2 , Fig. 1.3.5. La derivada $\left. \frac{\partial z}{\partial y} \right|_{(x_0, y_0)}$ es la pendiente de la curva C_2 en el punto P . La recta tangente es denotada por L_2 y su pendiente es la tangente de β , o sea:

$$\left. \frac{\partial z}{\partial y} \right|_{(x_0, y_0)} = \tan \beta$$

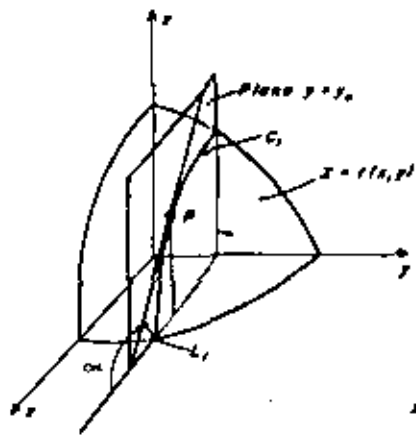


Fig. 1.3.4

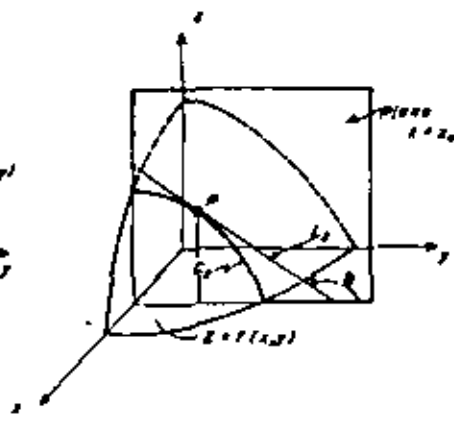


Fig. 1.3.5

Problema 1.3.5

1.37

Encuentre las pendientes de las rectas tangentes a la superficie del hemisferio $z = \sqrt{25-x^2-y^2}$; a) con el plano $x=2$, b) con el plano $y=3$, ambas en el punto $P(2,3)$ y c) encuentre los ángulos α y β que forman dichas tangentes con el plano x,y .

Solución:

a) lo que se pide es la $\frac{\partial z}{\partial y} \Big|_{(2,3)}$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-2y}{2\sqrt{25-x^2-y^2}} = \frac{-y}{\sqrt{25-x^2-y^2}}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} \Big|_P = \frac{-3}{2\sqrt{3}}$$

b) Se requiere:

$$\frac{\partial z}{\partial x} \Big|_P$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-2x}{2\sqrt{25-x^2-y^2}} = \frac{-x}{\sqrt{25-x^2-y^2}}; \quad \frac{\partial z}{\partial x} \Big|_P = \frac{-1}{\sqrt{3}}$$

$$c) \tan \alpha = \frac{\partial z}{\partial x} \Big|_P \quad \therefore \alpha = \arctan \left(\frac{\partial z}{\partial x} \Big|_P \right) = \arctan \left(-\frac{1}{\sqrt{3}} \right) = 150^\circ$$

$$\tan \beta = \frac{\partial z}{\partial y} \Big|_P \quad \therefore \beta = \arctan \left(\frac{\partial z}{\partial y} \Big|_P \right) = \arctan \left(\frac{3}{2\sqrt{3}} \right) = 139^\circ$$

Se deja al estudiante la interpretación gráfica del problema.

Problema 1.3.6

Encuentre un vector normal a la superficie:

$$z = x^2 - 2xy - y^2 \text{ en el punto } (1,2).$$

Solución:

Para determinar un vector normal a la superficie vamos a

1.38

aprovechar que se pueden conocer las pendientes de dos rectas tangentes a ella; dichas tangentes tomadas en un mismo punto se cortarán en él, y como sabemos de nuestro curso de Matemáticas II, dos rectas que se cortan definen un plano. En este caso, dado que los rectos son tangentes, el plano resultará tangente a la superficie; la normal a ese plano tangente es normal también a la superficie. Determinemos entonces las dos tangentes:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x - 2y; \quad \frac{\partial z}{\partial x} \Big|_P = -2 = m_1$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -2x - 2y; \quad \frac{\partial z}{\partial y} \Big|_P = -6 = m_2$$

Tenemos ya las pendientes de las tangentes a la superficie que pasan por el punto dado. ¿Será necesario determinar la ecuación de las rectas tangentes?

La respuesta es no, si lo que se requiere es un vector normal a la superficie, debemos de usar un procedimiento vectorial, así que regresemos a nuestros antecedentes vectoriales.

Tenemos dos direcciones y se requiere un vector perpendicular a simultáneamente a ambas. Pues bien, de acuerdo con la interpretación geométrica del producto vectorial, en Matemáticas I, dados dos vectores podemos encontrar un tercer vector, perpendicular al plano formado por los dos primeros, si a estos los multiplicamos vectorialmente. Eso es lo que necesitamos ahora, sólo que hoy que definía los vectores tangentes de los cuales sólo conocemos su dirección.

Consideremos el siguiente gráfico para observar lo que se ha-
ce

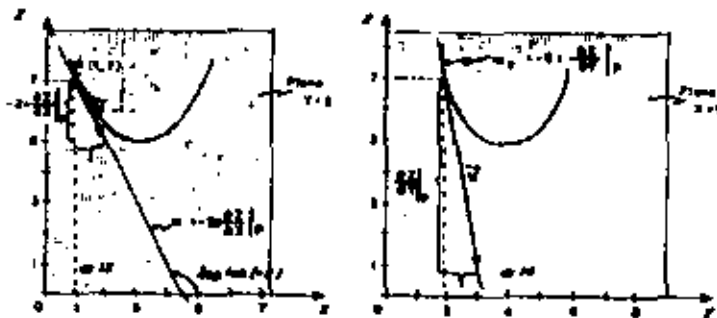


FIG. 1.3.9

En la figura 1.3.9 se muestra lo que se presenta en el plano $z=2$.
Sabemos que en el punto $(1,2)$ la pendiente de la recta tangente
contenida en dicho plano es $\frac{\partial z}{\partial x}|_P$ y vale -2 , lo cual puede de-
cirse que por una unidad de x , z decrece 2 unidades. Aléjemos un
vector \vec{u} en la dirección de la recta, cuyas componentes son: uno
en x , para que $\Delta x=1$; cero en y , ya que la recta se encuentra
en un plano perpendicular al eje y siendo su proyección sobre
dicho eje un punto; finalmente, la componente en z será $-\frac{\partial z}{\partial x}|_P$
para que al hacer $m = -\frac{\Delta z}{\Delta x}$ queda $m = \frac{\partial z}{\partial x}|_P$

en consecuencia el vector \vec{u} queda

$$\vec{u} = i + \frac{\partial z}{\partial x}|_P k = i - 2k$$

el problema de una manera similar en el plano $x=1$ (fig. 1.4), obte-
nemos:

$$\vec{v} = j + \frac{\partial z}{\partial y}|_P k = j - 6k$$

Si multiplicamos vectorialmente \vec{u} y \vec{v} obtenemos el vector nor-
mal

$$\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -6 \end{vmatrix} = 2i + 6j + k$$

el vector pedido es $\vec{n} = 2i + 6j + k$

1.3.3. APLICACIONES DE LA INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DE LA DERIVADA PARCIAL.

1.3.3.1. Normal a una superficie.

Basado en el problema anterior, halla una fórmula gene-
ral para las componentes de un vector normal a una su-
perficie, de ecuación $z = f(x, y)$, en el punto (x_0, y_0) . Cuan-
do la hayas encontrado reemplázalo con el problema anterior

1.3.3.2. Ecuación del plano tangente.

Con la normal a la superficie del inciso anterior, —
plantea la ecuación general del plano tangente a esa su-
perficie, en el punto $P_0(x_0, y_0)$.

Halla la ecuación del plano tangente para el problema —
que estamos resolviendo.

1.3.3.3. Ángulo entre dos superficies.

Como recordemos, el ángulo entre dos superficies, en —

un cierto punto de su curva de intersección, es el ángulo entre sus respectivos normales, en ese punto.

Dadas las superficies de ecuaciones:

$$z = f(x, y)$$

$$z = g(x, y)$$

Deduce una expresión para determinar el ángulo entre ellas, en el punto $P(x_0, y_0)$, y aplícala al cálculo del ángulo entre las superficies.

$$z = -2x^2 + y^2 + 5x - y + 2$$

$$z = x^2 - 3y^2 + 6y + 2x - 1$$

en $P(1, 1)$.

1.3.3.4 Recta Tangente a la Intersección de Dos Superficies:

La recta tangente a la curva intersección entre dos superficies, tiene la dirección de la perpendicular común a las normales a esas superficies en el punto considerado. En el problema 1.3.3, para hallar el ángulo entre las dos superficies, determinaste las normales respectivas en el punto $P(1, 1)$. Ahora, utilizando esos resultados, encuentra un vector tangente a la curva de intersección, en ese mismo punto, y las ecuaciones de la recta tangente a esa curva en el punto dado.

1.3.4 Condiciones de Derivabilidad:

Sea la función

$$f(x, y) = \begin{cases} x + y & \text{si } xy = 0 \\ 1 & \text{si } xy \neq 0 \end{cases}$$

Es evidente que esta función es discontinua en el origen; veamos si admite derivadas en ese punto

$$f'_x(0, 0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(0 + \Delta x, 0) - f(0, 0)}{\Delta x} = \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1$$

Análogamente

$$f'_y(0, 0) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(0, 0 + \Delta y) - f(0, 0)}{\Delta y} = \frac{\Delta y}{\Delta y} = 1$$

Cuando estudiaste las derivadas ordinarias concluiste que la existencia de la derivada implicaba necesariamente la continuidad de la función; podemos decir entonces, que cuando tenemos varias variables no es necesario que la función sea continua para que existan sus derivadas parciales.

La condición necesaria que podemos imponer ahora, es que la función $f(x, y)$ sea continua en $x = x_0$, para que exista la derivada parcial de $f(x, y)$ con respecto a x en el punto (x_0, y_0) .

Análogamente, la existencia de la derivada parcial de $f(x, y)$ con respecto a y en el punto (x_0, y_0) , implicará la continuidad de la función $f(x_0, y)$ en ese punto.

1.4 Derivadas Parciales Sucesivas y Teorema de Schwarz^{1.4.3}

La primera parte del título nos sugiere la posibilidad de derivar nuevamente una derivada, sólo que hay que ver en que casos es posible.

Como vimos en el tema anterior, una función $z = F(x, y)$ definida y continua en una región R del plano (x, y) puede tener derivadas parciales $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ si los límites que definen ambas derivadas existen. Ahora bien, cuando se cumple lo anterior, las derivadas parciales son n sucesos funciones definidas sobre la misma región R , es decir

$$\frac{\partial z}{\partial x} = F_x(x, y); \quad \frac{\partial z}{\partial y} = F_y(x, y)$$

en donde F_x y F_y definen distintas funciones de x, y . En tal situación es posible obtener las derivadas parciales de cada una de ellas, a las que llamaremos segundas derivadas parciales, o la derivada con respecto a x_i de la primera derivada parcial de $f(x)$, respecto a x_i se denota por

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} = f_{x_i x_i}(x, y).$$

que se lee: segunda derivada parcial de $f(x, y)$ con respecto a x dos veces. El símbolo $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$ es el operador de Jacobi, mientras que $f_{x_i x_i}(x, y)$ es el de Lagrange, empleándose también, en este caso, $f_{x_i x_i}(x, y)$ ó $f_{i i}$. De manera similar podemos derivar parcialmente $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ ahora con respecto a x_j , obteniéndose $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ derivada parcial mixta, entendiéndose según la disposición de las subíndices de derecha a izquierda, así

el símbolo anterior nos dice que $f(x, y)$ fue primeramente^{1.4.4} derivada con respecto a x_i y después respecto a x_j .

Se puede seguir derivando sucesivamente hasta que se muestran cero las derivadas, o bien no existen.

Ejemplo 1.4.1

Obtenga todas las segundas derivadas parciales de la función: $w = e^{x^2 y}$

Solución:

Primero se obtienen las primeras derivadas de w , respecto a x y y .

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 2xy e^{x^2 y} \quad 1.4.1.a$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = x^2 e^{x^2 y} \quad 1.4.1.b$$

La expresión 1.4.1.a puede ser derivada ahora respecto a x ó a y , ya que es una nueva función de x o y , por lo tanto obtenemos las parciales

$$w_{xx} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 2x^2 y^2 e^{x^2 y} \quad 1.4.1.c$$

$$w_{xy} = \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x} = 2x e^{x^2 y} + 2x^3 y e^{x^2 y} \quad 1.4.1.d$$

Al derivar de 1.4.1.b respecto a x y y , obtenemos

$$w_{yx} = \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = 2x e^{x^2 y} + 2x^3 y e^{x^2 y} \quad 1.4.1.e$$

$$u_{yy} = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = x^4 e^{x^2 y}$$

1.45
1411

Como ves, de una función de dos variables se obtienen varias segundas derivadas parciales, cada una de las cuales es nuevamente función de las variables originales; si estas funciones son derivables podemos encontrar las terceras derivadas parciales (d en 3º), y así sucesivamente.

Es fácil ver que si hay N variables independientes, el número de segundas derivadas parciales es N^2 , el de las terceras derivadas parciales es N^3 , y así en lo que sigue.

Hay algo interesante que observar también. Analicemos como son las parciales representadas en 1.4.1. d y e. Se observa que los resultados son los mismos; cabe la pregunta ¿Sucede así con todas las parciales segundas mixtas?

La respuesta está dada por el Teorema que enunciaremos a continuación

Teorema 1.4.1

Teorema de Schwarz :-

Si f es un campo escalar tal que sus derivadas

- f_{11}, f_{22} existen en una vecindad de (a, b)
- f_{12} es continua en (a, b)

Entonces $f_{21}(a, b)$ existe y además

$$f_{21}(a, b) = f_{12}(a, b)$$

La demostración de este teorema se presenta en el apéndice 12

Ejemplo 1.4.2

1- Verificar que $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ para la función $f(x, y) = 3x^2 \tan^2 xy$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 3 \tan^2 xy + 3x [2y \tan xy \sec^2 xy] \quad 1.4.2a$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 3x [2x \tan xy \sec^2 xy] = 6x^2 \tan xy \sec^2 xy \quad 1.4.2b$$

El derivar 1.4.2.a respecto a y , obtenemos:

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 6x^2 (\tan xy) \sec^2 xy + 6x^2 (\tan xy) \sec^2 xy + 16x^2 \sec^4 xy + 6x^2 y [2 \sec^2 xy] \tan^2 xy$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 12x^2 \tan xy \sec^2 xy + 6x^2 y \sec^4 xy + 12x^2 y \tan^2 xy \sec^2 xy \quad 1.4.2c$$

El derivar 1.4.2.b respecto a x , obtenemos:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 12x \tan xy \sec^2 xy + 6x^2 y \sec^4 xy + 12x^2 y \tan^2 xy \sec^2 xy \quad 1.4.2d$$

Como podemos observar los resultados 1.4.2.c y d son iguales. La función g y sus derivadas no cumplen con las hipótesis del Teorema de Schwarz, en puntos en los que el producto xy es igual a $\pi/2, 3\pi/2$ ó difiere de estos en $\pi/2$, en ellos; -

- la función $\tan xy$ no tiene un valor determinado, y por otro lado $\sec xy = \frac{1}{\cos xy}$ también es indeterminada. En dichos puntos, la función y sus derivadas son igualmente indeterminadas. Para puntos distintos siempre se cumplirá el Teorema de

- c) Schwarz. En los puntos en que $z = z_0 + i\pi/2$ la función no cumple con las hipótesis del Teorema de Schwarz y puede verse que, en esos casos, no es posible concluir la igualdad de las expresiones 1.4.3.c y d, dado que no tienen valores numéricos determinados (ambos tienden a infinito).

Cabe aclarar en este punto que el Teorema de Schwarz es la condición suficiente, más no necesaria, para la igualdad de las derivadas segundas mixtas.

Ejemplo 1.4.3

Demostrar que la función $z = \ln(x + \phi(y))$ satisface la ecuación (Nota: $\phi(y)$ es una función cualquiera de y):

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$$

Solución:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{x + \phi(y)} \quad 1.4.3.a \quad ; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\phi'(y)}{x + \phi(y)} \quad 1.4.3.b$$

en donde $\phi'(y) = \frac{d\phi(y)}{dy}$. De 1.4.3.a, tenemos

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = - \frac{\phi'(y)}{(x + \phi(y))^2}$$

De 1.4.3.b, tenemos:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) = - \frac{\phi'(y)}{(x + \phi(y))^2} \quad 1.4.3.c$$

que son iguales. De 1.4.3.a

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = - \frac{1}{(x + \phi(y))^2} \quad 1.4.3.d$$

Al substituir los resultados de 1.4.3.a, b, c, d en la ex-

presión a demostrar, obtenemos:

$$\frac{1}{x + \phi(y)} \left(- \frac{\phi'(y)}{(x + \phi(y))^2} \right) = \frac{\phi'(y)}{x + \phi(y)} \left(- \frac{1}{(x + \phi(y))^2} \right)$$

ahora simplificando

$$- \frac{\phi'(y)}{[x + \phi(y)]^3} = - \frac{\phi'(y)}{[x + \phi(y)]^3} \quad \text{I. q. d.}$$

1.5 FUNCIONES DIFERENCIABLES.

Introducción

Hasta este punto hemos tratado con magnitudes unitarias de la función respecto a sus variables independientes considerando que de éstas una varía y las demás permanecen constantes. Esto, por supuesto, no representa la generalidad de formas en que una función escalar de variable vectorial puede verse. Consideremos ahora en que forma se incrementa una función al cambiar simultáneamente más de una de las variables que la afectan y no necesariamente en forma unitaria, para ilustrar esto veremos el siguiente

Problema 1.5.1

Se desea determinar el cambio en la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyas catetos miden 40 y 60 cm (4.0; 5.1) cuando sus lados se incrementan en 1.0 y 1.5 cms. respectivamente.

Solución:

Una relación entre los catetos y la hipotenusa de un triángulo rectángulo está dada en el Teorema de Pitágoras; tenemos

1.49 h es la hipotenusa y a y c los catetos, luego

$$h^2 = a^2 + c^2$$

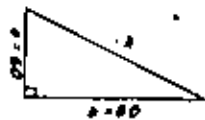


Fig. 1.5.1

El m.c.u. es h para $a=60, h_0=80$ es h_0

$$h_0^2 = 3600 + 6400 = 10000 \quad \therefore h_0 = 100 \text{ cm}$$

El valor de h para $a=59, b=21.5$ es h_1

$$h_1^2 = (59)^2 + (21.5)^2 = 10123.25$$

$$\therefore h_1 = 100.6143 \text{ cm}$$

El cambio de la hipotenusa es

$$h_1 - h_0 = \text{Valor final} - \text{Valor inicial} = 100.6143 - 100 = 0.6143$$

o sea, la hipotenusa crece 0.6143 cm.

El resultado obtenido por este procedimiento se conoce como "incremento de la función", cuando todas sus variables independientes cambian, tal que lo llamaremos "incremento total". Otra forma de obtener ese incremento es el que presentamos a continuación.

1.- Se incrementan las variables.

2.- Se resta el valor inicial de la función al valor de la función incrementada.

Para aclarar este procedimiento veamos otro problema.

Problema 1.5.2

1.50

Se proyectó un canal de 2m de ancho (plancha) y un metro de profundidad (traverse); debido a imprecisiones durante la construcción, las dimensiones quedaron de 2.02m para la plancha y de 1.03m para el traverse. ¿Qué tanto creció el área del canal?

El área de la sección del conducto que en este caso es un canal rectangular, se incrementa según se muestra en la Fig. 1.5.2

Solución

El área inicial de la sección es $A_0 = 2 \text{ m}^2$

Si se considera $b + \delta b = 2.02$ y $h + \delta h = 1.03$, el área será:

$$A_1 = (1.02)(1.03) = 2.0806 \text{ m}^2$$

y el incremento de área

$$\Delta A = A_1 - A_0 = +0.0806 \text{ m}^2$$

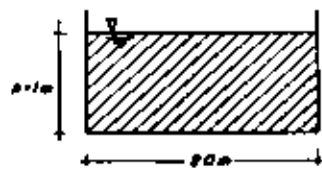
La representación gráfica de estos incrementos se hace en la Fig. 1.5.3, en la que se interpretan geoméricamente los incrementos

En la figura

$$\Delta A = A_1 - A_0 = \delta A_1 + \delta A_2$$

Calculamos numéricamente cada uno de los incrementos de área

$$\begin{aligned} (b + \delta b)(h + \delta h) &= (b + \delta b)(h + \delta h) \\ &= bh + \delta b h + h \delta b + \delta b \delta h \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \delta A_1 &= 0.02 \text{ m} \\ \delta A_2 &= 0.03 \text{ m} \end{aligned}$$

Fig. 1.5.2

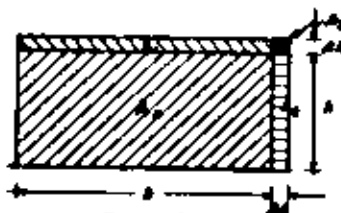


Fig. 1.5.3

$$A(b, h) = bh$$

1.51

$$\begin{aligned} \Delta A &= A(b+\Delta b, h+\Delta h) - A(b, h) = bh + b\Delta h + h\Delta b + \Delta b\Delta h - bh \\ \Delta A &= b\Delta h + h\Delta b + \Delta b\Delta h \end{aligned}$$

donde $b\Delta h$ es A_1 ,

$h\Delta b$ es A_2 ,

$\Delta b\Delta h$ es A_3

Veamos que tanto afecta cada una de las áreas citadas al valor del incremento:

	% de ΔA
$b\Delta h = 2 \times 0.01 = 0.06$	79.442
$h\Delta b = 1 \times 0.02 = 0.02$	24.814
$\Delta b\Delta h = 0.02 \times 0.03 = 0.0006$	$\frac{.744}{100\%}$

Como podemos observar, el producto $\Delta b\Delta h$ en este caso tiene un .74% al milésimo del incremento, por lo que podemos haber prescindido de él para obtener una aproximación del incremento y decir así que

$$\Delta A \approx b\Delta h + h\Delta b = 0.08 = dA$$

A esta aproximación del incremento la llamamos "diferencial". Las funciones que tienen diferencial a las que se les puede aproximar el incremento por medio de diferenciales, las llamamos "diferenciables". A continuación formalizamos esta definición:

Definición 1.5.1

Decimos que una función escalar de variable vectorial $f(\vec{x})$, $\vec{x} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$

es diferenciable (en un punto) si su incremento puede escribirse en la forma

$$\Delta f = \sum_{i=1}^n A_i \Delta x_i + \sum_{i=1}^n \eta_i \Delta x_i \quad 1.5.1.1$$

en donde los A_i no dependen de los incrementos, mientras que los η_i dependen de ellos en tal forma que $\eta_i \rightarrow 0$ a medida que los $\Delta x_i \rightarrow 0$

En algunos textos se encuentran la siguiente definición

Definición 1.5.1'

Una función escalar de variable vectorial $f(\vec{x})$, $\vec{x} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ es diferenciable (en un punto), si su incremento puede escribirse en la forma

$$\Delta f = \sum_{i=1}^n A_i \Delta x_i + \eta \sqrt{\sum_{i=1}^n \Delta x_i^2} \quad ; \quad \begin{matrix} \eta \rightarrow 0 \\ \Delta x_i \rightarrow 0 \end{matrix} \quad 1.5.1.2$$

Ambas definiciones son equivalentes, puesto que implican al dividirse, que el límite

$$\lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} \frac{|\Delta f - \sum_{i=1}^n A_i \Delta x_i|}{\sqrt{\sum_{i=1}^n \Delta x_i^2}} = 0 \quad 1.5.1.3$$

(Ver demostración en el apéndice (1.3)).
Notamos que el radical representa el módulo del vector incremento, como se representa gráficamente en la FIG. 1.5.4 para el caso de dos dimensiones

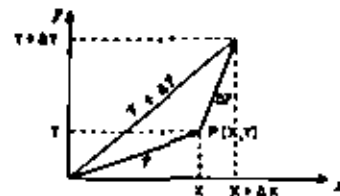


FIG. 1.5.4

Ejemplo 1.5.3

Revisa si la función $f(x,y,z) = x^2 + 2xyz$ es diferenciable

Solución:

Para que sea diferenciable es necesario, que su incremento pueda escribirse en la forma

$$\Delta f = A_1 \Delta x + A_2 \Delta y + A_3 \Delta z + \eta_1 \Delta x + \eta_2 \Delta y + \eta_3 \Delta z$$

según la definición. Calculemos el incremento:

1.- Incrementamos las variables

$$\begin{aligned} f(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z) &= (x+\Delta x)^2 + 2(x+\Delta x)(y+\Delta y)(z+\Delta z) \\ &= x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2 + 2xy\Delta z + 2x\Delta y\Delta z + 2x\Delta yz \\ &\quad + 2\Delta x\Delta y\Delta z + 2\Delta x\Delta yz + 2\Delta x\Delta y\Delta z + 2\Delta x\Delta yz \\ &\quad + 2\Delta x\Delta y\Delta z. \end{aligned}$$

2.- $\Delta f = f(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z) - f(x,y,z)$

$$\Delta f = 2x\Delta x + \Delta x^2 + 2xy\Delta z + 2x\Delta y\Delta z + 2x\Delta yz + 2\Delta x\Delta y\Delta z + 2\Delta x\Delta yz + 2\Delta x\Delta y\Delta z$$

Al agrupar por un lado a los términos que contienen a Δx , Δy , o Δz , y por otro a los que tienen productos entre estos incrementos:

$$\Delta f = (2x + 2y\Delta z + 2x\Delta y\Delta z + 2x\Delta yz + 2\Delta x\Delta y\Delta z + 2\Delta x\Delta yz) \Delta x + (2x\Delta z) \Delta y + (2xy\Delta z + 2\Delta x\Delta y\Delta z + 2\Delta x\Delta yz) \Delta z$$

En este caso se reconocen

$$A_1 = (2x + 2y\Delta z), \quad \eta_1 = \Delta x + 2y\Delta z + 2\Delta y\Delta z + 2\Delta y\Delta z$$

$$A_2 = 2x\Delta z, \quad \eta_2 = 2x\Delta z$$

$$A_3 = 2xy\Delta z, \quad \eta_3 = 0$$

Notese que la agrupación de los η_i pudo haberse

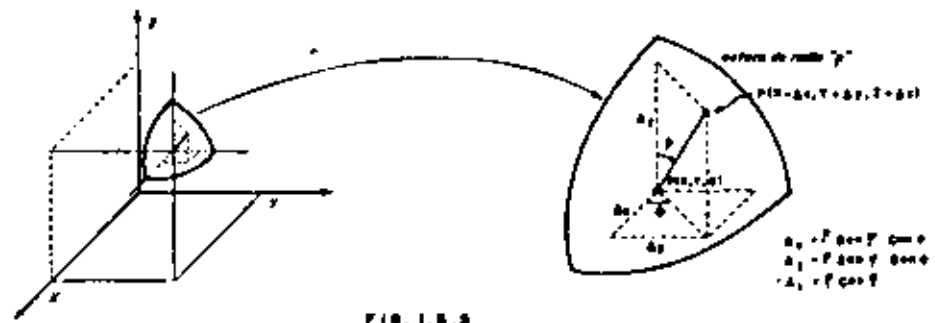
hecho de otras maneras; la agrupación de las A es es única.

Finalmente, como el incremento pudo expresarse de acuerdo a la definición, se afirma que la función es diferenciable.

Precisamente por la diversidad de formas de agrupar las η 's, generalmente es conveniente utilizar la definición 1.5.1' para saber si una función es o no diferenciable. En el caso del ejemplo 1.5.3. tendríamos:

$$\frac{|\Delta f - \sum A_i \Delta x_i|}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}} = \frac{|\Delta x^2 + 2xy\Delta z + 2x\Delta y\Delta z + 2x\Delta yz + 2\Delta x\Delta y\Delta z + 2\Delta x\Delta yz|}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}}$$

Y debemos demostrar que el límite de la expresión anterior es cero, cuando los incrementos de las tres variables tienden simultáneamente a cero. Para ello, utilicemos el artificio mostrado en la figura 1.5.5.



$$\lim_{\Delta x, \Delta y \rightarrow 0} \frac{|df - \sum_{i=1}^2 A_i \Delta x_i|}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\rho^2 \left[\frac{2}{3} \sin^2 \theta \cos^2 \theta + \frac{2}{3} \sin^2 \theta \cos^2 \theta + \frac{2}{3} \sin^2 \theta \cos^2 \theta \right]}{\rho}$$

$$= \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\rho \left[\frac{2}{3} \sin^2 \theta \cos^2 \theta + \frac{2}{3} \sin^2 \theta \cos^2 \theta + \frac{2}{3} \sin^2 \theta \cos^2 \theta \right]}{\rho}$$

Puesto que los términos encerrados en los signos de valor absoluto son constantes o variables acotadas

$$\lim_{\Delta x, \Delta y \rightarrow 0} \frac{|df - \sum_{i=1}^2 A_i \Delta x_i|}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} = 0 \implies \text{la función es diferenciable en } E^3$$

Ejemplo 1.5.4.- Definir si la función $f(x,y) = \sqrt{|xy|}$ es diferenciable en $(0,0)$

$$df = \sqrt{((0+\Delta x)(0+\Delta y))} - \sqrt{0} = \sqrt{|\Delta x \Delta y|}$$

$$= 0\Delta x + 0\Delta y + \sqrt{|\Delta x \Delta y|}; \sum_{i=1}^2 A_i \Delta x_i = 0$$

$$\frac{|df - \sum_{i=1}^2 A_i \Delta x_i|}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} = \frac{\sqrt{|\Delta x \Delta y|}}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}}$$

Al hacer uso de un artificio similar al mostrado anteriormente

$$\lim_{\Delta x, \Delta y \rightarrow 0} \frac{|df - \sum_{i=1}^2 A_i \Delta x_i|}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} = \frac{\sqrt{|\Delta x \Delta y|}}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} \text{ que no existe}$$

\implies la función no es diferenciable en $(0,0)$

1.6 DIFERENCIAL TOTAL

Como vimos en alguno de los problemas del inciso 1.5 anterior, y de acuerdo también con nuestros conocimientos de Matemáticas I, una diferencial es una aproximación del incremento de una función. Es aproximación justamente porque, como ya vimos, se está despreciando parte del incremento y se está considerando únicamente la llamada parte principal, que identificamos, en la definición de función diferenciable, con el primer grupo de sumandos; o sea:

$$df = \sum_{i=1}^n A_i \Delta x_i \tag{1.6.1}$$

la diferencia entre Δf y df es

$$\Delta f - df = \sum_{i=1}^n \eta_i \Delta x_i \tag{1.6.2}$$

en donde $\eta_i \rightarrow 0$ cuando $\Delta x_i \rightarrow 0$

Lo anterior quiere decir que una aproximación del incremento de una función se obtendrá en la medida que los incrementos de las variables se aproximan a cero. Sin embargo para efectos ingenieriles, una "buena"

aproximación del incremento la obtendremos cuando los incrementos de las variables sean simplemente pequeños, en comparación con los valores que toman las variables.

En el problema 1.5.2 puede verse que la diferencia en el incremento y la diferencial, se aproxima rápidamente a cero cuando los incrementos disminuyen. Una interpretación gráfica de lo dicho anteriormente se mostró en la fig. 1.6.3.

Una vez explicado el concepto de diferencial total como una aproximación del incremento, persiste aún la duda en cuanto a qué es lo que representan los A_i que multiplican los incrementos de las variables. Para explicarlo obtengamos el incremento total de una $f(\bar{x})$ diferenciable en donde $\bar{x} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$

$$f(\bar{x} + \Delta \bar{x}) - f(\bar{x}) = \Delta f = A_1 \Delta x_1 + A_2 \Delta x_2 + \dots + A_n \Delta x_n + \eta_1 \Delta x_1 + \eta_2 \Delta x_2 + \dots + \eta_n \Delta x_n. \quad 1.6.0.5$$

Puesto que todas las variables son independientes, podemos obligar ahora que todas las Δx_i , con excepción de Δx_1 sean nulos, o sea $\Delta x_i = 0 \quad \forall i \neq 1$, en tal caso la expresión 1.6.0.5 se reduce a

$$\Delta f = A_1 \Delta x_1 + \eta_1 \Delta x_1 \quad 1.6.0.6$$

que será un incremento parcial.

Si dividimos ambos miembros de 1.6.0.6 entre Δx_1

$$\frac{\Delta f}{\Delta x_1} = A_1 + \eta_1 \quad 1.6.0.7$$

y si tomamos el límite del cociente cuando $\Delta x_1 \rightarrow 0$ tenemos

$$\lim_{\Delta x_1 \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x_1} = A_1 + \lim_{\Delta x_1 \rightarrow 0} \eta_1 \quad 1.6.0.8$$

ya que como se dijo en la definición de función diferenciable, A_1 es independiente de los incrementos; en cambio, se dijo también que $\eta_1 \rightarrow 0$ cuando $\Delta x_1 \rightarrow 0$, por otro parte el límite propuesto es por definición la derivada parcial de f respecto a x_1 .

$$\lim_{\Delta x_1 \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x_1} = \frac{\partial f}{\partial x_1} = A_1 \quad 1.6.0.9$$

De un modo semejante se puede obtener que

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = A_2$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_n} = A_n \quad 1.6.0.8$$

Con estos resultados podemos redefinir la expresión 1.6.0.5, quedando de la siguiente forma

$$df = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \Delta x_i \quad 1.6.0.9$$

Si recordas de Matemáticas I que $\Delta x = dx$, y si además tomamos en cuenta nuevamente que las variables son independientes, podremos escribir que

$$\Delta x_i = dx_i \quad \forall i$$

por lo que las expresiones 1.6.0.7 y 1.6.0.9, también pueden escribirse

$$\Delta f = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i + \sum_{i=1}^n \eta_i dx_i \quad 1.6.0.10$$

y

$$df = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i \quad 1.6.0.11$$

Ejemplo 1.61

Determine los valores de Δf y df para la

función

$$f(x,y) = 2x^2 + 3xy - y^2 \text{ y los valores.}$$

a) $x=10, y=20, \Delta x=0.1, \Delta y=0.3$

b) $x=10, y=20, \Delta x=1, \Delta y=3$

Integre los resultados

Solución:

Incrementos:

$$\Delta f = 2(x+\Delta x)^2 + 3(y+\Delta y)(x+\Delta x) - (y+\Delta y)^2 - 2x^2 -$$

$$- 3xy + y^2$$

$$\Delta f = 2x^2 + 4x\Delta x + 2\Delta x^2 + 3xy + 3x\Delta y + 3\Delta x\Delta y + 3\Delta x^2 + 3\Delta y^2 + y^2$$

$$- y^2 - 2y\Delta y - \Delta y^2 - 3xy + y^2$$

$$\Delta f = 4x\Delta x + \Delta x^2 + 3x\Delta y + 3\Delta x\Delta y + 3\Delta x^2 + 3\Delta y^2 - 2y\Delta y - \Delta y^2$$

Diferencial:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy = (4x + 3y)dx + (3x - 2y)dy$$

a) $df = 4(10)(0.1) + 3(10)(0.3) + 3(20)(0.1) + 3(20)(0.1)^2 + 2(0.1)^2 + 2(0.1)(0.3) + 3(10)(0.3) + 3(20)(0.1) + 3(0.1)(0.3) - 2(20)(0.3) - (0.3)^2 = 4 + 0.02 + 9 + 6 + 0.09 - 120 - 0.09 = 7.02$

$$df/\% = (40+60)(0.1) + (30+40)(0.3) = 10.3 = 10.3 - 3 = 7.00$$

$$\Delta f - df = 0.02$$

por lo que se puede aproximar la diferencial al m-

ltemento.

error relativo en % = $\frac{\Delta f - df}{df} \cdot 100 = 0.2877\%$

b)

$$\Delta f/\% = 4(10)(1) + 3(10)(3) + 3(20)(1) + 3(20)(1)^2 + 2(1)^2 + 2(1)(3) - 2(20)(3) - (3)^2$$

$$\Delta f/\% = 72$$

$$df/\% = (40+60)(1) + (30+40)3 = 70$$

$$\Delta f - df = 72 - 70 = 2 \text{ por lo que el$$

incremento no debe ser aproximado por medio de la dife-

rencial en este caso. El error relativo que se comete al

usamos el diferencial en lugar del incremento es:

$$\text{error relativo} = \frac{\Delta f - df}{df} = \frac{2}{72} = 0.0277 = 2.77\%$$

En el ejemplo anterior se no lleva cuenta el geomé-

trico error que se comete al aplicar la diferencial

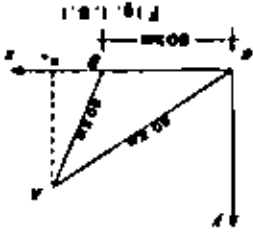
como una aproximación del incremento, en el caso que

los valores de las diferenciales de los variables no sean

pequeños en comparación con los valores variables.

En los siguientes ejemplos vamos a ver algunos a-

plicaciones de las diferenciales.



Ejemplo 16.3

La estación de radar O descubre un avión A a 10 km de distancia. La estación B, a 50 km al este de O, descubre al mismo avión a 10 km de distancia. Si el avión puede al

(on caso podemos resolver problemas como el siguiente.

Error relativo en % = $\frac{df}{f} \times 100$

Error relativo (id. errores) = $\frac{df}{f}$

en los valores de las variables = df

Error debido a una medición

Formas de la aplicación además de la diferencial, ésta tiene una gran aplicación en teoría de errores debido a que el error que se comete al realizar una cierta medición, es muy pequeña comparado con la magnitud medida cabe definir los siguientes tipos de errores:

con del número exacto: 2.0118
 $q = \sqrt{p_1^2 + p_2^2} = 2 + 0.01 = 2.01$ que es una aproximación

Finalmente

$N = \sqrt{(3.8)^2 + (2.1)^2}$

La primera aproximación al valor de N sería entonces

$N = \sqrt{x^2 + y^2}$ para los valores $x = 4, y = 2,$

con lo que se obtiene $N_1 = \sqrt{(4)^2 + (2)^2} = \sqrt{16 + 4} = \sqrt{20} = 2$

y luego sumará N su incremento al cambiar x de 4 a 3.8 y y de 2 a 2.1. En este caso

$\Delta x = x_1 - x_2 = 3.8 - 4 = -0.2$

$\Delta y = y_1 - y_2 = 2.1 - 2 = 0.1$

y el incremento lo aproximaremos por medio de la diferencial, ya que Δx y Δy son pequeños

$\Delta N \approx dN = \frac{\partial N}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial N}{\partial y} \Delta y$

Ahora calculando los parciales

$\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{1}{2} (x^2 + y^2)^{-1/2} (2x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{4}{2} = 0.1$

$\frac{\partial N}{\partial y} = \frac{1}{2} (x^2 + y^2)^{-1/2} (2y) = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{2}{2} = 0.3$

$dN = 0.1(-0.2) + 0.3(0.1) = 0.01$

Ejemplo 16.2

La suma de los cuadrados de los números

medir la distancia DA de 4 km y el otro por el de 3 km, calcular BA de 5 km, calcular el otro que se pide como el calcular la distancia de A con esos datos. Fig. 16.1

Plumeros CA = 11
BA = 5
Evidentemente

La Llamada

pero nuevas variables independientes son "u" y "v" que son los que presentan gradientes iguales. Como se demuestran obtener una expresión que contenga solamente "u" y "v".

Por la ley de los cosenos
 $100u = \frac{u^2 + 50^2 - 11^2}{2}$

Entonces

$$x = \frac{11u^2 + 50^2 - 11^2}{2} = \frac{100u}{u^2 + 25 - 11^2}$$

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{u}{50} = 1.6, \quad \frac{\partial x}{\partial v} = -\frac{11}{50} = -1.2$$

$$dx = 1.6(1.4) + (-1.2)(1.3)$$

$$dx = \frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv$$

1.7 Diferenciales Totales Sucesivas

El otro método posible ocurre cuando los errores de las mediciones sean de signo opuesto. En ese caso se suman sus efectos:

$$\max |dx| = 1.6(1) - 1.2(-3) = 10 \text{ km}$$

Se mismo como la diferencial podría ser usada como una aproximación del incremento de una función siempre que los incrementos puedan relativamente pequeños con respecto a los valores de las variables. Una diferencia tal es una función del punto y de los incrementos de las variables. ¿Podemos entonces calcular la diferencial de una diferencial? Si, si la nueva función es diferenciable. Consideremos la función $f = f(x, y)$ con dos variables independientes.

Su diferencial será

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$$

lo cual consideraremos que es una función en función de x y y . Además, para las funciones que perseguimos, podemos obligar a que dx y dy sean constantes. Entonces:

$$d(df) = d\left(\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy\right)$$

$$d^2 f = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} dx + \frac{\partial^2}{\partial y^2} dy \right)^2 f$$

1.70.6

Desde luego se trata de un símbolo no homogéneo.

La expresión $\frac{\partial}{\partial x}$ es un operador que carece de nivel por sí mismo, y el exponente activo para indicar orden de derivación cuando se aplica el operador, e incluso para la acción cuando se aplica a las derivadas.

Para la diferencial ordinaria es posible demostrar, por inducción matemática, que su expresión puede ser obtenida mediante

$$d^n f = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right)^n f$$

1.70.5

Una aplicación de las diferenciales totales sucesivas se encuentra en la expresión en serie de potencias para funciones de 2 o más variables independientes.

La serie de Taylor para este tipo de funciones puede ser representada en una forma condensada por la expresión

$$f(x) = f(x_0) + \frac{1!}{1!} \frac{df(x_0)}{dx} + \frac{2!}{2!} \frac{d^2 f(x_0)}{dx^2} + \dots + \frac{n!}{n!} \frac{d^n f(x_0)}{dx^n}$$

1.70.8

(Ver apéndice 1.4)

El desarrollo en serie de Taylor puede también ser

esta para obtener los términos aproximados de las funciones; basta observar que

$$\Delta f = f(x) - f(x_0)$$

1.70.9

Con las consideraciones anteriores

$$d^2 f = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} dx + \frac{\partial^2}{\partial y^2} dy \right) dx + \left(\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} dx + \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} dy \right) dy$$

que desarrollada y simplificada proporciona

$$d^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} (dx)^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} (dy)^2$$

1.70.3

Apartir de esta segunda diferencial podemos

obtener de igual manera la tercera, que quedaría:

$$d^3 f = \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} (dx)^3 + 3 \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} dx^2 dy + 3 \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} dx dy^2 + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} (dy)^3$$

1.70.4

En esta misma forma podemos seguir calculando de las diferenciales sucesivas, sólo que el proceso se vuelve cada vez más laborioso; para simplificarlo observamos que el resultado puede ser generado por una expresión como la que sigue, que corresponde al desarrollo de un binomio a una potencia, definiendo

$$d^2 f = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right)^2 f$$

1.70.5

do con la fórmula de Newton.

de donde

$$f(\bar{x}) = f(\bar{x}_0) + \Delta f \quad 1.7.0.10$$

y para obtener una mejor aproximación del incremento es suficiente tomar el número necesario de términos de la serie 1.7.0.8 desechando los que ya no aporten la aproximación requerida.

Ejemplo 1.7.1

Hallez df y d^2f para $f(x,y) = 3x^2y^3$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 6xy^3, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 9x^2y^2$$

Por lo que

$$df = 6xy^3 dx + 9x^2y^2 dy$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6y^3, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 18xy^2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 18x^2y$$

de donde obtenemos

$$d^2f = 6y^3(dx)^2 + 36xy^2 dx dy + 18x^2y(dy)^2$$

1.8 Derivadas Parciales de Funciones Compuestas

1.8.1 Funciones Compuestas

Problema 1.8.1

Vimos en el problema 1.3.3 que se define como radio hidráulico la sección de un conducto al cociente de su área entre el perímetro que se encuentra en contacto con el

fluido, llamado perímetro mojado. Matemáticamente

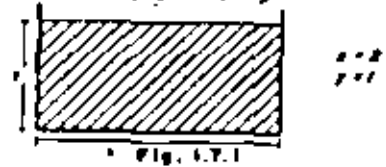
$$R = \frac{A}{p}$$

R = Radio hidráulico
 A = Área de la sección
 p = Perímetro mojado

Consideremos el canal de la fig. 1.7.1, cuyas dimensiones están en metros

Para este caso

$$R = \frac{A}{p} = \frac{xy}{x+2y}$$



Para calcular el valor del radio hidráulico podemos proceder de dos maneras: una, hacer la sustitución de las variables en la segunda expresión.

$$R \Big|_{\substack{x=2 \\ y=1}} = \frac{2 \times 1}{2+2(1)} = \frac{2}{4} = 0.5 \text{ m}$$

Otra forma sería calcular primeramente los valores del área y el perímetro y luego hacer el cociente.

$$A = 2 \quad R = \frac{2}{4} = 0.5 \text{ m}$$

$$p = 2+2(1) = 4$$

En el primer caso se dice que se está haciendo una composición de funciones; en el segundo caso, se dice que se está calculando a través de sus variables intermedias. Experimentalmente esto lo podemos representar como se indica en la fig. 1.7.2



Interpretemos lo anterior:

A y p son dos funciones (transformaciones) de $E^2 \rightarrow E^1$ cuyas reglas son

$$A(x, y) = xy$$

$$p(x, y) = x + 2y$$

que en conjunto definen la transformación $q(x, y) = [xy, x + 2y]$; R es una transformación de $E^2 \rightarrow E^1$ cuya regla es

$$R(A, p) = \frac{A}{p}$$

finalmente la composición de transformaciones

$$R \circ q(x, y) = \frac{xy}{x + 2y}$$

es una transformación o función de $E^2 \rightarrow E^1$ que nos lleva de los valores x, y al de R , a través de los de A y p .

Hay que recordar del álgebra que para que se pueda obtener la composición $G \circ F$, es condición necesaria que el recorrido de F tenga la misma dimensión que el dominio de G ; de lo contrario el problema no tiene solución.

En el caso de una composición de funciones podemos distinguir tres tipos de variables, ejemplificadas con las que intervienen en el problema 1.8.1

a) Las independientes: como x, y

b) Las intermedias: como A y p

c) Las dependientes: como el caso de R .

La función compuesta será la que nos lleve directamente de las independientes a las dependientes sin pasar por las intermedias, y en el caso general simplificar su manipulación.

1.8.2 Derivación de Funciones Compuestas

Como en nuestros temas anteriores, nuestro propósito es investigar como nacen las funciones compuestas al variar una o más de sus variables independientes. Ahora trabajemos de la derivación unitaria respecto a una sola variable, o sea, la derivada parcial respecto a esa variable.

Problema 1.8.2

Recoetemos el problema del tubo hidráulico y preguntémoslo siguiente:
¿Respecto a cuál de las variables, considerando unitarias sus variaciones, se tendrá la mayor derivación del radio hidráulico?

Solución:

Se trata de un problema de derivadas parciales; en el problema (1.3.3) habíamos encontrado

$$\frac{\partial R}{\partial x} = \frac{2y^2}{(x+2y)^3}$$

$$\frac{\partial R}{\partial y} = \frac{x^2}{(x+2y)^3}$$

1.71

los cuales, para los nuevos valores que ahora manejamos:

$$R_x(2,1) = \frac{2}{(2+2)^2} = \frac{1}{8}$$

$$R_y(2,1) = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$$

La mayor variación del radio hidráulico es cuando varía el tirante.

2º Camino

Este consiste en una generalización de un concepto visto en Matemáticas I.

Nuestra función es $R = R(A, P)$ en donde, a su vez $A = A(x, y)$ y $P = P(x, y)$, o sea $R = R[A(x, y), P(x, y)]$ y decimos que R es función de función de las variables x, y . Cuando teníamos este tipo de funciones calculábamos las derivadas $\frac{\partial R}{\partial x}$ y $\frac{\partial R}{\partial y}$ usando la llamada "regla de la cadena". ¿Será aplicable este concepto al problema planteado?

Calculemos el incremento total de R , que es una función diferenciable.

$$\Delta R = \frac{\partial R}{\partial A} \Delta A + \frac{\partial R}{\partial P} \Delta P + \eta \sqrt{(\Delta A)^2 + (\Delta P)^2} \quad 1.8.2.a$$

1.72

en donde

$$\eta \rightarrow 0 \text{ si } \Delta A \text{ y } \Delta P \rightarrow 0$$

en esta expresión, ΔA y ΔP no varían independientemente, sino que son debidos a los incrementos de "x" e "y", los cuales se pueden presentar simultáneamente o bien uno por uno. Consideremos que sólo "x" varía y "y" permanece constante, entonces,

$$\frac{\Delta R}{\Delta x} = \frac{\partial R}{\partial A} \frac{\Delta A}{\Delta x} + \frac{\partial R}{\partial P} \frac{\Delta P}{\Delta x} + \eta \sqrt{\left(\frac{\Delta A}{\Delta x}\right)^2 + \left(\frac{\Delta P}{\Delta x}\right)^2} \quad 1.8.2.b$$

Si tomamos límite de este cociente cuando $\Delta x \rightarrow 0$ tendremos por definición la derivada parcial de R con respecto a x , que es una de las que andamos buscando

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta R}{\Delta x} = \frac{\partial R}{\partial A} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta A}{\Delta x} + \frac{\partial R}{\partial P} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta P}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \eta \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sqrt{\left(\frac{\Delta A}{\Delta x}\right)^2 + \left(\frac{\Delta P}{\Delta x}\right)^2} \quad 1.8.2.c$$

Por definición:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta A}{\Delta x} = \frac{\partial A}{\partial x}; \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta P}{\Delta x} = \frac{\partial P}{\partial x}$$

$$\frac{\partial A}{\partial x} = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}; \quad \frac{\partial P}{\partial x} = 1$$

$$\text{luego } \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sqrt{\left(\frac{\Delta A}{\Delta x}\right)^2 + \left(\frac{\Delta P}{\Delta x}\right)^2} = \sqrt{2}$$

$$\text{Además, como } \Delta y = 0 \text{ y } \Delta x \rightarrow 0, \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \eta = 0$$

Por lo que (1.8.2.c), queda:

$$\frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial R}{\partial A} \frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial R}{\partial P} \frac{\partial P}{\partial x} + 0\sqrt{7}$$

$$\frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial R}{\partial A} \frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial R}{\partial P} \frac{\partial P}{\partial x}$$

Analogamente:

$$\frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial R}{\partial A} \frac{\partial A}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial P} \frac{\partial P}{\partial y}$$

que es la regla de la cadena para una función de dos variables independientes (x, y) a través de dos variables intermedias (A, P).

Al sustituir valores en nuestro ejemplo:

$$\frac{\partial R}{\partial A} = \frac{1}{P^{1/2}} = \frac{1}{4 \cdot m^{-1}}; \quad \frac{\partial R}{\partial P} = -\frac{A}{P^{3/2}} = -\frac{2}{16} = -\frac{1}{8}$$

$$\frac{\partial A}{\partial x} \Big|_{x=1} = 1m; \quad \frac{\partial A}{\partial y} = x \Big|_{x=2} = 2m; \quad \frac{\partial P}{\partial x} = 1; \quad \frac{\partial P}{\partial y} = 2$$

$$\frac{\partial R}{\partial x} = \frac{1}{4}(1) - \frac{1}{8}(1) = \frac{1}{8}$$

$$\frac{\partial R}{\partial y} = \frac{1}{4}(2) - \frac{1}{8}(2) = \frac{1}{4}$$

y se concluye lo mismo que con el primer procedimiento. En este ejemplo es más sencilla derivar la función aplicando la regla de la cadena, pues nos evitamos derivar dos veces un cociente; en la generalidad de los casos también ocurre así, sobre todo si hemos de calcular la derivada en el punto.

Problema 1.8.2.

Si el fluido que circula por el canal del problema 1.8.1 es agua y el canal es de concreto y con pendiente de 04 milésimas, el gasto que pueda circular se calcula como.

$$Q = 1.25 A R^{3/2}$$

Calcula la variación unitaria de Q al variar "x" y la variación unitaria de Q al variar "y"

solución:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = 1.25 \left(\frac{\partial Q}{\partial A} \frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial R} \frac{\partial R}{\partial x} \right)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial y} = 1.25 \left(\frac{\partial Q}{\partial A} \frac{\partial A}{\partial y} + \frac{\partial Q}{\partial R} \frac{\partial R}{\partial y} \right)$$

Al sustituir valores:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = 1.25 \left(R^{3/2} \frac{\partial A}{\partial x} + \frac{2}{3} A R^{1/2} \frac{\partial R}{\partial x} \right)$$

$$= 1.25 R^{3/2} \left(1 + \frac{2}{3} \frac{2}{0.5} \cdot \frac{1}{8} \right) = \frac{4}{3} \cdot 1.25 R^{3/2}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = 1.05 \frac{m^3/\text{seg}}{m} = 0.0105 \frac{m^3/\text{seg}}{\text{cm}}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial y} = 1.25 \left(R^{3/2} \frac{\partial A}{\partial y} + \frac{2}{3} A R^{1/2} \frac{\partial R}{\partial y} \right)$$

$$= 1.25 R^{3/2} \left(2 + \frac{2}{3} \frac{2}{0.5} \cdot \frac{1}{4} \right) = \frac{8}{3} \cdot 1.25 R^{3/2}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial y} = 2.10 \frac{m^3/\text{seg}}{m} = 0.0210 \frac{m^3/\text{seg}}{\text{cm}}$$

En los problemas 1.1 y 2 calculamos la derivación de una función compuesta de varias variables independientes respecto a cada una de sus variables. A estas derivadas las llamamos derivadas parciales de funciones compuestas, y siempre podemos calcularlas con cualquiera de los procedimientos mencionados si es que la derivada existe. Una generalización de la regla de la cadena empleada, puede verse a continuación.

Sea una función escalar de varias variables

$$f(\bar{u})$$

en donde

$$\bar{u} = [u_1, u_2, \dots, u_n]$$

o su vez

$$u_1 = u_1(\bar{x})$$

$$u_2 = u_2(\bar{x})$$

$$\vdots$$

$$u_n = u_n(\bar{x})$$

siendo

$$\bar{x} = [x_1, x_2, \dots, x_m]$$

Hemos tomado así una función compuesta, con las variables intermedias \bar{u} , y las variables independientes \bar{x} . Las derivadas parciales para este tipo de funciones se obtienen como sigue:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = \frac{\partial f}{\partial u_1} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f}{\partial u_2} \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial f}{\partial u_n} \frac{\partial u_n}{\partial x_1}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = \frac{\partial f}{\partial u_1} \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial f}{\partial u_2} \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \dots + \frac{\partial f}{\partial u_n} \frac{\partial u_n}{\partial x_2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_m} = \frac{\partial f}{\partial u_1} \frac{\partial u_1}{\partial x_m} + \frac{\partial f}{\partial u_2} \frac{\partial u_2}{\partial x_m} + \dots + \frac{\partial f}{\partial u_n} \frac{\partial u_n}{\partial x_m} \quad 1.2.8$$

Estas derivadas pueden también representarse en forma matricial, como sigue:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial u_n}{\partial x_1} \\ \frac{\partial u_1}{\partial x_2} & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial u_n}{\partial x_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial u_1}{\partial x_m} & \frac{\partial u_2}{\partial x_m} & \dots & \frac{\partial u_n}{\partial x_m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial u_1} \\ \frac{\partial f}{\partial u_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial u_n} \end{bmatrix} \quad 1.2.9$$

1.9 Diferencial total de Funciones Compuestas

Problema 1.9.1.

Dado el conal del problema (1.8.1), calcula aproximadamente cuanto varío el radio hidráulico cuando la plantilla se incrementa en 3 cm. y el tirante es cm.

Solución:

Se trata de un problema de diferencial total, que ya sabemos como resolver:

$$\Delta R \approx dR = \frac{\partial R}{\partial X} dX + \frac{\partial R}{\partial Y} dY$$

$$dL = \frac{1}{8} \cdot 0.05 + \frac{1}{4} \cdot 0.02 = 0.01125 \text{ m}$$

Hasta aquí, no hay dificultad, porque hemos operado con las variables independientes; que es como sabemos operar una diferencial. Ahora se nos ocurre ¿que resultado obtendríamos si operamos con las variables intermedias?, veamos.

$$dA = \frac{\partial A}{\partial x} dx + \frac{\partial A}{\partial y} dy = 1(0.05) + 2(0.02) = 0.09 \text{ m}^2$$

$$dP = \frac{\partial P}{\partial x} dx + \frac{\partial P}{\partial y} dy = 1(0.05) + 2(0.02) = 0.09 \text{ m}$$

Además recordamos:

$$\frac{\partial L}{\partial A} \Big|_{z=1} = 0.25 \text{ m}^{-1}$$

$$\frac{\partial L}{\partial P} \Big|_{z=1} = -0.125$$

Entonces:

$$\frac{\partial L}{\partial A} dA + \frac{\partial L}{\partial P} dP = 0.25(0.09) - 0.125(0.09) = 0.01125 \text{ m} = dL$$

o sea que el valor de la diferencial total fue el mismo, calculado a través de variables intermedias ó independientes. Este importante resultado lo podemos generalizar al caso de "n" variables intermedias y "m" independientes, como veremos a continuación:

sea $f(\bar{u})$, donde
 $\bar{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$

siendo a su vez:

$$u_1 = u_1(\bar{x}), u_2 = u_2(\bar{x}), \dots, u_n = u_n(\bar{x})$$

donde

$$\bar{x} = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_m)$$

Escribamos df en forma matricial

$$df = \left[\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_m} \right] \begin{bmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ \vdots \\ dx_m \end{bmatrix} \quad \text{--- 1.9.0.1}$$

Ahora, puesto que la matriz renglón de (1.9.0.1)

es la transpuesta de la que aparece en el primer miembro (1.8.2.9)

$$df = \left[\frac{\partial f}{\partial u_1}, \frac{\partial f}{\partial u_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial u_n} \right] \begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial u_1}{\partial x_m} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial u_2}{\partial x_m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial u_n}{\partial x_1} & \frac{\partial u_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial u_n}{\partial x_m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ \vdots \\ dx_m \end{bmatrix}$$

por la ley asociativa de la multiplicación matricial:

$$df = \left[\frac{\partial f}{\partial u_1}, \frac{\partial f}{\partial u_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial u_n} \right] \begin{bmatrix} du_1 \\ du_2 \\ \vdots \\ du_n \end{bmatrix} \quad \text{--- (1.9.0.2)}$$

que es la misma expresión (1.9.0.1) referido a las variables intermedias. De esto se

puede concluir que la forma de la diferencial total se ^{1.79} conserva independientemente de que la función sea o no compuesta. Cabe mencionar en este punto lo siguiente:

La diferencial total de una función compuesta puede reducirse a la diferencial total en términos de las variables independientes.

Las diferenciales de las variables independientes -- pueden tomar sus valores sin restricción, no así las diferenciales de las intermedias, que serán diferenciales totales y deben su valor tanto al de las variables independientes como a sus diferenciales. En decir, si "u" es una variable intermedia y "x" una independiente: $dx \approx \Delta x$; $du \approx \Delta u$.

Problema 1.9.2

Consideremos nuevamente el ejemplo 1.6.5; pero ahora preguntémosnos el error que se comete al calcular la ordenada de R. Ahora

$$y = u \cdot \sin \alpha$$

Si quisieramos dejar la expresión en términos de "u" y "v" tendríamos

$$y = u \cdot \sin \left[\arcsin \cos \frac{u^2 + 50^2 - v^2}{100u} \right]$$

cuya diferenciación es muy laboriosa. En cambio si aplicamos la propiedad que acabamos de ver, podemos escribir:

$$dy = u \cos \alpha d\alpha + \sin \alpha du$$

expresión de la que conocemos u, α , du y desconocemos $d\alpha$ que, según acabamos de ver, es la diferencial de una función; para calcularla partamos de

$$\cos \alpha = \frac{u^2 + 50^2 - v^2}{100u}$$

Por lo que

$$-100 \sin \alpha d\alpha = \frac{2u^2 - (u^2 + 50^2 - v^2)}{u^2} du - \frac{2v}{u} dv$$

$$d\alpha = \frac{50^2 - v^2 - u^2}{100(\sin \alpha)u^2} du + \frac{v}{50(\sin \alpha)u} dv$$

Ahora

$$\cos \alpha \Big|_{\substack{u=80 \\ v=60}} = \frac{80^2 + 50^2 - 60^2}{8000} = 0.6625$$

$$\sin \alpha \Big|_{\substack{u=80 \\ v=60}} = \sqrt{1 - 0.6625^2} = 0.7491$$

$$d\alpha = -0.0156 du + 0.0200 dv$$

Entonces

$$dy = 80(0.6625(-0.0156 du + 0.0200 dv) + 0.7491 du)$$

$$dy = -0.0777 du + 1.06 dv = -0.0777(-4) + 1.06(1.3)$$

Finalmente

$$\max |dy| = -0.0777(-4) + 1.06(1.3) = \underline{\underline{3.4908 \text{ Km}}}$$

1.10 Derivada Total

En el caso particular de una función compuesta con varias variables intermedias y una sola variable independiente, la derivada respecto a esa variable será una derivada ordinaria, a lo que llamaremos derivada total.

Sea

una función $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

en donde $\vec{u} = [u_1, u_2, \dots, u_n]$

$$u_1 = u_1(t), u_2 = u_2(t), \dots, u_n = u_n(t)$$

De acuerdo con 1.8.9 y teniendo en cuenta que las variables independientes se reducen a una sola: t , la regla de la cadena para una función compuesta de este tipo queda:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial u_1} \frac{du_1}{dt} + \frac{\partial f}{\partial u_2} \frac{du_2}{dt} + \dots + \frac{\partial f}{\partial u_n} \frac{du_n}{dt} \quad 1.10.0.1$$

expresada en forma matricial:

$$\frac{df}{dt} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial u_1} & \frac{\partial f}{\partial u_2} & \dots & \frac{\partial f}{\partial u_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{du_1}{dt} \\ \frac{du_2}{dt} \\ \vdots \\ \frac{du_n}{dt} \end{bmatrix} \quad 1.10.0.2$$

o bien en forma vectorial:

$$\frac{df}{dt} = \left(\frac{\partial f}{\partial u_1}, \frac{\partial f}{\partial u_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial u_n} \right) \cdot \left(\frac{du_1}{dt}, \frac{du_2}{dt}, \dots, \frac{du_n}{dt} \right)$$

1.10.0.3

A la primera matriz de la expresión 1.10.0.2, que representa exactamente lo mismo que el primer vector de la expresión 1.10.0.1,

$\left(\frac{\partial f}{\partial u_1}, \frac{\partial f}{\partial u_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial u_n} \right)$ lo denominaremos "vector gradiente". Posteriormente haremos una interpretación de este vector.

Si consideramos ahora que nuestro problema se reduce a sólo 3 variables intermedias (x, y, z) y una independiente (t), la expresión 1.10.0.1 queda

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{dz}{dt} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right) \cdot \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} \right) \quad 1.10.0.5$$

si ahora representamos el vector gradiente de f como ∇f , en donde

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{k} \quad 1.10.0.6$$

es un vector normal, y a $\frac{dx}{dt} \hat{i} + \frac{dy}{dt} \hat{j} + \frac{dz}{dt} \hat{k}$ como \vec{v} , entonces que:

$$\frac{df}{dt} = \nabla f \cdot \vec{v} \quad 1.10.0.7$$

Esta última forma de la derivada de una función compuesta nos es de suma utilidad en problemas de velocidades relativas, como el que se muestra en la continuación.

Ejemplo 1.10.1

Un barco "A" se mueve según se indica en la Fig. 1.10.1, con una velocidad $\vec{v}_A = 20 \text{ km/hr}$. Otro barco "B" se mueve

- 2) trayectoria mostrada también en la figura con $v_0 = 30 \text{ km/hr}$.
¿Con qué velocidad se están acercando en el instante en el que $x = 3 \text{ km}$ y $y = 4 \text{ km}$?

Solución:

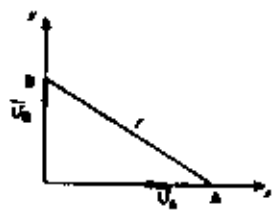


Fig. 1.10.1

La distancia que los separa es según el Teorema de Pitágoras

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

La variación de esta distancia respecto al tiempo es la velocidad pedida, así que hay que calcular

$$\frac{dr}{dt} = \frac{\partial r}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial r}{\partial y} \frac{dy}{dt} \quad 1.10.1b$$

Las parciales de r respecto a " x ", " y " se calculan a partir de la fórmula de la distancia, pero ¿Cómo obtenemos $\frac{dx}{dt}$ y $\frac{dy}{dt}$? ; aún cuando no se nos ha dado una relación entre x y t , se nos da que la variación de x respecto a t es 20 km/hr , o sea $\frac{dx}{dt} = -20 \text{ km/hr}$ (el signo negativo es porque x disminuye al aumentar t , según se ve en la figura por el sentido de la velocidad); de igual manera — $\frac{dy}{dt} = -30 \text{ km/hr}$.

Resolviendo entonces por los datos proporcionados

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad ; \quad \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad 1.10.1c$$

$$\frac{dx}{dt} = -20 \text{ km/hr} \quad ; \quad \frac{dy}{dt} = -30 \text{ km/hr}$$

$$\frac{dr}{dt} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \frac{dx}{dt} + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \frac{dy}{dt} \quad 1.10.1d$$

$$\frac{dr}{dt} = \frac{3}{\sqrt{9+16}} (-20) + \frac{4}{\sqrt{9+16}} (-30) = \frac{3}{5} (-20) + \frac{4}{5} (-30)$$

$$\frac{dr}{dt} = \frac{-60}{5} - \frac{120}{5} = \frac{-180}{5} = -36 \text{ km/hr}$$

∴ Los botes se aproximan con una velocidad de 36 km/hr .

Ejemplo 1.10.2

La superficie de una montaña tiene por ecuación — $z = 1 - \frac{1}{25}(x^2 + y^2)$ (x, y, z en km). Un camión va manejándose sobre esa montaña y se ha determinado que la proyección de su movimiento en el plano horizontal obedece a la ley $x = -9t - 3$, $y = -12t + 4$ (t en hrs) se quiere saber con qué rapidez está ganando altura cuando se encuentra situado en el punto $(1, 2)$.

Solución:

Lo que se requiere conocer es la variación de la eq. (1) respecto al tiempo, o sea $\frac{dz}{dt}$, en donde las coordenadas (x, y) del plano varían respecto al tiempo según la

la propuesta. Por ser $x = x(t)$, $y = y(t)$, decimos que z es una función compuesta de t , así que calcularemos $\frac{dz}{dt}$ con la regla de la cadena

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dt} \quad 1.10.2.a$$

Calculamos las derivadas parciales

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{1}{25}(2x) = -\frac{2}{25}x; \quad \frac{dx}{dt} = -9 \text{ km/hr}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{2}{25}y \quad ; \quad \frac{dy}{dt} = -12 \text{ km/hr} \quad 1.10.2.b$$

y substituyendo 1.10.2.b en 1.10.2.a

$$\frac{dz}{dt} = -\frac{2}{25}x(-9) - \frac{2}{25}y(-12) = \frac{18}{25}x + \frac{24}{25}y$$

La variación de z respecto a t en el punto pedido es

$$\left. \frac{dz}{dt} \right|_{(4,2)} = \frac{18}{25}(1) + \frac{24}{25}(2) = 2.64 \text{ km/hr}$$

este resultado indica que el camión asciende a razón de 2.64 km/hr justamente en el punto dado.

Yos podríamos preguntarnos ahora qué tan rápidamente varía su altura en el mismo punto cuando en la proyección de su movimiento avanza uniformemente. Para contestar a esta pregunta sería necesario dividir el resultado anterior por la magnitud de la velocidad horizontal, ya que según vimos en Matemáticas I,

$$\frac{dz}{ds} = \frac{dz}{dt} \frac{dt}{ds} = \frac{dz}{dt} / \frac{ds}{dt}$$

en donde s es la longitud medida en la dirección de la proyección del movimiento y $\frac{ds}{dt}$ la rapidez en dicha dirección.

Como $\frac{dx}{dt}$ y $\frac{dy}{dt}$ son las respectivas proyecciones de la velocidad en x y y la magnitud de la velocidad en la dirección pedida es

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$$

Antes de substituir los valores numéricos escribamos la expresión

$$\frac{dz}{ds} = \left(\frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dt} \right) / \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} \quad 1.10.2.c$$

Si representamos el primer factor de 1.10.2.c como si proviniera de un producto escalar de vectores -ostendremos

$$\begin{aligned} \frac{dz}{ds} &= \left(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y} \right) \cdot \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt} \right) / \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} \\ &\text{que podemos escribir también como} \\ \frac{dz}{ds} &= \left(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y} \right) \cdot \frac{\left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt} \right)}{\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}} \quad 1.10.2.d \end{aligned}$$

observemos que el segundo factor del 2º miembro de 1.10.2.d es un vector unitario, en dirección del movimiento, ya que las derivadas del numerador

son las componentes del vector velocidad.

Si sustituimos al segundo factor de 1.10.2.d por el vector \hat{e}_s (vector unitario en dirección de la velocidad) tendremos:

$$\frac{dz}{ds} = \left(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y} \right) \cdot \hat{e}_s \quad 1.10.2.e$$

Al primer vector de 1.10.2.e ya lo conocíamos, en 1.10.0.4 le dimos el nombre de vector gradiente, había mos entonces un poco acerca de él.

La notación para representar al vector gradiente es ∇z , o bien grad z , que se leen, indistintamente, gradiente de z , vector z o field z , en donde ∇ es un operador vectorial que, para funciones con su dominio en \mathbb{R}^2 tiene la forma

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{j} \quad 1.10.0.8$$

así, nada (∇) aplicado a la función z es lo que recibe el nombre de gradiente de z .

Usando el gradiente podemos escribir finalmente la expresión

$$\frac{dz}{ds} = \nabla z \cdot \hat{e}_s \quad 1.10.0.9$$

que nos da la variación pedida al sustituir las respectivas coordenadas.

Para la superficie de la montaña, se el punto dado

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{2}{25} x \quad ; \quad \frac{\partial z}{\partial x} \Big|_{\substack{x=1 \\ y=2}} = -\frac{2}{25}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{2}{25} y \quad \Big|_{\substack{x=1 \\ y=2}} = -\frac{4}{25}$$

$\nabla z \Big|_{\substack{x=1 \\ y=2}} = -\frac{2}{25} \hat{i} - \frac{4}{25} \hat{j}$; el vector unitario en la dirección del movimiento es

$$\hat{e}_s = \frac{\frac{dx}{dt} \hat{i} + \frac{dy}{dt} \hat{j}}{\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}} = \frac{-9\hat{i} - 12\hat{j}}{\sqrt{81+144}} = -\frac{3\hat{i}+4\hat{j}}{5}$$

Finalmente

$$\frac{dz}{ds} \Big|_{\substack{x=1 \\ y=2}} = \left(-\frac{2}{25} \hat{i} - \frac{4}{25} \hat{j} \right) \cdot \left(-\frac{3\hat{i}+4\hat{j}}{5} \right) = \frac{22}{125} = 0.176$$

que es la variación de la cota por cada unidad que se avanza en la proyección del movimiento. Se puede interpretar también como que la cota aumenta, al avanzar en la dirección del movimiento, a razón de 0.176 Km. por Km. o bien proyectando que el número no tiene unidades, pero que una mejor idea del fenómeno podemos tener que el camino en ese punto, está subiendo con una pendiente de 0.176 m por m., o inclusive, 0.176 em por em.

1.11.1 Derivada Direccional

En el problema anterior analizamos como más una

función al avanzar en una dirección determinada de su dominio. Problemas similares al anterior se resuelven con el mismo procedimiento seguido, al que llamaremos "Derivada Direccional". Formalizaremos a continuación el concepto de derivada en una dirección cualquiera.

Consideremos una función $f(x,y)$ y un punto $P(x,y)$ del plano para el cual la función está definida y es diferenciable. Una dirección cualquiera a partir de P está determinada si especificamos el ángulo θ que una recta cualquiera que pase

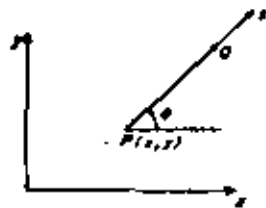


Fig. 1.11.1

por P forma con la misma positiva del eje x . Consideremos ahora una variable S (longitud - recorrida) que mide, sobre la recta en la dirección que indica la flecha; el origen de S será el punto P . Fig. 1.11.1.

Para pasar del punto P al punto Q , ambos sobre la recta, es necesario dar un incremento a S , (ΔS) ; por supuesto la función experimentará un incremento que estará dado por

$$\Delta f = f(x + \Delta S \cos \theta, y + \Delta S \sin \theta) - f(x, y)$$

1.11.0.1

en donde $\Delta S \cos \theta = \Delta x$, $\Delta S \sin \theta = \Delta y$ son los incrementos de las variables x, y derivados del incremento en

S (Fig. 1.11.2)

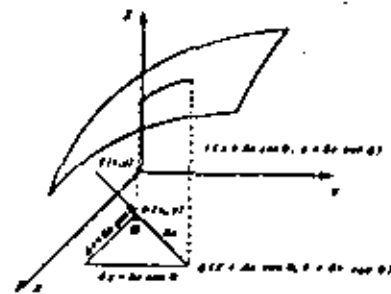


Fig. 1.11.2

El vector unitario \vec{u} , en dirección de PQ , está definido por

$$\vec{u} = \cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{j}$$

La derivación de f en la dirección de PQ recibe el nombre de derivada direccional de f (se escribe $D_{\vec{u}} f$) en la

dirección del vector \vec{u} y es, por definición

$$D_{\vec{u}} f(x,y) = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta S \cos \theta, y + \Delta S \sin \theta) - f(x,y)}{\Delta S}$$

1.11.0.3

cuando el límite existe.

Para obtener la expresión de esta derivada se pueda proceder por medio de la regla de la cadena como en el problema 1.10.2; ahora, las ecuaciones para matrices de la recta que pasa por P y Q son:

$$x = x_p + S \cos \theta$$

$$y = y_p + S \sin \theta$$

1.11.0.4

por lo que

$$\frac{df}{dS} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dS} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dS} = \frac{\partial f}{\partial x} \cos \theta + \frac{\partial f}{\partial y} \sin \theta$$

1.11.0.5

De la expresión anterior obtenemos otra notación de la derivada direccional que es precisamente $\frac{df}{ds}$ en donde S es la tangencial que se encuentra en la dirección del vector \vec{e} , así que

$$D_{\vec{e}} f = \frac{df}{ds} = \left(\frac{\partial f}{\partial x} i + \frac{\partial f}{\partial y} j \right) \cdot (\cos \theta i + \sin \theta j) \quad 1.11.0.6$$

en donde

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x} i + \frac{\partial f}{\partial y} j, \text{ y } \vec{e} = \cos \theta i + \sin \theta j \text{ es el vector unitario en la dirección de la derivada buscada, así que}$$

$$D_{\vec{e}} f = \frac{df}{ds} = \nabla f \cdot \vec{e} \quad 1.11.0.7$$

representa la forma vectorial de la derivada direccional.

A partir de esta representación vectorial podemos ver fácilmente que si $\vec{e} = i$

$$D_i f = \left(\frac{\partial f}{\partial x} i + \frac{\partial f}{\partial y} j \right) \cdot i = \frac{\partial f}{\partial x}$$

y si $\vec{e} = j$

$$D_j f = \left(\frac{\partial f}{\partial x} i + \frac{\partial f}{\partial y} j \right) \cdot j = \frac{\partial f}{\partial y}$$

de donde se concluye que la derivada parcial es un caso particular de la derivada direccional, siendo esta última la que sirve en general para analizar la variación de una función de varias variables en su dominio de definición.

El concepto de derivada direccional puede generalizarse fácilmente a funciones con más de dos variables independientes quedando así

$$D_{\vec{e}} F(\vec{x}) = \vec{\nabla} F(\vec{x}) \cdot \vec{e} \quad 1.11.0.8$$

en donde si $\vec{x} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, $\vec{e} = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$, y $|\vec{e}| = 1$

$$D_{\vec{e}} F(\vec{x}) = \frac{\partial F}{\partial x_1} e_1 + \frac{\partial F}{\partial x_2} e_2 + \dots + \frac{\partial F}{\partial x_n} e_n \quad 1.11.0.9$$

1.12 Gradiente

En el sistema anterior tratamos la variación de una función en una dirección dada de su dominio de definición, y vimos que esto se determina por medio de la derivada direccional. Veamos ahora algunos aspectos interesantes del gradiente, para lo cual nos referiremos al problema 1.10.2.

Problema 1.12.1. Consideremos otra vez la montaña y el camino del problema 1.10.2.

- ¿En qué dirección a partir de P debe moverse el camión para que no suba ni baje?
- ¿En qué dirección a partir de P se debe mover el camión para bajar por la máxima pendiente y llegar más pronto a la base de la montaña?
- ¿Cuál es el nombre numérico de la máxima pendiente en P ?
- ¿En qué dirección a partir de P , la pendiente es 0.01?

Solución:

En las preguntas de este problema ya no tenemos que analizar como antes, la medición de la función, sino que ahora lo que se desea determinar es la dirección en que ocurre una cierta variación. ¿De qué podemos ayudarnos?

Recordemos la representación vectorial de la derivada direccional e interpretemosla; la expresión nos dice que

$$D_{\vec{a}} f = \frac{df}{ds} = \nabla f \cdot \vec{a}$$

la interpretación geométrica del producto escalar 1.11.0.7

nos dice que

$$\nabla f \cdot \vec{a} = |\nabla f| |\vec{a}| \cos \phi$$

en donde ϕ es el ángulo que forma el gradiente con \vec{a} , y como $|\vec{a}| = 1$

$$D_{\vec{a}} f = |\nabla f| \cos \phi \quad 1.12.1.1$$

es. que nos indica que la derivada direccional es la componente del vector gradiente en la dirección del vector unitario \vec{a}

1.12.1 Curvas de Nivel

Con ayuda de lo que acabamos de ver, se puede responder a las preguntas del problema 1.12.1

a) Si se quiere que Z sea constante

$$\frac{dZ}{ds} = 0, \Rightarrow \nabla Z \cdot \vec{a} = 0$$

es condición de perpendicularidad; de otro modo, puesto que

$$|\nabla Z| \cos \phi = 0, \text{ como } |\nabla Z| \neq 0 \Rightarrow \cos \phi = 0$$

1.12.1.2

De la ecuación 1.12.1.2 obtenemos dos soluciones, una a 90° del

gradiente, y la otra a 270° , así que, para evitar ambigüedades direccional para que Z no varíe debemos movernos en una dirección perpendicular al gradiente.

La cota del punto $(1, 2)$ es de 0.8 km; naturalmente para no variar la cota, el camión tendría que moverse sobre $0.8 = 1 - \frac{1}{25}(x^2 + y^2)$, o bien $x^2 + y^2 = 5$ que es una circunferencia (al tomar en cuenta como segunda ecuación $Z = 0.8$). La tangente a esta circunferencia es paralela al vector $\vec{u} = i - \frac{1}{2}j$, (Fig. 1.12.1); el producto vectorial de éste con el gradiente nos indica que son perpendiculares:

$$\nabla Z \cdot \vec{u} = \left(-\frac{2}{25}i - \frac{4}{25}j\right) \cdot \left(i - \frac{1}{2}j\right) = 0$$

lo cual verifica lo dicho anteriormente, es decir, que para no variar su cota, el camión debe moverse perpendicularmente al gradiente

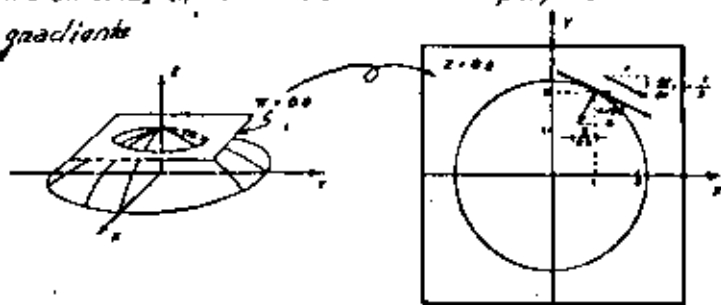


FIG. 1.12.1

A una curva en que la cota se conserva constante, se le llama curva de nivel. Por extensión, reciben este mismo nombre genérico las curvas sobre las cuales una función cualquiera $f(x, y)$, es igual a una constante.

1.95

Las curvas de nivel de algunas funciones reciben nombres específicos: si la función es la temperatura, se les llama isotermas; si se trata de presión: isobaras; si concentración de sales: isohalinas; etc.

Una superficie, o una función con dominio en E^2 , pueden quedar perfectamente descritas en el plano, mediante sus curvas de nivel. Generalmente se toman éstas para valores de la función igualmente espaciadas, en tal caso, al valor de esos incrementos iguales, se les llama "equidistancia".

La montaña del problema 1.12.1, se representa en la Fig. 1.12.2 mediante sus curvas de nivel a una equidistancia de 200m.

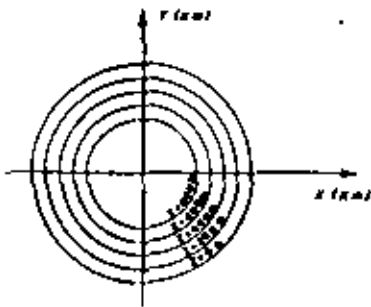


Fig. 1.12.2

1.12.3.- Línea de Máxima Pendiente

Después de haber resuelto el inciso "a" del problema 1.12.1, perseguimos con la solución de los siguientes incisos.

b) La solución de este punto requiere que la derivada direccional sea Máxima

De 1.12.1 vemos que el mayor valor absoluto que puede tomar la expresión es cuando $|\cos\phi|=1$, lo cual nos da dos so-

1.96

luciones si $\phi=0$, $\cos\phi=1$

$$\frac{dz}{ds} = 1721 \quad 1.12.1.3$$

si $\phi=\pi$, $\cos\phi=-1$

$$\frac{dz}{ds} = -1721 \quad 1.12.1.4$$

1.12.1.3 representa el máximo crecimiento de la función, mientras que 1.12.1.4 representa el máximo decrecimiento.

El máximo crecimiento se da en dirección del vector que apunta, ya sea cero el ángulo formado por el gradiente y el vector que define la dirección, estos dos son colineales y del mismo sentido. El máximo decrecimiento de Z se presenta en una dirección contraria al gradiente, pero colineal, ya que en este caso el ángulo que forman el gradiente y el vector que define la dirección es de 180° . Como seguimos al máximo decrecimiento (baja por la montaña pendiente), la dirección en que se presenta será la de $-\nabla Z|_p$

$$\nabla Z|_p = \frac{\partial Z}{\partial x} \left(-\frac{1}{25}(x^2+y^2) \right) i + \frac{\partial Z}{\partial y} \left(-\frac{1}{25}(x^2+y^2) \right) j$$

$$\nabla Z|_p = -\frac{2x}{25} i - \frac{2y}{25} j; \quad i = -\frac{2}{25} i - \frac{4}{25} j$$

que forma un ángulo de -116.34° con la dirección positiva del eje x .

La dirección buscada es $-\nabla Z|_p = \frac{2}{25} i + \frac{4}{25} j$ representada como vector, que forma un ángulo de 63.26° con la di-

dirección positiva del eje X; ver fig. 1.12.3
c) El valor numérico de la máxima pendiente es el valor de la máxima derivada direccional, o sea:

$$\frac{df}{ds} \text{ máxima} = |\nabla f| = \frac{\sqrt{4+16}}{(25)^2} = \frac{2}{25}\sqrt{5} = 0.179$$

En general, tanto la dirección como el valor de la máxima pendiente, se refieren exclusivamente al punto en que se calculan

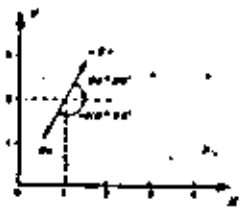


FIG. 1.12.3

d) Lo que ahora necesitamos es determinar una dirección. Sabemos que $\frac{df}{ds} = 0.01$, además: $\frac{df}{ds} = |\nabla f| \cos \phi$ en donde ϕ es el áng. formado entre ∇f y la dirección buscada, así que despejando $\cos \phi$, y de esta ϕ :

$$\cos \phi = \frac{0.01}{\frac{2\sqrt{5}}{25}} = 0.055 \Rightarrow \phi = 56^\circ 37'$$

Debe medirse a $56^\circ 37'$ a partir del gradiente; hay dos direcciones que satisfacen esta condición, dependiendo hacia donde se mida el ángulo, estas son, referidas a la dirección positiva del eje X. (Fig 1.12.4)

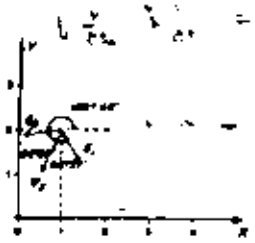


FIG. 1.12.4

$$\begin{aligned} -116^\circ 35' + 56^\circ 37' &= -59^\circ 58' \\ -116^\circ 35' - 56^\circ 37' &= -173^\circ 12' \\ &= 186^\circ 48' \end{aligned}$$

Una conclusión interesante del problema es que tenemos el a) la máxima variación de una función f en un punto es en

$$\frac{df}{ds} \text{ máxima} = |\nabla f(P)|$$

b) y ésta se presenta en la dirección de: $\nabla f(P)$. Estas dos conclusiones las podemos aplicar para afirmar que:

El gradiente de una función escalar es un vector, cuya magnitud representa la máxima variación de la función en un punto de su dominio y su dirección, la dirección en que tal máxima variación ocurre.

Además, como f es una función escalar de punto, depende del punto, pero no del sistema de referencia; así mismo, si "s" es la longitud de un arco medido sobre una curva del plano o del espacio, "s" tampoco depende del sistema de referencia, así que $\frac{df}{ds}$ es independiente de los cambios de coordenadas. Por consiguiente, la derivada direccional máxima, en la dirección en que ocurre, también será independiente del sistema de coordenadas.

Como $\frac{df}{ds} = |\nabla f| \cos \phi$; en donde ϕ es el ángulo entre el gradiente y la dirección, en el caso de que $\frac{df}{ds}$ sea máxima $\frac{df}{ds} = |\nabla f|$, y la magnitud del gradiente, así como su dirección son independientes de las coordenadas.

Problema 1.12.2

Dada la superficie $z = 25 - x^2 - 4y^2$

a) Dibujar en el plano x, y las curvas $z=0$, $z=9$, $z=16$

b) Encuentre el vector normal a la curva que pasa por $P(2, \sqrt{3})$ y dibújelo

Solución:

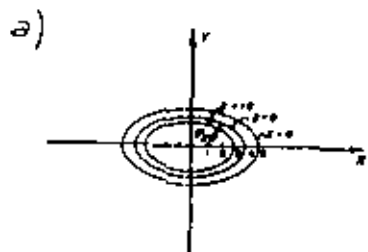


FIG. 1.12.2

Para $z=9$

$$9 = 25 - x^2 - 4y^2 \quad ; \quad x^2 + 4y^2 = 25 - 9 = 16$$

$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$
 elipse con centro en el origen
 y semiejes 4 y 2 respectivamente en x, y .

Para $z=16$

$$16 = 25 - x^2 - 4y^2 \quad ; \quad x^2 + 4y^2 = 25 - 16 = 9$$

$$\frac{x^2}{9} + \frac{4y^2}{9} = 1$$

elipse con centro en el origen y semiejes 3 y $\frac{3}{2}$ respecti-

amente

b) El vector normal a la curva que pasa por $P(2, \sqrt{3})$, es

$$\nabla z \Big|_P = \frac{\partial z}{\partial x} \Big|_P \mathbf{i} + \frac{\partial z}{\partial y} \Big|_P \mathbf{j} = -4\mathbf{i} + 4\sqrt{3}\mathbf{j}$$

cuya gráfica se ilustra en la Fig. 1.12.3, y es perpendicular a la curva en el nivel $z=9$

Problema 1.12.3

Hallar el vector tangente a la curva de intersección entre la superficie definida por la ecuación

$$F(x, y, z) = 2x^2 + 2y^2 + z - 9 = 0$$

y un plano vertical que pasa por el punto $P(1, 4)$, y forma un ángulo α con el eje x .

Solución

Determinemos primero un plano tangente a la superficie; para esto definiremos una tangente a la superficie, tal que su proyección sobre el plano xy sea la recta que forma un ángulo α con el eje x . (Ver Fig. 1.12.4)

La proyección horizontal del vector tangente cae en la propia línea en el plano. Así, si consideramos únicamente a esta proyección, la podemos representar como

$$\text{Proy}_{xy} \vec{n} = \cos \alpha \vec{i} + \sin \alpha \vec{j} = \vec{e}_n$$

La componente horizontal de ese vector tangente, será la variación de z por unidad de longitud medida sobre su proyección horizontal.

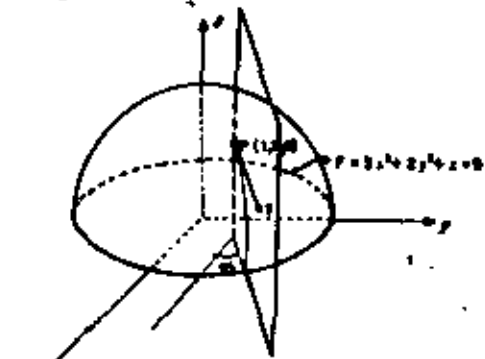


Fig. 1.12.6

al desmenujar z de la ecuación

$$z = 9 - 3x^2 - 2y^2 \quad ; \quad \nabla z = -6x\vec{i} - 4y\vec{j}$$

en el punto $P(1, 1, 4)$, $\nabla z|_P = -6\vec{i} - 4\vec{j}$

$$\frac{dz}{ds}|_P = \nabla z|_P \cdot \vec{e}_n = -6 \cos \alpha - 4 \sin \alpha$$

que para cualquier valor de α nos da la pendiente del vector tangente.

Finalmente el vector tangente en el punto es:

$$\vec{n} = \cos \alpha \vec{i} + \sin \alpha \vec{j} - (6 \cos \alpha + 4 \sin \alpha) \vec{k}$$

como se ve de las figs. 1.12.6 y 1.12.7

Este vector \vec{n} representa todas las normales tangentes a la superficie en el punto dado, ya que α puede

de tener cualquier valor



Fig. 1.12.7

Ahora calcularemos $\nabla F|_P$

$$\nabla F = 6x\vec{i} + 4y\vec{j} + \vec{k}$$

$$\nabla F|_P = 6\vec{i} + 4\vec{j} + \vec{k}$$

entonces

$$\nabla F|_P \cdot \vec{n}|_P = (6\vec{i} + 4\vec{j} + \vec{k}) \cdot (\cos \alpha \vec{i} + \sin \alpha \vec{j} - (6 \cos \alpha + 4 \sin \alpha) \vec{k})$$

$$\nabla F|_P \cdot \vec{n}|_P = 6 \cos \alpha + 4 \sin \alpha - 6 \cos \alpha - 4 \sin \alpha = 0$$

Así que, $\nabla F|_P$ es perpendicular a $\vec{n}|_P$ para cualquier valor de α , por lo tanto, como $\nabla F|_P$ es perpendicular a todas las normales tangentes, también es perpendicular a la superficie.

En general una superficie cualquiera obedece a la ecuación

$$F(x, y, z) = 0$$

En tanto que un punto se mueva sobre una superficie, es decir, en una dirección tangente \vec{t} , el valor de F debe permanecer nulo; esto es $\frac{dF}{ds} = 0$, o sea que en este caso $\nabla F \cdot \vec{t} = 0$ lo que significa que ∇F es perpendicular a todos los vectores tangentes, y por lo tanto a la superficie.

Cabe decir lo mismo en una superficie definida en la forma $F(x, y, z) = c$; $\nabla F(x_0, y_0, z_0)$ será perpendicular a la superficie en el punto (x_0, y_0, z_0) .

Una consecuencia de esto es que si la función $W = W(x, y, z)$ toma valores constantes c , para cada c habrá una superficie de nivel y el gradiente de $W(x, y, z)$ será perpendicular a la superficie de nivel $W = c$ en un punto dado (x, y, z) del dominio de W .

Al mismo tiempo, las direcciones en que una función crece con una rapidez dada en un punto, según las de las generatrices de un cono "recto" (recto con vértice en ese punto, y eje de simetría en la dirección del gradiente de la función en dicho punto).

1.13 Diferencial Exacto y su integración.

Comenzaremos tratando de resolver el problema siguiente:

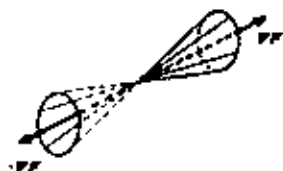


Fig. 1.12.8

(1) La palabra más correcta es semi-cono, porque sólo nos referimos a un manto del cono; en el otro manto, la rapidez es la misma en valor absoluto, pero con signo contrario; como se indica en la fig. 1.12.8

Problema 1.13.1

¿Cuál es la función cuyo gradiente es $-\frac{2x}{25}i - \frac{2y}{25}j$ y cuyo valor en el punto $(1, 2)$ es 0.1?

La solución en este caso no presenta mayor problema, pues si $\nabla f = -\frac{2x}{25}i - \frac{2y}{25}j$ recordamos del problema 1.12.1 anterior que

$$f = 1 - \frac{1}{25}(x^2 + y^2)$$

Atemos ahora si podemos contestar

Problema 1.13.2

¿Cuál es la función cuyo gradiente es $y^2 i + xj$ y cuyo valor, en el punto $(1, 1)$ es 2? Esta vez no conocemos nada de la función; pero podemos razonar como sigue:

El gradiente es perpendicular a las curvas de nivel; luego su pendiente será recíproca y de signo contrario a la de dichas curvas, cuya ecuación en general podemos escribir

$$f(x, y) = c$$

la pendiente de nuestro gradiente es $\frac{x}{y}$; así que la pendiente de una curva de nivel cualquiera de $f(x, y)$ será $-\frac{y}{x} = \frac{dy}{dx}$ que podemos escribir

$$\frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x}$$

lo cual integra como:

$$Ly = -Lx + Lc$$

o bien

$$L(xy) = Lc \Rightarrow xy = c$$

ahora usando la condición dada para $x=1, y=1$

$$f(x,y) = xy + c$$

$$f(1,1) = 1 + c = 2 \Rightarrow c = 1$$

finalmente

$$f(x,y) = xy + 1$$

Problema 1.13.3

Veamos ahora si podemos determinar la función de la cual $y\mathbf{i} - x\mathbf{j}$ es el gradiente.

De manera análoga obtenemos que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} \Rightarrow \frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}$$

integrando

$$Ly = Lx + Lc$$

y $\frac{y}{x} = c$, pero resulta que, si $g(x,y) = \frac{y}{x}$

$$\nabla g = -\frac{y}{x^2}\mathbf{i} + \frac{1}{x}\mathbf{j} \neq y\mathbf{i} - x\mathbf{j}$$

Entonces no cualquier combinación de funciones que se nos ocurra puede ser gradiente de una función, sino que, para que lo sea debe cumplir ciertas condiciones. En el caso anterior podríamos habernos dado cuenta que no era posible que $y\mathbf{i} - x\mathbf{j}$ fuera gradiente de una función ϕ porque, para serlo, se debería cumplir el teorema de Schwarz:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = y \quad ; \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} = -x$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial x} = 1 \quad ; \quad \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} = -1$$

o sea que

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial x} \neq \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y}$$

de donde se concluye que siendo y y $-x$ funciones que cumplen con las hipótesis del teorema de Schwarz, no provienen de una misma función, como se proponía.

1.13.1 Condición Necesaria y Suficiente para que un Vector sea el gradiente de una Función Escalar.

Del problema 1.13.3 surge una condición necesaria para que un vector de la forma $\mathbf{v} = P(x,y)\mathbf{i} + Q(x,y)\mathbf{j}$ sea gradiente de una función escalar ϕ , y esta es que, si suponemos que el vector dado es el gradiente de ϕ .

$$\nabla \phi = \frac{\partial \phi}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial \phi}{\partial y}\mathbf{j} \quad 1.13.1.1$$

entonces

$$P(x,y) = \frac{\partial \phi}{\partial x} \quad ; \quad Q(x,y) = \frac{\partial \phi}{\partial y} \quad 1.13.1.2$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial x} \quad 1.13.1.3$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \quad 1.13.1.4$$

y según el teorema de Schwarz 1.13.1.3 y 4 son iguales, así que, para que \vec{r} sea un gradiente se requiere que

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \quad \text{CONDICIÓN NECESARIA} \quad 1.13.1.5$$

Ahora nos preguntamos si la condición anterior garantiza la existencia de una función única ϕ de la cual \vec{r} es gradiente.

Supongamos que los miembros de $P(x, y)$ y $Q(x, y)$ son tales que 1.13.1.5 es cierta. Debemos entonces poder encontrar una función ϕ tal que

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = P \quad 1.13.1.6$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = Q \quad 1.13.1.7$$

Si 1.13.1.6 es verdadera, podemos integrarla respecto a "x" manteniendo "y" constante.

$$\phi = \int \frac{\partial \phi}{\partial x} dx + f(y) = \int P dx + f(y) \quad 1.13.1.8$$

y la función $f(y)$ nos da la parte de ϕ que depende exclusivamente de "y" ya que, al derivar ϕ respecto a "x" se habían anulado estos términos que sólo contienen a "y".

La expresión 1.13.1.8 debe satisfacer también a 1.13.1.7,

así que

$$Q = \frac{\partial}{\partial y} \left[\int P dx + f(y) \right] \quad 1.13.1.9$$

o sea

$$Q = \frac{\partial}{\partial y} \int P dx + \frac{df}{dy}$$

de donde despejamos $\frac{df}{dy}$

$$\frac{df}{dy} = Q - \frac{\partial}{\partial y} \int P dx \quad 1.13.1.10$$

Recordemos que f depende solamente de y , y por lo tanto su derivada; entonces la ecuación 1.13.1.10 nos es útil diciendo que al manipular en el segundo miembro, nos debe quedar una expresión que no contenga a "x". - Esto es, su derivada parcial con respecto a "x" debe ser nula:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial}{\partial y} \int P dx \right] = 0 \quad 1.13.1.11$$

o lo que es lo mismo, de acuerdo con el teorema de Schwarz

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial}{\partial x} \int P dx \right] = 0 \quad 1.13.1.12$$

que se simplifica como sigue

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y} [P] = 0 \quad 1.13.1.13$$

de donde

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} \quad 1.13.1.14$$

así que, el cumplimiento de 1.13.1.5 garantiza que existe una función única ϕ cuyo gradiente es el vector \vec{r} .

Decimos entonces que la condición necesaria y suficiente para que un vector $P(x,y)\vec{i} + Q(x,y)\vec{j}$ sea un gradiente

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} \quad \text{CONDICIÓN NECESARIA Y SUFICIENTE} \\ \text{1.13.1.5}$$

1.14 Diferencial Exacto.

Definición 1.14.1

Si dada una expresión de la forma $P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ existe una $\phi(x,y)$ tal que $d\phi = P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ para todo (x,y) en una cierta región y para todos los valores de dx, dy , decimos que la expresión es una diferencial exacta.

La condición 1.13.1.5 es, simultáneamente, condición necesaria y suficiente para que la expresión

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy \quad \text{1.14.0.1}$$

sea diferencial exacta o total de una función ϕ , ya que si lo es

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = P(x,y), \quad \text{y} \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} = Q(x,y) \quad \text{1.14.0.2}$$

Podemos ver además, que

$$d\phi = \nabla\phi \cdot (dx, dy) \quad \text{1.14.0.3}$$

puesto que $d\vec{r} = (dx, dy)$, y por lo tanto

$$d\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \phi}{\partial y} dy = \nabla\phi \cdot d\vec{r} \quad \text{1.14.0.4}$$

1.14.1 Diferencial Exacta y su Integración

Ejemplo 1.14.1

Consideremos la expresión $(2xy+y)dx + (x^2+xy)dy$ en donde $P(x,y) = 2xy+y$, $Q(x,y) = x^2+xy$

¿Es la expresión dada una diferencial exacta? Si lo es ¿a qué función proviene?

Solución

Para que sea diferencial exacta debe cumplirse

$$\frac{\partial}{\partial y}(2xy+y) = \frac{\partial}{\partial x}(x^2+xy)$$

calculando esas derivadas parciales obtenemos:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 2x+1 = \frac{\partial Q}{\partial x} = 2x+1$$

por lo que sí es diferencial exacta.

Para encontrar la función de la que proviene podríamos intentar el método que utilizamos para resolver el problema 1.13.2

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2xy+y}{x^2+xy}$$

pero vemos que ahora no es sencillo separar las variables para integrar. Afortunadamente la demostración realizada en 1.13.1 nos sugiere un método muy fácil

Recordemos que $P(x,y) = \frac{\partial \phi}{\partial x}$, así que, integrando P respecto a x

$$\phi = \int (2xy+y) dx + f(y),$$

en donde $f(y)$ es función sólo de y

$$\phi = x^2y + xy + f(y)$$

la que debe verificar a Q, así que:

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = x^2 + x + f'(y) = x^2 + x + y$$

de donde

$$f'(y) = y$$

Finalmente

$$\phi = x^2y + xy + \frac{1}{2}y^2 + C$$

Para el caso en que existan 3 variables el concepto puede generalizarse fácilmente usando el teorema de Schwarz, la única condición es que la función a integrar sea sólo en las variables que no se hayan integrado, teniendo que verificar dicha función a los restantes términos de la diferencial.

Ejemplo 1.14.2

La expresión

$$(3x^2 + z)dx + (2y + z^2)dy + (x + 2yz + 1)dz$$

¿Es diferencial exacta?

Si lo es debe verificar que, siendo

$$P = 3x^2 + z, \quad Q = 2y + z^2, \quad R = x + 2yz + 1$$

se cumpla el teorema de Schwarz tomando de dos en dos las funciones

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 0 = \frac{\partial Q}{\partial x} \quad ; \quad \frac{\partial P}{\partial z} = 1 = \frac{\partial R}{\partial x}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial z} = 2z = \frac{\partial R}{\partial y}$$

Completando por lo tanto, es una diferencial exacta.

¿De qué función proviene?

Integramos P respecto a x, la constante de integración en este caso debe permanecer invariable de y que sólo depende de (y, z)

$$\phi = \int (3x^2 + z) dx + f(y, z) = x^3 + xz + f(y, z);$$

esta expresión debe verificarse a Q, así que

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = 0 + f'_y(y, z) = Q = 2y + z^2$$

de donde

$$f'_y(y, z) = \int (2y + z^2) dy + h(z) = y^2 + z^2y + h(z)$$

se puede h(z) representar todos los términos de ϕ que dependen sólo de z; $\phi = x^3 + xz + y^2 + z^2y + h(z)$ y esta expresión debe verificarse a R, así que

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = x + z^2y + h'(z) = x + 2yz + 1 = R$$

de donde

$$h'(z) = 1 \Rightarrow h(z) = z + C$$

finalmente, la función ϕ buscada es

$$\phi = x^3 + xz + y^2 + z^2y + z + C$$

En capítulos posteriores veremos algunas consecuencias de la definición de diferencial exacta, y una interpretación física de la misma.

1.14.3 Generalización de la Diferencial Exacta

1.113

Teorema 1.14.1

En general, decimos que una expresión de la forma

$$P_1(\bar{x})dx_1 + P_2(\bar{x})dx_2 + \dots + P_n(\bar{x})dx_n \quad 1.14.3.1$$

en donde $\bar{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]$ es una diferencial exacta de una función $F(\bar{x})$ si, siendo P_1, P_2, \dots, P_n funciones escalares definidas en una cierta región de \mathbb{R}^n , cumplen el teorema de Schwarz para todas las combinaciones posibles de pares.

O sea, se deben cumplir $\frac{n(n-1)}{2}$ condiciones de la forma

$$\frac{\partial P_i}{\partial x_j} = \frac{\partial P_j}{\partial x_i}$$

basadas todas ellas en el cumplimiento del teorema de Schwarz.

(1) Para la verificación de esta expresión es el apéndice 1.2

1.114

1.15 Derivación de Funciones Implícitas de Varias Variables

En Matemáticas I se te presentó el problema de hallar la pendiente de la recta tangente a una circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 = a^2$, en un punto cualquiera de la misma, lo que puedes resolver en 2 formas: ya fuera despejando y , o bien derivando término a término.

O sea

$$y = \pm \sqrt{a^2 - x^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-x}{\pm \sqrt{a^2 - x^2}}$$

O derivando término a término

$$2x + 2y \frac{dy}{dx} = 0$$

de donde, al despejar $\frac{dy}{dx}$ obtenemos el mismo resultado

A continuación, resolveremos un problema similar, pero en 3 dimensiones:

Problema 1.15.1

Hallar la dirección de máximo crecimiento de la cota, en la función definida por la ecuación:

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{25} = 1 \quad 1.15.1a$$

en el punto en que $x=2, y=1, y z > 0$

Como habrás recordado, lo que si se resuelve hallando el gradiente de Z , lo cual requiere el cálculo de $\frac{\partial Z}{\partial x}$ y $\frac{\partial Z}{\partial y}$.

Derivaremos primero parcialmente con respecto a x , término a término, en la ec. 1.15.1a, por sea al método más sano

elto y general, ya que, lo hacemos resulte, no siempre es posible despejar z .

$$\frac{2x}{y} - \frac{y}{8} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{2z}{25} \frac{\partial z}{\partial x} = 0 \quad 1.15.1b$$

Desde luego que siendo y independiente de x , $\frac{\partial y}{\partial x} = 0$.

Al despejar $\frac{\partial z}{\partial x}$ obtenemos.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{25x}{9z} \quad 1.15.1c$$

En forma similar, pues obtenemos $\frac{\partial z}{\partial y}$

$$\begin{aligned} -\frac{y}{8} + \frac{2z}{25} \frac{\partial z}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= -\frac{25y}{16z} \end{aligned} \quad 1.15.1d$$

de donde

$$\nabla z = -\frac{25x}{9z} i - \frac{25y}{16z} j \quad 1.15.1e$$

Para $x=2, y=1, z = \frac{5\sqrt{10}}{12}$

$$\nabla z \Big|_{(2, 1, \frac{5\sqrt{10}}{12})} = -\frac{40}{3\sqrt{10}} i - \frac{15}{4\sqrt{10}} j$$

La dirección del máximo crecimiento de z es la del gradiente de z .

Por otro lado, consideremos la ecuación

$$x^2 + y^2 + z^2 = -9$$

y los intentos de resolver al mismo problema para el punto $(1, 1, -1)$

Observamos de inmediato, que en este caso no tiene sentido calcular las derivadas parciales de z con respecto a x y y , por que la función no existe en el campo de los reales, que es en el que estamos trabajando. En efecto, ninguna forma de valores reales es tal que la suma de sus cuadrados sea negativa.

Proceda en consecuencia, a averiguar qué condiciones habrá de cumplir una ecuación del tipo

$$F(x, y, z) = 0 \quad 1.15.01$$

para definir a una de ellas, digamos z , como función implícita de las otras dos; esto es, establecer la existencia de esa función z .

Teorema 1.15.1 (Teorema de la Existencia de la Función Implícita)

Sea la ecuación

$$F(x, y, z) = 0 \quad 1.15.1.I$$

en R la región que contiene íntegramente al punto (x_0, y_0, z_0)

Si:

$$F(x_0, y_0, z_0) = 0 \quad 1.15.1.II$$

$$F_x, F_y, F_z \text{ son continuas en } R \quad 1.15.1.III$$

$$F_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0 \quad 1.15.1.IV$$

Entonces hay una vecindad I_0 del punto (x_0, y_0) en la cual existe una función diferenciable única $z = f(x, y)$, tal que

$$z_0 = f(x_0, y_0) \quad 1.15.1.V$$

$$F[x, y, f(x, y)] = 0 \quad 1.15.1.VI$$

$$z_x = -\frac{F_x}{F_z}, \quad z_y = -\frac{F_y}{F_z} \quad 1.15.1.VII$$

La demostración completa de este teorema la puedes ver en el apéndice 1.3; sin embargo la demostración de la tesis

1.15.1.VII se presenta a continuación

En la vecindad bidimensional I_0 sobre la cual $z = f(x, y)$ está definida unívocamente, tenemos que $F_z \neq 0$; luego, de 1.6.0.11 tenemos que

$$dF = F_x dx + F_y dy + F_z dz = 0$$

al despejar

$$dz = -\frac{F_x}{F_z} dx - \frac{F_y}{F_z} dy$$

queda acordado con lo visto en 1.6.0.11

$$z_x = -\frac{F_x}{F_z}, \quad z_y = -\frac{F_y}{F_z} \quad 115.1.VII$$

La hipótesis 115.IV induce que z_x y z_y son continuas en I_0 , por lo que $z = f(x, y)$ es una función diferenciable.

Al aplicar 115.IV a la resolución de z_x y z_y del problema 115.1

$$F(x, y, z) = \frac{x^3}{9} + \frac{y^3}{16} + \frac{z^3}{25} - 1 = 0$$

$$F_x = \frac{2x}{9}, \quad F_y = \frac{y}{8}, \quad F_z = \frac{2z}{25}$$

de donde

$$z_x = -\frac{\frac{2x}{9}}{\frac{2z}{25}} = -\frac{25x}{9z}, \quad z_y = -\frac{\frac{y}{8}}{\frac{2z}{25}} = -\frac{25y}{16z}$$

Ejemplo 115.2

Halle $\frac{\partial z}{\partial x}$ y $\frac{\partial z}{\partial y}$ a partir de la ecuación

$$4x^3 - xy^2 + 2yz^2 - \cos z = \pi^2$$

en un entorno de $P(1, 2, \frac{\pi}{2})$ que la satisface, y valúelas en este punto. Evidentemente es función continua en una región que contiene al punto anterior

Solución Hacemos $F(x, y, z) = 4x^3 - xy^2 + 2yz^2 - \cos z - \pi^2 = 0$

de donde

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 12x^2 - y^2, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = -2xy + 2z^2, \quad \frac{\partial F}{\partial z} = 4yz + \sin z$$

Las derivadas parciales pedidas no existen sobre $4yz + \sin z = 0$

Finalmente

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{12x^2 - y^2}{4yz + \sin z} = \frac{z^2 - 12x^2}{4yz + \sin z} \Big|_{P(1, 2, \frac{\pi}{2})} = -\frac{8}{4\pi + 2}$$

115

118

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{-2xy + 2z^2}{4yz + \sin z} = \frac{2xy - 2z^2}{4yz + \sin z} \Big|_P = \frac{8 - \pi^2}{8\pi + 2}$$

Teorema 115.2 (Teorema General de la Existencia de Funciones Implícitas)

Sea la ecuación

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n, w) = 0 \quad 115.2.I$$

y R la región que en su interior contiene al punto $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0, w^0)$. Si

$$F(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0, w^0) = 0 \quad 115.2.II$$

$$F_{x_1}, F_{x_2}, \dots, F_{x_n}, F_w \text{ son continuas en } R \quad 115.2.III$$

$$F_w(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0, w^0) \neq 0 \quad 115.2.IV$$

Entonces hay una vecindad I_r del punto $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ en donde existe una función diferenciable única $w = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ tal que

$$w^0 = f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) \quad 115.2.V$$

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n, f(x_1, x_2, \dots, x_n)) = 0 \quad 115.2.VI$$

$$\left. \begin{aligned} w_{x_1}^0 &= -\frac{F_{x_1}}{F_w} \\ w_{x_2}^0 &= -\frac{F_{x_2}}{F_w} \\ &\vdots \\ w_{x_n}^0 &= -\frac{F_{x_n}}{F_w} \end{aligned} \right\} \quad 115.2.VII$$

La prueba de este teorema sigue un proceso similar al del teorema 115.1

Problema 115.3

Halle $\frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y}, \frac{\partial w}{\partial z}$ de la ecuación $e^w = \tan x^2 y^2 z^2 = 0$

$$F = e^w - \tan x^2 y^2 z^2 = 0$$

$$F_x = -2xy^2z^2 \sec^2(x^2y^2z^2), F_y = -2x^2yz^2 \sec^2(x^2y^2z^2), F_z = -2xy^2z \sec^2(x^2y^2z^2)$$

$$F_w = e^{uw}$$

Evidentemente se cumplen las condiciones del Teorema de Existencia, pues $e^{uw} \neq 0$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = -\frac{2xy^2z^2 \sec^2(x^2y^2z^2)}{e^{uw}} = \frac{2xy^2z^2 \sec^2(x^2y^2z^2)}{e^{uw}}$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{2x^2yz^2 \sec^2(x^2y^2z^2)}{e^{uw}}$$

$$\frac{\partial w}{\partial z} = \frac{2xy^2z \sec^2(x^2y^2z^2)}{e^{uw}}$$

1.15.1. Sistemas de Funciones Implícitas y su Derivación

Problema 1.15.4

Un avión ha sido detectado simultáneamente por 2 estaciones de radar, distantes entre sí 100 Km; una de ellas lo localizó a una distancia de 120 Km acercándose a razón de 500 Km/hr, la otra lo situó a 80 Km, y se le aproxima a 450 Km/hr. Hallar la rapidez y la dirección con que el avión se mueve.

Solución

Hoy que calculas $|v|$ y su dirección definida por θ

$$|v| = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$$

Como habrás identificado, en este problema x y y dependen de u y w

$$x = x(u, w), \quad y = y(u, w)$$

de donde

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial x}{\partial u} \frac{du}{dt} + \frac{\partial x}{\partial w} \frac{dw}{dt}, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{\partial y}{\partial u} \frac{du}{dt} + \frac{\partial y}{\partial w} \frac{dw}{dt}$$

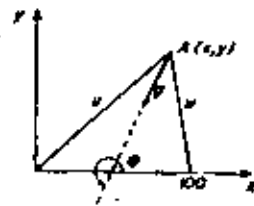


Fig. 1.15.1

De los datos del problema

$$\frac{du}{dt} = -500 \frac{km}{hr}, \quad \frac{dw}{dt} = -450 \frac{km}{hr}$$

signos negativos porque las distancias van decreciendo

Hoy que determinas $\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial x}{\partial w}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial w}$, por lo que necesites establecer relaciones de x y y con u y w . De la Fig 1.15.1

$$x^2 + y^2 = u^2$$

$$(100 - x)^2 + y^2 = w^2$$

De este sistema podemos despejar a x y y en términos de u y w ; pero como no siempre es factible o práctico esa operación, trabajaremos sin despejarlas.

En el sistema planteado existen dos funciones implícitas: x y y ; dos variables independientes: u y w ; recibe el nombre de sistema de funciones implícitas, y lo manipularemos en la forma siguiente:

$$F(x, y, u, w) = x^2 + y^2 - u^2 = 0$$

$$G(x, y, u, w) = (100 - x)^2 + y^2 - w^2 = 0$$

Hallamos sus diferenciales totales

$$dF = 2x dx + 2y dy - 2u du = 0$$

$$dG = -2(100 - x) dx + 2y dy - 2w dw = 0$$

Al simplificar y ordenar este sistema

$$x dx + y dy = u du$$

$$(x - 100) dx + y dy = w dw$$

de donde, resolvimos por la regla de Cramer para dx :

$$dx = \frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial u} & y \\ \frac{\partial G}{\partial u} & y \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x & y \\ x-100 & y \end{vmatrix}} = \frac{u y}{x y - (x-100) y} \frac{du - \frac{1}{2} \frac{dw}{du}}{du}$$

De acuerdo con la ec. 1.6.2.1) el coeficiente de du es precisamente $\frac{\partial x}{\partial u}$, y el coeficiente de dw es $\frac{\partial x}{\partial w}$.

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{16}{100}, \quad \frac{\partial x}{\partial w} = -\frac{16}{100}$$

Análogamente

$$dy = \frac{\begin{vmatrix} x & udu \\ x-100 & wdw \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x & y \\ x-100 & y \end{vmatrix}} = \frac{xw}{x-100} \frac{du}{y} - \frac{(x-100)u}{x-100} \frac{dw}{y}$$

de donde

$$\frac{\partial y}{\partial u} = \frac{xw}{100y}, \quad \frac{\partial y}{\partial w} = -\frac{(x-100)u}{100y}$$

Los valores de x y y los hallaremos de los datos del problema,

Fig. 1.15.2

$$\cos \phi = \frac{110^2 - 100^2 - 80^2}{2(110)(120)} = 0.75$$

$$\sin \phi = \sqrt{1 - (0.75)^2} = 0.661$$

$$x = 120(0.75) = 90 \text{ km}, \quad y = 120(0.661) = 79.3 \text{ km}$$

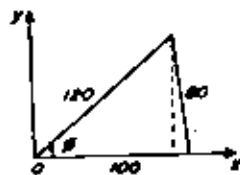


Fig. 1.15.2

con lo que obtenemos

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{120}{100} = 1.2, \quad \frac{\partial x}{\partial w} = -\frac{80}{100} = -0.8,$$

$$\frac{\partial y}{\partial u} = -\frac{(90-100)70}{100(79.3)} = 0.151, \quad \frac{\partial y}{\partial w} = \frac{(90)(80)}{100(79.3)} = 0.908$$

$$\frac{dx}{dt} = 1.2(-500) + (-0.8)(-450) = -240$$

$$\frac{dy}{dt} = 0.151(-500) + 0.908(-450) = -484.1$$

$$|v| = \sqrt{(-240)^2 + (-484.1)^2} = 540.3 \text{ km/hr}$$

Dirección

$$\theta = \arctan \frac{-484.1}{-240} = 243^\circ 39'$$

1.15.2 Sistemas de Funciones Implícitas

El conjunto de ecuaciones

$$F_1(x_1, x_2, \dots, x_n, w_1, w_2, \dots, w_m) = 0$$

$$F_2(x_1, x_2, \dots, x_n, w_1, w_2, \dots, w_m) = 0$$

...

$$F_m(x_1, x_2, \dots, x_n, w_1, w_2, \dots, w_m) = 0$$

en donde

$$w_1 = w_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$$

$$w_2 = w_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$$

...

$$w_m = w_m(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$$

constituye un sistema de funciones implícitas w_1, w_2, \dots, w_m , de variables independientes x_1, x_2, \dots, x_n .

Un ejemplo de este caso lo tenemos con las ecs.

$$x^2 + y^2 = u^2$$

$$100 - x^2 + y^2 = w^2$$

planteadas en el problema 1.15.4

Otro ejemplo lo tenemos en los sistemas de ecuaciones lineales que estudiaste en Álgebra:

$$3x + 5y - 2u - 4v = 10$$

$$2x - 3y - 3u + 2v = 6$$

$$4u - 6v - 3x - 4y = 3$$

$$2u - 3v + 2x - 5y = 8$$

1.15.2.a

1.15.2.b

1.15.3 Derivación de Sistemas de Funciones Implícitas

Tratemos de derivar u, v , en los sistemas 1.15.2.a y 1.15.2.b, con respecto a x y y , siguiendo el procedimiento usado en el ejm. 1.15.4

Al diferenciar primero 1.15.2.a

$$3dx + 5dy - 2du + 4dv = 0 \quad 1.15.2.c$$

$$2dx - 3dy - 3du + 2dv = 0 \quad 1.15.2.d$$

Este sistema de ecuaciones en du y dv lo podemos resolver por cualquiera de los métodos conocidos; en este caso nos resulta atrayente multiplicar 1.15.2.c por -2 y sumarla a 1.15.2.d; obtenemos:

$$-dx + 11dy + 4du = 0 \quad 1.15.2.e$$

de donde

$$du = \frac{1}{4}dx - \frac{11}{4}dy \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{4}; \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{11}{4}$$

Al sustituir el valor de du en 1.15.2.e

$$3dx + 5dy - 2\left(\frac{1}{4}dx - \frac{11}{4}dy\right) + 4dv = 0$$

que al simplificarla

$$\frac{5}{2}dx + \frac{21}{2}dy + 4dv = 0 \quad 1.15.2.f$$

$$dv = -\frac{5}{8}dx - \frac{21}{8}dy \Rightarrow \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{5}{8}; \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{21}{8}$$

Ahora trabajamos con el sistema 1.15.2.b

$$4du - 6dv - 3dx + 4dy = 0 \quad 1.15.2.g$$

$$2du - 3dv - 2dx - 5dy = 0 \quad 1.15.2.h$$

Se nos antoja nuevamente multiplicar 1.15.2.h por -2 , y sumarla a 1.15.2.g; sólo que ahora no solamente eliminamos du sino que también eliminariamos dv . ¿Qué pasa entonces?

La respuesta está en el curso de Álgebra: u y v no son funciones de x y y porque el determinante del sistema:

$$\begin{vmatrix} 4 & -6 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = 0$$

En realidad 1.15.2.b enmascara una relación entre x y y ; no existiendo pues relación (función) de u con x y y , tampoco puede existir

derivada

De lo anterior se concluye que no cualquier sistema de ecuaciones define a algunas de sus variables como funciones implícitas de las restantes. El Álgebra Lineal nos dice la condición que debían de reunir los sistemas de ecuaciones lineales; pero a nosotros nos interesan también los sistemas de ecuaciones no lineales.

Veamos primero el caso de dos ecuaciones y cuatro variables.

Teorema 1.15.3 (Teorema de Existencia)

Sean

$$F(x, y, u, v) = 0, \quad G(x, y, u, v) = 0 \quad 1.15.3.I$$

Tengamos ahora un conjunto de valores (x_0, y_0, u_0, v_0) que nos definen un punto en cuatro dimensiones

Sea la región R que contenga interiormente al punto (x_0, y_0, u_0, v_0) .

Entonces, si

$$F(x_0, y_0, u_0, v_0) = 0, \quad G(x_0, y_0, u_0, v_0) = 0, \quad 1.15.3.II$$

$$F_x, F_y, F_u, F_v, G_x, G_y, G_u, G_v, \text{ son continuas en } R. \quad 1.15.3.III$$

$$\begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix} \neq 0, \text{ en } (x_0, y_0, u_0, v_0) \quad 1.15.3.IV$$

existe alguna vecindad bidimensional de (x_0, y_0) en donde hay dos funciones diferenciables únicas:

$$u = f(x, y), \quad v = g(x, y)$$

tales que

$$u_0 = f(x_0, y_0), \quad v_0 = g(x_0, y_0) \quad 1.15.3.V$$

$$F(x, y, f(x, y), g(x, y)) = 0, \quad G(x, y, f(x, y), g(x, y)) = 0 \quad 1.15.3.VI$$

y las derivadas parciales de u y v con respecto a x y y son continuas y pueden obtenerse al resolver el sistema $dF = dG = 0$ 1.15.3.VII

La demostración del Teorema 115.3 la puedes ver en el Apéndice

Teorema 115.4 (Teorema General de Existencia)

Sean

$$F_1(x_1, x_2, \dots, x_n, w_1, w_2, \dots, w_m) = 0$$

$$F_2(x_1, x_2, \dots, x_n, w_1, w_2, \dots, w_m) = 0$$

...

$$F_m(x_1, x_2, \dots, x_n, w_1, w_2, \dots, w_m) = 0$$

115.4.I

Tengamos un conjunto de valores $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0, w_1^0, w_2^0, \dots, w_m^0)$ que nos definen un punto en el espacio $n+m$ -dimensional.

Sea la región R que tiene anteriormente a ese punto.

Entonces, si

$$F_1(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0, w_1^0, w_2^0, \dots, w_m^0) = 0$$

$$F_2(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0, w_1^0, w_2^0, \dots, w_m^0) = 0$$

...

$$F_m(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0, w_1^0, w_2^0, \dots, w_m^0) = 0$$

115.4.II

$\frac{\partial F_i}{\partial x_j}$ y $\frac{\partial F_i}{\partial w_j}$ $\forall i=1,2,\dots,m; j=1,2,\dots,n$ son continuas en R .

115.4.III

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial w_1} & \frac{\partial F_1}{\partial w_2} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial w_m} \\ \frac{\partial F_2}{\partial w_1} & \frac{\partial F_2}{\partial w_2} & \dots & \frac{\partial F_2}{\partial w_m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial F_m}{\partial w_1} & \frac{\partial F_m}{\partial w_2} & \dots & \frac{\partial F_m}{\partial w_m} \end{vmatrix} \neq 0$$

115.4.IV

hay alguna vecindad n -dimensional $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ en donde existen " m " funciones diferenciables únicas

$$w_i^0 = f_i(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$$

$$w_j^0 = f_j(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$$

...

$$w_m^0 = f_m(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$$

talas que

$$w_i^0 = f_i(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$$

$$w_j^0 = f_j(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$$

...

$$w_m^0 = f_m(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$$

115.4.V

115.4.VI

y

$$F_1(x_1, x_2, \dots, x_n, f_1, f_2, \dots, f_m) = 0$$

$$F_2(x_1, x_2, \dots, x_n, f_1, f_2, \dots, f_m) = 0$$

...

$$F_m(x_1, x_2, \dots, x_n, f_1, f_2, \dots, f_m) = 0$$

115.4.VII

Las derivadas parciales $\frac{\partial F_i}{\partial x_j} \forall i=1,2,\dots,m; j=1,2,\dots,n$, son continuas

La demostración de este teorema la puedes ver en el apéndice

115.4. Jacobianas

Al determinar de la expresión 115.3.IV

$$\begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix}$$

115.4.I

en que todas las láminas son derivadas parciales, y que aparece más que intervenga en forma muy destacada, en el cálculo de las derivadas parciales de funciones implícitas que aparecen en sistemas de ecuaciones como al 115.3.I, se le da en

1.127

mina "Jacobiano", y su nomenclatura más usual es la siguiente:

$$J\left(\frac{F, G}{(u, v)}\right) = \frac{\partial(F, G)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial u} & \frac{\partial F}{\partial v} \\ \frac{\partial G}{\partial u} & \frac{\partial G}{\partial v} \end{vmatrix} \quad 1.15.4.2$$

Con esa nomenclatura se logra una representación más compacta, y fácil de recordar y manipular.

Este operador tiene, entre otras, amplias aplicaciones en los problemas que requieran transformaciones de coordenadas.

Problema 1.15.5

Hallar $J\left(\frac{x, y}{r, \theta}\right)$ para el sistema de ecuaciones de transformación de coordenadas cartesianas a polares.

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta$$

$$J\left(\frac{x, y}{r, \theta}\right) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{vmatrix} = r \cos^2 \theta + r \sin^2 \theta = r$$

Para el sistema general de funciones implícitas indicado por 1.15.4.1 el jacobiano es

$$J\left(\frac{F_1, F_2, \dots, F_m}{(u_1, u_2, \dots, u_m)}\right) = \frac{\partial(F_1, F_2, \dots, F_m)}{\partial(u_1, u_2, \dots, u_m)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial u_1} & \frac{\partial F_1}{\partial u_2} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial u_m} \\ \frac{\partial F_2}{\partial u_1} & \frac{\partial F_2}{\partial u_2} & \dots & \frac{\partial F_2}{\partial u_m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial F_m}{\partial u_1} & \frac{\partial F_m}{\partial u_2} & \dots & \frac{\partial F_m}{\partial u_m} \end{vmatrix} \quad 1.15.4.3$$

1.128

1.15.5 Propiedades de los Jacobianos

Algunas de las propiedades de los jacobianos que emplearemos con frecuencia, son las siguientes:

$$1. \quad J\left(\frac{u_1, u_2, \dots, u_n}{x_1, x_2, \dots, x_n}\right) = J\left(\frac{u_1, u_2, \dots, u_n}{w_1, w_2, \dots, w_n}\right) J\left(\frac{w_1, w_2, \dots, w_n}{x_1, x_2, \dots, x_n}\right) \quad 1.15.5.1$$

an que u_1, u_2, \dots, u_n son funciones de w_1, w_2, \dots, w_n , y estas a su vez funciones de x_1, x_2, \dots, x_n .

2. Si u y u_2 son funciones de p, q , y r , y estas a su vez de x_1 y x_2 .

$$J\left(\frac{u_1, u_2}{x_1, x_2}\right) = J\left(\frac{u_1, u_2}{p, q}\right) J\left(\frac{p, q}{x_1, x_2}\right) + J\left(\frac{u_1, u_2}{p, r}\right) J\left(\frac{p, r}{x_1, x_2}\right) + J\left(\frac{u_1, u_2}{q, r}\right) J\left(\frac{q, r}{x_1, x_2}\right) \quad 1.15.5.2$$

A las expresiones del tipo 1.15.5.1 y 2 se las denomina regla de la cadena entre jacobianos.

3.

$$J\left(\frac{u_1, u_2, \dots, u_n}{x_1, x_2, \dots, x_n}\right) = \frac{1}{J\left(\frac{x_1, x_2, \dots, x_n}{u_1, u_2, \dots, u_n}\right)}$$

La demostración de estas propiedades la puedes ver en el Apéndice.

II D I F E R E N C I A C I Ó N P A R C I A L

TOMADO DE LOS APUNTES DE LA MATERIA DE MATEMATICAS III DE LA
FACULTAD DE INGENIERIA

U. N. A. M.

Capítulo Dos

2.- Máximos y Mínimos de Funciones de Varias Variables.

Uno de los problemas básicos de la ingeniería es el de optimizar la solución de los problemas que le competen. La capacidad de optimizar constituye una de las razones de ser del ingeniero. En otras palabras, existen muchas personas que pueden realizar una obra de ingeniería; pero es el ingeniero el capacitado para seleccionar los procedimientos óptimos, aprovechar al máximo las propiedades de los materiales para, bajo las adecuadas normas de seguridad, emplear un mínimo de estos; en fin, para realizar el tipo de obra que mayor beneficio einda a la colectividad. La vida del ingeniero transcurre en un constante optimizar; este proceso no siempre es racional y consciente debido a la complejidad de ciertos problemas; pero aún en estos casos, la actitud del ingeniero está orientada hacia la optimización.

En el curso de Matemáticas I, viste la deducción de las condiciones necesaria y suficiente, que deben cumplir los máximos y mínimos de una función de una variable, y se estableció el procedimiento adecuado para su solución. Ahora emprenderemos la resolución de este problema para el caso en que la función dependa de varias variables independientes. Al término de este capítulo, quedarás capacitado para resolver problemas del tipo siguiente:

Problema 2.0.1.

La sección de un canal de irrigación, abierto, ha de tener la forma de un trapecio. Si el área de la sección ha de ser de 37 m^2 , ¿qué dimensiones y qué pendiente de los lados hacen mínima la superficie

sustentadora S ? (Fondo y lados). Fig. 2.0.1.

Haremos unitaria la longitud del canal para reducirnos al estudio del área.

En este problema las variables independientes son z , ya que de entre x, y, z y α , z de ellas se pueden establecer en términos de las restantes a través de su relación geométrica, según se deduce de la Fig. 2.0.1, y del dato de área igual a 37 m^2 .

El número de variables independientes: 2, obliga a ampliar los conocimientos que adquiriste en Matemáticas I.

La resolución de este problema, según procedimiento que veremos posteriormente, proporciona los valores siguientes:

$$x = 10.66 \text{ m}, \quad y = 5.33 \text{ m}, \quad z = 5.33 \text{ m}, \quad \alpha = 60^\circ$$

y $S = 16 \text{ m}$ como valor mínimo.

En este problema, los resultados anotados fueron los únicos aceptables, por lo que obviamente corresponden a la solución buscada. En problemas objetivos como el anterior, es sencillo discriminar las soluciones para determinar los máximos o mínimos de las funciones que se van a optimizar; pero existen casos en que no es evidente esa definición, por lo que es necesario establecer las condiciones necesaria y suficiente que deben tener esos valores.

2.1. Valores Extremos

Procederemos a establecer las nociones de valores máximos y mínimos, relativos o absolutos de una función, pues nos serán útiles en la solución de estos problemas.



Fig. 2.0.1

Sea

$$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^1$$

señalada y diferenciable en E , un entorno de P_0 .

Definición 2.11

Un punto P_0 es un punto máximo relativo o local de una función f , si existe un entorno E de P_0 , subconjunto del dominio de f , tal que para todo $P \in E$

$$f(P) \leq f(P_0)$$

Ese valor $f(P_0)$ se llama (valor) máximo relativo de la función.

Si el entorno en el cual se cumple que $f(P) \leq f(P_0)$ se extiende a todo el dominio de la función, entonces se dice que en P_0 existe un máximo absoluto.

En forma análoga, un punto P_0 es un punto mínimo relativo o local de una función f , si existe un entorno E de P_0 , subconjunto del dominio de f , tal que para todo $P \in E$

$$f(P) \geq f(P_0)$$

Si el entorno en el cual se cumple que $f(P) \geq f(P_0)$ se extiende a todo el dominio de f , entonces se dice que en P_0 existe un mínimo absoluto.

De las anteriores definiciones no dependemos un método sencillo para investigar la ubicación de un máximo o un mínimo. En efecto, notamos que las definiciones nos dan un criterio de verificación, una vez que el punto ha sido propuesto; más no nos dicen como podemos proponer ese punto. Si nos aludáramos exclusivamente a las definiciones, nos veríamos obligados a seguir un procedimiento de tanteos, suponiendo que en un punto existe un máximo o mínimo, y verificando si cumple con la condición correspondiente, lo que significaría un trabajo muy laborioso, pues hay que investigar el valor de la función en todos los puntos de un entorno del punto propuesto. Hacemos notar que ésta no es un procedimiento descabellado, y que se usa con relativa frecuencia en problemas prácticos, en donde la función es tan complicada, que no se pueden aplicar los métodos que veremos a continuación; obviamente para este procedimiento se necesita una computadora, y se sabe de las metas de nuestro curso.

Definición 2.1.2

Los valores extremos de una función, son sus máximos y mínimos, relativos y absolutos.

2.2 Puntos Críticos

Sea la función f de finita y diferenciable

$$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^1$$

Para que una función f tenga un valor extremo en algún punto P_0 perteneciente a su dominio de definición, debe alcanzarse ese valor extremo sobre cualquier curva intersección entre la superficie representativa geométrica de esa función, y un plano que pase por P_0 y sea paralelo al eje sobre el cual se mida el cociente de la función.

En el caso del sistema coordenado cartesiano, esos planos serán paralelos al eje z , y por tanto perpendiculares al plano xy . Al referirnos a este sistema, todas las curvas intersección admitirán una tangente horizontal en P_0 , y la superficie admitirá un plano tangente horizontal y un vector normal con dirección vertical en ese

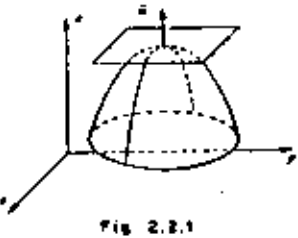


Fig. 2.2.1

punto, como indicamos en la fig. 2.2.1.

Para nuestra función en estudio: $Z = f(x, y)$, la normal es

$$\vec{n} = [0, 0, 1]$$

lo que equivale a

$$\nabla Z = 0$$

es decir, en ese punto ya no existe, en ninguna dirección, crecimiento para Z , lo que precisamente identifica a un punto extremo máximo; en forma semejante podemos establecer para un punto mínimo la misma condición, o sea que el punto en donde se presente un extremo (máximo o mínimo), la función no puede crecer ni decrecer.

Teorema 2.2.1

Para que una función $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^1$ presente un extremo en un punto, es condición necesaria que el gradiente de la función sea nulo en dicho punto.

$$\nabla f = 0$$

2.2.0.1

Demostación:

Por reducción al absurdo, si en un punto el gradiente no es nulo, la función crecerá en la dirección del gradiente y decrecerá en la opuesta; por consiguiente, no será posible establecer un plano sobre el cual, el valor de la función en el punto primario sea siempre superior o siempre inferior a los valores que asume en los demás puntos del entorno.

De esta manera tenemos un procedimiento sencillo para ubicar los puntos en donde se sospecha exista un extremo. Al anular el gradiente se generan n ecuaciones con tantas tantas incógnitas, que constituirán las condiciones del punto.

Ahora, cabe preguntar si esta condición la cumplen exclusivamente los puntos extremos de una función. Para visualizar la respuesta consideremos la función:

$$f(x, y) = x^2 - y^2$$

Calculamos su gradiente

$$\nabla f = 2xi - 2yj$$

de donde obtenemos

$$2x=0, \quad 2y=0$$

sistema cuyas raíces son $x=0, \quad y=0$

Veamos si podemos encontrar un entorno de $f(0,0)$, Fig. 2.2.2

en donde la función se mantenga, en todos sus puntos siempre superior o siempre inferior a

$$f(0,0) = 0$$

$$f(0+h, 0+k) = h^2 - k^2 \begin{cases} > 0, \text{ si } |h| > |k| \\ < 0, \text{ si } |h| < |k| \end{cases}$$

de donde se ve que no es posible formar tal entorno, pues la función adquiere valores positivos o negativos en la vecindad de $(0,0)$, dependiendo de la dirección en que nos movamos. Según se ve en la figura 2.2.2, formará valores positivos sobre las regiones 1 y 3, y negativos en las regiones 2 y 4.

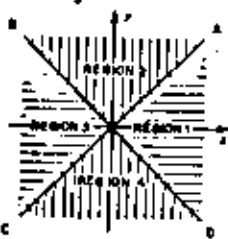


FIG. 2.2.2

Concluimos, por lo anterior, que la condición de gradiente nulo no es suficiente para garantizar la existencia de un punto extremo; más sí es condición necesaria.

La función estudiada:

$$z = f(x, y) = x^2 - y^2$$

queda representada en la Fig. 2.2.3;

observamos las regiones AOD y BOC

en que z tiene valores positivos, y

las regiones AOB y COD con valores

negativos, de acuerdo con el análisis

que hicimos para la Fig. 2.2.2

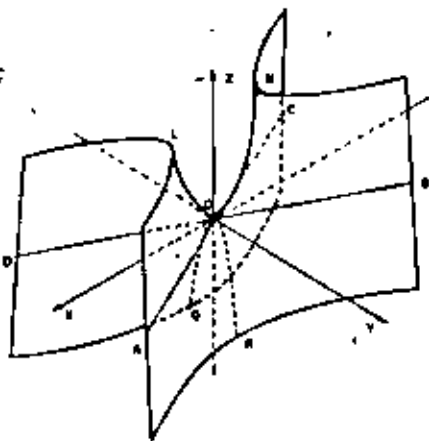


FIG. 2.2.3

Definición 2.2.1

Se denomina punto crítico de la función $f: R^2 \rightarrow R^1$ a todo punto P_0 para el cual $\nabla f(P_0) = 0$.

Geométicamente, los puntos críticos son aquellos en los cuales la superficie $Z = f(x, y)$ tiene un plano tangente horizontal según vimos en la fig. 2.2.1. Este incluye a los puntos extremos: máximos y mínimos, y otros que reciben el nombre de puntos silla, porque la forma de la superficie típica donde esto sucede es la de la Fig. 2.2.3 que asemeja una silla de montar.

La intersección de esa superficie con el plano yz es la curva LOK que tiene un máximo en O , mientras que su corte con el plano xz es la curva LON que muestra un mínimo en O .

2.3. Condición Suficiente para la existencia de Puntos Extremos.

Ya establecida la condición necesaria que deben cumplir los puntos extremos de una función: (ec. 2.2.0.1) debemos encontrar la condición suficiente que deben satisfacer esos puntos.

2.3.1 Criterio de la Segunda Derivada

Para entender más fácilmente este criterio, veamos primero funciones del tipo $z = f(x, y)$, que pueden visualizarse geométicamente.

Las consideraciones que hemos hecho acerca de los máximos, los mínimos, y los puntos silla dan la clave: cualquiera que sea el plano perpendicular a xy que corte a la superficie en estudio pasando por el punto considerado, nos debe proporcionar curvas que siempre presenten un máximo, o siempre un mínimo en ese punto; y nosotros, de acuerdo con el curso de Matemáticas I, ya sabemos como analizar una curva: simplemente obtenemos la segunda derivada, y si su valor en el punto en estudio, es positivo, se trata de un mínimo, y si su valor en ese punto es negativo, se trata de un máximo. Así pues, lo que debemos hacer

vestigar es si para cualquier dirección de corte la segunda derivada conserva su signo.

¿Con respecto a que debemos derivar? : no importa, una curva depende de un solo parámetro y, cualquiera que sea éste, con respecto a él debemos derivar. Si escogemos como parámetro a "S" longitud del arco de curva, el razonamiento se simplifica, pues entonces estaremos hablando de derivadas direccionales.

Sea un vector unitario en una dirección cualquiera de corte:

$$\vec{e} = \cos \alpha i + \sin \alpha j = \begin{bmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{bmatrix} \quad 2.3.1.1$$

Como sabemos, dada $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, la primera derivada direccional es:

$$\frac{df}{ds} = \nabla f \cdot \vec{e} = \frac{\partial f}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial f}{\partial y} \sin \alpha = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{bmatrix} \quad 2.3.1.2$$

En forma similar calculamos la segunda derivada direccional:

$$\begin{aligned} \frac{d^2f}{ds^2} &= \frac{d}{ds} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial f}{\partial y} \sin \alpha \right) = \nabla \left(\frac{\partial f}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial f}{\partial y} \sin \alpha \right) \cdot \vec{e} \\ &= \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cos \alpha + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \sin \alpha \right] i + \left[\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \cos \alpha + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \sin \alpha \right] j \cdot \vec{e} \end{aligned} \quad 2.3.1.3$$

O bien, en notación matricial

$$\begin{aligned} \frac{d^2f}{ds^2} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cos \alpha + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \sin \alpha \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \cos \alpha + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \sin \alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{bmatrix} = \vec{e}^T \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{bmatrix} \vec{e} \quad 2.3.1.4 \\ &= \vec{e}^T H \vec{e} \quad 2.3.1.5 \end{aligned}$$

en donde \vec{e}^T es la matriz transpuesta de \vec{e} .

A la matriz

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{bmatrix} = H \quad 2.3.1.5$$

se la denomina "matriz hessiana" y se la designa con H.

A su determinante

$$\Delta_H = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{vmatrix} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right)^2 \quad 2.3.1.6$$

se le denomina "determinante hessiano" o simplemente "hessiano".

Si el determinante hessiano es diferente de cero, y dicho que H es una matriz simétrica, ésta puede transformarse, de acuerdo a lo que viste en tu curso de Álgebra, en una matriz diagonal H' , mediante la matriz de vectores principales "p" que es una matriz ortogonal, es decir que su transpuesta p^T es su simétrica: $p^T = p^{-1}$, y cumple que $pp^T = I$, con lo que

$$p^T H p = H' \quad 2.3.1.7$$

en que H' es la matriz diagonal que tiene como elementos diagonales a los valores característicos de H, a los que designaremos con λ_1 y λ_2

$$H' = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \quad 2.3.1.8$$

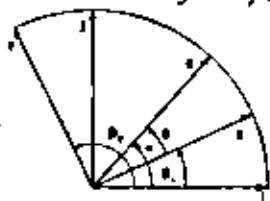
Desde luego que para no alterar 2.3.1.4, premultiplicaremos y postmultiplicaremos a H por $I = pp^T$, entonces

$$\frac{d^2f}{ds^2} = \vec{e}^T (pp^T H (pp^T)) \vec{e} \quad 2.3.1.9$$

$$\frac{d^2f}{ds^2} = \vec{e}^T p H' p^T \vec{e} \quad 2.3.1.9'$$

Como recordarás, esto es equivalente a girar los ejes coordenados, y obtener otros que coincidan con los vectores principales, for-

mándase la Fig 2.3.1, donde \vec{u} y \vec{v} son los vectores principales.



Entonces

$$\vec{p} = [\vec{u}, \vec{v}] = \begin{bmatrix} \cos \beta_1 & \cos \beta_2 \\ \sin \beta_1 & \sin \beta_2 \end{bmatrix}$$

Fig 2.3.1

* Para fijar ideas, consideremos el siguiente

Ejemplo 2.3.1

• Hallar la matriz H , sus valores característicos, y las matrices P, H' cuando la función $f(x, y) = x^2 - 3x + y^2$ en un punto crítico.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x - 3 \Rightarrow 2x - 3 = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2y \Rightarrow 2y = 0$$

$$x = \frac{3}{2}, y = 0 \Rightarrow y_1 = 0, y_2 = 0$$

$$x_1 = \frac{3}{2}, x_2 = 0$$

$$\Rightarrow p_1(1, 1), p_2(1, 0)$$

Estudiamos H :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0$$

Para hallar los valores característicos, recordará que debe basarse en la solución no trivial del sistema:

$$(6 - \lambda) \cos \beta - 3 \sin \beta = 0$$

$$-3 \cos \beta + (6 - \lambda) \sin \beta = 0$$

para lo cual se debe anular el determinante

$$\begin{vmatrix} 6 - \lambda & -3 \\ -3 & 6 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(6 - \lambda)^2 - 9 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 3, \lambda_2 = 9$$

Al sustituir λ , en el sistema

$$(6 - 3) \cos \beta - 3 \sin \beta = 0$$

$$\Rightarrow \cos \beta = \sin \beta, \beta = 45^\circ$$

$$\cos \beta = \frac{\sqrt{2}}{2}, \sin \beta = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\vec{u} = \left[\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right]$$

Al sustituir λ , en el mismo sistema

$$\cos \beta_2 = -\sin \beta_2 \Rightarrow \beta_2 = 135^\circ; \cos \beta_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \sin \beta_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\vec{v} = \left[-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right]$$

$$P = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

$$P^{-1} = P^T = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

y podemos verificar H'

$$P^{-1} H P = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}$$

El producto $e^T p$ da como resultado un vector unitario que indica la dirección de la cónica con respecto a los nuevos ejes \vec{u} y \vec{v} , según veremos a continuación

$$e^T p = [\cos \alpha, \sin \alpha] \begin{bmatrix} \cos \beta_1 & \cos \beta_2 \\ \sin \beta_1 & \sin \beta_2 \end{bmatrix} = [\cos \alpha \cos \beta_1 + \sin \alpha \sin \beta_1, \cos \alpha \cos \beta_2 + \sin \alpha \sin \beta_2]$$

$$= [\cos(\alpha - \beta_1), \cos(\alpha - \beta_2)] = [\cos(\alpha - \beta_1), \cos(\beta_2 - \alpha)] \quad 2.7.10$$

De la Fig 2.3.1, $\alpha - \beta_1 = \theta, \beta_2 - \alpha = 90^\circ - \theta$

$$\Rightarrow \cos(\beta_2 - \alpha) = \sin \theta$$

Finalmente

$$e^T p = [\cos \theta, \sin \theta] = \vec{u}^T \quad 2.7.11$$

2.13

Análogamente

$$p^T a = \begin{bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{bmatrix} = \bar{w} \quad 2.3.112$$

Para verificar que obtenemos un vector unitario, que hemos designado con \bar{w} , supongamos que a forma un ángulo, digase 60° , con el eje i_1 , o sea que formará un ángulo de 15° con el vector u de nuestro ejemplo

$$a^T = [\cos 60^\circ, \sin 60^\circ] = \left[\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right]$$

$$a^T p = \left[\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right] \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \left[0.9659, 0.2598 \right] = [\cos 15^\circ, \sin 15^\circ] \bar{w}$$

Entonces, volviendo a (2.3.1.9)

$$\frac{d^2 f}{ds^2} = \bar{e}^T (pp^T) H (pp^T) \bar{e} \quad \dots (2.3.1.9)$$

$$= (a^T p) (p^T H p) (p^T a)$$

$$= \bar{w}^T H' \bar{w}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{bmatrix}$$

de donde

$$\frac{d^2 f}{ds^2} = \lambda_1 \cos^2 \theta + \lambda_2 \sin^2 \theta \quad 2.3.113$$

Evidentemente el signo de $\frac{d^2 f}{ds^2}$ depende exclusivamente de los signos de λ_1 y λ_2

Si para el punto crítico en estudio

$$\lambda_1 \text{ y } \lambda_2 > 0 \quad 2.3.114$$

entonces, de acuerdo con 2.3.113

$$\frac{d^2 f}{ds^2} > 0 \quad 2.3.115$$

2.14

sin importar la dirección de corte, por lo que en ese punto se tendrá un mínimo relativo

Si para el punto crítico

$$\lambda_1 \text{ y } \lambda_2 < 0 \quad 2.3.116$$

entonces

$$\frac{d^2 f}{ds^2} < 0 \quad 2.3.117$$

en cualquier dirección de corte; en ese punto se tendrá un máximo relativo.

Si λ_1 y λ_2 tienen signo contrario, de la misma ac 2.3.113 se ve que $\frac{d^2 f}{ds^2}$ no conserva el signo, pues esta dependerá de si $\cos \theta$ es mayor que $\sin \theta$ o viceversa, es decir de la dirección de corte; esto significa que se tiene un punto silla

Si λ_1 o λ_2 son nulos, habrá una dirección en la que nada pueda concluirse, pues en ella $\frac{d^2 f}{ds^2} = 0$, por ejemplo, si $\lambda_1 = 0$ en $\theta = 0$, $\frac{d^2 f}{ds^2} = 0$, condición que según viste en Matemáticas I, no da fina la calidad del punto crítico

Al seguir nuestro ejemplo 2.3.1, en $g(1,1)$: $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 9$ ambos mayores que cero, por lo que para todo valor de θ

$$\frac{d^2 f}{ds^2} = 3 \cos^2 \theta + 9 \sin^2 \theta > 0$$

por lo que afirmamos que en g , existe un mínimo.

Analicemos ahora los resultados anteriores en términos de

$$A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad B = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}, \quad C = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

que podemos obtener de inmediato a partir de la función en estudio.

Recordemos que los valores característicos de la matriz Hessiana se obtienen al dividir al determinante.

$$\begin{vmatrix} A-\lambda & B \\ B & C-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

2.15

2.3.18

o sea

$$\lambda^2 - \lambda(A+C) + (AC - B^2) = 0$$

2.3.19

en donde podemos identificar al término independiente como el valor del determinante Δ_H , e igual, de acuerdo con la teoría de polinomios, el producto de las raíces λ_1 y λ_2 da la ec. 2.3.19

$$\Delta_H = AC - B^2 = \lambda_1 \lambda_2 \quad (1) \quad 2.3.20$$

En un máximo

$$\frac{d^2f}{dx^2} < 0$$

lo que se obtiene, de acuerdo con la ec. 2.3.19, si λ_1 y λ_2 son negativos, en cuyo caso, de acuerdo con la ec. 2.3.20

$$\Delta_H > 0 \quad 2.3.21$$

lo que, al analizar 2.3.20, requiere que A y C tengan el mismo signo:

Para investigar que signo les corresponde, simultáneamente, a A y C , apuntamos las soluciones de la ec. 2.3.19

$$\lambda = \frac{(A+C) \pm \sqrt{(A+C)^2 - 4(AC - B^2)}}{2}$$

$$\lambda = \frac{(A+C) \pm \sqrt{(A-C)^2 - 4\Delta_H}}{2} \quad 2.3.22$$

Dado que en el caso que estamos estudiando hemos establecido que $\Delta_H > 0$, entonces

$$|A+C| > \sqrt{(A-C)^2 - 4\Delta_H} \quad 2.3.23$$

por lo tanto el signo de $A+C$ predominará y dará el mismo signo tanto a λ_1 como a λ_2 , y como ya vimos que el signo de estas es el negativo, también serán negativos A y C

$$A, C < 0$$

2.3.24

En un mínimo

$$\frac{d^2f}{dx^2} > 0$$

De donde, ec. 2.3.19:

$$\lambda_1 \text{ y } \lambda_2 > 0$$

2.3.25

por lo tanto

$$\Delta_H > 0$$

2.3.26

y

$$A \text{ y } C > 0$$

2.3.27

En un punto silla, ya vimos que

$$\lambda_1 \text{ y } \lambda_2 \text{ tienen signos opuestos}$$

en este caso

$$\Delta_H < 0$$

2.3.28

Si se nos presenta un problema en que

$$\lambda_1 \text{ ó } \lambda_2 \text{ se anulan}$$

entonces

$$\Delta_H = 0$$

2.3.29

Ya vimos que en este caso nada podemos concluir con esa única información; habrá que recurrir al estudio de un entorno del punto crítico, para definir si se trata de un punto extremo o de un punto silla.

Continuando con lo que hemos visto, al analizar los puntos críticos, para el tipo de función que estamos estudiando, lo haremos con los valores característicos de la matriz hessiana; por lo tanto haremos énfasis en los valores que tienen en esos puntos, tanto al determinar la hessiana como las segundas derivadas parciales,

Según la misma establecida en los arts 2.3.1, 2.3.2, 2.3.4, 2.3.7, 2.3.8 y 2.3.9, sea que en el caso de una función $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, la definición de los puntos críticos lo podemos hacer con el Hessiano y con las segundas derivadas parciales, términos que podemos determinar de inmediato a partir de la función en estudio. Recomendamos a continuación esta procedimiento, mismo que contiene las condiciones necesaria y suficiente que deben cumplir los puntos críticos de una función con dos variables independientes.

Dado que los puntos críticos deben cumplir la condición necesaria

$$\nabla f = 0,$$

éstos se hallan resolviendo el sistema

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

Si para los puntos críticos así determinados

$$\Delta_H = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{vmatrix} > 0, \text{ y } \begin{cases} f_{xx} \text{ o } f_{yy} < 0, \text{ en ese punto existe un máximo.} \\ (o' \lambda_1, \lambda_2 < 0) \\ f_{xx} \text{ o } f_{yy} > 0, \text{ en ese punto existe un mínimo.} \\ (o' \lambda_1, \lambda_2 > 0) \end{cases}$$

$$\Delta_H < 0, \text{ en ese punto existe un punto silla.} \\ (o' \lambda_1 = -k\lambda_2, k > 0)$$

$\Delta_H = 0$, el punto crítico queda indeciso; se debe volver a estudiar un entorno de ese punto.

(En este caso $\lambda_1, \lambda_2 = 0$)

Ejemplo 2.3.2

Hallar mediante el criterio de la segunda derivada, los puntos críticos de $f(x,y) = x^3 - 3xy + y^3$ (Ver ejemplo 2.3.1)

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 3y, \quad 3x^2 - 3y = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = -3x + 3y^2, \quad -3x + 3y^2 = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} x=1, y=1 \\ x=0, y=0 \end{aligned}$$

Se hallaron $P_1(1,1)$, y $P_2(0,0)$; investigaremos a que tipo de punto crítico correspondan, para lo cual determinaremos su Hessiano.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6y, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = -3$$

$$\Delta_H = \begin{vmatrix} 6x & -3 \\ -3 & 6y \end{vmatrix} = 36xy - 9 = 27 > 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \Big|_{P_1(1,1)} = 6 > 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \Big|_{P_2(0,0)} = 0$$

En $P_1(1,1)$ existe un mínimo, pues tiene $\Delta_H > 0$ y $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} > 0$

$$\text{Altimo} = 0^3 - 3(1)(1) - (1)^3 = -1$$

En $P_2(0,0)$ existe un punto silla, pues hace $\Delta_H < 0$

2.3.3. Generalización

Tratemos ahora de generalizar estos razonamientos a una función escalar cualquiera con dominio en E^n

Sea

$$f(\vec{r}) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

2.3.3.1. Condición Necesaria

La condición necesaria para la existencia de puntos críticos es, según ya vimos

$$\nabla f = 0 \quad 2.3.3.1$$

2.3.3.2. Condición Suficiente

En este caso no podremos hablar de planos de corte ni de curvas resultantes, pero sí podemos decir que al definir un vector unitario $\vec{e} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$, en donde

$$\sqrt{\sum_{i=1}^n y_i^2} = 1 \quad 2.3.3.1$$

queda definido un parámetro s tal que

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + s\vec{e} \quad 2.3.3.2$$

donde $\nabla f(\vec{r}_0) = 0$ y por consiguiente será posible definir $f(\vec{r})$ en términos del parámetro s , y establecer como condición suficiente para que haya un máximo en \vec{r}_0 , la siguiente:

$$\frac{d^2 f(\vec{r}_0)}{ds^2} < 0, \quad \forall \vec{e} \quad 2.3.3.3$$

y para que haya un mínimo:

$$\frac{d^2 f(\vec{r}_0)}{ds^2} > 0, \quad \forall \vec{e} \quad 2.3.3.4$$

En estos casos, algunos autores hablan de "cortar a la función con un hiperplano", y que la intersección es una hipercurva, y cabe indicar que también suele

decirse que \vec{e} define una dirección.

La segunda derivada, en cualquier caso, la podemos calcular, como una generalización de lo visto anteriormente:

$$\frac{d^2 f}{ds^2} = \vec{e}^T H \vec{e} = [y_1, y_2, \dots, y_n] \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & \dots & f_{1n} \\ f_{21} & f_{22} & \dots & f_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{n1} & f_{n2} & \dots & f_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

dado que en forma de matriz

$$\vec{e} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \quad 2.3.3.5$$

por lo que su matriz transpuesta es:

$$\vec{e}^T = [y_1, y_2, \dots, y_n] \quad 2.3.3.6$$

y además H es la matriz formada con todas las posibles segundas derivadas parciales de $f(\vec{r})$:

$$H = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & \dots & f_{1n} \\ f_{21} & f_{22} & \dots & f_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{n1} & f_{n2} & \dots & f_{nn} \end{bmatrix} \quad 2.3.3.7$$

La matriz H , de acuerdo con el T. de Schwarz es simétrica, por lo que aceptará n valores principales que pueden calcularse en forma análoga a los anteriores, o bien — por medio de algún método numérico.

Asimismo puede obtenerse la matriz P de vectores princi-

2.31

paes con lo cual se cumple, como recordarán de la curso de álgebra:

$$P^T H P = D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} \quad 2.3.3.9$$

en que D es una matriz diagonal cuyos elementos no nulos son justamente los valores principales de la matriz H ; esta matriz D posee gran facilidad operativa, por lo que vale la pena trabajar con ella en lugar de H ; pero para poderla tener en la ecuación 2.3.3.5 necesitamos premultiplicar y postmultiplicar por $P P^T$ a fin de que dicha ecuación no se altere. Ya sabemos que $P^T = P^T$,

$$\text{además } \bar{e}^T P = \bar{\omega}^T \equiv [\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2, \dots, \bar{\omega}_n] \quad 2.3.3.10$$

$$P^T \bar{e} = \bar{\omega} \equiv \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \vdots \\ \omega_n \end{bmatrix} \quad 2.3.3.11$$

en donde $\omega_1^2 + \omega_2^2 + \dots + \omega_n^2 = 1$ 2.3.3.12
o sea, que $\bar{\omega}$, $\bar{\omega}^T$ son vectores unitarios; es decir $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ juegan el mismo papel de los cosenos directores.

Al sustituir 2.3.3.9, 10, y 11 en la ec. 2.3.3.5 obtenemos

$$\frac{d^2 f}{ds^2} = \bar{e}^T H \bar{e} = \bar{e}^T (P P^T) H (P P^T) \bar{e} \quad 2.3.3.13 \\ = (\bar{e}^T P) (P^T H P) (P^T \bar{e})$$

2.24

$$\frac{d^2 f}{ds^2} = \bar{\omega}^T D \bar{\omega} = [\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n] \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \vdots \\ \omega_n \end{bmatrix}$$

2.3.3.14

que al ser desarrollada

$$\frac{d^2 f}{ds^2} = \lambda_1 \omega_1^2 + \lambda_2 \omega_2^2 + \dots + \lambda_n \omega_n^2 \quad 2.3.3.15$$

De donde podemos concluir que habrá máximo si y sólo si

$$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n < 0$$

habrá mínimo si y sólo si

$$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n > 0$$

y habrá punto silla si los valores principales no conservan su signo, pues dependiendo de $\bar{\omega}$, la $\frac{d^2 f}{ds^2}$ será positiva o negativa.

Si uno de los valores principales se anula, entonces existe por lo menos una dirección en la cual se anula la segunda derivada; por ejemplo, si $\lambda_{i2} < 0$, la segunda derivada será nula en la dirección $\omega_i = 1$, $\omega_j = 0 \quad \forall j \neq i$

Sabemos que, en tal caso, no es posible afirmar con certidumbre, si hay máximo, mínimo, o punto de inflexión, por lo que habrá que analizar el punto crítico con otro enfoque. Una simplificación, como hicimos para el caso en E^2 , inciso 2.3.2, no es posible en mayor número de dimensiones, pues por ejemplo, para E^3 , los valores principales se obtienen anulando el determinante:

$$\begin{vmatrix} (f_{11}-\lambda) & f_{12} & f_{13} \\ f_{12} & (f_{22}-\lambda) & f_{23} \\ f_{13} & f_{23} & (f_{33}-\lambda) \end{vmatrix} = 0$$

denlo, como podéis comprobar, el término independiente de la ecuación simplificada es nuevamente Δ_0 , por lo que

$$\lambda_R = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_{xz} \\ f_{yx} & f_{yy} & f_{yz} \\ f_{zx} & f_{zy} & f_{zz} \end{vmatrix} = \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$$

pero ahora, al valor de este determinante nada nos dice sobre los signos de los valores principales. En efecto, ¿se pongamos $\lambda_1 > 0$ o en porque los tres son positivos, o en porque hay dos negativos y un positivo?

Así pues, siempre que tengamos un problema de máximos y mínimos con más de dos variables, estamos obligados a calcular los valores principales de la matriz Hessiana.

2.4.- Máximos y Mínimos Bajo Restricción

Cualquier problema de máximos y mínimos es, en términos generales, susceptible de ser planteado y resuelto según el procedimiento visto anteriormente; sin embargo en la práctica el ingeniero será requerido a optimizar bajo ciertas restricciones.

No se pueda pedir a un ingeniero que proyecte un generador de máxima eficiencia ni que construya una estructura de costo mínimo, así a secas; se le pedirá un generador de máxima eficiencia que no cueste más de una cierta cantidad, o una estructura de costo mínimo que soporte ciertas cargas; es decir, se le imponen ciertas condiciones o restricciones.

La expresión matemática de esas restricciones, al sustituirse en la función a optimizar, reduce al problema al tipo de los ya estudiados; pero en la mayoría de los casos, dan lugar a expresiones complicadas que requieren de un trabajo muy laborioso para determinar sus puntos extremos con el método ya conocido.

Por ejemplo, si se nos piden las dimensiones de un tanque prismático, sin tapa, de volumen máximo, con la condición de no usar más de 100 m^2 de lámina para construirlo (Fig. 2.4.1), nuestra función a optimizar es

$$V = xyz$$

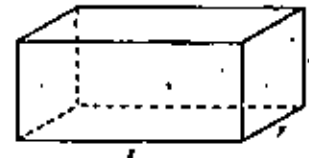


FIG. 2.4.1

Con la limitación

$$xy + 2xz + 2yz \leq 100$$

En general, siempre será posible despejar de las restricciones un cierto número de variables y sustituirlas en la función a optimizar; como desde luego, al caso más desfavorable se tiene si

$$\begin{aligned} \text{entonces} \quad & xy + 2xz + 2yz = 100 \\ & z = (100 - xy) / 2(x + y) \\ \text{y} \quad & y = \frac{xy(100 - xy)}{2(x + y)} \end{aligned}$$

A esta expresión se le trataría como quedó explicado anteriormente; pero se observa que aún en este sencillo problema el aparato algebraico se nos ha complicado.

Veremos a continuación un procedimiento que evita las dificultades algebraicas, que implica el criterio de la segunda derivada. Haremos antes algunas consideraciones

2.4.1 Función Objetivo

Lo primero que hay que distinguir es la función objetivo, para lo cual nos haremos la pregunta: ¿Qué es lo que vamos a maximizar o minimizar? La expresión matemática de lo que se va a optimizar es la función objetivo. Así, en el caso de la estructura de costo mínimo:

$$C = C_1 + C_2 + \dots + C_n$$

donde

C_1 = Costo del concreto

C_2 = Costo del acero

etc.

C , coste total, es la función objetivo

2.4.2 Restricciones o Condiciones Laterales

Por otro lado deben distinguirse las restricciones, es decir, las condiciones laterales que deben cumplir las variables que intervienen en la función objetivo. Estas restricciones pueden representarse en forma de desigualdades cerradas:

\geq ; \leq . Desde luego, estas desigualdades tienen su principal importancia en su cerradura, o sea en los puntos en que se cumple con la igualdad, a lo que se denomina punto activo de la restricción. En el caso de la estructura de costo mínimo, las restricciones estarían representadas por las fórmulas de resistencia de materiales

Ejemplo 2.4.1

Obtengamos el menor valor de la distancia del origen a la región:

$$g(x, y) = 9x^2 + 24xy + 16y^2 - 40x - 30y + 250 \leq 0 \quad 2.4.1.a$$

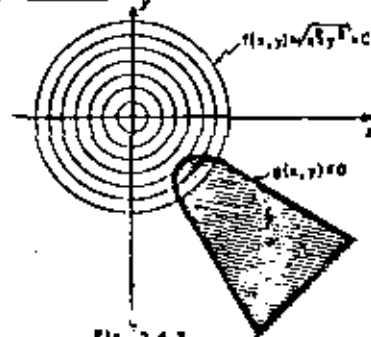


FIG. 2.4.2.

mostrada en la Fig. 2.4.2 la distancia del origen a cualquier punto es la dada por

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} \quad 2.4.1.b$$

Como se trata de hallar el menor valor de $f(x, y)$, ésta será la función a optimizar, es decir la función objetivo, que estará sujeta a

la restricción $g(x, y) \leq 0$, que nos define una región según mostramos en la Fig. 2.4.2

Definición 2.4.1

Región Permisible es la formada por todas las puntos que cumplen las restricciones

En nuestro problema es, desde luego, la dada por $g(x,y) \leq 0$, y la designaremos con \mathcal{P} ; las restricciones se ven aumentadas con las no mencionadas pero obvias

$$x > 0, \quad y < 0$$

Estudiamos uno de las curvas de nivel de la función objetivo, por ejemplo

$$f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2} = 11 \quad 2.41c$$

o por sencillez en la manipulación a

$$F(x,y) = [f(x,y)]^2 = x^2 + y^2 = 121 \quad 2.41d$$

De esta circunstancia estudiaremos un punto que pertenezca a \mathcal{P} , por ejm.: A, y veamos que direcciones admite; para ello analicamos su derivada direccional, para lo cual necesitamos primero su gradiente, (Fig. 2.4.3).

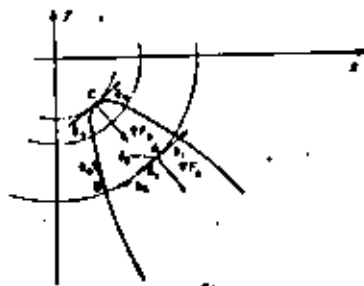


FIG. 2.4.3

$$\nabla F = 2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j}$$

Dado que $x > 0$ y $y < 0$, este vector tiene la dirección indicada en la Fig. 2.4.3

Es evidente que nuestra función crece en la dirección indicada, y decrece en la opuesta,

y dado que lo que buscamos es un mínimo, consideremos un vector unitario \bar{e}_s que forma un ángulo obtuso con ∇F . Evidentemente nos podemos acercar en esta dirección,

pues apunta hacia puntos pertenecientes a la región permisible. Calculemos la derivada direccional de nuestra función objetivo en esa dirección

$$\frac{dF}{ds} = \nabla F \cdot \bar{e}_s \quad 2.41e$$

Puesto que ∇F y \bar{e}_s forman un ángulo obtuso, $\frac{dF}{ds} < 0$, y la función será decreciente en esa dirección, luego hay puntos de la región permisible, más cercanos al origen que A, entonces A no es el punto buscado. La misma conclusión obtenemos si escogieramos otra dirección entre \bar{e}_s y \bar{e}_n , mostrados en la Fig. Llegaríamos a conclusión análoga, para cualquier punto no frontera de \mathcal{P} sobre la curva de nivel en estudio.

Si escogieramos el punto fronterizo B, donde la curva de nivel interseca a la frontera de \mathcal{P} , las direcciones en las cuales podemos movernos dentro de la región permisible, conservando obtuso el ángulo con el gradiente, se han restringido, quedando ahora comprendidas entre \bar{e}_+ , tangente a la frontera, y \bar{e}_s tangente a la curva de nivel. Así así hay muchas direcciones en las cuales podemos avanzar, conservando decreciente a nuestra función objetivo.

En conclusión, ninguno de los puntos de la curva de nivel que hemos analizado, satisface la condición de optimalidad, pues hay todavía muchos puntos de \mathcal{P} en los cuales la distancia al origen es menor que 11, tal como lo está indicando el hecho de que la derivada direccional de F se conserva negativa.

La solución está, intuitivamente, donde la frontera de la \mathcal{P}

2.29

fricción sea tangente a una curva de nivel.

En efecto, en estas condiciones, todas las direcciones que forman ángulo obtuso con el gradiente no pueden ser seguidas, pues nos llevan a puntos fuera de la región permisible.

Las direcciones límite son las de \vec{e}_1 y \vec{e}_2 , tangentes simultáneamente a la frontera de la región permisible y a la curva de nivel, circunstancia por la cual la derivada direccional de F en cualquiera de estas dos direcciones, es nula. Por lo anterior concluimos que no existe dirección permisible en la cual la función objetivo decrezca, lo que indica que hemos alcanzado al punto mínimo: C .

Para determinar ese punto crítico, observamos que la condición de tangencia simultánea a la frontera y a la curva de nivel de la función objetivo, implica que los normales a ambas, o sea los gradientes de las funciones que representan, deben coincidir en dirección, o lo que es lo mismo, un gradiente puede ser expresado como el otro multiplicado por un escalar

$$\nabla F = \lambda \nabla g \quad 2.41f$$

De 2.41a

$$\nabla g = (18x + 24y - 40)\vec{i} + (24x + 32y + 30)\vec{j} \quad 2.41g$$

de donde

$$2x\vec{i} - 2y\vec{j} = \lambda [(18x + 24y - 40)\vec{i} + (24x + 32y + 30)\vec{j}] \quad 2.41h$$

lo que requiere

$$2x = \lambda(18x + 24y - 40) \quad 2.41i$$

$$-2y = \lambda(24x + 32y + 30) \quad 2.41j$$

2.30

Dado que el punto que es solución del problema debe satisfacer la parte activa de la restricción, con esa ecuación se completa el sistema que permita hallar los valores de x, y y λ .

Generalmente no es necesario hallar el valor de λ , por lo que se puede eliminar entre las ecuaciones

$$\lambda = \frac{x}{9x + 12y - 20} = \frac{y}{12x + 16y + 15}$$

de donde obtenemos la ecuación

$$12x^2 + 7xy - 12y^2 + 15x + 20y = 0 \quad 2.41k$$

a partir de la cual despejamos x

$$x = \frac{-7y - 15 \pm \sqrt{49y^2 + 20xy + 225 - 576y^2 - 460y}}{24} \quad 2.41l$$

$$x = \frac{-7y - 15 \pm (25y - 15)}{24} \quad 2.41l'$$

con lo que obtenemos

$$x_1 = \frac{3y - 5}{4}, \quad x_2 = -\frac{4}{3}y \quad 2.41ll'$$

Al sustituir x_1 en la ec. 2.41a y hacer el arreglo correspondiente

$$25y^2 - 30y + 20y = 0 \quad 2.41m$$

de donde

$$y = \frac{30 \pm \sqrt{900 - 2000}}{50} \quad 2.41n$$

solución imaginaria, por lo que la descartamos.

Al sustituir x_2 en la ec. 2.41a, obtenemos

$$y_1 = -3 \quad 2.41o$$

para la que corresponde

$$x_1 = 4 \quad 2.41p$$

Entonces en $(4, -3)$ existe un mínimo igual a

$$d = f(x, y) = 5 \quad 2.41q$$

El razonamiento que hemos seguido aquí, es general para todo este tipo de problemas; sólo nos resta dar las expresiones matemáticas necesarias para atacar un problema en cualquier número de dimensiones.

En vez de simplificar la exposición, hagamos entre unas cuantas convenciones:

1°) Podemos evitar la disyuntiva entre maximizar o minimizar y hablar solamente de maximizar. En efecto, minimizar una función equivale a maximizar la misma función con signo cambiado.

$$\text{Min. } f(x) = \text{Máx. } [f(x)] \quad 2.42.1$$

Minimizar un coste significa también maximizar los ahorros.

2°) Todas las restricciones serán expresadas con ≥ 0 . Esto siempre será posible mediante el mismo artificio de cambiar el signo.

Así, en el ejemplo resuelto anteriormente, en vez de escribir:

$$9x^2 - 24xy + 16y^2 - 40x - 30y + 250 \leq 0$$

escribiremos:

$$40x - 9x^2 + 24xy - 16y^2 + 30y - 250 \geq 0$$

Ahora plantearemos el problema general

Maximización de la Función $f(x)$

Sea $f(x)$, a la que $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, continua y diferenciable en un entorno de \bar{x}

Sujeta a las restricciones

$$\begin{aligned} g_1(x) &\geq 0 \\ g_2(x) &\geq 0 \\ &\dots \\ g_m(x) &\geq 0 \end{aligned} \quad 2.42.2$$

Las restricciones definen una región en E^n ; pero no podemos dibujarla; sólo matemáticamente podemos saber si un cierto punto, está o no en la región permisible.

Diremos entonces que $\bar{x} \in P$ si y sólo si

$$g_1(\bar{x}) \geq 0$$

$$g_2(\bar{x}) \geq 0$$

...

$$g_m(\bar{x}) \geq 0$$

2.42.3

Con respecto a las direcciones, diremos que una dirección dada por el vector unitario \bar{e} es permisible, si existe $T > 0$ tal que

$$\bar{x}_1 = \bar{x} + T\bar{e} \in P, \quad (\bar{x} \in P) \quad 2.42.4$$

En un espacio de "n" dimensiones, sólo "n" restricciones pueden operar activamente en un punto sin ser redundantes. Salvo esta limitante, no podemos saber, en el problema general, cuantas restricciones van a operar activamente en el punto óptimo. Estos problemas normalmente se atacan a base de una computadora; pero en los problemas que atacaremos durante este curso, siempre habrá alguna circunstancia que nos permita definir, heurísticamente, al número de restricciones que operan activamente en el punto óptimo.

En el ejm 2.41, aparte de la restricción dada por el problema, incluiremos ahora 2 más:

$$x > 0$$

$$y \leq 0$$

pero ambas son redundantes, pues se pueden establecer a través de $g(x, y) > 0$.

2.33

En lo que sigue supondremos que ninguna de las m restricciones que planteamos es redundante.

Al conjunto de restricciones activas en un punto lo designaremos con A .

Teorema 2.4.1

Sea \bar{r}_0 un punto frontera, en el cual opera activamente el conjunto de restricciones A . Si $\bar{a} \in D$ entonces

$$\nabla g_i(\bar{r}_0) \cdot \bar{a} \geq 0, \quad \forall i \in A \quad 2.4.2.5$$

En que D es un conjunto de vectores unitarios que cumplan, en un punto dado, con la definición de dirección permisible.

Demostración del teorema

Por reducción al absurdo supongamos $\nabla g_i(\bar{r}_0) \cdot \bar{a} < 0$ para $\bar{a} \in D$.

$\nabla g_i \cdot \bar{a} < 0$ indica que la función g_i decrece en dirección \bar{a} . Estímulo

$$g_i(\bar{r}_0 + T\bar{a}) < g_i(\bar{r}_0), \quad (T > 0) \quad 2.4.2.6$$

Pero como g_i es activa en \bar{r}_0 , $g_i(\bar{r}_0) = 0$; entonces

$$g_i(\bar{r}_0 + T\bar{a}) < 0 \quad 2.4.2.7$$

por lo que $\bar{r}_0 + T\bar{a} \notin P$; pero entonces

$$\bar{a} \notin D \quad 2.4.2.8$$

lo que contradice la suposición inicial.

Cuando resolvamos el ejemplo, veremos como se verifica para ello que en el punto óptimo, ninguna dirección permisible forma un ángulo obtuso con el gradiente de la función objetivo.

2.34

Como ahora estamos hablando de maximizar, diremos que, en el punto óptimo, ninguna dirección permisible forma un ángulo agudo con el gradiente de la función objetivo:

Teorema 2.4.2.

Sea $\bar{q} \in P$ un punto óptimo; entonces si \bar{a} es permisible ($\bar{a} \in D$)

$$\nabla f(\bar{q}) \cdot \bar{a} \leq 0 \quad 2.4.2.9$$

Demostración:

Por reducción al absurdo; supóngase $\nabla f(\bar{q}) \cdot \bar{a} > 0$, $\bar{a} \in D$

Entonces $\bar{r}_1 = \bar{q} + T\bar{a} \in P$, $(T > 0)$ 2.4.2.10

Además si la derivada direccional de f es positiva, f es creciente en esa dirección y entonces

$$f(\bar{r}_1) > f(\bar{q}) \text{ y como } \bar{r}_1 \in P, \bar{q} \text{ no es óptimo}$$

En un punto óptimo en E^n , pueden operar activamente una, dos, o hasta n restricciones. Usando la terminología de conjuntos, a un punto óptimo el conjunto A de las restricciones activas puede contener 1, 2, ..., n elementos; nunca será vacío, pues vamos a considerar que se trata de un punto frontera, ni nunca contendrá más de n elementos, pues ya hemos convenido que ninguna restricción será redundante. Considera ahora primeramente el caso en el que sobre el punto $\bar{q} \in E^n$, óptimo, operan activamente n restricciones, las que quedarán designadas con los índices 1 a n , es decir:

$$\begin{aligned} g_1(\bar{q}) &= 0 \\ g_2(\bar{q}) &= 0 \\ &\dots \\ g_n(\bar{q}) &= 0 \end{aligned} \quad 2.4.2.11$$

Puesto que n ecuaciones definen un punto en E^n , quiere decir que son independientes; o lo que es lo mismo, el rango de la matriz jacobiana es n .

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \frac{\partial g_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x_1} & \frac{\partial g_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial g_2}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial g_n}{\partial x_1} & \frac{\partial g_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial g_n}{\partial x_n} \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \nabla g_1 \\ \nabla g_2 \\ \dots \\ \nabla g_n \end{bmatrix} \quad 2.4.2.12$$

Entonces, todos los gradientes de las restricciones que operan activamente en \bar{q} son linealmente independientes y forman una base en E^n . Al aumentar otro vector, por ejemplo ∇f , se tendrá un conjunto de vectores linealmente dependientes, y se podrá escribir:

$$\nabla f(\bar{q}) + \sum_{i=1}^n \lambda_i \nabla g_i(\bar{q}) = 0 \quad 2.4.2.13$$

Ecuación conocida como de Lagrange. Las escalares λ_i son conocidas

como multiplicadores de Lagrange.

Este caso lo tendríamos en nuestro ejm 2.4.1, si aumentásemos una restricción que dejase afuera al punto óptimo encontrado anteriormente. Sea el ejm siguiente

Problema 2.4.2

En el problema 2.4.1 agragar la restricción $y \leq -7$, lo cual deja fuera al punto óptimo encontrado inicialmente.

La región permisible se reduce, y ahora el punto óptimo es \bar{q} , Fig. 2.4.4

Como al planteamiento original fue hallar un mínimo, ahora de acuerdo con lo ya indicado, lo convertiremos en un problema de máximos por el artificio de multiplicar por menos uno a la función $F(x, y)$

$$G(x, y) = -F(x, y) = -x^2 - y^2 \quad 2.4.2.a$$

con las restricciones

$$g_1 = 40x - 9x^2 - 24xy - 16y^2 - 30y - 250 \geq 0 \quad 2.4.2.b$$

$$g_2 = -y - 7 \geq 0 \quad 2.4.2.c$$

Al resolver

$$\nabla G + \lambda_1 \nabla g_1 + \lambda_2 \nabla g_2 = 0 \quad 2.4.2.d$$

o sea

$$-2x\mathbf{i} - 2y\mathbf{j} + \lambda_1[(40-18x-24y)\mathbf{i} + (-24x-32y-30)\mathbf{j}] + \lambda_2[-\mathbf{j}] = 0 \quad 2.4.2.e$$

$$x = 48, \quad y = -7, \quad \lambda_1 = 0.0189, \quad \lambda_2 = 20.2173$$

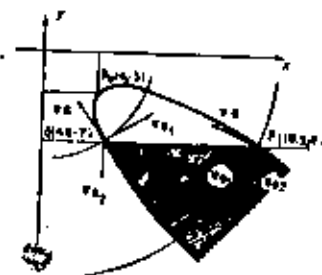


FIG. 2.4.4

2.31

Se observa que también en el punto \bar{q} (18.3, -7), definida por las restricciones g_1 y g_2 , se presenta la dependencia lineal de los vectores ∇G , ∇g_1 y ∇g_2 , pero aquí los valores de λ_1 y λ_2 son los siguientes:

$$\lambda_1 = -0.3015, \quad \lambda_2 = 87.9218$$

La diferencia está en que en el punto óptimo, los multiplicadores de Lagrange resultaron ser positivos, en tanto que en el punto no óptimo, uno de los multiplicadores resultó ser negativo.

Esta condición se puede generalizar a cualquier número de dimensiones.

Teorema 2.4.3

Sea $\bar{q} \in E^n$ un punto óptimo en el cual operan activamente m restricciones. Entonces ninguna de las multiplicadores que figuran en la expresión

$$\nabla f(\bar{q}) + \sum_{i=1}^m \lambda_i \nabla g_i(\bar{q}) = 0 \quad 2.4.2.14$$

pueda ser negativo.

Demostración.- Por reducción al absurdo: supongamos que uno de los multiplicadores, por ejemplo $\lambda_j < 0$

$$\nabla G + \lambda_1 \nabla g_1 + \lambda_2 \nabla g_2 + \dots - \lambda_j \nabla g_j + \dots + \lambda_m \nabla g_m = 0 \quad 2.4.2.15$$

Siempre podremos encontrar una dirección \bar{e} tal que

$$\bar{e} \cdot \nabla g_j = 0, \quad \forall i \neq j \quad 2.4.2.16$$

$$\bar{e} \cdot \nabla g_j > 0$$

En el caso particular de E^3 esta dirección se encontrará fácilmente como la de $\pm \nabla g_j \times \nabla g_i$, seleccionando el signo de manera que $\bar{e} \cdot \nabla g_j > 0$

Las condiciones establecidas permiten afirmar que \bar{e} es permisible, por

2.36

no forma ángulo obtuso con ninguno de los gradientes de las restricciones.

Multiplicámonos escalarmente la ec. de Lagrange por este vector

$$\nabla G \cdot \bar{e} - \lambda_j \nabla g_j \cdot \bar{e} = 0 \quad 2.4.2.17$$

$$\nabla G \cdot \bar{e} = \lambda_j \nabla g_j \cdot \bar{e} > 0 \quad 2.4.2.18$$

O sea, esa dirección permisible forma ángulo agudo con el gradiente de la función objetivo, en \bar{q} . Luego \bar{q} no es óptimo.

Podemos entonces concluir que cuando en un punto óptimo $\bar{q} \in E^n$ operan activamente m restricciones, se cumplirá la ec. de Lagrange, con todos los multiplicadores positivos.

Ahora debemos estudiar el caso en el cual sobre el punto óptimo operan activamente $m < n$ restricciones. Este último caso, por cierto, será el de los problemas que se resolverán durante el presente curso.

El problema, en general, lo plantearemos así:

$$\text{Máxima de } f(x) \quad (x \in E^n) \quad 2.4.2.19$$

Sujeta a las restricciones

$$g_1(x) = 0$$

$$g_2(x) = 0$$

$$\dots$$

$$g_m(x) = 0 \quad (m < n) \quad 2.4.2.20$$

Además, aceptaremos que el rango de la matriz jacobiana

$$\begin{bmatrix} \nabla g_1 \\ \nabla g_2 \\ \vdots \\ \nabla g_m \end{bmatrix}$$

2.4.2.21

es igual a m , es decir, ninguna de las restricciones es redundante. En el ejemplo que hemos estado estudiando, se observa que en un punto cualquiera de la frontera de \mathcal{D} donde obra activamente una sola restricción, el gradiente de ésta es perpendicular a las direcciones límites de las permisibles, representadas en este caso por las dos direcciones (opuestas) tangentes a la parábola que limita a \mathcal{D} .

No es difícil generalizar esta observación a un espacio de n dimensiones, con una sola restricción, si se recuerda que un gradiente siempre debe ser ortogonal a su hipersuperficie de nivel.

Entonces, si en un punto frontera operan activamente dos restricciones, las direcciones límite serán aquellas que sean simultáneamente normales a ∇g_1 y ∇g_2 , y así sucesivamente hasta llegar al caso en que operen activamente $(n-1)$ restricciones.

En E^3 , por ejemplo, si dos restricciones operan activamente sobre un punto frontera, éste se encontrará sobre la curva de intersección de $g_1=0$ y $g_2=0$; las direcciones límites serán las dos tangentes (opuestas) a la curva de intersección, y por lo mismo simultáneamente perpendiculares a las normales (gradientes) a las superficies. (Fig. 2.4.5)

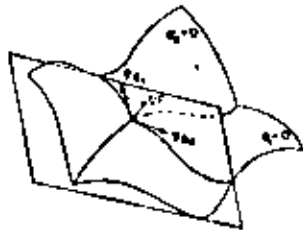


FIG. 2.4.5

Teorema 2.4.4

Sea el punto $\bar{x} \in E^n$, sobre la frontera de \mathcal{D} , en el cual operan activamente $m < n$ restricciones. Entonces el conjunto de los gradientes de tales restricciones en \bar{x} , unido a un conjunto de vectores que señalan direcciones límites, forman una base en E^n .

Demostración: Hemos dicho que el rango de la matriz formada por los gradientes de las restricciones es m ; esto indica que son linealmente independientes y que, por lo mismo, forman una base en el subespacio E^m . Ahora demostraremos primero que una dirección límite no está en E^m ; esto es, que es linealmente independiente de los gradientes.

En efecto, sea \bar{e}_z una dirección límite:

$$\alpha_1 \bar{e}_z + \alpha_1 \nabla g_1 + \alpha_2 \nabla g_2 + \dots + \alpha_m \nabla g_m = 0 \quad 2.4.22$$

Multipliquemos escalarmente por \bar{e}_z .

$$\alpha_1 \bar{e}_z^T \bar{e}_z = \alpha_1 = 0 \quad 2.4.23$$

Entonces

$$\alpha_1 \nabla g_1 + \alpha_2 \nabla g_2 + \dots + \alpha_m \nabla g_m = 0 \quad 2.4.24$$

Para si el conjunto de gradientes es linealmente independiente:

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_m = 0 \quad 2.4.25$$

De donde

$$\bar{e}_z, \nabla g_1, \nabla g_2, \dots, \nabla g_m \quad 2.4.26$$

es un conjunto de vectores linealmente independiente.

Ahora, ya establecido el conjunto $\nabla g_1, \nabla g_2, \dots, \nabla g_m, \bar{e}_z$ como linealmente independientes en E^m , y por consiguiente en E^n , siempre se podrá encontrar, si $n-m \geq 2$, otro vector \bar{e}_z tal que

$$\begin{aligned} \varepsilon_i \nabla g_i &= 0, \quad \forall i && 2.4.2.27 \\ \bar{\varepsilon}_{i_1} \cdot \bar{\varepsilon}_{i_1} &= 0 && 2.4.2.28 \end{aligned}$$

y así sucesivamente hasta completar la base en E^n .

Teorema 2.4.5
 Sea $\bar{q} \in E^n$ un punto óptimo de $f(x)$, sobre el cual operan utilísimas la m restricciones g_i , en que $i=1, \dots, m$. Sea el vector $\bar{\varepsilon}$ tal que

$$\nabla g_i(\bar{q}) \cdot \bar{\varepsilon} = 0, \quad \forall i \quad 2.4.2.29$$
 Entonces $\nabla f(\bar{q}) \cdot \bar{\varepsilon} = 0 \quad 2.4.2.30$

Demostración. La dirección señalada por $\bar{\varepsilon}$ es permisible, pues no forma ángulo obtuso con ninguno de los gradientes de las restricciones. Por la misma razón, también $-\bar{\varepsilon}$ es permisible. Entonces

$$\begin{aligned} \nabla f(\bar{q}) \cdot \bar{\varepsilon} &\leq 0 && 2.4.2.31 \\ \nabla f(\bar{q}) \cdot (-\bar{\varepsilon}) &\leq 0 && 2.4.2.32 \end{aligned}$$

La única forma de que estas dos expresiones se cumplan simultáneamente es que

$$\nabla f(\bar{q}) \cdot \bar{\varepsilon} = 0 \quad 2.4.2.33$$

Puesto que se ha demostrado que los vectores gradientes y las direcciones lícitas forman una base en E^n , se deberá cumplir

$$\nabla f(\bar{q}) \cdot \lambda_1 \nabla g_1(\bar{q}) + \lambda_2 \nabla g_2(\bar{q}) + \dots + \lambda_m \nabla g_m(\bar{q}) - \lambda_{m+1} \bar{\varepsilon}_1 - \dots - \lambda_n \bar{\varepsilon}_{n-m} = 0 \quad 2.4.2.34$$

pero como también se ha demostrado que

$$\nabla f(\bar{q}) \cdot \bar{\varepsilon}_1 = \nabla f(\bar{q}) \cdot \bar{\varepsilon}_2 = \dots = \nabla f(\bar{q}) \cdot \bar{\varepsilon}_{n-m} = 0 \quad 2.4.2.35$$

entonces $\lambda_{m+1} = \lambda_{m+2} = \dots = \lambda_n = 0$

La ec. de Lagrange queda, finalmente

$$\nabla f(\bar{q}) \cdot \lambda_1 \nabla g_1(\bar{q}) + \lambda_2 \nabla g_2(\bar{q}) + \dots + \lambda_m \nabla g_m(\bar{q}) = 0 \quad 2.4.2.36$$

También en este caso se puede demostrar que

$$\begin{aligned} \lambda_i &\geq 0, \quad \forall i && 2.4.2 \\ \lambda_i &\geq 0, \quad \forall i && 2.4.2.31 \end{aligned}$$

pero es conveniente recordar que al problema está planteado como un máximo, y las restricciones en la forma

$$g_i(x) \geq 0, \quad \forall i \quad 2.4.2.38$$

Si las restricciones no están planteadas en esta forma, los multiplicadores no tienen por qué obedecer a la restricción señalada.

La ec. de Lagrange permite deducir un método para encontrar el punto \bar{q} donde se cumple.

En efecto, esta ecuación entre vectores implica n ecuaciones entre escalares, en las cuales aparecerán $(n+m)$ incógnitas:

las n componentes del vector \bar{q} más las m multiplicadores de Lagrange.

Las m restricciones que operan activamente en \bar{q} (como ecuaciones) permiten completar la cuenta.

Problema 2.4.3

Se va a construir una caja en forma de paralelepípedo rectangular. El material de la base cuesta 75.00 por m^2 , y el de los lados 3150.00 por m^2 . Hallar las dimensiones de la caja de mayor volumen, sin tapa, que se pueda construir con 3600.00 pesos.

Solución

Función a optimizar: $V = xyz \quad 2.4.3.a$

Restricción:

$$\text{Costo: } C = 75xy + 2(150)yz + 2(150)yz = 3600 \quad 2.4.3.b$$

Función restrictiva:

$$g = 75xy + 300z(x+y) + 3600 \geq 0; \text{ parte activa } g = 0 \quad 2.4.3.c$$

Ecuación de Lagrange

$$\nabla V + \lambda \nabla g = 0$$

$$\nabla V = yz\mathbf{i} + xz\mathbf{j} + xy\mathbf{k}$$

$$\nabla g = (75y + 300z)\mathbf{i} - (75x + 300z)\mathbf{j} + 300(x+y)\mathbf{k}$$

$$yz\mathbf{i} + xz\mathbf{j} + xy\mathbf{k} + \lambda[(75y + 300z)\mathbf{i} - (75x + 300z)\mathbf{j} + 300(x+y)\mathbf{k}] = 0$$

De donde

$$yz = \lambda(75y + 300z) \quad 2.43g$$

$$xz = \lambda(75x + 300z) \quad 2.43h$$

$$xy = \lambda(300(x+y)) \quad 2.43i$$

estas 3 ec. junto con la 2.43c forman el sistema a resolver
 Al eliminar λ entre 2.43g y h

$$\frac{yz}{75y + 300z} = \frac{xz}{75x + 300z} \quad 2.43j$$

De las ec. 2.43h e i

$$\frac{xz}{75x + 300z} = \frac{xy}{300(x+y)} \quad 2.43k$$

Al quitar denominadores en la ec 2.43j y simplificarla

$$z^2(x-y) = 0 \quad 2.43l$$

De donde $z_1 = 0$ 2.43ll
 $x = y$ 2.43m
 Es evidente que $z_1 = 0$ no conduce a un máximo para el volumen, por lo que no lo consideraremos.

Al proceder en la misma forma en la ec. 2.43k

$$x(4z - y) = 0 \quad 2.43n$$

De donde $x_1 = 0$ 2.43o
 $y = 4z$ 2.43p

Desde luego que x_2 no corresponde a un máximo
 Al sustituir 2.43m y 2.43p en 2.43c

$$1200z^2 + 1200z^2 + 1200z^2 = 3600 \quad 2.43q$$

De donde

$z^2 = 1, z_2 = -1, z_3 = 1$
 Aquí desechamos la raíz negativa
 Para $z = 1, x = 4, y = 4$
 El volumen máximo será 16 m³

Problema 2.44
 Hallar las cotas máxima y mínima de la curva intersección entre las regiones $z \geq x^2 + y^2$, y $z \leq 6 - 2x - 2y$

Función objetivo: z 2.44a
 Función restrictiva num. 1: $z - x^2 - y^2 \geq 0$ 2.44b
 Función restrictiva num. 2: $6 - 2x - 2y - z \geq 0$ 2.44c

Al aplicar la ec. de Lagrange a la ec 2.44a, y a la parte activa de las ec. 2.44b y c

$$k + \lambda_1(-2x\mathbf{i} - 2y\mathbf{j} + k) + \lambda_2(-2\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - k) = 0 \quad 2.44d$$

de donde obtenemos

$$-2x\lambda_1 - 2\lambda_2 = 0 \quad 2.44e$$

$$-2y\lambda_1 - 2\lambda_2 = 0 \quad 2.44f$$

$$1 + \lambda_1 - \lambda_2 = 0 \quad 2.44g$$

De estas tres últimas ec. más las dos que correspondan a la parte activa de las ec. 2.44b y c obtenemos

$$x_1 = 1, y_1 = 1, z_1 = 1, \lambda_1 = -\frac{1}{2}, \lambda_2 = \frac{1}{2}$$

$$x_2 = 3, y_2 = 3, z_2 = 18, \lambda_1 = \frac{1}{2}, \lambda_2 = \frac{3}{2}$$

En $P(1,1)$ tendremos la cota mínima: $z = 1$

En $Q(3,3)$ tendremos la cota máxima: $z = 18$

2.4.3 Condición Suficiente

Hemos llegado a la ecuación de Lagrange partiendo de las condiciones a cumplir en el punto óptimo; así, estamos seguros de que ningún punto será óptimo si no cumple con la ec. de Lagrange; pero procede preguntarnos si sólo un punto óptimo cumple con ella. En otras palabras, una vez hallado a cabo el proceso descrito y habiendo encontrado las coordenadas del punto que cumple la ec. 2.4.2.13, incluyendo la restricción de signos para los multiplicadores, ¿estamos seguros de que realmente es el punto óptimo?. Para responder a esta pregunta introduciríamos algunas conceptos nuevos y recordaría, además, la definición de conjunto convexo que viste en el Capítulo I.

2.4.3.1. Funciones Cóncavas y Convexas

Ahora consideremos la curva C , de la Fig. 2.4.6 que representa

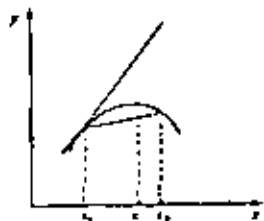


Fig. 2.4.6

a la función $y = f(x)$

Supóngase que conocemos $f(x_1)$ y $f(x_2)$, y que tratamos de estimar $f(x)$ por medio de una interpolación lineal. Esta estimación será tanto más aproximada cuanto más próximas estén los puntos x_1 ,

x_2 ; pero siempre será una subestimación del valor de la función. A las funciones que cumplan con esa condición se las denominan funciones cóncavas, y son muy fáciles de visualizar si esta se realiza sobre E^1 (Fig. 2.4.6); resulta más difícil su visualización si esta se realiza sobre E^2 , e imposible si el número de dimensiones aumenta; por lo mismo, resulta conveniente

una definición formal que permita reconocer una función de este tipo, en cualquier número de dimensiones.

Para su mejor comprensión recordemos el proceso de interpolación.

Ejemplo 2.4.5

Encontrar el seno de $34^\circ 33'$ sabiendo que $\sin 34^\circ 30' = 0.5664$, y $\sin 34^\circ 40' = 0.5668$

Llamamos $x = 34^\circ 33'$; $x_1 = 34^\circ 30'$, $x_2 = 34^\circ 40'$

$$\theta = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = 0.7$$

obviamente, siempre tendremos $0 \leq \theta \leq 1$

$$\sin x = \sin x_1 + \theta(\sin x_2 - \sin x_1)$$

$$\sin 34^\circ 33' = 0.5664 + 0.7(0.5668 - 0.5664) = 0.56662$$

Esta última ec. la podemos escribir

$$\sin x = \theta \sin x_2 + (1 - \theta) \sin x_1$$

Además

$$x - x_1 = \theta(x_2 - x_1)$$

$$x = \theta x_2 + (1 - \theta)x_1$$

Ahora si, veamos la siguiente

Definición 2.4.2

Una función es cóncava si dados dos puntos P_1 y P_2 , cualesquiera que le pertenecen

$$\theta f(P_1) + (1 - \theta)f(P_2) \leq f(\theta P_1 + (1 - \theta)P_2), \quad \forall 0 \leq \theta \leq 1 \quad (2.4.3.1)$$

Al regresar a la curva C , de la Fig. 2.4.6, si la estimación se hiciera a través de la tangente

$$f(x) = f(x_1) + f'(x_1)(x - x_1) \quad (2.4.3.2)$$

y entonces se estaría sobrestimando la función. Esta es una

propiedad que todas las funciones cóncavas tienen y sólo ellas.

Teorema 2.4.6
 Sea $f(r)$ una función cóncava, y sean \bar{r}_1 y \bar{r}_2 dos puntos cualesquiera, entonces

$$f(\bar{r}_1) + \nabla f(\bar{r}_1) \cdot (\bar{r}_2 - \bar{r}_1) \geq f(\bar{r}_2) \quad 2.4.33$$

La demostración de este teorema la puedes ver en el Apéndice

Ejm. 2.4.6

Sea el paraboloida de ocurrencia $z = -x^2 - y^2$ demostrar que es una función cóncava, Fig 2.4.7

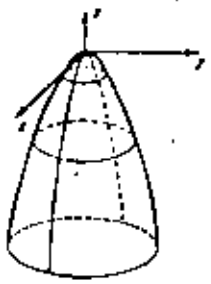


Fig 2.4.7

Estudiamos la parte de esa superficie mostrada en la Fig. 2.4.7, cuyo dominio es la región mostrada en la Fig 2.4.8

Dentro del dominio consideramos dos puntos cualesquiera, por ejm \bar{r}_1 y \bar{r}_2 , al aplicar el

Teorema 2.4.6

$$\begin{aligned}
 f(r) &= -r^2 \\
 \nabla f &= -2r \Big|_{r=\bar{r}_1} = -2\bar{r}_1 \\
 -\bar{r}_1^2 - 2\bar{r}_1 \cdot (\bar{r}_2 - \bar{r}_1) &= -\bar{r}_1^2 - 2\bar{r}_1 \cdot \bar{r}_2 + 2\bar{r}_1^2 \\
 &= \bar{r}_1^2 - 2\bar{r}_1 \cdot \bar{r}_2 + \bar{r}_2^2 - \bar{r}_2^2 \\
 \Rightarrow (\bar{r}_1 - \bar{r}_2)^2 - \bar{r}_2^2 &\geq f(\bar{r}_2) = -\bar{r}_2^2, \text{ QED}
 \end{aligned}$$

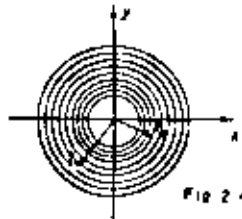


Fig 2.4.8

Ahora consideramos la curva C_2 que representa a la función $y = f(x)$, (Fig 2.4.9)

Esta función no es cóncava, pues una interpolación lineal entre las puntos x_1 y x_2 , arroja una sobreestimación de la función,

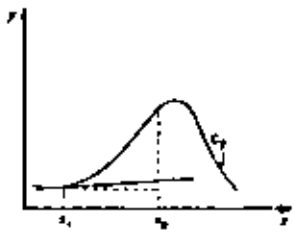


Fig. 2.4.9

sin embargo se parece mucho a una función cóncava, de ahí que se la denomina pseudocóncava. Esta función tiene un sólo intervalo en el cual es creciente, y otro sólo intervalo en el cual es decreciente, lo que permite escribir:

$$\text{Si } f'(x_i)(x_2 - x_i) \leq 0 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2) \quad 2.4.34$$

Esta propiedad no la tiene la función representada por la curva C_3 , Fig 2.4.10

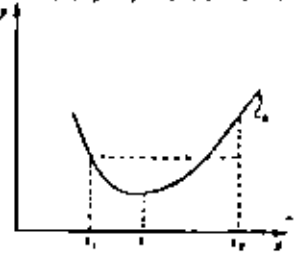


Fig. 2.4.10

En esa curva C_3 ,

$$f'(x_i)(x_2 - x_i) < 0 \quad 2.4.35$$

sin embargo

$$f(x_1) > f(x_2) \quad 2.4.36$$

En esta característica se basa la definición formal de función pseudocóncava

Definición 2.4.3
 Una función es pseudocóncava si y sólo si, para dos puntos cualesquiera \bar{r}_1 y \bar{r}_2

$$\nabla f(\bar{r}_1) \cdot (\bar{r}_2 - \bar{r}_1) \leq 0 \Rightarrow f(\bar{r}_1) \geq f(\bar{r}_2) \quad 2.4.37$$

Es conveniente hacer notar que una función cóncava satisface la definición de función pseudocóncava. La recíproca no es cierta. En otras palabras, si denominamos C al conjunto de funciones cóncavas, y S al de pseudocóncavas:

$$C \subseteq S \quad 2.4.38$$

Ejemplo 2.4.7

Demstrar que la función $z = -x^2 - y^2$ cumple con la condición de función pseudo cóncava.

$$\nabla f(r) = -2r$$

$$\forall z = -2r$$

Partamos de que:

$$\nabla f(r) \cdot (r_2 - r_1) \leq 0$$

o sea

$$-2r_1 \cdot (r_2 - r_1) \leq 0$$

$$\Rightarrow -2r_1 \cdot r_2 + 2r_1^2 \leq 0$$

$$\Rightarrow |r_1|^2 \leq r_1 \cdot r_2 \quad \Rightarrow |r_1| |r_2| \leq |r_1| |r_2| \text{ en } \theta$$

$$\Rightarrow |r_1| < |r_2|$$

$$\Rightarrow r_1^2 < r_2^2$$

$$\Rightarrow -r_1^2 > -r_2^2 \quad \text{Q.E.D.}$$

Ahora estamos en posibilidad de responder a la pregunta sobre la suficiencia de la cc. de Lagrange, para lo que utilizaremos la definición de conjunto convexo que vimos en el capítulo I

Teorema 2.4.7

Sea hallar el Máx $f(r)$, en que $r \in E^n$, sujeto a

$$g_1(r) \geq 0$$

$$g_2(r) \geq 0$$

$$\dots \dots$$

$$g_m(r) \geq 0$$

2.4.3.9

que definen una región $P \subseteq E^n$

Sea $\bar{q} \in P$ un punto que cumple con

$$f(\bar{q}) + \sum_{j=1}^m \lambda_j g_j(\bar{q}) = 0, \quad \lambda_j \geq 0, \quad \forall j \quad 2.4.3.10$$

Entonces, si f es seudocóncava y P es convexo, \bar{q} es un punto que resuelve el problema

Demostración:

Debemos hacer ver que $f(\bar{q}) \geq f(r)$, $r \in P$ 2.4.3.11

Consideremos pues un punto cualquiera r de la región permisible, y unámosto con \bar{q} por medio de una línea recta. Como P es un conjunto convexo, todos los puntos de esta recta estarán en P y, por lo mismo, $r - \bar{q}$ es una dirección permisible

Pero para cualquier dirección permisible se debe cumplir

$$\nabla f(\bar{q}) \cdot \bar{a} \leq 0 \quad 2.4.3.12$$

entonces

$$\nabla f(\bar{q}) \cdot (r - \bar{q}) \leq 0 \quad 2.4.3.13$$

pero como f es seudocóncava, esta condición implica que

$$f(\bar{q}) \geq f(r) \quad 2.4.3.14$$

Ejemplo 2.4.8

Hallar la cola máxima de la región $z \leq -x^2 - y^2$

Función objetivo: z 2.4.8a

Función restrictiva: $-x^2 - y^2 - z \geq 0$ 2.4.8b

Parte activa de la restricción: $-x^2 - y^2 - z = 0$ 2.4.8c

$$k + \lambda(-2xi - 2yj - k) = 0 \quad 2.4.8d$$

de donde

$$x=0, \quad y=0 \quad 2.4.8e$$

valores que al ser sustituidos en 2.4.8c proporcionan a máximo

$$z=0$$

En este ejemplo hemos encontrado el punto óptimo con toda seguridad,

porque si consideramos nuestra función objetivo $f(r) = z$; $\bar{r}(x_1, y_1, z_1)$; $\bar{r}_2(x_2, y_2, z_2)$ y aplicamos el teorema (2.4.6):

$$f(x) = x, \quad \nabla f(x) = b; \quad \tau_0 = \tau_1 + (x_0 - x_1); \quad (y_0 - y_1)_j = (x_0 - x_1) b_j$$

$$x_0 + b \cdot [(x_0 - x_1) + (y_0 - y_1)_j] = (x_0 - x_1) b_j$$

$$= x_0 + (x_0 - x_1) = x_0 = f(x) \Rightarrow x \text{ es función cóncava}$$

Por otra parte, la región permisible (ver fig 2.4.7) es un conjunto convexo.

ejemplo 2.4.9) Hallar la mínima costo de la compra de instalaciones de las superficies: $y = x^2 + x^2, \quad y - 2x^2 = 0$

En este caso, nuestra función objetivo es convexa:

$$f = x$$

Algunas restricciones son las ecuaciones de las superficies, que definen una región que puede expresarse

$$y \leq x^2 + x^2$$

$$y \geq 2x^2$$

Para tener estas restricciones en la forma que ya hemos visto antes.

$$y - x^2 - x^2 \leq 0 \dots\dots\dots (2.4.8.f)$$

$$2x^2 - y \leq 0 \dots\dots\dots (2.4.8.g)$$

y la ecuación de Lagrange queda:

$$\nabla x + \lambda_1 \nabla (y - x^2 - x^2) + \lambda_2 \nabla (2x^2 - y) = 0$$

que, al ser multiplicado escalarmente:

$$x + 2x\lambda_1 = 0 \dots\dots\dots (2.4.8.h)$$

$$\lambda_1 - \lambda_2 = 0 \dots\dots\dots (2.4.8.i)$$

$$1 - 2x\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \dots\dots\dots (2.4.8.j)$$

De (2.4.8.i): $\lambda_1 = \lambda_2$ y al sustituir este valor en (2.4.8.h):

$$1 - 2x\lambda_1 + \lambda_1 = 1 - \lambda_1(2x - 1) \Rightarrow \lambda_1 = \frac{1}{2x-1} \dots\dots (2.4.8.k)$$

Esto a su vez implica que $\lambda_1 \neq 0$, por lo que, tomando en cuenta en (2.4.8.f), se concluye que $x > 0$; este hecho también en (2.4.8.g), considerando la misma:

$$y - 2x^2 = 0; \quad y = 2x^2 \dots\dots\dots (2.4.8.l)$$

Revisemos finalmente (2.4.8.f) o (2.4.8.g), para obtener:

$$x + 2 - 2x^2 = 0$$

$$2x^2 - 2x - 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{2x \pm \sqrt{4x^2 - 4(-2)}}{2} \left\{ \begin{array}{l} 1 \\ -1 \end{array} \right.$$

donde se ve que el valor de la costo mínima es 2, lo que ocurre en el punto $(0, 2, 2)$ y el de la costo máxima es (-1) , lo que ocurre en el punto $(0, 0, -1)$.

Nota que al sustituir el valor de $x=2$ en (2.4.8.k), obtenemos:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{1}{3} > 0$$

como era de esperarse

Por otra parte, ya quedamos en que nuestra función objetivo (x) es cóncava. Te sugerimos que hagas una representación gráfica de las superficies involucradas en el problema, para que te des cuenta de que la región permisible es un conjunto de puntos convexo y estar así rigurosamente seguros de que el punto obtenido es el punto de máxima costo

III CALCULO VECTORIAL

TOMADO DE LOS APUNTES DE LA MATERIA DE MATEMATICAS III DE LA
FACULTAD DE INGENIERIA

U. N. A. M.

CAPITULO TRES

3. CAMPOS VECTORIALES

Introducción. - Todos los problemas que puedan resolverse aplicando conceptos vectoriales, también se pueden resolver por métodos no vectoriales, sólo que el análisis vectorial nos simplifica considerablemente muchos cálculos. Las vectoras son herramientas muy útiles en las Matemáticas del ingeniero, ya que ayudan a visualizar, y relacionar conceptos físicos y geométricos, que de otro modo nos serían difíciles de captar.

Recordamos que existen, tanto en Física como en Geometría, cantidades que quedan completamente definidas cuando se da su tamaño o número de acuerdo a una cierta escala; a este tipo de cantidades se las llama escalares, y a ejemplo de ellas son la presión, la masa, el área, la resistencia eléctrica, el calor, el volumen, etc. Por otro lado existen cantidades que no podemos describir por medio de un solo número, ya que no quedarían completamente definidas o caracterizadas; a este tipo de cantidades en que hace falta conocer su dirección, además de su magnitud, se les conoce como vectores, y a ejemplo de ellos los tenemos al manejar conceptos tales como el peso de los cuerpos, las fuerzas, las velocidades, la gravedad, momentos, etc.

3.1.- Campos Vectoriales o Funciones Vectoriales.

Hasta ahora, en los capítulos I y II, hemos manejado los vectores como variables independientes; procuremos que también podamos manejarlos como funciones.

3.1.1 Campos Vectoriales.

Si asignamos un vector $\vec{v}(P)$ a cada punto P de un cierto conjunto de puntos (curva, superficie o región), entonces diremos que en esos puntos existe un campo vectorial $\vec{v}(P)$. Como podemos ver en las figs. 3.1.1 y 3.1.2



Fig. 3.1.1

CAMPO DE VECTORES DE VELOCIDAD DE UN FLUJO

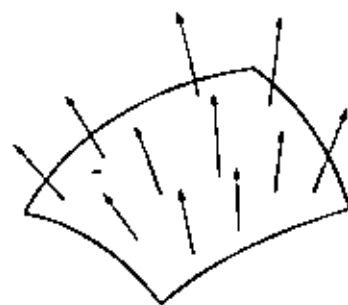


Fig. 3.1.2

CAMPO DE VECTORES NORMALES A UNA SUPERFICIE

En estos casos, el vector función depende de las coordenadas del punto P , es decir, de su vector de posición; por ello se dice que es una función vectorial de variable vectorial. Puede darse el caso, sin embargo, de que el vector función dependa de una sola magnitud, como es el caso de la densidad de corriente en un conductor delgado, lo cual queda completamente definida por medio de la distancia a la fuente de energía, Fig. 3.1.3a

Otro ejemplo del mismo caso es el de la fuerza tangencial sobre un carrito en la montaña rusa, fig. 3.1.3.b, que depende del recorrido "s" sobre una curva en el espacio; en estos dos últimos casos se dice que se trata una función vectorial de variable escalar. Por ser éstos los más sencillos, empezaremos con ellos nuestro estudio de las funciones vectoriales.

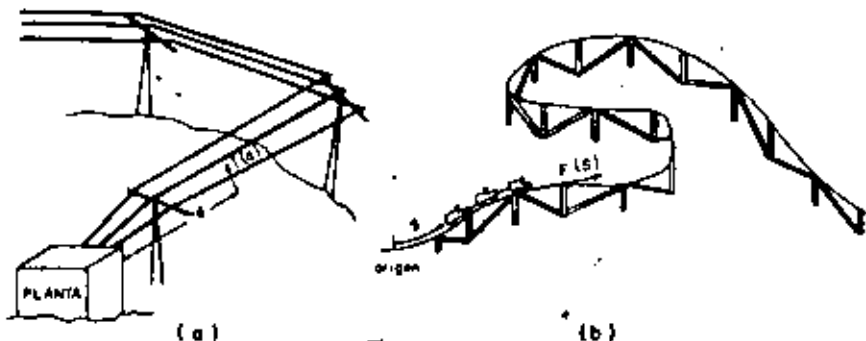


Fig. 3.1.3

3.1.2. - Funciones Vectoriales de Variable Escalar.

Si una partícula se está moviendo en el plano xy , y para seguir su movimiento colocamos observadores en los ejes 'x' y 'y', seguramente que el control que ellos llevarían sería, como se indica en la fig. 3.1.4, de tiempos y distancias en cada eje.

t(seg)	x(m)	y(m)
0	0	0
1	2	1
2	4	4
3	6	9
4	8	16

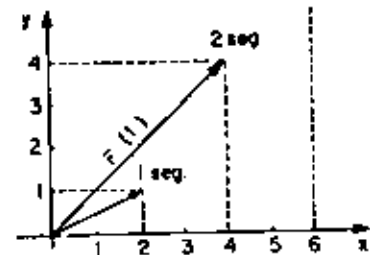


Fig. 3.1.4.

Como vemos, se ha definido así una función vectorial de la variable real tiempo, que establece un mapeo de E^1 en E^2 , ya que asigna a cada valor de "t" un solo vector del vector de posición \vec{r} en dos dimensiones. Ahora bien, para que la función que se definió analíticamente, sea útil, que habrá necesidad de conocer si el movimiento seguirá en la misma ley por más tiempo, o si la partícula no dará saltos o no. Si el movimiento es continuo podremos escribir matemáticamente que

$$\vec{r} : E^1 \rightarrow E^2 \mid \vec{r} = 2t\hat{i} + t^2\hat{j}, t \geq 0$$

3.1.2.1

2.5

En esta expresión estamos indicando que aceptamos que el movimiento empezó en $t=0$. Si supusiéramos que el movimiento había empezado previamente, quitaríamos la restricción, pudiendo escribir simplemente:

$$\vec{r}(t) = 2t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} \quad \dots\dots\dots 3.1.2.2$$

o bien ya que $\vec{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$:

$$x = 2t$$

$$y = t^2 \quad \dots\dots\dots 3.1.2.3$$

y si se despeja "t" en una de ellas y se substituye en la otra, eliminaremos "t", y por tanto obtendremos la expresión cartesiana del movimiento de la partícula en dos dimensiones, ver 3.1.5

$$t = \frac{x}{2} ; \quad t^2 = \frac{x^2}{4} \quad \therefore y = \frac{x^2}{4}$$

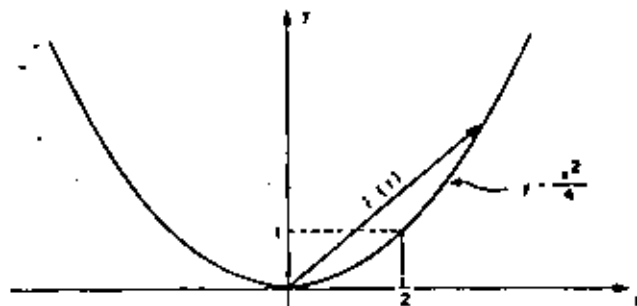


Fig. 5.1.5

3.6

En general, para el sistema coordenado cartesiano x, y, z ,

$$\vec{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k} \quad 3.1.2.4$$

siempre será posible eliminar "t" y obtener las ecuaciones cartesianas en función de x, y, z .

Ejemplo 3.2.1

Si se tiene el sistema :

$$x = \text{sen } t \quad 3.2.1.a$$

$$y = 2 \text{sen } t \quad 3.2.1.b$$

$$z = 3 \text{cos } t \quad 3.2.1.c$$

o bien

$$\vec{r}(t) = \text{sen } t\mathbf{i} + 2\text{sen } t\mathbf{j} + 3\text{cos } t\mathbf{k} \quad 3.2.1.d$$

De 3.2.1 a y b obtenemos :

$$y = 2x \quad 3.2.1.e$$

de 3.2.1.a

$$x^2 = \text{sen}^2 t \quad 3.2.1.f$$

de 3.2.1.b

$$\frac{y^2}{4} = \text{sen}^2 t \quad 3.2.1.g$$

Al sumar 3.2.1.f y g :

$$x^2 + \frac{y^2}{4} = 2 \text{sen}^2 t$$

de donde

$$\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{4} = \text{sen}^2 t \quad 3.2.1.h$$

de 3.2.1.c

$$\frac{z^2}{9} = \text{cos}^2 t \quad 3.2.1.i$$

al sumar 3.2.1.h y i :

$$\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} = 1 \quad 3.2.1.j$$

que junto con 3.2.1.e nos define la curva intersección de un elipsoide y un plano. 3.7

3.1.3 Funciones Vectoriales de Variable Vectorial.

En general, si el recorrido de una función vectorial está en un espacio "n" dimensional, necesitamos acudir a los vectores unitarios base e_1, e_2, \dots, e_n , para definir cualquier vector $\vec{r}(\vec{x})$ en "n" dimensiones

$$\vec{r}(\vec{x}) = r_1(\vec{x})e_1 + r_2(\vec{x})e_2 + \dots + r_n(\vec{x})e_n$$

3.1.3.1

Esto está indicando la necesidad de contar con n funciones escalares del vector \vec{x} , para definir la función vectorial $\vec{r}(\vec{x})$.

A su vez, el vector \vec{x} estará definido por "m" variables independientes, este es $\vec{x} = [x_1, x_2, \dots, x_m]$.

En otras palabras, estamos reduciendo las funciones en sus términos más generales, tal como las estudiamos en álgebra, quitando ahora la restricción a las transformaciones correspondientes, de que sean lineales.

Si aplicamos los conocimientos sobre transformaciones, que ya estudiamos en álgebra, podemos decir que la expresión 3.1.3.1 tiene un recorrido

en el espacio de "n" dimensiones, y un dominio en el espacio de "m" dimensiones. 3.8

Ejemplos:

a) El campo vectorial de velocidades de una partícula de la corriente de un río, puede estar dado por la función:

$$a(t) = 6t^2 i + 310t^2 j - 3t^2 k$$

b) El campo vectorial que representa las vectores de posición de un círculo de radio R , está dado por la función:

$$\vec{r}(\theta) = R \cos \theta i + R \sin \theta j$$

o bien en forma paramétrica:

$$x = R \cos \theta$$

$$y = R \sin \theta$$

3.2 Arco de Curva y su Expresión Vectorial

Si consideramos el hecho de que todos los objetos físicos están formados por partículas y cuando por ejemplo lo tratamos en forma independiente; resulta que un objeto que se mueve, genera una gran cantidad de curvas, una por cada partícula del objeto. (Fig. 3.2.1)

3.9

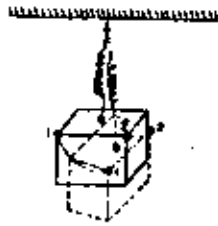


FIG. 3.2.1

Sabemos que existen curvas de todo tipo pero podemos distinguir aquellas que están contenidas en planos y que por lo mismo son llamadas "curvas planas", FIG. 3.2.2.a, y otras que definitivamente no pueden estar contenidas en planos, y este último tipo se las denomina "curvas alabeadas", FIG. 3.2.2.b

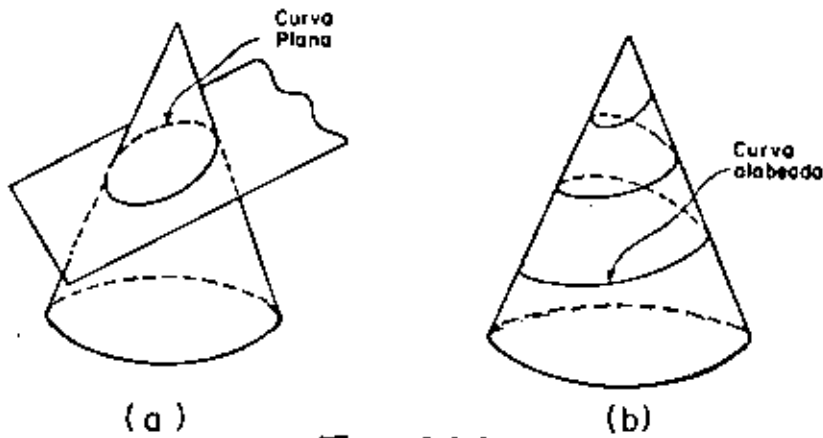


Fig. 3.2.2

3.10

Recordarás que si tenemos una curva en el plano x, y , la podemos definir matemáticamente por una ecuación del tipo $y = f(x)$, o bien, $\varphi = F(\theta)$. Una curva cualquiera en el espacio queda definida, como vimos en Matemáticas II, por la intersección de 2 superficies:

$$\begin{aligned} F(x, y, z) &= 0 \\ G(x, y, z) &= 0 \end{aligned} \quad \dots \quad 3.2.0.1$$

como se indica en la FIG. 3.2.3.

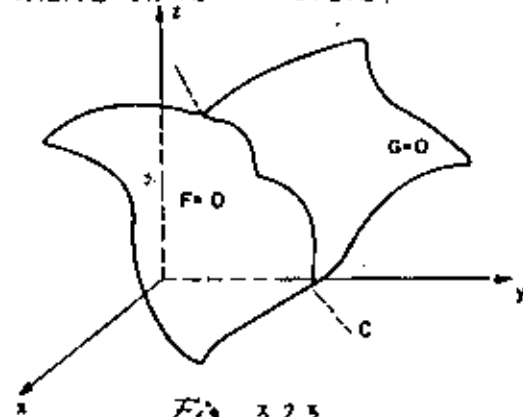


Fig. 3.2.3

También vimos en Matemáticas II, que una curva puede ser definida vectorialmente, por

$$\vec{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k} \quad 3.2.0.2$$

que tiene a ser una función vectorial de variable real; esta variable t , en este caso es un parámetro

cualquiera. Una forma muy útil que puede asumir la función vectorial es

$$\vec{r}(s) = x(s)\mathbf{i} + y(s)\mathbf{j} + z(s)\mathbf{k} \quad 3.2.3$$

donde "s" es la longitud de arco de curva que se define como $S_{AB} = \int_A^B \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2}$ según recordemos de Matemáticas II. Si la integral existe significa que la curva es rectificable.

Si la curva es continua, esto es, no tiene interrupciones, brintos, ni autointersecciones, se le llama curva regular FIG 3.2.4

Definición 3.2.1

Dada la función vectorial $\vec{r}(t)$ que representa una curva, si $\vec{r}(a) = \vec{r}(b)$ no implica necesariamente que $a = b$, se dice que la curva es cerrada.

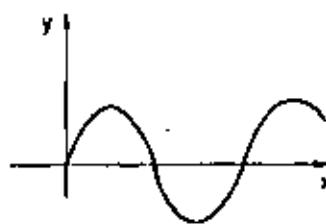
Así, la función $\vec{r}(t) = 2t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j}$ representada en la FIG 3.2.5 es abierta porque $\vec{r}(a) = 2a\mathbf{i} + a^2\mathbf{j}$ y $\vec{r}(b) = 2b\mathbf{i} + b^2\mathbf{j}$, y la única manera en que $\vec{r}(a) = \vec{r}(b)$ es que $a = b$, en cambio para la curva del ejemplo 3.2.1

$$\text{si } t = 0 \quad ; \quad \vec{r}(0) = 3\mathbf{k}$$

$$\text{si } t = 2\pi \quad ; \quad \vec{r}(2\pi) = 3\mathbf{k}$$

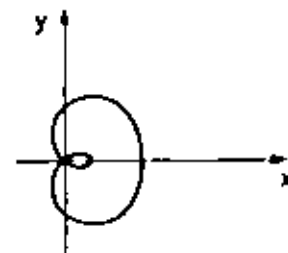
lo que indica que es cerrada.

Así mismo se le llamará curva suave o lisa (FIG 3.2.4) cuando tenga tangentes únicas que varíen en forma continua.



Curva regular suave

Fig. 3.2.4



Curva Irregular

Fig. 3.2.5

Una curva puede estar formada por arcos regulares suaves como en la FIG 3.2.6; en tal caso se le llama curva seccionalmente suave.

Todas estas características geométricas difíciles de analizar en curvas elaboradas, pueden ser analizadas a través del cálculo diferencial de funciones vectoriales, como veremos a continuación.

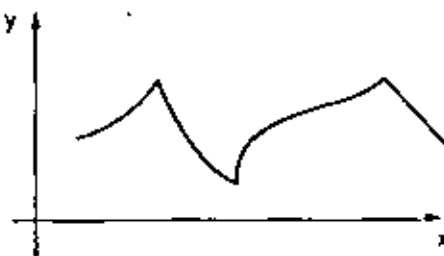


Fig. 3.2.6

3.3 LIMITES Y CONTINUIDAD DE FUNCIONES VECTORIALES DE VARIABLE ESCALAR

Por antecedentes de cursos previos, ya sabes analizar la continuidad de funciones dadas en forma cartesiana, sólo que creemos que será muy ventajoso que se pudiese analizar en la forma dada por (3.2.4). Así, nos referiremos al inciso (3.2.2) y veremos qué sucede si los observadores en los ejes x, y , nos reportaran que después de ver en el tiempo $t=2$ la partícula, la perdieron de vista para volver a ver en $t=1$ y así sucesivamente. En este caso la función existe y se representa por la figura 3.3.1; pero de ninguna manera es continua; por ejemplo en $t=2$ la función existe en ese punto pero no en sus proximidades.

En cambio la función $r(t) = (t+1)\frac{t-2}{t-2} f$... (3.3.0)

existe en las proximidades de $t=2$, pero no en $t=2$ ya que no se puede definir su denominador.

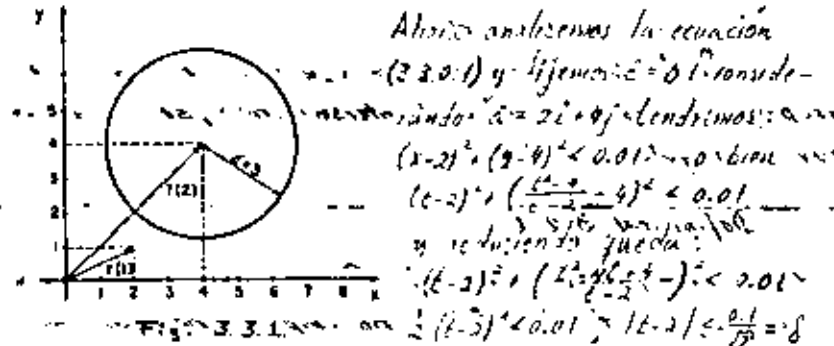
En el primer caso de los observadores, decimos que existe la función mas no el límite y en el segundo caso existe el límite mas no la función, por ello habrá que ver qué se debe entender por límite de una función vectorial de variable escalar.

Definición 3.3.1. Se dice que existe $\delta > 0$ tal que $|t-2| < \delta$ cuando $|t-2| < \delta$, se dice que el vector \bar{a} es el límite de la función vectorial \bar{r} cuando t tiende a 2.

Lo anterior se escribe como $\lim_{t \rightarrow 2} \bar{r}(t) = \bar{a}$ 3.3.0.2
 vemos porque la función de límite por la eq. 3.3.0.1 no tiene límite cuando $t \rightarrow 2$

Si se fija $\epsilon = 3$ y suponemos el vector $\bar{a} = 4\hat{i} + 4\hat{j}$, tendríamos de acuerdo a la definición: $|(t-2)\hat{j} - 4\hat{i} - 4\hat{j}| < 3$ lo que significa que $(t-2)^2 + (4-t)^2 < 9$ o bien $(t-4)^2 + (t-4)^2 < 9$.

Esta desigualdad nos define una región abierta dentro de la circunferencia con centro en $(4,4)$ y radio 3 (Fig. 3.3.1), pero observamos que no hay valores de t que nos defina un vector, cuya extremidad esté dentro del círculo, por lo que \bar{a} no puede existir.



En general para cualquier valor de $\epsilon > 0$ puedes comprobar que $|t-2| < \frac{\epsilon}{\sqrt{5}} = \delta$.

Por lo anterior puede afirmarse que el límite existe, aunque la función no está definida en $t=2$. La definición es válida para cualquier número de dimensiones en que se define \bar{r} . Puede verse en la fig. 3.3.2 una interpretación geométrica general para las dimensiones. Para los valores que cumplen con $|t-\bar{a}| < \epsilon$, sus extremidades más cercanas se encuentran dentro de la esfera de radio ϵ y están separadas por valores de t que se encuentran dentro de un intervalo alrededor de t .

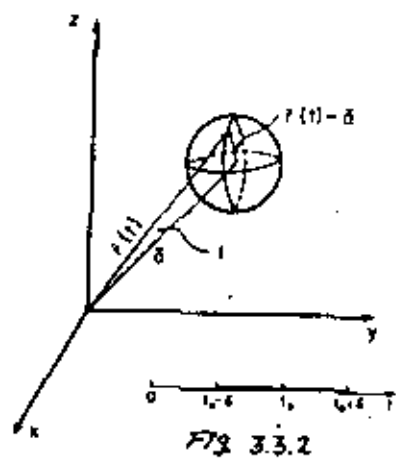


FIG 3.3.2

Por lo mismo, para calcular el límite de una función vectorial, se infiere que el vector límite estará compuesto por los límites de las componentes. Si consideramos al vector $\vec{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ como límite de la función $\vec{r}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ cuando $t \rightarrow t_0$, esto significa que:

$$|r_i - a_i| < \epsilon \text{ cuando } |t - t_0| < \delta \quad (3.3.03)$$

o lo que es lo mismo:

$$\sqrt{(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 + \dots + (x_n - a_n)^2} < \epsilon \text{ cuando } |t - t_0| < \delta$$

donde $x_1 = x_1(t), x_2 = x_2(t), \dots, x_n = x_n(t) \dots (3.3.04)$

a elevas al cuadrado (3.3.03):

$$(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 + \dots + (x_n - a_n)^2 < \epsilon^2 \text{ cuando } |t - t_0| < \delta \quad (3.3.05)$$

Pero como todos los sumandos son positivos:

$$\left. \begin{matrix} (x_1 - a_1)^2 < \epsilon^2 \\ (x_2 - a_2)^2 < \epsilon^2 \\ \dots \\ (x_n - a_n)^2 < \epsilon^2 \end{matrix} \right\} \text{ Cuando } |t - t_0| < \delta \dots (3.3.06)$$

o sea que $\left. \begin{matrix} |x_1 - a_1| < \epsilon \\ |x_2 - a_2| < \epsilon \\ \dots \\ |x_n - a_n| < \epsilon \end{matrix} \right\} \text{ cuando } |t - t_0| < \delta \dots (3.3.07)$

El hecho de que esta desigualdad cumple con la condición antes significa que:

$$\lim_{t \rightarrow t_0} x_1(t) = a_1, \quad \lim_{t \rightarrow t_0} x_2(t) = a_2, \quad \dots, \quad \lim_{t \rightarrow t_0} x_n(t) = a_n \quad (3.3.08)$$

Esto es, los componentes del vector límite son los límites de las funciones componentes.

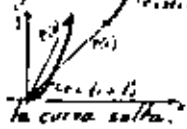
Definición 3.3.2

Una función vectorial $\vec{r}(t)$ es continua en el punto t_0 si y sólo si: $\lim_{t \rightarrow t_0} \vec{r}(t) = \vec{r}(t_0) \dots (3.3.09)$

Lo cual implica la existencia del límite \vec{r} de la función.

La continuidad de una función vectorial se variable escalar implica que la curva que la representa no tenga interrupciones ni saltos de valores. Por ejemplo, para la función siguiente:

$$\vec{r}(t) = \begin{cases} t\vec{i} + t^2\vec{j}, & \text{si } t < 2 \\ 2t\vec{i} + t^2\vec{j}, & \text{si } t \geq 2 \end{cases}$$



La función es discontinua en $t=2$, donde la curva salta.

Puesto que ya se demostró que el límite de una función vectorial está compuesto por los límites de sus componentes, podemos demostrar fácilmente los siguientes teoremas; lo cual haremos con el primero, dejando de lado que demostremos el segundo.

Teorema 3.3.1 Una función vectorial $\vec{r}(t)$ es continua en $t=t_0$, si y sólo si todas sus funciones componentes son continuas en dicho punto.

Demostración: Sean $\vec{r}(x, t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$ para que cada x_i se requiere que sea $\lim_{t \rightarrow t_0} x_i(t) = x_i(t_0)$ se requiere a la vez que $\lim_{t \rightarrow t_0} x_i(t) = x_i(t_0) \quad \forall i$

lo cual implica que $\vec{r}(t)$ debe ser continua $\forall t$.

A la inversa, si $\vec{r}(t)$ es continua $\forall t$ esto implica que:

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \vec{r}(t) = \vec{r}(t_0) \quad \forall t$$

lo cual a su vez implica que $\lim_{t \rightarrow t_0} \vec{r}(t) = \vec{r}(t_0)$

Teorema 3.3.2. Para que la función vectorial $\vec{r}(t)$ sea continua, es necesario e suficiente que:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} [\vec{r}(t_0 + \Delta t) - \vec{r}(t_0)] = 0 \quad \dots (3.3.10)$$

Definición 3.3.3. Una función vectorial $\vec{r}(t)$ es continua en un intervalo, si y sólo si es continua en todos y cada uno de los puntos del intervalo.

Ejemplo 3.3.1

a) Calcular el límite de la función $\vec{r}(t) = \cos t \cdot \vec{i} + 2e^t \cdot \vec{j}$ cuando $t \rightarrow 0$ y decir si es continua en ese punto.

$$\lim_{t \rightarrow 0} \vec{r}(t) = (\lim_{t \rightarrow 0} \cos t) \cdot \vec{i} + (\lim_{t \rightarrow 0} 2e^t) \cdot \vec{j} = \vec{i} + 2\vec{j}$$

dado que el límite existe y la función se está definida para $t=0$, entonces también será continua.

Ejemplo 3.3.2

Si $\vec{r}(x) = x\vec{i} - 2x\vec{j}$, ¿cómo encontrar cuando vale el límite cuando $x \rightarrow 0$ y decir si es continua en ese punto.

$\lim_{x \rightarrow 0} \vec{r}(x) = (\lim_{x \rightarrow 0} x) \cdot \vec{i} - (\lim_{x \rightarrow 0} 2x) \cdot \vec{j} = 0\vec{i} - 0\vec{j} = \vec{0}$ como el límite existe y la función se está definida, entonces también será continua en $x=0$

Ejemplo 3.3.3

Si $\vec{r}(t) = \frac{t}{2} \vec{i} + (t^2 - 1) \vec{j}$; decir si la función es continua en $t=0$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \vec{r}(t) = (\lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{2}) \vec{i} + (\lim_{t \rightarrow 0} (t^2 - 1)) \vec{j}$$

como el límite de $\frac{t}{2}$ cuando $t \rightarrow 0$ no está definido, entonces diremos que la función $\vec{r}(t)$ no es continua en $t=0$

3.4 Derivada Ordinaria y Diferencial Ordinaria

3.4.1 Derivada Ordinaria

Ejemplo 3.4.1

Si consideramos nuevamente la función 3.2.1

$\vec{r}(t) = 2t \vec{i} + t^2 \vec{j}$, ahora en $t=2$: $\vec{r}(2) = 4\vec{i} + 4\vec{j}$ y damos un incremento de 0.4 seg a t :

$$\vec{r}(t + \Delta t) = \vec{r}(2.4) = 4.8\vec{i} + 5.76\vec{j}$$

veremos que el vector cambia en magnitud y dirección y por ello su cambio debe ser medido por otro vector:

$$\Delta \vec{r} = \vec{r}(2.4) - \vec{r}(2) = 4.8\vec{i} + 5.76\vec{j} - 4\vec{i} - 4\vec{j} = 0.8\vec{i} + 1.76\vec{j}$$

como el cambio se efectuó en 0.4 seg, esto nos da la rapidez del cambio, o sea la velocidad media de la partícula:

$$\frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = 2.199\vec{j}$$

Al tomar incrementos cada vez menores, nos aproximamos más a la rapidez instantánea de cambio, acercándonos al límite; para esto utilizaremos un incremento cualquiera Δt :

3.19

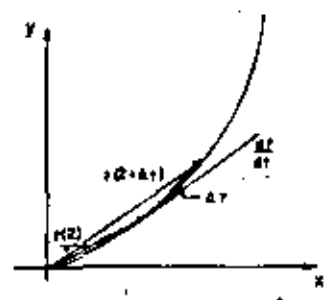


Fig. 3.4.1.

$$\begin{aligned} \Delta \vec{r} &= \vec{r}(2+\Delta t) - \vec{r}(2) = \\ &= 2(2+\Delta t)\vec{i} + (2+\Delta t)^2\vec{j} - 4\vec{i} - 4\vec{j} \\ &= 2\Delta t\vec{i} + (4\Delta t + \Delta t^2)\vec{j} \\ \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} &= 2\vec{i} + (4 + \Delta t)\vec{j} \\ \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} &= 2\vec{i} + 4\vec{j} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}(t) = \dot{\vec{v}} = \dot{\vec{r}} \end{aligned}$$

Si calculamos la pendiente de la tangente, a la trayectoria dada por las ecuaciones $x=2t$, $y=t^2$, o sea $y=4x^2$, tendremos, ya que para

$t=2, x=4: \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} \Big|_{x=4} = 2$

que es la misma que la del vector $\frac{d\vec{r}}{dt} \Big|_{t=2}$; por lo tanto este vector es tangente a la trayectoria, según se ilustra en la figura 3.4.1

El procedimiento que hemos seguido, ya lo habrás identificado como la regla de los 4 pasos de la derivación, solo que aplicada ahora a funciones vectoriales.

Definición 3.2.1
 Si $\vec{u}(t)$ es una función vectorial cualquiera de variable real, y existe $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{u}(t+\Delta t) - \vec{u}(t)}{\Delta t}$ se dice que la función $\vec{u}(t)$ es derivable, y al límite obtenido se le llama "derivada de la función vectorial" y se denota por $\frac{d\vec{u}}{dt}, \dot{\vec{u}}(t)$.

cuando la variable t es el tiempo se usa $\dot{\vec{u}}$

La propiedad de tangencia del vector velocidad o simplemente del vector derivada, es general para cualquier tipo de función susceptible de ser representada por una curva en E^2 o en E^3

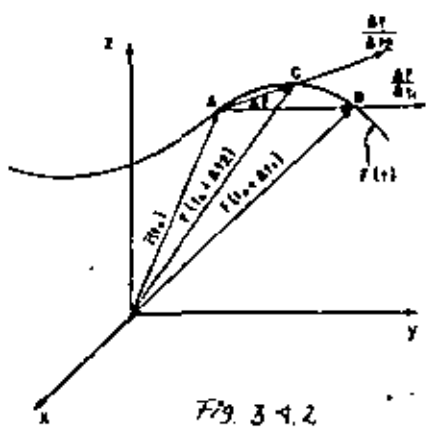


Fig. 3.4.2

Así en la fig 3.4.2, el valor inicial de t , genera el vector de posición $\vec{r}(t_0)$ en el punto A; un incremento de $t: \Delta t_1$, definirá al punto B y al mismo tiempo al vector $\vec{AB} = \Delta \vec{r}$. La división de este vector $\Delta \vec{r}$ entre el escalar Δt_1 , dará el vector secante $\frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t_1}$.

A otro incremento $\Delta t_2 < \Delta t_1$, se definirá el punto C y le corresponderá un vector secante $\frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t_2}$, que,

obviamente es más cercano a la tangente en A que $\frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t_1}$; si se prosigue así, dando incrementos cada vez más pequeños a la variable independiente "t", se avanzará a la tangente en el límite.

Por la propiedad ya demostrada de que el límite de una función vectorial está compuesto por los límites de las funciones componentes, se puede afirmar que la derivada de una función vectorial está compuesta por las derivadas de las funciones componentes. Así para la función 3.1.2.1. veremos al ejemplo siguiente:

Ejemplo 3.4.2. - Hallar la derivada de

$$r(t) = 2ti + t^2j$$

$$r(t+\Delta t) = 2(t+\Delta t)i + (t+\Delta t)^2j$$

$$\Delta r = 2(t+\Delta t)i + (t+\Delta t)^2j - 2ti - t^2j$$

$$\Delta r = 2\Delta t i + (2t\Delta t + (\Delta t)^2)j$$

$$\frac{\Delta r}{\Delta t} = 2i + 2tj + \Delta t j$$

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta r}{\Delta t} = r'(t) = 2i + 2tj$$

$$r'(t) \Big|_{t=2} = 2i + 2(2)j = 2i + 4j$$

Ejemplo 3.4.3. - Hallar la derivada de

$$r(t) = i \sin t - i \cos t^2 + e^t k$$

$$r'(t) = i \cos t + 2t i \sin t + e^t k$$

Ejemplo 3.4.4. Dado $r(t) = \ln(t+e)i - \tan t j + \sec t k$, hallar $r'(0)$.

$$r'(t) = \frac{1}{t+e} i - \sec^2 t j + \sec t \tan t k$$

$$r'(0) = e^{-1} i - j$$

Es decir que una curva es suave si tiene tangente única y definida en todos sus puntos; matemáticamente esto significa que la función representada por una curva debe ser derivable en todos, cada uno de sus puntos.

Ejemplo 3.4.5

La función $r(t) = 3t^2i + t^3j$ es derivable para todo valor de t , luego se trata de una curva suave.

Ejemplo 3.4.6

La función $r(t) = (t - \cos t)i + (t - \sin t)j$ no es derivable en $t=0$. En efecto,

$$r'(t) = (1 - \cos t)i + (1 + \sin t)j$$

$$r'(0) = 0i + 0j \text{ que no define dirección.}$$

Esta curva, la cicloide, fig. 3.4.3

es seccionalmente suave en el intervalo $0 < t < 2\pi$.

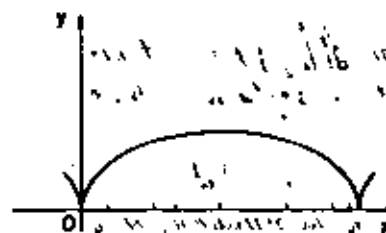


Fig. 3.4.3.

Si hubiéramos seguido la regla de los 4 pasos, hubiéramos encontrado vectores tangentes diferentes en $t=0$, según hubiéramos derivado por la derecha o por la izquierda.

Si $r(a) = r(b)$ para $a \neq b$, digamos que se trata de una curva cerrada. Si en tal caso se tiene $r'(a) = r'(b)$ se trata de una curva cerrada simple.

Ejemplo 3.4.7

La función $r(t) = \sin t^2i + 2\cos t^2j + 3 \tan t k$ es una curva cerrada simple; en efecto, ya vimos que

$$\begin{aligned} \vec{r}(0) &= \vec{r}(2\pi) = 3\vec{i} \\ \vec{r}'(t) &= \cos t \vec{i} + \sin t \vec{j} - 3\sin t \vec{k} \\ \vec{r}'(0) &= \vec{i} + 3\vec{j} \\ \vec{r}'(2\pi) &= \vec{i} + 3\vec{j} \end{aligned}$$

Lo contrario ocurre con la curva de la Fig. 3.19 llamada Lema de Pascal, que es una curva cerrada en el plano; en efecto, su ecuación vectorial es

$$\vec{r}(t) = (5 \cos t + 3) \cos t \vec{i} + (5 \cos t + 2) \sin t \vec{j}$$

En donde

$$\vec{r}(12.57) = 0$$

$$\text{y } \vec{r}(233.2) = 0$$

Por otra parte, derivando y simplificando:

$$\vec{r}'(t) = -(5 \sin t + 3 \sin t) \vec{i} + (3 \cos t + 2 \cos t) \vec{j} \quad \vec{r}'(233.2)$$

$$\vec{r}'(12.57) = 2.4 \vec{i} - 3.2 \vec{j}$$

$$\vec{r}'(233.2) = -2.4 \vec{i} - 3.2 \vec{j}$$

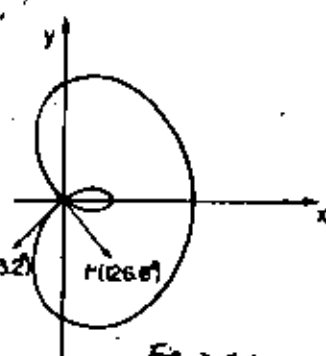


Fig. 3.19

Con lo anterior es posible deducir fórmulas para derivar combinaciones de funciones vectoriales.

Sean $\vec{u}(t)$, $\vec{v}(t)$ y $\vec{w}(t)$ funciones vectoriales y $f(t)$ una función escalar, entonces: $\frac{d}{dt} [f(t)\vec{v}(t)] = f \frac{d\vec{v}}{dt} + \vec{v} \frac{df}{dt}$... 3.4.1.1

Demostración:

$$\vec{r}(t) = f(t)\vec{v}(t)$$

$$\vec{r}(t) + \Delta \vec{r}(t) = f(t + \Delta t)\vec{v}(t + \Delta t)$$

$$\Delta \vec{r} = f(t + \Delta t)\vec{v}(t + \Delta t) - f(t)\vec{v}(t)$$

$$\frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{f(t + \Delta t)\vec{v}(t + \Delta t) - f(t)\vec{v}(t)}{\Delta t}$$

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(t + \Delta t)\vec{v}(t + \Delta t) - f(t)\vec{v}(t)}{\Delta t}$$

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt} [f(t)\vec{v}(t)] = f \frac{d\vec{v}}{dt} + \vec{v} \frac{df}{dt}$$

Las siguientes fórmulas se dejaron al alumno para su demostración:

$$\frac{d}{dt} [\vec{u}(t) \cdot \vec{v}(t)] = \vec{u}(t) \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} + \vec{v}(t) \cdot \frac{d\vec{u}}{dt} \quad 3.4.2$$

$$\frac{d}{dt} (\vec{u} \times \vec{v}) = \vec{u} \times \frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{d\vec{u}}{dt} \times \vec{v} \quad \dots \quad 3.4.3$$

$$\frac{d}{dt} (\vec{u} \cdot \vec{v} \times \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} \times \frac{d\vec{w}}{dt} + \vec{u} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} \times \vec{w} + \vec{u} \cdot \vec{v} \times \frac{d\vec{u}}{dt} \quad 3.4.4$$

$$\frac{d}{dt} [(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w}] = (\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \frac{d\vec{w}}{dt} + \frac{d\vec{u}}{dt} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) + \vec{u} \cdot \left(\frac{d\vec{v}}{dt} \times \vec{w} \right) + \vec{u} \cdot (\vec{v} \times \frac{d\vec{w}}{dt}) \quad 3.4.5$$

$$\frac{d}{dt} [f \vec{a}] = f \frac{d\vec{a}}{dt} + \frac{df}{dt} \vec{a} \quad \dots \quad 3.4.6$$

Teorema 3.4.1 Es condición necesaria y suficiente para que una función vectorial $\vec{r}(t)$ sea de módulo constante que:

$$\vec{r} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = 0 \quad 3.4.7$$

Demostración. Supongamos que $|\vec{r}| = cte$

así $\vec{r}^2 = |\vec{r}|^2 = \vec{r} \cdot \vec{r} = cte$

$$\frac{d}{dt} (\vec{r} \cdot \vec{r}) = 2\vec{r} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = 0$$

$$\vec{r} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = 0$$

Condición suficiente: supongamos que $\vec{r} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = 0$

lo anterior puede deberse a dos causas principales:

1) que $\vec{r} = 0$

2) $\frac{d\vec{r}}{dt} = 0$

En el primer caso implica que la magnitud $|\vec{r}| = 0 = cte$

y en el segundo implica que el vector es constante en módulo y dirección; fuera de estos casos, si $\vec{r} = \vec{r}(x_1, x_2, \dots, x_n)$

entonces $\vec{r} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = 0 = x_1 \cdot \frac{dx_1}{dt} + x_2 \cdot \frac{dx_2}{dt} + \dots + x_n \cdot \frac{dx_n}{dt}$ 3.418

además $\frac{d|\vec{r}|}{dt} = \frac{x_1 \frac{dx_1}{dt} + x_2 \frac{dx_2}{dt} + \dots + x_n \frac{dx_n}{dt}}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}}$

y tomando en cuenta (3.418)

$$\frac{d|\vec{r}|}{dt} = 0 \quad \text{q.q.d.d.}$$

Una demostración inmediata y evidente de lo anterior se tiene en E^2 y E^3 ya que el cumplimiento de 3.418 implica la perpendicularidad obligatoria entre \vec{r} y su derivada, lo cual solo puede ocurrir si la extremidad de la función describe una circunferencia, esto es, si su módulo es constante.

Teorema 3.42 Es condición necesaria y suficiente, para que una función vectorial $\vec{r}(t)$ mantenga su dirección constante que: $\vec{r} \times \frac{d\vec{r}}{dt} = 0$ 3.419

Demostración: Condición necesaria. Si $\vec{r}(t)$ es constante en dirección: $\vec{r}(t) = |\vec{r}| \vec{e}$ donde \vec{e} es un vector unitario constante, entonces $\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d|\vec{r}|}{dt} \vec{e}$ que es un vector paralelo a \vec{r} ; así: $\vec{r} \times \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{r} \times \frac{d|\vec{r}|}{dt} \vec{e} = \frac{d|\vec{r}|}{dt} \vec{r} \times \vec{e} = 0$

Condición suficiente: si $\vec{r} \times \frac{d\vec{r}}{dt} = 0$ puede suceder que alguno de los factores sea nulo, que es el caso trivial, por lo que nos ocuparemos del caso en que no sea así.

sabemos que $\vec{r} = |\vec{r}| \vec{e}$ y trataremos de demostrar que \vec{e} es un vector constante, así si derivamos:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = |\vec{r}| \frac{d\vec{e}}{dt} + \frac{d|\vec{r}|}{dt} \vec{e}$$

ahora efectuando el producto:

$$\vec{r} \times \frac{d\vec{r}}{dt} = 0 = |\vec{r}| \vec{r} \times \frac{d\vec{e}}{dt} + \frac{d|\vec{r}|}{dt} \vec{r} \times \vec{e}$$

donde sabemos que el segundo sumando del lado derecho de la igualdad es cero; ahora para que $\vec{r} \times \frac{d\vec{e}}{dt} = 0$ se necesita que: a) $\frac{d\vec{e}}{dt}$ sea paralelo a \vec{r}

b) $\frac{d\vec{e}}{dt} = 0$

por el teorema 3.42, sabemos que $\frac{d\vec{e}}{dt}$ es perpendicular a \vec{e} y por tanto a \vec{r} ; lo anterior no puede ser, ya que dos vectores no pueden ser simultáneamente paralelos y perpendiculares, por lo que se descarta la posibilidad a) y se acepta que: $\frac{d\vec{e}}{dt} = 0$ lo que implica que \vec{e} es un vector constante en módulo y dirección.

Cabe aclarar que las fórmulas 3.411, 3.412 y 3.416, son válidas en cualquier número de dimensiones, en tanto que 3.413, 3.414 y 3.415 sólo son válidas en espacios físicos (E^1 o E^3); asimismo el teorema 3.41 es válido en cualquier espacio Euclidiano, en cambio el 3.42 sólo se aplica en espacios físicos.

Cuando la variable representa específicamente el arco de curva, se puede lograr una interpretación geométrica de

la derivada similar a la que se obtuvo al principio de este inciso, lo que te dejamos como ejercicio (Haz $\vec{r} = 1t^2\vec{e}$ y sigue los 4 pasos de la derivación).

3.4.2 Derivadas Sucesivas

Ejemplo 3.4.5

Si se vuelve a considerar la función 3.1.21 $\vec{r}(t) = 2t\vec{i} + t^2\vec{j}$ y se evalúa su derivada para $t=1$ y $t=2$, tendremos:

$$\vec{v}(1) = 2\vec{i} + 2\vec{j}$$

$$\text{y } \vec{v}(2) = 2\vec{i} + 4\vec{j}$$

como ves, la velocidad obtenida ha respondido al cambio en el tiempo y ha variado tanto en magnitud como en sentido, como se representa en la fig. 3.4.5; la rapidez de cambio de la velocidad, mejor conocida como "aceleración", se obtiene dividiendo el vector incremento de velocidad entre el incremento de tiempo y tomando el límite de dicho cociente, cuando el divisor tiende a cero.

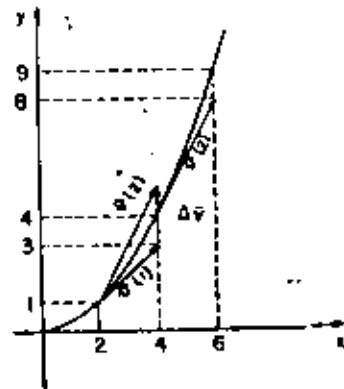


Fig. 3.4.5.

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \text{ y como puedes}$$

calcular para el caso expuesto $\vec{a} = \frac{d}{dt}(2\vec{i} + 2t\vec{j}) = 2\vec{j}$

Si ahora se diese el caso de que la aceleración también cambiase con un cambio en el tiempo, se obtendría una rapidez de cambio de la aceleración, esto es, una aceleración de la

aceleración; matemáticamente vendría a ser la tercera derivada de $\vec{r}(t)$, esto es.

$$\vec{a}' = \frac{d\vec{a}}{dt} = \frac{d^3\vec{r}}{dt^3} = \frac{d^3\vec{r}}{dt^3}$$

y para el caso tratado $\vec{a}' = 0$

Como te habrás dado cuenta, cada nueva derivada define en general una nueva función de la variable independiente y mientras esa función sea derivable, será posible encontrar la derivada de orden superior; así pues las derivadas de orden superior se obtienen igual que para funciones escalares, esto es, calculando la derivada de la derivada.

$$\frac{d^n(u(t))}{dt^n} = \frac{d}{dt} \left(\frac{d^{n-1}u(t)}{dt^{n-1}} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{d}{dt} \left(\frac{d^{n-2}u(t)}{dt^{n-2}} \right) \right) = \dots \quad 3.4.2.1$$

3.4.3 Diferencial Ordinario

Si se considera nuevamente la función 3.1.21 para los dos tiempos 2 y 2.1 segs, tendremos:

$$\vec{r}(2) = 4\vec{i} + 4\vec{j}$$

$$\vec{r}(2.1) = 4.2\vec{i} + 4.41\vec{j}$$

$$\Delta\vec{r} = 0.2\vec{i} + 0.41\vec{j}$$

donde se ve que ambas componentes $x(t)$, $y(t)$ sufrieron incrementos; como el incremento de la variable independiente "t" es pequeño (0.1) se pueden calcular aquéllos en forma aproximada por medio de diferenciales, así:

$$\Delta x \doteq dx = 2dt = 2(0.1) = 0.2$$

$$\Delta y \doteq dy = 2t dt = 2(2)(0.1) = 0.4$$

como puede observarse, estos incrementos corresponden apro-

inmediatamente con los componentes del incremento de la función \vec{r} ; al vector compuesto por estas dos diferenciales se le llama diferencial de la función vectorial; para que ésta exista se requiere que la función sea diferenciable, lo que se define como sigue

Definición. 3.4.2 Una función $\vec{r}[x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)]$ es diferenciable en $t=t_0$ si y sólo si, su incremento puede escribirse como:

$$\Delta \vec{r} = [x'_1(t_0)\Delta t + \eta_1\Delta t]\vec{e}_1 + [x'_2(t_0)\Delta t + \eta_2\Delta t]\vec{e}_2 + \dots + [x'_n(t_0)\Delta t + \eta_n\Delta t]\vec{e}_n \quad 3.4.2.1$$

donde $\vec{r} \cdot \vec{e}_i = x_i(t)$
 $\eta_i \rightarrow 0$
 si $\Delta t \rightarrow 0, \forall i$

Ahora bien, sabemos que la función 3.1.2.1 es diferenciable en $t=2$ ya que:

$$\Delta \vec{r} = [z(t+\Delta t) - zt]\vec{i} + [(t+\Delta t)^2 - t^2]\vec{j} = 2\Delta t\vec{i} + (2t\Delta t + \Delta t^2)\vec{j}$$

o bien: $\Delta \vec{r} = (2\Delta t + 0\Delta t)\vec{i} + (4\Delta t + \Delta t\Delta t)\vec{j}$
 donde: $0 = 0$ y $\Delta t \rightarrow 0$
 si $\Delta t \rightarrow 0$ y si $\Delta t \rightarrow 0$

Puesto que los paréntesis rectangulares de 3.4.3.1, contienen los incrementos de las funciones componentes, se sigue inmediatamente que una función vectorial será diferenciable si y sólo si lo son todas sus componentes. Por lo mismo, podemos afirmar que para que una función vectorial de variable real sea diferenciable es necesario y suficiente que sea derivable.

Definición 3.4.3 Se llama diferencial de una función vectorial $\vec{r}[x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)]$ a la expresión

$$d\vec{r} = x'_1(t)dt\vec{e}_1 + x'_2(t)dt\vec{e}_2 + \dots + x'_n(t)dt\vec{e}_n \quad 3.4.3.1$$

donde $\vec{r} \cdot \vec{e}_i = x_i(t)$
 o bien $d\vec{r} = [x'_1(t)\vec{e}_1 + x'_2(t)\vec{e}_2 + \dots + x'_n(t)\vec{e}_n] dt \quad 3.4.3.2$

puede observarse que la expresión entre paréntesis es la derivada de $\vec{r}(t)$ por lo que:

$$d\vec{r} = \vec{r}'(t)dt$$

que tiene la misma forma que la diferencial de una función real; o bien, puesto que

$$x'_i(t)dt = d(x_i), \quad d\vec{r} = [dx_1, dx_2, \dots, dx_n]$$

en la función 3.1.2.1, que ya vimos es diferenciable en $t=2$, su diferencial vale $d\vec{r} = (2z+4j)dt = 2dt\vec{i} + 4dt\vec{j}$; si $\Delta t = dt = 0.1$, $d\vec{r} = 0.2\vec{i} + 0.4\vec{j}$.

3.5 Fórmulas de Frenet Serret

Como una importante aplicación del cálculo vectorial, veremos el comportamiento de una curva en el espacio, a través del análisis de algunas de sus características geométricas, y de su aplicación a algunos problemas de la mecánica.

3.5.1 Longitud de Arco como Parámetro.

Como recordarás de la sección 3.3, el arco de una curva "s" también puede ser usado como parámetro en lugar del tiempo "t", por ello sólo añadiremos que este pará-

metro revela características intrínsecas de las curvas y por lo mismo comparables en cualquier clase de ellas.

Como hasta ahora para referirnos a una curva vectorialmente hemos buscado representarla a través de un parámetro cualquiera, es preciso ver si al usar el arco de curva "s" como nuevo parámetro, existe un solo vector de posición para cada valor de "s".

Para efecto de ilustración, si usamos el ejemplo de la sección 31.2 : $r(t) = 2t^2i + t^2j$ podemos hacer la representación siguiente:

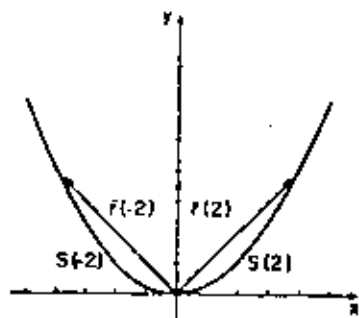


Fig. 3.5.1

Vemos en la fig 3.5.1, que para un cierto valor de "t", le corresponde un vector $\vec{r}(t)$, pero también un arco de curva $s(t)$, siempre y cuando tengamos un origen para medir el arco.

Sabemos que la longitud de arco se puede calcular mediante la fórmula:

$$s(t) = \int \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

$$\text{así para } t=2 \quad s(2) = \int_{0,0}^{2,4} \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

$$\text{como } dx = 2t dt; \quad dy = 2t dt$$

$$s(t) = \int \sqrt{4dt^2 + 4t^2 dt^2} = 2 \int \sqrt{t^2 + t^4} dt$$

$$\text{al integrar obtenemos } s(2) = \frac{1}{2} [t\sqrt{t^2+1} + L(\sqrt{t^2+1} + t)] = 2.95788$$

La solución general, en este caso es $s(t) = \frac{1}{2} [t\sqrt{t^2+1} + L(\sqrt{t^2+1} + t)]$ 35.11 respetando el signo que resulte, pero de otro modo no se podrá usar "s" como parámetro de una función vectorial, es decir, no podemos considerar las longitudes de arco siempre como positivas. Se ve claramente en la fig 3.5.1, que si le quitamos el signo a la longitud de arco 2.95788 le corresponderían dos valores de t (2 y -2) y dos vectores de posición $\vec{r} = 4i + 4j$ y $\vec{r} = -4i + 4j$.

3.52 Variación de una Función Vectorial con Respecto al Arco de Curva.

De la ecuación 35.1.1 puede verse que "s" es función de "t" y puesto que $\frac{ds}{dt} = 2\sqrt{t^2+1}$, es obvio que también es posible la función inversa; sin embargo, el despejar a "t" es engorroso, excepto en el caso de una circunferencia, como pueden ver en seguida:

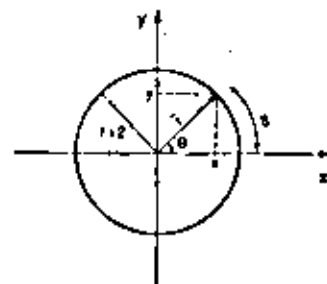


Fig 3.5.2

Consideremos que una partícula se mueve sobre la circunferencia de radio igual a dos y con una velocidad angular de 60 r.p.m.

De la fig. 3.5.2 se ve que:

$$x = 2 \cos \theta$$

$$y = 2 \sin \theta$$

$$\text{además } 60 \text{ r.p.m.} = \frac{2\pi \cdot 60}{2\pi} = 60 \text{ o bien}$$

$$\theta = 2\pi t$$

(arco = radio · ángulo); como $\theta = \frac{\pi}{2}$ entonces:

$$\vec{r}(t) = 2 \cos 2\pi t \vec{i} + 2 \sin 2\pi t \vec{j} \quad 3.5.2.1$$

$$\vec{r}(s) = 2 \cos \frac{s}{2} \vec{i} + 2 \sin \frac{s}{2} \vec{j} \quad 3.5.2.2$$

Observando 3.5.2.2 podemos ver que su derivada es

$$\frac{d\vec{r}}{ds} = -\sin \frac{s}{2} \vec{i} + \cos \frac{s}{2} \vec{j} \quad 3.5.2.3$$

que es tangente a la circunferencia, ya que es perpendicular al vector posición \vec{r} , pero además es unitario como puede comprobarse con su módulo.

Si ahora, generalizamos para cualquier curva encontraremos lo siguiente:

$$\Delta \vec{r} = |\Delta \vec{r}| \vec{e} \quad \text{donde } |\vec{e}| = 1$$

$$\text{así } \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta s} = \frac{|\Delta \vec{r}|}{\Delta s} \vec{e}$$

si tomamos el límite:

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta s} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{|\Delta \vec{r}|}{\Delta s} \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \vec{e}$$

El primer límite es el de la relación cuerda/arco y es igual a la unidad, y el del segundo es el de un vector

siempre unitario y alojado en $\Delta \vec{r}$, que como sabemos viene a ser un vector tangente a la curva, a este vector se le acostumbra designar por \vec{T} (Fig 3.5.3): $\frac{d\vec{r}}{ds} = \vec{T}$

Si ahora tomamos la ecuación 3.5.2.1 y derivamos con respecto al tiempo, obtendremos el vector \vec{v} , definido como velocidad

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = -4\pi \sin 2\pi t \vec{i} + 4 \cos 2\pi t \vec{j} \quad 3.5.2.4$$

Al módulo de \vec{v} se le llama rapidez y es igual en este caso a:

$$|\vec{v}| = \sqrt{16\pi^2 \sin^2 2\pi t + 16\pi^2 \cos^2 2\pi t} = 4\pi \sqrt{\sin^2 2\pi t + \cos^2 2\pi t} = 4\pi$$

ahora bien:

$$\vec{T} = \frac{d\vec{r}}{ds} = \frac{d\vec{r}}{dt} \frac{dt}{ds} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} \quad 3.5.2.5$$

En general \vec{v} se define en términos del tiempo:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{ds} \frac{ds}{dt} = \vec{T} \frac{ds}{dt} \quad 3.5.2.6$$

y ya que \vec{T} es un vector unitario, entonces el escalar $\frac{ds}{dt}$ será el módulo de la velocidad, o sea, la rapidez con que una partícula recorre una curva dada. Entonces, para este caso:

$$\vec{v} = \vec{T} |\vec{v}| = \vec{T} \frac{ds}{dt}, \quad \text{además como } \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}; \quad |\vec{v}| = \left| \frac{d\vec{r}}{dt} \right| = \frac{ds}{dt}$$

en este caso $\vec{v} = 4\pi \vec{T}$

Si ahora derivamos por segunda vez la ecuación

$$\text{obtenemos: } \frac{d^2\vec{r}}{ds^2} = \frac{d\vec{T}}{ds} = -\frac{1}{2} \cos \frac{s}{2} \vec{i} - \frac{1}{2} \sin \frac{s}{2} \vec{j} \quad 3.5.2.7$$

Y multiplicando escalarmente 3.5.2.5 con 3.5.2.7 observamos que:

$$\vec{T} \cdot \frac{d\vec{T}}{ds} = 0$$

lo cual era de esperarse según el teorema 3.4.1, puesto que \vec{T} tiene módulo constante; esta propiedad se cumple independiente del tipo de curva.

Por lo anterior, $\frac{d\vec{T}}{ds}$ resulta perpendicular a la curva y dirigido hacia el centro de la misma, dado que las componentes de 3.5.2.7 sólo difieren de 3.5.2.2 en un escalar y el signo.

Puede observarse que el módulo del vector $\frac{d\vec{T}}{ds}$ es, en el caso del problema que estamos tratando igual a $1/2$, o sea el reci-

proca del radio. Si consideramos al vector \vec{N} como un vector unitario alojado en 3.2.5 podemos escribir:

$$\vec{N} = -\cos \frac{s}{\rho} \hat{i} - \sin \frac{s}{\rho} \hat{j}, \text{ o sea } \frac{d\vec{T}}{ds} = \frac{1}{\rho} \vec{N} \dots 3.5.2.8$$

donde ρ es el radio de la circunferencia. En cualquier caso puesto que ya vimos que $\frac{d\vec{T}}{ds}$ es perpendicular a \vec{T} , éste siempre será paralelo a \vec{N} , por lo que 3.5.2.8 es una expresión general, y se la conoce como primera fórmula de Frenet-Serret.

3.5.3 Relación entre los Vectores \vec{T} y \vec{N} .

Si se desira la ecuación 3.5.2.4 obtendremos, según lo visto en la sección 3.4.5 :

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -v^2 \cos 2\pi t \hat{i} - v^2 \sin 2\pi t \hat{j} \text{ donde}$$

\vec{a} es la aceleración de la partícula y al proyectar \vec{a} sobre \vec{T} obtenemos: $\vec{a} \cdot \vec{T} = 0$

o sea, que no hay proyección de la aceleración a lo largo de \vec{T} , lo cual significa que la partícula no se acelera tangencialmente. Esto es de esperarse, ya que la velocidad angular es constante.

Si ahora se proyecta \vec{a} sobre \vec{N} :

$$\vec{a} \cdot \vec{N} = v^2 \cos 2\pi t \cos \frac{s}{\rho} + v^2 \sin 2\pi t \sin \frac{s}{\rho}$$

si recordamos que $2\pi t - 0 = \frac{s}{\rho}$

$$\vec{a} \cdot \vec{N} = v^2 (\cos^2 \frac{s}{\rho} + \sin^2 \frac{s}{\rho}) = v^2 = \frac{16\pi^2}{2} = \left(\frac{4\pi}{2}\right)^2$$

vemos que la partícula si tiene aceleración normal y según puede observarse en el caso de la circunferencia, esta

aceleración es igual al cuadrado de la velocidad (ver 3.5.1.4) entre el radio de la circunferencia. (Recuerda que $v^2 = |\vec{v}|^2$)

En general puede expresarse que:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}; \quad \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{ds} \frac{ds}{dt} = \vec{T} \frac{ds}{dt}$$

$$\vec{a} = \vec{T} \frac{d^2s}{dt^2} + \frac{ds}{dt} \frac{d\vec{T}}{dt}, \text{ y como } \frac{d\vec{T}}{dt} = \frac{d\vec{T}}{ds} \frac{ds}{dt}$$

tomando en cuenta 3.5.2.6

$$\vec{a} = \vec{T} \frac{d^2s}{dt^2} + \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 \frac{1}{\rho} \vec{N}$$

$$\vec{a} = \vec{T} \frac{d^2s}{dt^2} + \frac{v^2}{\rho} \vec{N}$$

3.5.3.1

De esta ecuación se concluye que la aceleración está siempre en el plano formado por los vectores \vec{T} y \vec{N} y por lo mismo podrá descomponerse en aceleración normal y tangencial. Al plano formado por \vec{T} y \vec{N} se le ha llamado "Plano osculator".

Al reflexionar un poco sobre lo anterior, particularmente acerca de la ecuación 3.5.3.1 ¿cuál componente crees que sea la culpable de que un automóvil se vuelque o se salga de la curva? ¿Debes entrar a una curva frenando o acelerando? ¿A alta velocidad o a baja? ¿Cortar la curva invadiendo el otro carril? ¿Para qué? Esperamos que puedas responder a estas preguntas.

Represemos al ejemplo 3.1.21 donde tenemos

$$\vec{r}(t) = 2t \hat{i} + t^2 \hat{j}$$

y ya habíamos calculado $\vec{v}(t) = 2\hat{i} + 2t\hat{j}$

así como $\vec{a} = 2\vec{j}$

¿Cuáles serán las aceleraciones normal y tangencial en $t=2$?

Vamos a ver primero la aceleración tangencial, que obtendremos proyectando la aceleración total \vec{a} sobre el vector unitario \vec{T} . Este vector ya sabemos que es colineal con la velocidad por lo que:

$$\vec{T}(2) = \frac{2\vec{i} + 2\vec{j}}{\sqrt{4+4}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{i} + \frac{2}{\sqrt{2}}\vec{j}$$

$$\text{así } \vec{a}_t = (\vec{a} \cdot \vec{T})\vec{T} = \frac{4}{\sqrt{2}}\vec{T} = \frac{4}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{i} + \frac{2}{\sqrt{2}}\vec{j}\right) = \frac{4}{2}\vec{i} + \frac{8}{2}\vec{j}$$

$$|\vec{a}_t| = 1.739$$

Para obtener la aceleración normal proyectaremos \vec{a} sobre el vector unitario \vec{N} , para determinar este podemos recordar que:

$$\frac{d\vec{T}}{ds} = \frac{d\vec{T}}{dt} \frac{dt}{ds} = \frac{1}{\rho} \vec{N}$$

que nos dice que \vec{N} es paralelo a $\frac{d\vec{T}}{ds}$, por lo que bastará calcular esta derivada y dividir entre su módulo, para obtener \vec{N} . Para el cálculo de esta derivada recordemos que:

$$\vec{v}(t) = 2\vec{i} + 2t\vec{j}$$

$$\text{entonces } \vec{T}(t) = \frac{2\vec{i} + 2t\vec{j}}{\sqrt{4+4t^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\vec{i} + \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\vec{j}$$

Pero el cálculo de la derivada requerida se complica algebráicamente, y lo sería más aún si la ecuación de la curva fuese más complicada; de hecho sólo es sencilla cuando la curva es circular; afortunadamente podemos salvar esta dificultad recordando que \vec{N} debe ser perpendicular a \vec{T} y que ambos están en el plano xy.

$$\text{Entonces, si } \vec{T}(2) = \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{i} + \frac{2}{\sqrt{2}}\vec{j}$$

$$\vec{N}(2) = -\frac{2}{\sqrt{2}}\vec{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{j}$$

$$\text{o. } \vec{N}(2) = \frac{2}{\sqrt{2}}\vec{i} - \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{j}$$

Para deshacer esta ambigüedad de signo, recordemos que \vec{N} se dirige hacia el centro de la curva, por lo que la solución correcta es la primera. Así

$$\vec{a}_n = (\vec{a} \cdot \vec{N})\vec{N} = \frac{2}{\sqrt{2}}\left(-\frac{2}{\sqrt{2}}\vec{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{j}\right) = -\frac{4}{2}\vec{i} + \frac{2}{2}\vec{j}$$

$$|\vec{a}_n| = \frac{2\sqrt{5}}{2} = 0.894 = \frac{v^2}{\rho} \quad ; \quad \text{como } v^2 = (2/2)^2 = 20 \frac{m^2}{s^2}$$

$$\therefore \rho = \frac{20}{0.894} = 22.36 \text{ m.}$$

y ya que estamos en este punto del ejemplo, cabría preguntarnos ¿Si es una parábola la curva tratada, que significa ρ ?

Sabemos que, matemáticamente, según la ecuación 3.52.6, ρ es un número tal que su recíproco mide el módulo de $\frac{d\vec{T}}{ds}$. Físicamente podemos interpretarlo de la manera siguiente:

Si tangente a nuestra curva problema trazamos una circunferencia de radio ρ , dos partículas que se moviesen con la misma velocidad, una sobre la circunferencia y otra sobre la curva problema (Fig. 3.54) tendrían la misma aceleración en el punto de tangencia.

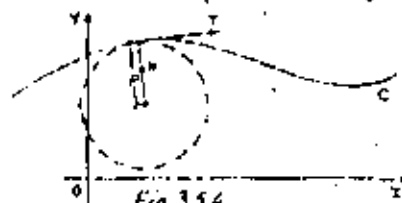


Fig. 3.54

Al círculo trazado en la forma descrita, se lo llama círculo osculador (del latín osculum que significa beso), y, a

su radio " ρ ", radio de curvatura.

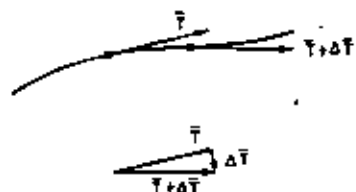
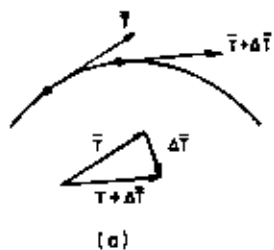


Fig. 3.5.5

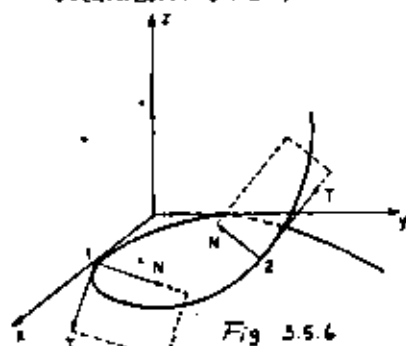
Consideremos además las curvas de la fig. 3.5.5. La curva "a" es "cerrada" lo que se traduce en un cambio fuerte de dirección de T en un pequeño arco recorrido. En cambio la curva (b) es "abierta" lo que se traduce en un menor cambio en la dirección de T al recorrer un arco de la misma longitud que en el caso de (a), por ello $|\frac{dT}{ds}|$ en la curva (a) es mayor que el módulo correspondiente en la curva (b), esto es, según 3.5.6 el radio de curvatura en (a) es menor que en (b); se dice también que la curva "a" tiene más curvatura que la (b), definiéndose curvatura como el recíproco del radio de curvatura.

$$\frac{dT}{ds} = \frac{1}{\rho} \bar{N} = K\bar{N}, \text{ donde } K (\text{Kappa}) \text{ igual a } \frac{1}{\rho} = \left| \frac{dT}{ds} \right|$$

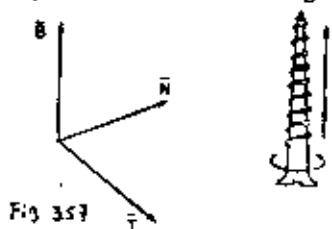
Huelga decir que si $K=0$ el vector T no cambia de dirección, y se trata de una línea recta.

3.5.4 Relaciones de T y N con el Vector Normal a Ambos.

Hemos visto como toda curva tendrá un vector tangente y otro vector normal a ella en cada punto, precisamente el plano osculador contiene a dichos vectores, y puede contener a toda la curva o solamente al punto donde se definen estos vectores, ¿Pero te has preguntado cómo saber si sucede una cosa u otra? A efectos de generalizar, vemos de la fig. 3.5.6 que los planos osculadores en el punto 1 y 2 no son los mismos, por lo cual



tendremos que desarrollar nuestra Matemática, a fin de que nos sirva para identificar dichos casos. Dado que se tienen dos vectores unitarios T y N en cada punto de la curva, su producto vectorial nos define otro nuevo vector B unitario, que por el hecho de ser perpendicular al plano de T y N , se le ha llamado vector binormal a la curva, para diferenciarlo del vector normal principal N . Cuando se sigue la regla de la mano derecha, el producto $T \times N$ nos indica que T avanza hacia N y el sentido de B , es congruente con el avance de un tornillo de rosca derecha, como en la fig. 3.57



así $\vec{T} \times \vec{N} = \vec{B}$ 3.5.4
 y $\vec{N} \times \vec{T} = -\vec{B}$

Como te habrás dado cuenta, con estos tres vectores tendremos a la vez definidos tres planos a saber: \vec{T}, \vec{N} formarán el plano "Osculador"; \vec{N}, \vec{B} obviamente, al ser los dos normales a la curva formarán el plano "Normal" y finalmente \vec{T} y \vec{B} forman el plano "Rectificador"; o sea que en cada punto de una curva tendremos constituido un triedro, tal como se muestra en la fig. 3.5.8

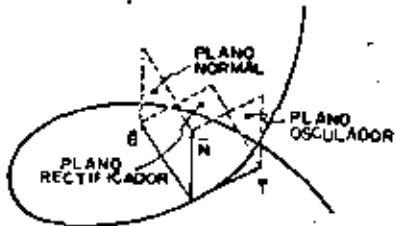


Fig. 3.5.8

Problema 3.5.1

A fin de ilustrar todo lo anterior y definir a la vez otro parámetro característico de las curvas se va a considerar la siguiente ley de movimiento de una partícula.

$\vec{r}(t) = t\vec{i} + \frac{2}{3}t^2\vec{j} + t^3\vec{k}$ 3.5.1a

de la cual se van a calcular la velocidad, la aceleración y sus componentes, tangencial y normal para $t=1$ seg (ft en metros y t en segundos).

$\vec{v}(t) = \dot{\vec{r}} = \vec{i} + 2t\vec{j} + 3t^2\vec{k}$; $v(t) = \sqrt{1+4t^2+9t^4}$
 $\vec{T} = \frac{\vec{v}}{v} = \frac{\vec{i} + 2t\vec{j} + 3t^2\vec{k}}{\sqrt{1+4t^2+9t^4}}$ 3.5.1b

$\vec{a}(t) = \dot{\vec{v}} = 2t\vec{j} + 6t\vec{k}$; $a(t) = \sqrt{4+36t^2}$
 $\vec{a}_T = (\vec{a} \cdot \vec{T})\vec{T} = \left(\frac{2t}{3}\right)\vec{T} = \frac{2t}{3} \left(\frac{\vec{i} + 2t\vec{j} + 3t^2\vec{k}}{\sqrt{1+4t^2+9t^4}}\right)$ 3.5.1c

$|\vec{a}_T| = \frac{2t}{3}$ 3.5.1d

Para calcular \vec{a}_N necesitamos previamente conocer al vector \vec{N} (de hecho se puede conocer \vec{a}_N por el teorema de Pitágoras

$|\vec{a}_N| = |\vec{a}| - |\vec{a}_T|$ pero sin conocer la dirección en que actúa)

Recordamos, que tanto la velocidad como la aceleración se alejan en el plano osculador, por ello el producto vectorial de ellos dará un vector paralelo a \vec{B} :

$\vec{v} \times \vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 2 \end{vmatrix} = -4\vec{i} - 2\vec{j} + 4\vec{k}$ 3.5.1e

$\vec{B} = \frac{-4\vec{i} - 2\vec{j} + 4\vec{k}}{\sqrt{16+4+16}} = \frac{-2\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}}{3}$ 3.5.1f

Ahora, si seguimos el sentido de giro que es el convencionalmente aceptado como positivo $\vec{T} \times \vec{N} = \vec{B}$ $\therefore \vec{N} = \vec{B} \times \vec{T}$

$\vec{N} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{\sqrt{1+4t^2+9t^4}} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = \frac{-6\vec{i} + 6\vec{j} - 3\vec{k}}{9} = \frac{-2\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}}{3}$ 3.5.1g

$\therefore |\vec{a}_N| = \vec{a} \cdot \vec{N} = \frac{2t}{3} = 2 \frac{ft}{seg^2}$ 3.5.1h

De acuerdo con las ecuaciones 3.5.2, 6 y 3.5.31

$\vec{v} \times \vec{a} = \frac{ds}{dt} \vec{T} \times \left(\frac{dv}{dt} \vec{T} + \frac{v^2}{\rho} \vec{N}\right)$
 $\vec{v} \times \vec{a} = \frac{v^3}{\rho} \vec{T} \times \vec{N} = \frac{v^3}{\rho} \vec{B}$ 3.5.1i

Precisamente de esta última ecuación podemos calcular la curvatura K o el radio de curvatura " ρ ".

$|\vec{v} \times \vec{a}| = \frac{v^3}{\rho}$; $\sqrt{4^2 + 2^2 + 4^2} = 3^2 \frac{1}{\rho}$

como $\frac{1}{\rho} = K$; $K = \frac{6}{27} = 0.222 \text{ m}^{-1}$ $\therefore \rho = \frac{1}{0.222} = 4.5 \text{ m}$
 también lo podemos calcular a través de

$|\vec{a}_N| = K v^2$, o sea $2 = 3^2 K \therefore K = 0.222 \text{ m}^{-1}$

3.5.5. Cálculo de la Torsión

Sabemos que por medio del vector binormal podemos definir matemáticamente al plano osculador, al cual queda expresado por la ecuación:

$$\vec{B} \cdot [r(t) - r(t_0)] = 0 \quad 3.5.5.1$$

y para el caso que estamos analizando

$$-\frac{2}{3}(x-1) - \frac{1}{3}(y - \frac{z}{2}) + \frac{2}{3}(z-1) = 0$$

o bien: $2x + y - 2z = 0$ para $t = t$ seg. ¿Pero cómo saber si este plano es el mismo para toda la curva? En tal caso la curva estaría alojada totalmente en un plano y se trataría de una curva plana; si no, se tratará de una curva alabeada.

Para averiguar lo anterior, únicamente tendremos que ver si \vec{B} es un vector constante en su dirección para cualquier tiempo; o sea, que utilizando otra vez el producto de $\vec{r} \times \vec{a}$, sólo que ahora sin substituir el tiempo igual a t ,

$$\vec{r}(t) \times \vec{a}(t) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2t^2 & 2t \\ 0 & 4t & 2 \end{vmatrix} = -4t^3 i - 2j + 2tk$$

$$\therefore \vec{B} = \frac{-4t^3 i - 2j + 2tk}{\sqrt{16t^6 + 4 + 4t^2}} = \frac{-2t^3 i - j + tk}{2t^3 + 1} \quad 3.5.5.2$$

veremos pues que para valores de t diferentes, tendremos diferentes planos osculadores y podemos concluir que la curva es alabeada.

De cualquier forma y para evitar que las relaciones expresadas en términos de t , pudieran resultar en una constante

emboscada, la forma más general y matemática para ver si \vec{B} cambia, es a través de su derivada con respecto a s o a t .

Si derivamos respecto a t a partir de la ecuación 3.5.5.1, el problema resulta muy laborioso debido a los cocientes; veamos pues la forma de derivar \vec{B} sin utilizar dicha expresión. Sabemos que $\vec{B} = \frac{\vec{r} \times \vec{a}}{|\vec{r} \times \vec{a}|}$

$$\text{o bien } \vec{r} \times \vec{a} = |\vec{r} \times \vec{a}| \vec{B} \quad 3.5.5.2$$

Si derivamos 3.5.5.2 con respecto a t

$$\vec{r} \times \frac{d\vec{a}}{dt} + \vec{a} \times \vec{r} = |\vec{r} \times \vec{a}| \frac{d\vec{B}}{dt} + \vec{B} \frac{d}{dt} |\vec{r} \times \vec{a}| \quad 3.5.5.3$$

al multiplicar 3.5.5.3 escalarmente por \vec{a} y recordar que $\vec{B} \perp \vec{a}$, tendremos:

$$\vec{r} \times \frac{d\vec{a}}{dt} \cdot \vec{a} = |\vec{r} \times \vec{a}| \frac{d\vec{B}}{dt} \cdot \vec{a} \quad 3.5.5.4$$

por otro lado, sabemos que $\vec{B} \cdot \frac{d\vec{B}}{dt} = 0$ ya que $|\vec{B}|$ es constante por lo que $\vec{B} \perp \frac{d\vec{B}}{dt}$ \therefore $\frac{d\vec{B}}{dt} \cdot \vec{a}$ 3.5.5.5

Si ahora consideramos $\vec{B} = \vec{T} \times \vec{N}$ y derivamos con respecto a t $\frac{d\vec{B}}{dt} = \vec{T} \times \frac{d\vec{N}}{dt} + \frac{d\vec{T}}{dt} \times \vec{N}$ como sabemos que $\frac{d\vec{T}}{dt} \times \vec{N} = \vec{0}$

$$\text{ya que } \frac{d\vec{T}}{dt} \text{ es paralelo a } \vec{N} \therefore \frac{d\vec{B}}{dt} = \vec{T} \times \frac{d\vec{N}}{dt} \quad 3.5.5.6$$

de esta última podemos concluir que $\frac{d\vec{B}}{dt}$ es perpendicular a \vec{T} , ya que el producto vectorial de dos vectores, es otro vector perpendicular a ambos.

Ahora bien si $\frac{d\vec{B}}{dt}$ es \perp a \vec{T} y de 3.5.5.5

$\frac{d\vec{B}}{dt}$ es \perp a \vec{B}

entonces $\frac{d\vec{B}}{ds}$ tiene que ser paralelo a \vec{N}

así: $\frac{d\vec{B}}{ds} = \frac{d\vec{B}}{dt} \frac{dt}{ds} = \frac{d\vec{B}}{dt} \frac{1}{|\vec{v}|}$ 3.5.57

o bien $\frac{d\vec{B}}{ds}$ será igual a un escalar multiplicado por \vec{N} .

o sea que el escalar que afecta al vector \vec{N} , nos da la medida del cambio del vector \vec{B} al recorrer la curva, así como el escalar k nos da la medida del cambio del vector \vec{T} ; a este nuevo escalar se le llama torsión y se le representa por la letra τ (tau). El nombre de torsión obviamente viene del torcimiento que sufre el plano osculador, al recorrer la curva en el sentido positivo de crecimiento de s ; convencionalmente se dice que las curvas alabeadas, semejantes a la cuerda de un tornillo de rosca derecha (Fig. 3.57) tienen torsión positiva; en tal caso $\frac{d\vec{B}}{ds}$ es contrario al vector \vec{N} , y tendremos (ver figura 3.59) $\frac{d\vec{B}}{ds} = -\tau \vec{N}$ 3.5.58

A la fórmula 3.5.58 se le conoce con el nombre de segunda fórmula de Frenet-Serret, y la medida de la torsión de una curva en un punto dado nos la dará el módulo del

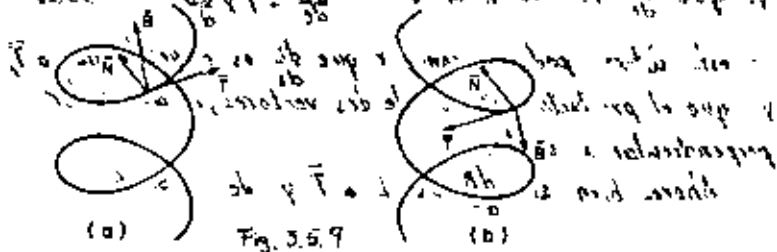


Fig. 3.59

vector $\frac{d\vec{B}}{ds}$, o sea τ ; naturalmente que el inverso de τ nos dará el radio de torsión de la curva, con una interpretación parecida a la efectuada para el radio de curvatura ρ .

Substituyendo 3.5.58 en 3.5.54 tendremos:

$\vec{v} \times \frac{d\vec{a}}{dt} \cdot \vec{a} = -|\vec{v}\vec{a}'| |\vec{v}| \tau \vec{N} \cdot \vec{a}$ 3.5.59

ya que $\frac{d\vec{B}}{ds} = \frac{d\vec{B}}{dt} \frac{dt}{ds} = -\tau \vec{N}$

Y como $\vec{N} \cdot \vec{a} = |\vec{a}'| \cos \alpha$ nos da $\alpha = 90^\circ + \tau s$ entonces podremos calcular de la ecuación 3.5.59 el parámetro τ si tenemos los abscisas arcos como al caso del ejemplo 3.5.11

así de 3.5.11 $\frac{d\vec{a}}{dt} = 4\vec{i}$ y como $\vec{v} \times \frac{d\vec{a}}{dt} \cdot \vec{a} = \vec{v} \times \vec{a} \cdot \frac{d\vec{a}}{dt} = (-4\vec{j} + 2\vec{k}) \cdot 4\vec{i} = 0$ entonces, como para el punto en estudio $|\vec{a}'| = 2$ y $|\vec{v}| = 2$ podemos afirmar con toda seguridad que la curva es alabeada, pues $\frac{d\vec{B}}{ds} \neq 0$.

Para hacer más general el procedimiento de cálculo de τ , podemos partir de:

$|\vec{v} \times \vec{a}'| = |\vec{v}| |\vec{a}'| \sin \theta = \tau |\vec{v}| |\vec{a}'|$ 3.5.10
 y de acuerdo con 3.5.26 y 3.5.31 $\tau = \frac{|\vec{v} \times \vec{a}'|}{|\vec{v}| |\vec{a}'|}$

o sea que de 3.5.10 y 3.5.12 $\tau = \frac{|\vec{v} \times \vec{a}'|}{|\vec{v}| |\vec{a}'|}$

Si ahora sustituimos este resultado en 3.5.5.9

$$\vec{v} = \vec{a} \cdot \frac{d\vec{a}}{ds} = |\vec{v} \cdot \vec{a}|^2 \vec{e}$$

de donde

$$\vec{e} = \frac{\vec{v} \cdot \vec{a} \cdot \frac{d\vec{a}}{ds}}{|\vec{v} \cdot \vec{a}|^2}$$

3.5.5.4

Finalmente, de $\vec{N} = \vec{B} \cdot \vec{T}$

$$\frac{d\vec{N}}{ds} = \vec{B} \cdot \frac{d\vec{T}}{ds} + \frac{d\vec{B}}{ds} \cdot \vec{T} = \vec{B} \cdot k\vec{N} - k\vec{N} \cdot \vec{T}$$

o sea

$$\frac{d\vec{B}}{ds} = k\vec{B} - k\vec{T}$$

3.5.5.5

expresión que se conoce con el nombre de tercera fórmula de Frenet-Serret

Cabe recalcar que las vectores \vec{T} , \vec{N} , y \vec{B} por ser linealmente independientes, constituyen una base en E^3 , con lo gran ventaja de que se trata de una base móvil, lo cual resulta muy adecuada y versátil para representar cualquier vector que se mueva con esa base, como es el caso de la velocidad y la aceleración.

3.6 Coordenadas Curvilíneas

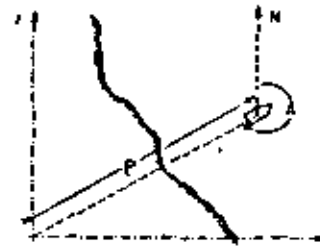


Fig. 3.6.1.

Se está llevando al cabo una exploración petrolera en el mar. Una lancha se coloca en un cierto punto, se toma una carga de explosivos y efectúa un sismograma; pasa enseguida a otro punto a realizar la misma tarea.

Naturalmente, cada sismograma debe quedar perfectamente ubicado. En este caso, el ingeniero que realiza la exploración coloca un emisor de ondas de radio en un punto fijo en tierra y se lleva en la lancha un receptor que, además, mide la dirección de donde vienen las ondas (radio goniómetro). Así, puede saber la distancia "p" a que se encuentra la lancha del emisor, en el momento de tomar el sismograma, y además el ángulo "A" de la línea que los une. (Ver fig. 3.6.1)

De esta manera, la localización de los puntos en el plano es sumamente sencilla; se puede hacer gráficamente (¿cómo?) o bien analíticamente, si se toma en cuenta que

$$x = \rho \sin(A - 180^\circ) = -\rho \sin A \quad \dots \quad 3.6.1.a$$

$$y = \rho \cos(A - 180^\circ) = -\rho \cos A \quad \dots \quad 3.6.1.b$$

El problema está en que los resultados urgen; en avión espera a que el ingeniero regrese a tierra, después de su diaria labor, para llevar lo realizado a las oficinas contra-

los de PEMER. Así, el ingeniero debe localizar los puntos en la tarjeta; pero allí no puede utilizar compás, escuadras, líneas portador, etc. y si se abren a calcular a bank las coordenadas cartesianas, retraza el resto del trabajo y realiza miles de diagramas por día, lo cual tampoco es admisible. ¿Qué puede hacer el ingeniero?

La solución no es complicada: simplemente, el ingeniero se lleva a bordo un papel como el mostrado en la fig. 3.6.2; en él ha señalado al punto donde se ubica el emisora en tierra, y ha definido la Dirección Norte. Además, ha trazado una sucesión

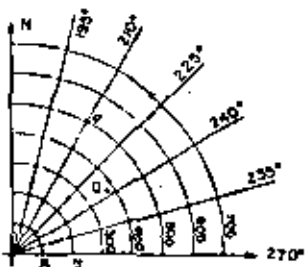


Fig. 3.6.2.

de círculos equidistantes (100 m, por ejemplo, a una cierta escala) y un conjunto de rectas concurrentes, se parecen entre sí por ángulos iguales (por ejemplo, 15°). Entonces, si lee como distancia 500 m y es el radiogoniómetro 210°, no tiene dificultad en ubicar el punto "F". Si como distancia lee 375 m y como azimut 235°, ubicará rápidamente el punto "G" y así sucesivamente.

El modo de posición de cualquier punto, en el espacio de dos dimensiones, requiere de los escalares para quedar definido; pero la idea inmanejable de posición, es única y no depende del modo que se usa para describirla; en otras palabras, los escalares NO tienen que ser necesariamente las con-

stantes del vector entre los ejes cartesianos, sino que pueden estar referidos a otro sistema coordenado cualquiera. El ingeniero de noche ejemplo inventa su propio sistema coordenado, que no es el cartesiano; puesto que las líneas en que la distancia (por una conveniente en el nuevo sistema) es constante, son curvas, este nuevo sistema es denominado sistema de coordenadas curvilíneas. A las ecuaciones 3.6.1 a y b que relacionan las nuevas coordenadas, se les llama "ecuaciones de transformación".

Ahora bien, la nueva pareja ordenada de números (ρ, θ) define, como ya dijimos, un vector de posición; de hecho define un nuevo espacio vectorial. Las ecuaciones 3.6.1 a y b garantizan que, a cada vector del nuevo espacio corresponde un solo vector del espacio cartesiano (Fig. 3.6.3). Estamos entonces en presencia de una función vectorial de variable vectorial, que transforma un vector \vec{q} de un espacio de dos dimensiones, en otro vector \vec{r} , de otro espacio de dos dimensiones.



Fig. 3.6.3

Podemos escribir

$$\vec{r} = E^2 \cdot \vec{q}$$

o también:

$$r_i = \rho \sin \theta_i - \rho \cos \theta_j$$

Se nos ocurre preguntarnos si la relación funcional actual también en sentido opuesto, es, es, si a cada vector \vec{r} se puede asignar un único vector \vec{q} . Estamos en posibilidad de contestar a esto si caemos en la cuenta de que (P, A) están expresados implícitamente en el sistema de 3.6.1.a y b; si este sistema las define como funciones implícitas de (x, y) , entonces a cada valor de \vec{r} corresponderá efectivamente un solo valor de \vec{q} .

Escribamos las ecs. 3.6.1.a y b como ya sabemos:

$$F = -\rho \cos A - x = 0$$

$$G = -\rho \sin A - y = 0$$

que deben cumplir las condiciones de las funciones implícitas 1.15.1.1 que, como recordamos, son tres; las dos primeras se cumplen obviamente; reamun si se cumple la tercera:

$$J \begin{pmatrix} F, G \\ \rho, A \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} -\cos A & -\rho \sin A \\ -\sin A & \rho \cos A \end{vmatrix} = -\rho$$

diferente de cero, en general, excepto en el origen; en efecto, a este valor no le corresponde un solo punto en el sistema (ρ, A) , sino todo el eje "A", lugar geométrico de los puntos en que $\rho = 0$. Cuando se tienen casos como éste, en que el jacobiano de trans-

formación, en general, diferente de cero, pero se anula en puntos especiales, a los que se denomina "puntos singulares".

En general, es bueno en libertad de escoger el sistema coordenado que más útil nos resulte para manejar el fenómeno que estamos representando. En cualquier caso, si estamos transformando un espacio de dos dimensiones en otro de dos dimensiones, tendremos, como función implícita:

$$\vec{r} = f(u, v) \text{ y } g(u, v)$$

que podemos escribir:

$$F = f(u, v) - x = 0 \quad 3.6.01$$

$$G = g(u, v) - y = 0 \quad 3.6.02$$

Para que la transformación inversa sea posible, es necesario que 3.6.01 y 3.6.02 se cumplan cuando: existan un punto; que f_u, f_v, g_u, g_v sean continuas en una región que contenga al punto, y que

$$J \begin{pmatrix} F, G \\ u, v \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} f_u & f_v \\ g_u & g_v \end{vmatrix} \neq 0 \quad 3.6.03$$

Podemos reescribir que

$$x_u = f_u$$

$$x_v = f_v$$

$$y_u = g_u$$

$$y_v = g_v$$

por lo que la última condición suelta expresarse como

$$J \begin{pmatrix} x, y \\ u, v \end{pmatrix} \neq 0 \quad 3.6.04$$

llamada jacobiano de transformación

Sobre estas bases, podemos idear un sistema de nuevas coordenadas cartesianas. Imaginemos que al originarse del ejem-

... plo anterior en vez de llevar los aparatos de medición en la lancha, los hubiese dejado en campo de paisesal de tierra, llevándose solamente el emisor de ondas de radio. En tal caso, este paiseral reportaria la distancia de la lancha y el ángulo que forma el recorrido de las ondas con una dirección fija "z". El sistema de coordenadas polares (Fig. 3.6.4) hubiese sido el más ventajoso; muy parecido al anterior, salvo en la denominación de las coordenadas angulares. Las ecuaciones de transformación ya las veremos:

$$r = \rho \cos \theta i + \rho \sin \theta j$$

$$J \left(\frac{z, \theta}{\rho, \theta} \right) = \rho$$

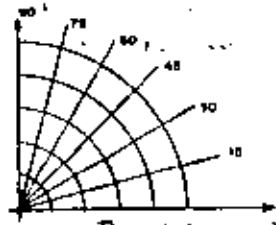


Fig. 3.6.4

Si la lancha se hubiese ubicado por medio de teodolitos colocados en dos puntos fijos: O_1 y O_2 , entonces el sistema coordenado más conveniente sería el de la fig. 3.6.5, cuyas ecuaciones de transformación, colocando el origen en O_1 y el eje x sobre O_1O_2 :

$$r = a \cos \theta_1 \cos \theta_2 i + a \cos \theta_1 \sin \theta_2 j$$

donde θ_1 es el ángulo medido por el teodolito en O_1 y θ_2 es el ángulo medido por el teodolito en O_2 . Demuestra que el jacobiano de transformación vale:

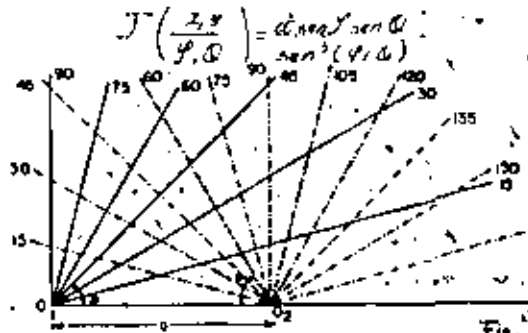


Fig. 3.6.5

Otra posibilidad en las condiciones bipolares (Fig. 3.6.6) ocurre cuando los puntos quedan ubicados por sus distancias a dos puntos fijos. Sus ecuaciones de transformación, haciendo coincidir el origen con O_1 y el eje x con O_1O_2 son:

$$u = \sqrt{a^2 - y^2} \dots 3.6.5$$

$$v = \sqrt{z^2 - a^2 + y^2} \dots 3.6.6$$

donde "a" es la distancia del punto a O_1 y "z" la distancia del mismo a O_2 .



Figura 3.6.6

Podemos demostrar también que:

$$J \left(\frac{z, \theta}{u, v} \right) = \frac{u v}{a^2}$$

Hay otras transformaciones que te has realizado aunque sin caer en la cuenta de que aún casos por

funciones de coordenadas cartesianas. Por ejemplo, el dibujo a continuación:

$$\vec{r} = k_1 \vec{i} + k_2 \vec{j}; \quad J\left(\frac{x, y}{u, v}\right) = k^2$$

Desde el prototipo se refiere al sistema \vec{x}, y , y el dibujo al sistema \vec{u}, v .

O en escala distorsionada, útil para dibujar los perfiles de tuberías:

$$\vec{r} = k_1 u \vec{i} + k_2 v \vec{j}; \quad J\left(\frac{x, y}{u, v}\right) = k_1 k_2$$

han quejas en papel logarítmico y variopintas:

$$\vec{r} = k_1 (k_1 u)^i + k_2 (k_2 v)^j; \quad J\left(\frac{x, y}{u, v}\right) = \frac{k_1 k_2}{u^i v^j}$$

$$\vec{r} = k_1 u^i + k_2 (k_2 v)^j; \quad J\left(\frac{x, y}{u, v}\right) = \frac{k_1 k_2}{u^i}$$

La traslación de ejes:

$$\vec{r} = (a + u) \vec{i} + (b + v) \vec{j}; \quad J\left(\frac{x, y}{u, v}\right) = 1$$

La rotación de ejes:

$$\vec{r} = (u \cos \alpha - v \sin \alpha) \vec{i} + (u \sin \alpha + v \cos \alpha) \vec{j}; \quad J\left(\frac{x, y}{u, v}\right) = 1$$

Aunque tener cuidado de los sistemas para convenientemente utilizarlos en las dimensiones, sólo hay que fijarse en que jacobiano sea siempre el que nos da un convergente, de finitud, sus ecuaciones de transformación.

En las dimensiones, también puede transformarse el sistema de coordenadas. Considera, por ejemplo, el caso del campo eléctrico alrededor de una partícula cargada. Este campo se puede

fundamentalmente de la distancia, por lo que resulta más sencillo expresarlo en coordenadas esféricas, en las ecuaciones de transformación ya conocidas:

$$\vec{r} = (r \cos \theta) \vec{i} + (r \sin \theta) \vec{j} + (r \cos \theta) \vec{k}$$

y que gráficamente se representa en la fig. 367. En cuanto al jacobiano de transformación, fácilmente puede darse a:

$$J\left(\frac{x, y, z}{r, \theta, \phi}\right) = r^2 \sin \theta$$

(¿Dónde se aplica este jacobiano? ¿Cómo se usan esos puntos sin guiones?)

En general, para cualquier sistema de coordenadas cartesianas en las dimensiones, se tiene:

$$\vec{r} = f(u, v, w) \vec{i} + g(u, v, w) \vec{j} + h(u, v, w) \vec{k}$$

La función inversa existirá si f_u, f_v, f_w etc. son continuas en una región alrededor del punto y si

$$J\left(\frac{x, y, z}{u, v, w}\right) \neq 0.$$

Este sistema convenientemente puede en las dimensiones en el de coordenadas esféricas: (fig. 368)

$$\vec{r} = (r \cos \theta) \vec{i} + (r \sin \theta) \vec{j} + r \vec{k}$$

$$J\left(\frac{x, y, z}{r, \theta, \phi}\right) = ($$

Desde luego, podemos usar cualquier otro sistema de coordenadas cartesianas en las dimensiones, definiendo siempre la función inversa que lo relaciona con el cartesianas.

3.6.1 Superficies

La Tierra es un cuerpo de tres dimensiones; sin embargo, cuando queremos fijar un punto sobre su superficie, se recurre a las coordenadas (λ, φ, z) sino que lo localizamos mediante dos medidas angulares. La mejor de las cosas, es la sencilla de realizar estas medidas⁽¹⁾ comparando con el problema de referir el punto a tres ejes coordenados.

¿Por qué se localiza mediante solamente dos medidas? Recuerda de Matemáticas II que una superficie tiene dos grados de libertad; esto es, solamente dos medidas se pueden fijar arbitrariamente; así, aún cuando quisieramos referir un punto de la Tierra a coordenadas cartesianas habría que fijarlas, por ejemplo, la "x" y la "y", quedando fija la "z" mediante la ecuación de la superficie.

Supongamos el siguiente sistema cartesiano: el origen está en el centro de la Tierra; el eje "z" coincide con el eje polar; el eje "x" pasa por la intersección del Ecuador con el meridiano de Greenwich; el eje "y" pasa por la intersección del Ecuador con el meridiano $90^\circ E$; además, consideremos a la Tierra como una esfera (Fig. 3.6.9). Entonces, las ecuaciones de transformación son:

$$(3.6.1.A) \begin{cases} x = R \cos \varphi \cos \lambda \\ y = R \cos \varphi \sin \lambda \\ z = R \sin \varphi \end{cases}; \quad -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}; \quad -\pi \leq \lambda \leq \pi$$

(1) Por ejemplo, para conocer la latitud, basta observar la estrella Polar y medir el ángulo que forma la visual con la horizontal.

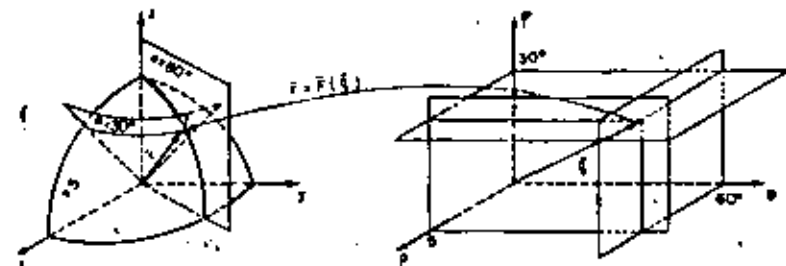


Fig. 3.6.7

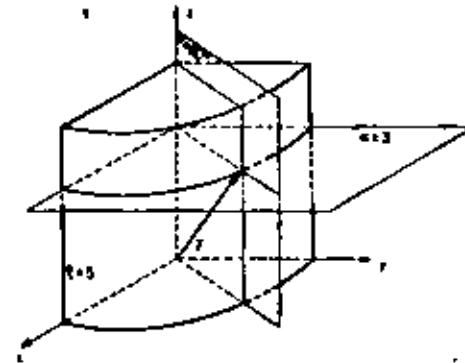


Fig. 3.6.8

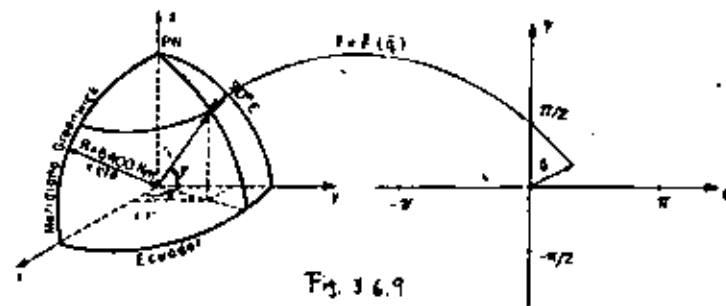


Fig. 3.6.9

Como sabemos, los signos +, - , son substituidos, respectivamente, por las letras E, W, cuando se refieren a "E" (longitud) o por las letras N, S, cuando se refieren a "S" (latitud).

Ejemplo 3.6.1 - Calcular las coordenadas cartesianas de la C. de México (100° W, 19° N), con respecto al sistema descrito anteriormente.

$$\begin{aligned}x &= 6400 \cos(19^\circ) \cos(-100^\circ) = -1058.80 \text{ km} \\y &= 6400 \cos(19^\circ) \sin(-100^\circ) = -5789.29 \text{ km} \\z &= 6400 \sin(19^\circ) = 2023.69 \text{ km}\end{aligned}$$

Ahora bien, la pareja ordenada de números (θ, φ) definen un espacio vectorial y a cualquier punto de ese espacio, corresponde un solo vector en el espacio cartesiano, mediante las ecu. 3.6.1.1. Estamos en presencia, entonces, de una función vectorial de variable vectorial, que transforma un espacio de dos dimensiones en un espacio de tres dimensiones.

Las ecu. 3.6.1.1 son también las ecuaciones paramétricas o vectoriales de la superficie de la tierra. Todas las superficies son susceptibles de definirse en esa forma, como recordará de Matemáticas II. En efecto, la ec. general de una superficie es

$$F(x, y, z) = 0$$

entonces, si suponemos que $F_z \neq 0$:

$$\begin{cases}x = u \\y = v \\z = f(u, v)\end{cases} \quad 3.6.2$$

Si $F_z = 0$, entonces, puesto $\nabla F \neq 0$, para que exista la superficie, alguna de las otras dos parciales será diferente de cero y podremos tener:

$$(3.6.1.3) \begin{cases}x = u \\y = f(u, v) \\z = v\end{cases} \quad \text{o bien (3.6.1.4)} \begin{cases}x = f(u, v) \\y = u \\z = v\end{cases}$$

Con las ecu. 3.6.1.2, 3.6.1.3 y 3.6.1.4 cualquier superficie puede ser expresada en forma paramétrica o vectorial; pero hay superficies que admiten ecuaciones más sencillas de manejar y vale la pena recordarlas:

• La esfera: Las ecuaciones 3.6.1.1 pueden ser, normalmente, en vez del parámetro φ , ángulo del vector de posición con el plano ecuatorial, se usa $\phi = \frac{\pi}{2} - \varphi$, es decir el ángulo del vector de posición con el eje "z".

$$\begin{cases}x = a \cos \theta \cos \phi \\y = a \cos \theta \sin \phi \\z = a \sin \theta\end{cases} \quad 3.6.1.5$$

a = radio de la esfera.

(Ver figura 3.6.10)

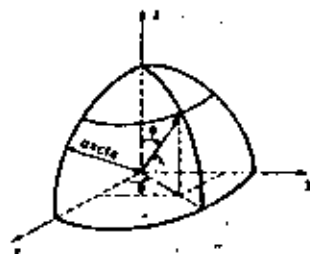


Figura 3.6.10

• El cilindro.- Si se considera un cilindro circular recto de generatriz paralela al eje "z" y radio "a", sus ecu. paramétricas:

$$\begin{cases}x = a \cos \theta \\y = a \sin \theta \\z = u\end{cases} \quad 3.6.1.6$$

(Ver figura 3.6.11)

Rotacione, si se toma de un libro
 de circular recta, una generatriz
 paralela a este eje, entonces
 ecuaciones muy similares.

El elipsoide: El elipsoide
 tiene por semiejes a, b, c ,
 alejados respectivamente en x, y
 y z , sus ecuaciones son:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

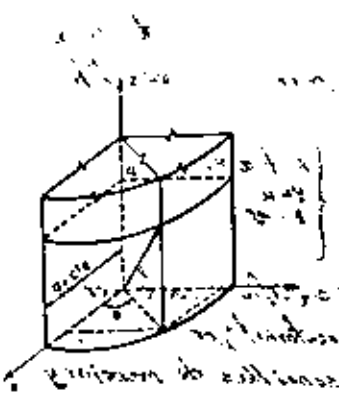


Fig. 3.6.11

Esta demostracion, que algunos dicen que
 es muy sencilla, pero basta dividir cada
 ecuacion por a^2, b^2, c^2 respectivamente, dividir al nume-
 rador y sumar, para obtener la ec. cartesiana del elipsoide:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

La interpretacion geometrica de los
 parametros angulares, no se refiere
 capero, al vector de posicion direcciona-
 la. Es la fig. 3.6.12 donde se ve la
 interpretacion geometrica de ambos
 parametros (¿por que la elipse LPS
 tiene por semiejes a y b - ¿por que?)

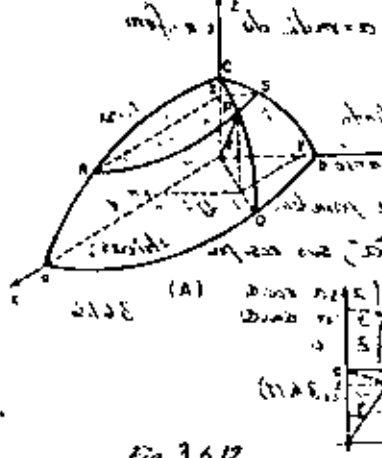
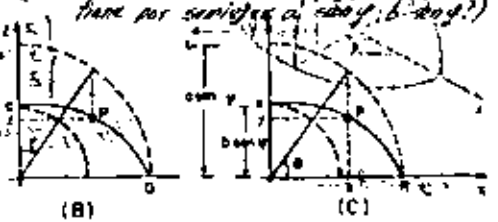


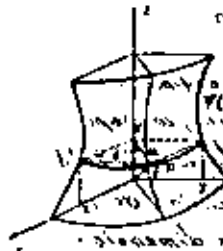
Fig. 3.6.12



Las superficies de revolucion: Cuando la curva $F(y, z) = 0$
 (ver fig. 3.6.13) gira alrededor del eje x , se genera una
 superficie de revolucion, cuya ec. cartesiana, fué la siguiente
 de la forma:

$$F(\sqrt{y^2 + z^2}, x) = 0$$

Si llamamos u al radio de la seccion circular (horizontal)
 que contiene al punto P y O al origen que forma el
 plano vertical que pasa por P , con el plano $z=0$, tendremos:



Si $u = 0, z = 0$, si además $F(0, x) = 0$,
 $F(y, z) = 0$ entonces $F(u) = f(u)$ y tendremos:
 $z = u \sin \theta$
 $y = u \cos \theta$

Fig. 3.6.13. ecuacion: $F(\sqrt{y^2 + z^2}, x) = 0$
 sistema cartesiano con $\begin{cases} y = u \cos \theta \\ z = u \sin \theta \end{cases}$

Ejemplo 3.6.2- Establecer la ec. vectorial del paraboloide de re-
 volucion que pasa por la curva $z = y^2$ en el plano $x=0$

Solucion:

De acuerdo a lo que acabamos de ver:
 $F = u \cos \theta + u \sin^2 \theta$

Al igual que en casos anteriores, nos interesa saber cuando
 a un punto de la superficie, corresponde un solo punto en

el plano de los parámetros; es decir, cuándo existe la transformación (función) inversa. Para averiguarlo, consideremos que un punto en la superficie, aunque tenga tres coordenadas sólo dos de ellas pueden fijarse arbitrariamente. Entonces, si se tiene

$$\begin{array}{ll} x = x(u, v) & 3.619 \\ y = y(u, v) & 3.6110 \\ z = z(u, v) & 3.6111 \end{array}$$

se pueden fijar arbitrariamente x, y ; x, z o y, z dando lugar, respectivamente a los sistemas 3.619 con 3.6110, 3.619 con 3.6111, o 3.6110 con 3.6111. Bastará entonces que uno de esos sistemas defina a u, v como funciones implícitas; o lo que es lo mismo, que así por lo menos de los jacobianos

$$J\left(\frac{x, y}{u, v}\right), J\left(\frac{x, z}{u, v}\right); J\left(\frac{y, z}{u, v}\right)$$

sea diferente de cero.

Ejemplo 3.63 - En una esfera de radio a

$$\begin{array}{l} x = a \cos \theta \cos \phi \\ y = a \cos \theta \sin \phi \\ z = a \sin \theta \end{array}$$

entonces

$$J\left(\frac{x, y}{\theta, \phi}\right) = \begin{vmatrix} a \cos \theta \cos \phi & -a \sin \theta \cos \phi \\ a \cos \theta \sin \phi & a \cos \theta \cos \phi \end{vmatrix} = a^2 \cos^2 \theta \sin \theta$$

$$J\left(\frac{x, z}{\theta, \phi}\right) = \begin{vmatrix} -a \sin \theta & 0 \\ a \cos \theta \cos \phi & -a \sin \theta \sin \phi \end{vmatrix} = a^2 \sin^2 \theta \cos \theta$$

$$J\left(\frac{y, z}{\theta, \phi}\right) = \begin{vmatrix} a \cos \theta \sin \phi & a \cos \theta \cos \phi \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = a^2 \sin \theta \cos \theta$$

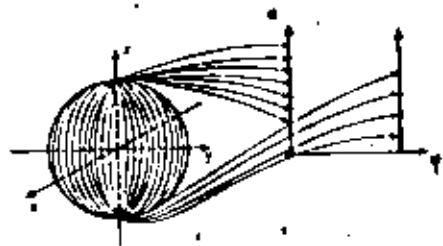


Fig. 3.6.14.

Los tres jacobianos son en general diferentes de cero; por lo tanto se anulan en $\theta = 0$ y en $\theta = 180^\circ$. En efecto, a cada polo corresponde una infinitud de puntos en el plano y, z , como puede observarse en la fig. 3.6.14

Fuera de esos dos puntos, a cada punto de la superficie de la esfera corresponden un solo punto en el plano y, z . Cabe indicar también que si uno de los parámetros se mantiene constante, se estará definiendo una curva de la superficie, puesto que tendremos un solo parámetro. Así por ejemplo, en el cilindro

$$\begin{array}{l} x = 3 \cos \theta \\ y = 3 \sin \theta \\ z = u \end{array}$$

si hacemos $\theta = 30^\circ$, obtenemos la recta

$$\begin{array}{l} x = \pm \sqrt{3}/2 \\ y = 3/2 \end{array}$$

si, por el contrario, hacemos $u = 4$, obtenemos la circunferencia

$$\begin{array}{l} x = 3 \cos \theta \\ y = 3 \sin \theta \\ z = 4 \end{array} \quad \text{Fig. 3.6.15}$$

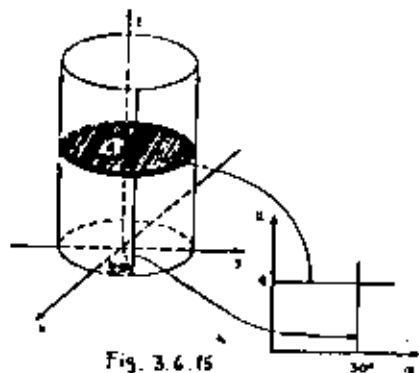


Fig. 3.6.15

en el plano de los parámetros, como otra curva.

Ejemplo 3.6.4 - Encontrar la representación, en el plano ϕ, θ , de la curva de intersección de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ y el cilindro $x^2 + y^2 = 5y$.

Solución:

Las ecuaciones de transformación para la esfera, son:

$$x = 5 \cos \phi \cos \theta$$

$$y = 5 \cos \phi \sin \theta$$

$$z = 5 \sin \phi$$

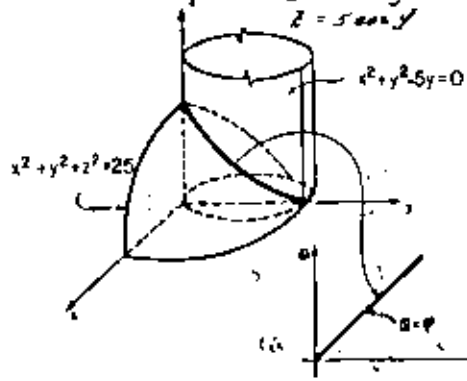


Fig. 3.6.16

Estas curvas se representan en el plano ϕ, θ como ocurre en la fig. 3.6.15

Más aún, si alguno de los jacobianos de transformación es en general diferente de cero, cualquier curva de la superficie podrá ser representada

Al aplicar estas ec. al cilindro:

$$x^2 = 25 \cos^2 \phi \cos^2 \theta$$

$$y^2 = 25 \cos^2 \phi \sin^2 \theta$$

$$z^2 = 25 \sin^2 \phi$$

$$-5z = -25 \cos \phi \sin \theta$$

$$z^2 + y^2 - 5z = 25 \cos^2 \phi (\sin^2 \theta - \sin \theta) = 0$$

Puesto que, como ya vimos, $\cos \phi \neq 0$ para que no se anulen los tres jacobianos, entonces se tiene

que cumplir

$$\sin \phi - \sin \theta = 0$$

$$\phi = \theta$$

que representa una recta en el plano ϕ, θ , como se ilustra en la fig. 3.6.16.

3.6.2.- Generalización del Concepto del Gradiente.

Volvamos al problema de la exploración petrolera en el mar.

Habríamos dicho que al ingeniero rascribió la dificultad que se le presentó, llevándose a la lancha un papel como el de la fig. 3.6.2. Ahora se nos plantea el siguiente cuestionamiento: si queremos que no haya un error mayor de 10m al determinar cada una de las coordenadas rectangulares del punto P (fig. 3.6.2) ¿qué error podemos permitirnos para las determinaciones de 'P' y 'A'?

La solución consiste en encontrar los incrementos de las variables 'P' y 'A', para obtener incrementos conocidos en dos funciones. Como éstos son pequeños, podemos calcularlos aproximadamente a través de sus diferenciales.

Debemos resolver entonces el sistema:

$$dx = \frac{\partial x}{\partial P} dP + \frac{\partial x}{\partial A} dA$$

$$dy = \frac{\partial y}{\partial P} dP + \frac{\partial y}{\partial A} dA$$

3.6.2.1

que podemos hacer por muchos métodos; usaremos el de inversión matricial; puesto el sistema 36.21 en forma matricial queda:

$$\begin{bmatrix} dx \\ dy \end{bmatrix} = J \begin{bmatrix} x, y \\ \rho, A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\rho \\ dA \end{bmatrix}$$

y su solución es

$$\begin{bmatrix} d\rho \\ dA \end{bmatrix} = J \begin{bmatrix} x, y \\ \rho, A \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} dx \\ dy \end{bmatrix} = J \begin{bmatrix} \rho, A \\ x, y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx \\ dy \end{bmatrix} \dots \quad 36.22$$

Entonces al sustituir los valores conocidos, obtenemos:

$$\frac{\partial A}{\partial \rho} = -250 = -0.5; \frac{\partial A}{\partial x} = -733; \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0.866; \frac{\partial \rho}{\partial y} = 0.5$$

Así:

$$J \begin{bmatrix} x, y \\ \rho, A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 & -733 \\ 0.866 & -250 \end{bmatrix}$$

Cuya adjunta es:

$$\begin{bmatrix} -250 & -733 \\ -733 & 0.5 \end{bmatrix}$$

La transpuesta de ésta es:

$$\begin{bmatrix} -250 & -733 \\ -733 & 0.5 \end{bmatrix}$$

Finalmente:

$$J \begin{bmatrix} x, y \\ \rho, A \end{bmatrix}^{-1} = J \begin{bmatrix} \rho, A \\ x, y \end{bmatrix} = \frac{1}{500} \begin{bmatrix} -250 & -733 \\ -733 & 0.5 \end{bmatrix}$$

Entonces:

$$\frac{1}{500} \begin{bmatrix} -250 & -733 \\ -733 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (110) \\ (110) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d\rho \\ dA \end{bmatrix}$$

Al hacer operaciones:

$$d\rho = \frac{250}{500} (110) + \frac{733}{500} (110)$$

$$dA = \frac{733}{500} (110) - \frac{0.5}{500} (110)$$

$$\text{Entonces, si } dx = dy = 10 \begin{cases} d\rho = 13.66 \\ dA = 0.00732 = 0.72' = 25' \end{cases}$$

$$\text{si } dx = 10, dy = -10 \begin{cases} d\rho = -0.66 \\ dA = 0.02732 = 1.57' = 1' 34'' \end{cases}$$

$$\text{si } dx = -10, dy = 10 \begin{cases} d\rho = 3.66 \\ dA = -0.02732 = -1.57' = -1' 34'' \end{cases}$$

$$\text{si } dx = -10, dy = -10 \begin{cases} d\rho = -13.66 \\ dA = -0.00732 = -0.72' = -25' \end{cases}$$

Puesto que las medidas ρ, A son independientes, deberemos exigir:

$$|d\rho| = 3.66 \text{ m}$$

$$|dA| = 25'$$

Recordemos brevemente acerca de la diferencial total de una función escalar $f(\vec{r})$; su expresión puede escribirse:

$$df = \nabla f \cdot d\vec{r}$$

o bien, en forma matricial:

$$df = [Vf] \begin{bmatrix} d\vec{r} \end{bmatrix}$$

Comparamos esta expresión con la ec. 3.62: también en ésta tenemos en el primer miembro la diferencial de una función, función vectorial en este caso; en el segundo miembro, también aparece el vector dx , pero multiplicado, una matriz. Este premultiplicador no es ahora un vector, es decir, una matriz rengón; sino que se trata de una matriz general; pero desempeña el mismo papel que el gradiente de una función escalar. Por esto, lo llamaremos "gradiente de una función vectorial".

En general, si tenemos la función vectorial

$$\vec{F}(u_1, u_2, \dots, u_m)$$

donde

$$u_1 = u_1(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$$u_2 = u_2(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$$\dots$$

$$u_m = u_m(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$$d\vec{F} = (du_1, du_2, \dots, du_m)$$

pero

$$du_1 = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial u_1}{\partial x_n} dx_n$$

$$du_2 = \frac{\partial u_2}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial u_2}{\partial x_n} dx_n$$

$$\dots$$

$$du_m = \frac{\partial u_m}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial u_m}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial u_m}{\partial x_n} dx_n$$

Entonces:

$$d\vec{F} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial u_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial u_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial u_m}{\partial x_1} & \frac{\partial u_m}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial u_m}{\partial x_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ \vdots \\ dx_n \end{bmatrix} = [\nabla \vec{F}] \begin{bmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ \vdots \\ dx_n \end{bmatrix} \quad 3.63$$

Notase que los rengones de $[\nabla \vec{F}]$ son los gradientes de las funciones escalares que la componen; la primera columna está compuesta por las derivadas parciales de todas las funciones componentes de \vec{F} con respecto a x_1 . Como ya hemos visto, este vector será ortogonal a la derivada de \vec{F} con respecto a x_1 , cuando las demás variables permanezcan constantes; este es, la primera columna es $\frac{\partial \vec{F}}{\partial x_1}$. Análogo significado hallamos en las demás columnas.

Si partimos la matriz $[\nabla \vec{F}]$ según sus columnas y seguimos la ley para multiplicar matrices partidas, obtenemos:

$$d\vec{F} = \frac{\partial \vec{F}}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \vec{F}}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial \vec{F}}{\partial x_n} dx_n \quad 3.64$$

que es una expresión de la misma forma que la que tenemos manejando para funciones escalares.

Si hacemos

$$ds = \sqrt{dx_1^2 + dx_2^2 + \dots + dx_n^2}$$

al dividir 3.624 entre "ds" obtendremos la derivada direccional de la función vectorial \vec{F} según una cierta dirección matemática en el espacio de "n" dimensiones

$$\frac{d\vec{F}}{ds} = \frac{\partial \vec{F}}{\partial x_1} \frac{dx_1}{ds} + \frac{\partial \vec{F}}{\partial x_2} \frac{dx_2}{ds} + \dots + \frac{\partial \vec{F}}{\partial x_n} \frac{dx_n}{ds} \dots\dots\dots 3.6.2.5$$

que también puede escribirse

$$\frac{d\vec{F}}{ds} = [\nabla \vec{F}] \left[\frac{d\vec{r}}{ds} \right] \dots\dots\dots 3.6.2.6$$

expresión enteramente análoga a la (1.11.07) donde el producto escalar se ha sustituido por un producto matricial y la matriz columna $d\vec{r}/ds$ es un vector unitario. Si $n=3$, este vector estará dado por sus cosenos directores y definirá una dirección geométrica. Si $n>3$, suele extrapolarse al concepto y hablar de ángulos directores con ejes matemáticos, así como de direcciones matemáticas.

Ejemplo 3.65 : Encontrar el gradiente de $\tau = x^2 + y^2 + z^2$.

Solución:
$$\nabla \tau = \begin{bmatrix} \frac{\partial \tau}{\partial x} & \frac{\partial \tau}{\partial y} & \frac{\partial \tau}{\partial z} \\ \frac{\partial \tau}{\partial x} & \frac{\partial \tau}{\partial y} & \frac{\partial \tau}{\partial z} \\ \frac{\partial \tau}{\partial x} & \frac{\partial \tau}{\partial y} & \frac{\partial \tau}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{I}$$

Ejemplo 3.66 : Encontrar el gradiente del campo gravitacional universal.

Solución: Supongamos una masa "M" y coloquemos ahí el origen; consideremos otra masa "m" en un punto definido por el vector de posición \vec{r} . Entonces, de acuerdo con la ley de Newton:

$$\vec{F} = - \left(\frac{GMm}{r^2} \right) \frac{\vec{r}}{r}$$

donde el término entre paréntesis define la magnitud, en tanto que el término fuera del paréntesis define la dirección; el signo define el sentido de la fuerza, hacia la masa mayor.

Al desglasar esta expresión en sus componentes, obtenemos:

$$\vec{F} = -GMm \frac{x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$$

Entonces calculamos $\frac{\partial \vec{F}}{\partial x}$:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{-x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \right] = -x \left(-\frac{3}{2} \right) (2xy^2 + 2z^2)^{-5/2} = \frac{3x^2 y^2 + 3x^2 z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}} = \frac{3x^2 (y^2 + z^2)}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{-y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \right] = -y \left(-\frac{3}{2} \right) (x^2 + y^2 + z^2)^{-5/2} (2x) = \frac{3xy (x^2 + y^2 + z^2)^{-5/2}}$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{-z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \right] = -z \left(-\frac{3}{2} \right) (x^2 + y^2 + z^2)^{-5/2} (2z) = \frac{3z^2 (x^2 + y^2 + z^2)^{-5/2}}$$

Entonces:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{GMm}{(2x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} [(2x^2 - y^2 - z^2)i + 2xyj + 2xz k]$$

Análogamente

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{GMm}{(2x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} [2xyi + (2y^2 - 2x^2 - 2z^2)j + 2yz k]$$

$$\frac{\partial F}{\partial z} = \frac{GMm}{(2x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} [2xz i + 2yz j + (2z^2 - 2x^2 - y^2)k]$$

Y el gradiente pedido:

$$\nabla F = \frac{GMm}{(2x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \begin{bmatrix} (2x^2 - y^2 - z^2) & 2xy & 2xz \\ 2xy & (2y^2 - 2x^2 - 2z^2) & 2yz \\ 2xz & 2yz & (2z^2 - 2x^2 - y^2) \end{bmatrix}$$

Ejemplo 3.6.7 : El campo de velocidades de un fluido está dado por $\vec{v} = 2xi + 3y^2j + 2z k$ (ft/s en m/s si x, y, z en m).

Calcular la rapidez de crecimiento de la velocidad en el punto $(1, 2, 2)$ y en dirección que forma un ángulo de 60° con el eje "x" y de 45° con el eje "y".

Solución: El gradiente de velocidades es:

$$\nabla \vec{v} = \begin{bmatrix} y & x & 0 \\ 0 & 2y & 0 \\ z & 0 & 2 \end{bmatrix}_p = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Para calcular el vector unitario recordemos que:

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$$

$$\text{por lo que } \cos^2 \gamma = 1 - \cos^2 \alpha - \cos^2 \beta = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow \\ \Rightarrow \vec{e} \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

Así:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + 2\sqrt{2} \\ \sqrt{2} + 1 \\ 1 + 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.82 \\ 2.41 \\ 3 \end{bmatrix} \text{ m/s}^2/\text{m}$$

que se puede interpretar como sigue: la componente en "z" de la velocidad varía, en la dirección dada, a razón de $3.82 \text{ m/s}^2/\text{m}$ (o $\text{cm/s}^2/\text{cm}$), etc.

Nota: El análisis del gradiente de velocidades es de vital importancia en los fenómenos de mezcla, con los que el ingeniero, cualquiera que sea su especialidad, alguna vez tendrá que tratar.

Ejemplo 3.6.8 - Calcular el vector normal del elipsoide

$$\vec{r} = x \cos \theta \cos \phi i + x \sin \theta \cos \phi j + z \cos \phi k$$

en el punto en que $\theta = 30^\circ$, $\phi = 45^\circ$

Solución: Para conocer el vector normal debemos conocer dos vectores tangentes a la superficie. Hemos dicho que si hacemos uno de los parámetros constantes, se define una curva de-

la superficie; la tangente a esa curva será justamente la derivada (parcial) del vector de posición \vec{r} con respecto al parámetro que queda como variable.

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial y} = \cos y \cos \theta \mathbf{i} + 2 \cos y \sin \theta \mathbf{j} - 3 \sin y \mathbf{k}$$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial y} \Big|_{y=\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\sqrt{2}}{2} \mathbf{i} + 2 \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\sqrt{2}}{2} \mathbf{j} - 3 \frac{1}{2} \mathbf{k} = \frac{\sqrt{2}}{2} \mathbf{i} + \frac{\sqrt{2}}{2} \mathbf{j} - \frac{3}{2} \mathbf{k}$$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} = -\sin y \cos \theta \mathbf{i} + 2 \cos y \cos \theta \mathbf{j}$$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} \Big|_{\theta=\frac{\pi}{4}} = -\frac{1}{2} \frac{\sqrt{2}}{2} \mathbf{i} + 2 \frac{1}{2} \frac{\sqrt{2}}{2} \mathbf{j} = -\frac{\sqrt{2}}{4} \mathbf{i} + \frac{\sqrt{2}}{2} \mathbf{j}$$

Entonces

$$\vec{n} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial y} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{3}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{vmatrix} = \frac{3\sqrt{2}}{4} \mathbf{i} + \frac{3\sqrt{2}}{8} \mathbf{j} + \frac{\sqrt{2}}{2} \mathbf{k}$$

Ejemplo 36.9: Para el elipsoide anterior, calcular los jacobianos: $A = J(\frac{x}{y, \theta})$; $B = J(\frac{x}{y, \theta})$; $C = J(\frac{x}{y, \theta})$ en el mismo punto.

Solución:

$$A = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial y} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial z}{\partial y} & \frac{\partial z}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 \cos y \cos \theta & 2 \cos y \cos \theta \\ -3 \sin y & 0 \end{vmatrix} = 6 \cos^2 y \cos \theta \Big|_{y=\frac{\pi}{4}, \theta=\frac{\pi}{4}} = 6 \frac{1}{4} \frac{1}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{4}$$

$$B = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial y} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial z}{\partial y} & \frac{\partial z}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 \sin y & 0 \\ \cos y \cos \theta & -\sin y \sin \theta \end{vmatrix} = 3 \sin^2 y \sin \theta \Big|_{y=\frac{\pi}{4}, \theta=\frac{\pi}{4}} = \frac{3}{4} \frac{1}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{4}$$

$$C = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial y} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial y} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos y \cos \theta & -\sin y \sin \theta \\ 2 \cos y \sin \theta & 2 \sin y \cos \theta \end{vmatrix} = 2 \cos y \cos^2 \theta + 2 \sin y \cos^2 \theta$$

$$C = 2 \cos y \cos y = 2 \cos^2 y \Big|_{y=\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Como vemos, los jacobianos resultan ser equivalentes a las componentes del vector normal. Te dejamos, como ejercicio, que demuestres esta propiedad para cualquier superficie $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$

Ejemplo 36.10: Dada la superficie $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$, calcular el área del paralelogramo que definen sus tangentes $\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}$, $\frac{\partial \vec{r}}{\partial v}$.

Solución: El área pedida es $|\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}|$; esta cantidad:

la podemos calcular de dos maneras:

a) Punto que $\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} = A \mathbf{i} + B \mathbf{j} + C \mathbf{k}$

entonces:

$$\left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right| = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}, \text{ donde } A = J\left(\frac{x}{u,v}\right)$$

$$B = J\left(\frac{y}{u,v}\right)$$

$$C = J\left(\frac{z}{u,v}\right)$$

$$d) \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right| = \sqrt{\left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}\right) \cdot \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial u}\right)}$$

Ahora, si recordas de Matemáticas II, el producto de cruce de dos vectores lo calculamos:

$$\left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}\right) \cdot \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}\right) = \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial u}\right) \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}\right) - \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}\right) \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial u}\right)$$

Para facilidad de escritura, hagamos:

$$E = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} = \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}\right)^2$$

$$F = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}$$

$$G = \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} = \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial v}\right)^2$$

Así:

$$\left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right| = \sqrt{EG - F^2} = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$$

Como ejercicio, verifica la igualdad obtenida para el elipsoide del ejemplo 3.6.B. ¿Cuándo desaparece F ?

3.7. El Gradiente en Coordenadas Curvilíneas.

3.7.1. Los Vectores Unitarios en Coordenadas Curvilíneas.

Cuando estemos repasando algunas transformaciones de coordenadas, en todas expresamos el vector \vec{r} en términos de sus funciones componentes, es decir:

$$\vec{r} = f(u,v) \vec{i} + g(u,v) \vec{j}$$

La excepción fue el caso de las coordenadas hiperbólicas (fig. 3.6.6) donde nos fuimos a escribir

$$u = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{3.6.5}$$

$$v = \sqrt{(x-a)^2 + y^2} \quad \text{3.6.6}$$

La razón es, por supuesto, que resulta muy laborioso desmenujar x, y , componentes de \vec{r} , de 3.6.5 y 6; podríamos escribir, en cambio, el vector \vec{q} :

$$\vec{q} = (\sqrt{x^2 + y^2}, \sqrt{(x-a)^2 + y^2})$$

pero también podríamos escribirlo en forma binómica:

$$\vec{q} = \sqrt{x^2 + y^2} \vec{e}_u + \sqrt{(x-a)^2 + y^2} \vec{e}_v$$

donde, en vez de los vectores \vec{i}, \vec{j} , hemos usado los vectores \vec{e}_u, \vec{e}_v , unitarios y ortogonales en los ejes u, v . Naturalmente, \vec{e}_u señala la dirección en que "c" es

constante, como i señala la dirección en que x varía su valor; análogamente, \bar{i}_v señalará la dirección en que v se conserva constante.

Estas direcciones no son constantes desde luego, en el sistema x, y ; no lo son, porque $u = ct$, $v = ct$, son representadas por curvas, por circunferencias, específicamente; por lo mismo, los vectores unitarios \bar{e}_u, \bar{e}_v , serán, en cada punto, los vectores tangentes unitarios a las circunferencias que se intersectan en ese punto. (Fig. 3.7.1). En otras palabras:

$$\bar{e}_u = \frac{\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}}{\left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \right|}; \quad \bar{e}_v = \frac{\frac{\partial \vec{r}}{\partial v}}{\left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right|}$$

Entonces, si queremos expresar estos vectores en el sistema x, y , procedemos como ya sabemos:

$$u^2 = x^2 + y^2$$

$$v^2 = (x-a)^2 + y^2$$

$$2u du = 2x dx + 2y dy$$

$$2v dv = 2(x-a) dx + 2y dy$$

Sistema que, al resolverse por cualquier método que quieras, da:

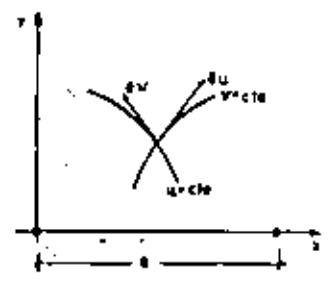


Fig. 3.7.1.

$$dx = u du - \frac{v dv}{u}$$

$$dy = \frac{v}{ay} (a-x) du + \frac{xv}{ay} dv$$

Lo que nos permite afirmar que:

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{u}{a}; \quad \frac{\partial x}{\partial v} = -\frac{v}{a}; \quad \frac{\partial y}{\partial u} = \frac{v}{ay} (a-x); \quad \frac{\partial y}{\partial v} = \frac{xv}{ay}$$

o, lo que es lo mismo:

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} = \frac{u}{a} i + \frac{v}{ay} (a-x) j = \frac{u}{a} (i + \frac{a-x}{y} j)$$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial v} = -\frac{v}{a} i + \frac{xv}{ay} j = -\frac{v}{a} (i - \frac{x}{y} j)$$

Las módulos:

$$\left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \right| = \frac{u}{a} \sqrt{1 + \frac{(a-x)^2}{y^2}} = \frac{u}{ay} \sqrt{y^2 + (a-x)^2} = \frac{uv}{ay}$$

$$\left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right| = \frac{v}{a} \sqrt{1 + \frac{x^2}{y^2}} = \frac{v}{ay} \sqrt{y^2 + x^2} = \frac{uv}{ay}$$

Por lo que

$$\bar{e}_u = \frac{\frac{u}{a} (i + \frac{a-x}{y} j)}{\frac{uv}{ay}} = \frac{\frac{1}{y} [y i + (a-x) j]}{\frac{v}{y}} = \frac{1}{v} [y i + (a-x) j]$$

$$\bar{e}_v = \frac{-\frac{v}{a} (i - \frac{x}{y} j)}{\frac{uv}{ay}} = \frac{-\frac{1}{y} (y i - x j)}{\frac{u}{y}} = -\frac{1}{u} [y i - x j]$$

Hecho que estos vectores no son necesariamente ortogonales; en efecto:

$$\bar{e}_u \cdot \bar{e}_v = -\frac{1}{uv} [y^2 - x(a-x)] = -\frac{1}{uv} (y^2 - ax + x^2)$$

$$\bar{e}_u \cdot \bar{e}_v = -\frac{1}{uv} (u^2 - au) \neq 0, \text{ en general}$$

En cambio, hay otros sistemas de coordenadas - curvilíneas en las cuales los vectores unitarios correspondientes, siempre son ortogonales entre sí; por ejemplo, el sistema polar:

$$\bar{r} = \rho \cos \theta \bar{i} + \rho \sin \theta \bar{j}$$

$$\frac{\partial \bar{r}}{\partial \rho} = \cos \theta \bar{i} + \sin \theta \bar{j} = \bar{e}_\rho$$

$$\frac{\partial \bar{r}}{\partial \theta} = -\rho \sin \theta \bar{i} + \rho \cos \theta \bar{j}; \left| \frac{\partial \bar{r}}{\partial \theta} \right| = \rho \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \bar{e}_\theta = -\sin \theta \bar{i} + \cos \theta \bar{j}$$

$$\bar{e}_\rho \cdot \bar{e}_\theta = -\sin \theta \cos \theta + \sin \theta \cos \theta = 0$$

En estas cases y sólo en éstas, tendremos que \bar{e}_ρ , tangente a la curva $C = ct$, es perpendicular a la curva $\rho = ct$, por lo que

$$\bar{e}_\rho = \frac{\nabla \rho}{|\nabla \rho|}$$

Análogamente

$$\bar{e}_v = \frac{\nabla \phi}{|\nabla \phi|}$$

En general, consideremos la transformación

$$\bar{r} = f(u, v) \bar{i} + g(u, v) \bar{j}$$

El vector unitario \bar{e}_u indicará la dirección en que \bar{r} es unskato, por lo que será tangente a dicha curva y se podrá escribir como

$$\bar{e}_u = \frac{\frac{\partial \bar{r}}{\partial u}}{\left| \frac{\partial \bar{r}}{\partial u} \right|} \quad 3.1.1.1$$

Análogamente

$$\bar{e}_v = \frac{\frac{\partial \bar{r}}{\partial v}}{\left| \frac{\partial \bar{r}}{\partial v} \right|} \quad 3.1.1.2$$

Si $\bar{e}_u \cdot \bar{e}_v = 0$, entonces los vectores unitarios conservan su ortogonalidad al pasar de un sistema a otro; se dice que se trata de un mapa "ortogonal" y en tales cases j sólo en éstos:

$$\bar{e}_u = \frac{\nabla u}{|\nabla u|} \quad 3.1.1.3$$

$$\bar{e}_v = \frac{\nabla v}{|\nabla v|} \quad 3.1.1.4$$

En tres dimensiones, hay una dirección en la cual dos de las variables se convierten constantes; por ejemplo, en la dirección "z", en el sistema cartesiano, las variables "y" y "x" se convierten constantes y está definida por la intersección de las superficies (planos) $y=c_1$, $x=c_2$ (Fig. 3.2.2)

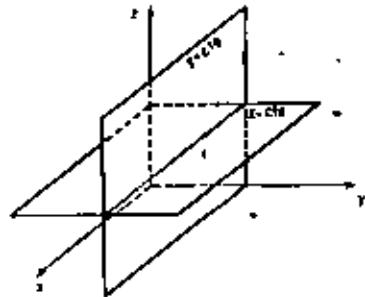


Fig. 3.2.2.

En la misma forma, si pasamos en el sistema esférico, por ejemplo, la dirección \hat{e}_θ señalará hacia donde "y" y "z" son constantes y quedará definida por las superficies $\rho=c_1$, $\phi=c_2$; pero ahora esas superficies no son planos, sino una

esfera y un cono (Fig. 3.2.3) cuya curva de intersección es una circunferencia, tangente a la cual quedará \hat{e}_θ , siendo variable, por ser este, en cada punto.

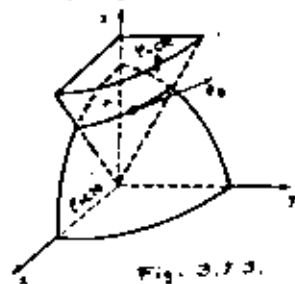


Fig. 3.2.3.

Adicionalmente, las Figs. 3.2.4 y 3.2.5 explican gráficamente la definición de los vectores unitarios \hat{e}_ρ y \hat{e}_ϕ .

Para definir estos vectores, recordamos que si mantenemos

constantes a "rho" y a "phi", por ejemplo, entonces definiremos a la curva de intersección de ambas superficies, cuyo parámetro es "theta" y por lo mismo,

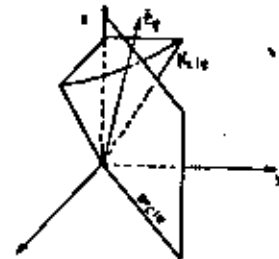


Fig. 3.2.4.

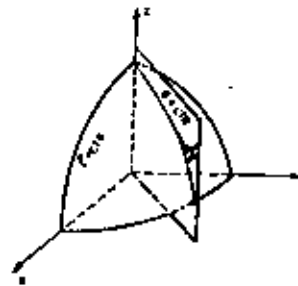


Fig. 3.2.5.

$$\hat{e}_\theta = \frac{\frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta}}{\left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} \right|}$$

Ahora:

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} = -\rho \sin \theta \hat{i} + \rho \cos \theta \hat{j}$$

$$\left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} \right| = \rho \sin \theta$$

Por lo que:

$$\hat{e}_\theta = -\sin \theta \hat{i} + \cos \theta \hat{j}$$

Adicionalmente:

$$\hat{e}_\rho = \cos \theta \sin \phi \hat{i} + \sin \theta \sin \phi \hat{j} + \cos \phi \hat{k} = \frac{\vec{r}}{\rho}$$

$$\hat{e}_\phi = \cos \theta \cos \phi \hat{i} + \sin \theta \cos \phi \hat{j} - \sin \phi \hat{k}$$

Nota que, en este caso, estas tres rectas son perpendiculares entre sí; en efecto:

$$\hat{e}_\rho \cdot \hat{e}_\theta = \cos \theta \sin \phi \cos \theta + \sin \theta \sin \phi \sin \theta - \sin \phi \cos \theta = \sin \phi \cos \theta (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta - 1) = 0$$

Tu puedes comprobar los otros dos productos y

completar además que

$$\bar{e}_1 = \bar{e}_2 \times \bar{e}_3; \quad \bar{e}_2 = \bar{e}_3 \times \bar{e}_1; \quad \bar{e}_3 = \bar{e}_1 \times \bar{e}_2$$

Por lo mismo, \bar{e}_3 será perpendicular simultáneamente a las tangentes a la esfera, \bar{e}_1 y \bar{e}_2 , y, consiguientemente, es perpendicular a dicha superficie de nivel y podemos escribir

$$\bar{e}_3 = \frac{\nabla \phi}{|\nabla \phi|}$$

y análogamente

$$\bar{e}_2 = \frac{\nabla \psi}{|\nabla \psi|}$$

$$\bar{e}_1 = \frac{\nabla \xi}{|\nabla \xi|}$$

En general, si tenemos la transformación

$$\bar{r} = f(x, y, z) \bar{i} + g(x, y, z) \bar{j} + h(x, y, z) \bar{k} \quad 3.7.15$$

el vector \bar{e}_a indicará la dirección en que x^a y x^b se mantienen constantes, siendo, por consiguiente, tangente a la curva definida por la intersección de los 2 superficies de nivel $x^a = c_1$; la ec. vectorial de esta curva se obtiene directamente de 3.7.15, por lo que

$$\bar{e}_a = \frac{\frac{\partial \bar{r}}{\partial x^a}}{\left| \frac{\partial \bar{r}}{\partial x^a} \right|} \quad 3.7.16$$

Análogamente

$$\bar{e}_2 = \frac{\frac{\partial \bar{r}}{\partial x^2}}{\left| \frac{\partial \bar{r}}{\partial x^2} \right|} \quad 3.7.17$$

$$\bar{e}_3 = \frac{\frac{\partial \bar{r}}{\partial x^3}}{\left| \frac{\partial \bar{r}}{\partial x^3} \right|} \quad 3.7.18$$

Si $\bar{e}_1 \cdot \bar{e}_2 = \bar{e}_2 \cdot \bar{e}_3 = \bar{e}_3 \cdot \bar{e}_1 = 0$, se dice que el mapa es conforme y en tal caso y solo en éste, se puede escribir que:

$$\bar{e}_1 = \frac{\nabla u}{|\nabla u|} \quad 3.7.19$$

$$\bar{e}_2 = \frac{\nabla v}{|\nabla v|} \quad 3.7.1.10$$

$$\bar{e}_3 = \frac{\nabla w}{|\nabla w|} \quad 3.7.1.11$$

La ventaja de usar en estos vectores arbitrarios es que hay campos físicos que pueden expresarse en forma muy sencilla en términos de ellos; podemos dar ejemplos:

Ejemplo 3.7.1 Sea una rueda de radio "a" que gire alrededor de un eje con velocidad angular " ω ". A una partícula de la rueda, fijada por su vector de posición, le corresponde un vector-velocidad, teniendo de este modo una función ve-

torial de variable vectorial \vec{v} , si se prefiere, un campo de velocidades.

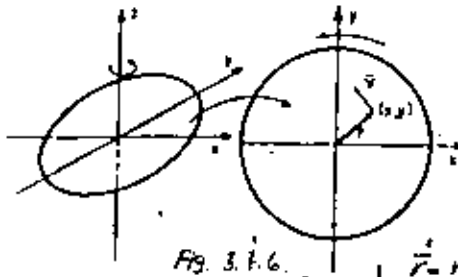


Fig. 3.1.6.

Consideramos el origen en la intersección del eje con el plano de la rueda, y un punto cualquiera (x, y) . El desplazamiento de esa partícula se describe por

$$\vec{r} = \sqrt{x^2 + y^2} \cos \omega t \hat{i} + \sqrt{x^2 + y^2} \sin \omega t \hat{j}$$

La velocidad, teniendo en cuenta que $\sqrt{x^2 + y^2}$ permanece constante para una partícula determinada:

$$\vec{v} = -\omega \sqrt{x^2 + y^2} \sin \omega t \hat{i} + \omega \sqrt{x^2 + y^2} \cos \omega t \hat{j} = -\omega y \hat{i} + \omega x \hat{j}$$

Ahora, en coordenadas polares lo escribimos ($\omega t = \phi$):

$$\vec{v} = -\omega \rho \sin \phi \hat{i} + \omega \rho \cos \phi \hat{j} = \omega \rho (-\sin \phi \hat{i} + \cos \phi \hat{j})$$

$$\vec{v} = \omega \rho \hat{e}_\phi$$

Ejemplo 3.1.2. - Una partícula cargada de electricidad genera un campo eléctrico que se expresa como sigue:

$$\vec{E} = \frac{k q_1 q_2 \vec{r}}{|\vec{r}|^3} = \frac{k q_1 q_2}{|\vec{r}|^2} \hat{r}$$

Donde el origen se encuentra en la partícula de carga q_1 ; k es la constante de Coulomb, y

q_2 es la carga de una partícula cualquiera que se encuentra en la posición de \vec{r} . Si las cargas tienen el mismo signo, $q_1 q_2 < 0$ y la fuerza tendrá el mismo sentido que \vec{r} , es decir, se repelen; lo contrario ocurre si $q_1 q_2 > 0$.

Este campo lo podemos expresar en coordenadas cartesianas:

$$\vec{E} = k q_1 q_2 \frac{x \hat{i} + y \hat{j} + z \hat{k}}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$$

pero también puede expresarse en coordenadas esféricas:

$$\vec{E} = k q_1 q_2 \frac{\cos \phi \cos \theta \hat{i} + \cos \phi \sin \theta \hat{j} + \sin \phi \hat{k}}{r^2}$$

$$\vec{E} = k q_1 q_2 \frac{\cos \theta \sin \theta \hat{i} + \cos \theta \cos \theta \hat{j} + \sin \theta \hat{k}}{r^2}$$

$$\vec{E} = \frac{k q_1 q_2}{r^2} \hat{e}_r$$

Desde luego que, para el caso gravitacional análogo:

$$\vec{F} = -\frac{GMm}{r^2} \hat{e}_r \quad \text{3.1.2.a}$$

Cálculo del Gradiente en Coordenadas Cartesianas
Se preguntará también la derivación del campo gravitacional análogo, hecho por 3.1.2.a, en el punto

(f, y, z) y según la dirección $\vec{e}(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)'$.

Se trata de una derivada direccional y sabemos que ésta se calcula:

$$\frac{dF}{ds} = [\nabla F] \vec{e} \quad 3.1.2.b$$

El gradiente de F lo calculamos en el ejemplo - 3.1.6, por lo hicimos en coordenadas cartesianas y ahora el punto está dado en coordenadas esféricas; para evitar hacer la transformación, consideramos la regla de la cadena:

$$\frac{dF}{ds} = \frac{\partial F}{\partial \rho} \frac{d\rho}{ds} + \frac{\partial F}{\partial \varphi} \frac{d\varphi}{ds} + \frac{\partial F}{\partial \theta} \frac{d\theta}{ds}$$

que puede ser forma matricial:

$$\left[\frac{dF}{ds} \right] = \left[\frac{\partial F}{\partial \rho} \right] \frac{d\rho}{ds} + \left[\frac{\partial F}{\partial \varphi} \right] \frac{d\varphi}{ds} + \left[\frac{\partial F}{\partial \theta} \right] \frac{d\theta}{ds} \quad 3.1.2.c$$

Además, las derivadas direccionales $\frac{d\rho}{ds}, \frac{d\varphi}{ds}, \frac{d\theta}{ds}$ las calculamos:

$$\frac{d\rho}{ds} = \nabla(\rho) \cdot \vec{e}; \quad \frac{d\varphi}{ds} = \nabla(\varphi) \cdot \vec{e}; \quad \frac{d\theta}{ds} = \nabla(\theta) \cdot \vec{e}$$

o bien, en forma matricial:

$$\frac{d\rho}{ds} = [\nabla \rho] \vec{e} \quad 3.1.2.d$$

$$\frac{d\varphi}{ds} = [\nabla \varphi] \vec{e} \quad 3.1.2.e$$

$$\frac{d\theta}{ds} = [\nabla \theta] \vec{e} \quad 3.1.2.f$$

Entonces, al sustituir 3.1.2.d, e, f en 3.1.2.c teniendo en cuenta a 3.1.2.b:

$$\frac{dF}{ds} = [\nabla F] \vec{e} = \left[\frac{\partial F}{\partial \rho} \right] [\nabla \rho] \vec{e} + \left[\frac{\partial F}{\partial \varphi} \right] [\nabla \varphi] \vec{e} + \left[\frac{\partial F}{\partial \theta} \right] [\nabla \theta] \vec{e}$$

que también puede expresarse, aprovechando la propiedad distributiva del producto matricial:

$$\frac{dF}{ds} = [\nabla F] \vec{e} = \left\{ \left[\frac{\partial F}{\partial \rho} \right] [\nabla \rho] + \left[\frac{\partial F}{\partial \varphi} \right] [\nabla \varphi] + \left[\frac{\partial F}{\partial \theta} \right] [\nabla \theta] \right\} \vec{e} \quad 3.1.2.g$$

Podemos calcular las parciales de F en respecto a las tres variables:

$$\frac{\partial F}{\partial \rho} = -\frac{6Mg}{r^2} \frac{\partial z}{\partial \rho} + 2 \frac{6Mg}{r^2} \frac{\partial \rho}{\partial \rho}$$

$$\frac{\partial F}{\partial \varphi} = -\frac{6Mg}{r^2} \frac{\partial z}{\partial \varphi}$$

$$\frac{\partial F}{\partial \theta} = -\frac{6Mg}{r^2} \frac{\partial z}{\partial \theta}$$

Si recordamos que

$$\vec{e} = \cos\alpha \vec{i} + \sin\alpha \cos\beta \vec{j} + \sin\alpha \sin\beta \vec{k}$$

las derivadas buscadas, ya en forma matricial quedan:

$$\left[\frac{\partial \bar{r}}{\partial \rho} \right] = \frac{36 \text{ Mr}}{\rho^3} \begin{bmatrix} \cos \phi \cos \psi \\ \cos \phi \sin \psi \\ -\sin \phi \end{bmatrix} \quad 3.1.2.1$$

$$\left[\frac{\partial \bar{r}}{\partial \psi} \right] = -\frac{36 \text{ Mr}}{\rho^3} \begin{bmatrix} \cos \phi \sin \psi \\ \cos \phi \cos \psi \\ 0 \end{bmatrix} \quad 3.1.2.2$$

$$\left[\frac{\partial \bar{r}}{\partial \phi} \right] = -\frac{36 \text{ Mr}}{\rho^3} \begin{bmatrix} -\sin \phi \cos \psi \\ -\sin \phi \sin \psi \\ 1 \end{bmatrix} \quad 3.1.2.3$$

y ahora nos falta calcular los gradientes de ρ, ψ, ϕ ; para ello recordamos que

$$\left[J \left(\begin{matrix} \rho \\ \psi \\ \phi \end{matrix} \right) \right] \left[J \left(\begin{matrix} x \\ y \\ z \end{matrix} \right) \right] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

por lo que, desglasando los productos del primer renglón, obtendremos:

$$\nabla \rho \cdot \frac{\partial \bar{r}}{\partial \rho} = 1 \quad 3.1.2.4$$

$$\nabla \psi \cdot \frac{\partial \bar{r}}{\partial \psi} = 0 \quad 3.1.2.5$$

$$\nabla \phi \cdot \frac{\partial \bar{r}}{\partial \phi} = 0 \quad 3.1.2.6$$

que nos indican que $\nabla \rho$ es simultáneamente perpendicular a $\frac{\partial \bar{r}}{\partial \psi}$ y a $\frac{\partial \bar{r}}{\partial \phi}$; esto quiere decir que:

$$\nabla \rho = \lambda \left(\frac{\partial \bar{r}}{\partial \psi} \times \frac{\partial \bar{r}}{\partial \phi} \right) \quad 3.1.2.7$$

Al sustituir (7) en (6):

$$\lambda \left(\frac{\partial \bar{r}}{\partial \psi} \times \frac{\partial \bar{r}}{\partial \phi} \right) \cdot \frac{\partial \bar{r}}{\partial \rho} = 1$$

pero:

$$\left(\frac{\partial \bar{r}}{\partial \psi} \times \frac{\partial \bar{r}}{\partial \phi} \right) \cdot \frac{\partial \bar{r}}{\partial \rho} = J \left(\begin{matrix} x \\ y \\ z \end{matrix} \right) = f' \sin \psi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{1}{f' \sin \psi} \quad 3.1.2.8$$

Al llevar (8) a (7) resulta

$$\nabla \rho = \frac{1}{f' \sin \psi} \left(\frac{\partial \bar{r}}{\partial \psi} \times \frac{\partial \bar{r}}{\partial \phi} \right)$$

En este caso, en que sabemos que $\frac{\partial \bar{r}}{\partial \psi} \perp \frac{\partial \bar{r}}{\partial \phi}$, y que sabemos además que

$$\frac{\partial \bar{r}}{\partial \psi} = \left| \frac{\partial \bar{r}}{\partial \psi} \right| \bar{e}_\psi; \quad \frac{\partial \bar{r}}{\partial \phi} = \left| \frac{\partial \bar{r}}{\partial \phi} \right| \bar{e}_\phi$$

podemos escribir

$$\nabla \rho = \frac{1}{f' \sin \psi} \left| \frac{\partial \bar{r}}{\partial \psi} \right| \left| \frac{\partial \bar{r}}{\partial \phi} \right| (\bar{e}_\psi \times \bar{e}_\phi) = \frac{1}{f' \sin \psi} \left| \frac{\partial \bar{r}}{\partial \psi} \right| \left| \frac{\partial \bar{r}}{\partial \phi} \right| \bar{e}_\rho$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \rho \cos \theta \cos \phi + \rho \sin \theta \cos \phi \cos \psi - \rho \sin \theta \sin \phi \cos \psi \Rightarrow \left| \frac{\partial z}{\partial x} \right| = \rho \cos \theta \cos \phi$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\rho \sin \theta \sin \phi + \rho \cos \theta \sin \phi \cos \psi \Rightarrow \left| \frac{\partial z}{\partial y} \right| = \rho \sin \theta \sin \phi$$

Entonces:

$$\nabla \rho = \frac{1}{\rho^2} \rho \rho \nabla \rho = (\cos \theta \cos \phi, \sin \theta \cos \phi, \cos \psi)$$

$$\nabla \theta = (\cos \theta \sin \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \psi) \quad 3.1.2.p$$

Análogamente:

$$\nabla \phi = \frac{1}{\rho} (\cos \theta \cos \psi, \sin \theta \cos \psi, -\sin \psi) \quad 3.1.2.g$$

$$\nabla \psi = \frac{1}{\rho} (-\sin \theta, \cos \theta, 0) \quad 3.1.2.f$$

Ahora, con 3.1.2.A, i, j, p, q, y r, podemos efectuar los productos indicados en 3.1.2.g:

$$\left[\frac{\partial F}{\partial \rho} \right] [\nabla \rho] = \frac{6Hm}{\rho^3} \begin{bmatrix} 2 \cos \theta \cos \phi \cos \psi & 2 \cos \theta \sin \phi \cos \psi & 2 \cos \theta \sin \phi \sin \psi \\ 2 \cos \theta \sin \phi \cos \psi & 2 \sin \theta \cos \phi \cos \psi & 2 \sin \theta \sin \phi \cos \psi \\ 2 \cos \theta \sin \phi \sin \psi & 2 \sin \theta \sin \phi \cos \psi & 2 \sin^2 \phi \end{bmatrix}$$

$$\left[\frac{\partial F}{\partial \theta} \right] [\nabla \theta] = \frac{6Hm}{\rho^2} \begin{bmatrix} -\cos \theta \cos \phi & -\cos \theta \sin \phi \cos \psi & \cos \theta \sin \phi \sin \psi \\ -\cos \theta \sin \phi \cos \psi & -\sin \theta \cos \phi \cos \psi & \sin \theta \sin \phi \cos \psi \\ \cos \theta \sin \phi \sin \psi & \sin \theta \sin \phi \cos \psi & -\sin^2 \phi \end{bmatrix}$$

$$\left[\frac{\partial F}{\partial \psi} \right] [\nabla \psi] = \frac{6Hm}{\rho^3} \begin{bmatrix} -\sin \theta & \sin \theta \cos \theta & 0 \\ \sin \theta \cos \theta & -\cos^2 \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Al sumar estas matrices y hacer simplificaciones:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{6Hm}{\rho^3} \begin{bmatrix} 2 \cos \theta \cos \phi \cos \psi + 2 \sin \theta \cos \phi \cos \psi & 2 \cos \theta \sin \phi \cos \psi & 2 \sin \theta \sin \phi \cos \psi \\ 2 \cos \theta \sin \phi \cos \psi & 2 \sin \theta \cos \phi \cos \psi - 1 & 2 \sin \theta \sin \phi \cos \psi \\ 2 \cos \theta \sin \phi \sin \psi & 2 \sin \theta \sin \phi \cos \psi & -2 \sin^2 \phi - 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta \cos \phi \\ \sin \theta \sin \phi \\ \cos \psi \end{bmatrix}$$

... 3.2.2

que es el resultado buscado, pues, todas las cantidades que aparecen son de la.

Ahora pasemos nuestra atención a la ec. (9), donde podemos ver que

$$[\nabla F] = \left[\frac{\partial F}{\partial \rho} \right] [\nabla \rho] + \left[\frac{\partial F}{\partial \theta} \right] [\nabla \theta] + \left[\frac{\partial F}{\partial \psi} \right] [\nabla \psi]$$

que es la expresión para el gradiente de cualquier campo vectorial en coordenadas esféricas; sin embargo, si recapitulamos en el procedimiento seguido para llegar a esta conclusión veremos en la medida de que el razonamiento es general.

Entonces consideremos el campo

$$\vec{F}(u, v, w)$$

donde las ecuaciones de transformación son:

$$x = f(u, v, w)$$

$$y = g(u, v, w)$$

$$z = h(u, v, w)$$

con la condición de que:

$$J = J\left(\begin{matrix} x, y, z \\ u, v, w \end{matrix}\right) \neq 0$$

Podemos decir entonces que:

$$[\nabla F] = \left[\frac{\partial F}{\partial u} \right] [\tilde{V}u] + \left[\frac{\partial F}{\partial v} \right] [\tilde{V}v] + \left[\frac{\partial F}{\partial w} \right] [\tilde{V}w] \quad 3.1.12$$

Al mismo tiempo, podemos afirmar que

$$\tilde{V}u = \frac{1}{J} \left(\frac{\partial F}{\partial v} \times \frac{\partial F}{\partial w} \right) \quad 3.1.13$$

$$\tilde{V}v = \frac{1}{J} \left(\frac{\partial F}{\partial w} \times \frac{\partial F}{\partial u} \right) \quad 3.1.14$$

$$\tilde{V}w = \frac{1}{J} \left(\frac{\partial F}{\partial u} \times \frac{\partial F}{\partial v} \right) \quad 3.1.15$$

De lo que:

$$[\nabla F] = \frac{1}{J} \left(\left[\frac{\partial F}{\partial u} \right] \left[\frac{\partial F}{\partial v} \times \frac{\partial F}{\partial w} \right] + \left[\frac{\partial F}{\partial v} \right] \left[\frac{\partial F}{\partial w} \times \frac{\partial F}{\partial u} \right] + \left[\frac{\partial F}{\partial w} \right] \left[\frac{\partial F}{\partial u} \times \frac{\partial F}{\partial v} \right] \right)$$

3.1.16

3.6) los invariantes de la matriz cuadrada

En el ejemplo (3.6.6) obtuvimos el gradiente del campo gravitacional central, en coordenadas cartesianas:

$$[\nabla F] = \frac{GMm}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \begin{bmatrix} 2x^2-y^2-z^2 & 2xy & 2xz \\ 2xy & 2y^2-x^2-z^2 & 2yz \\ 2xz & 2yz & 2z^2-x^2-y^2 \end{bmatrix} \dots (a)$$

Con la ecuación (3.7.2a) obtuvimos el gradiente del mismo campo en coordenadas esféricas

$$[\nabla F] = \frac{GMm}{r^3} \begin{bmatrix} 3\cos^2\theta \sin^2\phi - 1 & 3\sin\theta \cos\theta \sin^2\phi & 3\sin\theta \cos\theta \cos^2\phi \\ 3\sin\theta \cos\theta \sin^2\phi & 3\sin^2\theta \sin^2\phi - 1 & 3\sin^2\theta \sin\theta \cos\phi \\ 3\sin\theta \cos\theta \cos^2\phi & 3\sin\theta \cos\theta \sin\theta \cos\phi & 3\cos^2\theta - 1 \end{bmatrix} (b)$$

Si sumamos los elementos de la diagonal principal de (a) obtenemos este mismo resultado que obtenemos si sumamos los elementos de la diagonal principal de (b).

Esta coincidencia se explica porque entre la matriz (a) y (b) sólo ha habido una transformación lineal y la suma de los elementos de la diagonal principal de una matriz (traza) permanece invariante si sólo se somete a cualquier transformación lineal.

La demostración general de esta propiedad la puede ver en el Apéndice (3B); pero nos gustaría hacer hincapié en que ya se nos presentó anteriormente con esta propiedad; por ejemplo, en Geometría Analítica.

Ejemplo 3.8.1) - Sea la elipse $x^2 + 4y^2 = 4$ que, en forma matricial puede escribirse

$$[x, y] \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 4 \quad \dots (c)$$

Si este elipse lo referimos a unos ejes u, v girados 30° con respecto a los anteriores, obtenemos:

$$\frac{1}{4} u^2 + \sqrt{3} uv + \frac{13}{4} v^2 = 4$$

que, puesta en forma matricial

$$[u, v] \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{13}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = 4 \quad \dots (d)$$

y podemos observar que, en ambos matrices, la traza vale 0. 3.97

A veces, cuando hayo, nos presenta una gran ventaja utilizar una cantidad de esta naturaleza, pensemos en los campos vectoriales que se a demorar con el sistema de referencia. Entonces:

Definición 3.9.1: Dado el campo vectorial diferenciable

$$F = P(x, y, z)\mathbf{i} + Q(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k}$$

se llama DIVERGENCIA del campo vectorial F , a

$$\text{div } F = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \dots \dots \dots (3.9.1)$$

Si volvemos a observar las matrices que aparecen en los eos. (a) y (b), observamos en la cuenta de que, en ambos casos, las traza de los elementos simétricos a la diagonal principal están lo mismo (zero). Esto también lo podemos observar en las matrices de las ecuaciones (a) y (d). La demostración de que esta propiedad es general para todas las matrices de puntos equivalentes en el espacio (3.9.2). Como estas traza en un campo tridimensional con sus, los podemos ordenar en un vector que definiremos como si-gue:

Definición 3.9.2: Dado el campo vectorial diferenciable

$$F = P(x, y, z)\mathbf{i} + Q(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k}$$

se llama ROTACIONAL del campo vectorial F , a

$$\text{rot } F = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right)\mathbf{k} \dots \dots \dots (3.9.2)$$

Notemos que en estas dos invariantes están tomados en cuenta los nueve elementos de la matriz gradiente.

Hay una manera muy sencilla de recordar estas definiciones que además, se presta para recordar fácilmente estos conceptos. Vamos a verla en seguida; pero antes debemos hacer algunas observaciones y recordatorios sobre lo que es un operador.

A estas alturas, ya has tenido bastante contacto con operadores. Operadores son $+$, $-$, \cdot , \div , etc que aprendiste en el ciclo anterior, a los cuales había que agregar los que aprendiste en los cursos superiores: $\frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial y}$, $\frac{\partial}{\partial z}$, etc.

En esta ocasión hemos introducido fundamentalmente dos expresiones: $\frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial y}$, $\frac{\partial}{\partial z}$. 3.98

Lo que distingue a este último operador de los demás, es que tiene un carácter vectorial; es decir, no implica una sola operación sino un conjunto ordenado de operaciones; obtener ordenadamente todas las derivadas parciales. Por ello podemos representarlo, para el caso del espacio tridimensional:

$$\nabla \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

Si lo aplicamos a una función vectorial $\phi(x, y, z)$ obtendremos

$$\nabla \phi = \frac{\partial \phi}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial \phi}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial \phi}{\partial z}\mathbf{k}$$

que funciona como el producto de un escalar por un vector

$$\nabla \phi = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \phi$$

Si lo aplicamos a una función vectorial $F = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$, tratare a funcionar como un vector, en forma de matriz sencilla:

$$[F][\nabla] = \begin{bmatrix} P \\ Q \\ R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial P}{\partial x} & \frac{\partial P}{\partial y} & \frac{\partial P}{\partial z} \\ \frac{\partial Q}{\partial x} & \frac{\partial Q}{\partial y} & \frac{\partial Q}{\partial z} \\ \frac{\partial R}{\partial x} & \frac{\partial R}{\partial y} & \frac{\partial R}{\partial z} \end{bmatrix}$$

En los conceptos que acabamos de definir, también se presta para una representación compacta, utilizando su carácter vectorial; así por ejemplo, la divergencia:

$$\text{div } F \cdot \nabla F = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot (P, Q, R) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

Asimismo, el rotacional:

$$\text{rot } F = \nabla \times F = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right)\mathbf{k}$$

Este operador es llamado comúnmente "rotor" (por su semejanza con una letra del alfabeto hebreo), "rot" (delte al romo) o "grad"

Como dijimos antes, esta concepción también facilita su manipulación.

Ejemplo 3.1.1) - Calcular $\nabla(\phi\psi)$ donde $\phi = \phi(x, y, z)$, $\psi = \psi(x, y, z)$

$$\nabla(\phi\psi) = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \phi\psi = \frac{\partial(\phi\psi)}{\partial x} i + \frac{\partial(\phi\psi)}{\partial y} j + \frac{\partial(\phi\psi)}{\partial z} k$$

$$\nabla(\phi\psi) = \left(\phi \frac{\partial \psi}{\partial x} + \psi \frac{\partial \phi}{\partial x}\right) i + \left(\phi \frac{\partial \psi}{\partial y} + \psi \frac{\partial \phi}{\partial y}\right) j + \left(\phi \frac{\partial \psi}{\partial z} + \psi \frac{\partial \phi}{\partial z}\right) k$$

Podemos agrupar:

$$\nabla(\phi\psi) = \phi \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} i + \frac{\partial \psi}{\partial y} j + \frac{\partial \psi}{\partial z} k\right) + \psi \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} i + \frac{\partial \phi}{\partial y} j + \frac{\partial \phi}{\partial z} k\right)$$

$$\nabla(\phi\psi) = \phi \nabla\psi + \psi \nabla\phi \dots \dots \dots (3.8.0.3)$$

Por Inducción Matemática esta ecuación puede generalizarse a:

$$3.1.0.4) \dots \dots \nabla(\phi_1 \phi_2 \dots \phi_n) = \phi_1 \phi_2 \dots \phi_n \nabla\phi + \phi_1 \phi_2 \dots \phi_{n-1} \nabla\phi_n + \dots + \phi_1 \phi_2 \dots \phi_{n-1} \nabla\phi_n$$

donde $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n$ son todas funciones escalares de (x, y, z) .

Si $\phi_1 = \phi_2 = \dots = \phi_n = \phi$, la ec. (3.8.0.4) queda:

$$\nabla\phi^n = n\phi^{n-1} \nabla\phi \dots \dots (3.8.0.5)$$

Ejemplo 3.8.3) - Calcular $\nabla \times (\phi F)$ donde ϕ es una función escalar y F es una función vectorial, ambas de (x, y, z) .

Sea $F = P i + Q j + R k$; entonces:

$$\nabla \times (\phi F) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \phi P & \phi Q & \phi R \end{vmatrix} = \left[\frac{\partial(\phi R)}{\partial y} - \frac{\partial(\phi Q)}{\partial z}\right] i + \left[\frac{\partial(\phi P)}{\partial z} - \frac{\partial(\phi R)}{\partial x}\right] j + \left[\frac{\partial(\phi Q)}{\partial x} - \frac{\partial(\phi P)}{\partial y}\right] k$$

$$\nabla \times (\phi F) = \left(\phi \frac{\partial R}{\partial y} - \phi \frac{\partial Q}{\partial z} - \phi \frac{\partial Q}{\partial z} + \phi \frac{\partial R}{\partial z}\right) i + \left(\phi \frac{\partial P}{\partial z} - \phi \frac{\partial R}{\partial x} - \phi \frac{\partial R}{\partial x} + \phi \frac{\partial P}{\partial x}\right) j + \left(\phi \frac{\partial Q}{\partial x} - \phi \frac{\partial P}{\partial y} - \phi \frac{\partial P}{\partial y} + \phi \frac{\partial Q}{\partial y}\right) k$$

Lo que podemos escribir:

$$\nabla \times (\phi F) = \phi \left[\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) i + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) j + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) k \right] + \left(R \frac{\partial \phi}{\partial y} - Q \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) i + \left(P \frac{\partial \phi}{\partial z} - R \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) j + \left(Q \frac{\partial \phi}{\partial x} - P \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) k$$

ó bien:

$$\nabla \times (\phi F) = \phi \nabla \times F + \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial \phi}{\partial x} & \frac{\partial \phi}{\partial y} & \frac{\partial \phi}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

$$\nabla \times (\phi F) = \phi \nabla \times F + \nabla \phi \times F \dots \dots \dots (3.8.0.6)$$

En la misma forma, te puedes demostrar las siguientes fórmulas: Considera, e. c. t. e., las funciones escalares $\phi(x, y, z)$ y $\psi(x, y, z)$, así como las funciones vectoriales $\vec{u}(x, y, z)$ y $\vec{v}(x, y, z)$.

- $\nabla(c\phi) = c \nabla\phi \dots \dots \dots (3.8.0.7)$
- $\nabla(\phi + \psi) = \nabla\phi + \nabla\psi \dots \dots \dots (3.8.0.8)$
- $\nabla(\vec{u} + \vec{v}) = \nabla\vec{u} + \nabla\vec{v} \dots \dots \dots (3.8.0.9)$
- $\nabla(c\vec{u}) = c \nabla\vec{u} \dots \dots \dots (3.8.0.10)$
- $\nabla(\phi\vec{u}) = \phi \nabla\vec{u} + \vec{u} \nabla\phi \dots \dots \dots (3.8.0.11)$
- $\nabla(\vec{u} \cdot \vec{v}) = \vec{v} \nabla\vec{u} + (\nabla\vec{u}) \cdot \vec{v} \dots \dots \dots (3.8.0.12)$
- $\nabla \times (\vec{u} + \vec{v}) = \nabla \times \vec{u} + \nabla \times \vec{v} \dots \dots \dots (3.8.0.13)$
- $\nabla \times (c\vec{u}) = c \nabla \times \vec{u} \dots \dots \dots (3.8.0.14)$

3.9) - LA DIVERGENCIA Y EL ROTACIONAL EN COORDENADAS CURVILINEAS

Requerimos nuestra atención nuevamente a la ec. (3.7.1.12):

$$[\nabla \cdot F] = \left[\frac{\partial F}{\partial u}\right] [V_u] + \left[\frac{\partial F}{\partial v}\right] [V_v] + \left[\frac{\partial F}{\partial w}\right] [V_w] \dots \dots (3.7.1.12)$$

Observemos que al primer miembro lo podemos escribir como

$$[F] \cdot [V]$$

y entonces, recordando que lo tenemos de una matriz producto es el producto de las transpuestas en orden cambiado:

$$[V] [F] = V \cdot F = [V_u] \left[\frac{\partial F}{\partial u}\right] + [V_v] \left[\frac{\partial F}{\partial v}\right] + [V_w] \left[\frac{\partial F}{\partial w}\right]$$

o, lo que es lo mismo:

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \nabla u \cdot \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial u} + \nabla v \cdot \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial v} + \nabla w \cdot \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial w} \dots (3.9.01)$$

Que es la ec. para calcular la divergencia en cualquier tipo de coordenadas, ligadas al sistema cartesiano por:

$$\begin{aligned} x &= f(u, v, w) \\ y &= g(u, v, w) \\ z &= h(u, v, w) \end{aligned} \quad J = J\left(\frac{x, y, z}{u, v, w}\right) \neq 0$$

Análogamente se obtiene la expresión para la otra invariante:

$$\nabla \times \mathbf{F} = \nabla u \times \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial u} + \nabla v \times \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial v} + \nabla w \times \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial w} \dots (3.9.02)$$

donde ∇u , ∇v , ∇w , se obtienen con las ecs (3.1.13), (3.1.14) y (3.1.15)

Cuando el sistema curvilíneo es ortogonal, esto es: $\bar{e}_u \cdot \bar{e}_v = \bar{e}_v \cdot \bar{e}_w = \bar{e}_w \cdot \bar{e}_u = 0$

se puede observar de estas últimas ecuaciones que:

$$\nabla u \cdot \left(\frac{\partial \bar{e}_v}{\partial u} \times \frac{\partial \bar{e}_w}{\partial u} \right) = \frac{1}{|J|} \left| \frac{\partial \bar{e}_v}{\partial u} \times \frac{\partial \bar{e}_w}{\partial u} \right| \bar{e}_u = \frac{1}{|J|} \left| \frac{\partial \bar{e}_v}{\partial u} \right| \left| \frac{\partial \bar{e}_w}{\partial u} \right| \sin 90^\circ \bar{e}_u$$

Además, $J = \left| \frac{\partial \bar{e}_v}{\partial u} \right| \left| \frac{\partial \bar{e}_w}{\partial u} \right| \left| \frac{\partial \bar{e}_u}{\partial u} \right|$ (¿por qué?)

con lo que $\nabla u = \frac{1}{|J|} \bar{e}_u$

Para hacer más fácil la notación podemos hacer:

$$\left. \begin{aligned} U &= \left| \frac{\partial \bar{e}_v}{\partial u} \right| \\ V &= \left| \frac{\partial \bar{e}_w}{\partial u} \right| \\ W &= \left| \frac{\partial \bar{e}_u}{\partial u} \right| \end{aligned} \right\} \dots (3.9.03)$$

y entonces: $\nabla u = \frac{\bar{e}_u}{U} \dots (3.9.04)$

Análogamente

$$\nabla v = \frac{\bar{e}_v}{V} \dots (3.9.05)$$

$$\nabla w = \frac{\bar{e}_w}{W} \dots (3.9.06)$$

Entonces, para sistemas curvilíneos ortogonales y sólo para ellos, la ec. (3.9.01) queda:

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{1}{U} \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial u} \cdot \bar{e}_u + \frac{1}{V} \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial v} \cdot \bar{e}_v + \frac{1}{W} \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial w} \cdot \bar{e}_w \dots (3.9.07)$$

y la ec. (3.9.02):

$$\nabla \times \mathbf{F} = \frac{1}{U} \bar{e}_u \times \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial u} + \frac{1}{V} \bar{e}_v \times \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial v} + \frac{1}{W} \bar{e}_w \times \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial w} \dots (3.9.08)$$

Queremos que los sistemas cilíndrico y esférico sean ortogonales, por lo que les podemos aplicar estos resultados; en el sistema cilíndrico:

$$r = \rho \cos \theta$$

$$z = \rho \sin \theta$$

$$z = u$$

$$\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \rho} = \cos \theta \bar{e}_r + \sin \theta \bar{e}_z \quad U = 1$$

$$\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \theta} = -\rho \sin \theta \bar{e}_r + \rho \cos \theta \bar{e}_z \quad V = \rho$$

$$\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial u} = \bar{e}_z \quad W = 1$$

Si además consideramos que

$$\bar{r} = P(\rho, \theta, u) \bar{e}_r + Q(\rho, \theta, u) \bar{e}_\theta + R(\rho, \theta, u) \bar{e}_z$$

tendremos:

$$\frac{\partial \bar{r}}{\partial \rho} = P \bar{e}_r + Q \frac{\partial \bar{e}_r}{\partial \rho} + R \frac{\partial \bar{e}_z}{\partial \rho}$$

Recordemos que

$$\bar{e}_\rho = \cos \theta \bar{e}_r + \sin \theta \bar{e}_z \Rightarrow \frac{\partial \bar{e}_r}{\partial \rho} = 0$$

$$\bar{e}_\theta = -\sin \theta \bar{e}_r + \cos \theta \bar{e}_z \Rightarrow \frac{\partial \bar{e}_\theta}{\partial \rho} = 0$$

$$\bar{e}_z = \bar{e}_z \Rightarrow \frac{\partial \bar{e}_z}{\partial \rho} = 0$$

Así:

$$\frac{\partial \bar{r}}{\partial \rho} = P \bar{e}_r + R \bar{e}_z$$

Análogamente

$$\frac{\partial \bar{r}}{\partial \theta} = -P \bar{e}_r + Q \bar{e}_\theta + R \bar{e}_z$$

$$\frac{\partial \bar{r}}{\partial u} = R \bar{e}_z$$

Entonces:

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \left(\frac{\partial P}{\partial r} \bar{e}_r + \frac{\partial Q}{\partial \theta} \bar{e}_\theta + \frac{\partial R}{\partial \phi} \bar{e}_\phi \right) \cdot \bar{e}_r + \frac{1}{r} \left(P \bar{e}_\theta + \frac{\partial P}{\partial \theta} \bar{e}_r - Q \bar{e}_r + \frac{\partial Q}{\partial \theta} \bar{e}_\theta + \frac{\partial R}{\partial \phi} \bar{e}_\phi \right) \cdot \bar{e}_\theta + \left(\frac{\partial P}{\partial \phi} \bar{e}_r + \frac{\partial Q}{\partial \phi} \bar{e}_\theta + \frac{\partial R}{\partial \phi} \bar{e}_\phi \right) \cdot \bar{e}_\phi$$

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial P}{\partial r} + \frac{1}{r} \left(P + \frac{\partial Q}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial R}{\partial \phi} \quad \dots \dots \dots (3.9.0.9)$$

En cuanto al rotacional:

$$\nabla \times \mathbf{F} = \bar{e}_r \times \left(\frac{\partial P}{\partial r} \bar{e}_r + \frac{\partial Q}{\partial \theta} \bar{e}_\theta + \frac{\partial R}{\partial \phi} \bar{e}_\phi \right) + \frac{1}{r} \bar{e}_\theta \times \left(P \bar{e}_\theta + \frac{\partial P}{\partial \theta} \bar{e}_r - Q \bar{e}_r + \frac{\partial Q}{\partial \theta} \bar{e}_\theta + \frac{\partial R}{\partial \phi} \bar{e}_\phi \right) + \bar{e}_\phi \times \left(\frac{\partial P}{\partial \phi} \bar{e}_r + \frac{\partial Q}{\partial \phi} \bar{e}_\theta + \frac{\partial R}{\partial \phi} \bar{e}_\phi \right)$$

Tengamos en cuenta que

$$\begin{aligned} \bar{e}_r \times \bar{e}_\theta &= \bar{e}_\phi \\ \bar{e}_\theta \times \bar{e}_\phi &= \bar{e}_r \\ \bar{e}_\phi \times \bar{e}_r &= \bar{e}_\theta \end{aligned}$$

Por consiguiente:

$$\nabla \times \mathbf{F} = \frac{\partial Q}{\partial r} \bar{e}_\phi - \frac{\partial P}{\partial \theta} \bar{e}_\phi + \frac{1}{r} \left(-\frac{\partial P}{\partial \theta} \bar{e}_\phi + Q \bar{e}_r + \frac{\partial Q}{\partial \theta} \bar{e}_r \right) + \frac{\partial P}{\partial \phi} \bar{e}_\theta - \frac{\partial R}{\partial \phi} \bar{e}_r$$

$$\nabla \times \mathbf{F} = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial R}{\partial \theta} - P \frac{\partial Q}{\partial \phi} \right) \bar{e}_r + \left(\frac{\partial P}{\partial \phi} - \frac{\partial R}{\partial \theta} \right) \bar{e}_\theta + \frac{1}{r} \left[\left(P \frac{\partial Q}{\partial \theta} + Q \right) \cdot \frac{\partial P}{\partial \theta} \right] \bar{e}_\phi$$

$$\frac{\partial}{\partial r} (PQ)$$

Esta expresión es muy parecida a la del rotacional en coordenadas cartesianas; podemos llegar a una fórmula igualmente manuable si en vez de "z" se usa $\frac{1}{r} \bar{e}_r$; en vez de "k", $\frac{1}{r} \bar{e}_\theta$ y en vez de "Q", PQ:

$$\nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \frac{1}{r} \bar{e}_r & \bar{e}_\theta & \frac{1}{r} \bar{e}_\phi \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \phi} \\ P & PQ & R \end{vmatrix} \quad \dots \dots \dots (3.9.0.10)$$

Ejemplo 3.9.1) Su el campo

$$\mathbf{F} = p \cos \theta \bar{e}_r + u^2 \cos \theta \bar{e}_\theta + \frac{p}{u} \bar{e}_\phi$$

calcular su divergencia y su rotacional

solución: $P = p \cos \theta$; $Q = u^2 \cos \theta$; $R = \frac{p}{u}$

$$\frac{\partial P}{\partial r} = \cos \theta; \quad \frac{\partial Q}{\partial \theta} = -u^2 \sin \theta; \quad \frac{\partial R}{\partial u} = -\left(\frac{p}{u}\right)^2$$

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \cos \theta + \frac{1}{r} (p \cos \theta - u^2 \sin \theta) - \left(\frac{p}{u}\right)^2 \cos \theta (2-u^2) - \left(\frac{p}{u}\right)^2$$

$$\nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \frac{1}{r} \bar{e}_r & \bar{e}_\theta & \frac{1}{r} \bar{e}_\phi \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial u} \\ p \cos \theta & p u^2 \cos \theta & \frac{p}{u} \end{vmatrix} = \frac{1}{r} (-2u p \cos \theta) \bar{e}_r - \frac{2p}{u} \bar{e}_\theta + \frac{1}{r} (u^2 \sin \theta + p \cos \theta) \bar{e}_\phi$$

$$\nabla \times \mathbf{F} = -2u \cos \theta \bar{e}_r - \frac{2p}{u} \bar{e}_\theta + \cos \theta \left(\frac{u^2}{r} + 1 \right) \bar{e}_\phi$$

sigue los pasos que aquí te hemos indicado y llegarás a las siguientes expresiones en coordenadas esféricas.

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 P) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial P}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} (Q \sin \theta) \quad \dots \dots \dots (3.9.0.11)$$

$$\nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \bar{e}_r & \bar{e}_\theta & \bar{e}_\phi \\ p \sin \theta & p \cos \theta & \frac{p}{r} \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \phi} \\ P & Q & R \end{vmatrix} \quad \dots \dots \dots (3.9.0.12)$$

donde $F = P(r, \theta, \phi) \bar{e}_r + Q(r, \theta, \phi) \bar{e}_\theta + R(r, \theta, \phi) \bar{e}_\phi$
 $r = \rho \sin \theta \cos \phi$
 $y = \rho \sin \theta \sin \phi$
 $z = \rho \cos \theta$

Por último, considérese que la ec. (3.9.0.12) puede servir asimismo para obtener el gradiente de una función escalar en coordenadas esféricas. En efecto sea $f(u, v, w)$:

$$[\nabla f] = \frac{\partial f}{\partial u} [\bar{e}_u] + \frac{\partial f}{\partial v} [\bar{e}_v] + \frac{\partial f}{\partial w} [\bar{e}_w]$$

En los casos en que estas coordenadas esféricas sean mutuamente ortogonales, ya vimos que $\bar{e}_u, \bar{e}_v, \bar{e}_w$ obedecen a las ecs. (3.9.0.4), (3.9.0.5) y (3.9.0.6), por lo que:

$$\nabla f = \frac{1}{u} \frac{\partial f}{\partial u} \bar{e}_u + \frac{1}{v} \frac{\partial f}{\partial v} \bar{e}_v + \frac{1}{w} \frac{\partial f}{\partial w} \bar{e}_w \quad \dots \dots \dots (3.9.0.13)$$

para el caso de las coordenadas esféricas, ya vimos que $u=v=1$; $v=\theta$; así:

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x} \vec{e}_1 + \frac{1}{\rho} \frac{\partial f}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{e}_z \dots \dots \dots (3.9.14)$$

5. en el caso de coordenadas esféricas:

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{\rho} \frac{\partial f}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{1}{\rho \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \phi} \vec{e}_\phi \dots \dots \dots (3.9.15)$$

Ejemplo 3.9.2): La temperatura de un cuerpo varía proporcionalmente a la distancia al eje "z" e inversamente proporcional a su altura. Encontrar el gradiente de temperatura

Solución: la función es:

$$T = \frac{\lambda}{u} z, \text{ donde } \lambda \text{ es la constante de proporcionalidad.}$$

$$\text{variables: } \frac{\partial T}{\partial r} = \frac{\lambda z}{u^2} ; \frac{\partial T}{\partial \theta} = 0 ; \frac{\partial T}{\partial z} = \frac{\lambda}{u} - \frac{\lambda z}{u^2}$$

$$\nabla T = \frac{\lambda}{u} \vec{e}_r - \frac{\lambda z}{u^2} \vec{e}_z$$

3.10) INVARIANTES DE SEGUNDO ORDEN

En este capítulo hemos visto fundamentalmente tres conceptos: gradiente, Divergencia y Rotacional. El primero se puede aplicar indistintamente a un campo escalar o vectorial, se se aplica a un campo escalar, el resultado es un vector a cada punto, esto es, un campo vectorial; si se aplica a un campo vectorial, el resultado es una matriz asociada a cada punto que, como recordará de la teoría de Álgebra, forman también un espacio vectorial

Los otros dos conceptos se aplican siempre a campos vectoriales; la divergencia da por resultado un campo escalar y el rotacional da por resultado otro campo vectorial. La figura (3.10.1) resume lo anterior

Así pues, si los resultados son nuevos campos escalares o vectoriales, a estos también podemos nuevamente aplicarlos los conceptos de referencia y obtener nuevamente campos escalares o vectoriales, a los cuales de nuevo se les pueden aplicar tales conceptos y así sucesivamente. A nosotros nos interesan sólo los de segundo orden; así, del campo vectorial que se obtiene con el gradiente de una función escalar, nos interesa su divergencia y su rotacional. Del campo escalar que se

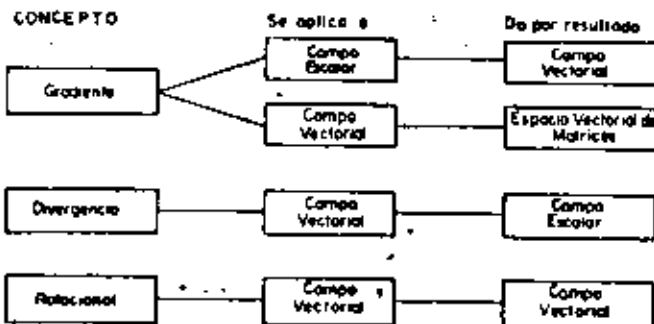


Fig. 3.10.1

resulta de la divergencia de un campo vectorial, obtendremos su gradiente y del campo vectorial de rotacional, obtendremos su divergencia y rotacional.

3.10.1) Divergencia de un gradiente

Sea la función escalar $\phi(x, y, z)$, su gradiente será el vector

$$\nabla \phi = \frac{\partial \phi}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \vec{k}$$

Si de este vector hacemos su divergencia, obtendremos:

$$\text{div}(\nabla \phi) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right) = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}$$

Se aproximan nuevamente las propiedades del operador vectorial y se escribe:

$$\nabla^2 \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \dots \dots \dots (3.10.1.1)$$

A este operador que acabamos de definir se le conoce como LAPLACIANO del campo escalar "phi". Cuando un campo escalar posee la propiedad de que

$$\nabla^2 \phi = 0, \text{ en todo los puntos}$$

se dice que cumple con la ecuación DE LAPLACE o que se trata de una FUNCIÓN ARMÓNICA

Esta propiedad, sea de larga que el gradiente tomase siempre una divergencia nula. Los campos vectoriales con esta propiedad se llaman

SOLENOIDALES.

3.10.2) Rotacional de un escalar

Sea nuevamente la función escalar $\phi(x, y, z)$, cuyo gradiente es

$$\nabla\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x}i + \frac{\partial\phi}{\partial y}j + \frac{\partial\phi}{\partial z}k$$

Ahora calculemos su rotacional

$$\nabla \times (\nabla\phi) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial\phi}{\partial x} & \frac{\partial\phi}{\partial y} & \frac{\partial\phi}{\partial z} \end{vmatrix} = i \left(\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} \right) + j \left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} \right) + k \left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} \right)$$

Por el teorema de Schwarz, podemos afirmar que el rotacional de un gradiente siempre es el vector nulo.

Cabría preguntarse si la recíproca es cierta; esto es, si existe un campo potencial con rotacional nulo, siempre es gradiente de alguna función escalar; para averiguarlo, supongamos:

$$\nabla \times F = 0, \text{ tal que } F = P i + Q j + R k$$

Como ya vimos:

$$\nabla \times F = \left(\frac{\partial Q}{\partial y} - \frac{\partial P}{\partial x} \right) i + \left(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z} \right) j + \left(\frac{\partial R}{\partial z} - \frac{\partial Q}{\partial y} \right) k$$

$$\text{Luego, si } \nabla \times F = 0 \Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial y} = \frac{\partial P}{\partial x}; \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z}; \frac{\partial R}{\partial z} = \frac{\partial Q}{\partial y}$$

que, como consecuencia de (13.1), es la condición necesaria y suficiente para F ser gradiente de una cierta función escalar ϕ .

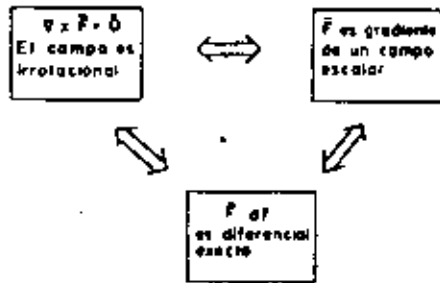


Fig. 3.10.2.

Nota.
Recuerda que la flecha de doble lado se lee "implica necesariamente".

Na denotemos, en éste es el caso,

$$F \cdot dr = P dx + Q dy + R dz$$

una diferencial exacta de la misma función ϕ .

Ejemplo 3.10.1) Calcular el rotacional del campo.

$$F = (xy + 4z)i + (xz + 3z)j + (2y + 4x)k$$

3. en caso de que sea nulo, averiguar de qué función es gradiente

Solución:

$$\nabla \times F = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xy+4z & xz+3z & 2y+4x \end{vmatrix} = (3-3)i + (4-4)j + (2-2)k = 0$$

Si el rotacional es nulo, sabemos F debe ser el gradiente de alguna función escalar, que calcularemos como vimos en (13.1):

$$\phi = \int (xy + 4z) dx + f(y, z) = 0.5xy + 4xz + f(y, z)$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial y} = 0.5x + \frac{\partial f}{\partial y} = xz + 3z \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y} = 0.5x + 2z \Rightarrow f = 0.5xy + g(z)$$

$$f = 0.5xy + g(z)$$

$$\phi = 0.5xy + 4xz + 0.5xy + g(z)$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial z} = 0.5xy + 8z + g'(z) = 2y + 4x \Rightarrow g'(z) = 0 \Rightarrow g(z) = C$$

$$\phi = 0.5xy + 4xz + C$$

A los campos cuyo rotacional es nulo en todos los puntos, se les llama **IRROTACIONALES**; a la función escalar de la cual un campo irrotacional es gradiente, se le conoce como función **POTENCIAL DE ESCALAR**; a las superficies de nivel de esta función, (o curvas, si la función es solamente de dos variables) se les llama "superficies (curvas) **EQUIPOTENCIALES**".

Ejemplo 3.10.2) Resalte que ya vimos que el campo gravitacional universal es irrotacional, encontrar su función potencial

Solución:

Notamos esto que este campo se expresa:

$$F = -GMm \frac{x^2i + y^2j + z^2k}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$$

$$F = -GMm \int \frac{\partial\phi}{\partial x} dx = f(y, z) = -\frac{GMm}{2} \left(\frac{1}{r} \right) (x^2 + y^2 + z^2)^{3/2} = f(y, z)$$

$$\phi = \frac{GMm}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} = f(x, y, z)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = -\frac{3x GMm}{2(x^2+y^2+z^2)^{5/2}} = -\frac{3GMm x}{2(x^2+y^2+z^2)^{5/2}} \text{ es } f'(x, y, z) = f'(x)$$

Análogamente, $g(y) = C'$, por lo que:

$$\phi = \frac{GMm}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} = C'$$

Para encontrar las superficies equipotenciales, tomamos $\phi = C''$:

$$C'' = C' = C = \frac{GMm}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$$

$$x^2+y^2+z^2 = \left(\frac{GMm}{C}\right)^{2/3}$$

Las equipotenciales son esferas concéntricas en el origen

Ahora consideremos un campo de velocidades

$$\vec{v} = v_x \hat{i} + v_y \hat{j}$$

y suponemos que sea, a la vez, irrotacional y solenoidal: si es irrotacional, entonces

$$\frac{\partial v_x}{\partial y} = \frac{\partial v_y}{\partial x} \dots \dots \dots (3.10.1)$$

y habrá una función ψ de la cual es gradiente:

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = v_x; \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = v_y$$

Por ser solenoidal:

$$\nabla \cdot \vec{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0$$

pero como $\vec{v} = \nabla \psi$,

$$\nabla \cdot \nabla \psi = \nabla^2 \psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0 \dots \dots \dots (3.10.2)$$

y ψ es una función que cumple con la ecuación de Laplace.

Ahora consideremos el campo

$$\vec{v} = v_x \hat{i} - v_y \hat{j}$$

por la ecuación (3.10.2) este campo es irrotacional; luego existe una función ψ' tal que

$$\vec{v} = \nabla \psi'$$

pero por la ecuación (3.10.1) el campo \vec{v} también es solenoidal y

puede entonces concluirse que

$$\nabla^2 \psi = 0$$

Además, puede concluirse que a cada función $\phi(x, y)$, armónica, corresponde otra función $\psi(x, y)$, también armónica, ligada por las expresiones

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial x} &= -\frac{\partial \phi}{\partial y} \\ \frac{\partial \psi}{\partial y} &= \frac{\partial \phi}{\partial x} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (3.10.3)$$

que se conocen como condiciones de Cauchy-Riemann (4)

Ahora consideremos dos curvas de nivel equipotenciales: $\phi = C_1$ y $\phi = C_2$, en un plano cartesiano; puesto que $\nabla \phi = \vec{v} = v_x \hat{i} + v_y \hat{j} = 0$, estas curvas se cortan en cualquier punto ortogonalmente (ver fig. 3.10.3).

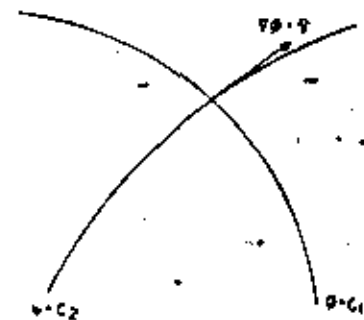


Fig. 3.10.3

La consecuencia, $\nabla \psi = \vec{v}$ tiene que ser tangente a la curva $\phi = C_1$, pero al hecho de que un vector normal a la curva sea su propio tangente a una curva, implica que esa curva es la trayectoria de una partícula.

Entonces, también puede afirmarse que la solución general de la ecuación de Laplace

$$\nabla^2 \psi = 0$$

consiste en una familia de líneas que se cortan ortogonalmente; es decir, curvas de nivel de ψ' (o, equivalentemente) y las otras, las trayectorias de las partículas (líneas de flujo).

3.10.3) Gradiente de una Divergencia

Sea ahora el campo vectorial $\vec{F} = F_x \hat{i} + F_y \hat{j}$, cuya divergencia es

(4) En cursos superiores de Matemáticas, encontrarán que estas condiciones se expresan en términos de variable compleja. La consiguiente arriba es una forma equivalente de expresarlo.

$$\nabla \cdot \vec{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

para obtener su gradiente:

$$\nabla(\nabla \cdot \vec{F}) = \left(\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 R}{\partial x \partial z} \right) i + \left(\frac{\partial^2 P}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 Q}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 R}{\partial y \partial z} \right) j + \left(\frac{\partial^2 P}{\partial z \partial x} + \frac{\partial^2 Q}{\partial z \partial y} + \frac{\partial^2 R}{\partial z^2} \right) k \dots (3.10.5.7)$$

3.10.4) Divergencia de un Rotacional

Sea nuevamente $\vec{F} = P i + Q j + R k$, cuyo rotacional es

$$\nabla \times \vec{F} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) i + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) j + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) k$$

La divergencia de este vector:

$$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{F}) = \frac{\partial^2 R}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 P}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 R}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 Q}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 P}{\partial z \partial y}$$

$$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{F}) = 0$$

La divergencia de un rotacional siempre es cero; mediante un razonamiento análogo al que hicimos cuando demostramos que el rotacional de un gradiente siempre es cero, podemos concluir que, cuando un campo vectorial es rotacional, se sabe a que es rotacional de otro cierto campo vectorial. Este nuevo campo es de gran importancia en la teoría Electromagnética y se llama "POTENCIAL VECTORIAL"; sin embargo, para obtenerlo, necesitamos de expresiones sobre corrientes de densidad, que aún no presentamos. Además, la solución no es única.

3.10.5) Potencial de un Escalar

Consideramos nuevamente a $\vec{F} = P i + Q j + R k$ y a su rotacional

$$\nabla \times \vec{F} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) i + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) j + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) k$$

Calculamos el rotacional de este campo:

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{F}) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} & \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} & \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \end{vmatrix}$$

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{F}) = \left(\frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 P}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 R}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 R}{\partial x \partial z} \right) i + \left(\frac{\partial^2 P}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 Q}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 R}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 Q}{\partial z \partial x} \right) j + \left(\frac{\partial^2 P}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 Q}{\partial z \partial y} - \frac{\partial^2 R}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 Q}{\partial z \partial x} \right) k \dots (3.10.5.1)$$

Si calculamos la ecuación (3.10.5.1) de la (3.10.5.1), obtenemos:

$$\nabla(\nabla \cdot \vec{F}) - \nabla \times (\nabla \times \vec{F}) = \left(\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 R}{\partial x^2} \right) i + \left(\frac{\partial^2 Q}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 Q}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 R}{\partial y^2} \right) j + \left(\frac{\partial^2 R}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 R}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 R}{\partial z^2} \right) k$$

$$\nabla(\nabla \cdot \vec{F}) - \nabla \times (\nabla \times \vec{F}) = \nabla^2 P i + \nabla^2 Q j + \nabla^2 R k \dots (3.10.5.2)$$

A este vector así definido se le acostumbra llamar LAPLACIANO VECTOCIAL del campo vectorial \vec{F} y se escribe

$$\nabla^2 \vec{F} = \nabla^2 P i + \nabla^2 Q j + \nabla^2 R k \dots (3.10.5.3)$$

IV INTEGRALES DE LINEA Y SUPERFICIE

U. N. A. M.

CAPITULO CUATRO

La Integral Curvilínea.

4-1

4.1.1.- La Integral Curvilínea.- Su expresión Vectorial y Física.

Problema 4.1.1.- Un cañón dispara una granada con una velocidad inicial de 900 Km/hr. Si el cañón forma un ángulo de $36^{\circ}52'$ con la horizontal y despreciamos la resistencia del aire, ¿dónde se encuentra la granada 4 seg después del disparo?

Solución: Escribamos la velocidad inicial como vector:

$$\vec{v}_0 = 900 \left(\frac{1}{3.6} \hat{i} + \frac{1}{3.6} \hat{j} \right) = 250 \hat{i} + 500 \hat{j} \quad (\text{El eje } x \text{ coincide con la horizontal})$$

cuyas componentes es conveniente reducir a unidades de m/s:

$$\vec{v}_0 = \frac{250.000}{3.600} \hat{i} + \frac{500.000}{3.600} \hat{j} = 200 \hat{i} + 150 \hat{j}$$

Ahora bien, puesto que despreciamos la resistencia del aire, la componente horizontal no debe variar; en cambio, la componente vertical debe sufrir un decremento constante de 9.8 m/seg cada segundo, debido a la aceleración de la gravedad. Entonces, la velocidad en cualquier instante queda:

4-2

$$\vec{v} = 200 \hat{i} + (150 - 9.8t) \hat{j} \quad \text{--- (4.1.1.a)}$$

Cuando estudiamos los campos vectoriales de variable real (ver 3.4.3) planteamos un caso muy semejante, en el cual, dada la expresión vectorial de una velocidad, y una posición inicial, se pedía la posición del móvil un cierto tiempo después. Ese ejemplo lo resolvimos a través de la diferencial total, - porque el incremento de tiempo era muy pequeño; es decir, hicimos

$$\vec{r}_f = \vec{r}_0 + \Delta \vec{r} \approx \vec{r}_0 + d\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v} \Delta t$$

donde \vec{r}_0 = Vector de posición del punto inicial

\vec{r}_f = Vector de posición del punto final

En el presente problema también nos dan una posición inicial $\vec{r}_0(0,0)$ (situamos el cañón en el origen), la velocidad está dada por (4.1.1.a) y $\Delta t = 4$ seg. La diferencia es que este incremento de tiempo es muy grande y si siguiera como una primera aproximación podríamos aceptar la igualdad entre el incremento y la diferencial del vector de posición.

Lo que podemos hacer es aproximarnos por incrementos "pequeños" de tiempo, donde pueda aceptarse la igualdad aproximada entre el incremen-

to y la diferencial; se propone $\Delta t = 1$ seg, con lo cual, mediante la tabla (4.1.1), llegaríamos a un resultado aproximado:

t (seg)	Δt (seg)	r (m)		v (m/seg)		$dr = v \Delta t$	
		x	y	v_x	v_y	dx (m)	dy (m)
0	1	0	0	200	150	200	150
1	1	200	150	200	140.2	200	140.2
2	1	400	290.2	200	130.4	200	130.4
3	1	600	420.6	200	120.6	200	120.6
4	1	800	541.2	200	110.8	200	110.8

Tabla 4.1.1

Estos resultados están representados en la fig. 4.1.1. Lo primero que observamos es que podemos haber-

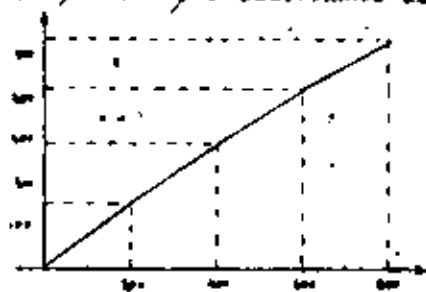


Fig. 4.1.1

Además intuimos que
a) Puesto que la velocidad es continua, en el ins-

Llegado al mismo resultado sumando directamente las columnas de dr , de acuerdo con la propiedad asociativa de la suma vectorial.

tante dado la partícula tiene que estar en un punto, esto es, no puede desaparecer, ni estar en dos puntos a la vez. b) Si hubiésemos escogido un valor de Δt más pequeño, habiésemos caído más cerca del punto verdadero. c) Hay varias maneras de acercarse al punto sin perder la aproximación; como vemos que los dos últimos segmentos son muy largos, podríamos haberlos subdividido. d) La aproximación se rige por la amplitud del mayor intervalo de tiempo. e) Nadie nos obliga a evaluar la velocidad al inicio del intervalo de tiempo; cualquier punto, dentro del mismo, puede servirnos, igualmente, puesto que el teorema del Valor Medio del Cálculo Diferencial nos dice que la velocidad media en el intervalo es igual a la velocidad real en algún punto de éste.

Así pues, aún fijando la amplitud máxima de los intervalos de tiempo, muchas personas obtendrán muchos puntos aproximados que podríamos imaginar-

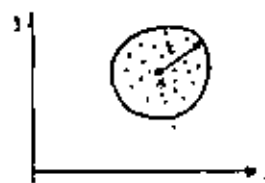


Fig. 4.1.2

los repartidos dentro de un círculo, de radio r y alrededor del punto verdadero, que llamaremos J . (Fig 4.1.2)

Lo importante es que, si a las personas anteriores se les restringiera más la amplitud máxima de los intervalos de tiempo, volverían a entregarnos puntos diferentes; pero ahora todos ellos se agruparían dentro de un círculo de menor radio; y si todavía restringiéramos más nuestra amplitud máxima, reduciríamos más aún el radio del círculo y así sucesivamente.

4.12) Generalidades.

Los campos vectoriales que tienen esta propiedad, se dice que son integrables sobre la curva. ¿Sobre cuál curva? Sobre la que implícitamente nos está definiendo la reducción del campo a un solo parámetro.

Esto es muy importante, pues las integrales curvilíneas (o de línea), como su nombre lo indica, siempre habrán de referirse a una curva. En el ejemplo anterior, desde el momento en que nos referimos a una partícula, nos estaremos refiriendo a una sola trayectoria; por la misma razón, fue posible reducir, tanto a \vec{v} como a \vec{F} , a una sola variable: " t ".

En general plantearemos: sea $\vec{u}(\vec{r})$ un campo vectorial cualquiera y sea $\vec{r}(t)$ una trayectoria rectificable a trozos (por secciones) sobre la cual

\vec{u} exista y fuese suelta. Sean también los puntos $P = \vec{r}|_{t=a} = \vec{r}(a)$ y $Q = \vec{r}|_{t=b} = \vec{r}(b)$

Representamos el intervalo $[a, b]$ en el eje " t " (Fig. 4.1.3)

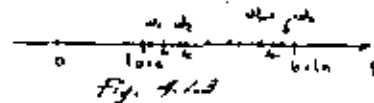


Fig. 4.1.3

y hacemos una partición (o red en E^1) en dicho intervalo, mediante los puntos $t_0 = a, t_1, t_2, \dots, t_n = b$.

A cada subintervalo le llamaremos celda de la red y, a la amplitud de la mayor de las celdas le llamaremos "norma de la red" y la representaremos por " Δ ".

Dentro de cada celda y sin más limitación que ésta, escogamos un punto que llamaremos w_1, w_2, \dots, w_n , según la celda en que se encuentre. En cada uno de estos puntos podremos evaluar $\vec{u}(w_i)$ y después $\vec{u}(w_i)$. Multipliquemos estos valores por los correspondientes espesores Δt_i y sumemos para obtener el vector

$$\sum_{i=1}^n \vec{u}(w_i) \Delta t_i$$

Definición 4.1.1). Si dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$\left| \sum_{i=1}^n \bar{u}(t_i) \Delta t_i - \bar{I} \right| < \epsilon \text{ cuando } \Delta S \dots (4.1.2.1)$$

se dice que $\bar{u}(t)$ es integrable sobre la curva $r(t)$ y que el vector \bar{I} es la integral vectorial del campo \bar{u} .

Se escribe:

$$\bar{I} = \int_a^b \bar{u}(r) dt = \int_a^b \bar{u}(r(t)) dt \dots (4.1.2.2)$$

La expresión (4.1.2.1) nos recuerda mucho, la expresión del límite vectorial; pero téngase en cuenta, que, cuando definimos este tipo de límites (ver subtema 3.2) nos referimos a funciones vectoriales. En el presente caso, la suma vectorial que aparece en (4.1.2.1), NO es una función de Δ pues, como ya vimos, aunque fijemos la malla de la red, podemos tener tantos valores de la suma vectorial como queramos.

De allí que no podemos transplantar todas las propiedades de los límites vectoriales a las integrales; por ejemplo

$$\int_a^b [\bar{u}(r) \cdot \sigma(r)] dt \neq \int_a^b \bar{u}(r) dt \cdot \int_a^b \sigma(r) dt$$

Si tenemos en cuenta estas limitaciones, podremos escribir que:

$$\int_a^b \bar{u}(r) dt = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \bar{u}(t_i) \Delta t_i \dots (4.1.2.3)$$

4.2.- La Integral Curvilínea como Integral Ordinaria.

4.2.1) Método Directo.

¿Cómo podremos resolver una integral curvilínea? Un posible método quedó esbozado en el inciso (4.1.1) consistente en realizar directamente las sumatorias. Este método es muy importante, pues es base de la integración numérica, a través de computadoras, - que cada día es de uso más frecuente. Sin embargo de este enfoque, podemos alcanzar la exactitud de la manera siguiente con referencia al problema (4.1.1):

Puesto que por razonamientos heurísticos hemos llegado a la conclusión de que el vector \bar{I} existe, tenemos la libertad de establecer la red en el intervalo de $t[0, 4]$ de la manera más conveniente para nosotros.

Establezcamos entonces una partición de n -intervalos de amplitud h , lo que implica $nh = 4$.

Ahora elaboramos la tabla (4.2.1), en la misma forma que la (4.1.1); pero dejando todos sus elementos en términos de "h". La suma que obtenemos es:

$$E = \sum_{k=1}^n \vec{v}(w_k) \Delta t_k = i(200nh) + j[150nh - 9.8h^2(n+1)] \quad 4.2.1.1$$

que también puede expresarse como:

$$E = i(200nh) + j[150nh - 9.8h^2 \frac{n(n+1)}{2}] = i(200nh) + j[150nh - 4.9h^2(n+1)]$$

$$E = i(200nh) + j(150nh - 4.9n^2h^2 + 4.9nh^2) \quad 4.2.1.2$$

Si se recuerda que $nh = 4$:

$$E = 800i + i(600 - 19.6 + 19.6h)$$

Y finalmente, tomamos límites cuando $h \rightarrow 0$:

$$\vec{I} = \lim_{h \rightarrow 0} [800i + (521.6 + 19.6h)j] = 800i + 521.6j \quad 4.2.1.3$$

4.2.2) A través de Antiderivadas.

Hay otra posibilidad para integrar este tipo de funciones, que surge cuando descomponemos la ec. (4.1.2) en sus componentes. Naturalmente primero para el problema (4.1) donde, como ya sabemos, $\vec{v} = v_x(t)i + v_y(t)j$, y diremos que $\vec{I} = I_x i + I_y j$:

$$\sqrt{\left[\sum_{k=1}^n v_x(w_k) \Delta t_k - I_x \right]^2 + \left[\sum_{k=1}^n v_y(w_k) \Delta t_k - I_y \right]^2} < \epsilon \quad \text{cuando } \Delta \in \mathcal{P} \quad 4.2.2.1$$

t_k	Δt_k	\vec{v}		\vec{v}		$d\vec{r} = \vec{v} \Delta t$	
		x	y	v_x	v_y	dx	dy
0	h	0	0	200	0	200h	0
h	h	200h	150h	200	150 - 9.8h	200h	150h - 9.8h^2
2h	h	400(2h)	300(2h) - 9.8h^2	200	150 - 9.8(2h)	200h	150h - 9.8(2h)^2
3h	h	600(3h)	450(3h) - 9.8(2h)^2	200	150 - 9.8(3h)	200h	150h - 9.8(3h)^2
...
(n-1)h	h	200	150 - 9.8(n-1)h	200h	150h - 9.8(n-1)h^2
nh	h	800(nh)

Tabla 4.2.1

que elevada al cuadrado da:

$$\left[\sum_{k=1}^n v_x(w_k) \Delta t_k - I_x \right]^2 + \left[\sum_{k=1}^n v_y(w_k) \Delta t_k - I_y \right]^2 < \epsilon^2 \quad \text{cuando } \Delta \in \mathcal{P} \quad 4.2.2.2$$

pero, como cada sumando es positivo, tiene que ser menor que la suma, por lo que

$$\left[\sum_{k=1}^n v_x(w_k) \Delta t_k - I_x \right]^2 < \epsilon^2 \quad \text{cuando } \Delta \in \mathcal{P} \quad 4.2.2.3$$

Al extraer raíz cuadrada en valor absoluto:

$$\left| \sum_{k=1}^n v_x(w_k) \Delta t_k - I_x \right| < \epsilon \quad \text{cuando } \Delta \in \mathcal{P} \quad 4.2.2.4$$

que es una expresión que ya conocemos desde Matemáticas II;

nos dice que existe la integral ordinaria de $v_x(t)$ y que ésta es I_x :

$$I_x = \int_0^1 v_x(t) dt = \int_0^1 200 dt = 200 [t]_0^1 = 200 \text{ m}$$

Análogamente ...

$$I_y = \int_0^1 (150 - 9.8t) dt = 150 [t]_0^1 - \frac{9.8}{2} [t^2]_0^1 = 150 - 4.9 = 145.1 \text{ m}$$

por lo tanto

$$\bar{I} = 200i + 145.1j$$

Esta propiedad la generalizamos por inducción para cualquier número de dimensiones y concluimos que, para realizar una integral vectorial, basta con integrar cada una de sus componentes. Más aún: si suponemos que existe la integral de cada componente de la función vectorial.

$$\bar{u}(t) = [u_1(t), u_2(t), \dots, u_j(t), \dots, u_n(t)], \bar{u} \in E^n \quad 4.2.2.5$$

Entonces puede escribirse

$$\left| \int_{t_1}^{t_2} u_j(\omega) dt - I_j \right| < \epsilon \quad \text{cuando } \Delta t \in \mathcal{S} \quad 4.2.2.6$$

y, al elevar al cuadrado:

$$\left[\int_{t_1}^{t_2} u_j(\omega) dt - I_j \right]^2 < \epsilon^2 \quad 4.2.2.7$$

Al sumar esta expresión en sus n componentes, obtenemos:

$$\sum_{j=1}^n \left[\int_{t_1}^{t_2} u_j(\omega) dt - I_j \right]^2 < n\epsilon^2 \quad \text{cuando } \Delta t \in \mathcal{S} \quad 4.2.2.8$$

si extraemos raíz cuadrada y escribimos en expresión vectorial:

$$\left| \int_{t_1}^{t_2} \bar{u}(\omega) dt - \bar{I} \right| < \epsilon \sqrt{n} \quad \text{cuando } \Delta t \in \mathcal{S} \quad 4.2.2.9$$

puesto que n es finita, esto implica que

$$\bar{I} = \int_{t_1}^{t_2} \bar{u}(t) dt \quad 4.2.2.10$$

Lo que, a su vez, nos permite afirmar que si existen las integrales de las componentes, existe la integral vectorial, y viceversa.

Esto permite además, reducir el problema de existencia y las propiedades, a técnicas de la integral ordinaria.

$$\int_{t_1}^{t_2} \bar{u} dt = \left[\int_{t_1}^{t_2} u_1 dt, \int_{t_1}^{t_2} u_2 dt, \dots, \int_{t_1}^{t_2} u_n dt \right] \quad 4.2.2.11$$

Así, podemos ahora, ya no sólo mediante un razonamiento heurístico, sino también mediante un razonamiento rigurosamente matemático, ver que la integral del problema (4.1.1) existe, puesto que ambas componentes de \bar{v} son funciones continuas.

En general, si las componentes de un campo vectorial son funciones acotadas de E con un número finito de puntos de discontinuidad, la integral curvilínea del campo vectorial -

existe, según vimos para esas funciones en Matemáticas II.

Ejemplo 4.2.1) Sea el campo $\vec{v} = x^2i + xyj + z^2k$ y la trayectoria $x=t, y=2t, z=t^2$. Decir si existe

$$\int_{(0,0,0)}^{(1,1,1)} \vec{v} \cdot d\vec{r}$$

y, en caso afirmativo, calcular ésta.

Al sustituir x, y, z en términos de t :

$$\vec{v}(t) = t^2i + 2t^2j + 2t^2k$$

Todas las componentes son continuas \Rightarrow Existe la integral pedida.

Si $x=0, t=0$; comprobación: si $y=0, t=0$; si $z=0, t=0$

Si $x=1, t=1$; comprobación: si $y=2, t=1$; si $z=1, t=1$

$$\begin{aligned} \int_{(0,0,0)}^{(1,1,1)} \vec{v} \cdot d\vec{r} &= i \int_0^1 t^2 dt + j \int_0^1 2t^2 dt + k \int_0^1 2t^2 dt \\ &= \frac{1}{3} i [t^3]_0^1 + \frac{2}{3} j [t^3]_0^1 + \frac{2}{3} k [t^3]_0^1 \\ &= \frac{1}{3} i + \frac{2}{3} j + \frac{2}{3} k \end{aligned}$$

Ejemplo 4.2.2). - Sea el campo $\vec{v} = xyi + x^2j$ y la curva $\vec{r} = (\cos t + \sin t)i + e^{2t} + \pi z$ $\vec{r} = (\cos t + \sin t)i + e^{2t} + \pi z$

Avisar si existe $\int_{(1,0)}^{(2,0)} \vec{v} \cdot d\vec{r}$ y, en caso afirmativo calcularla.

La trayectoria está representada en la fig. (4.2.1) y podemos observar

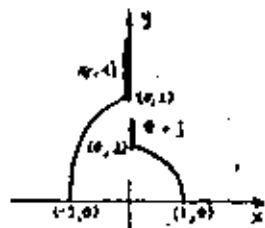


Fig. 4.2.1

que existe una discontinuidad en $t = \frac{\pi}{2}$, donde el campo pasa bruscamente de j a $-j$; sin embargo, este punto de discontinuidad es único, por lo que la integral existe. Para calcularla, apliquemos una de las propiedades de la integral ordinaria, que la recuerda muy bien:

la integral ordinaria, que la recuerda muy bien:

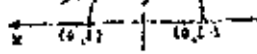
$$\int_{(x_0)}^{(x_1)} \vec{v} \cdot d\vec{r} = i \int_{x_0}^{x_1} v_x(x) dx + j \int_{x_0}^{x_1} v_y(x) dx = i \int_{x_0}^{x_1} v_x(x) dx + j \int_{x_0}^{x_1} v_y(x) dx$$

$$\begin{aligned} \int_{(1,0)}^{(2,0)} \vec{v} \cdot d\vec{r} &= i \int_0^{\pi/2} \cos t \sin t dt + j \int_0^{\pi/2} \cos^2 t dt + j \int_{\pi/2}^{\pi} \sin^2 t dt + j \int_{\pi/2}^{\pi} \sin^2 t dt \\ &= \frac{1}{2} i [\sin 2t]_0^{\pi/2} + i [\sin^2 t]_{\pi/2}^{\pi} + j \left[\frac{t}{2} - \frac{1}{4} \sin 2t \right]_0^{\pi/2} + j [2t - \sin 2t]_{\pi/2}^{\pi} \\ &= \frac{1}{2} i - i + \frac{\pi}{2} j + (2\pi - \pi) j = \frac{1}{2} i + \frac{3}{2} \pi j \end{aligned}$$

La propiedad que acabamos de aplicar se generaliza para cualquier integral curvilínea, de la siguiente manera:

$$\int_C \vec{v} \cdot d\vec{r} = \int_C^1 \vec{v} \cdot d\vec{r} + \int_C^2 \vec{v} \cdot d\vec{r} \dots \dots \dots 4.2.2.12$$

Ah más, como ya dijimos, las propiedades de la integral ordinaria se convierten en propiedades de la integral curvilínea. Te vamos a demostrar una de ellas, para que tú demuestres las restantes.



Si $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ es un vector constante.

$$\int_C \vec{a} \cdot d\vec{r} = \vec{a} \cdot \int_C d\vec{r} = \vec{a} \cdot (\vec{r}(b) - \vec{r}(a)) \quad 4.2.15$$

En efecto, sea $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$; entonces $d\vec{r} = (x'(t)dt, y'(t)dt, z'(t)dt)$.

Si además C está descrita por $\vec{r}(t)$, $a \leq t \leq b$, podemos escribir:

$$\int_C \vec{a} \cdot d\vec{r} = \int_a^b (a_1 x'(t) + a_2 y'(t) + a_3 z'(t)) dt = a_1 \int_a^b x'(t) dt + a_2 \int_a^b y'(t) dt + a_3 \int_a^b z'(t) dt = \vec{a} \cdot (\vec{r}(b) - \vec{r}(a)) \quad 4.2.14$$

De cada una de las integrales ordinarias podemos sacar las constantes; entonces:

$$\int_C \vec{a} \cdot d\vec{r} = a_1 \int_C dx + a_2 \int_C dy + a_3 \int_C dz = \vec{a} \cdot (\int_C dx, \int_C dy, \int_C dz) = \vec{a} \cdot (\int_C d\vec{r})$$

o bien, llamando $I_1 = \int_C dx$, $I_2 = \int_C dy$, $I_3 = \int_C dz$:

$$\int_C \vec{a} \cdot d\vec{r} = a_1 I_1 + a_2 I_2 + a_3 I_3 = \vec{a} \cdot (I_1, I_2, I_3) \quad 4.2.15$$

Ahora si hacemos el producto vectorial

$$\vec{a} \times \int_C d\vec{r} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ \int_C dx & \int_C dy & \int_C dz \end{vmatrix} = (a_2 \int_C dz - a_3 \int_C dy) i + (a_3 \int_C dx - a_1 \int_C dz) j + (a_1 \int_C dy - a_2 \int_C dx) k \quad 4.2.16$$

Al comparar (4.2.15) con (4.2.16) escribimos:

$$\int_C \vec{a} \times d\vec{r} = \vec{a} \times \int_C d\vec{r} \quad (\vec{a} \in \mathbb{R}^3) \quad 4.2.17$$

Cabe decir que esta propiedad solo es válida en espacios de 2 o 3 dimensiones, toda vez que involucra un producto vectorial. Las siguientes propiedades están definidas en cualquier número de dimensiones.

$$\int_C (\vec{u} + \vec{v}) dt = \int_C \vec{u} dt + \int_C \vec{v} dt \quad 4.2.18$$

$$\int_C h dt = h \int_C dt \quad (h = \text{cte. escalar}) \quad 4.2.19$$

$$\int_C \vec{a} \cdot d\vec{r} = \vec{a} \cdot \int_C d\vec{r} \quad 4.2.20$$

Si \vec{a} es un vector constante y $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ en todos los puntos de PR , entonces:

$$\vec{a} \cdot \int_C d\vec{r} = \int_C \vec{a} \cdot d\vec{r} \quad 4.2.21$$

En tres dimensiones, esta última propiedad tiene una

interpretación geométrica: $\vec{v} \cdot \vec{v} > 0$ indica que el vector variable \vec{v} apunta hacia arriba (obtusamente) con una dirección constante; si tal es el caso, su integral temporal formará ángulo obtuso con esa dirección.

4.2.5) El Teorema Fundamental del Cálculo en la Integral Curvilínea.

Consideremos nuevamente el problema (4.1.1). ¿sería posible calcular la posición de la partícula a los 5 seg? Después de luego:

$$\vec{r}(5) = i \int_0^5 200 dt + j \int_0^5 (150 - 9.8t) dt = 1000i + 427.5j$$

En general

$$\vec{r}(t) = i \int_0^t 200 dt + j \int_0^t (150 - 9.8t) dt = 200ti + (150 - 4.9t^2)j$$

donde, desde luego:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = 200i + (150 - 9.8t)j = \vec{v}$$

Estas expresiones nos permitirán responder a preguntas como:

a) Si el objetivo está en la horizontal, ¿cuánto tiempo tarda el proyectil en alcanzarlo?

Respuesta:

Buscamos "t" (segunda componente de \vec{v}) igual a cero:

$$150 - 9.8t = 0$$

$$t(150 - 9.8t) = 0 \quad \Rightarrow \quad t = \frac{150}{9.8} = \underline{\underline{30.6 \text{ seg}}}$$

b) ¿A qué distancia está el objetivo del cañón?

Respuesta:

Encontramos "x" (primera componente de \vec{r}) en $t = 30.6 \text{ seg}$

$$x = 200(30.6) = \underline{\underline{6122.0}}$$

c) ¿Cuál es la máxima altura que alcanza el proyectil?

Respuesta:

Donde la velocidad vertical se anula.

$$150 - 9.8t = 0$$

$$t = \frac{150}{9.8} = \underline{\underline{15.3 \text{ seg}}}$$

$$y_{\max} = 150(15.3) - 4.9(15.3)^2 = \underline{\underline{1118.0}}$$

En el caso más general, tendremos el campo vectorial $\vec{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ y la curva $C: \vec{r}(t) \in E^n$, donde $P = \vec{r}(a)$

$$F(\vec{r}) = \int_P^{\vec{r}} \vec{u} dt = \left\{ \int_a^t u_1 dt, \int_a^t u_2 dt, \dots, \int_a^t u_n dt \right\} = \{P_1(t), P_2(t), \dots, P_n(t)\}$$

y por el teorema fundamental de la integral ordinaria que
vemos en Matemáticas II:

$$\frac{dP_1}{dt} = U_1, \frac{dP_2}{dt} = U_2, \dots, \frac{dP_n}{dt} = U_n$$

Lo que significa que:

$$\frac{dF}{dt} = \vec{u} \quad \dots \dots \dots (4.2.5.1)$$

que es como se expresa el teorema fundamental del -
artículo para integrales curvilíneas y puede ser usado -
instintivamente cuando la función por integrar puede -
reducirse a alguna de las fórmulas de derivación vistas -
en el Cap. III.

Ejemplo 4.2.3) - Demostrar que $\frac{d}{dt}(\vec{u} \cdot \vec{u}) = 2\vec{u} \cdot \frac{d\vec{u}}{dt}$, $\int \vec{u} \cdot d\vec{u} = \frac{1}{2} u^2 + C$

Ejemplo 4.2.4) - Enunciar las fórmulas de integración por -
partes.

Sea f una función escalar, \vec{u} y \vec{v} dos funciones vectoriales.

a) $d(y\vec{u}) = yd\vec{u} + \vec{u}dy \Rightarrow \int yd\vec{u} = y\vec{u} - \int \vec{u}dy \dots \dots (4.2.3.2)$

$$\int \vec{u}dy = y\vec{u} - \int yd\vec{u} \dots \dots (4.2.3.3)$$

b) $d(\vec{u} \cdot \vec{v}) = \vec{u} \cdot d\vec{v} + \vec{v} \cdot d\vec{u} \Rightarrow \int \vec{u} \cdot d\vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{v} - \int \vec{v} \cdot d\vec{u} \dots \dots (4.2.3.4)$

c) $d(\vec{u} \times \vec{v}) = \vec{u} \times d\vec{v} + d\vec{u} \times \vec{v} \Rightarrow \int \vec{u} \times d\vec{v} = \vec{u} \times \vec{v} + \int \vec{v} \times d\vec{u} \dots \dots (4.2.3.5)$

Ejemplo 4.2.5) - Demostrar que una condición suficiente para
que una partícula describa un movimiento
plano, es que la aceleración sea siempre pa-
rallela al vector de posición de la partícula.

Sea $r(t)$ la trayectoria de la partícula; sea $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ su veloci-
dad y sea $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \lambda \vec{r}$ la aceleración siempre paralela a \vec{r} .

Por (4.2.3.5):
 $\int \vec{r} \times d\vec{v} = \vec{r} \times \vec{v} + \int \vec{v} \times d\vec{r} = \vec{r} \times \vec{v} + \vec{h}_1 \dots \dots (4.2.5.a)$

donde \vec{h}_1 es un vector constante.

Además, si $\frac{d\vec{v}}{dt} = \lambda \vec{r}$, $\vec{r} \times d\vec{v} = 0$ por lo que

$$\int \vec{r} \times d\vec{v} = 0 = \vec{h}_2 = \text{cte.} \dots \dots (4.2.5.b)$$

Al igualar (4.2.5.a) y (4.2.5.b):

$$\vec{r} \times \vec{v} + \vec{h}_1 = \vec{h}_2 \text{ o sea } \vec{r} \times \vec{v} = \vec{h}_2 - \vec{h}_1 = \vec{h}$$

Por otra parte, recordemos (3.5-5.2) que el producto vector-
ial de la velocidad por la aceleración, siempre nos da un
vector paralelo al bicornual:

$$\vec{v} \times \vec{a} = \vec{v} \times \lambda \vec{r} = -\lambda \vec{h}$$

4-21

puesto que \vec{h} es constante y un vector no puede hacer variar la dirección de un vector, el vector binormal se conservará paralelo a sí mismo y el movimiento será plano (4.2.2)

Ejemplo 4.2.5.- Calcular la energía cinética de los planetas.

Sea $\rho = r^2$, entonces, el campo gravitacional del sol es:

$$\vec{F} = -\frac{GMm}{r^2} \hat{r}$$

Y por la 2a. Ley de Newton:

$$m\vec{a} = -\frac{GMm}{r^2} \hat{r}$$

Si multiplicamos ambos miembros escalarmente por \vec{v} :

$$m\vec{v} \cdot \vec{a} = -\frac{GMm}{r^2} \vec{v} \cdot \hat{r} \quad (4.2.3.1)$$

pero $\vec{v} \cdot \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} v^2 \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \dot{\rho}^2 \right) = \dot{\rho} \dot{\rho}$ (4.2.3.2)

Por otra parte, como $\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$,

$$\dot{\rho} = \frac{1}{\rho} (x\dot{x} + y\dot{y} + z\dot{z}) = \frac{1}{\rho} (\vec{r} \cdot \dot{\vec{r}}) = \frac{1}{\rho} (\vec{r} \cdot \vec{v}) \quad (4.2.3.3)$$

Entonces, de (4.2.3.1) y (4.2.3.2) resulta:

$$-GMm \dot{\rho} = -GMm \frac{\vec{r} \cdot \dot{\vec{r}}}{\rho} = -GMm \frac{\vec{r} \cdot \dot{\vec{r}}}{\rho} = -GMm \frac{d\rho}{dt} \quad (4.2.3.4)$$

4-22

Al integrar (4.2.3.4) y (4.2.3.3) a (4.2.3.1):

$$m\vec{v} \cdot d\vec{v} = -GMm \frac{d\rho}{\rho^2}$$

y al integrar:

$$\frac{1}{2} m v^2 = \frac{GMm}{\rho} + C = \frac{GMm}{\rho} + C \quad (4.2.3.5)$$

que es la energía cinética que desarrollan los planetas.

Ejemplo 4.2.6.- Demostrar la primera ley de Kepler: los planetas describen órbitas elípticas, una de cuyos focos es el sol.

De (4.2.3.1) podemos ver que la aceleración se conserva paralela a \vec{r} ; podemos concluir, por lo tanto, que se trata de órbitas planas.

Multiplicamos ahora ambos miembros de (4.2.3.1) por $\vec{h} = \vec{r} \times \frac{d\vec{r}}{dt}$, como $m\vec{v} = m \frac{d\vec{r}}{dt}$, entonces:

$$m\vec{a} \times \vec{h} = -\frac{GMm}{r^2} \hat{r} \times (\vec{r} \times \frac{d\vec{r}}{dt})$$

$$\frac{d\vec{v}}{dt} \times \vec{h} = -GM \left(\frac{\vec{r}}{r^3} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} \vec{r} - \frac{\vec{r}}{r^3} \cdot \vec{r} \frac{d\vec{r}}{dt} \right) = -GM \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} \frac{\vec{r}}{r^3} - \frac{d\vec{r}}{dt} \right)$$

Para integrar el siguiente miembro, podemos usar la expresión (4.2.3.3):

$$\int d\vec{v} \times \vec{h} = -GM \int \frac{\vec{r}}{r^3} \cdot d\vec{r} \vec{r} + GM \int \frac{d\vec{r}}{r^2}$$

$$\begin{aligned} \vec{u} &= \vec{r} & dy &= \frac{\vec{r}}{r^2} \cdot d\vec{r} \\ d\vec{u} &= d\vec{r} & y &= -\frac{1}{r} \end{aligned}$$

$$\vec{v} \times \vec{h} = -GM \left(-\frac{\vec{r}}{r^2}\right) + GM \int \left(-\frac{d\vec{r}}{r^2}\right) + GM \int \frac{d\vec{r}}{r^2}, \vec{e}$$

ó bien:

$$\vec{r} \cdot \vec{v} \times \vec{h} = GM p + \vec{e} \cdot \vec{r}$$

$$\text{pero } \vec{r} \cdot \vec{v} \times \vec{h} = \vec{r} \times \vec{v} \cdot \vec{h} = \vec{h} \cdot \vec{h} = h^2$$

entonces

$$h^2 = GM p + \vec{e} \cdot \vec{r} = GM p + l^2 / p \cos \theta = p (GM + l^2 \cos \theta)$$

donde $\theta = |\theta|$ y \vec{e} sea el ángulo que forma el vector de posición con una dirección constante. Así:

$$p = \frac{h^2}{GM + l^2 \cos \theta} = \frac{h^2 / GM}{1 + \frac{l^2}{GM} \cos \theta}$$

Como recordamos de Matemáticas II, una cónica con foco en el polo tiene por ecuación

$$p = \frac{l}{1 + e \cos \theta}$$

donde e es la excentricidad de la cónica, en este caso l^2 / GM .

Ahora bien, hay cuatro cónicas: circunferencia, parábola, elipse o hipérbola; pero.

No puede ser circunferencia, ya que sabemos que no estamos en la misma distancia del sol.

No puede ser parábola ni hipérbola, porque éstas son curvas abiertas y también sabemos que damos vueltas al rededor del sol.

Por lo tanto se trata de una elipse (SEN)

4.3) La integral curvilínea en curvas cerradas.

La integral curvilínea, sobre una trayectoria cerrada de cualquiera de los tipos mencionados, no presenta características especiales. Tan solo hay que tomar en cuenta el siguiente aspecto:

Sabemos que, por definición, en la integral ordinaria:

$$\int_a^b f(x) dx = 0$$

lo que se antoja pasar a la integral curvilínea de la siguiente manera:

$$\int_a^a \vec{u} \cdot d\vec{l} = 0$$

Esto es cierto si con ello se quiere significar "no recorrido"; pero en una curva cerrada, podría tomarse como un regreso al punto de partida después de un recorrido y en-

tal caso, la expresión anterior en forma exacta en casos muy particulares.

En efecto, consideremos la curva $\vec{r} = \cos t \mathbf{i} + \sin t \mathbf{j}$ y un campo vectorial cualquiera $\vec{F} = u_x \mathbf{i} + v_y \mathbf{j}$, a integrar sobre la curva cerrada.

Notación:

Para indicar que se trata de una integral curvilínea cerrada usaremos el símbolo

$$\oint \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

en donde se está considerando que el recorrido sobre la curva C , sea en sentido positivo.

El sentido positivo de recorrido será aquel que pertenece a la región encerrada por la curva C , siempre a la izquierda, y negativo si la mantiene a la derecha. Fig. 4.3.1(a) y (b)



(a)



(b)

Fig. 4.3.1

$$\oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = i \int_0^{2\pi} u_x(t) dt + j \int_0^{2\pi} v_y(t) dt \neq 0, \text{ en general.}$$

Es decir, precisamente porque $\vec{r}(0) = \vec{r}(2\pi)$ los límites de la variable de integración son diferentes. Ahora, la misma curva la podemos expresar como $\vec{r} = t \mathbf{i} + \sqrt{1-t^2} \mathbf{j}$. En tal caso, el único valor de "t" que hace $\vec{r} = \vec{r}$, es 1. Si integramos entre los límites 1, 1, si obtendríamos invariablemente cero; pero hay que tomar en cuenta que en la forma expresada, \vec{r} no es una función, puesto que a un valor de "t" corresponden dos \vec{r} ; en realidad tenemos dos trayectorias, por lo que la integral la debemos plantear:

$$\oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = i \left\{ \int_1^1 u_x dt + \int_1^1 v_y dt \right\} + j \left\{ \int_1^1 u_x dt + \int_1^1 v_y dt \right\}$$

$$\text{donde } C_1: \vec{r} = t \mathbf{i} + \sqrt{1-t^2} \mathbf{j}$$

$$C_2: \vec{r} = t \mathbf{i} - \sqrt{1-t^2} \mathbf{j}$$

En general, en una curva cerrada, o bien tenemos dos valores diferentes de la variable de integración en el mismo punto, o bien hay dos trayectorias que hacen integrales diferentes.

4.4) Trabajo y Energía.

4.4.1) Problemas: Sea el cuerpo de la figura (4.4.1)

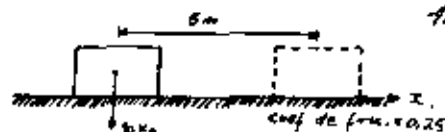


Fig. 4.4.1

Deslizamos un objeto sobre la superficie una longitud de 5m.
¿Qué trabajo debemos desarrollar?

Este es un problema elemental de trabajo.

La fuerza que se opone al desplazamiento es la fricción.
cuya magnitud es de 2.5 kg. Esta fuerza será constante,
por lo que el trabajo es simplemente $2.5 \times 5 = 12.5 \text{ kg}\cdot\text{m}$

Veamos, consideramos habernos de hacer antes de seguir adelante; en primer lugar, el trabajo es un escalar, y lo hemos obtenido como producto de un vector (la fuerza) por un escalar (la distancia). Entonces parece decir que por ahí queda, en más o menos un producto escalar; en efecto, lo que realmente hicimos, fue tomar la distancia y su dirección (i) y eso fue lo que multiplicamos escalarmente por la fuerza.

En segundo lugar, al definir el campo de fuerzas, nos damos cuenta que la fricción se opone al movimiento; luego $\vec{f} = -2.5\vec{i}$. La dirección del movimiento, en cambio, lleva la dirección positiva de \vec{x} . Así, el trabajo nos salió un poco negativo; sin embargo, para mover el cuerpo se realiza trabajo; luego si como es normal, definimos el campo de fuerzas que producen el movimiento, debemos cambiar el signo:

$$\vec{F} = 2.5\vec{i}; \quad W = \vec{F} \cdot \vec{s}$$

Ahora consideremos el cuerpo de la fig. (4.4.2) supongamos que el cuerpo es un bloque de hielo y la superficie horizontal una lámina lisa de aceite, es decir, podemos suponer que la fricción no existe.



Fig. 4.4.2

La fuerza que debemos de vencer es ahora la del resorte; pero esta es una fuerza variable.

$$F = 2xx\vec{i}$$

¿Qué hacemos ahora? Una solución aproximada sería dividir el desplazamiento en 5 intervalos y considerar que para desplazar el primer centímetro se requiere 2 kg; para desplazar el segundo 4 kg y así sucesivamente, sumando luego los trabajos de esas fuerzas parciales; nos damos cuenta de que, en realidad, debemos hacer una integral vectorial:

$$W = \int_{(10,0)}^{(20,0)} \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

y puesto que $s = x$:

$$W = \int_0^5 (2x\vec{i}) \cdot x\vec{i} = 2 \int_0^5 x dx = 2 \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^5 = 25 \text{ kg}\cdot\text{m}$$

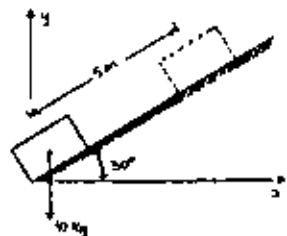


Fig 4.4.3

Ahora consideremos el caso mostrado en la fig (4.4.3). La fricción la suponemos también prácticamente inexistente, por lo que el campo de fuerzas que se opone al movimiento es el gravitacional y hay que aplicar

$$\vec{F} = mg\vec{j} = 10\vec{j}$$

pero no es la fuerza completa la que se opone al movimiento, sino solamente su proyección sobre el plano de deslizamiento o, para hablar con más propiedad, sobre un vector paralelo ese plano, cuyas componentes son $\vec{T} = \cos 30^\circ i + \sin 30^\circ j = \frac{\sqrt{3}}{2}i + \frac{1}{2}j$ (tomando la dirección del desplazamiento). Esta proyección es la que debe multiplicarse por la distancia:

$$W = \vec{F} \cdot \vec{T} = (10\vec{j}) \cdot 5 \left(\frac{\sqrt{3}}{2}i + \frac{1}{2}j \right) = 25 \text{ t.m.}$$

Nótese que ahora el vector \vec{T} sustituyó al vector \vec{i} ; es que ahora \vec{T} es que da dirección al desplazamiento.

Con todos estos casos particulares ¿podríamos encontrar una expresión general para calcular el trabajo? Hemos visto que la fuerza es variable y que debe proyectarse sobre la dirección del desplazamiento. Esta dirección podría ser variable también, por lo que \vec{T} adquiere el significado de tangente unitaria a

la trayectoria que debe seguir el cuerpo; con todo esto, podemos decir que

$$W = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{s} \quad \dots (4.4.1)$$

Esta expresión tiene, sin embargo, un inconveniente, vimos en (3.5.3) que trabajar en términos de \vec{s} como parámetro daba lugar a serias complicaciones algebraicas; afortunadamente, recordamos que

$$\vec{T} = \frac{d\vec{s}}{ds}$$

Por lo que, si sustituimos esta expresión en (4.4.1)

$$W = \int_C \vec{F} \cdot \frac{d\vec{s}}{ds} ds = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{s} \quad \dots (4.4.2)$$

Que nos permite mayor facilidad algebraica, toda vez que \vec{T} pueda manejarse en términos de cualquier parámetro.

4.4.2) Propiedades.

Por su gran aplicación en la Mecánica, este tipo especial de integral vectorial recibe una atención especial. En muchos casos, se le considera como único tipo de integral curvilínea y con ese nombre se le conocen. Nosotros preferimos considerarla como un caso particular de integral curvilínea, refiriendo este nombre genérico a toda integral vectorial que pueda ser reducida a una trayectoria.

Hay varias formas, a parte de la (4.4.1) y (4.4.2), de

expresar este tipo de integrales, he aquí algunas:

Si $\vec{F} = P(x)\vec{i} + Q(y)\vec{j} + R(z)\vec{k}$, entonces $\vec{F} \cdot d\vec{r} = Pdx + Qdy + Rdz$ y
integramos:

$$\int_a^b \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_a^b Pdx + Qdy + Rdz \dots (4.4.1.3)$$

Al reducir el campo vectorial a una trayectoria, $\vec{r}(t)$ se
tendrá:

$$\vec{F}(x) = P(x)\vec{i} + Q(y)\vec{j} + R(z)\vec{k}$$

En esta parte $\vec{r}(x) = f(x)\vec{i} + g(x)\vec{j} + h(x)\vec{k}$

$$d\vec{r} = f'(x)dx\vec{i} + g'(x)dx\vec{j} + h'(x)dx\vec{k} = \\ = [f'(x)\vec{i} + g'(x)\vec{j} + h'(x)\vec{k}] dx$$

Entonces

$$\vec{F} \cdot d\vec{r} = [P(x)f'(x) + Q(x)g'(x) + R(x)h'(x)] dx$$

si además

$$A = f(a) ; B = f(b)$$

$$\int_a^b \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_A^B [P(x)f'(x) + Q(x)g'(x) + R(x)h'(x)] dx \quad (4.4.1.4)$$

que además indica el procedimiento de cálculo.

Puesto que este tipo de integrales es tan importante,
vale la pena explicitar algunas de sus propiedades que,
de otro modo, no serían sino casos particulares de las
propiedades generales de la integral vectorial, ya dis-
tintas.

Si la fuerza se multiplica por una constante escalar,
el trabajo quedará multiplicado por dicha constante.

$$\int_a^b h\vec{F} \cdot d\vec{r} = h \int_a^b \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad (4.4.1.5)$$

Si dos campos de fuerzas obran sobre el cuerpo, el tra-
bajo total será la suma de los trabajos de los cam-
pos aislados

$$\int_a^b (\vec{F}_1 + \vec{F}_2) \cdot d\vec{r} = \int_a^b \vec{F}_1 \cdot d\vec{r} + \int_a^b \vec{F}_2 \cdot d\vec{r} \quad (4.4.1.6)$$

El trabajo desarrollado para llevar un cuerpo, de A a B
sobre una cierta trayectoria, es la energía que gana
el cuerpo al ir de B a A sobre la misma trayectoria (o-
niversa)

$$\int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = - \int_B^A \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad (4.4.1.7)$$

El trabajo desarrollado para llevar un cuerpo de A a B
sobre una cierta curva, es la suma del trabajo nece-
sario para llevarlo de D a B y del trabajo necesario
para llevarlo de A a D sobre la misma curva.

Lo anterior es cierto, independientemente de la posición
que ocupe D en respecto a A y B (Fig. 4.4.1)

$$\int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_A^D \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_D^B \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad (4.4.1.8)$$

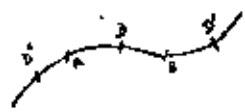


Fig. 4.4.1)

Si en todas las puntos de la traye-
toria el campo de fuerzas resul-
tante actúa en dirección opuesta
a la trayectoria (o perpendicular a ella) para vencer
la oposición, el trabajo desarrollado será positivo, o
al menos, nulo:

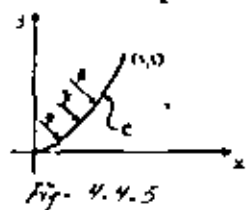
$$\text{Si } \vec{F} \cdot d\vec{r} \geq 0 \text{ en } \overline{AB}, \text{ entonces } \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} \geq 0 \quad (4.4.1.9)$$

Inversamente, si la fuerza que produce el movimiento no encuentra oposición (vgn. ausencia en el vacío) el cuerpo ganará energía.

$$\text{Si } \vec{F} \cdot d\vec{r} \neq 0 \text{ en } \widehat{AB}, \quad W = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} \neq 0 \quad \dots (4.4.10)$$

Ahora tratamos de resolver algunos ejemplos.

Ejemplo 4.4.1) Sea el campo de fuerzas $\vec{F} = y\vec{i} - x\vec{j}$, donde \widehat{AB} está en \mathbb{R}^2 si x, y están en metros. Calcular el trabajo necesario para llevar una partícula, del origen al punto $(1,1)$.



a) A través de la parábola $y = x^2$ (Fig. 4.4.5)
 Ec. vectorial de la trayectoria:
 Hacemos $x = t \Rightarrow y = t^2$ y así
 $\vec{r} = t\vec{i} + t^2\vec{j}; \Rightarrow d\vec{r} = (\vec{i} + 2t\vec{j})dt$
 $\vec{F}(t) = t^2\vec{i} - t\vec{j}; \vec{F} \cdot d\vec{r} = (t^2 - 2t^2)dt = -t dt$

Si $x = 0, t = 0$; comprobación: si $y = 0, t = 0$
 Si $y = 1, t = 1$; comprobación: si $x = 1, t = 1$

$$W = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^1 (-t) dt = -\frac{1}{2} [t^2]_0^1 = -\frac{1}{2} \text{ kg} \cdot \text{m}$$

b) A través de la recta $y = x$ (Fig. 4.4.6)

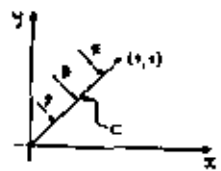


Fig. 4.4.6

Ahora hacemos $x = t; y = t$:
 $\vec{r} = t\vec{i} + t\vec{j}; d\vec{r} = (\vec{i} + \vec{j})dt$
 $\vec{F} = t\vec{i} - t\vec{j}; \vec{F} \cdot d\vec{r} = t - t = 0$
 $W = \int_{(0,0)}^{(1,1)} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$

lo que se explica cuando se ve en la muestra de que en este caso \vec{F} es perpendicular a la trayectoria en todos los puntos por lo que no se opone ni ayuda al movimiento de la partícula.

Siempre que el campo vectorial \vec{F} se mantenga perpendicular a la trayectoria, la integral resultará ser nula.

a) A través de la recta que brota que va de $(0,1)$ a $(1,1)$ y de $(0,1)$ a $(1,1)$ (Fig. 4.4.7)



Fig. 4.4.7

Puesto que la trayectoria no admite tangente única en $(0,1)$, $\vec{F} \cdot \vec{T}$ no es continua en ese punto; pero como el punto es único, la integral existe. Debemos calcularla según (4.4.10)

- De $(0,1)$ a $(1,1)$: $\vec{r} = t\vec{i}; d\vec{r} = dt\vec{i}; \vec{F} = t\vec{j}; \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$
- De $(0,1)$ a $(1,1)$: $\vec{r} = i + t\vec{j}; d\vec{r} = dt\vec{j}; \vec{F} = i - j; \vec{F} \cdot d\vec{r} = -dt$
 $W = \int_0^1 (-1) dt = -1 \text{ kg} \cdot \text{m}$

d) A través de la parábola $y = 2x$ (Fig. 4.4.8)

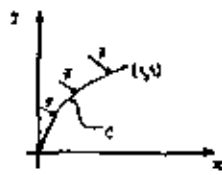
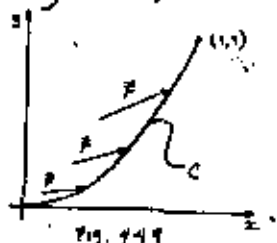


Fig. 4.4.8

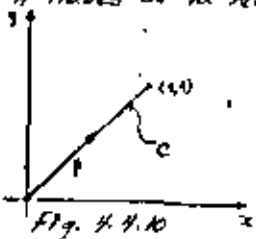
Bueno, es justo que te dejemos resolver solo este problema; el resultado debe ser $\frac{1}{3} \text{ kg} \cdot \text{m}$. Por otro lado, observamos que el trabajo requerido fue distinto para cada trayectoria probada, como ya se esperaba.

Ejemplo 4.4.2.) Sea el campo de fuerzas $\vec{F} = y\vec{i} + x\vec{j}$, donde (F) está en kg , si x, y están en metros. Calcular el trabajo necesario para llevar una partícula del origen al punto $(1,1)$



a) A través de la parábola $y=x^2$ (Fig. 4.4.9)
 $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}$; $d\vec{r} = (1+2x)\vec{i} + 2x\vec{j}$
 $\vec{F} = (2x, x)$; $\vec{F} \cdot d\vec{r} = 2x^2 + 2x^2$
 $W = \int_0^1 4x^2 dx = \frac{4}{3} \text{ kg}\cdot\text{m}$

b) A través de la recta $y=x$ (Fig. 4.4.10)



Hazlo tú solo; el resultado es $\frac{1}{2} \text{ kg}\cdot\text{m}$
 ¿El mismo resultado anterior?
 ¿Cómo? En el ejemplo (4.4.1) tuvimos resultados diferentes para cada trayectoria y ahora, un campo que es ca-

si igual al anterior, nos da mismos resultados para dos trayectorias diferentes.

¿Qué está pasando aquí? ¿Qué funciones cumplen con esta propiedad? Vamos a verlo en seguida.

4.5) Independencia de la Trayectoria

Calculamos el rotacional de \vec{F}

$$\nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y & x & 0 \end{vmatrix} = -z\vec{k}$$

¿Hacia el rotacional de \vec{F} .

$$\nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y & x & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Así pues, en los ejemplos anteriores, \vec{F} se distingue de \vec{F} , en que este último es un campo irrotacional y el primero no. ¿Será por eso que el trabajo con \vec{F} da lo mismo por dos trayectorias diferentes? Consideremos un campo cualquiera $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ tal que $\nabla \times \vec{F} = 0$. Queremos saber qué trabajo debe realizar para llevar una partícula del punto A al punto B, a través de la curva C : $\vec{r} = f(t)\vec{i} + g(t)\vec{j} + h(t)\vec{k}$, sabiendo que $A = \vec{r}(a)$; $B = \vec{r}(b)$

(Como hemos visto de (4.4.1.4):

$$W = \int_a^b [Pf'(t) + Qg'(t) + Rh'(t)] dt \quad (4.5.0.1)$$

Por si $\nabla \times \vec{F} = 0 \Rightarrow \vec{F} = \nabla \phi$; es decir $\frac{\partial \phi}{\partial x} = P$;

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = Q; \quad \frac{\partial \phi}{\partial z} = R$$

$$\text{Además } d\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \phi}{\partial y} dy + \frac{\partial \phi}{\partial z} dz$$

$$\frac{d\phi}{dt} = Pf'(t) + Qg'(t) + Rh'(t) \quad (4.5.0.2)$$

Así al sustituir (4.5.0.2) en (4.5.0.1)

$$W = \int_3^5 \frac{dy}{y^2} H - \int_1^2 (y^2 - y) dy - \int_1^2 H \quad (4.3.3)$$

La expresión (4.3.3) comprueba nuestra sospecha; en efecto, el trabajo de un campo irrotacional depende solamente de los puntos extremos de la trayectoria y no de ésta. Su cálculo se puede efectuar entonces de dos maneras: o integrando el campo a través de la trayectoria que nos resulte más simple, o calculando el potencial y calculando su "caída" entre los puntos extremos.

Si seguimos el último procedimiento en el ejemplo (4.2):

$$\vec{F} \cdot d\vec{r} = y dx + x dy$$

$$p = \int y dx + f(y) = xy + f(y)$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = x + f'(y) = y = x$$

$$f'(y) = 0 \Rightarrow f(y) = c$$

$$p = xy + c; \quad p(0,0) = c; \quad p(1,1) = 1 + c; \quad W = 1 + c - c = 1 \text{ kgm}$$

Entonces, cada vez que nos proponemos calcular el trabajo requerido para vencer un campo de fuerzas, deberemos averiguar si ese campo es irrotacional, pues - si tal es el caso, nuestros cálculos se simplificarán en gran medida.

¿Pero son los campos irrotacionales los únicos cuyo trabajo no depende de la trayectoria? Consideremos ahora un campo cualquiera \vec{F} cuyo trabajo no dependa de la trayectoria e integramoslo entre

4-37

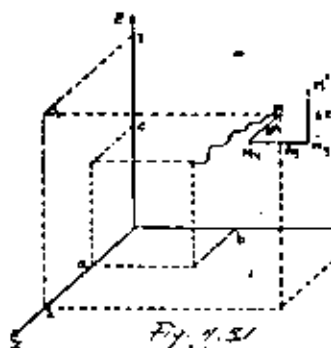


Fig. 4.51

los puntos $A(x_1, y_1, z_1)$ y $A'(x_2, y_2, z_2)$

como se ve en el dibujo, consideramos -

$$\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$$

$$W = \int_A^{A'} P dx + Q dy + R dz$$

Ahora superponemos que y veremos pasar la partícula a

$$A'(x_2, y_2, z_2) \text{ y } A(x_1, y_1, z_1)$$

Puesto que ya quedamos en que hay independencia de la trayectoria, irgámonos por rectas paralelas a los ejes (Fig. 4.5.1): de A a A_x , de A_x a A_y y de A_y a A' .

Entonces, por (4.4.1.8)

$$W + \Delta W = \left\{ \int_A^{A_x} P dx + Q dy + R dz + \int_{A_x}^{A_y} P dx + Q dy + R dz + \int_{A_y}^{A'} P dx + Q dy + R dz \right\}$$

Por lo que

$$\Delta W = \left\{ \int_{A_x}^{A_y} P dx + Q dy + R dz + \int_{A_y}^{A'} P dx + Q dy + R dz \right\}$$

o bien

$$\Delta W = (\Delta_x W + \Delta_y W + \Delta_z W)$$

Calculamos $\Delta_x W$; la ec. de la trayectoria de A_x a A_y es

$$\vec{r} = t\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}; \quad 0 \leq t \leq 1$$

$$\vec{F} = P(t, y_1, z_1)\vec{i} + Q(t, y_1, z_1)\vec{j} + R(t, y_1, z_1)\vec{k}; \quad \vec{r}' \cdot dt = P(t, y_1, z_1) dt$$

Además, en H_1 , $t = x$; en H_2 , $t = x + \Delta x$; entonces

$$\Delta W = \int_{x_1}^{x_2} P(x, y, z) dx$$

y por el teorema del Valor Medio del Cálculo-Integral:

$$\Delta W = P(\xi, y, z) \Delta x, \quad (x = \xi \pm x \pm \Delta x)$$

Ahora

$$\frac{\Delta W}{\Delta x} = P(\xi, y, z), \quad (x = \xi \pm x \pm \Delta x)$$

Al tomar límites cuando $\Delta x \rightarrow 0$, el primer miembro tiende a $\frac{\partial W}{\partial x}$ y ξ tiende a x . Así

$$\frac{\partial W}{\partial x} = P(x, y, z)$$

Análogamente se puede llegar a

$$\frac{\partial W}{\partial y} = Q(x, y, z)$$

$$\frac{\partial W}{\partial z} = R(x, y, z)$$

y si hacemos $u = \nabla \cdot \mathbf{F}$:

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = u$$

lo que nos dice que sólo los campos irrotacionales - pueden integrarse independientemente de la trayectoria.

Example 4.5.1) Calcular el trabajo realizado por el campo

$\mathbf{F} = (2x + y)\mathbf{i} + (2y + z)\mathbf{j}$ para mover una partícula sobre la recta que une los puntos $(0,0)$ y $(1,1)$

Si $\mathbf{F} = \nabla \phi$, $\frac{\partial \phi}{\partial x} = 2x + y \Rightarrow$ El campo es irrotacional

y no importa la trayectoria que sigamos. Se recomienda seguir una trayectoria de línea quebrada de $(0,0)$ a $(1,0)$ y de $(1,0)$ a $(1,1)$ ya que al variar una sola variable - en cada segmento, se tiene una sola diferencial.

En el primer segmento: $\mathbf{r} = t\mathbf{i}$; $d\mathbf{r} = dt\mathbf{i}$

$$\mathbf{F} = 2t\mathbf{i} + t\mathbf{j}; \quad \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 2t dt$$

$$W_1 = \int_0^1 2t dt = [t^2]_0^1 = 1$$

En el segundo segmento: $\mathbf{r} = t\mathbf{j} + t\mathbf{j}$; $d\mathbf{r} = dt\mathbf{j}$

$$\mathbf{F} = (2t)\mathbf{i} + (2t+1)\mathbf{j}; \quad \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = (2t+1) dt$$

$$W_2 = \int_0^1 (2t+1) dt = [t^2 + t]_0^1 = 2$$

$$W = W_1 + W_2 = 3$$

Este procedimiento sería:

$$\phi = \int (2x+y) dx + f(y) = x^2 + xy + f(y)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = x + f'(y) = 2y + 1$$

$$\Rightarrow f'(y) = 2y$$

$$f(y) = y^2 + C$$

$$\phi = x^2 + xy + y^2 + C; \quad \phi(1,1) = 0$$

$$\phi(0,0) = 3 + C$$

$$W = 3$$

Example 4.5.2) Calcular el trabajo realizado por el campo sobre una curva cerrada a una partícula sobre la circunferencia $\mathbf{r} = \cos t\mathbf{i} + \sin t\mathbf{j}$ y cuando el campo $\mathbf{F} = 2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j}$.

El campo es conservativo irrotacional, los valores del trabajo determinamos su función potencial: $\phi(x, y, z)$ y ahora debemos evaluar ϕ en el punto final y restarle el valor correspondiente en el punto inicial. Pero como ambos puntos coinciden, el trabajo va a ser nulo.

El razonamiento es general: si $\nabla \times \vec{F} = \vec{0}$

$$\int \vec{F} \cdot d\vec{s} = 0 \quad (4.5.0.4)$$

sobre cualquier trayectoria cerrada y en cualquier sentido de recorrido.

4.6) Campo Conservativo

Hasta ahora hemos considerado diversos campos de fuerzas y el trabajo que hay que hacer para vencerlos. No hemos hablado del efecto que un campo de esta naturaleza produce en la partícula.

La segunda ley de Newton nos dice que las fuerzas producen aceleraciones, que pueden ser positivas o negativas (en ocasiones se las llama aceleraciones o desaceleraciones).

Consideremos pues un campo de fuerzas \vec{F} tal que $\nabla \times \vec{F} = \vec{0}$:

$$\vec{F} = m\vec{a} \quad (\text{segunda ley de Newton})$$

pero $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$, entonces:

$$\vec{F} = m \frac{d\vec{v}}{dt}$$

Entonces si multiplicamos ambos miembros simultáneamente por $d\vec{s}$:

$$\vec{F} \cdot d\vec{s} = m \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot d\vec{s} = m \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \frac{d\vec{s}}{dt} = m \vec{v} \cdot d\vec{v}$$

Entonces ahora el trabajo que hay que hacer para llevar una partícula de masa m del punto (1) al punto (2) y como se conserva la relatividad de esa partícula:

$$W = \int_{(1)}^{(2)} \vec{F} \cdot d\vec{s} = m \int_{(1)}^{(2)} \vec{v} \cdot d\vec{v}$$

Puesto $\nabla \times \vec{F} = \vec{0}$, \vec{F} admite potencial y por lo tanto:

$$W = [\phi]_{(1)}^{(2)} = \frac{m}{2} [\vec{v}^2]_{(1)}^{(2)}; \text{ si hacemos } \phi = -\phi:$$

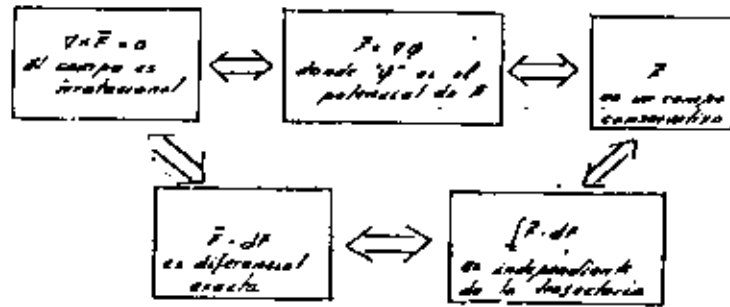
$$\phi(1) - \phi(2) = \frac{m\vec{v}_2^2}{2} - \frac{m\vec{v}_1^2}{2}$$

$$\text{O bien } \phi(1) + \frac{m\vec{v}_1^2}{2} = \phi(2) + \frac{m\vec{v}_2^2}{2} \quad (4.6.0.1)$$

El término $\frac{m\vec{v}_1^2}{2}$, tú lo conoces y sabes que es la energía cinética de la partícula en el punto (1). El término $\phi(1)$ se llama 'energía potencial' de la partícula en el punto (1) y dependerá del campo de fuerzas. Lo importante de la ecuación (4.6.0.1) es que la energía total de una partícula, sujeta a un campo irrotacional de fuerzas, es la misma en cualquier punto.

Es decir, la partícula no pierde ni gana energía, sino que la conserva.

Es así a los campos irrotacionales se les llama "conservativos", así recordemos todo lo que hemos dicho hasta ahora sobre los campos irrotacionales, podemos hacer el siguiente esquema, donde la flecha con doble trazo se le llama "implica necesariamente".



Por lo tanto, la doble implicación existe entre cualesquiera dos asociaciones; por ejemplo:

$$\vec{F} = \nabla \phi \implies \int \vec{F} \cdot d\vec{r} \text{ es independiente de la trayectoria.}$$

En el esquema se unieron todas las flechas en oblicuo de su claridad.

Ejemplo 4.6.1) El campo gravitacional localizado, $\vec{F} = -m\vec{g}$ es conservativo; en efecto, si $\vec{g} = -mg\vec{e}_z$, $\vec{F} = \nabla \phi$, $\phi = mgy$
 a) ¿Qué altura alcanza un cuerpo lanzado verticalmente hacia arriba?

Aplicamos la ec. (4.6.1), los valores son:

$$\phi(0) = 0; \quad \vec{v}_i = v_i \vec{e}_z; \quad \vec{v}_i^2 = v_i^2; \quad \phi(z) = mgy$$

obtenidos por condición del problema $\vec{v}_z = 0$ (El punto z es donde la partícula se detiene antes de iniciarse el descenso). Así:

$$\frac{1}{2} m v_i^2 = mgh$$

$$h = \frac{v_i^2}{2g}$$

b) ¿Con qué velocidad regresa al suelo?

Al aplicar nuevamente la ec. (4.6.1), ahora con los valores:

$$\phi_i = mgh \text{ (inicial)}; \quad \vec{v}_i = 0, \quad \phi_f = 0 \text{ (en el suelo)};$$

$$\vec{v}_f^2 = -2\vec{v}_i^2, \quad \vec{v}_f^2 = 2v_i^2$$

$$mgh = \frac{1}{2} m v_f^2$$

$$v_f = \sqrt{2gh} = v_i$$

c) ¿Cuánto tiempo tarda en subir y en bajar?

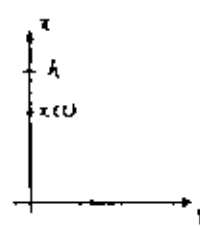


Fig. 4.6.1

se tiene que $\frac{dv_z}{dt} = -g\vec{e}_z$

$$\vec{v} = \int -g\vec{e}_z dt = -gt\vec{e}_z + \vec{C}$$

si $t=0$, $\vec{v} = v_i \vec{e}_z$, entonces:

$$v_i \vec{e}_z = \vec{C}$$

$$\vec{v} = (v_i - gt) \vec{e}_z$$

Cuando $\bar{v} = 0$, el tiempo de subida $t_2 = \frac{v_0}{g} = \sqrt{\frac{2h}{g}}$

Para tiempo de bajada, se puede pensar cierto que:

$$\bar{v} = -gt \text{ hacia } \bar{v}$$

pero ahora, si $t = 0$, $\bar{v} = 0 \Rightarrow \bar{v} = 0$
 $\bar{v} = -gt \text{ hacia } \bar{v}$

Al llegar al suelo, $\bar{v} = -\sqrt{2gh}$ hacia

Tiempo de bajada $= t_3 = \sqrt{\frac{2h}{g}} = t_2$

Ejemplo 4.6.2) Sea una partícula de masa 'm' que parte del reposo en la posición indicada en la figura (4.6.2) la partícula tiene en ese momento una energía potencial mgh que, al llegar al punto (A), ya transferida totalmente en energía cinética, la que a su vez se transfiere en energía potencial para elevarse al punto (B). En este punto inicia a descender nuevamente y las fuerzas de rozamiento se repiten nuevamente indefinidamente, para que la partícula esté sometida al campo gravitacional, que es conservativo.

Fig. 4.6.2

Al estar subiendo que ese no es cierto, pues el movimiento continuo se repite.

¿Qué está pasando entonces?

¿Qué está pasando entonces?

...

Aparte del campo gravitacional, la partícula se encuentra sometida a otro campo de fuerzas que es el de fricción; este campo no convierte la energía mecánica, sino que la disipa en calor. Como ya vimos que los campos conservativos sólo pueden ser irrotacionales, este campo admitirá rotacional. Si observamos la figura (4.6.2.b) nos damos cuenta de que la fricción hace por, con la proyección del peso de la partícula obligándola a estar.

Ejemplo 4.6.3) - Calcular la velocidad mínima inicial, que hay que dar a un cohete espacial para que escape de la atracción terrestre. (Despreciar la fricción del aire y los campos gravitacionales de otros cuerpos celestes).

En las suposiciones establecidas, al cohete queda sujeto solamente al campo gravitacional de la tierra que, como ya vimos es:

$$\vec{F} = -G \frac{Mm}{r^2} \vec{r}$$

donde $M =$ masa de la tierra
 $m =$ masa del cohete
 $G =$ constante de gravitación universal
 $\vec{r} =$ vector que fija la posición del cohete en un momento cualquiera, con origen en el centro de la tierra.

En su caso, con (4.6.10):

$$\gamma = \frac{6mH}{117}; \quad \phi = \frac{6mH}{117}$$

Así, para aplicar (4.6.11) tendremos:

$$\phi_{inicial} = \frac{6mH}{2400 \text{ km}}$$

Para escapar de la atracción de la Tierra, este es, para que $\ddot{r} = 0$, se requiere que el vector radial sea nulo; entonces

$$\phi_{final} = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(-\frac{6mH}{117} \right) = 0$$

La energía cinética inicial es lo que queremos averiguar; llamémosla $E_{i \text{ inicial}} = \frac{1}{2} m v_0^2$

Lo que nos importa es escapar de la atracción terrestre; una vez logrado este, no nos interesa que el objeto se mueva. Entonces

$$\left. \frac{dV}{dt} \right|_{final} = 0$$

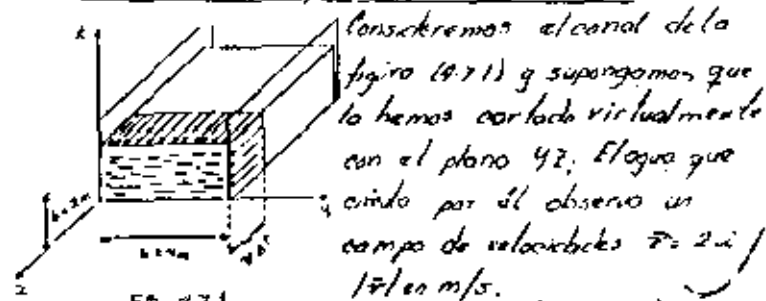
Ahora sí, apliquemos (4.6.1):

$$-\frac{6mH}{6700} + \frac{1}{2} m v_0^2 = 0$$

$$\frac{1}{2} v_0^2 = \frac{6mH}{6700} = \frac{6m}{(6700)^2} \cdot 6400 = 6400 \cdot \frac{m}{6700^2}$$

$$v_0 = \sqrt{(2) (6400 \text{ km}) (0.00001) \text{ km}^2/\text{s}^2} = 11.2 \text{ km/s}$$

1.7) Gasto en un Campo Plano de Velocidades



Consideremos el canal de la figura (1.7.1) y supongamos que lo hemos cortado virtualmente con el plano YZ. El agua que circula por él observa un campo de velocidades $\vec{v} = 2 \text{ m/s}$ en m/s.

Queremos calcular el gasto que está circunscrito por el canal.

El gasto se define como el volumen que pasa en un tiempo unitario; formalmente

$$Q = \frac{dV}{dt}$$

En el problema planteado, el volumen que alcanza a pasar en un intervalo "dt" de tiempo es el prisma mostrado en la figura (1.7.1), puesto que la velocidad es la misma en todos los puntos; así:

$$\Delta V = v \Delta t b h = 2 \Delta t (4) (2) = 8 \Delta t$$

$$\frac{\Delta V}{\Delta t} = 8$$

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta V}{\Delta t} = Q = 8 \text{ m}^3/\text{s}$$

Ahora resolvamos un poco el problema, suponiendo que el plano de corte virtual forma un ángulo de 30° con el plano yz , figura (4.7.2). Puesto que las velocidades siguen siendo las mismas en todos los puntos, el volumen que pasará en Δt será el del paralelepípedo mostrado en la figura (4.7.2).

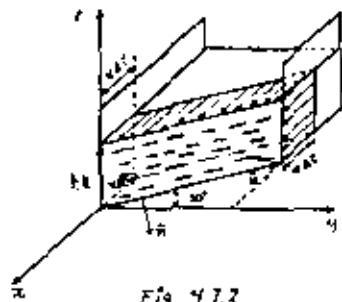


Fig 4.7.2

Nosotros sabemos calcular el volumen de un paralelepípedo como el doble producto escalar de los vectores que lo definen:

$$\Delta V = |\vec{u} \times (-\vec{v} \Delta t) \cdot h \vec{k}| \quad (4.7.01)$$

donde $\vec{u} = -b \tan 30^\circ \vec{i} + b \vec{j} = -\frac{1\sqrt{3}}{3} \vec{i} + \vec{j}$

Entonces:

$$\Delta V = \begin{vmatrix} -\frac{4\sqrt{3}}{3} & 4 & 0 \\ -2\Delta t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & z \end{vmatrix} = 8\Delta t$$

Con lo que podemos ver que llegamos al mismo resultado anterior, lo que quizá ya esperabas.

Lo importante de este resultado es que si consideramos el vector \vec{n} , normal unitario al plano de corte, \vec{u} puede expresarse:

$$\vec{u} = s \vec{k} \times \vec{n}, \quad \text{donde } s = |\vec{u}|$$

y entonces:

$$\begin{aligned} \vec{u} \times (-\vec{v} \Delta t) &= \vec{v} \Delta t \times \vec{u} = s \Delta t \vec{v} \times (\vec{k} \times \vec{n}) \\ &= s \Delta t (\vec{v} \cdot \vec{n} \vec{k} - \vec{v} \cdot \vec{k} \vec{n}) \end{aligned}$$

y como $\vec{v} \cdot \vec{k} = 0$

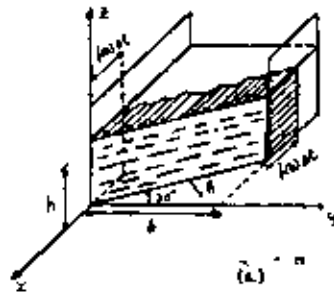
$$\vec{u} \times (-\vec{v} \Delta t) = s \Delta t \vec{v} \cdot \vec{n} \vec{k} \quad (4.7.02)$$

Al llevar (4.7.02) a (4.7.01):

$$\Delta V = s h \Delta t \vec{v} \cdot \vec{n} \quad (4.7.03)$$

Al comparar este caso con el anterior, nos damos cuenta de que, en vez de \vec{v} pusimos $\vec{v} \cdot \vec{n}$ y, en vez de b , pusimos s la longitud de la base del área de corte.

Resolvamos otro poco el problema. Ahora supongamos que el campo de velocidades está dado por $\vec{v} = f(y) \vec{i}$. El movimiento lo podemos concebir como sigue: las partículas describen un movimiento rectilíneo, paralelo a los paredes del canal; cada una de ellas lleva velocidad uniforme. Dos partículas tienen velocidad igual sólo si están lo mismo de una de las paredes del canal. En estas condiciones, el volumen que va a pasar en un tiempo Δt es el que se esquematiza en la figura (4.7.3); como es un estirado, para determinarlo vamos a calcular simplemente el área de su base, como aprendimos en Matemáticas II



$$\text{Area} = \Delta t \int_0^b f(y) dy = \tan 30^\circ \int_0^b y dy = \frac{1}{2} \tan 30^\circ b^2$$

Fig. 4.7.3 b



En la integral que resta, hagamos cambio de variable
 $y = z \cos 30^\circ$; $dy = \cos 30^\circ dz$

$$\text{Area} = \Delta t \int_0^b f(z \cos 30^\circ) \cos 30^\circ dz$$

Que es equivalente a la integral vectorial

$$\text{Area} = \Delta t \int_C \vec{v} \cdot \vec{n} ds$$

donde C es la línea de corte. Fácilmente se llega a

$$\Delta V = \Delta t \int_C \vec{v} \cdot \vec{n} h ds \quad (4.7.4)$$

que al compararla con (4.7.3) nos damos cuenta de que ahora tenemos una integral sobre la longitud s .

Al mismo resultado llegamos si el corte lo hacemos siguiendo una curva cualquiera $x = g(y)$:



$$\text{Area} = \Delta t \int_0^b f(y) dy = \int_0^b f(y) g'(y) dy$$

Las ecuaciones paramétricas de la curva pueden ser:

$$\begin{cases} x = g(u) \\ y = u \end{cases}$$

y por otra parte, $u = u(s)$, con lo que $du = u'(s) ds = \frac{ds}{s'(u)}$ y así:

$$\text{Area} = \Delta t \int_0^{u(b)} f(u) \frac{ds}{s'(u)}$$

Ahora recordemos que

$$T = \frac{g'(u) \hat{i} + j}{s'(u)}$$

$$\vec{r} = T \cdot h = \frac{h \cdot g'(u) \hat{i} + j}{s'(u)}$$

Por lo que $\vec{r} \cdot \vec{n} = \frac{f(u)}{s'(u)}$

Hasta ahora, hemos supuesto siempre que la velocidad de las partículas no cambia en su recorrido ¿Qué pasa si suponemos que $\vec{v} = f(x) \hat{i}$?

Puesto que ya hemos visto el efecto de un corte

cualquiera, asumamos que el corte lo hace nuevamente (Fig. 4.7.5)

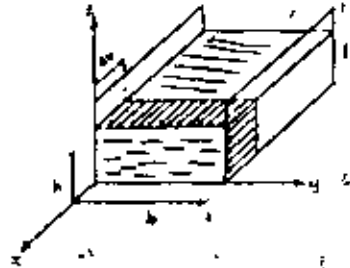


Fig. 4.7.5

el plano yz . Nuestro movimiento sigue siendo rectilíneo, pero ya no es uniforme, sino que cada partícula cambia su velocidad al acercarse a la región de corte.

Si seguimos a una de las partículas, caemos a un problema muy semejante al que vimos en (4.1.10). Entonces

$$\Delta x = \int_0^{\Delta t} \bar{v} dt$$

o bien, puesto que sólo tenemos componentes en "x"

$$\Delta x = \int_0^{\Delta t} f(x) dt$$

y por el teorema del Valor Medio del Cálculo Integral:

$$\Delta x = f(\bar{x}) \Delta t \quad 0 \leq \bar{x} \leq \Delta t$$

Entonces

$$\Delta V = bh f(\bar{x}) \Delta t$$

$$\frac{\Delta V}{\Delta t} = bh f(\bar{x})$$

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta V}{\Delta t} = Q = bh f(\bar{x})$$

donde $f(\bar{x})$ es la velocidad en la sección de corte. Así:

$$Q = bh \bar{v} = bh \bar{v} \cdot \bar{e} = bh \bar{v} \cdot \bar{n} = \int_C \bar{v} \cdot \bar{n} ds \quad (4.7.4)$$

resultando análogo a los anteriores y que nos permite pasar al caso más general, donde se tiene un flujo plano $\bar{v} = v_1(x,y)\bar{e}_1 + v_2(x,y)\bar{e}_2$ y un corte cualquiera definido por la curva $C: \bar{r} = x(s)\bar{e}_1 + y(s)\bar{e}_2$ (Fig. 4.7.6). El gasto que pasa a través de la superficie cilíndrica de altura "h", cuya directriz es "C", vale:

$$Q = h \int_C \bar{v} \cdot \bar{n} ds \quad (4.7.5)$$

Hemos visto que trabajar con "s" como parámetro de lugar a problemas algebraicos muy serios, a excepción hecha de curvas muy particulares.

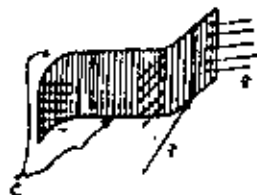


Fig. 4.7.6

Entonces tratamos de eliminar ese parámetro.

El vector \bar{n} es normal a la curva de corte, pero dirige hacia afuera: de hecho le habrás preguntado por qué usamos este sentido, en vez del que vimos con Front-Sheet. La razón es que convencionalmente se considera gasto positivo al que sale; de ahí que la proyección de \bar{v} lo debemos hacer hacia afuera. En todo caso $\bar{n} = -N$ y si $N = B \cdot T$, $\bar{n} = T \cdot B$

Como estamos en el plano xy, $B = k$ y entonces:

$$Q = h \int_C \bar{v} \cdot (T \cdot k) ds = h \int_C (k \cdot \bar{v}) \cdot T ds = h \int_C (k \cdot \bar{v}) \cdot \frac{d\bar{r}}{ds} ds$$

$$Q = h \int_C (k \cdot \bar{v}) \cdot d\bar{r} \quad (4.7.6)$$

La expresión (4.7.6) es muy similar a la (4.5.11) donde T queda sustituido por $(k \cdot \bar{v})$ y permite integrar en términos de cualquier parámetro.

Ejemplo 4.7.1): El campo de velocidades de un fluido está dado por $\bar{v} = x\bar{e}_1 + y\bar{e}_2$ en m/s si x, y en m. Calcular el gasto que pasa.

a) A través de un segmento de cilindro circular recto, con radio = 4 m y eje de simetría en el eje z; limitado por las generatrices.

$$\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \quad \begin{cases} x=4m \\ y=0 \end{cases} \quad \text{y los planos } z=0; z=3m.$$

Para la directriz:

$$\bar{r} = 4 \cos \theta \bar{e}_1 + 4 \sin \theta \bar{e}_2$$

$$d\bar{r} = (-4 \sin \theta \bar{e}_1 + 4 \cos \theta \bar{e}_2) d\theta$$

$$k \times \vec{r} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & 1 \\ x & y & 0 \end{vmatrix} = xj - yi = 16 \cos^2 \theta j - 16 \sin^2 \theta i$$

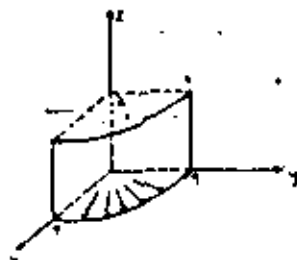


Fig. 4.7.7

$$k \times \vec{r} \cdot d\vec{r} = (16 \cos^2 \theta + 16 \sin^2 \theta) d\theta = 16 d\theta$$

si $x=4, y=0 \Rightarrow \theta=0$; si $x=0, y=4 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$; además, $h=3m$

$$Q = 3 \int_0^{\pi/2} 16 d\theta = 24\pi \text{ m}^3/\text{s}$$

b) A través del segmento de cilindro $g = 4 - \frac{x^2}{4}$ limitado por las generatrices $\begin{cases} x=0 \\ y=4m \end{cases}$ $\begin{cases} x=4m \\ y=0 \end{cases}$, los planos $x=0, z=3m$

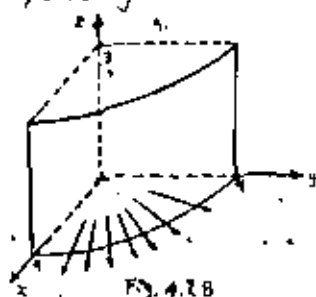


Fig. 4.7.8

Ahora, para la directriz:

$$\vec{r} = t\vec{i} + (4 - \frac{t^2}{4})\vec{j}$$

$$d\vec{r} = (t - \frac{t}{2})\vec{j} dt$$

$$k \times \vec{r} = xj - y\vec{i} = t\vec{j} + (\frac{t^2}{4} - 4)\vec{i}$$

$$k \times \vec{r} \cdot d\vec{r} = (\frac{t^2}{4} + \frac{t^2}{4} - 4) dt = -(\frac{t^2}{2} + 4) dt$$

Si $x=4, y=0, t=4$; si $x=0, y=4, t=0$ en ese orden, para respetar el sentido antihorario.

$$Q = -3 \int_4^0 (\frac{t^2}{2} + 4) dt = 3 \int_0^4 (\frac{t^2}{2} + 4) dt = 64 \text{ m}^3/\text{s}$$

Ejemplo 4.7.2) El campo de velocidades de un fluido está dado por $\vec{v} = y\vec{j} - x\vec{i}$, ($t=1$ en m/s, si x, y en m).

Calcular el gasto que pasa a través del rectángulo contenido en el plano $x+y=4$, limitado por las rectas $x=2, y=2$ y $x=4, y=0$, y los planos $z=0, z=3$.

La traza del plano en $z=0$:

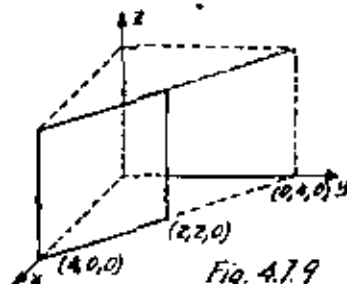


Fig. 4.7.9

$$\vec{r} = t\vec{i} + (4-t)\vec{j}$$

de donde

$$d\vec{r} = (i - j) dt$$

Nos damos cuenta de que $k \times \vec{v}$ es un campo irrotacional, por lo que su integral es independiente de la traza

de la sección de corte y sólo va a depender de las verticales que lo limitan. El potencial de $k \times \vec{v}$ es $XY+C$, entonces:

$$Q = 3 \{ [(2)(2) + C] - [(4)(0) + C] \} = 12 \text{ m}^3/\text{s}$$

En general, te será muy fácil probar que

Teorema 4.7.1

Si $\vec{v} = v_1\vec{i} + v_2\vec{j}$ tal que $\nabla \cdot \vec{v} = 0$, entonces

$$\nabla \cdot (k \times \vec{v}) = 0$$

CAPITULO CINCO

5-1

Introducción

Para introducir la integral doble de una función sobre una región del plano, plantearemos y resolveremos un problema; pero antes hagamos un ligero recuerdo de lo que es una región (ver capítulo 1.2) conjunto de puntos del plano limitado por una curva o polígono. Cuando una región se subdivide en otras menores, los bordes de estas subregiones serán también curvas o polígonos. Posteriormente trataremos con más detalle este asunto.

Problema 5.01

Estimamos el volumen de un sólido S , en el cual, sobre cada punto P de un rectángulo R de 10 cm de largo por 5 cm de ancho, se levanta un segmento de recta cuya longitud, en cm, es el cuadrado de la distancia que hay de P al vértice A (Fig. 5.0.1)

Los segmentos de rectas verticales cuando se consideran en el conjunto de todos los puntos de R , forman un sólido S cuya forma se muestra en la fig. 5.0.2.

Podemos notar que el punto más alto de S está sobre el vértice B opuesto a A .

Por el teorema de Pitágoras tenemos que su altura es $10^2 + 5^2 = 125$ cm

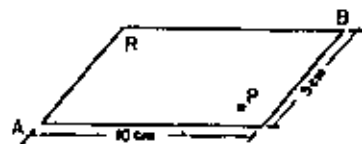


Fig. 5.0.1.

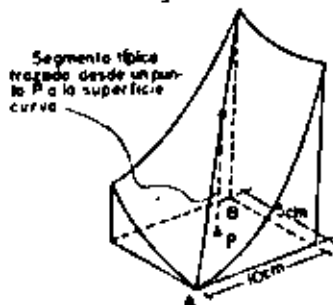


Fig. 5.0.2.

5-2

Para comenzar, podemos notar que el volumen de S es, sin lugar a dudas, menor que $10 \times 5 \times 125 = 6250 \text{ cm}^3$, porque el sólido S puede colocarse dentro de una caja cuya base tenga un área de 50 cm^2 y cuya altura sea de 125 cm. Si tratamos de obtener estimaciones más exactas, dividamos la base rectangular en regiones menores; por ejemplo dividémosla en cuatro rectángulos R_1, R_2, R_3 y R_4 , como vemos en la fig. 5.0.3

Para estimar el volumen de S , calculemos el volumen de la porción de S que queda sobre cada uno de los rectángulos y sumémoslos. Para hacer lo anterior elijamos un punto en cada uno de los cuatro rectángulos, por ejemplo el punto medio de cada uno de ellos, y sobre cada rectángulo construyamos una caja cuya altura sea igual a la altura que debe tener S en el punto medio del rectángulo correspondiente (Fig. 5.0.4)

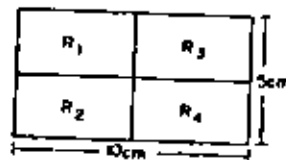


Fig. 5.0.3

Esto equivale a aproximar la función a través de una escala

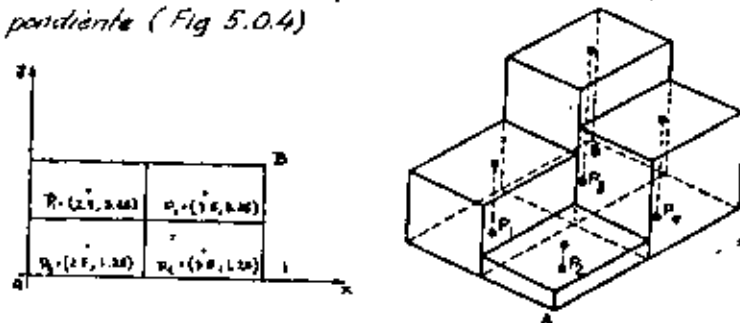


Fig. 5.0.4

nada, como viste en Matemáticas II.

Las alturas de las cajas que están sobre R_n son:

$$R_1: (2.6)^2 + (3.75)^2 = 20.3125$$

$$R_2: 7.8125$$

$$R_3: 70.3125$$

$$R_4: 57.8125$$

Los volúmenes correspondientes son:

$$R_1: 2.5 \times 5 \times 20.3125 = 253.90625$$

$$R_2: 97.65625$$

$$R_3: 878.90625$$

$$R_4: 722.65625$$

$$1953.1249 \text{ cm}^3$$

Esto que hicimos es sólo una estimación; con la misma partición de R podríamos obtener otras estimaciones si escogieramos otros puntos P para determinar las alturas de las cajas.

En general, para estimar el volumen de S comenzaremos por efectuar una partición de R en conjuntos menores R_1, R_2, \dots, R_n y, después, seleccionamos un punto P_i en R_1, P_2 en R_2, \dots, P_n en R_n . (Fig. 5.0.5)

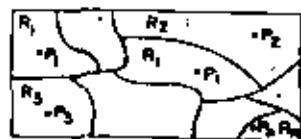
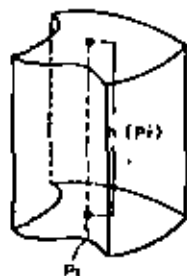


Fig. 5.0.5



Si a la altura de S sobre un punto típico $P_i \in R_i$ la llamamos $h(P_i)$, y denotamos A_i al área de R_i , entonces

$$h(P_1)A_1 + h(P_2)A_2 + \dots + h(P_n)A_n \quad 5.0.1$$

es una estimación del volumen de S mediante la suma de los volúmenes de n sólidos, como el que se muestra en la fig. 5.0.5. Desde luego será más fácil trabajar con cilindros de base rectangular (prismas), que con cilindros de base caprichosa. En lo sucesivo nos limitaremos pues a hablar de prismas, a menos que se especifique lo contrario.

La solución del problema anterior nos permite establecer lo siguiente.

5.1. Integral Doble en Coordenadas Cartesianas.

Es intuitiva que el volumen de S lo podremos obtener con mayor aproximación, si tomamos un mayor número de rectángulos de menor tamaño que los utilizados; y también es intuitiva que tendremos todavía mayor precisión en tanto que el tamaño de dichos rectángulos de cerca indefinidamente. Entonces, si el área de cada rectángulo A_i está dada por

$$A_i = \Delta x_i \Delta y_i$$

el volumen de S quedará más aproximado por

$$h(P_1)\Delta x_1\Delta y_1 + h(P_2)\Delta x_2\Delta y_2 + \dots + h(P_n)\Delta x_n\Delta y_n \quad 5.1.0.1$$

o sea

$$\sum_{i=1}^n h(P_i)\Delta x_i\Delta y_i \quad 5.1.0.2$$

El teorema de Weierstrass que viste en Matemáticas I, nos permite afirmar que, dentro de cada subregión habrá un punto Q tal que $h(Q)$ no supere a algún otro valor $h(P)$, donde P pertenece a esa subregión; asimismo afirmamos que habrá un punto T dentro de la misma subregión, tal que $h(T)$ no sea superada por algún otro valor $h(P)$. A los valores $h(Q)$ y $h(T)$ los llamaremos, respectivamente, ínfimo y supremo de la subregión, y los denotaremos

$$h(Q) = \inf h(P)$$

$$h(T) = \sup h(P)$$

como se muestra en la fig. 5.1.1

Por otro lado, el teorema de Bolzano permite afirmar que el valor de $h(p_2)$ es sea el de la altura de cada punto típico p_2 es un valor intermedio entre los anteriores (Fig. 5.1.1)

$$\inf h(p) \leq h(p_2) \leq \sup h(p)$$

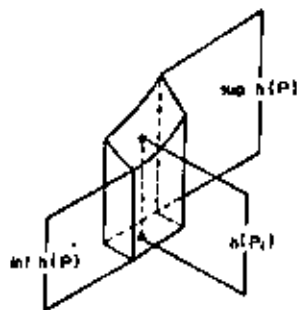


Fig. 5.1.1

De esta manera, si escogemos puntos supremos de $h(p)$ para cada prisma formado, podremos escribir

$$V_{\max} = \sum_{i=1}^n \sup h(p_i) \cdot A_i \quad 5.1.3$$

y si escogemos puntos ínfimos tendremos

$$V_{\min} = \sum_{i=1}^n \inf h(p_i) \cdot A_i \quad 5.1.4$$

para una cierta partición

Como puede verse de la fig. 5.1.1, el supremo y el ínfimo de cada subregión siempre se encontrarán separados por una diagonal para la función que estamos estudiando. En una de esas subregiones esa diagonal será máxima con respecto a las de las otras subregiones. Llamemos λ a la medida de esa diagonal máxima.

También podemos afirmar que, para la función que estamos estudiando, la diferencia entre los valores supremo e ínfimo de la función en esa celda de diagonal máxima, es así mismo máxima.

Si hacemos otra partición en donde la diagonal máxima sea menor que en la partición anterior, la diferencia entre los supremos e ínfimos en cada subregión también será menor que en el caso inicial, y puesto que nuestra función es continua, esas diferencias decrecerán indefinidamente a medida que vayamos haciendo particiones tales, que la máxima diagonal vaya decreciendo. En el límite, el volumen máximo tenderá a confundirse con el volumen mínimo, es decir ambos tendrán un mismo límite que definiremos como volumen del sólido.

$$V = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \sup h(p_i) \cdot A_i = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \inf h(p_i) \cdot A_i = \iint_R h(p) dA \quad 5.1.5$$

Puesto que $h(p_i) = f(x, y)$,

$$\text{entonces } \iint_R h(p) dA = \iint_R f(x, y) dA \quad 5.1.6$$

Esta última expresión es la integral doble de la función $f(x,y)$ en la región R .

Inmediatamente surgen las preguntas siguientes:

¿Existirá siempre la integral doble?

¿Cómo estableceremos la región R ?

¿Cómo evaluaremos la integral doble?

Para contestar la primera pregunta, suponte que queremos integrar la función siguiente:

$$f(x,y) = \begin{cases} 1, & \forall (x,y) \text{ } xy \text{ racional} \\ 0, & \forall (x,y) \text{ } xy \text{ irracional} \end{cases}$$

En la región

$$R = \{(x,y) \mid 0 \leq x \leq 1; 0 \leq y \leq 1\}$$

mostrada en la fig. 5.1.2, en donde hemos hecho una partición cualquiera. Sigamos, ahora, el procedimiento anterior

El supremo de cada celda vale, invariablemente, uno, en tanto que el ínfimo vale cero invariablemente. Evaluemos las sumas:

$$\sum_{i=1}^n \sup f(x,y)_i A_i = \sum_{i=1}^n (1) A_i = A$$

$$\sum_{i=1}^n \inf f(x,y)_i A_i = 0$$

Nota que estos puntos ya no están separados por la diagonal de la subregión correspondiente, sino que están contiguos (desde luego que la función no es continua)

Si ahora escogemos otra partición cuyo λ sea menor que la

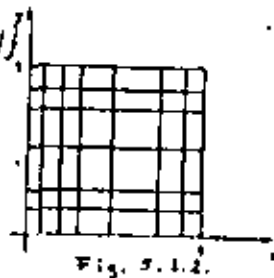


Fig. 5.1.2.

de la partición anterior, las sumas van a seguir variando lo mismo, y también eso ocurrirá si hacemos decrecer esa λ indefinidamente.

Ahora ¿cuál es el valor de la integral doble?, ¿el de la suma de los supremos o el de la suma de los ínfimos?, ¿o ambos?. Ninguna respuesta es racionalmente satisfactoria. Decimos entonces que no existe la integral doble de la función bajo estudio, en la región indicada.

Entonces surge otra pregunta, ¿cuándo existe la integral doble?. Vamos a responder a ello; pero antes formalicemos y generalicemos algunas de los conceptos ya vistos.

5.2. Redes Sobre una Región

Consideremos ahora una región plana cerrada y finita $R = \{(x,y)\}$ como se muestra en la fig. 5.2.1.

En ella el punto P_1 es el punto de la región que tiene la abscisa de valor ínfimo de entre todas las puntos de la región R ; llamemos a esta abscisa $X_1 = a$

$$a = \inf \{x \mid (x,y) \in R\}$$

De manera similar:

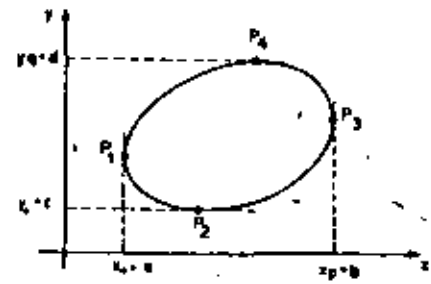


Fig. 5.2.1

$$b = \sup \{x \mid (x,y) \in R\}$$

$$c = \inf \{y \mid (x,y) \in R\}$$

$$d = \sup \{y \mid (x,y) \in R\}$$

R puede ser una parte de un rectángulo comprendido entre a y b , según el cual tomaremos n subregiones R_i para $i = 1, 2, \dots, n$

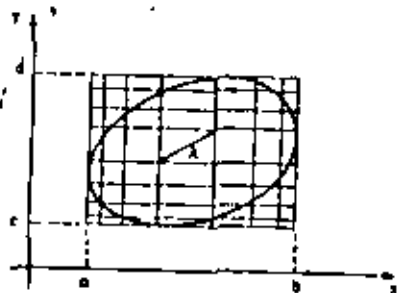
a) $R = Q$
 b) Las fronteras de las regiones Q y R se subdividen en cuatro partes P, R, Q y R

Subdividamos a los intervalos $[a, b]$ y $[c, d]$ en p y q subintervalos, respectivamente, no necesariamente iguales, es decir:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{p-1} < x_p = b$$

$$c = y_0 < y_1 < y_2 < \dots < y_{q-1} < y_q = d$$

como podemos ver en la figura 5.2.1.



De esta manera hemos subdividido a R en $p \cdot q$ subregiones y la región R' se ha subdividido en n subregiones, siendo

$$n = p \cdot q$$

Definición 5.2.1

A cada una de estas subregiones la llamamos CELDA y decimos que, sobre la región R , hemos establecido una RED de n celdas.

Fig. 5.2.2

Para efectos de este curso, haremos algunos casos sencillos en los que las partes R y R' son rectángulos.

Los valores más fáciles son los que se forman tomando rectas paralelas a los ejes coordenados, pero también pueden formarse tomando curvas sobre la región R .

Definición 5.2.2

Se llama NORMA de la red a la longitud de la mayor diagonal que se puede establecer para todas las celdas comprendidas dentro de la red.

$$\lambda = \max(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$$

donde λ es la norma.

5.3 Existencia de la Integral Doble.

5.3.1) Definición Formal de Integral Doble

Sea la función $f(x, y)$ definida en todas las partes de la región

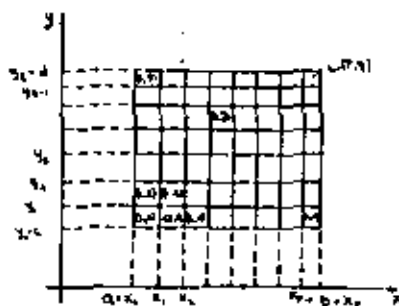
$$R = \{(x, y) / a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$$

Establezcamos una partición cualquiera en esta región, dividiendo el intervalo $[a, b]$ mediante los puntos

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{p-1} < x_p = b$$

y el intervalo $[c, d]$ mediante

$$c = y_0 < y_1 < y_2 < \dots < y_{q-1} < y_q = d$$



El resultado es la red de la figura (5.3.1) donde tendremos en identificar a las celdas como se ve en esa misma figura.

Si seguimos el procedimiento ya explicado anteriormente, debemos escoger un punto dentro de cada celda, sin más limitación que ésta.

Llamemos P_{11} al punto que escogimos en la celda (1,1); P_{12} al que escogimos en la celda (1,2); P_{21} al que escogimos en

en la celda (i, j) , etc.

Valuemos ahora la función en cada uno de estos puntos, obteniendo el conjunto de valores $f(P_{11}), f(P_{12}), \dots, f(P_{1p}), \dots, f(P_{ij}), \dots, f(P_{qj})$.

Llamemos $\Delta A_{ij} = (x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}) = \Delta x_i \Delta y_j$ al área de la celda (i, j) ;

$\Delta A_{ij} = (x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}) = \Delta x_i \Delta y_j$ al área de la celda (i, j) etc.

Multipliquemos cada uno de los valores de la función obtenidos anteriormente, por el área de la celda correspondiente y sumemos los productos que resultan:

$$\begin{aligned} & f(P_{11}) \Delta A_{11} + f(P_{12}) \Delta A_{12} + \dots + f(P_{1p}) \Delta A_{1p} = \sum_{j=1}^p f(P_{1j}) \Delta A_{1j} \\ & f(P_{21}) \Delta A_{21} + f(P_{22}) \Delta A_{22} + \dots + f(P_{2p}) \Delta A_{2p} = \sum_{j=1}^p f(P_{2j}) \Delta A_{2j} \\ & \vdots \\ & f(P_{q1}) \Delta A_{q1} + f(P_{q2}) \Delta A_{q2} + \dots + f(P_{qp}) \Delta A_{qp} = \sum_{j=1}^p f(P_{qj}) \Delta A_{qj} \\ & \hline \sum_{i=1}^q \sum_{j=1}^p f(P_{ij}) \Delta A_{ij} \end{aligned}$$

A una suma como la que se acaba de obtener, se la llama **SUMA DE RIEMANN**.

Habrás identificado a esta suma como la que obtuvimos en la ec. (5.1.0.2) y con lo que nos daba la suma de los volúmenes de las cajas de la figura (5.0.4).

Ahora bien, si con la partición ya establecida el profesor pidiese a sus alumnos que calcularan una suma de RIEMANN, lo más probable es que obtuvieran tantos resultados diferentes como alumnos ¿Por qué? Porque cada alumno puede

escoger un punto diferente en cada celda para valorar la función. Con mayor razón se obtendrían resultados diferentes si el profesor dejara que cada alumno hiciera su propia partición, limitándose a fijar la norma de la red.

Pero ¿qué pasaría si el profesor volviera a dejar el mismo ejercicio, reduciendo el valor de la norma de la red? Seguramente volvería a obtener tantos resultados como alumnos; pero quizá, la diferencia entre la mayor y la menor de las sumas se habría acortado. Si al acortar indefinidamente el valor de la norma, los resultados van precisándose cada vez más, podemos decir que éstos convergen a un número; este número sería la integral doble.

DEFINICIÓN 5.3.3

Si dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$\left| \sum_{i=1}^q \sum_{j=1}^p f(P_{ij}) \Delta A_{ij} - I \right| < \epsilon \text{ cuando } \lambda < \delta$$

se dice que la función $f(x, y)$ es **INTEGRABLE** sobre la región R y que el número "I" es la **INTEGRAL DOBLE** de $f(x, y)$ sobre R .

Como ya vimos, se escribe

$$I = \iint_R f(x, y) dA = \iint_R f(x, y) dx dy$$

Esta definición se parece mucho a la de límite; pero ten mucho cuidado en distinguir que NO se trata de un límite ordinario; en efecto, en este caso, la variable independiente es la norma " λ "; pero ya quedamos en que a un valor de " λ " corresponden una infinidad de sumas de Riemann; en otras palabras, la suma de Riemann NO es función de " λ ".

Simplemente por semejanza se acostumbra escribir

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{j=1}^p \sum_{i=1}^q f(P_{ij}) \Delta A_{ij} = \iint_R f(x, y) dA$$

Pero no todas las propiedades de los límites se pueden aplicar impunemente a la integral doble; por ejemplo

$$\iint_R f(x, y) g(x, y) dA \neq \iint_R f(x, y) dA \iint_R g(x, y) dA$$

5.3.2) Integrabilidad de la función Continua

Hemos formulado el concepto de integral doble; pero aún no disponemos de un medio útil para identificar a las funciones que cumplen con esa definición, esto es, a las funciones integrables.

Ya hemos hablado de la suma de supremos que se puede establecer sobre una partición. Si llamamos M_{ij} al valor supremo de la función en la celda i, j , a esta suma la podemos representar como:

$$S_{\lambda} = \sum_{ij} M_{ij} \Delta A_{ij}$$

que la llamaremos suma superior y que lleva índice porque depende de la norma de la red que estamos considerando.

Análogamente, llamaremos suma inferior a

$$s_{\lambda} = \sum_{ij} m_{ij} \Delta A_{ij}$$

en donde m_{ij} es el valor infimo de la función en la celda i, j .

De todo lo que hemos hablado, ya habías intuido que bastaría demostrar que S_{λ} y s_{λ} convergen hacia el mismo número cuando $\lambda \rightarrow 0$, para estar seguros que todas las demás sumas posibles también convergen y que por lo tanto existe la integral. Esto formalmente expresamos mediante el siguiente teorema:

Teorema 5.3.1

Para que la función $f(x, y)$ sea integrable sobre la región R es necesario y suficiente que dado $\epsilon > 0$ exista una $\delta > 0$ tal que

$$S - A < \epsilon \text{ cuando } \lambda < \delta$$

La demostración la puedes encontrar en el apéndice 5.1, pero la fig. 5.32a ilustra el caso de una

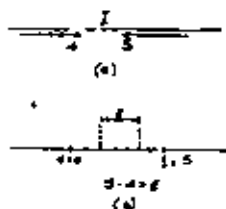


Figura 5.2

función integrable, mientras que lo es para $a < b < c$ donde el área de la función es integrable que se construye en el ejemplo 5.1.

Así pues, vamos a demostrar que un número que lo sea en la red inferior (a lo que se llama "refinar la red") "S" de cruce y "I" cruce.

Teorema 5.2

Si $\lambda > \lambda_0$, $S_1 > S_{\lambda_1}$ y $\lambda_1 < \lambda_2$

Demostremos:

Supongamos la red λ_1 ; cuando hacemos el refinamiento, puede suceder dos cosas: o queda anclada, o queda dividida en un número finito de sub-redes menores (Fig 5.2)

1'	2'	3'
1''	2''	3''

redes λ_1
Figura 5.3

Si queda anclada, su contribución a "I" es la misma; si queda subdividida su contribución a "I" es a "S":
 $\sum M_j \Delta x_j$

Para en cada una de las sub-redes menores es posible demostrar que $M_j < M_j$

Entonces:

$$\sum M_j \Delta x_j > \sum M_j \Delta x_j = M_j \sum \Delta x_j = M_j \Delta x_j$$

De donde se ve que la nueva contribución a "S" ahora será superior a la anterior, por lo que:

$$S_1 > S_{\lambda_1} \quad (5.2)$$

Análogamente puede demostrarse que $\lambda_1 < \lambda_2$

Por otra parte, para que "S" y "I" coincidan, necesitamos que, en algún momento "S" sea superior a "I"

Teorema 5.3

Para cada par de valores de $\lambda_1, \lambda_2, S_1, S_2$

Demostremos:

Construyamos $\lambda_3 < \lambda_1, \lambda_2$; entonces, de acuerdo con el Teorema 5.2:
 $S_2 > S_{\lambda_3} > S_{\lambda_1}, S_{\lambda_2} \quad (5.3)$

Ya habíamos indicado que una función continua es integrable; formalizamos con el siguiente teorema:

Teorema 5.4

Toda función continua es integrable en la región en que es continua

Demostremos:

Sea $f(x)$ continua en $R\{(a,b); (c,d)\}$

Hagamos una partición en esa región, con naves "I", como ya se ha visto y establezcamos también las naves superior e inferior:

$$S = \sum M_j \Delta x_j$$

$$I = \sum m_j \Delta x_j$$

El resto miembro a miembro

$$S - I = \sum (M_j - m_j) \Delta x_j \dots \dots \dots (5.4)$$

Hagamos $\epsilon > 0$, por la propiedad de las funciones continuas podemos encontrar $\delta > 0$, tal que:

$$M_j - m_j < \epsilon, \text{ cuando } \lambda < \delta \dots \dots \dots (5.5)$$

Entonces, al tomar en cuenta (5.4) e (5.5):

$$S - I < \sum \epsilon \Delta x_j = \epsilon \sum \Delta x_j = \epsilon \Delta x \text{ cuando } \lambda < \delta$$

donde Δx es el área de la región, puede que $\epsilon \Delta x > 0$ y fíjate, tenemos $\delta = \epsilon \Delta x$

con lo que:

$$S - I < \epsilon \text{ cuando } \lambda < \delta \quad (5.6)$$

Ahora ya así podemos concluir a la propuesta, existe funciones en

"integrables?" Si vemos que una función es continua en una región, no preguntamos más: esa función es integrable sobre esa región.

Más aún, solo nos queda un método para calcular: es necesario que desde los sucesos de Riemann los de mayor precisión, hagamos lo que nos parece más fácil y oblongamos el límite.

Para elegir este, resolvamos el problema 5.2.1, consistentemente en ordenar

$$\iint_R (x^2 + y^2) dx dy \text{ donde } R = \{x, y | 0 \leq x \leq 10, 0 \leq y \leq 5\}$$

Primero debemos subdividir la red a partes iguales; ¿cuál será la más conveniente? Aquí es que este formato por unidades iguales (10 y 5.0) así, se formaron

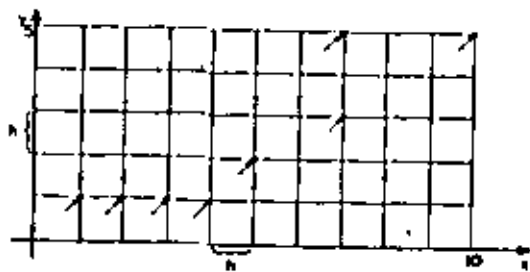


Fig. 5.2.1

una red de 10×5 cuadrados, cuyos dimensiones son los de R naturalmente.

Ahora debemos escoger un punto dentro de cada celda; usualmente la idea más propiamente al punto medio por más "representativa", pero ahora sabemos que solo se tiene importancia y que más bien debemos buscar la sencilla algebraica; entonces escogamos un vértice, por ejemplo el inferior izquierdo (debemos estar al cuadrado, es más fácil escoger h^2 que n^2).

Ahora debemos volver la función en cada uno de los puntos escogidos:

En la celda (1,1): $f(h, h) = h^2 + h^2 = 2h^2$, $f(h, h) \Delta A_{11} = 2h^2(h^2) = 2h^4$

En la celda (2,1): $f(h, h) = 4h^2 + h^2 = 5h^2$; $f(h, h) \Delta A_{21} = 5h^2(h^2) = 5h^4$

En la celda (3,1): $f(h, h) = 9h^2 + h^2 = 10h^2$; $f(h, h) \Delta A_{31} = 10h^2(h^2) = 10h^4$

En la celda (n,1): $f(h, h) = (n-1)^2 h^2 + h^2 = n^2 h^2$; $f(h, h) \Delta A_{n1} = (n^2 h^2)(h^2) = n^2 h^4$

$$\sum_{i=1}^n f(ih, h) \Delta A_{i1} = (2+5+\dots+n^2) h^4 = (1+2+\dots+n) 2h^4$$

Podría que $1+2+\dots+n^2 = n(n+1)(2n+1)/6$, $1+2+\dots+n = n(n+1)/2$

y entonces:

$$\sum_{i=1}^n f(ih, h) \Delta A_{i1} = \left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 2n \right] h^4 = \frac{n^3 + 3n^2 + 2n}{3} h^4 = \frac{n^3 + 3n^2 + 2n}{3} h^4$$

analogamente:

$$\sum_{j=1}^5 f(ih, 2h) \Delta A_{ij} = (1+4+9+\dots+n^2) h^2 (1+2+\dots+5) h^2 = \frac{n^3 + 3n^2 + 2n}{3} h^4$$

$$\sum_{j=1}^5 f(ih, jh) \Delta A_{ij} = \left[(1+4+\dots+n^2) + \dots + (1+4+\dots+n^2) \right] h^4 = 5 \left[\frac{n^3 + 3n^2 + 2n}{3} \right] h^4$$

$$\sum_{j=1}^5 \sum_{i=1}^n f(ih, jh) \Delta A_{ij} = h^4 \left[5 \left(\frac{n^3 + 3n^2 + 2n}{3} \right) + 5 \left(\frac{n^3 + 3n^2 + 2n}{3} \right) \right]$$

$$S = \sum_{j=1}^5 \sum_{i=1}^n f(ih, jh) \Delta A_{ij} = h^4 \left\{ \frac{10n^3 + 30n^2 + 20n}{3} \right\}$$

$$= h^4 \left(\frac{10n^3}{3} + 10n^2 + \frac{20n}{3} \right)$$

$$= h^4 \left(\frac{10n^3}{3} + 10n^2 + \frac{20n}{3} \right)$$

$$= h^4 \left(\frac{100n^3}{3} + 30n^2 + \frac{20n}{3} \right)$$

Podría que $nh = 5$:

$$S = \frac{10}{3} 125 + 30 \cdot 25 + \frac{20}{3} 5 h^4$$

Ahora, al tomar límites cuando $h \rightarrow 0$. ($n \rightarrow \infty$ también tienden a cero)

$$\lim_{h \rightarrow 0} S = \frac{10 \cdot 125}{3} + 0 + 0 = \frac{1250}{3} = \iint_R (x^2 + y^2) dx dy$$

Este procedimiento puede parecer laborioso, en realidad es más sencillo que manejar numéricamente a través de una computadora, lo cual ocurre cada vez más frecuentemente en todos los campos de la Ingeniería, por lo que no debes aburrirte. Cuando las funciones y regiones son sencillas, como las propuestas en el presente ejemplo, podemos usar otro método más simple, que vamos a ver a continuación.

Para entenderlo, comencemos por suponer que la función a integrar es sencilla así en términos de una de las variables, por ejemplo, y^2 .

$$f(x,y) = y^2, \text{ representada geométricamente en la fig. 5-15}$$

su historia de volumen:

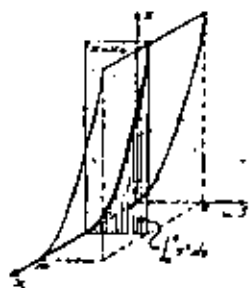


Figura 5-15

$$\int_0^1 \int_0^1 y^2 dx dy = 0.3333333333333333$$

Si cortamos la superficie en cuestión con un plano paralelo al "yz", siempre obtenemos la curva

$$\begin{cases} z = y^2 \\ x = x_0 \end{cases}$$

y el área (rectangular) comprendida entre dicha curva, la intersección del plano con el "xy" y la línea $y = 1$, siempre será:

$$A = \int_0^1 y^2 dy = \frac{1}{3}$$

independientemente del valor de x_0 ; por lo mismo, la integral puede darse en el valor de

$$\int_0^1 \int_0^1 y^2 dx dy = \int_0^1 \frac{1}{3} dx = \frac{1 \cdot 1}{3} = \frac{1}{3}$$

Ahora representemos a nuestra función propuesta como:

$$f(x,y) = x^2 + y^2$$

La figura 5-16 es la misma que la 5-15, vista desde otro punto de vista. Ahora, si cortamos con el plano $z = z_0$ obtenemos la curva

$$\begin{cases} z = z_0 \\ x = 0 \end{cases}$$

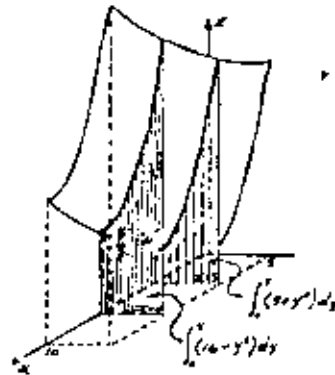


Figura 5-16

en esta caso, pues la curva de la intersección obtenida con el plano de corte, así como el área bajo ella; en otros palabras se forma así:

$$f(x) = \int_0^1 (x^2 + y^2) dy = x^2 \left[\frac{y^2}{2} \right]_0^1 + \left[\frac{y^3}{3} \right]_0^1$$

$$F(x) = 5x^2 + 1/3 \dots \dots \dots (5.12 a)$$

Ahora establezcamos una red en nuestra región, que podría ser la de la figura 5-14 o otra cualquiera; para fines de este ejemplo, representemos a una superficie con el plano $z = 1$, donde está en el área bajo la curva de la intersección será, de acuerdo con (5.12 a)

$$F(1) = 5(1)^2 + 1/3$$

Para si recordamos las propiedades de la integral ordinaria, que establezcamos en términos de Δx , podemos escribir que:

$$F(1) = \int_0^1 (1^2 + y^2) dy = \int_0^{\Delta x} (1^2 + y^2) dy + \int_{\Delta x}^{2\Delta x} (1^2 + y^2) dy + \dots + \int_{(n-1)\Delta x}^{n\Delta x} (1^2 + y^2) dy \dots \dots (5.12 b)$$

Si adoptamos nuestra notación ya establecida, de ahora en adelante el símbolo Δx en la función en la abscisa (x_0) y Δy al valor expresado en la función en la misma abscisa, tendremos que, con la abscisa (1):

$$n = 10 \Delta x = 1 \Rightarrow \Delta x = 0.1$$

En consecuencia, por otra propiedad de la integral ordinaria:

y el área bajo esta curva con

$$\int_0^1 (1 + y^2) dy = 1.3333333333333333$$

En cambio, si cortamos con el plano $z = 0$, la curva es:

$$\begin{cases} z = 0 \\ x = 0 \end{cases}$$

y el área bajo ella:

$$\int_0^1 (1 + y^2) dy = 1.3333333333333333$$

$$m_i h = \int_{x_{i-1}}^{x_i} (x^2 + y^2) dy = M_i h$$

Análogamente, en la celda (22):

$$m_{i+1} h = \int_{x_i}^{x_{i+1}} (x^2 + y^2) dy = M_{i+1} h$$

y así sucesivamente

$$m_{i+2} h = \int_{x_{i+1}}^{x_{i+2}} (x^2 + y^2) dy = M_{i+2} h$$

Añadiendo miembro a miembro y teniendo en cuenta (5.22 b):

$$\sum_{i=1}^n m_i h = F(x) = \sum_{i=1}^n M_i h \dots (5.22 c)$$

La expresión (5.22 c) puede ser multiplicada por Δx , de modo que sea más fácil para entender y poder deducir el valor de Δx :

$$\sum_{i=1}^n m_i h^2 = F(x) h = \sum_{i=1}^n M_i h^2$$

Ahora escogemos un plano de corte Δx , de manera que $h = \Delta x$, en consecuencia análogamente por el caso anterior:

$$\sum_{i=1}^n m_i h^2 = F(x) h = \sum_{i=1}^n M_i h^2$$

y pasamos según así sucesivamente:

$$\sum_{i=1}^n m_i h^3 = F(x) h^2 = \sum_{i=1}^n M_i h^3$$

Y sumar miembro a miembro:

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n m_{ij} h^4 = \sum_{i=1}^n F(x) h^3 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n M_{ij} h^4$$

Expresión en la cual tenemos los teoremas de Riemann que ya habíamos visto. Escrito en el primer miembro tenemos lo que hemos llamado como anterior "A"; en el tercer miembro, lo que llamamos como anterior "B" y en el segundo miembro, una suma en una sola variable, como lo que establecimos en el caso anterior B.

¿Qué pasa si la sucesión de Δx tiende a cero ($h \rightarrow 0$)? Como la función es continua, sabemos que la integral doble existe y por lo mismo "A" y "B" serán iguales al mismo número, que es la integral doble, en cuanto al primer segundo miembro, que puede hacer "oscilar" cada uno de los sumandos, no tiene a quedar más cercano que converger hacia el mismo número; este

numero, si lo sabes bien, es la integral ordinaria de $f(x)$. Así, tenemos en consecuencia (5.22 a), podemos escribir:

$$\begin{aligned} \iint (x^2 + y^2) dx dy &= \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 (x^2 + \frac{10x}{2}) dx \\ &= \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 + \frac{10x^2}{4} \Big|_0^1 = \frac{1}{3} + \frac{10 \cdot 1}{4} = \frac{1}{3} + \frac{25}{2} = \frac{50}{6} + \frac{250}{6} = \frac{300}{6} + \frac{250}{6} = \frac{550}{6} \end{aligned}$$

$$\iint (x^2 + y^2) dx dy = \frac{550}{6} \text{ cm}^2$$

5.3.3: Otras Funciones Integrables

Podríamos intentar por satisfacer un saber que toda función continua es integrable, pero para satisfacer completamente la pregunta, ¿cuáles funciones son integrables? debemos entender si cada las funciones continuas lo son. Ya vimos en el ejemplo 5.11 un caso de función discontinua no integrable, pero en partes partes, recordamos de las definiciones I que algunas funciones discontinuas (escalones y en un número finito de puntos de discontinuidad) admiten integral ordinaria, ¿habrá algunas funciones discontinuas de dos variables, que admiten integral doble?

Para entender esta pregunta, debemos entender un concepto nuevo, pero muy en este momento, Podríamos explicar a un punto dentro de un rectángulo de 1 cm^2 de área? Desde luego que sí y desde luego que también podemos explicar los puntos en varias rectángulos cuyos áreas sumen 1 cm^2 , Podríamos explicar a un millón de puntos aleatorios, dentro de un número finito de rectángulos cuyos áreas sumaran 1 cm^2 también?

Por principio de cuentas, podemos concluir que el número de rectángulos es difícil de contar, porque el número número que necesitamos, depende de la separación de los puntos, será un millón y otro número, aunque es muy grande, es finito. Ahora vamos a ver cómo.

Si suponemos que todos los rectángulos son iguales, el área de uno es otro también que es

$$\frac{1 \text{ cm}^2}{10^6} = 10^{-6} \text{ cm}^2$$

Este rectángulo es muy pequeño; tanto que solo a través del micróscopio podría observarse; pero un punto está dentro de él, porque un

parte no están bien. En resumen: si podemos englobar a un número de puntos dados dentro de un número finito de rectángulos cuyos lados sumen un número tan pequeño como queramos.

Ahora con el conjunto de puntos de la región limitada por una curva continua de 1 cm de ancho. ¿Podríamos englobarlos en un número finito de rectángulos cuyos lados sumaran ϵ cm?



Un solo rectángulo no basta, porque tendría ϵ cm, debemos subdividir, a manera de minimizar el área no cubierta (Fig. 2.3.1), pero por mucho que las perimetras de los rectángulos se aproximan a la circunferencia, sus áreas no pueden sumar más de π cm².



Figura 2.3.1

De lo anterior deducimos que hay dos tipos de conjuntos de puntos: aquellos cuyos alrededores pueden englobarse en un número finito de rectángulos, cuyos lados sumen un número arbitrariamente pequeño y los que se definen por extensión. Formalizamos.

Definición 2.3.4

Se dice que un conjunto de puntos tiene contenido de Jordan nulo (o simplemente, que es un conjunto nulo) si existe $\epsilon > 0$, tal que los puntos del conjunto pueden ser englobados en un número finito de rectángulos cuyos lados sumen una cantidad menor que ϵ .

Se convencerá luego, mediante un que se es lo mismo un conjunto nulo que un conjunto vacío; hence los voy a confundir.

Ejemplo 2.3.1) Demostrar que el conjunto de puntos de un segmento rectilíneo de longitud ℓ , es nulo.

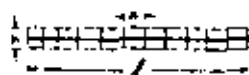


Figura 2.3.2

Se tome n cuadrados iguales como se ve en la figura 2.3.2. De esta manera los voy englobando todos los puntos de un segmento recto que:

$$n\ell^2 < \epsilon$$

para como

$$n = \frac{\epsilon}{\ell^2}, \quad n\ell^2 < \epsilon$$

$$\frac{\epsilon}{\ell^2} < \epsilon \Rightarrow n > \frac{\epsilon}{\ell^2}$$

como ℓ, ϵ son números fijos, n también será finito (o sea)

Ejemplo 2.3.2) Determinar el número y dimensión de los rectángulos necesarios para englobar los puntos de un segmento rectilíneo de 10 cm, si los áreas de los rectángulos no deben sumar más de 1 cm².

Solución:

Seagrupen los cuadrados iguales; entonces

$$n > \frac{\ell^2}{\epsilon} = \frac{(10\text{ cm})^2}{1\text{ cm}^2} = 10^2$$

tenemos que hacer más de 100 millones de bolitas en cuadrados, de dimensión

$$l = \frac{10\text{ cm}}{\sqrt{10^8}} = 10^{-4}\text{ cm} = 10^{-6}\text{ m}$$

El hecho de que cualquier triángulo que se trace por una multitudina de unidades de longitud.

Teorema 2.3.5

El conjunto de puntos de todo curva rectilínea, es nulo.

Demostración:

Es muy semejante a lo que acabamos de hacer, pero no podemos cubrir los rectángulos como en la recta, porque los cambios de dirección de la curva no permitirían que englobáramos a todos los puntos, lo que podemos hacer es hacerlos, como se ve en la figura 2.3.3, para garantizar que todo punto de la curva quede cubierto de cuando menos, en un rectángulo. El área sumada de todos los rectángulos (cuadrados, en realidad) es de

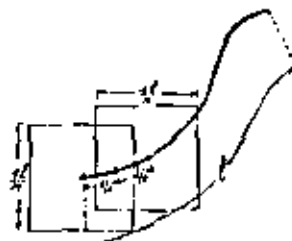


Figura 2.3.3

y esta cantidad deberá ser positiva para un punto perteneciente a cualquier δ .

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\delta}{2}\right)^2 \\ & \Rightarrow \frac{\delta^2}{4} - \epsilon \delta^2 > 0 \\ & \Rightarrow \delta > \frac{1}{2\epsilon} \end{aligned}$$

Como el segundo miembro es finito, δ también será finito (para ϵ).

Teorema 5.14

Si una función es acotada sobre una región y el conjunto de puntos en que es discontinua, tiene contenido nulo, la función es integrable sobre esa región.

La demostración de este teorema se puede ver en el Apéndice 5.2; pero nosotros a su vez le sugerimos un camino que surge de inmediato.

Carácter del Teorema 5.14

Si una función es acotada sobre una región R y el conjunto de sus puntos de discontinuidad se agrupan en un número finito de curvas rectas, la función es integrable sobre R .

Ahora veamos algunos ejemplos:

Ejemplo 5.2.1) Dado si la función definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} 2 & \text{si } x < y \\ 1 & \text{si } x > y \end{cases}$$

es integrable sobre la región $R = \{(x,y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$

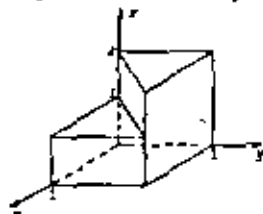


Fig. 5.3.10

Solución:

Esta función es discontinua sobre la región (su representación geométrica la puede observar en la Fig. 5.3.10); pero sus puntos de discontinuidad se agrupan en un segmento de la recta $x=y$, ya discontinua que está compuesta de puntos tiene contenido nulo. Luego

ya, la función es integrable

Ejemplo 5.2.2) Dado si la función

$$f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

es integrable sobre la región $R = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$

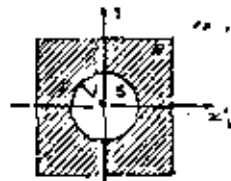


Fig. 5.3.11

Solución:

Ahora esta función es discontinua (en $x=y=0$) en toda la región.

Ya $R=0$

entonces $\int \int_R \sqrt{x^2 + y^2} \, dA = 0$ (en Fig. 5.3.11)

El conjunto de puntos de T no tiene contenido nulo, la función no es integrable sobre R (¿cómo formular la parte de Teorema con los datos que se dan dentro de T ?).

Este ejemplo, sin embargo, que la función

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } (x,y) \in T \\ \sqrt{x^2 + y^2} & \text{si } (x,y) \in R \end{cases}$$

es integrable en R , porque sus puntos de discontinuidad se agrupan en la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$ y ésta es una curva rectificada.

5.4) Ejercicios de la Sección 5.4

Vamos a considerar nuevamente el ejemplo 5.2.1 y calcularemos los límites superiores de la región, $\text{area} = \text{cm}^2$

Ahora supongamos que voláramos en modo los alturas y obtendríamos:

1) $2 \times 1 \text{ cm} \times 1 \text{ cm} = 2 \text{ cm}^2$

2) $1 \times 1 \text{ cm} \times 1 \text{ cm} = 1 \text{ cm}^2$

de

3) $1 \times 1 \text{ cm} \times 1 \text{ cm} = 1 \text{ cm}^2$

En suma, que la ley de correspondencia que nos habíamos dado anteriormente, parece correcta, siempre que consideremos las alturas en pulgadas, pero lo mismo, nuestras medidas son correctas; pero el volumen que nos da la fórmula que expresamos en unidades nos da como $\text{pulg.}^3 \cdot \text{cm}^2$

$$V = \iint_R (x^2 + y^2) \, dA = 2.5 \text{ pulg.}^3 \cdot \text{cm}^2$$

Naturalmente, estas unidades se nos permiten manejar convenientemente el resultado, por lo que demostramos que este puede expresarse en cm³; por lo que habremos expresado "x" en cm, por lo que la misma ley de curvas, por lo tanto será:

$$x = 0.02(1-y^2) = k f(x,y)$$

y ahora deberemos calcular:

$$V = \iint x \, dx \, dy = \iint 0.02(1-y^2) \, dx \, dy = \iint k f(x,y) \, dx \, dy$$

¿Deberemos realizar nuevamente ~~estas~~ mismas cálculos? No! pues ya en contemos un número $V = 0.002$, tal que:

$$\left| \sum_{j=1}^n f(x_j) \Delta A_j - V \right| < \epsilon \text{ cuando } \lambda < \delta$$

y ahora se nos está pidiendo un número tal que:

$$\left| \sum_{j=1}^n k f(x_j) \Delta A_j - V \right| < \epsilon \text{ cuando } \lambda < \delta$$

En esta última expresión, "k" puede salir fuera del signo de suma, por lo que la ley abstracta de la multiplicación:

$$\left| k \sum_{j=1}^n f(x_j) \Delta A_j - kV \right| < \epsilon \text{ cuando } \lambda < \delta$$

Más aún, por lo mismo razón, podemos pasar a "k" como factor común de toda la expresión dentro del signo de valor absoluto:

$$\left| k \left[\sum_{j=1}^n f(x_j) \Delta A_j - V \right] \right| < \epsilon \text{ cuando } \lambda < \delta$$

y además, podemos sacar el signo de valor absoluto:

$$\left| k \right| \left| \sum_{j=1}^n f(x_j) \Delta A_j - V \right| < \epsilon \text{ cuando } \lambda < \delta$$

y al dividir toda esta expresión entre $|k| > 0$:

$$\left| \sum_{j=1}^n f(x_j) \Delta A_j - \frac{V}{k} \right| < \frac{\epsilon}{|k|} \text{ cuando } \lambda < \delta$$

Toda vez que $\frac{\epsilon}{|k|} > 0$, la expresión anterior nos está diciendo que

$$\left| \iint f(x,y) \, dx \, dy - \frac{V}{k} \right| < \epsilon$$

(*) En este caso particular, $k = 0.02 > 0$, por lo que podríamos prescindir del signo de valor absoluto. Lo conservamos para no perder generalidad.

O sea que:

$$V = kV = 0.02 \cdot 0.002 = 0.00004 \text{ cm}^3$$

Aquí pues, no hubo necesidad de volver a integrar, como que basta con aplicar el resultado de la integración ya hecha, por el factor constante en todo el integrando no hemos perdido generalidad, por lo que podemos usar con la siguiente propiedad para todos los integrales dobles:

$$\iint k f(x,y) \, dx \, dy = k \iint f(x,y) \, dx \, dy \dots \dots \dots$$

Nos han encargado de construir una bandeja de camping para que sirva de dormitorio a un campamento de excursionistas. Diseñamos una como la mostrada en la figura 5-1, con base cuadrada. Queremos la z del techo $z = f(x,y)$, por lo que calculamos el volumen de esta estructura:

$$V = \iint f(x,y) \, dx \, dy$$

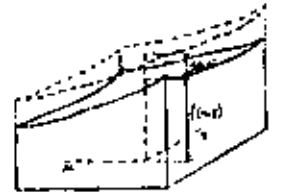


Figura 5-1

Sabemos que el área cuadrada de que se muestra con el presente número de excursionistas, hay peligro de que se viere el agua.

Como de momento no disponemos de más datos, decidimos construir la altura de las paredes que van a rodear a la base superior, según una ley: $\Delta z = g(x,y)$, quedando la bandeja como se muestra con líneas discontinuas en la figura 5-1. Ahora el aire contenido es a saber:

$$V_0 = \iint [f(x,y) + g(x,y)] \, dx \, dy \dots \dots \dots (5.0.0.2)$$

¿Nos serviría el primer resultado obtenido, como base para el nuevo volumen?

Inicialmente encontramos un número V_0 tal que $\left| \sum_{j=1}^n f(x_j) \Delta A_j - V_0 \right| < \epsilon$, cuando $\lambda < \delta, \dots (5.0.0.3)$

Definamos V_0 como

$$V_0 = \iint g(x,y) \, dx \, dy \dots \dots \dots (5.0.0.4)$$

o, lo que es lo mismo:

$$|\sum_{j=1}^n g(\eta_j) \Delta A_j - V_0| = \epsilon_0 \text{ cuando } \lambda = \delta_1, \dots, \delta_{n+2}$$

Si definimos $\delta = \delta_1, \delta_2, \dots, \delta_{n+2}$ y (λ, μ, ν) es cualquier punto de R , entonces y por lo tanto:

$$|\sum_{j=1}^n f(\eta_j) \Delta A_j - V| = |\sum_{j=1}^n g(\eta_j) \Delta A_j - V_0| + \epsilon_1 + \epsilon_2 \text{ cuando } \lambda = \delta$$

Puesto que el valor absoluto de una suma nunca es mayor que la suma de los valores absolutos, inferimos la última desigualdad es verdadera.

$$|\sum_{j=1}^n f(\eta_j) \Delta A_j - V| + \sum_{j=1}^n g(\eta_j) \Delta A_j - V_0| = \epsilon_1 + \epsilon_2 \text{ cuando } \lambda = \delta$$

Por la ley asociativa de la suma:

$$|\sum_{j=1}^n [f(\eta_j) + g(\eta_j)] \Delta A_j - (V + V_0)| = \epsilon_1 + \epsilon_2 \text{ cuando } \lambda = \delta$$

Puesto que $\epsilon_1 + \epsilon_2 > 0$, la última expresión nos indica que

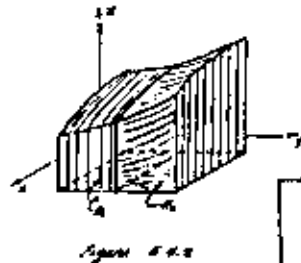
$$\iint_R [f(x,y) + g(x,y)] dx dy = V + V_0$$

o bien, de acuerdo con (5.4.2):

$$\iint_R f(x,y) dx dy + \iint_R g(x,y) dx dy = V + V_0$$

Por lo que basta con calcular la integral (5.4.2) y sumar el resultado ya conocido, para obtener el resultado que se desea saber de aquí a la propiedad general de la integral doble, que expresamos así:

$$\iint_R [f(x,y) + g(x,y)] dx dy = \iint_R f(x,y) dx dy + \iint_R g(x,y) dx dy \dots (5.4.3)$$

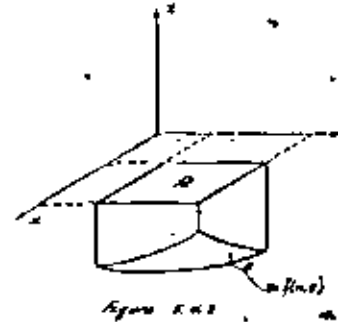


Una propiedad muy importante de la integral doble es la que se ilustra en la figura 5.4.2 y que es evidente cuando se ve en su interpretación geométrica:

$$\iint_R f(x,y) dx dy = \iint_{R_1} f(x,y) dx dy + \iint_{R_2} f(x,y) dx dy \dots (5.4.4)$$

$R = R_1 \cup R_2; R_1 \cap R_2 = \emptyset$

Independientemente de su interpretación geométrica, sobre el punto de vista de la Matemática pura, esta propiedad requiere demostración la cual se da en el Apéndice A.2.



Se ilustra convenientemente si consideramos puntos en un cubo, en la superficie $z = f(x,y)$ ($x, y \in R$) insertamos todos los puntos por abajo de los de la región en el plano xy , la integral debe salir negativa.

Si, además, suponemos que salimos por arriba; en el caso anterior una vez de δ en δ que

$$|\sum_{j=1}^n f(\eta_j) \Delta A_j - V| = V \text{ cuando } \lambda = \delta$$

o, lo que es lo mismo:

$$-V = \sum_{j=1}^n f(\eta_j) \Delta A_j - V = V \text{ cuando } \lambda = \delta$$

Si trabajamos con la primera parte de la desigualdad:

$$0 = \sum_{j=1}^n f(\eta_j) \Delta A_j \text{ cuando } \lambda = \delta$$

Cada última expresión es un absurdo para una suma de términos negativos no puede ser positiva bajo circunstancias alguna. Y hemos demostrado una propiedad general más de la integral doble:

si $f(x,y) \leq 0$ en R :

$$\iint_R f(x,y) dx dy \leq 0 \dots (5.4.5)$$

De lo cual obtenemos naturalmente la propiedad inversa:

Si $f(x,y) \geq 0$ en R :

$$\iint_R f(x,y) dx dy \geq 0 \dots (5.4.6)$$

Y un corolario muy importante:

Si $f(x,y)$ y $g(x,y)$ son en R :

$$\iint_R f(x,y) dx dy \pm \iint_R g(x,y) dx dy \dots \dots \dots (5-0-11)$$

Así pues, adoptamos tener métodos cuando tenemos un área como el mostrado en la figura 5-10 en una superficie y hacemos como un todo, adoptamos integrar por separado en R_1 y R_2 y luego sumar valores absolutos; pero si nos interesa la diferencia de volúmenes, con su signo, en tales integraciones sobre $R = R_1 \cup R_2$.

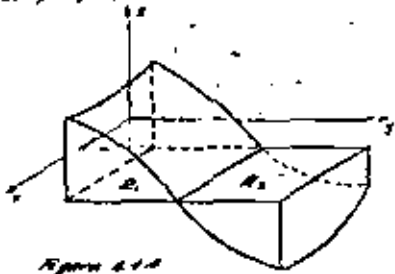


Figura 5-10

Solo si el área está en un plano, por ejemplo, adoptamos como R_1 para volúmenes sobre R . Si la integral es función, la exactitud es insuficiente para el cálculo y lo que nos falta adoptamos hacer el otro todo (positivo). Si la integral es regular, entonces hay problemas en la exactitud y del cálculo ser necesario para que no se dé (error).

Como propiedad importante, adoptamos que las variables de integración son reales; así es que no importa como llamamos a tales variables, siempre y cuando la región se define congruentemente. Así es:

$$R\{(x,y)/a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\} = R\{(u,v)/a \leq u \leq b, c \leq v \leq d\}$$

$$\iint_R f(x,y) dx dy = \iint_R f(u,v) du dv \dots \dots \dots (5-0-12)$$

Finalmente, adoptamos una propiedad no muy utilizada

$$\iint_R |f(x,y)| dx dy \geq \left| \iint_R f(x,y) dx dy \right| \dots \dots \dots (5-0-13)$$

5-0) La Integral Doble como Integral Riemann

5-0-1) La Integral Riemann

En (5-0-2) adoptamos un método para integrar una función particular sobre una región, en términos de integrales ordinarias. Tratamos ahora de generalizar el método para toda región integrable sobre una región rectangular.

Partamos pues de una función escalar $f(x,y)$, integrable sobre la región $R\{(x,y)/a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$, sobre la cual establecimos una red rectangular de puntos T . (Ver figura 5-11)



Figura 5-11

Un razonamiento análogo al que hicimos en la ocasión mencionada, nos permite definir

$$f(A) = \sum_{i,j} f(x_i, y_j) \Delta x \Delta y \dots \dots \dots (5-0-14)$$

Podemos estar seguros de la existencia de este integral, porque sabemos que $f(x,y)$ es integrable sobre R ; lo cual implica que, sobre un número sobre toda la región, o un punto de discontinuidad con un punto y función, o se agrupan en un área rectangular tal que Δx o Δy o Δz o en cualquier, o los puntos de discontinuidad son aislados y finitos.

Además, debe notarse:

$$f(A) = \sum_{i,j} f(x_i, y_j) \Delta x \Delta y \dots \dots \dots (5-0-15)$$

que podemos escribir:

$$f(A) = \sum_{i,j} f(x_i, y_j) \Delta x \Delta y + \dots + \sum_{i,j} f(x_i, y_j) \Delta x \Delta y$$

Sabemos que desde de la cota (5-1) hay un supremo M_1 y un ínfimo, m_1 , de los cuales podemos afirmar que

$$m_1 \leq f(x,y) \leq M_1 \text{ en el intervalo } [a, b]$$

Además, una propiedad de la integral ordinaria permite escribir

$$m_1 \Delta x \leq \sum_{i,j} f(x_i, y_j) \Delta x \Delta y \leq M_1 \Delta x$$

y razonamientos análogos nos permiten decir que:

$$m_1 \Delta x_1 = \int_a^{x_1} f(x,y) dx = M_1 \Delta x_1$$

$$m_2 \Delta x_2 = \int_{x_1}^{x_2} f(x,y) dx = M_2 \Delta x_2$$

$$\dots$$

$$m_n \Delta x_n = \int_{x_{n-1}}^b f(x,y) dx = M_n \Delta x_n$$

$$\sum_{j=1}^n m_j \Delta x_j = \int_a^b f(x,y) dx = \sum_{j=1}^n M_j \Delta x_j$$

o bien, de acuerdo con (5.2.12):

$$\sum_{j=1}^n m_j \Delta x_j = f(\xi) = \sum_{j=1}^n M_j \Delta x_j$$

Podemos multiplicar toda esta desigualdad por Δy_i como una cantidad es constante con y , para obtener y usar el teorema del signo de suma; así:

$$\sum_{j=1}^n m_j \Delta x_j \Delta y_i = f(\xi) \Delta y_i = \sum_{j=1}^n M_j \Delta x_j \Delta y_i$$

Al sumar ahora x, y y seleccionar los razonamientos anteriores:

$$\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n m_{ji} \Delta x_j \Delta y_i = f(\xi) \Delta x \Delta y = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n M_{ji} \Delta x_j \Delta y_i$$

Y así sucesivamente

$$\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n m_{ji} \Delta x_j \Delta y_i = f(\xi) \Delta x \Delta y = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n M_{ji} \Delta x_j \Delta y_i$$

Sea ϵ que nos encontremos con ϵ como sea pequeño o lo que sea pequeño en el caso (5.2.2): a la expresión de suma de infinitos, o la obtiene la suma de infinitos, ambas convergiendo hacia la integral doble, por lo que la función es integrable en media, una expresión que formalmente convergen a donde convergen los términos; pero que a se no convergen hacia

como recordará de notaciones Σ entonces podemos escribir:

$$\iint f(x,y) dx dy = \int_a^b f(x) dx \dots \dots \dots (5.2.13)$$

y al sustituir (5.2.12) en (5.2.13):

$$\boxed{\iint f(x,y) dx dy = \int_a^b \left\{ \int_a^b f(x,y) dx \right\} dy \dots \dots \dots (5.2.14)}$$

Esta expresión nos permite escribir la integral doble en función de integrales ordinarias al respecto escribiremos de (5.2.14) es la forma "Integral Escalada". Los corchetes (llaves) indican el orden en que deben realizarse las integraciones; es recordando que siempre debe empezarse con la integral de "dentro"; pueden escribirse simplemente

$$\iint f(x,y) dx dy = \int_a^b \left\{ \int_a^b f(x,y) dy \right\} dx \dots \dots \dots (5.2.15)$$

sin embargo, si hubiésemos invertido el orden de los razonamientos que nos llevaron a la última expresión, hubiésemos empezado por obtener:

$$f(\xi) = \int_a^b f(x,y) dx$$

y finalmente la ecuación de punto a

$$\iint f(x,y) dx dy = \int_a^b \left\{ \int_a^b f(x,y) dx \right\} dy = \int_a^b \left\{ \int_a^b f(x,y) dy \right\} dx \dots \dots \dots (5.2.16)$$

por lo que el orden en que se efectúa la integral reducida es irrelevante cuando se trata de regiones rectangulares.

Cabe hacer hincapié en que la existencia de la integral doble garantiza la existencia de la integral reducida. Lo contrario no es necesariamente cierto.

5.2.3. Las regiones curvas

Proponemos el siguiente problema: sea la región

$$R = \{(x,y) / 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x\}$$

obtener mediante integral la función

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2 y^2 & \text{si } (x,y) \in R \\ 0 & \text{si } (x,y) \notin R \end{cases}$$

Lo primero que debemos decir es que la función propuesta es discontinua en la región; en efecto nos damos cuenta de que con pocas de discontinuidad se repiten en la recta $x=y=0$; dentro de la región que nos interesa, cada un segmento de esta recta, perfectamente se obtiene hasta entre los puntos $(0,0)$ y $(1,1)$, de longitud finita, por lo que el conjunto de puntos de discontinuidad tiene contenido nulo. Formalmente con-

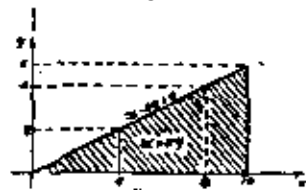


Fig. 5.2.2

decimos que $f(x,y)$ es integrable sobre D

Tentemos de evaluar este integral, por el método que acabamos de ver

$$\iint_D f(x,y) dx dy = \int_a^b \left\{ \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y) dy \right\} dx$$

Calculamos primero la integral de "dentro"; al intentar, nos damos cuenta de que siempre va a presentar un punto de discontinuidad, más o menos, que la ubicación de este punto es función de "x". Por ejemplo, podría ser la integral para $x=0$:

$$\int_0^1 f(x,y) dy = \int_0^2 (10-y^2) dy + \int_2^5 0 dy$$

y si lo planteamos para $x=1$:

$$\int_0^1 f(x,y) dy = \int_0^1 (10-y^2) dy + \int_1^5 0 dy$$

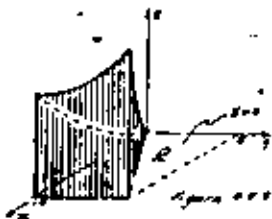
Ahora tenemos integrales con límites variables; los de la derecha no son problema, porque siempre van a ser ceros; pero los precedentes siempre van a tener un valor que dependa de "x", por lo que debemos expresarlos en términos de la variable. Lo hacemos así: en expresarlos, no sólo el integrando, sino también los límites, como funciones de "x".

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(x,y) dy &= \int_0^{2-x} (x^2+y^2) dy + \int_{2-x}^5 0 dy \\ &= \left[xy + \frac{y^3}{3} \right]_0^{2-x} + 0 = \frac{x^3}{3} + \frac{(2-x)^3}{3} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Lo que sigue es no afear el resultado por obtener el resultado final, integrando esta expresión sobre límites constantes

$$\iint_D f(x,y) dx dy = \int_0^1 \frac{1}{3} dx = \frac{1}{3} [x]_0^1 = \frac{1}{3} [1-0] = \frac{1}{3}$$

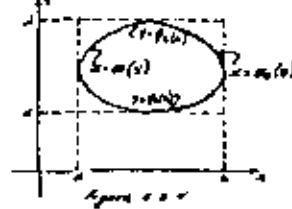
Vamos a resolver el problema que nos proponíamos, en base a una interpretación geométrica del mismo, representemos la función como se ve en la figura 5.3.3 y entonces se nos ocurre decir que hemos calculado el volumen de la parte sombreada, como los volúmenes se calculan por integral doble, se nos ocurre decir, además, que hemos calculado la integral doble de



de la parte sombreada, como los volúmenes se calculan por integral doble, se nos ocurre decir, además, que hemos calculado la integral doble de

sobre la región $R = \{(x,y) / a \leq x \leq b; c_1(x) \leq y \leq c_2(x)\} \dots \dots \dots (5.3.4)$

Y es obvio, así lo vamos a considerar, pero como no tenemos un resultado numéricamente seguro, sólo intuitivo, aborramos definir:



Definición 5.3.1

Sea la función $f(x,y)$ y sea la región $R = \{(x,y) / a \leq x \leq b; c_1(x) \leq y \leq c_2(x)\} \dots \dots \dots (5.3.4)$

se dice que f es integrable sobre R

si existe $\iint_R f(x,y) dx dy$

y el resultado de esa expresión integral, se le llama

$$\iint_D f(x,y) dx dy$$

Definición 5.3.2

Sea la función $f(x,y)$ y sea la región $R = \{(x,y) / a \leq x \leq b; c_1(x) \leq y \leq c_2(x)\} \dots \dots \dots (5.3.4)$

se dice que f es integrable sobre R si existe

$$\int_a^b \left\{ \int_{c_1(x)}^{c_2(x)} f(x,y) dy \right\} dx$$

y el resultado de esa expresión integral se le llama

$$\int_a^b \int_{c_1(x)}^{c_2(x)} f(x,y) dy dx$$

$$\text{es: } \iint_D f(x,y) dx dy = \int_a^b \left\{ \int_{c_1(x)}^{c_2(x)} f(x,y) dy \right\} dx = \int_a^b \left\{ \int_{c_1(x)}^{c_2(x)} f(x,y) dx \right\} dy \dots \dots \dots (5.3.5)$$

entonces

$$\iint_D f(x,y) dx dy = \int_a^b \left\{ \int_{c_1(x)}^{c_2(x)} f(x,y) dy \right\} dx = \int_a^b \left\{ \int_{c_1(x)}^{c_2(x)} f(x,y) dx \right\} dy \dots \dots \dots (5.3.5)$$

¿cómo estableceríamos la integral doble?

5.2) Regiones

Como, hemos establecido satisfactoriamente a la pregunta sobre cómo evaluar la integral doble, pero hemos dejado pendiente la pregunta sobre cómo establecer una región.

Ya te habrás dado cuenta de que esta pregunta simplemente a la ya resuelta, sobre todo a la hora de la siguiente manera: ¿cómo estableceríamos una región para que pudiéramos evaluar una integral doble sobre ella? Supón si te fijas, la expresión $(a \leq x \leq b)$ establece perfectamente la región sombreada de la figura 5.2.2, porque todo punto de la región pertenece a la expresión de referencia y todo los puntos de esa región pertenecen a ella, pero una expresión de ese tipo sirve directamente para evaluar la integral doble, porque de ella NO se obtienen directamente los límites.

En cambio la expresión $(a \leq x \leq b)$ si proporciona directamente los límites de integración, por lo que procuraremos igualmente a esa forma cada vez que podamos establecer una región en un plano.

Veamos ahora el siguiente problema, en el cual también nos va a interesar describir adecuadamente a D , la cual está limitada por $y = x^2$, $y = 0$, $x = 2$ y se representa en la figura 5.2.1.

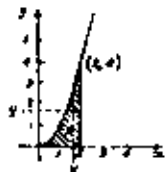


Figura 5.2.1

Si observamos la región, podemos notar que para los puntos (x, y) de D , los valores de "x" varían de $0 \leq x \leq 2$, o sea: $0 \leq x \leq 2$.

Ahora nosotros fijamos a "x" y consideramos sólo la variación de "y"; podemos notar que para cualquier "x", la "y" varía de $0 \leq y \leq x^2$, o sea de $0 \leq y \leq x^2$, lo cual podemos escribir como $0 \leq y \leq x^2$ y entonces

$$R\{(x, y) / 0 \leq x \leq 2; 0 \leq y \leq x^2\}$$

Podemos observar las siguientes propiedades, será ésta la única forma de poder definir los límites de integración? Si escribimos de manera constante a "x", no podríamos hablar de puntos en "y".

Veamos: procediendo ahora en forma inversa, notamos que los "y" varían entre $0 \leq y \leq 4$, o sea $0 \leq y \leq 4$.

Ahora, para una "y" cualquiera, la correspondiente variación de "x" es "a" de la curva a la recta $x = 2$, o sea $x^2 \leq x \leq 2$ y entonces

$$R\{(x, y) / 0 \leq y \leq 4; x^2 \leq x \leq 2\}$$

y podemos notar que hay otra expresión para definir la misma región, igualmente útil para fines de integral doble. Una la obtuvimos cuando mantenimos los límites de "x" constantes y variables los de "y". La otra la obtenimos en forma inversa. A la primera forma se le llama "región en x" (R_x) y a la segunda, "región en y" (R_y).

Si quisieramos integrar una función $f(x, y)$ en D , escribiéramos:

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_0^2 \int_0^{x^2} f(x, y) dy dx = \int_0^4 \int_{x^2}^2 f(x, y) dx dy$$

De lo anterior, podemos observar fácilmente que hay dos formas de expresar algebraicamente una región plana en coordenadas cartesianas para fines de integral doble:

$$R_x\{(x, y) / a \leq x \leq b; f(x) \leq y \leq g(x)\}$$

llamada "región en x", ó

$$R_y\{(x, y) / c \leq y \leq d; g(y) \leq x \leq h(y)\}$$

llamada "región en y".

Las funciones $f(x)$, $g(x)$ son funciones continuas en el intervalo $[a, b]$, las funciones $g(y)$, $h(y)$ son continuas en el intervalo $[c, d]$. Además, debe cumplirse que $f(x) \leq g(x)$ en $[a, b]$ y que $g(y) \leq h(y)$ en $[c, d]$.

La representación gráfica de la región "D" se muestra en la figura 5.2.1 y la de R_x , en la figura 5.2.2.

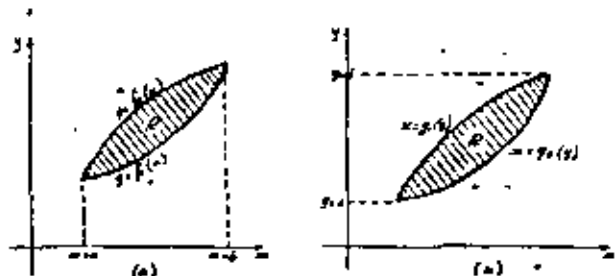


Figura 5.0.1

Resolvamos ahora el siguiente problema, considerando R es la región limitada por $y=2x-1$, $y=7-2x$, $y=0$, $x=5$. La representación gráfica es muestra en la figura 5.0.2

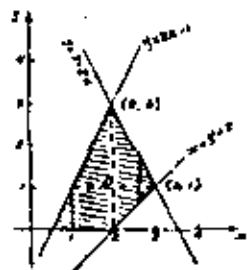


Figura 5.0.2

Puede, que una de las funciones es $y=0$, entonces la región no debería extenderse hacia la parte negativa del eje y . Podemos observar que para distintos valores que cumple $x=5$ varían en forma arbitraria, por ejemplo, si $x=1$, y varía entre 0 y $2x-1$; si $x=4$, y varía entre $2x-1$ y $y=7-2x$. Hemos entonces que no será posible expresar nuestra región con una sola expresión, sino como varias subregiones, que serán las que se muestran en la figura 5.0.3

una sola expresión, sino como varias subregiones, que serán las que se muestran en la figura 5.0.3

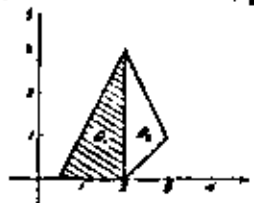


Fig 5.0.3

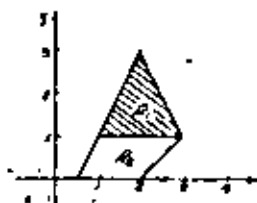


Fig 5.0.4

$$R_1 = \{(x,y) / 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2x-1\}$$

$$R_2 = \{(x,y) / 1 \leq x \leq 4, 2x-1 \leq y \leq 7-2x\}$$

Se dice al último conjunto las expresiones de R , tomando como base la figura 5.0.4.

En este problema, nuestra región de descomponer en dos subregiones y una región que está formada por un conjunto finito de curvas cerradas, no tiene curvas rectas, y una región acotada es aquella finita y cerrada, donde se cumple que cualquier línea paralela a los ejes coordenados intercepta a la frontera en dos puntos consecutivamente. (Figs 5.0.5 a y b)

Se entenderá que permite hacer la construcción de que no es posible describir la forma en que debe presentarse en todos los casos. Más aún: el subconjunto estáticamente de una región requiere de una habilidad que los de cualquier geometría, para que presenten un problema necesariamente de la geometría analítica.

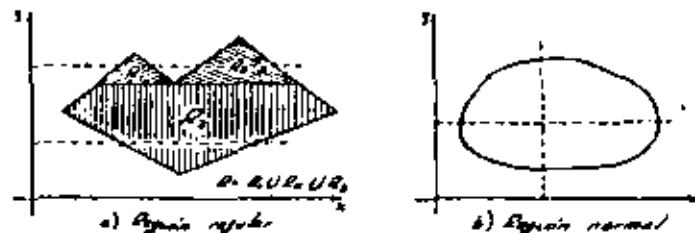


Figura 5.0.5

5.7. Interpretación Geométrica y Representación de la Integral Doble en Regiones Rectangulares

5.7.1. Interpretación Geométrica

Seamos z una función de variables bajo una superficie y sobre una región rectangular, mediante la integral doble. En el caso (5.8.2) vamos a dar un primer paso para esta interpretación a regiones no rectangulares.

En general, puede decirse que si se tiene una región R cualquier y en ella está definida una función $z=f(x,y)$, que puede ser representada por una superficie (Fig 5.7.1), el volumen comprendido entre esa superficie, el plano xy y el cilindro cuya directriz es la frontera de la región y cuya generatriz es paralela al eje z , está dado por:

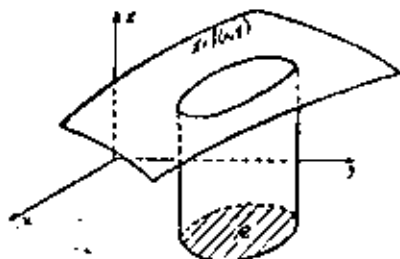


Figura 5.21

$$V = \iint_R f(x, y) \, dxdy \dots (5.2.1)$$

Considera ahora un cilindro como el mostrado en la figura 5.22. Su superficie es la frontera de una región cualquiera, sus generatrices son paralelas al eje z y están limitadas superiormente por el plano z = h.

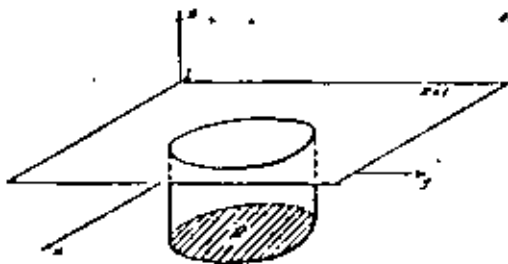


Figura 5.22

De acuerdo con (5.2.1), el volumen de este cilindro es

$$V = \iint_R h \, dxdy$$

Para resolver problemas que el volumen de un cilindro como lo

te, se puede escribir como

$$V = h_0 \cdot h$$

donde h_0 es el área de la región, vale es, el área de la base del cilindro y h es la altura, constante e igual a h_0 en este caso

entonces

$$V = \iint_R 1 \, dxdy = h_0 \cdot h$$

por lo que

$$h_0 = \iint_R 1 \, dxdy \dots (5.2.2)$$

de aquí que en ocasiones se acostumbra escribir

$$dxdy = dA \dots (5.2.3)$$

Ejemplo 5.21.- Calcular el volumen del cuerpo de la figura 5.23.

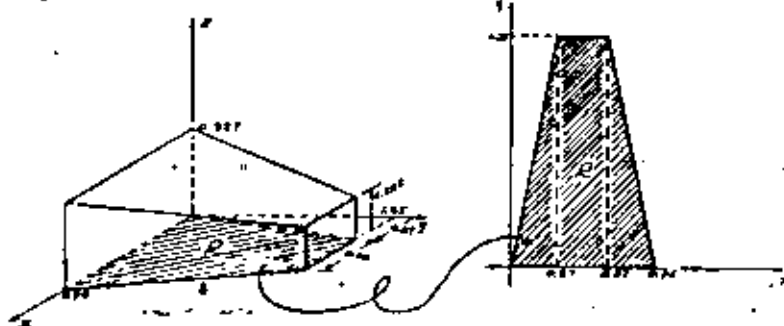


Figura 5.23

Solución:

Desde luego nos damos cuenta de que éste es un problema que se puede resolver por integral doble, ya que se trata de un volumen determinado por una superficie, el plano xy y cuatro líneas rectas.

Debemos primero encontrar la ecuación del plano que limita al sólido por la parte superior, es un plano perpendicular al eje z, entonces:

$$z = 0.25z = \frac{0.25z}{1.25z}$$

$$z = 0.25y + 0.25z$$

Ahora debemos establecer la región, de manera que sea sencilla para una integral doble. Al observar la figura 5.23, nos damos cuenta de que, si definimos en x , vale es, en x como $x = -1$ y $x = 1$, y en y , vale es, en y como $y = 0$ y $y = 1$, vamos a tener que considerar tres subregiones, separadas por las rectas $y = 0$ y $y = 1$, si escribimos la región con rectas paralelas al eje x , vale también que consideramos en y de la recta $y = 0$, a la recta $y = 0.25 - x$. Así, nos es más ventajoso definir la región en y

$$R = \{(x, y) / 0 \leq y \leq 1 - x \text{ y } -1 \leq x \leq 1\}$$

Ahora:

$$V = \iint_R z \, dxdy = \int_{-1}^1 \int_0^{1-x} (0.25y + 0.25z) \, dy \, dx$$

$$\int_{-1}^1 (0.25y + 0.25z) \, dy = 0.25y \left[\frac{y^2}{2} \right]_0^{1-x} + 0.25z \left[y \right]_0^{1-x}$$

$$V = \int_{-1}^{1} (0.005 + 0.001x^2) dx = 0.005x + \frac{0.001}{3}x^3 \Big|_{-1}^1 = 0.01 + \frac{0.001}{3}(1 - (-1)) = 0.01 + \frac{0.002}{3} = 0.010667 \text{ m}^3$$

Ejemplo 2.12) Calcular el área comprendida de la figura 2.12

Se debe primer problema cuando ahora se define la región de manera que la podemos usar en integral doble.

La figura 2.12. en esta se ve un círculo (una abstracción) que se define en $x^2 + y^2 = 1$, donde x define dx , pero si definimos sobre y dy , que define dy , entonces $dx = \sqrt{1-y^2}$ y $dy = \sqrt{1-x^2}$.

$$A = \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} dx dy = \int_{-1}^1 2\sqrt{1-y^2} dy$$

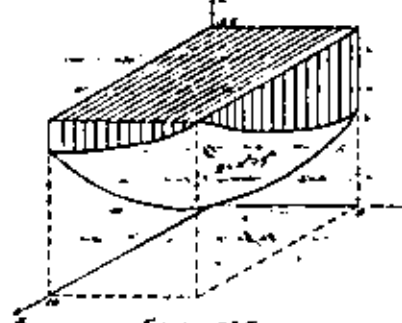
Con esta forma $A = \int_{-1}^1 2\sqrt{1-y^2} dy = \frac{2}{3} [y\sqrt{1-y^2} + \arcsin y]_{-1}^1 = \frac{2}{3} (\sqrt{0} + \frac{\pi}{2} - (-\sqrt{0} - \frac{\pi}{2})) = \frac{2}{3} (\pi) = \frac{2\pi}{3}$

Con esta forma $A = \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} dx dy = \int_{-1}^1 2\sqrt{1-y^2} dy$

Con esta forma $A = \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} dx dy = \int_{-1}^1 2\sqrt{1-y^2} dy$

(2) Este volumen es aproximadamente el volumen de agua en la cámara de transmisión de un satélite Bushell, cuando el nivel es de medio

Ejemplo 2.13) Calcular el volumen comprendido entre la superficie $z = x^2 + y^2$ y las planas $x=0, y=0, z=100, z=0$ (Figura 2.13)



Se debe primer problema cuando ahora se define la región de manera que la podemos usar en integral doble.

El volumen pedido no se puede calcular directamente por integral doble, porque está sobre y no bajo la superficie, pero lo podemos calcular como la diferencia del volumen del prisma limitado por las planas $x=0, x=100, y=0, y=100$ y el volumen

bajo la superficie y sobre la región $R = \{(x,y) | 0 \leq x \leq 100, 0 \leq y \leq 100\}$

El primer volumen es $V_1 = 100 \times 100 \times 100 = 1,000,000 \text{ cm}^3$

El segundo volumen V_2 se puede calcular por integral doble, de hecho es el problema (2.12) que se resuelve en el inciso (2.12), con un $\frac{2\pi}{3}$ en la altura de 100 .

Así que $V_2 = 100 \times \frac{2\pi}{3} = \frac{200\pi}{3} \text{ cm}^3$

Así que el volumen pedido es $V = V_1 - V_2 = 1,000,000 - \frac{200\pi}{3} \text{ cm}^3$

El concepto de volumen bajo la superficie, se puede aplicar a los otros dos planos coordenados, así, el volumen pedido en el ejemplo (2.13) lo podemos considerar como el volumen comprendido entre el plano $x=0$, la superficie $z = x^2 + y^2$ y el plano $y=0$ y limitado por el cilindro $x=100$ y los planos $z=0$ y $z=100$. En tal caso, diremos que

$$V = \int_0^{100} \int_0^{100} (100 - (x^2 + y^2)) dx dy$$

Ejemplo 2.14) Calcular el volumen pedido en el ejemplo (2.13), utilizando la ecuación (2.14).



Figura 5.2.4

Solución:

Al observar la Figura 5.2.4, nos damos cuenta de que, al trazar rectas paralelas al eje y , por cualquier punto de S_1 intersectamos a la superficie $z = \sqrt{10-x^2}$, si trazamos una recta paralela al eje y por cualquier punto de S_2 (Fig. 5.2.4), intersectamos a la superficie $y = 5$.

Entonces

$$V = V_1 + V_2$$

$$V = \int_0^{10} y \, dy \, dx + \int_0^{10} \sqrt{10-x^2} \, dx \, dy$$

$$V = \int_0^{10} y \, dy \, dx + \int_0^{10} 5 \, dx \, dy$$

Ahora definamos las regiones S_1 y S_2 :

$$S_1 = \{(x, y) / 0 \leq x \leq 10; x^2 \leq y \leq 100\}$$

$$S_2 = \{(x, y) / 0 \leq x \leq 10; x^2 \leq y \leq 5x\}$$

Así:

$$V = \int_0^{10} \left[\int_{x^2}^{100} y \, dy \right] dx$$

$$\int_0^{10} \sqrt{10-x^2} \, dx = \frac{1}{2} \left[(x-\sqrt{10-x^2}) \right]_0^{10} = \frac{1}{2} (10\sqrt{10}-10) = \frac{5}{2} \sqrt{10}$$

$$V_2 = \int_0^{10} \frac{1}{2} 10x \, dx = \frac{2500}{2}$$

Ahora

$$V_1 = \int_0^{10} \left[\int_{x^2}^{5x} y \, dy \right] dx = 5 \int_0^{10} (10-x^2) \, dx = 5000 - 1000 = 4000$$

$$V = \frac{10000}{2}$$

Entonces

$$V = \frac{10000}{2} + \frac{10000}{2} = \frac{10000 \sqrt{10}}{2}$$

Resultará que coincide con el obtenido anteriormente como ejercicio, usando este mismo volumen, ahora usaremos la ecuación:

$$V = \iint_T z \, dy \, dx \quad \dots \dots \dots (5.2.5)$$

donde T es la región sobre el plano xy .

Note, en cambio, que el cálculo de áreas por integral doble no está sujeto a que éstas estén comprendidas entre una curva y un eje ni limitadas por rectas paralelas a un eje (conclusiones que si tenemos si queremos calcularlas por integral ordinaria). De aquí que calcular áreas por integral doble resulte ser un método general.

5.18) Propiedades

Antes de demostrar las propiedades de la integral doble cuando sólo se halla definida sobre una región rectangular, las mismas propiedades funcionan para regiones arbitrarias:

$$\iint_R f(x, y) \, dx \, dy = \pm \iint_{R_1} f(x, y) \, dx \, dy \quad \dots \dots \dots (5.2.1)$$

$$\iint_R [f(x, y) \pm g(x, y)] \, dx \, dy = \iint_R f(x, y) \, dx \, dy \pm \iint_R g(x, y) \, dx \, dy \quad \dots \dots \dots (5.2.2)$$

$$\iint_R f(x, y) \, dx \, dy = \iint_{R_1} f(x, y) \, dx \, dy + \iint_{R_2} f(x, y) \, dx \, dy \quad \dots \dots \dots (5.2.3)$$

donde $R = R_1 \cup R_2$; $R_1 \cap R_2$ es un conjunto nulo

Si $f(x, y) \geq 0$ en R :

$$\iint_R f(x, y) \, dx \, dy \geq 0 \quad \dots \dots \dots (5.2.4)$$

$$\iint_R f(x, y) \, dx \, dy = \iint_{R_1} f(x, y) \, dx \, dy \quad \dots \dots \dots (5.2.5)$$

$$\iint_R |f(x, y)| \, dx \, dy \geq \left| \iint_R f(x, y) \, dx \, dy \right| \quad \dots \dots \dots (5.2.6)$$

Además, se tienen las conclusiones de la propiedad (5.2.4):

si $f(x, y) \geq 0$ en R :

$$\iint_R f(x, y) \, dx \, dy \geq 0 \quad \dots \dots \dots (5.2.7)$$

si $f(x, y) \geq g(x, y)$ en R :

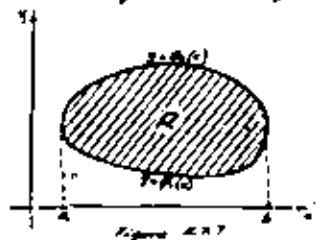
$$\iint_R f(x, y) \, dx \, dy \geq \iint_R g(x, y) \, dx \, dy \quad \dots \dots \dots (5.2.8)$$

En las ecuaciones (2.1.1) o (2.1.2), inclusive, R' es una región cualquiera.

A continuación demostraremos que las propiedades (2.2.1) y (2.2.2) son válidas también para regiones cualesquiera. Con procedimientos analíticos, si demostramos, como ejercicio, las demás propiedades.

Demostración de la propiedad (2.2.1):

Sea la región de la figura 2.2.1:



$$\iint_R f(x,y) dx dy = \int_a^b \left\{ \int_{\phi(x)}^{\psi(x)} f(x,y) dy \right\} dx$$

Por la propiedad ya conocida de la integral ordinaria:

$$\iint_R f(x,y) dx dy = \int_a^b \left\{ \int_{\phi(x)}^{\psi(x)} f(x,y) dy \right\} dx$$

Aplicamos nuevamente la misma propiedad:

$$\iint_R f(x,y) dx dy = h \int_a^b \left\{ \int_{\phi(x)}^{\psi(x)} f(x,y) dy \right\} dx \dots \dots \dots (2.2.2)$$

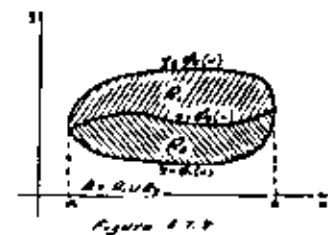
Para, por la definición (2.1.1):

$$\iint_R f(x,y) dx dy = \int_a^b \left\{ \int_{\phi(x)}^{\psi(x)} f(x,y) dy \right\} dx$$

Entonces, al sustituir cada expresión en (2.2.2):

$$\iint_R f(x,y) dx dy = h \iint_R f(x,y) dx dy \quad (2.2.3)$$

La propiedad (2.2.2) ya la aplicamos anteriormente, sin demostrarla, en el ejemplo (2.1.2). No aquí se demostró.



Sea la región de la figura 2.2.2:

$$\iint_R f(x,y) dx dy = \int_a^b \left\{ \int_{\phi(x)}^{\psi(x)} f(x,y) dy \right\} dx \quad (2.2.4)$$

Por la propiedad ya conocida de la integral ordinaria:

$$\iint_R f(x,y) dx dy = \int_a^b \left\{ \int_{\phi(x)}^{\psi(x)} f(x,y) dy \right\} dx + \int_a^b \left\{ \int_{\psi(x)}^{\phi(x)} f(x,y) dy \right\} dx \quad (2.2.5)$$

Al aplicar (2.2.5) en (2.2.4), recordando nuevamente las propiedades de la integral ordinaria:

$$\iint_R f(x,y) dx dy = \int_a^b \left\{ \int_{\phi(x)}^{\psi(x)} f(x,y) dy \right\} dx + \int_a^b \left\{ \int_{\psi(x)}^{\phi(x)} f(x,y) dy \right\} dx$$

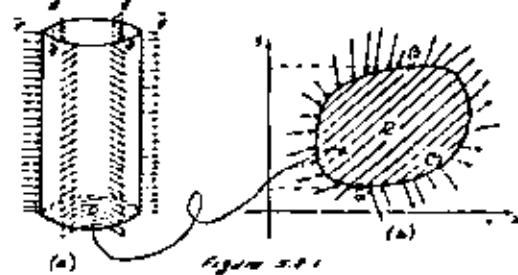
$$\iint_R f(x,y) dx dy = \int_a^b \left\{ \int_{\phi(x)}^{\psi(x)} f(x,y) dy \right\} dx + \int_a^b \left\{ \int_{\psi(x)}^{\phi(x)} f(x,y) dy \right\} dx$$

$$\iint_R f(x,y) dx dy = \iint_R f(x,y) dx dy + \iint_R f(x,y) dx dy \quad (2.2.6)$$

2.3) Centro de masa en el plano

2.3.1) Introducción

Imaginemos un objeto como el mostrado en la figura 2.3.1(a), en el cual todos los puntos tienen la misma densidad sobre los puntos de una misma vertical con igual espesor.



Imaginemos un cilindro vertical de altura h, cuyo radio sea r, y cuyo eje sea la línea que pasa por el punto (0,0) del eje x.

La curva C' de la figura 2.3.1(b).

Supongamos que nuestro problema consiste en encontrar el punto \bar{x} a través del cual, es decir, el balance sobre el punto \bar{x} que pasa y el que sale. Según como en el punto (4.7) con la propiedad ya demostrada de la integración:

$$\Delta Q = \int_C \bar{x} \delta ds = \int_C \bar{x} z^2 ds \dots \dots \dots (2.3.1)$$

donde \bar{x} es el radio normal exterior a C' .

Para calcular la integral introducida, representamos los elementos perimetrales de la curva, así como la función elemental de la densidad. Suponga, más que la región R' englobada por C' punto exterior como

$$R'(x,y) = \{x,y\}; \psi(x) \leq y \leq \phi(x) \dots \dots \dots (2.3.2)$$

En tal caso, las ecuaciones paramétricas de "a" se pueden escribir como
 parte derecha $\left\{ \begin{array}{l} x = \phi_1(t) \dots (5.2.13) \\ y = \psi_1(t) \dots (5.2.14) \end{array} \right\}$ Parte izquierda $\left\{ \begin{array}{l} x = \phi_2(t) \dots (5.2.15) \\ y = \psi_2(t) \dots (5.2.16) \end{array} \right\}$

Por otra parte, sea

$$\vec{r} = \phi_1(x, y) + \phi_2(x, y) \dots (5.2.17)$$

Ahora podemos escribir

$$\Delta Q = \int_C \vec{r} \cdot d\vec{s} = \int_C \phi_1 dx + \phi_2 dy = \int_C \phi_1 dx + \int_C \phi_2 dy \dots (5.2.18)$$

Definamos nuestra función a

$$\int_C \phi_1 dx$$

la cual, para evaluarla, debemos pasar los términos de la integral en función de "t", al cambiar (5.2.14) y (5.2.15) en (5.2.13), obtenemos, para la parte izquierda de la curva:

$$x = \phi_1[\phi_2(t), \psi_2(t)], \text{ además, de (5.2.16): } dy = \psi_2'(t) dt$$

Por otra parte, de (5.2.15) y (5.2.16), para la parte derecha de "a",

$$x = \phi_1[\phi_2(t), \psi_2(t)]; dy = \psi_2'(t) dt$$

esta integral en cuanto a la podemos evaluar en cualquier parte con tal de terminarla en el mismo, como tenemos dos expresiones para la curva, deberemos hacer dos integraciones, parte que nos conviene empezar en "a" (y=a) y terminar en "b" (y=b), la primera; empezar en "b", la segunda y terminarla en "a". Ahora, de (5.2.18):

si y=a, b=c

si y=b, a=c

y entonces:

$$\int_C \phi_1 dx = \int_a^c \phi_1 dx + \int_c^b \phi_1 dx = \int_a^c \phi_1[\phi_2(t), \psi_2(t)] \psi_2'(t) dt + \int_c^b \phi_1[\phi_2(t), \psi_2(t)] \psi_2'(t) dt$$

Por definición, como el número

$$\int_a^b \phi_1[\phi_2(t), \psi_2(t)] \psi_2'(t) dt = - \int_b^a \phi_1[\phi_2(t), \psi_2(t)] \psi_2'(t) dt$$

Así:

$$\int_C \phi_1 dx = \int_a^c \phi_1[\phi_2(t), \psi_2(t)] \psi_2'(t) dt - \int_c^b \phi_1[\phi_2(t), \psi_2(t)] \psi_2'(t) dt = \int_a^c \phi_1[\phi_2(t), \psi_2(t)] \psi_2'(t) dt - \int_b^a \phi_1[\phi_2(t), \psi_2(t)] \psi_2'(t) dt \dots (5.2.19)$$

Se nos ocurre pensar que la cantidad entre corchetes (Hesse) es el resultado de una integral con límites variables; es posible, consideremos:

$$\int_{\phi_2(t)}^{\psi_2(t)} \frac{\partial \phi_1}{\partial x} dx = \phi_1[\psi_2(t), \psi_2(t)] - \phi_1[\phi_2(t), \psi_2(t)] \dots (5.2.20)$$

Entonces, usando (5.2.20) en (5.2.19):

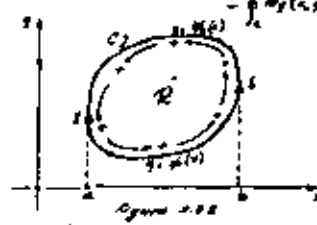
$$\int_C \phi_1 dx = \int_a^c \left[\int_{\phi_2(t)}^{\psi_2(t)} \frac{\partial \phi_1}{\partial x} dx \right] \psi_2'(t) dt = \int_a^c \frac{\partial \phi_1}{\partial y} \psi_2'(t) dt \dots (5.2.21)$$

Análogamente de (5.2.18):

$$\int_C \phi_2 dy = \int_a^c \left[\int_{\phi_2(t)}^{\psi_2(t)} \frac{\partial \phi_2}{\partial y} dy \right] \psi_2'(t) dt \dots (5.2.22)$$

Por otra parte, aplicando en particular el análogo al anterior, si podemos demostrar que

$$\int_C \phi_2 dy = \int_a^c \left[\int_{\phi_2(t)}^{\psi_2(t)} \frac{\partial \phi_2}{\partial x} dx \right] \psi_2'(t) dt \dots (5.2.23)$$



la razón del cambio de signo está en el sentido de la figura (5.2.2): para seguir el sentido positivo de recorrido (antihorario), se debe partir de "a" hacia "b", para ahora seguir por la parte inferior de la curva, mientras que en el caso anterior seguimos la parte derecha.

Una vez que hayamos comprobado la ecuación (5.2.23), podemos escribir la con la (5.2.22), para obtener:

$$\int_C \phi_2 dy = \int_a^c \phi_2 dx + \int_a^c \frac{\partial \phi_2}{\partial x} dx dy + \int_a^c \frac{\partial \phi_2}{\partial y} dy dy = \int_a^c \left(\frac{\partial \phi_2}{\partial x} + \frac{\partial \phi_2}{\partial y} \right) dy \dots (5.2.24)$$

Si se hace en círculo la ecuación (5.2.21) y se recuerda además, que la expresión entre paréntesis es la divergencia de la cantidad, podemos escribir que:

$$\Delta Q = \int_C \vec{r} \cdot d\vec{s} = \iint_D \nabla \cdot \vec{r} dx dy \dots (5.2.25)$$

Como dijimos en la que se conoce como teorema de la divergencia en el plano, que nos proporciona una relación entre la derivada

gerencia. En efecto, notamos primeramente que, si la divergencia es idénticamente nula, no hay incremento de gasto; esto es, el mismo gasto que entra es el que sale del cilindro.

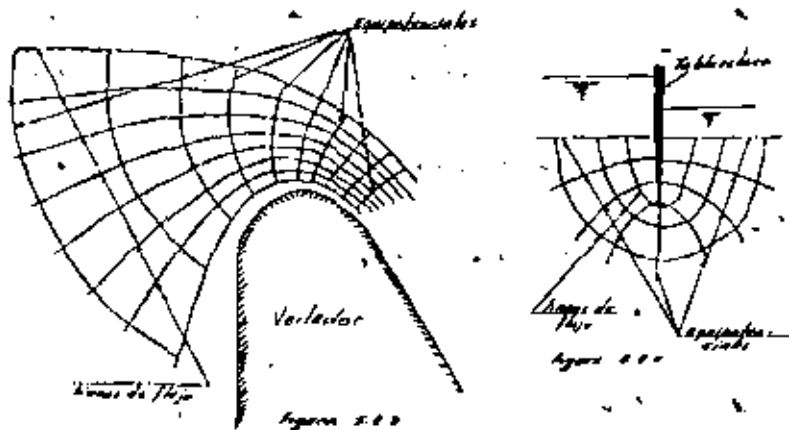
Ahora bien, ¿qué significa esto? Para comprenderlo mejor, imaginemos que sólo entra gasto y nada sale. Esto quiere decir que el fluido se está acumulando dentro del cilindro; pero como esto ya está lleno, la única manera en que más puede entrar es comprimiéndose; pero esto sucede si el fluido es agua?

[Not. El agua no puede comprimirse, ni los líquidos, en general. En caso de la elasticidad no fuera tan severa como la propuesta, basta con que el gasto que entra sea mayor que el que sale, para que dentro del cilindro se efectúe una compresión y esto no puede suceder en un líquido. Más aún: si el líquido no puede comprimirse, tampoco puede descomprimirse, por lo que no aceptaríamos, tampoco, que en los más que lo es un líquido, que al aumentar, en puntos particulares la divergencia de la velocidad de un líquido, siempre será cero.]

En cambio, si gas puede comprimirse o descomprimirse de acuerdo con las leyes que ya estudiaste en Termodinámica (Boyle, Mariotte-Gay Lussac). Por ello, la divergencia de velocidades de un gas es, en general, diferente de cero.

Si el flujo de un líquido es además irrotacional, además en el caso que discutíamos en el inciso (a), b). Entonces el flujo puede además ser la ecuación de Laplace y puede representarse gráficamente mediante una red de curvas que se cortan ortogonalmente, o una red de este tipo se le llama "red de flujo". La figura 5.2.3 representa el flujo a través de un vortador. La figura 5.2.4 representa el flujo a través

(a) Hay problemas muy específicos en los cuales se requieren cuidadosamente las pequeñas deformaciones de volumen que sufre un líquido. En los otros se hace el caso del golpe de ariete y el manejo de accionamiento a las máquinas por medio de un mecanismo. En todos los problemas los estudiarán en un momento, por tanto esperamos no haber olvidado del abanico de estos temas, donde siempre consideramos que un líquido es incompresible.



La una "teletorcedora".

5.2.2. Las Funciones de W-potential y Stokes en el Plano

El teorema de la divergencia en el plano es una forma de expresar el teorema de Gauss de áreas que nos va a ser de gran utilidad en el cálculo de las integrales múltiples.

En efecto, en el teorema de la divergencia integramos en sentido el campo \vec{F} ; hagamos:

$$\vec{F} = P(x,y)\vec{i} + Q(x,y)\vec{j}$$

Entonces hemos definido el campo

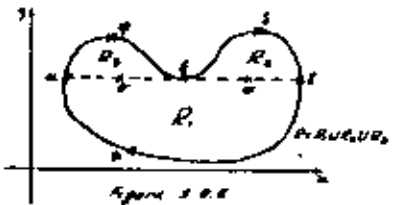
$$\vec{F} = P(x,y)\vec{i} + Q(x,y)\vec{j}$$

Teorema 5.2.1. (Teorema de Green)
 Sea "R" una región regular cerrada, limitada por un conjunto de curvas suaves o trozos. Si $P(x,y)$, $Q(x,y)$, $\frac{\partial P}{\partial x}$, $\frac{\partial Q}{\partial y}$ son continuas en "R":

$$\oint_C P dx + Q dy = \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$$

La demostración de este teorema, para una región normal, sigue los

mismos pasos que la demostración del teorema de la divergencia, que ya quedó demostrada en el inciso anterior. Basta por demostrar que el teorema es válido en cualquier región regular, como lo muestra en la figura 5.55.



En efecto, si se cumple para una región normal, se cumplirá para las regiones R_1, R_2, R_3 :

$$\oint_{\partial R_i} P dx + Q dy = \iint_{R_i} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$$

si se suman miembro a miembro se obtiene:

$$\oint_{\partial R} P dx + Q dy = \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy \quad (5.22.1)$$

Análogamente:

$$\int_{111} P dx + Q dy + \int_{122} P dx + Q dy = \iint_{R_1} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy \quad (5.22.2)$$

$$\int_{222} P dx + Q dy + \int_{233} P dx + Q dy = \iint_{R_2} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy \quad (5.22.3)$$

Si sumamos miembro a miembro (5.22.1), (5.22.2) y (5.22.3), se obtiene:

$$\int_{111} P dx + Q dy = - \int_{122} P dx + Q dy, \text{ así obtenemos:}$$

$$\int_{111} P dx + Q dy + \int_{122} P dx + Q dy + \int_{222} P dx + Q dy = \iint_{R_1} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy + \iint_{R_2} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy + \iint_{R_3} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$$

O sea:

$$\oint_{\partial R} P dx + Q dy = \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy \quad (5.22)$$

A este teorema le podemos dar una expresión vectorial si escribimos la curva de que

$$P dx + Q dy = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \quad \text{y que} \quad \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = |\nabla \times \mathbf{F}|$$

entonces

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma \quad (5.22')$$

A esta forma de expresar al teorema de Stokes, lo llamamos "teorema de Stokes en el plano". A la cantidad involucrada se le llama "circulación del campo vectorial" y puede referirse a una fuerza, a una velocidad, al campo eléctrico, etc, según lo que está representando el campo. Si éste es un campo, obviamente se observa que, para que haya trabajo en circuitos cerrados, el campo de fuerzas debe tener la rotacional $\neq 0$; el campo es de rotación nula, la energía consumida produce una diferencia aproximadamente nula en la superficie libre del agua, produciéndose un río.

A parte de su importancia física, este teorema nos relaciona dos conceptos matemáticos muy importantes, como son la integral curvilínea y la integral doble. Además, el teorema de Stokes tiene una interpretación geométrica muy útil, como veremos a continuación.

5.2.3) Interpretación geométrica del Teorema de Stokes

Sea R una región regular cerrada y limitada por la curva C . Sea el campo $\mathbf{F} = Mj - yk$

De acuerdo con el teorema de Stokes:

$$\oint_C M dy - y dx = \iint_R \left(\frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial (-y)}{\partial y} \right) dx dy = 2 \iint_R dx dy = 2A \quad (5.23.1)$$

Es preciso que nos permita calcular el área de una región por medio de una integral curvilínea, lo que resulta muy interesante cuando la curva tiene una forma paramétrica sencilla.

Ejemplo 5.2.1): Calcular el área de la elipse de ecuación en la solución:

Las ecuaciones paramétricas de la elipse son:

$$x = a \cos \theta$$

$$y = b \sin \theta$$

por lo que

$$dx = -a \sin \theta \, d\theta$$

$$dy = b \cos \theta \, d\theta$$

De acuerdo con (5.1.1):

$$A = \int_0^{\pi} \int_0^{2a \cos \theta} a \cos \theta \cos \theta \, d\theta - \int_0^{\pi} a \sin \theta (2a \cos \theta) \, d\theta$$

$$A = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} (2a^2 \cos^2 \theta - 2a^2 \sin^2 \theta) \, d\theta = 2a^2 b$$

Ejemplo 5.2.2.- Calcular el volumen comprendido entre el paraboloide $z = x^2 + y^2$ y el cilindro $x^2 + y^2 = 16$.

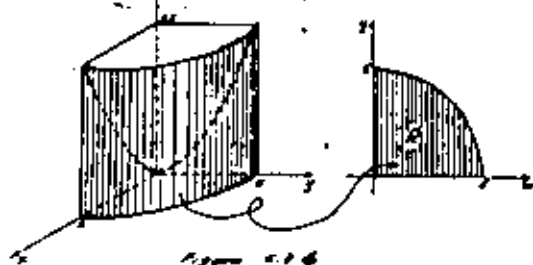


Figura 5.2.6

solución:

El volumen puede ser representado, en una cierta parte en la figura 5.2.6.

Para calcularlo, debemos tener:

$$\frac{1}{2} V = \iint_R x \, dx \, dy = \iint_R (x^2 + y^2) \, dx \, dy$$

donde

$$R = \{(x, y) / 0 \leq x \leq 4, 0 \leq y \leq \sqrt{16 - x^2}\}$$

entonces

$$\frac{1}{2} V = \int_0^4 \left[\int_0^{\sqrt{16-x^2}} (x^2 + y^2) \, dy \right] dx$$

Ahora

$$\begin{aligned} \int_0^{\sqrt{16-x^2}} (x^2 + y^2) \, dy &= x^2 \left[y \right]_0^{\sqrt{16-x^2}} + \frac{1}{3} \left[y^3 \right]_0^{\sqrt{16-x^2}} \\ &= x^2 \sqrt{16-x^2} + \frac{1}{3} (16-x^2)^{3/2} \end{aligned}$$

Y así:

$$\frac{1}{2} V = \int_0^4 \left[x^2 \sqrt{16-x^2} + \frac{1}{3} (16-x^2)^{3/2} \right] dx$$

Esta integral puede calcularse, pero es evidente que el proceso será muy laborioso. Veamos si el teorema de Green nos puede ayudar.

Se trata de integrar

$$\iint_R (2x^2 + y^2) \, dx \, dy$$

entonces podemos expresar que

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = 2x + y^2$$

o sea que P podría ser:

$$Q = \frac{1}{2} x^2 + y^2 x$$

Y así, de acuerdo con el teorema de Green:

$$\iint_R (2x^2 + y^2) \, dx \, dy = \oint_C Q \, dy = \int_0^{2\pi} \int_0^4 (x^2 + y^2) \, dy \, dx$$

donde C , para la región mostrada en la figura 5.2.6, es el contorno de una circunferencia, más los dos segmentos de eje. Como nos interesa el volumen completo, nos conviene ahora considerarlo como región de integración a todo el círculo englobado por la base del cilindro, que resulta en ser la curva sobre la cual integramos y cuyos parámetros son:

$$x = 4 \cos \theta$$

$$y = 4 \sin \theta; \quad dy = 4 \cos \theta \, d\theta$$

Así:

$$Q = x^2 + y^2 x = 16 \cos^2 \theta + 128 \sin^3 \theta \cos \theta$$

entonces:

$$I = \int_0^{2\pi} (128 \cos^2 \theta + 128 \sin^3 \theta \cos \theta) 4 \cos \theta \, d\theta$$

$$I = \int_0^{2\pi} (512 \cos^3 \theta + 512 \sin^3 \theta \cos^2 \theta) \, d\theta$$

$$I = 512 \int_0^{2\pi} (\frac{1}{4} \cos^3 \theta + \sin^3 \theta \cos^2 \theta) \, d\theta$$

Recordemos que

$$\cos^3 \theta = \frac{1}{4} (1 - \cos 2\theta)$$

$$\cos^2 \theta = \frac{1}{2} (1 + \cos 2\theta)$$

$$\cos^4 \theta = \frac{1}{8} (1 + \cos 2\theta + \cos 4\theta)$$

Por lo que

$$I = 512 \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4} \cos 2\theta + \frac{1}{4} \cos 2\theta \right) \, d\theta$$

$$I = \frac{512}{4} \left[\theta \right]_0^{2\pi} = \frac{512}{4} [2\pi - 0] = \frac{512}{4} \cdot 2\pi = 256\pi$$

$$I = \frac{512}{4} \cdot 2\pi$$

to en el sistema polar.

Para estudiar el campo, tomamos el conjunto de puntos frontera, incluyendo el origen, este conjunto puede expresarse por comprensión de la siguiente manera (Fig. 2.1)

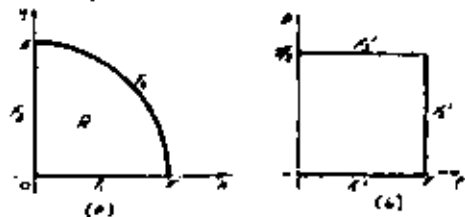


Figura 2.1

$R = \{(x,y) \mid x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq a^2\}$

$R' = \{(x,y) \mid 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq a\}$

$R'' = \{(x,y) \mid x \geq 0, y \geq 0, x \leq a\}$

Ahora debemos expresar al conjunto R' en términos de ρ, θ :

$$y = 0 \Rightarrow \theta = 0$$

Puesto que ρ no puede ser nulo:

$$x = 0 \Rightarrow \theta = \pi$$

Además:

$$0 \leq x \leq \rho \cos \theta \Rightarrow \rho \geq 0$$

$$0 \leq y \leq \rho \sin \theta \Rightarrow \rho \geq 0$$

Entonces:

$$R' = \{(\rho, \theta) \mid 0 \leq \rho \leq a, 0 \leq \theta \leq \pi\}$$

Ya nos queda ahora trabajo identificar a este conjunto de puntos con el segmento del eje ρ' que se muestra en la figura 2.1(b).

Análogamente:

$$x^2 = \rho^2 \cos^2 \theta$$

$$y^2 = \rho^2 \sin^2 \theta$$

$$x^2 + y^2 = \rho^2 = a^2 \Rightarrow \rho = a; x, y \geq 0 \Rightarrow 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

con lo que podemos identificar este segmento en la figura 2.1(b).

Finalmente:

$$x \geq 0 \Rightarrow \rho \cos \theta \geq 0; y \geq 0 \Rightarrow \rho \sin \theta \geq 0 \Rightarrow \theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$$

$$0 \leq y \leq a \Rightarrow 0 \leq \rho \sin \theta \leq a$$

5.9) La Integral Doble en Coordenadas Rectangulares

5.9.1) Ejemplo de Coordenadas Rectangulares

El problema que nos hacemos de encontrar resulta ser difícil de resolver por el método tradicional, más con la ayuda del teorema de áreas, resulta laborioso la tarea es que de región y en función no resulta fácilmente manejable en coordenadas cartesianas.

Ya vimos en el punto (a) que hay otros sistemas coordenados aparte del cartesiano y que, si se cumplen ciertas condiciones, un punto puede representarse gráficamente en un sistema o en otro, incluso en más de uno. Si el objetivo de que se cumplen esas condiciones en todos los puntos de una región, será posible entonces representar a esa región en diferentes sistemas coordenados. En segunda instancia, si se cumple primero con la región del problema que nos hacemos de resolver.

Ejemplo 2.9.1) Representar en el sistema polar la región de la figura 2.1(a).

Solución:

Es de largo que en la región, al igual que en coordenadas cartesianas, la vamos a representar dibujando sus fronteras. Por lo mismo, debemos trasladar al sistema polar todas y cada una de las partes frontera, naturalmente, los puntos de la región serán los que quedan explícitos por dichas fronteras.

Antes, debemos ver que se cumplen las condiciones para que el mapa sea posible, entonces, las ecuaciones de transformación son:

$$x = \rho \cos \theta$$

$$y = \rho \sin \theta$$

que evidentemente se cumplen en todos los puntos; además, todas las parábolas son ecuaciones para cualquier sistema de ρ, θ ; finalmente

$$J\left(\frac{x,y}{\rho,\theta}\right) = \rho$$

diferente de cero en general, excepto en el punto (0,0), que es un punto singular.

Así pues, todas las partes frontera de nuestra región (o excepción hecha del origen) y todos los puntos interiores de la misma, mapearán punto a punto.

y pasamos este segmento a la figura 5.9.1(a).

La región ha quedado abierta por la izquierda, pero aún nos falta un punto en la frontera que debidamente tomamos excluido el origen. Para este punto, p.e., es el eje "y". Por distancia de un punto singular, al origen no se puede en este caso como un solo punto, sino como un conjunto de puntos la región, en respuesta, queda representada en la figura 5.9.2. Puede observarse que esta región es mucho más fácil de manejar en el sistema polar,

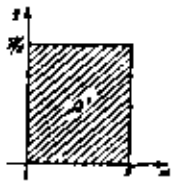


Figura 5.9.2

ya que $R = \{(r, \theta) / a \leq r \leq b; 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\}$ es una región rectangular, con límites constantes.

Desde luego no es estrictamente indispensable mejorar las fronteras con simbología de conjuntos, aunque esto ayuda mucho a la comprensión del proceso. Se pueden manejar simplemente las ecuaciones, como veremos en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 5.9.3) - Manejar la región de la figura 5.9.3 en un sistema con varias curvas generadas de transformación con:

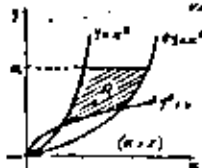


Figura 5.9.3

$$u = \frac{x^2}{y}$$

$$v = \frac{x}{y}$$

Solución:

Las derivadas son discontinuas en los ejes, por lo que estos puntos no pertenecen a la región. El Jacobiano de transformación:

$$J\left(\frac{x,y}{u,v}\right) = \begin{vmatrix} \frac{x}{y} & -\frac{x^2}{y^2} \\ -\frac{x^2}{y^2} & \frac{2x}{y} \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \neq 0$$

y el mapeo será punto a punto en toda la región.

Las fronteras son:

- la parábola $y = x^2$: $u/v = 1 \Rightarrow u = v$ recta paralela al eje "u"
- la parábola $y^2 = x$: $v^2 = 1 \Rightarrow v = 1$ recta paralela al eje "v"
- la parábola $xy = x^2$: $u/v = 2 \Rightarrow u = 2v$ recta paralela al eje "u"
- la recta $y = 2x$: $u/v = 2$; $u/v = 2$

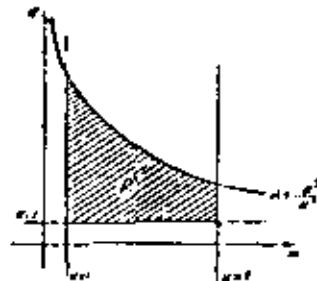


Figura 5.9.4

$$x = y^2; \quad x = 1$$

$$\frac{x}{y^2} = u \Rightarrow u = \frac{x}{y^2} \text{ como analítica en los ejes } u, v$$

Al representar gráficamente estas curvas, obtenemos la región de la figura 5.9.4, que también podemos expresarnos:

$$R = \{(u,v) / 1 \leq u \leq 2; 1 \leq v \leq \sqrt{u}\}$$

Ejemplo 5.9.3) - Encuentra una transformación que permita el mapeo de la región mostrada en la figura 5.9.5, como región rectangular.

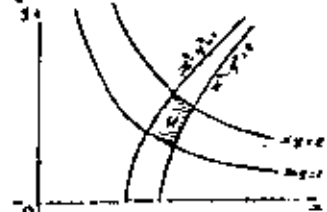


Figura 5.9.5

Solución:

sea la transformación

$$u = x^2 \cdot y^2$$

$$v = \frac{x}{y}$$

sus derivadas parciales son:

nos y su Jacobiano de transformación:

$$J\left(\frac{x,y}{u,v}\right) = \begin{vmatrix} \frac{x}{y} & -\frac{2x^2}{y^3} \\ \frac{x^2}{y^2} & \frac{x}{y} \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \neq 0$$

$$J\left(\frac{x,y}{u,v}\right) = \frac{1}{2(u \cdot v)^2}$$

Mediante esta transformación, tenemos:

- $x^2 \cdot y^2 = 1 \Rightarrow u = 1$ recta paralela al eje "u"
- $xy = 1 \Rightarrow v = 1$ recta paralela al eje "v"
- $x^2 \cdot y^2 = 2 \Rightarrow u = 2$ recta paralela al eje "u"
- $y = 2x \Rightarrow v = 2$ recta paralela al eje "v"

Como puede verse en la figura 5.9.6.

$$R = \{(u,v) / 1 \leq u \leq 2; 1 \leq v \leq 2\}$$

Figura 5.9.6

En algunos casos, decir que para evaluar regiones de un sistema coordenado en otro, deberemos:

- Definir las ecuaciones de las fronteras en el sistema original
- Transformarlas al nuevo sistema y dibujarlas en él
- Definir los puntos singulares, en ambos, y marcarlos adecuadamente
- Definir analíticamente la región deseada

5.9.2) - Cambio de Variables en Integral Doble

Siempre que la solución al ejemplo (5.9.1) se volvió laboriosa debido a que hubo la región como se muestra no se prestaban para manejarla en coordenadas cartesianas. Vamos ahora en el ejemplo (5.9.1), cómo la región de referencia se podía representar en forma convenientemente en el sistema polar. En ambos sistemas integro en este sistema.

$$\iint_D (x^2 + y^2) dx dy = \iint_D r^2 \cdot r dr d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{2}} r^3 dr d\theta = \int_0^{2\pi} \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^{\sqrt{2}} d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{2\sqrt{2}}{4} d\theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 2\pi = \sqrt{2}\pi$$

El resultado obtenido no depende del sentido, lo que quiere decir que no podemos cambiar una integral doble de un sistema coordenado a otro, solamente así como así. Hemos de tener en cuenta convenientemente

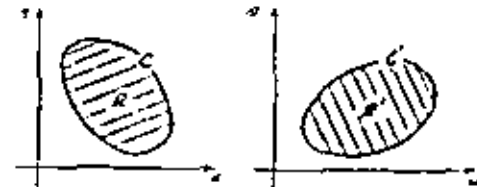


Figura 5.9.1

sea la integral doble $\iint_D f(x,y) dx dy$
 y sea la transformación $\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \end{cases} \quad (5.9.2)$
 tal que la jacobiana

sea continua y que el jacobiano $J\left(\frac{x,y}{u,v}\right) \neq 0$

En tales circunstancias, sabemos que el mapa es biunívoco, por lo que existirá

$$\begin{cases} u = u(x,y) \\ v = v(x,y) \end{cases} \quad (5.9.3)$$

y la región "R", así como la zona "C" de la figura 5.9.2 representará como "R'" y "C'" respectivamente

Hagamos "Q" tal que $\frac{\partial Q}{\partial t} = f(x,y)$; entonces

$$\iint_R f(x,y) dx dy = \iint_{R'} \frac{\partial Q}{\partial t} dx dy \quad (5.9.4)$$

y podemos aplicar el teorema de Green:

$$\iint_{R'} \frac{\partial Q}{\partial t} dx dy = \int_C Q dy \quad (5.9.5)$$

Ahora bien, si "C'" tiene como ecuaciones paramétricas

$$\begin{cases} x = g(t) \\ y = h(t) \end{cases}$$

por (5.9.2), si también ecuaciones paramétricas también en términos de "t", que será la variable de integración. Es convenientemente, si definimos las ecuaciones paramétricas de "C'", quedarán definidos las de "C" en el mismo parámetro. En pocas palabras de la misma integral sobre "C'" que sobre "C" y sólo habrá que pasar a "dy" en términos de la nueva variable

$$dy = \left(\frac{\partial y}{\partial t} \frac{dt}{dt} + \frac{\partial y}{\partial u} \frac{du}{dt} \right) dt$$

y así

$$\int_C Q dy = \int_C Q \left(\frac{\partial y}{\partial t} \frac{dt}{dt} + \frac{\partial y}{\partial u} \frac{du}{dt} \right) dt \quad (5.9.6)$$

Debe notar que esta expresión es enteramente cierta porque hemos supuesto positivo el jacobiano de transformación; si esto no fuera así, cambiaría el sentido de recorrida de "C'" a "C" y habría un cambio de signo en la ecuación (5.9.6); pero nosotros tomaremos el valor absoluto

entonces, teniendo (5.9.4) a (5.9.6):

$$\iint_R \frac{\partial Q}{\partial t} dx dy = \int_{C'} Q \left(\frac{\partial y}{\partial t} \frac{dt}{dt} + \frac{\partial y}{\partial u} \frac{du}{dt} \right) dt = \int_{C'} Q \frac{dy}{dt} dt = \int_{C'} Q \frac{dy}{dt} dt \quad (5.9.7)$$

Ahora podemos aplicar convenientemente el teorema de Green, para transformar nuestra última integral en un área, en una integral doble. Hecho que hay una expresión afectada por "dt"; esta expresión debemos derivarla parcialmente con respecto a "u" y restarle la derivada parcial, con respecto a "v", de la expresión afectada por "dt".

$$\int_{-1}^1 \int_0^1 (x^2 + y^2) dx dy = \int_{-1}^1 \left[\frac{1}{3} x^3 + \frac{1}{2} x^2 y \right]_{x=0}^{x=1} dy = \int_{-1}^1 \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} y \right) dy = \left[\frac{1}{3} y + \frac{1}{4} y^2 \right]_{-1}^1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \left(-\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) = \frac{2}{3} + \frac{1}{2} = \frac{7}{6}$$

Realicemos las operaciones indicadas:

$$\frac{2}{3} \left(\frac{1}{3} \right) = \frac{2}{9} \quad \frac{2}{3} \left(\frac{1}{2} \right) = \frac{1}{3}$$

$$\frac{2}{3} \left(\frac{1}{3} \right) - \frac{2}{3} \left(\frac{1}{3} \right) = \frac{2}{9} - \frac{2}{9} = 0$$

Ahora, parece que $\frac{2}{3}$ es la suma de x^2 y y^2 a través de las integrales...

$$\frac{2}{3} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{1} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{1} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{1} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{1} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{1} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{1} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{1} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{1} = \frac{2}{3}$$

Entonces, usando (2.1.2.1) o (2.1.2.2) y (2.1.2.3):

$$\int_{-1}^1 \int_0^1 (x^2 + y^2) dx dy = \int_{-1}^1 \int_0^1 \left(\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} \right) dx dy$$

Finalmente, si iteramos esta expresión en (2.1.2.2), haciendo en su lugar (2.1.2.4):

$$\int_{-1}^1 \int_0^1 (x^2 + y^2) dx dy = \int_{-1}^1 \int_0^1 \left(\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} \right) dx dy = \int_{-1}^1 \left[\frac{x^3}{6} + \frac{xy^2}{2} \right]_{x=0}^{x=1} dy = \int_{-1}^1 \left(\frac{1}{6} + \frac{y^2}{2} \right) dy = \left[\frac{1}{6} y + \frac{1}{6} y^3 \right]_{-1}^1 = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \left(-\frac{1}{6} - \frac{1}{6} \right) = \frac{2}{6} + \frac{2}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

Ahora, podemos ver que la integración hecha al través de esta técnica no da el resultado correcto: no tenemos en cuenta el Jacobiano de la transformación, que es lo que permite hacer el cambio de coordenadas en una integral doble. Intentemos nuevamente, recordando que:

$$\int_{-1}^1 \int_0^1 (x^2 + y^2) dx dy = \int_{-1}^1 \int_0^1 \left(\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} \right) dx dy = \int_{-1}^1 \left[\frac{x^3}{6} + \frac{xy^2}{2} \right]_{x=0}^{x=1} dy = \int_{-1}^1 \left(\frac{1}{6} + \frac{y^2}{2} \right) dy = \left[\frac{1}{6} y + \frac{1}{6} y^3 \right]_{-1}^1 = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \left(-\frac{1}{6} - \frac{1}{6} \right) = \frac{2}{6} + \frac{2}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

$$\int_{-1}^1 \int_0^1 (x^2 + y^2) dx dy = \int_{-1}^1 \int_0^1 \left(\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} \right) dx dy = \int_{-1}^1 \left[\frac{x^3}{6} + \frac{xy^2}{2} \right]_{x=0}^{x=1} dy = \int_{-1}^1 \left(\frac{1}{6} + \frac{y^2}{2} \right) dy = \left[\frac{1}{6} y + \frac{1}{6} y^3 \right]_{-1}^1 = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \left(-\frac{1}{6} - \frac{1}{6} \right) = \frac{2}{6} + \frac{2}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

(a) El orden de la cuenta es irrelevante, porque al final se hace el valor absoluto. La expresión arriba es correcta, porque estamos expresando el Jacobiano positivo.

$$V = \int_{-1}^1 \int_0^1 (x^2 + y^2) dx dy = \int_{-1}^1 \left[\frac{x^3}{3} + \frac{1}{2} x^2 y \right]_{x=0}^{x=1} dy = \int_{-1}^1 \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} y \right) dy = \left[\frac{1}{3} y + \frac{1}{4} y^2 \right]_{-1}^1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \left(-\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) = \frac{2}{3} + \frac{1}{2} = \frac{7}{6}$$

En (x, y) el volumen calculado es área, en el caso...

$$A = \int_{-1}^1 \int_0^1 \left(\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} \right) dx dy = \int_{-1}^1 \left[\frac{x^3}{6} + \frac{xy^2}{2} \right]_{x=0}^{x=1} dy = \int_{-1}^1 \left(\frac{1}{6} + \frac{y^2}{2} \right) dy = \left[\frac{1}{6} y + \frac{1}{6} y^3 \right]_{-1}^1 = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \left(-\frac{1}{6} - \frac{1}{6} \right) = \frac{2}{6} + \frac{2}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

Por el teorema fundamental del cálculo podemos escribir también:

$$dA = \left(\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} \right) dx dy$$

Ejemplo 2.1.4. Calcular el área de la región mostrada en la figura 2.1.3, si $x = 0$.

Solución:

La región puede representarse en la figura 2.1.4 y el Jacobiano calculado en el ejemplo 2.1.2 entonces, de acuerdo con (2.1.2.1):

$$A = \int_{-1}^1 \int_0^1 \left(\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} \right) dx dy = \int_{-1}^1 \left[\frac{x^3}{6} + \frac{xy^2}{2} \right]_{x=0}^{x=1} dy = \int_{-1}^1 \left(\frac{1}{6} + \frac{y^2}{2} \right) dy = \left[\frac{1}{6} y + \frac{1}{6} y^3 \right]_{-1}^1 = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \left(-\frac{1}{6} - \frac{1}{6} \right) = \frac{2}{6} + \frac{2}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

$$A = \int_{-1}^1 \left[\frac{x^3}{6} + \frac{xy^2}{2} \right]_{x=0}^{x=1} dy = \int_{-1}^1 \left(\frac{1}{6} + \frac{y^2}{2} \right) dy = \left[\frac{1}{6} y + \frac{1}{6} y^3 \right]_{-1}^1 = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \left(-\frac{1}{6} - \frac{1}{6} \right) = \frac{2}{6} + \frac{2}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

Ejemplo 2.1.5. Calcular el volumen bajo el paraboloide $z = x^2 + y^2$ y sobre la región mostrada en la figura 2.1.5.

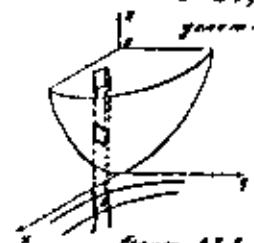
Solución:

La región está representada en la figura 2.1.6 y el Jacobiano calculado en el ejemplo 2.1.2 entonces, aplicamos (2.1.2.1):

$$V = \int_{-1}^1 \int_0^1 (x^2 + y^2) dx dy = \int_{-1}^1 \int_0^1 \left(\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} \right) dx dy = \int_{-1}^1 \left[\frac{x^3}{6} + \frac{xy^2}{2} \right]_{x=0}^{x=1} dy = \int_{-1}^1 \left(\frac{1}{6} + \frac{y^2}{2} \right) dy = \left[\frac{1}{6} y + \frac{1}{6} y^3 \right]_{-1}^1 = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \left(-\frac{1}{6} - \frac{1}{6} \right) = \frac{2}{6} + \frac{2}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

$$V = \int_{-1}^1 \int_0^1 (x^2 + y^2) dx dy = \int_{-1}^1 \int_0^1 \left(\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} \right) dx dy = \int_{-1}^1 \left[\frac{x^3}{6} + \frac{xy^2}{2} \right]_{x=0}^{x=1} dy = \int_{-1}^1 \left(\frac{1}{6} + \frac{y^2}{2} \right) dy = \left[\frac{1}{6} y + \frac{1}{6} y^3 \right]_{-1}^1 = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \left(-\frac{1}{6} - \frac{1}{6} \right) = \frac{2}{6} + \frac{2}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

Ejemplo 2.1.6. Calcular el volumen comprendido entre el paraboloide $z = x^2 + y^2$, el plano $z = 1$ y limitado por el cilindro de generatrices paralelas al eje z , cuya intersección con el plano xy es la región de la figura 2.1.6.



Solución:

El volumen pedida se representa en la figura 2.1.7. Puesto que se trata de un volumen sobre la superficie, tenemos que calcularlo por diferencia entre el

volumen del cilindro y el volumen bajo la superficie, ya mencionados en el ejemplo 5.95

El volumen del cilindro lo obtenemos como el área en la base por la altura, que es 2; obtenemos entonces el área de la base

$$A = \iint_D dx dy = \iint_D \left(\frac{2x}{2} \right) dx dy = \iint_D (x) dx dy$$

Esta vez no podemos omitir el valor del Jacobiano, por lo que tenemos que pasar a términos de u, v

$$u = x^2 - y^2 \\ 0 = xy; \quad x = \frac{u}{y}; \quad x^2 = \frac{u^2}{y^2}$$

Así:

$$u = \frac{u^2}{y^2} - y^2; \quad uy^2 = u^2 - y^4 \quad y^2 = \frac{u + y^4}{2}$$

Análogamente

$$\frac{x^2 = \frac{u + y^4}{2}}{x^2 - y^2 = \frac{u}{2}}$$

Entonces:

$$A = \iint_D \frac{1}{2(x^2 - y^2)} dx dy = \iint_D \frac{dy du}{\sqrt{u^2 + 4y^4}} = \int_0^1 \left\{ \int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{u^2 + 4y^4}} \right\} du$$

$$\int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{u^2 + 4y^4}} = \frac{1}{2} \left[\operatorname{sech}^{-1} \frac{2y}{u} \right] = \frac{1}{2} \operatorname{sech}^{-1} \frac{2}{u} - \operatorname{sech}^{-1} \frac{2}{u}$$

Entonces:

$$A = \frac{1}{2} \int_0^1 \operatorname{sech}^{-1} \frac{2}{u} du - \frac{1}{2} \int_0^1 \operatorname{sech}^{-1} \frac{2}{u} du$$

Ahora, integrando por partes:

$$\int \operatorname{sech}^{-1} \frac{2}{u} du = u \operatorname{sech}^{-1} \frac{2}{u} + 2 \operatorname{sech}^{-1} \frac{2}{u} + C$$

Así, al se hacer las sustituciones, obtenemos a:

$$A = \frac{1}{2} (2 \operatorname{sech}^{-1} 2 - \operatorname{sech}^{-1} 2 + 2 \operatorname{sech}^{-1} 2 - \operatorname{sech}^{-1} 2) = \operatorname{sech}^{-1} 2$$

$$A = 0.304$$

Por consiguiente, el volumen del cilindro será:

$$V = 2 \times 0.304 = 0.608 \quad \text{y el volumen pedido:}$$

$$V = 0.608 - 0.5 = 0.108$$

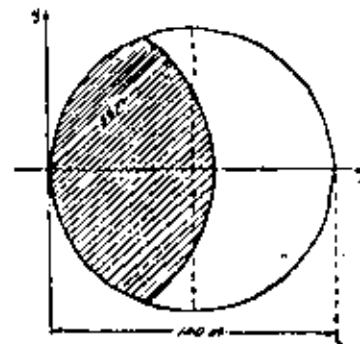


Figura 5.99

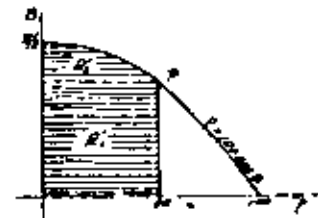


Figura 5.9.10

Ejemplo 5.99) Juan y Pedro heredaron a partes iguales un terreno circular de 100 m de diámetro. Juan abrió una acequia en el perímetro y con una compuerta de 85 m avanzó a la casa y le dejó pasar Pedro acequia a Juan que usó para cultivar papas; pero Juan argumenta que su casa no alcanza a avanzar la mitad del pasto. ¿Quién tiene razón?

Solución:

Juan tendrá razón si el área A_1 , sombreada en la figura 5.99, no es mayor que la mitad del terreno; es decir si

$$A_1 \leq \frac{1}{2} \pi r^2$$

debemos calcular esa área sombreada; aproximando la circunferencia, calculamos el área sombreada A_1 arriba del eje x :

$$A_1 = \iint_D dx dy$$

Como la región es el área de manipuleo en coordenadas cartesianas, la transformamos a coordenadas polares. Las fronteras son:

- El eje x , $y = 0 \Rightarrow \theta = 0$
- La circunferencia $x^2 + y^2 = 100^2 \Rightarrow \rho = 100$
- La otra circunferencia $x^2 + y^2 = 85^2 \Rightarrow \rho = 85$

$$x^2 + y^2 = \rho^2$$

$$-100 \leq \rho \leq 100 \cos \theta$$

$$x^2 + y^2 = \rho^2 \cos^2 \theta = \rho^2 \cos^2 \theta$$

El origen $\Rightarrow (0, 100 \text{ m})$
 $\Rightarrow (0, 0)$
 Todas estas curvas están dibujadas en la figura 5.9.1A

Ahora definamos R' aunque aparentemente es más fácil definir la región en P' , porque la podemos definir con una sola ecuación, esto implicaría integrar un "mejor" con la ecuación definamos la región en P' , pero lo cual deberemos encontrar el punto P' de intersección:

$$P = 88$$

$$(1.40 \text{ m/s})^2 = 100 \text{ m/s}^2 ; \text{ con } P = 0.00$$

$$0.2461^2 = 0.0607 \Rightarrow P(88, 0.0607)$$

Entonces:

$$R' = R' \cup R'_2 = R' \left\{ (0,0) / 0.0607 \text{ m/s}^2 \right\}$$

$$R'_2 = R'_2 \left\{ (0,0) / 0.0607 \text{ m/s}^2 \right\}$$

Así: $A_1 = A_2 = \int \int p \, dD = \int \int p \, dD = \dots$

$$\int \int p \, dD = \int \int p \, dD = \dots$$

$$\int \int p \, dD = \int \int p \, dD = \dots$$

$$\int \int p \, dD = 1000 \int \int p \, dD = \dots$$

$$A_1 = 1000 + 412 = 1412 \text{ m}^3$$

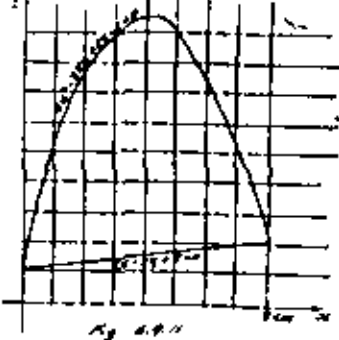
$$A = 2A_1 = 2824 \text{ m}^3 = 2.824 \times 10^6 \text{ m}^3$$

Así: $V = \int \int \int p \, dD = \dots$

Ahora, como ejercicio, ahora de qué largo debe haber escapado la escoria para que se haya formado un cono exactamente la mitad del punto

Ejemplo 5.9.2) El graficador, de donde el limnógrafo de una estación hidrométrica, nos proporciona la gráfica de la figura 5.9.2A, durante una avenida. La ecuación de la curva es $x^2 - 25x + 2y - 2 = 0$ (x, y, en cm). Se sabe que el gas

la base del río será según la ley $x - 150x + 2 = 0$ (x, y, en cm) el punto



centro del eje y' apunta a 20 m/s y cada estructura del eje se apoya sobre el río, ¿cuál fue el gas en la sección escoria durante la avenida?

Solución:
 El gas base es el escoria que se corre por un río, independientemente de la precipitación directa. El gas en escoria es la diferencia entre el gas total y el gas base. Ahora bien, sabemos que $Q = \frac{dV}{dt}$

Por similitud, el volumen se obtiene integrando el gas Q , lo que es lo mismo, obteniendo el área, bajo una curva que resultará muy parecida a la de la figura 5.9.2A, pero sobre la que se forma Q . Además, como nos piden el volumen en escoria, habrá que restar el área bajo la curva del gas base, quedándonos un área como la mostrada en la figura 5.9.2B, referida a los ejes ya mencionados. Solución: $V = \int \int \int p \, dD = \dots$

$$V = 3400 \left(\frac{m^3}{s} \right) = \dots$$

$$Q = 20 \left(\frac{m^3}{s} \right) \Rightarrow \int \left(\frac{Q}{20} \right) = \dots$$

$$= 10000 \text{ m}^3/\text{cm}^2$$

Así: $V = \int \int \int p \, dD = 72000 \int \int p \, dD$

Como $R' \left\{ (0,0) / 0.0607 \text{ m/s}^2 \right\}$

Entonces: $V = 72000 \int \int \int p \, dD = 72000 \int \int \left(\frac{Q}{20} \right) dD = \dots$

$$V = 0.72 \times 10^6 \text{ m}^3$$

Ej. Área de una superficie abovedada

Según el diagrama al referirse a una superficie abovedada nos referimos a una superficie que no queda en un plano.

Si recordamos nuestro problema s.a., supongamos que ahora nos interesa obtener el área de la superficie abovedada descrita en ese problema y que representamos en la figura 5.101

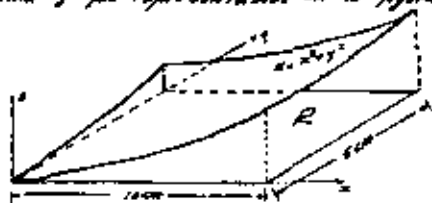


Figura 5.101

Obviamente, el área de esa superficie será mayor que la de la base, o sea, mayor que $10 \times 500 \text{ cm}^2$

Para estimarla, necesariamente que esa superficie

fuera plana, lo cual no podríamos lograrlo^(a), pero sí podemos construir un poliedro que se aproxime a la superficie. Dividiremos primeramente nuestra región "R" en cuatro subregiones; escogeremos un punto (p.ej. el punto medio) en cada subregión y desimulamos a la superficie; así por ese punto construimos el plano tangente y obtenemos un poliedro como el que se muestra en la figura 5.102

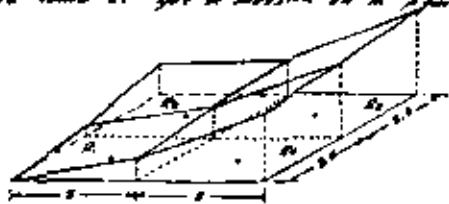


Figura 5.102

Ahora bien, si observamos esta figura, nos damos cuenta de que el área de este poliedro viene a ser la proyección del área del plano correspondiente, pero para calcular esta última, tendríamos que conocer cuál es la inclinación de cada superficie. Si recordamos nuestros conocimientos de geometría A-

(a) Solo se puede lograr si la superficie es desarrollable; más adelante una página de "calculus" más y más que se impone que las partes del plano se aproximen

utilizan en el espacio, así como lo que vimos en el capítulo uno, la inclinación de un plano lo podemos conocer si conocemos la normal al mismo. Si la superficie está expresada como $z = f(x, y)$, el vector normal será

$$\vec{n} = \left(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, -1 \right)$$

Si utilizamos uno de los procedimientos, tendremos: (A_i, B_i, C_i)

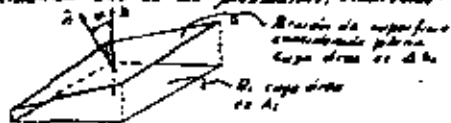


Figura 5.103

Para obtener la proyección de ΔS_i en A_i tenemos, si llamamos "n" al ángulo que forma "n" con la vertical:

$$A_i = \Delta S_i \cos \alpha; \quad \Delta S_i = \frac{A_i}{\cos \alpha}$$

Para obtener además que

$$\cos \alpha = \frac{|\vec{n} \cdot \hat{k}|}{|\vec{n}| |\hat{k}|} = \frac{\left(\frac{\partial z}{\partial x} i + \frac{\partial z}{\partial y} j - k \right) \cdot (-k)}{\sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 + 1}} \quad (1)$$

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 + 1}}$$

Estancia, con relación a nuestro problema, podemos formar la siguiente tabla; recordemos que $x = x^2 + y^2$; $\frac{\partial z}{\partial x} = 2x$; $\frac{\partial z}{\partial y} = 2y$

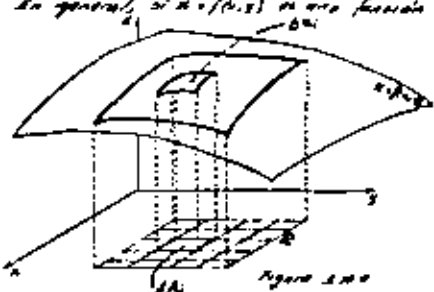
Sub-región	Área (cm²)	Punto (cm)			\vec{n}			n	cos α	$\frac{A_i}{\cos \alpha} = \Delta S_i$ (cm²)
		x	y	z	A	B	C			
R ₁	105	2.5	1.5	0.795	5	3	-1	5.67	0.1765	70.90
R ₂	155	2.5	2.75	0.806	5	5.5	-1	9.06	0.1083	115.82
R ₃	105	2.5	2.75	0.806	15	5.5	-1	16.80	0.059	211.86
R ₄	155	2.5	1.5	0.795	15	3	-1	15.31	0.065	198.20

$$\Sigma \Delta S_i = 588.88 \text{ cm}^2$$

Es claro que a medida que disminuyamos el tamaño de las R_i, mejoraremos la precisión de nuestra estimación y ésta será más pro-

en la medida que el área de los "B" tienda a cero; es decir, estamos aproximando en el caso de tener que realizar una suma de áreas cuando el área de cada una tienda a cero (o la norma de cada vector tienda a cero)

En general, si $z = f(x, y)$ es una función que nos define una superficie localizada sobre una región "R" del plano xy, el área de una partición de superficies se puede obtener si la siguiente fórmula:



Dividamos "R" en "n" subregiones de área "ΔSi", como se ve en la figura 5.10.0

Para obtener el área de la superficie abastando podemos tomar sus subproyecciones de las "n" subregiones en las correspondientes planas tangentes a la superficie y denotar "ΔAi" al área de la superficie que está sobre la misma sub región como hay "n" subregiones, la suma

$$\sum_{i=1}^n \Delta S_i$$

es una aproximación a la medida "S" en la superficie en cuestión

Para calcular ΔSi, consideremos la figura 5.10.1. Denotemos "ΔAi" a la parte de ella pedunculada como "ΔB"; lo único que necesitamos hacer es subproyectar "ΔAi" en "ΔBi", lo cual logramos si denotamos el ángulo que forman entre sí ambas superficies.

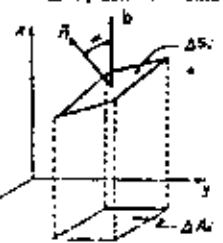


Figura 5.10.1

Si "n" es la normal a ΔSi, está sobre formando un ángulo "φ" con respecto al eje "z", si consideramos vectores, con respecto a "n", entonces:

$$\Delta A_i = \Delta S_i \cos \phi$$

$$\Delta S_i = \frac{\Delta A_i}{\cos \phi} \dots \dots \dots (5.10.1)$$

con respecto a "n", entonces:

Al vector "n", si recordamos lo visto en el capítulo 11.0, lo podemos abastar con los derivadas parciales de la función en el punto, o sea:

$$\vec{n} = \left(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, -1 \right)$$

Entonces el ángulo "φ" lo podemos calcular:

$$\cos \phi = \frac{\vec{n} \cdot \vec{k}}{|\vec{n}| |\vec{k}|} = \frac{-1}{\sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1}} \dots \dots \dots (5.10.2)$$

Ahora sustituimos (5.10.2) en (5.10.1), teniendo en cuenta además que ΔAi = Δxi Δyi

$$\Delta S_i = \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1} \Delta x_i \Delta y_i$$

Al sumar todas estas áreas

$$\sum_{i=1}^n \Delta S_i = \iint_R \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1} \Delta x_i \Delta y_i \dots \dots \dots (5.10.3)$$

obtenemos la suma de Riemann buscada. Si todas las normas de este tipo que podemos formar convergen cuando la norma de la red tiende a cero, se dice que la superficie es suave y que su área sobre el número al cual convergen las sumas (5.10.3)

$$S = \iint_R \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1} \, dxdy \dots \dots \dots (5.10.4)$$

que es la expresión que nos permitirá calcular el área de la superficie a búsqueda.

Esta fórmula la haremos extensiva a regiones no-rectangulares mediante las definiciones (5.1.1) y (5.1.2).

Ejemplo 5.10.1) Calcular el área de la superficie del cilindro $x^2 + y^2 = 16$ limitada por los planos $x=0, x=2, y=0, y=2$. (Fig 5.10.4)

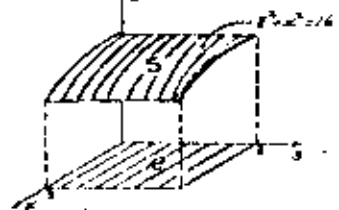


Figura 5.10.4

Solución:

Podemos empezar por definir "R"

$$R = \{(x, y) / 0 \leq x \leq 2; 0 \leq y \leq 2\}$$

Ahora: $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x}{\sqrt{16-x^2}}$

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 = \frac{x^2}{16-x^2}$$

$$\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = 0$$

$$1 = \frac{16-x^2-x^2}{16-x^2}$$

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1 = \frac{16-x^2}{16-x^2}$$

$$S = \int_0^4 \frac{x \, dx \, dy}{\sqrt{16-x^2}} = 4 \int_0^4 \left\{ \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{16-x^2}} \right\} dy = \int_0^4 2 \arcsin \frac{x}{4} \, dy$$

$$S = 2 \cdot 3 \pi 2 \int_0^4 dy = 12 \pi 2$$

5.11. Areas de Superficies Alabeadas en Coordenadas Curvilíneas

En el inciso 5.4.1 vimos que una superficie siempre podía expresarse por medio de su ecuación vectorial

$$\vec{r} = x(u, v)\vec{i} + y(u, v)\vec{j} + z(u, v)\vec{k} \dots \dots \dots (5.11.1)$$

o, lo que es lo mismo, mediante sus ecuaciones paramétricas:

$$x = x(u, v)$$

$$y = y(u, v)$$

$$z = z(u, v)$$

Vimos además que, bajo ciertas condiciones, esta representación implica un mapeo punto a punto en el plano uv, con lo que una porción cualquiera de la superficie, se podrá mapear como una región en el plano uv.

Ejemplo 5.11.1) Dibujar, en el plano xy, la porción de superficie de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 25$, comprendida entre las intersecciones de dicha esfera con el cilindro $x^2 + y^2 = 9$ y con el plano xy (ver figura 5.6.16).

Solución:
La primera curva de intersección la representamos ya en el ejemplo 5.4.4. Para representar la segunda, utilizamos el mismo análisis.

Apliquemos las ecuaciones de transformación al plano xy:
 $x = a \cos \phi \cos \theta$

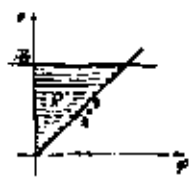


Figura 5.6.1

Puede que $\cos \theta < 0$.
 $\cos \theta = 0 \Rightarrow \theta = \pi/2$ (eje y)

Nos falta una curva para cerrar la región, pero la frontera de la porción de superficie analizada comprende al polo de la esfera, que ya vimos $(a, 0, 0)$ que es un punto singular, donde $\phi = 0$ o π .

Así pues, la región pedida $(x, y \geq 0)$ se define analíticamente:
 $A = \{(x, y) | 0 \leq \theta \leq \pi/2; 0 \leq \phi \leq \pi\}$

Ahora bien, ¿qué utilidad tiene esta representación de áreas de superficies curvas alabeadas? Respondámoslo recurriendo al área de la porción de superficie descrita en el ejemplo 5.6.1.

Ejemplo 5.6.2) - Calcular el área de la porción de la superficie de esfera descrita en el ejemplo 5.6.1.

Solución:

Desde luego se sabe que si queremos evaluar la ecuación (5.11.1), tenemos que integrar en una región semicircular, que ya hemos visto que resulta muy difícil de manejar. En cambio, la región que acabamos de definir es muy sencilla, integremos entonces en ella, pero no olvidemos el Jacobiano de transformación

$$S = \iint \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + 1} \, du \, dv = \iint \left(\frac{\partial x}{\partial \theta}\right) \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \theta}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial \phi}\right)^2 + 1} \, d\theta \, d\phi$$

Ahora $\int \left(\frac{\partial x}{\partial \theta}\right)^2 = 25 \cos^2 \theta \cos^2 \phi$ (ver ej. 5.4.3)

Por otra parte $z = \sqrt{25 - x^2 - y^2}$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x}{\sqrt{25 - x^2 - y^2}}; \quad \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 = \frac{x^2}{25 - x^2 - y^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y}{\sqrt{25 - x^2 - y^2}}; \quad \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = \frac{y^2}{25 - x^2 - y^2}$$

$$\frac{1}{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1} = \frac{1}{\frac{x^2}{25 - x^2 - y^2} + \frac{y^2}{25 - x^2 - y^2} + 1}$$

Al pasar esta cantidad en términos de las variables de integración:

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1 = \frac{2x^2}{2x-2y} + \frac{2y^2}{2x-2y} + 1 = \frac{2x^2 + 2y^2}{2x-2y} + 1 = \frac{2(x^2 + y^2 + x - y)}{2(x-y)} = \frac{x^2 + y^2 + x - y}{x-y}$$

$$\sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1} = \frac{x^2 + y^2 + x - y}{x-y}$$

Entonces

$$S = \iint_D \frac{x^2 + y^2 + x - y}{x-y} dx dy = \iint_D \frac{x^2 + y^2}{x-y} dx dy + \iint_D \frac{x-y}{x-y} dx dy$$

$$S = \iint_D \frac{x^2 + y^2}{x-y} dx dy + \iint_D 1 dx dy$$

En general, si deseamos calcular el área de una porción de la superficie (S.U.O.) que proyecta en el plano xy como R' (Fig 5.11.2), haremos:

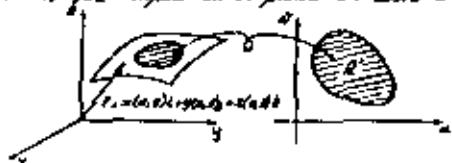


Figura 5.11.2

$$S = \iint_{R'} \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1} dx dy$$

Recordemos que ya hemos determinado

$$\sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1} = \frac{x^2 + y^2 + x - y}{x-y}$$

podemos introducir este Jacobiano al radical y obtener

$$S = \iint_{R'} \frac{x^2 + y^2 + x - y}{x-y} dx dy$$

$$S = \iint_{R'} \left(\frac{x^2 + y^2}{x-y} + 1 \right) dx dy$$

Ahora

$$C \frac{\partial x}{\partial z} = \left(\frac{\partial x}{\partial z} \frac{\partial y}{\partial z} - \frac{\partial y}{\partial z} \frac{\partial x}{\partial z} \right) \frac{\partial z}{\partial z} = \frac{\partial x}{\partial z} \frac{\partial y}{\partial z} - \frac{\partial y}{\partial z} \frac{\partial x}{\partial z}$$

Sumamos y restamos $\frac{\partial x}{\partial z} \frac{\partial y}{\partial z} - \frac{\partial y}{\partial z} \frac{\partial x}{\partial z}$:

$$C \frac{\partial x}{\partial z} = \left(\frac{\partial x}{\partial z} \frac{\partial y}{\partial z} + \frac{\partial y}{\partial z} \frac{\partial x}{\partial z} \right) \frac{\partial z}{\partial z} - \left(\frac{\partial x}{\partial z} \frac{\partial y}{\partial z} - \frac{\partial y}{\partial z} \frac{\partial x}{\partial z} \right) \frac{\partial z}{\partial z}$$

$$C \frac{\partial x}{\partial z} = \frac{\partial x}{\partial z} \frac{\partial y}{\partial z} - \frac{\partial y}{\partial z} \frac{\partial x}{\partial z} = \int \left(\frac{\partial x}{\partial z} \right) dz = -1$$

Análogamente: $C \frac{\partial y}{\partial z} = \int \left(\frac{\partial y}{\partial z} \right) dz = 1$

Así

$$S = \iint_D \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} dx dy \dots \dots \dots (5.11.1)$$

o bien, si recordamos el ejemplo 5.10:

$$S = \iint_D \sqrt{EG - F^2} du dv \dots \dots \dots (5.11.2)$$

donde, como se muestra en el citado ejemplo:

$$A = \left(\frac{\partial x}{\partial u} \right); \quad B = \left(\frac{\partial x}{\partial v} \right); \quad F = \frac{\partial x}{\partial u} \cdot \frac{\partial x}{\partial v}$$

Como ejercicio, resuelve el ejemplo 5.11.2, añadiendo los enunciados (5.11.1a) y (5.11.2).

Ejemplo 5.11.3) Calcular el área sobre la superficie de la esfera de radio "a", comprendida entre los meridianos $\theta = \theta_1$, $\theta = \theta_2$ y los paralelos $\varphi = \varphi_1$, $\varphi = \varphi_2$.

Solución:

La porción de superficie que se nos da en la figura 5.11.3:

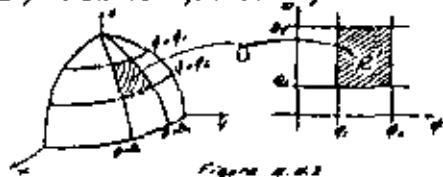


Figura 5.11.3

$$R'(\varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2; \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2)$$

Para, al resolver el ejercicio que te acabamos de indicar obtendrás $\sqrt{EG - F^2} = a^2 \sin \theta$

Entonces

$$S = \iint_D a^2 \sin \theta d\varphi d\theta = a^2 \int_{\theta_1}^{\theta_2} \left\{ \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sin \theta d\varphi \right\} d\theta = a^2 (\cos \varphi_1 - \cos \varphi_2) \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sin \theta d\theta$$

$$S = a^2 (\cos \varphi_1 - \cos \varphi_2) (\theta_2 - \theta_1)$$

Si queremos calcular el área de la semiesfera:

$$\varphi_1 = 0, \varphi_2 = \pi, \theta_1 = 0, \theta_2 = \pi$$

$$S = a^2 (1 - (-1)) (\pi - 0) = 2\pi a^2 \text{ resultado que ya conocíamos.}$$

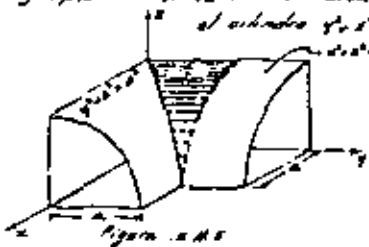


Figura 5.11.4

Como ejercicio, aplica el resultado obtenido para calcular el área del capote esférico de la figura 5.11.4, partiendo el resultado, también.

términos de "d" como en términos de "t".

Ejemplo 5.14. - Calcular el área del cilindro $x^2 + z^2 = a^2$ limitada por el cilindro $y^2 + z^2 = a^2$.



Solución:
En la figura 5.15 se representa la acción parte de la intersección.

El área total del cilindro entre las planas $x=a$, $x=-a$, $z=0$
 $S_1 = 2\pi a \cdot 2a = 4\pi a^2$

Para obtener el área pedida debemos restar a S_1 ocho veces el área de la porción sombreada, que es la que queda fuera de la intersección.

El cilindro tiene por ecuación vectorial:

$$\vec{r} = a \cos \theta \vec{i} + a \sin \theta \vec{k}$$

Las fronteras con las intersecciones con las superficies

$$\begin{aligned} x &= a \\ y &= a \\ y^2 + z^2 &= a^2 \end{aligned}$$

Las curvas aparecen en el plano xy como se ve a continuación:



$$\begin{aligned} x &= a + a \cos \theta \Rightarrow \cos \theta = \frac{x-a}{a} \Rightarrow \theta = \theta(x) \\ y &= a = u \\ y^2 + z^2 &= a^2 = a^2 \sin^2 \theta \\ z &= a^2 \sin^2 \theta = a^2 \cos^2 \theta \\ &\Rightarrow z = a \cos \theta \\ \vec{r} &= (a, u) / a \leq \theta \leq \pi / 2; a \cos \theta \leq u \leq a \end{aligned}$$

Por otra parte:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{r}}{\partial x} &= \vec{j}; \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial x}\right)^2 = 1 = E \\ \frac{\partial \vec{r}}{\partial y} &= -a \cos \theta \vec{i} + a \sin \theta \vec{k}; \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial y}\right)^2 = a^2 \sin^2 \theta + a^2 \cos^2 \theta = a^2 = G \\ \frac{\partial \vec{r}}{\partial z} &= \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} = 0 = F \end{aligned}$$

Entonces

$$S_2 = \iint_D \sqrt{G^2 - F^2} \, dx \, dy = \iint_D \sqrt{a^4 - 0} \, dx \, dy = 2a \int_0^{\pi/2} \left\{ \int_{a \cos \theta}^a dx \right\} d\theta = 2a \int_0^{\pi/2} (a - a \cos \theta) d\theta$$

$$S_2 = 2a^2 \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right) = a^2 \pi - 2a^2$$

y la superficie pedida:

$$S = S_1 - S_2 = \frac{2a^2}{\pi}$$

5.12: INTEGRAL TRIPLE EN COORDENADAS CARTESIANAS:

5.12.1) Introducción

Visto, cuando estudiaste Matemáticas II, que la integral sencilla resuelve, entre otros, el problema del área bajo una curva; ¿sabes o te va a ser que la integral doble resuelve, entre otros, el problema del volumen bajo una superficie. ¿Y si que vas a poder explicar entonces la integral triple?

Veamos nuestros conocimientos anteriores desde un punto de vista más general: en la integral sencilla, tomamos límite de una suma de áreas rectangulares; cada una de esas áreas se obtiene multiplicando el valor de la función que representa la curva en un punto, por la amplitud de un intervalo de la variable independiente, incluido dicho punto en el cual se encuentra el punto. (Ver figura 5.12.1)

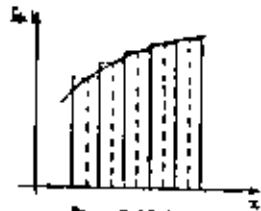


Fig. 5.12.1

En la integral doble, tomamos el límite de una suma de volúmenes prismáticos y cada uno de esos volúmenes se calcula multiplicando el valor de la función, en un punto cualquiera dentro de la base del prisma, por el área de esa base. (Ver figura 5.12.2)

Entonces en forma similar a la integral triple tendríamos que tener un límite de productos, cada uno de los cuales

formado como sigue: el valor de una función, ahora de tres variables, tomada en un punto del espacio, dentro de un prisma, por el volumen de ese prisma, que será el producto de los incrementos de las tres variables. (Ver fig 5.12.3)

Ahora la función, por ser tres variables, no es susceptible de representarse geoméricamente; pero nosotros sabemos que una función de tres variables tiene distintas interpretaciones físicas, como la que vamos a ver en el siguiente problema

5.12.2) Problema

En un bloque de hierro, extraído de una mina, la concentración de metal depende a la ley $c = 3x + 2y + z$ donde c está en mg/dm^3 si x, y, z están en dm. El bloque de hierro mide 2 m de largo por 1.50 m de ancho por 1 m de alto. ¿Cuál cantidad de metal hay en ese bloque?

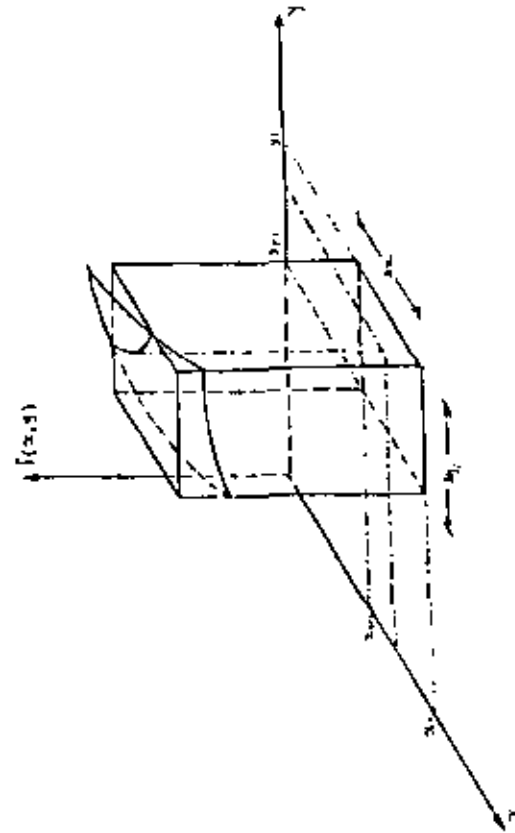


Fig. 5.12.2

Discusión: El peso del metal que se pregunta se obtiene como producto de la concentración por el volumen y para la concentración no es constante sino que está dada por una función de tres variables. Como una primera aproximación podemos dividir nuestro bloque de meta en prismas de $10 \times 10 \times 5$ cm, por ejemplo, y en la base de cada uno de ellos la concentración. De esta forma aproximación, por que dentro de cada uno de estos prismas la concentración no es constante, así, por ejemplo, si aislamos el primer prisma (Fig. 5.12.3) en cada uno de los vértices tendremos concentraciones de 0, 20, 15, 10, 5, 35, 60, 70 y 85 g/m³, por lo que, si escogemos algunos de estos puntos como representativos del cubito, podremos decir que, en éste, hay 0, 20, 5, 35, 10, 35, 15, 15, 15, 15, 15, 15 gr de metal, cualquiera de estas cantidades será una aproximación a la cantidad real.

Hagamos dos tanteos: uno, considerando como representativo de cada prisma el punto más cercano al origen y otro, considerando como representativo del prisma el punto más lejano al origen.

Primer tanteo: Para calcular los moles de metal, vamos primero los contenidos de metal en todas las cubetas adyacentes al eje x; después pasaremos a los que están junto a éstos, en la base y así sucesivamente hasta cubrir toda la base. Para seguir entonces al siguiente estante y así hasta terminar. Para distinguir de qué prismas hablamos, denominaremos como sigue: al cubo adyacente al origen lo llamaremos el (1, 1, 1); al que le sigue en dirección longitudinal, lo llamaremos el (2, 1, 1) para terminar con la primera hilera de prismas; longitudinal; la hilera adyacente estará formada por los cubos (1, 2, 1) y (2, 2, 1). El siguiente estante estaría formado, análogamente por los cubos (1, 1, 2), (2, 1, 2) etc.

Segundo tanteo: Te dejamos que, mediante una tabla análoga a la (5.12.1) compruebes el resultado de 275 g. Todos los resultados son similares, como ya se esperaba; tanto más porque en el primer tanteo escogimos los puntos en que la concentración es menor dentro de cada prisma mientras que, en el segundo tanteo, escogimos los puntos en que la concentración es mayor, tanto de cada prisma.

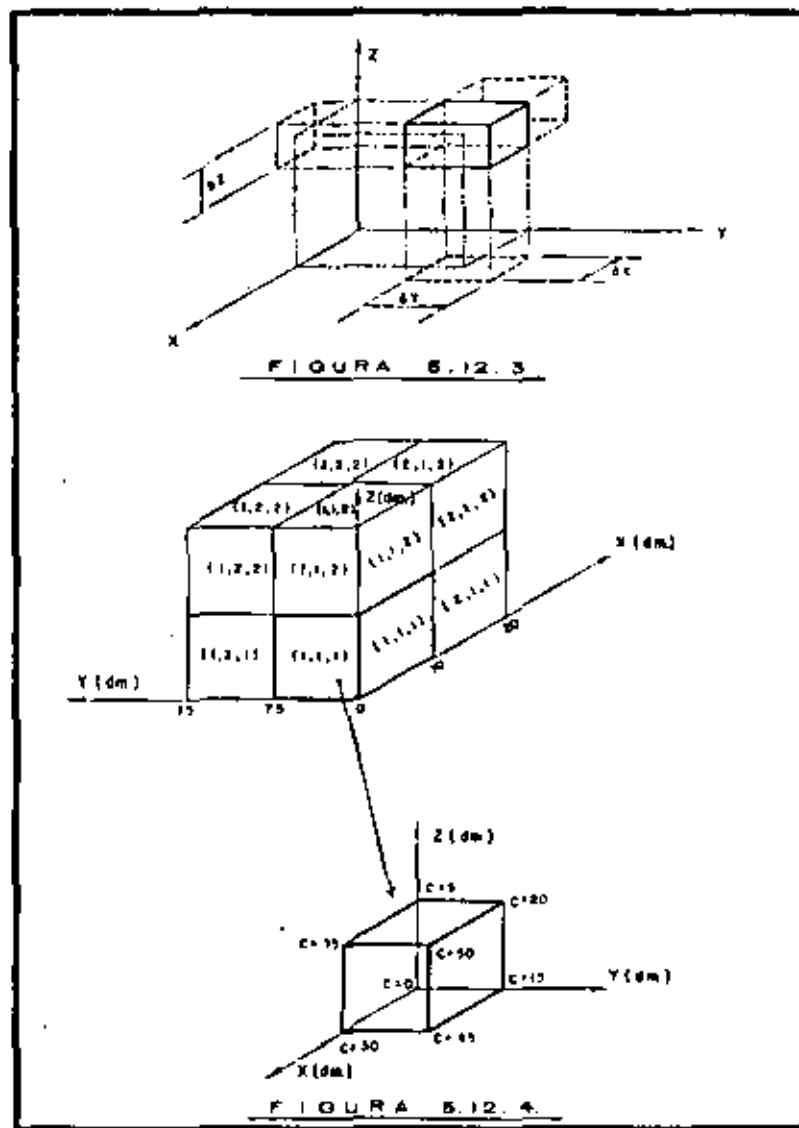


FIGURA 5.12.3

FIGURA 5.12.4

Prisma	Pto. repr. tentativo	Concentra (mg/cm ³)	Peso metal (gr)
(1,1,1)	(0, 0, 0)	0	0
(2,1,1)	(10, 0, 0)	30	11,250
(1,2,1)	(0, 7.5, 0)	15	5,625
(2,2,1)	(10, 7.5, 0)	45	16,875
(1,1,2)	(0, 0, 5)	5	1,875
(2,1,2)	(10, 0, 5)	35	13,125
(1,2,2)	(0, 7.5, 5)	20	7,500
(2,2,2)	(10, 7.5, 5)	50	18,750
			75,000

Tabla 5.12.1

Supón que en este momento el profesor le dijera al grupo: "Muechen, cada quien va a resolver aproximadamente el problema. Quedan en libertad para dividir la recia en cubos y/o prismas. También tienen libertad para escoger el punto que quieran dentro de cada prisma y la única restricción que van a respetar es que la mayor diagonal de un prisma no sobrepase 15 dm ($=1.5 \times 10^1 \text{ dm}$)". Lo más probable es que hubieran tantos resultados como alumnos; pero uno, habría una partición como la que propusimos; esto la hace a base de prismas de 7.5 x 11 dm y a igual alto a los prismas de 11 x 11 dm. Querri escogerlo en cada prisma el vértice más cercano al origen y quien seleccionara al más alejado, en tanto que el demás de una sola pieza, en el más cercano, en el más alejado, en un punto interior.

Una vez que hubieran recibido todos los resultados, disímiles, claro, mientras uno sea curioso; ningún resultado sería mayor de 18.75 gr y ningún resultado sería menor a 0 gr. Pero que si se quiere mantener la restricción de la mayor diagonal, hubieran necesario - aunque que, a bien respetar los prismas que hubieran formado o bien partirlas. Para explicar mejor lo que queremos decir, proponer que en vez del prisma que hemos llamado (1, 1, 1), queramos poner un prisma de 11 x 11 x 11 (Ver fig. 5.12.4). Esto significa que el prisma original lo hemos dividido en dos partes que llamamos A y B. Volumen de B = 75 dm³; volumen de A = 300 dm³.

Si ahora escogemos un punto dentro de A; seleccionamos el punto (0, 0, 0)

donde la función adquiere el menor valor dentro de A, que es de 1 mg/dm³. Así, A contribuye a la nueva suma con 300 mg.



Fig. 5.12.4

Al escoger un punto en B, escogeremos el origen, donde f adquiere el menor valor, que es de 0, por lo que B contribuye con 0 a la nueva suma. Entre ambas partes, A y B, contribuyen con 300 mg, que es mayor que la contribución anterior del prisma (1,1,1). Este razonamiento lo podemos hacer a la inversa, refiriéndonos al valor mayor de la función y llegar a la conclusión de que la nueva contribución es menor que la antigua.

Y extrapolando el mismo razonamiento a los demás prismas, explicamos al porqué de esa curioso comportamiento de resultados. Sigamos suponiendo; ahora el profesor pide que se resuelva nuevamente el problema en forma aproximada; deja las mismas libertades que antes; pero la restricción la hace ahora más severa; la mayor diagonal no debe exceder de 1 dm. Nuevamente se obtendrían tantos resultados como alumnos; pero ahora observáramos que la diferencia entre el mayor y el menor sería inferior a 180 gr, que es la diferencia que obtuvimos antes. ¿A que se debe esto? A la propiedad que tienen las funciones continuas consistente en que, al evaluarlas en dos puntos diferentes, estos valores serán tanto más parecidos cuanto más cerca estén los puntos entre sí. Como los puntos donde la función adquiere sus valores mayor y menor están de cada prisma están separados por su diagonal y ahora ésta se acorta, es natural que todos los resultados se parezcan más.

¿Y qué pasaría si la diagonal se acortara cada vez más? Los resultados, aunque siguieran siendo disímiles, se parecerían cada vez más; pero al limitarse cada vez más, quiere decir que se están agrupando alrededor de un número. Ese número es justamente el que nos describe el peso del metal en la recia.

¿Cómo encontrar ese número? Hay varias maneras, que veremos

más adelante. Por ahora le vamos a sugerir una, que surge directamente de la discusión anterior: dividir la roca en cubos de $n \times h \times h$. Escoge el punto más cercano al origen, dentro de cada cubo; valúa la función ahí; multiplica por h^3 y suma (te encontrarás que similar de la Inducción Matemática). Esta suma te debe dar $150\,000 - 9000 \cdot h$ (mg). Al hacer que h tienda a cero, esto es, al hacer que la diagonal tienda a cero, obtenemos $160\,000$ mg = 160 g, que es el número que resuelve exactamente el problema.

5.12.3) Definiciones

Cuando, en el problema que acabamos de resolver, decidimos dividir la roca en prismas, realizamos lo que formalmente se conoce como estrucurar una red. Esta operación la hicimos con el objeto de valuar el contenido de un cierto metal en la roca y quedamos en que era evidente que, la precisión del cálculo sólo podía depender del tamaño de los prismas y no de sus dimensiones relativas: por lo mismo, siempre que queramos establecer una red, no tendremos restricciones de ese tipo. Las redes mostradas en la figura (5.12.3) son igualmente válidas.

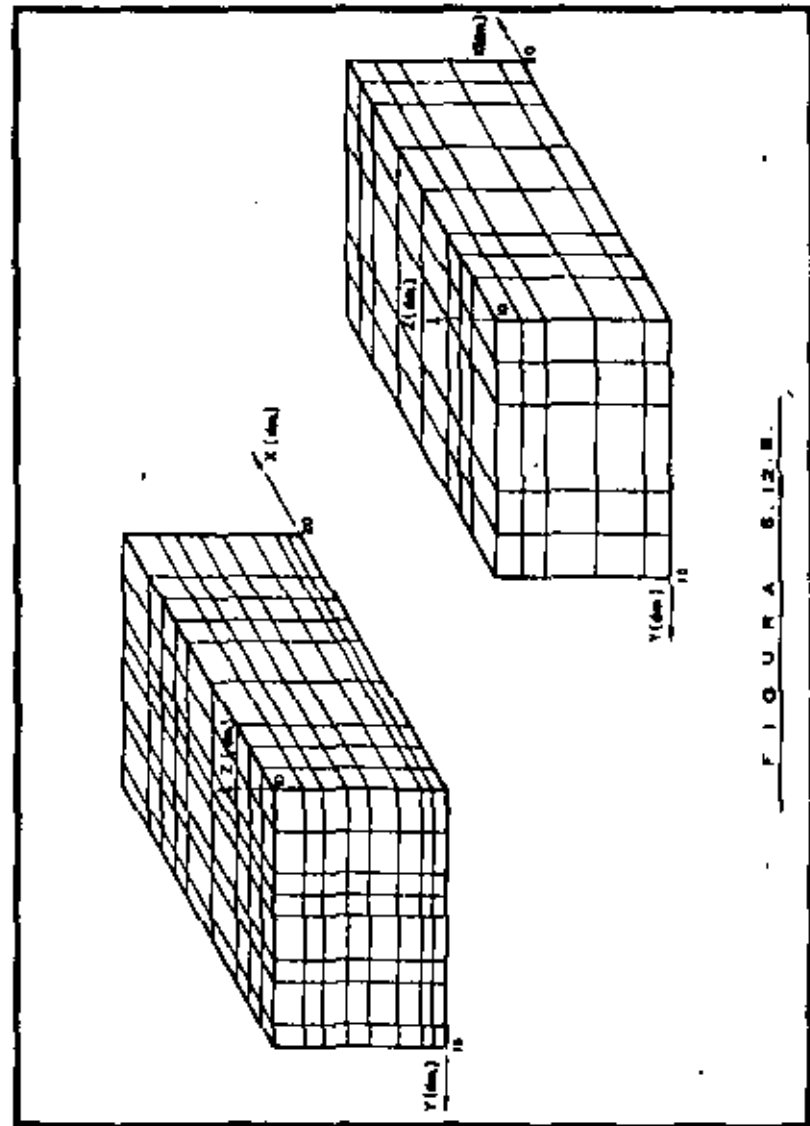
A cada uno de los prismas que resultan de la operación anterior se les denomina celdas de la red. De todas ellas, habrá una que tenga la mayor diagonal; a esta diagonal la llamaremos NORMA de la red y la representaremos con la letra griega " α ".

La red la establecimos en la roca, que matemáticamente puede definirse como un conjunto conexo de puntos; esto es, una región. Si es un conjunto, podemos definirlo como tal; en nuestro caso:

$$V\{(x, y, z) / 0 \leq x \leq 20; 0 \leq y \leq 15; 0 \leq z \leq 10\}$$

que se lee, como tú recordarás: conjunto V de puntos definidas por (x, y, z) , tales que x se encuentre en el intervalo $[0, 20]$, etc.

Sigamos recapitulando en lo que hicimos para resolver nuestro problema: una vez que fuéramos establecida la red, escogimos un punto en cada celda y en cada uno de estos valúamos la concentración. Esto equivale a aproximar a la función mediante una escaboteada.



como hiciste en la integral "sencilla" y doble, nada más que ahora no podremos usar la "escala".

La única restricción que debíamos respetar en esta operación es que el punto se encuentre dentro de la celda, incluyendo sus fronteras; vimos, recorda, que el resultado final no debía depender de las puntas que escogieramos. Una vez escogido el punto en cada celda y sabiendo la función en él, lo multiplicamos por el volumen de la celda; esto nos dio una aproximación de la cantidad de metal en cada celda.

El siguiente paso fue sumar todas las productos; esta suma, que es una aproximación a la cantidad total, depende del tamaño de las celdas; esto es, de la norma de la red; pero depende también de cómo se seleccionaron las puntas y de cuáles puntas se eligieron en cada celda. Sin embargo, vimos que las diferencias inherentes a las distintas elecciones al respecto tendían a desaparecer a medida que la norma de la red se hacía más pequeña, y que las sumas se aglutinaban alrededor de un número que, en el caso del ejemplo, resultó ser 150 gr.

Las funciones que tienen esta propiedad, se dice que son **triplemente integrables** en la región correspondiente. En este caso, diremos que la función $C = 3x + 2y + z$ es triplemente integrable en V . Al número que resulte del procedimiento descrito, se le denomina **Integral Triple** de la función, en la región definida. En este caso, 150 gr es la integral triple de la función C en la región V y anotaremos:

$$150 \text{ gr} = \iiint_V C \, dx \, dy \, dz$$

Formalmente, diremos:

Definición 8.12.1: Si dado $E > 0$, existe $\delta > 0$, tal que $|\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n f(\xi_i, \eta_j, \zeta_k) \Delta x \, \Delta y \, \Delta z - I| < E$ cuando $\delta < \delta$

Se dice que la función $f(x, y, z)$ es integrable en la región V que el número "I" es la integral triple de $f(x, y, z)$ en tal región.

$I = \iiint_V f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz \dots (8.12.3.2)$

Ya te disto cuenta de la gran semejanza que existe entre la expresión (8.12.3.1) y la definición de límite; de ahí que suela escribirse:

$$I = \iiint_V f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = \lim_{\delta \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n f(\xi_i, \eta_j, \zeta_k) \Delta x \, \Delta y \, \Delta z \dots (8.12.3.3)$$

donde (ξ_i, η_j, ζ_k) son las coordenadas del punto elegido en cada celda; pero también te habrás dado cuenta de que no se trata de un límite ordinario. En efecto, en el límite ordinario, el valor del término en valor absoluto, depende exclusivamente del valor que se asigne a la variable; en cambio, en la expresión (8.12.3.1), para un mismo valor de δ , ya vimos que puedes obtener una infinidad de valores para el término en valor absoluto. De ahí que no podamos usar simplemente todas las propiedades de los límites ordinarios; por ejemplo:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) g(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

en cambio:

$$\iiint_V f(x, y, z) g(x, y, z) \, dx \, dy \, dz \neq \iiint_V f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz \iiint_V g(x, y, z) \, dx \, dy \, dz$$

Si estás consciente de esta diferencia, puedes utilizar la expresión (8.12.3.3) como una forma abreviada de definir la integral triple.

8.12.4) Existencia de la Integral Triple

En todas las funciones tienen la propiedad de ser integrables en una región; por consiguiente, conviene preguntarse cuáles tienen esa propiedad.

Cuando analizamos la función C , vimos que su continuidad implicaba que era integrable. ¿Serán integrables todas las funciones continuas? Veámoslo:
Consideremos una región prismática cualquiera

$$V = \{(x, y, z) \mid a \leq x \leq b; c \leq y \leq d; e \leq z \leq f\}$$

y la función $f(x, y, z)$ continua en V . Establezcamos una red cualquiera en V , de norma Δ .

Ahora recordamos el teorema Weierstrass que viste ya en Matemáticas I y volvimos a usar cuando estudiamos la integral doble; con este teorema en la mano podemos afirmar que hay un valor de la función dentro de la celda (i, j, k) que es el supremo por algún otro dentro de la misma celda y que llamaremos M_{ijk} . Inversamente, afirmaremos que exista, dentro de esa celda otro valor, m_{ijk} que no supera a algún otro dentro de la celda en cuestión.

Entonces, dentro de las infinitas posibilidades de escoger un punto dentro de la celda (i, j, k) , escogimos aquel en el cual el valor de la función es justamente M_{ijk} y procedamos en forma análoga en todas las celdas. Al sumar, tendremos

$$S = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^p M_{ijk} \Delta x_i \Delta y_j \Delta z_k \dots \quad (5.24.1)$$

¿Que pasará con esta suma si disminuimos la norma? Pero de las funciones que dividie cuando usamos una de las celdas; pero como esto lo hacemos que hacen con un plano, en realidad tendremos que dividir tanta una "pared" de celdas (Fig 5.24.6). Analicemos una de las celdas divididas (Fig 5.24.6):

Llamemos M_{ijk} al valor de la función que se es supremo por otro dentro de la parte A y m_{ijk} a su análogo en la parte B.

Inversamente:

$$M_{ijk} \geq m_{ijk}$$

$$M_{ijk} = M_{ijk}$$

Si el volumen de A es ΔV_{ijk}^A y el volumen de B es ΔV_{ijk}^B entonces la celda (i, j, k) contribuirá a la nueva suma en

$$M_{ijk} \Delta V_{ijk}^A + m_{ijk} \Delta V_{ijk}^B \leq M_{ijk} \Delta V_{ijk}^A + M_{ijk} \Delta V_{ijk}^B$$

$$M_{ijk} \Delta V_{ijk}^A + m_{ijk} \Delta V_{ijk}^B \leq M_{ijk} (\Delta V_{ijk}^A + \Delta V_{ijk}^B) = M_{ijk} \Delta V_{ijk}$$

De esta manera, la contribución de cada celda a la suma "S" disminuirá (o en algún caso particular permanecerá igual) al ser partido; así, podemos afirmar que, si disminuimos la norma de la red, la suma "S", formada como se explicó anteriormente, disminuirá.

(Por supuesto igual si $f(x, y, z)$ etc.)

En forma análoga, con la red original de norma Δ , podemos escoger los puntos m_{ijk} y formar la suma

$$S = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^p m_{ijk} \Delta x_i \Delta y_j \Delta z_k \dots \quad (5.24.2)$$

y podemos demostrar que, si la norma disminuye, "S" aumenta, o al menos queda igual.

Pero si "S" aumenta y "S" disminuye, cuando disminuimos la norma ¿cubrirá la posibilidad de que "S" se redujera mayor que "S"? No, puesto que m_{ijk} nunca podrá ser mayor que M_{ijk} en la misma celda. Cualquier suma que se intente, escogiendo puntos diferentes de los indicados se encontrará necesariamente entre los valores de "S" y "S".

Ahora bien, como diríamos hace poco, en toda función continua, los valores de ella, evaluados en puntos diferentes, se parecen tanto más cuanto más cercanas estén las partes. M_{ijk} y m_{ijk} son dos valores de la función $f(x, y, z)$ evaluados en dos puntos diferentes de la misma celda, cuando la diagonal de ésta tiende a cero, ambos puntos tienden a acercarse, por lo que la diferencia entre ambos valores tiende a disminuirse. Matemáticamente expresamos esto:

$$M_{ijk} - m_{ijk} = \epsilon > 0 \quad \text{cuando } \Delta = \delta > 0 \dots \quad (5.24.3)$$

Ahora, al restar miembro a miembro (5.24.1) y (5.24.2):

$$S - S = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^p (M_{ijk} - m_{ijk}) \Delta x_i \Delta y_j \Delta z_k$$

y, al tomar en cuenta (5.24.3):

$$S - S = \epsilon \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^p \Delta x_i \Delta y_j \Delta z_k = \epsilon \text{ Vol de la región}$$

Toda vez que el volumen de la región es finito, podemos hacer la diferencia $S - S$ tan pequeña como nosotros queramos y sin que se vuelva negativa; esto quiere decir que están convergiendo a un número \mathcal{I} , por consiguiente, todas las sumas intermedias; entonces, la integral triple existe y establecemos afirmativamente la pregunta que inició la discusión y esto nuevo establecese en el siguiente.

Teorema 5.12.1: Toda función continua es integrable en la región en que es continua.

Pero no solamente las funciones continuas son integrables; para discutir este asunto, repasamos nuevamente el concepto de contenido nulo en un conjunto de puntos. Este concepto lo vimos en el plano, cuando discutíamos la integral doble; ahora lo trasladaremos al espacio de n dimensiones.

Definición 5.12.2: Dado $\epsilon > 0$, si todos los puntos de un conjunto pueden quedar encerrados en un número finito de prismas, cuyos volúmenes sumen una cantidad $< \epsilon$, se dice que el conjunto de puntos tiene un contenido de Jordan nulo, o simplemente contenido nulo.

Se podría pensar que un número cualquiera de puntos aislados en el espacio, con tal que sea finito, tiene contenido nulo; también podría intuir que las curvas rectificables tienen esta propiedad; pero lo más interesante es que

Teorema 5.12.2: El conjunto de puntos que pertenecen a una superficie suave, tiene contenido nulo.

Corolario 5.12.1: El conjunto de puntos que pertenecen a un número finito de superficies suaves, tienen contenido nulo.

La demostración de este teorema la puedes encontrar en el anexo (5.12)

Ahora bien, volvamos al punto de cuáles otras funciones, aparte de las continuas son integrables? Aquellas que son acotadas y cuyos puntos de discontinuidad forman un conjunto de contenido nulo, lo que formalmente se dice es en el siguiente

Teorema 5.12.3: Si una función $f(x, y, z)$ es acotada en la región $V = \{(x, y, z) / a \leq x \leq b; c \leq y \leq d; e \leq z \leq f\}$ y sus puntos de discontinuidad, dentro de la misma, forman un conjunto de contenido nulo, la función $f(x, y, z)$ es integrable en la región V .

Si entendiste bien la demostración del teorema análogo para integral doble; no te será difícil entender la demostración del presente teorema, que se encuentra en el anexo (5.12).

Ejemplo 5.12.1: La función $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ es integrable en la región $V = \{(x, y, z) / 0 \leq x \leq 5; 0 \leq y \leq 7; 2 \leq z \leq 4\}$ porque es continua en toda esa región.

Ejemplo 5.12.2: La función $f(x, y, z) = \begin{cases} x^2 + 2z & \text{si } z = 2 \\ 0 & \text{si } z > 2 \end{cases}$ ¿es integrable en $V = \{(x, y, z) / 0 \leq x \leq 2; 0 \leq y \leq 4; 0 \leq z \leq 5\}$?

Solución: La función es discontinua en V ; en efecto, superponer el punto $P(1, 3, 2) \in V$:
 $f(1, 3, 2) = 2$
y también $Q(1, 3, 2 + \delta) \in V$ ($\delta > 0$)
 $f(1, 3, 2 + \delta) = 0$
y el incremento:
 $\Delta f = -2$, lo donde como cuando $\delta \rightarrow 0^+$

los puntos de discontinuidad se agrupan en el plano $z = 2$, que como se ve tiene como que la función $f(x, y, z)$ es integrable en V .

Ejemplo 5.12.3: La función $f(x, y, z) = \sqrt{25 - x^2 - y^2 - z^2}$ ¿es integrable en $V = \{(x, y, z) / -6 \leq x \leq 6; -6 \leq y \leq 6; -6 \leq z \leq 6\}$?

La función no existe y por lo mismo es discontinua, fuera de la región $U = \{(x, y, z) / x^2 + y^2 + z^2 \leq 25\} \subset V$.

Los puntos de discontinuidad forman ahora una región U que podemos definir $W = V \cap U \subset V$ y una región W tiene contenido nulo en E_3 .

\Rightarrow la función f es integrable en V

(Imagínate una red sobre la región V ; considera la celda que contiene al punto $(6, 6, 6)$; tienes que escoger un punto dentro de esa celda, escoge al indirecto; ahora tienes que valor la función en ese punto ¿o cuál es ese valor?)

Cada hacer una definición: la función

$$f(x, y, z) = \begin{cases} \sqrt{15 - x^2 - y^2 - z^2} & \text{si } (x, y, z) \in U \\ 0 & \text{si } (x, y, z) \in W' \end{cases}$$

Si es integrable en V , porque ahora f es la función definida y hecha continua en W ; los puntos de discontinuidad están ahora exclusivamente en la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 25$

que es una superficie suave; por consiguiente, el conjunto de puntos de discontinuidad tiene ahora contenido nulo.

5.13) REDES EN UNA REGIÓN DEL ESPACIO E^3

El concepto de red en una región del espacio E^3 es el mismo que ya guardamos suficientemente aclarado con las ilustraciones hechas hasta ahora; sin embargo, es conveniente formalizar el concepto.

Sea la región $R = \{(x, y, z) \mid a \leq x \leq b; c \leq y \leq d; e \leq z \leq f\}$

La proyección de esta región sobre el eje x será el intervalo $I: [a, b]$; un hecho que, sus proyecciones sobre los ejes y, z serán, respectivamente: $I_a [c, d], I_b [e, f]$

Ahora recuerda que, en Matemáticas II, se define "red" o "partición" sobre un intervalo cerrado. Hicimos por uso de ese concepto para establecer sendas redes o particiones en los intervalos $[a, b], [c, d]$ y $[e, f]$, quedando así definidos los puntos (fig. 5.13.1)

$$a: x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b \dots (5.13.0.1)$$

$$c: y_0 < y_1 < y_2 < \dots < y_{m-1} < y_m = d \dots (5.13.0.2)$$

$$e: z_0 < z_1 < z_2 < \dots < z_{l-1} < z_l = f \dots (5.13.0.3)$$

Ya vimos que, si por cada uno de los puntos definidos en las redes (5.13.0.1) y (5.13.0.2) trazamos rectas perpendiculares al eje correspondiente, se define una red sobre la región

$$R(x, y) \mid a \leq x \leq b; c \leq y \leq d \subset E^3$$

Si, ahora, por cada uno de los puntos definidos según las redes

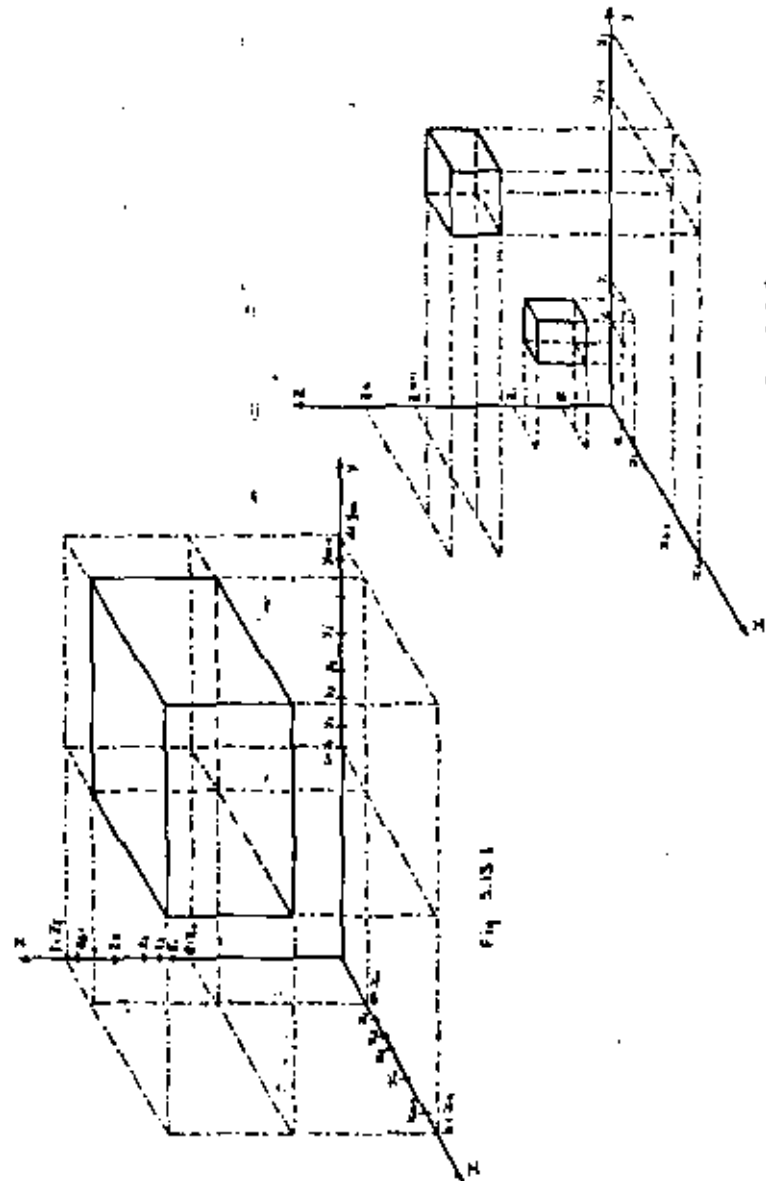


Fig. 5.13.1

(5.13.0.1), (5.13.0.2), (5.13.0.3) trazamos planos perpendiculares al eje respectivo, es decir, los planos de ecuaciones $x=x_1, x=x_2, \dots, y=y_1, y=y_2, \dots, z=z_1, z=z_2, \dots, z+z_1, z+z_2, \dots$. Se dice que no ha establecido una red en la región V .

Se puede decir que la red sobre V es la intersección de las redes sobre los intervalos I_1, I_2, I_3 .

El resultado es que la región V ha quedado dividida en subregiones de forma prismática rectangular a las cuales se denominan celdas de la red y se identifican según el orden que ocupa el vértice más alejado del origen dentro de la red en cada eje. Así por ejemplo (ver figura 5.13.2) la celda que tiene por vértices $(a, c, e), (x, c, e), (a, y, e), (x, y, e), (a, z, e), (x, z, e), (a, y, z), (x, y, z)$; su vértice más alejado del origen es el último; x_1 ocupa el primer lugar en la red (5.13.0.1) y_1 , ocupa el primer lugar en la red (5.13.0.2); z_1 ocupa el primer lugar en la red (5.13.0.3); así a esta celda la llamamos V_{111} . En general, la celda cuyos vértices son (ver sucesivamente fig 5.13.2); $(x_{11}, y_{11}, z_{11}), (x_1, y_1, z_{11}), (x_{11}, y_1, z_{11}), (x_1, y_1, z_{11}), (x_{11}, y_{11}, z_{11}), (x_1, y_{11}, z_{11}), (x_{11}, y_1, z_{11}), (x_1, y_1, z_{11})$ la llamamos $V_{i_1 j_1 k_1}$ su volumen:

$$\Delta V_{i_1 j_1 k_1} = (x_1 - x_{11})(y_1 - y_{11})(z_1 - z_{11}) = \Delta x_1 \Delta y_1 \Delta z_1 \quad (5.13.0.0)$$

Definición 5.13.1. Se llama diámetro de celda prismática fija a

$$\sqrt{(x_1 - x_{11})^2 + (y_1 - y_{11})^2 + (z_1 - z_{11})^2}$$

En otras palabras, diámetro es la longitud de un diagonal del prisma.

Definición 5.13.2. Se llama malla de una red establecida sobre la región $V \in E^3$, al mayor de los diámetros de sus celdas.

A este parámetro, como ya vimos, se lo denota con la letra Δ . Es evidente que

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} \Delta V_{i_1 j_1 k_1} = 0$$

5.14. REGION EN EL ESPACIO E^3

El concepto de región nos es también conocido desde hace tiempo, formalmente no lo he definido como un conjunto cerrado de puntos y arcos, pero al caso de los espacios E^1 y E^2 , sabemos que no quiere decir que los puntos cualesquiera del conjunto, son susceptibles de unirse por medio de una línea quebrada con un número finito de lados, tal que todos los puntos de dicha línea pertenecen al conjunto. Los conjuntos de puntos que todos en la fig (5.14.1) son curvas γ , por lo mismo, se denominan regiones.

En este sistema vamos a recordar cómo se pueden describir analíticamente las regiones en E^3 y además, hagamos una clasificación de las mismas.

Esta clasificación es muy similar a las de las regiones en E^2 , que ya vimos anteriormente.

Definición 5.14.1. Se dice que una región $V \in E^3$ es normal, si un plano cualquiera, paralelo a algún plano coordenado, la corta según una región plana normal.

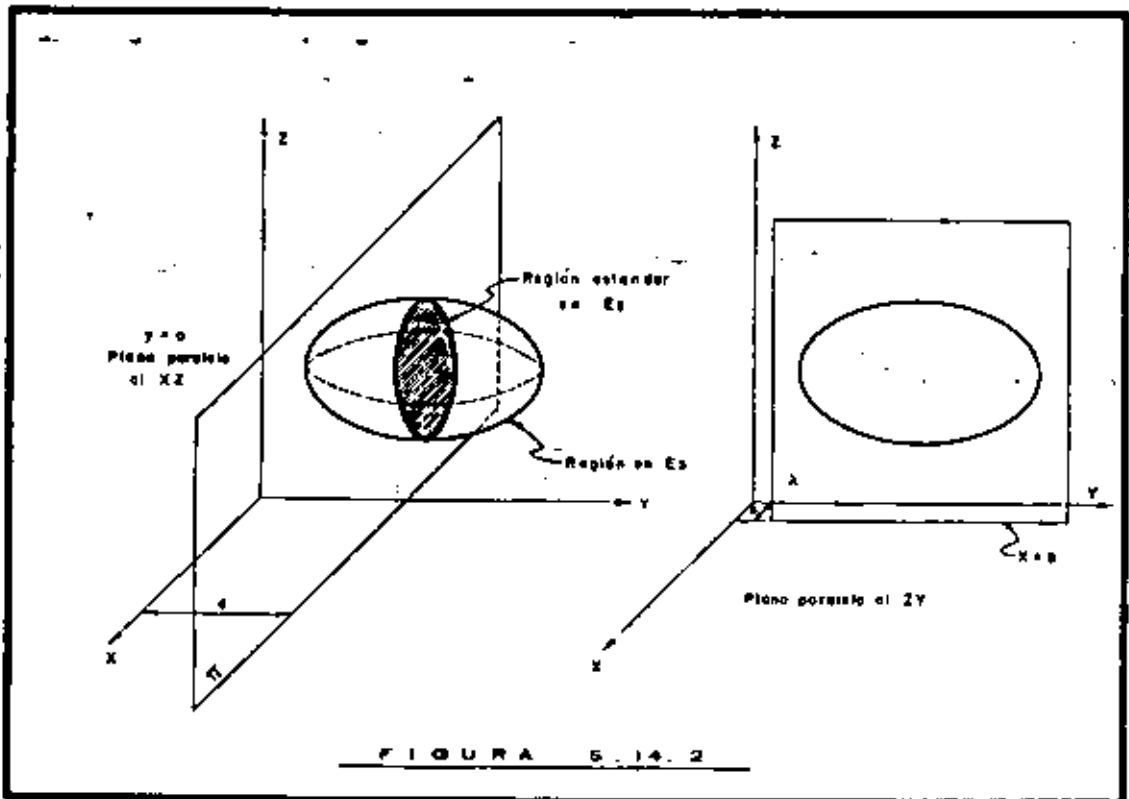
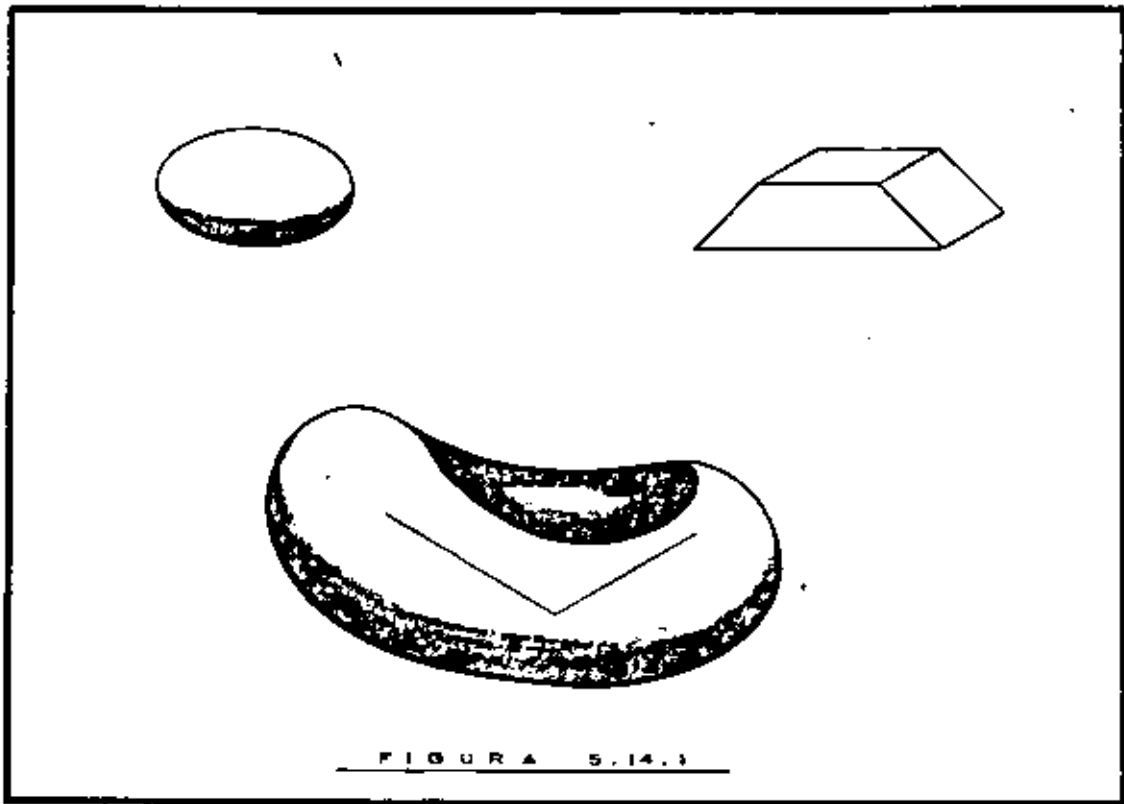
Las regiones de la figura (5.14.2) son normales.

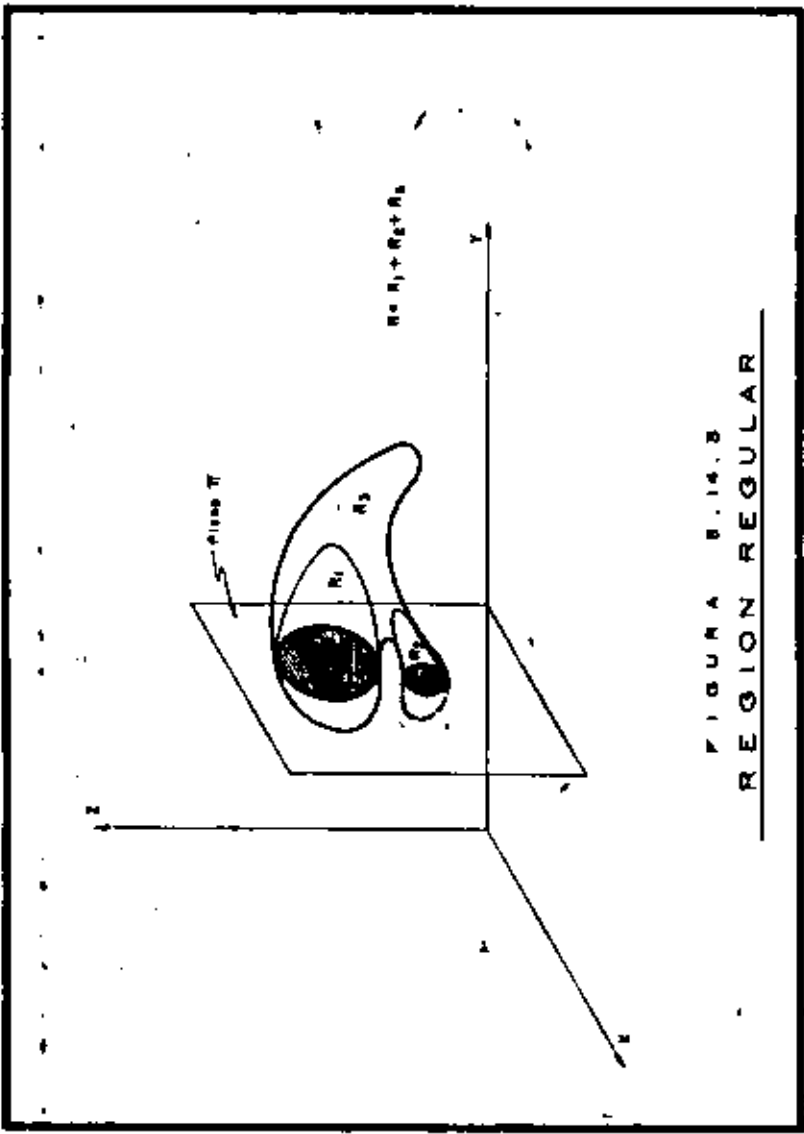
Definición 5.14.2. Se dice que una región $V \in E^3$ es regular, si puede descomponerse en un número finito de regiones normales.

La región de la figura (5.14.3) es una región regular.

Por lo que respecta a su descripción analítica, ya sabemos que hay muchas formas de hacerlo; por ejemplo, en el ejemplo (5.14.3) definamos a las regiones V, U, W de otras tantas maneras distintas y todas son válidas. La forma de definición que aquí vamos a proponer tiene el objetivo principal de ser utilizada para cálculo de integrales triples.

La discusión se basará principalmente en ejemplos, para después generalizar; pero al igual que lo hicimos cuando se trataban las regiones en el plano, hagamos una advertencia: definir regiones tridimensionales, requiere





el dominio de la Geometría Analítica en tres dimensiones; sin ese requisito, ya podríamos ilustrar todos los ejemplos que quisiéramos, que nunca se aprenderá a definir regiones.

Así pues, lo que sigue será una simple aplicación de nuestros conocimientos de Geometría Analítica a la definición de regiones tridimensionales.

Ejemplo 3.14.1) Definir la región "V" limitada por los planos $x=a, x=b, y=c, y=d, z=e, z=f$ (Fig 3.14.1)

Este caso se resuelve instantáneamente y de hecho ya lo hemos definido en el sistema (3.13). La idea de considerarlo como ejemplo, es que reflejemos un poco acerca del significado de la definición analítica, a fin de tomarlo como base en casos más complejos.

Lo primero que tenemos que hacer es cortar a nuestra región con un plano normal a algún eje coordenado; en este caso, cualquier plano que escogamos en esa característica nos corta a la región según una misma forma, por lo que ningún eje parece ser más ventajoso que otro. Escogamos entonces cortar la región con un plano normal al eje "z". El resultado del corte es una región plana R que ya sabemos definir.

$$R\{(y,z) / c \leq y \leq d ; e \leq z \leq f\}$$

Ahora bien, en este caso, mientras movemos el plano de corte paralelamente a sí mismo, dentro del intervalo $a \leq x \leq b$, la región de corte va a ser la misma. Entonces escribimos:

$$V\{(x,y,z) / a \leq x \leq b ; c \leq y \leq d ; e \leq z \leq f\}$$

Ejemplo 3.14.2) Definir analíticamente la región "V" limitada por $z^2+y^2 = a^2, z=3$ y el plano xy. (Fig 3.14.2)

Escogamos ahora planos normales al eje z. Uno cualquiera de estos planos corta a la frontera cilíndrica según una región circular, que ya sabemos cómo definir, aunque para ello debemos decidir primero si lo cortamos por rectas normales a "y" o a "x".

S.181

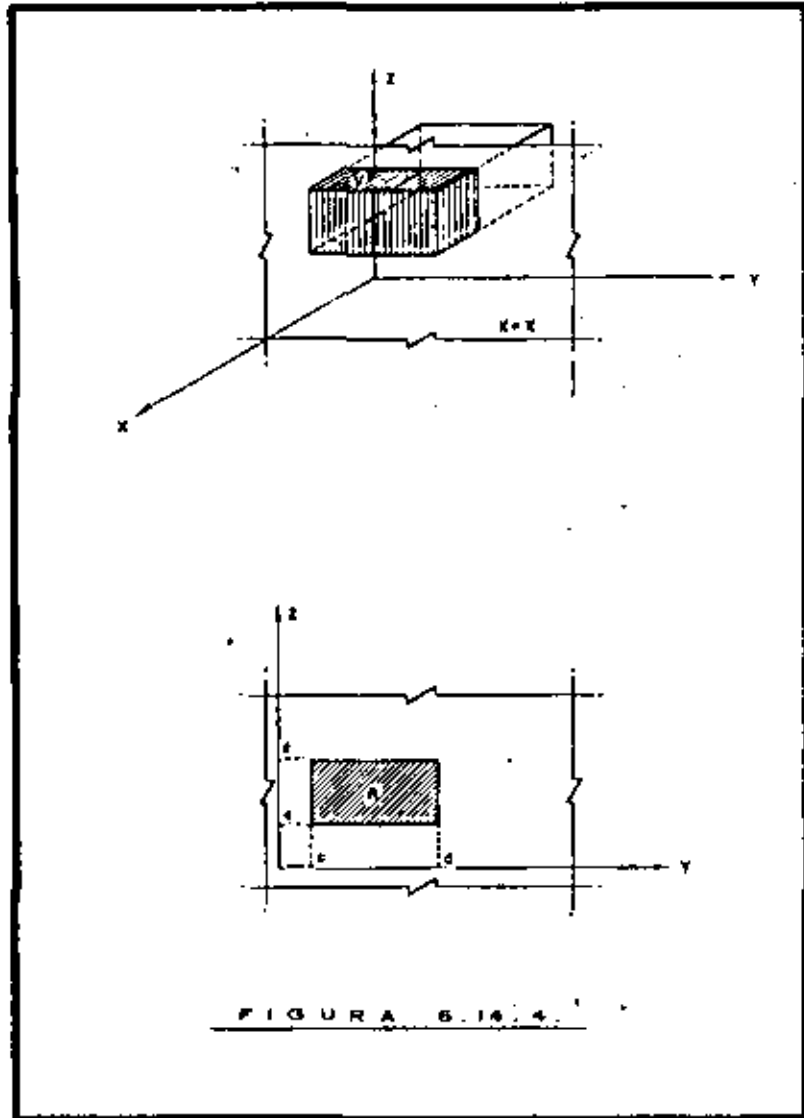


FIGURA 5.14.4.

S.182

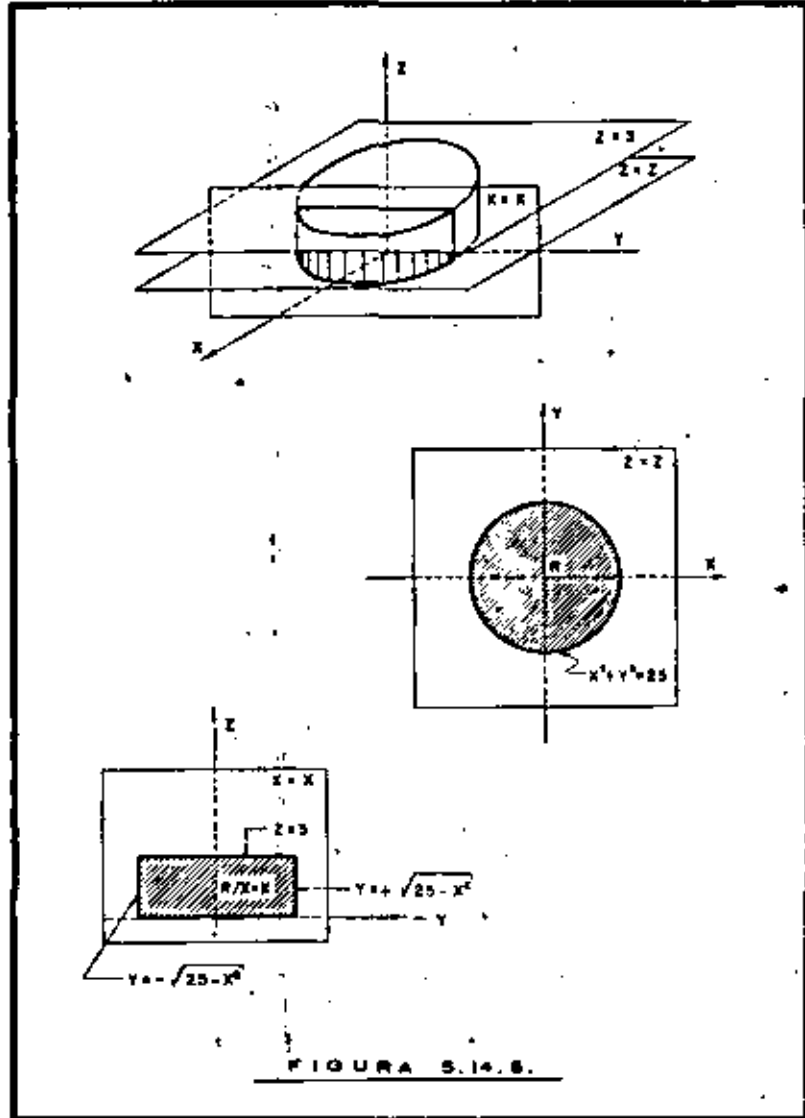


FIGURA 5.14.5.

Escojamos rectas normales a "y"

$$R\{(x,y) / -5 \leq y \leq 5; -\sqrt{25-y^2} \leq x \leq \sqrt{25-y^2}\}$$

Desde luego, los planos secantes deben moverse en el intervalo $0 \leq z \leq 3$ para que realmente intersecten la región. Así:

$$V\{(x,y,z) / 0 \leq z \leq 3; -5 \leq y \leq 5; -\sqrt{25-y^2} \leq x \leq \sqrt{25-y^2}\}$$

Podríamos también elegir planos normales al eje "x", para intersectar a la región. En tal caso, debemos establecer la región plana correspondiente que, como puedes ver en la propia figura (5-11.3) es siempre una región rectangular. Veamos primero qué región define el plano $x=3$ al cortar a nuestra región; para saber los límites, sustituimos $x=3$ en las ecuaciones de los frentes:

a) En el cilindro $x^2 + y^2 = 25$

$$9 + y^2 = 25; \quad y^2 = 16 \Rightarrow y = \pm 4$$

b) En los planos $z=3$ y $z=0$ no tiene influencia x , por lo que permanecen así:

$$R_{\text{int}}\{(y,z) / -4 \leq y \leq 4; 0 \leq z \leq 3\}$$

Para si intersectamos "V" con el plano $x=0$ obtenemos:

$$R_{\text{ext}}\{(y,z) / -5 \leq y \leq 5; 0 \leq z \leq 3\} \neq R_{\text{int}}$$

Debemos ser capaces entonces de definir R_{ext} a cómo? pues como hicimos en (a), sólo por consideración que z puede tener cualquier valor

$$x^2 + y^2 = 25; \quad z = 0 \Rightarrow y = \pm \sqrt{25-x^2}$$

Entonces

$$R_{\text{ext}}\{(x,y,z) / 0 \leq z \leq 3; -\sqrt{25-x^2} \leq y \leq \sqrt{25-x^2}\}$$

Desde luego, este sólo es cierto en el intervalo $-5 \leq x \leq 5$, pues cualquier valor fuera de él implicaría raíces imaginarias. Así:

$$V\{(x,y,z) / -5 \leq x \leq 5; 0 \leq z \leq 3; -\sqrt{25-x^2} \leq y \leq \sqrt{25-x^2}\}$$

Hemos definido la misma región V de dos maneras distintas y ambas igualmente válidas, todavía podríamos definirla de una manera más,

escojendo planos de corte normales al eje "y". Hazlo como ejercicio, ¡te hará

Ejemplo 5.14.3) Definir analíticamente la región "V" comprendida dentro de la esfera de radio 4 y centrada en el origen (fig. 5-11.4)

Escojamos planos de corte normales al eje x. Al cortar a "V" con estos planos obtenemos regiones circulares que varían con el plano escogido; por ejemplo, si cortamos con $x=0$ y luego con rectas normales a "y":

$$R_{\text{int}}\{(y,z) / -4 \leq y \leq 4; -\sqrt{16-y^2} \leq z \leq \sqrt{16-y^2}\}$$

En tanto que si escogemos el plano $z=3$:

$$7 + y^2 + z^2 = 16; \quad z = 3 \Rightarrow y = \pm \sqrt{9-y^2}$$

por lo que

$$R_{\text{ext}}\{(y,z) / -3 \leq y \leq 3; -\sqrt{9-y^2} \leq z \leq \sqrt{9-y^2}\}$$

Debemos ser capaces entonces de encontrar una expresión que describa a R_{ext} , en la cual, no sólo cambiamos los límites de "z" sino también los de "y". Sabemos cómo definir los primeros:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 16; \quad z = 3 \Rightarrow y = \pm \sqrt{16-x^2-9}$$

pero ¿y los límites de "y"? Bien, cuando establecimos las regiones R_{int} y R_{ext} , nos dimos cuenta de que en ambos casos las regiones circulares tenían su centro en el eje x; de ahí que en ambos casos hagamos $x=0$ cuando los límites de "y" haciendo $x=0$ en la ec. del círculo correspondiente. Así en este trabajo visualizamos que lo mismo va a ocurrir con todos los demás planos de corte; por lo que:

Ec. del círculo de corte, para $x=x$:

$$y^2 + z^2 = 16 - x^2$$

Si $z=0$

$$y^2 = 16 - x^2 \Rightarrow y = \pm \sqrt{16-x^2}$$

¿ así:

$$R_{\text{ext}}\{(x,y,z) / -\sqrt{16-x^2} \leq y \leq \sqrt{16-x^2}; -\sqrt{16-x^2-y^2} \leq z \leq \sqrt{16-x^2-y^2}\}$$

y como los planos de corte los podemos mover sobre el intervalo $-4 \leq x \leq 4$,

$$V\{(x,y,z) / -4 \leq x \leq 4; -\sqrt{16-x^2} \leq y \leq \sqrt{16-x^2}; -\sqrt{16-x^2-y^2} \leq z \leq \sqrt{16-x^2-y^2}\}$$

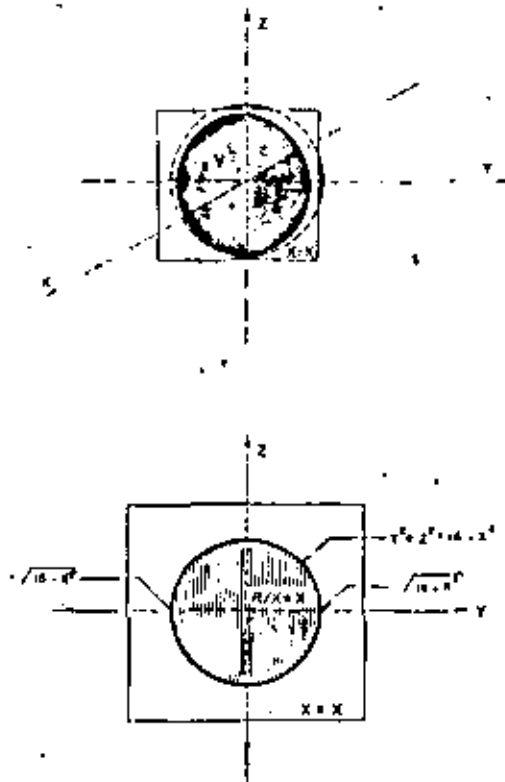


FIGURA 5.14.6.

Como ejercicio, defina la misma región:

- Cortando con planos normales a x^2 , pero cortando la región plana resultante con rectas normales a z^2 .
- Cortando con planos normales a y^2 y luego con rectas normales a x^2 .
- Cortando con planos normales a z^2 y luego con rectas normales a x^2 .
- Cortando con planos normales a x^2 y luego con rectas normales a z^2 .
- Cortando con planos normales a x^2 y luego con rectas normales a y^2 .

Ejemplo 5.14.9): Definir analíticamente la región limitada por las superficies $yz = z^2$; $z = y - z^2$ (Fig. 5.14.7).

Escogamos planos normales a y^2 y obtendremos regiones como las mostradas en la figura indicada. Es decir, ahora la región definida por el corte, no sólo cambia en cuanto a tamaño, sino que también cambia de forma y, por consiguiente de expresiones para definirla; por ejemplo, al cortar con $y = \frac{1}{4}$, obtenemos la región mostrada en la figura (5.14.7. b), que se puede definir:

$$R_{\frac{1}{4}} = \{(x, z) \mid -\frac{1}{2} \leq z \leq \frac{1}{2}; -\sqrt{\frac{1}{4} - z^2} \leq z \leq \sqrt{\frac{1}{4} - z^2}\}$$

En cambio, si cortamos con $y = \frac{9}{4}$, obtenemos la región de la fig. (5.14.7 c) que definimos:

$$R_{\frac{9}{4}} = \{(x, z) \mid -\frac{3}{2} \leq z \leq \frac{3}{2}; -\sqrt{\frac{9}{4} - z^2} \leq z \leq \sqrt{\frac{9}{4} - z^2}\}$$

En el primer caso, los límites de z^2 los podemos tener en general si hacemos $y = y$ en la ec. de la paraboloida

$$y = x^2 + z^2 \Rightarrow x = \pm \sqrt{y - z^2}$$

y los de x^2 , haciendo además $z = 0$, ya que todos los círculos tienen su centro en el eje y^2 .

$$y = z^2 \Rightarrow z = \pm \sqrt{y}$$

con lo que

$$R_{\frac{y}{y}} = \{(x, z) \mid -\sqrt{y} \leq z \leq \sqrt{y}; -\sqrt{y - z^2} \leq x \leq \sqrt{y - z^2}\}$$

Para no sólo ser cierta desde $y = 0$ hasta el mínimo valor de y en la intersección del paraboloida y el plano $z = y - z^2$. Este valor ($y = 1$) fue calculado en el ejemplo (2. 4. 9). Además, en la figura medirá en $y = 0$ ocurre sobre el plano $y = 0$.

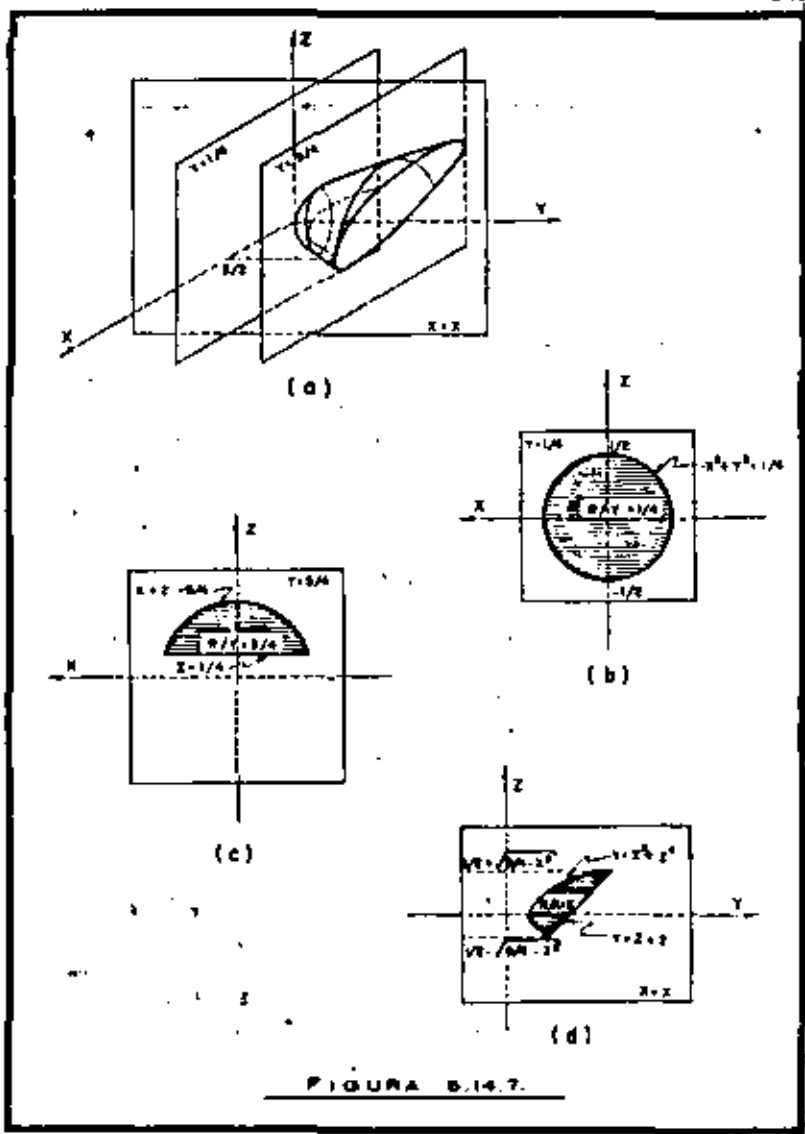


FIGURA 8.14.7.

En el segundo caso, podemos proceder análogamente; los límites darán $x = \pm \sqrt{y-2}$

y para los límites de z , debemos considerar, por un lado, que la parte circular sigue teniendo su centro en el eje y , lo que implica hacer $x=0$ en la ecuación del paraboloido:

$$y = z^2 \rightarrow z = \pm \sqrt{y}$$

y por otro lado, que a la recta horizontal es la intersección de $y = y$ con $z = y - 2$ por lo que

$$R'_{1/2} \{ (x, z) / y = 2 = \sqrt{y}; -\sqrt{y-2} = x = \sqrt{y-2} \}$$

y esto será cierto entre el valor de y antes mencionado y el máximo valor de y en la curva de intersección la que también está calculada en el ejemplo antes citado y de $y = 4$. En todo caso, en la figura (8.14.7) es también bastante claro que tal ocurre en el plano yz .

Puesto que $R'_{1/2}$ no puede asimilarse a $R'_{1/2}$, ni siquiera, tendríamos que dividir nuestra región V en dos subregiones:

$$V \{ (x, y, z) / 0 \leq y \leq 2; -\sqrt{y} \leq z \leq \sqrt{y}; -\sqrt{y-2} \leq x \leq \sqrt{y-2} \}$$

$$V_2 \{ (x, y, z) / 2 \leq y \leq 4; y-2 \leq z \leq \sqrt{y}; -\sqrt{y-2} \leq x \leq \sqrt{y-2} \}$$

definiendo $V = V_1 \cup V_2$.

El procedimiento fue laborioso y nos preguntamos si no podríamos simplificarlo; quizás podríamos empezar por preguntarnos si por qué decidimos cortar con planos normales al eje y ? es real, ¿hay una razón espacial para ello? podríamos considerarlo como un primer tanteo (aunque aquí, entre nos, lo hicimos para ilustrar los consecuentes de una decisión inadecuada). Ya sabemos que la integración y sus aspectos conexas deben realizarse por tanteos; equivocarse, pues, en uno de ellos, no es "pecado", simplemente hay que hacer otro tanteo. Cortemos ahora con planos normales al eje x . La figura (8.14.7d) nos enseña ahora una parábola cortada por una recta. Caso muy similar al del ejemplo (8.7.4); de hecho, se trata igual si $x=0$:

$$R'_{1/2} \{ (y, z) / 1 \leq z \leq 2; z^2 = y = 2 \}$$

En general, para obtener los límites de y , hacemos $x=0$ en la ec.

del paraboloide (la ec. del plano no depende de x)

$$y = x^2 + z^2$$

$$y = z^2$$

y para obtener los límites de " z " consideremos la intersección de los planos $x = x$, $z = y - z$ con el paraboloide, lo que da:

$$x^2, x^2 = z + z; \quad x^2 - z = (x^2 - z) = 0$$

$$z = \pm \sqrt{x^2 - z} \Rightarrow z = \pm \sqrt{x^2 - z^2}$$

Así: $R/\text{proy. } \{(y, z) / z = \sqrt{x^2 - z^2} \text{ o } z = -\sqrt{x^2 - z^2}; x^2 + z^2 = y = a^2\}$

Y esto será cierto en el intervalo $-\frac{3}{2}a \leq x \leq \frac{3}{2}a$, ya que valores fuera de este intervalo darían lugar a raíces imaginarias en los límites de " z ". También pueden encontrarse estos valores si hallas los valores máximo y mínimo de " z " en la curva de intersección del paraboloide con el plano $z = y - z$. Entonces

$$\nabla f(x, y, z) / \lambda = 2x = 2\lambda; \quad \pm \sqrt{x^2 - z^2} = z \pm \sqrt{x^2 - z^2}; x^2 + z^2 = y = a^2$$

Como ejercicio, define esta misma región eligiendo planos normales a z (horizontales). Tal vez te parezca la más sencilla de todas; en realidad, es difícil decirlo a priori por lo que te vas a hallar o por lo que acabamos de encontrar. Debemos esperar a aplicarla a una integral concreta, como veremos más adelante, para poder juzgar.

Tratemos ahora de obtener conclusiones generales, si es posible. Como ya habíamos dicho, no es posible acentar una "receta" que sirva para todos los casos. Definir adecuadamente una región tiene algo de "arte" o, por lo menos, requiere de una gran porción de "ojito clínico" y una buena dosis de imaginación, que nos permita "ver" la región en un espacio tridimensional.

El primer paso será siempre cortar la región con planos normales a algún eje cartesiano o axial. No es posible dar reglas fijas sin vez de cada la orientación de los planos secantes, tendremos en general una región que varía en forma y/o tamaño con respecto a la variable solucionada (Venás a tener "variable solucionada" a la que se asocia con el eje normal a los planos de corte), por

lo cual, al definir una región plana, los límites quedarán en términos de dicha variable.

Si esta línea que define la región plana, debemos tomar esta decisión, por lo menos, cortar con secciones paralelas a cualquiera de los ejes. En total, tendremos 6 posibilidades, de las cuales mencionaremos dos, para que tú deducas las otras cuatro.

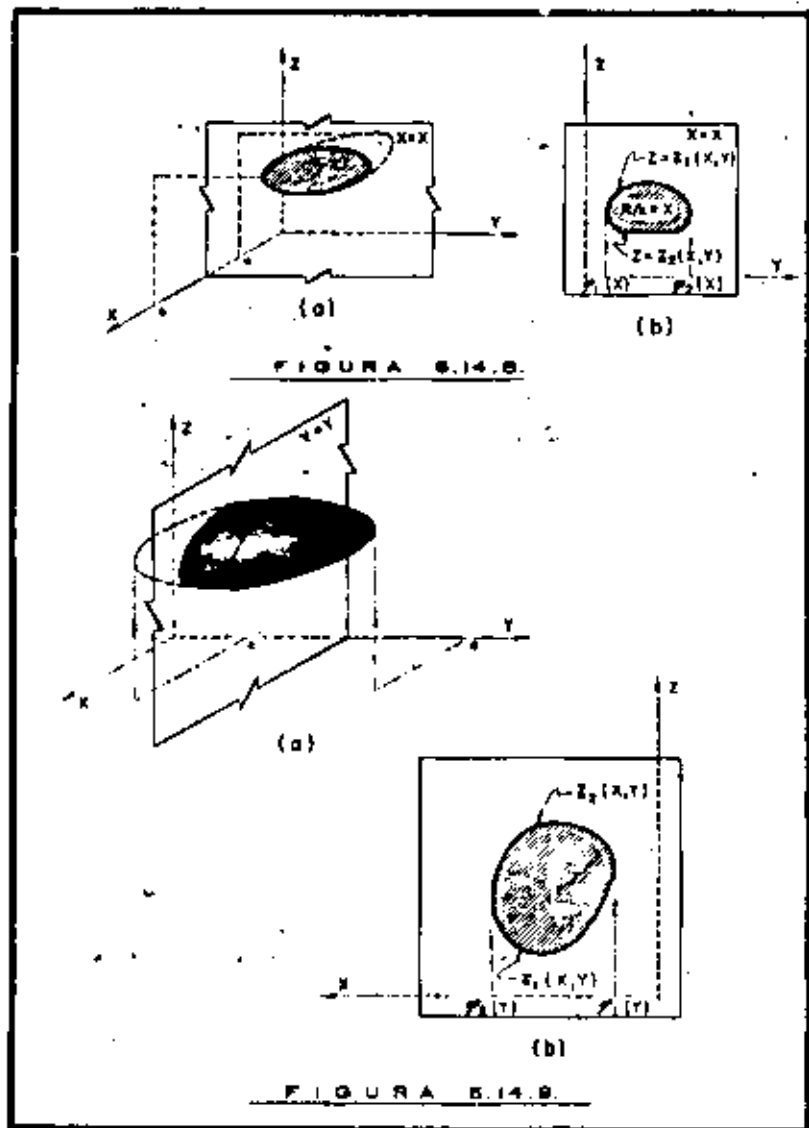
• Una posibilidad: Cortamos la región V con planos normales al eje " x " y, a la región plana que resulte, con secciones normales al eje " y ". (Fig 5.14. B. a y b)

La región plana se define en general

$$R/\text{proy. } \{(y, z) / f_1(z) \leq y \leq f_2(z); z_1(x, y) \leq z \leq z_2(x, y)\}$$

donde " f_1 " y " f_2 " se obtienen despejando " z " de las ecuaciones de las fronteras correspondientes. " f_1 " y " f_2 " se obtienen, en general como mínimo y máximo valores de " y ", respectivamente, considerando a " x " como constante; usálgamela; en el ejemplo (5.11.3), nos preguntáramos por los valores mínimo y máximo de " y " en la circunferencia $y^2 + z^2 = 16 - x^2$; Sin embargo, cabe aclarar que, en la mayoría de los casos prácticos, una buena representación gráfica de la región permitirá visualizar fácilmente estas funciones.

• Otra posibilidad: Cortamos primero con planos normales a " y " y luego



con estas variables a "z". (Fig 5.14.8 a y b)

La región plana se define, en general:

$$R_{x,y} = \{ (x,y) / \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y); z_1(x,y) \leq z \leq z_2(x,y) \}$$

Si la región cambia bruscamente de forma, (Ejemplo 5.14.4) es posible que tengamos que cambiar la expresión correspondiente dos o más veces para cubrir todas las posibilidades. En todo caso, como último paso del procedimiento para definir una región, debemos fijar el intervalo en la variable seleccionada, para el cual se cumple la definición de región correspondiente.

Como procedimiento general para ello, se puede decir que consistirá en obtener un máximo y un mínimo; ver el criterio de la segunda derivada si la función es única, por Lagrange en caso contrario; sin embargo, cabe decir que, en la mayoría de los casos, una buena figura con suficiente para definir el intervalo y llegar finalmente a cualquiera de mis expresiones, de las cuales lo vamos a minimizar las correspondientes a los regiones planas dadas; y también obtener los valores exactos.

• Primera posibilidad:

$$\{ (x,y,z) / a \leq x \leq b; \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y); z_1(x,y) \leq z \leq z_2(x,y) \} \quad (5.14.1)$$

• Segunda posibilidad:

$$\{ (x,y,z) / c_1(y) \leq x \leq c_2(y); z_1(x,y) \leq z \leq z_2(x,y) \} \quad (5.14.2)$$

Si consideramos el ejemplo (5.14.9), identificamos fácilmente la siguiente zona:

Utilizamos la forma (5.14.1); entonces:

$$a = 0$$

$$b = 10$$

$$\psi_1(y) = -\sqrt{10-y^2}$$

$$\psi_2(y) = \sqrt{10-y^2}$$

$$z_1(x,y) = \sqrt{10-x^2-y^2}$$

$$z_2(x,y) = \sqrt{10-x^2-y^2}$$

3.15 Interpretación Física y Propiedades de la Integral Fija

Como vimos el problema (3.12.2) encontramos una interpretación física para la

la integral triple, que, estrictamente hablando, se refiere a una cierta clase de volúmenes contenidos en una región V y cuya densidad variable está dada por la ley $\rho(x, y, z)$, la cantidad de la siguiente naturaleza, contenida en V sería

$$M = \iiint_V \rho(x, y, z) dx dy dz$$

Así es, desde luego, este caso el único susceptible a través de la integral triple: hay otros tipos de volúmenes que tienen plena significación dentro del contexto de la integral triple.

Es claro que tal esquema tiene distintos ejemplos según el tipo (partes) en que se divide. Por ejemplo, una combinación de hiperplanos contendría a las más pesadas abajo y a las más ligeras arriba; si llamamos ρ_0 a la densidad, tendríamos en tal caso

$$\rho = \rho_0 \frac{z}{z_0}$$

Más general sería el caso de una masa compuesta de distintos materiales, en el cual

$$\rho = \rho(x, y, z)$$

En tal caso, desde luego, la masa, es decir, nuestra región, es prismática, como ya hemos visto y en cada prisma (celda) escogeríamos un punto en el cual valoráramos la densidad. Si el punto escogido en la celda (i, j, k) es (ξ_i, η_j, ζ_k) , entonces tendríamos la suma

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^p \rho(\xi_i, \eta_j, \zeta_k) \Delta x_i \Delta y_j \Delta z_k$$

Equivalente, se insistirá que $\rho(x, y, z)$ es continua en toda la masa, —no se quiere hacer énfasis al detalle de considerar las equidistancias, no hay problemas técnicos; en efecto, en cada equidistancia la densidad cambiaría discontinuamente, o sea, con una discontinuidad en la función ρ ; pero cada equidistancia estaría limitada por un número finito de superficies, —ver ρ , — por lo que los puntos de discontinuidad tendrían medida neta y por lo tanto se ignoraría que la masa de la masa sería

$$M = \iiint_V \rho(x, y, z) dx dy dz \dots (5.12.1)$$

El peso de la masa sería un vector; pero si hablamos de una masa

sobre la superficie de la tierra, ya sabemos que siempre tendrá una dirección vertical y un sentido hacia abajo, por lo que escribiríamos en relación a la magnitud del vector, que es un escalar y que podemos en su caso multiplicarlo al valor de la función $\rho(\xi_i, \eta_j, \zeta_k)$ por γ , $\gamma = 9.81$ y así y por lo tanto afirmar que

$$W = \iiint_V \gamma \rho(x, y, z) dx dy dz \dots (5.12.2)$$

lo que significa que:

$$\int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \int_{z_1}^{z_2} \gamma \rho(\xi_i, \eta_j, \zeta_k) \Delta x_i \Delta y_j \Delta z_k = W / \gamma \text{ cuando } \Delta = S$$

o bien:

$$\int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \int_{z_1}^{z_2} \rho(\xi_i, \eta_j, \zeta_k) \Delta x_i \Delta y_j \Delta z_k = W / \gamma \text{ cuando } \Delta = S$$

y como ya:

$$\int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \int_{z_1}^{z_2} \rho(\xi_i, \eta_j, \zeta_k) \Delta x_i \Delta y_j \Delta z_k = W / \gamma \text{ cuando } \Delta = S$$

La expresión en valores absolutos nos conduce a:

$$\frac{W}{\gamma} = \iiint_V \rho(x, y, z) dx dy dz$$

o lo que es lo mismo:

$$W = \gamma \iiint_V \rho(x, y, z) dx dy dz \dots (5.12.3)$$

Al comparar las expresiones (5.12.2) y (5.12.3) es de interés ver que que hemos demostrado una de las propiedades de la integral triple que, en general, se expresa:

$$\iiint_V k f(x, y, z) dx dy dz = k \iiint_V f(x, y, z) dx dy dz \dots (5.12.4)$$

Un caso particular del cálculo de masas, lo constituye $\rho(x, y, z) = \rho(x, y)$, de acuerdo a la propiedad que acabamos de ver, la ecuación (5.12.3) quedaría

$$M = \rho \iiint_V dx dy dz$$

esto que obtenemos la interpolación generalizada de la integral triple:

$$M = \rho V = \iiint \rho \, dx \, dy \, dz \dots (5.15.0.5)$$

En un cuerpo heterogéneo, el calor específico, está es, la cantidad de calor requerido para elevar 1°C la temperatura, es un campo escalar que puede ser diferente en cada punto; lo llamamos τ el calor específico,

$$\tau = f(x, y, z)$$

y la cantidad de calor requerida para elevar 1°C la temperatura del cuerpo:

$$E = \iiint \tau(x, y, z) \, dx \, dy \, dz$$

Podría darse el caso de que, en un cuerpo como el analizado en la fig (5.15.1), se necesitase conocer la cantidad de energía necesaria para elevar 1°C la temperatura de la parte V_1 , la correspondiente energía para elevar 1°C la temperatura de la parte V_2 , además, la energía requerida para elevar la temperatura 1°C en todo el cuerpo.

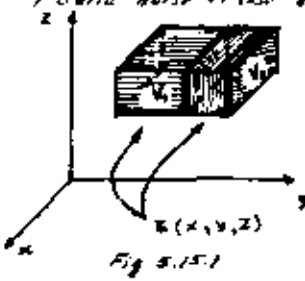


Fig 5.15.1

Siendo luego

$$E_1 = \iiint \tau(x, y, z) \, dx \, dy \, dz \dots (5.15.0.6)$$

$$E_2 = \iiint \tau(x, y, z) \, dx \, dy \, dz \dots (5.15.0.7)$$

y, si llamamos $V = V_1 \cup V_2$

$$E = \iiint \tau(x, y, z) \, dx \, dy \, dz \dots (5.15.0.8)$$

3 nos preguntamos si en la misma calentar todo el cuerpo que calentar las dos partes por separado. Veamos:

Hagamos una red en la región V_1 de n casillas cúbicas, con arista Δx_1 y otro en la región V_2 , también de n casillas cúbicas, con arista Δx_2 . Alguna de las dos mallas ha de ser mayor; dada la figura (5.15.2), parece ser que $\Delta x_1 < \Delta x_2$. Así lo consideraremos.
De (5.15.0.6) escribimos:

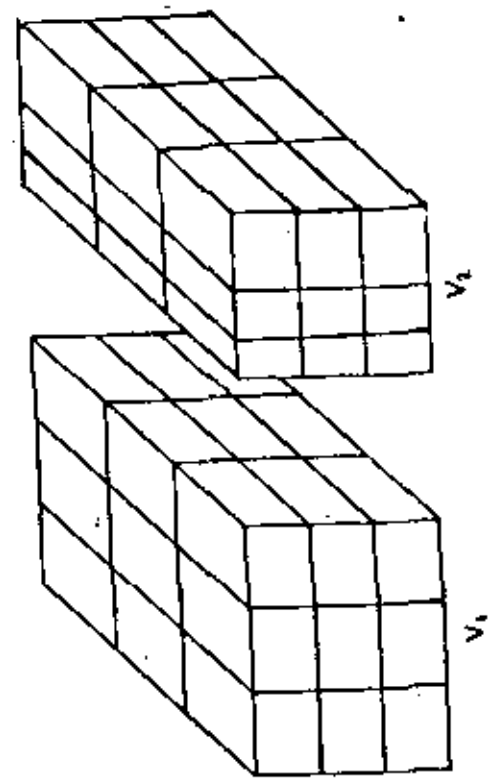


Fig 5.15.2

$$\int_{\Delta_1} \int_{\Delta_2} \int_{\Delta_3} z(x, y, z) \Delta x_1 \Delta y_1 \Delta z_1 - \epsilon_1 \quad \text{cuando } \Delta_1 < \delta$$

y, de (5.10.9.1):

$$\int_{\Delta_1} \int_{\Delta_2} \int_{\Delta_3} z(x, y, z) \Delta x_1 \Delta y_1 \Delta z_1 - \epsilon_2 \quad \text{cuando } \Delta_1 < \delta$$

Puesto que $\Delta_1 = \Delta_1$, $\Delta_2 < \delta$ garantiza que $\Delta_3 < \delta$; entonces las dos desigualdades se cumplen simultáneamente y podemos sumarlos miembro a miembro:

$$\int_{\Delta_1} \int_{\Delta_2} \int_{\Delta_3} z(x, y, z) \Delta x_1 \Delta y_1 \Delta z_1 - \epsilon_1 + \int_{\Delta_1} \int_{\Delta_2} \int_{\Delta_3} z(x, y, z) \Delta x_1 \Delta y_1 \Delta z_1 - \epsilon_2 < \epsilon_1 + \epsilon_2 \quad \text{cuando } \Delta_1 < \delta$$

Ya que el valor absoluto de una suma nunca supera a la suma de valores absolutos, inferimos la desigualdad y escribimos:

$$\left| \int_{\Delta_1} \int_{\Delta_2} \int_{\Delta_3} z(x, y, z) \Delta x_1 \Delta y_1 \Delta z_1 - \int_{\Delta_1} \int_{\Delta_2} \int_{\Delta_3} z(x, y, z) \Delta x_1 \Delta y_1 \Delta z_1 - (z, \bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \right| < \epsilon_1 + \epsilon_2 \quad \text{cuando } \Delta_1 < \delta$$

Por, por la propiedad asociativa de la suma:

$$\left| \int_{\Delta_1} \int_{\Delta_2} \int_{\Delta_3} z(x, y, z) \Delta x_1 \Delta y_1 \Delta z_1 - (z, \bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \right| < \epsilon_1 + \epsilon_2 \quad \text{cuando } \Delta_1 < \delta$$

Esta última expresión es equivalente a la ecuación (5.15.0.8) por lo que podemos afirmar que $\epsilon = \epsilon_1 + \epsilon_2$ o sea, se gasta la misma cantidad de energía al calcular un cuerpo, que calculando a sus partes por separado, como en el razonamiento anterior no hemos perdido generalidad, podemos escribir como propiedad de la integral triple:

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{V_1} f(x, y, z) dx dy dz + \iiint_{V_2} f(x, y, z) dx dy dz \quad (5.15.0.9)$$

siempre que $V = V_1 \cup V_2$ y $V_1 \cap V_2$ sea nulo.

Ahora consideremos un recipiente prismático rectangular "V" lleno de agua destilada al cual alguien le vierte una cantidad desconocida de salmuera de sodio (sulfato). Esta sal se disolverá lentamente en el agua y alcanzará, después de un tiempo bastante largo, una concentración uniforme en el seno del líquido. Entre tanto, en un instante determinado, mientras la concentración del NaCl en el agua y encontramos que obedecer a la ley matemática

$$C_1 = f(x, y, z)$$

por lo que la cantidad total de NaCl en el agua será de

$$W_1 = \iiint_V C_1(x, y, z) dx dy dz \quad (5.15.0.10)$$

Ahora supongamos que, además de el sodio NaCl, le echamos al agua otra sal. Digamos sulfato de calcio ($CaSO_4$), que tiene una difusividad rápida de difusión que NaCl. Por consiguiente, al medir su concentración en el mismo instante anterior se obtiene una ley diferente:

$$C_2 = g(x, y, z) \quad (\text{también continua})$$

por lo que

$$W_2 = \iiint_V C_2(x, y, z) dx dy dz \quad (5.15.0.11)$$

La cantidad total de sales añadidas al agua es $W_1 + W_2$ ¿Podríamos calcularla a través de una sola integral? Veámoslo:

Establezcamos una red en V, de norma Δ ; entonces, de (5.15.0.10):

$$\int_{\Delta_1} \int_{\Delta_2} \int_{\Delta_3} C_1(x, y, z) \Delta x_1 \Delta y_1 \Delta z_1 - W_1 < \epsilon_1 \quad \text{cuando } \Delta < \delta$$

y, de (5.15.0.11):

$$\int_{\Delta_1} \int_{\Delta_2} \int_{\Delta_3} C_2(x, y, z) \Delta x_1 \Delta y_1 \Delta z_1 - W_2 < \epsilon_2 \quad \text{cuando } \Delta < \delta$$

Puesto que las dos desigualdades se cumplen simultáneamente, podemos sumarlos miembro a miembro y aplicar la propiedad ya vista de los valores absolutos:

$$\int_{\Delta_1} \int_{\Delta_2} \int_{\Delta_3} [C_1(x, y, z) + C_2(x, y, z)] \Delta x_1 \Delta y_1 \Delta z_1 - (W_1 + W_2) < \epsilon_1 + \epsilon_2 \quad \text{cuando } \Delta < \delta$$

Esta expresión quiere decir que:

$$\iiint_V [C_1(x, y, z) + C_2(x, y, z)] dx dy dz = W_1 + W_2$$

o sea que podemos proceder, bien sumando las funciones C_1 y C_2 e integrando una vez, o bien integrando C_1 y C_2 por separado y luego sumando, como nos resulta más ventajoso. Esta es otra propiedad de la integral triple que, en general se expresa:

$$\iiint_V [f(x, y, z) + g(x, y, z)] dx dy dz = \iiint_V f(x, y, z) dx dy dz + \iiint_V g(x, y, z) dx dy dz \quad (5.15.0.12)$$

El ejemplo que hemos utilizado para indicar esta propiedad no es tan preciso como parece. Ese "alguien" que vierte sales en las legumbres estrochadas, es el mar, por efectos de marea. Corresponde a los biólogos definir cuáles son las concentraciones deseables de sales; pero es responsabilidad del ingeniero hacer las obras que garanticen tales concentraciones. Desde luego, el problema es mucho más complejo; pero el principio es el mismo:

Si medimos las diferentes temperaturas de un cuerpo V en grados Kelvin, obtenemos un campo escalar, como hemos visto en otras ocasiones:

$$T = f(x, y, z)$$

La cantidad de calor en toda el cuerpo, o energía latente es:

$$E = \iiint T(x, y, z) dx dy dz \dots (5.10.0.13)$$

¿Podríamos llegar a tener una energía negativa? Supongamos que sí; entonces $-E < 0$ y, dada una red en V de medida Δ , constituiríamos el ϵ -cubrimiento de (5.15.0.13) como sigue:

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n T(\xi_i, \eta_j, \zeta_k) \Delta x_i \Delta y_j \Delta z_k = -E \text{ cuando } \Delta = \delta$$

o lo que es lo mismo:

$$E = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n T(\xi_i, \eta_j, \zeta_k) \Delta x_i \Delta y_j \Delta z_k = -E \text{ cuando } \Delta = \delta$$

Al trabajar con la segunda parte de la última desigualdad:

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n T(\xi_i, \eta_j, \zeta_k) \Delta x_i \Delta y_j \Delta z_k = 0 \text{ cuando } \Delta < \delta \dots (5.15.0.14)$$

Ahora bien, la experiencia humana, desde la fecha, no ha logrado ni siquiera acercar la temperatura de un cuerpo al cero de Kelvin o cero absoluto (-273°C). Entonces, la desigualdad (5.15.0.14) no se puede cumplir, porque en el primer miembro tendríamos la suma de números positivos; por consiguiente, la energía latente de un cuerpo nunca podrá ser negativa. Al mismo tiempo, podemos afirmar, como propiedad de la integral triple:

$$\text{Si } f(x, y, z) \geq 0 \text{ en } V, \quad \iiint f(x, y, z) dx dy dz \geq 0 \dots (5.15.0.15)$$

$$\text{Si } f(x, y, z) \leq 0 \text{ en } V, \quad \iiint f(x, y, z) dx dy dz \leq 0 \dots (5.15.0.16)$$

$$\text{Si } f(x, y, z) \geq g(x, y, z) \text{ en } V, \quad \iiint f(x, y, z) dx dy dz \geq \iiint g(x, y, z) dx dy dz \dots (5.15.0.17)$$

Hay otra propiedad de la integral triple que no he mencionado al hablar como he anterior. Como ejercicio, puedes demostrar que $\iiint f(x, y, z) dx dy dz = \iiint f(x, y, z) dx dy dz \dots (5.15.0.18)$

5.16) La Integral Triple como Integral Iterada
5.16.1) Introducción. Sabemos en realidad cómo resolver una integral triple: el problema (5.12.1) nos da un método que de ninguna manera

podría olvidarse, ya que es la base para realizar integraciones por medio de computadora que, en los días que corren, son quizá más usadas que las tradicionales.

Ahora, si no dispones de computadora o si las funciones que vas a integrar puedes escribirte sin mucha dificultad, puedes disponer de otro método que a continuación te vamos a exponer.

Antes de entrar propiamente en materia, vamos a reescribir nuevamente el problema (5.12.1) y vamos a suponer, por un momento, que la ley de distribución del metal tiene

$$C = 3xy \text{ dy} \quad (C \text{ en mg/dm}^3 \text{ si } x, y \text{ en cm})$$

Supongamos también que establecimos la misma red y que, al escoger los puntos en cada celda del segundo cubrimiento, los elegimos sobre la misma vertical que los seleccionamos en el primer cubrimiento.

Aproximamente, entonces, $C(\xi_i, \eta_j, \zeta_k) = C(\xi_i, \eta_j, \zeta_k) = C(\xi_i, \eta_j)$

por lo que: $W \approx \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n C(\xi_i, \eta_j) \Delta x_i \Delta y_j \Delta z_k$

y, por cualquier red establecida en V: $W \approx \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n C(\xi_i, \eta_j) \Delta x_i \Delta y_j \Delta z_k$

Si ahora hacemos que la malla de la red tienda a cero, la malla de la red establecida en $R = \{(x, y) / 0 \leq x \leq 20; 0 \leq y \leq 15\}$ también tiende a cero y, por ser "C" continua, podemos afirmar que la expresión entre corchetes rectangular converge a la integral doble y por: $\iint C(x, y) dx dy = \lim_{\delta \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n C(\xi_i, \eta_j) \Delta x_i \Delta y_j = \iint C(x, y) dx dy \int_0^{\delta} dz$

Finalmente: $W = 10 \iint C(x, y) dx dy$

5.16.2) La integral iterada en regiones prismáticas:
En el caso general, sin embargo, tendremos como integrando una función en las tres variables; la función del problema (5.12.1) así lo es y por lo mismo

$$C(\xi_i, \eta_j, \zeta_k) = C(\xi_i, \eta_j, \zeta_k)$$

(Ver tabla 5.12.1: $C(0,0,0) = 0$ o $C(0,0,1) = 6$, etc.)
 Por supuesto, también la suma en el primer estado ($z = 0$, es decir, en la tabla 5.12.1) es diferente de la suma en el segundo estado ($z = 1$, es decir, en la tabla 5.12.2) y, si hubiese más estados, la suma en cada estado sería diferente en pocas palabras:

$$\iint_C C(x,y,z) dx dy = F(z) \dots \dots (5.16.2a)$$

Ahora establezcamos una red cualquiera en la región V , de manera A designemos un punto cualquiera (ξ_j, η_j, ζ_j) dentro de la celda (i,j,k) y tracemos un plano horizontal que pase por ese punto (Fig. 5.16.1)

$$F(\xi_j) = \iint_{A_j} C(x,y,\xi_j) dx dy = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^m \iint_{A_{ijk}} C(x,y,\xi_j) dx dy \dots (5.16.2b)$$

donde A_j es la región definida por la celda (i,j,k) sobre el plano xy . (Fig. 5.16.1)

Supongamos que en la celda (i,j,k) la función vale 0 en $(0,0,0)$ y que no vale 0 alguna otra parte dentro de la celda; por tanto $m_{ijk} = 0$ y por la propiedad que ya conocemos de la integral doble:

$$m_{ijk} \Delta x \Delta y_k < \iint_{A_{ijk}} C(x,y,\xi_j) dx dy$$

La conclusión podríamos asegurar del punto $(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$ dentro de la función cualquier el valor M_{ijk} y por lo tanto:

$$m_{ijk} \Delta x \Delta y_k < \iint_{A_{ijk}} C(x,y,\xi_j) dx dy < M_{ijk} \Delta x \Delta y_k$$

En la celda (i,j,k) podemos escribir $M_{ijk} \Delta x \Delta y_k < \iint_{A_{ijk}} C(x,y,\xi_j) dx dy < M_{ijk} \Delta x \Delta y_k$

y es sucesivamente, hasta llegar a la celda $(n,m,1)$

$$M_{n,m,1} \Delta x \Delta y_m < \iint_{A_{n,m,1}} C(x,y,\xi_j) dx dy < M_{n,m,1} \Delta x \Delta y_m$$

Al sumar miembro a miembro las desigualdades anteriores y tener en cuenta (5.16.2b)

$$\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^m M_{ijk} \Delta x \Delta y_k < F(\xi_j) < \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^m M_{ijk} \Delta x \Delta y_k \dots (5.16.2c)$$

Ahora multipliquemos los tres miembros de (5.16.2c) por Δz ; esta cantidad es constante para todas las celdas de V , por lo que puede salir y estar libremente de las sumatorias:

$$\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^m M_{ijk} \Delta x \Delta y_k \Delta z < F(\xi_j) \Delta z < \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^m M_{ijk} \Delta x \Delta y_k \Delta z$$

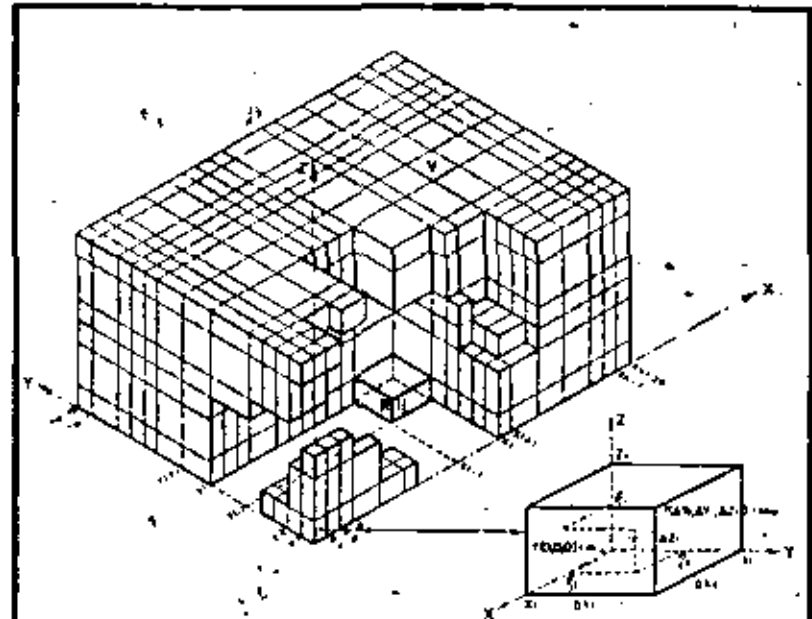


FIGURA 5.16.1

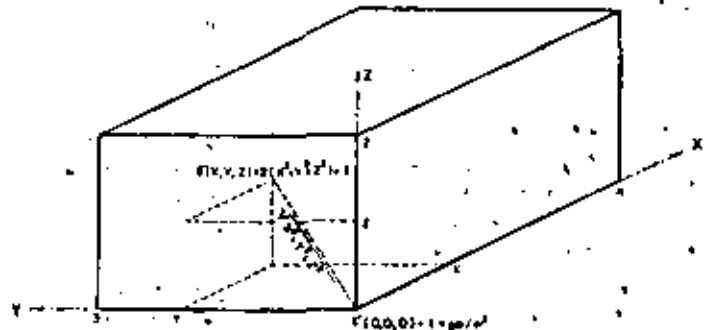


FIGURA 5.16.2

y procedamos análogamente con todos los demás miembros

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m M_{ij} \Delta x_i \Delta y_j \Delta z_k < F(\xi_k) \Delta z_k < \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m M_{ij} \Delta x_i \Delta y_j \Delta z_k$$

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m M_{ij} \Delta x_i \Delta y_j \Delta z_k < F(\xi_k) \Delta z_k < \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m M_{ij} \Delta x_i \Delta y_j \Delta z_k$$

y sumamos miembro a miembro estos dos últimos

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m M_{ij} \Delta x_i \Delta y_j \Delta z_k < \frac{1}{2} F(\xi_k) \Delta z_k < \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m M_{ij} \Delta x_i \Delta y_j \Delta z_k$$

que, de acuerdo con la notación adoptada, podemos escribir:

$$s < \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m F(\xi_k) \Delta z_k < S$$

Ahora hagamos tender a cero la norma de la red: puesto que la función que estamos integrando es continua, tanto "s" como "S" tenderán por límite en la integral triple; el límite del miembro central es un valor conocido: se trata de la integral ordinaria de F(z):

$$\iiint C(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b F(z) dz \dots \dots \dots (5.16.2.d)$$

y al sustituir (5.16.2.a) en (5.16.2.d)

$$\iiint C(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b \left\{ \iint C(x, y, z) dx dy \right\} dz$$

Expresión que nos dice que primero integramos en R para obtener una función de z, a tal función, la integramos posteriormente en el intervalo [a, b]. A esto se le llama integral iterada o reiterada. La integral doble que nos dará ya tenemos definida la región R en el inciso anterior; entonces:

$$\begin{aligned} \iint C(x, y, z) dx dy &= \int_0^{20} \left\{ \int_0^{20} (3x + 2y + z) dy \right\} dx = \int_0^{20} [20y + y^2 + 20z] dx \\ &= \int_0^{20} (40x + 225 + 10z) dx = [20x^2 + 225x + 10xz]_0^{20} \end{aligned}$$

$$\iint C(x, y, z) dx dy = 13500 + 300z = F(z)$$

Ahora

$$W = \iiint C(x, y, z) dx dy dz = \int_0^{20} (13500 + 300z) dz = [13500z + 150z^2]_0^{20}$$

$$W = 135000 + 15000 = 150000 \text{ mg}$$

El procedimiento que hemos seguido es general y lo podemos aplicar a cualquier región $V = \{(x, y, z) / a \leq x \leq b; c \leq y \leq d; e \leq z \leq f\}$ y a cualquier función $f(x, y, z)$ integrable en ella.

$$\iiint f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b \left\{ \iint f(x, y, z) dx dy \right\} dz \dots (5.17.1)$$

Más aún, tenemos otras dos posibilidades:

a) Definir $F(y) = \iint f(x, y, z) dx dz$

en cuyo caso obtendríamos finalmente:

$$\iiint f(x, y, z) dx dy dz = \int_c^d \left\{ \iint f(x, y, z) dx dz \right\} dy \dots (5.17.2)$$

b) Definir $F(x) = \iint f(x, y, z) dy dz$

en cuyo caso obtendríamos finalmente:

$$\iiint f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b \left\{ \iint f(x, y, z) dy dz \right\} dx \dots (5.17.3)$$

Ejemplo 5.16.1) Calcular la masa de un cuerpo prismático trirectángulo cuyos aristas midan 20 cm. Su densidad en un punto (x, y, z) es de 1 kg/m³ y aumenta a razón del doble del cuadrado de la distancia a dicho vértice.

Solución:
Referamos nuestro problema a un sistema coordenado: hagamos coincidir el vértice de menor densidad con el origen; la arista más larga con el eje "x" y la arista más corta con el eje "z". (Fig. 5.16.2).

Ahora, de acuerdo con este sistema de referencia, establezcamos la función densidad. Nos dicen que aumenta con el

doble de la distancia al origen, o sea que en el punto (x, y, z) :

$$\Delta \rho = 2(x^2 + y^2 + z^2)$$

(2 tiene unidades de kg/m^3)

y como en el origen la densidad vale $1 \text{ kg}/\text{m}^3$:

$$\rho = 2(x^2 + y^2 + z^2) + 1$$

Ahora establezcamos la región:

$$V = \{(x, y, z) / 0 \leq x \leq 1; 0 \leq y \leq 1; 0 \leq z \leq 1\}$$

Entonces podemos integrar en cualquiera de las formas (S.14.2), (S.14.2.2) o (S.14.2.3). Cuando se tienen regiones prismáticas, suele ser igualmente sencilla cualquiera de estas formas. Escogamos la última:

$$M = \iiint_V \rho \, dx \, dy \, dz = \int_0^1 \left\{ \int_0^1 \int_0^1 [2(x^2 + y^2 + z^2) + 1] \, dy \, dz \right\} dx$$

Definamos R_{yz} es rectangular:

$$R_{yz} = \{(y, z) / 0 \leq y \leq 1; 0 \leq z \leq 1\}$$

Entonces:

$$\begin{aligned} \iint_{R_{yz}} [2(x^2 + y^2 + z^2) + 1] \, dy \, dz &= \int_0^1 \left\{ \int_0^1 [2(x^2 + y^2 + z^2) + 1] \, dz \right\} dy \\ &= \int_0^1 [2(x^2 + y^2 + \frac{z^2}{2}) + z]_0^1 \, dy \\ &= 4 \int_0^1 (x^2 + y^2 + \frac{1}{2}) \, dy \\ &= 4 \left[yx^2 + \frac{y^3}{3} + \frac{y}{2} \right]_0^1 \\ &= 4(2x^2 + \frac{1}{3}) = F(x) \end{aligned}$$

Ahora:

$$M = 4 \int_0^1 (2x^2 + \frac{1}{3}) \, dx = \underline{\underline{488 \frac{1}{3} \text{ kg}}}$$

Si lo prefieres, al paso al sólido es, de acuerdo con (S.14.2.3):

$$M = 9.81 \cdot 488 = \underline{\underline{4782.28 \text{ N}}} = \underline{\underline{488 \frac{1}{3} \text{ kg}}}$$

5.14.6) La integral iterada en regiones normales

Supongamos que, para utilizar el sólido anterior, lo vamos a cortar por la mitad, a modo de dejar dos prismas triangulares, cuyas caras triangulares tengan $1 \times 2 \text{ m}$. (Fig. 5.14.3a) ¿Cuánto pesa cada parte?

Concentrémonos primero en la parte menos pesada, esto es, en la que contiene al vértice de densidad 1, que coincide con el origen. Ahora la región "U", que nos interesa, no es ya prismática rectangular, sino que está limitada por los tres planos coordenados y el plano

$$\frac{x}{4} + \frac{z}{2} = 1 \quad \text{--- (S.14.3.a)}$$

Nosotros sabemos cómo integrar en una región prismática trirectangular;

entonces englobemos nuestra región "U" en la región "V" y definamos

$$V = \left\{ \begin{array}{l} 2(x^2 + y^2 + z^2) + 1 \\ 0 \end{array} \right. \quad \forall (x, y, z) \in U$$

$$\forall (x, y, z) \notin U$$

Esta función es integrable en "V", toda vez que sus puntos de discontinuidad se agrupan en el plano (S.14.3.a), que es una superficie suave. Por otra parte, sabemos que estamos calculando la masa que nos interesa, puesto que la parte restante de la región no tiene masa.

Entonces calculamos:

$$M_1 = \iiint_V \rho \, dx \, dy \, dz$$

Para hacerlo, podemos usar cualquiera de las formas (S.14.2.1), (S.14.2.2) o (S.14.2.3). Utilicemos la última, por similitud con el ejemplo 5.14.1. Ello implica

$$M_1 = \int_0^1 F(x) \, dx$$

donde

$$F(x) = \iint_{R_{yz}} \rho(x, y, z) \, dy \, dz$$

Tratemos de establecer esta función. Si $x=0$, $R_{yz} \in U$. (ver Fig. 5.14.3b) por lo que

$$F(0) = \iint_{R_{yz}} [2(y^2 + z^2) + 1] \, dy \, dz$$

que podríamos resolver fácilmente; pero antes veamos otros valores de x : Si $x=1$ (ver Fig. 5.14.3c), $R_{yz} \notin U$ por lo que tendríamos que distinguir:

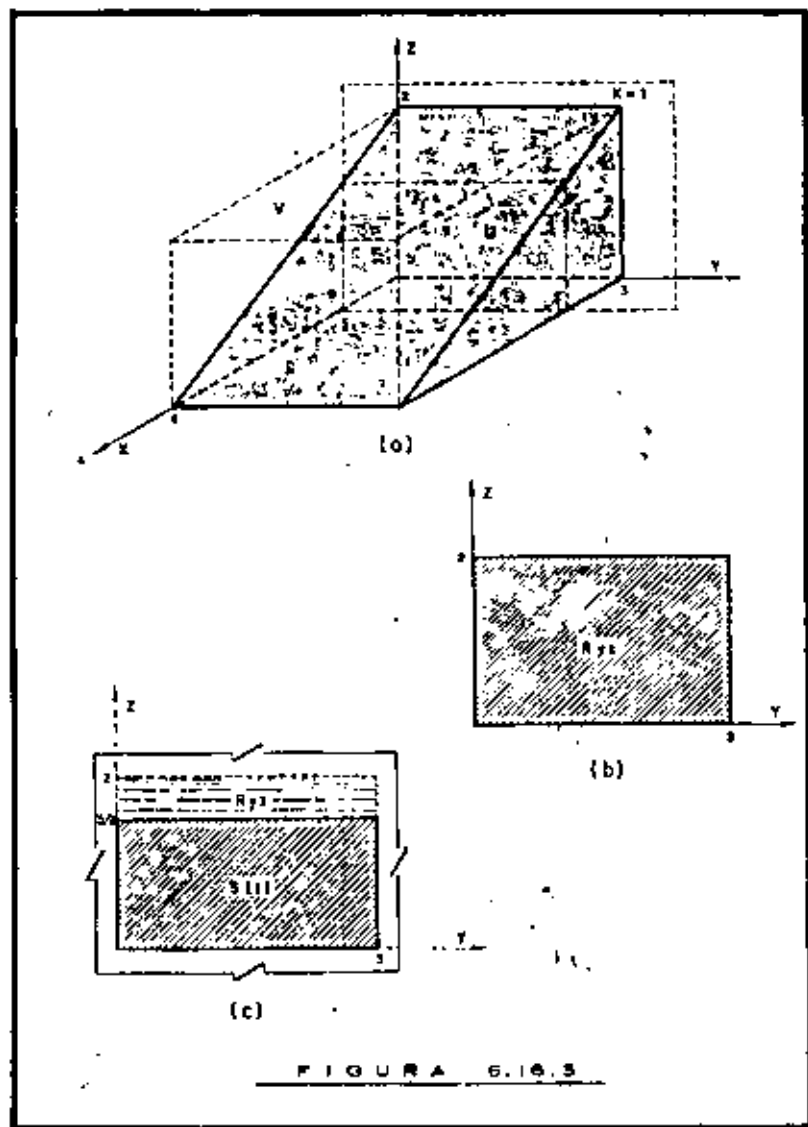


FIGURA 6.16.3

$$f(x, y, z) = \begin{cases} 2(1+y^2+z^2) + 1 & \forall (y, z) \in S \\ 0 & \forall (y, z) \notin S \end{cases}$$

Y si recordamos ($a < 0 >$)

$$F(x) = \iiint_{E_{3a}} f(x, y, z) \, dy \, dz = \iint_S [2(1+y^2+z^2) + 1] \, dy \, dz$$

Es decir que ahora el valor de $F(x)$ no sólo va a depender del valor de la función "f", sino también de la región plana que, según el plano de corte, queda contenida en "U". En general:

por lo que:

$$F(x) = \iint_{E_{2a}} f(x, y, z) \, dy \, dz = \iint_S [2(x^2 + y^2 + z^2) + 1] \, dy \, dz,$$

que ya sabemos calcular:

$$F(x) = \int_0^x \int_0^{1-x} [2(x^2 + y^2 + z^2) + 1] \, dz \, dy$$

con lo que:

$$U_1 = \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} [2(x^2 + y^2 + z^2) + 1] \, dz \, dy \, dx \dots \quad (3.16.2.b)$$

evaluamos entonces en orden:

$$\int_0^{1-x-y} [2(x^2 + y^2 + z^2) + 1] \, dz = [2x^2z + 2y^2z + \frac{2z^3}{3} + z]_0^{1-x-y}$$

$$= 4y^2 - 2y^2 - \frac{12}{3}x^3 + 5x^2 - \frac{9}{2}x + \frac{22}{3}$$

$$\int_0^{1-x} [4x^2y^2 - \frac{12}{3}x^3 + 5x^2 - \frac{9}{2}x + \frac{22}{3}] \, dy = [\frac{4}{3}x^2y^3 - \frac{12}{3}x^3y + 5x^2y - \frac{9}{2}xy + \frac{22}{3}y]_0^{1-x}$$

$$= -\frac{13}{4}x^3 + 15x^2 - \frac{9}{2}x + 38$$

Finalmente

$$\int_0^1 [-\frac{13}{4}x^3 + 15x^2 - \frac{9}{2}x + 38] \, dx = [-\frac{13}{16}x^4 + 5x^3 - \frac{9}{4}x^2 + 38x]_0^1$$

$U_1 = 169 \text{ kgm.}$
 $U_2 = 169 \text{ kgf.}$

Resuelto ya no hemos utilizado la región "U"; hagámonos una forma conveniente con lo que acabamos de hacer, esto es, usándolo en planos paralelos a "x": $U\{(x, y, z) / 0 \leq x \leq 1; 0 \leq y \leq 1-x; 0 \leq z \leq 1-x-y\}$

Notamos de inmediato que los límites de integración de la ec (3.16.2) son justamente los límites que definen la variación de cada una de nuestras variables en la región "V".

En general vamos a tener una región "V" como la mostrada en la fig. 3.16.4 a, y si de deberemos integrar una función $f(x, y, z)$; lo que intuitivamente en el ejemplo anterior requiere de un respaldo lógico formal, por lo que definimos:

Definición 3.16.1
 Si W es una región prismática trirectangular que contiene a "V" y si se tiene

$$P(x, y, z) = \begin{cases} f(x, y, z) & \forall (x, y, z) \in V \\ 0 & \forall (x, y, z) \notin V \end{cases}$$

donde $f(x, y, z)$ es continua en "V", entonces:

$$\iiint_W f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_V P(x, y, z) dx dy dz \dots (3.16.3)$$

Para calcular el segundo miembro de (3.16.3), en el ejemplo anterior decidimos definir:

$$P(x, z) = \begin{cases} f(x, y, z) & \forall (x, y, z) \in V \\ 0 & \forall (x, y, z) \notin V \end{cases}$$

esto fue equivalente a la decisión de cortar a nuestra región según planos normales al eje "x". En el ejemplo resuelto, al cortar a "V" con esos planos, nos encontramos regiones rectangulares; en el caso general tendremos regiones planas de cualquier forma, por lo que tendremos que decidir si las cortamos con rectas normales al eje "y" ó al eje "z". Al tomar esta decisión, estaremos decidiendo simultáneamente el orden de cálculo de la integral doble, como ya sabemos. Si preferimos que optamos por la primera alternativa; entonces habremos decidido definir a "V" según (3.16.4): (fig 3.16.4 b)

$$V = \{ (x, y, z) \mid a \leq x \leq b; y_1(x) \leq y \leq y_2(x); z_1(x, y) \leq z \leq z_2(x, y) \}$$

ya sabemos que:

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_W P(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b \left\{ \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \left\{ \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} P(x, y, z) dz \right\} dy \right\} dx \dots (3.16.3.2)$$

y puesto que

$$(x, y, z) \in V \iff (y, z) \in S \quad (\text{ver fig. 3.16.4 b})$$

tenemos:

$$\iiint_V P(x, y, z) dz dy dx = \int_a^b \left\{ \int_{z_1(x)}^{z_2(x)} \left\{ \int_{y_1(x, z)}^{y_2(x, z)} P(x, y, z) dy \right\} dz \right\} dx \dots (3.16.3.3)$$

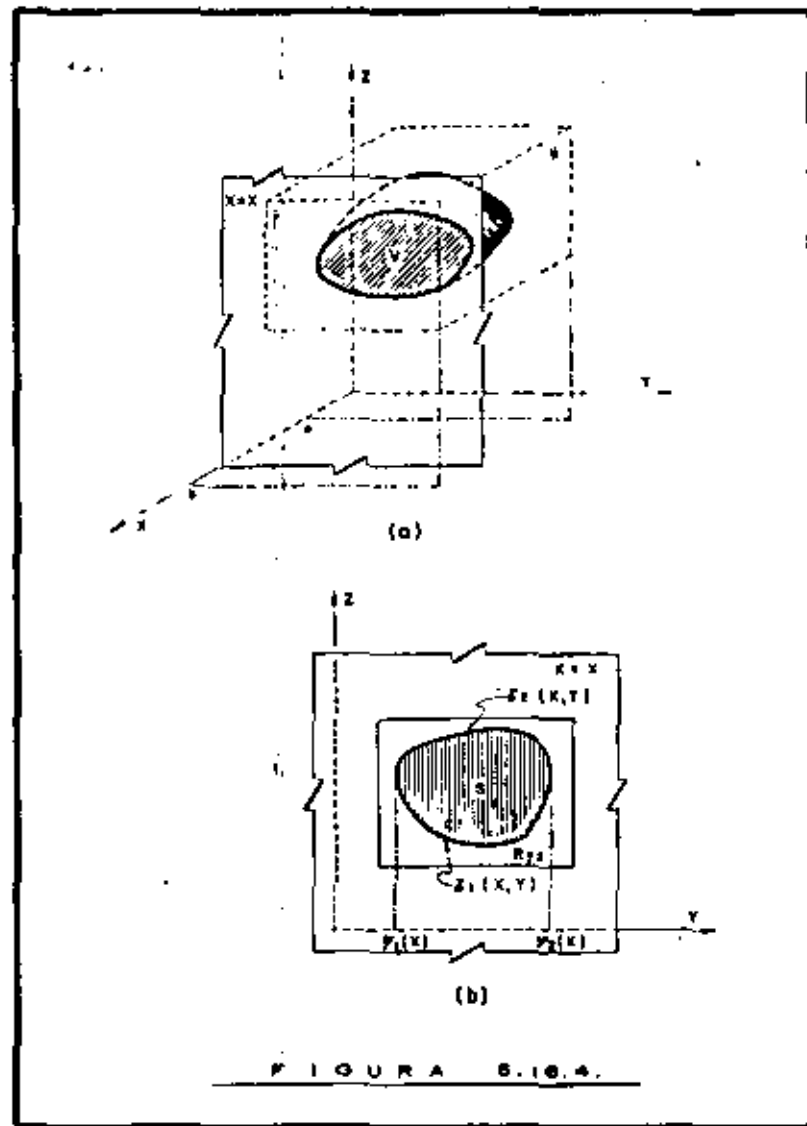


FIGURA 3.16.4.

Finalmente, al llevar (5.16.3) a (5.16.2)

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b \left[\int_{c_1(x)}^{c_2(x)} \left[\int_{d_1(x, y)}^{d_2(x, y)} f(x, y, z) dz \right] dy \right] dx \dots \quad (5.16.4)$$

y debemos remarcar ciertos aspectos:

- Los límites de la integral interior (primera en orden de realización) son, en general, funciones de (x, y) ; en casos particulares "podrá" faltar una u otra variable, o ambas; pero nunca podrán contener "z".

Los límites de la integral intermedia serán, en general, funciones de (x) ; podrán ser constantes; pero nunca podrán contener a "y" o a "z".

Los límites de la integral exterior siempre deben ser constantes.

Naturalmente, puesto que tenemos 6 maneras de definir "V" tendremos otras tantas maneras de desarrollar la integral triple, de las cuales te voy a mencionar otra para que te encuentres las otras cuatro:

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \int_c^d \left[\int_{a_1(z)}^{a_2(z)} \left[\int_{b_1(z, x)}^{b_2(z, x)} f(x, y, z) dy \right] dx \right] dz \dots \quad (5.16.5)$$

Los puntos que remarcamos anteriormente son válidos para todas, mas si cambiamos adecuadamente el nombre de las variables. Así, al primer punto, aplicado a la forma (5.16.5), diría:

"Los límites de la integral interior (primera en orden de realización) son, en general, funciones de (z, x) ; en casos particulares, podrá faltar una u otra variable, o ambas; pero nunca podrán contener "y".

Hemos dejado pendiente la mitad del problema que nos proponemos, esto es, calcular el peso de la otra mitad del sólido. Desde luego, una simple resta puede bastar; pero a fin de fijar ideas, por una parte y de comprobar nuestros cálculos, por otra, calcularemos el peso de la otra mitad utilizando también la integral triple.

Nuestra región, que ahora llamamos "W" está representada en la fig. (5.16.5) y la podemos también englobar en la región "V" del ejemplo (5.16.1). Definimos así:

$$\begin{cases} 2(x^2 + y^2 + z^2) + 1 & \forall (x, y, z) \in W \\ 0 & \forall (x, y, z) \notin W \end{cases}$$

por lo que

$$M_2 = \iiint_W [2(x^2 + y^2 + z^2) + 1] dx dy dz = \iiint_V \sigma(x, y, z) dx dy dz.$$

- (*) Afortunadamente, el pedazo de roca analizada puede ser reade por un material de 200 kg, pero si nos equivocamos en la distribución y el motor del material se quemó, perdemos la chamba... y con razón.

Ahora tenemos que definir nuestra región, pero ya sabemos que eso implica definir, al mismo tiempo, el orden de integración. En este momento, nos proponemos cortar a nuestra región con planos normales a "y", a fin de comprobar si hay alguna simplificación en los cálculos. Esto equivale, como ya vimos, a definir:

$$F(y) = \iint_{R'} f(x, y, z) dx dz = \iint_{R'} [2(x^2 + y^2 + z^2) + 1] dx dz$$

la región "S" que obtendremos así es siempre la misma, pero ahora no es rectangular, sino triangular (ver fig 5.10.5). Es indiferente cómo cortemos esta región; esojámosla con rectas normales a "x", con lo que definiremos "S":

$$S\{(x, y) \mid 0 \leq y \leq 1; z - \frac{z}{2} \leq z \leq 2\}$$

o, de una vez, "W":

$$W\{(x, y, z) \mid 0 \leq y \leq 1; 0 \leq z \leq 1; z - \frac{z}{2} \leq z \leq 2\}$$

y podemos plantear nuestra integral triple:

$$M_2 = \iiint_{W'} [2(x^2 + y^2 + z^2) + 1] dx dy dz = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^2 [2(x^2 + y^2 + z^2) + 1] dx dy dz$$

Al resolver paso a paso tendremos:

$$\int_0^2 [2(x^2 + y^2 + z^2) + 1] dx = [2x^3 + 2y^2x + \frac{2}{3}z^2x + x]_0^2 = \frac{16}{3}x^3 + 2x + \frac{2}{3}z^2x + x$$

$$\int_0^1 [\frac{16}{3}x^3 + 2x + \frac{2}{3}(y^2 + z^2)x] dy = [\frac{16}{12}x^4 + \frac{2}{2}x^2 + \frac{1}{2}(y^2 + z^2)x^2]_0^1 = 8x + 8y^2$$

$$M_2 = \int_0^1 (8x + 8y^2) dy = 4[2y + \frac{2}{3}y^3]_0^1 = 32 \text{ kg.}$$

y el peso

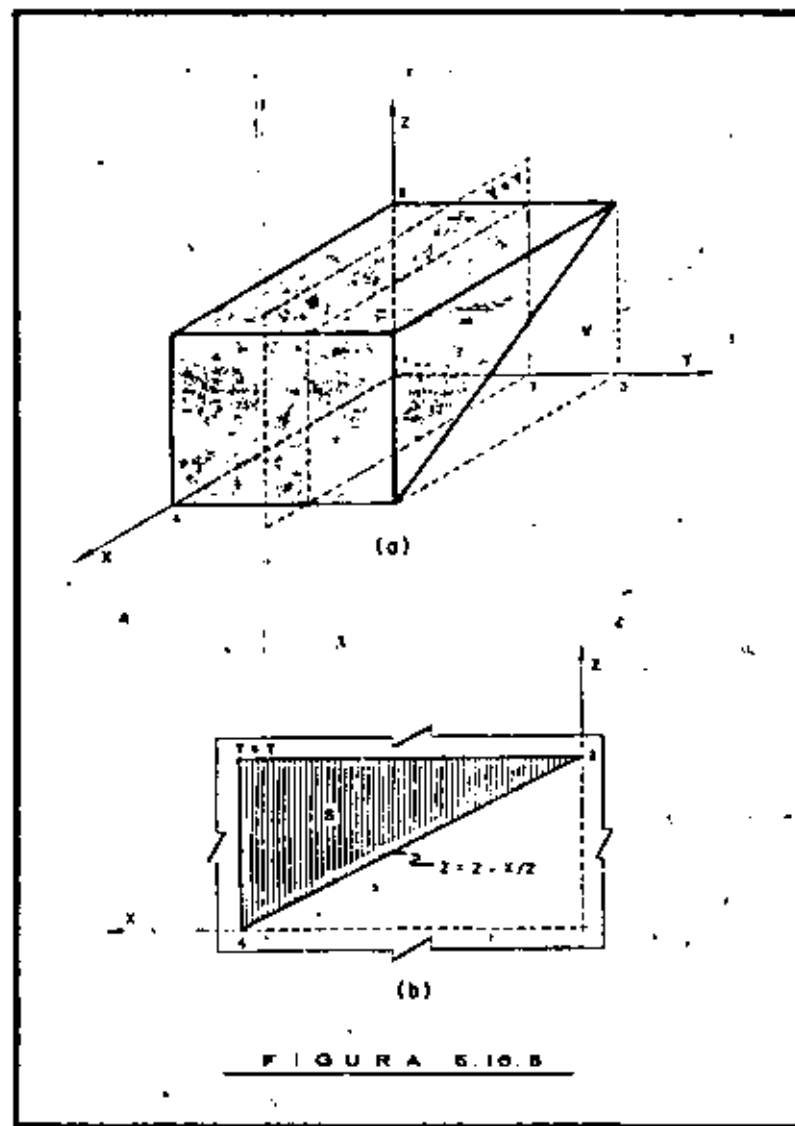
$$M_2 = 32 \text{ kg.}$$

Comprobación:

$$M_1 + M_2 = 16 + 32 = 48 \text{ kg.}$$

Si ambas mitades se han de usar por separado, requieren de un soporte de 40 kg y de otro de 8 kg.

Ejemplo 5.10.2) Para fabricar ciertas piezas de maquinaria, a unas esferas de acero de 5 cm se les agujerea hasta su centro por



medic de un taladro cónico (ver fig 5.16.6), las limaduras de acero son recuperadas y vendidas a una fundidora. Si la fábrica taladra 1000 esteras diarias y la eficiencia de recuperación es de 10% ¿que cantidad de limadura se junta diariamente?

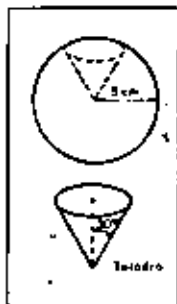


FIG. 5.16.6.

Necesitamos saber que volumen de acero se extrae de cada estera. Este volumen, multiplicado por el peso específico del acero (7.85 gr/cm³), por la cantidad de esteras taladradas y por la eficiencia de recuperación, será la respuesta a nuestro problema.

La parte principal del problema es pues, conocer el volumen de acero que se extrae a cada estera y esto lo podemos conocer por medio de una integral triple. Para plantearla, observemos que un cono tiene dos planos de simetría, por lo que nuestra región se limitará a un octante de la esfera (fig. 5.16.7), que es la cuarta parte del volumen total extraído.

Las ecuaciones de las superficies involucradas son:

Estera: $x^2 + y^2 + z^2 = 25$

Cono: $A^2 x^2 + A^2 y^2 + z^2 = 0$

Si $x = 0$

$A^2 y^2 = z^2$

$\pm Ay = z$

que son las ecuaciones de las generatrices en el plano yz.

Pero de la figura (5.16.6), el ángulo que forman estas rectas con el eje z es de 30°, por lo que sus ecuaciones son:

$z = \pm \operatorname{ctg} 30^\circ y + z \sqrt{3} y$

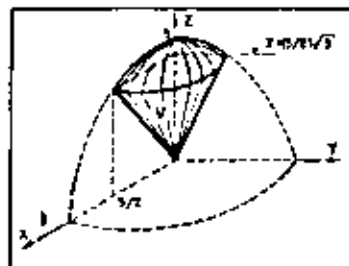


FIG. 5.16.7.

de donde

$A = \sqrt{3}$

y la ecuación del cono queda:

$3x^2 + 3y^2 + z^2 = 0$

Para definir una sola región, debemos cortar con planos normales a "x" o a "y". Cortemos con planos normales a "x" para obtener la región variable mostrada en la figura (5.16.8) y que definiremos:



Definamos $\{15, 0\} \leq x \leq \frac{1}{2} \sqrt{25 - 4z^2}$; $\sqrt{25 - 4z^2} \leq y \leq \sqrt{25 - x^2}$ y como podemos cortar desde el plano yz hasta $x = 9/2$:

$V = \int_{-9/2}^{9/2} \int_{\sqrt{25 - 4z^2}}^{\sqrt{25 - x^2}} \int_{\sqrt{25 - x^2 - y^2}}^{\sqrt{25 - x^2 - y^2}} dz dy dx$

Así, el volumen de la región:

$V = \int_{-9/2}^{9/2} \int_{\sqrt{25 - 4z^2}}^{\sqrt{25 - x^2}} \int_{\sqrt{25 - x^2 - y^2}}^{\sqrt{25 - x^2 - y^2}} dz dy dx$

Al resolver en orden:

$\int_{\sqrt{25 - 4z^2}}^{\sqrt{25 - x^2}} dz = \sqrt{25 - x^2 - y^2} - \sqrt{25 - x^2}$

$\int_{\sqrt{25 - 4z^2}}^{\sqrt{25 - x^2}} (\sqrt{25 - x^2 - y^2} - \sqrt{25 - x^2}) dy =$

Antes de continuar, hagamos un alto y reflexionemos sobre los siguientes pasos: todavía, después de realizar la integral planteada, hay que integrar en "x" ¿y que integrales vamos a manejar? Para integrar el primer radical, tendríamos que hacer la sustitución $y = \sqrt{25 - x^2} \operatorname{sen} \theta$ pero el límite superior no es constante, por lo que tendríamos que dejar en función del (ang sen) para luego integrar esta función con respecto a "x". Hemos halagador se presenta al ponernos con el segundo radical, donde la sustitución sería $y = x \operatorname{tg} \theta$ para obtener, como integrando en el siguiente paso, $L(\operatorname{csc} \theta - \operatorname{tg} \theta)$. Todo esto nos conduce a abandonar el presente procedimiento como un tanteo fallido y a re-plantear el problema definiendo la región de otra manera.

Si seccionamos un plano normal a "y", llegaremos a algo muy similar a lo que tenemos; si seccionamos con planos normales a "z", necesitaremos dos regiones: una dentro del cono (Fig. 5.14.9a) y otra en el casquete esférico (Fig. 5.14.9b). La primera región plana se define:



La segunda región plana (Fig. 5.14.9b) se define:

Y los cortes son válidos desde el plano xy hasta $z = 2\sqrt{3}/2$, por lo que:

$$V_1 = \int_0^{2\sqrt{3}/2} \int_0^{\sqrt{25-x^2}} \int_0^{2\sqrt{3}-z} dy dx dz$$

Así, podemos plantear nuestra primera integral:

$$V_1 = \int_0^{2\sqrt{3}/2} \int_0^{\sqrt{25-x^2}} \int_0^{2\sqrt{3}-z} dy dx dz$$

Integramos:

$$\int_0^{2\sqrt{3}/2} \int_0^{\sqrt{25-x^2}} \frac{1}{2} (2\sqrt{3}-z)^2 dx dz$$



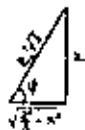
Fig. 5.14.9

Ahora:

$$\int_0^{2\sqrt{3}/2} \int_0^{\sqrt{25-x^2}} \frac{1}{2} (2\sqrt{3}-z)^2 dx dz = \int_0^{2\sqrt{3}/2} \int_0^{\sqrt{25-x^2}} \frac{1}{2} (2\sqrt{3}-z)^2 dx dz$$

Hacemos:

$$z = \frac{2}{\sqrt{3}} \cos \phi; \quad dz = -\frac{2}{\sqrt{3}} \sin \phi d\phi; \quad \sqrt{\frac{25}{3}-x^2} = \frac{5}{\sqrt{3}} \cos \phi$$



Además: si $z=0, \phi=0$; si $z=2/\sqrt{3}, \phi=\pi/2$

Entonces:

$$\int_0^{2\sqrt{3}/2} \int_0^{\sqrt{25-x^2}} \frac{1}{2} (2\sqrt{3}-z)^2 dx dz = \int_0^{\pi/2} \int_0^{5\cos \phi} \frac{1}{2} (2\sqrt{3}-\frac{2}{\sqrt{3}}\cos \phi)^2 \frac{5}{\sqrt{3}} \cos \phi d\phi dz$$

$$= \frac{5\sqrt{3}}{12}$$

Finalmente:

$$\frac{5\sqrt{3}}{12} \int_0^{2\sqrt{3}/2} dz = \frac{5\sqrt{3}}{12} \left[z \right]_0^{2\sqrt{3}/2} = \frac{5\sqrt{3}}{12} \cdot \frac{2\sqrt{3}}{2} = \frac{5\sqrt{3}}{6}$$

La segunda región plana (Fig. 5.14.9b) se define:

$$E_2 = \{(x,y,z) / 0 \leq x \leq \sqrt{25-z^2}; 0 \leq y \leq \sqrt{25-x^2}\}$$

y como los cortes son válidos de $z = 2\sqrt{3}/2$ a $z = 5$:

$$V_2 = \int_{2\sqrt{3}/2}^5 \int_0^{\sqrt{25-z^2}} \int_0^{\sqrt{25-x^2}} dy dx dz$$

Y nuestra integral triple:

Integramos:

$$\int_{2\sqrt{3}/2}^5 \int_0^{\sqrt{25-z^2}} \int_0^{\sqrt{25-x^2}} dy dx dz$$

$$\int_{2\sqrt{3}/2}^5 \int_0^{\sqrt{25-z^2}} \frac{1}{2} (25-x^2) dx dz = \int_{2\sqrt{3}/2}^5 \left[\frac{25x}{2} - \frac{x^3}{6} \right]_0^{\sqrt{25-z^2}} dz = \frac{125}{4} (5-z)$$

Ahora volvemos a tener otra integral como la que discutíamos anteriormente; la diferencia está en que el límite superior de integración permite ahora asimilar la integral a la de un cuadrante de círculo, cuyo resultado es tan sencillo como conocido, lo que permite finalmente:

$$V_2 = \frac{125}{4} \int_{2\sqrt{3}/2}^5 (5-z) dz = \frac{125}{4} \left[5z - \frac{z^2}{2} \right]_{2\sqrt{3}/2}^5 = \frac{125\pi}{4} \left(\frac{5}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{8} \right)$$

Y por último, puesto que $V = V_1 + V_2$ y V_1 ya es auto, de (5.14.9):

$$V = \frac{125\pi}{4} \left(\frac{5}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{8} + \frac{5}{24} \right) = \frac{125\pi}{12} (2-\sqrt{3}) = 8.769 \text{ cm}^3$$

Verificamos lo que decíamos en el sistema (5.14) para decidir sobre la mejor forma de definir una región, tenemos que referirnos a la integral para la que se define. En este caso fue más ventajoso definir dos regiones, que una sola.

Para terminar nuestro problema, debemos primeramente calcular el volumen total extraído a cada esfera, pero como recordará, sólo tenemos considerado la cuarta parte de la región:

Volumen extraído a una esfera = $0.769 \times 4 = 3.075 \text{ cm}^3$

que pesan

$$85.075 \times 2.05 = 275.335 \text{ gr.}$$

En un día se habrán extraído:

$$275.335 \times 1000 = 275.335 \text{ kg.}$$

y como la eficiencia de recuperación es del 80%:

$$275.335 \times 0.8 = \underline{\underline{220.268 \text{ kg. de arena recuperada/día}}}$$

5.14.4) La integral iterada en regiones regulares:

Solo unas breves palabras al respecto, puesto que ya estás incluyendo lo que va a pasar.

En efecto, cuando no tenemos una región normal, vamos a suponer, porque al cortarse con un plano normal a x^2 , no obtenemos una región plana normal (Fig 5.14.10) no podemos definir

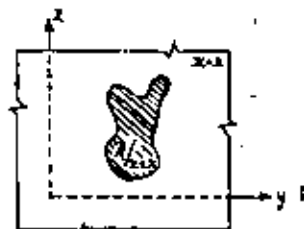


Fig. 5.14.10

$$F(x) = \iint_{R(x)} f(x, y, z) dy dz,$$

puesto que esta integral solo puede calcularse como iterada si la región es normal.

Pero si nuestra región original es regular, esto es, si puede descomponerse en un número finito de regiones normales, entonces

podemos aplicar reiteradamente (5.15.0.9) y escribir:

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{V_1} f(x, y, z) dx dy dz + \iiint_{V_2} f(x, y, z) dx dy dz + \dots + \iiint_{V_n} f(x, y, z) dx dy dz \quad (5.16.1)$$

y resolver cada una de las integrales como ya vimos en el inciso (5.16.3)

5.11) La integral Triple en Coordenadas Curvilíneas.

Aplicación a Cilíndricas y Esféricas.

5.11.1) Introducción: A lo largo de estos apuntes hemos hablado ya de las coordenadas curvilíneas y de algunas de sus aplicaciones. Específicamente, en el sistema (5.9) vimos cómo, al pasar de un sistema de referencia a otro, la forma de las regiones podía simplificar y por ende, las integrales que sobre ellas se definen.

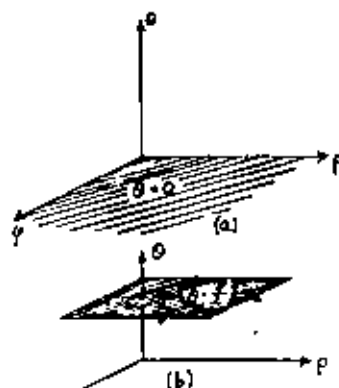
En integral triple, sucede por el estilo como veremos a continuación:

5.11.2) Mapas de regiones en E^3 : Consideremos el ejemplo (5.14.3) y la transformación a coordenadas esféricas:

$$(5.11.2.a) \begin{cases} x = \rho \sin \varphi \cos \theta \\ y = \rho \sin \varphi \sin \theta \\ z = \rho \cos \varphi \end{cases} \Rightarrow \sqrt{\left(\frac{x}{\rho}, \frac{y}{\rho}, \frac{z}{\rho}\right)} = \rho \sin \varphi$$

Puesto que este Jacobiano es diferente de cero, en general, podemos asegurar que, a cada vector de posición $F(x, y, z)$, corresponde un único vector de posición $\tilde{F}(\rho, \varphi, \theta)$ en el sistema esférico. De sea, toda curva en el sistema cartesiano, tiene su correspondiente imagen en el sistema esférico y lo mismo puede decirse de cada superficie.

Entonces veamos cuáles son las imágenes de las fronteras de la región V . Las fronteras son: los planos $z=0$ y $z=c$ con ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = c^2$ y la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = c^2$. Para entrar sus respectivas imágenes, restringimos a $z=0$ respectivamente $z=c$, sus ecuaciones (5.11.2.a).



Entonces, al plano $z=0$:

$$\rho \cos \varphi = 0$$

para $z=0$ $\rho \sin \varphi \neq 0$, surge que $\varphi = \pi/2$.

$$\cos \theta = 0, \quad \theta = \pi/2$$

Es, el plano xy (Fig 5.11.1.a)

Ahora, el plano $z=c$:

$$\rho \cos \varphi = c; \quad \cos \varphi = c/\rho; \quad \rho = c/\cos \varphi$$

Es, el plano que se muestra en la figura (5.11.1.b)

El arco $x^2 + y^2 + z^2 = c^2$

$$\rho^2 \sin^2 \varphi \cos^2 \theta + \rho^2 \sin^2 \varphi \sin^2 \theta + \rho^2 \cos^2 \varphi = c^2$$

$$\rho^2 \sin^2 \varphi = c^2 \cos^2 \varphi; \quad \rho \sin \varphi = c \cos \varphi; \quad \rho = c \cot \varphi$$

Es, el plano mostrado en la figura (5.11.1.c)

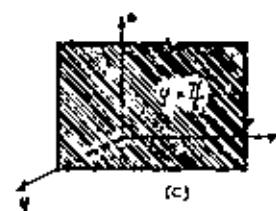
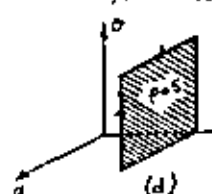


Fig. 5.12.1



La esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 25$
 $\rho^2 \sin^2 \varphi \cos^2 \theta + \rho^2 \sin^2 \varphi \sin^2 \theta + \rho^2 \cos^2 \varphi = 25$
 $\rho^2 \sin^2 \varphi = 25 \cos^2 \varphi; \quad \rho \sin \varphi = 5 \cos \varphi; \quad \rho = 5 \cot \varphi$ (Fig 5.11.1.d)

Si juntamos todas estas superficies en la figura (5.17.2.a) nos damos cuenta de que no hemos cerrado la región, a pesar de que en el sistema cartesiano, las cuatro superficies se juntaban para cerrar la región. ¿Es esta pasando entonces?

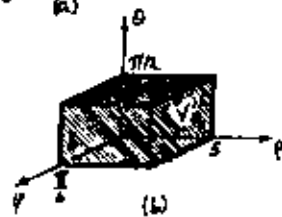


Fig. 5.17.2

¡Claro! El eje z forma parte de la región en el sistema cartesiano; sus ecuaciones: $\begin{cases} z=0 \\ y=0 \end{cases}$
 $\begin{cases} x=5 \\ x=0 \end{cases}$
 $\begin{cases} z=5-x^2 \\ z=0 \end{cases}$
 Como $z=0$, $z=5-x^2$ no pueden ser simultáneamente autos:
 $5-x^2=0 \Rightarrow x=0$
 y el espacio no puede ser punto a punto. El eje z mapa como el plano $u=0$.

Algo similar ocurre en el origen, donde $f=0$, ocasionando también la anulación del Jacobiano. El origen mapa entonces como el plano $f=0$, dejando así definida la región imagen, que llamaremos V' y que definimos (Fig. 5.17.2.b) $V' = \{(p, u) / 0 \leq p \leq 5; 0 \leq u \leq 5\}$ -- (5.17.2.4)

Muchas veces una región, que tanto trabajo nos habría costado definir en el sistema cartesiano, se convierte en una región prismática al cambiar de sistema de referencia.

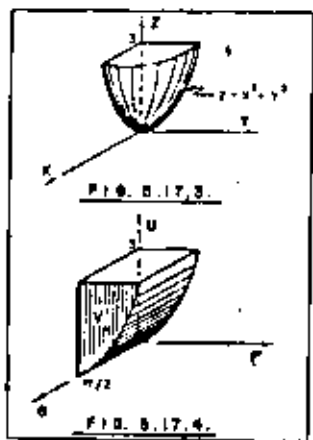
Por otra parte, cabe indicar que el procedimiento expresado es el general para realizar el mapeo de una región de un sistema coordenado a otro. En este caso, se podría haber establecido la región imagen al caer en la cuenta de que las fronteras son superficies coordenadas del sistema externo; en efecto, las superficies coordenadas, en el sistema externo, son conos, esferas y planos verticales.

También es importante el sistema cilíndrico, cuyas ecuaciones de transformación son:

$$(5.17.2d) \dots \begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \\ z = u \end{cases} \Rightarrow J \begin{pmatrix} x, y, z \\ \rho, \theta, u \end{pmatrix} = \rho$$

Las superficies coordenadas son cilindros, planos verticales y planos horizontales. Las partes singulares (donde $J=0$) se agrupan en el eje x , que mapa como el plano $\rho=0$.

Ejemplo 5.17.1) Dada la región mostrada en la figura (5.17.3), representar su imagen en el sistema cilíndrico y definirla analíticamente.



Las fronteras de la región son:

- Plano $\rho=5$
- Paraboloida $z=5-x^2$:
 $u=5-\rho^2 \cos^2 \theta$
 Cilindro parabólico
- Plano $z=0$, $u=0$
 $\rho \cos^2 \theta = 0$
 Plano $\rho=0$
- Plano $y=0$, $z=0$
 $\theta=0$; $\theta=\pi/2$
 Plano paralelo a ρu

Para cerrar, el eje z mapa como el plano $f=0$, para determinar así la región mostrada en la figura (5.17.4), que su define:

$$V' = \{(p, \theta, u) / 0 \leq \theta \leq \pi/2; 0 \leq p \leq 5; 0 \leq u \leq 5\} \dots (5.17.2.6)$$

En ocasiones puede ser ventajoso cambiar la forma específica de (5.17.2.1) o de (5.17.2.2). Para explicar lo que queremos decir, consideremos el siguiente

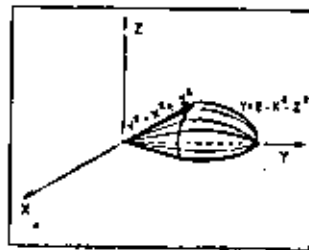


FIG. 5.17.3

Ejemplo 5.17.2) Dada la región con-
 signada en la figura (5.17.3) representa-
 r su imagen en un sistema cilíndrico y
 definirla analíticamente.

Ahora nos conviene usar la transformación:

$$(5.17.2c) \dots \begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = u \\ z = \rho \sin \theta \end{cases} \Rightarrow J \begin{pmatrix} x, y, z \\ \rho, \theta, u \end{pmatrix} = \rho$$

con lo que tendríamos que las fronteras son

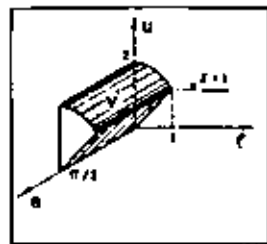


FIG. 5.17.9

- a) Paraboloide $y = z + z^2 - z^2$
 $u = z - (f^2 \cos^2 \theta + f^2 \sin^2 \theta)$
 $u = z - f^2$ cilindro parabólico
- b) Cono $y^2 = x^2 + z^2$
 $u^2 = f^2 \cos^2 \theta + f^2 \sin^2 \theta = f^2$
 $u = f$ plano perpendicular a fu
- c) Plano $xy, z = 0$
 $\theta = 0$ Plano fu

d) Plano $yz, z = 0$

$\theta = \pi/2$ plano paralelo a fu

e) Cerramos con el eje "y", que es donde ahora se abre el Jacobiano y que mapea en $\{z=0, \text{plano } \theta u\}$, para tener la figura (5.17.6) donde la región V' se define:

$$V' \{ (l, \theta, u) / 0 \leq \theta \leq \pi/2; f \leq u \leq z - f^2; 0 \leq u \leq f \}$$

Las coordenadas siguen siendo cilíndricas; las ecuaciones de transformación han cambiado; también cambian las superficies coordenadas, que ahora son cilíndricas con eje de simetría en "y"; planos que contienen a "y" y planos paralelos a yz .

Aunque hasta ahora hemos hablado de coordenadas cilíndricas y esféricas, exclusivamente, no debe entenderse que éstos sean los únicos sistemas de coordenadas curvilíneas en \mathbb{R}^3 . En general tendremos el problema de transformar la región "V" en el sistema cartesiano, a la región V' en un sistema cualquiera de coordenadas curvilíneas, dada por

$$\begin{cases} x = f(u, v, w) \\ y = g(u, v, w) \\ z = h(u, v, w) \end{cases} \dots (5.17.7.3)$$

con la condición de que

$$J \left(\frac{x, y, z}{u, v, w} \right) \neq 0$$

Para hacerlo, deberemos:

- 1º) Identificar las fronteras de nuestra región en el sistema cartesiano y los puntos singulares (donde el Jacobiano se anula) en su caso.
- 2º) Sustituir (5.17.7.3) en las ecu. de las fronteras, interpretar geométricamente el resultado.
- 3º) Dar a los puntos singulares, en su caso, el tratamiento especial que merezcan.
- 4º) Dibujar en el nuevo sistema.

6.11.3) Cambio de variables en la integral triple

Puesto que ya hemos visto que un cambio de variables puede simplificar grandemente una región, es lógico esperar que la integral correspondiente también se simplificará al aplicarse en la región transformada. Lo que tenemos que ver ahora es que debemos hacer y tener en cuenta para efectuar la integral en la nueva región.

Para ver esto en forma racional, debemos hacer intervenir un concepto que es muy sencillo en sí; pero que no se contempla en forma explícita en el programa del curso, más por la costumbre a contemplarlo con la mínima profundidad requerida para los fines inmediatos que perseguimos. Una visión más profunda la encontraremos en el Apéndice y te recomendamos que lo consultes, pues te será de gran utilidad en otras materias que tendrás de cursar, Mecánica de Fluidos y Mecánica del Medio Continuo, entre otras. El concepto en cuestión es el de INTEGRAL DE SUPERFICIE.

Cuando vimos la integral curvilínea, hicimos gran hincapié en que nos limitaríamos a integrar aquellos campos vectoriales que nos interesara reducir a una curva ó trayectoria. Pero eso es que toda integral curvilínea se puede reducir a una integral ordinaria, con una sola variable.

Pero bien, si nos interesase reducir un campo vectorial a una superficie a integrarlo, tendríamos la integral de superficie.

En general, una integral de superficie cualquiera estará dada por

$$\iint_S \vec{F} du dv \dots \dots (5.11.3.1)$$

donde \vec{F} es el campo vectorial y " u ", " v " son los parámetros de la superficie; en casos particulares, estos parámetros pueden ser un par cualquiera de las variables cartesianas.

Ahora bien, de toda la gama de combinaciones de funciones vectoriales que nos puede interesar integrar, hay una que es la más importante.

$$Q = \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} ds \dots \dots (5.11.3.2)$$

donde \vec{F} es el campo vectorial

\vec{n} es la normal unitaria exterior a la superficie.

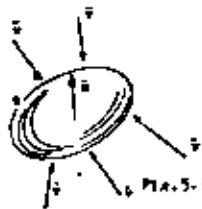
$$ds = \sqrt{EG + F^2} du dv = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + 1} du dv = \dots$$

Esta integral es importante porque valía el gasto de un fluido, cuyo campo de velocidades es \vec{F} , a través de una superficie cualquiera; en efecto, si recurridos (4.1.0.3) encontraremos que (5.11.3.2) no es sino la generalización de aquella en tres dimensiones.

Para poder llegar a un valor numérico de (5.11.3.2), deberemos definir la región de integración en el plano de los parámetros; se nos pueden presentar dos casos:

- a) Nos interesa una porción de superficie limitada por una curva cerrada.
- b) Nos interesa una superficie cerrada (p.ejuna esfera, un elipsoide, etc.)

Cuando se tiene el primer caso, se tiene una línea con la integral curvilínea a través del siguiente



Teorema 5.17.1 (Stokes).
Si " S " es una superficie orientable y seccionablemente suave y " \vec{F} " un campo vectorial diferenciable, entonces:

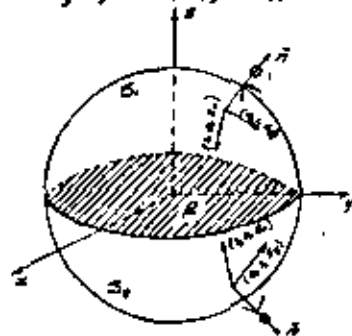
$$\iint_S \nabla \times \vec{F} \cdot \vec{n} ds = \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} \dots \dots (5.17.3)$$

Esta cantidad se le llama "circulación de \vec{F} "; sus

dimensiones [$L^2 T^{-2}$]. Su aplicación es básica en la teoría del vórtice. (Ver Apéndice).

Cuando se tiene una superficie cerrada, entonces existe una importantísima línea con la integral triple, que ilustraremos en el siguiente.

Ejemplo 5.17.8) Calcular el volumen de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, por medio de una integral doble



$$Vol = R \iint_A x dx dy$$

y puesto que

$$x = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$$

$$Vol = 2 \iint_A \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} dx dy$$

que puede resolverse mediante una transformación a coordenadas polares para obtener el resultado ya conocido: $Vol = \frac{4\pi R^3}{3}$

Fig. 5.17.8

Ejemplo 5.17.9) Se nos da R , calcular $\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} ds$, donde " S " es

la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ (el símbolo \iint indica, como ya te lo imaginabas, que la integral es sobre toda la superficie cerrada).

Debemos calcular \vec{n} ; ya sabemos que

$$\vec{n} = \frac{\nabla(x^2 + y^2 + z^2)}{\sqrt{2x^2 + 2y^2 + 2z^2}}$$

pero en este caso, el símbolo es importante, pues \vec{n} debe ir dirigido siempre hacia afuera; en la figura (5.17.9) vemos que en la parte superior arriba del plano xy , es la siguiente: si hacemos el producto

$$(1, 0, z_1) \times (0, 1, z_2) = -z_1 z_2 \vec{j} + z_1 z_2 \vec{i}$$

en tanto que, en la parte inferior o xy , para hacerlo, deberemos:

$$(0, 1, z_1) \times (1, 0, z_2) = z_1 z_2 \vec{i} + z_1 z_2 \vec{j}$$

Calcular una integral de superficie, es muy similar al cálculo de

una integral curvilínea: debemos llevar al vector a la superficie y hacer las operaciones indicadas, con lo que llegaremos tener una integral doble común y corriente sobre la superficie en S.

$$\vec{n}_1 = x\vec{k} = \sqrt{25-x^2-y^2} \vec{k}$$

$$\vec{n} = \frac{x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

$$\vec{n}_1 \cdot \vec{n} = \frac{\sqrt{25-x^2-y^2}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}; dS = \sqrt{z^2+x^2+y^2}$$

$$\vec{n}_1 \cdot \vec{n} dS = \sqrt{25-x^2-y^2} dx dy$$

Ahora en S₂:

$$\vec{n}_2 = x\vec{k} = -\sqrt{25-x^2-y^2} \vec{k}; \vec{n} = \frac{x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

$$\vec{n}_2 \cdot \vec{n} = -\frac{\sqrt{25-x^2-y^2}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}; \vec{n}_2 \cdot \vec{n} dS = -\sqrt{25-x^2-y^2} dx dy$$

Entonces:

$$\iint_S \vec{a} \cdot \vec{n} dS = \iint_{S_1} \vec{a} \cdot \vec{n} dS + \iint_{S_2} \vec{a} \cdot \vec{n} dS$$

$$\iint_{S_1} \vec{a} \cdot \vec{n} dS = \iint_{D_1} \sqrt{25-x^2-y^2} dx dy + \iint_{D_2} -\sqrt{25-x^2-y^2} dx dy$$

$$\iint_{S_2} \vec{a} \cdot \vec{n} dS = 2 \iint_{D_1} \sqrt{25-x^2-y^2} dx dy = Vol \dots \dots \dots (5.17.3.a)$$

Por supuesto que en S₂ = yj, S₃ = xz:

$$\iint_{S_2} \vec{a} \cdot \vec{n} dS = 2 \iint_{D_2} \sqrt{25-x^2-z^2} dx dz = Vol \dots \dots \dots (5.17.3.b)$$

$$\iint_{S_3} \vec{a} \cdot \vec{n} dS = 2 \iint_{D_3} \sqrt{25-y^2-z^2} dy dz = Vol \dots \dots \dots (5.17.3.c)$$

y entonces, al sumar miembro a miembro (5.17.3.a), (5.17.3.b) y (5.17.3.c):

$$3 Vol = \iint_S (\vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \vec{a}_3) \cdot \vec{n} dS$$

y como $\vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \vec{a}_3 = x\vec{k} + y\vec{j} + x\vec{i} = \vec{r}$

y además:

$$Vol = \iiint_V dxdydz, \text{ donde } V \text{ es la región delimitada por}$$

la esfera; y por otra parte

$$\vec{r} \cdot \vec{r} = 3 \dots$$

podemos escribir:

$$\iiint_V \vec{r} \cdot \vec{r} dxdydz = \iint_S \vec{r} \cdot \vec{n} dS \dots \dots \dots (5.17.3.d)$$

Esta relación la generalizaremos en el siguiente

Teorema 5.17.2 (Gauss, de la divergencia o Green en el espacio). - Si el campo vectorial " \vec{r} " es diferenciable en la región " V ", delimitada por la superficie cerrada " S ", orientada naturalmente hacia afuera, entonces:

$$\iiint_V \nabla \cdot \vec{r} dV = \iint_S \vec{r} \cdot \vec{n} dS \dots \dots \dots (5.17.3.e)$$

La importancia de este teorema es muy grande; más de rigurosamente la interpretación física de la divergencia para cualquier campo de velocidades; de las bases para establecer la ecuación de difusión, etc (ver Apéndice); pero la utilidad inmediata que nosotros vamos a obtener de él, es que nos va a permitir encontrar la relación fundamental para el cambio de variables en la integral triple.

Para verla desglosemos accidentalmente la ecuación (5.17.3.e) con

$$\vec{r} = R_1(x,y,z)\vec{i} + R_2(x,y,z)\vec{j} + R_3(x,y,z)\vec{k}$$

supongamos, además, que la superficie " S " se expresa en términos de las parámetros " u " y " w "; es decir, su ecuación vectorial

$$\vec{r} = x(u,w)\vec{i} + y(u,w)\vec{j} + z(u,w)\vec{k}$$

Entonces:

$$\nabla \cdot \vec{r} = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z}$$

Por otra parte:

$$\vec{n} = \pm \frac{\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial w}}{\left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial w} \right|} = \pm \frac{1}{\left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial w} \right|} \left[j \left(\frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial w} - \frac{\partial x}{\partial w} \frac{\partial z}{\partial u} \right) + j \left(\frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial w} - \frac{\partial y}{\partial w} \frac{\partial z}{\partial u} \right) + j \left(\frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial w} - \frac{\partial x}{\partial w} \frac{\partial y}{\partial u} \right) \right]$$

y además:

$$dS = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right| du dv$$

Así, (5.17.3.4) queda:

$$\iint_D \left(\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial x}{\partial w} \right) du dv dw = \iint_D \left[\left(\frac{\partial x}{\partial u} \right) + \left(\frac{\partial x}{\partial v} \right) + \left(\frac{\partial x}{\partial w} \right) \right] du dv \quad (5.17.3.5)$$

Ej. en pte 5.17.5): Valor el segundo miembro de (5.17.3.5)

Para la esfera se tiene: $x = 5 \cos \varphi \cos \theta$

$$R: \{ (\varphi, \theta) \mid 0 \leq \varphi \leq \pi, 0 \leq \theta \leq 2\pi \} \quad y = 5 \sin \varphi \cos \theta$$

$$z = 5 \sin \varphi \sin \theta$$

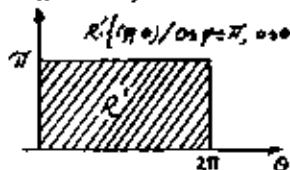


Fig. 5.17.9

Con lo que la esfera queda representada por la región R' mostrada en la figura (5.17.9).

Ahora:

$$J \left(\frac{x}{\partial \varphi} \right) = 25 \sin^2 \varphi \cos \theta$$

$$J \left(\frac{x}{\partial \theta} \right) = 25 \sin^2 \varphi \sin \theta$$

$$J \left(\frac{x}{\partial \theta} \right) = 25 \sin \varphi \cos \varphi$$

Como $\vec{r} = \vec{r}$, $\vec{r}_1 = x = 5 \cos \varphi \cos \theta$ $\Rightarrow J \left(\frac{x}{\partial \varphi} \right) = 125 \sin^2 \varphi \cos^2 \theta$

Análogamente

$$J_1 \left(\frac{x}{\partial \theta} \right) = 125 \sin^2 \varphi \sin^2 \theta$$

$$J_2 \left(\frac{x}{\partial \theta} \right) = \frac{125 \sin \varphi \cos \varphi}{125 \sin \varphi}$$

Así:

$$\iint_D \vec{r} \cdot \vec{n} dS = \iint_{R'} 125 \sin \varphi d\varphi d\theta = 125 \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \sin \varphi d\varphi d\theta$$

$$= 250 \int_0^\pi d\theta = 250\pi = 2 \text{ veces el volumen de la esfera.}$$

Ahora consideremos nuevamente el ejemplo (5.16.2) y tratemos de

y tratemos de escribir en el sistema (ρ, φ, θ) donde, según vimos en el inciso (5.11.2), la región se convierte en prismas rectangulares, mediante la transformación mostrada en el sistema de coordenadas (5.11.2.a).

En (5.17.3.a) podemos escribir:

$$V = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \rho^2 \sin \theta d\theta d\varphi d\rho \quad (5.17.3.b)$$

donde S es la superficie espacialmente curva formada por los planos xz , yz , por el cono $x^2 + y^2 = z^2$ y por la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 25$. Mediante la transformación propuesta, S se transforma en la superficie, también espacialmente curva, mostrada en la figura (5.17.3), que llamaremos S' .

Para resolver el segundo miembro de (5.17.3.a) tenemos que pasar a S' en términos de dos parámetros; para esto también lo podemos lograr a través de la superficie S' , puesto que a cada punto de S' , correspondiente al punto de S del parámetro el plano $\varphi = \frac{\pi}{2}$:

$$\rho = u$$

$$\varphi = \frac{\pi}{2}$$

$$\theta = v$$

y entonces, el cono representado por aquel plano:

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{1}{2} u \cos v \\ y &= \frac{1}{2} u \sin v \\ z &= \frac{1}{2} u \end{aligned} \right\} \quad (5.17.3.c)$$

Además, puesto que las variables con las mismas las límites de integración serán las mismas lo único que cabe prestar es que por un lado ya en signo cambiado al pasar de un sistema a otro, debido a un diferente sentido del vector "n". En este caso, como sabemos que tratamos con un volumen, espacialmente positivo, haremos caso omiso del signo, utilizando el que nos lleva al volumen positivo. Entonces, haciendo en nuestro (5.17.3.5) podemos escribir la siguiente expresión, que es válida en ambos sistemas:

$$V = \iint_{S'} J \left(\frac{x}{\partial u} \right) du dv \quad (5.17.3.d)$$

El Jacobiano involucrado lo podemos escribir fácilmente a través de

(5.17.2.0), pero este serviría para el plano $\phi = \frac{\pi}{2}$; sin embargo, en general podemos escribir: (ver 5.16.2.2)

$$J\left(\frac{x}{r}, \frac{y}{r}\right) = J\left(\frac{x}{r}, \frac{y}{r}\right) J\left(\frac{z}{r}, \frac{z}{r}\right) + J\left(\frac{x}{r}, \frac{y}{r}\right) J\left(\frac{z}{r}, \frac{z}{r}\right) + J\left(\frac{x}{r}, \frac{y}{r}\right) J\left(\frac{z}{r}, \frac{z}{r}\right)$$

con lo cual, (5.17.2.1) queda:

$$V = \int \int \int \left[J\left(\frac{x}{r}, \frac{y}{r}\right) J\left(\frac{z}{r}, \frac{z}{r}\right) + J\left(\frac{x}{r}, \frac{y}{r}\right) J\left(\frac{z}{r}, \frac{z}{r}\right) + J\left(\frac{x}{r}, \frac{y}{r}\right) J\left(\frac{z}{r}, \frac{z}{r}\right) \right] dxdydz \quad (5.17.2.2)$$

Ahora aplicamos al resto el teorema de la divergencia; así es, convertiremos la integral de superficie en una integral triple en el espacio (5.17.2.3), para esto cambiaremos (5.17.2.2) con (5.17.2.0) y observamos que $J\left(\frac{x}{r}, \frac{y}{r}\right)$ debe corresponder a $J\left(\frac{x}{r}, \frac{y}{r}\right)$ (en y se varían); luego, $\frac{\partial}{\partial z}$ debe corresponder a $\frac{\partial}{\partial z} J\left(\frac{x}{r}, \frac{y}{r}\right) = \rho \cos \phi (-\rho \sin \phi) = -\rho^2 \sin \phi \cos \phi \dots \dots \dots (5.17.2.4)$

Análogamente:

$$a_2 \rightarrow x J\left(\frac{x}{r}, \frac{y}{r}\right) = \rho \cos \phi (-\rho \sin \phi) = -\rho^2 \sin \phi \cos \phi \quad (5.17.2.4)$$

$$a_3 \rightarrow z J\left(\frac{x}{r}, \frac{y}{r}\right) = 0 \quad \dots \dots \dots (5.17.2.5)$$

Al observar nuevamente (5.17.2.2), vemos que (5.17.2.4) debe ser derivada con respecto a ϕ (primera variable); (5.17.2.5) con respecto a ϕ y (5.17.2.6) con respecto a θ y luego sumamos para obtener el integrando:

$$\frac{\partial}{\partial \phi} (\rho^2 \sin \phi \cos \phi) = 2\rho^2 \cos \phi \sin \phi$$

$$\frac{\partial}{\partial \phi} (-\rho^2 \sin \phi \cos \phi) = \rho^2 \cos \phi (\cos \phi - \sin^2 \phi)$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta} (0) = \frac{0}{\rho^2 \sin \phi} = J\left(\frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{z}{r}\right)$$

entonces:

$$V = \int \int \int \left[J\left(\frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{z}{r}\right) + \rho^2 \cos \phi (\cos \phi - \sin^2 \phi) \right] dxdydz \quad (5.17.2.6)$$

$$V = \int \int \int \rho^2 \cos \phi (\cos \phi - \sin^2 \phi) dxdydz = \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} \int_0^R \rho^2 (\cos^2 \phi - \sin^2 \phi) d\rho d\phi d\theta$$

$$V = \frac{128\pi R^3}{3} (1 - \frac{\sqrt{2}}{2}) = \frac{276.9 \text{ cm}^3}{3}$$

Resultado que coincide con el obtenido en el ejemplo (5.16.2); ahora la integración fue mucho más sencilla, pero tal vez piensen (y con razón) que esa simplificación se ve compensada con otras por el volumen de cálculos que debemos hacer para llegar a la ecuación (5.17.2.6). La ventaja es si siempre tenemos de hacer todos esos cálculos o si podemos evitarlos que siempre llegamos a una expresión análoga a (5.17.2.6). Si ves el Apéndice, te enseñaré a demostrar que no solamente en el caso del volumen, sino que, en el caso general.

Si $f(x, y, z)$ es integrable en V :

$$\iiint_V f(x, y, z) dxdydz = \iiint_V f(x, y, z) J\left(\frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{z}{r}\right) dxdydz \dots \dots (5.17.2.7)$$

Ejemplo 5.17.6 Cuando tenemos un cilindro por una tubería y queremos darle la oportunidad de que siga 3 direcciones ortogonales,

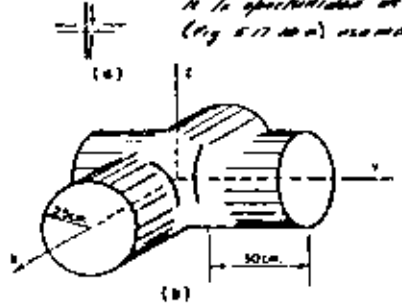


FIGURA 5.17.10.

(ver 5.17.10 a) usamos una pieza prefabricada que, en el texto sugerimos, se llama "aros" y que pueden ser representados en la figura (5.17.10. b). Tal es el caso de una tubería alambicada en conductos de acero (para espesor = 0.05 kg/cm²) o hasta de una tubería alambicada del tubo de acero (para espesor = 0.70 kg/cm²). Hecho de acero, si el espesor del aro es de 1cm

el peso total puede descomponerse en dos partes: el peso de la pieza sola y el peso del alambic. Por otra parte, tanto para una como para otra podemos descomponerla en el cilindro circular recto de 30 cm de altura y la intersección

Peso total	{	Peso de la pieza	{	Peso del alambic = 8	kg
			{	Peso de la intersección = 8	
Peso total	{	Peso del alambic	{	Peso del alambic cuando es el cilindro = 8	kg
			{	Peso del alambic cuando es la intersección = 8	

El peso P_1 es ahora de inmediato:

$$P_1 = 4(0.25) \pi (2.5)^2 (3) = 300.29 \text{ kg}$$

Si consideramos que el espesor es muy pequeño cuando se lo compara con las dimensiones generales de la pieza, P_1 puede ser determinado de inmediato:

$$P_1 = 4(2.8) \pi (2.5)(0.1) = 107.03 \text{ kg}$$

Con la misma transformación, P_2 también podemos obtenerlo considerando el volumen de acero como la superficie de la transformación por el espesor. En el ejemplo (5.11.4) vimos que la superficie de intersección es

$$S = 16(2.5^2) \left(\frac{\pi}{4} - 1\right) = 57.08 \text{ dm}^2$$

$$P_2 = 57.08(0.1)(7.8) = 44.52 \text{ kg}$$

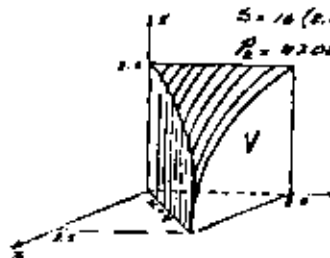


Fig. 5.11.11

No nos resta por otro valor P_2 , peso del líquido contenido en la intersección; para ello, vamos a aprovechar la simetría y calcularemos el volumen de la región V' mostrada en la figura (5.11.12), que es la mitad de la parte del volumen total. Nótese que siempre sobre el plano yz se define una región rectangular en la integración tradicional que mejora por razones.

Propagamos la transformación

$$x = \rho \cos \theta$$

$$y = \rho \sin \theta$$

$$z = \rho \cos \theta$$

$$J\left(\frac{x, y, z}{\rho, \theta, z}\right) = \rho$$

Encontramos entonces la región V' en el espacio (ρ, θ, z) :

- Plano yz , $x=0$: $\theta = \pi/2$ (Plano perpendicular al eje x)
- Plano xz , $y=0$: $\theta = 0$ (Plano yz)
- Plano xy , $z=0$: $\rho = 2.5$ (Plano perpendicular al eje z)
- Cilindro $x^2 + y^2 = 6.25$: $\rho = 2.5$ (Plano perpendicular al eje z)
- Plano $x=y$: $\theta = \pi/4$
- Eje z : $\rho = 0$ (Plano xy)

La región transformada es representada como en la figura (5.11.12 a). Para definirla, dejamos que sea el ángulo el que varía sobre los límites anteriores, lo que implica cortar con planos perpendiculares a "u", como se ve en la figura (5.11.12 b).

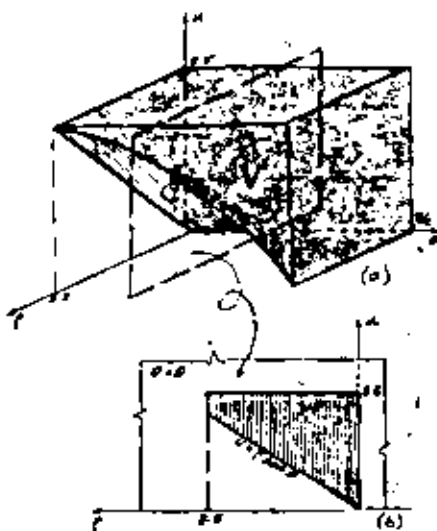


Fig. 5.11.12

Finalmente

$$V_1 = \int \int \int \rho d\rho d\theta dz$$

$$= \int_0^{\pi/4} \int_0^{\pi/2} \left\{ \int_{\rho=0}^{\rho=2.5} \rho d\rho \right\} d\theta dz$$

$$= \int_0^{\pi/4} \int_0^{\pi/2} (2.5\rho - \rho^2) d\rho dz = 1.25 \left[\rho^2 - \frac{\rho^3}{3} \right]_0^{2.5} dz$$

$$= 7.0625 - 12.6875 \text{ cm}^3$$

$$V_1 = \int_0^{\pi/4} (7.0625 - 12.6875 \text{ cm}^3) d\theta$$

$$= 7.0625 \theta - 12.6875 \left[\sin \theta \right]_0^{\pi/4}$$

$$V_1 = 7.06 \text{ dm}^3$$

$$P_2 = 16(7.06)(7.8) = 96.03 \text{ kg}$$

Peso total:

- $P_1 = 107.03 \text{ kg}$
- $P_2 = 44.52 \text{ kg}$
- $P_3 = 300.29 \text{ kg}$
- $P_4 = 96.03 \text{ kg}$
- 547.87

5.18) APLICACIONES DE LA INTEGRAL TRIPLE.

5.18.1) Centro de Masa

Consideremos el cuerpo del ejemplo (5.16.1). Supongamos que deseamos irrotar como se indica en la figura (5.18.1), sin que experimente "giro". ¿Dónde debe colocarse el gancho?

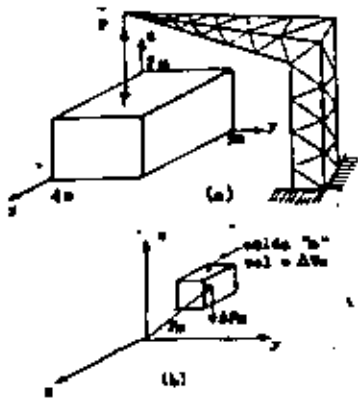


Fig. 5.18.1

La única manera de evitar el giro es lograr que la fuerza de inyección sea colineal al peso del cuerpo. Del ejemplo (5.16.1) sabemos que el peso es \vec{w} y por ignoramos cuál es su línea de acción

El peso lo podemos considerar como resultante de los pesos de todas las partículas materiales que componen el cuerpo; si dividimos a éste en "n" prismas, según una red, podemos escoger un punto en el n-ésimo prisma (ver figura 5.18.1.b) suponer que en todos los puntos del prisma hay la misma densidad y calcular la masa y peso del prisma bajo una suposición:

masa del prisma $m = \rho(\vec{r}_m) \Delta V_m$

peso " " " $= g \rho(\vec{r}_m) \Delta V_m$ (longitudinal)

y, si queremos definir a este último, nos resulta:

$\Delta \vec{P}_m = -g \rho(\vec{r}_m) \Delta V_m \vec{e}_z$

Además, podemos suponer que \vec{r}_m es punto de la línea de acción del peso g , es del caso, su momento con respecto al origen vale:

$\Delta \vec{M}_m = -g \rho(\vec{r}_m) \Delta V_m \vec{e}_z \times \vec{r}_m$

La suma vectorial de estos momentos nos daría una apreciación del momento del peso (Teorema de Steiner); pero si la red de la red establecida tiende a cero, tal suma convergerá (todas las funciones involucradas son continuas) al verdadero momento del peso con respecto al origen:

Momento del peso = $\iiint_V -g \rho(\vec{r}) \vec{e}_z \times \vec{r} dV$

$= -g \vec{e}_z \iiint_V \rho(\vec{r}) dV$

$= -g \vec{e}_z \times \vec{P} \quad \dots (5.18.1a)$

donde \vec{e}_z es una integral vectorial tomada el volumen; sus componentes se calculan integrando componente por componente; si recordamos (ej 5.16.1) que $\rho(\vec{r}) = \rho(x, y, z) = \rho(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$:

$\vec{e}_z = \iiint_V [2(x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}] dV \vec{e}_z = \iiint_V [2(x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}] dV \vec{e}_z$

Si suponemos $\vec{B} = B_x \vec{i} + B_y \vec{j} + B_z \vec{k}$:

$$B_x = \iiint_V [2(2x^2 + y^2 + z^2) + 1] dV \int \int \int (2x^2 + 2x^2 + 2x^2 + 2x^2 + 1) dx dy dz$$

$$= 1232 \text{ Kg} \cdot \text{m}^{-3}$$

$$B_y = \iiint_V [4(2x^2 + y^2 + z^2) + 1] dV \int \int \int (2x^2 + 4y^2 + 2x^2 + 2y^2 + 1) dx dy dz$$

$$= 516 \text{ Kg} \cdot \text{m}^{-3}$$

$$B_z = \iiint_V [2(2x^2 + y^2 + z^2) + 1] dV \int \int \int (2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 1) dx dy dz$$

$$= 106 \text{ Kg} \cdot \text{m}^{-3}$$

$$\vec{B} = 1232 \vec{i} + 516 \vec{j} + 106 \vec{k}$$

Entonces, puesto que \vec{P} debe equilibrar el momento de la (5.18.1), se establece la siguiente ecuación:

$$\vec{M}_P - g \vec{L} \times \vec{B} = 0$$

$$\vec{M}_P = g \vec{L} \times \vec{B} \quad \text{--- (5.18.1.b)}$$

El momento de \vec{P} lo podemos calcular

$$\vec{M}_P = m g \vec{L} \times \vec{r} \quad \text{--- (5.18.1.c)}$$

donde $m = 121 \text{ Kg}$ es la masa del cuerpo (ver el 5.14.1) y \vec{r} es el vector de posición de un punto cualquiera de la línea de acción de \vec{P} . Entonces, igualando (5.18.1.b) y (5.18.1.c):

$$m g \vec{L} \times \vec{r} = g \vec{L} \times \vec{B} \quad \text{--- (5.18.1.d)}$$

Las líneas que el \vec{P} es un cuerpo cuya línea de acción tiene dirección \vec{e} y cuyo momento es \vec{M} , --- (fig. 5.18.2), la ecuación de su línea de acción está dada por:



Fig 5.18.2

$$\vec{r} = \frac{\vec{M} \times \vec{e}}{\|\vec{e}\|^2} + \lambda \vec{e} \quad \text{--- (5.18.1.1)}$$

Al aplicar (5.18.1.1) a (5.18.1.d):

$$\vec{r} = \frac{(\vec{L} \times \vec{B}) \times \vec{e}}{\|\vec{e}\|^2} + \lambda \vec{e}$$

Al aplicar el producto indicado:

$$\vec{r} = \frac{(\vec{L} \cdot \vec{e}) \vec{B} - (\vec{B} \cdot \vec{e}) \vec{L}}{\|\vec{e}\|^2} + \lambda \vec{e}$$

Por último, si tomamos $\vec{e} = \lambda_1 \vec{i} + \lambda_2 \vec{j}$:

$$\vec{r} = \frac{\vec{L}}{\|\vec{e}\|^2} + \lambda \vec{e} = (2.02 \vec{i} + 1.02 \vec{j} + 1.06 \vec{k}) + \lambda \vec{e} \quad \text{--- (5.18.1.e)}$$

que es la ecuación de una recta vertical que pasa por el punto $G(2.02, 1.02, 1.06)$. Por lo que el punto debería colocarse en el punto (2.53, 1.52, 2).

¿Hacia dónde y qué pasaría si quisiéramos levantar el cuerpo como se indica en la figura (5.18.3)? ¿Debería colocarse el punto?

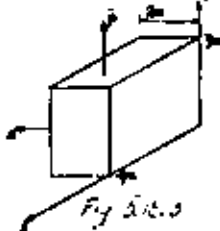


Fig 5.18.3

La única diferencia es que ahora la aceleración es $(-g \vec{j})$; si repetimos los cálculos anteriores, pero de ahora esta aceleración, obtendrás

la nueva ecuación de la línea de acción de la fuerza:

$$\bar{p} = (2.63 \sin 1.12j + 1.45k) + \lambda j \quad \dots (5.18.1.F)$$

que es una recta paralela al eje "y", que realiza o pasar por el punto G. Se antoja entonces que este punto es muy importante, pues hemos visto que las fuerzas de inercia, producidas por aceleraciones diferentes ($-gk, -gj$) pasan por ese punto ¿Será que todas las fuerzas de inercia pasan por ahí? Más aún ¿será que todos los cuerpos tienen un punto con esa propiedad?

Véase: Sea un cuerpo cualquiera "V" con una densidad continua $(*) \rho(\vec{r})$ y sujeto a una aceleración " \vec{a} " constante en todos los puntos.



Fig 5.18.4

Mediante un razonamiento análogo al anterior, establecemos que:

$$\bar{M}_a = \bar{r} \times \bar{p} = \iiint_V \rho(\vec{r}) \vec{a} \vec{r} \times dV = \vec{a} \times \iiint_V \rho(\vec{r}) \vec{r} dV.$$

$$= \vec{a} \times \bar{E} \quad \dots (5.18.1.2)$$

Al aplicar (5.18.1.1) a (5.18.1.2):

$$\bar{p} = \frac{(\vec{a} \times \bar{E}) + \bar{F}}{F^2} + \lambda, \vec{a}$$

(*) Révis considérer también la posibilidad de que fuera discreta. En tal caso se tiene un número finito de superficies suaves.

Si llamamos $m =$ masa del cuerpo $= \iiint_V \rho(\vec{r}) dV$, entonces

$$\bar{F} = m\vec{a} :$$

$$\bar{p} = \frac{(\vec{a} \times \bar{E}) + \bar{F}}{F^2} + \lambda, \vec{a} = \frac{\vec{a} \times \bar{E} - (\bar{E} \cdot \vec{a}) \vec{a}}{m \vec{a}^2} + \lambda, \vec{a}$$

Hagamos ahora $\lambda = \lambda_1 - \frac{\vec{E} \cdot \vec{a}}{m \vec{a}^2} :$

$$\bar{p} = \frac{\vec{E}}{m} + \lambda_1 \vec{a} \quad \dots (5.18.1.3)$$

que ayuda a indicarnos que la línea de acción de la fuerza de inercia es paralela a " \vec{a} " y pasa por el punto $\vec{G} = \frac{\vec{E}}{m}$. Este punto, puede verse, es dependiente de la aceleración, sino de las características propias del cuerpo; por eso mismo todos las fuerzas de inercia pasarán por ahí. Al punto "G" se le llama "centro de masa". Sus coordenadas suelen llamarse:

$$\bar{x} = \frac{\iiint_V x \rho dV}{\iiint_V \rho dV} \quad \dots (5.18.1.4)$$

$$\bar{y} = \frac{\iiint_V y \rho dV}{\iiint_V \rho dV} \quad \dots (5.18.1.5)$$

$$\bar{z} = \frac{\iiint_V z \rho dV}{\iiint_V \rho dV} \quad \dots (5.18.1.6)$$

Lo tanto (la raya encima de la letra) es la notación usual de

estas estas coordenadas. No se confundan con vectores.

Ejemplo 5.10.1) Para un cierto proceso industrial se vierte una mezcla de rocas en un embudo como el mostrado en la figura (5.10.5). De día se mantiene una agitación dentro del embudo, para mantener frías las rocas; de noche se deja estabilizar y en la mañana una ley lineal de densidades, de 2.8 ton/m³ abajo a 0.8 ton/m³ arriba. Se desea saber

- El peso total del contenido del embudo.
- La densidad de la mezcla durante el día.
- La línea de acción del peso durante el día y durante la noche.
- El momento de rotar que ocasiona un tambor de 1 m/s² en dirección del eje 'y', durante el día.
- El momento de rotar que ocasiona un tambor de la misma intensidad y dirección, durante la noche.

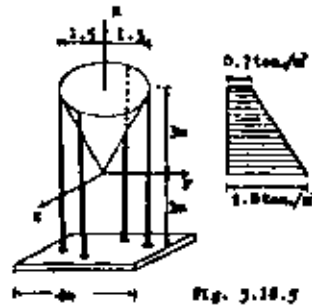


Fig. 5.10.5

Solución:

Sabemos que $m = \iiint \rho dV$; $\bar{r} = \frac{1}{m} \iiint \rho \mathbf{r} dV$

Por lo que debemos establecer ρ y la región V

$$\rho - 2.0 = \frac{2.8 - 0.8}{2 - 0}(z - 0) = -0.7z; \rho = -0.7z + 2.0$$

Envolvamos la eq. del cono:

$$x^2 + y^2 - z^2 = 0 \quad \text{si } z=0, y=1.5, x=0:$$

$$1.5^2 - z^2 = 0$$

$$1 = z$$

$$x^2 + y^2 - z^2 \quad \text{eq. del cono}$$

Aproximemos la superficie y definamos la región V en el primer octante, utilizando coordenadas esféricas. (Fig. 5.10.6)

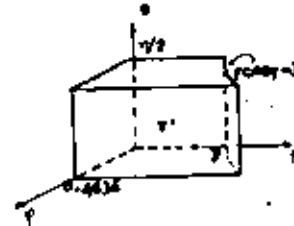


Fig. 5.10.6

$$V = \left\{ (x, y, z) / 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}; 0 \leq y \leq 1.5; 0 \leq z \leq 1 \right\}$$

Fig. 5.10.6

$$\text{Plano } x=0 \rightarrow \rho = 0$$

$$\text{Plano } y=0 \rightarrow \rho = 0.7z$$

$$\text{Cono } x^2 + y^2 - z^2 = 0$$

$$\rho = 2.0 - 0.7z \quad \rho = \rho \cos^2 \theta$$

$$\left(\frac{2.0 - 0.7z}{\cos^2 \theta} \right)^2 = \frac{1}{\cos^2 \theta}$$

$$\frac{1}{2} y = \frac{1}{2}; y = 0.756 \text{ rad}$$

$$\text{Plano } z=0:$$

$$\rho \cos \theta = 3; \rho = 3 \sec \theta$$

$$\text{Eje } z \rightarrow y=0$$

$$\text{Origen} \rightarrow \rho=0$$

$$M = \iiint_V \rho(x, y, z) \, dV = \int_0^2 \int_0^{2-y} \int_0^{2-x-y} (2-x-y+z) \, dz \, dy \, dx$$

$$= 2 \int_0^2 \int_0^{2-y} (2-x-y) \, dy \, dx + \int_0^2 \int_0^{2-y} z \, dy \, dx$$

$$M = \frac{1}{6} (52.7 + 10.8); \quad m = 8.66 \text{ ton/m}; \quad P = 8.66 \text{ ton}$$

La densidad de la mezcla, cuando se hace homogénea, durante el día:

$$\bar{\rho} = \frac{m}{V} = \frac{8.66}{\frac{10^3 \times 8^3}{6}} = 1.225 \text{ ton/m}^3$$

Ahora la línea de acción del peso: sabemos que debe ser vertical, por lo que debemos calcular solamente \bar{x} y \bar{y} . Durante el día:

$$\bar{x} = \frac{1}{8.66} \iiint_V x(1.225) \, dV = \frac{1.225}{8.66} \iiint_V x \, dV$$

Nos damos cuenta de que ahora no hay simetría, pues z es positiva en dos octantes y negativa en los otros dos; entonces dividimos nuestra región como se ve en la figura (5.18.1) y aplicamos la propiedad (5.15.4) de la integral triple:

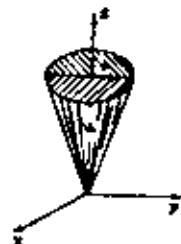


Fig. 5.18.1

$$\bar{x} = 0.1415 \left(\iiint_{V_1} x \, dV + \iiint_{V_2} x \, dV \right)$$

$$\bar{x} = \frac{1}{8.66} \iiint_V (2-x-y+z) \rho(x, y, z) \, dV$$

$$\bar{x} = 0.1415 \left\{ 2.8 \int_0^2 \int_0^{2-y} \int_0^{2-x-y} (2-x-y+z) \, dz \, dy \, dx - 0.8 \int_0^2 \int_0^{2-y} (2-x-y) \, dy \, dx \right\}$$

$$\bar{x} = 0.1415 (226.8 - 126.08) \frac{\pi}{6} = 2.06 \text{ m}$$

$$G(0, 0, 2.06)$$

$$\text{Entonces: } \vec{r} = (0, 0, 2.06) - (0, 0, 2) = (0, 0, -0.06)$$

$$M = \begin{vmatrix} 0 & 2.863 & 0 \\ 0 & -2 & 5.06 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 2.91 \text{ ton-m}$$

Ejemplo 5.18.2) - En un trazo de cilindro, como el mostrado en la figura (5.18.2), se

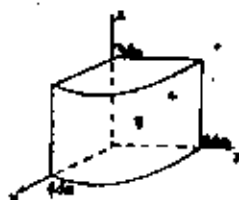


Fig. 5.18.2

tiene una densidad $\rho = xy$, donde ρ está en kg/m^3 si x, y están en m . Encuentra las coordenadas del centro de masa.

$$\bar{x} = \frac{\iiint_V x \rho(x, y, z) \, dV}{\iiint_V \rho(x, y, z) \, dV}$$

puesto que a cada punto de V corresponde otro de V_2 tal que

$$x \in V_1 = -x \in V_2$$

podemos concluir que

$$\iiint_{V_1} x \, dV = - \iiint_{V_2} x \, dV$$

o, lo que es lo mismo:

$$\iiint_{V_1} x \, dV + \iiint_{V_2} x \, dV = 0 \Rightarrow \bar{x} = 0$$

Una razón más amigable nos lleva a concluir que $\bar{y} = 0$; por lo que durante el día, el pez actuará coincidiendo con el eje "x".

Durante la noche, no se puede saber la densidad como constante:

$$\bar{x} = \frac{1}{E \cdot V} \left\{ \iiint_{V_1} x(z_1 - c_1 z) \, dV + \iiint_{V_2} x(c_2 - c_1 z) \, dV \right\}$$

Sin embargo, podemos ver igualmente que a cada punto de V_1 corresponde a otro en V_2 con la misma densidad y definiendo en el signo de la abscisa; entonces concluiremos nuevamente que

$$\bar{x} = 0$$

$$\bar{y} = 0$$

Estos resultados ya los esperábamos y podemos generalizarlos:

Dado un cuerpo "V" que admite un plano de simetría, ese plano dividirá a la región en V_1 y V_2 , tal que -

$$V = V_1 \cup V_2, \quad V_1 \cap V_2 = \text{conjunto vacío}$$

Entonces, si el punto Q de V_1 y su simétrico Q' de V_2 cumple con

$$G(Q) = G(Q')$$

El centro de masa estará en el plano de simetría.

Ahora veamos los efectos de un temblor. La fuerza actuando en la estructura será necesariamente una fuerza de inercia que se aplicará en el centro de masa. Esta fuerza tendrá la función de hacer girar la estructura alrededor del eje definido por

$$\begin{cases} y = 2 \\ z = -3 \end{cases}$$

El momento con respecto a un eje, recordemos, vale:

$$M = \vec{r} \times \vec{p} \cdot \vec{e}$$

donde \vec{p} es la fuerza

\vec{r} es un vector que une un punto cualquiera de la línea de acción de \vec{F} con un punto cualquiera del eje

\vec{e} es el vector unitario que define la dirección del eje

Definamos la fuerza; primero su magnitud

$$|F| = m|a| = 0.44 \times 1 + 0.66 \text{ Estadios}$$

$$= 0.883 \text{ ton}$$

$$\vec{F} = 0.883 \hat{j} \text{ y nos falta definir un punto de acti-$$

ción.

Ya sabemos que $\bar{x} = \bar{y} = 0$; calculemos \bar{z} . En el día:

$$\bar{z} = \frac{1}{0.66} \iiint_V 1.235z \, dV = 0.1715 \iiint_V z \, dV$$

Ahora tenemos una función simétrica, por lo que:

$$\bar{z} = 0.8659 \iiint_V e^{2xy} \cos y \, dV$$

$$\bar{z} = 0.6659 \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \int_0^{2xy} e^{2xy} \cos y \, dz \, dy \, dx$$

$$\bar{z} = 2.25 \text{ m} \quad \text{en } (0, 0, 2.25)$$

Con lo que al momento de saltar lo calculamos:

$$\vec{r} = (0, 0, 2.25) - (0, 3, 3) = (0, -2, 5.25)$$

$$M = \begin{vmatrix} 0 & 0.883 & 0 \\ 0 & -2 & 5.25 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 4.44 \text{ ton} \cdot \text{m}$$

Ahora, durante la noche:

$$\bar{z} = \frac{1}{0.66} \iiint_V (2.0 - 0.1z) z \, dV$$

dentro $V \{ (x, y, z) / 0 \leq x \leq 1; 0 \leq y \leq 1; 0 \leq z \leq \sqrt{1-x^2} \}$

$$\bar{z} = \frac{\int_0^1 \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} (2z - 0.1z^2) \, dz \, dy \, dx}{\int_0^1 \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} 1 \, dz \, dy \, dx}$$

$$\int_0^{\sqrt{1-x^2}} y \, dz = \frac{1}{2} (1-x^2); \quad \frac{1}{3} \int_0^1 x^2 (1-x^2) \, dx = \frac{1}{3} (1-x^2) \Big|_0^1 = 0.27$$

$$\frac{1}{2} \int_0^1 x (1-x^2) \, dx = -\frac{1}{6} (1-x^2)^2 \Big|_0^1 = 0.32$$

$$\bar{z} = \frac{\int_0^1 0.27 \, dx}{\int_0^1 0.32 \, dx} = \frac{0.27(1)}{0.32(1)} = \frac{0.27}{0.32} = 2.19 \text{ m}$$

Lo importante es que nos hayamos dado cuenta de que tanto 0.27 como 0.32, son resultado de serdos integrales -deben efectuadas en la región delimitada por la base del cilindro y que esta situación se nos va a presentar siempre que nuestro cuerpo sea un cilindro (o prisma) limitado por planos horizontales y la función densidad sea independiente de z ($\frac{\partial \rho}{\partial z} = 0$). En tal caso, siempre tendremos:

$$\bar{z} = \frac{\int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 (2.0 - 0.1z) z \, dz \, dy \, dx}{\int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 1 \, dz \, dy \, dx}$$

donde $z = z_1, z_2, z_3$ son las ecu. de los planos que limitan al cilindro y E es la región delimitada por la traza del mismo. Las integrales debidas nos darán densidades constantes (Numeros C_1 a la del numerador, C_2 a la del denominador) que pueden salir de las integrales en z :

$$\bar{z} = \frac{C_1 \int_{E_1} z_1 dA}{C_2 \int_{E_2} z_2 dA} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{\int_{E_1} z_1 dA}{\int_{E_2} z_2 dA} \dots (5.18.1.7)$$

Análogamente:

$$\bar{y} = \frac{\int_{E_1} y_1 dA}{\int_{E_2} y_2 dA} \dots (5.18.1.8)$$

Para el problema planteado:

$$\int_{E_1} y_1(x, y) dA + \int_{E_2} y_2(x, y) dA = 60.25$$

Por lo que

$$\bar{y} = \frac{60.25}{32} = 1.88 \text{ cm}$$

Para calcular \bar{z} , nos damos cuenta que el plano $z = 1.5$ es de simetría; o bien:

$$\bar{z} = \frac{\int_{E_1} z \left\{ \int_{E_2} z_2 dA \right\} dz}{\int_{E_2} z_2 dA} = \frac{9}{3} = 3 \text{ cm}$$

En general:

$$\bar{z} = \frac{z_1 + z_2}{2} \dots (5.18.1.9)$$

Desde luego, te encontrarás los otros dos casos: cilindros con generatrices paralelas al eje "y" y densidad tal que $\frac{\partial \bar{z}}{\partial y} = 0$; y cilindros con generatriz paralela al eje "x" y densidad tal que $\frac{\partial \bar{z}}{\partial x} = 0$; si sigues un razonamiento semejante al que acabamos de hacer, llegarás con facilidad a establecer las coordenadas de los respectivos centros de masa.

Ejemplo 5.18.3:- Un tanque de PENEZ tiene forma de

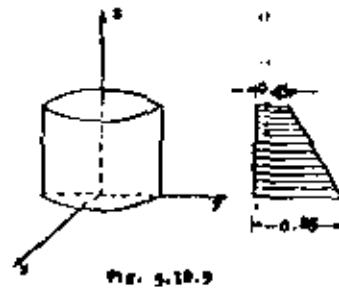


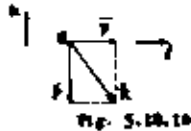
Fig. 5.18.3

cilindro circular recto de 5m de radio y 4m de altura y contiene hidruro de boro que se entrafiza según una ley lineal, siendo el más denso de 225 ton/m³ y el más ligero de 2.75 ton/m³.

Se desea saber cuál es la fuerza resultante (magnitud, dirección, sentido y posición) de un tambor que produce una aceleración de 25 m/s² en dirección del eje "y" (Fig 5.18.5)

Solución:

La resultante pedida está compuesta del peso y de la fuerza de inercia producida por el tambor, como se muestra en la fig (5.18.10). Ambas pasan por el punto G; una es vertical y otra horizontal.



Veamos primero la masa contenida en el tambor, la que nos servirá para calcular la magnitud de ambas fuerzas.

$$m = \iiint_V \rho \, dV$$

donde $\rho = 1.25 - 0.1z$ y $V = \{(x, y, z) / 0 \leq x \leq 4; -3 \leq y \leq 3; -\sqrt{16-x^2} \leq z \leq \sqrt{16-x^2}\}$

$$m = \int_0^4 (1.25 - 0.1z) \left\{ \int_{-3}^3 \int_{-\sqrt{16-x^2}}^{\sqrt{16-x^2}} dy \, dz \right\} dx$$

Nuestro camino es el área de la integral sobre "altura": es el área de la base, en este caso 25π ; así:

$$m = 25 \int_0^4 (1.25 - 0.1z) dz = 200(1.6) \text{ kg}$$

$$m = 65\pi \text{ kg}$$

Entonces

$$\vec{p} = -15\pi \hat{k} \text{ kg}$$

$$F = 15\pi(1.6) \hat{j} = 75\pi \hat{j}; E_{inercia} = 9.9 \hat{j}; \text{ kg}$$

$$\vec{R} = \pi(9.9 \hat{j} - 15 \hat{k})$$

$$|\vec{R}| = \pi(9.9^2 + 15^2) = 22.2\pi \text{ kg}$$

Res. falta solamente saber el punto de aplicación; pues lo que xz , yz son planos de simetría, podemos afirmar que

$$\bar{x} = \bar{y} = 0$$

Busquemos entonces la cota de G:

$$\bar{z} = \frac{\iiint_V z(1.25 - 0.1z) \, dV}{65\pi} = \frac{\int_0^4 (1.25 - 0.1z) \left\{ \int_{-3}^3 \int_{-\sqrt{16-x^2}}^{\sqrt{16-x^2}} z \, dy \, dz \right\} dx}{65\pi}$$

donde, nuevamente la integral sobre "altura" es el área de la base = 25π ; entonces podemos escribir:

$$\bar{z} = \frac{25 \int_0^4 z(1.25 - 0.1z) dz}{25\pi(2.6)} = \frac{1}{2.6} (2.6) = 1.0 \text{ m}$$

donde viene que, al final de cuentas:

$$\vec{z} = \frac{\int_V z \rho(x, y, z) \, dV}{\int_V \rho(x, y, z) \, dV}$$

y podemos generalizar diciendo que si el cuerpo es un cilindro (o prisma) con generatriz paralela al eje "z", limitado por los planos $z = a$, $z = b$ y la densidad es del tipo

$$\frac{\partial \rho}{\partial z} = \frac{\partial \rho}{\partial z} = c, \text{ entonces}$$

$$\bar{z} = \frac{\int_a^b z \rho(x, y, z) \, dz}{\int_a^b \rho(x, y, z) \, dz} \quad \dots \quad (5.18.1.10)$$

Y, por supuesto, te dejamos como ejercicio que encuentres las expresiones correspondientes para los casos en que los cilindros tengan generatrices paralela a cada uno de los otros dos ejes.

5.10.2) El Centro de Gravedad

Definimos al centro de masa, como el punto en que se aplican todas las fuerzas de inercia; llamamos centro de gravedad al punto por el cual pasa el peso del cuerpo.

En la gran mayoría de los problemas que abren al ingeniero, el peso es una fuerza de inercia, porque los cuerpos que usualmente manejamos tienen dimensiones incomparablemente menores que la Tierra y por consiguiente, la aceleración en todas sus partículas puede considerarse constante -7.81 m/seg^2 . En todos estos casos, el centro de gravedad coincide con el centro de masa.

Podríamos imaginar un cuerpo en el espacio sideral, con dimensiones comparables a las de la Tierra; en tal caso, la aceleración en cada partícula dependería de su posición y la resultante no necesariamente pasaría por el centro de masa. Para calcular las coordenadas del centro de gravedad utilizaríamos la prime

ra expresión de la ec. 15.18.12, sin sacar a la aceleración de la integral.

Como, repetimos, este caso es difícil que se presente al ingeniero, dejaremos hasta aquí la información y consideraremos que, sobre indicación, el centro de masa coincide con el centro de gravedad.

5.10.3) El Centroide

Recordemos al ejemplo (5.10.1). Decíamos que, durante el día, la densidad de la masa era homogénea; se oblige cuando quisimos calcular el punto de aplicación de la fuerza producida por un tambor, hicimos

$$\bar{z} = \frac{1.225}{8.66} \iiint z \, dV$$

por, a su vez:

$$8.66 = 1.225 \text{ kg} = 1.225 \iiint dV$$

Entonces podríamos escribir

$$\bar{z} = \frac{1.225 \iiint z \, dV}{1.225 \iiint dV} = \frac{\iiint z \, dV}{\iiint dV}$$

Lo que en general ocurre cuando la densidad es constante, al poder salir, tanto de la integral en el numerador, como

de la integral en el denominador. Pero entonces nos da-
 mos cuenta de que las integrales que quedan ya no
 dependen de características físicas del cuerpo, sino úni-
 camente de sus características geométricas; volvien-
 dose así el punto definido, no conectado necesariamente geo-
 métrico, que llamaremos **CENTROIDE** de la región. (Evi-
 dentemente decir "centroide del cuerpo" para no introducir
 conceptos físicos).

Aquí pues, definimos las coordenadas del centroide:

$$\bar{x} = \frac{\iiint_V x dV}{Vol} \quad (5.18.3.1)$$

$$\bar{y} = \frac{\iiint_V y dV}{Vol} \quad (5.18.3.2)$$

$$\bar{z} = \frac{\iiint_V z dV}{Vol} \quad (5.18.3.3)$$

Definido así, el centroide existe independientemente del
 centro de masa (y de gravedad) y coincide con éste cuan-
 do la densidad del cuerpo es constante.

Cuando la región es un cilindro con generatriz paralela
 al eje "z", entonces podemos simplificar las densidades
 en (5.18.1.1) y (5.18.1.8) para obtener

$$\bar{x} = \frac{\iint_A x dA}{Area} \quad (5.18.3.4)$$

$$\bar{y} = \frac{\iint_A y dA}{Area} \quad (5.18.3.5)$$

y se llega de esta manera al concepto de centroide de un área.

Ejemplo 5.18.4) Calcular el centroide del área mostrada en la
 figura (5.18.11.1)

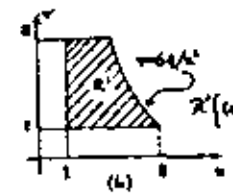
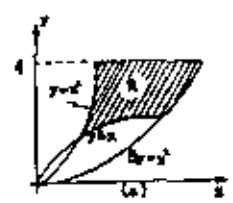


Fig. 5.18.11

Una manera más de usar la transfor-
 mación:

$$x = y^2 \quad J\left(\frac{x, y}{y, x}\right) = \frac{1}{2}$$

$$y = x^2$$

Con lo cual transformamos la figu-
 ra (5.18.11.1).

Para aplicar las ecu (5.18.3.4)
 y (5.18.3.5), calculamos el á-
 rea, que aparece en ambas.

$$Area = \iint_A dx dy = \frac{1}{2} \iint_D dx dy$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^4 \int_{x^2}^{4-x^2} dx dy = 7.48$$

Ahora:

$$\iint_A x dA = \frac{1}{2} \iint_D \sqrt{y} dy dx = \frac{1}{2} \int_0^2 \int_{x^2}^{4-x^2} y^{1/2} dy dx = 22.25$$

$$\bar{x} = \frac{22.25}{7.48} = 2.97$$

Por otra parte:

$$\iint_A y dA = \frac{1}{2} \iint_D y dy dx = \frac{1}{2} \int_0^2 \int_{x^2}^{4-x^2} y^2 dy dx = 21.15$$

por lo que $\bar{y} = \frac{21.15}{7.48} = 2.83$

5.18.4) Una distribución arbitraria

Consideremos la masa (5.18.1.a):

Momento del peso con respecto al origen $-gk = \bar{B}$

Si queremos obtener el momento de la misma forma, con respecto al eje x , recordamos que debemos cambiar la expresión anterior por x^2 :

$$\begin{aligned} \text{Momento del peso con respecto al eje } x &= -gkx \cdot \bar{B} \cdot \bar{z} \\ &= -g \int [k, \bar{z}, x^2] \\ &= -g \int [x, k, \bar{B}] = -g \bar{B}_x \end{aligned}$$

Análogamente

Momento del peso con respecto al eje $y = -g \bar{B}_y$

De ahí que se haya hecho habitualmente denominar a los componentes del vector \bar{B} como "momentos estáticos" o "momentos de primer orden". Estos son buenos nombres para referirnos a ellos, como podrían serlo cualquier otros.

Notemos que el vector \bar{B} NO es un momento en el sentido matemático de la palabra, puesto que ningún producto vectorial se encuentra involucrado; por consiguiente, sus componentes tampoco lo son. Más aún, las relaciones que acabamos de obtener, que son las que más asemejan a las componentes cartesianas de \bar{B} con momentos, sólo se cumplirán cuando la distribución es paralela a algún eje coordenado.

En todo caso, puesto que la denominación es prácticamente universal, nosotros nos limitaremos a ella y definiremos:

$$\bar{B}_x = \text{Momento estático del cuerpo en } x = \iint x^2 \rho(x, y, z) dV \dots (5.18.4.a)$$

$$\bar{B}_y = \text{Momento estático del cuerpo en } y = \iint y^2 \rho(x, y, z) dV \dots (5.18.4.b)$$

$$\bar{B}_z = \text{Momento estático del cuerpo en } z = \iint z^2 \rho(x, y, z) dV \dots (5.18.4.c)$$

Por analogía se define también:

$$\text{Momento estático de la región, en } x = \iint x dA \dots (5.18.4.d)$$

etc, que son conceptos estrictamente geométricos; más aún, también por analogía se define:

$$\bar{B}_x = \text{Momento estático del área, en } x = \iint x dA \dots (5.18.4.e)$$

$$\bar{B}_y = \text{Momento estático del área, en } y = \iint y dA \dots (5.18.4.f)$$

Si consideramos un elemento de generatriz vertical, con densidad constante ρ y cuya base define la región R en xy , el momento (verdadero) de su peso, con respecto al eje x , será:

$$g \rho \iint y dA$$

de ahí que se haya generalizado al denominar a (5.18.4.d): "momento estático del área con respecto al eje x ". Ya argumentamos que no exigis en este punto, por generalización que "vale"; pero en estos casos entonces sí es apropiado recurrir, como al ejemplo.

Si el plano yz pertenece al plano de masa, entonces

$$\bar{x} = \frac{\bar{B}_x}{M_{\text{masa}}} = 0 \Rightarrow \bar{B}_x = 0$$

conclusiones análogas podríamos obtener con referencia a los otros momentos estáticos.

5.18.5) Momentos de Inercia

Consideremos nuevamente el cuerpo del ejemplo (5.18.1) y supongamos que gira alrededor del eje x , con una velocidad angular " ω " constante. Nos preguntamos qué energía cinética adquiere el cuerpo. (Cf. 5.18.2)

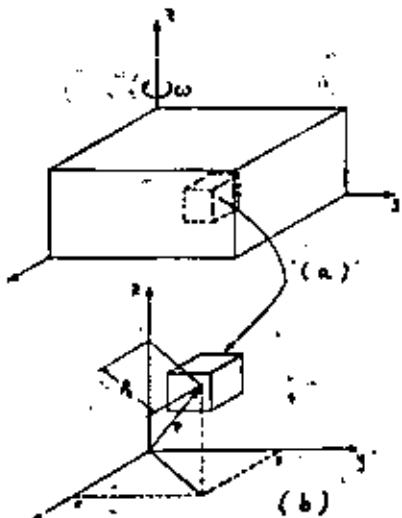


Fig. 5.10.12.

Subemos que la energía cinética es calcula como
 $\frac{1}{2} \rho \omega^2 \dots (5.10.5.1)$; pero:

- En cada punto hay una masa diferente.
- Cada punto tiene una velocidad diferente, que podemos escribir $\omega r = \omega \rho$ donde ρ es la distancia del punto al eje "z".

Habríamos que a considerar nuestra aproximación de dividir al cuerpo en prismas y a considerar dentro de cada prisma, a un punto como representativo. Así valoraríamos la energía cinética del prisma obediendo en la figura (5.10.12.b):
 $E_c = \frac{1}{2} \rho \Delta V (\omega \sqrt{x^2 + y^2})^2$

Lo que sigue, ya lo sabemos: una suma de términos como el indicado, tirado a todas las prismas en que dividamos al cuerpo, nos dará una aproximación de la energía cinética total; puesto que los sumandos son números, podemos disminuir indefinidamente el tamaño de los prismas, con la seguridad de que los valores de las sumas que obtengamos, van a converger; en el límite

$$E_c = \iiint \frac{1}{2} \rho \omega^2 [x^2 + y^2 + z^2 + y^2] (x^2 + y^2) dV$$

$$E_c = \frac{1}{2} \rho \omega^2 \iiint [2(x^2 + y^2 + z^2) + y^2] (x^2 + y^2) dV \dots (5.10.5.2)$$

Si analizamos comparativamente la energía cinética de un cuerpo que se traslada (ve 5.10.5.1), con la de un cuerpo que gira (ve 5.10.5.2), nos encontramos que en la primera aparece la mitad de la velocidad al cuadrado, en tanto que, en la segunda aparece la mitad de la velocidad angular al cuadrado. En (5.10.5.1) aparece la masa del cuerpo que, como sabes, es la medida de la inercia; en (5.10.5.2) aparece una integral triple que, deducimos, debe ser

5.11

la medida de la inercia al giro. Así pues, en esta integral lo vamos a llamar momento de inercia con respecto, al eje "z":

$$I_z = \iiint [2(x^2 + y^2 + z^2) + y^2] y^2 dV = \iiint [2(x^2 + y^2 + z^2) + y^2] y^2 dV$$

$$I_z = I_{xx} + I_{yy}$$

$$I_{xx} = \int_0^2 \int_0^2 \int_0^2 (2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + x^2) dx dy dz = 2674.93 \text{ Kg-m}^2$$

$$I_{yy} = \int_0^2 \int_0^2 \int_0^2 (2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + y^2) dx dy dz = 1809.60 \text{ Kg-m}^2$$

$$I_z = 4484.53 \text{ Kg-m}^2$$

si el eje de rotación estuviera en "x":

$$I_x = \iiint \rho (y^2 + z^2) dV = \iiint \rho y^2 dV + \iiint \rho z^2 dV = I_{yy} + I_{zz}$$

$$I_{zz} = \iiint [2(x^2 + y^2 + z^2) + x^2] x^2 dV = \int_0^2 \int_0^2 \int_0^2 (2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + x^2) dx dy dz$$

$$I_{zz} = 718.93 \text{ Kg-m}^2$$

$$I_{yy} = 1809.60 \text{ Kg-m}^2$$

$$I_x = 2528.53 \text{ Kg-m}^2$$

Análogamente:

$$I_y = I_{xx} + I_{zz} = 2674.93 + 718.93 = 3393.86 \text{ Kg-m}^2$$

La comparación de estos resultados comprueba algo que "se ve": lo más difícil es hacer girar al cuerpo sobre el eje "x", lo más fácil hacerlo girar sobre el eje "z".

Nota además que $I_x \neq I_z$; $I_{yy} \neq I_{zz}$; $I_{xx} \neq I_z$

Ejemplo 5.10.9) encontrar el momento de inercia del cuerpo del ejemplo (5.10.1) con respecto a un eje que pasa por el centro de masa y es paralelo al eje "z".

En el inciso (5.10.1) utilizamos $\rho(5.10.1.1, 1.45)$; lo que quiere decir que el nuevo eje tendrá por coordenadas:
 $\begin{cases} x = 2.02 \\ y = 1.78 \end{cases}$

lo que equivale a decir que la distancia de cada punto al eje

Sea σ de rotación es ahora:

$$\sqrt{(x-2.5z)^2 + (y-1.7z)^2}$$

por lo que el momento de inercia pedida será:

$$I_{\sigma} = \iiint_V \sigma [(x-2.5z)^2 + (y-1.7z)^2] dV$$

Descompongamos en suma de integrales:

$$I_{\sigma} = \iiint_V 2.5^2 z^2 dV - 2 \cdot 2.5 \cdot 1.7 z^2 dV + 1.7^2 z^2 \iiint_V dV$$

Entonces:

$$I_{\sigma} = I_{xx} - 2 \cdot 2.5 \cdot 1.7 m^2 + I_{yy} - 2 \cdot 2.5 \cdot 1.7 z^2 m$$

donde "m" es la masa del cuerpo = 400 kg. Todas las integrales involucradas las hemos calculado y podemos escribir las; para obtener un poco de claridad, antes de sustituir numeritos que

$$B_x = 2.52 \text{ (masa)} \quad B_y = 1.72 \text{ (masa)}$$

por lo que:

$$I_{\sigma} = 3694.95 - 2(2.52)^2(400) - 2(1.72)^2(400) + 100 \cdot 2.5 - 2(1.72)^2(400) + (1.72)^2(400)$$

$$I_{\sigma} = 5804.53 - (2.52)^2(400) - (1.72)^2(400) = 2804.53 - 400(2.52+1.72)^2$$

$$I_{\sigma} = 2804.53 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

y nos damos cuenta de que el momento de inercia con respecto al eje que pasa por el centro de masa, es igual al momento de inercia calculado anteriormente, menos la masa multiplicada por el cuadrado de la distancia en ambas ejes. El mismo tiempo, también notamos que

$$I_{xx} = I_{yy} = m \bar{z}^2 \quad ; \quad I_{yy} = I_{xx} = m \bar{z}^2$$

En general, podemos considerar al cuerpo "V" de la figura (5.10.13)

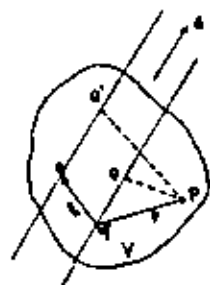


Fig. 5.10.13

que gira (o pretende hacerlo) alrededor de un eje que pasa por el centro de masa "G" y es paralelo al vector unitario "E". Supongamos que la masa específica del cuerpo está dada por la función $\rho(r)$, donde "r" es el vector de posición de un punto cualquiera "P", con el sentido a "G" como origen.

La distancia de "P" al eje de rotación

es (conforme a la definición)

$$R_{\sigma} = \sqrt{r^2 - z^2}$$

por lo que el momento de inercia con respecto al eje que pasa por G:

$$I_{\sigma} = \iiint_V (r^2 - z^2) \rho dV = \iiint_V (r^2 - z^2) dm \dots \dots \dots (5.10.14)$$

donde $dm = \rho dV$

Ahora, si queremos calcular el momento de inercia con respecto a un eje paralelo al anterior, la distancia de "P" al nuevo eje:

$$R_{\sigma'} = \sqrt{(r - z)^2 + z^2}$$

por lo que

$$I_{\sigma'} = \iiint_V (r - z)^2 dm = \iint (r^2 - 2rz + z^2) dm \dots \dots \dots (5.10.15)$$

Al operar:

$$\begin{aligned} (r - z)^2 &= r^2 - 2rz + z^2 = (r^2 - z^2) + (z^2 - 2rz + z^2) \\ &= (r^2 - z^2) - 2z(r - z) + (z^2 + z^2) \dots \dots \dots (5.10.16) \end{aligned}$$

Por lo que, al sustituir (5.10.14) en (5.10.15), recordando que $\bar{z}, \bar{x}, \bar{y}$, son constantes:

$$I_{\sigma'} = \iiint_V (r^2 - z^2) dm - 2(\bar{z} - z) \left\{ \iiint_V r z dm \right\} + \iint (z^2 + z^2) dm$$

desde luego de (5.10.14):

$$\iiint_V (r^2 - z^2) dm = I_{\sigma}$$

y además:

$$\iiint_V dm = m$$

Ahora, de (5.10.16):

$$\iiint_V r z dm = \bar{z}$$

pero como sabemos

$$\bar{z} = \frac{\bar{z}}{m}$$

y, en esta caso, puesto que "z" es el origen, $\bar{z} = 0$, por lo que $\bar{z} = 0$.

Así:

$$I_{\sigma'} = I_{\sigma} - m \bar{z}^2 \dots \dots \dots (5.10.17)$$

que corresponde que el resultado obtenido en el ejemplo (5.10.5) es general, habiéndose que $\rho = \delta l$ es la distancia entre los ejes paralelos dx y dy de la z que se conoce como el "momento de los ejes paralelos".

La expresión (5.10.2) sirve para calcular el momento de inercia de un cuerpo, con respecto a cualquier eje que pase por el origen, orientado según el vector unitario \hat{E} . La expresión (5.10.2) proporciona el momento de inercia con respecto a un eje que pase por un punto cuyo vector de posición sea \vec{r}_0 , orientado también según el vector de magnitud unitaria \hat{E} .

Si en (5.10.2) hacemos $\hat{E} = \hat{k}$, obtenemos el resultado ya conocido:

$$I_z = \iiint (x^2 + y^2) dm \dots \dots \dots (5.10.6)$$

que puede ser convenientemente descomponerse en la suma:

$$I_z = \iiint x^2 dm + \iiint y^2 dm$$

donde

$$I_{xx} = \iiint x^2 dm \dots \dots \dots (5.10.7)$$

$$I_{yy} = \iiint y^2 dm \dots \dots \dots (5.10.8)$$

A estas términos también se les acostumbra llamar "momentos de inercia", no lo son en realidad, porque no se refieren a un eje. Se conocen como "momento de inercia en x ", "momento de inercia en y ", respectivamente.

Si en (5.10.2) hacemos $\hat{E} = \hat{j}$, $\hat{E} = \hat{i}$, obtenemos, respectivamente:

$$I_y = \iiint (x^2 + z^2) dm \dots \dots \dots (5.10.9)$$

$$I_x = \iiint (y^2 + z^2) dm \dots \dots \dots (5.10.10)$$

y análogamente definimos:

$$\text{Momento de inercia en } x = \iiint x^2 dm \dots \dots \dots (5.10.11)$$

Cuando el eje con respecto al cual están dadas las expresiones momentos de inercia, pasa por el centro de masa, los llamamos el "momento de inercia".

correspondiente.

Si la densidad es constante, podrá usarse la integral y dejarse de lado de ella a ciertos conceptos geométricos. A esta integral también se le acostumbra llamar "momento de inercia del volumen" (se le llama así del "volumen") y sus unidades son $[L^4]$:

$$I_E = \text{Momento de inercia del volumen } V \text{ con respecto al eje } E = \iiint (x^2 + y^2) dV \dots \dots \dots (5.10.12)$$

Análogamente definimos:

$$I_{xx} = \iiint x^2 dV \dots \dots \dots (5.10.13)$$

etc.

Si el volumen es un cilindro, cuya base en xy es R^2 y está limitado por las planas $x=0$, $x=l$, al aplicar la integral restringida a (5.10.12) obtenemos:

$$I_z = \int_0^l \left\{ \iint (x^2 + y^2) dA \right\} dx = (l-0) \iint (x^2 + y^2) dA$$

A la integral doble que allí aparece, se le llama "momento polar de inercia del área":

$$I_z = \iint (x^2 + y^2) dA \dots \dots \dots (5.10.14)$$

y también definimos:

$$I_{xx} = \text{Momento de inercia del área en } x = \iint x^2 dA \dots \dots \dots (5.10.15)$$

$$I_{yy} = \text{Momento de inercia del área en } y = \iint y^2 dA \dots \dots \dots (5.10.16)$$