



centro de educación continua  
división de estudios superiores  
facultad de ingeniería, unam



A LOS ASISTENTES A LOS CURSOS DEL CENTRO DE EDUCACION  
CONTINUA

Las autoridades de la Facultad de Ingeniería, por conducto del Jefe del Centro de Educación Continua, otorgan una constancia de asistencia a quienes cumplan con los requisitos establecidos para cada curso. Las personas que deseen que aparezca su título profesional precediendo a su nombre en la constancia, deberán entregar copia del mismo o de su cédula a más tardar el SEGUNDO DIA de clases, en las oficinas del Centro con la señorita encargada de inscripciones.

El control de asistencia se llevará a cabo a través de la persona encargada de entregar las notas del curso. Las inasistencias serán computadas por las autoridades del Centro, con el fin de entregarle constancia solamente a los alumnos que tengan un mínimo del 80% de asistencia.

Se recomienda a los asistentes participar activamente con sus ideas y experiencias, pues los cursos que ofrece el Centro están planeados para que los profesores expongan una tesis, pero sobre todo, para que coordinen las opiniones de todos los interesados constituyendo verdaderos seminarios.

Es muy importante que todos los asistentes llenen y entreguen su hoja de inscripción al inicio del curso. Las personas comisionadas por alguna institución deberán pasar a inscribirse en las oficinas del Centro en la misma forma que los demás asistentes, entregando el oficio respectivo.

Con objeto de mejorar los servicios que el Centro de Educación Continua ofrece, al final del curso se hará una evaluación a través de un cuestionario diseñado para emitir juicios anónimos por parte de los asistentes.



ESTRUCTURAS FUERA DE LA COSTA  
OFF SHORE

Fecha	Duración	Tema	Profesor
Sept. 4	16 a 17:30 h 17:30 a 21 h	Introducción El Fondo Marino Configuración y constitución Técnicas de exploración y muestreo	Ing. Gabino Gracia Campillo Ing. Rogerio Zubieta Cárdenas
Sept. 5	16 a 21 h	Cimentaciones por pilotes Cimentaciones por superficie	Dr. Eulalio Juárez Badillo
Sept. 6	16 a 21 h	Tipos de movimientos atmosféricos Acción del viento sobre las estructuras Análisis estadístico. Viento de diseño	Dr. Nicolás Grijalva C.
Sept. 7	16 a 21 h	Teoría clásica de oleaje Acción del oleaje sobre las estructuras	Dr. Blair Kinsman
Sept. 8	16 a 20 h 20 a 21 h	Técnicas de predicción de oleaje para fines de diseño Instrumentos oceanográficos	Dr. Blair Kinsman M. en C. Rafael García Kiasouski
Sept. 11	16 a 18 h 18 a 21 h	Tipos de plataforma Criterios de selección Criterios operacionales de plataformas de producción y almacenamiento Secuencia constructiva	Ing. Rogerio Zubieta Cárdenas William Jansen
Sept. 12	16 a 21 h	Aspectos de hidrodinámica naval durante el remolque y descenso Materiales Instalaciones de diseño Diseño de cubiertas	William Jansen
Sept. 13	16 a 21 h	Dinámica de estructuras oceánicas	Ing. Marcel Gerbault
Sept. 14	16 a 21 h	Problemas técnicos en la construcción e implementación de plataformas de concreto	" "



11  
12  
13  
14  
15



centro de educación continua  
división de estudios superiores  
facultad de ingeniería, unam



PRIMER CURSO INTERNACIONAL SOBRE ESTRUCTURAS FUERA  
DE LA COSTA

CIMENTACIONES POR PILOTE Y SUPERFICIE

DR. EULALIO JUAREZ BADILLO

AGOSTO, 1978.

5. Taylor, D. W.—*Fundamentals of Soil Mechanics*—Capítulo 16—John Wiley and Sons, Inc. 1956.
6. Rendulic, L.—*Ein Beitrag zur Bestimmung der gleitsicherheit*—Der Bauingenieur—No. 19-20—1935.
7. Taylor, D. W.—*Stability of earth slopes*—Contribution to Soil Mechanics—Boston Society of Civil Engineers—1925-1940.
8. Carrillo, N.—*Perfil de un talud plástico de resistencia uniforme*—Anuario de la Comisión Impulsora y Coordinadora de la Investigación Científica—México—1943.
9. Jaky, J.—*Stability of Earth slopes*—Proc. del I Congreso Internacional de Mecánica de Suelos y Cimentaciones—Vol. II—1936.
10. Capper, P. L. y Cassie, W. F.—*The Mechanics of Engineering Soils*—Capítulo 6—E. y F. N. Spon—1960.
11. Rutledge, P. C.—*Resultados de la investigación sobre compresión triaxial*—Publicación original de Waterways Experiment Station, traducida por R. J. Marsal y M. Mazari en Contribuciones de la Mecánica de Suelos al diseño y construcción de presas de tierra—Secretaría de Recursos Hidráulicos—México—1961.
12. Fellenius, W.—*Erdstatische Berechnungen mit Reibung und Kohäsion. Adhäsion. und unter annahme Kreiszyllindrischer gleitflächen*—Ernst Ed. Berlin—1939.
13. Jambu, N.—*Stability Analysis of slopes with dimensionless parameters*—Harvard Soil Mechanics Series N° 46—Universidad de Harvard—1954.
14. Juárez-Badillo, E.—*La ecuación de Kotter en el análisis de estabilidad de taludes simples formados por suelos "cohesivos"*—Memoria del VII Congreso Panamericano de Carreteras—Panamá—1957—Revista Ingeniería—Vol. 23—N° 2—1958.
15. Rico, A.—*Analysis of Slope Stability. Elasto-plastic Considerations*—V Congreso Internacional de Mecánica de Suelos y Cimentaciones—Paris—1961.

## BIBLIOGRAFIA

- Fundamentals of Soil Mechanics*—D. W. Taylor—John Wiley and Sons—1956.  
*Theoretical Soil Mechanics*—K. Terzaghi—John Wiley and Sons—1956.  
*Basic Soils Engineering*—B. K. Hough—Ronald Press Co.—1957.  
*Principles of Engineering Geology and Geotechnics*—D. P. Krynnie y. W. R. Judd—McGraw Hill Book Co.—1957.  
*La Mecánica de Suelos en la Ingeniería Práctica*—K. Terzaghi y R. B. Peck—(Trad. O. Moretto)—Ateneo Ed.—1955.  
*Landslides and Engineering Practice*—Highway Research Board Special Report N° 29—Editado por E. B. Eckel—1959.  
*Earth Pressure Calculations*—J. Brinch Hansen—Danish Technical Press—Copenhagen—1953.  
*The Mechanics of Engineering Soils*—P. L. Capper y W. P. Cassie—E. y F. N. Spon—1957.  
*Mecánica del Suelo*—J. A. Jiménez Salas—Ed. Dossat—1954.  
*Traité de Mécanique des sols*—A. Caquot y J. Kerisel—Gauthier-Villars Ed.—1956.  
*Stabilité des terres*—J. Verdeyen y V. Roisin—Eyrolles Ed.—1955.  
*Practical Problems in Soil Mechanics*—H. R. Reynolds y P. Protopapadakis—Crosby Lockwood and Son—1956.

## CAPITULO VI

## INTRODUCCION AL PROBLEMA DE LA CAPACIDAD DE CARGA EN SUELOS

## VI-1. Generalidades

En este capítulo se presentan, desde un punto de vista puramente teórico, los métodos más generales y principales que se han desarrollado hasta hoy para resolver el fundamental problema de determinar la capacidad de carga de los suelos para fines de Ingeniería Civil. Estos métodos teóricos se fundamentan solamente en las Matemáticas Aplicadas y en la Mecánica del Medio Continuo y a ellas pertenecen; están afectados por todas las hipótesis y limitaciones frecuentes en aquellos campos y, por lo tanto, son de difícil aplicación directa a la realidad de las obras de ingeniería. Con base en tal Metodología, la Mecánica de Suelos ha podido seleccionar convenientemente y desarrollar sus propias teorías con vistas a resolver su problema específico: éstas se presentan en el Capítulo VII.

Las recomendaciones y prácticas que el sentido común y la experiencia de años han añadido al cuerpo teórico en la práctica corriente de la construcción de cimentaciones (principal aplicación de las Teorías de Capacidad de Carga), son el cuerpo básico de los capítulos VIII y IX. A lo largo de todo este estudio, el lector podrá ir viendo cómo, desde una solución puramente matemática, seleccionada teniendo en mente las necesidades de la Mecánica de Suelos, se llega a criterios constructivos prácticos, que hoy son una superposición de reglas empíricas, fundadas en la experiencia y muchas veces respaldadas por la propia teoría, sobre las soluciones fundamentales, proporcionadas por las Matemáticas Aplicadas y la Mecánica del Medio Continuo, gracias al desarrollo de un cálculo fundado en un grupo de hipótesis, a veces bastante poco satisfactorias.

Para visualizar objetivamente el problema de la Capacidad de Carga en suelos resulta útil el análisis del modelo mecánico que se presenta a continuación, debido a Khristianovich<sup>1</sup>. Considérese una balanza ordinaria, cuyo desplazamiento está restringido por fricción en las guías de los platillos, tal como se muestra en la fig. VI-1.

Si un peso suficientemente pequeño se coloca en un platillo, la balanza permanece en equilibrio, pues la fricción en las guías puede

neutralizarlo; en cambio, si el peso colocado es mayor que la capacidad de las guías para desarrollar fricción, se requerirá, para el equilibrio, un peso suplementario en el otro platillo. Se entenderá por equilibrio crítico de la balanza, la situación en que ésta pierde su equilibrio con cualquier incremento de peso en uno de sus platillos, por pequeño que éste sea. Una balanza muy ligera, en comparación con los pesos manejados, representará un medio sin peso propio; una balanza relativamente pesada respecto a los pesos de sus platillos representará un medio también pesado.

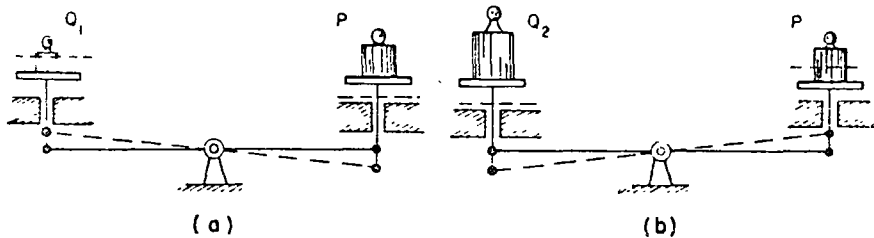


FIG. VI-1. Modelo de Khristianovich<sup>1</sup>

La estabilidad de cimentaciones puede ilustrarse con el siguiente problema planteado en la balanza. En el platillo derecho existe  $P$  y se requiere conocer  $Q$ , que debe colocarse en el platillo izquierdo, para tener la balanza en equilibrio crítico. Es evidente que este problema tiene dos soluciones; una corresponde a un  $Q < P$  y la otra, por lo contrario, a un  $Q > P$ . Las alternativas del equilibrio en estos dos casos ocurren con movimientos diferentes, ilustrados en los casos a) y b) de la fig. VI-1.

Considérese ahora el caso de una cimentación. Un cimiento de ancho,  $B$ , está desplantado a una profundidad  $D$ , dentro de un medio continuo, fig. VI-2.

El problema de una cimentación sería encontrar la carga  $q$ , máxima, que puede ponerse en el cimiento, sin que se pierda la estabilidad del conjunto. La correspondencia con la balanza puede visualizarse, haciendo coincidir un platillo con el cimiento, tal como se ve en la fig. VI-2. El otro platillo está dentro del terreno natural. Es evidente que la presión  $q$  que puede ponerse en el platillo izquierdo es mayor que la carga del otro platillo,  $p = \gamma D$ , puesto que la resistencia del suelo, representada en el modelo por la fricción en las guías, está trabajando a favor del  $q$ . Este caso corresponde entonces al de la fig. VI-1.b; en que  $Q > P$ .

El caso a) de la fig. VI-1, en que  $Q < P$ , corresponde al de una excavación. Ahora  $q$  es nulo, pero conforme se profundiza la excavación las cosas suceden como si se bajase el nivel de la balanza de la fig. VI-2, con la consecuencia del aumento de la presión  $p$ . Es evidente que existirá una profundidad crítica tal que, al tratar de

aumentar la excavación, el fondo de ésta se levantará como el platillo de la balanza lo haría. Este es el fenómeno de *falla de fondo*, frecuentemente reportado en las obras reales.

Un suelo muy resistente equivale a unas guías con mucha fricción y recíprocamente. Los casos límites estarían representados por una roca sana, en la cual, con referencia al caso de la cimentación,  $q$  podría ser muy grande en comparación de  $p$  y por un líquido, de resistencia nula al esfuerzo cortante, en el que el máximo  $q$  que puede ponerse es igual a  $p$  (principio de flotación). Una cimentación en la que  $q$  sea igual a  $p$  se denomina en Mecánica de Suelos *totalmente compensada*.

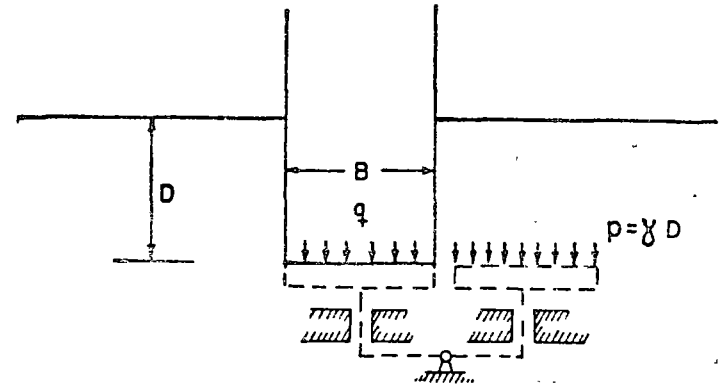


FIG. VI-2. Correspondencia de un cimiento con la balanza de Khristianovich.

Tras visualizar objetivamente el problema que plantea una cimentación, en los párrafos que siguen se discute brevemente la aplicabilidad y la metodología de las dos disciplinas de la Mecánica del Medio Continuo que se han usado principalmente hasta hoy para resolver teóricamente el problema; estas dos disciplinas son las Teorías de la Elasticidad y de la Plasticidad.

## VI-2. Metodología de la Teoría de la Elasticidad<sup>2</sup>

La Teoría de la Elasticidad se aplica a los problemas de cimentaciones en forma análoga al diseño estructural; es decir, primeramente se encuentran los esfuerzos que un cierto sistema de cargas exteriores produce en los puntos de la masa de suelo; en segundo lugar se encuentra la resistencia del suelo a ese tipo de esfuerzos. Una comparación entre ambos conceptos indicará si la masa de suelo

puede resistir sin que se produzca la *falla* u ocurran deformaciones excesivas que pongan en peligro la función estructural. El suelo, como cualquier otro material, puede sufrir deformaciones de dos tipos: deformaciones volumétricas y distorsiones. Las primeras son debidas tanto a la acción de esfuerzos normales como a la de esfuerzos cortantes. Las distorsiones son cambios sólo de forma y se deben fundamentalmente a la acción de los esfuerzos tangenciales. En materiales ideales linealmente elásticos (obedientes a la ley de Hooke) son nulos los cambios de volumen debidos a esfuerzos tangenciales, por lo que, en ese caso, la deformación volumétrica se debe a los esfuerzos normales únicamente.

Como ya se indicó en el Volumen I de esta obra la resistencia a la tensión de los suelos es muy pequeña, al grado de ser difícilmente aprovechable por el ingeniero, por lo que éste procura que este tipo de esfuerzos o no aparezca o no sea de importancia en las estructuras para las que utiliza al suelo. Por ello, los análisis de estabilidad ligados a estructuras reales tienen siempre que ver con los esfuerzos cortantes actuantes en la masa de suelo y con la resistencia de éstos al esfuerzo cortante.

La determinación de los esfuerzos en los puntos de la masa de suelo es un problema teórico para el cual la Teoría de la Elasticidad es útil, aún cuando, por la magnitud de las hipótesis que involucra, rinde frecuentemente soluciones que no son muy apropiadas a los problemas a que se aplican. La determinación de la resistencia del suelo para fines de comparación es un problema complejo, que comprende aspectos teóricos y muchos de carácter puramente práctico, tales como exploración, muestreo, pruebas de laboratorio, etc. En el Volumen I de esta obra se describió este problema en forma suficiente.

Si al efectuar la comparación resulta que la resistencia del suelo es en todo punto del medio superior a los esfuerzos cortantes inducidos, la respuesta al problema de estabilidad es evidente y la estructura de suelo soportará, dentro del marco de validez del análisis realizado, las cargas impuestas. Por otra parte, puede ocurrir que la resistencia resulte inferior a los esfuerzos inducidos en algún punto o zona del medio; este punto o zona *fallará* elásticamente hablando. Pero si este punto o zona están confinados en la masa de suelo y rodeados de material con capacidad adicional de resistencia, no necesariamente existe peligro de deslizamiento general. Lo que sucede es que esa zona cuya resistencia elástica ha sido superada, fluye algo y transmite los esfuerzos que no puede resistir al material vecino.

Lo anterior produce que el esquema de esfuerzos original deje de ser correcto y en la masa de suelo aparece una *zona plástica*. Sin embargo, la estabilidad general de la masa sigue garantizada. Si las cargas exteriores aumentan, la zona plástica crecerá correspondientemente, hasta el deslizamiento general cuando la resistencia última

del medio continuo sea excedida, por ejemplo, en todo punto de una superficie de deslizamiento posible. Así, no sólo será necesario conocer el máximo esfuerzo cortante actuante sobre la masa de suelo, sino que también será preciso conocer las circunstancias en que se presenta, donde ocurre y las consecuencias que puede acarrear. Sólo en los casos en que sea posible la verificación de un mecanismo de falla progresiva (ver Capítulo XII del Volumen I de esta obra), en que el esfuerzo actuante supere a la resistencia al esfuerzo cortante en un punto o una zona conducirá a una *falla* general.

La Teoría General de la Elasticidad ha sido, hasta hoy, poco aplicada a los suelos, quizá debido a lo incompleto aún de su campo, en plena etapa de investigación; a las dificultades matemáticas que su aplicación encierra y, sobre todo, a las limitaciones de la propia Teoría, que vuelven relativamente escépticos a muchos especialistas en suelos. Casi todas las aplicaciones clásicas de la Teoría de la Elasticidad a suelos han correspondido a la Teoría Lineal de la Elasticidad, que presupone que el suelo es un material continuo, linealmente elástico (que obedece la Ley de Hooke), homogéneo e isótropo; además, esta teoría es *instantánea*, es decir, que no toma en cuenta el factor tiempo, o sea, presupone la inexistencia de las deformaciones diferidas (tales como, por ejemplo, las debidas a consolidación). Es obvio que este conjunto de hipótesis no se satisface en los suelos reales y ésta, es la razón principal por la que las soluciones basadas en la Elasticidad Lineal han caído hoy en relativo descrédito. Es de notar, sin embargo, que en algunos casos particulares, esta Teoría ha proporcionado soluciones bastante satisfactorias en la práctica; la solución de Boussinesq, ya estudiada en el Capítulo II o la conocida Teoría de los Centros de Tensión, desarrollada para el análisis de un problema específico de asentamientos debidos a bombeo para extracción de petróleo, en la zona de Long Beach, Cal. EE. UU., por el doctor Nabor Carrillo, son ejemplos típicos de ello.

En el Capítulo VII se mencionarán brevemente algunas de las soluciones clásicas de la Elasticidad Lineal al problema de las cimentaciones.

### VI-3. Análisis basados en la Teoría de la Plasticidad

Otro intento para resolver teóricamente los problemas de la Mecánica de Suelos está fundado, como ya se dijo, en la Teoría de la Plasticidad. Puede decirse que esta Ciencia ha sido más fértil en su aplicación a suelos que la Elasticidad: el número de problemas prácticos para los que da un enfoque razonable es mayor y los problemas, en sí, son de mayor importancia. Sin embargo, no debe olvidarse que el aceptar para los suelos un comportamiento plástico equivale a substituir el suelo real de una obra por un ente ideal, cuyas



características de comportamiento frecuentemente son bien distintas a las del material real.

Se considera comúnmente que un material tiene un comportamiento plástico cuando se comporta elásticamente hasta un cierto nivel de esfuerzos, a partir del cual (comportamiento plástico propiamente dicho), sigue las leyes de la fig. VI-3.a (comportamiento idealmente plástico), o las de la VI-3.b (comportamiento plástico, con endurecimiento por deformación). Hasta llegar al nivel de esfuerzos correspondiente al comportamiento plástico, suele considerarse en la literatura la posibilidad de que el material pueda tener o no deformación elástica; en el primer caso se tiene un comportamiento elasto-plástico; en el segundo, rígido-plástico; en este último caso, el comportamiento plástico también puede ser perfecto o con endurecimiento por deformación, (figs. VI-3.c y VI-3.d).

Al aceptar la Teoría de la Plasticidad como base de análisis teóricos en la Mecánica de Suelos surgen dos cuestiones que han de ser consideradas<sup>2</sup>:

- a) Grado de validez de la hipótesis realizada
- b) Implicaciones de tales hipótesis

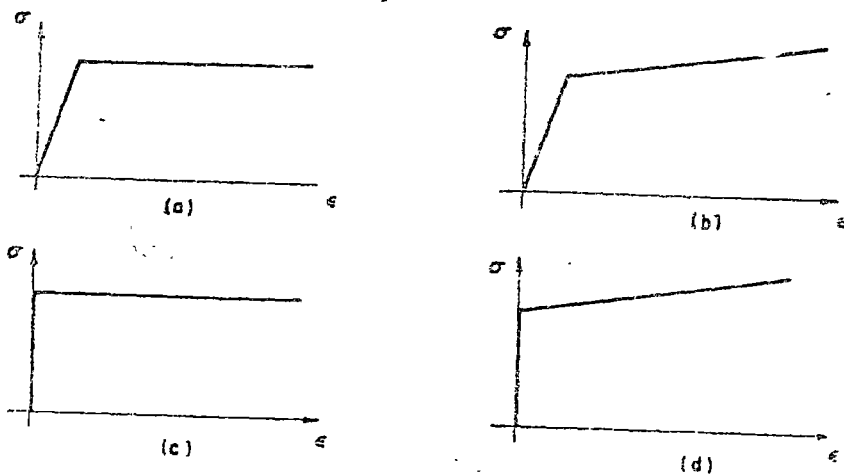


FIG. VI-3. Comportamientos plásticos

- a) Elasto-plástico perfecto
- b) Elasto-plástico, con endurecimiento por deformación
- c) Rígido-plástico perfecto
- d) Rígido-plástico, con endurecimiento por deformación

En lo que sigue se analizan brevemente las hipótesis más importantes contenidas en la Plasticidad, tratando de visualizar esas dos cuestiones:

### 1. El material es homogéneo e isotrópico

Esta hipótesis, común por otra parte a la Teoría de la Elasticidad tal como suele aplicarse a los suelos, tiene su origen en la búsqueda de la simplicidad matemática y física en las aplicaciones de la Teoría; al prescindir de ella, lo cual puede hacerse en muchos casos particulares, los análisis se complican. En la práctica, algunos suelos se acercan más a la hipótesis que otros; los suelos estratificados o aquellos cuyas propiedades en dirección vertical y horizontal difieren mucho son los que se separan más de la suposición.

### 2. No se consideran efectos en el tiempo

Esta hipótesis también es común a la Teoría de la Elasticidad, tal como comúnmente se aplica.

En las arenas, la hipótesis es bastante satisfactoria, tanto en lo referente a compresibilidad como a resistencia y aún en lo referente a las curvas esfuerzo-deformación. En las arcillas, el efecto del tiempo es de mayor importancia, tal como se desprende de lo estudiado en el Volumen I de esta obra, en sus partes alusivas.

La influencia del tiempo en el comportamiento de los suelos es de gran importancia tanto teórica como práctica y ha merecido últimamente bastante atención por parte de los investigadores. Los trabajos de Casagrande y Shannon<sup>3</sup>, parecen confirmar lo arriba asentado para arenas. Ha sido más difícil establecer conclusiones definitivas en lo que se refiere a arcillas. En los trabajos publicados por Habib y Hverslev<sup>4, 5</sup> se podrá ver parte del ideario que hoy se maneja, pudiéndose observar que la investigación actual permite llegar a conclusiones contradictorias, lo cual habla por sí solo de las incertidumbres que aún subsisten en estos aspectos. Sin embargo, parece cierto que en las aplicaciones prácticas el estudiar las condiciones más desfavorables de la vida de la estructura, para tomarlas como criterio de proyecto, proporciona una norma que permite superar sin peligro mucho de la ignorancia que hoy se siente.

### 3. No se consideran fenómenos de histéresis en la curva esfuerzo-deformación

El aceptar esta hipótesis en los suelos conduce, aparentemente, a fuertes desviaciones de la realidad; sin embargo, en la práctica, la situación se arregla considerando en una curva esfuerzo-deformación que contenga tramos de carga y descarga, una ley particular para el primero y otra, diferente, para el segundo. Esto es posible y aceptable dado que los casos prácticos más frecuentes, en la Mecánica de Suelos aplicada, corresponden o bien a un problema de carga, o bien a uno de descarga, bien definidos.

### 4. No se consideran efectos de temperatura

Dada la pequeña variación de temperatura que afecta a los suelos reales, se considera hoy que esta hipótesis no introduce ningun-

na desviación sería en los análisis. Algunos casos especiales, tales como la acción de helada, son objeto de estudio específico en la Mecánica de Suelos actual.

Las hipótesis anteriores implican, al ser aceptadas algunas características de comportamiento de los materiales plásticos que, al no ser cumplidas estrictamente por los suelos, transforman la teoría subsecuente en una doctrina referente, una vez más, a un material ideal que ya no es el suelo de las obras de ingeniería.

Puede demostrarse en Teoría de la Plasticidad (ver, por ejemplo, la ref. 3), que en los materiales plásticos friccionantes todo proceso de deformación plástica debe de ir acompañado de un aumento de volumen. Esta implicación, que es la más importante desde el punto de vista práctico de todas las predeterminadas por las anteriores hipótesis, se confirma experimentalmente, según se vio en el Capítulo XII del Volumen I de esta obra, en el caso de arenas compactas con relación de vacíos inferior a la crítica, pero en el caso de arenas sueltas sucede lo contrario, por lo que, en este caso, no son aplicables los criterios de análisis a partir de la Teoría de la Plasticidad; por extensión, resulta comprometida aún la aplicación de tales criterios a las arenas compactas, pues puede sospecharse que la coincidencia de comportamientos sea fortuita.

Otras implicaciones de las hipótesis anteriores pueden consultarse en la mencionada ref. 3.

#### VI-4. Algunos conceptos fundamentales de la Teoría de la Plasticidad de aplicación a suelos

Las aplicaciones de la Teoría de la Plasticidad a la Mecánica de Suelos realizadas hasta el presente y aquellas que conducen al establecimiento de las Teorías de Capacidad de Carga son un ejemplo de ello, han considerado al suelo una relación esfuerzo-deformación del tipo de la mostrada en la fig. VI-3.c; es decir, un comportamiento rígido-plástico.

La hipótesis de rigidez inicial, supuesto un comportamiento plástico para el suelo, no implica grave error, pues es un hecho que, en la mayoría de los casos prácticos, las deformaciones de los suelos previas a la falla (deformaciones elásticas) son muy pequeñas y pueden despreciarse.

También se ha aplicado siempre a los suelos la Plasticidad considerando la Teoría Lineal de la Deformación; es decir, considerando que la geometría de la masa no sufre cambios durante el proceso de deformación. Esto implica que los resultados teóricos sólo serán presumiblemente aplicables en el instante mismo del colapso, durante el cual se producirán ya deformaciones grandes.

La aplicación de la Teoría de la Plasticidad a un problema práctico requiere aceptar para el material de que se trate un *criterio de fluencia*; es decir, se precisa establecer de antemano un nivel de esfuerzos para el cual se admite que ocurrirá la fluencia indefinida de dicho material. En Mecánica de Suelos ha sido usual aceptar como criterio de fluencia la misma ley de Mohr-Coulomb; es decir, el suelo fluye indefinidamente en todo punto en que el esfuerzo cortante alcance el valor

$$\tau = s + \sigma \operatorname{tg} \phi$$

a no ser que exista alguna restricción en la vecindad del punto o zona plasticada, en cuyo caso la fluencia indefinida puede ser impedida. (Estado Plástico Contenido.)

En el Capítulo XI del Volumen I de esta obra se demostró que el plano en el cual ocurre la falla de un elemento prismático del material forma un ángulo de  $45 + \phi/2$  con el plano en el que obra el esfuerzo principal mayor y un ángulo de  $45 - \phi/2$  con aquél en que obra el esfuerzo principal menor.

En el caso más general de un elemento prismático, sujeto a un estado de esfuerzos tal que el esfuerzo principal intermedio,  $\sigma_2$ , tiene un valor diferente tanto de  $\sigma_1$  como de  $\sigma_3$ , lo antes dicho es válido igualmente, con el resultado de que, en este caso, los planos potenciales de falla son los mostrados en la fig. VI-4.a, con ángulos entre ellos de  $90 \pm \phi$ .

En un estado de esfuerzos no uniforme los conceptos anteriores pueden generalizarse aún más. Considérese, por ejemplo, un estado de deformación plana análogo al que se presenta en el relleno de un muro de retención o en un talud largos (nótese que estos casos

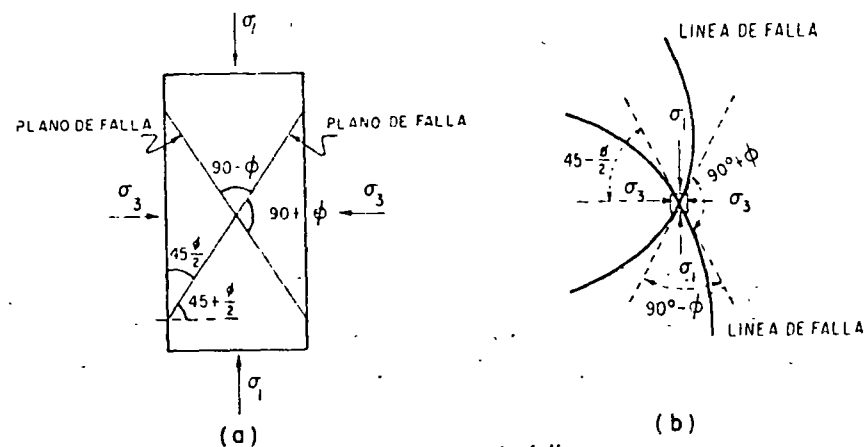


FIG. VI-4 Líneas de falla

corresponden a estados de esfuerzos no uniformes en el medio, pues éstos crecen con la profundidad por el peso propio del material). En este caso, se definen como líneas de falla a aquellas líneas imaginarias que son, en cada punto, respectivamente tangentes a los planos de falla que se definirían en un elemento prismático infinitesimal que se ubicara en dicho punto. De lo antes dicho, se desprende que por todo punto del material en estado de falla incipiente pasan dos líneas de falla que forman entre sí ángulos de  $90 + \phi$  ó  $90 - \phi$ , según cual se considere y que forman ángulos de  $45 - \phi/2$  y  $45 + \phi/2$ , respectivamente, con las direcciones de los esfuerzos principales máximo y mínimo ligadas al punto en cuestión (fig. VI-4.b).

Puede verse que si una familia de líneas de falla está formada por rectas paralelas, la segunda familia debe estar también formada por rectas paralelas que corten a las primeras en ángulos de  $90 \pm \phi$ . Análogamente, si una de las familias de líneas de falla está formada por un haz de rectas concurrentes en un punto, la segunda familia es un sistema de espirales logarítmicas ( $r = r_0 e^{\pm \theta \tan \phi}$ ) con polo en dicho punto de concurrencia, ya que tales curvas son las únicas que pueden cumplir con el haz la condición de intersección a  $90 \pm \phi$ .

En la Teoría de la Plasticidad es importante el estudio del campo de velocidades de desplazamiento de los puntos de un material, dentro de la zona en fluencia plástica; del estudio de la distribución de dichas velocidades y de acuerdo con las hipótesis de la Teoría es posible concluir que las líneas de falla gozan de la importante propiedad de que la velocidad de deformación a lo largo de ellas mismas es nula. También tienen la característica de que a lo largo de ellas un desplazamiento tangencial implica un desplazamiento normal, ligados ambos por la relación de que el normal es igual al tangencial por  $\tan \phi$ . Estas condiciones, más la de dilatación ya señalada, en unión a las condiciones de frontera del problema bastan para definir por completo el campo de distribución de velocidades de desplazamiento de los puntos del medio, siempre y cuando se conozca también la distribución de las líneas de falla.

Por último, se puede demostrar en la Teoría que un medio sólo puede sufrir movimientos de rotación o traslación como cuerpo rígido, cuando la superficie de deslizamiento y las líneas de falla sean rectas o espirales logarítmicas de ecuación igual a la arriba escrita (en un suelo puramente cohesivo la espiral se transforma en un arco de circunferencia). Estos tipos de movimientos son frecuentes en los mecanismos de falla utilizados en Mecánica de Suelos y concretamente en temas de Capacidad de Carga, por lo que puede preverse el uso de tales líneas de deslizamiento en dichos temas. Incidentalmente, es de notar que en el Método Suco, usado en Estabilidad de Taludes (capítulo V) se utiliza una curva de deslizamiento circular asociada a un movimiento de rotación como cuerpo rígido de la

masa de suelo deslizante, lo cual no es congruente en Teoría de la Plasticidad, según lo arriba anotado.

En un material perfectamente plástico los niveles de esfuerzo no pueden aumentar sin límite al aumentar las sollicitaciones externas; al alcanzarse la condición de fluencia las deformaciones aumentan a esfuerzo constante. Por lo tanto, un medio plástico sujeto a cargas crecientes debe llegar a una situación tal que un pequeño aumento en los esfuerzos produzca el flujo plástico. Tal condición crítica recibe el nombre de *estado de colapso plástico* y el sistema de cargas que la produce se llama *sistema de cargas límite*. La distribución de velocidades de deslizamiento en el momento del colapso plástico es el *mecanismo de colapso* o *mecanismo de falla*.

Se dice que un estado de esfuerzos es estáticamente admisible cuando satisface las condiciones de equilibrio, las de frontera impuestas por el problema concreto de que se trate y cuando el nivel de esfuerzos en todo punto es tal que la condición de fluencia no se ve sobrepasada.

Se dice que un campo de velocidades de deformación es cinemáticamente admisible si proviene de un campo de velocidades de desplazamiento que satisfaga las condiciones de frontera, la relación entre los desplazamientos normales y tangenciales a lo largo de las líneas de falla antes mencionadas y la condición de que la velocidad de deformación a lo largo de las mismas líneas de falla sea nula.

En los anteriores conceptos se basan dos teoremas de interés fundamental en las aplicaciones de la Teoría de la Plasticidad a los suelos. Estos reciben el nombre de Teoremas de Colapso Plástico.

### I. Primer Teorema

Entre todas las distribuciones de esfuerzos estáticamente admisibles, la distribución real es la que corresponde al factor de seguridad máximo. Es decir, si se calcula un factor de seguridad igual o mayor que uno para un sistema de cargas actuantes sobre el suelo en estudio, haciendo uso de una cierta distribución de esfuerzos estáticamente admisible, el factor de seguridad real, correspondiente a la distribución de esfuerzos real, será mayor que el calculado. Con mayor razón el mismo sistema de cargas, pero con magnitudes menores para éstas, conducirá a una situación estable.

### II. Segundo Teorema

Entre todos los campos de velocidades de deformación cinemáticamente admisibles, el campo real es el que corresponde al mínimo factor de seguridad. Es decir, si se calcula un factor de seguridad menor o igual que uno para un sistema de cargas actuantes sobre el suelo en estudio, haciendo uso de una distribución de velocidades de deformación cinemáticamente admisible, el factor de seguridad

real correspondiente a la distribución de velocidades de deformación real, será menor que el calculado. Con mayor razón, el mismo sistema de cargas, pero consideradas de mayor magnitud, conducirá a una situación inestable.

La demostración de estos enunciados puede verse en la ref. 7 ó en un tratado similar de Plasticidad.

El primer Teorema de Colapso Plástico permite calcular una cota inferior del sistema de cargas límite; es decir, permite calcular un valor límite del sistema de cargas tal que, para cualquier valor de las cargas menor que las calculadas, el sistema es estable.

Análogamente, el segundo Teorema de Colapso Plástico permite calcular una cota superior del sistema de cargas límite, o sea un sistema de cargas tal que cualquier otro con cargas mayores produce el colapso plástico de la estructura.

La combinación de los dos teoremas proporciona un método de diseño estructural muy sugestivo. En efecto, si ambos teoremas se aplican se tienen dos sistemas de cargas entre los cuales deberá estar ubicado el sistema crítico real que produce el colapso de la estructura en estudio. Este método, conocido como Análisis Límite, es frecuentemente usado en Mecánica de Suelos en forma más o menos explícita; por ejemplo, un análisis de estabilidad de taludes es una aplicación incompleta del mismo, ya que lo que allí se obtiene es la cota superior del sistema de cargas límite, sin obtener la inferior. En problemas en que las cotas superior e inferior coincidan, el análisis límite conducirá a una solución definitiva del problema, en materiales idealmente plásticos. En cuestiones de Capacidad de Carga las soluciones por Análisis Límite son particularmente utilizadas.

Los Teoremas de Colapso Plástico tienen un significado que, en lenguaje simplista, podría expresarse como sigue: la naturaleza es muy sabia y si se encuentra analíticamente una manera de que el suelo pueda soportar una carga dada, la naturaleza se encargará de que el suelo la soporte con menor dificultad. Análogamente, si se encuentra analíticamente un modo de que la carga impuesta al suelo produzca su falla, la misma naturaleza se encargará de que esa falla ocurra con un mecanismo más simple.

#### REFERENCIAS

1. Sokolovski, V. V.—*Statics of Soil Media*.—Capítulo 2 (Trad. del ruso por D. H. Jones y A. N. Schofield) — Butterworths Scientific Publications, 1960.
2. Jürgenson, L.—*The application of theories of Elasticity and Plasticity to Foundation Problems* — Contributions to Soil Mechanics (1925-1940) — Boston Society of Civil Engineers.

3. Resendiz, D.—*Algunos métodos de la Mecánica de Suelos basados en la Teoría de la Plasticidad*— Tesis de Maestro en Ingeniería.— División del Doctorado, Facultad de Ingeniería — U.N.A.M. — México — 1962.
4. Casagrande, A. y Shannon, W. L.—*Research in stress-deformation and strength characteristics of soils and soft rocks under transient loading* — Soil Mechanics Series N° 31 — Universidad de Harvard — 1948.
5. Habib, P.—*La résistance au cisaillement des sols* — Tesis Doctoral — Universidad de Paris — 1952.
6. Hvorslev, J.—*Physical components of the Shear Strength of Saturated clays* — A.S.C.E. Research Conference of Shear Strength of Cohesive Soils — Boulder, Colorado — 1960.
7. W. Prager y Ph. G. Hodge.—*Theory of Perfectly Plastic Solids* — Capítulo 8 — John Wiley and Sons — 1961.

#### BIBLIOGRAFIA

- Theory of Perfectly Plastic Solids* — W. Prager y Ph. G. Hodge — John Wiley and Sons — 1961.
- Statics of Soil Media* — V. V. Sokolovski (Trad. por D. H. Jones y A. N. Schofield) — Butterworths Scientific Publications — 1960.
- Plasticité* — A. A. Ilouchine (Trad. por A. Popof y P. Thomé) — Eyrolles Ed. — 1956.
- The Inelastic behavior of Engineering Materials and Structures* — A. M. Freudenthal — John Wiley and Sons — 1950.
- The Mathematical Theory of Plasticity* — R. Hill — Oxford Clarendon Press — 1950.
- Plasticity* — A. Nadai — McGraw Hill Ed. — 1951.
- Introduction to the Theory of Plasticity for Engineers*. — O. Hoffman y G. Sachs — McGraw-Hill Ed. — 1953.

## CAPITULO VII

### TEORIAS DE CAPACIDAD DE CARGA EN SUELOS

#### VII-1. Introducción

En este capítulo se trata de los principales esfuerzos teóricos realizados para resolver el problema de la Capacidad de Carga de los Suelos. Una buena parte de las teorías desarrolladas tienen su base en hipótesis simplificadoras del comportamiento de los suelos y en desarrollos matemáticos a partir de tales hipótesis; en algunas otras teorías, especialmente en las que corresponden a esfuerzos recientes, la observación y el empirismo juegan un papel mucho más importante. Se puede decir que todas las teorías matemáticas tienen como punto de partida la solución de Prandtl al problema de la indentación de un sólido rígido en un medio continuo, semi-infinito, homogéneo e isótropo bajo condiciones de deformación plana; esta solución, desarrollada en el marco de la Teoría de la Plasticidad, supone al medio rígido-plástico perfecto.

Con el objeto de asentar las ideas que presiden estos estudios, se presentan al principio ilustraciones simples de la aplicación de los Teoremas Extremos (capítulo VI) a algunos casos sencillos de interés para lo que sigue. También, con el mismo objeto, se presentan intentos de resolver el problema de capacidad de carga diferentes a los originados por los trabajos de Prandtl. En general, conviene reducir el problema a dos casos: la Capacidad de Carga de los suelos puramente "cohesivos" ( $c \neq 0$ ;  $\phi = 0$ ) y la de los suelos puramente "friccionantes" ( $c = 0$ ;  $\phi \neq 0$ ). Algunas de las teorías más usadas hoy se presentarán, sin embargo, para el caso más amplio de suelos con "cohesión" y "fricción".

En este capítulo no se ahondará en las virtudes y defectos de las distintas teorías para su aplicación a los diferentes casos prácticos. Para obtener información sobre tan fundamental cuestión, el lector deberá consultar los capítulos VIII y IX.

#### VII-2. Una aplicación simple del Análisis Límite al problema de la Capacidad de Carga en suelos puramente "cohesivos"

La teoría de la Elasticidad permite establecer la solución para el estado de esfuerzos en un medio semi-infinito, homogéneo, isó-

tropo y linealmente elástico, cuando sobre él actúa una carga uniformemente distribuida, sobre una banda de ancho  $2b$  y de longitud infinita (fig. VII-1).

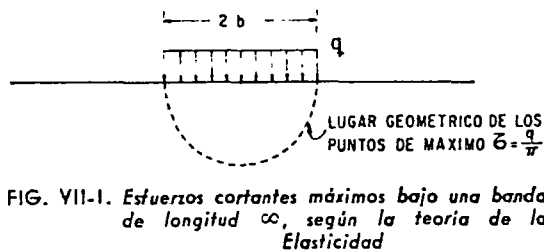


FIG. VII-1. Esfuerzos cortantes máximos bajo una banda de longitud  $\infty$ , según la teoría de la Elasticidad

En efecto, puede demostrarse<sup>1</sup> que para la condición de carga mostrada los máximos esfuerzos cortantes inducidos en el medio vale  $q/\pi$  y ocurren en puntos cuyo lugar geométrico es el semicírculo mostrado, cuyo diámetro es  $2b$ .

Por ser una solución obtenida por la Teoría de la Elasticidad puede garantizarse que ese estado de esfuerzos satisface las condiciones de equilibrio y de frontera, por lo que la solución será un estado de esfuerzos estáticamente admisible, siempre y cuando el valor de  $\tau_{m\acute{a}x}$  no sobrepase el valor de la resistencia del material, supuesta igual a  $c$  (condición necesaria para que no haya fluencia en ningún punto del medio).

Si:

$$\tau_{m\acute{a}x} = c = \frac{q}{\pi};$$

se sigue que:

$$q_{m\acute{a}x} = \pi c \quad (7-1)$$

lo cual fija el máximo valor de  $q$ .

De acuerdo con el Primer Teorema de Colapso Plástico (capítulo VI), la ec. 7-1 proporciona una cota inferior para el valor de  $q_u$ , carga última que puede colocarse sobre el medio, sin que ocurra falla en ningún punto del mismo.

En el Anexo VII-a se presenta un análisis más detallado de la solución anterior.

Por otra parte, según se desprende del citado Anexo, el análisis en estudio no proporciona ningún mecanismo posible de falla general, a pesar de que, a primera vista, pudiera juzgarse que por constituir todos los puntos en que se llega al mismo tiempo a la falla incipiente un semicírculo, la masa de suelo deslizará con movimiento de cuerpo rígido sobre dicha superficie. Pero debe hacerse notar, una vez más, que dicho semicírculo no es una superficie de deslizamiento por no ser los esfuerzos cortantes de falla tangentes a él. Lo que suceda cuando la carga aumente ligeramente a partir del valor que produzca  $\tau_{m\acute{a}x} = c$  en todos los puntos del semicírculo está fuera del campo del análisis elástico.

Para completar la aplicación del análisis límite a los problemas de capacidad de carga en suelos puramente "cohesivos" se necesita encontrar una cota superior para el valor de la carga última,  $q_u$ . Para lograr tal fin considérese un análisis de capacidad realizado según los lineamientos de la fig. VII-2 que, básicamente, consiste en una aplicación del Método Sueco al problema de Capacidad de Carga.

En efecto, considérase una superficie de falla circular, con centro en  $O$ , extremo del área cargada y radio  $2b$ , igual al ancho del cimiento. El momento motor, que tiende a producir el giro del terreno de cimentación como cuerpo rígido sobre la superficie de deslizamiento, vale

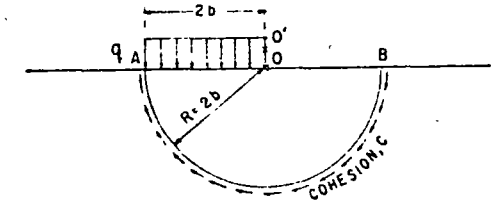


FIG. VII-2. Análisis de capacidad de carga considerando una superficie de falla circular

El momento resistente, que se opone al giro, es producido por la "cohesión" del suelo y vale

$$m = q \times 2b \times b = 2qb^2$$

El momento resistente, que se opone al giro, es producido por la "cohesión" del suelo y vale

$$R = 2\pi b \times 2b \times c = 4\pi c b^2$$

Comparando ambos se deduce que, para el círculo analizado, la carga máxima que puede tener el cimiento, sin falla, será:

$$q = 2\pi c = 6.28c.$$

En realidad puede demostrarse (W. Fellenius) que el círculo analizado no es el más crítico posible. En efecto, si se escoge un centro en  $O'$ , sobre el borde del área cargada, pero más alto que  $O$ , puede probarse que existe un círculo, el más crítico de todos, para el que

$$q_{m\acute{a}x} = 5.5c \quad (7-2)$$

representa la carga máxima que puede darse al cimiento, sin que ocurra el deslizamiento a lo largo del nuevo círculo.

Debe notarse que una superficie de falla, a lo largo de la cual ocurre una rotación de cuerpo rígido representa, según ya se indicó, un campo de velocidades de deslizamiento cinemáticamente admisible y, por lo tanto, un mecanismo posible de falla. Por ello y de

acuerdó con el 2º Teorema de Colapso Plástico, el valor dado por la ec. 7-2 es una cota superior de la carga última,  $q_u$ , considerando el medio como idealmente plástico.

Así, la carga última real,  $q_u$ , resulta acotada entre los valores

$$\pi c \leq q_u \leq 5.5. c \quad (7-3)$$

La solución de Prandtl, ya mencionada, permite, con otro mecanismo de falla, llegar a otra cota superior del problema que es menor que la obtenida por Fellenius, reduciéndose así aún más el intervalo teórico en que debe encontrarse la solución.

### VII-3. La solución de Prandtl

Prandtl estudió en 1920 el problema de la indentación de un medio semi-infinito, homogéneo, isótropo y rígido-plástico perfecto, por un elemento rígido de longitud infinita, de base plana. Considerando que el contacto entre el elemento y el medio era perfectamente liso, propuso el mecanismo de falla que se muestra esquemáticamente en la fig. VII-3.

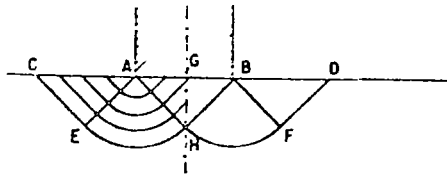


FIG. VII-3. Solución de Prandtl

Se trata, naturalmente, de calcular la máxima presión que se puede dar al elemento rígido sin que penetre en el medio semi-infinito; a este valor particular de la presión se le denomina *carga límite*.

La superficie AB es un plano principal, por no existir en ella esfuerzos rasantes (plano liso). Las superficies AC y BD son superficies libres, exentas de todo esfuerzo y, por lo tanto, también son planos principales. Con base en lo anterior, más la intuición de que los esfuerzos normales horizontales a lo largo de AC y BD, inducidos por la presión del elemento, son de compresión, se deduce que para tener un estado de falla incipiente en la vecindad de dichas superficies se requerirá que el esfuerzo de compresión mencionado deba tener un valor de  $2c$ . (En efecto, siendo el medio un sólido de resistencia constante igual a  $c$ , un elemento vecino a la superficie AC o BD está en condición análoga a la que se tiene en una prueba de compresión simple, en la cual la resistencia es  $q_u = 2c$ ). Haciendo uso de la teoría de los cuerpos perfectamente plásticos se encuentra que la región ACE es una región de esfuerzos constantes, iguales a la compresión horizontal arriba mencionada; igualmente la región AGI

es también de esfuerzos constantes. La transición entre ambas regiones es una zona de esfuerzos cortantes radial (AEH). Con estos estados de esfuerzos, Prandtl calculó que la presión límite que puede ponerse en la superficie AB está dada por el valor

$$q_c = (\pi + 2)c \quad (7-4)$$

Lo anteriormente expuesto parece indicar que en el momento del flujo plástico incipiente, el elemento rígido ejerce una presión uniforme igual a  $(\pi + 2)c$  sobre el sólido plástico semi-infinito.

La solución anterior carecería de verosimilitud física si no se le pudiese asociar un mecanismo cinemático de falla posible, con un campo de velocidades cinemáticamente admisible. Prandtl logró esto considerando que la región ABH se incrusta como cuerpo rígido, moviéndose verticalmente como si formara parte del elemento rígido. En la región AEH las líneas de deslizamiento son círculos con centro en A y con velocidad tangente a tales líneas igual a  $\sqrt{2}/2$ , constante en toda la región, supuesto que el elemento rígido desciende con velocidad unitaria. Finalmente, la región ACE se mueve como cuerpo rígido con la velocidad  $\sqrt{2}/2$ , en la dirección de EC.

La anterior solución, debida a Prandtl, es la base de todas las Teorías de Capacidad de Carga que se han desarrollado para aplicación específica a suelos.

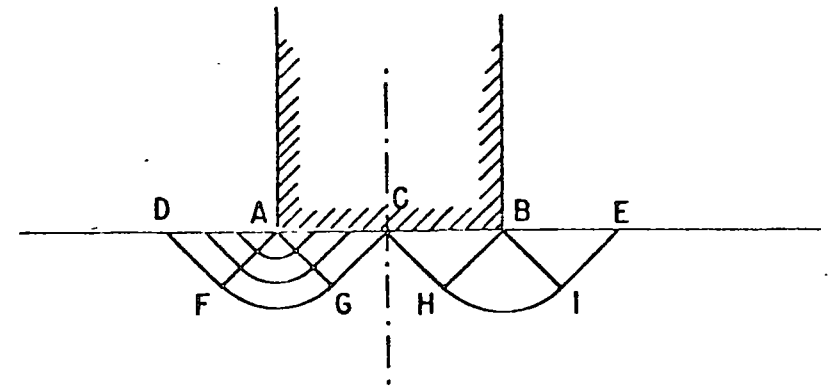


FIG. VII-4. Solución de Hill

VII-4. La solución de Hill

La solución de Prandtl, analizada atrás, no es la única posible para el problema planteado. En efecto, Hill presentó una solución alternativa<sup>4</sup> que se describe brevemente a continuación.

En la fig. VII-4 se muestra el mecanismo de falla propuesto, en el que las regiones *ACG* y *AFD* son de esfuerzos constantes y la región *AFG* es de esfuerzos radiales. Otro tanto puede decirse de las zonas simétricas, en el lado derecho de la figura. Los esfuerzos en estas regiones son los mismos que se presentan en las correspondientes del mecanismo de Prandtl, pero las velocidades de desplazamiento son diferentes. Suponiendo también que el elemento rígido desciende con velocidad unitaria, puede demostrarse que la zona *ACG* debe desplazarse como cuerpo rígido con velocidad  $\sqrt{2}$  en la dirección de *CG*; análogamente los puntos de la región *AFD* se mueven con la misma velocidad  $\sqrt{2}$  en la dirección *FD*; la zona radial se mueve en todos sus puntos con la misma velocidad ( $\sqrt{2}$ ), tangente a los círculos de deslizamiento. Con base en su mecanismo de falla, Hill pudo también calcular la presión límite que el elemento rígido puede transmitir sin indentarse en el medio, obteniendo el mismo valor que proporciona la solución de Prandtl y que se muestra en la expresión 7-4.

Es interesante notar que si la superficie del medio semi-infinito no fuese horizontal, sino que adoptase la forma que aparece en la fig. VII-5, la presión límite toma el valor

$q_c = 2c(1 + \theta)$  (7-5)

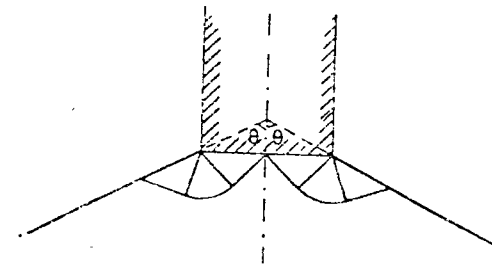


FIG. VII-5. Cuña truncada sujeta a indentación

La expresión 7-5 tiene como límites  $q_c = 2c$ , para  $\theta = 0$ , caso de una prueba de compresión simple y resultado en ella obtenido y  $q_c = (\pi + 2)c$ , para  $\theta = 90^\circ$ , que corresponde a superficie horizontal en el medio semi-infinito.

VII-5. La teoría de Terzaghi

La teoría de Terzaghi es uno de los primeros esfuerzos por adaptar a la Mecánica de Suelos los resultados de la Mecánica del Medio Continuo atrás tratados. En lo que sigue, se presenta sumari-

riamente en la forma original utilizada por el propio Terzaghi<sup>5</sup>. La Teoría cubre el caso más general de suelos con "cohesión y fricción" y su impacto en la Mecánica de Suelos ha sido de tal trascendencia que aún hoy, es posiblemente la teoría más usada para el cálculo de capacidad de carga en los proyectos prácticos, especialmente en el caso de cimientos poco profundos.

La expresión *cimiento poco profundo* se aplica a aquél en el que el ancho *B* es igual o mayor que la distancia vertical entre el terreno natural y la base del cimiento (profundidad de desplante,  $D_f$ ). En estas condiciones Terzaghi despreció la resistencia al esfuerzo cortante arriba del nivel de desplante del cimiento, considerándola sólo de dicho nivel hacia abajo. El terreno sobre la base del cimiento se supone que sólo produce un efecto que puede representarse por una sobrecarga,  $q = \gamma D_f$ , actuante precisamente en un plano horizontal que pase por la base del cimiento, en donde  $\gamma$  es el peso específico del suelo (fig. VII-6).

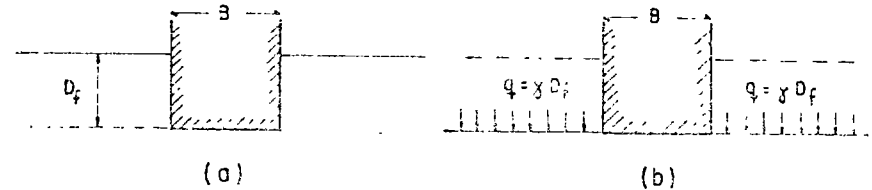


FIG. VII-6. Equivalencia del suelo sobre el nivel de desplante de un cimiento con una sobrecarga debida a su peso

Con base en los estudios de Prandtl, atrás presentados para el caso de un medio "puramente cohesivo", extendidos para un medio "cohesivo y friccionante", Terzaghi propuso el mecanismo de falla

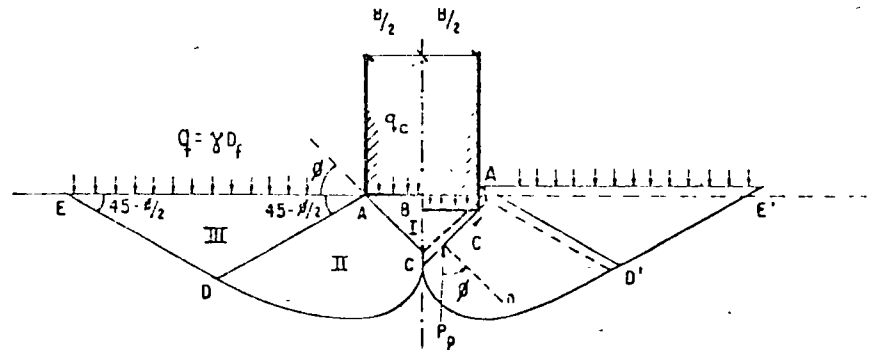


FIG. VII-7. Mecanismo de falla de un cimiento continuo poco profundo según Terzaghi



que aparece en la fig. VII-7 para un cimientó poco profundo, de longitud infinita normal al plano del papel.

La zona I es una cuña que se mueve como cuerpo rígido con el cimientó, verticalmente hacia abajo. La zona II es de deformación tangencial radial; la frontera AC de esta zona forma con la horizontal el ángulo  $\phi$ , cuando la base del cimientó es rugosa; si fuera idealmente lisa, dicho ángulo sería  $45 + \phi/2$ . La frontera AD forma un ángulo  $45 - \phi/2$  con la horizontal, en cualquiera de los dos casos. La zona III es una zona de estado plástico pasivo de Rankine. En el Anexo VII-b se dan algunos detalles adicionales sobre el mecanismo de falla propuesto por Terzaghi.

La penetración del cimientó en el terreno sólo será posible si se vencen las fuerzas resistentes que se oponen a dicha penetración; éstas comprenden al efecto de la cohesión en las superficies AC y la resistencia pasiva del suelo desplazado; actuante en dichas superficies. Por estarse tratando un caso de falla incipiente, estos empujes formarán un ángulo  $\phi$  con las superficies, es decir, serán verticales en cada una de ellas.

Despreciando el peso de la cuña I y considerando el equilibrio de fuerzas verticales, se tiene que

$$q_c B = 2 P_p + 2 C \operatorname{sen} \phi \quad (7-6)$$

donde

$q_c$  = carga de falla en el cimientó, por unidad de longitud del mismo  
 $P_p$  = empuje pasivo actuante en la superficie AC  
 $C$  = fuerza de cohesión actuante en la superficie AC.

Como  $C = cB/2\cos \phi$  (fig. VII-7), se tiene que

$$q_c = \frac{1}{B} (2 P_p + c B \operatorname{tg} \phi) \quad (7-7)$$

El problema se reduce entonces a calcular  $P_p$ , única incógnita en la ec. 7-7.

La fuerza  $P_p$  puede ser descompuesta en tres partes,  $P_{pc}$ ,  $P_{pq}$  y  $P_{p\gamma}$ .

$P_{pc}$  es la componente de  $P_p$  debida a la cohesión actuante a lo largo de la superficie CDE.

$P_{pq}$  es la componente de  $P_p$  debida a la sobrecarga  $q = \gamma D_f$  que actúa en la superficie AE.

$P_{p\gamma}$  es la componente de  $P_p$  debida a los efectos normales y de fricción a lo largo de la superficie de deslizamiento CDE, causados por el peso de la masa de suelo en las zonas II y III.

Teniendo en cuenta el desglosamiento anterior, la ec. 7-7 puede escribirse

$$q_c = \frac{2}{B} (P_{pc} + P_{pq} + P_{p\gamma} + \frac{1}{2} c B \operatorname{tg} \phi) \quad (7-8)$$

Terzaghi calculó algebraicamente los valores de  $P_{pc}$ ,  $P_{pq}$  y  $P_{p\gamma}$ ; después de ello, trabajando matemáticamente la expresión obtenida, logró transformar la ec. 7-8 en la

$$q_c = c N_c + \gamma D_f N_q + \frac{1}{2} \gamma B N_\gamma \quad (7-9)$$

Donde  $q_c$  es la presión máxima que puede darse al cimientó por unidad de longitud, sin provocar su falla; o sea, representa la capacidad de carga última del cimientó. Se expresa en unidades de presión.  $N_c$ ,  $N_q$  y  $N_\gamma$  son coeficientes adimensionales que dependen sólo del valor de  $\phi$ , ángulo de fricción interna del suelo y se denominan "factores de capacidad de carga" debidos a la cohesión, a la sobrecarga y al peso del suelo, respectivamente.

La ec. 7-9 se obtiene de la (7-8) introduciendo en ella los siguientes valores para los factores de capacidad de carga

$$\begin{aligned} N_c &= \frac{2 P_{pc}}{Bc} + \operatorname{tg} \phi \\ N_q &= \frac{2 P_{pq}}{B\gamma D_f} \\ N_\gamma &= \frac{4 P_p}{B^2 \gamma} \end{aligned} \quad (7-10)$$

Si en esas expresiones se colocan los valores obtenidos por el cálculo para  $P_{pc}$ ,  $P_{pq}$  y  $P_{p\gamma}$  se ve que los factores son sólo función del ángulo  $\phi$ , como se dijo.

Prescindiendo de los análisis algebraicos que justifican todas las afirmaciones anteriores, la ec. 7-9 puede tenerse de la (7-8) razonando como sigue:

Observando la fig. VII-7 puede verse que la componente  $P_{pc}$  es proporcional a  $B$  y a  $c$ . En efecto, si  $B$  se duplica, también lo hace la longitud de la superficie de deslizamiento CDE, puesto que duplicar  $B$  equivale a dibujar la nueva figura a escala doble. Evidentemente  $P_{pc}$  será doble si el valor de  $c$  se duplica, independientemente de toda otra consideración. Por ello, podrá escribirse que:

$$P_{pc} = K_c Bc$$

Donde  $K_c$  es una constante que dependerá sólo del valor de  $\phi$  (nótese en la fig. VII-7 que cualquier variación de  $\phi$  trae consigo una variación en la extensión y forma de la superficie de falla).

Análogamente puede observarse que al duplicarse  $B$  se duplica la superficie donde actúa la sobrecarga  $q = \gamma D_f$ , por lo que  $P_{py}$  resulta proporcional al propio valor de  $q$ . Por esto podrá escribirse:

$$P_{py} = K_q B \gamma D_f$$

Con  $K_q$  función sólo de  $\phi$ , por lo que ya se dijo.

Por último, al duplicarse  $B$  se cuadruplica el área de las zonas II y III y con ella el peso del material de dichas zonas. Esto se expresa matemáticamente diciendo que  $P_{py}$  es proporcional a  $B^2$ . Por otra parte, es evidente que  $P_{py}$  debe ser proporcional a  $\gamma$ . Puede así escribirse

$$P_{py} = K_\gamma \gamma B^2$$

$K_\gamma$  es también sólo función de  $\phi$ .

Llevando estos valores a la ec. 7-8 se tiene

$$q_c = \frac{2}{B} (K_c Bc + K_q B \gamma D_f + K_\gamma \gamma B^2 + \frac{1}{2} Bc \operatorname{tg} \phi)$$

$$q_c = [(2 K_c + \operatorname{tg} \phi)c + (2 K_q) \gamma D_f + (2 K_\gamma) B \gamma]$$

Llamando a los términos entre paréntesis  $N_c$ ,  $N_q$  y  $(1/2) N_\gamma$  respectivamente, resulta la ec. 7-9.

Si en esos mismos términos en paréntesis se substituyen los valores de  $K_c$ ,  $K_q$  y  $K_\gamma$  escritos arriba es fácil ver que se obtienen los valores de  $N_c$ ,  $N_q$  y  $N_\gamma$  dados por la ec. 7-10.

La ec. 7-9 es la fundamental de la Teoría de Terzaghi y permite calcular en principio la capacidad de carga última de un cimiento poco profundo de longitud infinita. La condición para la aplicación de la fórmula 7-9 a un problema específico es el conocer los valores de  $N_c$ ,  $N_q$  y  $N_\gamma$  en ese problema. Estos factores, como ya se dijo, son sólo funciones de  $\phi$  y Terzaghi los presenta en forma gráfica; esta gráfica se recoge en la fig. VII-8.

En el Anexo VII-b se presentan algunos de los análisis matemáticos que completan la actual exposición sobre la Teoría de Terzaghi.

Debe notarse que en la fig. VII-8 aparecen tres curvas que dan los valores de  $N_c$ ,  $N_q$  y  $N_\gamma$  en función del ángulo  $\phi$  y aparecen también otras tres curvas que dan valores modificados de esos factores,  $N'_c$ ,  $N'_q$  y  $N'_\gamma$  (líneas discontinuas de la figura). La razón de ser de estas últimas tres curvas es la siguiente: el mecanismo de falla mostrado en la fig. VII-7, supone que al ir penetrando el cimiento en el suelo se va produciendo cierto desplazamiento lateral de modo que los estados plásticos desarrollados incipientemente bajo la carga

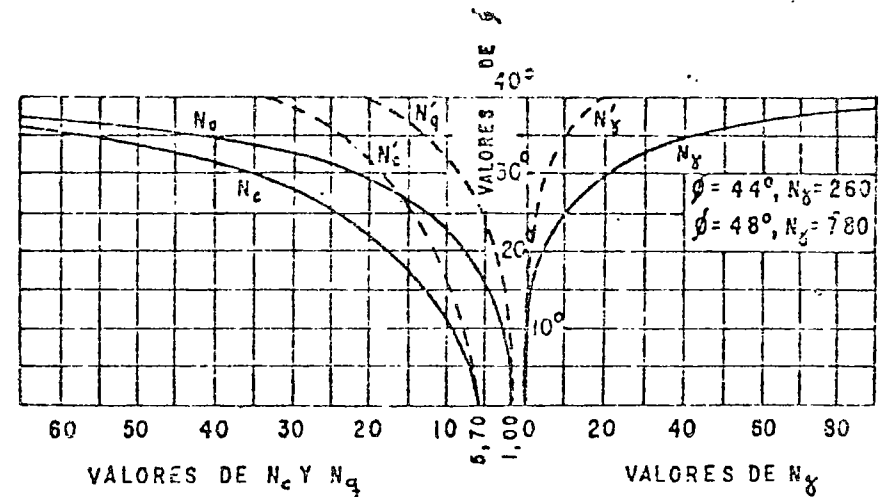


FIG. VII-8. Factores de capacidad de carga para aplicación de la teoría de Terzaghi

se amplían hasta los puntos  $E$  y  $E'$ , en tal forma que, en el instante de la falla, toda la longitud de la superficie de falla trabaja al esfuerzo límite. Sin embargo, en materiales arenosos sueltos o arcillosos blandos, con curva esfuerzo-deformación como la  $C_2$  de la fig. VII-9, en la cual la deformación crece mucho para cargas próximas a la de falla, Terzaghi considera que al penetrar el cimiento no logra desarrollarse el estado plástico hasta puntos tan lejanos como los  $E$  y  $E'$ , sino que la falla ocurre antes, a carga menor, por haberse alcanzado un nivel de asentamiento en el cimiento que, para fines prácticos, equivale a la falla del mismo. Este último tipo de falla es denominado por Terzaghi *local*, en contraposición de la falla en desarrollo completo del mecanismo atrás expuesto, a la que llama *general*.

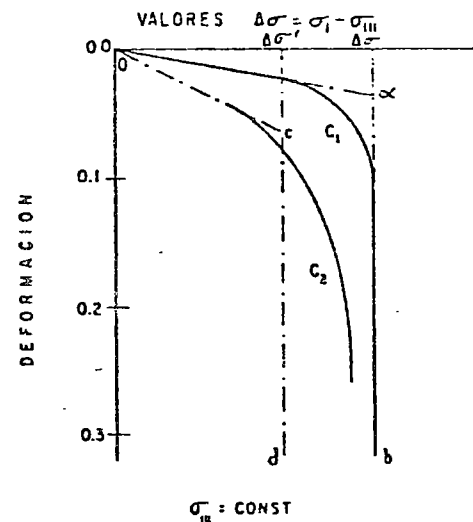


FIG. VII-9. Curvas de esfuerzo-deformación típicas para mecanismo de falla general (1) y local (2), según Terzaghi

Para obtener la capacidad de carga última con respecto a *falla local* de un modo razonablemente aproximado para fines prácticos, Terzaghi corrigió su teoría de un modo sencillo introduciendo nuevos valores de "c" y "φ" para efectos de cálculo: así trabaja con

$$c' = \frac{2}{3} c$$

$$\text{tg } \phi' = \frac{2}{3} \text{tg } \phi$$
(7-11)

O sea, asigna al suelo una resistencia de las dos terceras partes de la real; a este suelo equivalente, Terzaghi le aplica la teoría primeramente expuesta.

Dado un ángulo φ, en un suelo en que la falla local sea de temer, puede calcularse con la expresión 7-11 el φ' equivalente. Si con este valor φ' se entrara a las curvas llenas de la fig. VII-8 se obtendrían valores de los factores N iguales a los que se obtienen entrando con el φ original en las curvas discontinuas, para los factores N'. De este modo Terzaghi evita al calculista la aplicación reiterada de la segunda ec. 7-11.

En definitiva, la capacidad de carga última respecto a falla local queda dada por la expresión

$$q_c = \frac{2}{3} c N'_c + \gamma D_f N'_q + \frac{1}{2} \gamma B N'_\gamma$$
(7-12)

Toda la teoría arriba expuesta se refiere únicamente a cimientos continuos, es decir, de longitud infinita normal al plano del papel. Para cimientos cuadrados o redondos (tan frecuentes en la práctica, por otra parte), no existe ninguna teoría, ni aun aproximada. Las siguientes fórmulas han sido propuestas por el propio Terzaghi y son modificaciones de la expresión fundamental, basadas en resultados experimentales

Zapata cuadrada

$$q_c = 1.3 c N_c + \gamma D_f N_q + 0.4 \gamma B N_\gamma$$
(7-13)

Zapata circular

$$q_c = 1.3 c N_c + \gamma D_f N_q + 0.6 \gamma R N_\gamma$$
(7-14)

En las ecuaciones anteriores, los factores de capacidad de carga se obtienen en la fig. VII-8, sean los correspondientes a la falla

general o a la local, cuando ésta última sea de temer. En la ec. 7-14, R es el radio del cimiento.

También debe notarse que todas las fórmulas anteriores son válidas sólo para cimientos sujetos a carga vertical y sin ninguna excentricidad

#### VII-6. Aplicación de la Teoría de Terzaghi a suelos puramente cohesivos

Como se indica en el Anexo VII-b, o como puede verse en la fig. VII-8, para un suelo puramente cohesivo y en el caso de un cimiento de base rugosa, los factores de capacidad de carga resultan

$$N_c = 5.7$$

$$N_q = 1.0$$

$$N_\gamma = 0$$

Con estos valores, la ec. 7-9 queda

$$q_c = 5.7 c + \gamma D_f$$
(7-15)

Es costumbre escribir la ec. 7-15 como

$$q_c = 2.85 q_u + \gamma D_f$$
(7-16)

Que se visualiza de inmediato teniendo en cuenta que, en los suelos ahora tratados,  $q_u = 2c$ , donde  $q_u$  es la resistencia a la compresión simple del material. La ec. 7-16 es válida para cimientos de longitud infinita. Su equivalente para un cimiento cuadrado y circular se obtiene de inmediato a partir de las ecs. 7-13 y 7-14 y vale

$$q_c = 1.3 \times 5.7 c + \gamma D_f$$
(7-17)

En la práctica es frecuente utilizar la siguiente fórmula aproximada, cuya justificación descansa en las dos expresiones anteriores

$$q_c = 2.85 q_u \left(1 + 0.3 \frac{B}{L}\right) + \gamma D_f$$
(7-18)

En efecto, para el cimiento infinitamente largo  $B/L = 0$  y resulta la ec. 7-16; para el cimiento cuadrado,  $B/L = 1$  y la ec. 7-18 deviene en la 7-17. En rigor, la aproximación de la ec. 7-18 consiste en establecer una interpolación lineal entre ambos casos extremos, para cimientos largos, pero de longitud finita.

VII-7. La Teoría de Skempton

Terzaghi en su Teoría aplicada a suelos puramente cohesivos no toma en cuenta para fijar el valor de  $N_c$  la profundidad de desplante del cimiento en el estrato de apoyo,  $D$ . Así, en la fig. VII-10, los dos cimientos tendrían la misma capacidad, en lo referente a la influencia de la cohesión, es decir, al valor de  $N_c$ .

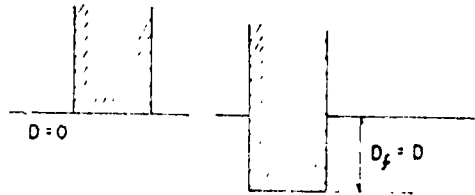


FIG. VII-10. Influencia de la profundidad de desplante en el valor de  $N_c$ , en suelos puramente cohesivos

Es claro que, según Terzaghi, la capacidad de carga no sería la misma en los dos cimientos, a causa del diferente valor del término  $\gamma D_f$ , que interviene en la expresión 7-15 o en sus similares; pero también puede considerarse una cuestión de sentimiento que el valor  $N_c$ , que Terzaghi no diferencia, podrá ser distinto en ambos casos. En efecto si se

piensa en términos de superficies de falla, el cimiento más profundo tendría una superficie de mayor desarrollo, en la cual la cohesión trabajará más, a lo que deberá corresponder un mayor valor de  $N_c$ . Skempton<sup>6</sup> realizó experiencias tratando de cuantificar estas ideas y encontró, en efecto, que el valor de  $N_c$  no es independiente de la profundidad de desplante; también encontró de acuerdo con la intuición, que  $N_c$  crece al aumentar la profundidad de desplante del cimiento, si bien este crecimiento no es ilimitado, de manera que  $N_c$  permanece ya constante de una cierta profundidad de desplante en adelante. Lo anterior es comprensible si se consideran los resultados de la Teoría de Meyerhof, que aparece más adelante, en este mismo capítulo.

Skempton propone adoptar para la capacidad de carga en suelos puramente cohesivos una expresión de forma totalmente análoga a la de Terzaghi, según la cual

$$q_c = c N_c + \gamma D_f \tag{7-19}$$

La diferencia estriba en que ahora  $N_c$  ya no vale siempre 5.7, sino que varía con la relación  $D/B$ , en que  $D$  es la profundidad de entrada del cimiento en el suelo resistente y  $B$  es el ancho del mismo elemento. En la fig. VII-11 aparecen los valores obtenidos por Skempton para  $N_c$ , en el caso de cimientos largos y de cimientos cuadrados o circulares.

Por otra parte, en los casos de suelos heterogéneos estratificados debe manejarse con cuidado el término  $\gamma D_f$ , que representa

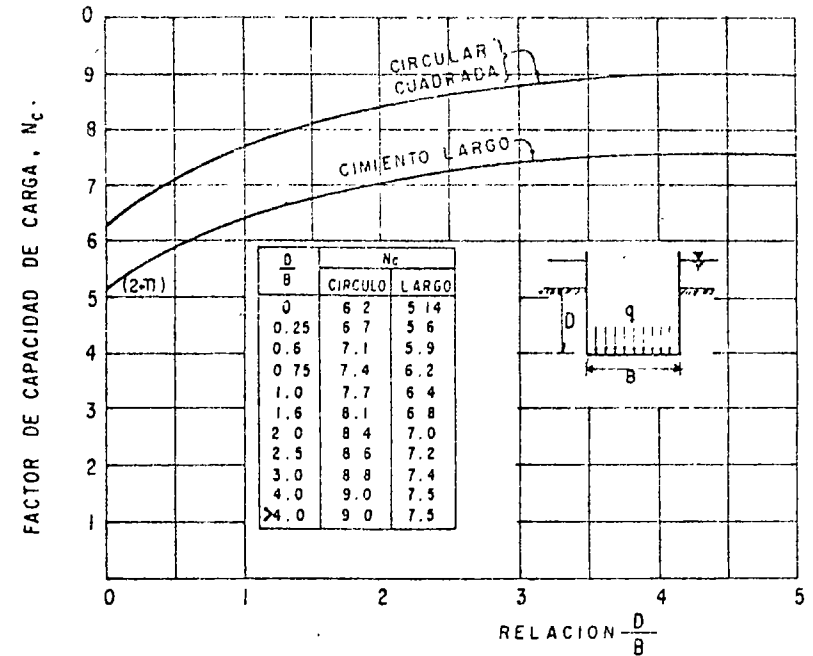


FIG. VII-11. Valores de  $N_c$  según Skempton, para suelos puramente cohesivos

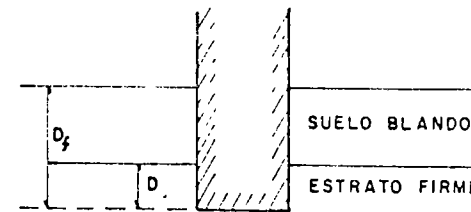


FIG. VII-12. Distinción entre  $D$  y  $D_f$  para aplicar la teoría de Skempton

la presión del suelo al nivel de desplante y que, por lo tanto deberá calcularse tomando en cuenta los diferentes espesores de los estratos con sus respectivos pesos específicos, en la condición de suelo de que se trate, más cualquier sobrecarga distribuida en la superficie del suelo. Lo anterior vale también, por supuesto, para la Teoría de Terzaghi.

VII-8. La Teoría de Meyerhof

En la Teoría de Terzaghi, analizada en la sección VII-6, no se toman en cuenta los esfuerzos cortantes desarrollados en el suelo arriba del nivel de desplante del cimiento; el suelo arriba del

plano de apoyo del cimiento se toma en cuenta solamente como una sobrecarga perfectamente flexible, pero no como un medio a través del cual puedan propagarse superficies de deslizamiento o en el cual puedan desarrollarse resistencias al esfuerzo cortante. Esta hipótesis es tanto más alejada de la realidad cuanto más profundo sea el cimiento considerado.

Meyerhof trató de cubrir esta deficiencia en una Teoría de Capacidad de Carga que ha alcanzado amplia difusión en épocas recientes. Desde luego, la Teoría de Meyerhof tampoco resuelve el problema con completo rigor científico y está sujeta a hipótesis de importancia, que se expondrán en lo que sigue.

En esta Teoría y para el caso de cimientos largos, se supone que la superficie de deslizamiento con la que falla el cimiento tiene la forma que se muestra en la fig. VII-13.

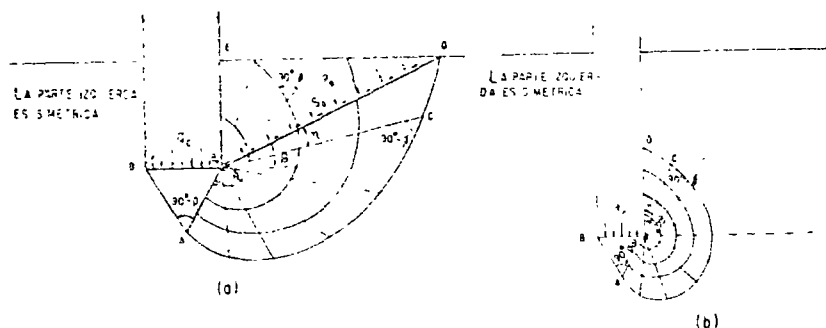


FIG. VII-13 Mecanismos de falla propuestos por Meyerhof

- a) A poca profundidad  
b) A gran profundidad

Según Meyerhof, la cuña  $ABB'$  es una zona de esfuerzos uniformes, a la que se puede considerar en estado activo de Rankine; la cuña  $ABC$ , limitada por un arco de espiral logarítmica, es una zona de esfuerzo cortante radial y, finalmente, la cuña  $BCDE$  es una zona de transición en que los esfuerzos varían desde los correspondientes al estado de corte radial, hasta los de una zona en estado plástico pasivo. La extensión del estado plástico en esta última zona depende de la profundidad del cimiento y de la rugosidad de la cimentación. La línea  $BD$  es llamada por Meyerhof *la superficie libre equivalente* y en ella actúan los esfuerzos normales,  $p_0$ , y tangenciales,  $s_0$ , correspondientes al efecto del material contenido en la cuña  $BDE$ .

La expresión a que se llega finalmente al desarrollar la Teoría de Meyerhof es la siguiente:

$$q_c = c N_c + p_0 N_q + \frac{1}{2} \gamma B N_\gamma \quad (7-20)$$

En la que el sentido de  $p_0$  es el arriba indicado y las demás letras tienen los significados usuales en este capítulo.

Como se ve, y éste es un ejemplo más de la fuerza de la tradición y la costumbre, Meyerhof presenta una expresión final cuya forma matemática es enteramente análoga a la de Terzaghi.

Las diferencias estriban en  $p_0$ , que ahora no es simplemente igual a  $\gamma h$  y en los tres factores de capacidad de carga,  $N_c$ ,  $N_q$  y  $N_\gamma$ , que son diferentes en valor numérico a los que se manejan con la Teoría de Terzaghi.

El cálculo que se hace en la Teoría de Meyerhof de estos factores también sigue, básicamente, los lineamientos planteados anteriormente por Terzaghi, aunque naturalmente, las superficies de deslizamiento que sirven de base a los cálculos son diferentes. Sin embargo, en la Teoría de Meyerhof persiste el defecto fundamental de que  $N_c$  y  $N_q$  se calculan con una cierta superficie de deslizamiento, en tanto que  $N_\gamma$  se calcula a partir de otra determinada con independencia y que, en general, no coincide con la primera; esta segunda superficie determina de hecho, una zona plástica de menor extensión que la primera. Así, una misma fórmula procede de dos mecanismos de falla, vale decir de dos fundamentos distintos, por lo que, en rigor, en la expresión 7-20 se suman términos no homogéneos entre sí. La verdadera superficie de deslizamiento debería de ser determinada, lo cual hasta hoy no ha sido posible, según se dijo. Implícitamente, Meyerhof espera que esa superficie verdadera resulte intermedia entre las dos utilizadas.

En el Anexo VII-c se presenta un desarrollo más detallado de la Teoría de Meyerhof, en el cual podrá verse el sistema seguido por este investigador para calcular sus factores, imprescindibles para el uso práctico de la fórmula 7-20.

A fin de cuentas, Meyerhof llega a gráficas en las que es posible calcular los valores de  $N_c$ ,  $N_q$  y  $N_\gamma$ . Estas gráficas se presentan en las figuras VII-14, VII-15 y VII-16, tal como el propio autor las propuso originalmente.

Debe notarse que para poder aplicar estas gráficas en general, es preciso conocer el valor del ángulo  $\beta$ , de inclinación de la superficie libre equivalente con la horizontal y ésta es una incertidumbre básica de la Teoría, que no ofrece ningún procedimiento riguroso para su cálculo. En efecto, como se hace ver en el mencionado Anexo VII-c, el valor de  $\beta$  depende, a fin de cuentas, de un coeficiente  $m$ , llamado "de movilización de la resistencia al esfuerzo cortante en la superficie libre equivalente", definido por la expresión:

$$s_0 = m(c + p_0 \operatorname{tg} \phi) \quad (7-21)$$

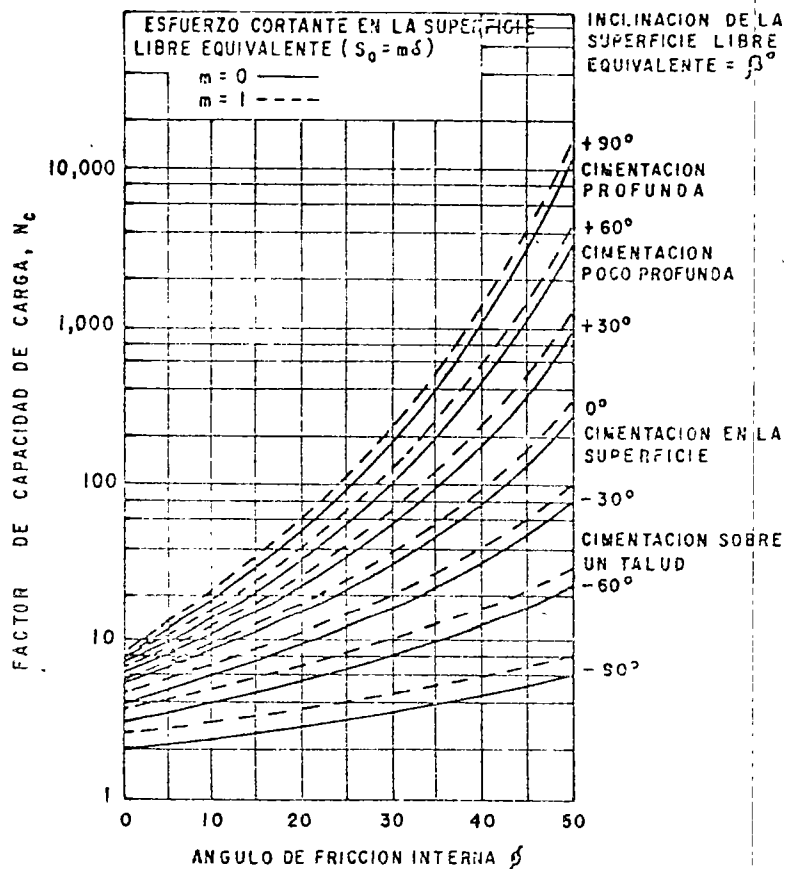


FIG. VII-14. Valores de  $N_c$  para cimentaciones largas, según Meyerhof

Que indica que en la superficie libre equivalente se acepta que la resistencia al esfuerzo cortante sigue la ley de Coulomb en esencia, pero regulada con un coeficiente  $m$ , de valor comprendido entre 0 y 1. Cuando  $m = 0$ , no se desarrolla resistencia en la superficie libre y cuando  $m = 1$ , la movilización de la resistencia es total. El valor de  $m$  es necesario en los cálculos puesto que en la Teoría se hace ver que la superficie libre equivalente no es necesariamente una superficie de falla y, por lo tanto, no hay razón, en principio, para que en ella se agote la resistencia del material, al ocurrir el deslizamiento del cimiento. Pues bien, este valor de  $m$  no puede calcularse en la Teoría; no existe en ésta ningún criterio que permita decidir

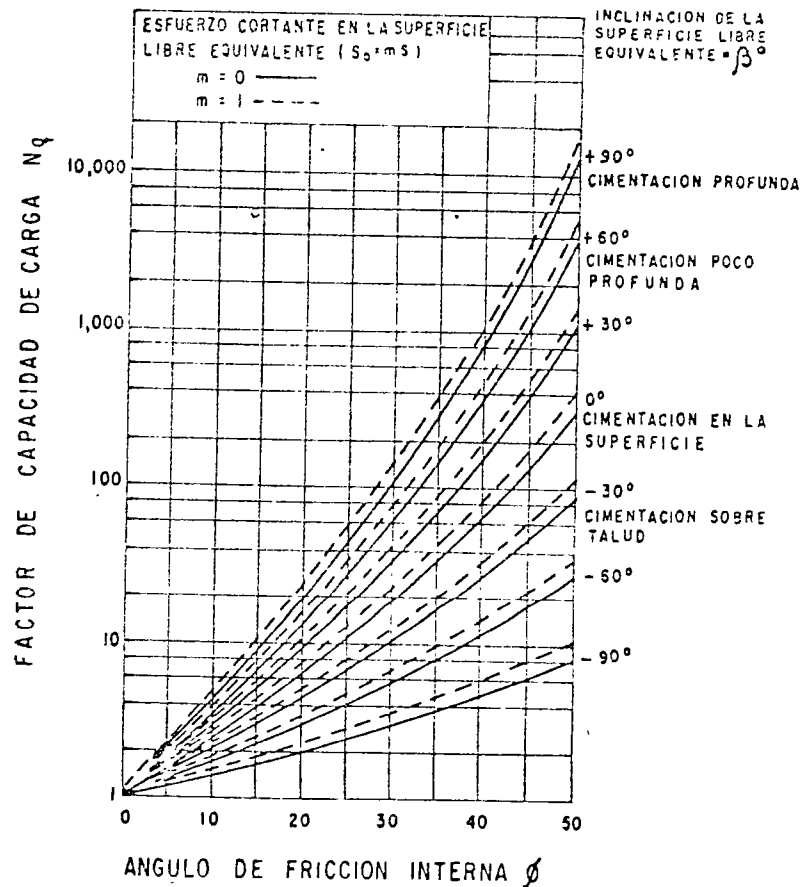


FIG. VII-15 Valores de  $N_q$ , para cimentaciones largas según Meyerhof

si 0, 1 ó un valor intermedio será el conveniente. Afortunadamente, por otra parte, la variación de los factores de capacidad de carga o de  $\beta$  con  $m$  no es muy abrupta, como puede verse en las figuras VII-14 a VII-16, en las que los valores de  $N_c$ ,  $N_q$  y  $N_\gamma$  se calculan para  $m = 0$  y  $m = 1$ , casos extremos.

También ha de notarse que en algunos casos especiales puede decirse cuales son las condiciones reales de la superficie libre equivalente y, por lo tanto, fijar realmente el valor de  $m$ ; tal es el caso de un cimiento desplantado sobre la superficie del terreno ( $D_f = 0$ ), en que dicha superficie es, evidentemente, la libre equivalente ( $\beta = 0$ ) y en la que, por no existir esfuerzos cortantes actuando,

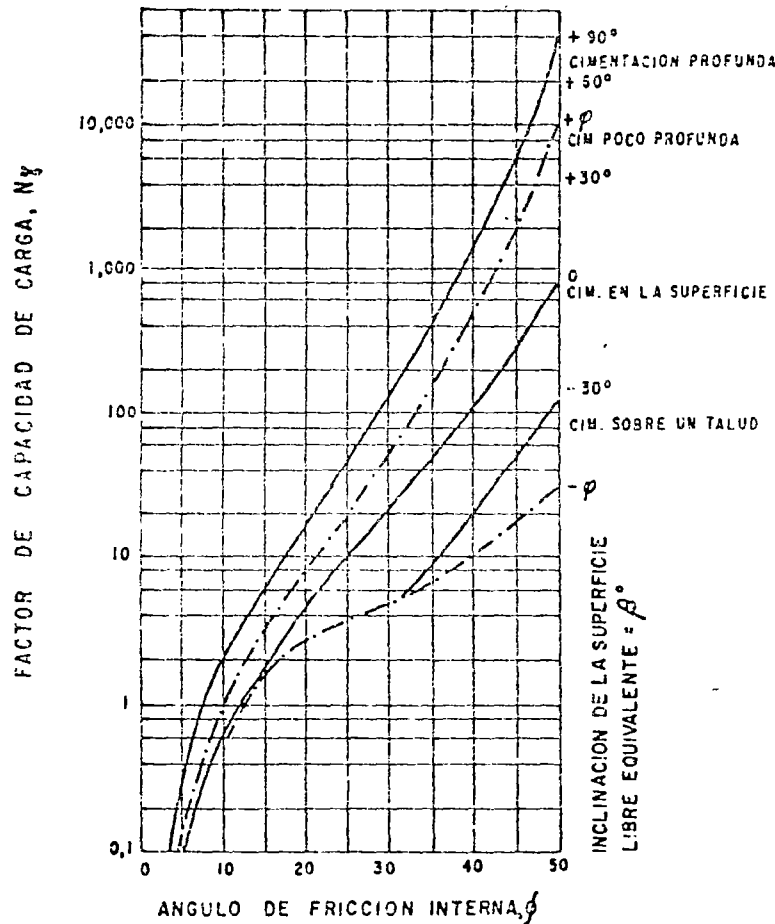


FIG. VII-16. Valores de  $N_q$  para cimientos largos, según Meyerhof

puede decirse que  $m = 0$ ; otro tanto ocurre en un cimiento colocado superficialmente sobre taludes simétricos a sus dos lados, en que dichos taludes forman la superficie libre equivalente ( $\beta < 0$ ), donde  $m$  vale también 0, por no existir esfuerzos cortantes sobre los taludes abiertos al exterior.

Para el caso de cimientos largos profundos, en que la profundidad de hincado sea de 6 a 8 veces mayor que el ancho del elemento, la superficie de deslizamiento se cierra siempre como en el caso b) de la fig. VII-13 y, por ello, puede afirmarse que  $\beta = 90^\circ$ ; la inde-

terminación del valor de  $\beta$  desaparece y la Teoría es fácilmente aplicable en los problemas reales.

En las figuras VII-14 a VII-16 se indican otros tipos de cimentación ligados a otros valores de  $\beta$  en forma meramente aproximada o como una guía para llegar a valores razonables de los factores de capacidad de carga. Es evidente que esta información ya no es tan segura y deberá ser usada con gran prudencia.

Así pues, la Teoría de Meyerhof, tal como fue presentada originalmente no es de aplicación sencilla a cimentaciones a poca profundidad. Por otra parte, en este caso puede aplicarse fácilmente la Teoría de Terzaghi en las condiciones más favorables, desde el punto de vista de sus hipótesis; además, en estas cimentaciones a poca profundidad, la Teoría de Terzaghi proporciona valores de la capacidad de carga muy parecidos y más conservadores. Por todo lo anterior puede concluirse, desde un punto de vista práctico, que no es importante que la Teoría de Meyerhof produzca las indeterminaciones señaladas en cimientos poco profundos.

La Teoría de Meyerhof es, en cambio, muy atrayente para el cálculo de cimentaciones en talud o de cimentaciones profundas, del tipo de pilas y pilotes, especialmente en este último caso, en que las hipótesis de la Teoría de Terzaghi resultan tan poco apropiadas, al no tomar en cuenta lo que pudiera suceder sobre el nivel de desplante. En este caso precisamente la Teoría de Meyerhof no está indeterminada según se detallará más adelante. Sin embargo, los autores de esta obra se sienten en la obligación de advertir a sus lectores contra un optimismo excesivo respecto a la Teoría de Meyerhof, como respecto a cualquier otra Teoría de Capacidad de Carga. Las mediciones en obras reales y los estudios en modelos muestran desviaciones notables en los resultados de las teorías, que deberán siempre conjugarse con el criterio del proyectista, la experiencia del constructor y la prudencia del científico que sabe valorar las incertidumbres y complejidades de la naturaleza.

Para el caso de cimientos largos en arenas sin cohesión ( $c = 0$ ;  $\phi \neq 0$ ), Meyerhof simplificó aún más la fórmula 7-20, substituyéndola por la expresión

$$q_c = \frac{1}{2} \gamma B N_{\gamma q} \quad (7-22)$$

En que  $N_{\gamma q}$  es un nuevo factor de capacidad de carga en el cual están involucrados los valores de  $N_q$  y de  $N_\gamma$ . En la fig. VII-17 se presentan gráficas que dan los valores de  $N_{\gamma q}$  para  $\phi = 30^\circ$  y  $\phi = 40^\circ$ , representativos de arenas sueltas y compactas, respectivamente.

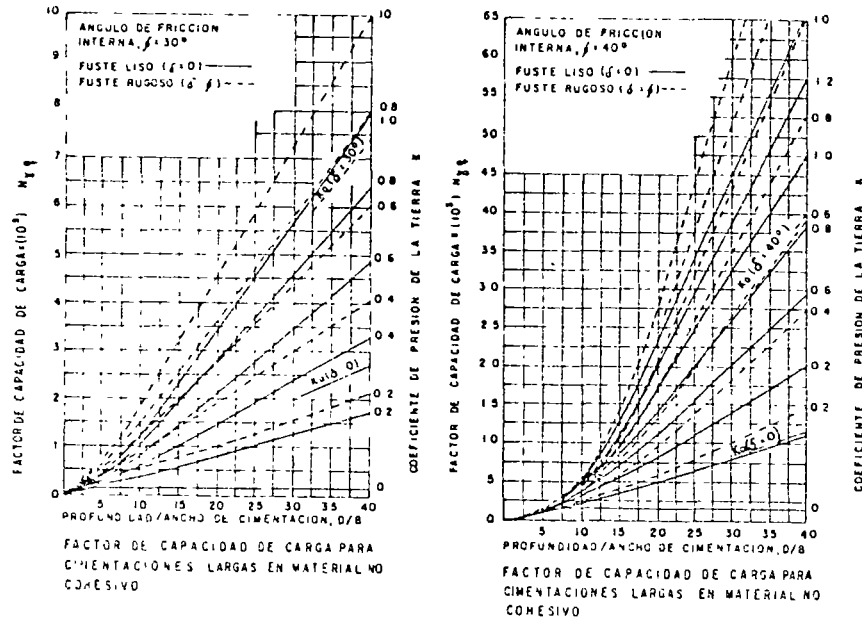


FIG. VII-17. Valores de  $N_{\gamma}$ , para cimientos largos de arenas, según Meyerhof

El valor de  $N_{\gamma q}$  depende de  $K$ , coeficiente de presión de tierras, el cual puede teóricamente oscilar entre los valores correspondientes a los estados activo y pasivo y no puede calcularse en forma precisa con la teoría, debiendo ser valuado con pruebas de campo. Meyerhof propone, para fines de proyecto, adoptar  $K = 0.5$  para arenas sueltas y  $K = 1.0$  para compactas. Además de la compacidad de la arena, influyen en  $K$  la resistencia y características de deformación del suelo, la historia previa de esfuerzo-deformación y el método de construcción de la cimentación propiamente dicha.

Las anteriores expresiones para el uso de la Teoría de Meyerhof se refieren a cimientos largos en el sentido normal al plano del papel. Para su aplicación al caso de pilotes, que corresponden a cimientos cuadrados o circulares, las cosas son algo diferentes. Refiriéndose a suelos con cohesión y fricción, en los que es aplicable la fórmula 7-20, Meyerhof consideró despreciable al término en  $N_{\gamma}$ , expresando la capacidad de carga con la fórmula

$$q_c = c N_c + K \gamma h N_q \quad (7-23)$$

En que  $K$  tiene el sentido y los valores prácticos arriba discutidos,  $c$ ,  $\gamma$  y  $h$  los sentidos usuales y  $N_c$  y  $N_q$  los valores que resultan de las gráficas de la fig. VII-18. Es natural que varíen también los

factores de capacidad de carga, si se considera que en el caso de cimientos cuadrados o circulares, que es el caso de pilotes como ya se hizo notar, las zonas plásticas son menores que en el caso de cimientos largos del mismo ancho y en los cuales la profundidad de hincado sea suficiente para que  $\beta$  valga también  $90^\circ$ .

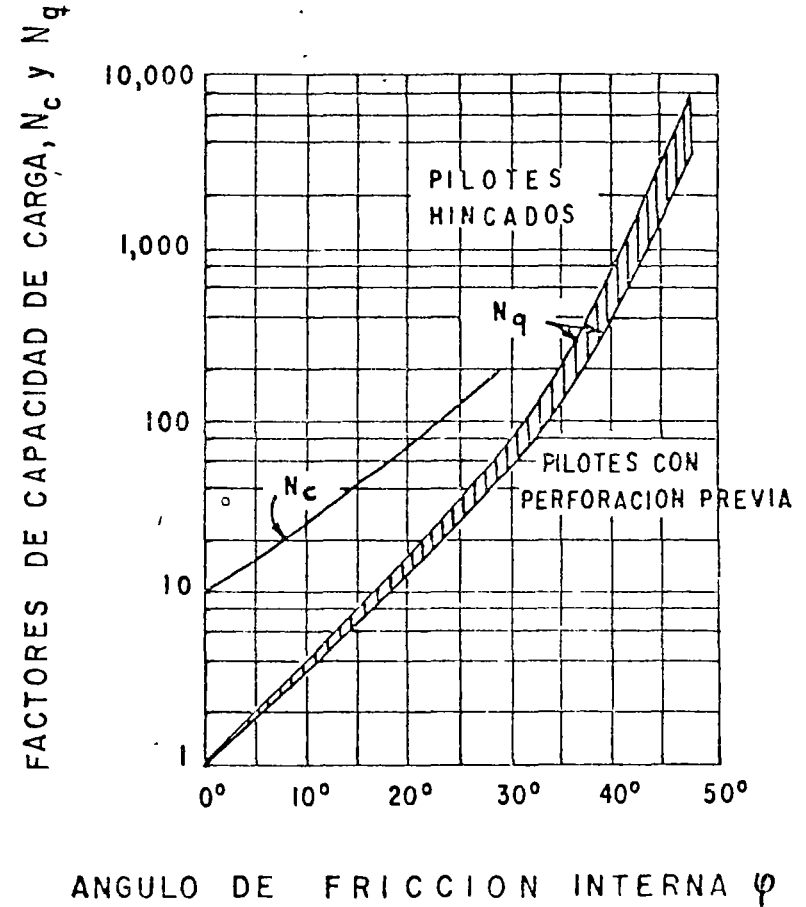


FIG. VII-18. Valores de  $N_c$  y  $N_q$  para pilotes, según Meyerhof

Para el caso de cimientos rectangulares, no muy largos, en arena, la fórmula 7-22 también ha de ser modificada, adoptando la forma

$$q_c = \frac{1}{2} \gamma \lambda B N_{\gamma q} \quad (7-24)$$



Donde  $\lambda$  es un "factor de forma" del cimiento, que depende de la relación largo a ancho del mismo,  $L/B$ . Los valores de  $\lambda$  aparecen en la gráfica de la fig. VII-19, que involucra a los correspondientes a

pilotes cuadrados para los que  $L/B = 1$  ó circulares, que se consideraran independientemente.

Debe notarse que el valor de  $\lambda$  no sólo depende de la relación  $L/B$ , sino que también se ve influenciado por la relación profundidad de desplante a ancho del cimiento,  $D_f/B$ , por el valor del ángulo  $\phi$  y por el procedimiento de construcción del cimiento, especialmente si se trata de un cimiento hincado o de uno colado en el lugar, previa excavación.

En las refs. 8, 9, 10, 11 y 12 podrán consultarse los puntos de vista de Meyerhof sobre su Teoría, así como algunas aplicaciones importantes de ésta.

VII-9. Resumen de recomendaciones

A continuación se presenta un breve resumen en el cual se vierte la opinión de los autores de este libro, respecto al campo de aplicación práctica de las diferentes teorías de capacidad de carga atrás mencionadas. El criterio para señalar a una teoría como apropiada para un caso dado obedece tanto a la confiabilidad de la teoría en sí, de acuerdo con los resultados de sus aplicaciones prácticas, como a la sencillez de aplicación.

1. La Teoría de Terzaghi es recomendable para toda clase de cimentaciones superficiales en cualquier suelo, pudiéndose aplicar con gran confiabilidad hasta el límite  $D_f \leq 2B$ .
2. La Teoría de Skempton es apropiada para cimentaciones en arcilla cohesiva ( $\phi = 0$ ), sean superficiales o profundas, incluyendo el cálculo de capacidad de carga en cilindros y pilotes.
3. Puede usarse la Teoría de Meyerhof para determinar la capacidad de carga de cimientos profundos en arenas y grava, incluyendo cilindros y pilotes, aunque ejerciendo vigilancia cuidadosa, ya que en ocasiones se ha observado que proporciona valores muy altos con respecto a los prudentes.

De lo anterior no debe pensarse que las reglas precedentes puedan seguirse a ojos cerrados, limitándose el proyectista a sentirse confiado en una fórmula. Particularmente en el caso de cimentaciones profundas, cilindros y pilotes, las teorías no dan valores de confiabilidad total y, quizá, ni aún buena; la experiencia del proyectista y las normas del sentido común deberán de jugar un papel de trascendencia y en ningún caso estará justificada una actitud pasiva del ingeniero, limitándose a seguir un formulario en forma indiscriminada.

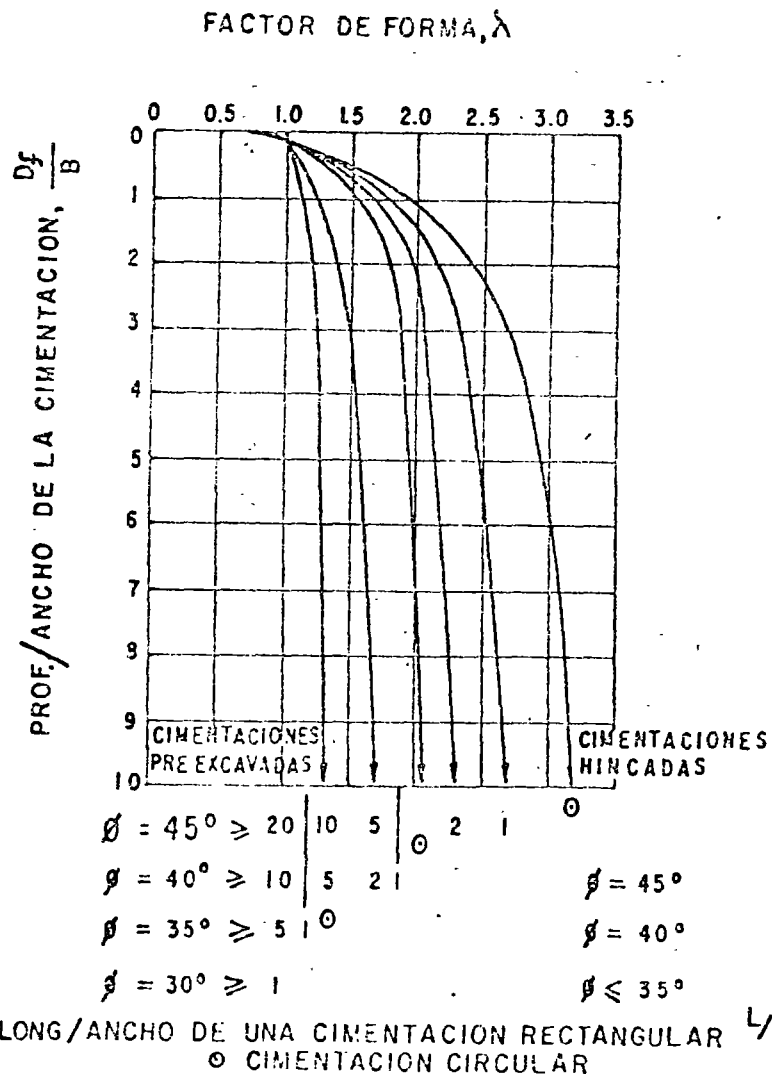


FIG. VII-19. Valores del factor de forma en cimientos no muy largos o pilotes, en arenas, según Meyerhof

VII-10. Cimentaciones con carga excéntrica e inclinada

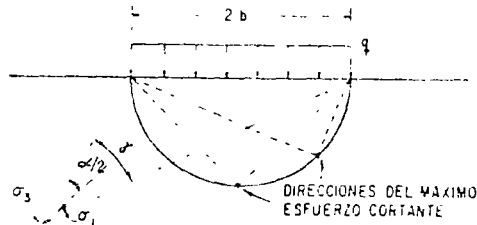
Ultimamente se han desarrollado algunas investigaciones<sup>14, 15</sup> referentes al comportamiento de cimentaciones superficiales sujetas a cargas excéntricas y/o inclinadas. Desde luego, es evidente que tales situaciones han de modificar los resultados de las teorías, desarrolladas todas bajo la hipótesis de carga vertical axial, según se vio. También parece evidente que tanto la excentricidad de la carga, como su inclinación son elementos desfavorables para la capacidad de carga de un elemento de cimentación.

En el Anexo VII-d se recogen algunas normas útiles que van resultando de los estudios hasta hoy realizados.

ANEXO VII-a

Solución elástica del estado de esfuerzos bajo una banda de longitud infinita

La solución debida a Carothers<sup>1</sup>, permite determinar el estado de esfuerzos en un medio semi-infinito, homogéneo, isótropo y linealmente elástico, sobre el que actúa una banda de carga uniformemente distribuida de valor  $q$ , ancho  $2b$  y longitud infinita (fig VII-a 1)



En un punto cualquiera del medio los esfuerzos principales son

$$\sigma_1 = \frac{q}{\pi} (\alpha + \text{sen } \alpha) \tag{7-a.1}$$

$$\sigma_3 = \frac{q}{\pi} (\alpha - \text{sen } \alpha)$$

FIG. VII-a.1. Estado de esfuerzos bajo una banda de longitud infinita según la teoría de la Elasticidad

Donde  $\alpha$  es el ángulo subtendido por las rectas que unen al punto considerado con los límites de la banda cargada. Estos esfuerzos actúan en direcciones tales que  $\sigma_1$ , esfuerzo principal mayor, coincide con la bisectriz del ángulo  $\alpha$ .

De las ecs 7-a.1 se deduce que el esfuerzo cortante máximo entre los que actúan en dicho punto ( $\bar{\tau}$ ) vale

$$\bar{\tau} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \frac{q}{\pi} \text{sen } \alpha \tag{7-a.2}$$

Por lo tanto, los máximos esfuerzos cortantes en el medio ocurren en puntos en que  $\text{sen } \alpha$  sea máximo, o sea en que  $\alpha$  valga  $90^\circ$ , lo que corresponde a un lugar geométrico constituido por un semicírculo de diámetro  $2b$  (ver fig. VII-a.1). Dichos esfuerzos cortantes máximos en el medio valen

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{q}{\pi} \tag{7-a.3}$$

Como quiera que estos esfuerzos  $\tau_{\text{máx}}$  actúan en planos que forman el ángulo de  $45^\circ$  con la dirección del esfuerzo principal mayor,  $\sigma_1$ , se sigue que sus direcciones están dadas para cada punto del semicírculo por las cuerdas que unen el punto de que se trate con los extremos de la banda cargada

Debe notarse que las direcciones en que actúan los esfuerzos cortantes de falla a lo largo del semicírculo no forman una superficie continua a lo largo de la cual pudiera producirse la falla del medio y, por lo tanto, la solución aquí analizada no proporciona un mecanismo posible de falla

ANEXO VII-b

La Teoría de Terzaghi

En este capítulo se expusieron métodos seguidos por Terzaghi para establecer su teoría de Capacidad de Carga, así como las expresiones finales a que puede llegarse en tal teoría; el propósito de este Anexo es presentar con mayor detalle los pasos seguidos en el desarrollo, a fin de tener una mayor comprensión del significado, grado de validez y problemas de interpretación de las conclusiones finales.

El trabajo original de Terzaghi<sup>6</sup> no desprecia el peso propio de la cuña  $I$ , (fig. VII-7), que se desplaza con el cimiento, al considerar el equilibrio de las fuerzas verticales que actúan sobre el mismo. (Este equilibrio se expresó en la ec. 7-6, pero considerando tal peso despreciable, lo cual corresponde a una presentación posterior y más simple de la teoría, hecha por el propio Terzaghi).

En realidad, la influencia del peso mencionado es infima, por lo que, cuando la Teoría se presenta en textos suele omitirse el término respectivo. En lo que sigue, empero y por respetar la presentación original del propio Terzaghi, el peso de la cuña  $I$  se hará intervenir en los cálculos.

Dicho peso vale  $W$  (fig. VII-7)

$$W = \frac{1}{4} \gamma B^2 \text{tg } \phi \tag{fig. VII-7}$$

así, la ec. 7-7 se transforma en

$$q_c = \frac{1}{B} \left( 2P_p + cB \operatorname{tg} \phi - \frac{1}{4} \gamma B^2 \operatorname{tg} \phi \right) \quad (7-b.1)$$

En la ec. anterior, ha de calcularse  $P_p$  para valuar la capacidad de carga del medio.

El problema se reduce a calcular el empuje pasivo que se produce en la superficie  $CA'$  (fig. VII-b.1) cuando el cimientto trata de incrustarse.

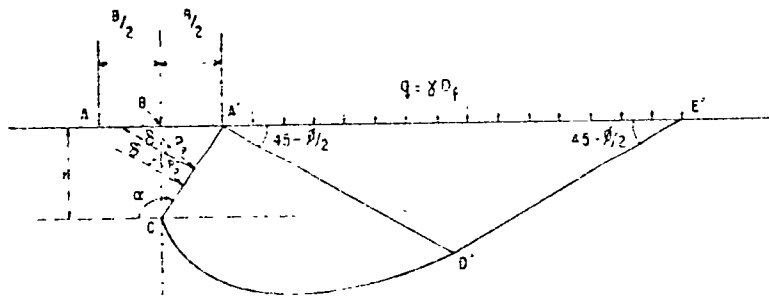


FIG. VII-b.1. Cálculo del término  $P_p$

En el Capítulo IV quedó establecido que el valor de la presión pasiva, debida al peso de un relleno puramente friccionante, sin sobrecarga, es, dentro de la Teoría de Rankine:

$$P_{p\gamma} = K_{p\gamma} \gamma z$$

Si el relleno fuera horizontal y el muro vertical, el valor de  $K_{p\gamma}$  sería

$$K_{p\gamma} = \operatorname{tg}^2 \left( 45^\circ + \frac{\phi}{2} \right) = N_\phi$$

Cuando la superficie sobre la que actúa la presión es inclinada, como la  $A'C$ , el valor de  $K_{p\gamma}$  es diferente, dependiendo del ángulo  $\alpha$ .

También se estableció en el Capítulo IV que el efecto de una sobrecarga  $q$  en la presión pasiva es un aumento constante de ésta en el valor

$$P_{pq} = K_{pq} q$$

Si el relleno es horizontal y el muro vertical, el valor de  $K_{pq}$  es el anotado arriba para  $K_{p\gamma}$ . En el caso de la fig. VII-b.1, en que la superficie  $A'C$  es inclinada, este valor también será distinto y función sólo del ángulo  $\alpha$ .

Por último, en un relleno friccionante y cohesivo, el aumento de presión pasiva causado por la cohesión es independiente de la profundidad  $z$ , como también se vio en el mismo Capítulo IV y vale

$$P_{pc} = K_{pc} \times c$$

En el caso de relleno horizontal y muro vertical se encontró

$$K_{pc} = 2 \sqrt{N_\phi} = 2 \operatorname{tg} \left( 45^\circ + \frac{\phi}{2} \right)$$

De nuevo este valor será diferente si la superficie sobre la que actúa la presión pasiva es inclinada.

En realidad, las expresiones arriba escritas para  $P_{pc}$ ,  $P_{pq}$  y  $P_{p\gamma}$  son para presiones normales a la superficie en que obran. Si la presión total no es normal a esta superficie, sino que forma con ella el ángulo  $\delta$ , las expresiones anteriores proporcionan sólo la componente normal de las presiones. Por último, si, como en el caso de la fig. VII-b.1, en la superficie en que actúan las presiones ocurre un contacto suelo con suelo, el valor del ángulo  $\delta$  será  $\phi$ .

Así la presión pasiva normal será:

$$P_{pn} = c K_{pc} + q K_{pq} + \gamma z K_{p\gamma} \quad (7-b.2)$$

En la ecuación anterior, los dos primeros términos son independientes de  $z$ , en tanto que el tercero sí depende de aquella variable.

Llamando  $P'_{pn}$  a la parte de la presión normal que no depende de  $z$  y  $P''_{pn}$  a la que sí depende, se tiene

$$P'_{pn} = c K_{pc} + q K_{pq}$$

$$P''_{pn} = \gamma z K_{p\gamma}$$

Las correspondientes componentes normales a la superficie  $A'C$  de los empujes pueden obtenerse integrando las expresiones anteriores en lo longitud de  $A'C$ , que es igual a  $H/\operatorname{sen} \alpha$ . (fig. VII-b.1).

$$P'_{pn} = \frac{1}{\operatorname{sen} \alpha} \int_0^H P'_{pn} dz = \frac{H}{\operatorname{sen} \alpha} (c K_{pc} + q K_{pq}) \quad (7-b.3)$$

aplicada a la mitad de  $A'C$ . Y

$$P''_{pn} = \frac{1}{\operatorname{sen} \alpha} \int_0^H P''_{pn} dz = \frac{1}{2} \gamma H^2 \frac{K_{p\gamma}}{\operatorname{sen} \alpha} \quad (7-b.4)$$

que se localiza a la altura  $H/3$ , a partir del punto  $C$ .

Los correspondientes empujes pasivos ( $P'_p$  y  $P''_p$ ) formarán un ángulo  $\delta$  con las componentes anteriores.

Además de los empujes  $P'_p$  y  $P''_p$ , existe a lo largo de la superficie A'C otra fuerza debida al efecto de la cohesión del suelo,  $c$ . Esta fuerza vale

$$C = \frac{H}{\text{sen } \alpha} c \quad (7-b.5)$$

El empuje pasivo total será la resultante de  $P'_p$ ,  $P''_p$  y  $C$ . La componente normal total de dicho empuje se obtendrá sumando las expresiones 7-b.3 y 7-b.4, de lo cual resulta

$$P_{pn} = P'_{pn} + P''_{pn} = \frac{H}{\text{sen } \alpha} (c K_{pc} + q K_{pq}) + \frac{1}{2} \gamma H^2 \frac{K_{py}}{\text{sen } \alpha} \quad (7-b.6)$$

Considerérese ahora, en primer lugar, el caso de un medio sin "cohesión" ( $c = 0$ ), en el que, además,  $D_f = 0$ ; o sea, en el que no existe sobrecarga. Este sería el caso de un cimiento superficialmente desplantado sobre arena.

Para este caso particular, la ec. 7-b.1 queda

$$q_c = \frac{1}{B} \left( 2 P_{py} - \frac{1}{4} B^2 \gamma \text{tg } \phi \right) \quad (7-b.7)$$

Donde  $P_{py}$  es la parte de  $P_p$  que toma en cuenta únicamente efectos de peso. Para este mismo caso particular, el empuje pasivo sobre la superficie A'C de la fig. VII-b.1 puede calcularse a partir de la expresión 7-b.6, dividiendo el valor de la componente normal del empuje  $P_{pn}$ , entre  $\cos \delta$

$$P_{py} = \frac{1}{2} \gamma H^2 \frac{K_{py}}{\text{sen } \alpha \cos \delta} \quad (7-b.8)$$

En el caso analizado (fig. VII-b.1)

$$H = \frac{1}{2} B \text{tg } \phi$$

$$\delta = \phi \quad (\text{por ser compacto suelo con suelo})$$

$$\alpha = 180^\circ - \phi$$

con tales valores, la ec. 7-b.8 queda

$$P_{py} = \frac{1}{8} \gamma B^2 \frac{\text{tg } \phi}{\cos^2 \phi} K_{py} \quad (7-b.9)$$

Substituyendo este valor en la ec. 7-b.7 se obtiene

$$q_c = \frac{1}{B} \left[ \frac{1}{4} \gamma B^2 \text{tg } \phi \left( \frac{K_{py}}{\cos^2 \phi} - 1 \right) \right] = \frac{1}{2} \gamma B N_\gamma$$

donde

$$N_\gamma = \frac{1}{2} \text{tg } \phi \left( \frac{K_{py}}{\cos^2 \phi} - 1 \right) \quad (7-b.10)$$

En la expresión anterior  $K_{py}$  puede obtenerse por medio del método de la espiral logarítmica (Capítulo IV), o por otro equivalente. Por lo demás debe notarse que, puesto que  $\alpha$  y  $\delta$  dependen, para este caso particular, sólo de  $\phi$ ,  $K_{py}$  y por lo tanto  $N_\gamma$  serán función sólo de dicho parámetro.

Si el terreno en que se apoya el cimiento tuviera cohesión y  $D_f$  fuera diferente de cero, existiendo una sobrecarga  $q$  en el nivel del cimiento, la capacidad de carga del cimiento se calculará usando la ec. 7-b.1, en la que, otra vez, habrá de valuar  $P_p$  según la ec. 7-b.6, introduciendo en ella de nuevo los valores

$$H = \frac{1}{2} B \text{tg } \phi$$

$$\delta = \phi$$

$$\alpha = 180^\circ - \phi$$

De ello resulta

$$P_p = \frac{P_{pn}}{\cos \delta} = \frac{B}{2 \cos^2 \phi} (c K_{pc} + q K_{pq}) + \frac{1}{8} \gamma B^2 \frac{\text{tg } \phi}{\cos^2 \phi} K_{py} \quad (7-b.11)$$

$$q_c = c \left( \frac{K_{pc}}{\cos^2 \phi} + \text{tg } \phi \right) + q \frac{K_{pq}}{\cos^2 \phi} + \frac{1}{2} \gamma B \text{tg } \phi \left( \frac{K_{py}}{\cos^2 \phi} - 1 \right) \quad (7-b.12)$$

Nótese que las ecs. 7-b.11 y 7-b.12 son únicamente válidas para la condición que se llamó *falla general*.

En la fig. VII-b.2 se muestra un cimiento continuo con base rugosa y aparece también la superficie de falla CDE, que se supone es sobre la que realmente ocurre la falla. Como se mencionó, Prandtl obtuvo la ecuación de dicha superficie para el caso de un medio rígido-plástico perfecto y exento de peso propio ( $\gamma = 0$ ); la solución de Prandtl, dibujada en la fig. VII-b.2, produciría una superficie,

tal como la que allí se muestra marcada con las letras  $C D, E_1$ ; esta superficie contiene a un arco ( $C D_1$ ) de espiral logaritmica, cuya ecuación es

$$r = r_0 e^{\theta \tan \phi}$$

Donde  $\theta$  es el ángulo central en radianes, formado entre la línea  $AC$  y el radio vector  $r$ . Para  $\phi = 0$  la ecuación anterior deviene a un círculo de radio  $r = r_0$ .

También, para  $\gamma = 0$ , la ec. 7-b.12 queda

$$q_c = c \left( \frac{K_{pc}}{\cos^2 \phi} + \tan \phi \right) + q \frac{K_{pq}}{\cos^2 \phi} = c N_c + q N_q \quad (7-b.13)$$

donde el sentido de los símbolos  $N_c$  y  $N_q$  es evidente.

En la ecuación anterior  $q_c$  es la capacidad de carga del medio sin peso. Debe notarse que los dos términos del segundo miembro tienen sentido físico por separado: el primero representa la capacidad de carga del medio sin sobrecarga ( $q = 0$ ) y el segundo, la carga que puede soportar el medio supuesto que su cohesión es nula.

En el caso  $\gamma \neq 0$ ,  $c = 0$  y  $q = 0$  no se ha podido hasta el momento determinar matemáticamente la superficie de falla teórica que resuelve el problema. Por el método de la espiral logaritmica, por ejemplo (Capítulo IV), puede determinarse la forma aproximada de dicha superficie y, con tal base, puede garantizarse que se desarrolla más alta que lo que indica la teoría analizada arriba. En la fig. VII-b.2, esta superficie se ha dibujado a través de los puntos  $C D, E_1$ . La capacidad de carga para este caso, obtenida a partir de la ec. 7-b.12 será

$$q_c = \frac{1}{4} \gamma B \tan \phi \left( \frac{K_{p\gamma}}{\cos^2 \phi} - 1 \right) = \frac{1}{2} \gamma B N_\gamma \quad (7-b.14)$$

En el caso general se tiene:  $c \neq 0$ ,  $q \neq 0$  y  $\gamma \neq 0$ . Para este caso, la capacidad de carga del cimiento es ligeramente mayor que la suma de las dadas por las ecs. 7-b.13 y 7-b.14, según se desprende de análisis numéricos de casos específicos, puesto que para el caso general tampoco existe una solución teórica completa relativa a la superficie de falla. De los mismos análisis se desprende que esta superficie de falla, a la cual se llamará *real*, ocurre en una zona intermedia entre las dos superficies particulares que se han mencionado: en la fig. VII-b.2, esta superficie real se trazó por los puntos  $C D E$ . De lo anterior Terzaghi concluye que es razonable considerar que la capacidad de carga real está dada por la suma de los tres términos antes analizados; o sea

$$q_c = c N_c + q N_q + \frac{1}{2} \gamma B N_\gamma \quad (7-b.15)$$

Teniendo en cuenta que en la mayoría de los casos la sobrecarga  $q$  es sólo debida al peso del suelo sobre el nivel de desplante, suele considerarse  $q = \gamma D_f$  y, por consecuencia

$$q_c = c N_c + \gamma D_f N_q + \frac{1}{2} \gamma B N_\gamma \quad (7-b.16)$$

que es la ec. 7-9.

En realidad, las curvas de la fig. VII-8, para los factores de capacidad de carga  $N_c$  y  $N_q$ , no fueron dibujados por Terzaghi a partir de los valores aproximados que se desprenden de la ec. 7-b.13, sino que se calcularon a partir de otra solución *matemáticamente exacta* de tales valores, obtenida por una aplicación de la función de esfuerzos de Airy hecha por Prandtl y Reissner para un medio sin peso. Según esta solución

$$N_q = \frac{a_0^2}{2 \cos^2(45^\circ + \phi/2)} \quad (7-b.17)$$

$$N_c = \text{ctg } \phi \left[ \frac{a_0^2}{2 \cos^2(45^\circ + \phi/2)} - 1 \right]$$

$$a_0 = e^{(3/4 \pi - \phi/2) \tan \phi}$$

Por lo contrario, la curva correspondientes a  $N_\gamma$  en la fig. VII-8 sí representa los valores de la ec. 7-b.10, obtenida por el propio Terzaghi.

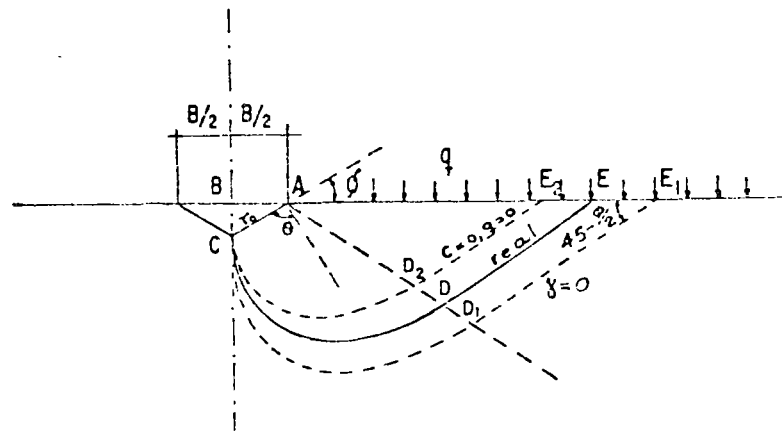


FIG. VII-b.2 Superficies de falla para diferentes condiciones del medio

En las ecs. 7-b.17 y 7-b.10 en el caso  $\phi = 0$ , correspondiente a un medio puramente cohesivo y con un cimiento rugoso, se tienen los valores particulares:

$$N_c = \frac{3}{2} \pi + 1 = 5.7$$

$$N_q = 1.0 \quad (7-b.18)$$

$$N_\gamma = 0$$

**ANEXO VII-c**

**La Teoría de Meyerhof para cimientos muy largos**

En el párrafo VII-8 del cuerpo de este capítulo se describió el mecanismo de falla propuesto por Meyerhof como base a su Teoría de Capacidad de Carga en cimentaciones. En la fig. VII-13 allí incluida se mostró gráficamente dicho mecanismo. También se escribió la fórmula final propuesta en la teoría, según la cual:

$$q_c = cN_c + p_0N_q + \frac{1}{2} \gamma B N_\gamma \quad (7-c.1)$$

En este anexo se describirá el camino seguido por Meyerhof para valuar los factores de capacidad de carga  $N_c$ ,  $N_q$  y  $N_\gamma$ . El método establecido por Meyerhof es similar al anteriormente seguido por Terzaghi, en su propio caso. Primeramente se valuan  $N_c$  y  $N_q$  con base en teorías previas establecidas por Prandtl (sección VII-3) y Reissner, convenientemente generalizadas y con la suposición de que el material está desprovisto de peso propio; después se calcula  $N_\gamma$  utilizando un método independiente sugerido por Ohde.

Así, en una primera etapa, con material sin peso, la fórmula 7-c.1 se reduce a:

$$q_c' = cN_c + p_0N_q \quad (7-c.2)$$

En tanto que, en una segunda etapa, se obtiene el efecto del peso del material:

$$q_c'' = \frac{1}{2} \gamma B N_\gamma \quad (7-c.3)$$

**VII-c.1. Obtención de los valores de  $N_c$  y  $N_q$**

El cálculo de estos factores de capacidad de carga se hace en lo que sigue para un cimiento muy largo y con base rugosa de ancho  $B$ . Los factores son función de los valores de  $\beta$ ,  $p_0$  y  $s_0$ , donde estos símbolos tienen el significado que se mencionó con referencia a la fig. VII-13.

En la fig. VII-c.1 aparece un esquema de la superficie de falla compuesta por un arco de espiral logarítmica  $AC$  y un tramo de recta  $CD$ .

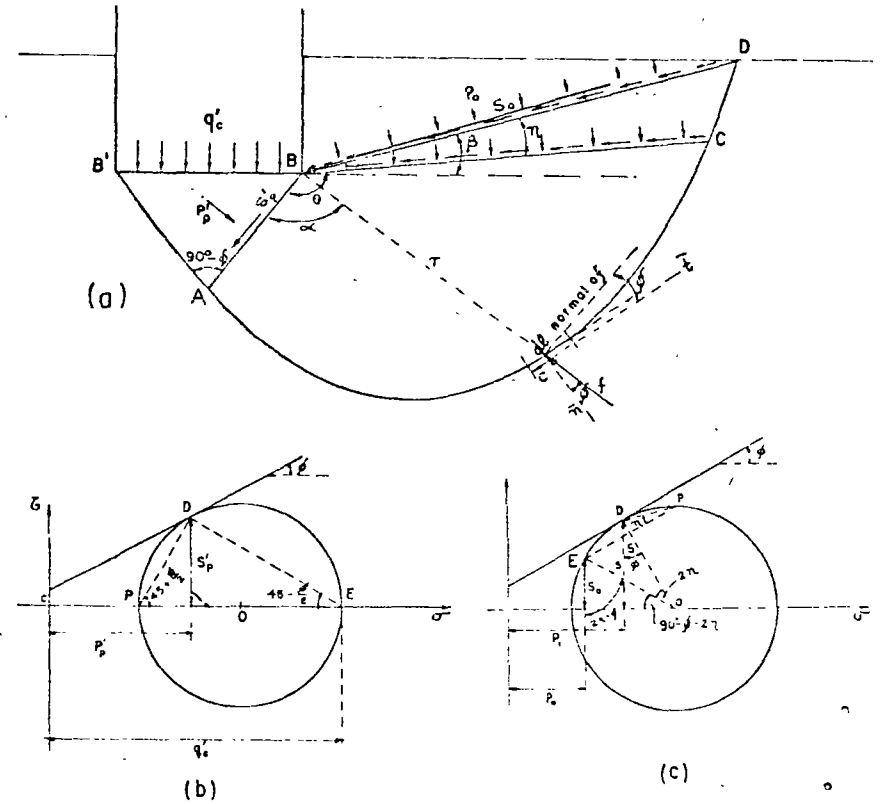


FIG. VII-c.1 Obtención de  $N_c$  y  $N_q$  para cimientos muy largos según Meyerhof

Considerando que la zona  $ABB'$  es de esfuerzos constantes y haciendo uso del método del círculo de Mohr, como aparece en la parte b) de la figura, se deduce que:

$$q_c' = p_p' + s_p' \operatorname{ctg}(45^\circ - \frac{\phi}{2}) \quad (7-c.4)$$

Nótese que el punto  $P$  resulta ser el polo del círculo de Mohr, que los esfuerzos en el plano  $BB'$  están dados por el punto  $E$  y que el punto  $D$  representa el estado de esfuerzos en el plano  $AB$  (en la parte  $b$ ,  $PD$  es paralela a  $AB$ , de la parte  $a$  de la misma figura).

Además, por la ley de Coulomb debe tenerse:

$$s_p' = c + p_p' \operatorname{tg} \phi \quad (7-c.5)$$

Considérese ahora el equilibrio en la masa  $ABC$ . Tomando momentos de las fuerzas exteriores a dicha masa respecto al punto  $B$ , se tiene (ver parte  $a$  de la figura):

$$\Sigma M_B = p_p' \frac{\overline{AB} \overline{AB}}{2} - p_1 \frac{\overline{BC} \overline{BC}}{2} - \int_0^L (cdl) \cos \phi \cdot r = 0 \quad (7-c.6)$$

En donde  $L$  es la longitud del arco de espiral  $AC$ . Tomando en cuenta la ecuación de la espiral logarítmica puede escribirse:

$$\overline{BC} = \overline{AB} e^{2\alpha \operatorname{tg} \phi} \quad (7-c.7)$$

Además, en la integral  $c$  y  $\cos \phi$  son constantes y

$$\begin{aligned} \int_0^L r dl &= \int_0^\alpha r \frac{rd\alpha}{\cos \phi} = \frac{1}{\cos \phi} \int_0^\alpha \overline{AB}^2 e^{2\alpha \operatorname{tg} \phi} d\alpha = \\ &= \frac{\overline{AB}^2}{\cos \phi} \left[ \frac{1}{2 \operatorname{tg} \phi} e^{2\alpha \operatorname{tg} \phi} \right]_0^\alpha = \frac{\overline{AB}^2}{2 \operatorname{sen} \phi} [e^{2\alpha \operatorname{tg} \phi} - 1] \end{aligned} \quad (7-c.8)$$

Substituyendo (7-c.7) y (7-c.8) en (7-c.6) se obtiene

$$\frac{1}{2} \overline{AB}^2 p_p' - \frac{1}{2} \overline{AB}^2 e^{2\alpha \operatorname{tg} \phi} p_1 - \frac{1}{2} \overline{AB}^2 c \operatorname{ctg} \phi (e^{2\alpha \operatorname{tg} \phi} - 1) = 0$$

Lo cual conduce a:

$$c + p_p' \operatorname{tg} \phi = (c + p_1 \operatorname{tg} \phi) e^{2\alpha \operatorname{tg} \phi} \quad (7-c.9)$$

Ecuación que relaciona a los esfuerzos en la superficie  $AB$  con los de la superficie  $BC$ .

Para llegar a relacionar la carga  $q_c'$  con los esfuerzos  $p_0$  y  $s_0$  resta ahora poner los esfuerzos  $p_1$  y  $s_1$  de la superficie  $BC$ , en términos precisamente de los esfuerzos  $p_0$  y  $s_0$ . Para ello debe tenerse en cuenta que la zona  $BCD$  es también una zona de esfuerzos constantes en estado plástico pasivo, por lo que la relación buscada puede obtenerse simplemente por medio del método del círculo de Mohr, representando por un círculo el estado de esfuerzos en todo punto

de la zona, tal como se hace en el esquema de la parte  $c$ ) de la fig. VII-c.1. En este círculo, el punto  $D$  representa el estado de esfuerzos en el plano  $BC$  y el punto  $E$  al estado de esfuerzos en el plano  $BD$ . Este punto  $E$  se obtuvo encontrando primeramente el polo  $P$ , por la intersección de la línea  $PD$ , paralela a  $BC$  de la parte  $a$ ), con el círculo y, en segundo lugar, trazando la línea  $PE$ , paralela a la superficie  $BD$ , por el polo ya obtenido. Viendo los ángulos marcados en la figura puede obtenerse que:

$$p_1 = p_0 + R \operatorname{sen}(2\eta + \phi) - R \operatorname{sen} \phi \quad (7-c.10)$$

donde  $R$  es el radio del círculo, igual a

$$R = \frac{s_1}{\cos \phi} = \frac{c + p_1 \operatorname{tg} \phi}{\cos \phi} \quad (7-c.11)$$

Por lo que, substituyendo este valor en la ec. 7-c.10 se llega a

$$p_1 = p_0 + \frac{c + p_1 \operatorname{tg} \phi}{\cos \phi} [\operatorname{sen}(2\eta + \phi) - \operatorname{sen} \phi] \quad (7-c.12)$$

despejando  $p_1$

$$p_1 = \frac{p_0 \cos \phi + c [\operatorname{sen}(2\eta + \phi) - \operatorname{sen} \phi]}{\cos \phi - \operatorname{tg} \phi [\operatorname{sen}(2\eta + \phi) - \operatorname{sen} \phi]} \quad (7-c.13)$$

Conviene ahora definir el parámetro  $m$  denominado coeficiente de movilización del esfuerzo cortante a lo largo de la superficie  $BD$ , en la forma ya utilizada en el párrafo VII-8. Así

$$s_0 = m(c + p_0 \operatorname{tg} \phi) \quad (7-c.14)$$

Volviendo a la parte  $c$ ) de la fig. VII-c.1, puede escribirse que

$$\cos(2\eta + \phi) = \frac{s_0}{R} = \frac{m(c + p_0 \operatorname{tg} \phi) \cos \phi}{c + p_1 \operatorname{tg} \phi} \quad (7-c.15)$$

De donde se ve que el valor del ángulo  $\eta$  depende de  $m$ , así como del esfuerzo normal en la superficie libre equivalente y de las propiedades del suelo.

En particular, obsérvese que si  $m = 1$  el punto  $E$  deberá coincidir con  $D$ , puesto que en este caso el esfuerzo cortante se moviliza por completo y, por lo tanto,  $\eta = 0$ . En cambio, si  $m = 0$ , el punto  $E$  debe quedar sobre el eje  $\sigma$ , puesto que  $s_0$  vale 0 y  $2\eta = 90 - \phi$ ; es decir,  $\eta = 45^\circ - \phi/2$ . Además, una vez definido  $m$ ,  $\eta$  queda definido

para un caso real dado y muy fácilmente puede relacionarse geoméricamente el valor del ángulo  $\beta$  con las características de forma de la cimentación,  $D_f$ , profundidad de desplante y  $B$ , ancho.

Substituyendo el valor de  $p_r$  (ec. 7-c.13) en la ec. 7-c.9 puede obtenerse un nuevo valor de  $p'_p$ , el cual llevado a la ec. 7-c.4, teniendo en cuenta la 7-c.5, conduce, finalmente, a

$$q'_c = c \left\{ \operatorname{ctg} \phi \left[ \frac{(1 + \operatorname{sen} \phi) e^{2\theta \operatorname{tg} \phi}}{1 - \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} (2\eta + \phi)} - 1 \right] \right\} + p_0 \left[ \frac{(1 + \operatorname{sen} \phi) e^{2\theta \operatorname{tg} \phi}}{1 - \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} (2\eta + \phi)} \right] \quad (7-c.16)$$

lo cual puede ponerse en la forma

$$q'_c = c N_c + p_0 N_q \quad (7-c.2)$$

que es la ecuación de partida. Comparando estas dos últimas ecuaciones escritas, los valores de  $N_c$  y  $N_q$  resaltan como evidentes.

### VII-c.2. Obtención del valor del $N_\gamma$

Para la obtención de este factor, que refleja la influencia del peso propio del suelo sobre la capacidad de carga, Meyerhof ha seguido del método de la espiral logarítmica, debido a Ohde, al cual encuentra ventajas por conducir a una solución matemática rigurosa en el caso  $\gamma = 0$  y por dar lugar a una superficie de falla que se parece bastante a los mecanismos de falla observados. Sin embargo, es de notar que la espiral logarítmica que el método plantea no es la misma usada en el cálculo de los factores  $N_c$  y  $N_q$ , que tenía su centro en el punto  $B$  (parte a de la fig. VII-c.1); en efecto, la espiral que ahora se busca es la crítica, que corresponde al mínimo valor de  $N_\gamma$  y esta tiene su centro en algún punto  $O$ , en general diferente de  $B$ . (fig. VII-c.2).

La obtención de  $N_\gamma$  mínimo se realiza por un método semigráfico de tanteos, en el cual se calcula la carga necesaria para producir el deslizamiento, considerando como fuerzas resistentes solamente las debidas al peso de la cuña. Analizando el equilibrio de la cuña por medio de una ecuación de momentos en torno a  $O$ , centro de la espiral supuesta, se tienen las siguientes fuerzas que producen momento

$P_1$ , empuje de la cuña  $DGE$ , que puede obtenerse del diagrama de Mohr.

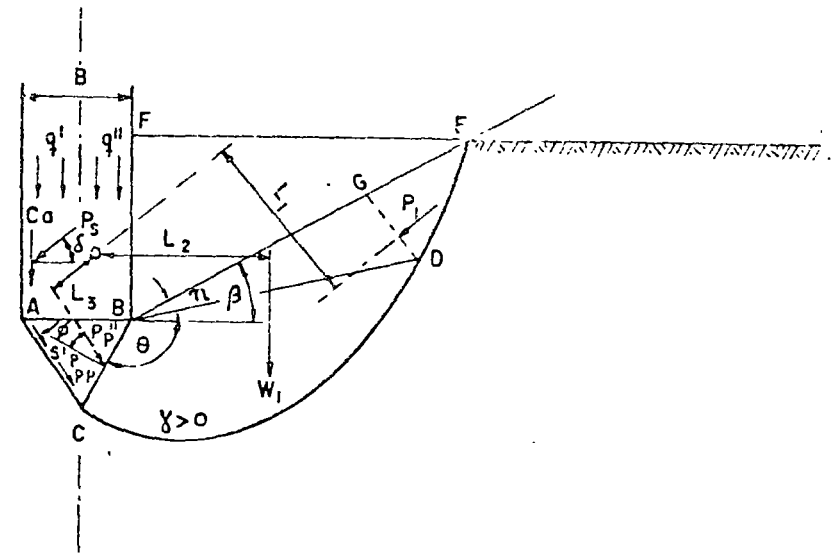


FIG. VII-c.2. Cálculo de  $N_\gamma$ , para cimientos muy largos según Meyerhof

$W_1$ , peso propio de la cuña  $BCDG$ .

$P''_p$ , empuje resultante del efecto de la cimentación, transmitido a través de la cara  $BC$ , que forma un ángulo  $\phi$  con la normal a dicha cara, y que actúa en el tercio de la distancia  $\overline{BC}$ , contado a partir de  $B$ .

Así,  $P''_p$  vale:

$$P''_p = \frac{P_1 l_1 + W_1 l_2}{l_1} \quad (7-c.17)$$

Una vez encontrado el mínimo  $P''_p$ , por tanteos con diferentes centros de espiral, se puede obtener el valor  $q''$ , al considerar el equilibrio de la cuña  $ABC$ , haciendo intervenir su propio peso:

$$q'' B = 2 P''_p \operatorname{sen} \left( 45 + \frac{\phi}{2} \right) - \frac{1}{2} \gamma B \frac{B}{2} \operatorname{tg} \left( 45 + \frac{\phi}{2} \right)$$

de donde:

$$q'' = \frac{\gamma B}{2} \left[ \frac{4 P''_p \operatorname{sen} \left( 45 + \frac{\phi}{2} \right)}{\gamma B} - \frac{1}{2} \operatorname{tg} \left( 45 + \frac{\phi}{2} \right) \right] \quad (7-c.18)$$



Lo cual puede ponerse en la forma

$$q_c'' = \frac{1}{2} \gamma B N_\gamma \quad (7-c.3)$$

donde el significado y valor de  $N_\gamma$  son evidentes.

Los valores de  $N_c$ ,  $N_q$  y  $N_\gamma$  así obtenidos, que corresponden a cimientos muy largos, son los tabulados y graficados por Meyerhof e incorporados en este capítulo como figuras VII-14, VII-15 y VII-16.

#### ANEXO VII-d

##### Cimentaciones superficiales sujetas a cargas excéntricas o inclinadas

En el caso de cargas excéntricas, que actúan a una distancia  $e$  del eje longitudinal del cimiento (excentricidad), Meyerhof recomienda tratar los problemas con las mismas fórmulas que rigen el caso de cargas axiales, modificando para efecto de cálculo, en cambio, el ancho del elemento de cimentación al valor:

$$B' = B - 2e \quad (7-d.1)$$

Lo anterior equivale esencialmente a considerar la carga centrada en un ancho menor que el real, considerando que una faja del cimiento de ancho  $2e$  no contribuye a la capacidad de carga.

Este ancho reducido  $B'$  debe usarse en las fórmulas en el término en que interviene  $B$ , en lugar de este último y, además, también debe usarse al calcular la carga total que puede resistir el cimiento, al valuar al área total de éste.

En el caso de una cimentación rectangular con carga excéntrica en las dos direcciones (longitud y ancho), el criterio anterior se aplica independientemente a las dos dimensiones del cimiento. Es de señalar, a fin de evitar errores de cálculo, que en el caso de un arco circular, la fórmula que da la carga total del cimiento es, consecuentemente con lo anterior:

$$Q_{tot} = \frac{\pi D D'}{4} q_c \quad (7-d.2)$$

en que  $D'$ , diámetro reducido, vale:

$$D' = D - 2e.$$

En el caso de cargas inclinadas Meyerhof ha obtenido coeficientes de reducción para los factores de capacidad de carga  $N_c$  y  $N_\gamma$ ,

que intervienen en su propia teoría. Con éstos puede obtenerse la capacidad de carga equivalente bajo fuerzas verticales, simplemente multiplicando los factores normales, obtenidos para carga vertical, por los coeficientes mencionados.

Los coeficientes de reducción aparecen en la Tabla 7-d.1, en la forma en que los presenta Sowers<sup>12</sup>.

TABLA 7-d.1

Factor	Profundidad de Desplante, $D_c$	Inclinación de la carga respecto a la vertical					
		0	10°	20°	30°	45°	60°
$N_\gamma$	0	1.0	0.5	0.2	0	—	—
	B	1.0	0.6	0.4	0.25	0.15	0.05
$N_c$	0 a B	1.0	0.8	0.6	0.4	0.25	0.15

En el caso de que la carga inclinada sea excéntrica, el efecto de los coeficientes de la tabla anterior se combinará con las normas dadas al comienzo de este anexo para cargas no axiales.

#### REFERENCIAS

1. Jürgenson, L. — *The application of Theories of Elasticity and Plasticity to Foundation Problems* — Contributions to Soil Mechanics — Boston Society of Civil Engineers — 1925-1940.
2. Prandtl, L. — *Ueber die Haerte plastischer Koerper* — Goettingen Nachr., math. — phys. Kl. — 1920.
3. Prager, W. y Hodge, P. G. — *Theory of Perfectly Plastic Solids* (Capítulo 6) — John Wiley and Sons — 1961.
4. Hill, R. — *The Plastic Yielding of Notched Bars under Tension* — Quarterly — Journal of Mechanics and Applied Mathematics — 1949.
5. Terzaghi, K. — *Theoretical Soil Mechanics* — Cap. VIII — John Wiley and Sons — 1956.
6. Skempton, A. W. — *The Bearing Capacity of Clays* — Building Research Congress — Londres — 1951.
7. Meyerhof, G. G. — *The Ultimate Bearing Capacity of Foundations* — Geotechnique — Diciembre, 1951.
8. Meyerhof, G. G. — *Recherches sur la force portante des pieux* — Suplements des Annaux du Institute du Batiment et Travaux Publiques — Paris, marzo-abril, 1953.
9. Skempton, A. W., Yassin, A. A., Gibson, R. E. — *Théorie de la force portante de pieux dans la Sable* — Suplements des Annaux du Institute du Batiment et Travaux Publiques — Paris, marzo-abril, 1953.
10. Meyerhof, G. G. y Murdock, L. J. — *An Investigation of the Bearing Capacity of Some Bored and Driving Piles in London Clay* — Geotechnique — 1953.

11. Meyerhof, G. G.—*Influence of Proughness of Base and Ground-water Conditions on the Ultimate Bearing Capacity of Foundations*—Geotechnique—1955.
12. Meyerhof, G. G.—*The Ultimate Bearing Capacity of Foundation on Slopes*—Vol. I—Memorias del IV Congreso Internacional de Mecánica de Suelos y Cimentaciones.—1957.
13. Meyerhof, G. G.—*The Bearing Capacity of Foundations under Eccentric and Inclined Loads*—Memoria del III Congreso Internacional de Mecánica de Suelos y Cimentaciones—Vol. I—Zurich—1953.
14. Meyerhof, G. G.—*Some Recent Foundation Research and Its Application to Design*—Structural Engineer—Vol. 31—Nº 6—Londres—Junio—1953.
15. Sowers, G. F.—*Shallow Foundations*—Cap. 6 de la obra *Foundation Engineering*, editada por G. A. Leonards—McGraw Hill Book Co—1962.

## BIBLIOGRAFIA

- Theoretical Soil Mechanics*—Karl Terzaghi—John Wiley and Sons—1943.  
*La Mecánica de Suelos en la Ingeniería Práctica*—Karl Terzaghi y Ralph B. Peck—(Trad. O. Moretto)—El Ateneo Ed—1955.  
*Mecánica de Suelos*—J. A. Jiménez Salas—E. Dossat—1954.  
*Foundation Engineering*—Editado por G. A. Leonards—McGraw Hill Book Co.—1962.  
*Principles of Soil Mechanics*—Ronald F. Scott—Addison-Wesley Pub Co.—1963.  
*Foundations*—A. L. Little—Edward Arnold Ltd—1961.

## CAPITULO VIII

## CIMENTACIONES POCO PROFUNDAS

## VIII-1. Introducción

En este capítulo se estudian las cimentaciones de todos aquellos tipos que se conocen en la rutina diaria de la ingeniería con el nombre de *poco profundas* o *superficiales*. En general, estas expresiones se refieren a cimentaciones en las que la profundidad de desplante no es mayor que un par de veces el ancho del cimientto; sin embargo, es evidente que no existe un límite preciso en la profundidad de desplante que separe a una cimentación *poco profunda* de una *profunda*.

La preocupación del constructor por el comportamiento de las cimentaciones es, por supuesto, tan antigua como la construcción misma, pero hasta épocas relativamente recientes tal preocupación no se reflejó en intentos de analizar científicamente el comportamiento de las cimentaciones, tratando de establecer principios generales que sirvieran a la vez de normas tanto para el proyecto, como para la construcción de campo.

Durante muchísimo tiempo, la tecnología de las cimentaciones se estableció solamente bajo bases burdamente empíricas; más que de una técnica en el actual sentido de la palabra, resulta justificado hablar de un "arte de cimentar". El hecho de que con lo que hoy se antojan tan pobres armas, el constructor de antaño fuera capaz de realizar obras magníficas que perduraron hasta los tiempos actuales más bien habla en favor de la inventiva y capacidad de adaptación de los ingenieros de otras épocas, que de la técnica que utilizaron. Hoy no resulta razonable seguir usando tan pobres medios y prescindir de los avances recientes en el conocimiento del campo en nombre de las mayores realizaciones de la ingeniería clásica.

La transmisión de conocimientos puramente experimentales en forma de una auténtica tradición oral, fue, durante largos siglos, el único modo de que disponía un constructor para adquirir el arte de cimentar. Naturalmente, todos los vicios del conocimiento puramente experimental, sin bases científicas generalizadoras, estaban presentes en este método.

En el momento en que el ritmo de la construcción aumentó hasta niveles similares a los que hoy se conocen, el método del "arte" se transformó en algo particularmente peligroso, al aumentar el número

de constructores, con lo que, necesariamente, el arte de cimentar cayó en manos no siempre muy bien dotadas. Los fracasos que entonces se hicieron notar condujeron al primer intento de racionalizar la construcción de las cimentaciones. Los constructores de alguna determinada ciudad volvieron la vista a sus realizaciones bien logradas y, relacionando la carga soportada con el área del cimiento, trataron de establecer un valor "seguro" del esfuerzo que era posible dar al suelo de aquel lugar particular. Nacieron así las leyes de "Código" o "Reglamento", que en muchas partes perduran en la actualidad. Sin embargo, basta pensar por un instante en las complejidades y variaciones del suelo en cualquier lugar del planeta, para darse cuenta que la generalización que se persigue en un código urbano de tal estilo es, por lo menos, muy peligrosa. Además, hoy se dispone de una gran variedad de tipos de cimentación poco profunda, adaptable cada uno de ellos a tipos peculiares de suelos y estructuras, consiguiéndose con una buena combinación seguridad y economía máximas; es claro que los estudios que una técnica de tal naturaleza requiere, quedan muy lejos de la generalización burda que presupone un simple Código.

Las Teorías de Capacidad de Carga, desarrolladas a partir de 1920, proporcionaron una base más o menos científica al estudio de las cimentaciones. Combinadas con el creciente conocimiento de los suelos y sus propiedades mecánicas y con el mejoramiento de las técnicas de medición de campo, han permitido en la actualidad el desarrollo de una metodología de proyecto y construcción de cimentaciones mucho más racional y avanzada que la que nunca antes poseyó el ingeniero. De lo anterior no debe seguirse que las teorías recientemente desarrolladas resuelven los problemas por completo; ya se ha insistido sobre sus limitaciones aún enormes. Pero tales teorías, auxiliadas por la clasificación y el estudio de los suelos y por mediciones del comportamiento de cimentaciones construidas, que permiten encastrarlas y asimilar correctamente las experiencias adquiridas, proporcionan una base común, que hace posible el intento de generalizar el conocimiento sobre cimentaciones, convirtiendo el arte de cimentar en una disciplina que tiende a lo científico cada vez más.

En este capítulo se clasifican someramente las cimentaciones poco profundas y se estudian las normas esenciales que deben regir su proyecto y construcción en los diferentes suelos. Finalmente, se estudian también algunos casos especiales de interés práctico, relacionados con el tema.

### VIII-2. Clasificación de las cimentaciones poco profundas

Los tipos más frecuentes de cimentaciones poco profundas son las zapatas aisladas, las zapatas corridas y las losas de cimentación.

Las zapatas aisladas son elementos estructurales, generalmente cuadrados o rectangulares y más raramente circulares, que se construyen bajo las columnas con el objeto de transmitir la carga de éstas al terreno en una mayor área, para lograr una presión apropiada. En ocasiones las zapatas aisladas soportan más de una columna. Las zapatas aisladas se construyen generalmente de concreto reforzado.

Las zapatas corridas son elementos análogos a los anteriores, en los que la longitud supera en mucho al ancho. Soportan varias columnas o un muro y pueden ser de concreto reforzado o de mampostería, en el caso de cimientos que transmiten cargas no muy grandes. La zapata corrida es una forma evolucionada de la zapata aislada, en el caso en que el suelo ofrezca una resistencia baja, que obligue al empleo de mayores áreas de repartición o en el caso en que deban transmitirse al suelo grandes cargas.

Cuando la resistencia del terreno sea muy baja o las cargas sean muy altas, las áreas requeridas para apoyo de la cimentación deben aumentarse, llegándose al empleo de verdaderas losas de cimentación, construidas también de concreto reforzado, las que pueden llegar a ocupar toda la superficie construida.

No existe ningún criterio preciso para distinguir entre si los tres tipos anteriores, siendo la práctica la norma para su distinción. También existen multitud de variedades de cimentaciones combinadas, en las que los tres tipos básicos se entremezclan al gusto del proyectista o del constructor, que se esforzará siempre por extraer del suelo el mayor partido posible, combinando los factores estructurales con las características del terreno de la manera más ventajosa en cada punto.

Si aún en el caso de emplear una losa corrida la presión transmitida al subsuelo sobrepasa la capacidad de carga de éste, es evidente que habrá de recurrirse a soportar la estructura en estratos más firmes, que se encuentren a mayores profundidades, llegándose así a las cimentaciones profundas.

### VIII-3. Factores que determinan el tipo de cimentación

A continuación se exponen ciertas normas breves que han de ser tomadas en cuenta para el proyecto de cualquier cimentación. En rigor, lo que más adelante se dice es aplicable tanto a cimentaciones poco profundas, como a otras desplantadas a mayor profundidad; pues se trata de comentarios de orden general que deben presidir cualquier proyecto de cualquier cimentación.

En general, los factores que influyen en la correcta selección de una cimentación dada pueden agruparse en tres clases principales:

- 1) Los relativos a la superestructura, que engloban su función, cargas que transmite al suelo, materiales que la constituyen, etc.
- 2) Los relativos al suelo, que se refieren a sus propiedades mecánicas, especialmente a su resistencia y compresibilidad, a sus condiciones hidráulicas, etc.
- 3) Los factores económicos, que deben balancear el costo de la cimentación en comparación con la importancia y aún el costo de la superestructura.

De hecho, el balance de los factores anteriores puede hacer que diferentes proyectistas de experiencia lleguen a soluciones ligeramente distintas para una cimentación dada, pues el problema carece de solución única por faltar un criterio "exacto" para efectuar tal balance, que siempre tendrá una parte de apreciación personal.

En general, puede decirse que un balance meditado de los factores anteriores permite en un análisis preliminar a un proyectista con experiencia eliminar todos aquellos tipos de cimentación francamente inadecuados para resolver su problema específico, quedando sólo algunos que deberán de ser más cuidadosamente estudiados para elegir entre ellos unas cuantas soluciones que satisfagan todos los requisitos estipulados desde el punto de vista estructural, de suelos, social, etc., para escoger de entre éstos el proyecto final, generalmente con una apreciación simplemente económica. Si ha habido éxito en todas las etapas del estudio, la solución final representará un excelente compromiso entre requerimientos estructurales y costo.

Debe observarse que al balancear los factores anteriores, adoptando un punto de vista estrictamente ingenieril debe estudiarse no sólo la necesidad de proyectar una cimentación que se sostenga en el suelo disponible sin falla o colapso, sino también que no tenga durante su vida asentamientos o expansiones que interfieran con la función de la estructura. Se llega así a la contribución fundamental de la Mecánica de Suelos al problema de las cimentaciones, contribución de doble aspecto que involucra dos problemas de la misma importancia para garantizar el éxito final. Por un lado, abordando un problema de Capacidad de Carga, se trata de conocer el nivel de esfuerzos que la cimentación puede transmitir al suelo sin provocar un colapso o falla brusca, generalmente por esfuerzo cortante; por otro lado, será necesario calcular los asentamientos o expansiones que el suelo va a sufrir con tales esfuerzos, cuidando siempre que éstos queden en niveles tolerables para la estructura de que se trate. No puede decirse que uno de los aspectos anteriores tenga mayor importancia que el otro en el proyecto de una cimentación; ambos deberán ser tenidos en cuenta simultáneamente y su justa apreciación dependerá el éxito o fracaso en un caso dado.

#### VIII-4. Consideraciones generales sobre el contacto suelo-estructura

Se trata ahora de dar algunas ideas fundamentales sobre como afecta la rigidez de las áreas cargadas a la distribución de asentamientos y presiones en el suelo subyacente; se consideran en el análisis suelos puramente friccionantes y puramente cohesivos, así como los casos limites de áreas cargadas totalmente flexibles e infinitamente rígidas.

Considérese en primer lugar el caso de un área uniformemente cargada y totalmente flexible. Debido a su flexibilidad, las presiones que el área cargada pasa al suelo serán idénticas a la presión uniforme sobre el área. Por otra parte, el asentamiento no será uniforme, sino que es máximo al centro del área cargada y menor en la periferia, adoptando una ley similar a la que se muestra en la fig. VIII-1.a, si es que el medio cargado se supone idealmente elástico. La justificación de la afirmación anterior se presenta en el Anexo III-a, y se corrobora en el Anexo VIII-a.

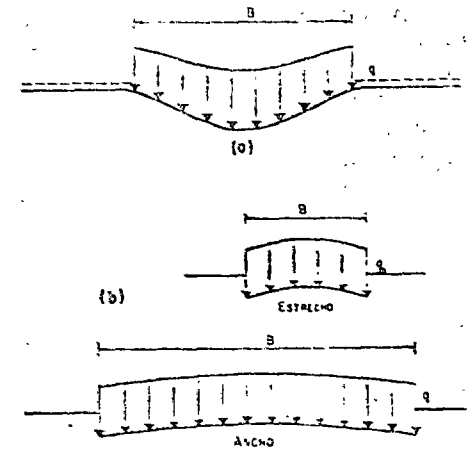


FIG. VIII-1. Perfil de asentamiento bajo un área uniformemente cargada sobre la superficie de un medio semi-infinito

En la práctica el asentamiento inmediato, debido exclusivamente a cambio de forma (es decir, excluyendo el asentamiento por consolidación), de áreas flexibles con carga uniforme, apoyadas en arcillas saturadas, adopta un perfil similar al mostrado en la parte a) de la fig. VIII-1. En cambio, cuando el área flexible se apoya en arenas

o gravas, el perfil se parece a los mostrados en la parte *b*) de la misma figura, ya que estos materiales poseen la propiedad de que su rigidez aumenta con el confinamiento, el cual obviamente será máximo en la zona bajo el centro del área cargada.

Considérese ahora en cambio que la carga se transmite al suelo a través de una placa infinitamente rígida. En este caso es obvio que, por su rigidez, la placa se asentará uniformemente, por lo que la presión de contacto entre placa y medio no podrá ser uniforme. Comparando este caso con el de la fig. VIII-1, es fácil ver que en el medio homogéneo y elástico la presión es mínima al centro y máxima en las orillas, puesto que para llegar al asentamiento uniforme éste deberá disminuir en el centro (disminución de presión) y aumentar en las orillas (aumento de presión). Una intuición análoga para el caso del medio cuya rigidez aumenta con el confinamiento conduce a una distribución en la que la presión es máxima bajo el centro del área cargada y mucho menor bajo la periferia. En la fig. VIII-2 se muestran ambas distribuciones (partes *a* y *b*).

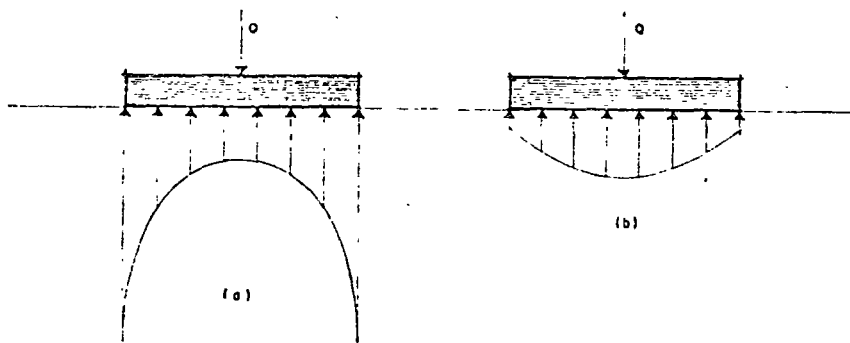


FIG. VIII-2. Distribución de presiones bajo una placa infinitamente rígida

- a) Medio homogéneo y elástico  
b) Medio cuya rigidez aumenta con el confinamiento

También ahora, en la práctica, el caso *a*) se parece a la distribución en una arcilla saturada, aún cuando teóricamente la presión es infinita en la periferia de la placa y es igual a la mitad de la presión media, bajo el centro; evidentemente la primera condición no puede satisfacerse y el valor de la presión en la periferia está limitado a su máximo que depende de la resistencia del material.

El caso *b*) de la fig. VIII-2 representa aproximadamente la distribución real de presión bajo una placa rígida colocada sobre arena o grava.

### VIII-5. Cimentaciones en arenas y gravas

En todo problema de cimentaciones existe un doble aspecto a considerar; por una parte la capacidad de carga, para evitar la falla por este concepto; por otra parte existe un aspecto de asentamientos, según el cual la cimentación no debe sufrir hundimientos o expansiones que pongan en peligro la función de la estructura o que sean mayores que aquéllos considerados como tolerables en el proyecto estructural.

El diseño de una cimentación consistirá siempre en considerar estos dos aspectos.

Se analizará en lo que sigue, en primer lugar, el aspecto de capacidad de carga.

Si un cimiento de ancho  $B$  está desplantado a una profundidad  $D_f$  dentro de un manto muy potente de arena o grava, la capacidad de carga de ese cimiento podrá estimarse haciendo uso de las fórmulas que proporciona la Teoría de Terzaghi (Capítulo VII). Para el caso de un cimiento muy largo, dicha capacidad, a la falla, será por lo tanto:

$$q_c = \gamma D_f N_q + \frac{1}{2} \gamma B N_\gamma \quad (8-1)$$

Para los cimientos cuadrados o circulares se usarán las fórmulas correspondientes a la Teoría de Terzaghi, tal como han sido obtenidas en el capítulo VII de este volumen.

Puede verse que, en esencia, la capacidad de carga última de un cimiento poco profundo en arena o grava depende de los siguientes conceptos:

1. La compacidad relativa de la arena, que se refleja en el valor de  $\phi$  y, por ello, en los valores de los factores de capacidad de carga  $N_q$  y  $N_\gamma$ . De hecho dicha compacidad influye muy poderosamente en la capacidad de carga, pues  $N_\gamma$  y  $N_q$  aumentan muy abruptamente cuando la compacidad llega a valores altos. El mejor método práctico para determinar la compacidad relativa de un manto de arena es quizá la prueba estándar de penetración, descrita en el apéndice del volumen I de esta obra. También se incluyó en aquel lugar una gráfica que expresa la importante correlación entre  $N$ , número de golpes en la prueba, la compacidad relativa y el valor del ángulo  $\phi$ , de fricción interna.

Cuando se trate con arenas muy finas situadas bajo el nivel freático el valor de  $N$  dado por la prueba de penetración es-

tándar resulta mayor que el que se tendría con arena seca, debido a la baja permeabilidad de la arena, que impide que el agua emigre a través de los huecos al producirse el impacto. Los valores obtenidos en la prueba en estos casos ( $N'$ ) se corrigen, según la expresión siguiente, propuesta por Peck, Hanson y Thornburn<sup>2</sup>.

$$N = 15 + \frac{1}{2} (N' - 15) = \frac{N' \pm 15}{2} \quad (8-2)$$

La corrección anterior sólo se hace si  $N' > 15$ .

Finalmente, es de señalar que en los casos en que existan gravas o boleos en el suelo, los resultados de la prueba estándar de penetración no suelen ser representativos de la compacidad de los mantos, pues uno de aquellos elementos puede detener el penetrómetro, aumentando ficticiamente el número de golpes. En estos casos la compacidad es mucho más difícil de determinar por métodos simples, haciéndose necesario recurrir a la experiencia y al criterio.

2. La posición del nivel de aguas freáticas.

En general, el peso específico de cualquier arena no sumergida oscila entre límites muy próximos, sea la arena seca, húmeda y saturada. Pero si la arena está sumergida bajo el nivel freático, el valor de  $\gamma$  se reduce sensiblemente a la mitad, lo cual se refleja de inmediato en la capacidad de carga última obtenida. Así por ejemplo, el valor de la sobrecarga al nivel de desplante  $\gamma D_f$  deberá calcularse teniendo en cuenta la condición de ese material, de modo que si está parcial o totalmente sumergido, se adopte el valor  $\gamma'_m$  donde ello ocurra; el valor de  $\gamma$  que figura en el segundo término de la ec. 8-1, se refiere al material situado bajo el nivel de desplante del cimiento, que sería movilizado en caso de falla. Peck, Hanson y Thornburn<sup>2</sup> recomiendan que si el nivel freático está a una profundidad  $B$  o mayor bajo el nivel de desplante, se considere el peso específico que figura en el segundo término de la ecuación como no sumergido; si el nivel freático y el de desplante coinciden o el primero queda encima del segundo deberá usarse el valor  $\gamma'_m$ ; en casos intermedios, una interpolación lineal entre ambos valores de  $\gamma$  será razonable. La posición del nivel de aguas freáticas se refleja además muy acusadamente en los costos de construcción de la cimentación, en el momento en que el nivel de desplante quede bajo dicho nivel freático, pues entonces la zona de cimentación habrá de ser drenada de manera que el nivel del agua se abata y la excavación necesaria se realice en seco.

Algunos métodos útiles para abatir el nivel freático en excavaciones se mencionarán en el volumen III de esta obra.

Finalmente, el hecho de que el nivel freático quede sobre el nivel de desplante puede conducir, cuando el espacio de cimentación desee aprovecharse, por ejemplo, para sótanos en edificios, al delicado problema de impermeabilizar estas zonas, lo cual es siempre difícil y costoso.

3. El ancho de la cimentación, según se deduce de la expresión 8-1, influye linealmente en la parte de la capacidad de carga que se refiere al peso del suelo situado bajo el nivel de desplante; por el contrario, dicho ancho no influye en la parte de capacidad de carga que refleja el efecto de la sobrecarga existente sobre el nivel de desplante.
4. Por último, la profundidad de desplante,  $D_f$ , también influye en la capacidad de carga, según se desprende de la inspección de la fórmula 8-1. No existe ningún criterio fijo para establecer apriorísticamente la profundidad de desplante que debe utilizarse en un proyecto dado; sin embargo, es posible mencionar algunas consideraciones generales que han de tenerse presentes para seleccionar una profundidad específica. Por muy bueno que sea un terreno de cimentación, no conviene cimentar demasiado superficialmente, pues ello conduce a estructuras con poca resistencia a fuerzas laterales; un valor del orden de 1.0 m debe verse como un mínimo recomendable; este valor pudiera rebajarse a otro del orden de 0.50 m en caso de que el suelo fuera extraordinariamente firme y la estructura ligera. Otra regla digna de tenerse en cuenta en la práctica es la de apoyar los cimientos siempre abajo de la capa de tierra vegetal, pues de otra manera pudieran presentarse posteriormente problemas de muy difícil solución con plantas en crecimiento, aparte de lo indeseable del suelo con materia orgánica desde el punto de vista de resistencia y compresibilidad. También es preciso considerar siempre la posibilidad de la existencia de cavernas u oquedades en el subsuelo o la presencia de estructuras subterráneas debidas al hombre, como por ejemplo ductos, colectores, cables, etc. La mayor parte de estos problemas pueden resolverse con la adecuada exploración.

El diseño de una cimentación poco profunda construida sobre suelos "friccionantes" es particularmente complicado cuando se atiende al aspecto de asentamientos de la estructura. En efecto, como se mencionó en el Capítulo III, el problema del cálculo de asentamientos en arenas dista de estar razonablemente resuelto. Desde luego, todo lo que en el capítulo mencionado se expuso puede aplicarse a un problema práctico como norma de criterio, para llegar a tener una

idea del orden de las magnitudes en juego. En lo que sigue se proporcionarán algunas ideas, basadas en el empirismo, que han probado su utilidad en muchos casos prácticos.

El asentamiento bajo una zapata en arena dependerá, como es natural, de las características esfuerzo-deformación de ésta; en especial de la rigidez que presenta a los esfuerzos cortantes, la cual depende del confinamiento del material y de su propia compacidad. El primer concepto aumenta en forma toscamente lineal con la profundidad en una arena, por lo que la mencionada rigidez seguirá una ley más o menos similar. Teniendo en cuenta que, como se dijo, el peso específico de una arena sumergida es del orden de la mitad del no sumergida, puede concluirse que el asentamiento bajo una zapata en arena sumergida se duplicará aproximadamente respecto al valor en la misma arena no sumergida, debido a que la presión de confinamiento en el primer caso depende del valor  $\gamma'_m$  en vez del de  $\gamma_m$  y, por ello, la rigidez del material al esfuerzo cortante se reduce prácticamente a la mitad. De esta manera, puede verse cómo la posición del nivel freático influye en la magnitud de los asentamientos de la arena.

A igual presión de contacto de una zapata en arena, el asentamiento crece al crecer el ancho de la zapata, si bien con bastante lentitud; la razón de este hecho estriba en que, al aumentar el ancho se afectan zonas más profundas en que la rigidez ante esfuerzos cortantes va siendo más grande.

Para arenas no sumergidas o para casos en que el nivel freático se encuentre a una profundidad  $B$ , ancho de la zapata, o mayor respecto al nivel de desplante, Peck, Hanson y Thornburn<sup>2</sup> proporcionan gráficas empíricas para obtener la presión de contacto correspondiente a un hundimiento de 2.5 cm (1"), para diferentes anchos de cimiento y distintas compacidades de la arena, obtenidas por la prueba estándar de penetración (fig. VIII-3).

Los valores de  $N$ , número de golpes en la prueba estándar, deberán obtenerse en su caso, usando las correcciones indicadas en este mismo inciso. La dimensión  $B$  de las gráficas se refiere al ancho de la zapata, si ésta es cuadrada, o a su mínima dimensión, si es rectangular. Si la arena estuviera sumergida, por lo arriba expuesto deberán reducirse a la mitad los valores dados por las gráficas para la presión admisible, correspondiente al asentamiento de 2.5 cm.

En ocasiones se ha usado la gráfica anterior para obtener las presiones de contacto correspondientes a otros asentamientos diferentes a 2.5 cm, haciendo la suposición de que el asentamiento es directamente proporcional a la presión de contacto; así, por ejemplo, los valores de la presión de la gráfica, duplicados, corresponderán, para el resto de las condiciones invariables, a asentamiento bajo la zapata de 5 cm (2").

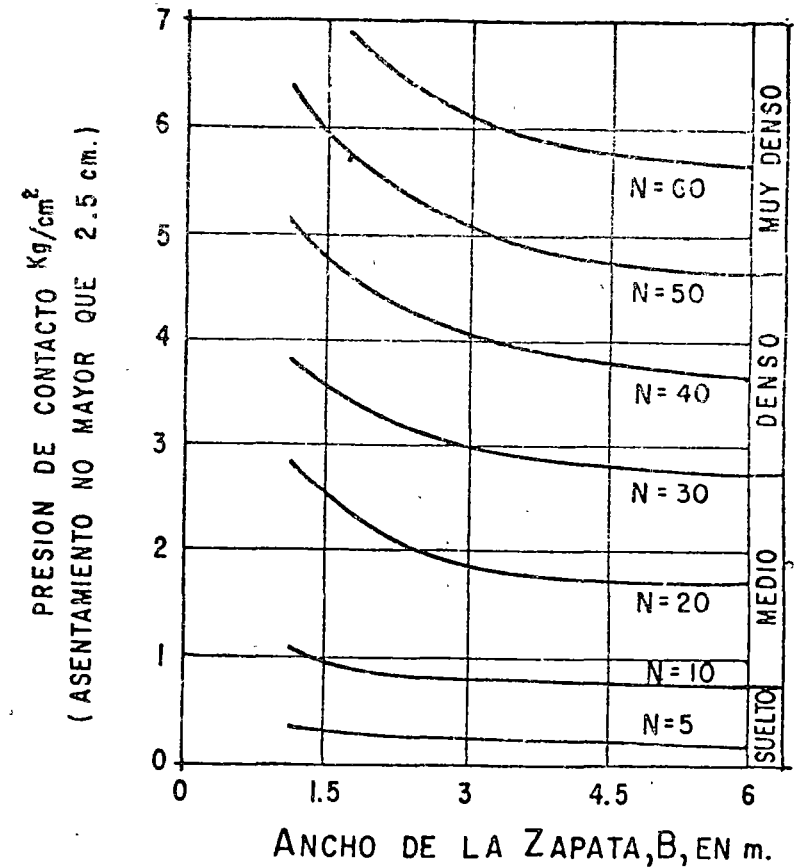


FIG. VIII-3. Presión de contacto correspondiente a asentamientos de 2.5 cm (1") para zapatas en arena

### VIII-6. Cimentaciones en arcillas homogéneas

En lo referente al aspecto de capacidad de carga, las cimentaciones poco profundas en arcillas homogéneas pueden calcularse con las teorías de Terzaghi o de Skempton, tal como se expusieron, particularizadas para el caso, en el Capítulo VII. Quizá la Teoría de Skempton sea la más completa para la aplicación al caso en estudio, pero la Teoría de Terzaghi proporciona valores muy similares de la capacidad de carga, por lo que la distinción entre ambas teorías tiene más de académica que de real en cimentaciones poco profundas.

En cualquiera de los dos casos, la expresión a usar es del tipo:

$$q_c = c N_c + \gamma D_f \quad (8-3)$$

La capacidad de carga última depende ahora esencialmente de la "cohesión" del material y de la presión actuante al nivel de desplante ( $\gamma D_f$ ). El ancho del cimiento no interviene si se aplica la Teoría de Terzaghi y su intervención es indirecta (a través de la relación de  $D/B$ ) en la Teoría de Skempton.

El valor de  $c$  puede obtenerse de una prueba triaxial rápida, que es la que mejor refleja dentro de un criterio de trabajo con esfuerzos totales, las circunstancias de la cimentación, en que la etapa inicial antes de la consolidación, suele ser la más crítica. Frecuentemente suele usarse como alternativa la prueba de compresión simple, algo más sencilla y rápida de ejecución; sin embargo, hay ciertos aspectos que hacen preferible la prueba triaxial rápida, cuando la disponibilidad de equipo y otros factores hagan posible su realización. En general, la prueba de compresión simple proporciona valores de la resistencia del suelo ("cohesión") algo inferiores a los de una prueba rápida; la razón estriba en la falta de soporte lateral que se tiene en una prueba de compresión simple, lo que hace que cualquier fisura o pequeña irregularidad estructural se refleje en el resultado de la prueba; por otra parte, la arcilla en la naturaleza posee siempre un cierto grado de confinamiento, por lo que, para una cimentación, suelen considerarse algo más representativos los resultados de una prueba rápida.

La capacidad de carga en arcillas homogéneas depende también, según se vio, de la presión existente al nivel de desplante ( $\gamma D_f$ ). En este caso existe una diferencia importante en el cálculo, según la cimentación sea o no impermeable, cuando el nivel de desplante quede bajo el nivel freático. En el primer caso, al nivel de desplante se habrá aliviado al terreno en una presión que es la total correspondiente a esa profundidad; por el contrario, en una cimentación permeable y por ello llena de agua hasta una altura igual a la del nivel freático, la descarga efectuada por la excavación no incluye a la presión del agua, por lo que el término  $\gamma D_f$ , debe representar únicamente la presión efectiva y así debe ser calculado; por ello, deberá usarse el peso específico sumergido en la parte del suelo bajo el nivel freático, o bien deberá restarse a la presión total al nivel de desplante, la presión debida al agua en el mismo nivel.

En arcillas homogéneas el que el nivel de desplante quede bajo el nivel freático ya no suele ser un problema tan grave como en el caso de arenas; las arcillas por su impermeabilidad permiten mantener las cepas de excavación en seco con un bombeo moderado y no muy costoso. Ahora bien, si la excavación es de gran área y profundidad, el bombeo no se podrá emplear despreocupadamente, pues el flujo de agua hacia la excavación, en el fondo de la misma, produce

expansiones que posteriormente se traducirán en asentamientos de la estructura; en estos casos, lo indicado es o bien hacer la excavación en secciones de área menor o bien recurrir a métodos para disminuir el flujo del agua hacia el fondo de la excavación, tales como pozos de captación o similares, que se describirán en el Volumen III de esta obra.

Otro problema de las excavaciones en arcillas especialmente de las relativamente profundas, es el que se refiere a la estabilidad de los taludes de las mismas y a los movimientos verticales y horizontales que se producen en las zonas adyacentes a la excavación propiamente dicha. La estabilidad probablemente ya difícil de por sí, por la baja resistencia común en las arcillas, se ve especialmente comprometida por el flujo lateral del agua hacia la excavación. La disminución de la resistencia al esfuerzo cortante que este flujo produce, así como el efecto de las fuerzas de filtración, son factores que deben considerarse en cualquier análisis de estabilidad a plazo relativamente largo. En el Volumen III de esta obra se discutirán métodos para interceptar el flujo lateral del agua. El tablestacado es otra de las formas de estabilizar los bordes de una excavación, generalmente preferible en zonas en que por existir edificaciones vecinas u otras causas similares, no sean tolerables desplazamientos en el terreno.

En regiones muy frías, según se explicó en el Capítulo I, el suelo se congela cuando la temperatura ambiente es inferior a  $0^\circ\text{C}$ . Esto produce expansiones que dependen tanto de factores ambientales como de la naturaleza del suelo. Una cimentación desplantada en este suelo se eleva durante la congelación y desciende bruscamente en el deshielo; para evitar estos efectos perjudiciales, la cimentación deberá desplantarse a suficiente profundidad. La profundidad máxima de congelación puede establecerse a partir de la experiencia local y la profundidad de desplante recomendable por este concepto será de ese orden en suelos muy susceptibles a la acción del congelamiento, pudiéndose llegar a la mitad de dicho valor en suelos poco susceptibles. En la República Mexicana los espesores máximos de congelamiento son del orden de 40 cm en el norte del país, por lo que puede decirse que el problema es inexistente, si se tiene en cuenta lo discutido respecto a la profundidad de desplante mínima recomendable en cualquier circunstancia.

Un aspecto muy importante en las cimentaciones poco profundas en arcillas es el relativo a los cambios volumétricos que ocurren en el suelo al variar su contenido de agua; estas variaciones proceden por lo general de periodos de estiaje y lluvias, aunque a veces son causados por factores más limitados, como riego de ciertas áreas o la existencia de hornos o calderas inadecuadamente aisladas. En áreas cubiertas de gran extensión el efecto es siempre más notorio en los bordes que en el centro, más protegido, lo que se traduce en



movimientos diferenciales que causan daños progresivos. En regiones áridas, basta la reducción de evaporación que produce una vivienda o un pavimento al cubrir el suelo, para producir humedecimiento en la zona cubierta, con la correspondiente expansión; las grietas longitudinales de gran desarrollo que aparecen frecuentemente en los hombros de las carreteras en estas zonas, tienen este origen. En las regiones húmedas el efecto es el contrario; cuando por alguna razón el suelo se seca, sobreviene el enjuntamiento y el agrietamiento y cualquier estructura suprayacente se asienta y se daña.

A veces, el agua que los árboles absorben es suficiente para producir cambios de volumen de importancia; esto aparte del efecto destructor que las raíces pueden ejercer por sí mismas.

Estudios realizados por Holtz y Gibbs en el Bureau of Reclamation y por Sowers y colaboradores<sup>3,4</sup> han permitido ligar la susceptibilidad de las arcillas a los cambios volumétricos con su índice plástico y su límite de contracción. Como resultado de tales estudios ha podido establecerse la siguiente relación empírica, que aparece en la Tabla 8-1.

TABLA 8-1

Susceptibilidad a cambios de volumen por cambios de contenido de agua	Índice de plasticidad		Límite de Contracción
	Regiones áridas	Regiones húmedas	
Poca	0-15	0-30	12 o más
Poca a media	15-30	30-50	10-12
Media a alta	30 o más	50 o más	10 o menos

Los cambios volumétricos son máximos en la superficie del suelo y nulos en la profundidad correspondiente al nivel freático; cuando éste no aparece dentro de la zona sujeta a cambios, la profundidad de esta zona es muy variable, dependiendo de los factores que provoquen la variación y de la naturaleza del suelo.

La profundidad de desplante deberá de quedar siempre bajo la zona sujeta a cambios volumétricos, cuando ésta puede ser determinada. Si esto último no es posible, el problema ha de ser resuelto con criterio y experiencia ceñidos a las condiciones locales.

En cimentaciones poco profundas en arcillas homogéneas el problema de asentamientos por consolidación suele ser el factor dominante en su comportamiento, de manera que la presión admisible desde el punto de vista de la resistencia del suelo suele quedar limitada por el valor que produzca el máximo asentamiento tolerable para la estructura que se desea cimentar.

Los asentamientos por consolidación se calculan recurriendo a la Teoría de la Consolidación Unidimensional con Flujo Vertical, que

se describió en el Volumen I de esta obra. Calculando los asentamientos que corresponden a cada elemento de la cimentación pueden obtenerse los asentamientos diferenciales, que son los que a fin de cuentas suelen interesar al proyectista de la estructura. Debe tenerse en cuenta que al calcular el asentamiento producido bajo una zapata, por ejemplo, deben hacerse intervenir las presiones que transmiten otras zapatas vecinas, situadas a distancias en que su influencia alcance a hacerse notar.

En el cálculo de asentamientos por consolidación sólo deben intervenir las cargas muertas y las vivas permanentes, pues las cargas accidentales o transitorias actúan un tiempo pequeño en comparación al requerido para influenciar un proceso de consolidación.

Los asentamientos diferenciales que una estructura puede tolerar dependen de su función y de características de la propia estructura y no puede darse un criterio general al respecto; en este punto el ingeniero especialista en suelos ha de quedar subordinado a las necesidades del ingeniero estructural.

Los asentamientos totales son muy importantes cuando existen estructuras vecinas a la considerada que pueden sufrir perjuicios por el movimiento de ésta o cuando existan instalaciones, ductos, etc., que no soportan sin daño los hundimientos resultantes.

### VIII-7. Cimentaciones en arcillas fisuradas

Frecuentemente, por procesos sufridos por las arcillas a lo largo de su historia geológica, se presentan en su estructura masiva multitud de fisuras muy próximas, siguiendo una o más direcciones predominantes. En estas condiciones se tiene la dificultad práctica de no poderse labrar los especímenes necesarios para la realización de una prueba de resistencia al esfuerzo cortante. Además, si una muestra pudiera lograrse, las pruebas en sí serían de interpretación insegura, pues la resistencia obtenida resultaría menor que la real; en una prueba de compresión simple, por la falta de confinamiento lateral, el error sería máximo, pero aún en una prueba rápida las fisuras supondrían planos de debilitamiento que influenciarían los resultados a no ser que la presión hidrostática de confinamiento fuera muy elevada.

A veces, en los laboratorios, se logran los especímenes por el procedimiento de elegir en una masa relativamente grande, por ejemplo una muestra cúbica, un fragmento relativamente libre de fisuras; no hay que decir que los resultados de las pruebas realizadas gracias a este subterfugio tienen el defecto de ser poco representativos.

Quizá el mejor recurso para valuar la resistencia de una arcilla fisurada para fines de cálculo de una cimentación, sea el realizar pruebas de carga con una placa, directamente sobre el terreno. Este

procedimiento, no exento de defectos y limitaciones de importancia, ha rendido muchas veces buenos resultados prácticos.

En esencia el método consiste en cargar un terreno con una placa metálica cuadrada o circular, de unos 50 cm de lado o diámetro, llevándola a la falla. Considerando la presión de falla como la capacidad de carga última del terreno, es posible, operando a la inversa una fórmula del tipo 8-3, obtener el valor del parámetro  $c$ . La placa se colocó a diferentes profundidades dentro del estrato en estudio, generalmente haciendo una prueba cada metro, dentro de la profundidad afectada por el futuro cimiento. En el Anexo VIII-b se describe someramente la técnica de la prueba de carga y se discuten sus limitaciones más importantes.

Una vez determinado el valor de la resistencia, con las arcillas fisuradas se puede proceder como con las homogéneas, ya estudiadas anteriormente en este capítulo. Sin embargo, en el caso de los taludes de las excavaciones, la resistencia obtenida en la forma arriba descrita no puede utilizarse para análisis de estabilidad; de hecho, esta estabilidad puede calcularse muy difícilmente y el problema suele resolverse con elementos de retención suficientes, cuando, por alguna razón, los taludes de la excavación no pueden tenderse a voluntad.

#### VIII-8. Cimentaciones en limos y loess

Actualmente se han perdido bastante los atributos distintivos de los suelos cuyo rango de tamaños cae en lo que las antiguas clasificaciones granulométricas llamaban limos. Hoy en los limos se distinguen dos tipos, los plásticos y los no plásticos. El comportamiento mecánico de los primeros se asimila al de las arcillas de plasticidad baja o media; el de los segundos se asimila al de las arenas muy finas. Los limos pueden deber su plasticidad a un porcentaje de partículas de forma laminar o a su contenido de materia orgánica. El polvo de roca es el típico ejemplo de un limo no plástico, con índice de plasticidad prácticamente nulo, en tanto que los limos orgánicos que se encuentran en depósitos masivos, fluviales o lacustres suelen presentar características de plasticidad acentuadas.

La prueba de penetración estándar suele utilizarse para determinar la consistencia de los limos; se considera que si el número de golpes en la prueba es menor que 10, los limos son sueltos o suaves e inadecuados para soportar cimientos. Cuando  $N$  es mayor que tal límite se considera que el material puede servir para los efectos señalados y, en tal caso, la cimentación se calcula con los procedimientos indicados para arenas, si el limo es no plástico, o con los procedimientos indicados para arcillas, si el limo es plástico.

En el caso de limos plásticos normalmente consolidados, bajo el nivel freático, los asentamientos constituyen un problema de impor-

tancia, comparable al que se presenta en arcillas; su cálculo puede hacerse a partir de la Teoría de la Consolidación de Terzaghi, con base en las correspondientes pruebas de laboratorio.

En limos sueltos o suaves, no adecuados para soportar cimientos, puede recurrirse al empleo de cimentaciones compensadas, descritas más adelante en este mismo capítulo, o bien a cimentaciones profundas, analizadas en el Capítulo IX.

En muchos limos, la resistencia al esfuerzo cortante es debida, además de la fricción entre las partículas, a algo de cohesión producida, por ejemplo, por un cementante. La mejor manera de determinar esa resistencia al esfuerzo cortante es recurrir a la realización de pruebas triaxiales, que permitan definir claramente la envolvente de resistencia del material. La prueba de compresión simple puede dar valores muy exagerados de la cohesión del material, a causa de la compresión existente entre las partículas, debida a la presión capilar del agua intersticial en el espécimen, que equivale a un confinamiento de importancia y que, por lo tanto, es una resistencia debida a fricción. La contribución real de la cohesión y de la fricción producto de presión capilar puede ponerse de manifiesto en la prueba de compresión simple repitiendo ésta con espécimen totalmente sumergido en agua; si el espécimen se derrumba o su resistencia es mucho menor que la del espécimen probado en el aire, quedará establecido que lo que aparentaba ser cohesión es, en realidad, resistencia por fricción desarrollada por tensión capilar en el agua.

El loess es, como se describió en el Capítulo I del Volumen I de esta obra, un material de depósito eólico, formado por partículas del tamaño del limo o de la arena fina, ligadas por un cementante. La estructuración del material es abierta, de un tipo intermedio entre una estructura simple típica y una panaloide y a ella corresponden relaciones de vacíos relativamente altas.

Una característica fundamental de los depósitos de loess, desde el punto de vista de su capacidad para sostener una cimentación, es su poca uniformidad; en estos depósitos la resistencia puede variar grandemente en distancias o profundidades pequeñas. La prueba de penetración estándar es muy útil para verificar esta uniformidad, pero en cambio puede dar valores bajos de la resistencia, a causa de que la peculiar estructura del material facilita la penetración del muestreador.

Por sus especiales características el loess es un material en que es particularmente difícil calcular la capacidad de carga con métodos teóricos; así, este es otro caso en que las pruebas de carga pudieran ser de utilidad, dosificándolas con criterio, de acuerdo con la uniformidad del depósito.

Los loess son generalmente depósitos no saturados, pero cuando se saturan el cementante se ablanda o se disuelve, perdiendo el con-

junto su cohesión. En estas condiciones, su estructura sufre un colapso, que se traduce en un asentamiento brusco, posiblemente muy perjudicial. La elevación del nivel freático, el riego, fugas de agua de tuberías o la simple exposición a lluvias fuertes son elementos de saturación comunes que deben evitarse.

### VIII-9. Cimentaciones en suelos estratificados

Todas las Teorías de Capacidad de Carga expuestas en el Capítulo VII y aplicadas a diferentes casos más atrás en este mismo capítulo son válidas únicamente para suelos homogéneos; la estratificación plantea un problema de heterogeneidad en principio no resuelto.

La frecuencia con que en la práctica se presentan cimentaciones poco profundas en suelos estratificados ha obligado, por otra parte, al uso de soluciones aproximadas con las que se espera poder llegar a resultados razonables. Frecuentemente, las soluciones empleadas para el caso están claramente inspiradas en las obtenidas para materiales homogéneos.

Los casos más frecuentes de estratificación en la práctica son aquellos en que un estrato de arcilla firme se presenta sobre otro de arcilla suave o en que un estrato friccionante sobreyace a otro cohesivo poco resistente.

En estos casos, el efecto de la estratificación es una distorsión en la superficie de falla, que tiende a crecer en el estrato débil y a tener desarrollos mínimos en el más fuerte. Obviamente, para que lo anterior suceda es preciso que la frontera del estrato débil no esté muy lejana del despiante del cimiento; en caso contrario, no se sabe muy bien cual sea el efecto de la presencia del estrato débil, pero su efecto va haciéndose de menor importancia, según la separación aumenta, al grado que cuando la separación es del orden de  $2B$ , el efecto de su presencia es prácticamente despreciable.

Para el caso de la secuencia de dos estratos arcillosos saturados. Button<sup>2</sup> ha propuesto una solución basada en el análisis de superficies cilíndricas de falla; los resultados de su método aparecen en la fig. VIII-4, en la que se dan los valores del factor de capacidad de carga  $N_c$ , modificado para tomar en cuenta la presencia del estrato inferior, en función de la relación  $d/B$ , en que  $d$  es el espesor del estrato superior y  $B$  el ancho del cimiento y de la relación de las cohesiones de ambos estratos.

La solución de Button cubre tanto el caso mencionado, en que el estrato más resistente es el superior, como el caso inverso, quizá menos frecuente en la práctica. En la gráfica se ve que el efecto del estrato débil es disminuir la capacidad de carga del fuerte y esta disminución depende tanto de la relación de cohesiones de ambos

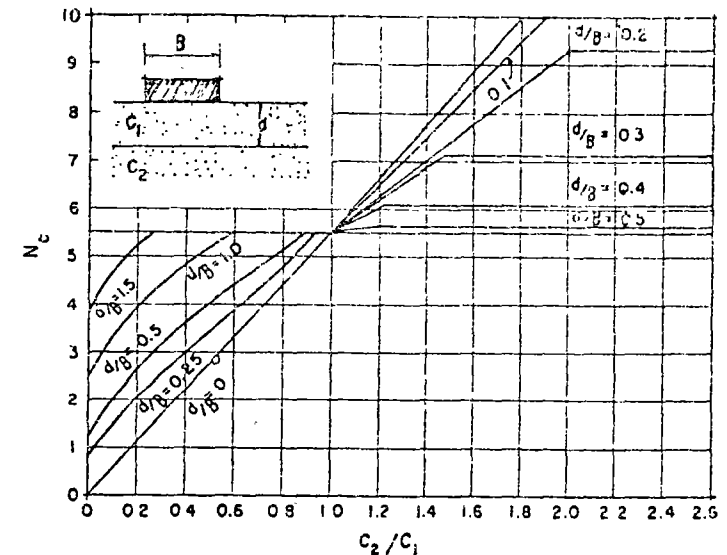


FIG. VIII-4. Solución de Button para un sistema de dos estratos cohesivos

estratos, como de la relación  $d/B$ . Por el contrario, cuando el estrato débil está arriba, el hecho de tener un estrato resistente abajo hace que su capacidad de carga aumente. Si el estrato inferior es mucho más resistente que el superior, la superficie de falla es tangente a éste y no influye en la capacidad de carga del cimiento la resistencia del estrato inferior, por alta que sea; esto se pone de manifiesto, para una cierta relación  $d/B$ , por la horizontalidad de las líneas de la figura, después de que se alcanza un cierto valor de la relación  $c_2/c_1$ .

Si los estratos no son puramente cohesivos, no existen soluciones del tipo de la de Button, arriba tratada. En este caso la estratificación puede ignorarse, calculando la capacidad de carga del cimiento sobre un suelo ficticio homogéneo, obtenido promediando proporcionalmente valores de los parámetros de resistencia de los dos estratos. Sin embargo, para poder hacer esto es necesario que las características de los dos estratos no sean demasiado diferentes, en cuyo caso el promedio no tiene sentido. Suele considerarse que ya no pueden promediarse valores que difieran entre sí más de un 50%, dentro de la profundidad significativa del cimiento.

Cuando se tiene un estrato resistente con cohesión y fricción sobre un estrato débil, en condiciones tales que no pueda hacerse el promedio proporcional arriba propuesto, en la práctica se ha

recurrido, para tomar en cuenta la presencia del estrato débil a un artificio que hace uso de la Teoría de Boussinesq. Según éste, se compara la capacidad de carga del estrato débil, calculada suponiendo que el cimienta llega al nivel de su frontera superior y considerando al estrato suprayacente como una sobrecarga, con el esfuerzo máximo que el cimienta le envía desde su verdadero desplante, calculado éste con la Teoría de Boussinesq. De este modo, la capacidad del estrato débil puede limitar al esfuerzo admisible de proyecto para la cimentación. En el cálculo del esfuerzo máximo transmitido por el cimienta deben hacerse intervenir cimientos vecinos, colocados a distancias en que se alcance a sentir su presencia.

### VIII-10. Capacidad de carga admisible. Factor de seguridad

Todas las capacidades de carga que hasta ahora se han mencionado corresponden, como repetidamente se ha insistido, a valores a la falla, es decir, a valores tales que si esos esfuerzos se comunicaran al material, este quedaría en estado de falla incipiente. Huelga decir que estos valores no son los que en la práctica se asignan a las cimentaciones reales. Nace así el concepto de capacidad de carga admisible o de trabajo, que es con la que se diseñará una cimentación. La capacidad de carga admisible en un caso dado será siempre menor que la de la falla y deberá estar suficientemente lejos de ésta como para dar los márgenes de seguridad necesarios para cubrir todas las incertidumbres referentes a las propiedades de los suelos, a la magnitud de las cargas actuantes, a la teoría específica de capacidad de carga que se use y a los problemas y desviaciones de la construcción.

En la práctica se ha generalizado la costumbre simplista de expresar la capacidad de carga admisible por una fracción de la capacidad de carga a la falla, obtenida dividiendo ésta entre un número mayor que 1, el cual se denomina factor de seguridad ( $F_s$ ). Sin embargo, por lo menos para el caso de suelos puramente cohesivos, el anterior criterio es erróneo, tanto desde el punto de vista conceptual, como del punto de vista del valor numérico de la capacidad de carga que con él se obtiene.

En efecto, considérese de nuevo el modelo mecánico de la balanza de Khristianovich, descrito en el párrafo VI-1, en el que se desea calcular el máximo  $Q$  que puede ponerse en un platillo, cuando en el otro actúa un peso  $P$  y cuando existe un cierto monto de fricción en las guías de la balanza, sin que el platillo con  $Q$  baje y el otro suba, produciéndose el desequilibrio. Ya se dijo que la  $Q$  máxima compatible con el equilibrio es igual a  $P$  más el valor de la fricción desarrollada en las guías, que colabora al equilibrio de la balanza, oponiéndose ahora a  $Q$ . En el caso de que se quiera tener cierto

grado de seguridad contra el desequilibrio de la balanza, pudiera ocurrirse reducir el valor de  $Q$ , por ejemplo a la mitad en cuyo caso pudiera pensarse a la ligera que se estaba aplicando un factor de seguridad de 2 al desequilibrio de la balanza. De este modo, en un platillo quedó  $P$ , en el otro  $Q/2$  y, además actúa la fricción. Sin embargo, hacer esto, posiblemente produjo el desequilibrio de la balanza en sentido contrario; es decir, levantándose el platillo con  $Q/2$  y bajando el platillo con  $P$ ; para que este desequilibrio ocurra bastará que la diferencia  $P - Q/2$  sea mayor que la fricción en las guías. De este modo, al disminuir la carga  $Q$  a la mitad, no se produjo seguridad, sino desequilibrio. Es evidente en este caso que el factor de seguridad debe aplicarse únicamente a aquella parte de  $Q$  que exceda al valor de la carga del otro platillo  $P$ . La condición de máxima seguridad corresponde al caso  $P = Q$ , en el que toda la fricción garantiza el equilibrio de la balanza.

Análogamente, en el caso de una cimentación en suelo puramente cohesivo, se vio que la capacidad de carga última está dada por una expresión del tipo:

$$q_c = cN_c + \gamma D_f$$

Si se medita sobre lo dicho en la sección VI-1, se ve que  $q_c$  representa la carga de un platillo,  $\gamma D_f$  la carga en el otro y el término debido a la resistencia del suelo,  $cN_c$ , la fricción en las guías de la balanza. Razonando como antes se concluye que la condición de máxima seguridad es

$$q_c = \gamma D_f$$

Pues entonces la resistencia del suelo está toda en reserva. En el caso de aplicar un factor de seguridad, éste deberá actuar sólo sobre la parte de  $q_c$  que exceda a  $\gamma D_f$ , es decir, sobre  $cN_c$ . De este modo resulta:

$$q_{ad} = \frac{cN_c}{F_s} + \gamma D_f \quad (8-4)$$

donde  $q_{ad}$  es la capacidad de carga admisible o de trabajo. El criterio ahora expuesto, conduce a conclusión bien distinta a la que se llega dividiendo toda la capacidad de carga de falla entre el factor de seguridad. De hecho, esta última operación pudiera, como en el caso de la balanza, conducir a valores inseguros y, en todo caso, llevará a soluciones antieconómicas.

En el caso de suelos puramente friccionantes, la capacidad de carga es mucho mayor que la presión actuante al nivel de desplante, por lo que el dividir la capacidad de carga última total entre un factor de seguridad produce un error, que si bien conceptualmente

hablando es idéntico al comentado para suelos puramente cohesivos, es en cambio, numéricamente muy pequeño; por esta razón la capacidad admisible de un suelo friccionante suele obtenerse en la práctica con la mencionada expresión simplista:

$$q_{ad} = \frac{q_c}{F_s} \quad (8-5)$$

Los valores de  $F_s$  a usar en un caso dado en la práctica pueden variar algo según la importancia de la obra y el orden de las incertidumbres que se manejen; en rigor debería de ser diferente en cada caso y producto de un estudio de ese caso. Sin embargo, en aras de simplicidad, existen valores típicos aceptados por la costumbre que se aplican a las cimentaciones poco profundas. Así, si en el análisis de las cargas actuantes se consideran sólo las permanentes es recomendable usar un  $F_s$  mínimo de 3. Si se toman en cuenta cargas permanentes y carga viva eventual, el valor anterior puede reducirse a 2 o 2.5. Si, además, se consideran efectos de sismo en regiones de tal naturaleza, el factor de seguridad puede llegar a tomar valores tan bajos como 1.5.

A veces es conveniente verificar el factor de seguridad correspondiente a los tres casos anteriores independientemente.

Todo lo anterior se refiere a problemas de falla en las cimentaciones; sin embargo, como ya se dijo, hay casos en que el asentamiento representa la condición dominante. En estos casos habrá de usarse una capacidad de carga aún menor que la admisible y tal que los hundimientos del subsuelo sean compatibles con el buen funcionamiento de la estructura.

#### VIII-11. Cimentaciones compensadas

El principio en que se basan estas cimentaciones es bien sencillo; se trata de desplantar a una profundidad tal que el peso de la tierra excavada iguale al peso de la estructura, de manera que al nivel de desplante el suelo, por así decirlo, no sienta la substitución efectuada, por no llegarle ninguna presión en añadidura a la originalmente existente.

Este tipo de cimentación exige, por supuesto, que las excavaciones efectuadas no se rellenen posteriormente, lo que se logra o con losa corrida en toda el área de cimentación o construyendo cajones huecos en el lugar de cada zapata. El primer tipo de cimentación es usual en edificios compensados, el segundo en puentes, por ejemplo.

Las cimentaciones compensadas han sido particularmente utilizadas para evitar asentamientos en suelos altamente compresibles, pues, teóricamente, los eliminan por no dar al terreno ninguna sobrecarga.

Sin embargo, como el proceso de carga no es simultáneo con el de descarga, resultado de la excavación, tienen lugar expansiones en el fondo de ésta, que se traducen en asentamientos cuando, por efecto de la carga de la estructura, dicho fondo regrese a su posición original. Así, los problemas principales de una cimentación compensada emanan de la excavación necesaria, generalmente profunda.

Todo lo anterior se refiere a las cimentaciones denominadas de compensación total, en las que el peso de la estructura es igual al de la tierra excavada. También existe, por supuesto, la compensación parcial, en donde el peso de la tierra excavada compensa únicamente una parte del peso de la estructura, en tanto que el restante se toma con pilotes o descanso sobre el terreno, si es que la capacidad de carga y la compresibilidad de éste lo permiten.

En el Anexo VIII-c se dan ideas complementarias sobre cimentaciones compensadas.

#### VIII-12. Cimentaciones en roca

El problema de las cimentaciones en roca es bien diferente del que se tiene en las cimentaciones ordinarias sobre suelo; en realidad, corresponde más bien su estudio a la Mecánica de Rocas, nuevo campo de la Ingeniería, en rápida expansión. Sin embargo, en aras de complementar la exposición correspondiente a este capítulo, en lo que sigue se dan algunas ideas sobre cimentaciones construidas sobre roca.

En las cimentaciones sobre roca, el asentamiento no suele ser una limitación para el diseño, pues dada la rigidez del material, suele ser completamente despreciable. La resistencia del material al esfuerzo cortante tampoco suele ser condición crítica en una roca, considerada masiva. Los problemas emanan ahora de dos fuentes; por un lado de los defectos, tales como grietas o fisuras, que la roca pueda tener y por otro, de los altos esfuerzos que soporta la estructura propiamente dicha que constituye la cimentación, emanantes de las altas presiones de contacto que se toleran.

La resistencia de una roca suele obtenerse de una prueba de compresión simple o suele estimarse. También ahora las pruebas de tipo triaxial son más convenientes, pero el equipo y el personal para su realización no están disponibles frecuentemente, por lo que generalmente el dato con el que se ha de trabajar es  $q_u$ , resistencia a la compresión simple. Si tal es el caso, es usual suponer  $\phi = 0$ , lo cual no es realmente correcto, según indican las pruebas triaxiales, y calcular.

$$c = \frac{q_u}{2}$$

Con este valor de  $c$ , la capacidad de la roca puede calcularse con alguna de las teorías ya tratadas, utilizando una expresión del tipo  $q_c = cN_c$ . Una vez calculada la capacidad de carga a la falla, puede usarse un factor de seguridad del orden de 3 para obtener la capacidad de trabajo.

Uno de los problemas prácticos que puede presentar la roca como material de cimentación es que se presente en un manto inclinado, sobre el que haya peligro de que deslice la cimentación. Esto puede ocurrir cuando la inclinación de la roca sea mayor que  $30^\circ$ , hasta cuyo límite puede decirse que las normales precauciones de construcción para lograr una buena adherencia entre la roca y el concreto de los elementos de cimentación, bastan para prevenir el peligro. En inclinaciones mayores debe recurrirse a anclajes, escalonamientos e ideas similares que combatan el riesgo de deslizamiento.

Si la roca sobreyace a suelos blandos, debe tenerse en cuenta que la deformación de éstos puede afectar a aquéllas; el riesgo de que la capa de roca falle por flexión puede, por su parte, analizarse con las técnicas que sirven para diseñar un pavimento rígido, expuesto en un capítulo posterior de este volumen.

En roca agrietada, fisurada o junteada, han de ser las zonas más débiles las que limiten las cargas de diseño a emplear en un caso dado y, en estos casos, conviene elevar el factor de seguridad que se utilice a valores del orden de 5 o aún mayores.

Un riesgo de importancia por su frecuencia en ciertos tipos de rocas como calizas por ejemplo, es la presencia de oquedades, o cavernas dentro de la profundidad que afecta la cimentación y bajo ella. Siempre deberá explorarse convenientemente el terreno de cimentación para excluir esta posibilidad. Si las cavernas existen y su techo ofrece peligro de no sustentar la cimentación será necesario corregir el defecto, rellenándolas o prolongando la cimentación hasta su piso.

También exige cuidado el colocar un cimiento en un corte o talud de roca, especialmente si las grietas o juntas que ésta pudiera presentar tuviesen un echado hacia el corte o talud. Ahora es de gran importancia la naturaleza del material que pueda llenar las grietas, sobre todo en lo referente a su estabilidad ante agua y a su plasticidad. En casos como éstos, el uso de banderillas metálicas de anclaje ha sido de utilidad.

En la fig. VIII-5 se presentan gráficamente algunos de los problemas frecuentes en cimientos sobre roca, con algunas soluciones usadas en la práctica.

### VIII-13. Cimentaciones en taludes

Meyerhof<sup>7</sup> ha propuesto un método para tomar en cuenta el hecho de que un cimiento se encuentre desplantado en las proxi-

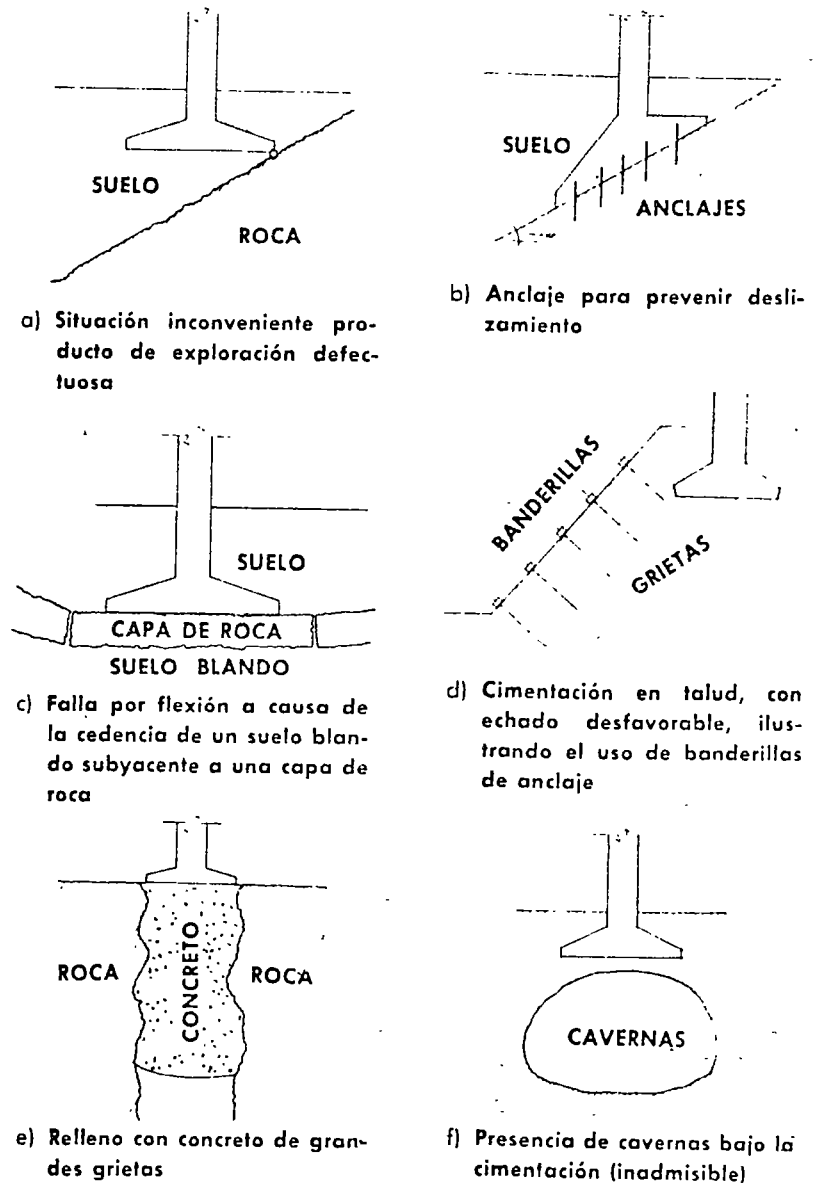


FIG. VIII-5. Problemas relacionados con cimentaciones en roca

midades de un talud, a fin de evitar que su presencia produzca la falla de éste por deslizamiento. En el Anexo VIII-d se presentan las gráficas respectivas que limitan la capacidad de carga por este concepto; dichas gráficas se refieren a cimientos continuos.

#### VIII-14. Socavación

Una corriente de agua que se desplaza en su cauce o en una zona de inundación tiene una cierta capacidad de suspender y arrastrar partículas sólidas que constituyen el lecho sobre el que ocurre el flujo. Este movimiento de material sólido en corrientes aluviales es un fenómeno complejo que depende de diversos factores, tales como la configuración geológica y topográfica del cauce, las características del material de arrastre y las características hidráulicas de la corriente. Esto produce la llamada socavación normal en el lecho de la corriente. Cuando se coloca un obstáculo dentro del cauce, como una pila de apoyo de un puente, se modifican localmente las condiciones de escurrimiento, cambiando en consecuencia la capacidad de arrastre en la zona vecina a la obstrucción. Si esta capacidad es mayor que la proporción con que la corriente alimenta a la zona con material sólido, se producirá en ésta una socavación adicional a la normal de la corriente; en caso contrario se producirá un depósito.



Falla por socavación (carretera costera del Pacífico en Guerrero)

Es evidente que el conocimiento de la profundidad a que puede llegar la socavación total y las características de este fenómeno son de fundamental importancia para el diseño de cimentaciones poco

profundas, en el caso de puentes y aún de otras estructuras construidas en zonas inundables. Innumerables fallas de puentes han ocurrido cuando la profundidad de desplante de las pilas ha quedado arriba del nivel alcanzado por la socavación normal, más la adicional impuesta por los obstáculos que la cimentación representa.

El problema de determinar el poder de socavación normal de una corriente es uno de los más complicados a los que puede enfrentarse el ingeniero, pues la socavación producida durante el aumento de capacidad de arrastre que el río adquiere en creciente por aumento de velocidad, se rellena cuando la corriente vuelve a su estado normal, no quedando huella aparente del fenómeno.

Se han intentado soluciones teóricas del problema, pero dadas las incertidumbres envueltas, su valor es hasta cierto punto dudoso. La otra fuente de conocimiento disponible es la que emana del análisis de corrientes reales o de experimentos en modelos de laboratorio; estos estudios son los más prometedores y de hecho han rendido ya resultados prácticos muy satisfactorios.

En muchos ríos, la profundidad normal de socavación es del orden de la diferencia de los tirantes en condiciones ordinarias y en creciente máxima, pero este dato no puede considerarse regla confiable, pues se han encontrado corrientes en que la socavación alcanza el triple y aún más de tal valor y otros casos en que, por el contrario, dicho valor es exagerado.

En el Anexo VIII-e se dan algunas reglas para calcular la profundidad de socavación y se describe un método propuesto para impedir, por lo menos parcialmente, que se produzca. También en el Volumen III habrá un Apéndice dedicado al tema.

#### VIII-15. Falla de fondo en excavaciones de arcilla

Cuando se construyen excavaciones para fines de cimentación se plantean una gran cantidad de problemas prácticos, algunos de los cuales ya han sido someramente tratados en párrafos anteriores. Sin embargo, no se ha mencionado el que constituye una de las causas de falla más frecuentes y peligrosas en excavaciones abiertas en arcillas: la falla del fondo de la excavación.

En este tipo de falla ocurre un asentamiento del terreno vecino, acompañado por el levantamiento generalmente rápido del fondo de la excavación; lo que sucede es que el material vecino fluye hacia el centro de la excavación, que se levanta correspondientemente. Este tipo de falla ha sucedido en zanjas para tubos y drenajes y en excavaciones relativamente profundas.

Las excavaciones para fines de cimentación se realizan lo suficientemente rápidas como para que sean despreciables los cambios en presión neutral dentro de la arcilla, por lo que todos los análisis

de estabilidad pueden hacerse con datos provenientes de pruebas triaxiales rápidas.

La capacidad de carga de una arcilla, a la profundidad  $D_f$  está dada, por ejemplo según la fórmula de Skempton (Capítulo VII), por

$$q_c = cN_c + \gamma D_f$$

Si sobre el suelo existe una sobrecarga de magnitud  $q$ , el valor de  $q_c$  pasa a ser

$$q_c = cN_c + \gamma D_f + q \quad (8-6)$$

En el segundo miembro de la ec. 8-6, el término  $cN_c$  representa la resistencia del suelo a lo largo de una superficie de falla, en tanto que el término  $\gamma D_f + q$  representa el esfuerzo al nivel de desplante debido al peso del suelo suprayacente y a las sobrecargas que hubiere. En el caso de una excavación, en el instante de falla de fondo incipiente (fig. VIII-6), la resistencia a lo largo de la superficie de falla ( $cN_c$ ) se opone al flujo del material del talud hacia el fondo de la excavación, a donde tiende a moverse por efecto de la presión  $\gamma D_f + q$ . Es evidente que, en el instante de falla de fondo incipiente, se tendría:

$$cN_c = \gamma D_{f\text{máx}} + q \quad (8-7)$$

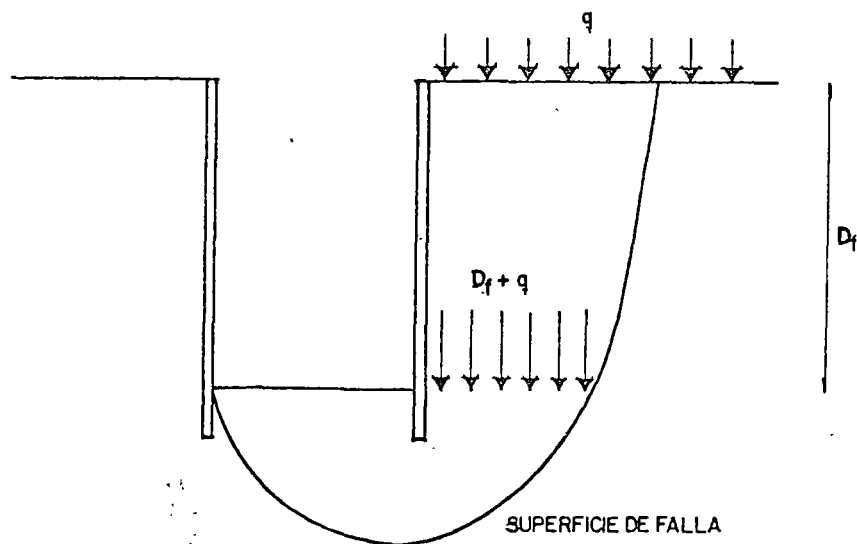


FIG. VIII-6. Mecanismo de falla de fondo en excavaciones en arcilla.

La fórmula 8-7 da la profundidad máxima a que puede llevarse la excavación, sin que falle por fondo. En la realidad, será necesario adoptar una precaución adicional por medio de un factor de seguridad; así

$$\gamma D_f + q = \frac{cN_c}{F_s} \quad (8-8)$$

de donde

$$F_s = \frac{cN_c}{\gamma D_f + q} \quad (8-9)$$

La expresión 8-9 permite calcular la seguridad de la excavación contra falla de fondo. En la práctica un valor de 1.5 para  $F_s$  parece ser suficiente en todos los casos, pues la aproximación de los cálculos resulta del orden de  $\pm 20\%$ , cuando se les compara con los resultados obtenidos de fallas reales.<sup>10</sup>

Una observación de interés es que la falla de fondo es independiente de la falla del talud como tal y no es causada por un mal ademado de los mismos. De hecho en una excavación no ademada la falla de talud siempre ocurre antes que la de fondo, pues el número de estabilidad de un talud es como mínimo 4 y como máximo 5.3 (recíprocos de 0.25 y de 0.181, respectivamente), como se vio en el Capítulo V, números que son menores que 6.2, valor mínimo de  $N_c$  según la teoría de Skempton, para una excavación cuadrada. Así, teóricamente, la falla de fondo sólo puede ocurrir en excavaciones ademadas, en que la falla de los taludes está restringida; sin embargo, la distorsión que la falla de fondo implica, puede llevar a la excavación a un colapso más general.

### ANEXO VIII-a

#### Consideraciones adicionales sobre el contacto suelo-estructura

En el párrafo III-a.2 del Anexo III-a se dieron algunas fórmulas para calcular dentro de la Teoría de la Elasticidad, los asentamientos bajo áreas circulares y rectangulares uniformemente cargadas. El asentamiento total así obtenido puede dividirse en dos partes: el debido a la distorsión del medio (cambio de forma) y el debido a cambio de volumen. La influencia de uno u otro dentro del total, en medios linealmente elásticos, puede calificarse haciendo variar convenientemente el valor de la relación de Poisson,  $\mu$ . En efecto, si  $\mu = 0.5$  se tiene el material incompresible, según la teoría lineal



de la Elasticidad, por lo que el asentamiento que en él se produzca tiene que deberse exclusivamente a cambio de forma. Así la expresión:

$$\delta_c = (1 - \mu^2) \frac{p}{E} D \quad (3-a.4)$$

ya vista para el caso del asentamiento bajo el centro de un área circular uniformemente cargada, particularizada para  $\mu = 0.5$ , dará la parte de  $\delta_c$  que se debe a cambio de forma únicamente.

$$\delta_c = 0.75 \frac{p}{E} D \quad (8-a.1)$$

Por otra parte, según la Elasticidad, no puede haber un valor de  $\mu$  más diferente de 0.5 que el valor  $\mu = 0$ . En un material con tal constante, el asentamiento total bajo la placa sería

$$\delta_c = \frac{p}{E} D \quad (8-a.2)$$

Puede pues verse que, en los casos más distantes, el asentamiento por cambio de forma representa un 75% del asentamiento total, de donde se deduce que el valor relativo del hundimiento por cambio de volumen no excederá de un 25% del total.

El anterior es, por supuesto, un razonamiento estrictamente teórico y con él se llega a conclusiones bastante razonables para los materiales que poseen circunstancialmente un comportamiento linealmente elástico, tales como el acero; sin embargo, en suelo las cosas son bien distintas, pues, por ejemplo en las arcillas, el asentamiento por cambio de volumen (consolidación) es mucho mayor que el de distorsión, al grado de que este último suele ignorarse sin cometer con ello un error serio; en estos campos, la utilidad de las fórmulas tales como las 3-a.4 se reduce, para el caso de arcillas saturadas, a un medio más o menos tosco para el cálculo de asentamientos inmediatos, anteriores a todo proceso de consolidación. En estas condiciones, es obvio que el valor de  $\mu$  conveniente será  $\mu = 0.5$ . La aplicación quizá más importante de estas ecuaciones en la práctica es el cálculo de deformaciones bajo carga transitoria, como el viento, o la interpretación de pruebas de carga de muy corta duración.

Considerando las limitaciones señaladas, puede resultar útil generalizar la expresión 3-a.4, de modo que resulte aplicable a otras formas de placa cargada. En efecto, el asentamiento bajo una placa flexible uniformemente cargada puede, en general, expresarse como:

$$\delta = \frac{1 - \mu^2}{E} p B I_0 \quad (8-a.3)$$

donde  $B$  es el ancho del elemento transmisor de la carga,  $I_0$  es un factor de influencia que depende del punto en que se mida el asentamiento y de la forma del área cargada y las demás letras tienen los significados normales.

En la Tabla 8-a.1 se dan algunos valores útiles de  $I_0$ .

TABLA 8-a.1

Forma del área cargada.	Valores de $I_0$		
	Bajo el Centro	Bajo la Esquina	Promedio
Cuadrado	1.12	0.56	0.95
Rectángulo ( $L/B = 2$ )	1.52	0.76	1.30
" ( $L/B = 5$ )	2.10	1.05	1.83
" ( $L/B = 10$ )	2.54	1.27	2.20
Círculo *	1.00	0.64 (borde)	0.85

\* Usando  $D$ , diámetro, en lugar de  $B$ , ancho, en la expresión 8-a.3.

Nótese que en áreas rectangulares, el asentamiento bajo una esquina es la mitad que bajo el centro del rectángulo.

El asentamiento elástico crece linealmente con la presión,  $p$ , y con el ancho del cimiento,  $B$ .

## ANEXO VIII-b

### Pruebas de carga en Arcillas Fisuradas

Para efectuar una prueba de carga con placa, para fines de cálculo de cimentaciones poco profundas, la placa deberá colocarse centrada en el fondo de una excavación, cuyo ancho sea del orden de cuatro veces el diámetro o lado de la placa y cuya profundidad sea la del nivel a que se desea calcular la capacidad de carga. La razón de la especificación sobre el ancho de la excavación es eliminar el término que se refiere a la sobrecarga ( $\gamma D_f$ ) de la fórmula a usar, para lo cual es preciso que quede excavada a los lados de la placa una zona suficiente para abarcar las zonas de falla que se desarrollen.

El lado o diámetro de la placa depende fundamentalmente del espaciamiento de las fisuras en el suelo, del tamaño del cimiento y del grado de uniformidad de la arcilla en lo referente a resistencia. Sin embargo, la experiencia ha comprobado que una placa de 50

cm de lado o diámetro, según sea cuadrada o circular, satisface todas las exigencias.

La placa deberá tener sobre el suelo un apoyo completo, por lo que es recomendable colocar entre la placa y el suelo una pequeña cama de arena del mínimo espesor suficiente para rellenar las irregularidades del fondo de la excavación.

El dispositivo de carga puede ser de dos tipos. Uno, muy simple y económico, que consiste en una pequeña estructura de madera o acero colocada sobre la placa, con una plataforma en la que se colocará la carga como lastre. El segundo, más elaborado, en el cual se da la carga con un gato hidráulico, que reacciona contra una viga metálica o una pequeña estructura, las que se anclan en el terreno o se lastran suficientemente. En la fig. VIII-b.1 se muestran esquemas de estos dispositivos.

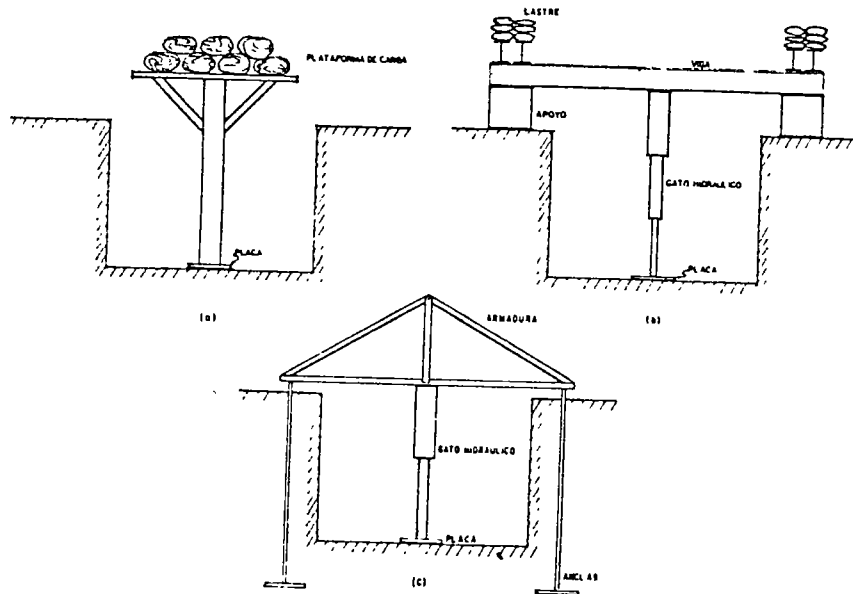


FIG. VIII-b.1. Esquemas de dispositivos para pruebas de carga de placa

- a) Con plataforma
- b) Con viga lastrada
- c) Con estructura anclada

El uso del gato hidráulico permite controlar la velocidad de la prueba y el proceso de carga de un modo muy efectivo, pero requiere de la presencia constante de un operador; la plataforma con carga muerta no tiene esta desventaja, pero es más burda.

Durante la prueba deberán de medirse las deformaciones que la placa vaya sufriendo. Esto puede lograrse con un nivel fijo o, más precisamente, con un micrómetro montado sobre una estructura independiente apoyada a suficiente distancia de la zona afectada por la prueba.

Los incrementos de carga que se vayan aplicando deberán de ser del orden de un décimo de la carga de falla estimada o del orden de un quinto de la carga de trabajo propuesta. La prueba deberá continuar hasta obtener la falla completa de la placa o hasta el triple de la carga de trabajo. Cada incremento deberá mantenerse constante hasta que la velocidad de asentamiento de la placa sea menor que 0.005 cm/h, debiéndose hacer lecturas de la deformación a intervalos crecientes tales como 1, 2, 5, 10, 30 min, 1 h, 2 h. Al final de la acción del incremento se dibujará la curva asentamiento-tiempo, en la cual se podrá medir la velocidad de asentamiento; al final de la prueba se dibujará una gráfica que relacione los asentamientos finales de cada incremento de carga con el valor de éstos; en esta gráfica, por lo general, puede distinguirse la carga de falla, señalada como un quiebre brusco entre dos ramas rectas prácticamente, que constituyen la curva. En la fig. VIII-b.2 aparecen dos curvas típicas tiempo-asentamiento, para un incremento de carga y carga-asentamiento.

Los resultados de una prueba de carga no representan las condiciones a largo plazo de un cimiento real bajo carga; la prueba es demasiado corta para ello. Además la prueba debe interpretarse cuidadosamente relacionando sus resultados con los de una exploración completa del terreno; de otro modo, es posible cometer errores de interpretación muy importantes. Como ejemplo, baste citar el de un estrato de arcilla más o menos dura que sobreyazca a un depósito de arcilla muy blanda; por su pequeño tamaño, los efectos de la placa de prueba pueden no llegar a la arcilla blanda en forma apreciable, lo cual dará a los resultados de la prueba un cariz optimista que pudiera no confirmarse cuando la zapata real, mucho más grande, alcanzara a afectar a la arcilla blanda con niveles de esfuerzo de importancia. Casos como el anterior obligan a repetir la prueba de placa en diversos niveles (generalmente de metro en metro) dentro de la profundidad significativa de la zapata prototipo, que equivale, aproximadamente, a dos veces el ancho de la misma; pero aún con estas precauciones las posibilidades de errores serios de interpretación de la prueba subsisten, cuando los resultados de ésta no se analizan con el debido criterio.

Huelga decir, al tener en cuenta todo lo anterior, que la prueba de carga no dice absolutamente nada de cuales vayan a ser los asentamientos totales por consolidación que sufrirá la zapata real. Así, el valor de estas pruebas se limita al cálculo de la capacidad de

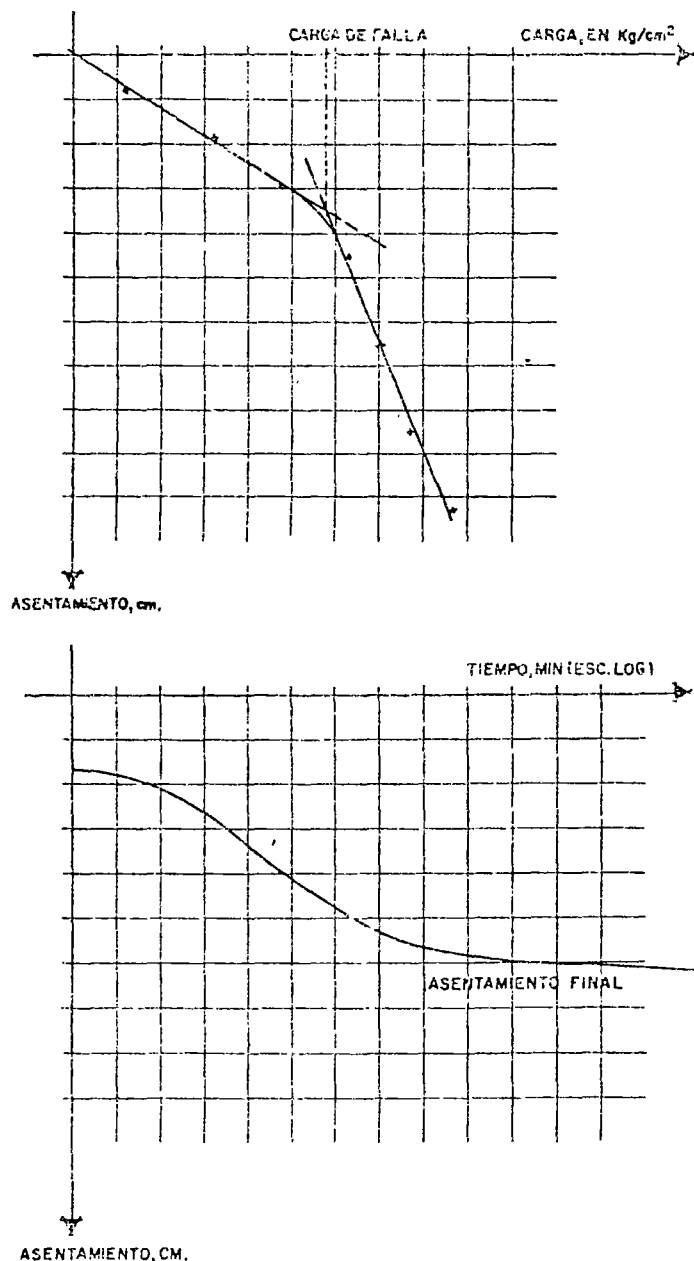


FIG. VIII-b.2. Curvas asentamiento-tiempo y carga-asentamiento en una prueba de carga con placa

carga última de los suelos; como método en este campo su valor es menos seguro que un análisis completo basado en exploración, muestreo y pruebas de resistencia al corte, por lo que estas pruebas de carga deben circunscribirse a las arcillas fisuradas en que, como se dijo, no pueden realizarse dichas pruebas de esfuerzo cortante por las condiciones prácticas ya señaladas.

### ANEXO VIII-c

#### Cimentaciones compensadas

Por cimentaciones compensadas se entienden en este Anexo aquellas totalmente compensadas o compensadas parcialmente en las que el resto de la carga se transmite al suelo por apoyo directo, por permitirlo así la capacidad de carga de éste y por resultar los asentamientos que se produzcan dentro de límites tolerables para la estructura de que se trate.

En lo referente a la presión adicional a la compensada que el suelo pueda tomar por capacidad de carga, el análisis se reduce a lo tratado en el cuerpo de este capítulo y en el Capítulo VII. El análisis de asentamientos que produzca la parte de presión no compensada suele ser el punto fundamental de los cálculos a efectuar; se realiza en la forma usual, es decir, aplicando la Teoría de Consolidación de Terzaghi y frecuentemente limita la parte de la presión de la estructura que pueda quedar sin ser compensada y, por lo tanto, obliga a efectuar excavaciones de la profundidad necesaria para la compensación suficiente.

En suelos altamente compresibles y normalmente consolidados no puede darse ninguna presión en añadidura de la previamente existente, pues cualquier incremento actuaría sobre la rama virgen de la curva de compresibilidad de la arcilla, causando fuertes asentamientos. En cambio, si la arcilla es preconsolidada podrá darse al suelo algo de presión por arriba de la previamente existente, con tal de que dicho exceso no llegue a afectar la rama virgen de la curva de compresibilidad y quede dentro de la rama de recompresión, con lo que los asentamientos resultantes serán bajos. Sin embargo, no basta para poder aprovechar la capacidad del suelo el que exista a niveles próximos a la cimentación por construir un manto más o menos preconsolidado; será siempre necesario verificar que a mayor profundidad no existan mantos de arcilla muy compresible a los que puedan llegar, desde la cimentación, esfuerzos que sobrepasen su carga de preconsolidación y afecten los tramos vírgenes de sus curvas de compresibilidad, pues los asentamientos totales resultantes serían en este caso grandes. La verificación anterior habrá de hacerse comparando los perfiles de carga de preconsolidación con los esfuer-

zos transmitidos por el exceso de presión que se dejó en la cimentación, sumados a la presión efectiva que el suelo tenga por peso propio. El cálculo de los esfuerzos transmitidos suele hacerse aplicando la Teoría de Boussinesq.

En relación a la presión en exceso de la existente previamente que puede dejarse actuar en una cimentación compensada en suelo preconsolidado, L. Zeevaert<sup>6</sup> recomienda que su valor se limite a

$$\Delta p \leq \frac{1}{2}(p_c - p_0) \quad (8-c.1)$$

donde

$\Delta p$  = incremento de presión en la cimentación sobre la presión previamente existente.

$p_c$  = carga de preconsolidación.

$p_0$  = presión efectiva en el suelo, por peso propio.

La limitación anterior deberá de verificarse, según se dijo más arriba, a cualquier profundidad abajo del nivel de desplante.

Para fines de cálculo del peso del material excavado para una cimentación compensada, la presión a considerar al nivel de desplante es la total, en caso de ser la cimentación impermeable, pues la descarga incluye a las partículas del suelo y al agua. Si la cimentación fuese permeable, el agua abajo del nivel freático no se descargaría, lo que equivale a considerar para la descarga al nivel de desplante a la presión efectiva del suelo.

En suelos de compresibilidad no muy alta posiblemente esté justificado dejar que la cimentación aplique presiones de cierta magnitud, aún invadiendo el tramo virgen de la curva de compresibilidad del material, siempre y cuando un detallado análisis de asentamientos indique que los resultados de tal criterio son tolerables para la estructura en estudio.

## ANEXO VIII-d

### Cimentaciones en Taludes

En la ref. 7, Meyerhof estudia el caso de cimientos poco profundos contruidos en taludes, combinando su propia teoría de capacidad de carga con los estudios referentes a la estabilidad de aquéllos. Se consideran dos casos diferentes para el cimiento; en el primero el cimiento está colocado sobre la ladera del talud, en tanto que en el segundo está sobre la corona del terraplén, pero a distancia tal del borde del talud que éste deja sentir su influencia. Desde luego, en ambos casos, la amplitud de las zonas plásticas es menor que la que se tiene en un cimiento situado sobre un terreno horizontal (ver

Capítulo VII), razón por la cual la capacidad de carga influenciada por el talud siempre será menor. Los dos casos anteriores se estudian suponiendo al talud formado por material puramente cohesivo o por material puramente friccionante.

Ya se vio que, según Meyerhof, la capacidad de carga del suelo puede expresarse como

$$q_c = cN_{cq} + \frac{1}{2} \gamma B N_{\gamma} \quad (8-d.1)$$

En la fig. VIII-d.1 aparece una gráfica que da los valores de  $N_{cq}$  para el caso de taludes en materiales puramente cohesivos, en cuya ladera se ha alojado un cimiento continuo. El factor  $N_{cq}$  es función del número de estabilidad del talud

$$N_s = \frac{\gamma H}{c} \quad (8-d.2)$$

En que  $H$  es la altura del talud y las demás letras tienen los sentidos usuales en cuestión de capacidad de carga; también depende  $N_{cq}$  de  $\beta$ , ángulo de inclinación del talud y de la relación  $D/B$ , de la profundidad menor de desplante al ancho del cimiento. En la misma figura aparece otra gráfica que proporciona el valor del factor  $N_{\gamma}$ , que rige la capacidad de carga de un cimiento continuo colocado en la ladera de un talud constituido por material puramente friccionante. Este factor depende del ángulo de fricción,  $\phi$ , de la inclinación del talud,  $\beta$ , y, otra vez, de la relación  $D/B$ . En ambos casos la línea llena se refiere al valor  $D/B = 0$  y la punteada a  $D/B = 1$ .

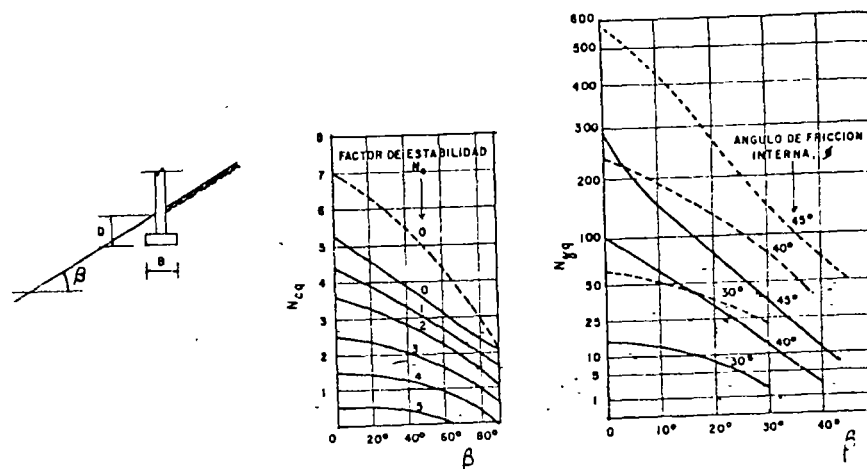


FIG. VIII-d.1. Factores de capacidad de carga para un cimiento en la ladera de un talud

Puede observarse en la gráfica para materiales cohesivos que para un valor de  $N_s = 5.53$  (cuyo recíproco es 0.181, valor con el que se trabajó en el Capítulo V), se tiene estado crítico en el talud; congruentemente, la capacidad de carga del cimiento en tal caso es nula ( $N_{cq} = 0$ ). Análogamente, si  $N_s = 0$  y  $\beta = 0$  se tiene una superficie horizontal y el factor  $N_{cq}$  resulta igual a 5.2, valor que coincide con el que, como se dijo, resulta en la Teoría de Prandtl para un cimiento común largo en material cohesivo. En las gráficas se observa que para un cierto valor de  $N_s$ , la capacidad de carga disminuye con el ángulo del talud,  $\beta$ , y al crecer el valor de  $N_s$  por aumentar la altura del talud, la capacidad de carga disminuye rápidamente.

En taludes de suelo puramente friccionante el factor  $N_{yq}$  disminuye al disminuir  $\phi$ , lo cual es de sentido evidente y disminuye también cuando  $\beta$  crece, observándose que aún para el caso  $D/B = 0$ , desplantado el cimiento en un talud cuya inclinación sea crítica ( $\beta = \phi$ ), el sistema conserva una capacidad de carga.

En la fig. VIII-d.2 se muestran gráficas análogas para cimientos en la corona del talud, pero relativamente cerca del borde de éste.

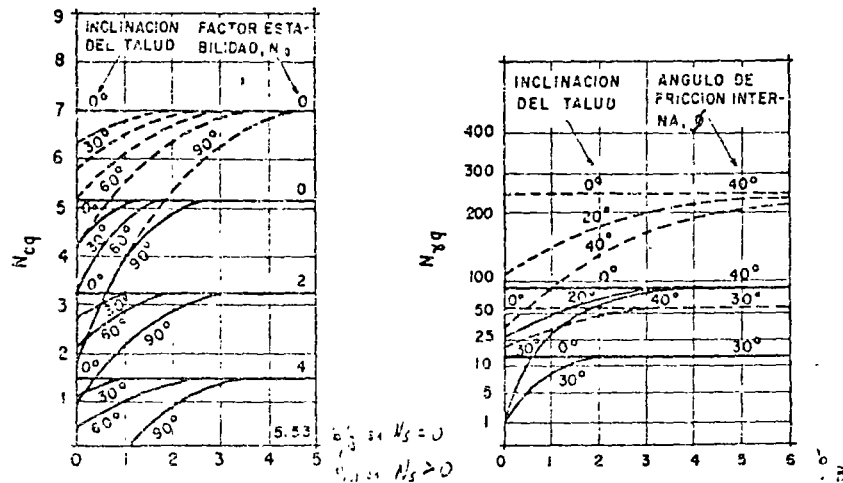
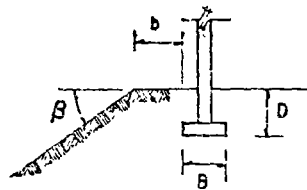


FIG. VIII-d.2. Factores de capacidad de carga para un cimiento en la corona de un talud

De nuevo se presentan dos gráficas, una que da  $N_{cq}$  en el caso de cimientos largos sobre taludes en materiales puramente cohesivos y otra para el factor  $N_{yq}$  relativo a taludes formados por suelos puramente friccionantes.

Puede observarse que en el caso de taludes cohesivos el valor de  $N_{cq}$  depende del número de estabilidad del talud,  $N_s$ , de su inclinación,  $\beta$ , de la relación  $D/B$  y de la distancia al borde del talud,  $b$ , expresada por la relación  $b/B$  o  $b/H$ , según se detalla en la figura a que se está haciendo referencia. Las líneas llenas y punteadas tienen el mismo sentido ya visto.

El factor  $N_{yq}$ , que rige la capacidad de cimientos sobre taludes friccionantes, depende del ángulo de fricción interna,  $\phi$ , del ángulo del talud,  $\beta$ , de la relación  $D/B$  y de la relación  $b/B$ .

Puede observarse en ambos casos que existe un valor de la distancia  $b$  tal que para valores mayores la capacidad de carga del cimiento ya no se ve influida por la presencia del talud y es la que corresponde a un cimiento sobre terreno horizontal. Este valor, de gran importancia práctica, oscila entre 2 y 6 veces el ancho del cimiento y depende de la relación  $D/B$  y del ángulo  $\phi$ , de fricción interna.

Nótese que al colocar un cimiento en un talud, sea cual sea su posición, la estabilidad de éste probablemente cambia, por lo que siempre deberá verificarse por los métodos usuales que el talud sigue siendo estable, considerando la sobrecarga que el cimiento representa.

También debe insistirse que las soluciones antes descritas valen sólo para taludes en suelos puramente cohesivos o puramente friccionantes según el caso. Así, la fórmula 8-d.1 deberá aplicarse siempre desglosada: el primer término del segundo miembro para suelos cohesivos y el segundo para friccionantes.

### ANEXO VIII-e

#### Socavación en Pilas de Puentes

La socavación adicional a la propia de la corriente producida al pie de las pilas de los puentes es debida a las modificaciones de las condiciones hidráulicas de escurrimiento que la presencia de la propia pila produce. En efecto, basta la desviación lateral de la corriente, causada por el obstáculo, para que aquella adquiera un impulso en dirección vertical que, combinado con el movimiento de avance da lugar a trayectorias descendentes que atacan el fondo, incrementando mucho la capacidad de arrastre de material sólido en la zona aguas arriba de la pila. En la cavidad así creada se produce un vórtice de eje horizontal que aumenta la erosión, hasta el punto en que se alcanza un nuevo perfil de equilibrio en el fondo del cauce.

La profundidad afectada por esta socavación varía con muchos factores que se refieren tanto a la corriente, como al cauce y a la propia pila. Las principales de estas características son el tirante y velocidad del agua, el tipo de suelo que forma el fondo del cauce la forma de la pila, su ancho y su inclinación con respecto a la dirección principal de la corriente. Los investigadores tratan de ligar a estas variables principales y a otras de menor influencia, pero las fórmulas y relaciones mejores de que hoy se dispone son de carácter semi-empírico y todavía no es posible depositar en ellas un alto grado de confiabilidad. Entre los métodos que se han propuesto para fijar profundidad de socavación adicional, se menciona a continuación uno, extraído de la ref. 8. En el volumen III de esta obra se mencionarán algunas teorías y trabajos en añadidura a lo que aquí se trata.

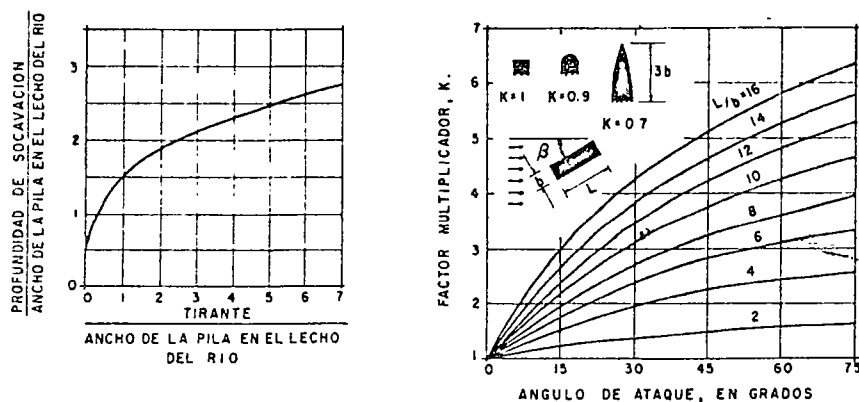


FIG. VIII-e.1. Cálculo de la socavación producida por la presencia de una pila en una corriente

En la fig. VIII-e.1.a aparece una curva que da la profundidad de socavación adicional cuando se conocen el tirante de la corriente y el ancho de la pila de puente de que se trate, al nivel del fondo del cauce. En la parte b) de la misma figura se obtiene un factor  $K$ , dependiente de la geometría de la sección recta de la pila y de su inclinación respecto a la dirección principal de la corriente, por el que debe multiplicarse el valor obtenido de la gráfica de la parte a), para obtener el valor final de proyecto para la socavación adicional. La gráfica de la parte b) de la figura funciona como sigue: conocida la relación largo a ancho de la pila ( $L/b$ ) y el ángulo de inclinación respecto a la dirección de la corriente, puede obtenerse un valor de  $K$  válido para pila de sección rectangular; si la pila tiene forma

similar a alguna de las que aparecen dibujadas, el valor antes obtenido deberá aún ser multiplicado por el coeficiente de reducción que aparece en las gráficas, para obtener finalmente la socavación adicional definitiva.

Los autores de esta investigación indican que las gráficas anteriores sólo son aplicables si existe en la corriente un gasto continuo de material sólido desde la dirección aguas arriba.

Obtenida así la profundidad de socavación adicional en la corriente causada por la presencia de la pila, para obtener la profundidad total de socavación deberá sumarse la socavación normal de la corriente, mencionada en el cuerpo de este capítulo.

Con las reglas que se desprenden de los párrafos anteriores y las enunciadas en el cuerpo de este capítulo se obtienen profundidades de socavación total que son probablemente exageradas en la mayor parte de las corrientes, según el criterio de los autores de este libro; sin embargo, el problema de la socavación es tan complicado e incierto que por fuerza ha de serse muy conservador si se pretende proporcionar un criterio cuantitativo general. Por otra parte, no puede excluirse un caso real en que la profundidad calculada con los criterios expuestos sea aún insuficiente en relación a las características de una corriente. De lo anterior se deduce que el criterio y la experiencia del ingeniero son vitales para juzgar en estos problemas y en la práctica el ingeniero deberá echar mano de todo los recursos susceptibles de darle luz. Así, por ejemplo, se ha recurrido a la prueba de penetración estándar para formular una idea de las profundidades a donde llega la socavación normal en un cauce. Según este criterio, en los lugares ya firmes se notará un aumento en el número de golpes necesarios para la penetración estándar a conseguir en la prueba; el criterio del proyectista establece un número indicativo en zonas ya fuera de peligro de socavación y 30 ó 40 golpes son números que se mencionan para tal efecto. Sin embargo, la norma anterior es peligrosa si no se emplea con experiencia, ya que en los cauces son frecuentes los boleos o las gravas que acusan gran número de golpes, sin que ello indique que exista la compacidad correspondiente.

Otro punto digno de observarse en las gráficas de la fig. VIII-e.1 es que en ellas no se habla del tipo de suelo que forme el fondo del cauce. Se refieren, naturalmente, a suelos socavables, constituidos por arenas, gravas o aún boleos y no a aquellos suelos en los que, por sus características, la socavación es de menor peligro; entre éstos últimos figuran las arcillas, los suelos cementados y, desde luego, las rocas en masas extensas.

En fechas relativamente más recientes, se han desarrollado mucho investigaciones sobre métodos tendientes a conseguir que la socavación adicional a la normal de la corriente no se produzca o sea de

escasa significación, cuando se coloca un obstáculo en la corriente. En la ref. 9, por ejemplo, Levi y Luna proponen un método que consiste en provocar, en la zona que de otro modo sería de socavación en una pila, un depósito de material o, por lo menos, una reducción muy substancial de dicha socavación; para ello proponen modificar las condiciones de la corriente cerca de la pila, por medio de otro obstáculo colocado aguas arriba de ella, cuyo efecto en combinación con el de la pila, sea en el sentido expresado. En realidad, la idea de producir una modificación a la corriente por medio de un obstáculo que resulte benéfico para una pila colocada aguas abajo del obstáculo, es antigua, pero en la referencia mencionada, los autores presentan un estudio muy minucioso sobre diversos tipos de obstáculos, distancias y posiciones en que deben colocarse y otros factores, que permiten establecer criterios cuantitativos de detalle, de relativa confiabilidad. El estudio está basado en el comportamiento de numerosos modelos de laboratorio, en los que se reprodujeron las condiciones reales de campo. De él pueden extraerse las siguientes conclusiones, presentadas por los autores

El obstáculo más apropiado para modificar el régimen de erosión de la corriente en forma favorable para la pila es una pantalla colocada aguas arriba de la pila, alineada con ella. La forma más favorable de la pantalla corresponde a una sección rectangular delgada, de espesor del orden de  $1/20$  del ancho de la pila, colocada normal a la dirección principal de la corriente. El ancho del obstáculo no debe sobrepasar al de la pila, pues aunque a mayor ancho la eficiencia es mayor, no se considera práctico sobrepasar el ancho de la pila por proteger. La distancia más recomendable de la pantalla a la pila es 2.2 veces el ancho de la última. La pantalla debe de hincarse lo suficiente para que en ningún caso su propia socavación pueda hacerla fallar; si la profundidad de la socavación total de la pila sin protección ha sido calculada, se recomienda hincar la pantalla protectora un 30% más que dicha profundidad. Conviene, por último, que la pantalla no sobresalga del fondo del cauce en más de un 35% del tirante de agua.

En estas condiciones, los autores del trabajo afirman que la socavación adicional que se produciría en la pila sin protección puede reducirse hasta en un 70%. La pantalla puede construirse antes o después que la pila. Finalmente los autores hacen notar que aunque los resultados de su experimento sólo valen en principio para las condiciones que rigieron en el mismo (lecho horizontal, homogeneidad del material de arrastre, tirante de agua constante y relativamente elevado), tienen la impresión de que su valor cualitativo tiene un campo de aplicación mucho más amplio y, de hecho, confían en su método para cualquier caso, especialmente cuando se trate de rellenas socavaciones que ya se han producido.

## REFERENCIAS

1. Sowers, G. F. — *Shallow Foundations* — Capítulo 6 del libro *Foundation Engineering*, editado por G. A. Leonards — Mc Graw Hill Book Co. — 1962.
2. Peck, R. B., Hanson, W. E. y Thornburn, T. H. — *Capítulo 14 del libro Foundation Engineering* — John Wiley and Sons — 1957.
3. Holtz, W. G. y Gibbs, H. F. — *Engineering Properties of Expansive Clays* — Trans. A. S. C. E. — Vol. 120 — 1956.
4. Sowers, G. F., Dalrymple, G. B. y Kennedy, C. M. — *High Volume Change Clays of the Southeastern Coastal Plain* — Trabajo no publicado — Law Engineering Testing Co. — Atlanta, Ga. — 1961.
5. Button, S. J. — *The Bearing Capacity of Footings on a Two Layer Cohesive Subsoil* — Tercer Congreso Internacional de Mecánica de Suelos y Cimentaciones — Zurich — 1953.
6. Zeevaert, L. — *Cimentaciones compensadas* — Memorias del Primer Congreso Panamericano de Mecánica de Suelos y Cimentaciones — Vol. I. — Mexico, D. F. — 1959.
7. Meyerhof, G. G. — *The Ultimate Bearing Capacity of Foundations on Slopes* — Memorias del IV Congreso Internacional de Mecánica de Suelos y Cimentaciones. — Vol. I — 1957.
8. Laursen, E. M. y Toch, A. — *Scour Around Bridge Piers and Abutments* — Iowa Highway Research Board Bull. N° 4 — 1956.
9. Levi, E. y Luna, H. — *Protección contra la socavación producida al pie de las pilas de puente* — VIII Congreso Panamericano de Carreteras — Bogotá, Colombia — 1960.
10. Bishop, A. W. y Bjerrum, L. — *The Relevance of the Triaxial Test to the Solution of Stability Problems* — Research Conference on Shear Strength of Cohesive Soils — ASCE — Boulder, Colorado — 1960.

## BIBLIOGRAFIA

- Foundation Engineering* — Ed. por G. A. Leonards — Mc Graw Hill Book Co. — 1962.
- Foundation Engineering* — R. B. Peck, W. E. Hanson y T. H. Thornburn — John Wiley and Sons — 1957.
- Foundations* — A. L. Little — Edward Arnold Pu. Londres — 1961.
- Foundations of Bridges and Buildings* — H. S. Jacoby y R. P. Davis — Mc Graw Hill Book Co. — 1953.

## CAPÍTULO IX

### CIMENTACIONES PROFUNDAS

#### IX-1. Introducción

Las condiciones del suelo superficial no siempre son apropiadas para permitir el uso de una cimentación poco profunda, del tipo de las descritas en el Capítulo VIII. En tal caso será preciso buscar terrenos de apoyo más resistentes a mayores profundidades: a veces éstos no aparecen a niveles alcanzables económicamente y es preciso utilizar como apoyo los terrenos blandos y poco resistentes de que se dispone, contando con elementos de cimentación que distribuyan la carga en un espesor grande de suelo. En todos estos casos y en otros que se detallarán en lo que sigue, se hace necesario recurrir al uso de cimentaciones profundas.

En este capítulo se darán los principios fundamentales para el cálculo de la capacidad de carga y los asentamientos de las cimentaciones profundas. Se estudiarán los arquetipos de éstas, simbolizando a la gran variedad que de ellas existe hoy y no se detallarán los problemas económicos y constructivos que, por otra parte, suelen jugar un papel tan importante en la elección, diseño y construcción de una cimentación profunda.

#### IX-2. Tipos de cimentaciones profundas

Los elementos que forman las cimentaciones profundas que hoy se utilizan más frecuentemente se distinguen entre sí por la magnitud de su diámetro o lado, según sean de sección recta circular o rectangular, que son las más comunes.

Los elementos muy esbeltos, con dimensiones transversales de orden comprendido entre 0.30 m y 1.0 m se denominan pilotes. A pesar del amplio rango de dimensiones que se indicó, la inmensa mayoría de los pilotes en uso tienen diámetros o anchos comprendidos entre 0.30 m y 0.60 m: pueden ser de madera, concreto o acero.

Los elementos cuyo ancho sobrepasa 1.0 m, pero no excede del doble de ese valor suelen llamarse pilas. Sin embargo, no se ha establecido hasta hoy una distinción definida entre pilas y pilotes y el criterio arriba expuesto tiene el único mérito de ser seguido por un cierto número de especialistas. Para otros, una pila es simplemente un elemento que, trabajando exactamente igual que una zapata, transmite cargas a mayor profundidad que la que suele considerarse en



aquellas; según estos especialistas un elemento es pila cuando la relación profundidad a ancho es 4 o mayor, en tanto que para una zapata suelen considerarse relaciones del orden de 1. Por último, cabe mencionar que para muchos ingenieros, entre los que se cuentan los autores de este libro, pila es, en el lenguaje diario, cualquier apoyo intermedio de un puente. En cualquier caso, las pilas se construyen de mampostería o de concreto.

Por último, se requieren muchas veces elementos de mayor sección que los anteriores a los que se da el nombre de cilindros, cuando son de esa forma geométrica o cajones de cimentación, cuando son paralelepípedicos. Los diámetros de los primeros suelen oscilar entre 3.0 y 6.0 m, se construyen huecos para ahorro de materiales y de peso, con un tapón en su punta y siempre se hacen de concreto. Los cajones tienen anchos similares, son huecos por la misma razón y se construyen con el mismo material.

En la fig. IX-1 aparecen esquemáticamente los tipos de cimentaciones descritas.

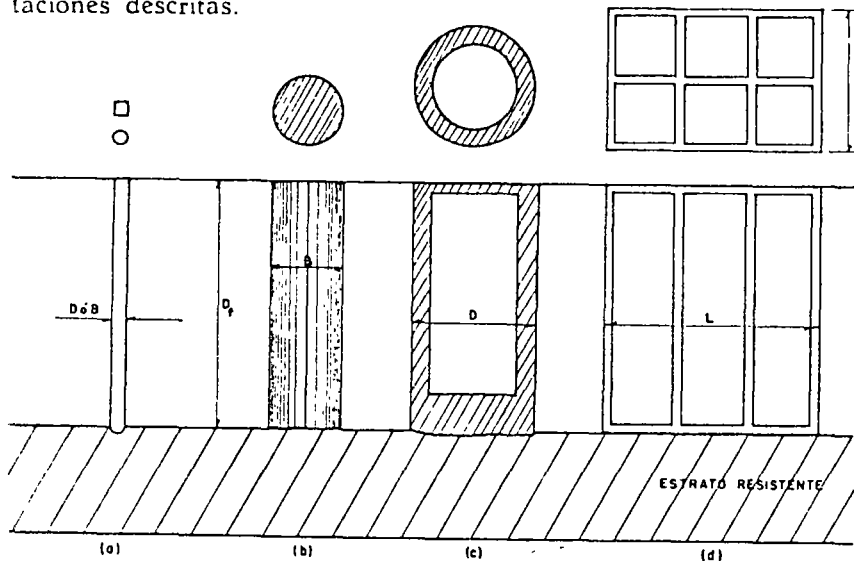


FIG. IX-1. Tipos de cimentaciones profundas

- a) Pilote
- b) Pila
- c) Cilindro (corte)
- d) Cajón de 6 celdas (corte)

### IX-3. Generalidades sobre pilotes

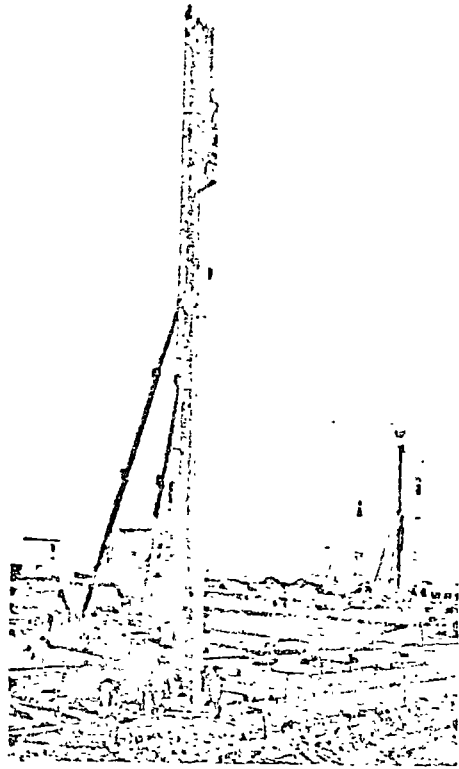
En general, se usan los pilotes como elementos de cimentación cuando se requiere

1. Transmitir las cargas de una estructura, a través de un espesor de suelo blando o a través de agua, hasta un estrato de suelo resistente, que garantice el apoyo adecuado. La forma de trabajo de estos pilotes podría visualizarse como similar a la de las columnas de una estructura.
2. Transmitir la carga, a un cierto espesor de suelo blando, utilizando para ello la fricción lateral que se produce entre suelo y pilote.
3. Compactar suelos granulares, con fines de generación de capacidad de carga. Este uso de los pilotes, en realidad fuera del campo de las cimentaciones en sí mismas, fue ya mencionado en el Volumen I de esta obra, en el capítulo referente a Compactación.
4. Proporcionar el debido anclaje lateral a ciertas estructuras (como tablestacas, por ejemplo) o resistir las fuerzas laterales que se ejerzan sobre ellas (como en el caso de un puente). En estos casos es frecuente recurrir a pilotes inclinados.
5. Proporcionar anclaje a estructuras sujetas a subpresiones, momentos de volcadura o cualquier efecto que trate de levantar la estructura. Estos son pilotes de tensión.
6. Alcanzar con la cimentación profundidades ya no sujetas a erosión, socavaciones u otros efectos nocivos
7. Proteger estructuras marítimas, tales como muelles, atracaderos, etc., contra el impacto de barcos u objetos flotantes. Una estructura auxiliar que cumple tal fin recibe el nombre de Duque de Alba.

Evidentemente, los pilotes pueden ser diseñados para cumplir dos o más de las funciones anteriores.

Desde el punto de vista de su forma de trabajo, los pilotes se clasifican en *de punta*, *de fricción* y *mixtos*. Los pilotes de punta desarrollan su capacidad de carga con apoyo directo en un estrato resistente. Los pilotes de fricción desarrollan su resistencia por la fricción lateral que generan contra el suelo que los rodea. Los pilotes mixtos aprovechan a la vez estos dos efectos.

Atendiendo al material del cual están hechos, los pilotes pueden ser de madera, de concreto, de acero o de una combinación de estos materiales. Los pilotes de madera ya se usan muy raramente en trabajos de importancia y han quedado prácticamente circunscritos a estructuras provisionales o a funciones de compactación de arenas. Los pilotes de concreto son los más ampliamente usados en la actualidad; pueden ser de concreto reforzado común o presforzado; aunque en su mayoría son de sección llena, últimamente se ha desarrollado bastante el uso de pilotes huecos, de menor peso. Los pilotes de acero son de gran utilidad en aquellos casos en que la hincada de los pilotes



Máquina piloteadora

de concreto se dificulte por la relativa resistencia del suelo, pues tienen mayor resistencia a los golpes de un martinete de hincado y mayor facilidad de penetración; suelen usarse secciones  $H$  o secciones tubulares, con tapón en la punta o sin él.

Según el procedimiento de construcción y de colocación, los pilotes de concreto pueden ser prefabricados e hincados a golpes o a presión o colados en el lugar, en una excavación realizada previamente a la construcción del pilote. Para los pilotes hincados a golpes, quizá aún los más frecuentes, por lo menos en trabajos ejecutados fuera de las ciudades, existen tres tipos principales de martinetes de hincado. El de caída libre, de poco uso ya por su lentitud, consiste simplemente en una masa guiada, que se eleva por medio de un malacate y se deja caer desde la altura especificada; el de vapor de acción sencilla, que

utiliza la energía del vapor para levantar la masa golpeante, para después dejarla caer por acción exclusivamente gravitacional y el de vapor de doble efecto, en el que la energía del vapor eleva la masa y la impulsa y acelera en su caída.

La efectividad de los distintos martinetes suele compararse recurriendo a su *energía*, expresada en  $\text{kgm/golpe}$ . Hay gran variedad de tipos y tamaños, existiendo máquinas en que la masa golpeante llega a 6 ton de peso o más, con 100 golpes por minuto y con energías hasta de 10,000  $\text{kgm}$ .

#### IX-4. Capacidad de carga en pilotes. Fórmulas dinámicas

La determinación de la capacidad de carga de un pilote es uno de los puntos de la actual Mecánica de Suelos más sujetos a las incertidumbres emanantes de lo imperfecto de las teorías de que se dispone,

de la dificultad de cuantificar la influencia del método constructivo del pilote y del desconocimiento de como deben ser tomadas en cuenta las características esfuerzo-deformación de los suelos, por otra parte tan imprecisamente conocidas hoy en día.

Ahora bien, aún supuesto que actualmente fuera posible calcular con suficiente aproximación la capacidad de carga de un pilote debe tenerse en cuenta que en la construcción nunca se utiliza uno de estos elementos, sino un grupo de ellos. Aunque la investigación actual sobre capacidad de carga o cualquier otro aspecto del comportamiento de un grupo de pilotes es sumamente limitada y escasa, existen ya suficientes elementos de juicio para afirmar que el comportamiento mecánico de un solo pilote es muy diferente del que exhibe un grupo. Esta no es ciertamente la menor incertidumbre que hoy rodea al campo de las cimentaciones piloteadas, ya que en la actualidad sólo existen teorías o fórmulas para calcular la capacidad de carga de pilotes aislados; el valor así obtenido se asigna al grupo, ignorando la diferencia de comportamiento arriba señalada; el hecho de que la práctica haya ido proporcionando algunas normas para tomar en cuenta el efecto de agrupamiento, poco añade todavía al panorama antes expuesto. De hecho, han ocurrido con cierta frecuencia fallas de grupos de pilotes en casos en que el conocimiento actual indicaría que un pilote considerado aislado había sido juiciosamente proyectado.

Por todo lo anterior, el diseño y construcción de las cimentaciones piloteadas es uno de los campos de la Mecánica de Suelos en que más se requiere el criterio de un ingeniero que no se confie únicamente en el discutible valor de una fórmula y que sepa hacer uso de su experiencia, sentido común e intuición del comportamiento de los materiales.

Para calcular la capacidad de carga de pilotes de punta, que trabajan por apoyo directo en un estrato de resistencia garantizada, se han usado fórmulas y criterios que pueden agruparse en tres clases principales, que se citan a continuación:

Las llamadas fórmulas dinámicas tratan de obtener la capacidad de carga del terreno a partir de la energía comunicada al pilote por el impacto del martillo de hincá. Su aplicación está limitada por lo tanto a los pilotes de punta hincados al golpe.

Las fórmulas empíricas en que la capacidad de carga del pilote se obtiene de experiencias locales.

Las fórmulas estáticas, en que la capacidad de carga del pilote se obtiene a partir de una teoría que valore la capacidad de carga del suelo, a partir de sus parámetros de resistencia.

Fórmulas dinámicas se han desarrollado muchas a partir del principio común del que todas emanan, según el cual la energía del impacto, cuantificada multiplicando el peso del martillo golpeante

por su altura de caída libre, se iguala con el trabajo efectuado durante la penetración del pilote por el impacto, cuantificado a su vez por el producto de la penetración de la punta del pilote en el impacto, por una fuerza que representa la resistencia dinámica del suelo al pilote y que se supone igual a la carga estática que el pilote puede soportar. A partir de tan sencillo principio, diferentes investigadores han ido complicando las fórmulas a usar, al tratar de tomar en cuenta las pérdidas de energía que se tienen durante la hincada, por rebote del martillo, deformación del pilote, vibraciones, absorción en el suelo vecino, etc. De este modo se ha llegado a la elaboración de fórmulas algebraicamente complicadas<sup>1</sup>, en algunas de las cuales se han desarrollado métodos realmente ingeniosos para incorporar pérdidas de detalle.

La falacia fundamental de las fórmulas dinámicas estriba en suponer que la resistencia dinámica opuesta al pilote en su punta durante el hincado por impacto, es igual a la resistencia que el pilote encontrará en su punta en condiciones de carga estática. Ello equivale a ignorar la diferencia de respuesta de los materiales a tipos de carga tan diferentes como la estática puramente y el impacto; cualquiera que se introduzca en el agua de una alberca lentamente y que después se deje caer sobre la misma de frente, desde una altura de 10 m, por ejemplo, concordará, sin embargo, en que dicha diferencia existe.

La diferencia es primordialmente debida a que durante el impacto se desarrollan resistencias viscosas y de inercia en el sistema pilote-suelo, pues la penetración del pilote tiene lugar en un lapso muy breve, con lo que la velocidad de penetración es importante y genera resistencia viscosa, análoga a la que se tendría en un fluido real si se tratase de mover a un objeto dentro de él. Además, la aparición de esta velocidad implica aceleraciones previas a las que deben haberse opuesto fuerzas de inercia, semejantes a las que se manejan en Mecánica en el Principio de D'Alambert. Estas fuerzas viscosas y de inercia no se presentan en el caso estático y hacen que la correlación entre la resistencia dinámica y la estática sea muy difícil, si no imposible de realizar. También se ignoran en las fórmulas dinámicas los efectos de cambio de resistencia del suelo en torno al pilote con el tiempo, tan importantes en muchos tipos de suelos. Ni tan siquiera puede decirse si las fórmulas dinámicas serán conservadoras o inseguras en un caso dado.

En vista de lo anterior ha de concluirse que las fórmulas dinámicas no representan un método racional de enfrentarse al problema de capacidad de carga en pilotes y, por ello, no deben usarse en ningún caso.

Sin embargo, con vista en el interés histórico que pudieran representar y por vía de información, en el Anexo IX-a, se analizan

algunas de las fórmulas dinámicas que ganaron mayor popularidad en el pasado.

Las fórmulas empíricas tienen el inconveniente general de su localismo. Muchas veces se elaboraron sin bases racionales sólidas y, por ello, están sujetas a numerosas incertidumbres que hacen necesario aplicarles un coeficiente de miedo superior a lo que hoy es normal; lo que conduce a cimentaciones antieconómicas. Una buena parte de estas fórmulas tienen como base criterios dinámicos; otras son simples recetas que tratan de recoger experiencias locales interpretadas con un carácter totalmente burdo. Los autores de esta obra estiman que la época de estas fórmulas ya pasó y que hoy en ningún caso está justificado su uso como alternativa al procedimiento de la aplicación de una teoría de capacidad de carga razonable, complementada con la adecuada exploración, el debido muestreo y el necesario trabajo de laboratorio. Pueden verse algunas fórmulas empíricas en la ref. 2.

Respecto a las teorías de Capacidad de Carga a emplear para el diseño de los pilotes trabajando por punta, ya se hizo un análisis detallado en el Capítulo VII, por lo que no se considera necesario añadir nada en este lugar. En cambio es preciso insistir en lo necesario de un completo conocimiento de las propiedades mecánicas de los suelos, previo a la aplicación de cualquier fórmula. Dicho conocimiento sólo podrá lograrse con una exploración completa y adecuada, para lograr la cual, el ingeniero no deberá ahorrar ningún esfuerzo. Las propiedades mecánicas del suelo se obtendrán entonces por pruebas de laboratorio realizadas sobre muestras obtenidas con cuidado; en estos dos renglones fundamentales, tampoco debe el ingeniero regatear su vigilancia y su interés, pues de ellos depende en gran medida el éxito o fracaso de su diseño.

Las fórmulas mencionadas en el Capítulo VII dan la capacidad de carga de un pilote a la falla, el cual no es el valor recomendable de diseño. Es necesario afectar la capacidad de carga última por un factor de seguridad conveniente para llegar a la capacidad admisible en el proyecto. Ahora podría repetirse mucho de lo que se señaló en el estudio del factor de seguridad en cimentaciones poco profundas (capítulo VIII). Los valores numéricos a usar para el factor de seguridad dependen de las incertidumbres inherentes al proyecto, especialmente en lo referente a la homogeneidad del subsuelo y al método de construcción del pilote. Sin embargo, es costumbre en los diseños normales usar un factor de seguridad del orden de 3 cuando la cimentación se calcula con cargas muertas y vivas permanentes, que es la forma usual de cálculo en trabajos de rutina; este factor puede reducirse algo cuando se haga un análisis más detallado de cargas

### IX-5. Pruebas de carga en pilotes

Generalmente el mejor método para estimar la capacidad de carga de un pilote individual en un cierto lugar, es el realizar una prueba de carga a escala natural en ese lugar. El inconveniente de las pruebas de carga estriba en su costo y en el tiempo requerido para realizarlas; estas razones hacen que en numerosas obras de poca magnitud no se ejecuten. En obras de importancia, sin embargo, no es buen criterio evitar las pruebas de carga en nombre del costo o del tiempo y, por lo menos deben hacerse algunas pruebas en lugares representativos de las distintas condiciones prevalecientes; la elección correcta de tales lugares es, desde luego, de fundamental importancia, define el éxito del programa de pruebas y suele requerir bastante experiencia. El lugar apropiado para efectuar una prueba de carga no siempre es aquel en que el terreno presenta condiciones más críticas, pues debe contarse también con la magnitud de las cargas en cada pilote, con el número de pilotes que se colocarán en cada zona y con las consecuencias derivadas de la falla de un pilote.

Una limitación de importancia que afecta a las conclusiones obtenidas de una prueba de carga es que ésta se realiza generalmente en un solo pilote y ya se ha mencionado que el comportamiento de un grupo es diferente del de una unidad aislada. Las pruebas de grupos de pilotes son muy escasas en la literatura, debido al costo y a la magnitud de las cargas que se requeriría movilizar en la prueba.

Con una prueba de carga puede obtenerse información sobre los siguientes aspectos

- a) La capacidad de carga última por punta de un pilote.

Una prueba de carga bien ejecutada da valores bastante satisfactorios en la capacidad de carga por punta, apóyese ésta en arena o arcilla dura. Para deslindar el valor de la capacidad por punta es necesario que la resistencia del pilote por fricción lateral se conozca con buena aproximación o que sea eliminada; esto último puede conseguirse colocando el pilote dentro de un tubo hueco del que sobresalga únicamente su punta.

- b) La capacidad de carga de un pilote por fricción lateral.

El resultado de una prueba de carga da la resistencia lateral por fricción o adherencia cuando la capacidad de carga por punta es despreciable, cual suele ser el caso de pilotes hincados en arcillas blandas o cuando se dispone en la punta del pilote un mecanismo a base de gatos que permite valuar la resistencia por punta independientemente de la resistencia total.

- c) El asentamiento total del pilote bajo la carga.

Esta información es bastante confiable cuando la punta del pilote se apoye en suelos no compresibles. En pilotes desplan-

tados en suelos cohesivos o en pilotes de fricción colocados en arcillas blandas, en cambio, los asentamientos obtenidos en la prueba no representan los que se tendrían en un pilote cargado a largo plazo. La razón es que en estos casos, los fenómenos de compresibilidad están muy ligados al tiempo y los periodos de prueba no son de ningún modo representativos, por los cortos, de los tiempos *de vida* de los pilotes prototipo. Por otra parte, siempre ha de tenerse presente que el asentamiento que produce un pilote puede ser mucho menor que el de un grupo de pilotes colocado en el mismo lugar. En la fig. IX-2 se ve de inmediato la diferencia de influencias en ambos casos, que explica el diferente asentamiento.

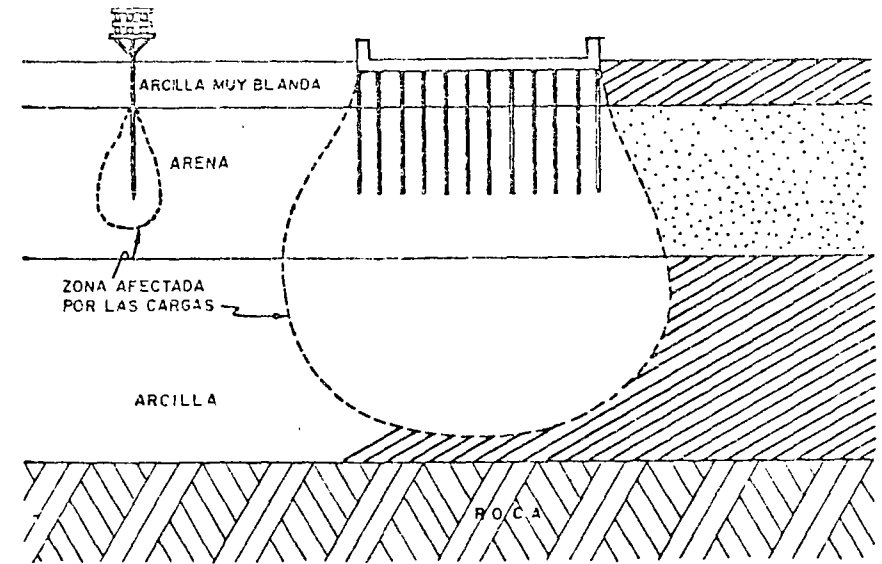


FIG. IX-2 Diferencia entre la influencia de un pilote y de un grupo de pilotes en lo referente a asentamientos

En el Anexo IX-b se dan algunos detalles sobre la ejecución e interpretación de pruebas de carga a escala natural.

Otro tipo de pruebas de carga que cada día es objeto de mayor atención por parte de los investigadores, no tanto para fijar la capacidad de carga última en un caso particular, sino más bien para tratar de entender de un modo racional los diferentes factores que influyen en el comportamiento de los pilotes, es la investigación sobre modelos de laboratorio. Muchos son los problemas de difícil solución que afectan a estas investigaciones, pero pese a ello puede decirse:

que ofrecen un futuro prometedor. En las refs. 4, 5, 6 y 7 pueden verse esfuerzos en esta dirección.

#### IX-6. Pilotes de punta hincados al golpe

En esta sección se consideran aquellos pilotes prefabricados que se hincan en el terreno por medio de golpes dados por el martillo de una piloteadora o martinete. En todo lo que sigue se considerará, por antonomasia, que el material que forma los pilotes es el concreto.

La capacidad de carga de estos pilotes se determina, como ya se ha repetido, realizando como etapa previa imprescindible un estudio de campo lo más completo posible, que incluya una completa exploración y un muestreo adecuado; en seguida, es preciso realizar las pruebas de laboratorio requeridas para determinar con suficiente confiabilidad las constantes de resistencia que, a su vez, permitan aplicar una teoría de capacidad de carga adecuada. En obras de cierta importancia o en casos en que surjan dudas en el proyectista, será necesario verificar los resultados obtenidos con una o varias pruebas de carga.

Nunca se insistirá bastante en la necesidad de explorar el área que vaya a ocupar una cimentación piloteada. Los pilotes de punta, en especial, se apoyan en un estrato de suelo resistente, cuyo espesor y características han de ser cuidadosamente verificados en todas partes, pues cambios no previstos en espesor y resistencia han sido causa de numerosas fallas.

Se considera que tanto en esta sección como en otros muchos párrafos anteriores se insistió bastante en las ideas arriba expuestas, por lo que, en lo que sigue, se hará hincapie en otros problemas que afectan la colocación y el funcionamiento de los pilotes de punta hincados al golpe.

Algunas veces se ha dicho erróneamente que un pilote de punta es un elemento estructural que trabaja como una columna, transfiriendo la carga de su cabeza a la punta, apoyada en el estrato resistente o en roca. Esta idea lleva a diseñar a los pilotes de manera que sus esfuerzos no sobrepasen a los que se tendrían en una columna del mismo material, mismas dimensiones y sujeta a la misma carga axial. Sin embargo, la experiencia ha demostrado que las fallas propiamente estructurales en los pilotes son tan raras, que no deben ser consideradas como un evento posible en el diseño. Tanto la teoría como la experiencia han demostrado que no puede presentarse pandeo por falta de confinamiento lateral, aún en los pilotes hincados en los suelos más blandos. Los esfuerzos de manejo previo al hincado, sí pueden jugar un papel importante en el diseño de los pilotes, especialmente los esfuerzos de izado en los elementos de concreto presforzado

Así, la capacidad de carga de un pilote de punta depende exclusivamente de las características del suelo en el que se apoya y del área de su sección recta.

Antiguamente era costumbre hincar los pilotes hasta que ya no era posible introducirlos a mayor profundidad bajo los golpes de un martillo autorizado por la práctica. Este criterio era conocido como criterio de *rechazo* para la hincada de los pilotes. Considerado así, como fundamental para definir el desplante del conjunto de los pilotes de una cimentación, este criterio es muy defectuoso y puede inducir a graves errores de trascendencia. Considérese, por ejemplo, el caso de la fig. IX-3, que se presenta como ilustrativo de una gran variedad de situaciones imposibles de individualizar.

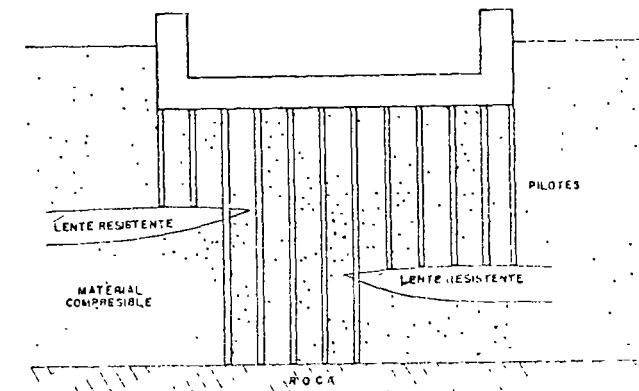


FIG. IX-3 Esquema que ilustra los peligros de hincado de pilotes "Al Rechazo"

En la figura se señalan con un rayado lentes de materiales resistentes a los que se supone capacidad para producir *rechazo* en los pilotes que se apoyan en ellos. Siendo la distribución de estas lentes irregular, los pilotes del conjunto quedarán a diferentes profundidades, con la consecuencia a lo largo del tiempo de que los pilotes apoyados en la roca permanecerán totalmente fijos, en tanto que los apoyados en los lentes resistentes se asentarán de manera diferente unos de otros por ser distinto el espesor de material compresible que queda bajo cada lente. La estructura de la figura seguramente está destinada a sufrir daños por asentamientos diferenciales.

Otro peligro de un pilote hincado al rechazo es que cualquier sobrecarga que el pilote reciba o cualquier disminución de resistencia en el suelo a lo largo del tiempo, podrán hacer penetrar al pilote en un estrato resistente delgado, que, sin embargo, hubiera presentado buenas condiciones en el momento de la hincada.

De lo anterior no debe deducirse que el rechazo de un pilote durante su hincado no sea un dato del que pueda extraerse una cierta utilidad. La profundidad de desplante de un pilote debe establecerse con base en el conocimiento del suelo a través de la exploración; de esa manera puede localizarse el estrato resistente hasta el que debe ser llevado al pilote; en este caso, el criterio de rechazo es una buena comprobación de haber alcanzado en la hinca el estrato deseado. En otras ocasiones el estrato de apoyo es de resistencia variable, dentro de límites razonables, en profundidad y en extensión; este es otro caso en que una aplicación inteligente del criterio de rechazo garantiza el buen apoyo. Un criterio de rechazo también es aplicable para no *sobrehincar* los pilotes, por lo que se entiende el dar un número excesivo e inconveniente de golpes de martillo al pilote sin lograr su avance, lo que lo perjudica estructuralmente.

Tanto para garantizar un buen apoyo, como para evitar sobrehincado es frecuente aceptar en la práctica un criterio de rechazo, según el que las condiciones del pilote son aceptables si con los últimos 3 a 5 golpes el pilote no se hinca más de 1 cm y siempre que esta situación se mantenga en los últimos 3 a 5 cm. El criterio anterior, se repite, es aceptable sólo cuando se aplica dentro de las normas de un proyecto, para afirmarlo, en el cual la posición y la profundidad de desplante de cada pilote se determinó precisamente con base en exploración. Si el rechazo se satisface lejos de las condiciones de proyecto, no debe considerarse aceptable y el proyecto o el método de hincado deberán verificarse cuidadosamente.

La necesidad de llevar pilotes a profundidades de desplante previamente elegidas y correspondientes a estratos de plena garantía en lo que se refiere a apoyo, plantea el problema de atravesar estratos de cierta resistencia, que dificultan la hinca, sin llegar a garantizar un apoyo permanente. Cuando estos estratos son de naturaleza friccio-

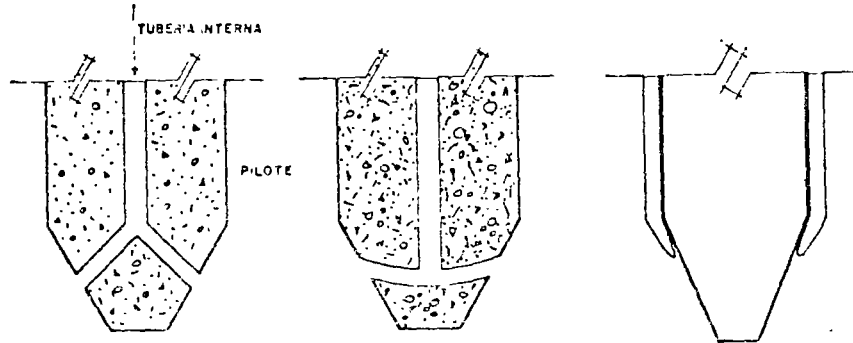


FIG. IX.4 Arreglos típicos para inyección de agua a presión para facilitar el hincado de pilotes

nante suele ser de buen resultado ayudar la hinca a golpes con la inyección de agua a presión. Los inyectorios de agua (chiflones) han de ser previstos y dispuestos con anticipación en el propio pilote, antes de construirlo. En la fig. IX-4 se muestran algunos dispositivos de inyección típicos.

Los inyectorios son tubos de 5 a 7.5 cm de diámetro, con estrechamiento en su extremo. Para inyección a través de arena debe preverse un gasto del orden de 1,000 l/min por pilote, con presiones de agua del orden de 10 kg/cm<sup>2</sup>. En materiales más gruesos ambas cifras pueden crecer considerablemente. Los arreglos con un solo inyector en la punta del pilote son indeseables, pues se tapan y, además, tienden a formar un tapón compacto bajo el pilote, dificultando el hincado. En el mejor arreglo, los chiflones deben salir lateralmente y dirigidos ligeramente hacia arriba. El número de salidas de agua debe ser tal que produzca dispositivos simétricos en torno al pilote, pues de otro modo éste no baja vertical o se desvía de cualquier dirección que se desee. Los tubos fuera del pilote se despegan fácilmente de éste y se desvían.

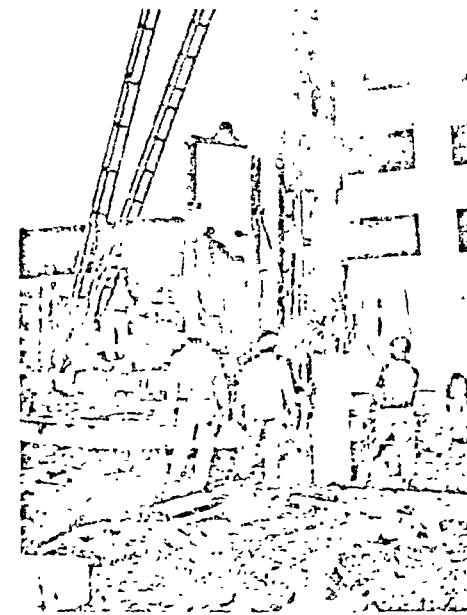
Frecuentemente se ha dicho que la inyección de agua no es efectiva para atravesar mantos de arcilla o de suelos finos plásticos en general. Sin embargo, la experiencia ha señalado buenos resultados en estos casos, siempre

que en torno al pilote no se cierre el espacio que permita la salida del agua hacia el exterior.

Cuando se hincan muchos pilotes ayudados por inyección de agua, debe contarse muy especialmente con la necesidad de eliminar el agua producto de la operación, lo que, en ciertas zonas, puede ser problemático.

Por último, es preciso señalar que la operación de la inyección debe suspenderse por lo menos un metro sobre el nivel de desplante definitivo del pilote, pues de otro modo se corre el riesgo de aflojar el nivel de apoyo, disminuyendo su resistencia.

Cuando se hincan pilotes en arcillas blandas, se despla-



Operación de hincado al golpe

za un volumen de suelo que puede ser tan grande como el volumen de los pilotes. Esto va produciendo en el terreno un lomo que levanta estructuras adyacentes o los pilotes vecinos; puede suceder que los pilotes ya hincados se separen del estrato resistente en que se apoyaban bajo la arcilla. La situación puede remediarse rehincando los pilotes, pero en ocasiones la adherencia entre arcilla y pilote crece de tal manera con el tiempo, que esta operación se hace muy difícil o imposible. También ocurren en el caso que se analiza movimientos laterales de los pilotes que fácilmente pueden ser indeseables. Todos los problemas anteriores pueden reducirse o eliminarse removiendo parte del suelo que el pilote va a desplazar. Esta operación se denomina preexcavación y se realiza con multitud de herramientas cortadoras o rotatorias, desarrolladas al efecto; en otras ocasiones pueden hincarse ademes huecos que se retiran posteriormente.

La preexcavación es útil también cuando a profundidades no muy grandes se presentan estratos cohesivos más o menos duros que han de ser atravesados en la hinca, pero que la dificultarían. Si los bordes de un pozo preexcavado no se derrumban éste puede ser un excelente método para evitar las dificultades emanadas de la dureza del material por atravesar.

En el Anexo IX-c se dan detalles de algunos tipos comunes de pilotes precolados hincados al golpe.

### IX-7. Pilotes de fricción hincados al golpe

Como ya se ha dicho, se denominan pilotes de fricción a aquellos que están totalmente embebidos en material blando, de modo que su resistencia proviene total o casi totalmente de la adherencia que se desarrolla en el fuste, en el caso de suelos cohesivos o de la fricción entre suelo y pilote, en el caso de suelos friccionantes. La resistencia por punta se considera muy pequeña o despreciable para la exposición que sigue dentro de esta sección.

La hinca de estos pilotes en arcilla blanda produce remoldeo, que disminuye su resistencia al esfuerzo cortante, tanto más cuanto más sensible sea; sin embargo, con el paso del tiempo la resistencia se va recuperando. Lo anterior se explica porque los esfuerzos y deformaciones tangenciales de hinca perturban la estructura de la arcilla, generando presiones neutrales que disminuyen los esfuerzos efectivos y, por ello, la resistencia al esfuerzo cortante; esto es tanto más notable cuanto más sensible sea la estructura de las arcillas. Así, es frecuente que en arcillas muy sensibles, los pilotes bajen por su propio peso. Con el paso del tiempo, se disipan las presiones en el agua en exceso de las hidrostáticas y se regenera la resistencia al esfuerzo cortante en el suelo. Los valores de la resistencia final del suelo son, por lo menos, del mismo orden de la resistencia inicial y aún pueden

ser mayores, debido a la consolidación que se induce durante la disipación de las presiones neutrales.

La capacidad de carga de los pilotes de fricción no puede calcularse con el uso de fórmulas dinámicas. Ya se ha visto que la resistencia de un pilote bajo el impacto instantáneo puede ser totalmente distinta que la resistencia a largo plazo, bajo carga estática permanente. Por otra parte, en arcillas no sensibles, de falla plástica, la resistencia viscosa durante el impacto impide en cierto grado la penetración del pilote, que entraría con mayor facilidad bajo carga estática o lentamente aplicada. En este caso las fórmulas dinámicas sobreestiman la capacidad de carga de esos pilotes. Como resumen, puede decirse que en ningún caso y bajo ninguna circunstancia pueden usarse fórmulas dinámicas para calcular la capacidad de carga en pilotes de fricción.

Para calcular la capacidad de carga de pilotes de fricción en arcilla blanda hay dos procedimientos practicables: a partir de los parámetros de resistencia al esfuerzo cortante del suelo o a partir de los datos de una prueba de carga.

La experiencia ha demostrado que en arcillas blandas saturadas es satisfactorio suponer que la adherencia entre el fuste del pilote y la arcilla es igual a la cohesión de ésta, calculada en prueba rápida o aún con base en una prueba de compresión simple. Es conveniente reducir este valor a la mitad para efectos de diseño, lo que equivale a utilizar un factor de seguridad de dos. Así, si  $f_a$  es la adherencia entre pilote y suelo se tiene

$$f_a = c = \frac{q_u}{2} \quad \text{a la falla} \quad (9-1)$$

o bien

$$f_{at} = \frac{c}{2} = \frac{q_u}{4} \quad \text{como valor de trabajo} \quad (9-2)$$

Una vez estimada la adherencia, la capacidad total del pilote se obtiene multiplicando aquella por el área de pilote embebido.

Tomlinson<sup>3</sup> ha propuesto, con base en numerosas pruebas, los valores de la adherencia de la Tabla 9-1, comparada con la cohesión en diferentes arcillas.

Nótese que la correspondencia entre la adherencia y la cohesión, muy aproximada en arcillas blandas, se hace menos cuanto más dura es la arcilla en la que se hinca el pilote. Esto es debido a que al hincar un pilote en arcilla más o menos dura tienden a formarse pequeños espacios huecos entre suelo y pilote, con lo que la adherencia promedio disminuye; este efecto, por supuesto, no se tiene en arcillas blandas. Además, en arcillas muy firmes, saturadas, fuer-

TABLA 9-1

Material del pilote	Consistencia de la arcilla	Cohesión, $c$ ton/m <sup>2</sup>	Adherencia, $f_a$ ton/m <sup>2</sup>
Concreto y madera	Blanda	0 — 4	0 — 3.5
	Firme	4 — 8	3.5 — 4.5
	Dura	8 — 15	4.5 — 7
Acero	Blanda	0 — 4	0 — 3
	Firme	4 — 8	3 — 4
	Dura	8 — 15	?

mente preconsolidadas, la distorsión producida por el hincado induce tensión en el agua de los vacíos, por lo que la arcilla en la vecindad del pilote tiende a expandirse con disminución en su resistencia al corte; para ello toma el agua de la arcilla vecina que tiende a consolidarse algo. Los valores de la Tabla 9-1 de Tomlinson han probado ser bastante confiables en las aplicaciones prácticas, por lo que deben preferirse al uso de recetas y fórmulas como las arriba mencionadas (fórmulas 9-1 y 9-2), cuando la arcilla en que se hincan los pilotes sea dura.

La capacidad de carga de pilotes de fricción hincados en arenas sueltas es aún más difícil de estimar actualmente. En estos casos los pilotes nunca trabajan únicamente por fricción lateral y la capacidad de carga por punta siempre juega un papel de importancia. La hincada de los pilotes tiene un efecto compactador en la arena, por lo que, a pesar de tener un manto originalmente suelto, puede volverse muy difícil y aún imposible hincar un pilote cuando en su vecindad se han hincado previamente otros.

La estimación de la capacidad de carga de los pilotes por fricción hincados en arenas es un problema prácticamente no resuelto en el campo teórico. Algunos autores suponen que la fricción lateral sigue una ley lineal a lo largo del fuste, aumentando la fricción con la profundidad, expresan dicha fricción como una fracción de la presión normal por peso propio del suelo que exista en un nivel determinado. Si a la profundidad  $z$  hay una presión vertical igual a  $\gamma z$ , la presión lateral correspondiente es considerada como  $K_0 \gamma z$ , donde  $K_0$  es un coeficiente de empuje de tierras. Esta presión actuando normalmente al fuste del pilote produce a lo largo de éste y a la profundidad  $z$  una fricción que vale

$$f_{lr} = K_0 \gamma z \operatorname{tg} \delta = K' \gamma z$$

donde  $\delta$  es el ángulo de fricción a considerar entre suelo y pilote

El valor de  $K_0$  que frecuentemente se ha mencionado oscila entre 0.4 para las arenas más sueltas, hasta 0.6 en las arenas más compactas, en que sea posible hablar de pilotes de fricción. En cuanto al valor de  $\delta$ , el más frecuentemente recomendado es  $2/3 \phi$ .

Algunos otros autores, aún sosteniendo como hipótesis básica la distribución lineal de la fricción, dan fórmulas más complicadas, en las que el valor  $K'$  es más complejo (ver, por ejemplo, la ref. 9).

Sin embargo, las experiencias han demostrado que la ley lineal de distribución para la fricción lateral puede ser muy discordante con la realidad. En la fig. IX-5, por ejemplo, se recogen experiencias en modelos de pilotes, hechas por Florentin L'Heriteau y Farhi citadas en la misma ref. 9, en las que puede verse como la ley de distribución de la fricción se aparta de la lineal en gran medida, si bien, en este caso se acercó a ella cada vez más, según la carga sobre el pilote se aproximó a la de falla.

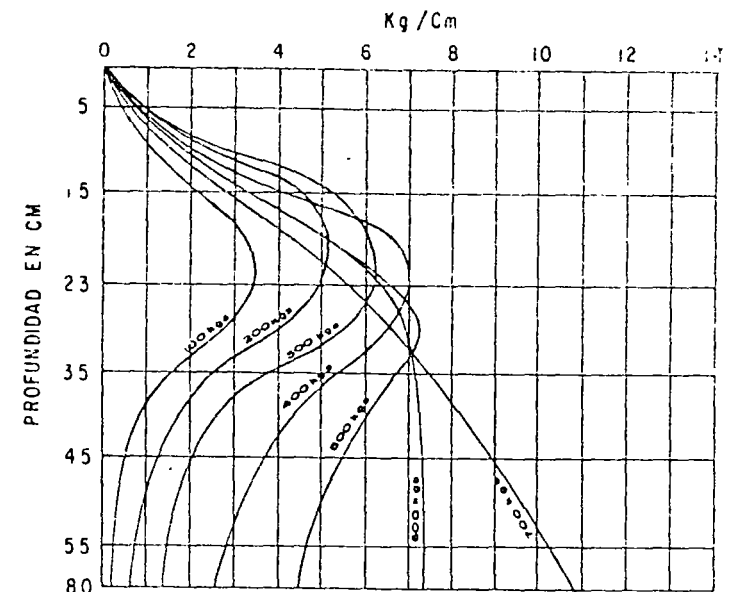


FIG. IX-5 Experiencias sobre distribución de la fricción lateral en el fuste de un pilote

Además, se ha visto que la resistencia de un pilote por fricción lateral en arena varía con muchos factores de influencia muy difícil de cuantificar en un caso dado, de los que los principales son la compactación y otras características del suelo, la posición del nivel freático



y las perturbaciones que se induzcan sobre el pilote, como son la hincada de otros, nuevas excavaciones, etc.

Así, la fórmula 9-3, que puede dar la capacidad por fricción por un proceso de integración a lo largo del fuste o aún más sencillamente adoptando un valor medio de la fricción en la ley lineal que se aplique a toda el área lateral del pilote, debe verse nada más que como una guía cuantitativa de los órdenes de magnitud de las fuerzas en juego, pero no como una base precisa de cálculo. En este problema están claramente indicadas las pruebas de carga como guía del criterio del proyectista y a ellas deberá de recurrirse en todos los casos de cierta importancia.

Si se usa la fórmula 9-3 deberá aplicarse un factor de seguridad del orden de 3 o 4 y a veces mayor, para tener valores de trabajo de la fricción lateral.

### IX-8. Pilotes colados en el lugar

Existe una gran variedad de pilotes que se construyen directamente en el lugar en que definitivamente van a cumplir su cometido; pilotes que no se construyen en otra parte para después ser hincados a golpes hasta su posición definitiva como los que hasta ahora se han venido tratando. Genéricamente se denomina a estos pilotes *colados en el lugar* o *pilotes colados in situ*.

Estos pilotes se distinguen y clasifican por los procedimientos que sirven para construirlos; éstos son sumamente variados y comprenden la excavación de perforaciones, ademadas o no, que después se rellenan de concreto, gatos que hacen penetrar los ademes a presión; chiflones que permiten hacer llegar los trabajos al nivel deseado o métodos que involucran la utilización de explosivos.

Muchos de los tipos de pilotes colados en el lugar de uso normal son patentes comerciales que difieren entre sí relativamente poco; esta competencia de carácter puramente comercial ha complicado el campo produciendo un gran número de variantes, respecto a unos pocos tipos básicos. En el anexo IX-d se reseñan brevemente los tipos más comunes de pilotes actualmente en uso.

La capacidad de carga en pilotes colados en el lugar se calcula básicamente en la misma forma que se describió para los pilotes precolados hincados al golpe.

### IX-9. Pilotes compuestos

Se denominan pilotes compuestos a aquellos constituidos por dos materiales, seleccionados siempre entre madera, concreto y acero. También caen dentro de esta denominación los pilotes de concreto formados por una parte precolada y otra colada en el lugar.

Cuando se use madera para formar pilotes ha de tenerse en cuenta que las fluctuaciones del nivel freático, con periodos alternados de humedecimiento y secado, son sumamente perjudiciales; en cambio, un pilote de madera siempre bajo el nivel freático se conserva en forma excelente. Así, las secciones compuestas de concreto y madera pueden usarse cuando el nivel freático no esté más profundo de 15 o 20 m, límite que suele considerarse para la sección de concreto de un pilote compuesto; si el nivel freático está más profundo ya sería conveniente pensar en un pilote sólo de concreto.

Un punto delicado en este tipo de pilotes es la unión entre las secciones diferentes, la que se logra actualmente con varios dispositivos prácticos, generalmente patentados.

Cuando la sección superior haya de soportar esfuerzos de flexión que produzcan esfuerzos laterales de importancia, puede convenir construirla de acero, generalmente de secciones tubulares, obteniéndose así un pilote compuesto de acero y madera.

Los pilotes compuestos de concreto y acero suelen tener de este material el tramo de punta, con lo que se logra una mayor facilidad de penetración en terrenos duros; las puntas de acero suelen entonces ser de sección *H*.

### IX-10. Otros tipos de pilotes de concreto

Se tratan en esta sección pilotes que no corresponden a las técnicas descritas con anterioridad, es decir, que ni son hincados a golpes, ni colados en el lugar. El método de hincado puede ser ahora a presión u otros.

En el Anexo IX-e se describen algunos de los tipos más comunes de pilotes de esta clase.

### IX-11. Pilotes de acero

Se llaman así los pilotes en que el acero es el material básico o el único. Se construyen usualmente con secciones de tubo o con secciones *H*.

Los pilotes de acero de sección tubular se colocan en el terreno hincándolos o presionándolos y pueden tener su punta tapada o ser abiertos. Los pilotes suelen rellenarse con concreto una vez que alcanzaron la profundidad de desplante. Es común que sean compuestos por secciones unidas entre sí por juntas especiales o soldadas; con esto se logra ventaja de maniobrabilidad y menor requerimiento de espacio para la colocación.

Se ha dicho con frecuencia que estos pilotes son apropiados para ser hincados a golpes a través de suelos más o menos duros en los que es difícil el hincado de pilotes de concreto, aún con

ayuda de chiflonaje; sin embargo, la experiencia de los autores es decepcionante y de hecho han visto serios problemas en obras en que proyectistas menos excéntricos habían esperado excelentes resultados. Los tubos cerrados en su extremo resultan tan difíciles de hincar como un pilote de concreto, si bien resisten más y más enérgicos golpes de un martinete; en los tubos abiertos, en suelos algo duros, el material que va penetrando durante el hincado dificulta grandemente también esta operación.

Los pilotes de sección tubular son buenos para soportar cargas grandes, ahorrando así muchos pilotes en estructuras pesadas en que se estudian como solución alternativa a los pilotes de concreto usuales. Los pilotes deberán protegerse por algún método apropiado<sup>19</sup> cuando exista peligro de ataque por corrosión.

Los pilotes de acero de sección  $H$ , debido a su pequeña área transversal y a su gran resistencia son adecuados para penetrar materiales duros, en los que los otros tipos darían problemas de hincado. También son adecuados para lugares en que no se desea tener fuerte desplazamiento del suelo a causa del hincado. Son capaces de soportar muy fuertes cargas, cuando están debidamente apoyados. Requieren comparativamente poco espacio de almacenaje. A veces se ha usado para sustituirlos, pero guardando sus características y con gran economía en muchos casos, rieles de desecho.

#### IX-12. Fricción negativa. Pilotes de control

Existe un problema muy común en las cimentaciones piloteadas con pilotes de punta, cuando se presenta una estratigrafía básicamente formada por un cierto espesor compresible, subyacente por el estrato resistente de apoyo y cuando dicho manto compresible tiende a disminuir de espesor por algún proceso de consolidación inducido. Este es el caso de estribos de puentes en los que el estrato compresible disminuye de espesor y se consolida por el peso de los terraplenes de acceso; también es el caso de algunos valles en los que el bombeo para fines agrícolas induce la consolidación; el caso ya famoso de la Ciudad de México es típico, pues en ella existe un estrato de apoyo a profundidades del orden de los 30 m arriba del cual las formaciones arcillosas, muy compresibles, se consolidan por efecto del intenso bombeo que para obtención de agua potable con fines de consumo se realiza en los estratos acuíferos.

Los pilotes de punta, apoyados en un estrato no consolidable y resistente permanecen comparativamente fijos, respecto a los suelos blandos que se enjutan, tendiendo a bajar a lo largo de su fuste. Esta tendencia induce esfuerzos de fricción en el fuste de los pilotes que, por ser en sentido descendente, sobrecargan a éstos al colgarse materialmente el suelo circunvecino de los pilotes. Si estas cargas no han

sido tomadas en cuenta en el diseño, pueden llegar a producir el colapso del pilote por penetración en el estrato resistente. Este es el fenómeno de fricción negativa en los pilotes de punta. En el mejor de los casos, es decir, cuando los pilotes aguantan la sobrecarga, la estructura apoyada sobre los pilotes parece emerger sobre la superficie del terreno, con lo que fácilmente producirá daños a estructuras vecinas. (fig. IX-6)

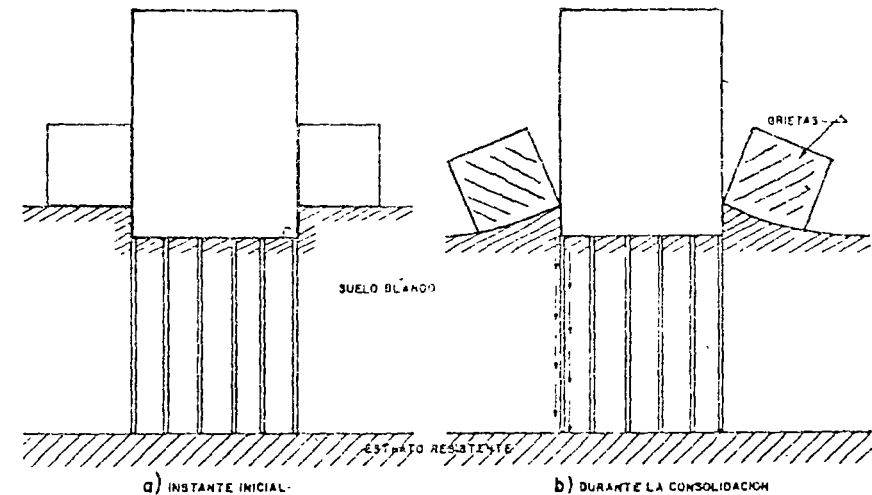


FIG. IX-6 Inducción de la fricción negativa a lo largo del fuste de pilotes de punta por Consolidación de los estratos blandos

Aún en el caso en que la fricción negativa no induzca falla y sea resistida, fácil es comprender que su efecto es maléfico, pues ocupa una buena parte de la capacidad de carga del pilote, que está soportando al suelo circunvecino y no carga útil.

Es fácil ver que en una estructura piloteada con pilotes de punta, en la que se tenga el efecto de fricción negativa, un pilote de una zona interior de la cimentación podrá ser sobrecargado con un peso que sea, como máximo, igual al del volumen de arcilla tributario a dicho pilote. En un pilote de borde, sin embargo, la sobrecarga podrá ser mayor, por razones obvias y este efecto puede aún acentuarse más en un pilote de esquina, teniéndose como límite únicamente el valor de la adherencia entre suelo y pilote a lo largo de todo el fuste del mismo. Por ello, si el estrato resistente es susceptible de alguna cedencia, el pilote de esquina será el que más asentamientos pueda presentar, seguido de los de borde, quedando los mínimos

hundimientos en las zonas interiores del área piloteada. Esto da lugar a una distribución de asentamientos opuesta a la que se tendría en una cimentación por superficie, flexible, bajo carga uniforme. Si la cimentación tiene rigidez y los pilotes están sólidamente unidos a ella en su cabeza, el efecto diferencial de fricción negativa en las esquinas y bordes puede llegar a hacer que los pilotes en esas zonas trabajen a tensión en su parte superior.

El valor de la sobrecarga que por fricción negativa puede llegar a tener un pilote de punta tiene, como se señaló, como cota superior el valor del producto de la adherencia entre suelo y pilote multiplicada por el área lateral de éste. En la práctica este valor de la adherencia suele tomarse igual al de la cohesión del suelo. En pilotes interiores el cálculo anterior suele ser conservador y, como se dijo, la sobrecarga no puede exceder el peso de la arcilla de un volumen tributario al pilote que puede ser valuado con cierta aproximación por simples consideraciones geométricas.

L. Zeevaert<sup>11</sup> ha hecho notar una consecuencia adicional de los efectos de fricción negativa cuya importancia práctica es quizá mayor de lo que a primera vista pudiera pensarse. Este efecto consiste en lo siguiente: al colgarse el suelo del pilote por fricción negativa, parte del peso que gravitaba en la zona de la punta del pilote sobre el estrato resistente se ha aliviado; si el estrato resistente es de natu-

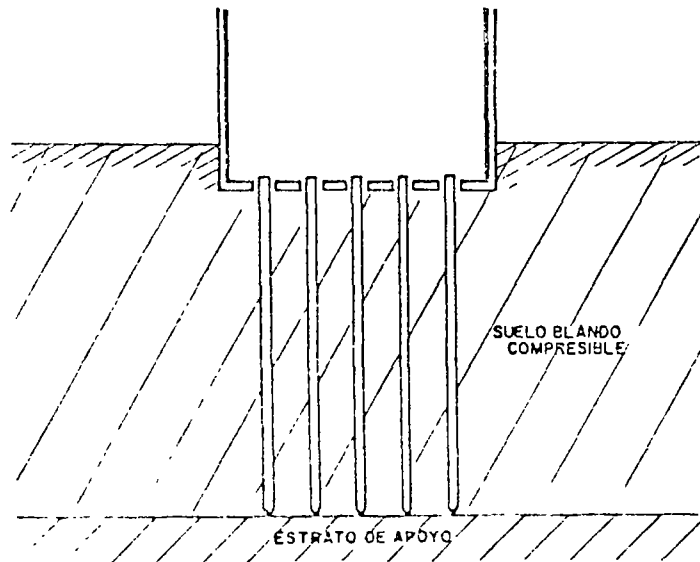


FIG. IX-7 Pilotes de punta atravesando libremente la cimentación

raleza friccionante, esta disminución de la presión efectiva conlleva una disminución de la resistencia al esfuerzo cortante y de la capacidad de carga y, por lo tanto, propicia la penetración del pilote en el estrato de apoyo.

Los efectos dañinos en las estructuras vecinas, la pérdida de capacidad de carga útil por fricción negativa y los peligros que entraña la penetración diferencial de los pilotes en los estratos firmes, han hecho pensar en soluciones que permitan manejar a los pilotes de punta superando estos problemas, so pena de desecharlos como cimentación posible en lugares en que existe enjuntamiento de terrenos blandos y fricción negativa.

La primera solución que se ocurrió se ilustra en la fig. IX-7.

Se trata simplemente de construir la cimentación de forma que los pilotes la atraviesen libremente, de modo que no haya ningún contacto o unión entre ambos elementos. La estructura se carga entonces directamente contra el suelo, el cual comenzará a ceder bajo su peso. Esta cedencia hace que el suelo accione sobre los pilotes por un mecanismo de fricción negativa, con lo que éstos toman por lo menos parcialmente la carga de la estructura, con la correspondiente disminución de las presiones efectivas en el suelo blando, así, los pilotes originalmente separados de la cimentación llegan a trabajar con cargas importantes, haciendo además que los asentamientos de la estructura disminuyan grandemente.



Vista de la instalación de un pilote de control

Aunque el modo de trabajar la cimentación anterior puede comprenderse fácilmente, cualitativamente hablando, la cuantificación de

las cargas que tome cada pilote o la predicción de los asentamientos diferenciales de la estructura son muy poco seguras, si no imposibles de efectuar. En algunas estructuras con este tipo de cimentación en la Ciudad de México se ha observado, de hecho, un comportamiento bastante imprevisible, tanto en lo que se refiere a asentamientos diferenciales, como a penetraciones diferenciales en el estrato resistente.

La necesidad de controlar la carga en los pilotes y los asentamientos diferenciales y totales de la estructura llevaron al investigador M. González Flores<sup>12</sup> a su difundida idea de los Pilotes de Control. Estos son, en esencia, pilotes de punta del tipo que atraviesa libremente la cimentación, sobre cuya cabeza se coloca un puente unido a la losa de cimentación de la estructura; este puente consiste de una vigueta de acero anclada a la losa con tornillos largos de acero. La unión entre la cabeza del pilote y la vigueta del puente se establece con un dispositivo formado por superposiciones sucesivas de placas delgadas de acero y sistemas de cubos pequeños de una madera con características esfuerzo-deformación especiales (fig. IX-8).

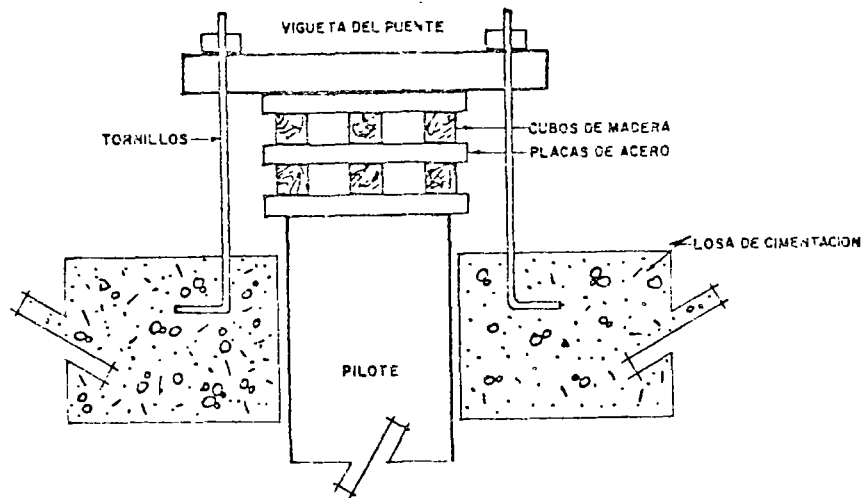


FIG. IX-8 Esquema de la cabeza de un pilote de control

El mecanismo arriba descrito tiene como finalidad hacer trabajar al pilote a la carga que se desee, claro está, siempre inferior a la carga de falla. Cada cubo de madera tiene una gráfica esfuerzo-deformación con un rango plástico amplio (fig. IX-9). Cuando se alcanza su carga de falla plástica previamente determinada, puede garantizarse que el cubo está transmitiendo una cierta carga fija

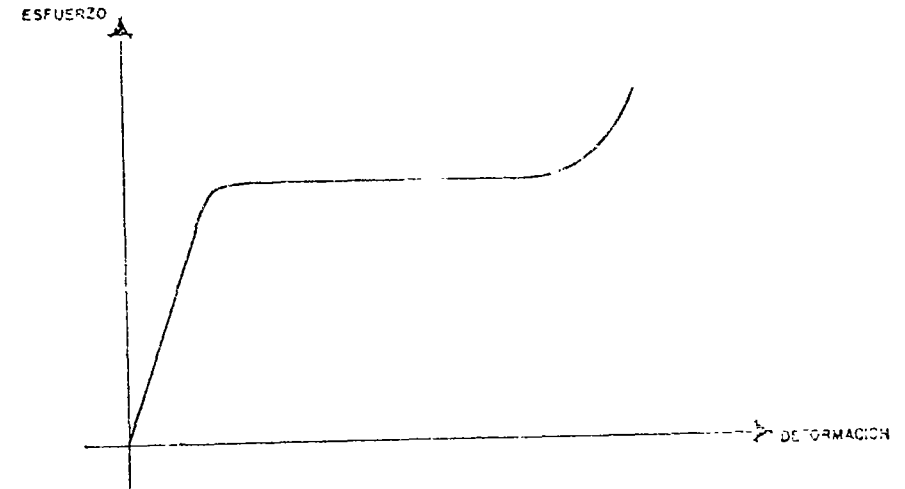
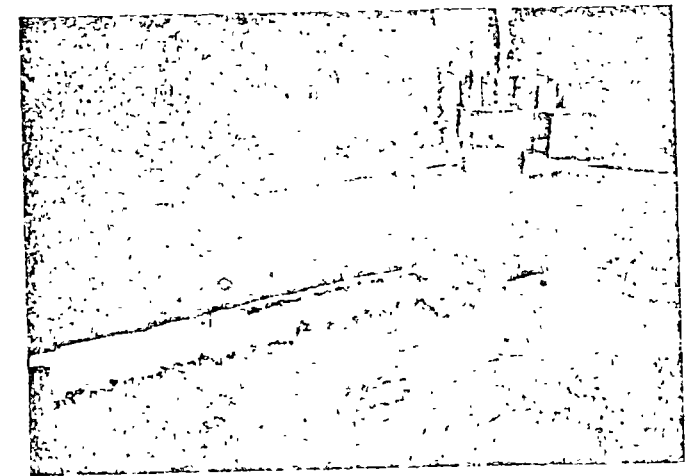


FIG. IX-9. Gráfica esfuerzo-deformación en compresión simple de un cubo de Caobilla, utilizada en los pilotes de control



Pilotes de Control. Nótese el edificio separado del terreno, permitiendo realizar trabajos de cimentación con comodidad

a la cabeza del pilote, para un amplio rango de deformación en el cubo. Conocida la carga que se desea que tome el pilote bastará dividir ese valor entre la carga de falla del cubo de madera para determinar el número de cubos que han de colocarse por capa, entre dos placas de acero. Como quiera que el sistema está sujeto a deformación, al cabo de un tiempo los cubos llegan al límite de deformación plástica, momento en que habrá que modificar la posición del puente y cambiar los cubos de madera. El lapso para estas operaciones puede ampliarse si se colocan varias capas de cubos de madera.

El objetivo fundamental de los pilotes de control es lograr que la estructura baje simultáneamente con la superficie del suelo. La carga transmitida por la estructura es tomada parte por el suelo y parte por los pilotes. Si la estructura tiende a bajar más aprisa de lo que lo hace la superficie del suelo (se supone que el suelo está bajando por algún proceso de consolidación independiente, por ejemplo el bombeo en el caso de la Ciudad de México), los pilotes se harán trabajar a mayor carga, aumentando el número de cubos por capa, con lo que se alivia la parte de carga transmitida directamente al suelo y se frena el descenso relativo de la estructura; recíprocamente, si la estructura tiende a emerger respecto al terreno, los pilotes se harán trabajar a menor carga, disminuyendo el número de cubos de madera por capa, de modo que la estructura transmita más carga al suelo, con lo que su asentamiento se verá acelerado.

Si la estructura desciende de un modo no uniforme con asentamiento diferencial, las técnicas arriba descritas podrán aplicarse a diferentes zonas del área de cimentación, con lo que es posible igualar los asentamientos.

La aplicación de las técnicas descritas exige, desde luego, un número de pilotes adecuado en la cimentación; con pocos pilotes la estructura se hundirá irremediablemente, ya que los pilotes no podrán sobrepasar su carga de falla; por otra parte, si el número de pilotes es excesivo, puede llegar a suceder que la estructura emerja aún cuando en la cabeza de los pilotes no se aplique carga.

### IX-13. Grupos de pilotes

Como ya se ha indicado reiteradamente, el comportamiento de un grupo de pilotes es distinto del de un pilote aislado, tanto en lo que respecta a capacidad de carga, como en lo que se refiere a asentamientos. Si en el caso de un pilote solo, que es el que se ha venido tratando hasta ahora en este capítulo, las incertidumbres de diseño son grandes todavía, en el caso de una agrupación de pilotes que constituya una cimentación real, estas incertidumbres son tanto mayores, que puede decirse que todo el conocimiento teórico del que hoy se dispone no pasa de ser un marco de referencia que sirva para encausar debidamente el criterio y la experiencia del proyectista, que

juegan un papel decisivo todavía en el logro de los buenos resultados prácticos. De hecho, se dice con razón que el diseño de una cimentación piloteada es más un arte que una cuestión científica, en el que factores tan primarios como el *instinto* del proyectista juegan un papel preponderante; sin embargo, también es un hecho bien sentido que son los hombres con mayor conocimiento teórico y mejor información general sobre el campo, los que logran sacar mayor partido de experiencia e instinto. Es evidente, por otra parte, que cualquier cosa que se piense o ejecute en torno a una cimentación real debe estar respaldada por un conocimiento exhaustivo de la estratigrafía del suelo por pilotear, conocimiento que debe llegar a profundidades suficientes, excedentes del valor del fuste de los pilotes en lo que sea necesario (fig. IX-2).

Poco es lo que puede decirse con seguridad desde un punto de vista teórico, sobre capacidad de carga en grupos de pilotes. Sin embargo, existen algunas reglas que se admite generalmente deben ser cumplidas por toda cimentación piloteada. Algunas de ellas se trata en lo que sigue.

En pilotes de punta apoyados en roca firme, no subyacida por ningún estrato compresible, la capacidad de carga de un grupo de pilotes es igual a la suma de las capacidades de carga de los pilotes individuales, siempre y cuando el espaciamiento entre pilotes sea tal que la hincada de uno de ellos no interfiera con sus vecinos ya hincados; esta interferencia puede ser haciéndoles perder el apoyo por levantamiento originado por el suelo que se desplaza en la hincada, o por interacción material de un pilote contra otro, por desviación durante el hincado. En la práctica suele considerarse como espaciamiento mínimo razonable el de 2 o 3 diámetros, medidos centro a centro entre los pilotes. Los problemas de interferencia se eliminan prácticamente usando pilotes preexcavados, algunos de cuyos tipos se describen en este capítulo.

En pilotes de punta apoyados en estratos resistentes no rocosos, pero no subyacidos por estratos compresibles, la capacidad de carga del grupo es tanto más parecida al caso anterior cuanto más firme y rígido sea el apoyo; en general, para los estratos comunes en que se apoyan pilotes de punta, puede decirse que la capacidad de carga de un conjunto de pilotes es similar a la que se obtiene multiplicando la carga soportada por un pilote individual por el número de los pilotes. Sin embargo, existe una gran cantidad de incertidumbres todavía sin dilucidar, en especial si el estrato de apoyo es de naturaleza friccionante. Por ejemplo, hay autores que opinan que un conjunto de pilotes puede tener mayor capacidad que la que se deduce del valor correspondiente a un pilote individual"; la razón es que se supone que el conjunto de pilotes trabaja como una pila equivalente que tuviera las dimensiones de dicho conjunto. Otros

autores, por el contrario, suponen que en ocasiones la capacidad del grupo es algo menor que la obtenida al multiplicar la carga de un pilote por el número de ellos.

Si debajo del estrato de apoyo hay suelos blandos compresibles, la capacidad de carga de los pilotes está limitada por la capacidad de carga del estrato blando y sobre todo por los asentamientos que en este caso aumentan considerablemente con el ancho del área piloteada (fig. IX-2).

No hay un método que pueda considerarse satisfactorio para calcular los asentamientos de una cimentación piloteada, apoyada en un estrato bajo el que haya suelos compresibles. El método que generalmente se aplica consiste en considerar la carga de la estructura aplicada en la punta de los pilotes, como carga uniformemente repartida en el área piloteada (fig. IX-10).

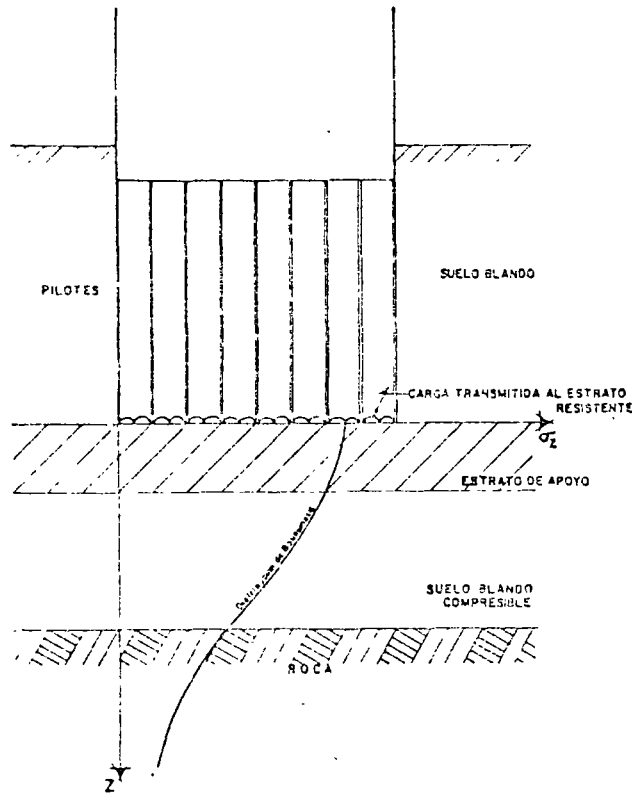


FIG IX-10 Método para calcular asentamientos bajo pilotes de punta

La dificultad estriba en valuar los esfuerzos que lleguen al manto compresible desde el estrato de apoyo. El procedimiento más conservador sería suponer una distribución de esfuerzos con la teoría de Boussinesq (Capítulo II) y con ella calcular los asentamientos en la forma tratada en el Capítulo III. Esto equivale a ignorar el efecto de losa que el estrato resistente produce, por el que los esfuerzos en el estrato subyacente son menores que los calculados. Si se conocen las propiedades mecánicas de los estratos resistentes y blandos subyacentes, podría obtenerse una distribución de esfuerzos más aproximada utilizando la Teoría de Burmister (Capítulo II).

En pilotes de fricción, el efecto de grupo más importante en lo que se refiere a la capacidad de carga es la posibilidad de una falla de la cimentación en conjunto (fig. IX-11).

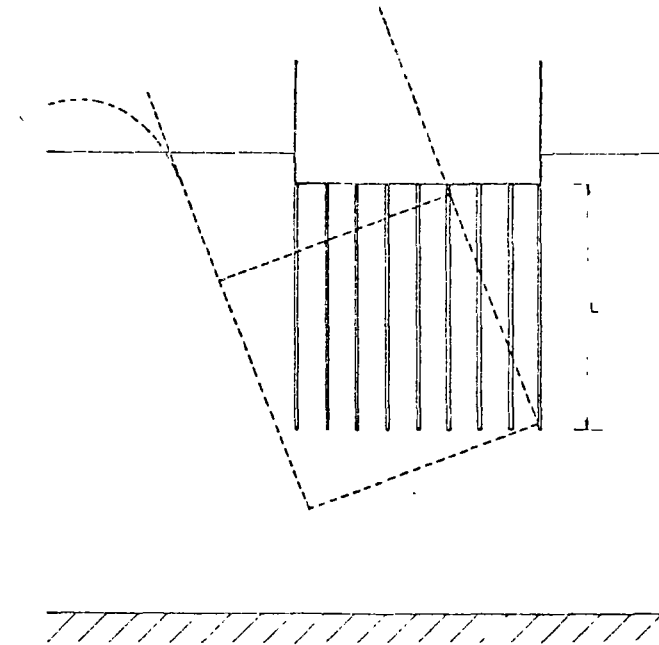


FIG. IX-11 Falla de conjunto de una cimentación con pilotes de fricción

La posibilidad de esta falla estriba en que la resistencia por adherencia y fricción en el área lateral del prisma de altura  $L$ , envolvente de los pilotes, sea menor que la suma de la resistencia de todos los pilotes considerados individualmente. Si  $n$  es el número de pilo-

tes en la cimentación,  $p$  el perímetro de cada uno,  $P$  el perímetro del conjunto y  $f_u$  es la adherencia entre pilote y suelo, supuesta igual a la resistencia al esfuerzo cortante del material, el peligro de falla de conjunto dejará de ser crítico si se cumple la desigualdad:

$$npLf_u \leq Pf_uL$$

$$np \leq P \quad (9-4)$$

lo que expresado en palabras da lugar a la conocida regla práctica de que no hay riesgo dominante de falla de conjunto siempre y cuando el perímetro del área ocupada por los pilotes sea mayor o igual que la suma de los perímetros de los pilotes individuales.

Algunos autores toman en cuenta en el razonamiento anterior la resistencia que ofrece a la falla la base inferior del prisma formado por el conjunto de los pilotes; huelga decir que la fórmula 9-4 es conservadora respecto a este criterio



Falla de un conjunto de pilotes

En lo que se refiere a asentamientos de grupos de pilotes de fricción, puede decirse que no guardan ninguna relación con el asentamiento de un pilote aislado. En general, el asentamiento de una cimentación piloteada con pilotes de fricción es menor que el que se tendría si la misma carga se aplicase al nivel de la cabeza de los pilotes, directamente sobre la misma área que se pilotea. Por supuesto que pueden imaginarse casos en los que la regla anterior no valga o que, inclusive, se invierta; por ejemplo, si la estratigrafía

comprende una costra potente dura, bajo la que hay suelo muy blando, el efecto de los pilotes, al transmitir esfuerzos directamente al suelo blando es contraproducente y se originan fuertes asentamientos, quizá mayores que los que se tendrían sin pilotes. La razón por la que los pilotes de fricción producen menor asentamiento que las cargas superficiales es doble; por un lado, los pilotes transmiten una parte substancial de la carga a zonas profundas, en las que por haber mayor presión inicial, el material es menos compresible; en segundo lugar, al repartir la carga a lo largo de todo el fuste, el nivel del mayor esfuerzo transmitido al suelo es menor que si la carga se transmitiera con una zapata.

Tampoco existe un método científico convincente para calcular los asentamientos en grupos de pilotes de fricción; las reglas que existen para ello están "prefabricadas" de modo que lleguen a resultados que sean razonables de acuerdo con la experiencia de que se dispone; después se les proporciona una apariencia más o menos formal, que permita asociarlas con más o menos éxito a alguna teoría admitida. Algunas de esas reglas se exponen a continuación.

Quizá el método más extendido para los fines prácticos es el debido a Terzaghi y Peck<sup>14</sup>, según el cual la carga tomada por los pilotes puede considerarse aplicada en el tercio inferior de los mismos, como uniformemente repartida en el área piloteada, calculando el asentamiento de ese nivel hacia abajo (Capítulos II y III), como si no existiese pilote alguno; ello implica la suposición de que el espesor de suelo correspondiente a los dos tercios superiores de los pilotes no se consolida. Los propios autores presentan este método como lo que ellos llaman una solución aproximada. En la mayoría de los casos, la estimación por este procedimiento resulta conservadora; es decir, los asentamientos reales son menores que los calculados. Precisamente por esta razón, algunos autores han propuesto considerar la carga uniforme equivalente aplicada al nivel de la punta de los pilotes, con lo que se reduce el espesor de material consolidable y se obtienen asentamientos menores.

#### IX-14. Deterioro y protección de pilotes

En esta sección se tratarán brevemente las causas más comunes que producen el deterioro de los pilotes y los procedimientos que más se han usado para la protección de los mismos. Primeramente se tratará el caso de los pilotes de madera para seguir con los de concreto y terminar con los pilotes de acero.

La calidad estructural de los pilotes de madera puede verse afectada por pudrimiento, por ataque efectuado por insectos u organismos marinos, por abrasión mecánica y por acción del fuego.

El pudrimiento de la madera es causado por el desarrollo de hongos en las zonas expuestas a periodos de humedecimiento y secado alternativos. La temperatura es otro factor que afecta el desarrollo de los hongos, considerándose que temperaturas entre 20°C y 35°C son las óptimas para su crecimiento. El pudrimiento de la madera es prácticamente nulo si el pilote permanece siempre seco, siempre saturado o ha sido tratado químicamente para impedir el crecimiento de los hongos. Sin embargo, los tratamientos usuales tienen la desventaja de proteger la madera únicamente superficialmente, por lo que la parte interior está expuesta al pudrimiento una vez que se produce alguna discontinuidad en su protección superficial (agujeros, cortes o zonas desprotegidas por abrasión mecánica).

La regla práctica más segura es la de que el uso de la madera en pilotes debe restringirse a zonas bajo el nivel freático mínimo que se tenga en la zona piloteada.

Puede considerarse que no existe ninguna variedad de madera inmune al ataque de insectos y organismos vivos, de modo que el único procedimiento seguro para evitar el problema es el uso de tratamientos preservativos adecuados. Desde luego esta forma de deterioro es particularmente grave en pilotes sujetos a la acción de aguas de mar, pues éstas suelen contener gran variedad de organismos que originan deterioro en la madera.

La protección de pilotes de madera se logra con dos métodos básicos, sujetos a multitud de variantes: o se envenena la madera con sustancias químicas que la hacen inapropiada a la vida animal o se la protege mecánicamente, por ejemplo cubriéndola con metal o concreto.

Los principales agentes de deterioro en pilotes de concreto son las sustancias susceptibles de producir destrucción o ataque al concreto, tales como algunos álcalis, ácidos o sales, la acción mecánica de la congelación del agua del subsuelo, la descomposición química del concreto, especialmente si está expuesto a la acción de agua salada y, finalmente, el manejo inapropiado en las operaciones de izado y colocación.

Los métodos de protección para pilotes de concreto cuando se hacen necesarios, consisten en el uso de pinturas, recubrimientos metálicos o de sustancias como la gunita u otras similares.

El principal enemigo de los pilotes de acero es la corrosión. Las principales medidas para evitarla son el aumentar la sección, pintar los pilotes con pinturas especiales o utilizar recubrimientos, sobre todo de concreto. Modernamente se ha utilizado con gran éxito la protección catódica, sujeta, por otra parte, a problemas de conservación.

Todo lo anterior hace necesario efectuar inspecciones periódicas a toda cimentación piloteada, a fin de constatar sus condiciones de conservación.

## IX-15. Pilas, cilindros de cimentación y cajones

Como ya se ha dicho en el comienzo de este capítulo, los elementos que dan título a esta sección se distinguen de los pilotes por su tamaño creciente sin duda tal distinción debe producir diferencias más fundamentales de comportamiento, pero éstas no están hasta ahora suficientemente dilucidadas, por lo que los criterios de cálculo de capacidad de carga y asentamientos son los mismos empleados en pilotes.

En el Anexo IX-f se dan algunas indicaciones sobre estos elementos de cimentación, sus métodos constructivos y su manejo en general.

### ANEXO IX-a

#### Fórmulas dinámicas para la capacidad de carga de pilotes hincados al golpe

La primera fórmula dinámica que ganó popularidad por su simplicidad es la conocida con el nombre de *fórmula del Engineering News*, presentada por Wellington en 1888. La fórmula se presentó para ser usada en pilotes de madera hincados con martillos de caída libre y se modificó más tarde para su aplicación a martillos de acción simple y doble. La fórmula para martillos de caída libre y de acción simple proviene de igualar la energía del impacto con el trabajo de penetración, más las pérdidas de energía que tengan lugar

$$Wh = Q_d s + \text{Pérdidas}$$

donde

$W$  = peso del martillo

$h$  = altura de caída

$Q_d$  = resistencia dinámica en la punta del pilote

$s$  = penetración de la punta del pilote en el impacto considerado.

Si las pérdidas se expresan con  $cQ_d$ , la fórmula queda

$$Q_d = \frac{Wh}{s + c} \quad (9-a-1)$$

Para el caso de martinets de doble efecto la fórmula se modifica al considerar que la fuerza que produce el impacto es el peso del



martillo más el empuje del vapor, expresado por la presión de éste,  $p$ , multiplicada por el área del émbolo,  $A$ . Así la fórmula queda

$$Q_d = \frac{(W + Ap)h}{s + c} \quad (9-a.2)$$

Obsérvese que  $c$  tiene unidades de longitud; su valor, obtenido empíricamente, es

- $c = 2.5$  cm, para martillo de caída libre
- $c = 0.25$  cm, para martillo de vapor
- $c = 0.25 P/W$  cm, siendo  $P$  el peso del pilote, para el caso de martillos de vapor, si se considera la influencia de la inercia y el peso del pilote en las pérdidas de energía.

Otra de las fórmulas dinámicas más populares, inclusive hoy en día, es la debida a Hiley<sup>1</sup>, en la que se trata de establecer las pérdidas de energía durante el hincado de un modo más detallado. En lo que sigue se dan los lineamientos básicos para la deducción de esta fórmula.

En el momento del impacto, el martillo posee una energía que corresponde a una cantidad de movimiento igual a su masa por su velocidad en dicho instante. El primer efecto del martillo sobre el pilote es una compresión de éste y al final de este periodo de compresión la velocidad del martillo y la del pilote serán la misma. Si  $W$  es el peso del martillo,  $g$  la aceleración debida a la gravedad y  $v$  la velocidad del martillo en el momento del impacto, la cantidad del movimiento del martillo en ese momento vale

$$M = \frac{W}{g} v$$

Si  $M_r$  es la cantidad de movimiento que corresponde a la energía que el pilote absorbe al comprimirse, al final del periodo de compresión la cantidad de movimiento del martillo se habrá reducido en esta cantidad y será

$$M' = M - M_r$$

También la velocidad del martillo se habrá reducido al fin del periodo de compresión al valor:

$$v_c = \frac{M'g}{W} = v - \frac{M_r g}{W} \quad (9-a.3)$$

Si se supone que el pilote tiene la posibilidad de moverse algo hacia abajo y que el efecto del hincado en el rebote hace que se pierda el contacto del pilote con la tierra, entonces la cantidad de movimiento del pilote al fin del periodo de compresión puede suponerse igual a  $M_r$  y, por lo tanto, la velocidad del pilote será

$$v_c = \frac{M_r g}{W_p} \quad (9-a.4)$$

donde  $W_p$  es el peso del pilote.

Las velocidades del martillo y pilote deben ser iguales al fin del periodo de compresión, por lo que las expresiones 9-a.3 y 9-a.4 pueden igualarse

$$v - \frac{M_r g}{W} = \frac{M_r g}{W_p} \quad (9-a.5)$$

Después del periodo de compresión el pilote se restituye, tratando de recuperar su forma original. Si  $e$  es el coeficiente de restitución del sistema pilote-martillo, entonces  $eM_r$  será la magnitud del impulso que causa la restitución, por definición de coeficiente de restitución. Así al final del periodo de restitución, la cantidad de movimiento del martillo será

$$M'' = M - M_r - eM_r = M - M_r(1 + e) \quad (9-a.6)$$

Si  $v_m$  representa la velocidad del martillo al final del periodo de restitución, se tendrá

$$v_m = \frac{M''g}{W} = v - \frac{M_r g}{W}(1 + e) \quad (9-a.7)$$

de la expresión 9-a.5 se deduce que

$$M_r = \frac{1}{g} \frac{W W_p}{W + W_p} v \quad (9-a.6)$$

Valor que substituido en (9-a.7) conduce a

$$v_m = v \left[ 1 - \frac{W_p}{W + W_p}(1 + e) \right]$$

de donde

$$v_m = \frac{W - e W_p}{W + W_p} v \quad (9-a.9)$$

Si  $v_p$  es la velocidad del pilote al final del periodo de restitución y teniendo en cuenta que en ese instante la cantidad de movimiento que corresponde a la energía total absorbida por el pilote es  $M_T + eM_T$ , se tiene que

$$v_p = \frac{M_T(1+e)g}{W_p} v \quad (9-a.10)$$

Substituyendo el valor dado por la ec. 9-a.8 para  $M_T$ , se tiene que:

$$v_p = \frac{W(1+e)}{W+W_p} v = \frac{W+eW}{W+W_p} v \quad (9-a.11)$$

Con las velocidades  $v_m$  y  $v_p$  del martillo y pilote, respectivamente, correspondientes al fin del periodo de restitución, puede calcularse la suma de las energías que se tienen en esos elementos en dicho momento, la cual ya podrá usarse en hincar el pilote en el suelo, venciendo la resistencia de éste. Sin embargo, ha de notarse que parte de esa energía se empleará aún en producir compresiones de índole elástica temporal en la cabeza de acero que se le coloca al pilote para el hincado, en el pilote y en el suelo.

Así la energía disponible en el sistema martillo-pilote, al fin de la restitución, será:

$$E_d = \frac{W}{2g}(v_m)^2 + \frac{W_p}{2g}(v_p)^2 \quad (9-a.12)$$

introduciendo las ecs. 9-a.9 y 9-a.11 en la (9-a.12) se llega a

$$\begin{aligned} E_d &= \frac{W v^2}{2g} \left( \frac{W - e W_p}{W + W_p} \right)^2 + \frac{W_p v^2}{2g} \left( \frac{W + e W}{W + W_p} \right)^2 = \\ &= \frac{W v^2}{2g} \frac{W + e^2 W_p}{W + W_p} = \frac{W v^2}{2g} \left[ 1 - \frac{W_p(1 - e^2)}{W + W_p} \right] \end{aligned} \quad (9-a.13)$$

De la expresión final de la ec. 9-a.13, teniendo en cuenta que la energía del martillo en el momento del impacto fue  $E = W v^2/2g$  se tiene que la energía perdida vale

$$\Delta E = \frac{W v^2}{2g} \frac{W_p(1 - e^2)}{W + W_p} \quad (9-a.14)$$

La energía disponible  $E_d$ , dividida entre la energía total  $E$ , da la *eficiencia* del golpe del martillo; puede verse en la penúltima expresión de las ecs. 9-a.13 que dicha *eficiencia* vale

$$\eta = \frac{W + e^2 W_p}{W + W_p} \quad (9-a.15)$$

lo cual puede escribirse

$$\eta = \frac{1}{1 + \frac{W_p}{W}} + \frac{e^2}{1 + \frac{W_p}{W}}$$

El segundo término del segundo miembro de la ecuación anterior es despreciable normalmente en la práctica, dado el pequeño valor de  $e^2$  en la mayoría de los casos. Si esto es así, resultará

$$\eta = \frac{1}{1 + \frac{W_p}{W}} \quad (9-a.16)$$

La ec. 9-a.16 indica la importancia de tener un martillo pesado en comparación al peso del pilote que se desee hincar; así la relación  $W_p/W$  será chica y la eficiencia del golpe,  $\eta$ , será grande. Este punto ilustra el inconveniente más grave de describir un martillo de hincadora por la energía de su golpe en kgm. En efecto, un cierto número de kgm puede lograrse con un martillo muy ligero, cayendo de gran altura o con un martillo muy pesado, que caiga de pequeña altura; en ambos casos la energía puede ser la misma, pero la eficiencia del golpe es tan diferente que puede decirse que los martinetes de martillo ligero son siempre inapropiados para la hincadora y que debe tenderse, en lo posible, al uso de maquinaria pesada que opere eficientemente y logre hincar pilotes en lugares en donde ello es factible, pero donde equipo ligero fracasa inevitablemente, por su baja eficiencia.

La energía cinética en el momento del impacto  $(W/2g)v^2$  proviene de la caída del martillo, por lo que puede escribirse

$$\frac{W}{2g} v^2 = W h$$

donde  $h$  es la altura de caída libre del martillo

Si no hubiera pérdidas de energía en el impacto, no hubiera pérdidas de naturaleza elástica y la eficiencia del golpe fuera 100%, evidentemente podría escribirse:

$$Q_d s = W h$$

En un martinete real existe una eficiencia mecánica,  $e_f$ , que se debe a que el martillo va guiado y se roza en sus guías, a la resistencia del aire, etc. Teniendo esto en cuenta, deberá escribirse

$$Q_d s = e_f W h$$

La energía del golpe está, a su vez, afectada por otro factor de eficiencia,  $\eta$ , según se vio y, en consecuencia, la ecuación anterior deberá modificarse para tomarla en cuenta

$$Q_d s = \eta e_f W h = e_f W h \frac{W + e^2 W_p}{W + W_p} \quad (9-a.17)$$

de donde resulta:

$$Q_d = e_f \frac{W h}{s} \frac{W + e^2 W_p}{W + W_p} \quad (9-a.18)$$

Si la punta del pilote se mueve hacia abajo una cierta cantidad,  $s$ , como resultado del golpe, la parte superior de la pieza metálica que se coloca en la cabeza del pilote para su protección, se mueve esa distancia más una cantidad adicional  $c = c_1 + c_2 + c_3$ , debido a las compresiones elásticas temporales en el propio cabezal de protección, en el pilote y en el suelo.

Entonces se tiene que el trabajo efectuado por el golpe es en realidad

$$Q_d \left( s + \frac{c}{2} \right)$$

ya que el trabajo adicional efectuado contra las fuerzas elásticas mencionadas es  $1/2(Q_d c)$ .

Por lo tanto

$$Q_d = e_f \frac{W h}{s + c/2} \frac{W + e^2 W_p}{W + W_p} \quad (9-a.19)$$

o, si se prefiere

$$Q_d = \frac{e_f W h}{s + 1/2(c_1 + c_2 + c_3)} \frac{W + e^2 W_p}{W + W_p} \quad (9-a.20)$$

que es la fórmula de Hiley, que se trataba de obtener.

La expresión anterior, es válida, según se desprende de su obtención, para martillos de caída libre o de acción simple. Para martillos de doble acción, la fórmula se modifica substituyendo el valor  $W h$  por el término  $E_n$ , energía por golpe, proporcionada por el fabricante de la unidad.

Las fórmulas anteriores no son aplicables en rigor al caso de pilotes hincados al rechazo en material muy duro o hincados sobre roca dura, en donde la punta del pilote no se mueve libremente; sin embargo, aún en esos casos, el autor de esta fórmula sostiene que con ella se obtienen resultados que no difieren mucho de los obtenidos con fórmulas más apropiadas, pero también más complicadas.

En la fórmula 9-a.20 el sentido detallado de los símbolos utilizados es el siguiente:

$Q_d$  = Resistencia última al hincado, supuesta igual a la capacidad de carga última del pilote.

$W$  = Peso del martillo que hinca al pilote.

$h$  = Altura de caída libre de un martillo de este tipo o carrera del martillo en uno del tipo de acción simple.

$e_f$  = Eficiencia mecánica del martillo de hincado. Los valores que se recomienda en la práctica en algunos casos frecuentes son los siguientes:

100% para martillos de caída libre de control automático.

75% para martillo de caída libre accionado con cable y malacate de fricción.

85% para martinetes McKiernan-Terry de acción simple.

75% para martinetes Warrington-Vulcan de acción simple.

85% para martinetes de doble acción McKiernan-Terry, Industrial Brownhoist, National y Unión.

100% para martinetes Diesel.

80% para martinetes de acción simple B.S.P., semiautomáticos.

$W_p$  = Peso del pilote y todos sus accesorios necesarios para la hinca.

$l$  = Longitud del pilote. Si en la resistencia del pilote al hincado juega papel importante la fricción lateral,  $l$  será la distancia de la cabeza del pilote al centro de las fuerzas de resistencia al hincado.

$e$  = Coeficiente de restitución, que varía de cero en pilotes con cabeza de madera deteriorada sin protección o en pilotes con amortiguadores en la cabeza, a 0.55 en pilotes con cabeza protectora de acero. Deberá usarse el valor 0.40 cuando la cabeza protectora en el pilote de acero esté provista de un amortiguador poco resistente; 0.25 en pilotes de madera o de concreto con cabeza de madera.

- $s$  = Penetración del pilote con el golpe.  
 $c_1$  = Compresión temporal de la cabeza del pilote y de su protección; incluye la compresión de los seguidores, si los hubiere.  
 $c_2$  = Compresión temporal del pilote.

$$c_2 = \frac{Q_d l}{A E} \quad (9-a.21)$$

- $c_2$  = Compresión del suelo bajo el impacto. Oscila de 0.5 cm en suelos relativamente resistentes hasta cero en suelos muy duros. Un valor normal es 0.25 cm.  
 $A$  = Sección recta del pilote. Si ésta no es constante, se deberá tomar un promedio entre los valores en la cabeza y en la punta. En pilotes de concreto reforzado, precolados, deberá transformarse el área de acero a un área equivalente de concreto.  
 $E$  = Módulo de elasticidad del material del pilote.  
 $c_1$  varía de 0 a 1.25 cm, dependiendo de varios factores. Valores altos de  $c_1$  se tienen cuando el suelo es muy resistente, la cabeza del pilote tiene colchón amortiguador de importancia y el pilote es de concreto;  $c_1$  es cero si el golpe se le aplica directamente a un pilote de acero.

## ANEXO IX-b

### Pruebas de carga en pilotes

El dispositivo para dar la carga al pilote, una vez que éste está en la posición de prueba, puede seguir alguna de las siguientes variantes:

1. Aplicación directa de la carga, colocando un lastre sobre una plataforma que descansa directamente en la cabeza del pilote.
2. Aplicación de la presión de un gato hidráulico cuya reacción la absorbe una plataforma lastrada, el peso de una estructura existente, una viga de acero anclada al terreno generalmente por medio de otros pilotes, etc.
3. Aplicación de una carga por mecanismo de palanca, usando una viga piloteada en un extremo a la que se carga en el otro extremo.

En la fig. IX-b.1 se muestran esquemas de algunos dispositivos típicos.

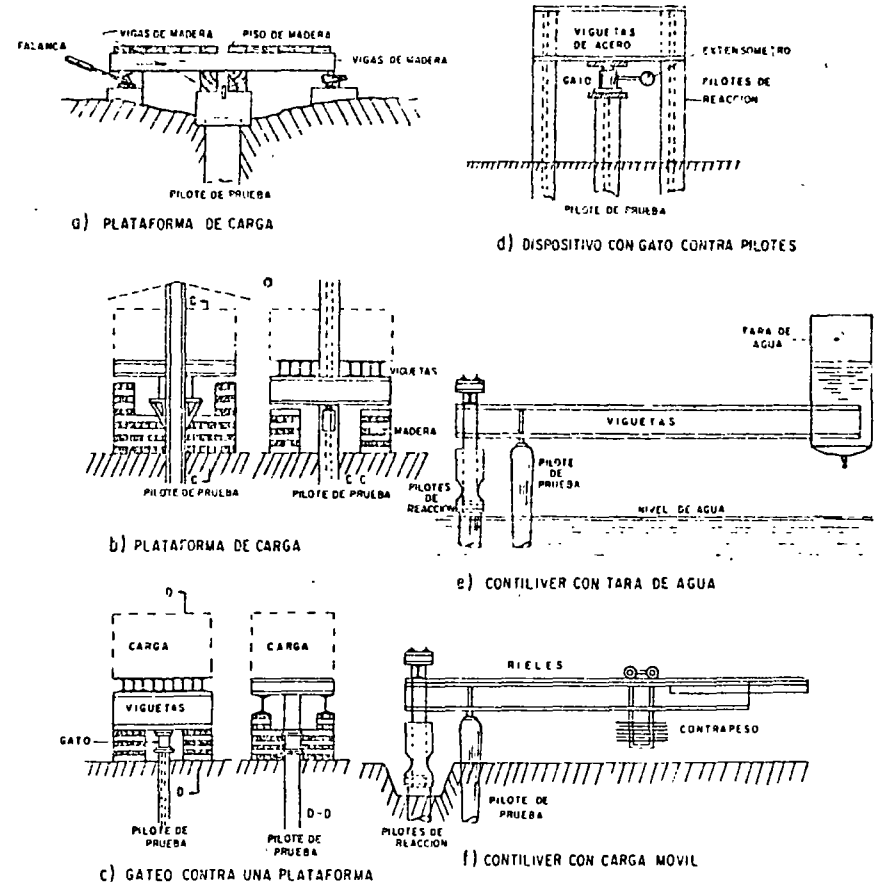


FIG. IX-b.1 Dispositivos típicos para pruebas de carga en pilotes (según R. D. Chelis)

El lastre suele estar constituido por rieles, lingotes, bloques de concreto, depósitos de agua o, simplemente, peso de tierra.

De los métodos empleados para la carga, ha de señalarse la dificultad de operación que plantea el primero de los citados, especialmente si han de seguirse, como es norma general, procesos de descarga, muy engorrosos con el sistema del lastrado y muy expeditos, por el contrario, si se usan gatos.

La secuela de realización de una prueba de carga en pilotes consiste esencialmente en cargar al pilote en incrementos, hasta llegar

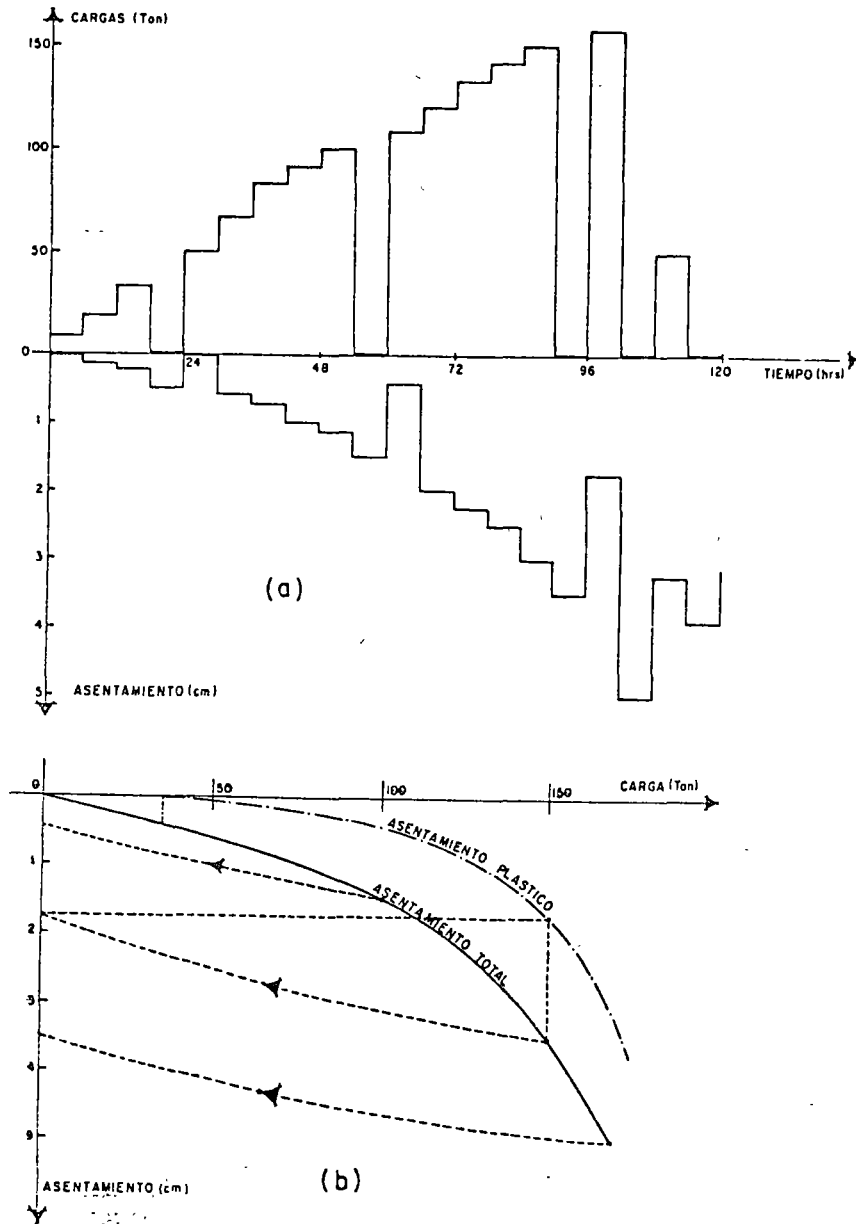


FIG. IX-b.2 Diagrama de correlación típico entre carga, asentamiento y tiempo, en una prueba de carga en un pilote

al valor máximo previsto en la prueba, generalmente del orden del doble de lo que se estima que sea la carga de proyecto y en medir por algún procedimiento los asentamientos correspondientes en la cabeza del mismo pilote.

Cada incremento de carga deberá dejarse el tiempo necesario como para que el asentamiento prácticamente cese. El asentamiento de la cabeza del pilote se debe a deformaciones elásticas (recuperables al retirar la carga) tanto en el suelo como en el propio pilote y a deformaciones plásticas (que permanecen al retirar la carga) del suelo. Estas deformaciones son las que causan generalmente los asentamientos excesivos en las estructuras y son, por lo tanto, las que deben evitarse. En una prueba de carga deben deslindarse los dos tipos de deformación, puesto que las deformaciones plásticas son las que realmente interesa definir en la prueba. Para esto es necesario efectuar procesos cíclicos de carga y descarga, durante los cuales el pilote llegue a cargas máximas cada vez mayores. En la fig. IX-b.2 puede verse una gráfica que ilustra resultados típicos de una prueba de carga.

En la parte a) de la figura se ilustra el proceso de cargar en incrementos, detallando los tiempos en que se colocaron y anotando los asentamientos que produjeron. Cada incremento se dejó un lapso de 6 h sobre el pilote, lo que se supone fue suficiente para que los asentamientos cesaran en todos los casos. La primera descarga se efectuó cuando la carga había llegado al valor de 35 ton; el asentamiento del pilote en dicha descarga se recuperó totalmente, lo que indica que era de naturaleza elástica. Al llegar, en el nuevo proceso de carga, a las 100 ton se descargó de nuevo, quedando ahora un asentamiento remanente de 0.4 cm.

La tercera descarga ocurrió al llegar el pilote a las 150 ton, con un asentamiento no recuperable de 1.75 cm.

En la parte b) de la figura se ha dibujado la gráfica carga-asentamiento total, con línea llena; la gráfica correspondiente a los asentamientos plásticos aparece con trazo de punto y raya. Esta última se obtuvo de los resultados de la parte a) de la figura, que permitieron trazar en forma aproximada las trayectorias de descarga (de las que sólo se conocen el primero y el último puntos). Con la deformación permanente en carga cero y el valor de la carga a partir de la que se descargó el pilote se obtienen puntos sobre la curva de asentamientos plásticos. En la parte b) de la figura se ilustra la obtención del punto correspondiente a la carga de 150 ton.

Una vez obtenida la curva de asentamientos totales y plásticos contra la carga pueden suceder dos cosas. Primero, que en las curvas se defina el punto de falla por un quiebre tan evidente, que no haya duda respecto a la carga de falla. En este caso, lo único que se requerirá para determinar la carga de trabajo del pilote será escoger

un factor de seguridad adecuado para dividir por él la carga de falla; este factor de seguridad es frecuentemente del orden de 2.

Existe un segundo caso más frecuente, en el que no es fácil determinar el punto de falla, debido a lo gradual del cambio de pendiente de las curvas asentamiento-carga. En este caso es preciso definir lo que se considerará carga última del pilote por medio de algún criterio conveniente, y hasta cierto punto, arbitrario. Existen varias reglas de esta naturaleza; las menos están elaboradas para aplicarse sobre la curva del asentamiento total, las más se refieren a la curva de asentamientos plásticos. Algunas de las reglas de mayor uso actual se mencionan a continuación:

1. Determínese la carga para la cual, en 48 h corresponda un asentamiento permanente no mayor de 0.5 cm y divídase ese valor por un factor de seguridad de 2, obteniéndose así la carga de proyecto. (Departamento de Carreteras del Estado de Louisiana, EE.UU., y Departamento de Obras Públicas del Estado de Nueva York, EE. UU.).
2. Hágase la prueba hasta aplicar una carga doble que la que se desee que soporte el pilote en la obra. La prueba se considerará satisfactoria cuando dicha carga no produzca un asentamiento total neto mayor de 0.025 cm por cada tonelada de carga aplicada, midiendo el asentamiento al retirar la carga, después de 24 h de permanencia (Código de Edificios de la Ciudad de Nueva York, EE. UU.).
3. Obtenida la curva carga-asentamientos plásticos, trácense tangentes a sus tramos inicial y final; la carga correspondiente a la intersección de los dos trazos, dividida entre un factor de seguridad de 1.5 ó 2 será la carga de proyecto.
4. Obténgase el punto en el que el asentamiento total comience a exceder de 0.125 cm por cada tonelada de carga adicional o en el que el asentamiento plástico comience a exceder de 0.075 cm por cada tonelada de la misma carga. La carga correspondiente a cualquiera de esos puntos se considera la última del pilote; para obtener la carga de proyecto, su valor deberá dividirse por 2, si el pilote trabaja bajo cargas estáticas o por 3 si ha de estar sujeto a cargas dinámicas. (Dr. R. L. Nordlund, Compañía Raymond de pilotes de concreto).

#### ANEXO IX-c

##### Algunos tipos comunes de pilotes precolados apropiados para ser hincados al golpe

Los pilotes de concreto apropiados para ser hincados a golpes suelen ser de sección rectangular o circular, con calibres compren-

didados usualmente entre 30 cm y 60 cm; sus longitudes oscilan entre 8 ó 10 m como límite inferior y 30 m o algo más, como superior. Estos pilotes requieren lugar de colado, tiempo para curado, espacio para almacenaje y equipo especial para izado y manejo. Frecuentemente se cuelan en tramos manejables, que se unen en la posición de hincado por medio de juntas cuya resistencia garantice ampliamente la del conjunto.

Los pilotes pueden ser simplemente reforzados o presforzados.

A continuación se describen algunos tipos especiales de pilotes que han sido usados en la práctica de las obras.

##### a) Pilote presforzado tipo Raymond

Muy apropiado para grandes longitudes de pilotes que han de soportar grandes cargas. Los pilotes se hacen de secciones de concreto con armado longitudinal y espiral de 5 m de longitud, aproximadamente. A lo largo de todo el pilote, coincidiendo en todas las secciones, existen perforaciones próximas a la periferia de calibre suficiente para contener a los alambres longitudinales de presfuerzo, los que, armado el pilote, se tensan con gatos y se sujetan rellenando las perforaciones con mortero de cemento.

Estos pilotes pueden llegar a diámetros de 1 m aproximadamente.

##### b) Pilotes Hawcube

Estos pilotes son una patente inglesa. Consisten en tramos de concreto precolado de 1.5 m a 3.0 m de longitud, que se van hincando y uniendo por machihembrado ayudado por mortero. Contribuyen a evitar difíciles maniobras de manejo, inevitables en pilotes largos.

##### c) Pilotes Gigantes

Estos son pilotes de concreto protegidos por canales de acero que hacen de camisa (fig. IX-c.1).

Los canales protegen al pilote de los golpes del martinete, absorbiendo una gran parte de la energía del impacto. Además embonan con una zapata de acero que cubre la punta del pilote, lo que sirve para transmitir la energía del impacto directamente a la punta, con lo que se logra mayor eficiencia de hincado y los pilotes puede alcanzar mayores profundidades o pueden usarse eficientemente martinetes de menor energía de hincado. El golpe se da en un cabezote de acero directamente co-

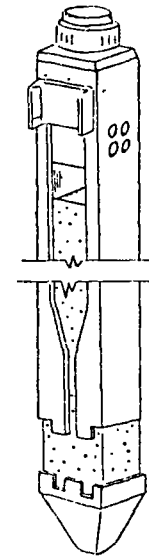


FIG. IX-C.1 Pilote Gigante

nectado a la armadura de canales. Al término del hincado se extraen los canales halándolos; el hincado de pilotes adyacentes elimina posteriormente el espacio vacío dejado por la remoción de los canales.

### ANEXO IX-d

#### Tipos de pilotes colados en el lugar

Como se dijo en el cuerpo de este capítulo hay una gran variedad de tipos de pilotes colados en el lugar, la mayor parte sujetos a patente. Los pilotes pueden construirse sin ademe permanente o con él; los primeros se usan donde no se derrumbe o cierre la excavación previa que se haga para la construcción del pilote, en donde el agua no anegue a la misma y en donde no se perjudique a un pilote recién construido al efectuar las excavaciones para los pilotes vecinos. Este tipo de pilotes tiene la ventaja de no precisar espacio de almacenaje, ni equipo para su manejo; además, no están sujetos a daños por maniobras de manejo o por hincado.

A continuación se describen brevemente los tipos más comunes de pilotes colados en el lugar sin ademe permanente.

a) *Pilote McArthur de concreto comprimido. Pilote Western*

Este pilote puede construirse hasta un diámetro del orden de 60 cm en forma satisfactoria a través de cualquier suelo, siempre que no ceda lateralmente cuando el concreto sea presionado.

El equipo de construcción comprende un ademe tubular y un émbolo que ajusta bastante bien en su interior. El procedimiento de construcción es el siguiente: en primer lugar se hinca el ademe circular con el émbolo bajado hasta su parte inferior; logrado el nivel deseado, se retira el émbolo y se rellena el ademe de concreto; en seguida, se extrae el ademe por tracción, asegurando al concreto con el peso del émbolo, para evitar que sea arrastrado hacia afuera, (fig. IX-d.1). Los pilotes Western son una variante de los anteriores en la que se acciona el émbolo con un mecanismo de poleas, de modo que al ser extraído el ademe utilizando el martinete de hinca, dicho mecanismo hace que el émbolo presione al concreto para garantizar que éste quede en posición dentro del ademe, sin arqueos y sin arrastre, cuando éste es extraído.

b) *Pilotes de concreto comprimido con base ampliada*

Estos pilotes tienen ventaja en lugares en que el estrato resistente es relativamente delgado y no es muy profundo; la base ampliada da menores esfuerzos de contacto, haciendo el papel

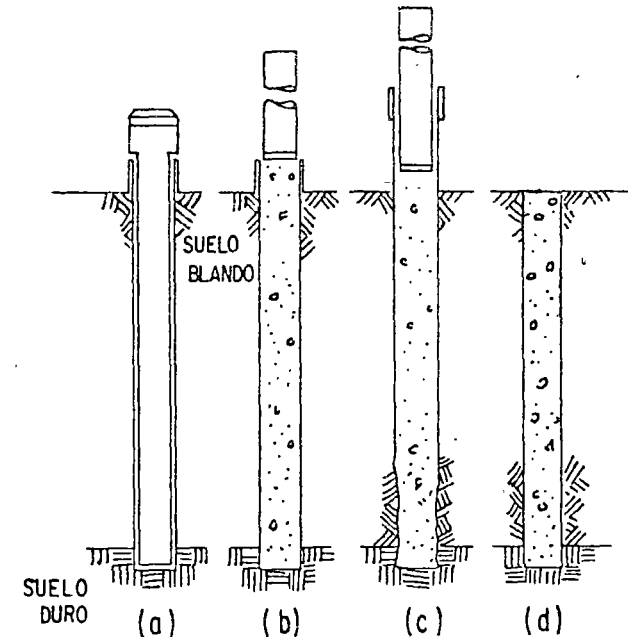


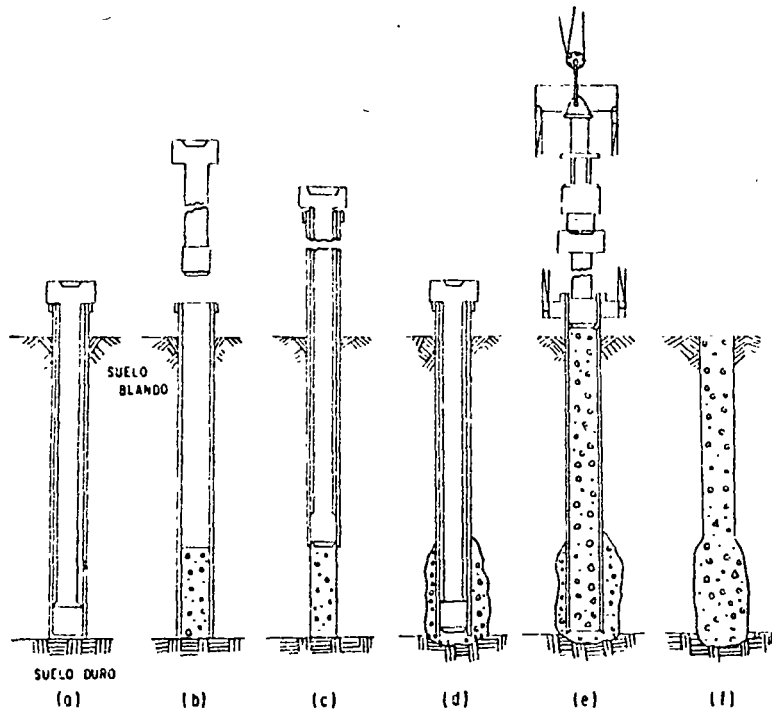
FIG. IX-d.1 Pilote McArthur

de una zapata. También son útiles para lograr un buen apoyo en estratos de roca muy inclinada.

El equipo utilizado incluye un ademe tubular hueco, con un émbolo interior que ajuste bien con él. La operación para formar al pilote es la siguiente, (fig. IX-d.2)

Se hinca el ademe con el émbolo metido hasta el fondo; a continuación se levanta el émbolo hasta retirarlo del ademe y se llena éste hasta una cierta altura, asegurando el concreto con el émbolo y se rehince el ademe, con el émbolo de nuevo llevado hasta el fondo, a través del concreto fresco, con lo que se produce la ampliación de base característica de estos pilotes. Se retira ahora otra vez el émbolo y se rellena de concreto todo el ademe. Finalmente se retira el ademe con presión hacia arriba, a la vez que con el émbolo se da sobre el concreto la suficiente contrapresión hacia abajo para garantizar que el concreto no sea arrastrado y que el pilote resulte bien conformado.

Las operaciones anteriores y la calidad del suelo condicionan la ampliación que se obtenga; formas alargadas son preferibles si el pilote ha de penetrar algo en un estrato de suelo

FIG. IX-d.2 *Pilote de concreto comprimido de base ampliada*

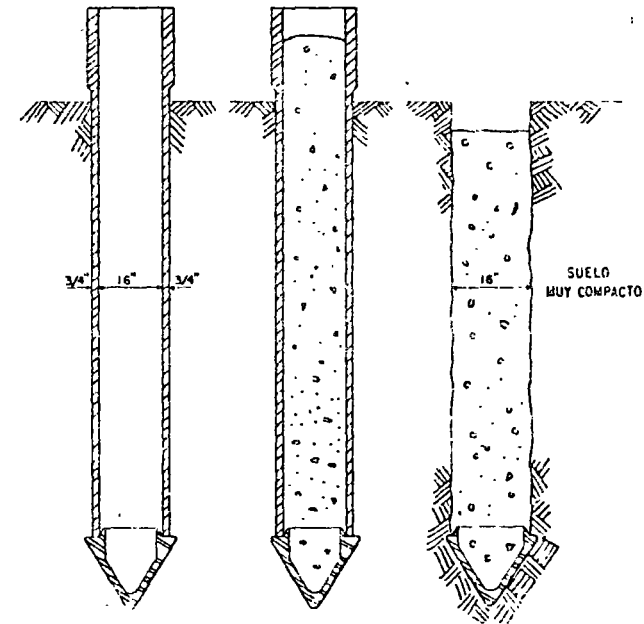
resistente; formas aplanadas dan buen resultado para apoyo en roca.

En los pilotes McArthur de concreto comprimido y con base ampliada, ésta se forma dando golpes al concreto que se vació en el ademe, en lugar de rehincar el sistema ademe-embolo a través de él. Existe también un tipo similar de pilote Western.

### c) *Pilotes Simplex*

Este tipo de pilotes se puede hincar a través de suelos blandos o relativamente duros. Se requiere que al retirar el ademe quede formado un buen molde para el vaciado de concreto, por lo que deberá colocarse un ademe interior ligero en el caso de que la consistencia del suelo no garantice dicho molde. En la fig. IX-d.3 se muestra esquemáticamente la operación de construcción, en la que debe notarse que la punta del dispositivo de hincado se pierde en cada pilote.

Este tipo de pilotes es usado frecuentemente en Inglaterra.

FIG. IX-d.3 *Pilote Simplex*

### d) *Pilotes Vibro*

Son estos pilotes apropiados para ser construidos a través de un suelo que, aun siendo blando tenga la consistencia necesaria para que el concreto no se difunda lateralmente a su través. Los pilotes suelen hacerse de concreto reforzado, con un armado que usualmente es objeto de especificación previa. El dispositivo de fabricación es análogo al de los pilotes Simplex; la extracción del tubo y la formación del pilote se logran por medio de golpes del martillo hacia arriba y hacia abajo. En el golpe hacia arriba, el ademe sube algo y una parte del concreto que lo llena fluye hacia abajo y lateralmente para llenar el espacio anular dejado por la parte del ademe que se movió; en ese golpe hacia arriba, se supone que el peso de la columna de concreto es suficiente como para que no haya arrastre del material; durante el golpe hacia abajo, el ademe y la columna de concreto suprayacente actúan como un pisón que compacta al concreto a nivel inferior. El golpe hacia abajo se da con menor carrera que el ascendente, con lo que resulta un desplazamiento neto del ademe hacia arriba. Los



golpes se dan a razón de 80 por minuto y la velocidad de ascenso del conjunto es de 1.20 m por minuto.

El pilote Vibro resulta, al fin de la construcción, de superficie lateral corrugada y logra una buena adherencia con el suelo circundante.

A continuación se describen brevemente algunos tipos de pilotes colados en el lugar que requieren ademe permanente. Se usan generalmente allí donde surjan los inconvenientes mencionados al principio de este Anexo. El ademe permanente es generalmente de lámina delgada corrugada y va colocado dentro del ademe de hincá, más pesado, que posteriormente se remueve. Frecuentemente, la falta de confinamiento lateral seguro hace necesario usar pilotes de concreto reforzado.

En general, estos pilotes se forman de modo similar a los que no requieren ademe permanente y que fueron tratados en párrafos anteriores de este Anexo. La diferencia estriba en que ahora se introduce en el ademe de hincá y una vez colocado éste, el ademe ligero y generalmente corrugado de que se habló, antes de vaciar el concreto. Pueden así fabricarse pilotes similares a los tipo Mc Arthur o a los de base ampliada que se describieron, dependiendo de la técnica particular que se siga en cada caso. Sin embargo, existen ahora algunos tipos de interés especial, que se mencionan en lo que sigue

#### a) *Pilotes Button-Bottom*

Se utilizan cuando se desea un incremento en el área de apoyo del pilote. Se han llevado a profundidades de 30 m con facilidad, soportando cargas del orden de 50 ton o algo mayores.

Hincado el ademe exterior hasta la profundidad deseada, llevando en su extremo inferior una zapata independiente de concreto precolado que se pierde en cada pilote, se introduce el ademe corrugado permanente hasta su fondo; este ademe se fija a la zapata por un dispositivo especial que atornilla ambas partes. Realizada esta operación el ademe se rellena de concreto y se extrae el tubo de hincá sin peligro, gracias a la fijación del ademe interior. (fig. IX-d.4).

Este tipo es patente Western.

#### b) *Pilotes Raymond con ademe metálico delgado hincados con mandril*

Estos pilotes pueden usarse tanto para trabajar por punta como por fricción y en cualquier clase de suelo. El ademe corrugado es hincado por medio de una pieza, denominada

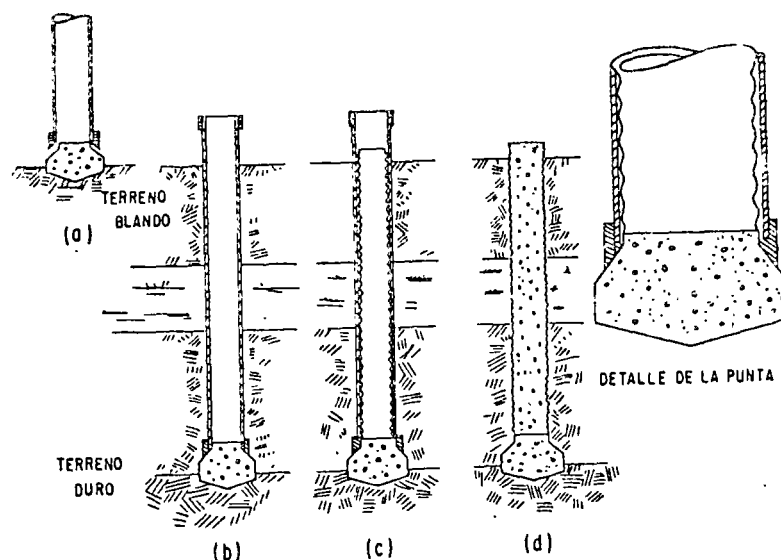


FIG. IX-d.4 *Pilote Button-Bottom*

mandril, que penetra en su interior, adoptando su forma y que se extrae una vez alcanzada la profundidad deseada (fig. IX-d.5).

El ademe puede ser inspeccionado una vez colocado y antes de ser relleno con concreto, que puede ser simple o reforzado.

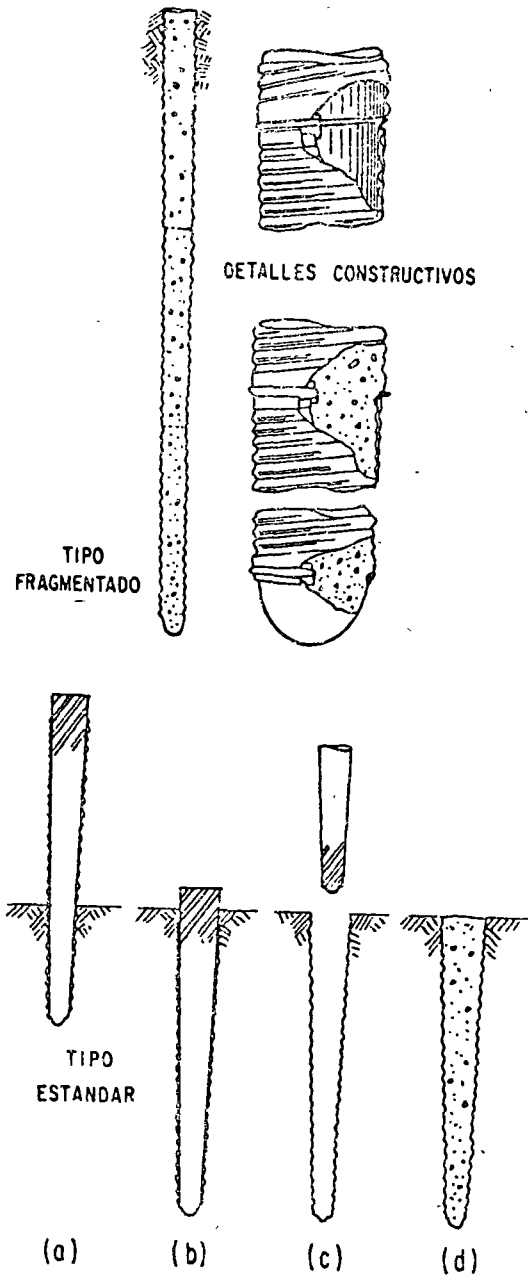
Recientemente se ha utilizado una variante del pilote presentado en la fig. IX-d.5, en el que se adopta una forma telescópica para el ademe y correspondientemente para el mandril interior, con tramos de diámetro cada vez menor según se desciende a lo largo del fuste del pilote.

## ANEXO IX-e

### Pilotes hincados a presión o preexcavados

#### a) *Pilotes preexcavados*

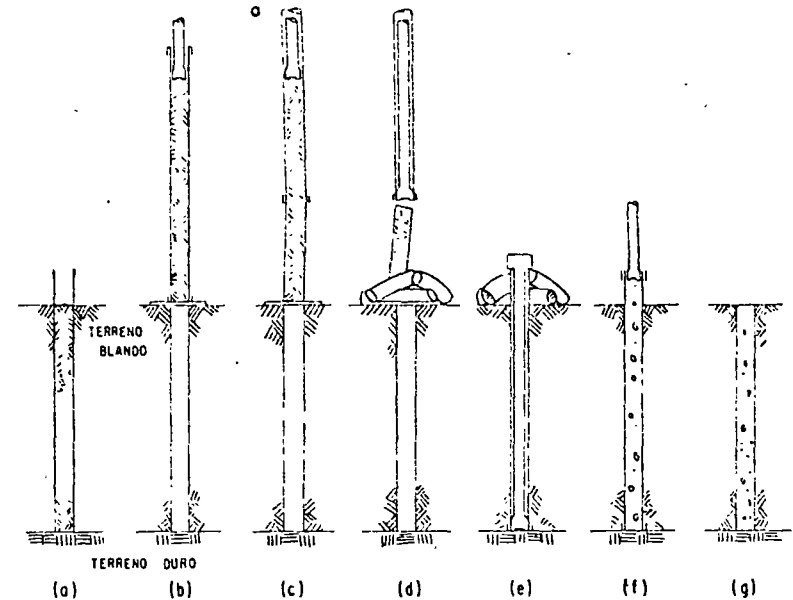
Estos pilotes son sumamente ventajosos cuando se trabaja con un suelo blando que se desplace lateralmente durante la hincá de un pilote, perjudicando a otros previamente hincados; también lo son cuan-

FIG. IX-d.5 *Pilote Raymond*

do existe un gran número de pilotes muy próximos, con lo que se presenta el peligro de levantar y desplazar a un pilote ya colocado con el hincado de otro vecino. El método de la preexcavación es también ventajoso cuando se trata de construir pilotes de gran diámetro.

Básicamente, estos pilotes se construyen siguiendo los lineamientos que se describen a continuación (fig. IX-e.1).

Se hincan un tubo de acero con punta biselada hasta el estrato de apoyo; se extrae el tubo con el material que quedó en su interior. El material se vacía elevando el tubo y colocando un mandril fijo en su extremo superior que impida que el material suba con el tubo. Después, se vuelve a meter el cilindro con el mandril en su interior hasta el nivel de apoyo; se extrae el mandril y se llena el cilindro de concreto; en seguida se presiona el mandril sobre el concreto y se extrae el tubo.

FIG. IX-e.1 *Pilote preexcavado*

Si el hueco de la excavación se cierra al sacar el tubo o si hay dificultades de hincado al tratar de meter el tubo de una vez, puede trabajarse con dos tubos, uno dentro del otro, retirando en tramos el interior, vaciándolo y volviéndolo a hincar otra fracción; durante estas operaciones, el tubo exterior actúa como ademe, que puede finalmente retirarse o ser dejado permanentemente.

b) *Pilotes Miga*

Estos son pilotes hincados a presión en pequeños tramos de unos 50 cm de longitud. Son muy útiles para trabajos de recimentación en que se disponga de poco espacio de maniobra. Las secciones, generalmente cuadradas o circulares, tienen un hueco en el centro de unos 8 cm de diámetro; este hueco sirve tanto para verificar la construcción del pilote, como para armarlo al fin del hincado.

El método de construcción consiste en hacer una pequeña excavación en cuyo fondo se coloca la primera sección del pilote con punta metálica, que se presiona con un gato para lograr su hincado; en trabajos de recimentación, la reacción del gato la da la estructura existente. Hincada la primera sección, se le une una segunda, por medio de un collar de acero, repitiéndose esta operación el número de veces que sea necesario.

Este tipo de pilote está patentado por la compañía Franki.

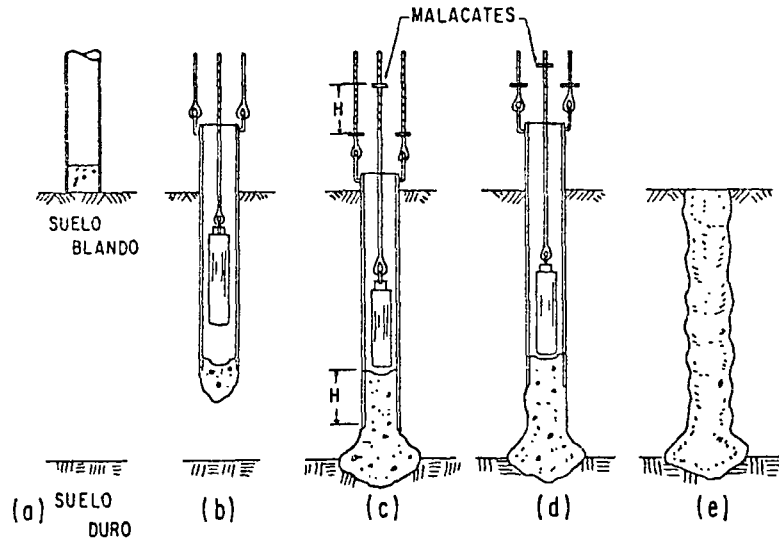


FIG. IX-e.2 Pilote Franki

c) *Pilotes Franki*

Estos pilotes tienen la ventaja de poseer una base ampliada, de modo que transmiten esfuerzos menores, a misma carga, lo que es conveniente si el estrato resistente no es de mucho espesor. Otra ventaja radica en no precisar gran espacio de maniobra, pues el martillo de hincado corre solo dentro del tubo que sirve de ademe al pilote.

El procedimiento de construcción es el que se menciona en lo que sigue (fig. IX-e.2):

En primer lugar se coloca la primera sección del tubo de hincado sobre la superficie del suelo, parcialmente llena con una carga de concreto seco. A continuación, se golpea el concreto con un martillo de caída libre, haciéndolo penetrar en el suelo, seguido del tubo. Una vez que se ha alcanzado un nivel un poco por encima del de desplante, se fija el tubo por medio de cables y, por medio del martillo, se fuerza al tapón de concreto hacia abajo y hacia fuera del tubo, colocando más concreto, siempre golpeando con el martillo; así se forma la base ampliada del pilote. Formada la base, se va vaciando concreto en el tubo, golpeándolo con el martillo, a la vez que se extrae lentamente el tubo.

Como su nombre lo indica, este pilote es manejado por la Compañía Franki.

d) *Pilotes hincados por rotación*

Son estos pilotes de concreto con agujero longitudinal en el que se aloja una barra, en cuyo extremo inferior, fuera del pilote va una hélice de diámetro mayor que el del pilote. Por rotación, el pilote alcanza el nivel deseado, tras lo cual se retira la barra y se rellena el agujero del pilote con concreto. La hélice se pierde en cada pilote.

## ANEXO IX-f

## Pilas, cilindros de cimentación y cajones

Como ya se ha dicho en este mismo capítulo, no existe entre pilas y pilotes una diferencia más substancial que su diámetro; ya se establecieron al respecto los límites que la costumbre suele fijar para diferenciar ambos elementos. La capacidad de carga y los asentamientos en pilas pueden establecerse en la misma forma descrita para los pilotes.

Las pilas suelen ser preexcavadas a mano o con maquinaria especial, pues sus dimensiones prohíben su hincado a golpes. El procedimiento denominado del *pozo seco* consiste simplemente en fabricar manualmente un pozo hasta el estrato resistente, convenientemente adomado y de dimensiones tales que un hombre por lo menos pueda trabajar en su interior; como su nombre lo indica, el método sólo puede aplicarse en terrenos secos o en los que las filtraciones sean muy pequeñas. El llamado *método Chicago* es una variante del anterior, en la que se va excavando el material hasta una profundidad del orden de 1 a 2 m, según su consistencia; la excavación se adema con largueros verticales de madera, que se mantienen con anillos de acero; se continúa después la excavación, repitiendo las

operaciones de ademado en cada tramo; al alcanzar el nivel de apoyo, suele ampliarse la base, para mejorar el poder portante del elemento; el hueco así producido, se rellena de concreto. Si las filtraciones de agua resultan grandes puede usarse el *metodo Gow* en el cual se van introduciendo en el terreno secciones tubulares de acero, telescópicamente, excavando a mano el material que va quedando dentro de cada sección (fig. IX-f.1).

Los métodos de excavación a mano resultan muy costosos en la actualidad, por lo cual se han desarrollado últimamente máquinas capaces de construir pilas, que además no tienen la limitación que la presencia de agua impone a los métodos manuales. Entre éstas destaca la máquina Benoto, de patente francesa, que fabrica pilas del orden de 1 m de diámetro.

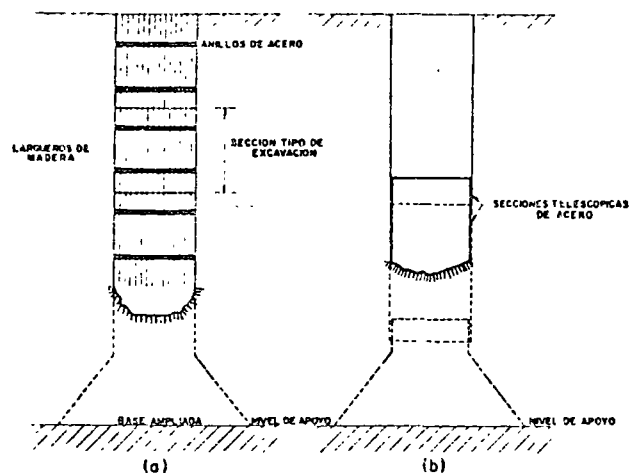


FIG. IX f.1 Pilas

- a) Excavada por el método Chicago  
b) Excavada por el método Gow

La excavación se realiza hincando un tubo exterior resistente, del que se va extrayendo el material usando una cuchara de almeja. El tubo se hinca con un efecto combinado de presión y rotación alternado, con lo que se asegura que no se adhiera al suelo. Al terminar la perforación se vacía dentro concreto, a la vez que se extrae la tubería de perforación.

Los cilindros son secciones circulares de concreto reforzado, que por su mayor diámetro (superior generalmente a los 3 m) se construyen huecos. El procedimiento de construcción consiste en colocar sobre el terreno el elemento, excavando en su interior con una cucha-

ra de almeja para retirar el material; el cilindro va descendiendo a medida que se retira el material bajo él, hasta llegar al estrato resistente. La penetración se facilita con punta biselada o cuchilla de acero en la parte inferior. Cuando son de gran longitud (y se han llegado a construir de 40 m) se construyen por tramos, colando cada sección sobre la superficie, monolíticamente unida a la parte que se haya hincado con anterioridad. Frecuentemente, en cilindros largos, se hace necesario lastrarlos a fin de vencer la fricción lateral que se opone a su descenso; en otras ocasiones se utilizan chiflones para el mismo fin. Una vez colocado el elemento en posición se cuela un tapón en su parte inferior y una tapa en la superior, quedando el interior hueco.

La capacidad de carga y los asentamientos de estos elementos se pueden estimar con los métodos descritos para pilotes, con las mismas incertidumbres analizadas en aquel caso, incrementadas inclusive ahora, por la falta de pruebas a escala natural, pues por ser los cilindros de cimentación elementos más costosos que los pilotes, son más escasas en la literatura las descripciones de pruebas de carga en cimentaciones construidas con ellos.

Los cajones de cimentación, como se dijo en el cuerpo de este capítulo, se distinguen de los cilindros sólo por su forma paralelepípedica. Las técnicas para su construcción y manejo se describen brevemente en lo que sigue, debiéndose observar que mucho de todo ello es aplicable también al manejo de cilindros.

Pueden distinguirse dos casos que obligan a adoptar técnicas diferentes: que exista o no un tirante de agua en el lugar de colocación del cajón. Si no hay agua, el cajón de una o varias celdas puede hacerse como se describió para el caso de los cilindros, extrayendo el material de su interior y colando el elemento en tramos, a medida que se va hundiendo en el subsuelo. Obviamente, las celdas deben tener las dimensiones apropiadas para permitir la excavación. En cajones muy altos es frecuente también recurrir al lastrado o al chiflonaje para vencer la fricción lateral.

Cuando en el lugar existe un tirante de agua, puede recurrirse a dos técnicas distintas. En la primera se lleva flotando al lugar un molde de acero, que constituirá la sección inferior del cajón; el molde reproduce la forma del cajón, de modo que los futuros muros de las celdas de éste aparecen como cámaras huecas entre dos láminas de acero en aquel. Ya en el lugar se vacía concreto en el molde, para ir colando los muros de las celdas del cajón; este concreto sirve de lastre y hace que el molde de acero descansa en el fondo. Ya en esta posición, se trabaja excavando el material dentro de las celdas, con lo que el cajón es llevado a la profundidad deseada bajo el fondo del río, lago, etc. Por supuesto el molde debe tener una altura algo

mayor que el tirante de agua en el lugar; si este es muy grande, el molde podrá formarse por secciones, conforme se va hundiendo.

En la segunda técnica, se coloca un tablestacado de acero que sobresalga del agua y que encierre la zona de construcción. El espacio interior se va rellorando de arena, hasta que ésta sobresale del agua, a modo de isla. Así se logra hincar el cajón como si no hubiera tirante de agua.

En el cajón neumático, el trabajo en seco se logra creando por medio de aire a presión una cámara de trabajo en su extremo inferior. La técnica está limitada por la presión que soportan los trabajadores que ocupan la cámara y excavan al terreno bajo el cajón, hasta llevar a éste a su posición final. El factor anterior hace que las profundidades en que se usa el método oscilen entre 10 y 30 m.

#### REFERENCIAS

1. Hiley, A. — *Pile Driving Calculations with Notes on Driving Forces and Ground Resistance* — Structural Engineering — Vol. 3 — 1930.
2. Chellis, R. D. — *Pile Foundations* — Apéndice 1 — McGraw Hill Co. — 1951.
3. Correa, J. J., Quintero, J. y Aztegui, E. — *Pruebas de carga en pilotes para cimentación del puente Alvarado* — Congreso sobre Cimientos Profundos — México, D. F. — Dic., 1964.
4. L'Herminier, R. — *Remarques sur le poinçonnement continu des sables et gravieres* — Anales del Instituto Técnico Francés de Obras Públicas — Números 63 y 64 — Marzo-Abril — 1953.
5. Saffery, M. y Tate, A. P. K. — *Model Test on Pile Groups in a Clay Soil with Particular Reference to the Behavior of the Group when it is Loaded Eccentrically* — Memoria del V Congreso Internacional de Mecánica de Suelos y Cimentaciones — Paris — 1961.
6. Sowers, G. y Martin, B. — *The Bearing Capacity of Friction Pile Groups in Homogeneous Clay from Model Studies* — Memoria del V Congreso Internacional de Mecánica de Suelos y Cimentaciones — Paris — 1961.
7. Correa, J. J., Rico, A., Moreno, G. y Esquivel, R. — *Pruebas de carga en modelos de cimientos profundos en arenas* — Congreso sobre Cimientos Profundos — México, D. F. — Dic. — 1964.
8. Tomlinson, M. J. — *The Adhesion of Piles Driven in Clay Soil* — Memoria del IV Congreso Internacional de Mecánica de Suelos y Cimentaciones — Londres — 1957.
9. Jiménez Salas, José A. — *Mecánica del Suelo* — Capítulo XIV — Ed. Dosat, S. A. — 1954. Cita una fórmula de Lehuérou-Kérisel.
10. Chellis, R. D. — *Pile Foundations* — Cap. 7 — Foundation Engineering — Editado por G. A. Leonards — McGraw Hill Book Co. — 1962.
11. Zeevaert, L. — *Reducción de la capacidad de carga en pilotes apoyados de punta, debida a la fricción negativa* — 1er. Congreso Panamericano de Mecánica de Suelos y Cimentaciones — Vol. I — México, D. F. — 1959.
12. González Flores, M. — *Enderezado de dos edificios; un metro en el caso más desfavorable* — 1er. Congreso Panamericano de Mecánica de Suelos y Cimentaciones — Vol. I — México, D. F. — 1959.
13. Meyerhof, G. G. — *Reporte General presentado a la Sesión I* — Congreso sobre Cimientos Profundos — México, D. F. — 1964.
14. Terzaghi, K. y Peck, R. B. — *Mecánica de Suelos en la Ingeniería Práctica* — (Traducción O. Moretto) — Artículo 56 — El Ateneo Ed. — 1955.

#### BIBLIOGRAFIA

- Foundations* — A. L. Little — Edward Arnold — Londres — 1961.  
*Foundation Engineering* — Editado por G. A. Leonards — McGraw Hill Book Co. — 1962.  
*Foundation Engineering* — R. B. Peck, W. E. Hanson y T. H. Thornburn — John Wiley and Sons — 1957.  
*Pile Foundations* — R. D. Chellis — McGraw Hill Book Co. — 1951.  
*Foundation Design* — W. C. Teng — Prentice Hall — 1962.  
*Foundations of Bridges and Buildings* — H. S. Jacoby y R. P. Davis — McGraw Hill Book Co. — 1941.  
*La Mecánica de Suelos en la Ingeniería Práctica* — K. Terzaghi y R. B. Peck — (Trad. O. Moretto) — El Ateneo Ed. — 1955.  
*Foundations* — E. E. Seelye — John Wiley and Sons, Inc. — 1956.



centro de educación continua  
división de estudios superiores  
facultad de ingeniería, unam



PRIMER CURSO INTERNACIONAL SOBRE ESTRUCTURAS

FUERA DE LA COSTA

PRINCIPIOS DE LA HIDRODINAMICA DE LOS FLUIDOS

DR. NICOLAS GRIJALVA O.

SEPTIEMBRE, 1978

# T E M A R I O

## I. ECUACIONES DE MOVIMIENTO DEL OCEANO Y LA ATMOSFERA

- 1.1 Introducción
- 1.2 Elasticidad
- 1.3 Fluídos ideales y Fluídos reales
- 1.4 Descripción del Movimiento de un Fluído
- 1.5 Ecuación de Continuidad
- 1.6 Viscosidad
- 1.7 Ecuaciones de Navier-Stokes

## II. VORTICIDAD Y TURBULENCIA

- 2.1 Algunas aproximaciones
- 2.2 Vorticidad
- 2.3 Turbulencia
- 2.4 Esfuerzos de Reynolds
- 2.5 Ecuaciones de Movimiento

## III. MOVIMIENTOS GENERALES

- 3.1 La aproximación  $\beta$
- 3.2 Circulación Oceánica  
Guif Stream + Kuro Shio
- 3.3 Tormentas Tropicales
- 3.4 Ecuaciones Ciclostróficas

## IV. ESFUERZOS SOBRE ESTRUCTURAS

- 4.1 Corriente
- 4.2 Viento
- 4.3 Forma del Esfuerzo
- 4.4 Estadística
- 4.5 Fluctuaciones.- Resonancias

La plática presente, tiene por objeto exponer los efectos de los movimientos marinos y atmosféricos sobre las estructuras, así como los principios teóricos de dichos movimientos.

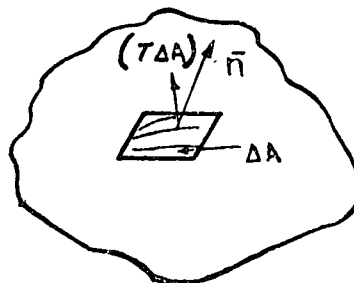
En general, el estudio tanto de la estructura de los movimientos marinos como atmosféricos cae dentro del campo de la mecánica de fluidos o tal vez dentro del campo de la mecánica de los cuerpos deformables. Por esta razón, la primera parte está dedicada a exponer brevemente estos principios, se tocará algunos temas de elasticidad para desarrollar paso a paso las teorías y exponer las leyes de la física y finalmente llegar a la circulación de la atmósfera, el oceano, a hablar de ciclones tropicales y el efecto de todos estos factores en las estructuras fuera de la costa.

## 1.2 ELASTICIDAD

### a Vector Esfuerzo

Se define el vector esfuerzo como

$$\bar{T} = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{(\bar{T} \Delta A)}{\Delta A}$$



### Tipos de fuerzas

1. Fuerzas de Superficie. Todas las fuerzas que actúan sobre la superficie
2. Fuerzas de cuerpo. Todas las fuerzas proporcionales a la masa contenida en el volumen elemental  $\Delta v$

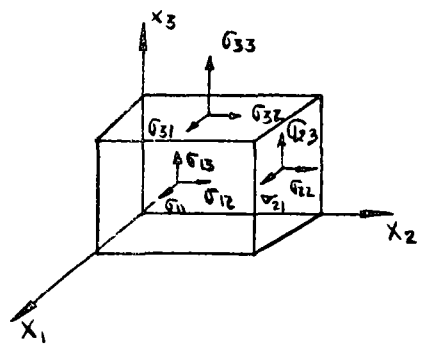


b.- Tensor Esfuerzo

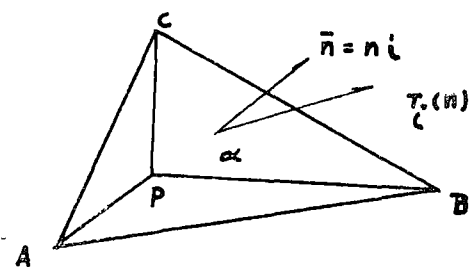
Se define como  $\sigma_{ij}$   $\sigma_{ij}$

COMPONENTES NORMALES  
 $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}$

ESFUERZOS CORTANTES  
 $\sigma_{ij}$  CUANDO  $i \neq j$



Relación entre el tensor esfuerzo y el vector esfuerzo



$T_i^{(n)}$  = Vector esfuerzo en el punto P

$\sigma_{ij}$  = Tensor esfuerzo

$F_i$  = Fuerza de cuerpo en el punto P

$\alpha$  = Area de la cara ABC del Tetraedro elemental

El área normal al eje  $x_i$ , tendrá una área

$$\alpha_i = \alpha \cos(x_i n_i) = \alpha n_i$$

Las fuerzas que actúan en ABC son:

$$(T_i^{(n)} + \epsilon_i) \alpha$$

$$(-\sigma_{ji} + \epsilon_{ji}) \alpha_j$$

$(F_i + \epsilon_i) \frac{1}{3} 4\alpha$  ; donde  $\frac{1}{3} 4\alpha$  es el volumen para el equilibrio.

$$(T_i^{(n)} + \epsilon_i) \alpha + (-\sigma_{ij} + \epsilon_{ji}) \alpha_j + (F_i + \epsilon'_i) \frac{1}{3} n \alpha = 0$$

$\alpha_j = \alpha n_j$ , se divide entre  $\alpha$  y se pasa al límite cuando  $n \rightarrow 0$

$$T_i^n = \sigma_{ji} n_{ji}$$

Se puede demostrar

1. Para equilibrio de momentos

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$$

2. Existe cuando menos un sistema tal que

$$\sigma_{ij} = 0 \quad (\text{para } i \neq j)$$

que es llamado eje principal

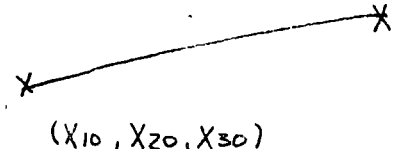
3. Si  $\sigma_{ij} = 0$  cuando  $i \neq j$  entonces  
 $\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33} = \sigma$  en este punto

5.  $\sigma_{ij}$  es un tensor cartesiano

#### DEFINICIONES

1. Un fluido es una materia tal que en los puntos en que  $\sigma_{ij} \neq 0 (i \neq j)$  existen movimientos continuos, no importa que tan pequeño sea  $\sigma_{ij}$
2. Un sólido es una materia que admite esfuerzos  $\sigma_{ij} = 0 (i \neq j)$  y aún permanece en estado de reposo.
3. Fluido perfecto. Se define como aquella materia que en cada punto y cada orientación el esfuerzo constante es cero  
 $\sigma_{ij} = -\delta_{ij} (P_i, t)$

## 1.4 Descripción del Movimiento de un Fluído.

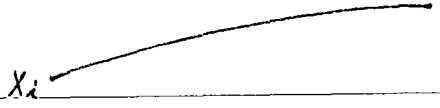


$(X_{10}, X_{20}, X_{30})$   
 POSICION INICIAL

$X_i (X_{10}, X_{20}, X_{30}, t)$   
 $\bar{v}_i = \frac{\partial \bar{X}_i}{\partial t} = v_i (X_{0i}, t)$   
 $a_i = \frac{\partial v_i}{\partial t} = a_i (\bar{X}_{0i}, t)$

Descripción Lagrangiana

$$\neq (X_1, X_2, X_3, t)$$



$X_i$   
 $t$

$\neq (X_i + v_i t, t + \Delta t)$   
 $X_i + v_i \Delta t$   
 $t + \Delta t$

$$\neq (X_i + v_i \Delta t, t + \Delta t) = \neq (X_i, t) + \frac{\partial \neq}{\partial x_i} v_i \Delta t + \frac{\partial \neq}{\partial t} \Delta t + \dots$$

$$\frac{\Delta \neq}{\Delta t} = \frac{\partial \neq}{\partial x_i} v_i + \frac{\partial \neq}{\partial t} + \dots$$

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \neq}{\Delta t} = \frac{\partial \neq}{\partial x_i} v_i + \frac{\partial \neq}{\partial t} = \frac{D \neq}{D T}$$

$$\Delta t \rightarrow 0$$

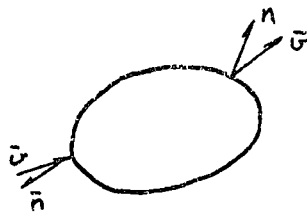
Derivada material

Derivada siguiendo el movimiento

Descripción Euleriana

### 1.5 Ecuación de Continuidad

Se acepta la ley de conservación de masas



$m$  = masa dentro de la superficie cerrada de  $S$ .

$$m = \int_V \rho dV$$

masa de fluido añadida a  $V$  por unidad de tiempo

$$= \int_S \rho \vec{v} \cdot \vec{n} dS$$

cambio de masa por unidad de tiempo

$$\frac{\partial m}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dV$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dV = - \int_S \rho \vec{v} \cdot \vec{n} dS$$

Por el teorema de la divergencia

$$\int_S \rho \vec{v} \cdot \vec{n} dS = \int_V \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) dV$$

$$+ \int_V \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) dV + \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = 0$$

$$\vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

también.

$$\vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) = \rho \vec{\nabla} \cdot \vec{v} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \rho$$

$$\rho \operatorname{div} \vec{v} + \underbrace{(\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \rho}_{\frac{D\rho}{Dt}} = 0$$

$$\rho \operatorname{div} \vec{v} + \frac{D\rho}{Dt} = 0$$

1. Fluido incompresible  $\frac{D\rho}{Dt} = 0$

$$\vec{v} \cdot \vec{v} = 0$$

2. Mov. continuo  $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$

$$\vec{v} \cdot \rho \vec{v} = 0$$

### 1.6 Viscocidad

Ley de Fricción de Newton

$$\tau = \mu \frac{du}{dy}, \quad \tau \quad \text{es el esfuerzo constante}$$

$\mu$  es coeficiente dinámico de viscosidad

Para el aire  $\mu = 0.001702 (1 + 0.00329T + 0.000007T^2)$   
dinas sec. cm

Para el agua  $= \frac{0.01779}{1 + 0.03368T + 0.00022T^2}$

Tensor esfuerzo para un fluido viscoso

$$1) \sigma_{ij} = -p \delta_{ij} + \tau_{ij} \quad (1)$$

$\tau_{ij}$  y  $-p \delta_{ij}$  son simétricos  $\sigma'_{ij}$  también es

simétrico (tensor cartesiano)

2) La Ley de Newton sugiere

$$\sigma_{ij} = \mu_{ijkl} \epsilon_{kl} \quad \epsilon_{kl} \in \mathbb{R}^2 \quad (2)$$

$$\epsilon_{kl} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_k}{\partial x_l} + \frac{\partial v_l}{\partial x_k} \right) \in \mathbb{R}^2 \text{ es también un tensor cartesiano simétrico}$$

$\mu_{ijkl}$  es un tensor simétrico de rango 4 (simétrico en los índices  $kl$ )

Definición. Un fluido es isotrópico si posee las mismas propiedades en un punto dado en todas direcciones.

$\mu$  tiene la forma

$$\mu_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{il} \delta_{jk} + \delta_{ik} \delta_{jl}) + \gamma (\delta_{il} \delta_{jk} - \delta_{ik} \delta_{jl})$$

donde  $\lambda, \mu, \gamma$  son escalares arbitrarias puesto que

$$\mu_{ijkl} = \mu_{ijlk}$$

$$\gamma = 0$$

sustituyendo en (2)

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} \epsilon_{kk} + 2\mu \epsilon_{ij}$$

también

$$\sigma_{ij} = (-P + \lambda \epsilon_{kk}) \delta_{ij} + 2\mu \epsilon_{ij}$$

finalmente

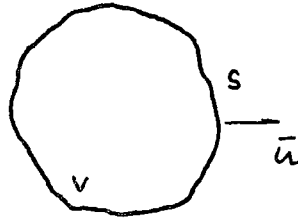
$$\sigma_{ij} = \left( -P + \frac{2}{3} \mu \epsilon_{kk} \right) \delta_{ij} + 2\mu \epsilon_{ij}$$

Para un fluido incompresible  $\epsilon_{kk} = 0$

$$\sigma_{ij} = -p \delta_{ij} + 2\mu \epsilon_{ij}$$

### 1.7 Ecuaciones de Navier Stokes

Considérese una superficie fija y cerrada  $S$ .



El momentum dentro de  $S$  está dado por:

$$M_{\text{com}} = \int_V \vec{v} \rho dV$$

$$\text{Cambio de momentum} = \frac{\partial}{\partial t} \int_V \vec{v} \rho dV + \int_S \rho \vec{v} (\vec{v} \cdot \vec{n}) dS$$

donde

1)  $\frac{\partial}{\partial t} \int_V \vec{v} \rho dV =$  es el cambio de momentum

2)  $\int_S \rho \vec{v} (\vec{v} \cdot \vec{u}) dS$  es la pérdida de momentum por el flujo a través de  $S$ .

Por el teorema de Gauss

$$\int_S \rho \vec{v} (\vec{v} \cdot \vec{n}) dS = \int_V [\rho \vec{v} (\vec{v} \cdot \vec{v}) + (\vec{v} \cdot \vec{v}) \rho \vec{v}] dV$$

cambio de Momentum

$$= \int_V \left[ \frac{\partial(\vec{v}\rho)}{\partial t} + \underbrace{(\vec{v} \cdot \vec{v}) \rho \vec{v} + \rho \vec{v} (\vec{v} \cdot \vec{v})}_{\frac{D(\rho \vec{v})}{Dt}} \right] dV$$

$$= \int_V \left\{ \rho \frac{D\vec{v}}{Dt} + \underbrace{\vec{v} \left( \frac{D\rho}{Dt} + \rho (\vec{v} \cdot \vec{v}) \right)}_{=0} \right\} dV$$

=0 por la ecuación de continuidad

$$\left. \begin{array}{l} \text{cambio de} \\ \text{momentum} \end{array} \right\} = \int_V \rho \frac{D\vec{v}}{Dt} dV$$

Ley de Newton

$$\left. \begin{array}{l} \text{cambio de} \\ \text{momentum} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Resultante de todas las} \\ \text{fuerzas.} \end{array} \right.$$

- 1) Fuerza resultante de todas las fuerzas aplicadas en la superficie

$$\int_S \vec{T}(u) dS$$



2) Fuerza resultante de las fuerzas de cuerpo

$$\int_V \rho \bar{F} dV$$

$$\int_V \rho \frac{D\bar{v}}{Dt} dV = \int_V \rho \bar{F} dV + \int_S \bar{T}^{(n)} dS$$

$$\int_S \bar{T}^{(n)} dS = \int_S \sigma_{ij} n_j dS = \int_V \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} dV$$

por último

$$\int_V \left( \rho \frac{Dv_i}{Dt} - \rho F_i - \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \right) dV = 0$$

como  $dV$  es arbitrario

$$\rho \frac{\partial v_i}{\partial t} - \rho F_i - \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = 0$$

pero

$$\sigma_{ij} = - \left( p + \frac{2}{3} \mu \epsilon_{kk} \right) \delta_{ij} + 2\mu \epsilon_{ij}$$

si  $\mu = \text{constante}$

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = - \frac{\partial p}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \mu \frac{\partial \epsilon_{kk}}{\partial x_i} + 2\mu \frac{\partial \epsilon_{ij}}{\partial x_j}$$

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)$$

sustituyendo

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{1}{3} \mu \frac{\partial^2 v_k}{\partial x_k \partial x_i} + \mu \nabla^2 v_i$$

$$\nu = \frac{\mu}{\rho}$$

viscosidad cinemática

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = F_i - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{1}{3} \nu \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_k \partial x_i} + \nu \nabla^2 u_i$$

$$\frac{D\vec{U}}{Dt} = \vec{F} - \frac{1}{\rho} \nabla P + \frac{\nu}{3} \nabla (\nabla \cdot \vec{U}) + \nu \nabla^2 \vec{U}$$

Ecuaciones de Navier-Stokes

Para un fluido incompresible

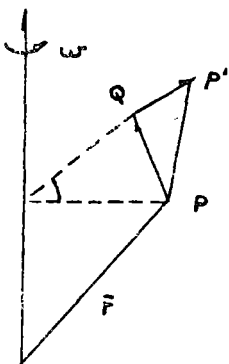
$$\frac{D\vec{U}}{Dt} = \vec{F} - \frac{1}{\rho} \nabla P + \nu \nabla^2 \vec{U}$$

↙ signo -

## II. Vorticidad y Turbulencia

### 2.1 Algunas aproximaciones

#### Rotación de la Tierra



$$(\bar{\omega}) = \frac{2\pi}{\text{DIA SIDERAL}} = 7.292 \times 10^{-5} \text{ sec}^{-1}$$

$$P P' = d\bar{r}$$

$$P Q = d\bar{r}_a$$

Q Toma la posición P' al rotar la tierra

$$P P' = P Q + Q P'$$

$$d\bar{r} = d\bar{r}_a + \bar{\omega} \times \bar{r} dt$$

$$\frac{d\bar{r}}{dt} = \left( \frac{d\bar{r}}{dt} \right)_a + \bar{\omega} \times \bar{r} \quad (1)$$

esta fórmula se puede generalizar a cualquier cantidad vectorial

$$\frac{d\bar{A}}{dt} = \left( \frac{d\bar{A}}{dt} \right)_a + \bar{\omega} \times \bar{A} \quad (2)$$

(1) se puede escribir

$$\bar{v} = v_a + \bar{\omega} \times \bar{r} \quad (3)$$

usando (3) y (2)

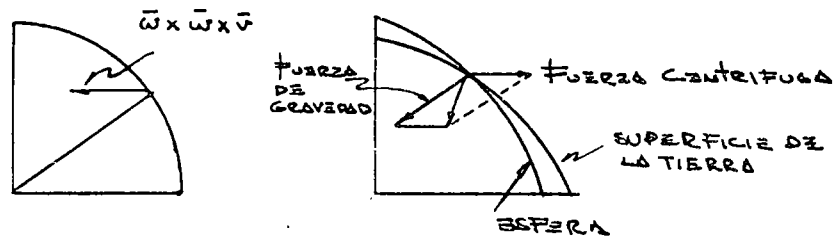
$$\frac{d\bar{v}}{dt} = \left( \frac{dv_a}{dt} \right)_a + \bar{\omega} \times v_a + \left( \frac{d(\bar{\omega} \times \bar{r})}{dt} \right)_a + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r})$$

$$\frac{d\bar{v}}{dt} = \left( \frac{dv_a}{dt} \right)_a + 2\bar{\omega} \times v_a + \bar{\omega} (\bar{\omega} \times \bar{r})$$

$\left(\frac{d\vec{v}_a}{dt}\right)_a$  es la aceleración del fluido con respecto a un sistema de rotación.

$2\vec{\omega} \times \vec{v}_a$  es la aceleración de coriolis

$\vec{\omega} \times \vec{\omega} \times \vec{r}$  es la aceleración centrípeta



La aceleración aparente de la gravedad es la resultante de la gravedad y la fuerza centrífuga. La fuerza aparente de la gravedad es:

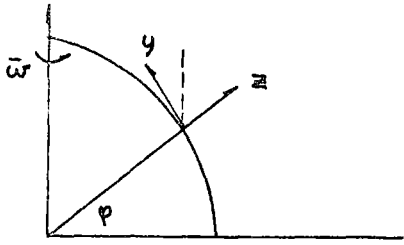
$$g = 980.621 (1 - 0.00264 \cos 2\varphi) \quad \text{cm/sec}^2$$

$\varphi$  es la latitud

entonces

$$\frac{D\vec{v}_a}{Dt} + 2\vec{\omega} \times \vec{v}_a = -\frac{1}{\rho} \nabla P + \vec{F} + \frac{\rho}{3} \nabla(\nabla \cdot \vec{v}_a) + \nabla^2 \vec{v}_a$$

son las ec. de Navier-Stokes referidas a un sistema en rotación



$$\omega_x = 0$$

$$\omega_y = \omega \cos \varphi$$

$$\omega_z = \omega \sin \varphi$$

entonces.

$$2 \bar{\omega} \times \vec{v} = 2 \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & \omega \cos \varphi & \omega \sin \varphi \\ u & v & w \end{vmatrix} = i z (\omega \cos \varphi w - \omega \sin \varphi v) + j (\omega \sin \varphi u) - k \omega \cos \varphi u$$

fuerza de cuerpo.

$$\vec{F} = (0, 0, \rho)$$

$$\frac{D u}{D t} + 2 \omega (w \cos \varphi - v \sin \varphi) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x}$$

$$\frac{D v}{D t} + 2 \omega (u \sin \varphi) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y}$$

$$\frac{D w}{D t} + 2 \omega (u \cos \varphi) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z}$$

para grandes movimientos de agua

$$2 \omega v \sin \varphi = \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x}$$

$$-2 \omega u \sin \varphi = \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y}$$

ecuaciones de

Holland-Hansen

Ecuaciones de Geostroficidad y la ecuación de equilibrio hidrostático

$$0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} - g$$

otra aproximación

$$\rho f v = \frac{\partial P}{\partial x}$$

$$-\rho f u = \frac{\partial P}{\partial y}$$

$$f = 2 \cos \theta \sin \varphi$$

$$-\rho g = \frac{\partial P}{\partial z}$$

tomando derivaciones cruzadas y eliminando

$$\frac{\partial v f \rho}{\partial z} = -\rho \frac{\partial^2 P}{\partial x \partial z}$$

$$\frac{\partial u f \rho}{\partial z} = \rho \frac{\partial^2 P}{\partial y \partial z}$$

integrando

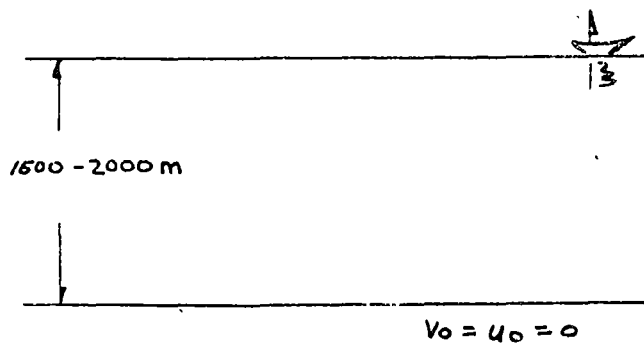
$$v \rho \int_{p_0}^{p_i} = -g/f \int_{p_0}^{p_i} \frac{\partial P}{\partial x} dz$$

$$u \rho \int_{p_0}^{p_i} = g/f \int_{p_0}^{p_i} \frac{\partial P}{\partial z} dz$$

se puede integrar a partir del nivel de referencia.

(Reference Level, Bezugsschichte)

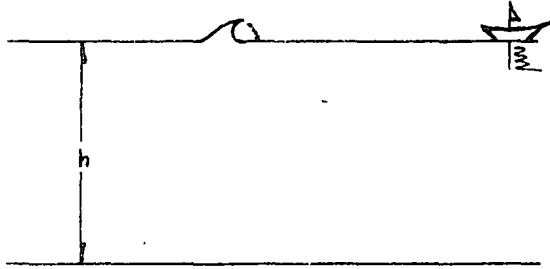
1500 - 2000 m



NIVEL DE  
REFERENCIA  
ANTES "NO MOTION  
LEVEL"

2.2 Vorticidad

Modelo de superficie libre (1 capa)



$$\frac{\partial P}{\partial z} = -\rho g$$

$$P = -\rho g [z - h(x, y)]$$

$$\text{PARA } z = h, P = 0$$

suposición

El fluido es homogéneo

$$P = \text{const.}$$

Sustituyendo el valor de P en las dos ec. de mov.

$$\frac{Du}{Dt} - f v + 2 \omega w \cos \varphi = -g \frac{\partial h}{\partial x}$$

$$\frac{Dv}{Dt} + f u = -g \frac{\partial h}{\partial x}$$

Suponiendo que

$$w \ll v$$

$$\frac{Du}{Dt} - f v = -g \frac{\partial h}{\partial x} \quad (1)$$

$$\frac{Dv}{Dt} + f u = -g \frac{\partial h}{\partial x} \quad (2)$$

aplicando  $\frac{\partial}{\partial y}$  a (1) y  $\frac{\partial}{\partial x}$  a (2) y sumando se obtiene.

$$\frac{D}{Dt} (\xi + f) = - (f + \xi) \operatorname{div} \vec{v}$$

donde

$$\xi = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = -2\alpha z$$

en general la vorticidad está definida por

$$\vec{\zeta} = \vec{v} \times \vec{v} = 2\vec{\alpha}$$

Por otro lado la ecuación de continuidad queda

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

la que queda satisfecha si introducimos

$$u = -\frac{\partial \psi}{\partial y}; v = \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad \text{es la función de corriente}$$

la ecuación de vorticidad queda

$$\vec{v}^2 \frac{\partial \psi}{\partial t} = J(\vec{v}^2 \psi, \psi) - \beta \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (4)$$

otra vez aplicando  $\frac{\partial}{\partial y}$  a (1) y  $\frac{\partial}{\partial x}$  a (2) e introduciendo la función de corriente se obtiene:

$$(2) (\psi_{xy}^2 - \psi_{xx} \psi_{yy}) - f \nabla^2 \psi - \underbrace{\sigma \psi \nabla^2 f + \rho \nabla^2 h}_{\rho \nabla^2 p} = 0 \quad (5)$$



La ecuación 4 es una ecuación de pronóstico y la (5) es ecuación de balance. Si conocemos la presión de (5) podemos calcular (4) resolviendo la ecuación en forma de la de Monge-Ampere, entonces calcularemos esto se hace en meteorología. Matemáticamente la ecuación es elíptica, su solución es posible para una área cerrada con valores a la frontera conocidos. Con excepción de bajas latitudes se puede usar la aproximación.

$$f \frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x}$$

$$f \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y}$$

que es equivalente a la aproximación geostrofica.

### 2.3 Turbulencia

Las ecuaciones de Navier-Stokes se pueden escribir

$$\bar{a} = \frac{1}{\rho} \nabla P + \bar{F} + \frac{\mu}{\rho} \nabla^2 \bar{v} ; a = \frac{Dv}{Dt}$$

supongamos

$$\bar{v} = v \bar{v}^* ; t = (d/v) t^* ; \rho = \rho u^2 \rho^* ; \bar{a} = (v^2/d) \bar{a}^*$$

$$x = x^* d ; y = y^* d , z = z^* d$$

Las cantidades marcadas \* no tienen dimensiones, las ecuaciones quedan

$$\bar{a}^* = -\nabla P + \frac{1}{R} \nabla^2 \bar{v}^* \quad \text{se desprecia la gravedad}$$

donde R es el número de Reynolds

$$R = \frac{\rho u d}{\mu}$$

$v$  es una velocidad característica

$d$  es una distancia característica

considérese un flujo en un tubo circular



$u$  VELOCIDAD MEDIA

$d$  diámetro

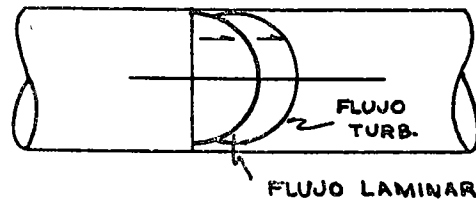
$v$  velocidad media

$d$  diámetro

R Rc Flujo laminar

R Rc Flujo turbulento

Rc=2000



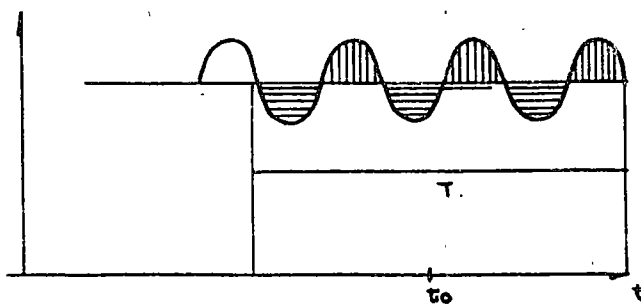
En un flujo turbulento las ecuaciones de Navier-Stokes también son aplicables

Se define lo siguiente.

$$\bar{u} = \frac{1}{T} \int_{t_0 - \frac{1}{2}T}^{t_0 + \frac{1}{2}T} u dt$$

$$\bar{v} = \frac{1}{T} \int_{t_0 - \frac{1}{2}T}^{t_0 + \frac{1}{2}T} v dt$$

$$\bar{w} = \frac{1}{T} \int_{t_0 - \frac{1}{2}T}^{t_0 + \frac{1}{2}T} w dt$$



$$u = \bar{u} + u'$$

$$v = \bar{v} + v'$$

$$w = \bar{w} + w'$$

## 2.4 Esfuerzos de Reynolds

Recopilación

Notación

$$\bar{v}_a = (u, v, w)$$

$$x_i = (x, y, z) \quad F_i = (F_x, F_y, F_z)$$

$$\sigma'_{ij} = t_{xx}, t_{yy}, t_{zz}, t_{xy}, t_{yz}, t_{zx},$$

Para fluídos incompresibles

$$\sigma'_{ij} = -p \delta_{ij} + 2\mu \epsilon_{ij}$$

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)$$

entonces

$$t_{xy} = \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = t_{yx}$$

$$t_{xx} = 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} \text{ etc.}$$

tomando valores medios

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} + 2\mu (\bar{w} \cos \varphi - \bar{v} \sin \varphi) \\ &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{F}}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \left[ \frac{\partial}{\partial x} (\bar{t}_{xx} - \rho \overline{u'u'}) + \frac{\partial}{\partial y} (\bar{t}_{xy} - \rho \overline{u'v'}) \right. \\ & \quad \left. + \frac{\partial}{\partial z} (\bar{t}_{xz} - \rho \overline{u'w'}) \right] \end{aligned}$$

y similares para las direcciones

Los términos

$$-\rho \bar{u}^2 - \rho \overline{u'v'}, \rho \overline{u'w'}, -\rho \bar{v}$$

$$-\rho \overline{v'w'}, -\rho \bar{w}^2$$

se llaman  
esfuerzos de Reynolds

## 2.5 Ecuaciones de Movimiento (Navier-Stokes)

Por analogía con:

$$\tau_{xx} = 2\mu \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\tau_{xx} - \rho \bar{u}^2 = 2(\mu + A) \frac{\partial u}{\partial x}$$

también

$$\bar{\tau}_{xy} = \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)$$

$$\bar{\tau}_{xy} = -\overline{p'u'v'} = (\mu + A) \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)$$

entonces las ecuaciones quedan

$$\frac{Du}{Dt} - f_v + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} = F^{(x)} + A_v \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + A_h \nabla^2 u$$

$$\frac{Dv}{Dt} + f_u + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} = F^{(y)} + A_v \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + A_h \nabla^2 v$$

y la tercera ecuación queda en forma hidrostática

### III. Movimientos Generales. Plano $\beta\beta$

En general se tiene el término

Pero para resolver cierto tipo de modelos se usa

$$f = f_0 + \beta y \quad \beta = 210 \sin 450 / R = 1.62 \times 10^{-6} \text{ cm}^{-1} \text{ sec}^{-1}$$

y las ecuaciones anteriores se resuelven haciendo una diferenciación cruzada y metiendo una función de corriente, o de transporte se obtiene:

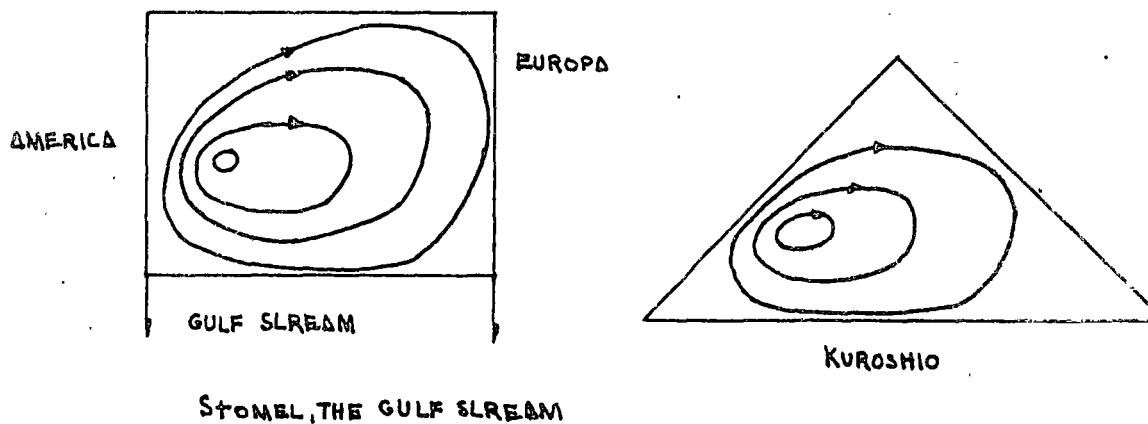
$$\left\{ A \left( \frac{\partial^4}{\partial t^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^2} \right) - \beta \frac{\partial}{\partial y} \right\} \psi = \frac{\partial \tau \kappa^2}{\partial y} - \frac{\partial \tau \kappa^4}{\partial x}$$

o bien

$$(A \nabla^4 - \beta \frac{\partial}{\partial y}) \psi = \nabla \times \tau$$

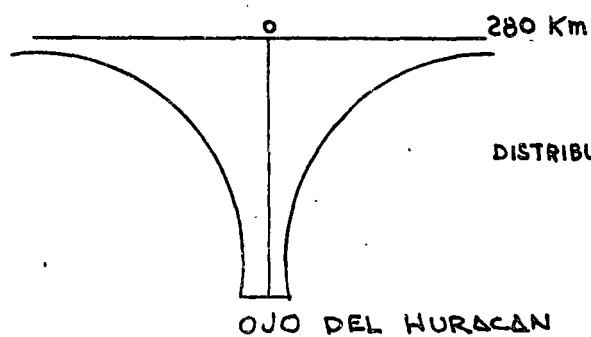
Por la variación de  $\beta$  se obtiene "West Ward intensification"

### 3.2 Circulación Oceánica

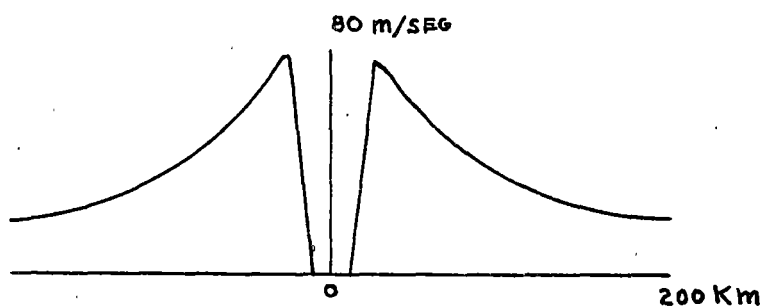


### 3.3 Tormentas Tropicales, Huracanes

Distribución de la presión



DISTRIBUCION DE LA PRESION



DISTRIBUCION DEL VIENTO

Distribución del viento

Para calcular el viento se usa la ecuación ciclostrofica

$$W = \sqrt{(fD(z)^2 + (DIP) (\partial P_0 / \partial D)}$$

D = la distancia del centro del huracán.

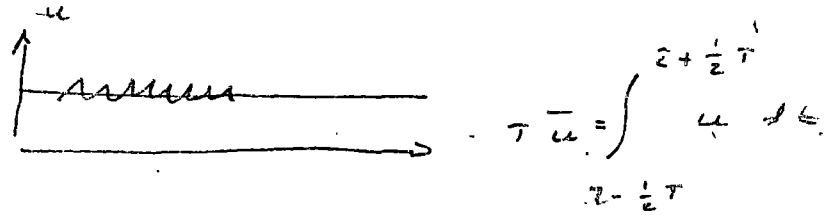


Efecto del agua o del aire.-

1.- Capa límite.-

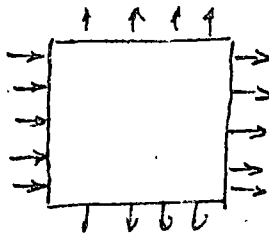
2.- Turbulencia.-

3.- Estadística.-

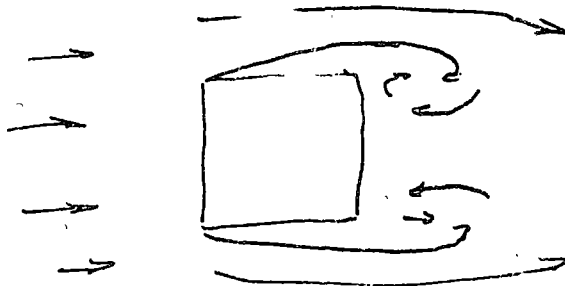


$$u = \bar{u} + u'$$

$u'$  fluctuación.-

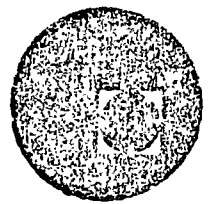


$$P = c' \rho \frac{u_a^2}{2}$$





centro de educación continua  
división de estudios superiores  
facultad de ingeniería, unam



PRIMER CURSO INTERNACIONAL SOBRE ESTRUCTURAS

FUERA DE LA COSTA

INSTRUMENTOS OCEANOGRÁFICOS

M. EN C. RAFAEL GARCIA KRASOVSKY

SEPTIEMBRE, 1978.

## INSTRUMENTOS OCEANOGRÁFICOS

Esta presentación se limitará a una descripción de los instrumentos oceanográficos que se utilizan para medir los diferentes parámetros requeridos para obtener un mejor entendimiento de los criterios de diseño utilizados en la construcción de estructuras marinas. Se analizará el rango, que se puede encontrar en el mar, para los diferentes parámetros, la exactitud con la que se desearía medir y algunas indicaciones sobre las técnicas de medición.

### INTRODUCCION

Los instrumentos oceanográficos son diseñados para un amplio rango de aplicaciones como: muestreadores de vida marina o suelos; registros de corrientes marinas, flujo de agua y temperaturas; y analizadores de densidad del agua de mar, salinidad y análisis químicos. Existe también una gran variedad de opiniones en la utilidad relativa de los diferentes tipos de instrumentos y su aplicación en los estudios en que son utilizados. Así, distintos tipos de instrumentos basados en diferentes principios se pueden usar para lo que parecería ser esencialmente la misma función. Esta situación tan compleja, existe en parte debido a la naturaleza de la experimentación oceanográfica, en la cual, en contraste con la situación de un laboratorio bajo control, no existen referencias ni una línea base de donde fijar la ejecución de las mediciones.

Generalmente los valores obtenidos de las mediciones no son estáticos ni se pueden promediar en línea recta. Por lo tanto, el valor instantáneo de las mediciones se puede relacionar solamente a un valor absoluto externo o definirlo estadísticamente por un valor interno de su RMS, período o amplitud de banda. Esto crea una considerable latitud en las técnicas de experimentación y por lo tanto también en los instrumentos usados.

La instrumentación se puede definir como "Una extensión de las habilidades del hombre para la observación, análisis o control". Los instrumentos se pueden dividir, para un mejor entendimiento, en tres grandes grupos: muestreadores, sensores y analizadores.

## MUESTREADORES

Los muestreadores son utilizados comunmente en operaciones de rutina con los que se obtienen materiales para su análisis posterior. Estos forman la clase mas grande de instrumentos oceanográficos y se reclasifican por su uso como biológicos, químicos y geológicos. A parte de la identificación con el área dicitplinaria del usuario, existen cinco categorías funcionales de muestreadores. Esto cinco grupos incluyen a la mayoría de los muestreadores importantes para los ingenieros oceánicos: 1) Nucleadores, 2) Dragas, 3) Redes o Trampas, 4) Bombas, 5) Botellas.

### 1 NUCLEADORES

Los nucleadores ya sean cilíndricos o de caja se utilizan para obtener muestras de un punto específico, con el menor disturbio posible en su constitución estatigráfica. El propósito de esto puede ser el de examinar las características estructurales, la formación histórica o la interrelación de los componentes biológicos y su medio ambiente. Estos instrumentos de extracción se pueden subdividir en términos de la fuerza que utilizan para su penetración en el medio: a) masa (peso o pistón hidráulico) b) vibrador (neumático o eléctrico) c) explosivo (químico o chispa eléctrica, y d) rotatorio.

### 2. DRAGAS

Existen dos tipos de dragas: las de arrastre, principalmente para obtener nodulos de material, y las que atacan directamente el fondo cortándolo para así obtener la muestra. Las características del mecanismo de corte y las del compartimiento retenedor son lo principal a considerar al escojer una draga. Los sistemas de cierre pueden ser mecánicos, hidráulicos o eléctricos. La capacidad y peso de las dragas van desde muy pequeñas, 1600 cm<sup>3</sup> y 30 kg, que se utilizan comunmente para obtener muestras de sedimentos para su análisis granulométrico, hasta dragas con capacidades de 2.3 m<sup>3</sup> y 6 ton de peso, pasando por una gran variedad de tipos y capacidades.

### 3 . TRAMPAS O REDES

Las trampas y redes juegan un papel importante en las investigaciones de pesca comercial, puesto que son principalmente usadas para tomar muestras de flora y fauna marina. Dado que este tipo de instrumentos no son de mucha aplicación para los ingenieros oceánicos, solo se mencionará que forman parte del instrumental oceanográfico y las personas interesadas en infromación al respecto la podrán encontrar en la bibliografía citada.

### 4. BOMBAS

Los métodos de bombeo de muestras de agua para análisis, es un método que ha tenido mucha aceptación en los últimos años. Este representa el estar obteniendo muestras de agua continuamente y a diferentes profundi-

dades mientras una embarcación se va desplazando. Este sistema ha demostrado ser útil en análisis biológicos, químicos y de trazadores. Los estudios de trazadores en el océano pueden ser de importancia para los ingenieros, dado que por este método se pueden definir coeficientes de difusión y movimientos de masas de agua en forma relativamente fácil.

En el mercado existen cuatro tipos de bombas: de vacío, centrífugas, de turbina y jet. Las bombas son limitadas en la succión por la presión de vapor en el impulsor. El flujo en los tubos es limitado por pérdidas de fricción, por lo que solamente una cantidad de agua puede ser succionada por unidad de tiempo. Las más generalizadas son las bombas de turbina y centrífugas, que utilizan tubo flexible de ployvinyl (PVC) para no contaminar las muestras. Estas pueden tener una capacidad de succión de 600 lts. por minuto, a profundidades de 30m y bajo una velocidad de 5 nudos pudiéndose alcanzar 100 lts/min a profundidades de 200 m.

## 5. BOTELLAS

Existen por lo menos dos docenas de botellas diferentes de uso común, su continua utilización indica que cada una sirve para un propósito particular. Las botellas son usualmente operadas con malacates y cable hidrográfico por donde se deslizan los mensajeros que accionan el mecanismo de cierre de las botellas. Algunas de las botellas más comunes son la Nansen, que es la más común, y la Knudsen que son botellas de inversión y que portan termómetros de tipo reversible tanto protegido como desprotegido. Estas son usadas principalmente en estudios hidrográficos de donde se puede conocer el movimiento de las masas de agua y sus características.

Otro tipo de botellas son las Van Dorn y las Frautschy con las que se pueden obtener diferentes volúmenes de agua con un mínimo de contaminación por el material del que está construída. Este tipo de botella es generalmente usada para análisis bacteriológicos, químicos y biológicos como también pueden ser usadas para determinar concentraciones de material en suspensión.

## SENSORES

Los sensores pueden ser activos o pasivos, pero la mayoría caen en la primera categoría. Un ejemplo de los sensores pasivos puede ser el termómetro de mercurio, el batitermógrafo y los correntímetros accionados por propela. Los sensores activos requieren una fuente de poder por separado. Dentro de los sensores se puede distinguir: a los termómetros, correntímetros, mareógrafos, olografos, ecosondas y refractores sísmicos entre otros.

### 1. TERMÓMETROS

El rango de la temperatura en los océanos y mares adyacentes va de los  $-2^{\circ}\text{C}$  a  $32^{\circ}\text{C}$ . Para una observación directa de la temperatura se puede considerar suficiente una exactitud de  $\pm 0.01^{\circ}\text{C}$ . Sin embargo al determinar la temperatura con el propósito de definir densidades, se requiere una exactitud de  $\pm 0.002^{\circ}\text{C}$ .

Los termómetros usados comúnmente son los termopares, termistores, y bulbos de resistencia, así como mecanismos especiales. Después de cada medición de temperatura puede existir cierta incertidumbre debido a la apreciación de la lectura y a la velocidad del sensor; el tiempo de estabilización para la mayoría de los termómetros eléctricos es de 1 segundo y para los de mercurio puede ser hasta de minutos.

El batitermógrafo, denominado generalmente BT, es uno de los instrumentos más clásicos para determinar temperaturas en función de la profundidad. La temperatura es registrada en una placa de vidrio ahumado en un plano X-Y donde las Xs son marcadas por una aguja sensible a la temperatura y las Ys por el desplazamiento de la placa conforme al BT se va hundiendo. Los termómetros de cubeta son termómetros de mercurio para medir la temperatura del agua en la superficie y constan simplemente de un recipiente colocado a la altura del bulbo con el fin de evitar una caída abrupta de la temperatura.

Los termistores son termómetros de resistencia en donde las caídas de voltaje a través de una resistencia de platino son una función del efecto de temperatura en la resistencia. Los termistores pueden proporcionar una exactitud que vá de los  $\pm 0.5^{\circ}\text{C}$  a  $\pm 0.02^{\circ}\text{C}$  dependiendo de lo sofisticado de la electrónica. La ventaja de este instrumento es que se puede conectar a registradores ya sean de aguja o de grabación.

Los termómetros reversibles mencionados en la sección de botellas, son termómetros que al momento de ser invertidos la columna de mercurio contenida en el tubo capilar es separada del bulbo, manteniendo así constante esta columna durante todo el ascenso a la superficie. Los termómetros de inversión son generalmente usados en pares, en donde uno de ellos está protegido a los incrementos de la presión del agua. Este termómetro registra la temperatura real. El otro, que no está protegido, registra una lectura de temperatura mayor debido a la presión del agua que fuerza al mercurio a subir más por el tubo capilar. La diferencia entre estas dos lecturas es usada para conocer la altura de la columna de agua que existía sobre los termómetros a la hora de hacer la inversión. Este tipo de termómetro, debido a técnicas especiales de construcción y de lectura, proporcionan una exactitud de  $\pm 0.002^{\circ}\text{C}$ .

## 2. CORRENTÍMETROS

Los transductores para medir flujos pueden ser de cuatro tipos básicos: de resistencia, por impulsor, de propela y acústico.

- a) Los correntímetros de resistencia son registradores que impuestos a una estructura fija, las fuerzas cortantes del flujo producen una fuerza de desplazamiento.
- b) Los correntímetros por impulsión atrapan un volumen de agua utilizando la menor energía cinética posible de la corriente para impartir velocidades de rotación.

- c) Los de propela utilizan una forma aerodinámica a lo largo del eje de revolución, en forma tal que siempre se oriente en el sentido de la corriente. Los tipos b y c a veces se combinan produciendo un correntímetro más completo.
- d) Los correntímetros acústicos miden diferenciales de la velocidad del sonido mandado en direcciones opuestas.

Se pueden reconocer dos aplicaciones principales de los correntímetros en oceanografía. La primera es la medición de la velocidad media de la corriente. El período de tiempo sobre el cual la media es tomada depende del propósito del estudio. La segunda aplicación es para obtener una medición del espectro turbulento de la velocidad.

La velocidad de una corriente en mar abierto puede llegar hasta más de 3 m/seg, con velocidades de corriente de marea en zonas costeras de hasta 6 m/seg. En el índice inferior de la escala es recomendable el poder medir velocidades por debajo de algunos décimos de cm/seg. En el estudio de las corrientes marinas es recomendable el obtener mediciones simultáneas en serie de tiempo y diferentes posiciones. Un poderoso impedimento para poder obtener mediciones de corrientes con cierto éxito, es el costo, pues resulta demasiado costoso el tener diez o más correntímetros en operación al mismo tiempo. Una de las causas que producen mayor error en la medición de corrientes es la oscilación vertical que produce el cable del que a veces se suspende el correntímetro.

### 3. OLOGRAFOS Y MAREOGRAFOS

La medición de mareas y oleaje representa uno de los grandes problemas de la instrumentación oceanográfica; no por las técnicas de diseño de los instrumentos, sino por los problemas que representa su instalación en el medio ambiente. En este caso, a diferencia de los demás, se necesita fijar los instrumentos y referirlos a algún punto conocido.

El Instrumento para medir oleaje o marea se puede simplificar tanto como el fijar una estaca graduada o regla y estimar visualmente los desplazamientos del nivel del agua; o se pueden utilizar instrumentos tan desarrollados como celdas de presión electrónica o satélites equipados con radar. El instrumento más generalizado sobre todo para medir mareas, es el limnógrafo. Para registrar las variaciones del nivel del agua utiliza un juego de poleas que son accionadas por un flotador que al subir o bajar produce el registro de las variaciones en un cilindro de papel que gira en función del tiempo. Debido a la poca resolución que tienen estos instrumentos no es posible el registrar oleaje, puesto que este tiene frecuencias mucho mas altas que la marea.

Un instrumento simple y común para registrar el oleaje es un tubo en el que se montan resistencias conectadas a un circuito eléctrico, espaciadas convenientemente, las que al hacer contacto con el agua producen un cambio en el circuito eléctrico. Uno de los instrumentos que más se está generalizando en la medición de oleaje y mareas son los sensores de presión. Generalmente constan de una celda sensible a la presión ubicada

en la parte exterior del instrumento y de un paquete electrónico localizado ya sea en un compartimiento hermético o en una base de operación conectado a través de un cable submarino. Debido a que la mayoría de estos instrumentos electrónicos trabajan por medio de promedios en el período, existe una gran variedad con diferentes rangos de medición. Por esto es importante el definir las características generales de la ola a medir, pues existen con períodos que van desde fracciones de segundo hasta 12 horas.

#### 4. ECOSONDA

El ecosonda es la simplificación más sencilla del sonar, utiliza un rayo direccional con su eje en forma vertical. El principio del sonar es el de medir el tiempo que le toma a un pulso de energía del sonido, el hacer un viaje de ida y regreso a un punto determinado. El ecosonda automáticamente convierte este tiempo a unidades de distancia, puesto que la velocidad de propagación del sonido en el agua es conocida. En general el ecosondas constan de 5 elementos principales: a) Generador de pulsos. b) Transductor transmisor, c) Transductor receptor d) Amplificador y e) Registrador.

El ecosonda es utilizado ampliamente en navegación, industrias pesqueras y trabajos hidrográficos. Existen una gran cantidad de tamaños y modelos, desde los portátiles accionados por batería, con profundidades de operación de 120m, hasta los de instalación permanente que pueden registrar profundidades de 10 Km. Las formas de registro también varían dependiendo del modelo. Existen ecosondas que funcionan solamente por medio de un rayo catódico que se desplaza sobre una escala graduada en el instrumento, los de registro por impresión en papel, hasta sistemas tan sofisticados de grabación digital en cintas magnéticas.

La velocidad del sonido en el agua varía con la temperatura y salinidad. Los ecosondas son operados considerando una velocidad de sonido conocida como la velocidad de calibración (1463 m/seg aprox.) y por lo tanto cualquier sondeo tendrá un error en una cantidad directamente proporcional a la variación de la velocidad considerada. Existen tablas que proporcionan la corrección que se debe aplicar para varias combinaciones de temperatura, salinidad y profundidad. Generalmente los nuevos aparatos vienen equipados con un sistema de calibración de la velocidad del sonido con el que a través de una manivela se ajusta una línea de calibración a las condiciones existentes en el momento del levantamiento.



## ANALIZADORES

Los analizadores comprenden a aquellos instrumentos que extienden nuestra capacidad de visión, comparación, evaluación y decisión. Los analizadores son más complejos que los sensores; generalmente están compuestos de sensores, transductores y a veces muestreadores.

Existen tres tipos de analizadores: 1) Lógicos, aquellos que hacen de decisiones deductivas en forma de secuencia y en base a similaridad de decisiones previamente hechas de acuerdo a instrucciones dadas. Un ejemplo son las calculadoras digitales. 2) Comparativos, son aquellos que miden el grado de similaridad con respecto a un estándar conocido como por ejemplo los salinómetros. 3) Reactivos, aquellos que forman un material con nuevas características cuando es sujeto a condiciones particulares como por ejemplo la titulación química para determinar concentraciones de oxígeno.

Debido a que este tema es muy amplio, pues existen gran cantidad de analizadores y a que la mayoría no son de aplicación directa a nuestro tema, solamente veremos los salinómetros que son los que por último tendrán una aplicación directa en la ingeniería oceánica.

## SALINIDAD

La salinidad es un término oceanográfico relacionado al total de sólidos disueltos en el agua de mar. Su rango puede ser desde casi 0‰ en estuarios, a aproximadamente 40‰, aunque en algunas lagunas costeras con altos índices de evaporación se pueden encontrar hasta 100‰. Sin embargo, aproximadamente el 99% de todo el volumen de agua de los océanos del mundo tienen una salinidad que va de los 33‰ a 39‰ y el 90% del volumen de agua de los océanos del mundo tiene un rango tan corto que va de los 34.33‰ a 35.10‰.

El método clásico para determinar salinidades, es el de obtener una colección de muestras y determinar químicamente uno de los mayores constituyentes del agua de mar; el contenido de sales de cloro. Puesto que las proporciones relativas de los principales constituyentes del agua de mar son casi constantes, la determinación del principal constituyente es suficiente para definir la concentración total de sales con por lo menos + 0.01‰. En años recientes se ha venido desarrollando el método de medición de salinidades por medio de la determinación de conducción eléctrica.

La determinación de salinidad por el método de conductímetros de inducción puede dar exactitud, dependiendo de la calidad del instrumento de + 0.02 a 0.002%. Esta última aproximación es recomendable para la obtención de densidades. Existen un sinúmero de propiedades del agua de mar que varían con la salinidad. Su determinación podría servir para definir el contenido de sales. Así el índice de refracción decrece con un incremento de la salinidad que también varía con la temperatura por lo cual se requiere una determinación muy exacta de este parámetro. La velocidad del sonido también varía con la temperatura y la salinidad, pero

más que el desarrollo de nuevos principios, se está presentando mayor atención al perfeccionamiento del salinómetro de inducción.

## CONCLUSIONES

Un mejor entendimiento de los océanos es previsto por un continuo refinamiento de teorías cada vez más comprensibles que tratan de dar una explicación integrada de las muchas características que se han observado en los océanos.

La teoría y la observación en la ciencia trabajan juntas; cada una por separado pueden causar error. Una teoría después de todo es una simple explicación basada en la observación, medición y razonamiento. Mejores medios de observación proveen la información básica para el desarrollo de nuevas teorías; nuevas teorías sugieren nuevas formas de improvisación para hacer observaciones.

El laboratorio para oceanografía son los océanos.

## APENDICE

Se presentan una serie de tablas recolectadas y publicadas en 1965 por la oficina de Oceanografía de la UNESCO, Paris. Estas enumeran en la forma mas completa posible, los diferentes tipos de instrumentos oceanográficos y sus características principales. Al final se presenta una lista con los nombres y direcciones de los principales fabricantes. (Tomada del Handbook of Ocean and Underwater Engineering).

TABLE 3-10. Bottom Samplers, Dredges

BOTTOM GRAB				
Manufacturer	Type	Size	Total weight, kg	Approx. price, U.S. \$
Hagen	Van Veen			
Hydro-Bios	Van Veen	0.1/0.022 m <sup>3</sup>	25/12	172/166
Hydrow	Van Veen	0.1 m <sup>3</sup>	40/60	146/176
Kelvin	Van Veen	14.2 liters		180
Lab. Oceanogr.	Van Veen	0.1-0.2 m <sup>3</sup>	32/70	138/210
GM.	Emery dredge (lever type)	2 liters	5	
Bergen Nautik	Petersen	0.1/0.2 m <sup>3</sup>	41/53	133/168
Lab. Oceanogr.	Petersen	0.1/0.2 m <sup>3</sup>	40/118	138/210
GM.	Modified Petersen	0.023 m <sup>3</sup>	4	
Kahl.	Modified Petersen	0.023 m <sup>3</sup>	4	
Mashpribor	Modified Petersen	0.025 m <sup>3</sup>	18	115
Rigosha	Modified Petersen	0.5 liters	5.2	40
Hydro-Bios	Ekman-Birge	25 × 25 × 30 cm	3.1 5.6	89/90
GM.	Ekman-Birge	15 × 15 × 15 cm	5.4	
Kahl.	Ekman-Birge	15 × 15 × 15 cm	5.4	96
Rigosha	Ekman-Birge	15 × 15 20 × 20 cm	5.2 9.2	81/104
Hydro-Bios	Ekman-Birge-Lenz	25 × 25 × 40 cm	5.6	169
Rigosha	Ekman-Birge-Lenz	15 × 15 × 22 cm	7.8	99
GM.	Rectangular box sediment B.S.	0.025 0.1 m <sup>3</sup>	40/70	
Kahl.	Rectangular box sediment B.S.	0.025/0.1 m <sup>3</sup>	40, 70	
Ballant.	Mud snapper			
GM.	Mud snapper		1.5	
Kahl.	Mud snapper		1.5	55.
Rigosha	Snapper (Marukawa)	300 cm <sup>2</sup>	9	42
T.S.K.	Snapper (Marukawa)	300 cm <sup>2</sup>	16	37
	Snapper		9	24
Hydro-Products	Shupek	20 × 20 cm	70	575
Lab. Oceanogr.	Knudsen	0.1 m <sup>3</sup>	140	348
Sapino	Heavy duty		27	106
GM.	Heavy duty (Diets-Lafond)		27	
Kahl.	Diets-Lafond Heavy Duty		27	280
GM.	Orange Peel Dredge	1.65/4.9 liters	20/-	395/-
Hayward	Dwarf Orange Peel Bucket	1.6/3.6/4.9/24.5/28.3 liters		
Hytch.	Dwarf Orange Peel Bucket	1.6/3.6/4.9/24.5/28.3 liters	16/18/20/86/95	495/510/525/-/-
Mécabotier	Benne preneuse à griffe	0.1 m <sup>3</sup>		175
GM.	Bacterial bottom sampler (Emery)	14 cm diam		85
Kahl.	Bacterial bottom sampler (Emery)	14 cm diam	11	
EG & G.	Photo-grab system (combined with underwater camera)	60 × 100 cm	340	

## PLUMMET BOTTOM SAMPLERS

Rigosha	Single-bowl plummet	60 m liters	5.3	18
T.S.K.	Single-bowl plummet			

## DREDGE

Manufacturer	Type	Size		Total weight, kg	Approx. price, U.S. \$
		Mouth	Length		
GM.	Pipe dredge	15 cm diam	45 cm	25	
Kahl.	Pipe dredge	15 cm diam	45 cm	25	
GM.	Rectangular with net and canvas	25			
Hydro-Bios	Rectangular Lubek (silk net)	30 × 40	25	1.3	41
Kahl.	Rectangular with net and canvas	28	46	11	85

TABLE 3-10. Bottom Samplers, Dredges (continued)

Manufacturer	Type	Size		Total weight, kg	Approx. price, U.S. \$
		Mouth	Length		
Mécabotier.....	Rectangular with net	62 × 31.5	.....	22	130
GM.....	Triangular dredge	38/60	89/120	20/45	
Kahl.....	Triangular dredge	38	69	20	
Mécabotier.....	Cone	.....	.....	.....	19
Rigoshia.....	Conical tube with net	24 diam	.....	6	40
Rigoshia.....	S.K. type	.....	.....	9	51
T.S.K.....	S.K. Nakai type	15.5 diam	67	11.3	16
GM.....	Power dredge	15-60	.....	.....	.....
Kahl.....	Power dredge	15-60	.....	.....	.....
Rigoshia.....	All metal for biology	45/60/90	.....	30/50/70	90/107/168
	Niino type	38/45/60/90	.....	30/45/80/120	80/90/107/168
T.S.K.....	For rocky bottom	90 × 18	260	146	
	For rocky bottom	46 × 11.5	210	48	
	For rocky bottom	38 × 9.5	170	35	
	For biological sample	63 × 32	190	94	

## GRAVITY CORERS

Manufacturer	Tube		Weight, kg	Inner tube	Approx. price, U.S. \$	Remarks
	Length, cm	Inner dia., mm				
Alpine.....	611	35	.....	Plastic	188	
Askania.....	200	45	.....	Brass	.....	Lead weights of 45 kg are attached
Bergen Nautik.....	100	...	45	Glass	176	
GM.....	30.5/61	...	40	Plastic	.....	
Hydro Products.....	.....	.....	.....	.....	.....	Similar to GM/Kahl Moore-free corer, expendable unit \$85
	127 (Phleger type)	65	71	.....	580	
Hydrow.....	100/150 (in 2 ps)	60	125/130	Brass	800/900	
	202	45	70	Brass	535	
Kahl.....	30.5/61 (Phleger type)	...	40	Plastic	245	
Mashpribor.....	100/150	...	14.5/19	.....	.....	
	100	...	19.0/25.5	.....	.....	For underway coring
Mécabotier.....	100/200/300	...	.....	.....	430/470/510	
Rigoshia.....	150	35	100	Plastic	280	
T.S.K.....	100	42	45	.....	.....	
	200	40	150	Plastic	.....	

## GUN-BED BOTTOM CORER

Manufacturer	Type	Tube		Weight (total)	Approx. price, U.S. \$
		Length	Diam		
T.S.K.....	Rocket core sampler	.....	.....	.....	.....

## UNDERWAY BOTTOM SAMPLER (SCOOPFISH)

Manufacturer	Size	Total weight, kg	Approx. price, U.S. \$
Askania.....	5 (dia) × 110 cm	10.5	
GM.....	- × 90 cm	6.8	
Hydrow.....	20 × 110 cm	20	185
GM.....	Capacity 75 cm <sup>3</sup>	5	
Rigoshia.....	Capacity 50 cm <sup>3</sup>	3	202
T.S.K. (No. 611).....	18 × 36 cm	17.5	
T.S.K. (No. 612).....	15.5 × 50 cm	49.7	
T.S.K. (No. 613).....	13.0 × 50 cm	23.5	
T.S.K. (No. 614).....	15.5 × 50 cm	38	

TABLE 3-10. Bottom Samplers, Dredges (continued)

SAMPLING TUBES				
Manufacturer	Type	Tube length, cm	Total weight, kg	Approx. price, U.S. \$
Hydro-Bios.....	Naumann	50/80	1.7/2.2	24/34
	Ohle	50	2.6	43
	Apstein	45	8.5	43
	Sediment-slime sampler	80		
Kelvin Hughes.....	Hinkley silt sampler	.....	.....	330
Rigosa.....	Nauman	50	3.5	28
	Kitahara	15	5	
T.S.K.....	Iwamiya	18	16	24

## BOTTOM SAMPLERS (FOR MARINE GEOLOGY AND BIOLOGY): PISTON CORERS

Manufacturer	Tube		Weight, kg	Inner tube	Approx. price, U.S. \$	Remarks
	Length, m	Inner dia. mm				
Alpine.....	2.4	35	(150 lb)	Plastic	475	Nominal weight; can be supplied without lead weights
	3.6	35	(300 lb)	Plastic	725	
	24.0 (in 4 pts)	63	(1,200 lb)	None	2,795	
GM.....	1.8	.....	.....	Plastic	.....	Lead weights of 50 to 200 lb attached
	3.6	.....	135	.....	.....	
	23	.....	680	.....	.....	
Hytech.....	2.7 (in 3 pts)	89	.....	Plastic	.....	
Kabl.....	1.8	.....	.....	Plastic	618	
	3.6	.....	135	.....	.....	
	23	.....	680	.....	.....	
Mécabotier...	2.5/5	.....	.....	.....	920/1,530	
Rigosa.....	1.8	60	120	Plastic	420	
	4.0	60	500	Plastic	3,355	
T.S.K.....	0.8	76 (OD)	.....	Plastic/brass	.....	Lead weights of 40 kg attached
	1.0	50 (OD)	68	Plastic/brass	225	
	3.5	75 (OD)	280	Plastic	.....	
	8	110 (OD)	570	Plastic	.....	
						Tripod for sampling available
						Tripod for sampling available

TABLE 3-11. Current Meters

CURRENT METERS (INDICATOR OR RECORDER ON INSTRUMENT)								
Manufacturer	Type/name	Mode of use	Max. depth	Max. duration	Method of recording		Price, U.S. \$	Remarks
					Speed	Direction		
Bergen Nautik	Ekman C.M.	From ship	No limit	No limit	Dials	Balls & cabinet	450	
Ricosha	Ekman-Mertz C.M.	From ship	No limit	No limit	Dials	Balls & cabinet	182	
T.S.K.	Ekman-Mertz C.M.	From ship	No limit	No limit	Dials	Balls & cabinet	192	
GM	Gemware C.M.	From ship	No limit	No limit	Dials	Balls & cabinet	.....	Modified Ekman type
Kahl	Gemware C.M.	From ship	No limit	No limit	Dials	Balls & cabinet	.....	Modified Ekman type
Mashpribor	BM-M Modernized C.M.	From ship	No limit	No limit	Dials	Balls & cabinet	425	Modified Ekman type
T.S.K.	T.S. Multiple C.M.	From ship	No limit	No limit	Dials	Balls & cabinet	.....	For serial observation
Bergen Nautik	Fjeldstad C.M.	From ship	No limit	No limit	Printed on tinfoil		730	Messengers excluded
GM	Fjeldstad C.M.	From ship	No limit	No limit	Printed on tinfoil			
Kahl	Fjeldstad C.M.	From ship	No limit	No limit	Printed on tinfoil			
Askania	Kohnecke C.M.	From ship	No limit	25 hr	Printed on tinfoil			
Kyowa Shoko	Ono C.M.	From buoy	300 m	15 days	Printed on paper			
Ricosha	Ono C.M.	From buoy	50 m	3 days	Printed on paper		420	
Micabohier	Currentograph, Type E (No. 1031)	From buoy	1,000 m	8 days	Printed on paper		1,350	
	Currentograph, Type B (No. 1203)	From buoy	1,000 m	20 days	Photographed on 2 x 8-mm film		3,050	
T.S.K.	T.S. Self-Direction-Recording C.M.	From ship/buoy	200 m	30 hr	Printed on paper			
Geodyne	Woods Hole C.M. A550	From buoy	6,000 m	1 year	Photographed on 16-mm film		1,500	
		From buoy	6,000 m	No limit	Digital on magnetic tape		3,000	Data-processing service available
Plessey	Recording C.M. M021	From buoy	2,000 m	60 days	Binary signal on magnetic tape		.....	Acoustic link permits monitoring
Marine Advuser	Data Acquisition System Q-122	From buoy	6,100 m	1 year	Binary signal on magnetic tape		.....	Temperature also
Mashpribor	Alexejev C.M. Type 2-r	From ship/buoy	250 m	1 month	Printed on paper		6,200	
	Alexejev C.M. Type 2	From ship/buoy	2,000 m	1 month	Printed on paper		6,200	
Braincon	Recording C.M. Type 183	From ship/buoy	6,000 m	90 days	Photographed on 16-mm film			
T.S.K.	Nannitt C.M. Type 2	From ship	.....	.....	Indication aboard	Balls & cabinet at the equipment		
	T.S.-N1 Type C.M.	From ship	1,000/3,000	.....	On smoked glass			

TABLE 3-11. Current Meters (continued)

SAVONIUS ROTOR CURRENT-MEASURING SYSTEMS								
Manufacturer	Speed sensor		Price, U.S. \$	Direction sensor		Mode of recording	Unit price, U.S. \$	Price of complete set, U.S. \$
	Max. depth	Range, cm/sec		Principle	Price, U.S. \$			
Marine Advisers	No limit	2-300	375	Voltage variation with potentiometer	675	Meter readout/dc recording	475	1,550
Geodyne	7,000	1-350	...	Digital	...	Digital/analog	...	...
Hytech	No limit	2-300	...	Pulse duration modulated	...	Meter readout/dc-recorder/digital/magnetic tape	...	...
Hydro Product "400"	More than 5,000	2-350	395	Voltage variation with potentiometer	750	Meter readout/dc-recorder	485	1,670
Hydro Product "500"	6,000	0.5-250	...	Voltage variation with potentiometer	...	<i>In situ</i> recording	...	2,460
Brauncon	6,000	2.5-250	...	Photographic picture	...	Photographs on 16-mm film	...	...
Plessey	150 6,000	2.5-300 5-500	...	? Digital	...	Recording at buoy Digital, magnetic tape	...	...

## GEOMAGNETIC ELECTRO-KINETOGRAPHS (G.E.K.)

Manufacturer	Electric supply	Approx. price, U.S. \$	Remarks
Leeds and Northrup	120 V 50-60 c/s	3,070	Excluding cord and electrodes
Mashpebor	...	2,820	Complete set
O.R.E.	120 V 60 c/s	...	Neutrally buoyant cord and fish
RIKEN	...	3,000	Complete set

## NEUTRALLY BUOYANT FLOATS

Manufacturer	Type	Approx. life, day	Max. depth, m	Approx. price, U.S. \$
Hytech	Regular	8	...	175
	Adjusting ping-rate Transponder	8-12	...	250
O.R.E.	Adjustable ping-rate	12	...	600
	Regular	10	6,600	...
Res. Man	Regular	8-21	...	...
	Transponder	7-12	...	...



TABLE 3-11. Current Meters (continued)

CURRENT METERS (INDICATOR OR RECORDER ABOARD OR ASHORE)									
Manufacturer	Type/name	Mode of use	Max. depth, m	Max. duration		Telemetric system	Method of recording		Approx. price, U.S. \$
				Sensor and recording device			Speed	Direction	
Askania	Bifilar C.M., Model A	From ship	50	No limit		Electric cable	Indicator	Indicator	
	Bifilar C.M., Model B	From ship	50	No limit		Electric cable	Recorded on wax paper		
Geodyne	A520	From buoy/ship	No limit	No limit		Cable/radio	Digital or analog		3,000
Kelvin-Hughes	Direct Reading C.M.	From ship	1,000	.....		Electric cable	Indicator	Indicator	2,500
	Roberts C.M. No. 1	From 1 buoy	1,000	6 wk		Radio	Analog	Analog	7,900
	Roberts C.M. No. 2	From 2 buoys	1,000	6 wk		Radio	Paper	Paper	13,600
	Roberts C.M. No. 3	From 3 buoys	1,000	6 wk		Radio	Tape	Tape	19,000
Marine Adruac	Roberts C.M. No. 4	From buoy	1,000	14 days		.....	In the buoy		11,600
	Q-8 Ducted C.M.	From buoy/ship	No limit	No limit		Electrical cable	Indicator or digital		700
	Improved Roberts C.M.	From buoy/ship	No limit	.....		Single core	Recorded on paper		1,675
	C.M. No. 1220	From ship	.....	.....		.....	.....		810
T.S.K.	T.S. Electric C.M.	From ship	1,000	No limit		Electric cable	Indicator	Indicator	2,344
	T.S.-R.B.T.-C.M., Type A	From ship/buoy	.....	No limit		Electric cable	Recorded on paper		970
	T.S.-R.B.T.-C.M., Type B	From buoy	.....	22 days		Radio telemetering	Recorded on paper		2,500
Plessey	T.S. Digital C.M.	From ship	200	No limit		Electric cable	Digital		
	Direct Reading C.M., MO22	From ship	.....	.....		Series of units for various types			

TABLE 3-12. Echo Sounders

ECHO SOUNDER AND FISH FINDER, VERTICAL							
Manufacturer	Type/model	Max. range	Phase scale	Frequency, kHz	Recorder or indicator	Approx. price, U.S. \$	Remarks
Apsies...	MS-252 A	240 ft	1 240 ft	200	Ind.	215 00	12, 24, 32 V
	MS-602	360 ft/ 120 fms	1 360 ft, 120 fms	125	Ind.	375 00	12, 24, 32 V
	MS-254	60 ft/ 60 fms	1 60 ft/ 60 fms	200	Ind.	235.00	12 V (24/32 V available with VA-200 voltage adapter)
	MR-201	360 ft 240 fms	1 360 ft 1 240 ft	200	Ind. Rec.	249 50	12 V (12/110 V dc and 115-V ac accessory inverters)
	MR-603	310 ft 155 fms	1 160 ft 80 fms 2 310 ft/ 155 fms	40	Rec.	1,125 00	White line 32/24 V
ATLAS	Navigation						
	Monotype B	100/1,000 m	1 100/1,000 m	30	Ind.		
	Monotype C	100/1,000 m	1 100/1,000 m	30	Ind.		
	Duotype	100/1,000 m	1 100/1,000 m	30	Rec./ind.		
	Nereus	100/1,000 m	1 100/1,000 m	30	Rec.		
	Neptun/Filia	100/1,000 m	1 100/1,000 m	30	Rec./ind.		
	Pilot	16 m	1 16 m	200	Ind.		
	Survey						
	672 a	33/66 m	1 15/36 m	80	Rec.		
	672 str	33/66 m	1 15/36 m	80	Rec.		Portable
	Echolog 672	33/66 m depth 5 km d stance	1 15/36 m	80	Rec.		
	Isobathrecorder	Various steps		200	Rec.		
	AN 601 c	500/1,000 m	4 200/1,000 m	15	Rec.		
	AN 601 a	500/5,000 m	4 200/2,000 m	10	Rec.		
	AN 601	5,000/12,000 m	4 200/2,000 m 300/3,000 m	10	Rec.		
	FisAry						
	Monograph 53	600 m	3 50/100/200 m	30	Rec.		
	Pelikan	500 m	4 200 m	30	Rec.		Black/grey indic.
	Pinguin	2,000 m	4 200 m	30	Rec.		Black/grey indic.
			2 1,000 m				
Duotype	1,000 m	2 200/100 m 3 200 m	30	Ind.			
		1 1,000 m					
Fishfinder EgK	1,000 m	3 200 m 1 1,000 m	30	Rec.		For fish detection up to 300 m black/grey indic.	
		1 25 m obs. range		Electron.			
Fishfinder Eg	1,000 m	3 200 m 1 1,000 m	30	Rec.		For fish detection up to 600 m black/grey indic.	
		1 25 m obs. range		Electron.			
Monoscop	600 m	3 200 m 1 20 m obs. range		Electron.		Only as supplement for recorder	
Phoenix	400 m	2 50/100/200 m	30	Rec.			
Netzsonde 684g/1200	300 m below transducer	2 50/100 m	30	Rec.		Up to 1,200 m cable Trawl depth up to 200 m	
Netzsonde 684g/2000	300 m below transducer	2 50/100 m	30	Rec.		Up to 2,000 m cable Trawl depth up to 400 m	

OCEANOGRAPHIC INSTRUMENTATION

3-95

TABLE 3-12. Echo Sounders (continued)

Manufacturer	Type/model	Max range	Phase scale	Frequency, kHz	Recorder or indicator	Approx. price, U.S. \$	Remarks
Bendix...	DR-12	50/200 fms	.....	25	Rec. L		
EDO.....	Fish Scope	400 fms	.....				Continuous
	Model 185	100-ft/100/ 5,000 fms	- 100 ft/100 fms/600 ft/ 6,000 fms	12	Ind. & rec. L	7,500	Continuous, on indicator
	Model 535	230 ft/fms	4 65 ft/fms	37.5	Rec. L		
	Model 578	230 ft/fms	4 65 ft/fms	37.5	Rec. L		
	Model 5008	460 ft/fms	4 130 ft/fms	22	Rec. L	4,000	Towing transducer
	Depth integ.	8,250 fms	- 250 fms	12	Rec. L		
	Prec. sound.						
ELAC...	Miniscope	150 m	1 5/15/50/ 150 m	50	Ind.		
	Fishlupe	65/164/328 fms	C 2 8/8/10 5 fms	.....	Ind.		Can be combined with echograph
	Annaga echograph	155/310/ 461/620 m	3 55/110/155/ 220 m	30	Rec. L		
	Echomat II	90/130/165/ 240 fms	3 33/40/55/80 fms	.....			
	Castor	40/80/160/ 320 m	2 21/45/96/ 192 m	50	Rec. L		
	Bellatrix	125/250/500/ 600 m	2 75/150/300/ 600 m	.....	Rec. L		Depth indicator available
	Atair	125/250/500/ 1,000 m	2 75/150/200/ 600 m	.....	Rec. L		Depth indicator and CRT display (fish detector) available
	Arcturus	125/250/500/ 1,000 m	2 75/150/300/ 600 m	.....	Rec. L		CRT display available
	Atair-Special	175/350/700/ 1,400 m	3 75/150/300/ 600 m	.....	Rec. L		Depth indicator and CRT display available
	Deneb	500/1,000/ 2,000/4,000 m	4 300/600/ 1,200/ 2,400 m	.....	Rec. L		
	Enif	1,500/3,000/ 6,000/ 12,000 m	4 900/1,800/ 3,600/ 7,200 m	.....	Rec. L		
	Watsonde	Similar to above					
Fisher.....	Sea Ranger				Ind.	125	
NEC.....	SD-150	10/100 m	1 10/100 m	200	Rec. L		
	BC-130	200/400/500/ 1,000 m	8 50/100/125/ 250 m	50/200	Rec. L		White line
	CG/130	200/400/500/ 1,000 m	8 50/100/125/ 250 m	24/200	Rec. L		White line
	SF-1005	320/1,250 m	3 120/450 m	23.5	Rec. L		White line
	SF-1006	320/1,250 m	3 120/450 m	23.5	Rec. L		
	SD-1100	320/1,920 m	3 120/720 m	23.5	Rec. L		
	SD-1002	320/1,250 m	3 120/450 m	23.5	Rec. L		
	Prec. Deep Sea Echo Sounder	13,000	- 200/2,000 m	10	Rec. L		
Kelvin Hughes	MS 26E	2,250 fms	8 50/400 fms	10	Rec.		
	MS 26H	4,500 m	8 75/750 m	10	Rec.		
	MS 26J	4,500 fms	8 80/500 fms	10	Rec.		
	MS 26K	9,000 m	8 150/1,500 m	150/ 1,500 m	Rec.		
	MS 28F	120/240/360/ 480 fms	C 30/60/90/ 120 fms	30/50	Rec.		White line
	MS 28M	220/440/660/ 880 m	C 55/110/165/ 220 m	30/50	Rec.		White line
	MS 29F	120/240/360/ 480 fms	C 30/60/90/ 120 fms	30/50	Rec.		White line

TABLE 3-12. Echo Sounders (continued)

Manufacturer	Type/model	Max. range	Phase scale	Frequency, kHz	Recorder or indicator	Approx. price, U.S. \$	Remarks
	MS 29M	220/440 660/ 880 m	C 55/110/165/ 220 m	30, 50	Rec.	.....	White line
	MS 33F/A	60 fms	3 30 fms	50	Rec.	.....	White line
	MS 33F/B	160 fms	3 60 fms	50	Rec.	.....	White line
	MS 33F/C	320 fms	3 120 fms	50	Rec.	.....	White line
	MS 33M/A	145 m	3 55 m	50	Rec.	.....	White line
	MS 33M/B	290 m	3 110 m	50	Rec.	.....	White line
	MS 33M/C	580 m	3 220 m	50	Rec.	.....	White line
	MS 35F	540 ft/270 fms/ 1,080 fms	C 90 ft/45 fms/ 180 fms	30/50	Rec.	.....	White line
	MS 35M	150/340/ 2,160 m	C 30/90/360 m	30/50	Rec.	.....	White line
	MS 37F/A	95 fms	C 30 fms	50	Rec.	.....	White line
	MS 37F/B	190/380 fms	C 60 120 fms	50	Rec.	.....	White line
	MS 39M/A	170 m	C 55 m	50	Rec.	.....	White line
	MS 39M/B	310, 620 m	C 110 220 m	50	Rec.	.....	White line
	Ms 3sF	1,200 2,000/ 4,500 fms	- 200, 400 800	10	Rec.	.....	Precision Recorder
	MS 3SM	2,400 4,800/ 9,600 m	- 400 900 1,600	10	Rec.	.....	Precision Recorder
Marconi Marine	Seagraph III	630 ft fms	4 180 ft fms	24	Rec. L	2,060	Depth indicator available
	Fishgraph	1,300 fms	5 60/300 fms	24	Rec. L	2,060	Black line recorder; depth indicator available
	Offshore Rec. E.S.	320 ft	3 120 ft	150	Rec. e	251	
	Inshore Echo Sounder	100 ft	.....	150	Ind.	132	
	Seamarc	440 fms	2 60/240 fms	50	Rec. L	.....	
Simrad	Skipper Sounder	100/240/ 320 fms, 620 m	3 40 80 120 fms, 220 m	.....	Rec. L	820	White line
	Model S10-6	260/650 fms	4 110/275 fms	.....	Rec. L	1,530	White line; depth indicator available
	Model S13-2	260/650 fms	4 110/275 fms	.....	Rec. L	1,920	White line; depth indicator available
	Master Sounder	100/240/320/ 620 fms, 620 m	3 40/80/120/ 220 fms	.....	Rec. L	.....	
	Master Sounder	80 fms, 500 m	1 -	.....	.....	.....	

## HORIZONTAL SOUNDER (INCLUDING COMBINED HORIZONTAL-VERTICAL SOUNDER)

Manufacturer	Type	Trailing, deg	Tilting, deg	Max. frequency range, kHz	Recorder or indicator	Approx. price, U.S.	Remarks
ATLAS	Periphon F4	.....	.....	22 1,500/ 3,000 m	Rec.	.....	Also with vertical scanner
ELAC	Lodar	300	0-90	4,000 m	Rec. & ind.	.....	
	Mittelodar	300	0-90	2,400 m	Rec. & ind.	.....	
	Minniodar	260	0-90	1,000 m	.....	.....	
Kelvin Hughes	Asdic	320	5 & 30 fixed	50 2,000 m/ 2,000 yd	Rec.	6,200	
	Asdic	30/120	5 & 30 fixed	50 800 m/ 900 yd	Rec.	3,300	
SIMRAD	Basdic	360	0-90	.....	.....	550	To be used with Simrad Master or Skipper Sounder
	Asdic	360/175	.....	30 1,500 m	Rec.	6,000	360° man., 175° auto.; 135 fms as vertical sounder
	Research sonar	.....	.....	11 & 30 13,000 m 6 500 m	Rec.	120,000	On horizontal with 11 kHz L CRT display For horizontal and vertical with 30 kHz

TABLE 3-13. Photometers, Cameras, Television

UNDERWATER PHOTOMETERS					
Manufacturer	Underwater cell	Flux collector	Readout	Approx price, U.S. \$	Remarks
GM	Weston 856-YR	Flat opal glass	One microammeter with cell and range selector; two microammeters with range selector		
Hydro Products	Photocell	Flat/ hemi-spherical	Ratio-meter (null balance read-out) .25 pioleter available with a depth sensor and deck module	1,500 2,000	Single or dual irradiance meter up to 200 m with 100 m cable and neutral filters, without microammeter
Int. Ag. C-14	Selenium-photocell	Flat opal glass	One microammeter with cell and range selector	188	
Kahl	Weston 856-YR	Flat opal glass	One microammeter with cell and range selector; two microammeters with range selector		
Lab. Océanogr.	Selenium photocell	Flat opal glass	One microammeter with cell and range selector	93	With 100-m cable, without neutral filters or microammeter
Marine Advisers	Up-and-down-welling cells	Flat/spherical	Ratio-meter (null balance read-out)	2,950	With depth indicator, without cable
	Up-welling cell	Flat/spherical	Ratio-meter (null balance read-out)		
Rigsha	Photronic cell	Flat opal glass	One microammeter with cell and range selector	420	With 50-m cable and filters
Tinsley			Ratio-meter (null balance read-out), balance-by-depth method		With 100-m cable, with opal glasses of different transmission
Whitney	Weston 865-RR		One microammeter with cell and range selector	170	With 30-m cable and neutral filters
T.S.K.	Selenium photocell	Flat opal glass	One microammeter with cell and range selector		With 80-m cable and filters

UNDERWATER TELEVISION

Manufacturer	Type	Max. depth of operation, m	Length of cable, m	No. of lines	Light source, w	Approx. price, U.S. \$	
Fenjohn		50	(Housing only)				
IBAK	SP50A	200	200	625	500	3,000	
	MK1	400	400	625/875	2 X 1,000	9,000	
	50B	500	500	625	2 X 500	12,000	
	50C	1,000	1,000	625	2 X 500	15,000	
	50D	2,000	2,000	625	2 X 500	19,000	
	TF83A	100	100	625	2 X 500	18,000	
	TF83B	500	500	625	2 X 500	22,000	
	TF83C	1,000	1,000	625	2 X 500	28,000	
	TF83D	2,000	2,000	625	2 X 500	38,000	
	TF83E	3,000	3,000	625	2 X 500	17,000	
	TF83F	4,000	4,000	625	2 X 500	50,000	
	O.E.C.	Hydro-eye	300	500	600	Mercury vapor	3,000-5,000
			1,750 8,500/17,000	460/1,800	600	1,000	10,545-22,500
Marconi		90	150	405/525/625	150 X 2	6,000	
SEREL							

TABLE 3-13. Photometers, Cameras, Television (continued)

TURBIDITY METERS						
Manufacturer	Length of light path	Light filter	Electricity	Readout	Cable length, m	Approx. price, U.S. \$
Askanis.....	1-10 cm adj.	RG1 & BG12	12-V battery	Reading microammeter; recording microammeter; null-balance readout; towed transmission meter	30	
	1 m/2m	RG1 & BG12	24-V battery	Reading microammeter; recording microammeter; null-balance readout; towed transmission meter	100	
	1-30 cm/1 m adj.	RG1 & BG12	24-V battery	Reading microammeter; recording microammeter; null-balance readout; towed transmission meter	100	
GM .....	Up to 1 m	On request	12-V battery	Reading microammeter; null-balance readout; towed transmission meter	10/95	
Hydro Products	1 m	On request	6-V battery and 115-V 60 Hz	Reading microammeter; recording microammeter	66	1,455
	10 cm/1 m	On request	6-V battery and 115-V 60 Hz	Reading microammeter; recording microammeter	66	1,230
Kahl.....	Up to 1 m	On request	12-V battery	Reading microammeter; null-balance readout; towed transmission meter	10/95	
Marine Advisers		Built-in Wratten filter	115-V 60 Hz	Null-balance readout; towed transmission meter	.....	2,570
Tinsley.....	1 m	Built-in filter, Chance OB2	20-V battery	Null-balance readout; towed transmission meter	.....	
Whitney.....				Reading microammeter	.....	300

## SCATTER METERS

Manufacturer	Light beam	Light source	Electricity	Readout	Cable	Price
Tinsley.....	Collimated	4S-W lamp	30 V	Null balance	5 cored	

## DEEP-SEA UNDERWATER CAMERA (INCLUDING UNDERWATER CAMERA OPERATED BY DIVER)

Manufacturer	Picture size/film, mm	Max no. of pictures	Exposure	Shutter	Max. depth operation, m	Approx. price, U.S. \$
Alpine.....	38 X 32/35	100	By bottom contact, with trigger weight	No X synch.	7,000/1,000	4,000/-
EG & G .....	35	500	Bottom contact, remote control, or automatic	X synch.	12,000	8,530
GM.....	-/35	18	By bottom contact, with trigger weight	Yes	3,000	600
Kahl.....	-/35	18	By bottom contact, with trigger weight	Yes	3,000	900
OEC. ....	64 X 57/70	400	Bottom contact, remote control, or automatic	X synch.	6,000	
IBAK .....	17 X 24/35	72	By remote control	X synch.	4,000	2,500

TABLE 3-14. Thermographs, Salinometers

IN SITU SALINITY, TEMPERATURE, AND DEPTH-MEASURING INSTRUMENTS							
Manufacturer	Salinity, ‰	Temperature, °C	Depth, m	Indicator or recorder	Cable length, m	Approx. price, U.S. \$	Remarks
Beckman RS 5-3	0-40 ± 0.3	0-40 ± 0.5	None	Digital readout	300	1,090	Temperature-corrected 12-point electrodeless salinity recorder
Beckman RS 6	0-40 ± 0.2	0-30 ± 0.2	0-130 ± 2.5	Digital readout	130	3,325	
Beckman RS 3*	32-39.4 ± 0.05	None	None	Recording	39 ea. sensor		
Geodyne	30-40 ± 0.02	-2-35 ± 0.05	0-9,000 ± 0.25%	Digital tape, V.F. plot			Sound velocity optional
GM	0-40 ± 0.3	0-40 ± 0.5	None	Dial	15	1,500	
Hydro-Bag	0-40 ± 0.3	-1-30 ± 0.03		Indicator	300		
Hitech model 9000j	30-40 ± 0.01	-2-35 ± 0.05		V.A.V. recorder			
Kahl	0-40 ± 0.3	0-40 ± 0.5	None	Dial	15	800	
Kieler	30-40 ± 0.2	-2-35 ± 0.02	0-2,500	Meter readout, V-2F recorder,	Up to 2,000	28,700	
Howaldtwerke			0-2,500	magnetic tape recorder, digital			
			0-500 0-200 ± 1.5%	readout, digital penster			
O.S.K.	27.2-34.3 ± 0.1	0-40 ± 0.2	None	Indicator	20		Sound velocity also
Plesseyf.				Digital, magnetic tape, punched card			
T.S.K.	29-36 ± 0.03	-2-32 ± 0.2	0-100 ± 3%	V.F. recorder		11,600	
	0-40 ± 0.3	0-40 ± 0.5	None	Indicator	30	970	
Whitney				Meter readout		300	

BATHY THERMOGRAPH\* (STANDARD MODEL)

Manufacturer	Temperature range, °C	Depth, m	Approx. price, U.S. \$†	Remarks
Belfort	-1-30	60/135/250	500	Fahrenheit-feet scale is available
	-2-32	55/137/274	520	Fahrenheit-feet scale is available
GM	-2-32	60/137/274		Fahrenheit-feet scale is available
Jules Richard	-2-30	50/150/300		
Kahl	-2-30	60/137/274		Fahrenheit-feet scale is available
Mashprib	-2-30	200	1,090	
Mécaholer	-	1,000	1,225	
Wallace and Tiernan	-1-30	60/135/270	600	
T.S.K.	-2-32	73/150/270		

TEMPERATURE-DEPTH RECORDER (EXCLUDING STD)

Manufacturer	Model	Temperature, °C		Depth, m		Recording system	Approx. price, U.S. \$	Remarks
		Range	Accuracy, ‰	Range	Accuracy, ‰			
Askania	6481	0-30	0.2	0-100	1.5	Portable temp-indicating instrument		Mechanical
	6433	0-30	0.15	0-300	5	Dots on chart		Battery 6 V, 8.5 amp-hr
Francis	Expendable BT	-2-30	0.2	0-460	2/5	Analog/digital	32-50	Ship speed 0-30 knots; price is for single probe; launcher and recorder on-board cost approx. \$5,000

TABLE 3-14. Thermographs, Salinometers (continued)

Manufacturer	Model	Temperature, °C		Depth, m		Recording system	Approx. price, U.S. \$	Remarks
		Range	Accuracy, %	Range	Accuracy, %			
Hydro-Products		0-40	1	6,500	1	XY rec.	.....	Special depth and temperature range available
	Model 4015	0-40	0.8/max.	0-350	1	Ind.	825	Excluding cable
Geodyne	A 119-6	0-30	0.2	0-4,000	1	Strip chart	650	Including recorder
	A 775	0-40	0.01	6,000	.....	Tape rec./XY rec.	6,000	
		0-30	0.1	1,500	.....	Tape rec.	.....	Moored-buoy temp.-depth profiles
Hytech	No. 482	0-40	0.1	1,700	0.5	Speedomax G		Recording on board
	No. 473	0-30	0.01	3,100	1.5	Tape XY rec.	7,000	Recording on board
Marine Advisor				3,000	1	Charts		Electronic recording on board
Sippican	Expandable BT	2-30	0.2	0-500	2/5	Analog/digital	32.50	Ship speed 0-30 knots
T.S.K.	Deep-sea BT	0-35		0-1,000		On smoked-glass plate		Mechanical
	E.B.T.	2-32	0.1	0-200/500/1,000	0.5	Ind., XY rec.		

## SALINOMETER (CONDUCTIVE TYPE)

Manufacturer	Salinity		No. of measuring cells	Sample size, ml	Bath temperature, °C	Approx. price, U.S. \$
	Range	Accuracy, %				
Atlantic R. C.	20-43	0.003	8	50	15 ± 0.005	
Rigusha			5			4,200
Jasco	20-40	0.01		25	10 ± 0.01	3,700

## SALINOMETER (INDUCTIVE TYPE)

Manufacturer	Salinity		Temp. compensation	Sample size, ml	Approx. price, U.S. \$	Remarks
	Range	Accuracy, %				
Auto-Lab	27.8-42	0.003	Dial setting	55	1,300	Extended range 0-42 available
Beckman (Cedar)	0-49	0.003	Automatic	50	2,855	
GM	0-49	0.003	Automatic	50		
Hytech	0-49	0.003	Automatic	50	3,600	
Industria	27.8-42	0.003	Dial setting	50	1,100	Extended range 0-42 available
Kahl	0-49	0.003	Automatic	50		
Plessey	0-49	0.003	Automatic	50		
T.S.K.	9-38	0.005	Automatic	80	1,500	Transistorized, built-in battery, or ac 100 v
	28-38	0.06	Automatic	80	900	

\* Metal-coated staballoy BT slides are supplied by Hytech at \$12.50 per box of 50 slides.

† Including accessories (grids, viewer, etc.) and 200 smoked-glass slides.



TABLE 3-15. Water-sampling Bottles

CLOSING WATER BOTTLES (NO THERMOMETER FRAMES ATTACHED)						
Manufacturer	Name/type	Capacity, liters	Weight, kg	Material of tube (inside)	Approx. price, U.S. \$	Remarks
<i>For serial sampling</i>						
Hytech	Frantschy	0,5/1	.....	Polyvinyl chloride	24/35	With valves
Rigosa	Doty a transparent	0,5	2,5	Plastic	42	
Hydro Products	Van Dorn	1/2/4	1,6/1,8/2,6	Plexiglass	50/60/75	
	Van Dorn	6/9	3,1/3,4	Plastic	105/120	
GM	PVC Water Bottle	2,3/6	2,7/3,1/4	Plastic transp.		
Kahl	PVC Water Bottle	2,3/6	2,7/3,1,4	Plastic transp.		
<i>For single sampling</i>						
Hydro-Bios	Ruttner	0,5/1/2	.....	Plexiglass	58/63/55	
Valco	Van Dorn	5	.....	Plastic	81	
T.S.K.	Van Dorn	50	70	Plastic	291	
Int. Ag. 14	Insulating W.B.	0,375	10	Plexy glass/Sanyl	149	Modified Pettersen Nansen bottles
	Insulating W.B.	1	14,5	Plexy glass/Sanyl	225	
Kahl	Closing W.B.	0,35	2,3	Tin-plated		
GM	Closing W.B.	0,35	2,3	Tin-plated		
Mécabolier	Closing W.B.	4	8	Plastic chromed		
Rigosa	C.W.B.	10/20	15/18	Brass	126/140	
T.S.K.	C.W.B.	5/10/20	.....	Plastic	87/116/181	
Lab Océanogr	Plankton Sampler	6	18	Nickel-plated	150	
	Steeman-Nielsen	100	.....	Nylon & PVC	138	
Valco	Jitta Twin Sampler	0,35 × 2	.....	Plastic	123	Transparent and brass-sheathed
T.S.K.	T.S. "TOMEI"	0,5/2	3,5/6,7	Plastic		
	T.S. "TOMEI"	1	.....	Plastic		
	T.S. "TOMEI"					
	Kitahara W.B.					
<i>Horizontal closing water bottle</i>						
Hydro-Bios	Horizontal C.W.B.	.....	16,8	.....	183	With frame for reversing them
Mécabolier	Horizontal C.W.B.	1/2/4	12/24/48	.....	165/305/450	
Rigosa	Horizontal W.B.	0,5	4	Brass	70	Open and close with 2 mess. up to 50 m Open and close with piston by 1 mess.
T.S.K.	Horizontal W.B.	0,7/1,2	7,3/10	.....	82	
STERILE WATER SAMPLER						
Manufacturer	Name/type	Capacity, ml	Material of ampule	Approx. price, U.S. \$	Remarks	
GM	Zo Bell sampler	230/250	Rubber/glass	105	For Kit, including 1 mechanism and clamp assembly, 12 Birt-sealed capillary tubes, one 4-oz bulb and inlet tube, one 8-oz bulb and inlet tube	
Kahl	Zo Bell sampler	230/250	Rubber/glass			
T.S.K.	Zo Bell type	200	Rubber			
Mécabolier	Reversing	250	.....			
Hytech	ABC sampler	100	Pyrex			
Hydro Products	Cobet sampler	110/230	Neoprene	34,50		

TABLE 3-15. Water-sampling Bottles (continued)

WATER BOTTLES WITH FRAMES FOR REVERSING THERMOMETERS							
Manufacturer	Name/Type	Capacity, liters	Weight, kg	No. of frames for rev. therm.	Material of tube (inside)	Approx. price, U.S. \$	Remarks
Ballant	Nansen	1,25		2/3	Teflon-coated		
Belfort	Nansen	1,25	3,5	3	Tin-plated	225	
Bergen	Nautik	1,25	4,0	2/3		73/60	
Hans. W.	Nansen						
Hydro-Bios	Nansen	1,25	4,5	2		155	
GM	Nansen	1,25	3,5	2/3	Tin-plated		
Kahl	Nansen	1,25	3,5	2/3	Tin-plated	177	
Mashpribor	Nansen	1,0	4,5	2	Brass	75	
Rigocha	Nansen	1,1		2/3	Brass	54'62	
T.S.K.	Nansen	1,3 2,0	6,3-7,5	2 3/4	Plastic-coated	52/-	
	Nansen	1,3		2/3	Polyethylene	50	
Valco	Nansen	1,1		1 2/3	Chromed	139	
Kelvin							
Hughes	Ekman R W B			3	Silver-plated	214	
Rigocha	Ekman R W B	1,0	7,5	2	Nickel-plated	98	
T.S.K.	Ekman R W B	0,6	3,5	1/2	Plastic	63	
Rigocha	Ekman, frameless	0,8	3,5	1	Brass	54	For single sampling
	Ekman, frameless	0,8	4,5	1	Plastic	63	For single sampling
T.S.K.	Ekman, frameless	0,6	3,2	1	Plastic		For single sampling
GM	Fjarlie W B	1,3	4,5	2/3	Noncontaminating		For serial sampling
Kahl	Fjarlie W B	1,3	4,5	2/3	Noncontaminating		For serial sampling
Lab.	Koulsen, frameless	1,2	3,3	2 3/4	Nickel-plated & araldite-coated	105/117	For serial sampling
Oceanogr.						125	
Mécabrier	Reversing W.B.	1,0	3,5	2/3	Chromed		Reversing thermometer frame and accommodations for serial sampling available
	Reversing W.B.	2,0	6,5	2/3	Chromed		Reversing thermometer frame and accommodations for serial sampling available
	Reversing W.B.	4,0		3	Plastic	205	Reversing thermometer frame and accommodations for serial sampling available
N I O.	Plastic R.W.B.	1,35	3,5	2/3	Polypropylene	189	For serial sampling
Hydro-Bios	Universal W.B.	3,5		2	Plastic	250	For serial sampling
Geodyne	Niskin	2		2/3	Polyethylene	270	For serial sampling
	Nonmetallic	1,7/4/8/30		2/3	PVC	140	For serial sampling
T.S.K.	Vertical	0,7		2			For sampling bottom water
	Vertical	1,2		2			

## MULTIPLE WATER SAMPLER (EXCLUDING COMBINED WITH BT)

Manufacturer	No. of tubes	Capacity of a tube, liters	Total weight, kg	Material of tube (inside)	Approx. price, U.S. \$	Remarks
Hydro-Bios	5	1 2/5	40	Plexiglass	438/593/675	Closed by messengers
Rigocha	8	9,14	14	Tin-plated	447	Closed by bellows at preset depth
T.S.K.	8/8/12/16	0,15	20 33/35/50	Brass		Operated aboard by keying electromagnet at any depth; depth indicator available
	8	0,15	22	Brass		Closed by bellows at preset depth

Following are names and addresses of the manufacturers listed in the UNESCO tables. Asterisks denote firms which responded to a request for up-to-date information on their products; "coup" denotes firms which indicated acceptance of payment in Unesco Coupons.

ACCO*	ACCO Equipment, American Chain & Cable Company Inc., 1110 E. Princess Street, York, Pennsylvania 17403, U.S.A.
Alpine	Alpine Geophysical Associates Inc., 55 Oak Street, Norwood, New Jersey, U.S.A.
Apelco*	Apelco, 313 East Grand Avenue, South San Francisco, California, U.S.A.
Askania*	Askania-Werke GMBH, Offenbach am Main, Taunusstrasse 47, West Germany
Atlantic R.C.	Atlantic Research Corporation, Henry G. Shirley Memorial, Highway at Edsall Road, Alexandria, Virginia, U.S.A.
Atlas-Werke*	Atlas-Werke GMBH, Department of Electronics, P.O. Box 8545, 2-S Bremen 2, West Germany
Auto-Lab.	Auto-Lab. Industries Pty. Ltd., 364 Eastern Valley Way, Chatswood, Sydney, N.S.W., Australia
A. Wuttke*	Adolf Wuttke, 2000 Hamburg 22, Humboldtstrasse 33, Germany
Ballant	D. Ballant, Manufacturing Co. Ltd., 619-21 H Street, N.W., Washington 1, D.C., U.S.A.
Belfort*	Belfort Instrument Co., 4 North Central Avenue, Baltimore 2, Maryland, U.S.A.
Bendix	The Bendix Corporation, Bendix International Division, 20 East 42nd Street, New York 17, N.Y., U.S.A.
Bergen Nautik	Bergen Nautik, Bergen, Strandgaten 18, Norway
Boursier	Société Boursier & Fils & Cie, 2 rue Charles-Laisant, Nantes, France
Braincon <i>coup.</i>	Braincon Corporation, Box 312, Marion, Mass., U.S.A.
Brown	S. G. Brown Ltd., Shakespeare Street, Watford, Hertfordshire, England
Carl Zeiss* <i>coup.</i>	Carl Zeiss, 7082 Oberkochen, Württemberg, West Germany
Cedar Beckman* <i>coup.</i>	Beckman Instruments Inc., Cedar Grove Operations, 89 Commerce Road, Cedar Grove, Essex County, New Jersey 07009, U.S.A.
EDO	Edo Corporation, College Point 56, L.I., New York, U.S.A.
EG & G	EG & G, Inc., 160 Brookline Ave., Boston, Mass., U.S.A.
ELAC*	Electroacoustic GMBH, Kiel, Westring 425, Germany
Fenjohn	Fenjohn Co., 90 Cricket Avenue, Ardmore, Pennsylvania, U.S.A.
Fisher	Fisher Research Laboratory Inc., 1975 University Avenue, Palo Alto, California, U.S.A.
Francis	Francis Associates, c/o Sippican Corp., Marion, Mass.
Geodyne*	Geodyne Corporation (see EG & G)
GM <i>coup.</i>	G.M. Manufacturing Co., 2417 Third Avenue, New York, N.Y. 10451, U.S.A.
Hans. W.	Hanseatische Werkstätten, Friedrichs & Co., Hamburg-Schnelsen, Oldeslor Strasse 97/99, West Germany
Hayward <i>coup.</i>	The Hayward Company, 90 West Street, New York, N.Y. 10006, U.S.A.
Hydraulik* <i>coup.</i>	Hydraulik A/S, Brattvag, Norway
Hydro-Bios* <i>coup.</i>	Hydro-Bios Apparatebau GMBH, Kiel, Wismarerstrasse 14, West Germany
Hydro Products*	Oceanographic Engineering Corporation, Hydro Products Division, P.O. Box 10766, San Diego, California, U.S.A.
Hydrow.	Hydrowerkstätten GMBH, Kiel-Hasse, Uhlenkrog 38, Germany

## UNDERWATER FIELDS AND INSTRUMENTATION

Hytech* <i>coup.</i>	The Bissett-Berman Corporation, Hytech, G Street Pier, San Diego, California 92101, U.S.A.
IBAK* <i>coup.</i>	IBAK Helmut Hunger, 23, Kiel, Fischereihafen-Gebäude 12, West Germany
Industria* <i>coup.</i>	Industria Manufacturing Engineers Pty Ltd., 23 Waratah Street, Sutherland, Australia
Int. Agency C-14* <i>coup.</i>	The International Agency for 14C Determination, Measurements of Primary Production in the Sea, Charlottenlund Slot, Charlottenlund, Denmark
Jayco	Jayco Instruments (Pty) Ltd., P.O. Box 23, Plumstead, Cape Town, South Africa
Jules Richard*	Jules Richard, 25 rue Mélingue, Paris 19e, France
Kahl* <i>coup.</i>	Kahl Scientific Instruments, 737 West Main Street, El Cajon, California, U.S.A.
KDK	Kaijo Denki Co. Ltd., (Marine Instruments Co. Ltd.), 19 1-chrome, Kanda-Nishukicho, Chiyoda-ku, Tokyo, Japan
Kelvin Hughes*	S. Smith & Sons (England Ltd.), Kelvin Hughes Division, St. Clare House, Minories, London E.C.3, England
Kieler Howaldtswerke* <i>coup.</i>	Kieler Howaldtswerke AG, Abt. Apparatebau, 23 Kiel-N.D., West Germany
Kyowa Shoko	Kyowa Shoko Ltd., 1804 Shunamachi 1-chrome, Toshima-ku, Tokyo, Japan
Lab. Oceanogr.* <i>coup.</i>	Laboratoire Océanographique, Bolbrovej 48, Rungsted Kyst, Denmark
Ledeon	Ledeon Inc., Gilman Road and Garvey Avenue, El Monte, California, U.S.A.
Leeds & Northrup* <i>coup.</i>	Leeds & Northrup Company, 4901 Stenton Avenue, Philadelphia 44, Pa., U.S.A.
Leitz	Ernst Leitz GmbH, Wetzlar a/Lahn, West Germany
Marconi	Marconi's Wireless Telegraph Co. Ltd., Marconi House, Chelmsford, Basildon, Essex, England
Marconi Marine*	Marconi International Marine Co. Ltd., Elehra House, Chelmsford, Essex, England
Marine Advisers* <i>coup.</i>	Marine Advisers Inc., P.O. Box 1963, La Jolla, California, U.S.A.
Mashpribor	V/O Mashpriborintorg, Moscow, G-200, Smolenskaya 32/34, U.S.S.R.
MBA <i>coup.</i>	Marine Biological Association, Citadel Hill, Plymouth, Devon, England
Mécaboler* <i>coup.</i>	La Société Mécaboler, 17 rue de Juvigny, Ablon (S. & O.), France
NEC*	Nippon Electric Company Ltd., 7-15 Shiba Gochome, Minato-ku, Tokyo, Japan
N.I.O. <i>coup.</i>	National Institute of Oceanography, Wormley, Godalming, Surrey, England
Norwinch	The Norwinch Group, Sales Department, A.S. Bergen Mekariske Verksteder, P.O. Box 858, Bergen, Norway
Oceanographic Laboratory	Oceanographic Laboratory Scottish Marine Biological Association, 78 Craighall Road, Edinburgh 6, Scotland (att. Dr. R. S. Glover)
OEC <i>coup.</i>	Oceanographic Engineering Corporation, P.O. Box 1560, La Jolla, California, U.S.A.
O.R.E.* <i>coup.</i>	Ocean Research Equipment Inc., Falmouth, Mass. 02541, U.S.A.
O.S.K. <i>coup.</i>	Ogawa Seiki Co. Ltd., No. 184, 2-chrome, Hyakumin-cho, Shinjuku-ku, Tokyo, Japan
Plessey*	The Plessey Co. Ltd., Marine System Division, Ilford, Essex, England
Pneumo Dyn.	Pneumo Dynamics Corporation System, Engineering Division, 4936 Fairmont Avenue, Bethesda, Maryland, U.S.A.

**REFERENCES**

3-105

- Res. Man. coup.** Research Manufacturing Corporation, P.O. Box 6056, San Diego 6, California, U.S.A.
- Rigosha\* coup.** Rigosha & Co. Ltd., 2 Kajicho, 1-chrome, Kanda, Chiyoda-ku, Tokyo, Japan
- Riken** Rikagaku Kenkyujo, No. 31, Komagome, Kamifujimaccho, Bunkyo-ku, Tokyo, Japan
- SEREL** Société d'exploitation et de recherches électroniques, 26 rue de Londres, Paris 9e, France
- SIMRAD\*** Simonsen Radio A.S., Ensjoveien 18-20, Oslo, Norway
- Smallwood coup.** A. W. Smallwood Ltd., Pomeroy Street, New Cross, London S.E. 14, England
- Sub. Cab.\*** Submarine Cables Ltd., Greenwich, London S.E. 10, England
- Tacoma Boat** Tacoma Boat-building Co. Inc., 132 Siteum Waterway, Tacoma, Washington, U.S.A.
- Tinsley\* coup.** H. Tinsley & Co. Ltd., Werndee Hall, South Norwood, London, S.E. 25, England
- T.S.K.\* coup.** Tsurumi Seikikosaku-sho Co. Ltd., 1506 Tsurumi-machi, Tsurumi-ku, Yokohama, Japan
- Union\*** Union Optical Co. Ltd., No. 21-1, 2-chrome, Shimura-cho, Itabashi-ku, Tokyo, Japan
- Valco** Valco Products Pty. Ltd., 180 Taren Point Road, Taren Point, Australia
- Wallace & Tiernan\*** Wallace & Tiernan GMBH, 887 Gunzburg-Donau, Postfach 149, West Germany; or Wallace & Tiernan, Inc., Belleville, N.J.
- Whitney** The Whitney Underwater Instruments, 1987 Corralitos, San Luis Obispo, California, U.S.A.
- Wildlife Supply coup.** Wildlife Supply Co., 2209 S. Hamilton Street, Saginaw, Michigan, U.S.A.

## EIBLIOGRAFIA

Myers J. John, et. al.  
HAND BOOK OF OCEAN AND UNDERWATER ENGINEERING  
Mc Graw Hill Book Company, 1969

INSTRUCTION MANUAL FOR OBTAINING OCEANOGRAPHIC DATA  
U.S. Naval Oceanog. Office  
Pub. No 607 3ed, 1968

INGHAM A.E.  
Sea Surveying  
John Wiley & Sons, New York, 1975

Yasso, E. Warren, E  
OCEANOGRAPHY  
Holt, Reineheet and Winston, I.A. New York, 1965

Pritchard D.W.  
PROBLEMS IN OCEANOGRAPHIC INSTRUMENTATION  
Oac. Inst. Amer. Aero-Space Instrumentation  
Symposium, preprint I-6, 1961

Pierson, W.J., et. al.  
OBSERVING AND FORECASTING OCEAN WAVES  
U.S. Naval Oceanographic Office  
H.O. Pub. No 603

HANDBOOK OF OCEANOGRAPHIC TABLES.  
U.S. Naval Oceanographic Office  
Special Publication SP-68., 1966

Neumann, G. and Pierson, W.J.  
PRINCIPLES OF PHYSICAL OCEANOGRAPHY  
Prentice-Hall, Inc., 1966



centro de educación continua  
división de estudios superiores  
facultad de ingeniería, unam



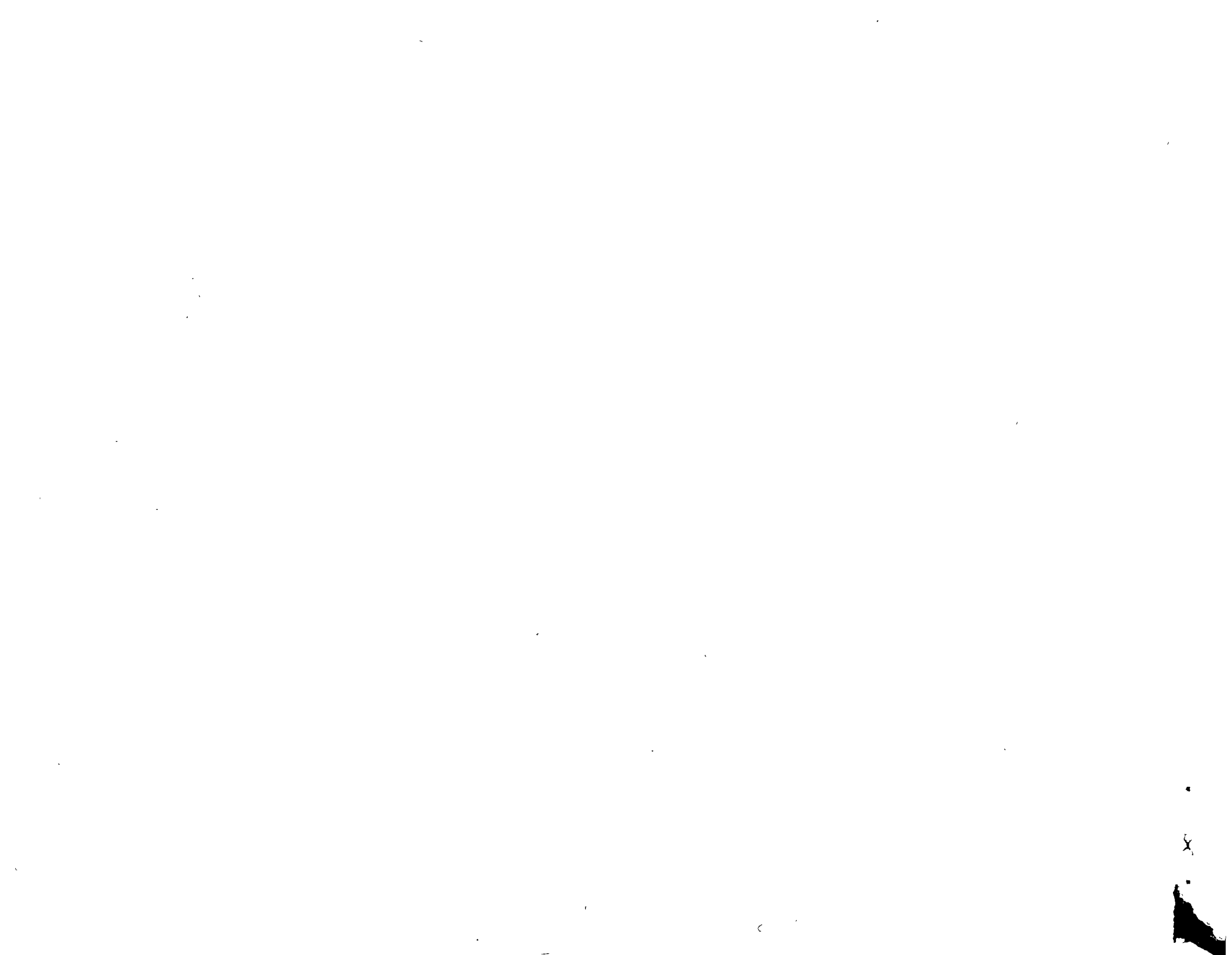
PRIMER CURSO INTERNACIONAL SOBRE ESTRUCTURAS

FUERA DE LA COSTA

OCEAN WAVES AND THE DIRECTIONAL SPECTRUM

BLAIR KINSMAN

SEPTIEMBRE, 1978.





OCEAN WAVES AND THE DIRECTIONAL SPECTRUM

An Engineering Tool

by

Blair Kinsman

Professor of Oceanography

Marine Sciences Research Center

State University of New York

Stony Brook

Prepared at the request of Dr. Zubieta

for a conference

in Mexico City, Mexico

May 1978



## CONTENTS

	Page
1. Description of the Phenomenon and Terminology	1-43
1.0 Prefatory Remarks	1
1.1 The Phenomena	1
1.2 Wave Classifications	20
1.3 The Component Sinusoid	27
1.4 The Sinusoid and the Sea	38
2. Hydrodynamics	44-69
2.1 The Equation of Motion: Conservation of Momentum	44
2.2 The Equation of Continuity: Conservation of Mass	47
2.3 The Wave Equation for a Progressive Wave with a Rigid Profile Traveling at Constant Phase Speed	48
2.4 "Solution" of the Wave Equation	49
2.5 Vorticity	56
2.6 Stream Function, Velocity Potential, and Laplace's Equation	58
2.7 Integration of the Equation of Motion	62
2.8 Boundary Conditions	64
2.9 Summary for Progressive Waves with Rigid Profiles	67
3. The Small-amplitude Component Wave	70-98
3.1 Simple Harmonic Waves of Small Amplitude: the Airey Wave	70
3.2 Approximations for Deep and Shallow Water	76
3.3 The Details of the Motion: an Exploitation of the Stream Function	82
3.4 The Energy of a Sinusoidal Wave	89
4. The Spectral "Solution"	99-121
4.1 Fourier Series Representation	99
4.2 The Energy Density Spectrum	106
4.3 An Application	111
4.4 The Directional Spectrum	115
4.5 A Few Remarks in Closing	119

"Amongst so many borrowed things, I am glad if I can steal one, disguising and altering it for some new service."

--Michel de Montaigne

## 1. Description of the Phenomenon and Terminology

### 1.0 Prefatory Remarks

When Dr. Zubieta invited me to take part in this conference I protested that I really knew very little about coastal engineering and doubted that I had anything to say that was worth your attention. He assured me that coastal engineering was not what he wanted me to talk about; that there would be many other speakers well qualified to handle that subject. And, after looking over the program, I can not but agree with him. What Dr. Zubieta asked of me was to talk about ocean waves; waves as they really are and waves as they are handled theoretically and mathematically. This made some kind of sense to me. I do know a bit about waves and the forces exerted by waves on coasts and coastal structures are among the more important with which the coastal engineer must contend.

### 1.1 The Phenomena

I think it likely that few of you have had much chance to watch waves. Consequently, I am going to begin by talking about them in a descriptive way. There is no point in offering you elaborate theoretical explanations for phenomena of whose existence you are unaware.

But, put your tracer in shallow water. In that case you will see that the horizontal excursion remains substantially the same at all depths. We can begin to suspect that the water depth  $h$  in comparison with the wave length  $L$  and the wave height  $H$  is going to have something to do with the problem. We have already turned up two cases of markedly different behavior in deep and shallow water.

While there is a limit to the ratio,  $H/L$ , there are many smaller heights that may be associated with the same  $L$ . Thus, there can be no unique water speed associated with any given wave length.

It is obvious that the waves contain energy. An undisturbed water surface is flat. On a wavy surface the crests are raised above still water against gravity and the troughs forced down. Thus, work has been done and the wave shape stores energy in potential form. In addition, there is water motion associated with the wave. Mass in motion has kinetic energy. This leads to another question: What does the work that creates waves and how is it done?

Many things will make waves: a rock dropped in still water, a seismic movement of the earth, the passage of a ship, the gravitational pull of the moon, and, above all, the wind. The "how" and the details of the motions which follow are something else again. For example, consider a wind which begins to blow over a smooth water surface. It seems reasonable that the frictional drag should set the water moving downwind in a current--and it does. But why should the water also respond with wave motion; and in such a peculiar way? The first response to the onset of a wind is the random appearance of small, darkened, ruffled patches called "cat's-paws." Within these patches the wavelets are small, always

of about the same length, and running in two trains symmetrically about the wind to form a diamond shaped pattern. They are capillary waves only a few millimeters high. If the wind stops, they vanish almost at once.

But, if the wind continues to blow, they grow until they reach a length of about 1.73 cm. At this stage they have the slowest speed a wave can have; about 24 cm/sec. If the wind persists, they continue to grow until they become gravity waves. At this point, if the wind stops, the waves do not die out but continue to run straight ahead with very little attenuation until they fetch up against something. The distances they can travel are almost incredible. Waves have been measured off the coast of California which were generated in the Indian Ocean and off Bermuda which came from storms south of New Zealand.

If no energy were lost from the waves they would continue to grow as long as the wind fed energy to them and they would become indefinitely high. They don't. So, sooner or later, forces must come into play which limit growth. The waves may get energy from the direct push of the wind on their upwind faces. How effective this will be obviously depends on how good a "grip" the wind can get on the waves which, in turn, depends on how jagged the waves are. Young steep chop gives a better grip than old smooth swell.

Energy can also be transferred by frictional drag on the sea surface. The frictional drag acts along the entire wave profile, but its effects must be different over a crest where the water motion is with the wind than it is over a trough where the motion is against the wind. Since the water motions are always much slower than the wave motion the waves can continue to gain energy

from the frictional drag even when they are running faster than the wind; which is not the case for the direct push.

The energy gained from the wind is lost mainly to the turbulent motion of the water. Breaking waves (white caps or white horses) dissipate the organized energy of the wave motion into disorganized turbulent motion. The viscosity of the water also saps energy from the waves but to a much smaller degree.

A detailed analysis of the energy balance that sets a limit to wave growth is extremely complex and not yet fully worked out but the principle can be stated very simply. As long as the energy income to the waves from all sources is larger than the energy dissipated from the waves (by whatever means), the waves will continue to grow. At first they grow in both length and height. If they reach heights for which they are unstable and energy for growth is still available, the continued growth is predominantly in length. A wave-system which has grown to the point where its energy income and loss are in balance is called a fully aroused sea.

The process by which waves grow to the fully aroused state is not a single step. As the capillary waves first formed grow larger, new capillaries are formed on them, grow, and in turn are served in the same fashion. Waves of different lengths run at different speeds, so that waves of different sizes and generations combine and recombine in a constantly changing interference pattern. In a sea, each of the more prominent crests is usually made up of a number of different wave crests, each generated at a different place and time, which, for the moment, have piled up to form the hump of water you see. If you try to follow any one wind-wave

crest with your eye, you will find that before long it simply vanishes. What has happened is that the waves which piled up to the crest which caught your eye are each running at a different speed and, having gotten out of step with each other, no longer add up to a crest.

How high the waves of a fully aroused sea will get depends on the wind force (speed); but it also depends on the duration, how long the wind blows, and on the fetch, the distance over which it blows. In other words, in addition to strength, the wind needs time and elbowroom to do its work. You should take reports of extremely high waves with a grain of salt. It is very easy to over estimate; particularly in storm seas which are enough to scare the pants off you anyway. The highest wave ever reliably estimated was 34 meters. In the North Atlantic, even during winter gales, the effective fetches seldom exceed 1100 km. With such a fetch a 20 m/sec wind could build up, at most, something like 10-meter waves. If you want to watch waves which have been generated over a really long fetch you will have to go to the Antarctic Ocean which runs unbroken around the entire Antarctic continent. There, winds often blow steadily with great force in the same direction for weeks at a time. At the other extreme, in the lee of a shore the fetch is always very short and large, locally generated waves never develop.

If instead of having fetch as the limitation we had an unlimited fetch but considered duration, it would take our 20 m/sec wind something like 42 hours to build a fully aroused sea.

It sometimes seems that the waves build much faster. Cornish observed a squall which lasted 4 minutes during which the wave



heights increased by 2 meters. The likely explanation for the apparent abrupt growth is that both the squall and the waves were moving at about the same speed so that the wind had been at work on the same waves for several hours before Cornish saw either. The entire system moving bodily into the area would produce an impression of very rapid wave growth. In mathematical terms, Cornish observed the effects of the material derivative,

$$DH/Dt \equiv \partial H/\partial t + u_i (\partial H/\partial x_i)$$

and interpreted it as entirely a local time rate of change,  $\partial H/\partial t$ .

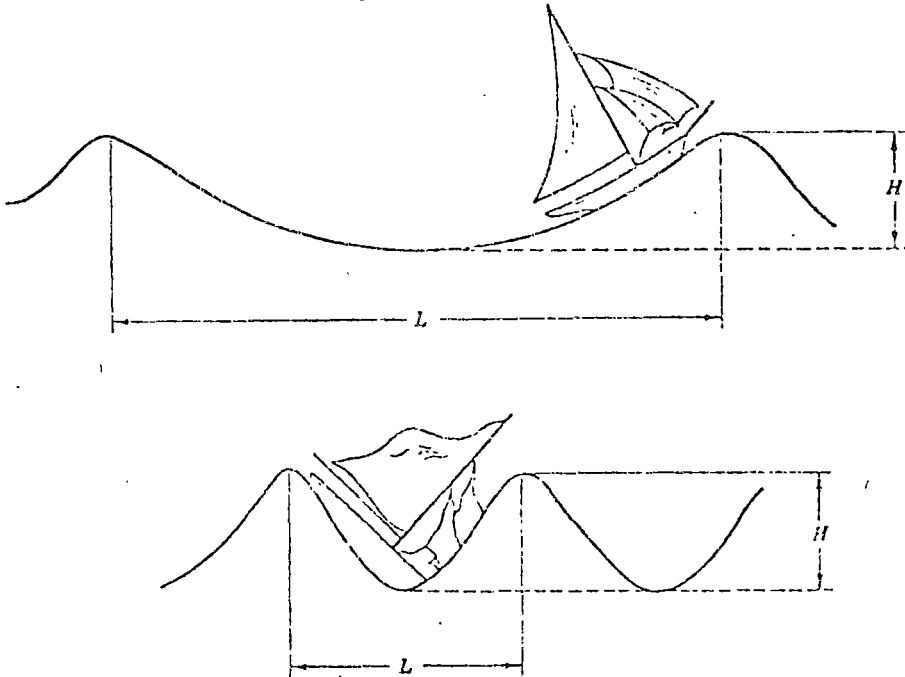
Waves generated by the kinds of storms that actually happen seldom need fetches of more than 1100 to 1300 km to reach full height--1700 km is probably room enough to develop the largest storm waves that have ever been reliably estimated. Based on 40,146 extracts from sailing ship logs the following frequency of occurrence of wave heights for the ocean as a whole seems reasonable:

Wave height (m)	0-0.9	0.9-1.2	1.2-2.1	2.1-3.7	3.7-6.1	> 6.1
Frequency of occurrence (%)	20	25	20	15	10	10

One sees that 45% of the ocean waves are less than 1.2 m high, 80% are less than 3.7 m high, and only 10% are greater than 6.1 m high. The largest wave encountered by the VENUS during her 3-year circumnavigation of the world (1836-1839) was met off Cape Horn and was 7.6 m high.

As any seaman could tell you, the heights of waves per se are not as important to him as is their steepness,  $\delta \equiv H/L$ ; the

ratio of height to length. A boat can easily ride a high wave if the wave is also very long. It just climbs up one side and slides down the other. In contrast, even a rather small wave can make trouble if it is steep. The stern gets hung up on one crest while the bow is driven under the next while the bow is driven under the next.



Waves are choppy, i.e., steeper during the early part of a blow than they are later when the sea is more fully developed.

Wind waves are irregular. Successive waves differ markedly in height and it is not at all unusual to find, for example, an occasional wave 2 to 2.5 meters high when the common run is only 1 to 1.5 meters high. The observed fact is that waves do tend to run in groups of higher and lower waves. This tendency has misled some people into statements like, "Every seventh (or third, or ninth) wave is the highest." Such statements recognize the irregularity but fail to describe it properly. The wave groups are as irregular on their scale as the individual waves are on theirs.

Because of the irregularity, if you observe the time between passages of successive crests, you will find many "periods"  $\tilde{T}$  in a sea. You should not confuse these observable "periods" with the period which is a mathematical artifact and something else altogether. Figure 1.1-1 shows the frequency distributions of "periods" actually observed at sea for three different wind speeds.

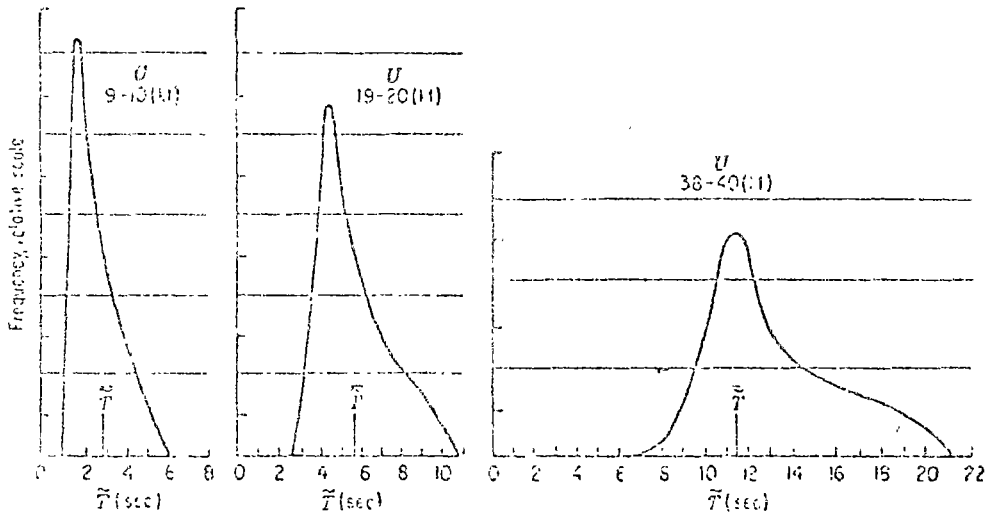


Fig. 1.1-1. Frequency distributions of observed wave periods,  $\tilde{T}$ , for three different wind speeds,  $U$ . [From Pierson, Neuman, and James (1955)]

You can see that the ranges are considerable: 1 sec to 6 sec, 2.5 sec to 11 sec, and 7 sec to 21 sec.

Nothing very sensible can be said about the "speeds" of observable waves. The waves are not conservative; in simple minded terms, no wave crest lasts very long. If you used an observed "period"  $\tilde{T}$  and an observed "wave length"  $\tilde{L}$  to construct a "speed"  $\tilde{c} = \tilde{L}/\tilde{T}$ , there is considerable doubt about what it is that is moving at this "speed." It can't be the observed crest--at least not for any great length of time since the crest will soon lose its identity as an individual.

Perhaps the best way to reach an understanding of the problem of wave "speed" is to drop a rock in a still pond and watch what happens. Shortly after the rock has been dropped a radial section

might look like (a) in Figure 1.1-2. A certain amount of energy has been put into the water by the impact. The energy has moved

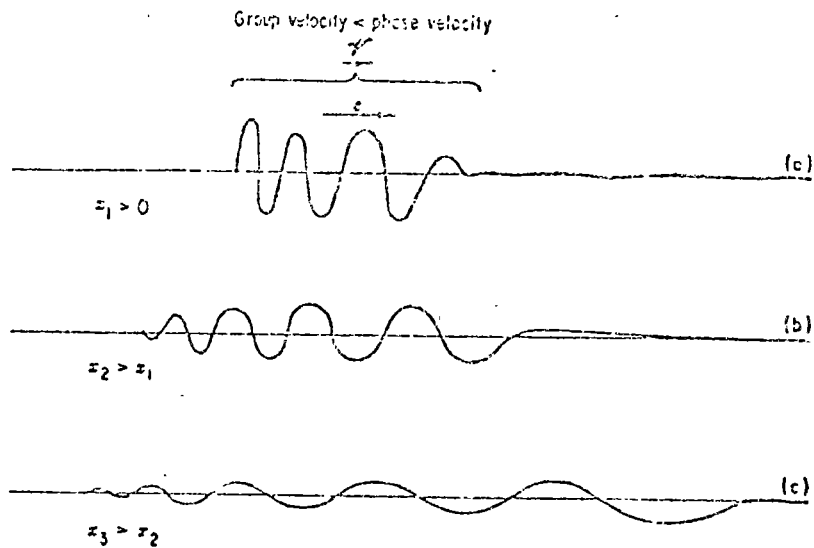


Fig. 1.1-2. Surface deformation at three positions for a limited disturbance.

out from the point of impact and is now located near some position  $x_1$ . Part of the energy is stored in the deformation of the water surface as potential energy and part of it is found in the motion as kinetic energy. The wave "lengths" are shorter at the rear and longer at the front of the wave train. If you try to follow an individual wave crest--for example, the last one in the train--you will shortly find that it is next to last. A new wave crest will have grown up behind it. A bit later it will be third from last; and so on. At the same time that new crests are appearing at the rear of the train, wave crests are dying away and vanishing from the front of the train. In time the crest you are watching, which was the last, will be the first and, shortly thereafter, will vanish. Thus, the group of waves moves in two ways. The individual waves move forward so long as they exist. In addition, the group, as a group, moves by adding crests at the rear and subtracting crests from the front.

From this two things are evident. First, even though the group remains an identifiable object capable of having a meaningful "speed," membership in the group is constantly changing. Second, the motion of the group is opposed to the motion of the individual crests. The combined effect is to move the group, as a group, more slowly than the individual crests.

I have said that you will find the longer waves toward the front of the train. To get a little ahead of our story, this is reasonable in terms of the mathematical component waves which we picture to ourselves as adding up to the disturbance we observe. Component waves do have meaningful speeds and the longer they are the faster they run. The initial deformation of the water surface can be thought of as the sum of a great many components. As time passes, the longer components will outrun the shorter and the original interference pattern will begin to sort itself out by lengths with the longer, faster components leading the parade.

If you look at the group at a later time by moving out to a position  $x_2 > x_1$ , (Fig. 1.1-2(b)) the group will arrive at  $x_2$  after a time interval appropriate to the group velocity rather than to the speed of the individual waves. The group will be spread over a longer distance. The individual wave heights will be smaller since the energy of the initial impact is spread out over a larger area. The long waves in front are now longer than they were at  $x_1$  and the short waves at the rear shorter. Figure 1.1-2(c) shows an even later stage. The sorting out process continues as the group moves. It is to this feature of ocean waves that we refer when we say that the sea is a dispersive medium. Component waves run at speeds which depend on their

lengths. An assemblage of component waves running on the sea surface will sort itself by lengths, dispersing as it travels.

In general, longer waves with faster speeds also have longer periods. They may be moving faster but, because they are so much longer, it takes longer from crest passage to crest passage at any fixed position. The period, length, and speed of a component wave are related by:

$$L = (g/2\pi)T^2 \quad \text{and} \quad c = \sqrt{(gL)/(2\pi)}$$

where  $g = 9.80$  m/sec is the acceleration of gravity. Representative values using these relations are:

Period, T (sec)	2.	4	8	16
Length, L (m)	6.24	24.96	99.82	399.28
Speed, c (m/sec)	3.12	6.24	12.48	24.96

Waves travel at right angles to the ridge of water forming the crest. A rising wind generates waves that run with it. If the wind direction shifts, the wind begins to work up a new set of waves running in the new direction. The waves generated by the wind before the shift continue to run on as before, substantially along great circle tracks.

If one compares the motion of the wind and the motion of the waves over large areas, one important difference appears at once. Since the air mass of the wind is being transported bodily, it must be deflected by the Coriolis force--to the right in the northern hemisphere, to the left in the southern hemisphere. In contrast the passage of a wave over the surface of the water is accompanied by very little net forward movement of the water and there is little or no deflection of the waves by Coriolis force. As a rule of

thumb, if you are looking at a weather map, you can expect winds to blow along the the isobars and waves to run tangent to them. One warning though: The high and low pressure systems are also on the move. What you see of the relations between wind direction and wave direction will depend on your position relative to the moving system. Hurricanes provide a good example. One was observed in which the wave direction differed from the wind direction by  $60^{\circ}$  in the two front quadrants and by  $90^{\circ}$  to  $100^{\circ}$  in the left rear quadrant. In the right rear quadrant the wind was nearly parallel to the waves.

Currents in the water will alter waves on the surface. An opposing current will increase wave heights and shorten wave lengths thus increasing the wave steepness. A following current will do just the opposite. In either case the wave period will be left unaltered. Most ocean currents are rather slow so that these alterations are often negligible. However, in currents like the Gulf Stream and the Kuroshio and in tide rips in coastal waters and inlets they are anything but negligible. They may at times make it impossible for small boats to enter a harbor.

We have said that gravity waves run straight ahead until they bump into something. Running into water shallow in comparison with the wave length definitely amounts to bumping into something. There is no longer room to develop fully the water motions which give rise to the surface waves. A number alterations take place. The wave speed ceases to be controlled by the wave length; water depth takes over. This is the exact analog of the change in the speed of light with density of the transmitting medium and it produces analogous results. The direction taken by the waves can

be altered and lens effects produced by water of varying depth.

Figure 1.1-3(a) Suggests why breakers at the seashore are almost always nearly parallel to the beach. It is well to keep in mind that the only feature of a wave as you see it from the beach that has been left unchanged from its deep-water, offshore condition is the wave period.

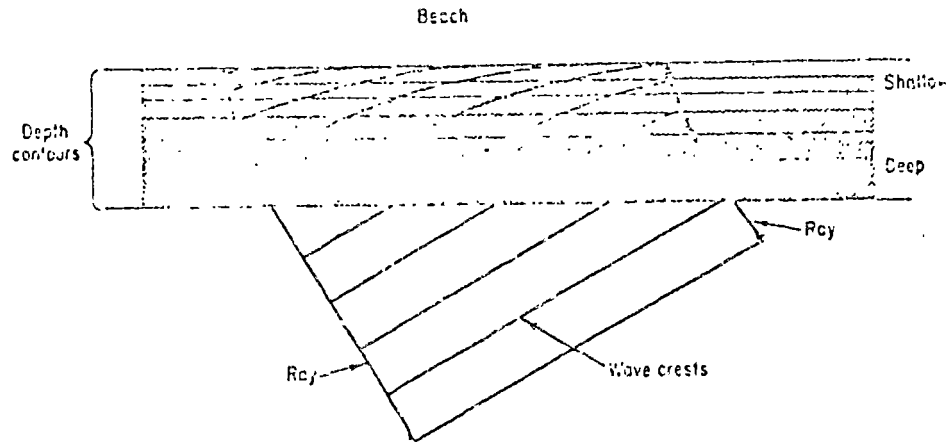


Fig. 1.1-3(a) The refraction of a wave train approaching an even gently sloping beach at an angle.

Depending on the trend of the bottom contours waves can be either focused, Fig. 1.1-3(b), or defocused, Fig. 1.1-3(c), Page 16. It is simply a matter of crowding the wave energy into a smaller area or of spreading it out.

Wave refraction is of great practical interest. There is a harbor in the States formed by breakwaters. The entrance was located artistically without regard for the bottom topography; unhappily at a focal point for waves from some directions. It is not uncommon to find 4-foot waves outside the harbor, negligible waves inside the harbor, and 10-foot waves in the entrance. I'm told that the first try at building a harbor for the ferry from LaPaz produced similar unfortunate results.

As an example of defocusing, there is a place on the open coast near La Jolla, California where defocusing so reduces wave



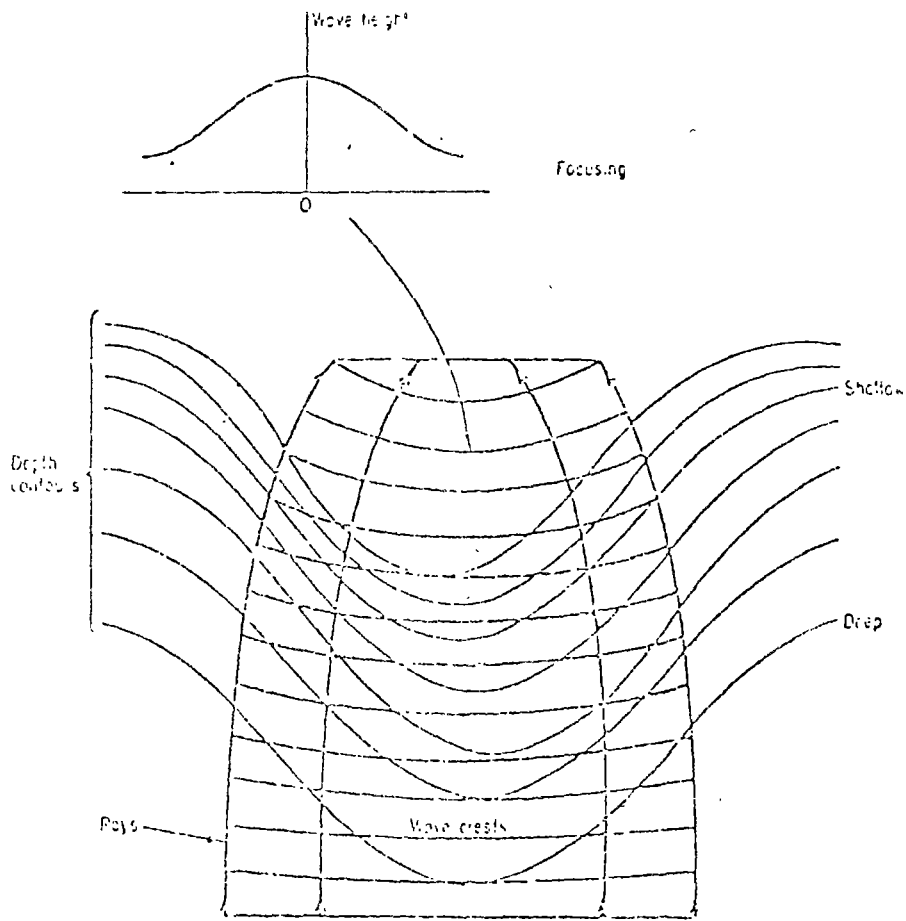


Fig. 1.1-3(b) The refraction of a wave train over a submarine ridge.

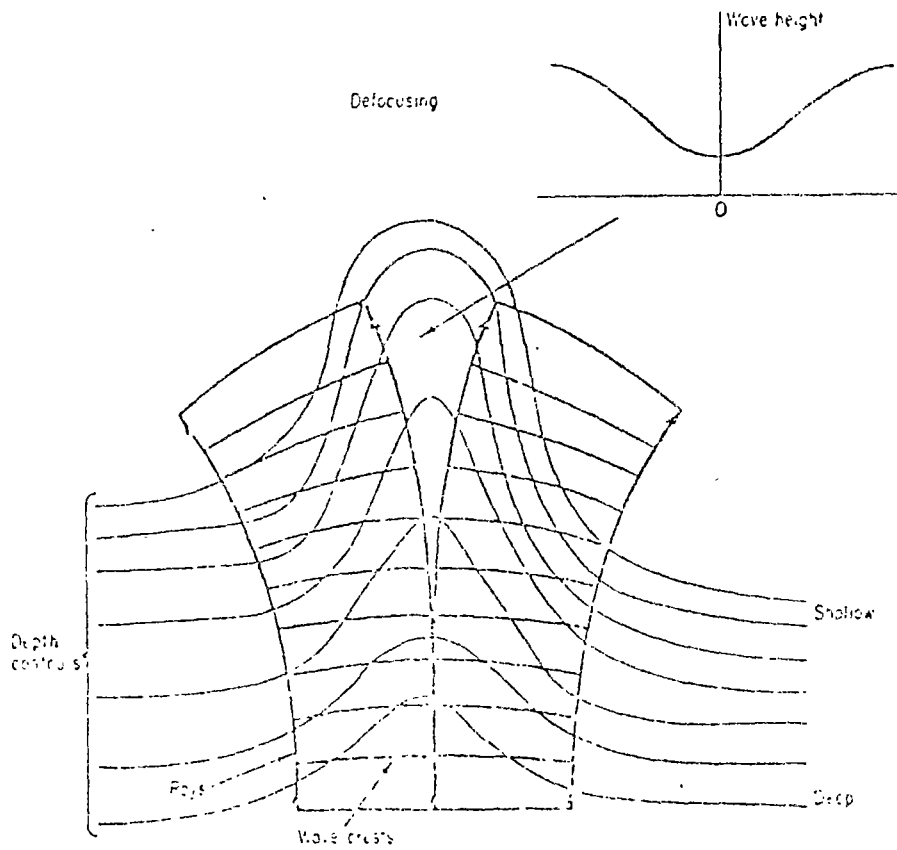


Fig. 1.1-3(c) The refraction of a wave train over a submarine valley.

heights that the local fishermen can anchor safely in open water even during heavy storms.

Waves finally run ashore and break up in surf--which can be pretty spectacular. When waves break on a beach the organized water motions which make them become completely scrambled and the wave form is lost. The energy they contain passes into other forms.

Breakers on evenly sloping beaches may be of two kinds: plunging and spilling. The plunging breaker has a well-rounded back and a concave front. In fact, just before the crest plunges forward into the trough, a swimmer dead to prudence can look upward through a solid overhang of water. A plunging breaker goes to pieces in a few seconds leaving very little of the wave form. A long swell with a steepness less than 0.005 and an offshore wind are favorable to the formation of plunging breakers.

In contrast, spilling breakers are concave on both faces. The wave unravels at its unstable, thin crest as the wave advances. The process takes much longer to destroy the wave form. Waves with steepnesses greater than 0.01 often produce spilling breakers; particularly if the wind is onshore.

If the wave form is not completely destroyed on the first break, the waves will reform and continue to run, steepen, and break again. Such breakers are called intermittant. An intermittent breaker may break three, four, or more times before the wave form is entirely destroyed.

Waves running into shoal water first decrease a little in height and then increase quite markedly. On most coasts, breakers are higher than the deep-water waves from which they come.

However, take casual reports of surf height cautiously. Heavy surf is awesome and the heights to which spume may spout must be distinguished from the heights reached by solid water. In severe easterly gales Minot's Ledge Light off Boston, which is 29.6 meters high, is sometimes entirely wrapped in flying spray. Bishop's Rock Light in England has had its bell, 30.5 meters above still-water level, broken off. Surf as high as 13 meters has been reliably reported. But don't forget--the process described by the word "surf" can be going on with waves only centimeters high.

Not only does a wave become higher just before it breaks, but also, as it moves into shallow water, it slows down, the crests close ranks, and the lengths are shortened. The wave steepness becomes much greater than it was offshore and the increase comes very quickly. This means that the handling of small boats in surf is very difficult. Offshore, the boat may rise and fall to the waves but, as the steepness increases, she pitches more and more heavily. Another aggravating factor is that in the surf zone the water is more and more moving bodily with the speed of the wave form. Unless the boat is designed and built for the work and is unusually well handled, she is very likely to be carried forward over the crest by the rush of water and pitched bow down into the trough ahead. The stern is then swept around out of control by the forward force of the water and broaching is almost inevitable. The best you can hope for is to be swamped. The usual result in heavy surf is that all hands are drowned.

Here is a practical bit of seaman's wisdom which you should learn--in your guts--if you ever do coastal work in boats. The last 100 meters into the beach is impassible when a surf is running.

Surf never looks as bad from the sea as it does from the beach since the smooth, rounded backs hide the smother of white water. If you are in trouble, get sea room and fight it out--no matter what your difficulty is. *Never attempt to land through surf in a boat unless you have already abandoned all hope for life.*

Most people have not the remotest conception of the energy expended in the surf zone. In deep water the energy of a wave is partly potential and partly kinetic. The total energy of a wave 10 feet high and 500 feet long may be as high as 400,000 foot-pounds per linear foot of crest. The alterations brought about by shallow water place a large part of that energy above still-water level and move it at the speed of the wave itself. Dynamometers, instruments which respond only to pressure and so do not register total energy, when placed in the surf zone have shown readings as high as 3 tons per square foot. The work that surf can do is truly startling. My favorite is Wick Breakwater, Scotland. There, surf broke off a piece of the breakwater composed of rock, cement, and iron reinforcement weighing 1350 tons (Yes, tons!), not once but twice, and moved it up the harbor.

I hope that these descriptions have given you a better idea of the kinds of phenomena we will have to explain. The ones covered here are just a sample. You should seize every opportunity you can get to watch waves--from waves in the bath tub to waves in the middle of the Pacific--in order to see for yourselves what phenomena need explanation.\*

---

\* A Word on Explanation:

We are fluid mechanics. That means that we are Newtonian physicists. For us, no phenomenon is explained until it can be

deduced as a necessary consequence from the first principles of Newtonian physics. Of these there are only four:

- (1) The conservation of mass--in fluid mechanics usually called the "continuity equation."
- (2) The conservation of momentum--in fluid mechanics, the "Navier-Stokes" equation.
- (3) The conservation of energy.
- (4) The second law of thermodynamics.

No question can be asked concerning the motion of a fluid to which the correct answer is not one of these four laws or a combination of them.

For years I have been trying to convey this fact to students preparing for their doctoral examinations. They usually think that there is lots more to it. There isn't. Once in a while an ex-student will come back 10 years later and say, "I see now what you meant."

---

## 1.2 Wave Classifications

Surface waves can be classified in a number of useful ways.

One way to do it is by period or, what comes to the same thing, by frequency which is the reciprocal of the period. Table 1.2-1 and Fig. 1.2-1 show one possible arrangement which is analogous to the bands of the electromagnetic spectrum. The curve representing the relative amounts of energy contained in ocean surface waves is my guess. No one has ever made the measurements on which such a curve should be based, so don't take it too seriously.

We distinguish gravity waves in two states: sea, when the waves are being worked on by the wind that raised them, and swell, when they have escaped the influence of the generating wind. Sea is usually of shorter period (higher frequency) than swell. As a rough rule of thumb, 10 seconds (0.1 cps) may be taken as separating sea from swell although you must allow for considerable overlap. Sea is shorter in length, steeper, more rugged and more confused than swell. Waves, whether sea or swell, in the process of breaking

Table 1.2-1 A CLASSIFICATION OF OCEAN SURFACE WAVES BY PERIOD OR FREQUENCY

Wave Name	Period Band (sec)	Frequency Band (cps)
Capillary	0 - $1 \times 10^{-1}$	$\infty$ - $1 \times 10^1$
Ultragravity	$1 \times 10^{-1}$ - $1 \times 10^0$	$1 \times 10^1$ - $1 \times 10^0$
Gravity	$1 \times 10^0$ - $3 \times 10^1$	$1 \times 10^0$ - $3.33 \times 10^{-2}$
Infragravity	$3 \times 10^1$ - $3 \times 10^{2.6}$	$3.33 \times 10^{-2}$ - $3.33 \times 10^{-3}$
Long period	$3 \times 10^2$ - $8.64 \times 10^{2.6}$	$3.33 \times 10^{-3}$ - $1.16 \times 10^{-3}$
Transitidal	$8.64 \times 10^{2.6}$ - $\infty$	$1.16 \times 10^{-3}$ - 0

\* 5 min \*\* 24 hr

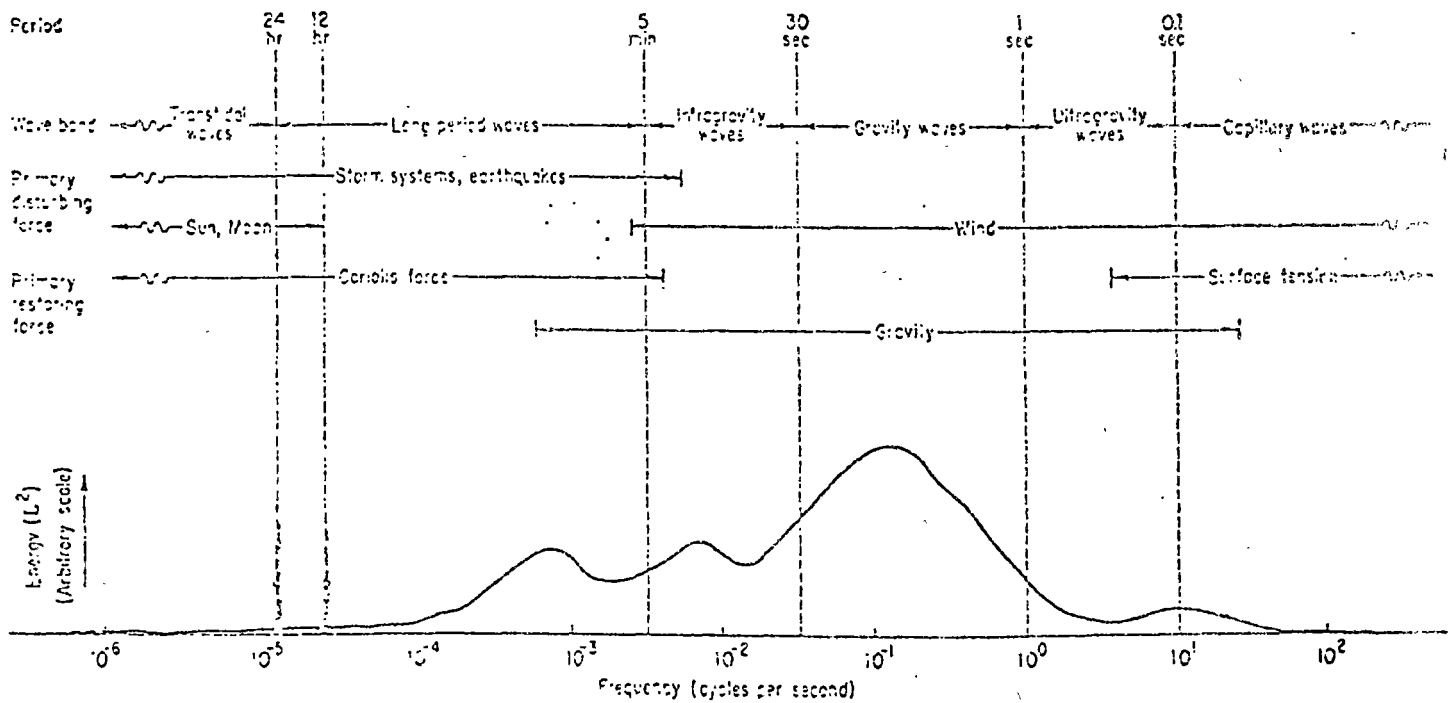


Fig. 1.2-1. Schematic (and fanciful!) representation of the energy contained in the surface waves of the oceans—in fact, a guess at the power spectrum.

up on the shore are called surf.

The wave band that interests you will depend on the problem you are trying to solve. If you are working on "sea return" or "clutter" on radar scopes, then the capillary and ultragravity bands will occupy your attention almost entirely. The problem of the sea-keeping ability of a fishing trawler will be a gravity-wave problem. Transport of sediment along a coast by waves requires attention to the infragravity band. Studies of large-scale atmospheric pressure systems, earthquakes, and astronomical forces

lead to the long-period band or to the transtidal band.

Another way to classify waves is by the disturbing force that made them. We have wind waves, ship waves, tide waves, etc. but such a classification is usually very casual. It is much more fundamental to distinguish between free and forced waves. The distinction arises from the way the disturbing force is applied and not with its source. A free wave is generated by an instantaneous application of the disturbing force which is at once withdrawn. The wave is then free to run and evolve. What it does depends on the liquid over which it runs and not at all on the characteristics of the disturbing force. The waves made by throwing a stone into still water give a good idea of free waves. A forced wave is at the other extreme. The disturbing force is applied continuously and the wave takes on the characteristics of the forcing function with modifications imposed by the liquid. The tide is a forced wave. Its period is forced by the periods of the sun and the moon which, however, do not have things all their own way since water has inertia (among other properties). The result is a wave that is forced to conform to the motions of the sun and moon but which is out of step with them because of the properties of the water and the shapes of the ocean basins. Wind-generated gravity waves are neither entirely forced nor entirely free. Generation of waves by wind resembles impact generation but, because the wind and the waves run together, the wind continues to work on the waves, forcing them to an extent. Such a situation is sometimes indicated by saying that the wind and the waves are "soft coupled." When sea has become swell it behaves much more like a free wave.

For an oscillation to exist at all three things are necessary. There must be an equilibrium or stable, undisturbed state; there must be a disturbing force to upset the equilibrium; and there must be a restoring force to reestablish the equilibrium. Thus, instead of using disturbing forces to classify waves we may use restoring forces. The principle restoring forces are surface tension, gravity, and Coriolis force. The surface of the water acts, in some ways, like a stretched membrane. Very short waves curve the "membrane" a great deal and the surface tension tries to flatten it out again. Longer waves produce much less curvature per unit length so that the water surface is not distorted so much. In this case the major force acting to flatten the sea surface is gravity. Part of the surface is too high, part is too low, the water has no "structural strength," and gravity gets in its licks. For very long waves there is a substantial mass flow of water connected with the wave motion and the Coriolis force is the chief force acting to "flatten out" the sea surface. With really long waves "flatten out" can only mean "restore to a surface of constant geopotential." The waves are so long that the curvature of the earth cannot be ignored. This classification by principal restoring force is essentially a classification by wave length with, between classes, considerable overlap where two of the forces are more or less equally important.

We have been using the word "surface" but, to be exact, we should use the more clumsy phrase "air-sea interface." It is the surface separating two fluids, water with a density of about  $1 \text{ g/cm}^3$  and air with a density a little greater than  $1 \times 10^{-3} \text{ g/cm}^3$ . Since the ratio of the density of air to that of water is roughly

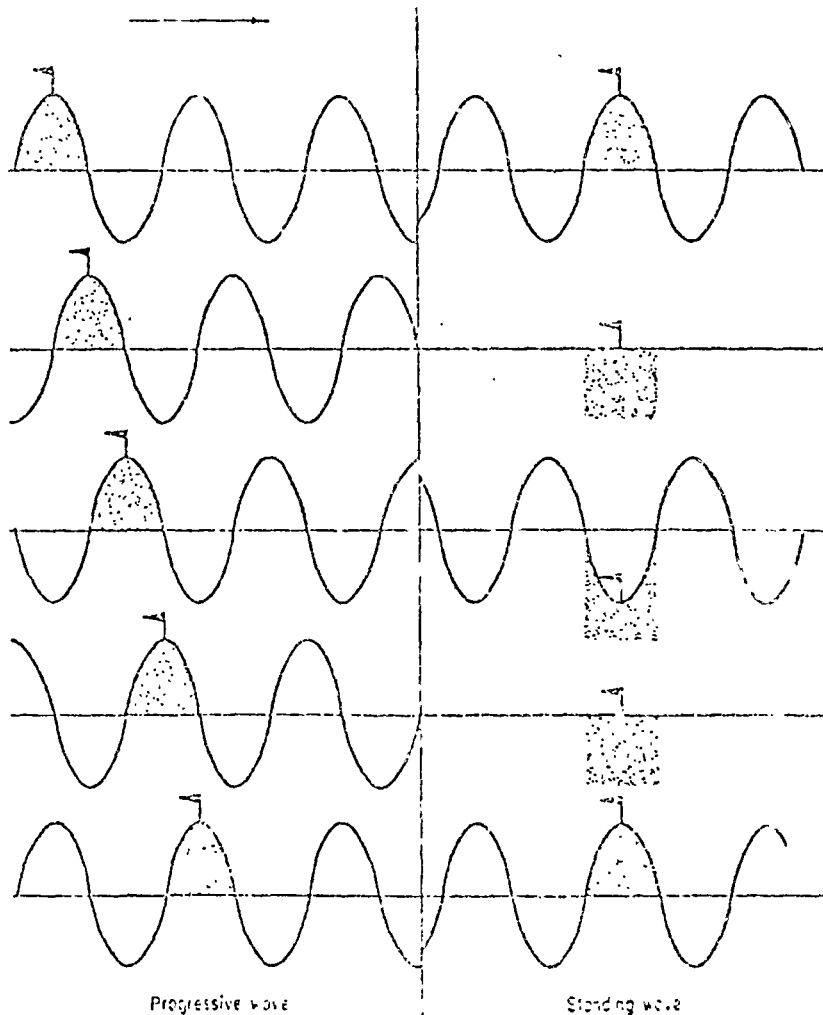


0.1%, for many purposes we can ignore the effect of the overlying air on the waves. If in considering any two regions of fluid we can neglect the density of the upper layer of fluid in comparison with the density of the lower layer of fluid, we call the waves on the interface between them surface waves. If we can not neglect the density of the overlying fluid, we call the waves on the interface internal waves. Internal waves do not require two different fluids. It is known that internal waves may be present in the ocean along the halocline or thermocline whenever the salinity or temperature stratifications become strong. It is also known that the heights of these internal waves can become very large without being reflected in appreciable surface displacements.

Waves can also be classified by the shapes of their profiles. The most commonly used profile designation is sinusoidal for a wave whose profile can be described by either a sine or a cosine. Sinusoidal waves are the elementary constituents of the very powerful Fourier analysis and their mathematical properties are well and widely known and easily manageable. A sinusoidal wave is never found at sea although the profiles of low swell and tsunamis sometimes resemble the sinusoid sufficiently to make application not quite impossible. Among engineers the cnoidal profile is frequently used. This is one of the Jacobian elliptic functions whose symbol is  $cn(u|m)$ . It can not be called an abbreviation--as "cos" is for "cosine"--since the function has never been given a name. The symbol was chosen by analogy with the cosine function since, when  $m = 0$ ,  $cn(u|m) = \cos(u)$ . "Cnoidal" is a barbaric coinage from the symbol analogy with "sinusoidal." If you stoop, squat, and strain you can sometimes find a wave

record which just might possibly be described by a cnoidal profile. Storm waves with their sharp narrow crests and relatively flat troughs slightly resemble an inverted prolated trochoid. In discussing Stokes' wave and Gerstner's wave there is some use for trochoidal profiles.

For our work, a very important classification of waves depends on whether the profile is in motion horizontally. If the profile of a wave moves relative to the medium, it is a progressive wave. If the profile does not move but merely oscillates in one place relative to the medium, forming and disappearing, it is a standing wave. The sketch attempts to suggest the difference.



We have already seen that the motion of a wave profile and the motion of the water particles are not the same. A wave in which the particle motion is entirely parallel to the direction in which the wave moves is called a longitudinal wave. One in which the motion is entirely perpendicular is called a transverse wave. Ocean surface waves belong to neither class, the water motions being circular, more or less, in the vertical plane.

Another important classification for us depends on the depth of the water. Physically, this is a recognition of the fact that water particle motion dies out with depth. If the bottom is far enough away, it does not interfere with the wave motion. If it is close to the surface, insufficient room is left for the water motion to develop and the waves will be affected. The classification is based on the ratio of the wave length  $L$  to the water depth  $h$ . If  $L/h$  is small, the wave is a deep-water or short wave. Physically, either the water is deep compared with the wave length or the wave length is short compared with the water depth. If  $L/h$  is large, then the wave is a shallow-water or long wave. The important feature of this classification is the relative depth. A tsunami with a wave length of hundreds of kilometers is a shallow-water wave in the deepest parts of the ocean. Ripples may be deep-water waves in a pond only a meter deep. Just how large and small large and small are is a question to be settled later.

All of these classifications are needed in discussions of ocean surface waves and will be used freely. The name applied at any particular point during a discussion is a clue to the aspect of the waves which is momentarily important.

### 1.3 The Component Sinusoid

Consider a cosine function. Analytically, it may be written as

$$(1.3:1) \quad \eta = A \cos(t)$$

or, more generally, as

$$(1.3:2) \quad \eta' = A \cos(t + \epsilon)$$

Plots of these functions give the very familiar wavelike Fig. 1.4-1.

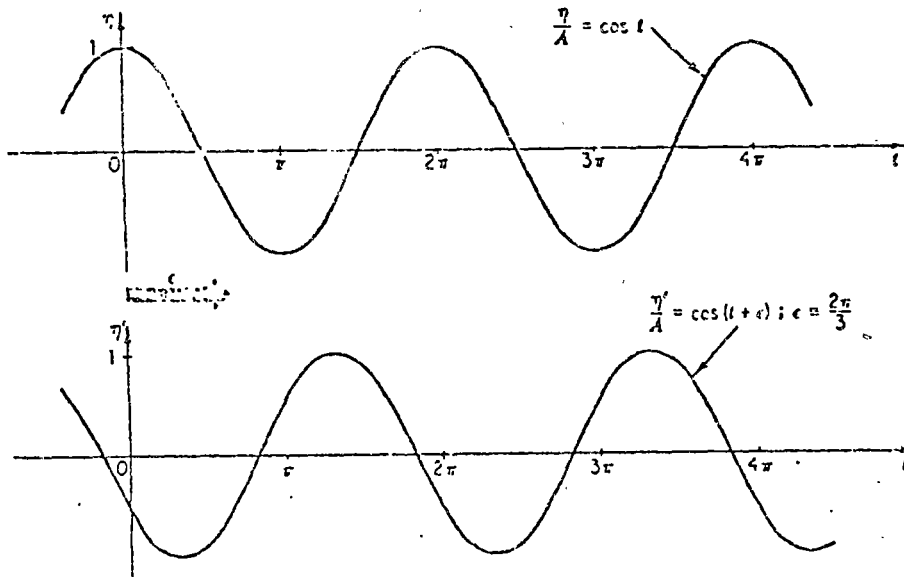


Fig. 1.4-1. Two sinusoids with a phase shift.

The  $\epsilon$  included in (1.3:2) is the phase shift whose effect is to move the curve rigidly along the  $t$ -axis. The figure has been drawn with a phase shift  $\epsilon = 120^\circ = 2\pi/3$  radians. This means that any characteristic feature or phase of the function  $\eta$  occurs  $2\pi/3$  earlier in the function  $\eta'$ .

The sine function is identical with the cosine function except for a phase shift of  $\pi/2$ , so that we can write

$$(1.3:3) \quad \eta'' = A \sin(t) = A \cos(t - \pi/2)$$

It is necessary to distinguish the sine from the cosine only if the phase shift of  $\pi/2$  is important. In situations where the phase is unimportant the term sinusoid applies to either indifferently.

Some people think analytically and some think geometrically. I find the geometric representation of the sinusoid very helpful. One usually first meets the sinusoid in trigonometry and learns to call it one of the "trigonometric" functions. It is there defined in terms of a right triangle:

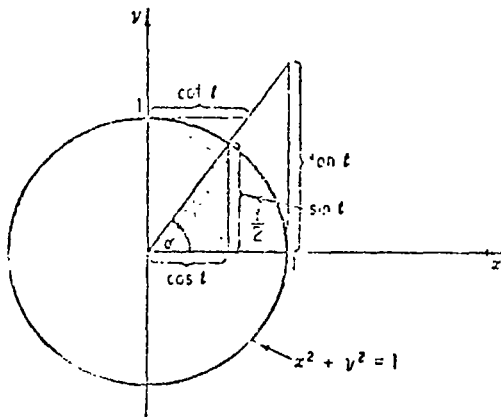
$$\cos \alpha = (\text{side adjacent})/(\text{hypotenuse})$$

$$\sin \alpha = (\text{side opposite})/(\text{hypotenuse})$$

The trigonometric functions are actually better called circular functions since by referring them to a circle they can be brought into a structure of functions referred generally to the conic sections: circular functions, elliptic functions, and hyperbolic functions. In the study of waves you need the entire set.

Consider Fig. 1.4-2(a). The circle has unit radius so that, on the basis of the trigonometric definition, the segment marked

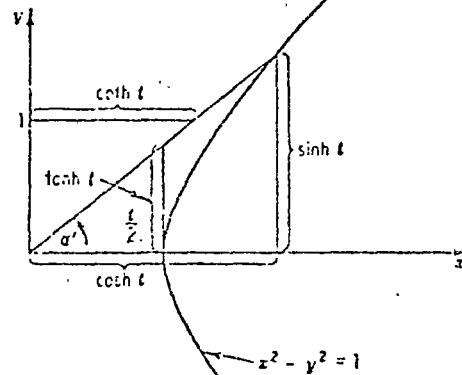
The unit circle and the circular functions



$t \equiv$  Double the area of the circular sector  
 $\alpha \equiv$  The central angle of the circular sector  
 $t = \alpha$

(a)

The unit rectangular hyperbola and the hyperbolic functions



$t \equiv$  Double the area of the hyperbolic sector  
 $\alpha' \equiv$  The angle of the hyperbolic sector  
 $t \neq \alpha'$

(b)

Fig. 1.4-2. The circular functions referred to the unit circle and the hyperbolic functions referred to the unit rectangular hyperbola.

"cos t" is cos  $\alpha$ . To bring the circular functions in line with the wider structure we need to redefine the argument,  $\alpha$ , the sector angle.

We need to use instead the area of the circular sector  $t$ . For the

circular functions this is a distinction without a difference. The area of a unit circle is  $\pi$ . The area of a circular sector is proportional to its angle so that  $(\alpha/2\pi) \times \pi = \alpha/2$  is the area and  $t = \alpha$ . For comparison the hyperbolic functions are shown in Fig. 1.4-2(b). They are not being dragged in here just to be perverse. We will have frequent use for them. The hyperbolic functions match the circular functions in every point. Instead of being referred to a unit circle they are referred to a unit rectangular hyperbola, analytically to  $x^2 - y^2 = 1$  which is the exact analog of the unit circle. The like-named segments will be found in corresponding positions in the two figures. The argument of the hyperbolic functions is double the area of the hyperbolic sector  $t$ . In this case the sector angle  $\alpha'$  is not equal to the double area  $t$ . This is why we had to redefine the argument of the circular functions to bring them into the wider context. With either the circular or the hyperbolic functions the area  $t$  is positive or negative according as the sector angle  $\alpha$  or  $\alpha'$  is positive or negative. The signs of the functions themselves are determined by the usual conventions for segments referred to Cartesian coordinates. In either case  $t$  ranges from  $-\infty$  to  $+\infty$ . To produce this effect for the circular functions the sector angle  $\alpha$  must range from  $-\infty$  to  $+\infty$ . For the hyperbolic functions  $\alpha'$  need range only from  $-\pi/4$  to  $+\pi/4$ .

The cosine function corresponds very closely to our most primitive intuitions of what a wave should be. For most people, a wave is synonymous with repetition. A wave is any phenomenon that cycles. And, for most of us, the properties of any kind of wave seem to be very closely associated with what we think we have

seen in waves on the surface of water. Suppose that the argument  $t$  is used as a measure of time and that at time zero we begin to watch either the ordinate or the abscissa of the intersection of a uniformly rotating ray with the unit circle, Fig. 1.4-4.

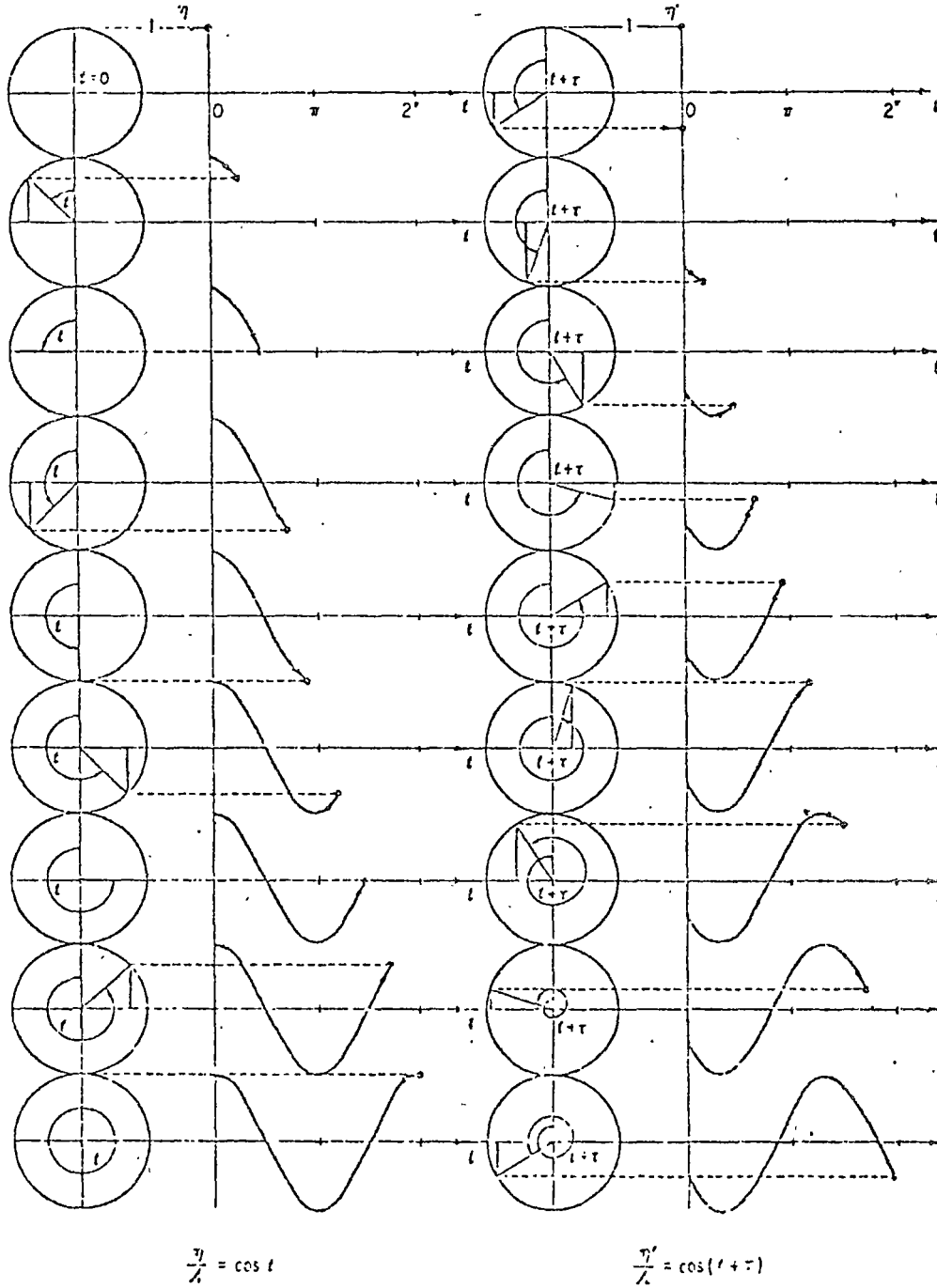


Fig. 1.4.4. The generation of a sinusoid by a uniform circular motion.

For comparison, the analog of Fig. 1.4-4 for the hyperbolic cosine is shown in Fig. 1.4-5. It is obvious that the hyperbolic cosine does not correspond to any intuitive notion of a wave.

Figure 1.4-4 shows the curves of Fig. 1.4-5 as generated by the uniformly rotating ray. Don't be misled by the fact that Fig. 1.4-4 spreads the motion out in space. For the moment we are using this only as a device to represent the passing of time. The actual observation might be a dot of light oscillating in a slit.

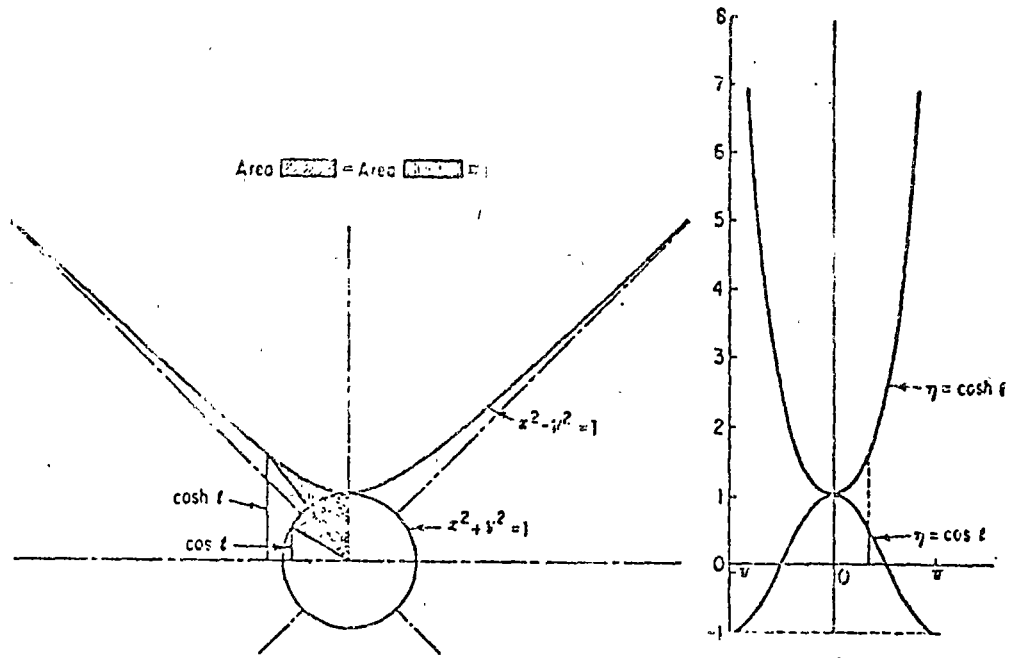


Fig. 1.4-5. Comparison of the cosine with the hyperbolic cosine.

The motion is easy to describe. From whatever position of phase the motion starts, the dot reaches a high point or crest and falls to a low point or trough, Fig. 1.4-6. We will define the wave

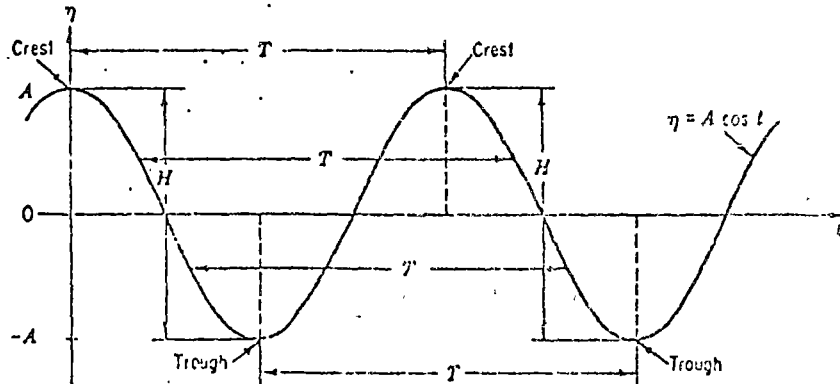


Fig. 1.4-6. Definition of wave terms for the sinusoid.

height H to be the difference in elevation between any crest and the succeeding trough. Since this wave is described by a cosine



function, all the crests and troughs will have the same elevations, respectively, so that all the wave heights will be equal. We can also define a wave amplitude  $A$  as half the wave height so that

$$(1.3:4) \quad H = 2A$$

Since the cosine function may be generated by a uniform motion on a circle, there will be a wave period  $T$  which is the time for one complete circuit of the generating point. In Fig. 1.4-6 it is the length on the time scale from any particular phase to its next repetition and will always be the same.

If we are observing at a point, we know nothing about any motion elsewhere. In the extreme, for all we know every point in space except the one we are watching may be at rest. This is rather unlikely for ocean surface waves. A more useful notion is that the surface is permanently deformed into the cosine function  $\eta = A \cos(x)$  which is being moved past our point of observation at a uniform speed. The plot of  $\eta = A \cos(x)$  will resemble Fig. 1.4-6 with the following changes: instead of time  $t$ , the horizontal axis will be length  $x$ ; the sinusoid is extended in space, not in time; instead of the period  $T$  we have the wave length  $L$ , which is the distance between repetitions of phase and is the same for all initial points. As the rigidly deformed surface passes your point of observation you will see it rise and fall with a period that depends on how fast the surface moves past you, i.e., on the phase speed  $c$ . Clearly, we have

$$(1.3:5) \quad c = L/T$$

We need not restrict ourselves to one dimension aligned with the  $x$ -axis as  $\eta = A \cos(x)$  suggests. If the entire  $x,y$ -surface is corrugated so that every section perpendicular to the  $y$ -axis is

identical with  $\eta = A \cos(x)$ , we will have ridges and troughs parallel to the y-axis and extending to infinity. Such waves are called long crested.

Our formulations of the long-crested sinusoid are too restricted. We need to be able to start them from any phase and to send them off in any direction. Starting them at any phase can be achieved by including an arbitrary phase shift  $\epsilon$ . Sending them off in any direction can be arranged by rotating the axes through an arbitrary angle  $\alpha$ . When this is done the long-crested sinusoid takes the general form

$$(1.3:6) \quad \eta = A \cos\{x \cos(\alpha) + y \sin(\alpha) + \epsilon\}$$

Its crests and troughs are perpendicular to a line which makes an angle  $\alpha$  with the x-axis and whose phase is shifted a distance  $-\epsilon$  measured perpendicular to the crest lines. Moving this general, long-crested sinusoid with a uniform speed  $c$  in the direction  $\alpha$  will produce a sinusoidal variation in elevation with time at any point of observation.

Any section through the long-crested sinusoid created by a plane perpendicular to the x,y-plane will be a sinusoid. If the section is parallel to the x-axis, then  $y = 0$  and  $\eta = A \cos\{x \cos(\alpha)\}$ . If it is parallel to the y-axis,  $x = 0$  and  $\eta = A \cos\{y \sin(\alpha)\}$ . The wave lengths will be  $L$  in the direction  $\alpha$ ,  $L/\cos(\alpha)$  in the x-direction, and  $L/\sin(\alpha)$  in the y-direction, Fig. 1.4-7 (page 34). Clearly, if a section is taken in the direction  $\alpha + \pi/2$ , the wave length becomes infinite. The wave length of a long-crested sinusoid is the length in the direction  $\alpha$  which makes it a minimum.

Circular functions are really rather dull. Once you have seen one for one period or over one wave length, it has no surprises for you.

A long-crested sinusoid is completely specified by five parameters: an amplitude  $A$  (or alternatively a height  $H$ ); two of the three parameters length  $L$ , period  $T$ , and phase speed  $c$ ; a phase shift  $\epsilon$ ; and a direction measured from the  $x$ -axis  $\alpha$ . When you know them you know all there is to know about the sinusoid. When the wave is aligned with the  $x$ -axis  $\alpha$  may be omitted leaving four parameters. A translation of the axes will then eliminate the phase lag leaving only three essential bits of information.

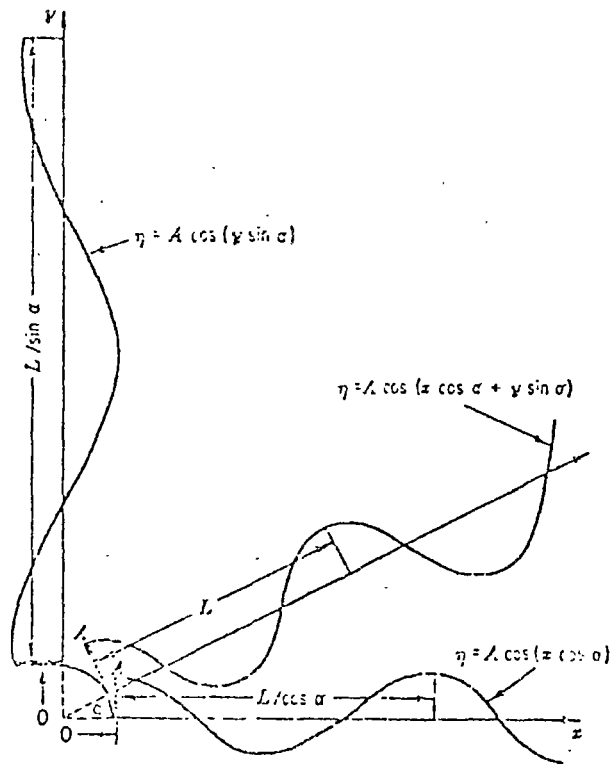


Fig. 1.4-7. Sections through a long-crested sinusoid not aligned with a coordinate axis.

Not only are sinusoids dull, but we never find wave profiles at sea which they describe very well. Our preoccupation with them arises from the fact that they are the components of the powerful technique of Fourier analysis. By adding many sinusoids, after properly adjusting their parameters, we can simulate very complex real sea surfaces. The Fourier method of analysis has proved to

be a very useful way to think about ocean waves and the fundamental ingredient of that mode of thought is the sinusoid.

Both the wave period  $T$  and the wave length  $L$  have a good natural physical feel to them. However, their reciprocals, which on first encounter may feel awkward, are often handier when it comes to mathematical manipulation. The reciprocals will feel good too when you have become used to them. We define the wave frequency by

$$(1.3:7) \quad \sigma' \equiv 1/T$$

and the wave number by

$$(1.3:8) \quad \kappa' \equiv 1/L$$

The dimensions of frequency are cycles per unit time. It tells you how often the cycle is repeated in unit time. The dimensions of wave number are cycles per unit length. It tells you how many times the wave pattern is repeated in a unit distance. In the course of many analyses the period and the length often occur in the combinations  $2\pi/T = 2\pi\sigma'$  and  $2\pi/L = 2\pi\kappa'$ . One gets tired of writing  $2\pi$  repeatedly and such repetition is a fertile source of mistakes.

If the  $2\pi$  is incorporated in the definitions of frequency and wave number as the unit, we get radian frequency and radian wave number:

$$(1.3:9) \quad \sigma \equiv 2\pi/T$$

and

$$(1.3:10) \quad \kappa \equiv 2\pi/L$$

and we need not write the  $2\pi$  explicitly. With these definitions the dimensions of frequency are radians per unit time and those of wave number are radians per unit distance. Whether you use frequency or radian frequency hardly matters. Suit you own convenience. The choice is trivial.

Substitution in (1.3:5) of either (1.3:7) and (1.3:8) or (1.3:9) and (1.3:10) gives

(1.3:11)  $c = \sigma/\kappa$

For a two-dimensional sinusoid, a long-crested sinusoid aligned with the x-axis, we have seen that an amplitude, a length, a period, and a phase shift were sufficient to specify the function exactly throughout all space and for all eternity. It can be written

(1.3:12)  $\eta = A \cos(\kappa x + \sigma t + \epsilon)$

since the wave length and wave period are interchangeable with the wave number and frequency. If we observe at a point and choose our initial time adroitly, (1.3:12) becomes

(1.3:13)  $\eta = A \cos(\sigma t)$

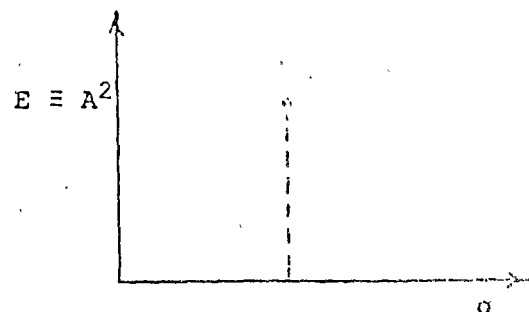
If we take an instantaneous snapshot of (1.3:12) again choosing our moment adroitly, we get

(1.3:14)  $\eta = A \cos(\kappa x)$

Adroit choice simply means that we don't care about the phase and thus begin at a crest, a situation that will recur frequently.

Equations (1.3:13) and (1.3:14) show us that, if phase is immaterial to us, a total of three parameters designates the whole family of cosines differing only by a phase shift. Further, if we are interested only in space behavior or

only in time behavior, two parameters will serve. For example, if I say that I have a sinusoid whose frequency is  $\sigma$  and the square of whose amplitude is  $A^2 \equiv E$ , you know just as much about it



as if I gave you (1.3:13) and told you that phase was unimportant.

Here is a portrait of equation (1.3:13) which is much easier to draw

than was Fig. 1.4-1. A single ordinate represents the family of sinusoids, the only information left out being the phase information. This representation will reach its maximum usefulness when we must keep track of many sinusoids at once. Each one becomes a point; the square of its amplitude being plotted at its appropriate frequency. A similar plot of  $A^2$  against wave number can represent equation (1.3:14). In either case, a plot of this sort is called a spectrum.

#### 1.4 The Sinusoid and the Sea

Now--how do the ocean surface waves we have described earlier compare with sinusoidal waves? If one mounts a wave-measuring instrument in a fixed position and records the changing water elevation, one gets the analog of  $\eta = A \cos(t + \epsilon)$  plotted in Fig. 1.4-1. I did this in a small bay and got the traces in Fig. 1.4-3. The differences in the three strips are due to chart speeds. The waves were more or less the same. About the only statement that holds for both Figs. 1.4-1 and 1.4-8 is that, as time passes, they both go up and down. You may feel

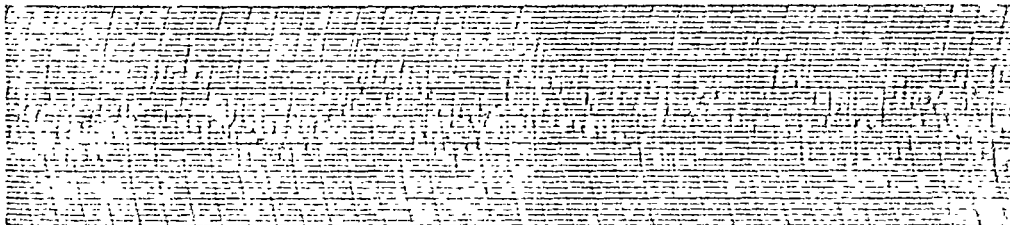
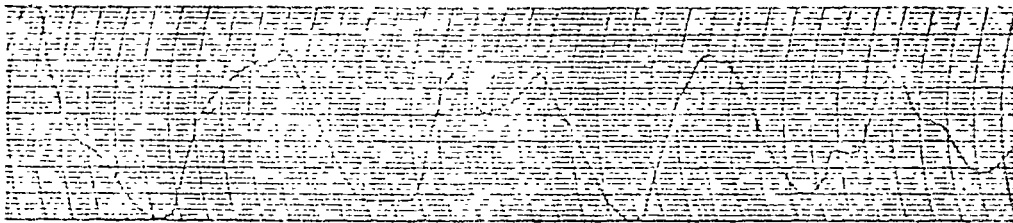


Fig. 1.4-8. Wave records made at a sheltered point in a small enclosed bay tributary to the Chesapeake Bay.

that waves measured in a small bay could not be representative of the ocean. If so, Fig. 1.4-9 on the next page shows records made off the coast of California. The traces are somewhat smoother than

those of Fig. 1.4-8 but no one would mistake them for the sinusoids of Fig. 1.4-1.

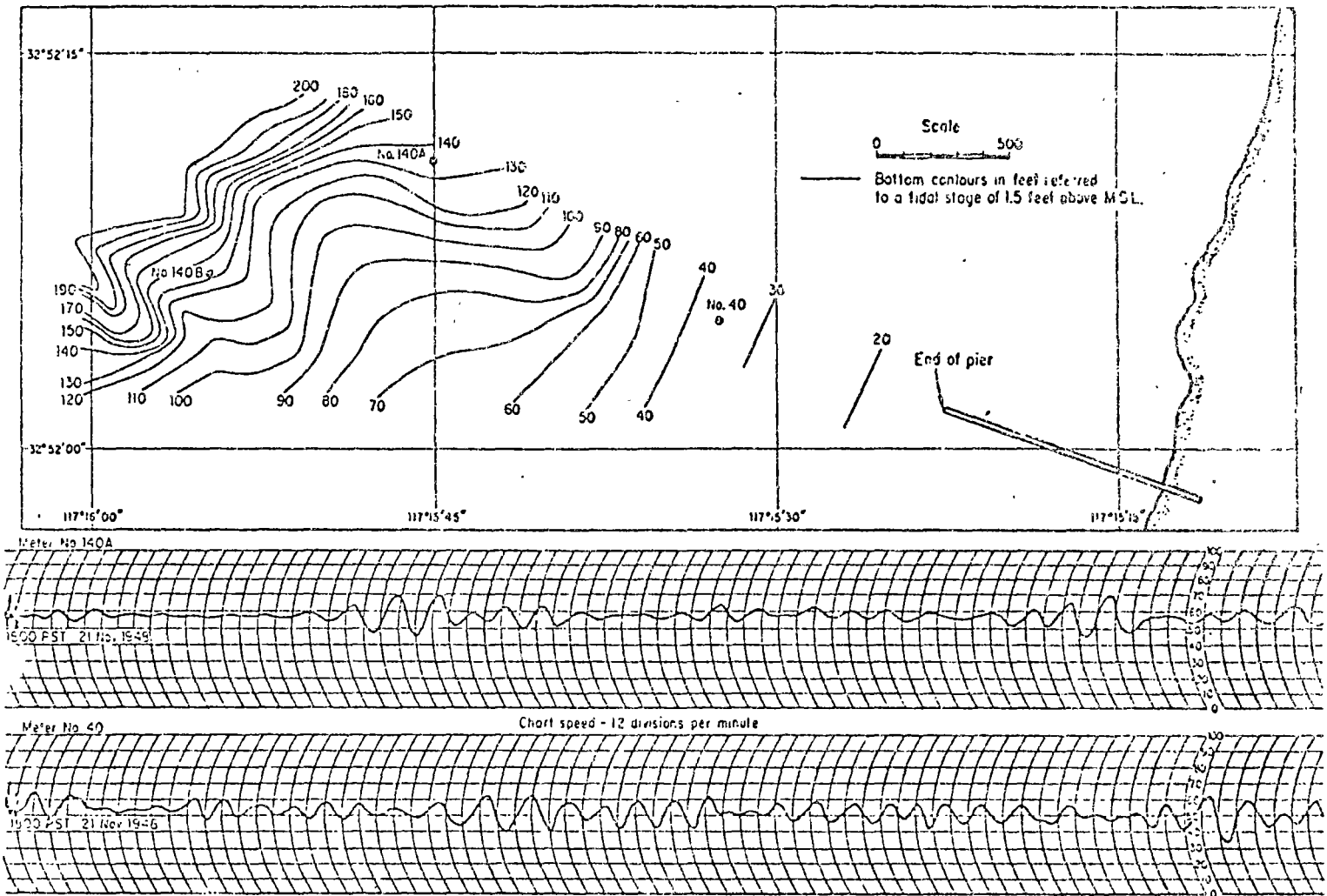


Fig. 1.4-9. Wave records made at unsheltered points in the Pacific Ocean near Scripps Institution of Oceanography.

We have identified the features of the sinusoid and named them. Can we find analogous features in the ocean wave records? For a sinusoid the wave height was defined as the difference in elevation between a crest and the next succeeding trough. Since we can identify both crests and troughs in the ocean wave record, we can apply the definition. What results is not a height  $H$  but many different heights  $H_i$ ;  $i = 1, 2, \dots$ . In the sinusoid we used symmetry to define the wave amplitude. In the sea records



there is no symmetry and the definition fails. The concept is meaningless for an irregular motion. For the sinusoid, when the single number  $H$  was given, there were no surprises. Each wave that passed had a height  $H$ . For the sea, no matter how many heights you have seen, you never know what's coming next. If there is a swell running, a knowledge of the 15 or 20 waves just past will make possible a pretty good guess at the heights of the next 2 or 3 waves. It will be useless for guessing the height of the 57th or 101st wave to follow. In a wind-driven sea even the next two or three waves can be a surprise. For the sinusoid, the definitions of length, wave number, period, frequency, and speed all depend on the idea of phase, which in turn requires that the record repeat itself exactly. No ocean wave record has yet been detected repeating itself exactly. No two ocean wave records have ever been found to duplicate each other. It is taken as axiomatic in the study of ocean waves that no sea surface ever repeats itself and that no two sea surfaces are ever exactly alike.

With records as variable as ocean wave records we must turn to statistics. We will be interested in averages of many kinds. For example, with the many wave heights we will talk about mean height  $\bar{H}$  and significant height  $\overline{H_{1/3}}$ , which is defined to be the mean of the one-third highest waves in a record. Clearly, when we merge details in averages we can hardly hope for an explicit deterministic description of the process. For the long-crested sinusoid we saw that, even under the most elaborate circumstances, five parameters are enough to pin it down completely. For ocean wave records, only an infinity of information could do the same job. The problem is really one of ordering chaos--not complete chaos,

of course, because by definition that would be impossible. We might reasonably call it first-order chaos and understand that to mean a situation in which the individual details are disorderly and unpredictable but where the statistics of large groups of individual details are orderly.

Unfortunately, it doesn't always seem crystal clear to everybody that the demand for a deterministic solution of the ocean wave problem is unreasonable. For one thing, ocean waves seem to be somewhat more accessible than are, say, the velocities and positions of individual gas molecules. For another, if you avoid going to sea, you can idealize the problem to the point where the mathematics becomes just barely endurable. The result is a stock of quite elegant "solutions" to the problem. The trouble is that the "problem" solved by the solutions is not the problem of ocean surface waves.

Of course statistics have always been used in treating real waves but until recently they have stood in relation to the solution of boundary-value problems as the politician stands to the statesman. The services are acceptable but the connection is hardly to be admitted. Since 1950 the most marked change in the study of ocean waves has been the frank admission that the problem is essentially statistical, that the deterministic formulation plays an auxiliary role, and that partial information about the wave motion is quite adequate for many many purposes. The politicians have taken over from the political scientists. The results have been quite nice. We now have solutions for a number of mundane difficulties and the theorists have had a new stimulus to speculation.

We have already cautioned against confusing the period  $T$  with the "period"  $\bar{T}$ . Choices of differentiating symbols and careful use of language are very good things as they permit us to distinguish and differentiate concepts. It is rather like making a measuring instrument more sensitive. One of the relations we will prove later for sinusoids is that

$$L = (g/2\pi)T^2$$

If one is busy sweeping statistics under the rug, it is easy to assume that the means  $\bar{L}$  and  $\bar{T}$  derived from irregular sea waves obey the same relation and that, in some sense, the irregular sea is equivalent to a pure sinusoid with length  $L = \bar{L}$  and period  $T = \bar{T}$ .

As a matter of fact

$$\bar{L} \neq (g/2\pi)\bar{T}^2$$

and both ideas are sheer nonsense. The mathematical properties of averages are not necessarily the mathematical properties of the analogous quantities for pure sinusoids. Failure to recognize this has created more confusion than one likes to think about.

It is very easy to forget the chaotic state of the sea when one is engaged in theoretical or modeling studies. Our means are seldom commensurate with our ends and the only way to make progress is to simplify and regularize. When one has given great effort and thought to a problem one has an emotional investment in any results obtained. It is very difficult for any man to evaluate justly the distance his work lies from "physical reality," or even the distance it lies from the problem he would like to have solved. Most of us need to be reminded. Therefore, once again, go wave watching. If you will watch waves with a seeing eye, you will never confuse the regularity of any simplified approximation like the sinusoid with ocean waves as they really are.

We now have some idea of the things that need to be explained and we have explored one profile, the sinusoid, that might model a wave. We do not yet know under what circumstances, if at all, the water motions might be persuaded to produce a sinusoid on the water surface. We do know that the water motions must conform to the laws of Newtonian physics. Thus, our immediate job is to lay out our tools from our Newtonian tool kit.

## 2. Hydrodynamics

### 2.1 The Equation of Motion: Conservation of Momentum

Newton's second axiom or law of motion says: "The change of motion is proportional to the motive force impressed; and is made in the direction of the right line in which the force is impressed."

More briefly in vector symbols,

$$\vec{a} \sim \vec{f} \quad .$$

To make an equation of the proportionality we include a constant of proportionality  $m$ , the mass, and write

$$m\vec{a} = \vec{f} \quad .$$

The forces acting on water may be either body forces, those which act equally on all parts of a mass, or surface forces, those which act only on the surfaces of the mass. The principal body forces are gravity and Coriolis forces. The principal surface forces are the pressure-force and the fictional or viscous force.

Let

- $\vec{p} \equiv$  the pressure force per unit mass,
- $\vec{g} \equiv$  the gravity force per unit mass,
- $\vec{c} \equiv$  the Coriolis force per unit mass, and
- $\vec{m} \equiv$  the frictional force per unit mass.

Then the change of motion  $\vec{a}$ , the acceleration, can be written as

$$\vec{a} = \vec{p} + \vec{g} + \vec{c} + \vec{m}$$

if we assume that the net force per unit mass is the vector sum of all the forces per unit mass.

For gravity waves the Coriolis and frictional forces per unit mass are negligible in comparison with the pressure and gravity forces per unit mass and we can use the approximation

$$\vec{a} = \vec{p} + \vec{g} \quad .$$

These forms of the conservation of momentum are not well adapted to discussions of fluids. We need equivalent forms which are.

The left-hand side is the vector acceleration which, as you know, can be written as the rate of change of the velocity  $\vec{u}$ . In component form the velocity is

$$\vec{u} = \vec{x}_1 u_1 + \vec{x}_2 u_2 + \vec{x}_3 u_3$$

where the  $\vec{x}_i$  are the unit coordinate vectors. You are used to using the material or Stokes derivative

$$D/Dt = \partial/\partial t + u_j (\partial/\partial x_j)$$

to express the total rate of change of any scalar quantity.

Mathematically,  $D/Dt$  manipulates exactly like the  $d/dt$  of ordinary calculus. The right-hand side simply gives you the details of the change. The  $\partial/\partial t$  specifies whatever change there may be in the absence of motion while the  $u_j (\partial/\partial x_j)$  gives the point by point changes in the scalar property brought about by the transport,  $u_j$ , of unevennesses,  $\partial/\partial x_j$ .

Since the velocity components are scalars, we can write the total rate of change in each component as the sum of the local rate of change plus the advective rate of change, i.e., as

$$Du_i/Dt = \partial u_i/\partial t + u_j (\partial u_i/\partial x_j) \quad ; i = 1, 2, 3 \quad (\text{tensor})$$

or

$$Du_i/Dt = \partial u_i/\partial t + (\vec{u} \cdot \nabla) u_i \quad ; i = 1, 2, 3 \quad (\text{vector})$$

where  $\nabla$  is the "nabla" operator--sometimes miscalled the "del" operator,

$$\nabla \equiv \vec{x}_1 (\partial/\partial x_1) + \vec{x}_2 (\partial/\partial x_2) + \vec{x}_3 (\partial/\partial x_3)$$

However, the material derivative form can not be used for vectors.

The total rate of change of the vector velocity takes the form

where

$$D\vec{u}/Dt = \partial\vec{u}/\partial t + \vec{u} \cdot \nabla(\vec{u}^2) + \vec{\omega} \times \vec{r}$$

and

$$\vec{u}^2 \equiv \vec{u} \cdot \vec{u} = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2$$

$$\vec{\omega} \equiv \text{the curl of } \vec{u}$$

$$\vec{\omega} = \nabla \times \vec{u} = \text{curl } \vec{u} = \begin{vmatrix} \vec{x}_1 & \vec{x}_2 & \vec{x}_3 \\ \partial/\partial x_1 & \partial/\partial x_2 & \partial/\partial x_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{vmatrix}$$

The pressure-force per unit mass is a gradient force and can be shown to have components

$$-(1/\rho) (\partial p / \partial x_i) \quad ; \quad i = 1, 2, 3$$

so that in vector notation

$$\vec{p} = -(1/\rho) \nabla p$$

where  $\rho$  is the fluid density.

The coordinate axes are usually chosen so that the  $x_3$ -axis is aligned with the gravity force per unit mass,  $\vec{g}$ , and directed toward the zenith. When this is done the components of  $\vec{g}$  are

$$\vec{g} = (0, 0, -g)$$

In component form Newton's second law then reads

$$\begin{aligned} (2.1:1) \quad Du_1/Dt &= -(1/\rho) (\partial p / \partial x_1) \\ Du_2/Dt &= -(1/\rho) (\partial p / \partial x_2) \\ Du_3/Dt &= -(1/\rho) (\partial p / \partial x_3) - g \end{aligned}$$

Should other surface and body forces be important, we can allow for them by supplying nonspecific place-holders,  $\vec{S} = \vec{x}_i S_i$  for the surface forces per unit mass and  $\vec{B} = \vec{x}_i B_i$  for the body forces per unit mass. Then, instead of (2.1:1) we will have

$$\begin{aligned} (2.1:2) \quad Du_1/Dt &= -(1/\rho) (\partial p / \partial x_1) + S_1 + B_1 \\ Du_2/Dt &= -(1/\rho) (\partial p / \partial x_2) + S_2 + B_2 \\ Du_3/Dt &= -(1/\rho) (\partial p / \partial x_3) + S_3 - g + B_3 \end{aligned}$$

The unspecified surface and body forces may represent the frictional and Coriolis forces we have neglected.

You should realize clearly that equations (2.1:1) and (2.1:2) have added nothing to Newton's original statement. They still say no more than "acceleration is proportional to force." The original proportionality has simply been run over to a set of component equations by inserting the constant of proportionality, mass, and referring the forces and motion to a specific set of Cartesian coordinate axes.

## 2.2 The Equation of Continuity: Conservation of Mass

The proposition that matter, mass, can be neither created nor destroyed is one that we Newtonian physicists cling to in spite of Einstein's  $e = mc^2$ . Our version of it in tensor notation is

$$(2.2:1) \quad \text{or} \quad \begin{aligned} \partial \rho / \partial t + \partial (\rho u_i) / \partial x_i &= 0 \\ \partial \rho / \partial t + \nabla \cdot (\rho \vec{u}) &= 0 \end{aligned}$$

in the vector version. We call it the equation of continuity.\*

---

\* If you want to see how you start with the principle of the conservation of matter and come out with this, and why we fluid mechanics prefer the name "continuity" read "Wind Waves," pages 59-69.

---

Manipulation of (2.2:1) produces the equivalent forms:

$$\begin{aligned} & (1/\rho) (D\rho/Dt) + \partial u_i / \partial x_i = 0 && \text{(tensor)} \\ \text{and} & && \\ & (1/\rho) (D\rho/Dt) + \nabla \cdot \vec{u} = 0 && \text{(vector)} \end{aligned}$$

If the fluid is incompressible, there can be no change in the fluid density , i.e., we must have

$$D\rho/Dt \equiv 0$$



Thus, for an incompressible fluid the equation of continuity becomes

$$(2.2:2) \quad \text{or} \quad \begin{aligned} \partial u_i / \partial x_i &= 0 && \text{(tensor)} \\ \nabla \cdot \vec{u} &= 0 && \text{(vector)} \end{aligned}$$

In words, there can be no divergence of the velocity in an incompressible fluid.

A fluid is called incompressible if the density of any fluid element remains constant. Note that this does not imply that the density of the entire fluid is constant and uniform. The frame of mind is Lagrangian. You must have  $D\rho/Dt \equiv 0$ , but  $\partial\rho/\partial t$  need not be.

2.3 The Wave Equation for a Progressive Wave with a Rigid Profile Traveling at Constant Phase Speed

If the fluid surface is given a permanent deformation at time  $t = 0$ ,  $\eta = \eta(x_1, x_2)$ , which is then displaced at a constant speed  $c$ , it can be shown that the equations of motion and continuity can be combined and written in terms of the surface deformation  $\eta$  as

$$(2.3:1) \quad \text{or} \quad \begin{aligned} \partial^2 \eta / \partial x_i^2 &= (1/c^2) (\partial^2 \eta / \partial t^2) && \text{(tensor)} \\ \nabla^2 \eta &= (1/c^2) (\partial^2 \eta / \partial t^2) && \text{(vector)} \end{aligned}$$

where

$$\nabla^2 \equiv \partial^2 / \partial x_1^2 + \partial^2 / \partial x_2^2 + \partial^2 / \partial x_3^2 \equiv \partial^2 / \partial x_i^2$$

is the Laplace operator.\*

---

\* For details see "Wind Waves," pages 69-72.

---

This is the "wave" equation. It still says no more than, "acceleration is proportional to force" and "matter is conserved."

The wave equation is a hyperbolic partial differential equation. As such, it describes a physical situation in which a localized disturbance (energy) is propagated through space and time and in which the disturbance travels through the medium without giving it, as a whole, any permanent displacement. These are the essential features of wave motion; not, repeat NOT, regular oscillations. In a sense, a wave may be thought of as a bit of information which is known at one place and time but which will be known at another place only at a later time.\*

---

\* For a discussion of the relation of hyperbolic equations to elliptic and parabolic equations and the relation of all three to physical phenomena see "Wind Waves," pages 73-78. See also "Potential Theory in Science and Technology:" lecture prepared for Dr. Sen, Instituto de Ingenieria, UNAM, 14 October 1975.

---

#### 2.4 "Solution" of the Wave Equation

Our immediate task is to "solve" the wave equation. In the absence of specific initial and boundary conditions "solve" means determine what classes of functions are compatible with the restrictions stated by the wave equation, i.e., compatible with conservation of momentum and mass.

For simplicity we will consider the wave equation in one space dimension,

$$(2.4:1) \quad \partial^2 \eta / \partial x^2 = (1/c^2) (\partial^2 \eta / \partial t^2)$$

The most general solution is easily gotten by a method due to

D'Alembert. Make a change of variable by setting

$$u \equiv x - ct \quad \text{and} \quad v \equiv x + ct$$

Then equation (2.4:1) reduces to

$$(2.4:2) \quad (\partial^2 \eta) / (\partial u \partial v) = 0$$

The solution of (2.4:2) can be had by inspection. Any function of  $u$  and  $v$  whose crossed partial derivative is zero must, on partial differentiation by  $u$ , yield a function of  $u$  only so that the next partial differentiation by  $v$  will give zero; similarly if we begin with  $v$ . The most general function that meets this requirement is

$$\eta(u, v) = f(u) + g(v)$$

or, to return to the original variables,

$$(2.4:3) \quad \eta(x, t) = f(x - ct) + g(x + ct)$$

What does (2.4:3) tell us? For one thing, it says that  $c$  must have dimensions. Since  $x$  has the dimension of length and  $t$  the dimension of time, unless  $c$  has the dimensions of speed,  $LT^{-1}$ , the indicated operations  $x \pm ct$  will be nonsense.

The functions  $f$  and  $g$  can be almost any sort of functions but, since (2.4:3) is to be a solution of (2.4:1), they will have to be twice differentiable with respect to  $x$  and  $t$ . If they were not, they would be pretty strange "solutions" since  $\eta_{xx}$  and  $\eta_{tt}$  would not be available for substitution in (2.4:1).

Suppose that  $g(x + ct) \equiv 0$ . Then  $\eta(x, t) = f(x - ct)$ . Let  $f$  be any suitable function, let  $t = 0$ , and plot  $f(x)$ , Fig. 2.4-1(a). (Next page.) Any particular feature of the function will be located at some particular  $x$ -value  $\xi$ , i.e.,  $x - ct = \xi$  when  $t = 0$ . Where will the same feature be after a time  $t = t_1$ ? To get the same value from the function  $f$  the argument must still be the same,

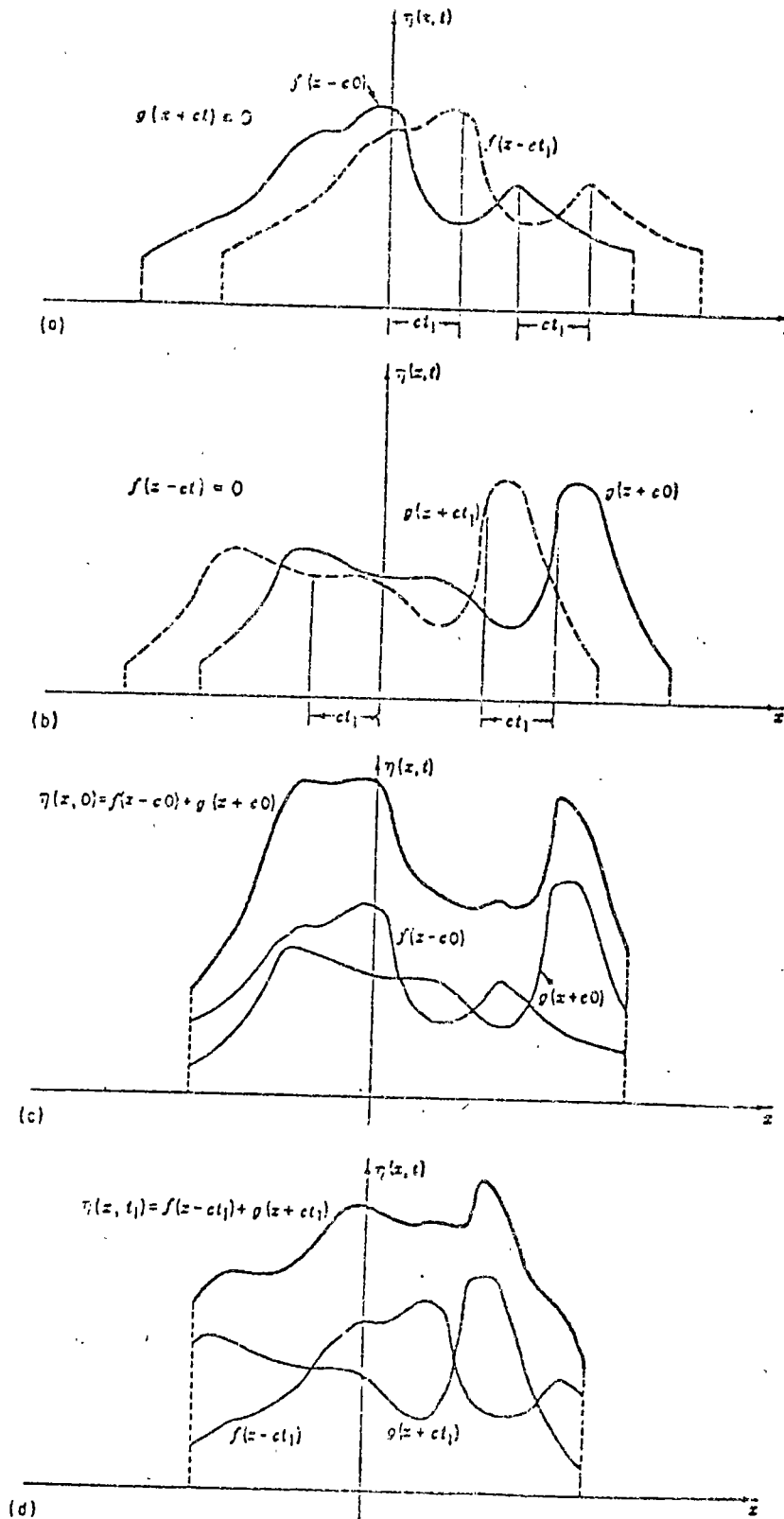


Fig. 2.4-1. The movement and combination of waves with rigid profiles.

$x - ct_1 = \xi$  or  $x = \xi + ct_1$ . Thus, the feature you are watching has moved a distance  $ct_1$  in the positive  $x$ -direction. Any function

whose argument is the combination  $x - ct$  is a wave with a rigid profile moving in the positive  $x$ -direction at constant speed  $c$ .

By a similar discussion, any function whose argument is the combination  $x + ct$  is a wave with a rigid profile moving in the negative  $x$ -direction at constant speed  $c$ , Fig. 2.4-1(b).

The general solution is the sum of these two rigid profiles traveling in opposite directions. As indicated in Fig. 2.4-1(c) and (d), the resulting sum is a time-varying profile which is not necessarily rigid at all.

In the general solution,  $f$  and  $g$  may be any twice differentiable function of  $x$  and  $t$ . Perhaps the simplest nontrivial choice would be a harmonic function. Suppose  $g(x, t) \equiv 0$  and

$$(2.4:4) \quad f(x, t) = a \cos\{m(x - ct)\}$$

The constant  $m$  with dimension  $L^{-1}$  must be included since  $x - ct$  has dimension  $L$  and the argument of a harmonic function must be a pure number.

Since we have already seen that wave speed can be written in terms of frequency and wave number  $c = \sigma/\kappa$ , (2.4:4) can be written

$$\eta(x, t) = a \cos\{(m/\kappa)(\kappa x - \sigma t)\}$$

or, if we set  $m \equiv \kappa$ ,

$$(2.4:5) \quad \eta(x, t) = a \cos(\kappa x - \sigma t)$$

This is a rigid cosine curve moving in the positive  $x$ -direction at a constant speed  $c$ . Its frequency is  $\sigma$  and its wave number is  $\kappa$  while  $a$  is its amplitude. Since it moves it is a progressive wave.

The same wave moving in the negative  $x$ -direction would be given by setting  $f(x - ct) \equiv 0$  and  $g(x + ct) \equiv a \cos\{m(x + ct)\}$  so that

$$(2.4:6) \quad \eta(x, t) = a \cos(\kappa x + \sigma t)$$

The wave equation is linear homogeneous as each term is of the first degree in  $\eta$  or its derivatives. Consequently, the principle of superposition holds. The principle of superposition says that if  $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_k$  are any  $k$  solutions of a linear homogeneous equation, then

$$\eta \equiv a_1 \eta_1 + a_2 \eta_2 + \dots + a_k \eta_k$$

is also a solution of the linear homogeneous equation where the  $a_1, a_2, \dots, a_k$  are arbitrary constants.

Since (2.4:5) and (2.4:6) are solutions of (2.4:1)--you can verify this by substitution--and since (2.4:1) is linear homogeneous,

$$(2.4:7) \quad \eta(x, t) = a \cos(kx - \sigma t) + a \cos(kx + \sigma t)$$

is also a solution of (2.4:1). Factoring out the  $a$  and applying the angle sum and difference identities of trigonometry brings

(2.4:7) to

$$(2.4:8) \quad \eta(x, t) = 2a \cos(kx) \cos(\sigma t)$$

That this is, in fact, a solution of (2.4:1) is easily verified by substitution.

We have arrived at (2.4:8) by adding two identical progressive cosine waves; one moving to the right and the other to the left. The result is a standing wave that moves in neither direction. There are positions that never change elevation and there are times when the entire surface is perfectly flat. Suppose that we are using radian frequency and wave number,  $\sigma \equiv 2\pi/T$  and  $\kappa \equiv 2\pi/L$ . If  $x_v = \{(2v - 1)/4\}L$  with  $v$  an integer, then  $\cos(\kappa x_v) \equiv 0$  and  $\eta(x_v, t) = 0$  for all times  $t$ . The values of  $x_v$  are called the nodes of the standing wave. The intervals between nodes are called loops. Similarly, at times  $t = \{(2\mu - 1)/4\}T$ ,  $\mu$  an integer,  $\cos(\sigma t_\mu) \equiv 0$  and, consequently,  $\eta(x, t_\mu) \equiv 0$  for all positions  $x$ .

Crests and troughs can appear only in those positions for which  $\cos(\kappa x) = \pm 1$ , i.e., for  $x = (v/2)L$ ,  $v$  an integer. If the two cosine factors are of the same sign, the result will be a crest, if of opposite sign, a trough.

I want to stress the fact that if you were to observe the motion described by equation (2.4:8), you would see a standing wave sloshing up and down and going nowhere. If you were not privy to the generating mechanism, you would not know that the mechanism producing what you saw was a pair of identical rigid sinusoidal progressive waves traveling in opposite directions. It might have been done some other way. What you can observe is the gross motion. If you choose to think of it as "composed," that is your business--and it may even be so.

The complete solution of a differential equation requires a particular solution in addition to the general solution. Particular solutions of equation (2.4:1) can be had by the method of separation of variables. One begins by assuming that there is a solution, and that it has the special form

$$\eta(x, t) = X(x)T(t)$$

i.e., that the solution is separable into the product of two functions, one exclusively a function of  $x$  and the other exclusively a function of  $t$ . This is an assumption. First of all, there may be no solution at all and second, if there is, it may not have the highly special form assumed. For the wave equation neither of these difficulties arises. There are three such particular solutions:

$$(2.4:9.1) \quad \eta(x, t) = (c_1 \exp\{\kappa x\} + c_2 \exp\{-\kappa x\})(c_3 \exp\{c\kappa t\} + c_4 \exp\{-c\kappa t\})$$

when  $\kappa^2 > 0$

$$(2.4:9.2) \quad \eta(x,t) = (c_5x + c_6)(c_7t + c_8)$$

when  $\kappa^2 = 0$

$$(2.4:9.3) \quad \eta(x,t) = (c_9 \cos(\kappa x) + c_{10} \sin(\kappa x)) (c_{11} \cos(ckt) + c_{12} \sin(ckt))$$

when  $-\kappa^2 > 0$  .\*

---

\* If you want the details look at "Wind Waves," pages 82-84.

---

The  $c_1, c_2, \dots, c_{12}$  are constants of integration. The  $c$  is a parameter specified by the original wave equation. The  $\kappa$  is a "free" parameter which emerges during the course of the analysis and will have to be determined by the boundary and initial conditions. Proper selection of the constants of integration in particular solution (2.4:9.3) will yield the progressive and standing waves (2.4:5, 6, and 8) already discussed.

Our discussion has been given in one space variable but there is nothing inherent that limits it to that.

$$\eta(\vec{x}, t) = f(\vec{k} \cdot \vec{x} - \sigma t) + g(\vec{k} \cdot \vec{x} + \sigma t)$$

or, in tensor form,

$$\eta(\vec{x}, t) = f(\kappa_i x_i - \sigma t) + g(\kappa_i x_i + \sigma t)$$

where  $\vec{x}$  is a position vector and  $\vec{k}$  is the vector wave number, is a solution of

$$\partial^2 \eta / \partial x_i^2 = (1/c^2) (\partial^2 \eta / \partial t^2)$$

with

$$|\vec{k}| = \sigma c.$$

You may use as many "space" dimensions as are appropriate to your problem. The various special forms of the wave equation for cylindrical symmetry and spherical symmetry can be found in Coulson (1949). The solutions we have been discussing are not restricted to ocean waves. They apply to any sort of wave in any medium in any number of space dimensions if it obeys the linear wave equation. To find ocean wave solutions we must impose the appropriate boundary conditions.



## 2.5 Vorticity

What I hope to do is say, "The fluid is irrotational," and be understood both mathematically and physically. We haven't time to go into elementary fluid mechanics here so all I can do is make a few superficial noises in the hope that they will remind you of what you presumably already know.\*

---

\* A detailed discussion can be found in "Wind Waves," pages 84-92.

---

When you apply force to a solid, say hitting a pool ball with a cue, it can respond in two ways. If you hit it dead center, it moves off in translatory motion. If you hit it off center, put "English" on it, it spins in addition to translating. What the solid doesn't do is change its shape.

If you apply force to a fluid, it can do all three--and usually does. If you apply force to a differential sized spherical fluid element, it shortly become ellipsoidal. An ellipsoid is described in terms of its axes. These are the lines along which there are no shears; only compressions or extensions. Generally, these axes are not only growing or shrinking but they are also being translated bodily as a whole and spinning as well.

In these terms we can make a stab at a physical description of vorticity. If you pick a fluid point at an instant of time, there will be three mutually perpendicular lines oriented so that, used as axes, there will be no shears; only extensional strains. Let these lines be attached to the fluid particles through which they happened to pass and let them "go with" the fluid for a brief time  $\delta t$ . Since the shears are zero the lines remain perpendicular, at least to first order in  $\delta t$ , but they change their orientation. The

vorticity  $\vec{\omega}$  is double the angular velocity of the triple of lines relative to their instantaneous position.

Please note that vorticity is an "infinitesimal" property. It is the "spin" of differential sized elements of fluid--another of those mathematical formulations "in the small." Don't expect to be able to see it by sticking paddle wheels or old aluminum filings in the water. Anything you can measure in the line of vorticity will be an integrated effect.

And don't let your intuition get out of hand. A fluid motion can follow a curved path and have no vorticity. It can follow a rectilinear path and have large amounts of vorticity.

In general, fluid motion will be irrotational if it is the result of conservative forces. It will also be irrotational if the density of the fluid is either uniform or a function of pressure only, i.e., autobarotropic. Oceanographers please note: sea water is not autobarotropic.

The vorticity is given by the curl of the velocity. For operational purposes, the vorticity can be remembered as

$$(2.5:1) \quad \text{curl } \vec{u} = \nabla \times \vec{u} = \begin{vmatrix} \hat{x}_1 & \hat{x}_2 & \hat{x}_3 \\ \partial/\partial x_1 & \partial/\partial x_2 & \partial/\partial x_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{vmatrix}$$

For irrotational motion we have

$$(2.5:2) \quad \text{curl } \vec{u} = 0 \quad \text{or} \quad \nabla \times \vec{u} = 0$$

Explicitly, zero vorticity or irrotational flow means

$$0 = \hat{x}_1 (\partial u_3 / \partial x_2 - \partial u_2 / \partial x_3) + \hat{x}_2 (\partial u_1 / \partial x_3 - \partial u_3 / \partial x_1) + \hat{x}_3 (\partial u_2 / \partial x_1 - \partial u_1 / \partial x_2)$$

A vector is zero if, and only if, its components are separately zero, so that for irrotationality we require the three simultaneous relations

$$\begin{aligned} & \partial u_3 / \partial x_2 - \partial u_2 / \partial x_3 = 0 \\ (2.5:3) \quad & \partial u_1 / \partial x_3 - \partial u_3 / \partial x_1 = 0 \\ & \partial u_2 / \partial x_1 - \partial u_1 / \partial x_2 = 0 \end{aligned}$$

## 2.6 Stream Function, Velocity Potential, and Laplace's Equation

This is another one of those matters which will have to go by the board on the assumption that you are already familiar with it.\*

---

\* If you are not, "Wind Waves," pages 92-101.

---

The real reason for bothering with streamfunctions and velocity potential functions is convenience. We usually use rectangular Cartesian coordinates and, in general, fluid flows will cross the coordinate grid at odd and changing angles. A coordinate system in which the flow is always either parallel to the lines of the grid or perpendicular to them would be handy. In addition, the stream function and velocity-potential function are scalar functions from either of which the vector velocity field can be recovered by differentiation. The arithmetic of scalars is much easier than the arithmetic of vectors. To manipulate the velocity we work with the streamfunction or with the velocity-potential function and get from it the velocity whenever we want it.

The stream function and the velocity-potential function are simply mathematical artifacts from which we can construct a locally orthogonal grid of streamlines and equipotential contours such that the velocity is always parallel to the streamlines and always perpendicular to the equipotential contours in a two-dimensional flow.

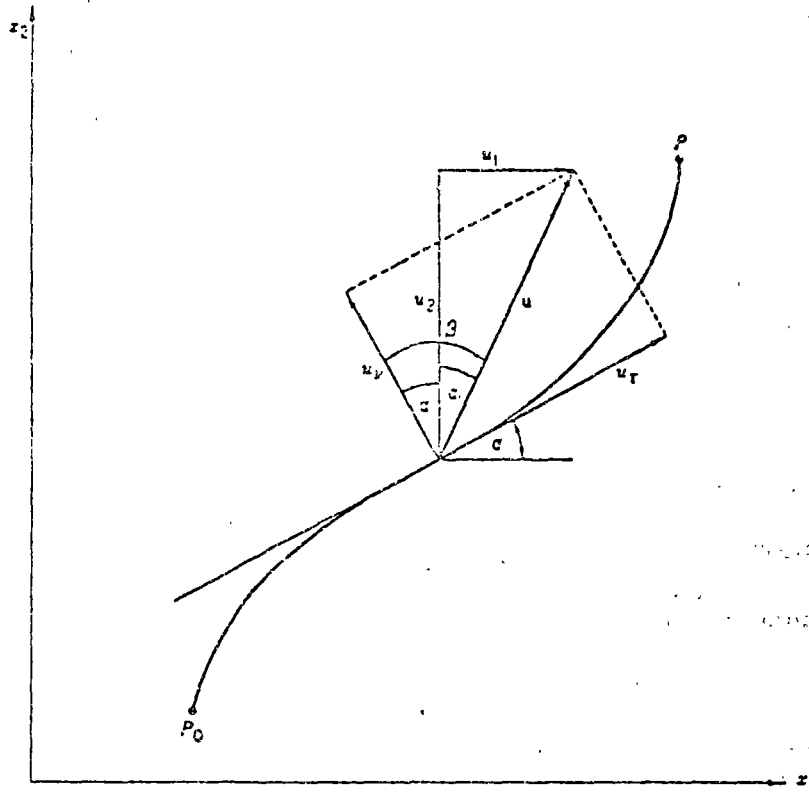


Fig. 2.6-1.

The stream function is defined by the contour integral

$$(2.6:1) \quad \psi(x_1, x_2; t) \equiv \int_{P_0}^P u_n ds$$

where

$u_n \equiv$  the normal component of  $\vec{u}$  along the path of integration from  $P_0$  to  $P$ .

The potential function is defined by the contour integral

$$(2.6:2) \quad \phi(x_1, x_2; t) \equiv - \int_{P_0}^P u_t ds$$

where

$u_t \equiv$  the tangential component of  $\vec{u}$  along the path of integration from  $P_0$  to  $P$ .

The streamlines and contours of equipotential are the paths traced out by  $P$  when  $\psi(x_1, x_2)$  and  $\phi(x_1, x_2)$  are constant.

Since the velocity is everywhere parallel to  $\psi = \text{a constant}$  and everywhere perpendicular to  $\phi = \text{a constant}$ , we have

$$\begin{aligned} u &\doteq - d\psi/dv \\ \text{where} \\ u &\equiv |\vec{u}| \end{aligned}$$

In words, the velocity along a stream line is proportional to the crowding of the streamlines. The more crowded they are, the faster the flow is moving. Similarly,

$$u = - d\phi/dv$$

But--can we always get stream functions and potential functions for any flow? Unfortunately, no! The mathematical requirement for the existence of  $\psi$  as given by (2.6:1) is

$$(2.6:3) \quad \partial u_1/\partial x_1 + \partial u_2/\partial x_2 = 0$$

and for the existence of  $\phi$  as given by (2.6:2) is

$$(2.6:4) \quad \partial u_1/\partial x_2 - \partial u_2/\partial x_1 = 0$$

In other words, the stream function  $\psi$  exists if, and only if, the flow is nondivergent. The velocity-potential function  $\phi$  exists if, and only if, the flow is irrotational. If the flow is both non-divergent and irrotational, the desired distorted grid exists; otherwise not.

The components of the velocity referred to the rectangular Cartesian axes are given either by

$$(2.6:5) \quad u_1 = - \partial\psi/\partial x_2 \quad \text{and} \quad u_2 = \partial\psi/\partial x_1$$

or by

$$(2.6:6) \quad u_1 = - \partial\phi/\partial x_1 \quad \text{and} \quad u_2 = - \partial\phi/\partial x_2$$

If  $\psi$  exists and  $\partial u_1/\partial x_2$  and  $\partial u_2/\partial x_1$  are formed from (2.6:5) we have

$$\partial u_1/\partial x_2 = - \partial^2\psi/\partial x_2^2 \quad \text{and} \quad \partial u_2/\partial x_1 = \partial^2\psi/\partial x_1^2$$

If the flow is also irrotational, then

$$-(\partial u_1/\partial x_2 - \partial u_2/\partial x_1) = \partial^2\psi/\partial x_1^2 + \partial^2\psi/\partial x_2^2 = 0$$

Similarly, starting from (2.6:6), if the flow is both irrotational and nondivergent,

$$\partial^2\phi/\partial x_1^2 + \partial^2\phi/\partial x_2^2 = 0$$

We can sum this up by saying that for an irrotational, incompressible fluid flow in two dimensions both the stream function and the velocity-potential function exist, that their iso-lines are mutually orthogonal, and that each satisfies Laplace's equation,

$$(2.6:7) \quad \nabla^2\psi = \partial^2\psi/\partial x_i^2 = 0 \quad \text{and} \quad \nabla^2\phi = \partial^2\phi/\partial x_i^2 = 0$$

Either the stream function  $\psi$  or the velocity potential  $\phi$  is a handy device for working with the vector velocity field. The first demands nondivergence and the second irrotationality. Oceanographers prefer to use the stream function  $\psi$ , which is almost always fairly realistic, rather than the velocity potential. This is because the ocean is nearly incompressible and is not auto-barotropic. However, having selected  $\psi$  in preference to  $\phi$  as the more realistic, you should then avoid using Laplace's equation for it ( $\nabla^2\psi = 0$ ) if you have any serious doubts about the existence of  $\phi$ . As we have just seen, Laplace's equation for the stream function is a result of using the velocity components expressed in terms of  $\psi$  in the vorticity equation. Laplace's equation for the stream function is, quite literally, a statement that the necessary and sufficient condition for the existence of the velocity potential  $\phi$  has been met.

You may work with  $\psi$  in the complete absence of  $\phi$ , and conversely. However, the instant you write  $\nabla^2\psi = 0$ , you have committed yourself to the existence of  $\phi$  and the equation  $\nabla^2\phi = 0$ . If Laplace's

equation holds for either, you can work out of either the stream function or the velocity-potential function at your convenience.

### 2.7 Integration of the Equation of Motion

The equation of motion in an approximation suitable for gravity waves was given as

$$\vec{a} = \vec{p} + \vec{g}$$

and on page 46 the vector acceleration  $\vec{a}$  was given as

$$D\vec{u}/Dt = \partial\vec{u}/\partial t + \frac{1}{2}\nabla(\vec{u}^2) + \vec{\omega} \times \vec{u}$$

where

$$\vec{\omega} \equiv \text{curl } \vec{u}$$

For irrotational motion  $\text{curl } \vec{u} = 0$  and the equation of motion can be written as

$$D\vec{u}/Dt = \partial\vec{u}/\partial t + \frac{1}{2}\nabla(\vec{u}^2) = - (1/\rho)\nabla p - \vec{g}$$

or in the component form as

$$Du_i/Dt = \partial u_i/\partial t + \frac{1}{2}(\partial u_j^2/\partial x_i) = - (1/\rho)(\partial p/\partial x_i) - \delta_{i,2}g$$

where

$$i = 1, 2$$

For irrotational flow we have a potential function  $\phi$  which gives us the velocity components

$$u_i = - \partial\phi/\partial x_i$$

from which

$$\partial u_i/\partial t = - \partial^2\phi/\partial x_i \partial t$$

Substituting and writing the component equations explicitly

$$(2.7:1) \quad - \partial^2\phi/\partial x_1 \partial t + \frac{1}{2}(\partial\{u_1^2+u_2^2\}/\partial x_1) = - (1/\rho)(\partial p/\partial x_1)$$

$$(2.7:2) \quad - \partial^2\phi/\partial x_2 \partial t + \frac{1}{2}(\partial\{u_1^2+u_2^2\}/\partial x_2) = - (1/\rho)(\partial p/\partial x_2) - g$$

Multiplying (2.7:1) by  $\delta x_1$ , (2.7:2) by  $\delta x_2$ , adding, and collecting terms we get

$$-(\partial^2 \phi / \partial x_i \partial t) \delta x_i + \frac{1}{2} (\partial \{u_1^2 + u_2^2\} / \partial x_i) \delta x_i = -(1/\rho) (\partial p / \partial x_i) \delta x_i - g \delta x_2$$

or, since in general,

$$(\partial f / \partial x_i) \delta x_i \equiv \delta (f)$$

$$\delta \{-\partial \phi / \partial t + \frac{1}{2} (u_1^2 + u_2^2)\} + g \delta x_2 = -(1/\rho) \delta p$$

Integrating both sides

$$\int \{(\delta \{-\partial \phi / \partial t + \frac{1}{2} (u_1^2 + u_2^2)\} + g \delta x_2) - F(t)\} = - \int \delta p / \rho$$

where  $F(t)$  is an arbitrary function of time and plays the role of a constant of integration. Since we have many total differentials this boils down to

$$(2.7:3) \quad \int \delta p / \rho = \partial \phi / \partial t - \frac{1}{2} (u_1^2 + u_2^2) - g x_2 + F(t)$$

Equation (2.7:3) is a statement of (Daniel) Bernoulli's Theorem, a really ancient result from the 18th century. It is an integrated version of the equation and says--surprise--"acceleration is proportional to force"--even when you sum the point values.

For steady motion there is no time change.  $\partial \phi / \partial t = 0$  and  $F(t) = k$ , an ordinary constant of integration. Bernoulli's Theorem then becomes

$$(2.7:4) \quad \int \delta p / \rho = - g x_2 - \frac{1}{2} (u_1^2 + u_2^2) + k$$

If, in addition to steady motion, the fluid is incompressible and  $\rho =$  a constant, Bernoulli's Theorem reads

$$(2.7:5) \quad p / \rho = - g x_2 - \frac{1}{2} (u_1^2 + u_2^2) + k_1$$

Notice that in the absence of motion the kinetic energy--which is represented by  $\frac{1}{2} (u_1^2 + u_2^2)$ --will be zero and equation (2.7:5) becomes the hydrostatic equation--as it should.

There will be times when we will want Bernoulli's Theorem very badly even though we will be entirely unwilling to concede



irrotational flow. In particular this will be the case with Gerstner's wave which is highly rotational. It can be produced by integrating along stream lines. The form corresponding to (2.7:4) for steady motion is

$$(2.7:6) \quad \oint \delta p/\rho = -gx_2 - \frac{1}{2}(u_1^2 + u_2^2) + C_s$$

where the integral is a contour integral along a streamline and  $C_s$  is not an arbitrary constant of integration but is dependent on the particular streamline along which you are integrating.

N.B. WARNING: The derivation of (2.7:6) depends neither on irrotationality nor upon nondivergence. Streamlines can exist even when the stream function does not. All that is required is that the motion be steady and sufficiently regular for streamlines to exist.

## 2.8 Boundary Conditions

The solution of a differential equation is a nebulous affair until it is made to conform to boundary and initial conditions. In fact, some people refuse to consider things like (2.4:9.3), which we offered as a solution of the wave equation, a solution at all, since it has not been adjusted to any boundary conditions. If you look at (2.4:9.3), you will see that the arguments of the sinusoids contain two parameters,  $\kappa$  and  $c$ . The  $c$  is a constant, specified in the original statement of the wave equation, (2.3:1). On the other hand, the  $\kappa$  emerged during the course of the solution and is free to take on any value. Consequently, (2.4:9.3) is not a solution but a functional form representing a continuous *infinity* of solutions, not all of which may be possible under a given set of circumstances. It is the boundary conditions which select out from all the possible values of a parameter such as  $\kappa$  those which make physical sense and are physically compatible with the situation described by the boundary conditions. If you want to get high flown about the whole thing, you can say that the boundary conditions "quantize" the parameters of the problem into "eigenvalues". The solutions corresponding to the selected values of the parameters are then called "eigenfunctions".

For ocean surface waves, the boundary conditions can be very simply stated. Boundaries of only two kinds are considered—rigid and free<sup>38</sup> If a boundary is rigid, there can be no fluid velocity component normal to the boundary. If there

<sup>38</sup> Sometimes an effort is made to think about a third kind, elastic boundaries, in connection with the absorption of wave energy on beaches and similar problems. Professor Maza is working on yet a fourth. His boundary is the surface of a sloping groin which has been armored with blocks. The fluid can force its way into the cracks and alter the frictional properties of the blocks. This is a particularly nasty kind of boundary and not much has been done with it to date.

is any fluid velocity at a rigid boundary, it must be entirely tangential to the boundary, so that a rigid boundary is always a streamline.

To make a boundary condition usable, we need to express it in mathematical symbols. We will do this in two ways, assuming the existence of either a potential function  $\varphi$  or a stream function  $\psi$ . The components of velocity are

$$u_1 = -\frac{\partial\psi}{\partial x_2} \quad u_2 = +\frac{\partial\psi}{\partial x_1} \quad \text{by (2.6:5)}$$

and

$$u_1 = -\frac{\partial\varphi}{\partial x_1} \quad u_2 = -\frac{\partial\varphi}{\partial x_2} \quad \text{by (2.6:6)}$$

For a rigid boundary there is no velocity normal to the boundary, so that

$$(2.8:1.1) \quad \frac{\partial\psi}{\partial\tau} = 0$$

$$(2.8:1.2) \quad \frac{\partial\varphi}{\partial\nu} = 0$$

where  $\nu$  is the normal direction and  $\tau$  is the tangential to the rigid boundary. In particular, if  $x_2 = -h$  is the bottom,

$$(2.8:2.1) \quad \left. \frac{\partial\psi}{\partial\tau} \right|_{x_2=-h} = 0;$$

$$(2.8:2.2) \quad \left. \frac{\partial\varphi}{\partial\nu} \right|_{x_2=-h} = 0.$$

At a rigid boundary the velocity must be entirely tangential to the boundary, so that

$$(2.8:3.1) \quad \psi \Big|_{x_2=-h} = \text{a constant};$$

$$(2.8:3.2) \quad \left. \frac{\partial\varphi}{\partial\tau} \right|_{x_2=-h} = u_\tau \Big|_{x_2=-h} = |u| \Big|_{x_2=-h}$$

The kinematic boundary condition for the free surface is that a fluid particle at the surface always remains at the surface<sup>15</sup>—in other words, that

$$(2.8:4) \quad \left. \frac{d}{dt} \{x_2 - \eta(x_1, t)\} \right|_{x_1=\eta} = 0.$$

Expanding, since  $dx_2/dt = u_2$ ,

$$u_2 \Big|_{x_1=\eta} - \frac{\partial\eta}{\partial t} - u_1 \frac{\partial\eta}{\partial x_1} \Big|_{x_1=\eta} = 0$$

or, replacing  $u_2$  with either  $\partial\psi/\partial x_1$  or  $-\partial\varphi/\partial x_2$ ,

$$(2.8:5.1) \quad \frac{\partial\eta}{\partial t} = \frac{\partial\psi}{\partial x_1} \Big|_{x_1=\eta} - u_1 \frac{\partial\eta}{\partial x_1} \Big|_{x_1=\eta}$$

<sup>15</sup>This condition is a consequence of the basic assumption of continuum mechanics, which may be stated as follows: The motion of a fluid can be described mathematically as a topological deformation that depends continuously on time. See Stoker (1957).

or

$$(2.8:5.2) \quad \frac{\partial\eta}{\partial t} = -\frac{\partial\varphi}{\partial x_2} \Big|_{x_1=\eta} - u_1 \frac{\partial\eta}{\partial x_1} \Big|_{x_1=\eta}$$

These conditions are nonlinear. If the waves are so small that the velocity  $u_1$  and the surface gradient  $\partial\eta/\partial x_1$  are also small, then the quadratic term  $u_1 (\partial\eta/\partial x_1) \Big|_{x_1=\eta}$  may be neglected in comparison with the linear terms, and, to first order, we have

$$(2.8:6.1) \quad \frac{\partial\eta}{\partial t} \approx \frac{\partial\psi}{\partial x_1} \Big|_{x_1=\eta}$$

or

$$(2.8:6.2) \quad \frac{\partial\eta}{\partial t} \approx -\frac{\partial\varphi}{\partial x_2} \Big|_{x_1=\eta}$$

In the next chapter, we will use the artifice of steady motion in applying the boundary conditions. This is a trick that permits us to freeze the wave profile while we study it. Suppose that we have a rigid profile, for example,

$$\eta = a \cos(\kappa x_1 - \sigma t).$$

It is moving to the right at the speed  $c = \sigma/\kappa$ , relative to our coordinate axes. Now suppose that we send the origin of the coordinates also moving to the right with speed  $c$ . Relative to the moving axes, the value of  $\eta$  for any  $x_1$ -position will show no change as time passes, and  $\partial\eta/\partial t = 0$ . Obviously, the artifice of steady motion is useless if the wave form is not rigid. With no time variation in  $\eta$ , (2.8: 6.1) takes the particularly simple form

$$\psi \Big|_{x_1=\eta} = \text{a constant}.$$

In other words, under the artifice of steady motion the surface becomes a streamline. It is customary to take the surface in this case as the reference streamline and write

$$(2.8:7.1) \quad \psi \Big|_{x_1=\eta} = 0.$$

From (2.8: 6.2) we have

$$(2.8:7.2) \quad \frac{\partial\psi}{\partial x_2} \Big|_{x_1=\eta} = 0$$

Comparison of (2.8: 7.1) with (2.8: 3.1) and (2.8: 7.2) with (2.8: 2.2) shows that under the artifice of steady motion the free surface behaves like a rigid boundary.<sup>49</sup>

Since the pressure within the fluid motion must conform to Bernoulli's equation, we can use it to get the dynamic free-surface boundary condition. In its irrotational form, (2.7: 3), after  $u^2$  has been expressed in terms of the velocity potential and solved for  $x_2$ , Bernoulli's equation is

$$x_2 = \frac{1}{g} \left\{ \frac{\partial\psi}{\partial t} - \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial\psi}{\partial x_1} \right)^2 + \left( \frac{\partial\psi}{\partial x_2} \right)^2 \right] + F(t) - \int \frac{\delta p}{\rho} \right\}.$$

<sup>49</sup>If the bottom is not flat and parallel to the undisturbed water surface, the artifice of steady motion will make it appear, when seen from the moving axes, as a progressive wave with a rigid profile.

If we absorb the additive function  $F(t)$  into  $\psi(x_1, x_2, t)$ , then the equation reads

$$x_2 = \frac{1}{g} \frac{\partial\psi}{\partial t} - \frac{1}{2g} \left[ \left( \frac{\partial\psi}{\partial x_1} \right)^2 + \left( \frac{\partial\psi}{\partial x_2} \right)^2 \right] - \frac{1}{g} \int \frac{\delta p}{\rho},$$

where the symbol  $\psi$  now includes an additive term to take care of  $F(t)$ . Now evaluate Bernoulli's equation at the free surface,  $x_2 = \eta$ :

$$(2.8:8) \quad \eta = \frac{1}{g} \frac{\partial\psi}{\partial t} \Big|_{x_1=\eta} - \frac{1}{2g} \left[ \left( \frac{\partial\psi}{\partial x_1} \right)^2 + \left( \frac{\partial\psi}{\partial x_2} \right)^2 \right] \Big|_{x_1=\eta} - \frac{1}{g} \int \frac{\delta p}{\rho} \Big|_{x_1=\eta}$$

If the fluid has constant density, then

$$(2.8:9) \quad \eta = \frac{1}{g} \frac{\partial\psi}{\partial t} \Big|_{x_1=\eta} - \frac{1}{2g} \left[ \left( \frac{\partial\psi}{\partial x_1} \right)^2 + \left( \frac{\partial\psi}{\partial x_2} \right)^2 \right] \Big|_{x_1=\eta} - \frac{p}{g\rho} \Big|_{x_1=\eta}$$

The dynamic boundary condition, as it stands, is nonlinear, because it includes the quadratic terms  $(\partial\psi/\partial x_1)^2$ . As before, if the velocities are small these terms can be neglected in comparison with the linear terms to get the linearized dynamic boundary condition

$$(2.8:10) \quad \eta = \frac{1}{g} \frac{\partial\psi}{\partial t} \Big|_{x_1=\eta} - \frac{p}{g\rho} \Big|_{x_1=\eta}$$

If we also neglect the pressure of the overlying air, then it becomes simply

$$(2.8:11) \quad \eta = \frac{1}{g} \frac{\partial\psi}{\partial t} \Big|_{x_1=\eta}$$

2.9 Summary for Progressive Waves with Rigid Profiles

We can now summarize the conditions to be imposed on the wave equation. Most of our discussion has been limited to two dimensions to avoid a morass of uninteresting operational detail. In this summary I will give our results in forms which leave you free to use as many dimensions as you please as long as they make some sort of physical sense.

The wave equation (for progressive waves with rigid profiles, traveling at constant phase speeds) whose solution we seek is

$$(2.9:1) \quad \frac{\partial^2 \eta}{\partial x_1^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} .$$

It was found to have general solutions of the form

$$(2.9:2) \quad \eta = f(\kappa \cdot x - \sigma t) + g(\kappa \cdot x + \sigma t)$$

where

$$(2.9:3) \quad \frac{\sigma}{|\kappa|} \equiv c ,$$

and, by separation of variables, to have particular solutions of the forms

$$(2.9:4) \quad \eta(x, t) = (c_1 e^{i \kappa \cdot x} + c_2 e^{-i \kappa \cdot x})(c_3 e^{i \sigma t} + c_4 e^{-i \sigma t}) ,$$

$$(2.9:5) \quad \eta(x, t) = (c_5 \kappa \cdot x + c_6)(c_7 \sigma t + c_8) ,$$

and

$$(2.9:6) \quad \eta(x, t) = (c_9 \cos \kappa \cdot x + c_{10} \sin \kappa \cdot x)(c_{11} \cos \sigma t + c_{12} \sin \sigma t) .$$

In case of irrotational, incompressible motion, the fluid velocity can be expressed in terms of either of two orthogonal scalar functions— $\psi$ , the stream function, or  $\phi$ , the velocity-potential function. Of the two, the oceanographer finds that conditions for realistic application to the ocean are more often met by  $\psi$  than by  $\phi$ . If both exist, then either satisfies Laplace's equation:

$$(2.9:7.1) \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1^2} = 0$$

$$(2.9:7.2) \quad \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1^2} = 0 .$$

The boundary conditions under which the wave equation is to be solved are:  
At any fixed boundary there is no normal velocity

$$(2.9:8.1) \quad \frac{\partial \phi}{\partial \nu} = 0$$

or

$$(2.9:8.2) \quad \psi = \text{a constant}$$

At the bottom where  $x_3 = -h = -h(x_1, x_2)$ ,

$$(2.9:9.1) \quad \left. \frac{\partial \phi}{\partial \nu} \right|_{x_3 = -h} = 0$$

or

$$(2.9:9.2) \quad \left. \psi \right|_{x_3 = -h} = \text{a constant}$$

For two dimensions, the kinematic boundary condition at the free surface is

$$(2.9:10.1) \quad \frac{\partial \eta}{\partial t} = - \left. \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \right|_{x_2=\eta} - u_1 \left. \frac{\partial \eta}{\partial x_1} \right|_{x_2=\eta}$$

or

$$(2.9:10.2) \quad \frac{\partial \eta}{\partial t} = \left. \frac{\partial \psi}{\partial x_1} \right|_{x_2=\eta} - u_1 \left. \frac{\partial \eta}{\partial x_1} \right|_{x_2=\eta} \quad (\text{nonlinear version})$$

For small motions,

$$(2.9:11.1) \quad \frac{\partial \eta}{\partial t} = - \left. \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \right|_{x_2=\eta}$$

or

$$(2.9:11.2) \quad \frac{\partial \eta}{\partial t} = \left. \frac{\partial \psi}{\partial x_1} \right|_{x_2=\eta} \quad (\text{linearized version})$$

If the artifice of steady motion has also been used, and the surface has been selected as the reference streamline,

$$(2.9:12.1) \quad \left. \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \right|_{x_2=\eta} = 0$$

or

$$(2.9:12.2) \quad \psi \Big|_{x_2=\eta} = 0 \quad (\text{linearized, steady motion, constant-depth version})$$

The dynamic free-surface boundary condition was found from Bernoulli's equation. For any point within the fluid we must have

$$(2.9:13.1) \quad x_3 = \frac{1}{g} \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{1}{2g} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \right)^2 - \frac{1}{g} \int \frac{\delta p}{\rho} \quad (\text{nonlinear version})$$

where  $x_3$  is aligned with gravity. For small motions this becomes

$$(2.9:13.2) \quad x_3 = \frac{1}{g} \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{1}{g} \int \frac{\delta p}{\rho} \quad (\text{linearized version})$$

These equations do not explicitly involve the wave disturbance. However, any wave disturbance which may exist must produce a pressure field compatible with (2.9:13.1). In other words, Newton's second law must govern the motion.

If (2.9:13.1) is evaluated at the free surface, we get the dynamical boundary condition

$$(2.9:14.1) \quad \eta = \frac{1}{g} \left. \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right|_{x_2=\eta} - \frac{1}{2g} \left. \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \right)^2 \right|_{x_2=\eta} - \frac{1}{g} \left. \int \frac{\delta p}{\rho} \right|_{x_2=\eta} \quad (\text{nonlinear version})$$

or

$$(2.9:14.2) \quad \eta = \frac{1}{g} \left. \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right|_{x_2=\eta} - \frac{1}{g} \left. \int \frac{\delta p}{\rho} \right|_{x_2=\eta} \quad (\text{linearized version})$$

If the fluid has constant density, these become

$$(2.9:15.1) \quad \eta = \frac{1}{g} \left. \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right|_{x_2=\eta} - \frac{1}{2g} \left. \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \right)^2 \right|_{x_2=\eta} - \frac{p}{\rho g} \Big|_{x_2=\eta} \quad (\text{nonlinear constant-density version})$$

or

$$(2.9:15.2) \quad \eta = \frac{1}{g} \left. \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right|_{x_2=\eta} - \frac{p}{\rho g} \Big|_{x_2=\eta} \quad (\text{linearized constant-density version})$$

If in (2.9:15.2) the pressure on the surface is negligible, then

$$(2.9:16) \quad \eta = \frac{1}{g} \left. \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right|_{x_2=\eta} \quad (\text{linearized, constant-density, negligible-surface-pressure version})$$

These, then, are the equations with which we must work. We will begin by assuming that the velocity components are so small that their squares are entirely negligible. To make such an assumption at all reasonable, the surface displacements must be kept very small. As a result, we can fit the boundary conditions on the fixed surface  $x_3 = 0$  rather than on the moving free surface  $x_3 = \eta$  without making very large errors and with a great gain in ease of mathematical manipulation. The object produced by this "double-think" will be the classical small-amplitude or Airy wave.

### 3. The Small-amplitude Component Wave

#### 3.1 Simple Harmonic Waves of Small Amplitude: the Airey Wave

This is the place to begin with waves; not because the simple harmonic wave, the sinusoid, of small amplitude matches anything you can see very well but because it is the component wave of Fourier analysis. By using a great many of these components you can synthesize very complex seas.

We will choose for our wave profile

$$(3.1:1) \quad \eta = a \cos(kx_1 - \sigma t)$$

and invoke the artifice of steady motion, sending the axes to the right at time  $t = 0$  with a speed  $c$ . This "freezes" the profile on the axes and (3.1:1) becomes

$$(3.1:2) \quad \eta = a \cos(kx_1)$$

The time dependence will be recovered at the end of the analysis by stopping the moving axes.

We will consider the case of a two-dimensional flow in an incompressible fluid. Further, we will require the flow to be both irrotational and nondivergent. As a result, both  $\psi$  and  $\phi$  exist and Laplace's equation holds;

$$(3.1:3) \quad \partial^2 \psi / \partial x_1^2 + \partial^2 \psi / \partial x_2^2 = 0$$

The boundary conditions for a two-dimensional, constant-density, irrotational motion with a free surface under constant overlying pressure and in water of constant depth under the artifice of steady motion were included in the summary of section 2.9. If we choose the free surface as our reference streamline, then the kinematic free-surface boundary condition is

$$(3.1:4) \quad \left. \frac{\partial \psi}{\partial x_2} \right|_{x_2=\eta} = 0 \quad (2.9:12.2)$$

For a bottom of constant depth, the kinematic bottom boundary condition is

$$(3.1:5) \quad \psi|_{x_2=-h} = \text{a constant} \quad (2.9:9.2)$$

The linearized dynamic free-surface condition is given by (2.9:15.2) and the artifice of steady motion will not be in force when we use it. Surface tension will be neglected, the pressure being taken to be the same on the two sides of the fluid interface.

$$(3.1:6) \quad g\eta = \partial\phi/\partial t|_{x_2=\eta} - p/\rho|_{x_2=\eta}$$

With these makings, our immediate job is to tinker up a stream function  $\psi(x_1, x_2) \rightarrow \psi(x_1, x_2, t)$  when the artifice of steady motion is removed--which conforms to (3.1:1) through (3.1:6). Once we have it we can use it to explore the motion.

We begin to construct  $\psi$  by invoking the force of two of the boundary conditions; (3.1:4) and (3.1:5). Specifically,

$$(3.1:7) \quad \psi(x_1, \eta) = 0$$

for the free surface and

$$(3.1:8) \quad \psi(x_1, -h) = \text{a constant}$$

for the bottom. Until we bring in other conditions our results will apply to any progressive wave with a rigid profile.

Since we are carpentering up a form for  $\psi$ , we are free to specify extra features if we want. I will suppose that I can write  $\psi$  in the form

$$(3.1:9) \quad \psi(x_1, x_2) = \psi_s(x_2) + \psi_t(x_1, x_2)$$

In other words,  $\psi$  is the sum of two functions, one of which depends only on the vertical coordinate  $x_2$  while the other depends on both coordinates. Each will have to satisfy Laplace's equation separately.

The advantage in these assumptions comes from the fact that the boundary conditions (3.1:7) and (3.1:8) are not both zero. I can



make the one-variable function take on the boundary values which leaves both boundary values zero for the two-variable function. It makes fitting constants of integration much easier.

For the one-variable function Laplace's equation reduces to an ordinary differential equation

$$d^2\psi_s/dx_2^2 = 0$$

which, upon integrating twice, gives

$$(3.1:10) \quad \psi_s(x_2) = k_1x_2 + k_2$$

the  $k_i$  being arbitrary constants of integration.

Applying the method of the separation of variables to the Laplace equation for  $\psi_t$  produces solutions of three kinds:

$$(3.1:11.1) \quad \psi_t(x_1, x_2) = (c_1 \exp\{\sqrt{nx_1}\} + c_2 \exp\{-\sqrt{nx_1}\}) \\ (c_3 \cos\sqrt{nx_2} + c_4 \sin\sqrt{nx_2}) \quad ; \quad n > 0$$

$$(3.1:11.2) \quad \psi_t(x_1, x_2) = (c_5x_1 + c_6)(c_7x_2 + c_8) \quad ; \quad n = 0$$

$$(3.1:11.3) \quad \psi_t(x_1, x_2) = (c_9 \cos\sqrt{-nx_1} + c_{10} \sin\sqrt{-nx_1}) \\ (c_{11} \exp\{\sqrt{-nx_2}\} + c_{12} \exp\{-\sqrt{-nx_2}\}) \\ ; \quad n < 0$$

Since (3.1:10) is a special case of (3.1:11.2) and since Laplace's equation is linear, a very general solution for  $\psi$  is the sum of

(3.1:11.2) and (3.1:11.3)

$$(3.1:12) \quad \psi(x_1, x_2) = (c_5x_1 + c_6)(c_7x_2 + c_8) \\ + (c_9 \cos\sqrt{-nx_1} + c_{10} \sin\sqrt{-nx_1})(c_{11} \exp\{\sqrt{-nx_2}\} + c_{12} \exp\{-\sqrt{-nx_2}\}) \\ ; \quad n < 0$$

We might have added (3.1:11.1) to (3.1:12) as well, keeping the n's separate by subscripts to get an even more general solution. There doesn't seem to be much point in doing so since pretty soon we will be using the profile (3.1:2) which sends a sinusoid in the  $x_1$ -direction. Equation (3.1:11.1) sends sinusoids in the  $x_2$ -direction.

Even if we reduce the number of constants of integration by using the special form (3.1:10) instead of (3.1:11.2),

$$(3.1:13) \quad \psi(x_1, x_2) = k_1 x_2 + k_2 + (c_9 \cos \sqrt{-n} x_1 + c_{10} \sin \sqrt{-n} x_1) \\ (c_{11} \exp\{\sqrt{-n} x_2\} + c_{12} \exp\{-\sqrt{-n} x_2\}) \quad : \quad n < 0$$

we are faced with seven arbitrary constants subject to only three "natural" restrictions: the surface and bottom boundary conditions and the, as yet unused, free-surface dynamic condition. Clearly, this isn't enough for seven constants.

We will have to impose more conditions. It is in the selection of the additional conditions that the essential difference between different wave solutions lies. Depending on what you choose you come up with the simple harmonic wave, the Stokes wave, the cnoidal wave, or what not. The art of choosing additional restraints lies in picking them in such a way that the particular solution that results closely describes some physical situation, or can be used in combination with other solutions to approximate physical reality.

Our additional restrictions will number two:

- (1) We will insist that the surface deformation be the sinusoid of equations (3.1:1) or (3.1:2).
- (2) We will require that the sinusoid have a small amplitude.

"Small" is an equivocal word and you should never accept it unless you are told small in comparison with what. Explicitly, here we mean that  $H = 2a$  is small in comparison with the wave length  $L$ , i.e., that  $H/L \ll 1$ . In terms of the amplitude and the wave number the small amplitude requirement reads  $\kappa a \ll 1$ . These two conditions, together with the "natural" conditions are enough to evaluate the constants of (3.1:13). I won't put you through it. The details can be found on pages 121-123 of "Wind Waves."

The result is an approximation valid within the small-amplitude condition. The dynamic free-surface condition has not yet been used and the artifice of steady motion is still in force.

$$(3.1:14) \quad \psi(x_1, x_2) \approx k_1 x_2 - k_1 a \left( \frac{\{\sinh \kappa(x_2 + h)\}}{\{\sinh \kappa h\}} \right) \cos(\kappa x_1)$$

Suppose now that the axes, which all this time have been moving with the cosine profile, are stopped. In effect, suppose we give them a velocity  $-k_1$  relative to the profile. The coordinate transformation is

$$(3.1:15) \quad \begin{aligned} x_1 &= x_1' - k_1 t \\ \psi &= \psi' + k_1 x_2 \end{aligned}$$

The profile will move relative to the primed system with a speed  $k_1$  in the positive  $x_1$ -direction. Therefore,  $k_1$  will be the phase speed usually symbolized by  $c$ . Replacing  $k_1$  with  $c$  and transforming (3.1:14) according to (3.1:15), dropping the primes, and remembering that  $\sigma = \kappa c$  one gets

$$(3.1:16) \quad \psi(x_1, x_2, t) \approx -ca \left( \frac{\{\sinh \kappa(x_2 + h)\}}{\{\sinh(\kappa h)\}} \right) \cos(\kappa x_1 - \sigma t)$$

which is the stream function for a progressive cosine wave of small amplitude  $a$  and velocity  $c$ , traveling in the positive  $x_1$ -direction in water of depth  $h$  where the length is  $L \equiv 2\pi/\kappa$  and the period is  $T \equiv 2\pi/\sigma$ .

Had the axes been given a velocity of  $+k_1$  relative to the cosine profile instead of  $-k_1$ , the result would have been

$$(3.1:17) \quad \psi(x_1, x_2, t) \approx +ca \left( \frac{\{\sinh \kappa(x_2 + h)\}}{\{\sinh(\kappa h)\}} \right) \cos(\kappa x_1 + \sigma t)$$

which is the stream function for a progressive cosine wave with the same characteristics as the wave corresponding to (3.1:16) except that it travels in the negative  $x_1$ -direction.

Don't be fooled. We have identified the arbitrary constant  $k_1$  with the phase speed of the wave,  $c$ , but naming it doesn't tell

you are structure. We still have to evaluate it which we can do through the, as yet, unused dynamic surface boundary condition (3.1:6).

Equation (3.1:6) is expressed in terms of  $\phi$  rather than  $\psi$ .

However, remembering that

$$\partial\phi/\partial x_1 = \partial\psi/\partial x_2 \quad \text{and} \quad \partial\phi/\partial x_2 = -\partial\psi/\partial x_1$$

leads directly to

$$\partial\phi/\partial t = c^2\kappa \left\{ \frac{\cosh \kappa(x_2+h)}{\sinh(\kappa h)} \right\} \eta$$

For use in (3.1:6)  $\partial\phi/\partial t$  must be evaluated at  $x_2 = \eta$ . By the small-amplitude assumption  $\kappa\eta \ll 1$ . If  $\kappa h$  is not also small, i.e., if in addition we assume  $H/h \ll 1$ , then

$$\cosh \kappa(\eta+h) \approx \cosh(\kappa h) \quad , \quad \left\{ \frac{\cosh \kappa(\eta+h)}{\sinh(\kappa h)} \right\} \approx \cosh(\kappa h) / \sinh(\kappa h)$$

and

$$\equiv \coth(\kappa h) \quad ,$$

$$\left. \frac{\partial\phi}{\partial t} \right|_{x_2=\eta} \approx \{c^2\kappa \coth(\kappa h)\} \eta$$

Substituting in (3.1:6) we get

$$(3.1:18) \quad \{g - c^2\kappa \coth(\kappa h)\} \eta = p/\rho \Big|_{x_2=\eta}$$

If now we insist on constant surface pressure, since  $\eta$  is time variable, its coefficient must be zero. We get

$$(3.1:19) \quad c^2 = (g/\kappa) \tanh(\kappa h)$$

The evaluation of this final constant completes the boundary-value problem under the conditions originally set, equations (3.1:16) or (3.1:17) and (3.1:19) comprising the solution. In order to reach it it was necessary to assume in addition to the boundary values as given (a) a specific profile, (b) small amplitude compared with the wave length,  $H/L \ll 1$ , (the small-amplitude assumption), and (c) small amplitude compared with the water depth,  $H/h \ll 1$ .

The equations cited are the solution of the problem in the sense that from them the details of the motion can be derived. The exploitation of the stream function to get these details is our

ultimate objective. Before we get to it we must pause to define deep and shallow water.

### 3.2 Approximations for Deep and Shallow Water

The terms "deep," "intermediate," and "shallow" water are reserved to designate ranges of the ratio  $h/L$  which is called the relative depth. So far as waves are concerned, water is deep or shallow only in relation to the lengths of the waves running on the water surface. Water in a pan may be "deep" if the surface waves are short and the ocean over the Tongan trench will be "shallow" if very long waves are running on the surface.

The ranges of the relative depth  $h/L$  that define deep, intermediate, and shallow water are governed by the approximations for the hyperbolic functions. Both the expression for the phase speed and the expressions for the stream functions contain them. These expressions are already approximations valid only to first order so that it seems reasonable to try to get rid of the hyperbolic functions by further approximation.

Table 3.2-1 (next page) summarizes certain of the "facts of life" about hyperbolic functions which I hope you know. At least, I hope you know the behavior of exponentials for large and small arguments which comes to the same thing.

Table 3.2-1 APPROXIMATIONS FOR HYPERBOLIC FUNCTIONS

Function	Definition	Approximation for large argument $e^a \gg e^{-a}$	Approximation for small argument (Taylor expansion) $e^a \approx 1 + a; e^{-a} \approx 1 - a$
$\sinh \alpha$	$\frac{e^{\alpha} - e^{-\alpha}}{2}$	$\frac{1}{2} e^{\alpha}$	$\alpha$
$\cosh \alpha$	$\frac{e^{\alpha} + e^{-\alpha}}{2}$	$\frac{1}{2} e^{\alpha}$	1
$\tanh \alpha$	$\frac{e^{\alpha} - e^{-\alpha}}{e^{\alpha} + e^{-\alpha}}$	1	$\alpha$
Used for:	Intermediate Water	Deep Water	Shallow Water

The phase speed of an Airy wave when  $2\pi/L$  is substituted for  $\kappa$  in the argument of the hyperbolic tangent only reads

$$(3.2:1) \quad c^2 \approx (g/\kappa) \tanh\{2\pi(h/L)\}$$

We will use the subscripts s and d for shallow and deep water and leave unsubscripted symbols for the full expressions to be used in intermediate water.

For deep water the relative depth  $h/L_d$  is large and

$$\tanh\{2\pi(h/L_d)\} \approx 1$$

so that equation (3.2:1) becomes

$$(3.2:2) \quad c_d^2 \approx g/\kappa_d = gL_d/2\pi$$

For shallow water the relative depth  $h/L_s$  is small and

$$\tanh\{2\pi(h/L_s)\} \approx 2\pi(h/L_s) = h\kappa_s$$

so that (3.2:1) becomes

$$(3.2:3) \quad c_s^2 \approx gh$$

Equation (3.2:2) says that in deep water the phase speed of a wave is a function of its length; the greater the length, the greater the speed. Equation (3.2:3) says that the speed of a wave in shallow water is independent of its length and depends only on the depth of the water in which it runs.

You can see that this changeover in the behavior of the phase speed is going to lead to some very interesting wave behavior. After all, most waves do sooner or later run into shallow water. And it is precisely on the beaches where the human race most often finds waves getting in the way of what it wants to do.

The wave period  $T$  (or frequency  $\sigma$ ) is constant independent of the depth of the water--a statement that corresponds very closely to what we find in nature. Since  $c/L = 1/T$  we have

$$(3.2:4) \quad c_d/L_d = c/L = c_s/L_s = 1/T$$

from which, among other relations,  $L_d = c_d T$ . Substituting for  $L_d$  in (3.2:2)

$$c_d^2 \approx (g c_d T) / (2\pi) = (g/\sigma) c_d$$

and dividing by  $c_d$

$$(3.2:5) \quad c_d \approx (g/2\pi) T = g/\sigma$$

which gives the deep-water phase speed as a function of the period or frequency. Solving (3.2:2) for  $L_d$  and substituting for  $c_d$  the  $L_d/T$  derived from (3.2:4) gives

$$L_d \approx (2\pi/g) (L_d^2/T^2)$$

or, dividing through by  $L_d$  and solving for it,

$$(3.2:6) \quad L_d \approx (g/2\pi) T^2 = (2\pi g) / (\sigma^2)$$

which gives the deep-water wave length as function of period.

It is particularly handy to have the deep-water length and phase speed as functions of the period. Wave periods are easier to measure than most of the properties of waves, but even more important is the fact that the period doesn't change in shallow water.

From time to time you may find yourself trapped by the necessity of making a guess at deep water characteristics from

what you can observe from a beach--which means shallow water. In such a case the following approximations derived from the equations can be used--but don't bother carrying the guess beyond the nearest digit.

$$(3.2:7) \quad \begin{aligned} \bar{c}_d \text{ (knots)} &\approx 3.03T \approx 3T \\ c_d \text{ (ft/sec)} &\approx 5.12T \approx 5T \\ c_d \text{ (m/sec)} &\approx 1.56T \approx 2T \end{aligned}$$

$$(3.2:8) \quad \begin{aligned} L_d \text{ (ft)} &\approx 5.12T^2 \approx 5T^2 \\ L_d \text{ (m)} &\approx 1.56T^2 \approx 2T^2 \end{aligned}$$

with T measured in seconds.

So far we have developed estimates for deep and shallow water but we have not said exactly what the terms are to mean. The classical answer of the 19th century mathematicians is: Waves are in deep water whenever  $h/L > \frac{1}{2}$ . Let's see what this answer means in practical terms. If  $h/L \geq \frac{1}{2}$ , then the argument of the hyperbolic function is  $\alpha = 2\pi h/L \geq \pi$ . Resorting to a table of hyperbolic functions reveals that in this case

$$1 \geq \tanh \alpha \geq \tanh \pi = 0.9963$$

Therefore, by the full expression for the phase speed, (3.2:1),

$$g/\kappa \geq c^2 \geq 0.9963(g/\kappa)$$

By the deep-water approximation, (3.2:2),

$$c_d^2 \approx g/\kappa_d$$

Thus, the ratio of the "true" value to the approximate deep-water value is

$$\kappa_d/\kappa \geq c^2/c_d^2 \geq 0.9963(\kappa_d/\kappa)$$

From (3.2:4) with a little twiddling

$$(3.2:9) \quad c/c_d = L/L_d = (2\pi/L_d)/(2\pi/L) = \kappa_d/\kappa$$



Therefore, dividing through by  $\kappa_d/\kappa$  leaves us with

$$1 \cong c/c_d \cong 0.9963$$

or

$$c_d \cong c \cong 0.9963c_d$$

At best,  $c_d$  and  $c$  will be identical. At worst,  $c = 0.9963c_d$ . Thus, the error introduced in the phase speed by using an approximation deleting the hyperbolic tangent factor whenever the water depth is greater than one-half the wave length is at most 0.37%. The term deep-water wave means a wave of length  $L$  in water of depth  $h$  for which

$$h/L \cong \frac{1}{2}$$

To get the same degree of approximation for the shallow water forms we must require that

$$h/L \cong 1/200$$

The conditions set by the 19th century mathematicians are the ones usually found in the literature but they are often much too severe for practical purposes. A principle that receives lip service from nearly everyone is that the precision of the measurements and the approximations used in the course of an investigation should be consistent. It's no use going to great pains to measure a quantity very, very precisely if, in the course of the analysis, crude approximations are made in which the precision is swamped. Conversely, using hairline approximations doesn't really improve one's results much if the data are crude. I have met men who have made what I consider outlandish claims for the precision of their wave measurements, but I have never met one who thought he was consistently within 0.37% of the true value on a wave measurement. Personally, I would consider a claim of 5% dangerously close to bragging. Whatever the accuracy is that you claim for your instrument

system as it operates under field conditions is the value that should determine the deep- and shallow-water criteria.

Table 3.2-2 shows the errors introduced by the deep- and shallow-water approximations for various values of relative depth.

Table 3.2-2

Error in $c/c_0$ or $c/c_1$ due to the hyperbolic approximation (Per cent)	Relative depth ( $h/L_d$ )	
	Deep water	Shallow water
0.5	0.474	0.006
1.0	0.417	0.010
2.0	0.358	0.019
5.0	0.277	0.043
10.0	0.211	0.095

If you have a 5% measuring system, then you can afford to use

$$h/L_d \geq 1/4$$

as the deep-water criterion and

$$h/L_d \leq 1/20$$

as the shallow-water criterion.

These criteria reduce the size of the intermediate band where you must struggle with the full equations considerably.

For engineering work I recommend a redefinition for each problem based firmly on the precision of your instrument system. For theoretical work you should stick with the 1/2, 1/200 since that's what everybody else uses.

### 3.3 The Details of the Motion: an Exploitation of the Stream Function

We are now in a position to use the stream functions developed in Sec. 3.1 and the deep- and shallow-water approximations of Sec. 3.2 to explore the details of the water motion when a small-amplitude, long-crested sinusoid runs over the surface. Gathering up our working material from Secs. 3.1 and 3.2, with  $c$  the magnitude of the phase velocity we have the following relations.

*Profile*

$$(3.3:1) \quad \eta = a \cos(\kappa x_1 - \sigma t)$$

*Stream function*

$$(3.3:2.1) \quad \text{Deep water:} \quad \psi(x_1, x_2; t) \approx -ca e^{\kappa x_2} \cos(\kappa x_1 - \sigma t)$$

$$(3.3:2.2) \quad \text{Intermediate water:} \quad \psi(x_1, x_2; t) \approx -ca \frac{\sinh \kappa(x_2 + h)}{\sinh \kappa h} \cos(\kappa x_1 - \sigma t)$$

$$(3.3:2.3) \quad \text{Shallow water:} \quad \psi(x_1, x_2; t) \approx -ca \left(1 + \frac{x_2}{h}\right) \cos(\kappa x_1 - \sigma t) .$$

*Profile*

$$(3.3:3) \quad \eta = a \cos(\kappa x_1 + \sigma t)$$

*Stream function*

$$(3.3:4.1) \quad \text{Deep water:} \quad \psi(x_1, x_2; t) \approx +ca e^{\kappa x_2} \cos(\kappa x_1 + \sigma t)$$

$$(3.3:4.2) \quad \text{Intermediate water:} \quad \psi(x_1, x_2; t) \approx +ca \frac{\sinh \kappa(x_2 + h)}{\sinh \kappa h} \cos(\kappa x_1 + \sigma t)$$

$$(3.3:4.3) \quad \text{Shallow water:} \quad \psi(x_1, x_2; t) \approx +ca \left(1 + \frac{x_2}{h}\right) \cos(\kappa x_1 + \sigma t) .$$

For either profile we have

*Phase speed*

$$(3.3:5.1) \quad \text{Deep water:} \quad c^2 \approx \frac{g}{\kappa}$$

$$(3.3:5.2) \quad \text{Intermediate water:} \quad c^2 \approx \frac{g}{\kappa} \tanh \kappa h$$

$$(3.3:5.3) \quad \text{Shallow water:} \quad c^2 \approx gh .$$

The *component velocities*, in terms of the stream function, are

$$u_1 = -\frac{\partial \psi}{\partial x_2} \quad \text{and} \quad u_2 = \frac{\partial \psi}{\partial x_1}$$

by (2.6:5), so that for (3.3:1) from (3.3:2.1), remembering that  $c\kappa = \sigma$ , we have:

*Component velocities*

$$(3.3:6.1.1) \quad \text{Deep water:} \quad u_1 = ac e^{\kappa x_2} \cos(\kappa x_1 - \sigma t)$$

$$(3.3:6.1.2) \quad u_2 = a\sigma e^{\kappa x_2} \sin(\kappa x_1 - \sigma t) .$$

$$(3.3:6.2.1) \quad \text{Intermediate water:} \quad u_1 = a\sigma \frac{\cosh \kappa(x_2 + h)}{\sinh \kappa h} \cos(\kappa x_1 - \sigma t)$$

$$(3.3:6.2.2) \quad u_2 = a\sigma \frac{\sinh \kappa(x_2 + h)}{\sinh \kappa h} \sin(\kappa x_1 - \sigma t) .$$

$$(3.3:6.3.1) \quad \text{Shallow water:} \quad u_1 = \frac{a\sigma}{\kappa h} \cos(\kappa x_1 - \sigma t)$$

$$(3.3:6.3.2) \quad u_2 = a\sigma \left(1 + \frac{x_2}{h}\right) \sin(\kappa x_1 - \sigma t) .$$

The stream functions for (3.3:3) differ from those for (3.3:1) only in having a *plus*  $\sigma t$  in the argument of the circular functions and a phase velocity which is the negative of the phase velocity for (3.3:1). Consequently, we write at once, by inspection of (3.3:6.i.j), for (3.3:3) the *component velocities*, using  $|c|$  and making the sign explicit:

(3.3:7.1.1) Deep water:  $u_1 = -a\sigma e^{\kappa x_2} \cos(\kappa x_1 + \sigma t)$

(3.3:7.1.2)  $u_2 = -a\sigma e^{\kappa x_2} \sin(\kappa x_1 + \sigma t)$ .

(3.3:7.2.1) Intermediate water:  $u_1 = -a\sigma \frac{\cosh \kappa(x_2 + h)}{\sinh \kappa h} \cos(\kappa x_1 + \sigma t)$

(3.3:7.2.2)  $u_2 = -a\sigma \frac{\sinh \kappa(x_2 + h)}{\sinh \kappa h} \sin(\kappa x_1 + \sigma t)$ .

(3.3:7.3.1) Shallow water:  $u_1 = -\frac{a\sigma}{\kappa h} \cos(\kappa x_1 + \sigma t)$

(3.3:7.3.2)  $u_2 = -a\sigma \left(1 + \frac{x_2}{h}\right) \sin(\kappa x_1 + \sigma t)$ .

Since  $u^2 = u_1^2 + u_2^2$ , we get for the square of the water velocity in:

(3.3:8.1) Deep water:  $u^2 = a^2 \sigma^2 e^{2\kappa x_2}$

from (3.3:6.1.j) or (3.3:7.1.j), using  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha \equiv 1$ , or, taking the square root,

$$|u| = a\sigma e^{\kappa x_2}.$$

(3.3:8.2) Intermediate water:

$$u^2 = \frac{a^2 \sigma^2}{\sinh^2 \kappa h} [\cosh^2 \kappa(x_2 + h) \cos^2(\kappa x_1 \pm \sigma t) + \sinh^2 \kappa(x_2 + h) \sin^2(\kappa x_1 \pm \sigma t)]$$

from (3.3:6.2.j) or (3.3:7.2.j).

(3.3:8.3) Shallow water:

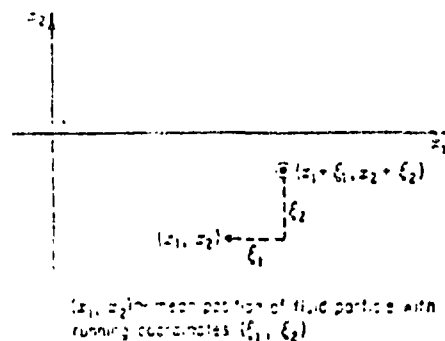
$$u^2 = a^2 \sigma^2 \left[ \frac{1}{(\kappa h)^2} \cos^2(\kappa x_1 \pm \sigma t) + \left(1 + \frac{x_2}{h}\right)^2 \sin^2(\kappa x_1 \pm \sigma t) \right].$$

A simple statement about the magnitude of the fluid velocity is possible only in the deep-water case. There, to the limit of our present approximation, we find the velocity dependent only on the depth of the point of observation,  $x_2$ . For intermediate water, circular and hyperbolic functions have combined to produce a formidable result. The shallow-water case is nearly as bad, but here, at least, if one looks at the component velocities (3.3:6.3.j) or (3.3:7.3.j), the horizontal component  $u_1$  is seen to be independent of  $x_2$ ; therefore, it must have the same value from surface to bottom, while the vertical component  $u_2$  decreases linearly from surface to bottom, vanishing when  $x_2 = -h$ , as it should.

Instead of asking for the Eulerian view we may ask for the Lagrangian view, requiring the velocity of a water particle as it moves under the influence of the wave. Let  $(\xi_1, \xi_2)$  be the coordinates of a fluid particle as measured from its mean position,

$$\frac{\partial \xi_1}{\partial t} = u_1 \quad \text{and} \quad \frac{\partial \xi_2}{\partial t} = u_2$$

Since we are dealing with small-amplitude waves, the motions will be small, and we can neglect differences in the component velocities arising from the small displacements  $\xi_1, \xi_2$ . In essence, we say that the velocities at the point  $(x_1, x_2)$  are substantially the same as those at  $(x_1 - \xi_1, x_2 + \xi_2)$ .



Consequently, integrating with respect to time,  $t$ , we have for deep water:

$$\int^{(1)} \frac{\partial \xi_1}{\partial t} dt = \int^{(1)} \pm a\sigma e^{\pm \kappa z} \cos(\kappa x_1 \mp \sigma t) dt$$

and

$$\int^{(1)} \frac{\partial \xi_2}{\partial t} dt = \int^{(1)} \pm a\sigma e^{\pm \kappa z} \sin(\kappa x_1 \mp \sigma t) dt,$$

or

$$(3.3:9.1.1) \quad \xi_1 = -ae^{\pm \kappa z} \sin(\kappa x_1 \mp \sigma t)$$

and

$$(3.3:9.1.2) \quad \xi_2 = +ae^{\pm \kappa z} \cos(\kappa x_1 \mp \sigma t);$$

for intermediate water:

$$\int^{(1)} \frac{\partial \xi_1}{\partial t} dt = \int^{(1)} \pm a\sigma \frac{\cosh \kappa(x_2 + h)}{\sinh \kappa h} \cos(\kappa x_1 \mp \sigma t) dt,$$

and

$$\int^{(1)} \frac{\partial \xi_2}{\partial t} dt = \int^{(1)} \pm a\sigma \frac{\sinh \kappa(x_2 + h)}{\sinh \kappa h} \sin(\kappa x_1 \mp \sigma t) dt,$$

or

$$(3.3:9.2.1) \quad \xi_1 = -a \frac{\cosh \kappa(x_2 + h)}{\sinh \kappa h} \sin(\kappa x_1 \mp \sigma t)$$

and

$$(3.3:9.2.2) \quad \xi_2 = +a \frac{\sinh \kappa(x_2 + h)}{\sinh \kappa h} \cos(\kappa x_1 \mp \sigma t);$$

and for shallow water:

$$\int^{(1)} \frac{\partial \xi_1}{\partial t} dt = \int^{(1)} \pm \frac{a\sigma}{\kappa h} \cos(\kappa x_1 \mp \sigma t) dt$$

and

$$\int^{(1)} \frac{\partial \xi_2}{\partial t} dt = \int^{(1)} \pm a\sigma \left(1 + \frac{x_2}{h}\right) \sin(\kappa x_1 \mp \sigma t) dt,$$

or

$$(3.3:9.3.1) \quad \xi_1 = -\frac{a}{\kappa h} \sin(\kappa x_1 \mp \sigma t)$$

and

$$(3.3:9.3.2) \quad \xi_2 = +a \left(1 + \frac{x_2}{h}\right) \cos(\kappa x_1 \mp \sigma t).$$

The length of the radius vector of the orbital motion will be given by

$$r = (\xi_1^2 + \xi_2^2)^{1/2}.$$

Consequently, by substituting from (3.3:9.1.i) we have for deep water, since  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha \equiv 1$ :

$$(3.3:10.1) \quad r = (a^2 e^{2\kappa z})^{1/2} = ae^{\kappa z};$$

for intermediate water:

$$(3.3:10.2) \quad r = \frac{a}{\sinh \kappa h} [\cosh^2 \kappa(x_2 + h) \sin^2(\kappa x_1 \mp \sigma t) + \sinh^2 \kappa(x_2 + h) \cos^2(\kappa x_1 \mp \sigma t)]^{1/2}$$

and for shallow water:

$$(3.3:10.3) \quad r = a \left[ \frac{1}{\kappa^2 h^2} \sin^2(\kappa x_1 \mp \sigma t) + \left(1 + \frac{x_2}{h}\right)^2 \cos^2(\kappa x_1 \mp \sigma t) \right]^{1/2}$$

We can recognize the deep-water case at once as a circle, since there is no time dependence. At the surface  $x_2 = 0$ , and the radius of the circle is  $a$ , the amplitude of the wave. As you descend toward the bottom,  $x_2$  assumes larger and larger negative values, so that the damping factor  $e^{-\kappa x_2}$  becomes smaller and smaller. The orbital motion remains circular, but the radius of the circle decreases exponentially.

The nature of the motion in the intermediate- and shallow-water cases is perhaps most easily seen from the component form. (3.3:9.2.j) and (3.3:9.3.j). In each case the type is  $\xi_1 = A \sin \alpha$  and  $\xi_2 = B \cos \alpha$ . If  $A = B$ , as is the case in deep water, (3.3:9.1.j), then we have the parametric equations for a circle. If  $A \neq B$ , the equations are the parametric equations for an ellipse with  $A$  and  $B$  the semi-axes. Thus, for intermediate water:

The orbital motion is elliptical.

The length of the semi-major axis is  $a \frac{\cosh \kappa(x_2 + h)}{\sinh \kappa h}$

The length of the semi-minor axis is  $a \frac{\sinh \kappa(x_2 + h)}{\sinh \kappa h}$

The focal distance is twice the square root of the difference between the squares of the semi-axes. Thus, if  $FF'$  represents the focal distance,

$$FF' = \frac{2a}{\sinh \kappa h} [\cosh^2 \kappa(x_2 + h) - \sinh^2 \kappa(x_2 + h)]^{1/2}$$

But,  $\cosh^2 \alpha - \sinh^2 \alpha \equiv 1$ . Therefore, the focal distance is

$$FF' = \frac{2a}{\sinh \kappa h} \equiv 2a \operatorname{cosech} \kappa h$$

In shallow water the motion remains elliptical, but there is no variation with depth in the length of the semi-major axis.

The length of the semi-major axis is  $\frac{a}{\kappa h}$

The length of the semi-minor axis is  $a \left(1 + \frac{x_2}{h}\right)$ .

The focal distance is  $FF' = 2a \left[ \frac{1}{\kappa^2 h^2} - \left(1 + \frac{x_2}{h}\right)^2 \right]^{1/2}$

or to first order,  $FF' = \frac{2a}{\kappa h}$ .

The Eulerian view is a picture of the field. The Lagrangian view focuses attention on the particle motion, Fig. 3.3-1. The two views are not really separable. Talking in terms of one or the other is merely a convenience.

Since the problem has been linearized, the details of the motion for a standing wave can be had by superposition. We have already shown that the sum of (3.3:1) and (3.3:3), which is a solution of the wave equation by superposition, is a standing wave with an amplitude of  $2a$ . Let a superscript plus trace the progressive wave moving to the right and a superscript minus trace the wave moving to the left. Use a superscript 0 for the standing wave tracer. Then

$$(3.3:11) \quad \eta^0 = \eta^+ + \eta^- = 2a \cos \kappa x_1 \cos \sigma t$$

is the standing wave resulting from the combination of the progressive waves

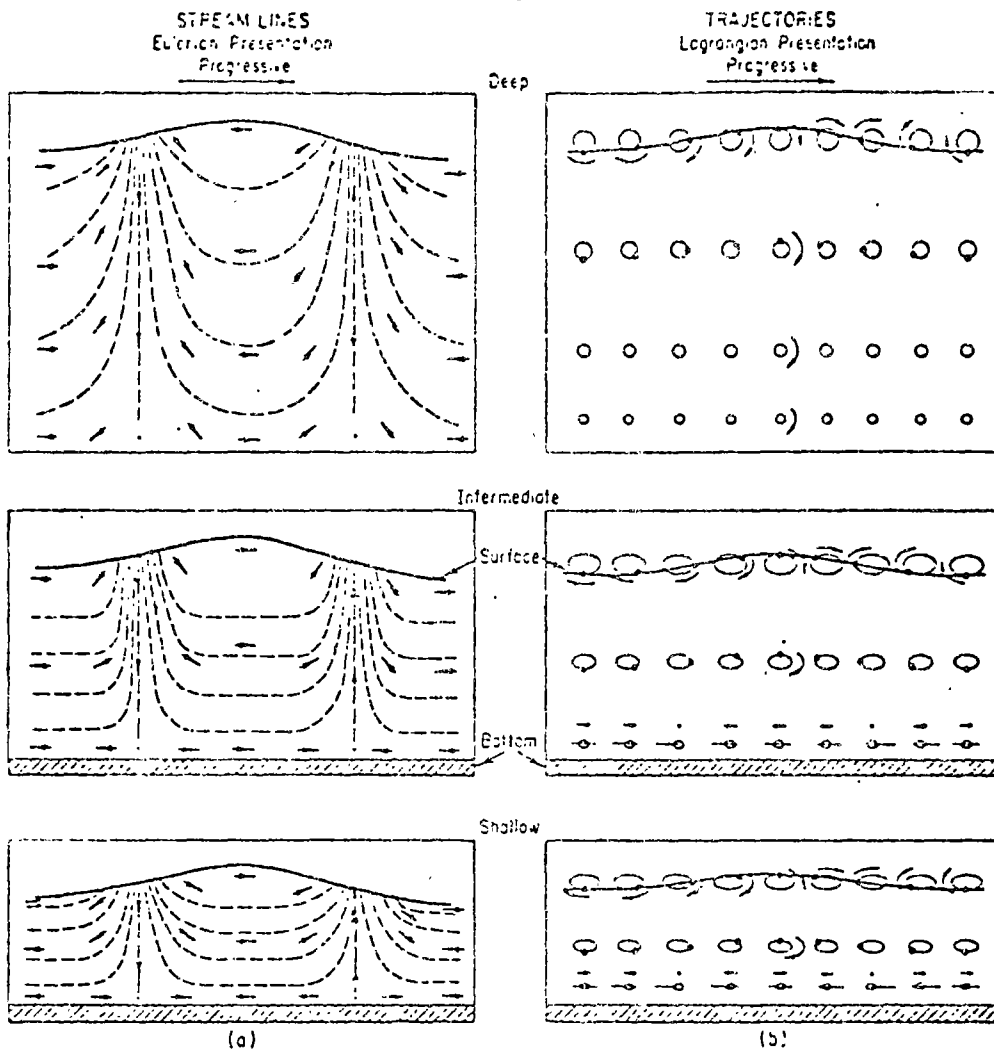


Fig. 3.3-1. Particle paths (Lagrangian viewpoint) and streamlines (Eulerian viewpoint) for a sinusoidal progressive wave.

(3.3: 1) and (3.3: 3). Its stream function will be

$$\psi^0 = \psi^+ + \psi^- .$$

Specifically, for deep water:

$$\psi^0 = -cae^{\kappa x_2} \cos(\kappa x_1 - \sigma t) + cae^{-\kappa x_2} \cos(\kappa x_1 + \sigma t) ,$$

or

$$(3.3:12.1) \quad \psi^0 = -2ace^{\kappa x_2} \sin \kappa x_1 \sin \sigma t ;$$

similarly, for intermediate water:

$$(3.3:12.2) \quad \psi^0 = -2ac \frac{\sinh \kappa(x_2 + h)}{\sinh \kappa h} \sin \kappa x_1 \sin \sigma t ;$$

and for shallow water:

$$(3.3:12.3) \quad \psi^0 = -2ac(1 + x_2/h) \sin \kappa x_1 \sin \sigma t$$

The details of the motion for the standing wave can be had by operating on the stream function  $\psi^0$  as we did on  $\psi^+$  and  $\psi^-$  for the opposed progressive waves, or they can be had by adding the results for the opposed progressive waves.

The field and particle motion is shown in Fig. 3.3-2. For a standing wave, all particle motion is rectilinear and simple harmonic with amplitude

$$\frac{2a}{\sinh \kappa h} \left\{ \frac{1}{2} [\cosh 2\kappa(x_2 \div h) - \cos 2\kappa x_1] \right\}^{1/2}$$

and inclination

$$\tan^{-1} \left[ -\tanh \kappa(x_2 \div h) / \tan \kappa x_1 \right].$$

In addition to the field and particle motions induced by the small-amplitude

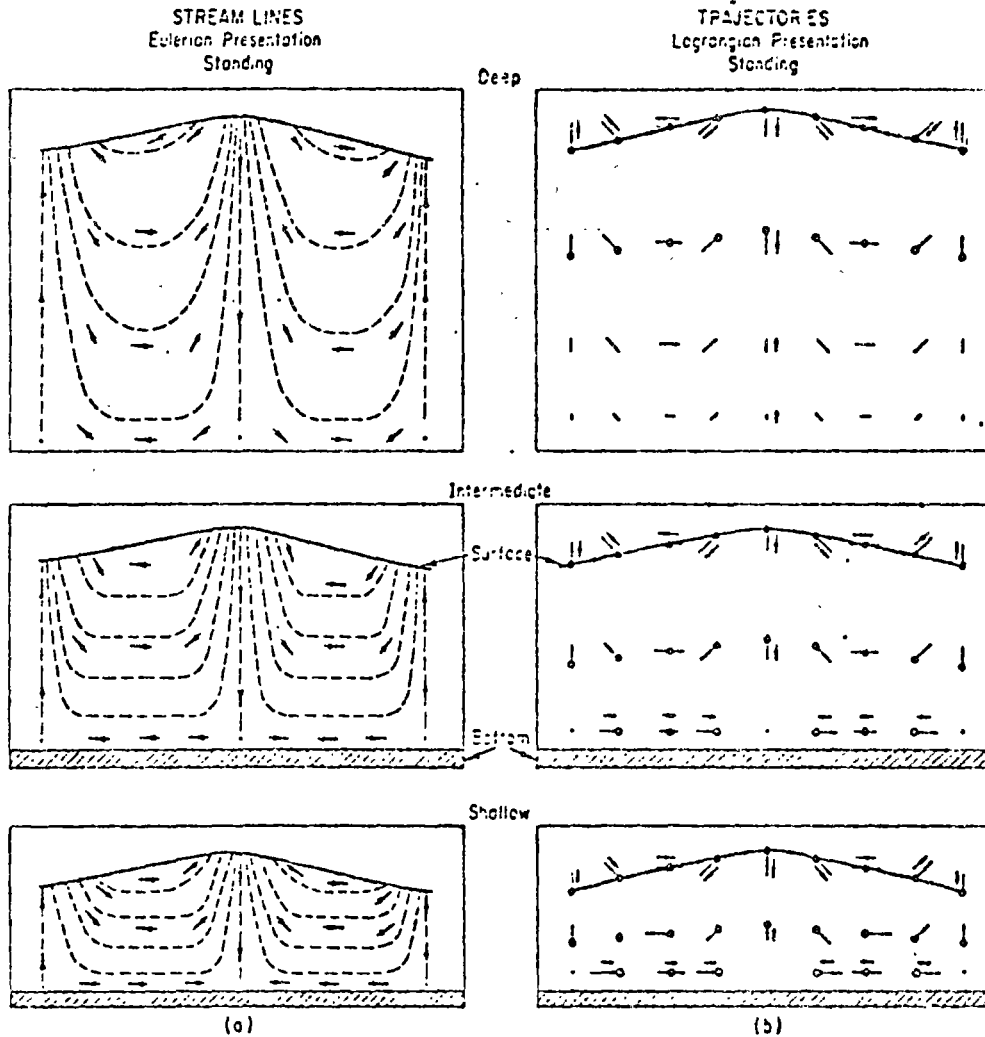


Fig. 3.3-2. Particle paths (Lagrangian viewpoint) and streamlines (Eulerian viewpoint) for a sinusoidal standing wave.

wave, it is desirable to know what the pressure fluctuations are within the fluid. This information is of special importance, since pressure gauges placed on the bottom in shallow water or suspended from buoys equipped with damping discs in deeper water are often used as wave recorders. Since the stream function exists, we can use Bernoulli's theorem in the form (2.7: 7).

$$\int \frac{\delta p}{\rho} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{1}{2} u^2 - g x_2 + F(t).$$

Since we know neither  $F(t)$  nor  $\varphi$  at the moment, absorb  $F(t)$  into  $\varphi$  and let the fluid density  $\rho$  be constant. Then Bernoulli's theorem may be written as



$$(3.3:15) \quad p = -\rho g x_2 + \rho \frac{\partial \phi}{\partial t} - \frac{1}{2} \rho (u_1^2 + u_2^2)$$

$$\left[ \begin{array}{c} \text{total} \\ \text{pressure} \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c} \text{hydrostatic} \\ \text{pressure} \end{array} \right] + \left[ \begin{array}{c} \text{pressure} \\ \text{due to} \\ \text{wave form} \end{array} \right] + \left[ \begin{array}{c} \text{pressure} \\ \text{due to local} \\ \text{kinetic energy} \end{array} \right]$$

Equation (3.3:15) says that the pressure in water of depth  $h$  at any distance  $x_2$  beneath the undisturbed surface is the hydrostatic pressure plus two additional terms—one arising from the passage of the wave form and the other due to the kinetic energy of the water motion, in the vicinity of the gauge, induced by the passage of the wave. Since the hydrostatic pressure will always be present whether waves are running or not, it represents a sort of background level, and we can concentrate our attention on departures from it. Let

$$(3.3:16) \quad \Delta p \equiv \rho \frac{\partial \phi}{\partial t} - \frac{1}{2} \rho (u_1^2 + u_2^2).$$

$\Delta p$  is the departure from hydrostatic pressure produced by the presence of a wave.

It can be shown that, on the average, the part of  $\Delta p$  due to local kinetic energy,  $\frac{1}{2} \rho (u_1^2 + u_2^2)$ , is negligible in comparison with the part of  $\Delta p$  due to the wave form,  $\rho \partial \phi / \partial t$ .  $\phi$  can be found from  $\psi$  and, after a run of the usual sorts of approximations appropriate to a first-order analysis, one gets for the departure from hydrostatic pressure: in deep-water,

$$(3.3:22.1) \quad \Delta p \approx \rho g \frac{H}{2} e^{\kappa x_2} \cos(\kappa x_1 - \sigma t);$$

in intermediate water,

$$(3.3:22.2) \quad \Delta p \approx \rho g \frac{H}{2} \frac{\cosh \kappa(x_2 + h)}{\cosh \kappa h} \cos(\kappa x_1 - \sigma t);$$

and in shallow water,

$$(3.3:22.3) \quad \Delta p \approx \rho g \frac{H}{2} \cos(\kappa x_1 - \sigma t)$$

What Eqs. (3.3:22.i) say is that in deep water the fluctuations about the hydrostatic pressure decrease exponentially with depth. By the time you have reached a depth of half a wave length,  $x_2 = -L/2$ , they are so small that most pressure gauges would fail to respond to them. From Eq. (3.3:22.1),

$$\frac{\Delta p \Big|_{x_2 = -L/2}}{\Delta p \Big|_{x_2 = 0}} = \frac{e^{-\kappa L/2}}{e^0} = e^{-2\pi(L/L)} = e^{-\pi} \approx 0.04.$$

The fluctuations in pressure have faded out at a depth of half a wave length to about one twenty-fifth of what they were just beneath the surface. Consequently, at depths  $x_2 < -L/2$  the pressure is essentially hydrostatic. From fluctuation in the pressure you could not hope to detect that a wave was running on the surface. In shallow water, from (3.3:22.3), we see that the pressure fluctuations are transmitted virtually unattenuated from the surface to the bottom, since the amplitude,  $\rho g(H/2)$ , is composed of constants. In intermediate water the behavior lies between direct transmission at full strength and exponential decay.

A pressure recorder must thus receive differently each component in a composite sea. There is no simple equivalence between a wave record and a pressure record. Information present can be compensated, but information lost—and this includes all information about waves with lengths less than double the depth at which the pressure transducer is located—can not be retrieved. In terms of wave numbers, a pressure gauge is a low-pass filter. Large  $\kappa$  (small  $L$ ) is simply cut off. This is not a bad property in every situation, and there may be times when you can take advantage of it. However, don't go around making general statements about the sea surface on the strength of bottom pressure records.

### 3.4 The Energy of a Sinusoidal Wave

The potential energy of any wave equals the work necessary to distort a horizontal sea surface into the wave profile. It has no connection with the water motions which may be occurring beneath the surface.

We will sketch a wave in two space dimensions and take the third into account by discussing a strip one unit deep in the  $x_2$ -direction, Fig. 3.4-1. Let the profile be divided into strips by dividing  $x_1$  into sections of length  $\Delta x_1$  and consider any particular section  $\Delta x_{1j}$ . From

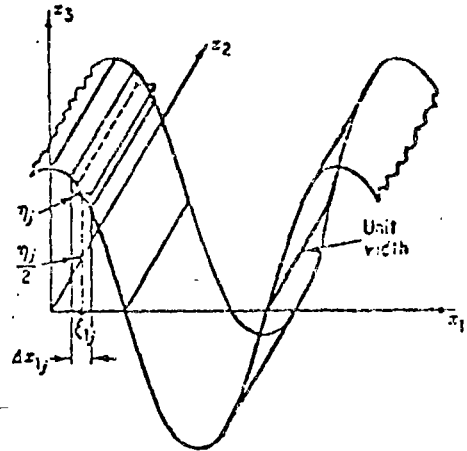


Fig. 3.4-1.

calculus we know that for some interior point of  $\Delta x_{1j}$ ,  $x_1 = \xi_1$ , there exists an ordinate  $\eta_j$  for which  $\eta_j \Delta x_{1j}$  is the area of the strip. If this area is multiplied by the unit depth in the  $x_2$ -direction, the same number gives the volume of fluid within the strip as well. The mass of fluid in the strip may then be expressed by  $\rho \eta_j \Delta x_{1j}$  where  $\rho$  is the density of the fluid. The center of gravity of the strip is at the level  $x_3 = \eta_j/2$ . Now-- since the potential energy is the mass multiplied by the acceleration due to gravity and the height of the center of gravity, the potential energy of the fluid strip may be written as

$$(\rho g/2) \eta_j^2 \Delta x_{1j}$$

Summing the potential energy over one wave length,  $x_1 = 0$  to  $x_1 = L$ , and permitting the longest of the  $\Delta x_{1j}$  to go to zero, we have, in the limit, for the potential energy over one wave length

$$\int_0^L (\rho g/2) \eta^2 dx_1$$

The horizontal area covered by a wave of length  $L$  and one unit deep in the  $x_2$ -direction is  $L \times 1 = L$ , so that the average potential energy per unit horizontal surface area is

$$(3.4:3.1) \quad V = (g/2L) \int_0^L \rho \eta^2 dx_1$$

If the fluid has constant density, then the average potential energy per unit horizontal surface area is

$$(3.4:3.2) \quad V = (\rho g/2L) \int_0^L \eta^2 dx_1$$

Our derivation has neglected the potential energy stored in the surface tension. However, neither the sinusoidal profile nor the small-amplitude assumption has been invoked so that the equations hold for waves of finite height and any profile that is single valued and sufficiently regular to have a wave length.

If we use the sinusoidal profile in equation (3.4:3.2) for the progressive wave we get

$$(3.4:4) \quad V^+ = (\rho g a^2)/4$$

If instead we use the sinusoidal profile for the standing wave, we have

$$(3.4:5) \quad V^0 = (\rho g a^2/4) \cos^2(\sigma t)$$

Equations (3.4:4) and (3.4:5) give the average potential energy per unit horizontal surface area for progressive and standing waves of sinusoidal profile.

If the small-amplitude assumption is made, they may be interpreted as the average potential energy per unit surface area.

Clearly, the potential energy of the progressive wave is a constant independent of time--only to be expected since the profile is rigid. On the other hand, the potential energy of the standing wave is a function of time since the distortion of the surface comes and goes.

Since the sinusoidal profiles,  $\eta$ , are functions of time as well as of space, the entire development can be replayed in terms of  $\Delta t$  and the wave period  $T$ . The result will be the average potential energy at a point per unit time. The results are

$$(3.4:6) \quad \overline{V^+} = \rho g a^2 / 4$$

and

$$(3.4:7) \quad \overline{V^0} = (\rho g a^2 / 4) \cos^2(\kappa x_1)$$

If either the time mean of (3.4:4) or (3.4:5) per unit time, or the space mean of (3.4:6) or (3.4:7) per unit horizontal area is taken, the results are

$$(3.4:8.1) \quad \overline{\overline{V^+}} = \rho g a^2 / 4$$

and

$$(3.4:8.2) \quad \overline{\overline{V^0}} = \rho g a^2 / 8$$

When you work out the component velocities for the standing wave you find that each has a factor of  $\sin(\sigma t)$ . Thus, at time  $t = 0$  we have  $u_1^0 = u_2^0 = 0$ . There is no kinetic energy since there is no fluid motion. At  $t = 0$  the total energy of the standing wave,  $E^0$ , is all potential.

$$(3.4:9.1) \quad E^0 = V^0 = \rho g a^2 / 4 \quad T^0 = 0$$

At time  $t = \pi/2\sigma$  the sea surface is flat and the potential energy of the standing wave has entirely disappeared. We have  $V^0 = 0$ . In the absence of generative or dissipative forces the total amount of energy in the wave can not have changed; so we conclude that what has vanished as potential energy must now be in the form of kinetic energy, i.e., that at  $t = \pi/2\sigma$  we must have

$$(3.4:9.2) \quad E^0 = T^0 = \rho g a^2 / 4 \quad V^0 = 0$$

The total energy,  $E^0$ , of the standing wave must be the sum of its kinetic and potential energies,  $E^0 = T^0 + V^0$ . Solving for the kinetic energy and substituting for  $E^0$  and  $V^0$  from (3.4:9.i) and

(3.4:5), after factoring out  $\rho g a^2/4$ , we have

$$T^0 = (\rho g a^2/4) (1 - \cos^2(\sigma t))$$

or, since  $1 - \cos^2(\sigma t) = \sin^2(\sigma t)$ ,

$$(3.4:10) \quad T^0 = (\rho g a^2/4) \sin^2(\sigma t)$$

When  $\sin^2(\sigma t)$  has a maximum, so also will  $T^0$ . Maxima occur for

$$t = \{(2v - 1)/4\}/\sigma$$

at which times, by (3.4:10),

$$T^0 = \rho g a^2/4$$

and the energy of the standing wave is entirely kinetic since

$V^0 = 0$  by (3.4:5). The total energy of the standing wave is

$$(3.4:11) \quad E^0 = T^0 + V^0 = (\rho g a^2/4) \{\sin^2(\sigma t) + \cos^2(\sigma t)\} = \rho g a^2/4$$

as it should be.

We turn our attention now to the kinetic energy of the progressive wave. Let it be resolved into two standing waves out of phase by  $\pi/2$ , i.e.,

$$(3.4:12) \quad \begin{aligned} \eta &= a \cos(kx_1 - \sigma t) \\ &= a \cos(kx_1) \cos(\sigma t) + a \sin(kx_1) \sin(\sigma t) \end{aligned}$$

At time  $t = 0$  the energy of the first-component standing wave is entirely potential--since for  $t = 0$ ,  $\cos(\sigma t) = 1$ --and  $E_1^0 = V_1^0 = \rho g a^2/4$ , while the energy of the second-component wave, being out of phase by  $\pi/2$ , is entirely kinetic--since for  $t = 0$ ,  $\sin(\sigma t) = 0$ --and  $E_2^0 = T_2^0 = \rho g a^2/4$ . Since the energy of the progressive wave must be the sum of the energies of its component standing waves--after all, you can hardly change the energy content of a wave by changing the description of it--the total energy per unit horizontal surface area is

$$(3.4:13) \quad E^+ = \rho g a^2/2$$

Again, since the total energy of a wave must be the sum of the potential and kinetic energies, in the absence of generative or dissipative forces we can find the kinetic energy per unit horizontal surface area from (3.4:13) and (3.4:4) and

$$T^+ = E^+ - V^+$$

Substituting

$$(3.4:14) \quad T^+ = \rho g a^2 / 4$$

Comparing (3.4:14) with (3.4:4) we see that to the first order of approximation--which is the level at which we are working in this section--there is equipartition of energy between potential and kinetic forms in a sinusoidal progressive wave.

So far we have been concerned only with average energy per unit surface area contained in the waves. Now we want to consider the transmission of energy by waves, and we will begin with a uniform wave train. A uniform wave train can be defined as one in which the amplitude  $a$ , the wave number  $\kappa$ , and the frequency  $\sigma$  are constant throughout the train. Let

the profile be the usual sinusoid and let the small-amplitude assumption be in force. Consider the rate at which work is being done on an area of unit width in the  $x_2$ -direction and height  $\Delta x_3$  in the vertical plane,

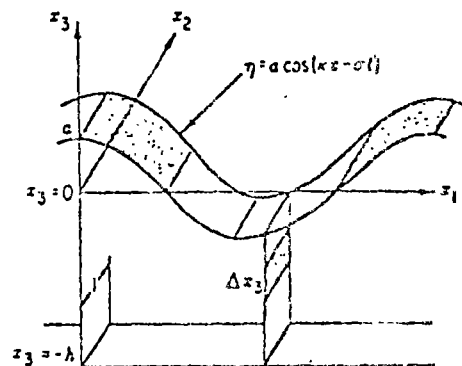


Fig. 3.4-2

Fig. 3.4-2. Let  $p$  be the pressure at the depth of the element and  $\Delta x_1$  be the horizontal distance through which the element moves in the time  $\Delta t$ , so that the power will be

$$(p \Delta x_3 \Delta x_1) / \Delta t \quad \text{or} \quad (\rho g \Delta x_3) (\Delta x_1 / \Delta t)$$

In the limit this becomes

$$p \delta x_3 (dx_1/dt)$$

and since  $dx_1/dt = u_1$ , may be written as  $pu_1 \delta x_3$ .

Bernoulli's Theorem gives us an expression for  $p$ . From equations (3.3:15), (3.3:16), and (3.3:22.2) it can be written as

$$p = -\rho g x_3 + \Delta p = -\rho g x_3 + \rho g a \left\{ \frac{\cosh \kappa(x_3+h)}{\cosh \kappa h} \right\} \cos(\kappa x_1 - \sigma t)$$

Substituting, the wave power per unit crest width is

$$P = -\rho g x_3 u_1 \delta x_3 + \rho g a u_1 \left\{ \frac{\cosh \kappa(x_3+h)}{\cosh \kappa h} \right\} \cos(\kappa x_1 - \sigma t) \delta x_3$$

The first term is associated with the hydrostatic pressure and has a mean value of zero if averaged over one or more wave periods.

The usual rock hockey applied to the second term brings us down to

$$(3.4:16) \quad P = \frac{1}{2} \rho g a^2 c \times \frac{1}{2} \{1 + (2\kappa h)/(\sinh 2\kappa h)\}$$

Equation (3.4:13) gave the total energy of a progressive wave as

$$E = \frac{1}{2} \rho g a^2$$

so that we can write the wave power as

$$(3.4:17) \quad P = E c \times \frac{1}{2} \{1 + (2\kappa h)/(\sinh 2\kappa h)\}$$

This is energy times phase speed, adjusted by a nondimensional factor involving the water depth. Define a nondimensional parameter  $n$  by

$$n \equiv \frac{1}{2} \{1 + (2\kappa h)/(\sinh 2\kappa h)\}$$

The wave power is then

$$(3.4:18) \quad P = E c n$$

Since the parameter  $n$  contains a hyperbolic function, there will be approximate forms for deep and shallow water.

For deep water  $\kappa h$  is very large and

$$(3.4:19.1) \quad n \approx \frac{1}{2}$$

For intermediate water one uses the full definition

$$(3.4:19.2) \quad n = \frac{1}{2} \{1 + (2\kappa h)/(\sinh 2\kappa h)\}$$

For shallow water  $kh$  is small and

$$(3.4:19.3) \quad n \approx 1$$

Equations (3.4:18) and (3.4:19.1) tell us that in deep water the wave train transmits energy at a speed one-half the phase speed of the wave,  $c$ , while equation (3.4:19.3) tells us that in shallow water the energy moves at the phase speed itself.

It is customary to use the product  $nc$  to define a new speed called the group wave speed.

$$(3.4:20) \quad nc \equiv \mathcal{V}$$

This is the speed at which a wave transmits energy. It is also the speed at which the wave group made by dropping a rock discussed in the first section moves. As you go along you will find it emerging in any number of contexts.

With this definition the formula for the wave power looks really simple:

$$(3.4:21) \quad P = \mathcal{V}E$$

While we are at it we might as well list the approximations for the group speed--the speed of energy transmission--in terms of the speed of phase transmission:

For deep water

$$(3.4:22.1) \quad \mathcal{V} = \frac{1}{2}c$$

For intermediate water

$$(3.4:22.2) \quad \mathcal{V} = \frac{1}{2}\{1 + (2kh)/(\sinh 2kh)\}c$$

For shallow water

$$(3.4:22.3) \quad \mathcal{V} = c$$

So far we have entirely neglected the frictional forces in the equation of motion. We will bring them in momentarily in a left-handed



way to form an estimate of the effect of viscosity on free oscillatory waves in deep water and we will derive an expression for the rate at which energy is changed by viscous dissipation. You will see that we were quite right to neglect viscous frictional forces at the outset.

For small-amplitude waves in deep water neglecting the viscosity we got:

$$\psi = -ca \exp\{\kappa x_2\} \cos(\kappa x_1 - \sigma t) \quad , \quad (3.3:2.1)$$

$$u_1 = a\sigma \exp\{\kappa x_2\} \cos(\kappa x_1 - \sigma t) \quad , \quad (3.3:6.1.1)$$

$$u_2 = a\sigma \exp\{\kappa x_2\} \sin(\kappa x_1 - \sigma t) \quad , \quad (3.3:6.1.2)$$

where

$$\eta = a \cos(\kappa x_1 - \sigma t)$$

was the specified profile.

Motion of this sort can persist even in the presence of viscous dissipation if the proper compensating surface forces are applied. (Don't ask me how I'm actually going to apply these surface forces. I'm working my imagination and I see that it can be done "in principle.")

From the equation of motion in the two-dimensional form these compensating forces,  $p_{22}$  and  $p_{21}$ , will have to be just equal to the dissipating forces, i.e.,

$$p_{22} = -P + 2\mu(\partial u_2/\partial x_2)$$

and

$$p_{21} = \mu(\partial u_2/\partial x_1 + \partial u_1/\partial x_2)$$

where  $\mu$  is the coefficient of viscosity with a value of about  $1.79 \times 10^{-2}$  poise in water. (1 poise  $\equiv$  1 dyne-sec/cm<sup>2</sup>.) We can work out the required partials from the relations given above and substitute to get

$$p_{22} = -p + 2\mu a \kappa \sigma \exp\{\kappa x_2\} \sin(\kappa x_1 - \sigma t)$$

and

$$p_{21} = 2\mu a \kappa \sigma \exp\{\kappa x_2\} \cos(\kappa x_1 - \sigma t)$$

Since we have already made the small-amplitude assumption we can more easily evaluate these expressions on  $x_2 = 0$  rather than on  $x_2 = \eta$ --as, in a strict sense, we should. One gets

$$\begin{aligned} P_{22} &\approx -p + 2\mu a \kappa \sigma \sin(\kappa x_1 - \sigma t) \\ \text{and} \\ P_{21} &\approx 2\mu a \kappa \sigma \cos(\kappa x_1 - \sigma t) \end{aligned}$$

Now, the rate at which these forces do work is

$$\begin{aligned} P_{22}u_2 + P_{21}u_1 &\approx -p a \sigma \sin(\kappa x_1 - \sigma t) \\ &\quad + 2\mu a^2 \kappa \sigma^2 \sin^2(\kappa x_1 - \sigma t) \\ &\quad + 2\mu a^2 \kappa \sigma^2 \cos^2(\kappa x_1 - \sigma t) \end{aligned}$$

where  $u_1$  and  $u_2$  are also evaluated at  $x_2 = 0$ . Simplifying,

$$P_{22}u_2 + P_{21}u_1 \approx -p a \sigma \sin(\kappa x_1 - \sigma t) + 2\mu a^2 \kappa \sigma^2$$

and averaging over complete cycles which removes the first term

$$\langle P_{22}u_2 + P_{21}u_1 \rangle \approx 2\mu a^2 \kappa \sigma^2$$

This is the average energy input necessary to maintain the motion in the presence of viscosity. Consequently, the energy dissipation  $R_\mu$  is either

$$(3.4:23.1) \quad R_\mu = -2\mu a^2 \kappa \sigma^2$$

or, with  $\sigma^2 = \kappa^2 c^2$ ,

$$(3.4:23.2) \quad R_\mu = -2\mu a^2 \kappa^3 c^2$$

This viscous attenuation isn't very impressive. Consider a wave with  $H = 2$  m and  $L = 100$  m. Its total energy per unit horizontal surface area we have found to be  $E = \frac{1}{2} \rho g a^2$ . With  $\rho = 1$  g/cm<sup>3</sup>,  $g = 980$  cm/sec<sup>2</sup>, and  $a = 100$  cm we have

$$E = 4.90 \times 10^6 \text{ ergs/cm}^2$$

From (3.4:23.1) the rate of energy loss due to viscosity with

$L = 100$  m and  $T = 8$  sec--so that  $\kappa = 10^{-4}$  1/cm and  $\sigma = 1/8 = 0.125$  1/sec--

and using  $\mu = 1.79 \times 10^{-2}$  g/cm/sec works out to

$$R_\mu = -0.129 \text{ ergs/cm}^2/\text{sec}$$

The wave has an energy of the order of millions of ergs per square centimeter which it is losing by viscosity at only a little more than one-tenth of one erg per square centimeter per second. If this rate held constant--which, of course, it can't since the wave height would decrease as the energy was lost--it would take the viscosity well over a year to destroy the wave. In that time it will have run into the land somewhere and gone to smash long before the viscosity could attenuate it very much.

#### 4. The Spectral "Solution"

##### 4.1 Fourier Series Representation

In Section 1 we described waves as they actually are. The two most important points made were that a wavy sea-surface is very irregular and that any problem concerning ocean waves is essentially statistical.

Trying to avoid the statistical nature of the problem by computing a mean wave height, a mean period, and a mean length from the irregular waves and then using them as parameters for some simple wave-form--sinusoidal, trochoidal, cnoidal, or whatever--is inadequate. No simple wave-form is ever equivalent in its effects to an irregular sea.

In Section 2 we discussed the hydrodynamic laws which the motion must obey.

The waves are on the water and the water conforms to the laws of Newtonian physics. It doesn't matter to the water whether you choose to formulate the problem as deterministic or statistical. The water just doesn't care about what you do.

In Section 3 we solved one particular boundary value problem and got the small-amplitude sinusoidal wave.

This wave is very very regular and the information derived for it was deterministic; not statistical. It is obvious that in no sense have we reached a "solution" for the waves described in Section 1. Such a solution must describe irregularity and it must be statistical.

To keep our discussion in Section 4 in focus I will propose a specific problem. Suppose that you have been asked by Pemex to design a tower. It is to be located in the Gulf of Campeche at a specified location well offshore in water of considerable depth. Pemex will be more than a little annoyed with you if the tower gets knocked down and its workmen killed.

At least part of your design problem concerns the waves. The tower is to be in open water unprotected from wave-action. Waves exert forces to which the tower responds. You can't build a truly rigid structure. In order to make a design of sufficient strength to stand against the wave forces and, at the same time, not waste money by over-design, you need to know the nature of the wave field, i.e., the nature of the forcing function, in considerable detail. It is only in terms of the forcing function that you can work out the behavior of the kind of tower you propose to build, i.e., the response function of the tower, and so know how strong it must be made.

Clearly, the only possible starting point is a knowledge of the wave fields characteristic of the specific tower location. The chances that you will be able to find this information in the literature are so small as to make an investment in a literature search prohibitive. In almost every case you will have to go to the spot in question and gather your own records in the field.

Figures 1.4-8 and 1.4-9 showed you what such wave records look like. These are point records which are functions of time,  $n(t) = n(t; x_1, x_2)$ . The space coordinates are parameters which tell you where the wave probe was mounted.

The elevation of the sea surface is a function of both space and time,  $\eta = \eta(x_1, x_2, t)$ , and for your tower design you need the space behavior as well as the time behavior. The response of your tower will depend on the direction of the wave approach as well as on its height and period. In other words, the problem is inherently 3-dimensional. This makes the arithmetic messy but it doesn't change the fundamental ideas. For clarity I will discuss mainly time records made at a point. The multidimensional aspects will be included by arm-waving and suggestion.

So--you have made a collection of characteristic wave records and you are looking at one of them, Fig. 4.1-1. You turned your

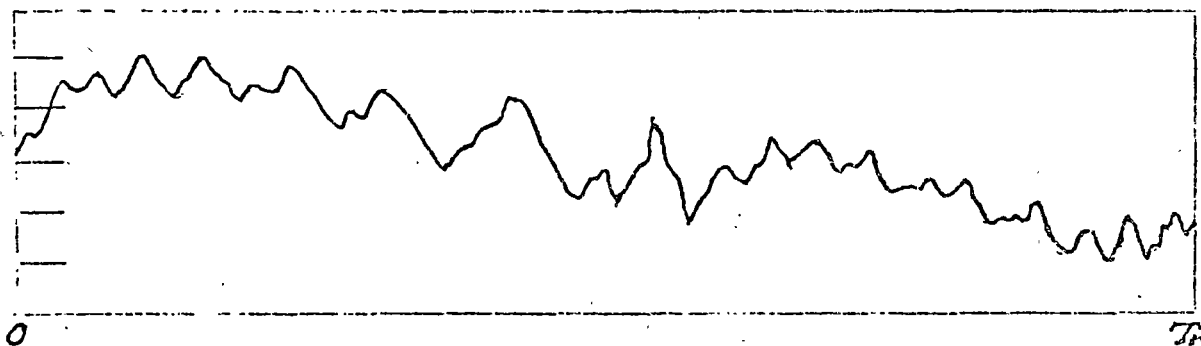


Fig. 4.1-1

instrument on at  $t = 0$  and off at  $t = T_r$  so that the record length is  $T_r$  sec. If  $T_r$  is long, the base water surface is moving up and down with the tide and your record will show it. If  $T_r$  is quite short, the base water level may have changed so little that it can be considered constant. In either case the wiggly line in front of you doesn't look like any regular profile you have ever seen as a solution to a boundary-value problem. What to do?

The first thing to do is to get the effect of the tide out of the record. Astronomers keep tabs on the moon and the sun and there are tide tables. If that won't do the trick, there are statistical methods by which pure sinusoids of finite height--which

is what tides are--can be estimated on the basis of the record itself. At any rate, estimate the tide, subtract it, and set it aside for future reference. The remaining record won't look much better than it did.

The second thing to do is to convert the tide-adjusted record into an equivalent Fourier series. The record displays no periods. However, if you simply repeat your record over and over, the extended record will have a period equal to the record length,  $T_p = T_r$ , whose fundamental radian frequency will be  $\sigma_1 = 2\pi/T_p$ . Then  $n(t)$  can be represented by the infinite Fourier series:

$$(4.1:1) \quad n(t) = a_0/2 + \sum_{q=1}^{\infty} \{a_q \cos(q\sigma_1 t) + b_q \sin(q\sigma_1 t)\}$$

where

$$(4.1:2) \quad a_q \equiv (2/T_p) \int_0^{T_p} n(t) \cos(q\sigma_1 t) dt \quad ; \quad q = 0, 1, 2, \dots$$

and

$$(4.1:3) \quad b_q \equiv (2/T_p) \int_0^{T_p} n(t) \sin(q\sigma_1 t) dt \quad ; \quad q = 1, 2, \dots$$

Notice that in this representation the terms appear in pairs of the form

$$A \cos(\alpha) + B \sin(\alpha)$$

This is just one of the ways to write a phase shifted sinusoid. Let

$$(4.1:4) \quad A^2 + B^2 \equiv C^2 \quad \text{and} \quad \tan^{-1}(B/A) \equiv \epsilon$$

Then we have

$$(4.1:5) \quad C \cos(\alpha + \epsilon) = A \cos(\alpha) + B \sin(\alpha)$$

Thus, (4.1:1) says that the irregular wave record  $n(t)$  can be represented by a sum of cosine waves whose amplitudes and phase shifts are determined by equations (4.1:2) through (4.1:5).

You can see that this gets us ahead a good bit. We already know a lot about the sinusoidal wave. We also know that we can add them by the principle of superposition. And here is a way to break up any irregular wave record into a sum of sinusoids.

The only trouble at the moment is that it is an infinite sum. The tail of the sum has larger and larger values of  $q$ . Thus, the component waves which form the tail of the infinite series are very high frequency waves, i.e., they have very short periods. Such waves are capillaries which never last very long. Their lengths are short. They never build up to any very great heights and so never contain much energy. Perhaps we can afford to neglect them.

Your record  $\eta(t)$  is finite, length  $T_r$ , which gives you your fundamental period or frequency  $\sigma_1$  by repetition of the record. These days we use digital computers. Suppose you digitize your record at an even number of points  $N$  evenly spaced  $\Delta t$  apart. You must choose  $\Delta t$  small enough to be less than half the period of the shortest appreciable fluctuation in your record. (This is where the tail of the infinite expansion goes by the board.) The table of  $N$  data values that results is

$$(4.1:6) \quad \eta_n = \eta(n\Delta t) \quad ; \quad n = 1, 2, \dots, N$$

For this table of values there will be a finite Fourier series which duplicates the  $N$  data points exactly. It is

$$\eta(t) = A_0 + \sum_{q=1}^{\frac{1}{2}N} A_q \cos(q\sigma_1 t) + \sum_{q=1}^{\frac{1}{2}N-1} B_q \sin(q\sigma_1 t)$$

or, for the specific data points where  $t = n\Delta t$ ;  $n = 1, 2, \dots, N$  with  $T_p = N\Delta t$  since  $\sigma_1 = (2\pi)/(N\Delta t)$



$$(4.1:7) \quad \eta_n = \eta(n\Delta t) = A_0 + \sum_{q=1}^{\frac{1}{2}N} A_q \cos(2\pi qn/N) + \sum_{q=1}^{\frac{1}{2}N-1} B_q \sin(2\pi qn/N)$$

The coefficients for the finite series take the forms:

$$(4.1:7.1) \quad A_0 = (1/N) \sum_{n=1}^N \eta_n = \bar{\eta}$$

This is the reference level (mean level) about which the sinusoids oscillate and we usually set it to zero.

$$(4.1:7.2) \quad A_q = (2/N) \sum_{n=1}^N \eta_n \cos(2\pi qn/N) \quad ; \quad q = 1, 2, \dots, \frac{1}{2}N-1$$

$$(4.1:7.3) \quad A_{\frac{1}{2}N} = (1/N) \sum_{n=1}^N \eta_n \cos(N\pi/2)$$

$$(4.1:7.4) \quad B_q = (2/N) \sum_{n=1}^N \eta_n \sin(2\pi qn/N) \quad ; \quad q = 1, 2, \dots, \frac{1}{2}N-1$$

This may look like a hoorah's nest to you but actually it's pretty simple. What it says is that if you have a wave record which you have read at points spaced at close enough intervals for the N digital values to be a good representation of the continuous record, you can trade the data values in for  $\frac{1}{2}N$  sine-cosine pairs, i.e.,  $\frac{1}{2}N$  phase shifted cosine waves, and have exactly the same information--neither more nor less--that you had in your original data set. Further, you need use only a finite number of them.

The great gain is that sinusoidal waves are well known, well behaved, and comparatively easy to think about. Instead of the very irregular wave record you can think about finite sums of very regular sinusoids.

Now you do it is simple too. Forget the bloody formulas. You digitize your record and then ask the computing center to run the data through its Fast Fourier Transform (FFT) program. Every self-respecting computing center has one on tap. It's fast--even for large data sets--and it's cheap. If you care about the FFT and its programing read

Brigham, O. E.

(1974) The Fast Fourier Transform. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N. J. 252 pp.

What comes back from the computing center is tables of  $A_q$  and  $B_q$ . A plot of them could look like Fig. 4.1-2.  $A_1$  and  $B_1$  are at

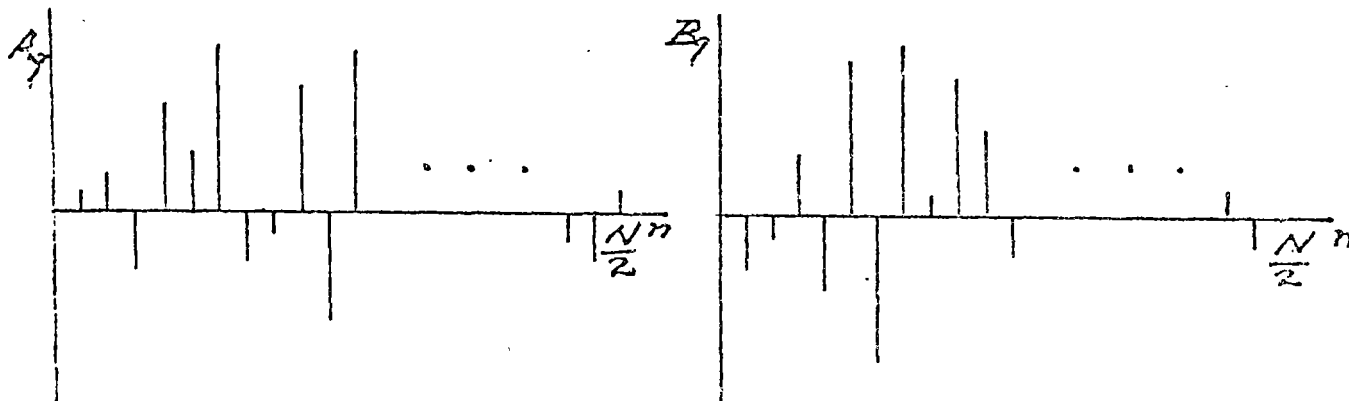


Fig. 4.1-2

the fundamental frequency  $f_1 = 1/T_r = 1/(N\Delta t)$ . The rest are spaced out evenly in order at intervals of  $f = 1/(2\Delta t)$ . The last,  $A_{N/2}$ , is located at  $f_c = 1/(2\Delta t)$ , the "cut-off" or Nyquist frequency.

This is almost as much of a mess as your original data. The trouble is that there is too much information and of the wrong kind. All the amplitudes and phase shifts of the record you stumbled into are there. If you had switched off your instrument a little sooner or a little later, the record length  $T_r$  would have been shorter or longer and the fundamental period would have made the

fundamental frequency,  $\sigma_1$ , larger or smaller than the one you got. All your  $A_q$ 's and  $B_q$ 's would wind up at different frequencies. Similarly, even if you made another record of exactly the same length under the same sea conditions, while the  $A_q$ 's and  $B_q$ 's would then be located at the same frequencies, their values would be very different.

One might question the "reality" of the Fourier component waves. Actually, since they duplicate the specific record for which they were computed, and since the record is a "real" physical record, they're real all right--but only for the record for which they were computed. And that's not what we need. We need something characteristic of the sea--any sea--which can be expected to remain the same if the conditions under which we made our record remain the same.

#### 4.2 The Energy Density Spectrum

The thing that characterizes similar sea conditions, irregular as they may be, is the energy contained in the waves. In subsection 3.4 we derived an expression for the average potential energy per unit horizontal surface area,

$$V = (\rho g/2L) \int_0^L \eta^2 dx_1 \quad \rho \text{ constant}$$

The similar expression for the average potential energy per unit time is

$$(4.2:1) \quad V = (\rho g/2T) \int_0^T \eta^2 dt \quad \rho \text{ constant}$$

These relations are independent of the shape of the profile  $\eta$  so long as it is single-valued and has a wave length or period.

We have forced our wave record to have a period; the record length  $T_r$ . All we have to do is square the record and integrate to get the potential energy.

In subsection 3.4 we also showed that the energy of a progressive wave to first order is equally divided between kinetic and potential energy. The factor,  $\rho g/2$  in (4.2:1) is just a scale factor.

Therefore, the total energy per unit time of the wave record is

$$(4.2:2) \quad E = (\rho g/2) \int_0^T \eta^2 dt$$

Strictly, (4.2:2) is a proportionality rather than an equation since the scale factor  $\rho g/2$  has been omitted. You can sop it up on the units or just remember to multiply it any time you need the "correct" physical dimensions of energy. The whole business of scale factors is pretty trivial anyway.

Now--here is something that hangs in there. If you make many wave records under similar conditions, no two of them will be the same. But, if you calculate their  $E$ -values, they will, apart from the usual sampling variability, come out in the same place.

In subsection 4.1 we saw that we could trade in the original wave record for a sum of phase-shifted cosines whose amplitudes were, by (4.1:4),

$$C_q = \sqrt{A_q^2 + B_q^2}$$

But, by (3.4:13) the energy of a progressive sinusoidal wave is proportional to the square of its amplitude, the scale factor again being  $\rho g/2$ . Therefore, the energy of each sinusoid in the Fourier series is

$$(4.2:3) \quad E_q = C_q^2 = (A_q^2 + B_q^2)$$

Since the sum of the sinusoids gives the original record the sum of their energies is the energy of the record.

$$(4.2:4) \quad \bar{E} = \sum \epsilon_q = \sum (\lambda_q^2 + B_q^2)$$

If we plot the energy corresponding to the analysis of Fig. 4.1-1 pictured in Fig. 4.1-2, it might look like Fig. 4.2-1.

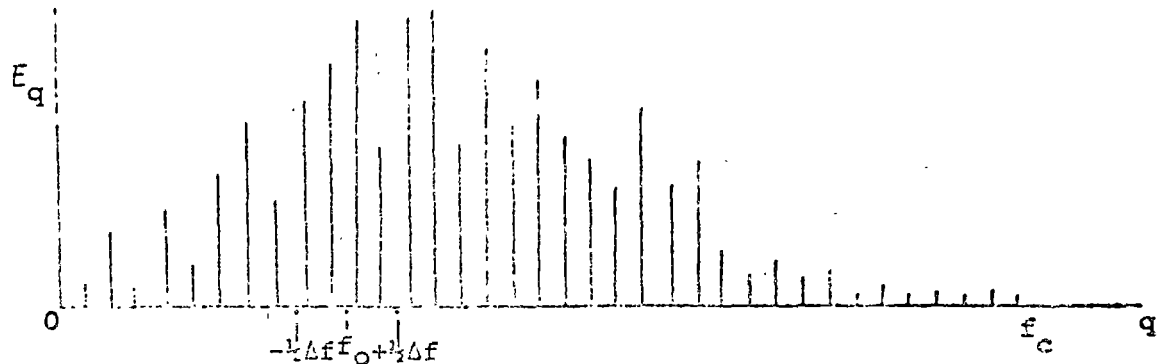


Fig. 4.2-1

We aren't quite home free yet. While the energy computed from long records made under similar conditions has stable values, the energies for the component waves are still wildly variable. Further, we don't really believe that the sea is made up of just exactly these discrete components standing on this evenly spaced set of frequencies. Those details were an accident. They depend on when we turned our instrument off and on the size of the  $\Delta t$  we chose when we digitized the record.

Instead, it seems more reasonable to suppose that waves of all frequencies are present in the sea and that we should use our discrete analysis to estimate the average energy within a frequency band. What we do is gather up our component energy estimates in bands  $(f_0 - \frac{1}{2}\Delta f, f_0 + \frac{1}{2}\Delta f)$  and average them. The average is then assigned (plotted) at the center frequency  $f_0$ . It is interpreted as being the average energy arising from components with frequencies in the band of length  $\Delta f$  centered at  $f_0$ .

The averaging "stabilizes" the energy estimates, Fig. 4.2-2.

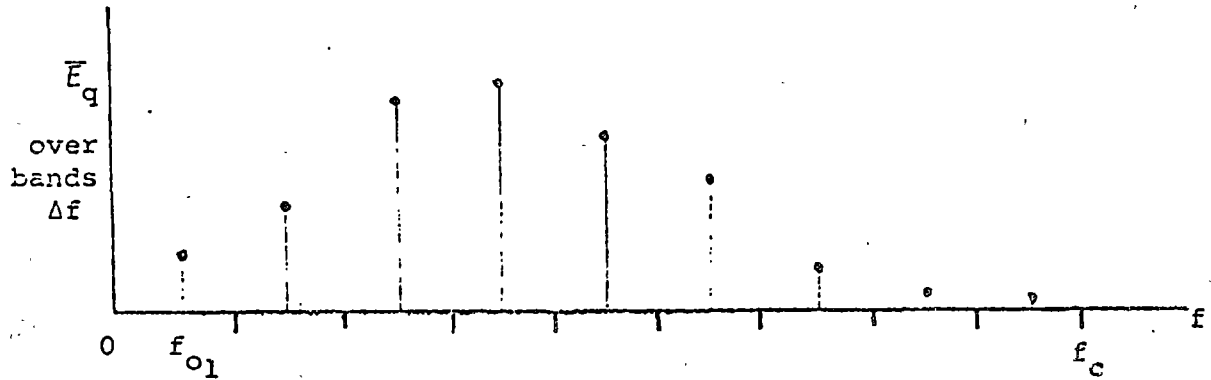


Fig. 4.2-2

As a recognition of the presence of waves of all frequencies, we fair a curve through the points and use it as our estimate of the energy density spectrum, Fig. 4.2-3.

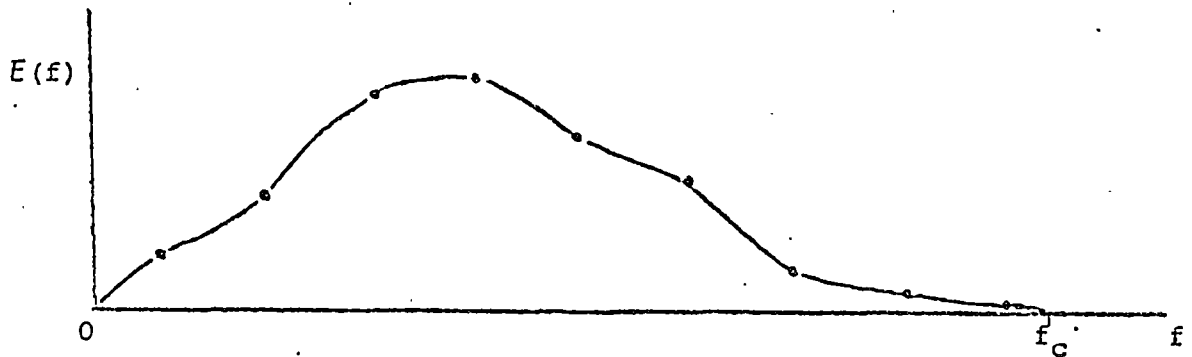


Fig. 4.2-3

This is a spectrum because the parameter of interest is sorted out by frequencies. It is a density function because the integral from any  $f_1$  to any  $f_2$  tells us how much of the parameter lies between  $f_1$  and  $f_2$ . Specifically, in our case the integral from  $f = 0$  to  $f = f_c$ , the cut off frequency, is the total parameter. It is an energy because the parameter is  $\eta^2$  which, for waves, is proportional to the total energy.

Now--back to practical matters for a moment. Since you don't really want to work with tables of  $A_q, B_q$ ; when you take your data to the computing center for the FFT processing don't ask for a print out of them. John Tukey was once heard to say that he knew of only one man who could be trusted to look at the components of a full Fourier series analysis and not talk blithering nonsense. Tell the computing center to follow up the FFT by further computing  $C_q^2 = A_q^2 + B_q^2$ . Then have them average the  $C_q^2$ 's in groups of  $v$  values appropriate to the  $\Delta f$  you have decided on. Have them print out these final values since they are the estimates of the energy density spectrum you really want.

You might have the computing center keep a tape of the  $A_q$ 's and  $B_q$ 's in case you change your mind about the size of the  $\Delta f$  you want to use so long as they don't charge you for the service. If they do charge, the chances are that it will be cheaper to recompute from the start.

I should issue one warning. Things like this are often called "power" density spectra or, for greater confusion, just "power" spectra although they are always densities. The name was coined by the electrical engineers at the Bell Telephone Laboratories. They were studying noise in circuits and working with electric currents. The square of an electric current is proportional to electric power so that their spectra were literally power density spectra. As more and more people borrowed their analysis techniques they also, unfortunately, borrowed their vocabulary as well. Today it is well established practice to call the spectrum for the square of any signal, whatever its physical nature, a "power" spectrum.

In our case the signal which is squared is the water displacement whose physical meaning is wave energy. Physically, we have an energy spectrum. You will frequently find it called a power spectrum. I do it myself. The use is justified by the generalized idea of using power for the square of any signal. However, don't let the usage lead you astray in your physical thinking.

#### 4.3 An Application

Suppose you have arrived at a tentative design for your tower. You will be worried about a lot of things including, perhaps, how much the platform will sway under the impact of waves. The tower design is complex--so complex that you won't have much confidence in your theoretical calculations. You probably can't even locate its natural frequency very well.

You may want to build a model of the tower and put it in a wave tank. You move the wave generating paddle rhythmically and measure the sway of the tower as it responds to a series of more or less regular waves. In spectral terms the waves you use to test the tower look like Fig. 4.3-1 (page 112). They are a series of Dirac spikes. Your measured values of sway, also plotted as amplitude squared, could look like Fig. 4.3-2 (page 112).

From Fig. 4.3-2, you would probably conclude that the sway-response of your tower was like Fig. 4.3-3 (page 112) and design



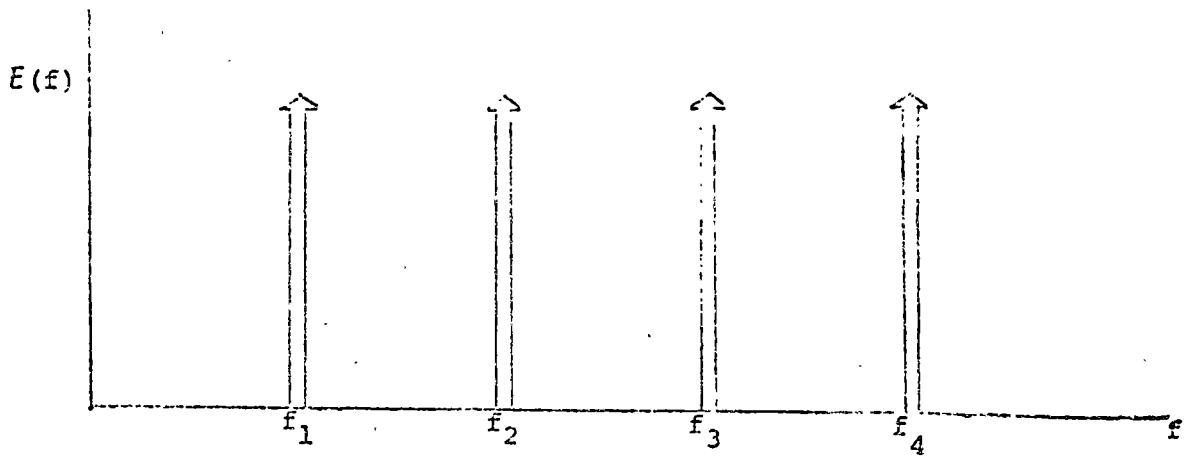


Fig. 4.3-1

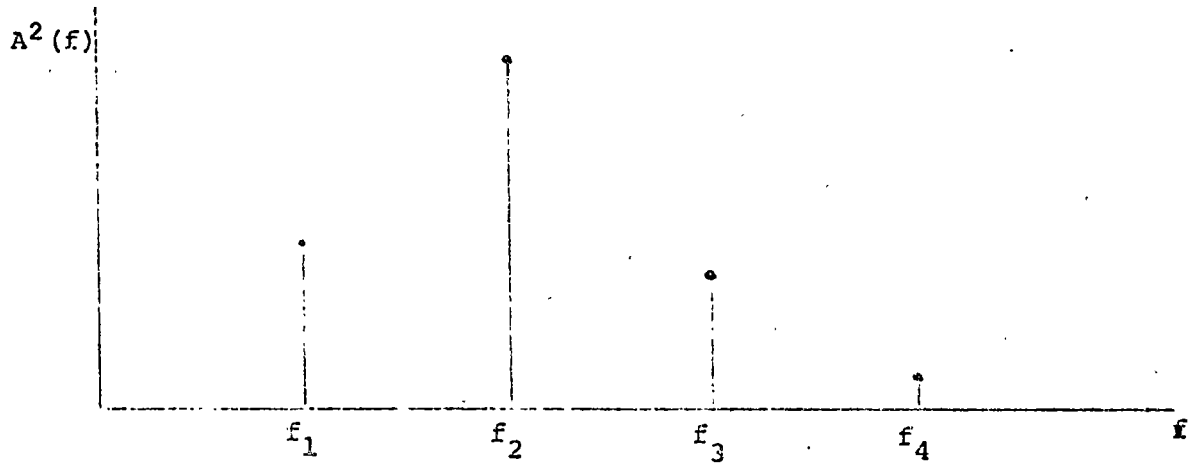


Fig. 4.3-2

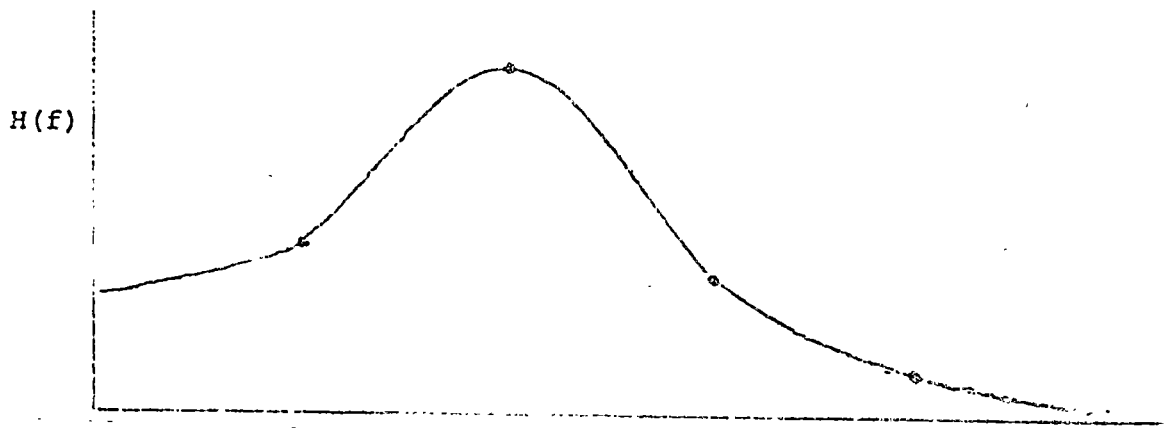


Fig. 4.3-3

Any structure has at least one natural frequency of oscillation. In addition, the real world is nonlinear and there may be frequencies which resonate through nonlinear interactions. The wave frequencies you chose for you tank tests may have missed them all! You would have if the true sway-response function happened to look like Fig. 4.3-4.

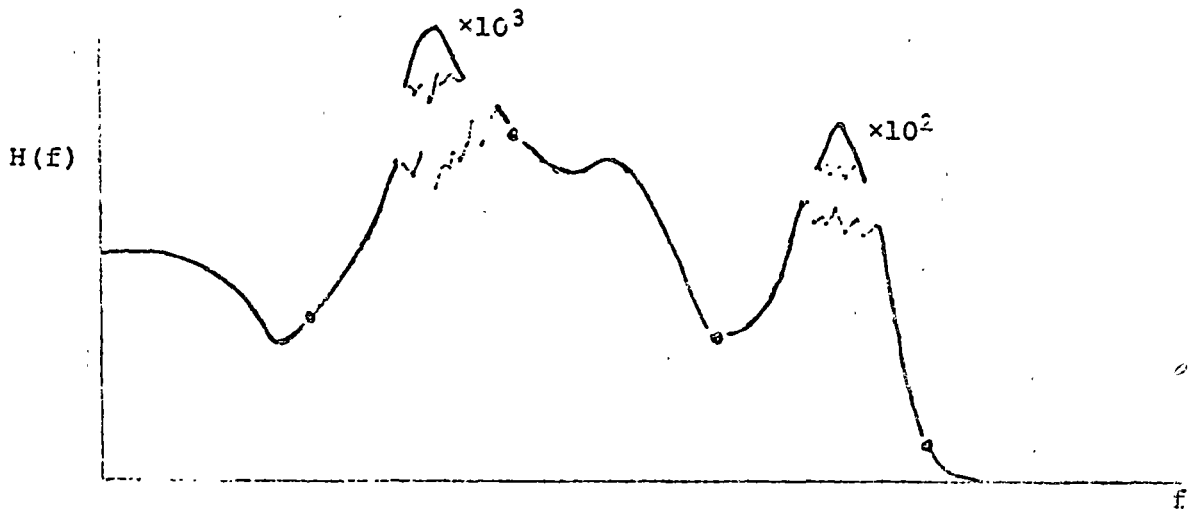


Fig. 4.3-4

The solution to the difficult is simple. Stop moving your wave generator as though you were playing the bass drum in a brass band. Don't test your tower against selected simple waves. In your wave tank generate a wave surface which models the energy density spectrum to which the tower will actually be subjected. Compute estimates of the power spectral densities for each. Then

$$\frac{\text{Output power spectral density}}{\text{Input power spectral density}} = (\text{Amplitude response } f_n)^2$$

By throwing the whole input spectrum at the tower, if there are any frequencies it particularly dislikes, you will find them. You can design specifically for them and the tower won't wash out in the first blow.

If you don't know the spectral shape of the forcing function--which is what you are trying to determine from your field

records--at the very least test your model tower with a "white noise" input. A white noise is any process with equal energies (powers) in components of all frequencies. It's power density spectrum looks like Fig. 4.3-5. If you do test with a "white noise," you may over-design because the real forcing function as it exists at your site never contains appreciable power at some frequency while the white noise does. But at least you won't

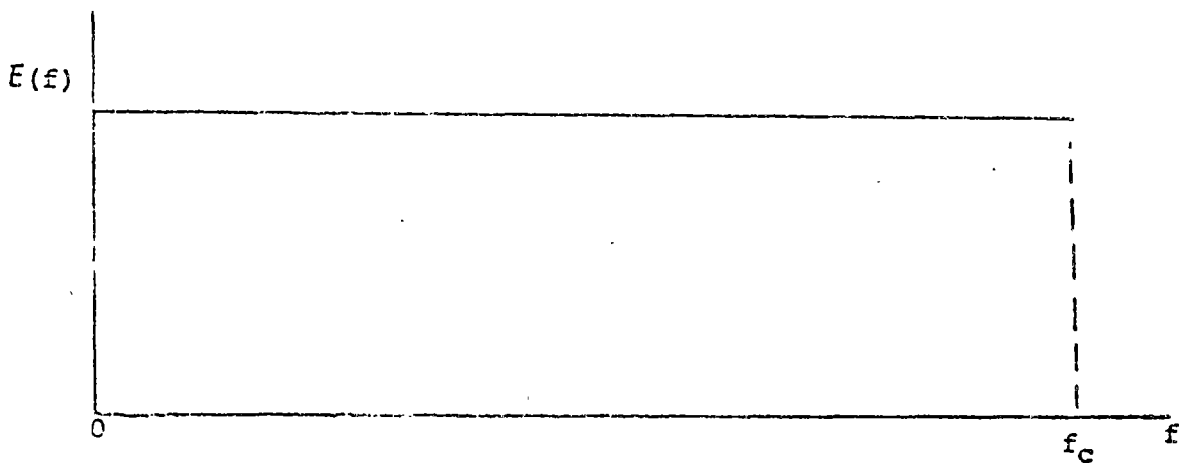


Fig. 4.3-5

remain innocent of the difficulties that could be there because the forcing function has a continuous broad-band spectrum. In the real world the one thing the spectrum absolutely isn't is a comb of Dirac spikes.

Naturally, there is a good bit more to the nuts and bolts of this kind of testing. If you ever intent to do anything useful and sensible about irregular signals of this sort--not just about waves--there is one book whose contents you should know a bit better than you know your own mother's name:

Bendat, J. S. and A. G. Piersol  
(1971) Random Data: Analysis and Measurement  
Procedures. Wiley-Interscience, New York  
407 pp.

#### 4.4 The Directional Spectrum

If you make a record of sea-surface elevation over an area at some instant of time,

$$\eta(x_1, x_2) = \eta(x_1, x_2; t)$$

The  $t$  is a parameter which indicates when the instantaneous record was made. A two-dimensional Fourier analysis, similar to the one-dimensional analysis of a time record taken at a point, will exchange the irregular sea surface for a sum of sinusoids sorted out by vector wave numbers  $\vec{\kappa} = (\kappa_1, \kappa_2)$ , i.e., sorted out by both wave length and direction of travel. From these a directional energy density spectrum can be calculated; one that gives the amount of wave energy at each wave number  $|\vec{\kappa}| = \kappa$  and also how much of the energy is traveling in each direction. One has either

$$\begin{array}{ll} E = E(\kappa_1, \kappa_2) & \text{(Cartesian)} \\ \text{or} & \\ E = E(\kappa, \theta) & \text{(Polar)} \end{array}$$

The  $\kappa_1, \kappa_2$ -form is probably the easier for theoretical work. Oceanographers prefer the  $\kappa, \theta$ -form since in wind drive seas the bulk of the energy travels pretty much down-wind within a smaller or larger angle symmetric about the wind direction so long as the waves are in deep water.

As the sea runs into shoal water each component will enter intermediate and then shallow water at a different time, depending on the wave length. The directions of travel are changed by refraction. So are the wave lengths. The directional spectrum becomes distorted from its deep-water form.

Students of waves have one great advantage over students of turbulence. In waves, the wave number and the frequency have a

functional connection.

$$\begin{aligned} & |\vec{\kappa}|c = \kappa c = \sigma \\ \text{and} \\ & c^2 = (g/\kappa) \tanh(\kappa h) \end{aligned}$$

Therefore,

$$(4.4:1) \quad \sigma^2 = g|\vec{\kappa}| \tanh(|\vec{\kappa}|h)$$

Circles concentric about the origin in  $\kappa_1, \kappa_2$ -space are the loci of wave numbers of fixed size, i.e., of all components of the same wave length. If we integrate  $E(\kappa_1, \kappa_2)$  around such circles, we gather up all the energy of components with the same wave number  $|\vec{\kappa}|$  in whatever direction they may be traveling. By using (4.4:1) we can convert the argument  $|\vec{\kappa}|$  to the equivalent frequency  $\sigma$  and so derive the frequency spectrum discussed in subsection 4.2.

$$(4.4:2) \quad E(\sigma) = \int_{\substack{\text{circles of} \\ \text{fixed } |\vec{\kappa}|}} E(\kappa_1, \kappa_2) d\kappa_1 d\kappa_2$$

with  $\sigma$  given by (4.4:1).

The  $E(\sigma)$  of (4.4:2) is the same energy density function you would have gotten had you made a time record at a fixed point within the area and analysed it as in subsection 4.2.

Unfortunately, the  $E(\sigma)$  has no sense of direction and you can't go the other way. From  $E(\kappa_1, \kappa_2)$  you can calculate  $E(\sigma)$  but from a knowledge of  $E(\sigma)$  you can never get the directional spectrum  $E(\kappa_1, \kappa_2)$ .

And the directional spectrum  $E(\kappa_1, \kappa_2)$  is what you really need.

Your structures are mostly asymmetrical with respect to the waves and they respond differently to waves arriving from different directions. Coastal structures, even those well offshore, are

exposed to waves which have highly asymmetrical spectra. Large long waves can reach them on the side open to the sea. Even if the land is 50 or 100 km away, it makes an effective barrier to such waves from the landward directions. Further, even if you can find a deep-water directional spectrum appropriate to given wind conditions, your coastal engineering is always done in shallow water. To refract an offshore deep-water spectrum in to your working site is a job that doesn't bear thinking about.

There is no substitute for gathering environmental wave information directly at your specific site.

As recently as 5 years ago we would have been stuck right here. Methods of getting the directional spectrum were known--"in principle"--but their difficulty and expense put them beyond the reach of working engineers. Dr. Pierson got one (just one!) directional spectrum from stereophotographs at the cost of three years hard labor and a couple of million dollars--not exactly the kind of thing for routine use.

Today there is a new technique based on optical transforms (laser holography) which will get you what you need; if not painlessly, at least at reasonable cost. It requires only a single photograph of the sea surface, a concurrent time record at a point within the area of the photograph to provide a scale factor, an optical bench, a laser, and a densitometer.

We can't go into it here but the general idea is that a photographic negative placed at one focus of a double convex lens and illuminated by a laser will produce at the other focus of the lens a light pattern which is the two-dimensional Fourier transform of the negative. A film placed at the second focus is exposed,

developed, and read with a densitometer to get contours of equal density of  $\alpha E(\kappa_1, \kappa_2)$ . The value of  $\alpha$  is estimated from the point-probe record via (4.4:2).

References useful for getting into this technique are:

Lipson, H.

(1972) Optical Transforms. Academic Press, N. Y.  
436 pp.

(This is a general background text on optical transform methods. They are widely applicable and very much worth adding to your arsenal of methods.)

Kasevich, R. S.

(1975) Directional wave spectra from daylight scattering. J. Geophys. Res. 80(33)4535-4541

Polis, D. F.

(1974) Optimal field size for wave spectra.  
J. Geophys. Res. 79(18)2733-2734

Stilwell, D., Jr.

(1969) Directional energy spectra of the sea from photographs. J. Geophys. Res. 74(8)1974-1986

-----, and R. O. Pilon

(1974) Directional spectra of surface waves from photographs. J. Geophys. Res. 79(9)1277-1284

Tayfun, M. A., C. Y. Yang, and G. C. Hsiao

(1975) Optimal design for wave spectrum estimates.  
J. Geophys. Res. 80(15)1937-1947

(1975) Correction.

J. Geophys. Res. 80(30)4719

-----, C. Y. Yang, V. Klemas, and H. Wang

(1975) Analysis of inhomogeneous wave number spectra.  
J. Geophys. Res. 80(24)3469-3474

The first paper on the method was Stilwell (1969). From the dates on this list of papers you can see that we aren't talking about ancient history.

Young as it is, the technique has already been used in the field; probably because we need the directional spectrum so badly--not only for engineering but for science as well. The

original photograph of the sea surface can be taken from a light plane using a simple, inexpensive camera. One does have to be a bit careful about the uniformity of sky illumination. Kasevich has given the method a good work out during Hasselman's study of North Sea waves in the North German Bight.

#### 4.5 A Few Remarks in Closing

In 1960 at the Easton Conference on Ocean Wave Spectra Dr. W. H.

Munk closed by saying:

"... I think on retrospect I failed to carry out the task you assigned me by not paying enough attention to the very real problems of the engineer. I think it is a fair conclusion to say that those who are interested in the movement of sand, the disappearance of beach houses, the reflection of radar, the reason why a Texas Tower failed, and how sewage spreads in the sea have not really gotten tangible methods out of the great improvements that have taken place in our basic understanding of the physics of ocean waves. Though engineers have improved their own understanding a great deal and have adopted more sophisticated methods, the theorists have improved their approach even more, so that the two are further apart than ever."

The gap was bad in 1960. I regret to say that by 1970 it appears to have become even worse.

During the past few years I have been called for consultation on a number of engineering problems involving waves. I have also reviewed the two volumes of R. Silvester's "Coastal Engineering:" as good a book of its kind as you are likely to find. What hits me hardest is that by far the greater part of the engineering methods now in use are based on science which antedates the Second World War. A good part even goes back to the 19th century.



Every so often you will be called in on a job. By this time you know that what you need is the directional spectrum--at least you do if you understand and believe what I've been telling you. So--you begin by asking what wave information the customer has about his site. More often than not he doesn't have any. He expects you to go look it up in a book! At best he sometimes reports brightly that he has had a commercial point wave gage in the water which some peon has read every hour or so--more or less--except on weekends and during bad weather--and he can give you significant heights and average "periods." In no case have I ever seen a customer who was about to pay for gathering the information with which his problem could really be solved.

What you do in the face of such idiocy depends on how hungry you happen to be. If you're not too hard up you say, "Let me get the information I need to solve your problem--and pay for it--or find yourself another boy." If you need the money, you take the job and fake it through with guesses and impressive mathematical calculations based on simple regular waves.

I was once asked for the "100-year design wave" for the northwest tip of Aruba; height and period, please. Since I'm the only waves-man in the United States who ever actually saw a wave off Aruba I suppose I was the logical man to ask. Frankly, I haven't the foggiest idea what a "100-year design wave" is. I suppose it means the highest wave which will occur at that place during the next hundred years. There are no wave measurements made off the northwest tip of Aruba--none. Wave measurements haven't been made anywhere for very long periods; let alone for a hundred years.

How in hell am I supposed to say anything about what's going to happen during the next hundred years on a knowledge of what has gone on during the last 0 years--or on the basis of 1 year, 5 years, or 10 years; if I were lucky enough to have so much information?

I wrote some science fiction based on my years of general wave watching and collected my money and my bad conscience. (I was hungry.) But I hate to think of what was probably done with that height and period. A hundred to one says it was used with a sinusoid--or maybe with a cnoid--to calculate some forces on something--probably on a cylindrical piling yet. The calculated forces were likely used for some other structural shape. How far from reality can you get?

Engineers must recognize that, so far as waves are concerned, their forcing functions have broad-band, continuous spectra. Quite a lot is already known about their general forms which can be incorporated into routine practice. The necessary tool is the directional spectrum. A practical technique for getting estimates of directional spectra for specific sites at a reasonable cost is at hand.

Use of the directional spectrum rather than regular simple waves will yield a much closer contact with physical reality.

DESIGN ASPECTS OF THE  
CONCRETE GRAVITY - TYPE  
OIL PLATFORMS IN THE  
NORTH SEA

(With special reference to the SEADECK design)

by W. Janssen

Design and Engineering  
Royal Netherlands Harbour Works Company  
Member of OGEM Group.

Table of contents.

1. Introduction.
2. Steel or concrete ?
3. Description of constructed concrete gravity-type platforms.
4. Other designs
5. Operational requirements of a production- and storage platform.
6. Description of SEADECK design.
7. Construction sequence.
8. Design.
9. Design requirements.
10. Foundation soil conditions.
11. Wind- and wave conditions.
12. Nautical aspects.
13. Durability of used materials.
14. Summary of technical characteristics and design criteria of Seadeck design.
15. Final conclusions
16. Bibliography.

Appendices.

1. More about calculations and foundation problems.
2. Hydraulic aspects of maritime structures.
3. The design of the steel deck structure for the SEADECK gravity production platform.
4. Steel gravity platform for Loango Oil field (Offshore Congo-Brazzavile).
5. The RDL hybrid gravity platform.

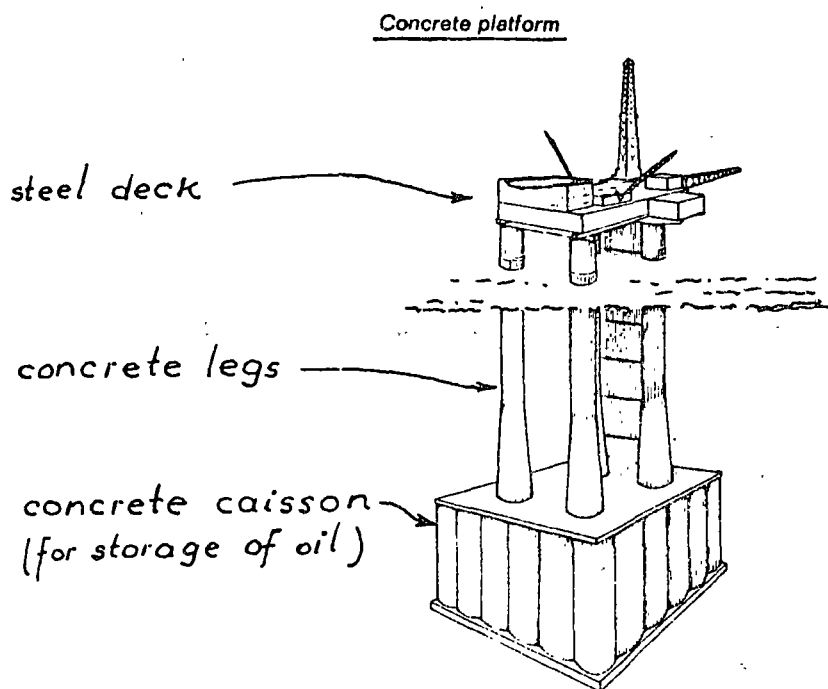
Design aspects of the concrete gravity-type oil Platforms in the North Sea.

(with special reference to the SEADECK design).

1.: INTRODUCTION.

Most people are not aware of the fact that during the last ten years a number of huge concrete structures have been installed in the North Sea, all of them with the purpose of producing and storing oil to satisfy one of the greatest needs of mankind : energy.

In this lecture a description will be given of these concrete gravity-type oil production platforms and further their design aspects will be dealt with; a description of the SEADECK design will be given in more detail.



The concrete base of such a structure is made up of a certain number of cells, which provide storage capacity for about one million barrels of oil. The deck is supported by three or four legs.

Fig. 1.

The dimensions of the structure are enormous. The area of the base can be compared with that of a great royal palace, while the legs can compete with the highest chimneys. The steel platform deck is nearly as big as half a football field.

Everybody knows that the demand for oil has increased considerably since the introduction of our motorcars with their combustion engines. And especially after World War Two the consumption increased drastically on account of the needs of the petrochemical industry, which uses oil and gas as basic materials.

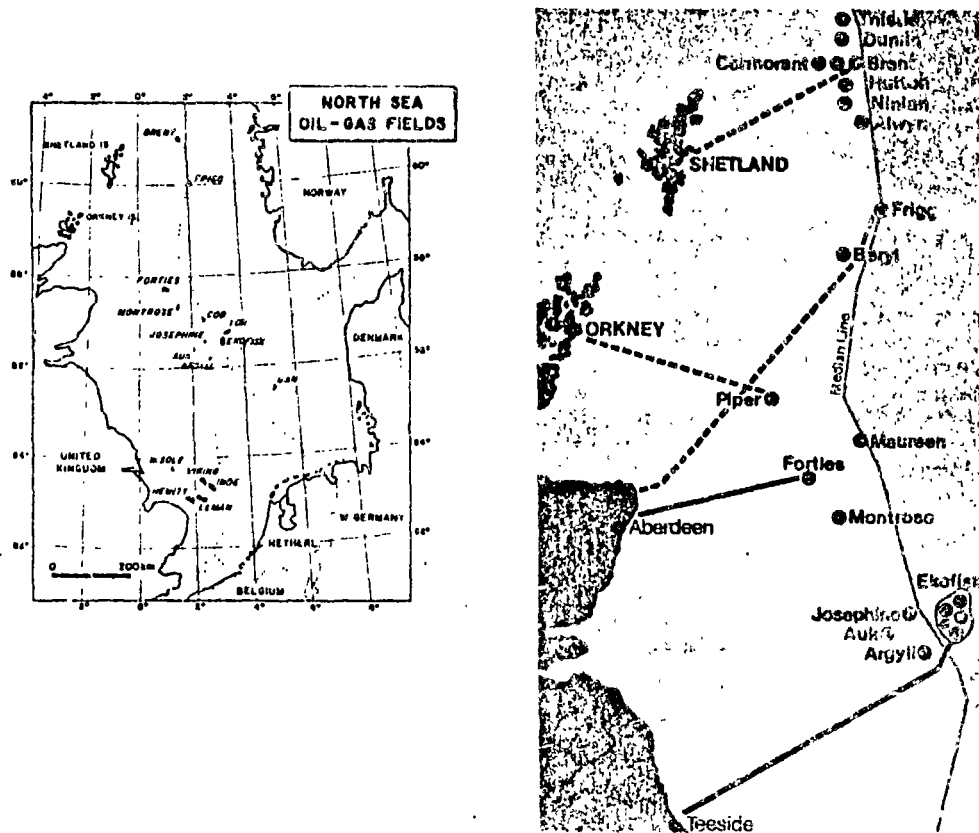
The drilling for oil became more intensive and was done on more locations. In Venezuela about 1930 oil was found in the Lake of Maracaibo and brought into exploitation. However, the "real" exploration and production on the "continental shelf" started only after World War Two in the Gulf of Mexico and the Persian Gulf.

In Western Europe, which possesses on shore only a few minor oil reserves the off-shore exploration became interesting and promising after the discovery of the huge natural gas reserves near the village of Slochteren in the North of the Netherlands (1959). Then the expectations about the North Sea greatly increased.

The North Sea, however, is less friendly than those other seas, in which up till then there had been drilled. The ever increasing demand for energy and the political situation, however, made the North Sea exploration feasible.

The first borings near the coast have been performed on artificial islands and later on in the deeper parts from semi-submersibles.

At the moment the oil companies which have acquired concessions in the North Sea are active in the shallow southern parts with the production of gas in about 40 platforms. These platforms are with regard to the design and construction a logical consequence and further development of those used in the Gulf of Mexico, where such activities already took place for many years.



Oil and gasfields in the North Sea.

Fig. 2

Apart from these relatively shallow coastal seas the North Sea cannot be compared with the Gulf of Mexico. In the first instance there is the difference in waterdepth. As no oil and only gas was found in the shallow Southern part, the exploration activities moved quickly to the North, where the waterdepth increases rapidly and consequently the wind- and waveloads.

At the moment the activities are concentrated in an area with waterdepths from 100 to 200 metres and waves, which are normally 15 metres high and can reach once in a hundred years a height of 30 metres. And it will not be long before activities will start near the Shetland islands with waterdepths of 200 to 300 metres.

Other differences are the soil conditions and the characteristics of the wave loads. The Gulf of Mexico is in general a calm sea, although hurricanes occur. The North Sea is much rougher, which influences unfavourably the fatigue strength of the materials used.

There is no doubt that after the drastic increase of the oil price since 1973 the exploitation of the North Sea Oil became a better economical proposition.

However, the production of crude oil requires a long period of preparation, which is estimated by the oil companies at about 7 years. One can distinguish three phases :

1) exploration :

investigations : soil, waves, weather,  
seismic surveys, exploration drilling.

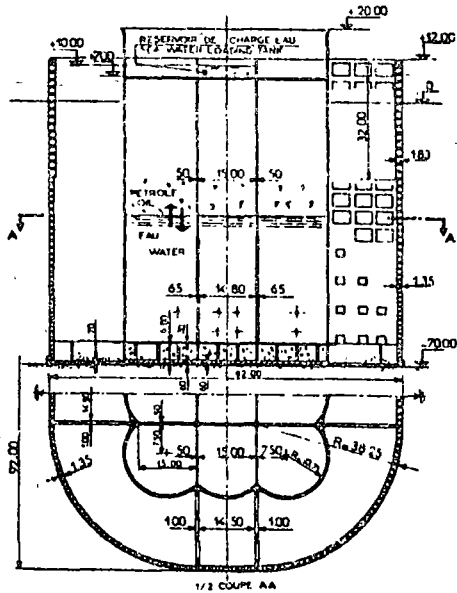
2) construction :

installation of drilling platforms,  
drilling of production wells,  
laying of pipelines.

3) production :

installation of all auxiliary equipment,  
commissioning of installation.





Cross section and plan Ekofisk storage vessel

Fig. 3

The first successful installation of a concrete gravity platform, that for Philips Petroleum in the Ekofisk field in the Norwegian concession area took place in 1973. The Norwegian group of contractors engaged in the construction of the Ekofisk storage tank needed two years : two years of designing, calculating, testing, making of drawings, consultations, but also of constructing, placing of concrete, welding, erecting, checking and quality control. For a civil engineering structure this is a very short period.

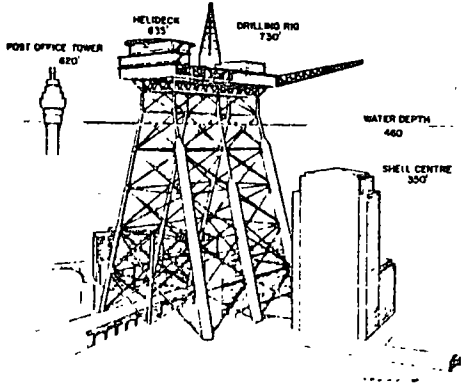
Essential are a good organisation and planning, speed of working, ability of constructing huge structures, knowledge of the latest technical developments and a close cooperation between many specialists.

About the speed and magnitude of the new technical developments will be said more later on.

A few facts about the Ekofisk storage tank :

this enormous concrete storage tank has been constructed near Stavanger in Norway and then towed over a distance of 270 Km and placed in the Ekofisk oil field. The height of this structure is about 100 metres, while the storage tanks can contain one million barrels of crude oil. It is a huge tank, protected by a perforated breakwater all around.

## 2.: STEEL OR CONCRETE ?



*An off-shore structure in comparison with some well-known buildings in London*

Fig. 4

After the first successes in the Norwegian field the oil companies started with the construction of steel platforms. The normally used steel jacket was prefabricated without deck and transported to the site on a pontoon. There it was launched, placed on the seabottom and connected with same by driving piles through the legs into the subsoil. The deck was placed by a floating sheerleg. The whole procedure of launching, however became very risky in the deeper waters; if anything goes wrong during launching, the structure cannot be retrieved or towed back. The placing of the superstructure can only be done in a calm sea.

In the case of greater waterdepths these jackets (space truss towers) are fitted with floats, while for the anchoring to the seabottom more piles per leg are required, sometimes with a length up to 200 metres. The deck frame is already an integral part of the jackets. The experience gained in the Gulf of Mexico, however, proved to be wholly insufficient because of the very unfavourable seaconditions and the costs and construction time increased considerably.

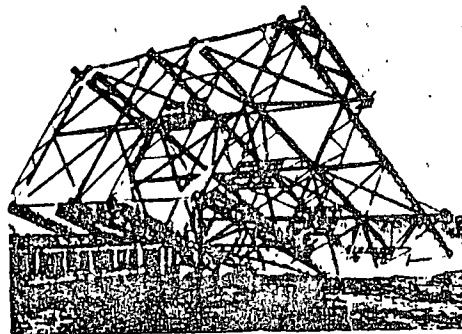
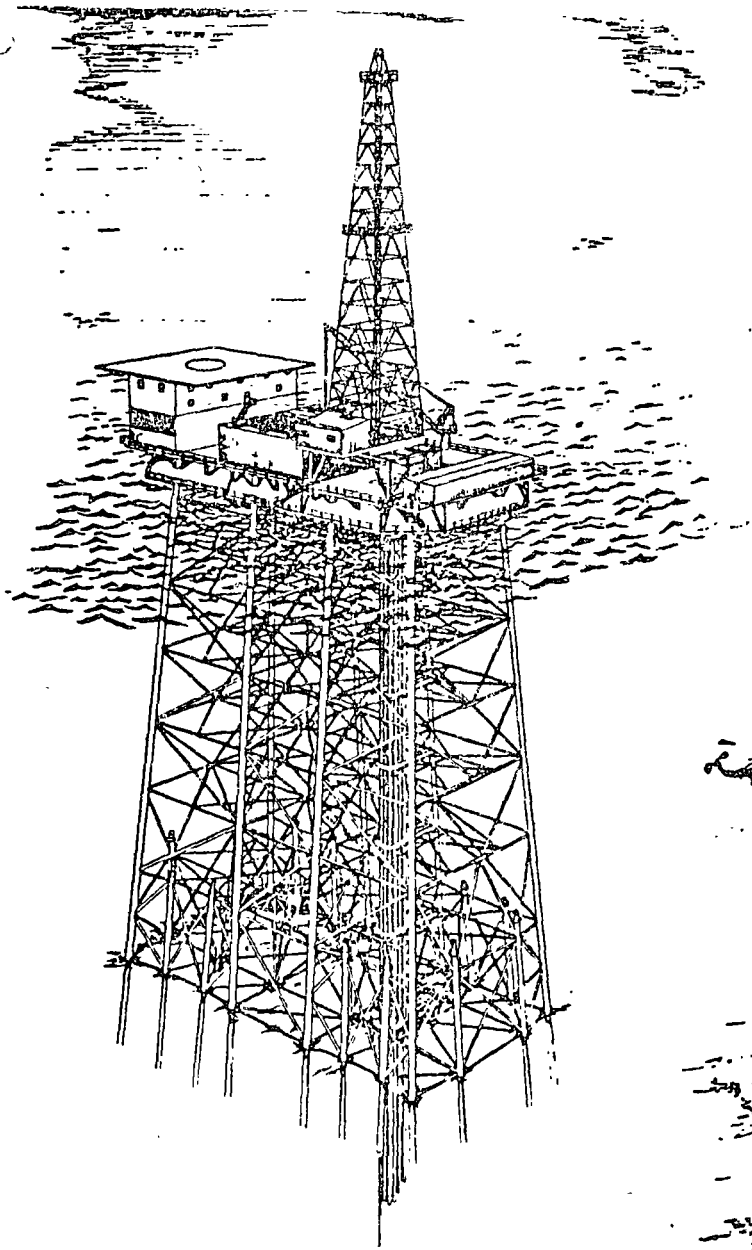
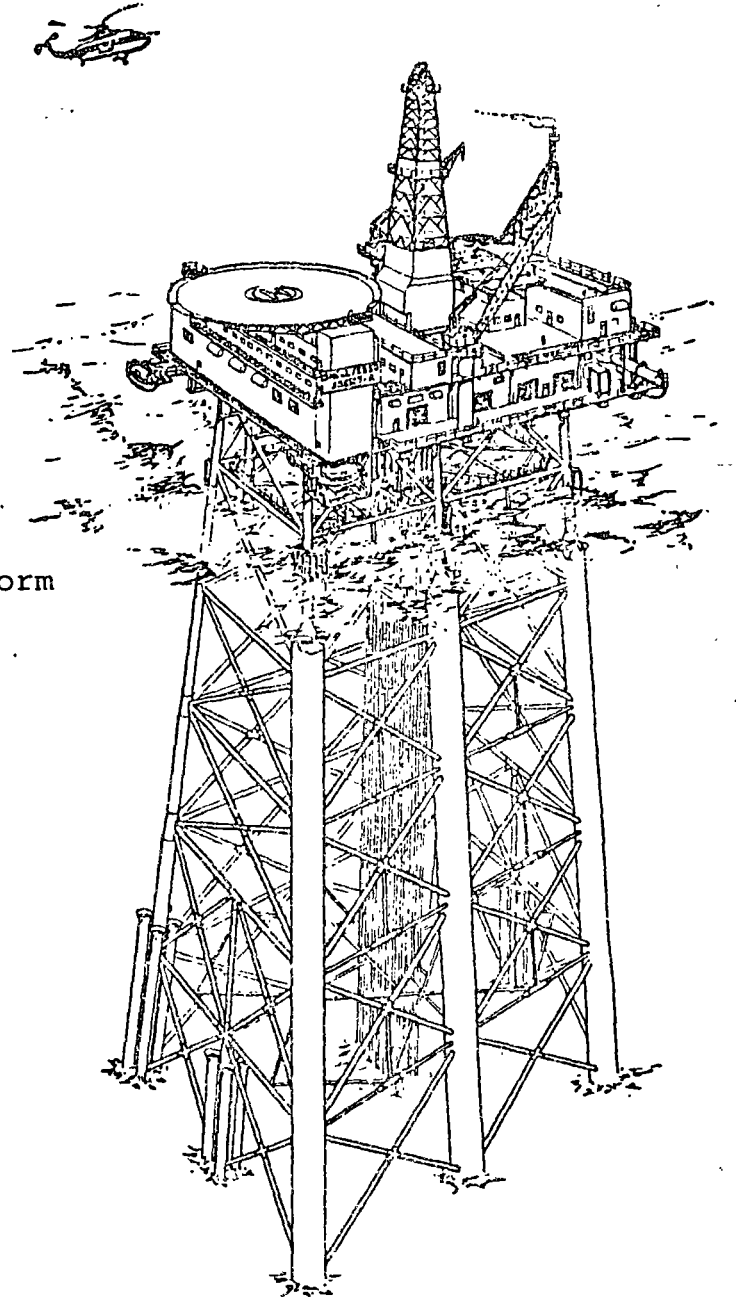


Fig. 5

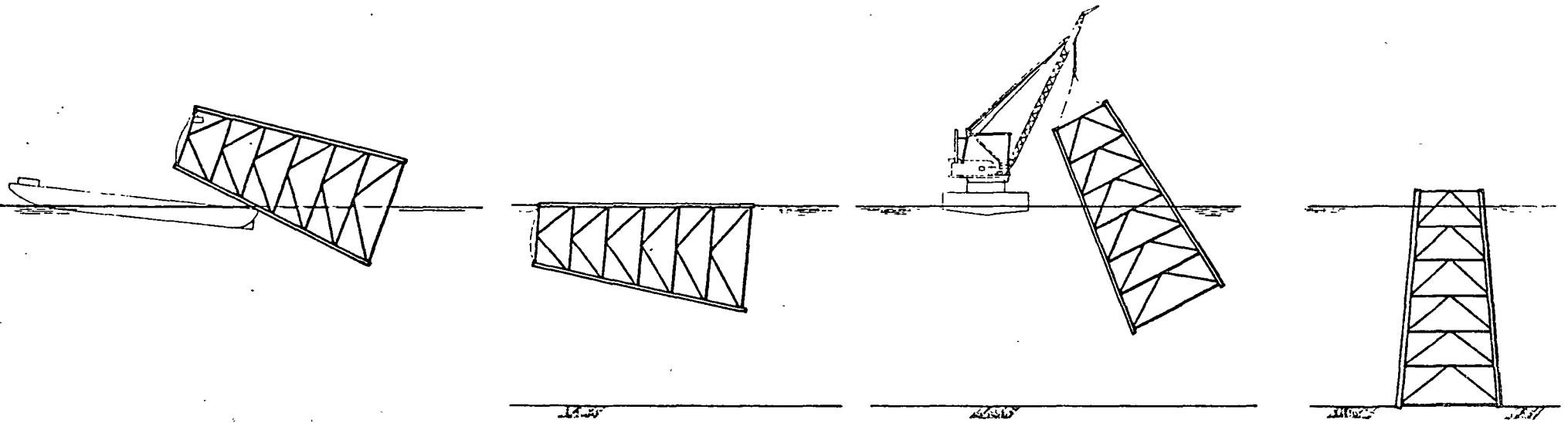
*Launching of a steel platform*



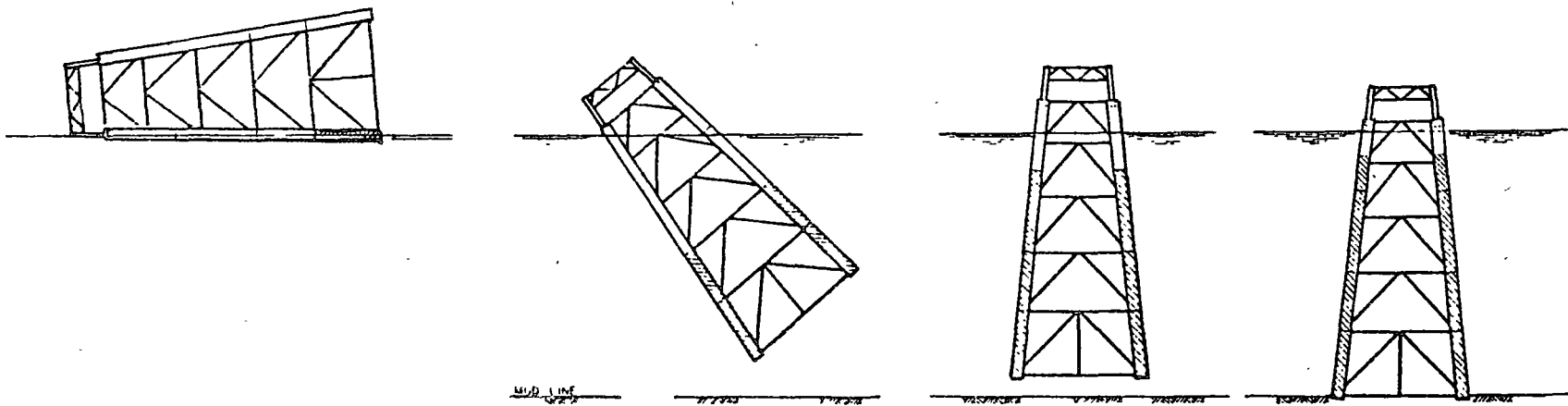
Non self-buoyant steel piled platform



Self-buoyant steel piled platform

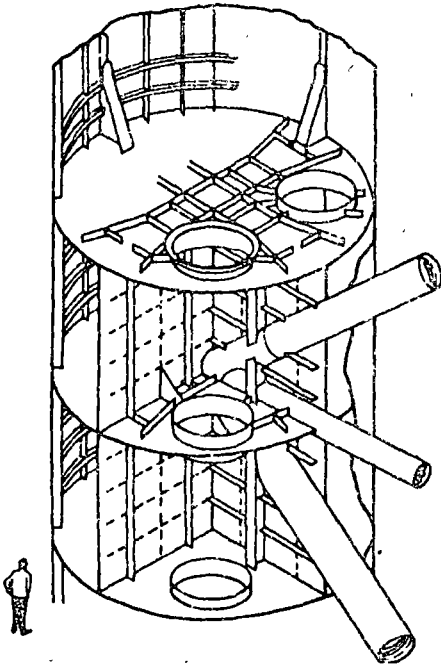


INSTALLATION OF JACKET BY LAUNCHING



INSTALLATION OF SELF-FLOATING JACKET

Joint connection for a jacket



At the moment there are platforms of more than 30.000 tons of steel, not included a few thousands tons for the deck structure. Because of the enormous increase of dimensions of the whole structure the joints became very complicated with all the consequential welding- and material problems. Steel plates with a thickness of more than 5 cm had to be used and because of the bending, preparation and welding of the plates the cost per ton of steel became a multiple of that of a normal steel structure.

Fig. 6

Further disadvantages were :

- 1) After placing of the jacket much construction work had still to be done off-shore, sometimes under the most severe and unexpected weather conditions during the very short summer season in the North Sea. (from 1st May to 1st September).
- 2) The transport of a huge jacket in horizontal position, the tilting by onesided ballasting and sinking became a hazardous operation.
- 3) For the anchoring to the seabed an enormous quantity of steel is required for the piles. These piles can have a weight up to 300 - 400 tons and can only be driven to a penetration of nearly 100 metres into the subsoil by special driving equipment.

Once a jacket has been set on the seabottom a considerable time elapses before it is safely pinned by the piles and the piles have been welded to the jacket. During all this time (one or two months) at any moment a storm can interrupt these operations.

In a production field and especially in the North Sea there is always a great need for storage capacity in case a tanker cannot be loaded with oil during bad weather conditions. A buffer tank is then essential. Such tanks had already been constructed in steel near Dubai in the Arabian Gulf in about 50 metres waterdepth.

However, in 1970 Philips Petroleum gave the order to the French consultant Doris and a consortium of Norwegian contractors to design and construct a concrete storage tank for one million barrels of oil, which could be installed in the Ekofisk field three years later. It was to be designed as a gravity structure.

The advantages of a concrete gravity platform are the following:

- 1) Incorporation of storage capacity.
- 2) Less off-shore constructionwork.  
Installation is a matter of days instead of months.
- 3) Shorter total constructiontime.
- 4) Building costs comparable with those of a steel platform.

Furthermore the soil conditions at the projected locations were favourable for gravity structures on a spread foundation.

3.: DESCRIPTION OF CONSTRUCTED CONCRETE GRAVITY-TYPE PLATFORMS.

After the succesful installation of the Ekofisk platform (1973) a great number of designs have been made for such platforms by groups of consultants and contractors.

Only four of them were succesful in getting a construction contract. A short description of their designs will be given in the following.

1) HOWARD - DORIS.

The French consultant Doris, designer of the Ekofisk tank, formed a joint venture with the English firm Howard and they got the order for two production platforms. In their design they again applied the idea of the perforated breakwater around the storage tank instead of presenting minimum exposed area at sea level.

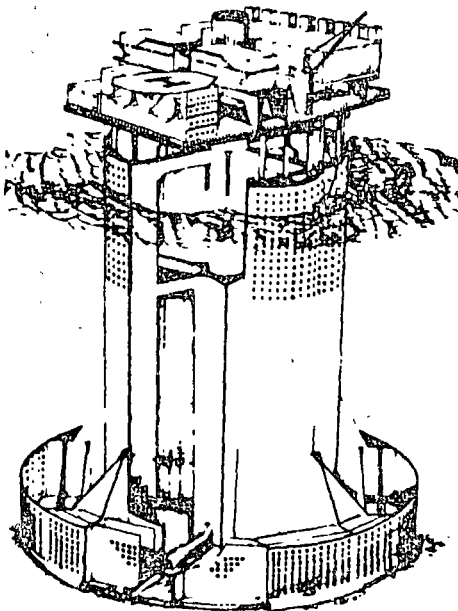
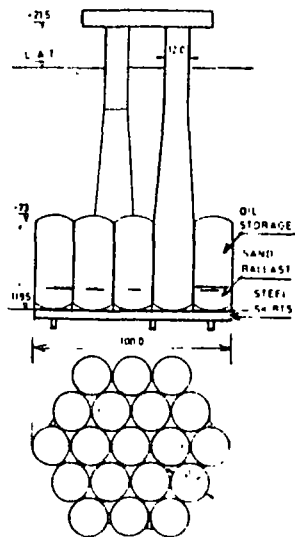
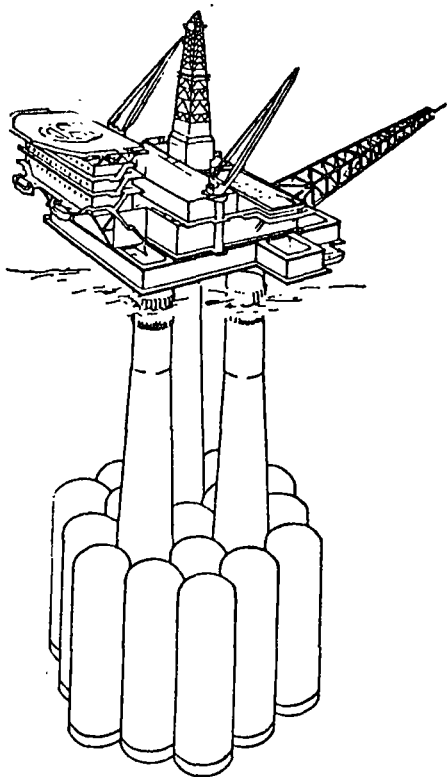


Fig. 7

*Platform designed by Howard-Doris*



Condeep concrete gravity platform

Fig. 8

## 2) CONDEEP

A consortium of Norwegian contractors, named Condeep got the order for five platforms. These platforms consist of a group of e.g. 19 concrete cylindrical tanks with a height of 60 metres, slipformed as a complete unit.

Three of them are extended and function as bearing columns for the steel superstructure.

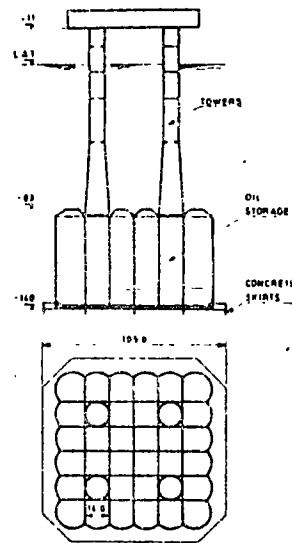
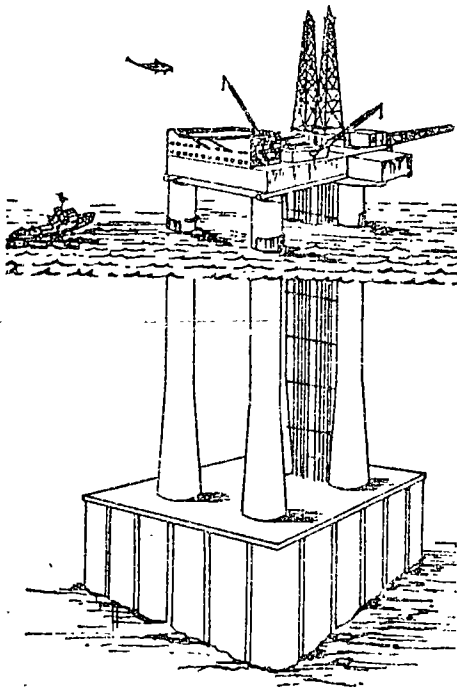
## 3) SEATANK - Mc ALPINE.

The French consultant Seatank, together with the English contracting firm Sir Robert Mc Alpine acquired the construction contracts for three production platforms, which have been built on a site in Scotland.

The base structure is rectangular and consists of a group of rectangular cells. Two concrete cylindrical towers carry the superstructure.

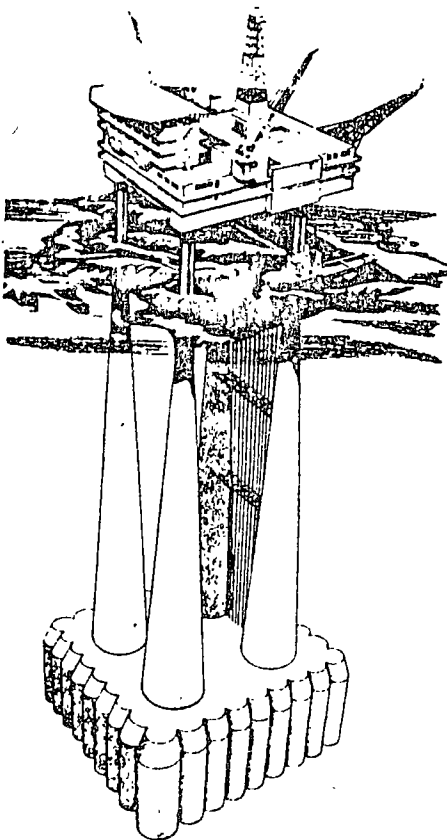


Platform designed by Saatank-McAlpine



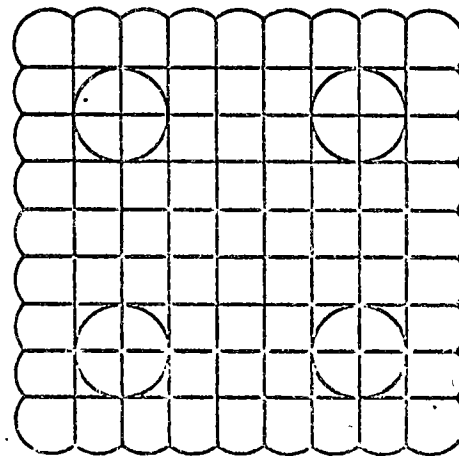
Sea Tank concrete gravity platform

Fig. 9



Andoc-platform

Fig. 10



4) ANDOC.

An English - Dutch joint venture under the name of Andoc (Anglo Dutch Offshore Concrete) received the order for one platform, which has been constructed on a site near Europort, Rotterdam. The design concept is more or less similar to that of Seatank.

See the following summary, fig. 11.

Fig. 11

Contractor	Client	Oilfield	Construction Site	Water-depth (in Mtrs)	Installation
Doris, Hoyer Elefsen, Selmer	Philips	Ekofisk	Norway	75	1973
Doris- Howard	Total	Frigg	Norway	95	1975
Doris- Howard	Total	Alwyn	Norway	127	1976
Condeep	Mobil	Beryl	Norway	110	1975
Condeep	Shell	Brent	Norway	140	1975
Condeep	Shell	Brent	Norway	140	1976
Condeep	Elf	Frigg	Norway	120	1976
Condeep	Mobil	Statfjord	Norway	140	1976
Seatank- Mc Alpine	Elf	Frigg	Scotland	105	1975
Seatank- Mc Alpine	Shell	Brent	Scotland	140	1975
Seatank- Mc Alpine	Shell	Cormorant	Scotland	150	1976
Andoc	Shell	Dunlin	Netherlands	150	1976
Summary of platforms ordered and constructed.					

#### 4.: OTHER DESIGNS.

Many other consortiums, consisting of consulting engineers, contractors and research institutes have elaborated designs for concrete gravity-type production platforms, with the result that the oil companies could invite several competing firms for a tender.

Such a bid involved an enormous quantity of work for the bidder, as the design had to be worked out and detailed to such an extent, that a "classification society" as Lloyds, Det Norske Veritas and later also the Dutch institute TNO could give a quality assurance. This means that these classification societies could get from the bid documents (descriptions, specifications, calculations and tests) sufficient insight and confidence in the whole project to give the client the assurance that during further elaboration of the design and the construction no unforeseen surprises were to be expected, which would result in extension of construction time and increase of construction costs.

The names of a few other consortiums, which also made designs, but were not successful in getting a construction contract were

Taylor Woodrow

ARK (Ove Arup - Keir)

RDL (Composite structure)

Selmer Tripod

Laing/GTM/ETPM

Campeon Bernard/Lind/Kier

Hersent

Technomare

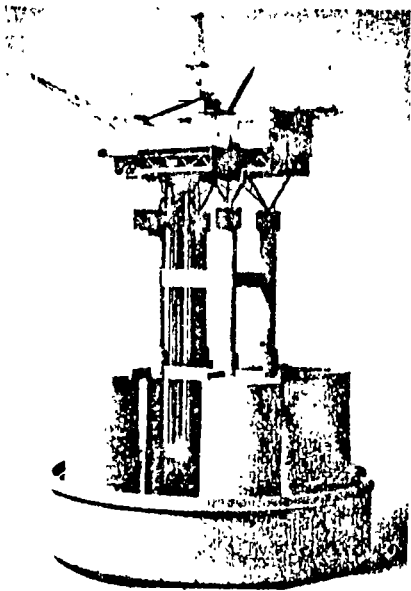
Chicago Bridge

Brown & Root/Wimpey/Christiani and Nielsen

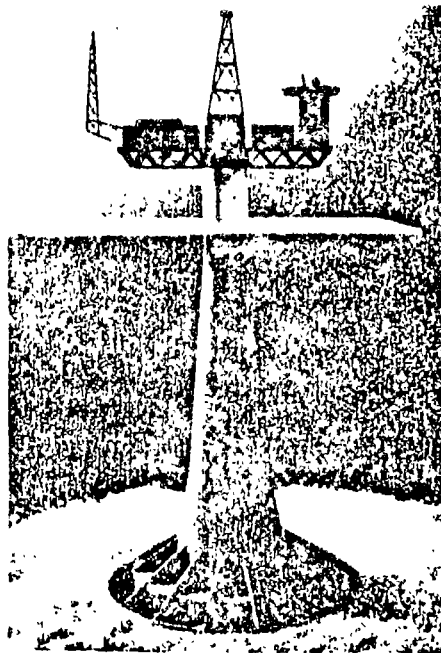
Grant Casub

Costain/Halcrow

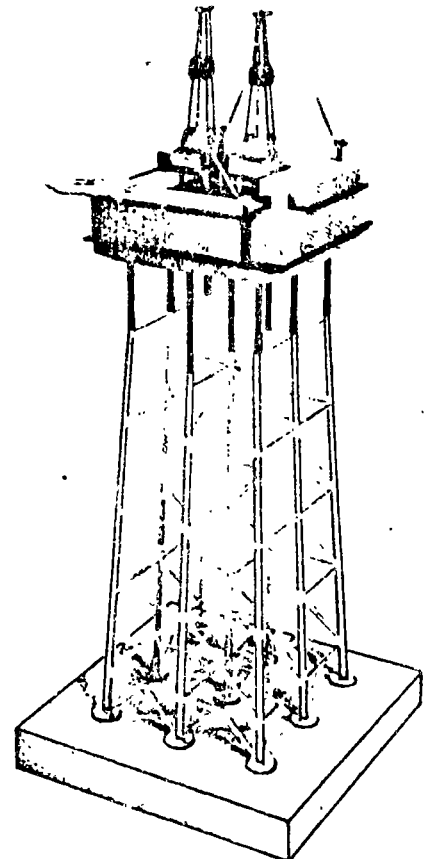
Seadeck



Taylor Woodrow

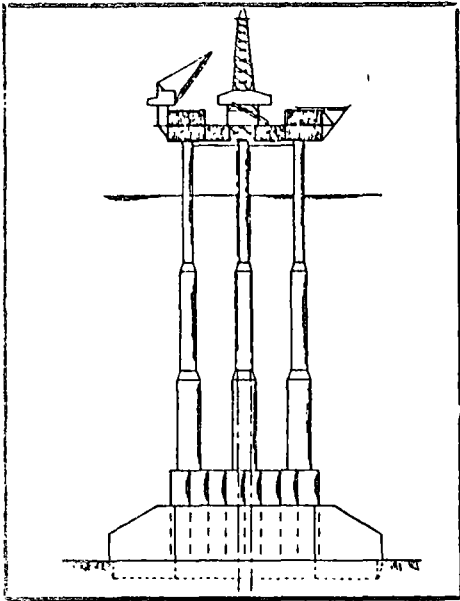


Ove Arup - Keir

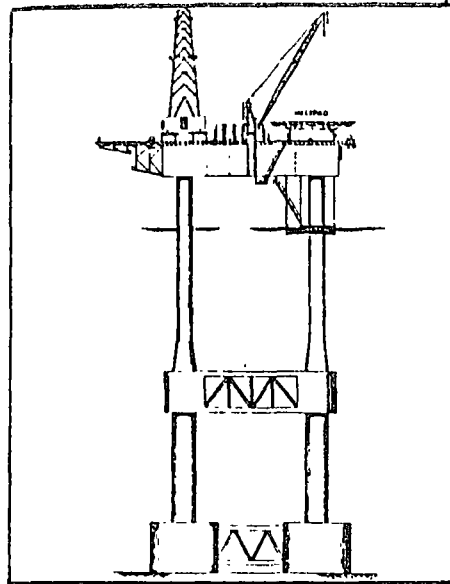


Composite platform from RDL  
(Ref. Appendix No. 5)

Fig. 12 (a)

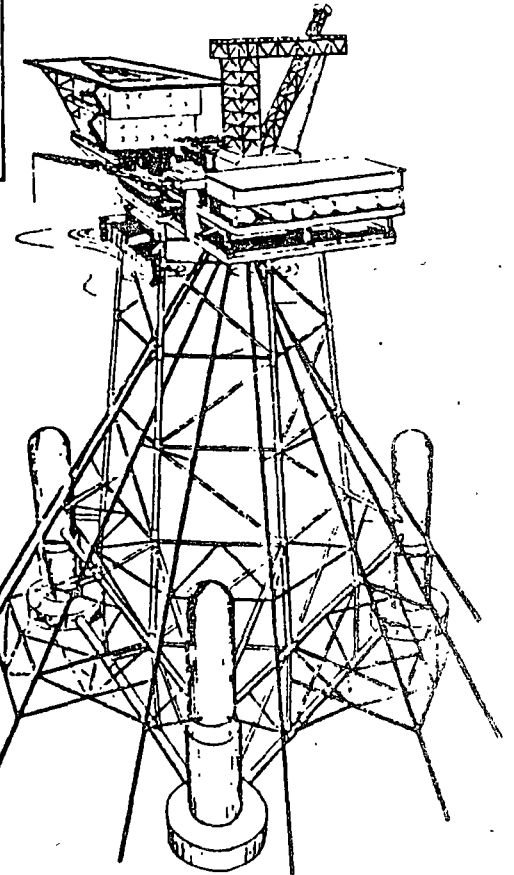


BROWN & ROOT/WIMPEY/  
CHRISTIANI & NIELSEN



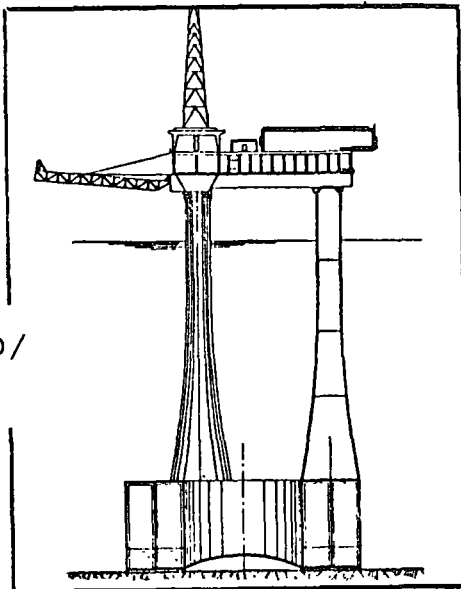
HERSENT

Fig. 12 (b)



(Ref. Appendix No. 4)

TECHNOMARE

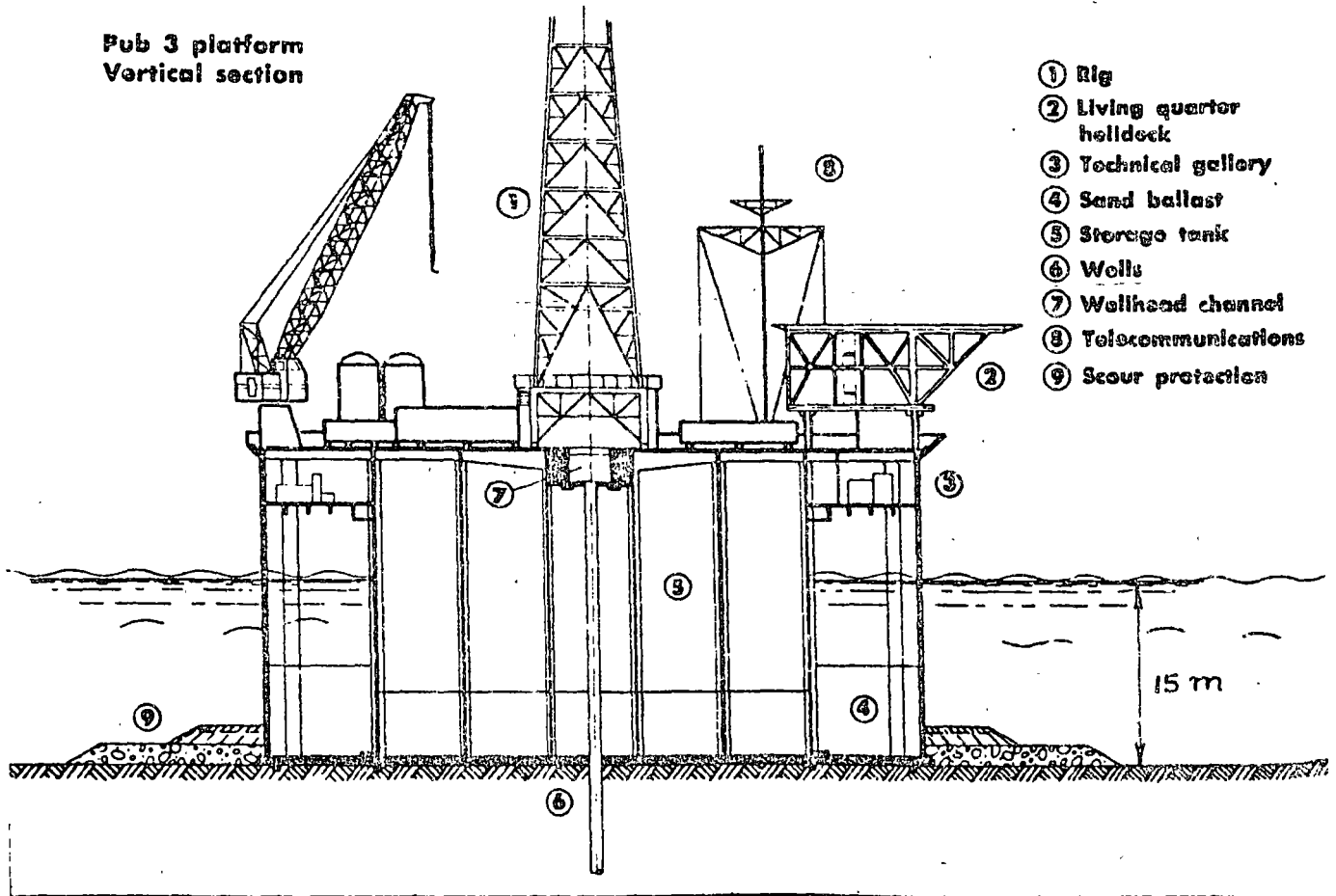


CAMPENON BERNARD/  
LIND/KIER

Two of the above designs have to be mentioned especially, as they will be used outside Europe.

- a) Tecnomare, an all steel gravity structure; four structures are under construction and will be towed to offshore Congo, and installed in 85 metres waterdepth.
- b) Campenon Bernard, a concrete gravity structure; three platforms have been ordered by Petrobras from the Brazilian - French consortium Mendes Junior - Campenon Bernard. They will be installed in 15 metres deep water in the Ubanara oil field offshore Brazil.

Pub 3 platform  
Vertical section



A vertical section drawing of the prestressed concrete gravity structure and its accommodations.

Fig. 12 (C) : MENDES Jr./CAMPENON BERNARD

My company belonged to the consortium named, Sea Platform Constructors (Scotland) Limited, consisting of four English firms and one Dutch firm, which group gave to its design the name of "Seadeck".

Therefore when describing a gravity type platform more in detail in the following chapters I will refer to the Seadeck platform, of which the conceptual design is more or less similar to that of Condeep, Seatank and Andoc.

From the list of all the designs, which have been made for gravity-type platforms you may conclude that the inventivity of the engineers is immense. I will only mention that all these designs have been influenced to a great extent by the availability of a construction site. This fact proved to be not an easy problem.

The reasons were :

- a) Because of the huge dimensions of the platform a deep, sheltered harbour is required for construction. Such sites are only available in the deep bays in Norway (called fjords) and Scotland (called lochs).
- b) Further it was practically impossible for foreign companies to get the necessary permission in these countries. Therefore most of the platforms have been constructed in Norway (Condeep) and Scotland (Seatank - Mc Alpine), while Andoc used a site near Europort, Rotterdam, which had its limitations, so that the erection of the superstructure had to be done in deep, sheltered waters in Scotland.

The proposed construction site for Seadeck was also in Scotland at Portavadie on Loch Fyne near to the Clyde Estuary. Later on I will explain how the method of construction and certain features of the basic design were dependent upon characteristics of this site.

#### 5.: OPERATIONAL REQUIREMENTS OF A PRODUCTION - AND STORAGE PLATFORM

Apart from the storage capacity a platform has also many other functions which result in a very complex installation.

The steel superstructure must be a safe and stable platform to carry the drilling tower with all its auxiliary equipment, further the housing for the crew, helicopterdeck etc.

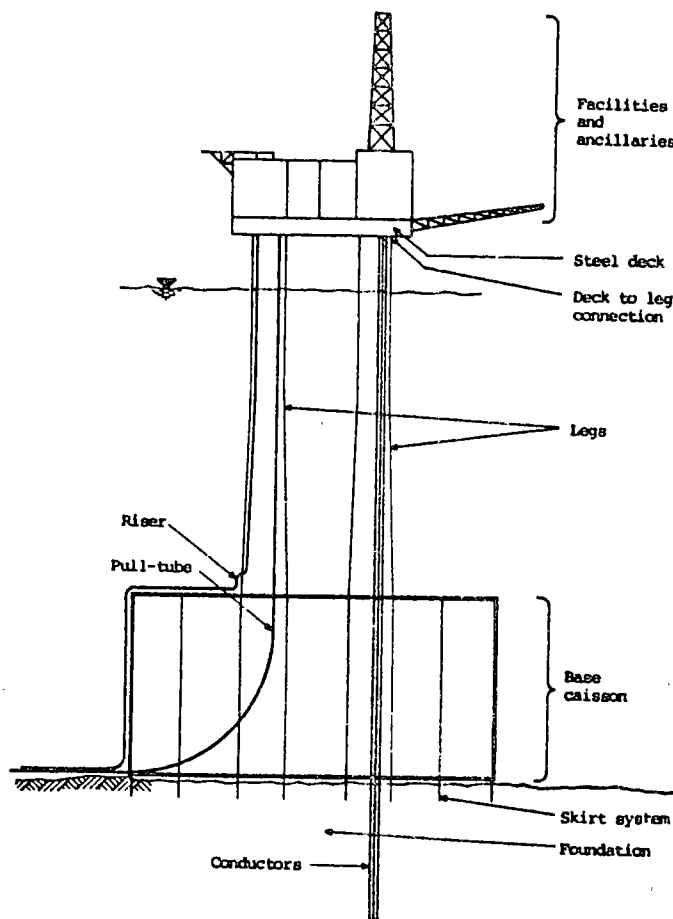
As soon as all the oil wells have been drilled such a platform will produce about 200.000 - 300.000 barrels per day. This quantity of oil has to be treated, cooled and pumped into the storage tanks, into berthed tankers or into the pipelines.

Therefore such a multitude of equipment and piping systems is necessary, that they constitute a great problem to the design engineer to find sufficient space for them.

One of the latest developments is that the deck is designed as a unit, in which most of the installations are already installed on shore, so that the offshore work can be reduced considerably.

For the production the following pipes are required, which have to withstand the wave forces in case they are installed outside the concrete towers.

- a) The conductor pipes, which guide the drilling shafts from the deck to the seabottom.
- b) The risers, through which the oil or gas flows to the structure from other off-shore completions.
- c) The J-tubes, through which the oil flows from the structure to the tankers.



TYPICAL CONCRETE GRAVITY PLATFORM.

Fig. 13

Inside the concrete towers there must be sufficient space for the pumping systems, for the storage of oil and for flooding arrangement during submerging or pumping to trim.

To accomodate all the piping systems the towers must be as wide as possible, however, especially near sealevel the wave forces require a slender tower; this is an example of one of the many contradictions in the design criteria, to which I will refer later on.

The principal function is to install oil wells which inevitably involves inserting structural elements - well conductors through the foundation. Unforeseen deformations of the foundation may, therefore, affect its use.

## 6.: DESCRIPTION OF SEADECK DESIGN.

Seadeck is a concrete oil production platform with a steel deck, supported by 3 or 4 legs which extend from a "tray", consisting of 19 or 22 large concrete caissons positioned on the seabed. See fig. 14.

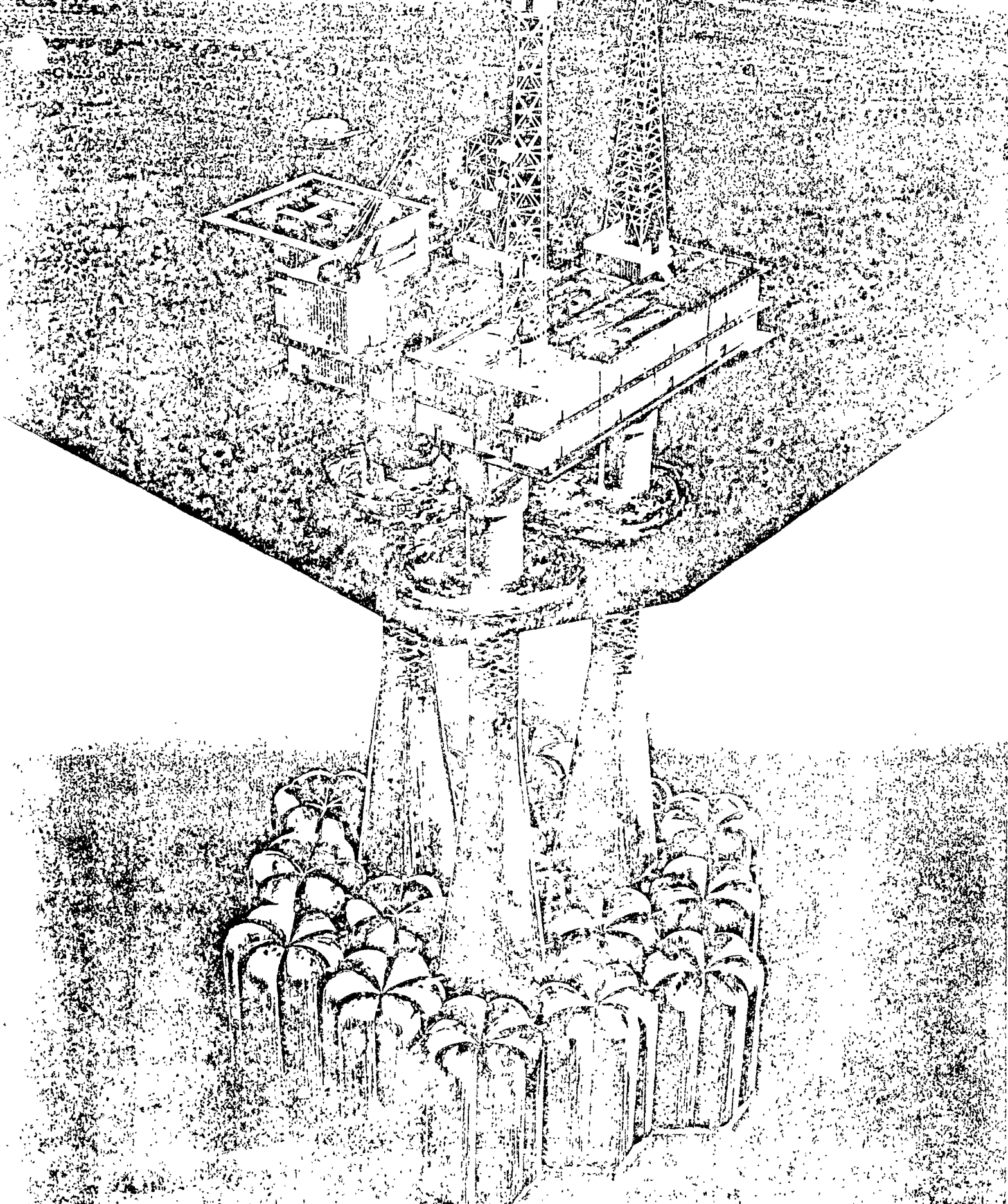
### 6.1. : Construction site at Portavadie.

The construction site for Seadeck is at Portavadie on Loch Fyne in Argyllshire. This site was chosen with great care. A natural tidal basin provides near perfect conditions for building the dry dock in which the caissons will be constructed in groups.

Within 2.000 metres of the construction dock is the deep, sheltered water of Loch Fyne. This is of great value and allows the third stage of construction to be completed with the structure ballasted down to its operational draught. The advantage of this facility is that the structure and complex control equipment can be fully tested before committing it to its final location.



SEA PLATFORM



SEA PLATFORM CONSTRUCTORS (SCOTLAND) LIMITED

Portavadie is in a pleasant part of Western Scotland. In recent years young people have left the area to look for better opportunities in larger towns and cities. The development of Seadeck will bring many of these people back. Although quiet and secluded, Portavadie is close to the central belt of Scotland where a large labour force is available.

The work force numbering about 500 men, will be accommodated in an architect-designed village at Pollphail, about half a mile from the work-site.

A roll-on, roll-off ferry service is planned to ply between Portavadie and Tarbert, across the Loch, which will be an invaluable asset to the area.

Portavadie will not be changed greatly by the Seadeck project and in the long term it will gain.

The village is well designed and the foreshore that adjoins it will not be affected in any way.

All heavy construction material will come in by sea and local traffic will use a new service road that is now being built around the whole complex from the ferry jetty to the village. At the close of the project the new facilities can be adapted to meet local needs.

It is possible that the village would then become a holiday centre and that the construction basin would emerge as a marina.

This last fact is specially mentioned as it was an important factor in getting the necessary permissions.

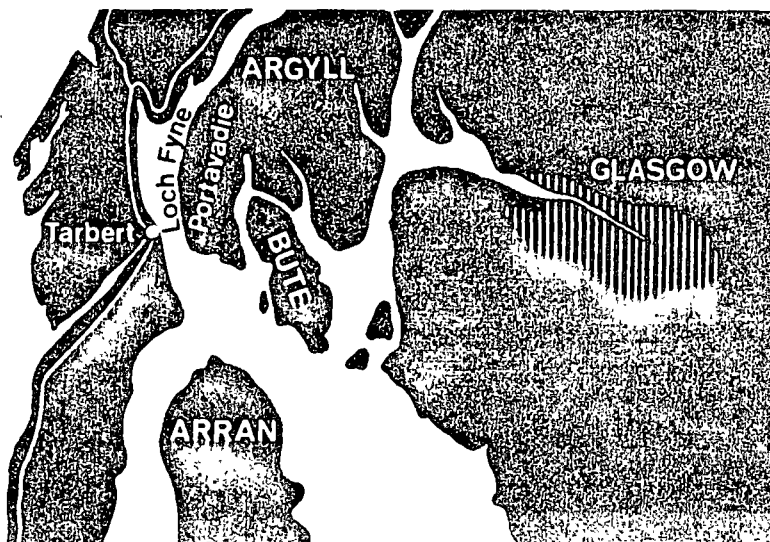


Fig. 15.

Construction site at Portavadie  
Loch Fyne (Scotland)

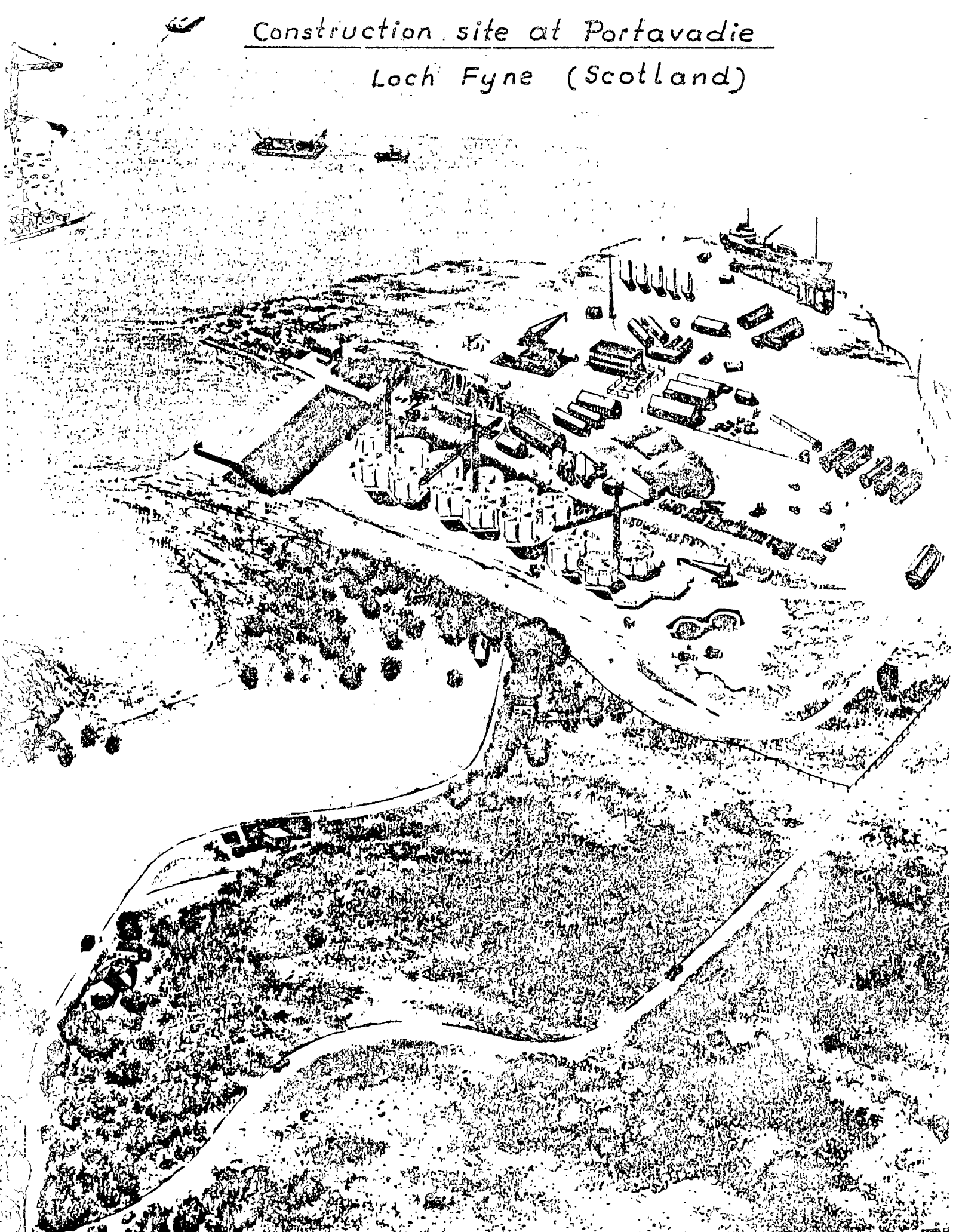


Fig. 16.

## 6.2. : Concrete structure.

In the following figures the general arrangement of a 3-leg structure is shown. See fig. 17.

The concrete substructure consists of a tray of 19 concrete caissons. Each caisson is divided by radial walls into 6 compartments with curved outer walls. Each caisson can be constructed separately and then joined with its neighbours by pilasters.

In this aspect the Seadeck design differs principally from the others as Condeep, Seatank and Andoc, in which designs the substructure is one big unit and slipformed as a whole.

Because of the restricted dimensions of the construction dock at the Portavadie site the original idea was to construct separate cells and join them later on when they had been floated out of the dock. A second reason was to event the very complicated procedure of casting the whole substructure as one unit.

In a later stage of the design the substructure of Seadeck has been divided in three units, each of them comprising a certain number of cells and cast as a unit.

By choosing radial walls and curved outerwalls for each cell there could be minimized on the total quantity of concrete and thus the weight of the structure so much that passage through the North Channel was possible.

By the concept of separate cells many arrangements are possible to meet the wishes of the client.

Between the caissons there are pockets open to the sea, through which the pipework can be led (through openings in the pilasters).

See fig. 18.

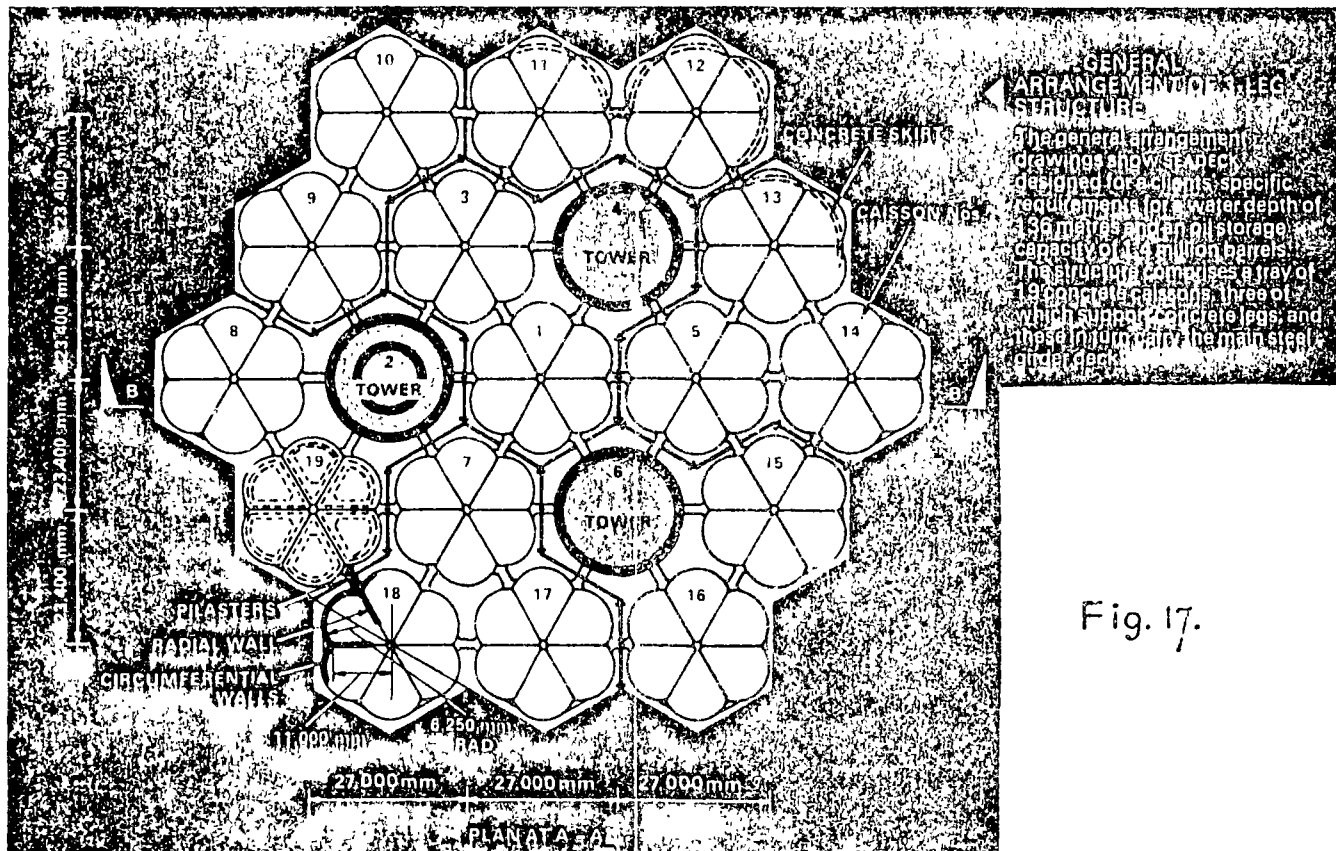
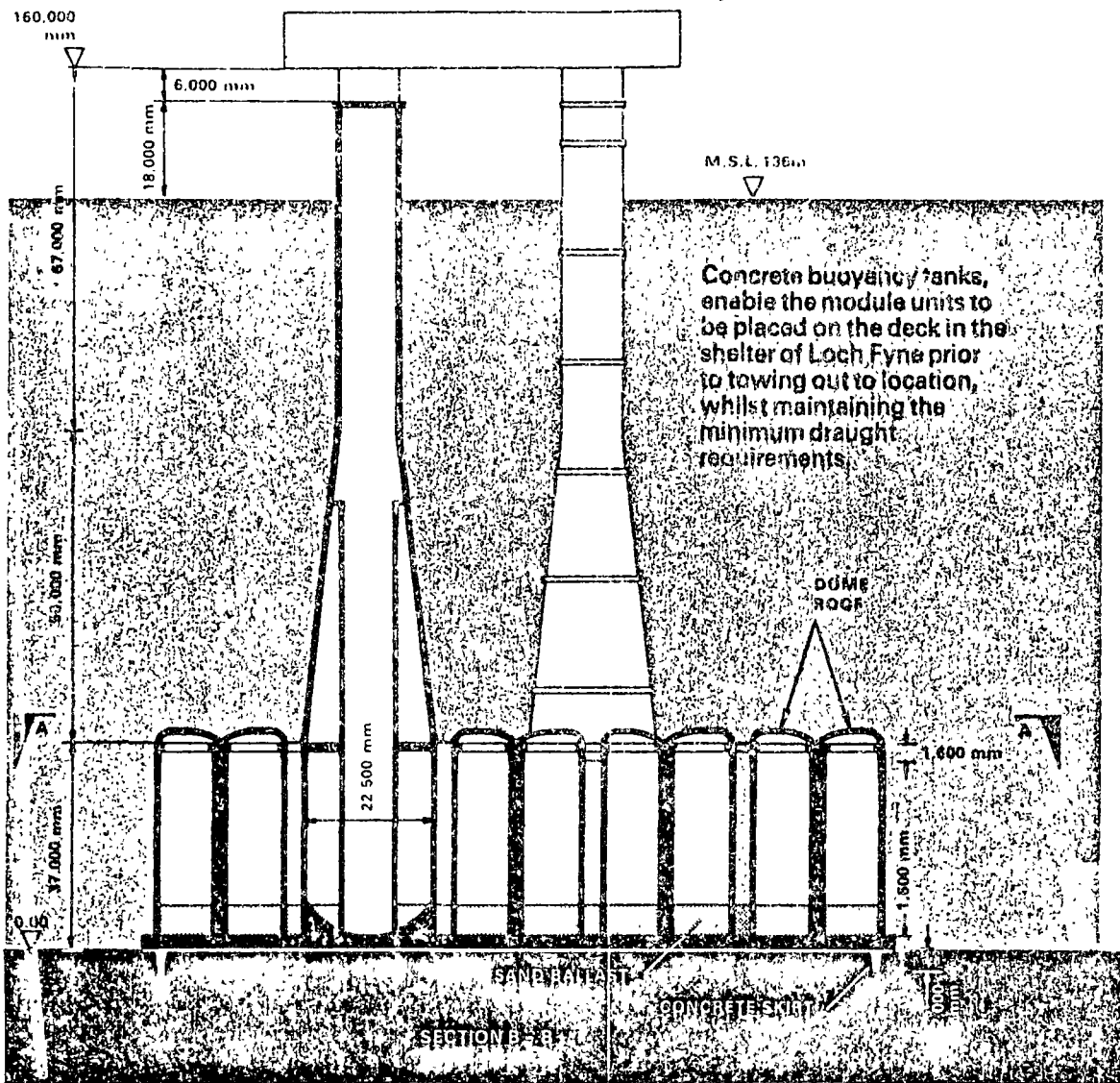


Fig. 17.

# pipework

Fig. 4. TYPICAL LAYOUT OF 4-LEG STRUCTURE FOR FITTING FITTINGS AND RISERS.

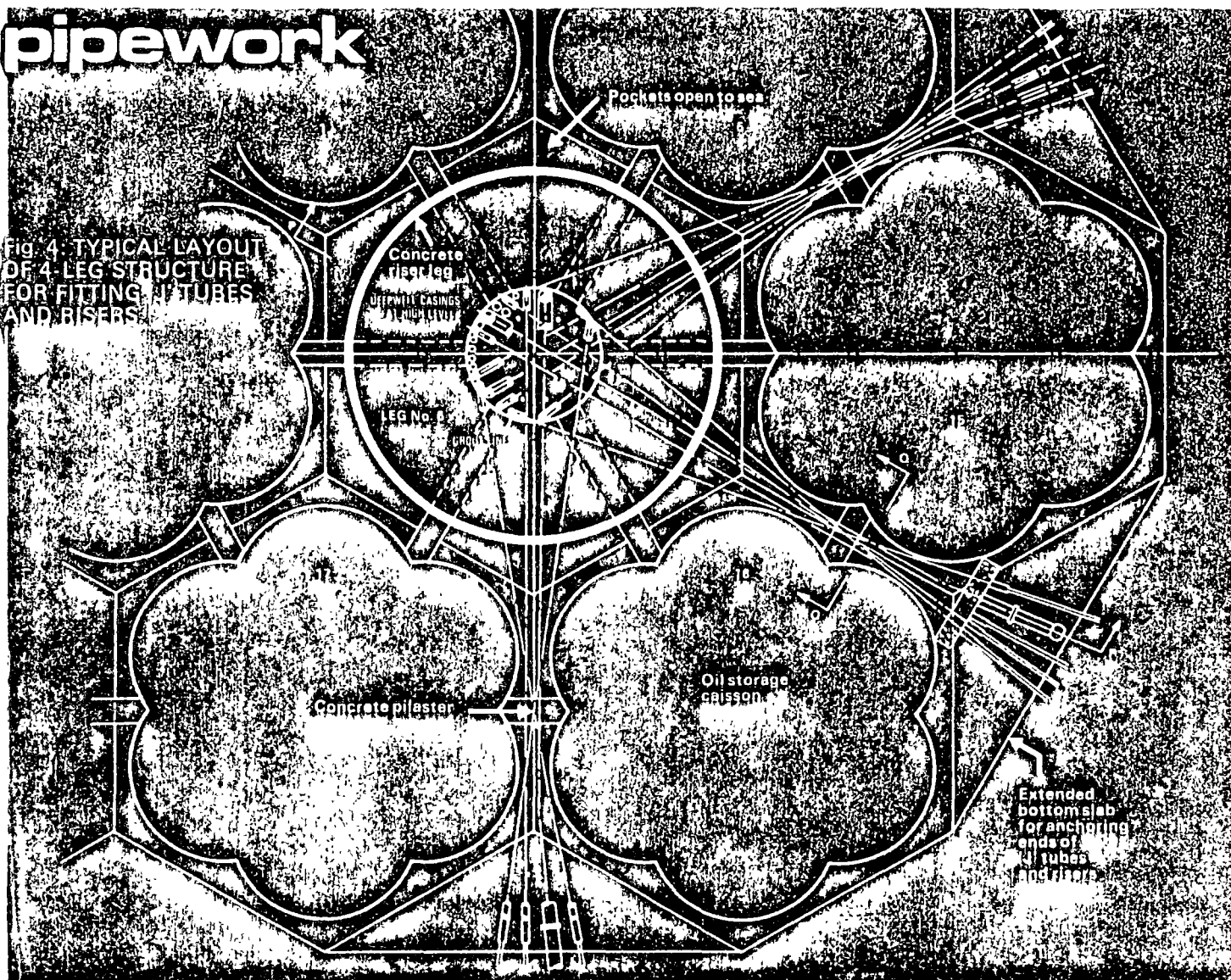
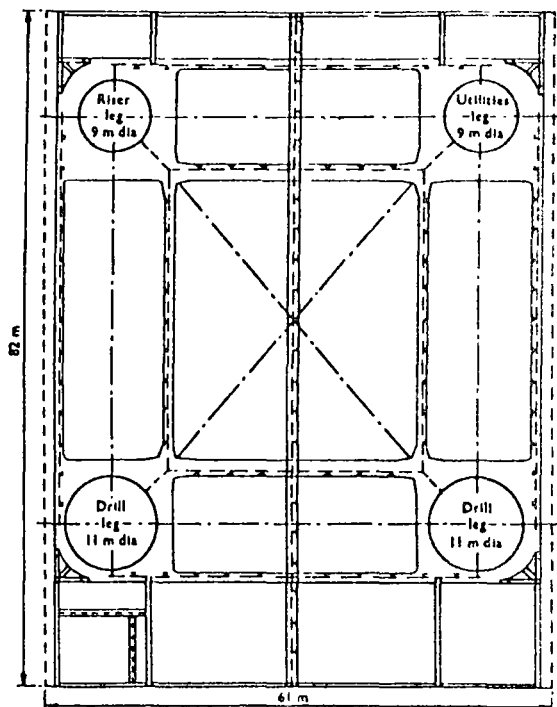


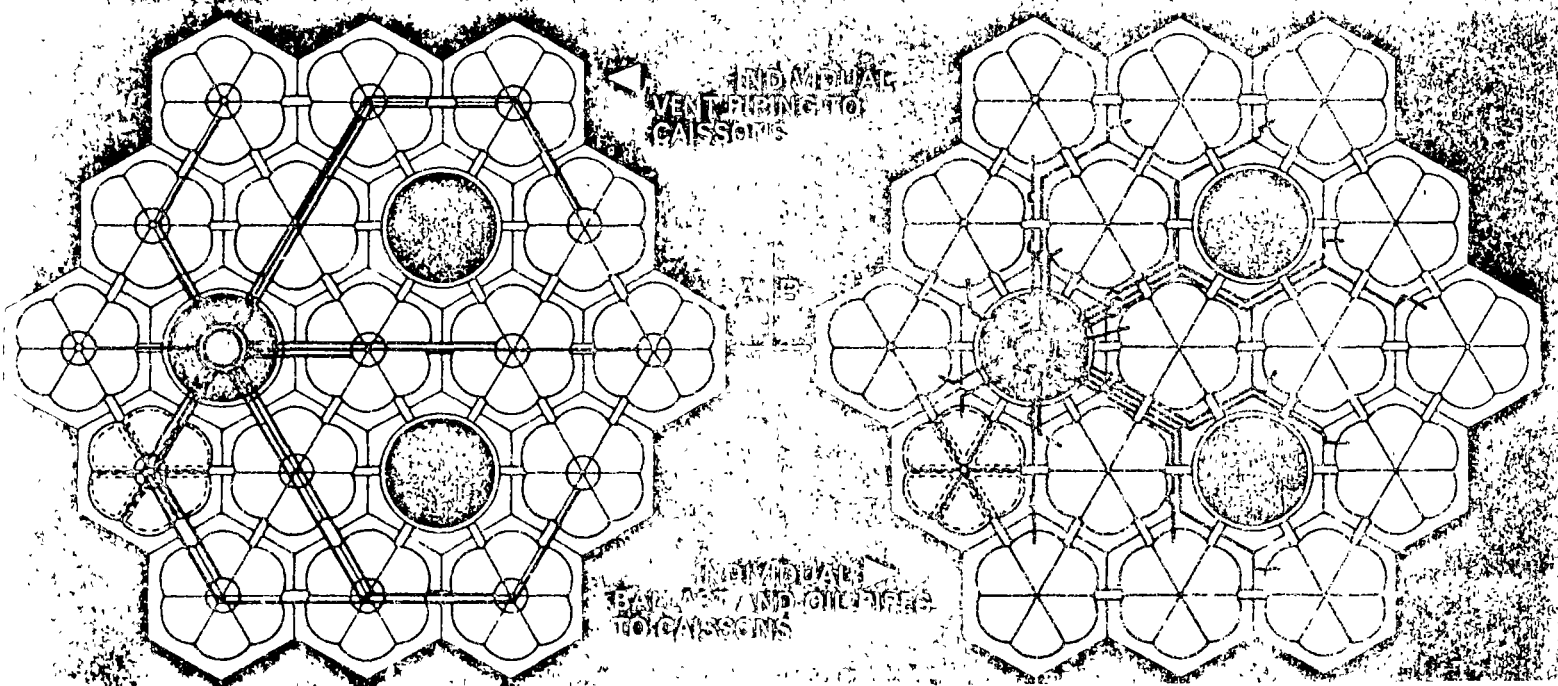
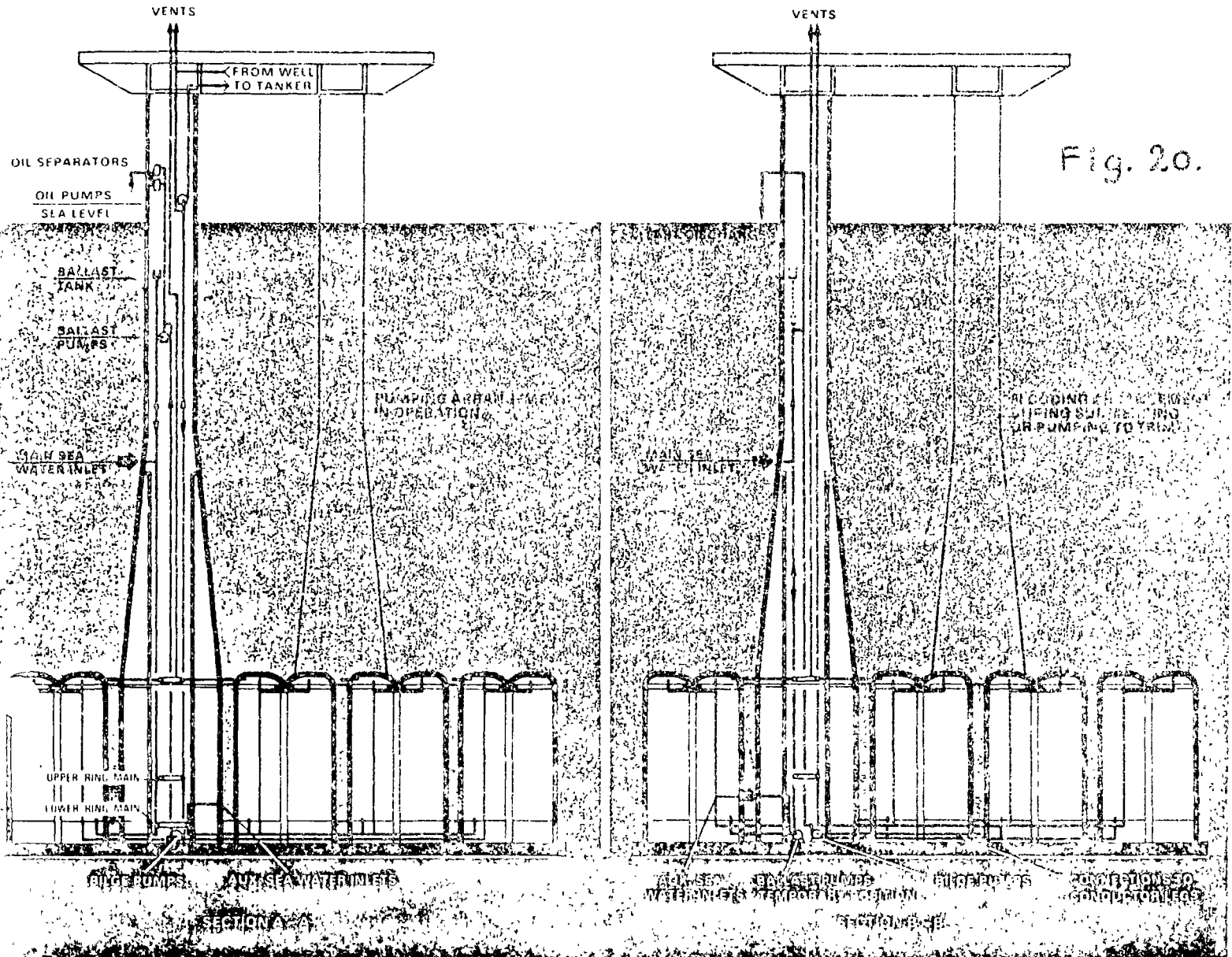
Fig. 18.

### 6.3. : Deck structure.

The steel deck consists of a series of stiffened plate girders braced together as indicated and is designed to carry loads up to 26.000 tons. It is a welded construction and incorporates steel stub legs which are connected to the concrete legs.



# 6.4. : pumping systems



## 7.: CONSTRUCTION SEQUENCE.

Before something can be said about the design aspects and especially the design criteria the construction sequence has to be described first.

As for every marine structure the stages during the construction play an very important role in determining the dimensions of the structure and for an oil platform it is even more the case.

The construction stages are the following.

### 1) Construction in dry dock.

Construction begins in the dry dock. The caissons are constructed in individual groups to a height (approx. 16 m), such that when they are afloat they clear the cill of the dock gate (Ref. Fig. 21.) Each group of caissons comprises a bottom slab, attached to which, as foundation conditions dictate, are steel skirts; the walls and pilasters being constructed using a "slipform" technique. All the pipework for oil storage, ballasting etc., is fixed in position on the base slab of each group of caissons. (Ref. Fig. 18).

When slipforming to the appropriate height is complete the groups of caissons are towed into a sheltered water area adjacent to the construction site where they are moored and coupled (Ref. Fig. 22). Adjustments of levels and altitudes are made by ballasting the compartments with water.

### 2) Joining of caisson groups.

The caissons are guided into their relative positions at the 16 m level by substantial steel pins, which engage in receiving pockets.

A watertight seal is installed between the groups of caissons which are then permanently joined together to form a cellular monolithic structure, 16 m high by 125 m diameter (approx) with a draught of 11 m.



# construction sequence

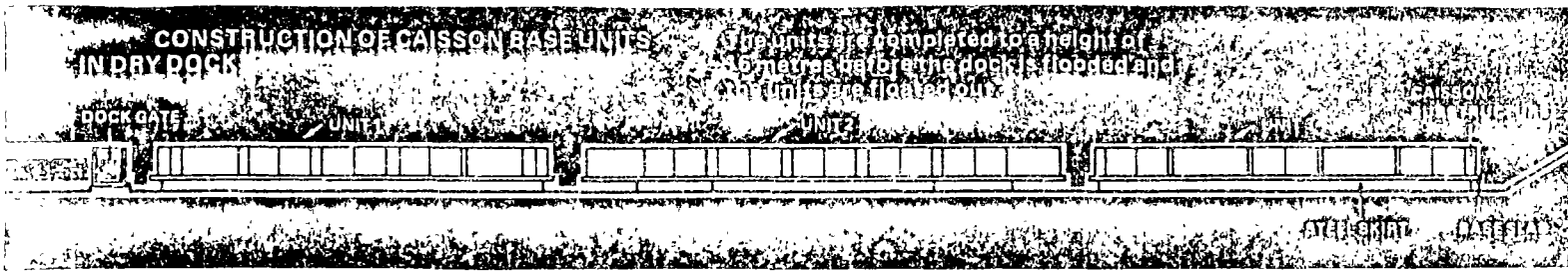


Fig. 21.

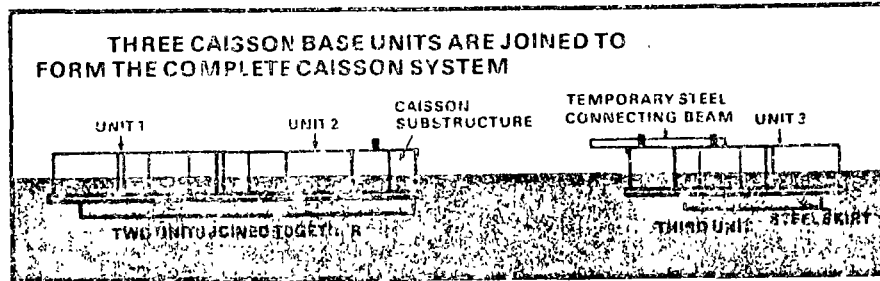


Fig. 22.

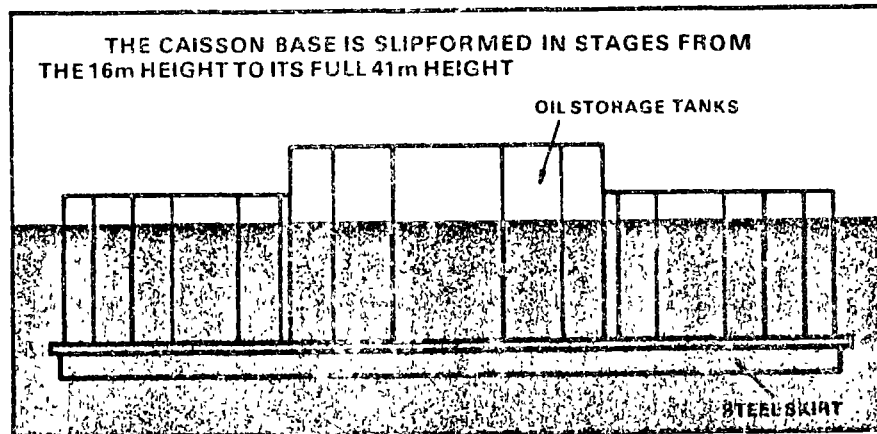


Fig. 23.

### 3) Completion of caissons substructure.

The caissons are extended by slipforming methods. The majority of them terminate in ring beams while the remainder are extended to form the legs which support the steel deck (Ref. Fig. 25).

On completion of this phase of construction the structure is towed into adjacent deeper water and moored.

The structure is ballasted so that only the top five metres of legs are above water and the steel deck (Ref. Fig. 27) is floated into position. Water is pumped out of the structure thus raising the deck clear of the pontoons. The deck is secured to the concrete legs by prestressing bars. Deck loads are then placed.

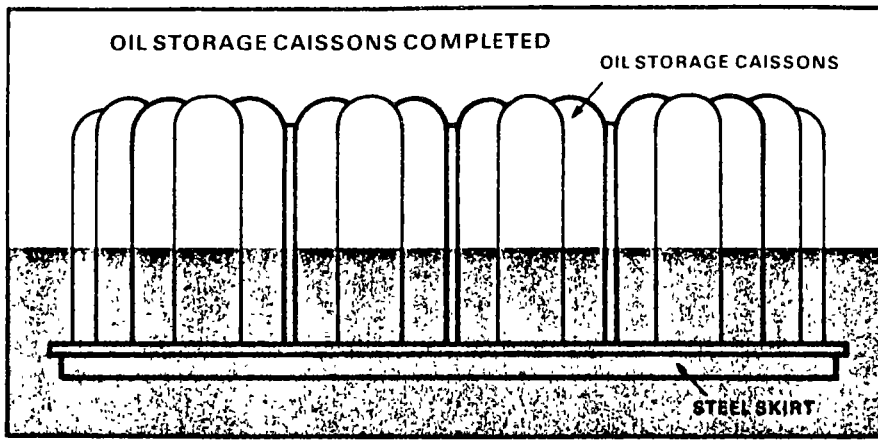


Fig. 24.

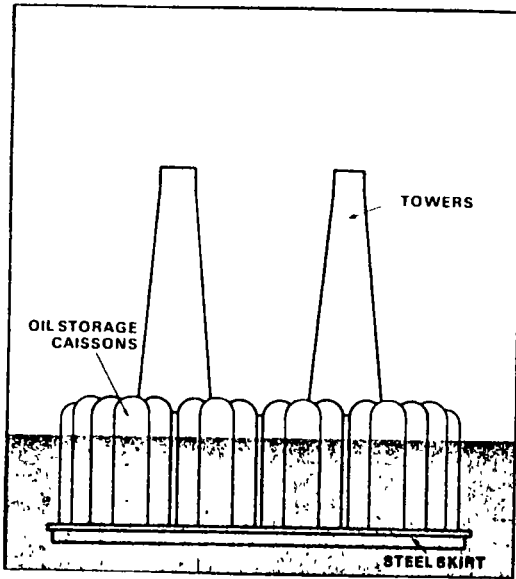


Fig. 25: SLIPFORMING TOWERS

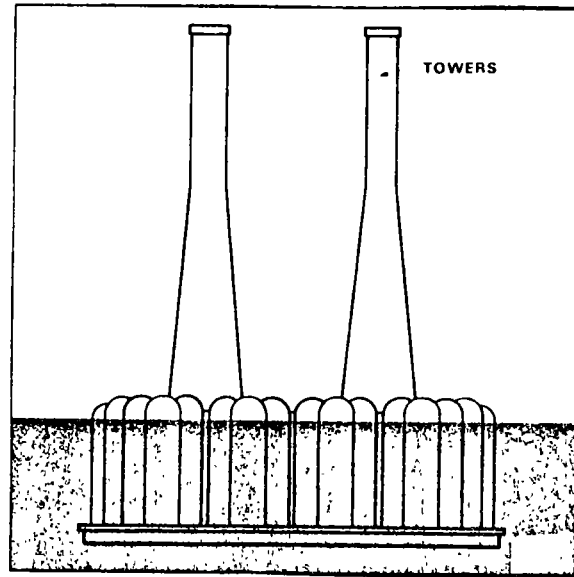


Fig. 26: CONCRETE TOWERS COMPLETED

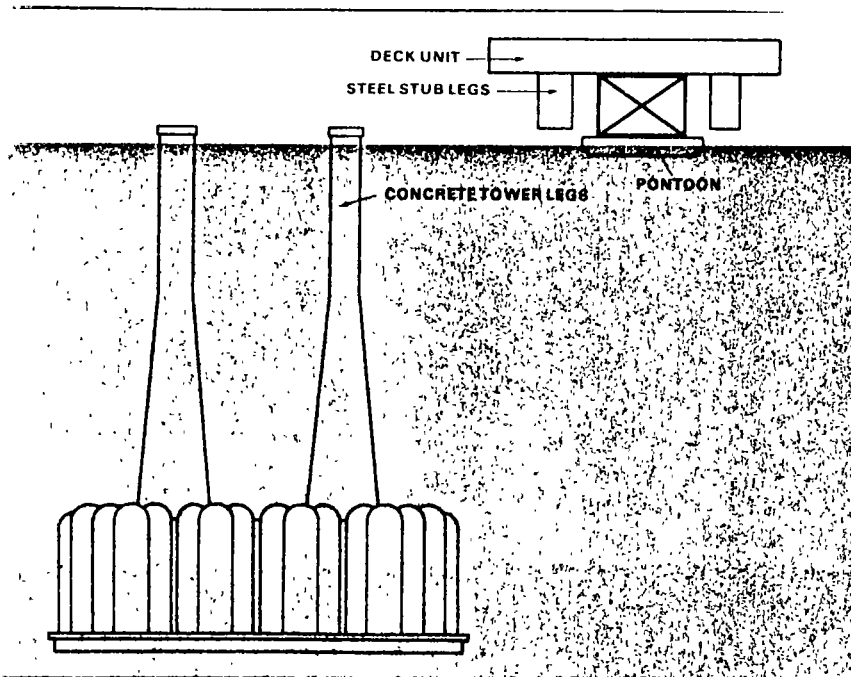


Fig. 27: STEEL DECK UNIT FLOATED OUT TO CONCRETE TOWERS AND BASE IN SUBMERGED CONDITION

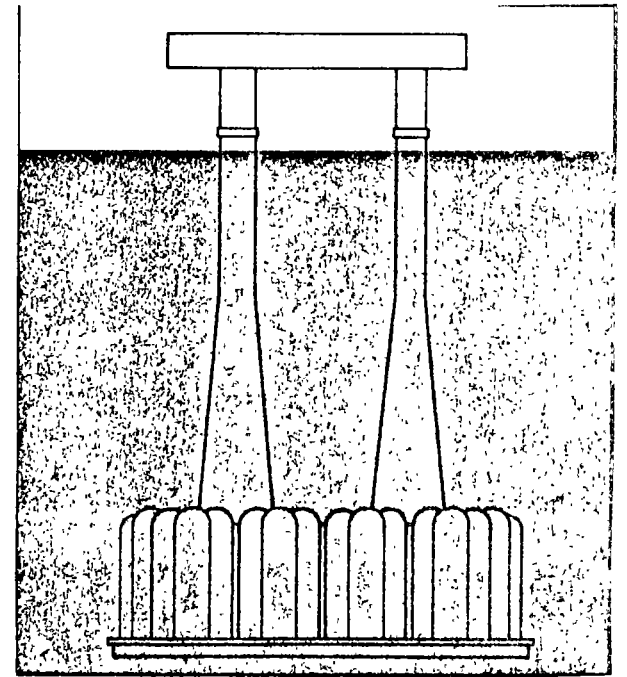


Fig. 28: DECK UNIT CONNECTED TO TOWERS

4) Completion of platform.

When installation of all equipment is complete and all systems are proved, the ballast water is pumped out until the draught is reduced to 19 fathoms (35 m). This is the maximum draught for towing out from the Clyde through the North Channel between the Mull of Kintyre and Northern Ireland (Ref. Fig. 30).

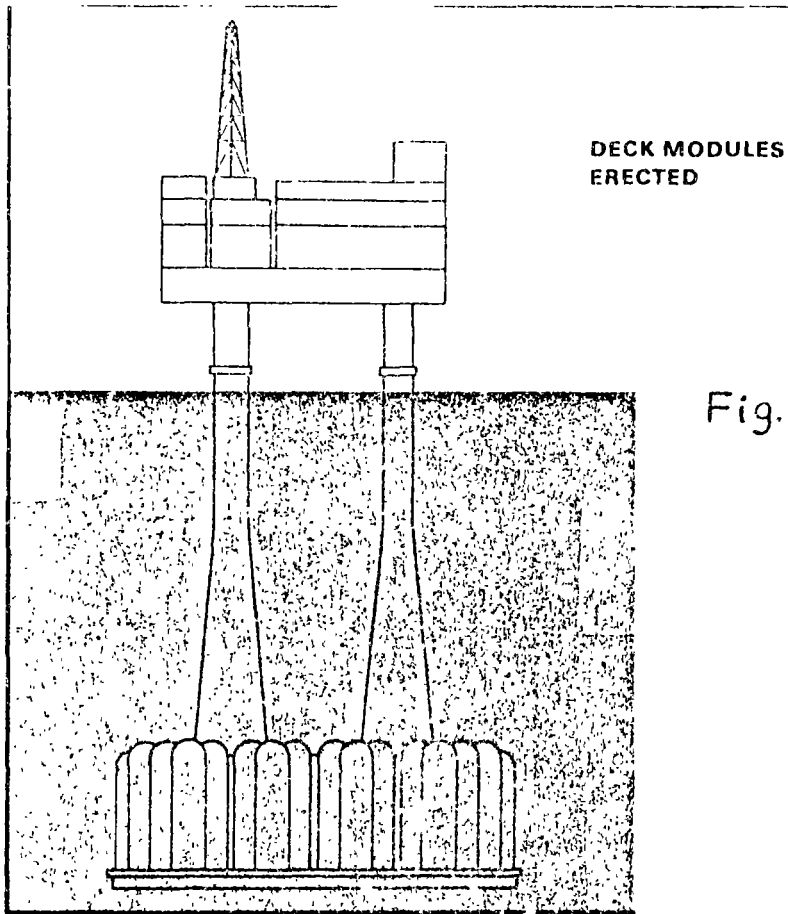


Fig. 29.

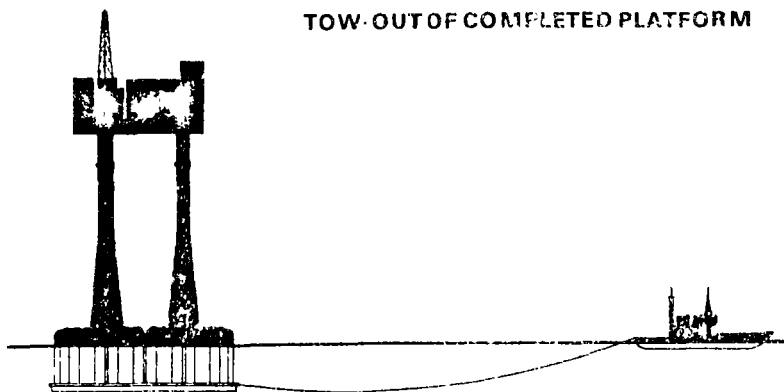


Fig. 30.

5) Location.

The structure is now ready to be towed to its location in the North Sea. In the event of heavy storms in open sea the caisson structure can be lowered until at least 50 m of water is above the top of the caissons; this protects the structure from the wave action.

May to September provides the most suitable towing period, with June and July the best months.

Towing time, based on a towing speed of 2 knots from Loch Fyne to the North Sea location, is estimated at 17 days.

When the structure reaches its final location in the North Sea it is progressively submerged until the base rests on the sea bed. (Ref. Figs. 31 & 32). This is achieved by admitting water into the caissons. If necessary, grout can be injected between the underside of the base slab and the foundation strata. Should the structure require protection from scour, beyond that provided by the skirt, a rock blanket can be placed about the perimeter.

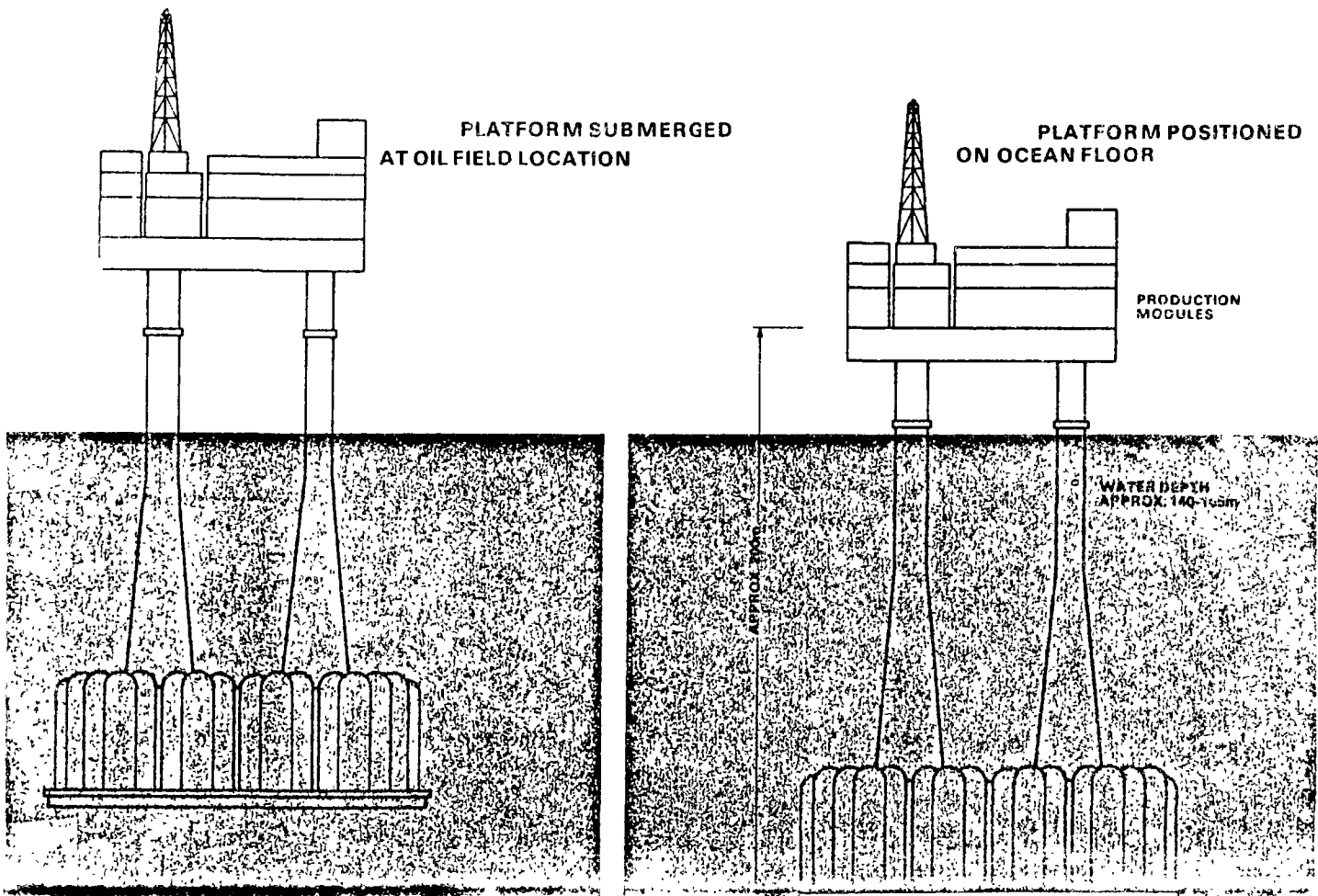


Fig. 3.

8.: DESIGN.

The design and calculation of a drilling platform combined with a storage tank for crude oil were in the beginning an unknown field, especially because of the lack of experience. Only one thing was clear, that enormous dimensions, weights and forces were involved and that many problems had to be studied first and completely new techniques developed.

Therefore it is clear that the designing of such a structure is not a job for one man.

The requirements of the client, the foundation aspects, the evaluation of the dynamic wave loads, the statical calculation of such a very complex structure, its nautical behaviour and the short available construction time required a perfect cooperation between many specialists. Such a team of specialists has been confronted with many contradictory requirements.

The calculation of a gravity structure founded on shore is a rather easy routine job. Such a foundation off-shore under very severe seaconditions and in great waterdepths, however, is completely different.

First : the sea- and soil conditions have to be studied and then

Second: the results of the investigations have to be translated into design criteria.

These studies could only be done in close cooperation with the scientific institutes working in the relevant field i.e.

Laboratory of Soil Mechanics

Hydraulics Laboratory

Ship Model Basin

Institutes for testing materials

Laboratories for applied Mechanics

Computer Specialists.

As soon as all the requirements of the client are known and all the involved experts have given their recommendations then the design engineer can start to find the "great compromise" between all requirements, thereby not forgetting the conditions during the construction phases.

The weight of the deck, the diameter, distance and shape and number of towers, the height and width of the substructure and the shape and arrangement of the cells, all these items are a subject of long discussions between the members of the design team.

Once the first concept has been chosen, then the dimensioning can only be solved through trial and error and especially with much mutual understanding between all involved engineers and specialists.

Only the limiting factors are rather easy to define, such as the available waterdepths on the construction site and those during the transport to the location.

Between the phases : construction and functioning of the platform there are the two temporary phases of transport and sinking. Although the duration of these phases is short, they are unfortunately critical for the design.

The transport of such a colossus requires favourable weather-conditions; during the sinking procedure the metacentric height has to be checked carefully and continuously.

The design problems, which will be dealt with in the following chapters are the following :

- 1) Foundation soil conditions.
- 2) Wind- and seaconditions
- 3) Influence of dynamic loads on foundation soil and structure.
- 4) Fatigue analysis of used materials.
- 5) Nautical aspects.
- 6) Durability of used materials.

Most of the abovementioned problems can be divided in three parts :

- a) investigations
- b) evaluation of results and translation into design criteria
- c) calculation of the statically very complicated structure.

In general it may be said that an enormous quantity of scientific work has been done in a very restricted time by all the involved design offices and scientific institutes, which deserves great admiration.

The principal features of off-shore concrete gravity structures are their large size, their construction afloat and deployment reasonably complete and their installation on a usually unprepared site.

The areas of analysis can be summarised as follows :

A. Stability.

- 1) Stability of whole foundation.
- 2) Local failures e.g. skirts.
- 3) Skirt penetration.

B. Earth pressure.

- 1) Impact at touchdown.
- 2) Lateral loads on skirts.
- 3) Pressures on base slabs.
- 4) Load distribution under structure.

C. Deformations.

- 1) Short term settlements.
- 2) Long term settlements.
- 3) Relative movements between structure and conductors and marine risers.

D. Hydraulics and seepage.

- 1) Piping.
- 2) Scour.

E. Special investigations.

- 1) Site stability - possibility of movement of soil towards structure as result of seismic instability of slopes; possibility of failure of soft soils as result of wave induced shear stresses.
- 2) Negative skin friction on conductors.
- 3) Dynamic response and cyclic loading - wave loads provide a repeated reversing loading.
- 4) Structural fatigue.
- 5) Soil fatigue.

9.: DESIGN REQUIREMENTS.

The design requirements for off-shore gravity structures are covered by several codes, some being more specific than others.

The following are mentioned here :

- a) American Petroleum Institute; recommended practice for planning, designing and construction of off-shore fixed platforms (fifth edition, January 1974).
- b) Fédération Internationale de la Précontrainte; recommendations for the design of concrete sea structures (October 1973).
- c) Det Norske Veritas; Rules for the design, construction and inspection of fixed off-shore structures (July 1974).
- d) Department of Energy; guidance on the design and construction of off-shore installations (March 1974).

In the case of concrete gravity oil platforms Det Norske Veritas from Norway has performed an enormous amount of pioneering work with respect to :



- a) design principles i.e. limit state method,
- b) structural and load analysis,
  - i.e. stochastic analysis,
  - dynamic structural analysis,
  - fatigue analysis.
- c) risk and reliability analysis to determine realistic safety factors.

From their assignments and activities they have gained considerable experience and insight in the design, construction and general performance of off-shore structures. In one of their reports they have given a precise definition of the "Behaviour of off-shore structures", which contains a synopsis of the most important problem areas and current methods of analysis.

They made a distinction between :

- a) the structural behaviour :
  - calculation of all stresses and solving of all structural problems for a specific set of design loads.
- b) the enduring behaviour :
  - study of the durability, service ability and general performance during the expected lifetime for a specific set of environmental conditions.

As already mentioned the structural behaviour has to be subdivided in the static and dynamic structural behaviour. Fatigue considerations should be classified as "enduring behaviour".

The synopsis is as follows.

Static behaviour	Dynamic behaviour	Enduring behaviour
System characteristics	Dynamic structure/ foundation model	Changes of structure/ foundation system during lifetime
Stresses and forces	Dynamic stresses and displacements	Foundation long term settlements
Displacements	Dynamic load factors	Cumulated fatigue stress damages
Foundation reactions	Damping of soil/ structure system	
Structural performance during accidental loads or mishaps	Vibrations of members	Fatigue cracking
Stress redistributions, cracking, etc.	Earthquake responses	Corrosion
	Long term stress responses	Durability
		Maintenance and repairs
		General serviceability and structural fitness as regards intended use

#### 10.: FOUNDATION SOIL CONDITIONS.

With the introduction of the concrete gravity structures as alternative to steel piled platforms the role of the geotechnical engineer became much more important.

He became greatly involved in the following activities :

##### Site exploration and soil testing :

- a) Site investigation.
- b) Interpretation of results from in-situ testing.
- c) Model tests to determine soil behaviour.
- d) Laboratory determination of cyclic tests to determine soil behaviour.

and also in the results of the

##### Calculation of the gravity structures,

- a) Analysis of dynamic soil-structure behaviour.
- b) Foundation soil stability under extreme loads.
- c) Performance observations.
- d) Field instrumentation and platform installation.
- e) Performance observations.

Soil investigations in the North Sea consisted primarily of sampled boreholes. Due to various circumstances the quality of the samples is poor and improvements in the sampling techniques are difficult to achieve. The greatest problem are the great differences in condition of the sample in the laboratory and same in deep water, like the tremendous change in hydrostatic pressure and temperature.

Therefore in-situ testing became a necessity and in the past years several techniques have been developed for off-shore surveys, of which the cone penetrometer test is at present the most widely used and with which appreciable experience has been gained.

In the static cone penetration test (CPT) a 10 cm<sup>2</sup> cone is used, that penetrates the soil layers at the rate of 2 cm/sec. The available thrust is 20 tons and the necessary reaction is provided by ballast.

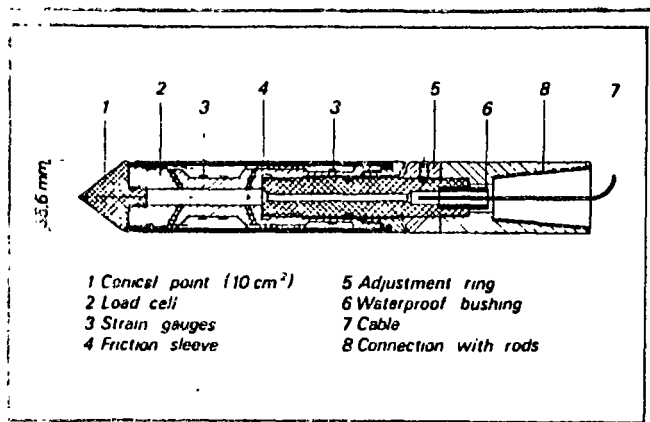
Continuous recording of the results on a chart recorder opened the way for tests under water.

The rig has been designed for lowering to the seabed from the derrick of a drilling vessel. The attainable penetration depends on the hardness of the soils encountered : i.e. about 10 to 25 metres.

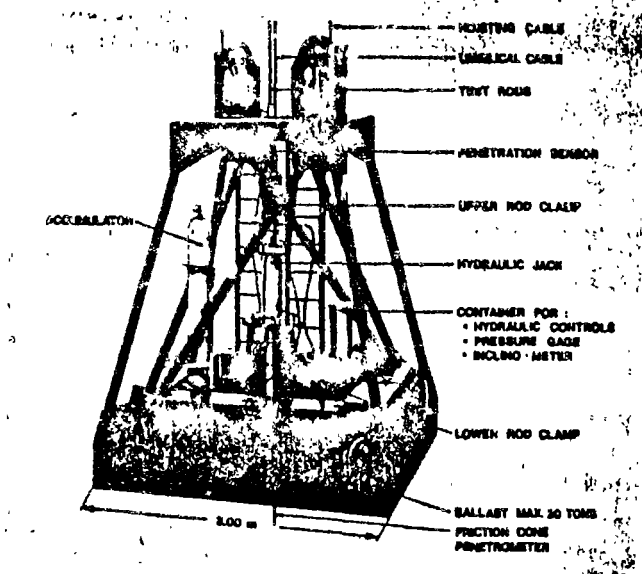
The electric penetrometer records simultaneously the cone resistance and the sleeve friction. The resulting continuous graph provides a very detailed picture of the soil profile. These tests became indispensable for evaluating the upper layers in connection with the required skirt penetration (see later). To be mentioned are the "Seajack" developed by the Norwegian Geotechnical Institute and the "Seacalf" from Fugro Cesco, Holland. See figure 33.

For deeper depths a special down the hole penetrometer has been developed (Wilson from Fugro-Cesco), which gives test results in a discontinuous graph of the cone resistance.

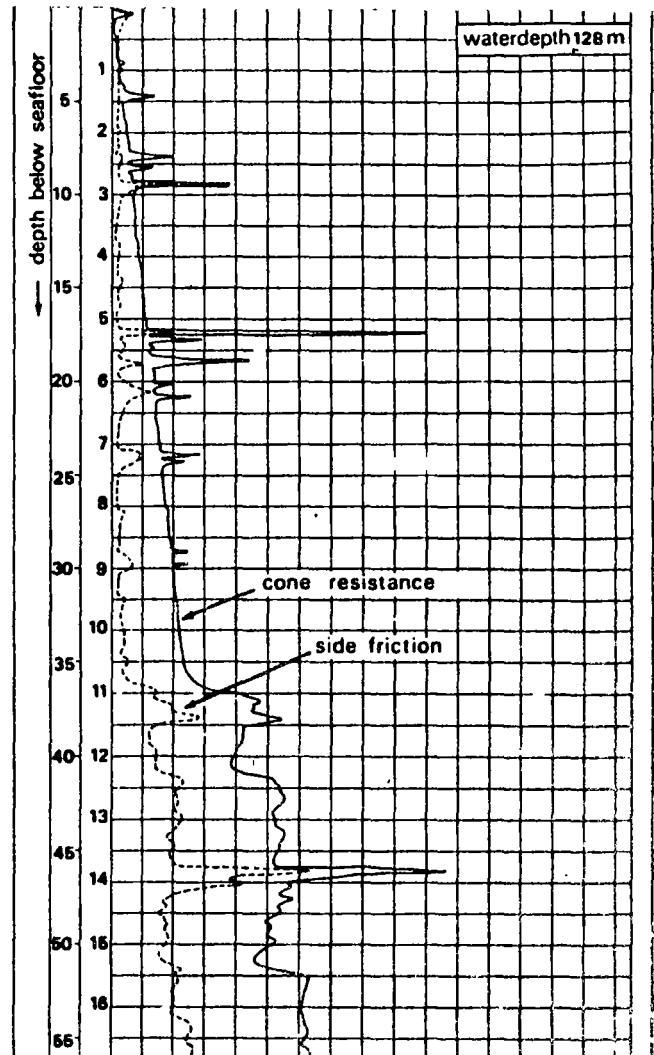
The interpretation of the CPT-results is still a matter of intensive studies.



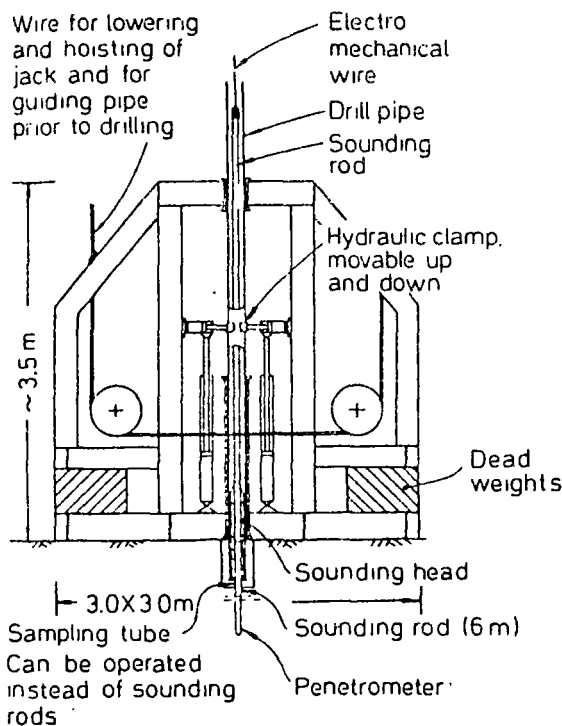
Fugro electric friction penetrometer.



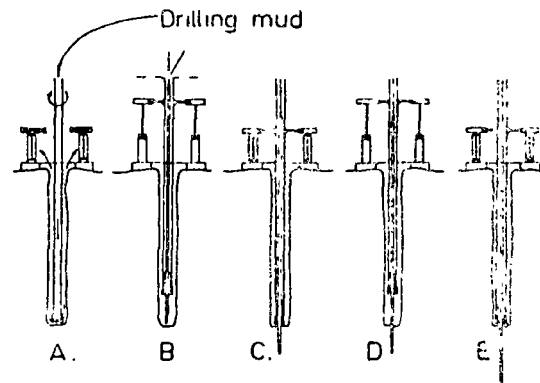
Seacalf seabed penetrometer rig.



Seacalf penetrometer test in normally consolidated clay, North Sea Forties field.



The "Seajack" used for sampling and in-situ testing.



- A. Drilling with mud, lost at sea floor.
- B. Drill pipe lifted 1 m by jack. Penetrometer with rods and clamp installed
- C. Penetration test (or sampling) by jacking drill pipe
- D. Pipe returned for new stroke
- E. Penetration test advanced one stroke length

An important aspect of the CPT is that the ratio between sleeve friction and cone resistance is practically constant for a particular soil type, which fact made it possible to carry out a soil classification and to derive a soil profile. Many more studies have been made to establish correlations, through which e.g. the shear strength of the in situ clay layers can be established, which is required for the foundation design.

The greatest advantage of a CPT test is that it can be considered as a little model test in situ.

CPT's can also be used to predict the settlement of a gravity structure as in sands a correlation has been found between cone resistance and compressibility. At the moment intensive studies are made to find more correlations, i.e. cone resistance and liquefaction potential.

The preliminary survey to explore the general soil profile normally includes :

Seismic profiling with acoustic reflection systems,  
Bathymetric survey for determination of waterdepth and seabed topography,

Seabed sampling,

One or two deep sampled borings to find the correlation with the acoustic profiles.

The detailed investigations to obtain exact data about soil characteristics consist of a number of boreholes and in situ tests, of which the CPT is now common in the North Sea.

A completely new factor in the design calculations was the nature of the waveloading and their effects on the soil.

The waves exert cyclic loadings and only intensive research projects have resulted in more knowledge about the behaviour of clay and sand layers under repeated loading. Soil samples were subjected to sinusoidal load pulses and after the cyclic loading tests strength and deformation have been measured.

One important conclusion was that the behaviour of clay under cyclic loading has to be analysed in terms of "effective" stresses. For stress levels above a certain lower limit strains increase continuously until failure occurs. In sandlayers there is another phenomenon: the magnitude of pore water pressure that may be built up during undrained cyclic loading of dense sands and cause liquefaction. Research taught that there are more complicating factors inherent to cyclic testing of soil elements in the laboratory than expected.

Studies and testing of larger models and field testing must be undertaken and maybe eventually the direct use of a field in situ device may give the best and most reliable information about the liquefaction of sands and silts.

In the beginning one could only start from conservative assumptions.

All the major gravity structures are equipped with steel or concrete skirts in order to reach the required foundation depth and to prevent scouring. Usually they are so arranged that compartments are created to allow injection of grout into gaps between the base of the structure and the seabed. These skirts must penetrate to the design level under the submerged weight of the structure. If necessary, this can be increased by ballasting. A good estimate of the expected skirt resistance during installation of the structure is essential.

In order to prevent damage to the skirts during installation the Condeep platforms have been provided with steel pipe dowels extruding 4 m below the skirt tip level to prevent the aqua-planing or skidding effect, that is the lateral movement of the structure during the first phase of penetration, the "touch down".

See fig. 34.

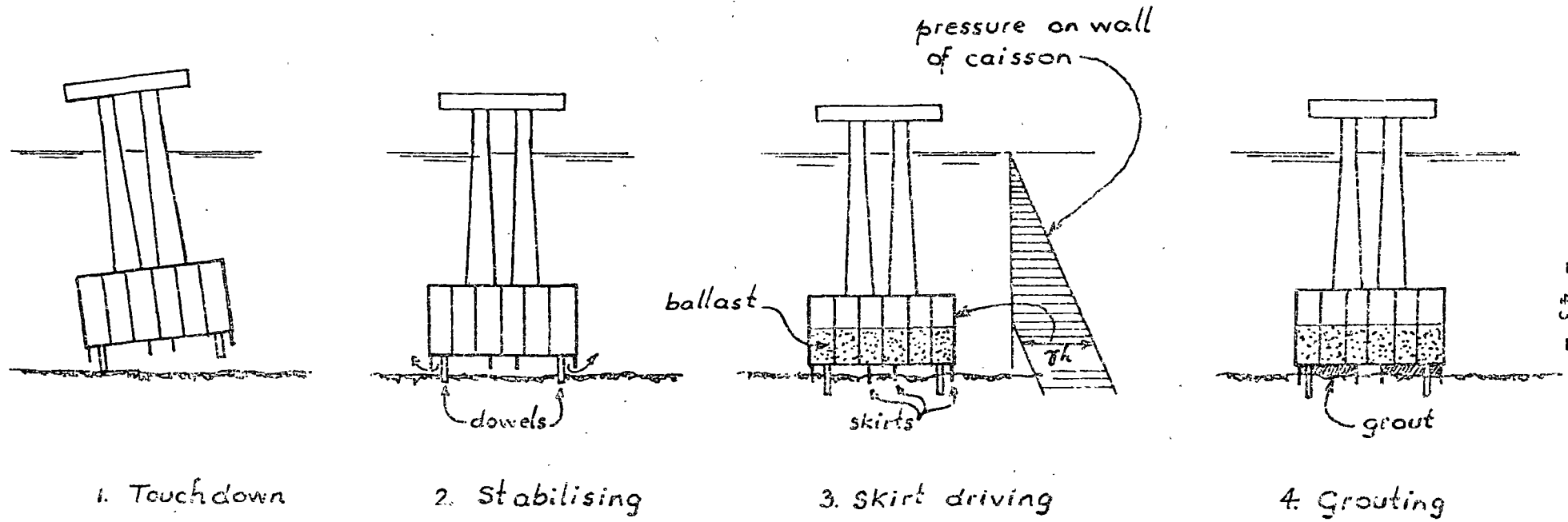


Fig. 34 : Installation sequence for a gravity platform

When calculating the platform stability the conventional method is used : assessing a factor of safety against failure expressed in terms of a material or a load factor.

Wave loads are assumed statically, however with a certain load factor because of the effects of repeated loading,

Investigated are :

- a) horizontal sliding.
- b) deep bearing capacity failure.

Formulae of Meyerhof and Brinch Hansen developed for foundations with horizontal and excentric vertical loading are used.

In determining allowable foundation stresses the most reliable concept is to maintain positive effective stresses at the mudline.

A commonly applied method is the use of a finite element model of structure base and foundation soil to compute stresses and displacements under different loading conditions. However, appropriate elastoplastic material properties have to be introduced. The effect of cyclic loading can be studied by introducing reduced strength and stiffness data. In principle, it is still a static analysis completely different to the type of loading in reality.

A considerable refinement is the application of a complete storm-loading spectrum in a non-linear elasto-plastic finite element analysis.

Another approach is to use material properties in which the accumulated effect of a certain number of load cycles has been incorporated.

All these computations give as a result the gradual penetration into the seabed due to cyclic loading and from that the horizontal displacement and tilting can be determined.



Eventually the behaviour of the structure during a series of stormy and calm periods should be studied also.

In the next figure are shown the calculated and measured settlements under the Ekofisk tank.

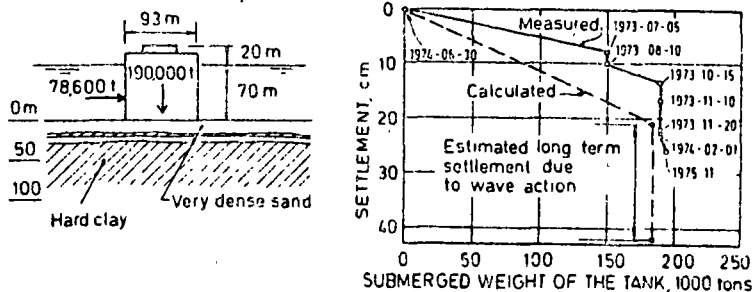


Fig. 35

Settlements under the Ekofisk Oil Storage Tank.

First there is an immediate settlement directly after placing followed by consolidation and creep settlements.

Then come the permanent settlements, which occur subsequently to each storm due to the excess pore pressures which build up during the cyclic loading by waves during storms.

Note : The soil deformations introduce significant stresses in the conductor pipes under the platform as well in the risers.

#### FIELD INSTRUMENTATION.

As the actual installation on the seabed is a critical phase in the life of a platform a comprehensive instrumentation is applied to measure all important factors such as platform inclination, water pressure in skirt compartments, soil pressure at the base of the structure and strains within the structure.

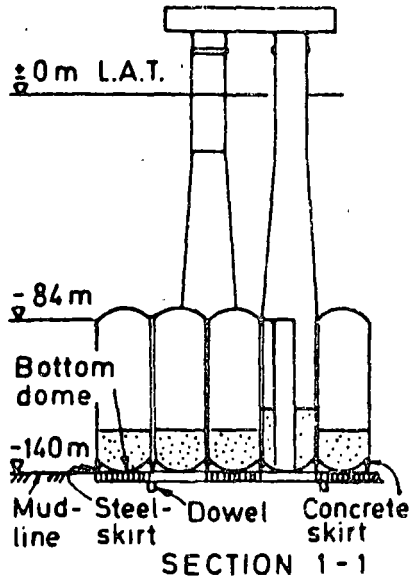
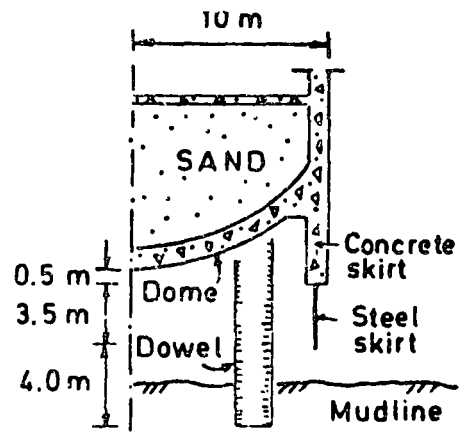
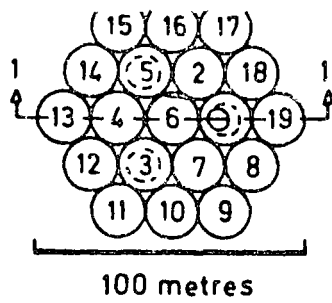
As soon as the alarm limits are reached measures are taken. With the ballasting system and the application of an over- and underpressure in the different skirt compartments the platform could be kept virtually vertical.

Further extensive instrumentation has been installed for the performance observations during the first years of the commissioning of the platform. An extensive program has been carried out by DNV and the performance data have been analysed and evaluated. The general conclusion is that the performance of the structure seems very satisfactory and that all the assumptions and calculated deformations etc. are in fair agreement with the predictions.

Fig.36: Field performance observations.

Final remarks :

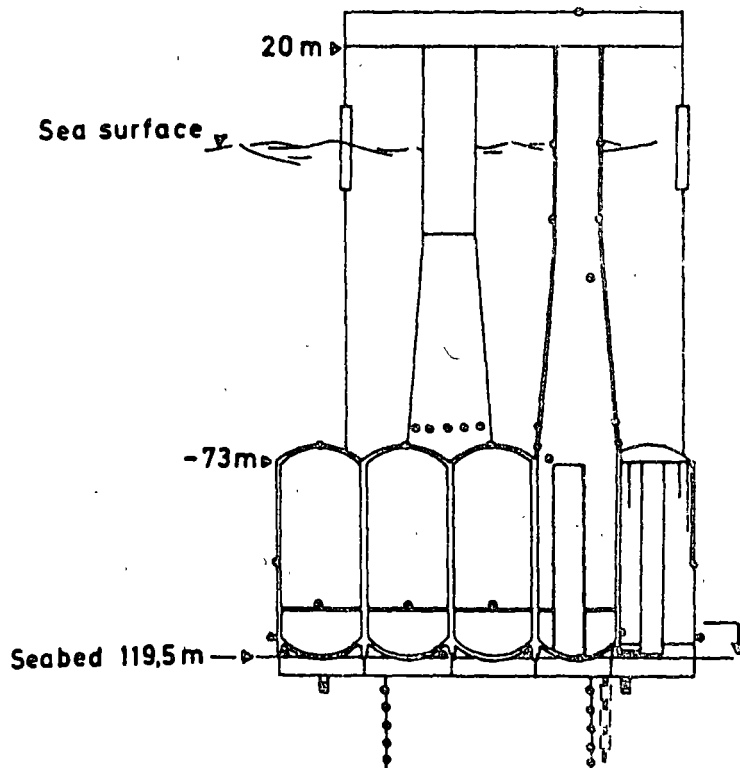
- 1) The bottom slabs should be designed for high local soil loading to cope with unevenness of the seabottom which is difficult to establish and correct in deeper water. It is therefore prudent to design the bottom slab for the maximum recommended local load of 200 tons/m<sup>2</sup>.
  
- 2) Site preparation may be possible in shallow water but in deeper water the difficulty and cost involved are such that removal of major obstructions is all that can be done before installation. The structures has therefore to be designed for a sloping uneven site with inhomogeneous soil conditions.  
Besides, on the one hand, any hole that was dredged would tend to be filled by natural sediment transport; and on the other hand the platform will not end up precisely on target.



### INSTRUMENTATION FOR INSTALLATION

- Water Level in the Cells.
- Draught.
- Water Pressure in the Skirt Compartments.
- Inclination of the Platform.
- Stresses in the Steel Pipe Dowels.
- Contact Earth Pressure at the Tip of the Domes.
- Structural Strain in the lower Domes.
- Structural Strain in the lower Part of the Walls.
- Short Term Settlement.

### Instrumentation for Installation of Condeep Structure.



### PARAMETERS MEASURED

- Stress in reinforcing
- Contact pressure
- Pore water pressure
- Penetration force
- Differential water pressure
- Ballast water level
- Draught
- Wave motion
- Wave pressure
- Structural motion
- Settlement and horizontal displacement

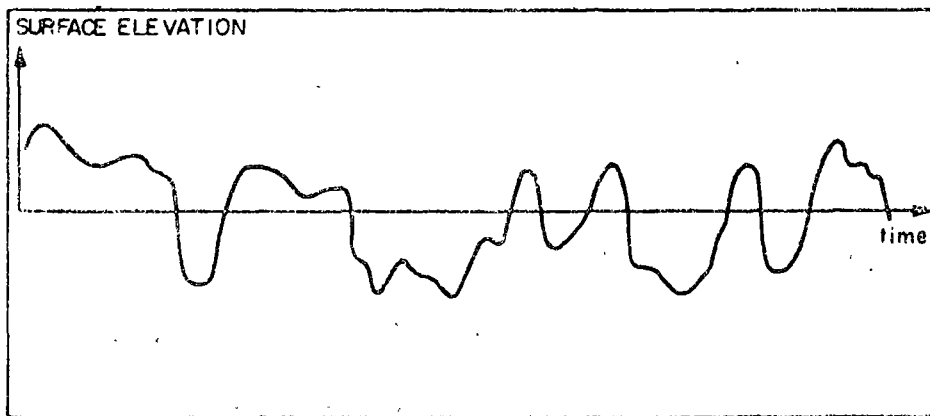
Fig. 36.

11.: WIND- AND SEACONDITIONS.

The structure must resist wave, wind, current and earth quake loads and also dynamic considerations are essential.

In technical and structural analyses the loading system is usually treated as a pseudo - static phenomenon, although dynamic amplification factors are included in the computed wave forces.

In reality, the structure is subjected to a great number of load cycles of varying magnitude, direction and frequency.



Sketch of Surface Elevation vs. Time at a Point on the Sea Surface

Fig. 37

This aspect causes most concern in design and requires a study of fatigue effects in the materials used, including foundation soils and of the dynamic behaviour of the complete soil-structure system.

In the North Sea the wave loading is the predominant factor and especially its dynamic effects.

The dynamic analyses are used to :

- a) calculate the multiplication of forces for the design wave with a long period.
- b) calculate the much higher amplification of forces for the many short-period waves, which can cause fatigue problems in the steel and concrete members and also in the soil.

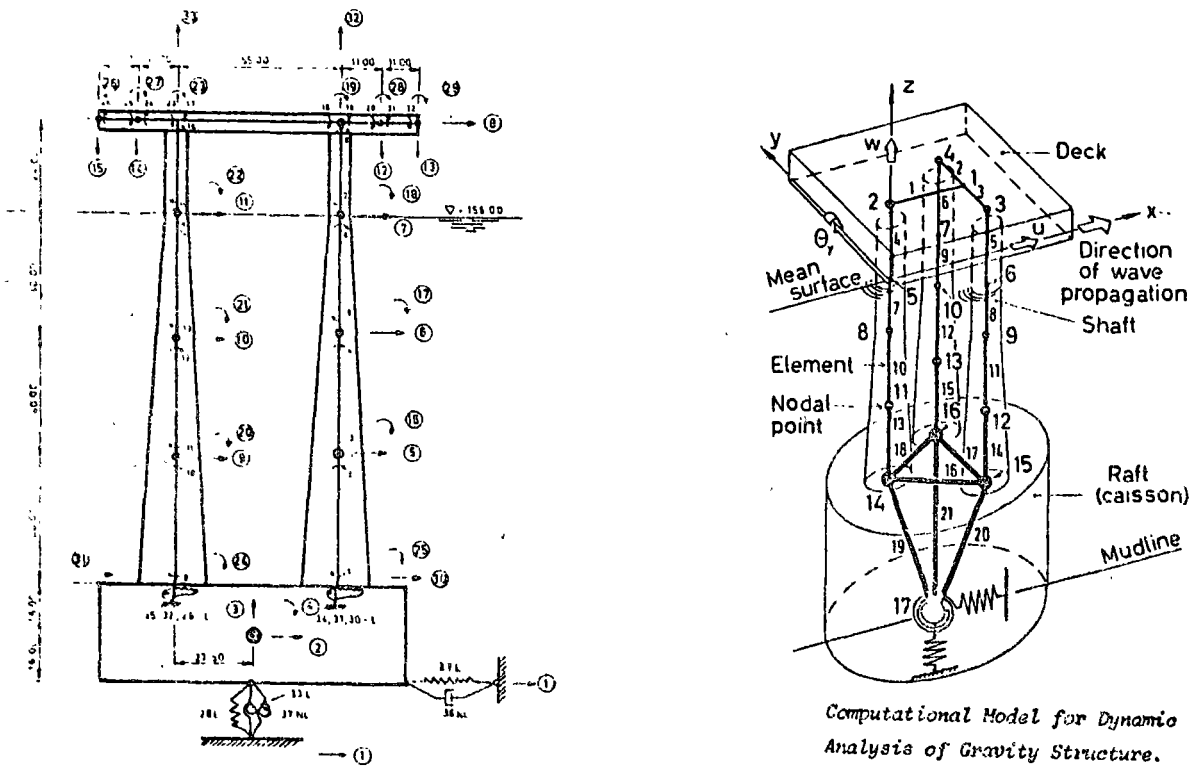
Generally two methods are used to calculate the forces exerted by ocean waves on the structure :

- a) the design wave method.
- b) the design wave spectrum method.

The latter method is a stochastic analysis and is gradually more commonly used by the structural and foundation engineers. One could observe that such a stochastic analysis is the best imitation of what is really going on with the structure. A wave load is not a continuously applied constant force, not a cyclic loading with equal pulses, however, it is a spectrum of the most realistic train of waves, which diversify in magnitude, direction etc. constantly.

Only then the effects on the structure can be calculated and a reliable prediction of deformations and fatigue behaviour can be obtained.

See fig. 38.



Dynamic model for typical gravity platform.

fig. 38

The height of the waves can be determined from forecasting wave spectra from knowledge of the past history of the winds in case there are no wave data available.

Several graphical wave forecasting methods have been developed each of them with its own restrictions. Only their names are mentioned here :

- 1) SMB-method (Sverdrup, Munk, Brettschneider)
- 2) Space-time method of Wilson
- 3) DD-method (Draper, Darbyshire)

This last method has been developed on the basis of wind- and wavedata from the Northern part of the Atlantic Ocean, Irish Sea and North Sea and it is valid for both deep and shallow water. The influence of the swell from earlier storms has been taken into account also.

After determination of the maximum windspeed, duration of the storm and the fetch the significant wave height and wave period can be established.

Fortunately, within reasonable accuracy, waveheights of natural irregular waves can be described via a theoretical distribution model : the Raileigh Distribution, which is completely characterised by one parameter, the significant waveheight. From this the data required by the design engineer can be determined by the application of wave statistics.

Two single sinusoidal design waves can be determined :

- 1) the "maximum" waveheight with an average chance of being exceeded once in a hundred years in order to check the strength of the structure.
- 2) the "own frequency" wave with a frequency equal to the natural period of the structure to check the dangerous phenomenon of resonance.

Once the design wave is known the forces exerted on the structure can be calculated with satisfactory methods.

Depending the waterdepth the conoidal, Airy or Stokes theory will be applied.

Depending the relative dimensions of the structure compared with the wavelength, the Morrison, Froude-Krylov or Diffraction theory will be used.

The force  $F$  acting on a cylindrical element is divided into an inertial component  $F_I$  and a drag component  $F_D$ .

There is a phase shift of  $90^\circ$  between the two components of the force. The distribution of wave-induced pressures on a platform is given in fig. 39.

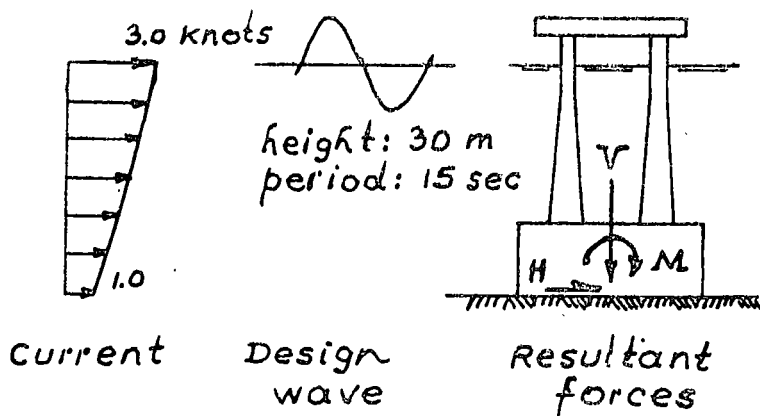
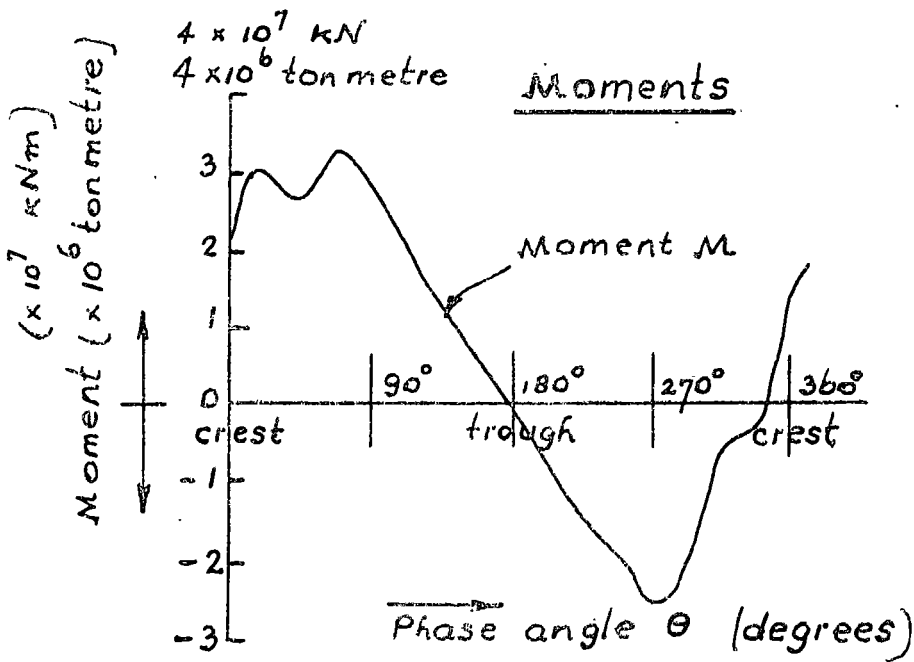
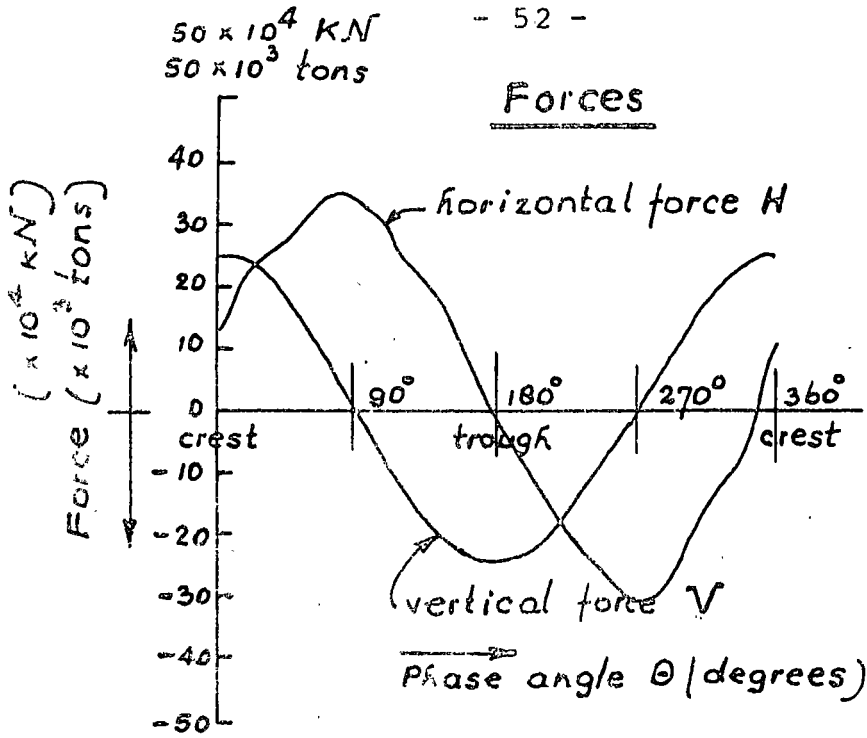
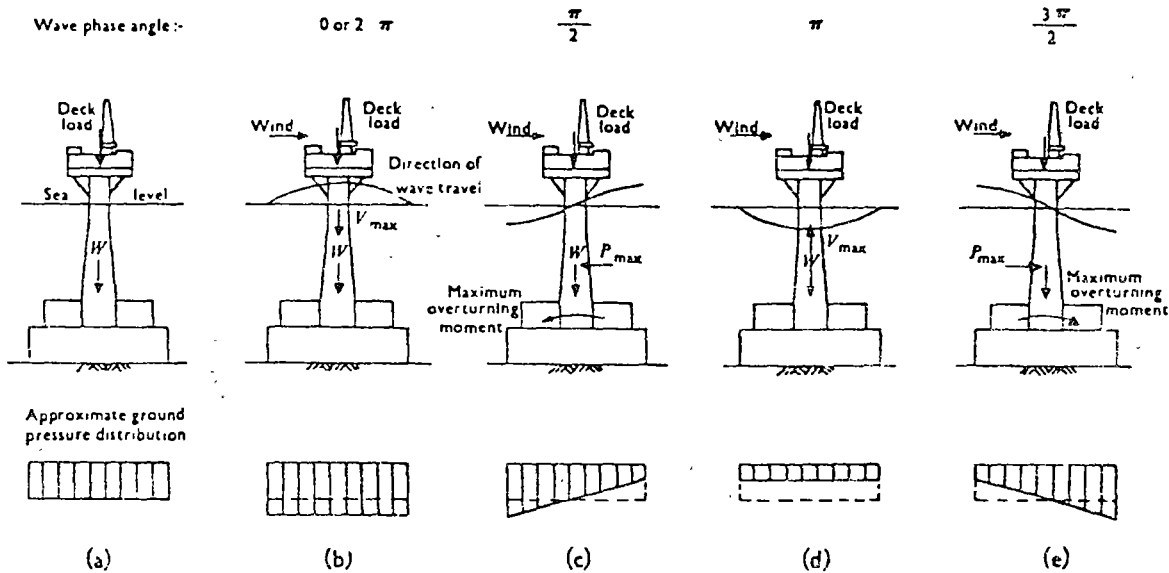


Fig. 39:  
Maximum resultant forces on structure.





Variation of base pressure with passage of wave.

The above figure shows clearly the repeated cyclic change in foundation pressures due to cyclic waveloads. Not only the maximum soil pressure at the edge of the foundation slab alternates from minimum to maximum, also the average soil pressure ranges between a minimum and a maximum. It is logical that this phenomenon unknown for on-shore structures must be investigated thoroughly and especially its effects on the used materials and foundation soil.

The following comments can be made.

- 1) The main force on large displacement structures is provided by the inertial component.
- 2) Consequently the peak horizontal force occurs when the wave surface elevation is near mean water level.
- 3) The resultant vertical load on the foundation changes during the passage of the wave.
- 4) The loads are cyclic in nature but with a small net resultant in time in the direction of wave travel.
- 5) There is a phase difference between the cyclic variations of the vertical and the horizontal force, and the moment components.

## 12.: NAUTICAL ASPECTS.

During all stages of the period, in which the platform floats its stability has to be investigated.

During the completion of the concreting of the caissons and the towers the structure is very stable. The floating stability is most critical during the submergence of the structure. The yardstick for stability is the metacentric height GM, which is a function of the displaced volume, the moment of inertia of the water plane area and the centre of gravity of the structure.

For a better understanding the derivation of the formula for G M will be given.

To determine the stability of a vessel during rolling (rotation around the longitudinal axis) it is necessary to calculate the metacentric height.



Moment due to the displacement:  $v \cdot \overline{z_1 z_2}$ .

Displacement of point C :

$$\overline{C C_\phi} = \frac{v \cdot \overline{z_1 z_2}}{V} = \frac{v}{V} \cdot \overline{z_1 z_2}.$$

Further :  $\overline{C C_\phi} \parallel \overline{z_1 z_2}$ .

The new line of direction of the buoyancy goes through point  $C_\phi$  and is perpendicular on the new waterlevel

$W_\phi L_\phi$ .

The point of intersection of this line with vertical axis of symmetry of the vessel is called the metacentre M.

The stabilizing moment is :

$$M_{st} = G \cdot \overline{RS} = G \cdot \overline{MZ} \cdot d\phi$$

A floating vessel is stable when point M is located above point G.

From the combination of parallel forces follows :

$$\overline{CS} : \overline{n_1 n_2} = v : V,$$

$$\overline{CS} = \frac{v}{V} \cdot \overline{n_1 n_2} = \frac{v \cdot \overline{n_1 n_2}}{V}.$$

$v \cdot \overline{n_1 n_2}$  represents the total stabilizing moment and is calculated as follows :

Volume of one wedge with a length  $dx$  (in the longitudinal direction of vessel) :

$$\frac{1}{2} \cdot y \cdot y d\phi \cdot dx = \frac{1}{2} y^2 \cdot d\phi \cdot dx$$

Moment of both wedges with respect to point b :

$$2 \times \frac{1}{2} y^2 \cdot d\phi \cdot dx \cdot \frac{2}{3} y = \frac{2}{3} y^3 \cdot d\phi \cdot dx.$$

When L is the length of the vessel the total moment of both wedges is :

$$\int_0^L \frac{2}{3} y^3 \cdot d\phi \cdot dx = d\phi \int_0^L \frac{2}{3} y^3 dx.$$

Substitution in formula for  $\overline{CS}$  :

$$\overline{CS} = \overline{MC} \cdot d\phi = \frac{d\phi \int_0^L \frac{2}{3} y^3 dx}{V} = \frac{d\phi \cdot I}{V}$$

$$\boxed{\overline{MC} = \frac{I}{V}}$$

$$I = \int_0^L \frac{2}{3} y^3 \cdot dx \text{ represents :}$$

the moment of inertia of the horizontal section of the vessel at the waterlevel with respect to the longitudinal axis (X-axis).

$$\underline{\text{Metacentric height}} : h_m = \overline{MZ} = \overline{MC} - \overline{CZ}$$

Conclusion : the stability of a floating vessel can be improved by :

- a low centre of gravity of the vessel.
  - a low centre of gravity of the displaced liquid.
  - a great moment of inertia of the horizontal section of the vessel at the waterlevel.
-

The metacentric height decreases suddenly when the top of the substructure disappears under water and the water-plane area is decreased from the total area of the substructure to that of the cross-section of three or four towers.

*Modification of the GM-value when a caisson is sinking, the minimum value is reached when the caisson deck is just disappearing into the water*

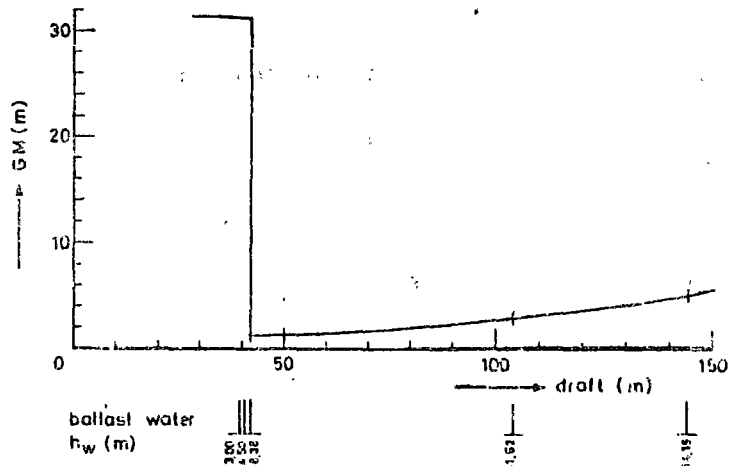


Fig. 40

When the structure sinks further under ballasting the metacentric height increases again very slowly due to the lowering of the centre of gravity by adding water ballast in the tanks.

The problem of ensuring a good floating stability will be more difficult when the oil companies do not accept an off-shore erection of the steel deck.

The towing of the structure to its final location is an operation, which must be planned carefully. About seven tugs are required.

Model tests have to be carried out to evaluate the performance of the structure in terms of pitch, heave and squat.

13.: DURABILITY OF USED MATERIALS, ESPECIALLY CONCRETE.

The durability of every concrete sea structure depends on its strength, its resistance against chemical corrosion by sea water, protection of reinforcing steel and watertightness.

STRENGTH.

Concrete for an off-shore structure must have such a strength that it can resist all the loads that occur. Except the dead and imposed loads as with every concrete structure the following loads have to be considered :

- hydrostatic
- hydrodynamic (waves, current)
- wind (high velocities)
- ice
- earthquake

This results generally in high compressive strength concrete types. The production of these concretes presents many practical problems, especially when it has to be done during the winter in a cold climate.

The requirements are :

- fairly rapid hardening (a strength of 400 kg/cm<sup>2</sup> at 28 days),
- reduced permeability,
- resistance to penetration by sea water and oil,
- a chemical stability when it is in contact with these liquids,
- frost resistance.

To meet these requirements a low water/cement ratio of about 0.4, depending on the amount of reinforcement, has to be used together with a slump between 7-8 cm and an air-entraining additive giving e.g. 3% included air.

A concrete sea structure may be made watertight in two ways. First by producing impermeable concrete and second by avoiding the formation of cracks.

Many investigations made on the impermeability of concrete show that attention should be paid to the granulometry, which should be studied carefully by a qualified laboratory, and further the effects of cement content, for which the Commission Permanente des Liants Hydrauliques et des Adjuvants du Béton recommends the following formula :

$$C = \frac{700}{5\sqrt{D}}$$

where

C is the cement content expressed in kg per m<sup>3</sup> of concrete, and

D is the largest aggregate size, expressed in mm.

This formula results in an increase of about 30 % over the ratio normally used for works on-shore.

The question of cracking of the concrete is much more difficult. The required storage capacities are very large and this results in long lengths of wall, of the order of 100 m. A concrete wall of such a length, built without any precautions undergoes shrinkage which causes large cracks, even before the prestress is applied. It is thus necessary to divide the structure into sections, separated by joints, wide enough to allow the steel to be lapped, that is about 1 m. These joints are only concreted when the sections either side have undergone the major part of their shrinkage, and just before the stressing of the longitudinal cables.



In spite of the low frost resistance of concrete in salt water, observations indicate that deterioration of high quality concrete takes place at a very slow rate. However, where freezing temperatures occur in ocean environments, air-entrained concrete should always be employed.

For many loading combinations and limit states, the tensile strength of the concrete will be of great importance. It would be therefore advisable to determine, specify and test the tensile strength of the concrete as a mean of quality assurance, together with the more conventional compressive tests.

Shear often presents a critical consideration for concrete sea structures and requires a principal stress analysis. Prestressing may often be employed advantageously to increase shear capacity.

Cracking of concrete may not affect the durability of the structure. In general the crack width for reinforced (non prestressed) concrete should not exceed 0.3 mm or 4/1000 of the nominal cover to the main reinforcement. The crack width of prestressed concrete should be limited to 0.2 mm.

Creep and shrinkage effects should be taken into account. Especially the freeze-thaw creep, which is of a greater magnitude than creep under moderate conditions. Therefore the application of the air-entrained concrete could be necessary. To avoid the negative shrinkage effects the addition of pozzolans may also be beneficial when constructing massive concrete gravity structures.

At last but not least the required minimum period of fire resistance should be considered.

CHEMICAL CORROSION OF CONCRETE.

At great depths, attack on concrete by sea water may occur either through the action of sulphates dissolved in the water on the tricalcium aluminate of the cement, or through the removal of free lime by the hydration of the calcium silicates. This, also applies for the colder regions. The first of these two methods of attack is the more important and this may be greatly reduced by the use of a cement which contains only a little crystallized tricalcium aluminate.

Attention should always be paid to the use of sulphate-resisting cements in marine concrete construction.

The question is raised what is the optimum  $C_3A$  content for reinforced and prestressed concrete, since a too high  $C_3A$  content leads to concrete disintegration, whereas a too low  $C_3A$  content may reduce the passivity of the cement at the steel surface. On the basis of present knowledge a range of 5 to 6 % seems to be the best.

The behaviour of concrete in contact with hydrocarbons is less well known. The few test results which are available show that the lightest elements in the oil may penetrate fairly deeply into the concrete and saturate it. This may cause a reduction of its compressive strength. A watertight concrete is the best remedy.

However, it is not the disintegration of the concrete itself, but the electrochemical corrosion of the reinforcing steel which represents the most critical and serious problem to the durability and safety of concrete sea structures.

### PROTECTION OF STEEL.

Experience indicates that corrosion of reinforcing steel has been and still is the most serious and critical problem to the durability and safety of concrete structures in ocean environments.

The most susceptible parts of the concrete structures to steel corrosion are those parts being most exposed to intermittent wetting and drying within the splash zone. Observations indicate that severe steel corrosion also may take place on concrete structures continuously submerged.

There is still no protecting method generally applicable and economically reasonable. Until more research is done, it seems that the most simple and economic way of reducing steel corrosion in larger structures is to seal the concrete surface by a proper surface coating.

An impermeable coating is only effective if it is applied to the face on which pressure is exerted.

Especially attention should be paid to the prestressing cables and their anchors.

### WATERTIGHTNESS.

This is very important property of the concrete. It effects its chemical resistance and at the same time it means a better protection of steel. Watertightness is the result of a suitable casting method together with a careful quality control.

However, this method cannot be used when the tank is constructed while floating; it is then necessary to take special precautions, in particular when curing the concrete. It should also be noted that the added cement content, recommended above, to increase the compactness of the concrete, increases the risk of shrinkage cracking.

Cracking may also be the result of excessive tensile stresses, caused by bending moments due to ground support conditions not in accordance with those assumed in the design of the structure. These can be best avoided by using very conservative assumptions for example, by assuming that the tank rests on a three-point support, the area of each support zone being determined from the maximum stress which the ground under the tank can sustain.

One of the major causes of cracking is the presence of stresses due to temperature effects; on leaving the well, the crude oil may be at a temperature several tens of degrees higher than that of the atmosphere. Thus, there are temperature gradients in the walls producing bending and to withstand the effects, either the prestress must be increased or sufficient normal steel must be distributed over the face to relieve the concrete in tension.

It is finally necessary to pay special attention to the anchorage zones of prestressing cables, where because of concentration of compressive forces, tensile stresses always occur and therefore must be controlled by the use of steel of small diameter.

Reference is made to the American A.C.I. Code No. 71 and CEB/FIP International Recommendations together with the Consideration for Design of Concrete Structures Subjected to Fatigue Loading (ACI-Journal, March 1974, Title No. 71-10).

#### 14.: SUMMARY OF TECHNICAL CHARACTERISTICS AND DESIGN CRITERIA OF SEADECK DESIGN.

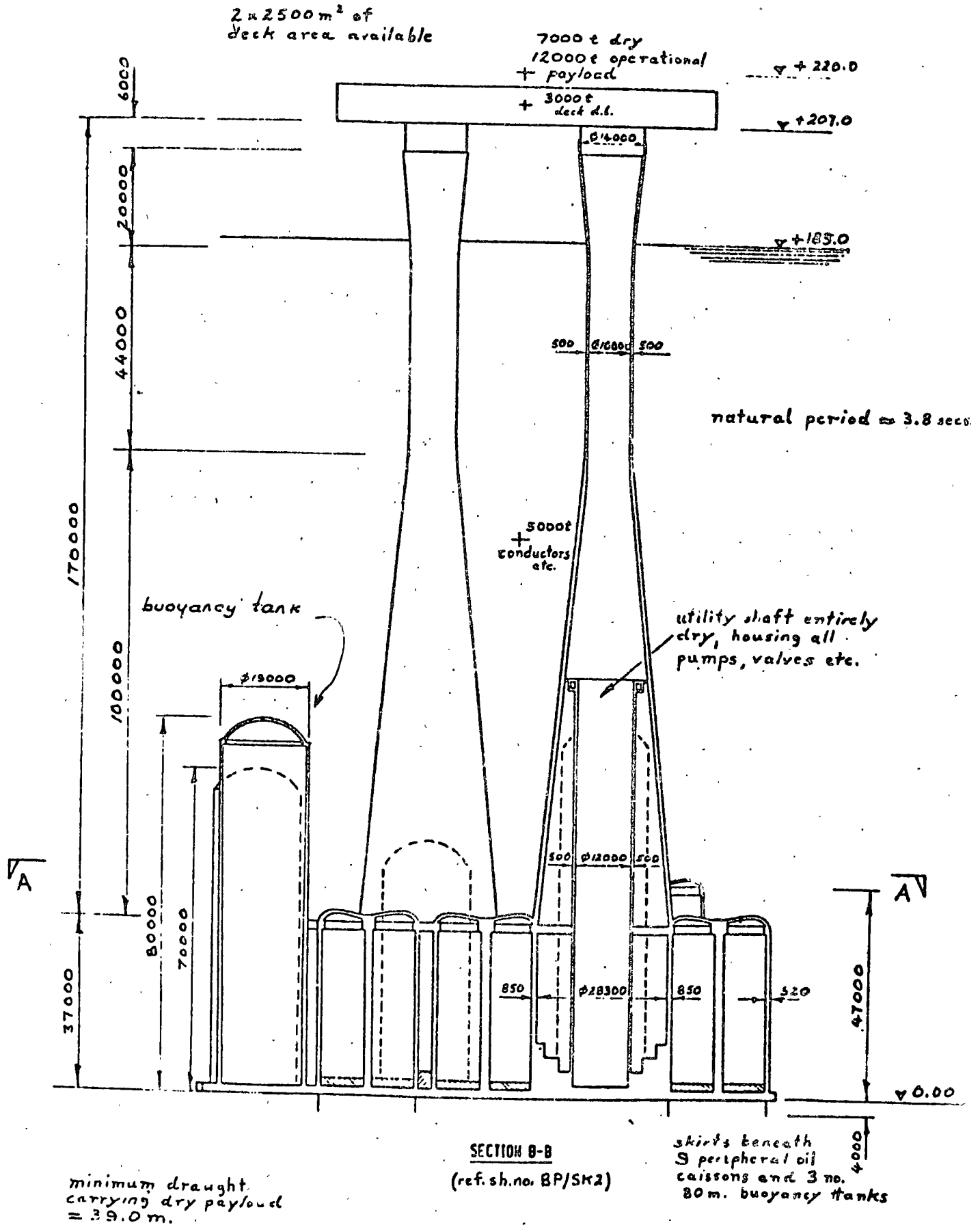
##### Introduction.

The following information identifies the salient features of the Seadeck design.

SHEET NO. BP/SK1	DATE 21.4.76
MADE BY P.J.	CHECKED

Seadeck BP Magnus

Sectional elevation on  $\phi$  of platform

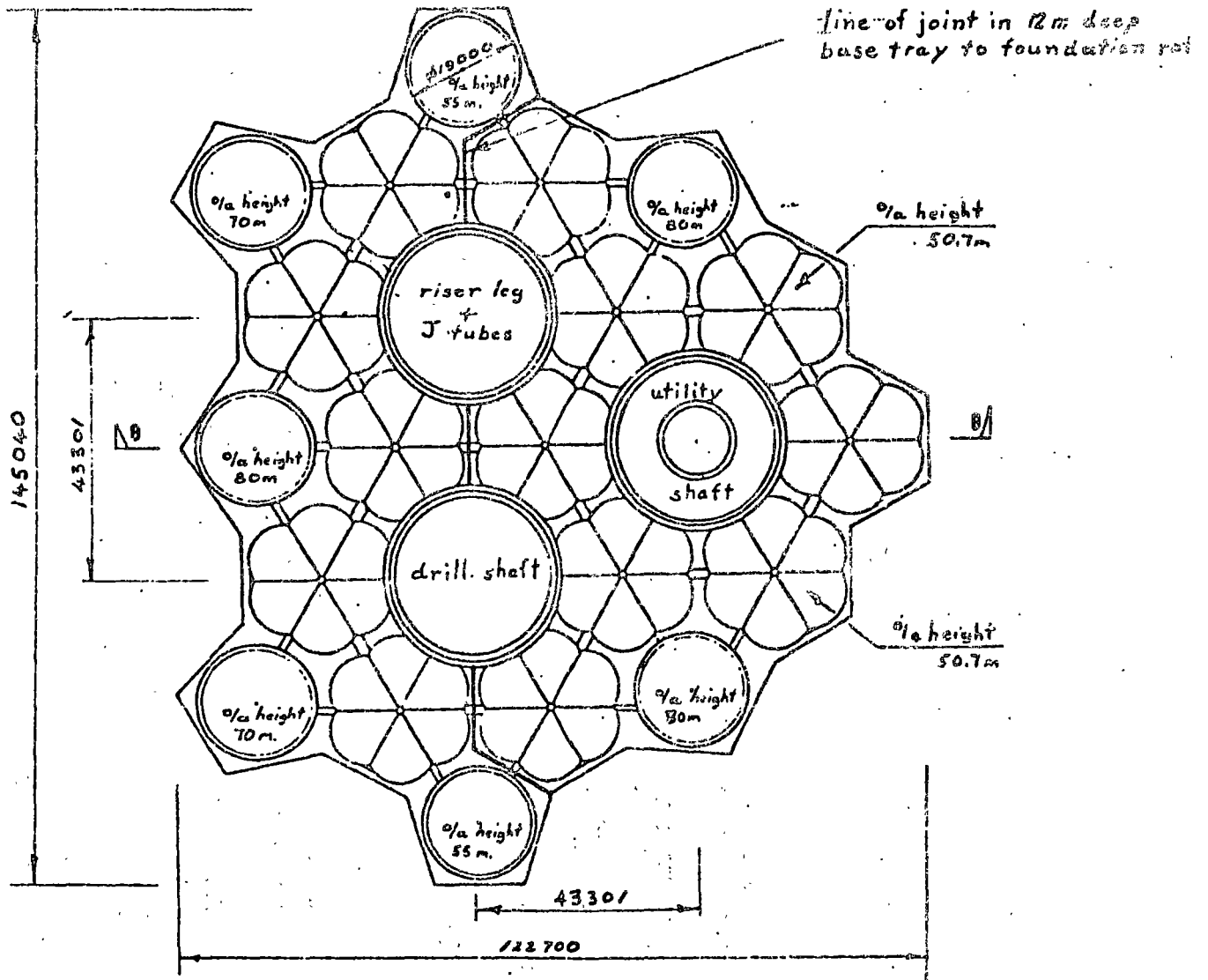


JOB NO. 7330	
SHEET NO. BP/K 2	DATE 21.4.76
MADE BY JJS	CHECKED

MAUNSELL

Seadeck BP Magnus

Plan view on foundation raft



PLAN ON A-A  
(ref. sh. no. BP/SK1)

The essence of this design is that the structure has been developed around the facilities available at Portavadie and around the water depths available in Loch Fyne and through the North Channel. It is a structure which can be completed in its entirety within the sheltered waters of Loch Fyne and can be towed, with a client's full dry payload on board through the shallow waters of the North Channel.

The displaced mass of the completed structure, including ballast, will be 435,000 tons for a structure designed for 165 m water depth. Of this total mass, the deck contributes 5.500 tons, the client's dry payload 20.000 tons and the systems within the structure, including the conductors, contribute 9.000 tons.

#### Wave loads and hydrostatic pressure loads.

For the first design calculations the wave loads were computed as static loads using the regular wave train approach, and the results have been increased by the appropriate amplification factor to allow for their dynamic nature.

For the final design however, an analysis will be considered whereby a spectral approach is used which, having determined the imposed wave forces, assesses more realistically the response of the structure under a random sea state, which can be extended to determine the consequential fatigue effects on both the steel deck and the concrete substructure.

With the structure submerged at its final location in 165 metres of water, there will be at that time approximately 25 metres of water ballast in the caissons and therefore a head imposed on the walls of the caissons of 140 metres. Under this condition and to comply with the DNV excessive short term loadings, with a material factor of 1.3 and a load factor of 1.3, the caisson wall thicknesses require to be 430 mms.

However, with an oversubmergence in Loch Fyne of 6 metres, required in order to place the deck and the modules on top, the long term loading requirements specified by DNV increase the material factor to 1.5 and the load factor to 1.4 and consequently the wall thicknesses of the caissons require to be increased from 430 to 550 mms. This oversubmergence in Loch Fyne to place modules on the deck could be in the order of 3 weeks and therefore is a critical load case.

#### Leg Design.

##### a) Serviceability limit state.

Under operational conditions the concrete stresses under the one month design wave i.e. height 18.5 metres and period 13.4 seconds, the following conditions apply :

Tension - 1 N/mm<sup>2</sup>

Compression - 0.33 x the cube strength with no allowance for ageing (as TNO).

##### b) Under extreme conditions i.e. the 100 year wave of 30 m height and period 17 seconds.

Tension - in accordance with CP 110 for crack sizes i.e. 6 N/mm<sup>2</sup>.

Compression - 0.5 x the cube strength with an allowance for ageing (as TNO, FIP, BS).

#### Ultimate Load Limit State.

0.44 x the cube strength in compression with an allowance for non linear stress strain distribution where appropriate with limitations of concrete strains of 0.0035 (as TNO, FIP, BS).



The seawater within the conductor legs will be heated up appreciably due to the hot oil rising through the conductors. Cooling of this water will be effected by circulatory flows created by thermal currents.

For a flow of oil of 20.000 barrels per day, we require 6 No. ports each 0.78 metres diameter to produce an induced seawater flow of 10.750 cubic metres per hour. This rate of flow assumes a temperature drop across the concrete legs of  $8^{\circ}$  C, with the seawater external to the legs at  $6^{\circ}$  C. The temperature of the oil within the conductors at the top of the leg therefore is  $14^{\circ}$  C.

#### Method of Ballasting.

Initially all caissons, buoyancy tanks and legs will be ballasted simultaneously until the structure reaches a draft of approximately 90 metres, when further ballasting will take place only in the towers. Each caisson, tower and buoyancy tank is separately serviced to permit the structure to be trimmed as required, and also to permit individual storage of oil within the caissons.

To enable submergence to take place, the seawater entry is provided at level 25 metres, but as the structure approaches seabed, this inlet is closed and a second inlet opened at 70 metres level in case there is any disturbance to the seabed and there is a drawing in of silt into the systems.

For deballasting the structure we have provided three ballast pumps which can discharge at the rate of 1.500 cubic metres per hour; thus, raising the structure from the fully submerged condition in Loch Fyne will take in the order of 160-180 hours.

Oil storage to the caissons is based on a balanced system between the incoming oil and the seawater already within the caissons. As oil is entered into the system, the necessary valves are opened and seawater is expelled up to the header tank through a self opening valve. The rate of inflow of oil must equal the outflow of water and as the flow increases, the ballast pumps lift the water up to the oily water separator for disposal.

#### Deck.

The deck structure comprises deep plate girders with flange plates stiffened with delta webs. The loads from both module and cellar deck are transferred by shear and bending to the web and collar plates around the leg section, which extends 6 m below the plate girders and passes through the cellar deck itself. All plate thicknesses in 50 D steel are, with minimum exceptions, not in excess of 38 mms and all welding details has been established with the agreement of the Welding Institute to minimise fatigue damage - recognised as the main parameter early in the design studies.

Discussion with oil companies have resulted in a plate girder depth of 9 m and a disposition of plant and equipment within the cellar deck and on the module deck of 17.500 tons dry pay load. The deck weight is 5.500 tons.

The deck, modules etc. will be fabricated from Portavadie and, depending on programme, can be offered up to the submerged structure in Loch Fyne either as deck alone, or deck plus cellar deck equipment or deck, cellar deck equipment plus all modules. An erection procedure has been defined which allows emplacement on the structure when it has been submerged to provide a leg freeboard of 11.50 m.

A preliminary fatigue analysis of the deck has been carried out.

Tow to location.

For the structures studied the draft of the completed platform with full dry payload is between 35,5 and 39,5 metres.

The minimum waterdepth throughout the tow is 45 metres (25 fathoms). In the Inistrahull section the shallows (i.e., less than 25 fathoms) will be buoyed.

Seven tugs are required to tow the structure ahead with two tugs astern for control.

Total IHP required is 125.000 allowing for a fleet effect factor of 1.2; equivalent to a tow line pull of 850 tons, which produces a heel of the structure of 0.16 degrees and increases the draft at the lead end by 0.2 metres.

During the tow through the Clyde and North Channel areas, a significant wave height of 3 m with a period of 6-12 seconds has been considered, together with a steady wind speed of 25 knots and a current of 2.5 knots.

In the Inistrahull section, waves of significant height 5 metres with periods of 6-12 seconds, and a steady wind speed of 40 knots together with a current of 1½ knots have been considered.

The dynamic effect of 20.000 tons dry payload on the legs of the structure in such sea conditions has also been considered. The moments induced at the base of the legs are approx. 50 % of the moments imposed by the environmental conditions on location. The deck acceleration is well below the 0.2 g "human limit" laid down by Noble Denton & Associates.

The model test results carried out at Wageningen, the Netherlands have been used to evaluate the performance of the structure in terms of pitch, heave and squat, to secure NDA's approval to the tow through the North Channel on 2.5 metre air cushion at a still water draft of 39.5 metres.

Damaged Stability.

The structure's damaged stability has been considered with the one leg fully flooded as a result of accidental impact by tugs, in association with a 50 knot wind. The structure under these conditions has a positive metacentric height and will develop a heel angle of  $12^{\circ}$ .

Submerging on location.

- 1) For the submergence of the structure itself, the maximum sea state in which this operation can commence can be in the range 3-4 metres significant height.
- 2) The submergence rate from 75 metres draft to 5 metres above seabed level, i.e. 160 metres draft, averages 6 metres per hour. At the draft of 160 metres the submerging will cease whilst the structure's position is checked, using transponders positioned previously by the client on the seabed, and the last 5 metres descent will be limited to a maximum descent rate of 6 metres per hour to minimise the risk of lateral excursion of the structure. The lateral force causing this excursion is related to the square of the sinking velocity and this puts emphasis on the need for good control of the rate of sinking. Similarly one must limit the velocity of the escaping water from below the platform to below the critical lifting velocity of the seabed sediments to reduce unnecessary scour. From the time the structure arrives on location in a semi submerged situation, the time for submergence to seabed and to effect full penetration of the skirts, is in the order of 18 hours.

Foundations.

The final foundation design must await the oil companies design specification and soil survey results. One of the design studies led to the following.

The skirt, 5.5 m deep, is part concrete, part steel to provide the necessary bending strength to resist the 100 year storm forces. In addition the skirt is designed to resist autumn storm forces (20 m waves) in the ungrouted condition and, further, it is capable of resisting the lateral excursion forces and those caused by the pitching motion of the structure during its submergence to the seabed at time of installation. Hence dowels projecting below the bottom of the skirt are not required in our design.

Model Tests on Seadeck Structure with Buoyancy Tanks.

Natural heave periods and metacentric heights at varying drafts are as follows :

<u>Draft</u>	<u>Period</u>	<u>Metacentric Height</u>
35 m	25 secs.	21 m
46 m	61 secs.	1.31 m
70 m	53 secs.	5.07 m
90 m	109 secs.	1.05 m
146 m	197 secs.	3.69 m

Natural pitch period at varying drafts are

35 m	31 secs.
46 m	128 secs.
70 m	59 secs.
90 m	112 secs.
146 m	76 secs.

The model tests were carried out in

- a) Calm water
- b) 3 m significant waves at 11.5 seconds significant period.
- c) 5.5 m significant waves at 11.5 seconds significant period.

All the natural periods are well above the longest wave period in both wave spectra which explains the quiet behaviour of the structure during all tests.

Compared with the model without the buoyancy tanks, the natural period at small drafts is increased by 9 seconds caused by the larger mass moment of inertia.

A film of the tests has been taken at 200 frames and at 24 frames per second, the model motion therefore being 1.25 times the prototype and the model speed 9.6 times the prototype.

Skirts are provided around the conductors to prevent loss of ground during conductor installation.

Cathodic protection is provided to the skirt steelwork.

The stability of the structure is established by the development of good contact between the base of the platform and the seabed. As it is not possible to prepare the site adequately to ensure this prior to the platform emplacement the design relies on the penetration of the peripheral skirt into the seabed with subsequent grouting of any cavities bounded by base, seabed and skirt. The skirt transfers from base slab level the shear forces imposed by the environment into the soil, to such a depth as is necessary to provide an adequate margin of safety; the grout distributes these forces over the entire base area, prevents local shear failure of the soil adjacent to the skirts and reduces the possibility of uneven settlement due to the rocking of the structure, inducing skirt penetration.

The maximum horizontal force imposed in storm conditions is 60.000 tons, the factor of safety on skirt penetration is 1.20 and a factor of safety of 2 on the soil shear strength caters for strength reduction arising from the cyclic loading of the clay strata.

The dynamic submergence tests were carried out at Wageningen at speeds of descent varying between 0.3 to 3.7 cm per second, whereas we shall be in practice descending the last 5 metres at a rate of 6 metres per hour or 0.166 cm per second. The tests were therefore carried out between 2 and 22 times faster than carried out on the prototype. The lateral excursions in the model tests were minimal.

#### 15.: FINAL CONCLUSIONS.

The development of concrete gravity structures for off-shore platforms can be seen as a everlasting battle between steel and concrete, as is also the case for bridges.

As there are also a few hybrid platform designs, may be one could better speak of a battle between piled structures and gravity structures.

The design, construction and installation of such a gravity structure for the NorthSea oil fields cover a wide field of engineering know how of a multi-disciplinary nature.

The designer as well as the builder have to solve many problems and to find the best solution for these problems, while a full understanding of the problems of other disciplines and a close cooperation between all partners of the team is required.

By the end of this year (1978) 13 concrete gravity platforms will have been installed in the North Sea in waterdepths ranging from 100 to 150 meters.

From the experience gained in fabrication and installation in the North Sea the following conclusions can be drawn.

- 1) The next generation of gravity structures should preferably be transported fully equipped with drilling rig and production facilities installed. The quantity of payload, which can be carried already during the float-out will become a governing factor.
- 2) The real costs of the concrete platforms have risen to an amount considerably higher than the original estimates, especially because of the tremendous effort in many man-years to gain the required knowledge in off-shore engineering.

A period of reflection has begun, which can be used for further systematical studies of the main problems and evaluation of the collected observations of the already installed platforms.

A few of the problems are the following :

TECHNICAL :

- reinforced concrete subjected to shear under combined moment and axial force.
- fatigue of reinforced concrete and steel under random cyclic loads.
- thermal strains in concrete due to hydration heat and produced hot oil.
- foundation response to cyclic loading.

ORGANISATION :

- mobilisation of a large work force of many skills congested on a small area.
- necessity for off-site prefabrication of large segments.
- necessity of prefabrication of piping systems.



- 3) In the meantime the steel engineers have found new solutions, i.e. multi-part jackets.

For locations in great waterdepths the platforms are made of multi-parts jackets. The parts of such a jacket can be joined first in horizontal position in sheltered deepwater and then as a whole structure placed on the base section will be placed first and with piles connected to the subsoil and then the upper parts stacked on top. The two examples are :

The Exxon Hondo platform, off-shore California in 265 m waterdepth and the Shell platform for the Cognac field in the Gulf of Mexico in 300 m waterdepth.

See next page.

- 4) At the moment it is difficult to say what type the next generation of oil platforms will be : a gravity or a piled one. It will depend from the developments in the required technology and the involved costs.

Anyhow the design engineer must follow all the promising evolutionary developments in every field of civil engineering.

A few of them will be mentioned in the following.

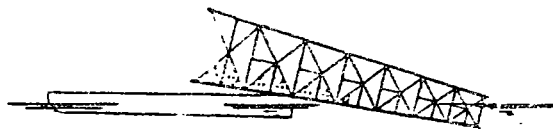
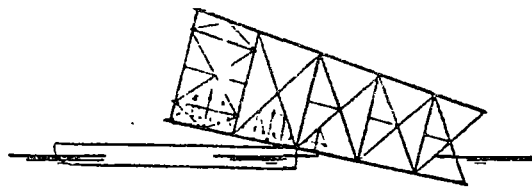
- a) The use of temporary buoyancy tanks of steel or concrete, to provide extra flotation and stability during the construction and instalation stages.

- b) Improvement of the used materials :

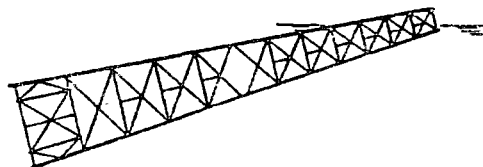
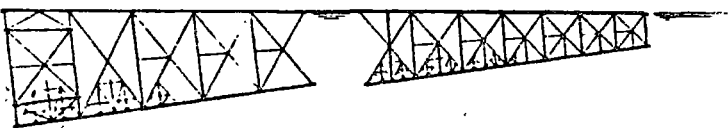
- high strength concrete,
- lightweight concrete of a high strength;  
use of light weight concrete in the top of the structure will lead to a lower centre of gravity of the structure and hence a greater floating stability.
- increase of tensile strength of concrete.

- c) study of ice pressures and measures to reduce them, e.g. special conical shapes.

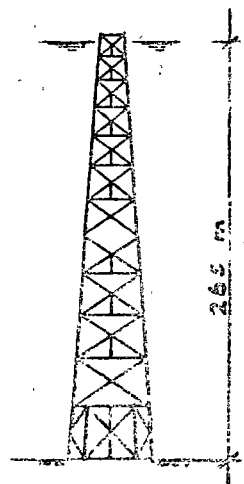
- d) development of floating structures, which do not have earth quake and soil problems; they are already in use for power plants, process plants for LPG and



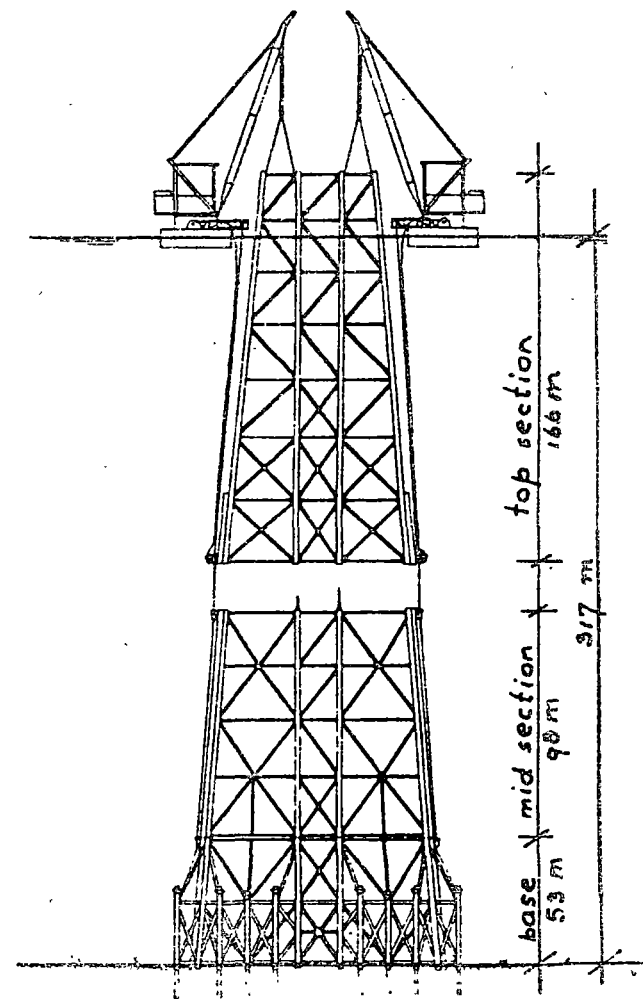
MULTI-PARTS JACKETS



HORIZONTALLY CONNECTED  
SECTIONALIZED JACKET  
EXXON HONDO PLATFORM



VERTICALLY CONNECTED  
SECTIONALIZED JACKET  
SHELL'S COGNAC PLATFORM



Last remark : creativity and innovation are essential.

Final remarks.

I hope that by this lecture you have got a better insight in the design aspects of the huge concrete oil platforms with all the involved problems.

May be not all of you will be in a position to be active in the design of these huge structures. Fortunately I can assure you that all the techniques which have now been developed for these off-shore structures will also be used in the design of smaller off-shore structures in harbour facilities in the open sea and that also in that field there are great possibilities for application.

16.: BIBLIOGRAPHY.

The articles about the concrete gravity-type oil platforms in the North Sea and the related problems are so numerous that in the following bibliography only a few will be mentioned which give more general and basic information.

GENERAL AND ALL SUBJECTS.

- 1.: Proceedings of the annually  
"Offshore Technology Conference"  
at Houston, Texas, U.S.A.
- 2.: Proceedings of the Conference on the behaviour of Off-shore  
Structures, Boss '76, Trondheim, Norway, 1976  
The Norwegian Institute of Technology.
- 3.: "Off-shore Structures",  
Proceedings of the Conference held in London,  
7-8 October 1974,  
The Institution of Civil Engineers, London, 1974.
- 4.: "Design and Construction of Offshore Structures",  
Proceedings of the Conference held in London,  
27-28 October 1976,  
The Institution of Civil Engineers, London, 1976.

SOIL.

- 1.: Offshore Soil Mechanics,  
A course of lectures and practical exercises held at  
Cambridge University, 29 March - 2 April 1976,  
edited by P. George and D. Wood.

CONCRETE AND STEEL.

- 1.: "The Inspection, maintenance and repair of concrete off-shore structures" submitted to the  
Marine Materials Panel  
Ship and Marine Technology Requirements Board  
Department of Industry  
by R.T.L. Allen and J. Gregory - Cullen  
Advisory Division  
Cement and Concrete Association  
52 Grovener Gardens  
London SW1W 8AQ, 23 Sept. 1974.
  
- 2.: "Concrete in the Oceans"  
Report No.1 and No. 2 submitted to the ship and Marine  
Technology Requirements Board, Department of Industry  
by Dr. G. Somerville and Dr. H.P.J. Taylor.  
  
Design and Research Department  
Research and Development Division  
Cement and Concrete Association  
Wexham Springs.  
Slough SL 3 6 PL, 6 Aug. 1974.
  
- 3.: Proceedings of the FIP Symposium  
Concrete Sea Structures  
Tbilisi, USSR, September 1972.
  
- 4.: Considerations for Design of Concrete Structures  
Subjected to Fatigue Loading,  
Reported by ACI Committee 215,  
ACI Journal, March 1974.

APPENDICES.

In the following Appendices a few special subjects in connection with the oil platforms will be dealt with more fully. The reader, however, must bear in mind that these lecture notes can only give the general outlines.

The Appendices are dealing with the following subjects :

- No. 1 : More about calculations and foundation problems.
- No. 2 : Hydraulic aspects of maritime structures
- No. 3 : The design of the steel deck structure for the SEADECK gravity production platform.
- No. 4 : Steel gravity platform for Loango oil field (Offshore Congo Brazzaville).
- No. 5 : The RDL hybrid gravity platform.

A P P E N D I X No. 1

MORE ABOUT CALCULATIONS AND FOUNDATION PROBLEMS.

The main subjects to be studied in the foundation design of a concrete gravity platform are the following :

1. Installation phase of platform.
2. Contact pressures between structure and seabed.
3. Stability against sliding and overturning under static loading.
4. Settlements.
5. Displacements under static loading.
6. Dynamic analysis.
7. Effects on cyclic loading on materials and soil.
8. Required safety factors.

In the following considerations a "typical" gravity structure will be used. Its overall dimensions and most important loads have been given. Ref. Fig. 1.

1.: INSTALLATION PHASE OF PLATFORM.

During the installation of a platform the following parts of same will come subsequently into contact with the seabottom :

- a) the dowels
- b) the skirts
- c) the bottom of the concrete caisson.

The dowels, which extend a few metres below the tip of the skirts have to be designed to prevent horizontal movement of the platform under the most severe weather conditions expected during the installation.

As already mentioned the purpose of the skirts is to create a deeper foundation level, especially when the upper soil layers consist of soft to medium stiff clay.

This soft material confined within the skirts can be left out of the stability considerations provided the skirts are a fixed part of the whole structure and will be designed to withstand the forces acting on them.

The skirts will penetrate into the seabottom by ballasting the platform with water.

The resistance consists of the tip resistance and the wall friction.

While in the stability calculations the lowest values of the soil strength has be taken into account, for the skirts however the most unfavourable assumption is the highest value found in the soil investigations.

When the bottom slab of the platform comes in contact with the seabed very high local pressures on the slab can occur, especially in dense sand. It is difficult to map the seabed with sufficient accuracy and therefore assumptions with respect to its unevenness have to be made.



As is the case for all concrete caissons which have to be installed on their foundation bed they can bear either on their centre part or on both their ends. Ref. Fig. 2.

The upper limit of the contact pressure is then the vertical stress corresponding to the local bearing capacity failure in the soil when the ridges are levelled out.

Recommended is a design pressure of not less than 200 tons/m<sup>2</sup>.

After placing the space between the slab and the seabed will be grouted to get a more uniform pressure distribution.

The platforms have been equipped with instrumentation in order to check that no overstressing will take place before grouting.

## 2.: CONTACT PRESSURE BETWEEN STRUCTURE AND SEABED.

It is essential that under the maximum overturning moment there is always a minimum contact pressure. If the joint should open water will be sucked in and squeezed out, which can cause erosion and possible catastrophic consequences for the structure. Therefore pockets of free water under the structure should be avoided in any case. Ref. Fig. 3.

## 3.: STABILITY AGAINST SLIDING AND OVERTURNING UNDER STATIC LOADING.

The stability calculations are different for sand and clay. In most cases, however, the subsoil consists of varying layers of sand and clay, reason why the calculation can become very complicated.

The only way then is to make many calculations under different assumptions.

- Sliding can take place at the seabottom, but also in a weak layer at a lower level in the subsoil.
- In varying subsoil layers it will be difficult to establish the most realistic slipline.

Horizontal sliding.

- 1) In sand; Ref. Fig. 4.

The tangent of the mobilized angle of friction is :

$$\operatorname{tg}\delta = \frac{P_H}{P_V}$$

The minimum angle of friction in the sand is equal to  $\phi$  as because of the skirts and the grouting of the pockets between base and seabottom the concrete structure proper does not glide over the seabottom.

Safety factor :  $SF = \operatorname{tg}\phi / \operatorname{tg}\delta$  (at least 1.50).

- 2) In clay; Ref. Fig. 5.

The resultant horizontal force will be taken by the available shear strength in the clay.

$$\text{Safety factor } SF = \frac{A \cdot \tau_f}{P_H}$$

where : A : area of base

$\tau_f$  : undrained shear strength of clay.

Overturning.

The stability against overturning (overstressing of the foundation soil by the overturning moment caused by the vertical and horizontal loads) can be determined both for sand and clay with three methods :

- 1) bearing capacity formulae,
- 2) sliding along sliplines,
- 3) finite element analysis.

Bearing capacity formulae.

The most frequently used formulae are those developed by Meyerhof (1963) and Brinch Hansen (1970). As for every formula the user must be aware of the assumptions they are based on. In sand drained conditions have been assumed. This will not be always the case; e.g. when the load is applied in a few seconds on a large structure founded on fine sand.

Most of the time the resultant loading is excentric. The bearing capacity formulae assume an effective foundation area to be centrally loaded. Ref. Fig. 6.

The Norwegian Geotechnical Institute is on account of own investigations and model tests in favour of the formula of Brinch Hansen.

Sand (Overturning); Ref. Fig. 7.

In the case of a shallow foundation resting on a horizontal sea floor, the bearing capacity formula given by Brinch Hansen reads :

$$P_V/BL = \frac{1}{2} \gamma' B N_\gamma S_\gamma i_\gamma$$

$P_V$  = Submerged weight

$B$  = Effective foundation width

$L$  = Effective foundation length

$\gamma'$  = Submerged unit weight of the sand

$N_\gamma$  = Bearing capacity factor,  $f(\phi)$

$S_\gamma$  = Correction factor for shape

$i_\gamma$  = Correction factor for inclined load.

The correction factors  $S_\gamma$  and  $i_\gamma$  can be expressed as :

$$S_\gamma = 1,0 - 0,4 i_\gamma B/L$$

$$i_\gamma = (1,0 - 0,7 P_H/P_V)^5$$

Clay (overturning); Ref. Fig. 8.

As for sand, the mobilized soil strength can be calculated by means of bearing capacity theories. The formula suggested by Brinch Hansen is as follows :

$$P_V/BL = c N_C (1 + s_C - i_C)$$

$P_V$  = submerged weight

$B$  = Effective foundation width

$L$  = Effective foundation length

$c$  = Mobilized shear strength of the clay

$N_C$  = Bearing capacity factor ( $N_C = 5.14$ )

$s_C$  = Correction factor for shape

$i_C$  = Correction factor for inclined load.

$$i_C = 0.5 - 0.5 \left( 1 - \frac{P_H}{A.C} \right), \quad s_C = 0.2 (1 - 2 i_C) B/L$$

Since  $c$  enters in the correction factor for inclined load, it is most convenient to solve the equation by a trial and error procedure.

From calculations there can be concluded that the minimum soil properties for a concrete gravity structure are :

for sand :  $\phi = 30^\circ$

for clay :  $c = 15 \text{ tons/m}^2$ .

An angle of internal friction of  $30^\circ$  will be found in most medium to dense granular soils. However, a required undrained shear strength of the clay equal to 15 tons/m<sup>2</sup> is found only in very stiff to hard clays, which means that the founding of a gravity structure on soft to medium clay is out of the question !

Sliding along sliplines.

By trial and error the most unfavourable slipline has to be found. When this is not the case the result will be on the unsafe side.

Further the mode of failure must be kinematically correct.

The slipline method has great advantages when compared with the bearing capacity method as varying properties of sand and clay layers can be taken into account, while it is difficult to determine the average shear strength to be substituted in a bearing capacity formula.

In sandlayers drained or partly undrained conditions are to be assumed depending from the grain size distribution and duration of loading; in clay layers always the undrained conditions.

In addition to the slipline analysis (general shear failure) local overstressing of the soil must be checked (local shear failure). This danger will be in the first instant at the edge of the base structure.

A finite element analysis can also be used to evaluate the stability as it indicates the loads by which various elements begin to yield. Ref. Fig. 9.

It is worthwhile to mention that the methods of analysing the stability which have been dealt with in the foregoing will give safety factors ranging from 1.4 to 2.4. The best procedure is that the design engineer uses the Brinch Hansen bearing capacity formula and the slipline method for the determination of the safety factor and the finite element analysis to get an insight in the stress conditions in the subsoil.

#### 4.: SETTLEMENTS.

Compression and shear deformation after the installation of the structure will cause settlements, which can be calculated by the elasticity theory. In dense sand and overconsolidated clay these initial settlements will stop soon after the application of the loads. Ref. Fig. 10.

However, the structures in the North Sea are during storms subjected to wave action with their repeated variations in horizontal and vertical loads, which cause long term settlements.

The magnitude of these settlements are difficult to estimate. Experience from structures on land with a great variation in live loads indicates that they might be of the same magnitude of the initial settlements.

Calculations made for a gravity structure founded on sand and clay with varying properties showed that the settlements in soft, normally consolidated clay layers will be excessive (8 to 10 metres) reason why founding on such layers is out of the question.

#### 5.: DISPLACEMENTS.

The maximum displacements of the structure (during the maximum design wave, the 100 year wave) must be calculated in order to judge the consequences for the structure, the conductors and the risers. They can be conveniently calculated with the finite element method. As usual some simplifications have to be made with respect to the geometry and the soil properties.

Further assumptions are :

- plane strain conditions
- soil to be a perfect elastic material,  
modulus of elasticity  $E = 5000 \text{ tons/m}^2$ ,  
Poisson's ratio  $\mu = 0.5$ .

Ref. Fig. 11.

## 6.: DYNAMIC ANALYSIS.

During a storm period the structure will be subjected to several thousands of reversed load applications of varying magnitude. This fact was a new problem indeed as onshore only in earthquake regions the structures are subjected to such loads and then only during a short period.

Two important questions must be answered :

- a) what is the dynamic amplification factor ?
- b) what will happen with the strength of the soil ?

In a dynamic analysis the dynamic response of the structure is determined in interaction with the soil foundation, particularly for wave frequencies close to the first natural frequency. Ref. Fig. 12.

Owing to the modern computer techniques the engineers are capable to make the necessary very complicated calculations of a concrete foundation structure. When the structure has been transformed into its computer model then it is easy to see the resemblance with the most simple structure : the single mass-spring system. The computer model consists of a cantilever of varying bending stiffness  $EI$  and an infinite axial stiffness  $EA$ . The mass of the structure together with that of the surrounding water which oscillates with the structure is lumped into a number of concentrated masses.

The cantilever is elastically damped at the base and the movements there (horizontal displacement and rotation) are subjected to viscous damping. The rotational and horizontal spring factor  $K_{\theta}$  and  $K_x$  can be approximately determined from analytical solutions for the elastic halfspace. They will also give the corresponding viscous damping coefficients. In addition damping resulting from internal friction in the subsoil may be considered.

The horizontal wave force may be regarded as a harmonic load with the amplitude  $P_0$ , which is dependent from the circular frequency. For structures with several shafts the force amplitude will be influenced by the time lag between the peak forces on the different shafts. The problem is even more complicated as also the wave direction will determine the force amplitude and rotational oscillation around the vertical axis of the structure will occur.

From the computer calculation the load amplification factors can be determined. They have a peak value at the system's damped natural frequency.

In general there can be said that for concrete platforms the peak values of the amplification factors will vary as follows (which is important to know in order to influence them) :

- they decrease with increasing stiffness of the concrete structure,
- they decrease with increasing frictional damping in the subsoil,
- they increase with increasing shear modulus of the soil because of the reduced importance of the geometrical damping.



About the natural frequencies, where the peak values occur there can be said the following :

- they are practically independent from the damping,
- they increase with increasing stiffness of the soil and/or the concrete structure,
- they decrease with increasing masses of the structure and with rising of the centre of gravity of same.

In general the response parameters will have their maximum amplitudes at frequencies very close to the first (lowest) natural frequency of the structure-soil system.

## 7.: EFFECTS OF CYCLIC LOADING ON MATERIALS AND SOIL.

### Soil strength.

It is well known that a cyclic shear stress caused by cyclic loading, e.g. a great number of waves, will eventually change the shear strength of a soil. This effect will be considered first for sand.

Every engineer knows the following example. A railway embankment of saturated loosely packed fine sand can slide unexpectedly when loads are applied suddenly by a passing train. The same can be caused by an earthquake. When the loads should be applied gradually, then there will be sufficient time for the water in the pores to be pressed out and for the sand grains to achieve a denser packing and carry the loads safely.

In the case of a storm consisting of a great number of waves with their load cycles of varying magnitude it can be understood that every, in a few seconds applied single wave load will cause a very small local disturbance in the packing of the sand and that the repeated application of waveloads will eventually build up a complete disturbance in the whole sand mass, which loses then completely its strength or "liquefies".

In connection with earthquake studies in U.S.A. and Japan extensive research has been carried out, the results of which can be used now for the evaluation of the effects of cyclic loading on a gravity structure.

The best method is to imitate the loading exerted by a storm with the 100 year wave in the laboratory.

First the distribution on different wave heights during the storm can be determined (Raleigh distribution). Normally the number of waves of various heights during the six peak-hours will be considered.

A wave of a certain height will cause a certain shear stress (stress level) in the soil. Many tests have to be done on many soil samples in order to learn the effect of cyclic loading at various stress levels.

In sand the effect of cyclic shear is studied by measuring the excess porewater pressure built up. If the total stresses are kept constant and the porewater pressure increases the effective stress and thus the strength must decrease. Failure will take place when the effective stress have been reduced so that the strength has become equal to the applied cyclic shear stress.

A typical test result from a dense sand sample which has been subjected to cyclic shear stresses in a shear apparatus is shown in Fig. 13.

There can be concluded that the porewater pressure increases practically linearly with the number of cycles until failure occurs. The strains are small and elastic during nearly the whole testperiod.

From such a test the parameter  $\beta$  can be defined which expresses the amount of build up porewater pressure per load cycle :

$$\beta = \frac{\Delta u}{\delta_c} \cdot \frac{1}{N_L} \cdot 100 \%$$

$\Delta u$  : excess porewater pressure at moment of liquefaction.

$\delta_c$  : consolidation stress

$N_L$  : number of load cycles at moment of liquefaction.

By running a number of cyclic shear tests with a different stress level  $\tau_H/\sigma_c$  the porewater pressure build up per cycle,  $\beta$ , can be obtained for different stress levels.

From these values of  $\beta$  and the storm data the total increase in porewater pressure during the storm can be determined.

See the table in Fig. 14.

The real conditions of the gravity structure must be imitated as much as possible, that means that the stress history of the sand has to be forecasted :

installation during the summerperiod and a few small storms before the 100 year storm.

This can be effected by running several hundreds of cycles at a low stress level. e.g.  $\tau_H/\sigma_c = 0.04$  and letting the sand drain before the real test is run.

It is useful to know that the soil will densify under the storms and that the effect of cyclic loading will decrease with the time and the safety factor will improve. Further a certain drainage during the storm period will take place.

#### Effect of cyclic loading on clay.

In this case the strain of the clay is the basic parameter. Before the clay samples are tested in the Laboratory they are first consolidated to the actual field stress, that is the soil pressure due to weight of the effective overburden plus the submerged weight of the structure.

The samples are subjected to cyclic horizontal shear stresses at a certain stress level and the strain is recorded as a function of the number of cycles.

In the diagram of Fig. 15 the lines of a certain constant strain have been indicated for different stress levels and number of cycles. A stress level is given by the ratio  $\tau_{\text{cyclic}}/\tau_{\text{failure}}$ , in which  $\tau_{\text{cyclic}}$  represents the cyclic horizontal shear stress and  $\tau_{\text{failure}}$  the undrained shear strength.

In the same diagram the total strain accumulated during a storm can be determined from the storm data (wave height distribution) and the shear stresses corresponding with the waveheights.

The last step is to find the corresponding reduction in shear strength for the above calculated total strain accumulated during the storm. A typical result of such a laboratory test is given in Fig. 16. In the final stability calculation this reduction in the shear strength of the clay caused by cyclic loading should be taken into account.

The reader should not forget that the knowledge of the effects of cyclic loading on sand and clay is based on studies performed during the last ten years and that still much research work has to be carried out.

8.: REQUIRED SAFETY FACTORS.

The determination of the safety factors for offshore structures is a matter of great importance.

They should depend on :

- 1) the scope of the soil investigations,
- 2) to what degree of accuracy the environmental loads have been determined,
- 3) to what degree of accuracy the calculations can be carried out,
- 4) available experience,
- 5) matters of economy and risks.

The choice of the design soil properties from the laboratory tests is very much subjected to the judgement of the soil engineer. A somewhat conservative approach is usual. Anyhow it must be avoided that too much safety has been already included in the design soil properties.

The required safety factors have been given in the already mentioned Rules and Recommendations, issued by the authorizing governmental and scientific Institutes.

Main subjects in stability calculations  
of a gravity type oil platform.

1. Installation phase.
2. Contact pressures between structure and seabed.
3. Stability against sliding and overturning under static loadings.
4. Settlements.
5. Displacements under static loadings.
6. Dynamic analysis.
7. Effects of cyclic loading on soil and materials.
8. Required safety factors.

Fig. 1: A typical structure with  
its typical resultant loads

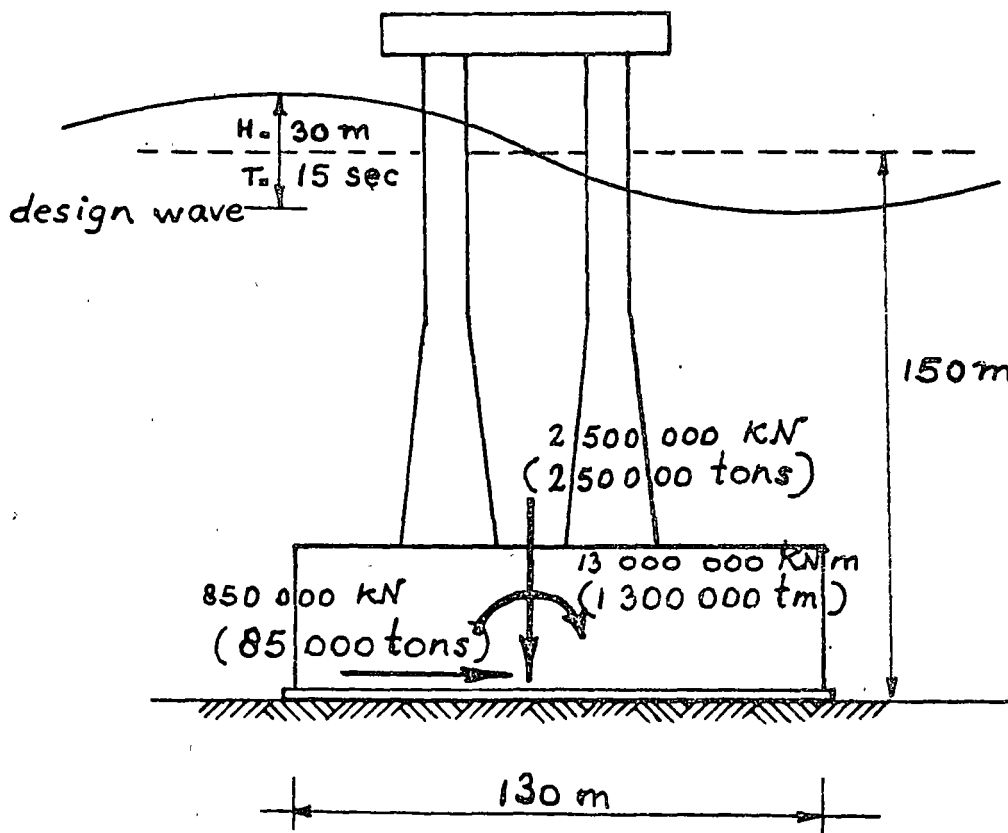
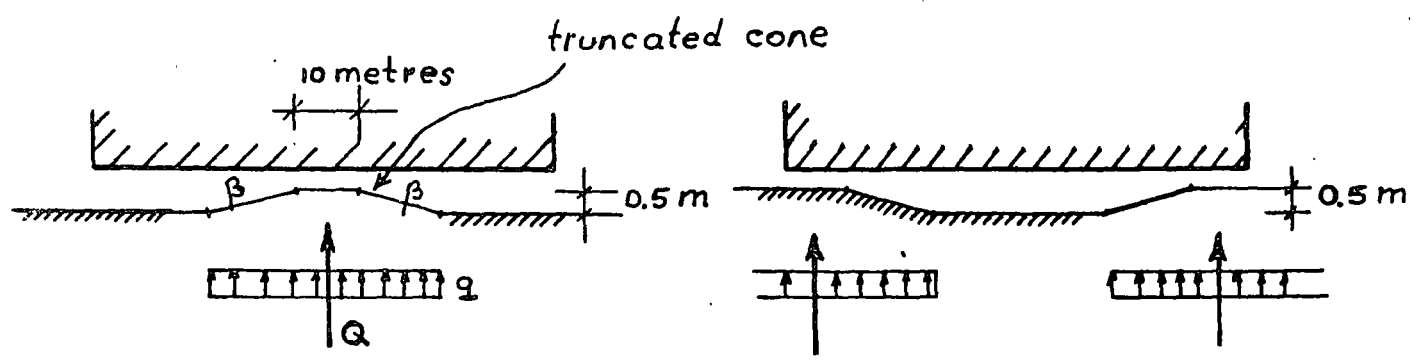


Fig. 2: Contact pressure on uneven seabottom.



$$Q = \frac{E}{1-\mu^2} \left( D_0 + \frac{\Delta H}{\beta} \right) \Delta H$$

soil:  $E = 3000 \text{ tons/m}^2$ ,  $\mu = 0.5$ ,

cone:  $\beta = 1/5$ ,  $\Delta H = 0.5 \text{ m}$   
 top diameter: 10 m

result:  $Q = 29000 \text{ tons}$ ,  $q = 140 \text{ tons/m}^2$ .

Fig. 3: Contact pressure between structure and seabed:

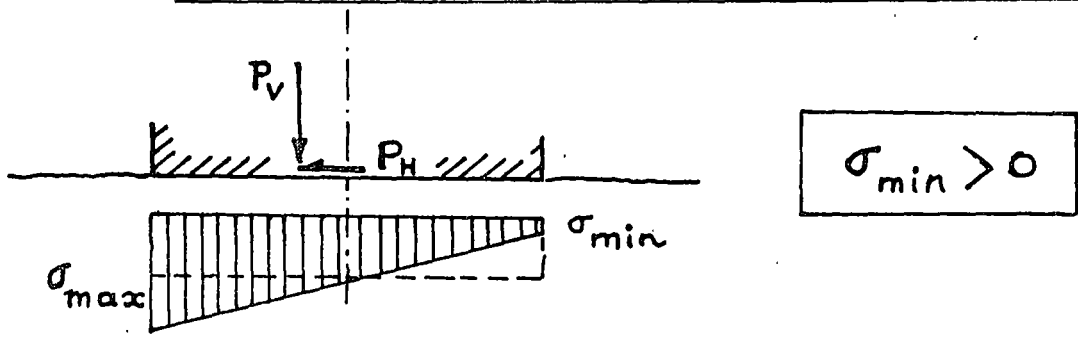
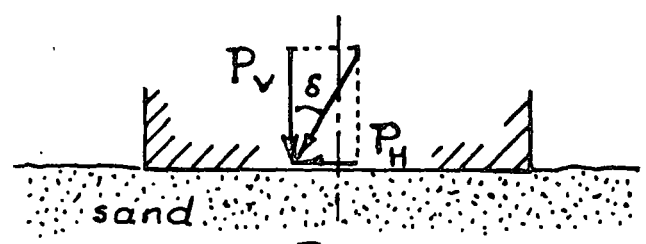


Fig. 4 and 5: Horizontal sliding.

In sand:

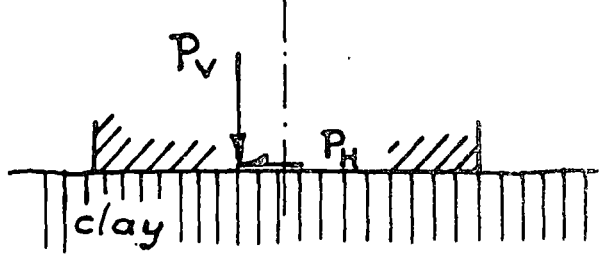


$$\text{tg } \delta = \frac{P_H}{P_V}$$

safety factor:

$$\text{s.f.} = \frac{\text{tg } \varphi}{\text{tg } \delta}$$

In clay:



safety factor:

$$\text{s.f.} = \frac{A \cdot \tau_f}{P_H}$$

Bearing capacity formulae

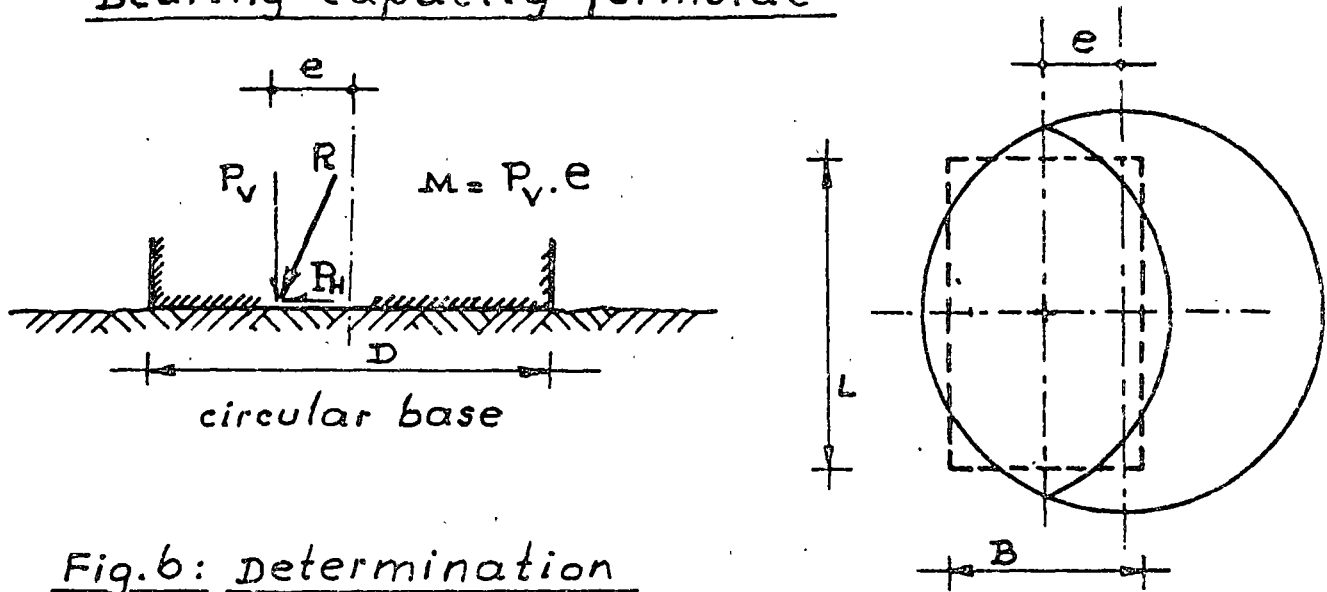


Fig. 6: Determination of effective foundation area.

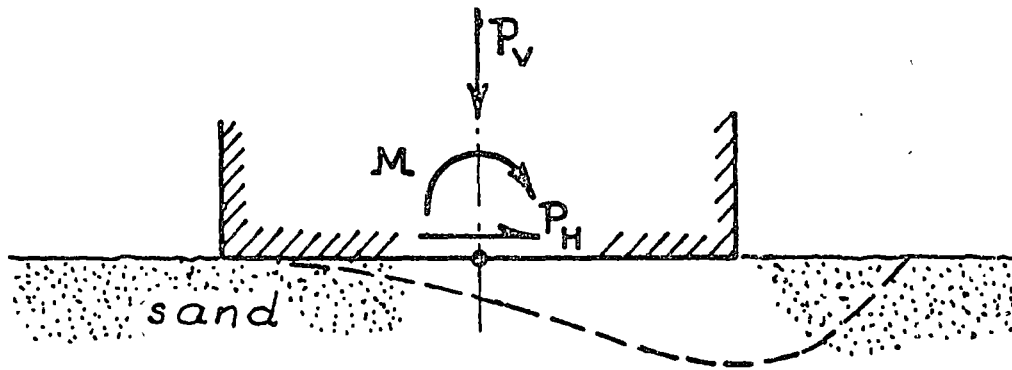


Fig. 7: Stability calculation based on critical slipline (for sand).

Bearing capacity formula of Brinch Hansen:

$$\underline{\underline{\frac{P_V}{BL} = \frac{1}{2} \gamma' B N_\gamma S_\gamma i_\gamma}}$$

$$\begin{cases} S_\gamma = 1.0 - 0.4 i_\gamma \frac{B}{L} \\ i_\gamma = \left(1.0 - 0.7 \frac{P_H}{P_V}\right)^5 \end{cases}$$

From the above the mobilised  $N_\gamma$  and thus  $\phi$  of the sand can be calculated. After introducing a safety factor the required  $\phi$  of the sand follows.



## Bearing capacity formulae

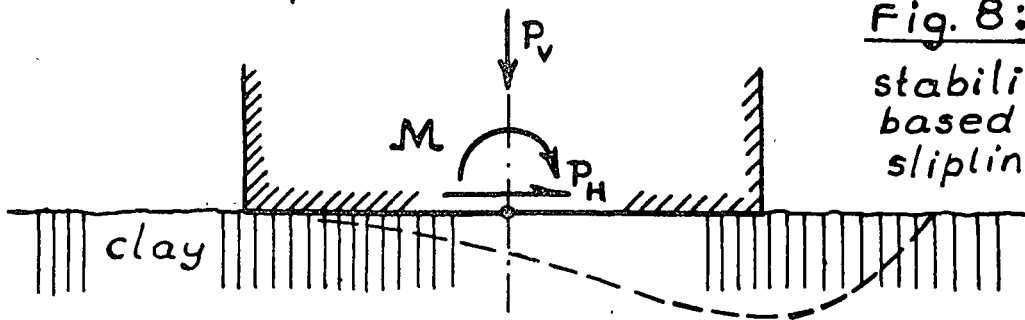


Fig. 8:  
stability calculation  
based on critical  
slipline (for clay)

Bearing capacity formula of Brinch Hansen:

for clay: 
$$\underline{P_V / BL = c N_c (1 + S_c - i_c)}$$

$$\begin{cases} N_c = \pi + 2 = 5.14 \\ S_c = 0.2 (1 - 2 i_c) \frac{B}{L} \\ i_c = 0.5 - 0.5 \sqrt{1 - \frac{P_H}{A c}} \end{cases}$$

By trial and error the mobilised  $c$  can be calculated and then after introducing a safety factor the required  $c$  follows.

Fig. 9:

Finite element  
model

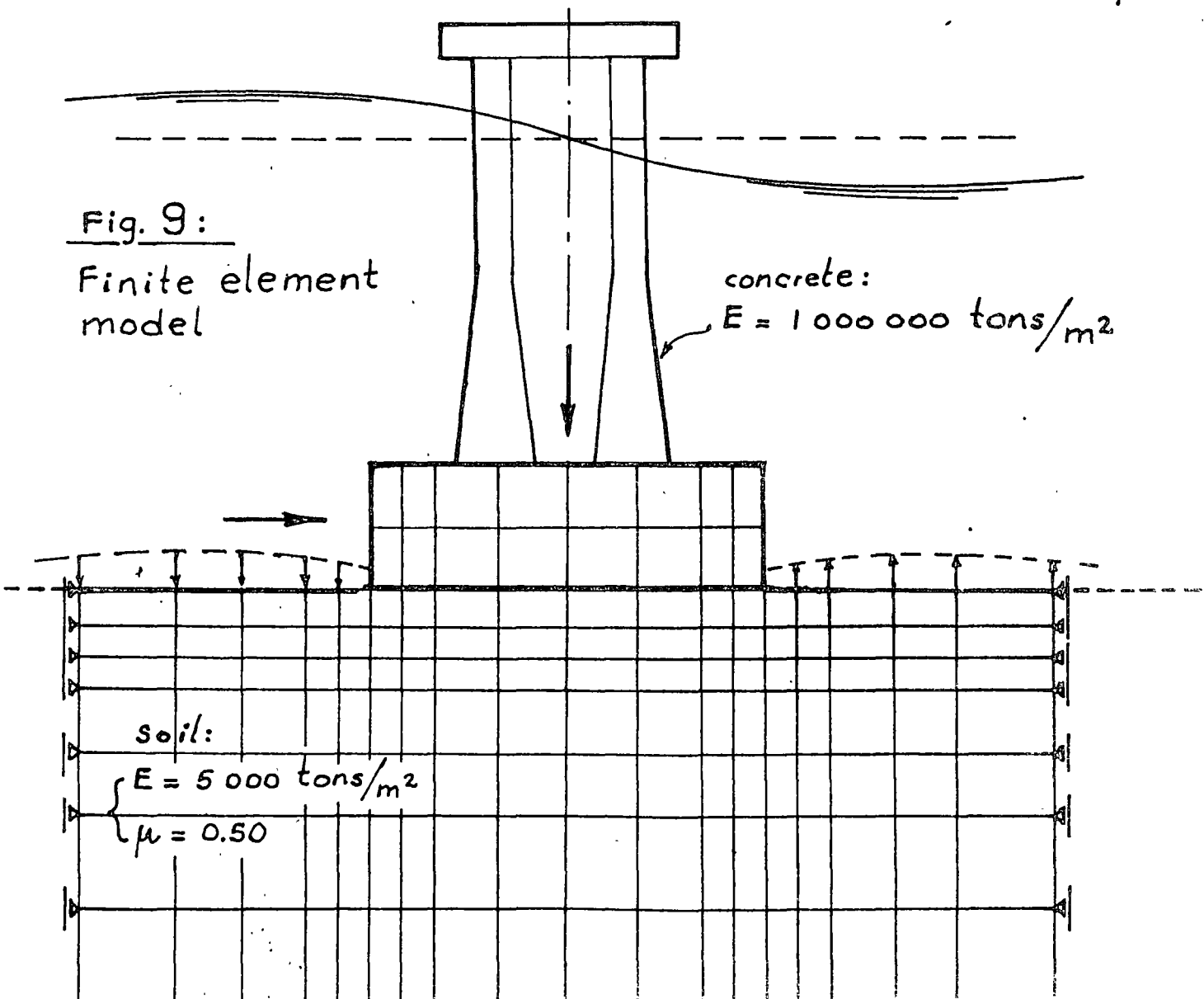
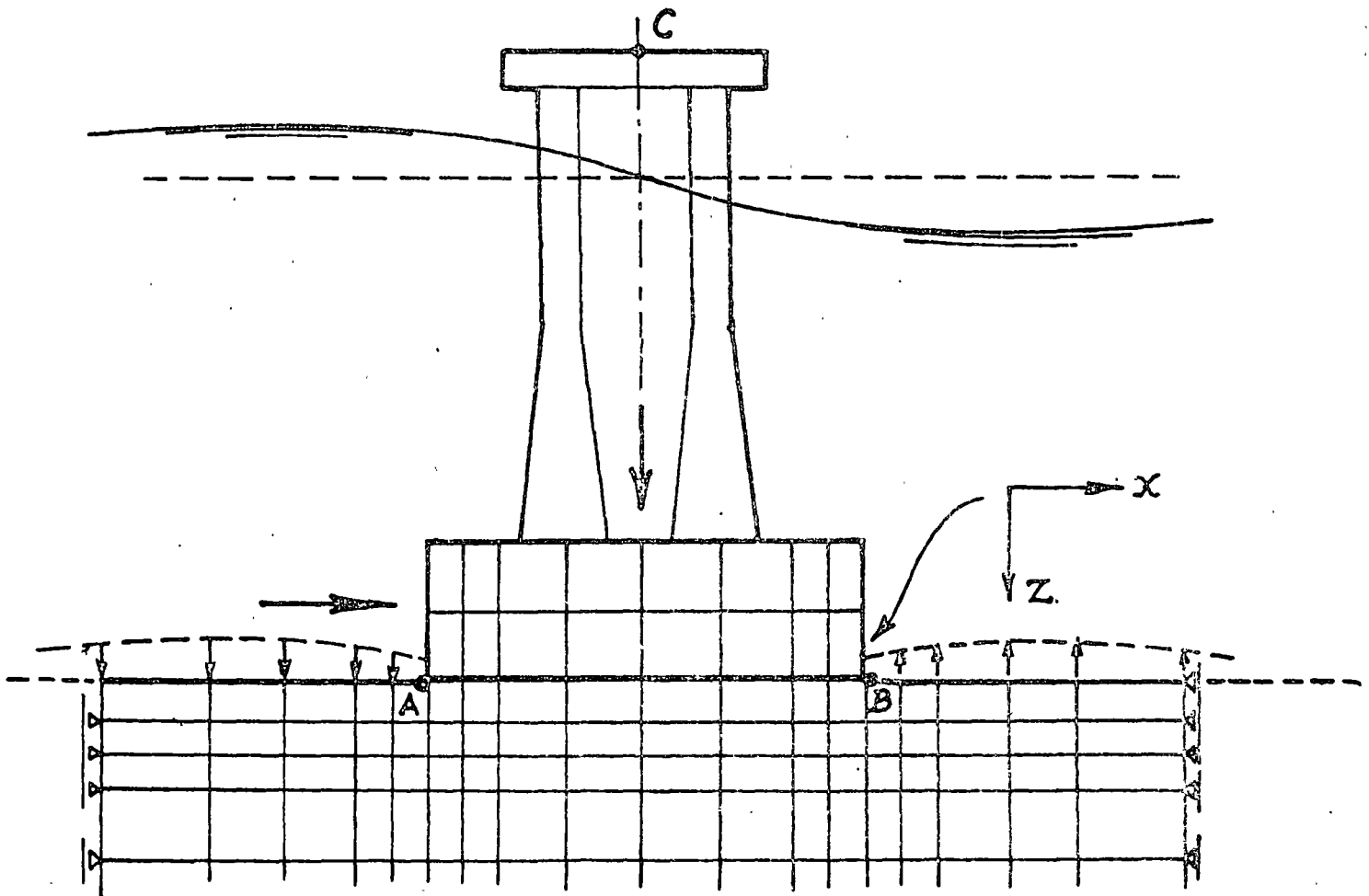


Fig. 10: Settlements to be considered.

They consist of:

- Initial settlements  
during installation
- Consolidation settlements  
due to compressible clay layers
- Long term settlements  
due to delayed clay consolidation  
due to repeated wave loads

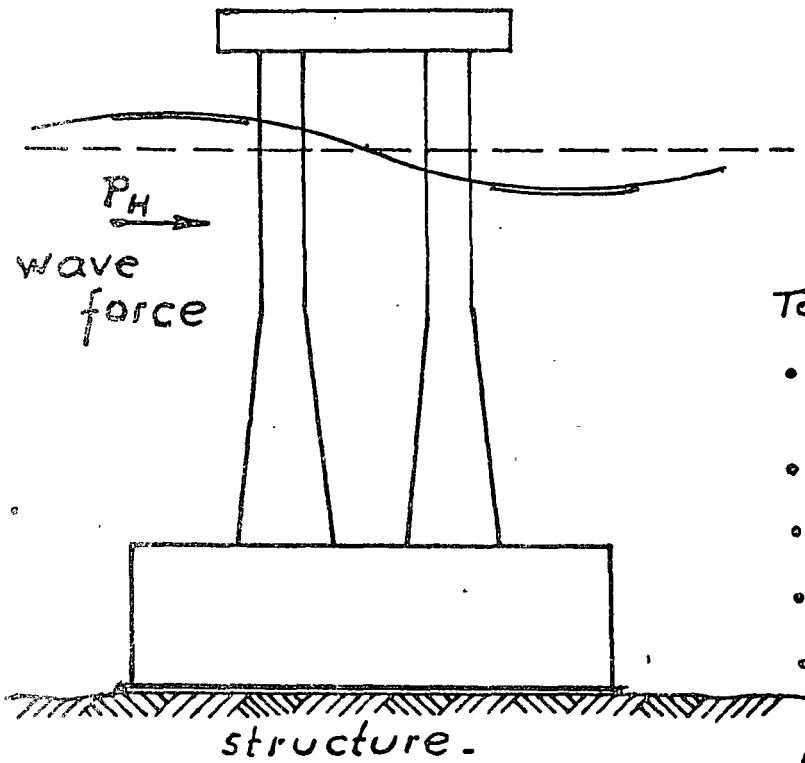
Fig. 11: Calculation of displacements.



Finite element analysis.

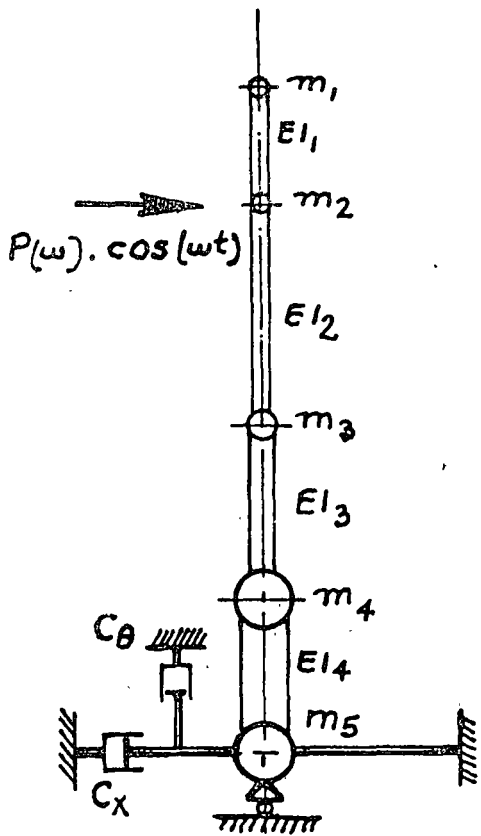
The vertical and the horizontal displacements in the points A and B at the base and point C at the deck are calculated.

Fig. 12: Dynamic analysis of cyclic loading.

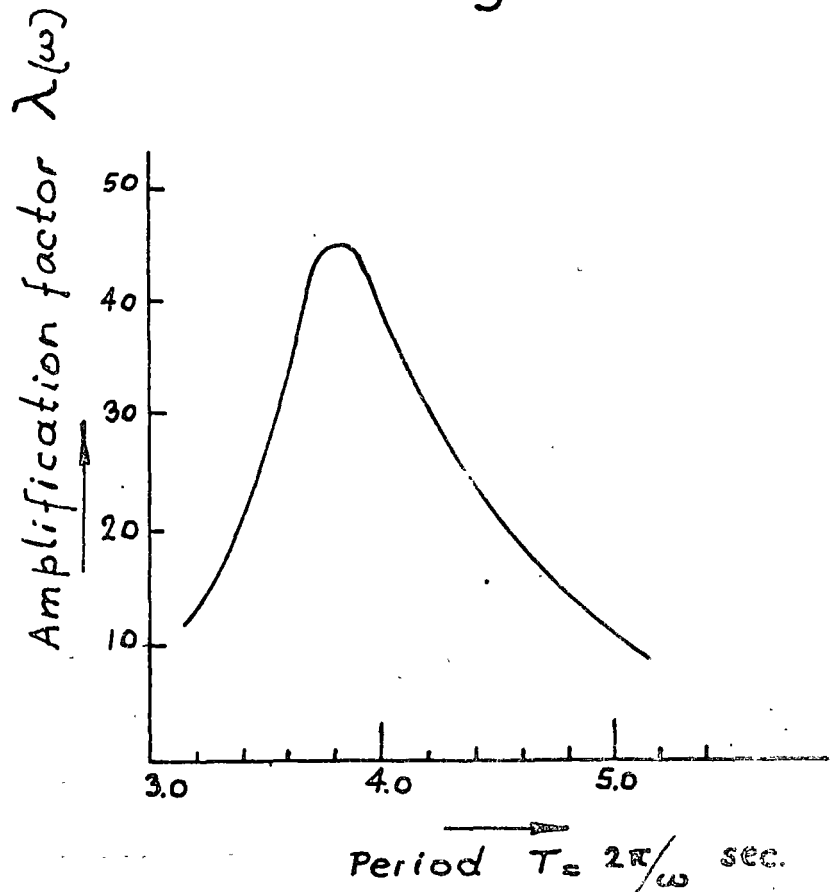


cyclic loading:  
 $P_H = P_0(\omega) \cdot \cos(\omega t)$   
 $\omega = 2\pi/T$

- To be determined:
- Natural frequency of structure
  - Displacements
  - Accelerations
  - Resulting stresses
  - Soil stiffness and damping
  - Reduction of soil strength



computer model



Result of dynamic analysis

$H = \lambda(\omega) \cdot P_0(\omega)$   
 Response = amplification  $\times$  static value

Fig. 13: Cyclic loading of sand.

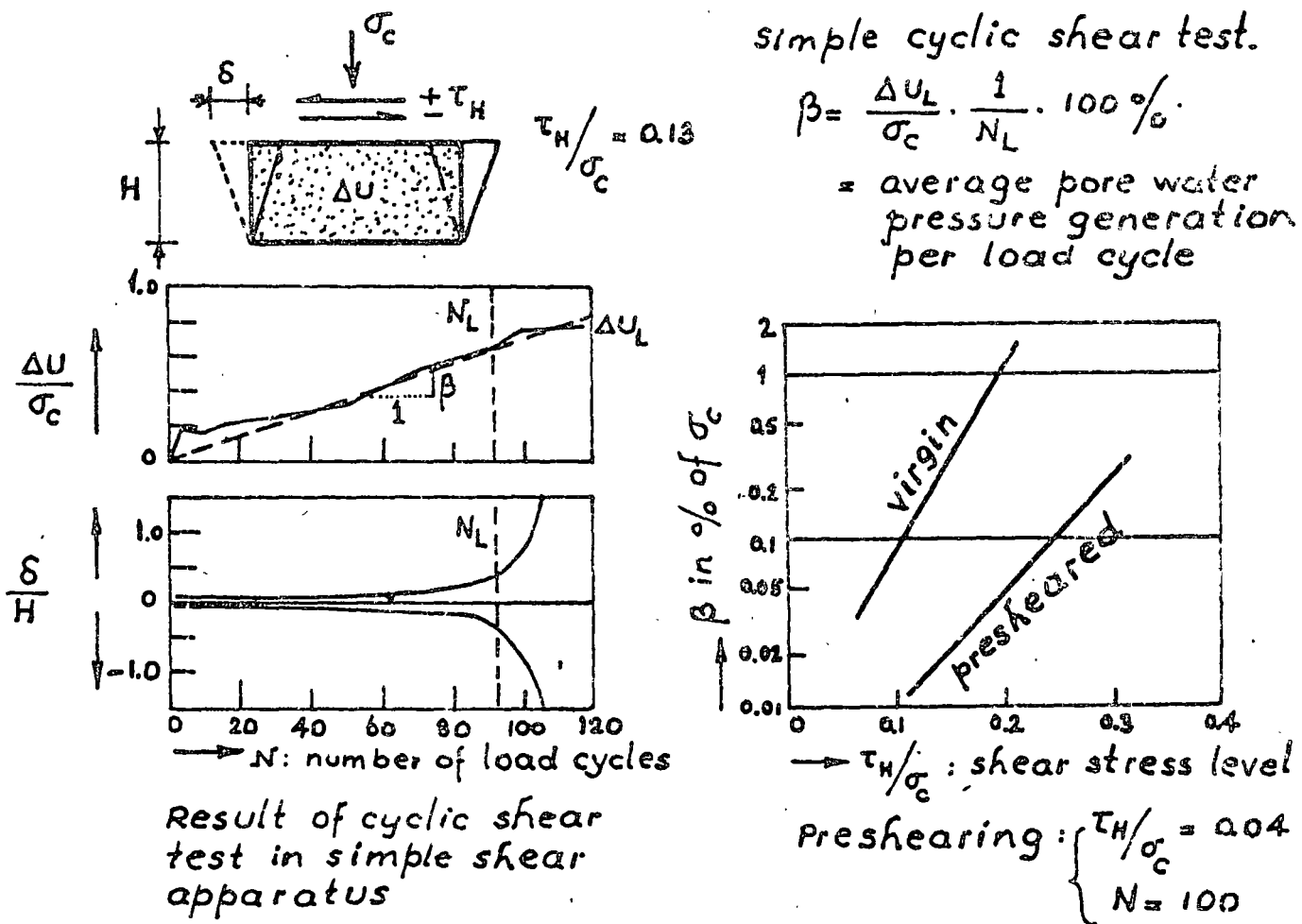


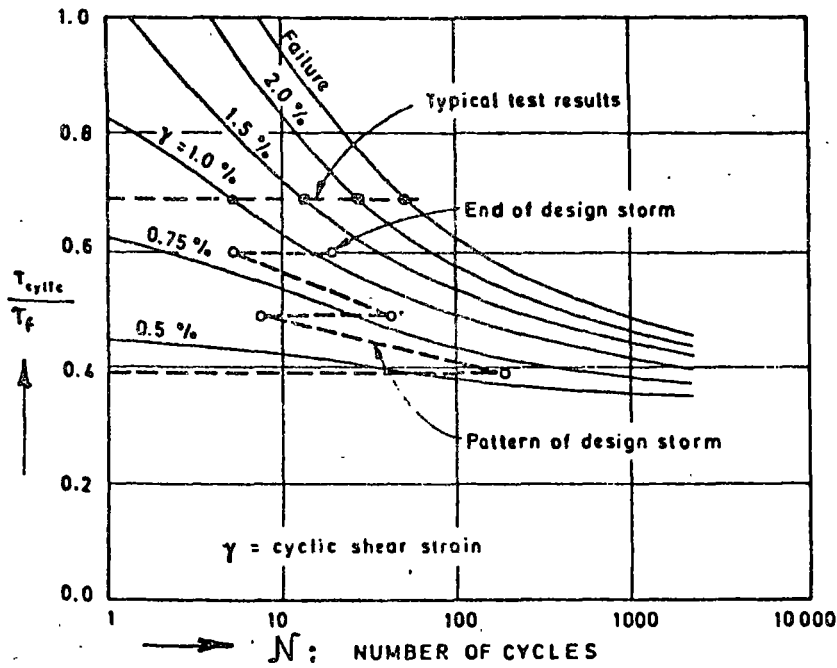
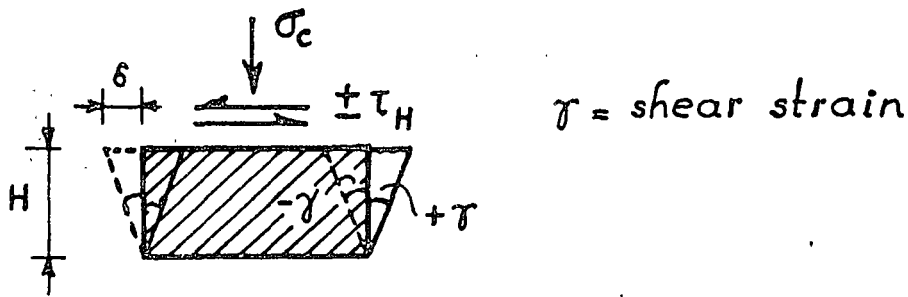
Fig. 14: Accumulated effect of design storm on sand.

Wave height in metres	Number of waves N	Stress level $\tau_H/\sigma_c$	Pore pressure per cycle in % of $\sigma_c$ $\beta$	$\beta \cdot N$ %
4-8	485	.075	.007	3.4
8-12	471	.125	.016	7.5
12-16	282	.175	.035	9.5
16-20	121	.225	.090	10.9
20-24	32	.275	.210	6.7
24-26	3	.312	.330	1.0
				39.0

Excess porewater pressure at end of six hour storm:

$$\Delta U = \beta \cdot N \cdot \sigma_c = 0.39 \times 25 = 10 \text{ tons/m}^2$$

Fig. 15: Cyclic loading of clay



Measured strain in the shear apparatus as a function of shear stress level and number of cycles.

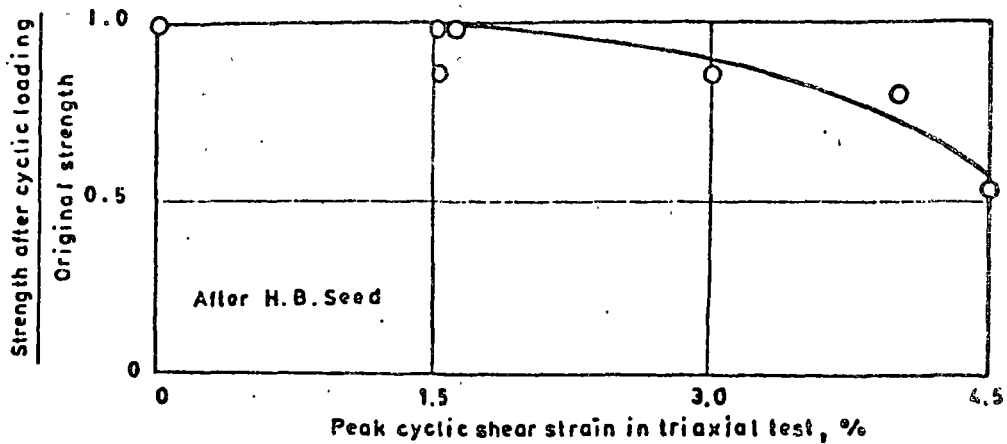


Fig. 16: Reduction in undrained shear strength as a function of strain developed by cyclic shear test.

A P P E N D I X No. 2

Hydraulic aspects of maritime structures.

The hydraulic aspects of maritime structures have become considerably important since for the off-shore structures the temporary stages of towage and sinking are most of the time the governing factor.

Therefore the influence of the environmental conditions (wind, waves, current etc.) have to be studied. Further the knowledge about the behaviour of vessels (floating structures) in the sea is indispensable.

A general trend in most structures is the increase in dimensions, not only because of the heavier tasks to be performed (heavier loads), but also because of the increase of the waterdepth and the considerably more severe environments (North Sea).

Because of that increase in dimensions the structures will become relatively more elastic and their motions more complex. Efficient control of these motions is extremely difficult. E.g. the big oil tankers.

For a floating structure its spring factor for a certain motion (relation between reaction force and displacement from an equilibrium position) is important. Every floating structure can have six components of motion; Ref. Fig. 1.

To ensure the stability of a floating structure the reaction moments must be positive to counteract the lateral moments, that means that the metacentric height MG must be positive and sufficient. Ref. Fig. 2.

E.g. pitch (rotation around the Y-axis) will occur during the sinking procedure of structures such as caissons, gravity structures, jackets and jack ups. During that procedure the stability must be checked constantly.

A floating structure has a certain mass. Not only the mass of the structure itself must be taken into account, but also that of a certain mass of entrained water, which gives the virtual mass (mass of structure plus added mass of water).

According Newton's Law ( $F = M a$  or  $a = \frac{F}{M}$ ) the acceleration of a body will be smaller when - for a given excitation force  $F$  - the mass increases.

Every structure has to be designed in such a way that it has a minimum response to the excitation forces, which can be achieved by an optimal combination of the reaction forces due to the mass and the spring. Such a mass-spring system can be characterized by its natural frequency at which the structure will oscillate after a small disturbance from its equilibrium position.

First the theory will be given about a single mass-spring system, as a good insight in same is of fundamental importance.

Consider a mass  $m$  with one freedom of displacement. Ref. Fig. 3.

The mass is connected with the foundation by a spring with a spring stiffness  $K$  and a viscous damper with a damping factor  $c$ . The system is loaded by a force  $F(t)$ .

For a certain displacement  $x$  the following loads are acting on the mass :  $+F(t)$ , the resistance of the spring  $-Kx$  and the viscous reaction force  $-c\dot{x}$ .

Condition of equilibrium :

$$F(t) - kx - c\dot{x} = m\ddot{x}$$

or  $m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F(t)$ .

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{dx}{dt} \\ \ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2} \end{cases}$$

The solution of above differential equation consists of :

1) the solution of the reduced equation, in which  $F(t) = 0$ ;  
this is the free oscillation of the system.

2) the particular solution, depending from the load  $F(t)$ .

The response of the system depends from the load and its own free oscillation.

Free oscillation without damping.

$$\text{Equation } m\ddot{\chi} + K\chi = 0$$

$$\text{or } \ddot{\chi} + \frac{K}{m}\chi = 0$$

The solution is the harmonic oscillation :

$$\chi = A \cos \omega t + B \sin \omega t, \text{ in which } \omega = \frac{K}{m}.$$

From this :  $\dot{\chi} = -A \sin \omega t + B \cos \omega t$ .

The factor  $\omega$  is the own or natural frequency of the undamped system.

The factor A and B can be determined from the boundary conditions :

At the beginning  $t = 0$  :

displacement :  $\chi(0) = \chi_0$

velocity :  $\dot{\chi}(0) = \dot{\chi}_0$

This gives :  $A = \chi_0$  and  $B = \dot{\chi}_0/\omega$

Final solution :  $\chi = \chi_0 \cos \omega t + \dot{\chi}_0/\omega \sin \omega t$ .

This can also be written as a single sinus function with amplitude C and phase angle  $\phi$ .

The motion  $\chi$  can be considered as the projection on the vertical from the vectors A and B, which rotate with the constant speed  $\omega$ , Ref. Fig. 4.



The sum of these projections is equal to the projection of the vector sum of both vectors.

$$\text{Further : } C = \sqrt{A^2 + B^2} = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{\dot{x}_0}{\omega}\right)^2}.$$

Projection of C on the vertical :  $\chi = C \sin (\omega t + \phi)$ ,

$$\text{in which : } \phi = \text{arc tg } \frac{A}{B} = \text{arc tg } \frac{\chi_C \omega}{\chi_0}.$$

The time, during which vector C makes one rotation is called the natural period and can be determined from :

$$\omega T = 2\pi \quad \rightarrow \quad T = \frac{2\pi}{\omega}.$$

The number of rotations per unit of time is called the natural frequency and is equal to :

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{K}{m}}.$$

Dimension : Cycles per second or Herz (Hz).

As an example of a superimposed oscillation the oscillation caused by a harmonic varying loading without damping, ( $c = 0$ ) will be dealt with in the following. Loading :  $F(t) = F_0 \sin \Omega t$ .

$$\left( \begin{array}{l} F_0 : \text{Maximum amplitude of force } F(t) \\ \Omega : \text{circular frequency} \end{array} \right)$$

The frequency is equal to :  $f = \frac{\Omega}{2\pi}$

The diff. equation for a single mass-spring system without damping is :

$$m\ddot{x} + kx = F_0 \sin \Omega t.$$

The solution consists of two parts :

- 1) that of the reduced diff. equation, the already dealt with free oscillation  $\chi_f$  with its two constants  $\chi_0$  and  $\omega$ ,
- 2) that of the particular solution  $\chi_p$ , which is determined by the loading  $F(t)$ .

The total response is :  $\chi = \chi_f + \chi_p$ .

In this case of the harmonic loading only the particular solution needs to be taken into account, as the free oscillation determined by the conditions in the beginning will be normally damped out quickly.

The load  $F(t) = F_0 \sin \Omega t$  gives as particular solution

$$\chi(t) = \chi_0 \sin \Omega t.$$

Substitution in the equilibrium condition :

$$-\Omega^2 m \chi_0 + K \chi_0 = F_0$$

$$\text{Hence : amplitude } \chi_0 = \frac{F_0}{k - \Omega^2 m}.$$

$$\text{Using } \omega^2 = \frac{K}{m} : \quad \chi_0 = \frac{F_0/K}{1 - \Omega^2/\omega^2}.$$

Between the input  $F(t)$  and the response  $\chi(t)$  the following relation can be defined :

$$\chi(t) = H(\Omega) F(t)$$

$$\text{and also } \chi_0 = H(\Omega) F_0$$

Function  $H(\Omega)$  is called the response function.

$$\text{Further : } \chi(t) = \frac{V(\Omega)}{K} F(t)$$

$$\text{and } \chi_0 = V(\Omega) \frac{F_0}{K} = V(\Omega) \chi_{st}.$$

Function  $V(\Omega)$  is called the "amplification" factor, which gives the ratio between the amplitude  $\chi_0$  and the static displacement

$$\chi_{st} = F_0/K$$

$$V = \frac{\chi_0}{\chi_{st}} = \frac{K \chi(t)}{F(t)} = \frac{1}{1 - \Omega^2/\omega^2}.$$

For  $\Omega/\omega = 1$ , that means when the frequency of the loading is equal to the natural frequency of the system the displacement will become infinite. This is called "resonance". Ref. Fig. 5.

Example of a single mass-spring system; Ref. Fig. 6.

A pile fixed in the subsoil, massless, free length  $l$ , bending stiffness  $EI$ .

At the pile top is a mass  $M$ , which can only move in a direction perpendicular to the axis of the pile. For a horizontal force at the pile top  $P$  the displacement will be :

$$\delta = \frac{Pl^3}{3EI}, \text{ from which } P = \frac{3EI}{l^3} \delta.$$

$$\text{Springstiffness : } K = \frac{3EI}{l^3},$$

$$\text{Natural frequency : } \omega = \sqrt{\frac{K}{m}} = \sqrt{\frac{3EI}{ml^3}} = 1.73 \sqrt{\frac{EI}{ml^3}}.$$

---

For two reasons it can be desirable to change the natural frequency of a structure or a vessel :

- 1) For a certain value of the natural frequency the continuous disturbances caused by the operation activities can result in such a continuous motion that the operation is hampered.
- 2) In case the excitation force has a frequency nearly equal to the natural frequency of the structure amplification of the motion (resonance) is generated.

In case the natural frequency has to be adapted because of one of the above reasons either the mass of the structure or the spring factor can be modified.

A few examples.

- A ship berthed to a quay can have surge motions (parallel to the front of the quay) or sway motions (perpendicular to the front) caused by passing ships or internal frequencies of the harbour basin. The mooring line configuration and especially its spring constant are of great importance.

When the configuration is too stiff the mooring line forces will be very high, while in case of a too soft configuration great movements of the ship have to be accepted.

In case of a floating pile rig it must be avoided that during pile driving the natural frequency of the heave of the pontoon corresponds with the frequency of the motion of the hammer. When necessary the remedies are :

- a) change of the added mass of the pontoon by stability fins or redistribution of the underwater volume. Ref. Fig. 7.
- b) change of the frequency of the excitation forces.

- When a crane ship is erecting a module and this load is suspending in the ropes anyhow the natural frequency of the crane pontoon must be out of the range of the natural frequency of the load at any length of the rope, otherwise an excessive roll will hinder the operations on board. Ref. Fig. 8.
- When the piles of a jetty have been driven they have to be braced immediately, otherwise they will break at the seabottom sooner or later by resonance with the waves. It is amazing how the natural frequency changes when two piles are connected at their top by a simple bracing and then they are out of danger.

The afore mentioned problems can become very difficult to solve especially when the influencing factors : added mass and spring factor are difficult to determine and varying with the time.

In the case of a sinking oil platform due to non-linear spring forces movements at all magnitudes of frequencies (sub and super harmonics) will be generated, thus different to the natural frequency. The problem can become even more complicated as the natural frequency will also change with the amplitude of the motions.

The calculation of waveforces exerted on a floating or a fixed structure has become so complicated that a design engineer can better leave this subject to an expert.

Waves can appear in many forms, Ref. Fig. 10. Only waves generated by wind will be considered in the normal maritime structures. Although these waves have a random appearance there has been discovered statistical laws. (Raleigh distribution).

The wave loads can be determined experimentally by measuring the forces exerted on the structure when this is kept fixed in a wave field.

For the analytical determination several methods exist, each method being specially adapted for the kind of problem depending on the dimensions and configuration of the structure and the seaconditions. The total load, local loads or pressure distribution can be determined.

The forces exerted by a current on a structure can be considered as generated when the structure moves with a certain speed through still water.

It is worthwhile to know that dynamic forces can be generated by a current e.g. by the shedding of vortices. Ref. Fig. 11. When the vortices are alternating great vibrations of the structure are the result. Further large peak forces in the drag will be introduced, but also the average drag will be greater than in the case of symmetric shedding of the vortices.  
Ref. Fig. 12.

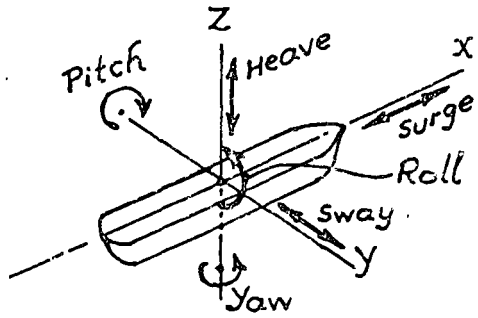


Fig 1: Six components of motion of a floating vessel

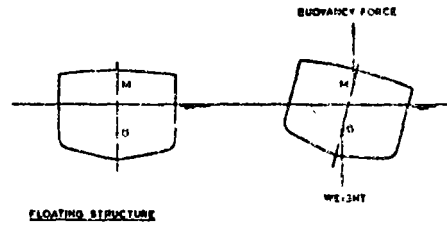


Fig. 2.

Fig. 3:  
Single mass-spring system

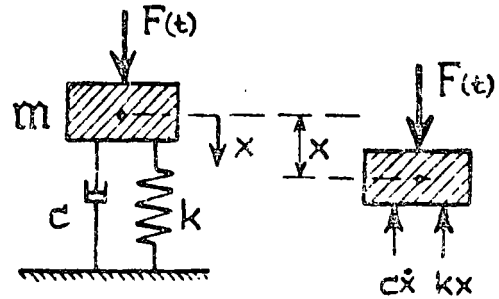


Fig. 4.

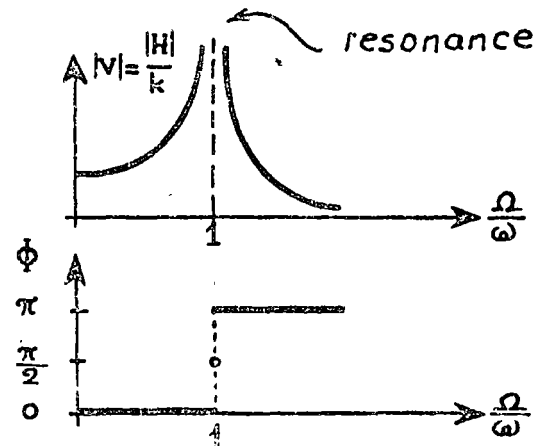
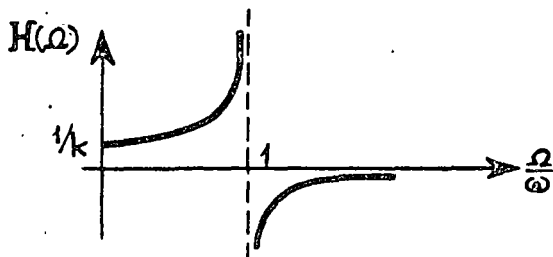
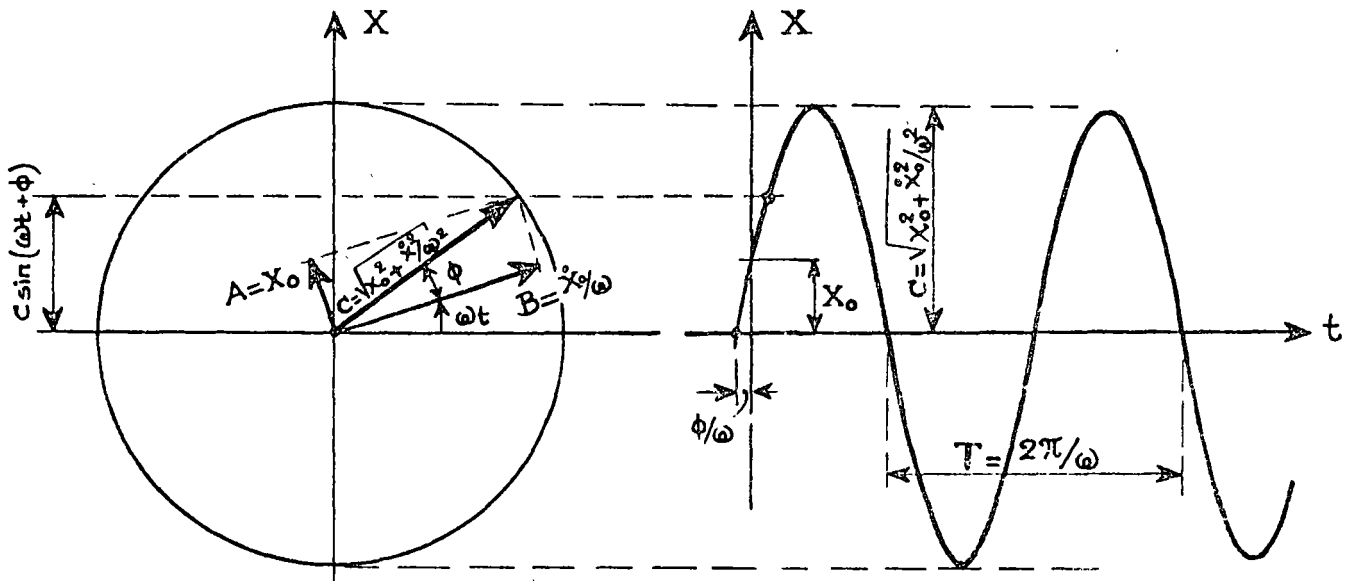


Fig. 5.

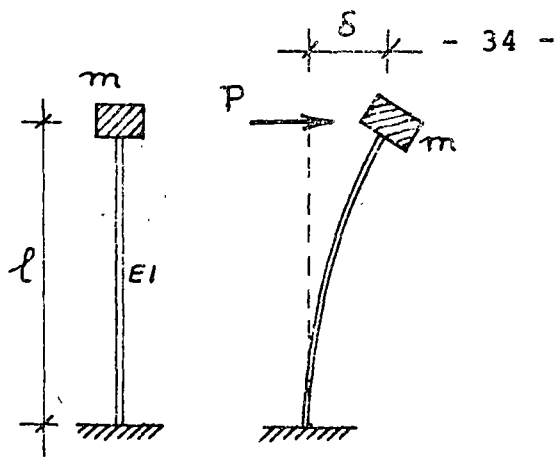
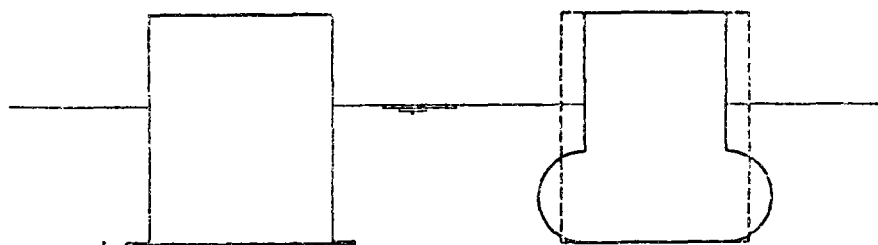


Fig. 6: Example of single mass-spring system.  
 Natural frequency:

$$\omega = 1.73 \sqrt{\frac{EI}{m l^3}}$$

Fig. 7



INCREASE OF ADDED MASS  
 BY MEANS OF  
 "STABILITY FINS"

CHANGE OF NATURAL HEAVE  
 FREQUENCY BY SHIFTING THE  
 DISTRIBUTION OF THE  
 UNDERWATER VOLUME

Fig. 8

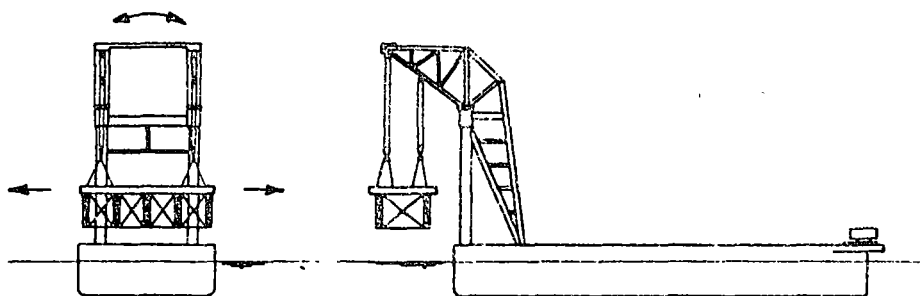
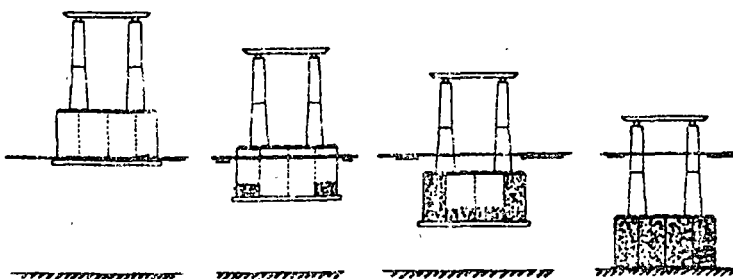


Fig. 9



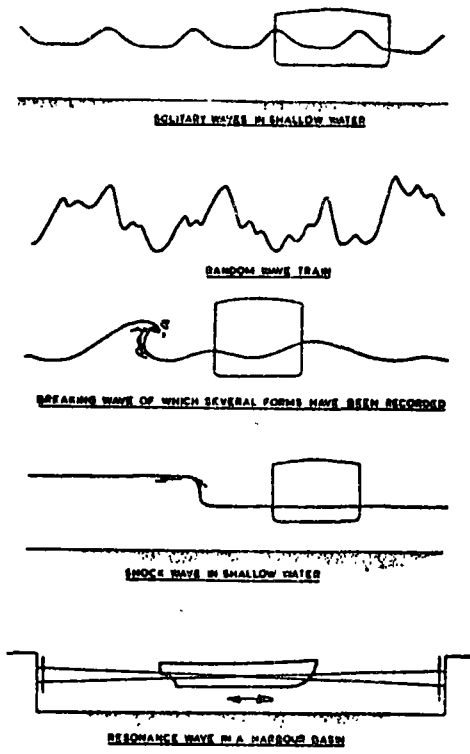


Fig. 10:  
Examples of wave forms

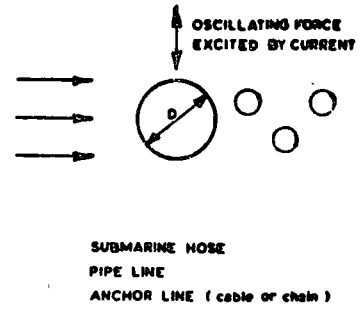
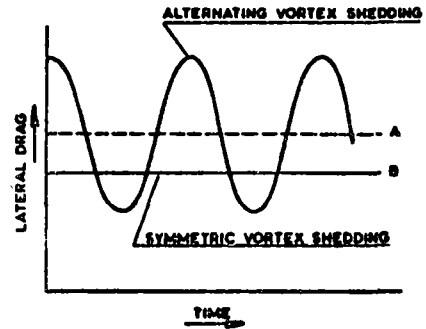
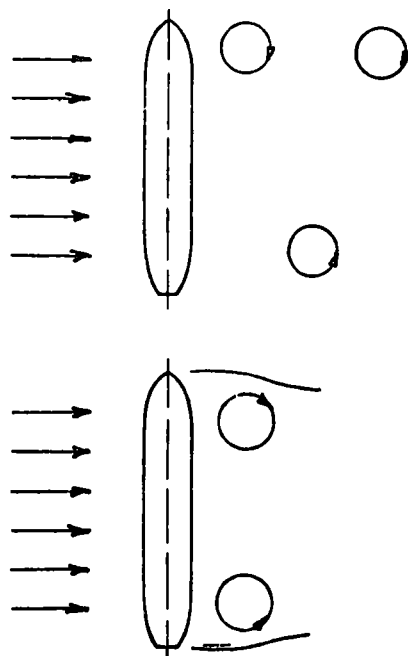


Fig. 11.



Examples of vortex shedding  
around a moored ship in a  
steady current.

Fig. 12.



APPENDIX No. 3

THE DESIGN OF THE STEEL DECK STRUCTURE FOR THE SEADECK GRAVITY PRODUCTION PLATFORM.

In the following the design of the above steel deck will be dealt with as it is significant for three reasons :

- a) its enormous dimensions, which are only found in the very large steel bridges,
- b) the legs and the deck constitute structurally a portal frame, which means that the efficiency of the knee joint is of the greatest importance,
- c) all has been done to eliminate potential fatigue.

The concrete legs are connected at their top to short steel legs which frame into the steel deck structure. Ref. Fig. 1.

The primary structure of the deck consists of eight deep plate girders which contain the cellar deck and which directly support the modules on the production deck. The cylindrical steel upper legs extend through the depth of the whole steel deck and finish at the level of the production deck. The eight plate girders transmit the loads directly into the legs. Ref. Fig. 2.

The deck structure which carries the loads has also the function of portal beam and must consequently resist the dynamic, wave induced sway forces of the whole structure. Because of headroom requirements of the cellardeck the deck beams are very high and consequently stiff, reason why heavy shear loads are attracted when the structure is deforming in the sway mode.

The choice of a plate girder has been made out of a great number of solutions e.g. truss, box girder and plate girder.

A truss has been rejected, because of :

- a) a welded truss is inherently prone to fatigue.
- b) the high shears to be carried are a too great problem for trusses.
- c) because of the large forces in the members thick and special steels are required.

The box girder, so attractive because of its great torsional stiffness, presents severe problems in shear lag in the flanges near the supports.

The plate girder had the following advantages :

- a) they can be positioned in a widely spaced support grid on which the modules can be supported directly.
- b) the wide grid spacing lends itself favourably to an efficient arrangement of the members at the nodes.
- c) plate girders are the cheapest to fabricate.

The choice of the delta flange arrangement is significant. The advantages are :

- a) the stiffness of the flange against both lateral and vertical bending and torsion is considerably increased,
- b) large flange area is possible with maximum plate thickness of 35 mm,
- c) with such a stiff boundary the structural efficiency of the web is higher.

The web has been stiffened vertically and horizontally.

Ref. Fig. 3.

The most difficult detail was that of the leg-deck knee joint.

Ref. Fig. 4.

The leading principle was to achieve the shortest load paths. Flange forces from the deckbeams are transmitted to the leg cylinders by a pair of external horizontal diaphragms. The shear webs pass directly into the leg cylinders, so that the cylinders form part of the shear path through the knee.

Two outer main beams are at such a spacing that they pass at a little distance from the cylinder.

The webs change direction before meeting the cylinder, so that a clear separation of the lines of the webs from the lines of action of the flange forces is achieved. The result was a very simple solution.

Further advantages are :

- a) Because the two horizontal diaphragms are external to the legs there is a clear uninterrupted space for pipework and access.
- b) The flanges flow smoothly around the cylinder, so that joint problems have been avoided.

A few details are significant :

- a) The delta section of the plate girder flanges has been tapered out just before the knee to avoid the problem of carrying axial loads through the webs at the intersection point.
- b) The webs of the internal plate girders meet at a Y-shaped welded joint.  
By the introduction of a small, specially made, extruded steel section the unfavourable fatigue features of a welded joint could be avoided at this very dangerous point.

As the steel superstructure has to accommodate extensive equipment and piping the requirements of penetrations for men's access and pipes have been considered from the beginning as one of the primary design considerations.

Special studies have been made of the reinforcing of these penetrations with respect to buckling, ultimate strength and fatigue.

One of the conclusions was that to keep the stress concentrations down to an acceptable level with respect to fatigue all penetrations should be kept as nearly circular as possible.

Although the Seadeck design incorporates only conventional weldings details and plate thicknesses, which are covered by current rules, there is not yet a code of practice which gives recommendations for the design of stiffened plates and shells. Such a code should incorporate limit state design in view of the increasing use of probabilistic analysis in off-shore design and requirements for stiffened plates and shells as existing codes vary widely.

The analysis for strength and fatigue consisted of :

- global static analysis,
- finite element analysis,
- dynamic analysis,
- fatigue analysis, thereby using both a deterministic regular wave train and a spectral analysis.

All above analyses are for the specialists indeed.

It is worthwhile to mention that the natural frequency of the structure is between 3,5 to 4 seconds, depending the soil conditions and that in that case the dynamic effects are small.

Reference :

"The design of the deck structure for the Sea Platform Constructors (Scotland) Ltd. gravity production platform" by P.J. Clark and J.M. Dawson.

Design and Construction of OFF-SHORE STRUCTURES",  
Paper 1,  
Proceedings of the Conference  
held in London, 27-28 October 1976,  
The Institution of Civil Engineers, London, 1976.

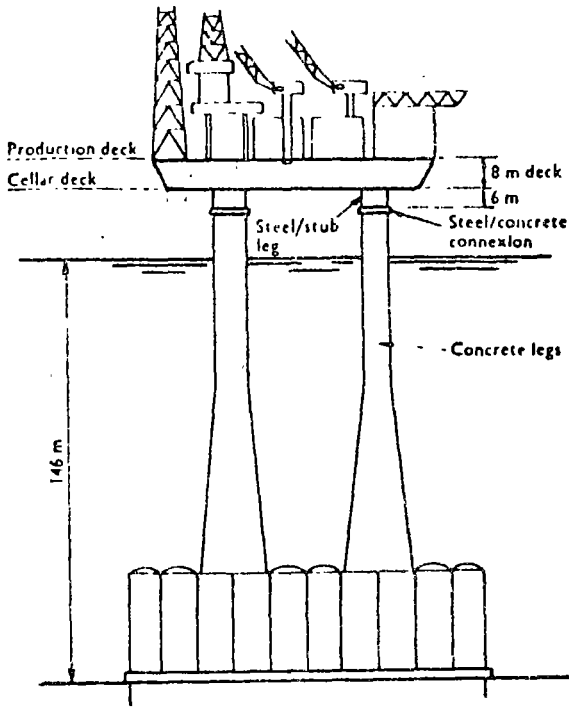


Fig. 1. Seadeck platform

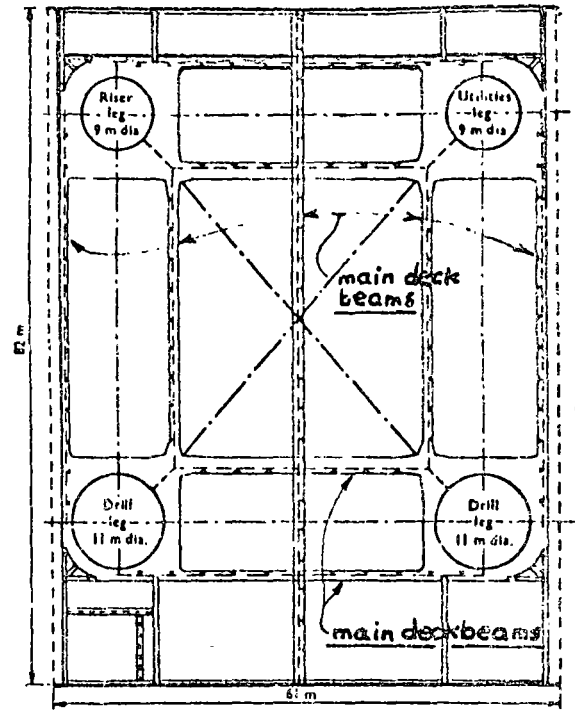
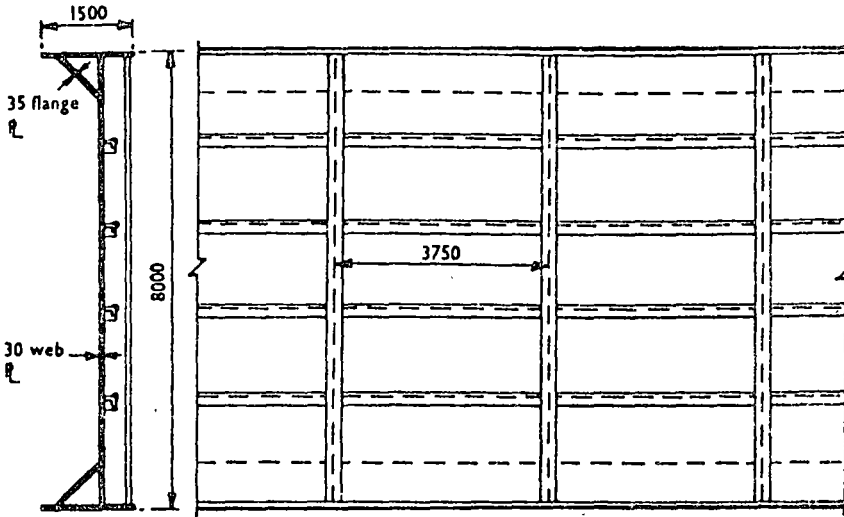


Fig. 2. Plan on seadeck



Vertically and horizontally stiffened webs

Fig. 3. Details of main deck beams (dimensions are typical only)

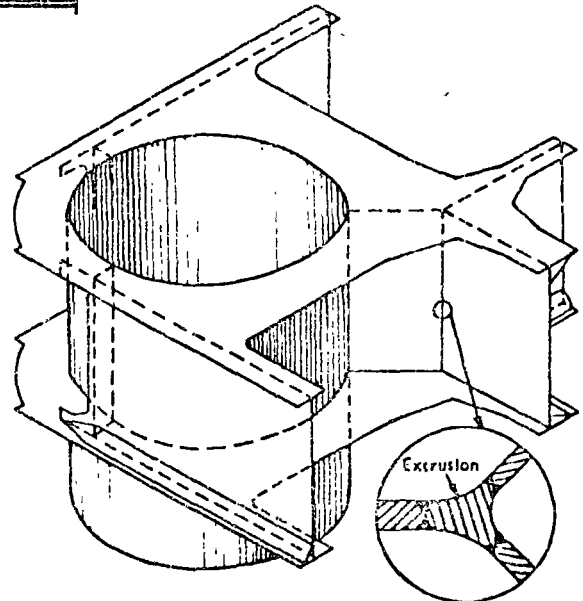


Fig. 4. Simplified view on deck leg connexion

APPENDIX No. 4.

STEEL GRAVITY PLATFORM FOR LOANGO OIL FIELD (OFF-SHORE CONGO - BRAZZAVILLE).

Designed by Technomare, Venice, Italy.

A short description will be given of above design because of the following reasons :

- a) to show that the use of concrete is not required for a gravity-type oil platform,
- b) to show the outstanding and ingenious aspects of this design.

The patent illustration is shown in Fig. 1.

This new and very sophisticated design is suitable for a wide range of waterdepths (up to 200 metres), sea conditions and bottom properties. Ref. Fig. 2.

The main structural components are from bottom to top : the triangular base with its three cylinders, the hexagonal tower and the deck. Ref. Fig. 3.

Each cylinder is divided in four separate compartments to provide sufficient stability in case of damage during towing and sinking operations. Each cylinder has at its base a wider foundation pad. Ref. Fig. 4.

The most important feature is the use of flotation tanks (the steel cylinders at the corners of the base structure) as an integral part of the structure. In comparison with the traditional steel jackets which are pinned to the seabottom by driving piles, this new concept has evident advantages :

- a) elimination of foundation piles and related costly off-shore operations.
- b) the integrated flotation cylinders at a great c.t.c. distance provide easier towing and sinking and increase final stability after installation.

- c) especially suitable for rocky subsoil.
- d) the adoption of three foundation pads instead of a continuous foundation slab minimizes the effect of soil unevenness and differential settlements.

Further basic criteria were :

- a) standardization of main structure for all types of platforms.
- b) typical conventional tubular space frame.
- c) provision for prefabrication in large structural blocks to facilitate final assembly in floating condition.
- d) frame geometry gives greater flexibility in order to meet unusual operative requirements e.g. in cooperation of slanted conductor pipes.

Owing to the many new aspects included in the design and to the lack of standards and regulations the theoretical analysis and the model tests performed have been extended far beyond normal practice.

As for every platform the four stages of fabrication and assembling, floating, sinking and on-bottom stability have to be studied thoroughly. Especially fatigue may not be forgotten.

References :

- 1.: "Design analysis and construction of the Loango steel gravity platforms",  
by C. Alloni, A. d'Agastino and R. Priarone.  
8th Off-shore Technology Conference, Houston 1976,  
Paper OTC 2437.
- 2.: "Design, construction and installation of the Loango steel gravity platforms",  
by D. Lalli, Technomare, Italy.  
Design and Construction of Off-shore Structures Conference  
held in London, 27-28 Oct. 1976.  
The Institution of Civil Engineers, London.

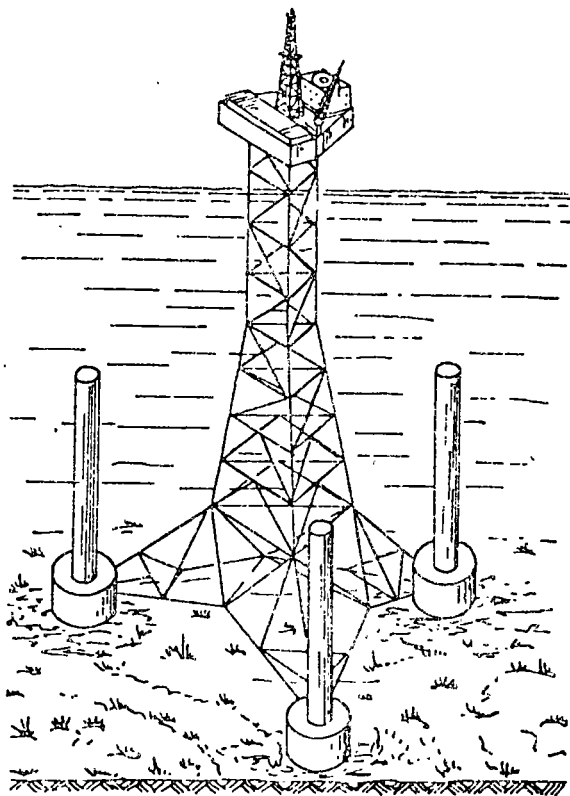


Fig. 1. All-steel gravity platform

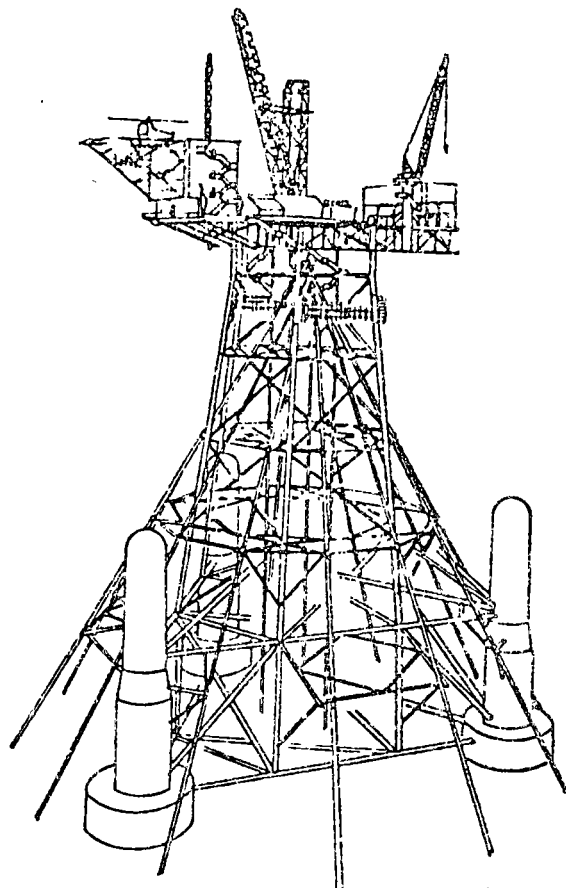


Fig. 2

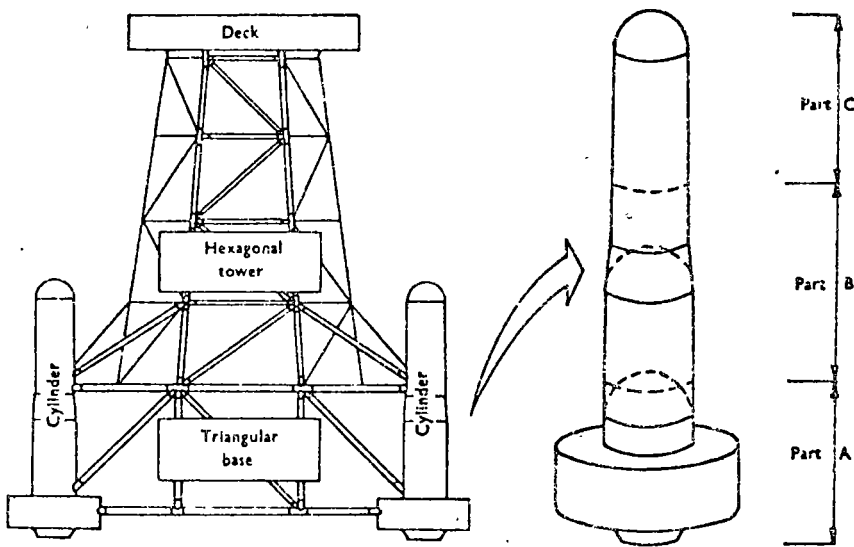


Fig. 3:  
Platform and  
cylinder main  
components

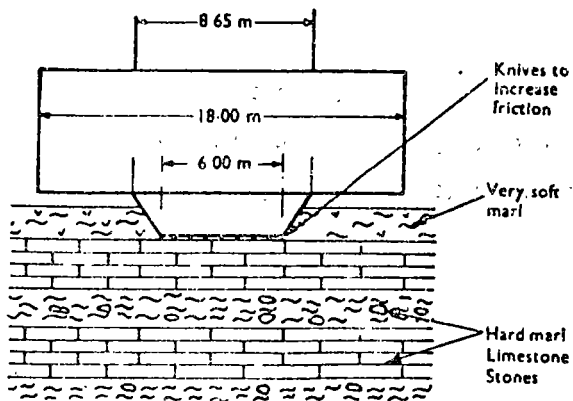


Fig. 4 :  
Footing and soil  
characteristics



APPENDIX No. 5

THE RDL ( Redpath Dorman Long) HYBRID GRAVITY PLATFORM.

A short description of the design of this platform will be given in the following as this unique design has several advantages above the already described concrete gravity platforms.

A thorough study of this design is a good lesson for every design engineer; then he will learn :

- a) how to evaluate and to use the good qualities of each type of material and structure and to make the best combination of them,
- b) how to prevent that temporary conditions will become governing in the dimensioning of the structure,
- c) how to get the lightest structure possible, which exerts smaller loads on the subsoil and is consequently suitable for more locations.

The battle of the North Sea is a battle between a pile supported steel jacket and a concrete gravity platform. The RDL hybrid platform is a combination of the "jacket" type design for the main structure and the "gravity" type design for the installation and founding on the seabed.

The steel jacket is the best solution for the structure as it has less exposure to the wave forces; the concrete foundation is the best solution to avoid pile driving during the installation period and to reduce the off-shore installation time to a minimum. Ref. Fig. 1.

Strength and stability during the temporary conditions have to be checked and if necessary improved; in the RDL hybrid design that has been done by adding steel buoyancy tanks.

The steel structure from deck level to the top of the foundation raft is in principle a conventional tubular steel space frame. The construction method developed by RDL (Ref. Fig. 2 and 3) permits the major part of the construction work to take place at a low level until the structure is raised in two halves into vertical position and then, as a complete tower, slid out on to the top of the foundation raft. The feature of this design is that the tower can be as light and economic as possible, as the final conditions and not those during construction are governing.

The foundation raft is a concrete structure, which can carry the loads of the steel tower and spread them over a sufficiently large foundation area to satisfy the foundation engineering requirements. It is a simple, rather shallow square with a large square central hole, subdivided into smaller compartments by division walls.

The wave forces on the whole structure are considerably less than those on a conventional concrete gravity structure with the consequence that greatly reduced soil stresses are imposed on the foundation soil.

The third typical part of the whole structure are the buoyancy cylinders. The light, concrete foundation raft has been designed to resist only the external hydrostatic water pressures during floating and not those during the immersion. Further the structure is unstable as soon as the concrete raft has disappeared under water.

The buoyancy cylinders have been arranged in eight groups of seven cylinders each. Ref. Fig. 4. The total buoyancy of the 56 cylinders is in excess of the submerged weight of the complete structure at tow-out.

This means that the foundation raft can be fully flooded (internal and external pressure equal), reason why the raft can be designed for a greatly reduced hydrostatic pressure.

The height of the buoyancy cylinders must be such that the floating stability during all stages of immersion is sufficient.

Shear keys on the soffit of the raft have also been designed to resist horizontal loads and further also skirts for scour protection. A great advantage of the hybrid structure is that the shear keys and skirts can be much smaller than those of the much bigger conventional gravity platforms. The greatest advantage however, is that they can be fixed to the soffit of the raft at a later stage, when the structure is floating in deep water.

The consequence is that construction at the construction yard and then along the quay wall is easier and requires less water-depth. Even the design of the shear keys can be done in the last stage.

The buoyancy cylinders are from steel in order to achieve maximum buoyancy for a minimum of structural weight. Concrete cylinders would lift the centre of gravity of the whole structure too much.

The buoyancy cylinders as well as the concrete raft can be used for oil storage.

Summarizing :

- the hybrid can be divided into three distinctive parts :  
the steel tower, the concrete foundation raft and the steel buoyancy cylinders.
- The first two elements can be designed for their permanent requirements after the installation of the whole structure.
- The third element provides only floating stability and protects the foundation raft against excessive water pressures during the sinking procedure. After installation the buoyancy tanks could be better removed to reduce the wave forces on the structure.
- When fully submerged the buoyancy cylinders provide the required floating stability by lifting the centre of buoyancy above the centre of gravity. Therefore they should be as light and as tall as possible.
- The following table is very interesting as it gives a comparison between a steel piled platform, 3 types of hybrid gravity platform and an all concrete gravity platform.  
Ref. Fig. No. 5.

The considerably less foundation pressures and material quantities are significant.

Reference :

F.J. Hansen and L.C.F. Ingersley,

"The case for a hybrid",

Design and Construction of Off-shore Structures Conference held in London, 27-28 Oct. 1976.

The Institution of Civil Engineers, London.

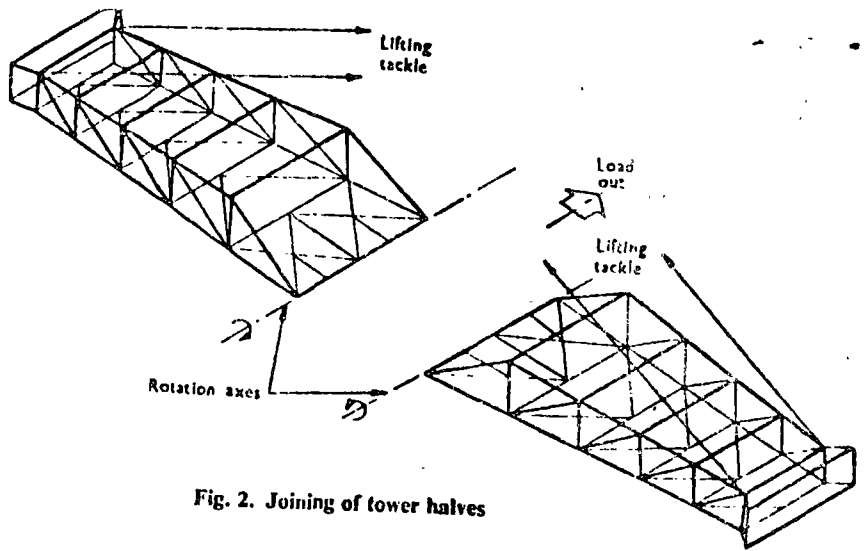
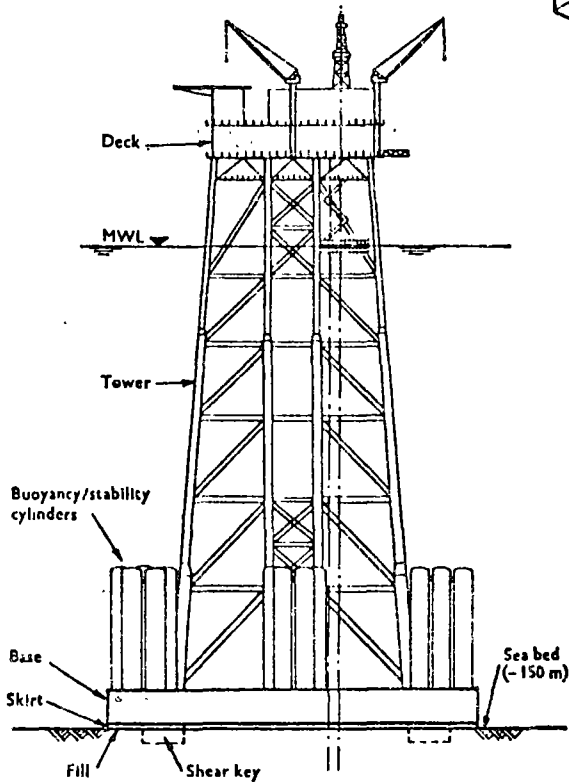


Fig. 2. Joining of tower halves

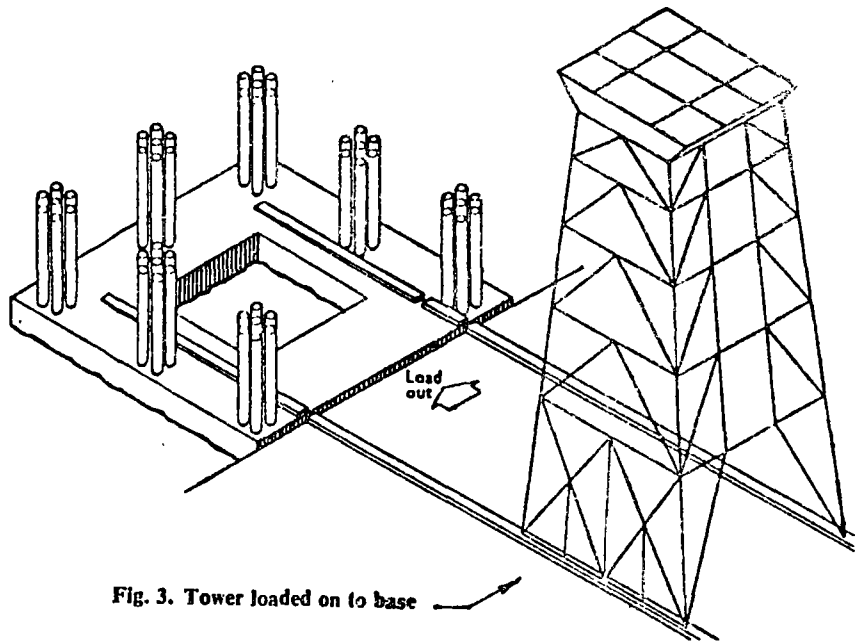
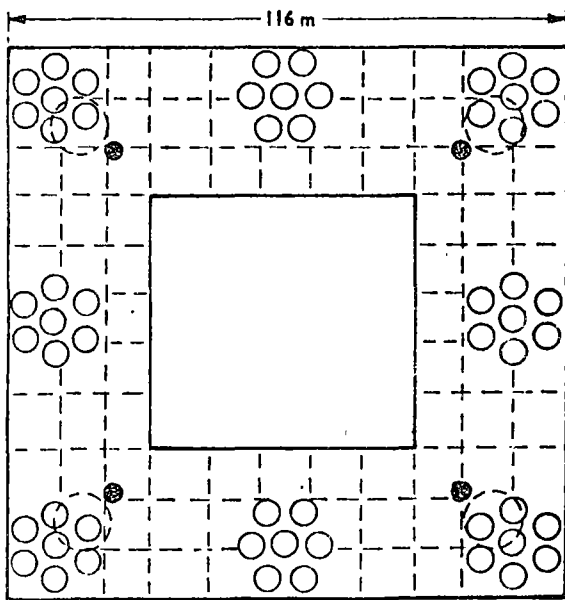


Fig. 3. Tower loaded on to base

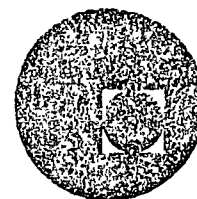
Fig. 4. Plan on raft

Fig. 5. Table.

	Piled	Gravity hybrid (steel cylinders)	Gravity hybrid (concrete cylinders)	Gravity hybrid (cylinders removed)	Gravity all concrete
Total weight, t	26 000	84 000	119 000	79 000	278 000
Steel content, t					
Structure including deck and fixtures	18 500	12 300	12 300	12 300	6 000
Piles	7 500	—	—	—	—
Reinforcement etc.	—	5 700	7 000	5 700	15 000
Buoyancy tanks	—	5 000	—	—	—
Total steel content	26 000	23 000	18 000	18 000	21 000
Concrete content, t	—	61 000	99 700	61 000	257 000
Weld content in structure, cu. in.*	2 200 000	1 200 000	1 000 000	1 000 000	630 000
Mudline shear, t	10 000	15 000	24 000	10 000	43 000
Overturning moment, 1m	800 000	780 000	920 000	610 000	1 900 000
Sea bed pressures (max.), t/m <sup>2</sup>	—	17	21	16	52



centro de educación continua  
división de estudios superiores  
facultad de ingeniería, unam



PRIMER CURSO INTERNACIONAL DE ESTRUCTURAS  
FUERA DE LA COSTA

SOME RECENT RESEARCH ON THE BEARING CAPACITY OF  
FOUNDATIONS

GEORGE GEOFFREY MEYERHOF

SEPTIEMBRE, 1978.

~~100-3-10-11~~  
100-3-10-11  
100-3-10-11

Meyershof

# SOME RECENT RESEARCH ON THE BEARING CAPACITY OF FOUNDATIONS

GEORGE GEOFFREY MEYERHOF\*

## ABSTRACT

The first part of the paper summarizes the results of recent research on the bearing capacity of spread foundations of various shapes under a central vertical load and outlines the effects of foundation depth, eccentricity and inclination of the load. Simple formulae have been derived for use in practice and their application to the design of rigid and flexible foundations is briefly indicated.

The second part of the paper discusses the bearing capacity of single piles under vertical and inclined loads. The bearing capacity of piled foundations and free-standing pile groups is outlined, and the results of model tests on pile groups under central and eccentric loads are briefly analysed in relation to some problems in practice.

## SOMMAIRE

La première partie de cet article présente un résumé des recherches récentes exécutées sur la force portante des fondations superficielles de différentes formes soumises à une charge centrée verticale; elle donne aussi un exposé des effets résultant de la profondeur des fondations, de l'excentricité et de l'obliquité de la charge. Des formules simples y sont dérivées pour l'emploi dans la pratique, et l'application de ces formules au calcul des fondations rigides et flexibles est brièvement expliquée.

La deuxième partie discute de la force portante des pieux simples soumis à des charges verticales et obliques. La force portante des fondations sur pieux et des groupes de pieux isolés y est traitée; les résultats d'essais sur modèle réduit de groupes de pieux soumis à des charges centrées et excentrées sont analysés brièvement en rapport avec quelques problèmes pratiques.

Twenty years have passed since Terzaghi (1943) published his well-known bearing capacity theory, which with his earlier consolidation theory of clays and later settlement analysis of sands led to a better understanding of the fundamentals of foundation behaviour. Under this stimulus the study of the bearing capacity and settlement of foundations in the field amplified by laboratory research has resulted in a more rational approach to foundation design, and some research in the subsequent decade has been discussed previously (Meyerhof, 1953b). During the past decade much further progress has been made in foundation engineering, and within the limits of this paper only some research on the ultimate bearing capacity of foundations will be summarized. An attempt will be made to indicate the relationship of this research to earlier work and its application to some problems in the design of spread and pile foundations.

## SPREAD FOUNDATIONS

The ultimate bearing capacity of spread foundations on uniform soils can generally be estimated with sufficient accuracy on the basis of plastic theory, and the theoretical relationship can be represented by (Terzaghi, 1943):

$$(1) \quad q = Q/BL = cN_c + \gamma DN_q + \gamma BN_\gamma$$

\*Head, Department of Civil Engineering, and Director, School of Graduate Studies, Nova Scotia Technical College, Halifax, Nova Scotia.

where  $B$  = width of foundation,  $D$  = depth of foundation,  $L$  = length of foundation,  $c$  = apparent cohesion of soil,  $\gamma$  = effective unit weight of soil, and  $N_c$ ,  $N_q$ , and  $N_\gamma$  are bearing capacity factors which depend mainly on the angle of internal friction or shearing resistance  $\phi$  of the soil.

The theoretical bearing capacity factors for a shallow horizontal strip foundation under a vertical load are (Prandtl, 1920):

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} N_c = (N_q - 1) \cot \phi \\ N_q = e^{\pi \tan \phi} N_\phi \\ \text{and, approximately, (Meyerhof, 1961b)} \\ N_\gamma = (N_q - 1) \tan (1.1\phi) \\ \text{where } N_\phi = \tan^2 (\frac{1}{2}\pi + \frac{1}{2}\phi). \end{array} \right.$$

The bearing capacity factors for strip foundations and the partly theoretical and partly semi-empirical factors for circular or square footings (Meyerhof, 1951 and 1961a) are shown in Figure 1. Theoretical bearing capacity factors for rectangular foundations with a side ratio of  $B/L$  are not yet available, but they can be estimated by interpolating between the factors for strips ( $B/L = 0$ ) and circles ( $B/L = 1$ ) in direct proportion to the ratio  $B/L$ . Alternatively, the bearing capacity factors for rectangles can be obtained by multiplying the factors in equations (2) for strip foundations by the corresponding empirical shape factors

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} s_c = 1 + 0.2N_\phi B/L \\ s_q = s_\gamma = 1, \quad (\phi = 0) \\ \text{and } s_q = s_\gamma = 1 + 0.1N_\phi B/L, \quad (\phi > 10^\circ) \end{array} \right.$$

with symbols as before.

It should be noted that for large values of the angle of internal friction ( $\phi > 30^\circ$ ) the experimental factor  $N_\gamma$  for circular or square foundations is smaller than that for strip foundations, whereas the opposite result is expected from bearing capacity theory. As shown previously (Meyerhof, 1961), this difference can be explained by the influence of the intermediate principal stress, which in the plane strain condition under strip foundations raises the experimental bearing capacity for large friction angles considerably above the theoretical value. While triaxial compression tests can, therefore, be used to determine the shear strength parameters for circular or square foundations, plane strain compression tests should be made to determine the corresponding parameters for strip foundations, when good agreement between the estimated and observed bearing capacities will be obtained.

For rectangular foundations the friction angles  $\phi$  can be interpolated between the plane strain and triaxial values in proportion to the side ratio  $B/L$  of the foundation. Since the angle of internal friction in plane strain compression tests is roughly 10 per cent greater than in triaxial compression tests (Bishop, 1961; Bjerrum and Kummeneje, 1961) the friction angles for rectangular foundations are roughly given by

$$(4) \quad \phi_r = (1.1 - 0.1B/L)\phi_s$$

where  $\phi_s$  = angle of internal friction or shearing resistance from triaxial compression tests.



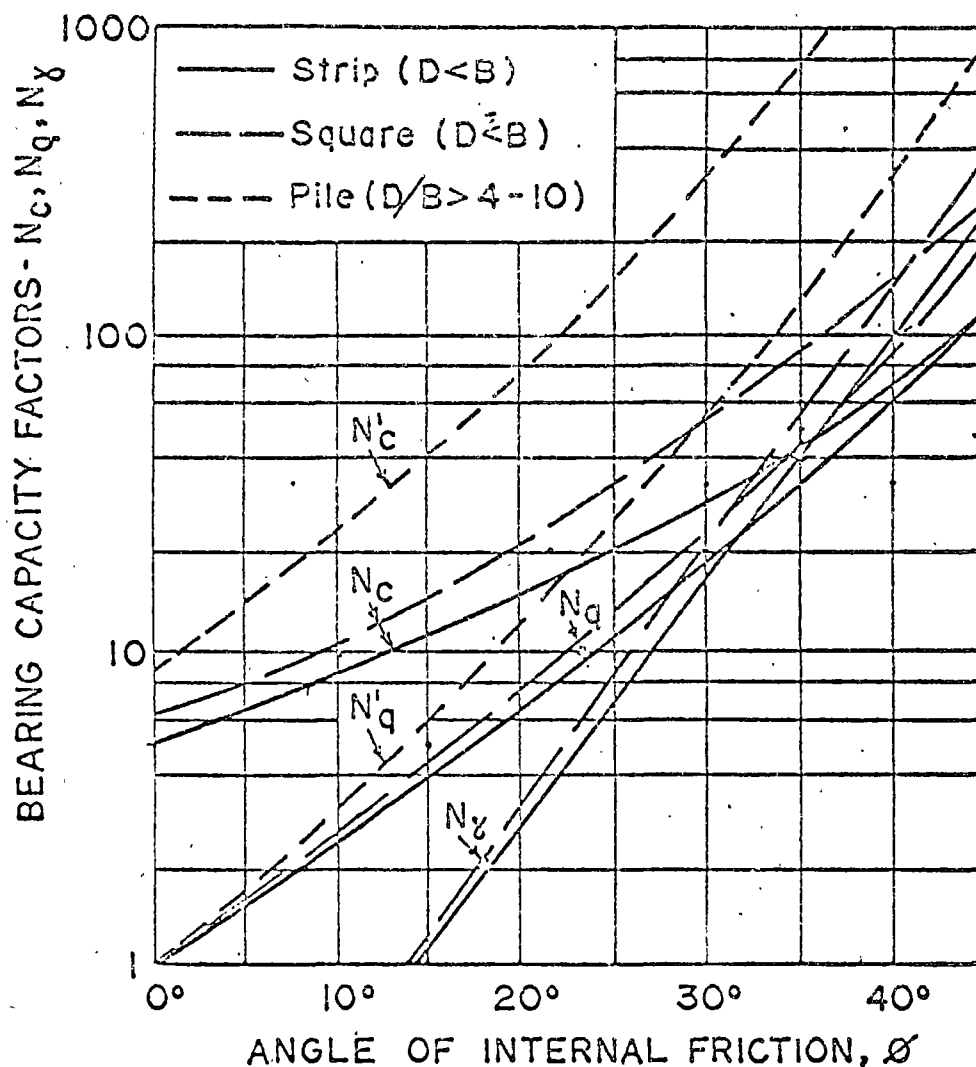


FIGURE 1. Bearing Capacity Factors for Spread and Pile Foundations

If the soil and ground-water conditions vary beneath a foundation, the average values of the effective unit weight, apparent cohesion, and friction angle of the soil within the failure zone should be used. This zone extends from ground level to a distance below the base of about the foundation width for circular or square foundations and up to about twice the foundation width for strip foundations. In the case of stratified materials having widely different soil properties, the bearing capacity can roughly be estimated from the maximum vertical stresses at the interfaces between the layers (Terzaghi and Peck, 1948) since more elaborate recent procedures on the basis of composite failure zones have not yet been sufficiently developed for practical use.

While the simple bearing capacity factors in equations (2) neglect the shearing resistance of the soil above foundation level, the corresponding

increase of the bearing capacity can be estimated from depth factors by which the individual factors have to be multiplied (Skempton, 1951; Hansen, 1955). For practical purposes the following expressions, which correspond to approximate failure surfaces and many test results (Meyerhof, 1951, 1955), are suggested for depths less than the width of the foundation:

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} d_c = 1 + 0.2\sqrt{N_c D/B} \\ d_q = d_\gamma = 1, \quad (\phi = 0) \\ \text{and } d_q = d_\gamma = 1 + 0.1\sqrt{N_c D/B}, \quad (\phi > 10^\circ) \end{array} \right.$$

with symbols as before.

As the depth of the foundation increases, the depth factors increase at a decreasing rate and approach a maximum value which can be used for an estimate of the point resistance of piles, as shown below.

Foundations of building frames, retaining walls and similar structures are generally subjected to eccentric and inclined loads, and these loading conditions can substantially reduce the bearing capacity of foundations. In order to allow for the eccentricity  $e$  of the resultant load  $R$  on the base of a foundation of width  $B$  (Figure 2), it was suggested (Meyerhof, 1953a) that an effective

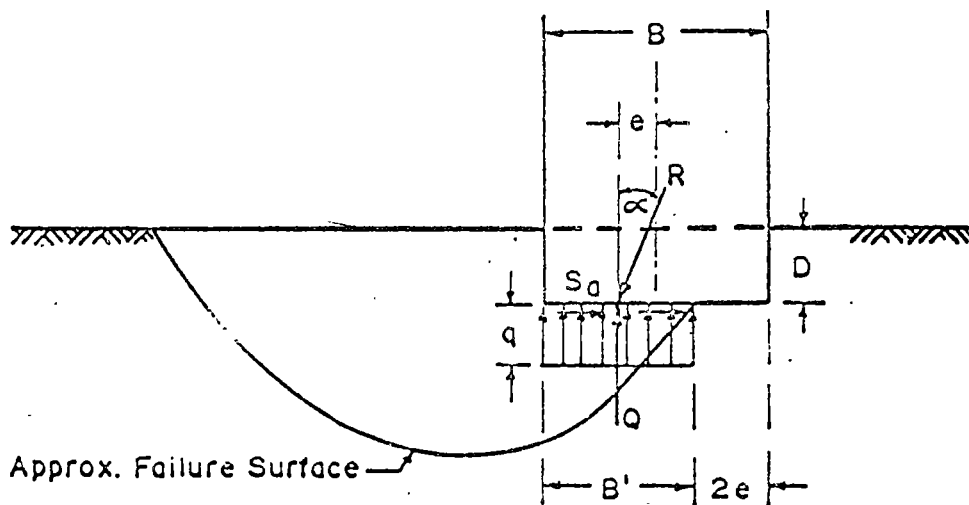


FIGURE 2. Base under Eccentric Inclined Load at Failure

foundation width  $B'$  is used in equation (1) and this width is twice the distance of the load from the toe of the foundation, i.e.

$$(6) \quad B' = B - 2e$$

Detailed model tests have shown that this procedure is on the safe side. The experimental effective width is between the above-mentioned value and the width estimated from the conventional contact pressure distribution (trapezium or triangle), which can be explained theoretically by more accurate failure zones (Hansen, 1955). For a double eccentricity of the load an effective contact area can be determined in such a way that its centre of gravity coin-

cides with the resultant of the load. In this connection a straight line of rotation across the base is required as the boundary of the effective contact area, but an approximate rectangular area of an effective width  $B'$  and effective length  $L'$  based on equation (6) in both directions is sufficiently accurate in practice.

The influence of inclined loads on the bearing capacity of spread foundations can readily be taken into account by using inclination factors, which have been deduced from more exact calculations (Schultze, 1952; Meyerhof, 1953a). In this connection the influence of the lateral soil resistance on foundations below the surface is particularly effective. For rough foundations the vertical component of the bearing capacity under a load inclined at an angle of  $\alpha$  with the vertical (Figure 2) can be approximated by the following inclination factors (Meyerhof, 1956b):

$$(7) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{and} \\ \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} i_c = i_q = (1 - \alpha/90^\circ)^2 \\ i_\gamma = (1 - \alpha/\phi)^2. \end{array}$$

The vertical component of the bearing capacity in the general case of eccentric inclined loads is, therefore, approximately,

$$(8) \quad q = Q/B'L' = d_c i_c c N_c + d_q i_q \gamma D N_q + d_\gamma i_\gamma \gamma B' N_\gamma \cdot \frac{1}{2}.$$

Model loading tests have shown that, as the inclination of the load increases, the bearing capacity of square foundations approaches that of strip foundations and the difference is negligible when failure occurs by sliding, as would be expected. Moreover, for a given inclination of the load an inclined foundation with a base normal to the resultant load gives a greater bearing capacity than a horizontal foundation (Meyerhof, 1953a), and inclined bases are therefore preferable for foundations of arch bridges. The theoretical relationships for the bearing capacity of inclined foundations are found to be similar to those for foundations located on the face of a slope or near the top edge of a slope (Meyerhof, 1957). The theory indicates that the bearing capacity of such foundations decreases with greater inclinations of the slope, especially for cohesionless soils, while for foundations on the top of clay slopes the bearing capacity decreases also considerably with greater height of the slope and is frequently governed by overall slope failure.

In order to resist an eccentric inclined load, the foundation will move and tilt sufficiently. At failure the necessary displacement in the direction of the load is approximately 5 to 20 per cent of the foundation width and the angle of rotation is about  $1^\circ$  to  $5^\circ$  according to the relative density or stiffness of the soil and the depth of the foundation. The influence of these relationships on the behaviour of structures is particularly important for statically indeterminate frames, bridges, and the lower storeys of multi-storey buildings. Model and full-scale tests on steel frames have given valuable indications and showed that the customary foundations can generally be considered as hinged bases and for fixity conditions either wide or deep foundations are required (Meyerhof, 1960b).

If the stiffness of the foundation is small in relation to the stiffness of the soil, then the problem of flexible elastic foundation slabs obtains; here calculation is difficult except under simple conditions. In practice one frequently

uses, therefore, a uniform contact pressure distribution or the method based on the modulus of subgrade reaction (Terzaghi, 1913). Recently the ultimate strength design has been extended to this case and a theory has been developed to estimate the load-bearing capacity of pavements and foundation slabs (Meyerhof, 1962a). In this way relatively simple solutions for the ultimate load under various loading conditions and slab sizes have been obtained. The proposed method can be used for both the assumption of a modulus of subgrade reaction and a modulus of deformation of the soil, and is confirmed by the results of loading tests on large slabs and model tests under concentrated loads.

#### PILE FOUNDATIONS

The bearing capacity of a single pile is the sum of point resistance and skin friction, both of which depend on the properties of the soil and the characteristics and method of installing the pile. Since the point resistance of vertical and inclined piles loaded in the direction of the pile is practically identical, equation (1) can be used if the bearing capacity factors include the limiting values of the depth factors, and the influence of the shape of the base and the compressibility of the soil (Meyerhof, 1959 and 1961a). For axially loaded single piles the ultimate bearing capacity is therefore, approximately,

$$(9) \quad Q = (cN_c' + \gamma DN_q')A_b + f_s A_s$$

where  $A_b$  = cross sectional area of base,

$A_s$  = surface area of shaft,

$f_s$  = unit skin friction, and other symbols as before.

The semi-empirical bearing capacity factors  $N_c'$  and  $N_q'$  for round or square driven piles with 60° points are shown in Figure 1. These factors apply only if the pile base is embedded in the load-bearing stratum near the base at least to a depth, which is, approximately

$$(10) \quad D = 4\sqrt{N_q'}B$$

In other cases the bearing capacity factors can be estimated by interpolating between the values for shallow foundations and piles roughly in direct proportion to the depth ratio  $D/B$ . If the soil properties vary near the base, the average values between about four times the pile diameter above the base and one pile diameter below the base should be used in cohesionless soils, while a somewhat smaller range is sufficient in clays, as indicated by the corresponding failure zone.

Although the skin friction in cohesionless soils is frequently neglected, it can be estimated for piles driven into sands by using an earth pressure coefficient of about 0.5 to 1.0 according to the relative density of the material (Meyerhof, 1951). The final value of the skin friction in clays after a few months, which governs the bearing capacity in practice, approximates the shearing strength for soft clays but hardly exceeds one-half of the shearing strength for stiff clays (Tomlinson, 1957) with an upper limit of about 1 ton/sq. ft. Detailed laboratory tests have shown (Meyerhof, 1962b) that the ratio of skin friction to shearing strength of soils depends mainly on the

type and roughness of the pile material, and this ratio is about 0.6 to 0.8 for steel, 0.7 to 0.9 for wood (parallel to the grain) and 0.8 to 1.0 for concrete.

For piles driven into cohesionless soils, static cone penetration tests are particularly suitable for an estimate of the bearing capacity, although for large pile diameters the point resistance is more in loose sand and less in dense sand than the cone resistance, which seems to be due to the volume changes associated with the deformation of the soil in the failure zone (Kerisel, 1961). A rough estimate of the bearing capacity of piles in such soils can also be obtained from the results of standard penetration tests (Meyerhof, 1956a).

More difficult is an estimate of the bearing capacity of piles which are not axially loaded. While a pile with transverse load can be designed similarly to a wall but with the additional soil resistance on the sides parallel to the load (Terzaghi, 1943), the bearing capacity of an obliquely loaded pile is between the transverse and longitudinal value. By the inclined loading the lateral earth pressure governing the skin friction is increased and the axial component of the bearing capacity governing the point resistance is reduced, as for a deep foundation. Hence the bearing capacity of batter piles is smaller if the load is more inclined than the batter of the pile, although the bearing capacity can be increased by fixity at the pile head, as shown by the results of tests in sand (Evans, 1954; Tschelotarioff, 1954). For the purpose of estimating the bearing capacity of such piles the relationships can conveniently be represented by polar bearing capacity diagrams (Meyerhof, 1960a).

Recent investigations of the group action of piles and ultimate bearing capacity of pile foundations have shown that two types of pile groups have to be distinguished, namely pile groups in which the caps or foundations rest on load-bearing soil (piled foundations) and pile groups with caps clear of the ground or with piles driven through soft strata into dense soil (free-standing pile groups).

A piled foundation (Figure 3) can be considered as a pier foundation with its base at the depth of the pile points, and the total bearing capacity is practically independent of the pile spacing. Although at present only model tests with a central vertical load on piled foundations in clay are available (Whitaker, 1960), some exploratory loading tests on vertical pile groups with a close pile spacing in sand (Kishida, 1962) indicate that similar conditions probably obtain generally for piled foundations in uniform soils. For a central load on such foundations with vertical piles at customary spacings up to about four or five pile diameters the total bearing capacity is thus the sum of the base resistance of the equivalent pier and the shearing strength of the soil along the perimeter of the group less the weight of the enclosed soil (Terzaghi and Peck, 1948).

For eccentric or inclined load the foundation tilts and the earth pressure on the sides of the group and the base shear should generally be taken into account (Figure 3). Exploratory loading tests on model piled foundations under vertical load with eccentricities up to one-half the width of the group indicate that the reduced vertical base resistance is offset by an increased skin friction. As a result the total bearing capacity of the group is practically unaffected by the eccentricity of the load, within the above experimental limit, and can be estimated as for piled foundations under a central load.

However, if the foundation width is of the same order of magnitude as the pile length, the lateral earth pressure is relatively small and can be neglected. The calculation is then similar to that of a spread foundation in which only compression piles are loaded and tension piles are ignored by using an effective base area (Meyerhof, 1960a). No loading tests to failure appear to have been made on piled foundations with inclined piles under various loading and soil conditions. An estimate of the bearing capacity can be made in a similar way as for groups with vertical piles but allowing for the horizontal component of the pile resistance, and an approximate procedure has been suggested before (Meyerhof, 1960a).

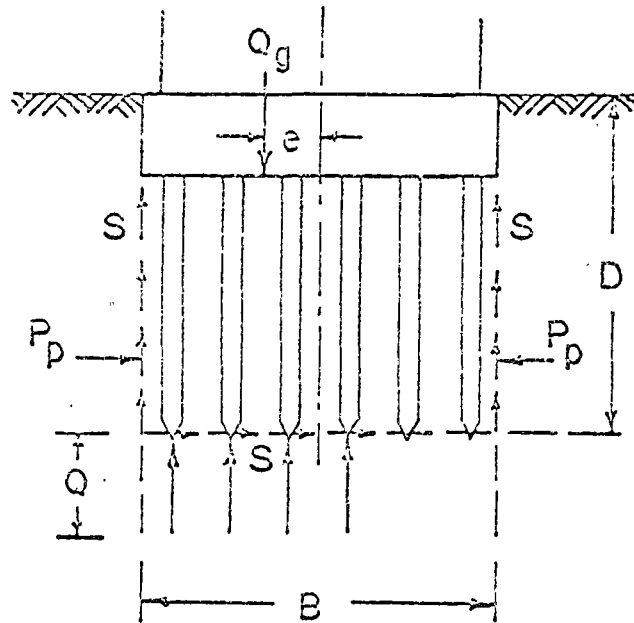


FIGURE 3. Piled Foundation at Failure

The total bearing capacity of a free-standing pile group (Figure 4) is the smaller amount of either the bearing capacity of an equivalent pier foundation or the sum of the bearing capacities of the individual piles. It is found that for a pile spacing of less than about two or three times the pile diameter the individual failure zones in the soil around the piles interact. This overlap produces soil arching between the piles and leads to pier action of the group so that its bearing capacity is the same as that of a piled foundation. For a greater pile spacing the individual action of the piles governs, although the deformation and any volume changes of the soil near the piles have to be considered in estimating the total bearing capacity.

Model tests on free-standing vertical pile groups in clay with central vertical load (Whitaker, 1957; Sowers and Martin, 1961) and with small eccentricities of the load (Saffery and Tate, 1961), which did not affect the total bearing capacity, showed that for a pile spacing of about two pile diameters the group capacity is only about two-thirds of the full bearing capacity reached at a spacing about seven or eight pile diameters (Figure 5). This difference

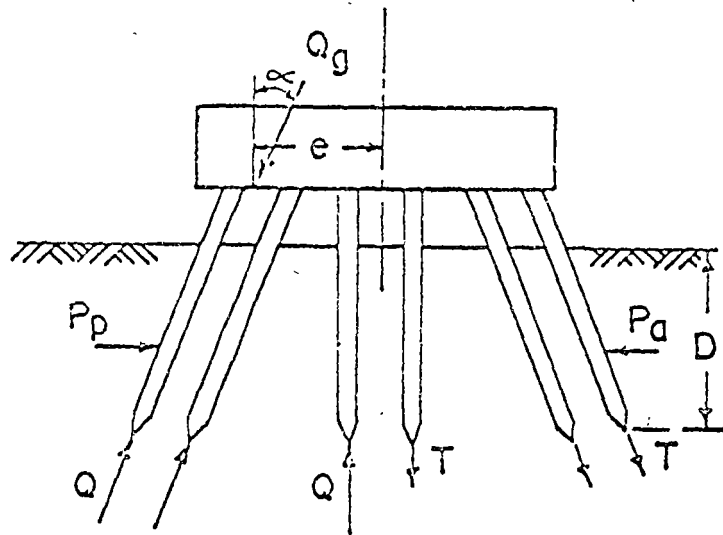


FIGURE 4. Free-Standing Pile Group at Failure

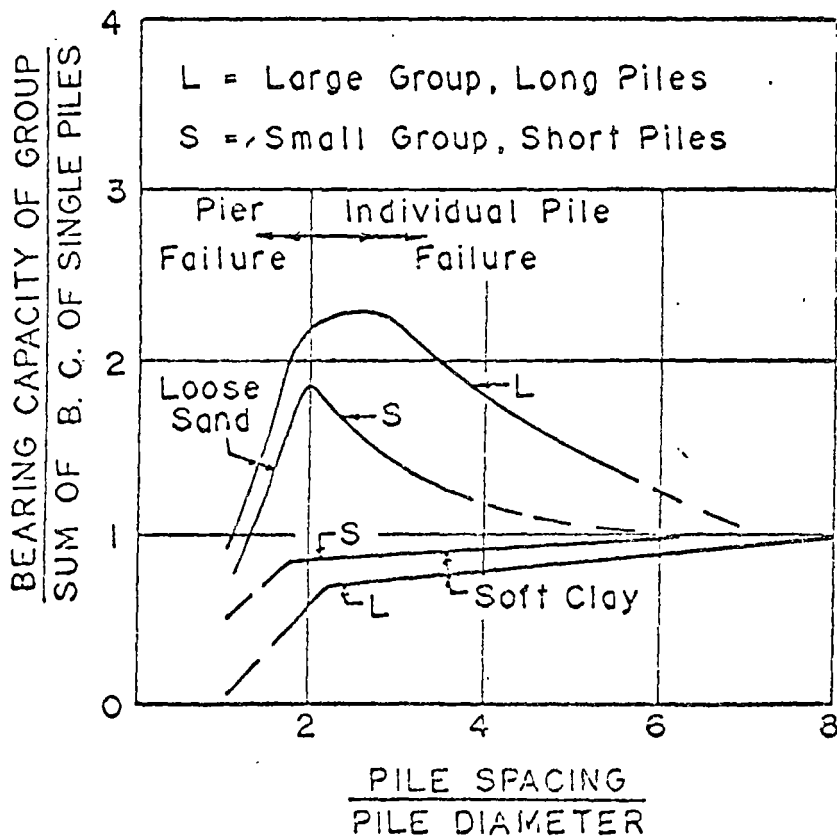


FIGURE 5. Typical Results of Model Tests on Free-Standing Pile Groups

can be explained by the overlapping of the individual zones of shearing deformation in the soil leading to local and progressive shearing failure at customary pile spacings, so that for a given spacing the bearing capacity per pile in a group decreases as the size of the group (number and length of piles) increases.

On the other hand, tests on free-standing model pile groups in loose sand (Kezdi, 1957; Stuart *et al.*, 1960) showed that for a pile spacing of about two pile diameters the total bearing capacity is more than twice the full bearing capacity, which is approached by about six or seven pile diameters (Figure 5). This result is supported by theoretical estimates of the compaction and deformation of loose sand by pile driving to which the effect of an overlapping of the individual soil failure zones has to be added at small pile spacings (Meyerhof, 1959). Thus it was found that for a given pile spacing the bearing capacity per pile in a free-standing group in loose sand increases as the size of the group increases.

In the absence of test results for eccentric and inclined loads the limited data on pile groups summarized above indicate that the bearing capacity of free-standing groups with a small pile spacing can be estimated as for an equivalent pier foundation. For a greater pile spacing, however, the total bearing capacity depends both on the compression and tension piles and on the lateral earth pressure (Figure 4) for which simple methods of analysis have recently been suggested for groups of vertical and inclined piles (Meyerhof, 1960a).

#### CONCLUSIONS

Although the ultimate bearing capacity of spread foundations can usually be estimated from customary theory and soil tests with sufficient accuracy, recent research has led to a better agreement with observations by improvements of both theory and soil testing. Thus, for strip foundations the theory should be used in conjunction with the shearing strength of the soil obtained from plane strain compression tests, while for circular or square foundations the results of triaxial compression tests apply. The influence of foundation shape and depth, the eccentricity and inclination of the load, the effect of ground-water conditions and sloping ground can readily be taken into account by recent extensions of bearing capacity theory. However, further research is required to deal with variable soil conditions.

The ultimate bearing capacity of single piles can be estimated theoretically for simple cases of loading and uniform soils. Eccentric and inclined loads and variable soil conditions do not yet permit accurate estimates. Moreover, for pile groups only limited information of the ultimate load is available at present from full-scale tests, although the results of model tests give some indication of their behaviour. These tests indicate that piled foundations can generally be treated as piers in practice, but further research is required for eccentric and inclined loads as well as variable soil conditions. More difficult is the problem of free-standing pile groups since the effect of overlapping zones of shearing deformation and volume changes of the soil in the field cannot be deduced from model tests and more full-scale observations are required.



DIRECTORIO DE ALUMNOS DEL CURSO : "PRIMER CURSO INTER  
NACIONAL SOBRE ESTRUCTURAS FUERA DE LA COSTA 4 AL 13  
DE SEPTIEMBRE DE 1978.

1. JUAN LUIS ABARCA RUIZ  
LUIS CABRERA 62 B  
CDA. SATELITE, EDO. DE MEX.  
TEL. 562.97.60  
GENERAL DE CONSTRUCCION S.A.  
SUPERINTENDENTE DE OBRAS  
LUCERNA 78-5°  
COL. JUAREZ  
MEXICO 6, D.F.  
TEL. 566.68.66
2. JOSE ALCANTARA BARRAGAN  
NONOALCO 45-L NO.706  
UNIDAD NONOALCO  
MEXICO 3, D.F.  
TE. 583.48.62  
PEMEX  
JEFE DE DEPARTAMENTO  
MARINA NACIONAL 329  
MEXICO 17, D.F.  
TEL. 250.43.33
3. RAUL ALVAREZ DELGADO  
INGENIERIA 18  
COL. INDUSTRIAL  
QUERETARO, QRO.  
TEL. 2.21.34 EXT.19  
INDUSTRIA DEL HIERRO S.A.  
JEFE DE DISEÑO DE ESTRUCTURAS  
METALICAS  
PARQUES INDUSTRIALES  
QUERETARO, QRO.
4. EDUARDO AMBROSI RODRIGUEZ  
ACUEDUCTOS Y URBANIZACIONES A.A.
5. ENRIQUE BAZAN ZURITA  
INSURGENTES SUR 4411 EDIF. 41 DEPTO.4  
COL. TLALPAN  
MEXICO 22, D.F.  
INSTITUTO DE INGENIERIA  
INVESTIGADOR ASOCIADO  
U.N.A.M.  
MEXICO 20, D.F.  
TEL. 548.97.94
6. JOSE LUIS CALDERON VAZQUEZ  
TLAPACOYA 29  
COL. ATLAMAYA  
MEXICO 20, D.F.  
TEL. 550.16.71  
PEMEX  
COORDINADOR PROYECTOS,  
GERENCIA SEG. INDUSTRIAL  
MARINA NAL. 329
7. MANUEL CARBALLO OMAÑA  
OIDORES 50  
COL. STA. CECILIA  
TLALNEPANTLA, EDO. DE MEX.  
TEL. 565.43.68  
PEMEX  
JEFE DEPTO. INC. EXPERIMENTAL  
MARINA NAL. 329  
MEXICO 17, D.F.  
TEL. 545.43.50

Sep. 13

8. GERMAN FAZ SALMON  
EDIFICIO 21 -B-307  
COL. IRRIGACION  
MEXICO 10, D. F.  
TEL. 557.38.36

DIRECCION GRAL. DE OBRAS  
MARITIMAS  
S. C.T.  
SUBJEFE DE ESTRUCTURAS  
INSURGENTES SUR 465-7°  
MEXICO, D. F.  
TEL. 564.51.01

9. RODOLFO FIGUEROA ARELLANO  
AV. UNIVERSIDAD 2016 EDIF.15-401  
COL. COPILCO-UNIVERSIDAD  
MEXICO 20, D. F.  
TEL. 548.50.05

PEMEX  
GERENCIA DE EXPLOTACION  
AYUDANTE TEC. DE LA SUBGERENCIA  
DE PRODUCCION Y TRANSPORTE  
MARINA NAL. 329  
MEXICO 17, D. F.  
TEL. 250.43.33

10. JOEL E. FUENTES CALDERON  
PEMEX  
ADMINISTRADOR DE PROYECTOS  
MARINA NAL. 329  
MEXICO 17, D. F.  
TEL. 531.63.63

11. VICENTE GAXIOLA SANTOS  
ANICETO ORTEGA 1310  
COL. DEL VAILE  
MEXICO 12, D. F.

GEOSISTEMAS S. A.  
GERENTE DEL AREA DE SERVICIOS  
ANICETO ORTEGA 1310  
MEXICO 12, D. F.  
TEL. 534.37.20

12. HUGO RENE GARDUÑO CONTRERAS  
CHIHUAHUA 169-2  
COL. ROMA  
MEXICO 7, D. F.  
TEL. 584.76.53

13. O. RUBEN GUERRA JIMENEZ  
MORENA 603  
COL. NARVARTE  
MEXICO, D. F.  
TEL. 523.68.68

INSTITUTO DE INGENIERIA  
INVESTIGADOR DE TIEMPO COMPLETO  
U. N. A. M.  
TEL. 548.97.94

14. HUMBERTO GOMEZ RUIZ  
INDIANA 218-9  
COL. NAPOLES  
MEXICO 18, D. F.  
TEL. 563.38.26

BOSNOR S. A. DE C. V.  
ING. DE PREPARACION Y CORTES  
CAROLINA 100-5°  
MEXICO 18, D. F.  
TEL. 598.11.63

15. ASENOR OFIR GONZALEZ M.  
PIE DE LA CUESTA 320-2  
COL. REFORMA IZTACCIHUATL  
MEXICO 13, D.F.  
TEL. 532.75.19
- ICATEC  
JEFE DE PROYECTOS  
GONZALEZ DE COSIO 24  
MEXICO 12, D.F.  
TEL. 536.57.41
16. JULIO M. GONZALEZ RUIZ
17. MARIO A. GUTIERREZ ESTRADA  
AV. RIO CHURUBUSCO 274 DEPTO. C-8  
COL. CARMEN, COYOACAN  
MEXICO 21, D.F.  
TEL. 544.59.13
- CENTRO DE CIENCIAS DEL MARY  
LIMNOLOGICA  
CATEDRATICO E INVESTIGADOR  
U.N.A.N.  
TEL. 550.52.15 EXT.4866
18. JAIME CAMARGO HERNANDEZ  
ANAXAGORAS 560  
MEXICO 12, D.F.  
TEL. 523.43.28
- INSTITUTO DE INGENIERIA  
INVESTIGADOR  
U.N.A.M.  
TEL. 548.97.95
19. LEOPOLDO JARDON OSORIO  
AGUASCALIENTES 402  
COL. GPE. VICTORIA  
TAMPICO, TAM.  
TE.2.99.79
- UNIVERSIDAD AUTONOMA DE TAMAULI-  
COORDINADOR PAS  
CENTRO UNIVERSITARIO DE  
TAMPICO, MADERO  
TAMPICO, TAM.  
TEL. 518.77 y 519.78
20. OSCAR H. LIZAN PEREZ  
AV. UNIVERSIDAD 2016 EDIF.4 DEPTO.302  
COL. COPILCO-UNIVERSIDAD  
MEXICO 20, D.F.
- PEMEX  
AYUDANTE TEC. SUBGERENCIA  
PRODUCCION Y TRANSPORTE  
MARINA NAL. 329  
MEXICO 17, D.F.  
TEL. 250.43.33
21. JORGE LOPEZ RIOS  
LICIA 4  
COL. GPE. TEPEYAC  
MEXICO 14, D.F.  
TEL. 517.55.54
- I.M. P.  
JEFE DEL DEPTO. DE ING. CIVIL  
CONCRETO  
AV. 100 MTS. NO.152  
MEXICO 14, D.F.  
TEL. 567.66.00 EXT.2314
- GILDA MEDINA VIDAURRI  
TENAYUCA 221-4  
MEXICO 13, D.F.  
TEL. 559.09.28
- DIRECCION GRAL. DE OBRAS  
MARITIMAS  
S.C.T.  
JEFE DEL DEPTO. DE DISEÑOS  
INSURGENTES SUR 465  
MEXICO, D.F. TEL.564.77.58

23. CLEMENTE MENDOZA CABREPA  
ANDADOR 20 DEL TEMOLUCO 1-1  
COL. ACUEDUCTO GPE.  
MEXICO 14, D.F.  
TEL. 392.24.72

CONSTRUCCIONES PROTEXA S.A.CV  
ANALISTA DE PRECIOS UNITARIOS  
CAMPOS ELISEOS 169-3  
COL. POLANCO  
MEXICO 5, D.F.  
TEL. 250.45.22

24. JUAN MERIDA DOMINGUEZ  
NORTE 72 "A" 5814  
COL. BONDOJITO  
MEXICO, D.F.  
TEL. 760.21.61

PEMEX  
ANALISTA DE PRECIOS UNITARIOS  
MARINA NAL. 329  
MEXICO 17, D.F.  
TEL. 250.55.91

25. ALFONSO MIRANDA JUAREZ  
AURELIANO RIVERA 36-4  
COL. TIZAPAN  
MEXICO 20, D.F.

SERV. PROF. DE ING. Y ARQ. S.C.  
DIRECTOR GENERAL  
TONALA 239  
MEXICO 7, D.F.  
TEL. 584.47.77

26. JORGE A. MORALES CASTRO  
RICARDO FLORES MAGON 265 B-303  
NONOALCO TLALTELOLCO  
MEXICO 3, D.F.  
TEL. 583.13.55

PEMEX  
SUBJEFE CONTROL DE OBRA  
T.S.N.G.  
MARINA NAL. 329  
MEXICO 17, D.F.  
TEL. 531.65.00

27. MAURICIO NANES  
TOLSTOI 22  
BUFETE INDUSTRIAL  
JEFE DE SECCION  
MEXICO 5, D.F.  
TEL. 533.15.00

28. JOSE LUIS OLIVARES COVARRUBIAS  
GUANAJUATO 163 P.B.  
COL. ROMA SUR  
MEXICO 7, D.F.  
TEL. 584.41.88

FABRICACIONES INGENIERIA Y  
MONTAJES S.A.  
JEFE DE PRESUPUESTOS Y CONTRA  
CION  
GUANAJUATO 163  
MEXICO, D.F.  
TEL. 379.25.04

9. ENRIQUE PASTA MUÑUZURI  
AV. REVOLUCION 1546 DEPTO. 5  
MEXICO 20, D.F.  
TEL. 550.76.18
- CONSTRUCCIONES PROTEXA S.A.  
SUPERINTENDENCIA DE ING. CIVIL  
CAMPOS ELISEOS 169  
MEXICO 5, D.F.
30. GUILLERMO PEREZ SOLIS  
TRAMONTO 33  
COL. PASTORES  
NAUCALPAN, EDO. DE MEX.  
TEL. 373.04.45
- PEMEX  
COORDINADOR A GERENCIA DE RAMA  
MARINA NAL. 329  
MEXICO 17, D.F.  
TEL. 545.74.60
31. MANUEL RETA PETTERSON  
BUFETE INDUSTRIAL  
DIRECTOR DE CONSTRUCCION  
TOLSTOI 22  
MEXICO, D.F.  
TEL. 533.18.20
32. ALEJANDRO REYES GONZALEZ  
OLIVO 102  
COL. FLORIDA  
MEXICO 20, D.F.  
TEL. 534.42.00
- INSTITUTO DE INGENIERIA  
INVESTIGADOR  
U.N.A.M.  
TEL. 548.65.60 EXT.452
33. LEONEL RIOS CEGUEDA  
RECIFE 637 BIS  
COL. LINDAVISTA  
MEXICO 14, D.F.  
TEL. 586.30.00
34. MARIO RODRIGUEZ DE LA GALA VELAZQUEZ  
PACATAS 415  
COL. NARVARTE  
MEXICO 12, D.F.  
TEL. 536.03.01
- PEMEX  
SUPT. GRAL. OBRAS PORTUARIAS  
Y DRAGADO  
MARINA NAL. 329  
MEXICO 17, D.F.  
TEL. 531.62.50
35. CARLOS F. SALINAS FALERO  
RETORNO 206 No.47  
COL. UNIDAD MODELO  
MEXICO 13, D.F.  
TEL. 581.34.39
- ICATEC S.A. CONSULTORES  
GERENTE DE PROYECTO  
GONZALEZ DE COSIO NO.24  
MEXICO 12, D.F.  
TEL. 536.85.60

36. LUIS SALASTORREA  
SN. FCO. 338-401  
COL. DEL VALLE  
MEXICO 12, D.F.  
TEL. 536.59.57

DIR. GRAL. DE SEÑALAMIENTO  
MARITIMO  
S.C.T.  
SUBDIRECTOR GENERAL  
EUGENIA 197-4°  
MEXICO 13, D.F.  
TEL. 579.24.13

37. ENRIQUE SALDAÑA TOULET  
CALLE CONVENTO SN. LORENZO 8  
JARDINES DE STA. MONICA  
TLALNEPANTLA, EDO. DE MEX.  
TEL. 397.16.68

BUFETE INDUSTRIAL DISEÑOS Y  
PROYECTOS S.A.  
JEFE DE SECCION  
TOLSTOI 22  
MEXICO, D.F.  
TEL. 533.15.00 EXT. 274

38. SERGIO TIRADO LEDESMA  
LAS HUERTAS 96-505  
COL. DEL VALLE  
MEXICO 12, D.F.  
TEL. 524.96.44

D. E. S. F. I.  
PROFESOR DE ASIGNATURA .A.  
U.N.A.M.  
TEL. 550.52.15 EXT.4493

39. OSCAR ZERON ESPINOSA  
EDIF. 31 B INT.103  
COL. LOMAS DE SOTELO  
MEXICO, D.F.  
TEL. 557.03.07

SECRETARIA DE PROG. Y PRES.  
ASESOR TECNICO  
F. S. T. DE MIER 77  
MEXICO 1, D.F.  
TEL.

40. ING. JAVIER HERNANDEZ ALVIRDE  
Arcadio Henkel 241  
Col. Morelos  
Toluca, México  
Tel: 5-94-81

DEPARTAMENTO DE PESCA  
Alvaro Obregón 269-5o. Piso  
Col. Roma  
México 7, D. F.  
Tel: 5-11-14-14