2. Programación Lineal

La Programación Matemática es la rama de la Investigación de Operaciones que se especializa en resolver problemas de optimación, en los cuales se desea maximizar una función (por ejemplo, la utilidad, el rendimiento o la eficiencia) o minimizarla (por ejemplo, los costos, el tiempo o la distancia). Permitiendo al decisor tomar el curso de acción o programa más eficiente.

En este capítulo se abordarán dos modelos de optimación lineal: el Método Simplex y el Modelo de Transporte. Para ello, en cada sección se plantea un problema de ejemplo que se resuelve paso a paso, y que sirve para ilustrar todas las etapas de solución del modelo. Posteriormente se abordan un par de ejercicios más, desarrollándolos completamente y abarcando temas adicionales. Y al final de cada sección se proponen algunos ejercicios sin el desarrollo paso a paso, pero se proveen soluciones parciales y finales para su corroboración.

Un modelo de Programación Matemática consiste en:

a) Un conjunto de variables de decisión, que pueden ser controladas o determinadas por el decisor.

b) Una función objetivo, que se maximizará o minimizará.

c) Un conjunto de restricciones, que describen las condiciones, bajo las cuales se debe satisfacer el objetivo.

Cuando la función objetivo y las restricciones se expresan como funciones lineales, hablamos de modelos de Programación Lineal.

La importancia de los modelos lineales radica en que muchos fenómenos pueden ser representados satisfactoriamente por ecuaciones lineales, o bien, dentro de ciertos rangos, aproximarse a ellas. Además de este tipo de ecuaciones, se cuenta con técnicas de solución altamente eficientes y fácilmente programables en un ordenador. Los programas de cómputo comerciales existentes permiten al decisor realizar con facilidad análisis de sensibilidad y planteamiento de escenarios múltiples.

A pesar de que la Programación Lineal ha mostrado ser una gran herramienta en la resolución de problemas complejos en áreas como la producción, la operación, las finanzas, la distribución o el transporte, entre otras, no se deben perder de vista sus limitaciones. Las funciones y restricciones que se manejan en Programación Lineal son funciones continuas en el ámbito de los números reales. Pero la interpretación de resultados requiere del criterio del decisor al interpretar números fraccionarios, y en ocasiones la diferencia entre dos soluciones contiguas puede ser enorme. Por ejemplo, si una variable representa el número de camiones que hay que adquirir y se obtiene un valor óptimo de 2.6, el decisor elegirá entre 2 y 3 camiones y esto puede implicar una diferencia de gastar o invertir varios miles de pesos o de poder realizar en menos tiempo las actividades de transporte o acarreo. Los problemas que involucran el análisis de funciones enteras, se abordan y resuelven con algoritmos de Programación Entera.

La certeza es un requisito para hacer uso de la Programación Lineal. Se requiere que el decisor conozca el estado del sistema y el valor de las restricciones de forma determinista. Cuando se quiera hacer uso de valores estocásticos se puede hacer uso de técnicas de Programación Lineal bajo Incertidumbre.

Otra desventaja de los modelos lineales es que pueden resultar inadecuados para representar problemas no proporcionales o con interacción entre variables, ya que las soluciones pueden conllevar una perdida significativa de información. En tales casos será mejor hacer uso de la Programación No Lineal.

Sin embargo, es importante entender y conocer las técnicas básicas de la Programación Lineal, pues son la base de las técnicas de Programación Matemática más avanzadas.

2.1 El Método Simplex

Los problemas de Programación Lineal pueden ser resueltos mediante diferentes metodologías, y de entre ellas el Método Simplex es la más poderosa. El método consiste en encontrar y probar soluciones sistemáticamente, hasta encontrar la óptima. Este método puede resolver problemas con millares de variables y restricciones, si se programa adecuadamente en una computadora.

Con la intención de lograr una explicación didáctica del algoritmo, abordaré todas las etapas de la solución aplicándolas a un problema sencillo con sólo dos variables de decisión. El primer paso será el planteamiento del modelo de Programación Lineal y su representación gráfica bidimensional. Posteriormente, aplicaré el algoritmo Simplex, y compararé las soluciones parciales obtenidas con aquellas del método gráfico. Después plantearé el modelo dual, lo resolveré e interpretaré sus resultados. Finalmente llevaré a cabo un análisis de sensibilidad, representando gráficamente los intervalos de solución.

Ejemplo 1

Una empresa desarrolladora iniciará un proyecto urbano en un terreno de 4 hectáreas. En él se construirán dos tipos distintos de casas: las viviendas tipo I que ocupan una superficie de 270 m^2 y tendrán un costo de $800,000, y las viviendas tipo II que ocupan 200 m^2 y con un costo de $500,000. Los estudios de mercado indican que la demanda máxima de viviendas de tipo I es de 100 unidades, mientras que para las de tipo II corresponde a 120 unidades, y además la demanda máxima combinada es de 170 unidades. Se desea determinar la combinación óptima de viviendas para lograr un ingreso máximo.

2.1.1 Planteamiento del modelo

Para solucionar este problema es necesario el planteamiento de un modelo de Programación Lineal, que cuente con la siguiente formulación:

Una función objetivo a maximizar

$$\max z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$$

sujeta a las restricciones

$$g_j(x_1, x_2, \ldots, x_n) = a_{j1} + a_{j2} + \ldots + a_{jn} \le b_j \text{ , } j = 1, 2, \ldots, m$$

Que también puede expresarse en forma matricial:

$$\max \ z = \mathbf{c}^T \mathbf{x}$$

$$\text{s a} \quad \mathbf{A}\,\mathbf{x} \leq \mathbf{b}$$

Donde **x** es el vector de variables de decisión, **c** el vector de coeficientes del objetivo, **A** es la matriz de coeficientes tecnológicos y **b** el vector de constantes.

El primer paso consiste en determinar las variables de decisión. Este paso es de vital importancia pues una elección inadecuada de las variables hará imposible la resolución del problema. Por lo general, estas variables representan los bienes que consumirá o producirá la empresa. En nuestro problema, los ingresos que tenga la empresa dependerán del tipo de casas que construya. Por esto las variables de decisión son:

x_1: número de viviendas tipo I por construir

x_2: número de viviendas tipo II por construir

El siguiente paso es identificar las restricciones, que limitan las decisiones admisibles que se pueden tomar. Las restricciones pueden tomar la forma de igualdades, en caso de que se desee alcanzar un valor específico, o de desigualdades, cuando dicho valor deba ser excedido o no, según el caso.

En nuestro problema tenemos una restricción por el uso del terreno y tres por la demanda del mercado:

Cada vivienda tipo I ocupa 270 m^2, las de tipo II ocupan 200 m^2 y en conjunto no deben exceder las 4 ha.

$$270\,x_1 + 200\,x_2 \leq 40{,}000$$

Demanda de viviendas tipo I.

$$x_1 \leq 100$$

Demanda de viviendas tipo II.

$$x_2 \leq 120$$

Demanda combinada.

$$x_1 + \quad x_2 \leq 170$$

Finalmente planteamos la función objetivo, en este caso es maximizar el ingreso, en miles de pesos.

$$\max \quad z = 800\,x_1 + 500\,x_2$$

2.1.2 Solución gráfica

Al graficar en el plano cartesiano las restricciones (figura 2.1), vemos que estas limitan un área, y que sólo las parejas de datos que caen dentro de esa área o dentro de su frontera cumplen con las restricciones establecidas. Hemos encontrado todas las soluciones factibles, pero nuestra meta es encontrar aquella que maximice nuestra función objetivo.

Con este fin incorporamos la función $z = 800\,x_1 + 500\,x_2$, para distintos valores de z al gráfico (figura 2.2). La función z queda representada como líneas paralelas cuyo valor es mayor conforme se alejan del origen. Como se puede apreciar, la solución factible con el valor de z mayor se encuentra en el vértice número 2.

Si la pendiente de la función z se modificara, la solución óptima caería en otro vértice.

Vértice	$\mathbf{x_1}$	$\mathbf{x_2}$	**z (millones de pesos)**
0	0	0	0
1	100	0	80
2	**100**	**65**	**112.5**
3	85.7	84.3	110.7
4	50	120	100
5	0	120	60

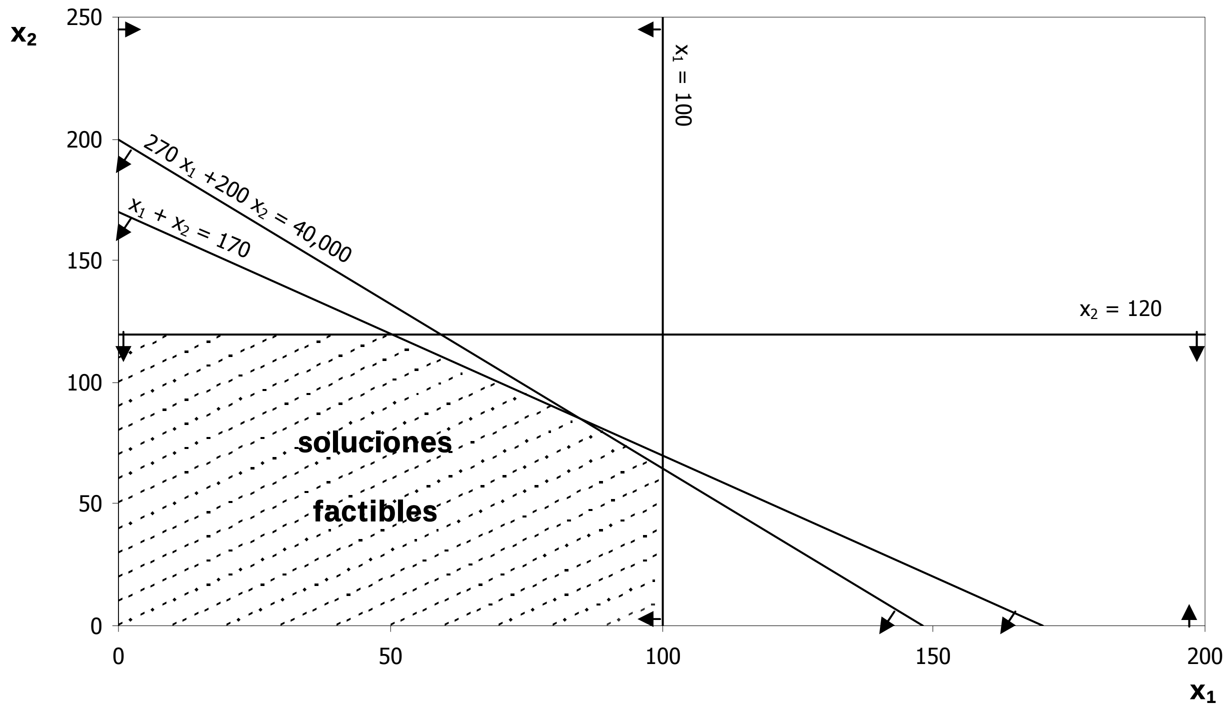


Figura 2.1 Región de soluciones factibles

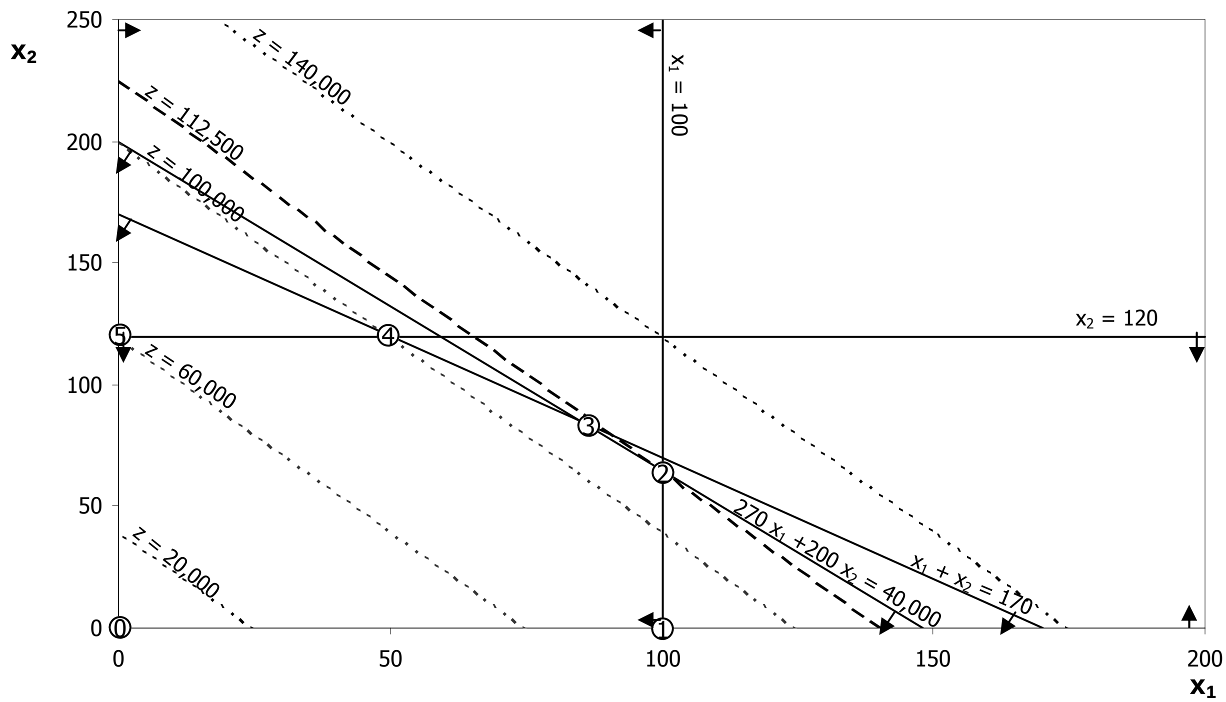


Figura 2.2 Método gráfico

En general, podemos afirmar que la función objetivo alcanza su valor máximo en un vértice del conjunto de soluciones factibles. A las soluciones de estos puntos se les conoce como soluciones básicas. Y a la solución que maximiza z se le llama solución óptima.

Como hemos visto, basta con analizar los vértices de la región de soluciones factibles para encontrar la solución óptima. El método Simplex realiza este análisis, pero de tal manera, que converge a la solución óptima sin necesidad de analizar todas las soluciones básicas.

2.1.3 El algoritmo Simplex

Para llevarlo a cabo, se convierten las desigualdades de nuestro modelo original en ecuaciones, mediante la incorporación de variables de holgura. Así el modelo se transforma de su forma estándar a su forma canónica :

Para el ejemplo, el modelo de programación lineal en forma canónica es:

Forma estándar	Forma canónica
$\max z = \mathbf{c}^T \mathbf{x}$ $\text{s a} \quad \mathbf{A}\,\mathbf{x} \le \mathbf{b}$ $\mathbf{x}_j \ge \mathbf{0}\ ,\ \mathbf{b} \ge \mathbf{0}$	$\max \quad z = \mathbf{c}^T \mathbf{x}$ $\text{s a} \quad \mathbf{A}\,\mathbf{x} + \mathbf{I}\,\mathbf{s} = \mathbf{b}$ $\mathbf{x} \ge \mathbf{0}\ ,\ \mathbf{s} \ge \mathbf{0}\ ,\ \mathbf{b} \ge \mathbf{0}$

$$
\begin{array}{llr}
\max & z = 800\,x_1 + 500\,x_2 & \\
\text{s a} & 270\,x_1 + 200\,x_2 + s_1 & = 40{,}000 \\
 & x_1 + s_2 & = 100 \\
 & x_2 + s_3 & = 120 \\
 & x_1 + x_2 + s_4 & = 170 \\
 & x_1, x_2, s_1, s_2, s_3, s_4 \ge 0 &
\end{array}
$$

donde x_1: número de viviendas tipo I

x_2: número de viviendas tipo II

s_1, s_2, s_3, s_4 : variables de holgura

Las variables de holgura van asociadas a las restricciones, así s_1 representa la superficie del terreno que no será ocupada por las viviendas, s_2 es la demanda no cubierta de viviendas tipo I, s_3 corresponde a la demanda tipo II no satisfecha y s_4 representa lo correspondiente a la demanda combinada. Las variables de holgura no se asocian con ningún coeficiente en la función objetivo, puesto que no son factores en la determinación del ingreso del proyecto.

Las ecuaciones de las restricciones y de la función objetivo pueden ser representadas por sus coeficientes en una tabla, conocida como tabla Simplex. Los valores de la fila z_j se calculan como la multiplicación del vector de la columna c_b y la columna a_j correspondiente.

variables básicas

		x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	
	c_b \ c_j	800	500	0	0	0	0	
s_1	0	270	200	1	0	0	0	40,000
s_2	0	1	0	0	1	0	0	100
s_3	0	0	1	0	0	1	0	120
s_4	0	1	1	0	0	0	1	170
	z_j	0	0	0	0	0	0	0
	$z_j - c_j$	-800	-500	0	0	0	0	

valores

La primer columna de esta tabla nos indica la variable asociada a cada ecuación, llamadas variables básicas. El valor de estas variables es el que corresponde a la última columna de la tabla, y representa un vértice de la región de soluciones factibles. Así se tiene que la primer solución factible encontrada corresponde a:

variables básicas	variables no básicas
s_1 = 40,0000	x_1 = 0
s_2 = 100	x_2 = 0
s_3 = 120	
s_4 = 170	

Y el ingreso tiene un valor de z = $0 . Esta solución está representada en la figura 2.1 como el vértice 0, de la región de soluciones factibles.

El siguiente paso es encontrar una solución factible que mejore el valor de z. Para ello se sustituye, mediante transformaciones lineales, una de las variables básicas por una no básica. La variable que entra a la base deberá incrementar el valor de z en la mayor proporción, mientras que la variable saliente al ser removida, permitirá que el valor de la variable entrante sea el mayor posible sin violar las restricciones. La variable entrante, bajo este criterio, será aquella cuyo coeficiente en la fila de costo reducido (z_j - c_j) sea el más negativo. En nuestro caso corresponde a x_1, y a la columna donde se encuentra le llamamos columna pivote.

Para encontrar la variable saliente se calculan los cocientes entre los valores de las variables básicas y los coeficientes correspondientes a la columna pivote.

		x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4		
	c_b \ c_j	800	500	0	0	0	0		cociente
s_1	0	270	200	1	0	0	0	40,000	148
s_2	0	1	0	0	1	0	0	100	100
s_3	0	0	1	0	0	1	0	120	∞
s_4	0	1	1	0	0	0	1	170	170
	z_j	0	0	0	0	0	0	0	
	z_j - c_j	-800	-500	0	0	0	0		

El menor cociente indica que variable saliente permitirá obtener el mayor valor en la variable entrante sin violar las restricciones. En este caso la variable saliente es s_2 y la fila donde se encuentra se llama fila pivote. La celda donde se cruzan esta fila y la columna pivote se llama celda pivote.

El siguiente paso en el método Simplex consiste en, mediante transformaciones lineales, convertir el número de dicha celda en 1 y el resto de los coeficientes de la columna pivote en 0. Además sustituir el nombre de la variable saliente por el de la variable entrante en la fila pivote. En la siguiente tabla podemos ver el resultado de este proceso.

		x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	
	c_b \ c_j	800	500	0	0	0	0	
s_1	0	0	200	1	-270	0	0	13,000
x_1	800	1	0	0	1	0	0	100
s_3	0	0	1	0	0	1	0	120
s_4	0	0	1	0	-1	0	1	70
	z_j	800	0	0	800	0	0	80,000
	$z_j - c_j$	0	-500	0	800	0	0	

Así se obtiene la segunda solución factible, que corresponde al vértice 1 de la figura 2.2. Siendo los valores de las variables:

variables básicas	variables no básicas
$x_1 = 100$	$x_2 = 0$
$s_1 = 13,000$	$s_2 = 0$
$s_3 = 120$	
$s_4 = 70$	

Para una z con valor de 80 millones de pesos.

Para verificar si se ha encontrado la solución óptima, se revisan los coeficientes de la última fila de nuestra tabla. Si alguno de ellos es negativo deberemos repetir el proceso de búsqueda de una mejor solución factible para la función objetivo.

Nuevamente se define la celda pivote.

		x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4		
	c_b \ c_j	800	500	0	0	0	0		cociente
s_1	0	0	200	1	-270	0	0	13,000	65
s_2	0	1	0	0	1	0	0	100	∞
s_3	0	0	1	0	0	1	0	120	120
s_4	0	0	1	0	-1	0	1	70	70
	z_j	800	0	0	800	0	0	80,000	
	$z_j - c_j$	0	-500	0	800	0	0		

Y se realizan las transformaciones lineales pertinentes para sustituir la variable básica saliente por la entrante.

		x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	
	c_b \ c_j	800	500	0	0	0	0	
x_2	500	0	1	0.005	-1.35	0	0	65
x_1	800	1	0	0	1	0	0	100
s_3	0	0	0	-0.005	1.35	1	0	55
s_4	0	0	0	-0.005	0.35	0	1	5
	z_j	800	500	2.5	125	0	0	112,500
	$z_j - c_j$	0	0	2.5	125	0	0	

Y se obtiene la solución correspondiente al vértice 2 de la figura 2.2. Se realiza la prueba de optimalidad y se observa que no existen valores negativos en la fila de costos reducidos. Se puede afirmar que se ha encontrado la solución factible óptima, que maximiza el valor de z.

Así, en la segunda iteración del método Simplex, se ha obtenido la solución factible óptima:

variables básicas	variables no básicas
$x_1 = 100$	$s_1 = 0$
$x_2 = 65$	$s_2 = 0$
$s_3 = 55$	
$s_4 = 5$	

Se concluye que para obtener un ingreso máximo, que corresponde a 112 millones y medio de pesos, se deberá proyectar el desarrollo urbano con 100 viviendas tipo I y 65 tipo II. Se aprovechará cada metro cuadrado del terreno (s_1) y se cubrirá completamente la demanda por las viviendas de mayor costo (s_2). Respecto a la demanda de viviendas de menor costo (s_3) y la demanda combinada (s_4), no se cubrirán del todo.

2.1.4 Otros tipos de solución

Existen problemas de Programación Lineal que no tiene solución o que tienen más de una solución factible que optima la función objetivo:

a) No existe una región de soluciones factibles. Si tenemos dos restricciones incompatibles entonces la solución es infactible (figura 2.3). En este caso obtendremos en la tabla Simplex variables que violen la restricción de no negatividad.

b) Existen múltiples soluciones factibles. Cuando la función objetivo tiene los mismos coeficientes que una restricción no redundante obtendremos óptimos alternativos. En dos dimensiones la gráfica de la función objetivo coincide con un lado de la región de soluciones factibles (figura 2.4). Así todas las soluciones de la frontera de la región comprendidas entre los dos vértices que intersecta la función objetivo, son soluciones factibles. En la tabla Simplex esto se manifiesta como un coeficiente de la función objetivo con valor cero para una variable no básica.

c) El problema no está acotado. Si la región de soluciones factibles se abre al infinito la función objetivo no tendrá un máximo definido (figura 2.5) y el método Simplex no convergerá.

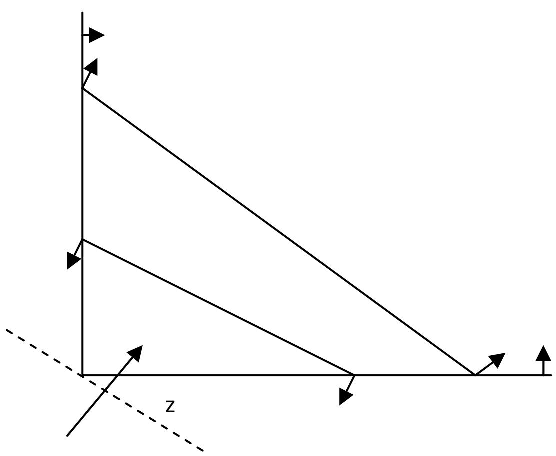


Figura 2.3 Infactible

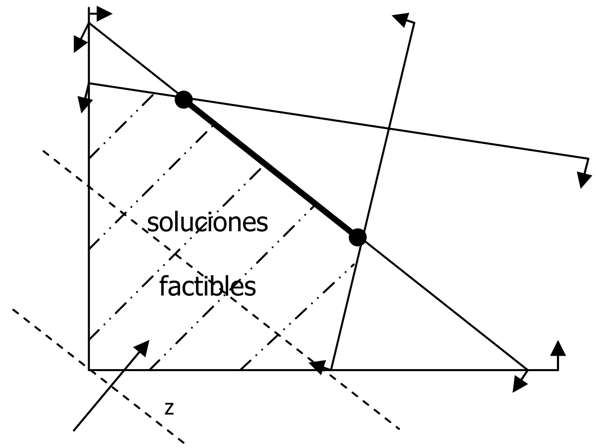


Figura 2.4 Óptimos alternativos

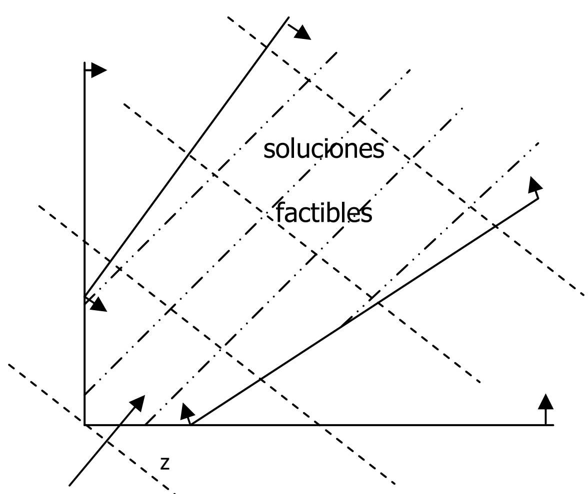


Figura 2.5 Problema no acotado

2.1.5 Variables artificiales

Hasta el momento se ha visto como se manejan las restricciones del tipo $a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n \leq b$, agregando variables de holgura para convertirlas en igualdades. Pero muchas restricciones en los modelos se manifiestan como desigualdades con esta forma:

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n \geq b$$

Si agregamos una variable de holgura, obtenemos

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n - s = b$$

Pero, al obtener la solución básica inicial vemos que

$$s = - b ,$$

violando la restricción de no negatividad de las variables. Este problema lo resolvemos agregando una variable artificial "y", expresando la restricción como:

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n - s + y = b$$

En caso de tener una igualdad de la forma:

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n = b$$

sólo agregaremos la variable artificial

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n + y = b$$

Las variables artificiales formarán parte de la solución básica inicial. Para asegurar su salida de la base se les asocia un costo de penalización muy grande "M" en la función objetivo:

$$z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n - M (y_1 + y_2 + \ldots + y_m)$$

Más adelante se ilustrará su aplicación con un ejemplo.

2.1.6 El modelo dual

Todo programa lineal en el que se busque maximizar utilidades está asociado con otro programa lineal en el que el objetivo sea la minimización de costos. Al programa original se le llama primal y al segundo dual, y ambos tendrán el mismo valor óptimo en su función objetivo.

Considérese el programa lineal:

Primal
$$\begin{aligned} \max\ & z = \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ \text{s a}\ & \mathbf{A}\,\mathbf{x} \le \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \ge \mathbf{0}\ , \end{aligned}$$

existe un programa lineal asociado

Dual
$$\begin{aligned} \min\ & z' = \mathbf{b}^T \mathbf{w} \\ \text{s a}\ & \mathbf{A}^T \mathbf{w} \ge \mathbf{c} \\ & \mathbf{x} \ge \mathbf{0} \end{aligned}$$

Para el problema de la empresa desarrolladora:

Primal
$$\begin{aligned} \max\ & z = 800\,x_1 + 500\,x_2 \\ \text{s a}\ & 270\,x_1 + 200\,x_2 \le 40{,}000 \\ & x_1 \le 100 \\ & x_2 \le 120 \\ & x_1 + x_2 \le 170 \\ & x_1\,,\ x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

Dual
$$\begin{aligned} \min\ & z' = 40{,}000\,w_1 + 100\,w_2 + 120\,w_3 + 170\,w_4 \\ \text{s a}\ & 270\,w_1 + w_2 + w_4 \ge 800 \\ & 200\,w_1 + w_3 + w_4 \ge 500 \\ & w_1\,,\ w_2\,,\ w_3\,,\ w_4 \ge 0 \end{aligned}$$

Los coeficientes de la primera restricción en el modelo dual nos indican cuantos insumos se consumen para producir una unidad del primer producto. En este caso nos indican que para construir una vivienda tipo I se requerirán 270 m^2 de terreno, y se cubrirá una unidad en la demanda por viviendas de mayor costo y una unidad en la demanda combinada. Y el coeficiente de la derecha de la restricción (800) es el valor de una vivienda tipo I construida.

Para resolver el modelo dual con el método Simplex debemos agregar variables de holgura y artificiales, y cambiar la función objetivo para lograr su maximización.

$$\text{s a} \quad 270\,w_1 + w_2 + w_4 - s_1 + y_1 = 800$$

$$200\,w_1 + w_3 + w_4 - s_2 + y_2 = 500$$

$$w_1,\ w_2,\ w_3,\ w_4,\ s_1,\ s_2,\ y_1,\ y_2 \geq 0$$

La función objetivo

$$\min\ z' = 40{,}000\,w_1 + 100\,w_2 + 120\,w_3 + 170\,w_4$$

Se plantea como maximización y se agrega el costo de penalización de las variables artificiales.

$$\max\ -z' = -40{,}000\,w_1 - 100\,w_2 - 120\,w_3 - 170\,w_4 - M\,y_1 - M\,y_2$$

Quedando la tabla Simplex de la siguiente manera

		w_1	w_2	w_3	w_4	s_5	s_6	y_1	y_2	
	b_b \ b_j	-40,000	-100	-120	-170	0	0	-M	-M	
y_1	-M	270	1	0	1	-1	0	1	0	800
y_2	-M	200	0	1	1	0	-1	0	1	500
	z_j	-470M	-M	-M	-2M	M	M	-M	-M	-1300M
	$z_j - b_j$	-470M	-M	-M	-2M	M	M	0	0	

El siguiente paso es encontrar la celda pivote. El menor costo reducido señalará la columna pivote. Con esta columna se calculan los cocientes de la columna de valores y se encuentra la fila pivote.

	b_b \ b_j	w_1 -40,000	w_2 -100	w_3 -120	w_4 -170	s_5 0	s_6 0	y_1 -M	y_2 -M		cociente
y_1	-M	270	1	0	1	-1	0	1	0	800	2.96
y_2	-M	200	0	1	1	0	-1	0	1	500	2.5
	z_j	-470M	-M	-M	-2M	M	M	-M	-M	-1300M	
	z_j - b_j	-470M +40,000	-M +100	-M +120	-2M +170	M	M	0	0		

Y realizamos las transformaciones lineales necesarias para sustituir la variable saliente y_2 por la entrante w_1.

	b_b \ b_j	w_1 -40,000	w_2 -100	w_3 -120	w_4 -170	s_5 0	s_6 0	y_1 -M	y_2 -M	
y_1	-M	0	1	-1.35	-0.35	-1	1.35	1	-1.35	125
w_1	-40,000	1	0	0.005	0.005	0	-0.005	0	0.005	2.5
	z_j									
	z_j - b_j									

Antes de calcular los valores de z_j y de los costos reducidos, observamos que la columna de la variable no básica w_2 es igual a la de la columna de la variable básica y_1. Esto nos permitirá introducir w_2 a la base y expulsar la variable artificial y_1 sin transformaciones adicionales. La tabla Simplex con la nueva base queda de esta forma:

	b_b \ b_j	w_1 -40,000	w_2 -100	w_3 -120	w_4 -170	s_5 0	s_6 0	y_1 -M	y_2 -M	
w_2	-100	0	1	-1.35	-0.35	-1	1.35	1	-1.35	125
w_1	-40,000	1	0	0.005	0.005	0	-0.005	0	0.005	2.5
	z_j	-40,000	-100	-65	-165	100	65	-100	-65	-112,500
	z_j - b_j	0	0	55	5	100	65	M -100	M -65	

Todos los costos reducidos son positivos. Se puede afirmar que hemos encontrado la solución óptima factible que maximiza -z', o bien, minimiza z'. Las variables artificiales se eliminan, pues hemos obtenido la solución óptima y carecen de utilidad. La tabla final del problema dual la podemos reescribir como:

		w_1	w_2	w_3	w_4	s_5	s_6	
	b_b \ b_j	-40,000	-100	-120	-170	0	0	
w_2	-100	0	1	-1.35	-0.35	-1	1.35	125
w_1	-40,000	1	0	0.005	0.005	0	-0.005	2.5
	z_j	-40,000	-100	-65	-165	100	65	-112,500
	$z_j - b_j$	0	0	55	5	100	65	

La solución óptima corresponde a:

variables básicas	variables no básicas
$w_1 = 2.5$	$w_3 = 0$
$w_2 = 12.5$	$w_4 = 0$
	$s_5 = 0$
	$s_6 = 0$

Para una z' de $112,500,000.

2.1.7 Interpretación del modelo dual

Para entender mejor el significado de los valores que aparecen en la tabla óptima del programa lineal dual, lo compararemos con la tabla de la solución óptima del programa primal.

Primal - Solución óptima

	c_b \ c_j	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	
		800	500	0	0	0	0	
x_2	500	0	1	0.005	-1.35	0	0	65
x_1	800	1	0	0	1	0	0	100
s_3	0	0	0	-0.005	1.35	1	0	55
s_4	0	0	0	-0.005	0.35	0	1	5
	z_j	800	500	2.5	125	0	0	112,500
	$z_j - c_j$	0	0	2.5	125	0	0	
		s_5	s_6	w_1	w_2	w_3	w_4	

Se puede observar que la solución del modelo primal incluye la solución al problema dual. Los valores de los costos reducidos de la solución óptima del primal corresponden con los valores de las variables en la solución óptima del dual; de tal manera que los costos reducidos de las variables de holgura en el primal son los valores de las variables de decisión en el dual, y los costos reducidos de las variables de decisión en el primal son los valores de las variables de holgura en el dual.

Dual - Solución óptima

	b_b \ b_j	w_1	w_2	w_3	w_4	s_5	s_6	
		-40,000	-100	-120	-170	0	0	
w_2	-100	0	1	-1.35	-0.35	-1	1.35	125
w_1	-40,000	1	0	0.005	0.005	0	-0.005	2.5
	z_j	-40,000	-100	-65	-165	100	65	-112,500
	$z_j - b_j$	0	0	55	5	100	65	
		s_1	s_2	s_3	s_4	x_1	x_2	

Lo mismo sucede con la solución óptima del dual; aporta la solución óptima del primal.

Como se ha visto el valor de las variables w_i es el costo reducido de la variable s_i.

Ambas variables están relacionadas con la misma restricción. Los valores de las variables w_i en la solución óptima son conocidos como precios sombra e indican la tasa a la que aumenta z si se incrementa un poco el límite de la restricción b_i correspondiente.

Así, si el valor de w_i es cero, existe superávit de este recurso y no tendría caso tratar de incrementar su disponibilidad, pues esto no conllevaría un aumento en z. En el caso de la empresa desarrolladora, son las variables w_3 y w_4 las que tienen valor cero, y corresponden a la demanda por viviendas tipo II y a la demanda combinada respectivamente. No convendrá invertir en campañas que incrementen estas dos demandas, pues no tendrían impacto en los ingresos del proyecto.

Cuando el valor de w_i es mayor a cero, estaremos hablando de un bien escaso. En caso de que la función objetivo sea maximizar utilidades, este valor puede indicarnos hasta cuanto estaría dispuesta a pagar la empresa por una unidad de este bien a un tercero. Pagar más no tendría sentido, pues por cada unidad extra que se dispusiera de este recurso se tendrían pérdidas, en vez de ganancias. En el problema que se ha resuelto, se observa que los bienes escasos corresponden a las variables w_1 y w_2, el área del terreno y la demanda por viviendas tipo I. Si hubiera oportunidad de incrementar el área del proyecto, la empresa obtendría cada metro cuadrado de terreno con un incremento en el ingreso de $2,500. Por otro lado, si la demanda por viviendas tipo I aumentara en una unidad, esto equivaldría a un incremento de $125,000 en el ingreso total del proyecto. Así, una campaña publicitaria que incrementará la preferencia por viviendas tipo I, será redituable si su costo unitario es menor a ese valor.

Por otro lado, los precios sombra no sólo indican los aumentos en la función objetivo, también señalan cuanto disminuiría z si las estimaciones de recursos disponibles fuesen exageradas. Se debe tener especial cuidado con aquellos recursos cuyos precios sombra son grandes, si la estimación de su disponibilidad es incierta, invertir en su precisión puede evitar el fracaso del proyecto. En nuestro problema tenemos asociado un precio sombra muy grande a la demanda de viviendas tipo I, esto sugiere que si se tienen dudas en el estudio de mercado, estás deberán ser disueltas, bien mediante un análisis exhaustivo o, ya sea el caso, mediante un estudio de mejor calidad.

2.1.8 Análisis de Sensibilidad

Mediante el análisis de sensibilidad buscamos obtener los rangos de variación de los parámetros de nuestro modelo de Programación Lineal, de tal manera que se conserve la base, obtenida en la solución óptima factible. Podemos estudiar los siguientes casos: cambio de coeficientes en la función objetivo, cambios de coeficientes de disponibilidad de recursos, incorporación de una nueva variable e incorporación de una nueva restricción.

Se verá primero el caso del cambio del coeficiente en la función objetivo para una variable básica. Tomando la tabla Simplex de la solución óptima del problema que se ha tratado hasta ahora, y agregando el parámetro δ en el coeficiente que se desea analizar. Por ejemplo, la variable básica x_2. Esto conlleva un cambio en el vector c_b y lleva a recalcular las últimas dos filas de la tabla.

		x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	
	c_b \ c_j	800	$500+\delta$	0	0	0	0	
x_2	$500+\delta$	0	1	0.005	-1.35	0	0	65
x_1	800	1	0	0	1	0	0	100
s_3	0	0	0	-0.005	1.35	1	0	55
s_4	0	0	0	-0.005	0.35	0	1	5
	z_j	800	$500+\delta$	$2.5+0.005\delta$	$125-1.35\delta$	0	0	$112{,}500+65\delta$
	$z_j - c_j$	0	0	$2.5+0.005\delta$	$125-1.35\delta$	0	0	

Como se observa, el parámetro δ sólo afecta los costos reducidos de las variables no básicas. Cuando estos costos valen cero, se tiene un óptimo alternativo, es decir, se puede cambiar de base. Apoyándonos en este hecho, podemos determinar para que valores de δ permanece la actual base como base óptima.

Evaluando δ para los valores de los costos reducidos de la variables no básicas, con los cuales ellas entraríán a la base, obtenemos:

$$2.5 + 0.005\,\delta \leq 0 \quad \rightarrow \quad \delta \leq -500$$

$$125 - 1.35\,\delta \leq 0 \quad \rightarrow \quad \delta \geq 92.6$$

Por lo tanto el rango de optimalidad para el parámetro δ es:

$$-500 < \delta < 92.6$$

Esto quiere decir que mientras el costo de las vivendas tipo II se mantenga en el rango:

$$0 < c_2 < 592.6$$

Los valores de x_1, x_2, s_3 y s_4, serán los obtenidos mediante la tabla Simplex anterior, y la función objetivo será máxima aunque los valores fluctuen entre \$80,000,000 y \$118,520,000 depeniendo del valor de δ.

El mismo procedimiento se aplica al evaluar la sensibilidad de una variable no básica. Se le agrega el parametro δ y se calculan nuevamente los costos reducidos. De allí se despeja δ para la condición en la que la variable no básica entraría a la base. Gráficamente, en dos dimensiones, lo que sucede es que cambia la pendiente de la función objetivo, mas no así la región de soluciones factibles (figura 2.6).

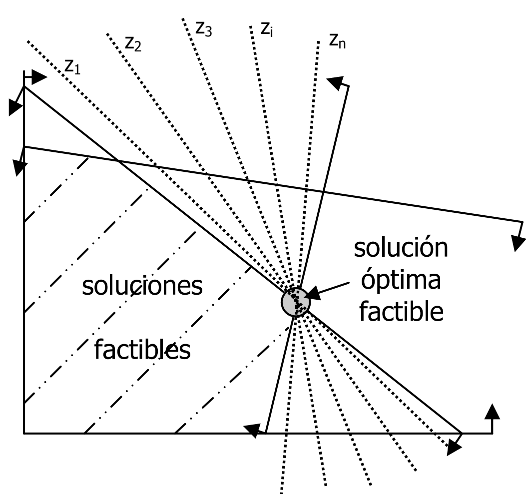


Figura 2.6 Análisis de Sensibilidad

En cambio si se altera el valor límite de una restricción se estará modificando la región de soluciones factibles. Una manera de encontrar el rango de optimalidad de estos coeficientes, es agregando parámetros a la función objetivo del programa dual. Como vimos antes, mientras en el programa primal $z = \mathbf{c}^T \mathbf{x}$, en el programa dual $z' = \mathbf{b}^T \mathbf{w}$.

Por ejemplo para la superficie del terreno b_1, que es un recurso escaso, obtenemos la siguiente tabla:

	b_b \ b_j	w_1	w_2	w_3	w_4	s_5	s_6	
		$-40{,}000-\delta$	-100	-120	-170	0	0	
w_2	-100	0	1	-1.35	-0.35	-1	1.35	125
w_1	$-40{,}000-\delta$	1	0	0.005	0.005	0	-0.005	2.5
	z_j	$-40{,}000$ $-\delta$	-100	-65 -0.005δ	-165 -0.005δ	100	65 $+0.005\delta$	$-112{,}500$ -2.5δ
	$z_j - b_j$	0	0	55 -0.005δ	5 -0.005δ	100	65 $+0.005\delta$	
		s_1	s_2	s_3	s_4	x_1	x_2	

Evaluando δ para los valores de los costos reducidos de la variables no básicas, con los cuales ellas entrarían a la base, obtenemos:

$$55 - 0.005\,\delta \le 0 \quad \rightarrow \quad \delta \ge 11{,}000$$
$$5 - 0.005\,\delta \le 0 \quad \rightarrow \quad \delta \ge 1{,}000$$
$$65 + 0.005\,\delta \le 0 \quad \rightarrow \quad \delta \le -13{,}000$$

Por lo tanto el rango de optimalidad para el parámetro δ es:

$$-13{,}000 \ge \delta \ge 1{,}000$$

O bien puede expresarse que la solución óptima obtenida es válida para una superficie de terreno entre 27,000 m^2 y 41,000 m^2, para los valores de ingreso entre \$80,000,000 y \$115,000,000, respectivamente.

En el caso de recursos superavitarios, se procede de la misma manera. Sin embargo, cabe recordar, que aumentar la disponibilidad de recursos superavitarios no causará cambios en la solución óptima, así que mediante este análisis se buscará determinar en que momento se convierten en recursos escasos.

El Análisis de Sensibilidad por incorporación de nuevas variables o restricciones, por modificación de coeficientes tecnológicos y el análisis bajo incertidumbre, son temas que caen fuera de los alcances de este trabajo.

2.1.9 Ejercicios resueltos

A continuación se plantean y se resuelven dos problemas de aplicación en la Ingeniería Civil. En el primero se determinan el número de horas-máquina óptimas para un proyecto de movimiento de tierras y en el segundo se plantea un programa lineal para la compra de equipo nuevo en un sistema de recolección de residuos sólidos. Si bien, el segundo problema estrictamente debe resolverse con programación entera, su planteamiento y la interpretación de resultados no cae fuera de los límites del curso de Teoría General de Sistemas.

Ejercicio 1

Un contratista posee cinco máquinas capaces de hacer trabajos de excavación. Estas máquinas no tienen los mismos rendimientos y, por contratos previos, su disponibilidad es limitada. El contratista desea determinar que combinación de máquinas le permitirá excavar 5000 m^3 de material en una semana al menor costo. En la tabla siguiente se incluyen los costos, capacidades y velocidades de operación de los distintos equipos.

Equipo	Capacidad (m^3)	Costo ($/h)	Disponibilidad (h/día)	Tiempo del ciclo (min)
Cargador frontal	1.5	175.00	6.0	4.50
Excavadora hidráulica	2	400.00	6.0	1.00
Retroexcavadora A	1.2	275.00	6.0	1.00
Retroexcavadora B	0.8	220.00	8.0	1.00
Grúa con almeja	1.2	470.00	5.5	2.25

a) Con Programación Lineal minimice el costo del proyecto y obtenga la combinación de maquinaria para ese fin.

b) De acuerdo con los precios sombra, explique la disponibilidad de que tipo de maquinaria convendría al contratista aumentar.

c) Mediante un Análisis de Sensibilidad indique cual es el costo horario para el que el cargador frontal se vuelve rentable.

Solución.

Planteamiento del modelo.

Primero definimos las variables de decisión. Si se desea minimizar el costo total de operación, éste estará en función del tiempo que operé cada máquina:

Sea x_i: el tiempo de operación de la máquina i

Y formulamos la función de costo objetivo, sumando los costos de operación de cada equipo:

Minimizar $z = 175\,x_1 + 400\,x_2 + 275\,x_3 + 220\,x_4 + 470\,x_5$

Para ajustar las restricciones de disponibilidad a una unidad de tiempo común, basta con que multipliquemos la disponibilidad diaria de cada equipo por los 5 días laborables con los que se cuenta:

$x_1 \leq 30$

$x_2 \leq 30$

$x_3 \leq 30$

$x_4 \leq 40$

$x_5 \leq 27.5$

Para definir la restricción de material total excavado, debemos encontrar el volumen por hora que remueve cada máquina:

Volumen/hora = Capacidad X 60 min / Tiempo del ciclo

Para la máquina 1: 1.5 m^3/ciclo X 60 min/hora / 4.5 min/ciclo = 20 m^3/hora

Para la máquina 2: 2.0 m^3/ciclo X 60 min/hora / 1.0 min/ciclo = 120 m^3/hora

Para la máquina 3: 1.2 m^3/ciclo X 60 min/hora / 1.0 min/ciclo = 72 m^3/hora

Para la máquina 4: 0.8 m^3/ciclo X 60 min/hora / 1.0 min/ciclo = 48 m^3/hora

Para la máquina 5: 1.2 m^3/ciclo X 60 min/hora / 2.25 min/ciclo = 32 m^3/hora

Multiplicando por el tiempo respectivo de operación y sumando el volumen movido por cada máquina obtenemos la última restricción.

$$20\,x_1 + 120\,x_2 + 72\,x_3 + 48\,x_4 + 32\,x_5 = 5000$$

Para utilizar el algoritmo Simplex se plantea el modelo de Programación Lineal en forma canónica, agregando variables de holgura para las desigualdades y una variable ficticia para la igualdad de la última restricción. Los coeficientes de la función objetivo son nulos para las variables de holgura y con un costo muy grande (-M) para la variable ficticia.

$$\max\; z' = -175\,x_1 - 400\,x_2 - 275\,x_3 - 220\,x_4 - 470\,x_5 - M\,y_1$$

$$\begin{array}{llllllllllll}
\text{s a} & x_1 & & & & & + s_1 & & & & & = 30 \\
& & x_2 & & & & & + s_2 & & & & = 30 \\
& & & x_3 & & & & & + s_3 & & & = 30 \\
& & & & x_4 & & & & & + s_4 & & = 40 \\
& & & & & x_5 & & & & & + s_5 & = 27.5 \\
& 20\,x_1 & + 120\,x_2 & + 72\,x_3 & + 48\,x_4 & + 32\,x_5 & & & & & + y_1 & = 5000
\end{array}$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, y_1 \geq 0$$

Se traslada el sistema de ecuaciones lineales a la tabla Simplex y se evalúa el renglón z' multiplicando el vector $\mathbf{c_b}$ con el correspondiente a cada variable.

	c_b \ c_j	x_1 -175	x_2 -400	x_3 -275	x_4 -220	x_5 -470	s_1 0	s_2 0	s_3 0	s_4 0	s_5 0	y_1 -M	b	
s_1	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	30	
s_2	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	30	
s_3	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	30	
s_4	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	40	
s_5	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	27.5	
y_1	-M	20	120	72	48	32	0	0	0	0	0	1	5000	
	z'_j	-20M	-120M	-72M	-48M	-32M	0	0	0	0	0	-M	-5000M	
	$z'_j - c_j$													

El siguiente paso es determinar la celda pivote, para ello se identifica la columna pivote con el menor valor que aparezca al calcular el costo reducido en la última fila. Una vez encontrado, se evalúa la columna de cocientes del vector b entre los valores correspondientes de la columna pivote. La celda con menor valor en la columna de cocientes señala el renglón pivote.

	c_b \ c_j	x_1 -175	x_2 -400	x_3 -275	x_4 -220	x_5 -470	s_1 0	s_2 0	s_3 0	s_4 0	s_5 0	y_1 -M		
s_1	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	30	∞
s_2	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	30	30
s_3	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	30	∞
s_4	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	40	∞
s_5	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	27.5	∞
y_1	-M	20	120	72	48	32	0	0	0	0	0	1	5000	41.7
	z'_j	-20M	-120M	-72M	-48M	-32M	0	0	0	0	0	-M	-5000M	
	$z'_j - c_j$	175 -20M	400 -120M	275 -72M	220 -48M	470 -32M	0	0	0	0	0	0		

La variable saliente es s_2 y la entrante es x_2. Se sustituye y mediante transformaciones lineales se obtiene la siguiente solución factible.

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	y_1		
	c_b \ c_j	-175	-400	-275	-220	-470	0	0	0	0	0	-M		
s_1	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	30	
x_2	-400	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	30	
s_3	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	30	
s_4	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	40	
s_5	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	27.5	
y_1	-M	0.17	0	0.6	0.4	0.27	0	-1	0	0	0	0.008	11.7	
	z'_j	-0.17M	-400	-0.6M	-0.4M	-0.27M	0	0	0	0	0	-0.008M	-12000 -11.7M	
	$z'_j - c_j$													

Calculando los costos reducidos y los cocientes correspondientes se encuentra una nueva celda pivote.

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	y_1		
	c_b \ c_j	-175	-400	-275	-220	-470	0	0	0	0	0	-M		
s_1	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	30	∞
x_2	-400	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	30	∞
s_3	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	30	30
s_4	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	40	∞
s_5	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	27.5	∞
y_1	-M	0.17	0	0.6	0.4	0.27	0	-1	0	0	0	0.008	11.7	19.5
	z'_j	-0.17M	-400	-0.6M	-0.4M	-0.27M	0	0	0	0	0	-0.008M	-12000 -11.7M	
	$z'_j - c_j$	175 -0.17M	0	275 -0.6M	220 -0.4M	470 -0.27M	0	0	0	0	0	0.992M		

La variable entrante es x_3 y la saliente y_1. Aplicando las transformaciones lineales necesarias, se obtiene la siguiente tabla donde ya se han calculado los costos reducidos.

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	y_1		
	c_b \ c_j	-175	-400	-275	-220	-470	0	0	0	0	0	-M		
s_1	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	30	
x_2	-400	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	30	
s_3	0	-0.28	0	0	-0.67	-0.44	0	1.67	1	0	0	-0.014	10.6	
s_4	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	40	
s_5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	27.5	
x_3	-275	0.28	0	1	0.67	0.44	0	-1.67	0	0	0	0.014	19.4	
	z'_j	-76.4	-400	-275	-183	-122	0	58.3	0	0	0	-3.82	-17347	
	$z'_j - c_j$	98.6	0	0	36.7	348	0	58.3	0	0	0	M		

Como todos los costos reducidos son no negativos, se ha encontrado la solución óptima para los valores:

$$x_1 = 0,\ x_2 = 30,\ x_3 = 19.4,\ x_4 = 0,\ x_5 = 0$$

Con los que la función objetivo alcanza el valor máximo de $z' = -17\ 347$.

Esto quiere decir, que el costo mínimo del proyecto es de $17,347 si se usa la siguiente combinación de maquinaria:

Excavadora hidráulica: 30 horas

Retroexcavadora A: 19.4 horas

Los precios sombra de la disponibilidad de los equipos son los correspondientes costos reducidos de las variables de holgura en la solución óptima. Los valores nulos indican un superávit en la disponibilidad del equipo, excepto para la excavadora hidráulica cuyo precio sombra es de $58.30, es decir que por cada hora adicional que estuviera disponible este maquinaria el costo del proyecto se reduciría en esta cifra.

Realizando el Análisis de Sensibilidad para el costo del cargador frontal observaremos cuando entra a la base.

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	
	c_b \ c_j	$-175-\delta$	-400	-275	-220	-470	0	0	0	0	0	
s_1	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	30
x_2	-400	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	30
s_3	0	-0.28	0	0	-0.67	-0.44	0	1.67	1	0	0	10.6
s_4	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	40
s_5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	27.5
x_3	-275	0.28	0	1	0.67	0.44	0	-1.67	0	0	0	19.4
	z'_j	-76.4	-400	-275	-183	-122	0	58.3	0	0	0	-17347
	$z'_j - c_j$	$98.6+\delta$	0	0	36.7	348	0	58.3	0	0	0	

Si el costo horario del cargador frontal se reduce en más de \$98.60, es decir si fuera menor a \$76.40, podría resultar rentable.

Ejercicio 2

Un municipio ha obtenido recursos para mejorar su sistema de recolección de residuos sólidos. Se ha estimado que la generación de residuos del municipio es de cerca de las 22 toneladas métricas, muy superior a la capacidad de recolección, ya que actualmente cuenta con sólo dos camiones de volteo y un camión cilíndrico, los primeros pueden recolectar 2500 kg diarios cada uno y el segundo alrededor de 5600 kg. Los costos diarios de operación de cada vehículo son de \$400 y \$350 respectivamente; mientras que los costos diarios de la mano de obra son \$650 y \$550 y no deben superar los \$4000.

Se tiene un presupuesto de \$1,200,000 para equipo nuevo y gracias a un programa federal se pueden adquirir los camiones de volteo a un costo de \$360,000 y los cilíndricos a \$420,000.

a) Plantee un programa lineal en forma canónica para determinar cuál es la combinación de vehículos con el menor costo de operación, tras la compra de nuevos camiones y obtenga su solución.

b) Explique los valores obtenidos para las variables de holgura y los precios sombra.

Solución

Definimos las variables de decisión:

x_1 : número total de camiones de volteo tras la compra de vehículos nuevos

x_2 : número total de camiones cilíndricos tras la compra de vehículos nuevos

El objetivo de este programa es minimizar los costos de operación de estos vehículos:

$$\min \; z = 400\,x_1 + 350\,x_2$$

Sujeto a las siguientes restricciones:

Residuos a recolectar

$$2.5\,x_1 + 3.6\,x_2 \geq 22$$

Costo de mano de obra

$$650\,x_1 + 550\,x_2 \leq 4000$$

Presupuesto para vehículos nuevos

$$360{,}000\,(x_1 - 2) + 420{,}000\,(x_2 - 1) \leq 1{,}200{,}000$$

Camiones de volteo en operación

$$x_1 \geq 2$$

Camiones cilíndricos en operación

$$x_2 \geq 1$$

Además x_1 y x_2 deben ser enteros.

El programa lineal expresado en forma canónica queda de la siguiente forma:

$$\max\ z' = -400\,x_1 - 350\,x_2$$

$$\begin{array}{llllllllllll}
\text{s a} & 2500\,x_1 & + 3600\,x_2 & - s_1 & & & & & + y_1 & & & = 22000 \\
 & 650\,x_1 & + 550\,x_2 & & + s_2 & & & & & & & = 4000 \\
 & 360\,x_1 & + 420\,x_2 & & & + s_3 & & & & & & = 2340 \\
 & x_1 & & & & & - s_4 & & & + y_2 & & = 2 \\
 & & x_2 & & & & & - s_5 & & & + y_3 & = 1
\end{array}$$

Simplificando algunas ecuaciones para facilitar el cálculo se obtiene la siguiente tabla. Estas simplificaciones no deben tomarse a la ligera ya que afectan directamente la interpretación de las variables de holgura y de los precios sombra. De esta manera la variable s_1 expresa la capacidad adicional de recolección en toneladas, no en kilogramos, y la variable s_3 el presupuesto no ejercido en decenas de miles de pesos.

		x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	y_1	y_2	y_3		
	c_b \ c_j	-400	-350	0	0	0	0	0	-1E+09	-1E+09	-1E+09		
y_1	-1E+09	2.5	5.6	-1	0	0	0	0	1	0	0	22	3.9286
s_2	0	650	550	0	1	0	0	0	0	0	0	4000	7.2727
s_3	0	36	42	0	0	1	0	0	0	0	0	234	5.5714
y_2	-1E+09	1	0	0	0	0	-1	0	0	1	0	2	-
y_3	-1E+09	0	1	0	0	0	0	-1	0	0	1	1	1
	z'_j	-4E+09	-7E+09	1E+09	0	0	1E+09	1E+09	-1E+09	-1E+09	-1E+09	-3E+10	
	$z'_j - c_j$	-3E+09	-7E+09	1E+09	0	0	1E+09	1E+09	0	0	0		

Una vez identificadas la variable entrante x_2 y la variable saliente y_3, se inician las iteraciones del Método Simplex cuya memoria de cálculo se presenta en las siguientes tablas.

		x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	y_1	y_2	y_3		
	c_b \ c_j	-400	-350	0	0	0	0	0	-1E+09	-1E+09	-1E+09		
y_1	-1E+09	2.5	0	-1	0	0	0	5.6	1	0	-5.6	16.4	2.9286
s_2	0	650	0	0	1	0	0	550	0	0	-550	3450	6.2727
s_3	0	36	0	0	0	1	0	42	0	0	-42	192	4.5714
y_2	-1E+09	1	0	0	0	0	-1	0	0	1	0	2	-
x_2	-350	0	1	0	0	0	0	-1	0	0	1	1	-1
	z'_j	-4E+09	-350	1E+09	0	0	1E+09	-6E+09	-1E+09	-1E+09	6E+09	-2E+10	
	$z'_j - c_j$	-3E+09	0	1E+09	0	0	1E+09	-6E+09	0	0	7E+09		

La variable entrante es s_5 y la saliente y_1.

		x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	y_1	y_2	y_3		
	c_b \ c_j	-400	-350	0	0	0	0	0	-1E+09	-1E+09	-1E+09		
s_5	0	0.4464	0	-0.179	0	0	0	1	0.1786	0	-1	2.9286	6.56
s_2	0	404.46	0	98.214	1	0	0	0	-98.21	0	0	1839.3	4.5475
s_3	0	17.25	0	7.5	0	1	0	0	-7.5	0	0	69	4
y_2	-1E+09	1	0	0	0	0	-1	0	0	1	0	2	2
x_2	-350	0.4464	1	-0.179	0	0	0	0	0.1786	0	0	3.9286	8.8
	z'_j	-1E+09	-350	62.5	0	0	1E+09	0	-62.5	-1E+09	0	-2E+09	
	$z'_j - c_j$	-1E+09	0	62.5	0	0	1E+09	0	1E+09	0	1E+09		

La variable entrante es x_1 y la saliente y_2.

		x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	y_1	y_2	y_3		
	c_b \ c_j	-400	-350	0	0	0	0	0	-1E+09	-1E+09	-1E+09		
s_5	0	0	0	-0.179	0	0	0.4464	1	0.1786	-0.446	-1	2.0357	
s_2	0	0	0	98.214	1	0	404.46	0	-98.21	-404.5	0	1030.4	
s_3	0	0	0	7.5	0	1	17.25	0	-7.5	-17.25	0	34.5	
x_1	-400	1	0	0	0	0	-1	0	0	1	0	2	
x_2	-350	0	1	-0.179	0	0	0.4464	0	0.1786	-0.446	0	3.0357	
	z'_j	-400	-350	62.5	0	0	243.75	0	-62.5	-243.8	0	-1863	
	$z'_j - c_j$	0	0	62.5	0	0	243.75	0	1E+09	1E+09	1E+09		

La solución óptima indica que se requieren dos camiones de volteo y tres camiones cilíndricos para tener el costo de operación más bajo y al mismo tiempo satisfacer la demanda, ceñirse al presupuesto y conservar el equipo existente. El costo de operación real sería de $1,850 diarios.

El valor de la variable básica s_2 indica que el presupuesto para mano de obra tiene una holgura de $1,030; en realidad si se recalcula para tres camiones cilíndrico, en vez de 3.0357, la holgura asciende a $1,050 por día.

La variable básica s_3 señala que del presupuesto para la compra de vehículos nuevos, no se ejercerán $345,000; nuevamente si se recalcula se obtiene el valor real de $360,000.

La variable básica s_5 indica el número de camiones cilíndricos nuevos que deben adquirirse, que en números enteros es dos.

La variable no básica s_1 tiene valor cero. Esto indica que se satisface apenas la demanda de residuos a recolectar. En realidad, con tres camiones cilíndricos se tiene capacidad para 21.8 toneladas al día, lo que no satisface la demanda. Por otra parte el precio sombra nos indica que por cada tonelada adicional que se desee recolectar los costos de operación se incrementan en $62.50 diarios, pero este valor se basa en el supuesto de que las variables x_1 y x_2 son reales y no enteras. En resumen, la solución obtenida no satisface la demanda de residuos a recolectar.

La variable no básica s_4 tiene valor cero. Esto se debe a que la restricción $x_1 \geq 2$ se puede reescribir como $x_1 - s_4 = 2$, donde x_1 representa el total de camiones de volteo en operación y s_4 representa la cantidad de estos camiones que se deberán adquirir. Como en la solución óptima $x_1 = 2$, no se requieren camiones de volteo nuevos. El precio sombra de s_4 nos indica cuanto varía la función objetivo si se modifica el valor de la restricción asociada. En este caso, si $x_1 \geq 1$, es decir si podemos retirar un camión de volteo actualmente en uso, los costos de operación se reducirían en \$243.75; suponiendo además que se recupere el costo total del vehículo y se invierta para la compra de camiones cilíndricos.

2.1.10 Ejercicios propuestos

En esta sección se plantean ejercicios complementarios que permiten ejercitar y profundizar los conocimientos adquiridos. La solución de cada uno de ellos no se muestra con el detalle de los ejercicios anteriores, sólo se muestran los pasos que servirán de guía para quien los resuelva exhaustivamente.

Ejercicio 3

Una empresa constructora requiere realizar voladuras para cortar rocas durante la construcción de un embalse. Para crear la mezcla explosiva se utilizan tres ingredientes (A, B y C) de la siguiente manera: por cada cuatro partes del ingrediente A se debe utilizar al menos una del ingrediente C, y por cada medida del ingrediente C se ha de utilizar una del ingrediente B. Para que la voladura sea exitosa la mezcla ha de pesar no menos de 280 gramos, pero si excede los 500 gramos la explosión sería muy peligrosa.

a) Si los costos de 10 gramos de los ingredientes son de \$24, \$72 y \$80 dólares respectivamente, elaboré un programa lineal que determine la mezcla explosiva con el menor costo sin que se ponga en riesgo la seguridad de la construcción y obtenga la solución óptima.

b) Explique el valor de las variables de holgura y de los precios duales de las restricciones.

c) Realice un Análisis de Sensibilidad para el costo del ingrediente A.

Solución

Planteamiento del modelo.

Sean x_1: la cantidad de ingrediente A

x_2: la cantidad de ingredientes B o C (ambas cantidades son iguales)

La función objetivo

min $z = 2.4\, x_1 + (7.2 + 8.0)\, x_2$

Y las restricciones

s a $-4\, x_1 + x_2 \geq 0$

$x_1 + 2\, x_2 \geq 280$

$x_1 + 2\, x_2 \leq 500$

$x_i \geq 0$

Aplicando el Método Simplex se obtiene la siguiente solución óptima:

La mezcla explosiva óptima se obtiene con 31.1 g del ingrediente A, 124.4 g del B y 124.4 g del C, a un costo de $1966.22.

	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	
c_b \ c_j	-2.4	-15.2	0	0	0	
x_1	1	0	0.22	-0.11	0	31.1
x_2	0	1	-0.11	-0.44	0	124.4
s_3	0	0	0	1	1	220
$z'_j - c_j$	0	0	1.16	7.02	0	-1966

La variable de holgura s_3 tiene un valor de 220 g, e indica la masa total que falta para alcanzar la mezcla peligrosa.

La variable s_1 es no básica y señala que la relación mínima recomendada de 4 a 1 de los ingredientes A y C se ha satisfecho justamente. La restricción asociada a esta variable se puede reescribir como $x_2 - s_1 = 4\,x_1$, por lo que el precio sombra indica que el costo de la mezcla se reduciría en \$1.16 por cada cuarto de gramo menos de la sustancia A, que se requiriera en proporción al elemento C.

Por otra parte el precio sombra de la variable no básica s_2 señala que los costos disminuirían en \$7.02 por cada gramo menos que se necesitará para crear la mezcla mínima. Es decir, que convendría utilizar un ingrediente adicional para reducir la cantidad de ingredientes A, B y C, si aquel costará menos de \$7.02 por gramo.

Del Análisis de Sensibilidad para el ingrediente A, se obtiene:

	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	
c_b \ c_j	$-2.4-\delta$	-15.2	0	0	0	
x_1	1	0	0.22	-0.11	0	31.1
x_2	0	1	-0.11	-0.44	0	124.4
s_3	0	0	0	1	1	220
$z'_j - c_j$	0	0	$1.16 - 0.22\delta$	$7.02 + 0.11\delta$	0	$-1966 - 31.1\delta$

Para s_1: $1.16 - 0.22\delta \leq 0$
$\rightarrow \delta \leq 5.2$

Para s_2: $7.02 + 0.11\delta \leq 0$
$\rightarrow \delta \geq -63.2$

Se obtuvo un rango de optimalidad para δ entre - 63.2 y 5.2, lo que quiere decir, que el costo de A puede variar entre \$0 y \$65.60, y la solución óptima obtenida anteriormente seguirá siendo válida.

Ejercicio 4

Tras el embate de un huracán se requiere evaluar los daños en una ciudad costera. Para ello se ha creado una comisión de emergencia que inspeccionará daños en las instalaciones eléctricas, de gas, agua potable y drenaje en edificios públicos, fabricas y viviendas. Se requiere que los inspectores atiendan al menos 6 edificios públicos y 4 fábricas, y que del total de inspecciones que realicen al menos 60% sean a viviendas. Se estima que los tiempos de inspección por edificio en horas se consumirán de la siguiente manera:

	Instalaciones eléctricas	Instalaciones de gas	Instalaciones hidráulicas
Viviendas	2	1	3
Edificios públicos	4	1	2
Fábricas	6	3	1

Se han presupuestado 120 horas de inspección a instalaciones eléctricas, 80 a instalaciones de gas y 100 a instalaciones hidráulicas.

a) Formule un programa lineal que optimice el uso de los recursos disponibles y obtenga su solución.

b) Explique los valores de las variables de holgura y de los precios sombra de las restricciones sobre el número de edificios públicos y fábricas que han de inspeccionarse.

Solución

Planteamiento del modelo.

Sean x_1 : número de viviendas inspeccionadas

x_2 : número de edificios públicos inspeccionados

x_3 : número de fábricas inspeccionadas

$$
\begin{array}{lr}
\text{maximizar} & z = x_1 + x_2 + x_3 \\
\text{s a} & x_2 \geq 6 \\
 & x_3 \geq 4 \\
 & 0.4\,x_1 - 0.6\,x_2 - 0.6\,x_3 \geq 0 \\
 & 2\,x_1 + 4\,x_2 + 6\,x_3 \leq 120 \\
 & x_1 + x_2 + 3\,x_3 \leq 80 \\
 & 3\,x_1 + 2\,x_2 + x_3 \leq 100 \\
 & x_i \geq 0
\end{array}
$$

Utilizando el Método Simplex, tras cinco iteraciones se obtiene la siguiente tabla óptima.

	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	s_6	
c_b \ c_j	1	1	1	0	0	0	0	0	0	
x_2	0	1	0	0	2	0	0.375	0	-0.25	12
x_3	0	0	1	0	-1	0	0	0	0	4
x_1	1	0	0	0	-1	0	-0.25	0	0.5	24
s_1	0	0	0	1	2	0	0.375	0	-0.25	6
s_5	0	0	0	0	2	0	-0.125	1	-0.25	32
s_3	0	0	0	0	-1	1	-0.325	0	0.35	0
$z'_j - c_j$	0	0	0	0	0	0	0.125	0	0.25	40

Solución óptima: $z = 40$ con $x_1 = 24$, $x_2 = 12$ y $x_3 = 4$.

Se atenderá el mayor número de inmuebles si se destinan los recursos a la revisión de 24 viviendas, 12 edificios públicos y 4 fábricas.

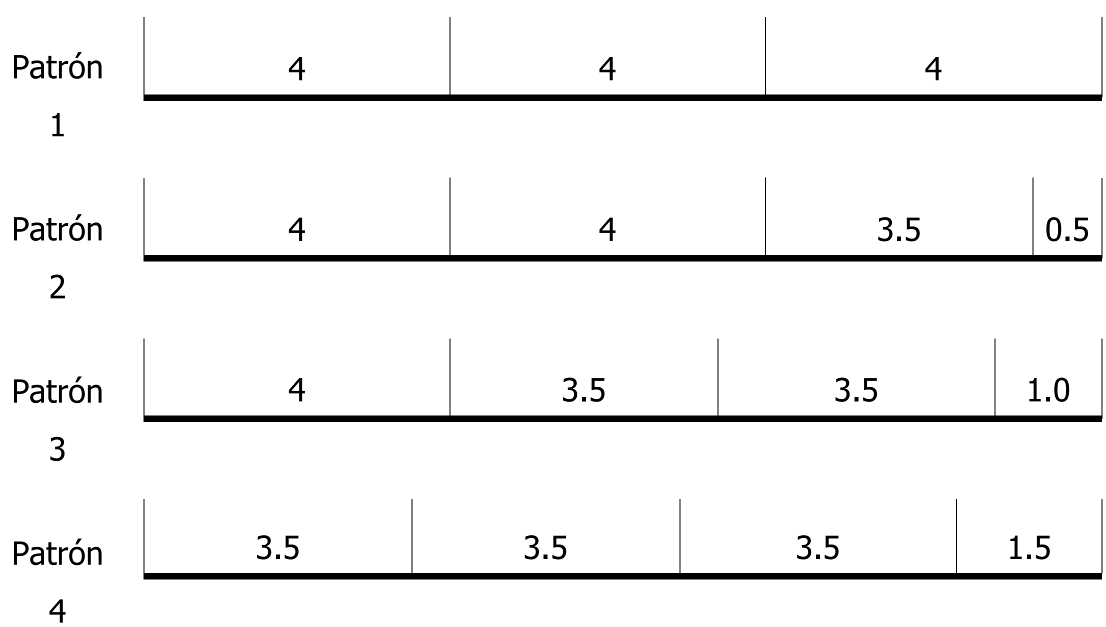
Por otra parte los valores de las variables de holgura básicas indican que se atienden 6 edificios públicos más del mínimo requerido ($s_1 = 6$) y no se hace uso de 32 horas de servicios técnicos en instalaciones de gas (s_5 = 32). Por otra parte, la variable s_3 = 0, indica que la proporción de viviendas es exactamente de 60% del total de edificaciones a inspeccionar.

El precio sombra de la variable s_2 = 0, indica que modificar el límite del número de fábricas a inspeccionar en una unidad no afectaría el número total de edificaciones a revisar.

Los precios sombra de s_4 y s_6 señalan el incremento en la variable objetivo si aumentamos en una hora la disponibilidad de tiempo para la inspección de instalaciones eléctricas e hidráulicas respectivamente. Se puede interpretar que un incremento de 8 horas para la revisión de instalaciones eléctricas o uno de cuatro para instalaciones hidráulicas permitirá la inspección de un inmueble adicional.

Ejercicio 5

En una construcción se requieren, para el armado de columnas, 40 tramos de varillas de acero de 4 metros y 30 tramos de 3.5 metros. Se cuenta con 25 varillas de 12 metros y se han propuesto los siguientes patrones de corte:



a) Sin tomar en cuenta la condición de variables enteras, plantee un programa lineal que minimice los desperdicios y obtenga su solución óptima.

b) Interprete los costos reducidos de las variables que no entran en la base y los valores de las variables de holgura.

c) Si se considera que en el patrón número 1 los cortes no son exactos en cierta cantidad de casos, lo que ocasiona desperdicios, realice un Análisis de Sensibilidad e indique el margen dentro del cual sigue siendo válida la solución obtenida.

Solución

Sea

x_i : número de varillas cortadas con el patrón i

minimizar $z = 0.5\ x_2 + 1.0\ x_3 + 1.5\ x_4$

s a
$$3\ x_1 + 2\ x_2 + x_3 \geq 40$$
$$x_2 + 2\ x_3 + 3\ x_4 \geq 30$$
$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 25$$
$$x_i \geq 0$$

Tras dos iteraciones del Método Simplex se obtiene la siguiente tabla óptima.

	x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	s_2	s_3	
c_b \ c_j	0	-0.5	-1	-1.5	0	0	0	
x_1	1	0.67	0.33	0	-0.33	0	0	13.33
x_4	0	0.33	0.67	1	0	-0.33	0	10
s_3	0	0	0	0	0.33	0.33	1	1.67
$z'_j - c_j$	0	0	0	0	0	0.5	0	-15

Se tiene una solución óptima para $x_1 = 13.33$ y $x_4 = 11.67$ con un desperdicio de 15 metros lineales de varilla. Pero los costos reducidos de las variables x_2 y x_3 son cero, lo que quiere decir que existen otras soluciones, con el mismo desperdicio de material.

Estos se presentan para las cuaternas (0; 20; 0; 3.33) y (8.33; 0; 15; 0).

Por otra parte, en la tabla óptima el valor de la variable s_3 representa el número de varillas no utilizadas, y su costo reducido es cero, pues hay un superávit de material. La variable no básica s_1 también tiene costo marginal cero, lo que quiere decir que reducir el requerimiento de varillas de cuatro metros no disminuiría las perdidas de material. El costo marginal de la variable s_2 señala que por cada varilla de tres metros y medio que no se demande se reducirán las perdidas en medio metro lineal.

Todos los resultados obtenidos en este ejercicio deben ser analizados con cuidado al presentar valores fraccionarios, como consecuencia se desperdiciaría más material del que se calcula con la función objetivo. Es recomendable utilizar algoritmos de Programación Entera, que no caen dentro de los alcances de este trabajo.

Para determinar las perdidas del patrón 1, para la cual se mantiene la solución óptima calculada se realiza el Análisis de Sensibilidad.

	x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	s_2	s_3	
c_b \ c_j	$-\delta$	-0.5	-1	-1.5	0	0	0	
x_1	1	0.67	0.33	0	-0.33	0	0	13.33
x_4	0	0.33	0.67	1	0	-0.33	0	10
s_3	0	0	0	0	0.33	0.33	1	1.67
z'_j - c_j	0	-0.67δ	-0.33δ	0	0	0.5	0	-15

La solución óptima obtenida no tiene validez para cualquier desperdicio en el patrón 1. La tabla señala la entrada de la variable x_2 a la base.

Ejercicio 6

Una empresa constructora tiene financiamiento para participar en distintos proyectos de edificación durante los siguientes tres años. Con base en la experiencia acumulada se han estimado los costos y utilidades de cada tipo de proyecto y se plasman en la siguiente tabla (costos en millones de pesos):

Tipo de edificio	Utilidad	Costo en el año 1	Costo en el año 2	Costo en el año 3
A	3	5	7	3
B	2.5	1	4	7
C	2	7	9	9
D	1	3	1	5

La disposición de recursos para la empresa es de 50 millones de pesos para el primer año, 24 millones durante el segundo y 30 millones durante el tercero.

a) Plantee un programa lineal que maximice las utilidades de la empresa, encuentre la solución óptima y opine sobre la validez de la solución.

b) Justifique si una redistribución de los recursos anuales brindaría mayores utilidades a la empresa.

c) Realice el Análisis de Sensibilidad para las variables de decisión no básicas.

Solución

Sea

x_i : tipo de proyecto en el que se invertirá

maximizar $z = 3\ x_1 + 2.5\ x_2 + 2\ x_3 + 1\ x_4$

s a $5\ x_1 + 1\ x_2 + 7\ x_3 + 3\ x_4 \leq 50$

$7\ x_1 + 4\ x_2 + 9\ x_3 + 1\ x_4 \leq 24$

$3\ x_1 + 7\ x_2 + 9\ x_3 + 5\ x_4 \leq 30$

$x_i \geq 0$

Tras dos iteraciones del Método Simplex se obtiene la solución óptima.

Las variables básicas x_1 = 1.3 y x_2 = 3.7 indican que se debe invertir en un proyecto

	x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	s_2	s_3	
c_b \ c_j	3	2.5	2	1	0	0	0	
s_1	0	0	2.38	3.89	1	-0.86	0.35	39.78
x_1	1	0	0.73	-0.35	0	0.19	-0.11	1.30
x_2	0	1	0.97	0.86	0	-0.08	0.19	3.73
$z_j - c_j$	0	0	2.62	0.11	0	0.36	0.15	13.21

tipo 1 y en 3 proyectos tipo 2, con lo que se obtendrían ganancias de 10.5 millones de pesos (sensiblemente por debajo de los 13.2 que aparecen en la solución óptima) si se invirtiera en cuatro proyectos tipo 2 las utilidades llegarían a los 13 millones pero se incurriría en un déficit de un millón en el tercer año.

La variable de holgura s_1 nos señala un subejercicio de casi 40 millones en el primer año. Si esos recursos se destinaran a los años 2 y 3 se incrementarían las ganancias en las medidas que señalan los costos reducidos de las variables s_2 y s_3.

El Análisis de Sensibilidad muestra que la variable x_3 entraría a la base si la utilidad del proyecto asociado fuera la menos de \$4.62 millones, mientras que la variable x_4 sería básica para una utilidad de \$1.11 millones en el proyecto tipo 4.

	x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	s_2	s_3	
c_b \ c_j	3	2.5	$2+\delta$	$1+\varepsilon$	0	0	0	
s_1	0	0	2.38	3.89	1	-0.86	0.35	39.78
x_1	1	0	0.73	-0.35	0	0.19	-0.11	1.30
x_2	0	1	0.97	0.86	0	-0.08	0.19	3.73
$z_j - c_j$	0	0	$2.62-\delta$	$0.11-\varepsilon$	0	0.36	0.15	13.21

Ejercicio 7

Una empresa constructora requiere agregados pétreos para una obra. Se ha estimado que requerirán 19,500 m^3 de agregado grueso, 31,000 m^3 de agregado fino y 20,500 m^3 de arena. Los materiales se extraerán de dos bancos y serán acarreados a la obra. El costo de transporte desde el banco A es de \$120 por metro cúbico y de \$150 desde el banco B.

Los análisis de la proporción de agregados en los depósitos se muestran en la siguiente tabla.

Material	Banco A (%)	Banco B (%)
Agregado grueso	20	30
Agregado fino	14	50
Arena	25	20
Desecho	41	0

Determine que cantidad de agregado debe ser extraído de cada banco para minimizar el costo de acarreo. Realice un análisis de los precios sombra e indique como afectaría un aumento en el requerimiento de agregado grueso a la solución encontrada.

Solución

Sea x_1 : material transportado desde el banco A

x_2 : material transportado desde el banco B

minimizar $z = 120\, x_1 + 150\, x_2$

s a $0.20\, x_1 + 0.30\, x_2 \geq 19{,}500$

$0.14\, x_1 + 0.50\, x_2 \geq 31{,}000$

$0.25\, x_1 + 0.20\, x_2 \geq 20{,}500$

$x_i \geq 0$

En este problema se llega más fácilmente a la solución resolviendo el sistema Dual.

maximizar $z' = 19{,}500\ w_1 + 31{,}000\ w_2 + 20{,}500\ w_3$

s a $0.20\ w_1 + 0.14\ w_2 + 0.25\ w_3 \leq 120$

$0.30\ w_1 + 0.54\ w_2 + 0.20\ w_3 \leq 150$

$w_i \geq 0$

Tras dos iteraciones se obtiene la tabla óptima.

	w_1	w_2	w_3	s_4	s_5	
b_b \ b_j	19,500	31,000	20,500	0	0	
w_3	0.598	0	1	5.15	-1.44	402.1
w_2	0.361	1	0	-2.06	2.58	139.2
$z'_j - b_j$	3,943	0	0	41,753	50,309	12,556,700
	s_1	s_2	s_3	x_1	x_2	

El menor costo de acarreo se consigue si se extraen 41,753 m^3 del banco A y 50,309 m^3 del banco B, el monto total sería de $12,556,700.

Los precios sombra de w_2 y w_3 nos muestran la tasa en la que se incrementaría el costo total de acarreo en caso de que el requerimiento de agregado fino o de arena aumentase en 1 m^3, los valores son $139 y $402 respectivamente.

	w_1	w_2	w_3	s_4	s_5	
b_b \ b_j	19,500+δ	31,000	20,500	0	0	
w_3	0.598	0	1	5.15	-1.44	402.1
w_2	0.361	1	0	-2.06	2.58	139.2
$z'_j - b_j$	3,943-δ	0	0	41,753	50,309	12,556,700
	s_1	s_2	s_3	x_1	x_2	

Del Análisis de Sensibilidad se deduce que la solución obtenida será válida mientras el volumen requerido de agregado grueso se mantenga por debajo de los 23,443 m^3.

2.2 Modelo de Transporte

El objetivo de un modelo de transporte es minimizar el costo total de envío de productos desde su almacenaje hasta su punto de demanda, sujeto a las restricciones que la demanda sea satisfecha y que la capacidad de las fuentes no sea excedida.

2.2.1 Planteamiento del modelo

El modelo de transporte es un programa lineal, pero tiene las siguientes particularidades:

Sean:

m: el número de orígenes

n: el número de destinos

u_i: la disponibilidad de recursos en el origen i

v_j : la demanda en el destino j

c_{ij} : el costo unitario de transportar el producto desde el origen i al destino j

x_{ij} : la cantidad que se envía desde el origen i al destino j

Con las restricciones:

De demanda $\sum x_{ij} = u_i \ ; \ i = 1, \ldots, m$

De disponibilidad $\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = v_i \ ; \ j = 1, \ldots, n$

De no negatividad $\overset{m}{\underset{i=1}{x_{ij}}} \geq 0; \ i = 1, \ldots, m; \ j = 1, \ldots, n$

Y el objetivo:

Minimizar costos de envío: $z = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} c_{ij} \, x_{ij}$

Una vez identificados estos elementos podemos proceder a la solución del programa. Al ser este un programa lineal se puede aplicar el algoritmo Simplex, pero se tendría que manejar m×n variables y m+n restricciones. El algoritmo de transporte permite resolver el problema con mayor facilidad, al aprovechar el hecho de que, en estos problemas la matriz de coeficientes tecnológicos en unitaria.

Para entender el algoritmo, se resolvera el problema siguiente:

Ejemplo 2

Para mantener transitables los caminos tras una nevada, se requiere esparcir una mezcla de arena y sal (la sustancia más barata y de uso extendido para derretir nieve o hielo) sobre la superficie de rodamiento. Para tal fin las oficina de obras públicas de cierta ciudad tiene dos almacenes con capacidades de 900 ton y 750 ton respectivamente. Se han identificado cuatro estaciones a partir de las cuales las cuadrillas pueden realizar los recorridos necesarios para despejar las carreteras principales. En cada estación el requerimiento del producto es distinto, siendo de 300 ton, 450 ton, 500 ton y 350 ton, respectivamente. Se ha estimado que el costo de transportar la mezcla a las distintas estaciones es el siguiente:

Costos en $/ton

	Estación 1	Estación 2	Estación 3	Estación 4
Depósito 1	20	30	15	25
Depósito 1	40	35	25	30

El jefe de obras públicas desea determinar el programa que le permitirá reducir al mínimo el costo de distribución del material.

Primero, se plantea el modelo de programación lineal.

Sea x_{ij} : la cantidad de arena y sal que se envía desde el origen i al destino j (ton)

Antes de plantear las restricciones de oferta y demanda, el algoritmo de transporte exige que exista un equilibrio entre ambas.

Calculamos la oferta total: 900 +1750 = 1650 ton

Y la demanda total: 300 + 450 + 500 + 350 = 1600 ton

Como la oferta es mayor que la demanda, se tiene que crear un destino ficticio que reciba el excedente de 50 ton. A este destino se le asignan costos de transporte nulos y le llamaré Estación 5.

Se tiene entonces como objetivo minimizar

$$z = 20\ x_{11} + 30\ x_{12} + 15\ x_{13} + 25\ x_{14} + 40\ x_{21} + 35\ x_{22} + 25\ x_{23} + 30\ x_{24}$$

Las ecuaciones de oferta quedarían entonces así:

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} = 900$$

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} + x_{25} = 750$$

Y estas son las de demanda:

$$x_{11} + x_{21} = 300$$

$$x_{12} + x_{22} = 450$$

$$x_{13} + x_{23} = 500$$

$$x_{14} + x_{24} = 350$$

$$x_{15} + x_{25} = 50 \quad \text{Demanda ficticia}$$

Con todas las variables no negativas.

2.2.2 El algoritmo de transporte

Como puede verse, los valores de la matriz de coeficientes tecnológicos sólo tiene valores unitarios o nulos con una configuración característica. Esto permite emplear un algoritmo de menor complejidad operativa que el Simplex. Primero se colocan los coeficientes de costos en una tabla como la siguiente:

	Estación 1	Estación 2	Estación 3	Estación 4	Estación 5	
Depósito 1	20	30	15	25	0	
Depósito 2	40	35	25	30	0	

Ahora se debe encontrar una solución básica inicial para nuestro programa lineal, para ello se describen a continuación tres procedimientos.

El procedimiento de la esquina noroeste

Se selecciona la celda correspondiente a la variable x_{11} y se intenta satisfacer la demanda de la Estación 1 con la oferta del Depósito 1. Posteriormente se repite el proceso con la celda contigua a la derecha, en caso que aún no se haya agotado la oferta en el Depósito 1, en caso contrario se selecciona la celda contigua inferior. El proceso se repite hasta satisfacer todas las demandas y agotar la disponibilidad de recursos.

	Estación 1	Estación 2	Estación 3	Estación 4	Estación 5	
Depósito 1	300 20	450 30	150 15	25	0	900
Depósito 2	40	35	350 25	350 30	50 0	750
	300	450	500	350	50	

Se obtuvo una solución básica factible con un costo de $40,000.

Este es el procedimiento más sencillo para obtener una solución básica factible, pero generalmente se obtiene una solución lejana a la óptima.

El procedimiento de la celda de mínimo costo

Este procedimiento consiste en satisfacer la demanda de la celda con el costo unitario menor. Una vez satisfecha, se busca la celda con el segundo menor costo unitario con demanda insatisfecha, y se repite el proceso. En caso de empate, es indistinto cual de las celdas empatadas seleccionar.

En la siguiente tabla se ilustra el procedimiento.

	Estación 1	Estación 2	Estación 3	Estación 4	Estación 5	
Depósito 1	(3) 300 20	30	(2) 500 15	(4) 50 25	(1) 50 0	900
Depósito 2	40	(6) 450 35	25	(5) 300 30	0	750
	300	450	500	350	50	

El costo de esta solución factible es de $39,500, menor a la obtenida con el procedimiento de la esquina noroeste.

El procedimiento de aproximación de Vogel

Este procedimiento es de mayor complejidad, pero con el se obtiene desde un inicio una solución factible más cercana a la óptima. El primer paso de este método es encontrar las diferencias aritméticas entre los menores costos de cada fila y de cada columna. A estas diferencias se les llama penalizaciones. Se selecciona la columna o fila con la mayor penalización y en ella se satisface la celda con menor costo. En caso de empate la selección de la celda es arbitraria. El proceso se repite eliminando la columna o fila que haya quedado satisfecha.

	Estación 1	Estación 2	Estación 3	Estación 4	Estación 5	
Depósito 1	20	30	15	25	0	15 900
Depósito 2	40	35	25	30	50 0	25 750
	300 20	450 5	500 10	350 5	50 0	

Mayor penalización

Menor costo de la fila

	Estación 1	Estación 2	Estación 3	Estación 4	Estación 5	
Depósito 1	Menor costo de la columna 300 20	30	15	25	0	5 900
Depósito 2	40	35	25	30	50 0	5 750
	300 20	450 5	500 10	350 5	50	

Mayor penalización

La columna de la Estación 5 ha sido satisfecha y no se toma en cuenta para el cálculo de las diferencias en el siguiente paso.

	Estación 1	Estación 2	Estación 3	Estación 4	Estación 5	
Depósito 1	300 20	30	500 15	25	0	10 900
Depósito 2	40	35	25	30	50 0	5 750
	300	450 5	500 10	350 5	50	

Y se repite el procedimiento.

	Estación 1	Estación 2	Estación 3	Estación 4	Estación 5	
Depósito 1	300 20	30	500 15	100 25	0	5 900
Depósito 2	40	35	25	30	50 0	5 750
	300	450 5	500	350 5	50	

Ya sólo queda una fila por satisfacer. Se deberá cumplir primero con el requerimiento de la celda de menor costo.

	Estación 1	Estación 2	Estación 3	Estación 4	Estación 5	
Depósito 1	300 20	30	500 15	100 25	0	900
Depósito 2	40	35	25	250 30	50 0	5 750
	300	450	500	350	50	

Quedando la solución factible inicial como:

	Estación 1	Estación 2	Estación 3	Estación 4	Estación 5	
Depósito 1	300 20	30	500 15	100 25	0	900
Depósito 2	40	450 35	25	250 30	50 0	750
	300	450	500	350	50	

Con un costo de $39,250, menor al obtenido por los procedimientos anteriores.

El método del escalón

Una vez obtenida una solución básica inicial, se calcula el costo relativo de trasladar una unidad a una celda no básica. Para ello se crean ciclos, estos consisten sucesiones de líneas horizontales y verticales, que comienzan y concluyen en la celda no básica elegida y tienen como vértices celdas básicas. Este método es conocido como método del escalón o *stepping stone*.

Para este ejemplo se usara la solución básica inicial obtenida con el procedimiento de la celda del mínimo costo.

Se inicia con la celda correspondiente a x_{12}.

	Estación 1		Estación 2		Estación 3		Estación 4		Estación 5		
Depósito 1	300	20		30	500	15	50	25	50	0	900
Depósito 2	*	40	450	35		25	300	30		0	750
	300		450		500		350		50		

Al aumentar en una unidad x_{21}, se tendrá que disminuir x_{11} y x_{24}, e incrementar $x_{21.}$ El costo de esta operación es:

$$40 - 30 + 25 - 20 = 15$$

Es decir, que en esta situación, trasladar material de la Estación 1 al Depósito 2 incrementaría el costo total del transporte en $15 por cada tonelada.

Siguiendo el mismo procedimiento se calcula el costo relativo, para cada celda no básica y se plasma en la tabla.

	Estación 1		Estación 2		Estación 3		Estación 4		Estación 5		
Depósito 1	300	20		0 30	500	15	50	25	50	0	900
Depósito 2		15 40	450	35		5 25	300	30		-5 0	750
	300		450		500		350		50		

Se puede observar que al menos una celda tiene valor negativo, esto indica que la solución factible no es óptima.

Se pueden disminuir los costos asignando a la celda con costo relativo más negativo el mayor envío posible, sin violar las restricciones de disponibilidad y demanda.

	Estación 1	Estación 2	Estación 3	Estación 4	Estación 5	
Depósito 1	300 20	0 30	500 15	100 25	0 0	900
Depósito 2	15 40	450 35	5 25	250 30	-5 50 0	750
	300	450	500	350	50	

Obteniendo que para esta solución el costo total es de $39,250.

Ahora, se calculan nuevamente los costos relativos para las variables no básicas.

	Estación 1	Estación 2	Estación 3	Estación 4	Estación 5	
Depósito 1	300 20	0 30	500 15	100 25	5 0	900
Depósito 2	15 40	450 35	5 25	250 30	50 0	750
	300	450	500	350	50	

Todos los costos relativos son no negativos, por lo tanto la solución es óptima.

Pero se observa que el costo relativo de la variable x_{12} es cero, pudiendo incrementar incluso en 100 ton el envío de material del Depósito 1 a la Estación 2, sin incrementar el costo total de transporte. Esto indica que existe un plan de envíos óptimo alternativo. La solución óptima alternativa se muestra en la siguiente tabla.

	Estación 1		Estación 2		Estación 3		Estación 4		Estación 5		
Depósito 1								0		5	
	300	20	100	30	500	15		25		0	900
Depósito 2		15				5					
		40	350	35		25	350	30	50	0	750
	300		450		500		350		50		

Con un costo total de $39,250.

Con esto se han determinado dos programas de envío que minimizan los costos de transporte de la mezcla de arena y sal, desde los depósitos a las estaciones desde donde se dará mantenimiento a los caminos.

Análisis de sensibilidad

Para determinar los rangos de optimalidad de los coeficientes de costo de la función objetivo, basta con integrar un parámetro δ a la tabla óptima, recalcular los costos relativos y determinar los valores para los que una variable específica saldrá de la base.

Por ejemplo, si se desea obtener el rango de optimalidad para los envíos del Depósito 2 a la Estación 2, se obtienen los siguientes costos relativos:

	Estación 1		Estación 2		Estación 3		Estación 4		Estación 5		
Depósito 1								$0+\delta$		$5+\delta$	
	300	20	100	30	500	15		25		0	900
Depósito 2		$15-\delta$				$5-\delta$					
		40	350	$35+\delta$		25	350	30	50	0	750
	300		450		500		350		50		

Los costos relativos, se volverían negativos bajo las siguientes condiciones:

$$0 + \delta < 0 \rightarrow \delta < 0$$

$$5 + \delta < 0 \rightarrow \delta < -5$$

$$15 - \delta < 0 \rightarrow \delta > 15$$

$$5 - \delta < 0 \rightarrow \delta > 5$$

Así para que x_{22}, siga permaneciendo en la base y la solución óptima no cambie, el valor de δ puede fluctuar entre 0 y 5, es decir, que el rango de optimalidad de x_{22} es:

$$35 < x_{22} < 40$$

2.2.3 El problema de asignación

El problema de asignación es un caso especial del problema de transporte. Se utiliza para asignar un grupo de tareas a un grupo de individuos, de tal manera que:

- Cada individuo realiza sólo una tarea
- Cada tarea es realizada por un solo individuo

El número de tareas n, por consiguiente, debe ser igual al número de individuos, y el objetivo del programa es minimizar los costos o los tiempos de ejecución.

Así las restricciones son

De demanda $\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 \; ; i = 1, \ldots, n$

De disponibilidad $\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \; ; j = 1, \ldots, n$

De no negatividad $x_{ij} \geq 0; i = 1, \ldots, n; j = 1, \ldots, n$

Y la función objetivo $z = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$

La solución básica inicial tendrá insuficientes celdas básicas para la creación de los ciclos de evaluación de los costos relativos. Esta situación se presenta cuando el número de celdas básicas es menor a m + n - 1 , siendo m y n el número de orígenes y destinos respectivamente. Una solución de ese tipo es llamada solución degenerada.

En estos casos se asigna arbitrariamente un valor ε muy pequeño a los envíos a celdas no básicas suficientes para tener n + m –1 celdas básicas, y por consiguiente, se incrementan la disponibilidades y la demandas correspondientes en ese valor ε. Con este artificio es posible aplicar el método del escalón normalmente.

Al ser un caso especial del problema de transporte, se puede utilizar cualquiera de los procedimientos expuestos para encontrar una solución inicial, y el método del escalón para encontrar la solución óptima. Más adelante se verá un problema de aplicación.

2.2.4 Ejercicios resueltos

A continuación se resuelven dos problemas, en el primero se reforzarán los conocimientos adquiridos mediante una aplicación a un problema de movimiento de agregados pétreos, y en el segundo se aborda el problema de asignación.

Ejercicio 8

Un contratista debe acarrear grava a tres construcciones desde dos bancos de materiales, uno al norte y otro al sur de la ciudad. Las construcciones requieren 10, 5 y 10 m^3 del agregado, respectivamente. En el banco norte hay disponibles 18 m^3, mientras que en el sur hay 14. Los costos por m^3 acarreada desde los orígenes a los posibles destinos son (en cientos de pesos):

Obra	Banco N	Banco S
1	3	6
2	6	3
3	5	4

a) Plantee un programa lineal que minimice los costos de transporte y obtenga su solución por medio de una tabla de transporte.

b) Encuentre los rangos de optimalidad para los envíos realizados a la obra 3.

Solución

Primero se revisa si la oferta y la demanda están equilibradas:

$$18 + 14 = 32 \quad > \quad 10 + 5 + 10 = 25$$

La oferta excede en 7 m^3 a la demanda; se tendrá que usar un destino ficticio que absorba esta cantidad.

$z = 3\,x_{11} + 6\,x_{12} + 5\,x_{13} + 0\,x_{14} + 6\,x_{21} + 3\,x_{22} + 4\,x_{23} + 0\,x_{24}$

Las ecuaciones de oferta quedarían entonces así:

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 18$$

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 14$$

Y estas son las de demanda:

$$x_{11} + x_{21} = 10$$

$$x_{12} + x_{22} = 5$$

$$x_{13} + x_{23} = 10$$

$$x_{14} + x_{24} = 7 \quad \text{Demanda ficticia}$$

Se introducen los coeficientes de la función objetivo y los valores del lado derecho de las restricciones en la siguiente tabla.

Para encontrar una solución factible inicial se usará el método de la esquina noroeste.

	Obra 1	Obra 2	Obra 3	Obra 4	
Banco N	3	6	5	0	
Banco S	6	3	4	0	

Se aplica el método del escalón para encontrar la solución óptima. Evaluando primero los costos relativos de las celdas no básicas.

	Obra 1		Obra 2		Obra 3		Obra 4		
Banco N	10	3	5	6	3	5		0	18
Banco S		6		3	7	4	7	0	14
	10		5		10		7		

Por ejemplo para la variable no básica x_{21} se crea un ciclo para trasladar a esta celda una unidad desde las celdas básica.

Tendremos que su costo relativo es 6 - 4 + 5 - 3 = 4.

	Obra 1		Obra 2		Obra 3		Obra 4		
Banco N	10	3	5	6	3	5		0	18
Banco S	*	6		3	7	4	7	0	14
	10		5		10		7		

Para el resto de las celdas no básicas se tiene:

x_{14} 0 - 5 + 4 - 0 = -1

x_{22} 3 - 4 + 5 - 6 = -2

Se capturan los costos relativos en la tabla y se nota que dos de los costos relativos son negativos, siendo el mayor el de la celda x_{22} , podemos afirmar que esta solución no es óptima.

	Obra 1		Obra 2		Obra 3		Obra 4		
Banco N	10	3	5	6	3	5		-1 0	18
Banco S		4 6		-2 3	7	4	7	0	14
	10		5		10		7		

Se encontrará una solución factible de menor costo si se asigna el mayor envío posible a esta celda no básica, sin violar las restricciones de disponibilidad y demanda, y afectando solamente a las variables del ciclo.

	Obra 1		Obra 2		Obra 3		Obra 4		
Banco N	10	3	0	6	8	5		0	18
Banco S		6	5	3	2	4	7	0	14
	10		5		10		7		

Se ha obtenido una nueva solución factible y se recalculan los costos relativos.

	Obra 1		Obra 2		Obra 3		Obra 4		
Banco N	10	3		2 6	8	5		-1 0	18
Banco S		4 6	5	3	2	4	7	0	14
	10		5		10		7		

El costo de la variable x_{14} es el único negativo, así que entra a la base y se le asigna el máximo envío de acuerdo al ciclo.

	Obra 1	Obra 2	Obra 3	Obra 4	
Banco N	10 3	6	1 5	7 0	18
Banco S	6	5 3	9 4	0 0	14
	10	5	10	7	

Calculamos los costos relativos de las variables no básicas para esta solución.

	Obra 1	Obra 2	Obra 3	Obra 4	
Banco N	10 3	2 6	1 5	7 0	18
Banco S	4 6	5 3	9 4	1 0	14
	10	5	10	7	

Todos los costos relativos son positivos. Se ha encontrado el programa de envíos óptimo, con un costo de $86,000.

Para encontrar los rangos de optimalidad de los envíos realizados a la obra 2, primero se agregará el parámetro δ a la tabla dentro del costo de transporte desde el banco N a esta obra y se recalcularan los costos relativos.

	Obra 1	Obra 2	Obra 3	Obra 4	
Banco N	10 3	$2+\delta$ $6+\delta$	1 5	7 0	18
Banco S	4 6	5 3	9 4	1 0	14
	10	5	10	7	

Se observa que la variable x_{12} entraría a la base para $\delta < -2$, es decir si el costo de transportar grava del banco norte a la obra 2 se redujera, al menos, a $4,000, se tendría una nueva solución óptima.

De la misma forma para los envíos del banco sur a la obra 2, se tiene los siguiente:

	Obra 1	Obra 2	Obra 3	Obra 4	
Banco N	10 3	$2-\delta$ 6	1 5	7 0	18
Banco S	4 6	5 $3+\delta$	9 4	1 0	14
	10	5	10	7	

En este caso la solución obtenida anteriormente será valida mientras $\delta < 2$, es decir, mientras el costo de transportar grava del banco sur al edificio 2 no exceda los $5,000.

Ejercicio 9

Se deben asignar cuatro operadores a cuatro máquinas en una obra carretera, pero la eficiencia de cada uno de ellos es diferente con cada equipo. En escala del uno al diez estas son las evaluaciones de la pericia de los operadores según el equipo.

		Maquinaria			
		1 Cargador frontal	2 Motoconformadora	1 Compactadora	1 Pata de cabra
Operador	Alberto	7	7	0	4
	Bruno	8	5	3	5
	César	10	4	6	0
	Daniel	8	2	7	8

a) Determine la asignación óptima de operarios.

b) Mediante un análisis de rangos de optimalidad, indique en que maquinaria conviene al proyecto capacitar a Alberto.

Solución

En este problema se desea maximizar la eficiencia en la operación, pero el algoritmo de transporte exige que la función objetivo se minimice. Entonces se debe buscar minimizar la ineficiencia y la tabla de calificaciones queda de esta manera.

		Maquinaria			
		1	2	3	4
Operador	A	3	3	M	6
	B	2	5	7	5
	C	0	6	4	M
	D	2	8	3	2

Resulta evidente que a Alberto no se le debe asignar la compactadora, ni César deberá operar el rodillo pata de cabra. Con ese fin hemos sustituido el valor de ineficiencia 10 por un valor muy grande que designamos como M.

Como cada operario sólo puede manejar una máquina y cada máquina sólo requiere un operario nos enfrentamos a un problema de asignación donde la función a minimizar es:

$$z= 3 x_{11} + 3 x_{12} + M x_{13} + 6 x_{14} + 2 x_{21} + 5 x_{22} + 7 x_{23} + 5 x_{24} + 0 x_{31} + 6 x_{32} + 4 x_{33} + M x_{34} + 2 x_{31} + 8 x_{32} + 3 x_{33} + 2 x_{34}$$

Esto se plasma en una tabla de transporte y con el procedimiento de la celda del mínimo costo se obtiene una solución factible.

	1	2	3	4	
A	3	3 1 3	M	6	1
B	2	5	4 1 7	5	1
C	1 1 0	6	4	M	1
D	2	8	3	2 1 2	1
	1	1	1	1	

El siguiente paso consiste en evaluar los costos relativos de las celdas no básicas. Pero como el número de celdas básicas es menor a n + m - 1 = 4 + 4 - 1 = 7 estamos ante una solución degenerada, y con insuficientes celdas básicas para calcular los ciclos. Así que se hará uso de una asignación ficticia muy pequeña en las celdas no básicas para calcular los costos relativos y aplicar el método del escalón.

Para la celda x_{11} tendremos el siguiente ciclo:

	1	2	3	4	
A	6 3	1 3	M	6	1
B	2	5	1 7	5	1
C	1 0	ε 6	4	M	1+ε
D	2	8	3	1 2	1
	1	1+ε	1	1	

Así se han calculado los costos reducidos de las variables no básicas.

	1	2	3	4	
A	6 3	1 3	M M	9 6	1
B	-1 2	M 5	1 7	-1 5	1
C	1 0	6 6	-1 4	M M	1
D	M 2	9 8	-1 3	1 2	1
	1	1	1	1	

Se puede apreciar que 4 de los costos reducidos son negativos y la solución no es óptima. Se selecciona arbitrariamente la variable x_{43}, y aplicando el método del escalón se introduce a la base.

	1	2	3	4	
A	6 3	 1 3	M M	9 6	1
B	-1 2	M 5	 1 7	-1 5	1
C	 1 0	6 6	-1 4	M M	1
D	M 2	9 8	-1 3	 1 2	1
	1	1	1	1	

Se obtiene una nueva asignación y se calculan los costos reducidos.

	1	2	3	4	
A	6 3	 1 3	M M	3 6	1
B	M 2	3 5	1 7	 1 5	1
C	 1 0	6 6	3 4	M M	1
D	3 2	M 8	 1 3	1 2	1
	1	1	1	1	

Todos los costos reducidos son positivos, entonces está asignación es óptima. Para obtener la máxima eficiencia del equipo de trabajo, Alberto deberá operar la motoconformadora, Bruno el rodillo, César el cargador frontal y Daniel la compactadora.

Para determinar en que debe ser capacitado Alberto para mejorar el desempeño del proyecto se calculan los costos reducidos en la asignación óptima, si disminuyera su ineficiencia en un valor δ.

	1	2	3	4	
A	$6-\delta$ $3-\delta$	 1 3	M M	3 6	1
B	M 2	3 5	1 7	 1 5	1
C	 1 0	$6-\delta$ 6	3 4	M M	1
D	3 2	M 8	 1 3	1 2	1
	1	1	1	1	

Para un valor de $\delta =$ 6 las variables x_{11} y x_{32} podrían entrar en la base, pero la ineficiencia violaría el supuesto de no negatividad.

	1	2	3	4	
A	$6+\delta$ 3	 1 $3-\delta$	M M	$3+\delta$ 6	1
B	M 2	$3+\delta$ 5	1 7	 1 5	1
C	 1 0	$6+\delta$ 6	3 4	M M	1
D	3 2	M 8	 1 3	1 2	1
	1	1	1	1	

Si la ineficiencia en el equipo 2 se redujera no tendría efecto en la asignación óptima. Sin embargo reduciría la ineficiencia total del proyecto.

	1	2	3	4	
A	6 3	 1 3	$12-\delta$ $10-\delta$	3 6	1
B	M 2	3 5	1 7	 1 5	1
C	 1 0	6 6	3 4	M M	1
D	3 2	$12-\delta$ 8	 1 3	1 2	1
	1	1	1	1	

Para evaluar la capacitación en la máquina tres hemos sustituido el valor de M por el 10 original, ya que no tenemos la restricción de no asignar la compactadora a Alberto. Sin embargo tendría que mejorar su eficiencia en 12 puntos para que esta variable entre a la base, cuestión imposible.

	1	2	3	4	
A	6 3	 1 3	M M	$3-\delta$ $6-\delta$	1
B	M 2	$3-\delta$ 5	1 7	 1 5	1
C	 1 0	6 6	3 4	M M	1
D	3 2	M 8	 1 3	1 2	1
	1	1	1	1	

En este último caso se obtendría un óptimo alternativo si la calificación de Alberto frente al rodillo pata de cabra pasara del 4 al 7. Sin embargo la eficiencia del conjunto sólo mejoraría si obtuviera una calificación de 8 o superior.

Se puede afirmar que capacitar a Alberto para mejorar su desempeño con la motoconformadora es la mejor alternativa para el proyecto.

2.2.5 Ejercicios propuestos

Ejercicio 10

En la construcción de una carretera se ha planeado aprovechar los materiales extraídos en los cortes para construir los terraplenes en zonas que requieran nivelación. Los volúmenes de los cortes y de los terraplenes y su ubicación se muestran en el siguiente gráfico. Además se ha ubicado un banco de materiales en el kilómetro 14 con un volumen suficiente para satisfacer la demanda.

corte m^3		450				700		650
km	0	4	8	12	16	20	24	26
terraplen m^3			300	1150	350		150	

Si los costos de transporte son proporcionales a las distancias de acarreo, obtenga el movimiento de tierras con el costo mínimo. Además explique como afectaría a la solución óptima que el banco de material se encontrará varios kilómetros alejado de la carretera.

Solución

Se capturan los costos de transporte en la tabla y se encuentra una solución inicial por el método de Vogel. Posteriormente se calculan los costos reducidos.

	T1	T2	T3	T4	
C1	300 4	150 8	8 0 12	24 0 20	450
C2	8 0 12	350 8	350 4	8 0 4	700
C3	8 0 18	500 14	0 0 10	150 2	650
BM	8 0 6	150 2	4 0 2	20 0 10	150
	300	1150	350	150	

No hay costos reducidos negativos por lo que la solución es óptima, con un costo total de transporte de 14,200 km×m^3.

Sin embargo la celda (3;3) tiene costo reducido igual a cero, lo que es señal de la existencia de un óptimo alternativo.

	T1	T2	T3	T4	
C1	300 4	150 8	8 0 12	24 0 20	450
C2	8 0 12	700 8	0 0 4	8 0 4	700
C3	8 0 18	150 14	350 10	150 2	650
BM	8 0 6	150 2	4 0 2	20 0 10	150
	300	1150	350	150	

Realizando un Análisis de Sensibilidad, se obtienen los costos reducidos para la nueva ubicación del banco de material.

	T1	T2	T3	T4	
C1	300	4	150	8	8 0	12	24 0	20	450
C2	8 0	12	700	8	0 0	4	8 0	4	700
C3	8 0	18	150	14	350	10	150	2	650
BM	8 0	$6+\delta$	150	$2+\delta$	4 0	$2+\delta$	20 0	$10+\delta$	150
	300	1150	350	150	

Los costos reducidos no se alteran, por lo que la solución óptima sigue siendo válida. El costo total se incrementará en 150 unidades por cada kilómetro que el banco de materiales se encuentre alejado de la carretera.

Ejercicio 11

Una empresa constructora cuenta con cinco palas mecánicas almacenadas en localidades distintas. Actualmente requiere ubicarlas en tres obras, requiere dos en la obra A, tres en la obra B y una en la obra C. Los costos de transporte en miles de pesos para cada pala se muestran en la tabla.

Determine el destino de cada pala mecánica que permita minimizar los costos de transporte. Se requieren un total de seis palas pero la disponibilidad es menor; se sugiere utilizar una sexta pala ficticia para resolver el problema.

Pala \ Obra	A	B	C
1	2	3	4
2	7	6	4
3	3	5	8
4	4	6	5
5	4	6	3

Solución

Con el método de la celda de menor costo se encontró una solución factible a la que se le calcularon los costos reducidos.

	A			B			C			
1		1	2	-1	0	3	3	0	4	1
2	2	0	7		1	6	1	0	4	1
3		1	3	0	0	5	6	0	8	1
4	-1	0	4		1	6	2	0	5	1
5	3	0	4	1	0	6		1	3	1
ficticia	1	0	M		1	M	3	0	M	1
		2			3			1		

Se introducen las nuevas variables a la base y se recalculan los costos reducidos.

	A	B	C	
1	1 0 2	 1 3	3 0 4	1
2	3 0 7	 1 6	1 0 4	1
3	 1 3	1 0 5	6 0 8	1
4	 1 4	1 0 6	2 0 5	1
5	2 0 4	1 0 6	 1 3	1
ficticia	2 0 M	 1 M	3 0 M	1
	2	3	1	

Como los costos reducidos son positivos se ha encontrado una solución óptima con un costo de 19 + M unidades.

Ejercicio 12

Para mejorar las condiciones de un centro comunitario seis empresas han presentado propuestas de remozamiento para distintas áreas. Todos los proyectos deben realizarse simultáneamente y las empresas sólo tienen capacidad para realizar un único proyecto. Además algunos proyectos han sido descartados y de los restantes se presentan los presupuestos en miles de pesos en la siguiente tabla.

Encuentre a que empresa se le debe adjudicar cada proyecto teniendo un gasto mínimo. Si se toma en consideración que sólo se cuenta con $2,000,000 para todas las obras, diga que proyectos deberían aplazarse. Justifique su respuesta.

Empresa	Edificio principal	Biblioteca	Área de juegos	Estaciona-miento	Parques
A	800	750	300	450	200
B	950	725	——-	500	275
C	——-	——-	200	——-	225
D	650	700	250	400	225
E	750	800	175	300	300
F	850	900	200	475	——-

Solución

Se obtuvo una solución factible con el método de la celda de mínimo costo.

	Edificio principal	Biblioteca	Área de juegos	Estaciona-miento	Parques	ficiticia	
A	- 0 800	100 0 750	225 0 300	75 0 450	1 200	25 0 M	1
B	275 0 950	1 725		75 0 500	100 0 275	- 0 M	1
C			25 0 200		25 0 225	1 M	1
D	-125 0 650	75 0 700	-25 0 250	1 400	75 0 225	- 0 M	1
E	-75 0 750	- 0 800	1 175	-25 0 300	225 0 300	25 0 M	1
F	1 850	275 0 900	-75 0 200	-125 0 475		- 0 M	1
	1	1	1	1	1	1	

Aplicando el método del escalón y tras dos iteraciones se obtiene la tabla óptima.

	Edificio principal	Biblioteca	Área de juegos	Estaciona-miento	Parques	ficiticia	
A	175 0 [800]	100 0 [750]	- 0 [300]	250 0 [450]	1 [200]	25 0 [M]	1
B	275 0 [950]	1 [725]		275 0 [500]	100 0 [275]	- 0 [M]	1
C			0 0 [200]		25 0 [225]	1 [M]	1
D	0 1 [650]	275 0 [700]	250 0 [250]	200 0 [400]	175 0 [225]	- 0 [M]	1
E	200 0 [750]	- 0 [800]	150 0 [175]	1 [300]	250 0 [300]	- 0 [M]	1
F	250 0 [850]	200 0 [900]	1 [200]	150 0 [475]		0 0 [M]	1
	1	1	1	1	1	1	

Los proyectos se deberán asignar de la siguiente manera para obtener el costo mínimo de $2,075,000. La empresa A se encargará de los parques, la B de la biblioteca, la D del edificio principal, la E del estacionamiento y la F del área de juegos, mientras la C queda fuera. Pero la tabla muestra un óptimo alternativo donde la empresa C se encarga del área de juegos y la F queda fuera.

Si se ha de aplazar algún proyecto, será aquel cuyo costo tenga la mayor disminución cuando se reasigne.

	Edificio principal	Biblioteca	Área de juegos	Estaciona-miento	Parques
Óptimo	650	725	200	300	200
Menor costo	650	700	175	300	200
Diferencia	0	25	25	0	0

El ahorro por aplazar las labores en la biblioteca o el área de juegos es el mismo, y con la suspensión de cualquiera de las dos actividades se estaría dentro del presupuesto estipulado.

Ejercicio 13

En una edificación se han retrasado cuatro tareas. Con el fin de acelerar los trabajos un ingeniero, un carpintero y un plomero están dispuestos a trabajar en labores que no dominan y para la tarea restante se contratará un especialista. La matriz de ineficiencia para los tres empleados es la siguiente:

	Soldar	Trazar	Ranuras	Alambrado
Plomero	1	5	1	2
Carpintero	4	3	2	1
Ingeniero	3	1	5	4

Determine como se deben asignar los trabajos al personal y en qué labor se debe contratar un especialista. Determine si conviene capacitar a alguno de los empleados para reducir la ineficiencia del conjunto.

Solución

La primera solución factible se obtuvo por el Método de la Esquina Noreste y se evaluaron los costos reducidos.

	Soldar		Trazar		Ranuras		Alambrado		
P				5		-2		1	
	1	1	0	5	0	1	0	2	1
C		5				-6		-2	
	0	4	1	3	0	2	0	1	1
I		-2		-6				-1	
	0	3	0	1	1	5	0	4	1
E		1		-2		-1			
	0	0	0	0	0	0	1	0	1
	1		1		1		1		

Introduciendo las nuevas variables a la base, tras dos iteraciones se obtiene dos asignaciones alternativas óptimas.

	Soldar		Trazar		Ranuras		Alambrado		
P				6		0		4	
	1	1	0	5	0	1	0	2	1
C		4		5		1			
	0	4	0	3	0	2	1	1	1
I		6				4		5	
	0	3	1	1	0	5	0	4	1
E		0		4				1	
	0	0	0	0	1	0	0	0	1
	1		1		1		1		

El plomero debe encargarse de soldar o ranurar, el carpintero está a cargo del alambrado y el ingeniero del trazo, y en la actividad restante se contratará un especialista.

La eficiencia de los tres empleados en las actividades que se les han asignado es de 1. El que alguno de ellos fuera capacitado para especializarse en esas actividades tan solo reduciría la ineficiencia del conjunto en un punto.