

IV CURSO INTERNACIONAL DE INGENIERIA SISMICA
 ESTRUCTURAS ESPECIALES
 (del 25 de julio al 17 de agosto, 1978)

FECHA	HORARIO	TEMA	PROFESOR
25 de julio	17 a 20 h	Presas y Taludes.	DR. DANIEL RESENDIZ N.
27 de julio	17 a 20 h	Puentes	DR. PORFIRIO BALLESTEROS B.
1º de agosto	17 a 20 h	Tanques y Tuberías	PROFR. ARTURO ARIAS
3 de agosto	17 a 20:10	Torres y chimeneas. Cimentaciones: Introducción. Vibraciones verticales, horizontales y de cabeceo en cimentaciones.	DR. LUIS ESTEVA MARABOTO
8 de agosto	17 a 18:30 h	Interacción dinámica suelo estructura	DR. LUIS ESTEVA MARABOTO
	18:40 a 20:10 h	Determinación experimental de las propiedades dinámicas de los suelos. Variación del módulo de cortante con el nivel de deformación.	M. en I. ABRAHAM DIAZ R.
10 de agosto	17 a 18:30 h	Prospección sísmica	B. MARTINEZ
	18:40 a 20:10	Criterios de diseño sísmico de cimentaciones	DR. LEONARDO ZEEVAERT W.
15 y 17 de agosto	17 a 20 h cada día	Cascarones	DR. PORFIRIO BALLESTEROS
		CLAUSURA	

DIRECTORIO DE PROFESORES
DISEÑO SISMICO DE ESTRUCTURAS ESPECIALES

1978

PROFR. ARTURO ARIAS SUAREZ
INVESTIGADOR DE TIEMPO COMPLETO "B"
INSTITUTO DE INGENIERIA, UNAM
CIUDAD UNIVERSITARIA
MEXICO 20, D.F.
TEL: 548. 54.79

DR. PORFIRIO BALLESTEROS BAROCIO
JEFE DE LA SECCION DE
MECANICA TEORICA Y APLICADA
DIVISION DE ESTUDIOS SUPERIORES
FACULTAD DE INGENIERIA, UNAM
CIUDAD UNIVERSITARIA
MEXICO 20, D.F.
TEL: 550. 52. 15 ext. 4498

DR. LUIS ESTEVA MARABOTO
INVESTIGADOR
INSTITUTO DE INGENIERIA, UNAM
CIUDAD UNIVERSITARIA
MEXICO 20, D.F.
TEL: 548. 97. 94

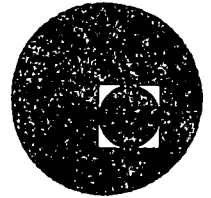
M. EN I. ABRAHAM DIAZ RODRIGUEZ
JEFE DE LA SECCION DE MECANICA DE SUELOS
DIVISION DE ESTUDIOS SUPERIORES
FACULTAD DE INGENIERIA, UNAM
CIUDAD UNIVERSITARIA
MEXICO 20, D.F.
TEL: 550. 52. 15 ext. 4490

DR. DANIEL RESENDIZ NUÑEZ
DIRECTOR
INSTITUTO DE INGENIERIA, UNAM
CIUDAD UNIVERSITARIA
MEXICO 20, DF.
TEL: 548.30. 44

DR. LEONARDO ZEEVAERT WIECHERS
PROFESOR
SECCION DE MECANICA DE SUELOS
D.E.S.F.I., UNAM
CIUDAD UNIVER SITARIA
MEXICO 20, D.F.
TEL: 550. 52. 15 ext. 4490



centro de educación continua
división de estudios superiores
facultad de ingeniería, unam



IV CURSO INTERNACIONAL DE INGENIERIA SISMICA

DISEÑO SISMICO DE ESTRUCTURAS ESPECIALES

PUENTES

M. EN I. VICTOR PAVON

DR. PORFIRIO BALLESTEROS

JULIO, 1978.

CURSO DE DISEÑO SISMICO DE ESTRUCTURAS ESPECIALES
P U E N T E S

Julio 27 de 1978.

M. en I. Víctor M. Pavón R.

INTRODUCCION:

A raíz del temblor de San Fernando en 1971, una extensa revisión a los criterios de diseño de puentes ha sido puesta en práctica. En el Japón, sitio de frecuentes y catastróficos sismos, el colapso de estructuras de puentes ha sido también objeto de profunda preocupación.

Es bien sabido, que la falla de la estructura de un puente, además del número de víctimas, en el caso de vehículos que en el momento del colapso total caigan al vacío, se agregan el costo de reposición de una estructura en sí costosa y lo que es peor, los trastornos ocasionados a la economía de una región por la falta de comunicación y transporte, muchas veces de elementos vitales para el auxilio de los afectados por el sismo, en los días inmediatamente después de la ocurrencia del mismo y a largo plazo mientras se repone o repara a la estructura destruída o dañada.

En lo que sigue, se pretende proporcionar algunos lineamientos un tanto someros, por las restricciones de tiempo, de algunos criterios para el establecimiento de las fuerzas, así como del análisis estructural, una vez establecidas éstas en una estructura de puente. Se proporcionan asimismo, recomendaciones para suministrar ductilidad tanto en la superestructura como en los elementos de apoyo y se sugieren algunos detalles constructivos que los expertos en ingeniería de puentes en zonas sísmicas consideran que pueden ser la diferencia entre la supervivencia y la falla catastrófica de una estructura de puente.

En la construcción de puentes, es necesario considerar dos aspectos, a saber: los elementos de apoyo o infraestructura y la cubierta o superestructura. Por tal motivo se fijan las diferencias fundamentales en el análisis de cada una de estos aspectos. Resulta indispensable recalcar que en un puente, las aceleraciones debidas a un sismo, pueden presentarse longitudinalmente al eje del puente, así como transversal y verticalmente.

Puesto que el estudio de las vibraciones en puentes soportados por cables, ya sea dispuestos parabólicamente o en forma recta, representa un capítulo muy especializado en la ingeniería de puentes, no se cubren en esta presentación.

I.- ESPECIFICACIONES PARA PUENTES EN ZONAS SISMICAS.-

CALIFORNIA. La práctica Californiana está basada en los códigos del U.B.C. y la Asociación de Ingenieros Estructuristas de ese estado norteamericano.

Para fijar el cortante en la base de la estructura, se propone la ecuación siguiente:

$$V = KCW \quad (1.1)$$

en que:

K = Coeficiente que relaciona el tipo de sistema estructural empleado.

C = Coeficiente relacionado en el espectro de aceleraciones del temblor.

W = Carga muerta.

El coeficiente K es un modificador empírico que se relaciona con los diferentes tipos de construcción y a la experiencia de temblores previos. En un temblor intenso se supone que la estructura excederá su capacidad elástica y este factor intenta definir la capacidad del sistema para absorber energía sin perder su integridad estructural.

El Código recomienda un factor de $K = 2.00$ para estructuras de puentes. The California Division of Highways ha empleado los factores K para modificar los coeficientes laterales basándose de la relación altura/espesor de la pila. Por ejemplo, si la pila es corta y rígida se le da un coeficiente $K = 1.33$.

El coeficiente $C = \frac{0.05}{\sqrt[3]{T}}$; T = período fundamental, A C se le da un valor máximo de 0.10 o sea 10% de g.

T se define mediante ecuaciones simplificadas que no son en general aplicables a las estructuras para puentes.

Tanto la California Division of Highways como el Washington Department of Highways utiliza el mismo procedimiento para determinar el período natural de la estructura. Supone que ésta consiste de un sistema de 1 grado de libertad, esto es; que cada pila actúa independientemente y que tiene la carga tributaria total aplicada en la parte superior de la columna. Ninguno de estos procedimientos toma en cuenta la rigidez de la cubierta. Si bien, el error normalmente de poco cuantía, yerra del lado de la inseguridad.

En Marzo de 1971 después del temblor de San Fernando, C.D.H. incrementó el coeficiente C por un factor de 2.00 para estructuras soportadas por zapatas aisladas y un factor de 2.50 para las apoyadas en zapatas.

El UBC ha incorporado el coeficiente en la ecuación (1) que toma en cuenta el riesgo sísmico de la localidad dada.

En Abril de 1971, el Washington Department of Highways adoptó un nuevo criterio

de análisis sísmico. En Washington no utilizan el coeficiente K , pero permite que C tenga un valor máximo de 0.133. Adoptaron asimismo, un coeficiente de $Z=2$ al oeste de Cascada Range. Consecuentemente California y Washington diseñan ahora para los mismos niveles de aceleración en regiones de gran actividad sísmica.

El reglamento tiene deficiencias pues no considera aceleraciones verticales, que se han llegado a registrar hasta $2/3$ del nivel de la aceleración horizontal, pero lo que es más importante, no toman en cuenta la influencia del suelo subyacente para fijar el coeficiente C , a diferencia de los japoneses como veremos posteriormente.

En Marzo de 1971 C.D.H., especificó que todas las conexiones se diseñen para una fuerza sísmica del 25% de la carga muerta.

JAPON.

Especificaciones Japonesas Para Puentes Carreteros Con Claros Menores a los 200 Metros.

Las especificaciones básicamente implican métodos de coeficientes sísmicos y proporcionan dos métodos para determinar esos coeficientes sísmicos. Uno es el método convencional del coeficiente sísmico que se aplica al diseño de estructuras relativamente rígidas. El otro, es el método del coeficiente sísmico que considera la respuesta estructural que se aplica al diseño de estructuras relativamente flexibles.

Los puntos principales de las especificaciones son como sigue:

a) El coeficiente sísmico horizontal de diseño para una estructura rígida se determina sistemáticamente, dependiendo de la localización geográfica del sitio donde se ubica el puente, las condiciones del suelo en cada uno de los sitios de la subestructura y la importancia del puente. El coeficiente horizontal de diseño para una estructura flexible se determina dependiendo del período fundamental de cada sistema estructural.

a) En el método del coeficiente sísmico que se emplea para estructuras relativamente rígidas; el coeficiente horizontal de diseño sísmico (k_h) se determinará mediante:

$$k_h = v_1 v_2 v_3 k_0 \quad (2)$$

en que:

k_h .- Coeficiente horizontal de diseño sísmico.

k_0 .- Coeficiente horizontal estándar de diseño sísmico = 0.2

v_1 .- Factor sísmico de zona.

v_2 .- Factor de las condiciones del terreno.

v_3 .- Factor de importancia.

Los valores de v_1 , v_2 y v_3 se muestran en las tablas 1, 2, y 3 respectivamente. Se tomará un valor mínimo de $k_h = 0.10$

Tabla 1 FACTOR SISMICO DE ZONA v_1 PARA PUENTES CARRETEROS.

Zona	Valor de v_1
A	1.00
B	0.85
C	0.70

Las zonas A, B y C es una clasificación dada en el archipiélago Japonés, y en la que burdamente corresponde la zona A a la región oriente, la zona B a la poniente y la C a fracciones al norte de la Isla Hokkaido y al sur poniente de Kyushu.

Table 2 FACTOR DE LAS CONDICIONES DEL TERRENO PARA PUENTES CARRETEROS.

Grupo	Definiciones (1)	Valor de v_2
1	(1) Suelo de la era Terciaria o más antiguo (que en lo sucesivo se define como roca) (2) Estrato Diluvial (2) con un espesor menor a 10 m. sobre la roca.	0.9
2	(1) Estrato Diluvial (2) con un espesor mayor a 10m. sobre la roca. (2) Estrato Aluvial (3) con un espesor menor a 10 m. sobre la roca.	1.0
3	Estrato Aluvial (3) con espesor menor a 25 m., que contiene un manto suave (4) de espesor menor a 5 metros.	1.1
4	Otros	1.2

Notas. (1) Puesto que estas definiciones no son muy inteligibles, la clasificación de las condiciones del terreno, se hará considerando adecuadamente el sitio del puente.

La profundidad del manto indicado se mide a partir de la superficie real del terreno.

- (2) Un Estrato Diluvial implica un estrato Aluvial denso tal como un estrato arenoso denso, estrato de grava, o de cantos rodados.
- (3) Un estrato Aluvial implica un nuevo manto sedimentario formado por un deslizamiento de tierra.
- (4) El estrato Suave se define como "Estrato de suelo cuya capacidad de soporte se desprecia en Diseño Sísmico".

Tabla 3 FACTOR DE IMPORTANCIA v_3 PARA PUENTES CARRETEROS.

Grupo	Definiciones	Valor de v_3
1	Puentes sobre autopistas (carreteras de acceso limitado) carreteras nacionales en general y carreteras principales de prefecturas. Puentes importantes en carreteras de prefecturas generales y municipales.	1.0
2	Otros	0.8

Nota: El valor de v_3 podrá incrementarse hasta 1.25 para casos especiales en el Grupo 1.

b) En el método del coeficiente sísmico modificado que considera la respuesta estructural que se emplea para estructuras relativamente flexibles; tales como puentes con pilas de altura mayor a 25 m. con un período fundamental mayor de 0.5 segundos, el coeficiente horizontal de diseño sísmico K_{hm} resulta igual a:

$$k_{hm} = \beta k_h \quad (3)$$

en que:

k_{hm} .- Coeficiente horizontal de diseño sísmico en el método del método modificado de coeficiente sísmico que toma en cuenta la respuesta estructural.

k_h .- Coeficiente dado por la ecuación (2)

β .- Factor que depende del período fundamental del puente y que se obtiene de la figura (1).

Para aquellas estructuras cuyos períodos fundamentales son menores a 0.5 segundos, β se puede tomar igual a 1.0.

El valor mínimo de k_{hm} será igual a 0.05

- (2) El coeficiente vertical de diseño sísmico, puede en general considerarse igual a cero, excepto para porciones especiales tales como apoyos.

- (3) El coeficiente horizontal de diseño sísmico para partes de la estructura, suelos y aguas bajo la superficie del terreno, puede considerarse igual a cero.
- (4) Las especificaciones establecen las presiones hidrodinámicas durante sismos. En especificaciones relacionadas, se establecen las presiones de tierra durante sismos.
- (5) Se da una atención específica a los estratos de suelos muy suaves y estratos de suelos vulnerables a la licuación durante los sismos. En el diseño, se desprecian las capacidades de carga de estos estratos, con objeto de asegurar una alta resistencia asísmica para las estructuras construidas sobre estos estratos.
- (6) Se debe dar también una atención especial al diseño de los detalles estructurales, tomando en consideración, el daño previamente experimentado de las estructuras de puentes. Para este propósito, se prescriben estipulaciones especiales tanto para los apoyos, como para dispositivos para evitar la caída de las traveses de puentes.
- (7) Se permiten incrementos en los esfuerzos permisibles de los materiales en el diseño de estructuras resistentes a sismos, las magnitudes de los incrementos de varios materiales se establecen en las especificaciones relacionadas. Los porcentajes de incrementos son como sigue:

Concreto en estructuras de concreto reforzado	50%
Refuerzo de estructuras de concreto reforzado	50%
Acero estructural para las superestructuras	70%
Acero estructural para subestructuras	50%
Concreto en estructuras de concreto prefabricado sometido a fuerzas de compresión.	65%
Suelos para cimentación.	50%

FUERZAS SISMICAS DE AASHTO 1973.

Esfuerzos Debidos a los Sismos.-

En las regiones en que se presume la ocurrencia de temblores, se tomarán provisiones para incluir las fuerzas laterales de temblores, como sigue:

$$EQ = CD$$

en que:

EQ = Fuerza lateral aplicada horizontalmente en una dirección cualquiera, en el centro de gravedad del peso de la estructura.

D = Carga muerta de la Estructura.

C = 0.02 para estructuras cimentadas en dos zapatas aisladas, en material que soporta 40 Ton/m².

= 0.04 para estructuras cimentadas en zapatas aisladas en material que soporta menos de 40 ton/m².

= 0.06 para estructuras cimentadas en pilotos.

Puede despreciarse la carga viva.

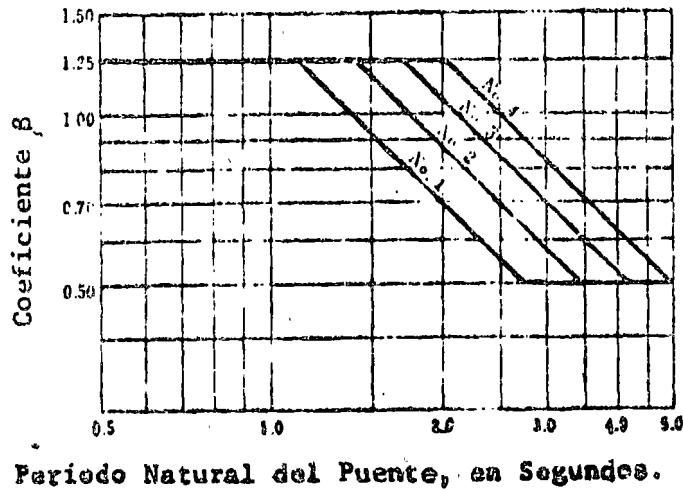


Figura 1.- COEFICIENTE DE RESPUESTA DINAMICA.

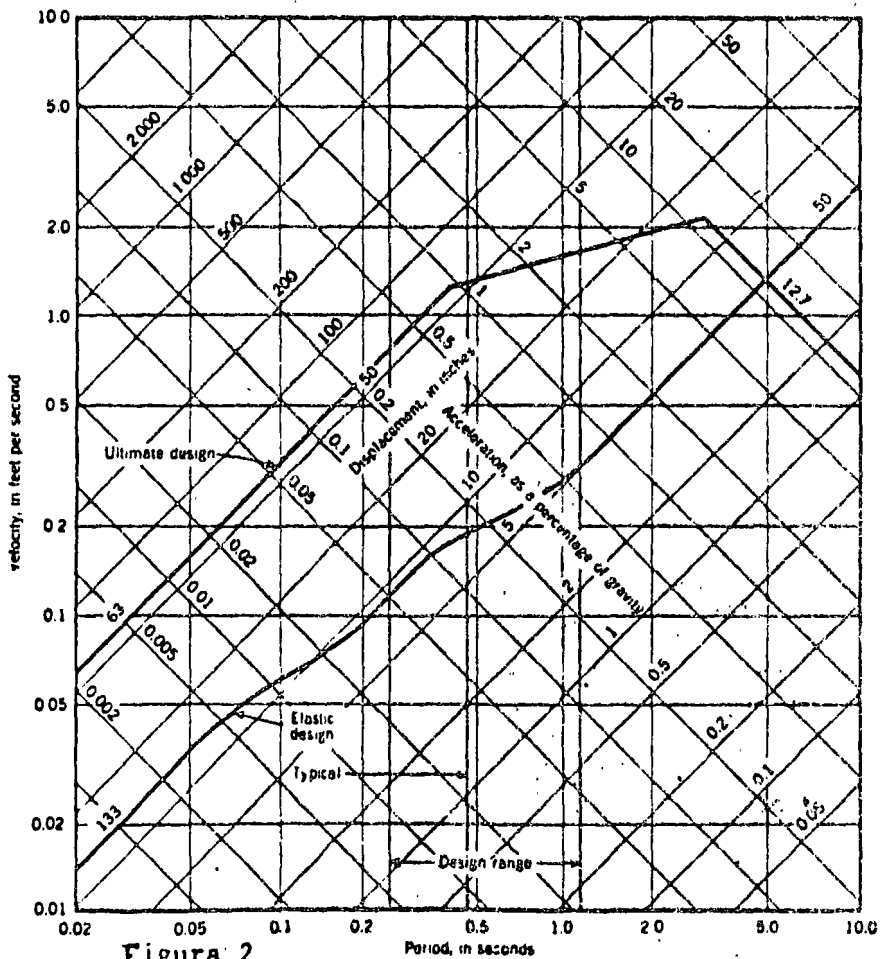


Figura 2

-AERIAL STRUCTURE RESPONSE SPECTRA FOR EARTHQUAKE DESIGN

II.- VIBRACIONES EN VIGAS.

Supóngase la viga esbelta y elástica, que se muestra en la figura 2.1 y cuya sección transversal puede ser variable a lo largo de ella, de tal forma que su masa varía también por unidad de longitud. Esto es, la masa y la rigidez pueden representarse como $m(x)$ y $EI(x)$ respectivamente.

La carga que actúa sobre la estructura es de tal naturaleza, que varía de sección en sección en cualquier instante y su intensidad en una sección dada, asimismo varía con el tiempo. Esta carga se puede representar por $w(x,t)$.

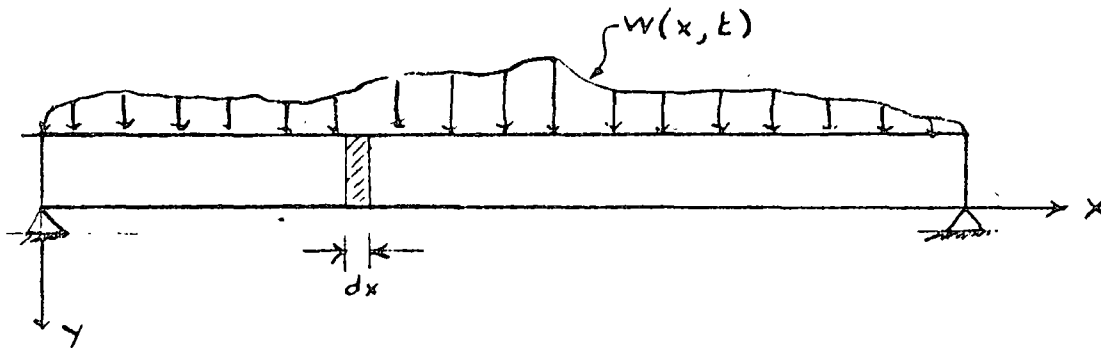


Figura 2.1

El movimiento en la viga que resulta de la aplicación de la carga, da lugar a fuerzas cortantes, $V(x,t)$; momentos flexionantes, $M(x,t)$; deflexiones $Y(x,t)$; velocidades, $\partial y/\partial t$ y aceleraciones $\partial^2 y/\partial t^2$.

Considerando un diagrama del cuerpo libre de un elemento dx , en la figura 2.2, se tiene la siguiente ecuación del equilibrio de las fuerzas a la dirección vertical:

Por la 2a. ley de Newton,

$$\Sigma F_y = m \, dx \, \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \quad (2.1)$$

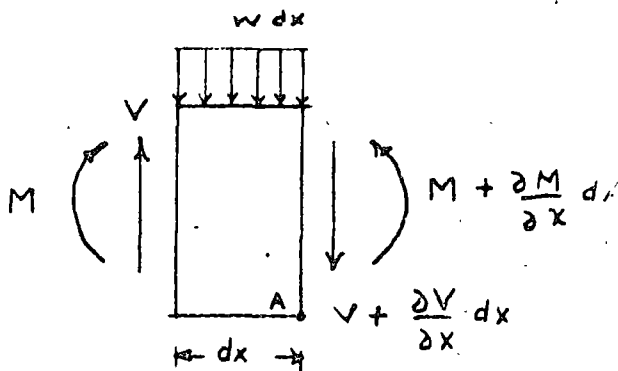


Figura 2.2

en que mdx es la masa total del elemento de longitud dx . Si ahora se substituyen las fuerzas verticales que aparecen en la figura 2.2 en el miembro de la izquierda de la ecuación (2.1), obtenemos:

$$wdx + V + \frac{\partial V}{\partial x} dx - V = mdx \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \quad (2.2)$$

simplificando:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - w \quad (2.3)$$

En las ecuaciones (2.2) y (2.3) se ha tomado como positiva la dirección hacia abajo del eje Y.

Si suponemos que la aplicación de las cargas es gradual, de tal manera que las fuerzas de inercia sean despreciables, la suma de momentos respecto a un punto A del elemento, resulta:

$$Vdx - wdx \frac{dx}{2} + M - M - \frac{\partial M}{\partial x} dx = 0 \quad (2.4)$$

De esta expresión puede despreciarse por ser de orden superior, al término que contiene a w . Consecuentemente, (2.4) queda:

$$V = \frac{\partial M}{\partial x} \quad (2.5)$$

De (2.3) y (2.5) se obtiene:

$$\frac{\partial^2 M}{\partial x^2} = m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - w \quad (2.6)$$

Obsérvese en (2.6) que si tratase de un problema estático, obtendríamos la expresión conocida:

$$\frac{d^2 M}{dx^2} = - w \quad (2.7)$$

Asimismo (2.6) ha sido desarrollada con la sola inclusión de las ecuaciones de equilibrio de fuerzas y momentos y es válida independientemente de la naturaleza del material de la viga, con tal de que dicho material tenga una distribución continua de su masa.

Se intentará enseguida, expresar el momento flexionante en una sección, en términos de la deflexión.

El esfuerzo normal en una fibra cualquiera, está dado por la fórmula conocida de la " escuadría ".

$$\sigma = \frac{M \cdot c}{I} \quad (2.8)$$

en que M, es el momento flexionante, que se considera positivo cuando provoca compresiones en las fibras superiores de la viga; I es el momento de inercia de la sección transversal y c es la distancia vertical entre el centroide de la sección y la fibra donde interesa valuar σ . La distancia c se considera positiva si se mide hacia abajo.

Considérese una fibra de la viga, localizada abajo del eje centroidal. Cuando una fibra se encuentra abajo del eje neutro y el momento aplicado es positivo, esas fibras interiores se alargan y las superiores se acortan.

Si la longitud del elemento diferencial en consideración, es dx para un momento positivo, el extremo izquierdo del elemento se desplazará u, y el lado derecho u + du, por lo que es cambio neto de longitud será du. La deformación unitaria vale por lo consiguiente du/dx, por definición, ya que du es la deformación total y dx es la longitud original. Véase la figura 2.3.

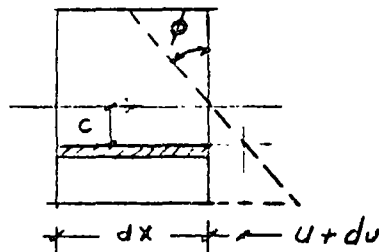


Figura 2.3

Sin embargo, puesto que el momento que da lugar a las deformaciones varía con el tiempo como ya se ha asentado, la deformación misma también variará con el tiempo, y por lo tanto, la deformación unitaria debe representarse como una derivada parcial respecto a x :

$$\epsilon = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (2.9)$$

De conformidad con la convención de signos adoptada, obsérvese que la pendiente $\partial y / \partial x$ resulta positiva cuando la sección gira en el sentido del reloj y como consecuencia de un momento negativo.

En la figura 2.3 se observa que un momento positivo da lugar a una pendiente de magnitud:

$$\tan \phi = - \frac{u+du}{c} \approx - \frac{u}{c} \quad (2.10)$$

Para ángulos pequeños:

$$\tan \phi = \phi \quad (2.11)$$

La pendiente de la elástica será para el mismo momento:

$$\tan \phi = \frac{\partial y}{\partial x} \quad (2.12)$$

Combinando (2.10), (2.11) y (2.12), se obtiene:

$$u = -c \frac{\partial y}{\partial x} \quad (2.13)$$

Derivando (2.13) respecto a x; se obtiene de (2.9)

$$\frac{\partial y}{\partial x} = -c \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \epsilon \quad (2.14)$$

Los materiales que cumplen con la ley de Hooke, son aquellos que tienen un comportamiento elástico y entonces:

$$\sigma = \epsilon E \quad (2.15)$$

o sea que, de (2.8), (2.14) y (2.15), se puede obtener:

$$\sigma = -c \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} E$$

y

$$\sigma = \frac{Mc}{I}$$

De (2. 8)

finalmente:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = - \frac{M}{EI} \quad (2.16)$$

Si utilizamos ahora (2.6) obtenemos finalmente la ecuación fundamental elástica de una viga esbelta.

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EI \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right) + \frac{m \partial^2 y}{\partial t^2} = w \quad (2.17)$$

Si no existen cargas exteriores, (2.17) simplemente se transforma a:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EI \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right) + \frac{m \partial^2 y}{\partial t^2} = 0 \quad (2.18)$$

Todavía más: si la viga fuese de sección uniforme en toda su longitud, conservándose constante E e I, se tiene:

$$\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \frac{m}{EI} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0 \quad (2.19)$$

Esta es una ecuación en derivadas parciales con las siguientes características: es lineal, de 4o orden y coeficientes constantes.

Se buscan soluciones para la ecuación (2.18), de la forma:

$$y = Xq \quad (2.20)$$

donde X es función solamente de x y se le designa como "función de forma" para la viga, en tanto que q es función del tiempo solamente y se le llama "función de tiempo" de la viga.

Substituyendo (2.20) (2.19), se obtiene:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EI \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} \right) + mX \ddot{q} = 0 \quad (2.21)$$

en que \ddot{q} representa la 2a derivada de q respecto a t, y

$$\frac{\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EI \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} \right)}{m X} = - \frac{\ddot{q}}{q} \quad (2.22)$$

puesto que el miembro de la izquierda depende sólo de x, en tanto que el de la derecha depende sólo de t y como ambos miembros son iguales, tal hecho sólo puede cumplirse si ambos son iguales a la misma constante, que elegimos sea p^2 . De esta manera podemos igualar ambos miembros a p^2 y desacoplar las ecuaciones; quedando:

$$\ddot{q} + p^2 q = 0 \quad (2.23)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EI X'' \right) - mp^2 X = 0 \quad (2.24)$$

en el caso de la ecuación (2.19), con EI constante, (2.24) se transforma en:

$$EIX^{IV} - mp^2x = 0 \quad (2.25)$$

Es conveniente introducir la siguiente notación:

$$\beta = \sqrt[4]{\frac{mp^2}{EI}} \quad (2.26)$$

y escribir:

$$X^{IV} - \beta^4 X = 0 \quad (2.27)$$

en que β es el llamado parámetro de forma y p es la frecuencia circular.

La solución de (2.27) contiene cuatro constantes arbitrarias de integración, ya que la ecuación es de cuarto orden en x . Puede hacerse ver que,

$$X = C_1 \text{ sen } \beta x + C_2 \text{ cos } \beta x + C_3 \text{ senh } \beta x + C_4 \text{ cosh } \beta x \quad (2.28)$$

La ecuación (2.23.) es de la misma forma que la que describe el movimiento vibratorio de una estructura con un solo grado de libertad y su solución es:

$$q = A \text{ sen } pt + B \text{ cos } pt \quad (2.29)$$

o

$$q = C \text{ cos } (pt - \alpha) \quad (2.30)$$

$$\text{De (2.20); la solución } y = X \text{ cos } (pt - \alpha) \quad (2.31)$$

en la que la constante C queda involucrada en las constantes de (2.28). En tanto que A , B y C se determinan a partir de las condiciones iniciales del problema y α es el ángulo de fase.

En la ecuación (2.28), los constantes de integración C_1 , C_2 , C_3 y C_4 , se determinan en forma similar a partir de las condiciones de frontera del problema. Ejemplo: Se trata de analizar una pila para puente se sección constante representada en la figura 2.4 a (Okamoto, pag. 311).

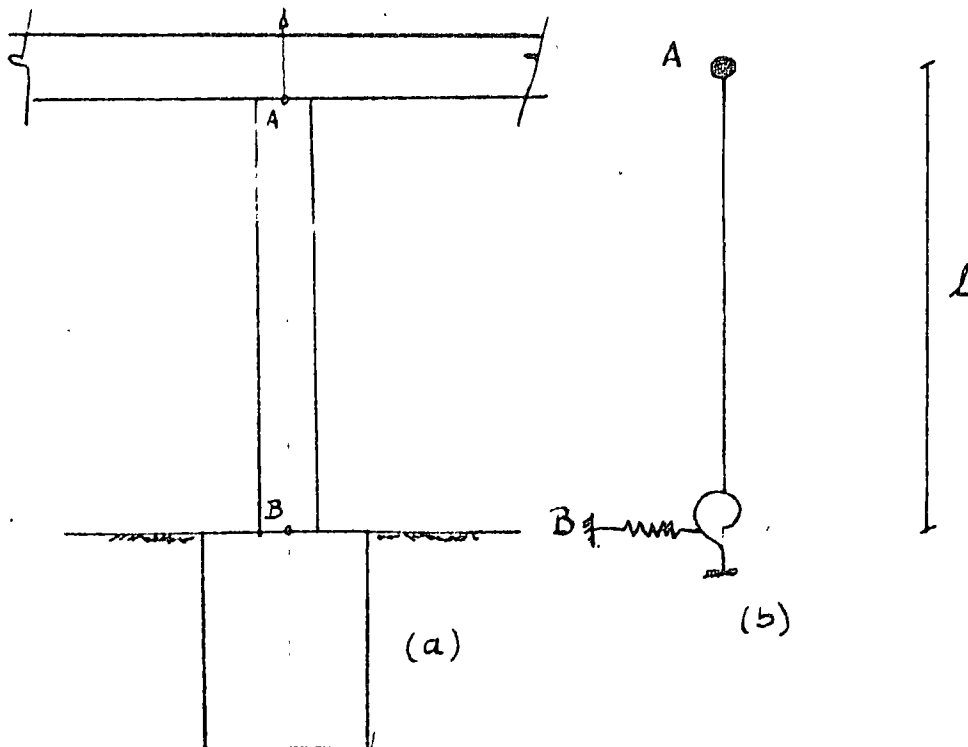


Figura 2.4

La pila se encuentra empotrada en el terreno y con una trabe descansando en su parte superior, o sea que la pila es un voladizo y la trabe colocada en su parte superior se considera como una masa considerable que se agrega en su parte superior. El modelo que representa a la estructura, es el mostrado en la figura 2.4b, en que hay un resorte entre la cimentación y el terreno que aplica una reacción proporcional al desplazamiento horizontal de la cimentación y un momento proporcional al ángulo de rotación de la cimentación.

Si el terreno vibra con una aceleración sísmica \ddot{U} , la vibración del puente ocasionada por esta vibración del terreno, se representa por la ecuación 2.18, modificada en la forma siguiente:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EI \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right) + (y + \ddot{U}) = 0 \quad (2.32)$$

en que y : es el desplazamiento o la deflexión de la pila, respecto al terreno.

U : es el desplazamiento del terreno durante el temblor.

m : es la masa por unidad de longitud de la pila.

EI : rigidez a la flexión de la pila.

El primer término contiene la fuerza que tiende a restaurar la deformación de la pila producida por la fuerza de inercia debida a la masa acelerada de la pila. Se supone que la fuerza axial del peso de la pila y de la trabe, se pueden despreciar.

En la parte superior de la pila, el momento flexionante vale 0 y la fuerza cortante es igual a la fuerza de inercia de la trabe. Si se designa con M a la masa de la trabe, las condiciones para $x=l$, en la parte superior de la pila, son:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial}{\partial x} \left(EI \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right) = M (\ddot{y} + \ddot{U}) \quad (2.33)$$

En el fondo de la pila, el momento flexionante y la fuerza cortante son proporcionales al ángulo de rotación y la deflexión de la pila, respectivamente. Si llamamos K_1 y K_2 a las rigideces de cada uno de esos resortes, tendremos:

$$EI \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = K_1 \frac{\partial y}{\partial x} \quad ; \quad \frac{\partial}{\partial x} \left(EI \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right) = K_2 y \quad (2.34)$$

Si la aceleración del terreno \ddot{U} es un dato, el comportamiento de la pila durante un sismo puede determinarse mediante las ecuaciones (2.31), (2.32) y (2.33).

Supóngase ahora en forma simple, que $\ddot{U} = 0$, para una vibración libre y una sección uniforme de la pila, podremos utilizar la ecuación (2.19) y mediante el método de separación de variables ya descrito, obtenemos las ecuaciones 2.26 y

y 2.27, así como la solución para X de la ecuación (2.28).

Las condiciones iniciales en este caso son:

Para $x = L$, el momento en el extremo superior vale cero: $\frac{d^2X}{dx^2} = 0$ (2.35)

el cortante en el extremo superior es igual a la fuerza de inercia de la masa de la trabe;

$$EI \frac{d^3X}{dx^3} = -M p^2 X \quad (2.36)$$

En (2.35) se obtienen unidades de fuerza, ya que p^2 , el cuadrado de la frecuencia circular se puede escribir $\frac{K}{M}$ y KX tiene unidades de fuerza.

El signo menos proviene del hecho de que la fuerza cortante en la pila es contraria a la fuerza de inercia.

Para $x=0$ La rotación y el desplazamiento del empotramiento de la pila, se puede representar similarmente a la ecuación 2.33:

$$EI \frac{d^2X}{dx^2} = K_1 \frac{dX}{dx} ; \quad (2.37)$$

$$EI \frac{d^3X}{dx^3} = K_2 X \quad (2.38)$$

Substituyendo las ecuaciones 2(35-37) en la ecuación (2.28), se plantean cuatro ecuaciones homogéneas para las cuatro constantes de integración C_1, C_2, C_3 y C_4 . Para que el sistema planteado tenga soluciones diferentes a la trivial, el determinante de los coeficientes debe ser igual a cero. Esto es:

$- \operatorname{sen} \beta L$	$- \cos \beta L$	$\operatorname{senh} \beta L$	$\operatorname{cosh} \beta L$
$\frac{Mp^2}{\beta^3 EI} \operatorname{sen} \beta L - \cos \beta L$	$\frac{Mp^2}{\beta^3 EI} \cos \beta L + \operatorname{sen} \beta L$	$\frac{Mp^2}{\beta^3 EI} \operatorname{senh} \beta L + \operatorname{cosh} \beta L$	$\frac{Mp^2}{\beta^3 EI} \operatorname{cosh} \beta L + \operatorname{sen} \beta L$
$\frac{K_1}{\beta EI}$	1	$\frac{K_1}{\beta EI}$	-1
	$\frac{K_2}{\beta^2 EI}$	-1	$\frac{K_2}{\beta^2 EI}$

= 0

(2.39)

La frecuencia natural se obtiene resolviendo la expresión anterior, en la que se determina primeramente βl y de ahí se substituye para hallar p .

Existe un número infinito de valores de p que satisfacen la ecuación (2.38), de manera que una vez determinando un valor de p , se obtiene una relación entre las cuatro constantes de integración, la cual proporciona un modo de la vibración libre. El número de modos de la vibración libre, es asimismo infinito.

Si la sección transversal de la pila no es uniforme, es difícil resolver la ecuación diferencial de partida (2.17) ó (2.18) en forma analítica. Es necesario resolverla por métodos numéricos. Véase por ejemplo, la solución mediante diferencias finitas de Okamoto, (Ref. 3 pag. 313).

En seguida, se presenta una relación de las condiciones de frontera aplicables para cada tipo de apoyo, en la solución de la ecuación diferencial. Para apoyos localizados en $x = x_1$.

Apoyos simples.- $x''(x_1) = \dot{x}(x_1) = 0$

Deflexión y momento nulo en cualquier apoyo, para cualquier valor de t .

Empotramientos.- $x(x_1) = x'(x_1) = 0$

Deflexión y pendiente nulas en el apoyo empotrado.

Extremo libre.- $x''(x_1) = x'''(x_1) = 0$

Momento y cortante nulos en el extremo libre.

III VIBRACIONES EN VIGAS CONTINUAS.

a) VIGAS DE DOS CLAROS:

Considérese la viga continúa de dos claros L_1 y L_2 , que descansa en una cimentación rígida, con los valores de m , E e I constantes en todo el claro. Los apoyos extremos giran libremente.

Se presenta enseguida, la solución matemática de las vibraciones libres de la estructura.

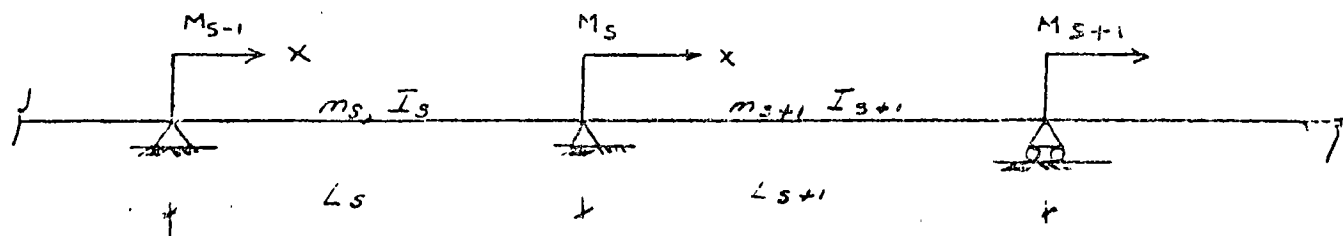


Figura 3.1

Para este caso es aplicable en cualquiera de los claros y con cualesquier con

diciones de apoyo, la ecuación (2.21) y su solución (2.28). Consecuentemente para un modo n y un claro s , la forma característica queda así:

$$X_s(x) = C_1 \operatorname{sen} \beta_s x + C_2 \cos \beta_s x + C_3 \operatorname{senh} \beta_s x + C_4 \cosh \beta_s x$$

$$X'_s(x) = \beta_s (C_1 \cos \beta_s x + C_2 \operatorname{sen} \beta_s x + C_3 \operatorname{senh} \beta_s x + C_4 \cosh \beta_s)$$

$$X''_s(x) = \beta_s^2 (-C_1 \operatorname{sen} \beta_s x - C_2 \cos \beta_s x + C_3 \operatorname{senh} \beta_s x + C_4 \cosh \beta_s x)$$

en que $X'_s(x)$ y $X''_s(x)$ son la primera y segunda derivada con respecto a x , y

$$\beta_s = \sqrt[4]{\frac{m_s p_n^2}{EI_s}}$$

en que p_n es la frecuencia asociada al n -ésimo modo. Si la vibración es libre, las frecuencias asociadas a cada uno de los claros, deben ser las mismas, puesto que estamos tratando con una viga continua.

Las condiciones de frontera para dos claros adyacentes, quedan establecidas de la forma siguiente:

$$X_s(0) = (a); X_s(L_s) = 0 \text{ (b)}; X'_s(L_s) = X'_{s+1}(0) \text{ (c)}$$

$$EI_s X''_s(L_s) = EI_{s+1} X''_{s+1}(0) = -M_s \text{ (d)}$$

$$X_{s+1}(0) = 0 \text{ (e)}$$

expresiones que significan que en la forma modal, las deflexiones son nulas en los apoyos y que las pendientes y momentos flexionantes de dos claros adyacentes y que concurren al mismo apoyo, deben ser iguales. Si ahora sustituimos las expresiones para la forma modal y sus derivadas, en las condiciones de frontera, debemos obtener:

$$(f) \quad C_2 + C_4 = 0$$

$$(g) \quad C_1 \operatorname{sen} \beta_s L_s + C_2 \cos \beta_s L_s + C_3 \operatorname{senh} \beta_s L_s + C_4 \cosh \beta_s L_s$$

$$(h) \quad C_1 \cos \beta_s L_s - C_2 \operatorname{sen} \beta_s L_s + C_3 \cosh \beta_s L_s + C_4 \operatorname{senh} \beta_s L_s = \frac{\beta_{s+1}}{\beta_s} (D_1 + D_3)$$

$$(i) \quad -C_1 \operatorname{sen} \beta_s L_s - C_2 \cos \beta_s L_s + C_3 \operatorname{senh} \beta_s L_s + C_4 \cosh \beta_s L_s = \frac{\beta_{s+1}^2}{\beta_s^2} \frac{EI_{s+1}}{EI_s} (-D_2 + D_4)$$

en que las constantes D_i se refieren al claro $(s+1)$.

Si primero se suman y luego se restan $g)$ e $i)$ y usando $j)$; $g) + i)$:

$$2C_3 \operatorname{senh} \beta_s L_s + 2C_4 \cosh \beta_s L_s = \frac{\beta_{s+1}^2}{\beta_s^2} \frac{I_{s+1}}{I_s} (-2D_2)$$

$$g-i) \quad 2 C_1 \operatorname{sen} \beta_s L_s + 2 C_2 \cos \beta_s L_s = \frac{\beta_{s+1}^2}{\beta_s^2} \frac{I_{s+1}}{I_s} \quad (2 D_2)$$

$$k) \quad D_1 = -D_2$$

$$l) \quad C_3 \operatorname{senh} \beta_s L_s - C_2 \cosh \beta_s L_s = -D_2 \frac{\beta_{s+1}^2}{\beta_s^2} \frac{I_{s+1}}{I_s}$$

$$m) \quad C_1 \operatorname{sen} \beta_s L_s + C_2 \cos \beta_s L_s = D_2 \frac{\beta_{s+1}^2}{\beta_s^2} \frac{I_{s+1}}{I_s}$$

de donde se obtiene:

$$n) \quad C_3 = \frac{C_2 \cosh \beta_s L_s - D_2 \frac{\beta_{s+1}^2}{\beta_s^2} \frac{I_{s+1}}{I_s}}{\operatorname{senh} \beta_s L_s}$$

$$o) \quad C_1 = \frac{-C_2 \cos \beta_s L_s + D_2 \frac{\beta_{s+1}^2}{\beta_s^2} \frac{I_2}{I_1}}{\operatorname{sen} \beta_s L_s}$$

Sumando n) y o):

$$C_1 + C_3 = C_2 \left(\frac{\cosh \beta_s L_s}{\operatorname{senh} \beta_s L_s} - \frac{\cos \beta_s L_s}{\operatorname{sen} \beta_s L_s} \right) - D_2 \frac{\beta_{s+1}^2}{\beta_s^2} \frac{I_{s+1}}{I_s} \left(\frac{1}{\operatorname{senh} \beta_s L_s} - \frac{1}{\operatorname{sen} \beta_s L_s} \right)$$

pudiendo escribir:

$$p) \quad C_1 + C_3 = C_2 G_s - D_2 \frac{\beta_{s+1}^2}{\beta_s^2} \frac{I_{s+1}}{I_1} H_s$$

pues hemos hecho que:

$$q) \quad G_s = \coth \beta_s L_s - \cot \beta_s L_s$$

y

$$r) \quad H_s = \operatorname{cosech} \beta_s L_s - \operatorname{cosec} \beta_s L_s$$

Ahora incrementemos en 1, todos los subíndices de G, β , I y H, en p), al mismo tiempo que sustituimos las constantes C, por D y D por F para representar a los tramos (s+1) y (s+2) respectivamente.

La expresión resultante que es igual a $D_1 + D_3$, se substituye en el miembro de la derecha de h) y si n) y o) junto con $C_4 = -C_3$ se substituyen en el miembro

de la izquierda de la misma ecuación h), queda lo siguiente:

$$p') \quad D_1 + D_3 = D_2 G_s + 1 - F_2 \left(\frac{\beta_{s+2}^2}{\beta_{s+1}^2} \frac{I_{s+2}}{I_{s+1}} \right) H_{s+1} ;$$

$$\frac{-C_2 \cos \beta_s L_s + D_2 \frac{\beta_{s+1}^2}{\beta_s^2} \frac{I_{s+1}}{I_s}}{\sin \beta_s L_s} \cos \beta_s L_s - C_2 (\sin \beta_s L_s + \sinh \beta_s L_s) + \frac{C_2 \cosh \beta_s L_s - D_2 \frac{\beta_{s+1}^2}{\beta_s^2} \frac{I_{s+1}}{I_s}}{\sinh \beta_s L_s} \cosh \beta_s L_s = \left(D_2 G_{s+1} - F_2 \frac{\beta_{s+2}^2}{\beta_{s+1}^2} \frac{I_{s+2}}{I_{s+1}} H_{s+1} \right) \frac{\beta_{s+1}}{\beta_s}$$

$$- C_2 \left(\frac{\cos^2 \beta_s L_s + \sin^2 \beta_s L_s}{\sin \beta_s L_s} \right) + C_2 \left(\frac{\cosh^2 \beta_s L_s - \sinh^2 \beta_s L_s}{\sinh \beta_s L_s} \right)$$

$$- D_2 \frac{\beta_{s+1}^2}{\beta_s^2} \frac{I_{s+1}}{I_s} (\cot \beta_s L_s - \coth \beta_s L_s) = (D_2 G_{s+1} - F_2 \frac{\beta_{s+2}^2}{\beta_{s+1}^2} \frac{I_{s+2}}{I_{s+1}}) \frac{\beta_{s+1}}{\beta_s} ;$$

$$- C_2 (\operatorname{cosec} \beta_s L_s - \operatorname{cosech} \beta_s L_s) - D_2 \frac{\beta_{s+1}^2}{\beta_s^2} \frac{I_{s+1}}{I_s} G_s - D_2 G_{s+1} \frac{\beta_{s+1}}{\beta_s} + F_2 \frac{\beta_{s+2}^2}{\beta_{s+1}^2} \frac{I_{s+2}}{I_{s+1}} H_{s+1} \frac{\beta_{s+1}}{\beta_s} = 0 ;$$

Finalmente:

$$s) \quad C_2 H_s - D_2 \left(\frac{\beta_{s+1}^2}{\beta_s^2} G_s + D_2 \frac{\beta_{s+1}}{\beta_s} G_{s+1} \right) + F_2 \frac{\beta_{s+2}^2}{\beta_s \beta_{s+1}} \frac{I_{s+2}}{I_{s+1}} H_{s+1} = 0$$

De d),:

$$-M_s = EI_{s+1} (-D_2 + D_4) \beta_{s+1}^2$$

y puesto que $D_4 = -D_2$

$$t) \quad D_4 = - \frac{M_s}{2EI_{s+1} \beta_{s+1}^2}$$

Substituyendo t) en s) y sus equivalentes incrementados y disminuidos en 1 y cancelando términos iguales:

$$M_{s-1} \frac{H_s L_s}{(\beta_s L_s) I_s} - M_s \left[\frac{G_s L_s}{(\beta_s L_s) I_s} + \frac{G_{s+1} L_{s+1}}{(\beta_{s+1} L_{s+1}) I_{s+1}} \right] + M_{s+1} \frac{H_{s+1} L_{s+1}}{(\beta_{s+1} L_{s+1}) I_{s+1}} = 0 \quad (3.1)$$

(3.1) es la ecuación de los Tres Momentos que puede utilizarse para obtener las frecuencias naturales de los modos normales. Es equivalente a la ecuación de los tres momentos del análisis estático y para la determinación de las cargas de pandeo. La ecuación (3.1) se aplica a cada uno de los pares de tramos adyacentes. Si el apoyo exterior está articulado, el momento en ese punto vale cero. Si ese extremo está empotrado, la ecuación se aplica de tal modo que M_s es el momento del extremo empotrado, y en tal caso el momento de inercia I del tramo ficticio exterior al apoyo externo, se toma igual a infinito.

Con el procedimiento señalado, se establece una ecuación para cada momento del apoyo correspondiente, resultanto un sistema de ecuaciones simultáneas. Los momentos M son aquellos que ocurren durante la vibración libre en un modo determinado, los que por supuesto no se conocen. Sin embargo, para que sea posible la presencia de una vibración, el determinante de los coeficientes de las M , debe ser nulo. Si se expande ese determinante, se obtiene una ecuación de frecuencias, cuyas raíces son $\beta_n L$, que están directamente relacionados con p_n . Una vez obtenidas las frecuencias, se determinan las formas características substituyendo cada una de las raíces en las condiciones de frontera de las ecuaciones f) a j). El número de ecuaciones requeridas, es uno menos que el número de coeficientes β_n que se van a determinar. El procedimiento descrito se ilustra con los ejemplos siguientes:

Viga de dos claros. Supóngase la viga de la figura (3.2) la ecuación (3.1) se plantea una sola vez, en que M_s es el momento del apoyo interior y $M_{s-1} = M_{s+1} = 0$. Entonces:

$$-M_s \left[\frac{G_s L_s}{(\beta_s L_s) I_s} + \frac{G_{s+1} L_{s+1}}{(\beta_{s+1} L_{s+1}) I_{s+1}} \right] = 0 \quad (3.2)$$

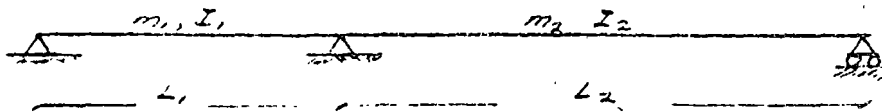


Figura 3.2

La ecuación de frecuencias:

$$\frac{G_1 L_1}{(\beta_1 L_1) I_1} + \frac{G_2 L_2}{(\beta_2 L_2) I_2} = 0 \quad (3.3)$$

Sabemos que:

$$G_1 = \coth \beta_1 L_1 - \cot \beta_1 L_1$$

$$G_2 = \coth \beta_2 L_2 - \cot \beta_2 L_2$$

$$\beta_{n1} = \sqrt[4]{\frac{m_1 p n^2}{EI_1}}$$

El problema consiste ahora en determinar los valores de $\beta_n L$ que satisfacen esta ecuación. Nótese que $\beta_{n1} L_1$ y $\beta_{n2} L_2$ tienen una relación constante para las propiedades dadas de una viga y por consiguiente una puede substituirse por una constante multiplicada por la otra. En general, tales ecuaciones de frecuencia no se resuelven fácilmente y debe emplearse un procedimiento de aproximaciones sucesivas. Este procedimiento puede acelerarse mediante el uso de valores tabulados de G y H.

Supóngase el caso particular de una viga de dos claros con rigidez, longitud y masa iguales. La ecuación de frecuencia queda:

$$G_{n1} + G_{n2} = 0$$

Ecuación que tiene dos juegos de raíces, la primera corresponde a:

$$G_{n1} \pm G_{n2} = \pm \infty$$

y la segunda a:

$$G_{n1} = G_{n2} = 0, \text{ esto es:}$$

$$\coth \beta_{n1} L_1 - \cot \beta_{n1} L_1 = \coth \beta_{n2} L_2 - \cot \beta_{n2} L_2$$

para el caso especial en que $L_1 = L_2$

$$\cot \beta_n L = \coth \beta_n L$$

Las raíces son:

$$\beta_n L = \pi, 2\pi, 3\pi \dots =$$

y

$$\beta_n L = 3.92, 7.06, 10.2 \dots$$

y las frecuencias naturales:

$$P_n^2 = \frac{EI \beta_n^4}{m} = \frac{EI}{m l^4} (\pi^4, 3.92^4, (2\pi)^4, 7.06^4 \dots)$$

Las formas características de los cuatro primeros modos se muestra en la figura 3.3.

MODOS NATURALES DE DOS CLAROS IDENTICOS

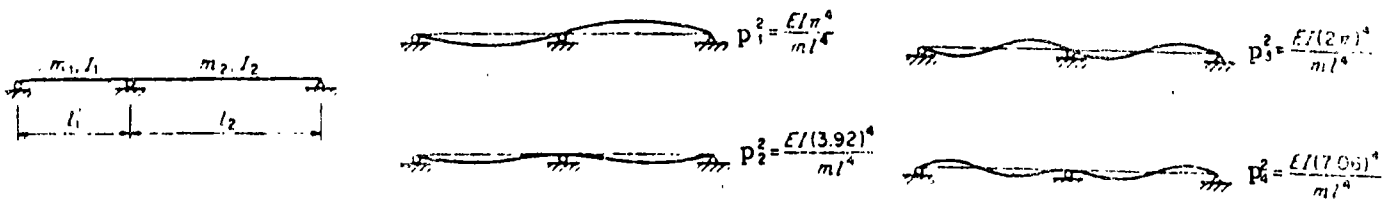


Figura 3.3.

MODOS NORMALES DE UNA VIGA DE DOS CLAROS.

En general, el primer juego de raíces, los modos impares, corresponden a los modos antisimétricos que corresponden a los modos de una viga simplemente apoyadas y los modos simétricos o el segundo juego de raíces, corresponden a una viga con un extremo empotrado y otro simplemente apoyado. Obsévese que en los modos antisimétricos o impares existe un nudo en el apoyo central y por lo consiguiente un claro no afecta al comportamiento del otro. Por otra parte, en el modo simétrico no hay rotación en el apoyo central, como si existiera un empotramiento en ese apoyo:

Supóngase ahora una viga de tres claros. La ecuación (3.2) debe plantearse dos veces. Véase la figura 3.4.

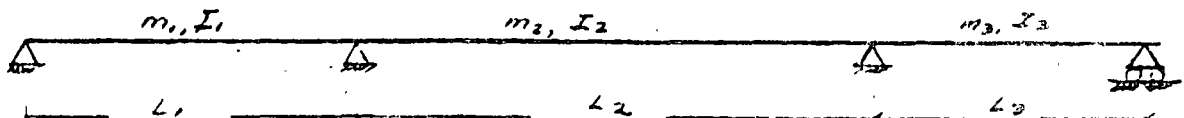


Figura 3.4

$$-M_1 \left[\frac{G_1 L_1}{(\beta_1 L_1) I_1} + \frac{G_2 L_2}{(\beta_2 L_2) I_2} \right] + M_2 \left[\frac{H_2 L_2}{(\beta_2 L_2) I_2} \right] = 0$$

$$M_1 \left[\frac{H_2 L_2}{(\beta_2 L_2) I_2} \right] - M_2 \left[\frac{G_2 L_2}{(\beta_2 L_2) I_2} + \frac{G_3 L_3}{(\beta_3 L_3) I_3} \right] = 0$$

La ecuación de frecuencias se obtiene como ya sabemos, expandiendo el determinante de los coeficientes de las M.

$$\left[\frac{G_1 L_1}{(\beta_1 L_1) I_1} + \frac{G_2 L_2}{(\beta_2 L_2) I_2} \right] \left[\frac{G_2 L_2}{(\beta_2 L_2) I_2} + \frac{G_3 L_3}{(\beta_3 L_3) I_3} \right] - \left[\frac{H_2 L_2}{(\beta_2 L_2) I_2} \right]^2 = 0$$

Para el caso de tres claros idénticos:

$$4 G_n^2 - H_n^2 = 0$$

ó

$$2 G_n = \pm H_n$$

en que G_n y H_n se aplican para cualesquiera de los claros. Los tres juegos de raíces son:

$$(1) \quad G_n = H_n = \pm \infty$$

cuya primera raíz es $\beta_1 L = \pi$ y el juego completo corresponde a los modos de una viga simplemente apoyada.

$$(2) \quad 2 G_n = - H_n$$

cuya primera raíz es el segundo modo de la viga: $\beta_2 L = 3.55$ y todos los modos de este juego tienen un modo al centro del claro intermedio.

$$(3) \quad 2 G_n = + H_n$$

cuya primera raíz o tercer modo, es $\beta_3 L = 4.30$. Véase la figura 3.5.

MODOS NATURALES DE TRES CLAROS IDENTICOS.

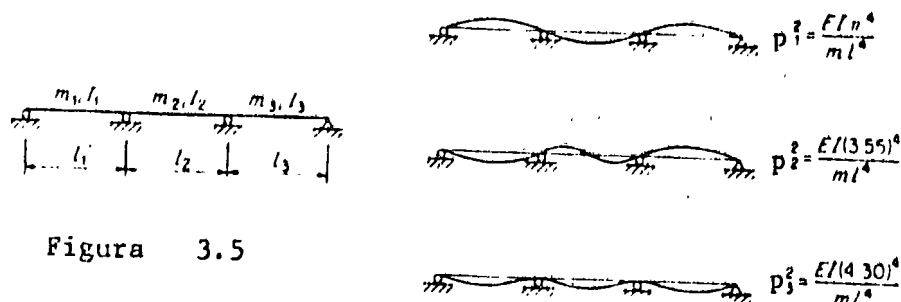


Figura 3.5

La ecuación de frecuencia de una viga de cuatro claros, puede investigarse en forma similar, pero es más complicada. Para claros idénticos se reduce a:

$$2 G_n = \pm H_n$$

véase la figura 3.6.

MODOS NATURALES DE CUATRO CLAROS IDÉNTICOS.

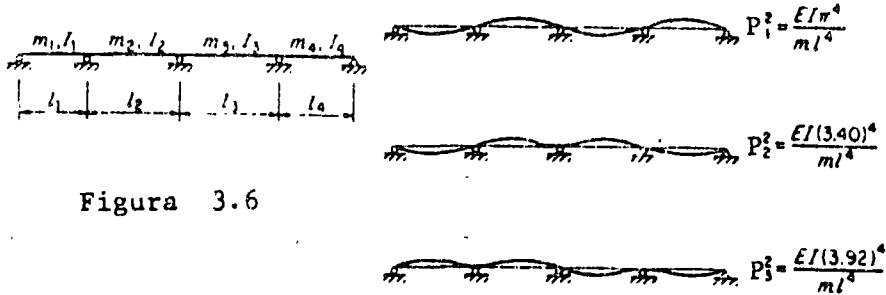


Figura 3.6

MODOS NORMALES DE UNA VIGA DE CUATRO CLAROS.

De todo lo anterior, resulta que para un número cualquiera de claros idénticos articuladas en los apoyos exteriores, el modo fundamental es igual a la de una viga simplemente apoyada. Los modos superiores de un solo claro son también modos superiores del caso de varios claros, pero están combinados con otros. Existe otro grupo de modos simétricos con pequeñas rotaciones en los apoyos interiores que corresponden burdamente a un claro empotrado y simplemente apoyado. Además, hay varias combinaciones de estos dos tipos, que se incrementan con el número de claros.

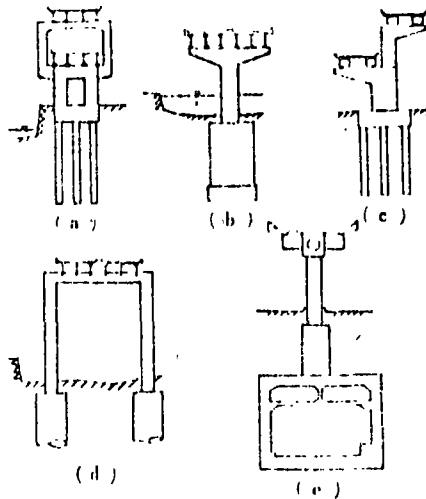


Figura 3.7

Vibraciones de los modos naturales de un puente continuo de grandes claros, en la dirección perpendicular al eje del puente.

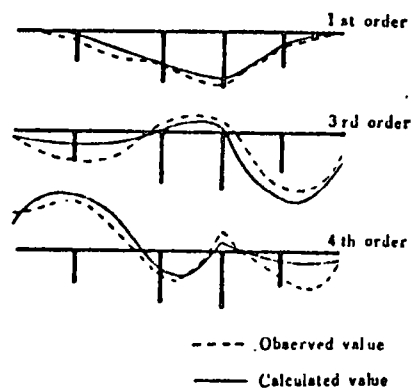


Figura 3.8

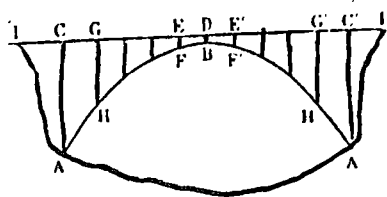
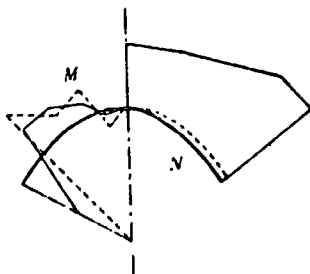


Figura 3.9



IV CIMENTACIONES

ESTRIBOS.-

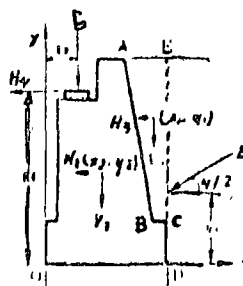
El daño más común en los estribos de puentes, son el asentamiento, volcamiento y falla por cortante. Una forma de daño local, es cuando las traveses chocan violentamente contra el estribo, causando agrietamientos de los muros de retención del estribo o descascarando el concreto en los asientos de las traveses.

El volcamiento de los estribos, usualmente se provoca por una debilidad en su resistencia a las presiones de tierra. En muchas ocasiones, la razón del volteo, es la poca profundidad del desplante de la cimentación. Puesto que los estribos normalmente se encuentran lejos del lecho del río y no hay peligro de socavación, los desplantes tienden a ser de poca profundidad, pero puesto que en este tipo de cimentaciones la capacidad de soporte del terreno, se afecta considerablemente durante un temblor, es imperiosa una cimentación profunda.

El efecto del cortante ocurre a menudo en las juntas de construcción del concreto simple, por lo que es necesaria una cuidadosa selección de ellas. Cuando no sea posible utilizar un tipo de estribo de concreto reforzado, debe además de supervisarse adecuadamente la localización y construcción de las juntas, colocar refuerzo en las mismas juntas, para lograr una buena transferencia del cortante mediante adherencia.

Aun cuando el estribo mismo no resulte dañado, hay muchos casos en que el suelo volcado a los lados y en la parte de atrás, se hunde y ocurre un colapso del muro de retención, lo que interrumpe el tránsito. Las causas principales del asentamiento son la diferencia entre las condiciones de vibración de los estribos y el terraplén y la consolidación insuficiente del suelo atrás del estribo. Es aconsejable que el material del terraplén sea de grava de calidad especial o roca triturada.

La estabilidad de un estribo durante un sismo, se logra de la manera siguiente: en la figura 4.1, las fuerzas externas que actúan sobre el estribo, consisten de la fuerza sísmica debida al peso de la trabe que se transmite a los apoyos, las fuerzas sísmicas debidas al peso del estribo y la presión de tierra en la parte trasera del estribo, que se trasmite durante el sismo. La fuerza que resiste la presión de tierra sobre la parte anterior del estribo, es la fuerza de reacción del terreno que actúa sobre la superficie inferior DO. Estas fuerzas se calculan de la siguiente manera:



Figura

4.1

- a) Si el peso de la trabe que actúa sobre el apoyo es W , la fuerza vertical V_1 que se aplica al estribo en el sismo, vale:

$$V_1 = (1 - k_v) W,$$

donde k_v es el coeficiente sísmico vertical. Ya que el estribo tiende a volcarse o deslizarse con mayor facilidad, al reducirse el peso de las trabes y el estribo debido al movimiento vertical hacia arriba, esta ecuación sirve para asegurar la estabilidad bajo las condiciones más desfavorables. El punto de aplicación de V_1 , es el centro del apoyo y la distancia horizontal al lalón posterior se expresa mediante x_1 . La fuerza horizontal de la trabe es:

$$H_1 = k_h W$$

en que k_h es el coeficiente sísmico horizontal. La altura de la línea de acción de H_1 , se supone coincidente con la superficie superior del apoyo y y_1 , desde el fondo del estribo.

- b) La fuerza sísmica debida al peso del estribo, cuando su peso es G , tiene los valores que se indican enseguida. El punto de aplicación es su centroide (x_2, y_2) .

$$V_2 = (1 - k_v) G, \quad H_2 = k_h G$$

- c) Puede afirmarse que la presión de tierra que actúa sobre el estribo (y que actúa sobre el estribo) y actuando en la línea vertical DE, el peso de la masa del suelo ABCE y la fuerza sísmica que actúa arriba. La presión de tierra puede calcularse mediante métodos reconocidos. Su punto de aplicación se encuentra a $1/3$ de la altura de la línea ED y su dirección tiene una inclinación $\varphi/2$ respecto a la línea ED.

La fuerza sísmica debida a la masa de tierra ABCE cuando el peso es w , tiene la magnitud dada enseguida, con el punto de aplicación en el centroide (x_3, y_3) de la masa.

$$V_3 = (1 - k_v) W, \quad H_3 = k_h W$$

Cuando las componentes horizontal y vertical de la resultante R de las fuerzas externas señaladas sean H y V :

$$H = H_1 + H_2 + H_3 + E \cos \varphi/2, \quad V = V_1 + V_2 + V_3 + E \sin \varphi/2$$

Cuando el punto en el que la línea de acción de la fuerza resultante corta a la superficie inferior del estribo sea F y la distancia de F a partir del punto O , sea x_0 , entonces x_0 , se puede determinar, considerando el momento de la fuerza ex-

terior respecto al punto 0.

$$x_0 = \frac{1}{V} \{ (x_1 V_1 + x_2 V_2 + x_3 V_3 + \ell E \operatorname{sen} y/2) - (y_1 H_1 + y_2 H_2 + y_3 H_3 + y_4 E \cos y/2) \}$$

Si la componente horizontal de la resistencia producida en la superficie inferior del estribo, se expresa por Q y la componente vertical por P, $Q = H$ y $P = V$.

Suponiendo que la distribución de P en la superficie inferior, sea trapezoidal y si las intensidades de las fuerzas reactivas en ambos extremos son p_1 y p_2 (Véase la figura 4.2).

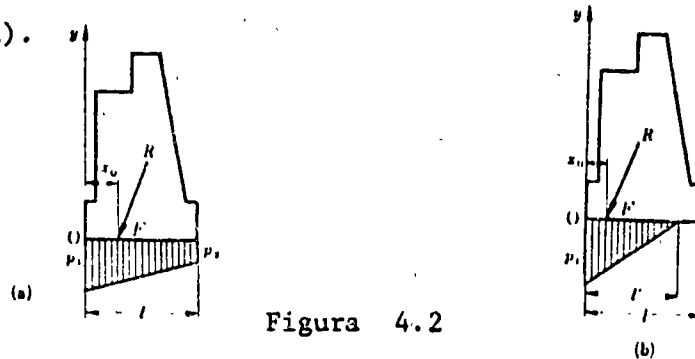


Figura 4.2

$$\ell/2 (p_1 + p_2) = P$$

$$(\ell/3) \frac{2 p_2 + p_1}{p_1 + p_2} = x_0$$

Por consiguiente:

$$p_2 = \frac{2P}{\ell} \left\{ \frac{3x_0}{\ell} - 1 \right\} ; \quad p_1 = \frac{2P}{\ell} \left\{ 2 - \frac{3x_0}{\ell} \right\}$$

De acuerdo con lo anterior, cuando x_0 sea $\ell/3$ o menor, p_2 se vuelve negativa, pero puesto que el suelo ordinariamente no resiste tensiones, se supone una distribución triangular de la fuerza de reacción, como se muestra en la figura 4.2b. Las condiciones de equilibrio serán.-

$$1/2 p_1 \ell' = P ; \quad \frac{1}{3} \ell' = x_0$$

y por tanto:

$$\ell' = 3 x_0 \quad p_1 = \frac{2P}{3 x_0}$$

En otras palabras, la fuerza de reacción p_1 , es grande si x_0 es pequeña. Pero mientras x_0 sea positiva, esto es; mientras F no quede fuerza de la superficie inferior, si el terreno de la cimentación es capaz de soportar a p_1 , no habrá volca-

miento. La resistencia horizontal Q es la fricción en la superficie de contacto. Si μ es el coeficiente de fricción queda expresada por:

$$Q = \mu V$$

Normalmente, μ se supone aproximadamente igual a 0.7, y si no hay suficiente resistencia, se incrementa la profundidad de desplante o se clavan pilotes para aumentar esa resistencia. A partir de la experiencia de sismos previos, la resistencia al simo de un estribo, se incrementa si existe tierra al frente del estribo. Cajones.

En lo referente a cajones, los problemas que se presentan cuando esta cimentación está sujeta a presiones sísmicas, son probablemente la capacidad de soporte o apoyo y la magnitud del desplazamiento. Respecto a la primera existe un método mediante el cual puede determinarse la profundidad de empotramiento.

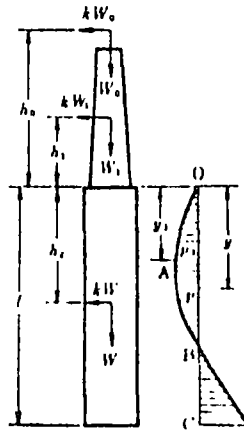


Figura 4,3

En la figura 4.3, las fuerzas externas que actúan sobre la pila, son el peso W_0 de la trabe, el peso W_1 de la pila, el peso W del cajón y la fuerza sísmica. La presión de tierra es resistente. Suponiendo que las presiones de tierra se distribuyan parabólicamente, la presión de tierra se representa por:

$$p = \frac{p_1 y}{y_1^2} (2 y_1 - y) \quad (4.1)$$

en que p_1 es la máxima intensidad de la reacción del terreno, y y_1 es la profundidad de la sección en que se presenta p_1 . Tanto p_1 como y_1 son cantidades desconocidas y se determinan de las fuerzas externas y sus reacciones. En otras palabras, cuando

- ℓ : longitud del cajón
 W : peso del cajón
 k : coeficiente sísmico.
 H : Fuerza sísmica horizontal que actúa sobre la trabe y la pila del puente, y
 M : momento de la fuerza sísmica que actúe sobre la trabe y la pila del puente respecto a la parte superior del cajón.

Se tendrá, entonces:

$$\left. \begin{aligned}
 H + kW &= \int_0^l \frac{p_1 y}{y_1^2} (2y_1 - y) dy \\
 \frac{kWl}{2} - M &= \int_0^l \frac{p_1 y^2}{y_1^2} (2y_1 - y) dy
 \end{aligned} \right\} \quad (4.2)$$

cuya solución es:

$$y_1 = \frac{3l - 4e}{8l - 12e} l \quad (4.3)$$

siempre que:

$$c = \frac{\frac{kWl}{2} - M}{H + kW}$$

y

$$p_1 = \frac{\frac{kWl}{2} - M}{2y_1 - \frac{3}{4}l} \cdot \frac{3y_1^2}{l^2} \quad (4.4)$$

Con estas ecuaciones se determina el valor máximo del esfuerzo p_1 si el valor obtenido es menor que la presión pasiva del suelo a la profundidad y_1 durante el sísmo, el cajón será estable. Además, al determinarse la distribución de esfuerzos en el suelo, pueden calcularse fácilmente los momentos flexionantes y fuerzas cortantes.

Si se emplea este método de análisis, un problema altamente indeterminado de la distribución de la fuerza de reacción de una cimentación en cajón, se convirtió en un problema estáticamente determinado, empleando una suposición sencilla. La estructura geológica de estrato superficial del suelo, es en ocasiones muy complejo. Posteriormente, debido al hincado del cajón. El método arriba mencionado proporciona una regla para este complicado problema.

Este método es sencillo, pero puesto que la estructural real del terreno no puede incluirse en los cálculos, no proporciona datos acertados en todos los casos. Además, aun cuando se tiene el dato de la fuerza de reacción, no es factible determinar el desplazamiento del cajón que ella provoca. Es necesario un análisis fiel de estos fenómenos. T. Ikehara considera al cajón como un cuerpo rígido, suponiéndolo soportado por resortes elásticos en ambos lados y en los planos inferiores, con las constantes de resorte en los planos laterales, proporcionales a la profundidad, obteniendo los resultados siguientes. Sin embargo, se desprecia la resistencia horizontal de la superficie inferior.

Cuando la fuerza reacción en el fondo, actúa dentro del núcleo de la sección inferior, su máxima intensidad en la pared lateral del cajón p_1 , y la presión en la fibra extrema que se produce en la superficie inferior, q_1 y q_2 , resultan:

$$p_1 = \frac{3[kWI^3 + 3III^3 + 4MI^3 + 8\alpha\kappa a^3(kW + II)]^2}{4bl^3(l^3 + 24\alpha\kappa a^3)(kWl + 4II + 6M)} \quad (4.5)$$

$$y_1 = \frac{kWI^3 + 3III^3 + 4MI^3 + 8\alpha\kappa a^3(kW + II)}{2l(kWl + 4II + 6M)} \quad (4.6)$$

$$\left. \begin{matrix} q_1 \\ q_2 \end{matrix} \right\} = \frac{N + W}{A} \pm \frac{3\alpha\kappa(kWl + 4II + 6M)}{b(l^3 + 24\alpha\kappa a^3)} \quad (4.7)$$

Cuando la reacción en el fondo, actúa fuera del núcleo de la sección inferior, p_1 , q_1 y q_2 se convierten en:

$$p_1 = \frac{3[kWI^3 + 3III^3 + 4MI^3 + 8m_2\kappa a^3(kW + II)]^2}{4bl^3(l^3 + 24m_2\kappa a^3)(kWl + 4II + 6M)} \quad (4.8)$$

$$y_1 = \frac{kWI^3 + 3III^3 + 4MI^3 + 8m_2\kappa a^3(kW + II)}{2l(kWl + 4II + 6M)} \quad (4.9)$$

$$q_1 = \frac{3\alpha\kappa(kWl + 4II + 6M)(1 + \cos\beta)}{b(l^3 + 24m_2\kappa a^3)} \quad (4.10)$$

en que:

- N: suma de las fuerzas verticales que actúan en la trabe y la pila;
 A: área del cajón en la sección inferior;
 2a: peralte del cajón, paralelamente a la dirección de la fuerza sísmica;
 2b: ancho del cajón, perpendicularmente a la dirección de la fuerza sísmica;
 σ : coeficiente determinado por la forma de la sección inferior. (Véase la fig.4.4).
 K_1 : coeficiente de la reacción lateral del suelo para una profundidad unitaria;
 K_2 : coeficiente de la reacción vertical del suelo para una profundidad unitaria;
 κ : K_2/K_1

Los factores β , m , y m_2 que se usan para efectuar estos cálculos, se obtienen resolviendo las tres ecuaciones simultáneas que se muestran enseguida:

$$\left. \begin{aligned} \frac{6\kappa a^3 m_1 (k W l + 4 I l + 6 M)}{l^3 + 24 m_1 a^3} &= N + W \\ m_1 &= \frac{1}{3} \sin^3 \beta + \frac{\sin \beta \cos^3 \beta}{2} + \frac{1}{2} (\pi - \beta) \cos \beta \\ m_2 &= \frac{3}{2} \left(\frac{\pi - \beta}{8} + \frac{1}{3} \sin^3 \beta \cos \beta + \frac{\sin^4 \beta}{32} \right) \end{aligned} \right\} \quad (4.11)$$

La tabla 1 proporciona datos burdos de las constantes de resorte del terreno. Sin embargo, es aconsejable confirmarlas mediante pruebas de campo.

No se ha establecido aún, un método para predecir el desplazamiento residual del cajón durante un sismo, es que el suelo alrededor del cajón, que fué perturbado durante la construcción, no se ha consolidado. Por ello, es necesaria un cuidadoso tratamiento de la superficie en el fondo del cajón.

TABLA 1 COEFICIENTES DE REACCION DEL SUELO.

S U E L O	K_1 (Kg/cm ³)	K_2 (Kg/cm ³)
Arcilla muy suave	menos de 1	-----
Suelo suave, cohesivo, arena suelta	1 a 2	-----
Arena suelta, arcilla dura	2 a 4	3 a 5
Arena ligeramente suelta, arcilla muy dura	4 a 8	5 a 15

Arena compactada, arena-grava

8 a 15

15 a 25

Arena muy compacta, grava, piedra lodoza

más de 15

más de 25

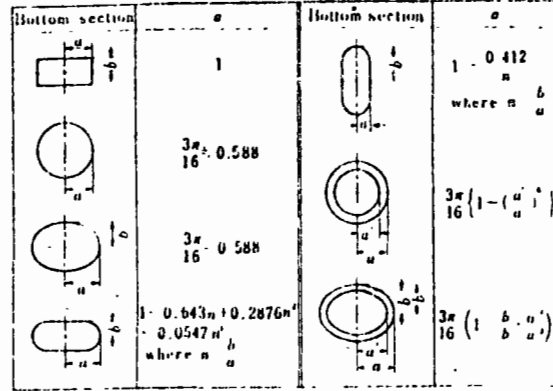


Figura 4.4.

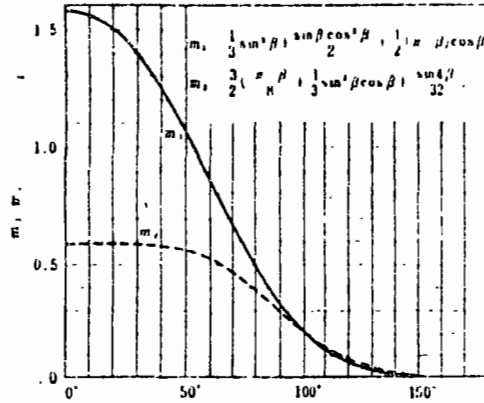


Figura 5.1 a) Restricción a la articulación empleada en puentes existentes. Se hacen aberturas a través de la cubierta y los agujeros se abren con taladros de diamante, a través de los diafragmas.

- 1.- Agujero de 7"
- 2.- Placas de acero.
- 3.- Tubo de 6"
- 4.-Cables de 7- 3/4"
- 5.-Poliestireno
- 6.- Neopreno.

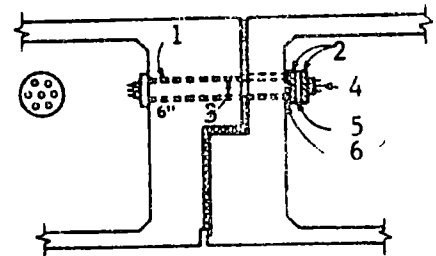


Figura 5.1 a)

Figura 5.1 b) Restricción a la articulación para puentes nuevos.

- 1.- Tubo galvanizado de 6"
- 2.- Placa de acero.
- 3.- Cables de 7- 3/4"
- 4.- Poliéstireno.
- 5.- Amortiguador elastomérico
- 6.- Neopreno.

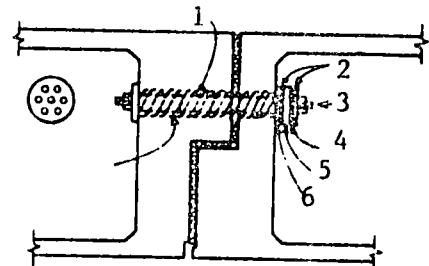


Figura 5.1 b)

Figura 5.2 CONEXION DE TRABE A VIGA.

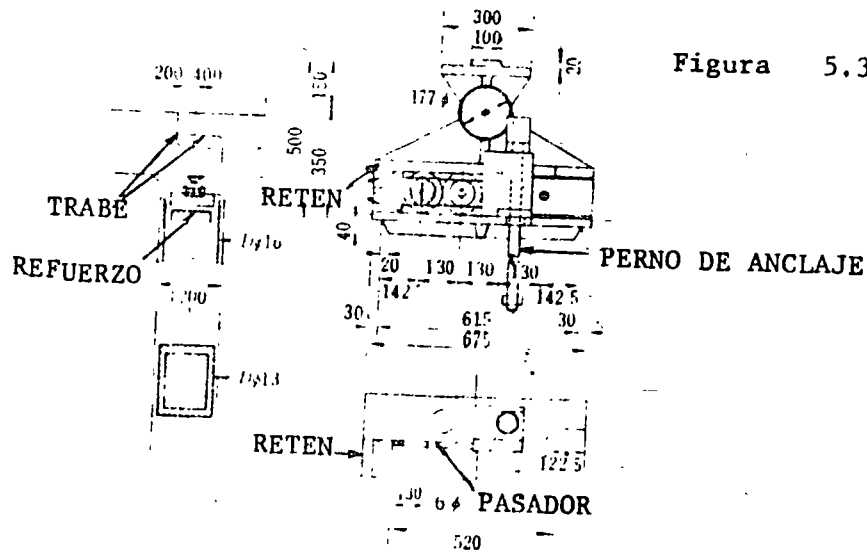
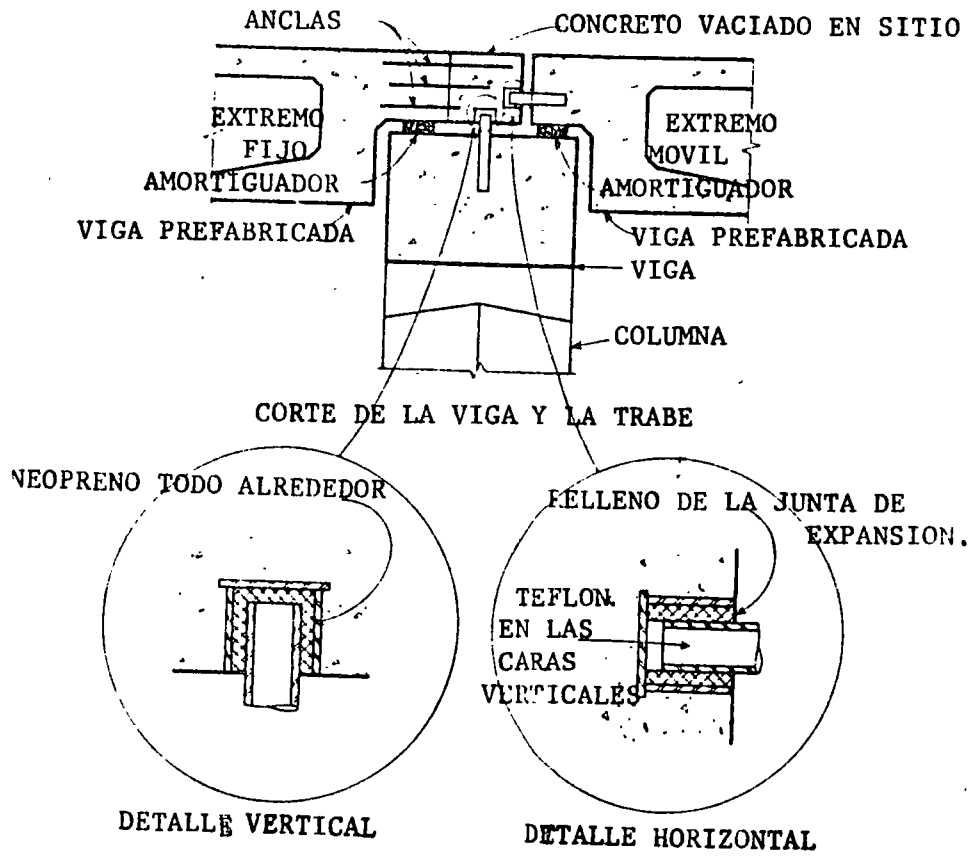
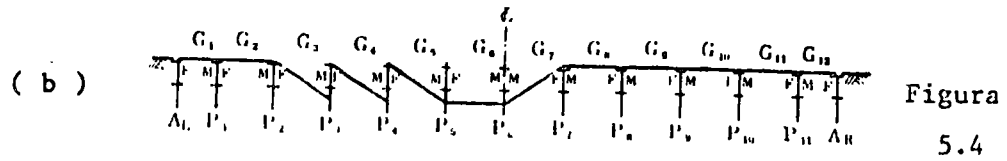
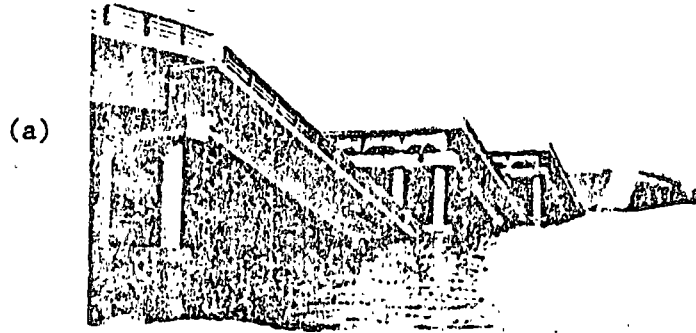


Figura 5.3



ILUSTRACION DE LA CAIDA DE LAS TRABES DEL PUENTE SHŌWA-ŌHASHI
(TEMBLOR DE NIIGATA DE JUNIO 16 DE 1964.)

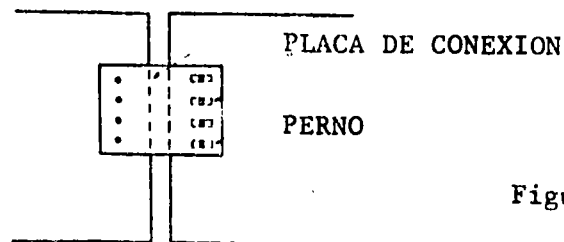


Figura 5.5

PLACA DE CONEXION PARA EVITAR LA CAIDA DE LAS TRABES.

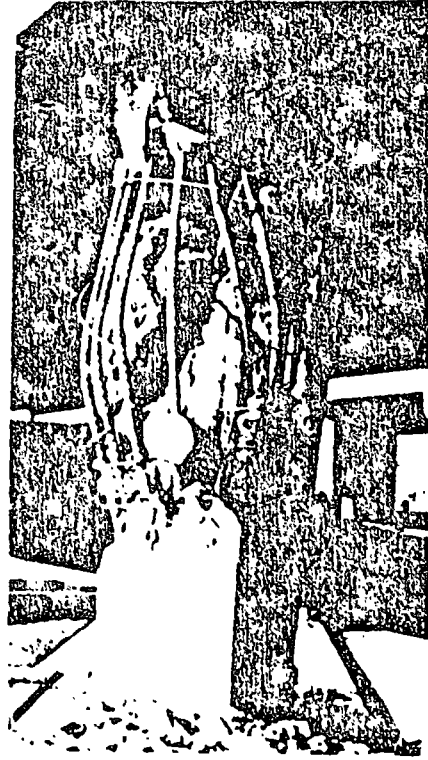


Figura 5,6

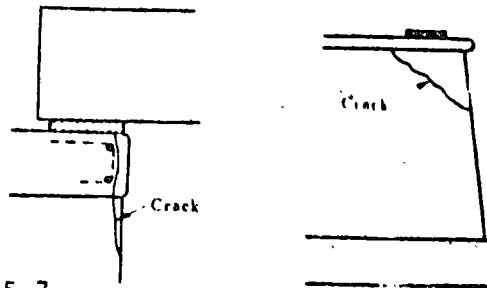


Figura 5,7

REFERENCIAS PARA CONSULTA ADICIONAL.

LIBROS.

- 1.- Biggs John M. Introduction to Structural Dynamics: Capítulo 8.- Mc. Graw Hill, 1964.
- 2.- Norris Charles H. y coautores. Structural Design for Dynamic Loads page 444, 445 Mc. Graw Hill, 1959.
- 3.- Okamoto Shunzo. Introduction to Earthquake Engineering.- Halsted Press. John Wiley & Sons, 1973. Capítulo 12.
- 4.- Roger Grover L. Dynamics of Framed Structures.- Capítulo 5 y 8, Wiley 1959.

PUBLICACIONES DIVERSAS.

- 5.- Kuang Han Chu y Marvin Jones. Theory of Dynamic Analysis of Box Girder Bridges Memorias IABSE 36-II-1976. Páginas 121-131
- 6.- Marvin Jones y Kuang Han Chu. Dynamic Analysis of a Box Girder Bridges *op. cit.* Páginas 133-145.
- 7.- David Williams y William G. Godden.- Experimental Model Studies of Seismic Response of High Curved Overcrossings. Informe No.EERC 76-18, Junio de 1976. University of California, Berkely.
- 8.- Ma.Chi Chen y J. Penzien. Non Linear Soil-Structure Interaction of Skew Highway Bridges. Informe No. UCB/ EERC- 77/24, Agosto 1977, University of California Berkely.
- 9.- Frank Baron, Metin Arikan y Raymond E. Hamati. The Effects of Seismic Disturbances on The Golden Gate Bridge. Informe No. EERC 76-31, Noviembre de 1976. University of California, Berkely.

AMERICAN SOCIETY OF CIVIL ENGINEERS.

- 10.- Bengt B. Broms. Lateral Resistance of Piles in Cohesive Soils.- Vol. 90, SM2 Marzo de 1964. Página 27.
- 11.- Trevor J. Poskitt. Structural Analysis of Suspension Bridges.- Vol. 92 ST 1, Febrero de 1966, página 49.
- 12.- Grant A. Ross, H. Bolton Seed y Ralph Migliaccio. Bridge Foundation Behavior in the Alaska Earthquake. Vol. 95, SM4, Julio de 1969. Página 1007.
- 13.- Anestis S. Veletsos y Ian. G. Currie. Analysis of Dynamic Response of Highway Bridges. Vol. 96 EM5, Octubre de 1970, página 593.
- 14.- Robin Shepherd y Richard E. Mc. Connel. Seismic Response Predictions of Bridge Pier.- Vol. 98, EM3, Junio de 1972. Página 609.
- 15.- Richard F. Domínguez y Charles E. Smith. Dynamic Analysis of Cable Systems. Vol. 98. ST 8, Agosto de 1972. Página 1817.

- 16.- Nicholas F. Morris. Dynamic Analysis of Cable Stiffened Structures. Vol. 100 ST5, Mayo de 1974. Página 971.
- 17.- Ahmed M. Abdel- Ghaffar. Free Lateral Vibrations of Suspension Bridges. Vol. 104 ST3. Marzo de 1978. Página 503.
- 18.- Sharad M. Mote y Kuang-Han Chu. Cable Trusses Subjected to Earthquakes Vol.104 ST4, Abril de 1978, página 667.
- 19.- Arthur L. Elliot: The San Francisco Earthquake.- A Lesson in Highway and Bridges Design. Civil Engineering, Septiembre de 1972. Página 95.
- 20.- Keith D. Bull, Seismic Design of Highway Bridges Vol. 98. ST8. Agosto de 1972. Página 1741.
- 21.- I. Kawasaki y E. Kuribayashi.- On Specifications for Earthquake Resistant Design of Honshu-Shikoku Bridges. Memorias, International Symposium on Earthquake Structural Engineering.- Agosto 19-21 de 1976. Vol. II. Página 711.- Department of Civil Engineering. University of Missouri-Rolla.
- 22.- K. Kawakami, E. Kuribayashi, T. Iwasaki y Y. Iida. On Specifications for Earthquake-Resistant Design of Highway Bridges. *op.cit.* Vol. II. Página 771.
- 23.- E.A. Egeseli y J.F. Fleming.- Dynamic Behavior of Cable Stayed Bridges. *op.cit.* Vol. I. Página 59.
- 24.- R.D. Sharpe y A.J. Carr. The Inelastic Seismic Response of Bridge Structures.- *op.cit.* Vol.I. Página 91.
- 25.- A. Páez. Vibraciones en Puentes: Hormigón y Acero No. 102 Asociación Técnica Española del Pretensado. 1er Trimestre de 1972. Página 23.
- 26.- Iikunishi y Y. Yamada. Earthquake Response and Earthquake Resistant Design of Long Span Suspension Bridges. Memorias, Third World Conference on Earthquake Engineering.- Nueva Zelanda, Vol.II, 1965. Página IV/K/12.
- 27.- Edward Margason. Earthquake Effect of Embedded Pile Foundations. Piletips.- Seminar on Current Practices in Pile Design and Instalation. San Francisco 1977. Página 65. Publicado por Associated Pile & Fitting Corp. 262 Rutherford Blvd., Clifton, N.J. 07014.
- 28.- Leonardo Zeevart.- Pile Design and Installation in Earthquake Areas. *op.cit.* Página 109.
- 29.- Especificaciones AASHTO.- Undécima Edición.

Journal of the
STRUCTURAL DIVISION
 Proceedings of the American Society of Civil Engineers

EARTHQUAKE FORCES IN REINFORCED CONCRETE CHIMNEYS

By Wadi S. Rumman,¹ M. ASCE

INTRODUCTION

The ever-increasing demand for air pollution control in the last decade or two has led to the construction of tall reinforced concrete chimneys. Many chimneys that are 800 ft high or more have already been built or are to be built in the near future. With the increase of the height of concrete chimneys, their response to lateral forces such as wind and earthquakes becomes more and more important. The purpose of this paper is to furnish numerous results of response of chimneys to actual earthquakes and to compare these results with values obtained using certain simplified rules that can be adapted to design office procedures.

The study is based on an elastic response and on a coefficient of .05 of critical damping.

METHOD OF SOLUTION

The response of a chimney to earthquake forces is computed by modal analysis techniques. This requires that the natural modes of vibration be obtained, from which the response of the chimney in the different modes is computed. The total response of the chimney is then obtained by the instantaneous combination of the responses in the different modes.

Modes of Vibration.—The basic differential equation for the free vibration of a chimney (ignoring shear deformations and rotary inertia effects) with zero damping is given by

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EI \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right) + m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0 \dots\dots\dots (1)$$

Note.—Discussion open until May 1, 1968. To extend the closing date one month, a written request must be filed with the Executive Secretary, ASCE. This paper is part of the copyrighted Journal of the Structural Division, Proceedings of the American Society of Civil Engineers, Vol. 93, No. ST6, December, 1967. Manuscript was submitted for review for possible publication on December 7, 1966.

¹Assoc. Prof. of Civ. Engrg., Univ. of Michigan, Ann Arbor, Mich.

in which $y(x, t)$ = the displacements in the chimney, $m(x)$ = the mass per unit length, x = the distance along the chimney, and t = time.

The method of separation of variables will give the frequency equation

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(EI \frac{d^2 \phi}{dx^2} \right) = m \omega^2 \phi \dots \dots \dots (2)$$

in which $\phi(x)$ is a mode shape and ω = the frequency.

Eq. 2 can only be satisfied for certain values of ω and ϕ which are the natural frequencies of the chimney and the mode shapes respectively. The solution of Eq. 2, however, can only be achieved numerically because of the variations of the moments of inertia of the chimney. The numerical solution used in this paper is the well-known Stodola process. This process has been briefly outlined by the writer in another paper² and will be presented in this paper in the section entitled "Computer Solution." The tables in a paper by Housner and Keightley³ can be used to obtain the modal characteristics of linearly tapered chimneys in which the outside diameter of the concrete shell as well as its thickness varies linearly along the height.

Response of Chimney to Earthquakes.—If a chimney is subjected to a base acceleration, a , then the basic differential equation with zero damping is

$$m \left(\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + a \right) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EI \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right) = 0 \dots \dots \dots (3)$$

It can be shown that a solution to Eq. 3 is

$$y(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \phi_i(x) q_i(t) \dots \dots \dots (4)$$

in which ϕ_i = the shape of the i th mode (dimensionless) and q_i = the displacement in the i th mode which is given by

$$\ddot{q}_i + \omega_i^2 q_i = \frac{-a \int_0^L m \phi_i dx}{\int_0^L m \phi_i^2 dx} \dots \dots \dots (5)$$

The damping can be introduced by writing Eq. 5 in the form

$$\ddot{q}_i + 2\beta \omega_i \dot{q}_i + \omega_i^2 q_i = \frac{-a \int_0^L m \phi_i dx}{\int_0^L m \phi_i^2 dx} \dots \dots \dots (6a)$$

in which β = the fraction of critical damping, L = length of chimney, ω_i = frequency in the i th mode, and

²Rumman, W. S., "Vibrations of Steel-Lined Concrete Chimneys," *Journal of the Structural Division*, ASCE, Vol. 89, No. ST5, Proc. Paper 3661, Oct., 1963, pp. 35-63.

³Housner, G. W., and Keightley, W. O., "Vibrations of Linearly Tapered Cantilever Beams," *Journal of the Engineering Mechanics Division*, ASCE, Vol. 88, No. EM2, Proc. Paper 3101, Apr., 1962, pp. 95-123.

$$\ddot{q}_i = \frac{d^2 q_i}{dt^2} \quad \dot{q}_i = \frac{dq_i}{dt} \dots \dots \dots (6b)$$

COMPUTER SOLUTION

Determination of Modes.—The procedure for finding the first mode using the Stodola method is as follows:

1. Assume any deflected shape for the chimney. The specific shape assumed is a zero-deflection at the bottom and unity at all the other stations.
2. Compute the values of the intensity of the dynamic loading, $m \omega^2 \phi$, with ω considered equal to 1.
3. Find the values of the bending moments, M , at the different stations, assuming a second degree variation in the loading, $m \phi$. Compute the values of M/EI .
4. Assuming a second degree variation in the values of M/EI and using Newmark's numerical procedure,⁴ calculate the displacements at all stations of the chimney beginning with zero-displacement and zero-slope at the bottom.
5. Normalize the computed shape by making the maximum displacement equal to +1.
6. Compare the normalized shape of Step 5 with the assumed shape of Step 1. The comparison is made on the basis of the difference between the absolute values of the two shapes at all the stations.
 - (a) If this difference does not exceed 0.000001 at any location, the computed shape is considered equal to the assumed shape and the square of the frequency is obtained by finding the ratio between the maximum value of the assumed shape and the corresponding value of the computed shape of Step 4. That is,

$$\omega^2 = \frac{\text{Maximum value of assumed } \phi}{\text{Corresponding value of computed } \phi} \dots \dots \dots (7)$$

Note that the maximum value of assumed ϕ is always equal to +1.

- (b) If the difference exceeds 0.000001, the process is repeated by assuming the normalized shape of Step 5 as the deflected shape and repeating the process beginning with Step 2. The process is thus repeated until convergence is obtained.

A higher mode frequency is obtained as follows:

7. Assume any shape; in this case, the same shape as in Step 1 is assumed.
8. Complete steps 2, 3 and 4 as for the first mode.
9. Purify the computed shape from the lower modes according to²

⁴Newmark, N. M., "Numerical Procedure for Computing Deflections, Moments, and Buckling Loads," *Transactions*, ASCE, Vol. 108, 1943.

20

$$\phi_p = \phi - \frac{\int m \phi \phi_1 dx}{\int m \phi_1^2 dx} \phi_1 - \frac{\int m \phi \phi_2 dx}{\int m \phi_2^2 dx} \phi_2 \dots - \frac{\int m \phi \phi_{(i-1)} dx}{\int m \phi_{(i-1)}^2 dx} \phi_{(i-1)} \dots \dots \dots (8)$$

in which ϕ = computed shape, and ϕ_p = purified shape.

10. Normalize the purified shape, ϕ_p , in the same manner as in the first mode (Step 5) and compare the normalized shape with the assumed shape. The comparison test is identical to that of the first mode.

(a) If the comparison test is not satisfied, then repeat the process beginning with Step 8 and using as the assumed shape the normalized shape of Step 10.

(b) If the comparison test is satisfied, the process is stopped and the square of the frequency is obtained by finding the ratio between the maximum value of the assumed shape and the corresponding value of the purified shape of Step 9. Therefore for the higher mode

$$\omega^2 = \frac{\text{Maximum value of assumed } \phi}{\text{Corresponding value of purified } \phi} \dots \dots \dots (9)$$

Response to Earthquakes.—The response of a chimney to an earthquake involves the determination of the maximum bending moments and the maximum shears at different sections along the chimney. These maximum moments and shears are calculated at each section by a combination of as many modes as desired. In other words, for any one section along the chimney the bending moment (or shear) is computed for each mode individually at short intervals of time (interval did not exceed 1/20 of the period of the highest mode) and then combined at each interval of time by obtaining their algebraic sum. The absolute maximum of these combined values is then taken as the maximum bending moment (or shear) at the particular section during the duration of the earthquake.

The above procedure requires that the response of the chimney be obtained individually and simultaneously for the different modes. The response of the chimney in any mode due to an earthquake will involve the solution of Eq. 6a.

Although the acceleration, a , of the earthquake can be expressed as a system of straight lines, yet the solution of Eq. 6a for the duration of the earthquake will require a prohibitive amount of time unless a high-speed computer is used. The IBM 7090 computer was therefore utilized in the solution of Eq. 6a using a third-order Runge-Kutta process. This process will be described briefly.

Eq. 6a has the form

$$\ddot{x}_1 + C \dot{x}_1 + K x_1 = -f(t) \dots \dots \dots (10)$$

Let $\dot{x}_1 = x_2 \dots \dots \dots (11)$

then Eq. 10 will take the form

$$\dot{x}_2 + C x_2 + K x_1 = -f \dots \dots \dots (12a)$$

or $\dot{x}_2 = -(f + K x_1 + C x_2) \dots \dots \dots (12b)$

If at any time, τ , x_1 and x_2 are known, which in the physical problem represent the displacement and velocity, respectively, then the value of x_1 and x_2 can be computed at the next time ($\tau + h$) in this manner: If at $t = \tau$, $x_1 = x_1(\tau)$ and $x_2 = x_2(\tau)$, then at $t = (\tau + h)$,

$$x_1(\tau + h) = x_1(\tau) + \frac{1}{4} k_{01} + \frac{3}{4} k_{21} \dots \dots \dots (13)$$

$$x_2(\tau + h) = x_2(\tau) + \frac{1}{4} k_{02} + \frac{3}{4} k_{22} \dots \dots \dots (14)$$

in which $k_{01} = h [x_2(\tau)] \dots \dots \dots (15)$

$$k_{02} = h [-f(\tau) - K x_1(\tau) - C x_2(\tau)] \dots \dots \dots (16)$$

$$k_{11} = h \left[x_2(\tau) + \frac{k_{02}}{3} \right] \dots \dots \dots (17)$$

$$k_{12} = h \left[-f\left(\tau + \frac{h}{3}\right) - K \left\{ x_1(\tau) + \frac{k_{01}}{3} \right\} - C \left\{ x_2(\tau) + \frac{k_{02}}{3} \right\} \right] \dots \dots (18)$$

$$k_{21} = h \left[x_2(\tau) + \frac{2}{3} k_{12} \right] \dots \dots \dots (19)$$

$$k_{22} = h \left[-f\left(\tau + \frac{2h}{3}\right) - K \left\{ x_1(\tau) + \frac{2}{3} k_{11} \right\} - C \left\{ x_2(\tau) + \frac{2}{3} k_{12} \right\} \right] \dots (20)$$

The initial displacement and velocity are required for this process and are taken as zero.

SCOPE OF THE STUDY

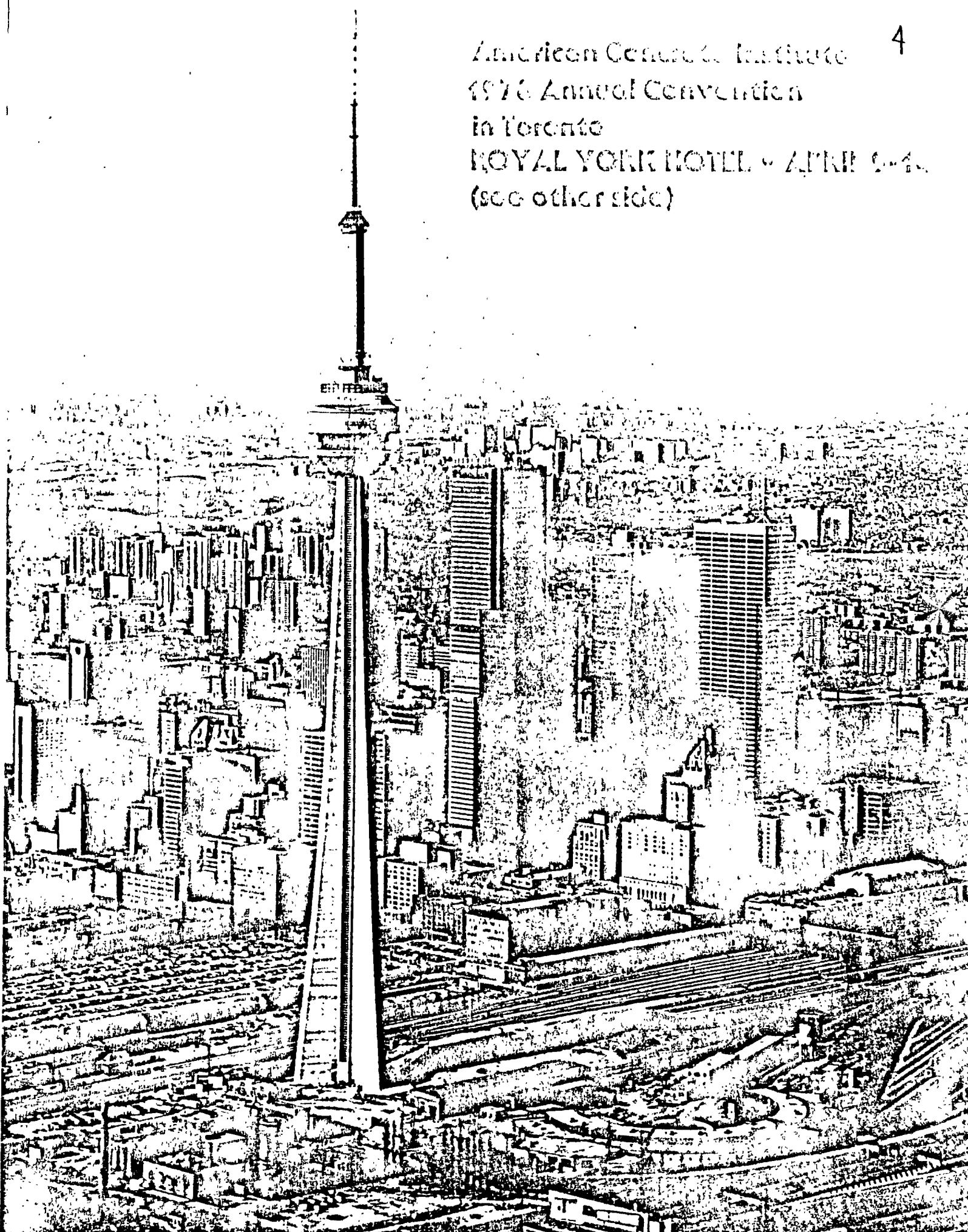
The study reported herein was made on eight reinforced concrete chimneys ranging in height from 352 ft to 825 ft. The main dimensions and data of these chimneys are given in Table 1.

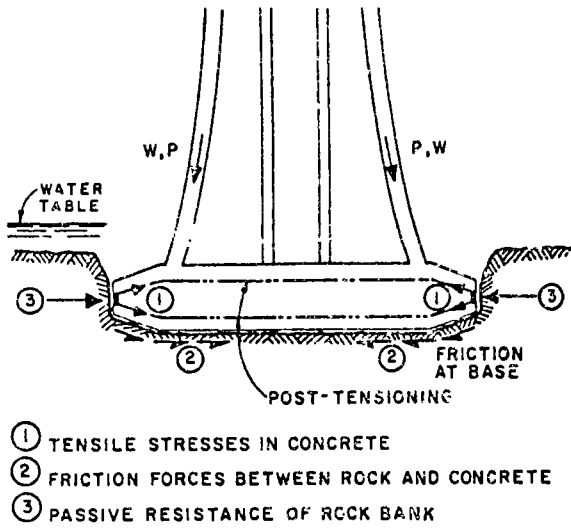
TABLE 1.—DIMENSIONS AND DATA OF CHIMNEY USED FOR STUDY

Designation	Height, in feet	Top Outside Diameter, in feet	Bottom Outside Diameter, in feet	Total Weight, in Kips	Remarks
1	352	23.58	30.90	4,532	Corbel-supported brick lining
2	450	16.33	35.79	6,743	Corbel-supported brick lining
3	534	18.67	35.03	8,374	Independent liner
4	622	23.33	47.26	12,526	Independent liner
5	707	19.98	69.14	26,236	Corbel-supported brick lining
6	800	36.56	65.00	25,033	Independent liner
7	800	29.31	52.90	12,768	Concrete liner of Chimney No. 6
8	825	25.00	63.96	22,976	Supported steel liner

W

American Ceramic Institute
1976 Annual Convention
in Toronto
ROYAL YORK HOTEL - APRIL 2-4
(see other side)





- ① TENSILE STRESSES IN CONCRETE
- ② FRICTION FORCES BETWEEN ROCK AND CONCRETE
- ③ PASSIVE RESISTANCE OF ROCK BANK

Fig. 2. Loading pattern of foundation slab.

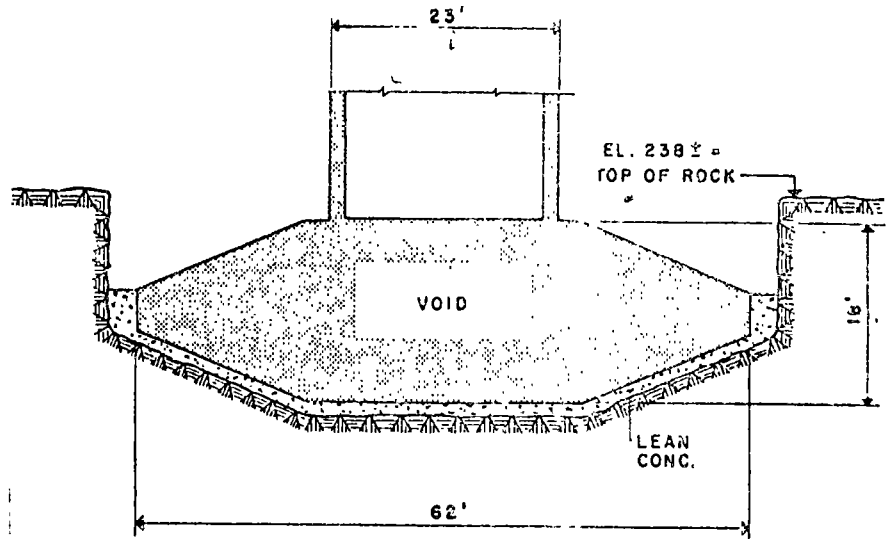


Fig. 3. Section through foundation.

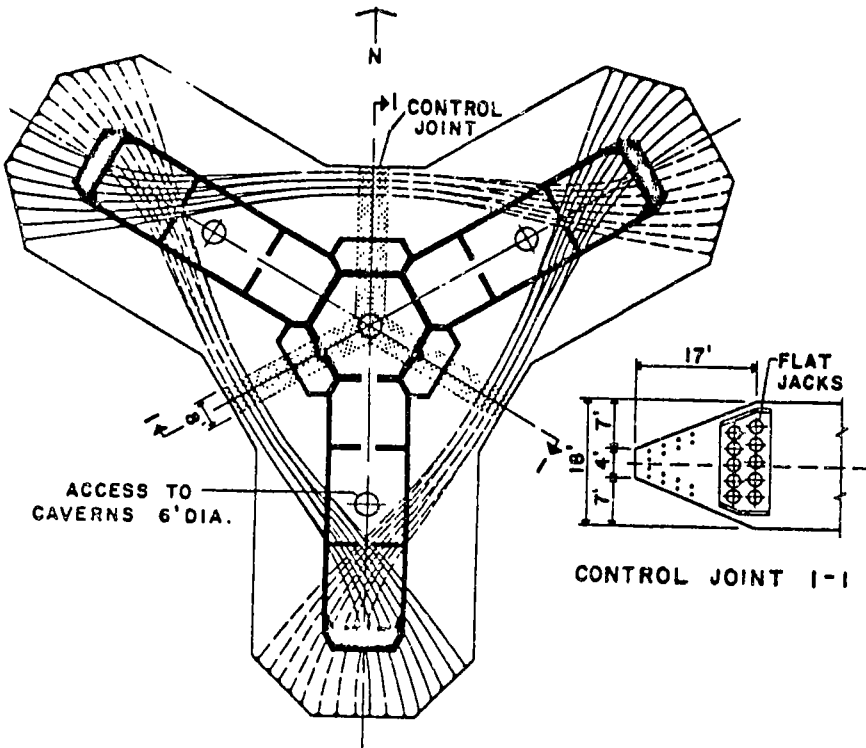


Fig. 4. Plan of foundation showing layout of prestressing tendons and section of control joint locating flat jacks.

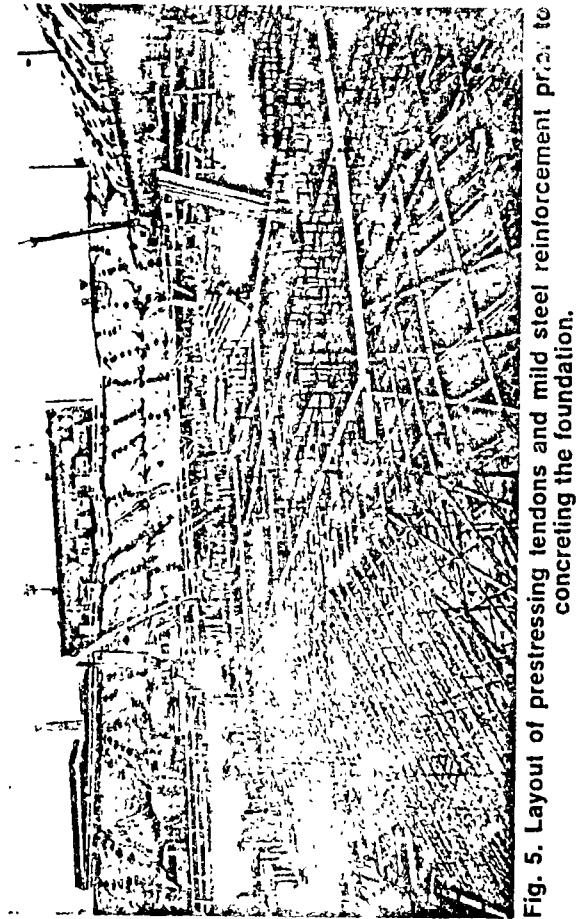


Fig. 5. Layout of prestressing tendons and mild steel reinforcement prior to concreting the foundation.

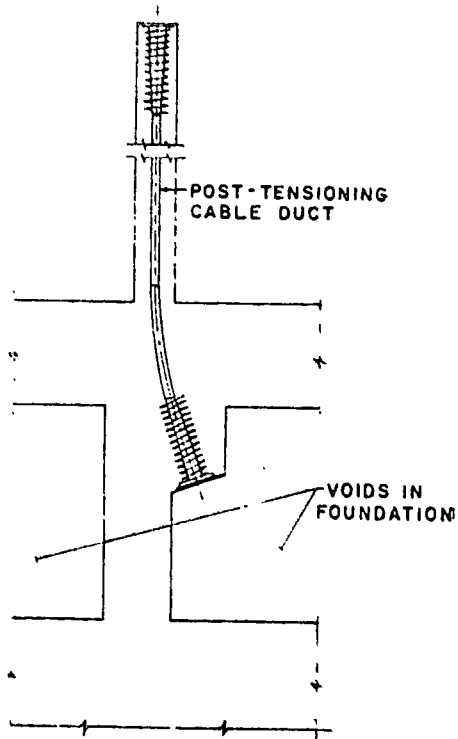


Fig. 6. Anchorage of Tower tendons.

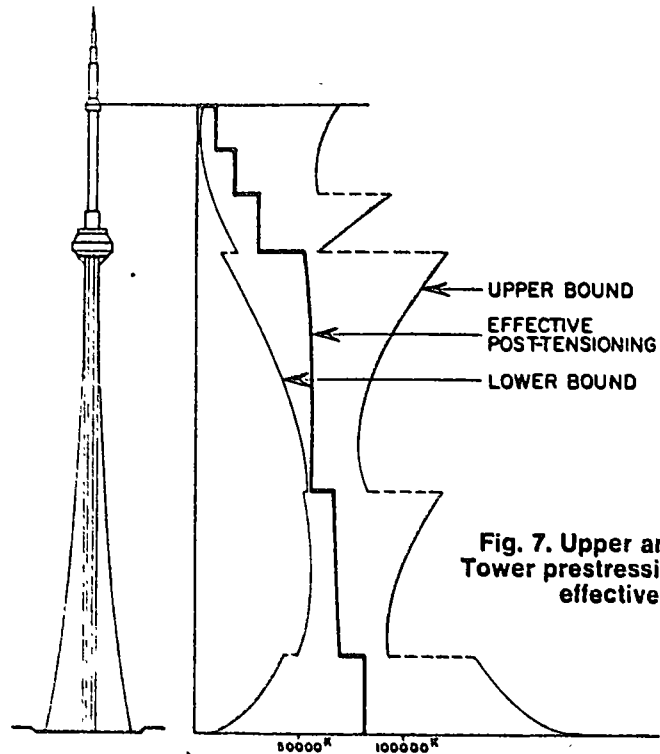


Fig. 7. Upper and lower bounds of Tower prestressing force with values effectively achieved.

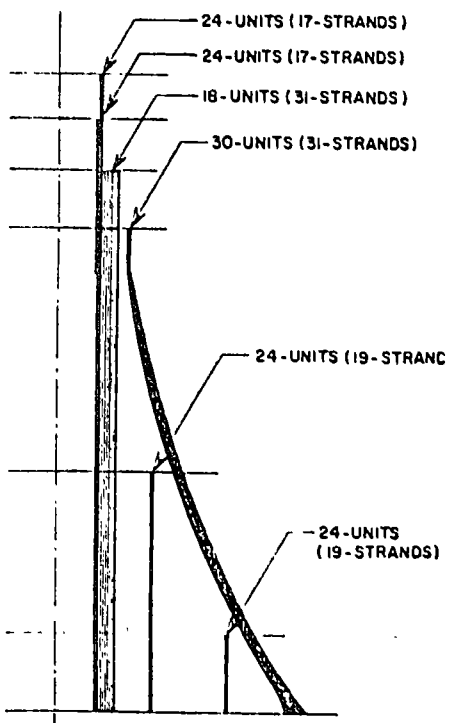


Fig. 8. Distribution of tendon units through Tower shaft.

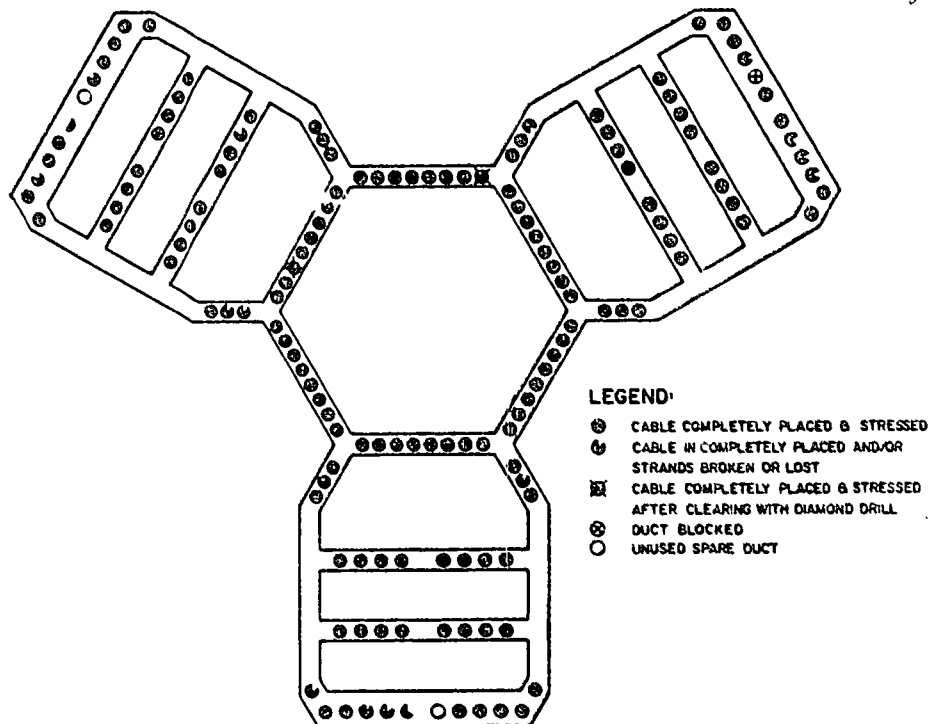


Fig. 11. Historical review of post-tensioning results.

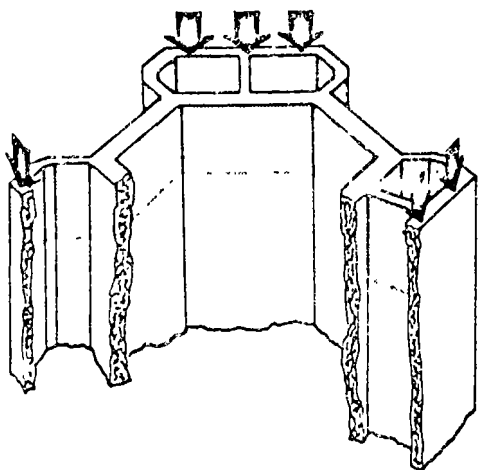


Fig. 24. Stage 1 loads concentrated at outside edges of truncated Tower. Note that shaded areas denote tensile stress.

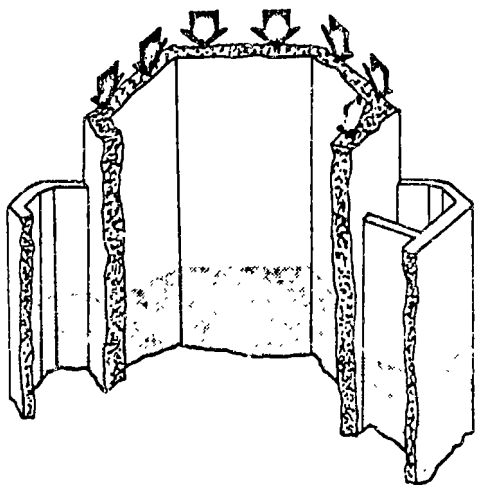


Fig. 25. Stage 2 loads concentrated in central portion of truncated Tower. Note that shaded areas denote tensile stress.

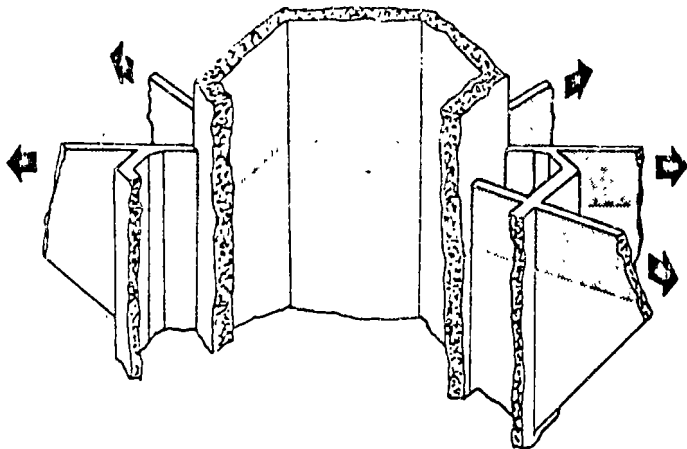


Fig. 26. Stage 3 horizontal loads from bracket walls. Note that shaded areas denote tensile stress.

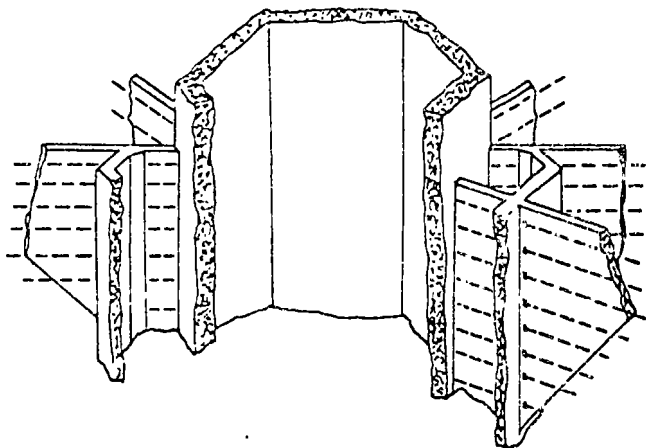
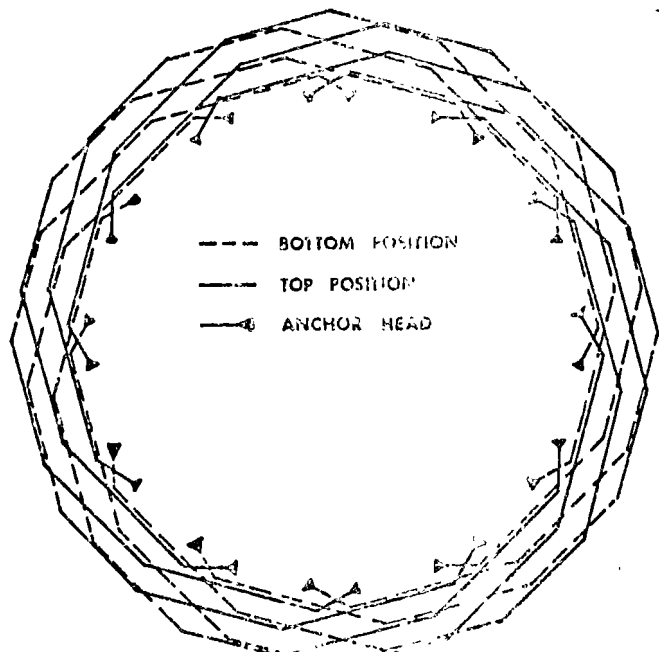


Fig. 27. Arrangement of stress bars for lateral support.

Fig. 28. Layout of tendons for ring beam.



cero de los conceptos enunciados (ductilidad), ya que su aplicabilidad es sensible a las rigideces que tienen los elementos estructurales después de que se inicia su cedencia plástica. Además, es inevitable que, si ninguna parte de la estructura está subdiseñada con respecto a un cierto criterio, algunas partes (la mayoría de los elementos estructurales) se hallen sobrediseñadas con referencia a ese mismo criterio. Ello trae consigo aumentos probables en los momentos de volteo, pues ocasionalmente habrá sismos que hagan que la estructura aproveche esas reservas adicionales de carácter local.

Queda por tanto la valuación de las reducciones que se apoyan en los dos primeros argumentos presentados (no simultaneidad de las cortantes máximas, y simplificación de la envolvente) y la comparación, con criterios usuales, de los resultados que se obtengan.

3. RESPUESTAS DE SISTEMAS DE COMPORTAMIENTO LINEAL

Consideremos un sistema que posee modos naturales de vibración, en el sentido clásico. Supongámoslo sujeto a una familia de temblores que pueden idealizarse como segmentos, todos ellos de la misma duración, de un proceso estocástico estacionario. Si la duración de los movimientos es grande en comparación con el periodo fundamental de vibración del sistema, y si este periodo es, a su vez, mucho mayor que los periodos dominantes de los acelerogramas de los temblores en cuestión, se demuestra³ que las respuestas de diseño del sistema están dadas aproximadamente por la relación

$$Q^2 = \sum Q_1^2 + \sum_{i \neq j} \sum \frac{Q_i Q_j}{1 + \epsilon_{ij}} \quad (1)$$

en la cual

- Q = respuesta del sistema, con probabilidad P de ser excedida al menos una vez
- Q_i = respuesta en el i ésimo modo natural de vibración, con probabilidad P de que Q_i o $-Q_i$ sea excedida al menos una vez; Q_i ha de tomarse con el mismo signo que el de la correspondiente función de transferencia cuando esta alcanza su valor máximo absoluto

$$\epsilon_{ij} = \frac{\omega_j - \omega_i}{\zeta_i \omega_i + \zeta_j \omega_j}$$

- ω_i = i ésima frecuencia circular natural del sistema, calculada como si este careciera de amortiguamiento

$$\omega_i' = \omega_i \sqrt{1 - \zeta_i^2} = \textit{iésima frecuencia circular natural del sistema amortiguado}$$

- ζ_i' = fracción del amortiguamiento crítico equivalente que el sistema posee en el i ésimo modo natural; se calcula de la relación

$$\zeta_i' = \zeta_i + \frac{2}{\omega_i^2}$$

- ζ_i = fracción del amortiguamiento crítico en el i ésimo modo natural
- s = duración de cada temblor, es decir, duración de cada segmento del proceso estocástico estacionario que idealiza a la familia de temblores

Si $\max \epsilon_{ij} \ll 1$, la ec 1 suministra resultados que difie-

ran poco de los que arroja la relación mas usual y mas simple

$$Q^2 = \sum_1 Q_i^2 \quad (2)$$

Esta equivalencia aproximada se cumple cuando las frecuencias de los modos naturales que contribuyen apreciablemente a Q difieren lo suficiente entre sí de acuerdo con la definición de ϵ_{ij}

En ciertas estructuras sujetas a ciertos tipos de perturbación, resulta preferible omitir el análisis modal y proceder directamente con las funciones de transferencia. Se define la función de transferencia ψ_q como la respuesta a la perturbación consistente en la aceleración $\delta(t)$, donde δ es la función delta de Dirac. Las estructuras a que nos referimos son aquellas para las que las funciones ψ_q son periódicas, con periodo corto en comparación con la duración de las perturbaciones. Estas estructuras carecen de amortiguamiento. Si la perturbación es tal que sus ordenadas espectrales de pseudovelocidad para fines de diseño son independientes del periodo natural en el intervalo de periodos que interesa, podemos valorar la distribución de las respuestas de diseño a partir de la relación

$$Q^2 = \int_{t_1}^{t_1+T} \psi_q^2 dt \quad (3)$$

donde t_1 es cualquier valor de t tal que $\psi_q(t)$ no es idénticamente nula para $t < t_1$ y T es el periodo de ψ_q . En estas condiciones también es válida la ec 2. La constante de proporcionalidad que implica la ec 3 puede valorarse por compara-

ción con las respuestas de diseño en sistemas conservadores de comportamiento lineal con un grado de libertad, sujetos a este tipo de perturbación.

Las ecs 2 y 3 también son aplicables al análisis de sistemas cuyas funciones de transferencia son ondas periódicas amortiguadas. Tal sucede cuando los grados de amortiguamiento de los modos naturales son proporcionales a los periodos de vibración correspondientes, si al suprimir el amortiguamiento, las funciones de transferencia satisfacen el criterio establecido al enunciar la ec 3. La constante de proporcionalidad se halla entonces tomando como base las respuestas de sistemas amortiguados con un grado de libertad.

Un caso particular de las perturbaciones consideradas en relación con la ec 3 es una familia de acelerogramas consistentes en segmentos finitos de ruido blanco. Las aceleraciones espectrales son entonces inversamente proporcionales al periodo.

4. VIGA UNIFORME DE CORTANTE

Adoptaremos como primera idealización de edificio una viga uniforme en la que la pendiente en cada sección es proporcional a la fuerza cortante que allí obra. Supondremos la viga empotrada en su base y libre en el extremo superior.

Si llamamos S a la fuerza cortante y u al desplazamiento relativo a la base, la hipótesis de comportamiento puede ponerse en la forma

$$S = k \frac{\partial u}{\partial z} \quad (4)$$

the maximum stress in the vertical reinforcement on the windward side of the chimney f_{sw} due to the action of wind and dead loads, shall be computed by Eq. (19):

$$f_{sw} = n f'_{cw} \left[\frac{1 + \cos \alpha}{\cos \beta - \cos \alpha} \right] \quad (19)$$

4.4.3—At horizontal sections where two equal openings occur, but not diametrically opposite each other in the chimney shell, the sections shall be investigated with the wind from two directions to determine the maximum stresses. Eq. (13), (15), and (19) shall be used to compute the stresses resulting from a wind in a direction along the diameter through one of the openings.

The maximum combined wind and dead load stresses resulting from a wind in a direction along the line of symmetry between the two openings shall be computed by Eq. (54), (55), and (56).

$$f'_{ow} = \frac{W (1 - \cos \alpha)}{2rt B} \quad (54)$$

Where B is as given below:

$$f_{cw} = f'_{cw} \left[1 + \frac{t}{2r (1 - \cos \alpha)} \right] \quad (55)$$

$$f_{sw} = n f'_{sw} \left[\frac{1 + \cos \alpha}{1 - \cos \alpha} \right] \quad (56)$$

where the openings are spaced 2ϕ deg apart and ϕ is less than 90 deg and all other values are as defined in preceding paragraphs.

Before solving Eq. (54), (55), and (56), solve for e/r in Eq. (53) using the value of p determined in Eq. (13).

$$e/r = A/B \quad (53)$$

where:

$$A = 1/2 (1 - p) (\alpha - \sin \alpha \cos \alpha) - (1 - p + np) (\beta + \sin \beta \cos \beta \cos 2\phi - 2 \cos \alpha \sin \beta \cos \phi) + 1/2 np \pi$$

$$B = (1 - p) (\sin \alpha - \alpha \cos \alpha) - 2 (1 - p + np) (\sin \beta \cos \phi - \beta \cos \alpha) - np \pi \cos \alpha$$

Compare the result of Eq. (53) with the actual e/r as determined from:

$$e/r = M/Wr \quad (57)$$

If the two values of e/r do not agree, vary α , maintaining p constant, to satisfy Eq. (53).

If the stresses obtained in Eq. (54), (55), and (56) exceed the allowable limits defined in Section 408, p must be increased and α varied to make Eq. (53) satisfactory.

Where the segment between openings is small as related to the height of the openings, this segment must be investigated as a column.

4.4.4—In addition to the reinforcement determined by the stability and temperature formu-

las, extra reinforcement shall be provided at the sides, bottom, top and corners of these openings as hereinafter specified. This extra reinforcement shall be placed near the outside surface of the chimney shell as close to the opening as proper spacing of bars will permit. Unless otherwise specified, all extra reinforcement shall extend past the opening a sufficient distance to develop the bars in bond.

4.4.5—At each side of the opening, the additional vertical reinforcement shall have a total area equal to established design reinforcement for one-half of the width of the opening.

4.4.6—At both the top and bottom of each opening, additional reinforcement shall be placed having an area at least equal to one-half the established design circumferential reinforcement interrupted by the opening, but the area A_s of this additional steel at the top and also at the bottom shall be not less than that given by the following:

$$A_s = \frac{0.07 f_c t S}{20,000^*} \quad (65)$$

where

$$f_c = 0.375 f'_c$$

t = concrete thickness at opening, in.

S = width of opening, in.

One-half of this extra reinforcement shall extend completely around the circumference of the chimney, and the other half shall extend beyond the opening a sufficient distance to develop the bars in bond. This steel shall be placed within a height not to exceed the thickness t .

4.4.7—Diagonal reinforcing with a total cross-sectional area in square inches of not less than 1/5 of the shell thickness in inches shall be placed at each corner of the opening.

4.4.8—Buttress walls shall not be incorporated in the design of the shell at openings.

4.5 — Earthquake design

4.5.1 *General*—Chimneys in earthquake areas shall be designed and constructed to withstand as a minimum the lateral seismic forces given herein,¹ assuming that the forces can act in any direction. The job specification should state applicable earthquake zone coefficient z .

4.5.2 *Notation*—The following notation shall apply to this section:

C^2 = numerical coefficient for base shear

D = outside diameter of chimney shell at top, ft

*This value applies when Grade 40 steel is used and may be increased when high strength steel is used, in proportion to the increase in yield strength up to a maximum increase of 20 percent.

¹A rational analysis based on modal response calculations is recommended for final design.

²Coefficient C in this specification is equivalent to KC in the Uniform Building Code.

4.5.6 Combined stresses—Stresses in concrete and reinforcement due to combined earthquake and dead loads denoted by f_{co} and f_{sc} shall be computed by the equations in Sections 4.3 and 4.4 in the same manner as stresses are computed for combined wind and dead loads.

4.6 — Vertical temperature stresses

4.6.1—The maximum vertical stress, in psi, in the concrete, occurring at the inside of the chimney shell, due to temperature, f'_{crv} shall be computed by Eq. (24):

$$f'_{crv} = LkT_s E_c \quad (24)$$

where

L = thermal coefficient of expansion of the concrete and of the reinforcing steel, to be taken as 0.0000065 per deg F

E_c = modulus of elasticity of the concrete, psi

$$k = -pn + \sqrt{pn(pn + 2z)} \quad (28)$$

p = ratio of total area of vertical temperature reinforcement to total area of concrete of chimney shell at section under consideration

z = ratio of distance between inner surface of chimney shell and vertical temperature reinforcement to total shell thickness t

n is as heretofore defined

T_s is computed by Eq. (21a), (21b), (21c), or (22)*

a. For unlined chimneys:

$$T_s = \frac{tD_{cs}}{C_c D_c} \left[\frac{T - T_o}{\frac{1}{K_1} + \frac{tD_{cs}}{C_c D_c} + \frac{D_{cs}}{K_2 D_{co}}} \right] \quad (21a)$$

b. For lined chimneys with insulation completely filling the space between the lining and shell:

$$T_s = \frac{tD_{cs}}{C_c D_c} \left[\frac{T - T_o}{\frac{1}{K_1} + \frac{t_b D_{cs}}{C_b D_b} + \frac{t_s D_{cs}}{C_s D_s} + \frac{tD_{cs}}{C_c D_c} + \frac{D_{cs}}{K_2 D_{co}}} \right] \quad (21b)$$

c. For lined chimneys with unventilated air space between the lining and shell:

$$T_s = \frac{tD_{cs}}{C_c D_c} \left[\frac{T - T_o}{\frac{1}{K_1} + \frac{t_b D_{cs}}{C_b D_b} + \frac{D_{cs}}{K_r D_s} + \frac{tD_{cs}}{C_c D_c} + \frac{D_{cs}}{K_2 D_{co}}} \right] \quad (21c)$$

d. For lined chimneys with a ventilated air space between the lining and shell:

$$T_s = \frac{tD_{cs}}{C_c D_c} \left[\frac{T - T_o}{\frac{1}{r_q K_1} + \frac{t_b D_{cs}}{r_q C_b D_b} + \frac{D_{cs}}{K_s D_s} + \frac{tD_{cs}}{C_c D_c} + \frac{D_{cs}}{K_2 D_{co}}} \right] \quad (22)$$

where

r_q = ratio of heat transmission through chimney shell to heat transmission through lining for chimneys with ventilated air spaces

t = thickness of concrete shell, in.

t_b = thickness of air space or insulation, in.

t_b = thickness of lining, in.

T = maximum temperature of gas inside chimney, deg F

T_o = minimum temperature of outside air surrounding chimney, deg F

*The research data available to establish the coefficients of heat transfer through chimney lining and shell, especially as they concern the heat transfer from gases to the surfaces and through ventilated air spaces between lining and shell, are somewhat meager. Unless complete heat balance studies are made for the particular chimney, it is permissible to use constants as determined or stated below. These constants when entered into the equations for temperature differential through the chimney shell T_s will give values of accuracy in keeping with the basic design assumptions.

$$r_q = 0.5$$

$$C_c = 12$$

C_s and C_b = to be obtained from the manufacturer of the materials used

K_1 = to be determined from curves in Fig. 5.15

$$K_2 = 12$$

$$K_r = T/120$$

$$K_s = T/150$$

The value of $r_q = 0.5$ shall apply only where the distance between the lining and the chimney shell is not less than 4 in. throughout the entire height of the lining and air inlet openings are provided through the chimney shell at the bottom of the lining having an area in square feet numerically equal to two-thirds the inside diameter in feet of the chimney shell at the top of the lining. Local obstructions in the air space between the lining and the chimney shell shall not restrict the area of the air space at any horizontal section to less than that specified for air inlet at the bottom of the lining.

Corbel supported full height linings should be arranged to allow for expansion and to protect adequately the concrete of the corbel and the chimney shell against corrosion from the chimney gases.

Where a self-supporting or corbel supported partial height lining is used, the height to which the lining is carried should be determined on the basis of the temperature stresses in the chimney shell and protection against corrosion of the concrete rather than on the basis that the temperature of the gas materially decreases as it passes up the chimney. Attention is called to a number of tests which have been made on chimneys in service (see "Report of Tests Made to Determine the Temperatures in Reinforced Concrete Chimneys," ACI Proceedings V. 21, 1925, p. 204; "Outline of Tests on 300-ft Reinforced Concrete Chimney," ACI Proceedings V. 22, 1926, p. 350; and "Report of Tests on 300-ft Reinforced Concrete Chimney," ACI Proceedings V. 23, 1927, p. 169) which show that the drop in temperature of the chimney gas between the entering point and the top of the chimney is relatively slight.

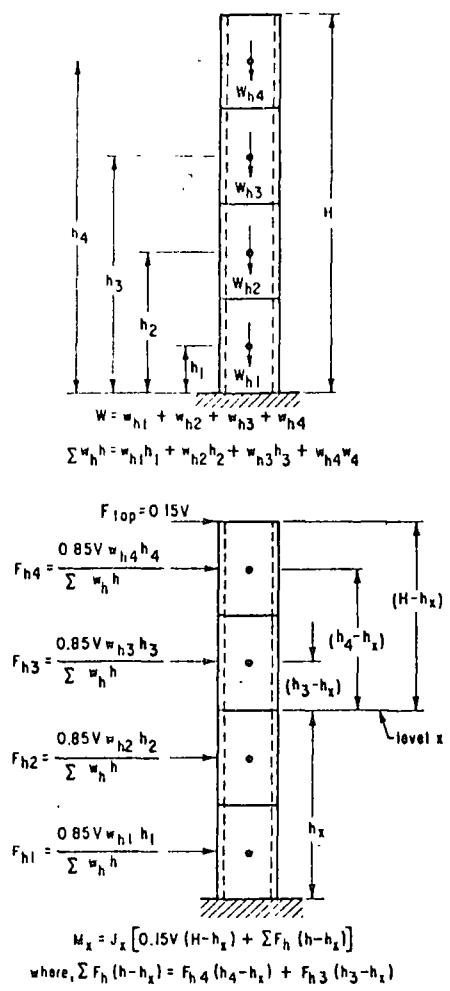


Fig. 4.5.2 — Definition of symbols

- W = total weight of chimney without lining, lb
- W_1 = total weight of chimney including corbel supported lining, lb
- w_h = that portion of W or W_1 which is assigned to the level designated as "h"
- Z = zone coefficient* for earthquake magnitude which shall not be less than 0.3 for Zone 1, 0.5 for Zone 2, and 1.0 for Zone 3.

4.5.3 Base shear—The base shear or total lateral force shall be computed by Eq. (58):

$$V = ZUCW \text{ or } V = ZUCW_1 \quad (58)$$

The value of C shall be computed by Eq. (59):

$$C = 0.1 / \sqrt[3]{T} \quad (59)$$

The value of the fundamental period of vibration of unlined chimneys may be approximated by Eq. (60):

$$T = \frac{1.8 H^2}{(3D_1 - D) \sqrt{E}} \quad (60)$$

If the chimney has a lining supported by the shell, but not structurally an integral part thereof, T shall be multiplied by the factor.

$$\sqrt{\frac{W_1}{W}} \quad (61)$$

4.5.4 Distribution of lateral forces—Fifteen percent of the total lateral force V shall be considered concentrated at the top of the chimney. The remainder shall be distributed in accordance with Eq. (62):

$$F_h = \frac{0.85V w_h h}{\Sigma w_h h} \quad (62)$$

4.5.5 Moments—The design moment at any level of the chimney shall be computed by Eq. (63):

$$M_x = J_x [0.15V (H - h_x) + \Sigma F_h (h - h_x)] \quad (63)$$

in which the value of J_x is determined from:

$$J_x = J + (1 - J) (h_x/H)^5 \quad (64)$$

where

$$J = 0.6 / \sqrt[3]{T} \quad (65)$$

and J shall be not less than 0.45 nor greater than 1.0.

- D_1 = outside diameter of chimney shell at base, ft
- E = modulus of elasticity of concrete, psi
- F_h = lateral force applied to a level designated as "h"
- H = height of chimney above base, ft
- h = height above base to the level designated as "h", ft
- h_x = height above base to the level designated as "x", ft
- J = numerical coefficient for base moment
- J_x = numerical coefficient for moment at a level designated as "x"
- $\Sigma w_h h$ = summation of the products of all $w_h h$ for the chimney
- M = moment at the base
- M_x = moment at any level "x"
- T = fundamental period of vibration of the chimney, sec
- U = use factor and varies from 1.3 to 2.0 (see commentary)
- V = total shear at the base

*From the map of the United States showing zones of approximately equal seismic probability in the latest edition of the Uniform Building Code. The job specifications should indicate zone to be used for design (as well as the "use factor").

Fig. 20.1. Base shear.

$$V = ZKCW \dots (1-A)$$

V = Base shear, kips

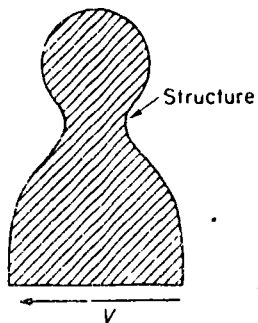
Z = Seismicity coefficient
= 1.0 for UBC Zone III

K = Structure coefficient
= 2.0 for towers, chimneys

C = Flexibility coefficient
= $\frac{0.05}{\sqrt[3]{T}}$ --- (1-B)

T = Fundamental period of structure (sec)

W = Operating weight of structure (kips)



$$F_i = 0.004 V \left(\frac{h_n}{D}\right)^2 \dots (2-A)$$

$$F_i = 0 \text{ for } \frac{h_n}{D} \geq 3$$

$$F_i = 0.15 V \text{ for } \frac{h_n}{D} > 6.12$$

$$F_x = (V - F_i) \frac{w_x h_x}{\sum_{i=1}^n w_i h_i} \dots (2-B)$$

$$V = F_i + \sum_{i=1}^n F_i \dots (2-C)$$

$$V_x = F_i + \sum_{i=x}^n F_i \dots (2-D)$$

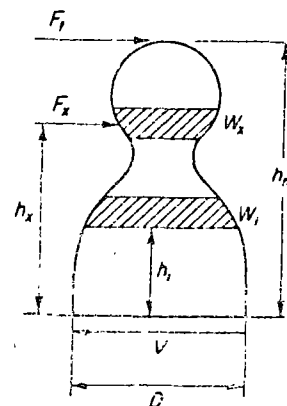


Fig. 20.2. Distribution of base shear.

Fig. 20.3. Moments.

$$M = J \left(F_i h + \sum_{i=1}^n F_i h_i \right) \dots (3-A)$$

$$J = \frac{0.6}{\sqrt[3]{T}} \dots (3-B)$$

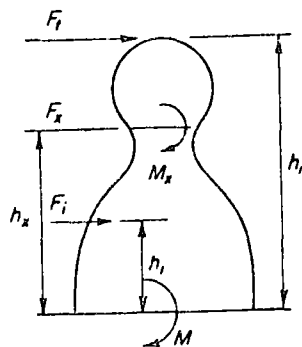
T = Fundamental period, sec

$$M_x = J_x \left[F_i (h_n - h_x) + \sum_{i=x}^n F_i (h_i - h_x) \right] \dots (3-C)$$

$$J_x = J + (1 - J) \left(\frac{h_x}{h_n} \right)^3 \dots (3-D)$$

$J_x = J = 1.0$ when $T \geq 0.216$ sec.

J min, for structures other than building, = 0.45



The transverse design shear at any horizontal plane in the structure is the cumulative sum of the lateral forces above that plane, resulting from the distribution of the base shear by the criteria given by formulas 2-A and 2-B of Fig. 20.2 Formula 2-C states this for any plane x above the base, giving V_x . Formula 2-D provides the corresponding value at the base V , which of course should check the base shear that previously has been distributed and now is reaccumulated.

Having determined the base shear (Fig. 20.1) and the distribution of that base shear (Fig. 20.2), the remaining basic design criteria relate to the overturning moment on the structure as a whole and at any horizontal plane x . If all of the lateral forces acted simultaneously in one direction, which is equivalent to saying that the action or response is entirely in the fundamental mode, then the overturning moment at any plane would be the moment of the lateral forces, in absolute value, above and about that plane. The formulas for J and J_x , 3-B and 3-D of Fig. 20.3, then should be unity. Actually, the design base shear represents the sum of the modal shears significant in the response of the structure. Similarly, the base overturning moment should be the sum of the modal base moments. The base overturning moments in the different modes for a uniform towerlike structure are related to the modal shears and the structure height h_n as follows:

$$M_1 = 0.729V_1h_n$$

$$M_2 = 0.209V_2h_n$$

$$M_3 = 0.127V_3h_n$$

These are for structures deflecting in bending. The constants for structures deflecting in shear are substantially the same for the second and higher modes, being 0.212 and 0.127 for the second and third modes. In the first mode it is 0.636. Modes higher than the third contribute little toward base overturning. The base overturning moment corresponding to the statically distributed forces per the criteria of Fig. 20.2 would be:

$$M = 0.72Vh_n$$

So, if the design base moment were to be considered the moment of the static lateral forces, this is tantamount to saying that the base moment should correspond to the total design lateral force, or base shear, applied to the structure in the first or fundamental mode. This would be very conservative. It is clear that if any significant part of the design base shear is assignable to higher modes, the base moment will be reduced.

The commentary supporting the SEAOC code (1967) outlines the reasoning that results in a reduced base moment by a factor J as given by formula 3-A in Fig. 20.3. Formula 3-B relates J to the fundamental period, and a minimum value of J for structures other than buildings is 0.45. At any other horizontal plane x , the overturning moment is given by formula 3-C of Fig. 20.3, with J_x

defined by formula 3-D. $J = 1.0$ for $T = 0.216$. For this T , and lesser values of T , $J = J_x = 1.0$.

14

20.3 FUNDAMENTAL PERIOD T DETERMINATIONS

The primary need for determining the fundamental period of vibration of a structure under design is its use in formula 1-B in determining the flexibility coefficient C . T also enters into the determination of J by formula 3-B. In both cases it is the cube root of T that is required. As mentioned earlier, this permits considerable inaccuracy in T without significantly affecting the values of either C or J .

While some approximate empirical formulas are given in the SEAOC code for pre-establishing the fundamental period T for buildings, for structures other than buildings, this period must be properly substantiated by technical data. This option is available to the earthquake engineer designing a building—in lieu of using the empirical formulas given in the code. It is rather the exception than the rule that this option is exercised for building design.

It is the purpose here to list and compare some of the methods and formulas available to compute the fundamental periods of towers and chimneys.

20.3.1 Fundamental Periods of Reinforced Concrete Chimneys

The American Concrete Institute's Committee 505 (1968), after studying the periods of a number of reinforced concrete chimneys, evolved the following empirical formula. While dimensionally inconsistent, as is the SEAOC formula for building periods, it nevertheless gives results very consistent with other methods, as shown in Table 20.2.

$$T = \frac{1.8H^2}{(3D_o - D_H)E^{1.2}} \quad (20.1)$$

where T = fundamental period in seconds

H = height in feet

D_o = outside diameter at the base in feet

D_H = outside diameter at the top in feet

E = modulus of elasticity of concrete in pounds per square inch.

$E = 10 \times 28$ -day compressive strength of the concrete

G. W. Housner and W. O. Keightley (1963) have developed the following formula for the period of a tapered cantilever. It is not only dimensionally consistent, but it has been extended in the referenced work to provide the second and third mode periods as well as the fundamental. These are important where dynamic analyses are to be made, involving the modal response to

Table 20.1. COEFFICIENTS FOR DETERMINING PERIOD OF VIBRATION OF FREE-STANDING CYLINDRICAL SHELLS HAVING VARYING CROSS SECTIONS AND MASS DISTRIBUTION*

$\frac{h_x}{H}$	α	β	γ	$\frac{h_x}{H}$	α	β	γ
1.00	2.103	8.347	1.000000	0.50	0.1094	0.9863	0.95573
0.99	2.021	8.121	1.000000	0.49	0.0998	0.9210	0.95143
0.98	1.941	7.898	1.000000	0.48	0.0909	0.8584	0.94683
0.97	1.863	7.678	1.000000	0.47	0.0826	0.7987	0.94189
0.96	1.787	7.461	1.000000	0.46	0.0749	0.7418	0.93661
0.95	1.714	7.248	0.999999	0.45	0.0678	0.6876	0.93097
0.94	1.642	7.037	0.999998	0.44	0.0612	0.6361	0.92493
0.93	1.573	6.830	0.999997	0.43	0.0551	0.5872	0.91854
0.92	1.506	6.626	0.999994	0.42	0.0494	0.5409	0.91173
0.91	1.440	6.425	0.999989	0.41	0.0442	0.4971	0.90448
0.90	1.377	6.227	0.999982	0.40	0.0395	0.4557	0.89679
0.89	1.316	6.032	0.999971	0.39	0.0351	0.4167	0.88864
0.88	1.256	5.840	0.999956	0.38	0.0311	0.3801	0.88001
0.87	1.199	5.652	0.999934	0.37	0.0275	0.3456	0.87088
0.86	1.143	5.467	0.999905	0.36	0.0242	0.3134	0.86123
0.85	1.090	5.285	0.999867	0.35	0.0212	0.2833	0.85105
0.84	1.038	5.106	0.999817	0.34	0.0185	0.2552	0.84032
0.83	0.988	4.930	0.999754	0.33	0.0161	0.2291	0.82901
0.82	0.939	4.758	0.999674	0.32	0.0140	0.2050	0.81710
0.81	0.892	4.589	0.999576	0.31	0.0120	0.1826	0.80459
0.80	0.847	4.424	0.999455	0.30	0.010293	0.16200	0.7914
0.79	0.804	4.261	0.999309	0.29	0.008769	0.14308	0.7776
0.78	0.762	4.102	0.999133	0.28	0.007426	0.12576	0.7632
0.77	0.722	3.946	0.998923	0.27	0.006249	0.10997	0.7480
0.76	0.683	3.794	0.998676	0.26	0.005222	0.09564	0.7321
0.75	0.646	3.645	0.998385	0.25	0.004332	0.08267	0.7155
0.74	0.610	3.499	0.998047	0.24	0.003564	0.07101	0.6981
0.73	0.576	3.356	0.997656	0.23	0.002907	0.06056	0.6800
0.72	0.543	3.217	0.997205	0.22	0.002349	0.05126	0.6610
0.71	0.512	3.081	0.996689	0.21	0.001878	0.04303	0.6413
0.70	0.481	2.949	0.996101	0.20	0.001485	0.03579	0.6207
0.69	0.453	2.820	0.995434	0.19	0.001159	0.02948	0.5992
0.68	0.425	2.694	0.994681	0.18	0.000893	0.02400	0.5769
0.67	0.399	2.571	0.993834	0.17	0.000677	0.01931	0.5536
0.66	0.374	2.452	0.992885	0.16	0.000504	0.01531	0.5295
0.65	0.3497	2.3365	0.99183	0.15	0.000368	0.01196	0.5044
0.64	0.3269	2.2240	0.99065	0.14	0.000263	0.00917	0.4783
0.63	0.3052	2.1148	0.98934	0.13	0.000183	0.00689	0.4512
0.62	0.2846	2.0089	0.98789	0.12	0.000124	0.00506	0.4231
0.61	0.2650	1.9062	0.98630	0.11	0.000081	0.00351	0.3940
0.60	0.2464	1.8068	0.98455	0.10	0.000051	0.00249	0.3639
0.59	0.2288	1.7107	0.98262	0.09	0.000030	0.00165	0.3327
0.58	0.2122	1.6177	0.98052	0.08	0.000017	0.00104	0.3003
0.57	0.1965	1.5279	0.97823	0.07	0.000009	0.00062	0.2669
0.56	0.1816	1.4413	0.97573	0.06	0.000004	0.00034	0.2323
0.55	0.1676	1.3579	0.97301	0.05	0.000002	0.00016	0.1966
0.54	1.1545	1.2775	0.97007	0.04	0.000001	0.00007	0.1597
0.53	0.1421	1.2002	0.96688	0.03	0.000000	0.00002	0.1216
0.52	0.1305	1.1259	0.96344	0.02	0.000000	0.00000	0.0823
0.51	0.1196	1.0547	0.95973	0.01	0.000000	0.00000	0.0418
				0.	0.	0.	0.

*Mitchell formula: $T = \left(\frac{H}{100}\right)^2 \sqrt{\frac{\sum w \Delta a + (1/H) \sum P \beta}{\sum E D^3 \Delta r}}$

some given ground motion. Since our interest here is primarily in the fundamental mode, the formula and related curves are given only for this mode, with some minor changes in notation to provide some degree of consistency in the nomenclature used here.

$$T = 2\pi \left[\frac{A_o P H^4}{\Omega_1^2 E I_o} \right]^{1/2} \quad (20.2)$$

- where T = fundamental period in seconds
- A_o = cross-sectional area of the shell at the base in square feet
- P = mass density in slugs per cubic foot
- H = height in feet
- E = modulus of elasticity in pounds per square foot
- I_o = moment of inertia of the base cross section in feet⁴
- Ω_1^2 = constant given by Fig. 20.4 depending upon the ratios r_1 and r_2
- r_1 = ratio of the mean diameters, top to bottom, = $(D_H - t_H)/(D_o - t_o)$
- r_2 = ratio of shell thicknesses, top to bottom, = t_H/t_o
- t_H, t_o = shell thicknesses, top and bottom, in feet

Warren W. Mitchell in an unpublished work (1962) developed a form of solution of the familiar Rayleigh principle of equating potential and kinetic energies in a vibrating system, which is especially useful in calculating fundamental periods of cylindrical, tapered-cylindrical, and step-tapered-cylindrical structures common to refinery-type vessels.

$$T = \left[\frac{H}{100} \right]^2 \sqrt{\frac{\sum w \Delta\alpha + (1/H) \sum P\beta}{\sum \bar{E} D^3 t \Delta\gamma}} \quad (20.3)$$

- where T = fundamental period in seconds
- H = height in feet
- w = weight per foot of height over a uniform, or assumed uniform, section of the structure in pounds per foot
- P = concentrated loads that may be attached to

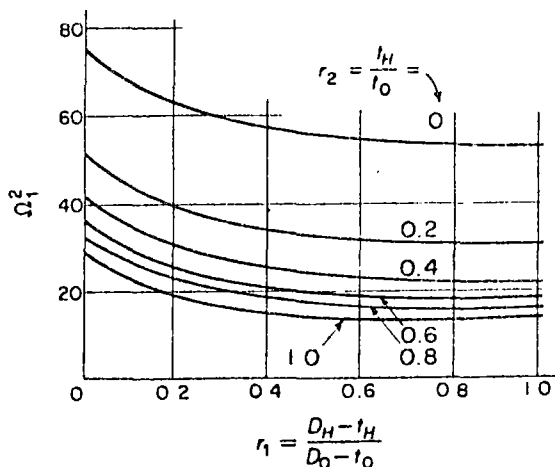


Fig. 20.4. Ω_1^2 for Housner-Keightley formula for fundamental period of tapered cantilevers.

- the structure at any level, which add mass but do not contribute to the stiffness of the structure
- \bar{E} = Modulus of elasticity in pounds per square inch over 10^6
- D = diameter of each section in feet
- t = thickness of each section of shell in inches
- $\Delta\alpha$ = difference in the α values between the top and bottom of each section
- β = constant at the section at which concentrated loads P are attached
- $\Delta\gamma$ = difference in the γ values between the top and bottom of each section
- Σ = summation of the products of the quantities shown over the height of the structure

Table 20.1 has the values for α , β , and γ . In applying this method to the 450-ft chimney, item 6 of Table 20.2, the chimney was arbitrarily divided into 10 sections. The result is in excellent agreement with those obtained by two other methods given above. An illustration of the use of the Mitchell method to a step-tapered tower is given later.

Table 20.2. FUNDAMENTAL PERIODS OF REINFORCED CONCRETE TAPERED CHIMNEYS

Chimney number	Period in seconds							
	Dimensions			University of Michigan computer		ACI formula	Housner and Keightley	Mitchell
	Height, ft	Top O.D., ft	Bottom O.D., ft	Strong axis	Weak axis			
1	299.67	9.92	26.67	1.09	1.12	1.23	1.29	
3	343.55	16.50	33.00	1.48	1.53	1.38	1.40	
3	352.5	17.17	27.42	1.83	2.12	1.84	1.84	
4	417.0	21.17	37.58	1.47	1.51	1.76	1.51	
5	534.0	18.67	35.03	2.26	2.39	3.17	2.68	
6	450.0	17.75	40.0	[Not available]		2.02	2.05	2.02

Table 20.2 shows comparative results of periods of several chimneys as determined by the ACI formula (Eq. 20.1), by the Housner-Keightley formula (Eq. 20.2), and for chimney Number 6 by the Mitchell formula (Eq. 20.3). For chimneys 1 through 5, computer calculations from the University of Michigan (a part of ACI Committee 505 study) also are shown. Results should be compared with the "strong axis" computer results. Note that the Housner-Keightley results are more consistently in accord with the computer results than are the ACI results, although the only large disparity between ACI and the computer is for chimney Number 5. The results for chimney Number 6 from the three formulas given here are in almost exact accord.

To illustrate the application of the SEAOC criteria to a chimney, the shear and moment curves for the design of the 450-ft chimney Number 6 in Table 20.2 will be developed. The basic dimensions of this chimney are as follows:

- $h_n = 450$ ft
- $D_o = 40.00$ ft
- $D_H = 17.75$ ft
- $t_o = 24$ in.
- $t_H = 7$ in.
- total weight $W = 10,814$ kips
- fundamental period $T = 2.02$ sec

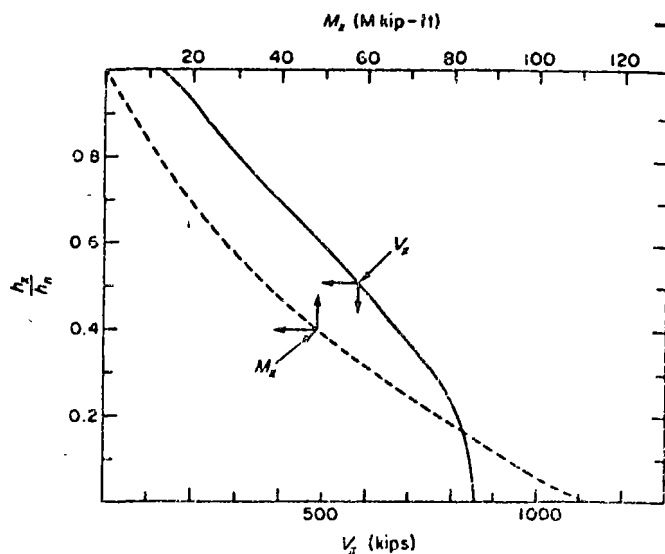


Fig. 20.5. Earthquake design shear and moments in a 450-ft reinforced concrete chimney.

combined earthquake coefficient = $ZKC = 1.0 \times 2.0 \times 0.05/2.02^{1/3} = 0.0786$
 base shear $V = ZKCW = 0.0786 \times 10814 = 852$ kips
 Since H/D_o is greater than 6.12, $F_t = 0.15$ and $V = 127$

Table 20.3. EARTHQUAKE DESIGN SHEARS AND MOMENTS IN 450-FT CHIMNEY

$\frac{h}{h_n}$	$\frac{h_x}{h_n}$	w_x , kips	$\frac{w_x h_x}{h_n}$	$\frac{w_x h_x}{\sum w h} (V - F_t) \left(\frac{w_x h_x}{\sum w h} \right)$	V_x , kips	$\left(\frac{h_x}{h_n} \right)^3$	J_x	M_x , kip ft
1.00					127 = F_t			
	0.95	341	324	0.083	187.2	0.852	0.922	2630
	0.85	472	401	0.106	264.0	0.614	0.797	9000
	0.75	607	455	0.117	348.8	0.421	0.695	16100
	0.65	761	495	0.126	440.2	0.274	0.618	24000
	0.55	937	515	0.132	535.9	0.166	0.561	32900
	0.45	1120	504	0.129	629.4	0.091	0.522	43200
	0.35	1310	458	0.117	714.2	0.043	0.497	55300
	0.25	1526	381	0.098	785.3	0.0156	0.462	69100
	0.15	1720	258	0.066	833.2	0.0033	0.476	85200
	0.05	2020	101	0.026	852.0	0.00012	0.474	102000
0							0.474	113000
		10814	3892	1.000	725.0 = $\sum F_x$			
		W	$\sum \frac{w_x h_x}{h_n}$		127.0 = F_t			
					852.0 = V			

$$J = \frac{0.60}{1 + \sqrt{T}} = \frac{0.60}{3 + \sqrt{2.02}} = 0.474 \quad J_x = J + (1 - J) \left(\frac{h_x}{h_n} \right)^3 = 0.474 + 0.526 \left(\frac{h_x}{h_n} \right)^3$$

kips. The remainder of the shear, $852 - 127 = 725$ kips, will be distributed in accordance with formula 2-B of Fig. 20.2. This is done by dividing the chimney into 10 equal height sections and performing the calculation shown in Table 20.3. Summing the resulting forces progressively from the top to the bottom provides the shears at all sections. These are plotted in Fig. 20.5.

The computation of $J = 0.474$ and of the J_x values at different heights in the chimney, in accordance with the formulas 3-B and 3-D, respectively, of Fig. 20.3, are also indicated in Table 20.3. The resulting moment curve has been plotted on Fig. 20.5 also.

20.3.2 Fundamental Period of Steel Chimneys

For cantilevered structures of uniform section, Eq. 20.4 applies to materials generally:

$$T = 1.79 \left(\frac{wH^4}{EIg} \right)^{1/2} \quad (20.4)$$

For steel, this can be manipulated into the following form:

$$T = 765 \times 10^{-8} \left(\frac{H}{D} \right)^2 \left(\frac{12wD}{t} \right)^{1/2} \quad (20.5)$$

- where T = fundamental period in seconds
- H = height in feet
- D = diameter in feet
- w = weight per unit of height in pounds per foot
- t = shell thickness in inches
- E = modulus of elasticity in pounds per square foot
- I = moment of inertia of the cross section in feet⁴
- g = acceleration of gravity = 32.2 ft/sec²

If the base of the steel chimney is flared, the period of such a chimney can best be calculated by

$$T = 2\pi \left(\frac{0.80\delta}{g} \right)^{1/2} \quad (20.6)$$

where δ = the calculated deflection in feet at the top of the chimney due to 100% of its weight applied as a lateral load.

If the chimney is lined, the weight per foot must include the weight of the lining, and the added stiffness due to the lining must be determined as an equivalent thickness of steel. The modified thickness of steel then should be used in the appropriate formula given above. This has a good correlation with measured periods of lined stacks. Guniting, e.g., can reduce the period of a steel chimney on the order of 15%.

Once the period is determined, the calculation of base shear, distributed forces, shear, and moment diagrams is essentially the same as that outlined in the illustrative

problem for the reinforced concrete chimney. The properties of the steel at the operating temperature must guide the allowable stresses. The operating temperature of the steel will depend upon linings or insulations that may be applied to the chimney. Whatever that temperature may be, it must be recognized that the yield point of normal carbon steel decreases about 1500 lb/in.² for each 100°F rise in temperature. Buckling stresses and the need for stiffening of the shell also need investigation. Without stiffening, the thickness of the shell should be equal to or greater than that given by the following:

$$t = \frac{Ds_y}{0.24E'} \quad (20.7)$$

- where t = shell thickness in inches
- s_y = yield strength of the steel at the operating temperature in psi
- E' = modulus of elasticity at the operating temperature in psi
- D = diameter of the shell in inches

20.3.3 Fundamental Period of Step-Tapered Towers

It was mentioned earlier, in discussing methods for calculating the fundamental period of reinforced concrete chimneys, that the Mitchell formula (Eq. 20.3) has general application to uniform, tapered, or step-tapered cylindrical structures. To illustrate its use, and the use of the constants in Table 20.1, the period of a process vessel not uncommon in refinery practice has been calculated in Fig. 20.6. Having found the period to be $T = 1.10$ sec, the steps that follow in applying the SEAOC code criteria are essentially those outlined in some detail in the illustration of the 450-ft reinforced concrete chimney. The basic difference would be to judiciously divide the height to have sections terminate at the break points in the elevation, i.e., where the diameter or where the unit weight changes. For the purpose of calculating the period, these are the only divisions of structure that need to be made. However, for purposes of distributing the base shear, further subdivision is justified, up to perhaps 10 or more.

It is also recommended that a J factor of 1.0 be used for such structures, since it seems reasonable to expect that such a structure would vibrate primarily, if not exclusively, in the fundamental mode.

20.4 WIND AND EARTHQUAKE

While it is not the purpose here to define wind forces (they are quite adequately defined in recent reports—

to the rotation will be

$$\omega^2 \left\{ \frac{W}{2g} r_1 \int_0^l \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 dx + \frac{W}{2g} \int_0^l \left[(r_0 + x) \int_0^x \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 dx \right] dx \right\}$$

If it be assumed that the dynamic-deflection curve is still given by

$$y = a \left(1 - \cos \frac{\pi x}{2l} \right)$$

the above contribution of potential energy becomes

$$P_\omega = \frac{\omega^2 a^2}{2g} \left[W r_1 \frac{\pi^2}{8l} + w l \left(\frac{\pi^2 - 3}{24} + \frac{r_0 \pi^2 - 4}{l} \right) \right]$$

Introducing this term multiplied by 2 into Eq. (2-21a), instead of the term involving T , we obtain finally

$$p = 34.4 \sqrt{\frac{EI + (\omega^2/g)[0.405r_1/l + \alpha(0.0940 + 0.1203r_0/l)]Wl^3}{Wl^3(1 + 0.227\alpha)}}$$

Since $EI = 9.21 \times 10^4$ lb-in.², $W = 0.25$ lb, $\alpha = 2\%$, $r_0 = 2l$, $r_1 = 3l$,

$$p = 34.4 \sqrt{\frac{9.21 \times 10^4 + 1.268\omega^2}{376}} = 539 \sqrt{1 + 0.1378 \times 10^{-4}\omega^2}$$

Thus, when $N = 0$, $p_c = 539$ radians per sec ≈ 85.8 cycles per sec; and when $N = 1,000, 2,000, 3,000$, and $4,000$ rpm, the frequencies become 92, 109, 132, and 159 cycles per sec, respectively.

It is therefore seen that at high speeds the "centrifugal stiffening" of the system is considerable.

2-7. Effects of Rotatory Inertia and of Shear Deflection. *The Effect*

of Rotatory Inertia. In all our previous work in this chapter, the expression for kinetic energy has included only the contribution associated with rectilinear motion. It will now be shown that in some cases the contribution due to rotatory motion cannot be neglected. Let us consider the pendulum shown in Fig. 2-19 and consisting of a massless inextensible rod with a disk of weight W at its end.

If the disk is a thin plate of radius R , the square of its radius of gyration about the axis of the rod is $\rho_0^2 = R^2/2$ so that the square of its radius of gyration about axis $y-y$ or axis $z-z$ will be $\rho_1^2 = R^2/4$. Its moment of inertia about the $z-z$ axis is therefore $W\rho_1^2/g$.

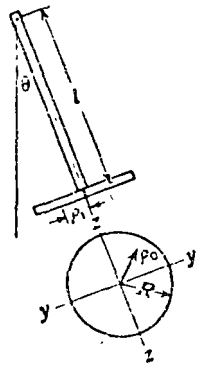


FIG. 2-19. Elementary concept of rotatory inertia

The kinetic energy of the disk for the swinging pendulum is then

$$Kp^2 = \frac{1}{2} \frac{W}{g} (l^2 + \rho_1^2) \dot{\theta}^2$$

If we consider the motion made up of a linear displacement $y \approx l\theta$ and an angular one of $\theta \approx dy/dx$, we may write

$$K_t p^2 \approx \frac{1}{2} \frac{W}{g} y^2 \quad \text{and} \quad K_r p^2 \approx \frac{1}{2} \frac{W}{g} \rho_1^2 \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \quad K = K_t + K_r$$

Making the customary assumptions about the time function being sinusoidal, and generalizing the concept to apply to loadings on beams, we have

$$Kp^2 = \frac{1}{2} p^2 \int_0^l \frac{w}{g} \left[y^2 + \rho_1^2 \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right] dx \quad (2-30)$$

It is seen that the rotatory-inertia contribution of

$$\frac{1}{2} p^2 \int_0^l \frac{w}{g} \rho_1^2 \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 dx$$

will be of consequence only if masses with large values of ρ_1 are located at places where the slopes of the dynamic-deflection curve are appreciable.

As an example, let us calculate the ratio of K_r/K_t for uniform beams, simply supported as well as of the cantilever type. The possible dynamic-deflection curves are therefore

$$\left. \begin{aligned} y &= a \sin \frac{\pi x}{l} \\ y &= a \left(1 - \cos \frac{\pi x}{2l} \right) \end{aligned} \right\} \text{and } \frac{K_r}{K_t} = \begin{cases} 9.87 \frac{\rho_1^2}{l^2} & \text{for simply supported beams} \\ 5.44 \frac{\rho_1^2}{l^2} & \text{for cantilever beams} \end{cases}$$

For solid rectangular cross sections of depth h , $\rho_1^2 = h^2/12$ so that we have

$$\frac{K_r}{K_t} = \begin{cases} 0.822 \frac{h^2}{l^2} & \text{for simply supported beams} \\ 0.453 \frac{h^2}{l^2} & \text{for cantilever beams} \end{cases}$$

Consequently, if h/l is $1/10$, the kinetic energy of translation should be increased by 0.822 per cent and by 0.453 per cent, respectively, for the two types of beams. We conclude that only in the case of stubby beams will the rotatory-inertia contribution of the uniform beam be appreciable.

However, it should be made clear that concentrated masses with considerable radii of gyration may contribute a great deal to the kinetic energy by virtue of their rotatory inertia. For example, a circular rod

of 1 in. diameter, l in. long, carries a disk of 3 in. diameter and 1 in. thickness at its end (Fig. 2-20). The kinetic-energy ratio corresponding to a deflection described by a versed-sine curve is given by

$$\frac{K_p}{K_t} = \frac{\pi^2 w l \rho_1^2 / 8l^2 + \pi^2 W \rho_2^2 / 4l^2}{(\frac{3}{2} - 4/\pi) w l + W} = \frac{\pi^2 \alpha \rho_1^2 + 2\rho_2^2}{8l^2 0.227\alpha + 1} \quad (2-31)$$

In the example $\alpha = l/9$, $\rho_1 = 1/4$, and $\rho_2 = 3/4$,

$$\frac{K_p}{K_t} = \frac{\pi^2 0.111l + 18}{128l^2 0.0252l + 1}$$

If $l = 9$ in., the ratio is 0.0148. This means that the translatory kinetic energy should be increased by 1.48 per cent and that the natural frequency therefore will be decreased by about $3/4$ of 1 per cent. But if

$l = 4.5$ in., the energy ratio is 0.0633 and the corresponding decrease in natural frequency will amount to about 3 per cent. A much larger effect is found if the disk is made 9 in. in diameter. For $l = 9$, $\alpha = l/81$, and $\rho_2 = 9/4$, the energy ratio will be 0.1505, and the

corresponding decrease in natural frequency will amount to about 7 per cent.

Consideration of Shear Deflections. The proportions of most beams are usually such that shear deflections may be neglected, but in some cases of very stubby beams or in cases where the cross section of the beam involves a narrow web it is occasionally necessary to consider shear deflections.

In elementary textbooks on strength of materials, a shear-stress distribution coefficient $1/k'$ is deduced on the assumption that the warping of the beam's cross-sectional plane due to shearing stresses does not influence the flexural-stress distribution. The calculation of the stress-distribution factor then involves the static moment μ of one-half the cross section A , the "solid" width b_0 of the beam at the neutral axis, and the moment of inertia of the cross-sectional area of the beam about the neutral axis; thus,

$$\frac{1}{k'} = \frac{A \int_0^{h/2} y dA}{b_0 I} \quad \text{or} \quad k' = \frac{b_0 I}{A \mu} \quad (2-32)$$

The value of $1/k'$ for a solid rectangular cross section of dimensions b , h is $3/2$, for a solid circular cross section it is $3/3$, but for many structural sections the above formula has no real significance.

More refined studies of the simultaneous existence of flexural and shear deformations show that, for a beam of solid rectangular cross section

and of relatively narrow width,

$$\frac{1}{k'} = \frac{3}{2} - \frac{3}{10(1+\nu)} - \frac{3\nu}{4(1+\nu)}$$

where ν is Poisson's ratio. The first member on the right-hand side is then the "crude" value of $1/k'$ given above, the second term gives a correction due to longitudinal stresses, and the third term represents a correction necessitated by the lateral deformation of the beam. Thus, if ν is $1/3$, we have $1/k' = 1.500 - 0.225 - 0.188 = 1.087$, and if ν is $1/4$, $1/k' = 1.50 - 0.24 - 0.15 = 1.11$. In either case, the corrections are appreciable, and it must be admitted that the precise value of $1/k'$ for an arbitrary cross section has not yet been given.

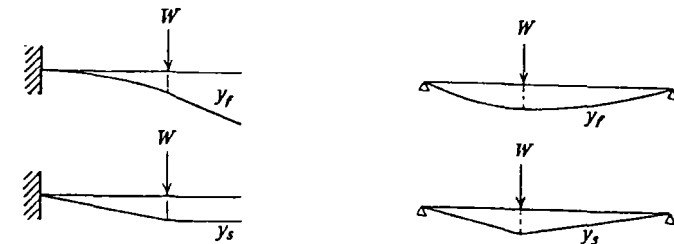


FIG. 2-21. The shapes of beam deflection curves due to flexure and due to shear.

For open structural sections, as I beams, the significance of $1/k'$, as computed by Eq. (2-32), is almost completely lost. In such cases, the flanges contribute a negligible amount of shearing resistance if the flexural neutral surface is parallel to the flanges, and conversely, if the flexural neutral surface is parallel to the web, only the flanges contribute appreciably to the shear resistance. Consequently, for such sections, k' may be taken equal to unity, and A is then replaced by a cross-sectional area 5 to 12 per cent larger than that of either the web A_w or of the flanges A_f , according to the direction of resistance.

A simplified analysis of flexure and shear may be made by placing the total deflection y equal to the sum of an independent flexural deflection y_f and an independent shear deflection y_s , and calculating the two component deflections from the differential relations

$$\frac{d^2 y_f}{dx^2} = -\frac{M}{EI} \quad \text{and} \quad \frac{dy_s}{dx} = \frac{Q}{k'GA}$$

where the moment M and the shear Q are functions of x .

Figure 2-21 shows the shapes of y_f and y_s for two beams with concentrated loads. We then have

$$y_{\max} = a_f + a_s = \frac{Wl^3}{48EI} + \frac{Wl}{4k'GA} = \frac{Wl^3}{48EI} \left(1 + 12 \frac{E\rho^2}{k'Gl^2} \right) \quad (2-33a)$$

for the simply supported beam with the load at the center and

$$y_{\max} = a_f + a_s = \frac{Wl^2}{8EI} + \frac{Wl}{kGA} = \frac{Wl^3}{3EI} \left(1 + 3 \frac{E\rho^2}{kGI^2} \right) \quad (2-33b)$$

for a cantilever with load at the end. It should be noticed that slope discontinuities occur in the curves for y , and that the square of the ratio ρ/l will be of great importance in deciding whether or not to take shear deflections into account.

If we let $G = 3E/8$ and compare the ratio q of the maximum deflections a_s and a_f , we find that

$$q = \frac{a_s}{a_f} = \begin{cases} \frac{32}{k'} \frac{\rho^2}{l^2} & \text{for simply supported beam with load at mid-span} \\ \frac{8}{k'} \frac{\rho^2}{l^2} & \text{for cantilever beam with load at free end} \end{cases} \quad (2-34a)$$

and that

$$q = \frac{a_s}{a_f} = \begin{cases} \frac{25.6}{k'} \frac{\rho^2}{l^2} & \text{for uniformly loaded, simply supported beam} \\ \frac{10.7}{k'} \frac{\rho^2}{l^2} & \text{for uniformly loaded cantilever beam} \end{cases} \quad (2-34b)$$

Therefore, in any specific problem we can easily determine the order of magnitude of a_s/a_f and thereby come to a decision whether or not to consider shear deflections in natural-frequency calculations.

Beam with Flexure, Shear, Linear, and Rotatory Inertia. Let us assume that shear deflections are of importance. The potential energy of the system will then be made up of the two parts

$$P = P_f + P_s = \frac{1}{2} EI \int_0^l \left(\frac{d^2 y_f}{dx^2} \right)^2 dx + \frac{1}{2} k' GA \int_0^l \left(\frac{dy_s}{dx} \right)^2 dx \quad (2-35a)$$

while the kinetic energy, including the rotatory as well as the translatory contribution, will be given by

$$Kp^2 = (K_t + K_r)p^2 = \frac{1}{2} \frac{p^2}{g} \int_0^l w(y_f + y_s)^2 dx + \frac{1}{2} \frac{p^2}{g} \int_0^l w\rho^2 \left(\frac{dy_f}{dx} \right)^2 dx \quad (2-35b)$$

As an example, we shall choose the 10- by 10-in. 1 beam, section CB 103, formerly used in the example relating to a beam on elastic supports, and inquire about the significance of shear distortions as we vary the span length. The beam is simply supported and is loaded only by its own

weight. Figure 2-22 shows the dimensions of the beam's cross section. The following data are found in the handbook:

$$\begin{aligned} w &= 8.33 \text{ lb per in.} & A &= 29.43 \text{ sq in.} & I_1 &= 625 \text{ in.}^4 \\ I_2 &= 207 \text{ in.}^4 & \rho_1 &= 4.61 \text{ in.} & \rho_2 &= 2.65 \text{ in.} \\ E &= 30 \times 10^6 \text{ lb per sq in.} & G &= \frac{3}{8} E \end{aligned}$$

If we calculate the static moments μ_1 and μ_2 from the given dimensions, we obtain $\mu_1 = 65$ cu in. and $\mu_2 = 30$ cu in. Consequently, the values of the shear-distribution coefficients will be

$$\begin{aligned} \frac{1}{k'_1} &= \frac{29.43 \times 65}{0.685 \times 625} = 4.47 \\ \frac{1}{k'_2} &= \frac{29.43 \times 30}{11.12 \times 207} = 0.383 \end{aligned}$$

At first sight, we may conclude that the shear rigidities $k'_1 AG$ and $k'_2 AG$ of the section for the two directions differ greatly. There is, however, some question as to whether or not we are justified in taking $(b_0)_2$ equal to 11.12 in., since, at distances slightly greater than 0.343 in. to the left or to the right of the center line of the web, the thickness is not 11.12 in. but only 2×1.118 in., making the value of $1/k'_2$ at that location equal to 1.90, an enormous change. Since extensive tests have shown that the shear-rigidity ratios of the two directions of many structural sections are fairly well given by the ratio of the web area to the flange area, we use the *empirical relation* by which k'_1 as well as k'_2 is placed equal to unity, and by which the web and the flange areas A_w and A_f are increased by, say, 8.5 per cent, the average of the range indicated before. This gives

$$\begin{aligned} k'_1 A_1 &= 1.085 \times 6.06 = 6.58 \text{ sq in.} & \text{and} \\ k'_2 A_2 &= 1.085 \times 23.13 = 25.13 \text{ sq in.} \end{aligned}$$

With the formerly assumed values of E and G , the shearing rigidities of the beam in the two directions then become

$$\begin{aligned} k'_1 A_1 G &= 74 \times 10^6 \text{ lb per radian} & \text{and} \\ k'_2 A_2 G &= 282 \times 10^6 \text{ lb per radian} \end{aligned}$$

From now on, we restrict our example to the direction 1-1 of Fig. 2-22 about which the flexural rigidity is a maximum and the shearing rigidity

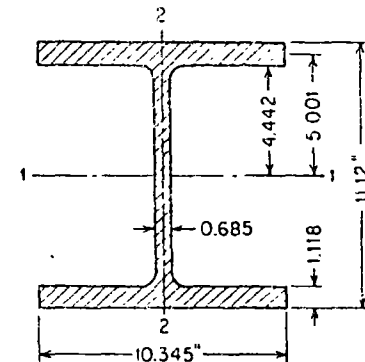


FIG. 2-22. Dimensions of 10- by 10-in. WF beam weighing 100 lb per ft.

is the minimum. We then have

$$\frac{1}{2}EI_1 = 9,375 \times 10^6 \text{ lb-in.}^2 \quad \frac{1}{2}k'_1 A_1 G = 37 \times 10^6 \text{ lb per radian}$$

$$\frac{1}{2}w = 4.17 \text{ lb per in.} \quad \frac{1}{2}w\rho^2 = 88.8 \text{ lb-in.}$$

The next step is to assume a plausible deflection curve for the resultant dynamic distortions. We know that the flexural-deflection curve will have a sinusoidal shape and that the static shear-deflection curve will be of parabolic shape. Since the two do not differ markedly, we assume that the one of sinusoidal shape may be used for purposes of integration. Accordingly, we write

$$y = y_f + y_s = (a_f + a_s) \sin \frac{\pi x}{l} = (1 + q)a_f \sin \frac{\pi x}{l}$$

so that $\frac{dy_f}{dx} = \frac{\pi}{l} a_f \cos \frac{\pi x}{l} \quad \frac{dy_s}{dx} = qa_f \frac{\pi}{l} \cos \frac{\pi x}{l} \quad \text{etc.}$

The ratio q is given by Eq. (2-34b) and must now be interpreted as being

$$q = \frac{25.6 \rho_1^2}{k'_1 l^2} = \frac{25.6 I_1}{k'_1 A_1 l^2} = \frac{25.6 \times 625}{6.58 l^2} = \frac{2,430}{l^2}$$

Evaluation of the four integrals of Eqs. (2-35a) and (2-35b) will then give

$$P_f = \frac{1}{4}EI_1 a_f^2 \pi^4 l^{-3} = 457 \times 10^9 a_f^2 l^{-3}$$

$$P_s = \frac{1}{4}G A_1 a_f^2 \pi^2 q^2 l^{-1} = 183 \times 10^6 a_f^2 q^2 l^{-1}$$

$$K_t = \frac{1}{4} \frac{w}{g} a_f^2 (1 + q)^2 l = 5.40 \times 10^{-3} a_f^2 (1 + q)^2 l$$

$$K_p = \frac{1}{4} \frac{w}{g} a_f^2 \rho^2 \pi^2 l^{-1} = 1.135 a_f^2 l^{-1}$$

It is seen that the values of the integrals depend on various powers of the span length l of the beam, with the ratio q being inversely proportional to l^2 . The square of the frequency of the uniform and simply supported I beam of our example is then given by

$$p_{j,\rho}^2 = \frac{P_f + P_s}{K_t + K_p} = \frac{457l^{-3} + 0.183q^2 l^{-1}}{5.40(1 + q)^2 l + 1.135l^{-1}} \times 10^{12}$$

If the span of the beam is now taken equal to 20 ft, or 240 in., we have

$$p_{j,\rho}^2 = \frac{330.6 + 13.56}{140.6 + 0.4728} \times 10^4 = 24,370 \quad \text{or} \quad p_{j,\rho} = 156.1 \text{ radians per sec}$$

or 24.9 cycles per sec is the approximate natural frequency. If we neglect shear-distortion and rotatory-inertia effects, we would place q ,

P_s , and K_p , equal to zero and have

$$p_f^2 = \frac{457 \times 10^{12} l^{-3}}{5.40 l} = 84.63 \times 10^{12} l^{-4} = 25,510$$

$$p_f = 159.7 \text{ radians per sec} \approx 25.4 \text{ cycles per sec}$$

Consequently, the presence of shear distortions and rotatory-inertia loading will lower the frequency by only 2 per cent if the I beam is 20 ft long.

In Table 2-2, we can notice the changes in the natural frequency as the length of the I beam is reduced. It is interesting that the five beam lengths covered in Table 2-2 correspond to the vibrational configuration of the beam when it is vibrating in its fundamental, second, fourth, eighth, and sixteenth natural mode. The five natural frequencies, computed by the exact analysis, are shown in the seventh row of the table for a comparison.

TABLE 2-2. SHEAR- AND ROTATORY-INERTIA EFFECTS ON FREQUENCY OF UNIFORM SIMPLY SUPPORTED BEAMS

l , ft.....	20	10	5	2.5	1.25
l/h	21.6	10.8	5.4	2.7	1.35
$q = a_s/a_f$	0.042	0.169	0.675	2.70	10.80
p_f , radians/sec.....	160	640	2,560	10,240	40,960
$p_{f,\rho}$	156	587	1,943	5,218	11,720
Mode number.....	1	2	4	8	16
p_{exact}	151.6	570	1,905	5,208	11,715
$p_{f,\rho}$	157	592	1,978	5,323	11,925

It is clear that a lowering of the frequency due to shear-deflection and rotatory-inertia loading becomes important as the ratio l/h decreases. Thus, when l/h is 5.4, the lowering amounts to about 25 per cent. The exact frequencies are in fair agreement with the approximate ones, and they are all lower than these. In the last row of the table, a frequency $p'_{f,\rho}$ is given; this is the result of a *short-cut method* explained below. It should be emphasized that Eqs. (2-35a) and (2-35b) can be extended to take into account complicated mass distributions as well as concentrated masses. Moreover, they can be made to apply to a beam whose cross section changes over the span. For such problems, the exact analysis is too involved to allow application, but the potential- and kinetic-energy method gives numerical results of reasonably good approximation.

Short-cut Estimate of Shear Effect. Compute the ratio of maximum shear deflection to maximum flexural deflection, the value q , by Eq. (2-34a) or (2-34b), using the appropriate coefficient and expression accord-

ing to the type of the beam's cross section. Then,

$$p'_j = p_j \sqrt{\frac{1}{1+q}} \quad (2-36)$$

In our numerical example, the beam was uniformly loaded and simply supported. Consequently, the coefficient is 25.6, giving $q = 2,430/l^2$. It is seen that p'_j is always higher than $p_{j,0}$.

The conclusion may therefore be drawn that shear corrections can be estimated by the above short-cut formula and that only for short beams will the corrections be appreciable. In subsequent chapters, we shall consider the higher modes of vibration of beams in which shear- and rotatory-inertia corrections increase greatly with the mode numbers. This is in obvious agreement with our present finding for a simply supported beam, namely, that the effect increases with ρ/l , if we interpret l as one-half of the effective wavelength of a higher-mode displacement configuration.

2-8. Building Vibrations. For some purposes of analysis, a multistory building may be considered a vertical cantilever beam, "planted" in or placed on an elastic soil. For lateral, primarily horizontal vibrations, we shall find that shear deflections are of great importance even for the fundamental-mode frequency since the ρ/l ratio of most buildings is comparatively large.

Depending on the building's type and size of foundation as well as on the rigidity constants of the near-surface geology of the building site, we shall find a lowering of the fundamental frequency of the structure as compared with that of a similar structure on a hypothetically infinitely rigid soil.

"Planting" Stiffness of Building on Ground. Analytically, we can distinguish two stiffnesses arising from the interaction of the foundation and its surrounding soil, a translatory one that depends on the depth of planting as well as on a horizontal shear stiffness of the soil itself, and a rotatory stiffness that depends mainly on the vertical compressional elasticity of the site and only secondarily on the depth of planting. Idealizing the situation further by neglecting the depth of planting, we have the stiffness constants k_o and \mathcal{K}_o for a building, resting on a rigid mat foundation directly on top of the soil.

$k_o = \epsilon_H bh$ lb per in. and

$$\mathcal{K}_o = \epsilon_V \frac{1}{12} \begin{pmatrix} bh^3 \\ hb^3 \end{pmatrix} \text{ lb-in. per radian} \quad (2-37)$$

where h and b are the horizontal dimensions of the rectangular foundation and the two foundation moduli ϵ_H and ϵ_V are expressed in pounds per square inch per inch.

Rigid Building on Elastic Massless Soil. For a horizontal translatory vibration, the building will be acted upon only by the ground stiffness k_o . Consequently, its dynamic deflection will be constant over its length, and its frequency will be

$$p_i = \sqrt{g \frac{k_o}{W}} \quad (2-38)$$

For a rotatory motion of the rigid building about a principal axis located on top of the soil, parallel to the b direction, the dynamic-deflection curve will be a straight line $y = \theta x$, and the restoring moment will be proportional to $\mathcal{K}_o \theta$. If the building height is l and the construction is uniform, its moment of inertia about the axis of rotation will be

$$\frac{W}{g} \left(\frac{l^2}{3} + \frac{h^2}{12} \right)$$

and its kinetic energy will be given by

$$Kp^2 = \frac{1}{2} \frac{W}{g} \left(\frac{l^2}{3} + \frac{h^2}{12} \right) p^2 \theta^2$$

The potential energy will consist of two parts, a positive contribution of elastic origin and a negative one of gravitational type.

$$P_o - P_o = \frac{1}{2} \mathcal{K}_o \theta^2 - \frac{1}{2} Wl(1 - \cos \theta) \approx \frac{1}{2} \left(\mathcal{K}_o - \frac{Wl}{2} \right) \theta^2$$

Consequently, the frequency will be given by

$$p_r = \sqrt{g \frac{\mathcal{K}_o - Wl/2}{W(l^2/3 + h^2/12)}} \quad (2-39)$$

showing that the rigid building will topple over—its frequency will approach zero—when

$$l^2 = \frac{2\mathcal{K}_o}{w} = \frac{1}{6} bh^3 \frac{\epsilon_V}{w} \quad (2-40)$$

Stiffness and Mass Effect of Ground. In calculating the two ground stiffnesses k_o and \mathcal{K}_o from supposedly known ground moduli ϵ_H and ϵ_V , we may assume that the effective area of the building in contact with the ground is elliptical instead of rectangular. This will take into account the fact that the soil located in the corner regions of the contact area is less confined and therefore less effective than for locations closer in. However, the values of ϵ_H and ϵ_V are usually not known a priori to more than one significant figure, since their evaluation from laboratory tests cannot be trusted to apply with much precision to *in situ* conditions. A field evaluation of ϵ_H and ϵ_V —after the building has been erected—by



centro de educación continua
división de estudios superiores
facultad de ingeniería, unam



IV CURSO INTERNACIONAL DE INGENIERIA SISMICA

DISEÑO SISMICO DE ESTRUCTURAS ESPECIALES

EFFECTOS SISMICOS EN ESTRUCTURAS EN
FORMA DE PENDULO INVERTIDO

Dr. Octavio A. Rascón Chávez

Agosto, 1978.

Efectos sísmicos en estructuras en forma de péndulo invertido

Octavio RASCON CH. *

INTRODUCCION

En la práctica se presentan estructuras constituidas por una sola columna la cual sostiene una cubierta que puede ser una losa o un cascarón. Su comportamiento dinámico debe estudiarse considerando el efecto que la inercia rotacional de la cubierta induce en el movimiento total de la estructura.

A principios de este año se presentó en California, EUA un trabajo¹ en el cual se trató este problema desde un punto de vista energético. Se calculó sólo el período fundamental y con base en él, la respuesta de la estructura a un determinado temblor. Los períodos calculados para cuatro estructuras de este tipo ya construidas fueron menores que los medidos *in situ*. La discrepancia fue atribuida a efectos de rotación y traslación de la base.

El objeto de este trabajo es introducir un análisis modal, el cual nos proporcionará los efectos del acoplamiento que existe entre los modos de vibración. También se tomarán en cuenta en forma aproximada los efectos de rotación y traslación de la base.

CALCULO DE FRECUENCIAS Y CONFIGURACIONES MODALES DE VIBRACION

1. Suelo rígido

Para el caso en que el centro de gravedad de la cubierta se encuentra localizado en la prolongación del eje de la columna, el movimiento de la estructura podrá estudiarse en dos direcciones perpendiculares entre sí. En tal caso el problema podrá discretizarse como de dos modos de vibración acoplados en cada dirección.

Para el cálculo de las frecuencias de vibración se idealizará la estructura como de comportamiento lineal, constituida por una cubierta infinitamente rígida de masa simétricamente distribuida y soportada por una sola columna. Como primer caso se considerará al suelo infinitamente rígido (fig. 1).

En fig. 1

W = peso de la cubierta más la parte tributaria de la columna

J = momento de inercia de la masa de la cubierta respecto al eje z

* Asistente de Investigador, Instituto de Ingeniería, UNAM.

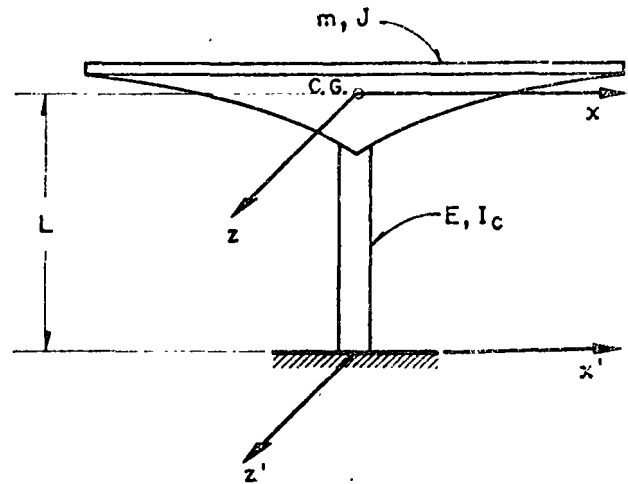


Fig. 1. Péndulo invertido

E = módulo de elasticidad del material de la columna

I_c = momento de inercia de la sección transversal de la columna con respecto al eje z

C.G. = centro de gravedad de la cubierta

L = distancia de C.G. al suelo.

Para la columna mostrada en las figs. 2a y 2b.

k = rigidez por traslación (fuerza horizontal aplicada en C.G. necesaria para que este se desplace la unidad)

k_r = rigidez por rotación (par aplicado en C.G. necesario para producir un giro unitario a la altura de C.G.)

θ = rotación en C.G. debida a la fuerza k

δ = desplazamiento lateral de C.G. debido al momento k_r .

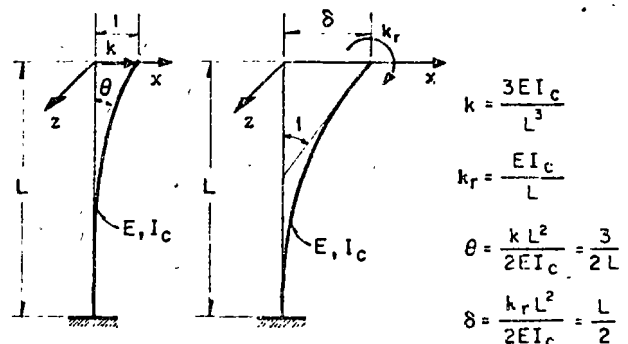


Fig. 2. Rigideces

Despreciando las deformaciones por cortante, las expresiones para k , k_r , Θ y δ pueden encontrarse por estática y valen

$$k = 3EI/L^3; \quad (1a)$$

$$k_r = EI/L; \quad (2a)$$

$$\Theta = 1.5/L \quad (1b)$$

$$\delta = L/2 \quad (2b)$$

Para una fuerza de magnitud αk , el desplazamiento será α y el giro $\alpha\Theta$. Para un par de magnitud βk_r , el giro será β y el desplazamiento $\beta\delta$. Al aplicarse ambos simultáneamente, el desplazamiento total de C.G. será x_1 y el giro ϵ_1 (fig. 3).

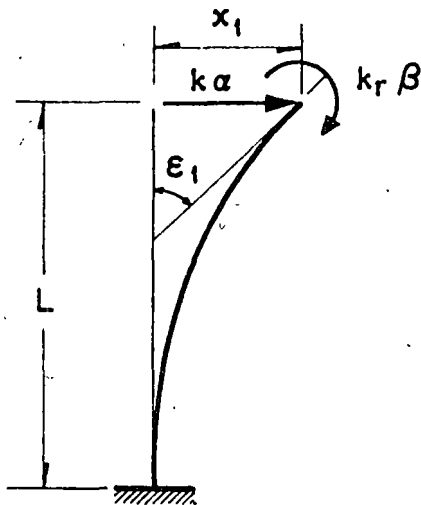


FIG. 3. Desplazamientos y giros totales

$$x_1 = \alpha + \beta\delta$$

$$\epsilon_1 = \alpha\Theta + \beta$$

Por tanto los valores de x_1 y ϵ_1 quedan dados por

$$x_1 = \alpha + \beta\delta \quad (3)$$

$$\epsilon_1 = \alpha\Theta + \beta \quad (4)$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones 3 y 4 para α y β , y utilizando las ecs 1b y 2b se obtiene

$$\alpha = (x_1 - k_r\gamma\epsilon_1)/\kappa; \quad (5a)$$

$$\beta = (\epsilon_1 - k\gamma x_1)/\kappa \quad (5b)$$

en las cuales

$$\gamma = L^2/2EI_c; \quad (6a)$$

$$\kappa = 1 - kL^3/4EI_c = 0.25 \quad (6b)$$

Para las oscilaciones del péndulo mostrado en la fig 1, el diagrama de cuerpo libre de la cubierta está indicado en la fig 4. Las ecuaciones de movimiento, despreciando efectos gravitacionales, serán

$$m\ddot{x}_1 + k\alpha = 0 \quad (7)$$

$$J\ddot{\epsilon}_1 + k_r\beta = 0 \quad (8)$$

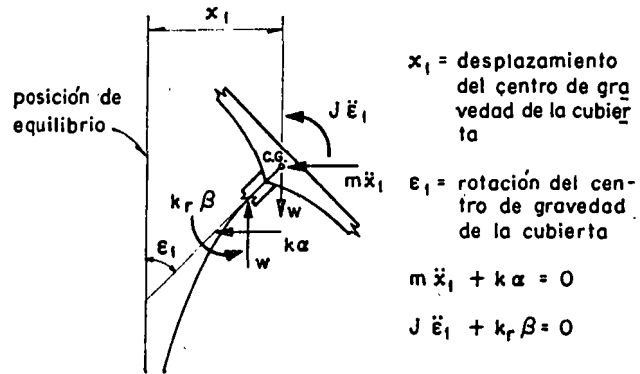


FIG. 4. Diagrama de cuerpo libre

Sustituyendo a (5a) y (5b) en (7) y (8) se obtiene

$$m\ddot{x}_1 + (kx_1 - k_r\gamma\epsilon_1)/\kappa = 0 \quad (9)$$

$$J\ddot{\epsilon}_1 + (k_r\epsilon_1 - k\gamma x_1)/\kappa = 0 \quad (10)$$

Las ecs. 9 y 10 se pueden expresar matricialmente en la forma

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & J \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{\epsilon}_1 \end{bmatrix} + \frac{1}{\kappa} \begin{bmatrix} k & -\gamma k k_r \\ -\gamma k k_r & k_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \epsilon_1 \end{bmatrix} = 0 \quad (11)$$

Utilizando las ecs 1a, 2a y 6a se encuentra que

$$\gamma k k_r = Lk/2 \quad (12)$$

Puesto que el movimiento es armónico se tiene que

$$\ddot{x}_1 = -\omega^2 x_1 \quad \text{y} \quad \ddot{\epsilon}_1 = -\omega^2 \epsilon_1 \quad (13)$$

en donde ω es la frecuencia circular natural de vibración.

Sustituyendo las ecs. 12 y 13 en (11) se obtiene

$$-\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & J \end{bmatrix} \omega^2 \begin{bmatrix} x_1 \\ \epsilon_1 \end{bmatrix} + \frac{1}{\kappa} \begin{bmatrix} k & -\frac{Lk}{2} \\ -\frac{Lk}{2} & k_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \epsilon_1 \end{bmatrix} = 0 \quad (14)$$

Factorizando en la ec. 14

$$\left\{ \frac{1}{\kappa} \begin{bmatrix} k & -\frac{Lk}{2} \\ -\frac{Lk}{2} & k_r \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & J \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} x_1 \\ \epsilon_1 \end{bmatrix} = 0 \quad (15)$$

La ec 15 representa un sistema de ecuaciones homogéneas, el cual, para tener solución diferente de la trivial, necesita que su determinante sea nulo. Por tanto

$$\begin{vmatrix} \frac{k}{\kappa} - m\omega^2 & -\frac{Lk}{2\kappa} \\ -\frac{Lk}{2\kappa} & \frac{k_r}{\kappa} - J\omega^2 \end{vmatrix} = 0 \quad (16)$$

Desarrollando el determinante se llega a

$$mJ\omega^4 - \frac{1}{\kappa}(kJ + mk_r)\omega^2 + \frac{1}{4\kappa^2}(4kk_r - L^2k^2) = 0 \quad (17)$$

Dividiendo ambos miembros entre mJ y considerando que $L^2k^2 = 3kk_r$ se obtiene

$$\omega^4 - \frac{kJ + mk_r}{mJ\kappa}\omega^2 + \frac{kk_r}{4mJ\kappa^2} = 0 \quad (18)$$

que es una ecuación de segundo grado en ω^2 , cuyas soluciones son

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{kJ + mk_r}{2mJ\kappa} \pm \sqrt{\frac{(kJ + mk_r)^2}{4m^2J^2\kappa^2} - \frac{kk_r}{4mJ\kappa^2}} \quad (19)$$

Dividiendo numerador y denominador de (19) entre mJ

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{k/m + k_r/J}{2\kappa} \pm \frac{1}{2\kappa} \sqrt{(k/m + k_r/J)^2 - (k/m)(k_r/J)} \quad (20)$$

Llamando a

$k/m = p^2 =$ cuadrado de la frecuencia circular natural por traslación

$k_r/J = \Omega^2 =$ cuadrado de la frecuencia circular natural por rotación

se obtiene

$$\omega_{1,2}^2 = 2 \left(p^2 + \Omega^2 \pm \sqrt{(p^2 + \Omega^2)^2 - p^2\Omega^2} \right) \quad (21)$$

Dividiendo ambos miembros de (21) entre p^2 y haciendo $\omega^2/p^2 = \lambda$ y $\Omega^2/p^2 = \mu$ se llega a

$$\lambda_{1,2} = 2 \left(1 + \mu \pm \sqrt{(1 + \mu)^2 - \mu} \right) \quad (22)$$

Es interesante notar que si $J = 0$ (masa concentrada) de la ec 17 se obtiene $\omega^2 = k/m = p^2$.

Las configuraciones modales pueden obtenerse de cualquiera de las dos ecuaciones algebraicas contenidas en la ecuación matricial dada en ec 15. La primera de ellas es

$$\left(\frac{k}{\kappa} - m\omega_n^2 \right) x_{1,n} - \frac{Lk}{2\kappa} \varepsilon_{1,n} = 0 \quad (23)$$

donde el índice n indica el número del modo y de la cual se obtiene

$$x_{1,n}/\varepsilon_{1,n} = \frac{Lk}{2\kappa} \left(\frac{k}{\kappa} - m\omega_n^2 \right) \quad (24)$$

dividiendo numerador y denominador de (24) entre m y considerando que $\kappa = 0.25$, $k/m = p^2$ y que $\lambda_n = \omega_n^2/p^2$ se llega a

$$x_{1,n}/\varepsilon_{1,n} = 2L/(4 - \lambda_n) \quad (25)$$

Si se desean tomar en cuenta las deformaciones por cortante basta con modificar las rigideces mediante un análisis de estática y partir de nuevo de la ec 17 sin considerar que $L^2k^2 = 3kk_r$. Si existe excentricidad en alguna dirección su efecto podrá tomarse en cuenta introduciendo un grado de libertad adicional.

En las figs 5 y 6 se encuentran representados los resultados de las ecs 22 y 25.

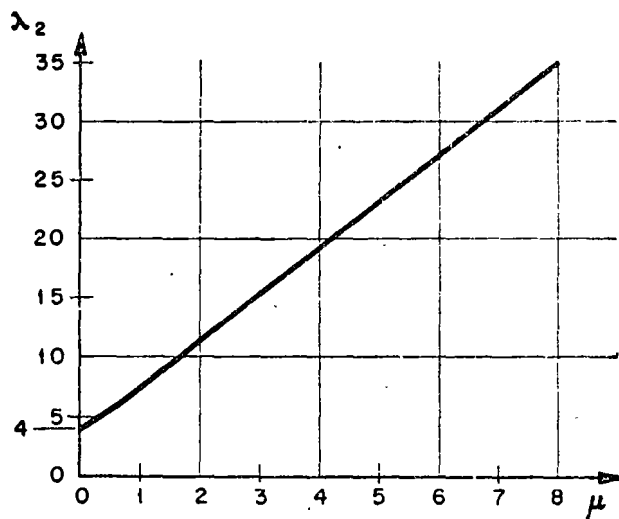
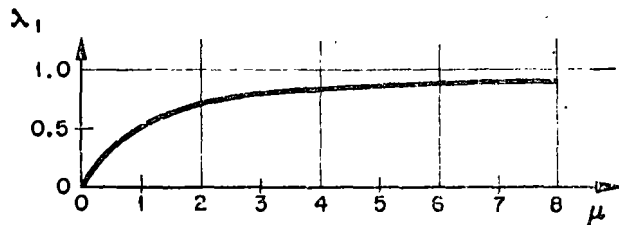


FIG. 5. Gráfica de frecuencias

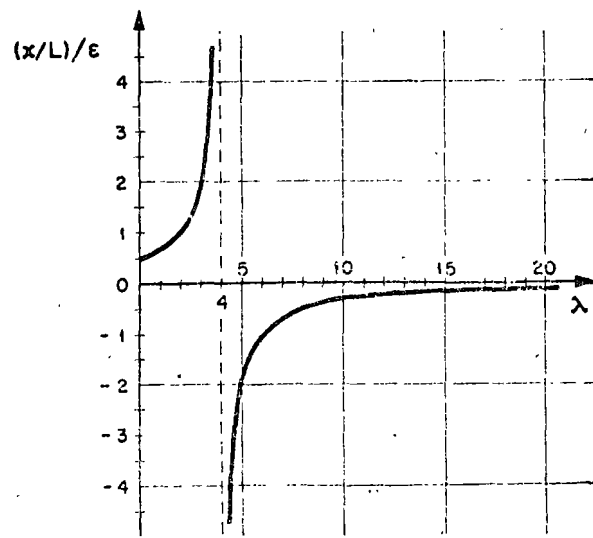


FIG. 6. Gráfica $(x/L)/\varepsilon$ vs λ

2. Suelo flexible

Al oscilar una estructura cimentada en suelo blando, existe interacción dinámica suelo-estructura que en la mayoría de los casos no debe despreciarse al calcular las frecuencias y los modos de vibración. En lo que sigue se propone la adaptación de un método numérico para tomar en cuenta dicho efecto.

Las restricciones del suelo serán idealizadas mediante resortes de comportamiento lineal; uno para desplazamientos lineales horizontales y otro para deformaciones angulares de cabeceo de la cimentación^{2,3}.

En la fig. 7 se hace referencia a los parámetros que a continuación se mencionan

K = rigidez del resorte correspondiente a la traslación de la base $= C_r A$

C_r = coeficiente de cortante elástico uniforme del suelo.

A = área de contacto de la cimentación.

R = rigidez del resorte correspondiente a rotación de la base $= C_\phi I_b - W'y$

C_ϕ = coeficiente de compresión elástica no uniforme del suelo.

I_b = momento de inercia de área de la base de la cimentación con respecto al eje z'

W' = peso de la estructura

y = altura del centro de gravedad de la estructura sobre el nivel de desplante

$F = m\omega_n^2 x$

x = desplazamiento angular total en C.G.

$M = J\omega_n^2 \epsilon$

ϵ = desplazamiento angular total en C.G.

L' = altura de C.G. sobre el nivel de desplante

x_0 = traslación de la base

ϵ_0 = rotación de la base

$x_1 = \alpha + \beta\delta$

$\epsilon_1 = \beta + \alpha\theta$

$x_2 = L'\epsilon_0$

$\alpha = F/k$

$\beta = M/k_r$

$J, L, \delta, \theta, k, k_r, x_1, \epsilon_1$ y W ya definidos anteriormente.

El problema será resuelto utilizando un procedimiento iterativo y la tabulación propuesta por N. M. Newmark⁴; se despreciarán la variación de la rigidez de la columna debida a la fuerza normal W y los momentos en la misma, causados por la excentricidad del peso debida a deformaciones de la columna.

Sean

F_0 = fuerza horizontal en la base de la cimentación $= F$

M_0 = momento flexionante en la base de la cimentación $= M + FL'$

$x_0 = F_0/K$

$\epsilon_0 = M_0/R$

A continuación se describe el procedimiento a seguir:

1. Suponer valores para x y ϵ .
2. Calcular F y M_0 usando las expresiones $F = m\omega_n^2 x$ y $\epsilon = J\omega_n^2 \epsilon$. En esta etapa el valor de ω_n aún no se conoce; por tanto se llevará como factor común en el resto del cálculo

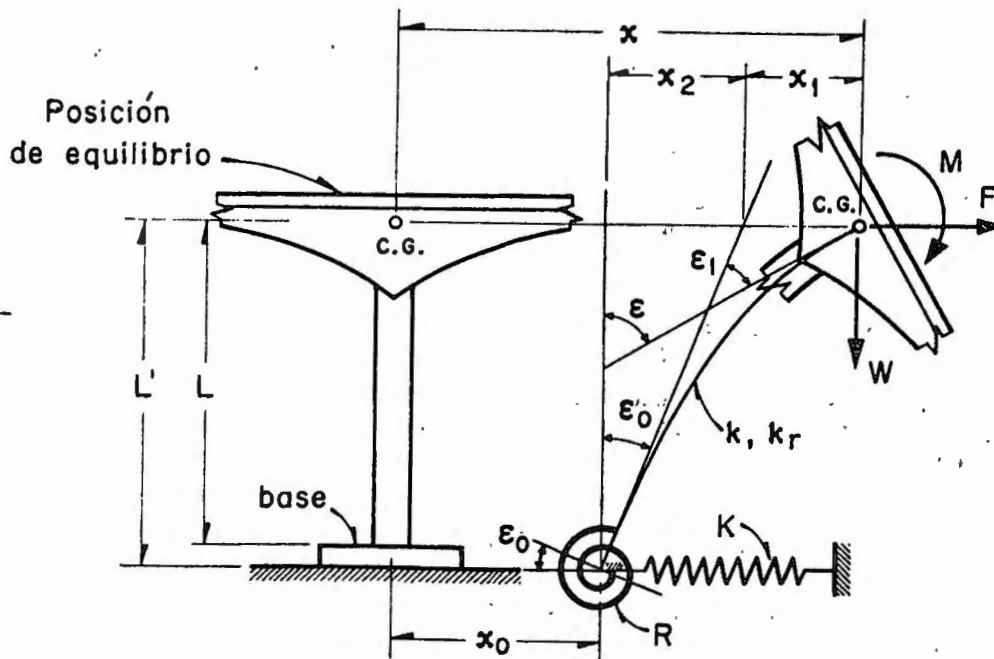


Fig. 7. Modelo de interacción dinámica suelo-estructura.

3. Calcular la fuerza y el momento en la base mediante las fórmulas

$$F_0 = F \quad \text{y} \quad M_0 = M + FL'$$

4. Encontrar los valores de los desplazamientos $x_0 = F_0/K$ y $\epsilon_0 = M_0/R$
5. Calcular los valores de los parámetros $\alpha = F/k$ y $\beta = M/k_r$
6. Efectuar los productos $\beta\delta$ y $\alpha\theta$
7. Calcular $x_1 = \alpha + \beta\delta$ y $\epsilon_1 = \beta + \alpha\theta$
8. Efectuar el producto $x_2 = L'\epsilon_0$
9. Calcular los desplazamientos lineales y angulares totales de C.G. mediante las expresiones $x' = x_0 + x_1 + x_2$ y $\epsilon' = \epsilon_0 + \epsilon_1$
10. Encontrar el valor de ω_n^2 mediante los cocientes x/x' y ϵ/ϵ'
11. Si los valores de ω_n^2 calculados en el paso anterior son aproximadamente iguales, el proceso habrá concluido. En caso contrario repitase la secuela utilizando como valores de partida para x y ϵ los encontrados en etapa 9 o valores cuyo cociente sea igual al de x' entre ϵ' . El proceso deberá continuarse hasta lograr la aproximación deseada.

EJEMPLO DE APLICACION

Con motivo de ilustrar los conceptos enunciados anteriormente se calcularán las frecuencias y modos de vibración de un cascarón ya construido en California, EUA (fig 8). Los datos necesarios han sido extraídos de la ref 1. Se computarán también las respuestas sísmicas suponiendo que esa estructura fuera a construirse en la zona blanda de la ciudad de México. Se utilizarán por tanto los parámetros elásticos de las arcillas del Valle de México y los espectros de diseño propuestos en el reglamento de construcción para el Distrito Federal⁵.

Los datos necesarios de la estructura son

$$\begin{aligned} L &= 419 \text{ cm} \\ L' &= 480 \text{ cm} \\ \bar{y} &= 249 \text{ cm} \\ W &= 20,450 \text{ kg} \quad (m = 20.81 \text{ kg seg}^2/\text{cm}) \\ W' &= 43,600 \text{ kg} \\ I_b &= 1.775 \times 10^9 \text{ cm}^4 \\ I_c &= 1.065 \times 10^6 \text{ cm}^4 \\ k &= 1.266 \times 10^4 \text{ kg/cm} \\ k_r &= 7.41 \times 10^8 \text{ kg cm/rad} \\ J &= 1.386 \times 10^6 \text{ kg seg}^2 \text{ cm} \\ \theta &= 0.00358 \text{ rad/cm} \\ \delta &= 208 \text{ cm/rad} \end{aligned}$$

Las expresiones para C_r y C_φ son las siguientes²

$$C_r = F_1 \frac{E'}{1 - \nu^2} \frac{1}{\sqrt{A}}; \quad C_\varphi = F_2 \frac{E'}{1 - \nu^2} \frac{1}{\sqrt{A}} \quad (26)$$

En ecs 26

$$\begin{aligned} E' &= \text{módulo de elasticidad del suelo} \\ \nu &= \text{relación de Poisson del suelo} \end{aligned}$$

A = área de contacto de la cimentación
 F_1, F_2 = factores de forma de la cimentación

Para el caso de la zona blanda del Valle de México un valor representativo de E' es 50 kg/cm^2 y $\nu \approx 0.5$. Para una cimentación cuadrada los valores de F_1 y F_2 son 0.704 y 2.11 respectivamente.

Sustituyendo valores en ecs 26 se obtiene

$$\begin{aligned} C_r &= 0.123 \text{ kg/cm}^3 \\ C_\varphi &= 0.369 \text{ kg/cm}^3 \end{aligned}$$

CASO 1. SUELO RÍGIDO

a) Cálculo de frecuencias y modos de vibración

Para el cálculo de las frecuencias de vibración usaremos la fórmula dada en ec 22. Los valores de los parámetros a sustituir son

$$\begin{aligned} p^2 &= k/m = 608 \text{ (rad/seg)}^2 \\ \Omega^2 &= k_r/J = 535 \text{ (rad/seg)}^2 \\ \mu &= \Omega^2/p^2 = 0.882 \end{aligned}$$

con los cuales

$$\lambda_{1,2} = 2(1.882 \pm \sqrt{3.55 - 0.882}) = 0.494; 7.034$$

Por tanto

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \sqrt{0.494 \times 608} = \sqrt{300} = 17.32 \text{ rad/seg} \\ \omega_2 &= \sqrt{7.034 \times 608} = \sqrt{4250} = 65.30 \text{ rad/seg} \end{aligned}$$

Los periodos naturales son

$$T_1 = 2\pi/\omega_1 = 0.362 \text{ seg} \quad (T_1 \text{ obtenido de un registro de vibraciones libres de la estructura y reportado en ref 1} = 0.483 \text{ seg})$$

$$T_2 = 2\pi/\omega_2 = 0.096 \text{ seg}$$

Comparando los valores calculado y medido de T_1 se puede ver la importancia de la interacción dinámica suelo-estructura.

Las relaciones modales se obtienen de las ecs. 25 y sus valores son

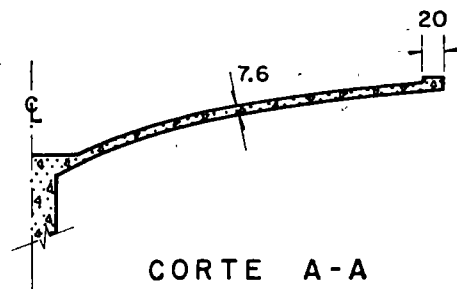
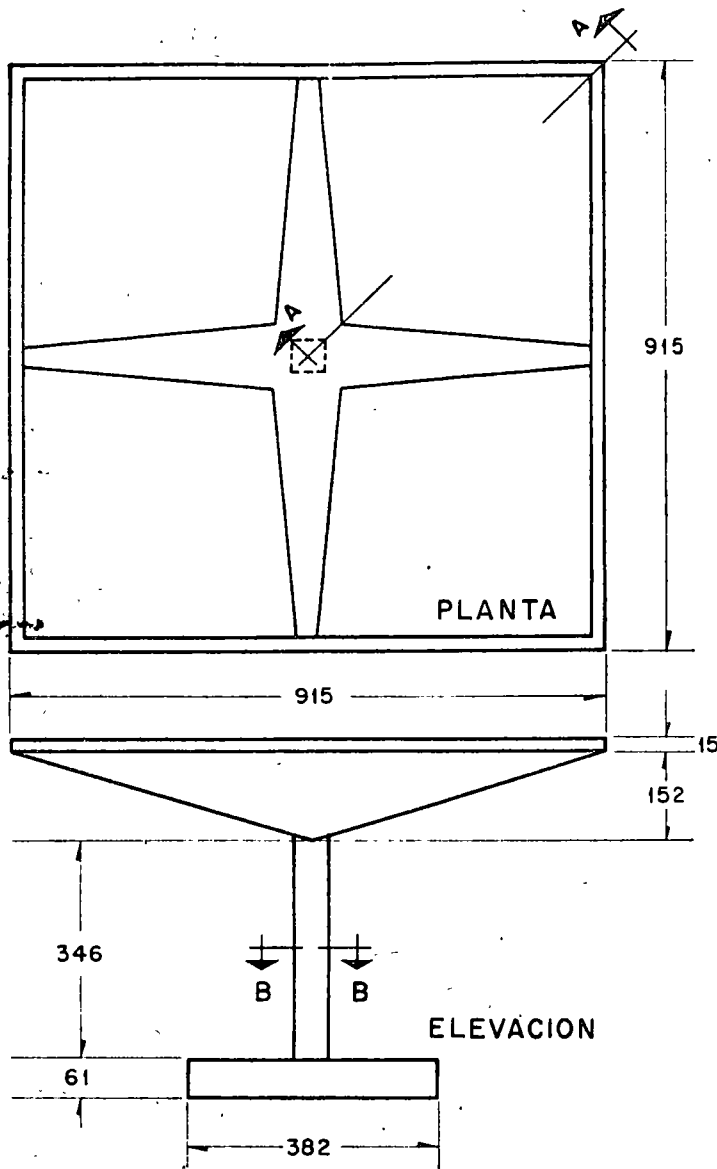
$$x_1/\epsilon_1 = \frac{2 \times 419}{4 - 0.494} = 238 \text{ cm/rad}$$

$$x_2/\epsilon_2 = \frac{2 \times 419}{4 - 7.034} = 275 \text{ cm/rad}$$

b) Respuesta sísmica

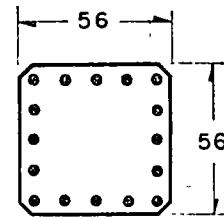
Para el cálculo de la respuesta sísmica de sistemas de varios grados de libertad es necesario calcular los coeficientes de participación de cada modo de vibración. Se puede demostrar que para este caso es aplicable la siguiente ecuación

$$C_n = \frac{X_n^T \bar{M} \bar{i}}{X_n^T \bar{M} X_n} \quad (27)$$



CORTE A-A

Acotaciones en centímetros



CORTE B-B

FIG. 8. Cascarón utilizado para ejemplo. (Después de R. McLean)

en la cual

\bar{i} es un vector que representa los desplazamientos estáticos de cada grado de libertad de la estructura inducidos por un desplazamiento estático unitario de la base.

\bar{X}_n es el vector modal para el enésimo modo (n)

\bar{M} es la matriz de inercia y

\bar{X}_n^T es el vector traspuesto de \bar{X}_n

Para nuestro caso se tendrá

$$\bar{i} = \begin{bmatrix} X_{est} \\ \epsilon_{est} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{X}_1 = \begin{bmatrix} 238 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \bar{X}_2 = \begin{bmatrix} -275 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\bar{X}_1^T = \begin{bmatrix} 238 & 1 \end{bmatrix}, \quad \bar{X}_2^T = \begin{bmatrix} -275 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\bar{M} = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & J \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20.81 & 0 \\ 0 & 1.386 \times 10^6 \end{bmatrix}$$

Sustituyendo valores en ec 27 y efectuando los productos matriciales en ella indicados se obtiene

$$C_1 = \frac{4,960}{2.566 \times 10^6} = 0.00193$$

$$C_2 = \frac{-5,720}{2.959 \times 10^6} = -0.00193$$

El valor absoluto de la respuesta máxima en cada uno de los modos será τ .

$$\begin{bmatrix} V_n = \text{fuerza cortante} \\ M_n = \text{momento flexionante} \end{bmatrix} = |C_n| \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & J \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_n \\ \epsilon_n \end{bmatrix} S_{an} \quad (28)$$

donde

S_{an} = ordenada del espectro de aceleraciones afectada por el coeficiente sísmico $C = 0.15$.

El espectro que será utilizado es el propuesto en el reglamento de construcciones del Distrito Federal⁵ (fig. 9). Los valores de las ordenadas espectrales correspondientes a T_1 y T_2 son 100 cm/seg² y 80.6 cm/seg² respectivamente.

Sustituyendo valores en ec 28 se llega a

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ M_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 957 \text{ kg} \\ 268,000 \text{ kg cm} \end{bmatrix} \quad (29)$$

$$\begin{bmatrix} V_2 \\ M_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 893 \text{ kg} \\ 216,000 \text{ kg cm} \end{bmatrix} \quad (30)$$

El criterio propuesto en ref. 8 será utilizado para el cálculo de la respuesta total (considerando los efectos combinados de los dos modos). Por lo anterior la respuesta total de la estructura valdrá

$$V = \sqrt{V_1^2 + V_2^2} ; M = \sqrt{M_1^2 + M_2^2} \quad (31a, 31b)$$

En ecs 31a y 31b

V = fuerza cortante total en la columna

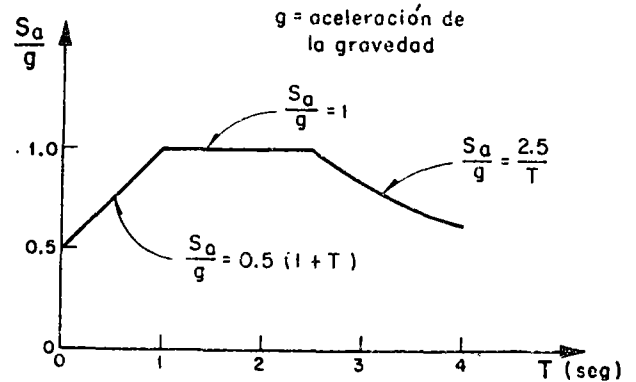


Fig. 9. Espectro de aceleraciones (Después de E. Rosenblueth y L. Esteva)

M = momento flexionante total en C. G. Sustituyendo los valores dados en ecs 29 y 30 en (31) se obtiene

$$V = 1,310 \text{ kg} ; M = 344,000 \text{ kg cm}$$

El momento en la base de la columna valdrá

$$M_b = 344,000 + 1,310 \times 419 = 893,000 \text{ kg cm}$$

Los resultados de este caso se resumen en la fig. 10a.

CASO 2. SUELO FLEXIBLE

a) Cálculo de frecuencias y modos de vibración.

Para considerar las restricciones del suelo emplearemos el método propuesto anteriormente procediendo en forma tabular. Sustituyendo valores en ecuaciones para K y R se obtienen 1.88×10^4 kg/cm y 6.35×10^8 kg cm/rad respectivamente.

PRIMER MODO

Parámetros	Valores (1er. ciclo)		Factor común
x, ϵ (supuestos)	$x = 400$ cm	$\epsilon = 1$ rad	
$F = m \omega_1^2 x, M = J \omega_1^2 \epsilon$	$F = 8320$	$M = 1,386,000$	ω_1^2
$F_0 = F, M_0 = M + FL'$	$F_0 = 8320$	$M_0 = 5,376,000$	ω_1^2
$x_0 = F_0/K, \epsilon_0 = M_0/R$	$x_0 = 0.4420$	$\epsilon_0 = 0.00847$	ω_1^2
$\alpha = F/k, \beta = M/k_r$	$\alpha = 0.6570$	$\beta = 0.00187$	ω_1^2
$\beta \delta, \alpha \theta$	$\beta \delta = 0.3892$	$\alpha \theta = 0.00235$	ω_1^2
$x_1 = \alpha + \beta \delta, \epsilon_1 = \beta + \alpha \theta$	$x_1 = 1.0462$	$\epsilon_1 = 0.00422$	ω_1^2
$x_2 = \epsilon_0 L'$	$x_2 = 4.0650$	—	ω_1^2
$x' = x_0 + x_1 + x_2, \epsilon' = \epsilon_0 + \epsilon_1$	$x' = 5.5532$	$\epsilon' = 0.01269$	ω_1^2
$\omega_1^2 = x/x', \omega_1^2 = \epsilon/\epsilon'$	72.0	78.7	

$$x'/\epsilon' = 438, \quad \bar{X}_1^T = [438 \ 1]$$

PRIMER MODO			
Parámetros	Valores (2º ciclo)		Factor común
x, ε	438	1	
F, M	9130	1,386,000	ω_1^2
F_0, M_0	9130	5,766,000	ω_1^2
x_0, ε_0	0.4860	0.00910	ω_1^2
α, β	0.7210	0.00187	ω_1^2
$\beta\delta, \alpha\theta$	0.3892	0.002585	ω_1^2
x_1, ε_1	1.1102	0.004455	ω_1^2
x_2, ε_2	4.365	—	ω_1^2
x'/ε'	5.961	0.013565	ω_1^2
ω_1^2	73.5	75.8	—

Suponiendo que la aproximación es suficiente resulta

$$x'/\varepsilon' = 440, \bar{X}_1^T = [440, 1], \omega_1^2 \doteq 74 \text{ (rad/seg)}^2$$

$$T_1 = 0.731 \text{ seg.}$$

El procedimiento para el cómputo de los parámetros del segundo modo es el mismo, sólo que la configuración supuesta deberá "limpiarse", antes de proseguir el cálculo, de las componentes del primer modo que pudiera contener. Se demuestra que si \bar{X}_2^T es el vector de la configuración supuesta, el vector libre de componentes del primer modo queda dado por

$$\bar{X}_2 = \bar{X}_2' - \frac{\bar{X}_2'^T \bar{M} \bar{X}_1}{\bar{X}_1^T \bar{M} \bar{X}_1} \bar{X}_1 \quad (32)$$

Suponiendo para el primer ciclo

$$\bar{X}_2' = \begin{bmatrix} -150 \\ 1 \end{bmatrix}$$

y sustituyendo valores en la ecuación matricial 32 se obtiene

$$\bar{X}_2 = \begin{bmatrix} -151 \\ 1 \end{bmatrix}$$

que nos da los valores de partida para el primer ciclo de cálculo.

SEGUNDO MODO			
Parámetros	Valores (1er. ciclo)		Factor común
x, ε	-151	1	
F, M	-3143	1,386,000	ω_2^2
F_0, M_0	-3143	-123,000	ω_2^2
x_0, ε_0	-0.1672	-0.0001940	ω_2^2
α, β	-0.2481	0.0018700	ω_2^2
$\beta\delta, \alpha\theta$	0.3892	-0.0008890	ω_2^2
x_1, ε_1	0.1411	0.0009810	ω_2^2
x_2, ε_2	-0.0930	—	ω_2^2
x'/ε'	-0.1191	0.0007870	ω_2^2
ω_2^2	1267	1270	—

$$x'/\varepsilon' = -151, \bar{X}_2^T = [-151 \ 1], T_2 = 0.176 \text{ seg.}$$

En este caso se supuso un valor cercano al real y por tanto sólo se necesitó un ciclo para que se obtuviera la aproximación deseada. Si el valor supuesto no hubiese sido ese sino otro cualquiera seguramente no hubiera sido suficiente un ciclo de cálculo. En los ciclos subsiguientes se procedería en igual forma que antes: suponer inicialmente la configuración obtenida en el ciclo anterior; limpiarla de las componentes del primer modo; etc.

b) Respuesta sísmica

Los valores de los coeficientes de participación y de las ordenadas espectrales para este caso son:

$$C_1 = 0.001689, \quad C_2 = -0.001689$$

$$S_{a1} = 127.4 \text{ cm/seg}^2, \quad S_{a2} = 86.6 \text{ cm/seg}^2$$

Las respuestas máximas para cada modo valen

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ M_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,970 \text{ kg} \\ 298,200 \text{ kg cm} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} V_2 \\ M_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 461 \text{ kg} \\ 203,000 \text{ kg cm} \end{bmatrix}$$

Las respuestas máximas totales serán (fig 10b)

$$V = 2,030 \text{ kg}$$

$$M = 361,000 \text{ kg cm}$$

$$M_b = 1,209,000 \text{ kg cm}$$

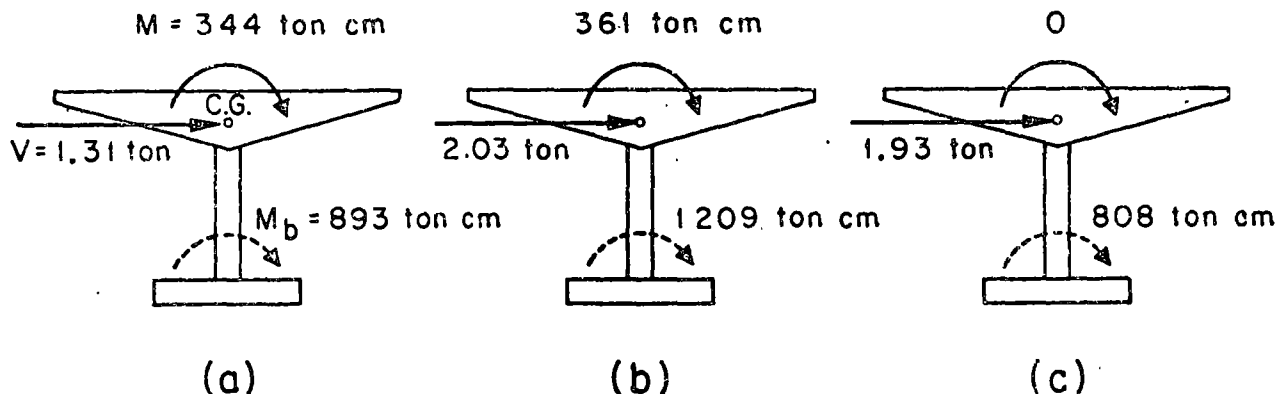


FIG. 10. Respuestas sísmicas

CASO 3. BASE RÍGIDA Y MASA CONCENTRADA

Para comparación de resultados se verá cuál es el valor de la respuesta máxima en el caso de despreciar la inercia rotacional y la interacción suelo-estructura.

Para este caso $p^2 = 608 \text{ (rad/seg)}^2$, $T = 0.325 \text{ seg}$, $0.15S_a = 92.6 \text{ cm/seg}^2$, $V = mS_a = 1,930 \text{ kg}$ y $M_b = 808,000 \text{ kg cm}$ (fig 10c).

CONCLUSIONES

En la siguiente tabla se resumen los resultados de los tres casos, indicados como porcentajes del segundo caso.

Concepto	Caso 1	Caso 2	Caso 3
V	64.4%	100%	95.0%
M	95.2%	100%	0%
M_b	73.8%	100%	66.7%

Los resultados de la tabla anterior dan una idea clara de la importancia que tiene el considerar la inercia rotacional de la cubierta y la interacción suelo-estructura. La importancia del primer concepto aumentará conforme mayor sea el momento de inercia de masa de la cubierta con respecto al eje z. El último concepto es tanto más importante cuanto más blando sea el suelo de cimentación. En particular puede observarse que en el tipo de solución 3 no se obtiene momento flexionante a la altura de C.G. Esto puede traer consigo serios errores en la cuantía del acero de refuerzo necesario en la unión columna-cubierta que es donde más ductilidad necesita desarrollarse.

AGRADECIMIENTO

El autor manifiesta su agradecimiento a los doctores E. Rosenblueth y J. A. Nieto, así como al Ing. E. del Valle por sus valiosos comentarios y sugerencias.

REFERENCIAS

- McLean, R. S., "Inverted pendulum structures", technical report of Consulting Civil and Structural Engineers, Fullerton, Cal. (ene, 1965).
- Barkan, D. D., "Dynamics of bases and foundations". McGraw Hill Book Co. Inc. (1962).
- Jacobsen, L. S., y Ayre, R. S., "Engineering vibrations", McGraw Hill Book Co. Inc. (1958).
- Newmark, N. M., "Numerical procedure for computing deflections, moments and buckling loads", Transactions ASCE, Vol. 108 (1943), pp. 1161-1234.
- Rosenblueth, E. y Esteva, L., "Proyecto de reglamento de las construcciones en el Distrito Federal. Folleto complementario. Diseño sísmico de edificios", Ediciones Ingeniería, México (1962).
- Marsal, R., y Mazari, M., "El subsuelo de la Ciudad de México", Publicación del Instituto de Ingeniería, UNAM (1962).
- Newmark, N. M., y Rosenblueth, E., "Earthquake Engineering", será publicado por Prentice-Hall, Inc.
- Rosenblueth, E., "Some applications of probability theory in aseismic design", Proceedings, 1st World Conference on Earthquake Engineering, Berkeley, Cal. (1956), paper 8.



centro de educación continua
división de estudios superiores
facultad de ingeniería, unam



IV CURSO INTERNACIONAL DE INGENIERIA SISMICA

DISEÑO SISMICO DE ESTRUCTURAS ESPECIALES

Modelo Matemático para Representar la Interacción
Dinámica de Suelo y Cimentación

Dr. Octavio A. Rascón Chávez

Agosto, 1978.

Modelo matemático para representar la interacción dinámica de suelo y cimentación*

José A. NIETO, Emilio ROSENBLUETH y Octavio A. RASCON **

1. INTRODUCCION

1.1. Descripción del problema

La influencia del suelo de cimentación en la respuesta dinámica de una estructura no ha sido suficientemente estudiada. Aunque es posible un tratamiento riguroso del problema¹, éste no es de fácil aplicación en la práctica. Conviene contar con un modelo matemático sencillo que permita determinar con bastante precisión la respuesta de un sistema suelo-estructura a perturbaciones dinámicas. El modelo debe proporcionar resultados razonablemente correctos en el intervalo de frecuencias de mayor interés. El tratamiento se simplifica considerando primeramente la cimentación de una estructura como un bloque rígido. El problema consiste en determinar el comportamiento dinámico del sistema constituido por el cuerpo rígido y el suelo; este último se puede idealizar, en una extensa gama de condiciones prácticas, como un medio elástico, homogéneo, isótropo y seminfinito.

Una vez determinada la respuesta dinámica del bloque rígido de cimentación tomando en cuenta su interacción con el suelo, es fácil incorporar al sistema la estructura flexible que se levanta sobre dicha cimentación.

1.2. Antecedentes

Las principales soluciones disponibles hasta la fecha para el problema de interacción dinámica entre un cuerpo rígido y un semiespacio elástico pueden clasificarse en cuatro grupos.

- 1) Soluciones exactas clásicas, que suponen que la distribución de esfuerzos de contacto entre bloque y suelo no depende de la frecuencia de vibración²⁻⁵ y generalmente toman dicha distribución igual a la que corresponde a carga estática. El cálculo de las respuestas dinámicas exige trabajar independientemente con cada frecuencia de excitación, pues los parámetros del modelo matemático correspondiente son funciones de esta variable; tal situación no es objetable cuando se trata de calcular el efecto de vibraciones debidas a maquinaria, pues entonces sólo interesan una o unas cuantas frecuencias de excitación, pero introduce complicaciones injustificadas cuando se desea calcular la respuesta a una perturbación que contiene

componentes significativas en un extenso intervalo de frecuencias, como lo es un sismo, y prácticamente imposibilita el cálculo de respuestas cuando sobre la cimentación existe una estructura de comportamiento no lineal. Además, a muy altas frecuencias esta solución de errores inadmisibles provenientes de la hipótesis referente a la distribución de esfuerzos de contacto.

- 2) Para una placa circular sujeta a vibración se dispone de la solución exacta que toma en cuenta la distribución correcta de esfuerzos de contacto⁷. Por lo demás esta solución adolece de las mismas limitaciones que las del grupo que antecede, cuando se trata de análisis para diseño sísmico.
- 3) Se han propuesto diversos modelos matemáticos que incluyen masas virtuales, elementos flexibles y amortiguadores lineales para representar al suelo⁸⁻¹³. Al tomar estos parámetros independientes de la frecuencia se elimina la dificultad mencionada a propósito de la aplicación de las soluciones de los grupos anteriores a diseño sísmico, si bien se introducen errores inadmisibles a muy altas frecuencias. (Se ha demostrado que la masa virtual de suelo debe ser nula para que el orden de magnitud de las respuestas quede correctamente predicho cuando la frecuencia de excitación tiende a infinito⁷). Las masas virtuales de estos modelos matemáticos se basan en consideraciones de carácter intuitivo, mientras las constantes de los amortiguadores se han determinado a partir de un número limitado de pruebas de laboratorio en modelos físicos de pequeñas dimensiones usando o simulando suelos en forma tal que se antoja peligroso extrapolar a partir de ellos.
- 4) Para eliminar la objeción mencionada respecto al empleo de una masa virtual cuando interesan frecuencias sumamente elevadas se ha propuesto un modelo matemático que comprende sólo un elemento flexible y un amortiguador lineal en representación del suelo, ambos elementos carentes de masa⁷. Dicho modelo suministra resultados excelentes en los intervalos de frecuencias sumamente bajas o excepcionalmente altas, pero introduce errores hasta de un 30 por ciento en el intervalo intermedio (si bien el error generalmente no excede 20 por ciento en el intervalo de mayor interés). Esta solución

* Ponencia presentada en el Primer Congreso Nacional de Ingeniería Sísmica, Guadalajara, Jal., nov. 1965.

** Respectivamente, investigador, director y ayudante de investigador del Instituto de Ingeniería, UNAM.

sólo se ha formulado, aparentemente, para las oscilaciones verticales de una placa circular.

De las soluciones mencionadas, las del último grupo son las únicas que pudieran considerarse satisfactorias para diseño sísmico. Sin embargo, tienen el inconveniente de perder precisión a frecuencias bajas y medias, que son las de mayor interés en el diseño de cimentaciones de maquinaria lenta y en diseño sísmico de estructuras.

El modelo matemático que se propone en este trabajo está basado en las soluciones exactas clásicas. Presenta la ventaja de mayor precisión en el intervalo de interés práctico de las frecuencias. Está limitado, por lo pronto, a bases de cimentación de forma circular, aunque su extensión a otras formas de base es inmediata. Se limita también a la consideración de modos desacoplados de vibración. Para los grados de libertad elegidos, estos modos no pueden existir en general cuando se trata de una base rígida por lo que respecta a cabeceo y traslación horizontal, salvo cuando la relación de Poisson, ν , vale 0.5. En la práctica los grados de libertad horizontal y de cabeceo se encuentran acoplados. En el modelo propuesto es factible tomar en consideración este acoplamiento variando la colocación de los elementos flexibles para los modos en cuestión.

1.3. Fundamentos del modelo matemático propuesto

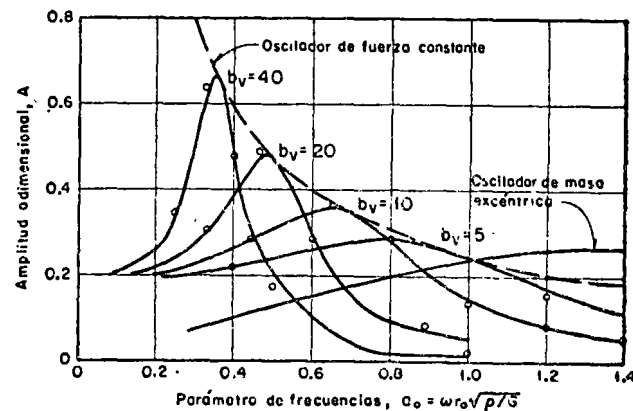
1.3.1. SOLUCIONES "EXACTAS" PARA BASES CIRCULARES

La respuesta dinámica de un cilindro circular de masa M_0 y radio r_0 desplantado en la superficie de un semiespacio elástico homogéneo e isotropo cuyas constantes elásticas son G y ν y cuya densidad de masa es ρ ha sido estudiada por varios investigadores²⁻⁵ para los seis grados de libertad del sistema, a saber: vertical, dos horizontales iguales entre sí, cabeceo respecto a dos diámetros ortogonales de la base y torsión respecto al eje vertical que pasa por el control de la base. Se han considerado en la mayoría de los casos dos tipos de perturbación actuando sobre el cilindro: sollicitación armónica cuya amplitud es independiente de la frecuencia ω , y sollicitación armónica cuya amplitud es proporcional a ω^2 . (Este último tipo es el que produciría un excitador mecánico de masa excéntrica). Como se desconoce, excepto para vibración vertical⁶, la distribución real de esfuerzos dinámicos en la superficie de contacto entre el cilindro y el semiespacio, en los estudios referidos se ha supuesto una distribución de esfuerzos dinámicos análoga a la distribución estática existente bajo alguna de las dos condiciones extremas siguientes: a) cilindro infinitamente rígido, y b) cilindro infinitamente flexible. Con la primera suposición se prescriben los desplazamientos en la superficie de contacto y se determina la condición

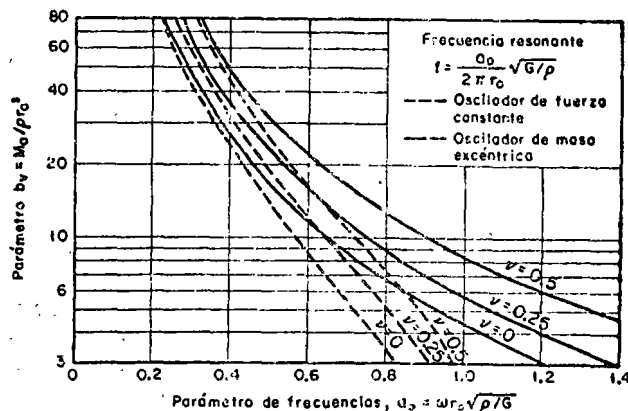
de esfuerzos correspondientes. Con la segunda suposición la distribución de esfuerzos se prescribe de antemano para cada tipo de movimiento. Estas suposiciones conducirán sólo a valores aproximados de la respuesta dinámica del cilindro, pero se ha comprobado⁴ que las aproximaciones son adecuadas para la mayor parte de los fines prácticos.

Richart⁵ ofrece una excelente presentación de los resultados obtenidos por él y por otros investigadores para la determinación de las frecuencias resonantes y amplitudes de vibración del cilindro circular infinitamente rígido. Sus gráficas se reproducen en las figs 1 a 4, correspondientes a cada uno de los grados de libertad. En la mitad inferior de estas figuras se presenta la frecuencia resonante en función de la masa o la inercia del cilindro rígido para los dos tipos de perturbación considerados y para varios valores de la relación de Poisson, ν . Tanto la frecuencia resonante como la masa o momento de inercia se grafican en forma adimensional, aquella como el parámetro de frecuencias $a_0 = \omega r_0 \sqrt{\rho/G}$ y esta como el parámetro b , que se define en la forma siguiente:

- i. Para movimiento vertical, $b_v = M_0/\rho r_0^3$
- ii. Para movimiento horizontal, $b_H = M_0/\rho r_0^3$

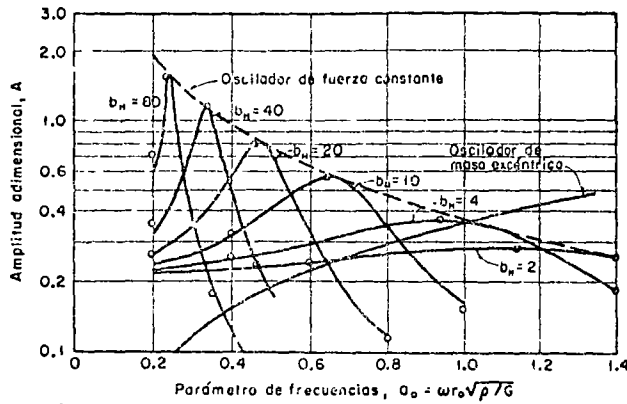


(a) Amplitud de vibración vertical para relación de Poisson $\nu = 0.25$

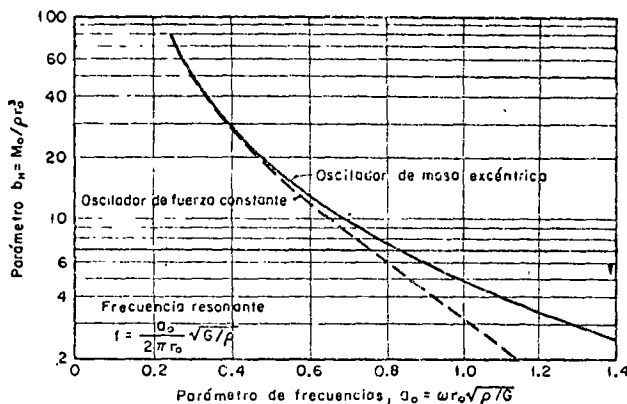


(b) Frecuencia resonante en función de b_v para tres valores de la relación de Poisson

FIG. 1. Curvas de respuesta y frecuencias resonantes de vibración vertical (Según Richart, ref. 5)



(a) Amplitud de vibración horizontal



(b) Frecuencia resonante en función de b_H

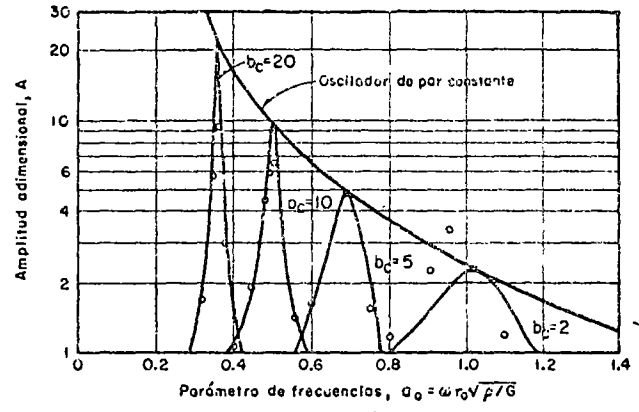
FIG. 2. Curvas de respuesta y frecuencias resonantes de vibración horizontal. Relación de Poisson, $\nu = 0$ (Según Richart, ref. 5)

iii. Para cabeceo, $b_a = I_0 / \rho r_0^5$

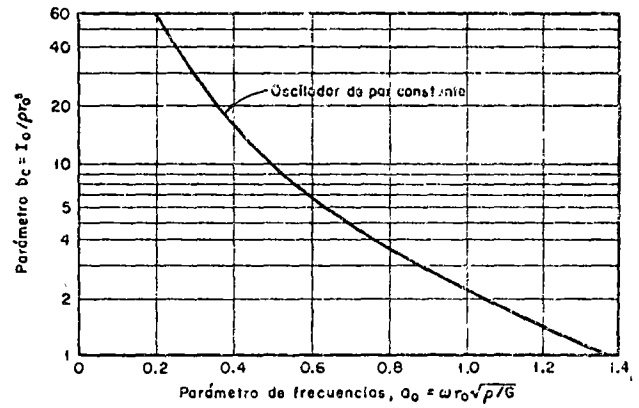
iv. Para movimiento torsional, $b_T = J_0 / \rho r_0^5$

En estas expresiones, I_0 es el momento de inercia de la masa de la base respecto al eje de cabeceo y J_0 , su momento de inercia respecto al eje de torsión. En la mitad superior de las figs. 1 a 4, Richart presenta la amplitud de vibración en función del parámetro de frecuencias para varios valores de b y para ambos tipos de perturbación. La amplitud, A , que corresponde a cada grado de libertad se presenta adimensionalmente en la forma siguiente:

- i. Para vibración vertical, $A_V G r_0 / Z$ si la amplitud de la fuerza perturbadora, Z , es independiente de la frecuencia, y $A_V \rho r_0^3 / 2 m_1 l$ si la perturbación es debida a un excitador mecánico con masa excéntrica m_1 y brazo giratorio de longitud l .
- ii. Para vibración horizontal, $A_H G r_0 / Q_H$, o $A_H \rho r_0^3 / 2 m_1 l$, en que Q_H es la amplitud de la fuerza perturbadora independiente de la frecuencia.



(a) Amplitud de vibración de cabeceo



(b) Frecuencia resonante en función de b_C

FIG. 3. Curvas de respuesta y frecuencias resonantes de vibración de cabeceo. Relación de Poisson, $\nu = 0$ (Según Richart, ref. 5)

iii. Para vibración de cabeceo, $A_M G r_0^3 / M$, en que M es la amplitud del momento de cabeceo.

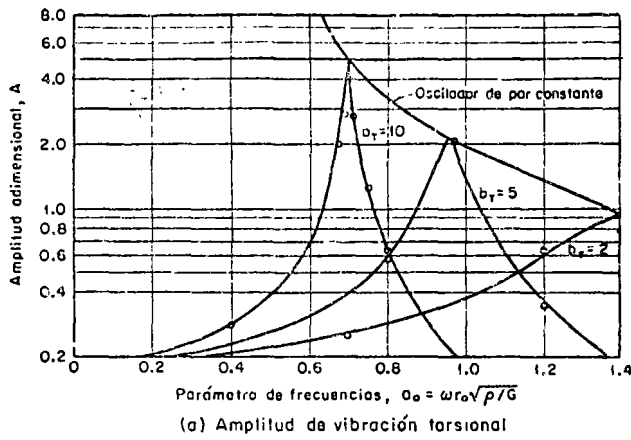
iv. Para vibración torsional, $A_T G r_0^3 / T$, en que T es la amplitud del par torsional.

(Para estos dos últimos casos no se presentan curvas correspondientes a la perturbación producida por un excitador mecánico).

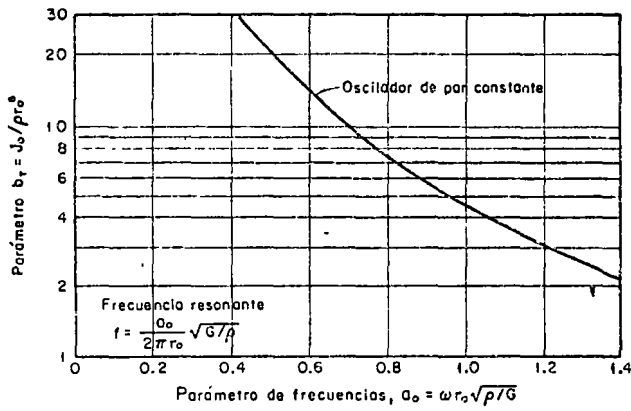
De la similitud entre las curvas de amplitudes presentadas por Richart y los espectros de desplazamiento de un sistema amortiguado, con un grado de libertad, sujeto a los mismos tipos de perturbación surgió la idea de desarrollar el modelo matemático que se describe en la siguiente sección.

1.3.2. RESPUESTA DINÁMICA DE SISTEMAS AMORTIGUADOS DE UN GRADO DE LIBERTAD

Se sabe que la frecuencia circular resonante de un sistema amortiguado con un grado de libertad



(a) Amplitud de vibración torsional



(b) Frecuencia resonante en función de b_T

FIG. 4. Curvas de respuesta y frecuencias resonantes de vibración torsional. Independiente de la relación de Poisson (Según Richart, ref. 5)

con masa, M , constante elástica K y constante de amortiguamiento C , está dada por ¹⁴

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{K(1 - 2\xi^2)}{M}} \quad (1)$$

cuando la amplitud máxima de la sollicitación dinámica es constante, y por

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{K}{M(1 - 2\xi^2)}} \quad (2)$$

cuando la amplitud máxima de la sollicitación es proporcional al cuadrado de la frecuencia perturbadora. En estas expresiones $\xi = C/2\sqrt{KM}$ es el porcentaje de amortiguamiento crítico del sistema.

Si se conoce la constante elástica de un sistema amortiguado y se determinan experimentalmente sus frecuencias resonantes ω_1 y ω_2 cuando la excitación es, respectivamente, independiente de y proporcional al cuadrado de la frecuencia perturbadora, es posible, mediante las ecs. 1 y 2, determinar el valor de la masa M y de la constante de amortiguamiento C del sistema. En esta idea se basa el modelo matemático propuesto en este tra-

bajo, con las modificaciones que se indican más adelante.

Se sabe también que la frecuencia resonante ω_v del sistema amortiguado, cuando la amplitud máxima de la excitación es proporcional a la frecuencia perturbadora, es igual a la frecuencia natural del sistema sin amortiguamiento. La amplitud resonante del sistema amortiguado sujeto a este último tipo de excitación es $M/2\xi K$.

2. MODELO MATEMATICO PROPUESTO

El modelo que se propone es un sistema de un grado de libertad con amortiguamiento lineal. Consiste en una masa rígida constituida por la cimentación y por un prisma virtual de suelo cuya base es idéntica a la de la cimentación, pero cuya altura va a depender del grado de libertad considerado. En este trabajo se estudian exclusivamente bases de cimentación de forma circular, por lo que el prisma virtual es un cilindro. La masa rígida está soportada por un elemento flexible, linealmente elástico, sin peso. La forma del elemento flexible y su colocación respecto a la masa rígida dependen del modo de vibración considerado y se presentan en la fig. 5. Como constante elástica del elemento flexible se utiliza la obtenida por medio de la teoría de la elasticidad al considerar para cada grado de libertad la acción estática de la sollicitación aplicada al cilindro rígido de radio r_0 desplantado en la superficie del semiespacio elástico que representa al suelo. En esta constante elástica se incluye el efecto de la relación de Poisson. De esta manera se asegura

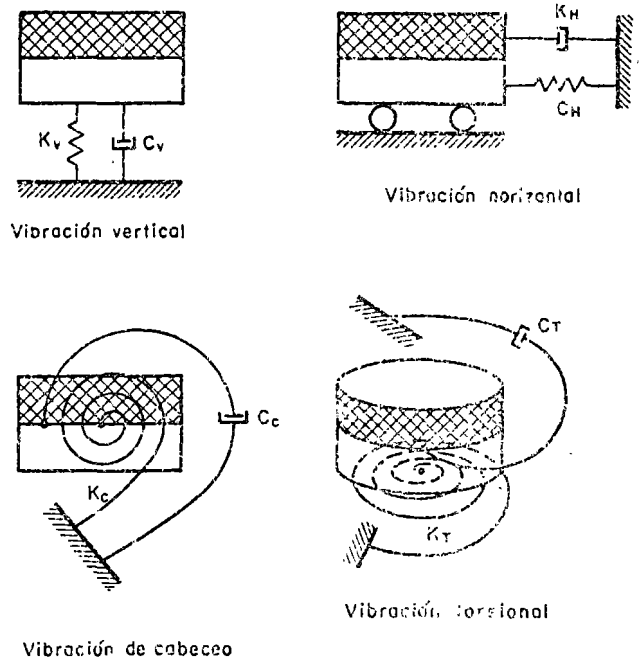


FIG. 5. Modelos matemáticos propuestos para los diferentes grados de libertad

que la solución es exacta cuando la frecuencia de excitación tiende a cero.

Debe notarse que al hablar de frecuencia de excitación nula y carga estática se entiende una velocidad de carga suficientemente lenta para evitar la aparición de fuerzas de inercia apreciables en el suelo, pero no tan lenta que se induzcan los fenómenos de consolidación y de deformaciones diferidas en gran escala. Este concepto es importante cuando se trata de aplicación a cimentaciones que se apoyan en suelos reales.

Resta determinar la altura de la masa virtual de suelo y la constante de amortiguamiento para cada grado de libertad. Se desea que la respuesta del modelo matemático se ajuste a los resultados de la teoría clásica; dado que en la mitad inferior de las figs. 1 a 4 se dispone del valor de la frecuencia resonante para cada modo de vibración y para los dos tipos de perturbación considerados, es sencillo determinar los valores requeridos utilizando estas figuras y las ecs. 1 y 2. Sin embargo, como en diseño sísmico la gama de frecuencias de interés es amplia, no interesa especialmente que el modelo tenga exactamente la misma frecuencia resonante que se determinó con la teoría clásica. Por otra parte, en los espectros de diseño sísmico más comunes, el intervalo de mayor interés de las frecuencias corresponde a amplitudes máximas de excitación proporcionales a la frecuencia perturbadora. Por estas dos razones se optó por utilizar el procedimiento descrito arriba para determinar solamente la altura de la masa virtual de suelo, y encontrar el valor de la constante de amortiguamiento ajustando la ordenada máxima del espectro de pseudovelocidades correspondiente a la solución clásica con la amplitud resonante del modelo indicado en la subsección 1.3.2. El espectro de pseudovelocidades se puede determinar utilizando las curvas de las figs. 1 a 4.

Mediante este procedimiento se llega a los valores que se consignan en la Tabla 1 en la cual la constante elástica del elemento flexible está identificado por K con el subíndice correspondiente al grado de libertad considerado, y A representa el área de cimentación. Los resultados se dan en función de A y de su raíz cuadrada para facilitar una primera estimación de los parámetros

que corresponden a cimentaciones no circulares, a reserva de que estudios ulteriores permitan afirmar tales estimaciones.

En las figs. 1 a 4 se incluyen algunos puntos representativos de las respuestas de los modelos desarrollados utilizando los valores de la Tabla, para diversos tipos de perturbación. El modelo proporciona una aproximación excelente a la respuesta exacta para los modos de vibración vertical y horizontal, aunque para los modos torsional y de cabeceo la aproximación no es tan buena. Hay que hacer notar también que en las estructuras ordinarias en las que la influencia del segundo modo de vibración es importante, éste tiene una frecuencia de 2 a 2.5 veces mayor que la frecuencia fundamental, por lo que bastará que el modelo dé una buena aproximación en el intervalo comprendido entre la frecuencia resonante y 2.5 veces el valor de dicha frecuencia.

La precisión del modelo puede mejorarse drásticamente si se hace la constante del amortiguador variable con la frecuencia; se ha preferido no proceder en tal forma para preservar la simplicidad del tratamiento.

El modelo propuesto permite incorporar fácilmente en el análisis la influencia del comportamiento inelástico de la estructura. Está limitado por ahora a bases circulares y a la consideración de modos de vibración desacoplados.

Se trabaja actualmente en la preparación de modelos semejantes para bases de cimentación rectangulares con diversas relaciones de largo a ancho. El estudio de éstas se basa en los resultados clásicos presentados en la ref. 15. Para otras formas de cimentación se pueden aplicar los resultados de este trabajo utilizando los coeficientes elásticos del suelo determinados mediante los monogramas de Newmark¹⁶ e integrando en toda el área de la base la solución clásica de Cerruti¹⁷. Aunque suele suponerse¹⁸ que la vibración horizontal y la de cabeceo de una cimentación están desacopladas si el centro de masa de la cimentación se halla a la altura de la base de contacto entre cimentación y suelo, esto no acontece en la práctica. Por otra parte, soluciones exactas basadas en la teoría de la elasticidad¹⁹ demuestran que aun para el caso de esfuerzos tangenciales

TABLA 1
PARÁMETROS DEL MODELO PROPUESTO

TIPO DE VIBRACION	ALTURA DEL PRISMA DE SUELO		CONSTANTE DE AMORTIGUAMIENTO	
	En función del radio de la base	En función del área de la base	En función del radio de la base	En función de la altura del prisma
Vertical	0.48 r_0	0.27 \sqrt{A}	1.8 $\sqrt{K_{vp}r_0^3}$	5.42 $\sqrt{K_{vp}h^3}$
Horizontal	0.10 r_0	0.05 \sqrt{A}	1.3 $\sqrt{K_{hp}r_0^3}$	41.1 $\sqrt{K_{hp}h^3}$
Cabeceo	0.63 r_0	0.35 \sqrt{A}	0.30 $\sqrt{K_{cp}r_0^3}$	0.731 $\sqrt{K_{cp}h^3}$
Torsión	0.44 r_0	0.25 \sqrt{A}	0.50 $\sqrt{K_{tp}r_0^3}$	6.90 $\sqrt{K_{tp}h^3}$

TABLA 2

ALGUNOS VALORES DE LAS CONSTANTES ELÁSTICAS

FORMA DE LA BASE	MODO DE VIBRACION			
	vertical	horizontal	cabecce	torsion
Circular	$\frac{4}{1-\nu} Gr_0$	$5.8\pi \frac{(1-\nu^2)}{(2-\nu)^2} Gr_0$	$2.7 Gr_0^{3*}$	$\frac{16}{3} Gr_0^{2**}$
Rectangular ¹⁸	$\frac{E}{1-\nu^2} c_s \sqrt{A}^+$	$\frac{E}{1-\nu^2} k_T \sqrt{A}^+$	$\frac{E}{1-\nu^2} k_\phi \frac{I^+}{\sqrt{A}}$	$\frac{1.5 E}{1-\nu^2} k_T \sqrt{\frac{J}{\sqrt{A}}}$

*Sólo se presenta el valor de K_c correspondiente a $\nu = 0$.

** El valor de K_T para base circular es independiente de ν .

+ Los valores de c_s , k_T y k_ϕ se presentan en las tablas 3, 4, y 5, respectivamente para algunos valores de la relación largo/ancho.

aplicados sobre la superficie del terreno, se producen rotaciones de la misma, así que el acoplamiento no debe ignorarse.

Finalmente es de notarse que en un análisis modal que tome en cuenta la intersección con el terreno los modos naturales de vibración no son rigurosamente ortogonales. Mientras la participación del terreno no gobierne en forma pronunciada el comportamiento, la falta de ortogonalidad no afecta seriamente las respuestas sísmicas para fines de diseño. En cambio, sí debe tenerse en cuenta en el cálculo de los modos naturales

de vibración, sobre todo cuando se acude a métodos numéricos que hacen uso de esta propiedad.

Algunos valores de las constantes elásticas de los elementos flexibles obtenidas a partir de la teoría de la elasticidad para los modos de vibración considerados y diferentes formas de la base se consignan en la Tabla 2.

TABLA 3

VALORES DEL COEFICIENTE c_s

(Según Barkan, ref. 18)

Relación largo/ancho	c_s
1.0	1.06
1.5	1.07
2.0	1.09
3.0	1.13
5.0	1.22
10.0	1.41

TABLA 4

VALORES DEL COEFICIENTE k_T

(Según Barkan, ref. 18)

(Desplazamiento horizontal en la dirección paralela al lado a)

ν	Relación a/b							
	0.5	1.0	1.5	2.0	3.0	5.0	10.0	
0.1	1.040	1.000	1.010	1.020	1.050	1.150	1.250	
0.2	0.990	0.938	0.942	0.945	0.975	1.050	1.160	
0.3	0.926	0.868	0.864	0.870	0.906	0.950	1.040	
0.4	0.844	0.792	0.770	0.784	0.806	0.850	0.940	
0.5	0.770	0.704	0.692	0.686	0.700	0.732	0.940	

TABLA 5

VALORES DEL COEFICIENTE k_ϕ

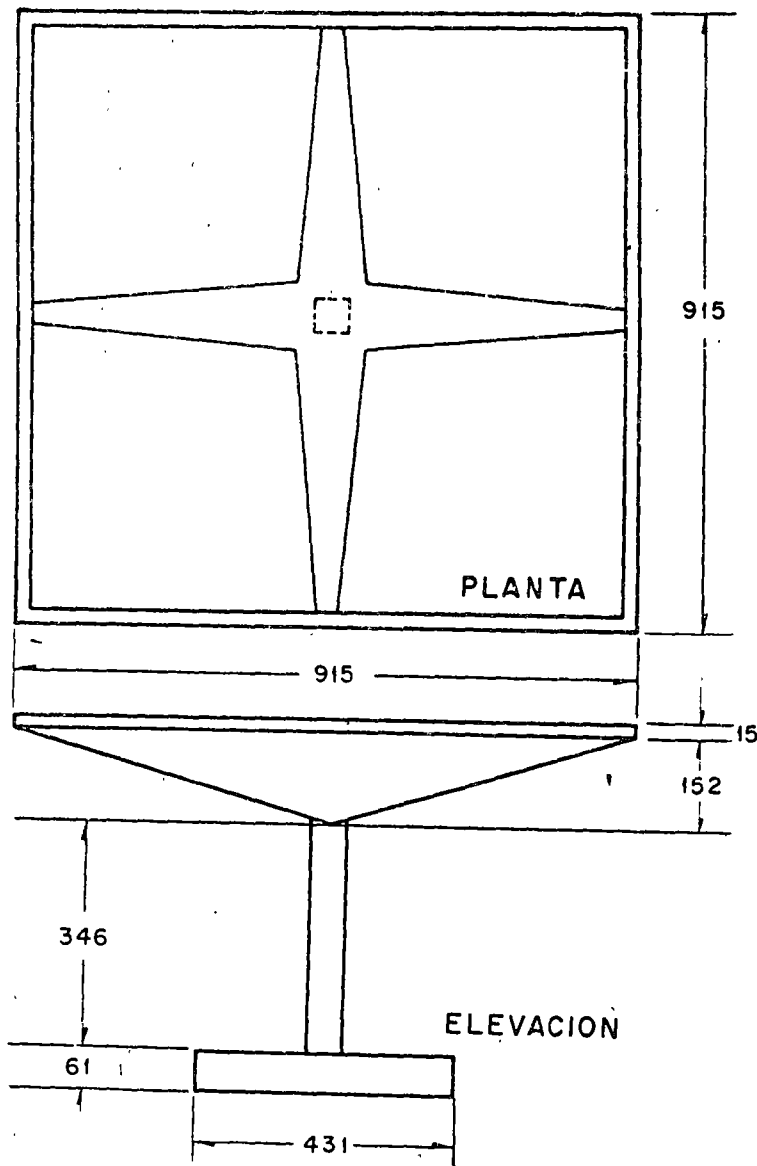
(Según Barkan, ref. 18)

(Cabecce respecto al eje paralelo al lado largo)

largo/ancho	k_ϕ
1.0	1.984
1.5	2.254
2.0	2.510
3.0	2.955
5.0	3.700
10.0	4.981

3. EJEMPLO DE APLICACION

Para ilustrar la forma de aplicación de los resultados obtenidos con el modelo propuesto, se resolverá el problema presentado en la ref. 20. Dicho problema consiste en calcular las frecuencias, modos de vibración y respuestas sísmicas de un péndulo invertido (fig. 6) tomando en cuenta la intersección dinámica suelo-estructura y la inercia rotacional de la cubierta. La solución difiere de la presentada en la ref. 20 principalmente en que se introducirán dos grados de libertad adicionales al tomar en cuenta la masa y el momento de inercia de la losa de cimentación. Los parámetros del suelo de cimentación son: $\rho = 0.112$ ton seg^2/m^4 , $\nu = 0.5$ y $G = 166$ ton/ m^2 . Utilizando las expresiones propuestas se obtiene: $K_H = 2097$ ton/m, $C_H = 67.80$ ton seg/m , $K_\phi = 8040$ ton m, $C_\phi = 40.86$ ton seg/m , $M_1 = 0.34$ ton seg^2/m e $I_1 = 4.67$ ton seg^2/m . Los parámetros de la estructura son²⁰: distancia del centro de



$L =$	4.19 m
$L' =$	4.80 m
$I =$	13.86 ton seg ² m
$W =$	20.45 ton
$m =$	2.08 ton seg ² /m
$W' =$	43.6 ton
$M_0 =$	2.2 ton seg ² /m
$I_0 =$	3.03 ton seg ² m
$I_A =$	$1.065 \times 10^2 \text{ m}^4$
$k =$	1266 ton/m
$k_r =$	7410 ton m/rad
$\theta =$	0.358 rad/m
$\delta =$	2.08 m
$\rho =$	0.112 ton seg ² /m ⁴
$\nu =$	0.5
$G =$	166 ton/m ²
$K_H =$	2097 ton/m
$C_H =$	67.80 ton seg/m
$K_C =$	8040 ton m
$C_C =$	40.86 ton seg/m

FIG. 6. Cascarón utilizado para ejemplo (Después de R. McLean)

gravedad de la cubierta a la base de la columna, $L = 4.19$ m; distancia de dicho centro a la base de la cimentación, $L' = 4.80$ m; momento de inercia de la masa de la cubierta respecto al eje de cabeceo, $I_m = 13.86$ ton seg²/m; peso de la cubierta, $W = 20.45$ ton; masa de la cubierta, $m = 2.08$ ton seg²/m; peso de la estructura, $W' = 43.6$ ton; momento de inercia centroidal principal de la sección transversal de la columna, $I_A = 1.065 \times 10^2 \text{ m}^4$; rigidez por traslación de la columna, $k = 1266$ ton/m; rigidez por flexión de la columna, $k_r = 7410$ ton m/rad; rotación al nivel del centro de gravedad, debida a una fuerza horizontal de valor k , $\theta = 0.358$ rad/m; desplazamiento lateral del centro de gravedad debido a un momento de valor k_r aplicado en dicho punto, $\delta = 2.08$ m; $M_0 = 2.2$ ton seg²/m; $I_0 = 3.03$ ton seg² m. (Para la obtención de k , k_r , θ y δ véase la ref. 20.)

Para el cálculo de los modos y frecuencias de vibración, se empleó una extensión del método propuesto en ref. 20. La extensión consiste en tomar en cuenta los dos grados de libertad adicionales debidos a la masa y a la inercia de la losa de cimentación. La solución se llevó a cabo mediante una tabulación, en la cual x es el desplazamiento del centro de gravedad, ϵ su rotación, x_0 el desplazamiento de la cimentación, ϵ_0 su giro; x_1 y ϵ_1 desplazamiento y rotación del centro de gravedad debido a la flexibilidad de la columna y x_2 es el desplazamiento de dicho centro debido a la rotación de la cimentación como cuerpo rígido.

Después de varios ciclos se llegó a $\omega_1 = 9.07$ rad/seg, $T_1 = 2\pi/\omega_1 = 0.692$ seg, $\bar{X}_1^T =$ vector modal traspuesto $= [4.36 \ 1 \ 0.39 \ 0.64]$.

Para el cálculo del segundo modo, utilizando los conceptos antes mencionados se obtuvo

$$\omega_2 = 25.3 \text{ rad/seg}, T_2 = 0.248 \text{ seg.}$$

$$\bar{X}_2^T = [1.26 \quad -1 \quad 3.73 \quad -0.26]$$

La respuesta sísmica se calculó tomando en cuenta solamente los dos primeros modos. La manera de introducir los modos restantes es obvia, mas cabe suponer que el efecto de estos será despreciable.

La respuesta sísmica se obtuvo utilizando el espectro de respuesta propuesto en el Reglamento del Distrito Federal²¹ para la zona de alta compresibilidad. Dicho espectro lleva implícito un amortiguamiento total de la estructura. En el caso particular considerado el porcentaje de amortiguamiento se encuentra comprendido entre 2 por ciento correspondiente a la estructura y 34 por ciento obtenido como si esta fuese un cuerpo rígido y el amortiguador tuviese la constante C_H .

Los coeficientes de participación para la respuesta sísmica¹¹ son

$$r_n = \frac{\bar{X}_n^T \bar{M} \bar{i}}{\bar{X}_n^T \bar{M} \bar{X}_n}$$

en la que \bar{i} es un vector que representa los desplazamientos estáticos de cada grado de libertad de la estructura inducidos por un desplazamiento estático unitario de la base.

En nuestro caso,

$$\bar{i}^T = [1 \quad 0 \quad 1 \quad 0]$$

La respuesta máxima en cada uno de los modos será^{14, 20}

$$\bar{R}_n = \left\{ \begin{array}{l} V_{cn} \\ M_{cn} \\ V_{bn} \\ M_{bn} \end{array} \right\} = r_n \bar{M} \bar{X}_n A_n$$

donde \bar{R}_n es el vector de las respuestas en el modo n ésimo cuyas componentes son la fuerza y el momento en la cubierta, V_{cn} y M_{cn} respectivamente y la fuerza y el momento en la losa de cimentación, V_{bn} y M_{bn} respectivamente y A_n es la ordenada del espectro de aceleraciones afectada del coeficiente sísmico correspondiente²¹. En nuestro caso dicho coeficiente vale 0.15.

Los resultados obtenidos fueron

$$\bar{R}_1^T = [1.995 \text{ ton} \quad 3.049 \text{ ton m} \quad 1.792 \text{ ton} \quad 1.084 \text{ ton m}]$$

$$\bar{R}_2^T = [0.548 \text{ ton} \quad -2.897 \text{ ton m} \quad 1.980 \text{ ton} \quad -0.418 \text{ ton m}]$$

La respuesta total se obtiene utilizando el criterio propuesto en la ref. 22, según el cual

$$V_c = \sqrt{V_{c1}^2 + V_{c2}^2}, M_c = \sqrt{M_{c1}^2 + M_{c2}^2}, \text{ etc.}$$

Los resultados son

$$V_c = 2.30 \text{ ton}, M_c = 4.21 \text{ ton m},$$

$$V_b = 2.67 \text{ ton}, M_b = 1.16 \text{ ton m}$$

En la fig. 7a se resumen los resultados y se comparan con los de la fig. 7b obtenidos en la ref. 20. Se observa que las respuestas son muy parecidas y es seguro que al tomar en cuenta los dos modos faltantes la respuesta del caso (a) será un poco mayor.

Los resultados de este ejemplo, en el que se consideraron masas y momentos de inercia virtuales, difieren poco de los obtenidos en la ref. 20 en la cual no se tomaron en cuenta dichos parámetros. Esto se debe a que la gran flexibilidad de la estructura juega un papel importante en la respuesta. Es fácil imaginar casos en los cuales ello no sucede.

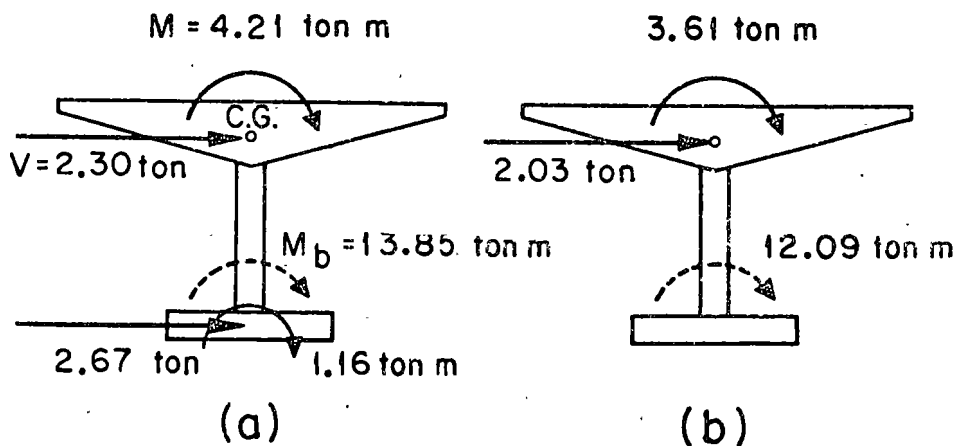


Fig. 7. Comparación de las respuestas sísmicas. a) Incluyendo masa virtual del suelo. b) Despreciando la masa virtual del suelo

REFERENCIAS

1. Nieto, J. A. y Reséndiz, D., "Interacción dinámica entre subsuelo y estructura: una revisión del problema", Primer Congreso Nacional de Ingeniería Sísmica, Guadalajara (1965).
2. Reissner, E., "Stationäre, Axialsymmetrische durch eine Schüttelnde Masse Erregte Schwingungen eines Homogenen Elastischen Halbraumes", Ingenieur-Archiv., 7 (1936), 381-396.
3. Sung, T. Y., "Vibrations on semi-infinite solids due to periodic surface loading", Symp. on Dynamic Testing of Soils, ASTM Special Technical Publication No. 156 (1953), 35-63.
4. Arnold, R. N., Bycroft, G. N. y Warburton, G. B., "Forced vibrations of a body on an infinite elastic solid", Journ. of Appl. Mechs., 22, 3 (sep. 1955), 391-400.
5. Richart, F. E. Jr., "Foundation vibrations", Trans. ASCE, 127, Part. 1 (1962), 863-925.
6. Chae, Y. S., "Dynamic pressure distribution at the base of a rigid footing subjected to vibratory loads", Tesis doctoral, Univ. de Michigan (1964).
7. Lysmer, J., "Vertical motion of rigid footings", Tesis doctoral, Univ. de Michigan (1965).
8. Crockett, J. H. A. y Hammond, R. E. R., "The natural oscillation of ground and industrial foundations", Memorias del 2o. Congr. Internac. de Mec. de Suelos e Ingeniería de Cimentacs., 3 (1948), 88-93.
9. Merritt, R. G. y Housner, G. M., "Effect of foundation compliance on earthquake stresses in multistory buildings", Bull. Seism. Soc. of Amer., 44, 4 (oct. 1954), 551-570.
10. Thomson, W. T., "A survey of the coupled ground-building vibration", Memorias del 2o. Congr. Mundial de Ing. Sism., Japón (1960), 2, 833-847.
11. Lycan, D. y Newmark, N. M., "Effect of structure and foundation interaction", Journal E. M. Div. ASCE, 87, EMS (oct. 1961), 1-32.
12. Fleming, J. F., Screwvala, F. N. y Kondner, R. L., "Foundation-superstructure interaction under earthquake motion", Memorias del 3er. Congr. Mundial de Ing. Sism., Nueva Zelandia (1965), Tema 1, Trabajo 1/F/9.
13. Balakrishna Rao, H. A., "A simplified method for computing resonant frequency of square footings", Proc. Memorias del 2o. Simp. de Ing. Sism., Roorkee, India (1962).
14. Newmark, N. M. y Rosenblueth, E., "Earthquake Engineering", a ser publicado por Prentice-Hall, inc.
15. Koboxi, T., "Dynamical response of rectangular foundation on an elastic space", Proc. Japan Natl. Symp. on Earthquake Engr. (1962), 81-86.
16. Newmark, N. M. "Influence charts for computation of vertical displacements in elastic foundations", Univ. de Illinois, Engineering Experiment Station, Bulletin No. 367, 44, 45 (nov. 1942).
17. Cerruti, V., Roma, Acc. Lincei, Mem. Fis. Mat. (1882) (ver también E. H. Love, "A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity", Dover Publications 241-243).
18. Barkan, D. D., "Dynamics of Bases and Foundations", McGraw-Hill Book Company, Inc. (1962).
19. Olagaray, C., "Integración de las soluciones de Bousinesq y Cerruti en una región rectangular", Manuscrito inédito, Inst. de Ing., UNAM (1965).
20. Rascón, O. A., "Efectos sísmicos en estructuras en forma de péndulo invertido", Memorias del 1er. Congr. Nacional de Ing. Sism., Guadalajara, México (1965).
21. Rosenblueth, E. y Esteva, L., "Folleto complementario. Diseño sísmico de edificios", Ediciones Ingeniería, México (1962).
22. Rosenblueth, E., "Some applications of probability theory in aseismic design", Memorias del 1er. Congr. Mundial de Ing. Sism., Berkeley, Cal. (1956).



centro de educación continua
división de estudios superiores
facultad de ingeniería, unam



IV CURSO INTERNACIONAL DE INGENIERIA SISMICA

DISEÑO SISMICO DE ESTRUCTURAS ESPECIALES

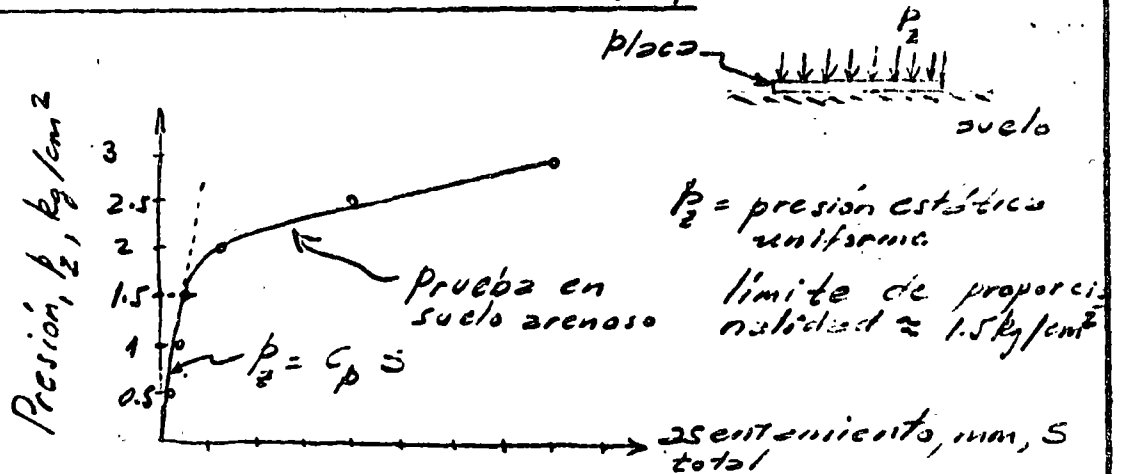
VIBRACION DE CIMENTACIONES

DR. OCTAVIO A. RASCON CHAVEZ

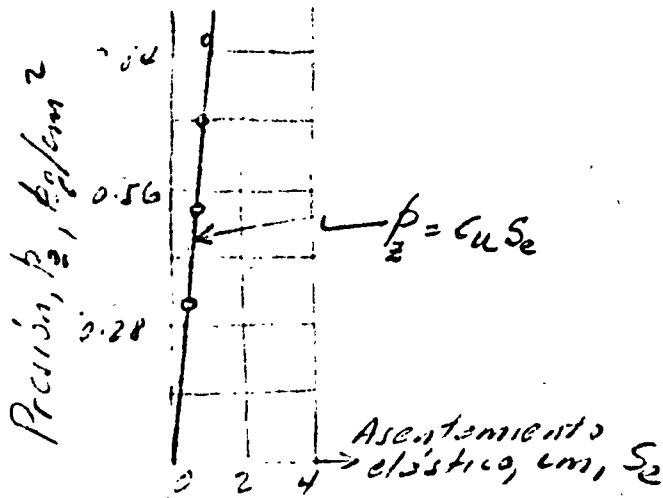
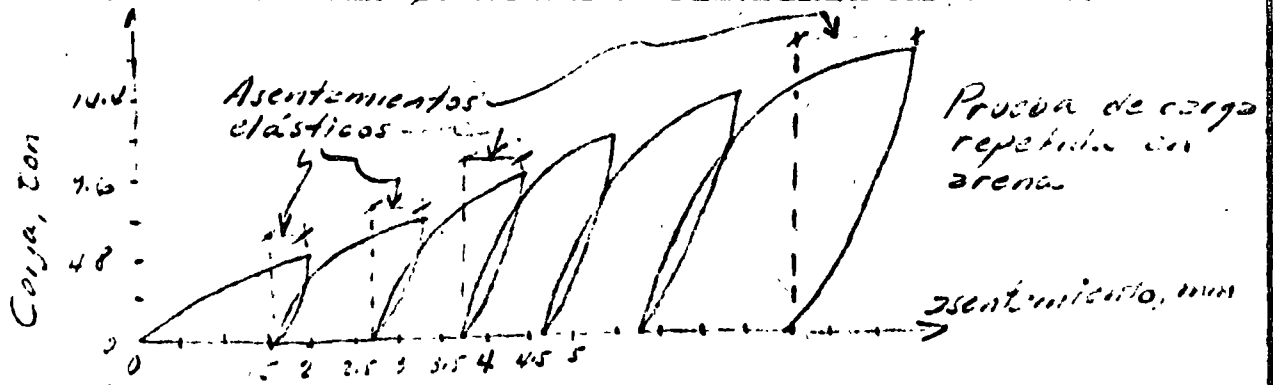
AGOSTO, 1978.

Propiedades elásticas de los suelos

1. Coeficiente de reacción del suelo, c_p



2. Coeficiente de compresión elástica uniforme, c_u



$$c_u = \frac{E}{1-D^2} \frac{C_s}{\sqrt{A}}$$

C_s está tabulada en el Barkan, pág 24, para cimentaciones rectangulares.

Bajo la hipótesis de asentamiento uniforme de una placa circular infinitamente rígida, en términos de la teoría de elasticidad se obtiene que

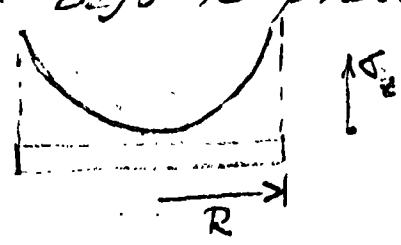
$$C_u = 1.13 \frac{E}{1-\nu^2} \frac{1}{\sqrt{A}}$$

E = módulo de elasticidad

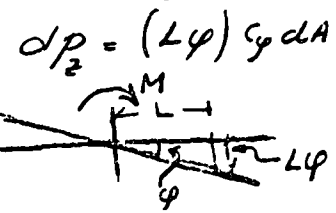
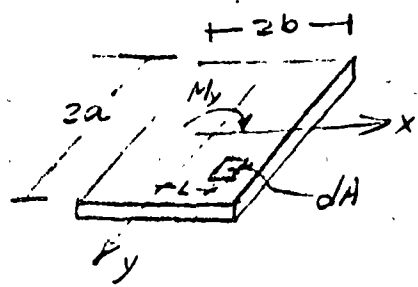
ν = módulo de poisson

A = área de contacto de la placa

Bajo esta hipótesis la distribución de esfuerzos bajo la placa es de la forma



3. Coeficiente de compresión no uniforme, c_φ
 M_y = momento estático alrededor del eje y.

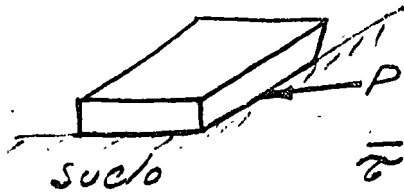


$$dP_z = (L\varphi) c_\varphi dA$$

$$c_\varphi = \frac{E}{1-\nu^2} \frac{k_\varphi}{\sqrt{A}}$$

Los valores de k_φ se encuentran tabulados en el libro de Barkan, pág. 32, para diferentes relaciones de largo a ancho de la placa.

4. Coefficiente de cortante elástica uniforme, C_T



Al aplicar P estáticamente:

$$\bar{\tau} = C_T S'_e$$

$\bar{\tau}$ = esfuerzo cortante promedio en la zona de contacto

S'_e = desplazamiento elástico promedio bajo la acción de $\bar{\tau}$

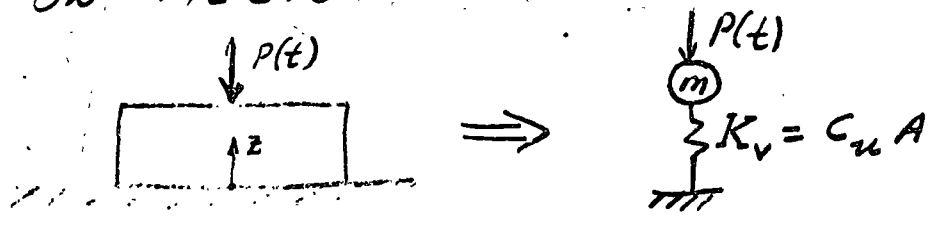
C_T = coeficiente de proporcionalidad.

$$C_T = \frac{E}{1-\nu^2} \frac{k_T}{VA}$$

Los valores de k_T se encuentran en el Barkan, pág 36, para placas rectangulares y diferentes valores del módulo de Poisson del suelo.

Quando las fuerzas o momentos que se aplican a la cimentación son dinámicos es necesario tomar en cuenta que parte de la energía es disipada a través del suelo, a este problema se le denomina de interacción dinámica suelo-estructura.

VIBRACIONES VERTICALES DE UNA PLACA INFINITAMENTE RIGIDA SOBRE UN MEDIO SEMINFINITO



$m = W/g$, $W =$ peso de cimentación + máquina

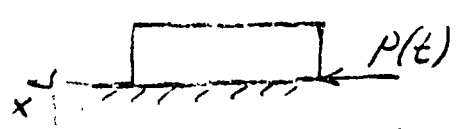
$$m\ddot{z} - W + W + C_u A z - P(t) = 0$$

$$m\ddot{z} + C_u A z = P(t)$$

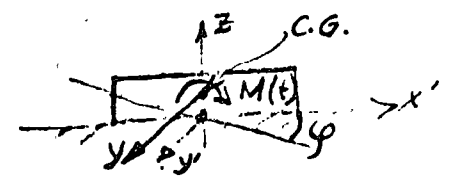
Caso de vibraciones libres ($P(t) = 0$)

$$\ddot{z} + \omega_v^2 z = 0 ; \quad \omega_v^2 = \frac{C_u A}{m} = \frac{E}{1-\nu^2} \zeta \frac{\sqrt{A}}{m}$$

Este planteamiento adolece del defecto de que no se toma parte del suelo que se "adhiera" a la cimentación formando parte de la masa total del sistema, ni la disipación de energía a través del suelo. Cosa semejante sucede en los casos de vibraciones horizontales de cabeceo o torsión; en los primeros dos casos se obtiene



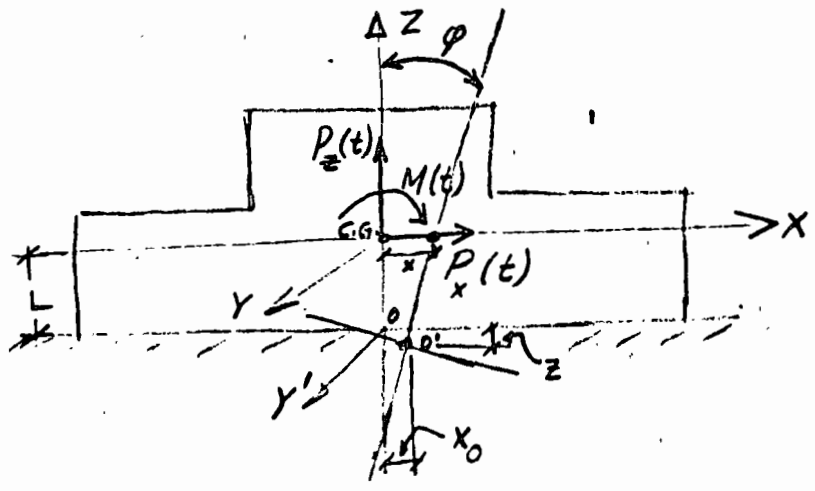
$$\ddot{x} + \omega_H^2 x = P(t); \quad \omega_H^2 = \frac{E}{1-\nu^2} k_T \frac{\sqrt{A}}{m}$$



$$\ddot{\varphi} + \omega_c^2 \varphi = M(t)$$

$$\omega_c^2 = \frac{E}{1-\nu^2} k_y \frac{I}{YA I_0}$$

en donde I = momento de inercia del área que constituye la base de la cimentación, con respecto al eje y' , e I_0 = momento de inercia de masa con respecto al eje y que pasa por el centro de gravedad de la cimentación y la máquina. En estas mismas condiciones, si se plantea el problema de vibraciones verticales, horizontales y de cabeceo simultáneamente se tendrá (pág. 110 del Burkan)

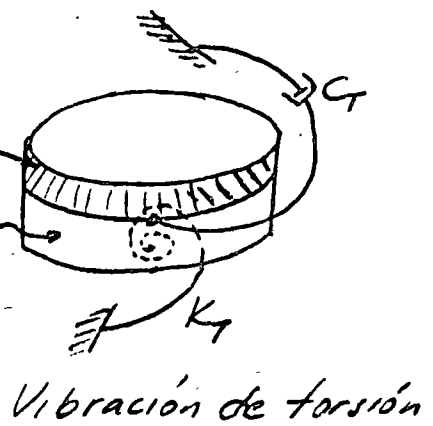
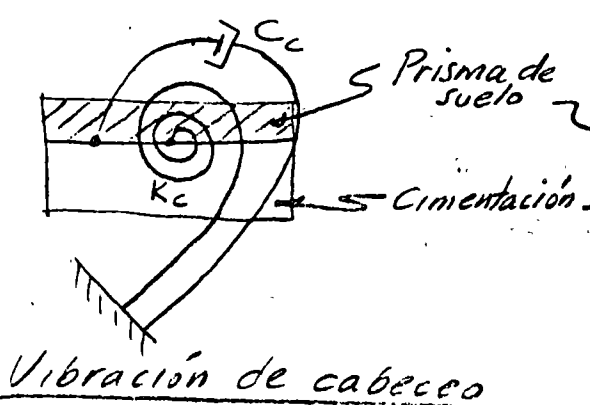
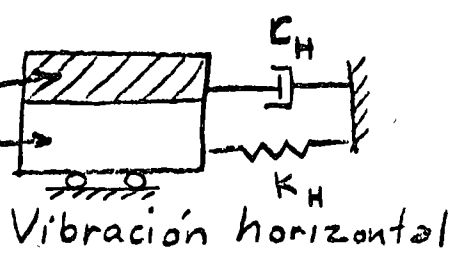
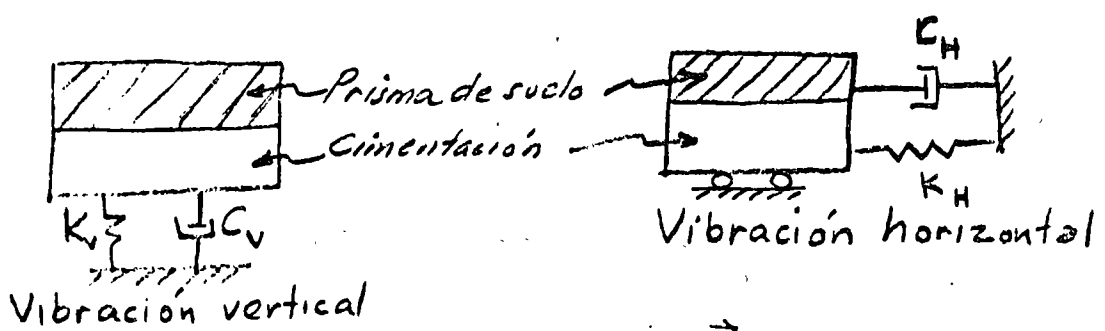


$$\begin{aligned}
 m\ddot{z} + c_u Az &= P_z(t) \quad \leftarrow \text{Ecuación independiente de } x \text{ y } \phi \\
 m\ddot{x} + c_r Ax - c_r AL\phi &= P_x(t) \\
 I_0\ddot{\phi} - c_r ALx + (c_\phi I - WL + c_r AL^2)\phi &= M(t)
 \end{aligned}
 \left. \vphantom{\begin{aligned} m\ddot{z} + c_u Az &= P_z(t) \\ m\ddot{x} + c_r Ax - c_r AL\phi &= P_x(t) \\ I_0\ddot{\phi} - c_r ALx + (c_\phi I - WL + c_r AL^2)\phi &= M(t) \end{aligned}} \right\} \text{Ecuaciones acopladas}$$

Las objeciones citadas anteriormente han sido ya sorteadas en algunos modelos matemáticos "exactos" que dan la solución a vibraciones forzadas con excitación armónica, en vibración desacoplada en cada coordenada generalizada.

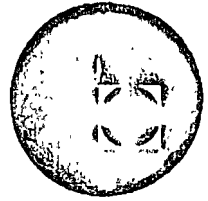
En la investigación publicada por J.A. Nieto, E. Rosenblueth y O. Rascon, "Modelo matemático para representar la interacción dinámica de suelo y cimentación", en el Boletín de la Sociedad Mexicana de Ingeniería Sísmica, Vol. 3, N°2 que se anexa, se aprovechan algunas de las soluciones "exactas" mencionadas para proponer modelos basados en sistemas de un grado de libertad para cada caso (traslación, cabeceo o torsión), que cubran satisfactoriamente los rangos de periodos de interés en diseño sísmico.

En estos modelos se prescribe un prisma de suelo que hay que agregar a la cimentación, un resorte y un amortiguador (tablas 1 y 2 de la publicación mencionada)





centro de educación continua
división de estudios superiores
facultad de ingeniería, unam



IV CURSO INTERNACIONAL DE INGENIERIA SISMICA

DISEÑO SISMICO DE ESTRUCTURAS ESPECIALES

CIMENTACIONES

M. EN I. ABRAHAM DIAZ R.

AGOSTO, 1978.

DETERMINACION EXPERIMENTAL DE LAS
PROPIEDADES DINAMICAS DE LOS SUELOS

por

J. ABRAHAM DIAZ RODRIGUEZ*

I N T R O D U C C I O N

Grandes avances se han realizado en años recientes en el desarrollo de procedimientos analíticos para calcular la respuesta del terreno bajo la acción de cargas sísmicas. Sin embargo, el uso de tales procedimientos requiere del conocimiento de las propiedades dinámicas de los suelos para llegar a soluciones satisfactorias.

Teniendo en cuenta que las cargas dinámicas pueden producir un amplio intervalo de deformaciones en los suelos, se puede afirmar que no existe un ensaye único que sea adecuado para cubrir todo el intervalo de deformaciones requerido en los problemas de ingeniería sísmica.

En la fig 1 se muestran en forma aproximada los rangos de aplicabilidad de los distintos ensayos tanto de campo como de laboratorio.

* Profesor y Jefe de la Sección de Mecánica de Suelos, DESFI, UNAM

* Investigador, Instituto de Ingeniería, UNAM

Las principales propiedades que se necesitan en dinámica de suelos e ingeniería sísmica son:

- Módulo de Young, E
- Módulo de rigidez al cortante, G
- Relación de Poisson, ν
- Fracción del amortiguamiento crítico, ζ
- Información esfuerzo-deformación
- Resistencia al esfuerzo cortante
- Parámetros de licuación

TECNICAS DE LABORATORIO

Algunos ensayos de laboratorio tienen como finalidad la medición de alguna propiedad específica tal como resistencia al esfuerzo cortante o el módulo de rigidez al cortante, en tanto que otros ensayos tienen como objetivo la simulación de situaciones o estados.

Efecto de la velocidad de deformación

Importantes esfuerzos se han dirigido hacia la determinación del comportamiento de los suelos sometidos a carga cíclica, para tratar de contestar a la pregunta de cómo será el comportamiento de una muestra cargada estáticamente con respecto a otra cargada dinámicamente.

La resistencia dinámica de una muestra de suelo cargada súbitamente será generalmente mayor que la resistencia estática.

Las principales variables que se ven afectadas por la velocidad de deformación o por la velocidad de aplicación de carga son:

- La presión de poro
- Las relaciones esfuerzo-deformación
- La resistencia al esfuerzo cortante

En lo que sigue se describirán los equipos y procedimientos para la determinación de las propiedades dinámicas de los suelos, principalmente respecto al módulo de rigidez al cortante y amortiguamiento.

Prueba de columna resonante

Este tipo de prueba permite estudiar el comportamiento de muestras de suelo en un intervalo de deformaciones que va desde deformaciones pequeñas ($\approx 10^{-5}$), como las inducidas por vibraciones de maquinaria hasta deformaciones relativamente grandes ($\approx 10^{-3}$), como las inducidas por un sismo.

Los especímenes pueden ser excitados en el sentido longitudinal o en torsión. Por lo tanto, se pueden determinar módulos dinámicos tanto de Young, E , como de rigidez al cortante, G , ver fig 2.

Los especímenes son de geometría cilíndrica, ya sea sólidos o huecos. Las dimensiones usualmente empleadas son: 3.6cm ($\approx 1\ 1/2$ ") a 7.2cm (≈ 3 ") de diámetro por 15cm (≈ 3 ") a 25cm (≈ 10 ").

La muestra cilíndrica (sólida o hueca) se apoya sobre una base rígida y se fija en ella. En su parte superior se instala la cabeza excitadora.

En esta forma se tiene una probeta fija en su base y libre en su parte superior, que es excitada longitudinal o torsionalmente.

En la realización de la prueba la frecuencia se va variando hasta encontrar la frecuencia de resonancia del espécimen. El módulo correspondiente se calcula con el dato de la frecuencia de resonancia, la geometría del espécimen y las características de excitación.

La ecuación propuesta por Wilson y Dietrich (1960), es:

$$E \text{ ó } G \text{ (psi)} = 2.39 \times 10^{-5} f^2 H^2 \gamma \quad (1)$$

en donde

f frecuencia de resonancia longitudinal para E o torsional para G, en Hz

H altura del espécimen, en pulgadas

γ peso volumétrico, en pcf

La determinación de las propiedades de amortiguamiento consiste en conseguir en estado establecido de vibración y suspender súbitamente la acción forzadora y obtener la gráfica de decaimiento de la amplitud de vibración de la cual se calculará el decremento logarítmico y con la ec (2) se obtiene la fracción del amortiguamiento crítico.

$$\delta = \ell_n \frac{x_n}{x_{n+1}} = \frac{2\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \quad (2)$$

Actualmente hay varias versiones del aparato de columna resonante, prácticamente todas estas versiones dan resultados consistentes, (Skoglund, Marcuson y Cunny, 1976).

Prueba de Pulsos

Esta prueba consiste en generar mediante cristales piezoeléctricos ondas ultrasónicas ya sea longitudinales o de torsión y medir su velocidad de propagación. Para ello se excita mediante un pulso de esfuerzo un extremo del espécimen y se mide el tiempo de llegada en el otro extremo.

Mayores detalles se describen por Lawrence (1963).

Uno de los mayores inconvenientes consiste en la identificación e interpretación del tiempo de llegada de las ondas.

Prueba de Vibración Torsional Libre

La fig 3 ilustra el aparato desarrollado por Zeevaert (1957), el cual consiste en una cámara triaxial modificada, que permite someter a la muestra a diferentes presiones de confinamiento, esto permite conocer la variación del módulo G con la presión de confinamiento.

Un brazo horizontal, sobre el cual se colocan masas que guardan simetría con el eje de la muestra, da lugar a un sistema de un grado de libertad. Al brazo se le da un pequeño impulso inicial permitiendo que el sistema vibre libremente. La vibración como

respuesta de los elementos elásticos del suelo se registra y de esta información se calcula el módulo G y el amortiguamiento de acuerdo con la expresión

$$G = \frac{w_s^2}{1 - \left(\frac{w_s}{w_a}\right)^2} K \quad (3)$$

en donde

- w_s frecuencia natural amortiguada del sistema
- w_a frecuencia natural amortiguada del aparato
- K constante característica de la geometría del sistema

La fracción del amortiguamiento crítico se calcula con la expresión del decremento logarítmico.

En general los valores de las propiedades medidas con este aparato resultan menores que los obtenidos con otros procedimientos para un nivel de deformaciones equivalentes.

Prueba Triaxial Cíclica

La prueba triaxial cíclica se desarrolló con el objetivo de ejecutar ensayos bajo carga repetida.

Seed y Lee (1966) fueron los primeros en utilizar cámara triaxial cíclica, con objeto de reproducir la condición de esfuerzos a que se halla sujeto un elemento de suelo durante un temblor (atribuyendo el estado de deformaciones del suelo a la propagación de ondas de cortante).

Si la superficie del terreno es horizontal, antes del temblor no hay esfuerzos cortantes en planos horizontales (fig 4a). Durante el temblor, los esfuerzos normales permanecen constantes, pero se generan esfuerzos cortantes (figs 4b y 4c).

En una cámara triaxial cíclica, la condición de esfuerzos señalada antes se produce en un plano a 45° .

En la prueba triaxial cíclica, se coloca un espécimen de suelo en la cámara el cual se satura y consolida bajo una presión confinante. Después se somete la muestra a un esfuerzo deviator cíclico de amplitud constante bajo condiciones no drenadas en tanto que se registra la variación de la presión de poro y deformación axial, ver fig 5.

El comportamiento de las muestras de arena suelta, sometidas al ensaye propuesto por Seed y Lee, se caracteriza por un aumento gradual de la presión de poro sin que haya deformación axial apreciable, hasta que se produce el incremento que eleva la presión de poro al mismo valor de la presión confinante "licuación inicial", momento a partir del cual la muestra se deforma súbitamente más del 20%. Las arenas en estado compacto exhiben un comportamiento similar al de las arenas sueltas, pero al llegar a la "licuación inicial" no se presenta una deformación grande en forma súbita, sino que la deformación se incrementa gradualmente.

Según el concepto de Seed y Lee, cualquier espécimen de arena es susceptible de licuarse no importando su compacidad relativa.

Los parámetros más importantes según estos investigadores son: el número de ciclos de esfuerzo (Nd_c) para alcanzar la condición $u = \bar{\sigma}_3$, la relación entre el esfuerzo cortante máximo y el esfuerzo confinante, $\frac{\sigma_{dc}}{2\bar{\sigma}_3}$ y la relación de vacíos.

Castro (1969) al realizar sus ensayos en cámara triaxial cíclica observó que durante la prueba se desarrollan heterogeneidades en las muestras, de manera especial en la zona superior. Atribuye a estas heterogeneidades, inducidas por el ensaye, el que especímenes densos alcancen la condición $u = \bar{\sigma}_3$.

Al comparar los ensayos realizados por Castro y por Seed y Lee, se aprecia que la frecuencia de aplicación de carga hace que el comportamiento de prueba Quasi estática sea diferente al de prueba cíclica.

Además de la medición de las características de licuación de los suelos, la cámara triaxial cíclica se utiliza para medir tanto el módulo E , el cual se determina de la relación esfuerzo axial entre deformación axial; el amortiguamiento ζ según se indica en la fig 6. El módulo G se puede determinar indirectamente si se conoce la relación de Poisson ν , de acuerdo a la expresión

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (4)$$

Las limitaciones de este aparato se encuentran en la literatura, Seed y Lee (1966), Castro y Poulos (1977) y Annaki y Lee (1977).

Lee (1976) dice "... Haciendo las consideraciones apropiadas de las limitaciones conocidas, la cámara triaxial ofrece un medio popular y razonable entre una prueba idealmente perfecta y la realidad práctica".

Sin embargo, Seed y Lee admiten que para estudiar el comportamiento de suelos sometidos a excitación sísmica el equipo de corte simple cíclico o torsión cíclica son más apropiados que la cámara triaxial cíclica.

Prueba de Corte Simple Cíclico

La prueba de corte simple cíclico se desarrolló con la idea de conseguir mayor aproximación a las condiciones de campo que la lograda con cámara triaxial.

Uno de los primeros aparatos de corte simple fue el desarrollado por *Swedish and Norwegian Geotechnical Institutes* (Kjellman, 1951). Sin embargo, este aparato tenía el inconveniente de utilizar muestras cilíndricas (los esfuerzos cortantes en una sección horizontal no pueden ser uniformes).

Roscoe (1953) modificó el aparato, utilizando muestras de sección rectangular y paredes rígidas.

En la Universidad de California, en Berkeley, Peacock y Seed (1968) desarrollaron un aparato de corte simple, que utilizaron para examinar la tendencia a licuarse de una muestra de arena sometida a este tipo de esfuerzo. También en la Universidad de British Columbia, Pickering y Finn (1969), Finn et al (1970 y

1971) han utilizado corte cíclico simple para el estudio de licuación.

En las figs 7 y 8 se ilustran los resultados obtenidos por Peacock y Seed.

A la prueba de corte simple cíclico (fig 9) se le han señalado limitaciones tales como la generación de condiciones de no uniformidad de esfuerzos en las fronteras, lo cual causa la falla de las muestras a esfuerzos menores que aquéllos requeridos en el campo. Aunque esto se puede minimizar con una cuidadosa preparación de la muestra.

La prueba permite la determinación directa del módulo G, aunque los valores medidos resultan menores que los determinados en el campo, ver fig 6.

Prueba de Corte Simple Cíclico Torsional

Este aparato se desarrolló en un intento por evitar alguna de las limitaciones asociadas al aparato de corte simple e incorporar la posibilidad de controlar los esfuerzos laterales.

Entre los investigadores que han contribuido al desarrollo de esta prueba se deben mencionar a Ishihara y Li (1972), Hardin (1971), Drnevich (1972), Yoshimi y Oh-Oka (1973), Ishibashi y Sherif (1974), Ishihara y Yasuda (1975), Cho, Rizzo y Humphries (1976) y Iwasaki, Tatsuoka y Tokagi (1977).

El equipo desarrollado por Drnevich (1972) tiene la ventaja de que permite realizar ensayos como columna resonante o como tor

sión cíclica. Drnevich ha estudiado las propiedades de rigidez y amortiguamiento de arenas saturadas en condiciones no-drenadas.

Ensayes en Mesa Vibradora

Este tipo de ensayos generalmente consiste en colocar un recipiente o caja con arena saturada, sobre una mesa vibradora (Díaz y Del valle, 1977) y estudiar el comportamiento de la muestra de arena (medir la aceleración de la mesa vibradora a la cual ocurre la licuación).

Maslov (1957) realizó ensayos con especímenes cilíndricos de 2.5 m de altura y 1.4 m de diámetro. Los ensayos los realizó con el objeto de comprobar su teoría de filtración. Los ensayos los realizaba sin aplicar sobrecarga. Medía la presión de poro en cinco puntos del interior de la muestra, por medio de tubos piezométricos. Los experimentos comprobaron que a una cierta aceleración (crítica), se produce aumento de la presión de poro y posteriormente consolidación del espécimen.

Yoshimi (1967) hizo experimentos utilizando el equipo de la fig 10, con arenas sueltas sometidas a vibración horizontal. Los resultados muestran que la presión de poro se incrementa uniforme y simultáneamente hasta un punto, en el cual un incremento rápido (mayor que los anteriores), eleva la presión de poro a un valor al esfuerzo total, la estructura del suelo colapsa, y se forma una capa de agua en la parte superior de la muestra.

Finn, Emery y Gupta (1970, 1971) también hicieron pruebas en Mesa Vibradora utilizando un recipiente de paredes rígidas como se puede apreciar en la fig 11. Un ejemplo de los resultados obtenidos se muestran en la fig 12.

Whitman (1970) menciona los factores que afectan los resultados de mesa vibradora y su influencia en la interpretación de los mismos:

1. Frecuencia de vibración
2. Duración de vibración
3. Tamaño y geometría del recipiente
4. Características de deformación del recipiente
5. Método de colocación de la muestra
6. Control del drenaje
7. Aparatos de medición de deformaciones
8. Presión confinante

Tal vez la principal objeción del uso de recipientes rígidos sobre mesa vibradora es que no se conoce el esfuerzo cortante actuante en la masa, que en gran parte es tomado por el recipiente, además impone condiciones de frontera que no representan condiciones de campo.

Con objeto de superar las limitaciones anteriormente descritas, Díaz, Weckmann e Iturbe (1973) diseñaron en el Instituto de Ingeniería, UNAM, un recipiente D-W-72 que permite: simular el efecto de sobrecarga (fuerzas de inercia), imponer condiciones de deformación controlable (corte simple en una sola dirección),

ensayar muestras grandes (30x60x90 cm), y la colocación de instrumentación en él interiormente. Un croquis del aparato diseñado se muestra en la fig 13.

De Alba, Seed y Chan (1976) y Seed, Mori y Chan (1977) han estudiado el comportamiento de muestras de arena de 230 x 110 x 10cm de espesor, sometidas a esfuerzo cortante simple cíclico en una dirección. En estos ensayos se registraron deformaciones cortantes, presión de polo y aceleraciones.

Para estudiar los efectos de movimientos multidireccionales, Pyke, Seed y Chan (1975) y Seed, Pyke y Martin (1978) realizaron ensayos de especímenes excitados en dos direcciones horizontales perpendiculares, de los cuales encontraron que los asentamientos provocados por movimientos multidireccionales son mayores que los provocados por movimientos en una sola dirección.

Resumen de Resultados

Módulo de rigidez al cortante

Hardin y Richart (1963) y Hardin y Black (1968) proponen para deformaciones angulares inferiores a 10^{-4} las siguientes expresiones:

- Para arenas y gravas con granos redondeados

$$G_{\text{máx}} = \frac{2630 (2.17 - e)^2}{1+e} \frac{\sigma_0^{-0.5}}{\sigma_0} \quad (5)$$

- Para arenas con granos angulosos

$$G_{\text{máx}} = \frac{1230 (2.97 - e)^2}{1+e} \bar{\sigma}_0^{-0.5} \quad (6)$$

en las que:

G módulo de rigidez al cortante en lb/pulg²

e relación de vacíos

$\bar{\sigma}_0$ $(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)/3$, esfuerzo octaédrico normal efectivo

Hardin y Black (1968, 1969) proponen

- Para arcillas

$$G = \frac{G_{\text{máx}}}{1 + \gamma/\gamma_r} \quad (7)$$

$$G_{\text{máx}} = 326 \frac{(2.973 - e)^2}{1+e} (\text{OCR})^a \bar{\sigma}_0^{0.5} \quad (8)$$

El valor de a depende del PI según la tabla

PI	0	20	40	60	80	>100
a	0	0.18	0.30	0.41	0.48	0.50

$$\gamma_r = \frac{\tau_{\text{máx}}}{G_{\text{máx}}}$$

$$\tau_{\text{máx}} = \left\{ \left[\frac{(1+K_0)}{2} \bar{\sigma}_v \sin \bar{\phi} + \bar{C} \cos \bar{\phi} \right]^2 - \left[\frac{(1-K_0)}{2} \bar{\sigma}_v \right]^2 \right\}^{0.5} \quad (9)$$

en donde

G módulo secante de rigidez al cortante en kg/cm²

- γ deformación angular en cm/cm
- e relación de vacíos
- OCR relación de preconsolidación
- $\bar{\sigma}_m$ esfuerzo efectivo principal medio en kg/cm²
- $\bar{\sigma}_v$ esfuerzo vertical efectivo en kg/cm²
- K_0 coeficiente de esfuerzo lateral en reposo
- \bar{c} cohesión, en términos de esfuerzos efectivos en kg/cm²
- $\bar{\phi}$ ángulo de fricción interna en términos de esfuerzos efectivos

Con base en los resultados experimentales y teóricos publicados por diversos investigadores, Seed e Idriss (1970) proponen el siguiente procedimiento para calcular los valores del módulo de rigidez al cortante y del amortiguamiento en suelos.

• Para arenas

$$G = 22 K_2 (\bar{\sigma}_m)^{\frac{1}{2}} \quad (10)$$

Para arenas, K_2 depende de la relación de vacíos y de la amplitud de las deformaciones. Las figuras 14 y 15 muestran los valores de K_2 obtenidos experimentalmente para dos valores distintos de la densidad relativa, para diversas muestras de arena. En las mismas figuras se muestran las curvas medias que representan a los datos empíricos, y en la 16 las curvas empíricas correspondientes a varias densidades relativas. Como este parámetro se correlaciona con la prueba de penetración estándar,

en muchos problemas prácticos el procedimiento consistirá en efectuar un sondeo de penetración, usar los datos de campo para estimar la densidad relativa, y a partir de ella, el módulo de elasticidad secante, empleando la fig 16 y la ec(10).

Los datos de la fig 16 se muestran también en la fig 17, en donde aparecen los valores de G , normalizados respecto al valor de G para $\gamma = 10^{-4}$ por ciento, en función de la deformación angular. Se considera que cuando se aplican los métodos geosísmicos ordinarios para determinar las velocidades de propagación de ondas longitudinales y de cortante las deformaciones angulares que se generan tienen valores del orden de las que sirvieron de base para la normalización citada, y que por lo tanto, el valor de G que corresponde a cualquier deformación angular se puede estimar a partir de la fig 17.

Seed e Idriss comentan que los valores que ellos proponen para G , en arenas, deben utilizarse cuando los datos de campo se obtienen mediante el método de penetración estándar, mientras que para otros casos es deseable utilizar los resultados de Hardin y Drnevich.

Amortiguamiento

Hardin (1965) propone

- Para arenas

$$\zeta_{\text{máx}} = D - 1.5 \log_e N \quad (11)$$

- Para arcillas saturadas

$$\zeta_{\text{máx}} = 31 - (3 + 0.3f) (\bar{\sigma}_m)^{0.5} + 1.5f^{0.5} - 1.5 \log_e N \quad (12)$$

en donde

- ζ fracción del amortiguamiento crítico
- N número de ciclos
- f frecuencia de la carga aplicada en Hz
- D en arenas limpias se especifican valores del 35 y 28 por ciento para estados secos y saturados respectivamente

Seed y Lee (1970), estiman

- Para arenas

Que el amortiguamiento calculado con la curva llena de la fig 13 proporciona buenos resultados para efectos prácticos. Además, recomiendan que en caso de obtenerse en forma experimental el amortiguamiento asociado a dos valores de la deformación angular, se haga pasar una curva paralela a la dada por la curva llena de la fig 18 y, así, obtener la variación completa del amortiguamiento con la deformación angular.

- Para arcillas saturadas

Los datos experimentales disponibles para calcular este parámetro son muy escasos y se muestran en la fig 19. Debido a su gran dispersión es difícil determinar los factores principales que intervienen en su cuantificación. Según Seed e Idriss el valor medio representativo para la curva llena de la fig 19

proporciona valores del amortiguamiento con suficiente aproximación para problemas prácticos. También sirve de base para cuantificar la variación del amortiguamiento respecto a la deformación angular cuando solo se conocen dos valores del amortiguamiento para determinadas deformaciones, haciendo pasar por dichos valores una curva paralela a la llena.

TECNICAS DE CAMPO

Existen tres métodos de campo para determinar el "módulo de rigidez al cortante" de los suelos:

1. Pruebas geofísicas
2. Pruebas de vibración
3. Pruebas de placa

Diagramas de cada uno de estos procedimientos de prueba se muestran en la fig 20.

Los dos primeros métodos consisten en la medición de la velocidad de propagación de las ondas a través del suelo.

Considerando que el medio es elástico, el módulo de Young E , y el módulo G , se pueden calcular de la velocidad de propagación de ondas (P), compresionales, v_p , o de ondas (S) de cortante, v_s , usando las siguientes expresiones

$$E = \rho v_p^2 \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{(1-\nu)} \quad (14)$$

$$G = \rho v_s^2 \quad (15)$$

en las cuales

- ρ densidad de masa
- ν relación de Poisson

El método de la prueba de placa consiste en someter una placa que descansa sobre la superficie del terreno a la aplicación de carga repetida con objeto de obtener la relación carga-deformación. De esta información se calcula el módulo E, mediante

$$E = \frac{P(1-\nu^2)}{r^2 w} \quad (16)$$

y considerando un valor para ν se puede calcular

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (17)$$

en donde

- r radio de la placa de carga
- w deformación vertical
- P carga

1. Métodos Geofísicos

a) Prueba de medición en sondeos

Este método consiste en medir el tiempo requerido para que las ondas generadas en un punto, mediante el impacto de un martillo pesado o una explosión, lleguen a uno o más geófonos colocados dentro de un barreno.

A continuación se describirá en forma breve el método conocido como "de sondeo en paralelo" (Cross-Hole survey) ya que se consi

dera en opinión de muchos ingenieros como el método de campo más digno de confianza para medir el módulo G.

El método consiste en medir la velocidad de propagación de ondas de cuerpo entre dos puntos en la masa de suelo. Las ondas de cuerpo se generan mediante un impulso vertical aplicado en el fondo de un sondeo.

La llegada de la energía en forma de ondas compresionales o sondantes se registra en un segundo sondeo mediante un geófono vertical. Conociendo la distancia horizontal entre los dos sondeos la velocidad de las ondas se puede calcular.

Sin embargo, en determinaciones bajo el nivel freático (NF) la V_p determinada será la del líquido, no la del suelo, en tanto que la velocidad V_s determinada arriba o abajo del NF será la del suelo.

El método requiere de 4 elementos

- i) sondeos
- ii) fuente de generadora de ondas
- iii) equipo de captación (geófono)
- iv) equipo de registro

b) Método geosísmico de refracción

Este método es aplicable sólo en medios sobre el nivel freático y cuando las velocidades en cada estrato se incrementan con la profundidad. Un esquema de este método se presenta en la fig 21.

2. Prueba de Vibración

Este procedimiento consiste en colocar en la superficie del terreno un vibrador de alta frecuencia (30 a 1000 Hz) y uno de baja frecuencia (hasta 30 Hz), para generar ondas de Rayleigh, que para propósitos prácticos tienen una velocidad (V_r) semejante a la V_s . La velocidad se calcula midiendo la longitud de onda, λ , medida con geófonos a lo largo de la superficie del terreno y la frecuencia de vibración de la fuente (vibrador), usando la expresión:

$$V_s \approx V_r = \lambda f \quad (19)$$

en donde

λ longitud de onda

f frecuencia de vibración

La velocidad (V_r) medida, se considera que corresponde a la velocidad de propagación en el suelo a una profundidad de un medio de λ . Al variar la frecuencia de la fuente se cambia λ , y se puede conocer la variación de (V_r) con la profundidad, ver fig 20.b

3. Pruebas de Placa

El módulo del suelo se puede determinar, bajo condiciones no drenadas, ya sea mediante la aplicación de carga repetida y midiendo la pendiente de la curva carga-deformación o mediante la medición de la frecuencia de resonancia con un vibrador, fig 20.c.

B I B L I O G R A F I A

1. Anderson, D.G. and Woods, R.D. (1975)
"Comparison of Field and Laboratory Shear Moduli", *Proceedings of the Conference on In Situ Measurement of Soil Properties*, Geotechnical Engineering Division (ASCE) Specialty Conference, Raleigh, North Carolina, June 1-4, Vol. 1, pp 69-97
2. Annaki, M. and Lee, K.L. (1977)
"Equivalent Uniform Cycle Concept of Soil Dynamics", *Journal of the Geotechnical Engineering Division*, ASCE, vol 103, No. GT6, Proc. Paper 12991, June, pp 549-564.
3. Arango, I. and Moriwaki, Y. (1978)
"Comparison Between In Situ and Laboratory-Determined Dynamic Shear Velocity and Modulus", *Proceedings of the Conference on Earthquake Engineering and Soil Dynamics*, Geotechnical Engineering Division, ASCE, Pasadena, June 19-21.
4. Ballard, R.F., Jr. (1976)
"Method for Crosshole Seismic Testing", *Geotechnical Engineering Division*, ASCE, Vol. 102, No. GT12, Dec. Proc. Paper 12646, pp 1261-1273.
5. Ballard, R.F., Jr. and McLean, F.G. (1975)
"Seismic Field Methods for In Situ Moduli", *Proceedings of the Conference on In Situ Measurement of Soil Properties*, Geotechnical Engineering Division (ASCE) Specialty Conference, Raleigh, North Carolina, June 1-4, Vol. 1, pp 121-150
6. Bamert, E., Schnitter, G. and Weber, M. (1967)
"A Field Method of Determining Soil Properties by Impact Loading", *Proceedings of International Symposium on Wave Propagation and Dynamic Properties of Earth Materials*, Albuquerque, N.M., Aug. 23-25, pp 265-274.
7. Bjerrum, L. and Landva, A. (1966)
"Direct Simple Shear Tests on a Norwegian Quick Clay", *Geotechnique*, Vol. 26, No. 1, pp 1-20.
8. Casagrande, A. (1976)
"Liquefaction and Cyclic Deformation of Sands--A Critical Review", Harvard Soil Mechanics Series No. 88, Harvard University, Cambridge, Mass.
9. Casagrande, A. and Shannon, W.L. (1948)
"Stress Deformation and Strength Characteristics of Soils under Dynamic Loads", *Proceedings of the Second International Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering*, Rotterdam, Vol. V, pp 29-34.

10. Castro, G. (1969)
"Liquefaction of Sands", *Harvard Soil Mechanics Series No. 81*, Cambridge, Mass., Jan.
11. Castro, G. and Poulos, S.J. (1977)
"Factor Affecting Liquefaction and Cyclic Mobility", *Journal of the Geotechnical Engineering Division, ASCE*, Vol. 103, No. GT6, June, pp 501-516.
12. DeAlba, P., Seed, H.B. and Chan, C.K. (1976)
"Sand Liquefaction in Large-Scale Simple Shear Tests", *Journal of the Geotechnical Engineering Division, ASCE*, Vol. 102, No. GT9, Proc. Paper 12403, Sept., pp 222-227.
13. Díaz, A., Weckmann, O. e Iturbe, R. (1973)
"Licuación de Arenas-Primera Parte", Instituto de Ingeniería, UNAM.
14. Díaz, J.A. and Del Valle, F. (1977)
"Dynamics laboratory of the National University of Mexico", *6th World Conference on Earthquake Engineering*, New Delhi
15. Drnevich, V.P. (1977)
"Resonant Column Testing - Problems and Solutions", *ASTM Symposium on Dynamic Soil and Rock Testing in the Field and Laboratory for Seismic Studies*, Denver, June.
16. Drnevich, V.P., Hardin, B.O. and Shippy, D.J. (1977)
"Modulus and Damping of Soils by the Resonant Column Method", *Symposium on Dynamic Soil and Rock Testing in the Field and Laboratory for Seismic Studies*, Denver, June.
17. Finn, W.D.L. (1972)
"Soil Dynamics - Liquefaction of Sands", *Proceedings of the International Conference on Microzonation*, Seattle, Oct. 30-Nov. 3, Vol. 1, pp 87-112.
18. Finn, W.D.L., Bransby, P.L. and Pickering, D.J. (1970)
"Effect of Strain History on Liquefaction of Sands", *Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division, ASCE*, Vol. 96, No. SM6, Nov., Proc. Paper 7670, pp 1917-1934.
19. Finn, W.D.L., Emery, J.J. and Gupta, Y.P. (1970)
"A Shaking Table Study of the Liquefaction of Saturated Sands During Earthquakes", *Proc. 3rd European Symposium on Earthquake Engineering*, Sept., pp 253-262.
20. Finn, W.D.L., Emery, J.J. and Gupta, Y.P. (1971)
"Liquefaction of Large Samples of Saturated Sand on a Shaking Table", *Proc. 1st Canadian Conf. on Earthquake Engineering*, Vancouver, May, pp 97-110.

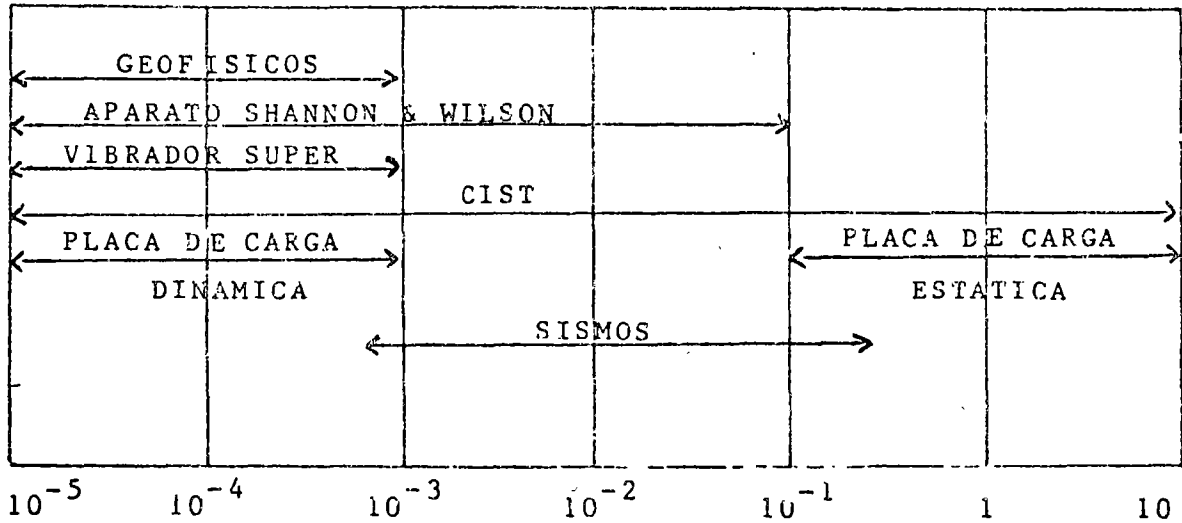
21. Finn, W.D.L., Pickering, D.J. and Bransby, P.L. (1971)
"Sand Liquefaction in Triaxial and Simple Shear Tests",
Journal of the Soil Mechanics and Foundation Division, ASCE,
Vol. 97, No. SM4, Proc. Paper 8039, April, pp 639-659.
22. Finn, W.D.L. and Vaid, Y.P. (1977)
"Liquefaction Potential from Drained Constant Volume Cyclic
Simple Shear Tests", *Preprints of Sixth World Conference on
Earthquake Engineering*, New Delhi, Jan. 10-14, Vol. 6, pp
7-12.
23. Hall, J.R., Jr. and Richart, F.E., Jr. (1963)
"Dissipation of Elastic Wave Energy in Granular Soils",
Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division, ASCE,
Vol. 89, No. SM6, Nov., pp 27-56.
24. Hardin, B.O. (1965)
"The Nature of Damping in Sands", *Journal of the Soil Mecha-
ics and Foundations Division*, ASCE, Vol. 91, No. SM1, Part 1,
Jan., pp 63-27.
25. Hardin, B.O. (1970)
"Suggested Methods of Test for Shear Modulus and Damping of
Soils by the Resonant Column", *ASTM Special Technical Pub-
lication 479*, pp 516-529.
26. Hardin, B.O. and Black, W.L. (1968)
"Vibration modulus of Normally Consolidated Clay", *Journal
of the Soil Mechanics and Foundations Division*, ASCE, Vol.
94, No. SM2, Proc. Paper 5833, March, pp 353-368.
27. Hardin, B.O. and Drnevich, V.P. (1972)
"Shear Modulus and Damping in Soils: Measurement and Param-
eter Effects", *Journal of the Soil Mechanics and Foundations
Division*, ASCE, Vol. 98, No. SM6, Proc. Paper 8977, June,
pp 603-624.
28. Hardin, B.O. and Music, J. (1965)
"Apparatus for Vibration of Soil Specimens During the Triax-
ial Test", *Instruments and Apparatus for Soil and Rock
Mechanics*, ASTM STP 392, Am. Soc. Testing Mats., pp 55-74.
29. Humphries, W.K. and Wahls, H.E. (1968)
"Stress History Effects on Dynamic Modulus of Clay", *Journal
of the Soil Mechanics and Foundations Division*, ASCE, Vol.
94, No. SM2, Proc. Paper 5834, March, pp 371-389.
30. Hvorslev, M.J. and Kaufman, R.I. (1952)
Torsion Shear Apparatus and Testing Procedures, USAE Water
ways Experiment Station, Bulletin No. 38, May, 76 pp

31. Ishibashi, I. and Sherif, M.A. (1974)
"Soil Liquefaction by Torsional Simple Shear Device", *Journal of the Geotechnical Engineering Division, ASCE*, Vol. 100, No. GT8, Proc. Paper 10752. Aug., pp 871-888.
32. Ishihara, K. and Li, S. (1972)
"Liquefaction of Saturated Sand in Triaxial Torsion Shear Test", *Soils and Foundations*, Vol. 12, No. 2, June, pp 19-39.
33. Ishihara, K. and Yasuda, S. (1975)
"Sand Liquefaction in Hollow Cylinder Torsion Under Irregular Excitation", *Soils and Foundations*, Vol. 15, No. 1, March, pp 45-59.
34. Kjellman, w. (1951)
"Testing of Shear Strength in Sweden", *Geotechnique*, Vol. 2, pp 225-232.
35. Lawrence, F.V., Jr. (1963)
"Propagation Velocity of Ultrasonic waves through Sand", MIT Research Report R63-8, March.
36. Lee, K.L. (1976)
"Fundamental Considerations for Cyclic Triaxial Tests on Saturated Sands", *Proc. Int. Conf. on Behavior of Offshore Structures*, BOSS "76", Trondheim, Norway, Aug., Vol. 1, pp 355-373.
37. Lee, K.L., Seed, H.B. and Dunlop, P. (1969)
"Effect of Transient Loading on the Strength of Sand", *Proceedings of the Seventh International Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering*, Mexico City. vol. 1. pp 239-247.
38. Maslov, N.M. (1957)
"Questions of Seismic Stability of Submerged Sandy Foundations and Structures", *Proceedings of the Fourth International Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering*, London, Vol. 1, pp 368-372.
39. Mulilis, J.P., Chan, C.K. and Seed, H.B. (1975)
"The Effects of Method of Sample Preparation on the Cyclic Stress-Strain Behavior of Sands", Report No. EERC 76-18, Earthquake Engineering Research Center, University of California, Berkeley, July.
40. Murphy, V.J. (1972)
"Geophysical Engineering Investigation Techniques for Microzonation", *Proceedings of the International Conference on Microzonation*, Vol. 1, pp 135-159.

41. Pyke, R., Seed, H.B. and Chan, C.K. (1975)
"Settlement of Sands Under Multidirectional Shaking", *Journal of the Geotechnical Engineering Division*, ASCE, Vol. 101, No. GT4, April, Proc. Paper 11251, pp 379-398.
42. Richart, F.E., Jr., Hall, J.R., Jr. and Woods, R.D. (1970)
Vibrations of Soils and Foundations, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 414 pp.
43. Roscoe, K.H. (1953)
"An Apparatus for the Application of Simple Shear to Soil Samples", *Proceedings, Third International Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering*, Zurich, Vol. 1, pp 186-191.
44. Seed, H.B. (1976)
"Evaluation of Soil Liquefaction Effects on Level Ground During Earthquakes", *State-of-the-Art Paper, Liquefaction Problems in Geotechnical Engineering*, Meeting Preprint 2752, ASCE Annual Convention, Sept. 27 - Oct. 1, Philadelphia, Pa., pp 1-104.
45. Seed, H.B., Kenji, M. and Chan, C.K. (1977)
"Influence of Seismic History on Liquefaction of Sands", *Journal of the Geotechnical Engineering Division*, ASCE, Vol. 103, No. GT4, Proc. Paper 12841, April, pp 257-270.
46. Seed, H.B. and Lee, K.L. (1966)
"Liquefaction of Saturated Sands During Cyclic Loading", *Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division*, ASCE, Vol. 92, No. SM6, Nov., pp 105-134.
47. Seed, H.B. and Lundgren, R. (1954)
"Investigation of the Effect of Transient Loading on the Strength and Deformation Characteristics of Saturated Sands". *Proceeding ASFM*, Vol. 54, pp 1288-1306.
48. Seed, H.B., Mori, K. and Chan, C.K. (1977)
"Influence of Seismic History on Liquefaction of Sands", *Journal of the Geotechnical Engineering Division*, ASCE, Vol. 103, No. GT4, Proc. Paper 12841, April, pp 257-270.
49. Seed, H.B. and Peacock, W.H. (1971)
"Test Procedure for Measuring Soil Liquefaction Characteristics", *Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division*, ASCE, Vol. 97, No. SM8, Aug., pp 1099-1119.
50. Seed, H.B., Pyke, R.M. and Martin, G.R. (1978)
"Effect of Multidirectional Shaking on Pore Pressure Development in Sands", *Journal of the Geotechnical Engineering Division*, ASCE, Vol. 104, No. GT1, Jan., Proc. Paper 13485, pp 27-44.

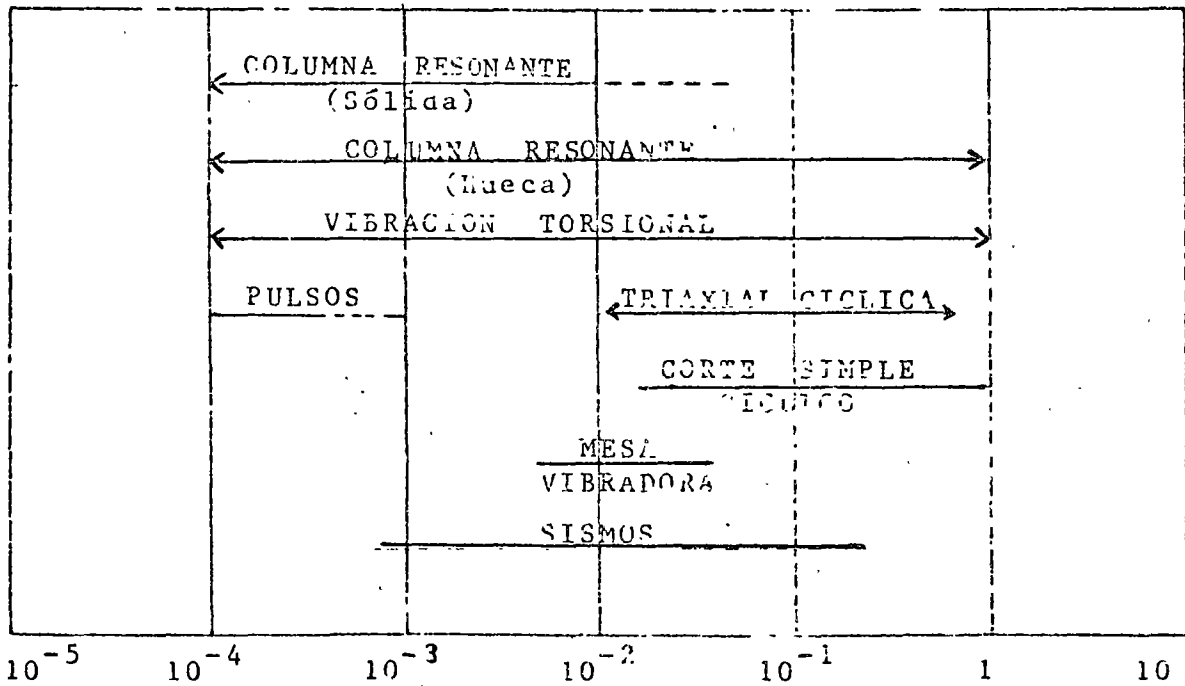
51. Seed, H.B. and Silver, M.L. (1972)
"Settlement of Dry Sands During Earthquakes", *Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division*, ASCE, Vol. 98, No. SM4, Proc. Paper 8844, April, pp 381-397.
52. Sherif, M.A. and Ishibashi, I. (1976)
"Dynamic Shear Moduli for Dry Sands", *Journal of the Geotechnical Division*, ASCE, Vol. 102, No. GT11, Proc. Paper 12572, Nov., pp 1171-1184.
53. Silver, M.L. (1976)
"Laboratory Triaxial Testing Procedures to Determine the Cyclic Strength of Soils", Report No. NUREG-31, U.S. Nuclear Regulatory Commission, Washington, D.C., Dec. 70 pp.
54. Silver, M.L., Chan, C.K., Ladd, R.S., Lee, K.L., Tiedemann, D.A., Townsend, F.C., Valera, J.E. and Wilson, J.H. (1976)
"Cyclic Triaxial Strength of Standard Test Sand", *Journal of the Geotechnical Engineering Division*, Vol. 102, No. GT5, May, pp 511-522.
55. Silver, M.L. and Park, T.K. (1975)
"Testing Procedure Effects on Dynamic Soil Behavior", *Journal of the Geotechnical Engineering Division*, ASCE, Vol. 101, No. GT10, Proc. Paper 11671, Oct., pp 1061-1083.
56. Silver, M.L. and Seed, H.B. (1971)
"Deformation Characteristics of Sands Under Cyclic Loading", *Journal of the Soil Mechanics and Foundation Division*, ASCE, Vol. 97, No. SM8, Aug., pp 1081-1098.
57. Skoglund, G.R., Marcuson, W.F. III, and Cunney, R.W. (1975)
"Evaluation of Resonant Column Dynamic Testing Devices", Misc. Paper 5-75-2, U.S. Army Engineer Waterways Experiment Station, Vicksburg, Feb.
58. Skoglund, G.R., Marcuson, W.F. III, and Cunney, R.W. (1976)
"Evaluation of Resonant Column Test Devices", *Journal of the Geotechnical Engineering Division*, ASCE, Vol. 102, No. GT11, Nov., Proc. Paper 12567.
59. SW-AA (1974)
"Soil Behavior Under Earthquake Loading Conditions, In Situ Impulse Test", *Progress Report*, Contract No. AT(04-3)-954, U.S. Atomic Energy Commission, June. [Shannon & Wilson, Agbabian Associates joint venture].
60. SW-AJA (1971)
"Soil Behavior Under Earthquake Loading Conditions", Interim Report No. 1, Subcontract No. 3354, Union Carbide Corporation, for U.S. Atomic Energy Commission, Contract W-7405-eng-26, Dec. 186 pp. (SW-AJA is Shannon & Wilson and Agbabian-Jacobsen Associates joint venture).

61. SW-AJA (1972a)
"Soil Behavior Under Earthquake Loading Conditions, State-of-the Art Evaluation of Soil Characteristics for Seismic Response Analysis", Under subcontract No. 3354, Union Carbide Corporation for U.S. Atomic Energy Commission, Contract No. W-7405-eng-26, Jan.
62. SW-AJA (1972b)
"Soil Behavior Under Earthquake Loading Conditions, Interim Report No. 2", prepared under Subcontract No. 3354, Union Carbide Corp., for U.S. Atomic Energy Commission, Contract No. W-7405-eng-26, Feb.
63. Taylor, D.W. and Whitman, R.V. (1954)
"The Behavior of Soils Under Dynamic Loadings-3", *Final Report on Laboratory Studies*, Civil Engineering Dept., MIT, Aug.
64. Townsend, F.C., Marcuson, W.F. III, and Mulilis, M. (1978)
"Cyclic Triaxial and SPT for Predicting Liquefaction", *Proceedings of the Conference on Earthquake Engineering and Soil Dynamics*, Geotechnical Engineering Division, ASCE, Pasadena, June 19-21.
65. Whitman, R.V. (1970b)
"Summary of Results from Shaking Table Tests at University of Chile using a Medium Sand", MIT, Progress Report No. 9, Effect of Local Soil Conditions Upon Earthquake Damage Research Report R 70-25, Soils Publication No. 250, May.
66. Whitman, R.V. and Ortigosa de Pablo, P. (1968)
"Densification of Sand by Vertical Vibrations, Rep. No. 4 - Repeated Load and Vibration Tests upon Sand", MIT, Civil Engineering Tech. Paper No. T68-5, Soils Pub. No. 222, Aug.
67. Wilson, S.D. and Dietrich, R.J. (1960)
"Effect of Consolidation Pressure on Elastic and Strength Properties of Clay", *Proceedings ASCE Research Conference on Shear Strength of Cohesive Soils*, Boulder, Colo., June, pp 419-435.
68. Zeevaert, L. (1967)
"Free Vibration Torsion Tests to Determine the Shear Modulus of Elasticity on Soils", *Proc., 3rd Panamerican Conf. on Soil Mech. and Foundation Eng.*, Caracas, Vol. 1, pp 111-129.



Deformación angular, γ , en por ciento

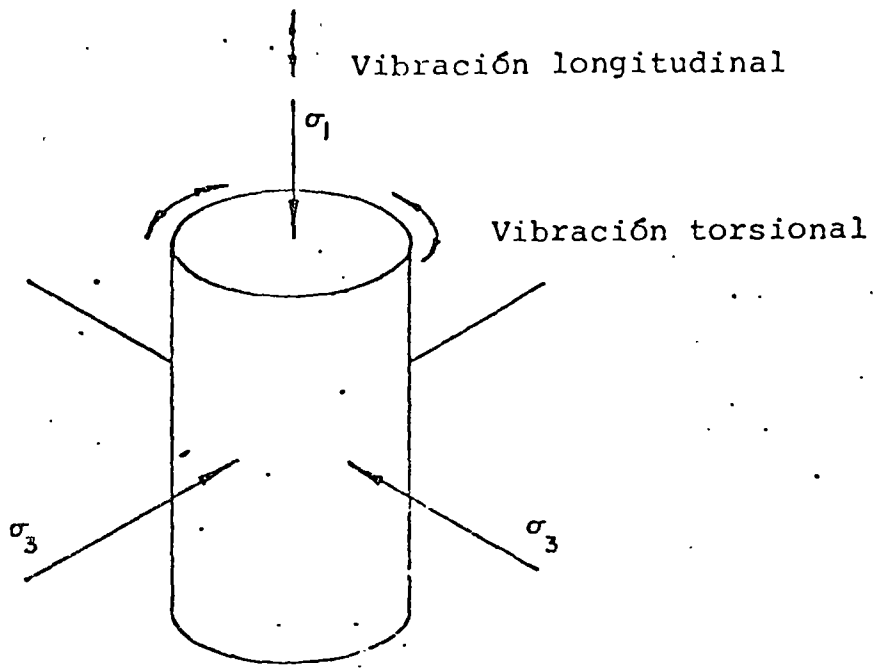
a. PRUEBAS DE CAMPO



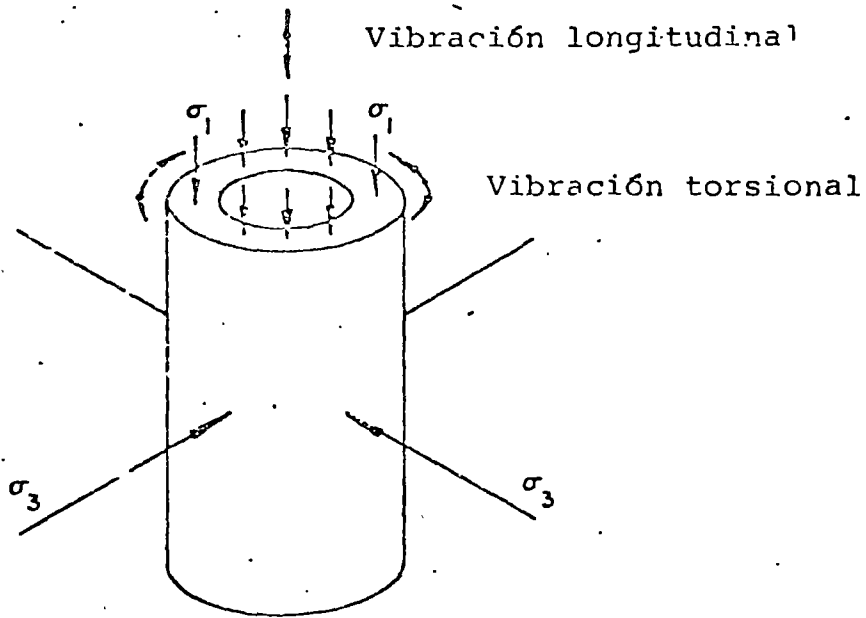
Deformación angular, γ , en por ciento

b. PRUEBAS DE LABORATORIO

Fig 1 RANGO APROXIMADO DE DEFORMACIONES IMPUESTAS EN PROCEDIMIENTOS DE MEDICION



a. Cilindro Sólido



b. Cilindro Hueco

Fig 2 PRUEBA DE COLUMNA RESONANTE

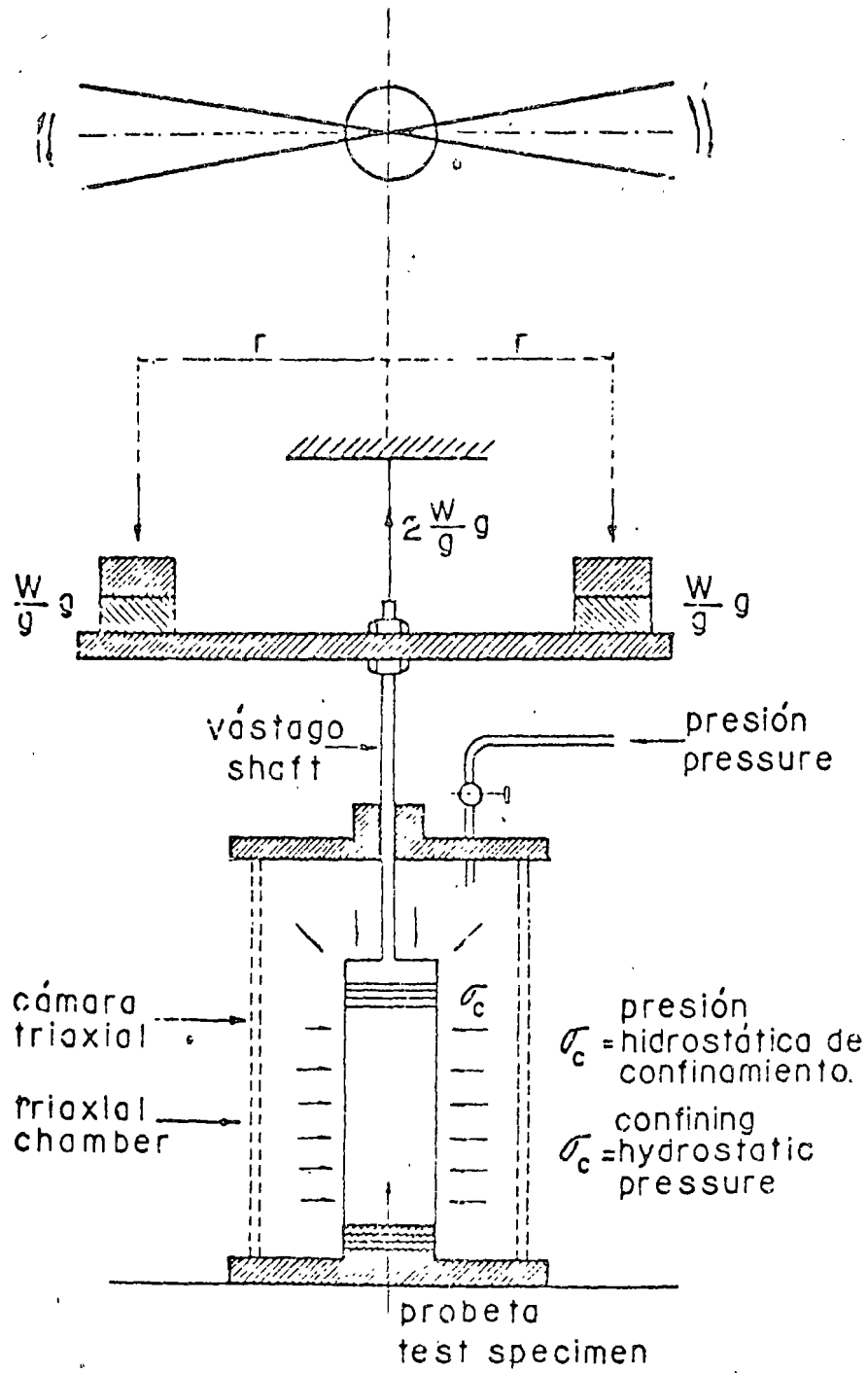


Fig 3 DISPOSITIVO PARA PRUEBAS DINAMICAS DE TORSION, (Zeevaert, 1967)

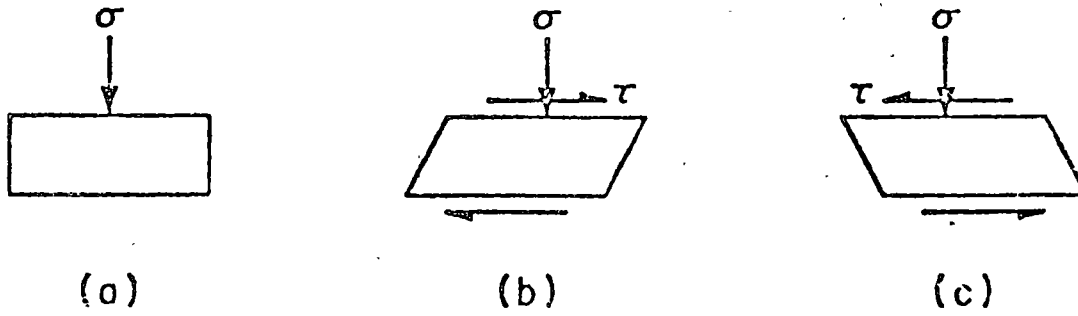


Fig 4. Condiciones de esfuerzo idealizadas para un elemento de suelo bajo la superficie, durante un sismo (Seed y Lee, 1966)

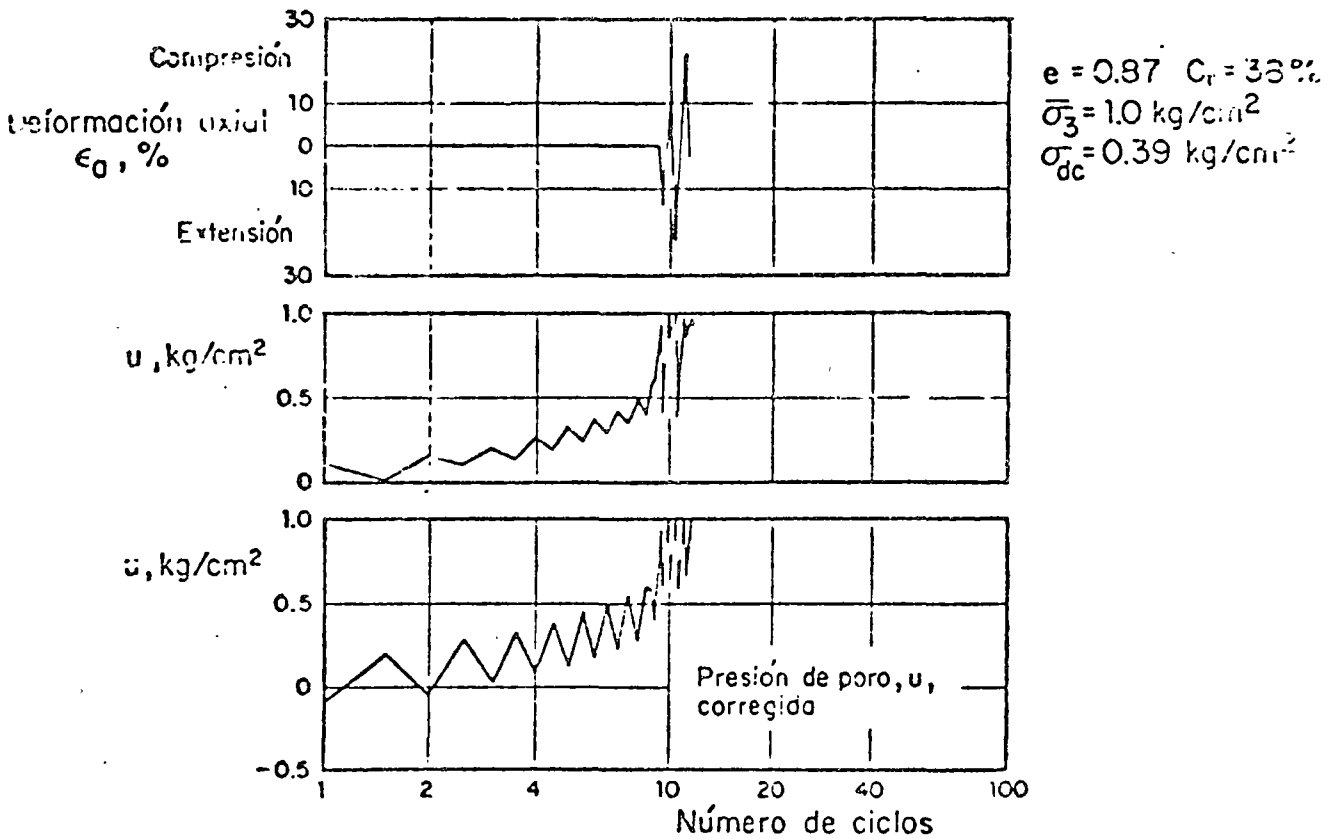


Fig 5. Prueba de carga cíclica, típica en arena suelta (Seed y Lee, 1966)

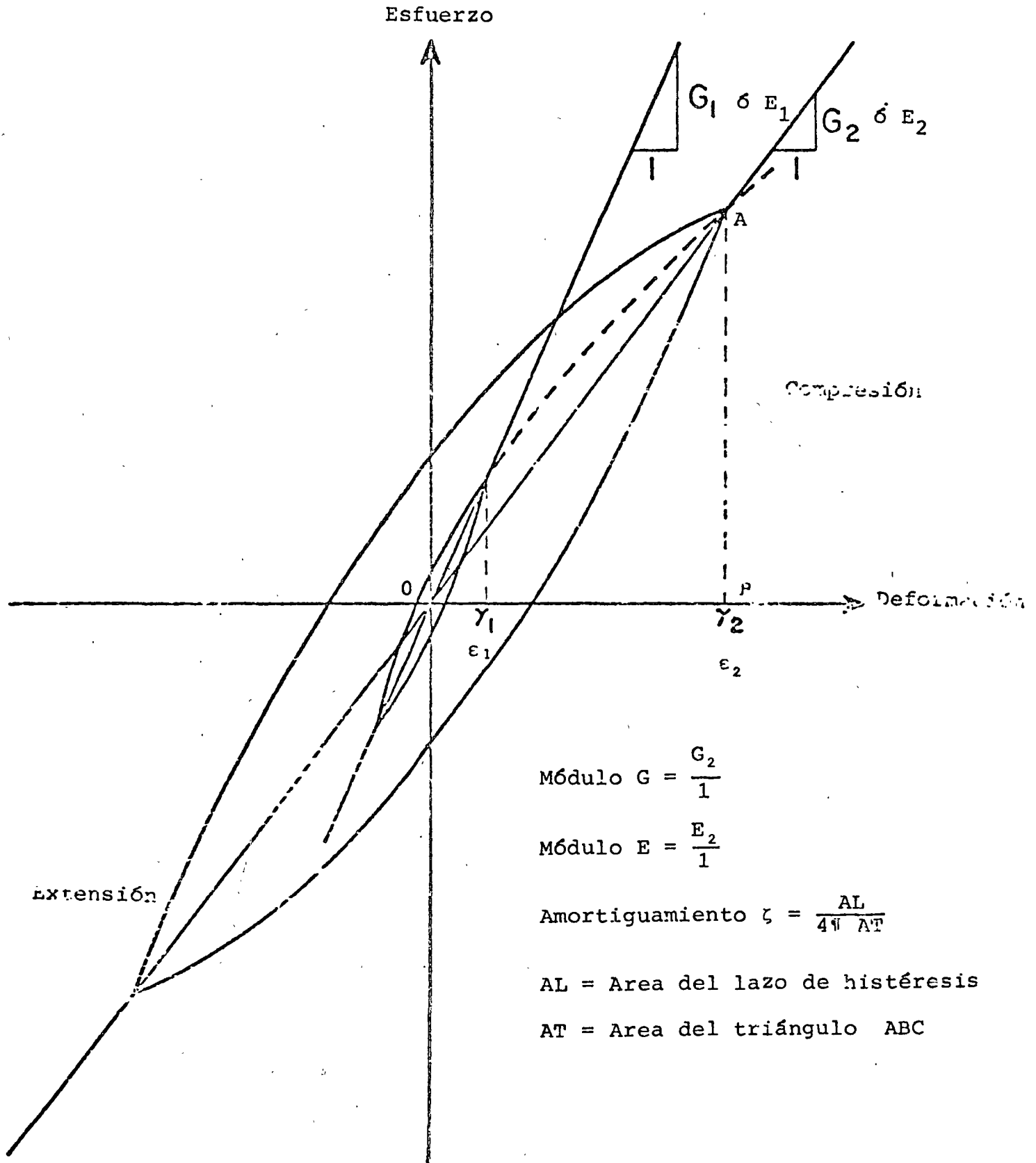


Fig 6 RELACION HISTERETICA ESFUERZO-DEFORMACION PARA DIFERENTES AMPLITUDES DE DEFORMACION

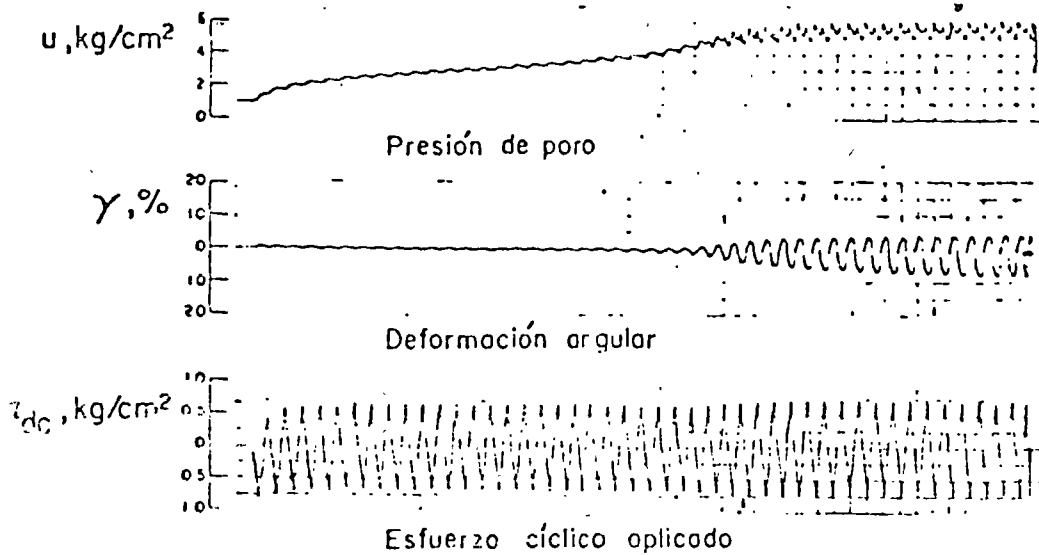


Fig 7 Prueba típica de corte simple en arena compacta (Peacock y Seed, 1968)

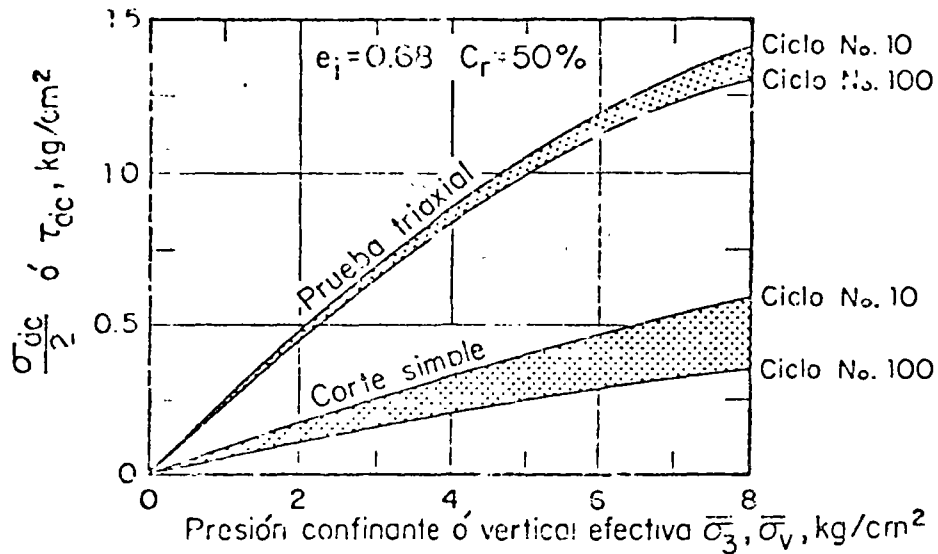


Fig 8 Comportamiento de arena suelta en corte simple y en prueba triaxial cíclica (Peacock y Seed, 1968)

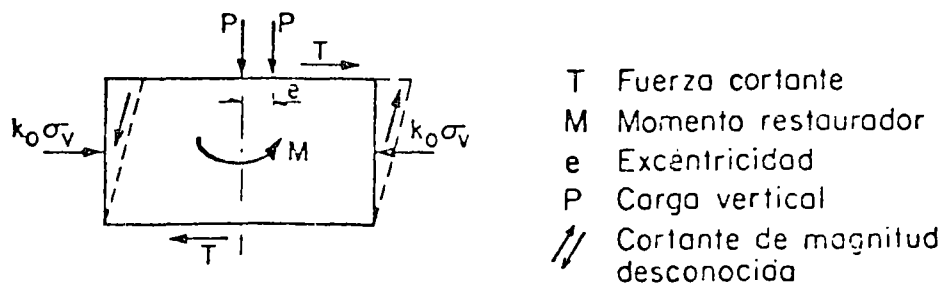


Fig 9 Equilibrio estático de fuerzas en un espécimen sometido a corte simple

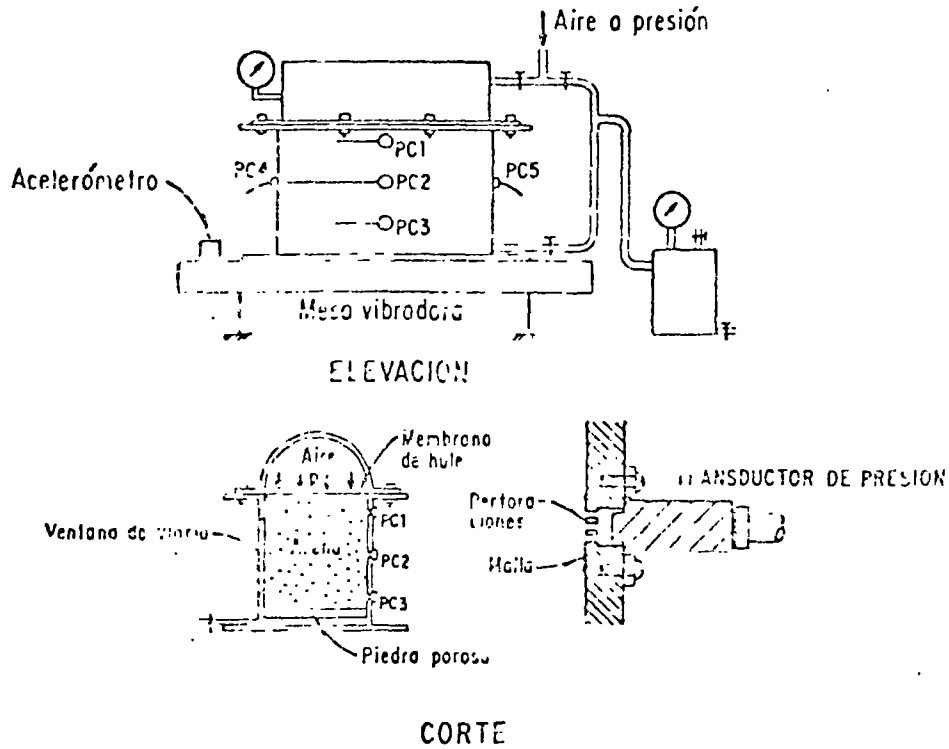


Fig 10 Recipiente para probar arenas en mesa
dora (Yoshimi, 1967)

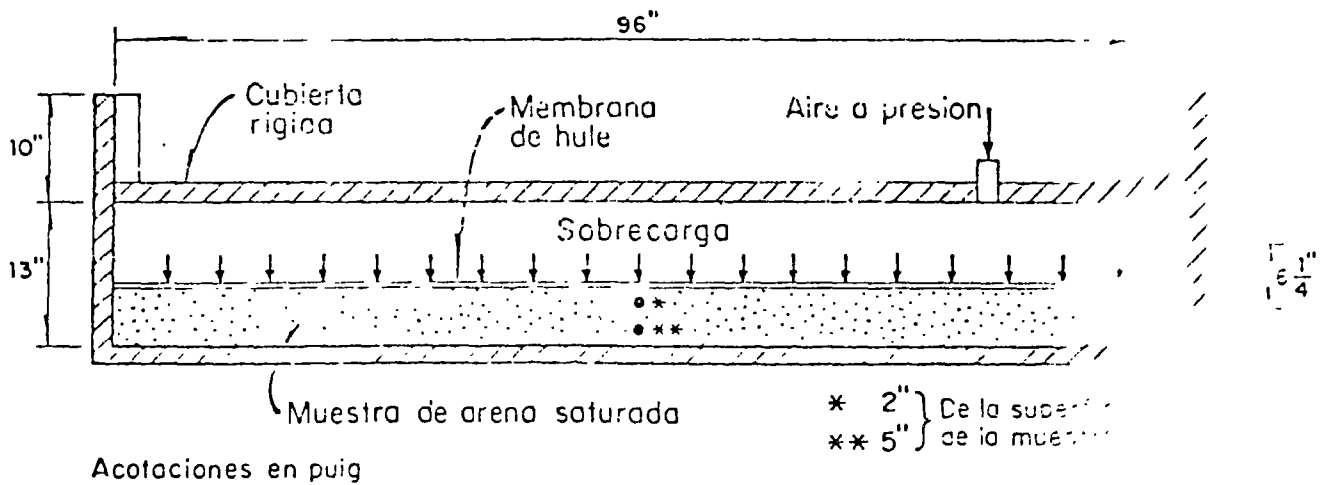
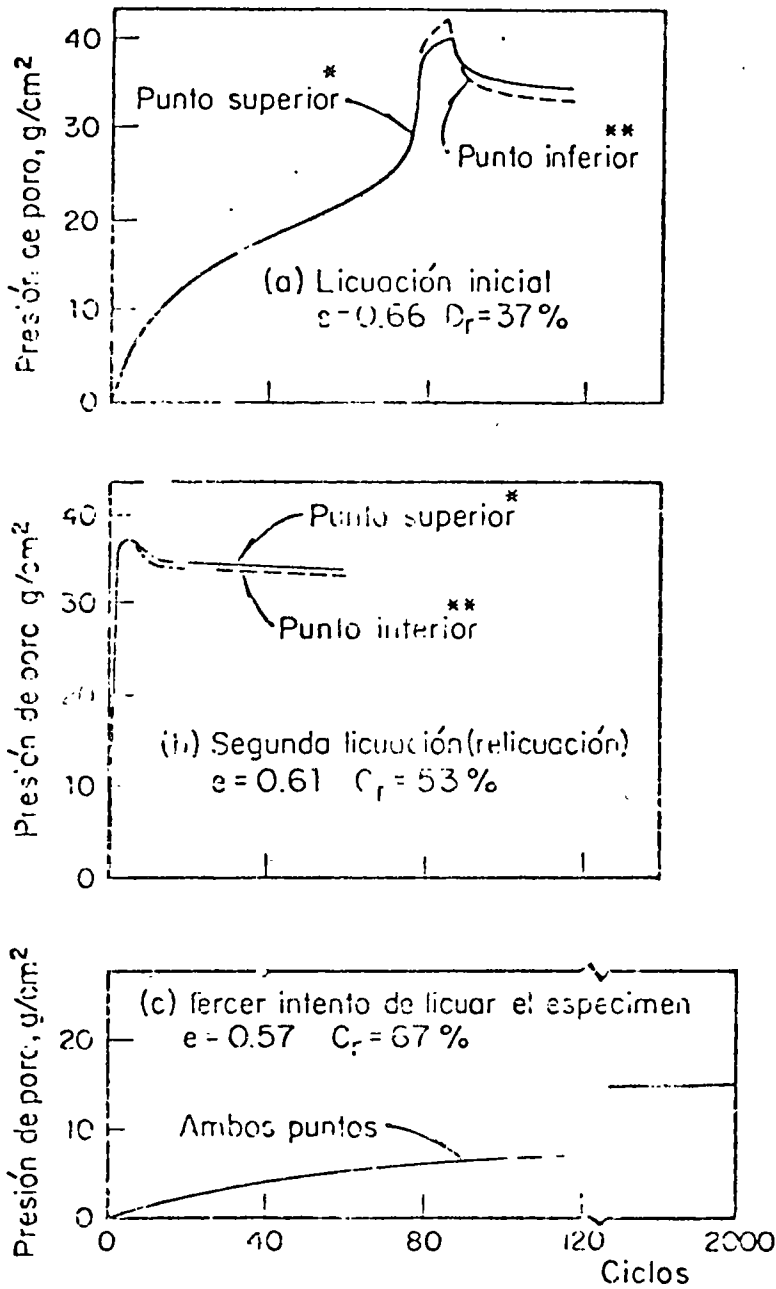
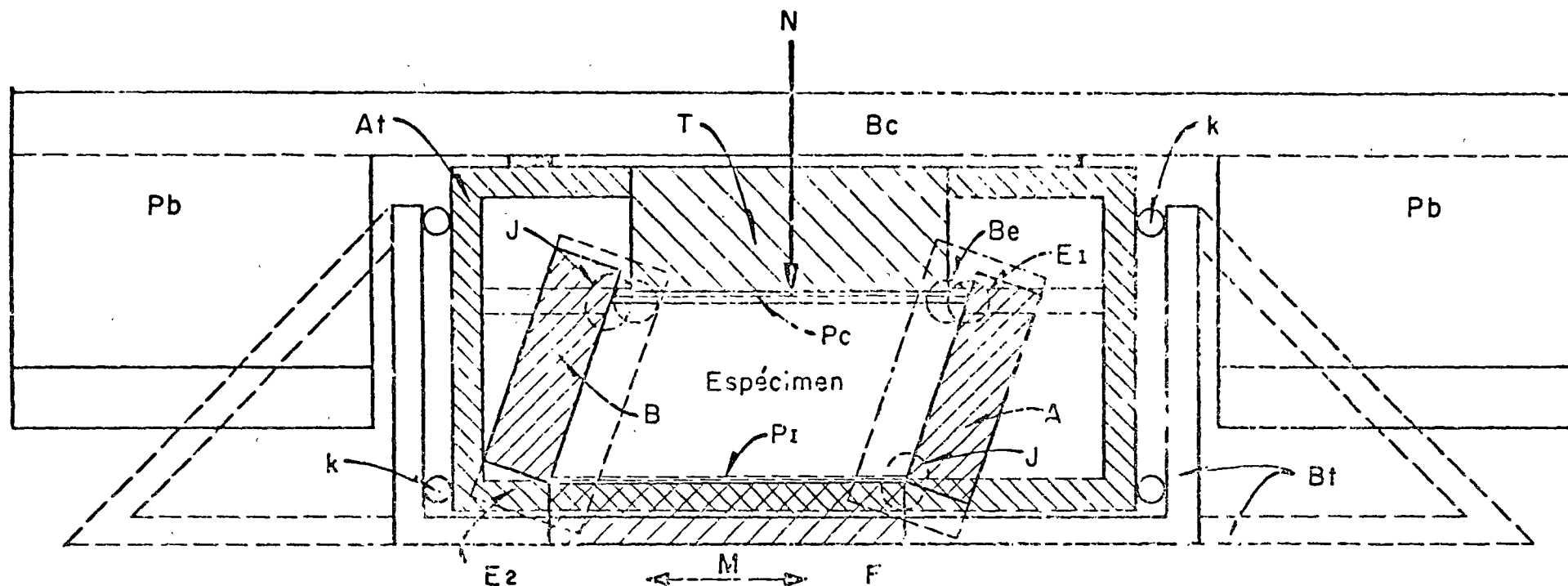


Fig 11 Corte del modelo de arena de 18" de ancho
recipiente (Finn et al, 1970)



Presión total en el punto inferior (36+13) = 49 g/cm²**
 Presión total en el punto superior* (36+5) = 41 g/cm²
 Aceleración senoidal, amplitud = 0.25 g, Frecuencia 2 Hz

Fig 12 Presión de poro vs número de ciclos
 (Finn et al, 1970)



A, B Paredes inclinables

At Armazón de la tapa

Bc Bastidor de carga

Be Movimiento vertical de cojinetes de la tapa

Bt Bastidor para la tapa

E1, E2 Ejes de las paredes inclinables

F Fondo del recipiente

J Movimiento vertical de cojinetes de las paredes inclinables

k Cojinetes-guía

M Movimiento alternado de la mesa vibradora

N Carga normal sobre la tapa

Pb Masas de plomo

Pc Placa de carga

T Tapa del recipiente

Fig 13 Corte transversal del aparato mostrado en el límite de su carrera
(Díaz, Weckmann e Iturbe, 1973)

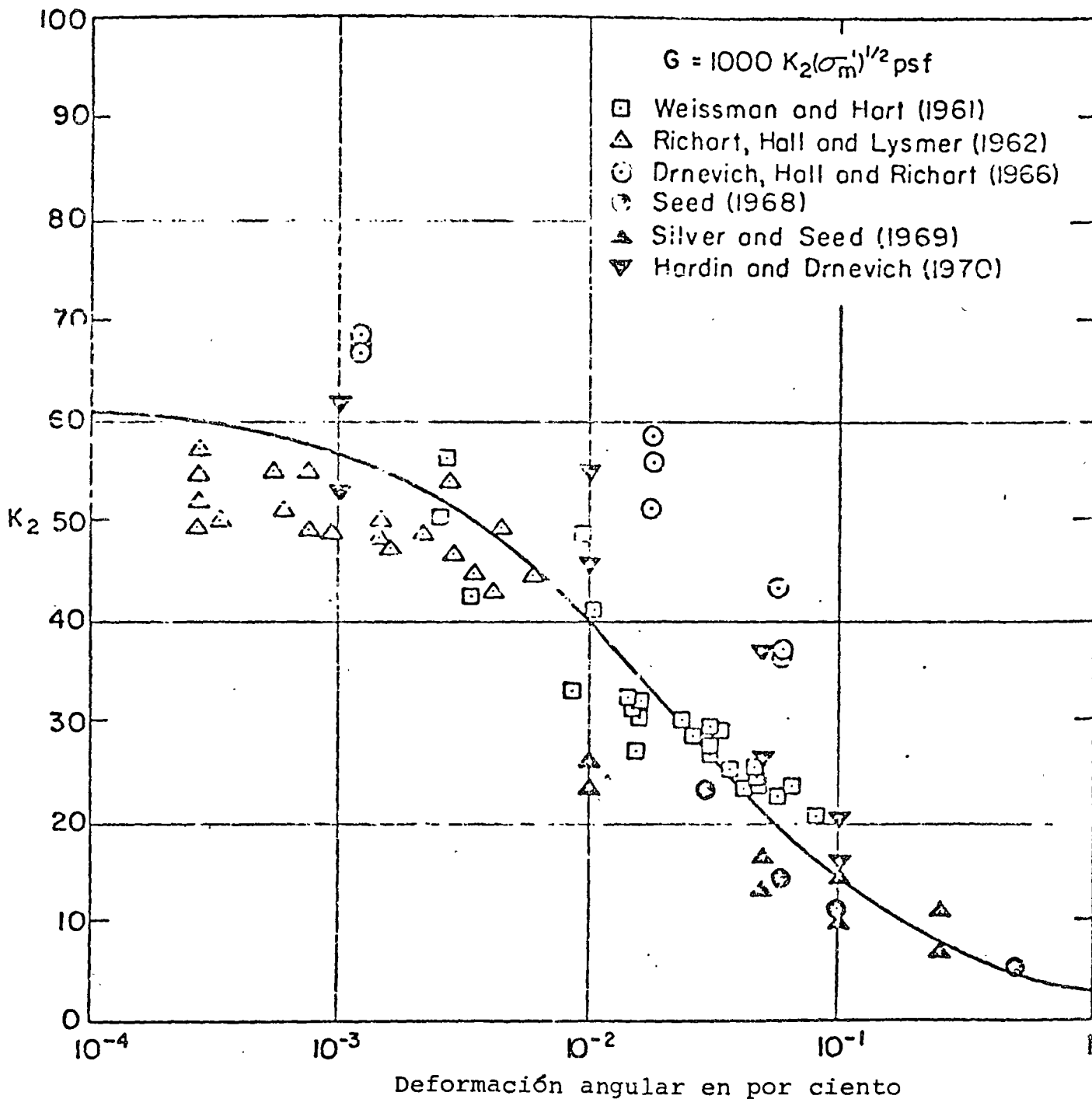


Fig 14 MODULO DE RIGIDEZ AL CORTANTE PARA ARENAS,
 $C_r = 75\%$ (Seed e Idriss, 1970)

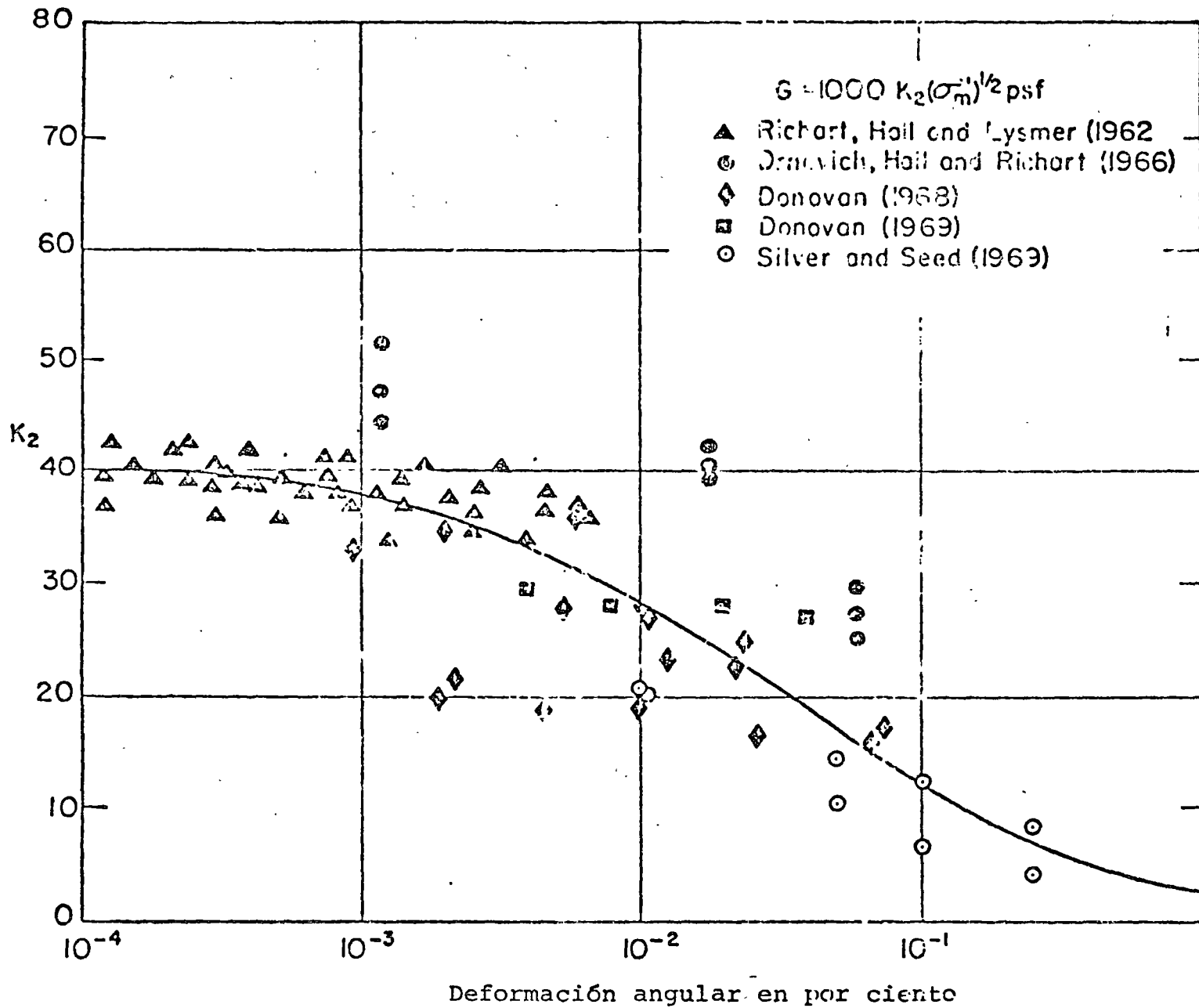


Fig 15 MODULO DE RIGIDEZ AL CORTANTE PARA ARENAS,
 $C_r = 40\%$ (Seed e Idriss, 1970)

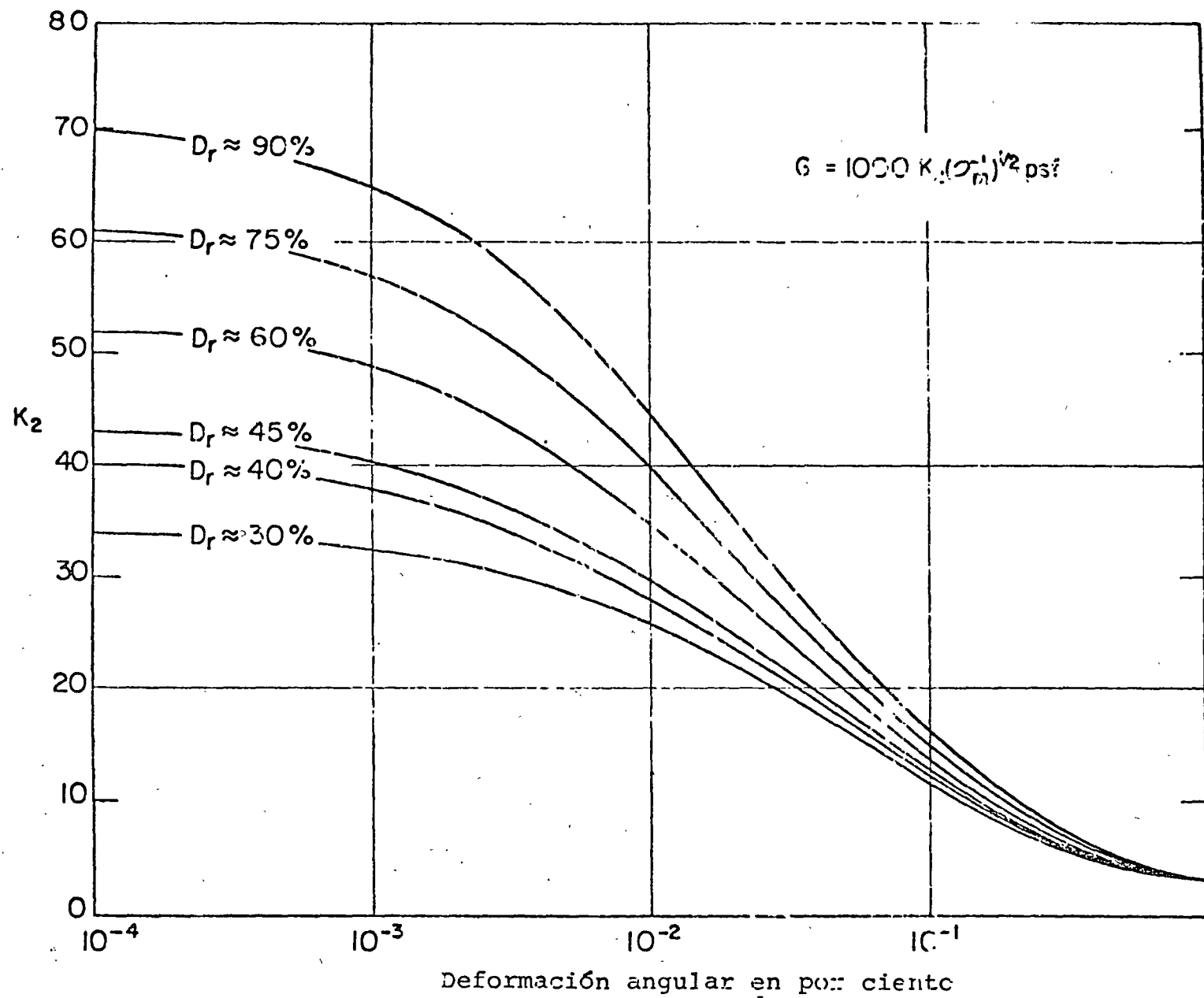


Fig 16 MODULO DE RESIDEZ AL CORTANTE PARA ARENAS.
(Seed e Idriss, 1970)

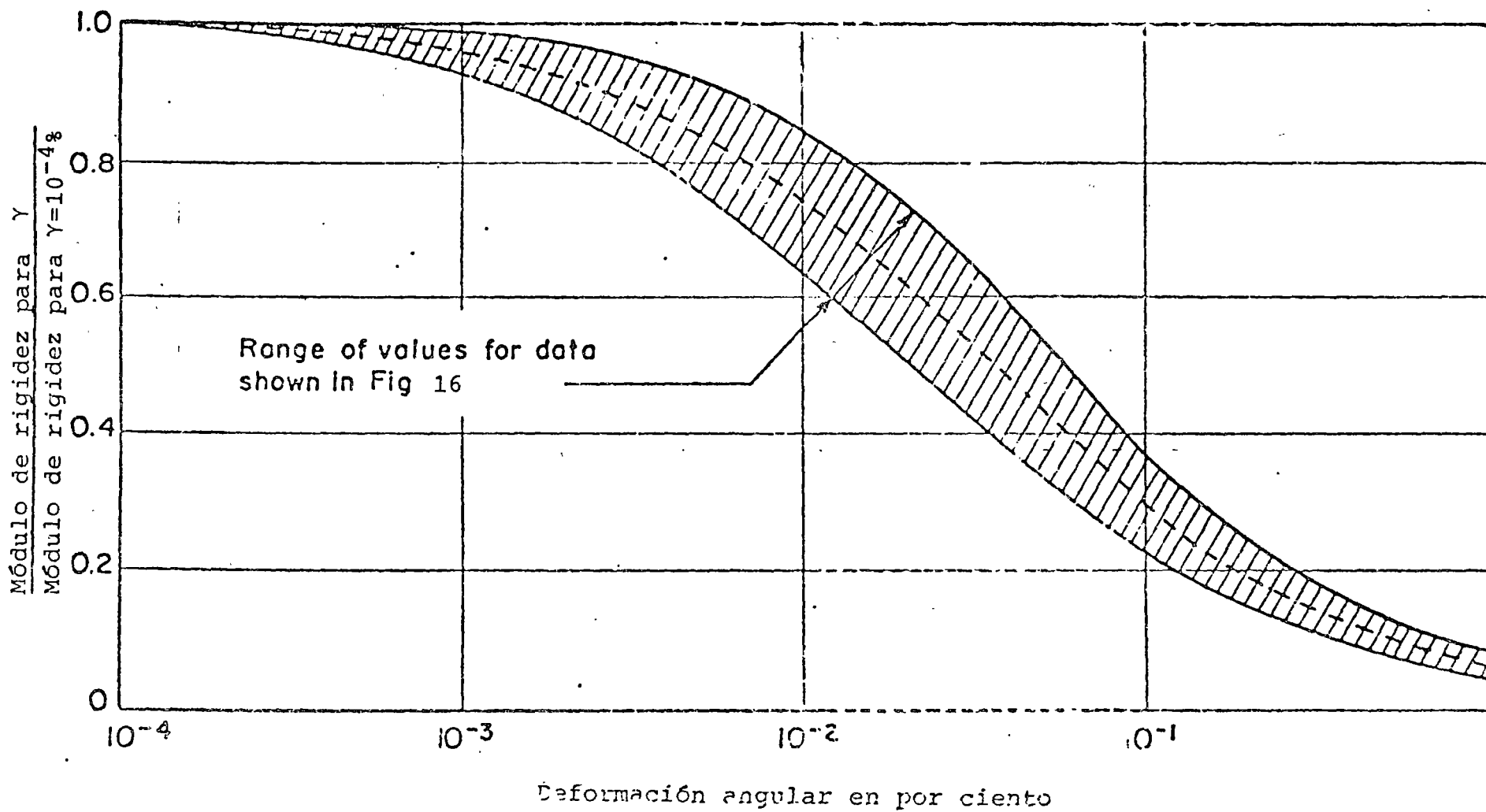


Fig 17 MÓDULO DE RIGIDEZ AL CORTANTE NORMALIZADO PARA ARENAS
(Seed e Idriss, 1970)

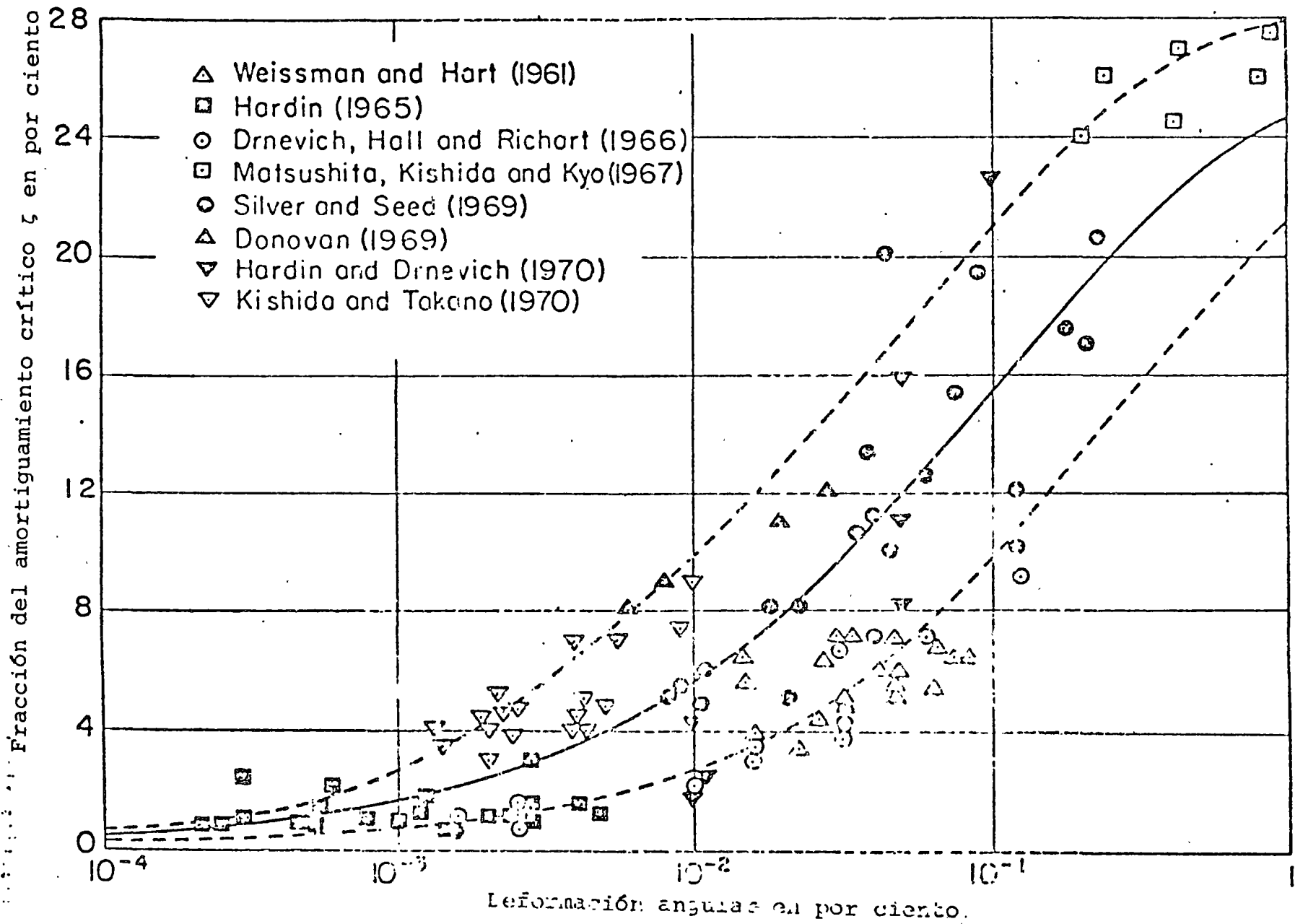


Fig 18 AMORTIGUAMIENTO PARA ARENAS
(Gee e Idriss, 1970)

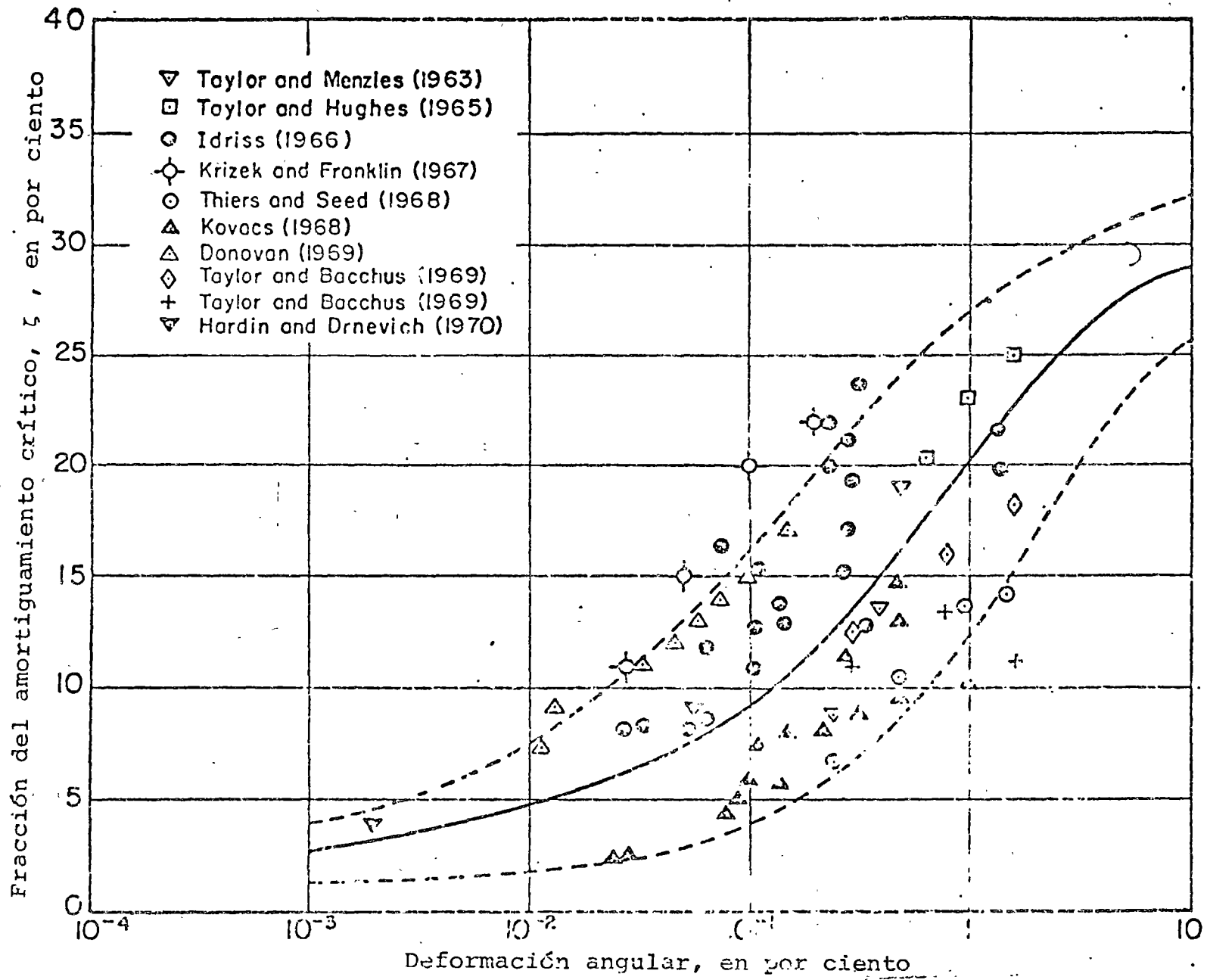
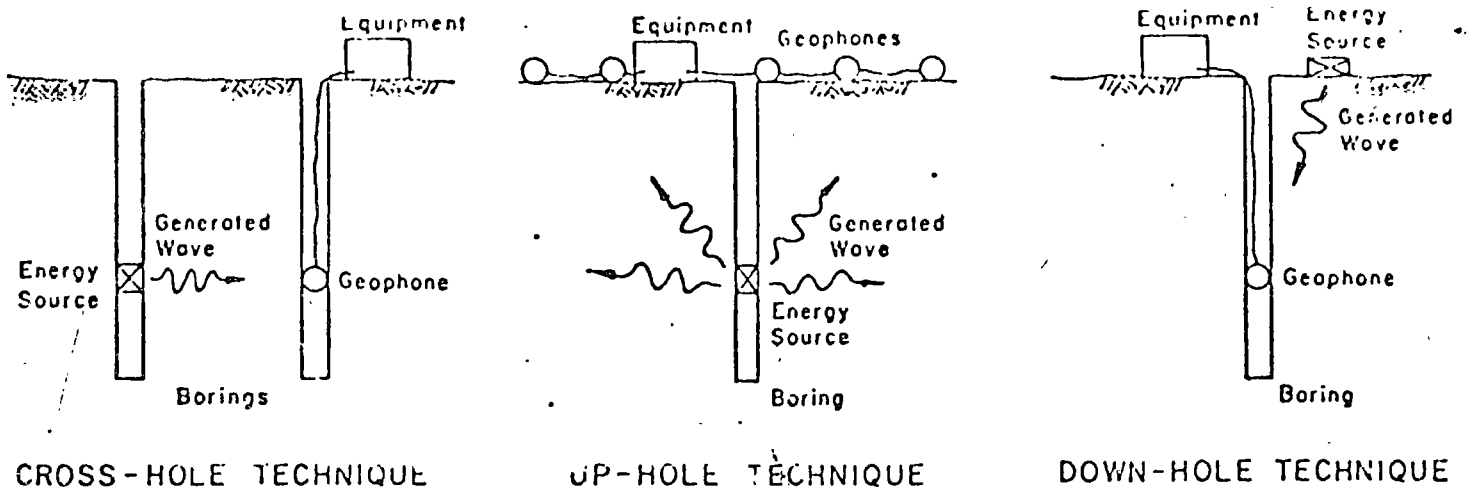
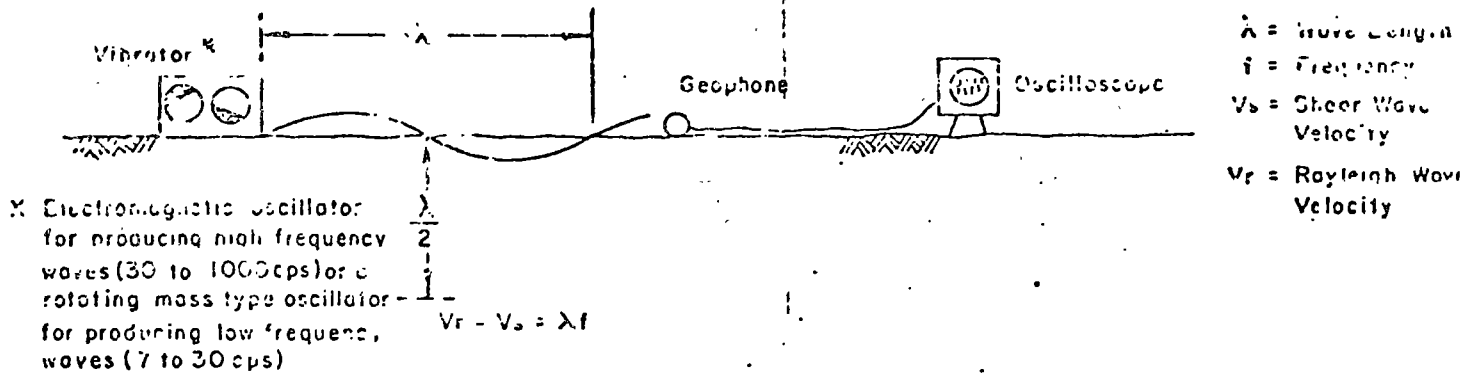


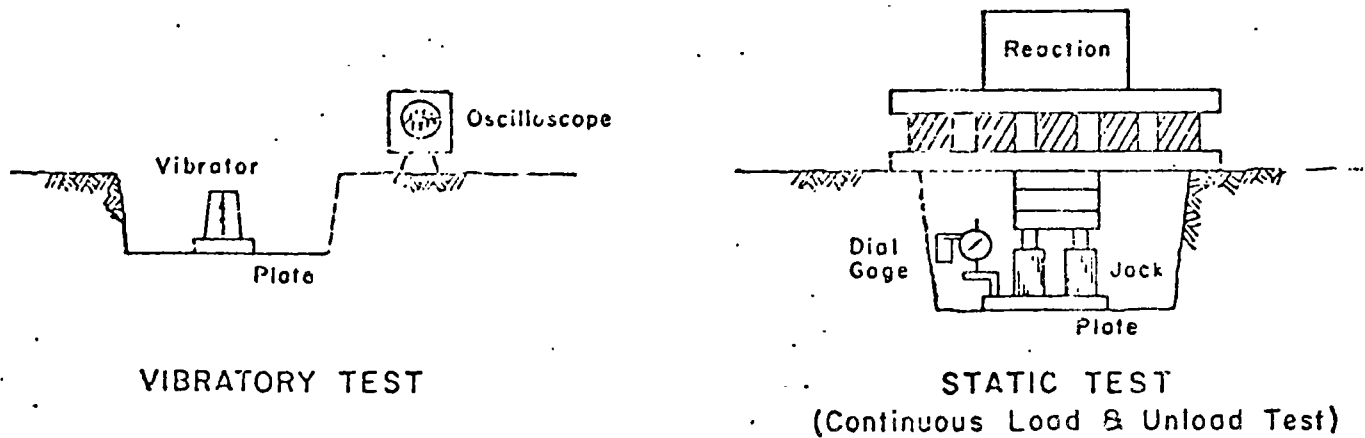
Fig 19 AMORTIGUAMIENTO PARA ARCILLAS SATURADAS.



a. Pruebas Geofísicas

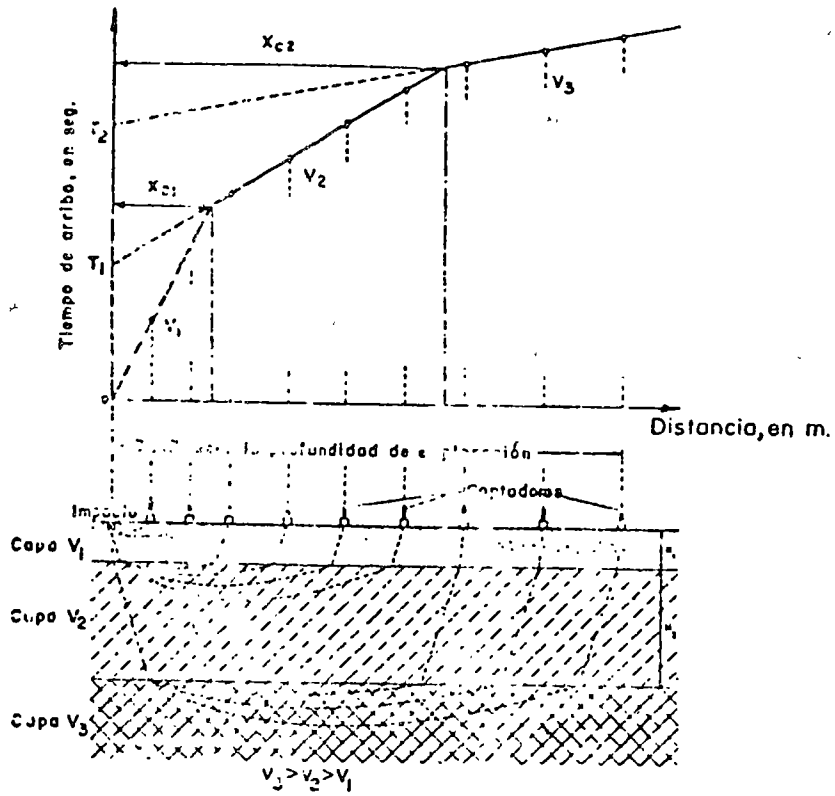


b. Pruebas de Vibración

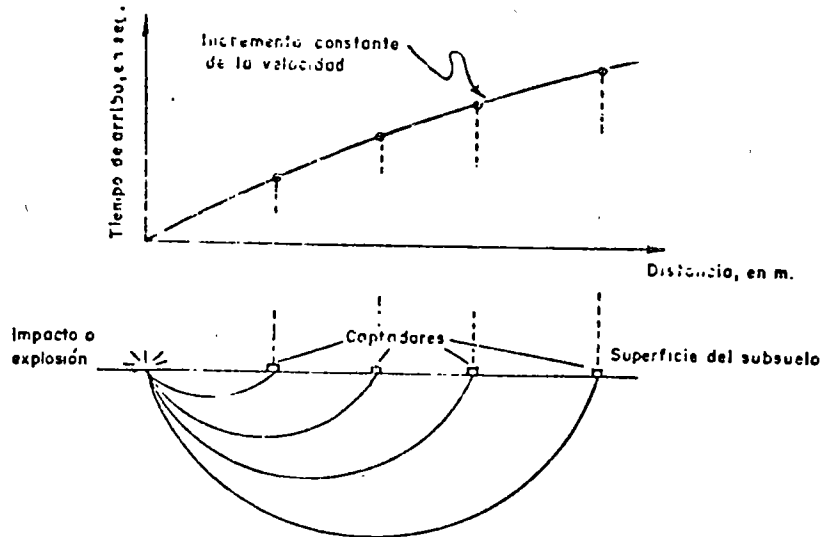


c. Pruebas de Placa

Fig 20 PRUEBAS DE CAMPO PARA DETERMINAR EN MODULO DE RIGIDEZ AL CORTANTE, G. (SW-AJA, 1972a)



a) Material estratificado



b) Material homogéneo

Fig. 21 Gráficas distancia-tiempo de llegada en proyección horizontal



centro de educación continua
división de estudios superiores
facultad de ingeniería, unam



IV CURSO INTERNACIONAL DE INGENIERIA SISMICA

DISEÑO SISMICO DE ESTRUCTURAS ESPECIALES

RESPUESTA SISMICA DE CIMENTACIONES
MONOLITICAS

DR. LEONARDO ZEEVAERT

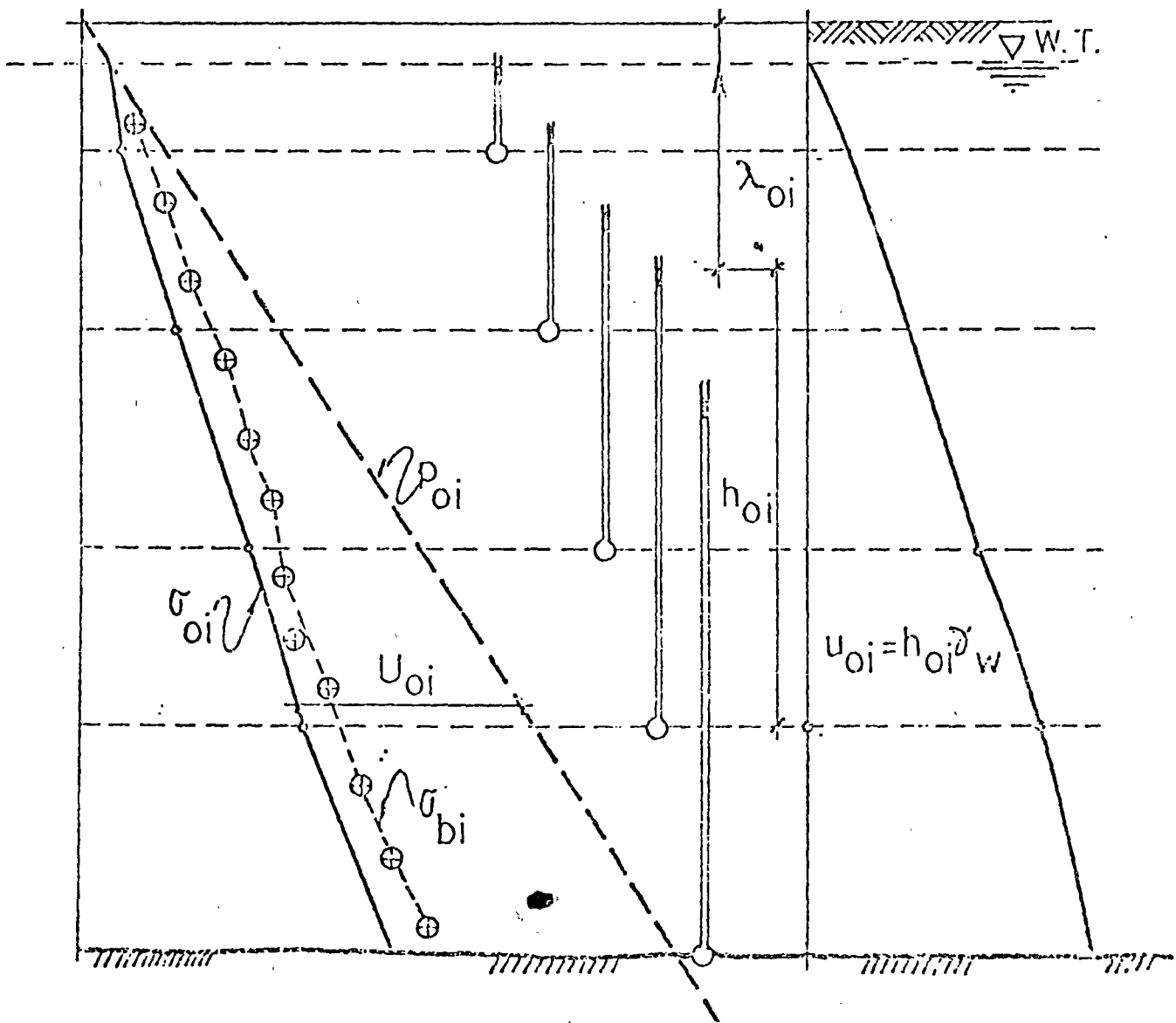
AGOSTO, 1978.

*RESPUESTA SISMICA DE
CIMENTACIONES MONOLITICAS*

*POR LEONARDO ZEEVAERT**

*IV Curso Internacional de Ingeniería Sísmica
Agosto 1978*

** Profesor División Estudios Superiores
Facultad de Ingeniería U.N.A.M.
Sección de Mecánica de Suelos*



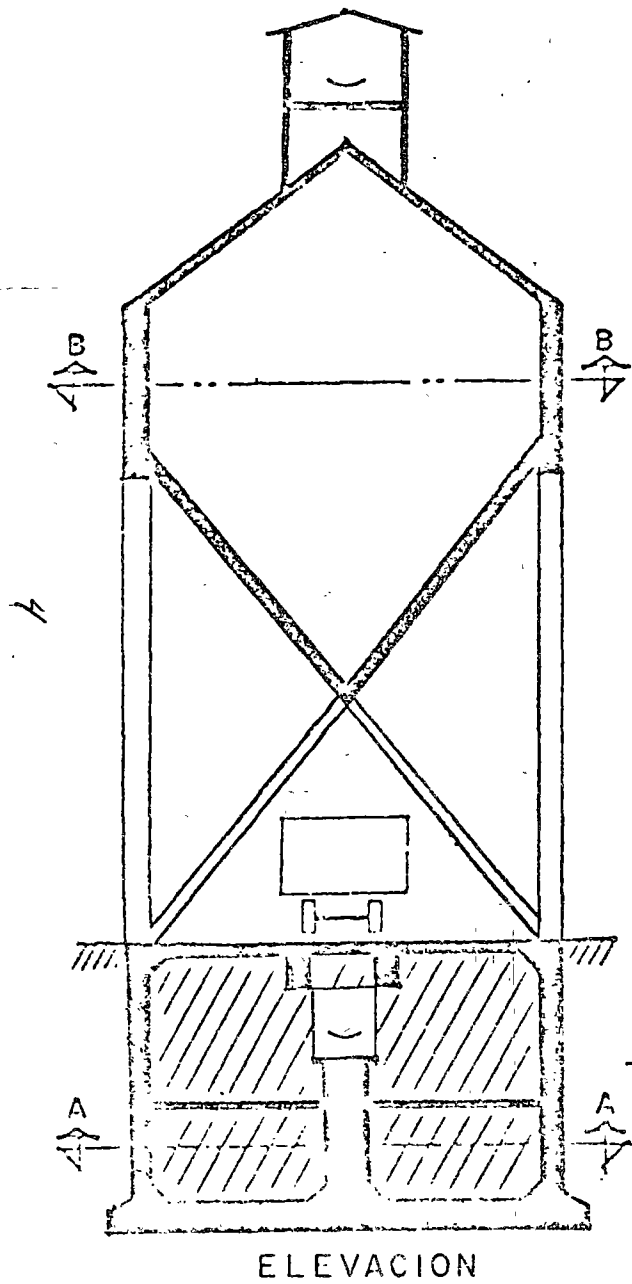
ESTRATIGRAFIA, CONDICIONES HIDRAULICAS,
 ESFUERZOS EFECTIVOS Y TOTALES, Y ES-
 FUERZOS CRITICOS

Prue ba	IV	III	II	I	ESTRATO
					Profundidad
					Clasificación
w					Contenido de agua
s_s					Gravedad específica
S%					Grado de saturación
γ_n					Peso unitario
q_u					Compresión simple
k					Coeficiente de permeabilidad
M_e					Módulo de respuesta elástica
K_{ep}					Coeficiente elasto-plástico
m_{ep}					Compresibilidad en prueba de consolidación y parámetros correspondientes
m_t					
c_v					Módulo dinámico de elasticidad al cortante
μ					Velocidad onda de cortante
v_s					
v_{oi}					Esfuerzo crítico
σ_b					

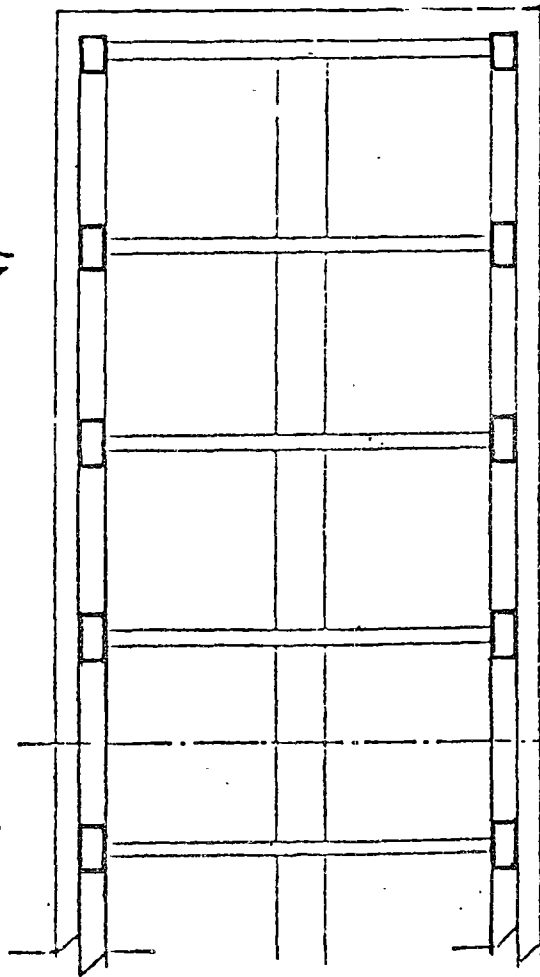
PROPIEDADES MECANICAS DE LOS SEDIMENTOS Y
PROPIEDADES INDICE

3

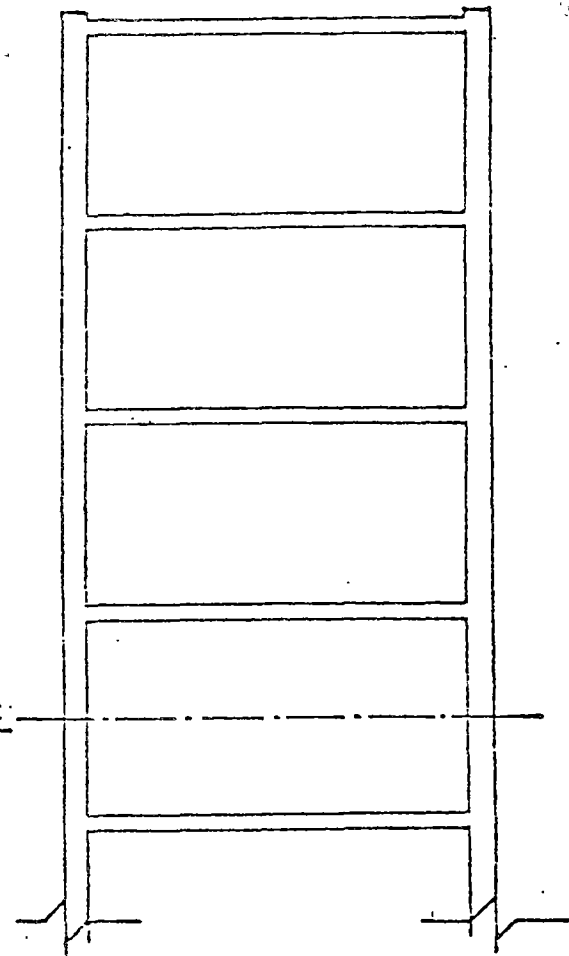
FIG.-2



ELEVACION



SECCION A-A



SECCION B-B

ESTRUCTURA RIGIDA Y CIMENTACION

FIG.-3

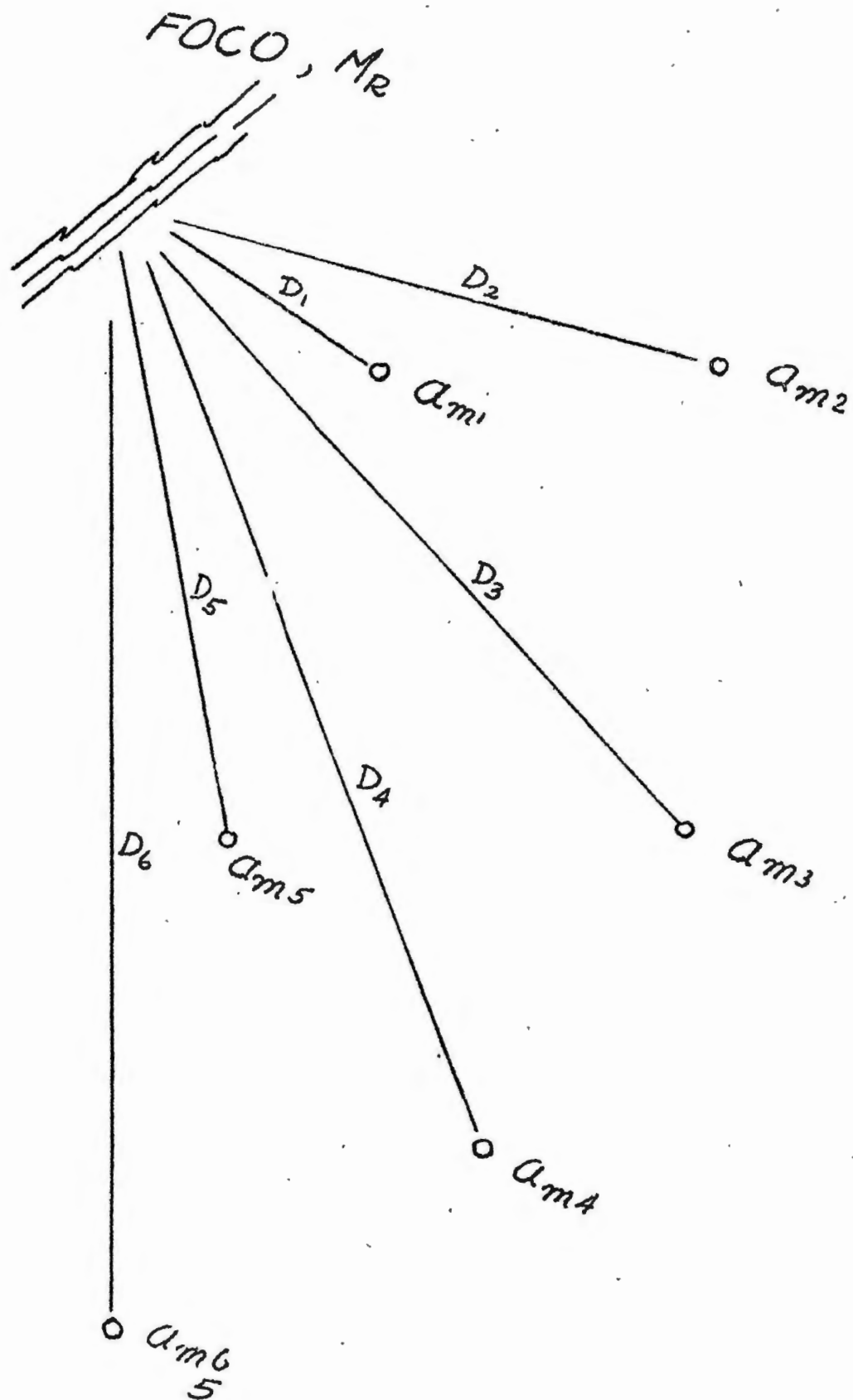


FIG.-4

LOGARITHMIC 46 7202
2 1/2 CYCLES
KEUFEL & ESSER CO.
SAN FRANCISCO, CALIF. U.S.A.

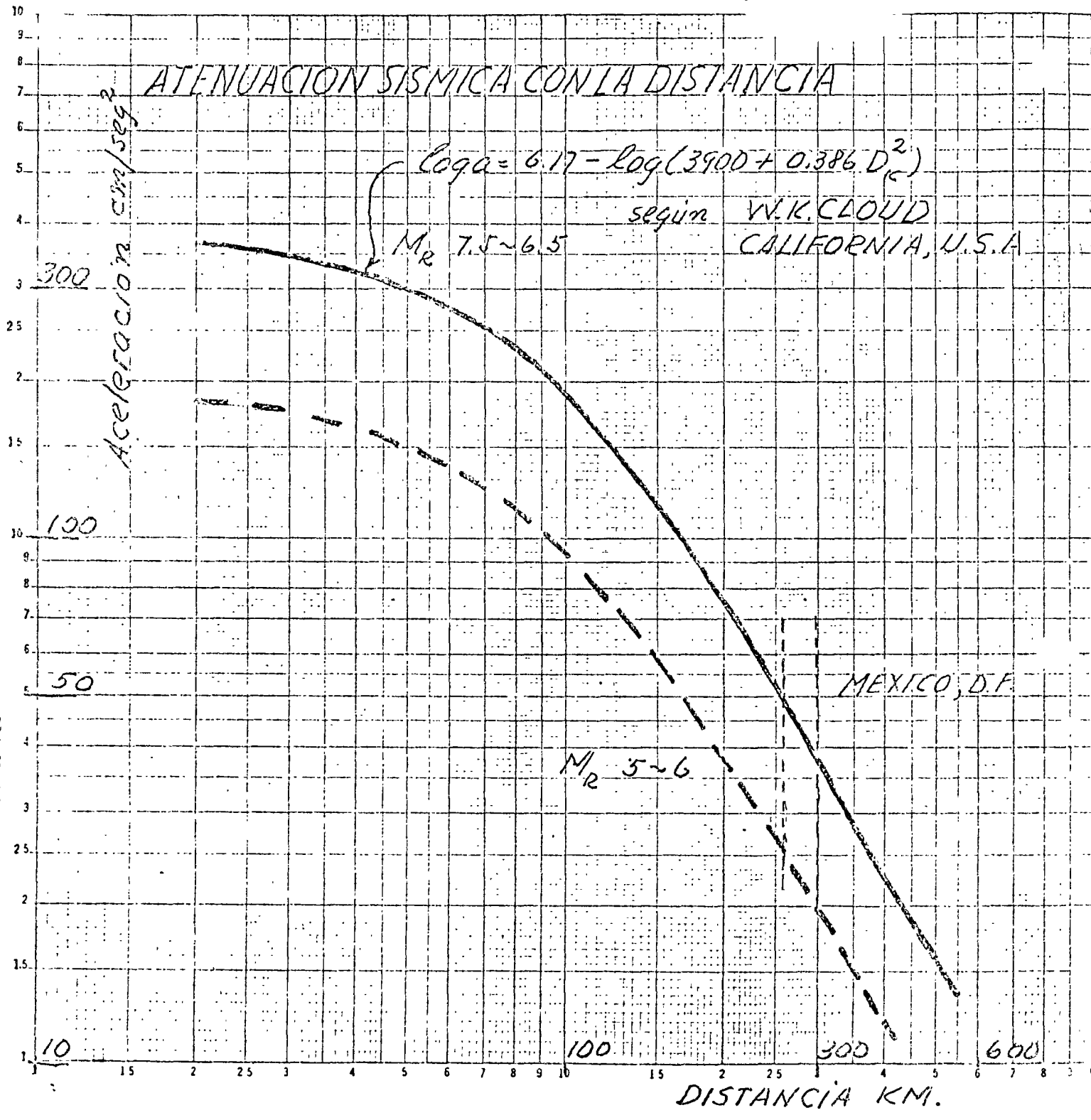
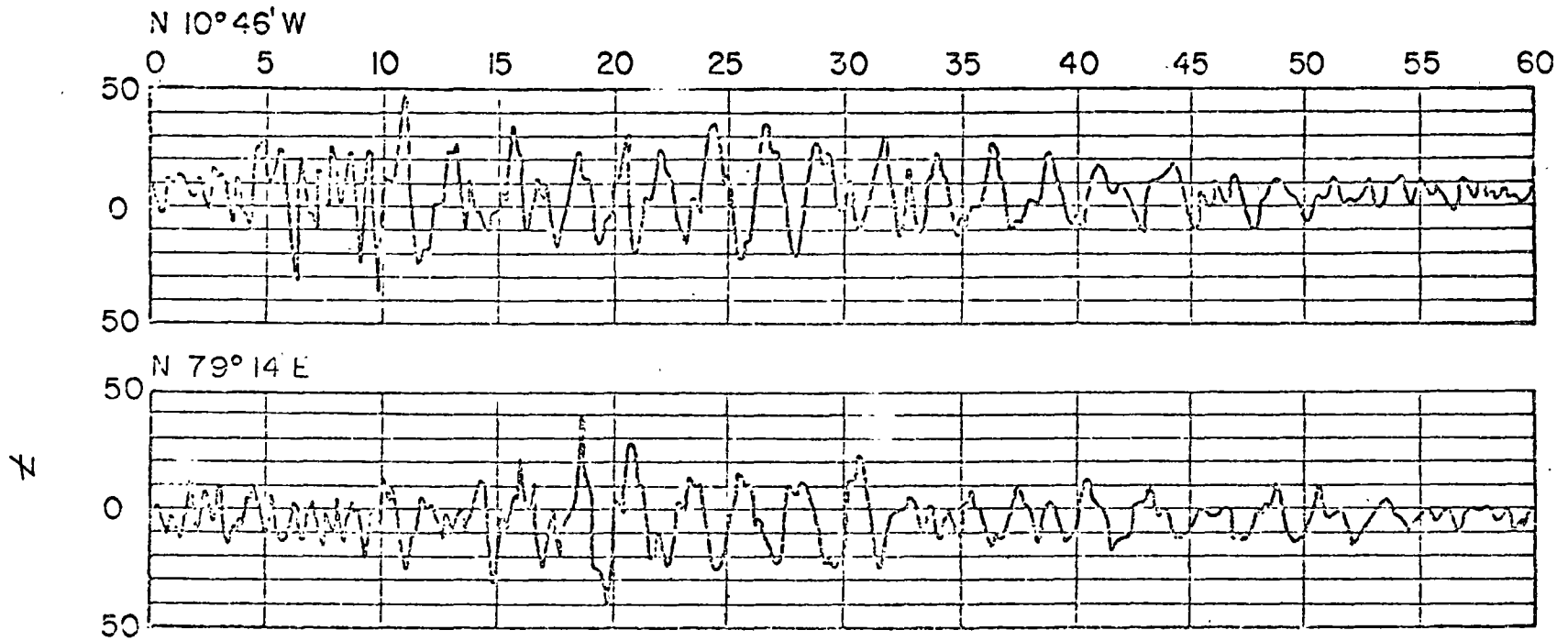
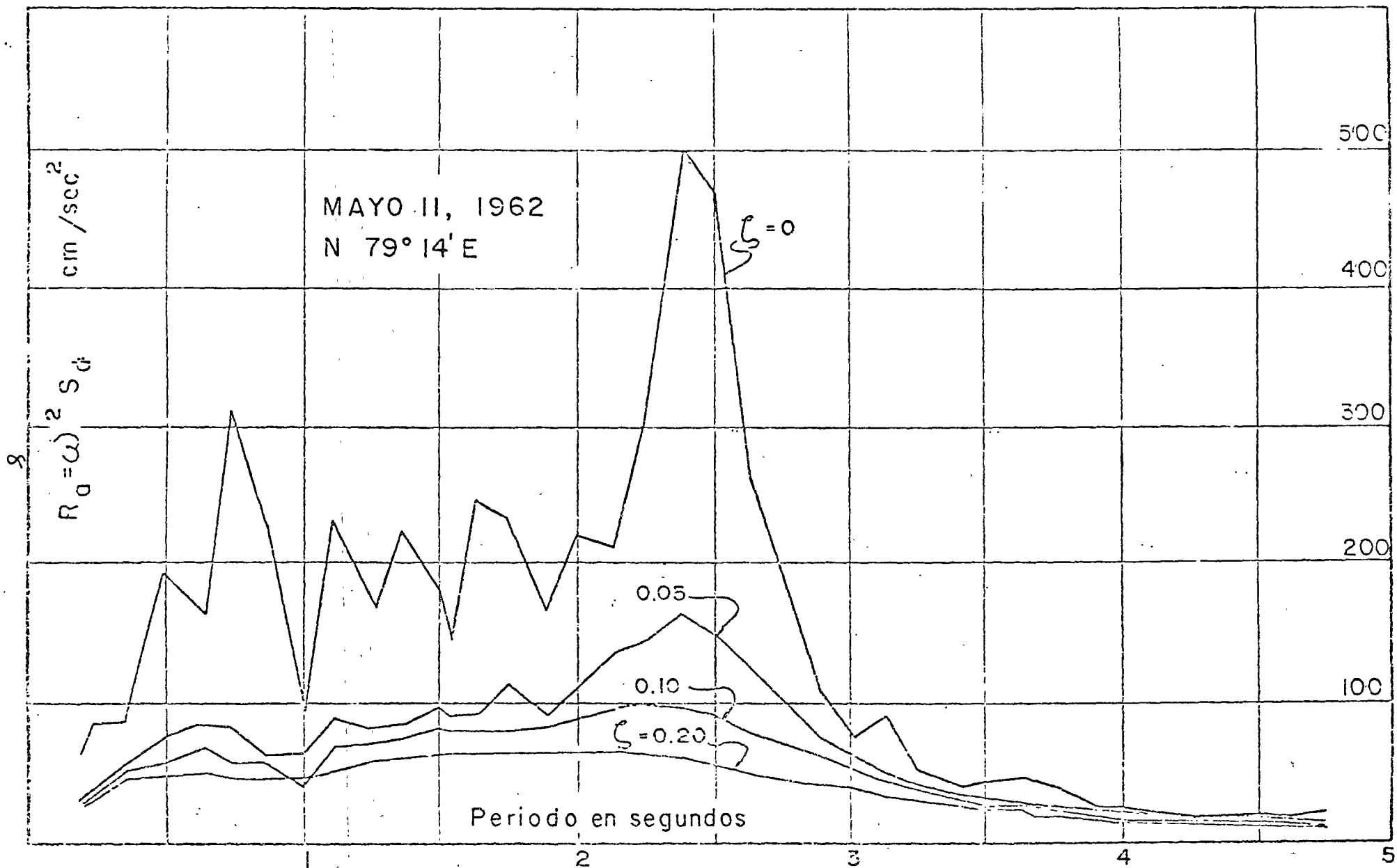


FIG-



ACELEROGRAMA MAYO II, 1962 CIUDAD DE MEXICO



ESPECTRO DE SEUDO-ACELERACION MAYO 11, 1962
CIUDAD DE MEXICO

ACELERACIONES MAXIMAS DE LA SUPERFICIE DEL SUELO:

MAYO. 11, 1962 : $a_m = 38 \text{ cm/sec}^2$

MAYO. 19, 1962 : $a_m = 32 \text{ cm/sec}^2$

JULIO. 28, 1957 (Estimado) $a_m = 50 \text{ cm/sec}^2$

5
4
3
2
1

$\frac{R a}{a_{max}}$

$\rho = 5\%$

10%

20%

Periodo en segundos

ESPECTRO ENVOLVENTE DE RESPUESTA DE ACELERACION RELATIVA
CIUDAD DE MEXICO

FIG.-8

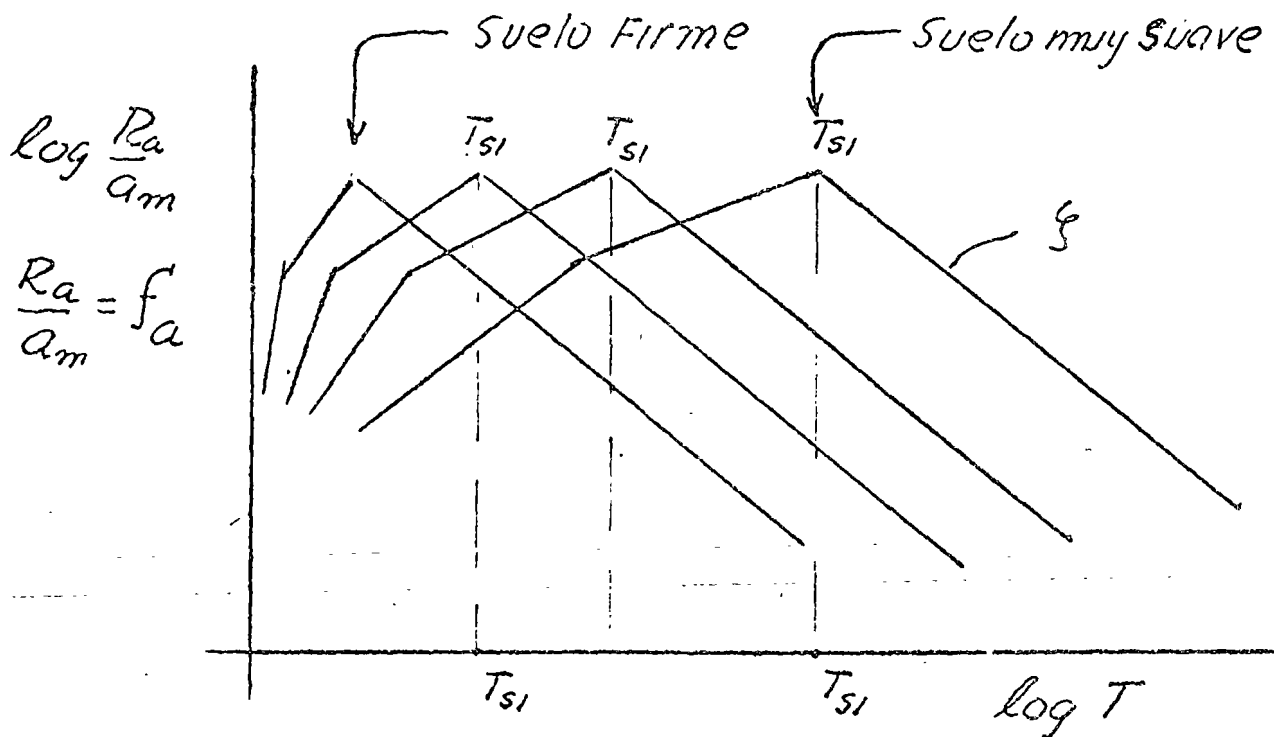
$$R_v = \int_0^t a(\tau) e^{-\xi \omega(t-\tau)} \sin \omega_a(t-\tau) d\tau \Big|_{\max} \quad (1)$$

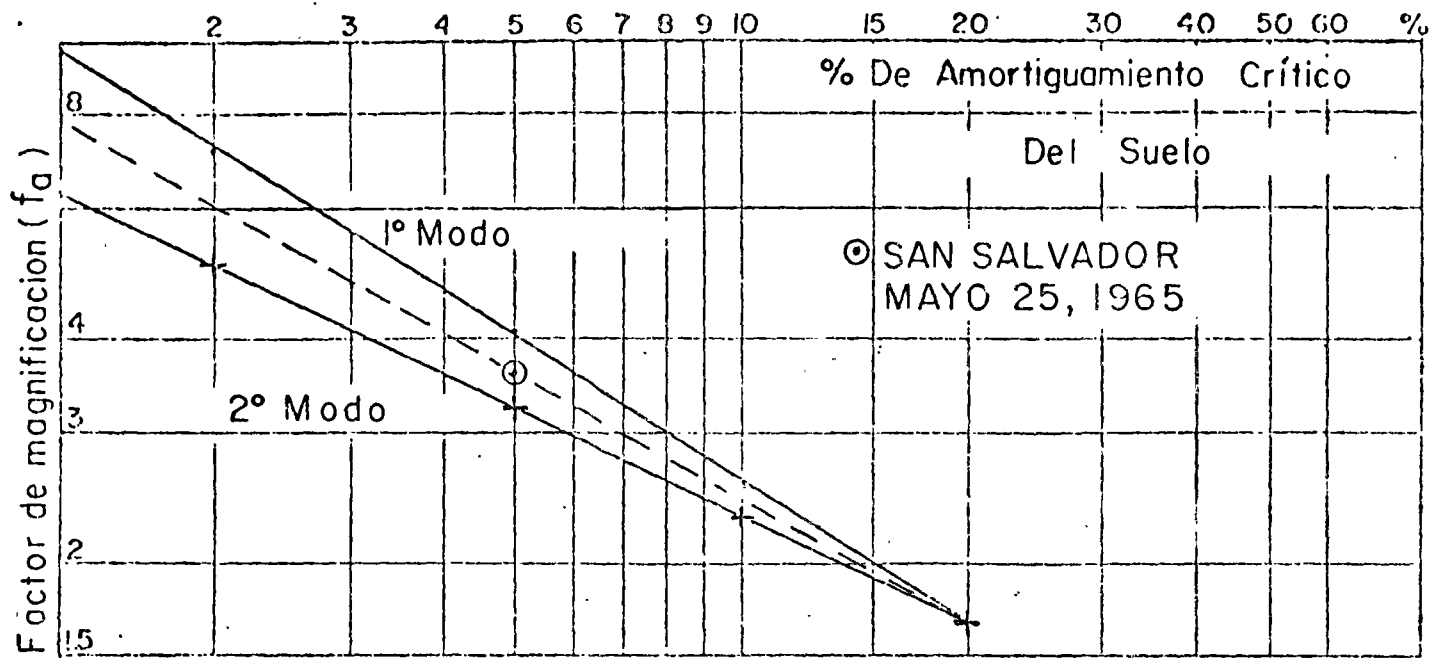
$$R_a = R_v \cdot \omega \quad (2)$$

$$R_a = \frac{2\pi}{T} \cdot R_v \quad (3)$$

$$V_m = M \cdot R_a \quad (4)$$

$$V_m = M \left(\frac{R_a}{a_m} \right) a_m \quad (5)$$





FACTORES DE MAGNIFICACION OBSERVADOS PARA EL SUBSUELO DE LA CIUDAD DE MEXICO

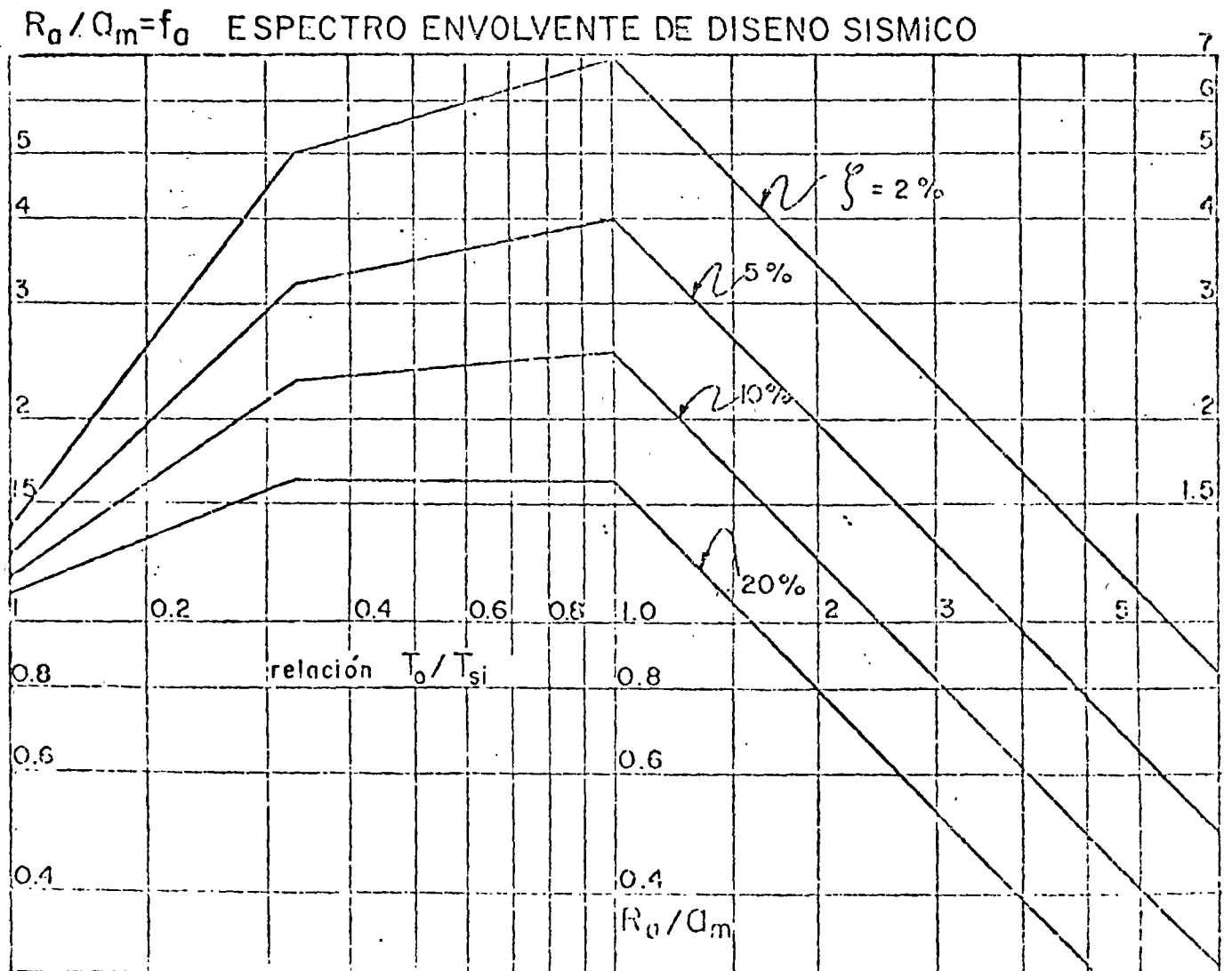


FIG-10

$$\sigma_{oi} = p_{oi} - U_{oi} \quad (6)$$

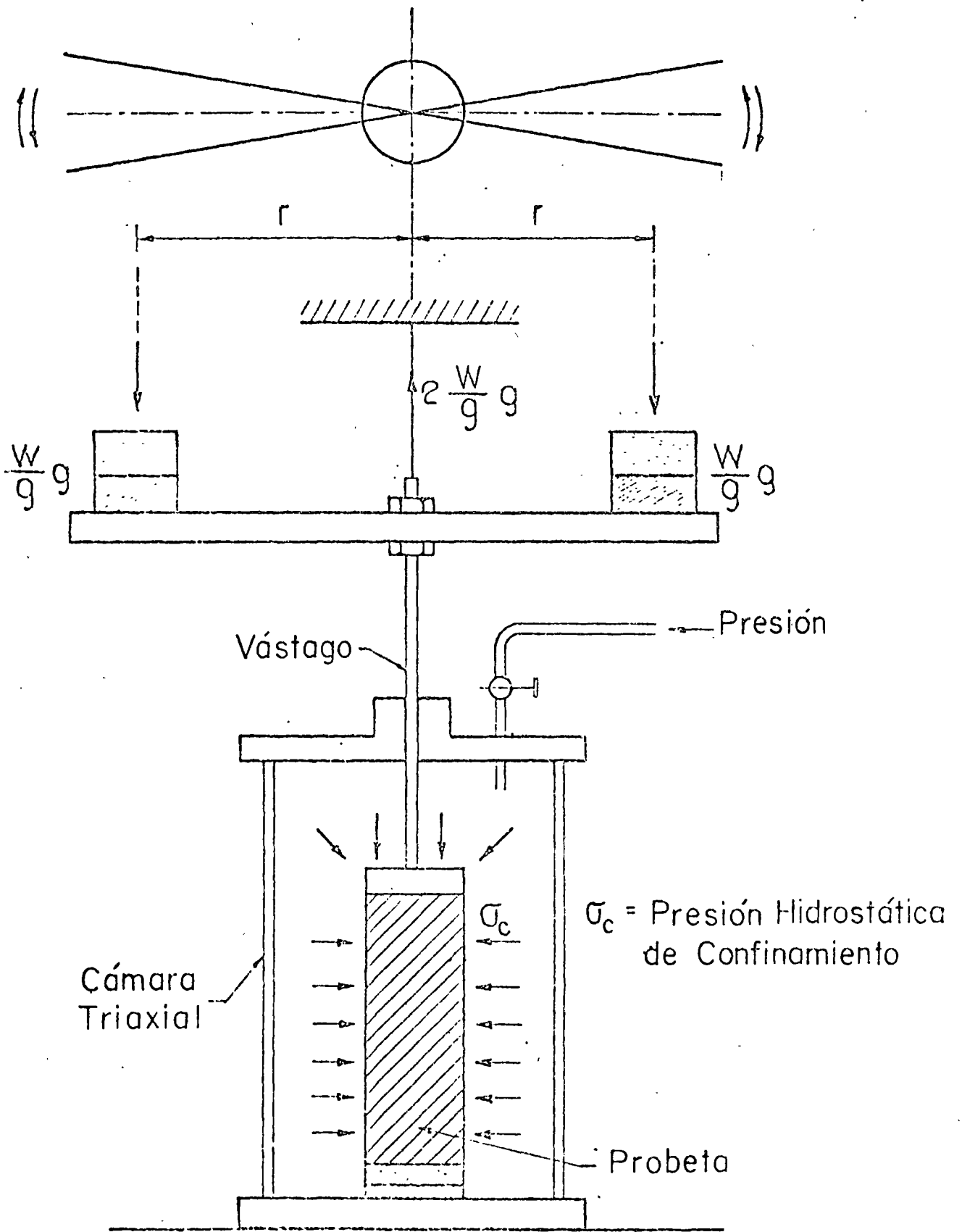
$$\sigma_c = \frac{1}{3} (1 + 2K_o) (\sigma_{oi})_v \quad (7)$$

$$K_o = \frac{(\sigma_{oi})_v}{(\sigma_{oi})_h} \quad (8)$$

ARCILLAS $\mu = \mu_o e^{n_s \sigma_c} \quad (9)$

ARENAS $\mu = C_s \sigma_c^{n_s} \quad (10)$

FIG.- II



PRUEBA DEL PENDULO DE TORSION LIBRE PARA UN CONFINAMIENTO DETERMINADO

$$v_s = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \quad (11)$$

$$T_s = 4 \sum_1^n \frac{d_i}{v_{si}} \quad (12)$$

$$E = 2(1+\nu)\mu \quad (13)$$

$$v_c = \sqrt{\frac{(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \cdot \frac{E}{\rho}} \quad (14)$$

$$\nu_c^{-1} = \frac{(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad (15)$$

$$v_c = \sqrt{\frac{E}{\nu_c \cdot \rho}} \quad (16)$$

$$T_c = 4 \sum_1^n \frac{d_i}{v_{ci}} \quad (17)$$

$$v_c / v_s > 1 \sim 2.7$$

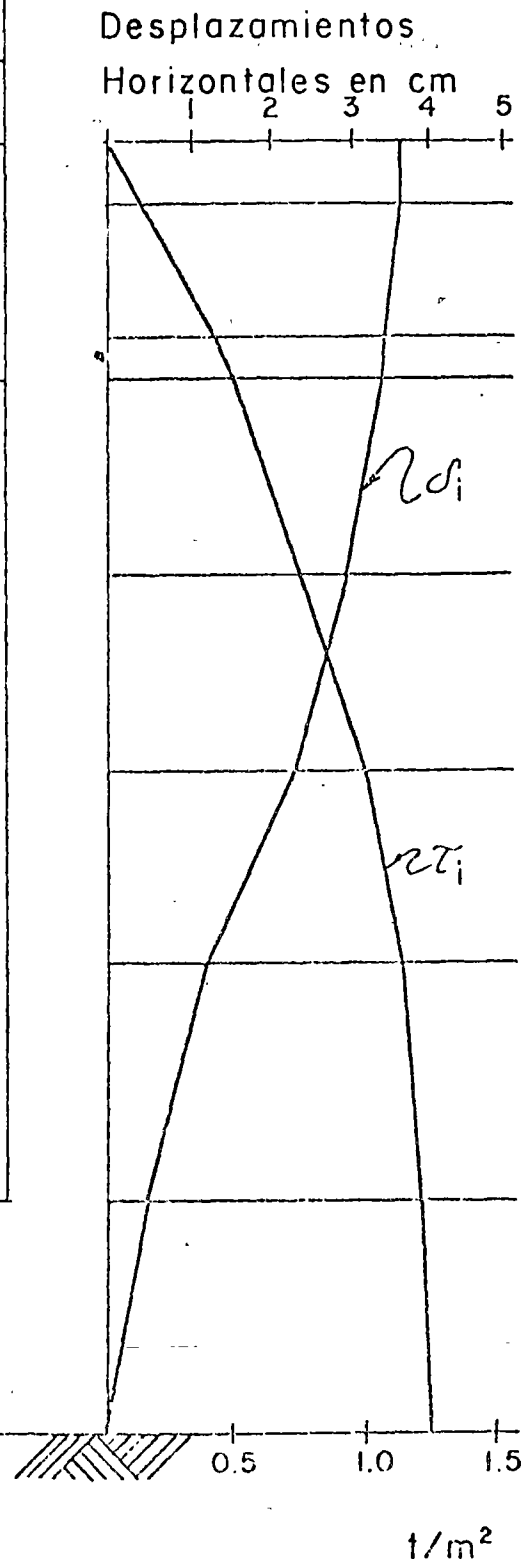
FIG.-14

PERFIL DE MODULO DINAMICO DE ELASTICIDAD AL CORTANTE

ESTRATO	Z	d	W	S _s	γ	μ VALORES Kg/cm ²		
						50	100	150
A		1.5	—	—	1.70			
B		3.5	60	2.58	1.62			
C	5	1.0	80	2.63	1.53			
D		5.0	320	2.52	1.17			
E	10	5.0	270	2.38	1.19			
F		5.0	250	2.38	1.20			
G	20	6.0	230	2.45	1.22			
H		6.0	230	2.54	1.23			
	35	Suelo Firme						

Z Profundidad en (m)
 d Espesor en m.
 W Contenido de agua
 S_s Gravedad específica
 γ Peso unitario

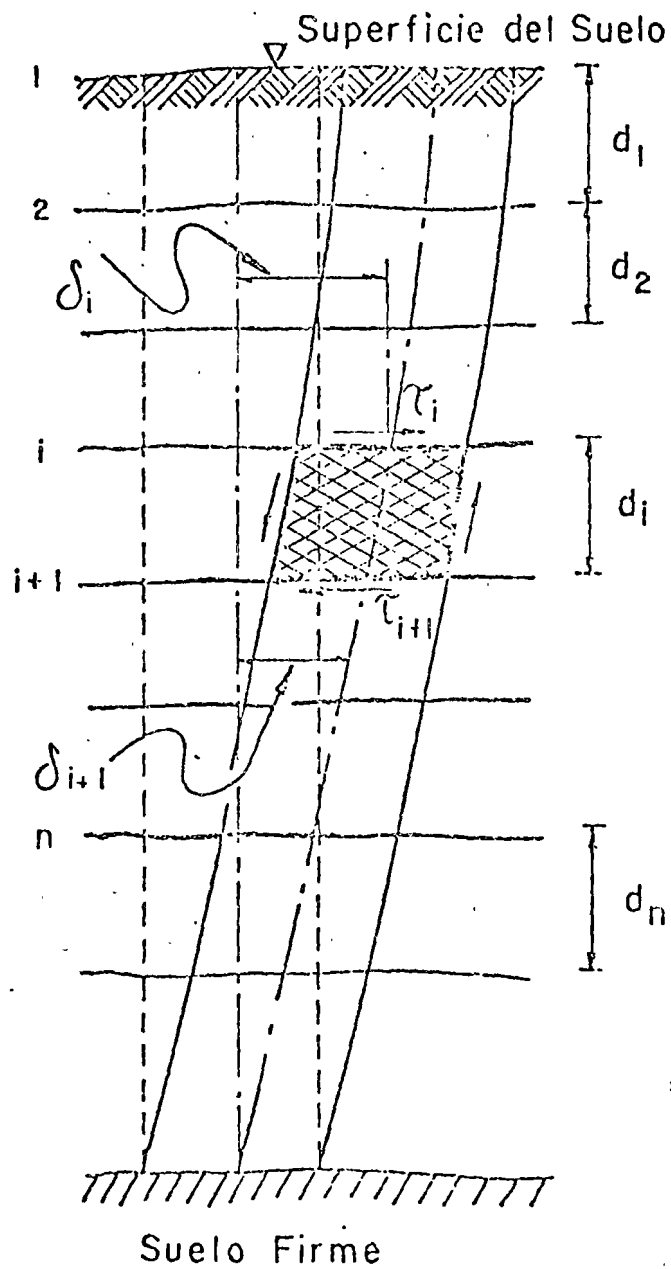
ESTRATO		t/m ³	$\frac{t \text{ seg}}{m^4}$	t/m ²	m/seg	seg	seg
N°	d	γ	ρ	μ	v_s	$\Sigma \Delta t$	$\Sigma \Delta t$
A	1.5	1.70	0.170	450	51.4	0.117	
B	3.5	1.62	0.165	640	62.3	0.342	
C	1.0	1.53	0.156	1500	98.1	0.383	
D	5.0	1.17	0.119	820	83.0	0.624	1.12
E	5.0	1.19	0.121	600	70.4	0.908	
F	5.0	1.20	0.122	460	61.4	1.23	
G	6.0	1.22	0.124	1050	92.0	1.49	
H	6.0	1.23	0.125	1620	113.8	1.70	



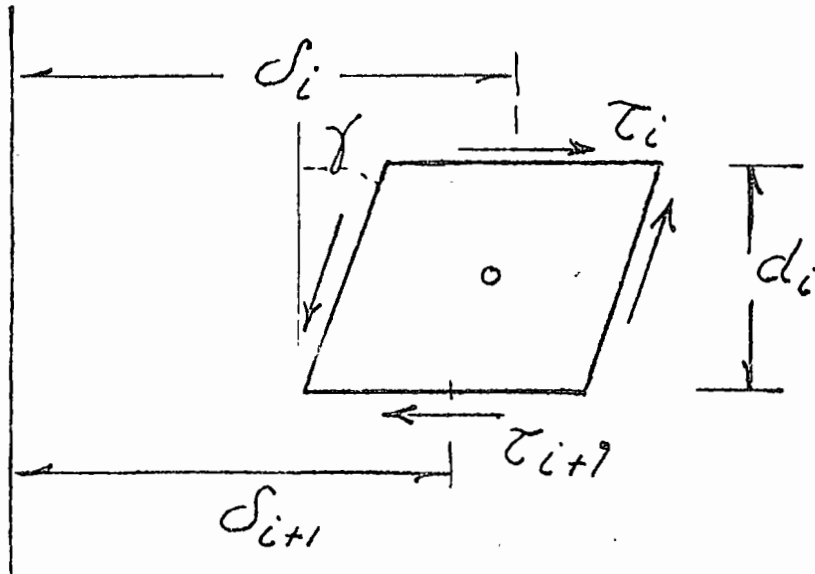
$T_{s1} = 1.70 \text{ seg}$ $T_{s2} = 1.12 \text{ seg}$

COMPORTAMIENTO SISMICO DEL SUBSUELO

FIG.-16



COLUMNA DE SUELO SUJETA A
MOVIMIENTO SISMICO



$$(\tau_{i+1} - \tau_i) = (\rho_i d_i) \frac{1}{2} (\delta_i + \delta_{i+1}) \omega_n^2 \quad (18)$$

$$\frac{\delta_i - \delta_{i+1}}{d_i} = \frac{\tau_i + \tau_{i+1}}{2\mu} = \gamma' \quad (19)$$

$$\delta_{i+1} = A_i \delta_i - B_i \tau_i \quad (20)$$

$$\tau_{i+1} = C_i (\delta_i + \delta_{i+1}) + \tau_i \quad (21)$$

$$A_i = \frac{1 - N_i}{1 + N_i} \quad B_i = \frac{1}{1 + N_i} \cdot \frac{d_i}{\mu_i} \quad (22)$$

$$C_i = \frac{1}{2} \rho_i d_i \omega_n^2 \quad N_i = \frac{\rho_i d_i^2 \omega_n^2}{4\mu_i}$$

DEL ESPECTRO ENVOLVENTE DE
ACELERACION RELATIVA

$$\frac{T_0}{T_s} \longrightarrow \frac{R_a}{a_m} = f_a \quad (23)$$

$$V_m = M \left(\frac{R_a}{a_m} \right) a_m \quad (24)$$

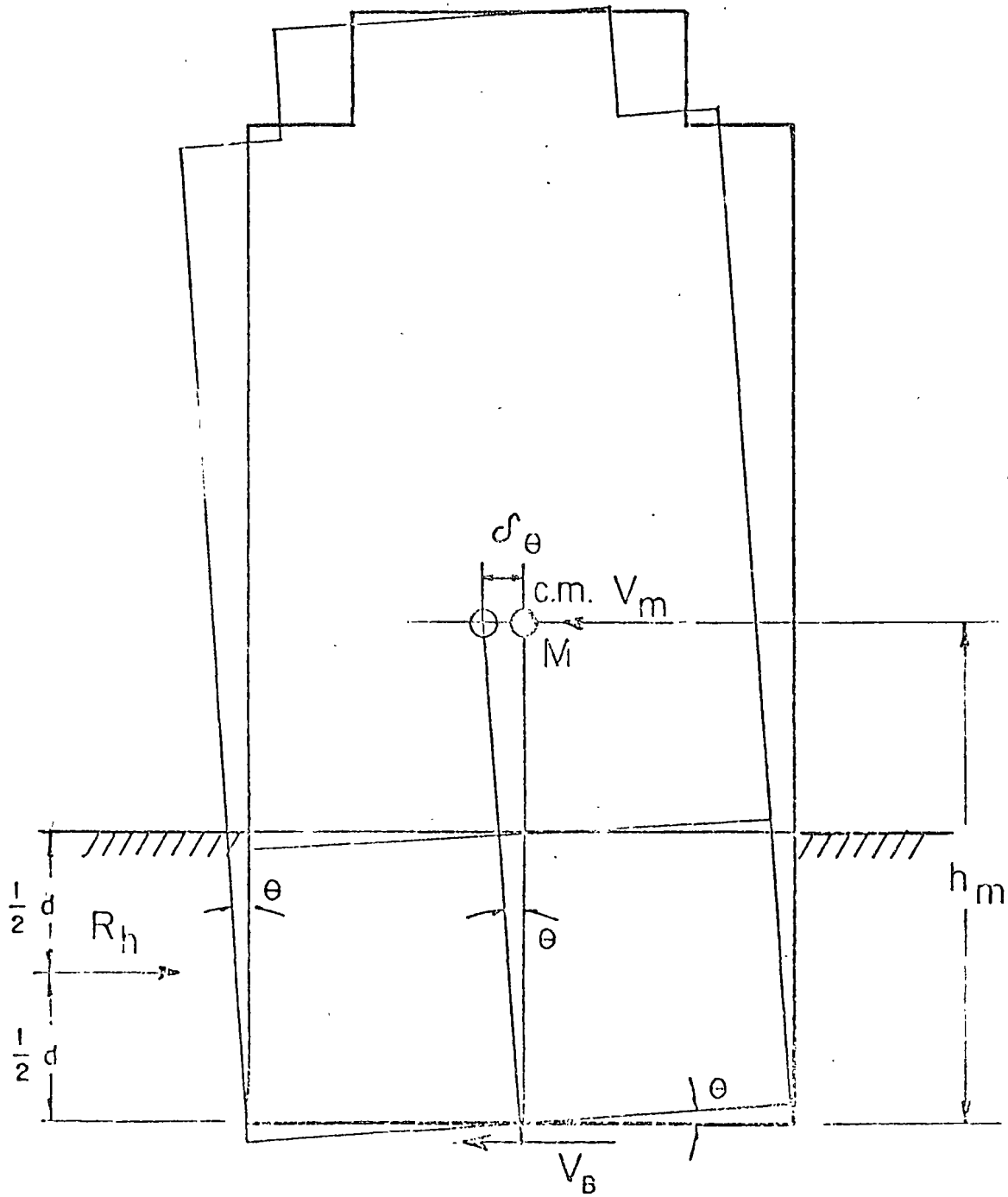
a_m aceleración máxima de
la superficie del suelo

$$V_B = R_h - V_m \quad (25)$$

$$O_{TB} + O_{TW} = V_m \cdot h_m \quad (26)$$

$$O_T = M \cdot \delta_\theta \omega_\theta^2 \cdot h_m \quad (27)$$

$$K_\theta = \frac{O_T}{\theta} \quad (28)$$



ROTACION DEL EDIFICIO

FIG - 20

$$M \delta_{\theta} \omega_{\theta}^2 \cdot h_m = K_{\theta} \frac{\delta_{\theta}}{h_m} \quad (29)$$

$$\omega_{\theta}^2 = \frac{1}{h_m^2} \cdot \frac{K_{\theta}}{M} \quad (30)$$

$$T_{\theta} = 2\pi h_m \sqrt{\frac{M}{K_{\theta}}} \quad (31)$$

————— . ————— . ————— . ————— . —————

DETERMINACION DE $K_{\theta} \rightarrow T_{\theta}$

MOMENTO TOTAL DE VOLTEO

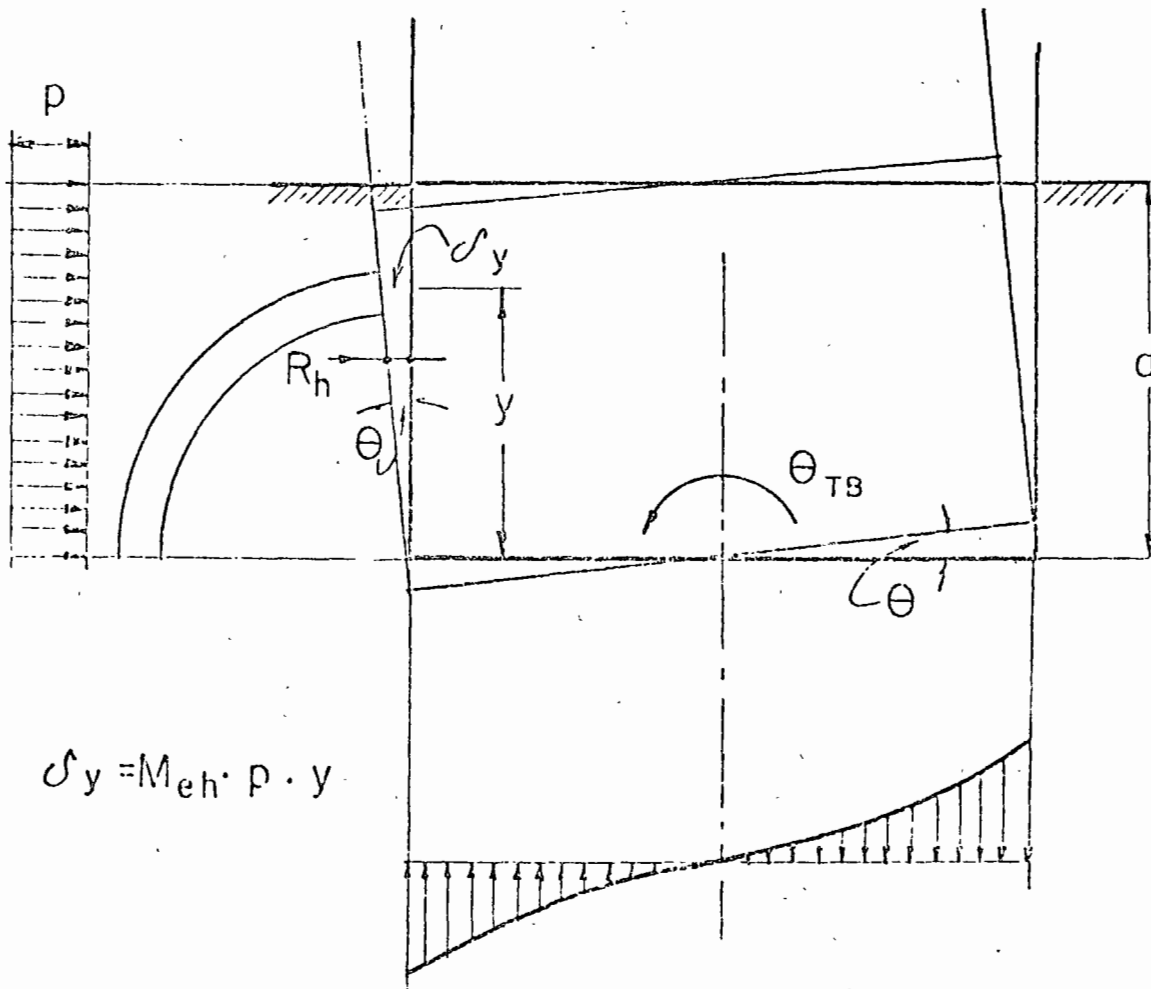
$$O_T = K_{\theta} \cdot \theta \quad (32)$$

para el muro $K_{\theta W} = \frac{O_{TW}}{\theta} \quad (33)$

para la base $K_{\theta B} = \frac{O_{TB}}{\theta} \quad (34)$

$$O_T = O_{TW} + O_{TB} \quad (35)$$

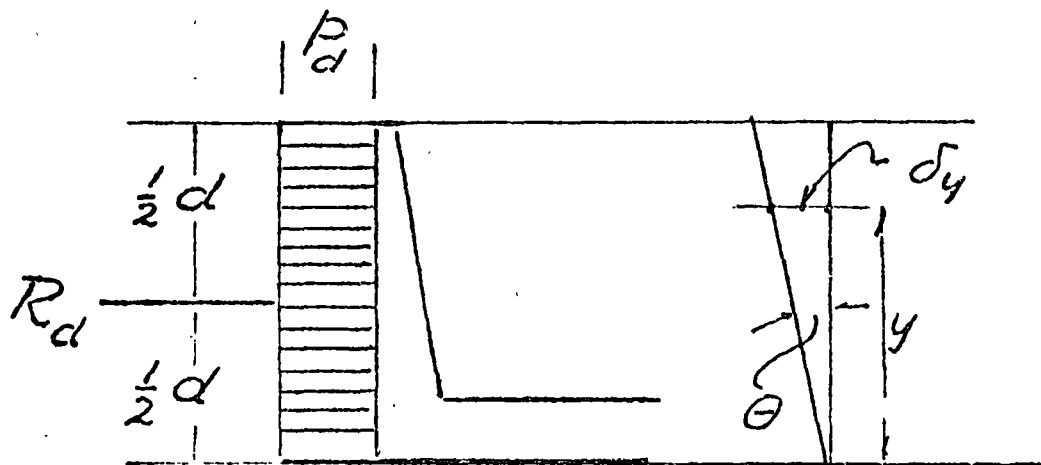
$$\therefore K_{\theta} = K_{\theta W} + K_{\theta B} \quad (36)$$



REACCIONES DEL SUELO DURANTE LA ROTACION DE LA CIMENTACION

FIG.-22

DETERMINACION DE $K_{\theta W}$



$$R_d = p \cdot d \quad (37)$$

$$\theta = \frac{\delta_y}{y} = M_{eh} \cdot p \quad (38)$$

$$\delta_y = M_{eh} \cdot p \cdot y \quad (39)$$

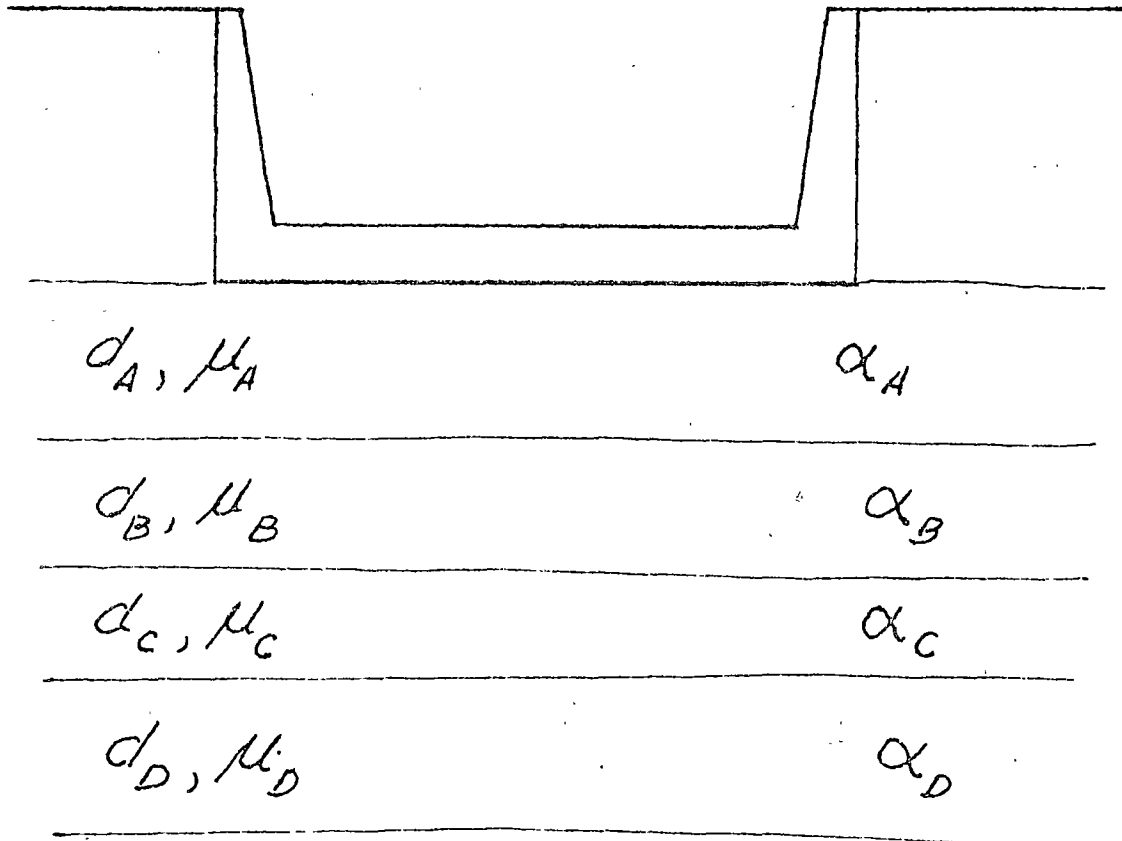
$$M_{eh} = \frac{1}{2(1+\nu)\mu} \quad (40)$$

$$O_{TW} = \frac{1}{2} p d^2 \quad K_{\theta W} = \frac{O_{TW}}{\theta} \quad (41)$$

$$K_{\theta W} = \frac{\frac{1}{2} p d^2}{p M_{eh}} = \frac{d^2}{2 M_{eh}} \quad (42)$$

$$K_{\theta W} = (1+\nu) d^2 \mu \quad (43)$$


DETERMINACION DE K_{WB}



$$\alpha_N = (M_e \cdot d)_N \quad (44)$$

$$\alpha_N = \left(\frac{d}{2(1+\nu)\mu} \right)_N \quad (45)$$

CARGA UNITARIA EN AREA TRIBUTARIA $\bar{\sigma}_1$

		2	3	4	5	6	α
A	I_{11}^A	I_{21}^A	I_{31}^A			I_{61}^A	α_A
B	I_{11}^B	I_{21}^B	I_{31}^B			I_{61}^B	α_B
C	I_{11}^C	I_{21}^C	I_{31}^C			I_{61}^C	α_C
D	I_{11}^D	I_{21}^D	I_{31}^D			I_{61}^D	α_D

MATRIZ DE INFLUENCIA DE ESFUERZOS UNITARIOS

FIG.- 25

CARGA EN
PUNTO

$$\begin{aligned}
 1 \quad \{\bar{\delta}_n\}_1 &= \left[I_{ji}^N \right]_1^T \times \{\alpha_N\} \\
 2 \quad \{\bar{\delta}_n\}_2 &= \left[I_{ji} \right]_2^T \times \{\alpha_N\} \\
 3 \quad \{\bar{\delta}_n\}_3 &= \left[I_{ji} \right]_3^T \times \{\alpha_N\} \quad (46) \\
 \cdot & \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\
 \cdot & \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\
 n \quad \{\bar{\delta}_n\} &= \left[I_{ji} \right]_n^T \times \{\alpha_N\}
 \end{aligned}$$

$$\{\delta_n\} = \left[\delta_{ji} \right]^T \times \{q_n\} \quad (47)$$

1	2	3	4	5	6	q
\bar{J}_{11}	\bar{J}_{12}	\bar{J}_{13}	\bar{J}_{14}	\bar{J}_{15}	\bar{J}_{16}	q_1
\bar{J}_{21}	\bar{J}_{22}	\bar{J}_{23}	\bar{J}_{24}	\bar{J}_{25}	\bar{J}_{26}	q_2
\bar{J}_{31}	\bar{J}_{32}	\bar{J}_{33}	\bar{J}_{34}	\bar{J}_{35}	\bar{J}_{36}	q_3
\bar{J}_{41}	\bar{J}_{42}	\bar{J}_{43}	\bar{J}_{44}	\bar{J}_{45}	\bar{J}_{46}	q_4
\bar{J}_{51}	\bar{J}_{52}	\bar{J}_{53}	\bar{J}_{54}	\bar{J}_{55}	\bar{J}_{56}	q_5
\bar{J}_{61}	\bar{J}_{62}	\bar{J}_{63}	\bar{J}_{64}	\bar{J}_{65}	\bar{J}_{66}	q_6

MATRIZ DE DESPLAMIENTOS UNITARIOS

FIG.- 27

EL PROBLEMA SE DIVIDE EN

- a) SIMETRICO POR ACCION ESTATICA
- b) ASIMETRICO POR ACCION DINAMICA

a) SIMETRICO

SE USA COMPRESIBILIDAD VOLUMETRICA DE LOS ESTRATOS α PARA CARGA ESTATICA EN LA MATRIZ DE DESPLAZAMIENTOS UNITARIOS POR SIMETRIA

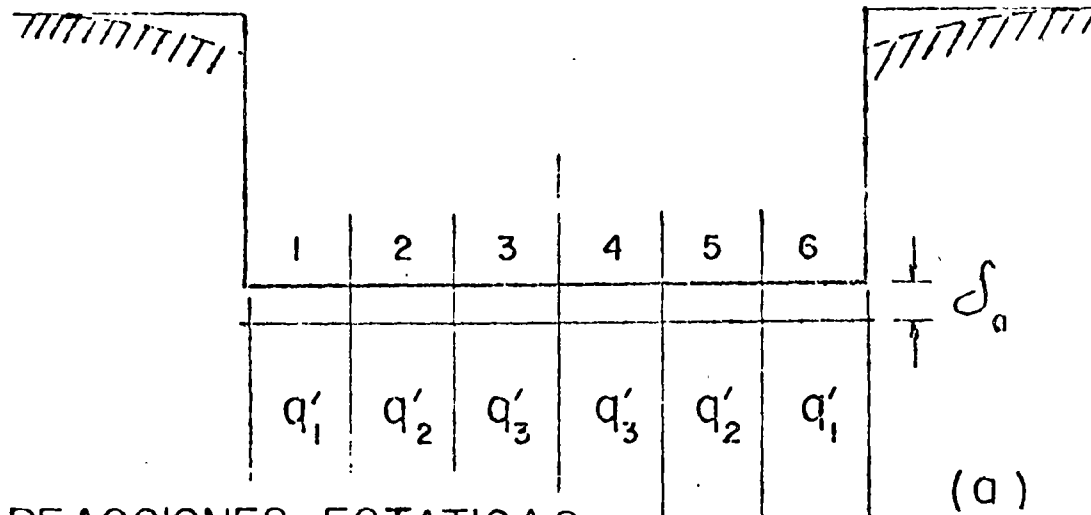
$$\begin{bmatrix} \bar{\delta}'_{11} + \bar{\delta}'_{16} & \bar{\delta}'_{12} + \bar{\delta}'_{15} & \bar{\delta}'_{13} + \bar{\delta}'_{14} \\ \bar{\delta}'_{21} + \bar{\delta}'_{26} & \bar{\delta}'_{22} + \bar{\delta}'_{25} & \bar{\delta}'_{23} + \bar{\delta}'_{24} \\ \bar{\delta}'_{31} + \bar{\delta}'_{36} & \bar{\delta}'_{32} + \bar{\delta}'_{35} & \bar{\delta}'_{33} + \bar{\delta}'_{34} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q'_1 \\ q'_2 \\ q'_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \delta'_1 \\ \delta'_2 \\ \delta'_3 \end{Bmatrix}$$

$$\{\delta'_n\} = [\bar{\delta}'_{ij}] \{q'_n\}$$

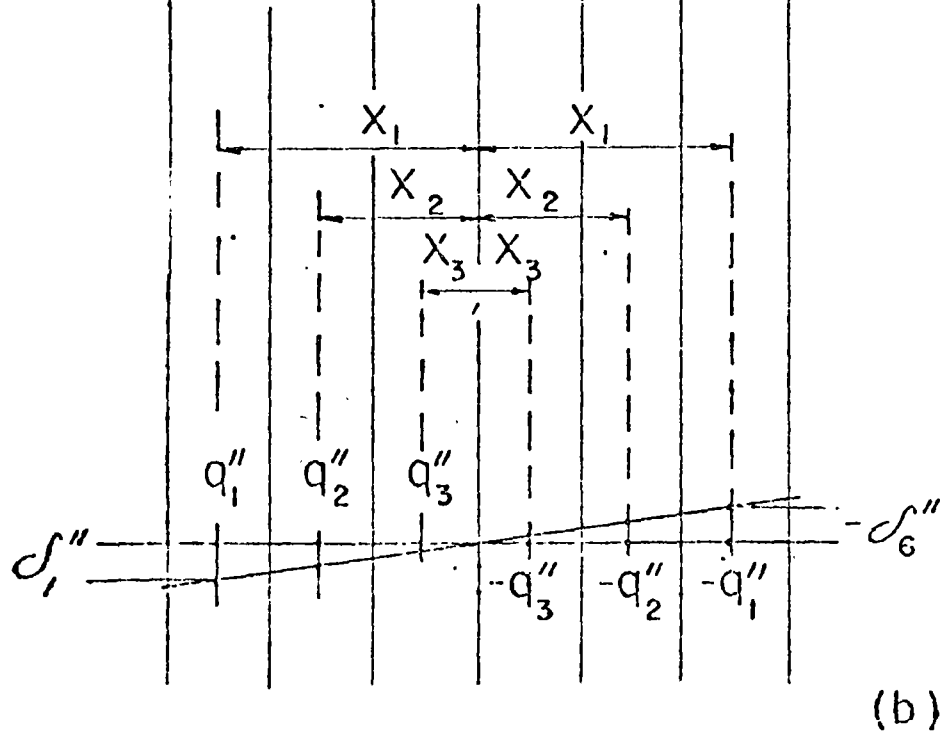
$$\delta'_1 = \delta'_2 = \delta'_3 = \dots = \delta'_6$$

$$q'_1, q'_2, q'_3, q'_4, q'_5, q'_6$$

CIMENTACION RIGIDA



REACCIONES ESTATICAS



$$\delta''_1 = -\delta''_6 = \theta' \cdot X_1$$

$$\delta''_2 = -\delta''_5 = \theta' \cdot X_2$$

$$\delta''_3 = -\delta''_4 = \theta' \cdot X_3$$

REACCIONES DINAMICAS MAXIMAS

FIG. - 29

b) ASIMETRICO

SE USA α_N DINAMICO EN LA MATRIZ DE DESPLAZAMIENTOS UNITARIOS

$$\begin{bmatrix} \bar{\delta}_{11}'' - \bar{\delta}_{16}'' & \bar{\delta}_{12}'' - \bar{\delta}_{15}'' & \bar{\delta}_{13}'' - \bar{\delta}_{14}'' \\ \bar{\delta}_{21}'' - \bar{\delta}_{26}'' & \bar{\delta}_{22}'' - \bar{\delta}_{25}'' & \bar{\delta}_{23}'' - \bar{\delta}_{24}'' \\ \bar{\delta}_{31}'' - \bar{\delta}_{36}'' & \bar{\delta}_{32}'' - \bar{\delta}_{35}'' & \bar{\delta}_{33}'' - \bar{\delta}_{34}'' \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1'' \\ q_2'' \\ q_3'' \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \delta_1'' \\ \delta_2'' \\ \delta_3'' \end{Bmatrix}$$

$$\{\delta_i''\} = [\bar{\delta}_{ij}''] \{q_i''\}$$

aquí $q_1'' = -q_6''$, $q_2'' = -q_5''$, $q_3'' = -q_4''$
para un giro θ' se determina

$$\{\delta_i''\} = \begin{Bmatrix} \theta' X_1 \\ \theta' X_2 \\ \theta' X_3 \end{Bmatrix}$$

$$O'_{TB} = \bar{a} \sum \frac{q_i''}{r_i} X_i \quad K_{\theta B} = \frac{O'_{TB}}{\theta'}$$

$$K_{\theta} = K_{\theta W} + K_{\theta B}$$

$$T_{\theta} = 2\pi h_m \sqrt{\frac{M}{K_{\theta W} + K_{\theta B}}}$$

DEL ESPECTRO

$$\frac{T_{\theta}}{T_s}, \xi_0 \longrightarrow \frac{R_a}{a_m} = f_a$$

$$V_m = (M \cdot a_m) \cdot f_a$$

$$O_T = V_m \cdot h_m$$

$$\theta = \frac{O_T}{K_{\theta W} + K_{\theta B}}$$

$$O_{TW} = K_{\theta W} \cdot \theta$$

$$O_{TW} = \frac{K_{\theta W}}{K_{\theta W} + K_{\theta B}} O_T$$

$$O_{TB} = \frac{K_{\theta B}}{K_{\theta W} + K_{\theta B}} O_T$$

ESFUERZO CONTRA EL MURO

$$O_{TW} = \frac{1}{2} (p) d^2$$

$$\frac{1}{2} (p) d^2 = \frac{K_{\theta W}}{K_{\theta W} + K_{\theta B}} O_T$$

$$p = \frac{K_{\theta W}}{K_{\theta W} + K_{\theta B}} \cdot \frac{2 O_T}{d^2}$$

INCREMENTO DE ESFUERZOS
DE CONTACTO POR VOLTEO SIS-
MICO

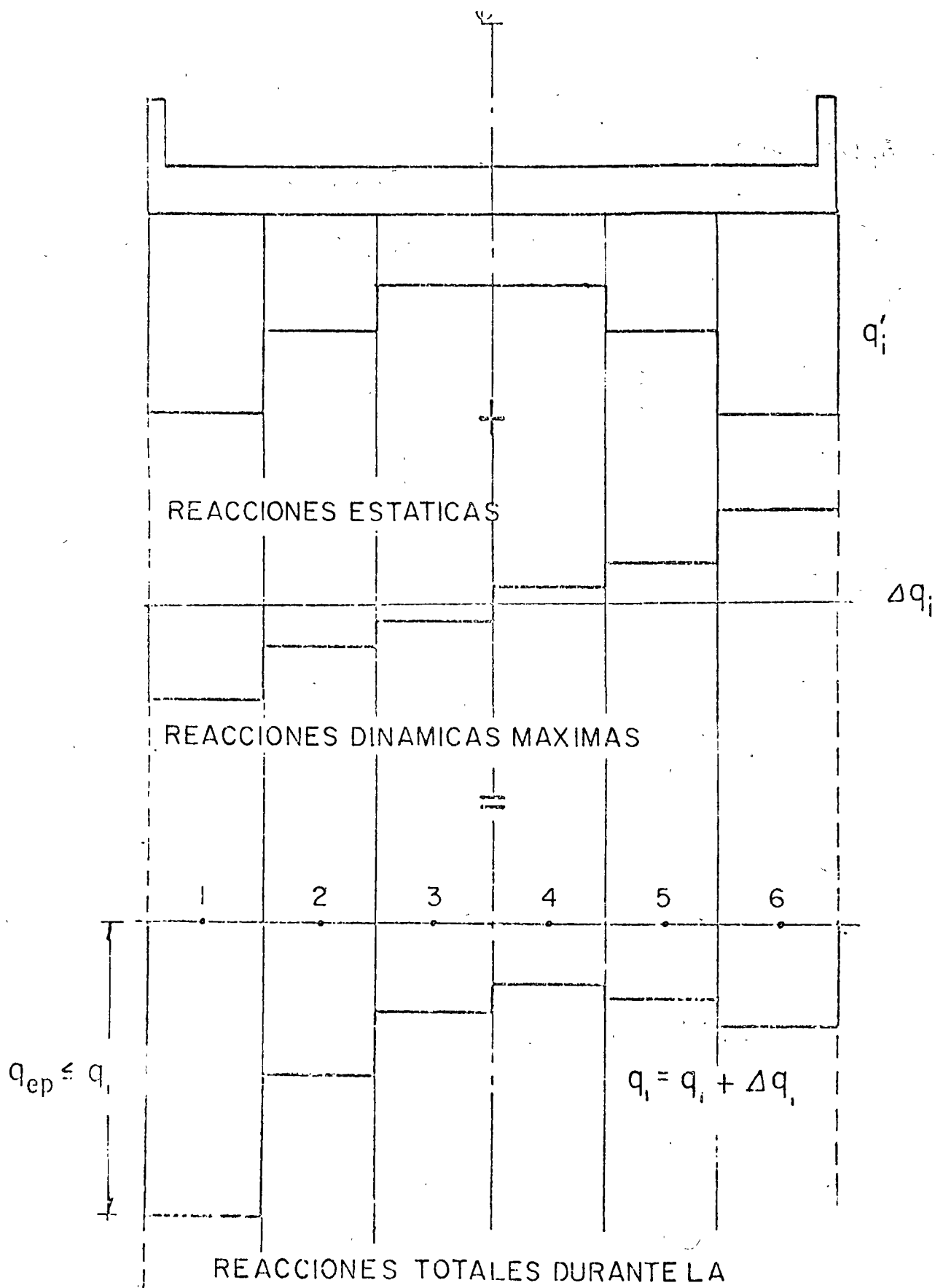
$$\Delta q_i = q_i'' \frac{O_T}{O_T'}$$

ESFUERZOS TOTALES

$$q_i = q_i' \pm \Delta q_i$$

EN ORILLA CIMENTACION

$$q_{ep} \geq q_i$$



REACCIONES TOTALES DURANTE LA
 ACCION SISMICA
 DISTRIBUCION DE ESFUERZOS DE CONTACTO
 AL NIVEL DE DESPLANTE DE LA CIMENTACION

RELACION DE ALUMNOS DEL CURSO DISEÑO SISMICO DE ESTRUCTURAS
ESPECIALES (24 DE JULIO AL 18 DE AGOSTO, 1978)

1. ING. LEONARDO ALVAREZ TROYA
10 de Agosto 3858
El Vito, Ecuador
Tel. 543904

UNIVERSIDAD CENTRAL
EL VITO, ECUADOR
TEL. 520611

2. ING. ROBERTO ENRIQUE BRENES BRENES
Calle 18, avs 4-6
Cartago, Costa Rica

INST. COSTARRICENSE DE
ELECTRICIDAD
Sábana Nte., Sn. José, Costa Rica

3. SR. JESUS CAMPOS DE LA GARZA
Puebla 115-203
Col. Roma
México 7, D.F.

EURO ESTUDIOS S.A. DE C.V.
GERENTE TECNICO
GAUSS 9-201
COL. ANZURES
MEXICO 5, D.F.
TEL. 250.70.00

4. ARQ. OSCAR ARCHIBALDO DENEKEN GARCES
Magnolias 34-12
Col. Valle
México 12, D.F.
Tel. 559.17.68

DIR. GRAL. DE PREVENCION Y
ATENCION A EMERGENCIAS
S.A.H.O.P.
TEC. ESPECIALISTA EN AREA DE
REHABILITACION Y PROYEC. ESP.
Rubén Darío 13 Entrepiso
Col. Polanco
México 5, D.F.
Tel. 250.78.75

5. ING. STANISLAW DOROSZ
Odontología 57 -302
Copilco-Universidad
México 20, D.F.
Tel. 550.38.56

INSTITUTO DE INGENIERIA
U.N.A.M.
MEXICO 20, D.F.
TEL. 548.97.74

6. ING. SERGIO OCTAVIO R. ESCOBAR MEDINA
Juan de Tolosa 809
Zacatecas, Zac.
Tel. 2.11.47

ESC. DE ING.
UNIVERSIDAD AUTONOMA DE
ZACATECAS
Tel. 2.08.27

7. ING. ELIAS GALINDO VALLARINO
German Patillo 36-5
Col. Aragón
Querétaro, Qro.

UNIVERSIDAD AUTONOMA DE
QUERETARO
Maestro de Tiempo Completo
Centro Universitario
Querétaro, Qro.

RELACION DE ALUMNOS DEL CURSO DISEÑO SISMICO DE ESTRUCTURAS
ESPECIALES (24 DE JULIO AL 18 DE AGOSTO, 1978)

8. SR. LEON GALVAN PONCE DE LEON

Cerro Protasio Tagle 39 L
San Miguel Chapultepec
México 18, D.F.
Tel. 515.46.24

ESCUELA SUPERIOR DE
INGENIERIA MECANICA Y
ELECTRICA
Profesor
Av. Xocongo
Col. Tránsito
México, D.F.

9. ING. RAMON MORALES ROSS

Pestalossi 526-5
Col. Narvarte
México 12, D.F.
Tel. 523.21.52

UNIVERSIDAD JUAREZ
AUTONOMA DE TABASCO
Profesor
Ciudad Universitaria
V.Hermosa, Tabasco

10. ING. FLORENCIO MORENO LOPEZ

Primavera Ote. 35
Querétaro, Qro.

ESCUELA DE INGENIERIA
UNIVERSIDAD AUTONOMA DE
QUE RETARO
Profesor
Centro Universitario
Querétaro, Qro.
Tel. 2.51.89

11. ING. ROBERTO ORTEGA RAMIREZ

Mollendo 1038-8
Col. Lindavista
México 14, D.F.
Tel. 586.65.24

ESCUELA SUPERIOR DE INGE-
NIERIA Y ARQUITECTURA
Profesor
Edif. 4
Unidad Profesional
Zacatenco.
Tel. 586.96.44

12. SR. JESUS PORRAS MARISCAL

Calz. Sta. Anita 115
Col. Moderna
México, D.F.
Tel. 690.17.68

INSTITUTO TECNOLOGICO
REGIONAL OAXACA
Catedrático
Calz. Inst. Téc. Regional S/N
Oaxaca, Oax.

13. ING. ALFONSO RUIZ VAZQUEZ

Av. Valle de Bravo 19
Vergel de Coyoacán
México 22, D.F.

ARVA CONSTRUCCIONES
Propietario
Av. Valle de Bravo 19
México 22, D.F.
Tel. 677.37.30

RELACION DE ALUMNOS DEL CURSO DISEÑO SISMICO DE ESTRUCTURAS
ESPECIALES (24 DE JULIO AL 18 DE AGOSTO, 1978)

14. ING. ANTONIO SANCHEZ HERNANDEZ

San Luis Potosí 19
Col. Hidalgo
Querétaro, Qro.
Tel. 2.70.08

ESCUELA DE INGENIERIA
UNIVERSIDAD AUTONOMA DE
QUERETARO
Profesor
Centro Universitario
Querétaro, Qro.
Tel. 2.51.89

15. ING. RAUL SERRANO LIZAOLA

Bonampak 4506
Col. Reforma Agua Azul
Puebla, Pue.
Tel. 43.92.96

UNIVERSIDAD AUTONOMA
DE PUEBLA
ESCUELA DE INGENIERIA
Ciudad Universitaria
Puebla, Pue.

16. ING. FEDERICO TIRADO INDA

Juárez 57
Chilpancingo, Gro.
Tel. 2.28.44

ESCUELA DE INGENIERIA
UNIVERSIDAD AUTONOMA
DE GUERRERO
SUBDIRECTOR
Av. Casa de la Juventud s/n
Chilpancingo, Gro.
Tel. 2.27.41

17. ING. OSCAR VALLE MOLINA

Lago Guanacacha 153
Col. Anáhuac
México 17, D.F.
Tel. 545.22.69

ESCUELA SUPERIOR DE
INGENIERIA Y ARQUITECTURA
I. P. N.
Profesor
Unidad Profesional de Zacatenco
Edificio 4
México 14, D.F.
Tel. 586.96.44

18. ING. GUSTAVO AGUIRRE PIEDRA

Av. Col. del Valle 443
Col. del Valle
México 12, D.F.
Tel. 523.99.90

U. TECNICA PARTICULAR DE
LOJA
ECUADOR S.A.
Lecturas de Mecánica Analítica
Loja Ecuador P.O.Box 71 S.A.
Tel. 960.375



Modelo matemático para representar la interacción dinámica de suelo y cimentación*

José A. NIETO, Emilio ROSENBLUETH
y Octavio A. RASCON **

1. INTRODUCCION

1.1. Descripción del problema

La influencia del suelo de cimentación en la respuesta dinámica de una estructura no ha sido suficientemente estudiada. Aunque es posible un tratamiento riguroso del problema¹, éste no es de fácil aplicación en la práctica. Conviene contar con un modelo matemático sencillo que permita determinar con bastante precisión la respuesta de un sistema suelo-estructura a perturbaciones dinámicas. El modelo debe proporcionar resultados razonablemente correctos en el intervalo de frecuencias de mayor interés. El tratamiento se simplifica considerando primeramente la cimentación de una estructura como un bloque rígido. El problema consiste en determinar el comportamiento dinámico del sistema constituido por el cuerpo rígido y el suelo; este último se puede idealizar, en una extensa gama de condiciones prácticas, como un medio elástico, homogéneo, isótropo y seminfinito.

Una vez determinada la respuesta dinámica del bloque rígido de cimentación tomando en cuenta su interacción con el suelo, es fácil incorporar al sistema la estructura flexible que se levanta sobre dicha cimentación.

1.2. Antecedentes

Las principales soluciones disponibles hasta la fecha para el problema de interacción dinámica entre un cuerpo rígido y un semiespacio elástico pueden clasificarse en cuatro grupos.

- 1) Soluciones exactas clásicas, que suponen que la distribución de esfuerzos de contacto entre bloque y suelo no depende de la frecuencia de vibración²⁻⁵ y generalmente toman dicha distribución igual a la que corresponde a carga estática. El cálculo de las respuestas dinámicas exige trabajar independientemente con cada frecuencia de excitación, pues los parámetros del modelo matemático correspondiente son funciones de esta variable; tal situación no es objetable cuando se trata de calcular el efecto de vibraciones debidas a maquinaria, pues entonces sólo interesan una o unas cuantas frecuencias de excitación, pero introduce complicaciones injustificadas cuando se desea calcular la respuesta a una perturbación que contiene

componentes significativas en un extenso intervalo de frecuencias, como lo es un sismo, y prácticamente imposibilita el cálculo de respuestas cuando sobre la cimentación existe una estructura de comportamiento no lineal. Además, a muy altas frecuencias esta solución de errores inadmisibles provenientes de la hipótesis referente a la distribución de esfuerzos de contacto.

- 2) Para una placa circular sujeta a vibración se dispone de la solución exacta que toma en cuenta la distribución correcta de esfuerzos de contacto⁷. Por lo demás esta solución adolece de las mismas limitaciones que las del grupo que antecede, cuando se trata de análisis para diseño sísmico.
- 3) Se han propuesto diversos modelos matemáticos que incluyen masas virtuales, elementos flexibles y amortiguadores lineales para representar al suelo⁸⁻¹³. Al tomar estos parámetros independientes de la frecuencia se elimina la dificultad mencionada a propósito de la aplicación de las soluciones de los grupos anteriores a diseño sísmico, si bien se introducen errores inadmisibles a muy altas frecuencias. (Se ha demostrado que la masa virtual de suelo debe ser nula para que el orden de magnitud de las respuestas quede correctamente predicho cuando la frecuencia de excitación tiende a infinito⁷). Las masas virtuales de estos modelos matemáticos se basan en consideraciones de carácter intuitivo, mientras las constantes de los amortiguadores se han determinado a partir de un número limitado de pruebas de laboratorio en modelos físicos de pequeñas dimensiones usando o simulando suelos en forma tal que se antoja peligroso extrapolar a partir de ellos.
- 4) Para eliminar la objeción mencionada respecto al empleo de una masa virtual cuando interesan frecuencias sumamente elevadas se ha propuesto un modelo matemático que comprende sólo un elemento flexible y un amortiguador lineal en representación del suelo, ambos elementos carentes de masa⁷. Dicho modelo suministra resultados excelentes en los intervalos de frecuencias sumamente bajas o excepcionalmente altas, pero introduce errores hasta de un 30 por ciento en el intervalo intermedio (si bien el error generalmente no excede 20 por ciento en el intervalo de mayor interés). Esta solución

* Ponencia presentada en el Primer Congreso Nacional de Ingeniería Sísmica, Guadalajara, Jal., nov. 1965.

** Respectivamente, investigador, director y ayudante de investigador del Instituto de Ingeniería, IINAM.

sólo se ha formulado, aparentemente, para las oscilaciones verticales de una placa circular.

De las soluciones mencionadas, las del último grupo son las únicas que pudieran considerarse satisfactorias para diseño sísmico. Sin embargo, tienen el inconveniente de perder precisión a frecuencias bajas y medias, que son las de mayor interés en el diseño de cimentaciones de maquinaria lenta y en diseño sísmico de estructuras.

El modelo matemático que se propone en este trabajo está basado en las soluciones exactas clásicas. Presenta la ventaja de mayor precisión en el intervalo de interés práctico de las frecuencias. Está limitado, por lo pronto, a bases de cimentación de forma circular, aunque su extensión a otras formas de base es inmediata. Se limita también a la consideración de modos desacoplados de vibración. Para los grados de libertad elegidos, estos modos no pueden existir en general cuando se trata de una base rígida por lo que respecta a cabeceo y traslación horizontal, salvo cuando la relación de Poisson, ν , vale 0.5. En la práctica los grados de libertad horizontal y de cabeceo se encuentran acoplados. En el modelo propuesto es factible tomar en consideración este acoplamiento variando la colocación de los elementos flexibles para los modos en cuestión.

1.3. Fundamentos del modelo matemático propuesto

1.3.1. SOLUCIONES "EXACTAS" PARA BASES CIRCULARES

La respuesta dinámica de un cilindro circular de masa M_0 y radio r_0 desplantado en la superficie de un semiespacio elástico homogéneo e isotropo cuyas constantes elásticas son G y ν y cuya densidad de masa es ρ ha sido estudiada por varios investigadores²⁻⁵ para los seis grados de libertad del sistema, a saber: vertical, dos horizontales iguales entre sí, cabeceo respecto a dos diámetros ortogonales de la base y torsión respecto al eje vertical que pasa por el centro de la base. Se han considerado en la mayoría de los casos dos tipos de perturbación actuando sobre el cilindro: sollicitación armónica cuya amplitud es independiente de la frecuencia ω , y sollicitación armónica cuya amplitud es proporcional a ω^2 . (Este último tipo es el que produciría un excitador mecánico de masa excéntrica). Como se desconoce, excepto para vibración vertical⁶, la distribución real de esfuerzos dinámicos en la superficie de contacto entre el cilindro y el semiespacio, en los estudios referidos se ha supuesto una distribución de esfuerzos dinámicos análoga a la distribución estática existente bajo alguna de las dos condiciones extremas siguientes: a) cilindro infinitamente rígido, y b) cilindro infinitamente flexible. Con la primera suposición se prescriben los desplazamientos en la superficie de contacto y se determina la condición

de esfuerzos correspondientes. Con la segunda suposición la distribución de esfuerzos se prescribe de antemano para cada tipo de movimiento. Estas suposiciones conducirán sólo a valores aproximados de la respuesta dinámica del cilindro, pero se ha comprobado⁴ que las aproximaciones son adecuadas para la mayor parte de los fines prácticos.

Richart⁵ ofrece una excelente presentación de los resultados obtenidos por él y por otros investigadores para la determinación de las frecuencias resonantes y amplitudes de vibración del cilindro circular infinitamente rígido. Sus gráficas se reproducen en las figs 1 a 4, correspondientes a cada uno de los grados de libertad. En la mitad inferior de estas figuras se presenta la frecuencia resonante en función de la masa o la inercia del cilindro rígido para los dos tipos de perturbación considerados y para varios valores de la relación de Poisson, ν . Tanto la frecuencia resonante como la masa o momento de inercia se grafican en forma adimensional, aquella como el parámetro de frecuencias $a_0 = \omega r_0 \sqrt{\rho/G}$ y esta como el parámetro b , que se define en la forma siguiente:

- i. Para movimiento vertical, $b_v = M_0/\rho r_0^3$
- ii. Para movimiento horizontal, $b_H = M_0/\rho r_0^3$

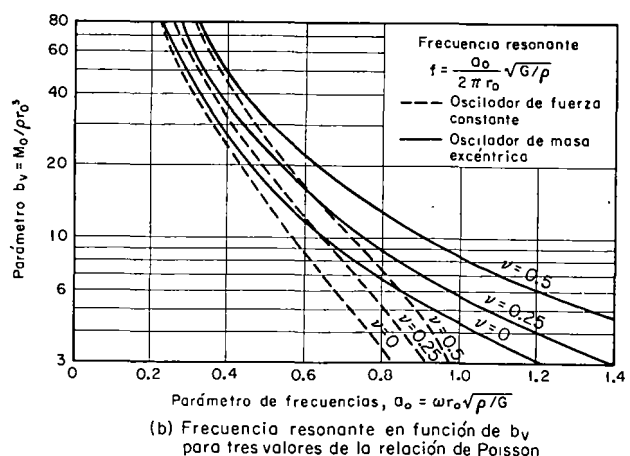
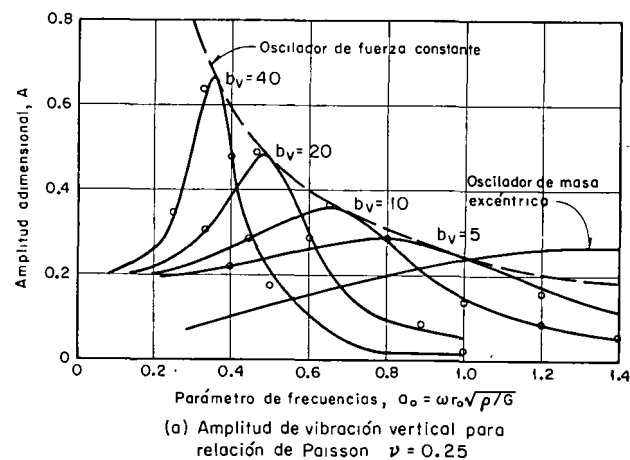
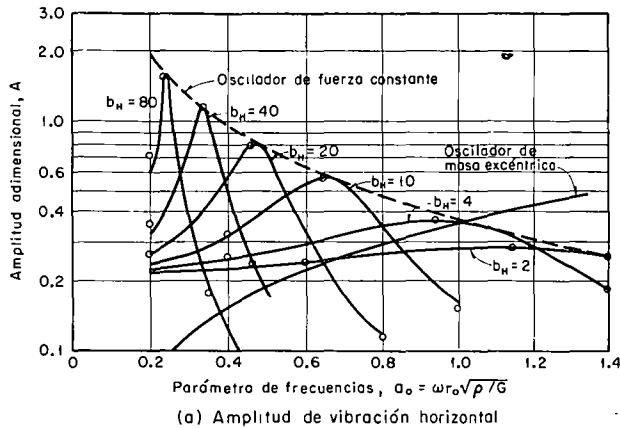
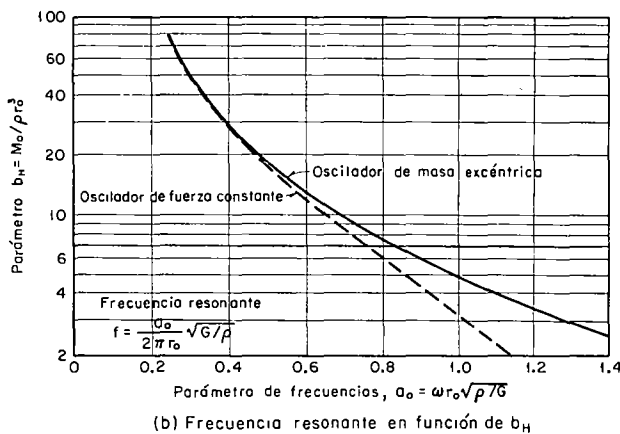


FIG 1. Curvas de respuesta y frecuencias resonantes de vibración vertical (Según Richart, ref. 5)



(a) Amplitud de vibración horizontal



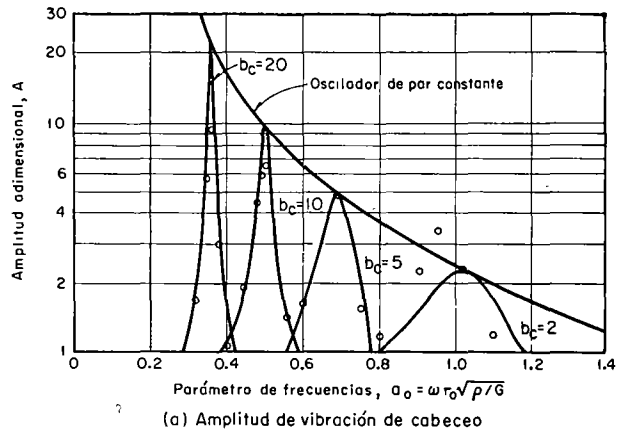
(b) Frecuencia resonante en función de b_H

FIG. 2. Curvas de respuesta y frecuencias resonantes de vibración horizontal. Relación de Poisson, $\nu = 0$ (Según Richart, ref. 5)

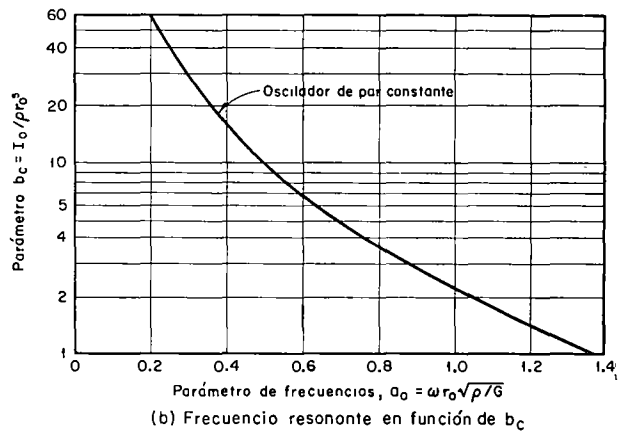
- iii. Para cabeceo, $b_a = I_0/\rho r_0^5$
- iv. Para movimiento torsional, $b_T = J_0/\rho r_0^5$

En estas expresiones, I_0 es el momento de inercia de la masa de la base respecto al eje de cabeceo y J_0 , su momento de inercia respecto al eje de torsión. En la mitad superior de las figs. 1 a 4, Richart presenta la amplitud de vibración en función del parámetro de frecuencias para varios valores de b y para ambos tipos de perturbación. La amplitud, A , que corresponde a cada grado de libertad se presenta adimensionalmente en la forma siguiente:

- i. Para vibración vertical, $A_V Gr_0/Z$ si la amplitud de la fuerza perturbadora, Z , es independiente de la frecuencia, y $A_V \rho r_0^3/2m_1 l$ si la perturbación es debida a un excitador mecánico con masa excéntrica m_1 y brazo giratorio de longitud l .
- ii. Para vibración horizontal, $A_H Gr_0/Q_H$, o $A_H \rho r_0^3/2m_1 l$, en que Q_H es la amplitud de la fuerza perturbadora independiente de la frecuencia.



(a) Amplitud de vibración de cabeceo



(b) Frecuencia resonante en función de b_C

FIG. 3. Curvas de respuesta y frecuencias resonantes de vibración de cabeceo. Relación de Poisson, $\nu = 0$ (Según Richart, ref. 5)

- iii. Para vibración de cabeceo, $A_H Gr_0^3/M$, en que M es la amplitud del momento de cabeceo.
- iv. Para vibración torsional, $A_T Gr_0^3/T$, en que T es la amplitud del par torsional.

(Para estos dos últimos casos no se presentan curvas correspondientes a la perturbación producida por un excitador mecánico).

De la similitud entre las curvas de amplitudes presentadas por Richart y los espectros de desplazamiento de un sistema amortiguado, con un grado de libertad, sujeto a los mismos tipos de perturbación surgió la idea de desarrollar el modelo matemático que se describe en la siguiente sección.

1.3.2. RESPUESTA DINÁMICA DE SISTEMAS AMORTIGUADOS DE UN GRADO DE LIBERTAD

Se sabe que la frecuencia circular resonante de un sistema amortiguado con un grado de libertad

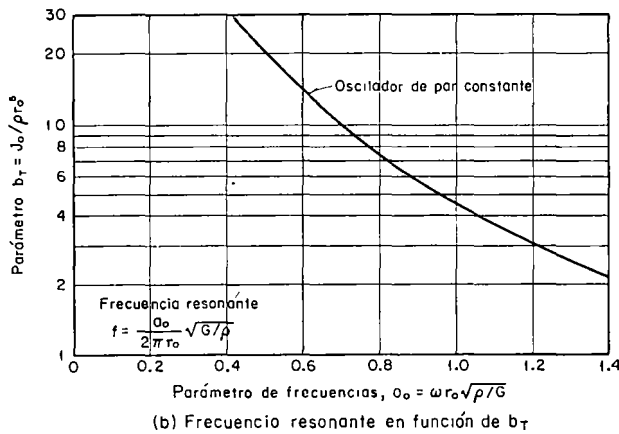
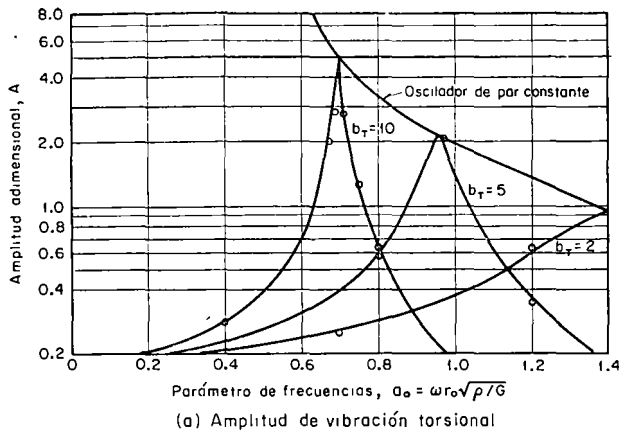


FIG. 4. Curvas de respuesta y frecuencias resonantes de vibración torsional. Independiente de la relación de Poisson (Según Richart, ref. 5)

con masa, M , constante elástica K y constante de amortiguamiento C , está dada por¹⁴

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{K(1 - 2\xi^2)}{M}} \quad (1)$$

cuando la amplitud máxima de la sollicitación dinámica es constante, y por

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{K}{M(1 - 2\xi^2)}} \quad (2)$$

cuando la amplitud máxima de la sollicitación es proporcional al cuadrado de la frecuencia perturbadora. En estas expresiones $\xi = C/2 \sqrt{KM}$ es el porcentaje de amortiguamiento crítico del sistema.

Si se conoce la constante elástica de un sistema amortiguado y se determinan experimentalmente sus frecuencias resonantes ω_1 y ω_2 cuando la excitación es, respectivamente, independiente de y proporcional al cuadrado de la frecuencia perturbadora, es posible, mediante las ecs. 1 y 2, determinar el valor de la masa M y de la constante de amortiguamiento C del sistema. En esta idea se basa el modelo matemático propuesto en este tra-

bajo, con las modificaciones que se indican más adelante.

Se sabe también que la frecuencia resonante ω_T del sistema amortiguado, cuando la amplitud máxima de la excitación es proporcional a la frecuencia perturbadora, es igual a la frecuencia natural del sistema sin amortiguamiento. La amplitud resonante del sistema amortiguado sujeto a este último tipo de excitación es $M/2\xi K$.

2. MODELO MATEMATICO PROPUESTO

El modelo que se propone es un sistema de un grado de libertad con amortiguamiento lineal. Consiste en una masa rígida constituida por la cimentación y por un prisma virtual de suelo cuya base es idéntica a la de la cimentación, pero cuya altura va a depender del grado de libertad considerado. En este trabajo se estudian exclusivamente bases de cimentación de forma circular, por lo que el prisma virtual es un cilindro. La masa rígida está soportada por un elemento flexible, linealmente elástico, sin peso. La forma del elemento flexible y su colocación respecto a la masa rígida dependen del modo de vibración considerado y se presentan en la fig. 5. Como constante elástica del elemento flexible se utiliza la obtenida por medio de la teoría de la elasticidad al considerar para cada grado de libertad la acción estática de la sollicitación aplicada al cilindro rígido de radio r_0 desplantado en la superficie del semiespacio elástico que representa al suelo. En esta constante elástica se incluye el efecto de la relación de Poisson. De esta manera se asegura

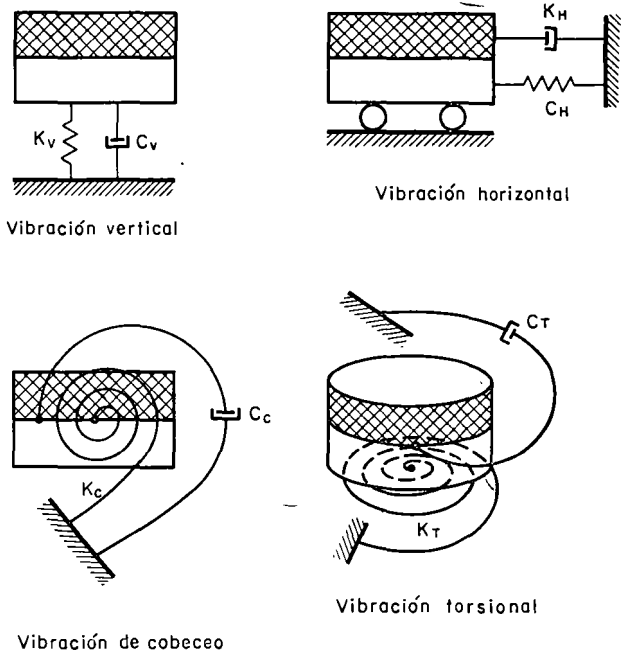


FIG. 5. Modelos matemáticos propuestos para los diferentes grados de libertad

que la solución es exacta cuando la frecuencia de excitación tiende a cero.

Debe notarse que al hablar de frecuencia de excitación nula y carga estática se entiende una velocidad de carga suficientemente lenta para evitar la aparición de fuerzas de inercia apreciables en el suelo, pero no tan lenta que se induzcan los fenómenos de consolidación y de deformaciones diferidas en gran escala. Este concepto es importante cuando se trata de aplicación a cimentaciones que se apoyan en suelos reales.

Resta determinar la altura de la masa virtual de suelo y la constante de amortiguamiento para cada grado de libertad. Se desea que la respuesta del modelo matemático se ajuste a los resultados de la teoría clásica; dado que en la mitad inferior de las figs. 1 a 4 se dispone del valor de la frecuencia resonante para cada modo de vibración y para los dos tipos de perturbación considerados, es sencillo determinar los valores requeridos utilizando estas figuras y las ecs. 1 y 2. Sin embargo, como en diseño sísmico la gama de frecuencias de interés es amplia, no interesa especialmente que el modelo tenga exactamente la misma frecuencia resonante que se determinó con la teoría clásica. Por otra parte, en los espectros de diseño sísmico más comunes, el intervalo de mayor interés de las frecuencias corresponde a amplitudes máximas de excitación proporcionales a la frecuencia perturbadora. Por estas dos razones se optó por utilizar el procedimiento descrito arriba para determinar solamente la altura de la masa virtual de suelo, y encontrar el valor de la constante de amortiguamiento ajustando la ordenada máxima del espectro de pseudovelocidades correspondiente a la solución clásica con la amplitud resonante del modelo indicado en la subsección 1.3.2. El espectro de pseudovelocidades se puede determinar utilizando las curvas de las figs. 1 a 4.

Mediante este procedimiento se llega a los valores que se consignan en la Tabla 1 en la cual la constante elástica del elemento flexible está identificado por K con el subíndice correspondiente al grado de libertad considerado, y A representa el área de cimentación. Los resultados se dan en función de A y de su raíz cuadrada para facilitar una primera estimación de los parámetros

que corresponden a cimentaciones no circulares, a reserva de que estudios ulteriores permitan afirmar tales estimaciones.

En las figs. 1 a 4 se incluyen algunos puntos representativos de las respuestas de los modelos desarrollados utilizando los valores de la Tabla, para diversos tipos de perturbación. El modelo proporciona una aproximación excelente a la respuesta *exacta* para los modos de vibración vertical y horizontal, aunque para los modos torsional y de cabeceo la aproximación no es tan buena. Hay que hacer notar también que en las estructuras ordinarias en las que la influencia del segundo modo de vibración es importante, éste tiene una frecuencia de 2 a 2.5 veces mayor que la frecuencia fundamental, por lo que bastará que el modelo dé una buena aproximación en el intervalo comprendido entre la frecuencia resonante y 2.5 veces el valor de dicha frecuencia.

La precisión del modelo puede mejorarse drásticamente si se hace la constante del amortiguador variable con la frecuencia; se ha preferido no proceder en tal forma para preservar la simplicidad del tratamiento.

El modelo propuesto permite incorporar fácilmente en el análisis la influencia del comportamiento inelástico de la estructura. Está limitado por ahora a bases circulares y a la consideración de modos de vibración desacoplados.

Se trabaja actualmente en la preparación de modelos semejantes para bases de cimentación rectangulares con diversas relaciones de largo a ancho. El estudio de éstas se basa en los resultados clásicos presentados en la ref. 15. Para otras formas de cimentación se pueden aplicar los resultados de este trabajo utilizando los coeficientes elásticos del suelo determinados mediante los monogramas de Newmark¹⁶ e integrando en toda el área de la base la solución clásica de Cerruti¹⁷. Aunque suele suponerse¹⁸ que la vibración horizontal y la de cabeceo de una cimentación están desacopladas si el centro de masa de la cimentación se halla a la altura de la base de contacto entre cimentación y suelo, esto no acontece en la práctica. Por otra parte, soluciones exactas basadas en la teoría de la elasticidad¹⁹ demuestran que aun para el caso de esfuerzos tangenciales

TABLA 1
PARÁMETROS DEL MODELO PROPUESTO

TIPO DE VIBRACION	ALTURA DEL PRISMA DE SUELO		CONSTANTE DE AMORTIGUAMIENTO	
	En función del radio de la base	En función del área de la base	En función del radio de la base	En función de la altura del prisma
Vertical	0.48 r_0	0.27 \sqrt{A}	1.8 $\sqrt{K_v r_0^3}$	5.42 $\sqrt{K_v \rho h^3}$
Horizontal	0.10 r_0	0.05 \sqrt{A}	1.3 $\sqrt{K_H r_0^3}$	41.1 $\sqrt{K_H \rho h^2}$
Cabeceo	0.63 r_0	0.35 \sqrt{A}	0.30 $\sqrt{K_C r_0^5}$	0.731 $\sqrt{K_C \rho h^5}$
Torsión	0.44 r_0	0.25 \sqrt{A}	0.50 $\sqrt{K_T r_0^5}$	6.90 $\sqrt{K_T \rho h^5}$

TABLA 2

ALGUNOS VALORES DE LAS CONSTANTES ELÁSTICAS

FORMA DE LA BASE	MODO DE VIBRACION			
	vertical	horizontal	cabeceo	torsión
Circular	$\frac{4}{1-\nu} Gr_0$	$5.8\pi \frac{(1-\nu^2)}{(2-\nu)^2} Gr_0$	$2.7 Gr_0^{3*}$	$\frac{16}{3} Gr_0^{3**}$
Rectangular ¹⁸	$\frac{E}{1-\nu^2} c_s \sqrt{A}^+$	$\frac{E}{1-\nu^2} k_T \sqrt{A}^+$	$\frac{E}{1-\nu^2} k_\phi \frac{I}{\sqrt{A}}^+$	$\frac{1.5 E}{1-\nu^2} k_T \sqrt{A}$

*Sólo se presenta el valor de K_c correspondiente a $\nu = 0$.

** El valor de K_T para base circular es independiente de ν .

+ Los valores de c_s , k_T y k_ϕ se presentan en las tablas 3, 4, y 5, respectivamente para algunos valores de la relación largo/ancho.

aplicados sobre la superficie del terreno, se producen rotaciones de la misma, así que el acoplamiento no debe ignorarse.

Finalmente es de notarse que en un análisis modal que tome en cuenta la intersección con el terreno los modos naturales de vibración no son rigurosamente ortogonales. Mientras la participación del terreno no gobierne en forma pronunciada el comportamiento, la falta de ortogonalidad no afecta seriamente las respuestas sísmicas para fines de diseño. En cambio, si debe tenerse en cuenta en el cálculo de los modos naturales

de vibración, sobre todo cuando se acude a métodos numéricos que hacen uso de esta propiedad.

Algunos valores de las constantes elásticas de los elementos flexibles obtenidas a partir de la teoría de la elasticidad para los modos de vibración considerados y diferentes formas de la base se consignan en la Tabla 2.

TABLA 3

VALORES DEL COEFICIENTE c_s

(Según Barkan, ref. 18)

Relación largo/ancho	c_s
1.0	1.06
1.5	1.07
2.0	1.09
3.0	1.13
5.0	1.22
10.0	1.41

TABLA 4

VALORES DEL COEFICIENTE k_T

(Según Barkan, ref. 18)

(Desplazamiento horizontal en la dirección paralela al lado a)

ν	Relación a/b							
	0.5	1.0	1.5	2.0	3.0	5.0	10.0	
0.1	1.040	1.000	1.010	1.020	1.050	1.150	1.250	
0.2	0.990	0.938	0.942	0.945	0.975	1.050	1.160	
0.3	0.926	0.868	0.864	0.870	0.906	0.950	1.040	
0.4	0.844	0.792	0.770	0.784	0.806	0.850	0.940	
0.5	0.770	0.704	0.692	0.686	0.700	0.732	0.940	

TABLA 5

VALORES DEL COEFICIENTE k_ϕ

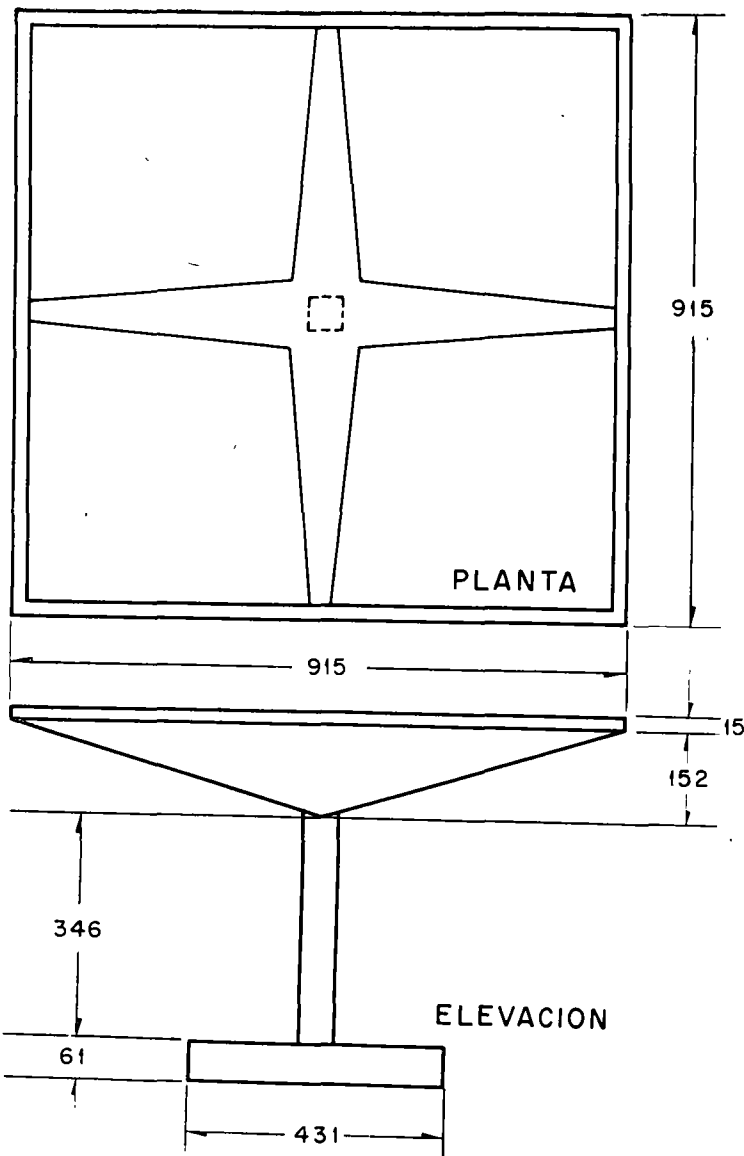
(Según Barkan, ref. 18)

(Cabeceo respecto al eje paralelo al lado largo)

largo/ancho	k_ϕ
1.0	1.984
1.5	2.254
2.0	2.510
3.0	2.955
5.0	3.700
10.0	4.981

3. EJEMPLO DE APLICACION

Para ilustrar la forma de aplicación de los resultados obtenidos con el modelo propuesto, se resolverá el problema presentado en la ref. 20. Dicho problema consiste en calcular las frecuencias, modos de vibración y respuestas sísmicas de un péndulo invertido (fig. 6) tomando en cuenta la intersección dinámica suelo-estructura y la inercia rotacional de la cubierta. La solución difiere de la presentada en la ref. 20 principalmente en que se introducirán dos grados de libertad adicionales al tomar en cuenta la masa y el momento de inercia de la losa de cimentación. Los parámetros del suelo de cimentación son: $\rho = 0.112$ ton seg^2/m^4 , $\nu = 0.5$ y $G = 166$ ton/ m^2 . Utilizando las expresiones propuestas se obtiene: $K_H = 2097$ ton/m, $C_H = 67.80$ ton seg/m , $K_C = 8040$ ton m, $C_C = 40.86$ ton seg/m , $M_1 = 0.34$ ton seg^2/m e $I_1 = 4.67$ ton seg^2/m . Los parámetros de la estructura son²⁰: distancia del centro de



$L =$	4.19 m
$L' =$	4.80 m
$I =$	13.86 ton seg ² m
$W =$	20.45 ton
$m =$	2.08 ton seg ² /m
$W' =$	43.6 ton
$M_0 =$	2.2 ton seg ² /m
$I_0 =$	3.03 ton seg ² m
$I_A =$	$1.065 \times 10^{-2} m^4$
$k =$	1266 ton/m
$k_r =$	7410 ton m/rad
$\theta =$	0.358 rad/m
$\delta =$	2.08 m
$\rho =$	0.112 ton seg ² /m ⁴
$\nu =$	0.5
$G =$	166 ton/m ²
$K_H =$	2097 ton/m
$C_H =$	67.80 ton seg/m
$K_C =$	8040 ton m
$C_C =$	40.86 ton seg/m

Fig. 6. Cascarón utilizado para ejemplo (Después de R. McLean)

gravedad de la cubierta a la base de la columna, $L = 4.19$ m; distancia de dicho centro a la base de la cimentación, $L' = 4.80$ m; momento de inercia de la masa de la cubierta respecto al eje de cabeceo, $I_m = 13.86$ ton seg²/m; peso de la cubierta, $W = 20.45$ ton; masa de la cubierta, $m = 2.08$ ton seg²/m; peso de la estructura, $W' = 43.6$ ton; momento de inercia centroidal principal de la sección transversal de la columna, $I_A = 1.065 \times 10^{-2} m^4$; rigidez por traslación de la columna, $k = 1266$ ton/m; rigidez por flexión de la columna, $k_r = 7410$ ton m/rad; rotación al nivel del centro de gravedad, debida a una fuerza horizontal de valor k , $\theta = 0.358$ rad/m; desplazamiento lateral del centro de gravedad debido a un momento de valor k_r aplicado en dicho punto, $\delta = 2.08$ m; $M_0 = 2.2$ ton seg²/m; $I_0 = 3.03$ ton seg² m. (Para la obtención de k , k_r , θ y δ véase la ref. 20.)

Para el cálculo de los modos y frecuencias de vibración, se empleó una extensión del método propuesto en ref. 20. La extensión consiste en tomar en cuenta los dos grados de libertad adicionales debidos a la masa y a la inercia de la losa de cimentación. La solución se llevó a cabo mediante una tabulación, en la cual x es el desplazamiento del centro de gravedad, ε su rotación, x_0 el desplazamiento de la cimentación, ε_0 su giro; x_1 y ε_1 desplazamiento y rotación del centro de gravedad debido a la flexibilidad de la columna y x_2 es el desplazamiento de dicho centro debido a la rotación de la cimentación como cuerpo rígido.

Después de varios ciclos se llegó a $\omega_1 = 9.07$ rad/seg, $T_1 = 2\pi/\omega_1 = 0.692$ seg, $\bar{X}_1^T =$ vector modal traspuesto = $[4.36 \ 1 \ 0.39 \ 0.64]$.

Para el cálculo del segundo modo, utilizando los conceptos antes mencionados se obtuvo

$$\omega_2 = 25.3 \text{ rad/seg}, T_2 = 0.248 \text{ seg.}$$

$$\bar{X}_2^T = [1.26 \quad -1 \quad 3.73 \quad -0.26]$$

La respuesta sísmica se calculó tomando en cuenta solamente los dos primeros modos. La manera de introducir los modos restantes es obvia, mas cabe suponer que el efecto de estos será despreciable.

La respuesta sísmica se obtuvo utilizando el espectro de respuesta propuesto en el Reglamento del Distrito Federal²¹ para la zona de alta compresibilidad. Dicho espectro lleva implícito un amortiguamiento total de la estructura. En el caso particular considerado el porcentaje de amortiguamiento se encuentra comprendido entre 2 por ciento correspondiente a la estructura y 34 por ciento obtenido como si esta fuese un cuerpo rígido y el amortiguador tuviese la constante C_H .

Los coeficientes de participación para la respuesta sísmica¹⁴ son

$$r_n = \frac{\bar{X}_n^T \bar{M} \bar{i}}{\bar{X}_n^T \bar{M} \bar{X}_n}$$

en la que \bar{i} es un vector que representa los desplazamientos estáticos de cada grado de libertad de la estructura inducidos por un desplazamiento estático unitario de la base.

En nuestro caso,

$$\bar{i}^T = [1 \quad 0 \quad 1 \quad 0]$$

La respuesta máxima en cada uno de los modos será^{14, 20}

$$\bar{R}_n = \left\{ \begin{array}{c} V_{cn} \\ M_{cn} \\ V_{bn} \\ M_{bn} \end{array} \right\} = r_n \bar{M} \bar{X}_n A_n$$

donde \bar{R}_n es el vector de las respuestas en el modo n ésimo cuyas componentes son la fuerza y el momento en la cubierta, V_{cn} y M_{cn} respectivamente y la fuerza y el momento en la losa de cimentación, V_{bn} y M_{bn} respectivamente y A_n es la ordenada del espectro de aceleraciones afectada del coeficiente sísmico correspondiente²¹. En nuestro caso dicho coeficiente vale 0.15.

Los resultados obtenidos fueron

$$\bar{R}_1^T = [1.995 \text{ ton} \quad 3.049 \text{ ton m} \quad 1.792 \text{ ton} \quad 1.084 \text{ ton m}]$$

$$\bar{R}_2^T = [0.548 \text{ ton} \quad -2.897 \text{ ton m} \quad 1.980 \text{ ton} \quad -0.418 \text{ ton m}]$$

La respuesta total se obtiene utilizando el criterio propuesto en la ref. 22, según el cual

$$V_c = \sqrt{V_{c1}^2 + V_{c2}^2}, M_c = \sqrt{M_{c1}^2 + M_{c2}^2}, \text{ etc.}$$

Los resultados son

$$V_c = 2.30 \text{ ton}, M_c = 4.21 \text{ ton m},$$

$$V_b = 2.67 \text{ ton}, M_b = 1.16 \text{ ton m}$$

En la fig. 7a se resumen los resultados y se comparan con los de la fig. 7b obtenidos en la ref. 20. Se observa que las respuestas son muy parecidas y es seguro que al tomar en cuenta los dos modos faltantes la respuesta del caso (a) será un poco mayor.

Los resultados de este ejemplo, en el que se consideraron masas y momentos de inercia virtuales, difieren poco de los obtenidos en la ref. 20 en la cual no se tomaron en cuenta dichos parámetros. Esto se debe a que la gran flexibilidad de la estructura juega un papel importante en la respuesta. Es fácil imaginar casos en los cuales ello no sucede.

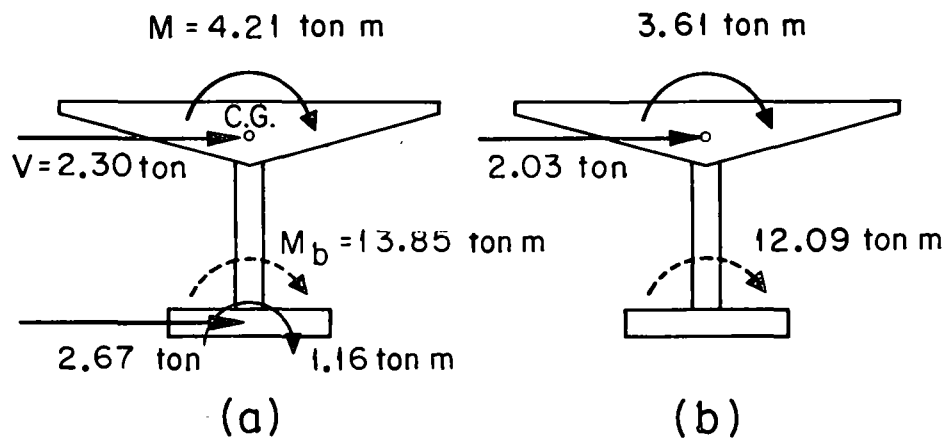


FIG. 7. Comparación de las respuestas sísmicas. a) Incluyendo masa virtual del suelo. b) Despreciando la masa virtual del suelo

REFERENCIAS

1. Nieto, J. A. y Reséndiz, D., "Interacción dinámica entre subsuelo y estructura: una revisión del problema", Primer Congreso Nacional de Ingeniería Sísmica, Guadalajara (1965).
2. Reissner, E., "Stationäre, Axialsymmetrische durch eine Schüttelnde Masse Erregte Schwingungen eines Homogenen Elastischen Halbraumes", Ingenieur-Archiv., 7 (1936), 381-396.
3. Sung, T. Y., "Vibrations on semi-infinite solids due to periodic surface loading", Symp. on Dynamic Testing of Soils, ASTM Special Technical Publication No. 156 (1953), 35-63.
4. Arnold, R. N., Bycroft, G. N. y Warburton, G. B., "Forced vibrations of a body on an infinite elastic solid", Journ. of Appl. Mechs., 22, 3 (sep. 1955), 391-400.
5. Richart, F. E. Jr., "Foundation vibrations", Trans. ASCE, 127, Part. 1 (1962), 863-925.
6. Chae, Y. S., "Dynamic pressure distribution at the base of a rigid footing subjected to vibratory loads", Tesis doctoral, Univ. de Michigan (1964).
7. Lysmer, J., "Vertical motion of rigid footings", Tesis doctoral, Univ. de Michigan (1965).
8. Crockett, J. H. A. y Hammond, R. E. R., "The natural oscillation of ground and industrial foundations", Memorias del 2o. Congr. Internac. de Mec. de Suelos e Ingeniería de Cimentacs., 3 (1948), 88-93.
9. Merritt, R. G. y Housner, G. M., "Effect of foundation compliance on earthquake stresses in multistory buildings", Bull. Seism. Soc. of Amer., 44, 4 (oct. 1954), 551-570.
10. Thomson, W. T., "A survey of the coupled ground-building vibration", Memorias del 2o. Congr. Mundial de Ing. Sism., Japón (1960), 2, 833-847.
11. Lycan, D. y Newmark, N. M., "Effect of structure and foundation interaction", Journal E. M. Div. ASCE, 87, EMS (oct. 1961), 1-32.
12. Fleming, J. F., Screwvala, F. N. y Kondner, R. L., "Foundation-superstructure interaction under earthquake motion", Memorias del 3er. Congr. Mundial de Ing. Sism., Nueva Zelandia (1965), Tema 1, Trabajo 1/F/9.
13. Balakrishna Rao, H. A., "A simplified method for computing resonant frequency of square footings", Proc. Memorias del 2o. Simp. de Ing. Sism., Roorkee, India (1962).
14. Newmark, N. M. y Rosenblueth, E., "Earthquake Engineering", a ser publicado por Prentice-Hall, Inc.
15. Koboxi, T., "Dynamical response of rectangular foundation on an elastic space", Proc. Japan Natl. Symp. on Earthquake Engr. (1962), 81-86.
16. Newmark, N. M., "Influence charts for computation of vertical displacements in elastic foundations", Univ. de Illinois, Engineering Experiment Station, Bulletin No. 367, 44, 45 (nov. 1942).
17. Cerruti, V., Roma, Acc. Lincei, Mer. Fis. Mat. (1882) (ver también E. H. Love, "A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity", Dover Publications 241-243).
18. Barkan, D. D., "Dynamics of Bases and Foundations", McGraw-Hill Book Company, Inc. (1962).
19. Olagaray, C., "Integración de las soluciones de Bousinesq y Cerruti en una región rectangular", Manuscrito inédito, Inst. de Ing., UNAM (1965).
20. Rascón, O. A., "Efectos sísmicos en estructuras en forma de péndulo invertido", Memorias del 1er. Congr. Nacional de Ing. Sism., Guadalajara, México (1965).
21. Rosenblueth, E. y Esteva, L., "Folleto complementario. Diseño sísmico de edificios", Ediciones Ingeniería, México (1962).
22. Rosenblueth, E., "Some applications of probability theory in aseismic design", Memorias del 1er. Congr. Mundial de Ing. Sism., Berkeley, Cal. (1956).





bulletin

of the International Association
for Shell Structures

n. **41**

offprint

Congress of Mexico. The application of shell structures

General Report. Theme IV

P. BALLESTEROS

secretariat: Alfonso XII, 3 - Madrid-7 (Spain)

The results determined by the authors confirm those previously obtained by: Rabich and Krätzig in Germany, Scriven and Albasiny in England and Layrange in France. The order of magnitude of the error obtained in the theory is not exactly known, because we introduce the hypotheses of

$$M_{\theta\theta} = M_{\theta\theta} \quad ; \quad N_{\theta\theta} = N_{\theta\theta} \quad ; \quad Q_{\theta} = Q_{\theta} = 0 ,$$

but if we do not introduce these hypotheses, it could be not possible actually to solve the problem.

The authors have presented an excellent contribution to applied mechanics as well as to shell structures practice.

Simplified calculation of membrane stresses in a conical concrete roof type «shells».

Arq. Jorge MOLINA MONTES (Mexico)

The author, in a reversed conical shell, studies the membrane stresses considering the equilibrium of the differential shell element in cylindrical coordinates and later he checks the values utilizing overall the membrane equilibrium under load conditions and revolution support.

comment

Prof. Dr. A. M. HAAS

I shall make a comment about the comparison between the investigations performed by Harrestin and others on critical load. In the figure in which this comparison was stated there was a curve derived from an investigations on type of double curvature shell that was not a sphere.

Prof. Dr. Porfirio BALLESTEROS

That curve was derived from investigation on elliptic paraboloidal shell of rectangular plant, but this surface is equivalent to spherical surface. This kind of shell is in the conditions of Lower limit of critical load, because they are supported at the four corners and they are more closer to the lower limit.

Prof. Dr. A. M. HAAS

I really think, that it would not really be compared directly with the spherical investigations.

Reprint of

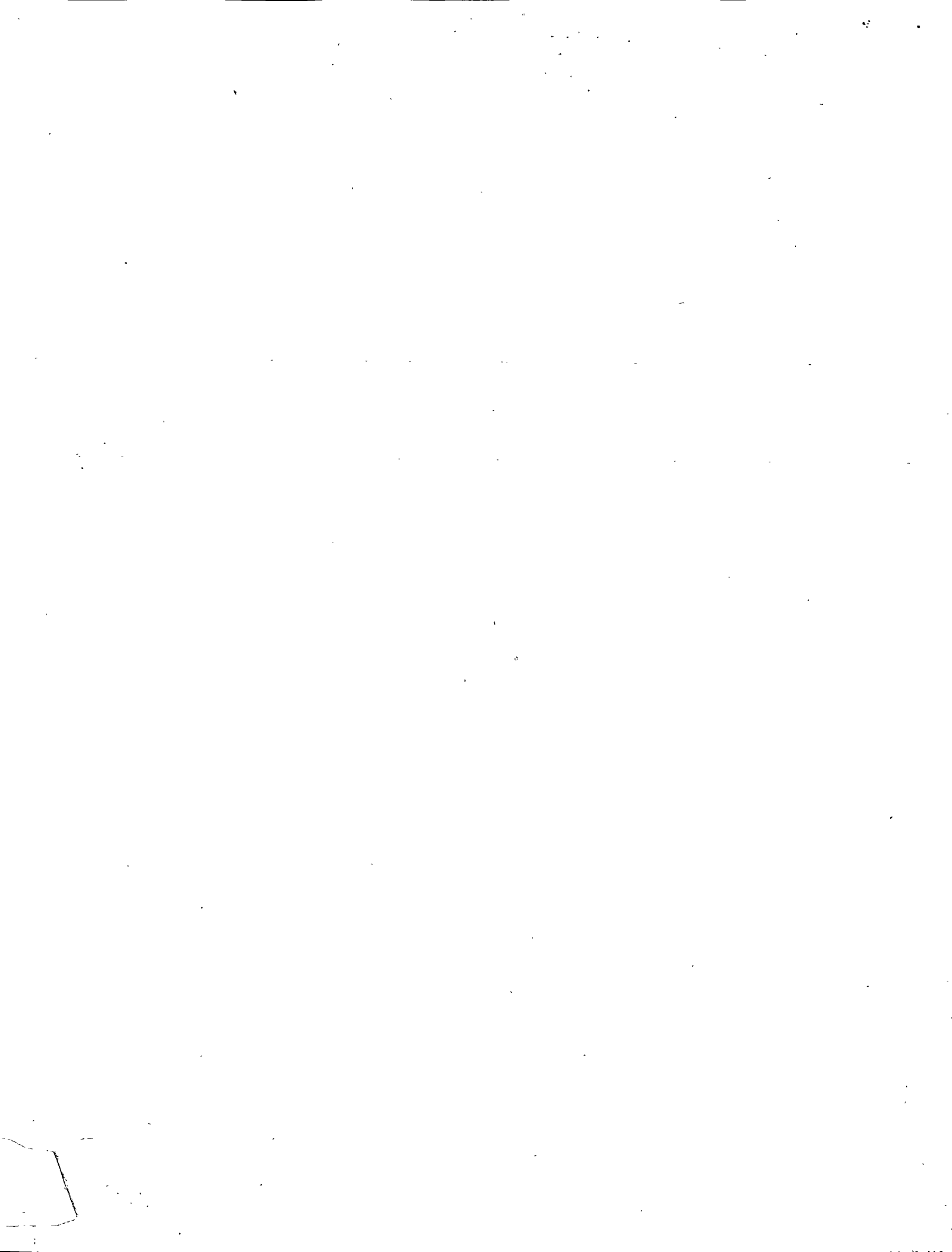
PROCEEDINGS OF THE WORLD CONFERENCE OF SHELL STRUCTURES

STRESS ANALYSIS AND DESIGN OF OUR LADY OF FATIMA CHURCH

BY

PORFIRIO BALLESTEROS

OCTUBRE
SAN FRANCISCO,
CALIFORNIA



PROCEEDINGS

WORLD CONFERENCE ON
SHELL STRUCTURES

OCTOBER 1-4, 1962
SAN FRANCISCO
CALIFORNIA

PRESENTED BY

UNIVERSITY OF CALIFORNIA
BERKELEY

INTERNATIONAL ASSOCIATION FOR SHELL STRUCTURES
MADRID

BUILDING RESEARCH ADVISORY BOARD
NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES - NATIONAL RESEARCH COUNCIL
WASHINGTON, D. C.

EDITORIAL COMMITTEE

S. J. MEDWADOWSKI
CHAIRMAN

WILLIAM R. DAWSON

ROBERT M. DILLON

FRANK J. HEGER

JOE W. KELLY

HENRY J. LAGORIO

HUGH D. McNIVEN

TECHNICAL EDITOR

R. W. SPANGLER
BRAB

STRESS ANALYSIS AND DESIGN OF OUR LADY OF FATIMA CHURCH

PORFIRIO BALLESTEROS

Structural Engineer, Monterrey, Mexico

INTRODUCTION

In the Catholic religion, the Church is the Mystical Body of Christ. Since Christ is the Head of the Church and since Catholics are members of the same body, there exist two component parts. The Head of the Church is placed precisely in the sanctuary in that section set off at the presbyterium or the part proper to the presbyter, the priest. Then comes the nave or ship of the transient dwelling of God, and this is the section appropriate to the members of the Mystical Body which Christ founded.

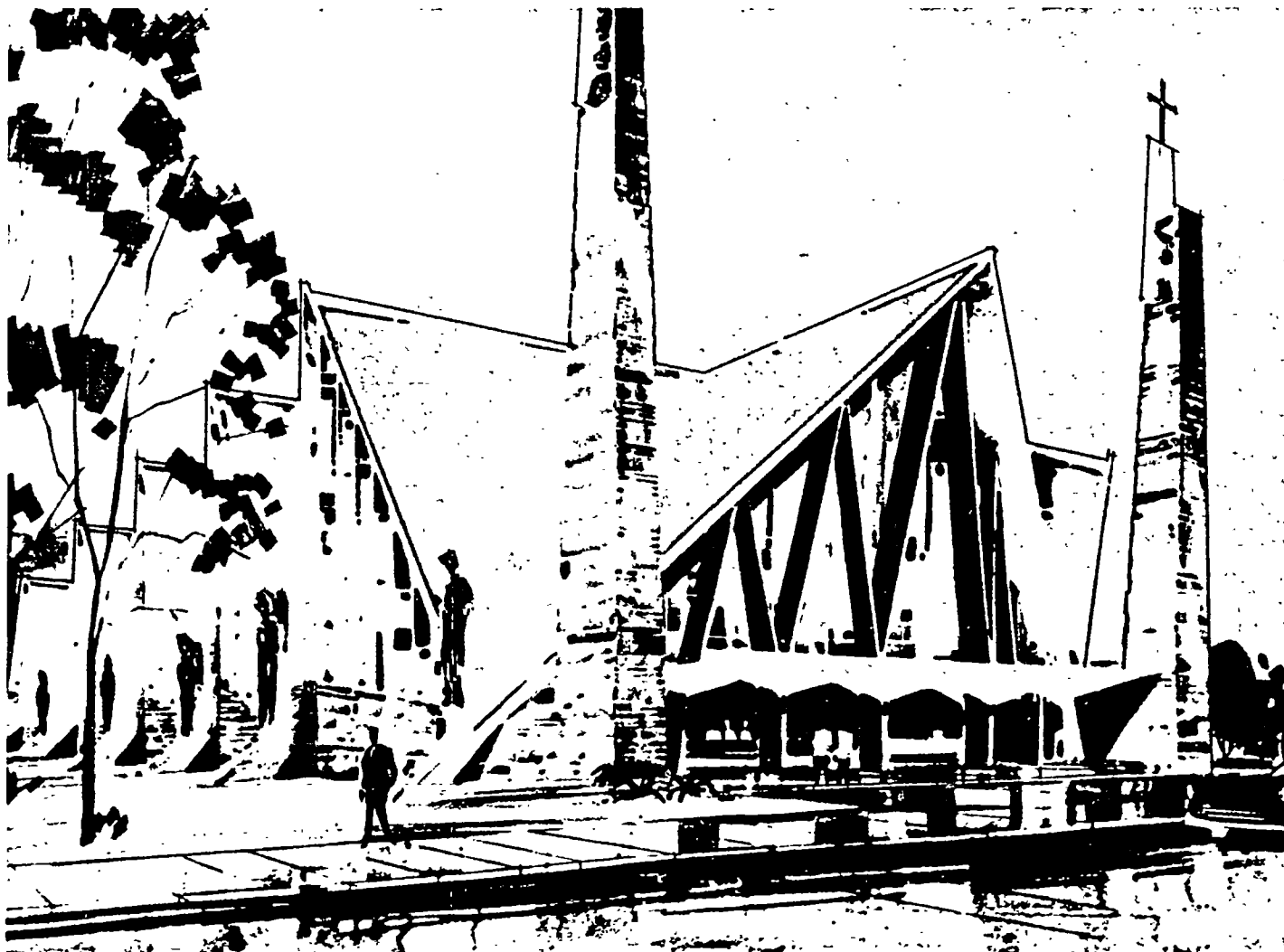
The Church that He founded was formed of His Redemption; it had its birth in His death the symbol of which is the Cross. It is the Cross which dominates the entire structural concept. It is made manifest by the crossing of the two main border beams AN and GF (Figures 3 and 4), that is to say, the longitudinal axis at the center and upper part with the transverse axis FG .

At the time Christ died and the Holy Spirit came to dwell in the Body of the Church, Christ founded His Church as said above with Himself as Head and with twelve

ABSTRACT

Hyperbolic paraboloidal shells of wide span for the structure of Our Lady of Fatima Church at Monterrey, Mexico, have recently been designed by the author and are now under

Our Lady Of Fatima Church.



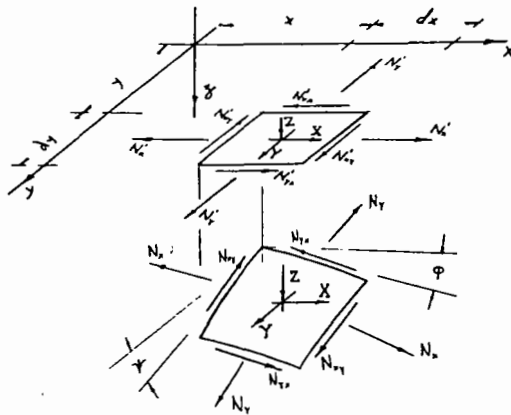


Figure 1. Shell element of arbitrary shape and its projection on the x, y plane.

construction with the author in charge.

In the shells EFGH and IJKL (Figures 3 and 4), numerical values for the membrane stresses were determined analytically, and in the shells ABCD and MNOP, they were found by relaxation procedures. Since this theory is well established, only the results of the calculations as in Figures 2 through 7 are shown. The order of magnitude of the critical load is discussed. All the important design and construction details are presented.

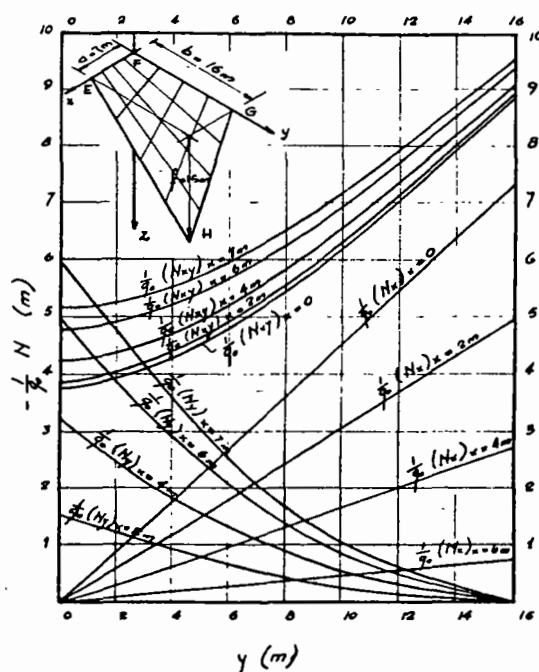


Figure 2. Stresses in shell EFGH.

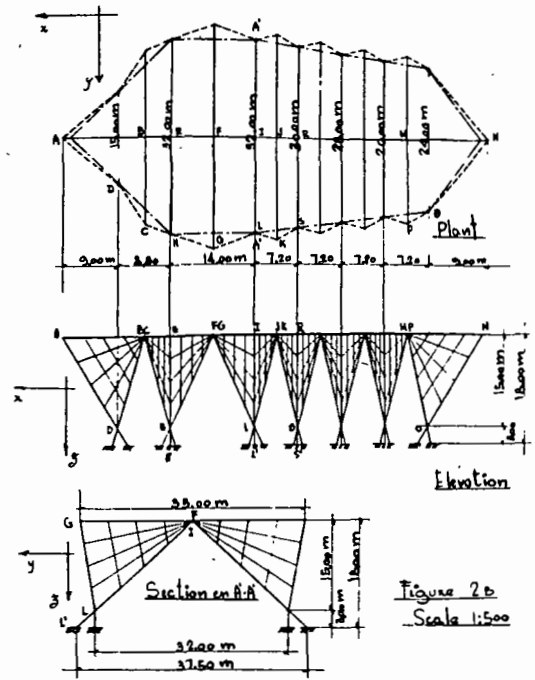


Figure 4. Structure projection.

Apostles, members upon whom rested the responsibility of teaching His doctrine. Twelve supports will hold the nave ($H, L, S, \dots O$), and they will serve as pedestals for twelve sculptures representing each of the Apostles. The increase in the transverse spaces BC, FG, JK, \dots, MP , will tend to bring closer to Him these members of the Christ in the presbyterium and also to solve the illumination problem which has been designed to carry the light toward the sanctuary.

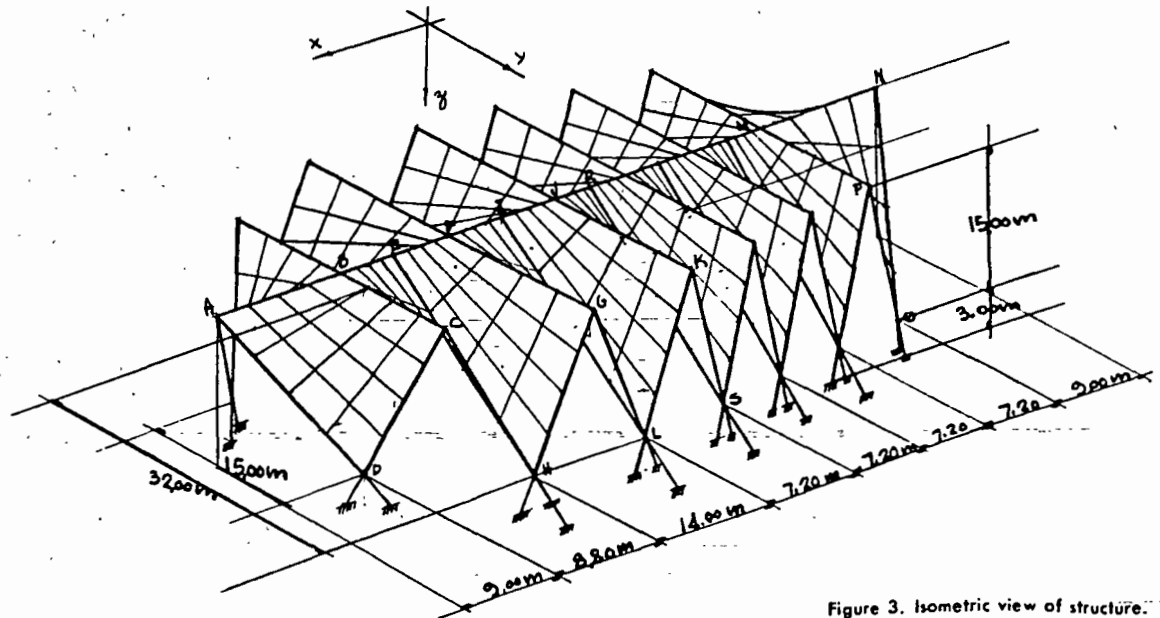


Figure 3. Isometric view of structure.

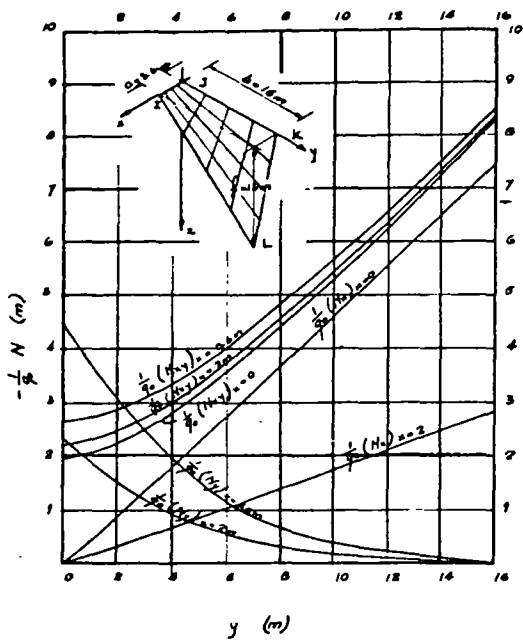


Figure 5. Stresses in shell IJKL.

The cantilever at end A tends to cover the altar, and the cantilever at end N serves to cover the portic, the narthex, and the choir.

ORDER OF MAGNITUDE OF CRITICAL LOAD

Since there is a portion of the shells IJKL and EFGH that is almost plane, it was useful to know the buckling load of the equivalent simply supported rectangular plate compressed in two perpendicular directions, and also the corresponding buckling of the same plate under the action of shearing stresses. These values are shown in Figure 7.

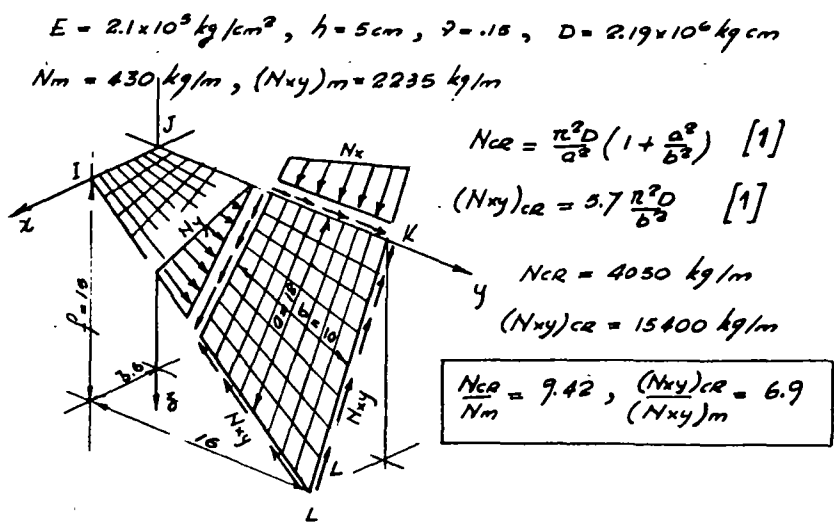


Figure 7. Order of magnitude of critical load.

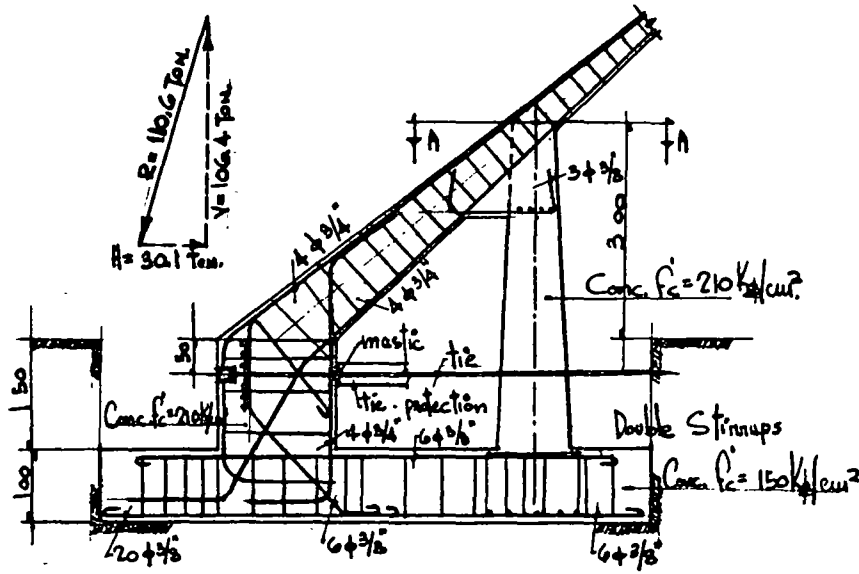


Figure 6. Shearing stress at boundary in shell ABCD.

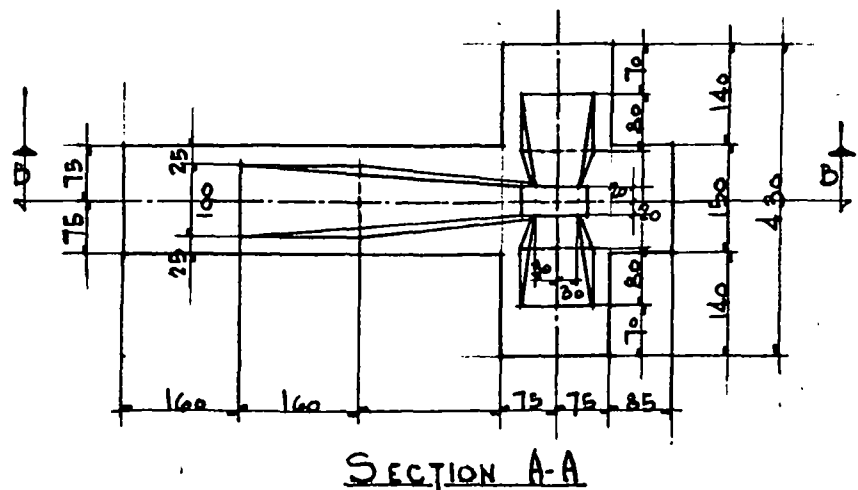
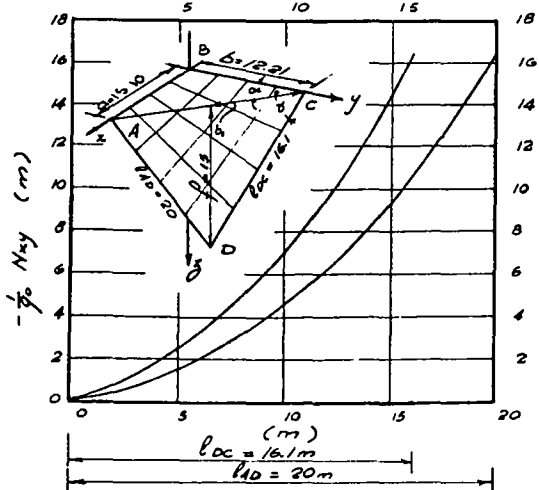


Figure 8. Typical support.

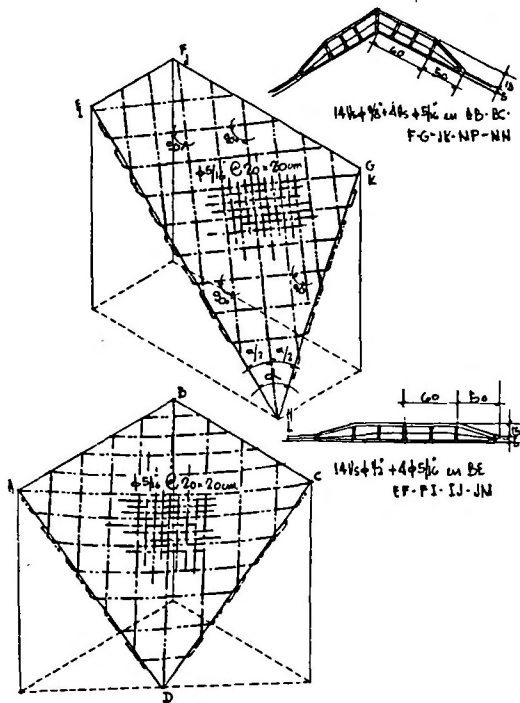


Figure 9. Reinforcing steel in shells (isometric views).

DESIGN AND CONSTRUCTION DETAILS

In the typical support shown in Figure 8, the static analysis was made such that the resultant force is vertical and it goes through the centroidal point of the contact section; the figure is explanatory in itself. The reinforcement of the shells is shown in Figure 9.

ACKNOWLEDGEMENTS

With sincere gratitude, the writer wishes to thank architect Eduardo Padilla for the architectural project of the Church. Grateful acknowledgement is also extended to Mr. Edgardo Taroco of Montevideo, Uruguay, for doing most of the numerical work and to Mr. Gregorio Cruz for doing the structural drawings of this project.

SUPPLEMENTARY NOTATION

h shell thickness
 a, b, f shell dimensions (length, width, rise)

E	modulus of elasticity
ν	Poisson's ratio
D	flexural rigidity [$Eh^3/12(1 - \nu^2)$]
X, Y, Z	components of surface load per unit area
N_x, N_y, N_{xy}	normal and shearing forces per unit distance in middle surface of shell
N_{cr}	critical force per unit distance in the middle surface of shell
A, B, C, \dots	constants
γ	weight per unit volume
g_0	weight per unit area of shell (γh)
F	stress function

REFERENCES

- [1] Stephen P. Timoshenko and James M. Gere. *Theory of Elastic Stability*, McGraw-Hill, 1961.
- [2] A. L. Parme. "Shells of Double Curvature," *Transactions ASCE*, Vol. 123, 1958, pp. 989-1025.
- [3] Shisuo Ban. "Deformation of Hyperbolic Paraboloid Shells," *Publications, International Assn. for Bridge and Structural Eng.*, Zurich, Vol. 13, 1953, p. 1.
- [4] R. S. Jenkins. "Theory of New Forms of Shell," Paper No. 7, Symposium on Concrete Shell Roof Construction, Cement and Concrete Assn., London, July 1952.
- [5] I. Fytos. "Hyperbolic Paraboloid Shells," *Technika Chronika*, Athens, Vol. 26, Nos. 295-296, 1949, pp. 35-44.
- [6] M. P. Borkowski. "Doubly Curved Thin Slab Structures," *Translation No. 31*, Cement and Concrete Assn., London, 1951.
- [7] A. Pucher. "Calculations for Shells of Double Curvature Using Differential Equations," *Bauingenieur*, Vol. 18, 1937, p. 118.
- [8] F. Aimond. "Treatise on Statics of Parabolic Hyperboloidal Shells not Stiff in Bending," *Publications, Intl. Assn. for Bridge and Structural Eng.*, Zurich, Vol. 4, 1936, p. 1.
- [9] B. Laffaille. "General Investigation Concerning Skew Surface Shells," *Publications, Intl. Assn. for Bridge and Structural Eng.*, Zurich, Vol. 3, 1935, p. 295.
- [10] B. Laffaille. "Thin Shells in the Shape of Hyperbolic Paraboloids," *Le Genie Civile*, Paris, Vol. 104, 1934, pp. 409-410.

instituto mexicano del cemento y del concreto, a. c.

**relato general del tema IV
métodos prácticos para el
análisis de estructuras laminares**

Por

PORFIRIO BALLESTEROS

**Sobretiro de la Memoria del Congreso Internacional sobre la
Aplicación de Estructuras Laminas en Arquitectura**

IASS-IMCYC

Septiembre 3-7 de 1967

México

MEXICO, D. F.

1969

relato general del tema IV

métodos prácticos para el

análisis de estructuras laminares

PORFIRIO BALLESTEROS*

Los trabajos presentados en este tema son los siguientes:

The supporting frames of cylindrical north-light shells

Amin Ghali (Canadá)

Umbrella hyperbolic paraboloidal shell

Carlos A. Brebbia (Argentina)

Contribution to a simplified calculation of thin elastic shallow shells having a positive gaussian curvature index

H. Hotzler (Berlín)

On the design of uniformly loaded spherical caps based on a load buckling analysis

Donald E. Milks and Howard P. Harrenstien (USA)

Stresses in hyperboloids of revolution

P. L. Gould and S. L. Lee (USA)

Cálculo simplificado de los esfuerzos de membrana en una cubierta de concreto tipo cascarón en forma de cono

Arq. Jorge Molina Montes (México)

The supporting frames of cylindrical north-light shells

Amin Ghali (Canadá)

El autor ha presentado un análisis de esfuerzos de la estructura de soporte de cascarones cilíndricos apoyados en los extremos con abertura de iluminación. Considera los efectos de temperatura y establece que sólo son necesarias las juntas de dilatación en los muros de apoyo, Fig. 1.

Para el análisis de esfuerzos utiliza los procedimientos de energía de deformación, transporta los ejes de referencia al centro elástico de la estructura, las ecuaciones si-

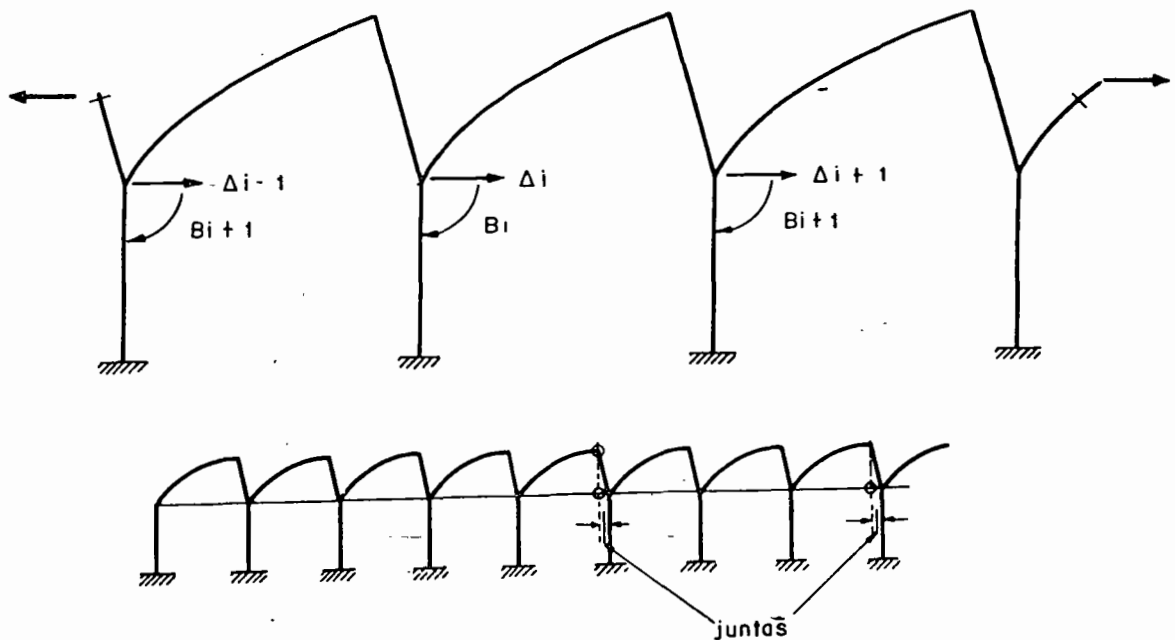
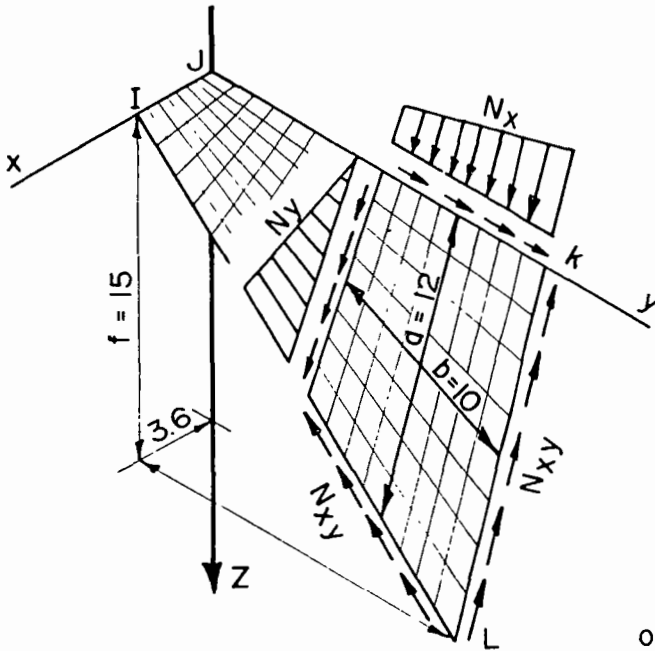


Fig. 1

* Doctor en Ingeniería. Profesor, Ingeniería Civil, Universidad de Nuevo León. Ingeniero Consultor, Monterrey, México.

$$E = 2.1 \times 10^6 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}; h = 5 \text{ cm}; \nu = 0.15; D = 2.19 \times 10^6 \text{ kg cm}$$

$$Nm = 430 \frac{\text{kg}}{\text{m}}; (N_{xy})_m = 2.235 \frac{\text{kg}}{\text{m}}$$



$$N_{CR} = \frac{r^2 D}{a^2} \left(1 + \frac{a^2}{b^2}\right) \quad (1)$$

$$(N_{xy})_{CR} = 5.7 \frac{r^2 D}{b^2} \quad (1)$$

$$N_{CR} = 4050 \frac{\text{kg}}{\text{m}}$$

$$(N_{xy})_{CR} = 15.400 \frac{\text{kg}}{\text{m}}$$

$\frac{N_{CR}}{Nm} = 9.42; \frac{(N_{xy})_{CR}}{(N_{xy})_m} = 6.9$
--

orden de magnitud
de la carga crítica

Fig. 2

multáneas resultantes, las expresa en forma matricial. En realidad este trabajo no tiene nada que ver con el análisis de cascarones, se refiere a la solución de una estructura indeterminada de alto orden.

Existe gran incertidumbre al calcular las cargas que trasmite el cascarón a la estructura de soporte, basándose sólo en la teoría de vigas.

Umbrella hyperbolic paraboloidal shell

Carlos A. Brebbia (Argentina)

El autor expone que la teoría membranal de Aïmond, en los cascarones paraboloides hiperbólicos tipo paraguas, no respeta las condiciones de compatibilidad de deformaciones entre vigas de borde y cascarón.

En algunos casos el despreciarlo puede conducir a condiciones peligrosas.

Las pruebas de Rowe,¹ efectuadas en la Asociación del Cemento y Concreto de Londres, mostraron que los esfuerzos de fle-

xión son importantes en las proximidades del cascarón con la viga de borde.

Yu y Kriz¹ concluyeron que el análisis de esfuerzos de membrana es satisfactorio para propósitos de diseño. En este trabajo el autor analiza elásticamente la teoría de flexión por el procedimiento de desplazamientos elementales finitos. Muestra los resultados obtenidos por medio de computadoras electrónicas para diferentes relaciones de c/t , donde se observa la importancia en la distribución interna de esfuerzos. Concluye que para grandes valores de c/t , y bajo la acción de cargas verticales, domina el comportamiento de teoría de membrana, y para pequeños valores de c/t , la flexión. Calcula gráficas de diseño para una relación de Poisson de 0.15 y para valores de c/t comprendidos entre los 25 y 100.

Establece algunas consideraciones de estabilidad y estudia la flexión por cargas de viento.

Respecto a las condiciones de pandeo, es

¹ Referencias 1 y 2 citadas por el autor.

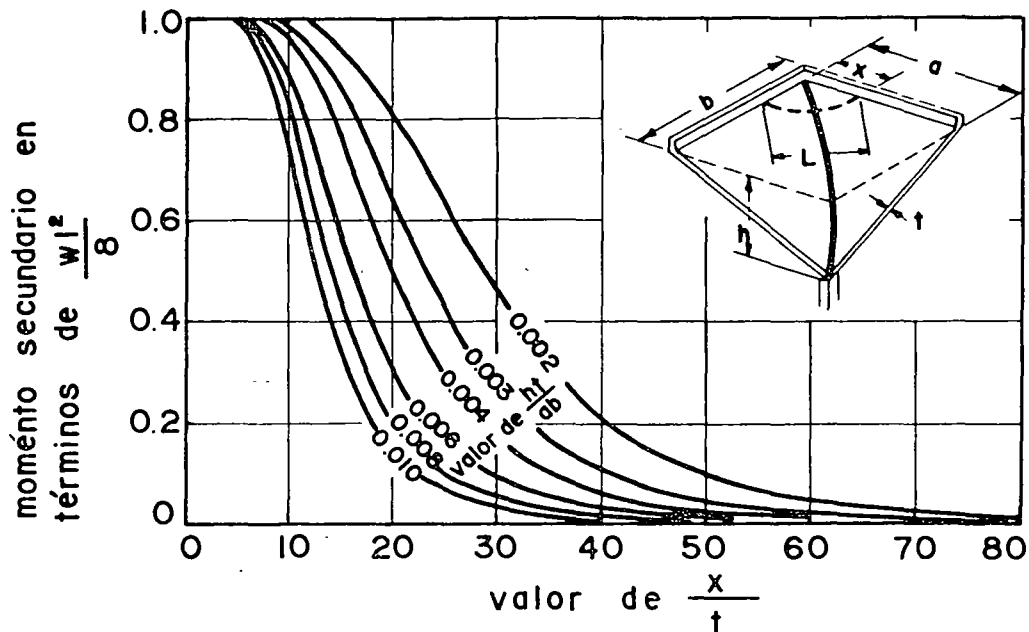


Fig. 3

importante mencionar que esta clase de superficies, debido a la curvatura Gaussiana negativa; tiene una gran capacidad de carga crítica. Sólo en algunos casos de cascarones muy aperlaltados es conveniente analizar el orden de magnitud de la carga normal y corte crítico, lo cual es posible hacer comparando la zona de menor curvatura con la placa equivalente comprimida en dos direcciones perpendiculares, y bajo la acción de esfuerzos de corte;² en la figura 2, se presenta un análisis de un cascarón aperlaltado, en el cual fue importante conocer el orden de magnitud de la carga normal y cortante crítico.³ La carga crítica en las vigas de borde de compresión, prácticamente no existe por estar éstas conectadas por medio del refuerzo a la superficie del cascarón.

A. L. Parme,⁴ presentó un estudio aproximado de esfuerzos de flexión en cascarones paraboloides hiperbólicos tipo paraguas. Considera la flexión de los arcos parabólicos que generan la superficie, independientemente uno del otro. Se considera que estos valores deben compararse con los presentados por el autor. En la figura 3 se presentan gráficamente los resultados de Parme.

El trabajo presentado por el autor es una excelente aportación de esfuerzos por medio de computadoras en cascarones paraboloides hiperbólicos.

Contribution to a simplified calculation of thin elastic shallow shells having a positive Gaussian curvature index

H. Hotzler (Berlín)

El autor presenta un procedimiento aproximado para determinar los momentos de flexión y torsión en las proximidades de los apoyos, en cascarones de doble curvatura positiva, las fórmulas que concluyen son prácticas y fáciles de aplicar.

Es importante mencionar que en este tipo de cascarones raras veces los esfuerzos de membrana originan dificultades en su diseño. El espesor nunca se determina en función de los esfuerzos membranales, generalmente es definido por los esfuerzos de pandeo, y en raras ocasiones por esfuerzos de flexión y temperatura. La determinación de esta clase de esfuerzos presenta dificultades matemáticas, pero existen soluciones aproximadas basadas en las suposiciones de Geckler,⁵ las cuales han sido establecidas dando valores adecuados para fines prácticos.

² Stephen P. Timoshenko and James M. Gere Theory of Elastic Stability, Mc.Graw Hill, 1961.

³ P. Ballesteros, "Proceedings of World Conference of Shells Structures, pp. 355-358, San Francisco, 1962.

⁴ A. L. Parme, Transactions ASCE, Vol. 126, pp. 1023-1025, 1956.

⁵ Stephen P. Timoshenko and James M. Gere Theory of Elastic Stability, Mc Graw Hill, 1961.

Esfuerzos de flexión debidos a las cargas. La discrepancia de los desplazamientos entre cascarón y vigas de borde origina perturbaciones de flexión en las proximidades de las vigas de borde, estos se determinan por medio del cilindro tangente equivalente. Se supone que el corte transversal toma la totalidad de la carga a través del arco de borde. Siendo R el radio de curvatura, q la carga por unidad de área, y h el espesor, el momento máximo en función de las hipótesis anteriores viene expresado por

$$M_{\text{máx}} = -0.289 q R h \quad (1)$$

valor que se abate rápidamente y tiende a cero a una distancia del arco de aproximadamente cuatro veces el espesor.

Flexión debida a temperaturas diferenciales entre el arco y cascarón. Si el cascarón se encuentra a una temperatura ΔT mayor que la de los arcos de borde, y si este estuviese libre, su desplazamiento radial sería

$$w = -\alpha R \Delta T \quad (2)$$

en el cual α es el coeficiente de expansión térmica del concreto.

La teoría de cascarones cilíndricos, considerando el cilindro tangente equivalente, prueba que si el desplazamiento definido por la fórmula (2) es prevenido por los arcos de borde, se inducen los siguientes cortantes y momentos entre arco de borde y cascarón, Fig. 4.

$$Q_T = \frac{\alpha E h k \Delta T}{R} \quad (3)$$

$$M_T = \frac{\alpha E h k^2 \Delta T}{2R} \quad (4)$$

en donde:

Q = cortante por unidad de longitud entre cascarón y arco de borde,

M = momento por unidad de longitud entre cascarón y arco de borde,

α = coeficiente de expansión térmica del concreto,

E = módulo de elasticidad del concreto,

h = espesor del concreto,

ΔT = diferencia de temperatura entre cascarón y arco de borde, y

$k = 0.76\sqrt{Rh}$.

El orden de magnitud de los valores definidos por (3) y (4), concluye que en la

práctica es imposible prever suficiente sección y refuerzo para tomar dichos valores, lo cual origina una rotación plástica en la conexión con los arcos de borde, y no afecta la estabilidad de la estructura, sólo es recomendable que los anclajes del arco de refuerzo entre viga de borde y cascarón sean adecuados.

Esfuerzos debidos a temperaturas diferencial entre las superficies interior y exterior del cascarón. El valor de estos esfuerzos se aproxima por medio del cascarón esférico equivalente, con un radio medio R , igual al promedio de los dos radios de curvatura principal, y se obtienen los siguientes valores:

$$\sigma_c = \frac{1}{2} \alpha E \left[1 - \frac{2}{3} \frac{h}{R} \right] \Delta T \quad (5)$$

$$\sigma_i = \frac{1}{2} \alpha E \left[1 + \frac{2}{3} \frac{h}{R} \right] \Delta T \quad (6)$$

Desde el punto de vista de diseño los esfuerzos definidos por (5) y (6) no requieren especial atención.

Se considera importante hacer una comparación numérica entre los valores anteriores y los propuestos por H. Hotzler.

La carga de pandeo se discute en la siguiente ponencia.

La aportación presentada por el autor es de gran importancia en el diseño de cascarones de curvatura gaussiana positiva.

On the design of uniformly loaded spherical caps based on a load buckling analysis

Donald E. Milks and Howard P. Harrenstien (USA)

Los autores basados en las tres ecuaciones de equilibrio y en las cuatro condiciones de deformación, planteadas por Eric Riessener,⁶ las resuelven por medio de una solución de serie de potencias, bajo las condiciones de borde de: No resistencia a la deflexión y rotación (momento meridional y esfuerzo normal cero), resistencia completa a la rotación y deflexión (rotación meridional y desplazamiento radial cero) y bajo la suposición intermedia de que el momento meridional y el desplazamiento radial son cero, establecen las condiciones de límite superior, intermedio e inferior de carga de pan-

⁶ Referencia 2 citada por los autores.

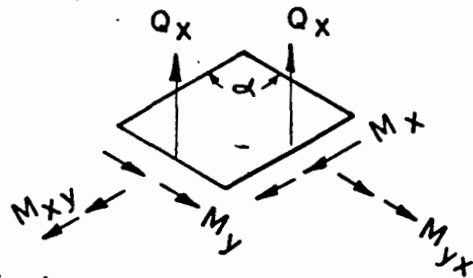
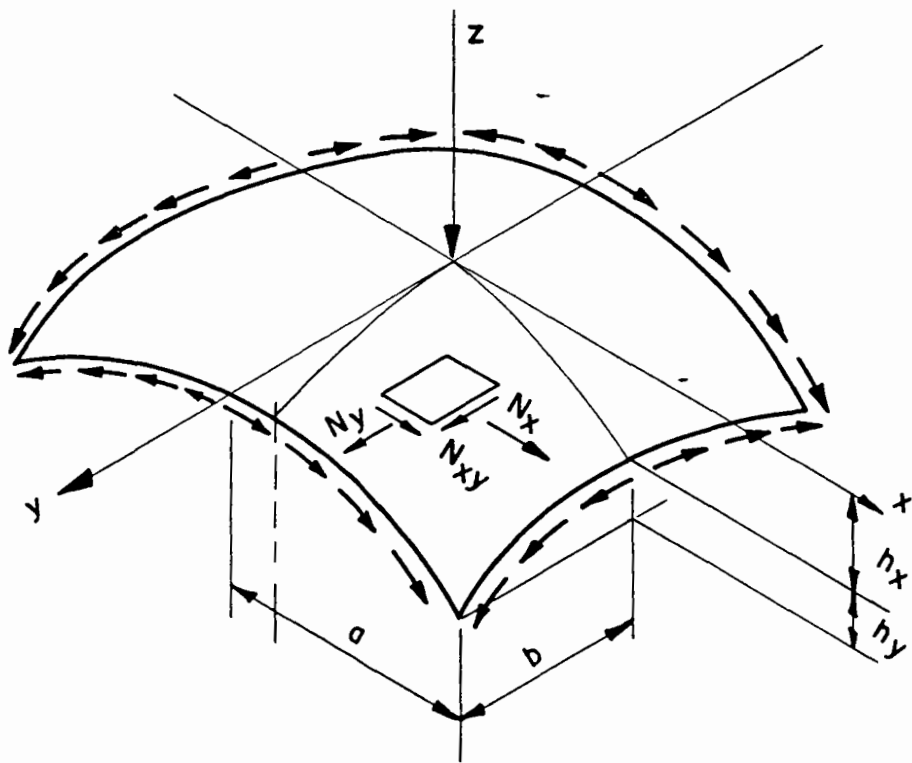
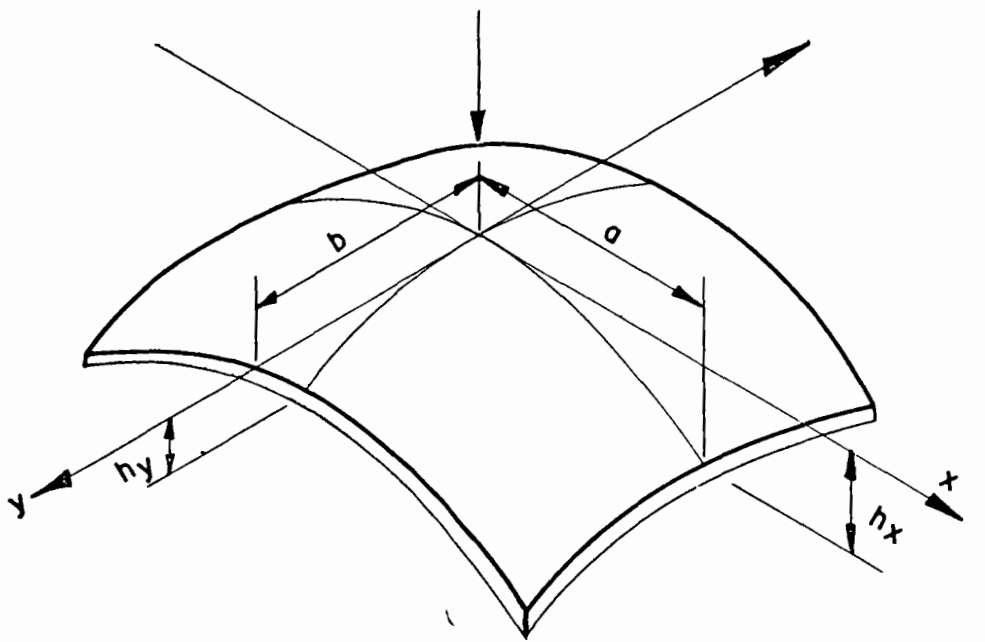


Fig. 4

deo para cascarones esféricos. Determinan valores numéricos para la carga crítica y verifican experimentalmente, en modelos de un material plástico, que los valores se encuentran entre los límites superior e inferior.

Es conveniente mencionar lo siguiente:

A. Van der Neut,⁷ determinó la siguiente expresión para la carga de pandeo de cascarones esféricos.

$$q_{CR} = \frac{2Et}{R(1-\nu^2)} \left[\sqrt{\frac{1-\nu^2}{3}} \frac{t}{R} - \frac{\nu t^2}{2R^2} \right] \quad (7)$$

En donde, E es el módulo de elasticidad, t el espesor, R el radio de curvatura y ν la relación de Poisson. La fórmula (7) para $\nu = 0.10$, y despreciando el término t^3/R^3 con respecto a $\frac{t^2}{R^2}$ se transforma en

$$q_{CR} = CE \left[\frac{t}{R} \right]^2$$

en la cual $C = 1.155$. El resultado anterior obtenido por medio de una teoría de primer orden, fue refinado posteriormente por Theodore von Kármán y H. S. Tsien;⁸ ellos probaron que el coeficiente C debe ser reducido a 0.312. Una experiencia de P. Csonka,⁹ ha probado que en cascarones de concreto, inclusive el menor de los valores anteriores es peligrosamente alto. Un cascarón paraboloide elíptico de planta regular, construido por Csonka en Budapest falló por pandeo dos años después bajo la acción de una carga excepcional de nieve. La experiencia anterior indujo a los investigadores a las evaluaciones límites superior e inferior de cargas de pandeo. Posteriormente, Eduardo Torroja, después de un estudio experimental en cascarones de concreto propone, como un valor seguro para el coeficiente C , a 0.05. A continuación se presenta una gráfica comparativa de los valores mencionados en la ponencia presentada por Milks y Harrenstien, Fig. 5.

Es de mencionarse que la aportación presentada por los autores es de gran importancia tanto desde el punto de vista de la mecánica aplicada como de la práctica relacionada con el diseño de cascarones.

Stresses in hyperboloids of revolution

P. L. Gould and S. L. Lee (USA)

Los autores, introduciendo variables auxiliares, la relación de Gauss Codazzi, desarrollando la carga que actúa en el cascarón por series de Fourier, transforman las ecuaciones generales de equilibrio de cascarones de revolución.

Primero, bajo las condiciones membranales, obtienen una ecuación diferencial no homogénea de segundo orden, cuya incógnita es una función del esfuerzo meridional. Consideran los casos de carga muerta, sísmica y viento. La solución de la ecuación diferencial para el caso particular de las torres de enfriamiento de superficie hiperboloide de revolución, la obtienen dividiendo el cascarón en segmentos horizontales, y las constantes de integración las determinan de las condiciones de borde referidas a la parte superior del cascarón, Fig. 6.

Para cada una de las condiciones anteriores presentan gráficas de diseño de gran utilidad práctica.

Para estudiar la flexión, transforman las ecuaciones de equilibrio, y compatibilidad de deformaciones, en un sistema de dos ecuaciones diferenciales de segundo orden en términos de variables complejas. Las resuelven bajo las condiciones de borde referentes a deformaciones y esfuerzos en el anillo superior del cascarón y proporcionan gráficas de diseño para las tres condiciones de carga mencionadas previamente.

Los resultados determinados por los autores verifican los obtenidos previamente por: Rabich y Krätzing en Alemania, Scriven y Albasiny en Inglaterra y Layrange en Francia.

Realmente no se sabe con exactitud el orden de magnitud del error obtenido en la teoría, por introducir las hipótesis de $M_{\theta\theta} = M_{\phi\phi}$, $N_{\theta\theta} = N_{\phi\phi}$, $Q_{\theta} = Q_{\phi} = 0$, pero si no se hacen estas hipótesis actualmente no sería posible resolver el problema. Los autores han presentado una excelente aportación tanto para la mecánica aplicada como para la práctica de las estructuras de cascarón.

⁷ A. Van der Neut, Dissertation, Delf, 1932.

⁸ Referencias 9 y 10 citadas por el autor.

⁹ The buckling of Spheroidal Shell Curved in Two Directions", by P. Csonka, Acta Technica, Acadamiae Societatarum Hungaricae, Budapest, Tomus XIV, 1956.

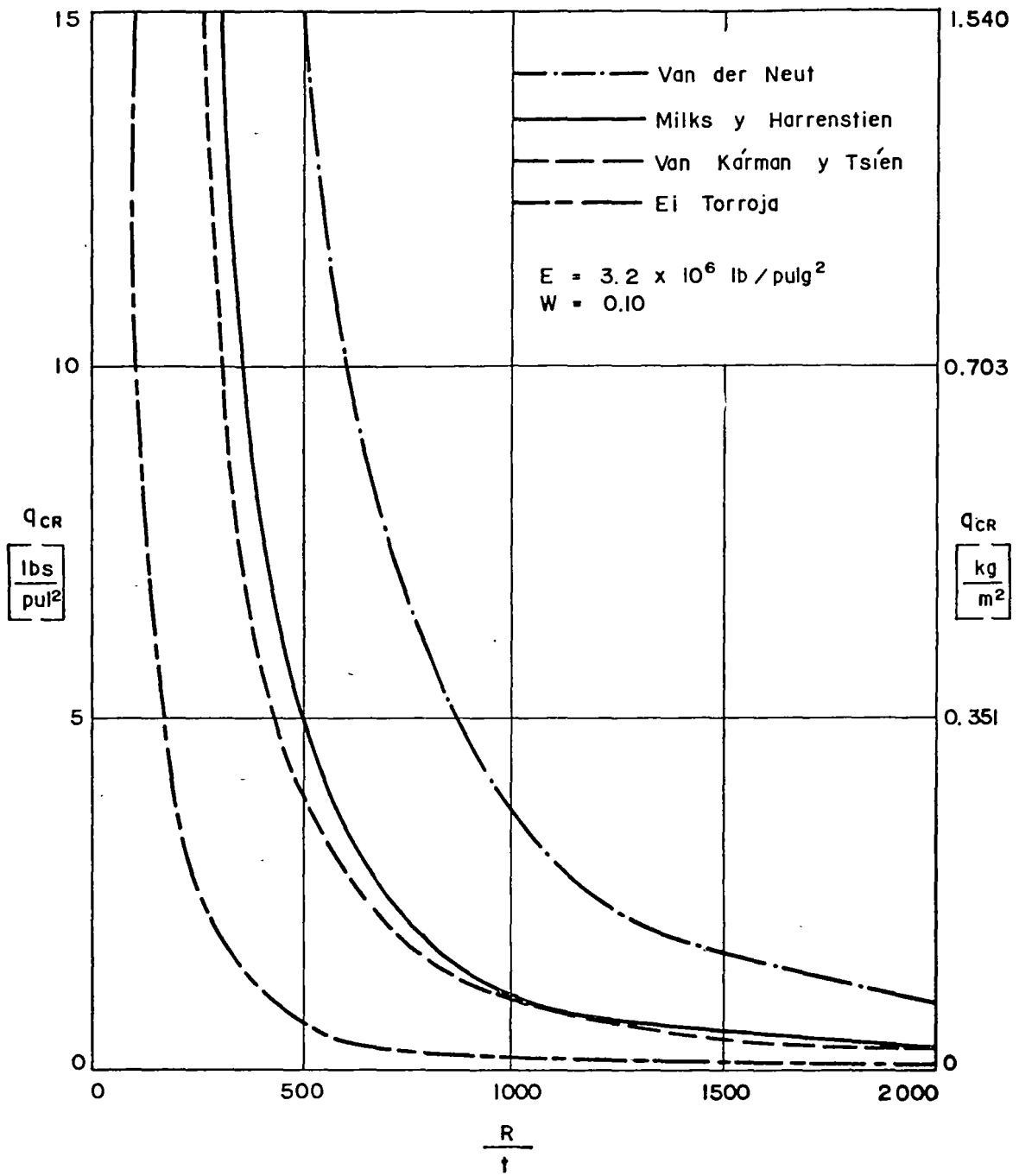


Fig. 5

Cálculo simplificado de los esfuerzos de membrana en una cubierta de concreto tipo "Casarón", en forma de cono
 Arq. Jorge Molina Montes (México)

El autor, en un casarón cónico invertido, deduce los valores de los esfuerzos de membrana por medio del equilibrio del elemento diferencial de casarón en coordenadas cilíndricas y posteriormente verifica los valores considerando el equilibrio membranar

bajo las condiciones de carga y apoyo de revolución.

PROF. DR. A. M. HAAS

I shall make a comment about the comparison between the investigations performed by Harrestien and others on critical load. In the figure in which this comparison was stated there was a curve derived from an investigation on type of double curvature shell that was not a sphere.

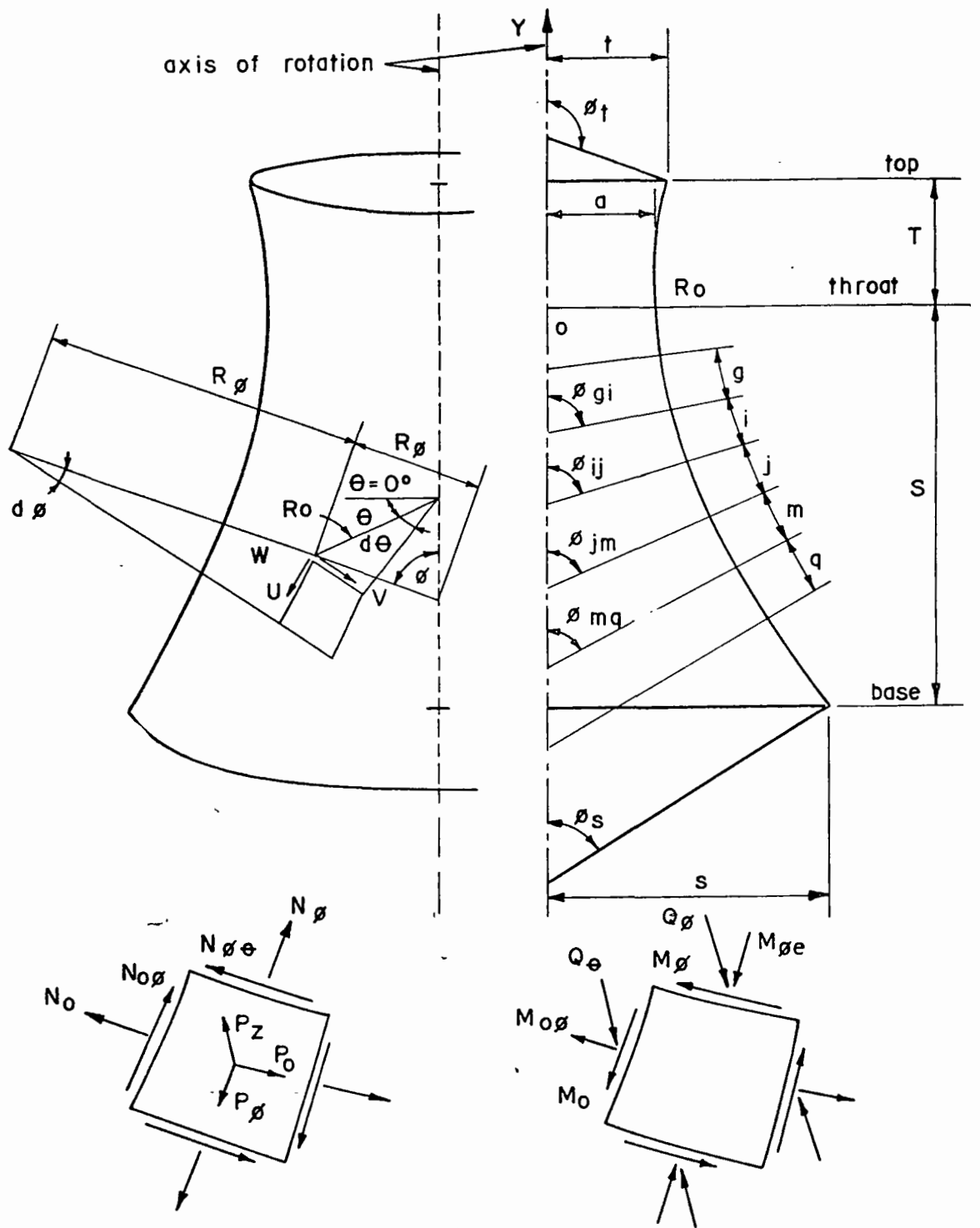


Fig. 6

DR. PORFIRIO BALLESTEROS

That curve was derived from an investigation on elliptic paraboloid shell of rectangular plant, but this surface is equivalent to spherical surface. This kind of shell is in the condition of lower limit of critical load, because they are supported at the four

corners and they are more closer to the lower limit.

PROF. DR. HAAAS

I really think, that it would not really be compared directly with the spherical investigations.

