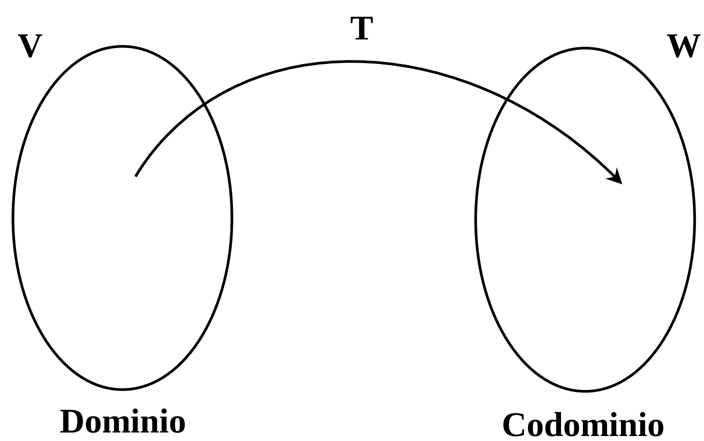
CAPÍTULO 2

TRANSFORMACIONES LINEALES

Transformación

Sean V y W espacios vectoriales. La función $T: V \to W$ recibe el nombre de transformación y, los espacios V y W se llaman dominio y codominio de la transformación, respectivamente. Esquemáticamente se tiene:



Transformación lineal

Sean V y W espacios vectoriales definidos sobre un campo K. La función $T: V \to W$ se llama transformación lineal si se cumplen las siguientes dos propiedades:

$\forall\ \bar{u}, \bar{v} \in V$ y $\forall\ \alpha \in K$

1) $T(\bar{u} + \bar{v}) = T(\bar{u}) + T(\bar{v})$

2) $T(\alpha\,\bar{u}) = \alpha\,T(\bar{u})$

Recorrido y núcleo de una transformación lineal

Sean V y W espacios vectoriales y $T: V \to W$ una transformación lineal.

1) Se llama recorrido de T al conjunto de todas las imágenes de los vectores del dominio, el cual se denota como $T(V)$ y es tal que:

$$T(V) = \left\{ T(\bar{v}) \mid \bar{v} \in V \right\}$$

2) Se llama núcleo de T al conjunto de vectores del dominio, cuya imagen es el vector cero de W, el cual se denota como $N(T)$ y es tal que:

$$N(T) = \left\{ \bar{v} \in V \mid T(\bar{v}) = \bar{0}_W \right\}$$

Teoremas

Si $T: V \to W$ es una transformación lineal, entonces:

1) $T\left(\bar{0}_V\right) = \bar{0}_W$

2) $T(V)$ es un subespacio de W.

3) $N(T)$ es un subespacio de V.

4) Si $B = \left\{ \bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_n \right\}$ es una base V, entonces el conjunto $G = \left\{ T(\bar{v}_1), T(\bar{v}_2), \ldots, T(\bar{v}_n) \right\}$ es generador del recorrido de T.

5) Si V es un espacio de dimensión finita, entonces se cumple que:

$$Dim\, V = Dim\; T(V) + Dim\; N(T)$$

EJERCICIO 2.1 Determine si la transformación $T : P \to D$, donde

$$P = \{\, a x + b \mid a, b \in \mathbb{R} \,\} \quad \text{y} \quad D = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \,\middle|\, a,\ b \in \mathbb{R} \right\}$$

definida por

$$T\,(\,f\,) = \begin{bmatrix} f\,(0) & 0 \\ 0 & f\,(1) \end{bmatrix} \quad ; \qquad \forall\ f \in P$$

es lineal.

SOLUCIÓN:

Para que una transformación sea lineal se deben cumplir las dos propiedades que se señalan en la definición de este concepto. Dichas propiedades se conocen con los nombres de superposición y homogeneidad, respectivamente, de acuerdo con el orden en que aparecen en la citada definición.

Verifiquemos si se cumplen estas propiedades:

1) Superposición:

$\forall\ f_1(x) = a_1 x + b_1 \ , \quad f_2(x) = a_2 x + b_2 \in \mathrm{P}$, se tiene que:

$$T\,(\,f_1 + f_2) = T\,(\,f_1) + T\,(\,f_2)$$

sustituyendo f_1 y f_2, tenemos:

$$T\left[\,(\,a_1 x + b_1) + (\,a_2 x + b_2)\,\right] = T\,(\,a_1 x + b_1) + T\,(\,a_2 x + b_2)$$

efectuando la suma del lado izquierdo de la igualdad y aplicando T del lado derecho, tenemos:

$$T\left[\,(\,a_1 + a_2)\,x + (\,b_1 + b_2\,)\,\right] = \begin{bmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & a_1 + b_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_2 & 0 \\ 0 & a_2 + b_2 \end{bmatrix}$$

aplicando T del lado izquierdo y sumando del lado derecho, se tiene:

$$\begin{bmatrix} b_1+b_2 & 0 \\ 0 & \left(a_1+a_2\right)+\left(b_1+b_2\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1+b_2 & 0 \\ 0 & \left(a_1+a_2\right)+\left(b_1+b_2\right) \end{bmatrix}$$

$\therefore$ cumple

2) Homogeneidad:

$\forall \; f(x) = ax+b$ y $\forall \; \alpha \in \mathbb{R}$

$T\left(\alpha f\right) = \alpha T\left(f\right)$

de donde:

$T\left[\alpha\left(ax+b\right)\right] = \alpha T\left(ax+b\right)$

$T\left[\alpha a x + \alpha b\right] = \alpha \begin{bmatrix} b & 0 \\ 0 & a+b \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} \alpha b & 0 \\ 0 & \alpha a+\alpha b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha b & 0 \\ 0 & \alpha a+\alpha b \end{bmatrix}$

$\therefore$ cumple

entonces podemos concluir que la transformación T es lineal.

EJERCICIO 2.2 Dada la transformación $T:\mathbb{R}^3 \to P_1$, donde $P_1 = \left\{ ax+b \;\middle|\; a, b \in \mathbb{R} \right\}$, cuya regla de correspondencia es:

$$T\left(a, b, c\right) = \left(a+b\right)x + \left(a-c\right) ; \qquad \forall \left(a, b, c\right) \in \mathbb{R}^3$$

a) Determine si T es lineal.

b) Obtenga el recorrido y el núcleo de T .

c) Dé una base y la dimensión del recorrido y del núcleo.

SOLUCIÓN:

a) Las dos propiedades de superposición y homogeneidad que son necesarias demostrar para determinar si una transformación es o no lineal, se pueden juntar en una sola expresión y, si ésta se cumple, se puede concluir sobre la linealidad de la misma, como a continuación se muestra.

$$\forall\ \bar{v}_1 = \left(a_1,\ b_1,\ c_1 \right),\ \ \bar{v}_2 = \left(a_2,\ b_2,\ c_2 \right) \in \mathbb{R}^3 \quad \text{y} \quad \forall\ \alpha \in \mathbb{R}$$

$$T\left(\alpha \bar{v}_1 + \bar{v}_2 \right) = \alpha T\left(\bar{v}_1 \right) + T\left(\bar{v}_2 \right)$$

$$T\left[\alpha \left(a_1,\ b_1,\ c_1 \right) + \left(a_2,\ b_2,\ c_2 \right) \right] = \alpha T\left(a_1,\ b_1,\ c_1 \right) + T\left(a_2,\ b_2,\ c_2 \right)$$

de donde se tiene:

$$T\left[\left(\alpha a_1 + a_2,\ \alpha b_1 + b_2,\ \alpha c_1 + c_2 \right) \right] = \alpha\left[\left(a_1 + b_1 \right) x + \left(a_1 - c_1 \right) \right] + \left[\left(a_2 + b_2 \right) x + \left(a_2 - c_2 \right) \right]$$

aplicando la regla de correspondencia de T del lado izquierdo y efectuando operaciones y factorizando del lado derecho, se tiene:

$$\left[\left(\alpha a_1 + a_2 \right) + \left(\alpha b_1 + b_2 \right) \right] x + \left[\left(\alpha a_1 + a_2 \right) - \left(\alpha c_1 + c_2 \right) \right] = \left(\alpha a_1 + \alpha b_1 \right) x + \left(\alpha a_1 - \alpha c_1 \right) + \left(a_2 + b_2 \right) x + \left(a_2 - c_2 \right)$$

$$\left[\left(\alpha a_1 + a_2 \right) + \left(\alpha b_1 + b_2 \right) \right] x + \left[\left(\alpha a_1 + a_2 \right) - \left(\alpha c_1 + c_2 \right) \right] = \left[\left(\alpha a_1 + a_2 \right) + \left(\alpha b_1 + b_2 \right) \right] x + \left[\left(\alpha a_1 + a_2 \right) - \left(\alpha c_1 + c_2 \right) \right]$$

como se cumple la igualdad, entonces podemos concluir que la transformación T es lineal.

b) Para obtener el recorrido se hará uso del teorema 4 enunciado anteriormente. Tomemos entonces la base canónica del dominio, esto es:

$$B = \left\{ \left(1,\ 0,\ 0 \right),\ \left(0,\ 1,\ 0 \right),\ \left(0,\ 0,\ 1 \right) \right\}$$

de donde:

$T = \left(1,\ 0,\ 0 \right) = x + 1$

$T = \left(0,\ 1,\ 0 \right) = x$

$T = \left(0,\ 0,\ 1 \right) = -1$

con lo cual el conjunto $G = \left\{ x+1,\ x,\ -1 \right\}$ es generador del recorrido.

Es evidente que G es un conjunto linealmente dependiente ya que $x+1$ se puede obtener como una combinación lineal de los otros dos elementos del conjunto. De acuerdo con esto, se puede llegar a que el conjunto $C = \left\{ x\ ,\ 1 \right\}$ es una base del recorrido y, por lo tanto, se tiene que:

$$a\left(x \right) + b\left(1 \right) = ax + b$$

con lo cual se llega a que el recorrido es:

$$T\left(\mathbb{R}^3 \right) = \left\{ ax + b \mid a,\ b \in \mathbb{R} \right\}$$

Por otro lado, el núcleo se obtiene a partir de la igualdad:

$$T\left(a,\ b,\ c \right) = 0x + 0$$

de donde:

$$\left(a+b \right) x + \left(a-c \right) = 0x + 0$$

por igualdad de polinomios se llega al sistema:

$$\begin{cases} a + b = 0 \\ a - c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = -a \\ c = a \end{cases}$$

por lo tanto, el núcleo de la transformación es:

$$N\left(T \right) = \left\{ \left(a,\ -a,\ a \right) \mid a \in \mathbb{R} \right\}$$

c) Una base del recorrido es:

$$C = \{ x,\ 1 \} \qquad \therefore \qquad Dim\ T\left(\mathbb{R}^3\right) = 2$$

Una base del núcleo es:

$$D = \left\{ \left(1,\ -1,\ 1\right) \right\} \qquad \therefore \qquad Dim\ N\left(T\right) = 1$$

Obsérvese que el teorema 5 se cumple, ya que:

$$Dim\ T\left(\mathbb{R}^3\right) + Dim\ N\left(T\right) = 3$$

que es igual a la dimensión del dominio.

Nota: Cuando se traten los temas de transformaciones inyectivas, suprayectivas y biyectivas e inversa de una transformación, se retomarán los conceptos de recorrido y núcleo.

Matriz asociada a una transformación lineal

Sean V y W dos espacios vectoriales de dimensión n y m, respectivamente, y sean $A = \left\{ \bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_n \right\}$ y $B = \left\{ \bar{w}_1, \bar{w}_2, \ldots, \bar{w}_m \right\}$ bases de dichos espacios.

Si $T:\ V \to W$ es una transformación lineal, existe una matriz única $M_B^A\left(T\right)$, de orden $m x n$, tal que:

$$M_B^A\left(T\right)\left(\bar{v}\right)_A = \left[\ T\left(\bar{v}\right)\right]_B \quad ; \quad \forall\ \bar{v} \in V$$

Las n columnas de la matriz $M_B^A\left(T\right)$, llamada matriz asociada a T, son los vectores de coordenadas en la base B, de las imágenes de los vectores de la base A, esto es:

$$M_B^A\left(T\right) = \left[\left[T\left(\bar{v}_1\right)\right]_B \quad \left[T\left(\bar{v}_2\right)\right]_B \ \cdots \ \left[T\left(\bar{v}_n\right)\right]_B \right]$$

EJERCICIO 2.3 Sean los espacios vectoriales

$$P_2 = \left\{ a x^2 + b x + c \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$$

$$M = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \middle| \; a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$$

Ambos definidos sobre el campo real, y sea la transformación lineal $T: P_2 \to M$ definida por:

$$T\left(a x^2 + b x + c \right) = \begin{bmatrix} a+c & 3b \\ 3b & a-c \end{bmatrix} \; ; \; \forall \; a, b, c \in \mathbb{R}$$

Obtenga la matriz asociada a la transformación T .

SOLUCIÓN:

Para obtener la matriz asociada a la transformación se requiere una base del dominio y una del codominio. Consideremos las bases:

$$A = \left\{ x^2, x, 1 \right\} \quad \text{y} \quad B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

Las imágenes de los elementos de la base A son:

$$T\left(x^2 \right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T\left(x \right) = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$T\left(1 \right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Obteniendo los vectores de coordenadas de estas imágenes referidas a la base B, tenemos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \alpha_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \alpha_3 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Al realizar las operaciones correspondientes y por igualdad de matrices, fácilmente puede llegarse a:

$$\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right)_B = (1,\ 0,\ 1)$$

En forma análoga con las otras dos imágenes, se llega a:

$$\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} = \beta_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \beta_2 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \beta_3 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \left(\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \right)_B = (0,\ 3,\ 0)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \gamma_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \gamma_2 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \gamma_3 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \right)_B = (1,\ 0,\ -1)$$

Con lo cual, la matriz asociada a la transformación viene dada por la disposición en columna de dichos vectores de coordenadas, esto es:

$$M_B^A(T) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

EJERCICIO 2.4 Sea la transformación lineal $H: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, definida por:

$$H(x,\ y,\ z) = (2x + z,\ -y+z,\ -4x-y-z)\ ; \quad \forall (x,\ y,\ z) \in \mathbb{R}^3$$

Obtenga la matriz asociada a la transformación H referida a la base canónica de $\mathbb{R}^3$.

SOLUCIÓN:

Como se sabe, la base canónica de $\mathbb{R}^3$ es:

$$B = \{ (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1) \}$$

Las imágenes de sus elementos son:

$$T\ (1, 0, 0) = (2, 0, -4)$$

$$T\ (0, 1, 0) = (0, -1, -1)$$

$$T\ (0, 0, 1) = (1, 1, -1)$$

Los vectores de coordenadas de las imágenes vienen dadas por:

$$(2, 0, -4) = \alpha_1 (1, 0, 0) + \alpha_2 (0, 1, 0) + \alpha_3 (0, 0, 1)$$

Realizando las operaciones correspondientes y mediante la igualdad de vectores, se llega a:

$$\left[(2, 0, -4) \right]_B = (2, 0, -4)$$

En forma similar, fácilmente se puede llegar a:

$$\left[(0, -1, -1) \right]_B = (0, -1, -1)$$

$$\left[(1, 1, -1) \right]_B = (1, 1, -1)$$

Con lo cual, la matriz asociada a la transformación H es:

$$M_B^B (H) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -4 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Obsérvese que las columnas de la matriz asociada a la transformación H, son precisamente las imágenes de los vectores de los elementos de la base canónica.

En general, cuando se obtenga la matriz asociada a una transformación lineal del tipo $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, será suficiente con obtener las imágenes de los elementos de la base canónica del dominio, y dichas imágenes disponerlas como columnas para llegar a definir la matriz asociada a la transformación.

Álgebra de transformaciones lineales

Adición y multiplicación por un escalar:

Sean V y W dos espacios vectoriales definidos sobre un campo K, y sean $T: V \rightarrow W$ y $H: V \rightarrow W$ dos transformaciones lineales.

1) La suma $T+H$ de T y H es una transformación lineal de V en W definida por:

$$\left(T+H\right)\left(\bar{v}\right) = T\left(\bar{v}\right) + H\left(\bar{v}\right) \quad ; \qquad \forall\ \bar{v} \in V$$

2) El producto de un escalar $\alpha \in K$ por la transformación T es una transformación lineal de V en W que se denota con αT y se define como:

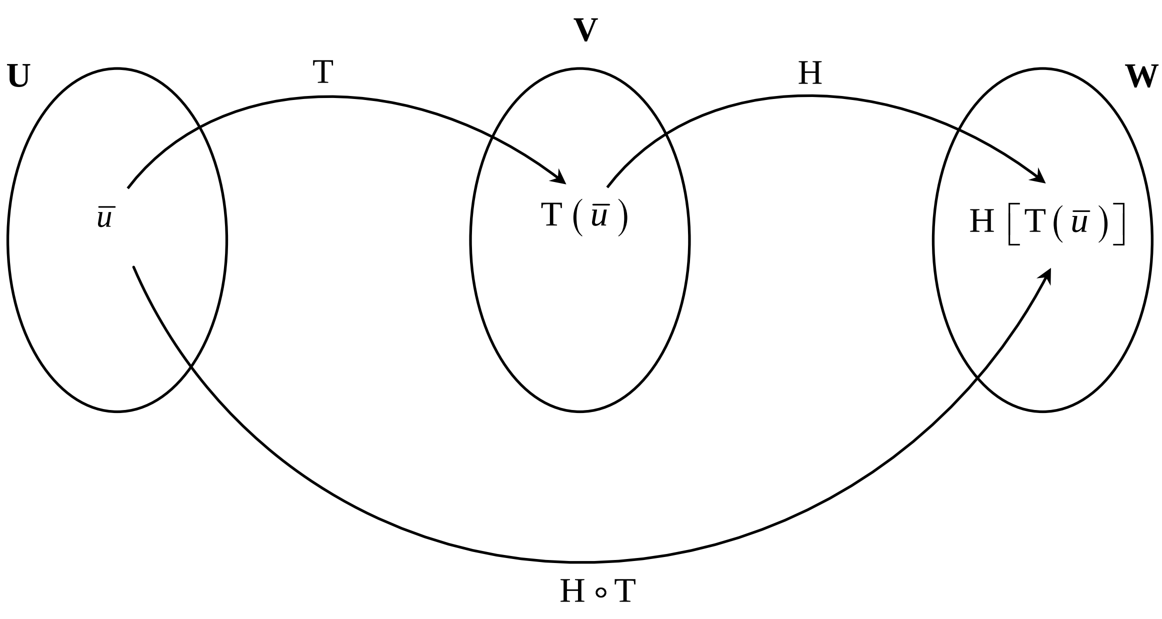
$$\left(\alpha T\right)\left(\bar{v}\right) = \alpha T\left(\bar{v}\right) \quad ; \qquad \forall\ \bar{v} \in V$$

Composición:

3) Sean $T: U \rightarrow V$ y $H: V \rightarrow W$ dos transformaciones lineales. La operación $H \circ T$ es una transformación lineal de U en W definida por:

$$\left(H \circ T\right)\left(\bar{u}\right) = H\left[\ T\left(\bar{u}\right)\right] \quad ; \quad \forall\ \bar{u}\ U$$

La operación composición puede representarse gráficamente de la siguiente forma:



Teoremas

Sean V y W dos espacios vectoriales definidos sobre un campo K, y sean A y B bases de V y W respectivamente. Si T y H son dos transformaciones lineales cualesquiera de V en W, entonces.

1) $M_B^A\left(T+H\right)=M_B^A\left(T\right)+M_B^A\left(H\right)$

2) $M_B^A\left(\alpha T\right)=\alpha M_B^A\left(T\right)$; $\forall\ \alpha\in K$

Sean U, V y W
tres espacios vectoriales definidos sobre un campo K, y sean A, B y C bases de U, V y W respectivamente.

Si $T:U\rightarrow V$ y $H:V\rightarrow W$ son dos transformaciones lineales, entonces

3) $M_C^A\left(H\circ T\right)=M_C^B\left(H\right)M_B^A\left(T\right)$

EJERCICIO 2.5 Dadas las transformaciones lineales:

$$T:\ \mathbb{R}^2\rightarrow\mathbb{R}^2 \quad \text{donde} \quad T\left(x,\ y\right)=\left(-x,\ 2x-3y\right)$$

$$S:\ \mathbb{R}^2\rightarrow\mathbb{R}^2 \quad \text{donde} \quad S\left(x,\ y\right)=\left(x-y,\ 3y\right)$$

Obtenga el vector $\bar{v}$, tal que:

$$\left(S\circ T\right)\left(\bar{v}\right)=\left(-1,\ 1\right)$$

SOLUCIÓN:

Considerando a $\bar{v}=\left(x,\ y\right)$, entonces se tiene que:

$$\left(S\circ T\right)\left(x,\ y\right)=S\left[\ T\left(x,\ y\right)\right]=\left(-1,\ 1\right)$$

de donde

$$S\left(-x,\ 2x-3y\right)=\left(-1,\ 1\right)$$

aplicando la regla de la transformación S, tenemos:

$$\left[-x - \left(2x - 3y \right),\ 3\left(2x - 3y \right) \right] = \left(-1,\ 1 \right)$$

simplificando se tiene:

$$\left(-3x + 3y,\ \ 6x - 9y \right) = \left(-1,\ 1 \right)$$

por igualdad de vectores se llega al sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} -3x + 3y = -1 \\ \\ 6x - 9y = 1 \end{cases}$$

cuya solución es:

$$x = \frac{2}{3} \qquad\qquad y = \frac{1}{3}$$

con lo cual el vector $\bar{v}$ es:

$$\bar{v} = \left(\frac{2}{3},\ \frac{1}{3} \right)$$

EJERCICIO 2.6 Sea el espacio vectorial $M = \left\{ \begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{bmatrix} \middle|\ x,\ y \in \mathbb{R} \right\}$ y las transformaciones lineales:

$$H : \mathbb{R}^2 \rightarrow M \quad \text{dada por} \quad H\left(x,\ y \right) = \begin{bmatrix} x + y & 0 \\ 0 & y \end{bmatrix} \ ; \quad \forall \ \left(x,\ y \right) \in \mathbb{R}^2$$

$$S : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad \text{dada por} \quad S\left(x,\ y \right) = \left(-x,\ 0 \right) \ ; \quad \forall \ \left(x,\ y \right) \in \mathbb{R}^2$$

Determine la regla de correspondencia de la transformación $T : M \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que:

$$\left[2S + \left(T \circ H \right) \right] \left(x,\ y \right) = \left(0,\ y \right)$$

SOLUCIÓN:

Partiendo de la expresión dada, tenemos:

$$\left[\, 2S + \left(T \circ H \right) \right]\left(x, y \right) = \left(0, y \right)$$

de donde se tiene:

$$2S\left(x, y \right) + \left(T \circ H \right)\left(x, y \right) = \left(0, y \right)$$

despejando:

$$\left(T \circ H \right)\left(x, y \right) = \left(0, y \right) - 2S\left(x, y \right)$$

aplicando S, tenemos:

$$\left(T \circ H \right)\left(x, y \right) = \left(0, y \right) - 2\left(-x, 0 \right)$$

$$\left(T \circ H \right)\left(x, y \right) = \left(2x, y \right) \qquad \ldots\ldots (1)$$

Por otro lado, en términos de matrices asociadas sabemos que:

$$M\left(T \right) M\left(H \right) = M\left(T \circ H \right)$$

Siempre que las matrices asociadas estén referidas a bases canónicas o bases naturales.

Esta ecuación resulta ser una ecuación matricial, de la cual podemos despejar $M\left(T \right)$, esto es:

$$M\left(T \right) M\left(H \right) M^{-1}\left(H \right) = M\left(T \circ H \right) M^{-1}\left(H \right)$$

de donde se tiene:

$$M\left(T \right) = M\left(T \circ H \right) M^{-1}\left(H \right) \qquad \ldots\ldots (2)$$

Para obtener $M\left(T \right)$, necesitamos obtener las matrices asociadas de $\left(T \circ H \right)$ y de H.

Si aplicamos isomorfismo, podemos expresar a la transformación H como:

$$H\left(x, y \right) = \left(x+y, y \right) \quad ; \quad \text{aplicando} \quad f\left(\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \right) = \left(a, b \right)$$

Considerando la base canónica, tenemos:

$$\left.\begin{aligned} H(1,\ 0) &= (1,\ 0) \\ H(0,\ 1) &= (1,\ 1) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad M(H) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \ldots\ldots (3)$$

Por otro lado, considerando la expresión (1), tenemos:

$$\begin{aligned} (T \circ H)(1,\ 0) &= (2,\ 0) \\ (T \circ H)(0,\ 1) &= (0,\ 1) \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad M(T \circ H) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \ldots\ldots (4)$$

de (3) se obtiene que:

$$M^{-1}(H) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \ldots\ldots (5)$$

sustituyendo (4) y (5) en (2), tenemos:

$$M(T) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

de donde:

$$M(T) = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Como la transformación $T : M \to \mathbb{R}^2$, entonces mediante el isomorfismo podemos lograr que $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, con lo cual se puede expresar:

$$T(x,\ y) = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x - 2y \\ y \end{bmatrix}$$

esto es:

$$T(x,\ y) = (2x - 2y,\ \ y)$$

Finalmente, aplicando el isomorfismo inverso, tenemos:

$$T\left(\begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{bmatrix}\right) = (2x - 2y,\ \ y)$$

Transformaciones lineales inyectivas, suprayectivas y biyectivas

1) Transformación inyectiva: Una transformación lineal es inyectiva, si y sólo si, el núcleo de dicha transformación es de dimensión cero.

2) Transformación suprayectiva: Una transformación lineal es suprayectiva, si y sólo si, la dimensión del recorrido es igual a la dimensión del codominio, o bien, si la dimensión del núcleo es igual a cero, entonces la transformación será suprayectiva, si la dimensión del dominio es igual a la dimensión del codominio.

3) Transformación biyectiva: Una transformación lineal es biyectiva, si y sólo si, es inyectiva y suprayectiva, es decir, si la dimensión del núcleo es igual a cero y la dimensión del recorrido es igual a la dimensión del codominio.

Inversa de una transformación lineal

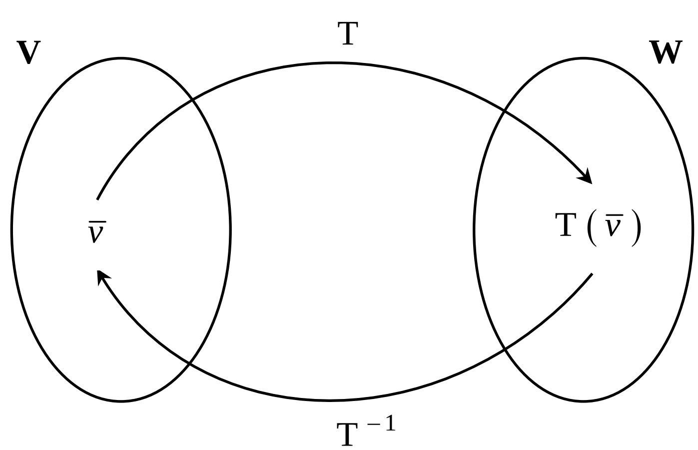
Sea $T: V \rightarrow W$ una transformación lineal. La inversa de T es una transformación lineal $T^{-1}: W \rightarrow V$, para la cual se cumple que:

1) $T^{-1} \circ T = I_V$

2) $T \circ T^{-1} = I_W$

Donde I_V e I_W son transformaciones identidad en V y W, respectivamente.

Gráficamente:



Teorema

Sean V y W dos espacios vectoriales de dimensión finita, $T: V \to W$ una transformación lineal y A, B bases de V y W, respectivamente:

1) T^{-1} existe, si y sólo si, $M_B^A(T)$ es no singular.

2) Si T^{-1} existe, entonces $\left[M_B^A(T) \right]^{-1} = M_A^B\left(T^{-1}\right)$.

EJERCICIO 2.7 Sea la transformación lineal $T: M \to P_1$ definida por:

$$T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}\right) = (a-b)x + (a+b) \quad ; \quad \forall \begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix} \in M$$

donde:

$$M = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix} \middle| \, a, b \in \mathbb{R} \right\} \quad \text{y} \quad P_1 = \{ ax + b \mid a, b \in \mathbb{R} \}$$

a) Determine si T es biyectiva.

b) De ser posible, obtenga la transformación inversa T^{-1}.

SOLUCIÓN:

a) Obteniendo el núcleo de T.

Al igualar a cero el recorrido, se genera el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} a - b = 0 \\ a + b = 0 \end{cases}$$

cuya única solución es:

$$a = 0$$
$$b = 0$$

de donde el núcleo de T es:

$$N\left(T\right) = \left\{ \bar{0} \right\} \quad \Rightarrow \quad Dim\ N\left(T\right) = 0$$

con lo cual podemos concluir que T es inyectiva.

Por otro lado, se puede apreciar que el dominio y el codominio de T son espacios de dimensión dos, y como el núcleo es de dimensión cero, entonces T es suprayectiva. Al ser T inyectiva y suprayectiva, entonces T es biyectiva.

b) Como T resultó ser biyectiva, entonces T^{-1} existe.

Para obtener T^{-1}, primeramente transformaremos los espacios vectoriales M y P_1 a espacios del tipo $\mathbb{R}^n$, mediante dos isomorfismos.

Como M y P_1 son espacios vectoriales de dimensión dos, entonces son isomorfos a $\mathbb{R}^2$. De acuerdo con esto, podemos plantear los isomorfismos:

$$f\left(\begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}\right) = \left(a,\ b\right)$$

$$g\ \left(a x + b\right) = \left(a,\ b\right)$$

Con lo cual, la regla de correspondencia de T quedaría como:

$$T\left(\ a,\ b\right) = \left(\ a - b,\ a + b\right)$$

Obteniendo la matriz asociada a T con la base canónica, tenemos:

$$\begin{aligned} T\left(1,\ 0\right) &= \left(1,\ 1\right) \\ T\left(0,\ 1\right) &= \left(-1,\ 1\right) \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad M\left(T\right) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

de donde se tiene que:

$$\left[M\left(T \right) \right]^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = M\left(T^{-1} \right)$$

a partir de esto tenemos que:

$$T^{-1}\left(a,\ b \right) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{a+b}{2} \\ \dfrac{-a+b}{2} \end{bmatrix}$$

esto es:

$$T^{-1}\left(a,\ b \right) = \left(\frac{a+b}{2},\ \frac{b-a}{2} \right)$$

aplicando los isomorfismos inversos y tomando en cuenta que $T^{-1}:\ P_1 \rightarrow M$, tenemos:

$$T^{-1}\left(a x + b \right) = \begin{bmatrix} \dfrac{a+b}{2} & \dfrac{b-a}{2} \\ \dfrac{b-a}{2} & \dfrac{a+b}{2} \end{bmatrix}$$

EJERCICIO 2.8 Sea $T:\ P_1 \rightarrow P_1$, donde $P_1 = \left\{ a x + b \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$, una transformación lineal tal que:

$$M_B^A\left(T \right) = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

es su matriz asociada referida a las bases.

$$A = \left\{ 2x,\ 3 \right\} \quad \text{y} \quad B = \left\{ x,\ x+3 \right\}$$

del dominio y codominio respectivamente.

a) Determine si la transformación T es biyectiva.

b) Obtenga, si existe, T^{-1}.

SOLUCIÓN:

a) Dado que $Det\left(M_B^A(T)\right) = 2$, entonces podemos garantizar que:

$$\left[M_B^A(T)\right]^{-1} \qquad \text{existe}$$

Como $M_A^B\left(T^{-1}\right) = \left[M_B^A(T)\right]^{-1}$, entonces T^{-1} existe, por lo que podemos asegurar que T es biyectiva.

b) Como $M_B^A(T) = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad M_A^B\left(T^{-1}\right) = \dfrac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

Para obtener la regla de correspondencia de T^{-1} se procede de la siguiente forma:

Obtengamos primero el vector de coordenadas de un vector cualquiera $ax+b$ de P_1 , referido a la base B.

$$ax+b = \alpha(x) + \beta(x+3)$$

$$ax+b = (\alpha+\beta)x + 3\beta$$

por igualdad de polinomios:

$$\begin{cases} \alpha+\beta = a \\ 3\beta = b \quad \Rightarrow \quad \beta = \dfrac{b}{3} \end{cases}$$

sustituyendo en la primera ecuación, se tiene:

$$\alpha + \frac{b}{3} = a \quad \Rightarrow \quad \alpha = a - \frac{b}{3}$$

$$\therefore \qquad \left(a x + b \right)_B = \left(a - \frac{b}{3} , \ \frac{b}{3} \right)$$

al multiplicar este vector de coordenadas por la matriz $M_A^B \left(T^{-1} \right)$, lo que se obtiene es $\left[T^{-1} \left(a x + b \right) \right]_A$, entonces:

$$\left[T^{-1} \left(a x + b \right) \right]_A = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a - \dfrac{b}{3} \\ \dfrac{b}{3} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} a - \dfrac{b}{3} + \dfrac{4b}{3} \\ \dfrac{2b}{3} \end{bmatrix}$$

entonces:

$$\left[T^{-1} \left(a x + b \right) \right]_A = \begin{bmatrix} \dfrac{a+b}{2} \\ \dfrac{b}{3} \end{bmatrix}$$

de donde:

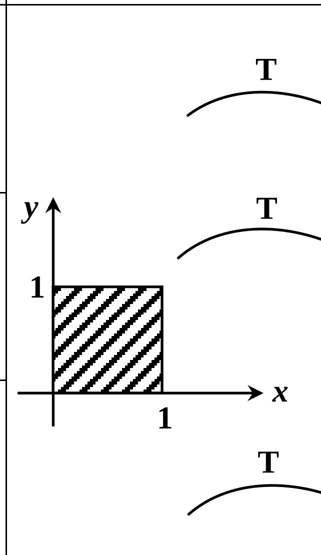
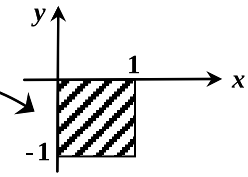
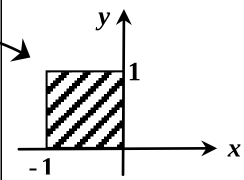
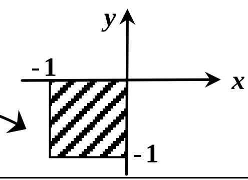
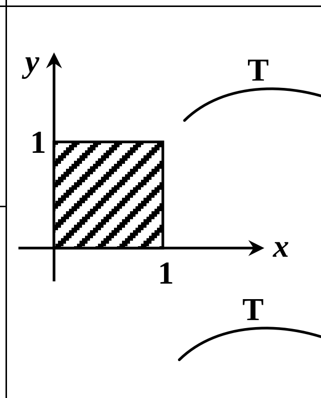
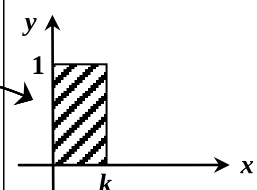
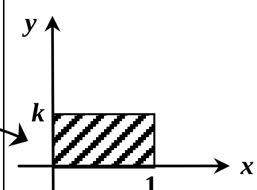
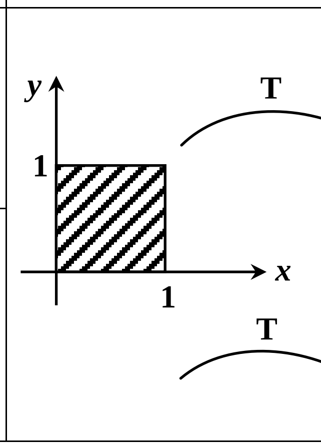
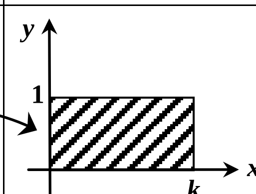
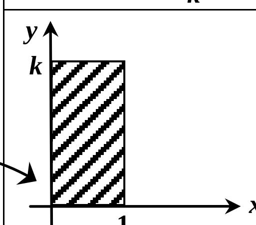
$$\left[T^{-1} \left(a x + b \right) \right]_A = \left(\frac{a+b}{2} , \ \frac{b}{3} \right)$$

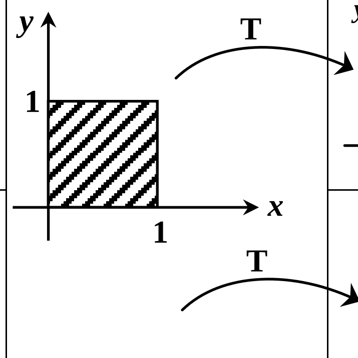
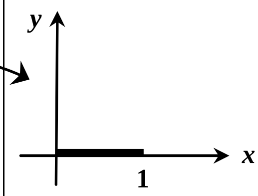
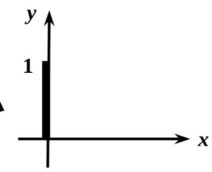
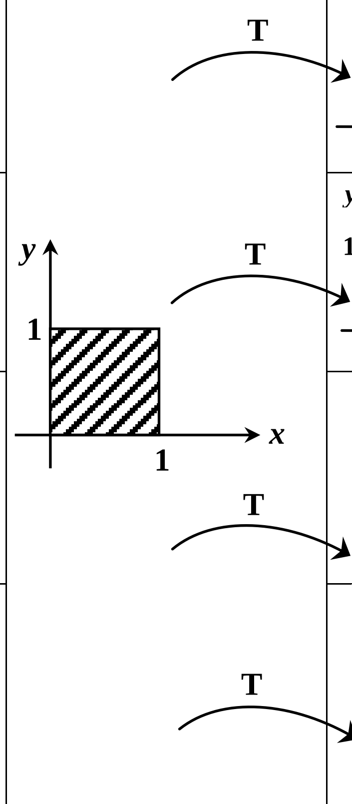
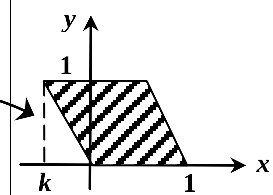
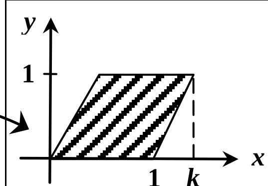
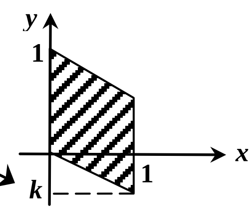
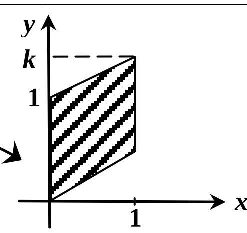
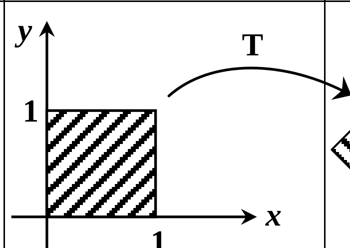
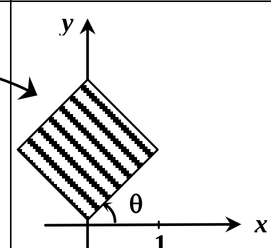
con este vector de coordenadas y la base A , se tiene:

$$T^{-1} \left(a x + b \right) = \frac{a+b}{2} \left(2x \right) + \frac{b}{3} \left(3 \right)$$

$$\therefore \qquad T^{-1} \left(a x + b \right) = \left(a + b \right) x + b$$

Efectos geométricos de las transformaciones lineales de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$

Transformación	**Matriz de transformación**	**Efecto geométrico**	
		Dominio	**Codominio**
Reflexión	Sobre el eje x $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$		
	Sobre el eje y $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$		
	Con respecto al origen $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$		
Contracción	Horizontal $\begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $0 < k < 1$		
	Vertical $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}$ $0 < k < 1$		
Expansión	Horizontal $\begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $k > 1$		
	Vertical $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}$ $k > 1$		

Transformación	Matriz de transformación	Efecto geométrico	
		Dominio	Codominio
Proyección	Sobre el eje x $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$		
	Sobre el eje y $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$		
Deformación o Deslizamiento	A lo largo del eje x con $k<0$ $\begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$		
	A lo largo del eje x con $k>0$ $\begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$		
	A lo largo del eje y con $k<0$ $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{bmatrix}$		
	A lo largo del eje y con $k>0$ $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{bmatrix}$		
Rotación	$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$		

EJERCICIO 2.9 Determine el efecto geométrico que produce:

a) El realizar un giro de 90° y posteriormente efectuar una expansión horizontal considerando $k = 3$.

b) El realizar primero la expansión horizontal con $k = 3$ y posteriormente realizar el giro de 90°.

Realice, para cada caso, la representación geométrica considerando la región que se define con los puntos $(0,\ 0)$, $(1,\ 0)$, $(1,\ 1)$ y $(0,\ 1)$.

SOLUCIÓN:

a) De acuerdo con la tabla anterior, la matriz de giro es:

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

Como $\theta = 90^\circ$, entonces:

$$\text{Matriz de giro } = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = G$$

La matriz de expansión horizontal es:

$$\begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

como $k = 3$, entonces:

$$\text{Matriz de expansión } = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = E$$

como se nos pide realizar primero el giro y después la expansión, esto equivale a realizar la composición de ambas transformaciones, esto es:

$$(E \circ G)\bar{u} = E\left[\ G(\bar{u})\right]$$

obsérvese que en el lado derecho de la igualdad se aplica primero el giro al vector $\bar{u}$ y posteriormente se aplica la transformación de expansión E .

Sabemos que:

$$M\left(E \circ G \right) = M\left(E \right) M\left(G \right)$$

de donde:

$$M\left(E \circ G \right) = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = T$$

Aplicando esta transformación a los puntos dados, tenemos:

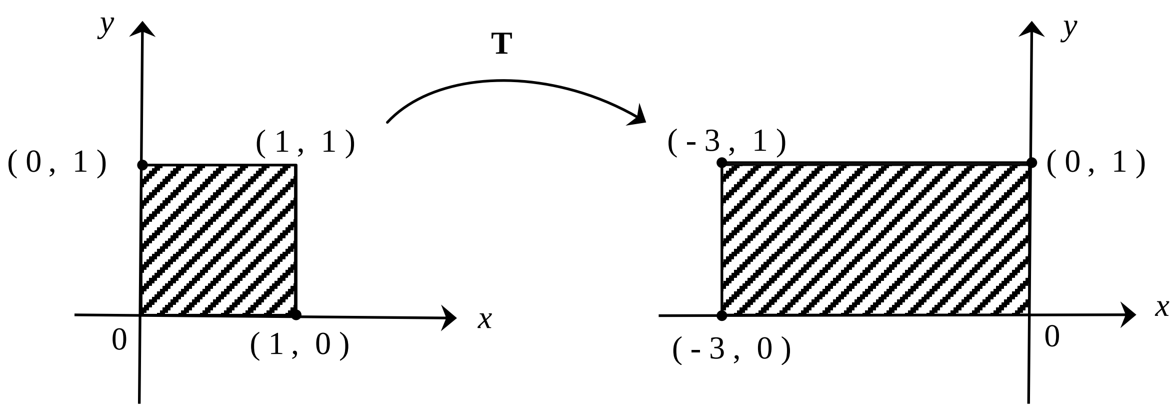
$$T\left(0,0\right) = \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \therefore \qquad T\left(0,0\right) = \left(0,0\right)$$

$$T\left(1,0\right) = \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \therefore \qquad T\left(1,0\right) = \left(0,1\right)$$

$$T\left(1,1\right) = \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \therefore \qquad T\left(1,1\right) = \left(-3,1\right)$$

$$T\left(0,1\right) = \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \therefore \qquad T\left(0,1\right) = \left(-3,0\right)$$

Gráficamente:



b) Si se aplica primero la expansión horizontal y posteriormente el giro de 90°, entonces se tiene:

$$M\left(G \circ E\right) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} = H$$

Aplicando esta transformación a los puntos, tenemos:

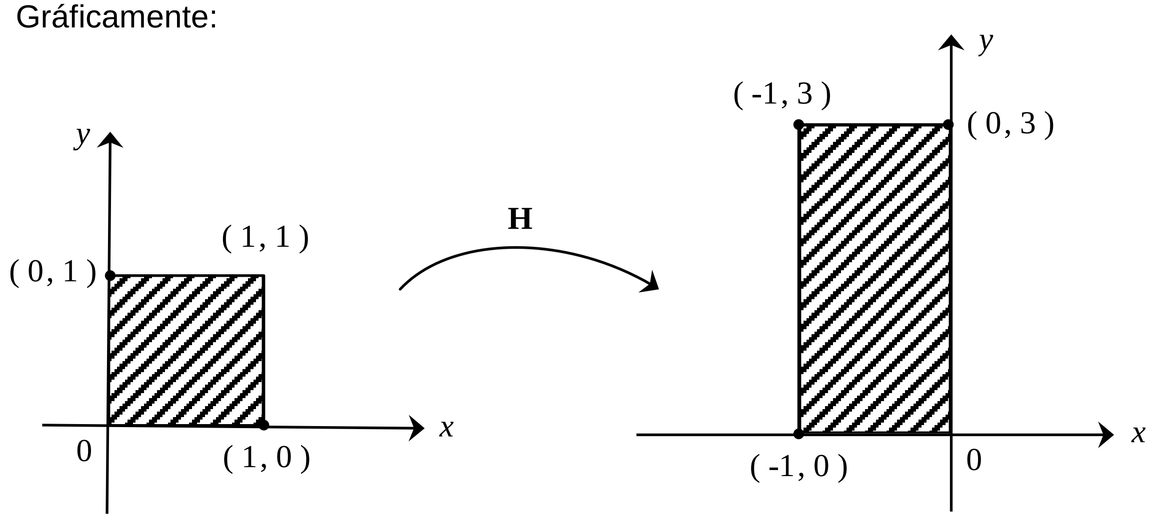
$$H\left(0,0\right) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \therefore \quad H\left(0,0\right) = \left(0,0\right)$$

$$H\left(1,0\right) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \therefore \quad H\left(1,0\right) = \left(0,3\right)$$

$$H\left(1,1\right) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \therefore \quad H\left(1,1\right) = \left(-1,3\right)$$

$$H\left(0,1\right) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \therefore \quad H\left(0,1\right) = \left(-1,0\right)$$

Gráficamente:



Como podemos darnos cuenta, el orden en que se aplican las transformaciones sí modifica el resultado que se obtiene, lo cual era de esperarse pues la composición de transformaciones lineales, en general no es conmutativa.

Valores y vectores característicos (valores y vectores propios)

A las transformaciones lineales que se aplican de un espacio vectorial V al mismo espacio V, se les conoce como operadores lineales

$$T: V \rightarrow V$$

Para este tipo de transformaciones pueden existir vectores diferentes de cero que tienen la siguiente característica:

$$T(\bar{v}) = \lambda \bar{v}$$

Donde $\bar{v} \in V$ y λ es un escalar perteneciente al campo de definición del espacio V.

El concepto anterior se puede definir formalmente de la siguiente manera.

Definición

Sea V un espacio vectorial de dimensión finita definido sobre un campo K y sea $T: V \rightarrow V$ un operador lineal para el cual:

$$T(\bar{v}) = \lambda \bar{v} \quad \text{con} \quad \bar{v} \neq \bar{0}$$

donde λ es un escalar perteneciente a K. Al escalar λ se le llama valor característico de T y al vector $\bar{v}$, diferente de cero, se le conoce como vector característico de T correspondiente al valor λ.

El vector característico tiene que ser diferente de cero, pero el valor característico λ sí puede tomar el valor de cero.

Algunos autores llaman al valor característico valor propio y al vector característico le llaman vector propio.

Propiedades de los valores y vectores característicos

1. Los vectores característicos asociados a valores característicos distintos son linealmente independientes.

2. Si $\bar{v}$ es un vector característico asociado a un valor característico λ, entonces $\alpha \bar{v}$ es también un vector característico asociado a λ, $\forall \alpha \in K$ y $\alpha \neq 0$.

3. Si $\bar{u}$ y $\bar{v}$ son dos vectores característicos asociados a λ y $\bar{u} \neq -\bar{v}$, entonces $\bar{u} + \bar{v}$ es un vector característico asociado λ.

Espacio característico

Al conjunto formado por todos los vectores característicos asociados a un valor característico λ, al cual se le agrega el vector cero, se le llama espacio característico y se representa con $E(\lambda)$.

EJERCICIO 2.10 Sea P el espacio de polinomios de grado menor o igual a dos sobre el campo real y sea $T: P \to P$ el operador lineal definido por:

$$T\left[f(x) \right] = f(x) + f''(x) + x\, f'(x) \quad ; \qquad \forall\ f(x) \in P$$

a) Obtenga los valores y vectores característicos de T.

b) Determine los espacios característicos asociados a cada valor característico.

SOLUCIÓN:

a) Expresemos primero la regla de correspondencia de T de la siguiente manera:

Sea $f(x) = ax^2 + bx + c$ un polinomio cualquiera del espacio P. Se tiene que:

$$\text{Si} \quad f(x) = ax^2 + bx + c$$

$$\Rightarrow \quad f'(x) = 2ax + b$$

$$f''(x) = 2a$$

sustituyendo en la definición de la regla de correspondencia dada, tenemos:

$$T\left(ax^2 + bx + c\right) = \left(ax^2 + bx + c\right) + \left(2a\right) + x\left(2ax + b\right)$$

simplificando:

$$T\left(ax^2 + bx + c\right) = ax^2 + bx + c + 2a + 2ax^2 + bx$$

$$T\left(ax^2 + bx + c\right) = 3ax^2 + 2bx + (2a + c)$$

Con la finalidad de simplificar el procedimiento aplicaremos el concepto de isomorfismo.

Como el espacio vectorial P es de dimensión tres, entonces es isomorfo con $\mathbb{R}^3$, con lo cual se aplicarán los siguientes isomorfismos:

$$h\left(ax^2 + bx + c\right) = (a,\ b,\ c)$$

$$h^{-1}(a,\ b,\ c) = ax^2 + bx + c$$

de acuerdo con esto, la regla de correspondencia del operador T queda:

$$T(a,\ b,\ c) = (3a,\ 2b,\ 2a + c)$$

Obteniendo la matriz asociada a T referida a las bases canónicas, tenemos:

$$T(1,\ 0,\ 0) = (3,\ 0,\ 2)$$

$$T(0,\ 1,\ 0) = (0,\ 2,\ 0)$$

$$T(0,\ 0,\ 1) = (0,\ 0,\ 1)$$

de donde la matriz asociada a T es:

$$M(T) = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} = A$$

Obteniendo el polinomio característico, se tiene:

$$Det(A - \lambda \mathrm{I}) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 2 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)(2-\lambda)(1-\lambda)$$

con lo cual el polinomio característico en forma factorizada es:

$$P(\lambda) = (3-\lambda)(2-\lambda)(1-\lambda)$$

los valores característicos son:

$$\lambda_1 = 3$$

$$\lambda_2 = 2$$

$$\lambda_3 = 1$$

Obteniendo los vectores característicos haciendo uso de la expresión $(A-\lambda\mathrm{I})\,\bar{u} = \bar{0}$, tenemos:

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 2 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \ldots\ldots(1)$$

Para $\lambda_1 = 3$, sustituyendo en (1) y por igualdad de matrices, se tiene:

$$\begin{cases} \qquad\qquad 0 = 0 \\ \quad -y \qquad\quad = 0 \quad \Rightarrow \quad y = 0 \\ 2x \qquad -2z = 0 \quad \Rightarrow \quad x = z \end{cases}$$

Si hacemos $z = k_1$, entonces:

$x = k_1$

con lo cual se tiene:

$$\left(\bar{v}_1 \right)_B = \left(k_1, \ 0, \ k_1 \right)$$

siendo B la base con la cual se obtuvo la matriz asociada a la transformación pero del espacio P . Aplicando h^{-1} a los elementos de la base canónica, tenemos:

$$h^{-1}\left(1, \ 0, \ 0\right) = x^2$$

$$h^{-1}\left(0, \ 1, \ 0\right) = x$$

$$h^{-1}\left(0, \ 0, \ 1\right) = 1$$

$\therefore$ La base B es: $B = \left\{ x^2, \ x, \ 1 \right\}$

Con la base B y el vector de coordenadas de $\bar{v}_1$, se tiene:

$$\bar{v}_1 = k_1 x^2 + k_1 \qquad \text{con} \qquad k_1 \neq 0$$

vectores característicos asociados a λ_1

Para $\lambda_2 = 2$ se tiene:

$$\begin{cases} x \qquad\quad = 0 & \Rightarrow \quad x = 0 \\ \qquad\quad 0 = 0 & \\ 2x \; - z = 0 & \Rightarrow \quad z = 0 \end{cases}$$

Como y no figura en el sistema de ecuaciones, entonces y puede tomar cualquier valor, esto es:

$$\text{si} \qquad y = k_2$$

entonces:

$$\left(\overline{v}_2 \right)_B = \left(0,\ k_2,\ 0 \right)$$

Con lo cual los vectores característicos asociados a λ_2 son:

$$\overline{v}_2 = k_2 x \quad \text{con} \quad k_2 \neq 0$$

Para $\lambda_3 = 1$ se tiene:

$$\begin{cases} 2x \quad = 0 \\ \quad y = 0 \\ 2x \quad = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{matrix} x = 0 \\ y = 0 \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad z = k_3$$

entonces:

$$\left(\overline{v}_3 \right)_B = \left(0,\ 0,\ k_3 \right)$$

de donde los vectores característicos asociados a λ_3 son:

$$\overline{v}_3 = k_3 \quad \text{con} \quad k_3 \neq 0$$

b) De acuerdo con los resultados obtenidos en el inciso anterior, se tiene que los espacios característicos son:

$$E\left(\lambda_1\right) = \left\{ k_1 x^2 + k_1 \,\middle|\, k_1 \in \mathbb{R} \right\}$$

$$E\left(\lambda_2\right) = \left\{ k_2 x \,\middle|\, k_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

$$E\left(\lambda_3\right) = \left\{ k_3 \,\middle|\, k_3 \in \mathbb{R} \right\}$$

EJERCICIO 2.11 Para el operador lineal $T : M \to M$ donde:

$$M = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \,\middle|\, a,\, b,\, c \in \mathbb{R} \right\}$$

y cuya regla de correspondencia es:

$$T\left(\begin{bmatrix} x & y \\ y & z \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 3x + y - 5z & x + 3y - 5z \\ x + 3y - 5z & 2z \end{bmatrix} ; \quad \forall \begin{bmatrix} x & y \\ y & z \end{bmatrix} \in M$$

obtenga los valores, vectores y espacios característicos de T.

SOLUCIÓN:

Como el espacio vectorial M es de dimensión tres, entonces se emplearán los siguientes isomorfismos:

$$f = \left(\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \right) = \left(a,\, b,\, c \right)$$

$$f^{-1} = \left(a,\, b,\, c \right) = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$$

Con lo cual la regla de correspondencia de T queda:

$$T\left(x, y, z \right) = \left(3x + y - 5z,\;\; x + 3y - 5z,\;\; 2z \right) ; \quad \forall \left(x, y, z \right) \in \mathbb{R}^3$$

Obteniendo la matriz asociada a T referida a las bases canónicas, tenemos:

$$T\left(1,\ 0,\ 0\right) = \left(3,\ 1,\ 0\right)$$

$$T\left(0,\ 1,\ 0\right) = \left(1,\ 3,\ 0\right)$$

$$T\left(0,\ 0,\ 1\right) = \left(-5,\ -5,\ 2\right)$$

entonces la matriz asociada a T es:

$$M\left(T\right) = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -5 \\ 1 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = A$$

con lo cual el polinomio característico se obtiene a partir de:

$$Det\left(A-\lambda\mathrm{I}\right) = \begin{bmatrix} 3-\lambda & 1 & -5 \\ 1 & 3-\lambda & -5 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{bmatrix} = \left(3-\lambda\right)\left(3-\lambda\right)\left(2-\lambda\right)-\left(2-\lambda\right)$$

$$Det\left(A-\lambda\mathrm{I}\right) = \left(2-\lambda\right)\left[\left(3-\lambda\right)^2-1\right] = \left(2-\lambda\right)\left(\lambda^2-6\lambda+8\right)$$

factorizando se tiene:

$$Det\left(A-\lambda\mathrm{I}\right) = \left(2-\lambda\right)\left(\lambda-2\right)\left(\lambda-4\right)$$

entonces los valores característicos son:

$$\lambda_1 = 2$$

$$\lambda_2 = 2$$

$$\lambda_3 = 4$$

como $\left(A - \lambda \mathrm{I} \right) \bar{u} = \bar{0}$ es:

$$\begin{bmatrix} 3-\lambda & 1 & -5 \\ 1 & 3-\lambda & -5 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \ldots\ldots(1)$$

los vectores característicos se obtienen a partir del siguiente procedimiento:

Para $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$, sustituyendo en (1) tenemos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -5 \\ 1 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

con lo cual se llega al sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x + y - 5z = 0 \\ x + y - 5z = 0 \\ \qquad\quad 0 = 0 \end{cases}$$

al escalonarlo se obtiene:

$$\begin{cases} x + y - 5z = 0 \\ \qquad\quad 0 = 0 \\ \qquad\quad 0 = 0 \end{cases}$$

Se trata de un sistema de ecuaciones compatible indeterminado con dos grados de libertad, entonces:

Si $\quad y = k_1$

y $\quad z = k_2$

$\Rightarrow \quad x = -k_1 + 5k_2$

de donde se obtiene que:

$$\left(\bar{v}_1 \right)_B = \left(-k_1 + 5k_2 ,\ k_1 ,\ k_2 \right)$$

como la base B es:

$$B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},\ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

Esta base se obtiene al aplicar f^{-1} a los elementos de la base canónica, que es la base con la cual se obtuvo $M\left(T \right)$.

Conocido el vector de coordenadas de $\bar{v}_1$ y la base B, entonces los vectores característicos asociados a λ_1 y λ_2 son:

$$\bar{v}_1 = \begin{bmatrix} -k_1 + 5k_2 & k_1 \\ k_1 & k_2 \end{bmatrix} \quad \text{con} \quad k_1 \ \text{y/o} \ k_2 \neq 0$$

Para $\lambda_3 = 4$ se tiene que:

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & -5 \\ 1 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

de donde se llega a:

$$\begin{cases} -x + y - 5z = 0 \\ x - y - 5z = 0 \\ \qquad\quad -2z = 0 \end{cases}$$

al escalonarlo se obtiene:

$$\begin{cases} x - y - 5z = 0 \\ \qquad\quad - 10z = 0 \\ \qquad\quad - 2z = 0 \end{cases}$$

Como $z = 0$, entonces de la primera ecuación se obtiene:

$x = y$

si $y = k_3 \quad \Rightarrow \quad x = k_3$

con lo cual:

$$\left(\bar{v}_2 \right) = \left(k_3,\ k_3,\ 0 \right)$$

entonces, de la misma forma como se procedió en el caso anterior, se llega a:

$$\bar{v}_2 = \begin{bmatrix} k_3 & k_3 \\ k_3 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{con} \quad k_3 \neq 0$$

vectores característicos asociados a $\lambda_3 = 4$.

Finalmente, se tiene que los espacios característicos son:

$$E\left(\lambda_1 \text{ y } \lambda_2 \right) = \left\{ \begin{bmatrix} -k_1 + 5k_2 & k_1 \\ k_1 & k_2 \end{bmatrix} \;\middle|\; k_1 \text{ y } k_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

$$E\left(\lambda_3 \right) = \left\{ \begin{bmatrix} k_3 & k_3 \\ k_3 & 0 \end{bmatrix} \;\middle|\; k_3 \in \mathbb{R} \right\}$$

Obsérvese que el espacio característico asociado a λ_1 y λ_2 es de dimensión dos.

Matrices similares

Se tiene que dos matrices A y B de orden $n \times n$ son similares, si existe una matriz no singular C, tal que:

$$B = C^{-1}AC$$

Teorema:

Dos matrices representan al mismo operador lineal, si y sólo si, son similares.

Propiedades de las matrices similares

1. Si A y B son matrices similares, entonces $Det(A) = Det(B)$.

2. Dos matrices similares tienen el mismo polinomio característico y, por lo tanto, los mismos valores característicos.

Diagonalización

Si V es un espacio vectorial de dimensión n y $T : V \to V$ es un operador lineal, entonces existe una matriz diagonal asociada a T, cuando se puede definir una base de V formada por vectores característicos de T. La matriz asociada a T referida a esta base, es una matriz diagonal D cuyos elementos d_{ii} son los valores característicos de T.

Teorema

Sea A de $n \times n$ una matriz asociada a un operador lineal T.

La matriz A será similar a una matriz diagonal D, si y sólo si, existe un conjunto linealmente independiente formado por n vectores característicos de T. Para este caso, existe una matriz no singular P, para la cual se cumple que $D = P^{-1}AP$, donde P tiene como columnas a los n vectores característicos de T correspondientes a los valores característicos d_{ii} que definen a la matriz diagonal D.

EJERCICIO 2.12 Para el operador lineal $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definido por:

$$T(x,\ y,\ z) = (x,\ 5x+2y-2z,\ x+3z)\ ;\quad \forall\ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$$

a) Obtenga los valores y vectores característicos de T.

b) Determine los espacios característicos de T.

c) Defina una matriz diagonalizadora P.

d) Compruebe que $D = P^{-1}AP$.

SOLUCIÓN:

a) Obtengamos primero la matriz asociada al operador T referida a la base canónica de $\mathbb{R}^3$.

$$T(1,\ 0,\ 0) = (1,\ 5,\ 1)$$

$$T(0,\ 1,\ 0) = (0,\ 2,\ 0) \quad \Rightarrow \quad M(T) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} = A$$

$$T(0,\ 0,\ 1) = (0,\ -2,\ 3)$$

de donde el polinomio característico se obtiene con:

$$Det(A - \lambda \mathrm{I}) = \begin{bmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 5 & 2-\lambda & -2 \\ 1 & 0 & 3-\lambda \end{bmatrix} = (1-\lambda)(2-\lambda)(3-\lambda)$$

por lo tanto, los valores característicos son:

$$\lambda_1 = 1$$

$$\lambda_2 = 2$$

$$\lambda_3 = 3$$

Obteniendo los vectores característicos, tenemos:

Para $\lambda_1 = 1$ se tiene:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 5x + y - 2z = 0 \\ \\ x \qquad + 2z = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad x = -2z$$

si $\quad z = k_1$

$\Rightarrow \quad x = -2k_1 \qquad \therefore \quad \bar{v}_1 = \left(-2k_1,\ 12k_1,\ k_1 \right)$ con $k_1 \neq 0$

$\qquad y = 12k_1 \qquad$ vectores característicos asociados a λ_1

Para $\lambda_2 = 2$ se tiene:

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -x = 0 \\ 5x - 2z = 0 \\ x + z = 0 \end{cases}$$

de donde se obtiene que:

$x = 0$

$y = k_2 \qquad \therefore \qquad \bar{v}_2 = \left(0,\ k_2,\ 0 \right)$ con $k_2 \neq 0$

$z = 0 \qquad$ vectores característicos asociados a λ_2

Para $\lambda_3 = 3$ se tiene:

$$\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 5 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -2x = 0 \\ 5x - y - 2z = 0 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad y = -2z$$

de donde se obtiene que:

$x = 0$

$y = -2k_3 \qquad \therefore \qquad \bar{v}_3 = \left(0,\ -2k_3,\ k_3 \right)$ con $k_3 \neq 0$

$z = k_3 \qquad$ vectores característicos asociados a λ_3

b) Los espacios característicos son:

$$E(\lambda_1) = \{(-2k_1,\ 12k_1,\ k_1) \mid k_1 \in \mathbb{R}\}$$

$$E(\lambda_2) = \{(0,\ k_2,\ 0) \mid k_2 \in \mathbb{R}\}$$

$$E(\lambda_3) = \{(0,\ -2k_3,\ k_3) \mid k_3 \in \mathbb{R}\}$$

c) En forma general la matriz P es:

$$P = \begin{bmatrix} -2k_1 & 0 & 0 \\ 12k_1 & k_2 & -2k_3 \\ k_1 & 0 & k_3 \end{bmatrix}$$

si se hace que:

$$k_1 = 1$$

$$k_2 = 2$$

$$k_3 = -1$$

entonces una matriz diagonalizadora sería:

$$P = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 12 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

cuya inversa es:

$$P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 7 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

d) Sustituyendo tenemos que:

$$D = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 7 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 12 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

desarrollando los productos se tiene:

$$D = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 7 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 12 & 4 & 6 \\ 1 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

$$D = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

de donde:

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

EJERCICIO 2.13 Para el operador lineal $T: P_2 \to P_2$ donde:

$$P_2 = \left\{ ax^2 + bx + c \mid a,\ b,\ c \in \mathbb{R} \right\}$$

definido por:

$$T\left(ax^2 + bx + c\right) = (a - 2c)\,x^2 + (-2a + 4c)\ ; \qquad \forall\ ax^2 + bx + c \in P_2$$

a) Determine si la matriz que representa al operador T es diagonalizable,

b) en caso afirmativo, obtener una matriz diagonal D asociada a T, y

c) determine una base a la cual está referida la matriz diagonal D del inciso anterior.

SOLUCIÓN:

Con el fin de simplificar el procedimiento se emplearán los siguientes isomorfismos:

$$f\left(ax^2 + bx + c\right) = (a,\ b,\ c)$$

$$f^{-1}(a,\ b,\ c) = ax^2 + bx + c$$

De esta forma, la regla de correspondencia del operador T es:

$$T(a,\ b,\ c) = (a - 2c,\ 0,\ -2a + 4c)\ ; \quad \forall\ (a,\ b,\ c) \in \mathbb{R}^3$$

a) Obteniendo los valores y vectores característicos, tenemos:

$$T(1,\ 0,\ 0) = (1,\ 0,\ -2)$$

$$T(0,\ 1,\ 0) = (0,\ 0,\ 0) \quad \Rightarrow \quad M(T) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{bmatrix} = A$$

$$T(0,\ 0,\ 1) = (-2,\ 0,\ 4)$$

El polinomio característico viene dado por:

$$Det\left(A-\lambda\mathrm{I}\right)=\begin{bmatrix}1-\lambda & 0 & -2\\ 0 & -\lambda & 0\\ -2 & 0 & 4-\lambda\end{bmatrix}=\left(1-\lambda\right)\left(-\lambda\right)\left(4-\lambda\right)+4\lambda$$

$$P\left(\lambda\right)=-\lambda\left(4-\lambda-4\lambda+\lambda^2\right)+4\lambda$$

$$P\left(\lambda\right)=-\lambda^3+5\lambda^2-4\lambda+4\lambda$$

$$P\left(\lambda\right)=-\lambda^3+5\lambda^2=\lambda^2\left(-\lambda+5\right)$$

Por lo que los valores característicos son:

$$\lambda_1=0$$

$$\lambda_2=0$$

$$\lambda_3=5$$

Obteniendo los vectores característicos, tenemos:

Para $\lambda_1=\lambda_2=0$ se tiene:

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & -2\\ 0 & 0 & 0\\ -2 & 0 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}\quad\Rightarrow\quad\begin{cases}x-2z=0\\ 0=0\\ -2x+4z=0\end{cases}$$

al escalonar el sistema se reduce a:

$$\left\{x-2z=0\right.\quad\Rightarrow\quad x=2z$$

Se trata de un sistema compatible indeterminado con dos grados de libertad, con lo cual se tiene que su solución general es:

si $z=k_1 \quad\Rightarrow\quad x=2k_1$

con $y=k_2$

con lo cual los vectores característicos asociados a λ_1 y λ_2 son:

$$\bar{v}_1 = \left(2\,k_1,\ k_2,\ k_1 \right) \quad \text{con} \quad k_1 \neq 0 \quad \text{y/o} \quad k_2 \neq 0$$

Para $k_3 = 5$ se tiene:

$$\begin{bmatrix} -4 & 0 & -2 \\ 0 & -5 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} -4x \qquad -2z = 0 \\ \qquad -5y \qquad = 0 \\ -2x \qquad -z = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad y = 0$$

al escalonar el sistema se llega a:

$$\begin{cases} 2x + z = 0 \\ \qquad y = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad z = -2x$$

Obteniendo la solución general tenemos:

Si $\quad x = k_3 \quad \Rightarrow \quad z = -2k_3 \quad$ con $\quad y = 0$

por lo que los vectores característicos asociados a λ_3 son:

$$\bar{v}_3 = \left(k_3,\ 0,\ -2\,k_3 \right) \quad \text{con} \quad k_3 \neq 0$$

Obsérvese que el espacio característico asociado a λ_1 y λ_2 es de dimensión dos, por lo que una base de dicho espacio sería:

$$B = \left\{ \left(2,\ 0,\ 1 \right),\ \left(0,\ 1,\ 0 \right) \right\}$$

Los elementos de esta base son vectores característicos asociados a λ_1 y λ_2.

Para el caso de $\bar{v}_3$ un vector característico es:

$$\left(1 ,\ 0 ,\ -2 \right)$$

Como la matriz diagonalizadora P está formada con los vectores característicos dispuestos en forma de columna, entonces tenemos que:

$$P = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Si P es no singular, esto es, si existe P^{-1}, entonces la matriz A es diagonalizable. Dado que:

$$Det\left(P \right) = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -5$$

entonces:

$$Det\left(P \right) \neq 0 \qquad \therefore \qquad P^{-1} \text{ existe}$$

con lo cual podemos asegurar que A es diagonalizable.

Tenemos que los valores y vectores característicos del operador original T, aplicando f^{-1}, son:

Para $\lambda_1 = \lambda_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \bar{v}_1 = 2k_1x^2 + k_2x + k_1$ con $k_1 \neq 0$ y / o $k_2 \neq 0$

Para $\lambda_1 = 5 \quad \Rightarrow \quad \bar{v}_3 = k_3x^2 - 2k_3$ con $k_3 \neq 0$

b) Con esta matriz P y empleando la expresión $D = P^{-1}AP$ se llega a que la matriz D es:

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

c) Una base a la cual está referida la matriz D es la formada por los vectores característicos obtenidos, esto es:

$$f^{-1}(2, 0, 1) = 2x^2 + 1$$

$$f^{-1}(0, 1, 0) = x$$

$$f^{-1}(1, 0, -2) = x^2 - 2$$

$\therefore$ La base solicitada es $B = \{ 2x^2 + 1, \ x, \ x^2 - 2 \}$

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Sea la transformación $T:\ \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por:

$$T\left(x,\ y,\ z\right)=\left(\ y-2z,\ y+z,\ x+2y-3z\right);\quad \forall\left(x,\ y,\ z\right)\in\mathbb{R}^3$$

a) Determine si T es lineal.

b) Obtenga el recorrido y el núcleo de T y la dimensión de ambos.

c) Verifique que se cumple que la dimensión del dominio es igual a la dimensión del recorrido más la dimensión del núcleo.

d) Obtenga $\left(T\circ 3T^{-1}\right)\left(x,\ y,\ z\right)$.

2. Sea la transformación $T:M\rightarrow\mathbb{R}^3$, donde M es el espacio de matrices cuadradas de orden dos con elementos reales, tal que:

$$T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right)=\left(a+b+c,\ a-d,\ b+c+d\right);\quad \forall\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\in M$$

a) Determine si T es lineal.

b) Obtenga el núcleo de T y su dimensión.

c) Determine el recorrido de T y su dimensión.

3. Sean V y W los espacios vectoriales

$$V=\left\{\,ax+b\ \middle|\ a,\ b\in\mathbb{R}\,\right\}\qquad \text{y}\qquad W=\left\{\,ax^2+bx+c\ \middle|\ a,\ b,\ c\in\mathbb{R}\,\right\}$$

Si la transformación lineal $T:V\rightarrow W$ se define por:

$$T\left(P(x)\right)=x\,P(x)\quad;\quad\forall\ P(x)\in V$$

obtenga la matriz asociada a T referida a las bases:

$A = \{ x,\ 1 \}$ del dominio.

$B = \{ x^2+2x+1,\ 9x+2,\ 4x^2+3x+3 \}$ del codominio.

4. Dadas las transformaciones lineales

$T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $T(x, y) = (-y,\ x+6y)$

$S: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $S(x, y) = (2x+7y,\ 9x+y)$

$H: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $H(x, y) = (x+2y,\ 2x+y)$

determine las componentes del vector $\bar{u} \in \mathbb{R}^2$ tal que:

$$\left[T^{-1} \circ (S - 3H) \right] \bar{u} = (8,\ -3)$$

5. Sean las transformaciones lineales

$$S: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \ , \quad T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \ \text{ y } \ H: \mathbb{R}^2 \to M$$

definidas por:

$$S(x,\ y) = (2x - y,\ x + y)\ ; \quad \forall\ (x,\ y) \in \mathbb{R}^2$$

$$T(x,\ y) = (y,\ x)\ ; \quad \forall\ (x,\ y) \in \mathbb{R}^2$$

$$H(x,\ y) = \begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{bmatrix}; \quad \forall\ (x,\ y) \in \mathbb{R}^2$$

donde $M = \left\{ \begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{bmatrix} \middle|\ x,\ y \in \mathbb{R} \right\}$

Determine la regla de correspondencia de la transformación Q , tal que:

$$3S + T = Q \circ H$$

6. Sean los espacios vectoriales

$$P_2 = \left\{ a x^2 + b x + c \mid a,\ b,\ c \in \mathbb{R} \right\} \quad \text{y} \quad M = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \middle| \ a,\ b,\ c \in \mathbb{R} \right\}$$

ambos definidos sobre el campo real, y sea la transformación lineal $T:\ P_2 \to M$ definida por:

$$T\left(a x^2 + b x + c \right) = \begin{bmatrix} a+c & 3b \\ 3b & a-c \end{bmatrix} \quad ; \quad \forall\ a x^2 + b x + c \in P_2$$

Obtenga la regla de correspondencia de T^{-1}.

7. Sea la región definida por los puntos $(0,\ 0),\ (1,\ 0),\ (1,\ 1),\ (0,\ 1)$. Determine el efecto geométrico que produce:

a) El realizar primero una reflexión con respecto al origen y después una contracción vertical con $k = \dfrac{1}{2}$.

b) El realizar primero una deformación a lo largo del eje x con $k = 1$ y después una reflexión sobre el eje y.

8. Sean $A = \left\{ \bar{u}_1,\ \bar{u}_2 \right\}$ y $B = \left\{ \bar{v}_1,\ \bar{v}_2 \right\}$ dos bases de $\mathbb{R}^2$, donde:

$$\bar{u}_1 = (2,\ 1) \qquad \bar{v}_1 = (1,\ -2)$$

$$\bar{u}_2 = (1,\ -1) \qquad \bar{v}_2 = (0,\ 1)$$

y sea $T:\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ una transformación lineal, tal que:

$$T\left(\bar{u}_1 \right) = 2\bar{v}_1 + \bar{v}_2 \quad \text{y} \quad T\left(\bar{u}_2 \right) = \bar{v}_1 - \bar{v}_2$$

Determine:

a) Los valores y vectores característicos de T.

b) Los espacios característicos asociados a cada valor característico.

9. Sea la matriz:

$$M(T) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

la representación matricial del operador lineal $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, referida a la base canónica.

a) Obtenga los espacios característicos asociados a los valores característicos del operador T.

b) Determine si T es diagonalizable.

c) En caso de resultar afirmativo el inciso anterior, obtenga la matriz diagonal asociada a T y una base a la cual esté referida.

10. Sea $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un operador lineal definido por:

$$T(x,\ y,\ z) = (4x + z,\ 2x + 3y + 2z,\ x + 4z)\ ; \quad \forall\ (x,\ y,\ z) \in \mathbb{R}^3$$

a) Obtenga los espacios característicos asociados a los valores característicos del operador T.

b) Determine si T es diagonalizable.

c) En caso de resultar afirmativo el inciso anterior, obtenga una matriz diagonalizadora P.

d) Compruebe que se cumple la expresión $D = P^{-1}AP$ con la matriz P obtenida en el inciso anterior.

e) Dé una base de $\mathbb{R}^3$ para la cual la matriz asociada a T es diagonal.

RESPUESTAS A LOS EJERCICIOS PROPUESTOS

1. **a)** T es lineal.

b) Como la $Dim\ R(T) = 3$, esto implica que el recorrido de T es $\mathbb{R}^3$.

$$N(T) = \{(0,\ 0,\ 0)\} \quad \therefore \quad Dim\ N(T) = 0$$

c) Si se cumple.

d) $\left(T \circ 3T^{-1}\right)(x,\ y,\ z) = (3x,\ 3y,\ 3z)$.

2. **a)** T es lineal.

b) $N(T) = \left\{ \begin{bmatrix} d & -c-d \\ c & d \end{bmatrix} \middle| \ c,\ d \in \mathbb{R} \right\} \Rightarrow Dim\ N(T) = 2$

c) $R(T) = \{(a,\ a-b,\ b) \mid a,\ b \in \mathbb{R}\} \Rightarrow Dim\ R(T) = 2$

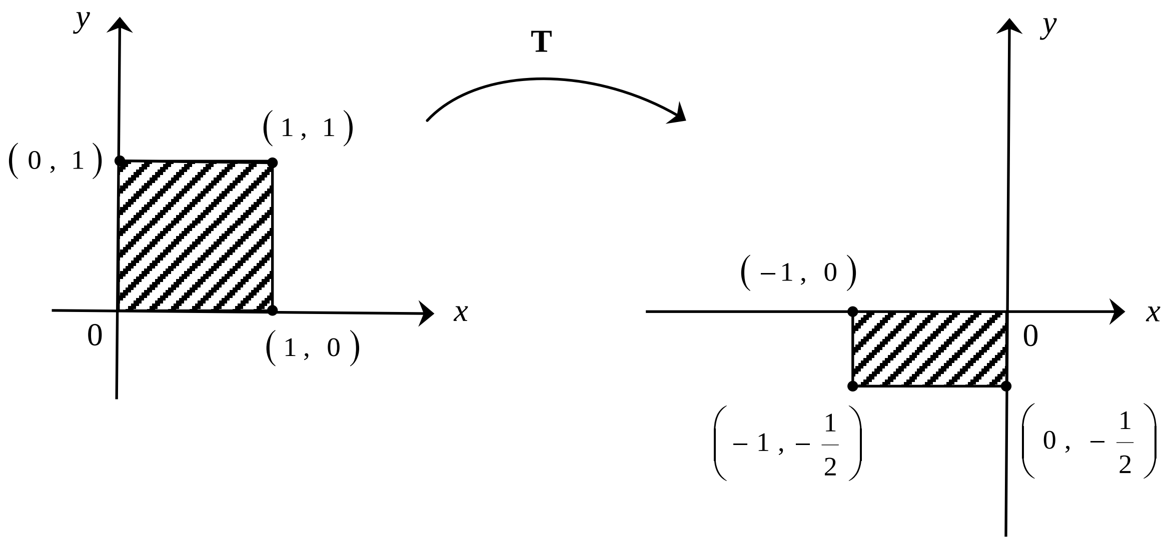
3. $M(T) = \begin{bmatrix} 21 & 8 \\ -3 & -1 \\ -5 & -2 \end{bmatrix}$

4. $\bar{u} = (-4,\ -1)$

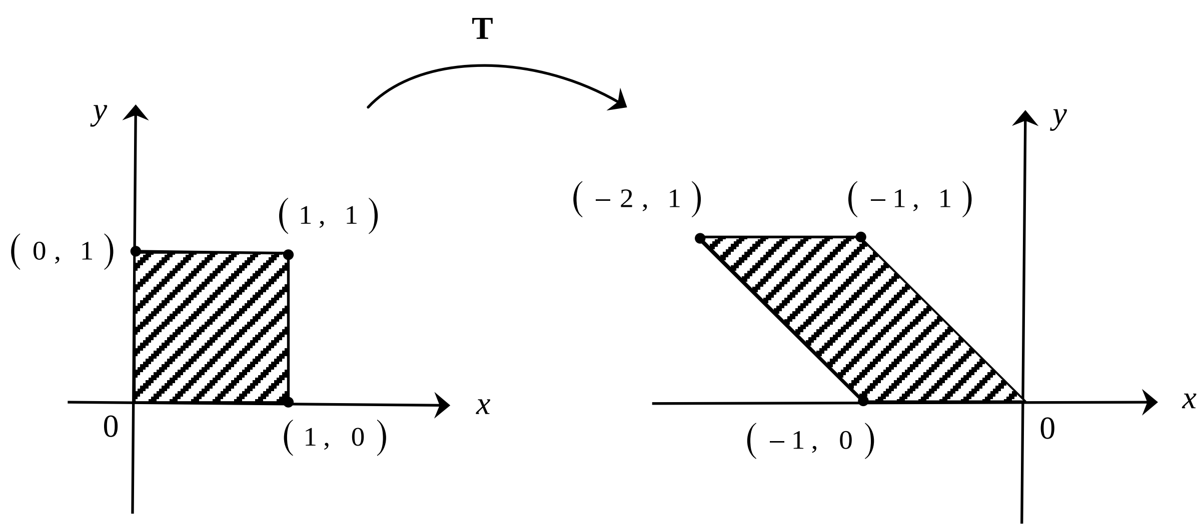
5. $Q\left(\begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{bmatrix}\right) = (6x - 2y,\ 4x + 3y)$

6. $T^{-1}\left(\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}\right) = \left(\dfrac{a+c}{2}\right)x^2 + \left(\dfrac{b}{3}\right)x + \dfrac{a-c}{2}$

7. a)



b)



8. **a)** $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$

$\bar{v}_{1,2} = (0, k)$ con $k \neq 0$

b) $\mathrm{E}\left(\lambda_{1,2}\right) = \{(0, k) \mid k \in \mathbb{R}\}$

9. **a)** $\mathrm{E}\left(\lambda_{1,2}\right) = \left\{\left(k_1, -2k_1 + 2k_2, k_2\right) \mid k_1 \ y \ k_2 \in \mathbb{R}\right\}$

$\mathrm{E}\left(\lambda_3\right) = \left\{\left(0, k_3, 0\right) \mid k_3 \in \mathbb{R}\right\}$

b) T sí es diagonalizable.

c) $D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$B = \{(1, -2, 0), (0, 2, 1), (0, 1, 0)\}$

10. **a)** $\mathrm{E}\left(\lambda_{1,2}\right) = \left\{\left(k_1, k_2, -k_1\right) \mid k_1 \ y \ k_2 \in \mathbb{R}\right\}$

$\mathrm{E}\left(\lambda_3\right) = \left\{\left(k_3, 2k_3, k_3\right) \mid k_3 \in \mathbb{R}\right\}$

b) T sí es diagonalizable.

c) $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

e) $B = \{(1, 1, -1), (0, 1, 0), (1, 2, 1)\}$ base formada por vectores característicos.