CAPÍTULO 4

OPERADORES LINEALES EN ESPACIOS CON PRODUCTO INTERNO

Adjunto de un operador

En un espacio vectorial V con producto interno, cada operador lineal T tiene un operador llamado su adjunto que también es lineal y representamos con T^*, cuya definición es:

Definición

Sea V un espacio con producto interno y sea $T : V \to V$ un operador lineal. Un operador $T^* : V \to V$ se dice que es el adjunto de T si se cumple que:

$$\left(T(\bar{u}) \,\middle|\, \bar{v} \right) = \left(\bar{u} \,\middle|\, T^*(\bar{v}) \right); \quad \forall\ \bar{u}, \bar{v} \in V$$

Esta definición está basada en el producto interno, por lo que, el operador adjunto depende del producto interno considerado, es decir, el operador T tiene tantos adjuntos como productos internos se consideren, pero para cada producto interno el adjunto es único.

Propiedades del operador adjunto

Sea V un espacio vectorial sobre un campo K, con producto interno. Si S y T son operadores lineales en V y α es un escalar de K, entonces:

1. $(T^*)^* = T$

2. $(\alpha T)^* = \bar{\alpha} T^*$

3. $(S + T)^* = S^* + T^*$

4. $(T^*)^{-1} = \left(T^{-1}\right)^*$

5. $(S \circ T)^* = T^* \circ S^*$

EJERCICIO 4.1 Obtenga el adjunto del operador lineal $T: \mathrm{P}_1 \to \mathrm{P}_1$, donde $\mathrm{P}_1 = \{ ax+b \mid a,\ b \in \mathbb{R} \}$ y cuya regla de correspondencia es:

$$T\ (\ ax+b\ ) = 2bx + (\ a-b\ )$$

con respecto al producto interno en P_1 definido por

$$\big(\ (\ ax+b\ ) \mid (\ mx+r\ )\ \big) = 2am + 2br \quad ; \quad \forall\ \bar{p} = ax+b,\ \ \bar{q} = mx+r\ \in \mathrm{P}_1$$

SOLUCIÓN:

Como el espacio P_1 es de dimensión dos, entonces es isomorfo a $\mathbb{R}^2$, con lo cual si aplicamos dicho isomorfismo tenemos que la regla de correspondencia de T y el producto interno quedarían como:

$$T\ (\ a,b\ ) = (\ 2b,\ a-b\ ) \qquad \ldots\ldots(1)$$

$$\big(\ (\ a,b\ ) \mid (\ m,r\ )\ \big) = 2am + 2br$$

Se sabe que el adjunto de T es un operador $T^*: \mathrm{P}_1 \to \mathrm{P}_1$ para el cual se debe cumplir que:

$$\big(\ T(\ \bar{p}\ ) \mid \bar{q}\ \big) = \big(\ \bar{p} \mid T^*(\ \bar{q}\ )\ \big) \qquad \ldots\ldots(2)$$

Si suponemos que el adjunto de T es de la forma:

$$T^*(\ m,\ r\ ) = (\ \alpha m + \beta r,\ \gamma m + \delta r\ ) \qquad \ldots\ldots(3)$$

y como

$$\bar{p} = (\ a,\ b\ ) \quad \text{y} \quad \bar{q} = (\ m, r\ )$$

entonces al sustituir en (2) tenemos:

$$\big(\ T\ (\ a,b\ ) \mid (\ m,r\ )\ \big) = \big(\ (\ a,\ b\ ) \mid T^*\ (\ m,r\ )\ \big)$$

Aplicando las reglas de correspondencia de T y T^*, tenemos:

$$\big(\ (\ 2b,\ a-b\ ) \mid (\ m,r\ )\ \big) = \big(\ (\ a,b\ ) \mid (\ \alpha m + \beta r,\ \gamma m + \delta r\ )\ \big)$$

desarrollando el producto interno en ambos lados:

$$4bm + 2ar - 2br = 2\alpha am + 2\beta ar + 2\gamma bm + 2\delta br$$

al agrupar tenemos:

$$(4b)m + (2a - 2b)r = (2\alpha a + 2\gamma b)m + (2\beta a + 2\delta b)r$$

Por igualdad se llega a:

$$\begin{array}{ll} \alpha = 0 & \beta = 1 \\ \gamma = 2 & \delta = -1 \end{array}$$

con lo cual al sustituir estos valores en (3) tenemos que:

$$T^*(m, r) = (r, 2m - r)$$

Si se aplica el isomorfismo inverso, entonces el adjunto de T es:

$$T^*(mx + r) = rx + (2m - r)$$

EJERCICIO 4.2 Sea el espacio vectorial $\mathbb{C}^2$ definido en el campo de los números complejos, en el cual se define el producto interno usual, y sea el operador lineal $T: \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ con regla de correspondencia:

$$T(x, y) = (x + y, ix + (3 + 2i)y)$$

Obtenga el operador adjunto de T.

SOLUCIÓN:

Para resolver este ejercicio haremos uso de una propiedad de las matrices asociadas a estos operadores que establece:

Si $T: V \rightarrow V$ es un operador lineal y B es una base ortonormal de V, entonces:

$$M_B^B(T^*) = \left[M_B^B(T) \right]^*$$

Dado que el campo de definición del espacio vectorial V es de los números complejos, entonces la dimensión de V es dos, por lo que una base ortonormal del espacio es:

$$B = \{ (1, 0), (0, 1) \}$$

Dado que se trata de la base canónica, entonces la matriz asociada a T referida a dicha base sería:

$$\begin{aligned} T(1,0) &= (1, i) \\ T(0,1) &= (1, 3+2i) \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad M_B^B(T) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ i & 3+2i \end{bmatrix}$$

Como $M_B^B(T^*) = \left[M_B^B(T) \right]^*$, entonces:

$$M_B^B(T^*) = \begin{bmatrix} 1 & -i \\ 1 & 3-2i \end{bmatrix}$$

de donde la regla de correspondencia del operador adjunto de T viene dada por:

$$T^*(w, z) = \begin{bmatrix} 1 & -i \\ 1 & 3-2i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w - iz \\ w + (3-2i)z \end{bmatrix}$$

$$\therefore \quad T^*(w, z) = \left(w - iz,\ w + (3-2i)z \right)$$

Operador normal

Sea V un espacio con producto interno y sea $T : V \to V$ un operador lineal. Se dice que T es un operador normal si se cumple que:

$$T \circ T^* = T^* \circ T$$

Debido a que para cada producto interno considerado el adjunto es diferente, un operador puede ser normal respecto a un producto interno y no serlo respecto a otro.

Propiedades de los operadores normales

Sea V un espacio con producto interno y sea $T : V \to V$ un operador normal.

1. $\| T(\bar{v}) \| = \| T^*(\bar{v}) \| \; ; \qquad \forall\, \bar{v} \in V$

2. Si $T(\bar{v}) = \lambda \bar{v}$ entonces $T^*(\bar{v}) = \lambda \bar{v}$

3. Si $\bar{v}_1$ y $\bar{v}_2$ son vectores característicos de T correspondientes a valores característicos distintos, entonces los vectores $\bar{v}_1$ y $\bar{v}_2$ son ortogonales, es decir, $\left(\bar{v}_1 \middle| \bar{v}_2 \right) = 0$.

EJERCICIO 4.3 Determine si el operador lineal $T : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ con regla de correspondencia

$$T(x, y) = (2i\,x + y\,,\ -x - 2i\,y)$$

es un operador normal, considerando el producto interno usual en $\mathbb{C}^2$.

SOLUCIÓN:

Lo primero que tenemos que determinar es el operador adjunto de T. Para ello, consideremos a los vectores:

$$\bar{u} = (x, y) \quad \text{y} \quad \bar{v} = (w, z) \qquad \ldots\ldots(1)$$

y supongamos que:

$$T^*(w, z) = \left(\alpha_1 w + \alpha_2 z\,,\ \alpha_3 w + \alpha_4 z \right) \quad \ldots\ldots(2)$$

con lo cual se debe cumplir:

$$\left(T(\bar{u}) \middle| \bar{v} \right) = \left(\bar{u} \middle| T^*(\bar{v}) \right) \qquad \ldots\ldots(3)$$

sustituyendo (1) y (2) en (3), tenemos:

$$\left(T(x, y) \middle| (w, z) \right) = \left((x, y) \middle| T^*(w, z) \right)$$

de donde:

$$\Big(\left(2i\,x + y\,,\ -x - 2i\,y \right) \Big|\ \left(w,\ z \right) \Big) = \Big(\left(x,\ y \right) \Big| \left(\alpha_1 w + \alpha_2 z\,,\ \alpha_3 w + \alpha_4 z \right) \Big)$$

aplicando la regla de correspondencia del producto interno se tiene:

$$2i\,x\,\overline{w} + y\,\overline{w} - x\,\overline{z} - 2i\,y\,\overline{z} = \overline{\alpha}_1\,x\,\overline{w} + \overline{\alpha}_2\,x\,\overline{z} + \overline{\alpha}_3\,y\,\overline{w} + \overline{\alpha}_4\,y\,\overline{z}$$

agrupando y factorizando tenemos:

$$\left(2i\,\overline{w} - \overline{z} \right) x + \left(\overline{w} - 2i\,\overline{z} \right) y = \left(\overline{\alpha}_1\,\overline{w} + \overline{\alpha}_2\,\overline{z} \right) x + \left(\overline{\alpha}_3\,\overline{w} + \overline{\alpha}_4\,\overline{z} \right) y$$

por igualdad se tiene que:

si $\overline{\alpha}_1 = 2i \quad \Rightarrow \quad \alpha_1 = -2i$

si $\overline{\alpha}_2 = -1 \quad \Rightarrow \quad \alpha_2 = -1$

si $\overline{\alpha}_3 = 1 \quad \Rightarrow \quad \alpha_3 = 1$

si $\overline{\alpha}_4 = -2i \quad \Rightarrow \quad \alpha_4 = 2i$

Al sustituir los valores de α_i en la expresión (2), tenemos que el adjunto de T es:

$$T^*\left(w,\ z \right) = \left(-2i\,w - z\,,\ w + 2i\,z \right)$$

Para determinar si T es un operador normal, debemos comprobar si se cumple que:

$$T \circ T^* = T^* \circ T$$

esto es:

$$\left(T \circ T^* \right)\left(x,\ y \right) = \left(T^* \circ T \right)\left(x,\ y \right)$$

$$T\left[T^*\left(x,\ y \right) \right] = T^*\left[T\left(x,\ y \right) \right]$$

aplicando las reglas de correspondencia de T y T^* dentro de los corchetes, tenemos:

$$T\left(-2i\,x - y,\ x + 2i\,y \right) = T^*\left(2i\,x + y,\ -x - 2i\,y \right)$$

aplicando de nuevo dichas reglas, se tiene:

$$\left[2i\left(-2i\,x - y \right) + \left(x + 2i\,y \right),\ -\left(-2i\,x - y \right) - 2i\left(x + 2i\,y \right) \right] =$$

$$\left[-2i\left(2i\,x + y \right) - \left(-x - 2i\,y \right),\ \left(2i\,x + y \right) + 2i\left(-x - 2i\,y \right) \right]$$

realizando operaciones:

$$\left(4x - 2i\,y + x + 2i\,y\,,\; 2i\,x + y - 2i\,x + 4y \right) =$$

$$\left(4x - 2i\,y + x + 2i\,y\,,\; 2i\,x + y - 2i\,x + 4y \right)$$

sumando términos semejantes, tenemos:

$$\left(5x\,,\; 5y \right) = \left(5x\,,\; 5y \right)$$

Como se cumple la igualdad, entonces se puede concluir T es un operador normal.

Operadores hermitianos, antihermitianos, simétricos y antisiméticos

Definición

Sea V un espacio vectorial definido en $\mathbb{C}$, en el cual se define un producto interno y sea $T : V \to V$ un operador lineal.

Si se cumple que:

$$\left(T\left(\bar{v}_1 \right) \middle| \bar{v}_2 \right) = \left(\bar{v}_1 \middle| T\left(\bar{v}_2 \right) \right) \quad ; \qquad \forall\; \bar{v}_1\,,\; \bar{v}_2 \in V$$

entonces se dice que T es un operador hermitiano.

Al operador T se le llama antihermitiano si se cumple que:

$$\left(T\left(\bar{v}_1 \right) \middle| \bar{v}_2 \right) = -\left(\bar{v}_1 \middle| T\left(\bar{v}_2 \right) \right) \quad ; \qquad \forall\; \bar{v}_1\,,\; \bar{v}_2 \in V$$

Si T es un operador hermitiano definido sobre el campo de los números reales, se le llama también operador simétrico.

Si T es un operador antihermitiano definido sobre el campo de los números reales, se le llama también operador antisimétrico.

Un operador T puede ser hermitiano con respecto a un producto interno y no serlo con respecto a otro; sin embargo, es suficiente con que sea hermitiano para algún producto interno para que se le llame de esta forma y cumpla con todas las propiedades de todo operador hermitiano.

Propiedades de los operadores hermitianos, simétricos, antihermitianos y antisimétricos

1) Si T es un operador hermitiano, entonces:

a) T es diagonalizable.

b) Sus valores característicos son números reales.

c) Los vectores característicos son ortogonales, siempre y cuando los valores característicos sean diferentes.

2) Si $T : V \rightarrow V$ es un operador hermitiano y B es una base ortonormal de V para algún producto interno definido en V, entonces $M_B^B(T)$ es una matriz hermitiana.

3) Si $M_B^B(T)$ es una matriz asociada a un operador hermitiano referida a una base B ortonormal, entonces:

a) La matriz diagonalizadora P es una matriz unitaria, si el campo de definición del espacio vectorial es complejo.

b) La matriz diagonalizadora P es una matriz ortogonal, si el campo de definición del espacio vectorial es real.

4) Si T es un operador antihermitiano, entonces sus valores característicos son imaginarios puros.

5) Si $T : V \rightarrow V$ es un operador antihermitiano y B es una base ortonormal de V, entonces $M_B^B(T)$ es una matriz antihermitiana.

EJERCICIO 4.4 Sea el operador lineal $T: \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$, donde $\mathbb{C}^2$ está definido en el campo de los números complejos y cuya regla de correspondencia es:

$$T\left(a+bi,\ c+di\right)=\left(a-d+\left(b+c\right)i,\ b-ai\right);\quad \forall\, a,\, b,\, c,\, d \in \mathbb{R}$$

Considerando al producto escalar ordinario en $\mathbb{C}^2$ como producto interno:

a) Determine si T es un operador hermitiano.

b) En caso de ser afirmativa la respuesta del inciso anterior, obtenga una matriz asociada a T referida a una base ortonormal de $\mathbb{C}^2$ y compruebe que dicha matriz es hermitiana.

c) Si T es un operador hermitiano, compruebe que sus valores característicos son reales.

d) ¿Los vectores característicos de T resultan ser ortogonales?

SOLUCIÓN:

a) Para determinar si T es un operador hermitiano se debe cumplir que:

$$\left(T\left(\bar{v}_1\right)\middle|\ \bar{v}_2\right)=\left(\bar{v}_1\ \middle|\ T\left(\bar{v}_2\right)\right)\quad;\qquad \forall\ \bar{v}_1,\ \bar{v}_2 \in \mathbb{C}^2$$

si consideramos los vectores

$$\bar{v}_1=\left(a+bi,\ c+di\right)\quad \text{y}\quad \bar{v}_2=\left(x+yi,\ z+wi\right)$$

entonces

$$\left(T\left(a+bi,\ c+di\right)\middle|\left(x+yi,\ z+wi\right)\right)=\left(\left(a+bi,\ c+di\right)\middle|\ T\left(x+yi,\ z+wi\right)\right)$$

desarrollando el lado izquierdo de la igualdad, tenemos:

$$\left(T\left(a+bi,\ c+di\right)\middle|\left(x+yi,\ z+wi\right)\right)=\left(\left(a-d+\left(b+c\right)i,b-ai\right)\middle|\left(x+yi,\ z+wi\right)\right)$$

$$=\left[\left(a-d\right)+\left(b+c\right)i\right]\left(x-yi\right)+\left(b-ai\right)\left(z-wi\right)$$

$$=\left(ax-ayi-dx+dyi+bxi+by+cxi+cy\right)+\left(bz-bwi-azi-aw\right)$$

$$=\left(ax-dx+by+cy+bz-aw\right)+\left(-ay+dy+bx+cx-bw-az\right)i \qquad \ldots\ldots(1)$$

desarrollando el lado derecho se tiene:

$$\big(\,(a+bi,\ c+di)\,\big|\,T\,(x+yi,\ z+wi)\,\big) = \big(\,(a+bi,\ c+di)\,\big|\,(x-w+(y+z)i,\ y-xi)\big)$$

$$= (a+bi)\left[(x-w)-(y+z)i\right]+(c+di)(y+xi)$$

$$= (ax-aw-ayi-azi+bxi-bwi+by+bz)+(cy+cxi+dyi-dx)$$

$$= (ax-aw+by+bz+cy-dx)+(-ay-az+bx-bw+cx+dy)\,i \qquad \ldots\ldots(2)$$

Como las expresiones (1) y (2) son iguales, entonces el operador T es hermitiano.

b) Como el campo de definición del espacio $\mathbb{C}^2$ es complejo, entonces su dimensión es igual a dos y una base ortonormal de dicho espacio es:

$$B = \{(1,\ 0),\ (0,\ 1)\}$$

Con lo cual la matriz asociada al operador T será:

$$\begin{aligned} T(1,\ 0) &= (1,\ -i) \\ T(0,\ 1) &= (i,\ 0) \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad M_B^B(T) = \begin{bmatrix} 1 & i \\ -i & 0 \end{bmatrix} = A$$

Comprobando que A es hermitiana tenemos:

$$A^* = \begin{bmatrix} 1 & i \\ -i & 0 \end{bmatrix}$$

como $A = A^*$, entonces A es una matriz hermitiana.

c) Obteniendo los valores característicos de T, tenemos:

$$det\,(A-\lambda \mathrm{I}) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & i \\ -i & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(1-\lambda)-1 = \lambda^2-\lambda-1$$

Aplicando la fórmula para ecuaciones de segundo grado se tiene:

$$\lambda = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

por lo tanto, los valores característicos son:

$$\lambda_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}$$

que resultaron ser números reales como se esperaba.

d) Dado que los valores característicos son diferentes, entonces de acuerdo con la propiedad $1.c$ los vectores característicos son ortogonales.

EJERCICIO 4.5 Sea el operador lineal $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definido por

$$T(x, y) = (0, kx - 2y)$$

Determine el o los valores de $k \in \mathbb{R}$ de tal forma que T sea un operador simétrico con el siguiente producto interno:

$$\left((x_1, y_1) \middle| (x_2, y_2) \right) = \frac{25}{144} x_1 x_2 + \frac{1}{9} \left(y_1 y_2 - x_1 y_2 - x_2 y_1 \right)$$

SOLUCIÓN:

Para que T sea un operador simétrico se debe cumplir la igualdad:

$$\left(T(\bar{v}_1) \middle| \bar{v}_2 \right) = \left(\bar{v}_1 \middle| T(\bar{v}_2) \right) \quad ; \quad \forall\ \bar{v}_1, \bar{v}_2 \in \mathbb{R}^2$$

esto es:

$$\left(T(x_1, y_1) \middle| (x_2, y_2) \right) = \left((x_1, y_1) \middle| T(x_2, y_2) \right)$$

aplicando la regla T tenemos:

$$\left((0, kx_1 - 2y_1) \middle| (x_2, y_2) \right) = \left((x_1, y_1) \middle| (0, kx_2 - 2y_2) \right)$$

desarrollando el producto interno en ambos lados:

$$\frac{1}{9}\left[\left(kx_1-2y_1\right)y_2-0-x_2\left(kx_1-2y_1\right)\right]=\frac{1}{9}\left[y_1\left(kx_2-2y_2\right)-x_1\left(kx_2-2y_2\right)-0\right]$$

de donde se obtiene:

$$kx_1\,y_2-2y_1\,y_2-k\,x_1\,x_2+2\,x_2\,y_1\;=\;kx_2\,y_1-2y_1\,y_2-kx_1\,x_2+2x_1\,y_2$$

simplificando términos semejantes tenemos:

$$kx_1\,y_2+2\,x_2\,y_1\;=\;kx_2\,y_1+2x_1\,y_2$$

de donde se puede concluir que con $k=2$ se cumple la igualdad y por lo tanto, con dicho valor, el operador T es simétrico.

Operadores ortogonales y unitarios

Definición

Sea V un espacio vectorial definido en $\mathbb{C}$, en el cual se define un producto interno y sea $T:\,V\to V$ un operador lineal.

Si se cumple que:

$$\left(\,T\left(\bar{v}_1\right)\middle|\,T\left(\bar{v}_2\right)\right)=\left(\,\bar{v}_1\;\middle|\;\bar{v}_2\,\right)\;;\quad\forall\;\bar{v}_1\,,\;\bar{v}_2\in V$$

entonces se dice que T es un operador unitario.

Si T es un operador unitario definido sobre el campo de los números reales, se le llama también operador ortogonal.

Propiedades de los operadores unitarios y ortogonales

Cabe resaltar el hecho de que todo operador ortogonal es también un operador unitario, por lo que las propiedades que a continuación se enuncian se cumplen para ambos operadores.

1) Si T es un operador unitario, entones T conserva las normas, esto es:

$$\| T(\bar{v}) \| = \| \bar{v} \| \quad ; \quad \forall \ \bar{v} \in V$$

2) Los valores característicos de un operador unitario tienen módulo uno, esto es:

$$|\lambda| = 1$$

3) La matriz asociada a un operador unitario referida a una base ortonormal es una matriz unitaria y tiene las siguientes propiedades.

a) La suma de los productos de los elementos de cualquier fila (renglón o columna) por los conjugados de los correspondientes elementos de cualquier otra fila paralela es igual a cero, es decir, si las filas se consideran como vectores, entonces éstos resultan ser ortogonales.

b) La suma de los cuadrados de los módulos de los elementos de cualquier fila es igual a uno, esto es, si las filas se consideran como vectores, entonces éstos son vectores unitarios.

EJERCICIO 4.6 En el espacio vectorial $\mathbb{R}^2$ con el producto escalar ordinario se tiene el operador ortogonal $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ en donde $T(1, 0) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right)$. Calcule $T(0, 1)$.

SOLUCIÓN:

Se sabe que un operador ortogonal cumple la condición:

$$\left(T\left(\bar{v}_1 \right) \,\middle|\, T\left(\bar{v}_2 \right) \right) = \left(\bar{v}_1 \,\middle|\, \bar{v}_2 \right)$$

de donde se tiene:

$$\left(T(1,0) \,\middle|\, T(0,1) \right) = \left((1,0) \,\middle|\, (0,1) \right)$$

$$\left(\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right) \middle| (a, b) \right) = 0$$

desarrollando el producto interno:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\, a - \frac{1}{\sqrt{2}}\, b = 0$$

$$a - b = 0 \qquad\qquad \ldots\ldots(1)$$

Por otro lado, como se trata de un operador ortogonal, entonces preserva la norma, esto es:

$$\left\| T(0,1) \right\| = \left\| (0,1) \right\|$$

$$\left\| (a, b) \right\| = 1$$

$$\sqrt{a^2 + b^2} = 1$$

$$a^2 + b^2 = 1 \qquad\qquad \ldots\ldots(2)$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones que se forma con (1) y (2), tenemos:

$$\begin{cases} a - b = 0 & \Rightarrow \quad a = b \\ a^2 + b^2 = 1 & \end{cases}$$

de (2) se tiene:

$$a^2 + a^2 = 1$$

$$2a^2 = 1$$

$$a^2 = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad a = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \Rightarrow \quad b = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Dado que los vectores para los cuales se obtiene su imagen bajo T, esto es, $T(1, 0)$ y $T(0, 1)$ constituyen una base ortonormal de $\mathbb{R}^2$, entonces la matriz $M(T)$ referida a dicha base tiene que ser ortogonal, es decir, debe cumplir que:

$$M\, M^T = M^T M = \mathrm{I}$$

entonces las únicas imágenes correctas del vector $(0, 1)$ son:

$$T_1(0, 1) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

$$T_2(0, 1) = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

Es importante aclarar que, el hecho de tener dos posibles imágenes para el vector $(0, 1)$, en realidad esto implica que existen dos operadores ortogonales T_1 y T_2 con los cuales se satisfacen las condiciones del problema y con cada uno de estos operadores se obtiene la imagen correspondiente del vector $(0, 1)$. Las matrices asociadas a estos operadores, referidas a la base canónica son:

$$M(T_1) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad M(T_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Lo cual implica, obviamente, dos operadores ortogonales T_1 y T_2 con sus respectivas reglas de correspondencia.

EJERCICIO 4.7 Determine si el operador lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ cuya regla de correspondencia es

$$T(x, y, z) = \left(\frac{2x - 2y + z}{3}, \frac{2x + y - 2z}{3}, \frac{x + 2y + 2z}{3} \right)$$

es un operador ortogonal, considerando como producto interno el producto escalar ordinario en $\mathbb{R}^3$.

SOLUCIÓN:

Para resolver este ejercicio se pueden seguir dos métodos. El primero de ellos sería verificar si el operador T satisface la condición

$$\left(T(\bar{v}_1) \,\middle|\, T(\bar{v}_2) \right) = \left(\bar{v}_1 \,\middle|\, \bar{v}_2 \right)$$

si es así, entonces T es un operador ortogonal.

El otro método sería verificando la condición relativa a la matriz asociada a dicho operador. Si T es un operador ortogonal, entonces la matriz asociada a T referida a una base ortonormal deber ser una matriz ortogonal.

De estos dos métodos de solución, el primero resulta ser muy laborioso dadas las características de la regla de correspondencia de T, por lo cual se optará por el segundo método descrito.

Si consideramos como base de $\mathbb{R}^3$ a la base canónica, ésta resulta ser una base ortonormal con el producto interno considerado.

Obteniendo la matriz asociada a T, tenemos:

$$T(1,0,0) = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3} \right)$$

$$T(0,1,0) = \left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3} \right) \qquad \therefore \qquad M(T) = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} = A$$

$$T(0,0,1) = \left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3} \right)$$

Comprobando si la matriz A es ortogonal, se tiene que:

$$A\,A^T = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathrm{I}$$

Como $A\,A^T = \mathrm{I}$, entonces A es una matriz ortogonal y por lo tanto podemos afirmar que T es un operador ortogonal.

EJERCICIO 4.8 Sea el espacio vectorial $\mathbb{C}^2$ definido sobre $\mathbb{C}$ y el operador lineal $T: \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ cuya regla de correspondencia es:

$$T(x, y) = \left(\frac{1+i}{\sqrt{3}}\, x + \frac{i}{\sqrt{3}}\, y \, , \, \frac{1}{\sqrt{3}}\, x + \alpha y \right); \qquad \forall \, (x, y) \in \mathbb{C}^2$$

Determine el valor de $\alpha \in \mathbb{C}$ para el cual T sea un operador unitario. Considere como producto interno al producto escalar ordinario usual en $\mathbb{C}^2$.

SOLUCIÓN:

Para que T sea un operador unitario se debe cumplir que:

$$\left(T(\bar{v}_1) \,\middle|\, T(\bar{v}_2) \right) = \left(\bar{v}_1 \,\middle|\, \bar{v}_2 \right) \;\; ; \;\; \forall \;\; \bar{v}_1 , \bar{v}_2 \in \mathbb{C}^2$$

si consideramos $\bar{v}_1 = (x_1, y_1)$ y $\bar{v}_2 = (x_2, y_2)$, entonces:

$$\left(T(x_1, y_1) \,\middle|\, T(x_2, y_2) \right) = \left((x_1, y_1) \,\middle|\, (x_2, y_2) \right)$$

aplicando T tenemos:

$$\left(\left(\frac{1+i}{\sqrt{3}} x_1 + \frac{i}{\sqrt{3}} y_1 , \frac{1}{\sqrt{3}} x_1 + \alpha y_1 \right) \,\middle|\, \left(\frac{1+i}{\sqrt{3}} x_2 + \frac{i}{\sqrt{3}} y_2 , \frac{1}{\sqrt{3}} x_2 + \alpha y_2 \right) \right) = x_1 \bar{x}_2 + y_1 \bar{y}_2$$

desarrollando el producto interno del lado izquierdo, se tiene:

$$\left(\frac{1+i}{\sqrt{3}} x_1 + \frac{i}{\sqrt{3}} y_1 \right) \overline{\left(\frac{1+i}{\sqrt{3}} x_2 + \frac{i}{\sqrt{3}} y_2 \right)} + \left(\frac{1}{\sqrt{3}} x_1 + \alpha y_1 \right) \overline{\left(\frac{1}{\sqrt{3}} x_2 + \alpha y_2 \right)} = x_1 \bar{x}_2 + y_1 \bar{y}_2$$

conjugando y factorizando $\frac{1}{\sqrt{3}}$, tenemos:

$$\frac{1}{3} \left[\left((1+i) x_1 + i y_1 \right) \left((1-i) \bar{x}_2 - i \bar{y}_2 \right) + \left(x_1 + \sqrt{3}\, \alpha y_1 \right) \left(\bar{x}_2 + \sqrt{3}\, \bar{\alpha} \bar{y}_2 \right) \right] = x_1 \bar{x}_2 + y_1 \bar{y}_2$$

multiplicando por 3 en ambos lados y desarrollando los productos, tenemos:

$$2 x_1 \bar{x}_2 - i x_1 \bar{y}_2 + x_1 \bar{y}_2 + i \bar{x}_2 y_1 + \bar{x}_2 y_1 + y_1 \bar{y}_2 + x_1 \bar{x}_2 + \sqrt{3}\, \alpha x_1 \bar{y}_2 + \sqrt{3}\, \alpha \bar{x}_2 y_1 + 3 \alpha \bar{\alpha} y_1 \bar{y}_2$$
$$= 3 x_1 \bar{x}_2 + 3 y_1 \bar{y}_2$$

simplificando y agrupando:

$$3x_1\bar{x}_2 + \left(1-i+\sqrt{3}\,\bar{\alpha}\right)x_1\bar{y}_2 + \left(1+i+\sqrt{3}\,\alpha\right)\bar{x}_2 y_1 + \left(1+3\alpha\bar{\alpha}\right)y_1\bar{y}_2 = 3x_1\bar{x}_2 + 3y_1\bar{y}_2$$

Por igualdad se tiene:

$$\begin{cases} 1-i+\sqrt{3}\,\bar{\alpha} = 0 & \ldots\ldots(1) \\ 1+i+\sqrt{3}\,\alpha = 0 & \ldots\ldots(2) \\ 1+3\alpha\bar{\alpha} = 3 & \ldots\ldots(3) \end{cases}$$

de (2) tenemos que:

$$\alpha = -\frac{1+i}{\sqrt{3}}$$

verificando si el valor de α satisface a las ecuaciones (1) y (3), se tiene:

sustituyendo en (1) :

$$1-i+\sqrt{3}\,\overline{\left(-\frac{1+i}{\sqrt{3}}\right)} = 0$$

$$1-i+\left(-1+i\right) = 0$$

$$0 = 0 \qquad \therefore \qquad \text{satisface}$$

sustituyendo en (3) :

$$1+3\left(-\frac{1+i}{\sqrt{3}}\right)\overline{\left(-\frac{1+i}{\sqrt{3}}\right)} = 3$$

$$1+\left(-1-i\right)\left(-1+i\right) = 3$$

$$1+2 = 3$$

$$3 = 3 \qquad \therefore \qquad \text{satisface}$$

Por lo que si $\alpha = -\dfrac{1+i}{\sqrt{3}}$, entonces el operador T es unitario.

Teorema espectral

Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$ de dimensión finita y con producto interno, y sea $T: V \to V$ un operador normal:

Si $\lambda_1, \lambda_1, \ldots, \lambda_k$ son los diferentes valores característicos de T, $\mathrm{E}(\lambda_i)$ es el espacio característico correspondiente a λ_i y P_i es el operador de proyección ortogonal sobre $\mathrm{E}(\lambda_i)$, entonces:

a) $T = \lambda_1 \mathrm{P}_1 + \lambda_2 \mathrm{P}_2 + \ldots + \lambda_k \mathrm{P}_k$

b) $\mathrm{P}_1 + \mathrm{P}_2 + \ldots + \mathrm{P}_k = \mathrm{I}$

c) $\mathrm{P}_i \circ \mathrm{P}_j = 0$, para toda $i \neq j$

Si el espacio vectorial V está definido sobre un campo real, entonces el teorema espectral también se cumple para un operador T simétrico.

EJERCICIO 4.9 Para el operador simétrico $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ cuya regla de correspondencia es:

$$T(x, y) = (-x + 2y, 2x + 2y)$$

a) Obtenga la descomposición espectral del operador T.

b) Verifique que se cumple la condición $\mathrm{P}_1 + \mathrm{P}_2 = \mathrm{I}$

c) Compruebe que $\mathrm{P}_1 \circ \mathrm{P}_2 = 0$.

SOLUCIÓN:

a) Obteniendo los valores, vectores y espacios característicos, tenemos:

$$\left.\begin{array}{l} T(1, 0) = (-1, 2) \\ \\ T(0, 1) = (2, 2) \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad M(T) = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = A$$

de donde:

$$\det\left(A-\lambda \mathrm{I} \right) = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 2 \\ 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \left(-1-\lambda\right)\left(2-\lambda \right)-4$$

$$= \lambda^2-\lambda-2-4$$

entonces:

$$\mathrm{P}\left(\lambda \right) = \lambda^2-\lambda-6$$

$$\mathrm{P}\left(\lambda \right) = \left(\lambda-3 \right)\left(\lambda+2 \right)$$

con lo cual los valores característicos son:

$$\lambda_1 = 3$$

$$\lambda_2 = -2$$

Obteniendo los vectores característicos, se tiene:

Para $\lambda_1 = 3$:

$$\begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

donde surge el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} -4x+2y = 0 \\ 2x-y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x-y = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \Rightarrow y = 2x$$

si $x = \mathrm{k}_1 \Rightarrow y = 2\mathrm{k}_1$

con lo cual los vectores característicos asociados a $\lambda_1 = 3$ son:

$$\bar{v}_1 = \left(\mathrm{k}_1,\ 2\mathrm{k}_1 \right) \quad \text{con} \quad \mathrm{k}_1 \neq 0$$

Para $\lambda_2 = -2$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x + 2y = 0 \\ 2x + 4y = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x + 2y = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad x = -2y$$

si $y = \mathrm{k}_2 \ \Rightarrow \ x = -2\mathrm{k}_2$

con lo cual los vectores característicos asociados a $\lambda_2 = -2$ son:

$$\bar{v}_2 = \left(-2\mathrm{k}_2, \ \mathrm{k}_2 \right) \qquad \text{con} \quad \mathrm{k}_2 \neq 0$$

Por lo que, los correspondientes espacios característicos son:

$$\mathrm{E}\left(\lambda_1 \right) = \left\{ \left(\mathrm{k}_1, \ 2\mathrm{k}_1 \right) \,\middle|\, \mathrm{k}_1 \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\mathrm{E}\left(\lambda_2 \right) = \left\{ \left(-2\mathrm{k}_2, \ \mathrm{k}_2 \right) \,\middle|\, \mathrm{k}_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

Obsérvese que los vectores característicos con el producto escalar ordinario en $\mathbb{R}^2$ como producto interno, resultan ser ortogonales y por lo tanto, los espacios característicos son uno complemento ortogonal del otro, por lo que cualquier vector $\left(x, \ y \right) \in \mathbb{R}^2$ puede ser expresado en forma única como la suma de dos vectores que, en este caso, serían uno de cada espacio característico.

Los operadores P_1 y P_2 que proyectan cualquier vector de $\mathbb{R}^2$ sobre los espacios característicos son:

$$\left. \begin{array}{l} \mathrm{P}_1\left(a, \ b \right) = \left(a, \ 2a \right) \ \in \ \mathrm{E}\left(\lambda_1 \right) \\ \\ \mathrm{P}_2\left(a, \ b \right) = \left(-2b, \ b \right) \in \ \mathrm{E}\left(\lambda_2 \right) \end{array} \right\} \qquad \ldots\ldots\left(\mathrm{I} \right)$$

Al expresar un vector cualquiera $\left(x, \ y \right) \in \mathbb{R}^2$ como la suma de vectores pertenecientes a los espacios característicos, tenemos:

$$\left(x, \ y \right) = \left(a, \ 2a \right) + \left(-2b, \ b \right) \quad \ldots\ldots\left(1 \right)$$

de donde surge el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x = a - 2b & \text{......}(2) \\ y = 2a + b & \text{......}(3) \end{cases}$$

de (2) se tiene:

$$a = x + 2b \qquad \text{......}(4)$$

sustituyendo (4) en (3) :

$$y = 2\left(x + 2b \right) + b$$

$$y = 2x + 5b$$

$$b = \frac{-2x + y}{5} \qquad \text{......}(5)$$

sustituyendo (5) en (4) :

$$a = x + 2\left(\frac{-2x + y}{5} \right)$$

$$a = \frac{x + 2y}{5} \qquad \text{......}(6)$$

De acuerdo con las reglas de correspondencia que tienen los operadores proyección que se muestran en (I) y los valores obtenidos de a y b, se tiene que:

$$\mathrm{P}_1(x, y) = \left(\frac{x + 2y}{5}, \frac{2x + 4y}{5} \right)$$

$$\mathrm{P}_2(x, y) = \left(\frac{4x - 2y}{5}, \frac{-2x + y}{5} \right)$$

Como la descomposición espectral del operador T es de la forma:

$$T = \lambda_1 \mathrm{P}_1 + \lambda_2 \mathrm{P}_2$$

entonces la descomposición espectral de T es:

$$T(x,\ y) = 3\left(\frac{x + 2y}{5},\ \frac{2x + 4y}{5}\right) - 2\left(\frac{4x - 2y}{5},\ \frac{-2x + y}{5}\right)$$

realizando las operaciones indicadas para comprobar que dicha descomposición es correcta, tenemos:

$$T(x,\ y) = \left(\frac{3x + 6y}{5},\ \frac{6x + 12y}{5}\right) + \left(\frac{-8x + 4y}{5} \quad + \quad \frac{4x - 2y}{5}\right)$$

sumando se llega a:

$$T(x,\ y) = (-x + 2y,\ 2x + 2y)$$

Como se llega a la misma regla de correspondencia dada en el enunciado del ejercicio, entonces podemos concluir que la descomposición espectral de T a la que se llegó, es correcta.

b) Se debe verificar que la suma de los operadores proyección es igual al operador identidad, esto es:

$$\mathrm{P}_1 + \mathrm{P}_2 = \mathrm{I}$$

Esto se puede expresar como:

$$\mathrm{I}(x,\ y) = \left(\mathrm{P}_1 + \mathrm{P}_2\right)(x,\ y)$$

$$\mathrm{I}(x,\ y) = \mathrm{P}_1(x,\ y) + \mathrm{P}_2(x,\ y)$$

sustituyendo P_1 y P_2 tenemos:

$$\mathrm{I}(x,\ y) = \left(\frac{x + 2y}{5},\ \frac{2x + 4y}{5}\right) + \left(\frac{4x - 2y}{5},\ \frac{-2x + y}{5}\right)$$

al sumar se obtiene:

$$\mathrm{I}(x,\ y) = (x,\ y) \qquad \therefore \qquad \text{cumple}$$

c) Se debe cumplir que:

$$P_1 \circ P_2 = 0$$

Cabe hacer notar que el $"0"$ de la expresión $P_1 \circ P_2 = 0$ en realidad nos representa al operador nulo, esto es:

$$0(x, y) = (0, 0) \; ; \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

De acuerdo con esto, entonces se tiene que:

$$\left(P_1 \circ P_2 \right)(a, b) = 0(a, b) \quad \text{donde} \quad (a, b) \in \mathbb{R}^2$$

Aplicando la definición de la operación composición del lado izquierdo de la igualdad y el operador nulo del lado derecho, tenemos:

$$P_1 \left[P_2 (a, b) \right] = (0, 0)$$

Aplicando la regla de correspondencia del operador P_2 se tiene que:

$$P_1 \left(\frac{4a - 2b}{5} , \frac{-2a + b}{5} \right) = (0, 0)$$

aplicando ahora la regla de P_1 tenemos:

$$\left[\frac{\frac{4a - 2b}{5} + 2\left(\frac{-2a + b}{5} \right)}{5} , \frac{2\left(\frac{4a - 2b}{5} \right) + 4\left(\frac{-2a + b}{5} \right)}{5} \right] = (0, 0)$$

realizando operaciones se tiene:

$$\left(\frac{\frac{4a - 2b}{5} + \frac{-4a + 2b}{5}}{5} , \frac{\frac{8a - 4b}{5} + \frac{-8a + 4b}{5}}{5} \right) = (0, 0)$$

sumando:

$$\left(\frac{0}{5} , \frac{0}{5} \right) = (0, 0)$$

$$(0, 0) = (0, 0)$$

Con lo cual se comprueba que la composición de los operadores proyección nos da el operador nulo.

Formas cuádricas

Una de las múltiples aplicaciones que tienen los valores y vectores característicos es la que se da en las formas cuádricas, que nos permite simplificar el estudio de las cónicas y de las superficies, cuando éstas tienen sus ejes oblicuos a los ejes del sistema de referencia, esto es, los valores y vectores característicos pueden ser usados para resolver problemas donde se requiere hacer una rotación de ejes.

Las ecuaciones:

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$$

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + exz + fyz + gx + hy + iz + j = 0$$

corresponden a las ecuaciones generales de segundo grado en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$, respectivamente.

A las expresiones que sólo consideran los términos de segundo grado, se les llaman formas cuádricas o formas cuadráticas, esto es:

$ax^2 + bxy + cy^2 \longrightarrow$ Forma cuádrica para el caso de $\mathbb{R}^2$.

$ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + exz + fyz \longrightarrow$ Forma cuádrica para el caso de $\mathbb{R}^3$.

Las formas cuádricas pueden ser expresadas matricialmente de la siguiente forma:

$$ax^2 + bxy + cy^2 = \underbrace{\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix}}_{\bar{x}^T} \underbrace{\begin{bmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}}_{\bar{x}} = \bar{x}^T A \bar{x}$$

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + exz + fyz = \underbrace{\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix}}_{\bar{x}^T} \underbrace{\begin{bmatrix} a & \frac{d}{2} & \frac{e}{2} \\ \frac{d}{2} & b & \frac{f}{2} \\ \frac{e}{2} & \frac{f}{2} & c \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}}_{\bar{x}} = \bar{x}^T A \bar{x}$$

Considerando la ecuación general de segundo grado se tiene:

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$$

representando en forma matricial esta ecuación tenemos:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix}}_{\overline{x}^{T}} \underbrace{\begin{bmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}}_{\overline{x}} + \underbrace{\begin{bmatrix} d & e \end{bmatrix}}_{k} \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}}_{\overline{x}} + f = 0$$

con lo cual la ecuación queda como:

$$\overline{x}^{T} A \overline{x} + k \overline{x} + f = 0 \qquad \ldots\ldots (1)$$

si se hace:

$$\overline{x} = \mathrm{P} \overline{x}' \qquad \ldots\ldots (2)$$

esto es:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \mathrm{P} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$$

Donde x' y y' son los ejes del nuevo sistema de referencia ya rotado. P es la matriz diagonalizadora de la matriz A que figura en la ecuación (1), formada por vectores característicos unitarios, con lo cual P es una matriz ortogonal, es decir, $\mathrm{P}^{-1} = \mathrm{P}^{T}$. Se debe cuidar además que $\det(\mathrm{P}) = 1$, lo cual garantiza el giro de ejes. Si el $\det(\mathrm{P}) = -1$, entonces será suficiente con intercambiar las columnas de P.

Al sustituir la expresión (2) en (1) se tiene:

$$(\mathrm{P}\overline{x}')^{T} A (\mathrm{P}\overline{x}') + k (\mathrm{P}\overline{x}') + f = 0$$

de donde:

$$(\overline{x}')^{T} \mathrm{P}^{T} A \mathrm{P} \overline{x}' + (k\mathrm{P}) \overline{x}' + f = 0$$

dado que el producto de matrices es asociativo tenemos:

$$(\overline{x}')^{T} (\mathrm{P}^{T} A \mathrm{P}) \overline{x}' + (k\mathrm{P}) \overline{x}' + f = 0 \quad \ldots\ldots (3)$$

como

$$P^T A P = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

donde λ_1 y λ_2 son los valores característicos de A.

Entonces la ecuación (3) expresada con matrices quedaría como:

$$\begin{bmatrix} x' & y' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d & e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + f = 0$$

efectuando los productos indicados llegaríamos a una ecuación de la forma:

$$\lambda_1 (x')^2 + \lambda_2 (y')^2 + d'x' + e'y' + f = 0 \qquad \ldots\ldots(4)$$

donde:

$$d' = d\,P_{11} + e\,P_{21}$$

$$e' = d\,P_{12} + e\,P_{22}$$

Como se puede apreciar en la ecuación (4), se trata de una ecuación de segundo grado donde el término xy ya no aparece, lo cual quiere decir que los ejes de la cónica son coincidentes o paralelos a los ejes del nuevo sistema de referencia x', y'.

Para el caso de la ecuación general de segundo grado en $\mathbb{R}^3$, es decir, cuando se tienen superficies cónicas cuyos ejes sean oblicuos al sistema de referencia, el procedimiento a seguir para rotar dicho sistema, de tal manera que los nuevos ejes resulten coincidentes o paralelos a los ejes de la superficie, es exactamente el mismo al seguido para el caso de $\mathbb{R}^2$, con la única diferencia de que la matriz A ahora será de 3×3 y se tendrán tres valores y tres vectores característicos.

EJERCICIO 4.10 Para la cónica cuya ecuación es:

$$9x^2 + 4xy + 6y^2 + 12x + 36y + 44 = 0$$

a) Determine una matriz P correspondiente al giro que hace paralelos los ejes coordenados con los ejes de la cónica.

b) Obtenga la ecuación de la cónica, en un sistema de referencia $(x'', \; y'')$, que no contenga término mixto ni términos lineales.

c) Calcule el ángulo de giro.

d) Dibuje la cónica así como los distintos sistemas de referencia.

SOLUCIÓN:

a) La matriz P que se pide determinar es la matriz diagonalizadora de A.

La representación matricial de la ecuación de la cónica es:

$$\bar{x}^T A \bar{x} + k\bar{x} + 44 = 0 \qquad \ldots\ldots(1)$$

donde:

$$A = \begin{bmatrix} 9 & 2 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} \quad ; \quad k = \begin{bmatrix} 12 & 36 \end{bmatrix} \quad ; \quad \bar{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Como se sabe, la matriz P está formada por la disposición en columna de los vectores característicos unitarios de la matriz A, entonces:

$$\det(A - \lambda \mathrm{I}) = \begin{vmatrix} 9-\lambda & 2 \\ 2 & 6-\lambda \end{vmatrix} = (9-\lambda)(6-\lambda) - 4 = \lambda^2 - 15\lambda + 50 = (\lambda - 10)(\lambda - 5)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 10 \\ \lambda_2 = 5 \end{cases} \qquad \text{valores característicos}$$

Obteniendo los vectores característicos tenemos:

Para $\lambda_1 = 10$:

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow (2)\begin{cases} -x + 2y = 0 \\ 2x - 4y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x + 2y = 0 \Rightarrow x = 2y \\ 0 = 0 \end{cases}$$

si $y = k_1 \Rightarrow x = 2k_1 \therefore \bar{v}_1 = \left(2k_1 ,\ k_1\right)$ con $k_1 \neq 0$ vectores característicos

Para $\lambda_2 = 5$:

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} + \\ (-2) \end{matrix}\begin{cases} 4x + 2y = 0 \\ 2x + y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + y = 0 \Rightarrow y = -2x \\ 0 = 0 \end{cases}$$

si $x = k_2 \Rightarrow y = -2k_2 \therefore \bar{v}_2 = \left(k_2 ,\ -2k_2\right)$ con $k_2 \neq 0$ vectores característicos

Si hacemos que $k_1 = 1$ y $k_2 = -1$, entonces se obtienen los siguientes vectores característicos:

$\bar{u}_1 = (\ 2 ,\ 1\ )$ donde $\left\| \bar{u}_1 \right\| = \sqrt{5}$

$\bar{u}_2 = (\ -1 ,\ 2\ )$ donde $\left\| \bar{u}_1 \right\| = \sqrt{5}$

Considerando como producto interno el producto escalar ordinario.

Entonces los vectores característicos unitarios son:

$$\bar{e}_1 = \left(\frac{2}{\sqrt{5}} ,\ \frac{1}{\sqrt{5}} \right)$$

$$\bar{e}_2 = \left(-\frac{1}{\sqrt{5}} ,\ \frac{2}{\sqrt{5}} \right)$$

Con lo cual la matriz diagonalizadora P buscada es:

$$\mathrm{P} = \begin{bmatrix} \dfrac{2}{\sqrt{5}} & -\dfrac{1}{\sqrt{5}} \\ \dfrac{1}{\sqrt{5}} & \dfrac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$$

Se tiene además que:

$$\det\left(\mathrm{P} \right) = 1$$

y al ser P una matriz ortogonal, entonces se cumple que:

$$\mathrm{P}^{T} = \mathrm{P}^{-1}$$

Por otro lado, si realizamos:

$$\left(\bar{u}_1 \middle| \bar{u}_2 \right) = \left((2,\ 1) \middle| (-1,\ 2) \right) = -2+2 = 0$$

con lo cual se tiene que los vectores característicos son ortogonales. Estos vectores nos definirán la dirección de los ejes del nuevo sistema de referencia con el giro requerido.

b) Si hacemos $\bar{x} = \mathrm{P}\,\bar{x}\,'$ y sustituimos en la ecuación (1), tenemos:

$$\left(\mathrm{P}\,\bar{x}\,' \right)^{T} A \left(\mathrm{P}\,\bar{x}\,' \right) + k \left(\mathrm{P}\,\bar{x}\,' \right) + 44 = 0$$

de donde se tiene que:

$$\left(\bar{x}\,' \right)^{T} \mathrm{P}^{T} A\, \mathrm{P}\,\bar{x}\,' + \left(k\mathrm{P} \right) \bar{x}\,' + 44 = 0$$

agrupando:

$$\left(\bar{x}\,' \right)^{T} \left(\mathrm{P}^{T} A\, \mathrm{P} \right) \bar{x}\,' + \left(k\mathrm{P} \right) \bar{x}\,' + 44 = 0$$

Como $P^T = P^{-1}$ entonces $P^T A P = D$, con la cual se llega a:

$$\left(\bar{x}'\right)^T D\ \bar{x}' + \left(k\mathrm{P}\right)\bar{x}' + 44 = 0$$

sustituyendo tenemos:

$$\begin{bmatrix} x' & y' \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 12 & 36 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dfrac{2}{\sqrt{5}} & -\dfrac{1}{\sqrt{5}} \\ \dfrac{1}{\sqrt{5}} & \dfrac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + 44 = 0$$

realizando operaciones:

$$10\left(x'\right)^2 + 5\left(y'\right)^2 + \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} 12 & 36 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + 44 = 0$$

$$10\left(x'\right)^2 + 5\left(y'\right)^2 + \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} 60 & 60 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + 44 = 0$$

$$10\left(x'\right)^2 + 5\left(y'\right)^2 + \frac{60}{\sqrt{5}}x' + \frac{60}{\sqrt{5}}y' + 44 = 0$$

Obsérvese que en esta ecuación ya no se tiene término con producto entre las variables; sin embargo, aún se tienen términos lineales. Para eliminar estos términos se hará un desplazamiento del sistema de referencia para hacer coincidir el centro de la cónica con el origen del nuevo sistema de referencia $\left(x'',\ y''\right)$. Para esto se requiere completar trinomios que sean cuadrados perfectos y hacer la factorización correspondiente.

Agrupando y factorizando tenemos:

$$10\left[\left(x'\right)^2 + \frac{6}{\sqrt{5}}x'\right] + 5\left[\left(y'\right)^2 + \frac{12}{\sqrt{5}}y'\right] = -44$$

completando trinomios:

$$10\left[\left(x'\right)^2+\frac{6}{\sqrt{5}}\,x'+\frac{9}{5}\right]+5\left[\left(y'\right)^2+\frac{12}{\sqrt{5}}\,y'+\frac{36}{5}\right]=-44+18+36$$

$$10\left(x'+\frac{3}{\sqrt{5}}\right)^2+5\left(y'+\frac{6}{\sqrt{5}}\right)^2=10$$

$$\left(x'+\frac{3}{\sqrt{5}}\right)^2+\frac{1}{2}\left(y'+\frac{6}{\sqrt{5}}\right)^2=1$$

si se hace que:

$$x''=x'+\frac{3}{\sqrt{5}}$$

$$y''=y'+\frac{6}{\sqrt{5}}$$

entonces se tiene:

$$\left(x''\right)^2+\frac{\left(y''\right)^2}{2}=1$$

En este sistema de referencia $\left(x'',\ y''\right)$ la ecuación carece de término mixto y lineal, que es lo que se pedía obtener en el inciso $b)$.

Al observar la ecuación a la que se llegó es evidente que se trata de una elipse con centro en el origen y con semiejes $a=1$ y $b=\sqrt{2}$.

c) Para calcular el ángulo de giro, se deberá obtener el ángulo que forman el vector característico $\bar{u}_1 = (2,\ 1)$ que define la dirección del eje x', con el vector unitario $i = (1,\ 0)$.

Sabemos que:

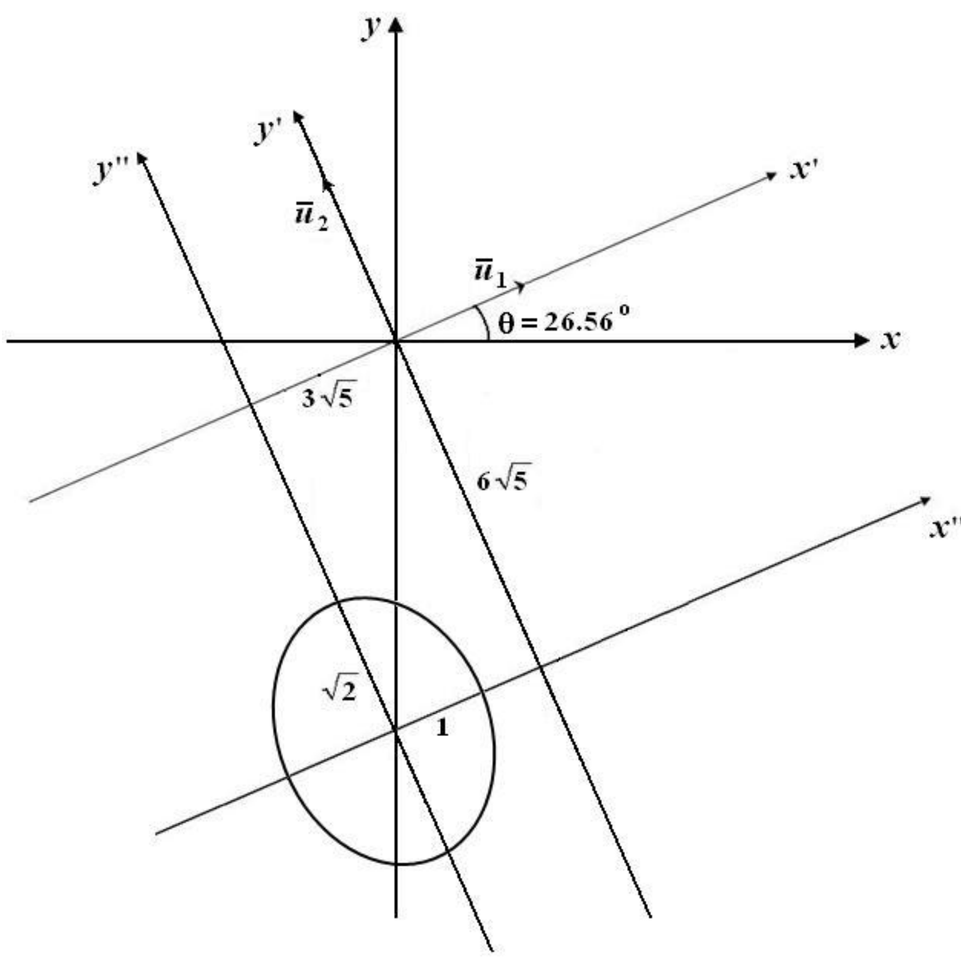
$$\cos\theta = \frac{(\bar{u}_1 \mid i)}{\|\bar{u}_1\|\ \|i\|}$$

sustituyendo:

$$\cos\theta = \frac{((2,\ 1) \mid (1,\ 0))}{(\sqrt{5})(1)}$$

$$\cos\theta = \frac{2}{\sqrt{5}} \qquad \therefore \qquad \theta = 26.56^\circ$$

d) Trazo aproximado de la cónica y los sistemas de referencia.



EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Obtenga el adjunto del operador lineal $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, cuya regla de correspondencia es:

$$T(x, y) = (2x - y, \ x - 3y)$$

Considere como producto interno el producto escalar ordinario en $\mathbb{R}^2$.

2. Sea el espacio vectorial:

$$M = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \middle| \ a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

definido en el campo de los números reales y sea el operador lineal $T: M \to M$ con regla de correspondencia:

$$T\left(\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} a-b & 0 \\ 0 & a+b \end{bmatrix}$$

Determine el operador adjunto de T, considerando el siguiente producto interno:

$$\left(\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \middle| \begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{bmatrix} \right) = ax + by \ ; \qquad \forall \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{bmatrix} \in M$$

3. Sea el operador lineal $T: \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$, donde $\mathbb{C}^2$ está definido en el campo complejo y cuya regla de correspondencia es:

$$T(x, y) = (2x + iy, \ y - ix) \ ; \qquad \forall (x, y) \in \mathbb{C}^2$$

a) Determine si T es un operador normal respecto al producto interno usual en $\mathbb{C}^2$.

b) Obtenga $\| T^*(1+i, \ 1-i) \|$.

4. Sea el espacio vectorial de polinomios $P = \{ ax+b \mid a,\, b \in \mathbb{R} \}$ sobre el campo $\mathbb{R}$, y sea $T:\ P \to P$ un operador lineal definido por:

$$T(ax+b) = (2a-2b)\,x + (5b-2a);\quad \forall\ ax+b \in P$$

Considerando como producto interno:

$$(f \mid g) = f(0)\,g(0) + f'(0)\,g'(0)\ ; \qquad \forall\ f,\ g \in P$$

a) Determine si T es un operador hermitiano.

b) En caso de ser afirmativa la respuesta del inciso anterior, obtenga una matriz asociada a T referida a una base ortonormal de P y compruebe que dicha matriz es hermitiana.

c) Si T es un operador hermitiano, compruebe que sus valores característicos son reales.

d) Verifique que los vectores característicos de T resultan ser ortogonales.

5. Determine la relación que deben tener $a,\, b \in \mathbb{R}$ tal que el operador lineal

$$T(x,\, y) = (2x + ay,\ bx - y)\ ;\quad \forall\ (x,\, y) \in \mathbb{R}^2$$

sea un operador simétrico con el producto escalar ordinario.

6. Sea la transformación lineal $T:\ P \to P$ definida por:

$$T\left(ax^2 + bx + c\right) = -2bx^2 + (2a+c)\,x - b$$

donde $P = \left\{ ax^2 + bx + c \mid a,\, b,\, c \in \mathbb{R} \right\}$

Determine si T es un operador antihermitiano con el producto interno.

$$(p \mid q) = \frac{1}{4}\,p''(1)\,q''(1) + p'(0)\,q'(0) + p(0)\,q(0)\ ; \qquad \forall\ p,\ q \in P$$

7. En el espacio vectorial $\mathbb{C}^2$ sobre $\mathbb{C}$ se define el operador lineal $T: \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ de la siguiente manera:

$$T(a+bi,\ c+di) = (-b+ai,\ d-ci) \quad ; \qquad \forall\ (a+bi,\ c+di) \in \mathbb{C}^2$$

a) Determine si el operador T es hermitiano, antihermitiano y/o unitario, considerando como producto interno al producto escalar ordinario complejo.

b) En caso de ser posible, obtenga una matriz diagonal que represente al operador lineal T.

8. Determine si el operador lineal $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ cuya regla de correspondencia es:

$$T(x,y,z)=\left(\frac{2x}{\sqrt{14}} + \frac{y}{\sqrt{14}} + \frac{3z}{\sqrt{14}}\ ,\ \frac{x}{\sqrt{3}} + \frac{y}{\sqrt{3}} - \frac{z}{\sqrt{3}}\ ,\ -\frac{4x}{\sqrt{42}} + \frac{5y}{\sqrt{42}} + \frac{z}{\sqrt{42}} \right)$$

es un operador ortogonal, considerando como producto interno el producto escalar ordinario en $\mathbb{R}^3$.

9. Sea el espacio vectorial:

$$\mathbb{C} = \left\{ z \,\middle|\, z = a+bi \ ; \quad \forall\ a, b \in \mathbb{R} \ \text{ donde } \ i^2 = -1 \right\}$$

sobre $\mathbb{C}$ y el operador $T: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definido por:

$$T(z) = zi \quad ; \qquad \forall\ z \in \mathbb{C}$$

Determine si T es un operador unitario con el siguiente producto interno:

$$(u \mid v) = u\,\bar{v} \ ; \quad \forall\ u, v \in \mathbb{C}$$

donde $\bar{v}$ es el conjugado de v.

10. Para el operador hermitiano $T:\ \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ cuya regla de correspondencia es:

$$T(x,\ y) = \left(2x,\ -\frac{1}{3}x + y \right)$$

y el producto interno:

$$\left(\bar{x} \mid \bar{y} \right) = x_1 x_2 + x_1 y_2 + x_2 y_1 + 3 y_1 y_2\ ;\ \forall\ \bar{x} = \left(x_1,\ y_1 \right),\ \bar{y} = \left(x_2,\ y_2 \right) \in \mathbb{R}^2$$

a) Obtenga la descomposición espectral del operador T.

b) Verifique que se cumple la condición $\mathrm{P}_1 + \mathrm{P}_2 = \mathrm{I}$.

c) Compruebe que $\mathrm{P}_1 \circ \mathrm{P}_2 = 0$.

11. Para el operador simétrico $T:\ \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ cuya regla de correspondencia es:

$$T(x,\ y) = (2x - y,\ -x + 2y)$$

y el producto interno:

$$\left(\bar{x} \mid \bar{y} \right) = x_1 x_2 - x_1 y_2 - x_2 y_1 + 3 y_1 y_2\ ;\ \forall\ \bar{x} = \left(x_1,\ y_1 \right),\ \bar{y} = \left(x_2,\ y_2 \right) \in \mathbb{R}^2$$

obtenga la descomposición espectral del operador T.

12. Para la cónica cuya ecuación es:

$$x^2 + 2xy + y^2 - \frac{10}{\sqrt{2}}x + \frac{2}{\sqrt{2}}y + 14 = 0$$

a) Determine una matriz P correspondiente al giro que hace paralelos los ejes coordenados con los ejes de la cónica.

b) Obtenga la ecuación de la cónica, en un sistema de referencia $(x'',\ y'')$, que no contenga término mixto ni términos lineales.

c) Calcule el ángulo de giro.

d) Dibuje la cónica así como los distintos sistemas de referencia.

13. Dada la elipse de ecuación $3x^2 + 2y^2 = 5$, obtenga la ecuación de esta elipse referida a un sistema (x', y'), donde el eje x' forma un ángulo de $30°$, medidos en sentido antihorario, con respecto al eje x.

14. Para la cónica cuya ecuación es:

$$2x^2 + \sqrt{3}\, xy + y^2 = 4$$

a) Determine una matriz P correspondiente al giro que hace paralelos los ejes coordenados con los ejes de la cónica.

b) Obtenga la ecuación de la cónica, en un sistema de referencia (x', y'), que no contenga término mixto.

c) Dibuje la cónica así como los distintos sistemas de referencia.

RESPUESTAS A LOS EJERCICIOS PROPUESTOS

1. $T^*(w, z) = (2w + z, -w - 3z)$

2. $T^*\left(\begin{bmatrix} w & 0 \\ 0 & z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} w + z & 0 \\ 0 & -w + z \end{bmatrix}$

3. **a)** T es un operador normal.

b) $\| T^*(1 + i, 1 - i) \| = \sqrt{26}$

4. **a)** El operador T sí es hermitiano.

b) $M_B^B(T) = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$ es una matriz hermitiana donde $B = \{ x, 1 \}$

c) $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = 6$ valores característicos reales.

d) Sí son ortogonales.

5. $a = b$

6. T sí es un operador antihermitiano.

7. **a)** T no es hermitiano.

T no es antihermitiano.

T es unitario.

b) $D = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}$

8. T sí es un operador ortogonal.

9. T sí es un operador unitario.

10. **a)** $T(x, y) = 2\left(x, -\dfrac{x}{3}\right) + 1\left(0, \dfrac{x}{3} + y\right)$

b) Sí se cumple.

c) Sí se cumple.

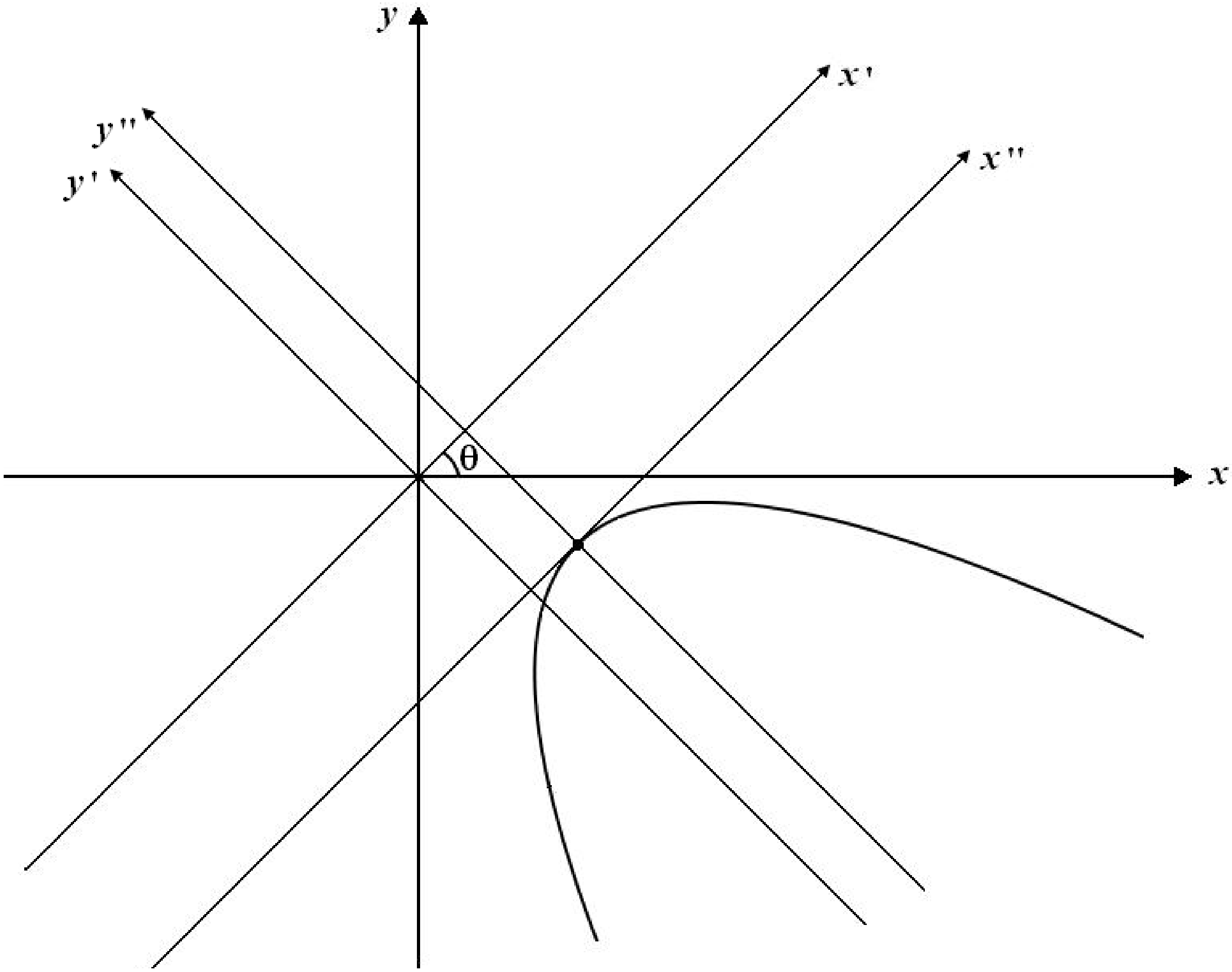
11. $T(x, y) = 1\left(\dfrac{x+y}{2}, \dfrac{x+y}{2}\right) + 3\left(\dfrac{x-y}{2}, \dfrac{-x+y}{2}\right)$

12. **a)** $P = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{2}} & -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ \dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$

b) $(x'')^2 = -3(y'')^2$

c) $\theta = 45^\circ$

d)



13. $11(x')^2 - 2\sqrt{3}\,x'y' + 9(y')^2 = 20$

14. a) $P = \begin{bmatrix} \dfrac{\sqrt{3}}{2} & -\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{2} & \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$

b) $5(x')^2 + (y')^2 = 8$ ó $\dfrac{(x')^2}{\frac{8}{5}} + \dfrac{(y')^2}{8} = 1$

c)