Método Simplex

Una empresa desarrolladora iniciará un proyecto urbano en un terreno de 4 hectáreas. En él se construirán dos tipos distintos de casas: las viviendas tipo I que ocupan una superficie de 270 m2 y tendrán un costo de $800,000, y las viviendas tipo II que ocupan 200 m^2 y con un costo de $500,000. Los estudios de mercado indican que la demanda máxima de viviendas de tipo I es de 100 unidades, mientras que para las de tipo II corresponde a 120 unidades, y además la demanda máxima combinada es de 170 unidades. Se desea determinar la combinación óptima de viviendas para lograr un ingreso máximo.

Ver forma estándar

El primer paso consiste en determinar las variables de decisión. Este paso es de vital importancia pues una elección inadecuada de las variables hará imposible la resolución del problema. Por lo general, estas variables representan los bienes que consumirá o producirá la empresa. En nuestro problema, los ingresos que tenga la empresa dependerán del tipo de casas que construya. Por esto las variables de decisión son:

x_1: número de viviendas tipo I por construir

x_2: número de viviendas tipo II por construir

Planteamiento del modelo

Una función objetivo a maximizar
max $z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$
sujeta a las restricciones
$g_j(x_1, x_2, \ldots, x_n) = a_{j1} + a_{j2} + \ldots + a_{jn} \leq b_j$, $j = 1, 2, \ldots, m$

Que también puede expresarse en forma matricial:

$$\begin{array}{ll} \max & z = \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ \text{s a} & \mathbf{A}\,\mathbf{x} \leq \mathbf{b} \end{array}$$

Donde **x** es el vector de variables de decisión, **c** el vector de coeficientes del objetivo, **A** es la matriz de coeficientes tecnológicos y **b** el vector de constantes.

Cada vivienda tipo I ocupa 270 m2, las de tipo II ocupan 200 m2 y en conjunto no deben exceder las 4 ha.

$$270\ x_1 + 200\ x_2 \leq 40{,}000$$

Leer cuestionamiento

Ver forma canónica

Demanda de viviendas tipo I.

$$x_1 \leq 100$$

Demanda de viviendas tipo II.

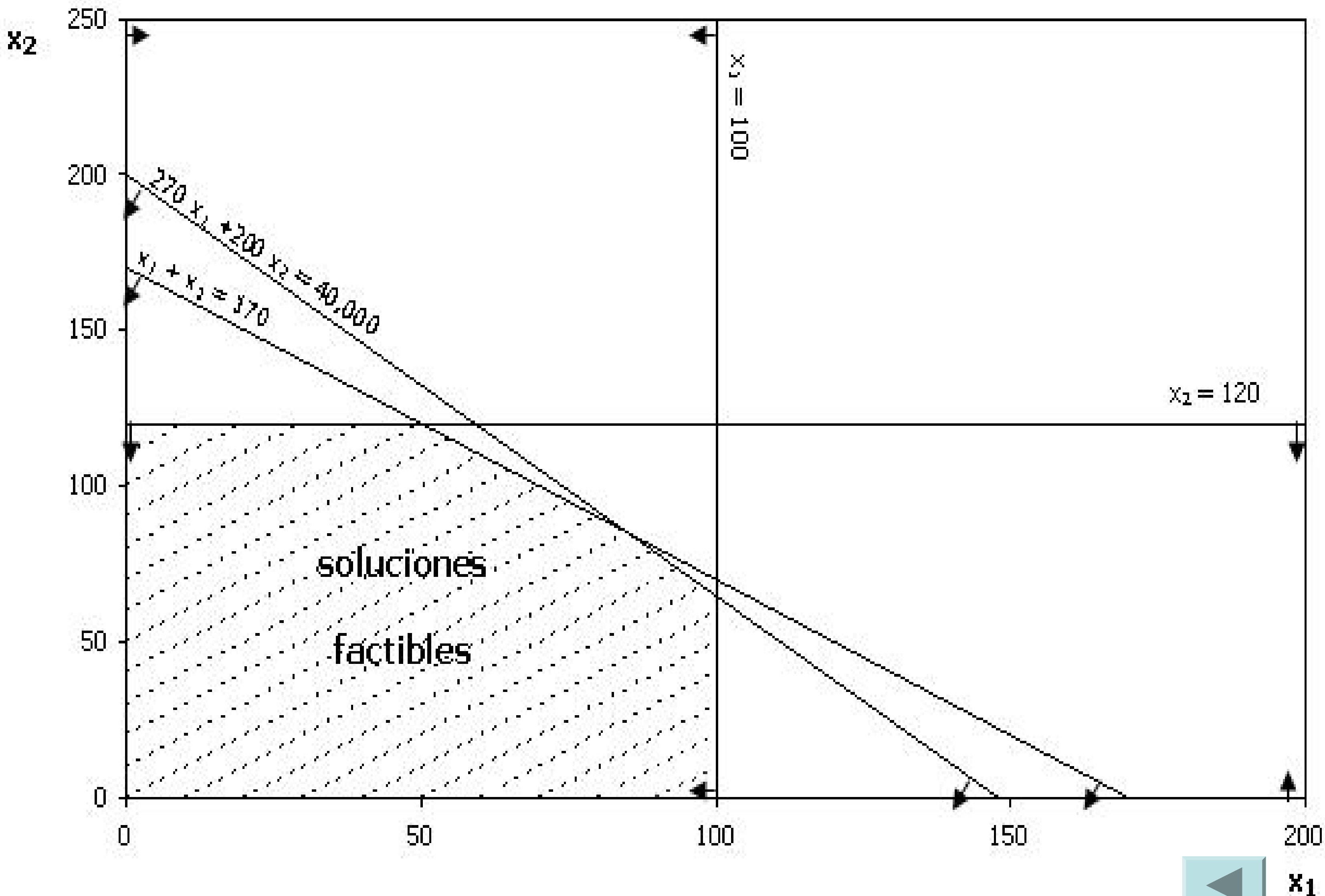
$$x_2 \leq 120$$

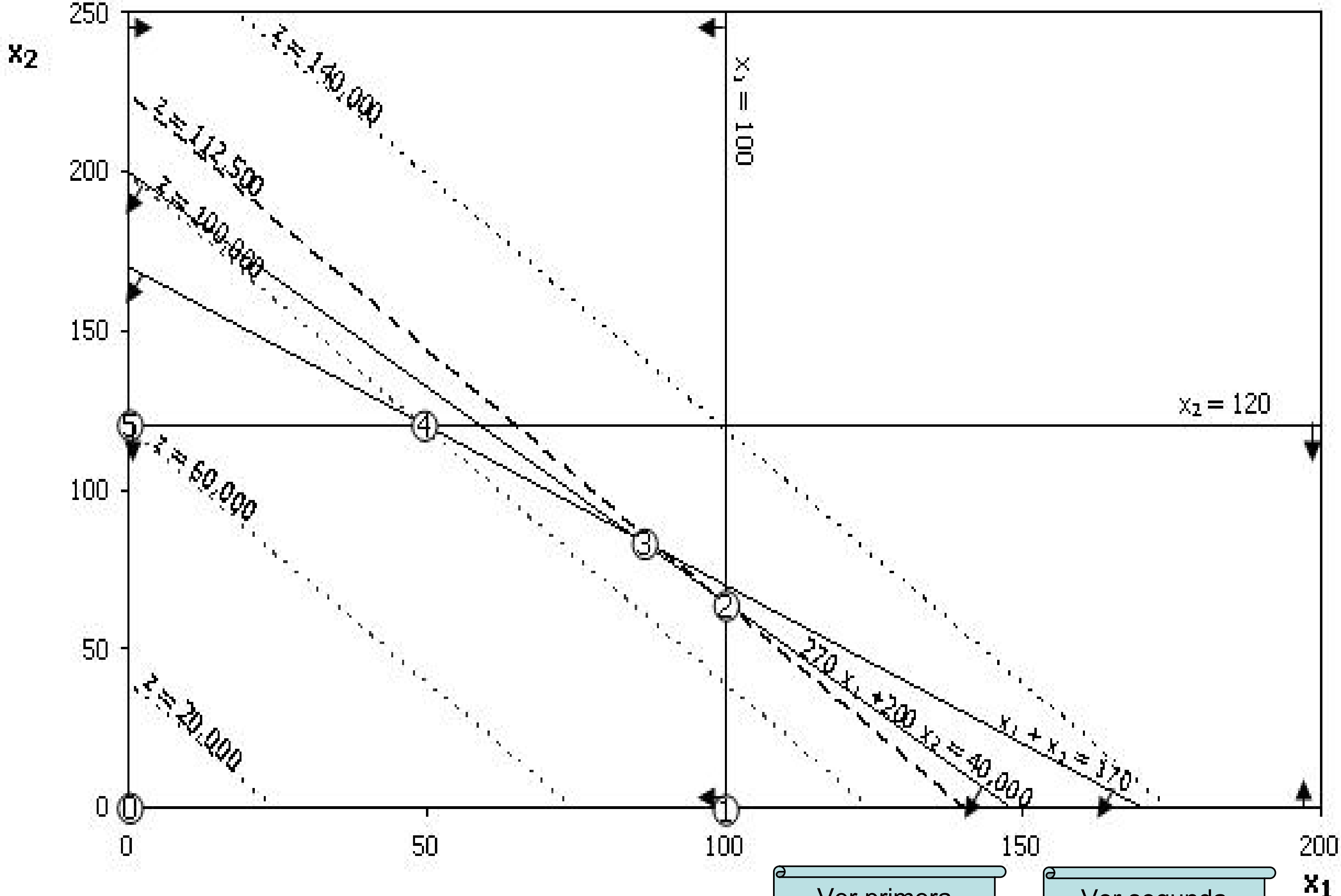
Demanda combinada.

$$x_1 + x_2 \leq 170$$

Finalmente planteamos la función objetivo, en este caso es maximizar el ingreso, en miles de pesos.

$$\max \quad z = 800\ x_1 + 500\ x_2$$


x2
250
200
150
100
50
0
0
50
100
150
200
x1
x1 = 100
270 x1 + 200 x2 = 40,000
x1 + x2 = 170
x2 = 120
soluciones
factibles

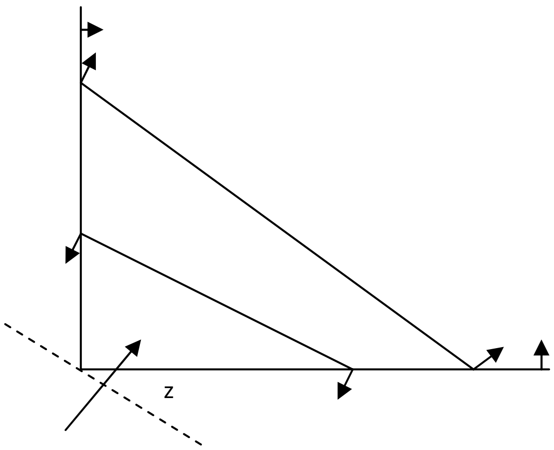


Ver primera iteración

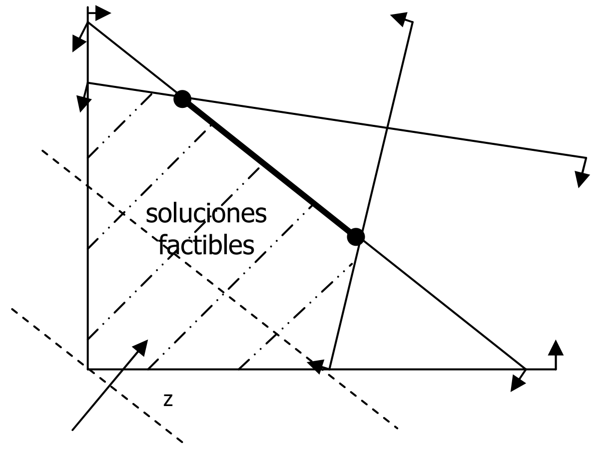
Ver segunda iteración

Vértice	**x_1**	**x_2**	**z (millones de pesos)**
0	0	0	0
1	100	0	80
2	**100**	**65**	**112.5**
3	85.7	84.3	110.7
4	50	120	100
5	0	120	60

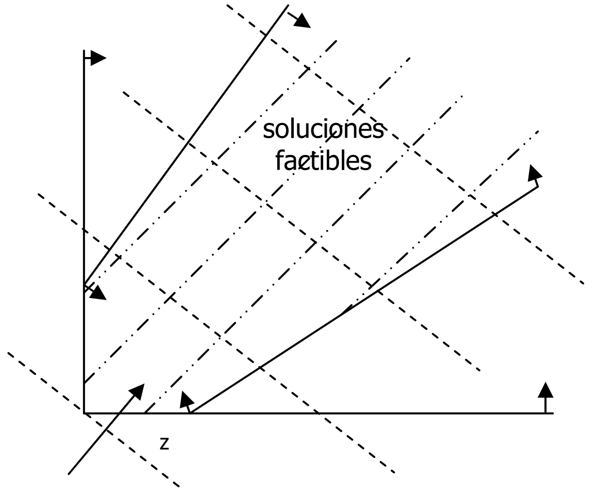
La función objetivo alcanza su valor máximo en un vértice del conjunto de soluciones factibles. A las soluciones de estos puntos se les conoce como soluciones básicas. Y a la solución que maximiza z se le llama solución óptima.



Infactible



Óptimos alternativos



Problema no acotado

Forma estándar	Forma canónica
$\max z = \mathbf{c}^T \mathbf{x}$	$\max \; z = \mathbf{c}^T \mathbf{x}$
s a $\quad \mathbf{A}\,\mathbf{x} \leq \mathbf{b}$	s a $\quad \mathbf{A}\,\mathbf{x} + \mathbf{I}\,\mathbf{s} = \mathbf{b}$
$\mathbf{x}_j \geq \mathbf{0}\,,\ \mathbf{b} \geq \mathbf{0}$	$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}\,,\ \mathbf{s} \geq \mathbf{0}\,,\ \mathbf{b} \geq \mathbf{0}$

Ver forma estándar

Ver forma canónica

max

$z = 800\ x_1 + 500\ x_2$

s a

$$
\begin{array}{lllllll}
270\ x_1 & + 200\ x_2 & + s_1 & & & & = 40{,}000 \\
x_1 & & & + s_2 & & & = 100 \\
 & x_2 & & & + s_3 & & = 120 \\
x_1 & + x_2 & & & & + s_4 & = 170
\end{array}
$$

$$x_1, x_2, s_1, s_2, s_3, s_4 \geq 0$$

x_1: número de viviendas tipo I

x_2: número de viviendas tipo II

s_1, s_2, s_3, s_4 : variables de holgura

Ver forma estándar

s_1, s_2, s_3, s_4 : variables de holgura

Las variables de holgura van asociadas a las restricciones, así s_1 representa la superficie del terreno que no será ocupada por las viviendas, s_2 es la demanda no cubierta de viviendas tipo I, s_3 corresponde a la demanda tipo II no satisfecha y s_4 representa lo correspondiente a la demanda combinada. Las variables de holgura no se asocian con ningún coeficiente en la función objetivo, puesto que no son factores en la determinación del ingreso del proyecto.

	c_b \ c_j	x_1 800	x_2 500	s_1 0	s_2 0	s_3 0	s_4 0	
s_1	0	270	200	1	0	0	0	40,000
s_2	0	1	0	0	1	0	0	100
s_3	0	0	1	0	0	1	0	120
s_4	0	1	1	0	0	0	1	170
	z_j	0	0	0	0	0	0	0
	$z_j - c_j$	-800	-500	0	0	0	0	

variables básicas	variables no básicas
$s_1 = 40{,}000$	$x_1 = 0$
$s_2 = 100$	$x_2 = 0$
$s_3 = 120$	
$s_4 = 170$	

Variable entrante

Permitirá obtener el mayor valor en la variable entrante

Menor cociente

	c_j / c_b	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4		cociente
		800	500		0	0	0		
s_1	0	270	200	1	0	0	0	40,000	148
s_2	0	1	0	0	1	0	0	100	100
	0	0	1	0	0	1	0	120	∞
		1	1	0	0	0	1	170	170
	z_j	0	0	0	0	0	0	0	
	$z_j - c_j$	-800	-500	0	0	0	0		

Celda pivote

Variable saliente

Costo reducido más negativo

Incrementa en mayor medida el valor de z

Variable entrante

Permitirá obtener el mayor valor en la variable entrante

Menor cociente

	c_b \ c_j	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4		cociente
		800	500	0	0	0	0		
s_1	0	0	200	1	0	0	0	13,000	65
x_1		1	0			0	0	100	∞
s_3		0	1			1	0	120	120
s_4	0	0	1	0	-1	0	1	70	70
	z_j	800	0	0	800	0	0	80,000	
	$z_j - c_j$	0	-500	0	800	0	0		

Variable saliente

Celda pivote

Ver solución gráfica

Costo reducido más negativo

Incrementa en mayor medida el valor de z

		x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4		
	c_b \ c_j	800	500	0	0	0	0		cociente
x_2	500	0	1	0.005	-1.35	0	0	65	
x_1	800	1	0	0	1	0	0	100	
s_3	0	0	0	-0.005	1.35	1	0	55	
s_4	0	0	0	-0.005	-1	0	1	5	
	z_j	800	0	2.5	125	0	0	112,500	
	$z_j - c_j$	0	0	2.5	125	0	0		

No hay costos reducidos negativos

El valor de z es máximo

Ver solución gráfica

variables básicas	variables no básicas
$x_1 = 100$	$s_1 = 0$
$x_2 = 65$	$s_2 = 0$
$s_3 = 55$	
$s_4 = 5$	

Se concluye que para obtener un ingreso máximo, que corresponde a 112 millones y medio de pesos, se deberá proyectar el desarrollo urbano con 100 viviendas tipo I y 65 tipo II. Se aprovechará cada metro cuadrado del terreno (s_1) y se cubrirá completamente la demanda por las viviendas de mayor costo (s_2). La demanda de viviendas de menor costo (s_3) y la demanda combinada (s_4), no se cubrirán del todo.

Primal	**Dual**
max $z = \mathbf{c}^T \mathbf{x}$	min $z' = \mathbf{b}^T \mathbf{w}$
s a $\mathbf{A}\,\mathbf{x} \le \mathbf{b}$	s a $\mathbf{A}^T \mathbf{w} \ge \mathbf{c}$
$\mathbf{A}\,\mathbf{x} \ge \mathbf{0}$	$\mathbf{A}\quad \mathbf{x} \ge \mathbf{0}$

Primal

$$
\begin{aligned}
\text{max} \quad & z = 800\, x_1 + 500\, x_2 \\
\text{s a} \quad & 270\, x_1 + 200\, x_2 = 40{,}000 \\
& x_1 = 100 \\
& x_2 = 120 \\
& x_1 + x_2 = 170 \\
& x_1 ,\, x_2 = 0
\end{aligned}
$$

Dual

$$\min \quad z' = 40{,}000\, w_1 + 100\, w_2 + 120\, w_3 + 170\, w_4$$

$$\text{s a} \quad 270\, w_1 + w_2 + w_4 = 800$$

$$200\, w_1 + w_3 + w_4 = 500$$

$$w_1 ,\, w_2 ,\, w_3 ,\, w_4 = 0$$

$$\max \quad -z' = -40{,}000\, w_1 - 100\, w_2 - 120\, w_3 - 170\, w_4 - M\, y_1 - M\, y_2$$

$$\begin{aligned} \text{s a} \quad & 270\, w_1 + w_2 + w_4 - s_1 + y_1 = 800 \\ & 200\, w_1 + w_3 + w_4 - s_2 + y_2 = 500 \\ & w_1, w_2, w_3, w_4, s_1, s_2, y_1, y_2 = 0 \end{aligned}$$

	b_b \ b_j	w_1	w_2	w_3	w_4	s_5	s_6	y_1	y_2	
		-40,000	-100	-120	-170	0	0	-M	-M	
y_1	-M	270	1	0	1	-1	0	1	0	800
y_2	-M	200	0	1	1	0	-1	0	1	500
	z_j	-470M	-M	-M	-2M	M	M	-M	-M	-1300M
	$z_j - b_j$	-470M	-M	-M	-2M	M	M	0	0	

	b_b \ b_j	w_1	w_2	w_3	w_4	s_5	s_6	y_1	y_2		
		-40,000	-100	-120	-170	0	0	-M	-M		cociente
y_1	-M	270	1	0	1	-1	0	1	0	800	2.96
y_2	-M	200	0	1	1	0	-1	0	1	500	2.5
	z_j	-470M	-M	-M	-2M	M	M	-M	-M	-1300M	
	$z_j - b_j$	-470M +40,000	-M +100	-M +120	-2M +170	M	M	0	0		

		w_1	w_2	w_3	w_4	s_5	s_6	y_1	y_2	
	b_b \ b_j	-40,000	-100	-120	-170	0	0	-M	-M	
y_1	-M	0	1	-1.35	-0.35	-1	1.35	1	-1.35	125
w_1	-40,000	1	0	0.005	0.005	0	-0.005	0	0.005	2.5
	z_j									
	$z_j - b_j$									

		w_1	w_2	w_3	w_4	s_5	s_6	y_1	y_2	
	b_b \ b_j	-40,000	-100	-120	-170	0	0	-M	-M	
w_2	-100	0	1	-1.35	-0.35	-1	1.35	1	-1.35	125
w_1	-40,000	1	0	0.005	0.005	0	-0.005	0	0.005	2.5
	z_j	-40,000	-100	-65	-165	100	65	-100	-65	-112,500
	z_j - b_j	0	0	55	5	100	65	M -100	M -65	

No hay costos reducidos negativos

El valor de z es mínimo

		w_1	w_2	w_3	w_4	s_5	s_6	
	b_b \ b_j	-40,000	-100	-120	-170	0	0	
w_2	-100	0	1	-1.35	-0.35	-1	1.35	125
w_1	-40,000	1	0	0.005	0.005	0	-0.005	2.5
	z_j	-40,000	-100	-65	-165	100	65	-112,500
	z_j - b_j	0	0	55	5	100	65	

variables básicas	variables no básicas
$w_1 = 2.5$	$w_3 = 0$
$w_2 = 12.5$	$w_4 = 0$
	$s_5 = 0$
	$s_6 = 0$

Para una z' de $112,500,000.

Dual - Solución óptima

	b_b \ b_j	w_1	w_2	w_3	w_4	s_5	s_6	
		-40,000	-100	-120	-170	0	0	
w_2	-100	0	1	-1.35	-0.35	-1	1.35	125
w_1	-40,000	1	0	0.005	0.005	0	-0.005	2.5
	z_j	-40,000	-100	-65	-165	100	65	-112,500
	$z_j - b_j$	0	0	55	5	100	65	
		s_1	s_2	s_3	s_4	x_1	x_2	

Ver primal

Precios sombra

w_3 w_4

w_1 w_2

w_1

Primal – Solución óptima

	c_b \ c_j	x_1 800	x_2 500	s_1 0	s_2 0	s_3 0	s_4 0	
x_2	500	0	1	0.005	-1.35	0	0	65
x_1	800	1	0	0	1	0	0	100
s_3	0	0	0	-0.005	1.35	1	0	55
s_4	0	0	0	-0.005	-1	0	1	5
	z_j	800	0	2.5	125	0	0	112,500
	$z_j - c_j$	0	0	2.5	125	0	0	

Ver dual

La solución óptima del dual; aporta la solución óptima del primal.

La variable w_i es el costo reducido de la variable s_i. Ambas variables están relacionadas con la misma restricción. Los valores de las variables w_i en la solución óptima son conocidos como precios sombra e indican la tasa a la que aumenta z si se incrementa un poco el límite de la restricción bi correspondiente.

Ver dual

Así, si el valor de w_i es cero, existe superávit de este recurso y no tendría caso tratar de incrementar su disponibilidad, pues esto no conllevaría un aumento en z. En el caso de la empresa desarrolladora, son las variables w_3 y w_4 las que tienen valor cero, y corresponden a la demanda por viviendas tipo II y a la demanda combinada respectivamente. No convendrá invertir en campañas que incrementen estas dos demandas, pues no tendrían impacto en los ingresos del proyecto.

Ver dual

Cuando el valor de w_i es mayor a cero, estaremos hablando de un bien escaso. En caso de que la función objetivo sea maximizar utilidades, este valor puede indicarnos hasta cuanto estaría dispuesta a pagar la empresa por una unidad de este bien a un tercero. Pagar más no tendría sentido, pues por cada unidad extra que se dispusiera de este recurso se tendrían pérdidas, en vez de ganancias. En el problema que se ha resuelto, se observa que los bienes escasos corresponden a las variables w_1 y w_2, el área del terreno y la demanda por viviendas tipo I.

Ver dual

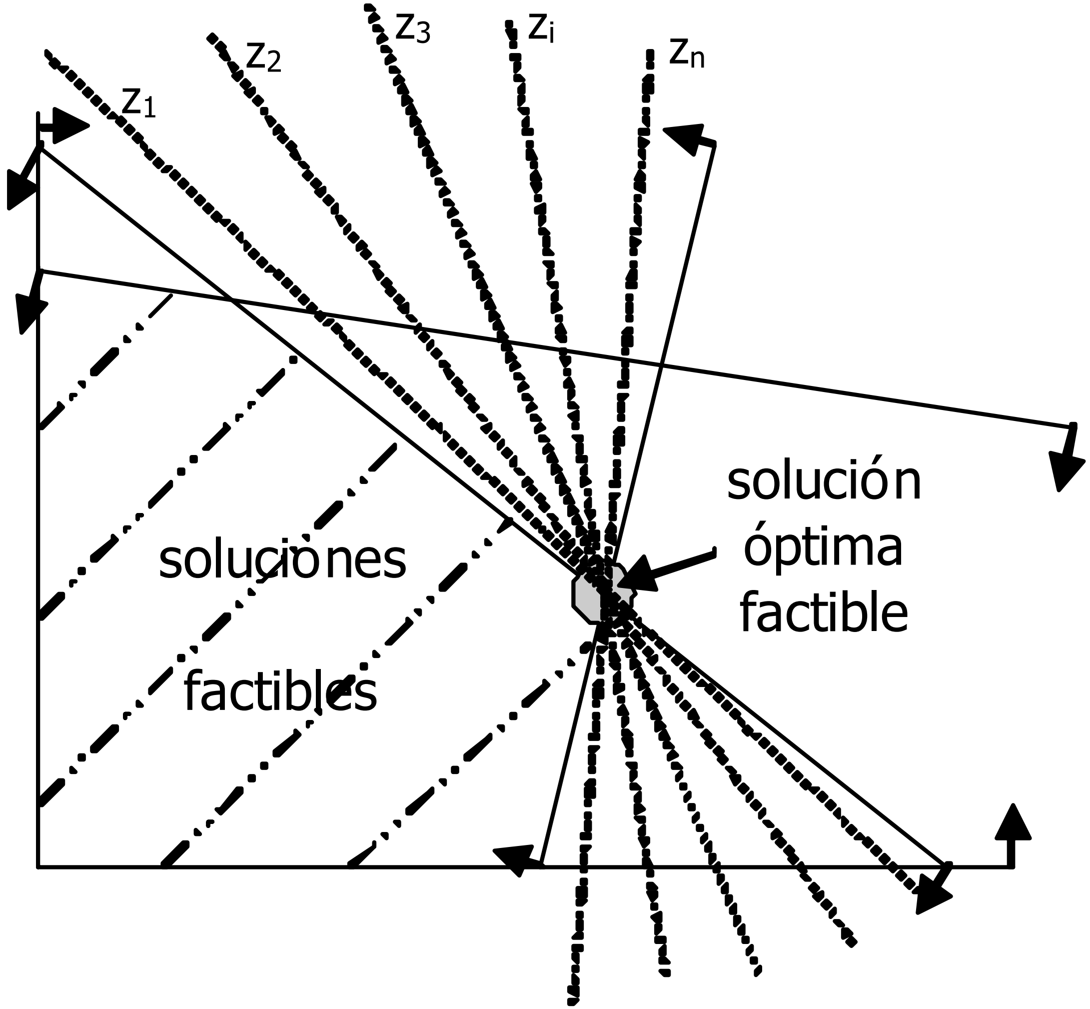
Por otro lado, los precios sombra no sólo indican los aumentos en la función objetivo, también señalan cuanto disminuiría z si las estimaciones de recursos disponibles fuesen exageradas. Se debe tener especial cuidado con aquellos recursos cuyos precios sombra son grandes, si la estimación de su disponibilidad es incierta, invertir en su precisión puede evitar el fracaso del proyecto. En nuestro problema tenemos asociado un precio sombra muy grande a la demanda de viviendas tipo I, esto sugiere que si se tienen dudas en el estudio de mercado, estás deberán ser disueltas, bien mediante un análisis exhaustivo o, ya sea el caso, mediante un estudio de mejor calidad.

Ver dual

Análisis de sensibilidad

Mediante el análisis de sensibilidad buscamos obtener los rangos de variación de los parámetros de nuestro modelo de Programación Lineal, de tal manera que se conserve la base, obtenida en la solución óptima factible. Podemos estudiar los siguientes casos: cambio de coeficientes en la función objetivo, cambios de coeficientes de disponibilidad de recursos, incorporación de una nueva variable e incorporación de una nueva restricción.

Se verá primero el caso del cambio del coeficiente en la función objetivo para una variable básica.



z1
z2
z3
zi
zn
solución
óptima
factible
soluciones
factibles

En cambio si se altera el valor límite de una restricción se estará modificando la región de soluciones factibles. Una manera de encontrar el rango de optimalidad de estos coeficientes, es agregando parámetros a la función objetivo del programa dual. Como vimos antes, mientras en el programa primal $z = \mathbf{c}^T \mathbf{x}$, en el programa dual $z' = \mathbf{b}^T \mathbf{w}$.

Por ejemplo para la superficie del terreno b1, que es un recurso escaso, obtenemos la siguiente tabla.

		w_1	w_2	w_3	w_4	s_5	s_6	
	b_b \ b_j	$-40{,}000-\delta$	-100	-120	-170	0	0	
w_2	-100	0	1	-1.35	-0.35	-1	1.35	125
w_1	$-40{,}000-\delta$	1	0	0.005	0.005	0	-0.005	2.5
	z_j	$-40{,}000$ $-\delta$	-100	-65 -0.005δ	-165 -0.005δ	100	65 $+0.005\delta$	$-112{,}500$ -2.5δ
	$z_j - b_j$	0	0	55 -0.005δ	5 -0.005δ	100	65 $+0.005\delta$	
		s_1	s_2	s_3	s_4	x_1	x_2	

	c_j / c_b	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	
		800	$500+\delta$	0	0	0	0	
x_2	$500+\delta$	0	1	0.005	-1.35	0	0	65
x_1	800	1	0	0	1	0	0	100
s_3	0	0	0	-0.005	1.35	1	0	55
s_4	0	0	0	-0.005	0.35	0	1	5
	z_j	800	$500 +\delta$	$2.5 +0.005\delta$	$125 -1.35\delta$	0	0	$112{,}500 +65\delta$
	$z_j - c_j$	0	0	$2.5 + 0.005\delta$	$125 -1.35\delta$	0	0	

El parámetro **δ** sólo afecta los costos reducidos de las variables no básicas. Cuando estos costos valen cero, se tiene un óptimo alternativo, es decir, se puede cambiar de base. Apoyándonos en este hecho, podemos determinar para que valores de **δ** permanece la actual base como base óptima.

Evaluando δ para los valores de los costos reducidos de la variables no básicas, con los cuales ellas entrarían a la base, obtenemos:

$$2.5 + 0.005\,\delta = 0 \quad \rightarrow \quad \delta = -500$$

$$125 - 1.35\,\delta = 0 \quad \rightarrow \quad \delta = 92.6$$

Por lo tanto el rango de optimalidad para el parámetro δ es:

$$-500 < \delta < 92.6$$

Esto quiere decir que mientras el costo de las vivendas tipo II se mantenga en el rango:

$$0 < c_2 < 592.6$$

Los valores de x_1, x_2, s_3 y s_4, serán los obtenidos mediante la tabla Simplex anterior, y la función objetivo será máxima aunque los valores fluctuen entre \$80,000,000 y \$118,520,000 depeniendo del valor de δ.

Algoritmo de transporte

Para mantener transitables los caminos tras una nevada, se requiere esparcir una mezcla de arena y sal (la sustancia más barata y de uso extendido para derretir nieve o hielo) sobre la superficie de rodamiento. Para tal fin las oficina de obras públicas de cierta ciudad tiene dos almacenes con capacidades de 900 ton y 750 ton respectivamente. Se han identificado cuatro estaciones a partir de las cuales las cuadrillas pueden realizar los recorridos necesarios para despejar las carreteras principales. En cada estación el requerimiento del producto es distinto, siendo de 300 ton, 450 ton, 500 ton y 350 ton, respectivamente.

Se ha estimado que el costo de transportar la mezcla a las distintas estaciones es el siguiente:

Costos en $/ton

	Estación 1	Estación 2	Estación 3	Estación 4
Depósito 1	20	30	15	25
Depósito 1	40	35	25	30

El jefe de obras públicas desea determinar el programa que le permitirá reducir al mínimo el costo de distribución del material.

Sea $\mathbf{x}_{ij}$: la cantidad de arena y sal que se envía desde
el origen i al destino j (ton)

Oferta total: 900 +1750 = 1650 ton

Demanda total: 300 + 450 + 500 + 350 = 1600 ton

Como la oferta es mayor que la demanda, se tiene que crear un destino ficticio que reciba el excedente de 50 ton, la Estación 5.

Objetivo minimizar

$$z = 20\,x_{11} + 30\,x_{12} + 15\,x_{13} + 25\,x_{14} + 40\,x_{21} + 35\,x_{22} + 25\,x_{23} + 30\,x_{24}$$

Las ecuaciones de oferta quedarían entonces así:

$$\begin{array}{lll}
x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} & = 900 & \text{Depósito 1} \\
x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} + x_{25} & = 750 & \text{Depósito 2}
\end{array}$$

Y estas son las de demanda:

$$\begin{array}{lll}
x_{11} + x_{21} & = 300 & \text{Estación 1} \\
x_{12} + x_{22} & = 450 & \text{Estación 2} \\
x_{13} + x_{23} & = 500 & \text{Estación 3} \\
x_{14} + x_{24} & = 350 & \text{Estación 4} \\
x_{15} + x_{25} & = 50 & \text{Estación 5 ficticia}
\end{array}$$

	Estación 1	Estación 2	Estación 3	Estación 4	Estación 5	
Depósito 1	20	30	15	25	0	
Depósito 2	40	35	25	30	0	

El procedimiento de la esquina noroeste

	Estación 1	Estación 2	Estación 3	Estación 4	Estación 5	
Depósito 1	300 20	450 30	150 15	25	0	900 / 600 / 300
Depósito 2	40	35	350 25	350 30	50 0	750 / 350 / 50
	300	450	500 / 150	350	50	

Se obtuvo una solución básica factible con un costo de $40,000.

El procedimiento de la celda de mínimo costo

	Estación 1	Estación	Estación 3	Estación	Estación	
Depósito 1	300 (20)	(30)	(15)	50 (2[illegible])	(0)	[illegible]
Depósito 2	(40)	450 (35)	(25)	300 (30)	(0)	750 / 300
	300	450	500	350 / 50	50	

menor costo

menor costo

menor costo

menor costo

menor costo

menor costo

El costo de esta solución factible es de $39,500, menor a la obtenida con el procedimiento de la esquina noroeste.

El procedimiento de aproximación de Vogel

	Estación 1		Estación 2		Estación 3		Estación 4		Estación 5		
Depósito 1	300	20		30	500	15	100	20		0	15 / 5 800 / 300
Depósito 2		40	450	35		25	250	30	50	0	5 / 25 750 / 300
	300	20	450	5	500	10	350 / 100	5	50	0	

mayor penalización

menor costo

menor costo

menor costo

mayor penalización

mayor penalización

menor costo

Solución factible inicial con un costo de $39,250, menor al obtenido por los procedimientos anteriores.

El método del escalón

Una vez obtenida una solución básica inicial, se calcula el costo relativo de trasladar una unidad a una celda no básica. Para este ejemplo se usará la solución básica inicial obtenida con el procedimiento de la celda del mínimo costo.

	Estación 1	Estación 2	Estación 3	Estación 4	Estación 5	
Depósito 1	300 (20)	(30)	300 (15)	50 (25)	50 (0)	900
Depósito 2	15 (40)	450 (35)	(25)	300 (30)	(0)	700
	300	[illegible]	500	350	50	

Es decir, que trasladar material de la Estación 1 al Depósito 2 incrementaría el costo total del transporte en $15 por cada tonelada transportada.

30 – 35 + 30 – 25 = 0

		n	Estación 3	Estación 4	Estación 5	
Depósito 1	300 (20)	0 (30)	500 (15)	50 (25)	50 (0)	900
Depósito 2	15 (40)	450 (35)	5 (25)	300 (30)	-5 (0)	700
	300	450	50	350	50	

:

0 – 0 + 25 – 35 = -5

Al menos una celda tiene valor negativo, esto indica que la solución factible no es óptima.

Se calculan nuevamente los costos relativos para las variables no básicas:

$0 – 25 + 30 – 0 = 5$

	Estación 1	Estación 2	E 3		ión 5	
Depósito 1	300 (20)	0 (30)	500 (15)	100 (25)	5; 0 (0)	900
Depósito 2	15 (40)	450 (35)	5 (25)	300 (30)	-5; 50 (0)	700
	300	450	500	350	50	

Se pueden disminuir los costos asignando a la celda con costo relativo más negativo el mayor envío posible, sin violar las restricciones de disponibilidad y demanda.

Todos los costos relativos son no negativos, por lo tanto la solución es óptima y tiene un costo total de $39,250.

Pero se observa que el costo relativo de la variable x_{12} es cero, pudiendo incrementar incluso en 100 ton el envío de material del Depósito 1 a la Estación 2, sin incrementar el costo total de transporte. Esto indica que existe un plan de envíos óptimo alternativo.

Análisis de sensibilidad

Plan óptimo alternativo

	Estación 1	Estación 2	Estación 3	Estación 4	Estación 5	
Depósito 1	300 (20)	100 (30)	500 (15)	0 / 0 + δ (25)	0; 5 / 5 + δ (0)	900
Depósito 2	15 / 15 - δ (40)	350 (35+δ)	5 / 5 - δ (25)	350 (30)	50 (0)	700
	300	450	500	350	50	

Para determinar los ran... de los coeficientes de costo de la función objetivo, b... abla óptima, recalcular los costos ... los que una vari...

Por ejemplo, si se desea obtener el rango de optimalidad para los envíos del Depósito 2 a la Estación 2, se agrega **δ** al costo y se recalculan los costos relativos.

Los costos relativos, se volverían negativos bajo las siguientes condiciones:

$0 + \delta < 0 \rightarrow \delta < 0$

$5 + \delta < 0 \rightarrow \delta < -5$

$15 - \delta < 0 \rightarrow \delta > 15$

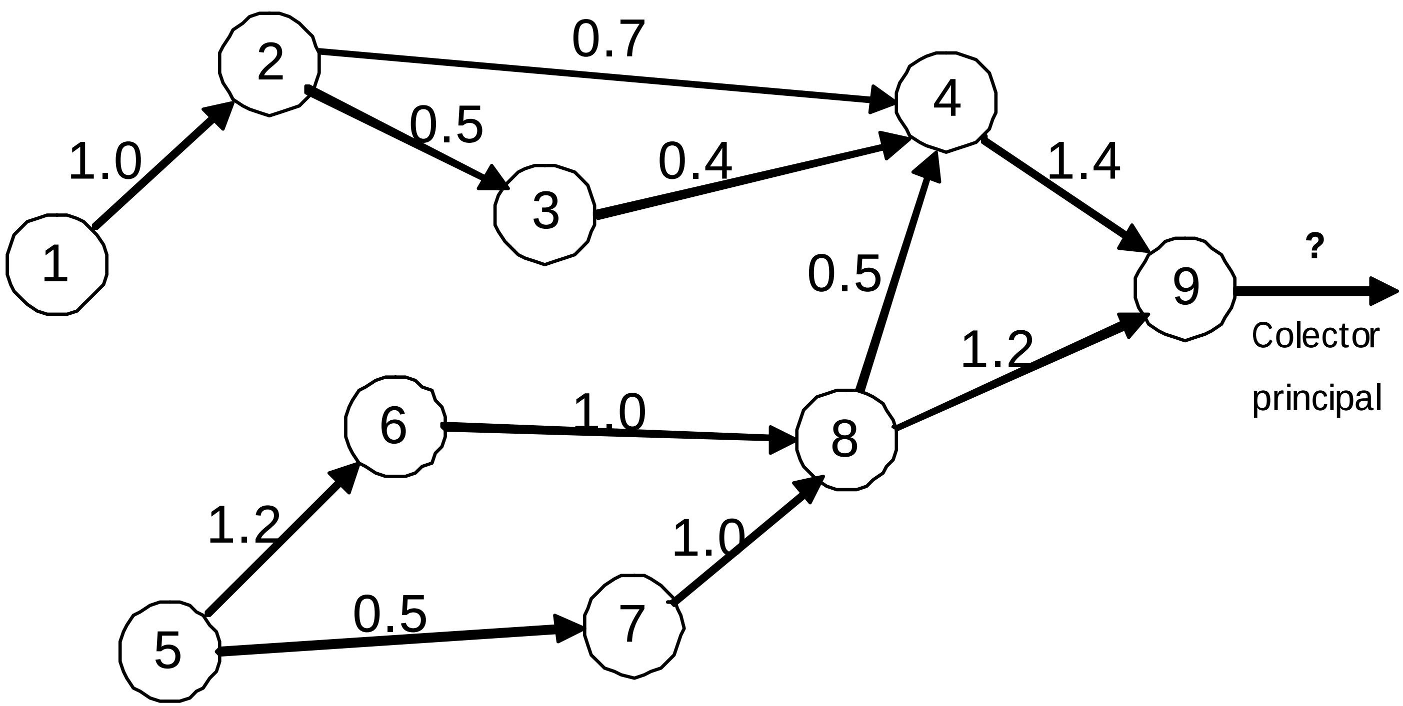
$5 - \delta < 0 \rightarrow \delta > 5$

Así para que x_{22}, siga permaneciendo en la base y la solución óptima no cambie, el valor de **δ** puede fluctuar entre 0 y 5, es decir el rango de optimalidad de x_{22} es:

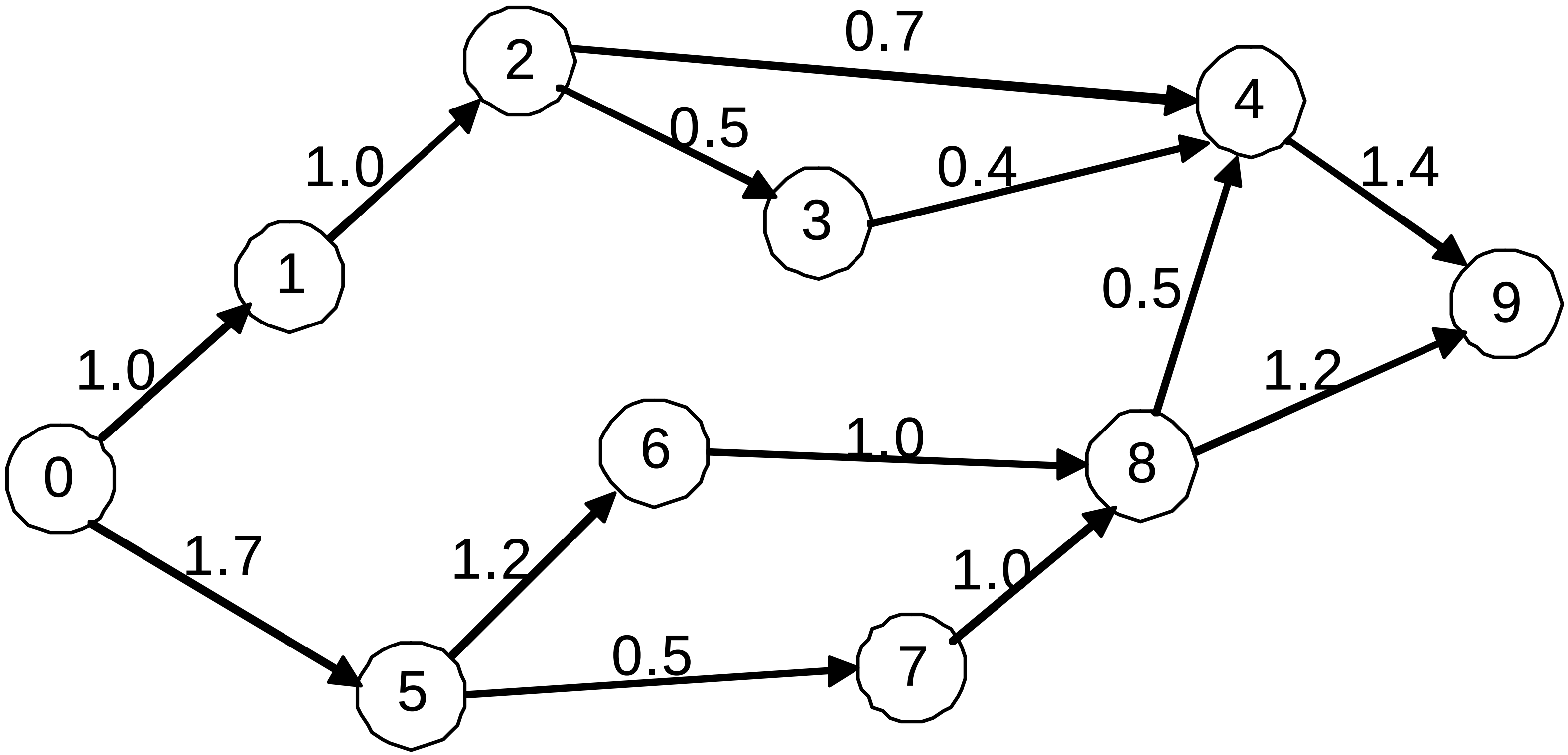
$35 < x_{22} < 40$

Flujo máximo

La red de drenaje de una pequeña ciudad ha ido creciendo conforme las colonias se han conurbado. En tiempo de lluvias la capacidad del drenaje se ve sobrepasada y la ciudad sufre inundaciones. Se ha propuesto la ampliación del colector principal para un desalojo eficiente de las precipitaciones.



En este caso los flujos se originan en los nodos 1 y 5 por lo que es necesario crear un nodo ficticio de origen. Lo mismo sucede cuando se tiene diversos destinos del flujo, se debe crear un nodo ficticio de destino donde confluyan los reales.



Evaluando δ para los valores de los costos reducidos de la variables no básicas, con los cuales ellas entrarían a la base, obtenemos:

$$55 - 0.005\,\delta = 0 \quad \rightarrow \quad \delta = 11{,}000$$

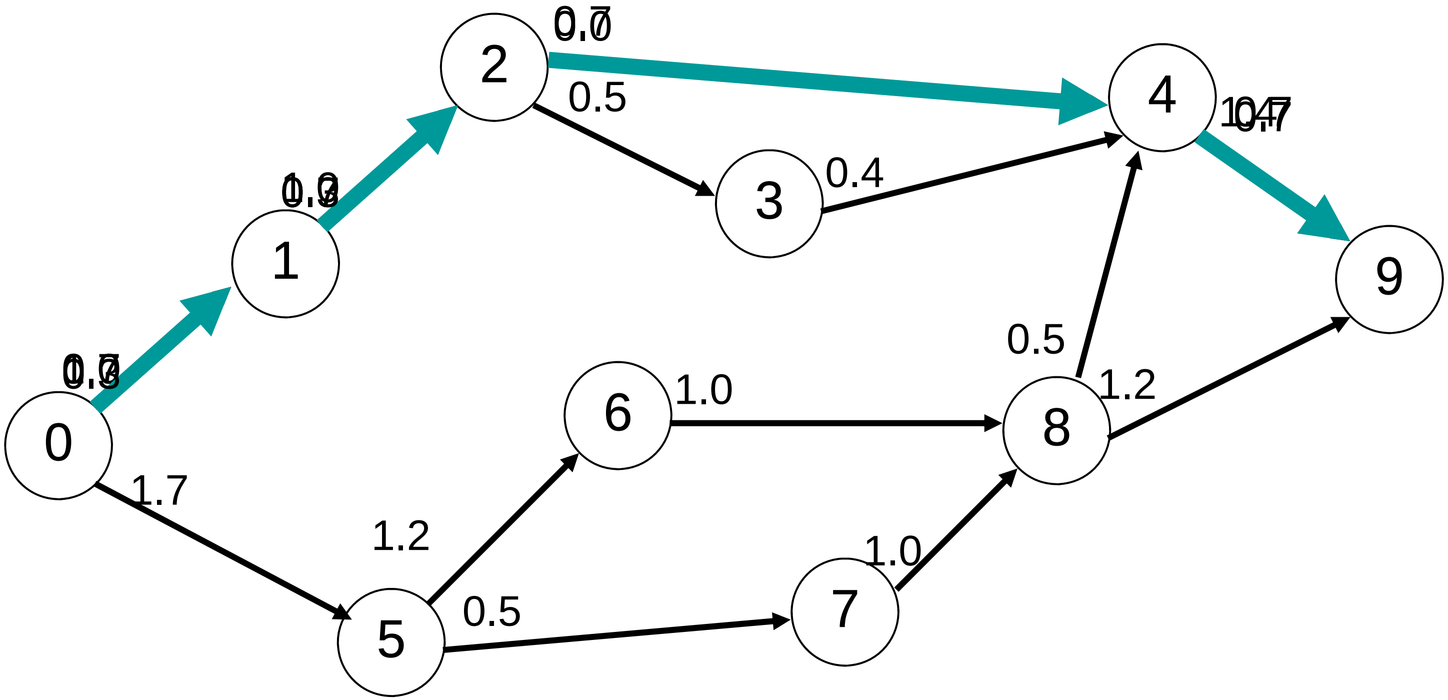
$$5 - 0.005\,\delta = 0 \quad \rightarrow \quad \delta = 1{,}000$$

$$65 + 0.005\,\delta = 0 \quad \rightarrow \quad \delta = -13{,}000$$

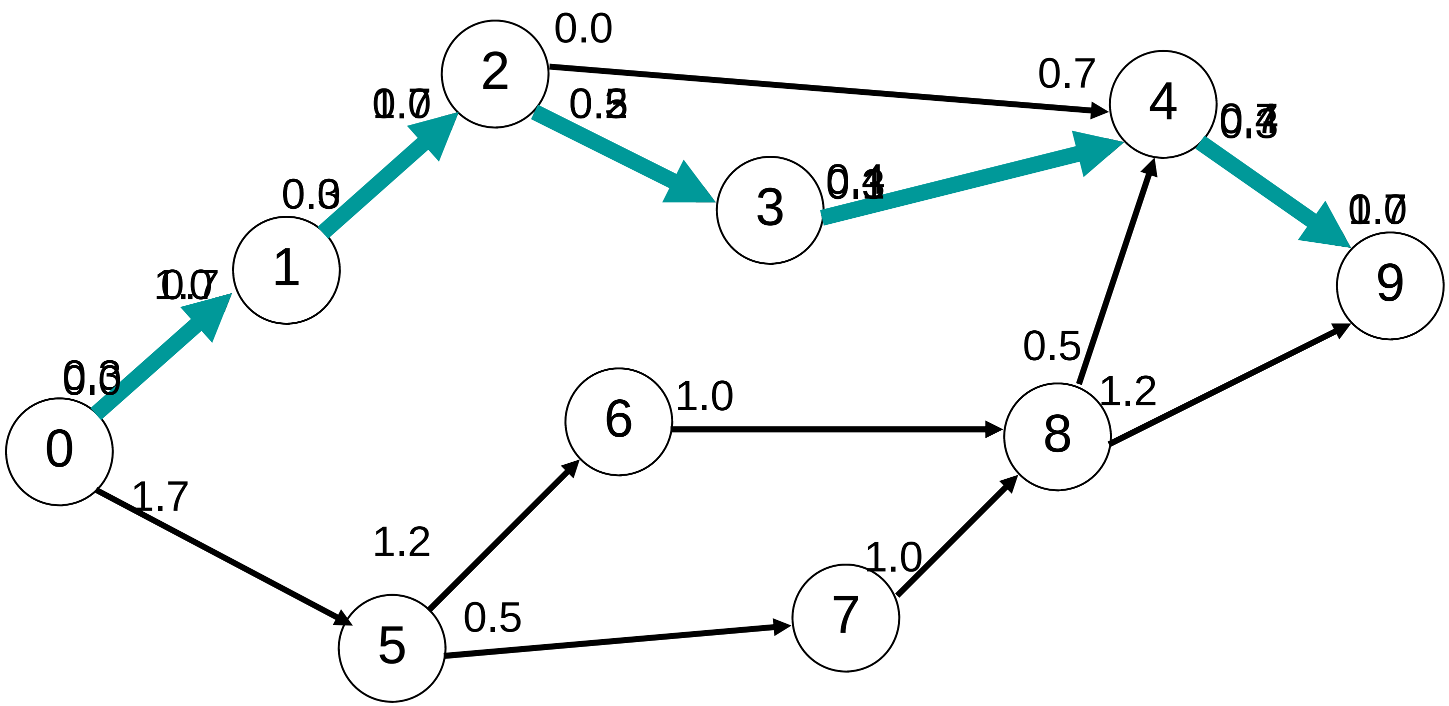
Por lo tanto el rango de optimalidad para el parámetro δ es:

$$-13{,}000 = \delta = 1{,}000$$

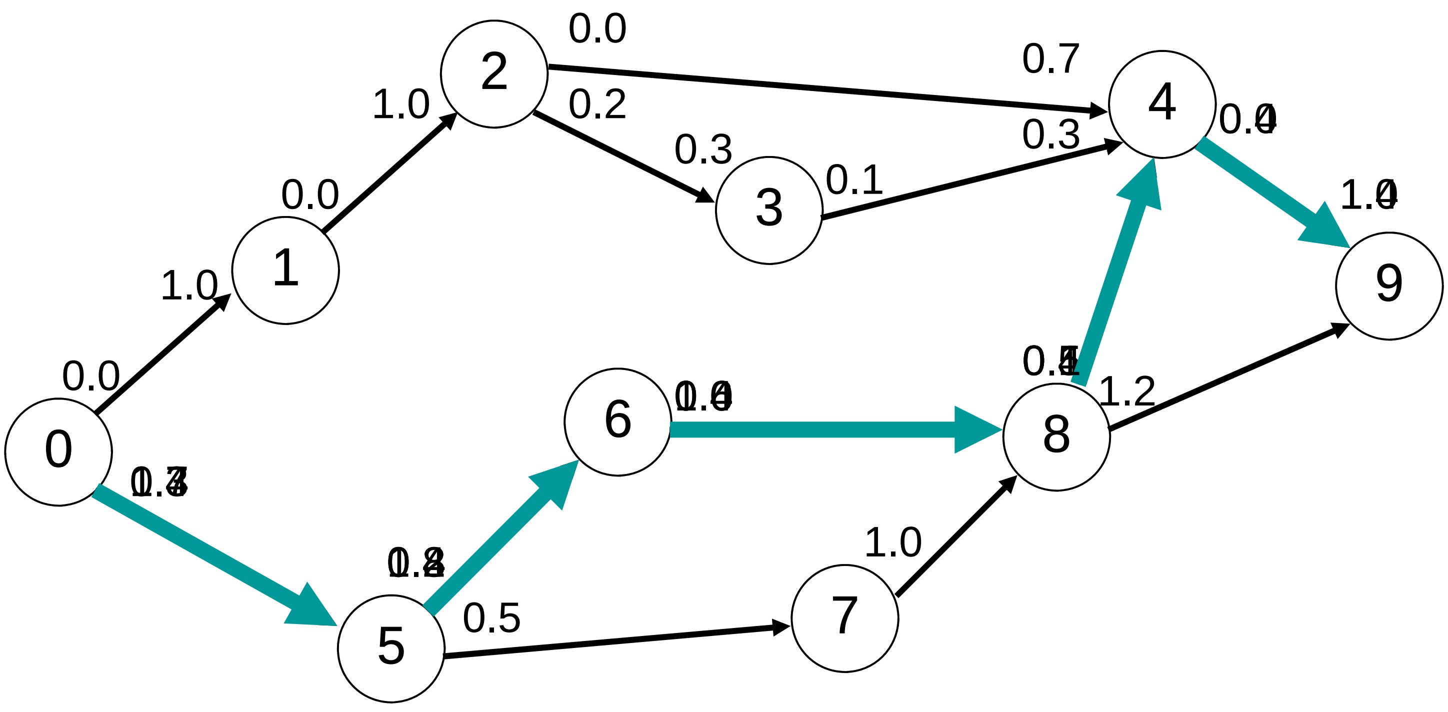
O bien puede expresarse que la solución óptima obtenida es válida para una superficie de terreno entre 27,000 m^2 y 41,000 m^2, para los valores de ingreso entre $80,000,000 y $115,000,000, respectivamente.



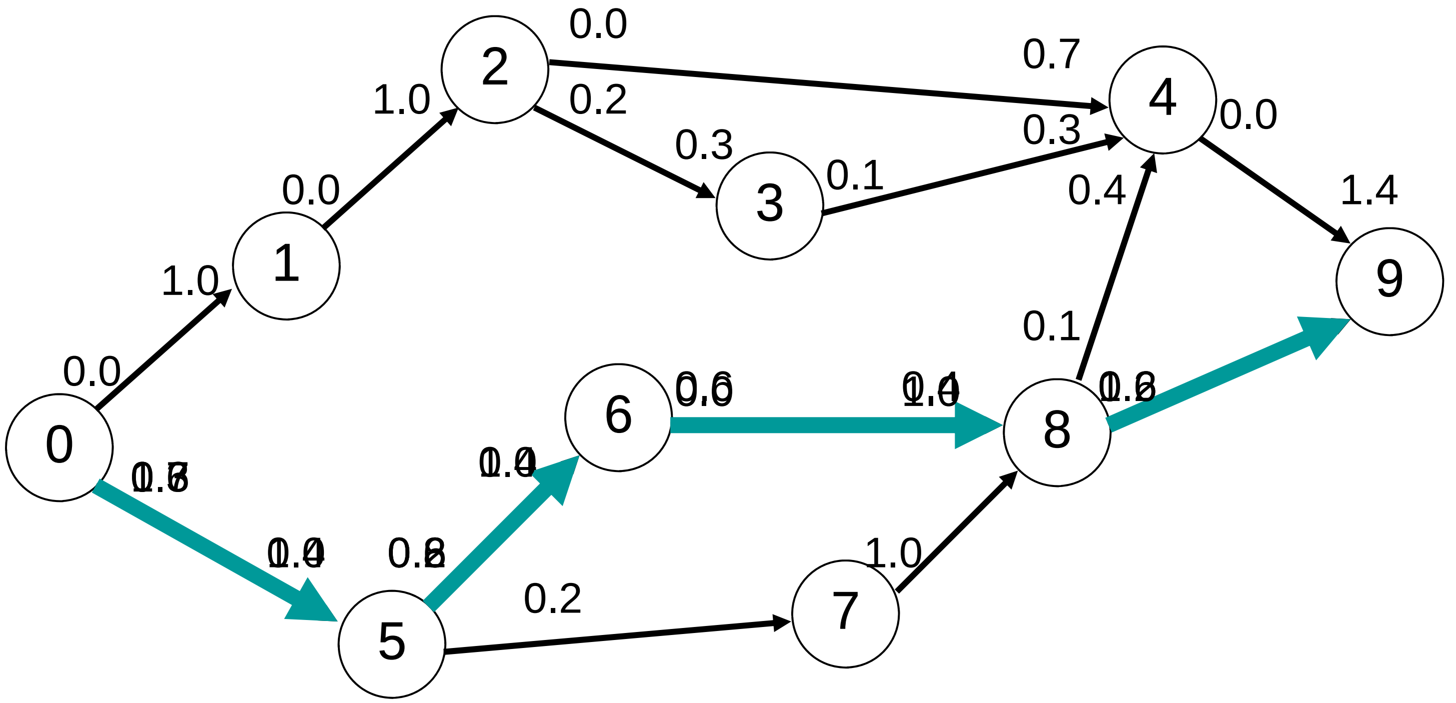
Primera trayectoria



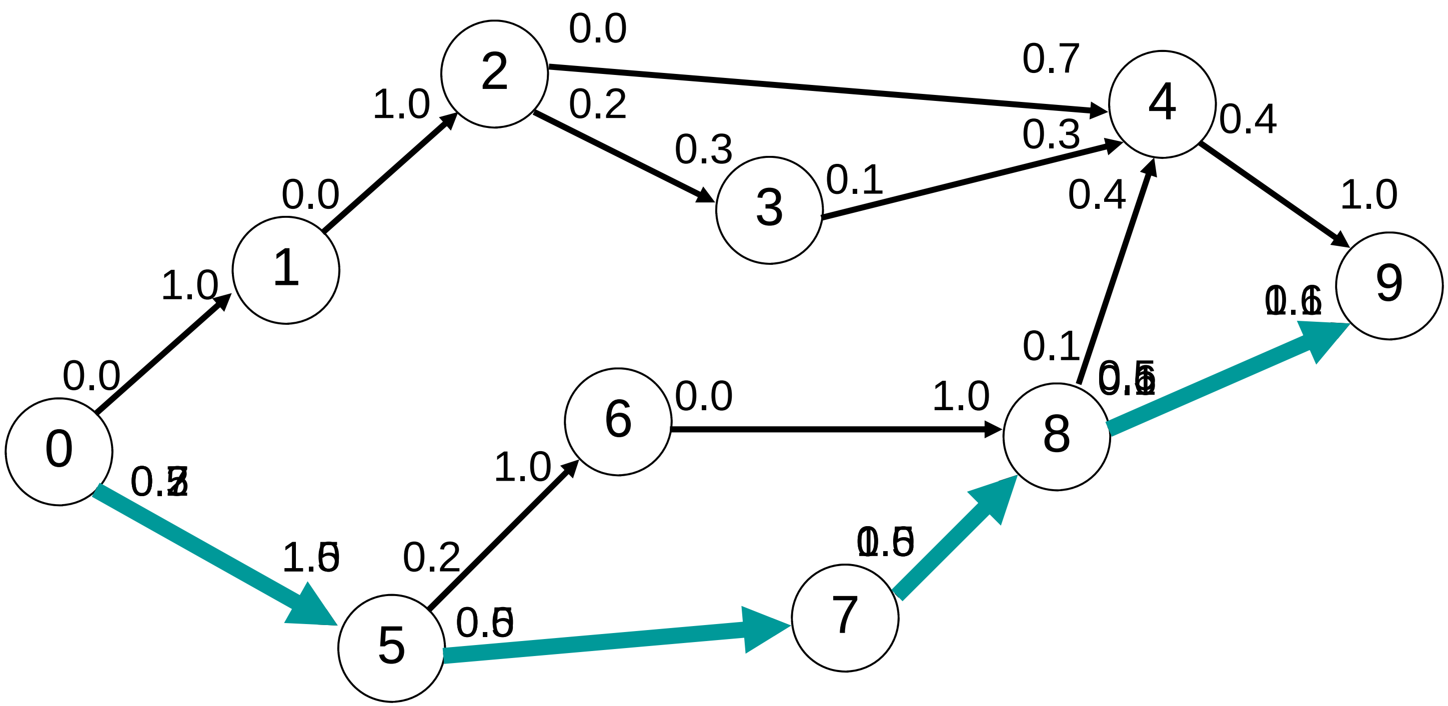
Segunda trayectoria



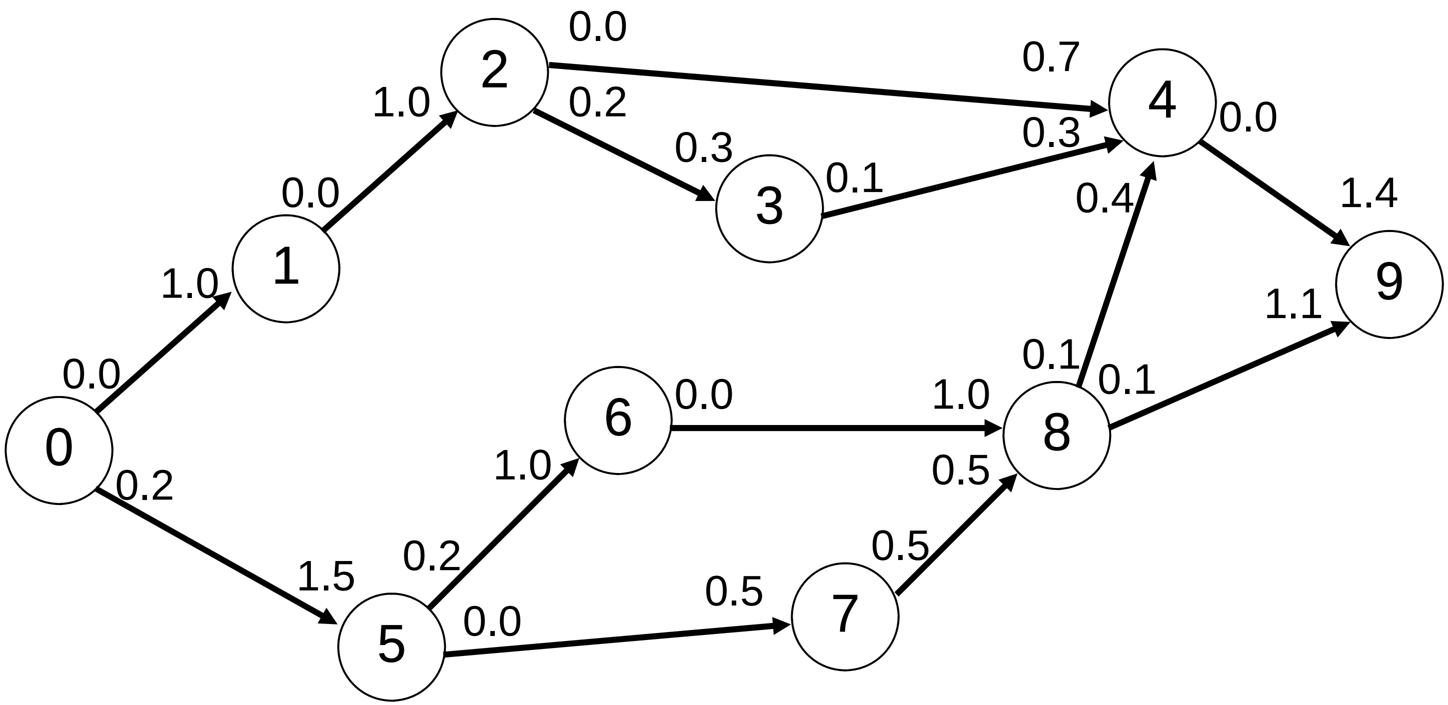
Tercera trayectoria



Cuarta trayectoria

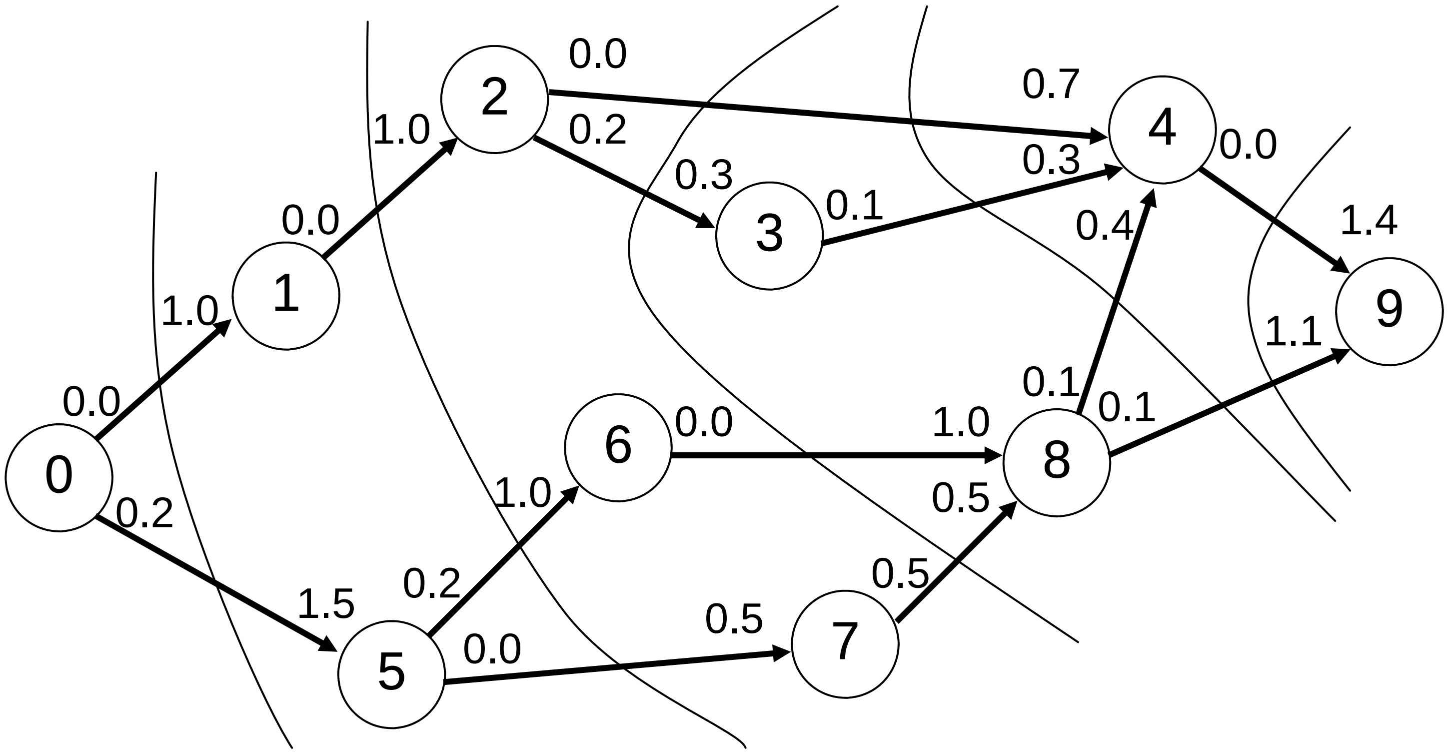


Quinta trayectoria



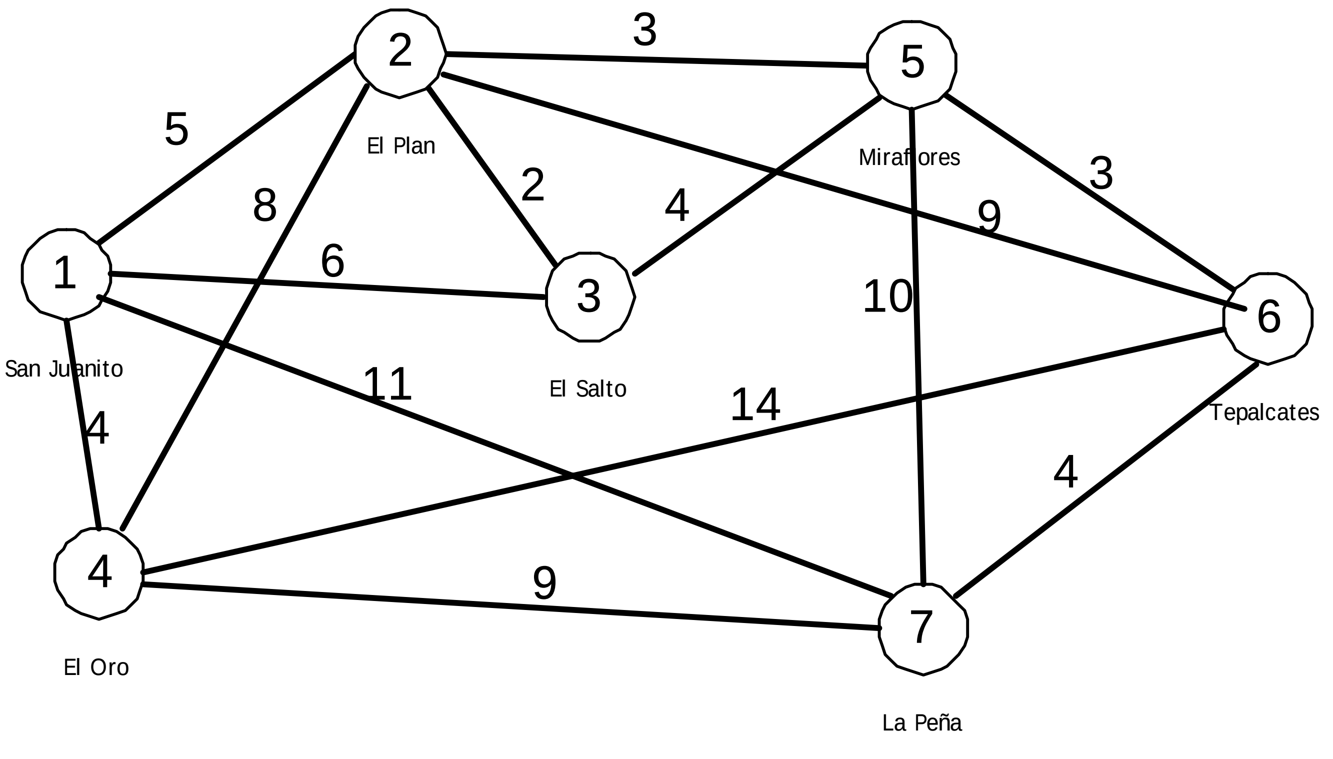
Se calcula el valor del flujo máximo sumando los flujos que entran en el destino:

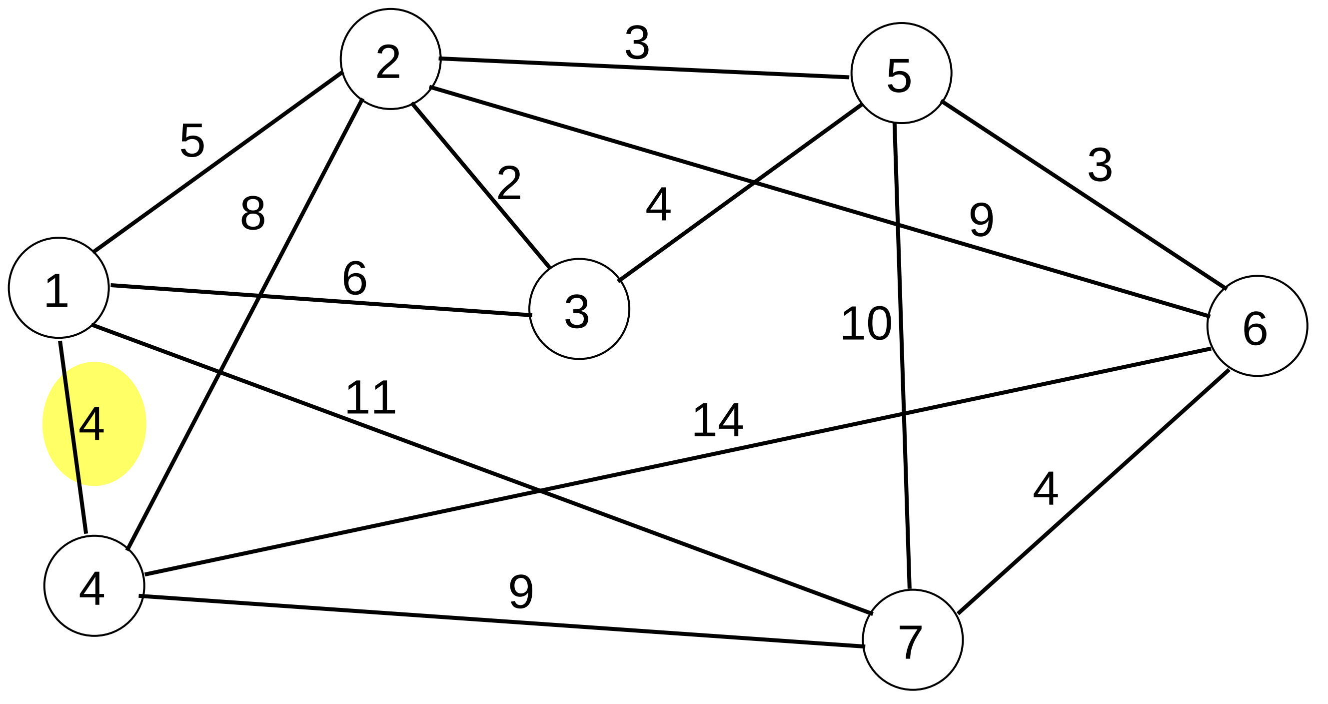
1.1 m3/s + 1.4 m3/s = 2.5 m3/s


0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
0.0
1.0
0.2
1.5
0.0
1.0
0.0
0.7
0.2
0.3
0.1
0.3
0.0
1.4
0.4
1.1
0.1
0.1
0.0
1.0
1.0
0.2
0.5
0.5
0.5
0.0
0.5

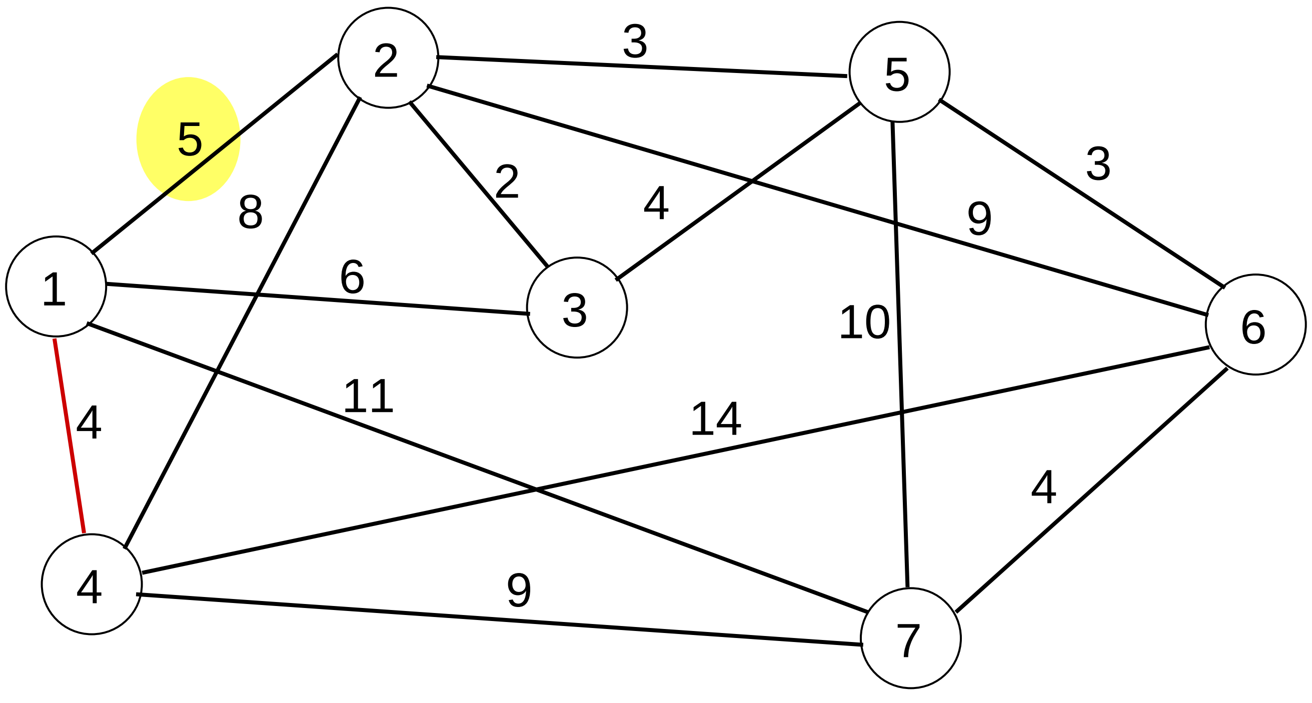
Árbol de mínima expansión

Se quiere construir una red de caminos que comunique a la cabecera municipal de San Juanito con las villas y rancherías de la región. Un experto ha estimado el costo de construcción (en millones de pesos) de cada uno de los caminos factibles

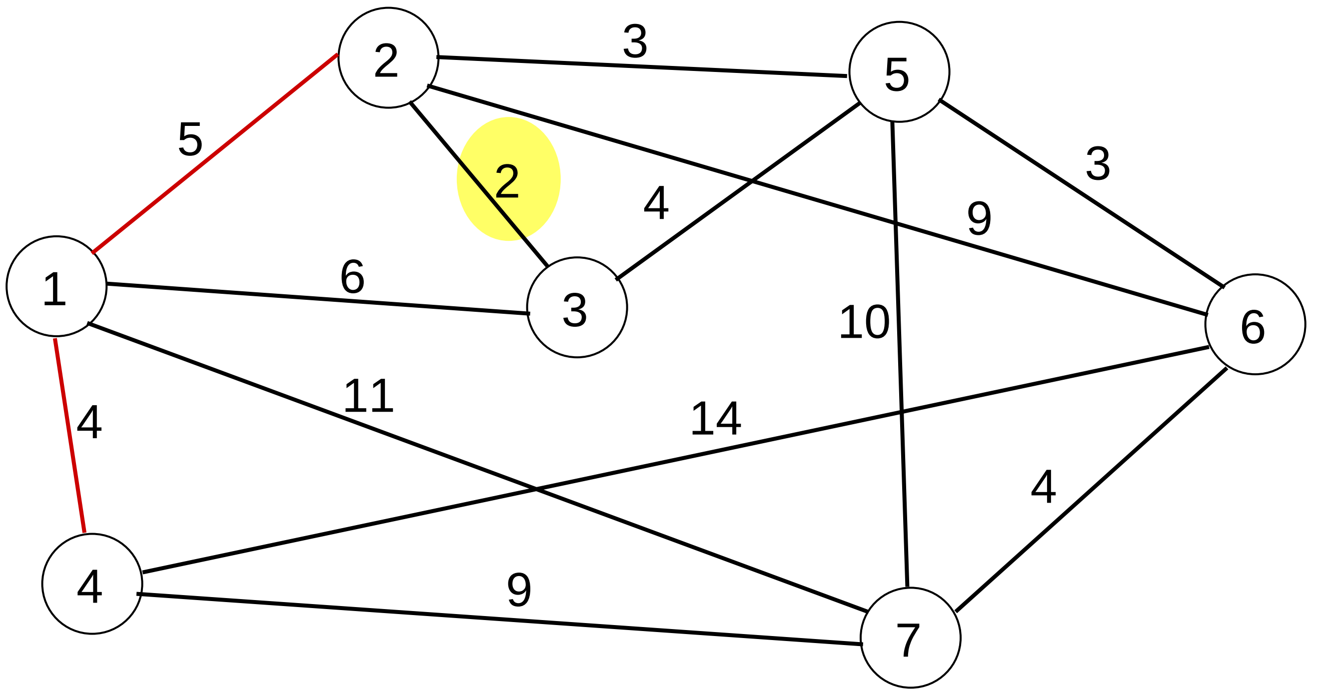




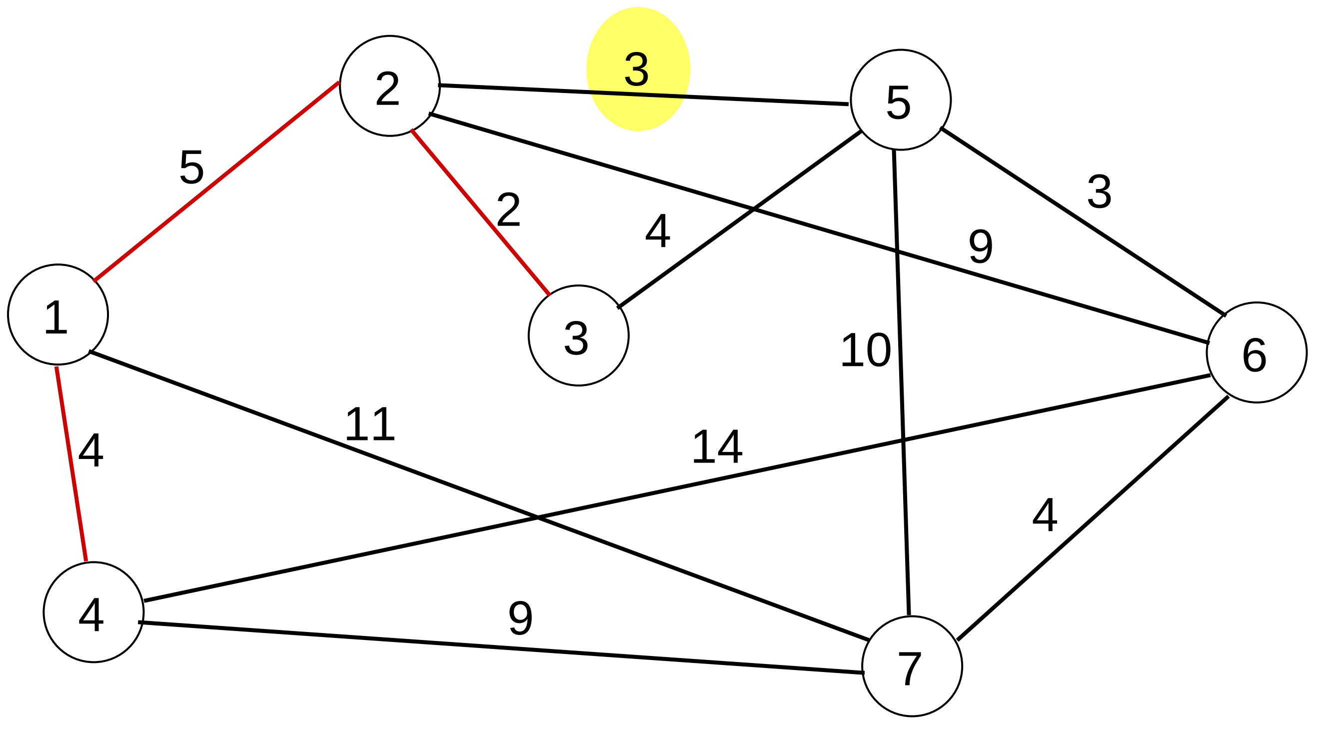
1
2
3
4
5
6
7
5
8
6
4
11
3
2
4
9
3
10
14
4
9

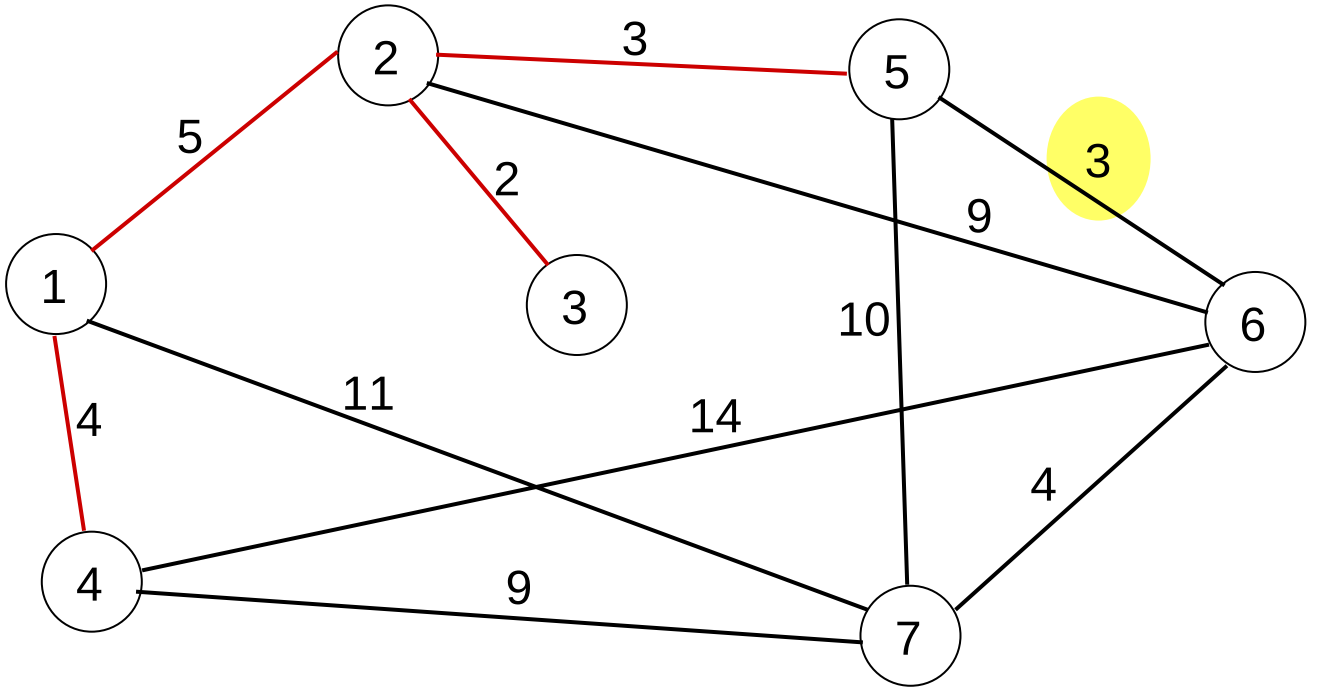


1
2
3
4
5
6
7
5
8
3
2
4
9
3
6
10
11
4
14
4
9

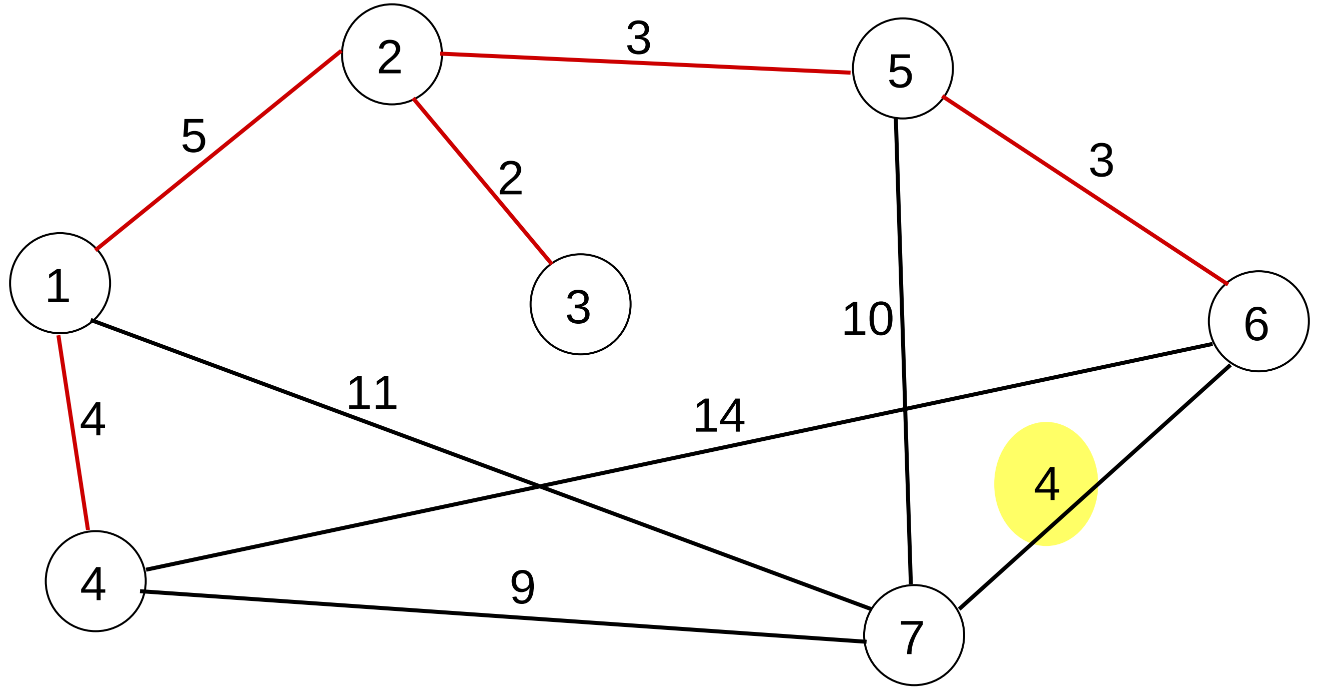


1
2
3
4
5
6
7
5
4
6
11
2
3
4
9
3
10
14
9
4


1
2
3
4
5
6
7
5
2
3
4
9
3
10
11
14
4
4
9
3

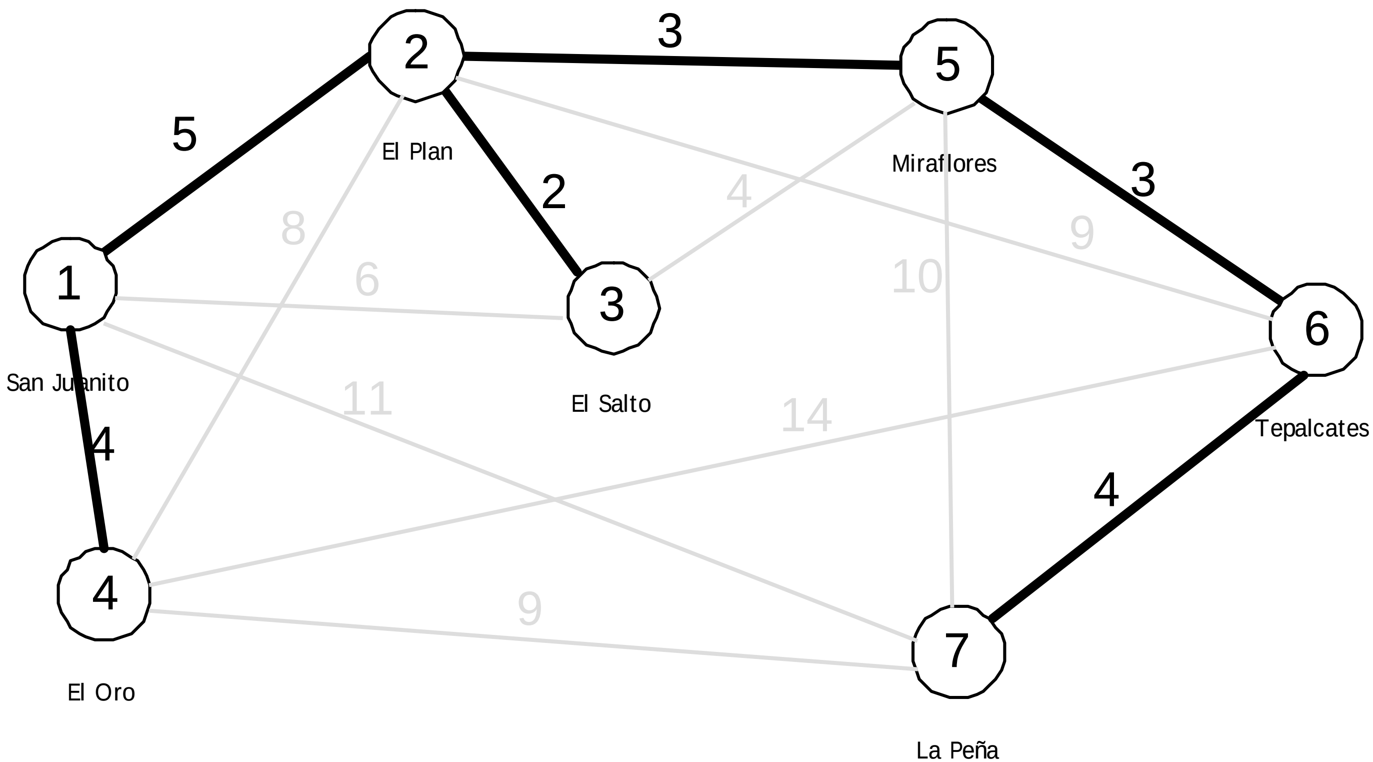


1
2
3
4
5
6
7
5
3
2
9
3
10
11
4
14
4
9



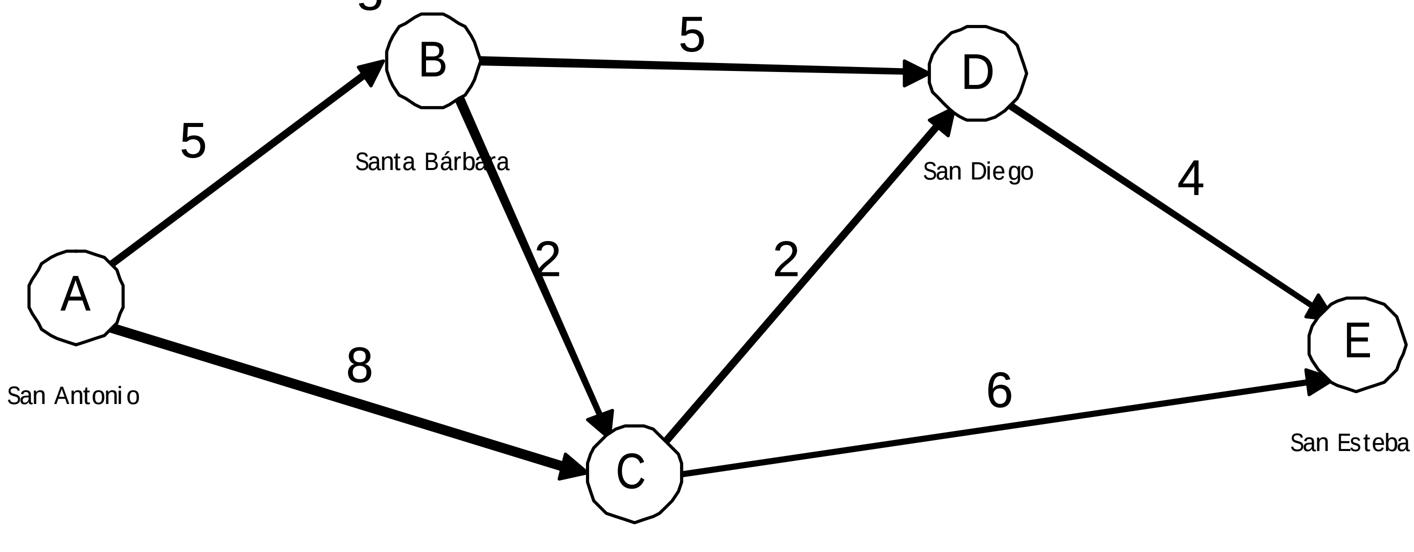
1
2
3
4
5
6
7
5
3
2
3
10
11
14
4
4
9

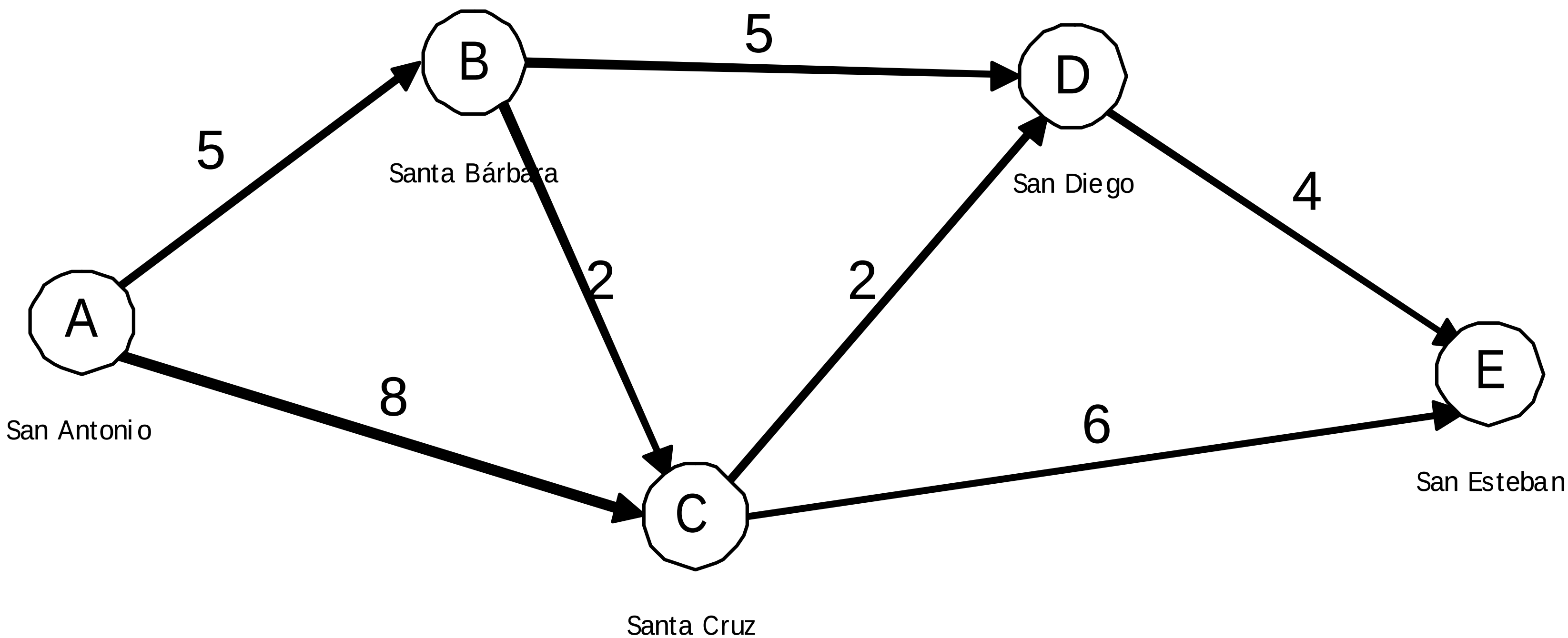
El Árbol de mínima expansión que nos muestra cual es la red de caminos que conecta todas estas poblaciones al menor costo. El costo se obtiene sumando la longitud de los arcos, en este caso corresponde a 21 millones de pesos..



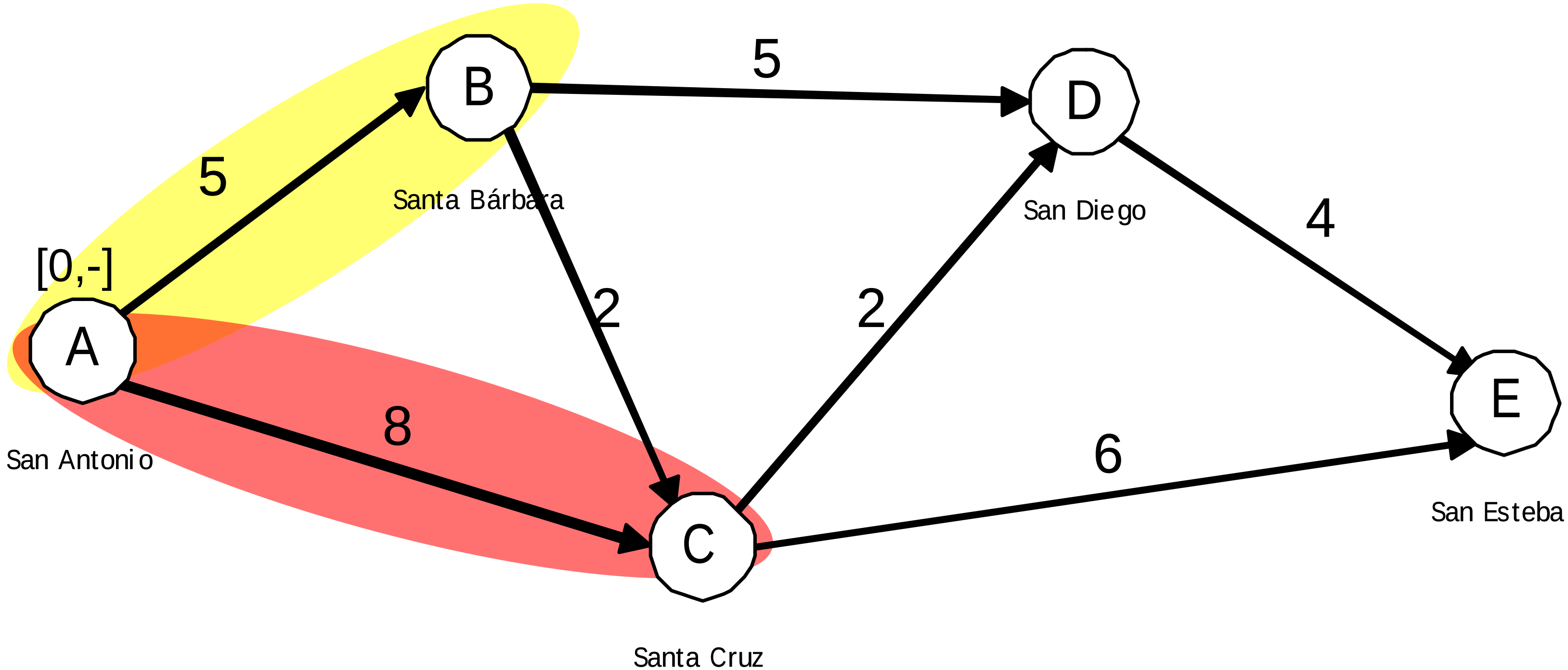
Ruta más corta

Con el fin de mejorar su red vial, un gobierno estatal ha implementado un programa de pavimentación de caminos. Uno de los proyectos consiste en la colocación de una capa de concreto asfáltico sobre las terracerías existentes en el camino que conecta los pueblos de San Antonio y San Esteban. Pero existen diversas rutas que pasan por poblaciones intermedias y se debe decidir cuales de ellas se beneficiarán con el programa. Se utilizará un criterio de decisión que minimice el costo del proyecto, para ello se supone que dicho costo sólo depende de la longitud total de la ruta.

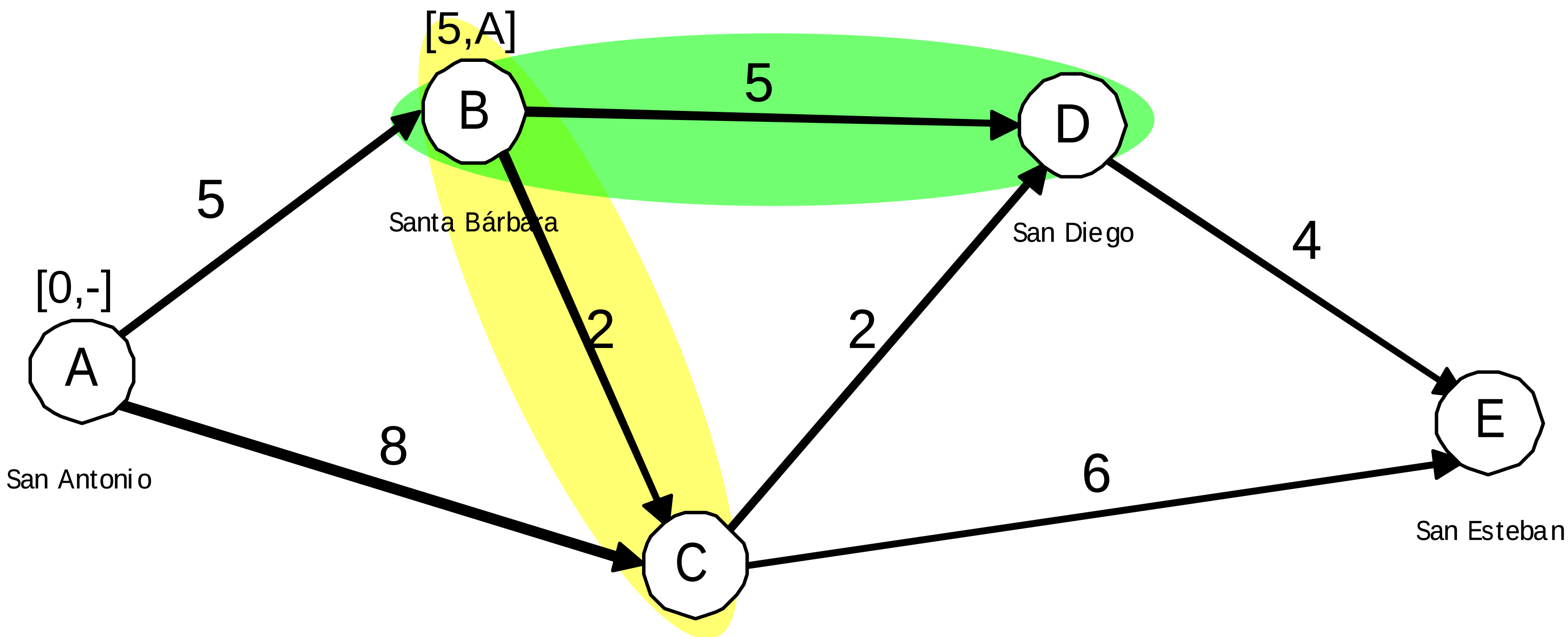




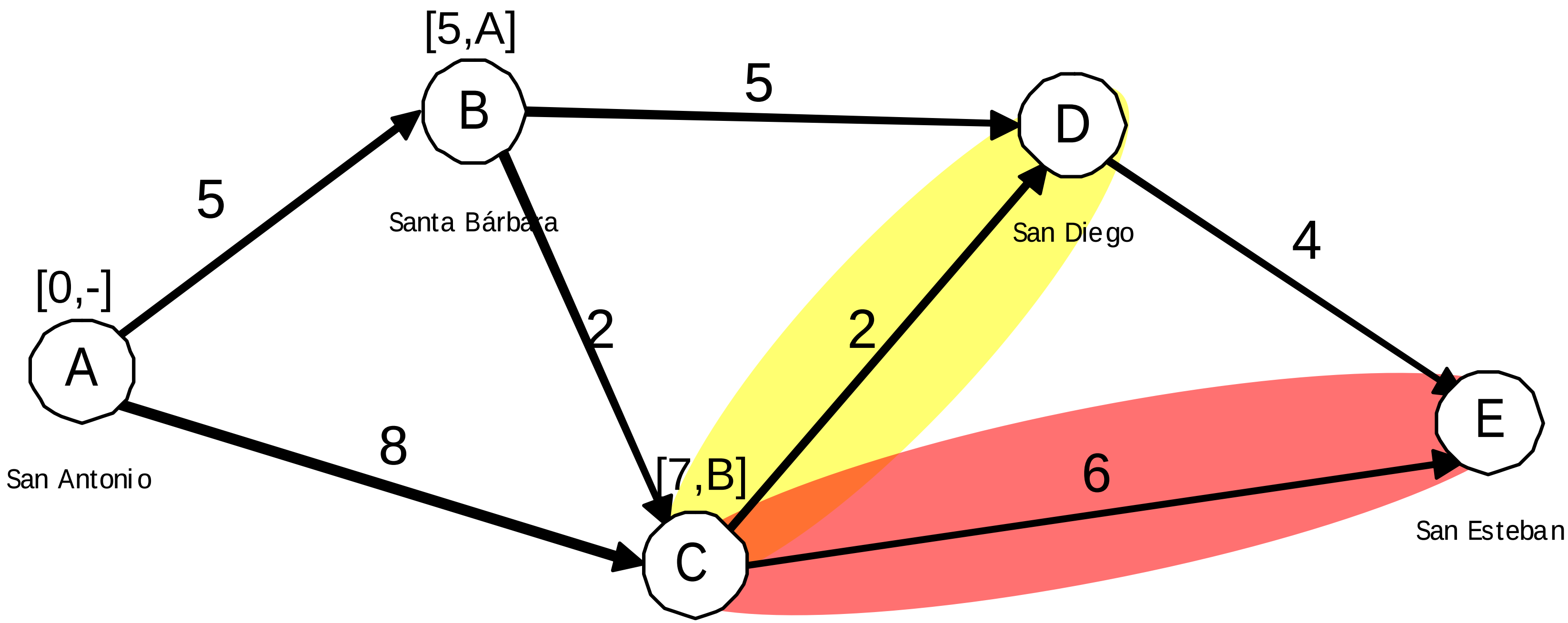
Nodo	Clasificación	Condición
A	A [0, -]	permanente



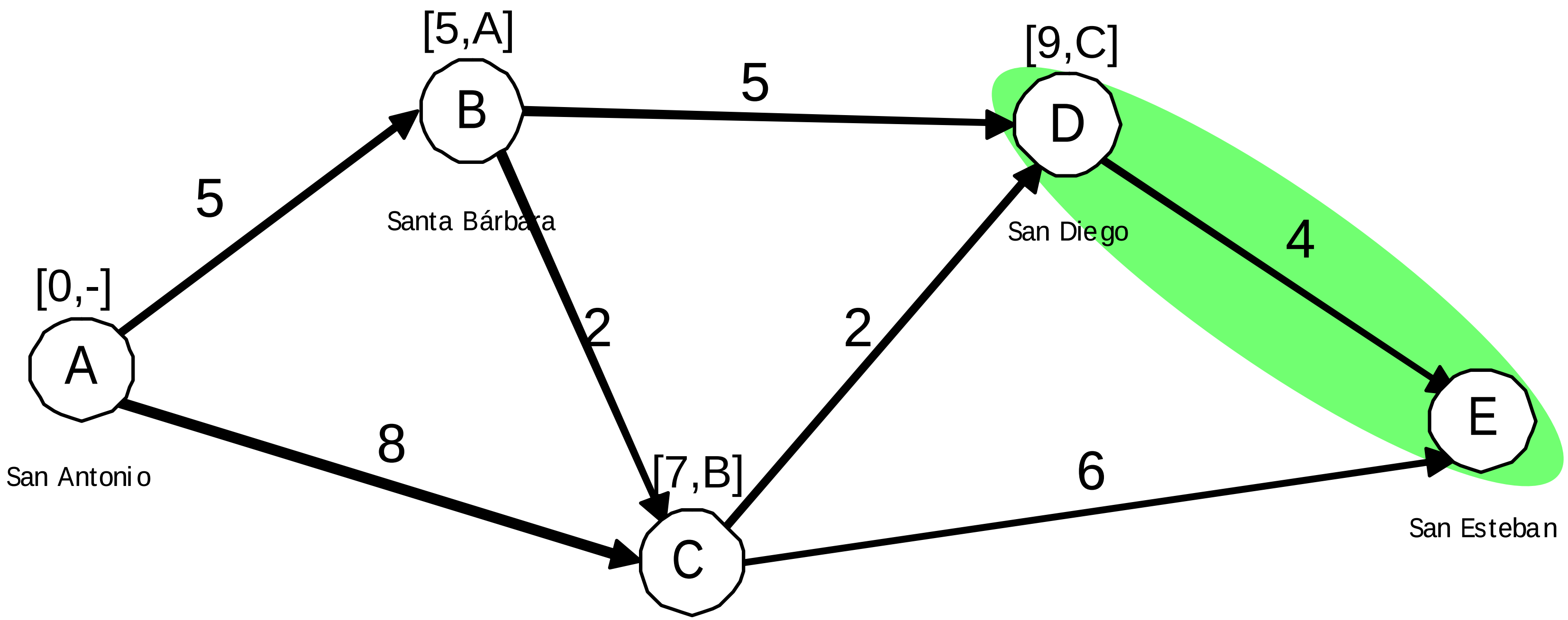
Nodo	Clasificación	Condición
A	A [0, -]	permanente
B	B [0+5, A] = B [5, A]	temporal
C	C [0+8, A] = C [8, A]	temporal



Nodo	Clasificación	Condición
A	A [0, -]	permanente
B	B [5, A]	permanente
C	C [8, A] C [5+2, B] = C [7, B]	
D	D [5+5, B] = D [10, B]	temporal

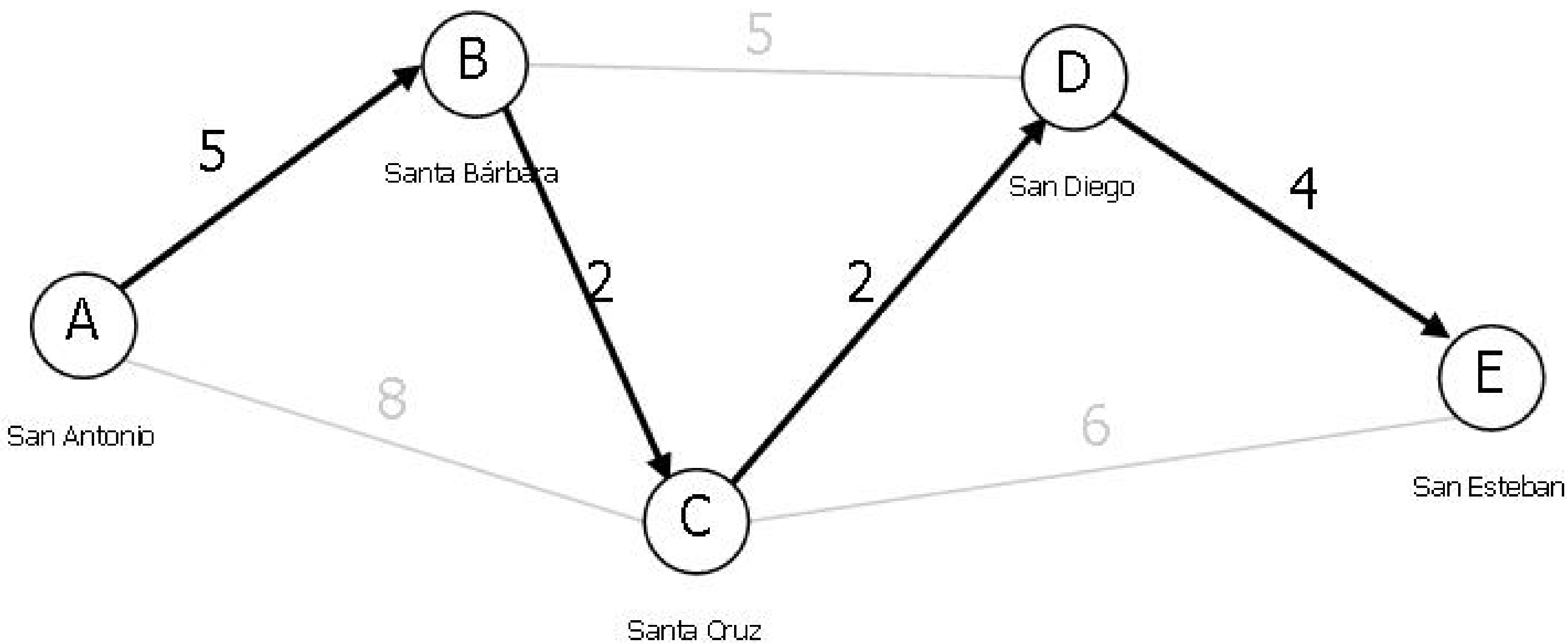


Nodo	Clasificación	Condición
A	A [0, -]	permanente
B	B [5, A]	permanente
C	C [7, B]	permanente
D	D [10, B] D [7+2, C] = D [9, C]	
E	E [7+6, C] = E [13, C]	temporal



Nodo	Clasificación	Condición
A	A [0, -]	permanente
B	B [5, A]	permanente
C	C [7, B]	permanente
D	D [9, C]	permanente
E	E [13, C] E [9+4, D] = E [13, D]	

Como se puede ver ambas etiquetas del nodo destino E nos dan la misma distancia al origen (13 km). En este caso tenemos dos rutas con longitud mínima y se deberá utilizar un criterio adicional para determinar la óptima. Si uno de los objetivos secundarios del programa es beneficiar la mayor cantidad de poblados posibles, entonces la ruta a elegir sería A → B → C → D → E



Método de la ruta crítica

Se tomará el ejemplo de la construcción de una casa de una planta, para la cual ya se cuenta con planos arquitectónicos y estructurales, además de todos los permisos necesarios. He aquí el listado de las actividades necesarias para su realización.

A Preparación del terreno
B Instalaciones preliminares
C Trazo
D Excavación
E Cimentación
F Muros
H Techos

J Instalación eléctrica
K Instalación hidráulica y sanitaria
L Pisos
M Acabados
N Puertas y ventanas
P Pintura
Q Jardinería

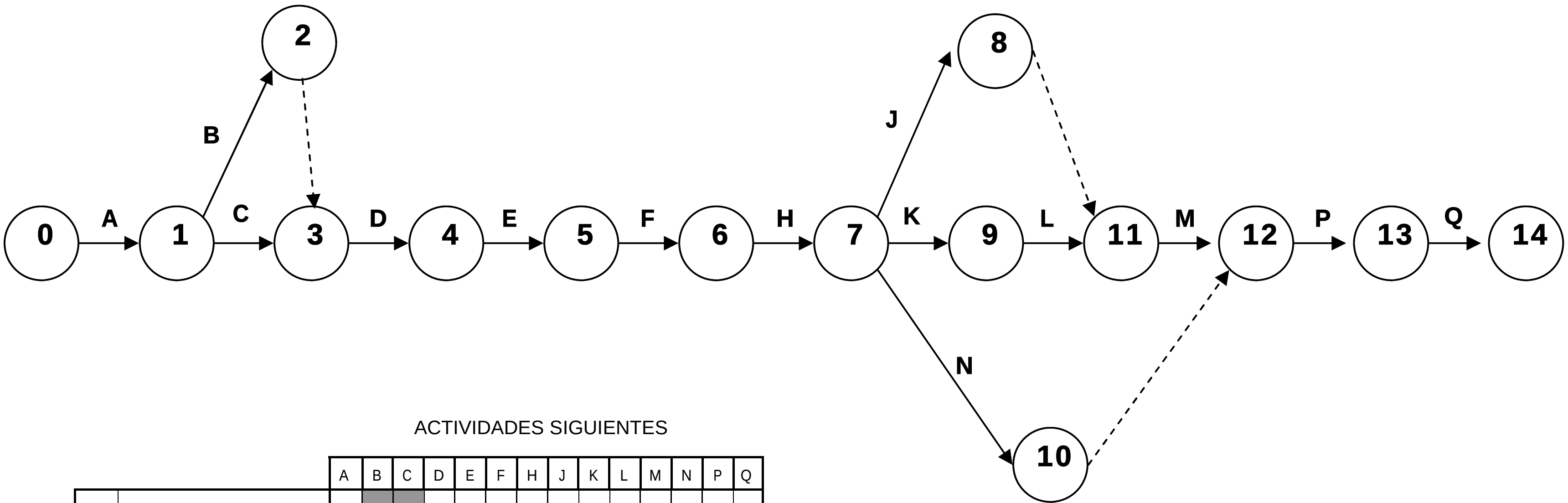
ACTIVIDADES SIGUIENTES

ACTIVIDADES PRECEDENTES

		A	B	C	D	E	F	H	J	K	L	M	N	P	Q
A	Preparación del terreno														
B	Instalaciones preliminares														
C	Trazo														
D	Excavación														
E	Cimentación														
F	Muros														
H	Techos														
J	Instalación eléctrica														
K	Instalación hidráulica y sanitaria														
L	Pisos														
M	Acabados														
N	Puertas y ventanas														
P	Pintura														
Q	Jardinería														

Actividad		Duración (días)
A	Preparación del terreno	2
B	Instalaciones preliminares	2
C	Trazo	1
D	Excavación	5
E	Cimentación	7
F	Muros	15
H	Techos	15
J	Instalación eléctrica	15
K	Instalación hidráulica y sanitaria	10
L	Pisos	4
M	Acabados	12
N	Puertas y ventanas	8
P	Pintura	4
Q	Jardinería	2

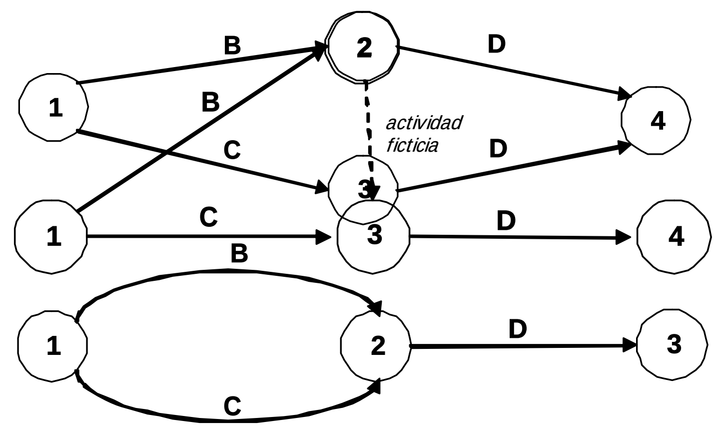
- ❖Cada flecha debe iniciar y terminar en un nodo.
- ❖Todas las flechas de la red deben estar dirigidas de izquierda a derecha.
- ❖Las flechas van de un nodo con ordinal menor a uno mayor
- ❖Ningún par de nodos pueden estar conectados por más de una flecha.

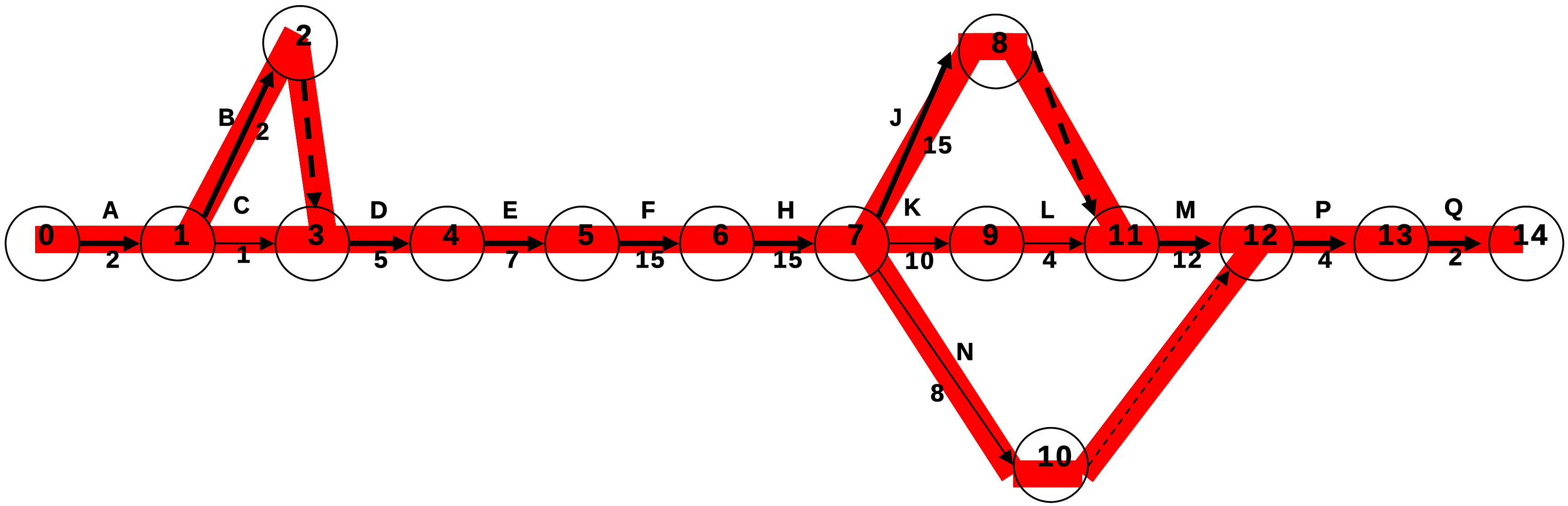


ACTIVIDADES SIGUIENTES

ACTIVIDADES PRECEDENTES

		A	B	C	D	E	F	H	J	K	L	M	N	P	Q
A	Preparación del terreno		■	■											
B	Instalaciones preliminares				■										
C	Trazo				■										
D	Excavación					■									
E	Cimentación						■								
F	Muros							■							
H	Techos								■	■			■		
J	Instalación eléctrica											■			
K	Instalación hidráulica y sanitaria										■				
L	Pisos											■			
M	Acabados													■	
N	Puertas y ventanas													■	
P	Pintura														■
Q	Jardinería														





0 → 1 → 2 → 3 → 4 → 5 → 6 → 7 → 8 → 11 → 12 → 13 → 14 79 días

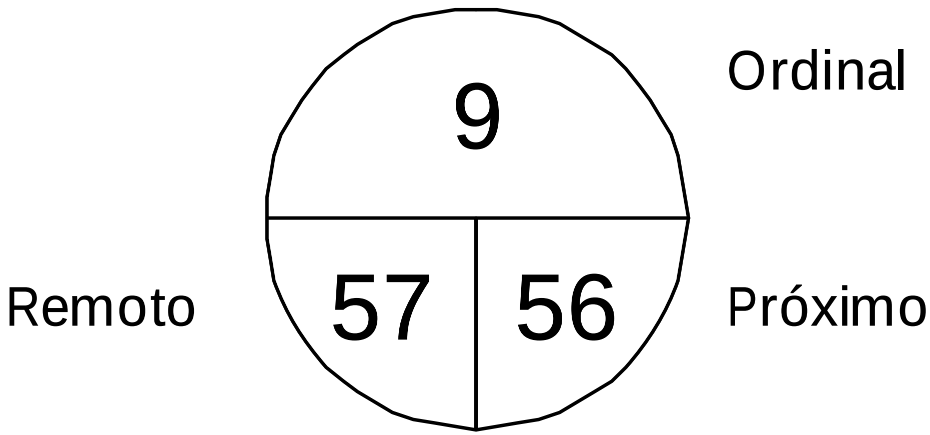
0 → 1 → 2 → 3 → 4 → 5 → 6 → 7 → 9 → 11 → 12 → 13 → 14 78 días

0 → 1 → 2 → 3 → 4 → 5 → 6 → 7 → 10 → 12 → 13 → 14 56 días

0 → 1 → 3 → 4 → 5 → 6 → 7 → 8 → 11 → 12 → 13 → 14 78 días

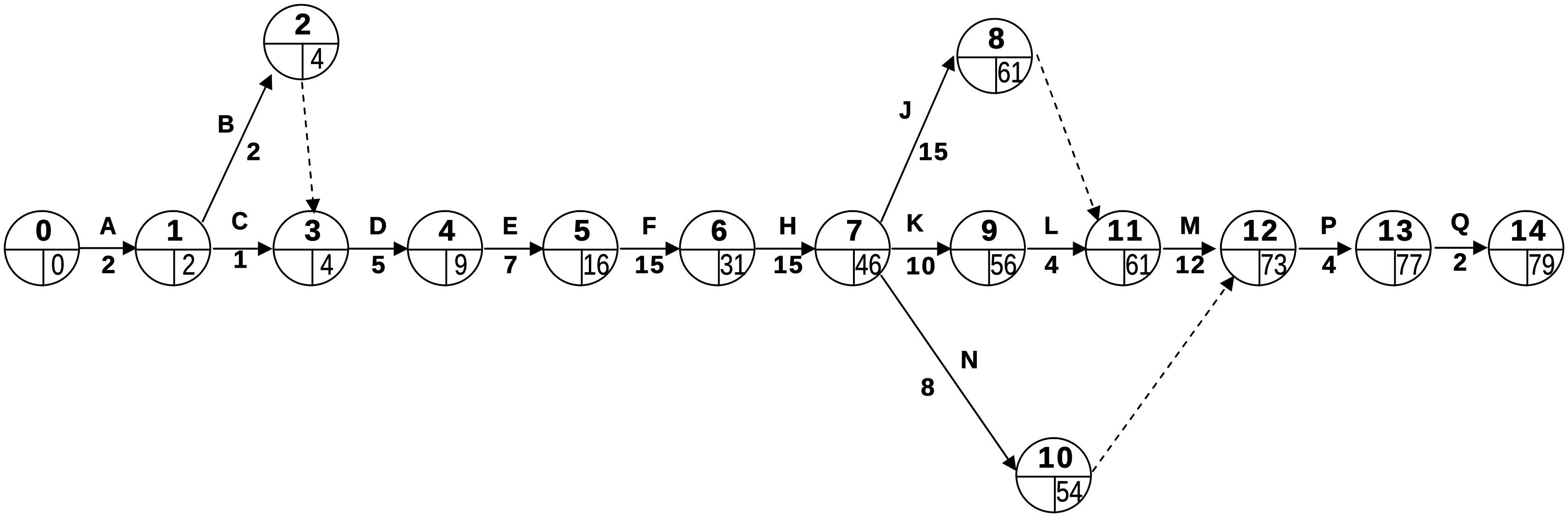
0 → 1 → 3 → 4 → 5 → 6 → 7 → 9 → 11 → 12 → 13 → 14 77 días

0 → 1 → 3 → 4 → 5 → 6 → 7 → 10 → 12 → 13 → 14 55 días



Representación gráfica de los hitos

Fin próximo = Inicio próximo + Duración

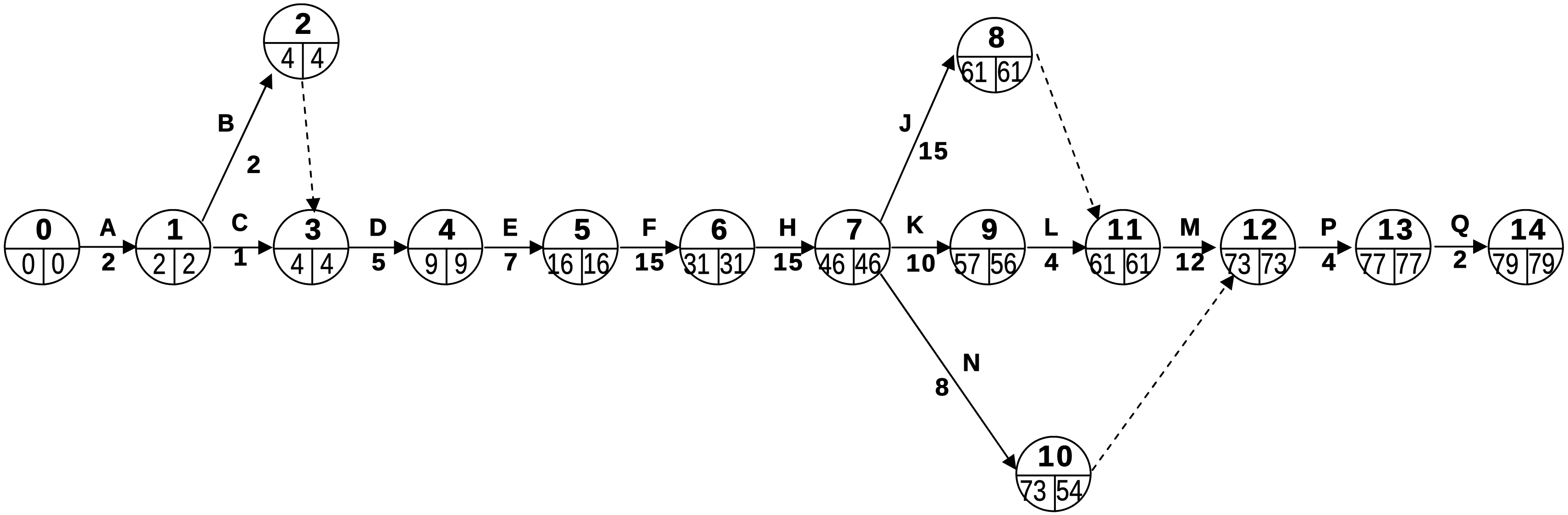


Inicio próximo = Mayor fin próximo de las actividades precedentes

Como “C” tiene un fin próximo igual a 3, mientras que la actividad “Ficticia 2-3” de 4, entonces el inicio próximo de la “D” será 4.

Inicio próximo “P” = Mayor (Fin próximo “Ficticia 10-12”, Fin próximo “M”)
Inicio próximo “P” = Mayor (54, 73) = 73

Inicio remoto = Fin remoto - Duración



Fin remoto = Menor inicio remoto de las actividades subsecuentes

Fin remoto “H” = Menor (Inicio remoto “J”, Inicio remoto “K”, Inicio remoto “N”)

Fin remoto “A”= Menor (Inicio remoto “B”, Inicio remoto “C”)

Fin remoto “A”= Menor (2, 3) = 2

Fin remoto “H” = Menor (46, 47, 65) = 46

Para encontrar la ruta crítica hemos de calcular el tiempo de sobra que tienen las tareas para realizarse sin alterar la duración total del proyecto. Este lapso es conocido como holgura total y se obtiene al restar la duración de la tarea de la diferencia entre su fin remoto y su inicio próximo.

Holgura total = Fin remoto - Inicio próximo - Duración

Las actividades con holgura libre igual a cero forman la o las rutas críticas. Cualquier retraso en su ejecución acarrea un retraso en la fecha de conclusión del proyecto.

Actividad		Nodo inico	Nodo fin	Duración (días)	Inicio remoto	Inicio próximo	Fin remoto	Fin próximo	Holgura total	Holgura libre
A	Preparación del terreno	0	1	2	0	0	2	2	**0**	
B	Instalaciones preliminares	1	2	2	2	2	4	4	**0**	
C	Trazo	1	3	1	2	2	4	4	1	
	Ficticia 2-3	2	3	0	4	4	4	4	**0**	
D	Excavación	3	4	5	4	4	9	9	**0**	
E	Cimentación	4	5	7	9	9	16	16	**0**	
F	Muros	5	6	15	16	16	31	31	**0**	
H	Techos	6	7	15	31	31	46	46	**0**	
J	Instalación eléctrica	7	8	15	46	46	61	61	**0**	
K	Instalación hidráulica y san.	7	9	10	46	46	57	56	1	
N	Puertas y ventanas	7	10	8	46	46	73	54	19	
	Ficticia 8-11	8	11	0	61	61	61	61	**0**	
L	Pisos	9	11	4	57	56	61	60	1	
	Ficticia 10-12	10	12	0	73	54	73	73	19	
M	Acabados	11	12	12	61	61	73	73	**0**	
P	Pintura	12	13	4	73	73	77	77	**0**	
Q	Jardinería	13	14	2	77	77	79	79	**0**	

La holgura libre nos señala el tiempo que una actividad puede retrasarse sin que esto ocasione una postergación del tiempo próximo de inicio de la actividad siguiente. Para obtenerla se realiza el siguiente cálculo:

Holgura libre = Fin próximo - Inicio próximo – Duración

La holgura libre puede ser igual o menor que la holgura total, pero en ningún caso mayor.

	Actividad	Nodo inico	Nodo fin	Duración (días)	Inicio remoto	Inicio próximo	Fin remoto	Fin próximo	Holgura total	Holgura libre
A	Preparación del terreno	0	1	2	0	0	2	2	**0**	0
B	Instalaciones preliminares	1	2	2	2	2	4	4	**0**	0
C	Trazo	1	3	1	2	2	4	4	1	1
	Ficticia 2-3	2	3	0	4	4	4	4	**0**	0
D	Excavación	3	4	5	4	4	9	9	**0**	0
E	Cimentación	4	5	7	9	9	16	16	**0**	0
F	Muros	5	6	15	16	16	31	31	**0**	0
H	Techos	6	7	15	31	31	46	46	**0**	0
J	Instalación eléctrica	7	8	15	46	46	61	61	**0**	0
K	Instalación hidráulica y san.	7	9	10	46	46	57	56	1	0
N	Puertas y ventanas	7	10	8	46	46	73	54	19	0
	Ficticia 8-11	8	11	0	61	61	61	61	**0**	0
L	Pisos	9	11	4	57	56	61	60	1	0
	Ficticia 10-12	10	12	0	73	54	73	73	19	19
M	Acabados	11	12	12	61	61	73	73	**0**	0
P	Pintura	12	13	4	73	73	77	77	**0**	0
Q	Jardinería	13	14	2	77	77	79	79	**0**	0

Críticas:

A	Preparación del terreno
B	Instalaciones preliminares
D	Excavación
E	Cimentación
F	Muros
H	Techos
J	Instalación eléctrica
M	Acabados
P	Pintura
Q	Jardinería

Semicríticas sin holgura libre

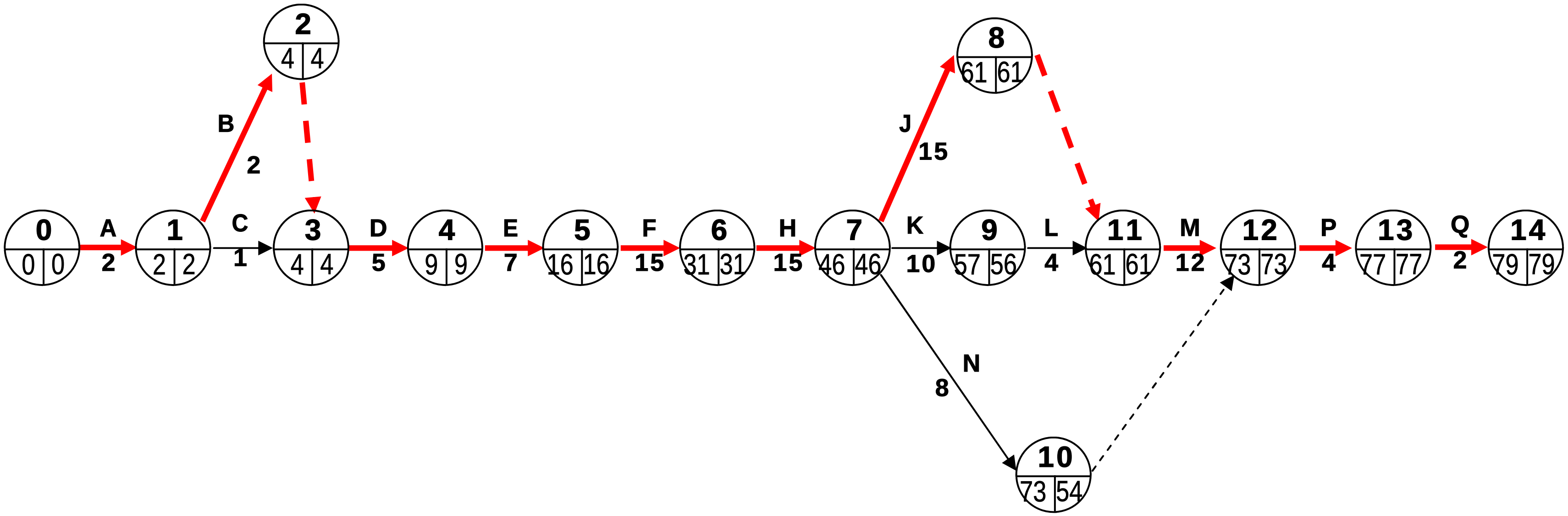
K	Instalación hidráulica y sanitaria
L	Pisos

Semicríticas con holgura libre

C	Trazo

No críticas

N	Puertas y ventanas



0
0 0
A
2
1
2 2
B
2
2
4 4
C
1
3
4 4
D
5
4
9 9
E
7
5
16 16
F
15
6
31 31
H
15
7
46 46
J
15
8
61 61
K
10
9
57 56
L
4
N
8
10
73 54
11
61 61
M
12
12
73 73
P
4
13
77 77
Q
2
14
79 79