CAPÍTULO 3

ESPACIOS CON PRODUCTO INTERNO

Producto interno

Sea V un espacio vectorial sobre un campo de definición complejo. Un producto interno es una función de V x V en $\mathbb{C}$ que asocia a cada pareja de vectores $\bar{u}$ y $\bar{v}$ de V un escalar $\left(\bar{u}\,|\,\bar{v}\right) \in \mathbb{C}$, llamado el producto interno de $\bar{u}$ y $\bar{v}$, que satisface los siguientes axiomas:

1. $\left(\bar{u}\,|\,\bar{v}\right) = \overline{\left(\bar{v}\,|\,\bar{u}\right)}$

2. $\left(\bar{u}\,|\,\bar{v}+\bar{w}\right) = \left(\bar{u}\,|\,\bar{v}\right) + \left(\bar{u}\,|\,\bar{w}\right)$

3. $\left(\alpha\bar{u}\,|\,\bar{v}\right) = \alpha\left(\bar{u}\,|\,\bar{v}\right)$

4. $\left(\bar{u}\,|\,\bar{u}\right) > 0$ si $\bar{u} \neq \bar{0}$

Propiedades del producto interno

Sean $\bar{u}$, $\bar{v}$ y $\bar{w}$ vectores de un espacio V sobre $\mathbb{C}$ con producto interno y sea $\alpha \in \mathbb{C}$.

1. $\left(\bar{u}\,|\,\alpha\bar{v}\right) = \bar{\alpha}\left(\bar{u}\,|\,\bar{v}\right)$

2. $\left(\bar{u}\,|\,\bar{u}\right) \in \mathbb{R}$

3. $\left(\bar{0}\,|\,\bar{u}\right) = \left(\bar{u}\,|\,\bar{0}\right) = 0$

4. $\left(\bar{u}\,|\,\bar{u}\right) = 0$ si y sólo si $\bar{u} = \bar{0}$

5. $\left(\bar{u}\,|\,\bar{v}-\bar{w}\right) = \left(\bar{u}\,|\,\bar{v}\right) - \left(\bar{u}\,|\,\bar{w}\right)$

EJERCICIO 3.1 Sea F el espacio vectorial de las funciones continuas en el intervalo $\left[\,0,\,1\,\right]$. Determine si la función:

$$\left(\,f\mid g\,\right) = \int_0^1 e^t\; f\left(t\right)\,g\left(t\right)dt \quad ; \quad \forall\; f,\,g \in F$$

es un producto interno.

SOLUCIÓN:

Para determinar si la función dada es un producto interno, se deberá demostrar el cumplimiento de los cuatro axiomas de la definición.

1) $\left(\,f\mid g\,\right) = \left(\,g\mid f\,\right)$

Esto es:

$$\int_0^1 e^t\; f\left(t\right)\,g\left(t\right)dt = \int_0^1 e^t\,g\left(t\right)\,f\left(t\right)dt$$

como el producto de funciones es conmutativo, entonces se cumple la propiedad.

2) $\left(\,f\mid g+h\,\right) = \left(\,f\mid g\,\right) + \left(\,f\mid h\,\right)$

De donde:

$$\int_0^1 e^t\; f\left(t\right)\left[\,g\left(t\right)+h\left(t\right)\right]dt = \int_0^1 e^t\; f\left(t\right)\,g\left(t\right)dt + \int_0^1 e^t\; f\left(t\right)\,h\left(t\right)dt$$

$$\int_0^1 \left[\,e^t f\left(t\right)\,g\left(t\right)dt + e^t\,f\left(t\right)\,h\left(t\right)dt\right] = \int_0^1 e^t\; f\left(t\right)\,g\left(t\right)dt + \int_0^1 e^t\; f\left(t\right)\,h\left(t\right)dt$$

como la integral de una suma es igual a la suma de las integrales, se tiene:

$$\int_0^1 e^t\,f\left(t\right)\,g\left(t\right)dt + \int_0^1 e^t\,f\left(t\right)\,h\left(t\right)dt = \int_0^1 e^t\,f\left(t\right)\,g\left(t\right)dt + \int_0^1 e^t\,f\left(t\right)\,h\left(t\right)dt$$

$\therefore$ cumple.

3) $\left(\alpha f \mid g \right) = \alpha \left(f \mid g \right)$

Entonces

$$\int_0^1 e^t \left[\alpha f(t) \right] g(t) dt = \alpha \int_0^1 e^t f(t) g(t) dt$$

por propiedades de las integrales se tiene:

$$\alpha \int_0^1 e^t f(t) g(t) dt = \alpha \int_0^1 e^t f(t) g(t) dt$$

$\therefore$ cumple

4) $\left(f \mid f \right) > 0$ si $f \neq 0$ axioma conocido como positividad.

De donde se tiene que:

$$\int_0^1 e^t f(t) f(t) dt > 0$$

$$\int_0^1 e^t \left[f(t) \right]^2 dt > 0$$

Como e^t es una función positiva $\forall\ t \in \mathbb{R}$ y la función $\left[f(t) \right]^2$ también es positiva $\forall\ t \in \mathbb{R}$ por estar elevada al cuadrado, entonces la gráfica de la función $e^t \left[f(t) \right]^2$ se encuentra por arriba del eje de las abscisas y en consecuencia el área bajo la curva en el intervalo $\left[0 , 1 \right]$ siempre será positiva, por lo tanto se cumple el axioma de la positividad, con lo cual, podemos afirmar que la función:

$$\int_0^1 e^t f(t) g(t) dt$$

es un producto interno.

EJERCICIO 3.2 En el espacio vectorial

$$W = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ a+b & 2a \end{bmatrix} \middle| \, a,\, b \in \mathbb{R} \right\}$$

sobre $\mathbb{R}$ se define la función:

$$\left(\bar{u} \mid \bar{v} \right) = ac - 2ad - 2bc + 4bd \quad ; \quad \forall\ \bar{u} = \begin{bmatrix} a & b \\ a+b & 2a \end{bmatrix}, \quad \bar{v} = \begin{bmatrix} c & d \\ c+d & 2c \end{bmatrix} \in W$$

Considerando que se cumplen:

$$\left(\bar{u} \mid \bar{v} + \bar{w} \right) = \left(\bar{u} \mid \bar{v} \right) + \left(\bar{u} \mid \bar{w} \right) \quad ; \quad \forall\ \bar{u},\, \bar{v},\, \bar{w} \in W$$

$$\left(\alpha\, \bar{u} \mid \bar{v} \right) = \alpha \left(\bar{u} \mid \bar{v} \right) \quad ; \quad \forall\, \alpha \in \mathbb{R} \ \text{ y } \ \forall\ \bar{u},\, \bar{v} \in W$$

determine si $\left(\bar{u} \mid \bar{v} \right)$ es un producto interno en W.

SOLUCIÓN:

Dado que se da por hecho que se cumplen dos de los cuatro axiomas, entonces sólo resta comprobar el cumplimiento de los restantes (simetría y positividad).

Simetría:

$$\left(\bar{u} \mid \bar{v} \right) = \overline{\left(\bar{v} \mid \bar{u} \right)}$$

Dado que el campo de definición son los reales, entonces el conjugado no tiene ningún efecto, por lo que la propiedad a demostrar es:

$$\left(\bar{u} \mid \bar{v} \right) = \left(\bar{v} \mid \bar{u} \right) \quad ; \quad \forall\ \bar{u} = \begin{bmatrix} a & b \\ a+b & 2a \end{bmatrix}, \ \bar{v} = \begin{bmatrix} c & d \\ c+d & 2c \end{bmatrix} \in W$$

esto es:

$$\left(\begin{bmatrix} a & b \\ a+b & 2a \end{bmatrix} \middle| \begin{bmatrix} c & d \\ c+d & 2c \end{bmatrix} \right) = \left(\begin{bmatrix} c & d \\ c+d & 2c \end{bmatrix} \middle| \begin{bmatrix} a & b \\ a+b & 2a \end{bmatrix} \right)$$

$$ac - 2ad - 2bc + 4bd = ca - 2cb - 2da + 4db$$

dada la conmutatividad del producto de reales, tenemos:

$$ac - 2ad - 2bc + 4bd = ac - 2ad - 2bc + 4bd$$

$\therefore$ cumple

Positividad:

$$\left(\bar{u} \mid \bar{u} \right) > 0 \quad \text{si} \quad \bar{u} \neq \bar{0}$$

esto es:

$$\left(\begin{bmatrix} a & b \\ a+b & 2a \end{bmatrix} \middle| \begin{bmatrix} a & b \\ a+b & 2a \end{bmatrix} \right) > 0$$

de donde se tiene:

$$a^2 - 2ab - 2ab + 4b^2 > 0$$

$$a^2 - 4ab + 4b^2 > 0$$

$$\left(a - 2b \right)^2 > 0$$

cuando $a = 2b$ entonces $a - 2b = 0$, por lo que podemos concluir que este axioma no se cumple, por lo tanto:

$$\left(\bar{u} \mid \bar{v} \right) = ac - 2ad - 2bc + 4bd$$

no es un producto interno.

Norma de un vector

Sea V un espacio vectorial sobre un campo de definición complejo, en el cual se define un producto interno. La norma del vector $\bar{v} \in V$, denotada por $\| \bar{v} \|$, se define como:

$$\| \bar{v} \| = \left(\bar{v} \mid \bar{v} \right)^{\frac{1}{2}}$$

Propiedades de la norma

Sea V un espacio vectorial con producto interno.
$\forall\ \bar{u},\ \bar{v} \in V$ y $\forall\ \alpha \in \mathbb{C}$, se tiene que:

1. $\| \bar{v} \| \geq 0$ y $\| \bar{v} \| = 0$ si y sólo si $\bar{v} = \bar{0}$

2. $\| \alpha \bar{v} \| = |\alpha|\ \| \bar{v} \|$

3. $\| \bar{u} + \bar{v} \| \leq \| \bar{u} \| + \| \bar{v} \|$

Vectores unitarios

Si $\| \bar{v} \| = 1$, entonces al vector $\bar{v}$ se le llama vector unitario. Si $\bar{v}$ es un vector diferente de cero, entonces el vector unitario se obtiene como:

$$\left(\frac{1}{\| \bar{v} \|} \right) \bar{v}$$

Desigualdad de Cauchy - Schwarz

Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$, en el cual se define un producto interno. $\forall\ \bar{u},\ \bar{v} \in V$

$$\left| \left(\bar{u} \mid \bar{v} \right) \right|^2 \leq \left(\bar{u} \mid \bar{u} \right) \left(\bar{v} \mid \bar{v} \right)$$

Donde $\left| \left(\bar{u} \mid \bar{v} \right) \right|$ es el módulo de $\left(\bar{u} \mid \bar{v} \right)$.

La igualdad se cumple, si y sólo si, $\bar{u}$ y $\bar{v}$ son vectores linealmente dependientes.

Distancia entre vectores

Sean $\bar{u}$ y $\bar{v}$ dos vectores de un espacio V con producto interno. Se define como distancia de $\bar{u}$ a $\bar{v}$, y se denota con $d(\bar{u}, \bar{v})$ al número definido por:

$$d(\bar{u}, \bar{v}) = \| \bar{v} - \bar{u} \|$$

Propiedades de la distancia entre vectores

Sea V un espacio con producto interno. La distancia entre vectores tiene las siguientes propiedades:

1. $d(\bar{u}, \bar{v}) \geq 0$

2. $d(\bar{u}, \bar{v}) = 0$ si y sólo si $\bar{u} = \bar{v}$

3. $d(\bar{u}, \bar{v}) = d(\bar{v}, \bar{u})$

4. $d(\bar{u}, \bar{w}) \leq d(\bar{u}, \bar{v}) + d(\bar{v}, \bar{w})$

Ángulo entre vectores

Sean $\bar{u}$ y $\bar{v}$ dos vectores no nulos de un espacio vectorial V sobre $\mathbb{R}$ con producto interno. El ángulo entre los vectores $\bar{u}$ y $\bar{v}$ está dado por la expresión:

$$\cos\theta = \frac{(\bar{u} \mid \bar{v})}{\|\bar{u}\| \, \|\bar{v}\|} \qquad \text{donde} \qquad 0 \leq \theta \leq \pi$$

Si el campo de definición de V es $\mathbb{C}$, entonces el ángulo entre $\bar{u}$ y $\bar{v}$ está dado por:

$$\cos\theta = \frac{R(\bar{u} \mid \bar{v})}{\|\bar{u}\| \, \|\bar{v}\|}$$

donde $R(\bar{u} \mid \bar{v})$ representa la parte real de $(\bar{u} \mid \bar{v})$.

Vectores ortogonales

Sea V un espacio vectorial con producto interno. Dos vectores $\bar{u}, \bar{v} \in V$ son ortogonales si:

$$\left(\bar{u} \mid \bar{v} \right) = 0$$

EJERCICIO 3.3 Sea el espacio vectorial

$$P_2 = \left\{ a x^2 + b x + c \mid a,\ b,\ c \in \mathbb{R} \right\}$$

donde se define el producto interno:

$$\left(f \mid g \right) = f(1)\ g(1) + f(0)\ g(0) \quad ; \quad \forall\ f, g \in P_2$$

a) Calcule la distancia y el ángulo entre los polinomios $p(x) = x^2 - 1$ y $q(x) = -2x + 1$.

b) Si $f(x) = 2x + 1$, determine un polinomio distinto del polinomio nulo, que sea ortogonal a $f(x)$.

SOLUCIÓN:

a) Sabemos que la distancia viene dada por:

$$d\left(p,\ q \right) = \| q - p \|$$

se tiene que:

$$q(x) - p(x) = -x^2 - 2x + 2$$

Si $\quad h(x) = q(x) - p(x) = -x^2 - 2x + 2$

entonces

$$\| h(x) \| = \left(h(x) \mid h(x) \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left[h(1)\, h(1) + h(0)\, h(0) \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left[(-1)(-1) + (2)(2) \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$= (1+4)^{\frac{1}{2}}$$

$$\| h(x) \| = \sqrt{5}$$

por lo que la distancia entre los polinomios $p(x)$ y $q(x)$ es:

$$d(p,\ q) = \sqrt{5}\ u$$

Calculando el ángulo entre los polinomios $p(x)$ y $q(x)$, tenemos:

$$\| p(x) \| = \left(p(x) \mid p(x) \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left[p(1)\, p(1) + p(0)\, p(0) \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left[(0)(0) + (-1)(-1) \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$= \sqrt{1} = 1$$

$$\therefore \quad \| \, p(x) \, \| = 1$$

$$\| \, q(x) \, \| = \left(q(x) \mid q(x) \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left[q(1)\, q(1) + q(0)\, q(0) \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left[(-1)(-1) + (1)(1) \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$= \sqrt{2}$$

$$\therefore \quad \| \, q(x) \, \| = \sqrt{2}$$

además, se tiene que:

$$\left(p(x) \mid q(x) \right) = p(1)\, q(1) + p(0)\, q(0)$$

$$= (0)(-1) + (-1)(1)$$

$$\left(p(x) \mid q(x) \right) = -1$$

Como el ángulo entre los polinomios viene dado por:

$$\cos\theta = \frac{\left(p(x) \mid q(x) \right)}{\| \, p(x) \| \; \| q(x) \|}$$

entonces

$$\cos\theta = \frac{-1}{(1)\left(\sqrt{2}\right)}$$

$$\theta = \cos^{-1}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\therefore \quad \theta = 135^\circ$$

b) Se pide determinar un polinomio $g(x) \neq 0$ que sea ortogonal a $f(x)$.

Si hacemos:

$$g(x) = ax^2 + bx + c \qquad \ldots\ldots(1)$$

entonces se debe cumplir que:

$$\left(f(x) \mid g(x) \right) = 0$$

esto es:

$$f(1)\,g(1) + f(0)\,g(0) = 0$$

$$(3)(a+b+c) + (1)(c) = 0$$

$$3a + 3b + 3c + c = 0$$

$$3a + 3b + 4c = 0$$

de donde:

$$4c = -3a - 3b$$

$$\Rightarrow \quad c = -\frac{3}{4}a - \frac{3}{4}b$$

sustituyendo c en (1) tenemos $g(x) = ax^2 + bx + \left(-\frac{3}{4}a - \frac{3}{4}b\right)$

si hacemos que: $a = 0$ y $b = 4$, entonces $g(x) = 4x - 3$

este polinomio $g(x)$ resulta ser ortogonal a $f(x)$.

Evidentemente la solución no es única.

EJERCICIO 3.4 Sea F el espacio de funciones reales de variable real, donde se define el producto interno:

$$(f \mid g) = \int_0^1 f(t)\, g(t)\, dt \quad ; \quad \forall \;\; f, \; g \in F$$

Para las funciones $f(t) = t+1$ y $g(t) = t^2$:

a) Obtenga un vector unitario a partir de la función f ,

b) determine si f y g son ortogonales, y

c) verifique la desigualdad de Cauchy – Schwarz.

SOLUCIÓN:

a) Calculando la norma de la función f , tenemos:

$$(f \mid f) = \int_0^1 f(t)\; f(t)\, dt = \int_0^1 (t+1)(t+1)\, dt = \int_0^1 (t+1)^2 \; dt$$

$$= \left[\frac{(t+1)^3}{3} \right]_0^1 = \frac{(2)^3}{3} - \frac{1}{3} = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$$

entonces:

$$\| f \| = \sqrt{\frac{7}{3}}$$

por lo que el vector unitario pedido será:

$$\frac{f(t)}{\| f(t) \|} = \frac{t+1}{\sqrt{\frac{7}{3}}} = \sqrt{\frac{3}{7}}\; t + \sqrt{\frac{3}{7}}$$

b) Si f y g son ortogonales, entonces se debe cumplir que:

$$\left(f \mid g \right) = 0$$

entonces

$$\left(f \mid g \right) = \int_0^1 (t+1)\left(t^2\right) dt = \int_0^1 \left(t^3 + t^2\right) dt = \left[\frac{t^4}{4} + \frac{t^3}{3} \right]_0^1$$

$$= \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{3} \right) - 0 = \frac{7}{12}$$

como $\left(f \mid g \right) \neq 0$, entonces f y g no son ortogonales.

c) La desigualdad de Cauchy – Schwarz establece que:

$$\left| \left(f \mid g \right) \right|^2 \leq \left(f \mid f \right) \left(g \mid g \right)$$

como en los incisos anteriores ya se obtuvo $\left(f \mid g \right)$ y $\left(f \mid f \right)$, entonces sólo falta calcular $\left(g \mid g \right)$.

$$\left(g \mid g \right) = \int_0^1 \left(t^2\right)\left(t^2\right) dt = \int_0^1 t^4 \, dt = \left[\frac{t^5}{5} \right]_0^1 = \frac{1}{5}$$

sustituyendo en la desigualdad, tenemos:

$$\left| \frac{7}{12} \right|^2 \leq \left(\frac{7}{3} \right) \left(\frac{1}{5} \right)$$

$$\frac{49}{144} < \frac{7}{15} \qquad \therefore \quad \text{se verifica la desigualdad de Cauchy – Schwarz.}$$

Conjuntos ortogonales y ortonormales

Sea V un espacio vectorial con producto interno y sea $A = \{ \bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_n \}$ un subconjunto de V. Se dice que A es un conjunto ortogonal cuando:

$$\left(\bar{v}_i \mid \bar{v}_j \right) = 0 \quad ; \quad \forall \; i \neq j$$

Si cada vector del conjunto A tiene norma igual a uno, entonces al conjunto A se le llama conjunto ortonormal.

Es importante destacar que todo conjunto de vectores ortogonales no nulos, es linealmente independiente.

Coordenadas de un vector con respecto a una base ortogonal y respecto a una base ortonormal

Sea V un espacio vectorial con producto interno y sea $B = \{ \bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_n \}$ una base ortogonal de V.

Si $\bar{a} \in V$ y se tiene que:

$$\bar{a} = \alpha_1 \bar{v}_1 + \alpha_2 \bar{v}_2 + \ldots + \alpha_n \bar{v}_n$$

entonces los escalares α_i vienen dados por la expresión:

$$\alpha_i = \frac{\left(\bar{a} \mid \bar{v}_i \right)}{\left(\bar{v}_i \mid \bar{v}_i \right)}$$

Si los vectores de la base B fueran vectores unitarios, es decir, si B fuese una base ortonormal, entonces las coordenadas del vector $\bar{a}$ respecto a la base B vendrían dadas por:

$$\alpha_i = \left(\bar{a} \mid \bar{v}_i \right)$$

ya que $\left(\bar{v}_i \mid \bar{v}_i \right) = 1$

Proceso de ortogonalización de Gram - Schmidt

Sea V un espacio con producto interno y sea $B = \{ \bar{b}_1, \bar{b}_2, \dots, \bar{b}_n \}$ una base cualquiera de V.

Si $B_{\text{ort}} = \{ \bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_n \}$ es una base ortogonal del espacio V, entonces sus elementos vienen dados por:

$$\bar{v}_1 = \bar{b}_1$$

$$\bar{v}_2 = \bar{b}_2 - \frac{(\bar{b}_2 \mid \bar{v}_1)}{(\bar{v}_1 \mid \bar{v}_1)} \bar{v}_1$$

•

•

•

$$\bar{v}_i = \bar{b}_i - \sum_{k=1}^{i-1} \frac{(\bar{b}_i \mid \bar{v}_k)}{(\bar{v}_k \mid \bar{v}_k)} \bar{v}_k$$

para $i = 1, 2, \dots, n$

EJERCICIO 3.5 En el espacio vectorial $\mathbb{R}^2$ se tiene el producto interno:

$$(\bar{x} \mid \bar{y}) = x_1 y_1 + 3 x_2 y_2 \quad ; \quad \forall (x_1, x_2), (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$$

y la base $A = \left\{ \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right), \left(1, \frac{1}{3} \right) \right\}$ de $\mathbb{R}^2$.

a) Determine si la base A es ortonormal.

b) En caso de resultar negativo el inciso anterior, obtenga una base ortonormal a partir de A.

c) Obtenga las coordenadas del vector $\bar{u} = (3, -1)$ en la base ortonormal propuesta.

SOLUCIÓN:

a) Determinemos primero si la base A es ortogonal:

$$\left(\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right) \middle| \left(1, \frac{1}{3} \right) \right) = \frac{1}{2} - 3\left(\frac{1}{6} \right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$$

$\therefore$ A es una base ortogonal

Calculando la norma de los vectores de A para determinar si es una base ortonormal, tenemos:

$$\left\| \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right) \right\| = \left(\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right) \middle| \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right) \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left(\frac{1}{4} + \frac{3}{4} \right)^{\frac{1}{2}} = (1)^{\frac{1}{2}} = 1$$

el primer vector de A es unitario.

$$\left\| \left(1, \frac{1}{3} \right) \right\| = \left(\left(1, \frac{1}{3} \right) \middle| \left(1, \frac{1}{3} \right) \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left(1 + 3\left(\frac{1}{9} \right) \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{4}{3} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\left\| \left(1, \frac{1}{3} \right) \right\| = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

como el segundo vector de A no es unitario, entonces A no es una base ortonormal.

b) Una base ortonormal sería:

$$B = \left\{ \left(\frac{1}{2}, \ -\frac{1}{2} \right), \ \frac{\sqrt{3}}{2} \left(1, \ \frac{1}{3} \right) \right\}$$

esto es:

$$B = \left\{ \left(\frac{1}{2}, \ -\frac{1}{2} \right), \ \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \ \frac{\sqrt{3}}{6} \right) \right\}$$

c) Las coordenadas del vector $\bar{u} = (3, \ -1)$ serán:

$$\alpha = \left((3, \ -1) \middle| \left(\frac{1}{2}, \ -\frac{1}{2} \right) \right) = \frac{3}{2} + 3 \left(\frac{1}{2} \right) = 3$$

$$\beta = \left((3, \ -1) \middle| \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \ \frac{\sqrt{3}}{6} \right) \right) = \frac{3\sqrt{3}}{2} - 3 \left(\frac{\sqrt{3}}{6} \right) = \sqrt{3}$$

con lo cual, el vector de coordenadas de $\bar{u}$ referido a la base B, es:

$$(\bar{u})_B = \left(3, \ \sqrt{3} \right)$$

EJERCICIO 3.6 En el espacio vectorial

$$M = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \middle| \ a, \ b \in \mathbb{R} \right\}$$

se define el producto interno:

$$\left(A \middle| B \right) = tr \ (AB) \quad ; \quad \forall \ A, \ B \in M$$

Obtenga, mediante el método de Gram – Schmidt, una base ortonormal de M a partir del conjunto:

$$G = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

SOLUCIÓN:

Como puede apreciarse fácilmente, el espacio vectorial M es de dimensión dos, por lo que, cualquiera de sus bases deberá contener únicamente dos vectores. Como el conjunto G contiene tres elementos, entonces podemos asegurar que G es un conjunto linealmente dependiente y por lo tanto no es una base de M.

En el enunciado del ejercicio nos piden obtener una base ortonormal de M a partir del conjunto G, entonces apliquemos el método de Gram–Schmidt directamente al conjunto G y veamos lo que sucede.

Si consideramos que:

$$G = \{ \bar{b}_1, \bar{b}_2, \bar{b}_3 \}$$

entonces, aplicando el método de Gram – Schmidt, tenemos:

$$\bar{v}_1 = \bar{b}_1$$

esto es:

$$\bar{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

además:

$$\bar{v}_2 = \bar{b}_2 - \frac{(\bar{b}_2 \mid \bar{v}_1)}{(\bar{v}_1 \mid \bar{v}_1)} \bar{v}_1 \qquad \ldots\ldots (1)$$

desarrollando tenemos:

$$\left(\bar{b}_2 \mid \bar{v}_1 \right) = \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \middle| \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \right) = tr\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \right)$$

$$\Rightarrow \left(\bar{b}_2 \mid \bar{v}_1 \right) = -1$$

$$\left(\bar{v}_1 \mid \bar{v}_1 \right) = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \middle| \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \right) = tr\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right)$$

$$\Rightarrow \left(\bar{v}_1 \mid \bar{v}_1 \right) = 2$$

sustituyendo en (1) tenemos:

$$\bar{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \frac{-1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\bar{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \quad \bar{v}_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

De acuerdo con el método de Gram – Schmidt, tenemos que:

$$\bar{v}_3 = \bar{b}_3 - \frac{\left(\bar{b}_3 \mid \bar{v}_1 \right)}{\left(\bar{v}_1 \mid \bar{v}_1 \right)} \bar{v}_1 - \frac{\left(\bar{b}_3 \mid \bar{v}_2 \right)}{\left(\bar{v}_2 \mid \bar{v}_2 \right)} \bar{v}_2 \qquad \ldots\ldots(2)$$

desarrollando tenemos:

$$\left(\bar{b}_3 \,\middle|\, \bar{v}_1 \right) = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \middle| \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \right) = tr\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \right)$$

$$\Rightarrow \left(\bar{b}_3 \,\middle|\, \bar{v}_1 \right) = 0$$

$$\left(\bar{b}_3 \,\middle|\, \bar{v}_2 \right) = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \middle| \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \right) = tr\left(\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \right)$$

$$\Rightarrow \left(\bar{b}_3 \,\middle|\, \bar{v}_2 \right) = 1$$

$$\left(\bar{v}_2 \,\middle|\, \bar{v}_2 \right) = \left(\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \middle| \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \right) = tr\left(\begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \right)$$

$$\Rightarrow \left(\bar{v}_2 \,\middle|\, \bar{v}_2 \right) = \frac{1}{2}$$

sustituyendo en (2) tenemos:

$$\bar{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \frac{0}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} - \frac{1}{\frac{1}{2}} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$\bar{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \quad \bar{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Como era de esperarse, la base ortogonal B estará formada únicamente por los vectores $\bar{v}_1$ y $\bar{v}_2$, esto es:

$$B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \right\} \qquad \text{base ortogonal}$$

Calculando la norma de cada vector tenemos:

$$\| \bar{v}_1 \| = \left(\bar{v}_1 \,\middle|\, \bar{v}_1 \right)^{\frac{1}{2}}$$

como $\left(\bar{v}_1 \,\middle|\, \bar{v}_1 \right) = 2$, entonces:

$$\| \bar{v}_1 \| = \sqrt{2}$$

Por otro lado:

$$\| \bar{v}_2 \| = \left(\bar{v}_2 \,\middle|\, \bar{v}_2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

Como $\left(\bar{v}_2 \,\middle|\, \bar{v}_2 \right) = \frac{1}{2}$, entonces:

$$\| \bar{v}_2 \| = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

con lo cual, la base ortonormal B' será:

$$B' = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \sqrt{2} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \right\}$$

o también:

$$B' = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

EJERCICIO 3.7 Sea el espacio vectorial

$$P_2 = \left\{ \, a x^2 + b x + c \,\middle|\, a,\ b,\ c \in \mathbb{R} \, \right\}$$

en el cual se define el producto interno:

$$\left(f \mid g \right) = \int_{-1}^{1} f\left(t \right)\, g\left(t \right) d t \qquad ; \quad \forall \quad f,\ g \in P_2$$

A partir de la base $B = \left\{ 1,\ x,\ x^2 \right\}$, empleando el método de Gram–Schmidt, obtenga una base ortonormal del espacio P_2.

SOLUCIÓN:

Sabemos que:

$$\bar{v}_1 = \bar{b}_1$$

esto es:

$$\bar{v}_1 = 1$$

$$\bar{v}_2 = \bar{b}_2 - \frac{\left(\bar{b}_2 \mid \bar{v}_1 \right)}{\left(\bar{v}_1 \mid \bar{v}_1 \right)}\, \bar{v}_1 \qquad \ldots\ldots (1)$$

desarrollando por partes:

$$\left(\bar{b}_2 \mid \bar{v}_1 \right) = \int_{-1}^{1} 1\left(x \right) d x = \int_{-1}^{1} x\, d x = \left[\frac{x^2}{2} \right]_{-1}^{1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$$

al sustituir este resultado en (1) tenemos que:

$$\bar{v}_2 = x$$

Se tiene que:

$$\bar{v}_3 = \bar{b}_3 - \frac{\left(\bar{b}_3 \mid \bar{v}_1 \right)}{\left(\bar{v}_1 \mid \bar{v}_1 \right)}\, \bar{v}_1 - \frac{\left(\bar{b}_3 \mid \bar{v}_2 \right)}{\left(\bar{v}_2 \mid \bar{v}_2 \right)}\, \bar{v}_2 \qquad \ldots\ldots (2)$$

desarrollando tenemos:

$$\left(\bar{b}_3 \,\middle|\, \bar{v}_1 \right) = \int_{-1}^{1} \left(x^2 \right)(1)\, dx = \int_{-1}^{1} x^2\, dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_{-1}^{1} = \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3} \right) = \frac{2}{3}$$

$$\left(\bar{b}_3 \,\middle|\, \bar{v}_2 \right) = \int_{-1}^{1} \left(x^2 \right)(x)\, dx = \int_{-1}^{1} x^3\, dx = \left[\frac{x^4}{4} \right]_{-1}^{1} = \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4} \right) = 0$$

$$\left(\bar{v}_1 \,\middle|\, \bar{v}_1 \right) = \int_{-1}^{1} (1)(1)\, dx = \int_{-1}^{1} dx = \left[x \right]_{-1}^{1} = (1 + 1) = 2$$

sustituyendo en (2) se tiene que:

$$\bar{v}_3 = x^2 - \frac{\frac{2}{3}}{2}(1)$$

$$\bar{v}_3 = x^2 - \frac{1}{3}$$

por lo que la base ortogonal es:

$$B_{\text{ort}} = \left\{ 1,\ \ x,\ \ x^2 - \frac{1}{3} \right\}$$

Obteniendo la norma de cada uno de los vectores de la base ortogonal, tenemos:

$$\| \bar{v}_1 \| = \left(\bar{v}_1 \,\middle|\, \bar{v}_1 \right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$$

$$\| \bar{v}_2 \| = \left(\bar{v}_2 \,\middle|\, \bar{v}_2 \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\int_{-1}^{1} x\,(x)\, dx \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\int_{-1}^{1} x^2\, dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left(\left[\frac{x^3}{3} \right]_{-1}^{1} \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3} \right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$\| \bar{v}_3 \| = \left(\bar{v}_3 \,\middle|\, \bar{v}_3 \right)^{\frac{1}{2}}$$

se tiene que:

$$\left(\bar{v}_3 \,\middle|\, \bar{v}_3 \right) = \int_{-1}^{1} \left(x^2 - \frac{1}{3} \right)\left(x^2 - \frac{1}{3} \right) dx = \int_{-1}^{1} \left(x^4 - \frac{2}{3} x^2 + \frac{1}{9} \right) dx$$

$$= \left[\frac{x^5}{5} - \frac{2}{9} x^3 + \frac{1}{9} x \right]_{-1}^{1} = \left[\left(\frac{1}{5} - \frac{2}{9} + \frac{1}{9} \right) - \left(-\frac{1}{5} + \frac{2}{9} - \frac{1}{9} \right) \right]$$

$$= \frac{4}{45} - \left(-\frac{4}{45} \right) = \frac{8}{45}$$

entonces:

$$\left\| \bar{v}_3 \right\| = \sqrt{\frac{8}{45}} = \frac{\sqrt{8}}{3\sqrt{5}}$$

al dividir cada vector entre su norma, se tiene que la base ortonormal pedida es:

$$B_{\text{ortonormal}} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \,,\; \frac{x}{\sqrt{\frac{2}{3}}} \,,\; \frac{x^2 - \frac{1}{3}}{\frac{\sqrt{8}}{3\sqrt{5}}} \right\}$$

simplificando se tiene:

$$B_{\text{ortonormal}} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \,,\; \sqrt{\frac{3}{2}}\, x \,,\; \sqrt{\frac{5}{8}} \left(3x^2 - 1 \right) \right\}$$

Complemento ortogonal

Sea V un espacio con producto interno y sea W un subespacio de V.
Se dice que un vector $\bar{v} \in V$ es ortogonal a W si se cumple que:

$$\left(\bar{v} \,\middle|\, \bar{u} \right) = 0 \quad ; \qquad \forall\ \bar{u} \in W$$

Al conjunto de todos los vectores de V ortogonales a W se le llama Complemento ortogonal de W y se denota con $W^{\perp}$, esto es:

$$W^{\perp} = \left\{ \bar{v} \in V \,\middle|\, \left(\bar{v} \,|\, \bar{u} \right) = 0 \;;\; \forall\, \bar{u} \in W \right\}$$

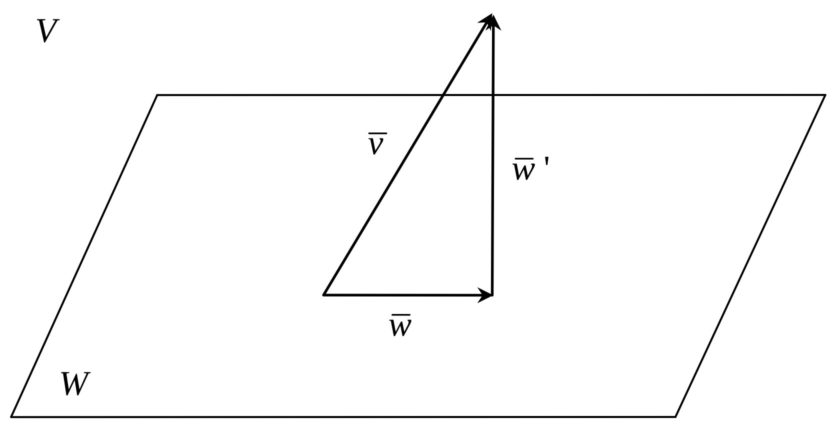
Proyección de un vector sobre un subespacio

Sea V un espacio vectorial con producto interno y sea W un subespacio de V.

Cualquier vector $\bar{v} \in V$ puede expresarse en forma única como la suma de dos vectores, uno de W y el otro de $W^{\perp}$, esto es:

$$\bar{v} = \bar{w} + \bar{w}' \quad \text{donde} \quad \bar{w} \in W \quad \text{y} \quad \bar{w}' \in W^{\perp}$$

gráficamente:



La proyección de $\bar{v} \in V$ sobre el subespacio W viene dada por la expresión:

$$\bar{w} = \sum_{i=1}^{n} \left(\bar{v} \mid \bar{e}_i \right) \bar{e}_i$$

donde el conjunto $\left\{ \bar{e}_1 , \bar{e}_2 , \ldots , \bar{e}_n \right\}$ es una base ortonormal de W.

Teorema de proyección

Sea V un espacio con producto interno y sea W un subespacio de V. La proyección de un vector $\bar{v} \in V$ sobre W es más próxima a $\bar{v}$ que cualquier otro vector de W. Esto es, si $\bar{w}$ es la proyección de $\bar{v}$ sobre W, entonces:

$$\| \bar{v} - \bar{w} \| \leq \| \bar{v} - \bar{t} \| \quad ; \quad \forall \; \bar{t} \in W$$

El signo de igualdad se cumple, si y sólo si, $\bar{t} = \bar{w}$.

EJERCICIO 3.8 Sea el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ con producto interno definido por:

$$\left(\bar{x} \mid \bar{y} \right) = x_1 y_1 + 2 x_2 y_2 + x_3 y_3 \; ; \quad \forall \; \bar{x} = \left(x_1, x_2, x_3 \right), \; \bar{y} = \left(y_1, y_2, y_3 \right) \in \mathbb{R}^3$$

y sea $W = \left\{ \left(x, \; y, \; z \right) \mid \; x + 2y - z = 0 \; \text{ con } \; x, \; y, z \in \mathbb{R} \right\}$ un subespacio de $\mathbb{R}^3$. Determine el complemento ortogonal de W.

SOLUCIÓN:

Si se despeja z de la ecuación del plano, entonces el subespacio W puede ser expresado de la siguiente forma:

$$W = \left\{ \left(x, \; y, \; x + 2y \right) \mid \; x, \; y \in \mathbb{R} \right\}$$

Una base de W es:

$$B = \left\{ \left(1, 0, 1 \right), \; \left(0, 1, 2 \right) \right\}$$

Si consideramos un vector cualquiera $\bar{u} = \left(a, \; b, \; c \right)$ que pertenezca al complemento ortogonal de W, entonces se debe cumplir que:

$$\left(\left(a, b, c \right) \middle| \left(1, \; 0, \; 1 \right) \right) = 0 \qquad \text{y} \qquad \left(\left(a, b, c \right) \middle| \left(0, \; 1, \; 2 \right) \right) = 0$$

Desarrollando ambos productos internos se tiene que:

$$a + c = 0 \qquad \dots (1) \qquad \text{y}$$

$$2b + 2c = 0 \ , \ \text{de donde}$$

$$b + c = 0 \qquad \dots (2)$$

De (1) y (2) se llega a:

$$a = -c \qquad \text{y} \qquad b = -c$$

Por lo tanto, al sustituir en el vector $\bar{u} \in W^{\perp}$, se obtiene que:

$$W^{\perp} = \left\{ (-c, -c, c) \middle| \ c \in \mathbb{R} \right\}$$

Para comprobar que se llegó al resultado correcto, se tomará un vector cualquiera de W y otro de $W^{\perp}$ para comprobar que dichos vectores son ortogonales.

Sean $\bar{v} = (1, 1, 3) \in W$ y $\bar{u} = (-3, -3, 3) \in W^{\perp}$. Con el producto interno definido, se tiene que:

$$\left(\bar{v} \mid \bar{u} \right) = \left((1, 1, 3) \mid (-3, -3, 3) \right) = -3 - 6 + 9 = 0$$

por lo tanto, $\bar{v}$ y $\bar{u}$ resultan ser ortogonales.

EJERCICIO 3.9 Mediante el teorema de proyección, expresar al vector $\bar{v} = (-1, 2, 6, 0)$ en la forma $\bar{v} = \bar{w}_1 + \bar{w}_2$, donde $\bar{w}_1$ pertenece al subespacio W generado por los vectores $\bar{u}_1 = (-1, 0, 1, 0)$ y $\bar{u}_2 = (0, 1, 0, 1)$ y $\bar{w}_2$ es ortogonal a W. Considere como producto interno el producto escalar ordinario en $\mathbb{R}^4$.

SOLUCIÓN:

Una base del subespacio W es el conjunto:

$$B = \left\{ (-1, 0, 1, 0), (0, 1, 0, 1) \right\} = \left\{ \bar{b}_1, \bar{b}_2 \right\}$$

Si efectuamos:

$$\left(\bar{b}_1 \,\middle|\, \bar{b}_2 \right) = \left((-1,\ 0,\ 1,\ 0) \,\middle|\, (0,\ 1,\ 0,\ 1) \right) = 0$$

con lo cual podemos afirmar que B es una base ortogonal de W.

Calculando las normas de los vectores de B, tenemos:

$$\| \bar{b}_1 \| = \left(\bar{b}_1 \,\middle|\, \bar{b}_1 \right)^{\frac{1}{2}} = \left((-1,\ 0,\ 1,\ 0) \,\middle|\, (-1,\ 0,\ 1,\ 0) \right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$$

$$\| \bar{b}_2 \| = \left(\bar{b}_2 \,\middle|\, \bar{b}_2 \right)^{\frac{1}{2}} = \left((0,\ 1,\ 0,\ 1) \,\middle|\, (0,\ 1,\ 0,\ 1) \right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$$

Dividiendo cada vector entre su respectiva norma, tenemos que una base ortonormal de W es:

$$B_{\text{ortonormal}} = \left\{ \left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\ 0,\ \frac{1}{\sqrt{2}},\ 0 \right),\ \left(0,\ \frac{1}{\sqrt{2}},\ 0,\ \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \right\}$$

Se tiene que la proyección de $\bar{v}$ sobre W, es decir, el vector $\bar{w}_1$, se obtiene a partir de la expresión:

$$\bar{w}_1 = \sum_{i=1}^{2} \left(\bar{v} \,\middle|\, \bar{e}_i \right) \bar{e}_i$$

desarrollando:

$$\bar{w}_1 = \left(\bar{v} \,\middle|\, \bar{e}_1 \right) \bar{e}_1 + \left(\bar{v} \,\middle|\, \bar{e}_2 \right) \bar{e}_2 \qquad \ldots\ldots (1)$$

donde los vectores $\bar{e}_1$ y $\bar{e}_2$ son los vectores de la base ortonormal de W, esto es:

$$\bar{e}_1 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\ 0,\ \frac{1}{\sqrt{2}},\ 0 \right)$$

$$\bar{e}_2 = \left(0,\ \frac{1}{\sqrt{2}},\ 0,\ \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

sustituyendo $\bar{v}$, $\bar{e}_1$ y $\bar{e}_2$ en (1) , tenemos:

$$\bar{w}_1 = \left((-1,\ 2,\ 6,\ 0) \left| \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\ ,\ 0\ ,\ \frac{1}{\sqrt{2}}\ ,\ 0 \right) \right. \right) \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\ ,\ 0\ ,\ \frac{1}{\sqrt{2}}\ ,\ 0 \right) +$$

$$\left((-1,\ 2,\ 6,\ 0) \left| \left(0\ ,\ \frac{1}{\sqrt{2}}\ ,\ 0\ ,\ \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \right. \right) \left(0\ ,\ \frac{1}{\sqrt{2}}\ ,\ 0\ ,\ \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

desarrollando los productos internos tenemos:

$$\bar{w}_1 = \frac{7}{\sqrt{2}} \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\ ,\ 0,\ \frac{1}{\sqrt{2}}\ ,\ 0 \right) + \frac{2}{\sqrt{2}} \left(0\ ,\ \frac{1}{\sqrt{2}},\ 0\ ,\ \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

$$\bar{w}_1 = \left(-\frac{7}{2}\ ,\ 1,\ \frac{7}{2}\ ,\ 1 \right)$$

como $\bar{v} = \bar{w}_1 + \bar{w}_2$, entonces:

$$\bar{w}_2 = \bar{v} - \bar{w}_1$$

sustituyendo tenemos:

$$\bar{w}_2 = (-1\ ,\ 2,\ 6\ ,\ 0) - \left(-\frac{7}{2},\ 1,\ \frac{7}{2},\ 1 \right)$$

$$\bar{w}_2 = \left(\frac{5}{2}\ ,\ 1,\ \frac{5}{2}\ ,\ -1 \right)$$

por lo tanto, se tiene que:

$$\bar{v} = \bar{w}_1 + \bar{w}_2 = \left(-\frac{7}{2},\ 1,\ \frac{7}{2},\ 1 \right) + \left(\frac{5}{2},\ 1,\ \frac{5}{2},\ -1 \right) = (-1\ ,\ 2,\ 6\ ,\ 0)$$

EJERCICIO 3.10 Obtenga el polinomio $h(x) \in W$ que tiene la menor distancia al polinomio $g(x) = x^2 - 2x - 1$, si $g(x) \in P_2$.

Se sabe que W es un subespacio de P_2 y que dichos espacios son:

$$P_2 = \{ ax^2 + bx + c \mid a,\ b\ c \in \mathbb{R} \}$$

$$W = \{ ax^2 - 3ax \mid a \in \mathbb{R} \}$$

Considere para su desarrollo el producto interno en P_2 definido por:

$$(p \mid q) = \sum_{i=0}^{2} p(i)\, q(i) \quad ; \quad \forall\ p(x),\ q(x) \in P_2$$

SOLUCIÓN:

El polinomio $h(x)$ que se pide es la proyección del polinomio $g(x)$ sobre el subespacio W.

Para calcular $h(x)$ necesitamos obtener una base ortonormal de W. Como W es un espacio de dimensión uno, entonces una base sería:

$$B = \{ x^2 - 3x \}$$

Calculando la norma del elemento de la base, tenemos:

$$\| x^2 - 3x \| = \left(x^2 - 3x \mid x^2 - 3x \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left[p(0)\ p(0) + p(1)\ p(1) + p(2)\ p(2) \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left[(0)^2 + (-2)^2 + (-2)^2 \right]^{\frac{1}{2}} = \sqrt{8}$$

de donde la base ortonormal de W es: $B_{\text{ortonormal}} = \left\{ \dfrac{1}{\sqrt{8}} \left(x^2 - 3x \right) \right\}$

La proyección del polinomio $g\left(x\right)$ sobre el espacio W viene dada por la expresión:

$$h\left(x\right)=\left(g\left(x\right)\middle|\,\bar{e}_1\right)\bar{e}_1$$

donde $\bar{e}_1$ es el elemento de la base ortonormal de W .

Sustituyendo tenemos:

$$h\left(x\right)=\left(\left(x^2-2x-1\right)\middle|\,\frac{1}{\sqrt{8}}\left(x^2-3x\right)\right)\left(\frac{1}{\sqrt{8}}\left(x^2-3x\right)\right)$$

por propiedades del producto interno se tiene que:

$$h\left(x\right)=\frac{1}{8}\left(\left(x^2-2x-1\right)\middle|\left(x^2-3x\right)\right)\left(x^2-3x\right)$$

aplicando el producto interno:

$$h\left(x\right)=\frac{1}{8}\left[\left(-1\right)\left(0\right)+\left(-2\right)\left(-2\right)+\left(-1\right)\left(-2\right)\right]\left(x^2-3x\right)$$

$$h\left(x\right)=\frac{1}{8}\left(6\right)\left(x^2-3x\right)$$

$$h\left(x\right)=\frac{3}{4}\left(x^2-3x\right)$$

$$h\left(x\right)=\frac{3}{4}x^2-\frac{9}{4}x$$

Mínimos cuadrados

La solución de mínimos cuadrados $\bar{v}$ de un sistema incompatible:

$$A\,\bar{x} = \bar{y}$$

donde A es una matriz de orden $m \times n$, satisface la ecuación normal:

$$A^T A\,\bar{x} = A^T\,\bar{y}$$

y recíprocamente, cualquier solución de la ecuación normal es solución de mínimos cuadrados. Además, si el rango de la matriz A es igual a n, la solución es única y viene dada por la expresión:

$$\bar{v} = \left(A^T A \right)^{-1} A^T\,\bar{y}$$

EJERCICIO 3.11 Para los puntos $(-2,\ 1)$, $(-1,\ 0)$, $(0,\ 2)$, $(1,\ 3)$ y $(2,\ 6)$, determine:

a) La ecuación de la recta de mínimos cuadrados que mejor se ajuste a los puntos dados.

b) La ecuación de la curva de mínimos cuadrados de segundo grado que mejor se ajuste a dichos puntos.

c) Cuál de las dos opciones presenta el menor error. Considere al producto escalar ordinario en $\mathbb{R}^2$ como producto interno.

SOLUCIÓN:

a) Consideremos que la ecuación de la recta buscada es de la forma:

$$y = mx + b$$

Al sustituir las coordenadas de los puntos dados en la ecuación de la recta, se genera el siguiente sistema de ecuaciones:

$$S_1 : \begin{cases} -2m & + & b & = & 1 \\ -m & + & b & = & 0 \\ 0m & + & b & = & 2 \\ m & + & b & = & 3 \\ 2m & + & b & = & 6 \end{cases}$$

Si se expresa matricialmente este sistema se tiene:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}}_{A} \underset{\overline{x}}{\begin{bmatrix} m \\ b \end{bmatrix}} = \underset{\overline{y}}{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix}}$$

Dando lugar a la ecuación matricial $A\overline{x} = \overline{y}$, donde:

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \quad ; \quad \overline{x} = \begin{bmatrix} m \\ b \end{bmatrix} \quad ; \quad \overline{y} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Se sabe que toda solución de mínimos cuadrados satisface a la ecuación normal:

$$A^T A\,\overline{x} = A^T\,\overline{y} \qquad \ldots\ldots (1)$$

se tiene que:

$$A^T A = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \ldots\ldots (2)$$

Por otro lado, se tiene que:

$$A^T \bar{y} = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \\ 12 \end{bmatrix} \quad \ldots\ldots (3)$$

sustituyendo (2) y (3) en (1) tenemos:

$$\begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \\ 12 \end{bmatrix}$$

de donde se tiene que:

$$10\,m = 13 \quad \Rightarrow \quad m = \frac{13}{10}$$

$$5\,b = 12 \quad \Rightarrow \quad b = \frac{12}{5}$$

Por lo tanto, la recta buscada tiene por ecuación:

$$y = \frac{13}{10}\,x + \frac{12}{5}$$

b) Se nos pide ajustar a un polinomio de segundo grado de la forma:

$$y = P\left(x \right) = a\,x^2 + b\,x + c \qquad \ldots\ldots (4)$$

cuyos coeficientes a, b y c desconocemos y vamos a determinar.

Al sustituir en la expresión (4) las coordenadas de los puntos dados, llega al sistema de ecuaciones:

$$S_2 : \begin{cases} 4a - 2b + c = 1 \\ a - b + c = 0 \\ c = 2 \\ a + b + c = 3 \\ 4a + 2b + c = 6 \end{cases}$$

Este sistema puede ser expresado matricialmente de la siguiente forma:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}}_{A} \underset{\overline{x}}{\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}} = \underset{\overline{y}}{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix}}$$

de donde:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad ; \quad \overline{x} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \quad ; \quad \overline{y} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix}$$

obteniendo:

$$A^T A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 & 1 & 4 \\ -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 34 & 0 & 10 \\ 0 & 10 & 0 \\ 10 & 0 & 5 \end{bmatrix} \ldots\ldots (5)$$

además:

$$A^T \overline{y} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 & 1 & 4 \\ -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 31 \\ 13 \\ 12 \end{bmatrix} \quad \ldots\ldots (6)$$

sustituyendo (5) y (6) en (1) tenemos:

$$\begin{bmatrix} 34 & 0 & 10 \\ 0 & 10 & 0 \\ 10 & 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 31 \\ 13 \\ 12 \end{bmatrix}$$

lo cual genera un sistema de ecuaciones que al resolverlo se obtiene:

$$a = \frac{1}{2}$$

$$b = \frac{13}{10}$$

$$c = \frac{7}{5}$$

sustituyendo estos valores en (4), se tiene que el polinomio buscado es:

$$P(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{13}{10}x + \frac{7}{5}$$

c) Calculando el vector de errores para cada curva de ajuste tenemos:

Para el caso de la recta se tiene:

Tomando las abscisas de los puntos dados y sustituyéndolas en la ecuación de la recta tenemos que:

Para $P_1(-2,\ 1)$ se tiene que el punto en la recta es $Q_1\left(-2,\ -\frac{1}{5}\right)$

Para $P_2(-1,\ 0)$ se tiene que el punto en la recta es $Q_2\left(-1,\ \frac{11}{5}\right)$

Para $P_3(0,\ 2)$ se tiene que el punto en la recta es $Q_3\left(0,\ \frac{12}{5}\right)$

Para $P_4(1,\ 3)$ se tiene que el punto en la recta es $Q_4\left(1,\ \frac{37}{10}\right)$

Para $P_5(2,\ 6)$ se tiene que el punto en la recta es $Q_5(2,\ 5)$

De donde se tiene que las componentes del vector de errores viene dado mediante la diferencia de las ordenadas de los puntos P_i y Q_i, esto es:

$$e_1 = y - y_1 = 1 - \left(-\frac{1}{5} \right) = \frac{6}{5}$$

$$e_2 = y - y_2 = 0 - \frac{11}{5} = -\frac{11}{5}$$

$$e_3 = y - y_3 = 2 - \frac{12}{5} = -\frac{2}{5}$$

$$e_4 = y - y_4 = 3 - \frac{37}{10} = -\frac{7}{10}$$

$$e_5 = y - y_5 = 6 - 5 = 1$$

por lo que el vector error es:

$$\overline{e}_1 = \left(\frac{6}{5},\ -\frac{11}{5},\ -\frac{2}{5},\ -\frac{7}{10},\ 1 \right)$$

calculando su norma:

$$\left\| \overline{e}_1 \right\| = \left(\overline{e}_1 \,\middle|\, \overline{e}_1 \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\overline{e}_1 \bullet \overline{e}_1 \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{36}{25} + \frac{121}{25} + \frac{4}{25} + \frac{49}{100} + 1 \right)^{\frac{1}{2}}$$

Entonces se tiene que el error es:

$$\left\| \overline{e}_1 \right\| = 2.816$$

Para el caso del polinomio de segundo grado, tenemos:

Para $P_1(-2,\ 1)$ se tiene que el punto en $P(x)$ es $R_1(-2,\ 0.8)$

Para $P_2(-1,\ 0)$ se tiene que el punto en $P(x)$ es $R_2(-1,\ 0.6)$

Para $P_3(0,\ 2)$ se tiene que el punto en $P(x)$ es $R_3(0,\ 1.4)$

Para $P_4(1,\ 3)$ se tiene que el punto en $P(x)$ es $R_4(1,\ 3.2)$

Para $P_5(2,\ 6)$ se tiene que el punto en $P(x)$ es $R_5(2,\ 6)$

Obteniendo la diferencia de las ordenadas, tenemos:

$$\begin{aligned} e_1 &= 1 - 0.8 = 0.2 \\ e_2 &= 0 - 0.6 = -0.6 \\ e_3 &= 2 - 1.4 = 0.6 \\ e_4 &= 3 - 3.2 = -0.2 \\ e_5 &= 6 - 6 = 0 \end{aligned}$$

por lo que el vector de errores para el caso de $P(x)$ es:

$$\bar{e}_2 = (0.2, \ -0.6, \ 0.6, \ -0.2, \ 0)$$

calculando su norma:

$$\| \bar{e}_2 \| = (\bar{e}_2 \mid \bar{e}_2)^{\frac{1}{2}} = (\bar{e}_2 \bullet \bar{e}_2)^{\frac{1}{2}} = (0.04 + 0.36 + 0.36 + 0.04 + 0)^{\frac{1}{2}}$$

Entonces se tiene que el error es:

$$\| \bar{e}_2 \| = 0.894$$

Por lo tanto, el menor error se obtiene con el polinomio de segundo grado, lo cual quiere decir que dicha curva es la que mejor se ajusta a los puntos dados.

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. En el espacio vectorial

$$P_2 = \left\{ a x^2 + b x + c \mid a,\ b,\ c \in \mathbb{R} \right\}$$

sobre $\mathbb{R}$ se define la operación:

$$\left(p \mid q \right) = p(1)\,q(1) + p(0)\,q(0) + p(2)\,q(2); \quad \forall\ p,\ q \in P_2$$

Determine si $\left(p \mid q \right)$ es un producto interno en P_2 .

2. En el espacio vectorial $\mathbb{R}^2$ se define la función:

$$\left(\bar{u} \mid \bar{v} \right) = x_1 x_2 + x_1 y_2 + y_1 x_2 + 3 y_1 y_2 \ ; \quad \forall\ \bar{u} = \left(x_1,\ y_1 \right),\ \bar{v} = \left(x_2,\ y_2 \right) \in \mathbb{R}^2$$

Determine si $\left(\bar{u} \mid \bar{v} \right)$ es un producto interno.

3. En el espacio vectorial $\mathbb{R}^2$ se define el producto interno:

$$\left(\bar{u} \mid \bar{v} \right) = x_1 x_2 - x_1 y_2 - x_2 y_1 + 3 y_1 y_2 \ ; \quad \forall\ \bar{u} = \left(x_1,\ y_1 \right),\ \bar{v} = \left(x_2,\ y_2 \right) \in \mathbb{R}^2$$

Obtenga un vector $\bar{w} \in \mathbb{R}^2$ que, con el producto interno dado, sea ortogonal al vector $\left(9,\ 1 \right)$ y su norma sea $\sqrt{33}$.

4. Si en el espacio vectorial $\mathbb{R}^4$ se define el producto escalar ordinario y se tiene que $B = \left\{ \bar{v}_1,\ \bar{v}_2,\ \bar{v}_3,\ \bar{v}_4 \right\}$ es su base canónica, obtenga un vector unitario que cumpla simultáneamente las dos condiciones siguientes:

a) Que se ortogonal a $\bar{v}_1$ y $\bar{v}_4$, y

b) que forme ángulos iguales con $\bar{v}_2$ y $\bar{v}_3$.

5. En el espacio vectorial

$$M = \left\{ \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \;\middle|\; a\,,\; b\,,\; c\,,\; d\,,\; e\,,\; f\,,\; g\,,\; h\,,\; i\,,\; \in \mathbb{R} \right\}$$

se define el producto interno:

$$\left(A \middle| B \right) = tr\left(B^T A \right) \quad ; \qquad \forall\; A,\; B \in M$$

Considerando las matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Calcule:

a) La norma de la matriz A .

b) La distancia entre las matrices A y B .

c) El ángulo que forman las matrices A y B .

6. Sea el espacio vectorial $P_2 = \left\{ at^2 + bt + c \;\middle|\; a,\; b,\; c \in \mathbb{R} \right\}$, en el cual se define el producto interno:

$$\left(p \mid q \right) = \int_0^1 p(t)\, q(t)\, dt \quad ; \qquad \forall\; p(t),\; q(t) \in P_2$$

Determine un vector $f_3(t) \neq 0$ que sea ortogonal a los vectores $f_1(t) = t^2 + 1$ y $f_2(t) = t - 1$.

7. En el espacio vectorial F de funciones continuas reales en el intervalo $[-\pi,\ \pi]$ se define el siguiente producto interno:

$$(f \mid g) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, g(t)\, dt \quad ; \qquad \forall\ f,\ g \in F$$

a) Determine si las funciones $f(t) = \operatorname{sen} t$ y $g(t) = \cos t$ son ortogonales.

b) Calcule la norma de la función $g(t) = \cos t$.

8. Sea F el espacio vectorial de las funciones reales de variable real continuas en el intervalo $[0,\ 2\pi]$ y el producto interno definido por:

$$(f \mid g) = \int_{0}^{2\pi} f(x)\, g(x)\, dx \quad ; \qquad \forall\ f,\ g \in F$$

a) Calcule el ángulo y la distancia entre las funciones $f(x) = 3$ y $g(x) = \cos x$; $\forall\ x \in [0,\ 2\pi]$.

b) Obtenga una base ortogonal del subespacio de F generado por el conjunto:

$$A = \{\, 3,\ \cos x,\ -9 \,\}$$

9. Sea el conjunto $B = \{\, (1,\ 1,\ -1),\ (0,\ 1,\ -1),\ (1,\ 1,\ 0) \,\}$ una base del espacio vectorial $\mathbb{R}^3$. Determine a partir de B una base ortonormal de dicho espacio, considerando el siguiente producto interno definido en $\mathbb{R}^3$:

$$(\bar{x} \mid \bar{y}) = 3x_1 y_1 + 2x_2 y_2 + x_3 y_3 \ ; \ \forall\ \bar{x} = (x_1,\ x_2,\ x_3),\ \bar{y} = (y_1,\ y_2,\ y_3) \in \mathbb{R}^3$$

10. En el espacio vectorial

$$M = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \middle| \; a, \; b \in \mathbb{R} \right\}$$

se define el producto interno:

$$\left(M_1 \mid M_2 \right) = \left(\begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & b_1 \end{bmatrix} \middle| \begin{bmatrix} a_2 & 0 \\ 0 & b_2 \end{bmatrix} \right) = a_1 a_2 + b_1 b_2 \; ; \quad \forall \; M_1 , \; M_2 \in M$$

Empleando el proceso de ortogonalización de Gram–Schmidt, obtenga una base ortonormal del espacio M a partir de la base:

$$B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, \; \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

11. Sea el espacio vectorial $P_2 = \left\{ a x^2 + b x + c \mid a, \; b, \; c \in \mathbb{R} \right\}$, en el cual se define el producto interno:

$$\left(p(x) \middle| q(x) \right) = \sum_{n=-1}^{1} p(n) \, q(n)$$

y sea $W = \left\{ a x^2 + c \mid a, \; c \in \mathbb{R} \right\}$ un subespacio de P_2. Obtenga el complemento ortogonal de W.

12. Sean $W = \{ (x, x, y) \mid x, y \in \mathbb{R} \}$ y $B = \{ (1, 1, 0), (0, 0, 1) \}$ un subespacio de $\mathbb{R}^3$ y una base de W, respectivamente. Considerando el producto interno:

$$\left(\bar{u} \mid \bar{v} \right) = x_1 x_2 + 3 y_1 y_2 + z_1 z_2 \; ; \; \forall \; \bar{u} = \left(x_1, y_1, z_1 \right), \; \bar{v} = \left(x_2, y_2, z_2 \right) \in \mathbb{R}^3$$

obtenga:

a) El vector $\bar{w} \in W$ más próximo al vector $\bar{a} = (6, 2, 1)$.

b) La distancia entre los vectores $\bar{w}$ y $\bar{a}$.

13. Sean M el espacio vectorial de matrices cuadradas de orden dos con elementos reales y el producto interno en M definido por:

$$\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \middle| \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} \right) = a x + b y + c z + d w \; ; \quad \forall \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} \in M$$

y sea $W = \left\{ \begin{bmatrix} a & a - b \\ b & a \end{bmatrix} \middle| \; a, b \in \mathbb{R} \right\}$ un subespacio de M.

a) Determine el complemento ortogonal $W^{\perp}$ de W.

b) Exprese al vector $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ como la suma $B + C$, donde $B \in W$ y $C \in W^{\perp}$.

c) Obtenga la proyección del vector A sobre $W^{\perp}$.

14. Para los puntos $(2,\ 2)$, $(3,\ 4)$, $(4,\ 5)$ y $(5,\ 7)$ determine:

a) La ecuación de la recta de mínimos cuadrados que mejor se ajuste a los puntos dados.

b) La ecuación de la curva de mínimos cuadrados de segundo grado que mejor se ajuste a dichos puntos.

c) Por qué se llega a la respuesta obtenida en el inciso $b)$.

RESPUESTAS A LOS EJERCICIOS PROPUESTOS

1. $\left(p \mid q \right)$ sí es un producto interno.

2. $\left(\bar{u} \mid \bar{v} \right)$ sí es un producto interno.

3. $\bar{w} = \left(3,\ 4 \right)$ (La respuesta no es única)

4. $\bar{v} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \left(0,\ 1,\ 1,\ 0 \right)$ (La respuesta no es única)

5. **a)** $\| A \| = \sqrt{10}$

b) $d\left(A,\ B \right) = 4$

c) $\theta = 78.46^\circ$

6. $f_3\left(t \right) = 110t^2 - 112t + 9$ (La respuesta no es única)

7. **a)** $f\left(t \right)$ y $g\left(t \right)$ son ortogonales.

b) $\| g\left(t \right) \| = \sqrt{\pi}$

8. **a)** El ángulo entre $f\left(x \right)$ y $g\left(x \right)$ es 90°, y la $d\left(f,\ g \right) = \sqrt{19\pi}$.

b) El subespacio generado por el conjunto A es:

$E\left(A \right) = \left\{ a + b\cos x \mid a,\ b \in \mathbb{R} \right\}$

y una base ortogonal de $E\left(A \right)$ es:

$B_{\text{ort}} = \left\{ 1,\ \cos x \right\}$

9. $B_{\text{ortonormal}} = \left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}} \right), \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}} \right), \left(0, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}} \right) \right\}$

10. $B_{\text{ortonormal}} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, \ \sqrt{5} \begin{bmatrix} \frac{2}{5} & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} \end{bmatrix} \right\}$

11. $W^{\perp} = \{ bx \mid b \in \mathbb{R} \}$

12. a) $\bar{w} = (3, 3, 1)$

b) $d(\bar{w}, \bar{a}) = 2\sqrt{3}$

13. a) $W^{\perp} = \left\{ \begin{bmatrix} -y-w & y \\ y & w \end{bmatrix} \middle| \ y, w \in \mathbb{R} \right\}$

b) $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \in W$ y $C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \in W^{\perp}$

$\Rightarrow A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$

c) La proyección del vector A sobre $W^{\perp}$ es el vector $C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$

14. a) $y = \frac{8}{5}x - \frac{11}{10}$

b) $y = \frac{8}{5}x - \frac{11}{10}$

c) Como se busca un polinomio que pertenezca al conjunto de los polinomios de grado menor o igual a dos, el que mejor se ajusta es el polinomio obtenido, que resulta ser de primer grado e igual a la respuesta del inciso $a)$, esto es, no existe un polinomio de segundo grado que se ajuste mejor que la recta obtenida.