CAPÍTULO 1

ESPACIOS VECTORIALES

Espacio vectorial

Sea V un conjunto no vacío, en el cual se definen dos operaciones llamadas adición y multiplicación por un escalar y, sea K un campo. Se dice que V es un espacio vectorial sobre K si las dos operaciones cumplen con los diez axiomas siguientes:

$\forall\ \bar{u},\ \bar{v},\ \bar{w} \in V$ y $\forall\ \alpha,\ \beta \in K$

1. $(\bar{u} + \bar{v}) \in V$

2. $(\bar{u} + \bar{v}) + \bar{w} = \bar{u} + (\bar{v} + \bar{w})$

3. $\exists\ \bar{0} \in V \mid \forall\ \bar{u} \in V;\ \bar{u} + \bar{0} = \bar{0} + \bar{u} = \bar{u}$

4. $\forall\ \bar{u} \in V;\ \ \exists\ (-\bar{u}) \in V \mid \bar{u} + (-\bar{u}) = (-\bar{u}) + \bar{u} = \bar{0}$

5. $\bar{u} + \bar{v} = \bar{v} + \bar{u}$

6. $(\alpha\,\bar{u}) \in V$

7. $\alpha(\bar{u} + \bar{v}) = \alpha\bar{u} + \alpha\bar{v}$

8. $(\alpha + \beta)\,\bar{u} = \alpha\bar{u} + \beta\,\bar{u}$

9. $\alpha(\beta\bar{u}) = (\alpha\beta)\,\bar{u}$

10. Si 1 es la unidad de K, entonces $1\,\bar{u} = \bar{u}\ ;\ \ \forall\ \bar{u} \in V$

A los elementos del conjunto V se les llama vectores y a los elementos del campo K se les llama escalares.

EJEMPLO 1.1 Determine si el conjunto $A = \left\{ x \mid x \in \mathbb{R}^{+} \right\}$ y las operaciones de adición y multiplicación por un escalar definidas por:

$$x + y = x\,y \;; \qquad \forall \; x, y \in \mathbb{R}^{+}$$

$$\alpha x = x^{\alpha} \;; \qquad \forall \; x \in \mathbb{R}^{+} \; \text{ y } \; \forall \; \alpha \in \mathbb{R}$$

es un espacio vectorial.

SOLUCIÓN:

Veamos si se cumplen los diez axiomas de espacio vectorial.

$\forall \; x, \; y, \; z \in A$ y $\forall \; \alpha, \; \beta \in \mathbb{R}$, tenemos:

1) $x + y = x\,y \in A$ Dado que la multiplicación de dos reales positivos da un real positivo, entonces se cumple.

2) $\left(x + y \right) + z = x + \left(y + z \right)$

$$xy + z = x + yz$$

$$xyz = xyz \qquad \therefore \; \text{cumple}$$

Con el fin de simplificar la demostración del cumplimiento de los axiomas 3 y 4, se demostrará primero el cumplimiento del axioma 5. De no ser así, en los axiomas 3 y 4 se tendrían que determinar los idénticos e inversos izquierdos y derechos, y compararlos para saber si son iguales en cada caso, y con ello concluir sobre su existencia o no existencia. Si se procede como se está sugiriendo, entonces no será necesario realizar el procedimiento descrito renglones arriba, pues se demuestra primero el axioma de la conmutatividad.

De lo anterior se tiene que:

5) $x + y = y + x$

$$xy = yx$$

Se cumple dada la conmutatividad de la multiplicación en $\mathbb{R}$.

3) $\forall\ x \in A;\ \ \exists\ e \in A \mid e + x = x + e = x$
de donde:

$$x + e = x$$
$$xe = x$$
$$e = 1 \in x \qquad \therefore \quad \text{cumple}$$

4) $\forall\ x \in A;\ \ \exists\ i \in A \mid i + x = x + i = e$
de donde:

$$x + i = e$$
$$xi = 1$$
$$i = \frac{1}{x} \in A \qquad \therefore \quad \text{cumple}$$

6) $\alpha x = x^{\alpha} \in A$ dado que:

- Si $\alpha > 0$, entonces x^{α} es positivo.
- Si $\alpha = 0$, entonces $x^{\alpha} = 1$
- Si $\alpha < 0$, entonces $x^{-\alpha} = \dfrac{1}{x^{\alpha}}$ que es positivo.

$\therefore$ cumple

7) $\alpha\,(x + y) = \alpha x + \alpha y$

$$\alpha\,(xy) = x^{\alpha} + y^{\alpha}$$
$$(xy)^{\alpha} = x^{\alpha}\, y^{\alpha}$$
$$(xy)^{\alpha} = (xy)^{\alpha} \qquad \therefore \quad \text{cumple}$$

8) $(\alpha + \beta)\, x = \alpha x + \beta x$

$$x^{\alpha+\beta} = x^{\alpha} + x^{\beta}$$
$$x^{\alpha+\beta} = x^{\alpha}\, x^{\beta}$$
$$x^{\alpha+\beta} = x^{\alpha+\beta} \qquad \therefore \quad \text{cumple}$$

9. $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$

$\alpha\left(x^{\beta}\right) = x^{\alpha\beta}$

$\left(x^{\beta}\right)^{\alpha} = x^{\alpha\beta}$

$x^{\alpha\beta} = x^{\alpha\beta}$ $\therefore$ cumple

10. $\exists\ \alpha \in \mathbb{R} \mid \alpha x = x ;\ \forall\ x \in A$

$\alpha x = x$

$x^{\alpha} = x$

$\alpha = 1$ que es la unidad en $\mathbb{R}$ $\therefore$ cumple

Dado que se cumplen los diez axiomas, podemos concluir que el conjunto A es un espacio vectorial.

EJEMPLO 1.2 Determine si $\mathbb{R}^2$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ para la adición y la multiplicación por un escalar definidas por:

$$\left(x_1,\ y_1\right) + \left(x_2,\ y_2\right) = \left(x_1 + x_2,\ y_1 + y_2\right);\quad \forall\left(x_1,\ y_1\right), \left(x_2,\ y_2\right) \in \mathbb{R}^2$$

$$\alpha(x,\ y) = (\alpha y,\ \alpha x);\quad \forall\,(x,\ y) \in \mathbb{R}^2;\quad \alpha \in \mathbb{R}$$

En caso de no serlo, indique cuáles propiedades de la definición no se cumplen.

SOLUCIÓN:

$\forall\left(x_1,\ y_1\right),\ \left(x_2,\ y_2\right),\ \left(x_3,\ y_3\right) \in \mathbb{R}^2$ y $\forall\ \alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$, tenemos:

1) $\left(x_1 ,\ y_1 \right) + \left(x_2 ,\ y_2 \right) = \left(x_1 + x_2 ,\ y_1 + y_2 \right) \in \mathbb{R}^2 \quad \therefore$ cumple

2) $\left[\left(x_1 ,\ y_1 \right) + \left(x_2 ,\ y_2 \right) \right] + \left(x_3 ,\ y_3 \right) = \left(x_1 ,\ y_1 \right) + \left[\left(x_2 ,\ y_2 \right) + \left(x_3 , y_3 \right) \right]$

$$\left(x_1 + x_2 ,\ y_1 + y_2 \right) + \left(x_3 ,\ y_3 \right) = \left(x_1 ,\ y_1 \right) + \left(x_2 + x_3 ,\ y_2 + y_3 \right)$$

$$\left(x_1 + x_2 + x_3 ,\ y_1 + y_2 + y_3 \right) = \left(x_1 + x_2 + x_3 ,\ y_1 + y_2 + y_3 \right)$$

$\therefore$ cumple

Siguiendo la recomendación hecha en el ejercicio anterior, demostraremos primero que se satisface el axioma 5.

5) $\left(x_1 ,\ y_1 \right) + \left(x_2 ,\ y_2 \right) = \left(x_2 ,\ y_2 \right) + \left(x_1 ,\ y_1 \right)$

$$\left(x_1 + x_2 ,\ y_1 + y_2 \right) = \left(x_2 + x_1 ,\ y_2 + y_1 \right)$$

Dada la conmutatividad de la adición en $\mathbb{R}$, entonces se cumple.

3) $\forall \left(x, y \right) \in \mathbb{R}^2 ;\ \exists \left(e_1 ,\ e_2 \right) \in \mathbb{R}^2 \mid \left(x, y \right) + \left(e_1 ,\ e_2 \right) = \left(e_2 ,\ e_1 \right) + \left(x, y \right) = \left(x, y \right)$

De donde se tiene que:

$$\left(x,\ y \right) + \left(e_1 ,\ e_2 \right) = \left(x,\ y \right)$$

esta igualdad se cumple, si y sólo si:

$$\left(e_1 ,\ e_2 \right) = \left(0,\ 0 \right) \in \mathbb{R}^2 \qquad \therefore \text{ cumple}$$

4) $\forall \left(x, y \right) \in \mathbb{R}^2 ;\ \exists \left(i_1 ,\ i_2 \right) \in \mathbb{R}^2 \mid \left(x, y \right) + \left(i_1 ,\ i_2 \right) = \left(i_1 ,\ i_2 \right) + \left(x, y \right) = \left(e_1 ,\ e_2 \right)$

Considerando:

$$\left(x,\ y \right) + \left(i_1 ,\ i_2 \right) = \left(e_1 ,\ e_2 \right)$$

$$\left(x + i_1 ,\ y + i_2 \right) = \left(0,\ 0 \right)$$

con lo cual se llega a:

$$\begin{matrix} i_1 = -x \\ i_2 = -y \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad \left(i_1 ,\ i_2 \right) = \left(-x ,\ -y \right) \in \mathbb{R}^2 \qquad \therefore \text{ cumple}$$

6) $\alpha\left(x_1,\ y_1 \right) = \left(\alpha y_1,\ \alpha x_1 \right) \in \mathbb{R}^2 \qquad \therefore \quad \text{cumple}$

7) $\alpha\left[\left(x_1,\ y_1 \right) + \left(x_2,\ y_2 \right) \right] = \alpha\left(x_1,\ y_1 \right) + \alpha\left(x_2,\ y_2 \right)$

$$\alpha\left(x_1 + x_2,\ y_1 + y_2 \right) = \left(\alpha y_1,\ \alpha x_1 \right) + \left(\alpha y_2,\ \alpha x_2 \right)$$

$$\left[\alpha\left(y_1,\ y_2 \right), \alpha\left(x_1,\ x_2 \right) \right] = \left[\alpha\left(y_1,\ y_2 \right), \alpha\left(x_1,\ x_2 \right) \right]$$

$\therefore$ cumple

8) $\left(\alpha+\beta \right)\left(x_1, y_1 \right) = \alpha\left(x_1,\ y_1 \right) + \beta\left(x_1,\ y_1 \right)$

$$\left[\left(\alpha+\beta \right) y_1, \left(\alpha+\beta \right) x_1 \right] = \left(\alpha y_1, \alpha x_1 \right) + \left(\beta y_1,\ \beta x_1 \right)$$

$$\left[\left(\alpha+\beta \right) y_1, \left(\alpha+\beta \right) x_1 \right] = \left[\left(\alpha+\beta \right) y_1, \left(\alpha+\beta \right) x_1 \right]$$

$\therefore$ cumple

9) $\alpha\left[\beta\left(x_1,\ y_1 \right) \right] = \left(\alpha\beta \right)\left(x_1, y_1 \right)$

$$\alpha\left[\beta y_1,\ \beta x_1 \right] = \left(\alpha\beta y_1,\ \alpha\beta x_1 \right)$$

$$\left(\alpha\beta x_1,\ \alpha\beta y_1 \right) \neq \left(\alpha\beta y_1,\ \alpha\beta x_1 \right)$$

$\therefore$ no cumple

10) $\forall \left(x_1,\ y_1 \right) \in \mathbb{R}^2 ;\ \exists\ \alpha\ \mathbb{R} \mid \alpha\left(x_1,\ y_1 \right) = \left(x_1,\ y_1 \right)$

de donde:

$$\left(\alpha y_1,\ \ \alpha x_1 \right) \ = \ \left(x_1,\ \ y_1 \right)$$

por igualdad:

$$\alpha y_1 \ = \ x_1 \qquad \Rightarrow \qquad \alpha = \frac{x_1}{y_1} \qquad \ldots(1)$$

$$\alpha x_1 \ = \ y_1 \qquad \Rightarrow \qquad \alpha = \frac{y_1}{x_1} \qquad \ldots(2)$$

Se aprecia en (1) y (2) que α toma valores diferentes, lo cual no es posible pues α es la unidad del campo y este valor es único.

$$\therefore \quad \text{no cumple}$$

En consecuencia podemos concluir que $\mathbb{R}^2$ no es un espacio vectorial con las operaciones definidas.

Subespacio vectorial

Sea W un subconjunto de un espacio vectorial V. Si W es a su vez un espacio vectorial con respecto a las operaciones de adición y multiplicación definidas en V, se dice entonces que W es un subespacio de V.

Teorema

Sea V un espacio vectorial sobre un campo K. Si W es un subconjunto no vacío de V, entonces W será un subespacio de V, si y sólo si, se cumplen las condiciones siguientes:

1) $\forall\ \bar{u}, \bar{v} \in W, \qquad \left(\bar{u} + \bar{v} \right) \in W$

2) $\forall\ \bar{u} \in W$ y $\forall\ \alpha \in K, \quad \left(\alpha\, \bar{u} \right) \in W$

EJEMPLO 1.3 Determine si el conjunto

$$A = \left\{ a x^2 + bx + c \,\middle|\, 2a + b - c = 0 ; \;\; a,\, b,\, c \in \mathbb{R} \right\}$$

es un subespacio del espacio vectorial

$$\mathrm{P}_2 = \left\{ a x^2 + bx + c \,\middle|\, a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$$

definido sobre el campo $\mathbb{R}$.

SOLUCIÓN:

Despejando c de la ecuación que se tiene en el conjunto A , tenemos:

$$c = 2a + b$$

Si se sustituye como término independiente en A , entonces dicho conjunto se puede expresar como:

$$A = \left\{ a x^2 + b x + \left(2a+b \right) \middle|\, a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

Dado que el conjunto A es un subconjunto del espacio P_2 , entonces sólo restaría comprobar que A es cerrado para la adición y la multiplicación por un escalar, para demostrar que es un subespacio.

De esta forma se tiene que:

1) $\forall \; a_1 x^2 + b_1 x + \left(2a_1 + b_1 \right), \quad a_2 x^2 + b_2 x + \left(2a_2 + b_2 \right) \in A$

$$\left[a_1 x^2 + b_1 x + \left(2a_1 + b_1 \right) \right] + \left[a_2 x^2 + b_2 x + \left(2a_2 + b_2 \right) \right] =$$

$$\left(a_1 + a_2 \right) x^2 + \left(b_1 + b_2 \right) x + \left[2 \left(a_1 + a_2 \right) + \left(b_1 + b_2 \right) \right] \in A$$

$\therefore$ cumple

2) $\forall \; a x^2 + b x + \left(2a + b \right) \in A$ y $\forall \, \alpha \in \mathbb{R}$

$$\alpha \left[a x^2 + b x + \left(2a + b \right) \right] = \alpha a x^2 + \alpha b x + \left(2 \alpha a + \alpha b \right) \in A$$

$\therefore$ cumple

Dado que se cumplen las dos cerraduras, entonces podemos concluir que A es un subespacio de P_2 .

Dependencia lineal

Sea $A = \left\{ \bar{v}_1 ,\ \bar{v}_2 \ , \ \dots \ , \ \bar{v}_n \right\}$ un conjunto de vectores. Se dice que A es linealmente independiente si la ecuación

$$\alpha_1 \bar{v}_1 + \alpha_2 \bar{v}_2 + \dots + \alpha_n \bar{v}_n = \bar{0}$$

sólo se satisface cuando $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$. En caso contrario, es decir, si existen escalares $\alpha_1, \alpha_2 \ , \ \dots \ , \ \alpha_n$ no todos nulos, para los cuales se satisface dicha ecuación, entonces se dice que el conjunto A es linealmente dependiente.

Conjunto generador

Sea V un espacio vectorial sobre K, y sea $G = \left\{ \bar{v}_1 ,\ \bar{v}_2 \ , \ \dots \ , \ \bar{v}_n \right\}$ un conjunto
de vectores de V. Se dice que G es generador de V si todo vector de V puede expresarse como una combinación lineal de los vectores de G.

Base

Se define como base de un espacio vectorial V, a cualquier subconjunto B de vectores de V, tal que:

1) Cualquier vector de V puede expresarse como una combinación lineal de los vectores de B.

2) B es linealmente independiente.

Dimensión

La dimensión de un espacio vectorial V , se define como la cantidad de elementos de cualquiera de sus bases y se denota como:

$$Dim \quad V$$

Si $V = \{ \overline{0} \}$, entonces $Dim \quad V = 0$

Vector de coordenadas

Sea $B = \{ \overline{v}_1 , \ \overline{v}_2 , \ldots , \ \overline{v}_n \}$ una base del espacio vectorial V y sea $\overline{v}$ un vector cualquiera de V tal que:

$$\overline{v} = \alpha_1 \overline{v}_1 + \alpha_2 \overline{v}_2 + \ldots + \alpha_n \overline{v}_n$$

A los escalares $\alpha_1 , \alpha_2 , \ldots , \alpha_n$ se les llama coordenadas de $\overline{v}$ en la base B y al vector:

$$(\overline{v})_B = (\alpha_1 , \alpha_2 , \ldots , \alpha_n)^T$$

se le llama vector de coordenadas de $\overline{v}$ en la base B .

EJEMPLO 1.4 Sean

$$S_1 = \{ (a,\ b,\ c) \mid a = 2c\ ;\ \ a, b, c \in \mathbb{R} \}$$

$$S_2 = \{ (a,\ b,\ c) \mid b = c\ ;\ \ a, b, c \in \mathbb{R} \}$$

subespacios de $\mathbb{R}^3$.

a) Determine si el conjunto $S_1 \cap S_2$ es un subespacio de $\mathbb{R}^3$.

b) En caso de resultar afirmativo el inciso anterior, obtenga una base y la dimensión de $S_1 \cap S_2$.

SOLUCIÓN:

a) De acuerdo con las condiciones dadas en S_1 y S_2, dichos conjuntos se pueden expresar de la siguiente forma:

$$S_1 = \{ (2c,\ b,\ c) \mid b,\ c \in \mathbb{R} \}$$

$$S_2 = \{ (a,\ c,\ c) \mid a,\ c \in \mathbb{R} \}$$

Obsérvese que la característica de las ternas del conjunto S_1, es que la primera componente es el doble de la tercera, en tanto que en S_2, la característica es que la segunda componente y la tercera son iguales. Tomando en cuenta lo anterior, el conjunto que considera ambas características, es precisamente la intersección de ambos conjuntos, esto es:

$$S_1 \cap S_2 = \{ (2c,\ c,\ c) \mid c \in \mathbb{R} \}$$

Otra forma de obtener el conjunto $S_1 \cap S_2$ es empleando los conceptos estudiados en la asignatura Geometría Analítica. En estos términos el planteamiento sería el siguiente:

El conjunto S_1 es el conjunto de puntos que pertenecen al plano $a = 2c$ y el conjunto S_2 son los puntos que pertenecen al plano $b = c$; ambos planos contienen al punto $(0,\ 0,\ 0)$, lo que implica que dichos planos se intersecan y, por lo tanto, definen una recta cuyos puntos son precisamente el conjunto buscado $S_1 \cap S_2$. Lo que se hará es obtener la recta de intersección entre estos planos.

Sean

$$\pi_1 : \quad a - 2c = 0 \quad \Rightarrow \quad \bar{N}_1 = \left(1, \ 0, \ -2 \right)$$

$$\pi_2 : \quad b - c = 0 \quad \Rightarrow \quad \bar{N}_2 = \left(0, \ 1, \ -1 \right)$$

Un vector $\bar{u}$ paralelo a la recta viene dado por:

$$\bar{u} = \bar{N}_1 \times \bar{N}_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 2i + j + k$$

entonces:

$$\bar{u} = \left(2, 1, 1 \right)$$

$$\mathrm{P}_0 = \left(0, \ 0, \ 0 \right)$$

de donde la ecuación de la recta en forma paramétrica es:

$$L : \begin{cases} x = 2t \\ y = t \\ z = t \end{cases}$$

de esta forma se tiene que:

$$\pi_1 \cap \pi_2 = S_1 \cap S_2 = \left\{ \left(2t, \ t, \ t \right) \mid t \in \mathbb{R} \right\}$$

que es igual al conjunto intersección que se obtuvo en primera instancia.

Determinemos ahora si $S_1 \cap S_2$ es un subespacio de $\mathbb{R}^3$.

Comprobando si se cumplen las dos cerraduras, tenemos:

Cerradura para adición

$$\forall \left(2c_1,\ c_1,\ c_1\right),\ \left(2c_2,\ c_2,\ c_2\right) \in S_1 \cap S_2$$

$$\left(2c_1,\ c_1,\ c_1\right) + \left(2c_2,\ c_2,\ c_2\right) = \left[2\left(c_1+c_2\right),\ c_1+c_2,\ c_1+c_2\right] \in S_1 \cap S_2$$

$\therefore$ cumple

Cerradura para multiplicación por un escalar

$$\forall\ \left(2c,\ c,\ c\right) \in S_1 \cap S_2 \quad \text{y} \quad \forall\ \alpha \in \mathbb{R}$$

$$\alpha\left(2c,\ c,\ c\right) = \left(2\alpha c,\ \alpha c,\ \alpha c\right) \in S_1 \cap S_2$$

$\therefore$ cumple

con lo cual podemos concluir que $S_1 \cap S_2$ es un subespacio de $\mathbb{R}^3$.

b) Es evidente que el conjunto $S_1 \cap S_2$ es de dimensión uno, puesto que depende de una sola variable, con lo cual se tiene que una base será:

$$B = \left\{\left(2,\ 1,\ 1\right)\right\}$$

$$\therefore\ \ Dim\ \ S_1 \cap S_2 = 1$$

EJEMPLO 1.5 Sea el conjunto $A = \left\{\left(-1,\ k,\ 2\right),\ \left(-1,\ 1,\ -1\right),\ \left(1,\ 0,\ 2\right)\right\}$.

a) Determine el valor de k para que el conjunto A sea linealmente dependiente.

b) Con el valor obtenido en el inciso anterior, obtenga el espacio vectorial que genera el conjunto A.

c) Determine una base y la dimensión del espacio vectorial obtenido en el inciso anterior.

SOLUCIÓN:

a) Para obtener el valor de k solicitado, se mostrarán tres caminos distintos, con la idea de que el estudiante pueda utilizar cualquiera de ellos en problemas de dependencia o independencia lineal de conjuntos.

MÉTODO 1:

Aplicando la ecuación de dependencia lineal.

$$\alpha_1\left(-1,\ k,\ 2\right)+\alpha_2\ \left(-1,\ 1,\ -1\right)+\alpha_3\left(1,\ 0,\ 2\right)=\bar{0} \qquad \ldots(1)$$

$$\left(-\alpha_1,\ k\alpha_1,\ 2\alpha_1\right)+\left(-\alpha_2,\ \alpha_2,-\alpha_2\right)+\left(\alpha_3, 0, 2\alpha_3\right)=\left(0, 0, 0\right)$$

$$\left(-\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3,\ \ k\alpha_1+\alpha_2,\ 2\alpha_1-\alpha_2+2\alpha_3\right)=\left(0, 0, 0\right)$$

Por igualdad de vectores se llega al sistema:

$$\begin{cases} -\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3=0 \\ k\alpha_1+\alpha_2=0 \\ 2\alpha_1-\alpha_2+2\alpha_3=0 \end{cases}$$

Conmutando la primera columna con la tercera, tenemos:

$$\begin{array}{c} (-2) \\ \\ + \end{array}\begin{cases} \alpha_3-\alpha_2-\alpha_1=0 \\ \alpha_2+k\alpha_1=0 \\ 2\alpha_3-\alpha_2+2\alpha_1=0 \end{cases} \sim \begin{array}{c} \\ + \\ (-1) \end{array}\begin{cases} \alpha_3-\alpha_2-\alpha_1=0 \\ \alpha_2+k\alpha_1=0 \\ \alpha_2+4\alpha_1=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha_3-\alpha_2-\alpha_1=0 \\ \alpha_2+4\alpha_1=0 \\ \left(k-4\right)\alpha_1=0 \end{cases}$$

Se trata de obtener el valor de k, de tal forma que el sistema de ecuaciones sea compatible indeterminado y, con esto, existan valores α_1, α_2, α_3 distintos de cero para los cuales se satisfaga la ecuación (1) y entonces poder concluir que el conjunto A es linealmente dependiente.

Es evidente en el sistema escalonado que con $k = 4$, el sistema se reduce a dos ecuaciones con tres incógnitas y se convierte en un sistema compatible indeterminado, que admite múltiples soluciones y, por lo tanto, el conjunto A sería un conjunto linealmente dependiente. Si por el contrario k toma valores diferentes de cuatro, entonces A sería un conjunto linealmente independiente.

MÉTODO 2:

Este método consiste en formar una matriz con los vectores del conjunto A y mediante el escalonamiento de dicha matriz, buscar el valor de k para el cual uno de los renglones de la matriz se hace ceros. Cuando se realiza el escalonamiento de una matriz y uno o más renglones se hacen ceros, esto implica que dichos renglones son linealmente dependientes.

De esta forma se tiene:

$$\begin{bmatrix} -1 & k & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{array}{c} (1) \\ + \\ + \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & k & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{array}{c} \\ (-4) \\ + \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & k & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & (k-4) & 0 \end{bmatrix}$$

Con $k = 4$ el tercer renglón se hace ceros y se puede concluir que con este valor, el conjunto A es linealmente dependiente.

MÉTODO 3:

Este tercer y último método consiste en formar un determinante con los vectores del conjunto A y determinar para qué valor de k el determinante es igual a cero. Cuando un determinante es igual a cero, implica que los renglones o las columnas que lo conforman son linealmente dependientes.

De acuerdo con esto, tenemos:

$$\begin{vmatrix} -1 & k & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -2 - k - 2 + 2k = 0$$

de donde se obtiene que:

$$k - 4 = 0$$

$$\therefore \quad k = 4$$

con este valor de k el conjunto A es linealmente dependiente.

b) Dado que con $k=4$ el conjunto A es linealmente dependiente, entonces podemos suprimir cualquiera de los vectores de A y con los restantes, que resultan ser linealmente independientes, generar el espacio vectorial solicitado.

Si suprimimos el primer vector, entonces el espacio generado sería:

$$a\,(-1,\ 1,\ -1) + b\,(1,\ 0,\ 2) = (-a+b,\ a,\ -a+2b)$$

$$\therefore \quad \mathrm{E}\,(A) = \{\, (-a+b,\ a,\ -a+2b) \mid a,\ b \in \mathbb{R} \,\}$$

Es importante aclarar que al suprimir el segundo o tercer vector, el espacio vectorial que se genera es igual al espacio generado con los vectores considerados.

c) Una base del espacio vectorial sería:

$$B = \{\, (-1,\ 1,\ -1),\ (1,\ 0,\ 2) \,\}$$

dado que se trata de un conjunto generador con vectores linealmente independientes, entonces:

$$Dim\ \ \mathrm{E}\,(A) = 2$$

EJEMPLO 1.6 Sean el espacio vectorial

$$\mathrm{P} = \{\, at^2 + bt + c \mid a,\ b,\ c \in \mathbb{R} \,\}$$

y el conjunto $A = \{\, t^2+4t-3,\ t^2-2t+5,\ 2t^2-3t,\ t+3 \,\}$

a) Determine si el conjunto A es generador del espacio vectorial P.

b) En caso afirmativo, obtenga una base de dicho espacio.

c) Determine las coordenadas del vector $\mathrm{P}_1 = t^2 + 2t + 1$, referidas a la base obtenida en el inciso anterior.

SOLUCIÓN:

a) Como se sabe, el conjunto P de los polinomios de grado menor o igual a dos es de dimensión tres, por lo que el conjunto A, al tener cuatro elementos, se puede afirmar que es un conjunto linealmente dependiente. De acuerdo con esto, se tomará un subconjunto de A con tres elementos y, si éste es linealmente independiente, sería entonces una base de P y por lo tanto generador de dicho espacio vectorial.

Consideremos entonces el subconjunto:

$$B = \left\{ t^2 + 4t - 3,\ \ 2t^2 - 3t,\ \ t + 3 \right\}$$

Para determinar si B es linealmente independiente, se formará un determinante de 3×3 con los coeficientes de cada polinomio y, si dicho determinante es diferente de cero, entonces B es un conjunto linealmente independiente.

De esta forma se tiene:

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & -3 \\ 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -9 - 6 - 24 = -39$$

Al ser el determinante diferente de cero, podemos concluir que B es linealmente independiente y, por lo tanto, una base de P y generador del mismo.

De acuerdo con lo anterior se ha dado respuesta tanto al inciso a) como al inciso b), con lo cual, sólo resta dar respuesta al inciso c).

c) Las coordenadas del vector $\mathrm{P}_1 = t^2 + 2t + 1$ vienen dadas por:

$$t^2 + 2t + 1 = \alpha_1 \left(t^2 + 4t - 3 \right) + \alpha_2 \left(2t^2 - 3t \right) + \alpha_3 \left(t + 3 \right)$$

de donde se llega a:

$$t^2 + 2t + 1 = \left(\alpha_1 + 2\alpha_2 \right) t^2 + \left(4\alpha_1 - 3\alpha_2 + \alpha_3 \right) t + \left(-3\alpha_1 + 3\alpha_3 \right)$$

por igualdad de polinomios de obtiene:

$$(3)(-4)\begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 = 1 \\ 4\alpha_1 - 3\alpha_2 + \alpha_3 = 2 \\ -3\alpha_1 + 3\alpha_3 = 1 \end{cases} \sim (-3)\begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 = 1 \\ -11\alpha_2 + \alpha_3 = -2 \\ 6\alpha_2 + 3\alpha_3 = 4 \end{cases} \sim$$

$$\begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 = 1 & \ldots(1) \\ -11\alpha_2 + \alpha_3 = -2 & \ldots(2) \\ 39\alpha_2 = 10 & \ldots(3) \end{cases}$$

de (3) :

$$\alpha_2 = \frac{10}{39} \qquad \ldots(4)$$

sustituyendo (4) en (2) :

$$-11\left(\frac{10}{39}\right) + \alpha_3 = -2$$

$$\alpha_3 = -2 + \frac{110}{39}$$

$$\alpha_3 = \frac{32}{39} \qquad \ldots(5)$$

sustituyendo (4) en (1) :

$$\alpha_1 + 2\left(\frac{10}{39}\right) = 1$$

$$\alpha_1 = 1 - \frac{20}{39}$$

$$\alpha_1 = \frac{19}{39}$$

por lo que el vector de coordenadas es:

$$\left(P_1\right)_B = \left(\frac{19}{39}, \frac{10}{39}, \frac{32}{39}\right)$$

Isomorfismo entre espacios vectoriales

Sean U y V dos espacios vectoriales de dimensión finita, definidos sobre un campo K. Se dice que la función $f: U \rightarrow V$ es un isomorfismo de U a V, si f es biyectiva y además cumple con las condiciones siguientes:

1) $f\left(\bar{u}_1 + \bar{u}_2\right) = f_1\left(\bar{u}_1\right) + f\left(\bar{u}_2\right) \ ; \quad \forall\ \bar{u}_1$ y $\bar{u}_2 \in U$

2) $f\left(\alpha \bar{u}\right) = \alpha\, f\left(\bar{u}\right) \ ; \quad \forall\ \bar{u} \in U$ y $\forall\ \alpha \in K$

Los espacios vectoriales isomorfos sólo difieren en la naturaleza de sus elementos, sus propiedades algebraicas son idénticas.

Teoremas

1) Si V es un espacio vectorial real de dimensión n, entonces V es isomorfo a $\mathbb{R}^n$.

2) Todo espacio vectorial es isomorfo a sí mismo.

3) Si un espacio vectorial V es isomorfo a otro espacio W, entonces W es isomorfo a V.

4) Si un espacio vectorial U es isomorfo a un espacio V y V es a su vez isomorfo a un espacio W, entonces U es isomorfo a W.

5) Dos espacios vectoriales de igual dimensión son isomorfos.

EJEMPLO 1.7 Para cada espacio vectorial dado, establecer un isomorfismo con un espacio del tipo $\mathbb{R}^n$.

a) $Q = \left\{ ax^2 + bx + (2a + 6b) \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$

b) $N = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ a+b & c \end{bmatrix} \middle| \; c = 2a \; ; \; a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$

SOLUCIÓN:

a) La base natural del espacio vectorial Q es:

$$B = \left\{ x^2 + 2, \; x+6 \right\}$$

Con lo cual Q es un espacio vectorial de dimensión dos, entonces Q es isomorfo a $\mathbb{R}^2$ o a cualquier otro subespacio del tipo $\mathbb{R}^n$ de dimensión dos. De acuerdo con lo anterior, podemos establecer las funciones f y g entre el espacio Q y los espacios:

$$\mathbb{R}^2 = \left\{ (a, b) \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

$$H = \left\{ (a, b, 2a + 6b) \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

Ambos espacios de dimensión dos.

Con lo cual se tiene:

$$f\left(ax^2 + bx + (2a + 6b) \right) = (a, b), \text{ esto es, } \quad f: Q \to \mathbb{R}^2$$

$$g\left(ax^2 + bx + (2a + 6b) \right) = (a, b, 2a + 6b), \text{ esto es, } \quad g: Q \to H$$

Las dos funciones cumplen con ser biyectivas, por lo que se procederá a verificar el cumplimiento de las dos condiciones para ver si establecen o no un isomorfismo.

Para f se tiene:

1) $\forall\ a_1 x^2 + b_1 x + \left(2a_1 + 6b_1 \right),\ \ a_2 x^2 + b_2 x + \left(2a_2 + 6b_2 \right) \in Q$

$$f\left(\bar{u}_1 + \bar{u}_2\right) = f\left(\bar{u}_1\right) + f\left(\bar{u}_2\right)$$

$$f\left[\left(a_1 x^2 + b_1 x + \left(2a_1 + 6b_1\right)\right) + \left(a_2 x^2 + b_2 x + \left(2a_2 + 6b_2\right)\right)\right] =$$

$$f\left[a_1 x^2 + b_1 x + \left(2a_1 + 6b_1\right)\right] + f\left[a_2 x^2 + b_2 x + \left(2a_2 + 6b_2\right)\right]$$

Sumando del lado izquierdo de la igualdad y aplicando f del lado derecho, tenemos:

$$f\left[\left(a_1 + a_2\right)x^2 + \left(b_1 + b_2\right)x + 2\left(a_1 + a_2\right) + 6\left(b_1 + b_2\right)\right] = \left(a_1, b_1\right) + \left(a_2, b_2\right)$$

Aplicando f del lado izquierdo y sumando del lado derecho, tenemos:

$$\left(a_1 + a_2,\ b_1 + b_2\right) = \left(a_1 + a_2,\ b_1 + b_2\right)$$

$\therefore$ cumple

2) $\forall\ ax^2 + bx + \left(2a + 6b\right) \in Q$ y $\forall\ \alpha \in \mathbb{R}$

$$f\left(\alpha \bar{u}\right) = \alpha\, f\left(\bar{u}\right)$$

$$f\left[\alpha\left(\alpha x^2 + bx + \left(2a + 6b\right)\right)\right] = \alpha\ f\left[\alpha x^2 + bx + \left(2a + 6b\right)\right]$$

de donde:

$$f\left[\alpha a x^2 + \alpha b x + \left(2\alpha a + 6\alpha b\right)\right] = \alpha\left(a, b\right)$$

$$\left(\alpha a,\ \alpha b\right) = \left(\alpha a,\ \alpha b\right)$$

$\therefore$ cumple

Dado que f es biyectiva, entonces f establece un isomorfismo entre los espacios Q y $\mathbb{R}^2$.

Para g se tiene:

1) $\forall\ a_1x^2+b_1x+\left(2a_1+6b_1\right),\ a_2x^2+b_2x+\left(2a_2+6b_2\right)\in Q$

$$g\left(\bar{u}_1+\bar{u}_2\right)=g\left(\bar{u}_1\right)+g\left(\bar{u}_2\right)$$

$$g\left[a_1x^2+b_1x+\left(2a_1+6b_1\right)\quad+\ a_2x^2+b_2x+\left(2a_2+6b_2\right)\right]=$$

$$g\left[a_1x^2+b_1x+\left(2a_1+6b_1\right)\right]+\ g\left[a_2x^2+b_2x+\left(2a_2+6b_2\right)\right]$$

sumando y aplicando g **:**

$$g\left[\left(a_1+a_2\right)x^2+\left(b_1+b_2\right)x+2\left(a_1+a_2\right)+6\left(b_1+b_2\right)\right]=$$

$$\left(a_1,\ b_1,\ 2a_1+6b_1\right)+\left(a_2,\ b_2,\ 2a_2+6b_2\right)$$

aplicando g y sumando, tenemos:

$$\left(a_1+a_2,\ b_1+b_2,\ 2\left(a_1+a_2\right)+6\left(b_1+b_2\right)\right)=\left(a_1+a_2,\ b_1+b_2,\ 2\left(a_1+a_2\right)+6\left(b_1+b_2\right)\right)$$

$\therefore$ cumple

2) $\forall\ ax^2+bx+\left(2a+6b\right)\in Q$ y $\forall\ \alpha\in\mathbb{R}$

$$g\left(\alpha\bar{u}\right)=\alpha g\left(\bar{u}\right)$$

$$g\left[\alpha\left(\alpha x^2+bx+\left(2a+6b\right)\right)\right]=\alpha g\left[\left(\alpha x^2+bx+\left(2a+6b\right)\right)\right]$$

de donde:

$$g\left[\alpha ax^2+\alpha bx+\left(2\alpha a+6\alpha b\right)\right]=\alpha\left(a,\ b,\ 2a+6b\right)$$

$$\left(\alpha a,\ \alpha b,\ 2\alpha a+6\alpha b\right)=\left(\alpha a,\ \alpha b,\ 2\alpha a+6\alpha b\right)$$

$\therefore$ cumple

Dado que g es biyectiva, entonces g establece un isomorfismo entre los espacios Q y H.

b) El espacio vectorial N se puede establecer como:

$$N = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ a+b & 2a \end{bmatrix} \middle| \; a,\ b \in \mathbb{R} \right\}$$

La base natural de N es:

$$B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix},\ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\}$$

Con lo cual N es un espacio vectorial de dimensión dos, entonces N es isomorfo a $\mathbb{R}^2$ o a cualquier otro subespacio del tipo $\mathbb{R}^n$ de dimensión dos.

De acuerdo con lo anterior, podemos establecer la función biyectiva $h: N \to \mathbb{R}^2$ con la siguiente regla de correspondencia:

$$h\left(\begin{bmatrix} a & b \\ a+b & 2a \end{bmatrix} \right) = (a,\ b)$$

Veamos si h cumple con las dos condiciones.

1) $$\forall \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_1+b_1 & 2a_1 \end{bmatrix},\ \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ a_2+b_2 & 2a_2 \end{bmatrix} \in N$$

$$h\left(\bar{u}_1 + \bar{u}_2 \right) = h\left(\bar{u}_1 \right) + h\left(\bar{u}_2 \right)$$

de donde:

$$h\left(\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_1+b_1 & 2a_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ a_2+b_2 & 2a_2 \end{bmatrix} \right) = h\left(\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_1+b_1 & 2a_1 \end{bmatrix} \right) + h\left(\begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ a_2+b_2 & 2a_2 \end{bmatrix} \right)$$

sumando y aplicando h, tenemos:

$$h\left(\begin{bmatrix} a_1+a_2 & b_1+b_2 \\ (a_1+a_2)+(b_1+b_2) & 2(a_1+a_2) \end{bmatrix}\right) = (a_1,\ b_1) + (a_2,\ b_2)$$

aplicando h y sumando, se tiene:

$$(a_1+a_2,\ \ b_1+b_2) = (a_1+a_2,\ \ b_1+b_2)$$

$\therefore$ cumple

2) $\forall \begin{bmatrix} a & b \\ a+b & 2a \end{bmatrix} \in \mathbb{N}$ y $\forall\, \alpha \in \mathbb{R}$

$$h(\alpha\bar{u}) = \alpha h(\bar{u})$$

de donde:

$$h\left(\alpha\begin{bmatrix} a & b \\ a+b & 2a \end{bmatrix}\right) = \alpha\, h\left(\begin{bmatrix} a & b \\ a+b & 2a \end{bmatrix}\right)$$

$$h\left(\begin{bmatrix} \alpha a & \alpha b \\ \alpha a+\alpha b & 2\alpha a \end{bmatrix}\right) = \alpha(a,\ b)$$

$$(\alpha a,\ \alpha b) = (\alpha a,\ \alpha b)$$

$\therefore$ cumple

Entonces h establece un isomorfismo entre los espacios N y $\mathbb{R}^2$.

Matriz de transición

Sean $A = \{ \bar{v}_1, \ \bar{v}_2, \ldots, \ \bar{v}_n \}$ y $B = \{ \bar{w}_1, \ \bar{w}_2, \ldots, \ \bar{w}_n \}$ dos bases de un espacio vectorial V. La matriz de transición M_B^A tiene por columnas los vectores de coordenadas de los elementos de la base A con respecto a la base B, esto es:

$$M_B^A = \left[\left(\bar{v}_1 \right)_B \ \left(\bar{v}_2 \right)_B \ \cdots \ \left(\bar{v}_n \right)_B \right]$$

Esta matriz M_B^A conocida también como matriz de cambio de base, es tal que, si conocemos $(\bar{v})_A$ donde $\bar{v} \in V$ y deseamos obtener el vector de coordenadas de $\bar{v}$ en la base B, esto es $(\bar{v})_B$, entonces es suficiente con efectuar el producto:

$$M_B^A \ (\bar{v})_A = (\bar{v})_B$$

Además, se tiene que la matriz de transición es una matriz no singular, esto es, siempre tiene inversa y se cumple que:

$$\left(M_B^A \right)^{-1} = M_A^B$$

EJEMPLO 1.8 Sean $A = \{ \bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3 \}$ y $B = \{ \bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3 \}$ dos bases de un espacio vectorial de dimensión tres, las cuales están relacionadas de la siguiente manera:

$$\bar{v}_1 = \bar{u}_1 + \bar{u}_3$$

$$\bar{v}_2 = 2\bar{u}_2$$

$$\bar{v}_3 = \bar{u}_2 + \bar{u}_3$$

a) Obtenga la matriz de transición de la base A a la base B.

b) Obtenga las coordenadas en la base B del vector $\bar{w}$, si se tiene que $(\bar{w})_A = (3, 5, 2)$.

SOLUCIÓN:

a) La relación que se proporciona entre los elementos de las bases A y B, nos define la matriz de transición de la base B a la base A, esto es:

$$M_A^B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Se sabe que:

$$\left(M_A^B \right)^{-1} = M_B^A$$

Entonces será suficiente con obtener la inversa de la matriz M_A^B para llegar a la matriz solicitada. Al obtener la inversa de M_A^B se llega a:

$$M_B^A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

b) Se tiene que:

$$M_B^A (\bar{w})_A = (\bar{w})_B$$

entonces

$$\left(\bar{w}\right)_B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \quad \left(\bar{w}\right)_B = \left(3,\ 3,\ -1\right)$$

EJEMPLO 1.9 Sean $A=\left\{\bar{a}_1,\ \bar{a}_2,\ \bar{a}_3\right\} = \left\{x^2+x-3,\ 3x^2+x-5,\ x^2-2x+2\right\}$ y $B=\left\{\bar{b}_1,\ \bar{b}_2,\ \bar{b}_3\right\}$ dos bases del espacio vectorial $\mathrm{P}=\left\{ax^2+bx+c \mid a,\ b,\ c \in \mathbb{R}\right\}$.

Si se sabe que:

$$\left(\bar{a}_1\right)_B = \left(1,\ 0,\ 1\right) \quad , \quad \left(\bar{a}_2\right)_B = \left(2,\ 1,\ 2\right) \quad , \quad \left(\bar{a}_3\right)_B = \left(-1,\ 1,\ 0\right)$$

obtenga los vectores de la base B .

SOLUCIÓN:

Este ejercicio se resolverá siguiendo dos métodos distintos.

MÉTODO 1.

De los datos del enunciado se tiene que:

$$M_B^A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

si se obtiene la inversa de esta matriz se llega a:

$$\left(M_B^A\right)^{-1} = M_A^B = \begin{bmatrix} -2 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

considerando las columnas de M_A^B se tiene que:

$$\left(\bar{b}_1\right)_A = (\,-2,\ 1,\ -1\,)\ ,\quad \left(\bar{b}_2\right)_A = (\,-2,\ 1,\ 0\,)\ ,\quad \left(\bar{b}_3\right)_A = (\,3,\ -1,\ 1\,)$$

son los vectores de coordenadas de los elementos de la base B con respecto a la base A, con lo cual se tiene que:

$$\bar{b}_1 = -2\left(x^2+x-3\right)+1\left(3x^2+x-5\right)-1\left(x^2-2x+2\right)$$

al realizar las operaciones y simplificar se llega a:

$$\bar{b}_1 = x-1$$

en forma análoga se tiene que:

$$\bar{b}_2 = -2\left(x^2+x-3\right)+1\left(3x^2+x-5\right)$$

$$\bar{b}_2 = x^2-x+1$$

finalmente:

$$\bar{b}_3 = 3\left(x^2+x-3\right)-1\left(3x^2+x-5\right)+1\left(x^2-2x+2\right)$$

$$\bar{b}_3 = x^2-2$$

por lo tanto, la base B es:

$$B = \left\{\,x-1,\ \ x^2-x+1,\ \ x^2-2\,\right\}$$

MÉTODO 2.

En el enunciado del problema nos proporcionan los vectores de coordenadas de los elementos de la base A con respecto a la base B. Con las componentes de estos vectores podemos obtener los vectores $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$, $\bar{a}_3$ expresándolos como una combinación lineal de los elementos de la base B, esto es:

$$\begin{cases} \bar{b}_1 + \bar{b}_3 = \bar{a}_1 \\ 2\bar{b}_1 + \bar{b}_2 + 2\bar{b}_3 = \bar{a}_2 \\ -\bar{b}_1 + \bar{b}_2 = \bar{a}_3 \end{cases}$$

sustituyendo los vectores $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$, $\bar{a}_3$, se llega al sistema:

$$\begin{cases} \bar{b}_1 + \bar{b}_3 = x^2 + x - 3 \\ 2\bar{b}_1 + \bar{b}_2 + 2\bar{b}_3 = 3x^2 + x - 5 \\ -\bar{b}_1 + \bar{b}_2 = x^2 - 2x + 2 \end{cases}$$

escalonando el sistema tenemos:

$$(1)\,(-2)\begin{cases} \bar{b}_1 + \bar{b}_3 = x^2 + x - 3 \\ 2\bar{b}_1 + \bar{b}_2 + 2\bar{b}_3 = 3x^2 + x - 5 \\ -\bar{b}_1 + \bar{b}_2 = x^2 - 2x + 2 \end{cases} \sim \begin{cases} \bar{b}_1 + \bar{b}_3 = x^2 + x - 3 & \ldots(1) \\ \bar{b}_2 = x^2 - x + 1 & \ldots(2) \\ \bar{b}_2 + \bar{b}_3 = 2x^2 - x - 1 & \ldots(3) \end{cases}$$

de (2) se tiene:

$$\bar{b}_2 = x^2 - x + 1$$

sustituyendo (2) en (3) , tenemos:

$$\left(x^2 - x + 1 \right) + \bar{b}_3 = 2x^2 - x - 1$$

de donde:

$$\bar{b}_3 = x^2 - 2 \qquad \ldots(4)$$

sustituyendo (4) en (1) , se tiene:

$$\bar{b}_1 + \left(x^2 - 2 \right) = x^2 + x - 3$$

entonces

$$\bar{b}_1 = x - 1$$

con lo cual se llega a que la base B es:

$$B = \left\{ x-1,\ x^2 - x + 1,\ x^2 - 2 \right\}$$

Espacio renglón y espacio columna de una matriz

Sea A una matriz de orden $m \times n$.

1) Si consideramos a los renglones A como vectores del espacio $\mathbb{R}^n$, entonces al espacio generado con los renglones de A se le llama espacio renglón y se le representa con:

$$L\left(A_R \right)$$

3) Si consideramos a las columnas de A como vectores del espacio $\mathbb{R}^m$, entonces al espacio generado con las columnas de A se le llama espacio columna y se le representa con:

$$L\left(A_C \right)$$

Teorema

Para cualquier matriz A , se tiene que:

$$Dim\ L\left(A_R \right) = Dim\ L\left(A_C \right)$$

EJEMPLO 1.10 Para la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & 2 & 2 \\ -1 & 3 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

Obtenga:

a) El espacio renglón $L\left(A_R\right)$, una base y su dimensión.

b) El espacio columna $L\left(A_C\right)$, una base y su dimensión.

SOLUCIÓN:

a) Para obtener el espacio renglón, se obtendrá primero una base del mismo mediante el escalonamiento de la matriz A.

$$\begin{array}{c} (1)\,(-2) \\ + \\ + \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & 2 & 2 \\ -1 & 3 & -3 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{array}{c} \\ (1) \\ + \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -5 & 4 & -4 \\ 0 & 5 & -4 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -5 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Los renglones no nulos de la matriz equivalente, una vez concluido el escalonamiento, constituyen una base del espacio renglón y, por consiguiente, el número de renglones no nulos, nos definen la dimensión de dicho espacio vectorial. A este número también se le conoce como rango de la matriz A.

De acuerdo con lo anterior, se tiene que una base del espacio renglón será:

$$B_R = \{ (1,\ 2,\ -1,\ 3),\ (0,\ -5,\ 4,\ -4) \}$$

$$\therefore \quad Dim\ L\left(A_R \right) = 2$$

Generando el espacio renglón, tenemos:

$$a\left(1,\ 2,\ -1,\ 3\right) + b\left(0,\ -5,\ 4,\ -4\right) = \left(a,\ 2a-5b,\ -a+4b,\ 3a-4b\right)$$

$$\therefore \quad L\left(A_R \right) = \left\{ \left(a,\ 2a-5b,\ -a+4b,\ 3a-4b \right) \mid a,\ b \in \mathbb{R} \right\}$$

b) Como sabemos que la dimensión del espacio columna es igual a la dimensión del espacio renglón, entonces será suficiente con tomar dos vectores columna de la matriz original, cuidando que éstos no sean proporcionales, para obtener una base del espacio columna.

De esta forma una base será:

$$B_C = \{ (1,\ 2,\ -1),\ (2,\ -1,\ 3) \}$$

$$\therefore \quad Dim\left(A_C \right) = 2$$

y el espacio columna será:

$$a\left(1,\ 2,\ -1\right) + b\left(2,\ -1,\ 3\right) = \left(a+2b,\ 2a-b,\ -a+3b\right)$$

$$\therefore \ L\left(A_C \right) = \left\{ \left(a+2b,\ 2a-b,\ -a+3b \right) \mid a,\ b \in \mathbb{R} \right\}$$

Criterio del Wronskiano

Sea $\{ f_1 , f_2 , \dots , f_n \}$ un conjunto de n funciones reales de variable real, cada una de las cuales admite por lo menos $n-1$ derivadas en el intervalo (a, b). El determinante

$$W(x) = \begin{vmatrix} f_1 & f_2 & \cdots & f_n \\ f_1^{'} & f_2^{'} & \cdots & f_n^{'} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ f_1^{n-1} & f_2^{n-1} & \cdots & f_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

se denomina Wronskiano del conjunto de funciones dado.

Si existe al menos un valor $x_0 \in (a, b)$, para el cual $W(x_0) \neq 0$, entonces el conjunto de funciones es linealmente independiente en dicho intervalo.

Cabe hacer notar que si $W(x) = 0, \quad \forall \ x \in (a, b)$, entonces no se puede concluir nada en cuanto a la dependencia o independencia lineal del conjunto de funciones. En este caso se deberá recurrir a la ecuación de dependencia lineal para su análisis.

EJEMPLO 1.11 Determine si el conjunto de funciones $\{ e^x, e^{2x}, e^{x+2} \}$ es linealmente dependiente o independiente en el intervalo $(-\infty, \infty)$.

SOLUCIÓN:

Obteniendo el Wronskiano tenemos:

$$W(x) = \begin{vmatrix} e^x & e^{2x} & e^{x+2} \\ e^x & 2e^{2x} & e^{x+2} \\ e^x & 4e^{2x} & e^{x+2} \end{vmatrix} = e^x\left(2e^{2x}\right)\left(e^{x+2}\right) + e^x\left(4e^{2x}\right)\left(e^{x+2}\right)$$
$$+\; e^x\left(e^{2x}\right)\left(e^{x+2}\right) - e^x\left(2e^{2x}\right)\left(e^{x+2}\right)$$
$$-\; e^x\left(e^{2x}\right)\left(e^{x+2}\right) - e^x\left(4e^{2x}\right)\left(e^{x+2}\right)$$

$$W(x) = 2e^{4x+2} + 4e^{4x+2} + e^{4x+2} - 2e^{4x+2} - e^{4x+2} - 4e^{4x+2}$$

de donde:

$$W(x) = 0$$

Dado que $W(x) = 0$, entonces el criterio del Wronskiano no permite decidir en cuanto a la dependencia o independencia lineal del conjunto de funciones. Por lo tanto, se procederá de la siguiente manera:

Como se puede apreciar:

$$e^{x+2} = e^2 e^x$$

es decir, e^{x+2} se puede obtener al multiplicar la función e^x por la constante e^2, esto implica que las funciones e^x y e^{x+2} son linealmente dependientes entre sí, con lo cual podemos concluir que el conjunto de funciones dado es linealmente dependiente.

EJERCICIO 1.12 Si $H = \left\{ e^x + 2e^{-x},\ 2 + \operatorname{sen} 2x,\ e^{-x} + 2 \right\}$ es un subconjunto del espacio vectorial de las funciones reales de variable real, determine si el conjunto H es linealmente independiente en el intervalo $(-\infty, \infty)$.

SOLUCIÓN:

Calculando el Wronskiano, tenemos:

$$W(x) = \begin{vmatrix} e^{x} + 2e^{-x} & 2 + \operatorname{sen} 2x & e^{-x} + 2 \\ e^{x} - 2e^{-x} & 2\cos 2x & -e^{-x} \\ e^{x} + 2e^{-x} & -4\operatorname{sen} 2x & e^{-x} \end{vmatrix}$$

$$W(x) = \left(e^{x} + 2e^{-x}\right)(2\cos 2x)\left(e^{-x}\right) + \left(e^{x} - 2e^{-x}\right)(-4\operatorname{sen} 2x)\left(e^{-x} + 2\right)$$

$$+ \ (2 + \operatorname{sen} 2x)\left(-e^{-x}\right)\left(e^{x} + 2e^{-x}\right) - \left(e^{x} + 2e^{-x}\right)(2\cos 2x)\left(e^{-x} + 2\right)$$

$$- \ (-4\operatorname{sen} 2x)\left(-e^{-x}\right)\left(e^{x} + 2e^{-x}\right) - \left(e^{x} - 2e^{-x}\right)(2 + \operatorname{sen} 2x)\left(e^{-x}\right)$$

Si hacemos $x = 0$, tenemos:

$$W(0) = (3)(2)(1) + (-1)(0)(3) + (2)(-1)(3) - (3)(2)(3) - (0)(-1)(3) - (-1)(2)(1)$$

$$W(0) = -16$$

Esto implica que al menos existe un valor de x en el intervalo de definición de las funciones, esto es, $x_0 = 0$, para el cual $W\left(x_0\right) \neq 0$, lo que nos permite concluir que el conjunto H es linealmente independiente.

EJERCICIO1.13 Determine si el conjunto de funciones

$$G = \left\{ 2\,\text{sen}^2 x,\ -\cos^2 x,\ 3 \right\}$$

es linealmente dependiente o independiente en el intervalo $\left(-\infty,\ \infty \right)$.

SOLUCIÓN:

Obteniendo el Wronskiano, tenemos:

$$W(x) = \begin{vmatrix} 2\,\text{sen}^2 x & -\cos^2 x & 3 \\ 4\,\text{sen}\,x\ \cos x & 2\cos x\ \text{sen}\,x & 0 \\ -4\,\text{sen}^2 x + 4\cos^2 x & 2\cos^2 x - 2\,\text{sen}^2 x & 0 \end{vmatrix}$$

Aplicando el método de cofactores en la tercera columna, tenemos:

$$W(x) = 3\left[\left(4\,\text{sen}\,x \cos x \right)\left(2\cos^2 x - 2\,\text{sen}^2 x \right) - \left(2\cos x\ \text{sen}\,x \right)\left(-4\,\text{sen}^2 x + 4\cos^2 x \right) \right]$$

desarrollando los productos y simplificando, se tiene:

$$W(x) = 3\left(8\,\text{sen}\,x \cos^3 x - 8\,\text{sen}^3 x \cos x + 8\,\text{sen}^3 x \cos x - 8\,\text{sen}\,x \cos^3 x \right)$$

$$W(x) = 0$$

Dado que el Wronskiano resultó igual a cero, entonces el criterio no decide, por lo que se tendrá que recurrir a la ecuación de dependencia lineal para determinar si el conjunto G es linealmente independiente o dependiente.

Se sabe que:

$$\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$$

de donde

$$-\cos^2 x = -1 + \operatorname{sen}^2 x$$

con lo cual, la ecuación de dependencia lineal se puede expresar como:

$$\alpha_1 \left(2\operatorname{sen}^2 x \right) + \alpha_2 \left(-1 + \operatorname{sen}^2 x \right) + \alpha_3 \left(3 \right) = \overline{0} \quad \ldots (1)$$

multiplicando y factorizando términos semejantes, tenemos:

$$\left(2\alpha_1 + \alpha_2 \right) \operatorname{sen}^2 x + \left(-\alpha_2 + 3\alpha_3 \right) = 0 \operatorname{sen}^2 x + 0$$

por igualdad se tiene:

$$\begin{cases} 2\alpha_1 + \alpha_2 & = 0 \\ -\alpha_2 + 3\alpha_3 & = 0 \end{cases}$$

Se trata de un sistema de ecuaciones compatible indeterminado, que admite múltiples soluciones, esto es, se pueden obtener valores para los escales α_1, α_2, α_3 diferentes de cero, con los cuales se satisface la ecuación (1), por lo que, se puede concluir que el conjunto G es linealmente dependiente.

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Demuestre que el conjunto

$$A = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b \\ 0 & c & 0 \end{bmatrix} \middle| \; a + 2b = 0 \; ; \quad a,\, b,\, c \in \mathbb{R} \right\}$$

es un espacio vectorial sobre el campo de los números reales, considerando las operaciones de adición y multiplicación por un escalar usuales con matrices.

2. Determine si el conjunto $\mathrm{P} = \left\{ ax + b \mid a,\ b \in \mathbb{R} \right\}$, es un espacio vectorial sobre el campo de los números reales, si la adición de vectores es la adición ordinaria de polinomios, y la multiplicación por un escalar se define como:

$$k\left(ax + b\right) = kb \; ; \quad \forall\ k \in \mathbb{R} \quad \text{y} \quad \forall\ \left(ax+b\right) \in P$$

3. Sea A un subconjunto del espacio vectorial $\mathbb{R}^3$, tal que:

$$A = \left\{ (\ x,\ y,\ z\ ) \mid 2x - y - z = 0 \; ; \quad x,\ y,\ z \in \mathbb{R} \right\}$$

a) Determine si A es un subespacio de $\mathbb{R}^3$.

b) En caso afirmativo, obtenga una base y la dimensión del subespacio A.

4. Sea M un espacio vectorial de las matrices simétricas de orden 2 con elementos en $\mathbb{R}$ y sea N el conjunto definido por:

$$N = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ b & -a \end{bmatrix} \middle| \; a,\ b \in \mathbb{R} \right\}$$

Determine si N es un subespacio de M; si lo es, obtenga para M y N, una base y su dimensión.

5. Dado el conjunto $A = \{ (a, -1, 1), (0, a, -2), (-1, 0, 1) \}$

a) Determine el valor de $a \in \mathbb{R}$, tal que el espacio generado por A sea de dimensión 2.

b) Con el valor obtenido en el inciso a), obtenga el espacio generado.

6. Sea $N = \left\{ \begin{bmatrix} x & y \\ z & 0 \end{bmatrix} \;\middle|\; z = x - y, \quad x, y, z \in \mathbb{R} \right\}$ un espacio vectorial.

a) Determine cuál de los siguientes conjuntos es una base de N:

$$B_1 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\}$$

$$B_2 = \left\{ \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\}$$

b) Obtenga el vector de coordenadas de $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ respecto a la base elegida en el inciso anterior.

7. En el espacio vectorial $\mathrm{P}_1 = \{ a + bx \mid a, b \in \mathbb{R} \}$, la matriz

$$M_B^A = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{7}{2} \\ \frac{3}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

es la matriz de transición de la base $A = \{ 6 + 3x, 10 + 2x \}$ a la base B.

a) Determine cuál es la base B.

b) Calcule el vector de coordenadas en la base B del vector

$$\mathrm{P}(x) = -4 + x.$$

8. Sean $B = \{ 2\,\text{sen}\,x + \cos x ,\ \ 3\cos x \}$ y $B' = \{ \text{sen}\,x ,\ \ \cos x \}$ dos base del espacio vectorial

$$F = \{ f \mid f(x) = a\,\text{sen}\,x + b\cos x \,;\ \ a,\ b \in \mathbb{R} \}$$

a) Obtenga la matriz de transición de la base B a la base B'.

b) Si $h(x) = 2\,\text{sen}\,x - \cos x$, obtenga $[\, h(x) \,]_B$

9. Dada la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 9 \\ 2 & 1 & 7 \\ -1 & 3 & -5 \\ 1 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

determine:

a) el espacio vectorial generado por los renglones de la matriz A.

b) el espacio vectorial generado por las columnas de la matriz A.

c) una base y la dimensión del espacio renglón y del espacio columna de la matriz A.

d) si los espacios renglón y columna son isomorfos.

10. Determine si el conjunto $B = \{ \mathrm{P}(x),\ \mathrm{P}'(x),\ \mathrm{P}''(x),\ \mathrm{P}'''(x) \}$ es linealmente dependiente o independiente, donde

$$\mathrm{P}(x) = a x^3 + b x^2 + c x + d\ , \quad a,\ b,\ c\ d \in \mathbb{R}$$

y

$$\mathrm{P}'(x) = \frac{d}{dx}\,\mathrm{P}(x)\,, \quad \mathrm{P}''(x) = \frac{d^2}{dx^2}\,\mathrm{P}(x)\,, \quad \mathrm{P}'''(x) = \frac{d^3}{dx^3}\,\mathrm{P}(x)$$

11. Dado el conjunto de funciones $\{ 2,\ \ \cos 2x,\ \ \cos^2 x \}$

a) Calcule el Wronskiano del conjunto.

b) Determine si el conjunto es linealmente dependiente o independiente.

RESPUESTAS A LOS EJERCICIOS PROPUESTOS

2. No es un espacio vectorial.

3. **a)** Sí es un subespacio.

b) Una base sería $B = \{ (1,\ 0,\ 2),\ (0,\ 1,\ -1) \}$ $\qquad Dim\ A = 2$

4. N sí es un subespacio de M.

$$B_M = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},\ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\} \ ;\ Dim\ M = 3$$

$$B_N = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},\ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\} \ ;\ Dim\ N = 2$$

5. **a)** $a_1 = 1$ y $a_2 = -2$

b) Si $a = 1$ y tomando al segundo y tercer vector como una base, se tiene:

$$L(A) = \{ (-k_2,\ k_1,\ -2k_1 + k_2) \mid k_1,\ k_2 \in \mathbb{R} \}$$

Si $a = -2$ y tomando al segundo y tercer vector como una base, se tiene:

$$L(A) = \{ (-k_2,\ -2k_1,\ -2k_1 + k_2) \mid k_1,\ k_2 \in \mathbb{R} \}$$

Nota: En el inciso b) las respuestas no son únicas.

6. **a)** $B_N = \left\{ \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\}$

b) $\left(\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right)_{B_N} = (7, \ -3)$

7. **a)** $B = \{ 2, \ 3 + 2x \}$

b) $[\, \mathrm{P}(x) \,]_B = \left(-\dfrac{11}{4}, \ \dfrac{1}{2} \right)$

8. **a)** $M^{B}_{B'} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

b) $[\, h(x) \,]_B = \left(1, \ -\dfrac{2}{3} \right)$

9. **a)** $L\left(A_R \right) = \left\{ (a, \ 4a + 7b, \ 2a - 3b) \mid a, \ b \in \mathbb{R} \right\}$

b) $L\left(A_C \right) = \left\{ (a, \ 2a + b, \ -a - b, \ 3a + b)^T \mid a, \ b \in \mathbb{R} \right\}$

c) Una base del espacio renglón es:

$B_R = \{ (1, \ 4, \ 2), \ (0, \ 7, \ -3) \}$ $\quad \therefore \quad$ $Dim \ L\left(A_R \right) = 2$

Una base del espacio columna es:

$B_C = \left\{ (1, \ 2, \ -1, \ 3)^T, \ (0, \ 1, \ -1, \ 1)^T \right\}$ $\quad \therefore \quad$ $Dim \ L\left(A_C \right) = 2$

d) Como ambos espacios son de igual dimensión, entonces son isomorfos.

10. El conjunto B es linealmente independiente.

11. **a)** $W(x) = 0$

b) El conjunto es linealmente dependiente.