

3. Redes

En la Ingeniería Civil es común encontrar problemas que involucran el concepto de redes. La gama es enorme, desde redes de distribución de agua o redes de transporte hasta redes de actividades o redes de recursos dentro de un proyecto. Las representaciones de las redes han mostrado ser una herramienta muy poderosa para el entendimiento de las relaciones entre los componentes de un sistema y su posterior optimización.

El desarrollo de algoritmos de optimización de redes ha ido de la mano con el desarrollo de cada vez más poderosos programas de cómputo, que han permitido a los ingenieros aplicarlos cotidianamente en sistemas complejos con un gran número de elementos. Muchas de estas metodologías son soluciones a problemas de programación lineal específicos que bien podrían resolverse con ayuda del Método Simplex, pero dadas sus condiciones especiales es más sencillo abordarlos con un algoritmo específico. Antes de abordar las metodologías es preciso entender la terminología usada en el análisis de redes (Hillier, 2007, p. 407).

Una red es un conjunto de puntos y un conjunto de líneas que unen ciertos pares de puntos. Los puntos son llamados nodos y las líneas arcos. Los nodos representan intersecciones de caminos, fuentes de agua, bancos de materiales, etc., mientras que los arcos representan caminos, tuberías o actividades a realizar. Los arcos pueden tener un tipo de flujo que pase por ellos, por ejemplo gasto hidráulico, volumen vehicular, recursos o tiempo. Cuando en un arco el flujo sólo se permite en una dirección, se llama arco dirigido y se representa con una flecha; mientras que si el flujo se permite en ambos sentidos se le llama ligadura. Si la red está compuesta sólo de arcos dirigidos se llama red dirigida. (Taha, 2004, p.214)

A la sucesión de arcos que unen dos nodos distantes se le llama trayectoria. Cuando exista al menos una trayectoria entre cualquier par de nodos se tiene una red conexa (figuras 3.1 y 3.2). Cuando una trayectoria comienza y termina en un mismo nodo se le llama ciclo (figura 3.4) y a una subred conexa sin ciclos se le llama árbol. Si el árbol

abarca todos los nodos de la red entonces es llamado árbol de expansión (Figura 3.3).

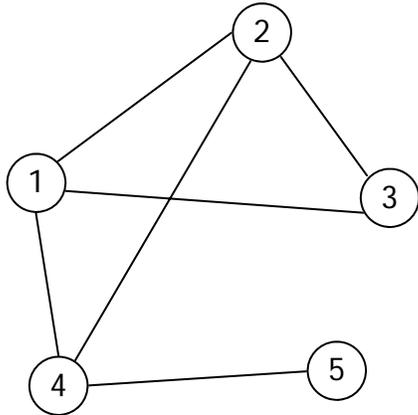


Figura 3.1 Red conexa

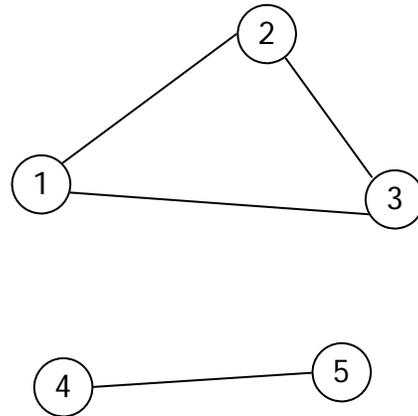


Figura 3.2 Red inconexa

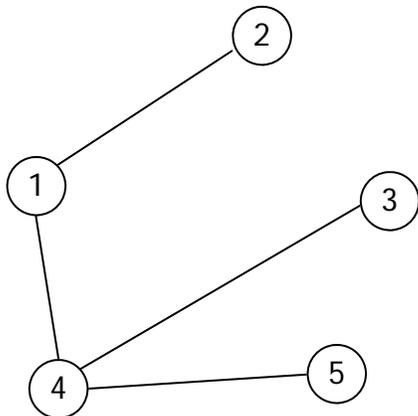


Figura 3.3 Árbol de expansión

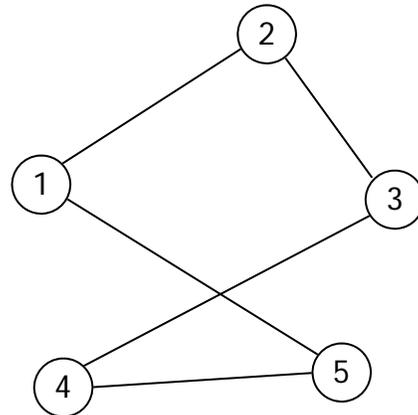


Figura 3.4 Ciclo

En este capítulo se abordan tres algoritmos sencillos que nos permiten obtener soluciones óptimas a algunos problemas típicos de las redes; como son la determinación del flujo máximo dentro de un sistema, la estructuración del árbol de expansión de menor longitud y la definición de la trayectoria más corta entre dos nodos.

3.1 Flujo máximo

El algoritmo de flujo máximo permite definir la capacidad máxima de una red dirigida desde una fuente hasta un destino. Es un algoritmo muy útil para determinar el gasto

máximo de una red de tuberías o la capacidad vehicular de una red de caminos.

3.1.1 Teoría

A continuación, con ayuda de un ejercicio dirigido, se exponen las particularidades y funcionamiento del algoritmo de flujo máximo.

Ejemplo 3

La red de drenaje de una pequeña ciudad ha ido creciendo conforme las colonias se han conurbado. En tiempo de lluvias la capacidad del drenaje se ve sobrepasada y la ciudad sufre inundaciones. Se ha propuesto la ampliación del colector principal para un desalojo eficiente de las precipitaciones.

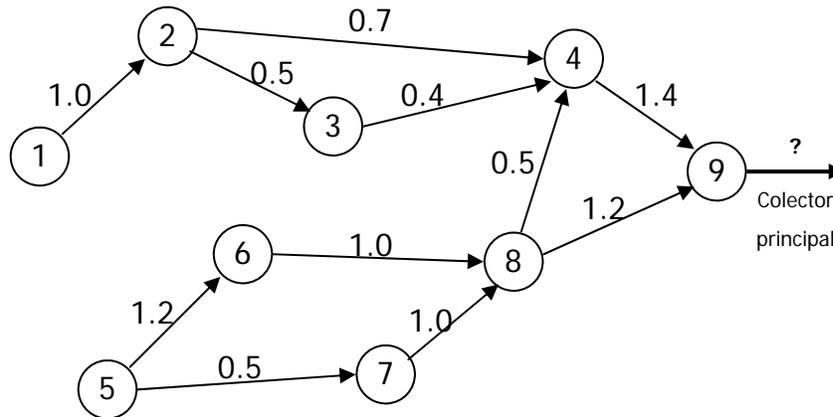


Figura 3.5 Red de alcantarillado

En la figura 3.5 se muestra el gasto máximo en m^3/s de los colectores secundarios y la dirección del flujo. Determine la capacidad de dicho colector con base en el flujo máximo de la red.

El algoritmo de flujo máximo requiere que exista un solo nodo de origen y uno de destino. En este caso los flujos se originan en los nodos 1 y 5 por lo que es necesario crear un nodo ficticio de origen. Lo mismo sucede cuando se tiene diversos destinos del flujo, se debe crear un nodo ficticio de destino donde confluyan los reales. El flujo de los arcos salientes del nodo ficticio de origen corresponden a la suma de los arcos salientes de los nodos de origen real (figura 3.6).

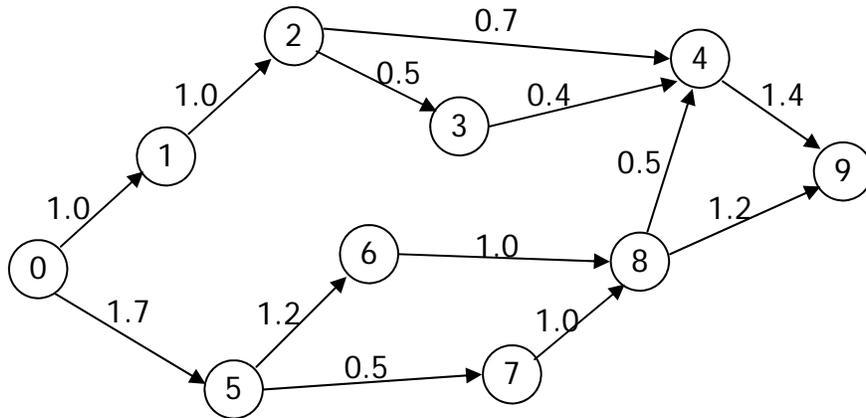


Figura 3.6 Red de alcantarillado

Como primer paso se debe encontrar una trayectoria capaz de transportar algún flujo desde el origen hasta el destino, por ejemplo $0 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 9$. En esta ruta se busca el arco con menor capacidad, en este caso el arco $2 \rightarrow 4$ con capacidad para $0.7 \text{ m}^3/\text{s}$. Este es el máximo flujo que puede transportarse por esta trayectoria y se plasma colocándolo en el extremo de destino de cada uno de los arcos involucrados. La capacidad residual de cada ducto se anota junto a su nodo de origen (figura 3.7).

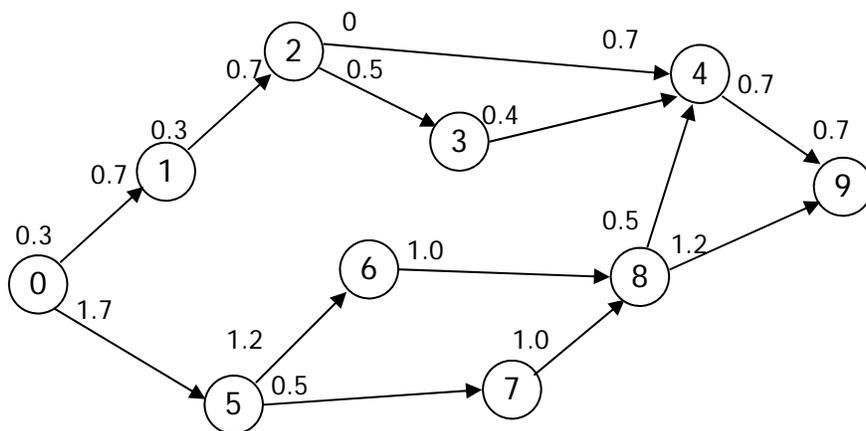


Figura 3.7 Primera trayectoria

Ahora se busca otra trayectoria que tenga capacidad residual para transportar un flujo del origen al destino. La trayectoria $0 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 9$ cumple con esta condición y el menor flujo residual de ella es $0.3 \text{ m}^3/\text{s}$. Se resta este valor a los flujos residuales de los arcos involucrados y se le suma a su flujo transportado (figura 3.8).

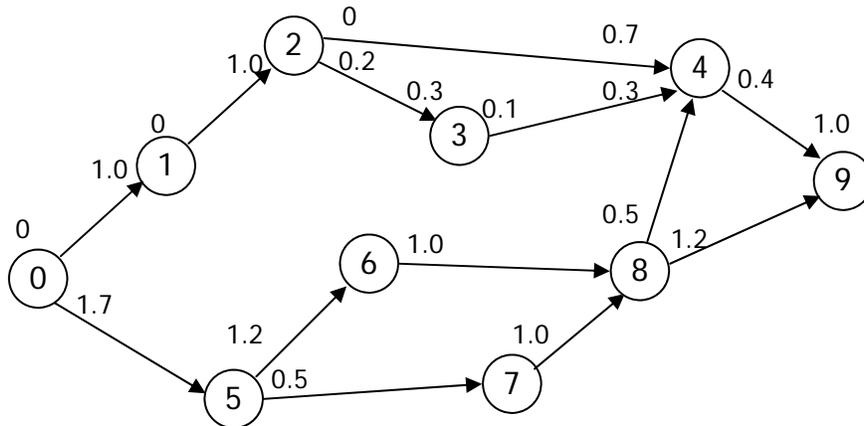


Figura 3.8 Segunda trayectoria

Podemos observar que los arcos $2 \rightarrow 3$ y $3 \rightarrow 4$ aún cuentan con flujo residual, pero como se conectan al origen a través de los arcos $0 \rightarrow 1$ y $1 \rightarrow 2$ que están saturados, esta capacidad residual no se aprovechará.

Buscando otra trayectoria se encuentra $0 \rightarrow 5 \rightarrow 6 \rightarrow 8 \rightarrow 4 \rightarrow 9$ con un flujo residual mínimo en el arco $4 \rightarrow 9$ de magnitud $0.4 \text{ m}^3/\text{s}$. Con este valor se calculan los nuevos flujos residuales para los arcos de esta ruta (figura 3.9).

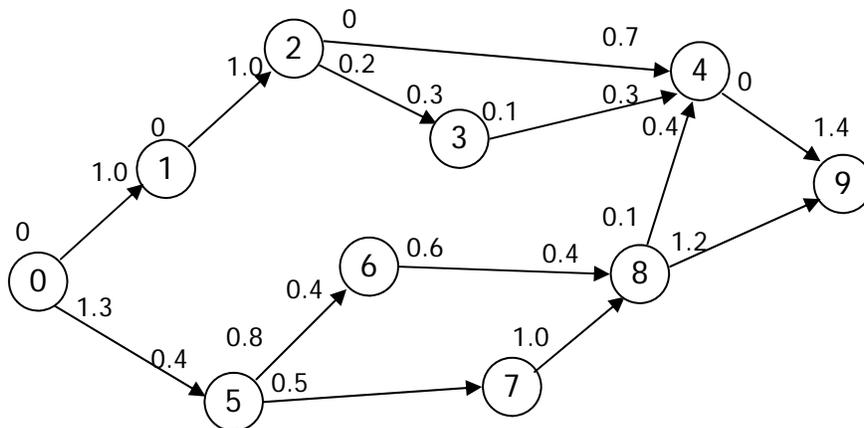


Figura 3.9 Tercera trayectoria

La cuarta trayectoria es $0 \rightarrow 5 \rightarrow 6 \rightarrow 8 \rightarrow 9$ con un flujo residual mínimo de $0.6 \text{ m}^3/\text{s}$. Se calculan los flujos residuales y se registran en la red (figura 3.10).

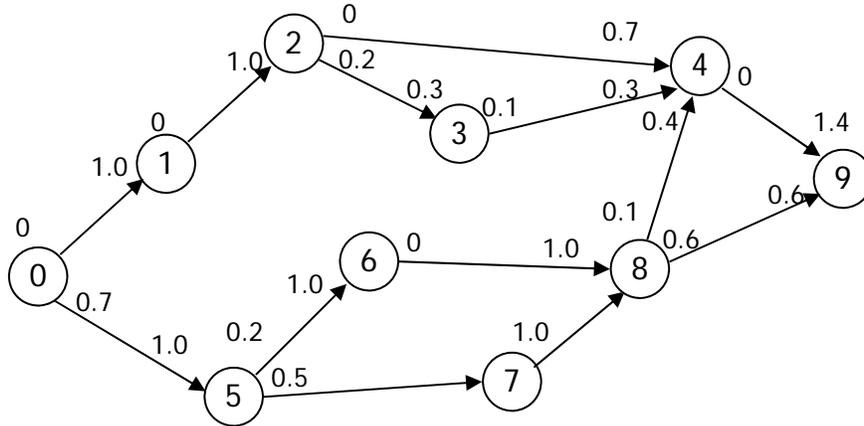


Figura 3.10 Cuarta trayectoria

Ahora solo queda una trayectoria con flujo residual, $0 \rightarrow 5 \rightarrow 7 \rightarrow 8 \rightarrow 9$. El mínimo corresponde al arco $5 \rightarrow 7$ por lo que se resta $0.5 \text{ m}^3/\text{s}$ a los flujos residuales de esta trayectoria (figura 3.11).

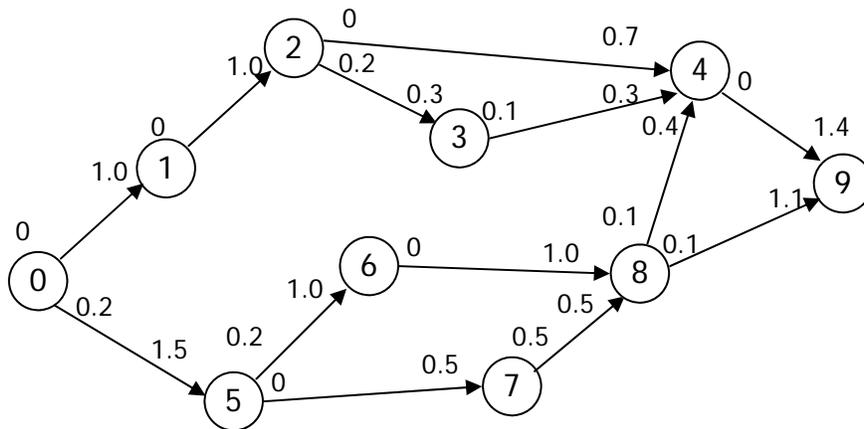


Figura 3.11 Quinta trayectoria

Si bien, aunque existe una capacidad residual de $0.2 \text{ m}^3/\text{s}$ en los arcos que salen del origen y de $0.1 \text{ m}^3/\text{s}$ en los que desembocan en el destino, es imposible encontrar una ruta que los transporte.

Con esto concluye el algoritmo del flujo máximo y se calcula su valor sumando los flujos que entran en el destino, $1.1 \text{ m}^3/\text{s} + 1.4 \text{ m}^3/\text{s} = 2.5 \text{ m}^3/\text{s}$. Por lo tanto el colector principal deberá ser diseñado para captar este flujo.

Cabe aclarar que este algoritmo sólo es capaz de calcular los flujos máximos totales que entran o salen de la red pero no los que circularan efectivamente por cada arco. Los valores de los arcos interiores dependen del orden en el que se seleccionen las trayectorias.

Por ejemplo, si hubiéramos seleccionado las trayectorias en este orden: $0 \rightarrow 5 \rightarrow 7 \rightarrow 8 \rightarrow 9$, $0 \rightarrow 5 \rightarrow 6 \rightarrow 8 \rightarrow 9$, $0 \rightarrow 5 \rightarrow 6 \rightarrow 8 \rightarrow 4 \rightarrow 9$, $0 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 9$, $0 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 9$, obtendríamos la red de la figura 3.12; con el mismo valor para el flujo máximo pero con flujos residuales distintos a los de la figura 3.11.

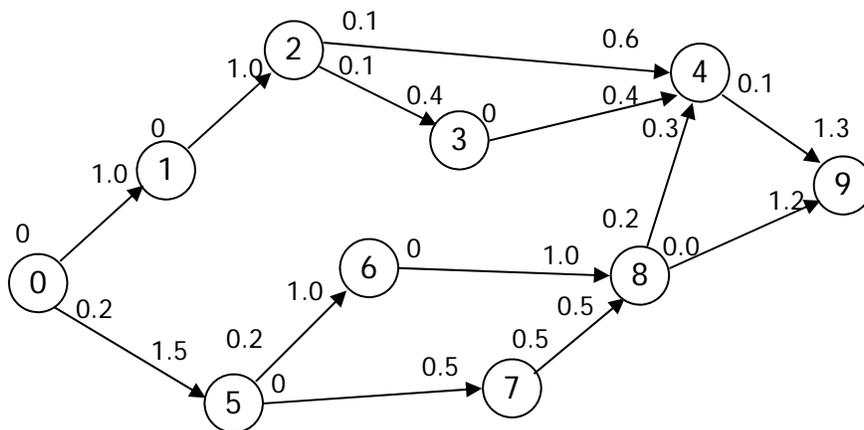


Figura 3.12 Flujo máximo

3.1.2 Ejercicios resueltos

En esta sección se verá la aplicación del algoritmo del flujo máximo en un problema de capacidad vial y en uno de abastecimiento de agua potable.

Ejercicio 14

Por los trabajos de ampliación del colector principal se deberá cerrar el cuerpo sur de una importante avenida de la ciudad. El tráfico será desviado por calles más pequeñas de un sólo sentido, cuya capacidad (veh/h) se muestra en la figura 3.13.

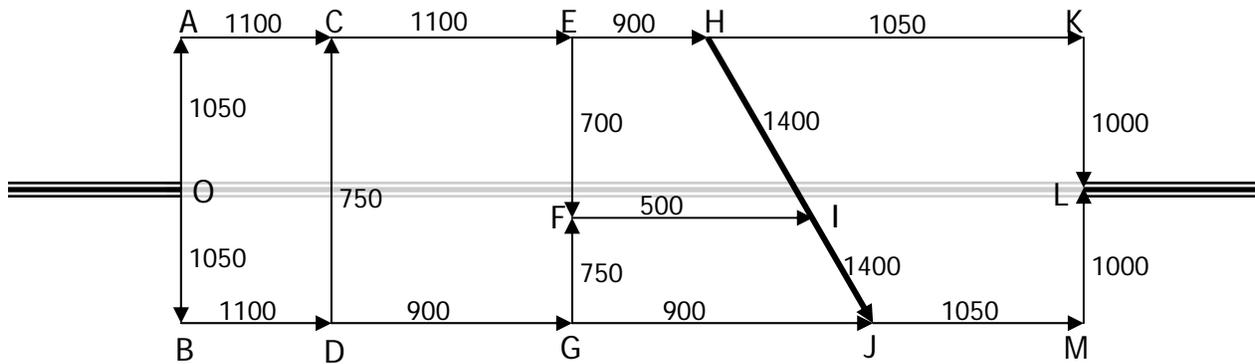


Figura 3.13 Red vial

Determine el flujo vehicular máximo que puede circular por esta red vial.

Solución

Primero se busca una trayectoria capaz de transportar el flujo desde el origen al destino: $O \rightarrow B \rightarrow D \rightarrow G \rightarrow J \rightarrow M \rightarrow L$. En esta trayectoria el menor flujo se observa en los arcos $D \rightarrow G$ y $G \rightarrow J$ con un valor de 900 veh/h. Con este dato se calculan los flujos residuales de la trayectoria (figura 3.14).

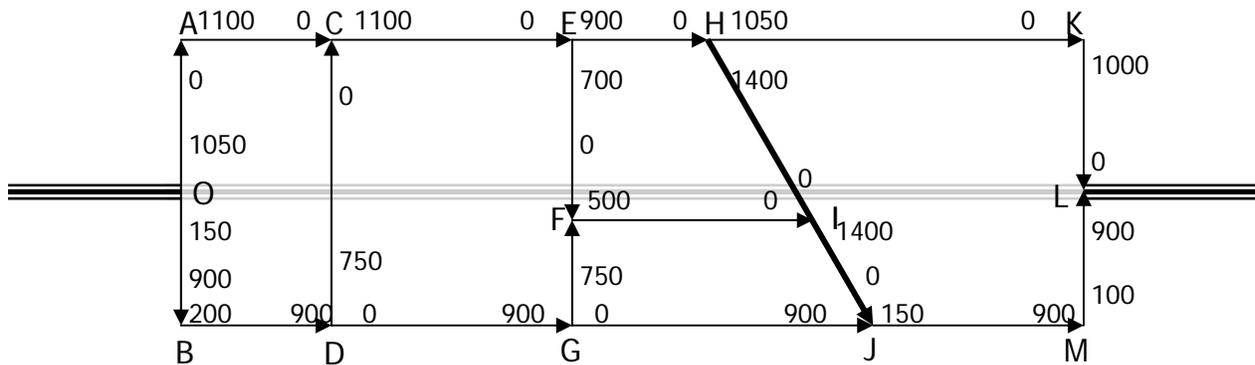


Figura 3.14 Primer trayectoria

Una segunda trayectoria capaz de trasportar flujo es $O \rightarrow A \rightarrow C \rightarrow E \rightarrow H \rightarrow K \rightarrow L$, en la cual el arco $E \rightarrow H$ tiene la menor capacidad, 900 veh/h. Con este valor se calculan los flujos residuales de esta trayectoria (figura 3.15).

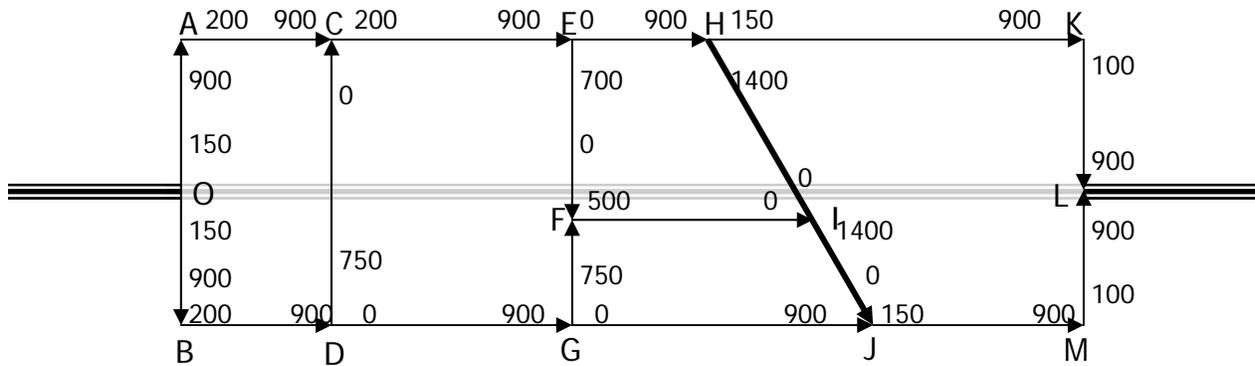


Figura 3.15 Segunda trayectoria

Una tercera trayectoria es $O \rightarrow A \rightarrow C \rightarrow E \rightarrow F \rightarrow I \rightarrow J \rightarrow M \rightarrow L$ con capacidad de 100 veh/h en el arco $E \rightarrow F$ (figura 3.16).

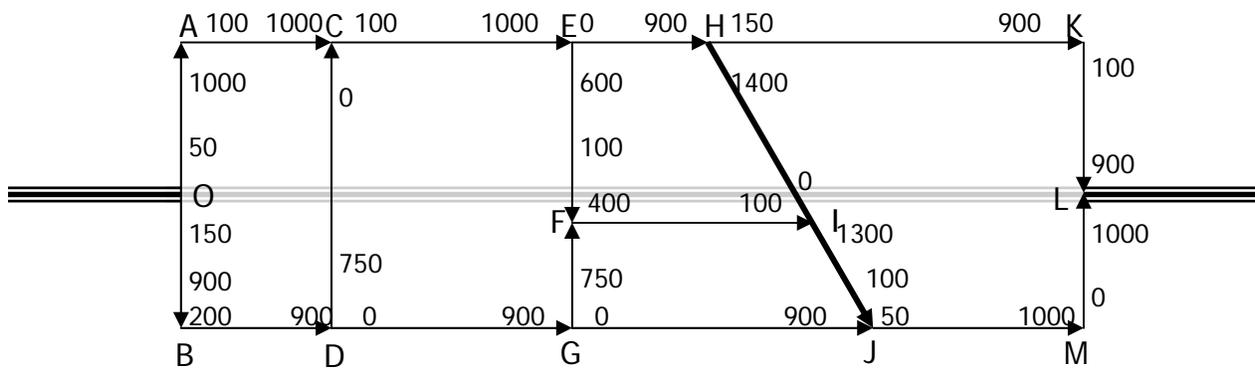


Figura 3.16 Tercera trayectoria

Tras calcular los flujos residuales se observa que no existen más trayectorias capaces de transportar flujo del origen al destino. La suma de los flujos que entran al nodo L es el flujo máximo, con un valor de 1900 veh/h.

Ejercicio 15

Una red de pozos bombea agua hacia una tubería principal a través de una serie de tanques interconectados. En la figura 3.17 se muestra la configuración de la red y los gastos máximos para cada tubería en lps. Determine el flujo máximo de la tubería principal trabajando a máxima capacidad.

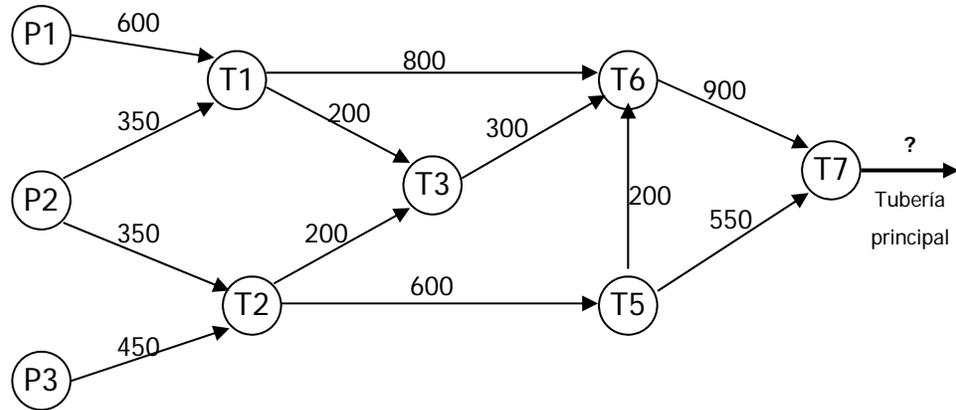


Figura 3.17 Red de pozos y tanques

Solución

Primero se crea un nodo ficticio de origen con arcos a los nodos P1, P2 y P3, con capacidades que satisfagan los gastos salientes de dichos nodos (figura 3.18).

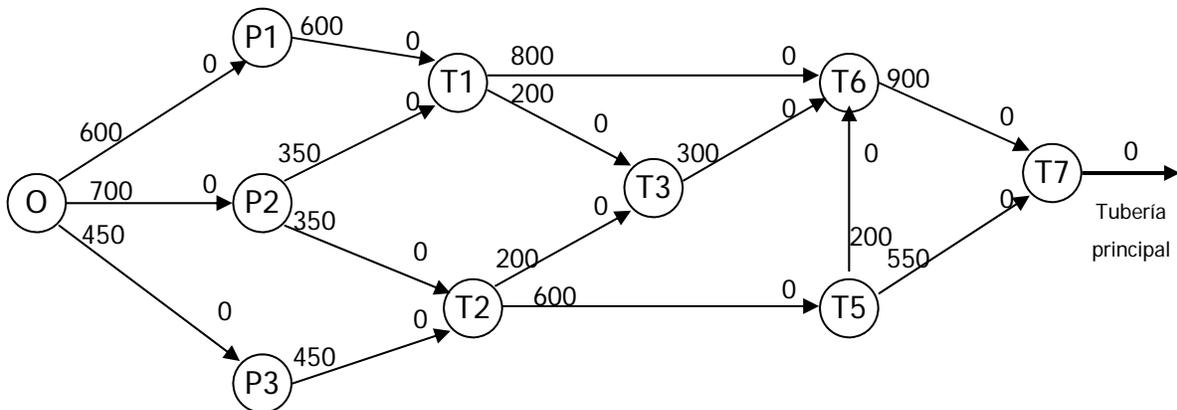


Figura 3.18 Red de pozos y tanques

Se encuentra una primera trayectoria: $O \rightarrow P1 \rightarrow T1 \rightarrow T6 \rightarrow T7$ con capacidad de 600 lps y se calculan los flujos residuales, como se muestra en la figura 3.19.

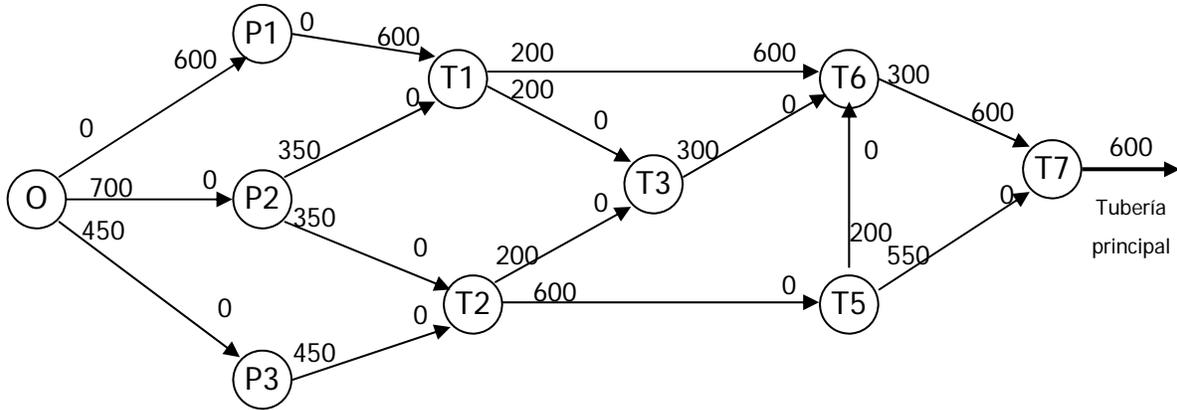


Figura 3.19 Primera trayectoria

La segunda trayectoria encontrada es $O \rightarrow P3 \rightarrow T2 \rightarrow T5 \rightarrow T7$ con 450 lps (figura 3.20).

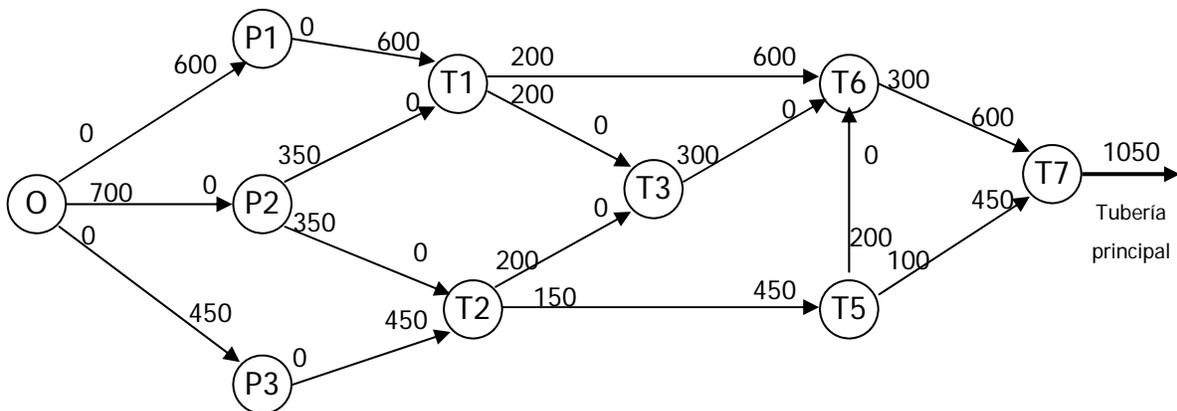


Figura 3.20 Segunda trayectoria

La tercera trayectoria es $O \rightarrow P2 \rightarrow T1 \rightarrow T6 \rightarrow T7$ con 200 lps (figura 3.21). Con esto la cuarta trayectoria corresponde a $O \rightarrow P2 \rightarrow T1 \rightarrow T3 \rightarrow T6 \rightarrow T7$ con 100 lps (figura 3.22). La quinta y última trayectoria, $O \rightarrow P2 \rightarrow T2 \rightarrow T5 \rightarrow T7$, aporta otros 100 lps (figura 3.23).

El flujo máximo de la red es de 1450 lps.

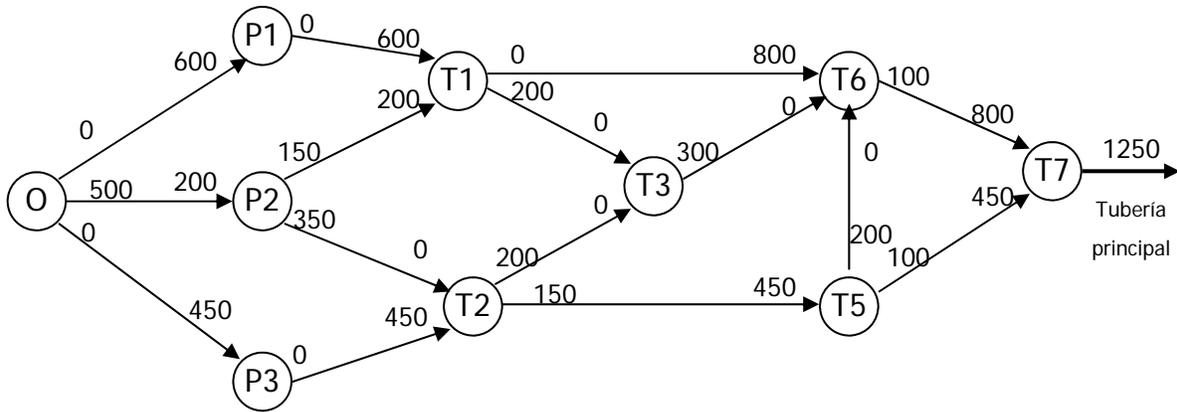


Figura 3.21 Tercera trayectoria

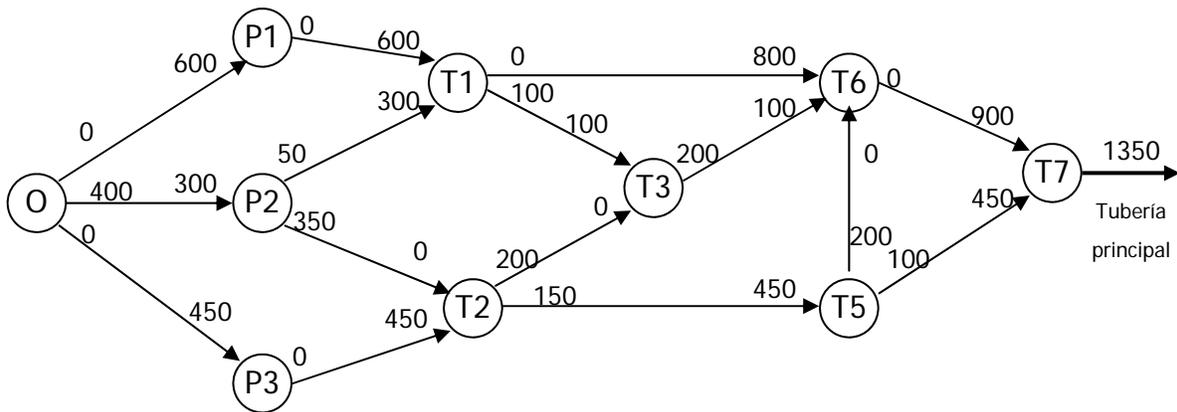


Figura 3.22 Cuarta trayectoria

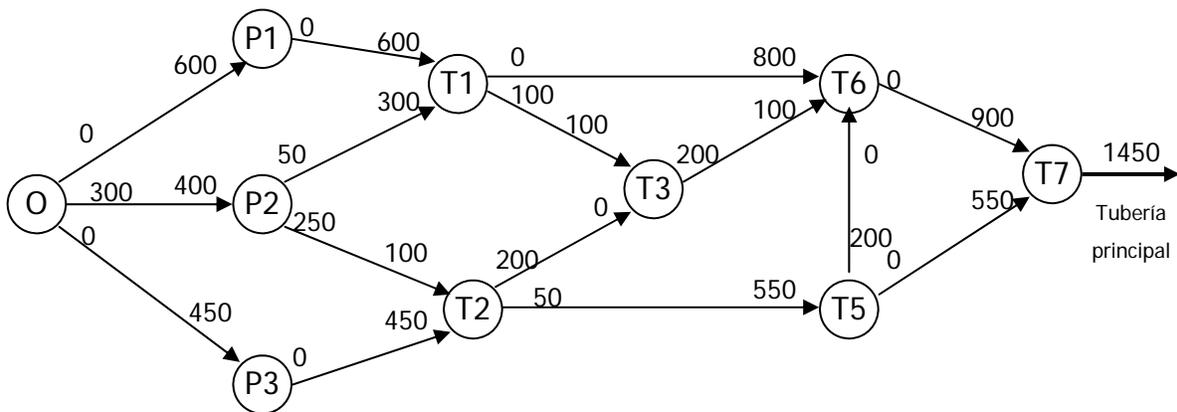


Figura 3.23 Quinta trayectoria

3.1.3 Ejercicios propuestos

Ejercicio 16

La producción de tres refinerías se transporta a través de una red de oleoductos hacia dos terminales de distribución. Ante las grandes distancia que recorren los fluidos, la red cuenta con tres estaciones de bombeo. Determine la capacidad máxima de la red en millones de barriles diarios de acuerdo al diagrama de la figura 3.24.

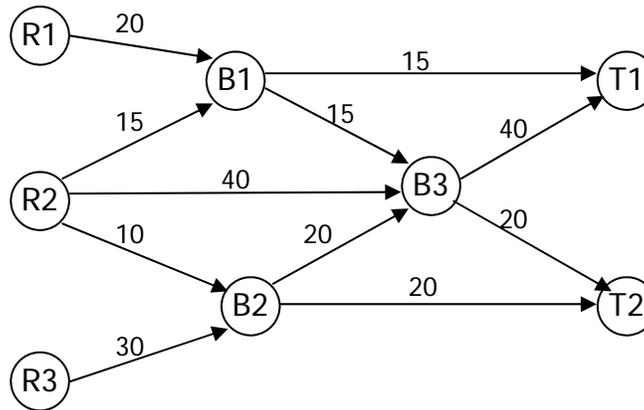


Figura 3.24 Red de oleoductos

Solución

Al aplicar el algoritmo de Flujo máximo se obtiene el diagrama de la figura 3.25.

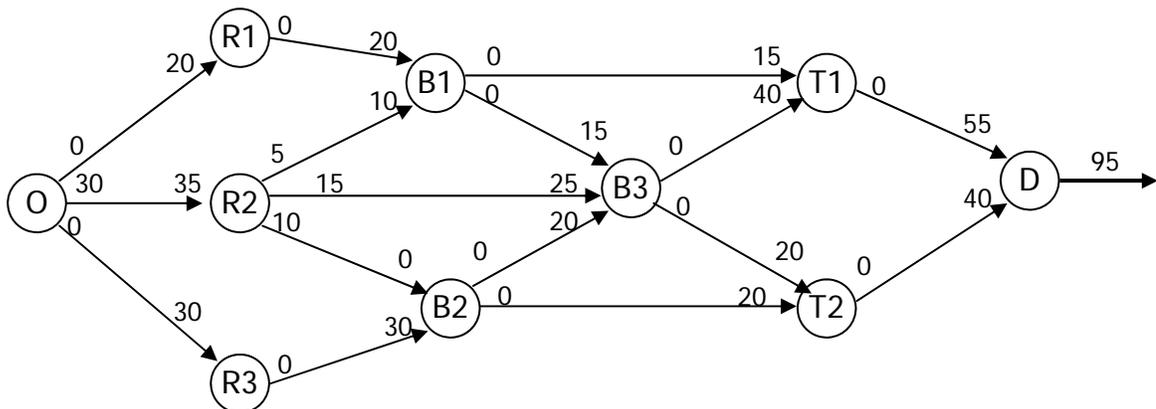


Figura 3.25 Flujo máximo

La capacidad máxima de la red es de 95 millones de barriles diarios.

Ejercicio 17

Con el fin de rediseñar la geometría de un entronque se requiere determinar el flujo máximo de vehículos que circularán por él. De acuerdo con el diagrama de la figura 3.26 calcule la capacidad máxima de la red que se muestra a continuación, donde las capacidades de las carreteras están dadas en vehículos por hora.

Solución

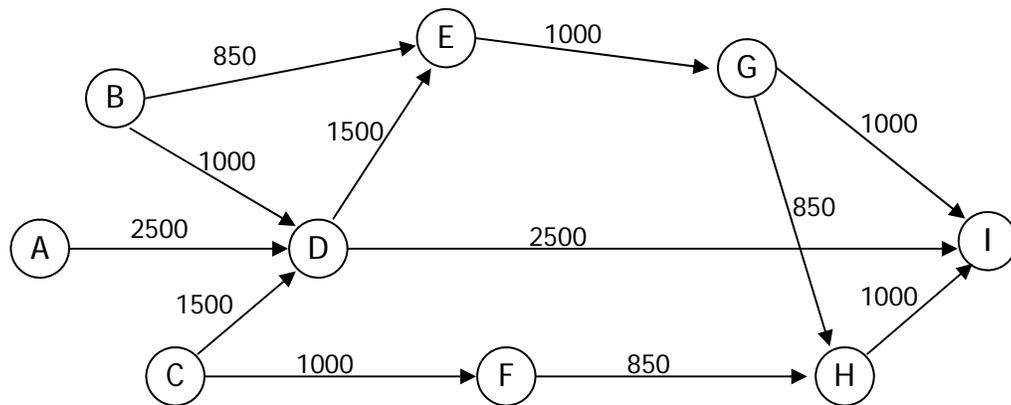


Figura 3.26 Red de carreteras

Al aplicar el algoritmo de Flujo máximo (figura 3.27) se obtiene un flujo de 4,350 veh/h en la red.

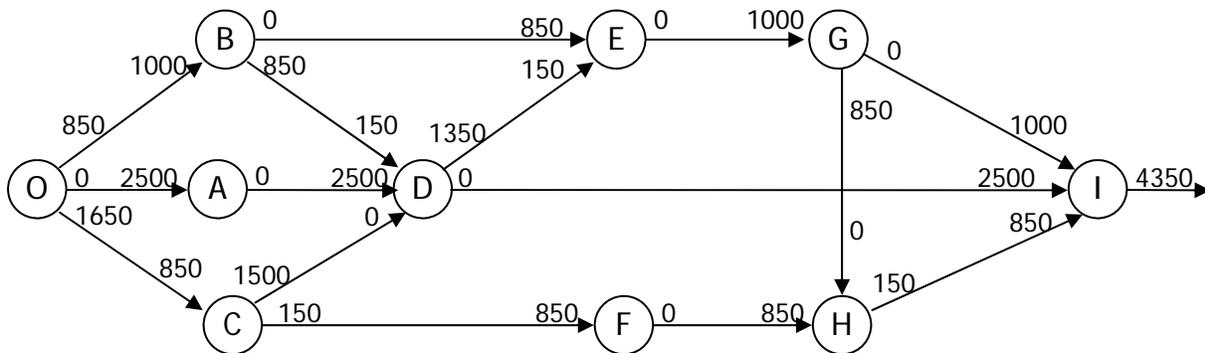


Figura 3.27 Flujo máximo

3.2 Árbol de mínima expansión

Uno de los problemas más comunes al construir redes de infraestructura es determinar la estructura mínima que permita que todos los nodos queden interconectados. Un árbol de expansión, al tratarse de una red conexa sin ciclos, cumpliría con la segunda condición. Pero para determinar la estructura mínima primero se han de conocer los arcos potenciales, y mediante el algoritmo del Árbol de mínima expansión se descartarían aquellos que no formen una red óptima.

3.2.1 Teoría

El algoritmo del Árbol de mínima expansión requiere el reconocimiento visual de alternativas para seleccionar la mejor opción. Por ello, es más sencillo comprender los pasos que sigue mediante un ejemplo detallado.

Ejemplo 4

Se quiere construir una red de caminos que comunique a la cabecera municipal de San Juanito con las villas y rancherías de la región. Un experto ha estimado el costo de construcción (en millones de pesos) de cada uno de los caminos factibles y lo ha plasmado en la red de la figura 3.28.

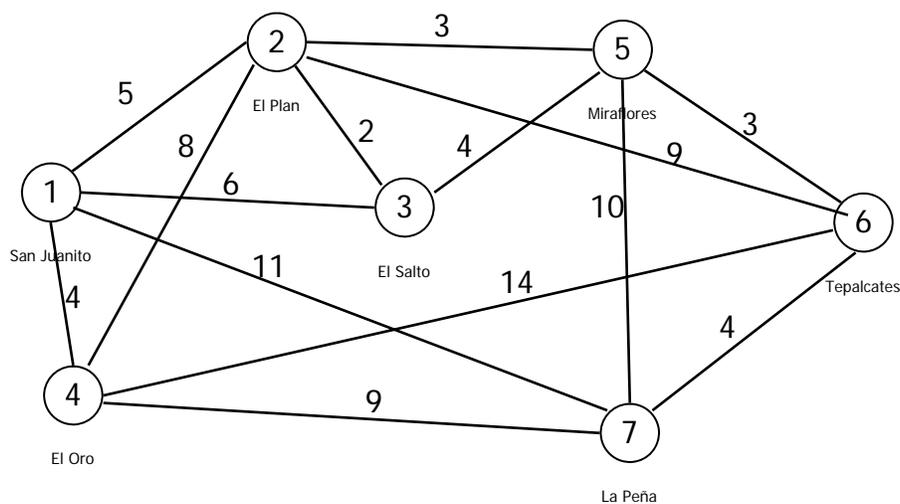


Figura 3.28 Red de caminos posibles

Determine la red de caminos con el menor costo de construcción.

El algoritmo del Árbol de mínima expansión consiste en seleccionar un conjunto conexo de nodos y determinar cual es el arco de menor longitud que sea parte del subconjunto. Este arco pasará a formar parte del árbol y el nodo enlazado será parte del nuevo conjunto conexo. En un principio, el conjunto inicial contiene al nodo 1 solamente (figura 3.29).

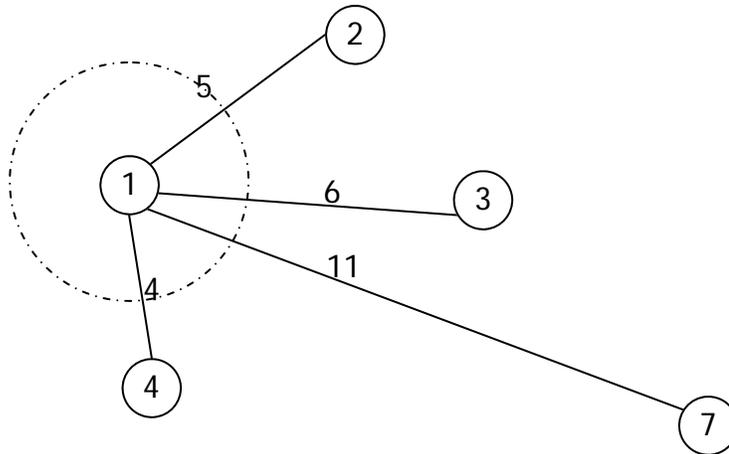


Figura 3.29 Primera expansión

Se observa que de los cuatro arcos que parten del nodo 1, el de menor costo (longitud) enlaza al nodo 4. El arco 1-4 se convierte en la primer rama del árbol y el conjunto conexo esta constituido por los nodos 1 y 4 (figura 3.30).

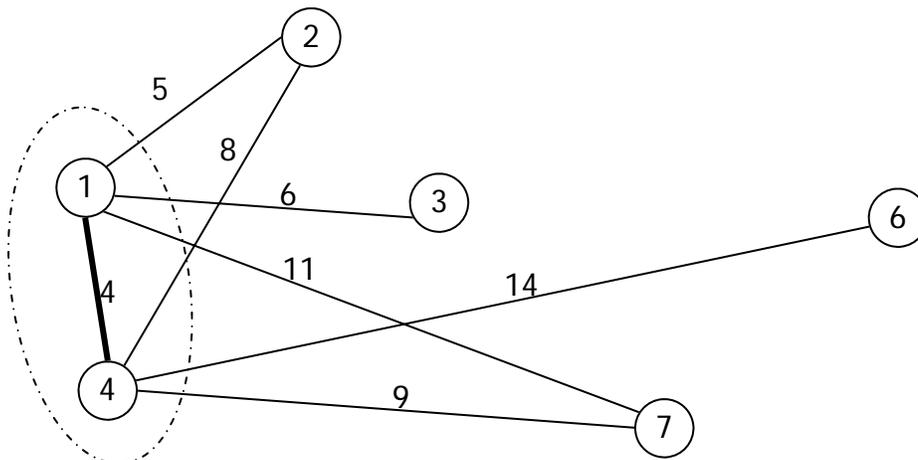


Figura 3.30 Segunda expansión

La nueva rama del árbol de expansión es el arco con menor costo de este subconjunto, es decir, el arco 1-2. El nodo 2 pasa a formar parte del subconjunto conexo mientras que el arco 2-4 es descartado (figura 3.31).

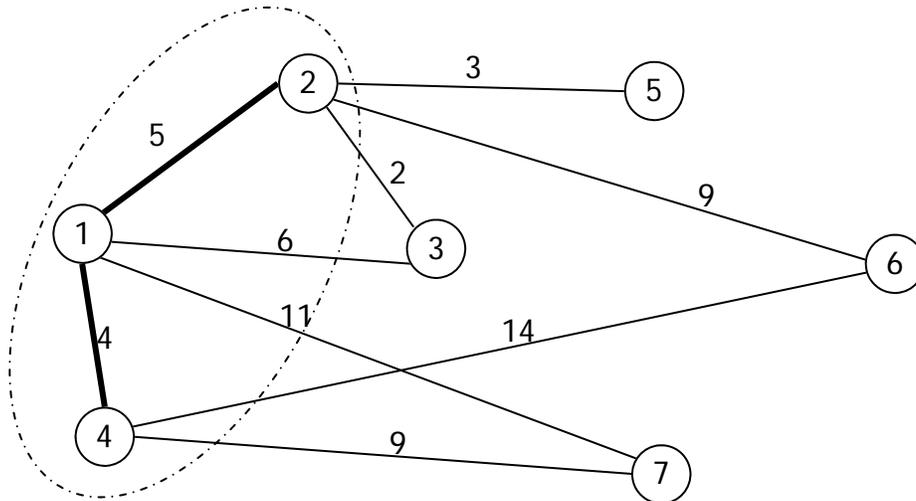


Figura 3.31 Tercera expansión

En la siguiente iteración se observa que el arco 2-3 tiene el menor costo y el nodo 3 pasa al subconjunto conexo. El arco 1-3 es descartado (figura 3.32).

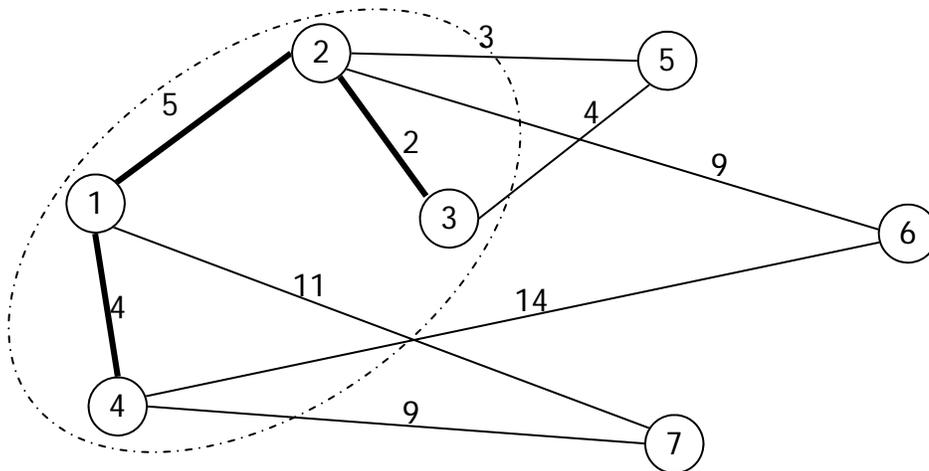


Figura 3.32 Cuarta expansión

La rama que se integra al árbol es la 2-5 y el nodo 5 pasa al subconjunto. Se descarta el arco 3-5 (figura 3.33).

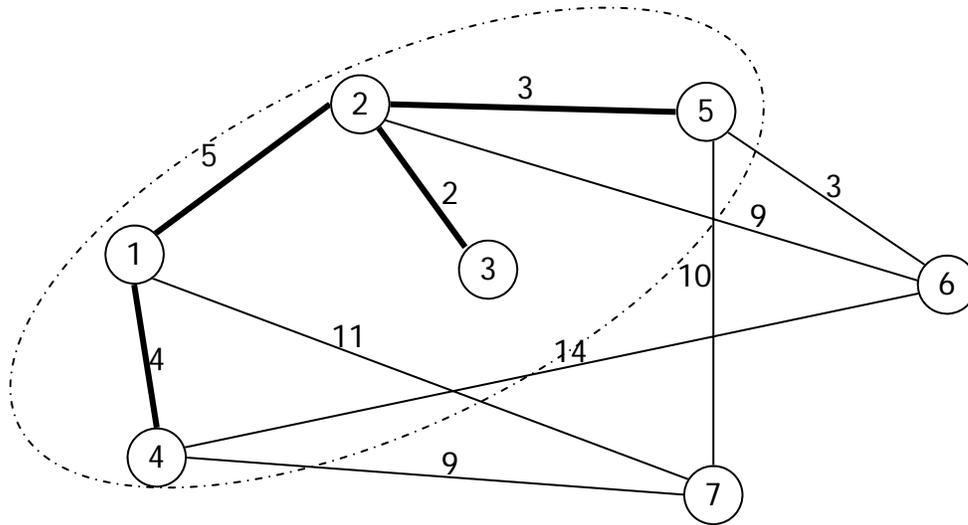


Figura 3.33 Quinta expansión

Con un costo de 3 millones el arco 5-6 es la rama potencial más corta y pasa a formar parte del árbol de expansión. Los arcos 2-6 y 4-6 son descartados (figura 3.34).

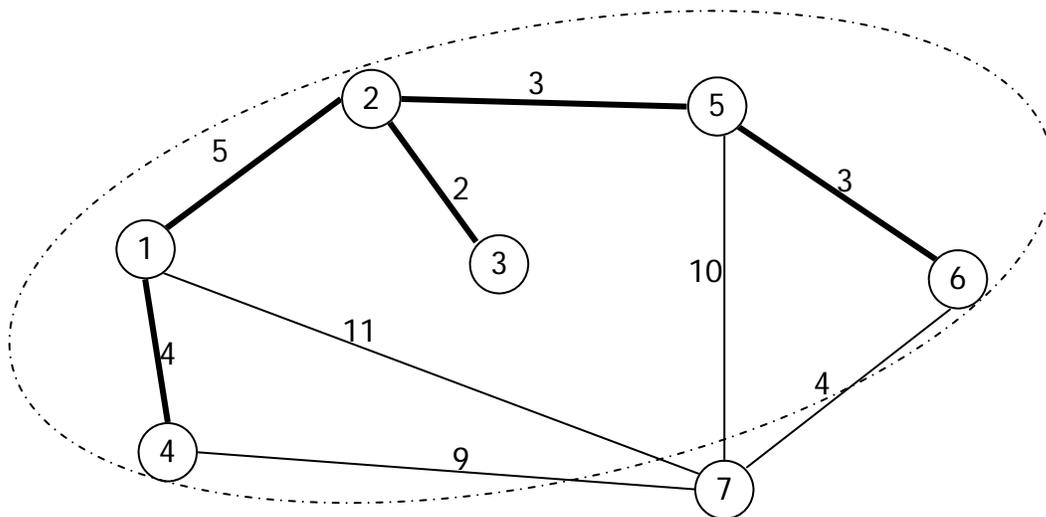


Figura 3.34 Sexta expansión

La rama con menor costo que conecta el último nodo de la red es la 7-6 con un costo de 4 millones. En la figura 3.35 podemos ver el Árbol de mínima expansión que nos

muestra cual es la red de caminos que conecta todas estas poblaciones al menor costo. El costo se obtiene sumando la longitud de los arcos, en este caso corresponde a 21 millones de pesos.

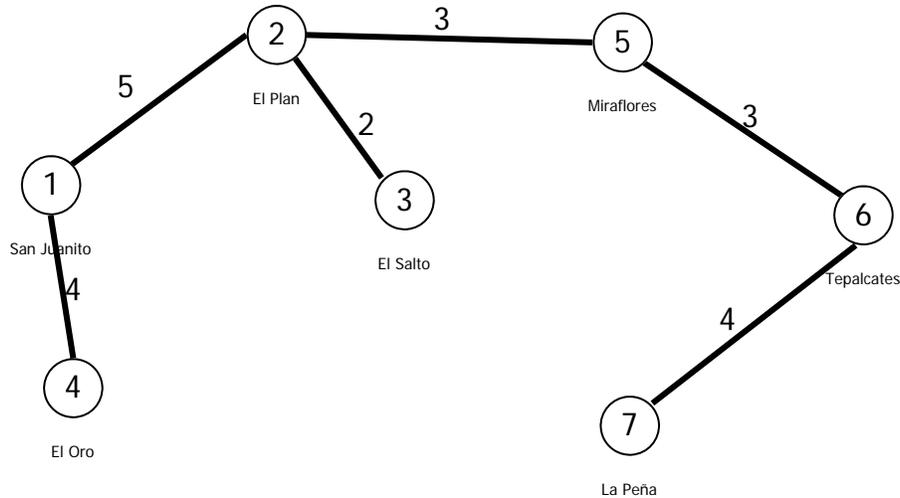


Figura 3.35 Árbol de mínima expansión

3.2.2 Ejercicios resueltos

Los siguientes ejercicios reforzarán los conocimientos adquiridos. El primero de ellos resuelve un problema de cableado subterráneo en un desarrollo habitacional y el segundo de ellos hace uso del algoritmo del Árbol de mínima expansión en una red ferroviaria.

Ejercicio 18

En un desarrollo residencial se construirá una red de cableado eléctrico y de comunicaciones con tuberías subterráneas. En la figura 3.36 se indica la posición y longitud (en metros) de las tuberías compatibles con el proyecto. Determine la red mínima que interconecta todas las casas, partiendo de la casa 1.

Solución

Primero se determina el conjunto conexo que forman los nodos directamente conectados al nodo 1. De los arcos contenidos en el conjunto se selecciona el de menor longitud, en este caso el arco 1-4 (figura 3.37).

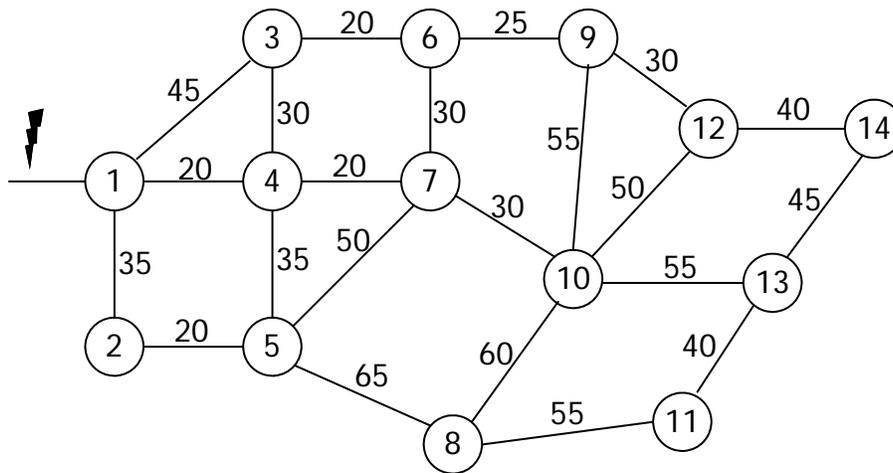


Figura 3.36 Red de cableado subterráneo.

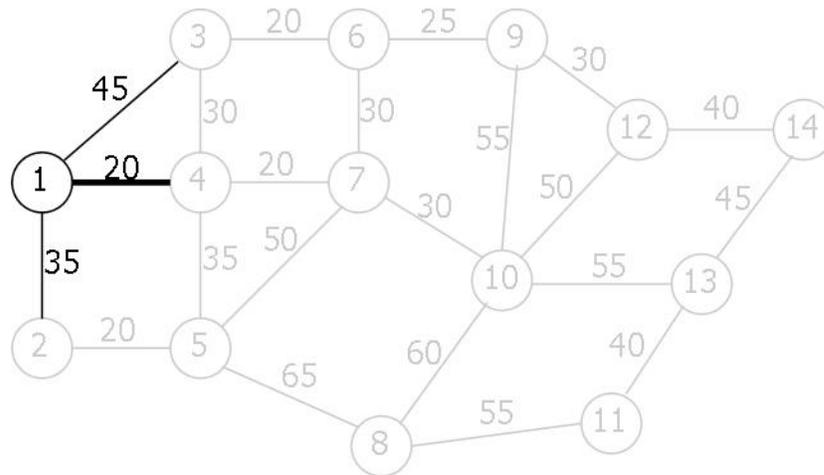


Figura 3.37 Primera expansión

Con los nodos 1 y 4 conectados expande el conjunto conexo y se encuentra el arco con la menor longitud 4-7 (figura 3.38). Al conectar el nodo 7 se observa que los arcos 3-4, 6-7 y 7-10 tienen la misma longitud; se selecciona arbitrariamente el arco 3-4 (figura 3.39). Con el nodo 3 conectado a través del arco 3-4 se descarta el arco 1-3; el arco con menor longitud es el arco 3-6 (figura 3.40). El nuevo arco de menor longitud es ahora el 6-9 (figura 3.41). El arco 6-7 se descarta y se observa que existen dos arcos con longitud de 30 m; se selecciona arbitrariamente el arco 7-10 (figura 3.42). El arco

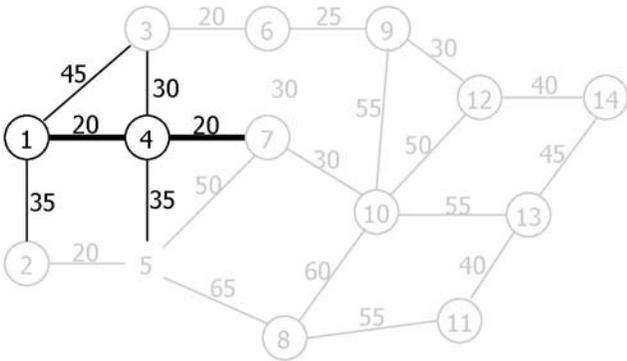


Figura 3.38 Segunda expansión

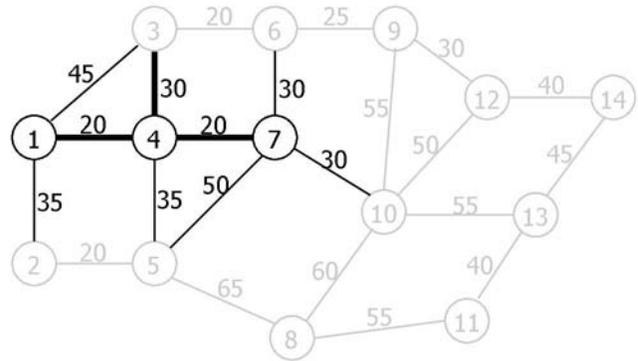


Figura 3.39 Tercera expansión

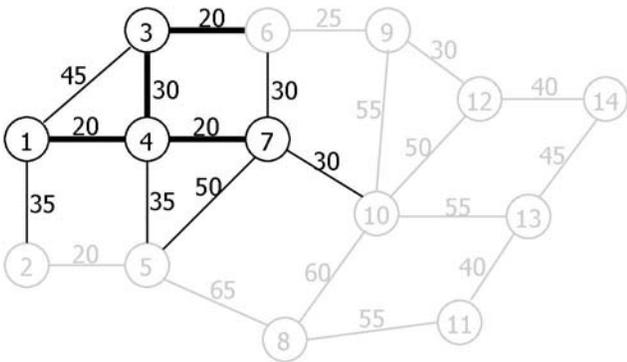


Figura 3.40 Cuarta expansión

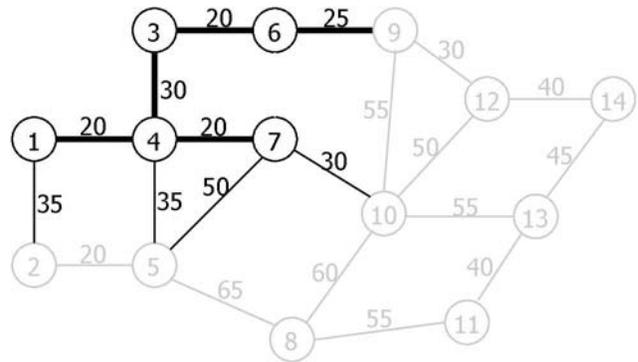


Figura 3.41 Quinta expansión

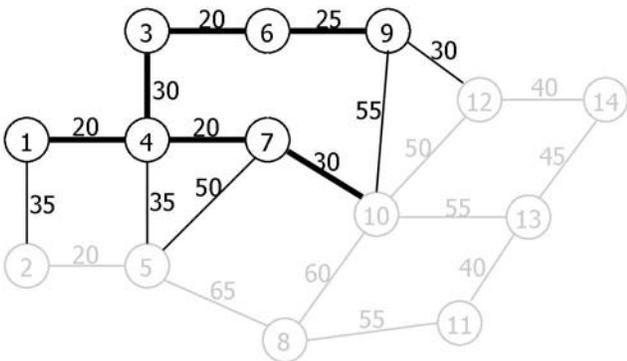


Figura 3.42 Sexta expansión

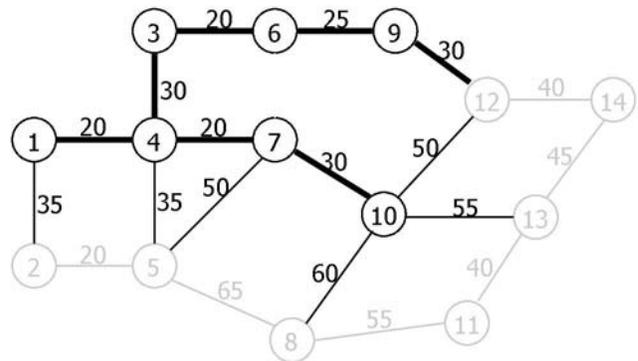


Figura 3.43 Séptima expansión

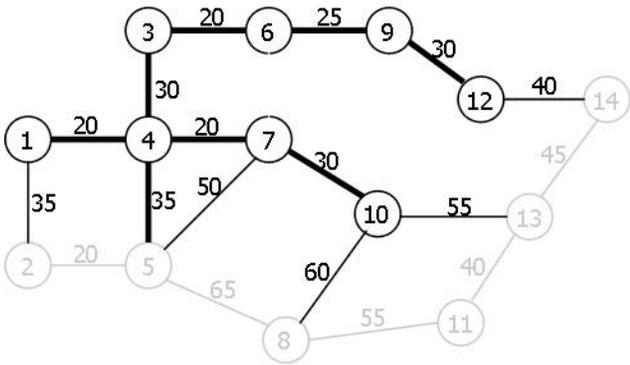


Figura 3.44 Octava expansión

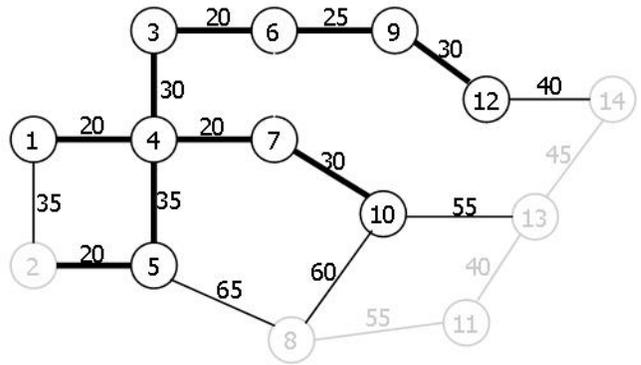


Figura 3.45 Novena expansión

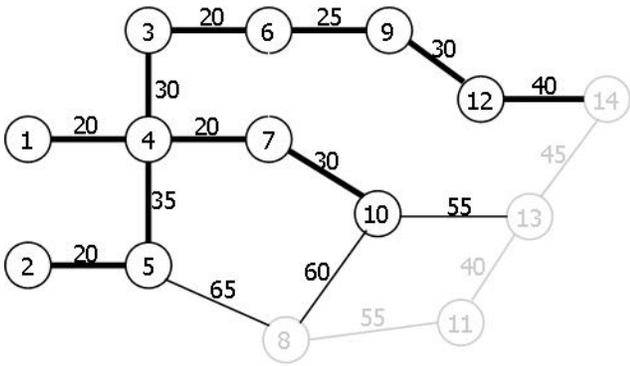


Figura 3.46 Décima expansión

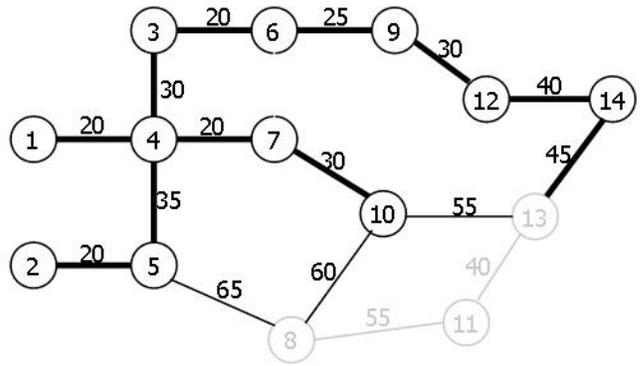


Figura 3.47 Undécima expansión

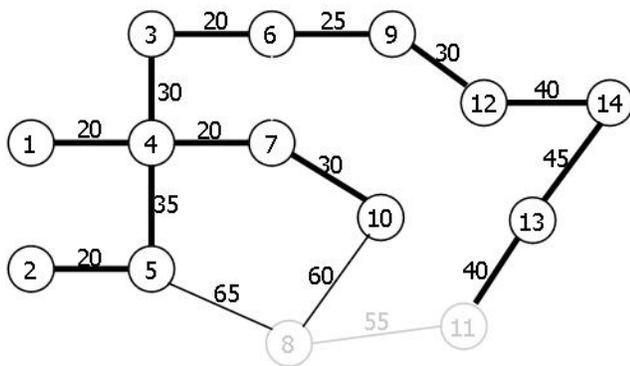


Figura 3.48 Duodécima expansión

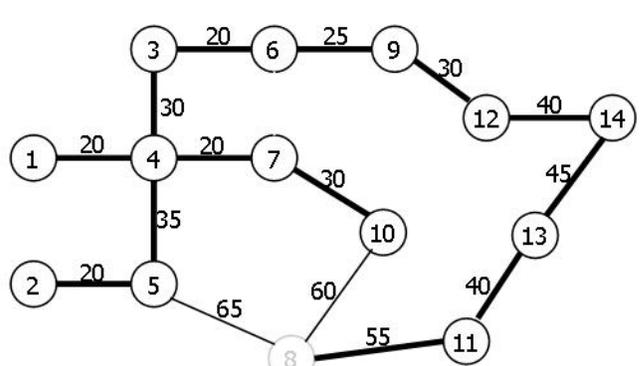


Figura 3.49 Decimotercera expansión

9-10 se descarta y el 9-12 pasa a formar parte del árbol de expansión (figura 3.43). Los arcos 1-2 y 4-5 tienen la menor longitud; arbitrariamente se escoge el 4-5 (figura 3.44). Se descarta el arco 5-7 y se observa que el arco 2-5 es el menor (figura 3.45). El arco 1-2 es descartado y el 12-14 es elegido (figura 3.46). El arco 13-14 es el menor, por lo tanto el nodo 13 entra al conjunto conexo (figura 3.47). El arco 19-13 se descarta y el árbol se expande desde el nodo 13 hacia el nodo 11 (figura 3.48). De los tres arcos restantes el de menor longitud es el 8-11, que es el último perteneciente al Árbol de mínima expansión (figura 3.49).

Finalmente se eliminan los arcos 5-8 y 8-10 y se obtiene el árbol de la figura 3.50 con una longitud total de 410 m.

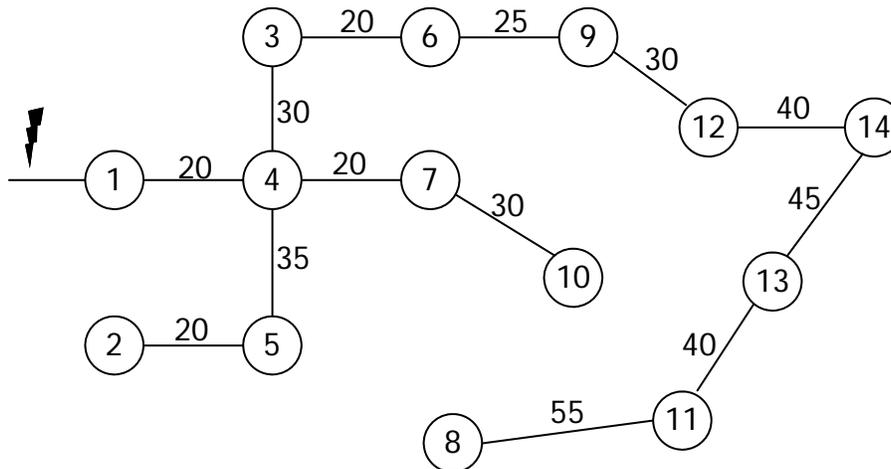


Figura 3.50 Árbol de mínima expansión

Ejercicio 19

En el esquema de la figura 3.51 se muestra una parte de la red ferroviaria multimodal de nuestro país, donde se señalan las distancias aproximadas entre terminales en kilómetros. Partiendo del Puerto de Manzanillo determine el Árbol de mínima expansión.

Solución

Manzanillo sólo cuenta con una vía que lo conecta a Guadalajara, así que obviamente ese arco forma parte del Árbol de mínima expansión. Es con la red conexa al nodo 4, donde se buscará el de menor distancia, en este caso el que conecta con Irapuato, con

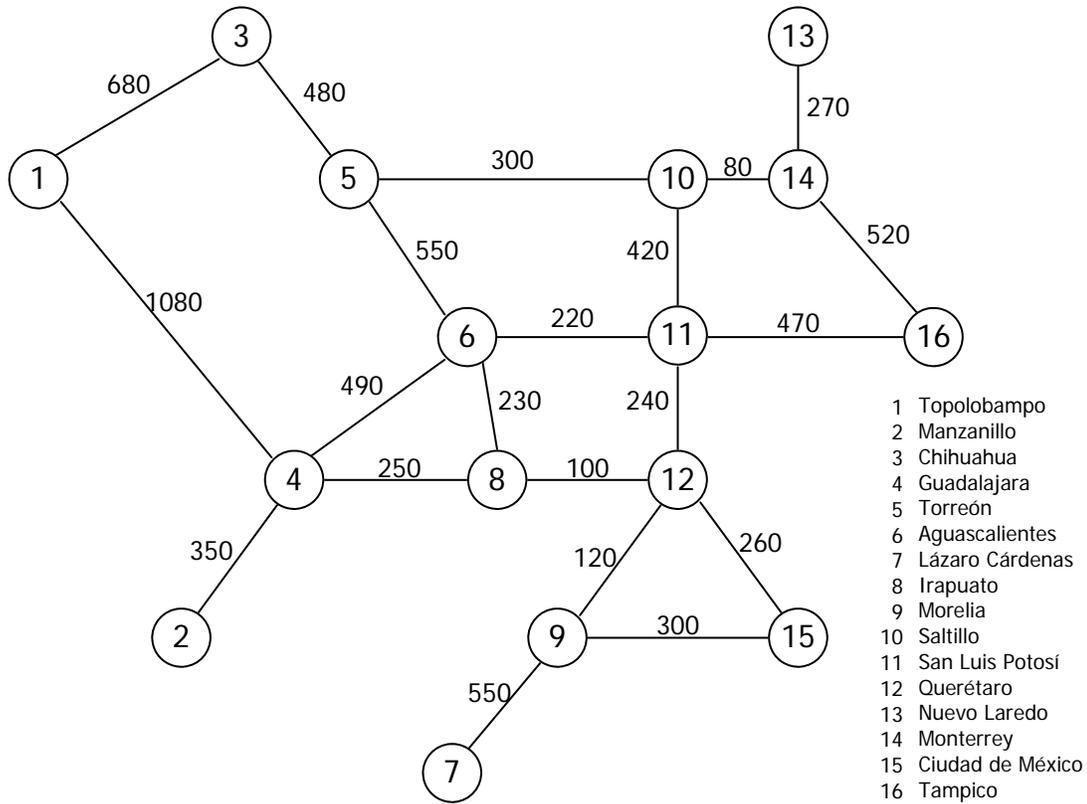


Figura 3.51 Red ferroviaria multimodal

longitud de 20 km (figura 3.52). Se agregan los arcos 6-8 y 8-12, siendo este último el más corto de la red conexa y pasa a formar parte del árbol de expansión (figura 3.53). Se agregan tres arcos más, y se observa que la conexión Querétaro-Morelia es la más corta, arco 9-12 (figura 3.54). Ahora el arco más corto es el 6-8, lo que nos permite cancelar el 4-6 (figura 3.55). La vía Aguascalientes-San Luis Potosí, arco 6-11, con 220

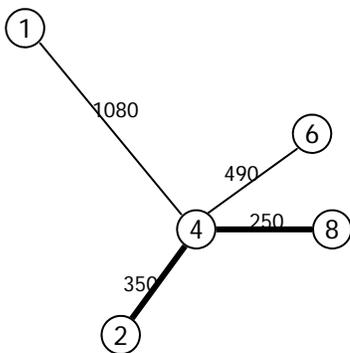


Figura 3.52 Primera expansión

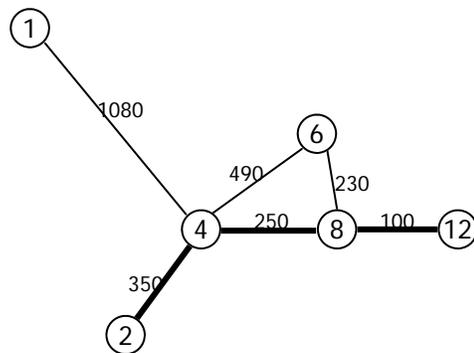


Figura 3.53 Segunda expansión

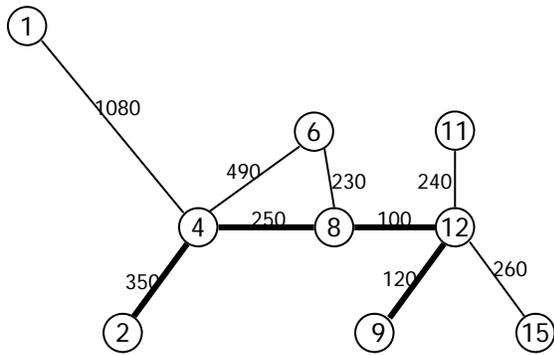


Figura 3.54 Tercera expansión

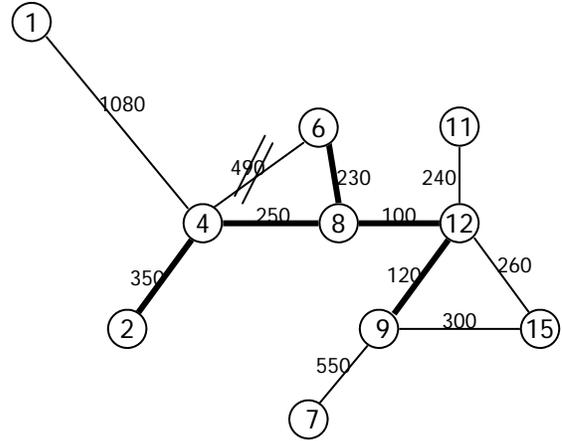


Figura 3.55 Cuarta expansión

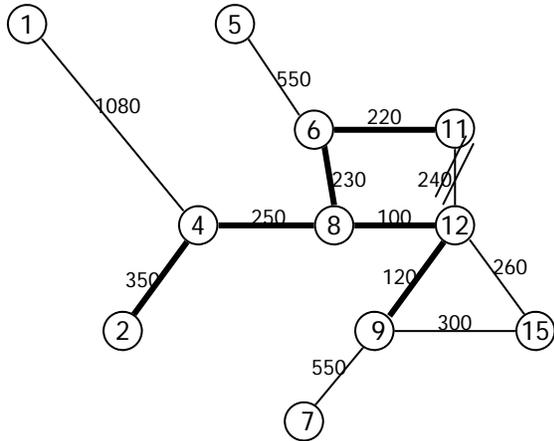


Figura 3.56 Quinta expansión

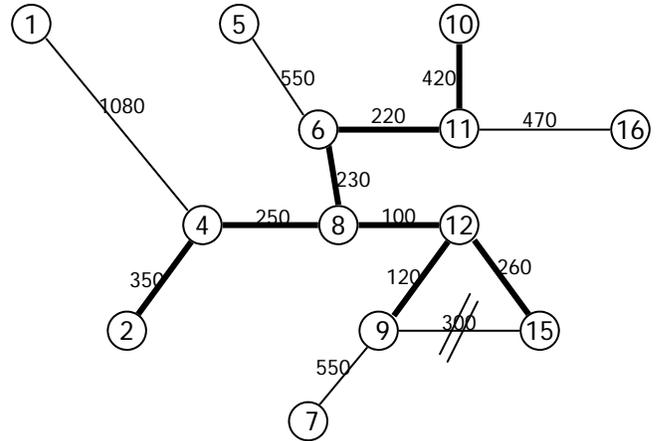


Figura 3.57 Sexta y séptima expansiones

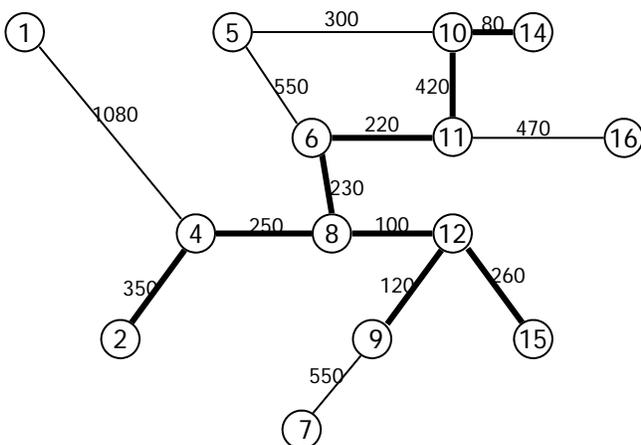


Figura 3.58 Octava expansión

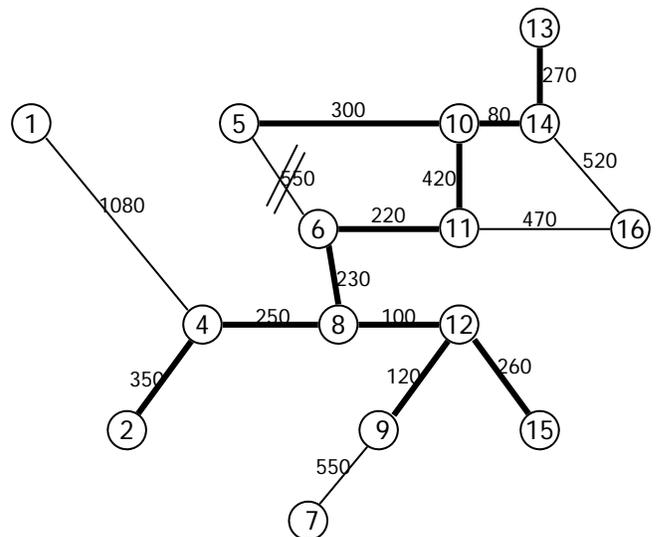


Figura 3.59 Novena y décima expansiones

km entra al árbol de expansión y se cancela el arco 11-12 (figura 3.56). A continuación, se agrega la vía Querétaro-Ciudad de México, arco 12-15, y se cancela la Morelia-Ciudad de México, arco 9-15. La entrada del nodo 15 al árbol no provee nuevos enlaces, así que también se agrega el arco 11-10 con 420 km (figura 3.57). El siguiente arco del árbol de expansión es la vía Saltillo-Monterrey con 80 km (figura 3.58). En el siguiente paso entra al árbol el arco 13-14, pero no aparecen nuevos, así se incluye también la vía Saltillo-Torreón, arco 5-10, y se cancela la Aguascalientes-Torreón, arco 5-6 (figura 3.59). Se observa que el arco 11-16 es siguiente y cancela el 14-16, la red conexa no se altera y se incluye entonces el arco 5-3 en el árbol de expansión (figura 3.61). De los restantes es la conexión Morelia-Lázaro Cárdenas, arco 7-9, la más corta con 550 km, y sólo queda agregar al Árbol de mínima expansión el arco 1-3 y cancelar el 1-4 (figura 3.61).

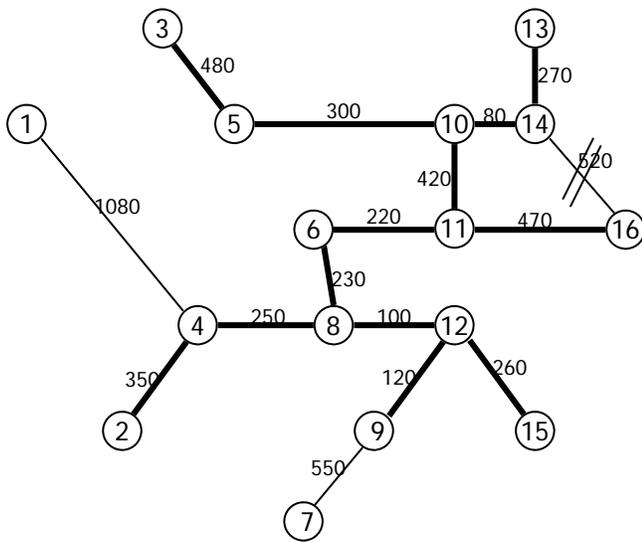


Figura 3.60 Undécima y duodécima expansiones

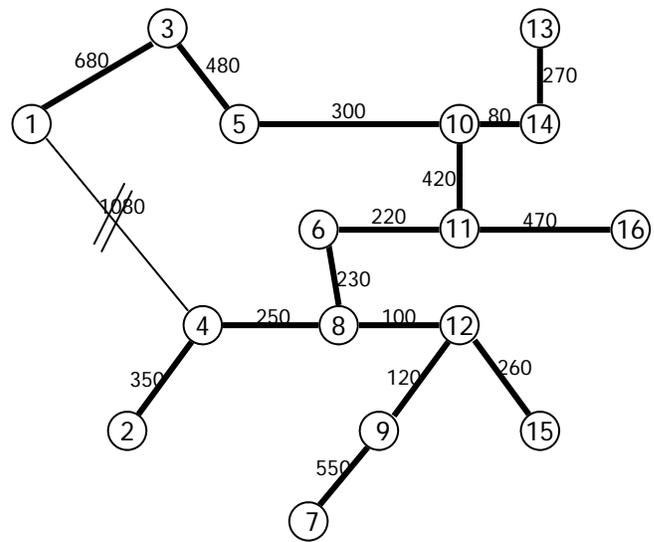


Figura 3.61 Decimotercera y decimocuarta expansiones

En la figura 3.62 se observa el Árbol de mínima expansión para la red ferroviaria multimodal que parte del Puerto de Manzanillo y tiene una longitud total de 4,780 km.

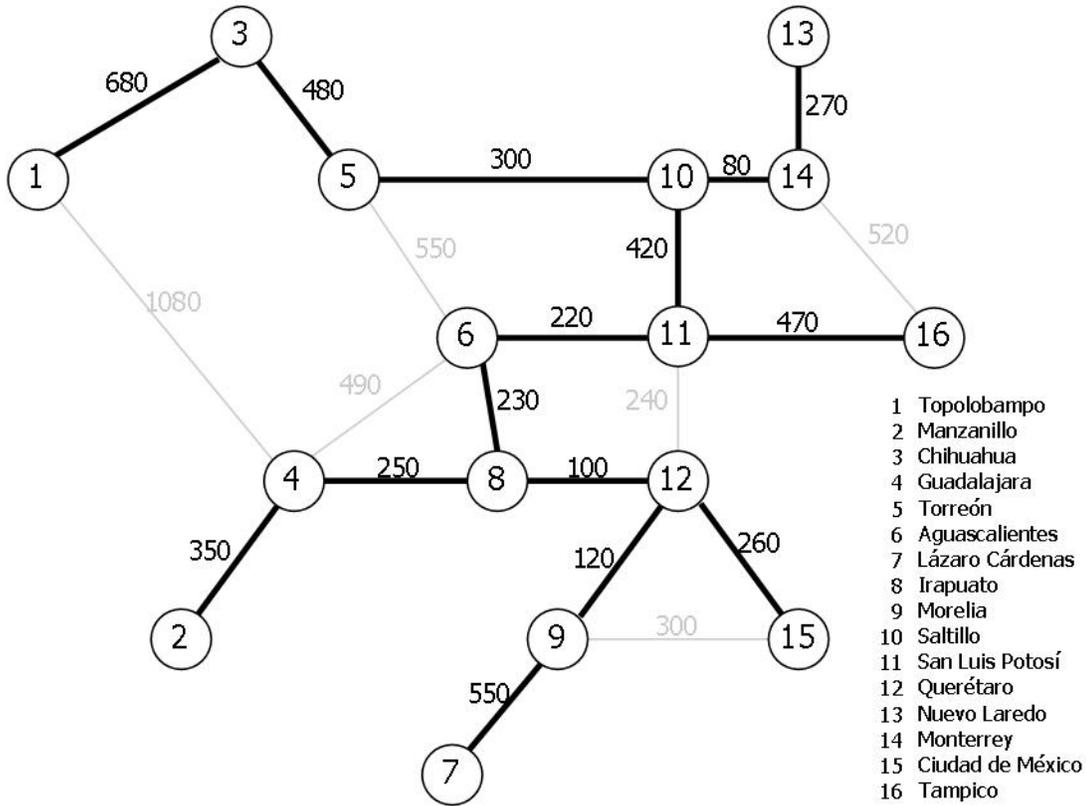


Figura 3.62 Árbol de mínima expansión

3.2.3 Ejercicios propuestos

Ejercicio 20

En la figura 3.63 se muestra la configuración de una red de tuberías (en metros) que conecta algunas plataformas marinas de la Sonda de Campeche con tierra y con la bo-

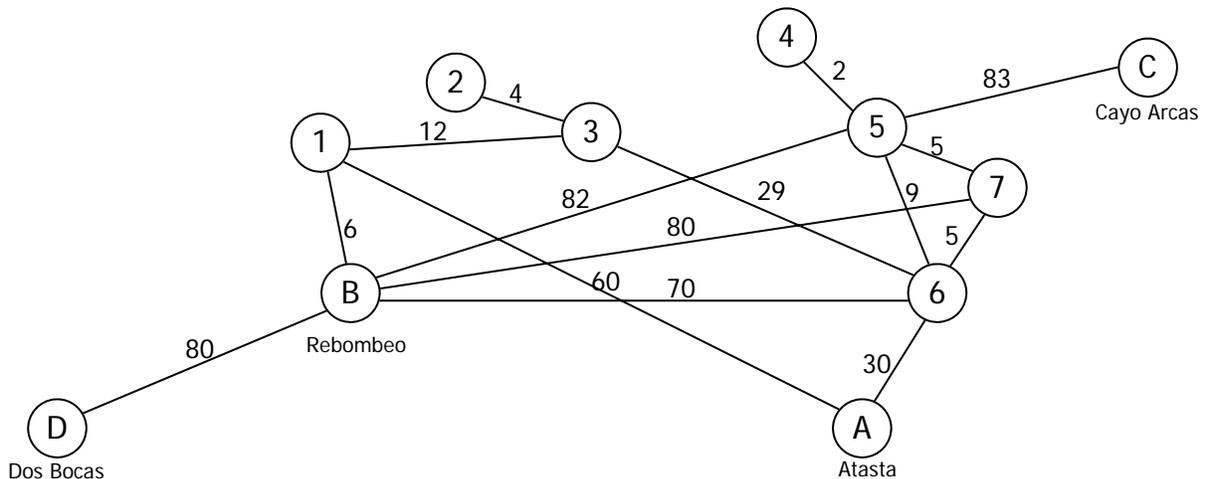


Figura 3.63 Red de oleoductos

ya de Cayo Arcas. Encuentre el Árbol de mínima expansión para esta red.

Solución

En la figura 3.64 se muestra el Árbol de mínima expansión para la red de oleoductos con un longitud de 256 km.

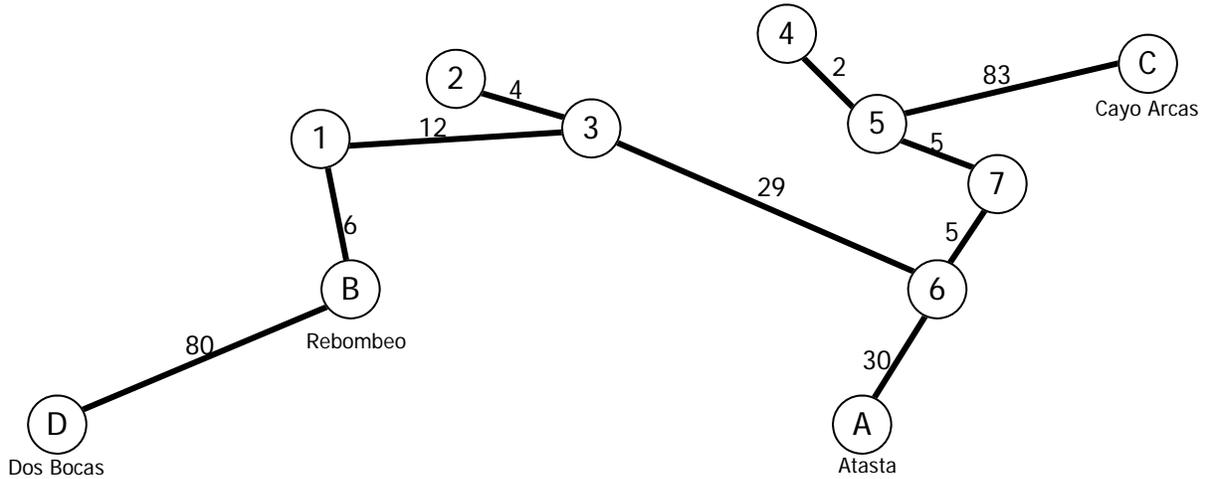


Figura 3.64 Red de oleoductos

Ejercicio 21

En la figura 3.65 se muestra la red de carreteras que conectan a la Ciudad de México con el llamado Arco Norte. Las longitudes aproximadas en km se señalan sobre cada

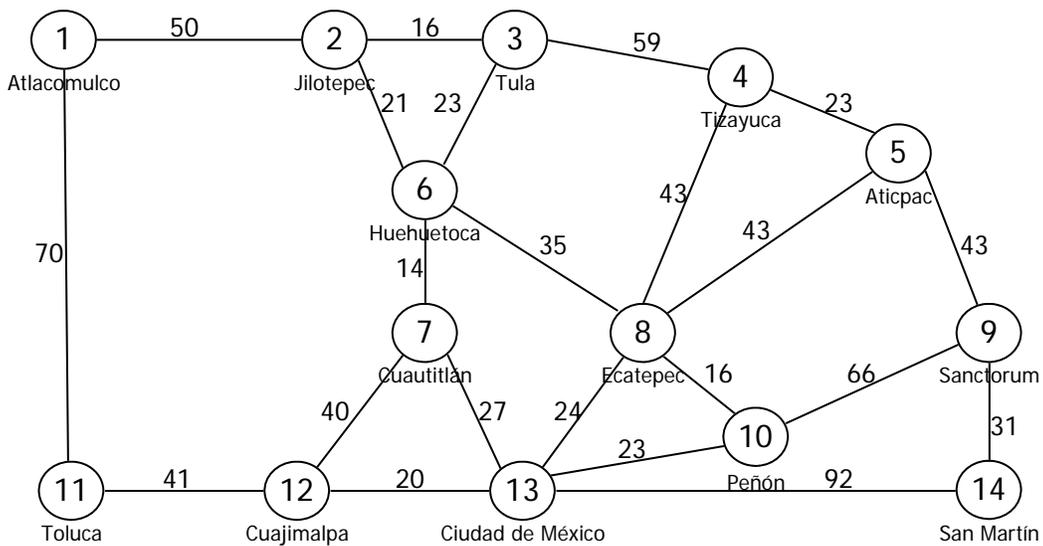


Figura 3.65 Red de carreteras

arco. Encuentre el Árbol de mínima expansión para esta red.

Solución

En la figura 3.66 se muestra el Árbol de mínima expansión para la red de carreteras. Se hace notar que el arco Ecatepec-Tizayuca de la autopista México-Pachuca puede ser sustituido por el Ecatepec-Aticpac de la México-Tuxpan obteniendo la misma longitud total de 368 km.

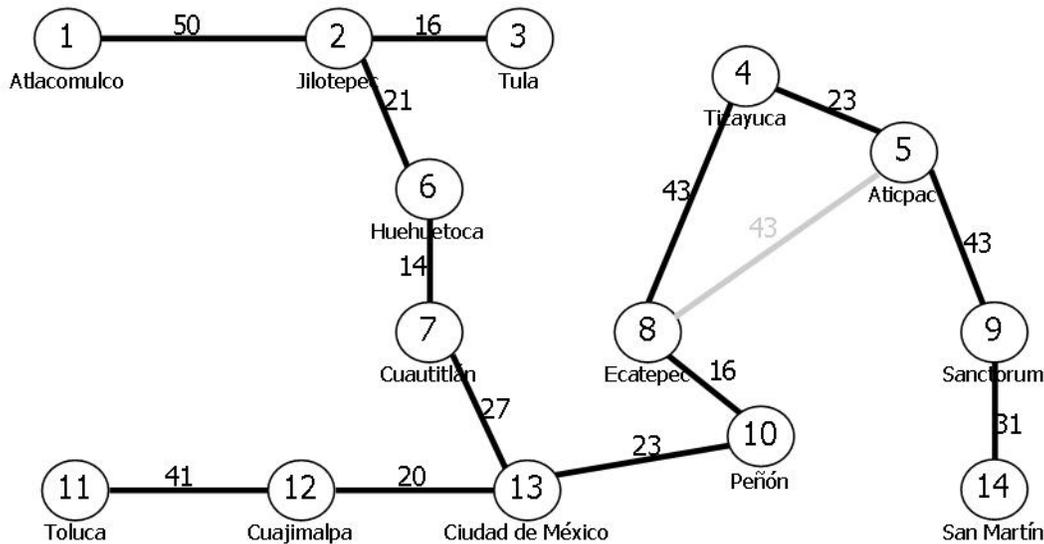


Figura 3.66 Árbol de mínima expansión.

3.3 Algoritmo de la ruta más corta

Cuando se desea encontrar el camino más corto o más rápido entre dos localidades conectadas en una red vial, o determinar la sucesión de actividades con costo mínimo se puede recurrir a los algoritmos de Dijkstra y de Floyd. En esta sección sólo se empleará el primero al ser más simple, aunque menos general.

3.3.1 Teoría

El método de Dijkstra se aplica a redes dirigidas y basa su funcionamiento en el cálculo de una clasificación de los nodos de acuerdo con la siguiente fórmula (Taha, 2004, 225): $[u_j, i] = [u_i + d_{ij}, i]$

Donde u_i es la distancia más corta desde el nodo de origen hasta el nodo i y d_{ij} la longitud el arco $i-j$. Un nodo se considera permanente cuando no se puede encontrar una ruta más corta al mismo, el literal i corresponde con el número de este nodo. Esta clasificación puede cambiar su condición de temporal o permanente conforme avanza el algoritmo. Para explicar el método se hará uso del siguiente ejemplo.

Ejemplo 5

Con el fin de mejorar su red vial, un gobierno estatal ha implementado un programa de pavimentación de caminos. Uno de los proyectos consiste en la colocación de una capa de concreto asfáltico sobre las terracerías existentes en el camino que conecta los pueblos de San Antonio y San Esteban. Pero existen diversas rutas que pasan por poblaciones intermedias y se debe decidir cuales de ellas se beneficiarán con el programa. Se utilizará un criterio de decisión que minimice el costo del proyecto, para ello se supone que dicho costo sólo depende de la longitud total de la ruta.

En la figura 3.67 se muestra la red de caminos de la región y sus longitudes en kilómetros.

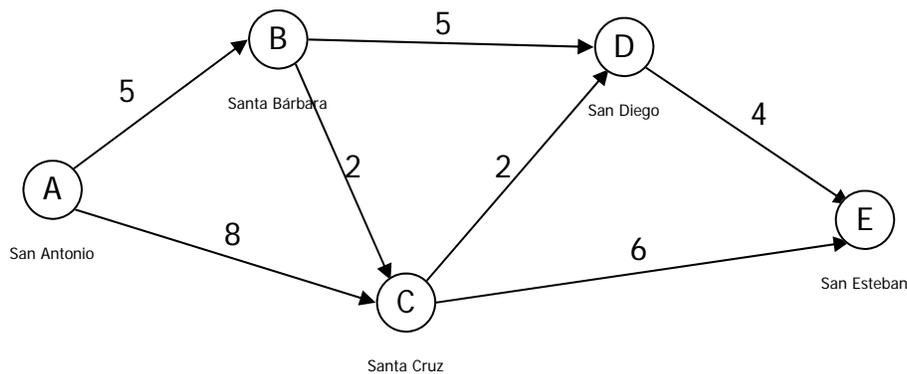


Figura 3.67 Red de caminos

El objetivo es determinar la ruta con el menor costo de pavimentación.

Para encontrar la solución del problema, el primer paso consiste en clasificar el nodo de origen A, San Antonio, con la siguiente etiqueta A [0, -]. Esto nos indica que la distancia del origen al nodo A es de 0 km, sin nodo predecesor.

Nodo	Clasificación	Condición
A	A [0, -]	permanente

Ahora se calculan las clasificaciones para cada nodo al que se pueda llegar desde A.

Nodo	Clasificación	Condición
A	A [0, -]	permanente
B	B [0+5, A] = B [5, A]	temporal
C	C [0+8, A] = C [8, A]	temporal

El clasificación temporal con la menor u_j corresponde al nodo B, 5 km desde el origen con A como predecesor. Esta cambia su condición a permanente y se calculan las clasificaciones de los nodos a los que se accede desde B, es decir D y C.

Nodo	Clasificación	Condición
A	A [0, -]	permanente
B	B [5, A]	permanente
C	C [8, A] C [5+2, B] = C [7, B]	
D	D [5+5, B] = D [10, B]	temporal

Se observa que la menor distancia u_j que se puede encontrar al nodo C se obtiene accediendo desde B. La condición de C cambia a permanente, y permite clasificar los nodos E y D.

Nodo	Clasificación	Condición
A	A [0, -]	permanente
B	B [5, A]	permanente
C	C [7, B]	permanente
D	D [10, B] D [7+2, C] = D [9, C]	
E	E [7+6, C] = E [13, C]	temporal

La nueva distancia calculada al nodo D es menor que la anterior, y al no haber más rutas que lo accedan, cambia su condición a permanente. Ahora se calcula la clasificación al nodo E desde D.

Nodo	Clasificación	Condición
A	A [0, -]	permanente
B	B [5, A]	permanente
C	C [7, B]	permanente
D	D [9, C]	permanente
E	E [13, C]	

Como se puede ver ambas etiquetas del nodo destino E nos dan la misma distancia al origen (13 km). En este caso tenemos dos rutas con longitud mínima y se deberá utilizar un criterio adicional para determinar la óptima. Si uno de los objetivos secundarios del programa es beneficiar la mayor cantidad de poblados posibles, entonces la ruta a elegir sería A → B → C → D → E (figura 3.68).

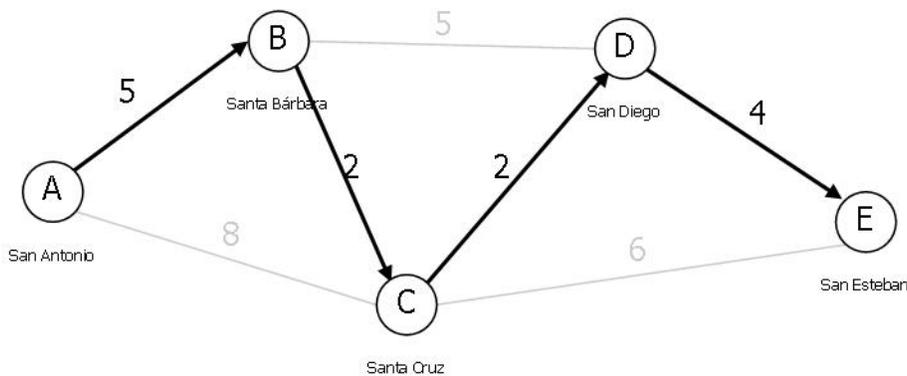


Figura 3.68 Camino más corto

3.2.2 Ejercicios resueltos

Los siguientes ejercicios reforzaran los conocimientos adquiridos. El primero de ellos

aborda un problema de probabilidad y evaluación de riesgo en la rutas de evacuación de un poblado y el segundo de ellos consiste en plantear un programa de sustitución de maquinaria. Para el segundo ejercicio se abandona la solución tabular y las etiquetas se colocan en el grafo.

Ejercicio 22

La población de Ecatzingo en las faldas del Popocatepetl requiere una ruta de evacuación en caso que el volcán entre en erupción. Para cada tramo carretero que conecta la cabecera municipal con Chalco, se ha obtenido la probabilidad de que los caminos sufran derrumbes durante un evento volcánico, de acuerdo a la figura 3.69.

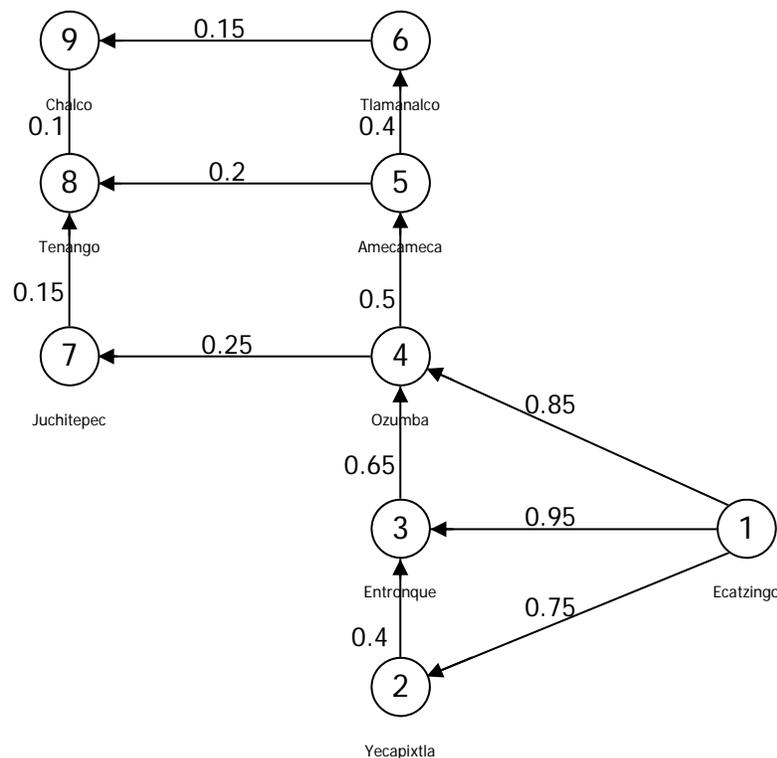


Figura 3.69 Probabilidad de derrumbes en una red de caminos

Encuentre la ruta de evacuación más confiable desde Ecatzingo hasta Chalco.

Solución

El objetivo es encontrar la ruta en la que sea menos probable sufrir al menos un derrumbe, o bien minimizar la probabilidad complementaria, $1 - P$ (ningún camino sufre derrumbes). Por lo tanto se ha de encontrar la ruta que logre:

minimizar $1 - (1 - p_{i-j}) \times (1 - p_{j-k}) \times (1 - p_{k-l}) \times \dots$

o maximizar $(1 - p_{i-j}) \times (1 - p_{j-k}) \times (1 - p_{k-l}) \times \dots$

Para convertir la multiplicación en una suma y así poder aplicar el algoritmo de Dijkstra, se calcula el algoritmo del producto. Y se busca la ruta que logre:

maximizar $\log(1 - p_{i-j}) + \log(1 - p_{j-k}) + \log(1 - p_{k-l}) + \dots$

o minimizar $-\log(1 - p_{i-j}) - \log(1 - p_{j-k}) - \log(1 - p_{k-l}) - \dots$

De esta manera, el negativo del logaritmo de la probabilidad de que no se presente un derrumbe para cada tramo queda como se muestra en la figura 3.70.

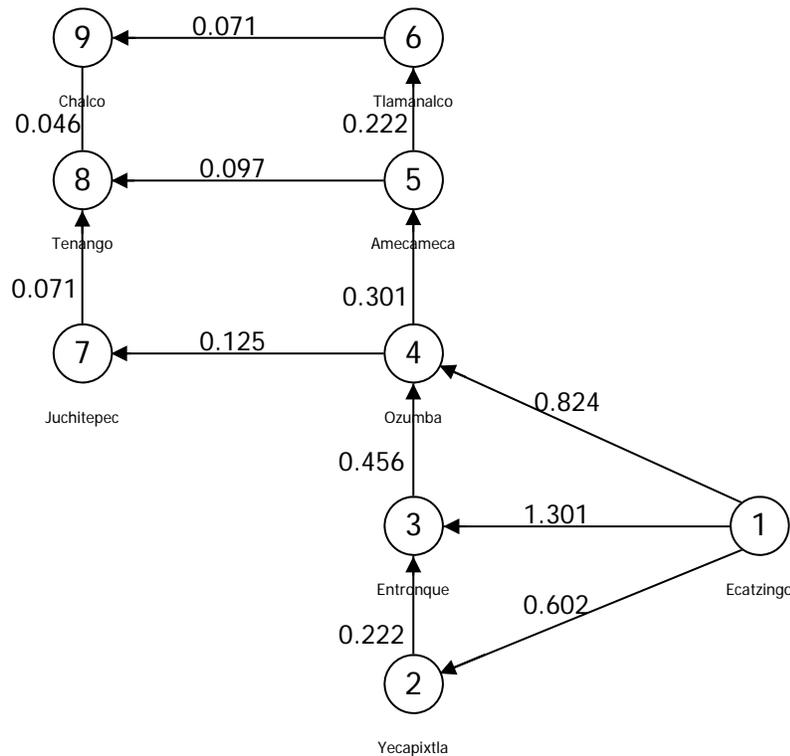


Figura 3.70 Negativo del logaritmo de la probabilidad de no sufrir derrumbes

Partiendo desde el nodo 1 se puede acceder a los nodos 2, 3 y 4, cuya clasificación temporal se calcula.

Nodo	Clasificación	Condición
1	1 [0, -]	permanente
2	2 [0+0.602, 1] = 2 [0.602, 1]	temporal
3	3 [0+1.301, 1] = 3 [1.301, 1]	temporal
4	4 [0+0.824, 1] = 4 [0.824, 1]	temporal

Se observa que el nodo 2 tiene la menor u_i y su condición cambia a permanente. Se calcula la clasificación del nodo 3 a partir del 2.

Nodo	Clasificación	Condición
1	1 [0, -]	permanente
2	2 [0.602, 1]	permanente
3	3 [1.301, 1] 3 [0.602+0.222, 2] = 3 [0.824, 2]	
4	4 [0+0.824, 1] = 4 [0.824, 1]	temporal

Se ha obtenido la menor u_i para el nodo 3 y su condición pasa a permanente. Ahora se calcula la distancia desde el origen del nodo 4 pasando por el 3.

Nodo	Clasificación	Condición
1	1 [0, -]	permanente
2	2 [0.602, 1]	permanente
3	3 [0.824, 2]	permanente
4	4 [0.824, 1] 4 [0.824+0.456, 3] = 4 [1.280, 1]	

La distancia calculada es mayor, se conserva la clasificación anterior, que pasa a permanente y se agregan los nodos 5 y 7. La ruta $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4$ tiene una distancia u_i mayor que la $1 \rightarrow 4$, así que los nodos 2 y 3 quedan fuera de la Ruta más corta.

Nodo	Clasificación	Condición
1	1 [0, -]	permanente
4	4 [0.824, 1]	permanente
5	5 [0.824+0.301, 4] = 5 [1.125, 4]	temporal
7	7 [0.824+0.125, 4] = 7 [0.949, 4]	temporal

En esta ocasión el nodo 7 tiene una clasificación menor y pasa a ser permanente. Se agrega el nodo 8 a la tabla.

Nodo	Clasificación	Condición
1	1 [0, -]	permanente
4	4 [0.824, 1]	permanente
5	5 [1.125, 4]	temporal
7	7 [0.949, 4]	permanente
8	8 [0.949+0.071, 7] = 8 [1.020, 7]	temporal

Entre los nodos con clasificación temporal es el nodo 8 el de menor u_i , por lo tanto su condición pasa a permanente, y se agrega el nodo 9.

Nodo	Clasificación	Condición
1	1 [0, -]	permanente
4	4 [0.824, 1]	permanente
5	5 [1.125, 4]	temporal
7	7 [0.949, 4]	permanente
8	8 [1.020, 7]	permanente
9	9 [1.020+0.046, 8] = 9 [1.066, 8]	temporal

La clasificación del nodo de destino, nodo 9 Chalco, es menor que la temporal del nodo 5. La clasificación es permanente y se ha encontrado la Ruta más corta, como se muestra en la figura 3.71.

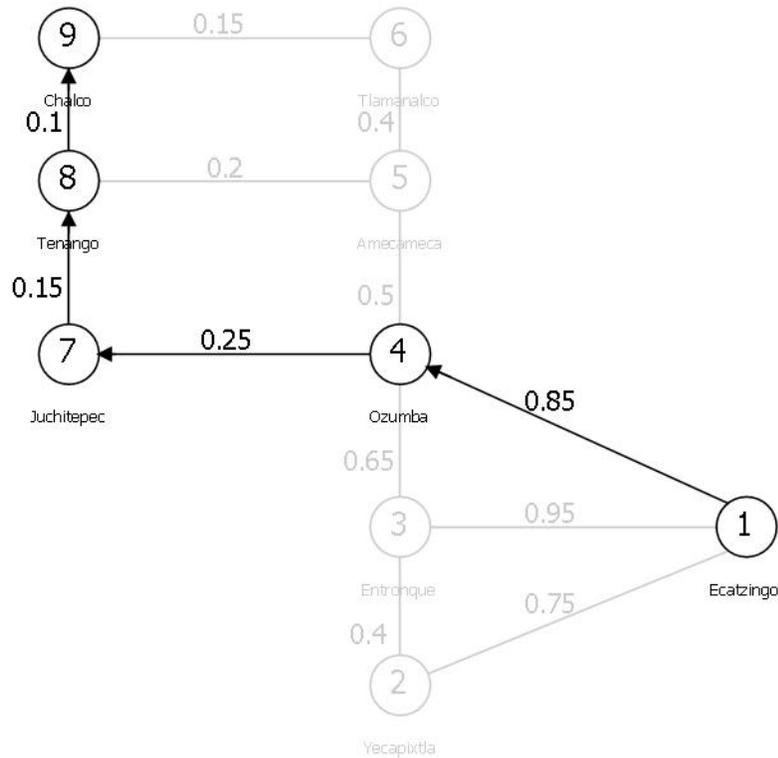


Figura 3.71 Ruta con menor probabilidad de derrumbes.

La ruta más confiable será Ecatzingo-Ozumba-Juchitepec-Tenango-Chalco con una probabilidad de que se presenten derrumbes en al menos un tramo de:

$$1 - (1 - 0.85) \times (1 - 0.25) \times (1 - 0.25) \times (1 - 0.15) \times (1 - 0.1) = 91.4\%.$$

Ejercicio 23

Una empresa constructora está desarrollando un plan de sustitución de equipo para los próximos cuatro años. Se ha decidido que las compactadoras (bailarinas) recién adquiridas, han de ser sustituidas tras un mínimo de un año de uso o un máximo de tres. Los costos de sustitución de estos equipos se tabulan en el siguiente cuadro.

		Año de sustitución			
		1	2	3	
Año de adquisición	2009	1,100	2,200	3,300	Costo de sustitución en dólares
	2010	1,150	2,300	3,450	
	2011	1,200	2,400	—	
	2012	1,300	—	—	

Determine la estrategia que reduzca al mínimo los costos de sustitución del equipo en el horizonte a cuatro años.

Solución

Este problema puede ser resuelto por el método de la Ruta más corta si se plantea como una red. En esta red los años de adquisición son los nodos y los arcos son los costos de sustitución del equipo (figura 3.72).

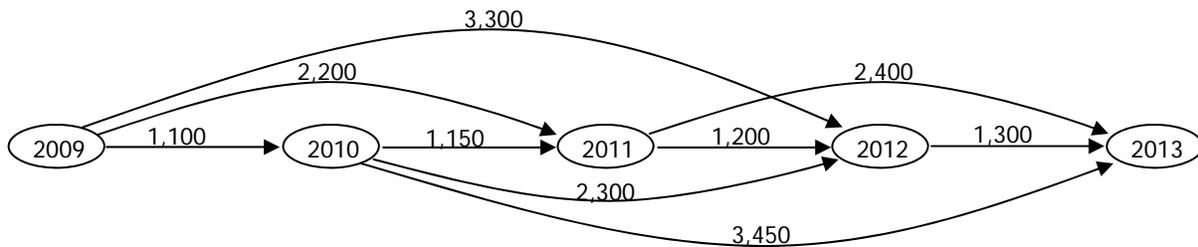


Figura 3.72 Red de costos de sustitución de equipo

Se etiqueta el nodo inicial y se clasifican temporalmente los nodos conectados (figura 3.73).

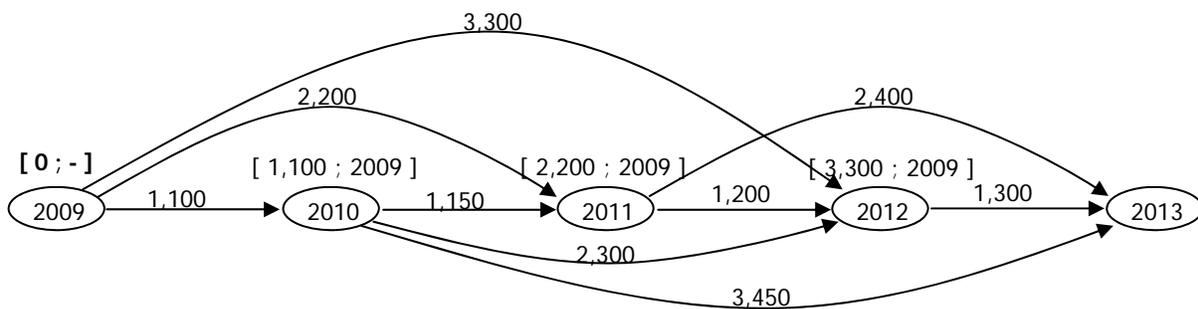


Figura 3.73 Primera clasificación

Al no haber más rutas que lleven al nodo 2010 desde un nodo con clasificación permanente, también la clasificación de este nodo pasa a esa categoría. Desde allí se evalúa la clasificación de los nodos que lo conectan (figura 3.74).

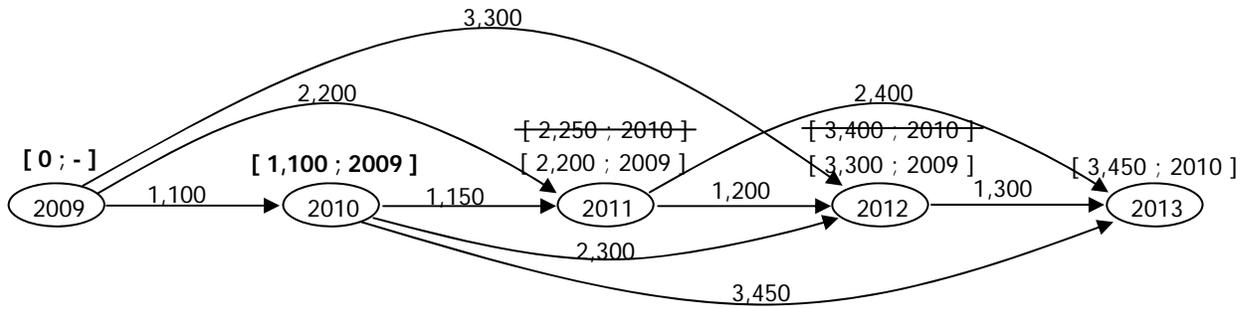


Figura 3.74 Segunda clasificación

Las clasificaciones obtenidas para los nodos 2011 y 2012 dan costos mayores, así que se conservan las provenientes del nodo 2009. Se observa que no hay más conexiones hacia el nodo 2011 y su clasificación pasa a permanente, entonces se obtiene las clasificaciones de los nodos restantes a partir de él (figura 3.75).

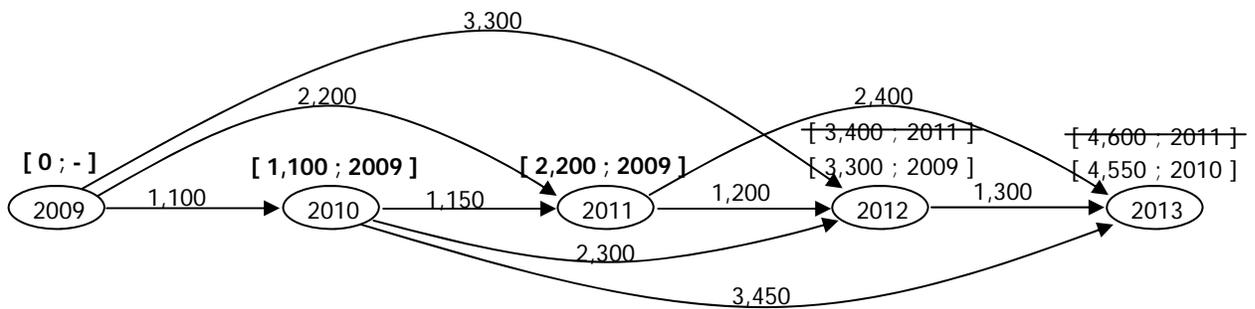


Figura 3.75 Tercera clasificación

Las clasificaciones obtenidas son mayores y la del nodo 2012 pasa a permanente. Ahora solo resta calcular la clasificación del nodo 2013 a partir del 2012 (figura 3.76).

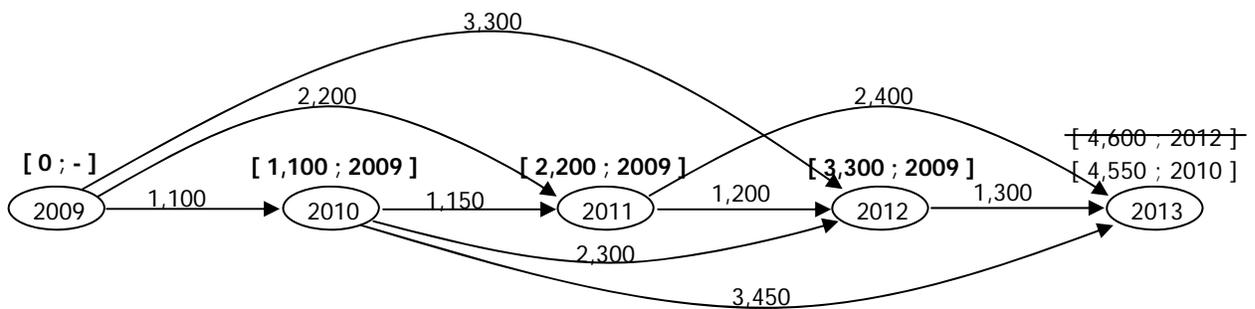


Figura 3.76 Cuarta clasificación

Finalmente, se observa que la menor clasificación obtenida para el nodo 2013 es la proveniente del nodo 2010. Partiendo del nodo final, se pueden seguir los orígenes de las clasificaciones hasta el nodo inicial, obteniendo en el proceso la Ruta más corta (figura 3.77).

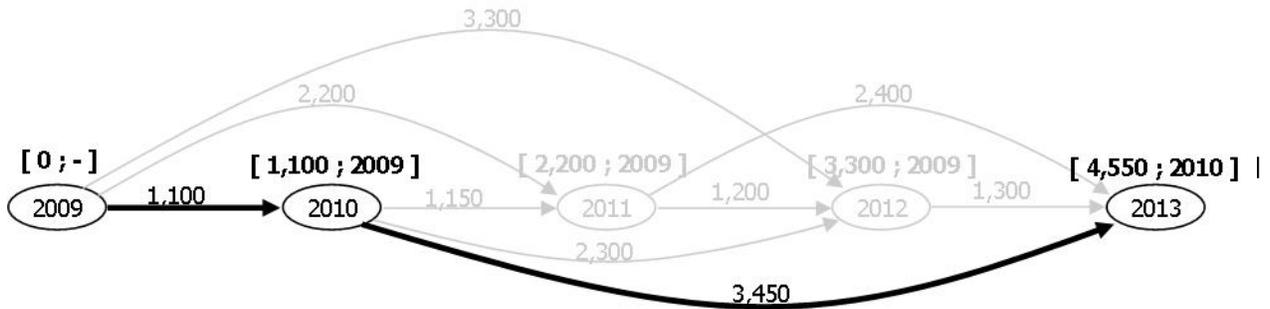


Figura 3.77 Ruta más corta

En el horizonte a cuatro años se obtiene el menor costo de sustitución de las compactadoras si estas se reemplazan en el año 2010 y posteriormente en el 2013. El costo de este esquema de sustitución será de 4,550 dólares por unidad.

3.2.3 Ejercicios propuestos

Ejercicio 24

En la figura 3.78 se muestran los tiempos de recorrido estimados (en minutos) para las principales autopistas entre la Ciudad de México y el Arco Norte. Determine mediante

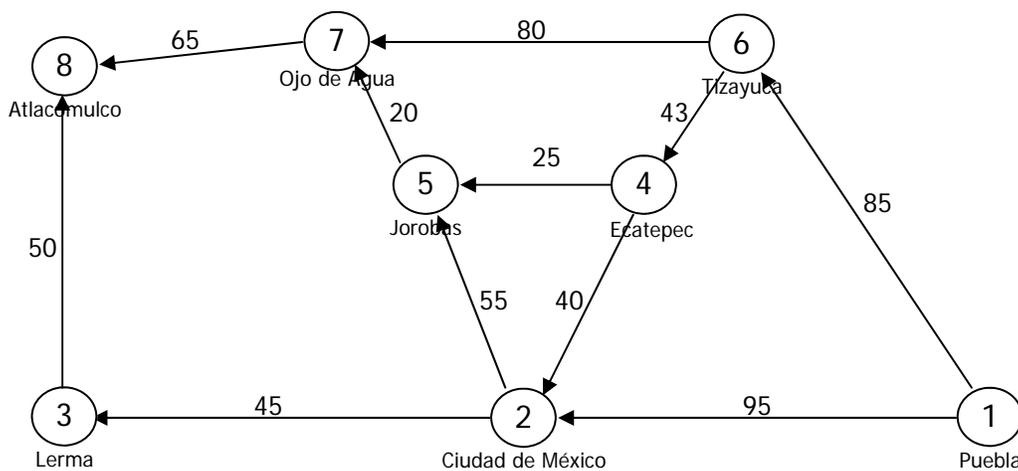


Figura 3.78 Tiempos de trayecto en la red de carreteras

el algoritmo de Dijkstra la ruta más rápida entre Puebla y Atlacomulco.

Solución

En la figura 3.79 se muestra la ruta más rápida entre Puebla y Atlacomulco, con una duración total de 190 minutos. Además se muestran las etiquetas permanentes de todos los nodos.

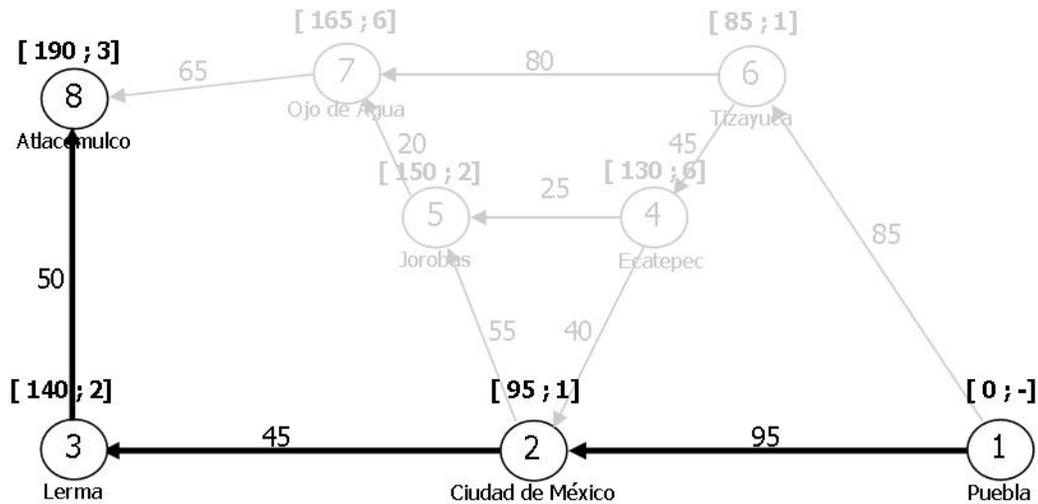


Figura 3.79 Ruta más corta

Ejercicio 25

En la planeación de vialidades urbanas se hace uso de sistemas de información geográfica (SIG), donde se generan rutas a partir de matrices origen-destino obtenidas en encuestas o análisis territoriales, y con ellas se asignan los flujos a las distintas vialidades. En la figura 3.80 se muestra esquemáticamente una parte de la traza urbana de la ciudad de Colima, con la longitud de los arcos en km. Encuentre la Ruta más corta entre Villa de Álvarez y el centro.

Solución

Aplicando el algoritmo de las etiquetas de Dijkstra se ha encontrado que la Ruta más corta parte del origen, Villa de Álvarez, siguiendo los nodos 4, 10, 11 y 17 hasta el destino, centro de Colima, con una longitud de 3.5 km (figura 3.81).

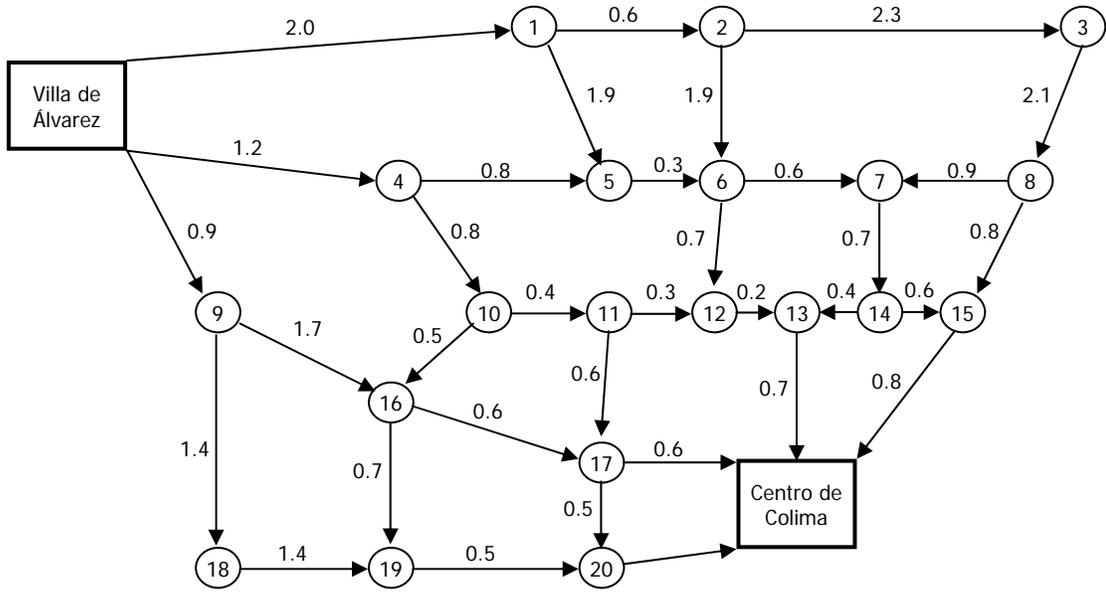


Figura 3.80 Red vial

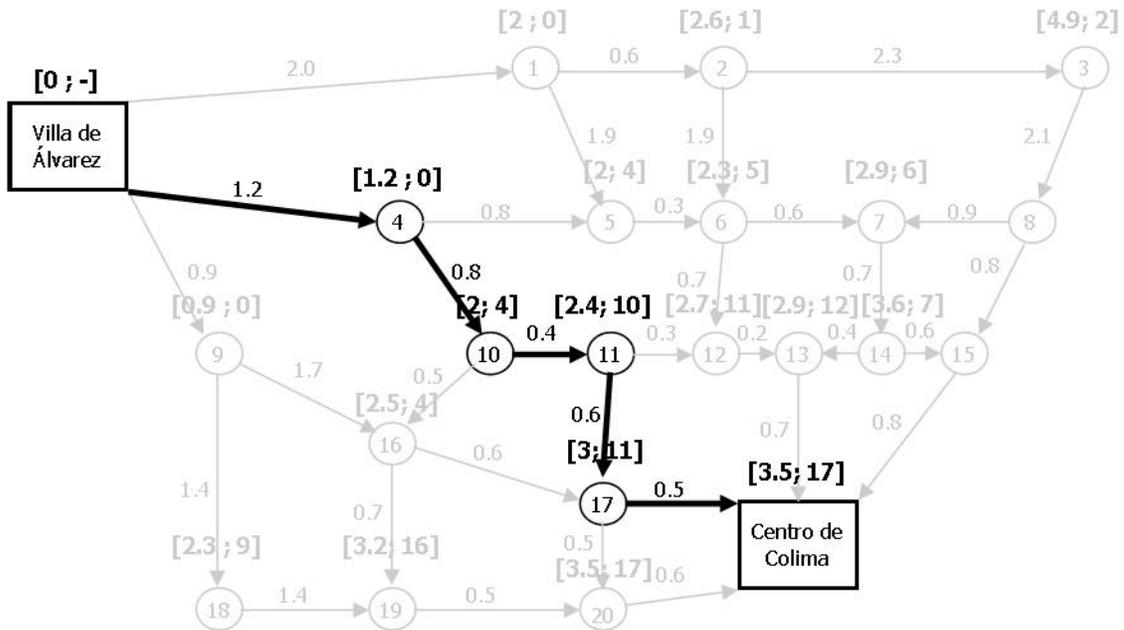


Figura 3.81 Ruta más corta