



centro de educación continua
división de estudios superiores
facultad de ingeniería, unam



A LOS ASISTENTES A LOS CURSOS DEL CENTRO DE EDUCACION
CONTINUA

Las autoridades de la Facultad de Ingeniería, por conducto del Jefe del Centro de Educación Continua, Dr. Pedro Martínez Pereda, otorgan una constancia de asistencia a quienes cumplan con los requisitos establecidos para cada curso. Las personas que deseen que aparezca su título profesional precediendo a su nombre en la constancia, deberán entregar copia del mismo o de su cédula a más tardar el SEGUNDO DIA de clases, en las oficinas del Centro con la señorita Barraza, encargada de inscripciones.

El control de asistencia se llevará a cabo a través de la persona encargada de entregar las notas del curso. Las inasistencias serán computadas por las autoridades del Centro, con el fin de entregarle constancia solamente a los alumnos que tengan un mínimo del 80% de asistencia.

Se recomienda a los asistentes participar activamente con sus ideas y experiencias, pues los cursos que ofrece el Centro están planeados para que los profesores expongan una tesis, pero sobre todo, para que coordinen las opiniones de todos los interesados constituyendo verdaderos seminarios.

Es muy importante que todos los asistentes llenen y entreguen su hoja de inscripción al inicio del curso. Las personas comisionadas por alguna institución deberán pasar a inscribirse en las oficinas del Centro en la misma forma que los demás asistentes entregando el oficio respectivo.

Con objeto de mejorar los servicios que el Centro de Educación Continua ofrece, al final del curso se hará una evaluación a través de un cuestionario diseñado para emitir juicios anónimos por parte de los asistentes.

IV CURSO INTERNACIONAL DE INGENIERIA SISMICA

SISMOLOGIA Y SISMICIDAD

(del 4 al 20 de julio de 1978)

FECHA	HORARIO	TEMA	PROFESOR
4 de julio	17 a 20 h	Origen de los temblores. Instrumentos para registrar temblores. Magnitud e intensidad Sismicidad de la tierra. Predicción de temblores.	DR. CINNA LOMNITZ
6 de julio	17 a 20 h	Propagación de ondas en un medio seminfinito o en una estratificado.	DR. GUSTAVO AYALA
11 de julio	17 a 18:30h	Efectos sísmicos en suelos granulares	M. EN I. ABRAHAM DIAZ RODRIGU
	18:40 a 20:10 h	Influencia de las condiciones locales. Tipos de temblores.	DR. LUIS ESTEVA MARABOTO
13 de julio	17 a 18:30 h	Procesamiento de acelerogramas.	DR. OCTAVIO A. RASCON CHAVEZ
	18:40 a 20:10 h	Nociones de teoría de probabilidades.	DR. OCTAVIO A. RASCON CHAVEZ
18 de julio	17 a 18 h	El proceso estocástico de Poisson	DR. OCTAVIO A. RASCON CHAVEZ
	18:10 a 20:10 h	Sismicidad y riesgo sísmico	DR. LUIS ESTEVA MARABOTO
20 de julio	17 a 20 h	Sismicidad y riesgo sísmico	DR. LUIS ESTEVA MARABOTO

EVALUACION DE LA ENSEÑANZA

IV CURSO INTERNACIONAL DE INGENIERIA
SISMICA

SISMOLOGIA Y SISMICIDAD

del 4 al 20 de julio de 1978.

PROFESOR Y/O TEMA

DOMINIO DEL TEMA	EFICIENCIA EN EL USO DE AYUDAS AUDIOVISUALES	MANT. DEL INTERES (AMENIDAD, FACILIDAD DE EXPRESION, COMU- NICACION CON LOS ASISTENTES)	PUNTUALIDAD
1. - Origen de los temblores. Instrumentos para registrar temblores... Dr. Cinna Lomnitz			
2. - Propagación de ondas en un medio seminfinito o en una estratificado. Dr. Gustavo Ayala Milián			
3. - Efectos sísmicos en suelos granulares M. en I. Abraham Lfiaz Rodríguez			
4. - Influencia de las condiciones locales. Tipos de temblores. Dr. Luis Esteva Maraboto			
5. - Procesamiento de acelerogramas Dr. Octavio A. Rascón Chávez			
6. - Nociones de teoría de probabilidades Dr. Octavio A. Rascón Chávez			
7. - El proceso estocástico de Poissón Dr. Octavio A. Rascón Chávez			
8. - Sismicidad y riesgo sísmico Dr. Luis Esteva Maraboto			
ESCALA DE EVALUACION DEL 1 AL 10 mag. 29.VI.77			

EVALUACION DEL CURSO

	CONCEPTO	EVALUACION
1.	APLICACION INMEDIATA DE LOS CONCEPTOS EXPUESTOS	
2.	CLARIDAD CON QUE SE EXPUSIERON LOS TEMAS	
3.	GRADO DE ACTUALIZACION LOGRADO CON EL CURSO	
4.	CUMPLIMIENTO DE LOS OBJETIVOS DEL CURSO	
5.	CONTINUIDAD EN LOS TEMAS DEL CURSO	
6.	CALIDAD DE LAS NOTAS DEL CURSO	
7.	GRADO DE MOTIVACION LOGRADO CON EL CURSO	

ESCALA DE EVALUACION DE 1 A 10

1. ¿Qué le pareció el ambiente del Centro de Educación Continua?

Muy agradable Agradable Desagradable

2. Medio de comunicación por el que se enteró del curso:

Periódico Excélsior Periódico Novedades Folleto del Curso

Cartel mensual Radio Universidad Comunicación carta, teléfono, verbal, etc.

3. Medio de transporte utilizado para venir al Palacio de Minería:

Automóvil particular Metro Otro medio

4. ¿Qué cambios haría usted en el programa para tratar de perfeccionar el curso?

5. ¿Recomendaría el curso a otras personas? Si No

6. ¿Qué curso le gustaría que ofreciera el Centro de Educación Continua?

7. ¿Qué servicios desearía que tuviese el CEC para los asistentes a cursos?

8. Otras sugerencias:



centro de educación continua
división de estudios superiores
facultad de ingeniería, unam



SISMOLOGIA Y SISMICIDAD

SISMOLOGIA

DR. CINNA LOMNITZ

JULIO, 1978.

III CURSO INTERNACIONAL DE INGENIERIA SISMICA

SISMOLOGIA

C. LOMNITZ

5 Y 7 DE JULIO DE 1977

INTRODUCCION

Desde el punto de vista del ingeniero, los sismos representan un riesgo importante que debe ser considerado en el diseño de toda estructura. En muchas regiones el riesgo de falla de la estructura por sismo puede llegar a dominar otras consideraciones de diseño. Por lo tanto, es necesario conocer ciertos aspectos básicos de sismología para fines de estimación del riesgo sísmico local.

Las presentes conferencias tratarán de los siguientes aspectos, que de ninguna manera agotan el tema de la sismología; pero se han seleccionado por ser relevantes en el marco de este curso.

- A. Sismología y Sismotectónica
- B. Sismología observacional
- C. Predicción de temblores

Ante todo, es indispensable precisar que no conocemos la causa y el mecanismo de generación de los temblores. Existen ciertas hipótesis y se ha avanzado mucho en los últimos diez o quince años; pero se trata de fenómenos muy complejos cuya naturaleza exacta aún no llega a ser totalmente comprendida por la ciencia.

A. SISMOLOGIA Y SISMOTECTONICA

Observemos la distribución geográfica de los temblores en un globo (fig 1). Veremos que la actividad sísmica va rodeando y delineando ciertas grandes unidades geográficas, que son placas de la litósfera. Se cree que estas placas pueden tener movimientos absolutos y relativos, ya que descansan en una capa viscosa: astenósfera. Cuando dos placas se van alejando mutuamente, el hueco es relleno por materiales que suben desde la astenósfera. En cambio, cuando dos placas se van acercando su choque mutuo es acomodado mediante la subducción, es decir, la absorción de una placa (la placa oceánica) por debajo de la otra (la placa continental). Si ambas placas en proceso de colisión son continentales se produce una compresión que pliega el borde continental y los deja como un acordeón (ejemplo: los Himalayas); los temblores se originan principalmente en los bordes de placas, debido a estos procesos de tensión o compresión entre las placas

Hay también sismos en el interior de las placas, ya que éstas no son homogéneas y, por el contrario, contienen numerosas imperfecciones que son otras tantas causas de concentración de esfuerzos. Algunos de estos sismos "intra-placas" pueden ser altamente destructivos. Sin embargo, la mayor proporción de la energía sísmica se localiza en los bordes de las placas litosféricas.

Fallas y fracturas. Una falla es un plano de discontinuidad mecánica entre dos unidades geológicas; en cambio, un contacto es un plano de discontinuidad deposicional (fig 2). Por ejemplo, una falla puede desplazar un contacto, pero no viceversa. El desplaza-

miento de los contactos a uno y otro lado de una falla, indica la actividad de la falla.

Prácticamente toda la superficie de la tierra ha sufrido deformación intensa; por lo tanto, existen fallas en todas partes. La sismología estudia la configuración de las unidades geológicas en relación a los sismos, y la sismotectónica estudia la deformación que dichas unidades han sufrido y su actividad sísmica.

Un sismo es una ruptura sobre un plano. Todo sismo se produce sobre una falla, generalmente una falla pre-existente. El largo de una falla y su importancia regional, indican la magnitud potencial del sismo que puede generar.

Pero antes hay que determinar si la falla es activa. Esta tarea es de crítica importancia y debe ser realizada por un geólogo experimentado. Consiste en analizar las relaciones entre la falla y las formaciones cenozoicas, muy particularmente las del cuaternario: desplazamiento del curso de los ríos, formación de terrazas, erosión y depósitos deltaicos, y otros indicios.

Hay fallas activas que atraviesan toda la corteza terrestre (fallas corticales), o toda la litósfera, como la Falla de San Andrés que es un borde de placas. Para poder determinar la importancia relativa de una placa, es necesario complementar la sismogeología regional con estudios geofísicos específicos sobre la estructura de la corteza. Por ejemplo, si existe una fuerte anomalía gravitacional, y si los estudios sismológicos revelan espesores diferentes de la corteza a ambos lados de la falla, podrá concluirse que la falla

compromete todo el espesor de la corteza.

Existen sismos destructores que se han originado en fallas cortas. La Falla de Tiscapa, que produjo el sismo de Managua de 1972, tiene un largo de unos 15-20 km. Sin embargo, la magnitud del sismo fue solamente de 6 en la ^{le} escala de Richter. Los daños desproporcionados se debieron a la cercanía del epicentro y al tipo de construcciones.

Como ejemplo, veremos el análisis sismogeológico y sismotectónico del terremoto de Tangshan (China), en 1976.

B. SISMOLOGIA OBSERVACIONAL

Las ondas sísmicas se propagan en cualquier medio, excepto en el vacío, y su detección se limita únicamente a la sensibilidad de los aparatos y al ruido sísmico ambiente.

El sismógrafo es un instrumento que utiliza el principio del micrófono: transforma vibraciones mecánicas en impulsos eléctricos. El sistema inercial del sismómetro se compone de una masa suspendida mediante resortes o hilos: se mide la posición relativa del centro de masa con respecto al suelo. Hay una gran variedad de tipos y modelos de sismómetros, según la dirección del movimiento (de la suspensión) y el rango de frecuencias.

TIPOS DE SISMOMETROS

(a) Frecuencia:

Acelerógrafos	2 - 20 Hz
Sismómetros de periodo corto	1 Hz
Sismómetros de periodo largo	0.01 - 0.1 Hz

(b) Tipo de suspensión:

Vertical

Horizontal

Las características de amplificación de un sismómetro pueden regularse eléctricamente, es decir, variando la impedancia del circuito de salida y las características del equipo de registro. En principio es posible obtener amplificaciones máximas del orden de 10^6 en términos de desplazamiento a frecuencias de 1Hz (la amplificación se refiere al factor de escala en el sismograma). En la práctica, el ruido sísmico ambiente reduce la amplificación útil a una fracción de la sensibilidad del equipo. La mayoría de las buenas estaciones operan a una amplificación del orden de 50,000 a frecuencias de 1Hz.

Ondas sísmicas. En sismología, las ondas compresionales (sonido), se denominan "Ondas P"; y las transversales (rotacionales o de cizalle), se denominan "Ondas S". Las velocidades de estas ondas son muy diferentes entre sí y varían de un material a otro. Si ρ es la densidad del material y λ, μ son los números de Lamé (parámetros elásticos), las velocidades de P y S se expresan como sigue:

$$v_p = \sqrt{(\lambda + 2\mu) / \rho}$$

$$v_s = \sqrt{\mu / \rho}$$

Además de las ondas P y S, que se denominan "ondas de cuerpo", existen las ondas superficiales que se dan solamente en la interfase entre dos medios diferentes. Las amplitudes de las ondas superficiales decaen rápidamente desde la superficie hacia el interior del medio. Existen ondas Rayleigh (en las que cada partícula de la superficie

sigue una elipse retrógrada en el plano vertical); y ondas Love (en que la trayectoria de la partícula transversal a la dirección de propagación y está en el plano de la interfase). Las ondas superficiales son dispersivas y sus componentes de alta frecuencia se amortiguan rápidamente. Suelen adquirir amplitudes mucho mayores para las ondas de cuerpo, y desempeñan un papel importante desde el punto de vista del daño sísmico.

Predicción. A partir de 1966 se inició en China un programa oficial de predicción de temblores. Por ser el primer programa de este género en el mundo merece un análisis detallado.

El sistema chino de predicción se basa en las siguientes premisas:

1. Las causas directas de los sismos se desconocen.
2. La interacción de estas causas con la estructura geológica da margen a un cuadro muy complejo de síntomas y efectos.
3. En una región dada la configuración general de estos síntomas y efectos es estable y tiende a repetirse.
4. Para predecir temblores es necesario disponer de una información muy amplia y detallada, que permita al sismólogo abstraer el cuadro general de fenómenos premonitores y analizar su significado.
5. Esto significa que es necesario cubrir la región, y especialmente la posible zona epicentral, con una densa red de estaciones de observación.

Los chinos enfocan la lucha contra los sismos como un programa de alta prioridad, en todo similar a una campaña militar. Han movili-

zados a cientos de miles de voluntarios que construyeron aparatos sencillos en sus lugares de trabajo y los controlan diariamente. En consecuencia, ya las brigadas y los burós sismológicos provinciales han aprendido a interpretar las características de sus respectivas regiones, que las ayudan a diagnosticar las anomalías al momento de presentarse y a implementar medidas que ya han salvado muchos miles de vidas.

Las mediciones que actualmente se hacen en China para detectar efectos premonitores de los sismos abarcan más de diez diferentes fenómenos, en su mayoría relacionados con variaciones en el campo de esfuerzos de la tierra:

- observaciones geodésicas
- desplazamientos en fallas geológicas
- inclinación del suelo
- cambios de resistividad en rocas
- corrientes telúricas
- geomagnetismo
- campo gravitacional
- mediciones geoquímicas
- fluctuación del nivel de agua en pozos
- efecto piezoeléctrico en sondeos
- cambios de velocidad sísmica en rocas
- cambios en la ocurrencia de sismos menores
- cambios en el caudal de los mananciales
- cambios en el comportamiento animal

La mayoría de estos efectos son cuantitativos e instrumentales; unos cuantos son cualitativos y dependen de observadores humanos. Existen cuatro etapas de predicción, y cada etapa utiliza otras clases de fenómenos predictores.

- A. Predicción a largo plazo
- B. Predicción a mediano plazo
- C. Predicción a corto plazo
- D. Predicción inmediata

Para la predicción inmediata se utilizan los cambios en el campo geomagnético, en la resistividad de las rocas, en el nivel de los pozos, en la inclinación del suelo, en el comportamiento animal y, sobre todo, la ocurrencia de sismos premonitores. La predicción inmediata es la más delicada ya que depende generalmente de la eficiencia y decisión de un pequeño grupo local, muchas veces de sismólogos voluntarios.

Sin embargo, los éxitos reportados por el programa son impresionantes. Se presentará un estudio de caso para aclarar el método utilizado.

Bibliografía

- C. Lomnitz, Global Tectonics and Earthquake Risk (Elsevier, 1974).
- F. Press y R. Siever, Earth (W.H. Freeman, 1976)
- E. Rosenblueth, Predicción en Ingeniería Sísmica en China, Soc. Mex. Ing. Sísmica, Diciembre 1976.
- X. Le Pichon, J. Francheteau y J. Bonnia, Plate Tectonics (Elsevier, 1973).



centro de educación continua
división de estudios superiores
facultad de ingeniería, unam



IV CURSO INTERNACIONAL DE INGENIERIA SISMICA

SISMOLOGIA Y SISMICIDAD

DR. CINNA LOMNITZ

JULIO, 1978.

Chapter 10

SEISMOLOGICAL INSTRUMENTATION

C. L. ...

THOMAS V. MCEVILLY

Department of Geology and Geophysics, University of California, Berkeley, Calif., U.S.A.

10.1 INTRODUCTION

This chapter presents general information and guideline hopefully useful in selecting instruments for seismological research and engineering applications. Two main aspects are considered: (1) defining the measurement requirements in a particular situation; (2) understanding the principles and capabilities of available sensing, signal conditioning, and recording systems and the degree to which requirements can be met by available equipment. Emphasis is on widely used conventional seismological equipment. Special devices, such as strain gages, seismoscopes, and digital acquisition systems are mentioned where appropriate.

10.2 APPLICATIONS

The following stand out among the many applications of seismological instruments in the assessment of seismic risk and in providing bases for the making of engineering decisions.

- Seismotectonic investigations: use of earthquake source parameters and spatial distribution of hypocenters to infer local or regional tectonic characteristics such as principal stress directions, extent of potential earthquake zones, deformation rates, depth range of crustal or upper-mantle earthquakes, and temporal variations of earthquake source parameters or medium properties.
- Monitoring of fault creep: detection and measurement of long-term aseismic slip on potentially active recent fault traces.
- Earthquake prediction research: monitoring temporal variations in earthquake characteristics and physical properties in the source region.
- Short-range seismicity studies: use of portable or temporary equipment in gathering spatial and temporal data on occurrence of small local earthquakes, detecting and mapping active faults, or monitoring effects of reservoir loading behind dams.
- Shallow subsurface investigation: use of a variety of active or passive seis-

mological methods in measuring soil properties, overburden thickness, lateral variation in near-surface geology, depth of water table, etc.

Aftershock sequence study: study of characteristics of aftershock sequences, the nature of faulting, and local ground effects.

Strong-motion recording: detection and broadband recording of moderate to strong ground motion in seismic regions for specifying bases of structural design in the area.

Determination of dynamic properties of structures: measurement of structural responses to static or dynamic perturbations including, among the latter, impulsive excitation of free vibrations, forced harmonic or quasiharmonic excitation, ambient disturbances, blasts, and earthquakes.

Model studies: monitoring of shaking-table motions and of the responses of models to dynamic excitation.

These applications require the measurement of motion or force either at a point (e.g., an accelerometer) or between two points (e.g., a strain gage). We shall concentrate on the former class of requirement and will thus treat the conventional inertial seismometer in some detail. Strain monitoring techniques for structures or across fault zones are well-covered in specialized texts. A series of papers presented at the 5th World Conference on Earthquake Engineering (1973) provide an excellent review of earthquake instrumentation for recording strong motion.

10.3 REQUIREMENTS: GENERAL

The nature of a particular application will usually specify the type of sensor required, the frequency range of interest, the accuracy and resolution of the record produced, and any requirements for possible interconnection of instruments, remote data telemetry, or provisions for automatic processing. Additional constraints are always present in the available budget as well as in the operational and maintenance conditions.

An important early decision involves recording requirements. At times a simple measurement of the peak value is sufficient — in other applications the time history of the parameter variation must be retained. Ordinarily direct measurement of peak values is far less expensive than time-based recording. We consider next a group of special-purpose instruments, including peak-reading devices, and follow with a more extensive discussion of widely used conventional inertial seismometers and seismographs.

10.4 PEAK-READING INSTRUMENTS

10.4.1 Peak ground motion

The information contained in the peak value of a ground-motion parameter (maximum displacement, velocity, or acceleration) is usually insuffi-

cient for much analysis beyond threshold monitoring or event counting. Instruments measuring such peak values serve frequently as complements of standard seismographs capable of supplying full time histories of ground motion. In some applications, however, these data are of great value. A prime example is the simple low-cost shock (acceleration) indicator widely used to monitor the vibration environment during commercial transportation of delicate equipment. Another application is the peak velocity indicator used to monitor damage potential of vibrations from blasting and heavy construction. Simple counting of microearthquakes larger than a given magnitude also provides a valuable activity indicator for volcanoes.

For strong-motion recording, interest is ordinarily centered on the peak horizontal ground acceleration or the peak responses of oscillators with specific periods and damping ratios. A precise measurement of peak ground acceleration is not sought. In keeping with the goals of low-cost and simplicity, and in view of the unsophisticated analysis of the resulting data, a rough estimate of peak acceleration is usually adequate. This can be obtained from several types of devices.

A falling-pin set is a primitive vibration-indicating instrument consisting of a set of slender, rigid prismatic rods of different heights, standing on a horizontal surface. Roughly, the rod slenderness determines the horizontal acceleration required to topple it. If b = diameter of rod base, h = rod height, and g = gravity, a statistically applied horizontal acceleration of bg/h is required to topple the rod. While the peak earthquake acceleration actually required to topple the rod in an earthquake may differ substantially from this value, by noting which rods have toppled over we get a gross idea of a range in which lies the maximum horizontal acceleration. The maximum and minimum values of peak ground acceleration in which we are interested determine the range of rod slenderness and the precision with which we wish to bracket the peak acceleration governs the number of rods used.

A seismoscope is an instrument which records the occurrence of an earthquake. A widely used model due to Wilmot (shown in Fig. 10.1) is a damped two-degree-of-freedom oscillator capable of recording the pendulum trajectory in the horizontal plane. Recording by stylus on a smoked watch glass, the instrument traces a hodogram representing the response of a lightly damped pendulum to the earthquake excitation. A reasonable model of a typical structure is embodied in a natural period of 0.75 sec and a damping factor of 0.1 critical. Having no time (nor frequency) scale, the seismoscope record cannot be reduced to ground motion, i.e., the same record can be produced by an infinite family of widely differing ground motions. At high-frequency excitation, the seismoscope trace deflection is proportional to ground displacement, while at low frequencies it is proportional to ground acceleration. For any excitation, however, it fulfills the intended purpose of providing a point (0.75 sec period, 0.1 damping) on the response spectrum for the earthquake motion recorded. A series of such seismoscopes

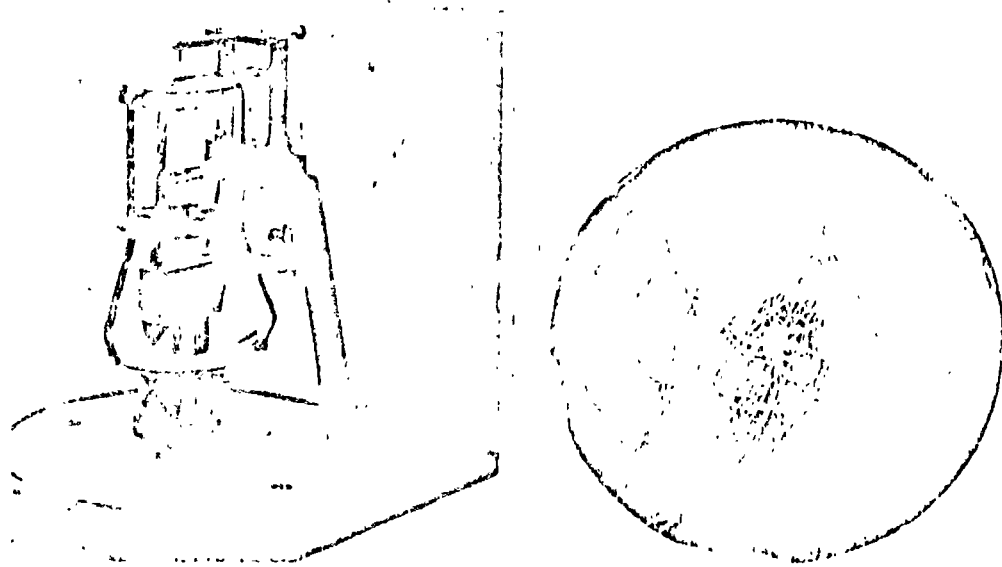


Fig. 10.1. Wilnot seismoscope (left, courtesy Kinemetrics, Inc.) and seismogram written at 1971 San Fernando earthquake (courtesy Seismological Field Survey, NOAA).

with different periods and damping can be used to obtain several points on the response spectrum directly.

Seismoscopes with natural frequencies above about 20 Hz produce, for typical earthquakes, records with amplitude directly proportional to ground acceleration and can thus be calibrated as peak-reading accelerometers. Various designs exist based on different types of oscillation, e.g., pendulums with stylus and smoked glass, cantilevers with magnetic indication of maximum deflection, elastic spheres writing ink impressions on a confining box upon flattening due to acceleration, etc.

10.4.2 Peak structural motion

When conducting harmonic-excitation tests of a structure, often only the motion amplitudes at different points are of interest for various excitation frequencies. The oscillations are usually of sufficiently low frequency and large amplitude; they can be measured directly at the seismometer output. When the structure is man-excited, visual observation of the seismometer output allows the operators to control their swaying. For earthquake excitation, any of the devices described in the previous section can, of course, be installed at various points within the structure.

In cases where the structure's damping ratio is to be measured, an accurate

record of the decay of free oscillations must be made and peak-reading devices are inadequate. With modern instrumentation it should be easy to obtain natural frequencies and damping factors for structures to an accuracy of a few percent — quite adequate for such measurements within the linear-response range of structures.

One of the most significant structural response parameters in earthquakes is the maximum acceleration developed at selected points. Using the peak-reading accelerometers discussed in the previous section, such measurements should be possible with errors of 10% or less.

10.4.3 Peak structural deformations

We are often interested in measuring a building's maximum interstory relative displacements and the strains at selected sections of structural members or at joints. The former have been successfully recorded by using the device depicted in Fig. 10.2. It consists of a diagonal bar extending the whole story height, connected at the lower end to a lever that magnifies relative displacements five-fold. The lever has a pen that records on a drum possessing a clock mechanism which requires rewinding once a week. Records are obtained on paper replaced when rewinding the clock mechanism. The reason for the rotating drum in lieu of a stationary scratch device is that temperature changes and wind effects cause some story drifts which it is desirable to isolate from earthquake response. The latter is confined to such a short time interval on the record that it is impossible to derive a response-history record but the accuracy with which maximum drifts are read is quite sufficient for practical purposes.

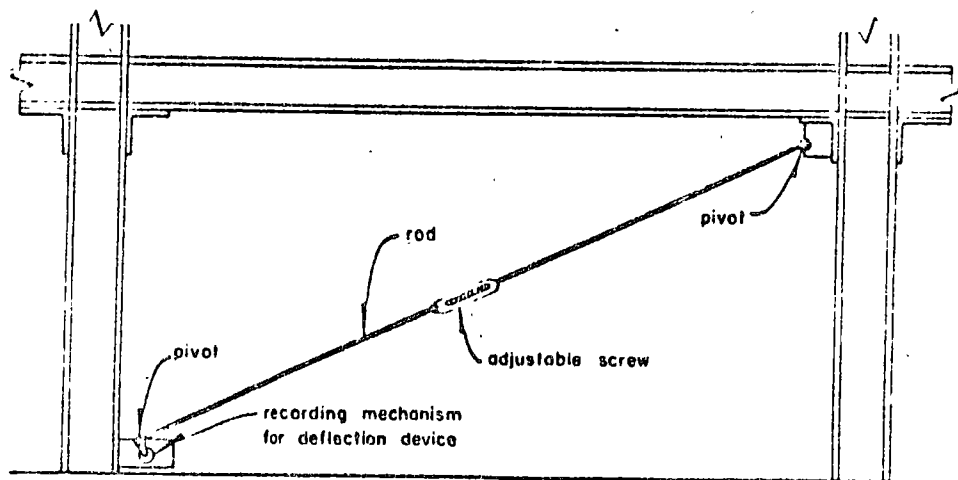


Fig. 10.2. Structural strain recording device. Diagonal element detects relative motion across entire story in building (after Zeevaert and Newmark, 1956).

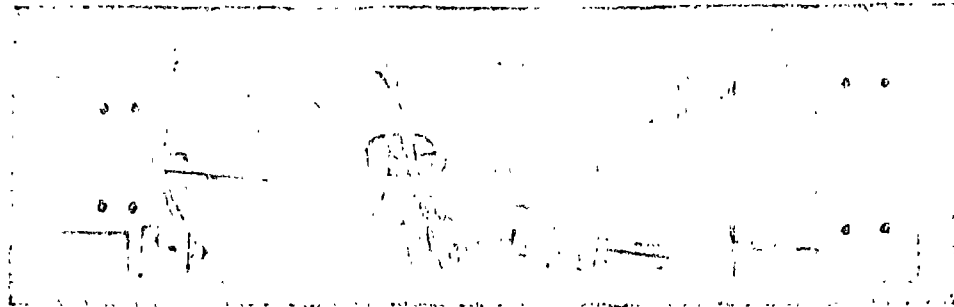


Fig. 10.3. Scratch strain gage. The circular target, 2.5 cm in diameter, is rotated by the strains. End attachment plates may be separated several meters (courtesy Prewitt Associates).

When strains due to phenomena other than earthquakes are negligible relative to earthquake-caused strains, a very convenient, inexpensive, and compact instrument is the scratch strain gage, shown in Fig. 10.3. This is essentially a bar connecting two fixed plates attached to a member up to several meters apart. A simple magnifying device, ending in a stylus which scratches on a smoked glass or metal plate, is incorporated in the connecting rod and provides a permanent record of the strain. The record is ordinarily read through a microscope or a powerful magnifying glass.

Although the instruments described provide only peak values and their accuracy is not high, their costs are so many times smaller than those of more conventional and complex equipment that a great many can be installed in a structure for the price of a single sophisticated instrument. It would seem that there is much to recommend the use of these simple instruments.

10.5 CONVENTIONAL SEISMOGRAPHIC SYSTEM — DESIGN CONSIDERATIONS

10.5.1 Basic design parameters

Bandwidth, *sensitivity*, and *dynamic range* are the basic parameters one must define in specifying a seismographic system. A difficulty lies in their interdependence. Bandwidth is the frequency interval of greatest interest; dynamic range is the span of the largest (full scale) to the smallest (system noise) usable signal recorded and is expressed as the ratio (often in dB) of these two signals; and sensitivity refers to the absolute gain (magnification) of the seismograph within the range. Generally all three cannot be optimized simultaneously in a reasonably simple instrument. For example, the special, high-gain, long-period seismographs used in the detection of teleseismic surface waves from small nuclear explosions and earthquakes exhibit very high gain (ca. 10^6 magnification) in a very narrow frequency band around 40 sec

(0.02–0.03 Hz). The same long-period seismograph, operating at the same site, but in the conventional WWSSN (world-wide seismographic station network) long-period mode (15–100 sec) would be capable of operating at maximum magnification of the order of $3 \cdot 10^3$, giving the same amplitude of background motion on a record as produced by the high-gain configuration. On the other hand, if we could faithfully record the basic seismometer input with a dynamic range of 10^6 , we would capture the information in both of the foregoing configurations and we could produce either record through an appropriate payout.

A second example of parameter control can be seen in the recording methods commonly used for local earthquake motion. The bandwidth required for recording strong ground motion near the source of a major earthquake is essentially the same as that used in microearthquake recording — about 0.1–30 Hz. The actual ground motion, however, will be several centimeters for the former and several nanometers (10^{-9} m) for the latter, a ratio of 10^7 . A single instrument designed to do both measuring tasks simultaneously would demand a dynamic range of 10^7 , or 150 dB (20 dB is a factor of 10). This design near-impossibility gives rise to the two different system types in common use.

10.5.2 Bandwidth

Bandwidth can usually be specified early on in the consideration of a seismographic system design. The required frequency range of ground motion is generally clear from the intended use of the data. Modern instruments allow great flexibility in this selection. However, if the recording medium is a visible record (as opposed to digital or analog magnetic tape to be processed later), one must take care not to attempt extreme wideband recording, as the resulting earthquake records would be of ragged appearance and difficult to interpret. Background noise amplitude also increases with bandwidth, often obscuring small events that could be seen clearly on a visible record from a narrower-band instrument. An obvious example is the 6–8 sec microseism band, which is effectively avoided in the conventional short-period/long-period seismographs employed in most observatories.

If both bandwidth and visible records are required, it is often possible to split the output from a single seismometer into several desirable frequency bands, with individual gain adjustments, and to record the bands separately. A pertinent example lies in the use of the commercially available force-balance accelerometer for moderate-to-strong-motion recording. Such units exhibit flat response to ground acceleration over the frequency range 0–50 Hz with the limiting instrumental noise background smaller than $10^{-6} g$ (g = gravity) for high-quality units having a full-scale capability of 1 g. Any desired frequency bands can be derived from its output on visible records at gains consistent with the inherent device output noise. Another illustration

of modern wideband sensors is the new series of long-period seismometers capable of operating at natural periods of 50 sec or more in conventional environments. Equipped with appropriate transducers these instruments can produce simultaneous records of solid-earth tides (period of about 12 hours), free oscillations and mantle surface waves (100--3000 sec), conventional long-period waves (5--100 sec), conventional short-period waves (0.2--5 sec), and microearthquake signals (2--20 Hz). This exemplified the need for separate records of the different bandwidth signals, with individual gains and recording speeds, if visible records are the prime data medium. It is clear that use of digital or analog magnetic tape for primary recording provides a means of recovering the desired bandwidth in postprocessing and this reduces the requirements for continuous visible monitoring of all bands.

10.5.3 Sensitivity

Selection of the operating sensitivity for a seismograph would appear straightforward once the bandwidth is specified. In most applications the seismologist or engineer can define the maximum and minimum signals to be recorded; the interdependence of the fundamental design parameters of sensitivity and dynamic range is apparent here.

Modern high-quality inertial seismometers with moving coil transducers have inherent dynamic range capabilities of 10^5 -- 10^6 (100--120 dB) over which the output is an adequately linear and undistorted representation of the input ground motion. Only the most sophisticated and state-of-the-art recording systems (such as the digital systems in exploration seismology or in large nuclear detection arrays, with 16--19 bit word lengths) approach these values. Conventional seismographs use only a part of this dynamic range of the sensor itself.

A good quality, conventional, visible seismograph has a dynamic range of 40--50 dB (roughly, a measurement resolution in the trace position of about 0.2--0.5 mm and a full-scale swing of 50 mm). The best analog FM magnetic tape recorders exhibit roughly the same dynamic range, but generally over a wider frequency bandwidth. With digital recording the range depends on the number of bits in a data word, while the bandwidth is set by the sampling rate and seismometer response. Ten- to twelve-bit words are commonly used in seismology for dynamic requirements of about 54 and 66 dB, respectively.

In this discussion we have assumed that the fundamental noise limitation is imposed by the recording systems, i.e., that the inherent seismometer noise (not ground noise) and the noise in the signal-processing elements (galvanometer or amplifier) are at or below the recorder noise level or resolution. This situation should be a design criterion to avoid wasting part of the usable recorder range on system noise.

Having selected the recording medium and its dynamic range, we can now

specify the sensitivity required of our overall system. This is often done easily at the small-signal end of the range, where we can usually define the smallest motion we want to detect. Frequently this level is simply set at the local microseismic background level. However, in some applications it is important that earthquakes of a given size be recorded without "clipping" the record. This is particularly true for strong-motion recording where, for example, we may wish to stay on scale up to 1 or 1.5 *g*. If the recorder range is not large, this requirement will result in records with no visible microseismic background. This should be carefully considered in setting the system sensitivity. Having established the operating sensitivity, its realization is a simple matter of gain between seismometer and recorder.

Finally, some scheme must exist in order that the system response can be measured in its operating configuration. This is important both in the initial set-up and in the maintenance program where periodic checks of performance are made with the system installed and operational.

10.5.4 Response curve

A reasonable estimate of the nature of the motion to be recorded by a proposed system thus allows specification of the fundamental instrument parameters. These characteristics are embodied in the instrument response curve, which contains all the relevant information about the seismograph's behavior under excitation. The common representation of the system response is a magnification curve $M(f)$, where f is frequency, in hertz, of the excitation motion, assumed harmonic. M is the ratio of record amplitude to excitation displacement; it is thus a displacement sensitivity. The record amplitude can be measured in many ways, such as millimeters of trace displacement on a record or film viewer, output voltage from an amplifier or tape recorder on playback, or the numerical value of a digital word generated by an analog-to-digital converter. The denominator in M can equally well be excitation velocity or acceleration. These choices define then $V(f) = M(f)/2\pi f =$ velocity sensitivity, and $A(f) = M(f)/(2\pi f)^2 =$ acceleration sensitivity, where we have used the relation $|dx/dt| = 2\pi|x|f$ in harmonic motion.

In complete statements about magnification curves lend themselves to confusion. M , V , and A curves can apply to the same instrument, differing solely by factors $2\pi f$. It is important that the precise meaning of the ordinates of the magnification curve be made explicit. This source of confusion is related to the practice of referring to some seismographs as "velocity meters" and to others as "accelerometers". This terminology applies to the frequency range of interest. If the $M(f)$ curve is flat in this frequency range, the instrument is termed a "displacement meter"; if $V(f)$, a velocity meter; and if $A(f)$ is flat, an accelerometer. Figure 10.4 shows a set of generalized M , V , and A curves for a hypothetical seismograph; this single instrument may be called a displacement meter, velocity meter, or accelerometer, de-

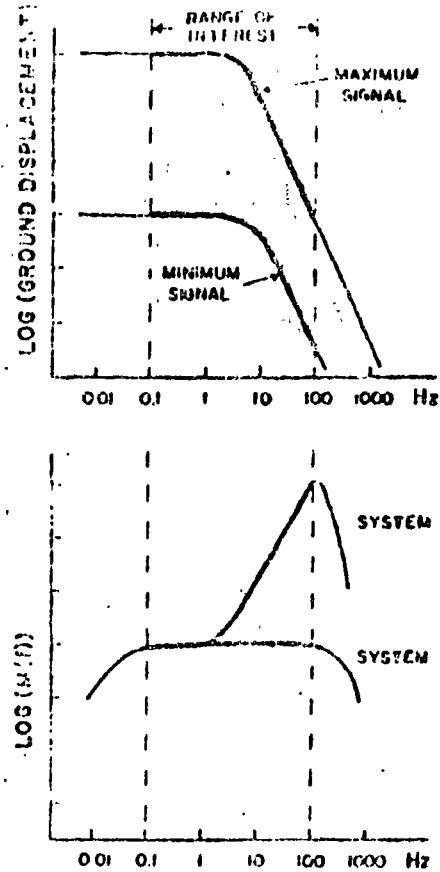
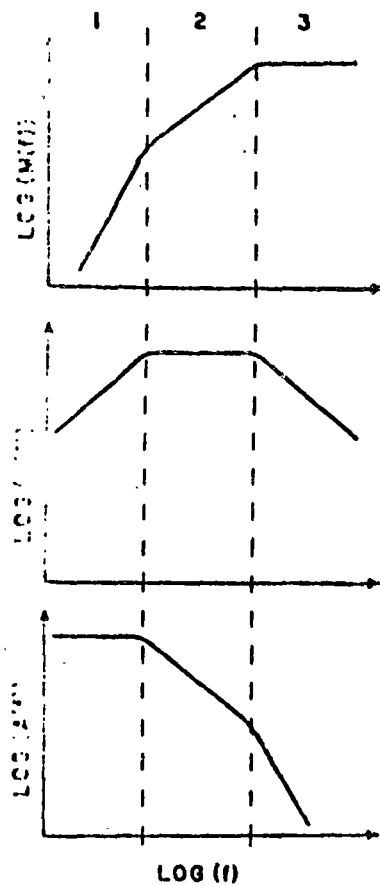


Fig. 10.4. Magnification (M), velocity sensitivity (V), and acceleration sensitivity (A) response curves for a seismograph, generalized to straight line segments. The seismograph may be described as an accelerometer, a velocity meter, or a displacement meter in the frequency ranges 1, 2, and 3, respectively.

Fig. 10.5. Top. Approximate spectral range, 0.1-100 Hz, of ground displacement expected from earthquakes in the magnitude range 2-5. Bottom. Alternate system magnification curves to record shaded signal range in top figure, requiring 100 dB dynamic range ('flat' response of system 1) or 60 dB ('pre-whitened' response of system 2).

pending on whether we are interested in frequency ranges 3, 2, or 1 respectively.

Analysis of the intended application of a required seismographic system should lead to the design response curve, both in shape and in absolute level. The shape reflects the bandwidth of the motion to be measured and, if possible, it should compensate for any severe frequency-dependence in its expected motion (it should "pre-whiten" the input, in the sense of making its spectrum essentially flat in the frequency range of interest). The latter consi-

generation is more important the smaller the available dynamic range of the system and the wider the bandwidth desired. The response curve's absolute level is the system sensitivity and must be set recognizing the expected range of the motions to be recorded. There are upper and lower limits to the size of the motions to be recorded (their ratio being the required minimum dynamic range). Figure 10.5 illustrates these concepts with a generalized range of expected earthquake signals at two possible response curves for the bandwidth. The figure displays an earthquake-like displacement spectrum assuming that recording over three orders of earthquake magnitude is required. From the maximum signal at low frequency to the minimum at high frequency there are five orders of magnitude (100 dB). If we attempted to record in accordance with the desired bandwidth and signal range for response curve 1, we would need a resolution of 10^{-6} of full scale to detect the minimum signal of interest. After prewhitening the response (curve 2), we require only a resolution of 10^{-3} of full scale to record the same motions. Most visible records offer little more than two orders of magnitude, and the ground-displacement spectrum is typical for earthquakes. Hence it is not surprising that difficulty is encountered in trying to record wide-band earthquake ground-motion data (in the 0.05–50 Hz band, say) on systems with limited dynamic range. Even digital recording with system response curve 1 in the figure would need an 18-bit word length for the full 10^5 range while 12 bits would suffice for the shaped response of curve 2.

Another step in defining the required response curve for a given application lies in identifying potential noise sources, in the ground or in the system, that might limit the sensitivity. The classic example of such noise problem is the 6–8 sec microseism so prominent in most seismograms. With magnitudes up to 10-mm during high activity, these ubiquitous surface waves have resulted in the traditional long-period/short-period division in seismometry, which effectively avoids high gain in the troublesome range.

The wide variation often resulting in response curves as we attempt to cover the useful frequency range of earthquake ground motion is illustrated in Figs. 10.6–10.8. The figures display a range of magnification curves of systems operating within the observatories of the University of California Seismographic Stations and are representative of current techniques for wide-range applications. An entire complex of instruments for recording earthquakes in the magnitude (M) range of -3 to 9 covers a phenomenal span of ground amplitudes and frequencies: 10^{-10} to 10^{-1} m or more in displacements and $3 \cdot 10^{-4}$ to 10^2 Hz in frequencies, where we are excluding earth tides, fault creep, fault rupture, and secular strains at the low-frequency extreme, and high-frequency acoustic waves at the high end.

10.5.5 Setting specifications

The application for which a seismographic system is to be designed defines the key instrumental parameters required to furnish the data sought, as we

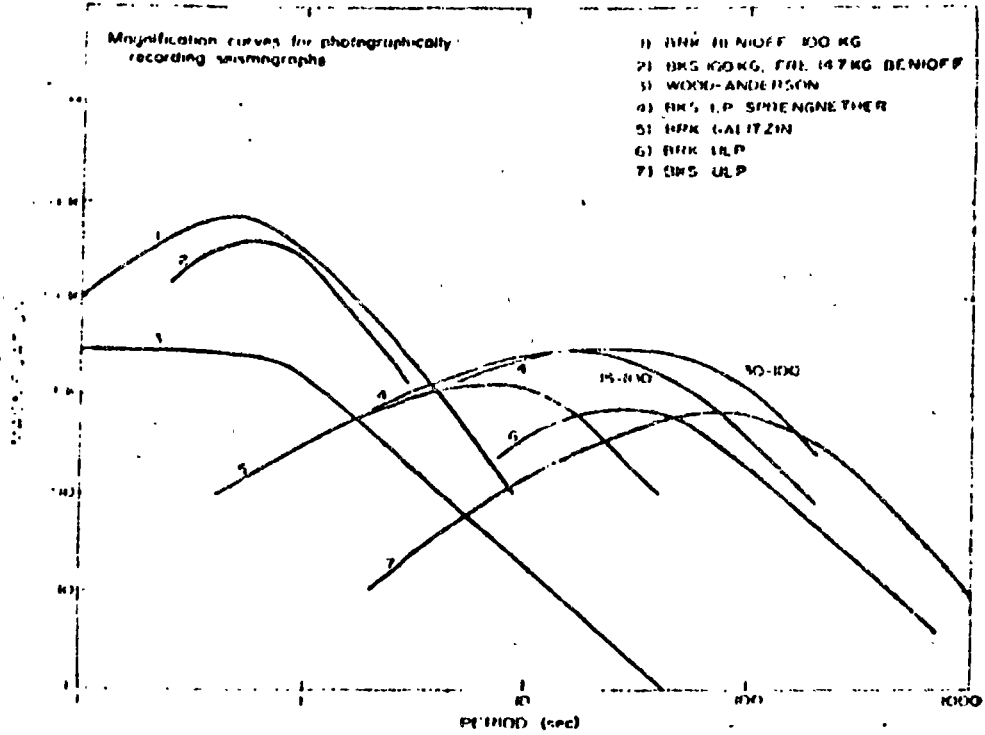


Fig. 10.6. Suite of magnification curves applicable to photographically recording seismographs in station network of University of California, Berkeley. Note wide range of maximum magnification and period of the maximum, from the conventional short-period system (curve 1) to the ultra-long period (ULP) system (curve 7).

have discussed: bandwidth, sensitivity (with possible variations over the bandwidth), and dynamic range. These result in a response curve, the absolute-sensitivity-levels, the required-resolution-at-the-small-signal-extreme, and the full-scale capability. Bandwidth and sensitivity parameters are matters of mechanical and electrical characteristics of the seismometers and signal-conditioning devices. Dynamic range, along with timing resolution and constraints on record duration format, sets additional requirements on the recording system.

The most important admonition in setting specifications for seismographic systems is to ascertain as completely as possible the nature of the ground motions we wish to record. Manufacturers of seismological equipment should not be placed in the position of interpreting requests for quotations as "short-period seismograph systems", for a "strong-motion sensor", or a "broadband seismograph". The result can be a purchased system that does not do the job or that is far more elaborate and thus more expensive than needed.

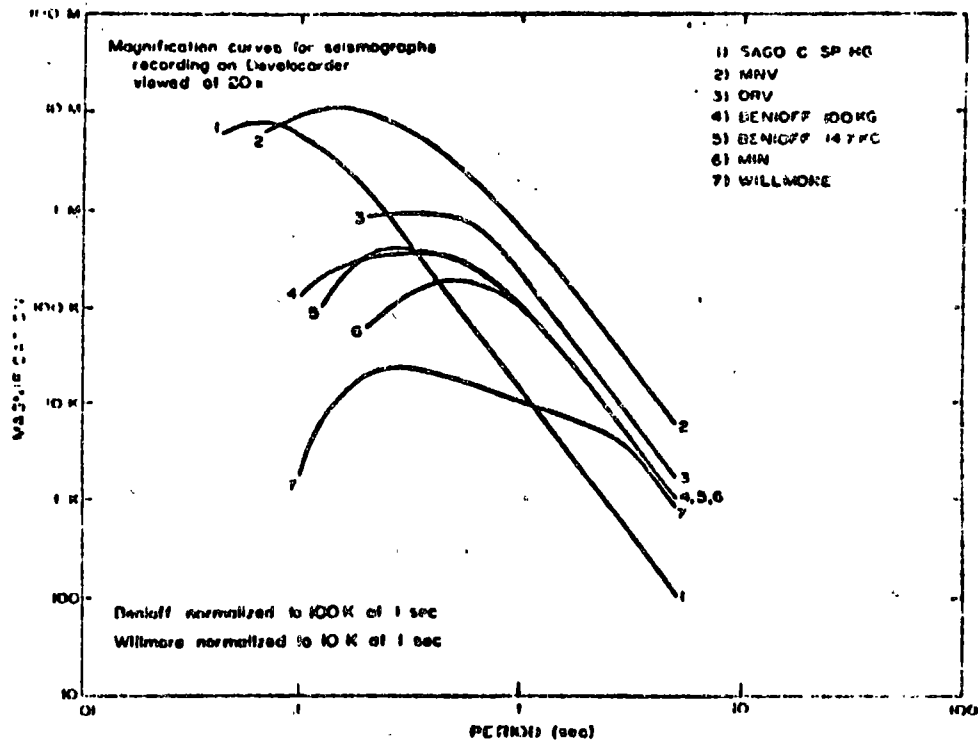


Fig. 10.7. Suite of magnification curves applicable to telemetered short-period seismographs in the University of California network which record on a single 16-mm film recorder.

A common mistake is the assumption that one should apply a "safety factor" of, say, two to the requirements in all directions to be sure of getting the system actually needed. This is seriously objectionable because seismographic design does not use a continuous spectrum of building-block components. The components are widely spaced in capabilities and in cost, and a factor of two in sensitivity and bandwidth may necessitate major steps in several components of the system and imply an order of magnitude cost increase.

When the particular application allows some flexibility in system parameters it is advisable to request quotations on packages designed for the extremes in the acceptable range. The manufacturer usually also suggests an intermediate system as optimum. On the other hand, if one knows precisely the required instrumental parameters for the application, it is well to state them exactly from the beginning. This will ordinarily insure that the most economical design will be adopted.

In this discussion of system specification we must also mention the existence of "standard" seismographs — widely used systems developed in re-

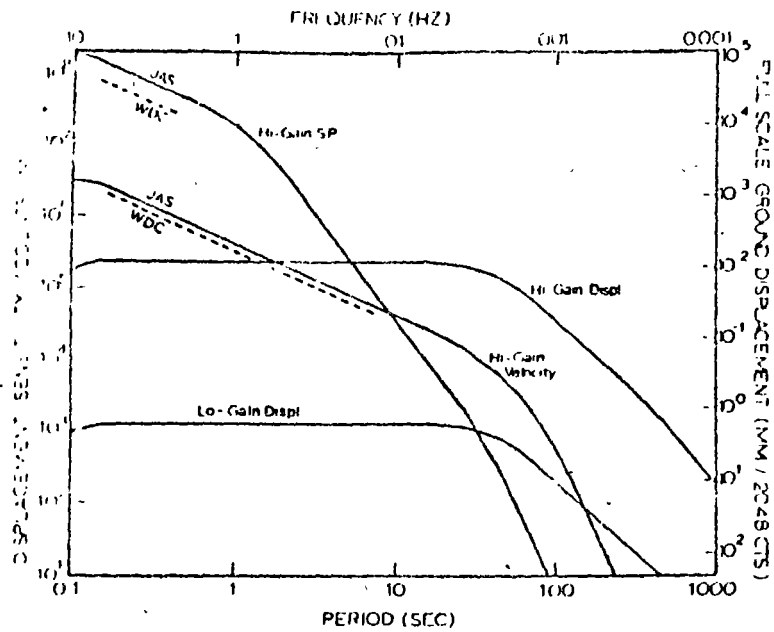


Fig. 10.8. Suite of displacement sensitivity curves applicable to telemetered broadband seismographs in the University of California network which record on FM magnetic tape at Berkeley and are digitized on playback. JAS, WDC are station named; SP is short period channel; Displ., Velocity indicate transducer used. The four response types shown are taken simultaneously from a single seismometer by appropriate selection of transducer, amplifier gain, and filter.

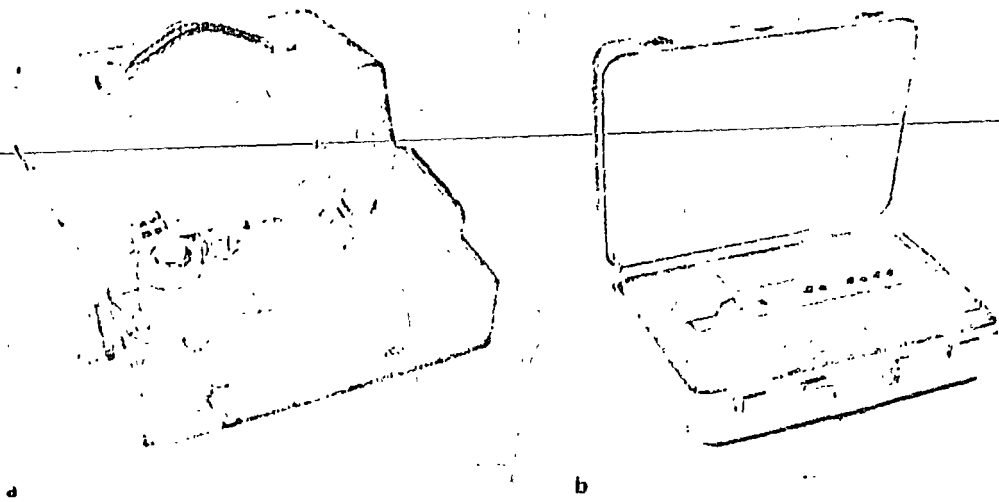
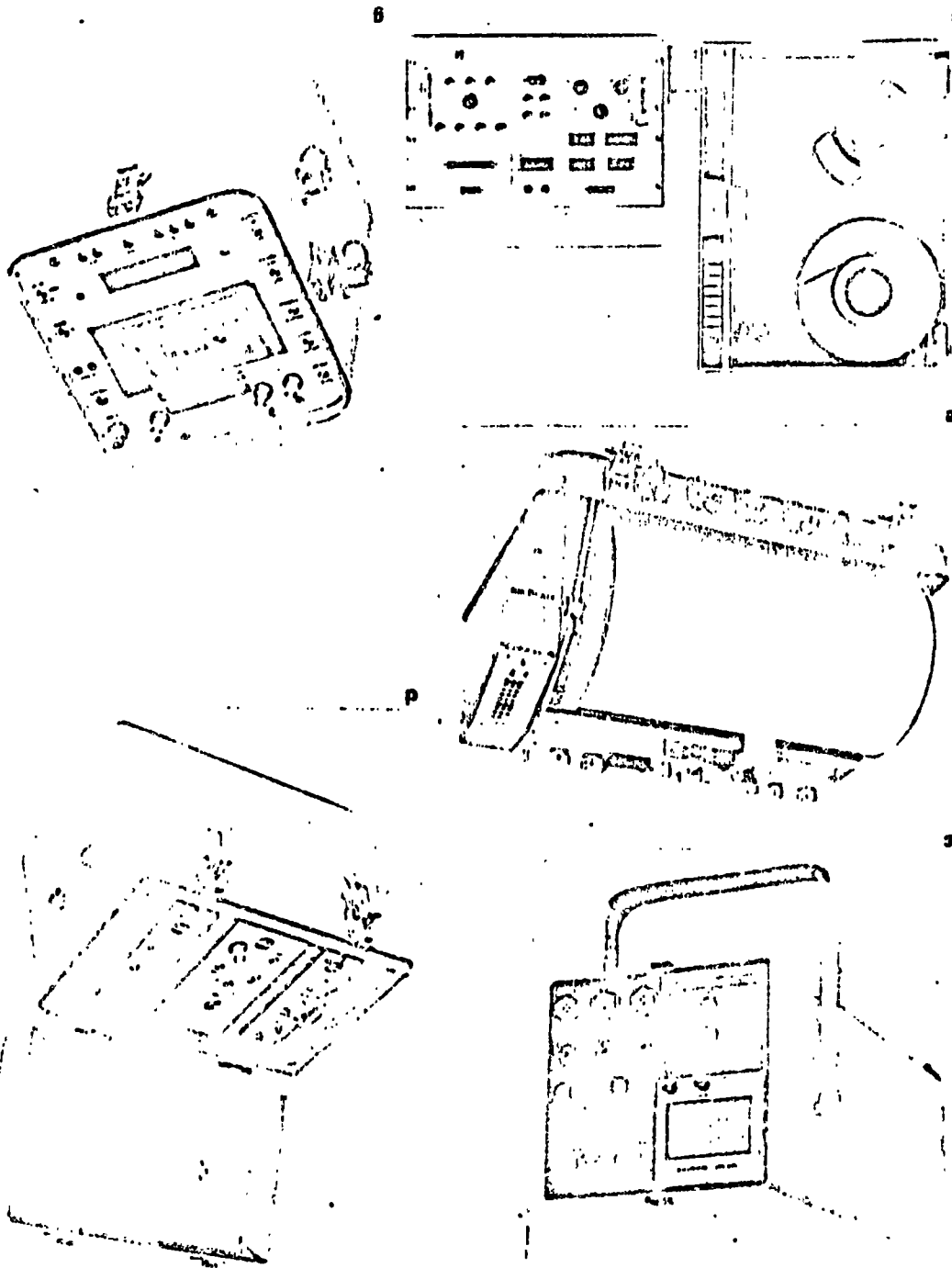


Fig. 10.9. Examples of commercially available specially packaged seismographic systems: a) strong motion accelerometer; b) 6-channel engineering seismograph; c) signal-enhance-ment refraction seismograph; d) field station for FM telemetry with amplifier, voltage-controlled oscillator, calibrator, and RF transmitter (inside case); e) portable microearthquake seismograph; f) digital data acquisition system with 1/2 in. magnetic tape; g) digital event recording system with memory and cassette magnetic tape (courtesy Kinemetrics (a,f), Nimbus Instruments (b,c), Eyringneither Instrument (d,e,g)).



use to particular applications and which consequently offer maximum performance for their cost. Several are illustrated in Fig. 10.9. It is often economical advantageous to use such packages when their specifications cover the requirements of the application in mind.

10.5.6 Peripheral considerations

The preceding discussion dealt with what can be called the fundamental instrumental parameters. There are usually several additional considerations in selecting a seismographic system for a given application. The more specific the application, the more significant these peripheral considerations may become. The following list provides some examples.

Timing. One should state the required precision and resolution of the timing system. Precision involves stability of the clock, generally crystal-controlled, and its absolute time error. Resolution involves both the increment of reference pulses from the clock and the speed of the recording system.

Record duration. This includes the time elapsed from the physical erasing of the paper, film, or magnetic tape.

Physical size. The total volume and weight of the complete system are often important, especially for instruments for recording structural responses, and the matter becomes paramount in office and commercial buildings.

Power requirements. Electrical-power consumption is crucial when one must operate the system on batteries in remote locations or with portable instruments. When maintenance costs for more conventional solutions are particularly high, use of solar cells can be appropriate.

Telemetry. It is becoming commonplace to transmit data from a remote installation to a central or convenient recording site using land line, telephone line, or low-power radio links. There are many advantages in this practice:

(1) Reduced maintenance costs for instruments at locations of difficult accessibility.

(2) The use of a common time base for an entire network of stations.

(3) Continuous monitoring of the instruments' operation, which allows immediate detection of conditions requiring attention.

(4) Continuous recording of all data on a common medium. If magnetic tape, the uninteresting portions may be erased, retaining complete records of events only, thus avoiding the use of excessive lengths of paper, film, or tape while attaining excellent timing resolution.

(5) Reduced system costs due to elimination of local clocks, recorders, and elaborate vaults, with attendant power requirements. For station networks, these cost savings are usually not compensated by telephone-line charges, resulting in a net cost reduction for the telemetered system.

— Recording system. There is much variety in this system component. One

may select smoked glass or paper; photographic film; pen and helical recording on drum; strip chart; cassette; 1/4", 1/2", or 1" reel-to-reel magnetic tape, analog or digital. The user generally has several constraints that incline his preference toward a particular recorder. Thus, magnetic-tape recording adds the expensive requirement of a playback system and associated hardware but in many applications it is well justified in view of the increased dynamic range bandwidth, and timing resolution along with conciseness in processing.

— Triggering and memory. Modern sensors and circuitry allow a wide selection of triggering thresholds and background noise/signal ratios to be incorporated into systems designed to record only sporadic events of interest. Inexpensive semiconductor memories are available that permit retention of the initial portion of the signal; yet their use is by no means widespread at present. In the coming years, however, such systems promise to become standard in seismology where the information desired consists of discrete events. Many shortcomings in present triggered seismographs, due primarily to missing the onset of the event, are eliminated by the incorporation of such memory systems.

— Instrumental protection. Instruments used at construction or near blasting sites or installed in locations exposed to vandalism or mere curiosity demand special considerations concerning their protection.

The foregoing and other additional considerations are necessary ingredients in the selection of a system configuration once the fundamental parameters have been specified. Often they drastically reduce the number of alternative system types for a given application.

10.6 CONVENTIONAL SEISMOGRAPHIC SYSTEMS — COMPONENT ELEMENTS

10.6.1 General constraints

The preceding section treated the general problem of specifying performance and physical characteristics in a seismograph. The following discussion dealt with available components used in the design of specific seismographic systems. Upon cursory analysis, it would appear that virtually any desired response curve is attainable. In theory this is the case. Any seismometer, of arbitrary natural frequency, damping, mass, and sensitivity, produces a non-zero output in response to ground motion of any amplitude and frequency. Conceivably one need merely select, by some signal conditioning method (amplification and selective filtering), the sensitivity and bandwidth of interest. The concept is perfectly correct. The neglected factor is noise. As long as a system so designed will produce, in response to ground motion at the desired detection threshold, an output sufficiently above system noise, the design concept is sound. Unfortunately, this condition is not easily ob-

tained when high sensitivity and low frequencies are involved. If it were, seismologists would need only an inexpensive exploration-type geophone, an amplifier, and a variable filter to work the entire seismic band from solid-earth tides to blast vibrations.

Realizable (as opposed to ideal) designs for seismographs are based on careful consideration and definition of the system requirements, as discussed earlier, followed by a common-sense evaluation of performance capabilities in components available for use. There will always be more than one design to accomplish a given measurement task. Satisfaction comes in optimizing the interplay of capability, complexity, and cost with the requirements of the application. Variations in the resulting solutions are evident when one considers, as an example, the wide range of seismographs in routine use worldwide as "long period" instruments. Subsequent discussions outline information on system components that, hopefully, will be helpful to the seismologist, geologist, or engineer faced with the task of specifying a seismograph for a particular use.

10.6.2 The complete seismograph

The basic elements integral to a seismograph are three. The sensor, normally a seismometer of some description, produces a measurable signal in response to a motion of its base. The response of a seismometer is characterized typically in terms of a sensitivity and some frequency dependence. This fundamental behavior can be stated compactly in its transfer function, i.e., the output (in whatever units are appropriate — e.g., volts, amperes, deflection of an optical or mechanical lever, etc.) per unit excitation (again in appropriate units — e.g., ground displacement, velocity, acceleration, strain, rotation, etc.), as a function of the frequency (in Hz) of the excitation. Generally, the transfer function is presented for convenience as a complex function of angular frequency, e.g., $S(\omega)$, where ω is in radians per second ($\omega = 2\pi f$ where f is in Hz or cycles per second). The complex nature of $S(\omega)$ indicates that the output of the sensor may be out of phase with the excitation, and $S(\omega)$ could be given as $|S(\omega)|e^{i\phi(\omega)}$, where $\phi(\omega)$ is the phase lag. $S(\omega)$ completely defines the response characteristics of a seismometer. For the conventional design using a spring-mass mechanical oscillator, $S(\omega)$ can be written in terms of its natural frequency, damping, and sensitivity.

The second element in the seismograph acts on the output of the sensor and is loosely described as the signal conditioning device. It may be no more than a mechanical or optical system of levers, or, more often in modern instruments, an electronic circuit or galvanometer providing amplification and filtering of the electrical output of the sensor. In any case, the signal conditioning element can also be characterized by its transfer function, say $C(\omega)$, giving output/input as a function of frequency in appropriate units. While we shall see that most $S(\omega)$ are very similar in form, $C(\omega)$, on the

other hand, can range from the simplicity of a numerical constant to the intricacy of an involved chain of amplifiers with low- and high-pass filters, yielding a complicated, complex functional representation. Despite potential complexity in $C(\omega)$, it is usually a straightforward procedure to write the mathematical expression for it.

The third and final element in a complete seismograph records the conditioned output of the sensor. The output of the recorder is a record. In its simplest form it is the deflection (e.g., in mm) of a trace from some zero position on a sheet of recording paper, film or glass. It may alternatively be a digital word (in counts) an FM tone (in Hz) or voltage written on magnetic tape. The recorder also may have a characteristic frequency response. We define its transfer function as $R(\omega)$, in the same sense as for the two previous elements. The output of the recorder is the seismogram, the fundamental medium of data presentation in seismology.

Assuming the system elements are themselves linear systems, we can define the response of the complete seismograph in terms of its components. The transfer function $T(\omega)$ of the complete seismograph is:

$$T(\omega) = S(\omega)C(\omega)R(\omega)$$

where $T(\omega)$ is the output of the recorder divided by the input to the sensor, in the appropriate units for the system. Virtually always a complex quantity, $T(\omega)$ is usually presented as $|T(\omega)|$, the amplitude response, in a magnification, velocity sensitivity, or acceleration sensitivity curve (see Fig. 10.4), along with $\phi(\omega)$, the phase response.

$T(\omega)$ completely describes the performance of a seismograph, except for system noise. It is sufficient to produce synthetic seismograms from a known input, $I(\omega)$ (where $I(\omega)$ is simply the Fourier transform, or spectrum of $I(t)$, the input ground motion time function). It serves as well to recover the input motion (in the frequency range where the input ground motion exceeds the equivalent system noise) from the recorded output $O(t)$, or its spectrum $O(\omega)$. The nature of the system transfer function is thus seen clearly in its definition:

$$O(\omega) = I(\omega)T(\omega)$$

or:

$$I(\omega) = O(\omega)/T(\omega)$$

It is evident at this stage that, in designing a required system response, all three system elements, S , C , and R , must be considered in shaping $T(\omega)$. With regard to the system noise level, each element also contributes. Either a level of background noise (e.g., from an amplifier) or a basic resolution (e.g., the smallest measurable signal in a recording medium) will characterize each element. These limiting values, which generally are frequency-depen-

dent, can be "taken through" the system transfer function to give the operating noise level or resolution in $O(\omega)$.

We shall discuss the system elements in turn.

10.6.3 Seismometers

The seismometer is the basic sensor of ground motion, say $u(x, y, z, t)$. For inertial (spring-mass) type seismometers, the measurement is made of relative distance between the seismometer frame (ground) and an inertial reference point on the suspended mass. Normally only one component of u , say u_x , is detected with a given seismometer. The seismometer output is thus proportional in some way to $u_x(t)$, and it may, depending on the design and on the type transducer used to detect the relative motion, actually produce a signal very nearly proportional to $u_x(t)$ or the time derivatives $\dot{u}_x(t)$ or $\ddot{u}_x(t)$ in the bandwidth of interest (see Section 10.5.5).

Extensometers or strain gages, on the other hand, measure the change in one of the components of u , usually in the direction of the measured component, e.g., $\partial u_x(t)/\partial x$, usually denoted as the extensional strain component e_{xx} . Again, depending on the transducer, which is the integral part of a seismometer converting mechanical motion into a usable output signal, the actual output may be a time derivative of $e_{xx}(t)$, e.g., $\dot{e}_{xx}(t)$.

The response equations for the conventional inertial seismometer are easily developed. For convenience in analyzing data, we desire the response in a form $S(\omega)$, where ω is angular frequency of the excitation (see Section 10.6.2).

The equilibrium equation for a damped single degree of freedom seismometer, responding to ground motion $u_x(t)$, can be written:

$$m\ddot{x} + c\dot{y} + ky = 0$$

where, as shown in Fig. 10.10, x is the absolute displacement of m , $y = x - u_x$, the measurable relative displacement of m , m is mass of the system, c is the damping coefficient (force/velocity), and k is the spring constant (force/displacement).

Rewriting the equation in the familiar form:

$$\ddot{y} + 2\zeta\omega_n\dot{y} + \omega_n^2y = -\ddot{u}_x$$

where $\omega_n = \sqrt{k/m}$, the undamped natural frequency of the system in radian/sec, and $\zeta = c/2m\omega_n$, the damping factor, i.e., the fraction of critical damping for the oscillator.

The solution to the equation of motion is readily obtained by application of the Laplace transform, i.e.:

$$Y(s) = \frac{y(0) + y(0)(s + 2\zeta\omega_n)}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} + \frac{F(s)}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

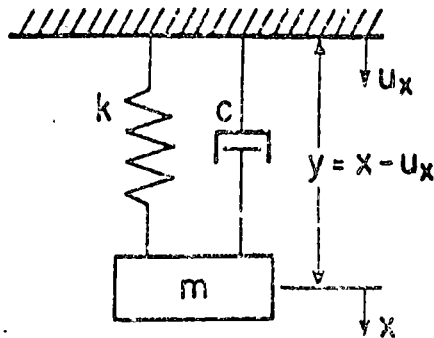


Fig. 10.10. Mechanical schematic of conventional inertial seismometer.

where $s = i\omega$, $Y(s)$ is the Laplace transform of $y(t)$, and $F(s)$ is the Laplace transform of $-u_x(t)$.

The first term is the complementary solution, representing transient motion due to initial conditions at $t = 0$, while the second is the particular solution for the forcing acceleration $-\ddot{u}_x(t)$.

The transient motion, or natural vibration of the oscillator can be transformed back to the time domain, giving:

$$y(t) = \exp(-\zeta\omega_n t) \left[y(0) \cos \mu\omega_n t + \left(\frac{y(0)}{\mu\omega_n} + \frac{y(0)\zeta}{\mu} \right) \sin \mu\omega_n t \right]$$

where $\mu = (1 - \zeta^2)^{1/2}$.

The physical significance of critical damping ($\zeta = 1$) is clear in this form as the value of c ($= 2\zeta m\omega_n$) for which the natural vibration ceases and the motion becomes a simple exponential decay as $y(0)e^{-\omega_n t}$. This is termed critical damping. For $\zeta > 1$, the natural motion is described by exponentially decaying functions, always taking a longer time to reach a given amplitude reduction than for the critically damped case. In most seismograph designs, the natural frequency ω_n of the seismometer falls within the frequency band of the ground motion to be recorded by the system. In such cases, damping is usually set near-critical to eliminate prolonged transient oscillations which tend to mask the desired response to the ongoing forcing ground motion.

Similarly transforming the forced motion back to time yields, for a general form of $-\ddot{u}_x(t)$:

$$y(t) = \frac{-1}{\mu\omega_n} \int_0^t \ddot{u}_x(\tau) \exp[-\zeta\omega_n(t - \tau)] \sin[\mu\omega_n(t - \tau)] d\tau$$

This is the familiar convolution integral seen in the analysis of linear system response. It is clear that the output at a given time depends on the total prior time history of excitation. With damping near-critical, however, the response to a given input is reduced significantly by times of the order of several times the natural period.

Rather than a general form of u_x , it is convenient to consider the seismometer response to sinusoidal excitation at a particular frequency. For harmonic ground motion of the form:

$$u_x(t) = A \sin \omega_e t$$

or:

$$u_x(t) = \frac{A}{\omega_e^2} \sin \omega_e t$$

where ω_e is the angular frequency of forcing motion (radians per second), the steady-state response (neglecting transient motion) is:

$$y(t) = \frac{A}{[(\omega_n^2 - \omega_e^2)^2 + (2\zeta\omega_n\omega_e)^2]^{1/2}} \sin(\omega_e t + \phi)$$

where:

$$\phi = \tan^{-1} \frac{2\zeta\omega_n\omega_e}{\omega_e^2 - \omega_n^2}$$

gives the phase shift.

This expression represents the basic measurable motion in a seismometer. Ignoring for the moment any effects of the transducer which detects this motion, we can define the basic seismometer displacement sensitivity, or magnification $M(\omega_e)$, as:

$$\begin{aligned} M(\omega_e) &= \frac{|y(t)|}{|u_x(t)|} + \text{the phase lag } \phi(\omega_e) \\ &= \frac{\omega_e^2}{[(\omega_n^2 - \omega_e^2)^2 + (2\zeta\omega_n\omega_e)^2]^{1/2}} \end{aligned}$$

Similarly, the velocity sensitivity is:

$$\begin{aligned} V(\omega_e) &= \frac{M(\omega_e)}{\omega_e} + \text{additional } \pi/2 \text{ phase lag over } M \\ &= \frac{\omega_e}{[(\omega_n^2 - \omega_e^2)^2 + (2\zeta\omega_n\omega_e)^2]^{1/2}} \end{aligned}$$

and the acceleration sensitivity is:

$$\begin{aligned} A(\omega_e) &= \frac{M(\omega_e)}{\omega_e^2} + \text{additional } \pi \text{ phase lag over } M \\ &= \frac{1}{[(\omega_n^2 - \omega_e^2)^2 + (2\zeta\omega_n\omega_e)^2]^{1/2}} \end{aligned}$$

The equivalent expressions in the form of complex transfer functions are:

$$S_M(\omega) = \frac{s^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

$$S_V(\omega) = \frac{-is}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

$$S_A(\omega) = \frac{-1}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

where $s = i\omega$.

These fundamental sensitivity curves are presented for various damping factors in Fig. 10.11. The corresponding phase curves are shown in Fig. 10.12. Note that an arbitrary specification of phase must be made, corresponding

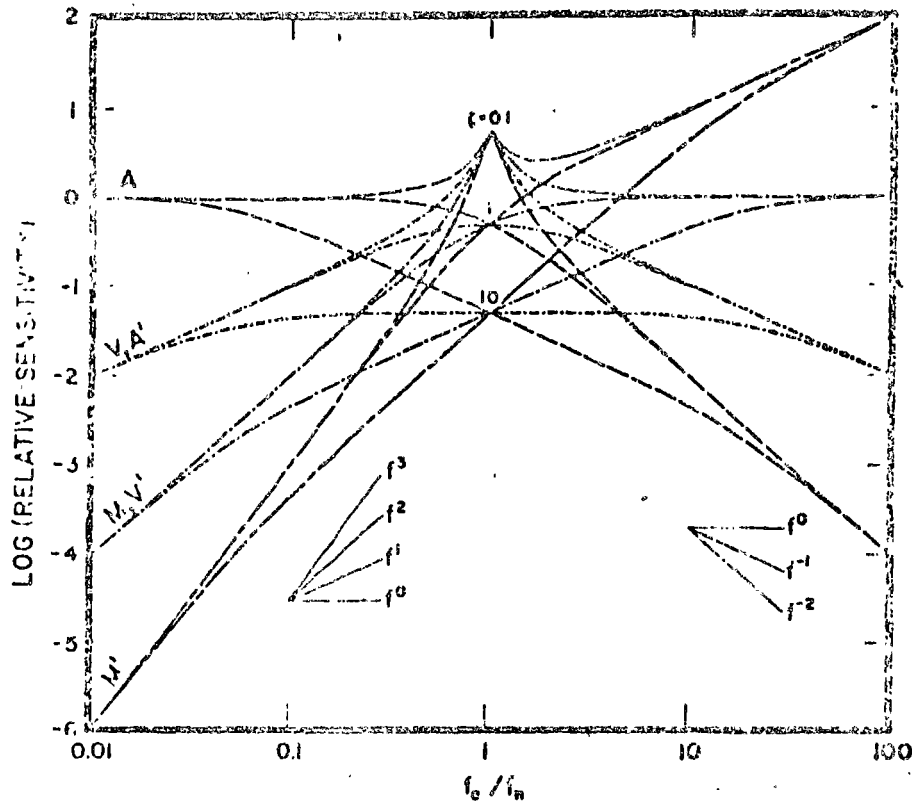


Fig. 10.11. Normalized seismometer response curves for three damping factors in terms of magnification (M), velocity sensitivity (V), and acceleration sensitivity (A) vs. frequency of excitation (f_0) relative to seismometer natural frequency (f_n). Unprimed symbols for seismometer with displacement transducer, primed symbols for velocity transducer, insets give asymptotic slopes.

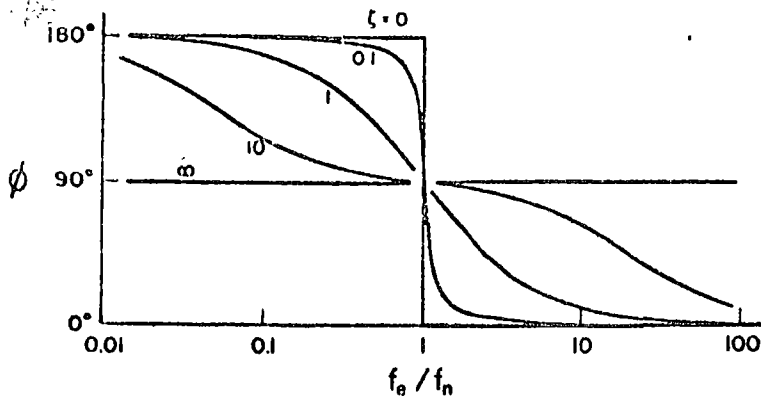


Fig. 10.12. Phase response (ϕ) for the magnification curve M in Fig. 10.11 for four damping values. High-frequency asymptotes are set by convention at 0° .

to the sign definition on y relative to x and u_x in Fig. 10.10. In seismometry it is conventional to specify the asymptotic phase-delay value as zero for high-frequency displacement sensitivity; i.e., we usually tap the seismometer in a given direction and identify the output polarity with the tap direction. This convention produces the phase relations shown in Fig. 10.12 for y relative to u_x , and illustrated for high frequencies in Fig. 10.13.

The seismometer thus provides us with the measurable quantity y , which is related to the ground motion u_x as shown in Figs. 10.11 and 10.12. Signal conditioning, as will be discussed in the next section, is normally applied to y in the form of amplification and filtering. A very common form of such

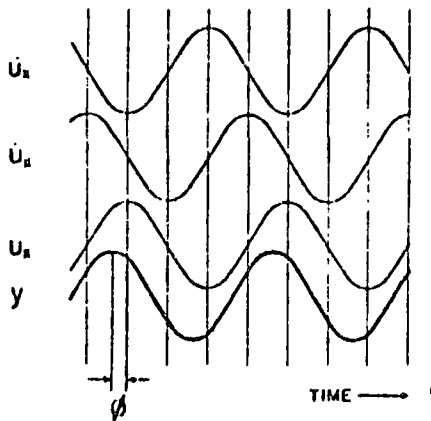


Fig. 10.13. Illustration of high-frequency ($f_e > f_n$) phase response of seismometer displacement y to steady-state sinusoidal ground displacement u_x , velocity $u_{\dot{x}}$, and acceleration $u_{\ddot{x}}$. High-frequency limit is 0° by convention.

conditioning is applied within the seismometer in the process of measuring y . The device which performs this measurement within the seismometer is termed the transducer. Transducer in general use are designed to measure either y (the displacement of the inertial reference) or \dot{y} . The former (i.e., the displacement transducer), consists normally of either a passive lever system (optical or mechanical), or of an active (requiring external electrical power) electronic circuit to measure change in capacitance between a fixed and a moving plate. The velocity transducer is typically a coil of wire moving in a fixed magnetic field generated by a permanent magnet, and producing an output voltage directly proportional to the relative velocity \dot{y} . In this case the seismometer output is differentiated, and the response curves M , V , and A in Fig. 10.11 are multiplied by $\omega_0 = 2\pi f_0$, shown as M' , V' , and A' in the figure. Note that it is not possible to obtain a flat magnification curve from the velocity-transducer output, unless further shaping is applied to the signal.

All the response curves in Fig. 10.11 exhibit asymptotic demands with slopes proportional to f_n^n where n is a positive or negative integer or zero (see insert in figure). Furthermore, these asymptotes always intersect at $f_0/f_n = 1$, i.e., at the natural frequency of the seismometer. Note also that, for heavy damping (see curves for $\xi = 10$), a third straight segment appears around $f_0/f_n = 1$. This segment extends from $f_0/2\xi$ to $2\xi f_0$, and is often used in response shaping. For example, Soviet strong motion instruments use the curve A' ($\xi \approx 10$) while U.S. designs use the curve A ($\xi \approx 1$). Willmore (1961) and Rodgers (1967) present a complete disc of the graphical representation of response curves.

10.6.4 Signal conditioning

We have reviewed the nature of basic output signals presented by conventional seismometers. If the shape (frequency response) and absolute level (sensitivity) of one of these curves is essentially that required for a particular application, we need only record the signal. More often we have need for a different shape and/or sensitivity and must investigate methods of signals conditioning.

In virtually every requirement for a seismograph there exists a range of frequencies to be recorded with reasonable fidelity. This specification almost always implies injection of unwanted background noise (from either the system or the ground). In Fig. 10.14 we show a generalized background noise curve for a very quiet site. Superimposed on roughly a f_0^{-1} or f_0^{-2} wide-band noise distribution are the microseism peaks, particularly the 5-8 sec band related to ocean waves. It is this curve which has had the greatest influence on high-gain seismograph design. The common long-period-short-period division is obviously motivated by the necessity of minimizing response around 6-sec period. The rationale for sharp peaking of the response at 35-40 sec in the modern high-gain long-period systems likewise is based

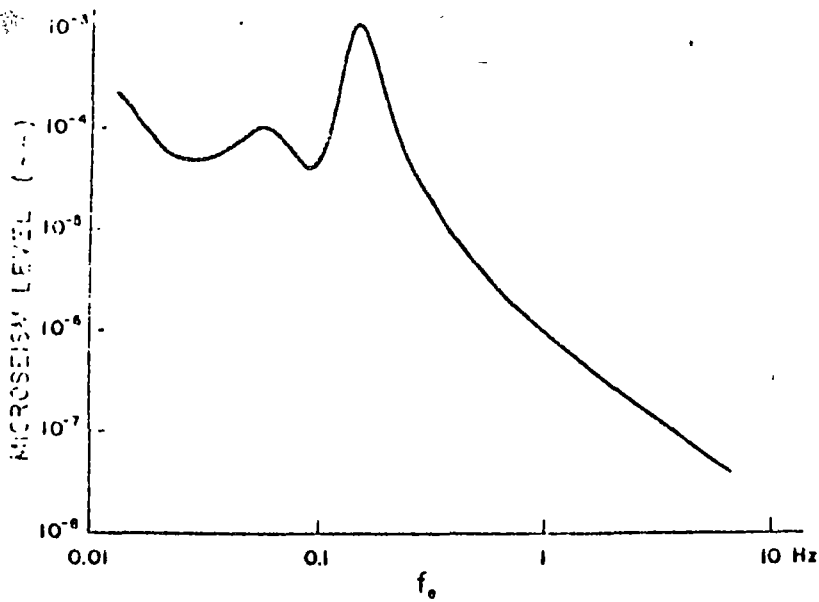


Fig. 10.14. Average background microseism for a very quiet site, in mm of ground displacement, as a function of frequency.

on background motion considerations. Peterson and Orsini (in press) describe these considerations in the design of the modern Seismic Research Observatories (SRO) which are being installed in the world-wide network.

The degree of conditioning necessary in a system will depend on the subsequent recording of the signal. As discussed earlier in this chapter, the conventional visible seismogram used in routine seismological observations has limited dynamic range. Such records are more readable with correspondingly narrower bandwidths than are more broadband seismograms. At the other extreme, a digitally recording system with very wide dynamic range, say 100 dB, can record with a wide frequency range.

Signal conditioning in its most common implementation consists of amplification and/or filtering of the signal to produce the desired sensitivity and bandwidth. Basic parameters to be considered in conditioning are the inherent noise levels at the seismometer output and in the conditioning device.

A typical moving-coil velocity transducer with several hundred ohms resistance will have a generator constant G of around 100 volts per meter per second, or 100 newtons per ampere. This quantity is a fixed property of the permanent magnet and coil, equal to the product of the flux density B (webers/m²) and the length of conductor L (m) in the magnetic field. The quantities $Vm^{-1}s^{-1}$, N/A , or Wb/m are numerically and dimensionally identical, and all specify G . From Fig. 10.10, the typical background velocity at a quiet site at 1 Hz is $2\pi \cdot 10^{-6}$ m/n/sec or $2\pi m\mu/sec$ (or nm/sec), producing

a peak voltage of $0.6 \mu\text{V}$. The inherent Johnson noise in the coil by virtue of its resistance is smaller by more than two magnitude than this voltage in a bandwidth of a few hertz, yielding a fairly clear and uncontaminated signal from the smallest ground motions we might wish to measure in the short period range. With f_c^{-1} ground noise, the background particle velocity will remain essentially constant except for microseism peaks, and, so long as $y \approx u_c$ ($f_c > f_n$), the velocity-transducer output gives the most noise-free measurement of y over a relatively wide frequency bandwidth.

A conventional displacement transducer using capacitance plates is inherently a device with greater noise than a coil by virtue of the fact that it is an active electronic circuit measuring small capacitance changes, thus subject to noise contributions from its components, power supply, etc. In bandwidths of a few hertz, with very careful design utilizing phase-sensitive detection, noise levels equivalent to 10^{-7} mm have been achieved. For the older-style design using balanced resonant circuits, a practical equivalent noise level would appear to be 10^{-6} – 10^{-6} mm. See Dratler (in press) for a discussion of capacitance-displacement transducers.

Modern amplifiers are capable of operating over bandwidths of several hertz with equivalent input noise levels of something less than $0.1 \mu\text{V}$ for discrete components, and less than $1 \mu\text{V}$ for the best integrated circuit amplifiers (cost about \$25). Clearly, the state-of-the-art now allows substitution of solid-state amplifiers for galvanometers where high sensitivity is required and DC power (typically much less than 1 watt) is available. This development, in very recent years, has provided a new dimension in flexibility for seismograph design.

Until around the middle 1960's there was no substitute for the galvanometer as a low-noise amplifier. Equivalent input noise levels below $0.1 \mu\text{V}$ were readily available. Equally important, the galvanometer derives its driving power directly from the moving-coil transducer, with external power required only for the light source. It is this combination of low noise and high gain (2 to 20 mm/ μV) that sets the seismometer-galvanometer combination as the standard electromagnetic seismograph for many years. It also led to the phototube amplifier (PTA) when high-level electrical signals were required for subsequent visible or tape recording and other signal processing or transmission.

A conclusion apparent in the preceding discussion is important in the design of signal-conditioning electronics following a seismometer output. It is that available velocity or displacement transducers can be used with equally satisfactory results in the range of frequencies about 0.01–10 Hz, where the seismometer relative displacement y can be made essentially equal to the ground displacement u_g , i.e., where the M -curve is essentially flat. In this range either transducer can be designed with inherent noise levels equivalent to ground displacements well below background in the quietest sites. At frequencies above about 10 Hz, by virtue of decreasing ground noise, the dis-

placement-transducer noise approaches levels equivalent to background. At low frequencies, however, by virtue of the more rapid decrease in velocity (\dot{y}) than in displacement (y) (f_c^3 vs. f_c^2) with longer-period ground motion (compare M' with M in Fig. 10.7), the displacement transducer rapidly becomes the better detector and is the logical choice for measurement of mantle surface waves, free oscillations, gravity, earth strain, and solid-earth tides.

The above considerations of noise limitations in signal conditioning become more important as higher sensitivities are required. For most strong-motion and engineering-seismology applications, however, the ground motions to be measured are sufficiently large that noise levels in signal conditioning devices are not normally a serious concern.

The basic rule governing selection of signal-conditioning components is that the full dynamic range of the recording device is used for ground motion in the bandwidth of interest. An example would be in digital recording, where one would want the least significant bit in the digital data word to represent ground motion and not system noise. Similarly, the mechanical and optical design in a conventional strong-motion accelerometer should be sufficiently clean that the smallest measurable deflection of the photographic trace represents seismometer mirror deflection due to ground motion and not spurious noise in the mechanical film drive or optical systems.

10.6.5 Recording

The decision as to recording method for a seismograph is usually reached early in the systems design procedure. Dictated by the planned use of the data, as well as by the form and quality of the signal available for recording, the recorder selection is normally straightforward. Frequency bandwidth, dynamic range, and record length, in addition of physical and electrical constraints, are the principal parameters governing the choice.

The major division in commonly used recording systems separates visible, or hard-copy, recorders from those which record the signal on magnetic tape of some type. The former designation includes: (1) devices in which a stylus inscribes the record on smoked or otherwise coated paper, glass, or metal; (2) pen and ink recorders; (3) heated stylus on special paper; and (4) light spot on photographic film or paper. Dynamic range is limited to about 40–50 dB in the best cases. The highest frequency measurable depends on the speed of the recording medium relative to the stylus, pen, or light spot, as well as on the actual size of the trace being written. Typical recording speeds range from 0.1 mm/sec for frequencies about 0.05 Hz, up to 10 mm/sec for frequencies as high as 20–50 Hz (depending on trace width). In general, the finest trace, about 0.1 mm wide, is written by a stylus on smoked paper or glass. The problem of pen friction and associated deadband is eliminated in photographic recording where high contrast is also obtained.

The convenience of pen-ink recorders, using inexpensive paper, is often preferred in a tradeoff analysis considering resolution, contrast, and friction along with cost and convenience. A compromise with the convenience of pen and paper, but improved resolution and contrast over ink, is the heated stylus on special coated paper, which is naturally more expensive than the plain paper used with ink. A popular multi-channel recorder uses 16-mm film which is processed in the unit. Unless the seismograph is designed for a specific recording technique (e.g., the 70-mm film in many strong-motion systems), the selection of visible recorders is normally based as much on personal preference as on details in specifications.

Visible recorder, in general, are designed for low cost plus the convenience of viewing and monitoring at least one day's data on a single record. They allow measurement of time and amplitude, only estimations of frequency content, and by and large are not well suited for digitization and subsequent processing. An exception is the high-quality strong-motion accelerograph film record, which contains a single event on three well-spaced traces at relatively high recording speed.

Magnetic-tape systems constitute the other principal class of recorders commonly used in seismological measurements. Developments in low-power analog and digital circuitry during the 1970's, plus the increasing access of workers to analog playback facilities and to small computers with magnetic-tape playback capabilities, have resulted in greatly increased application of magnetic-tape recording in a wide range of seismological efforts. Recording is accomplished in three fundamentally different modes: (1) analog direct; (2) analog FM (frequency modulated); and (3) digital.

In direct recording the analog signal is converted directly into a proportional magnetization on the tape. A consequence of the dependence on tape to head velocity in the playback process is that DC signals cannot be recorded and recovered on playback, thus the method has a low-frequency cutoff of several hertz. Very low recording speeds of around 0.1 mm/sec with up to 30 dB dynamic range have been used to record data at frequencies up to 20-30 Hz. For 1/2-in tape with seven data tracks this is a very efficient mode of data storage. The lack of DC response and relatively low dynamic range are the major limitations of direct analog recording.

FM analog magnetic-tape recording offers the advantages of DC response, precise amplitude information, and 40-50 dB dynamic range, at a tradeoff in tape speed. 0-10 Hz bandwidth can be obtained at 1 mm/sec tape speed. Considering again seven data tracks on a 1/2-in tape at this slow speed, a single reel of tape can contain several weeks data from up to seven seismographs. While such recorders are used widely in seismology, they are in reality precision laboratory devices not well-suited to the rigors of field installations unless maintained constantly by qualified technicians.

Digital magnetic-tape recording suffered initially from the low information density possible relative to analog methods. For example, a 12-bit word

(66 dB dynamic range) at 25 samples per second (barely adequate for 10 Hz response, with adequate anti-alias filtering), recording on the same 1/2-in 7-track tape, with seven data channels multiplexed (each at 10 Hz bandwidth), would require a tape speed over 1 cm/sec — an order of magnitude less information density than for FM. Even though the lower density is balanced by an order of magnitude improvement in dynamic range, the required frequency of tape change for multi-station continuous recording poses a severe problem for seismographic data acquisition.

Two recent developments may well revolutionize the use of digital magnetic-tape recording in seismology. These are the advent of low-cost reliable digital cassette transports along with the development of integrated circuit shift register modules whereby thousands of bits of information can be held in memory on a single printed circuit board, providing a delay in the data stream while the decision is being made regarding its significance and the necessity of recording it permanently on tape. Such "self-editing" data systems, which can be used with low-cost cassette or 1/4-in tape recorders for event recording, have finally brought the unquestioned superior fidelity of digital recording to routine seismographic recording where the desired data consist of discrete events, comprising but a fraction of the total monitoring time. Ambuter and Solomon (1974) and Prothero (1976) describe systems of this type.

As a final suggestion to those who would design systems based on magnetic tape as the prime recording medium — a monitor record of some type, recording continuously, is invaluable in the task of identifying, locating, and processing the events stored on the tape.

10.6.6 Timing

Timing systems commonly used in seismographs are of two types: (1) a precision oscillator driving a clock; or (2) continuous reception of a radio time signal. Even in the case of the oscillator and clock, regular radio reception is needed for time check.

Crystal oscillators with temperature compensation for time bases are available at relatively low cost and low power drain with long-term stability of $5 \cdot 10^{-8}$ at constant temperature. This stability makes available simple timing systems which exhibit drift rates in normal service of as little as 0.1 sec per month. The complete timing program derived from such an oscillator can be as simple as a series of minute and hour pulses for visible recorders, or as complex as a digital time code with day, hour, minute, second information repeated once per second. The basic precision is the same in either case.

Radio time signals exist in a variety of forms. Perhaps the most common is the WWV-type periodic or continuous time data transmission in the 2.5–20 MHz standard time broadcast bands. These short-wave signals can usually be received, with adequate equipment, anywhere in the world, at some time of

the day. While adequate for chronometer time checks, these signals are too erratic in reception quality for use as a primary time signal. Low-frequency time broadcasts in the 15–100 Hz range, such as WWVB, can be received reliably enough for continuous recording over areas of continental dimensions. Another source of continuous time data lies in the navigational broadcasts such as the Loran system. In many areas, standard broadcast stations (500–1500 Hz) transmit daily reference signals at regular times. A micro-power timer can be incorporated easily and at very low cost into field systems to turn on a pretuned receiver daily at a present time stable to a few seconds per month.

There is the occasional system that does not require synchronization to universal time. Special-purpose microearthquake networks, such as those used in geothermal site investigations, recording events seen only by that network, are an example. Another example is the array of deformation and pressure gauges often installed in large dams or structures to record response to strong earthquake shaking. In these cases a system is adequate which provides a reference for relative timing among data channels, and sufficient precision for the analysis contemplated (e.g., high-resolution response spectra).

10.6.7 Telemetry

In many cases it is advantageous to emplace the seismometer some distance from the recording site. The distance may be as little as 1–2 km, where cultural noise is unacceptable high in the recorder area, or as much as hundreds of kilometres when central recording of a network of stations is desired. Modern techniques of data telemetry, FM or digital, provide a simple reliable solution to this need.

The most commonly used telemetry system for seismological data is based on frequency modulation (FM) in the audio range of 300–3000 Hz which is readily transmitted by commercial voice-grade telephone lines. Typically, seismometer signals in the 0–25 Hz range are converted by a voltage-controlled oscillator (VCO) to tones in the audio band modulated ± 125 Hz by the signal. Up to nine (but preferably seven or less) independent tones (multi-components at one station, different gains, or multiple stations) can then be multiplexed onto one telephone line. At the receiver, the tones are demodulated by narrow-band discriminators which deliver the original analog seismometer signal. Dynamic range of 50–60 dB can be obtained with relatively simple system. The signals are then available at the central recording site for recording and processing. A variation on this method uses intermediate recording of the multiplexed tone bundles on magnetic tape at 15/16 ips (24 mm/sec), with demodulation upon playback. This is probably the most dense packing of information available in magnetic tape recording.

The telemetry link may consist alternatively of low power (0.1–0.5 watt) radio pairs, typically transmitting in FM mode somewhere in the 50–500

3 kHz range, requiring line-of-sight path, and effective up to 100 km distance in favorable circumstances. With radio telemetry, as with special land lines, the 300–3000 Hz bandwidth limitation on voice-grade telephone lines can be extended, allowing more channels per link.

If the requirement exists to telemeter data with a dynamic range greater than about 60 dB, digital techniques should be investigated. While digital data telemetry is not presently in widespread use for modest seismological installations, the rapid advances in the field of digital data transmission and acquisition virtually assures that such methods are coming in seismological practice.

10.7 CALIBRATION

After careful consideration of the requirements and components of a proposed seismographic system has produced detailed specifications and the resulting equipment has been installed, the inevitable question is asked, "What is the system response?" This question frequently arises, sometimes as soon as the system is operational; in other cases it may be months, or even years, before data from the instruments are processed in such a manner that any more than a rough magnification value is required. Nevertheless, this question will arise sooner or later in the case of virtually any modern installation of seismographic instrumentation.

In this final section the two general and most effective approaches to answering the question of system calibration will be outlined. The two methods are: (1) theoretical, a consideration of the expected response of each element in the system and their syntheses into the overall system response; and (2) empirical, a direct measurement of the system response to an input equivalent to a known ground motion. In the former approach we need to know all the parameters which define the response of each component, must be known, i.e., seismometer natural frequency, damping, coil resistance and inductance, transducer sensitivity, amplifier and filter characteristics, and recording-system constants. Many or all of these will have to be measured in the laboratory, to a precision consistent with the desired accuracy of the theoretical response calculation. In the latter empirical method, only the means to inject a known equivalent ground-motion input, with the required precision, into the system is needed. The standard modern approach to this is the use of an independent calibration coil on the seismometer. A current passed through the coil, whose electromagnetic constant is known or can be easily measured, produces a known force on the inertial mass of the seismometer which is equivalent to an acceleration of the ground. While many apparently differing schemes for calibration are used, they are, virtually without exception, simply variations or combinations of these two methods.

With careful procedures, either approach to calibration is capable of pro-

ducing response curves accurate to better than 5%. Having performed such a calibration, it is common good practice to check system response periodically with a simple weight lift or known electrical signal in the calibration coil. Variations in the system response are seen easily as changes in the response ("cal-pulse") of the system to this standard test input.

REFERENCES

- Ambuter, B.P. and Solomon, S.C., 1974. An event-recording system for monitoring small earthquakes, *Bull. Seismol. Soc. Am.*, 64: 1181-1188.
- Dratler, J., Jr., in press. An inexpensive linear displacement transducer using a low-power lock-in amplifier.
- Hudson, D.E., 1958. The Wilnot survey type strong-motion earthquake recorder. Earthquake Eng. Res. Lab., Calif. Inst. of Technol., Pasadena.
- Newmark, N.M. and Rosenbluth, E., 1971. *Fundamentals of Earthquake Engineering*. Prentice-Hall, New Jersey, 640 pp.
- Peterson, J. and Orsini, N.A., in press. Seismic research observatories — upgrading the world wide network. *EOS Trans. Am. Geophys. Union*.
- Prothero, W.A., 1976. A portable digital seismic recorder with event-recording capability. *Bull. Seismol. Soc. Am.*, 66.
- Rodgers, P.W., 1967. Overdamped second-order response. *Control Eng.*, March 1967: 77-78.
- Willmore, P.L., 1961. Some properties of heavily-damped electromagnetic seismographs. *Geophys. J. R. Astron. Soc.*, 4: 389-404.
- Zeevaert, L., and Newmark, N.M., 1956. Aseismic design of Latino Americana Tower in Mexico City. Proc. 1st World Conf. Earthquake Eng., Berkeley, Calif., 35: 1-11.

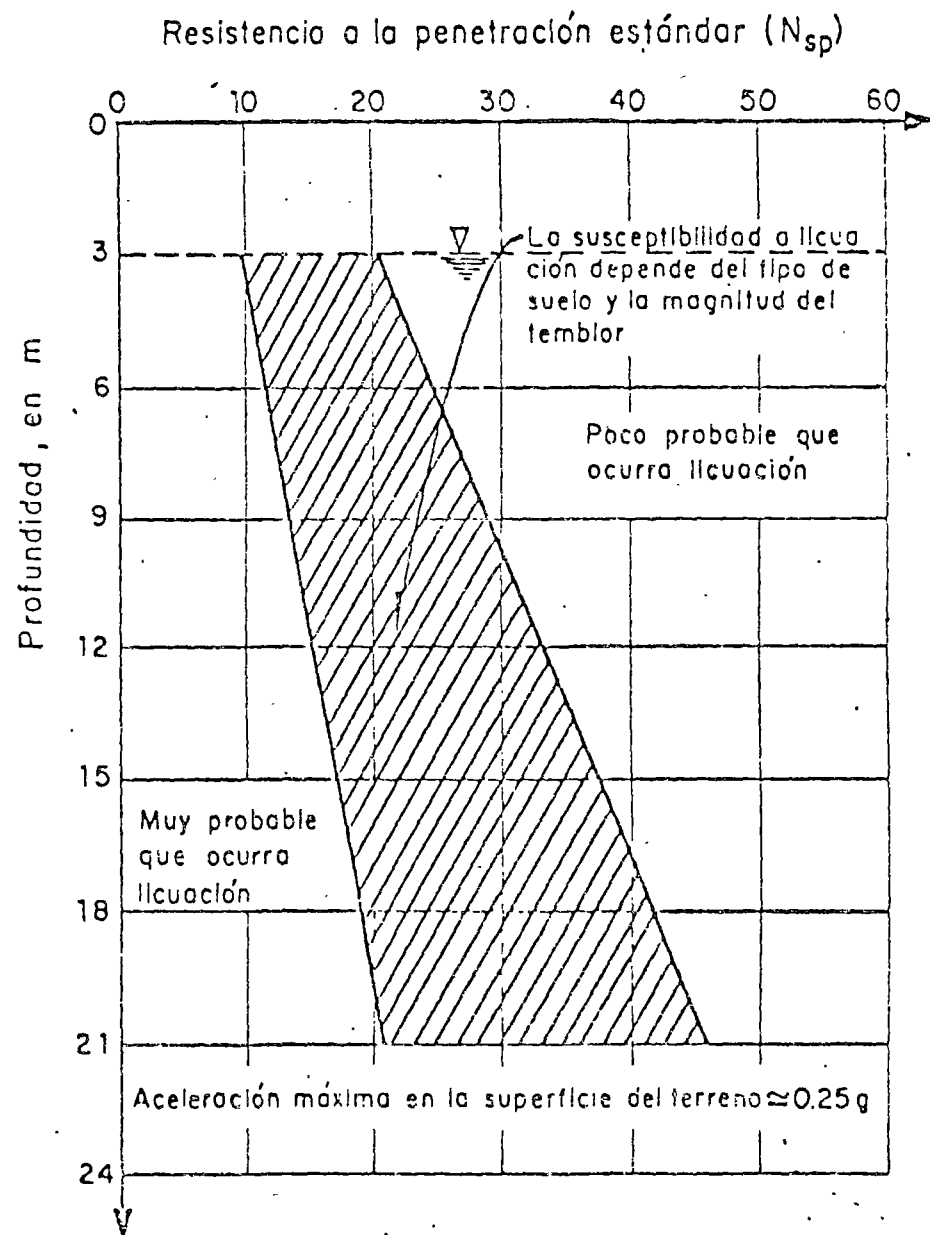
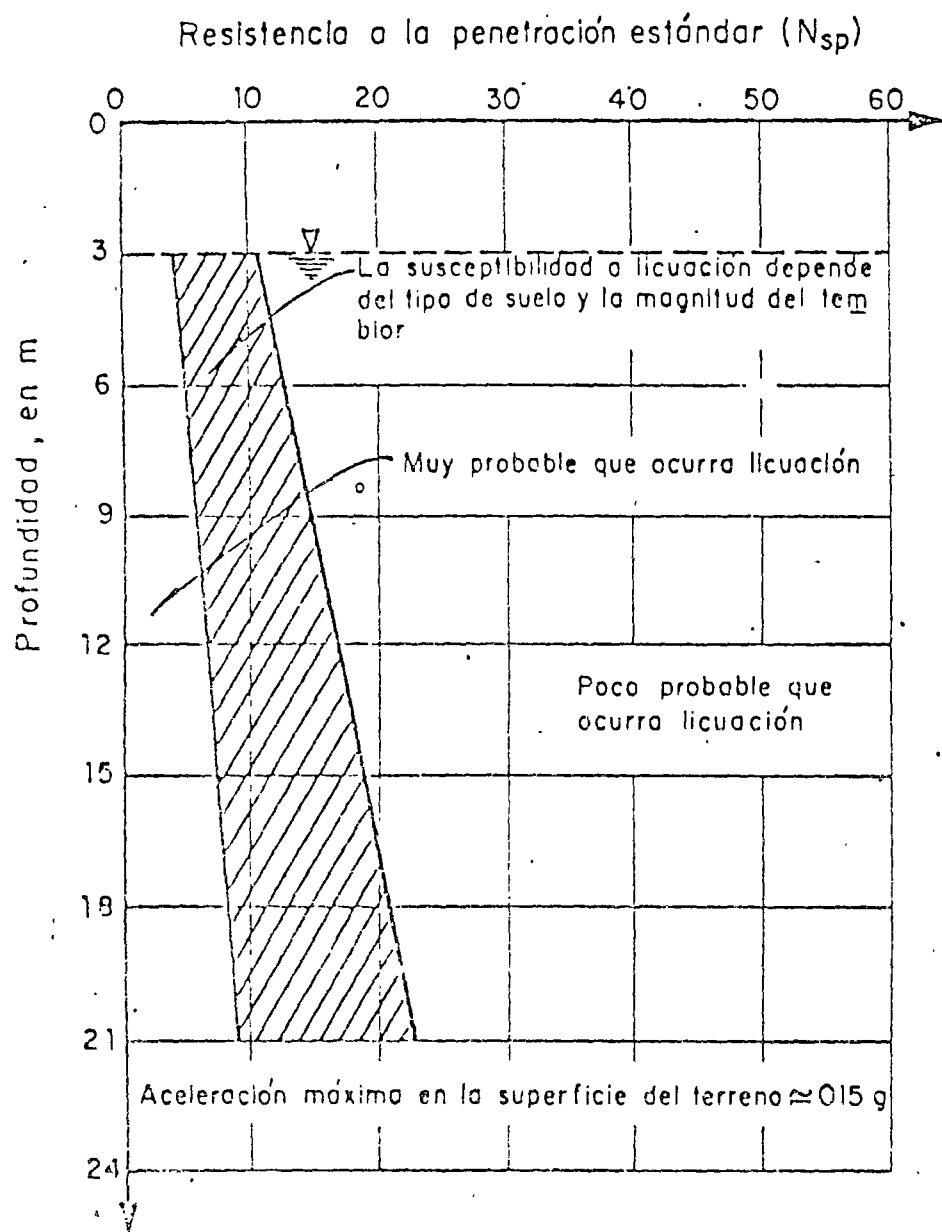
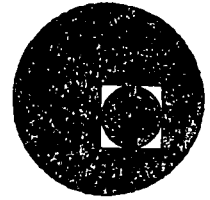


Fig 20 Gráficas para evaluar la susceptibilidad a licuación de arenas con el nivel freático a una profundidad aproximada de 3.0m





centro de educación continua
división de estudios superiores
facultad de ingeniería, unam



IV CURSO INTERNACIONAL DE INGENIERIA SISMICA

SISMOLOGIA Y SISMICIDAD

EFFECTOS SISMICOS EN SUELOS GRANULARES

M. EN I. ABRAHAM DIAZ RODRIGUEZ

JULIO, 1978

EFFECTOS SISMICOS EN SUELOS GRANULARES

por

Abraham Díaz Rodríguez*

INTRODUCCION

El comportamiento adecuado de los suelos y las cimentaciones durante la ocurrencia de temblores es esencial para evitar daños severos a toda clase de estructuras.

Las condiciones bajo las cuales los suelos (como parte de la cimentación o como material de construcción) pierden una parte significativa de su resistencia, conduciendo a fallas inducidas por temblores, no son, al menos hasta la fecha (junio, 1977) completamente entendidas y constituyen un campo fértil de investigación y de gran utilidad para la práctica profesional de la Ingeniería Civil.

La importancia de los efectos que los sismos pueden inducir en los suelos granulares se debe a los graves daños que se han observado en numerosas ocasiones durante los temblores pasados.

* Investigador, Instituto de Ingeniería, UNAM

* Profesor, División de Estudios Superiores,
Facultad de Ingeniería, UNAM

De 1881 a 1946 se ha informado de 229 deslizamientos, que causaron el desplazamiento total de 25 millones de m^3 de arena. En Holanda, a orillas de los numerosos estrechos que existen, ha habido gran cantidad de deslizamientos que provocaron el rompimiento de diques y, por tanto, la inundación de grandes extensiones.

Durante el temblor de Chile, en 1960, se formaron extensas zonas de falla. La tierra fue arrastrada hacia el mar a lo largo de la costa de 600 m, llevando consigo todas las estructuras de retención; las paredes del muelle con secciones de 5 m de concreto reforzado fueron abatidas y luego arrastradas. En este mismo temblor, falló una presa debido a la licuación del suelo de cimentación.

En México existen evidencias de que durante el sismo de 1959 (Mar-sal, 1961), un gran tramo de la margen izquierda del río Coatzacoalcos tuvo desplazamientos verticales y horizontales de importancia. Muchas instalaciones de la zona de astilleros sufrieron hundimientos bajo la cimentación y el asentamiento general fue notable después del sismo. Algunos tramos de los muelles cimentados sobre pilotes metálicos de 10 m de longitud sufrieron desplazamientos apreciables en dirección horizontal. Uno de los muelles se desplazó hacia el río más de 1/2 m. Tales movimientos se han atribuido al fenómeno de licuación en los mantos arenolimosos y limoarenosos que allí se encuentran entre 0 y 8 m de profundidad. En vista de las altas relaciones de vacíos y de la granulometría uniforme de dichos suelos, no puede descartarse esta posibilidad.

En Alaska, en 1964 (Seed, 1969), se produjo un deslizamiento debido a la licuación del suelo que movió 70 millones de m³ de material, destruyendo muchas de las instalaciones de la bahía de Anchorage. La superficie del terreno fue completamente devastada por los desplazamientos, produciéndose una nueva superficie irregular. El 40 por ciento de las casas y edificios comerciales fueron seriamente dañados debido a las fisuras que se extendían bajo las construcciones.

Durante junio de 1964, en Niigata, Japón (Seed y Lee, 1966), hubo daños muy graves causados por licuación de la arena. Muchas estructuras se asentaron más de 1 m y se inclinaron notablemente; hubo un edificio que giró 80° (fig 1), quedando prácticamente tendido en el suelo. Además de estas fallas, hubo otras evidencias físicas de licuación. Poco después del sismo se observó que brotaba agua del suelo por las grietas que se formaron, en las cuales llegaron a hundirse casas y automóviles; al mismo tiempo, se veía emerger a la superficie estructuras que debían permanecer bajo el suelo, como fue el caso de un tanque para tratamiento de aguas negras.

Durante este sismo, en la extensa zona licuada se produjeron daños en edificios, puentes, caminos, muelles, vías de ferrocarril, etc. Debido al asentamiento que se produjo, la parte de la ciudad cercana al río quedó completamente inundada. Se estima que en este sismo 2,130 edificios sufrieron falla total, 6,200 fueron seriamente dañados y 31 200 sufrieron daños ligeros (Seed y Lee, 1967).

FENOMENOS INDUCIDOS POR SISMOS

El comportamiento dinámico de los suelos granulares constituye, dentro de la dinámica de suelos, uno de los problemas que actualmente está lejos de ser comprendido totalmente y es mucho lo que falta por dilucidar en torno a ello, al grado que es posible ver interpretaciones diferentes y aún contradictorias de los hechos experimentales disponibles, y por lo tanto, constituye un campo fértil para la investigación en ingeniería sísmica.

Dos de los principales fenómenos que la ocurrencia de temblores, pueden inducir en depósitos de suelos granulares son:

1. Cambios de volumen (Densificación-asentamientos)
2. Reducción de la resistencia al esfuerzo cortante
(Aumento de la presión de poro-licuación)

En lo que sigue se tratará de dar un breve panorama del estado de conocimiento que guardan estos dos temas. No se ha pretendido en estas notas hacer un análisis exhaustivo y completo. Para mayores detalles se ha elaborado una lista de referencias actualizada (junio de 1977) para que sirva de guía a aquellas personas que estén interesadas en profundizar en el tema.

ESTUDIOS DE DENSIFICACION

Es un hecho bien establecido que la aplicación de carga cíclica a una muestra de arena, da como resultado un decrecimiento progresivo de volumen, aún en el caso de arenas densas, las cuales se comportarían dilatantes bajo carga unidireccional o monotónica. Varias técnicas, tanto de laboratorio como de campo, se han desarrollado (Broms y Forssblad, 1969).

El uso de vibraciones verticales para producir la densificación de muestras de arena se ha utilizado en el pasado (D'Appolonia y D'Appolonia, 1967; Whitman y Ortigosa, 1968), estos estudios han mostrado que los cambios de peso volumétrico de las muestras son pequeños para aceleraciones menores de 1 g (figs 4 y 5).

Los cambios tanto de volumen como de características friccionantes de arenas secas inducidos por grandes aceleraciones horizontales y un gran número de ciclos de pequeña amplitud se han investigado utilizando cajas de corte montadas sobre mesas vibratoras (Barkan, 1962; Youd, 1970), ver fig 6.

Otros estudios basados en ensayos de corte simple y mesas vibratoras, con niveles de aceleración y amplitudes de deformación semejantes a los esperados en temblores intensos, han mostrado que: la amplitud de deformación, compacidad relativa y número de ciclos de carga son los principales factores que gobiernan la compactación de suelos granulares secos o saturados bajo condiciones drenadas (Silver y Seed. 1969; Youd, 1972) ver fig 7.

Pyke, Seed y Chan (1974), realizaron una serie de ensayos de corte simple tanto en una (x) como en dos (x,y) direcciones. Se utilizaron dos patrones básicos de movimiento, en los ensayos bidireccionales.

Los resultados de los ensayos utilizando movimientos aleatorios se resumen en la fig 8, en donde se encuentra el asentamiento para 10 ciclos de carga como función de la relación, τ_h/σ_v , en donde, τ_h , es el máximo esfuerzo cortante horizontal y, σ_v , es el esfuerzo vertical aplicado. Estas pruebas confirmaron las conclusiones de Silver y Seed (1971), que para un nivel de deformaciones cortantes el asentamiento inducido es independiente del esfuerzo vertical. Sin embargo, si se realiza una prueba bajo condiciones de esfuerzo controlado, las deformaciones cortantes cíclicas, y por lo tanto los asentamientos, se incrementan con el incremento de la relación de esfuerzos. Para un valor dado de la relación de esfuerzos se puede ver que el asentamiento causados por dos componentes de movimiento es aproximadamente igual a la suma de los asentamientos causados por cada una de las componentes.

Sobre la base de estos resultados parece razonable postular que para arenas saturadas ensayadas bajo condiciones no drenadas, el incremento de la presión de poro será aproximadamente dos veces más rápida bajo dos componentes de movimiento que bajo una sola.

Tomando en cuenta todo lo anterior, se puede concluir que los aspectos más importantes relacionados con los cambios de volumen de suelos granulares, son los siguientes:

- a) Los esfuerzos cortantes cíclicos constituyen el medio más efectivo de densificación
- b) Para un peso volumétrico dado, la amplitud de las deformaciones cortantes es el parámetro más importante que afecta la velocidad y magnitud de la densificación
- c) A mayores esfuerzos de sobrecarga la velocidad de densificación generalmente resulta menor
- d) La densificación es independiente de la frecuencia del movimiento

CALCULO DE ASENTAMIENTO

La acción de los sismos puede causar asentamientos considerables en depósitos de suelos granulares. Durante el temblor de San Fernando, ocurrido el 9 de febrero de 1971, se tuvieron asentamientos de edificios, los cuales variaron de 10 a 15 cm (aprox. 4 a 6 pulgadas).

Mayores asentamientos e incluso inclinación de edificios pueden ocurrir debido a la licuación de los depósitos de arena saturada, pero este problema se tratará en el capítulo siguiente.

Los asentamientos de depósitos de arena seca, resultantes del movimiento del terreno son rara vez uniformemente distribuidos, y, en general causan asentamientos diferenciales en las estructuras, los cuales, en algunos casos, pueden llegar a clasificarse como daños mayores. Daños severos de grandes estructuras en Skopje durante

el temblor de 1963, fueron atribuidos a los asentamientos diferenciales causados por la densificación de lentes de arena suelta bajo las cimentaciones (Seed and Silver, 1972).

Los asentamientos de edificios cimentados sobre arena seca, considerando la acción de cargas estáticas, se estima empíricamente y generalmente, se pone poca atención a los posibles asentamientos debidos a los movimientos del terreno inducidos por sismos.

Se han propuesto dos procedimientos semi-empíricos para estimar los asentamientos provocados por temblores. Uno de éstos propuesto por Seed y Silver (1972) permite estimar el asentamiento de arenas secas, Pyke et al (1974) amplió el método para tomar en cuenta movimientos multi-direccionales. Lee y Albaisa (1974) propusieron un método aplicable a arenas saturadas.

El procedimiento de Seed y Silver (1972) para estimar el asentamiento de un estrato de arena debido a carga sísmica, consiste de los siguientes pasos:

- a) Calcular la historia de deformaciones de cortante en varias capas del estrato, usando un método de análisis dinámico lineal.
- b) Convertir la historia de deformaciones de cortante en cada capa a un número equivalente de ciclos de deformación cortante de amplitud constante.
- c) Aplicar el número de ciclos de deformación cortante, determinado en (b) a muestras de arena ensayadas bajo condiciones de corte simple y determinar las deformaciones volumétricas a deformaciones verticales resultantes.

d) Repetir el procedimiento de (c) para cada capa del estrato e integrar las deformaciones verticales para obtener el asentamiento total.

El paso (b) involucra una aproximación. Martin et al. (1975) ha demostrado que el efecto de una historia irregular de deformaciones de cortante depende no únicamente de la magnitud de los pulsos en el registro, como también del orden en que ellos son aplicados. El procedimiento para determinar el número equivalente de ciclos no toma en cuenta el hecho antes mencionado.

Al expresar analíticamente la relación entre deformaciones de cortante y los cambios de volumen, se pueden eliminar los pasos b, c y d como sucede con el método de Martin et al (1975), el cual es aplicable al cálculo de asentamientos de estratos de arena seca o parcialmente saturada.

PERDIDA DE RESISTENCIA DE SUELOS GRANULARES

- LICUACION DE ARENAS -

Probablemente uno de los efectos más costosos y espectaculares que se puedan encontrar en ingeniería sísmica se deban al fenómeno de la licuación de arenas.

El fenómeno es complejo y aún no es claro y completamente comprendido, al grado que es posible encontrar interpretaciones diferentes y aún contradictorias de los hechos experimentales existentes.

La discrepancia empieza con la propia definición del término licuación. Mientras que para H.B. Seed (1966) el término "licuación inicial" es la condición de una muestra de arena en la cual la presión de poro inducida por la aplicación de carga cíclica alcanza el valor de la presión de confinamiento y el término "licuación total" es la condición correspondiente a que la muestra alcance una amplitud de deformación del 20%; A. Casagrande en 1969, utiliza los términos licuación y movilidad cíclica que después modifica (Casagrande, 1976) definiendo por "licuación real" a la respuesta de una muestra de arena suelta y saturada cuando se le somete a deformaciones o impactos que dan como resultado una pérdida sustancial de resistencia y en casos extremos a flujo de taludes, y por "licuación cíclica" la respuesta de un espécimen dilatante de arena cuando se le ensaya en cámara triaxial cíclica y la presión de poro se eleva en forma incremental hasta alcanzar la presión de confinamiento.

En esta plática entenderemos por "licuación de arenas" al fenómeno mediante el cual una arena saturada pierde una gran parte de su resistencia al esfuerzo cortante (debido a carga monotónica o cíclica) y fluye o se comporta como un líquido hasta que los esfuerzos cortantes actuantes en la masa de suelo disminuyen a valores compatibles con la resistencia del suelo licuado, el movimiento se detiene, y el suelo recupera su resistencia y estabilidad.

Por lo tanto, un talud que se licúa llega a estabilizarse, cuando la pendiente se ha reducido a pocos grados.

Descripción del Fenómeno

El fenómeno de licuación de arenas es causado por el desarrollo de grandes presiones en el agua que ocupa los poros del suelo. Estas grandes presiones de poro son inducidas cuando se aplican a la masa de suelo esfuerzos o deformaciones de cortante, en condiciones tales que no se permite su disipación inmediata, es decir prácticamente a volumen constante. La forma de aplicación de los esfuerzos cortantes puede ser monotónica, cíclica o transitoria.

Factores que influyen en la ocurrencia de licuación

Los factores más importantes que influyen en la ocurrencia de licuación son:

a) Tipo de suelo

Los suelos uniformemente graduados son más susceptibles de sufrir licuación que los suelos bien graduados; dentro de los primeros, las arenas finas se licuan más fácilmente que las gravas o suelos

arcillosos aluviales. En el temblor de Alaska se observó que las estructuras de puentes cimentadas sobre arena sufrieron grandes desplazamientos, mientras que las cimentadas en grava no tuvieron daños.

En la fig 9 se muestran las envolventes de las curvas granulométricas de los suelos que se han licuado.

b) Compacidad relativa (C_r) o relación de vacíos (e)

Un depósito de arena suelta es más susceptible de sufrir licuación que un depósito de arena densa.

En el temblor de Niigata hubo licuación en zonas cuya C_r era del orden del 50 por ciento, o menor, en tanto que en las zonas con una $C_r > 70$ por ciento no se presentó ningún daño.

En la fig 10 se ilustra el concepto de compacidad relativa.

c) Esfuerzo confinante inicial

La susceptibilidad de licuación disminuye al aumentar el esfuerzo confinante. Ensayes de laboratorio han mostrado que para una relación de vacíos inicial, el esfuerzo cortante requerido para comenzar la licuación bajo condiciones de carga repetida, se incrementa con el aumento de la presión de confinamiento.

d) Magnitud del esfuerzo repetido

Cualquier depósito con una relación de vacíos mayor que su $e_{\text{mín}}$ es susceptible de sufrir pérdida parcial o total de resistencia, si la excitación es de intensidad suficiente.

Evidencias de campo demuestran que depósitos de arena suelta han resistido sismos de poca intensidad (0.005g) y se han licuado ante la acción de sismos intensos (0.16g), (Seed, Idriss, 1971).

La resistencia a la licuación decrece al aumentar la magnitud del esfuerzo.

e) Número de ciclos de esfuerzo

Todos los estudios de laboratorio indican que en una muestra sujeta a carga repetida, con un nivel de esfuerzo o deformación prescrito, el inicio de la licuación dependerá de la aplicación de un número requerido de ciclos de esfuerzo.

Esto se confirmó en Anchorage, durante el temblor de 1964, ya que los deslizamientos ocurrieron después de 90 seg de iniciado el movimiento..

TRABAJOS EXPERIMENTALES

Desde el punto de vista experimental, el fenómeno de licuación ha sido estudiado por varios investigadores utilizando diversos aparatos (triaxial, triaxial cíclica, corte simple cíclico, torsión cíclica y mesa vibradora).

El concepto de relación de vacíos crítica

La evidencia experimental ha demostrado que las arenas "seltas" disminuyen su volumen bajo la acción de esfuerzos cortantes y que, por el contrario las arenas "densas" lo aumentan.

Tomando en cuenta lo anterior, A. Casagrande llegó a la conclusión de que el decremento de volumen de una arena suelta y el incremento de volumen de una arena densa tenderían a la misma relación de vacíos, en la cual la arena puede deformarse sin cambio de volumen, a la cual denominó "relación de vacíos crítica".

Puesto que la curva de relación de crítica divide el comportamiento dilatante (bajo la curva) y contractivo (arriba de la curva), Casagrande la propuso como una medida para investigar la susceptibilidad de licuación de una arena.

Posteriormente Casagrande al analizar la falla de la presa de Fort Peck se dio cuenta que la curva de relación de vacíos crítica no dividía realmente el comportamiento contractivo y dilatante de las arenas.

Castro (1969) modificó el concepto de relación de vacíos crítica y obtuvo, a partir de resultados de pruebas triaxiales consolidadas-no drenadas con medición de presión de poro (pruebas \bar{c}_u), la curva de estado crítico. En la fig 11 se muestran las líneas e_f de estado crítico para varias arenas.

Prueba triaxial cíclica

Seed y Lee (1966) fueron los primeros en utilizar cámara triaxial cíclica, con objeto de reproducir la condición de esfuerzos a que se halla sujeto un elemento de suelo durante un temblor (atribuyendo el estado de deformaciones del suelo a la propagación de ondas de cortante).

Si la superficie del terreno es horizontal, antes del temblor no hay esfuerzos cortantes en planos horizontales (fig 12a). Durante el temblor, los esfuerzos normales permanecen constantes, pero se generan esfuerzos cortantes (figs 12b y 12c).

En una cámara triaxial cíclica, la condición de esfuerzos señalada antes se produce en un plano a 45°, como se indica en la fig 13.

El comportamiento de las muestras de arena suelta, sometidas al ensaye propuesto por Seed y Lee, se caracteriza por un aumento gradual de la presión de poro sin que haya deformación axial apreciable, hasta que se produce el incremento que eleva la presión de poro al mismo valor de la presión confinante, momento a partir del cual la muestra se deforma subitamente más del 20%. Las arenas en estado compacto exhiben un comportamiento similar al de las arenas sueltas, pero al llegar a la "licuación inicial" no se presenta una deformación grande en forma súbita, sino que la deformación se incrementa gradualmente.

Ségún el concepto de Seed y Lee, cualquier espécimen de arena es susceptible de licuarse no importando su compacidad relativa.

Los parámetros más importantes según estos investigadores son: el número de ciclos de esfuerzo (N_d) para alcanzar la condición $u = \bar{\sigma}_3$, la relación entre el esfuerzo cortante máximo y el esfuerzo confinante, $\frac{\sigma_{dc}}{2\bar{\sigma}_3}$ y la relación de vacíos.

Castro (1969) al realizar sus ensayes en cámara triaxial cíclica observó que durante la prueba se desarrollan heterogeneidades en las muestras, de manera especial en la zona superior. Atribuye a

estas heterogeneidades, inducidas por el ensaye, el que especímenes densos alcancen la condición $u = \bar{\sigma}_3$.

Al comparar los ensayos realizados por Castro y por Seed y Lee, se aprecia que la frecuencia de aplicación de carga hace que el comportamiento de prueba Quasi estática sea diferente al de prueba cíclica.

Prueba de corte simple cíclico

La prueba de corte simple cíclico se desarrolló con la idea de conseguir mayor aproximación a las condiciones de campo que la lograda con cámara triaxial.

Uno de los primeros aparatos de corte simple fue el desarrollado por Swedish and Norwegian Geotechnical Institutes (Kjellman, 1951). Sin embargo, este aparato tenía el inconveniente de utilizar muestras cilíndricas (los esfuerzos cortantes en una sección horizontal no pueden ser uniformes).

Roscoe (1953) modificó el aparato, utilizando muestras de sección rectangular y paredes rígidas.

En la Universidad de California, en Berkeley, Peacock y Seed (1968) desarrollaron un aparato de corte simple, que utilizaron para examinar la tendencia a licuarse de una muestra de arena sometida a este tipo de esfuerzo. También en la Universidad de British Columbia, Pickering y Finn (1969), Finn et al (1970 y 1971) han utilizado corte cíclico simple para el estudio de licuación.

En las figs 14 y 15 se ilustran los resultados obtenidos por Peacock y Seed.

Este tipo de ensayos generalmente consiste en colocar un recipiente o caja con arena saturada, sobre una mesa vibradora y medir la aceleración de la mesa a la cual ocurre la licuación. Estos valores se relacionan con las medidas de aceleración en el campo.

Whitman (1970) menciona los factores que afectan los resultados y su influencia en la interpretación de los mismos:

1. Frecuencia de vibración
2. Duración de vibración
3. Tamaño y geometría del recipiente
4. Características de deformación del recipiente
5. Método de colocación de la muestra
6. Control del drenaje
7. Aparatos de medición de deformaciones
8. Presión confinante

Finn, Emery y Gupta (1971) mencionan las ventajas de usar grandes muestras y mesa vibradora.

Tal vez la principal objeción al uso de recipientes rígidos sobre mesa vibradora es que no representan las condiciones de campo.

Con objeto de superar esta dificultad Díaz, Weckmann e Iturbe (1973) proponen combinar la utilidad de las condiciones de corte simple (inciso b) y la ventaja de utilizar muestras grandes (30 x 60 x 90 cm)

en un recipiente de paredes móviles para ensayar arena saturada en mesa vibradora.

METODOS PARA EVALUAR LA SUSCEPTIBILIDAD A LA LICUACION DE LOS SUELOS

En relación a la predicción de la susceptibilidad a la licuación de depósitos de suelos granulares saturados considerable cantidad de investigación se ha dirigido hacia el desarrollo de mejores métodos de predicción y técnicas de ensaye.

Los métodos se pueden clasificar en tres categorías:

1. Métodos empíricos, basados en la comparación de las condiciones de los sitios en donde ocurrió o no licuación con las condiciones del sitio que se desea analizar.

Dentro de esta categoría se clasifican los primeros cuatro métodos que se describirán en este capítulo.

2. Métodos simplificados. Consisten básicamente en comparar la resistencia obtenida en pruebas de laboratorio, con los esfuerzos que provocará el sismo.

En esta categoría se clasifican los métodos propuestos por Seed e Idriss (1970) y por Casagrande (1976).

3. Métodos de análisis de respuesta del terreno. Son más refinados que los anteriores, utilizan programas de computadora.

Criterio del WES (Waterways Experimental Station)

Este criterio fue desarrollado para analizar la estabilidad de terraplenes a lo largo del Río Mississippi, en el que se producen flujos de material producidos por el incremento de la presión de poro originada por los cambios del nivel del río.

Criterio de Florin e Ivanov

Este criterio, desarrollado en Rusia, permite estimar la susceptibilidad a la licuación de suelos por medio de pruebas de campo. Se investigan los 10 m superiores de suelo haciendo explotar sucesivamente tres cargas de dinamita de 5 kg colocadas a una profundidad media de 4.5 m y determinando después de cada explosión, el asentamiento medio de la superficie dentro de un radio de 4.5 m. La cantidad y profundidad a la que se coloca el explosivo se eligen de forma que no haya expulsión de suelo durante la explosión. Si el asentamiento promedio es menor de 8 a 10 cm y la relación de asentamientos entre explosiones sucesivas es menor que 0.6 se puede afirmar que ese suelo no es susceptible a licuación.

Criterio de Kishida

Este criterio está basado en el análisis de las condiciones del suelo de 3 sitios en los que ocurrió licuación, (Kishida, 1969). Bajo sismos de igual magnitud, puede ocurrir licuación si el nivel freático está cerca de la superficie, si las características granulométricas satisfacen las relaciones: $2mm > D_{50} > .074 \text{ mm}$; $C_u < 10$ y

además se cumplen las siguientes condiciones:

- El espesor del estrato de suelo no licuable, arriba del estrato, licuable es menor que 8 m.
- La relación de los espesores del estrato no licuable al licuable es menor que 1.

Kishida también concluye que los suelos no son susceptibles a la licuación si:

- La presión efectiva de confinamiento es superior a 2 kg/cm^2 o,
- La compacidad relativa es superior a 75%.

Criterio de Oshaki

Este criterio (Oshaki, 1969) establece que los suelos con nivel freático cercano a la superficie pueden licuarse si se presentan las siguientes características granulométricas:

$$2 \text{ mm} > D_{60} > 0.2 \text{ mm}; D_{10} < 0.1 \text{ mm}$$

Adicionalmente, establece que estos suelos tendrán poca probabilidad de licuarse si el número de golpes N_{sp} en prueba de penetración estándar es mayor que $2z$, en que z es la profundidad en metros.

Método de Seed e Idriss

Este método consiste en comparar los esfuerzos inducidos por el sismo en los estratos licuables con los que puede resistir el suelo sin que ocurra licuación. Para determinar los esfuerzos inducidos in situ, debe contarse con el acelerograma del sismo de diseño, la estratigrafía y las propiedades índice y mecánicas de los suelos. Seed e Idriss proponen un procedimiento simplificado para estimar

la magnitud de los esfuerzos que origina el sismo. La magnitud de los esfuerzos que pueden provocar licuación en el suelo se obtiene a partir de pruebas de laboratorio, tanto triaxiales como de corte simple, con esfuerzos repetidos o bien se estima con gráficas de diseño obtenidas por Seed e Idriss. La comparación de los esfuerzos inducidos por el sismo con los que provocan licuación del suelo permite juzgar la susceptibilidad de un suelo a sufrir este fenómeno.

Se calcula el esfuerzo cortante máximo ($\tau_{\text{máx}}$) a una profundidad z , conocida la aceleración máxima ($a_{\text{máx}}$) en la superficie del terreno, y suponiendo que la masa de suelo se comporta como un cuerpo rígido, mediante la expresión:

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{\gamma z}{g} a_{\text{máx}}$$

$a_{\text{máx}}$ aceleración máxima en la superficie del terreno

γz presión vertical total a la profundidad z

g aceleración de la gravedad

$\tau_{\text{máx}}$ esfuerzo cortante máximo a la profundidad z

Como el terreno es deformable, en general se tendrá que:

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{\gamma z}{g} a_{\text{máx}} r_d$$

siendo r_d un factor de corrección, menor que 1.

El análisis de varios sismos en sitios que presentan un estrato de arena en los 15 m superiores ha mostrado que r_d cae dentro del intervalo de valores de la fig 16.

Seed e Idriss proponen calcular el esfuerzo cortante promedio τ_p que, en un número dado de ciclos, produce el mismo efecto que el sismo con la expresión:

$$\tau_p = 0.65 \frac{Yz}{g} a_{\text{máx}} r_d$$

Por su parte, el número de ciclos significativos en el comportamiento del material dependerá de la duración del sismo. Para fines prácticos se puede usar la siguiente tabla:

Magnitud del sismo	Nº de ciclos significativos, N
7	10
7 1/2	20
8	30

Previamente a la realización de pruebas de laboratorio, es preciso conocer la compacidad relativa del material in-situ. Para ello se utilizan los resultados de las investigaciones hechas por Holtz y Gibbs. En la fig 17 se presenta una gráfica modificada por Seed e Idriss que permite conocer la compacidad relativa.

Los esfuerzos que provocarán la licuación en un suelo a una compacidad relativa dada, se pueden deducir en forma aproximada de los experimentos llevados a cabo por diversos investigadores, tanto en cámaras triaxiales como en aparatos de corte simple. A partir de pruebas en cámaras triaxiales se han obtenido gráficas que permiten estimar si ocurrirá licuación en un suelo sometido a cierto número de ciclos (10 ó 30 usualmente) para una relación de esfuerzos $\left(\frac{\sigma_{dc}}{2\sigma_c}\right)$

dada y determinado tamaño de las partículas (representado por el D_{50}). En las figs 14 y 15 se presentan estas gráficas para una compacidad relativa de 50%.

Para determinar la relación de esfuerzos correspondiente a otra compacidad relativa se usa el hecho experimental de que la relación de esfuerzos $(\frac{\sigma_{dc}}{2\sigma_c})$ es aproximadamente proporcional a la compacidad relativa (fig 14 y 15). En las mismas figuras, se observa que el material menos resistente corresponde a un $D_{50} = 0.074$ mm.

Tomando en cuenta que el esfuerzo más significativo, en la licuación de un suelo bajo la acción de un temblor, es el esfuerzo cortante actuante en el plano horizontal; la prueba de corte simple es la que mejor asemeja las condiciones de deformación in-situ. Es por tanto importante correlacionar los resultados anteriores, obtenidos en cámaras triaxiales, con los obtenidos en pruebas de corte. Las investigaciones llevadas a cabo por Seed e Idriss, permitieron concluir que, para fines prácticos:

$$\left(\frac{\tau_{xy}}{\sigma_y}\right) \text{ corte simple} = c_r \left(\frac{\sigma_{dc}}{2\sigma_c}\right) \text{ triaxial}$$

en que c_r depende de la compacidad relativa (fig 18).

Comparando los esfuerzos producidos en el terreno por un temblor y los esfuerzos que el material es capaz de soportar, es posible determinar si el suelo presentará o no el fenómeno de licuación, para las condiciones particulares supuestas.

Seed e Idriss presentan un procedimiento simplificado que permite aplicar el método anterior en forma expedita mediante gráficas de

penetración estándar contra la profundidad, elaboradas para 2 profundidades típicas del nivel freático y para 2 aceleraciones máximas del terreno (figs 19 y 20). En estas gráficas se delimitan tres zonas: una, en la cual no habrá licuación; otra, en la que podría o no presentarse licuación dependiendo de las características granulométricas del material y de la magnitud del temblor; y la tercera en la cual es muy probable que el material se licúe. Las fronteras entre las zonas anteriores se determinaron para una compacidad relativa de 50% y corresponden a condiciones extremas en cuanto al número de ciclos significativos producidos por un temblor y a la granulometría del material. La frontera a la izquierda de la cual se concluye que habrá licuación fue obtenida usando el mínimo número de ciclos razonable ($N_{sp} = 10$) combinado con la granulometría del material menos susceptible a la licuación ($D_{50} = 2$ mm); la frontera a la derecha de la cual se dice no habrá licuación se obtuvo combinando el máximo número de ciclos razonable ($N_{sp} = 30$) con la granulometría del material mas susceptible ($D_{50} = .074$ mm).

Método de Casagrande

En esencia el procedimiento consta de los siguientes pasos:

1. Se ejecutan pruebas triaxiales con aplicación de carga monotónica (o cíclica, dependiendo de la compacidad relativa de la arena), en muestras inalteradas labradas de bloques obtenidos manualmente, y se determina su respuesta. De preferencia las pruebas deben ejecutarse en un equipo que disponga de extremos lubricados y los especímenes deben estar consolidados con una relación de esfuerzos principales de 2.

2. Se determina la línea de estado crítico, línea e_f , si es que los resultados de las pruebas lo permiten.
3. A partir de pruebas de compresión unidimensional, se estiman las combinaciones de esfuerzos efectivos y compacidad relativa (relación de vacíos) susceptibles de desarrollarse en el campo.
4. Se compara la posición de los puntos estimados en el paso anterior con la posición de la línea e_f . Los puntos situados arriba y a la derecha de la línea e_f son susceptibles de experimentar licuación. Puntos situados a la izquierda de y sobre la línea e_f , no son susceptibles de experimentar licuación.
5. En suelos no susceptibles de experimentar licuación por su posición en relación con la línea e_f , es posible estimar el incremento de presión de poro inducido por la aplicación de cargas cíclicas para un cierto número de ciclos. A. Casagrande estima que el número de ciclos necesario para inducir presiones de poro superiores al 50% de la presión de confinamiento in situ, es superior a cuatro veces el número de ciclos observados en el laboratorio (valor a partir del cual la influencia del fenómeno de movilidad cíclica en los resultados, es muy importante).
6. Si se requiere una estimación de las deformaciones inducidas por carga cíclica en el campo, es necesario ejecutar mediciones precisas de las deformaciones en el laboratorio, hasta que la presión de poro alcanza el 50% de la presión de confinamiento, y utilizar estas mediciones como una guía de las posibles deformaciones in situ, teniendo en cuenta que solo una fracción de las deformaciones medidas en el laboratorio son causadas por el mecanismo que controla el desarrollo de presiones de poro y deformaciones en el campo.

CONCLUSIONES

1. La licuación se presenta fundamentalmente en arenas finas, uniformes, de origen reciente y aluvial, y con compacidades relativas inferiores a 40 ó 50% dependiendo de la presión de confinamiento. La experiencia de que se dispone indica que arenas con una compacidad relativa $> 50\%$ no son susceptibles de experimentar licuación.
2. Para estimar la susceptibilidad a la licuación de arenas existen procedimientos empíricos y analíticos. Ambos hacen uso de la experiencia, y el segundo tipo hace uso de los resultados de pruebas de laboratorio ejecutadas sobre muestras representativas del suelo.
3. Los procedimientos empíricos relacionan el comportamiento del suelo con factores tales como el espesor de los estratos bajo consideración, sus características granulométricas, etc. Su aplicación es limitada a condiciones similares a las que les dieron origen.
4. Los procedimientos analíticos hacen uso de la experiencia, la teoría, y los resultados de pruebas de laboratorio en donde se determina la respuesta de muestras del suelo, sujetas a condiciones de esfuerzo y deformación que se supone duplican las condiciones existentes in situ.
5. Los procedimientos analíticos responden a dos enfoques principales: (a) el basado en el concepto de relación de vacíos crítica; aplicable para identificar la susceptibilidad a la licuación.

ción de arenas bajo carga monotónica y cíclica, y (b) el basado en los resultados de pruebas cíclicas; de utilidad para estimar el aumento en la presión de poro y las deformaciones in situ después de considerar que el mecanismo que controla el desarrollo de estas variables in situ es diferente al mecanismo que controla el desarrollo de estas mismas variables en el laboratorio.

6. Parece ser que un enfoque diferente y realista al problema de la licuación de arenas consistiría en efectuar investigaciones detalladas de depósitos naturales.

REFERENCIAS

- Ambraseys, N. N., 1970. Factors controlling the earthquake response of foundation materials. *Proc. Third European Symp. Earthq. Engrg.*, Sofia, Bulgaria, pp 309-323.
- Ambraseys, N. N., 1973. Dynamics and response of foundation materials in epicentral regions of strong earthquakes. *Proc. Fifth World Conf. Earthq. Engrg.*, Rome, Italy, pp CXXVI-CXLVIII.
- Ambraseys, N. N., and Sarma, S., 1969. Liquefaction of soils induced by earthquakes. *Bull. Seism. Soc. Am.*, 59:651-664.
- Barkan, D. D., 1962. *Dynamics of Bases and Foundations*. McGraw-Hill, New York, 434 pp.
- Bazaraa, A., 1967. Use of the standard penetration test for estimating settlements of shallow foundations on sand. *Doctoral thesis, Dept. of Civil Engrg., University of Illinois, Urbana, Illinois.*
- Broms, B. B., and Forssblad, L., 1969. Vibratory compaction of cohesionless soils. *Proc. Specialty Session No. 2, Seventh Interntl. Conf. Soil Mech. Found. Engrg.*, Mexico City, pp 101-118.
- Casagrande, A., 1936. Characteristics of cohesionless soils affecting the stability of slopes and earth fills. *J. of the Boston Society of Civil Engineers*, January, pp 257-276.
- Casagrande, A., 1938. The Shearing Resistance of Soils and its Relation to the Stability of Earth Dams., *Proc. Soils and Foundation Conference of the U. S. Engineer Department*, Boston, Mass.
- Casagrande, A., and Shannon, W. L., 1948. Stress-deformation and strength characteristics of soils under dynamic loads. *Proc. Second Interntl. Conf. Soil Mech.*, Rotterdam, Holland, V, pp 29-34.

- Casagrande, A., 1965. Role of the Calculated Risk in Earthwork and Foundation Engineering. *Journal of the Soil Mechanics and Foundation Engineering Division, ASCE.*
- Casagrande, A. y Rendon, F., 1976. Reciprocating and Gyrotory Shear Apparatus-Design, Testing Procedures and Tests on Saturated Sand. *Report to WATERWAYS EXPERIMENTAL STATION, Vicksburg, Miss.*
- Casagrande, A., 1976. Liquefaction and Cyclic Deformation of Sands: A Critical Review. *Harvard Soil Mechanics Series No. 88.*
- Castro, G., 1969. Liquefaction of sands. *Report 81, Harvard Soil Mechanics Series, Harvard University, Cambridge, Massachusetts.*
- Castro, G., 1975. Liquefaction and cyclic mobility of saturated sands. *Proc. ASCE, J. Geotechnical Engrg. Div., Vol 101.*
- Castro, G. and Christian, J.T., 1976. Shear Strength of Soils and Cyclic Loading. *Proc. ASCE, 102 (GT9): 887-894.*
- Castro, G. and Poulos, S.J., 1977. Factors Affecting Liquefaction and Cyclic Mobility. *Proc. ASCE, 103 (GT6): 501-506.*
- Cervantes, R., Esteva, L., and Alduncin, G., 1973. Riesgo sísmico en formaciones estratificadas. *Internal Report, Instituto de Ingeniería, Universidad Nacional Autónoma de México, Mexico City.*
- Corps of Engineers, U.S. Department of the Army. 1939. Report on the Slide of a Portion of the Upstream Face at Fort Peck Dam. *U.S. Government Printing Office, Washington, D.C.*
- Cuellar, V., Bazant, Z.P., Krizek, R.J. and Silver, M.L., 1977. Densification and Hyteresis of Sand Under Cyclic Shear. *Proc. ASCE, 103 (GT5): 399-416.*

- D'Appolonia, D.J., and D'Appolonia, E., 1967. Determination of the maximum density of cohesionless soils. *Proc. Third Asian Regional Conf. on Soil Mech. and Foundation Engrg.*, Haifa, Israel, pp 266-268.
- De Alba, P., Chan, C.K. and Seed, H.B., 1975. Determination of Soil Liquefaction Characteristics by Large-Scale Laboratory Tests. *Report No. EERC 75-14*. University of California. Berkeley, California.
- Díaz, A., Weckmann, O. Iturbe, R., 1973. Licuación de Arenas, Primera Parte. Instituto de Ingeniería, UNAM, Informe 319.
- Donovan, N.C., 1971. A stochastic approach to the seismic liquefaction problem. Presented at *First Interntl. Conf. on Applications of Statistics and Probability to Soil and Structural Engineering*, Hong-Kong.
- Faccioli, E. and Resendiz, D., 1975. Soil Dynamics Behavior Including Liquefaction. *Report E 15*, Instituto de Ingeniería, UNAM. México.
- Finn, W.D.L., Pickering, D.J., and Bransby, P.L., 1969. Sand Liquefaction in triaxial and simple shear tests. *Report 11, Soil Mechanics Series, Dept. of Civil Engrg., University of British Columbia*, Vancouver, Canada.
- Finn, W.D.L., Bransby, P.L., and Pickering, D.J., 1970. Effect of strain history of liquefaction of sand. *Proc. ASCE*, 96 (SM6): 1917-1934.
- Finn, W.D.L., Emery, J.J., and Gupta, Y.P., 1971. Liquefaction of large samples of saturated sand on a shaking table. *Proc. First Canadian Conf. on Earthq. Engrg.*, Vancouver, Canada, pp 97-110.
- Finn, W.D.L. and Byrne, P.M., 1976. Estimating Settlement in Dry Sands During Earthquakes. *Canadian Geotechnical J.*, Vol. 13, Number 4: 355-363.

- Finn, W.D.L., Lee, K.W. and Martin, G.R., 1977. An Effective Stress Model for Liquefaction. *Proc. ASCE*, 103 (GT6): 517-533.
- Florin, V.A. and Ivanov, E.L., 1973. Liquefaction of Saturated Sandy Soils. *Proc., 5th International Conference on Soil Mechanics and Foundations Engineering*, Paris, France.
- Gibbs, H.J., and Holtz, W.G., 1957. Research on determining the density of sands by spoon penetration testing. *Proc. Fourth Internatl. Conf. Soil Mech. Found. Engrg.*, London, England, 1, pp 35-39.
- Hardin, B.O., and Drnevich, V.P., 1972a. Shear modulus and damping in soils: measurement and parameter effects. *Proc. ASCE*, 98 (SM6): 603-624.
- Hardin, B.O., and Drnevich, V.P., 1972b. Shear modulus and damping in soils: design equation and curves. *Proc. ASCE*, 98 (SM7): 667-692.
- Huang, Wen-Xi, 1961. Investigations on Stability of Saturated Sand Foundations and Slopes Against Liquefaction. *Proc. 5th ICSMFD*. Vol 2.
- Idriss, I.M., and Seed, H.B., 1968b. Seismic response of horizontal soil layers. *Proc. ASCE*, 94 (SM4): 1003-1031.
- Ishibashi, I., and Sherif, M.A., 1974. Soil liquefaction by torsional simple shear device. *Proc. ASCE*, 100 (GT8): 871-888.
- Ishihara, K., and Li, S., 1972. Liquefaction of saturated sand in triaxial torsion shear test. *Soils and Foundations*, 12(2):19-40.
- Ishihara, K. and Yasuda, S., 1972. Sand Liquefaction Due to irregular Excitation, *Soil and Foundations*, Vol. 12, No. 4.
- Ishida, H., 1970. Characteristics of liquefaction of level sandy ground during the Tokachioki earthquake. *Soil and Foundations*, 10(2): 103-111.
- Ladd, R.S., 1977. Specimen Preparation and Cyclic Stability of Sand. *Proc. ASCE*, 103 (GT6): 535-547.

- Lee, K.L., and Seed, H.B., 1967. Cyclic stress conditions causing liquefaction of sand. *Proc. ASCE*, 93 (SM1): 47-70.
- Lee, K.L., and Fitton, J.A., 1968. Factors affecting the cyclic loading strength of soil. In: *Symposium on Vibration Effects of Earthquakes on Soils and Foundations*, ASTM Spec. Techn. Publ. 450, pp 71-95.
- Lee, K.L., and Albaisa, A., 1974. Earthquake induced settlements in saturated sands. *Proc. ASCE*, 100 (GT4): 387-406.
- Liou, C.P., Streeter, V.L. and Richart, F.E. Jr., 1977. Numerical Model for Liquefaction. *Proc. ASCE*, 103 (GT6): 589-606.
- Marsal, R.J., 1961. Behavior of a Sandy Uniform Soil During the Jaltipan Earthquake, México. *Procs 5th International Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering, Vol I*, pp 224-233.
- Martin, G.R., Fenn, W.D. and Seed, H.B., 1975. Fundamentals of Liquefaction under Cyclic Loading. *Journal of the Geotechnical Engineering Division*, No. GT5.
- Martin, R.E., 1977. Estimating Foundation Settlements in Residual Soils. *Proc. ASCE*, 103 (GT3): 197-212.
- Middlebrooks, T.A., 1942. Fort Peck Slide. *ASCE Transactions*, Vol 107.
- Mulilis, J.P., Seed, H.B., Chan, C.K., Mitchell, J.K. and Arulanandan, K., 1977. Sample Preparation Sand Liquefaction. *Proc. ASCE*, 103 (GT2): 91-108.
- Ohsaki, Y., 1966. Niigata earthquakes, 1964, building damage and soil condition. *Soils and Foundations*, 6(2): 14-37.
- Ohsaki, Y., 1970. Effects of sand compaction on liquefaction during the Tokachioki earthquake. *Soils and Foundations*, 10(2): 112-128.

- Papadakis, C.N., 1973. Soil transients by characteristics method. *Doctoral thesis, Dept. of Civil Engrg., University of Michigan, Ann Arbor, Michigan.*
- Peacock, W.H., and Seed, H.B., 1968. Sand liquefaction under cyclic loading simple shear conditions. *Proc. ASCE, 94 (SM3): 689-708.*
- Poulos, S.J., 1971. The stress-strain curves of soils. *Mimeographed pamphlet.*
- Pike, R., Chan, C.K., and Seed, H.B., 1974. Settlement and liquefaction of sands under multi-directional shaking. *Report EERC 74-2, Earthq. Engrg. Res. Center, University of California, Berkeley, California.*
- Schnabel, P.B., Lysmer, J., and Seed, H.G., 1972b. SHAKE: a computer program for earthquake response analysis of horizontally layered sites. *Report EERC 72-12, Earthq. Engrg. Res. Center, University of California, Berkeley, California.*
- Seed, H.B., 1960. Soil strength during earthquakes. *Proc. Second World Conf. Earthq. Engrg., Tokyo and Kyoto, Japan, I, pp 183-194.*
- Seed, H.B., 1969. The influence of local soil conditions on earthquake damage. *Soil Dynamics Speciality Conference, VII ICSMFD, México.*
- Seed, H.B., 1970. Soil problems and soil behavior. In: R.L. Wiegel (Editor), *Earthquake Engineering.* Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, pp 227-252.
- Seed, H.B., and Lee, K.L., 1966. Liquefaction of saturated sands during cyclic loading. *Proc. ASCE, 92 (SM6): 105-134.*
- Seed, H.B., and Idriss, I.M., 1967. An analysis of the soil liquefaction in the Niigata earthquake. *Proc. ASCE, 93 (SM3): 83-108.*
- Seed, H.B., and Idriss, I.M., 1969. Influence of soil conditions on ground motions during earthquakes. *Proc. ASCE, 95 (SM1): 99-137.*

Seed, H.B., and Idriss, I.M., 1970b. A simplified procedure for evaluating soil liquefaction potential. Report EERC 70-9, Earthq. Engrg. Res. Center, University of California, Berkeley, California.

Seed, H.B., and Idriss, I.M., 1970c. Soil moduli and damping factors for dynamic response analyses. Report EERC 70-10, Earthq. Engrg. Res. Center, University of California, Berkeley, California.

Seed, H.B. and Silver, M.L., 1972. Settlement of dry sands during earthquakes. Proc. ASCE, 98 (SM4): 381-397.

Seed, H.B., Lee, K.L., Idriss, I.M. and Makdisi, F.I., 1973. Analysis of the Slide in the San Fernando Dams during the Earthquake of Feb. 9, 1971. EERC, Report No. EERC 73-2, University of California, Berkeley, California.

Seed, H.B., Mori, K. and Chan, C.K., 1975. Influence of Seismic History on the Liquefaction Characteristics of Sands. Report No. 75-25. University of California, Berkeley, California.

Seed, H.B., Martin, P.P. and Lysmer, J., 1975. The Generation and Dissipation of Pore Water Pressures During Soil Liquefaction. Report No. EERC 75-26, University of California, Berkeley, California.

Seed, H.B., Arango, I. and Chan, C.K., 1975. Evaluation on Soil Liquefaction Potential During Earthquakes. Report No. EERC 75-28, University of California, Berkeley, California.

Seed, H.B., Pyke, R. and Martin, G.R., 1975. Effect of Multi-directional Shaking on Liquefaction of Sands. Report No. EERC 75-41, University of California, Berkeley, California.

Seed, H.B. and Booker, J.R., 1976. Stabilization of Potentially liquefiable Sand Deposits Using Gravel Drain Systems.

Shannon & Wilson, Inc., and Agbabian-Jacobsen Associates, 1971. Soil behavior under earthquake loading conditions. Report prepared for U.S.A.E.C., Contract W-7405-eng-26.

- Shockley, W.C. y Ahluin, R.C., 1960. Non-Uniform Conditions in Triaxial Test Specimens, *Research Conference on Shear Strength of Cohesive Soils*, ASCE. Boulder, Colorado.
- Silver, M.L., and Seed, H.B., 1969. The behavior of sands under seismic loading conditions. *Report EERC 69-16, Earthq. Engrg. Res. Center, University of California, Berkeley, California.*
- Streeter, V.L., Wylie, E.B., and Richart, F.E., 1973. Soil motion computations by characteristics method. *ASCE Natl. Struct. Engrg. Meeting, San Francisco, California, Preprint 1952.*
- Thiers, G.R., and Seed, H.B., 1968a. Cyclic stress-strain characteristics of clay. *Proc. ASCE, 94(SM2): 555-569.*
- Valera, J.E. and Donovan, N.C., 1977. Soil Liquefaction Procedures-A Review. *Proc. ASCE 103 (GT6): 607-625.*
- Watson, J.D., 1970. Stress-deformation characteristics of cohesionless soils from triaxial compression tests. *Doctoral thesis, Harvard University, Cambridge, Massachusetts.*
- Whitman, R.V., and Ortigosa, P., 1968. Densification of sand by vertical vibrations. *Technical paper T68-5, Dept. of Civil Engrg. Massachusetts, Institute of Technology, Cambridge, Massachusetts.*
- Yegian, M.K., 1976. Risk analysis for Earthquake-induced ground failure by liquefaction, M.I.T. *Publication No. R76-22.*
- Youd, T.L., 1970. Densification and shear of sand during vibration. *Proc. ASCE, 96 (SM3): 863-880.*
- Youd, T.L., 1972. Compaction of sands by repeated shear straining. *Proc. ASCE, 98 (SM7): 709-726.*
- Youd, T.L. and Hoose, S.N., 1976. Liquefaction During 1906 San Francisco Earthquake. *Proc. ASCE, 102 (GT5): 425-439.*

Zeevaert, L., 1967. Free vibration torsion tests to determine shear modulus of elasticity of soils. *Proc. Third Panamerican Conf. Soil Mech. and Found Engrg.*, Caracas, Venezuela, I. 111-129.

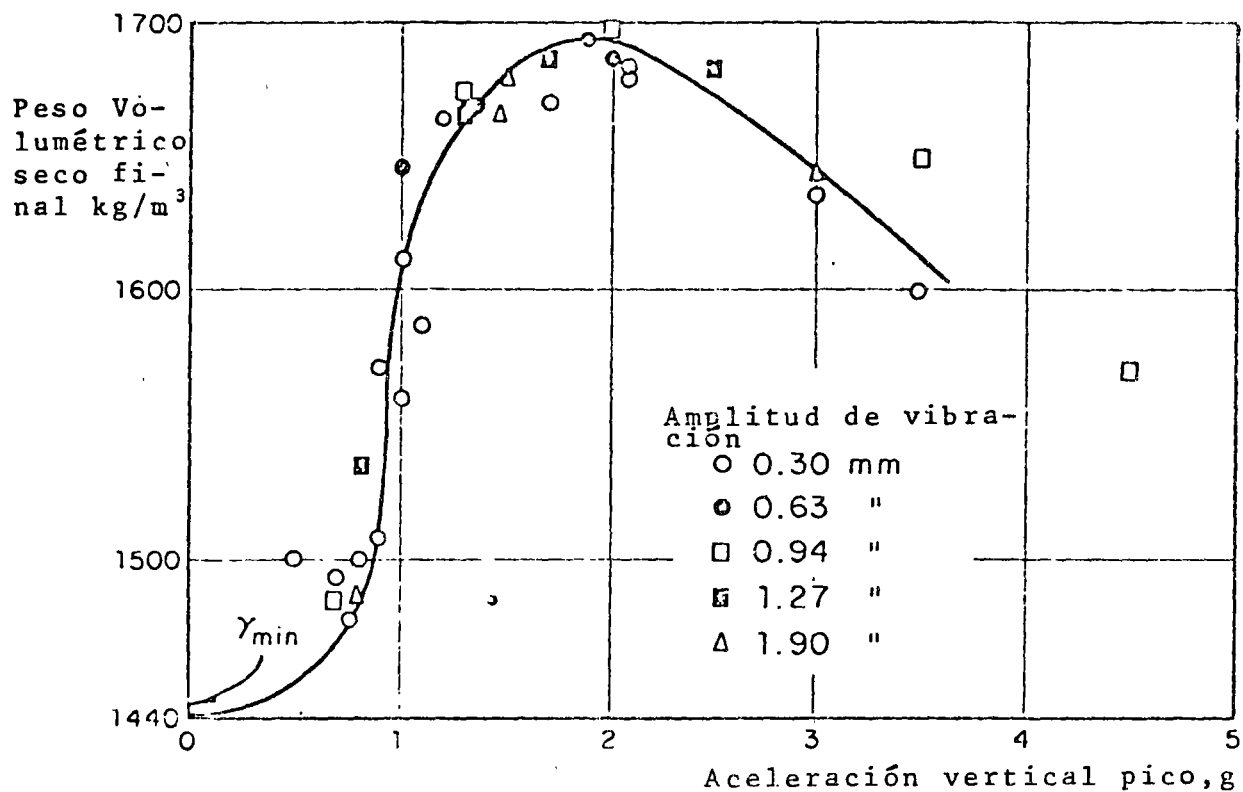


Fig 4 : Efecto de la intensidad de aceleración sobre la densificación de la arena en pruebas de mesa vibradora vertical

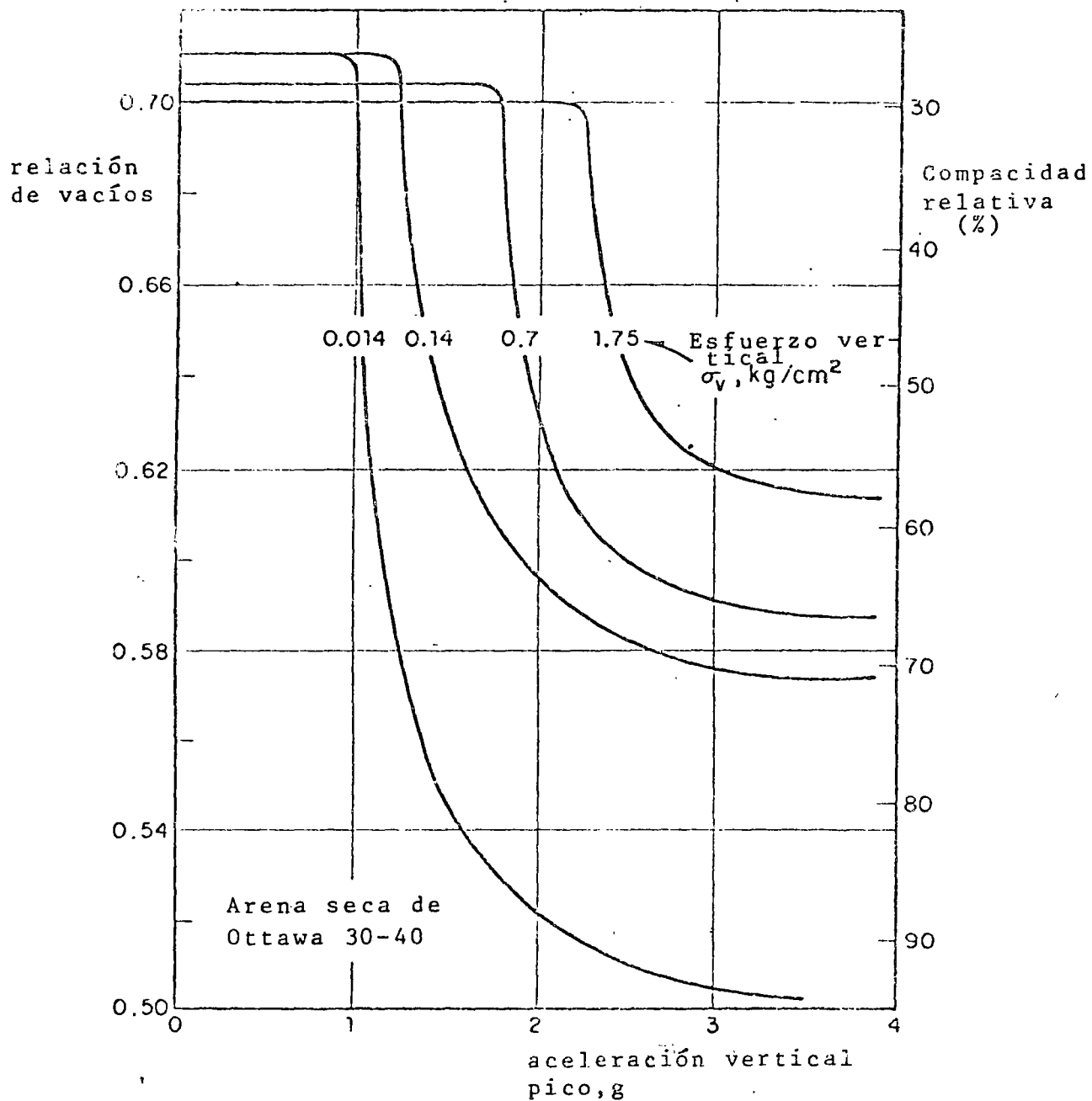


Fig 5 Efectos de la intensidad de aceleración y esfuerzo de confinamiento sobre la densificación de arena seca de Ottawa en pruebas de mesa vibratora vertical.

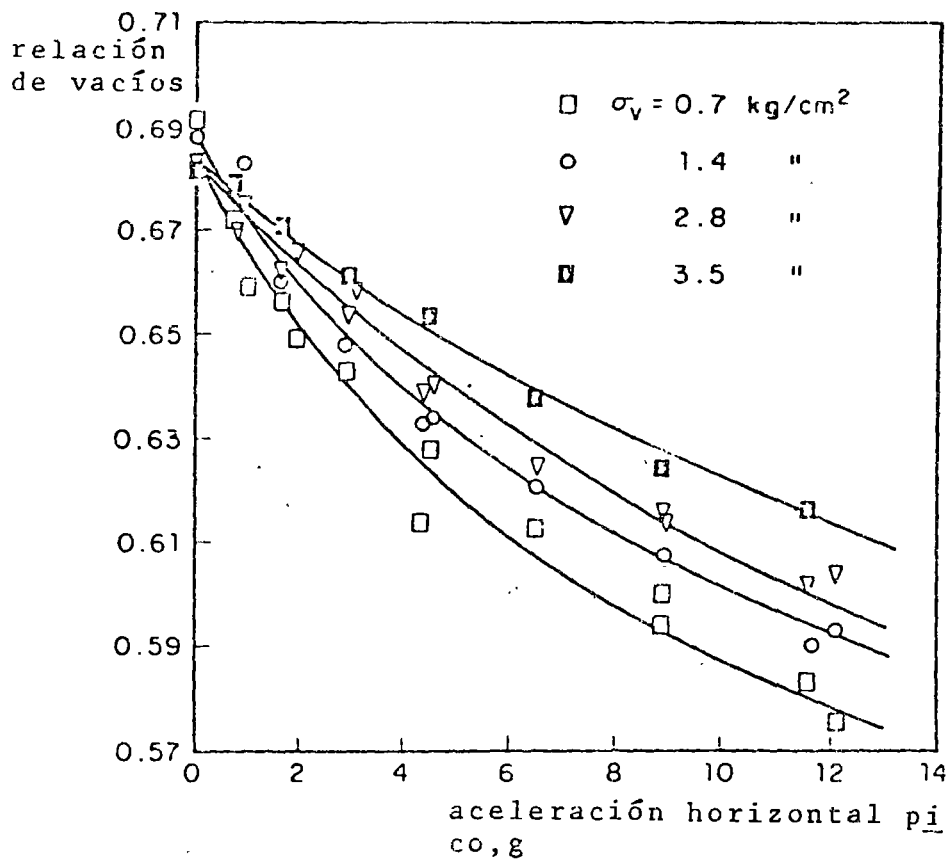


Fig 6

Efectos de la intensidad de aceleración y esfuerzo de confinamiento sobre la relación de vacíos de arena seca de Ottawa en pruebas de vibración cortante, Youd (1970).

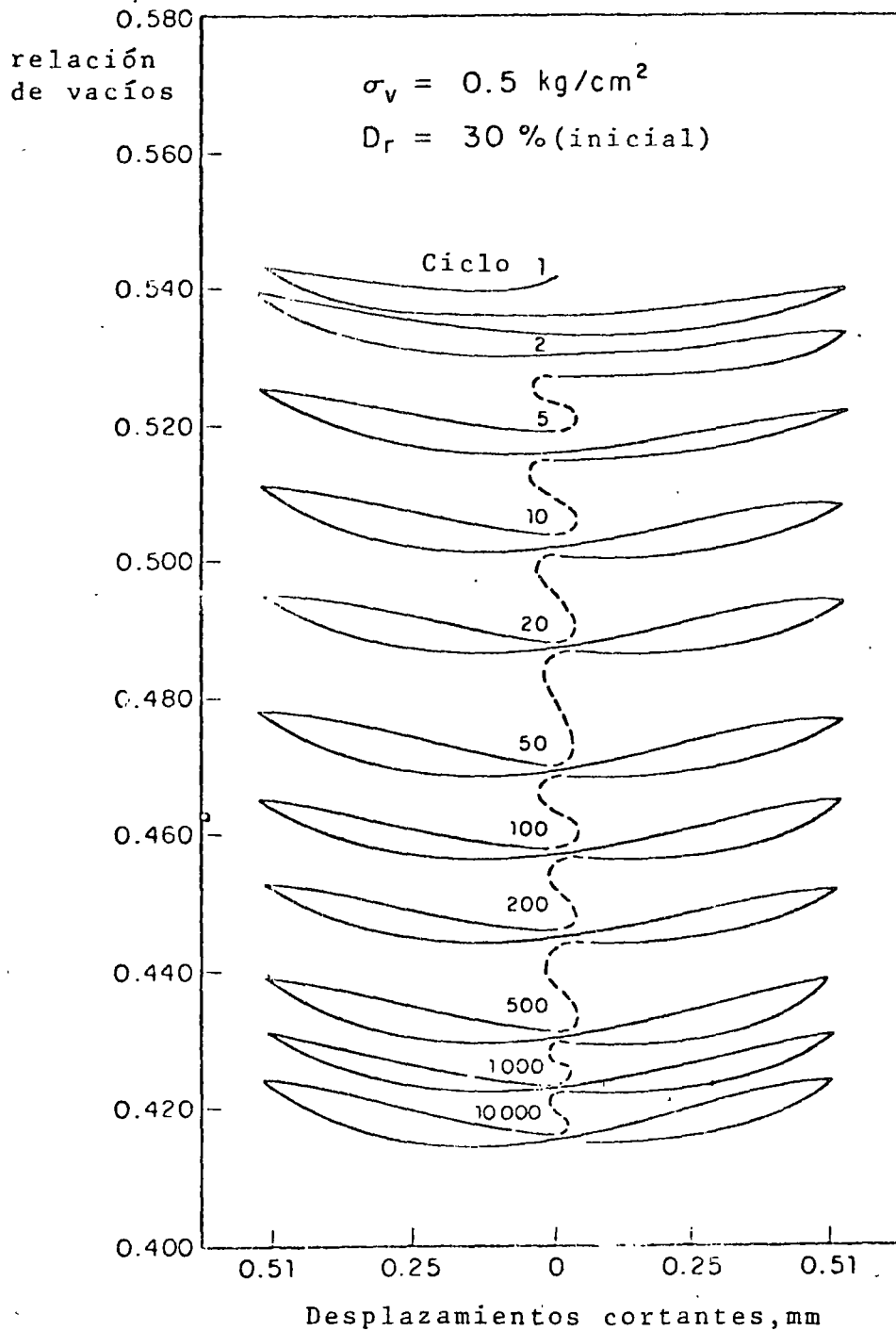


Fig 1 Compactación vs historia esfuerzo-deformación en una prueba drenada de esfuerzo cortante cíclico sobre arena de Ottawa saturada, (Youd, 1972).

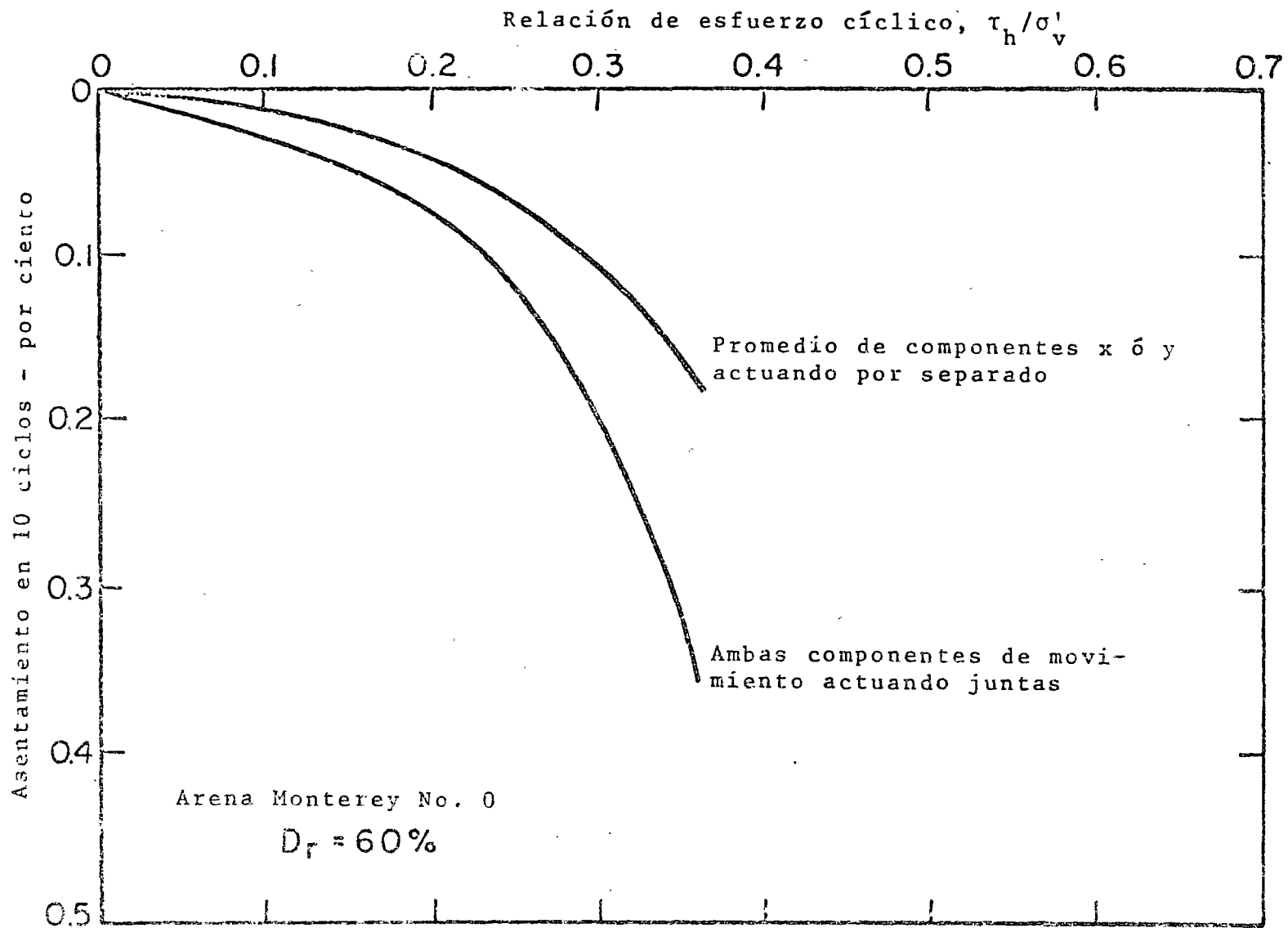


Fig 8 Asentamiento de arena seca bajo movimiento unidireccional y multidireccional, (Pyke et al, 1974).

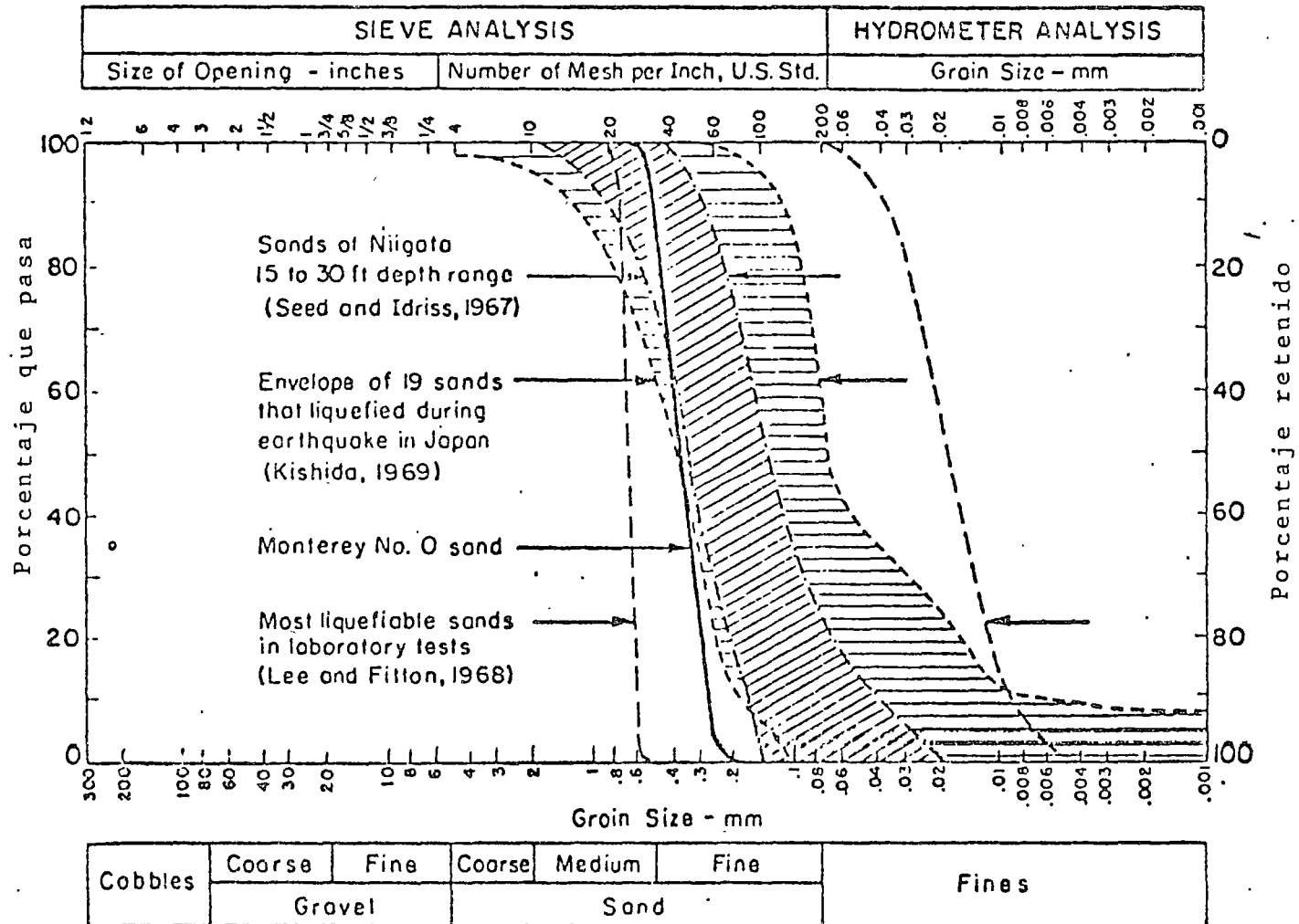


Fig 9 Suelos susceptibles a licuación.

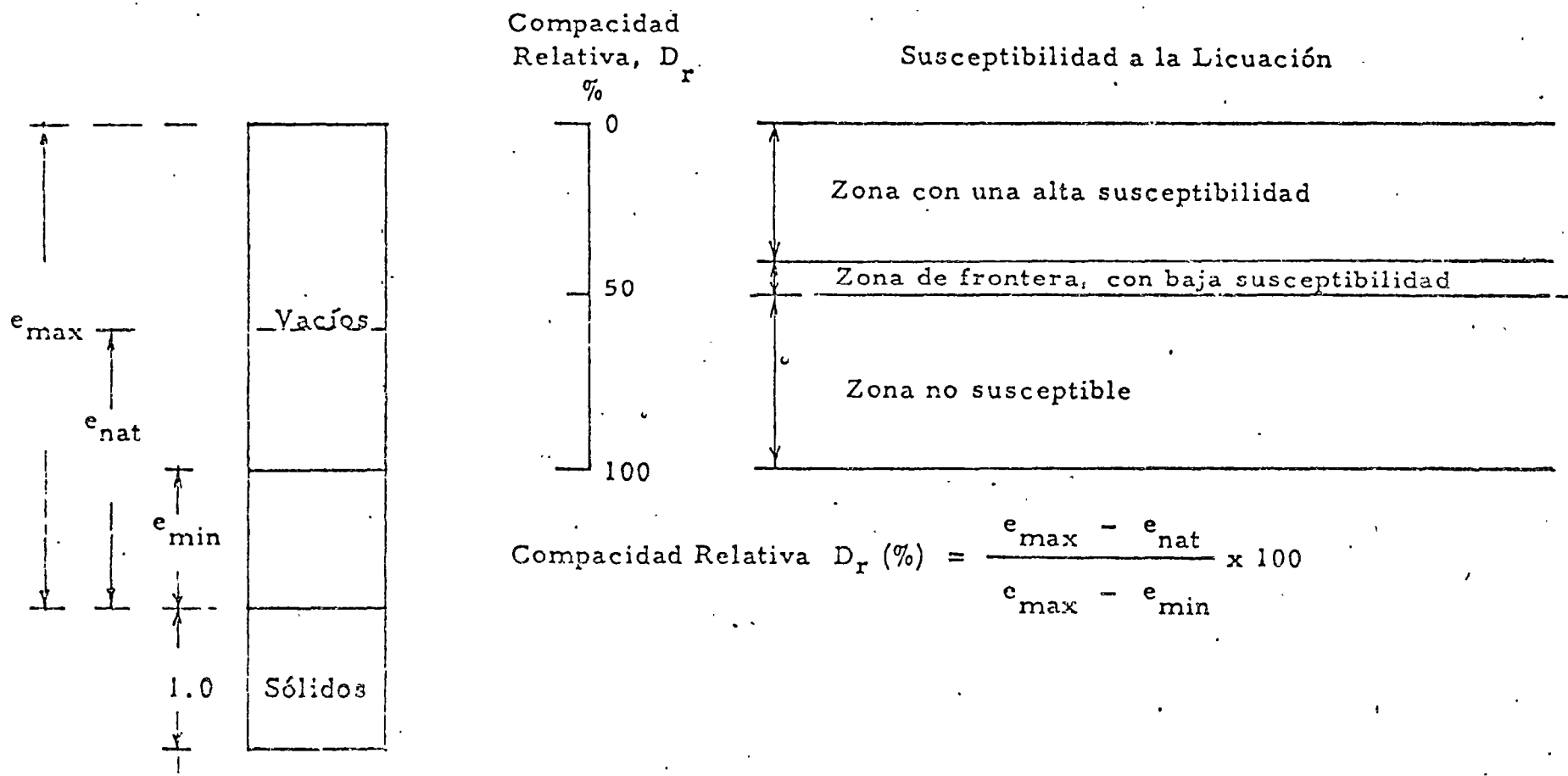


Fig. 10 Concepto de Compacidad Relativa

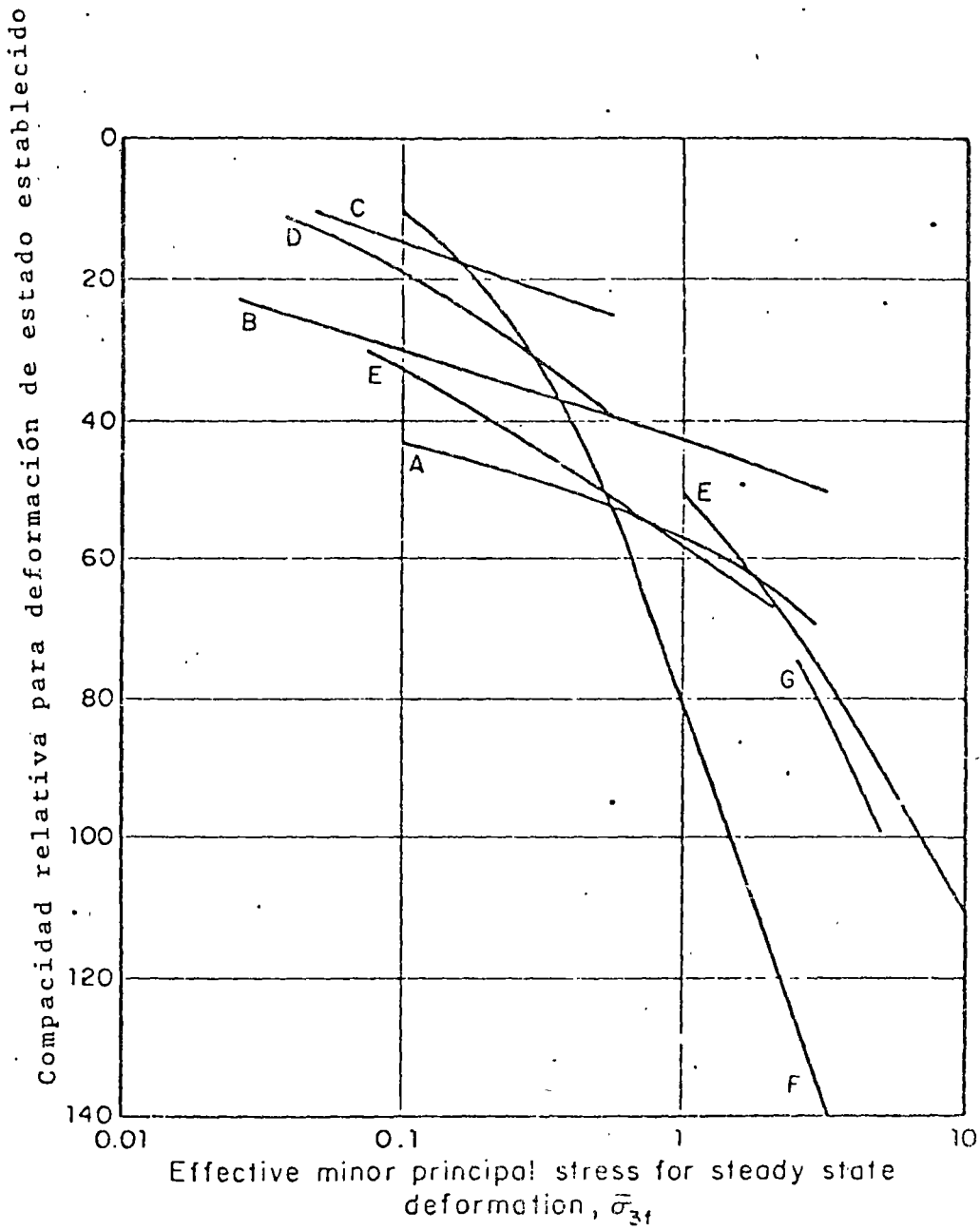


Fig 11 Curvas de estado crítico (líneas e_f) de arenas descritas en Castro (1972).

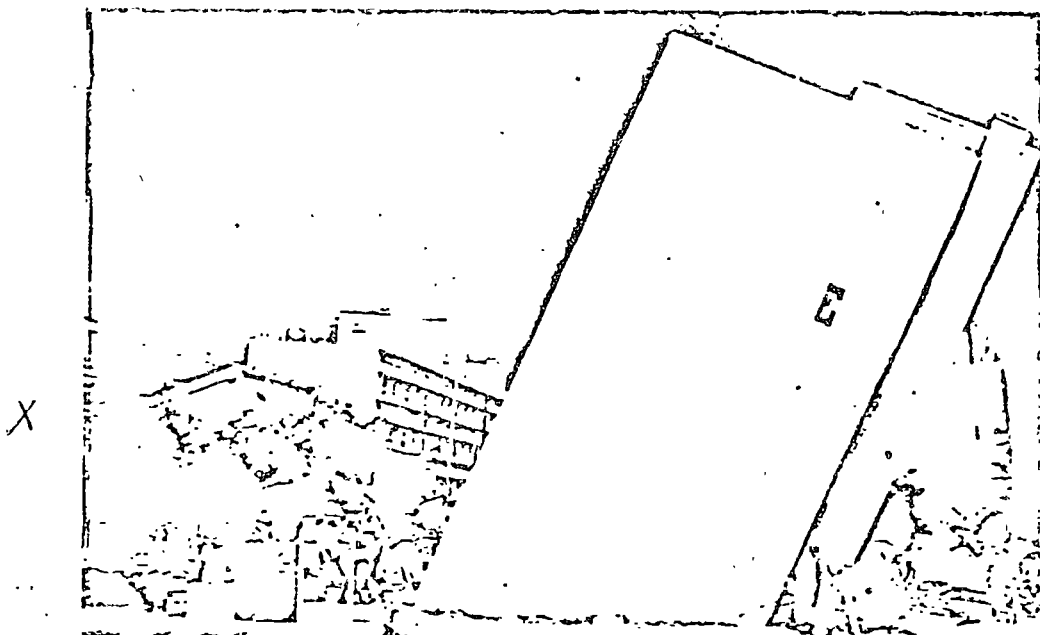


Fig 1. Inclination de edificios durante el temblor de Niigata, 1964

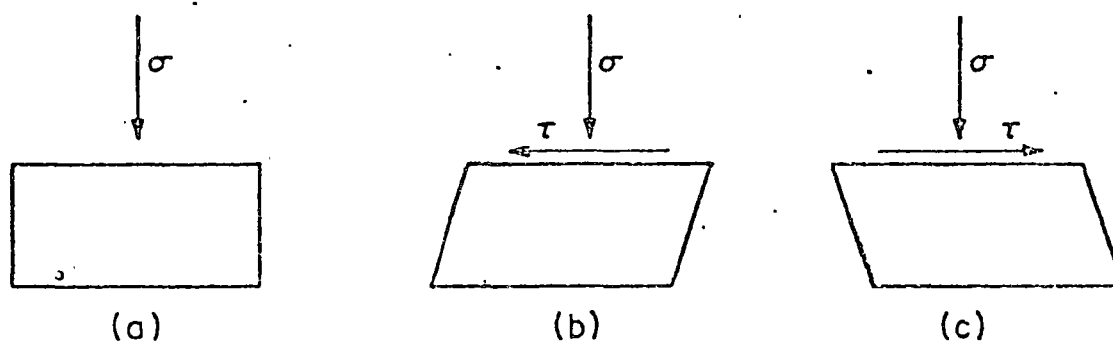


Fig 12, Condición idealizada de esfuerzos para un elemento de suelo en el interior de un depósito, durante un temblor

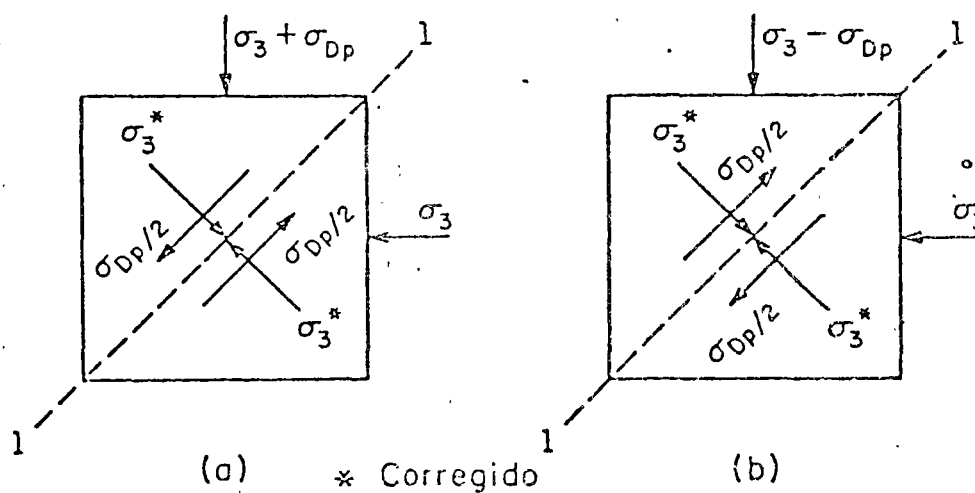


Fig 3. Prueba de compresión triaxial cíclica

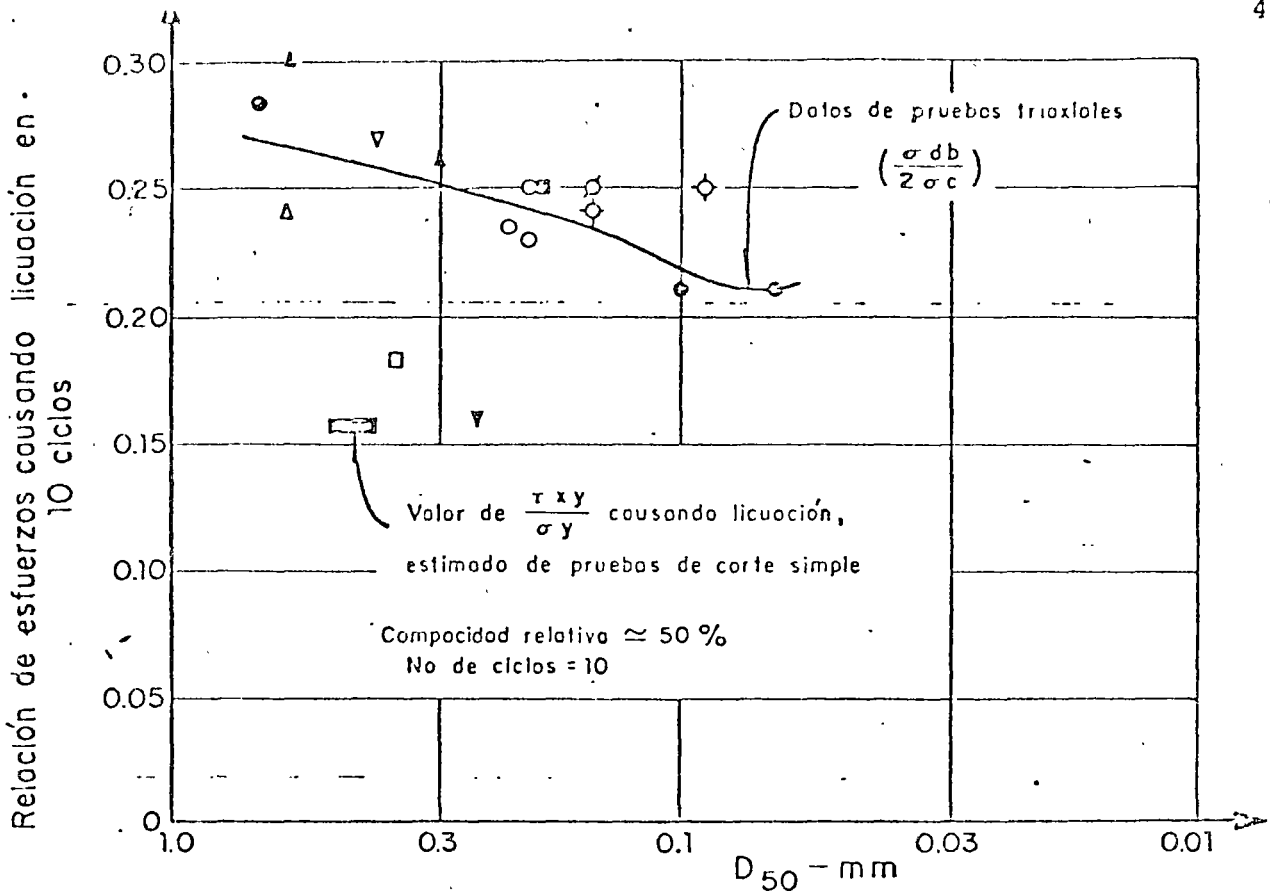


Fig14 Condiciones de esfuerzo causando licuación de arenas en 10 ciclos

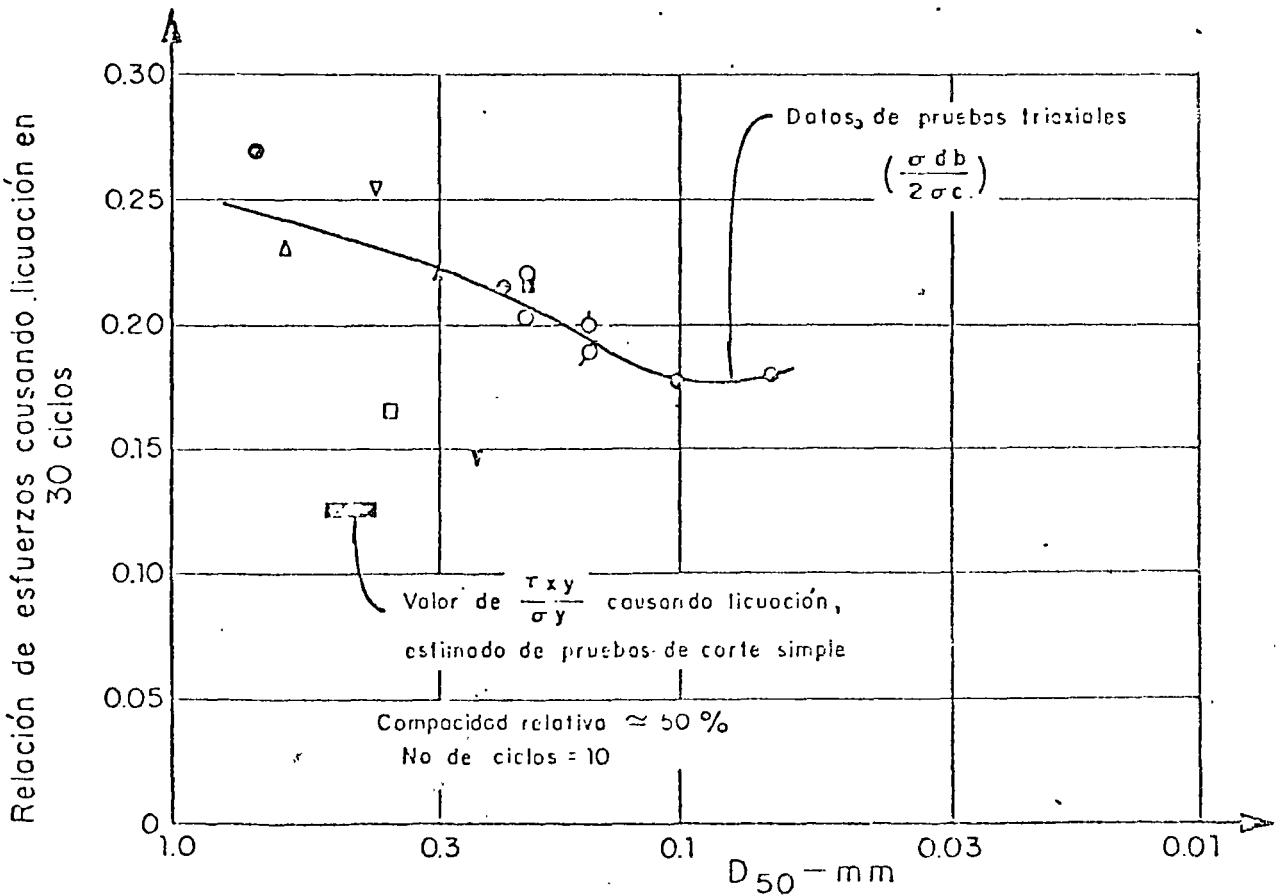


Fig15 Condiciones de esfuerzo causando licuación de arenas en 30 ciclos

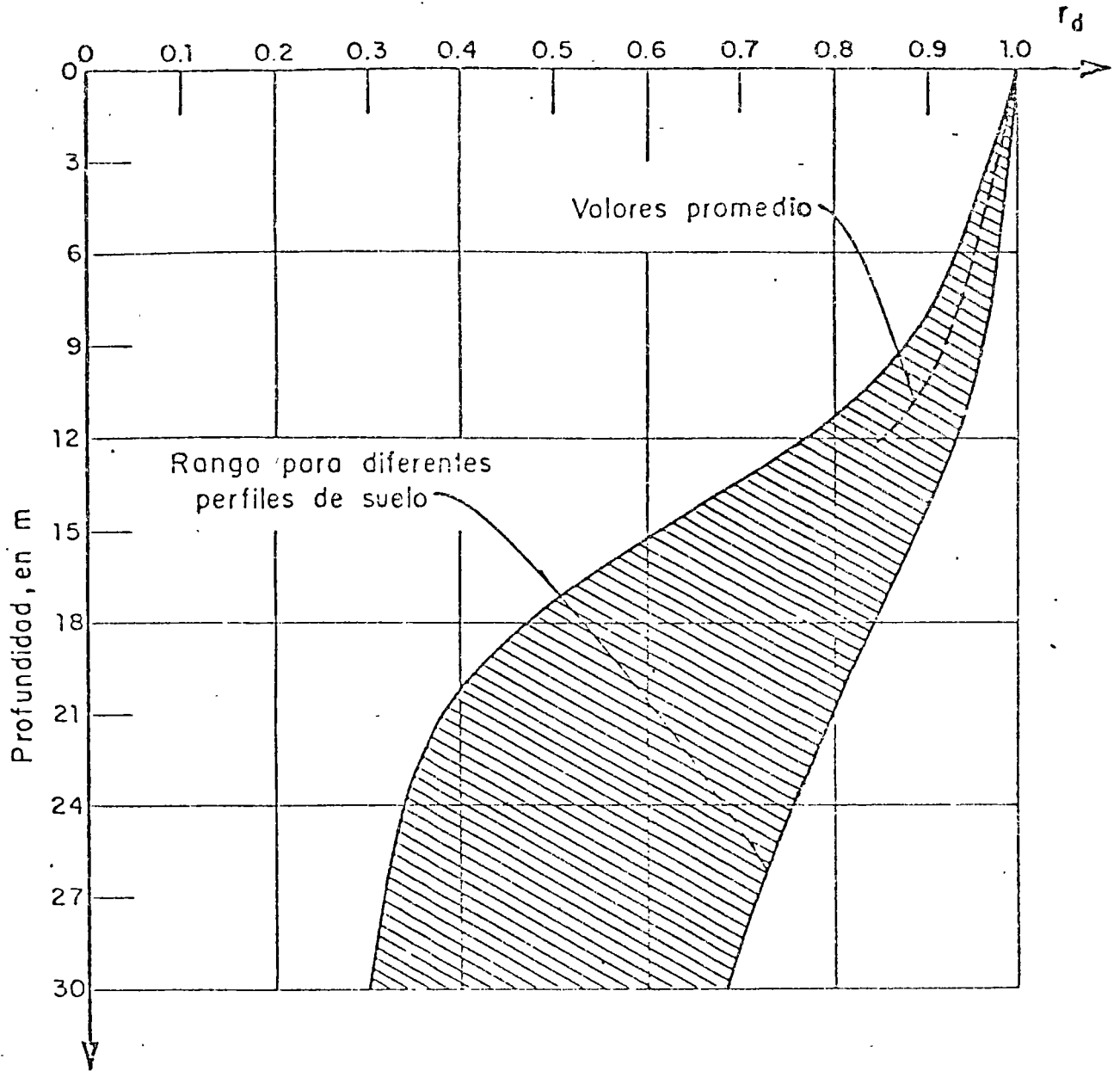


Fig 16 Rango de valores de r_d para diferentes perfiles de suelo

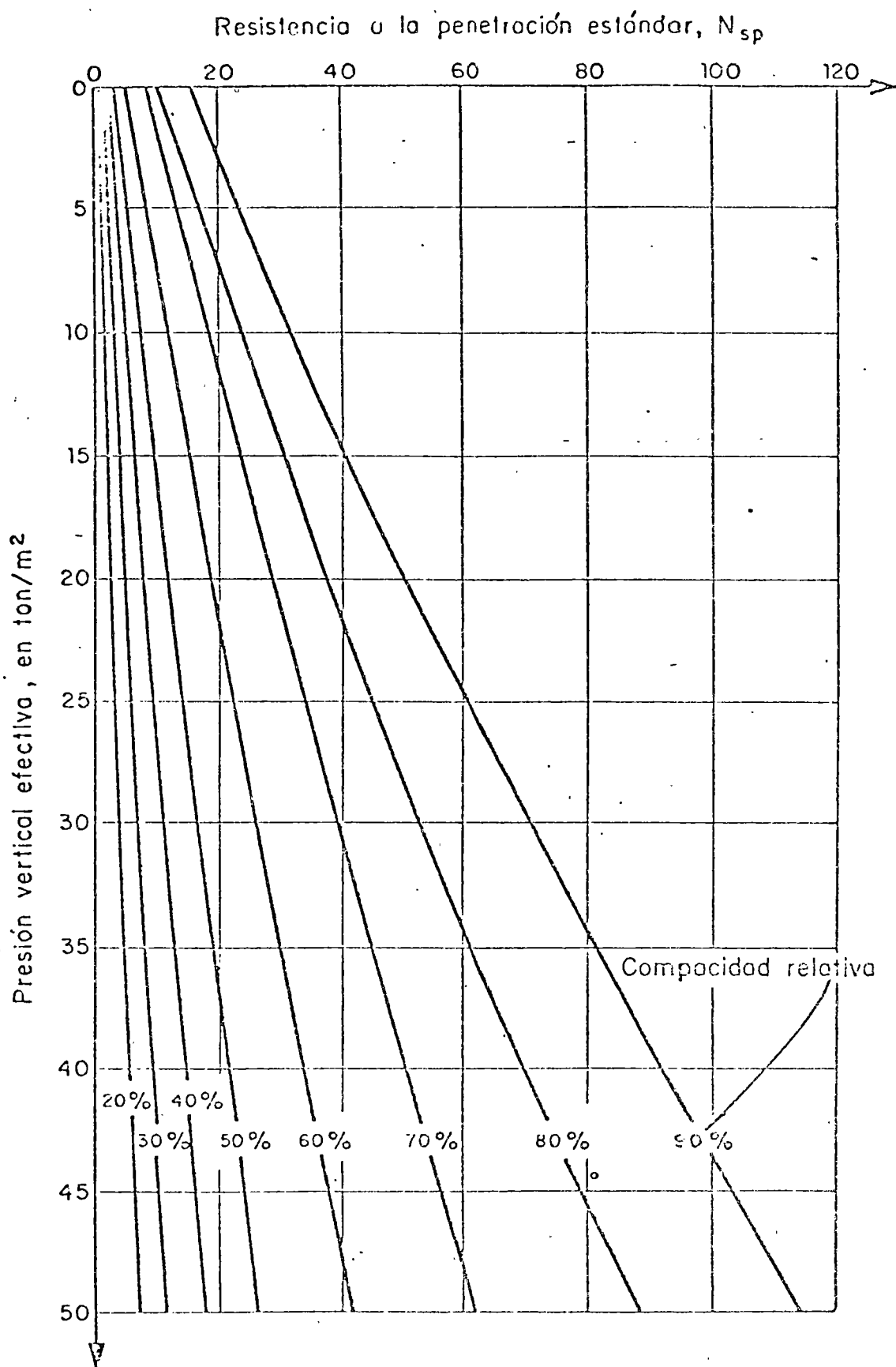


Fig 17 Relación entre la resistencia a la penetración, compacidad relativa y presión vertical

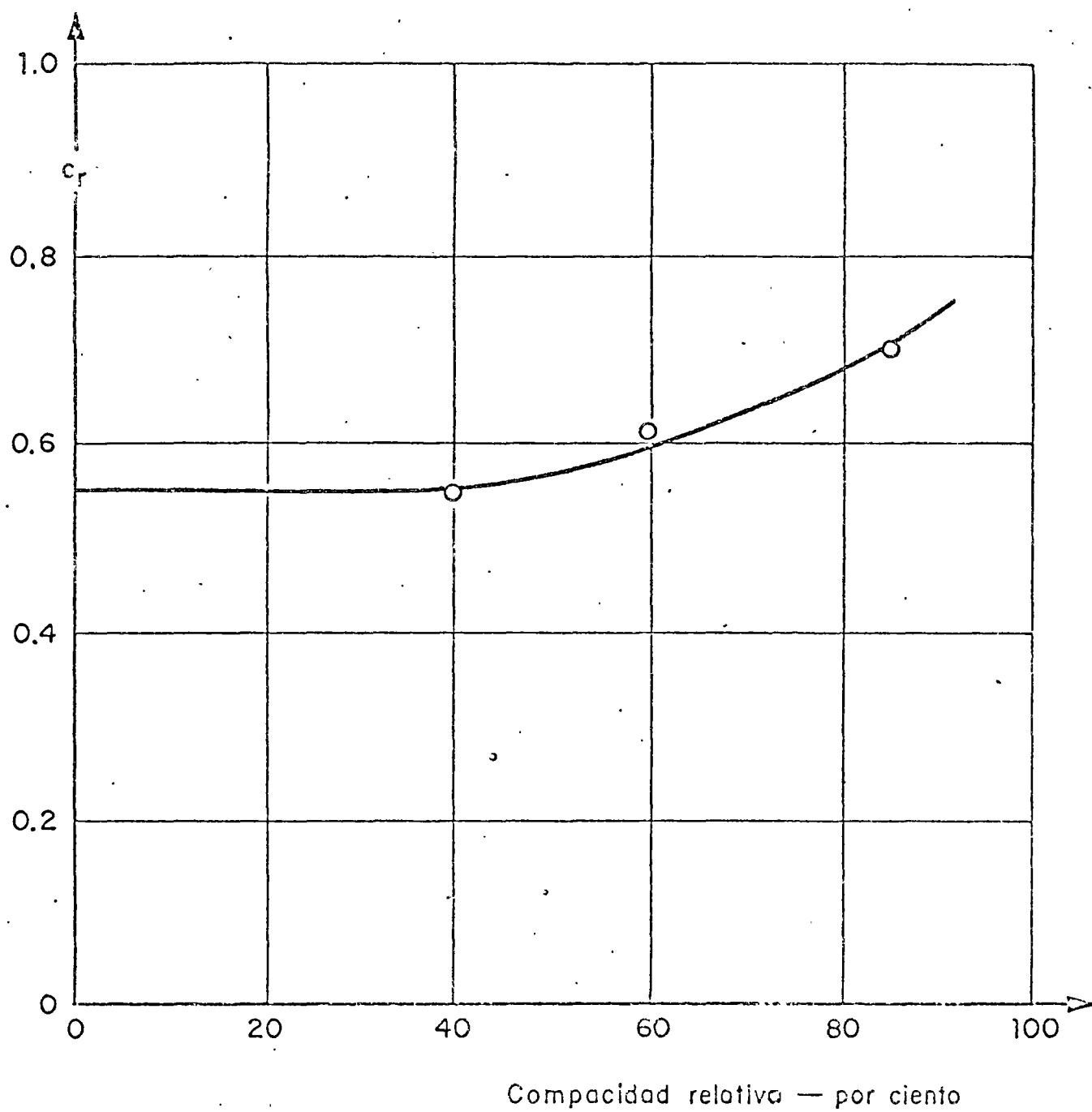


Fig 18 Relación entre c_r y la compacidad relativa

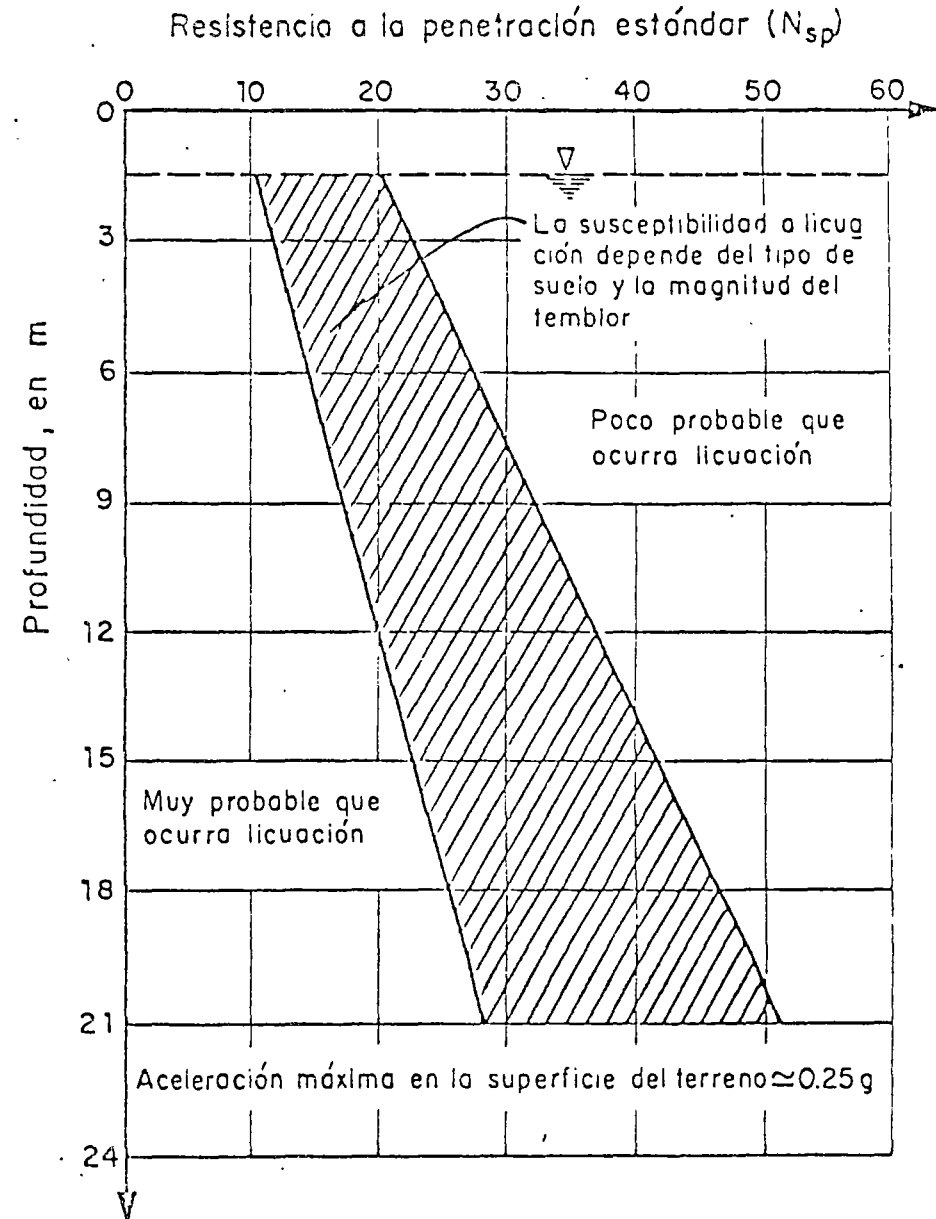
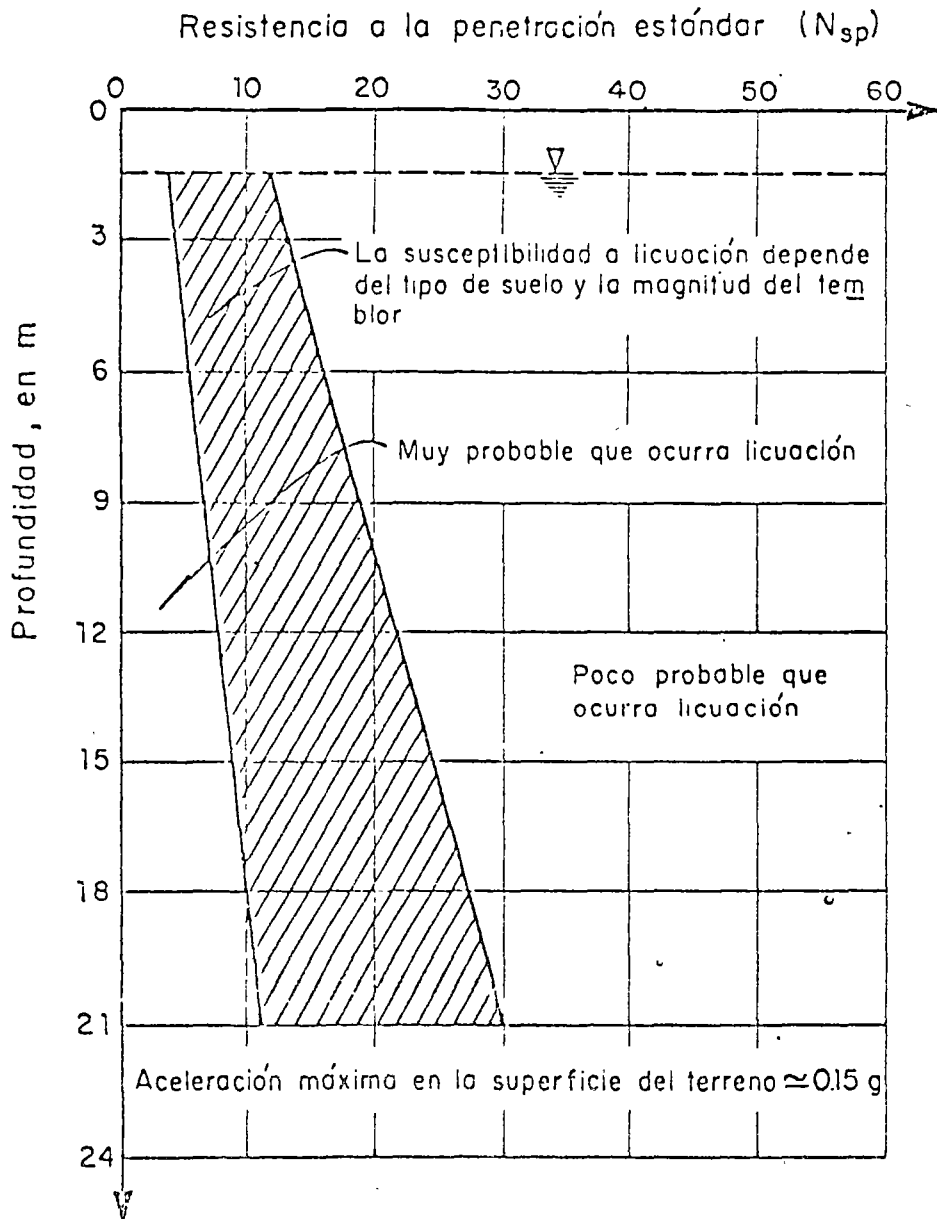
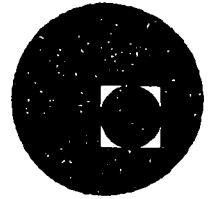


Fig 19 Gráficas para evaluar la susceptibilidad a licuación de arenas con el nivel freático a una profundidad aproximada de 1.5 m



centro de educación continua
división de estudios superiores
facultad de ingeniería, unam



IV CURSO INTERNACIONAL DE INGENIERIA SISMICA

SISMOLOGIA Y SISMICIDAD

NOCIONES DE TEORIA DE
PROBABILIDADES

DR. OCTAVIO A. RASCON CHAVEZ

JULIO, 1978.

TEORIA DE PROBABILIDADES

1 7
POR DR. OCTAVIO A. RUIZ-SOLÍS CH.

EXPERIMENTO. PARA FINES DE ESTE CURSO, SE ENTENDERÁ POR EXPERIMENTO A TODO PROCESO DE OBSERVACION. ASÍ UN EXPERIMENTO PUEDE SER PLANEADO Y REALIZADO POR EL HOMBRE, O PUEDE SER EFECTUADO POR LA NATURALEZA EN CASO DE UN FENÓMENO NATURAL. POR EJEMPLO, EL LANZAR UNA MONEDA O UN DADO Y OBSERVAR LA CARA QUE QUEDA HACIA ARRIBA, ES UN EXPERIMENTO PLANEADO Y REALIZADO POR EL HOMBRE. EL OBSERVAR LA CANTIDAD DE AGUA QUE LLUEVE ANUALMENTE EN UNA CIUDAD, ES UN EXPERIMENTO ASOCIADO A UN FENÓMENO NATURAL.

AL RESULTADO DE UN EXPERIMENTO SE LE DENOMINA DATO. A UN GRUPO DE DATOS SE LE LLAMA MUESTRA.

PROBABILIDAD: ES UNA MEDIDA DE LA CERTIDUMBRE QUE SE LE ASOCIA A LA OCURRENCIA U OBSERVACION DE UN RESULTADO DETERMINADO, AL REALIZARSE EL EXPERIMENTO CORRESPONDIENTE.

LA TEORIA DE PROBABILIDADES ES UNA RAMA DE LAS MATEMÁTICAS APLICADAS QUE TRATA LO CONCERNIENTE A LA ASIGNACIÓN Y MANEJO DE PROBABILIDADES.

ESTADISTICA: ES LA RAMA DE LAS MATEMATICAS QUE SE ENCARGA DE ENSEÑAR LAS REGLAS PARA COLECTAR, ORGANIZAR, PRESENTAR Y PROCESAR LOS DATOS OBTENIDOS AL REALIZAR VARIAS VECES EL EXPERIMENTO ASOCIADO A UN FENOMENO DE INTERES Y PARA INFERIR CONCLUSIONES ACERCA DE ESTE ULTIMO. PROPORCIONA, ADEMAS, LOS METODOS PARA EL DISEÑO DE EXPERIMENTOS Y PARA TOMAR DECISIONES CUANDO APARECEN SITUACIONES DE INCERTIDUMBRE.

ESTADISTICA

- * DESCRIPTIVA.- TRATA LO CONCERNIENTE A LA OBTENCION, ORGANIZACION, PROCESAMIENTO Y PRESENTACION DE LOS DATOS.
- * INFERENCIAL.- TRATA LO CONCERNIENTE A LOS METODOS PARA INFERIR CONCLUSIONES ACERCA DEL FENOMENO DEL CUAL PROVIENEN LOS DATOS

SIMBOLOS DE DESIGUALDADES:

- $<$ menor que
 \leq menor o igual que
 $>$ mayor que
 \geq mayor o igual que
 \neq diferente de

TEORIA DE CONJUNTOS

UN CONJUNTO ES UNA COLECCION BIEN DEFINIDA DE OBJETOS.

NOTACION: LOS CONJUNTOS SE DENOTAN USUALMENTE CON LETRAS MAYUSCULAS, Y SUS ELEMENTOS SE ANOTAN DENTRO DE UN PAR DE LLAVES.

EJEMPLOS

A) EL CONJUNTO DE NUMEROS ANOTADOS EN UN DADO ES

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

B) EL CONJUNTO DE LOS NUMEROS ENTEROS MENORES QUE 5 ES

$$S = \{-\infty, \dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$$

$$\circ S = \{x: x \text{ ES ENTERO Y } x \leq 4\}$$

C) EL CONJUNTO DE LOS NUMEROS ENTEROS POSITIVOS MENORES QUE 5 ES

$$E = \{0, 1, 2, 3, 4\}$$

$$E = \{x: \text{ES ENTERO Y } 0 \leq x \leq 4\}$$

D) EL CONJUNTO DE LOS CONTINENTES ES

$$C = \{\text{ASIA, EUROPA, AMERICA, AFRICA, OCEANIA}\}$$

E) EL CONJUNTO DE MARCAS QUE TIENE UNA MONEDA ES

$$M = \{\text{CARA, CRUZ}\}$$

F) EL CONJUNTO DE NUMEROS MAYORES DE 5 PERO MENORES O IGUALES QUE 10

$$S_1 = \{x: 5 < x \leq 10\}$$

CONJUNTOS {

 FINITOS.- CUANDO TIENEN UN NUMERO FINITO

 DE ELEMENTOS

 INFINITOS.- CUANDO TIENEN UN NUMERO INFINITO

 DE ELEMENTOS

 SUBCONJUNTOS

PARA EXPRESAR QUE UN ELEMENTO PERTENECE A UN CONJUNTO SE USA EL

 SIMBOLO ϵ . PARA EXPRESAR QUE NO PERTENECE SE USA EL SIMBOLO \notin .

EJEMPLO

SI $S_1 = \{x: 5 < x \leq 10\}$, ENTONCES

$3 \notin S_1$; $5 \notin S_1$; $8 \in S_1$; $10 \in S_1$

PARA EXPRESAR QUE UN CONJUNTO ESTA CONTENIDO EN OTRO SE USA EL

 SIMBOLO \subset ; SI NO ESTA CONTENIDO SE USA EL SIMBOLO $\not\subset$.

PARA QUE UN CONJUNTO ESTE CONTENIDO EN OTRO SE REQUIERE QUE *TODOS*

 SUS ELEMENTOS LO ESTEN, ES DECIR, QUE TODOS SUS ELEMENTOS PERTE-

 NEZCAN A AMBOS CONJUNTOS.

EJEMPLO

SEAN $E = \{3, 5\}$; $F = \{3, 8\}$; $G = \{7, 9\}$. $E \not\subset S_1$; $F \not\subset S_1$; $G \subset S_1$

SI UN CONJUNTO, B, ESTA CONTENIDO EN OTRO, S, SE DICE QUE B

 ES SUBCONJUNTO DE S.

EJEMPLO

$B = \{x: 3 < x \leq 8\}$ Y $S_1 = \{x: 5 < x \leq 10\}$

EN ESTE CASO:

$G \subset S_1 \Rightarrow G$ ES SUBCONJUNTO DE S_1

$B \not\subset S_1 \Rightarrow B$ NO ES SUBCONJUNTO DE S_1

SE DICE QUE DOS CONJUNTOS SON IGUALES CUANDO CONTIENEN LOS MISMOS ELEMENTOS (NO IMPORTA EL ORDEN EN QUE ESTOS SE ESCRIBAN)

EJEMPLO

SEAN $A=\{1,3,5,7\}$, $B=\{7,5,1,3\}$ Y $C=\{7,5,1\}$

EN TAL CASO, $A = B \neq C$

CONJUNTO VACIO

DE LA MISMA MANERA QUE EXISTE EL CERO EN LOS NUMEROS, EN LA TEORIA DE CONJUNTOS EXISTE EL CONJUNTO VACIO, EL CUAL NO TIENE ELEMENTOS. USUALMENTE SE DENOTA \emptyset .

EJEMPLO

¿CUAL ES EL CONJUNTO DE ELEMENTOS, x , TALES QUE $2x=7$ Y x ES ENTERO?

SOLUCION :- ES EL CONJUNTO VACIO, \emptyset .

A \emptyset SE LE CONSIDERA COMO SUBCONJUNTO DE CUALQUIER CONJUNTO. ASI, POR EJEM, TODOS LOS SUBCONJUNTOS DEL CONJUNTO

$S = \{2, 5, 10\}$ SON: $\{2\}; \{5\}; \{10\}; \{2, 5\}; \{2, 10\}; \{5, 10\}; \{2, 5, 10\}$ Y \emptyset .

ESPACIO DE EVENTOS

ASOCIADO A UN EXPERIMENTO SIEMPRE HAY UN CONJUNTO DE RESULTADOS POSIBLES; A DICHO CONJUNTO SE LE LLAMA ESPACIO DE EVENTOS.

EJEMPLOS

EL ESPACIO DE EVENTOS ASOCIADO AL EXPERIMENTO DE LANZAR UN DADO Y ANOTAR LA CARA QUE QUEDA HACIA ARRIBA ES

$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

EL ESPACIO DE EVENTOS CORRESPONDIENTE AL EXPERIMENTO DE LANZAR DOS DADOS Y ANOTAR LOS NUMEROS QUE QUEDAN HACIA ARRIBA ES

$$S = \left\{ \begin{array}{l} (1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6) \\ (2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6) \\ (3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6) \\ (4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6) \\ (5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5), (5,6) \\ (6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6) \end{array} \right\}$$

SI EN ESTE EXPERIMENTO LA OBSERVACION DE INTERES FUESE LA SUMA DE LOS DOS NUMEROS OBSERVADOS, ENTONCES EL ESPACIO DE EVENTOS DEL EXPERIMENTO SERIA

$$S = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$$

A TODO SUBCONJUNTO DE UN ESPACIO DE EVENTOS SE LE LLAMA EVENTO. A LOS EVENTOS QUE TIENEN UN SOLO ELEMENTO DEL ESPACIO SE LES LLAMA EVENTOS SIMPLES.

SI AL REALIZAR UN EXPERIMENTO SE OBSERVA UN ELEMENTO DEL EVENTO A, ENTONCES SE DICE QUE OCURRIO O SE VERIFICO EL EVENTO A. POR EJEMPLO, SI $A = \{2, 4\}$ Y AL LANZAR UN DADO SE OBSERVA EL 2 O 4, SE DICE QUE OCURRIO EL EVENTO A; SI SE OBSERVA CUALQUIER OTRO NUMERO, ENTONCES SE DICE QUE NO OCURRIO A.

ESPACIOS DE
EVENTOS

DISCRETOS.- SI SUS ELEMENTOS PUEDEN NUMERARSE O CONTARSE. TIENEN UN NUMERO FINITO O INFINITO NUMERABLE DE ELEMENTOS.

CONTINUOS.- SI SUS ELEMENTOS NO PUEDEN ENUMERARSE. TIENEN UN NUMERO INFINITO NO NUMERABLE DE ELEMENTOS

EJEMPLO

LOS ESPACIOS DE EVENTOS $S_1 = \{\text{CARA, CRUZ}\}$; $S_2 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, \}$;
 $S_3 = \{\text{VERDE, ROJO}\}$ SON DISCRETOS. LOS ESPACIOS DE EVENTOS
 $S_4 = \{X: -\infty < X \leq 0\}$; $S_5 = \{Z: Z \geq 3\}$; $S_6 = \{Y: 3 \leq Y \leq 80\}$
 SON CONTINUOS.

EJEMPLO

¿QUE TIPOS DE ESPACIOS DE EVENTOS CORRESPONDEN A LOS SIGUIENTES
 EXPERIMENTOS?

A) CONTEO DEL NUMERO DE GRANOS DE UNA MAZORCA DE MAIZ

$S = \{0, 1, 2, 3, \dots, \infty\}$, ES DISCRETO E INFINITO

B) MEDICION DE LA LONGITUD DE UNA ESPIGA DE TRIGO

$S = \{X: 0 < X < \infty\}$, X EN CM, ES CONTINUO E INFINITO

C) MEDICION DEL EFECTO DE UNA VACUNA, EN TERMINOS DE "EXITO" O
 "FRACASO"

$S = \{\text{EXITO, FRACASO}\}$ ES DISCRETO Y FINITO.

D) MEDICION DEL NUMERO DE MILIGRAMOS DE UN ANTIBIOTICO CONTENIDO
 EN UNA CAPSULA

$S = \{Y: 0 \leq Y < \infty\}$ Y en mg, ES CONTINUO E INFINITO.

COMPLEMENTO DE UN EVENTO

EL COMPLEMENTO DE UN EVENTO A ES OTRO EVENTO QUE CONTIENE TODOS LOS
 ELEMENTOS DEL ESPACIO DE EVENTOS CORRESPONDIENTE QUE NO ESTAN EN A.
 USUALMENTE SE DENOTA CON UNA TILDE SOBRE EL SIMBOLO QUE CORRESPON-
 DE AL EVENTO QUE COMPLEMENTA, \bar{A} .

EJEMPLOS

SI $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ Y $A = \{1, 3, 5\}$ ENTONCES $\bar{A} = \{2, 4, 6\}$.

SI $S = \{X: 0 \leq X \leq 58\}$ Y $A = \{X: 3 < X \leq 17\}$, ENTONCES $\bar{A} = \{X: 0 \leq X \leq 3, 17 < X \leq 58\}$

EVENTOS MUTUAMENTE EXCLUSIVOS

CUANDO DOS O MAS EVENTOS NO PUEDEN OCURRIR SIMULTANEAMENTE AL REALIZAR UNA SOLA VEZ UN EXPERIMENTO, SE DICE QUE ESTOS SON MUTUAMENTE EXCLUSIVOS, ES DECIR, DOS EVENTOS SON MUTUAMENTE EXCLUSIVOS CUANDO NO TIENEN NI UN SOLO ELEMENTO EN COMUN.

EJEMPLO

- A) CUALQUIER EVENTO Y SU COMPLEMENTO SON MUTUAMENTE EXCLUSIVOS.
 B) ¿SON $E = \{Y: 0 \leq Y \leq 25\}$ Y $A = \{2, 50, 100\}$ MUTUAMENTE EXCLUSIVOS?
 NO, PORQUE TIENEN EL ELEMENTO 2 EN COMUN.

OPERACIONES CON EVENTOS

UNION

LA UNION DE DOS EVENTOS ES OTRO EVENTO CUYOS ELEMENTOS SON TODOS LOS DE AMBOS. LA OPERACION DE UNION SE DENOTA CON EL SIMBOLO U.

EJEMPLOS

- A) SI $A = \{2, 4, 6\}$ Y $B = \{1, 6, 12\}$, ENTONCES
 $G = A \cup B = \{1, 4, 6, 12, 2\}$
- B) ¿SON A Y B MUTUAMENTE EXCLUSIVOS? NO PORQUE TIENEN EL 6 EN COMUN.
- C) SI $D = \{Y: 0 \leq Y \leq 13\}$ Y $E = \{Y: 20 \leq Y \leq 50\}$,
 ENTONCES
 $D \cup E = \{Y: 0 \leq Y \leq 13, 20 \leq Y \leq 50\}$
- D) SI $F = \{Y: 8 \leq Y \leq 20\}$, ENTONCES
 $D \cup F = \{Y: 0 \leq Y \leq 20\}$.
- E) SI $G = \{Y: 3 \leq Y \leq 10\}$, ENTONCES
 $D \cup G = \{Y: 0 \leq Y \leq 13\} = D$; OBSERVESE QUE EN ESTE CASO $G \subset D$. EN GENERAL,
 SI $A \subset B$, ENTONCES $A \cup B = B$.

EN GENERAL, LA UNION DE VARIOS EVENTOS ES OTRO EVENTO CUYOS ELEMENTOS SON TODOS LOS DE LOS EVENTOS QUE SE UNEN.

EJEMPLO

$$A \cup B \cup F = K = \{1, 2, 4, 6, y: 8 \leq y \leq 20\}$$

INTERSECCION

LA INTERSECCION DE DOS EVENTOS ES EL CONJUNTO DE ELEMENTOS QUE PERTENECEN SIMULTANEAMENTE A AMBOS. PARA DENOTAR LA OPERACION DE INTERSECCION SE USA EL SIMBOLO \cap .

EJEMPLOS

A) $A = \{2, 3, 6\}$ Y $B = \{2, 6, 10\}$ ENTONCES $A \cap B = C = \{2, 6\}$

B) $D = \{y: 4 \leq y \leq 5\}$, ENTONCES $A \cap D = \emptyset$.

OBSERVESE QUE EN ESTE EJEMPLO A Y D SON MUTUAMENTE EXCLUSIVOS, YA QUE NO TIENEN NINGUN ELEMENTO EN COMUN. SIEMPRE QUE DOS EVENTOS SON MUTUAMENTE EXCLUSIVOS, SU INTERSECCION ES EL CONJUNTO VACIO.

EN GENERAL, LA INTERSECCION DE VARIOS EVENTOS ES EL CONJUNTO DE ELEMENTOS QUE TODOS ELLOS TIENEN EN COMUN.

EJEMPLO

SI $A = \{2, 3, 6, 8\}$; $B = \{2, 3, 10, 100\}$; $C = \{y: 0 \leq y \leq 5\}$ Y $D = \{y: 2 \leq y \leq 4\}$,

ENTONCES

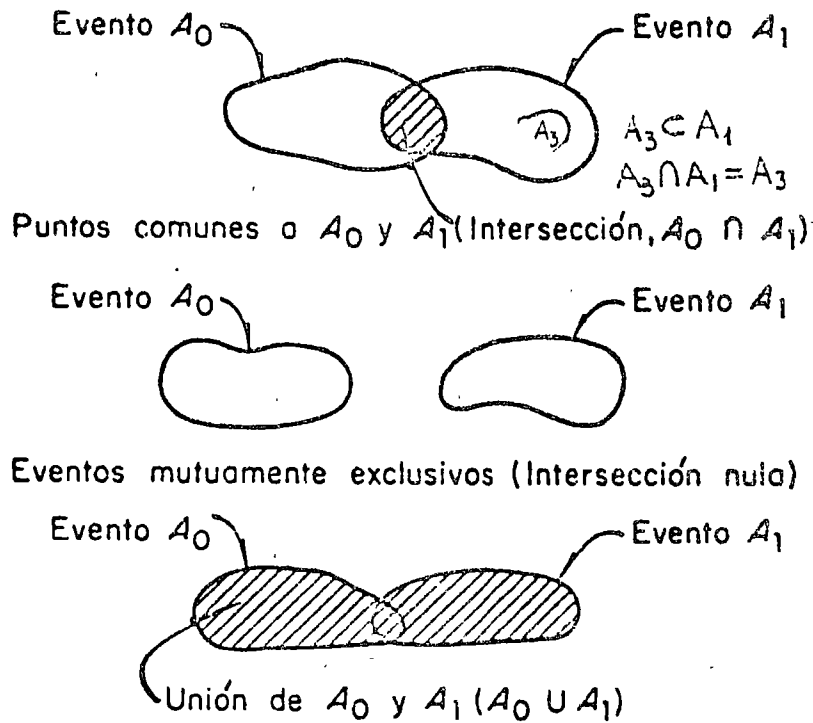
$$A \cap B \cap C \cap D = E = \{2, 3\}$$

$$A \cup B \cup C \cup D = F = \{y: 0 \leq y \leq 5, 6, 8, 10, 100\}$$

LA OCURRENCIA DE UN EVENTO "Y" OTRO IMPLICA LA OCURRENCIA DE AMBOS A LA VEZ, ES DECIR, QUE SE VERIFIQUE LA INTERSECCION. LA OCURRENCIA DE UN EVENTO "O" ALGUN OTRO, IMPLICA LA OCURRENCIA DE CUALQUIERA DE ELLOS, ES DECIR DE LA UNION.

DIAGRAMAS DE VENN

UNA MANERA DE ILUSTRAR GRAFICAMENTE LAS OPERACIONES CON CONJUNTOS ES MEDIANTE LOS DIAGRAMAS DE VENN. EN ESTOS, CADA CONJUNTO SE REPRESENTA POR UNA CURVA CERRADA QUE ENCIERRA LOS ELEMENTOS QUE LE CORRESPONDEN.



Diagramas de Venn (unión e intersección de eventos)

TEORIA DE PROBABILIDADES

AL LANZAR UNA MONEDA NO PODEMOS PREDECIR CON CERTEZA CUAL CARA QUEDARA HACIA ARRIBA. LO UNICO QUE SE PUEDE ASEGURAR, SI LA MONEDA NO ESTA CARGADA, ES QUE AMBAS CARAS TIENEN LA MISMA OPORTUNIDAD DE SALIR, ES DECIR, QUE LOS EVENTOS SIMPLES {CARA} Y {CRUZ} TIENEN LA MISMA PROBABILIDAD DE OCURRIR.

COMO YA SE DIJO, LA PROBABILIDAD DE QUE OCURRA UN EVENTO ES UNA MEDIDA DEL GRADO DE CONFIANZA QUE SE TIENE DE QUE ESTE OCURRA AL REALIZAR EL EXPERIMENTO CORRESPONDIENTE.

EXISTEN POR LO MENOS TRES MANERAS DE ASIGNARLE UNA PROBABILIDAD A UN EVENTO:

1. EN TERMINOS DE LOS RESULTADOS DE REPETIR VARIAS VECES UN EXPERIMENTO (METODO FRECUENCIAL).
2. APLICANDO LA DEFINICION CLASICA DE PROBABILIDADES.
3. CON BASE EN UN MODELO MATEMATICO (PROBABILISTICO) DEL FENOMENO DE QUE SE TRATE.

METODO FRECUENCIAL

SI $N(A)$ ES EL NUMERO DE VECES QUE SE OBSERVA EL EVENTO A AL REALIZAR N VECES UN EXPERIMENTO, LA FRECUENCIA RELATIVA DE A, DEFINIDA COMO $N(A)/N$, SE CONSIDERA COMO ESTIMACION DE LA PROBABILIDAD DE A,

$$P(A) = \frac{N(A)}{N}$$

YA QUE, EN EL LIMITE, $P(A) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N(A)}{N}$

EJEMPLO

DE UNA URNA QUE CONTIENE BOLAS ROJAS, BLANCAS Y AZULES, SE SACO UNA BOLA, SE ANOTO SU COLOR Y SE REGRESO A LA URNA. SI ESTE EXPERIMENTO SE REPITE 20 VECES Y LOS RESULTADOS SON

b,b,a,r,r,r,a,b,r,a,b,b,a,r,b,r,r,a,r,a, DONDE

r = ROJA, b = BLANCA, a = AZUL

¿QUE PROBABILIDADES LE ASIGNARIA A LOS EVENTOS $B=\{b\}$, $A=\{a\}$, y $R=\{r\}$, DE ACUERDO CON EL METODO FRECUENCIAL?

EN ESTA MUESTRA SE TIENE QUE $N(B)=6$, $N(A)=6$, $N(R)=8$, $N=20$

$$\text{POR LO QUE } P(B) = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}; \quad P(A) = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}; \quad P(R) = \frac{8}{20} = \frac{4}{10}$$

NOTESE QUE LOS EVENTOS B, A Y R SON MUTUAMENTE EXCLUSIVOS, YA QUE SON EVENTOS SIMPLES, Y QUE

$$P(B) + P(A) + P(R) = \frac{3}{10} + \frac{3}{10} + \frac{4}{10} = 1 = P(S)$$

EN DONDE $S = \{r,b,a\}$

DEFINICIÓN CLÁSICA DE PROBABILIDADES

SI $N(A)$ ES EL NUMERO DE MANERAS IGUALMENTE PROBABLES EN QUE PUEDE OCURRIR EL EVENTO A Y N ES EL NUMERO TOTAL DE ELEMENTOS DEL ESPACIO DE EVENTOS CORRESPONDIENTE, ENTONCES LA PROBABILIDAD DE A ES

$$P(A) = \frac{N(A)}{N}$$

EJEMPLOS

A) SI EN UNA URNA SE TIENEN 5 BOLAS BLANCAS Y 15 NEGRAS, Y SE VA A SELECCIONAR UNA AL AZAR, ¿CUAL ES LA PROBABILIDAD DE QUE SEA BLANCA ($A = \{\text{BLANCA}\}$)?:

$$N = 5 + 15 = 20; N(A) = 5 \Rightarrow P(A) = \frac{5}{20} = \frac{1}{4}$$

B) SI SE LANZAN DOS DADOS, ¿CUAL ES LA PROBABILIDAD DE QUE

1. SALGA UN 2 Y UN 5 (EVENTO B)?
2. LA SUMA SEA 7 (EVENTO A)

PARA EL INCISO 1 EL ESPACIO DE EVENTOS ES:

$$S = \left\{ \begin{array}{l} (1,1) \ (1,2) \ (1,3) \ (1,4) \ (1,5) \ (1,6) \\ (2,1) \ (2,2) \ (2,3) \ (2,4) \ (2,5) \ (2,6) \\ (3,1) \ (3,2) \ (3,3) \ (3,4) \ (3,5) \ (3,6) \\ (4,1) \ (4,2) \ (4,3) \ (4,4) \ (4,5) \ (4,6) \\ (5,1) \ (5,2) \ (5,3) \ (5,4) \ (5,5) \ (5,6) \\ (6,1) \ (6,2) \ (6,3) \ (6,4) \ (6,5) \ (6,6) \end{array} \right\}$$

SI EL DADO NO ESTA CARGADO, CADA PAREJA DE NUMEROS ES IGUALMENTE PROBABLE. EN TAL CASO, $N=36$ y $N(B)=2$ (APARECE (2,5) O (5,2))

$$\Rightarrow P(B) = 2/36 = 1/18.$$

PARA EL INCISO 2 EL ESPACIO DE EVENTOS ES

$$S_1 = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$$

PERO NO TODOS LOS ELEMENTOS (EVENTOS SIMPLES) SON IGUALMENTE PROBA-

BLES, YA QUE, POR EJEMPLO, EL 2 SOLO APARECERA SI SE OBSERVA LA PAREJA (1,1), EN CAMBIO EL 3 APARECERA SI OCURREN LAS PAREJAS (1,2) O (2,1), ES DECIR, EL 3 TIENE EL DOBLE DE PROBABILIDAD QUE EL 2. POR ESTO, PARA CALCULAR LA PROBABILIDAD DE QUE LA SUMA SEA 7 ES NECESARIO TRABAJAR CON EL ESPACIO S Y CONTAR LAS MANERAS POSIBLES DE QUE LA SUMA SEA 7, LO CUAL OCURRE SI SE OBSERVA CUALQUIERA DE LAS PAREJAS (6,1), (5,2), (4,3), (3,4), (2,5) o (1,6), ES DECIR, HAY 6 MANERAS IGUALMENTE PROBABLES DE QUE OCURRA EL EVENTO A. POR LO TANTO

$$P(A) = \frac{N(A)}{N} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

PROCEDIENDO DE ESTA MANERA SE PUEDEN CALCULAR LAS PROBABILIDADES DE QUE LA SUMA SEA 2,3,4, ETC. LOS RESULTADOS SON:

$$P(\{2\}) = \frac{1}{36}; P(\{3\}) = \frac{2}{36}; P(\{4\}) = \frac{3}{36}; P(\{5\}) = \frac{4}{36};$$

$$P(\{6\}) = \frac{5}{36}; P(\{7\}) = \frac{6}{36}; P(\{8\}) = \frac{5}{36}; P(\{9\}) = \frac{4}{36};$$

$$P(\{10\}) = \frac{3}{36}; P(\{11\}) = \frac{2}{36} \text{ y } P(\{12\}) = \frac{1}{36}$$

$$\text{(OBSERVESE QUE } \sum_{i=2}^{12} P(\{i\}) = 1)$$

ASIGNACION DE PROBABILIDADES MEDIANTE UN MODELO MATEMATICO

MEDIANTE ESTE METODO LAS PROBABILIDADES SE ASIGNAN A PARTIR DE UN MODELO MATEMATICO QUE INVOLUCRE TODOS LOS FACTORES POSIBLES QUE INTERVIENEN EN LA ALEATORIEDAD DEL FENOMENO.

AXIOMAS DE LA TEORIA DE PROBABILIDADES

LAS PROBABILIDADES QUE SE ASIGNAN A LOS DIFERENTES EVENTOS RELACIONADOS CON UN FENOMENO ALEATORIO DEBEN CUMPLIR CON LOS SIGUIENTES TRES AXIOMAS:

AXIOMA 1: LA PROBABILIDAD DE OCURRENCIA DE UN EVENTO A ES UN NUMERO, $P(A)$, QUE SE LE ASIGNA A DICHO EVENTO, CUYO VALOR QUEDA EN EL INTERVALO

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

AXIOMA 2: SI S ES UN ESPACIO DE EVENTOS, ENTONCES

$$P(S) = 1$$

AXIOMA 3: LA PROBABILIDAD, $P(C)$, DE LA UNION, C, DE DOS EVENTOS MUTUAMENTE EXCLUSIVOS, A Y B, ES IGUAL A LA SUMA DE LAS PROBABILIDADES DE ESTOS, ES DECIR,

$$P(A \cup B) = P(C) = P(A) + P(B)$$

EJEMPLOS

A) EN EL PROBLEMA DEL LANZAMIENTO DE UN DADO QUE NO ESTA CARGADO SE PUEDE ASIGNAR A CADA NUMERO (A CADA EVENTO SIMPLE) UNA PROBABILIDAD DE $1/6$, SI $A = \{2, 4\}$ Y $B = \{5, 6\}$, ENTONCES, PUESTO QUE $A = \{2\} \cup \{4\}$ Y $B = \{5\} \cup \{6\}$, Y QUE LOS EVENTOS ELEMENTALES SON MUTUAMENTE EXCLUSIVOS ENTRE SI, APLICANDO EL AXIOMA 3 SE OBTIENEN:

$$P(A) = P(\{2\}) + P(\{4\}) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$P(B) = P(\{5\}) + P(\{6\}) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

SI $C = A \cup B$, Y DADO QUE A Y B SON EVENTOS MUTUAMENTE EXCLUSIVOS:

$$P(C) = P(A) + P(B) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

ADEMAS, OBSERVESE QUE SE CUMPLE CON LOS AXIOMAS 1 Y 2,

YA QUE

$$P(S) = P(\{1\}) + P(\{2\}) + P(\{3\}) + P(\{4\}) + P(\{5\}) + P(\{6\}) \\ = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{6}{6} = 1$$

EJEMPLO

EN EL PROBLEMA DEL LANZAMIENTO DE DOS DADOS, ¿CUAL ES LA PROBABILIDAD QUE AL REALIZAR UNA VEZ EL EXPERIMENTO LA SUMA DE LOS DOS NUMEROS QUE QUEDEN HACIA ARRIBA SEA 7 U 11? ESTO ES EQUIVALENTE A PREGUNTAR POR LA PROBABILIDAD DE QUE OCURRA EL EVENTO

$C = \{7\} \cup \{11\}$. PUESTO QUE $\{7\}$ Y $\{11\}$ SON EVENTOS MUTUAMENTE EXCLUSIVOS:

$$P(C) = P(\{7\}) + P(\{11\}) = \frac{6}{36} + \frac{2}{36} = \frac{8}{36} = \frac{2}{9}$$

EJEMPLO

EN UN LABORATORIO SE PROBARON 100 VIGAS DE CONCRETO REFORZADO NOMINALMENTE IDENTICAS, Y SE ANOTARON LAS CARGAS CON LAS CUALES FALLO CADA UNA. DE ESTA SUCESION DE EXPERIMENTOS SE ASIGNARON, EN TERMINOS DE LAS FRECUENCIAS RELATIVAS CORRESPONDIENTES, LAS SIGUIENTES PROBABILIDADES:

SI $A = \{X: 0 < X < 20 \text{ ton}\}$; $P(A) = 0.17$

SI $B = \{X: 20 < X < 40 \text{ ton}\}$; $P(B) = 0.24$

SI $C = \{X: 40 < X < 60 \text{ ton}\}$; $P(C) = 0.27$

SI $D = \{X: 60 < X < 80\}$; $P(D) = 0.13$

SI $E = \{X: 80 < X < 100\}$; $P(E) = 0.11$

SI $F = \{X: 100 < X\}$; $P(F) = \underline{0.08}$

$$\Sigma P(.) = 1.00$$

SI SE REALIZA UNA VEZ MAS EL EXPERIMENTO, CALCULEMOS LAS SIGUIENTES PROBABILIDADES:

- A) QUE LA RESISTENCIA SEA MENOR O IGUAL QUE 80 TON. PUESTO QUE $G = \{X: 0 \leq X \leq 80 \text{ ton}\}$ SE TIENE QUE $G = A \cup B \cup C \cup D$, POR LO QUE
- $$P(G) = P(A) + P(B) + P(C) + P(D) = 0.17 + 0.24 + 0.27 + 0.13 = 0.81$$
- B) LA PROBABILIDAD QUE RESISTA MAS DE 60 TONS. PUESTO QUE $H = \{X: 60 < X < \infty\}$ O $H = \{X: X > 60\}$ SE TIENE QUE $H = D \cup E \cup F$, POR LO QUE $P(H) = P(D) + P(E) + P(F) = 0.13 + 0.11 + 0.08 = 0.32$
- C) LA PROBABILIDAD QUE RESISTA MAS DE 40 TON, PERO CUANDO MUCHO 100 TON. PUESTO QUE $I = \{X: 40 < X \leq 100\}$ SE TIENE QUE $I = C \cup D \cup E$ POR LO QUE $P(I) = P(C) + P(D) + P(E) = 0.27 + 0.13 + 0.11 = 0.51$

TEOREMAS

DOS TEOREMAS IMPORTANTES QUE SE DEDUCEN A PARTIR DE LOS AXIOMAS SON:

TEOREMA 1.

SI A ES UN EVENTO DEL ESPACIO S , ENTONCES $P(\bar{A})=1-P(A)$

DEMOSTRACION

PUESTO QUE A Y \bar{A} SON MUTUAMENTE EXCLUSIVOS

Y ADEMÁS $A \cup \bar{A} = S$, ENTONCES, $P(S) = P(A) + P(\bar{A}) = 1$

$$\Rightarrow P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

CASO PARTICULAR: PUESTO QUE $P(\bar{S}) = 1 - P(S) = 0$ Y $\bar{S} = \emptyset$, SE TIENE QUE

$$P(\emptyset) = 0$$

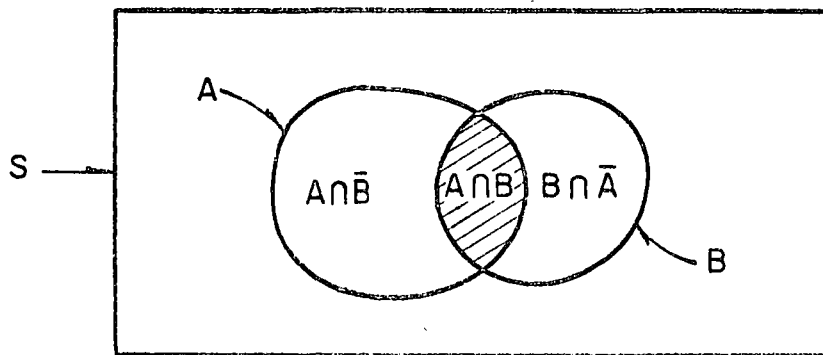
TEOREMA 2.

SI A Y B SON DOS EVENTOS CUALQUIERA DE S, ENTONCES

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

DEMOSTRACION

SEA EL DIAGRAMA DE VENN:



$A \cup B = (A \cap B) \cup (A \cap \bar{B}) \cup (B \cap \bar{A})$. PUESTO QUE $A \cap B$, $A \cap \bar{B}$ Y $B \cap \bar{A}$ SON MUTUAMENTE EXCLUSIVOS, SE TIENE QUE $P(A \cup B) = P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B}) + P(B \cap \bar{A})$.

SUMANDO Y RESTANDO $P(A \cap B)$ Y AGRUPANDO TERMINOS SE OBTIENE

$$P(A \cup B) = [P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B})] + [P(A \cap B) + P(B \cap \bar{A})] - P(A \cap B)$$

$$\text{PERO } A = (A \cap \bar{B}) \cup (A \cap B) \Rightarrow P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B}) = P(A)$$

$$\text{Y } B = (A \cap B) \cup (B \cap \bar{A}) \Rightarrow P(A \cap B) + P(B \cap \bar{A}) = P(B), \text{ POR LO QUE}$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

EJEMPLO

EN UNA URNA SE TIENEN 28 TIRAS DE PAPEL Y EN CADA UNA SE ENCUENTRA ANOTADA UNA LETRA DISTINTA DEL ALFABETO. CALCULE LA PROBABILIDAD DE QUE AL EXTRAER AL AZAR UNA TIRA:

- A) SE OBTENGA UNA VOCAL
 B) SE OBTENGA a O z
 C) OCURRAN C Y D, DONDE $C=\{x,y,z\}$ Y
 $D=\{b,c,y,z\}$
 D) OCURRA C O D

Respuestas

$$A) A=\{a,e,i,o,u\} \Rightarrow P(A) = \frac{5}{28}$$

$$B) B=\{a,z\} \Rightarrow P(B) = \frac{2}{28}$$

$$C) F = C \cap D = \{y,z\} \Rightarrow P(F) = \frac{2}{28}$$

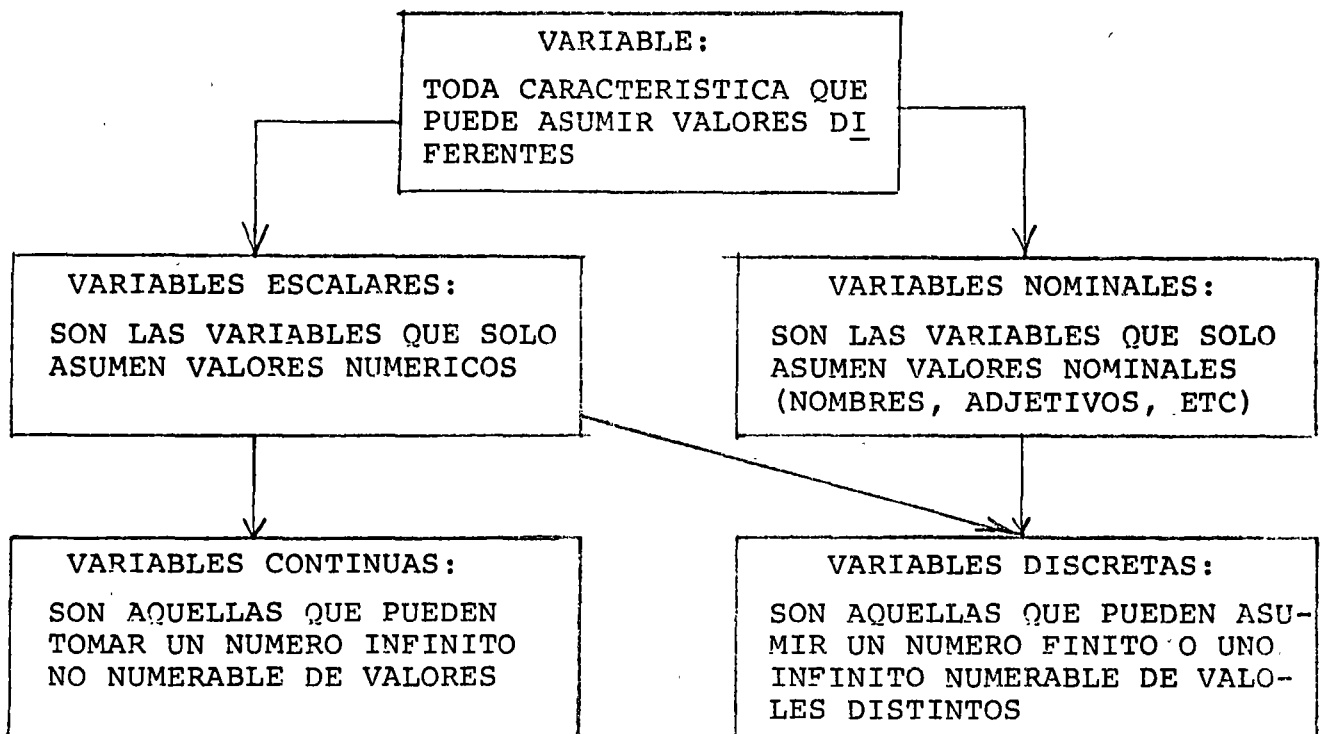
$$D) E = C \cup D = \{b,c,x,y,z\} \Rightarrow P(E) = \frac{5}{28}$$

$$\circ P(E) = P(C) + P(D) - P(C \cap D)$$

$$P(C \cap D) = P(F) = \frac{2}{28} \Rightarrow P(E) = \frac{3}{28} + \frac{4}{28} - \frac{2}{28} = \frac{5}{28}$$

VARIABLES ALEATORIAS

CLASIFICACION DE VARIABLES



UNA VARIABLE ALEATORIA ES UNA VARIABLE TAL QUE NO PUEDE PREDECIRSE CON CERTEZA EL VALOR QUE ASUMIRA AL REALIZAR UN EXPERIMENTO.

POR EJEMPLO, LA RESISTENCIA O CARGA DE FALLA DE UNAS VIGAS ES UNA VARIABLE ALEATORIA, YA QUE ANTES DE ROMPER UNA VIGA TOMADA AL AZAR NO SE PUEDE PRECISAR CUAL SERA SU RESISTENCIA. EN LA SIGUIENTE TABLA SE PRESENTAN LOS RESULTADOS EXPERIMENTALES CON 15 VIGAS DE CONCRETO REFORZADO, OBSERVANDOSE QUE ESTOS VARIAN DE UNAS A OTRAS DE MANERA ALEATORIA.

TABLA 2. PRUEBAS DE VIGAS DE CONCRETO REFORZADO

Número de la viga	Carga de agrietamiento, en kg	Carga de falla, en kg
1	4 700	4 700
2	3 840	4 220
3	3 270	4 360
4	2 310	4 680
5	2 950	4 270
6	4 810	4 810
7	2 720	4 590
8	2 720	4 490
9	4 310	4 310
10	2 950	4 630
11	4 220	4 220
12	2 720	4 340
13	2 720	4 340
14	2 630	4 770
15	2 950	4 630

A TODO EXPERIMENTO SE LE PUEDE ASOCIAR AL MENOS UNA VARIABLE ALEATORIA, DEPENDIENDO ESTA DEL PROBLEMA QUE SE TENGA PLANTEADO. POR EJEMPLO, EN EL CASO DE LA RESISTENCIA DE LAS VIGAS DE VARIABLE

ALEATORIA PUEDE SER DIRECTAMENTE DICHA RESISTENCIA, EN CUYO CASO SU ESPACIO DE EVENTOS SERIA

$$S_1 = \{x: 0 < x < \infty\}$$

LA VARIABLE TAMBIEN PUDO HABER SIDO UNA CUYO ESPACIO DE EVENTOS FUERA

$$S_2 = \{\text{EXITO}, \text{FRACASO}\}$$

EN DONDE EL EXITO OCURRIRIA SI LA VIGA RESISTIERA MAS DE CIERTA CANTIDAD, POR EJEMPLO 4600 KG, Y EL FRACASO OCURRIRIA SI RESISTIERA MENOS, ES DECIR:

EXITO: SI $X \geq 4600$ KG

FRACASO: SI $X < 4600$ KG

LEYES DE PROBABILIDADES

EL COMPORTAMIENTO DE UNA VARIABLE ALEATORIA SE DESCRIBE MEDIANTE SU LEY DE PROBABILIDADES, LA CUAL PUEDE ESPECIFICARSE DE DIFERENTES FORMAS. LA MANERA MAS COMUN DE HACERLO ES MEDIANTE SU DISTRIBUCION O DENSIDAD DE PROBABILIDADES.

A FIN DE EVITAR CONFUSION, SE EMPLEARA UNA LETRA MAYUSCULA PARA DENOTAR UNA VARIABLE ALEATORIA, Y LA MINUSCULA CORRESPONDIENTE PARA LOS VALORES QUE PUEDE ASUMIR. SI LA VARIABLE ALEATORIA X ES DISCRETA Y PUEDE ASUMIR LOS VALORES x_i , SU DENSIDAD DE PROBABILIDADES, $f_X(x)$ SERA EL CONJUNTO DE LAS PROBABILIDADES

$$P_X(x_i) = P(X = x_i)$$

LA CUAL SE LEE "PROBABILIDAD DE QUE $X = x_i$ ". ESTO ES

$$f_X(x) = \{P_X(x_i)\}$$

PARA QUE UNA DENSIDAD DE PROBABILIDADES SATISFAGA LOS TRES AXIOMAS DE LA TEORIA DE PROBABILIDADES, SE DEBEN CUMPLIR LOS SIGUIENTES REQUISITOS

A) $0 \leq P_X(x_i) \leq 1$ PARA TODA x_i

B) $\sum_{i=1}^n P_X(x_i) = 1$, DONDE n ES EL NUMERO TOTAL DE VALORES QUE PUEDE ASUMIR X

C) $P(x_m \leq X \leq x_r) = \sum_{i=m}^{i=r} P_X(x_i)$; $m \leq r$

LA DISTRIBUCION DE PROBABILIDADES ACUMULADAS O FUNCION DE DISTRIBUCION

OTRA FORMA DE ESPECIFICAR LA LEY DE PROBABILIDADES DE UNA VARIABLE ALEATORIA ES MEDIANTE LA DISTRIBUCION DE PROBABILIDADES ACUMULADAS, $F_X(x_i)$, QUE SE DEFINE COMO EL CONJUNTO DE LAS SUMAS PARCIALES DE LAS PROBABILIDADES, $P_X(x_i)$, CORRESPONDIENTES A TODOS LOS VALORES DE X MENORES O IGUALES QUE x_i . POR LO TANTO, ESTA FUNCION DA LAS PROBABILIDADES DE QUE LA VARIABLE ALEATORIA TOME VALORES MENORES O IGUALES QUE x_m PARA CUALQUIER m , ES DECIR

$$F_X(x) = \{F_X(x_m)\} ; m = 1, 2, \dots, n$$

EN DONDE

$$F_X(x_m) = \sum_{i=1}^{i=m} P_X(x_i) = P(X \leq x_m)$$

EJEMPLO

SEA X LA VARIABLE ALEATORIA DISCRETA "NUMERO TOTAL DE CARROS QUE SE DETIENEN EN UNA ESQUINA DEBIDO A LA LUZ ROJA DE UN SEMAFORO". SI LAS PROBABILIDADES ASOCIADAS A CADA VALOR, DETERMINADAS POR EL METODO FRECUENCIAL, SON

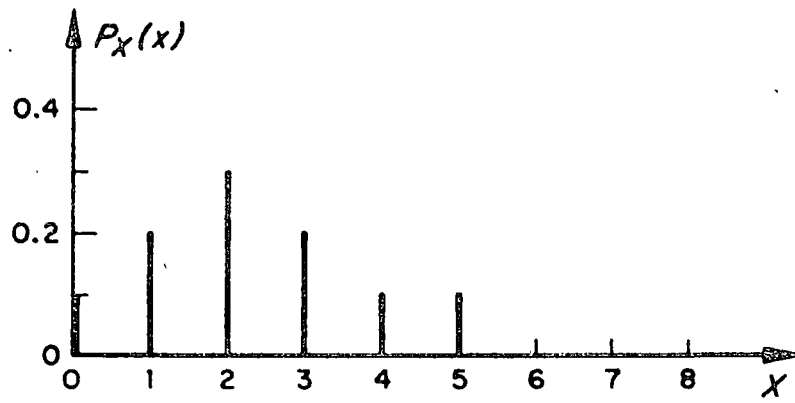
$$P_X(x) = \begin{cases} 0.1 & \text{SI } x = 0 \\ 0.2 & \text{SI } x = 1 \\ 0.3 & \text{SI } x = 2 \\ 0.2 & \text{SI } x = 3 \\ 0.1 & \text{SI } x = 4 \\ 0.1 & \text{SI } x = 5 \\ 0 & \text{SI } x \geq 6 \end{cases}$$

LA DISTRIBUCION DE PROBABILIDADES Y LA DE PROBABILIDADES ACUMULADAS CORRESPONDIENTES SERAN

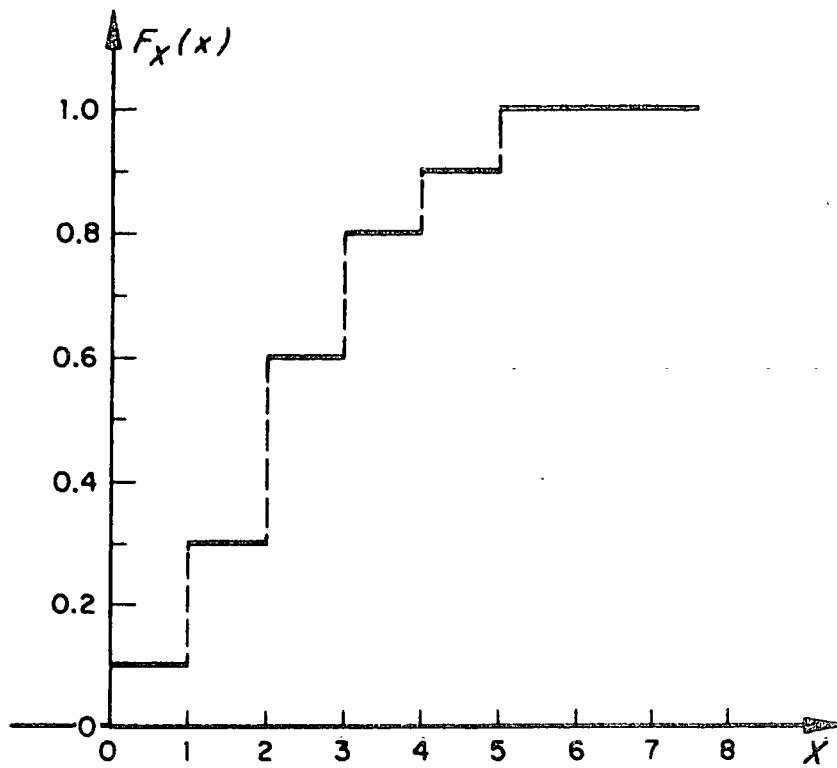
x	$f_X(x)$	$F_X(x)$
<0	0	0
0	0.1	0.1
1	0.2	0.3
2	0.3	0.6
3	0.2	0.8
4	0.1	0.9
5	0.1	1.0
≥ 6	0	1.0

O SEA $F_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{SI } x < 0 \\ 0.1, & \text{SI } 0 \leq x < 1 \\ 0.3, & \text{SI } 1 \leq x < 2 \\ 0.6, & \text{SI } 2 \leq x < 3 \\ 0.8, & \text{SI } 3 \leq x < 4 \\ 0.9, & \text{SI } 4 \leq x < 5 \\ 1.0, & \text{SI } 5 \leq x \end{cases}$

LAS GRAFICAS DE ESTAS DISTRIBUCIONES SE PRESENTAN EN LA FIGURA DE LA SIGUIENTE HOJA.



a) Distribución de probabilidades



b) Función de distribución

Ley de probabilidades del ejemplo del tráfico

EJEMPLO

SEA LA VARIABLE ALEATORIA X DEFINIDA POR LA SUMA DE LOS DOS NUMEROS QUE QUEDEN HACIA ARRIBA AL LANZAR DOS DADOS. EN ESTE CASO EL ESPACIO DE EVENTOS ES

$$S = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$$

Y LA DENSIDAD DE PROBABILIDADES ES

$$f_X(x) = \left\{ \frac{1}{36}, \frac{2}{36}, \frac{3}{36}, \frac{4}{36}, \frac{5}{36}, \frac{6}{36}, \frac{5}{36}, \frac{4}{36}, \frac{3}{36}, \frac{2}{36}, \frac{1}{36} \right\}$$

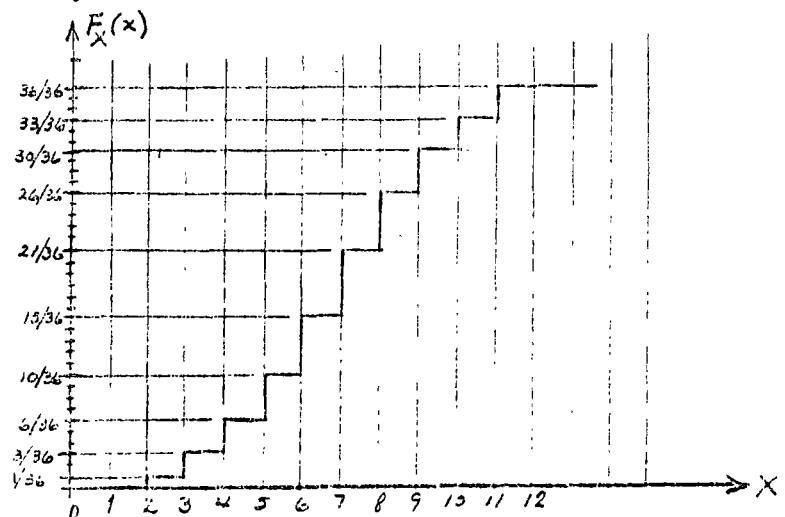
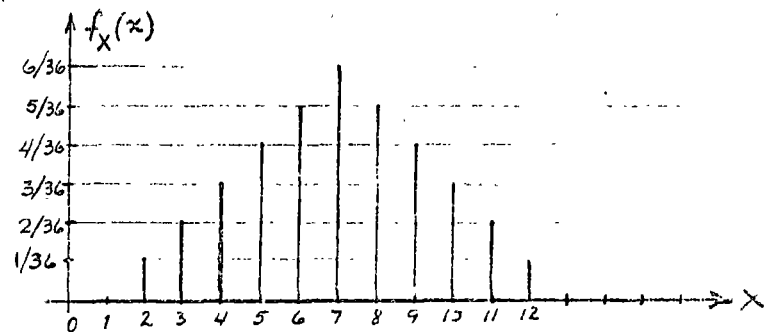
EN ESTE CASO $X_1=2, X_2=3, \dots, X_{11}=12$

$$Y \quad f_X(2) = \frac{1}{36}, f_X(3) = \frac{2}{36}, \dots, f_X(12) = \frac{1}{36}$$

ESTAS PROBABILIDADES FUERON CALCULADAS EN UN EJEMPLO PREVIO SOBRE PROBABILIDADES DE EVENTOS .

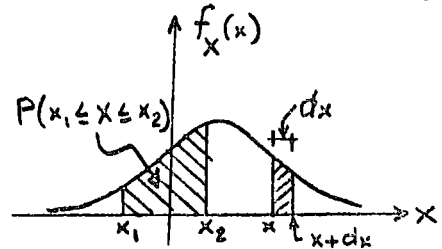
CON ESTAS PROBABILIDADES SE PUEDE OBTENER LA FUNCIÓN DE DISTRIBUCION O DE PROBABILIDADES ACUMULADAS, DE LA SIGUIENTE MANERA:

x	$f_X(x)$	$F_X(x)$
<2	0	0
2	$1/36$	$1/36$
3	$2/36$	$3/36$
4	$3/36$	$6/36$
5	$4/36$	$10/36$
6	$5/36$	$15/36$
7	$6/36$	$21/36$
8	$5/36$	$26/36$
9	$4/36$	$30/36$
10	$3/36$	$33/36$
11	$2/36$	$35/36$
12	$1/36$	$36/36=1$
>12	0	1
	$\Sigma=1$	



EN EL CASO DE UNA VARIABLE ALEATORIA CONTINUA, X , LA PROBABILIDAD DE QUE ESTA TOME UN VALOR COMPRENDIDO ENTRE x Y $x + dx$ ESTA DADA POR $f_X(x)dx$, DONDE $f_X(x)$ ES LA DENSIDAD DE PROBABILIDADES DE X . POR LO TANTO, LA PROBABILIDAD DE QUE X ASUMA VALORES COMPRENDIDOS EN EL INTERVALO $x_1 \leq X \leq x_2$ ES

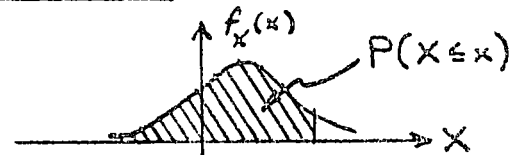
$$P(x_1 \leq X \leq x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f_X(x) dx$$



LA INTERPRETACION GRAFICA DE ESTA PROBABILIDAD ES QUE CORRESPONDE AL AREA BAJO LA CURVA DE $f_X(x)$ COMPRENDIDA ENTRE x_1 Y x_2 .

PUESTO QUE $F_X(x) = P(X \leq x) = P(-\infty \leq X \leq x)$, Y EN VIRTUD DE LA ECUACION ANTERIOR SE TIENE QUE LA FUNCION DE DISTRIBUCION ES:

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(u) du$$



DONDE u ES SOLO UNA VARIABLE MUDA DE INTEGRACION. EL VALOR DE ESTA INTEGRAL ES IGUAL AL AREA BAJO LA CURVA DE $F_X(x)$ A LA IZQUIERDA DE x . DE ESTA ECUACION SE CONCLUYE QUE

$$\frac{dF_X(x)}{dx} = \frac{d}{dx} \left(\int_{-\infty}^x f_X(u) du \right) = f_X(x)$$

ALGUNAS PROPIEDADES DE $F_X(x)$ SON:

$$0 \leq F_X(x) \leq 1$$

$$F_X(-\infty) = 0$$

$$F_X(\infty) = 1$$

$$F_X(x + \epsilon) \geq F_X(x), \text{ SI } \epsilon \geq 0$$

$$F_X(x_2) - F_X(x_1) = P(x_1 \leq X \leq x_2)$$

PARA SATISFACER LOS AXIOMAS DE LA TEORIA DE PROBABILIDADES SE
NECESITA QUE

$$f_X(x) \geq 0 \text{ PARA TODA } x$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) dx = 1$$

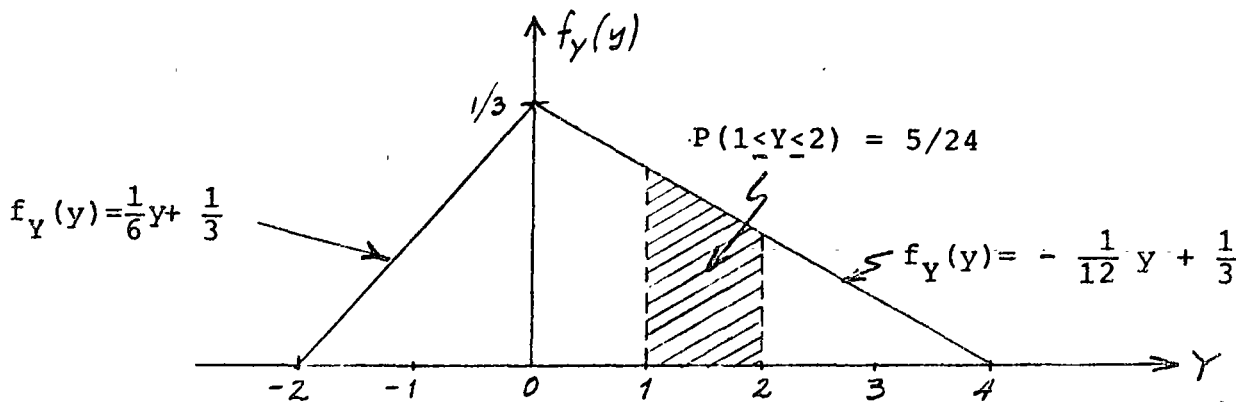
EJEMPLO

SEA UNA VARIABLE ALEATORIA CONTINUA CUYA DENSIDAD DE PROBABILIDAD ES DE FORMA TRIANGULAR DADA POR LAS SIGUIENTES ECUACIONES:

$$f_Y(Y) = \frac{1}{6} Y + \frac{1}{3}, \text{ SI } -2 \leq Y \leq 0$$

$$f_Y(Y) = -\frac{1}{12} Y + \frac{1}{3}, \text{ SI } 0 \leq Y \leq 4$$

$$f_Y(Y) = 0 \quad \text{SI } Y \leq -2 \text{ O } Y \geq 4$$



LA DISTRIBUCION DE PROBABILIDADES ACUMULADAS ES, ENTONCES:

$$\text{SI } -2 \leq Y \leq 0$$

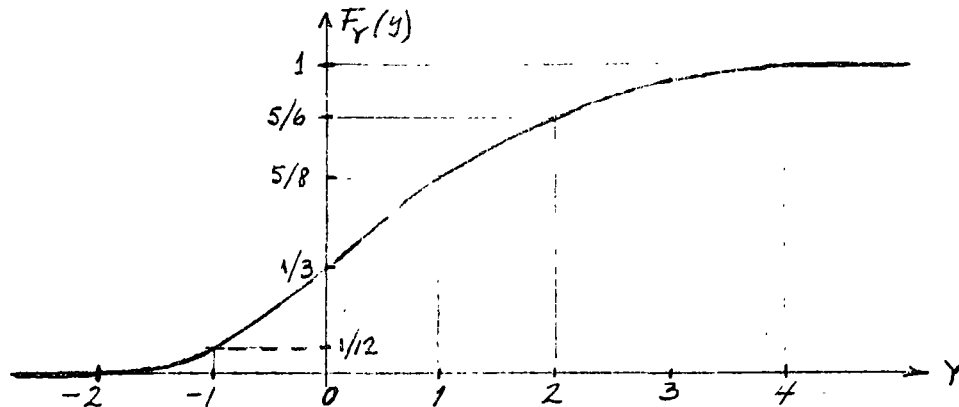
$$\begin{aligned} F_Y(Y) &= \int_{-\infty}^Y f_Y(U) dU = \int_{-2}^Y \left(\frac{1}{6} U + \frac{1}{3} \right) dU \\ &= \left[\frac{U^2}{12} + \frac{U}{3} \right]_{-2}^Y = \frac{Y^2}{12} + \frac{Y}{3} + \frac{1}{3} \end{aligned}$$

$$\text{SI } 0 \leq Y \leq 4$$

$$\begin{aligned} F_Y(Y) &= F_Y(0) + \int_0^Y \left(-\frac{1}{12} U + \frac{1}{3} \right) dU = \frac{1}{3} + \left[-\frac{U^2}{24} + \frac{U}{3} \right]_0^Y = \\ &= \frac{1}{3} - \frac{Y^2}{24} + \frac{Y}{3} \quad \text{SI } 0 \leq Y \leq 4 \end{aligned}$$

$$F_Y(y) = 0 \quad \text{SI } y \leq -2$$

$$F_Y(y) = 1 \quad \text{SI } y \geq 4$$



SI SE DESEA CALCULAR LA PROBABILIDAD DE QUE AL REALIZAR UNA VEZ EL EXPERIMENTO QUE INVOLUCRA A DICHA VARIABLE, EL VALOR QUE SE OBSERVE CAIGA EN EL INTERVALO $1 \leq Y \leq 2$, ENTONCES

$$P[1 \leq Y \leq 2] = \int_1^2 \left(-\frac{1}{12}y + \frac{1}{3}\right) dy = \left[-\frac{y^2}{24} + \frac{y}{3}\right]_1^2 = \frac{5}{24}$$

O

$$P[1 \leq Y \leq 2] = F_Y(2) - F_Y(1) = \frac{5}{6} - \frac{5}{8} = \frac{5}{24}$$

EJEMPLO

UN INGENIERO ESTA INTERESADO EN DISEÑAR UNA TORRE QUE RESISTA LAS CARGAS DEBIDAS AL VIENTO. DE UNA SERIE DE OBSERVACIONES DE LA MAXIMA VELOCIDAD ANUAL DEL VIENTO CERCA DEL SITIO DE INTERES, SE ENCUENTRA QUE EL HISTOGRAMA PUEDE AJUSTARSE RAZONABLEMENTE, DESDE UN PUNTO DE VISTA ESTADISTICO, MEDIANTE UNA DISTRIBUCION DE PROBABILIDADES EXPONENCIAL DE LA FORMA

$$f_X(x) = Ke^{-\lambda x}; x \geq 0$$

DONDE X ES LA MAXIMA VELOCIDAD DEL VIENTO, λ ES UNA CONSTANTE Y K ES OTRA CONSTANTE TAL QUE OBLIGA A QUE EL AREA BAJO LA CURVA DE $f_X(x)$ SEA IGUAL A UNO. POR TANTO,

$$\int_0^{\infty} Ke^{-\lambda x} dx = \frac{-K}{\lambda} [e^{-\lambda x}]_0^{\infty} = \frac{K}{\lambda} = 1$$

DE DONDE

$$K = \lambda$$

POR TANTO

$$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}; x \geq 0$$

LA FUNCION DE DISTRIBUCION SERA

$$F_X(x) = \int_0^x f_X(u) du = \int_0^x \lambda e^{-\lambda u} du = [-e^{-\lambda u}]_0^x = 1 - e^{-\lambda x}; x \geq 0$$

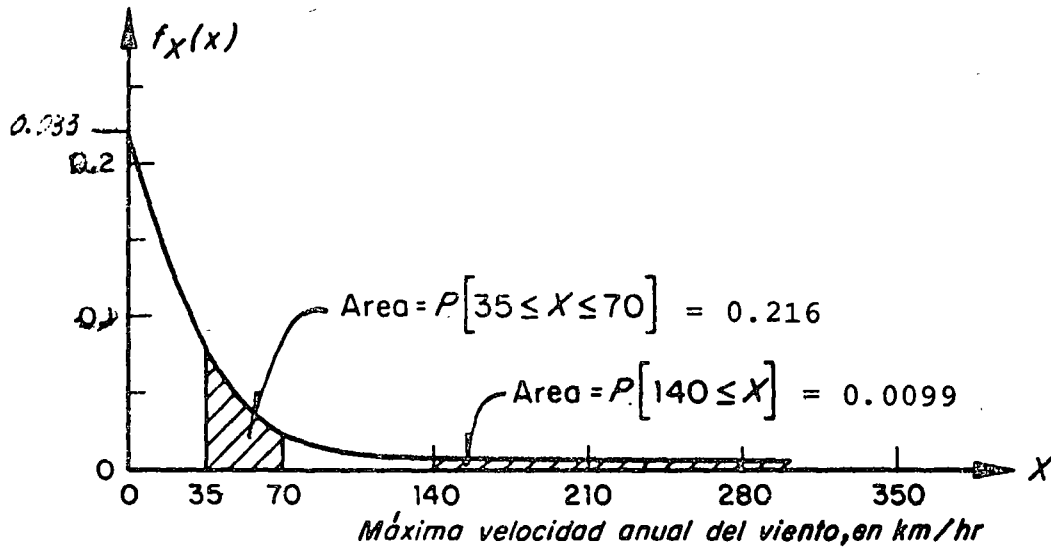
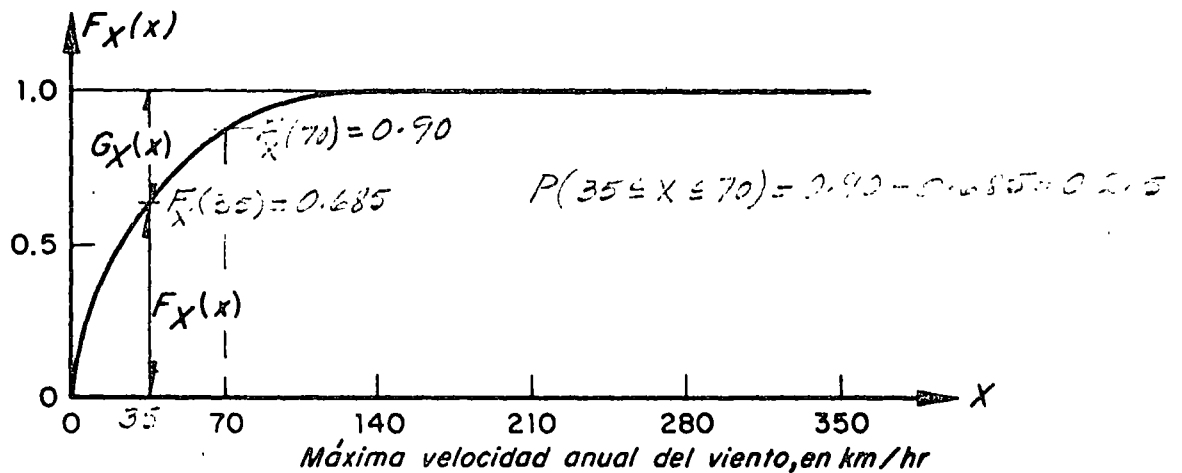
EL VALOR DE λ SE PUEDE TOMAR, POR EJEMPLO, DE MANERA QUE $F_X(x)$ SE AJUSTE PARA QUE COINCIDA CON UN VALOR EMPIRICO. ASI, SI LA FRECUENCIA RELATIVA DEL EVENTO $A = \{X \leq 70 \text{ KM/H}\}$ ES 0.9, ENTONCES

$$P(0 \leq X \leq 70) = F_X(70) = 0.9$$

DE DONDE

$$0.9 = 1 - e^{-70\lambda}$$

POR LO CUAL $\lambda = 0.033$.

a) Densidad de probabilidades de X b) Función de distribución de X

Ley de probabilidades correspondiente al ejemplo de la máxima velocidad anual del viento

SI SE DESEA CALCULAR, POR EJEMPLO, LA PROBABILIDAD DE QUE LA VELOCIDAD MÁXIMA DEL VIENTO EN UN AÑO DADO ESTE ENTRE 35 Y 70 KM/H, SE TENDRÁ:

$$\begin{aligned}
 P(35 \leq X \leq 70) &= \int_{35}^{70} 0.033e^{-0.033x} dx = [-e^{-0.033x}]_{35}^{70} = \\
 &= -e^{-0.033 \times 70} - (-e^{-0.033 \times 35}) = -e^{-2.31} + e^{-1.155} = \\
 &= -0.099 + 0.315 = 0.216
 \end{aligned}$$

EN TERMINOS DE $F_X(x)$ ESTA PROBABILIDAD QUEDA DADA POR

$$\begin{aligned}
 P(35 \leq X \leq 70) &= F_X(70) - F_X(35) = 0.90 - (1 - e^{-1.155}) = 0.90 - 0.685 \\
 &= 0.215
 \end{aligned}$$

FUNCION DE DISTRIBUCION COMPLEMENTARIA

EL COMPLEMENTO, $G_X(x)$, DE LA DISTRIBUCION DE PROBABILIDADES ACUMULADAS SE UTILIZA CUANDO LAS DECISIONES SE TOMAN CON BASE EN PROBABILIDADES DE QUE SE EXCEDA UN VALOR DADO DE LA VARIABLE. LA FUNCION DE DISTRIBUCION COMPLEMENTARIA SE DEFINE COMO

$$G_X(x) = P(X > x) = 1 - F_X(x)$$

EJEMPLO

PARA EL PROBLEMA ANTERIOR DE LA VELOCIDAD MAXIMA ANUAL DEL VIENTO, CALCULEMOS LA PROBABILIDAD DE QUE ESTA SEA MAYOR DE 140 KM/H:

$$G_X(140) = P(X \geq 140) = \int_{140}^{\infty} 0.033e^{-0.033x} dx = 0.0099$$

O, ALTERNATIVAMENTE

$$P(X \geq 140) = 1 - F_X(140) = G_X(140) = 1 - (1 - e^{-0.033 \times 140}) = e^{-4.62} = 0.0099$$

ESPERANZAS

LA ESPERANZA DE UNA FUNCION $g(X)$, DE UNA VARIABLE ALEATORIA DISCRETA,
 X , ES, POR DEFINICION

$$E(g(X)) = \sum_{i=1}^{i=n} g(x_i) P_X(x_i)$$

O PARA UNA VARIABLE CONTINUA

$$E(g(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X(x) dx$$

EJEMPLOS

1. SI $g(X) = \text{CONSTANTE} = c$

$$E(c) = c \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) dx = c$$

2. SI $g(X) = cx$

$$E[cx] = c \overbrace{\int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx}^{E[X]} = cE[X]$$

3. SI $g(X) = a + bx$

$$E[a + bx] = a \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) dx + b \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx = a + bE[X]$$

4. SI $g(X) = g_1(X) + g_2(X)$

$$\begin{aligned} E[g_1(X) + g_2(X)] &= \int_{-\infty}^{\infty} g_1(x) f_X(x) dx + \int_{-\infty}^{\infty} g_2(x) f_X(x) dx \\ &= E[g_1(X)] + E[g_2(X)] \end{aligned}$$

EJEMPLO

SI X ES UNA VARIABLE ALEATORIA CON DENSIDAD DE PROBABILIDADES EXPONENCIAL, CALCULAR LA ESPERANZA DE LA FUNCION

$$g(x) = x^2$$

EN ESTE CASO SE TIENE QUE

$$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x} \quad \text{SI } 0 \leq x < \infty, \quad \text{Y} \quad f_X(x) = 0 \quad \text{SI } x < 0$$

POR LO QUE

$$E(X^2) = E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X(x) dx = \lambda \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\lambda x} dx$$

$$= \lambda \left[\frac{-x^2 e^{-\lambda x}}{\lambda} \right]_0^{\infty} + \frac{2\lambda}{\lambda} \int_0^{\infty} x e^{-\lambda x} dx = \frac{-2}{\lambda^2} \left[e^{-\lambda x} (1 + \lambda x) \right]_0^{\infty} = \frac{2}{\lambda^2}$$

EN GENERAL, A LA ESPERANZA DE X^2 SE LE DENOMINA VALOR MEDIO CUADRATICO.

MEDIDAS DE TENDENCIA CENTRAL

LA MEDIA O ESPERANZA, $E[X]$, DE UNA VARIABLE ALEATORIA, X , SE CALCULA CON LAS ECUACIONES ANTERIORES PARA EL CASO EN QUE $g(X)=X$. DE ESTA MANERA, SI LA VARIABLE ES DISCRETA, SU ESPERANZA QUEDA DADA POR

$$E(X) = \sum_{i=1}^{i=n} x_i P_X(x_i)$$

DONDE n ES EL TOTAL DE VALORES QUE X PUEDE ASUMIR.

PARA EL CASO DE UNA VARIABLE ALEATORIA CONTINUA, LA MEDIA ES

$$m_X = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx$$

EJEMPLO

CALCULAR LA ESPERANZA DE UNA VARIABLE ALEATORIA CUYA DENSIDAD DE PROBABILIDADES ES TRIANGULAR DADA POR

$$f_Y(y) = \frac{1}{6} y + \frac{1}{3} \quad \text{SI } -2 \leq y \leq 0$$

$$f_Y(y) = \frac{-1}{12} y + \frac{1}{3} \quad \text{SI } 0 \leq y \leq 4$$

$$f_Y(y) = 0 \quad \text{SI } y \leq -2 \quad \text{O} \quad y \geq 4$$

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} y f_Y(y) dy = \int_{-2}^0 y \left(\frac{y}{6} + \frac{1}{3} \right) dy + \int_0^4 y \left(\frac{-y}{12} + \frac{1}{3} \right) dy$$

$$= \left[\frac{y^3}{18} + \frac{y^2}{6} \right]_{-2}^0 + \left[\frac{-y^3}{36} + \frac{y^2}{6} \right]_0^4 = \frac{2}{3}$$

EJEMPLO

CALCULAR LA ESPERANZA DE UNA VARIABLE ALEATORIA CON DENSIDAD DE
PROBABILIDADES EXPONENCIAL

$$f_x(x) = \lambda e^{-\lambda x}$$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_x(x) dx = \lambda \int_0^{\infty} x e^{-\lambda x} dx = \lambda \left[\frac{-e^{-\lambda x}}{\lambda^2} (1 + \lambda x) \right]_0^{\infty} = \frac{1}{\lambda}$$

MEDIDAS DE DISPERSION

UNA MEDIDA MUY COMUN DE LA DISPERSION O VARIABILIDAD DE LOS VALORES QUE PUEDE ASUMIR UNA VARIABLE ALEATORIA ES LA VARIANCIA, LA CUAL SE DENOTA COMO $\sigma^2(X)$ O $\text{VAR}(X)$, LA CUAL SE DEFINE COMO LA ESPERANZA DE LA FUNCION $g(X) = [X - E(X)]^2$. ASI, PARA UNA VARIABLE ALEATORIA DISCRETA

$$\sigma^2(X) = \text{VAR}(X) = \sum_{i=1}^{i=n} (x_i - E(X))^2 P_X(x_i)$$

Y PARA UNA CONTINUA

$$\sigma^2(X) = \text{VAR}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - E(X))^2 f_X(x) dx$$

DESARROLLANDO EL INTEGRANDO DE ESTA ULTIMA ECUACION:

$$\begin{aligned} \sigma^2(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} (x^2 - 2xE(X) + E^2(X)) f_X(x) dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x) dx - 2E(X) \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx + E^2(X) \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) dx = E[X^2] - E^2[X] \end{aligned}$$

ES DECIR, LA VARIANCIA SE PUEDE CALCULAR COMO LA DIFERENCIA DEL VALOR MEDIO CUADRATICO Y EL CUADRADO DE LA MEDIA DE X.

OTRAS MEDIDAS DE DISPERSION DE LA VARIABLE ALEATORIA X SON LA DESVIACION ESTANDAR, $\sigma(X)$, LA CUAL ES IGUAL A LA RAIZ CUADRADA DE LA VARIANCIA, Y EL COEFICIENTE DE VARIACION QUE SE DEFINE COMO

$$v(X) = \sigma(X) / E(X) , \text{ SI } E(X) \neq 0$$

EJEMPLO

SI X ES UNA VARIABLE ALEATORIA CON DISTRIBUCION DE PROBABILIDADES EXPONENCIAL, CALCULAR SU VARIANCIA, DESVIACION ESTANDAR Y COEFICIENTE DE VARIACION:

$$\begin{aligned}\sigma^2(X) &= E(X-E[X])^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x-E[X])^2 \lambda e^{-\lambda x} dx = \lambda \int_0^{\infty} (x^2 - 2xE[X] + E^2[X]) e^{-\lambda x} dx \\ &= \lambda \int_0^{\infty} x^2 e^{-\lambda x} dx - 2E[X] \lambda \int_0^{\infty} x e^{-\lambda x} dx + E^2[X] \int_0^{\infty} \lambda e^{-\lambda x} dx \\ &= \frac{2}{\lambda^2} - 2 \frac{1}{\lambda} \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}\end{aligned}$$

YA QUE $E(X) = 1/\lambda$ Y $E[X^2] = 2/\lambda^2$.

USANDO LA FORMULA $\sigma^2(X) = E[X^2] - E^2[X]$, Y TOMANDO EN CUENTA QUE $E[X^2] = 2/\lambda^2$ SE OBTIENE:

$$\sigma^2(X) = 2/\lambda^2 - 1/\lambda^2 = 1/\lambda^2$$

EN CONSECUENCIA, LA DESVIACION ESTANDAR ES

$$\sigma(X) = \sqrt{1/\lambda^2} = 1/\lambda$$

Y EL COEFICIENTE DE VARIACION

$$v(X) = \sigma(X)/E(X) = \frac{1/\lambda}{1/\lambda} = 1$$

EJEMPLO

SEA Y UNA VARIABLE ALEATORIA CON DENSIDAD DE PROBABILIDADES TRIANGULAR DADA POR

$$f_Y(y) = \frac{1}{6} y + \frac{1}{3} \quad \text{SI } -2 \leq y \leq 0$$

$$f_Y(y) = -\frac{1}{12} y + \frac{1}{3} \quad \text{SI } 0 \leq y \leq 4$$

$$f_Y(y) = 0 \quad \text{SI } y \leq -2 \text{ O } y \geq 4$$

CALCULAR LA VARIANCIA, LA DESVIACION ESTANDAR Y EL COEFICIENTE DE VARIACION.

CALCULAREMOS PRIMERO EL VALOR MEDIO CUADRATICO PARA LUEGO APLICAR LA ECUACION $\sigma^2(Y) = E(Y^2) - E^2(Y)$

$$E[Y^2] = \int_{-2}^0 y^2 \left(\frac{1}{6} y + \frac{1}{3} \right) dy + \int_0^4 y^2 \left(-\frac{y}{12} + \frac{1}{3} \right) dy = \left[\frac{y^4}{24} + \frac{y^3}{9} \right]_{-2}^0 + \left[-\frac{y^4}{48} + \frac{y^3}{9} \right]_0^4 = 2$$

$$\sigma^2(Y) = 2 - (2/3)^2 = 14/9$$

$$\sigma(Y) = 1.25 \quad (\sqrt{14/9})$$

$$v(Y) = 1.25 / (2/3) = 1.88$$

DISTRIBUCIONES PARTICULARES

VARIABLES ALEATORIAS DISCRETAS

DISTRIBUCION BINOMIAL O DE BERNOULLI

LA DISTRIBUCION BINOMIAL O DE BERNOULLI SE EMPLEA COMO DENSIDAD DE PROBABILIDADES DE VARIABLES ALEATORIAS DISCRETAS ASOCIADOS A EXPERIMENTOS EN LOS QUE SOLO HAY (O SOLO IMPORTAN) DOS RESULTADOS POSIBLES, UNO DE LOS CUALES USUALMENTE SE DENOMINA "EXITO" Y, EL OTRO, "FRACASO". ($S = \{\text{éxito, fracaso}\}$)

SEAN p = PROBABILIDAD DE OBSERVAR "EXITO" AL REALIZAR UNA VEZ EL EXPERIMENTO

q = PROBABILIDAD DE "FRACASO" = $1-p$

X = VARIABLE ALEATORIA "NUMERO DE EXITOS OBSERVADOS AL REPETIR n VECES EL EXPERIMENTO "CON REEMPLAZO"

LA DISTRIBUCION DE PROBABILIDADES BINOMIAL ES

$$f(x) = \frac{n!}{x!(n-x)!} p^x q^{n-x} : x = 0, 1, \dots, n$$

SE PUEDE DEMOSTRAR QUE LOS PARAMETROS DE ESTA DISTRIBUCION SON

$$E(X) = np, \quad \sigma^2(X) = npq$$

LA ESPERANZA DE LA DISTRIBUCION DE BERNOULLI ES

$$\begin{aligned}
 E(X) &= \sum_{x=0}^n x \frac{n!}{x!(n-x)!} p^x q^{n-x} = \sum_{x=1}^n x \frac{n!}{x!(n-x)!} p^x q^{n-x} \\
 &= np \underbrace{\sum_{x=1}^n \frac{(n-1)!}{(x-1)!(n-x)!} p^{x-1} q^{n-x}}_{(p+q)^{n-1}} = np(p+q)^{n-1} = np
 \end{aligned}$$

LA VARIANCIA DE LA DISTRIBUCION BINOMIAL ES

$$\sigma^2(X) = E[(X-E(X))^2] = E[(X-np)^2]$$

$$\begin{aligned}
 \text{PERO } E[(X-np)^2] &= E(X^2 - 2npX + n^2p^2) = E[X + X(X-1) - 2npX + n^2p^2] \\
 &= E[(1-2np)X] + E[X(X-1)] + E(n^2p^2) \\
 &= (1-2np)np + n^2p^2 + \sum_{x=0}^n \frac{n!}{x!(n-x)!} p^x q^{n-x} x(x-1) \\
 &= np - n^2p^2 + \sum_{x=2}^n n(n-1) \frac{(n-2)!}{(x-2)!(n-x)!} p^2 p^{x-2} q^{n-x} \\
 &= np - n^2p^2 + n(n-1)p^2 \underbrace{\sum_{x=2}^n \frac{(n-2)!}{(x-2)!(n-x)!} p^{x-2} q^{n-x}}_{(p+q)^{n-2}} \\
 &= np - n^2p^2 + n(n-1)p^2(p+q)^{n-2} = np - np^2 = np(1-p) = npq
 \end{aligned}$$

EN RESUMEN, PARA LA DISTRIBUCION BINOMIAL,

$$E(X) = np \quad ; \quad \sigma^2(X) = npq \quad ; \quad \sigma(X) = \sqrt{npq}$$

EJEMPLO

SI SE LANZA AL AIRE SEIS VECES UNA MONEDA HOMOGENEA,

- A) ¿CUAL ES LA PROBABILIDAD DE OBTENER DOS "CARAS"?
- B) ¿CUAL ES LA PROBABILIDAD DE OBTENER POR LO MENOS CUATRO "CARAS" ($X \geq 4$)?
- C) ¿CUANTO VALEN LA ESPERANZA Y LA DESVIACION ESTANDAR?

SOLUCION

- A) PUESTO QUE LA MONEDA ES HOMOGENEA SE TIENE $p=1/2$ Y $q=1-1/2=1/2$, DONDE p ES LA PROBABILIDAD DE OBSERVAR "CARA" (CARA = EXITO) EN UN LANZAMIENTO. POR TANTO

$$P[X = 2] = f_x(2) = \frac{6!}{2!(6-2)!} \left(\frac{1}{2}\right)^2 (1/2)^{6-2} = \frac{6!}{2! 4!} (1/2)^6 = \frac{15}{64} = 0.2344$$

- B) PARA QUE SE CUMPLA $X \geq 4$ EN SEIS LANZAMIENTOS, SE NECESITA QUE SE OBSERVEN 4, 5 O 6 CARAS. PUESTO QUE ESTOS TRES EVENTOS SON MUTUAMENTE EXCLUSIVOS, SE TIENE

$$P[X \geq 4] = f_x(4) + f_x(5) + f_x(6)$$

CALCULANDO LOS TRES SUMANDOS COMO EN LA PREGUNTA ANTERIOR, RESULTA

$$\begin{aligned} P[X \geq 4] &= \frac{6!}{4! 2!} (1/2)^4 (1/2)^{6-4} + \frac{6!}{5! 1!} (1/2)^5 (1/2)^{6-5} + \frac{6!}{6! 0!} (1/2)^6 (1/2)^{6-6} \\ &= \frac{15}{64} + \frac{6}{64} + \frac{1}{64} = \frac{11}{32} = 0.3438 \end{aligned}$$

- C) $E[X] = np = 6(1/2) = 3$

$$\sigma^2[X] = npq = 6(1/2)(1/2) = 3/2, \quad \sigma(X) = \sqrt{3/2} = 1.22$$

DISTRIBUCION DE POISSON

UNA DISTRIBUCION DE PROBABILIDADES PARA UNA VARIABLE ALEATORIA DISCRETA, X , DE LA FORMA

$$f_X(x) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} ; x = 0, 1, 2, \dots$$

SE LLAMA DISTRIBUCION DE POISSON; EN ESTA ECUACION λ ES UNA CONSTANTE. SE PUEDE DEMOSTRAR QUE LA MEDIA Y LA VARIANCA PARA ESTA DISTRIBUCION QUEDAN DADAS POR

$$E(X) = \sum_{x=0}^{\infty} x \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} = \lambda$$

$$\sigma^2(X) = \sum_{x=0}^{\infty} (x-\lambda)^2 \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} = \lambda$$

ES POSIBLE DEMOSTRAR QUE LA DISTRIBUCION DE POISSON PUEDE EMPLEARSE COMO UNA PROXIMACION DE LA DE BERNOULLI, TOMANDO $\lambda = np$ CUANDO n ES GRANDE Y p PEQUEÑA, PERO DE TAL MANERA QUE $npq > 1$. AL RESPECTO, SI $n=20$ Y $p=0.05$, ENTONCES EL ERROR QUE SE TIENE AL USAR DICHA APROXIMACION ES MENOR DE 3 POR CIENTO PARA VALORES DE X MENORES DE 3; PARA $X=4$ Y $X=5$ LOS ERRORES RESPECTIVOS SON 15 Y 41 POR CIENTO, DEBIDO A QUE NO SE CUMPLE CON LA CONDICION DE QUE npq SEA MAYOR DE UNO, YA QUE $npq = 20 \times 0.05 \times 0.95 = 0.95$.

EJEMPLO

SI LA PROBABILIDAD DE QUE FALLE UNA VARILLA DE ACERO AL APLICARLE UNA DETERMINADA FUERZA DE TENSION ES DE 0.001, ¿CUAL ES LA PROBABILIDAD DE QUE DE 2000 VARILLAS PROBADAS FALLEN A) TRES, B) MAS DE DOS?

CON $\lambda = 2000 \times 0.001 = 2$ Y CONSIDERANDO QUE $npq = 19 > 1$, SE PUEDE USAR LA DISTRIBUCION DE POISSON COMO APROXIMACION DE LA BINOMIAL:

$$a) \quad P[X = 3] = \frac{\lambda^3 e^{-\lambda}}{3!}$$

$$P[X = 3] = \frac{2^3 e^{-2}}{3!} = 0.18$$

EN ESTE CASO LA DISTRIBUCION BINOMIAL DA COMO RESULTADO

$$P[X=3] = \frac{2000!}{3! \times 1997!} (0.001)^3 (0.999)^{1997} = 0.184$$

$$b) \quad P[X > 2] = 1 - P[X \leq 2] = 1 - F_X(2) = 1 - \{P[X = 0] +$$

$$+ P[X = 1] + P[X = 2]\} = 1 - \frac{2^0 e^{-2}}{0!} - \frac{2^1 e^{-2}}{1!} - \frac{2^2 e^{-2}}{2!} =$$

$$= 1 - \frac{1}{e^2} - \frac{2}{e^2} - \frac{2}{e^2} = 1 - \frac{5}{e^2} = 0.323$$

EJEMPLO

UNA COMPAÑIA ASEGURADORA DESPUES DE MUCHOS AÑOS DE EXPERIENCIA HA ESTIMADO QUE EL 0.004% DE LA POBLACION FALLECE ^{ANUALMENTE} POR ACCIDENTE AUTOMOVILISTICO. SI ESTA COMPAÑIA TIENE 40,000 ASEGURADOS, ¿CUAL ES LA PROBABILIDAD DE QUE 2 DE ELLOS MUERAN EN UN AÑO POR ESE TIPO DE ACCIDENTE?

SEA X EL NUMERO DE PERSONAS QUE MUEREN ANUALMENTE DE ENTRE LOS ASEGURADOS, POR ACCIDENTE. LA MEDIA DE X ES

$$E[X] = 0.00004 \times 40,000 = 1.6 = \lambda$$

ADEMAS, TOMANDO EN CUENTA QUE $npq > 1$, SE PUEDE USAR SIN GRAN ERROR LA DISTRIBUCION DE POISSON:

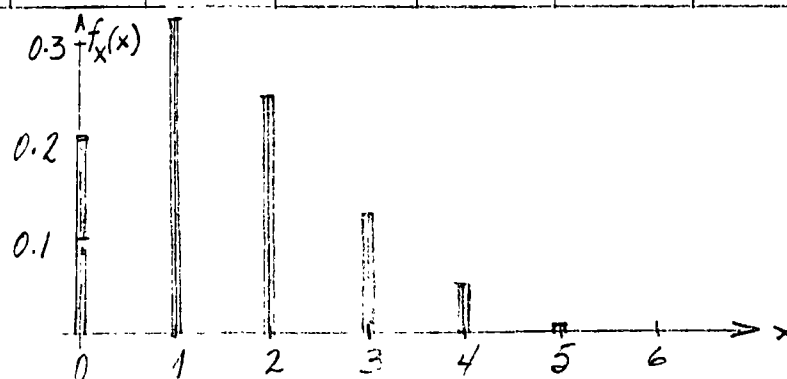
$$P[X=x] = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} = \frac{(1.6)^x e^{-1.6}}{x!}; x=0, 1, 2, \dots$$

POR LO QUE

$$P[X=2] = \frac{(1.6)^2 e^{-1.6}}{2!} = \frac{0.2019 \times 2.56}{2} = 0.26$$

LA DISTRIBUCION DE PROBABILIDADES PARA ESTA VARIABLE ALEATORIA ES:

x	0	1	2	3	4	5	6	...
$f_X(x)$	0.202	0.323	0.258	0.138	0.055	0.018	0.005	...



EJEMPLO

EN LA AMPLIACION DEL CARRIL PARA DAR VUELTA A LA IZQUIERDA EN UNA AVENIDA, SOLO HAY CAPACIDAD PARA 3 AUTOS COMO MAXIMO ESPERANDO LA FLECHA LUMINOSA DEL SEMAFORO. EN UN ESTUDIO ESTADISTICO DEL TRANSITO EN ESE LUGAR SE ENCONTRO QUE EN CADA CICLO DE LUCES DEL SEMAFORO HAY EN PROMEDIO 6 AUTOS QUE VAN A DAR VUELTA. ¿CUAL ES LA PROBABILIDAD DE QUE EN UN CICLO DEL SEMAFORO, TOMADO AL AZAR, SE CONGESTIONE EL TRANSITO POR EXCEDERSE LA CAPACIDAD DEL CARRIL?

$$P[X > 3] = ?$$

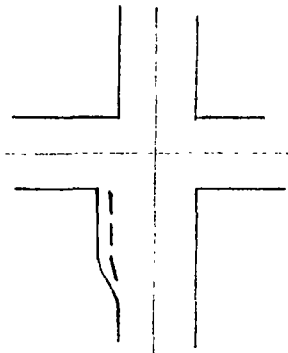
$$\text{SI } A = \{X > 3\}, \bar{A} = \{X \leq 3\}$$

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A) \text{ O } P(A) = 1 - P(\bar{A}). \text{ CON } \lambda = 6,$$

$$P(\bar{A}) = P[X \leq 3] = \sum_{x=0}^{x=3} f_X(x) = \sum_{x=0}^{x=3} \frac{e^{-6} 6^x}{x!}$$

$$P(\bar{A}) = e^{-6} \left(1 + 6 + \frac{6^2}{2} + \frac{6^3}{6} \right) = 61e^{-6} = 0.152$$

$$P[A] = P[X > 3] = 1 - 0.152 = 0.848$$



PROCESO ESTÓCÁSTICO DE POISSON

CON BASE EN LA DISTRIBUCIÓN DE POISSON SE PUEDE DEDUCIR QUE LA DISTRIBUCION DE PROBABILIDADES DEL NUMERO DE OCURRENCIAS DE UN EVENTO DURANTE UN PERIODO t QUEDA DADA POR

$$f_X(x) = P[X = x \text{ EN UN LAPSO } t]$$

$$f_X(x) = \frac{(\lambda t)^x e^{-\lambda t}}{x!} ; x = 0, 1, 2, \dots$$

DONDE

λ = NUMERO MEDIO DE OCURRENCIAS POR UNIDAD DE TIEMPO.

LA ESPERANZA Y LA VARIANCIA DE ESTE PROCESO, PARA UN LAPSO t , SON

$$E(X) = \lambda t$$

$$\sigma^2(X) = \lambda t$$

PARA QUE ESTA DISTRIBUCION SE APLIQUE SE REQUIERE QUE EL EVENTO OCURRA CADA VEZ DE MANERA INDEPENDIENTE DE LAS OCURRENCIAS PREVIAS, Y QUE λ SEA CONSTANTE. A λ SE LE CONOCE COMO INTENSIDAD DEL PROCESO; A SU RECIPROCO, $1/\lambda$ SE LE DENOMINA PERIODO DE RECURRENCIA.

100

EJEMPLO

EN UNA CENTRAL DE COMUNICACIONES SE TIENE UNA DEMANDA MEDIA DEL SERVICIO DE 8 LLAMADAS CADA MINUTO. CALCULAR LAS PROBABILIDADES DE QUE EN 2 MINUTOS NO SE SOLICITE EL SERVICIO, DE QUE SE SOLICITE SOLO UNA VEZ, Y MAS DE UNA VEZ.

$$f_X(0) = P[X=0] = \frac{(\lambda t)^0 e^{-\lambda t}}{0!} = e^{-16} = 0.00004$$

$$f_X(1) = \frac{16^1 e^{-16}}{1!} = 0.00064$$

$$P[X>1] = 1 - (0.00004 + 0.00064) = 0.99932$$

4

EJEMPLO

MEDIANTE UN ESTUDIO ESTADISTICO SOBRE LA OCURRENCIA DE MAREMOTOS EN LA COSTA MEXICANA DEL OCEANO PACIFICO SE ESTIMO QUE UNA OLA DE 4m DE ALTURA O MAYOR SOBRE EL NIVEL DE LA MAREA TIENE UN PERIODO DE RECURRENCIA DE 100 AÑOS. CALCULAR LAS PROBABILIDADES DE QUE EN LOS PROXIMOS 10, 50 Y 100 AÑOS NO OCURRA NINGUN MAREMOTO EN DICHA REGION CUYA OLA MAXIMA EXCEDE DE 4m, SUPONIENDO QUE LA OCURRENCIA DE LOS MAREMOTOS SE PUEDE MODELAR MEDIANTE UN PROCESO ESTOCASTICO DE POISSON.

LA DISTRIBUCION DE PROBABILIDADES DE LA VARIABLE ALEATORIA X =NUMERO DE MAREMOTOS CUYA OLA MAXIMA ES MAYOR DE 4m, CON $\lambda=1/100=0.01$ ES

$$f_X(x) = \frac{\lambda t e^{-\lambda t}}{x!} = \frac{0.01t e^{-0.01t}}{x!}$$

POR LO TANTO, PARA $t=10, 50$ Y 100 AÑOS, SE TIENE, RESPECTIVAMENTE, QUE:

$$a) f_X(0) = \frac{(0.01 \times 10)^0 e^{-0.01 \times 10}}{0!} = e^{-0.1} = 0.905$$

$$b) f_X(0) = \frac{(0.01 \times 50)^0 e^{-0.01 \times 50}}{0!} = e^{-0.5} = 0.607$$

$$c) f_X(0) = \frac{(0.01 \times 100)^0 e^{-0.01 \times 100}}{0!} = e^{-1} = 0.368$$

PARA ESTE MISMO PROBLEMA, LAS PROBABILIDADES DE QUE OCURRA AL MENOS UN MAREMOTO CON OLA MAXIMA MAYOR DE 4m SON, RESPECTIVAMENTE,

$$a) P[X \geq 1] = 1 - f_X(0) = 1 - 0.905 = 0.095$$

$$b) P[X \geq 1] = 1 - 0.607 = 0.393$$

$$c) P[X \geq 1] = 1 - 0.368 = 0.632$$

VARIABLES ALEATORIAS CONTINUAS

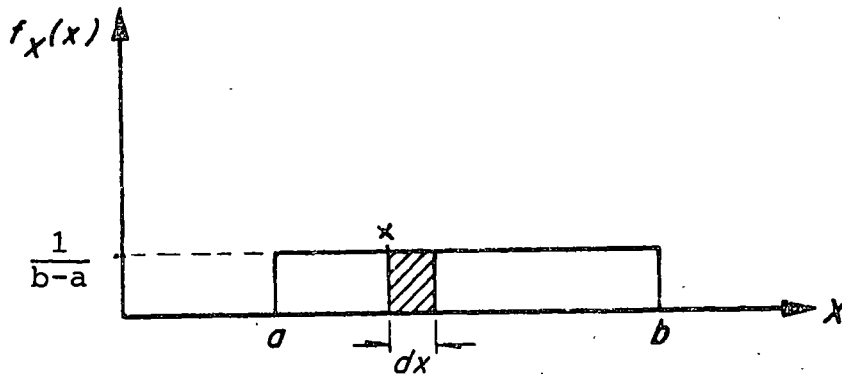
DISTRIBUCION UNIFORME

SE DICE QUE UNA VARIABLE ALEATORIA CONTINUA, X , TIENE DISTRIBUCION UNIFORME ENTRE $X = a$ Y $X = b$ ($b > a$) SI

$$f_X(x) = \text{CONSTANTE} = \frac{1}{b-a}, \quad a \leq X \leq b$$

LO QUE SIGNIFICA QUE LA PROBABILIDAD DE OBTENER UN VALOR ENTRE x Y $x + dx$ ES LA MISMA PARA CUALQUIER x COMPRENDIDA ENTRE a Y b .

LA GRAFICA DE DICHA DISTRIBUCION ES



Distribución uniforme de una variable aleatoria continua

LA ESPERANZA Y LA VARIANCIA DE LA DISTRIBUCION UNIFORME SE CALCULAN DE LA SIGUIENTE MANERA:

$$\begin{aligned}
 E[X] &= \int_a^b x \frac{1}{b-a} dx = \left[\frac{x^2}{2(b-a)} \right]_a^b = \frac{b^2 - a^2}{2(b-a)} = (b+a)/2 \\
 \sigma^2(X) &= \int_a^b (x-E[X])^2 \frac{1}{b-a} dx = \int_a^b \frac{x^2}{b-a} dx + \int_a^b \frac{(E[X])^2}{b-a} dx - \\
 &\quad - \int_a^b \frac{2xE[X]}{b-a} dx \\
 &= \left[\frac{x^3}{3(b-a)} \right]_a^b + \left[\frac{(E[X])^2}{b-a} x \right]_a^b - \left[\frac{2E[X]}{b-a} \frac{x^2}{2} \right]_a^b = \\
 &= \frac{b^3 - a^3}{3(b-a)} + (E[X])^2 - E[X](b+a) = \frac{(b-a)^2}{12}
 \end{aligned}$$

DISTRIBUCION NORMAL

UNA DE LAS DISTRIBUCIONES DE VARIABLES ALEATORIAS CONTINUAS MAS UTIL ES LA DISTRIBUCION NORMAL O DE GAUSS, DEFINIDA POR LA ECUACION

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}$$

DONDE μ ES LA MEDIA Y σ LA DESVIACION ESTANDAR DE X.

SI SE HACE LA TRANSFORMACION

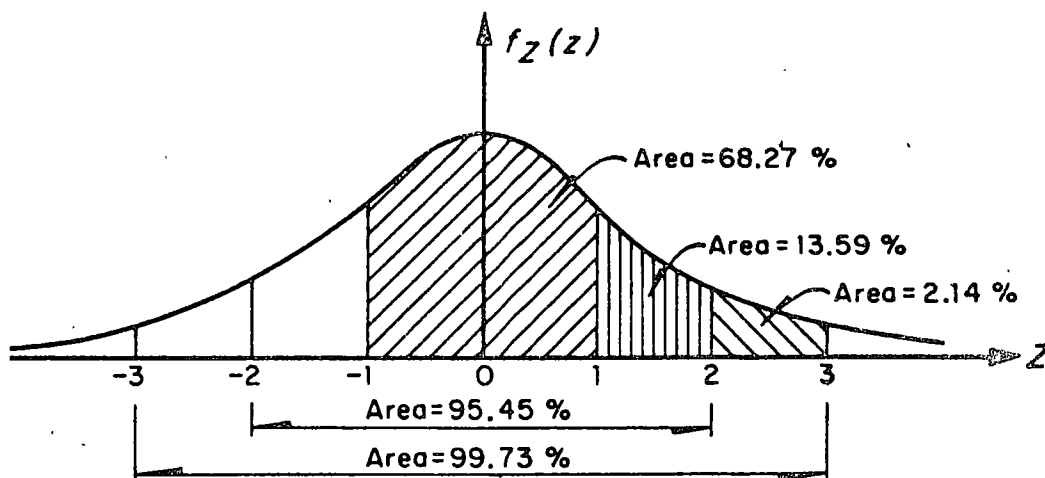
$$Z = (X-\mu)/\sigma$$

ENTONCES LA ECUACION ANTERIOR SE REDUCE A LA LLAMADA FORMA ESTANDAR, CUYA ECUACION ES

$$f_Z(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2}$$

EN ESTE CASO LA VARIABLE ALEATORIA Z TIENE DISTRIBUCION NORMAL CON MEDIA IGUAL A CERO Y VARIANCIA IGUAL A UNO.

EXISTEN TABLAS PARA CALCULAR LAS PROBABILIDADES DE UNA VARIABLE ASOCIADA A UNA DISTRIBUCION NORMAL ESTANDAR. EN LA SIGUIENTE FIGURA SE MUESTRA LA FORMA DE CAMPANA DE ESTA DISTRIBUCION, OBSERVANDOSE LA SIMETRIA RESPECTO A $Z=E(Z)=0$.



Distribución normal de una variable aleatoria continua

LA UTILIDAD DE LA DISTRIBUCION NORMAL ESTANDAR RADICA EN QUE

$$P[x_1 \leq X \leq x_2] = \int_{x_1}^{x_2} f_X(x) dx = P[z_1 \leq Z \leq z_2] = \int_{z_1}^{z_2} f_Z(z) dz$$

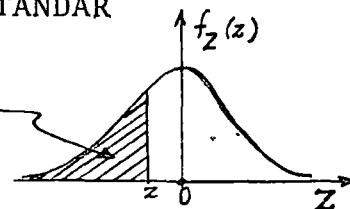
DONDE

$$z_1 = \frac{x_1 - \mu}{\sigma} \quad \text{Y} \quad z_2 = \frac{x_2 - \mu}{\sigma}$$

TABLA 3

FUNCION DE DISTRIBUCION NORMAL ESTANDAR

$$F_Z(z) = \int_{-\infty}^z \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2/2} du$$



Z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
-3.	.0013									
-2.9	.0019	.0018	.0017	.0017	.0016	.0016	.0015	.0015	.0014	.0014
-2.8	.0026	.0025	.0024	.0023	.0023	.0022	.0021	.0021	.0020	.0019
-2.7	.0035	.0034	.0033	.0032	.0031	.0030	.0029	.0028	.0027	.0026
-2.6	.0047	.0045	.0044	.0043	.0041	.0040	.0039	.0038	.0037	.0036
-2.5	.0062	.0060	.0059	.0057	.0055	.0054	.0052	.0051	.0049	.0048
-2.4	.0082	.0080	.0078	.0075	.0073	.0071	.0069	.0068	.0066	.0064
-2.3	.0107	.0104	.0102	.0099	.0096	.0094	.0091	.0089	.0087	.0084
-2.2	.0139	.0136	.0132	.0129	.0125	.0122	.0119	.0116	.0113	.0110
-2.1	.0179	.0174	.0170	.0166	.0162	.0158	.0154	.0150	.0146	.0143
-2.0	.0227	.0222	.0217	.0212	.0207	.0202	.0197	.0192	.0188	.0183
-1.9	.0287	.0281	.0274	.0268	.0262	.0256	.0250	.0244	.0239	.0233
-1.8	.0359	.0351	.0344	.0336	.0329	.0322	.0314	.0307	.0300	.0294
-1.7	.0446	.0436	.0427	.0418	.0409	.0401	.0392	.0384	.0375	.0367
-1.6	.0548	.0537	.0526	.0516	.0505	.0495	.0485	.0475	.0465	.0455
-1.5	.0668	.0655	.0643	.0630	.0618	.0606	.0594	.0582	.0571	.0559
-1.4	.0808	.0793	.0778	.0764	.0749	.0735	.0721	.0708	.0694	.0681
-1.3	.0968	.0951	.0934	.0918	.0901	.0885	.0869	.0853	.0838	.0823
-1.2	.1151	.1131	.1112	.1093	.1075	.1056	.1038	.1020	.1003	.0985
-1.1	.1357	.1335	.1314	.1292	.1271	.1251	.1230	.1210	.1190	.1170
-1.0	.1587	.1562	.1539	.1515	.1492	.1469	.1446	.1423	.1401	.1379
-0.9	.1841	.1814	.1788	.1762	.1736	.1711	.1685	.1660	.1635	.1611
-0.8	.2119	.2090	.2061	.2033	.2005	.1977	.1949	.1921	.1894	.1867
-0.7	.2420	.2389	.2358	.2326	.2297	.2266	.2236	.2206	.2177	.2148
-0.6	.2743	.2709	.2676	.2643	.2611	.2578	.2546	.2514	.2483	.2451
-0.5	.3085	.3050	.3015	.2981	.2946	.2912	.2877	.2843	.2810	.2776
-0.4	.3446	.3409	.3372	.3336	.3300	.3264	.3228	.3192	.3156	.3121
-0.3	.3821	.3783	.3745	.3707	.3669	.3632	.3594	.3557	.3520	.3483
-0.2	.4207	.4168	.4129	.4090	.4052	.4013	.3974	.3936	.3897	.3859
-0.1	.4602	.4562	.4522	.4483	.4443	.4404	.4364	.4325	.4286	.4247
-0.0	.5000	.4960	.4920	.4880	.4840	.4801	.4761	.4721	.4681	.4641

EJEMPLO

COMO RESULTADO DE UNA LARGA SERIE DE EXPERIMENTOS PROBANDO A COMPRESION SIMPLE CILINDROS DE CONCRETO, SE HA ESTIMADO QUE LA ESPERANZA DE LA RESISTENCIA ES DE 240 KG/CM^2 Y LA DESVIACION ESTANDAR DE 30 KG/CM^2 .

- A) ¿CUAL ES LA PROBABILIDAD DE QUE OTRO CILINDRO TOMADO AL AZAR RESISTA MENOS DE 240 KG/CM^2 ?
- B. ¿CUAL ES LA PROBABILIDAD DE QUE RESISTA MAS DE 330 KG/CM^2 ?
- C) ¿CUAL ES LA PROBABILIDAD DE QUE SU RESISTENCIA ESTE EN EL INTERVALO DE 210 A 240 KG/CM^2 ?

SUPONGASE QUE LA DISTRIBUCION DE PROBABILIDADES ES NORMAL.

SOLUCION

- A) PARA EMPLEAR LAS TABLAS DE DISTRIBUCION NORMAL ES NECESARIO ESTANDARIZAR LA VARIABLE X, EMPLEANDO $\mu=240$ Y $\sigma=30$, CON $x_1=240$:

$$z_1 = \frac{240 - 240}{30} = 0$$

RECURRIENDO A LA TABLA DE LA DISTRIBUCION NORMAL SE OBTIENE

$$P[X \leq 240] = P[Z \leq 0] = 0.5$$

O SEA, LA PROBABILIDAD QUE CORRESPONDE AL AREA SOMBREADA DE LA SIGUIENTE FIGURA:

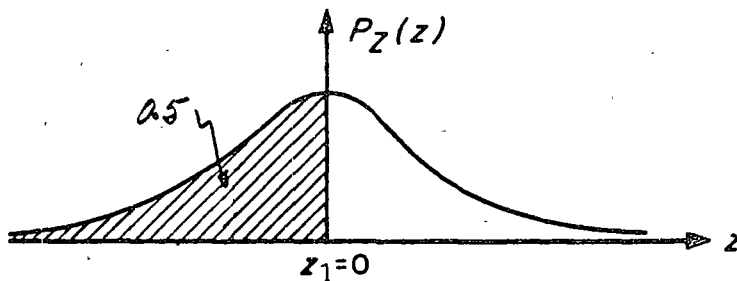


Fig 16. Distribución normal correspondiente al inciso c del ejemplo

TEOREMA CENTRAL DEL LIMITE

SEAN LAS VARIABLES ALEATORIAS X_1, X_2, \dots, X_k , ^{IDENTICAS} CON DENSIDADES DE
PROBABILIDADES (ARBITRARIAS), CUYA SUMA SE DENOTARA COMO W, ES DECIR

$$W = X_1 + X_2 + \dots + X_k$$

ES POSIBLE DEMOSTRAR EL TEOREMA DENOMINADO TEOREMA CENTRAL DEL LIMITE, CUYO ENUNCIADO INDICA QUE CONFORME AUMENTA EL NUMERO DE VARIABLES INVOLUCRADAS EN LA SUMA ANTERIOR (AL AUMENTAR k), LA DENSIDAD DE
PROBABILIDADES DE W TIENDE A SER LA DISTRIBUCION NORMAL. ADEMAS SE PUEDE DEMOSTRAR QUE SI TODAS LAS VARIABLES X_1, X_2, \dots, X_k TIENEN DISTRIBUCION NORMAL, ENTONCES, RIGUROSAMENTE, W TAMBIEN LA TIENE, INDEPENDIENTEMENTE DEL NUMERO DE VARIABLES QUE APAREZCAN EN LA SUMA.

A PARTIR DEL TEOREMA DEL LIMITE CENTRAL SE DEMUESTRA QUE LA DISTRIBUCION DE BERNOULLI SE PUEDE APROXIMAR MEDIANTE LA NORMAL CUANDO EL
NUMERO DE REPETICIONES DEL EXPERIMENTO ES GRANDE (30 O MAS), CON
LO CUAL SE LOGRA UN AHORRO CONSIDERABLE DE LABOR NUMERICA EN LA
SOLUCION DE ALGUNOS PROBLEMAS. PARA MEJORAR ESTA APROXIMACION, CONVIENE EFECTUAR UNA CORRECCION POR CONTINUIDAD, LA CUAL SE JUSTIFICA POR USAR UNA DISTRIBUCION CONTINUA EN VEZ DE UNA DISCRETA, SUMANDO O RESTANDO, SEGUN SEA EL CASO, 0.5 AL VALOR DE X QUE SE
USE. POR EJEMPLO, SI SE DESEA CUANTIFICAR LA PROBABILIDAD DE QUE DE 2000 ENSAYES SE LOGREN DE 3 A 6 EXITOS, LOS LIMITES REALES QUE SE DEBEN USAR AL APLICAR LA DISTRIBUCION CONTINUA SON $x_1=2.5$ Y $x_2=6.5$.

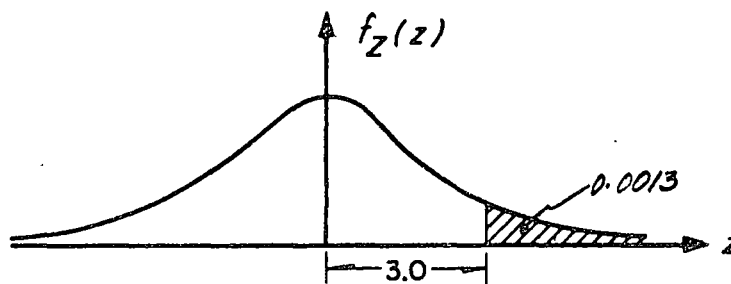
B) EL VALOR ESTANDARIZADO DE LA VARIABLE, PARA $x_1=330 \text{ KG/CM}^2$, ES

$$z_1 = \frac{330 - 240}{30} = 3$$

FOR LO QUE

$$P[X \geq 330] = P[Z \geq 3] = 1 - 0.9987 = 0.0013$$

QUE ES EL AREA SOMBREADA DE LA SIGUIENTE FIGURA:



Distribución normal correspondiente al inciso b del ejemplo

C) LOS VALORES ESTANDARIZADOS DE LA VARIABLE, PARA $x_1=210$ Y $x_2=240$ SON:

$$z_1 = \frac{210 - 240}{30} = -1$$

$$z_2 = \frac{240 - 240}{30} = 0$$

POR LO QUE

$$P[210 \leq X \leq 240] = P[-1 \leq Z \leq 0] = 0.3413$$

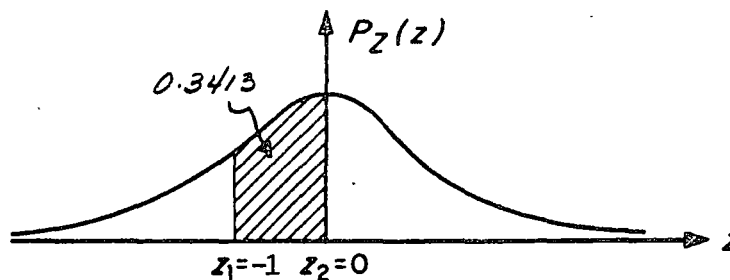


Fig 16. Distribución normal correspondiente al inciso c del ejemplo

EJEMPLO

SI LA PROBABILIDAD DE QUE FALLE UNA VARILLA DE ACERO AL APLICARLE CIERTA CARGA ES DE 0.001, DETERMINAR LA PROBABILIDAD DE QUE EN 2000 VARILLAS PROBADAS FALLEN MAS DE DOS.

USANDO LA DISTRIBUCION DE BERNOULLI SE OBTIENE

$$\begin{aligned}
 P[X > 2] &= 1 - P[X \leq 2] = 1 - (P[X = 0] + P[X = 1] + P[X = 2]) = \\
 &= 1 - \left(\frac{2\,000!}{2\,000! \, 0!} (0.001)^0 (0.999)^{2\,000} + \frac{2\,000!}{1\,999! \, 1!} (0.001)^1 (0.999)^{1\,999} + \right. \\
 &\left. + \frac{2\,000!}{1\,998! \, 2!} (0.001)^2 (0.999)^{1\,998} \right) = 0.3255
 \end{aligned}$$

LOS CALCULOS NECESARIOS PARA OBTENER LA SOLUCION SON BASTANTE MAS TEDIOSOS QUE LOS QUE DEBEN EFECTUARSE APROVECHANDO QUE EL NUMERO DE REPETICIONES DEL EXPERIMENTO ES GRANDE, A FIN DE UTILIZAR LA DISTRIBUCION NORMAL. EN ESTAS CIRCUNSTANCIAS, LA PROBABILIDAD DE QUE $X \leq 2$ EN EL CASO DISCRETO, EQUIVALE A LA DE QUE $X \leq 2.5$ EN EL CONTINUO; ASI

$$\mu = np = 2\,000 \times 0.001 = 2$$

$$\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{2\,000 \times 0.001 \times 0.999} = 1.41$$

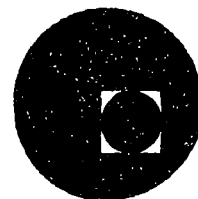
$$P[X \leq 2.5] = P\left[Z \leq \frac{2.5 - 2}{1.41}\right] = P[Z \leq 0.355] = 0.6387$$

DE DONDE

$$P[X > 2.5] = 1 - P[X \leq 2.5] = 1 - 0.6387 = 0.3613$$



centro de educación continua
división de estudios superiores
facultad de ingeniería, unam



IV CURSO INTERNACIONAL DE INGENIERIA SISMICA

SISMOLOGIA Y SISMICIDAD

NOCIONES DE PROBABILIDAD Y ESTADISTICA
(PARTE COMPLEMENTARIA)

DR. OCTAVIO A. RASCON CHAVEZ .

JULIO, 1978.

REGLAS DE CONTEO

AL ASIGNAR PROBABILIDADES A LOS EVENTOS APLICANDO LA TEORIA CLASICA ES NECESARIO CALCULAR $N(A)$ Y N PARA APLICAR LA FORMULA

$$P(A) = N(A) / N.$$

SEAN, POR EJEMPLO, LOS EVENTOS $A = \{b, c\}$ Y $B = \{a, e, i, o, u\}$ CON LOS CUALES SE FORMAN PALABRAS DE DOS LETRAS, LA PRIMERA DE A Y LA SEGUNDA DE B. EL EVENTO QUE SE FORMA ASI ES

$$C = \{xy : x \in A; y \in B\}$$

SI ENUMERAMOS LOS ELEMENTOS:

CON LA b: ba, be, bi, bo, bu	}	10 ELEMENTOS
CON LA c: ca, ce, ci, co, cu		

SIN EMBARGO, LA SOLUCION SE PUEDE OBTENER RAPIDAMENTE SIN NECESIDAD DE ENUMERAR TODAS LAS POSIBILIDADES, OBSERVANDO QUE LA PRIMERA LETRA SOLO PUEDE SER DE DOS TIPOS b o c, MIENTRAS QUE LA SEGUNDA, DE CINCO TIPOS a, e, i, o, u, POR LO QUE EL TOTAL DE ELEMENTOS ES $2 \times 5 = 10$, ES DECIR, EL EVENTO C PUEDE OCURRIR DE 10 MANERAS DISTINTAS E IGUALMENTE PROBABLES.

REGLA DE LA MULTIPLICACION

EN GENERAL, SI DOS EVENTOS, A Y B, PUEDEN OCURRIR DE $N(A)$ Y $N(B)$ MANERAS DISTINTAS, RESPECTIVAMENTE, ENTONCES EL TOTAL DE MANERAS EN QUE AMBOS PUEDEN OCURRIR, EN EL ORDEN INDICADO, ES $N(A) \times N(B)$.

ESTA REGLA SE PUEDE GENERALIZAR A MAS DE DOS EVENTOS.

EJEMPLO

¿CUANTOS NUMEROS PARES DE TRES CIFRAS SE PUEDEN FORMAR UTILIZANDO LOS DIGITOS 5,6,7,8 y 9, SIN QUE SE USE EL MISMO DIGITO EN LAS DECENAS Y LAS CENTENAS?

SOLUCION.- SEAN LOS EVENTOS

$A = \{X: X \text{ ESTA EN LAS CENTENAS}\}$

$B = \{Y: Y \text{ ESTA EN LAS DECENAS}\}$

$C = \{Z: Z \text{ ESTA EN LAS UNIDADES Y ES PAR}\}$

$D = \{XYZ: X \in A; Y \in B; Z \in C\}$

PUESTO QUE NO SE PERMITE REPETICION DE DIGITOS, $N(A)=5$ Y $N(B)=4$.

ADEMAS, PUESTO QUE EL NUMERO DEBE SER PAR, $N(C)=2$. POR LO TANTO

$$N(D) = 5 \times 4 \times 2 = 40$$

SI EL ULTIMO DIGITO NO TUVIESE QUE SER PAR: $S = \{XYZ: X \in A; Y \in B; Z \in F\}$

DONDE $F = \{Z: Z \text{ ESTA EN LAS UNIDADES}\}$

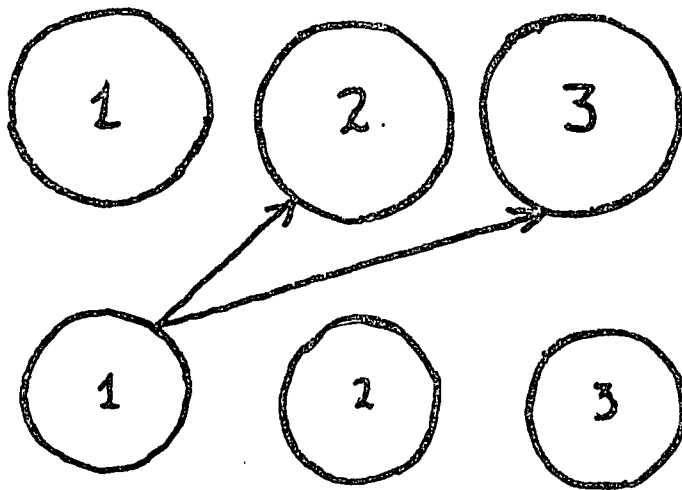
ENTONCES $N(F)=5$ Y $N(S)=5 \times 4 \times 5 = 100$.

CON ESTO, CALCULEMOS LA PROBABILIDAD DE QUE SI EL ESPACIO DE EVENTOS ES S Y SE ANOTAN TODOS LOS NUMEROS DEL MISMO EN UNA TIRA DE PAPEL, AL SACAR UNA AL AZAR DE UNA URNA, EL NUMERO SEA PAR:

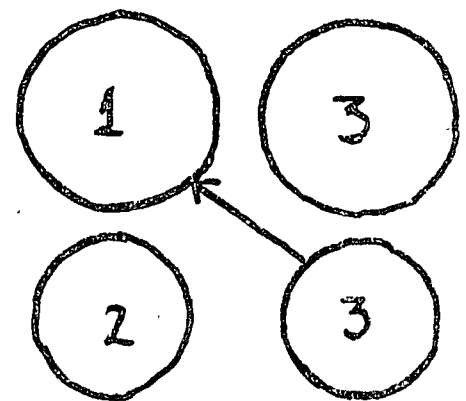
$$P(A) = \frac{N(A)}{N} = \frac{N(A)}{N(S)} = \frac{40}{100} = 0.4 = 40\%$$

EJEMPLO

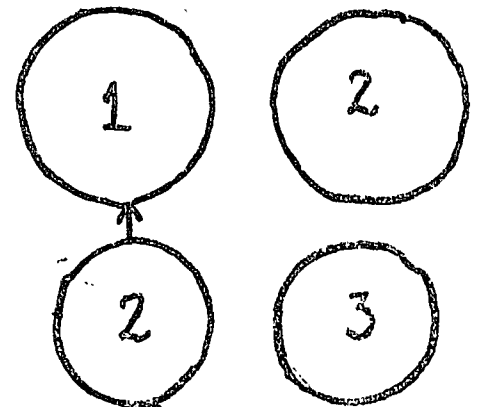
EN UNA CAJA SE TIENEN TRES PERFORACIONES NUMERADAS DEL UNO AL TRES. SI SE HECHAN EN ELLA TRES BOLAS TAMBIEN NUMERADAS DEL 1 AL 3 Y SE AGITA LA CAJA, CALCULAR LA PROBABILIDAD DE QUE NINGUNA BOLA CAIGA EN LA PERFORACION QUE TIENE SU NUMERO (EVENTO A)



2 POSIBILIDADES



1 POSIBILIDAD



1 POSIBILIDAD

$$N(A) = 2 \times 1 \times 1 = 2$$

$$N = 3 \times 2 \times 1 = 6$$

$$P(A) = \frac{N(A)}{N} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

EJEMPLO

SE DISPONE DE TRES BANDERAS: UNA BLANCA, UNA NEGRA Y UNA VERDE.

1. SI CADA PAREJA DE BANDERAS DE DISTINTO COLOR CONSTITUYE UNA SEÑAL, ¿CUANTAS SEÑALES SE PUEDEN HACER SI EL ORDEN DE COLOCACION DE LAS BANDERAS ES IMPORTANTE (EVENTO A)?

$$N(A) = 3 \times 2 = 6$$

2. SI TRES BANDERAS TAMBIEN CONSTITUYEN UNA SEÑAL CUANDO TODAS SON DE DIFERENTE COLOR ¿CUANTAS SEÑALES PODEMOS HACER CON LAS 3 BANDERAS A LA VEZ (EVENTO B)?

$$N(B) = 3 \times 2 \times 1 = 6$$

3. ¿CUANTAS SEÑALES SE PUEDEN HACER CON DOS O TRES BANDERAS EN LAS CONDICIONES ANTERIORES (EVENTOS C)? $C = A \cup B$

$$N(C) = N(A) + N(B) = 6 + 6 = 12$$

4. SI CADA SEÑAL DEL EVENTO C SE DIBUJA EN UNA TIRA DE PAPEL Y LUEGO SE COLOCAN EN UNA URNA, ¿CUAL ES LA PROBABILIDAD DE QUE SI SE TOMA UNA AL AZAR,

- A) SALGA UNA SEÑAL ESPECIFICA (EVENTO F): $(S = C)$

$$P(F) = N(F) / N(C) = 1 / 12$$

- B) SALGA UNA SEÑAL CON DOS BANDERAS POR LO MENOS (EVENTO G):

$$G = C \Rightarrow N(G) = 12 \Rightarrow P(G) = \frac{12}{12} = 1$$

- C) SALGA UNA SEÑAL CON DOS BANDERAS, UNA DE ELLAS VERDE (EVENTO H):

$$N(H) = 1 \times 2 + 2 \times 1 = 4 \Rightarrow P(H) = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

- D) SALGA UNA SEÑAL CON TRES BANDERAS, UNA DE ELLAS VERDE (EVENTO I):

$$N(I) = 1 \times 2 \times 1 + 1 \times 1 \times 2 + 2 \times 1 \times 1 = 6$$

$$P(I) = 6 / 12 = 1 / 2 = 50\%$$

E) SALGA UNA SEÑAL CON DOS O TRES BANDERAS EN QUE SE USE UNA VERDE (EVENTO J)

$$J = \text{HUI} \Rightarrow N(J) = N(H) + N(I) = 4 + 6 = 10$$

$$P(J) = 10/12 = 5/6$$

PERMUTACIONES

EL ARREGLO DE N OBJETOS EN CIERTO ORDEN SE DENOMINA PERMUTACION.
 POR EJEMPLO, TODAS LAS PERMUTACIONES QUE PUEDEN HACERSE CON LAS
 LETRAS A,B,C SON: ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA. EL TOTAL ES
 $3 \times 2 \times 1 = 6$ PERMUTACIONES (N=3).

EN GENERAL, EL NUMERO DE PERMUTACIONES ES $N(N-1)(N-2)(N-3) \times \dots \times 1 = N!$

EJEMPLO

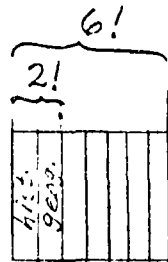
¿CUANTAS PERMUTACIONES SE PUEDEN HACER CON 5 OBJETOS?

$$5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$$

EJEMPLO

EN UN LIBRERO SE COLOCARAN AL AZAR 7 LIBROS. CALCULEMOS LA PRO-
 BABILIDAD DE QUE EL DE HISTORIA Y EL DE GEOGRAFIA QUEDEN JUNTOS
 (EVENTO A).

$$P(A) = N(A) / N$$



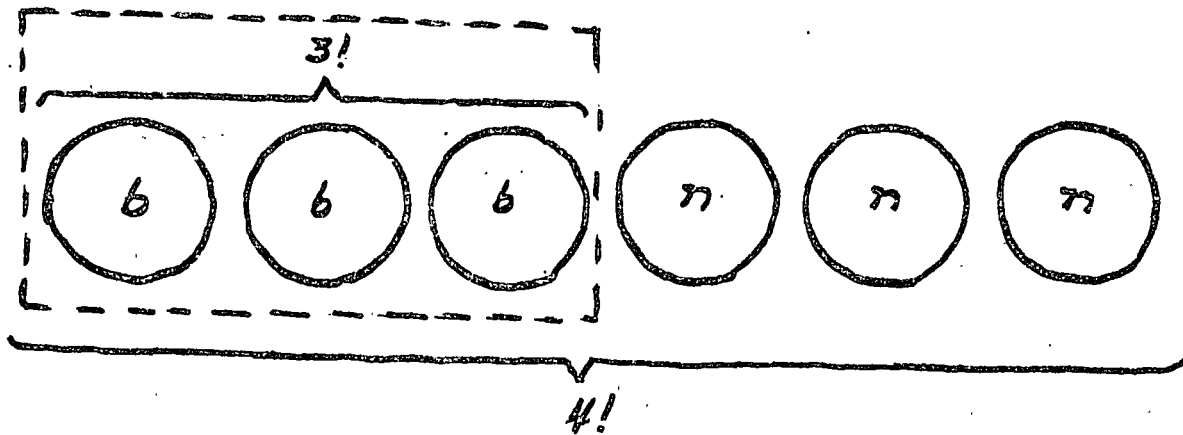
$$N = 7! = 7 \times (6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1) = 7 \times 6!$$

$$N(A) = 2! \times 6! ; P(A) = \frac{2! \times 6!}{7!} = \frac{2! \times 6!}{7 \times 6!} = \frac{2}{7}$$

EJEMPLO

EN UNA URNA SE TIENEN 6 ESFERAS, DE LAS CUALES 3 SON BLANCAS Y 3 SON NEGRAS. SI LAS SEIS SE EXTRAEN AL AZAR, UNA TRAS OTRA, SIN REMPLAZO LA PROBABILIDAD DE QUE LAS 3 BLANCAS SALGAN EN FORMA CONSECUTIVA

(EVENTO F) ES:



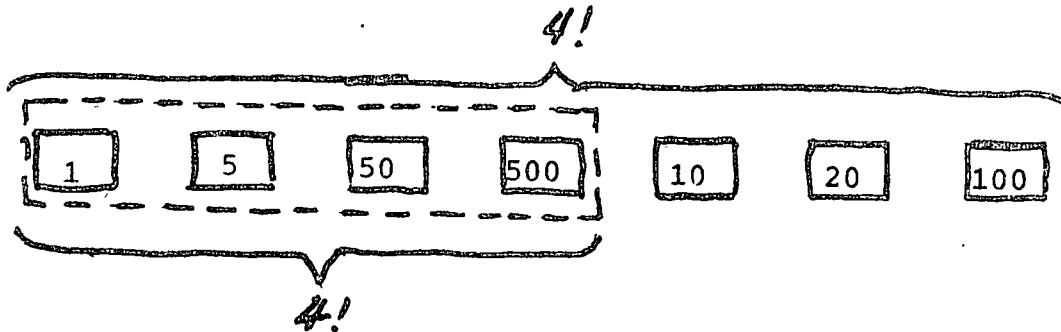
$$N(F) = 3! \times 4! ; N = 6!$$

$$P(F) = N(F)/N = \frac{3! \times 4!}{6!} = \frac{3! \times 4!}{6 \times 5 \times 4!}$$

$$P(F) = \frac{3 \times 2 \times 1}{6 \times 5} = \frac{1}{5}$$

EJEMPLO

EN UNA URNA SE TIENEN 7 SOBRES IDENTICOS Y CADA UNO CONTIENE UN BILLETE DE DIFERENTE DENOMINACION (1,5,10,20,50,100 y 500 PESOS).
 ¿CUAL ES LA PROBABILIDAD DE 1,5,50 y 500 PESOS SALGAN CONSECUTIVAMENTE EN CUALQUIER ORDEN, SI SE SACAN LOS SIETE AL AZAR, UNO TRAS OTRO (EVENTO A)?.



$$N(A) = 4! \times 4!; N=7!$$

$$P(A) = \frac{4! \times 4!}{7!} = \frac{4! \times 4!}{7 \times 6 \times 5 \times 4!} = \frac{4 \times 3 \times 2 \times 1}{7 \times 6 \times 5} = \frac{4}{35}$$

PERMUTACIONES PARCIALES

EL NUMERO DE MANERAS EN QUE SE PUEDEN ORDENAR N OBJETOS TOMANDO DE r EN r ES:

$${}^N P_r = \frac{N!}{(N-r)!}$$

ESTO ES EQUIVALENTE A DECIR QUE ${}^N P_r$ ES EL NUMERO DE DIFERENTES MANERAS EN QUE r OBJETOS PUEDEN SER SELECCIONADOS DE N OBJETOS ($r \leq N$) SIN REEMPLAZAR NINGUNO DE ELLOS AL LOTE ANTES DE SACAR EL SIGUIENTE.

OBSERVESE QUE SI $r=N$:

$${}^N P_N = \frac{N!}{(N-N)!} = \frac{N!}{0!} = N!$$

EJEMPLO

SI SE TIENEN LAS LETRAS A,B,C,D, EL NUMERO DE MANERAS EN QUE SE PUEDEN ORDENAR TOMANDO DE 2 EN 2 ES

$${}^4 P_2 = \frac{4!}{(4-2)!} = \frac{4 \times 3 \times 2!}{2!} = 12$$

EL CONJUNTO DE ESTAS POSIBILIDADES ES:

$$S = \{AB, AC, AD, BA, BC, BD, CA, CB, CD, DA, DB, DC\}$$

OBSERVESE QUE CUANDO EL ORDEN ES IMPORTANTE, AC NO ES LO MISMO QUE CA, ETC.

COMBINACIONES

CUANDO EL ORDEN NO ES IMPORTANTE, ES DECIR, SI EL AGRUPAMIENTO
 GA ES EL MISMO QUE EL AC, A LOS AGRUPAMIENTOS SE LES DENOMINA
COMBINACIONES. POR EJEMPLO, SI SE FORMARA UNA COMISION DE 2 INDI-
 VIDUOS DE UN GRUPO DE 8 TOMANDO SUS NOMBRES AL AZAR DE UNA URNA,
 Y DESEAMOS SABER CUANTOS COMITES DE 2 MIEMBROS PODRIAN FORMARSE
 COMO RESULTADO DEL PROCESO, ENTONCES LOS RESULTADOS (PEDRO, JOSE)
 Y (JOSE, PEDRO) CONSTITUIRIAN EL MISMO COMITE, ES DECIR, NO IMPOR-
 TARIA EN QUE ORDEN SE SACARAN SUS NOMBRES DE LA URNA.

ASI, SE PUEDE DEMOSTRAR QUE EL NUMERO DE COMBINACIONES POSIBLES
 DE FORMAR DE N OBJETOS TOMANDO DE r EN r ES:

$${}^N C_r = \binom{N}{r} = \frac{N!}{(N-r)!r!}$$

ESTO EQUIVALE A DECIR QUE ${}^N C_r$ ES EL NUMERO DE MANERAS DISTINTAS EN
 QUE r OBJETOS PUEDEN SELECCIONARSE DE N ($r \leq N$) SIN REEMPLAZO Y SIN IM-
 PORTAR EL ORDEN EN QUE APAREZCAN.

CUANDO UNO SE ENFRENTA A UN PROBLEMA QUE IMPLICA LA REPETICIÓN DE UN EXPE-
 RIMENTO, ES NECESARIO DETERMINAR SI HAY O NO REEMPLAZO DE LAS OBSER-
 BACIONES. POR EJEMPLO, EL REPETIR EL LANZAMIENTO DE UN DADO Y OB-
 SERVIR CADA VEZ EL NUMERO QUE QUEDA HACIA ARRIBA LLEVA IMPLICITO
 QUE HAY REEMPLAZO.

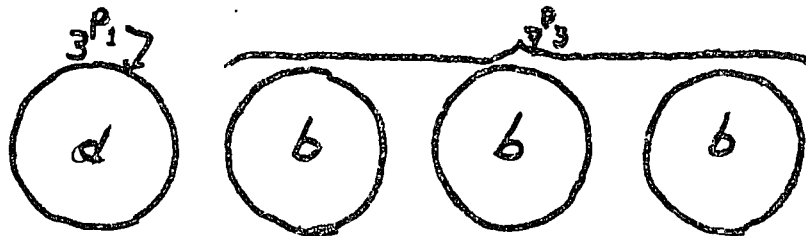
EJEMPLO

UNA CAJA CONTIENE 10 FOCOS, DE LOS CUALES 3 SON DEFECTUOSOS. SI SELECCIONAMOS 4 AL AZAR SIN REEMPLAZO

- A) ¿CUANTOS SON LOS RESULTADOS POSIBLES, ES DECIR, CUANTOS ELEMENTOS TIENE EL ESPACIO DE EVENTOS?

$$N(S) = {}_{10}P_4 = \frac{10!}{(10-4)!} = 10 \times 9 \times 8 \times 7 = 5040$$

- B) ¿CUANTOS ELEMENTOS DE S TIENEN COMO PRIMER RESULTADO UN FOCO DEFECTUOSO Y TRES FOCOS BUENOS EN LOS OTROS TRES?

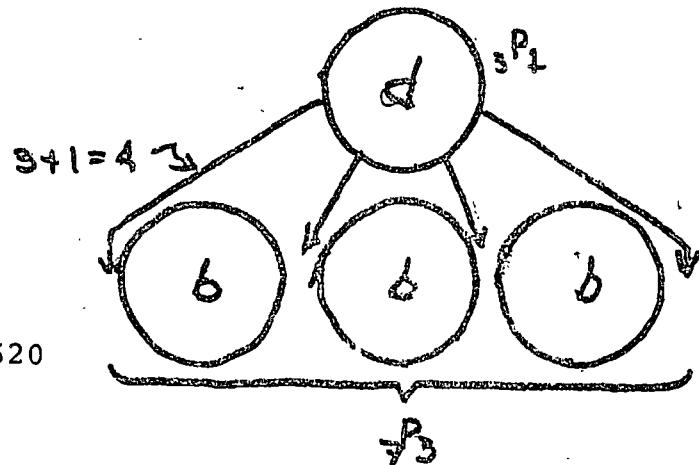


$$N(A) = {}_3P_1 \times {}_7P_3 = \frac{3!}{(3-1)!} \times \frac{7!}{(7-3)!} = \frac{3!}{2!} \times \frac{7!}{4!}$$

$$N(A) = 3 \times (7 \times 6 \times 5) = 630$$

$$\Rightarrow P(A) = 630/5040 = 63/504$$

- C) ¿CUANTOS ELEMENTOS DE S TIENEN UN FOCO DEFECTUOSO Y 3 BUENOS?



$$N(B) = 4 \times {}_3P_1 \times {}_7P_3 = 4 \times 630 = 2520$$

$$\Rightarrow P(B) = \frac{2520}{5040} = \frac{1}{2}$$

PERMUTACIONES DE GRUPOS DE OBJETOS

"EL NUMERO DE PERMUTACIONES POSIBLES DE N OBJETOS DE LOS CUALES SE TIENEN N_1 , IGUALES ENTRE SI EN EL PRIMER GRUPO, N_2 IGUALES ENTRE SI EN EL SEGUNDO GRUPO, ETC, HASTA N_K IGUALES EN EL K-ESIMO GRUPO (LOS GRUPOS SON DISTINGUIBLES ENTRE SI), DE MANERA QUE $N_1 + N_2 + \dots + N_K = N$ QUEDA DADO POR LA FORMULA:

$${}^N P_{N_1, N_2, \dots, N_K} = \frac{N!}{N_1! N_2! \dots N_K!}$$

EJEMPLO

EN EL INCISO C DEL EJEMPLO ANTERIOR SE TIENEN DOS GRUPOS EN LA MUESTRA, EL DE DEFECTUOSOS CON UN SOLO ELEMENTO, ES DECIR $N_1=1$, Y EL DE BUENOS, CON TRES ELEMENTOS, $N_2=3$, QUE SE PERMUTAN POR GRUPO DE ${}^4 P_{1,3} = \frac{4!}{1!3!} = 4$ MANERAS DISTINTAS.

EJEMPLO

ENUMERE LAS PERMUTACIONES QUE SE PUEDEN HACER CON DOS GRUPOS DE BOLAS, 2 NEGRAS Y 2 BLANCAS.

b b n n

$n_1 = 2$

b n b n

b n n b

$n_2 = 2$

n b b n

n n b b

${}^4 P_{2,2} = \frac{4!}{2!2!} = 6$

n b n b

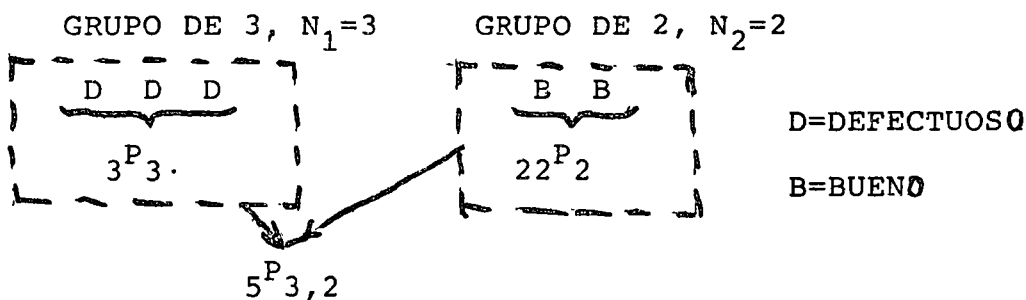
EJEMPLO

UNA CAJA CONTIENE 25 TRANSISTORES DE LAS CUALES 3 SON EFECTUOSOS.
¿CUAL ES LA PROBABILIDAD DE QUE, SI SE EXTRAEN 5 AL AZAR SIN
REEMPLAZO,

- A) SE OBTENGAN LOS 3 DEFECTUOSOS
B) SE OBTENGAN SOLO 2 DEFECTUOSOS
C) SE OBTENGA SOLO 1 DEFECTUOSO
D) NO SE OBTENGA NINGUNO DEFECTUOSO?

SOLUCION:

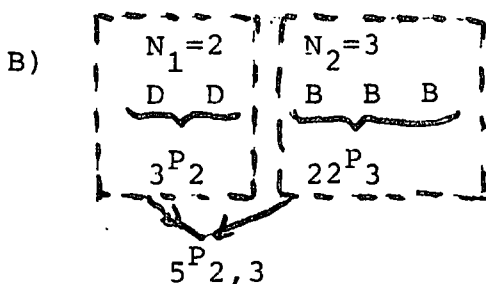
$$A) N(S) = 25^P_5 = \frac{25!}{(25-5)!} = \frac{25!}{20!}$$



$$N(A) = 3^P_3 \cdot 22^P_2 \cdot 5^P_{3,2} = 3! \cdot \frac{22!}{(22-2)!} \cdot \frac{5!}{3! \cdot 2!}$$

$$N(A) = 60 \frac{22!}{20!}$$

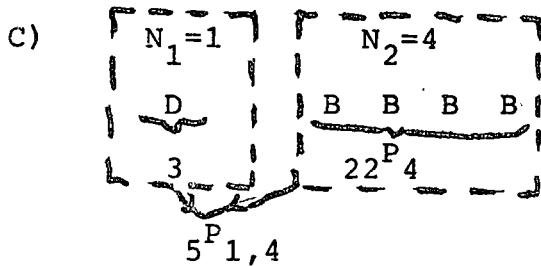
$$P(A) = \frac{60 \frac{22!}{20!}}{\frac{25!}{20!}} = 60 \frac{22!}{25!} = \frac{60}{13800}$$



$$N(B) = 3^P_2 \times 22^P_3 \times 5^P_{2,3} = \frac{3!}{(3-2)!} \frac{22!}{(22-3)!} \frac{5!}{2! \times 3!}$$

$$N(B) = 3! \frac{22!}{19!} \frac{5 \times 4}{2} = 60 \frac{22!}{19!}$$

$$P(B) = \frac{60 \frac{22!}{19!}}{\frac{25!}{20!}} = 60 \frac{22!}{25!} \frac{20 \times 19!}{19!} = \frac{1200}{13800}$$

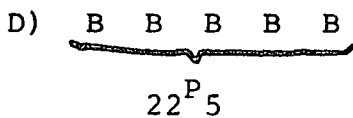


$$N(C) = 3 \times 22^P_4 \times 5^P_{1,4}$$

$$N(C) = 3 \frac{22!}{(22-4)!} \times \frac{5!}{1! \times 4!}$$

$$N(C) = 3 \frac{22!}{18!} \frac{5 \times 4!}{1 \times 4!} = 15 \frac{22!}{18!}$$

$$P(C) = \frac{15 \frac{22!}{18!}}{\frac{25!}{20!}} = \frac{15 \times 20 \times 19 \times 18!}{\frac{25!}{22!} \times 18!} = \frac{5700}{13800}$$



$$N(D) = 22^P_5 = \frac{22!}{(22-5)!} = \frac{22!}{17!}$$

$$P(D) = \frac{22!/17!}{\frac{25!}{20!}} = \frac{20 \times 19 \times 18 \times 17!}{\frac{25!}{20!} \times 17!}$$

$$P(D) = 6840/13800$$

OBSERVESE QUE EN ESTE EJEMPLO HEMOS CALCULADO LAS PROBABILIDADES DE TODOS LOS ELEMENTOS DEL ESPACIO DE EVENTOS CORRESPONDIENTE AL "NUMERO DE DEFECTUOSOS QUE SE PUEDEN OBSERVAR EN UNA SELECCION AL AZAR DE 5 ELEMENTOS", EN LA CUAL SOLO SE PUEDEN TENER 0, 1, 2, Ó 3 DEFECTUOSOS, ES DECIR,

$$S = \{0, 1, 2, 3\}$$

VERIFIQUEMOS QUE, EN EFECTO, $P(S) = 1$:

$$P(S) = P(\{0\}) + P(\{1\}) + P(\{2\}) + P(\{3\})$$

$$= \frac{6840}{13800} + \frac{5700}{13800} + \frac{1200}{13800} + \frac{60}{13800}$$

$$= \frac{13800}{13800} = 1$$

PROBABILIDAD CONDICIONAL

LA PROBABILIDAD CONDICIONAL, $P(A|B)$, DEL EVENTO A, DADO QUE EL B HA OCURRIDO SE CALCULA CON LA FORMULA

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad ; \quad P(B) > 0 \quad (1)$$

EVENTOS INDEPENDIENTES

SI DOS EVENTOS, A Y B, SON INDEPENDIENTES, LA PROBABILIDAD DE A NO SE ALTERA SI OCURRE EL EVENTO B; ES DECIR, DOS EVENTOS SON INDEPENDIENTES SI

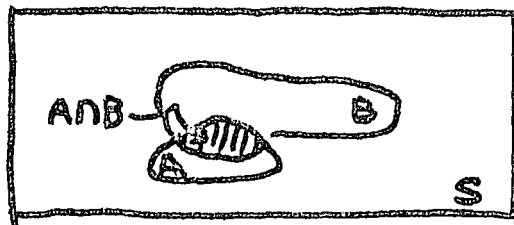
$$P(A|B) = P(A)$$

EN TAL CASO, DE LA ECUACION 1 :

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B) \quad (1')$$

PUESTO QUE $P(A \cap B) = N(A \cap B) / N(S)$ Y $P(B) = N(B) / N(S)$ LA ECUACION 1 SE PUEDE ESCRIBIR COMO

$$P(A|B) = \frac{\frac{N(A \cap B)}{N(S)}}{\frac{N(B)}{N(S)}} = \frac{N(A \cap B)}{N(B)} \quad (2)$$



EL TRABAJAR CON LA ECUACION 2 EQUIVALE A EMPLEAR UN ESPACIO DE EVENTOS REDUCIDO DE S A B.

EJEMPLO

EN UNA URNA HAY 10 TRANSISTORES BUENOS Y 10 DEFECTUOSOS. ¿CUAL ES LA PROBABILIDAD DE SACAR UNO BUENO Y UNO DEFECTUOSO (EN CUALQUIER ORDEN) AL REALIZAR DOS EXTRACCIONES AL AZAR, SI HAY REEMPLAZO DEL PRIMER TRANSISTOR OBSERVADO?

HAY VARIAS FORMAS DE RESOLVER ESTE PROBLEMA:

1. PUESTO QUE EL NUMERO DE DEFECTUOSOS ES IGUAL AL DE BUENOS, SE PUEDE FORMULAR EL SIGUIENTE ESPACIO DE EVENTOS, EN EL QUE TODOS LOS ELEMENTOS SON IGUALMENTE PROBABLES:

$$S = \{(d,d), (d,b), (b,b), (b,d)\}$$

EL EVENTO DE INTERES ES:

$$A = \{(d,b), (b,d)\}$$

$$\text{POR LO QUE } N(S) = 4, N(A) = 2$$

$$\text{Y } P(A) = 2/4 = 1/2$$

2. HAY 10 x 10 MANERAS DISTINTAS DE QUE SALGA PRIMERO EL BUENO Y LUEGO EL DEFECTUOSO, Y OTRAS TANTAS DE QUE OCURRA DE MANERA INVERSA. POR LO TANTO:

$$N(A) = (10 \times 10) \times 2 = 200$$

$$N(S) = 20 \times 20 = 400$$

$$P(A) = 200/400 = 1/2$$

3. SEAN LOS EVENTOS

$$B = \{\text{SALE PRIMERO EL BUENO Y LUEGO EL DEFECTUOSO}\} = \{(c,d)\}$$

$$F = \{\text{SALE PRIMERO EL DEFECTUOSO Y LUEGO EL BUENO}\} = \{(c,b)\}$$

$$D = \{\text{SALE PRIMERO EL BUENO}\}$$

$$E = \{\text{SALE SEGUNDO EL DEFECTUOSO}\}$$

$$O = \{\text{SALE PRIMERO EL DEFECTUOSO}\}$$

$$R = \{\text{SALE SEGUNDO EL BUENO}\}$$

POR LO TANTO, AL REALIZAR LAS DOS EXTRACCIONES CONSECUTIVAMENTE:

$$B = D \cap E \quad \text{Y} \quad F = O \cap R$$

SI $A = \{\text{SALE UNO BUENO Y UNO MALO}\} = B \cup F$

SE TIENE QUE $P(A) = P(B) + P(F)$

YA QUE B Y F SON MUTUAMENTE EXCLUSIVOS, Y

$$P(B) = P(D \cap E) = \frac{10}{20} \times \frac{10}{20} = \frac{100}{400} = \frac{1}{4}$$

$$P(F) = P(O \cap R) = \frac{10}{20} \times \frac{10}{20} = \frac{1}{4}$$

YA QUE D Y E, Y O Y R SON INDEPENDIENTES. ESTO CONDUCE A

$$P(A) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

RESOLVAMOS AHORA ESTE PROBLEMA SI NO HAY REEMPLAZO:

$$P(D \cap E) = P(E|D)P(D) = \frac{10}{19} \times \frac{10}{20} = \frac{10}{38}, \text{ YA QUE}$$

$$P(D) = 10/20, P(E|D) = 10/19 \text{ ANALOGAMENTE, } P(F) = \frac{10}{38},$$

$$\text{POR LO QUE } P(A) = \frac{10}{38} + \frac{10}{38} = \frac{10}{19}.$$

INDEPENDENCIA DE UN GRUPO DE EVENTOS

EN GENERAL, LOS EVENTOS A_1, A_2, \dots, A_M

SON INDEPENDIENTES SI, Y SOLO SI,

$$P(A_{K_1} \cap A_{K_2} \cap \dots \cap A_{K_R}) = P(A_{K_1}) \times P(A_{K_2}) \times \dots \times P(A_{K_R})$$

PARA CUALQUIER GRUPO DE ENTEROS K_1, K_2, \dots, K_R , CON $K_R \leq M$ (TODAS LAS PAREJAS, TERCIAS, ETC, DE EVENTOS POSIBLES DE FORMARSE DEBEN SER INDEPENDIENTES).

DICHO DE OTRA MANERA, LOS EVENTOS A_1, A_2, \dots, A_M SON INDEPENDIENTES SI LOS ELEMENTOS DE TODOS LOS SUBCONJUNTOS POSIBLES DE $R = \{A_1, A_2, \dots, A_M\}$ SON INDEPENDIENTES.

EJEMPLO

SI $M=3$, A_1 , A_2 Y A_3 SON INDEPENDIENTES SI, Y SOLO SI,

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1)P(A_2)$$

$$P(A_1 \cap A_3) = P(A_1)P(A_3)$$

$$P(A_2 \cap A_3) = P(A_2)P(A_3)$$

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1)P(A_2)P(A_3)$$

TODAS LAS COMBINACIONES QUE PUE-
DAN FORMARSE CON DOS EVENTOS:

$\{A_1, A_2\}, \{A_1, A_3\}, \{A_2, A_3\}$

SI $M=4$, PARA QUE A_1, A_2, A_3 Y A_4 SEAN INDEPENDIENTES SE REQUIERE QUE SE CUMPLA QUE

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) = P(A_1)P(A_2)P(A_3)P(A_4)$$

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1)P(A_2)P(A_3)$$

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_4) = P(A_1)P(A_2)P(A_4)$$

$$P(A_2 \cap A_3 \cap A_4) = P(A_2)P(A_3)P(A_4)$$

$$P(A_1 \cap A_3 \cap A_4) = P(A_1)P(A_3)P(A_4)$$

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1)P(A_2)$$

$$P(A_1 \cap A_3) = P(A_1)P(A_3)$$

$$P(A_1 \cap A_4) = P(A_1)P(A_4)$$

$$P(A_2 \cap A_3) = P(A_2)P(A_3)$$

$$P(A_2 \cap A_4) = P(A_2)P(A_4)$$

$$P(A_3 \cap A_4) = P(A_3)P(A_4)$$

TODAS LAS COMBINACIONES DE
TRES EVENTOS QUE PUE-
DAN FORMARSE = $4^C_3 = \frac{4!}{3!1!} = 4$

TODAS LAS COMBINACIONES DE
DOS EVENTOS QUE PUE-
DAN FORMARSE = $4^C_2 = \frac{4!}{2!2!} = 6$

EJEMPLO

EN UN ESTUDIO SOCIOLOGICO SE INTERROGARON 1200 PERSONAS DE UNA COLONIA RESIDENCIAL, Y SE OBTUVIERON LOS SIGUIENTES DATOS:

GUSTO POR LA MUSICA CLASICA	TITULO UNIVERSITARIO		SIN TITULO UNIVERSITARIO		Σ
	VARONES	DAMAS	VARONES	DAMAS	
ALTO	100	50	200	250	600
BAJO	150	100	150	200	600
Σ	250	150	350	450	1200

SI $A = \{\text{VARON}\}$, $B = \{\text{CON TITULO}\}$
 $C = \{\text{GUSTO ALTO}\}$

¿CUAL ES LA PROBABILIDAD DE QUE SI SE SELECCIONA UN CIUDADANO AL AZAR DE LA MISMA COLONIA, ESTE SEA VARON, TENGA TITULO Y GUSTO ALTO POR LA MUSICA?

POR EL METODO FRECUENCIAL:

$$\text{NUMERO DE VARONES} = 250 + 350 = 600$$

$$\text{NUMERO DE PERSONAS CON TITULO} = 250 + 150 = 400$$

$$\text{NUMERO DE PERSONAS CON ALTO GUSTO POR LA MUSICA CLASICA} = 600$$

POR LO TANTO

$$P(A) = 600/1200 = 1/2, P(B) = 400/1200 = \frac{1}{3}$$

Y $P(C) = 600/1200 = 1/2$. PUESTO QUE

$D = A \cap B \cap C$ Y A, B Y C SON INDEPENDIENTES, SE TIENE QUE

$$P(D) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{12}$$

DE OTRA MANERA: $P(D) = 100/1200 = 1/12$

LEY GENERAL DE MULTIPLICACION

DE LA ECUACION (1):

$$P(A \cap B) = P(A|B)P(B)$$

ESTA ECUACION SE PUEDE GENERALIZAR A MAS DE DOS EVENTOS ASI:

$$P(E_1 \cap E_2 \cap \dots \cap E_k) = P(E_1)P(E_2|E_1) \dots P(E_k|E_1, E_2, \dots, E_{k-1}) \quad (3)$$

POR EJEMPLO, SI $k=4$

$$P(E_1 \cap E_2 \cap E_3 \cap E_4) = P(E_1)P(E_2|E_1)P(E_3|E_1, E_2) \times \\ \times P(E_4|E_1, E_2, E_3)$$

EJEMPLO

¿CUAL ES LA PROBABILIDAD DE QUE AL EXTRAER SIN REEMPLAZO CUATRO CARTAS AL AZAR DE UN PAQUETE DE 52, LAS DOS PRIMERAS SEAN DIAMANTES Y LAS DOS ULTIMAS SEAN CORAZONES (EVENTO E)?

SEAN $A = \{\text{LA 1a. ES DIAMANTE}\}$, $B = \{\text{LA 2a. ES DIAMANTE}\}$,
 $C = \{\text{LA 3a. ES CORAZON}\}$, $D = \{\text{LA 4a. ES CORAZON}\}$.

EN TAL CASO

$$E = A \cap B \cap C \cap D = \{(d, d, c, c)\}$$

$$P(A) = 13/52, P(B|A) = 12/51, P(C|A, B) = 13/50$$

$$P(D|A, B, C) = 12/49$$

APLICANDO LA ECUACION 3 SE OBTIENE

$$P(E) = \frac{13}{52} \frac{12}{51} \frac{13}{50} \frac{12}{49} = \frac{78}{20825}$$

SI LOS EVENTOS E_i QUE APARECEN EN LA ECUACION (3) SON INDEPENDIENTES, ENTONCES

$$P(E_1 \cap E_2 \cap \dots \cap E_k) = P(E_1) \times P(E_2) \times \dots \times P(E_k)$$

QUE ES LA LEY GENERAL DE MULTIPLICACION

EJEMPLO

SE TIENEN EN UNA URNA TRES BOLAS BLANCAS Y TRES NEGRAS. ¿CUAL ES LA PROBABILIDAD DE QUE APAREZCAN LAS TRES BLANCAS AL PRINCIPIO SI SE EXTRAEN SIN REEMPLAZO SUCESIVAMENTE LAS SEIS?

$$1. \quad \overbrace{\underbrace{b \ b \ b}_{3!} \ \underbrace{n \ n \ n}_{3!}}^{6!}$$

CON PERMUTACIONES:

$$N(A) = 3! \times 3!$$

$$N(S) = 6!$$

$$P(A) = 3! \ 3! / 6! = 1/20$$

$$2. \quad \boxed{b \ b \ b} \ n \ n \ n.$$

CON PERMUTACIONES POR GRUPOS:

$$N(A) = 1$$

$$N(S) = 6^{P_{3,3}} = \frac{6!}{3!3!} = 20$$

$$P(A) = 1/20$$

$$3. \quad \begin{array}{ccccccc} & & & & b & b & b & \underbrace{n \ n \ n} \\ & & & & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \text{PROBABILIDADES:} & & & & \frac{1}{2} & \frac{2}{5} & \frac{1}{4} & 1 \end{array}$$

CON PROBABILIDADES CONDICIONALES:

$$P(A) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{20}$$

AHORA, ¿CUAL ES LA PROBABILIDAD DE QUE LAS TRES BLANCAS APAREZCAN CONSECUTIVAMENTE?

1. $\overbrace{b \ b \ b \ n \ n \ n}^{6!}$
 $\underbrace{b \ b \ b}_{3!} \ \underbrace{n \ n \ n}_{4!}$

CON PERMUTACIONES:

$$P(A) = \frac{3!4!}{6!} = \frac{1}{5}$$

2. $\boxed{b \ b \ b} \ n \ n \ n$

CON PERMUTACIONES POR GRUPOS:

$$N(A) = 4P_{1,3} = \frac{4!}{1!3!} = 4, \quad N(S) = 6P_{3,3} = \frac{6!}{3!3!} = 20$$

$$P(A) = 4/20 = 1/5$$

3. $\begin{array}{ccccccc} & b & b & b & n & n & n \\ & \uparrow & \uparrow & \uparrow & & & \\ \text{PROBABILIDADES:} & \frac{1}{2} & \frac{2}{5} & \frac{1}{4} & & & 1 \end{array}$

CON PROBABILIDADES CONDICIONALES:

$$P(A) = \left(\frac{1}{2} \times \frac{2}{5} \times \frac{1}{4}\right) 4P_{1,3} = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}$$

EJEMPLO

DE UN LOTE DE 100 EJES DE RELOJERIA SE EXTRAEN CUATRO AL AZAR SIN REEMPLAZO, ¿CUAL ES LA PROBABILIDAD DE QUE APAREZCAN DOS DEFECTUOSOS (EVENTO A) SI EN EL LOTE HAY 20 POR CIENTO DE DEFECTUOSOS?

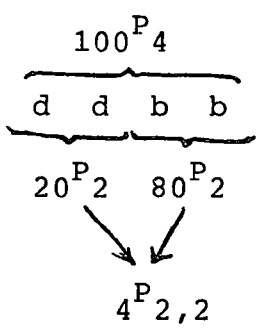
1.

$$\begin{array}{cccc}
 & \overbrace{4P_{2,2} = 6} & & \\
 & d & d & b & b \\
 & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\
 \text{PROBABILIDADES:} & \frac{20}{100} & \frac{19}{99} & \frac{80}{98} & \frac{79}{97}
 \end{array}$$

CON PROBABILIDAD CONDICIONAL:

$$P(A) = \frac{20}{100} \frac{19}{99} \frac{80}{98} \frac{79}{97} 6 = 0.15$$

2.



CON PERMUTACIONES PARCIALES Y EN GRUPOS:

$$\begin{aligned}
 P(A) &= \frac{\frac{20!}{18!} \frac{80!}{78!} \frac{4!}{2!2!}}{\frac{100!}{96!}} \\
 &= \frac{(20 \times 19) (80 \times 79) (6)}{100 \times 99 \times 98 \times 97} = 0.15
 \end{aligned}$$

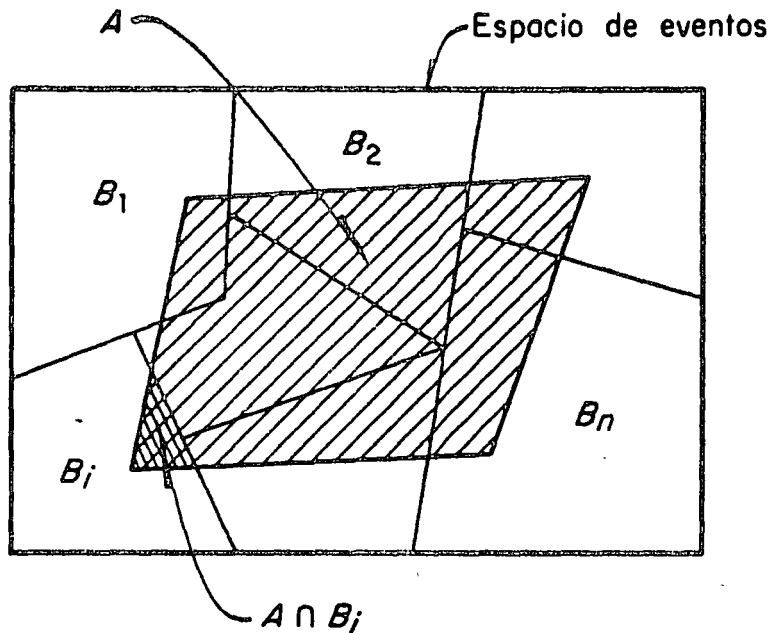
LEY GENERAL DE LA ADICION

SI TODOS LOS EVENTOS E_i SON MUTUAMENTE EXCLUSIVOS ENTRE SI,
EL AXIOMA 3 TAMBIEN SE GENERALIZA A:

$$P(E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_k) = P(E_1) + P(E_2) + \dots + P(E_k)$$

TEOREMA DE LA PROBABILIDAD TOTAL

SE DICE QUE UN GRUPO DE EVENTOS ES COLECTIVAMENTE EXHAUSTIVO SI LA UNION DE TODOS ELLOS ES EL ESPACIO DE EVENTOS CORRESPONDIENTE.



EN UN GRUPO DE EVENTOS COLECTIVAMENTE EXHAUSTIVOS Y MUTUAMENTE EXCLUSIVOS, B_1, B_2, \dots, B_n , SI A ES UN EVENTO CUALQUIERA DEFINIDO EN EL MISMO ESPACIO, ENTONCES, APLICANDO EL AXIOMA 3, RESULTA

$$P(A) = P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) + \dots + P(A \cap B_n) = \sum_{i=1}^{i=n} P(A \cap B_i)$$

YA QUE LOS EVENTOS $A \cap B_i$ SON MUTUAMENTE EXCLUSIVOS, Y $A = (A \cap B_1) \cup (A \cap B_2) \cup \dots$

TOMANDO EN CUENTA QUE $P(A \cap B_i) = P(B_i)P(A|B_i)$, SE OBTIENE FINALMENTE LA ECUACION

$$P(A) = \sum_{i=1}^{i=n} P(B_i)P(A|B_i)$$

CON LA CUAL SE DEFINE EL LLAMADO TEOREMA DE LA PROBABILIDAD TOTAL.

TEOREMA DE BAYES

CONSIDERANDO QUE $P(B_j \cap A) = P(A \cap B_j)$, SE TIENE QUE

$$P(B_j|A) = \frac{P(B_j \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A \cap B_j)}{P(A)}$$

DE DONDE

$$P(B_j|A) = \frac{P(B_j)P(A|B_j)}{\sum_{i=1}^n P(B_i)P(A|B_i)}$$

ESTE RESULTADO SE CONOCE COMO TEOREMA DE BAYES. A LAS PROBABILIDADES $P(B_j)$ QUE SE ASIGNAN A LOS EVENTOS B_j ANTES DE OBSERVAR EL EVENTO A, SE LES DENOMINA A PRIORI O PREVIAS; A LAS PROBABILIDADES $P(B_j|A)$ QUE SE OBTIENEN DESPUES DE OBSERVAR EL EVENTO A, SE LES LLAMA A POSTERIORI O POSTERIORES.

EJEMPLO

EN UNA FABRICA SE RECIBEN REGULADORES DE VOLTAJE DE DOS PROVEEDORES, B_1 Y B_2 , EN PROPORCIÓN DE 3 A 1; ES DECIR, LA PROBABILIDAD DE QUE UN REGULADOR TOMADO AL AZAR PROVENGA DEL PROVEEDOR B_1 ES $P(B_1)=3/4$, Y DEL B_2 ES $P(B_2)=1/4$.

SUPONGAMOS ADEMAS QUE EL CONTROL DE CALIDAD DEL PROVEEDOR B_1 ES MEJOR QUE EL DE B_2 , DE MANERA QUE EL 95% DE LOS REGULADORES DE B_1 TRABAJAN BIEN, Y SOLO EL 80% DE LOS DE B_2 FUNCIONAN CORRECTAMENTE. CALCULEMOS LA PROBABILIDAD DE QUE UN REGULADOR TOMADO AL AZAR FUNCIONE BIEN (EVENTO A).

$$P(A|B_1) = 0.95; P(A|B_2) = 0.80$$

DEL TEOREMA DE LA PROBABILIDAD TOTAL:

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A|B_1)P(B_1)+P(A|B_2)P(B_2) \\ &= 0.95 \times \frac{3}{4} + 0.80 \times \frac{1}{4} = 0.9125 \end{aligned}$$

EJEMPLO

SUPONGAMOS AHORA QUE LA PREGUNTA DEL PROBLEMA SE CAMBIA A: ¿CUAL ES LA PROBABILIDAD DE QUE UN REGULADOR TOMADO AL AZAR PROVENGA DEL PROVEEDOR B_1 , SI SE HIZO UNA PRUEBA DEL REGULADOR Y SE OBSERVO QUE FUNCIONA CORRECTAMENTE?

APLICANDO EL TEOREMA DE BAYES:

$$P(B_1|A) = \frac{P(B_1)P(A|B_1)}{P(B_1)P(A|B_1) + P(B_2)P(A|B_2)} \quad ; \quad P(B_1) = \frac{3}{4}, \quad P(B_2) = \frac{1}{4}$$

$$= \frac{\frac{3}{4} \times 0.95}{\frac{3}{4} \times 0.95 + \frac{1}{4} \times 0.80} = \frac{2.85}{3.65} = 0.78$$

ADEMAS

$$P(B_2|A) = \frac{P(B_2)P(A|B_2)}{\frac{3.65}{4}} = \frac{\frac{1}{4} \times 0.80}{\frac{3.65}{4}} = 0.22$$

OBSERVESE QUE

$$P(B_1|A) + P(B_2|A) = 0.78 + 0.22 = 1.00$$

EJEMPLO

SUPONGASE QUE UNA PRUEBA PARA DETECTAR DIABETES TIENE UNA EFICIENCIA DEL 95%, ES DECIR, SOLO EN EL 95% DE LOS CASOS SE DETECTA CON ELLA LA DIABETES EN UNA PERSONA QUE LA PADECE. SUPONGASE TAMBIEN QUE EL 2% DE LAS PRUEBAS QUE RESULTAN POSITIVAS SON DE GENTE SANA, Y QUE EL 3% DE LA POBLACION DE UNA REGION DE MEXICO PADECE ESTA ENFERMEDAD.

- a) ¿CUAL ES LA PROBABILIDAD DE QUE UNA PERSONA SELECCIONADA AL AZAR PUEDA SER DECLARADA DIABETICA POR LA PRUEBA?
- b) SI LA PRUEBA DICE QUE SI ES DIABETICA, ¿CUAL ES LA PROBABILIDAD DE QUE REALMENTE LO SEA?

SOLUCION

$$B_1 = \{\text{TIENE DIABETES}\}; \quad B_2 = \{\text{NO TIENE DIABETES}\}$$

$$E = \{\text{LA PRUEBA DETECTA DIABETES}\}$$

$$P(B_1) = 0.03, \quad P(B_2) = 0.97$$

$$P(E|B_1) = 0.95, \quad P(E|B_2) = 0.02$$

$$\begin{aligned} \text{a) } P(E) &= P(E|B_1)P(B_1) + P(E|B_2)P(B_2) \\ &= 0.95 \times 0.03 + 0.02 \times 0.97 = 0.0479 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } P(B_1|E) &= \frac{P(B_1)P(E|B_1)}{P(B_1)P(E|B_1) + P(B_2)P(E|B_2)} \\ &= \frac{0.03 \times 0.95}{0.03 \times 0.95 + 0.97 \times 0.02} = 0.59 \end{aligned}$$

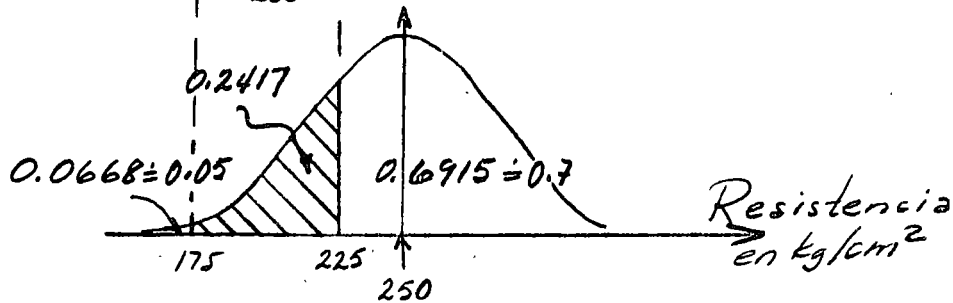
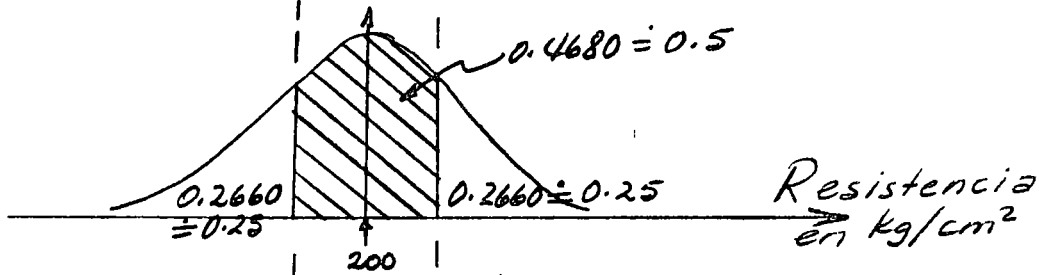
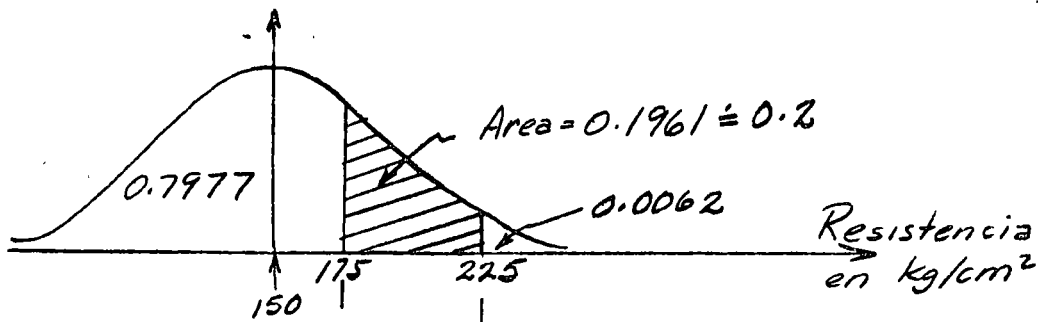
EJEMPLO

EXISTE UN EDIFICIO DE CONCRETO REFORZADO PARA EL CUAL SE INVESTIGA SU CAPACIDAD DE CARGA DE DISEÑO. UN INGENIERO, CON BASE EN SU EXPERIENCIA PERSONAL Y CON BASE EN LA EPOCA EN QUE FUE CONSTRUIDO, DECIDE QUE LA RESISTENCIA NOMINAL, f'_c DEL CONCRETO PUDO SER DE 150 KG/CM², 200 KG/CM² O 250 KG/CM², CON LAS SIGUIENTES PROBABILIDADES PREVIAS:

RESISTENCIA NOMINAL, EN KG/CM ²	PROBABILIDAD
$B_1 = \{150\}$	$P(B_1) = 0.3$
$B_2 = \{200\}$	$P(B_2) = 0.6$
$B_3 = \{250\}$	$P(B_3) = 0.1$

PARA PREDECIR LA RESISTENCIA NOMINAL REAL, ES NECESARIO REALIZAR UN EXPERIMENTO QUE CONSISTE EN EXTRAER CORAZONES (MUESTRAS) DEL CONCRETO DE LA ESTRUCTURA Y PROBARLOS A COMPRESION SIMPLE. EL INGENIERO DECIDE QUE LA RESISTENCIA, S , DE UN SOLO CORAZON DARA UNA PREDICCION CONFIABLE, Y DEFINE LOS EVENTOS ANOTADOS EN LA PRIMERA COLUMNA DE LA TABLA DE LA SIGUIENTE HOJA, A LAS CUALES LES ASIGNA PROBABILIDADES CONDICIONALES, DADA LA RESISTENCIA NOMINAL, f'_c , DE ACUERDO CON LA SUPOSICION DE QUE LA RESISTENCIA TIENE DISTRIBUCION NORMAL CON LA MEDIA IGUAL A f'_c Y COEFICIENTE DE VARIACION CONSTANTE; DE ACUERDO CON LA TEXTURA DEL CONCRETO Y CON LA EPOCA DE CONSTRUCCION, LE ASIGNA UN VALOR DE 0.20 A DICHO COEFICIENTE (IMPLICA UN CONTROL DE CALIDAD MALO)

RESISTENCIA DEL CORAZON, S, EN KG/CM ²	P(A _j B _i)		
	(f' _C) ₁ =150 B ₁ ={150}	(f' _C) ₂ =200 B ₂ ={200}	(f' _C) ₃ =250 B ₃ ={250}
EVENTO A ₁ = {S < 175}	0.80	0.25	0.05
EVENTO A ₂ = {175 ≤ S ≤ 225}	0.20	0.50	0.25
EVENTO A ₃ = {S > 225}	0	0.25	0.70



SUPONGASE QUE SE SACA UN CORAZON Y QUE SU RESISTENCIA RESULTA SER DE 164 KG/CM^2 , ES DECIR, QUE OCURRE EL EVENTO A_1 . LAS PROBABILIDADES A POSTERIORI DE LAS RESISTENCIAS NOMINALES SON, ENTONCES

$$\begin{aligned}
 P(\{150\}|A_1) &= \frac{P(\{150\})P(A_1|\{150\})}{P(\{150\})P(A_1|\{150\})+P(\{200\})P(A_1|\{200\})+P(\{250\})P(A_1|\{250\})} \\
 &= \frac{0.3 \times 0.80}{0.3 \times 0.8 + 0.6 \times 0.25 + 0.1 \times 0.05} = \frac{0.24}{0.24 + 0.15 + 0.005} \\
 &= \frac{0.24}{0.395} = 0.6076
 \end{aligned}$$

$$P(\{200\}|A_1) = \frac{P(\{200\})P(A_1|\{200\})}{0.395} = \frac{0.15}{0.395} = 0.3797$$

$$P(\{250\}|A_1) = \frac{P(\{250\})P(A_1|\{250\})}{0.395} = \frac{0.005}{0.395} = 0.0127$$

SUPONGASE AHORA QUE EN VEZ DE UN SOLO CORAZON EL INGENIERO HUBIESE DECIDIDO OBTENER DOS, SITUADOS EN DIFERENTES NIVELES DE LA ESTRUCTURA, Y QUE AL PROBARLOS EN UNO OCURRIÓ A_1 Y EN EL OTRO A_2 . LA PROBABILIDAD DE QUE OCURRAN AMBOS EVENTOS (A_1, A_2) SI f'_c ES REALMENTE 150, 200 O 250 KG/CM^2 , SERA EL PRODUCTO DE DOS PROBABILIDADES CONDICIONALES, PUESTO QUE A_1 Y A_2 SON INDEPENDIENTES.

$$P(A_1, A_2|\{150\}) = P(A_1|\{150\})P(A_2|\{150\}) = 0.80 \times 0.20 = 0.16$$

$$P(A_1, A_2|\{200\}) = P(A_1|\{200\})P(A_2|\{200\}) = 0.25 \times 0.50 = 0.125$$

$$P(A_1, A_2|\{250\}) = P(A_1|\{250\})P(A_2|\{250\}) = 0.05 \times 0.25 = 0.0125$$

ESTAS PROBABILIDADES SON INDISPENSABLES, YA QUE EL TEOREMA DE BAYES EN ESTE CASO NOS DARIA:

$$P(\{150\} | A_1, A_2) = \frac{P(\{150\})P(A_1, A_2 | \{150\})}{P(\{150\})P(A_1, A_2 | \{150\}) + P(\{200\})P(A_1, A_2 | \{200\}) + P(\{250\}) \times P(A_1, A_2 | \{250\})}$$

EN ESTE CASO LAS PROBABILIDADES A POSTERIORI SON:

$$P(\{150\} | A_1, A_2) = \frac{0.3 \times 0.16}{3.0 \times 0.16 + 0.6 \times 0.125 + 0.1 \times 0.0125}$$

$$= \frac{0.048}{0.048 + 0.075 + 0.00125} = \frac{0.048}{0.12425} = 0.386$$

$$P(\{200\} | A_1, A_2) = \frac{P(\{200\})P(A_1, A_2 | \{200\})}{0.12425} = \frac{0.075}{0.12425} = 0.604$$

$$P(\{250\} | A_1, A_2) = \frac{P(\{250\})P(A_1, A_2 | \{250\})}{0.12425} = \frac{0.00125}{0.12425} = 0.010$$

LOS MISMOS RESULTADOS SE HABRIAN OBTENIDO SI EL INGENIERO, DESPUES DE EXTRAER EL PRIMER CORAZON Y DE CALCULAR LAS PROBABILIDADES POSTERIORES CORRESPONDIENTES, HUBIERA DECIDIDO SACAR EL SEGUNDO Y RECALCULAR DICHAS PROBABILIDADES CON BASE EN LAS OBTENIDAS PARA EL PRIMERO; ES DECIR, LAS PROBABILIDADES PREVIAS EN EL SEGUNDO CALCULO SERIAN $P(\{150\}) = 0.6076$, $P(\{200\}) = 0.3797$ Y $P(\{250\}) = 0.0127$. EN TAL CASO, LAS PROBABILIDADES POSTERIORES, DADO QUE OCURRIO A_2 , SON

$$\begin{aligned}
 P(\{150\}|A_2) &= \frac{P(\{150\})P(A_2|\{150\})}{0.2 \times 0.6076 + 0.5 \times 0.3797 + 0.25 \times 0.0127} \\
 &= \frac{0.12152}{0.12152 + 0.18975 + 0.00318} = \frac{0.12152}{0.31445} = 0.386
 \end{aligned}$$

$$P(\{200\}|A_2) = \frac{P(\{200\})P(A_2|\{200\})}{0.31445} = \frac{0.18975}{0.31445} = 0.604$$

$$P(\{250\}|A_2) = \frac{P(\{250\})P(A_2|\{250\})}{0.31445} = \frac{0.00318}{0.31445} = 0.010$$

QUE SON IGUALES A LAS ANTERIORES.

CON LO ANTERIOR SE DEMUESTRA QUE LAS PROBABILIDADES SE PUEDEN ACTUALIZAR CONFORME SE VA OBTENIENDO NUEVA INFORMACION EXPERIMENTAL.

OTRAS MEDIDAS USUALES DE TENDENCIA CENTRAL DE UNA VARIABLE ALEATORIA SON LA MEDIANA Y EL MODO, LA PRIMERA SE DEFINE COMO EL VALOR DE LA VARIABLE AL CUAL CORRESPONDE UNA PROBABILIDAD ACUMULADA DE 50%, Y LA SEGUNDA, COMO EL VALOR DE LA VARIABLE AL CUAL CORRESPONDE LA MAYOR PROBABILIDAD.

EJEMPLO

SI LA DENSIDAD DE PROBABILIDADES DE LA VARIABLE ALEATORIA X CORRESPONDE A LOS ERRORES EN UNA NIVELACION, ES LA DE LA SEGUNDA COLUMNA DE LA SIGUIENTE TABLA, LA MEDIA DE DICHA VARIABLE RESULTA SER 4 167 LA MEDIANA 4000 Y EL MODO 4000 MICRAS. LOS CALCULOS CORRESPONDIENTES SE LOCALIZAN EN LA TERCERA COLUMNA.

x_i , EN MICRAS	$P_X(x_i)$	$x_i P_X(x_i)$, EN MICRAS	$F_X(x_i)$
0	6/60	0	6/60
1 000	2/60	2 000/60	8/60
2 000	4/60	8 000/60	12/60
3 000	8/60	24 000/60	20/60
4 000	13/60	52 000/60	33/60 = 0.5
5 000	12/60	60 000/60	45/60
6 000	7/60	42 000/60	52/60
7 000	4/60	28 000/60	56/60
8 000	2/60	16 000/60	58/60
9 000	2/60	18 000/60	60/60
TOTAL: $E[X] = 250\ 000/60 = 4\ 167$ MICRAS			

Ejemplo. Construcción de la carpeta de una carretera.

Un contratista construirá la carpeta de una carretera en tramos de 50 m; el gobierno aceptará o rechazará cada tramo de acuerdo con una prueba de control de calidad. El contratista tiene la opción de pedir el concreto a una de dos plantas premezcladoras; la planta A cobra 140 pesos/m³ y la B 160 pesos/m³, pero, el control de calidad que se lleva en la planta B es mejor, lo cual hace más probable que un tramo dado pase favorablemente la prueba de aceptación. Tomando en cuenta que en cada tramo se usan 100 m³ de concreto y que la probabilidad de que el proveniente de la planta A no pase la prueba de control es 0.10, y la de B es 0.05, el constructor deberá decidirse por cuál planta usar. El árbol de decisiones de este problema es el mostrado en la fig 6.4, donde $P(\theta_1)$ y $P(\theta_2)$ son las probabilidades de que ocurran θ_1 y θ_2 , respectivamente. La utilidad $U_1 = u(a_1, \theta_1)$ es la que corresponde a utilizar la planta A y que la carpeta pase la prueba de control de calidad; en este caso la utilidad (negativa) es el costo del concreto (\$14,000.00) más la colocación (supongamos \$100,000.00), por lo cual $U_1 = -114,000.00$. $U_2 = u(a_1, \theta_2)$ es la que corresponde a usar la planta A y que la carpeta no pase la prueba de calidad; en este caso el constructor deberá demoler y reconstruir el tramo con los siguientes costos:

Carpeta demolida	}	Pérdida de prestigio	\$	5,000.00
		Mano de obra de demolición		15,000.00
		Concreto		14,000.00
		Mano de obra de colocación		100,000.00

Reconstrucción	$\left\{ \begin{array}{l} \text{Mano de obra} \\ \text{Concreto} \end{array} \right.$	\$ 100,000.00
		14,000.00
T O T A L		\$ 248,000.00

De manera similar se obtienen u_3 y u_4 , cuyos valores resultan ser $u_3 = - \$116,000.00$ y $u_4 = - \$252,000.00$.

Si la decisión se tomara sin considerar las probabilidades de aceptar la carpeta, el constructor se decidiría por la planta A, ya que la pérdida (utilidad negativa) sería menor. Si sí se toman en cuenta y adoptamos como *criterio de decisión* el escoger la planta que conduzca a una *esperanza de pérdida* menor se tendrá (recuerde que la esperanza de la variable aleatoria X , $E[X]$, es $E[X] = \sum_{i=1}^m P[X_i] X_i$, donde las X_i son los valores que puede asumir X , y $P[X_i]$ son las probabilidades correspondientes):

Para la planta A:

$$E[u] = 0.90 \times (-114,000) + 0.10 \times (-248,000) = -\$127,400.$$

Para la planta B:

$$E[u] = 0.95 \times (-116,000) + 0.05 \times (-252,000) = -\$122,800.$$

Comparando ambas cifras se concluye que la decisión de comprar el concreto de la planta B conduce a una pérdida esperada menor que la de la planta A, es decir, se escoge la planta B aunque el precio unitario del concreto sea mayor.

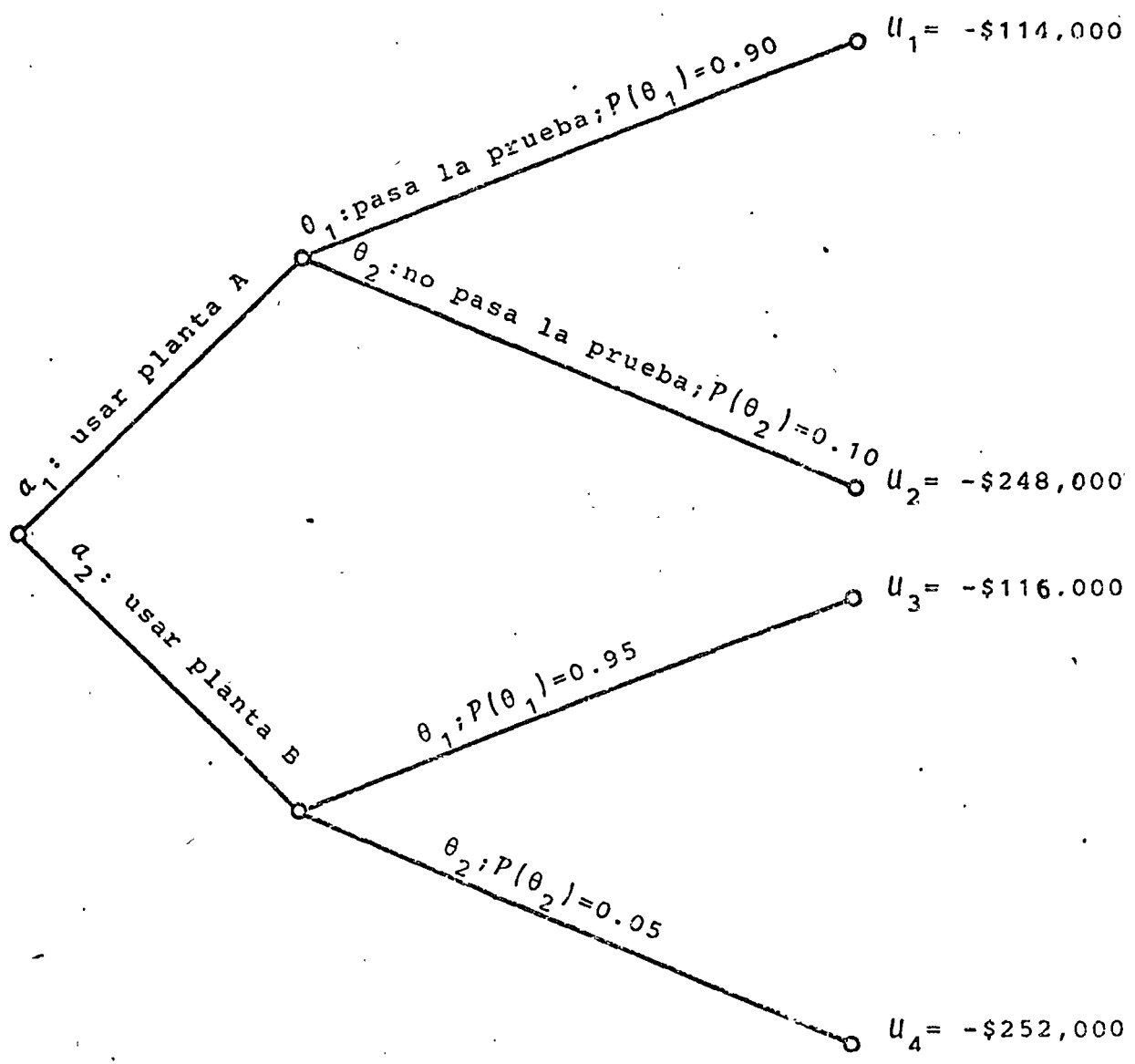


Fig 6.4 Arbol de decisiones del ejemplo 6.2

EJEMPLO

EN LA SIGUIENTE TABLA SE CALCULA LA VARIANCIAS DE LA VARIABLE ALEATORIA CUYA DENSIDAD DE PROBABILIDADES SE PRESENTO EN EL EJEMPLO ANTERIOR ($E(x) = 4167$ micras).

$x_i - E(X)$ EN MICRAS	$(x_i - E(X))^2 P_X(x_i)$	$(x_i - E(X))^2 P_X(x_i)$, EN MICRAS
-4 167	6/60	1 740 000
-3 167	2/60	333 000
-2 167	4/60	313 000
-1 167	8/60	181 000
- 167	13/60	6 000
833	12/60	139 000
1 833	7/60	390 000
2 833	4/60	531 000
3 833	2/60	487 000
4 833	2/60	687 000

TOTAL: 4 798 000 MICRAS² = $\sigma^2(X)$

LA DESVIACION ESTANDAR Y EL COEFICIENTE DE VARIACION DE ESTA VARIABLE ALEATORIA SON, RESPECTIVAMENTE,

$$\sigma(X) = \sqrt{4\,798\,000} = 2\,200 \text{ MICRAS}, \text{ Y } v(X) = \sigma(X)/E(X) = \frac{2\,200}{4\,167} = 0.528$$

SI $n=2$, ENTONCES X PUEDE ASUMIR LOS VALORES 0, 1 y 2, ES DECIR $S = \{0, 1, 2\}$. EL ESPACIO DE EVENTOS DEL EXPERIMENTO ES

$$S_1 = \{ \underbrace{(\text{FRACASO, FRACASO})}_{X=0}, \underbrace{(\text{EXITO, FRACASO})}_{X=1}, \underbrace{(\text{FRACASO, EXITO})}_{X=1}, \underbrace{(\text{EXITO, EXITO})}_{X=2} \}$$

$$f_X(x) = \{P(0), P(1), P(2)\}$$

OBSERVESE QUE $x=0$ OCURRE DE UNA MANERA, $x=1$, DE DOS, Y $x=2$, DE UNA. ESTOS RESULTADOS SE PUEDEN OBTENER PERMUTANDO DOS GRUPOS, UNO CON x Y EL OTRO CON $n-x$ ELEMENTOS:

$$x=0: \quad {}_2P_{0,2} = \frac{2!}{0!x2!} = 1 ; P(\{0\}) = q \times q = q^2 = p^0q^2$$

$$x=1: \quad {}_2P_{1,1} = \frac{2!}{1!x1!} = 2 ; P(\{1\}) = 2pq$$

$$x=2: \quad {}_2P_{2,0} = \frac{2!}{2!x0!} = 1 ; P(\{2\}) = pxp = p^2 = p^2q^0$$

$$\sum_{i=0}^2 P(\{i\}) = q^2 + 2pq + p^2 = (p+q)^2 = 1$$

(OBSERVESE QUE LOS ELEMENTOS DE S_1 NO SON IGUALMENTE PROBABLES, A MENOS QUE $p = q = 1/2$.)

SI $n = 3$, $S = \{0, 1, 2, 3\}$, $e = \text{EXITO}$ Y $f = \text{FRACASO}$, ENTONCES

$$S_1 = \{(f, f, f), (e, f, f), (f, e, f), (f, f, e), (e, e, f), (e, f, e), (f, e, e), (e, e, e)\}$$

$$x = 0: {}_3P_{0,3} = \frac{3!}{0! \cdot 3!} = 1; P(\{0\}) = 1 p^0 q^3 = q^3$$

$$x = 1: {}_3P_{1,2} = \frac{3!}{1! \cdot 2!} = 3; P(\{1\}) = 3 p q^2$$

$$x = 2: {}_3P_{2,1} = \frac{3!}{2! \cdot 1!} = 3; P(\{2\}) = 3 p^2 q$$

$$x = 3: {}_3P_{3,0} = \frac{3!}{3! \cdot 0!} = 1; P(\{3\}) = 1 p^3 q^0 = p^3$$

$$\sum_{i=0}^3 P(\{i\}) = (p+q)^3 = 1$$

PASANDO AL CASO GENERAL DE CUALQUIER VALOR DE n , LA PROBABILIDAD DE QUE OCURRAN x EXITOS Y $n-x$ FRACASOS EN UN ORDEN DETERMINADO ES

$$P(X=x) = p^x q^{n-x}$$

EN VIRTUD DE LA LEY GENERAL DE MULTIPLICACION.

UN ORDEN POSIBLE SERIA, POR EJEMPLO,

$$\underbrace{\text{EXITO, EXITO, \dots, EXITO}}_x, \underbrace{\text{FRACASO, \dots, FRACASO}}_{n-x}$$

AHORA BIEN, LOS x EXITOS PUEDEN OCURRIR EN ${}_n P_{x, n-x}$ ORDENES DISTINTOS, CADA UNO CON PROBABILIDAD $p^x q^{n-x}$. POR LO TANTO, EN VIRTUD DE LA LEY GENERAL DE ADICION, LA DISTRIBUCION DE PROBABILIDADES DE X RESULTA SER

$$f_X(x) = \frac{n!}{x!(n-x)!} p^x q^{n-x}; x = 0, 1, \dots, n$$

LA CUAL SE CONOCE CON EL NOMBRE DE BINOMIAL O DE BERNOULLI.

TABLA 1
 FUNCION DE DISTRIBUCION BINOMIAL

$$F_X(x) = \sum_{k=0}^x \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k}$$

n	x	p				
		0.10	0.20	0.30	0.40	0.50
2	0	.8100	.6400	.4900	.3600	.2500
	1	.9900	.9600	.9100	.8400	.7500
3	0	.7290	.5120	.3430	.2160	.1250
	1	.9720	.8960	.7840	.6480	.5000
	2	.9990	.9920	.9730	.9360	.8750
4	0	.6561	.4096	.2401	.1296	.0625
	1	.9477	.8192	.6517	.4752	.3125
	2	.9963	.9728	.9163	.8208	.6875
	3	.9999	.9984	.9919	.9744	.9375
5	0	.5905	.3277	.1681	.0778	.0312
	1	.9185	.7373	.5282	.3370	.1875
	2	.9914	.9421	.8369	.6826	.5000
	3	.9995	.9933	.9692	.9130	.8125
	4	1.0000	.9997	.9976	.9898	.9688
6	0	.5314	.2621	.1176	.0467	.0156
	1	.8857	.6554	.4202	.2333	.1094

TABLA 1 (continuación)
 FUNCION DE DISTRIBUCION BINOMIAL

$$F_X(x) = \sum_{k=0}^x \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k}$$

n	x	p				
		0.10	0.20	0.30	0.40	0.50
6	2	.9842	.9011	.7443	.5443	.3438
	3	.9987	.9830	.9295	.8208	.6562
	4	.9999	.9984	.9891	.9590	.8906
	5	1.0000	.9999	.9993	.9959	.9844
7	0	.4783	.2097	.0824	.0280	.0078
	1	.8503	.5767	.3294	.1586	.0625
	2	.9743	.8520	.6471	.4199	.2266
	3	.9973	.9667	.8740	.7102	.5000
	4	.9998	.9953	.9712	.9037	.7734
	5	1.0000	.9996	.9962	.9812	.9375
8	0	.4305	.1678	.0576	.0168	.0039
	1	.8131	.5033	.2553	.1064	.0352
	2	.9619	.7969	.5518	.3154	.1445
	3	.9950	.9437	.8059	.5941	.3633
	4	.9996	.9896	.9420	.8263	.6367
	5	1.0000	.9988	.9887	.9502	.8555
	6	1.0000	.9999	.9987	.9915	.9648
	7	1.0000	1.0000	.9999	.9993	.9961
9	0	.3874	.1342	.0404	.0101	.0020
	1	.7748	.4362	.1960	.0705	.0195
	2	.9470	.7382	.4628	.2318	.0898
	3	.9917	.9144	.7297	.4826	.2539
	4	.9991	.9804	.9012	.7334	.5000
	5	.9999	.9969	.9747	.9006	.7461
	6	1.0000	.9997	.9957	.9750	.9102
	7	1.0000	1.0000	.9996	.9962	.9805
	8	1.0000	1.0000	1.0000	.9997	.9980
10	0	.3487	.1074	.0282	.0060	.0010
	1	.7361	.3758	.1493	.0464	.0107
	2	.9298	.6778	.3828	.1673	.0547
	3	.9872	.8791	.6496	.3823	.1719
	4	.9984	.9672	.8497	.6331	.3770

TABLA 1 (continuación)
 FUNCION DE DISTRIBUCION BINOMIAL

$$F_X(x) = \sum_{k=0}^x \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k}$$

n	x	p				
		0.10	0.20	0.30	0.40	0.50
10	5	.9999	.9936	.9527	.8338	.6230
	6	1.0000	.9991	.9894	.9452	.8281
	7	1.0000	.9999	.9984	.9877	.9453
	8	1.0000	1.0000	.9999	.9983	.9893
	9	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9990
11	0	.3138	.0859	.0198	.0036	.0005
	1	.6974	.3221	.1130	.0302	.0059
	2	.9104	.6174	.3127	.1189	.0327
	3	.9815	.8389	.5696	.2963	.1133
	4	.9972	.9496	.7897	.5328	.2744
	5	.9997	.9883	.9218	.7535	.5000
	6	1.0000	.9980	.9784	.9006	.7256
	7	1.0000	.9998	.9957	.9707	.8867
	8	1.0000	1.0000	.9994	.9941	.9673
	9	1.0000	1.0000	1.0000	.9993	.9941
	10	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9995
12	0	.2824	.0687	.0138	.0022	.0002
	1	.6590	.2749	.0850	.0196	.0032
	2	.8891	.5583	.2528	.0834	.0193
	3	.9744	.7946	.4925	.2253	.0730
	4	.9957	.9274	.7237	.4382	.1938
	5	.9995	.9806	.8822	.6652	.3872
	6	.9999	.9961	.9614	.8418	.6128
	7	1.0000	.9994	.9905	.9427	.8062
	8	1.0000	.9999	.9983	.9847	.9270
	9	1.0000	1.0000	.9998	.9972	.9807
	10	1.0000	1.0000	1.0000	.9997	.9968
	11	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9998
13	0	.2542	.0550	.0097	.0013	.0001
	1	.6213	.2336	.0637	.0126	.0017
	2	.8661	.5017	.2025	.0579	.0112
	3	.9658	.7473	.4206	.1636	.0461
	4	.9935	.9009	.6543	.3530	.1334
	5	.9991	.9700	.8346	.5744	.2905
	6	.9999	.9930	.9376	.7712	.5000
	7	1.0000	.9988	.9818	.9023	.7095

TABLA 1 (continuación)
 FUNCION DE DISTRIBUCION BINOMIAL

$$F_X(x) = \sum_{k=0}^x \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k}$$

n	x	p				
		0.10	0.20	0.30	0.40	0.50
13	8	1.0000	.9998	.9960	.9679	.8666
	9	1.0000	1.0000	.9993	.9922	.9539
	10	1.0000	1.0000	.9999	.9987	.9888
	11	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9983
	12	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999
14	0	.2288	.0440	.0068	.0008	.0001
	1	.5846	.1979	.0475	.0081	.0009
	2	.8416	.4481	.1608	.0398	.0065
	3	.9559	.6982	.3552	.1243	.0287
	4	.9908	.8702	.5842	.2793	.0898
	5	.9985	.9561	.7805	.4859	.2120
	6	.9998	.9884	.9067	.5925	.3953
	7	1.0000	.9976	.9685	.8499	.6047
	8	1.0000	.9996	.9917	.9417	.7880
	9	1.0000	1.0000	.9983	.9825	.9102
	10	1.0000	1.0000	.9998	.9961	.9713
	11	1.0000	1.0000	1.0000	.9994	.9935
	12	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9991
13	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	
15	0	.2059	.0352	.0047	.0005	.0000
	1	.5490	.1671	.0353	.0052	.0005
	2	.8159	.3980	.1268	.0271	.0037
	3	.9444	.6482	.2969	.0905	.0176
	4	.9873	.8358	.5155	.2173	.0592
	5	.9978	.9389	.7216	.4032	.1509
	6	.9997	.9819	.8689	.6098	.3036
	7	1.0000	.9958	.9500	.7869	.5000
	8	1.0000	.9992	.9848	.9050	.6964
	9	1.0000	.9999	.9963	.9662	.8491
	10	1.0000	1.0000	.9993	.9907	.9408
	11	1.0000	1.0000	.9999	.9981	.9824
	12	1.0000	1.0000	1.0000	.9997	.9963
	13	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9995
14	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	

TABLA 1 (continuación)
 FUNCION DE DISTRIBUCION BINOMIAL

$$F_X(x) = \sum_{k=0}^x \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k}$$

n	X	P				
		0.10	0.20	0.30	0.40	0.50
18	0	.1501	.0180	.0016	.0001	.0000
	1	.4503	.0991	.0142	.0013	.0001
	2	.7338	.2713	.0600	.0082	.0007
	3	.9018	.5010	.1546	.0328	.0038
	4	.9718	.7164	.3327	.0942	.0154
	5	.9936	.8671	.5344	.2088	.0481
	6	.9988	.9487	.7217	.3743	.1189
	7	.9998	.9837	.8593	.5634	.2403
	8	1.0000	.9957	.9404	.7368	.4073
	9	1.0000	.9991	.9790	.8653	.5927
	10	1.0000	.9998	.9939	.9424	.7597
	11	1.0000	1.0000	.9986	.9797	.8811
	12	1.0000	1.0000	.9997	.9942	.9519
	13	1.0000	1.0000	1.0000	.9987	.9846
	14	1.0000	1.0000	1.0000	.9998	.9962
	15	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9993
	16	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999
17	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	
19	0	.1351	.0144	.0011	.0001	.0000
	1	.4203	.0829	.0104	.0008	.0000
	2	.7054	.2369	.0462	.0055	.0004
	3	.8850	.4551	.1332	.0230	.0022
	4	.9648	.6733	.2822	.0696	.0096
	5	.9914	.8369	.4739	.1629	.0318
	6	.9983	.9324	.6655	.3081	.0835
	7	.9997	.9767	.8180	.4878	.1796
	8	1.0000	.9933	.9161	.6675	.3238
	9	1.0000	.9984	.9674	.8139	.5000
	10	1.0000	.9997	.9895	.9115	.6762
	11	1.0000	1.0000	.9972	.9648	.8204
	12	1.0000	1.0000	.9994	.9884	.9165
	13	1.0000	1.0000	.9999	.9969	.9632
	14	1.0000	1.0000	1.0000	.9994	.9904
	15	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9978
	16	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9996
17	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	

TABLA 1 (continuación)
 FUNCION DE DISTRIBUCION BINOMIAL

$$F_X(x) = \sum_{k=0}^x \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k}$$

n	x	p				
		0.10	0.20	0.30	0.40	0.50
16	0	.1353	.0281	.0033	.0003	.0000
	1	.5147	.1407	.0261	.0033	.0003
	2	.7892	.3518	.0994	.0183	.0021
	3	.9316	.5981	.2459	.0651	.0106
	4	.9830	.7982	.4499	.1666	.0384
	5	.9967	.9183	.6598	.3288	.1051
	6	.9995	.9733	.8247	.5272	.2272
	7	.9999	.9930	.9256	.7161	.4018
	8	1.0000	.9985	.9743	.8577	.5982
	9	1.0000	.9998	.9929	.9417	.7728
	10	1.0000	1.0000	.9984	.9809	.8949
	11	1.0000	1.0000	.9997	.9951	.9616
	12	1.0000	1.0000	1.0000	.9991	.9894
	13	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9979
	14	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9997
15	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	
17	0	.1668	.0225	.0023	.0002	.0000
	1	.4818	.1182	.0193	.0021	.0001
	2	.7618	.3096	.0774	.0123	.0012
	3	.9174	.5489	.2019	.0464	.0064
	4	.9779	.7582	.3887	.1260	.0245
	5	.9953	.8943	.5968	.2639	.0717
	6	.9992	.9623	.7752	.4478	.1662
	7	.9999	.9891	.8954	.6405	.3145
	8	1.0000	.9974	.9597	.8011	.5000
	9	1.0000	.9995	.9873	.9081	.6855
	10	1.0000	.9999	.9968	.9652	.8338
	11	1.0000	1.0000	.9993	.9894	.9283
	12	1.0000	1.0000	.9999	.9975	.9755
	13	1.0000	1.0000	1.0000	.9995	.9936
	14	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9988
	15	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999
16	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	

TABLA 1 (continuación)
 FUNCION DE DISTRIBUCION BINOMIAL

$$F_X(x) = \sum_{k=0}^x \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k}$$

n	x	p				
		0.10	0.20	0.30	0.40	0.50
20	0	.1216	.0115	.0008	.0000	.0000
	1	.3917	.0692	.0076	.0005	.0000
	2	.6769	.2061	.0355	.0036	.0002
	3	.8670	.4114	.1071	.0160	.0013
	4	.9568	.6296	.2375	.0510	.0059
	5	.9887	.8042	.4164	.1256	.0207
	6	.9976	.9133	.6080	.2500	.0577
	7	.9996	.9679	.7723	.4159	.1316
	8	.9999	.9900	.8867	.5956	.2517
	9	1.0000	.9974	.9520	.7553	.4119
	10	1.0000	.9994	.9829	.8725	.5881
	11	1.0000	.9999	.9949	.9435	.7483
	12	1.0000	1.0000	.9987	.9790	.8684
	13	1.0000	1.0000	.9997	.9935	.9423
	14	1.0000	1.0000	1.0000	.9984	.9793
	15	1.0000	1.0000	1.0000	.9997	.9941
	16	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9987
	17	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9998
	18	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

DISTRIBUCION GEOMETRICA

SEA p LA PROBABILIDAD DE EXITO EN UN EXPERIMENTO. SI EL EXPERIMENTO ES CON REEMPLAZO Y SE REPITE SUCESIVAMENTE HASTA QUE SE OBSERVA UN EXITO SE TENDRA LA VARIABLE ALEATORIA X =NUMERO DE REPETICIONES DEL EXPERIMENTO HASTA QUE SE OBSERVA EL PRIMER EXITO. OBTENGAMOS LA DENSIDAD DE PROBABILIDADES DE X . ($S = \{1, 2, 3, \dots\}$)

EL PRIMER EXITO OCURRIRA EN EL EXPERIMENTO NUMERO x SI, Y SOLO SI, EN LOS $x-1$ ANTERIORES HUBO PUROS FRACASOS. LA PROBABILIDAD DE ESTE EVENTO, DADO QUE LOS EXPERIMENTOS SON INDEPENDIENTES, ES

$$f_X(x) = (1-p)^{x-1} p$$

ESTA FUNCION SE DENOMINA DISTRIBUCION GEOMETRICA. SE PUEDE DEMOSTRAR QUE LA DISTRIBUCION DE PROBABILIDADES ACUMULADAS ES

$$F_X(x) = \sum_{x=1}^n p(1-p)^{x-1} = 1 - (1-p)^n$$

Y QUE

$$E(X) = \sum_{x=1}^{\infty} x(1-p)^{x-1} p = 1/p$$

$$\sigma^2(X) = \sum_{x=1}^{\infty} \left(x - \frac{1}{p}\right)^2 (1-p)^{x-1} p = (1-p)/p^2$$

EJEMPLO

¿CUAL ES LA PROBABILIDAD DE OBTENER UN TORNILLO DEFECTUOSO POR PRIMERA VEZ EN LA ~~QUINTA~~ ^{SEXTA} EXTRACCION, SI EL PORCENTAJE DE DEFECTUOSOS DEL LOTE DEL CUAL SE MUESTREA ES DE 5 POR CIENTO?

$$P(X=6) = f_X(6) = (1-0.05)^5 \times 0.05 = 0.95^5 \times 0.05 = 0.03869$$

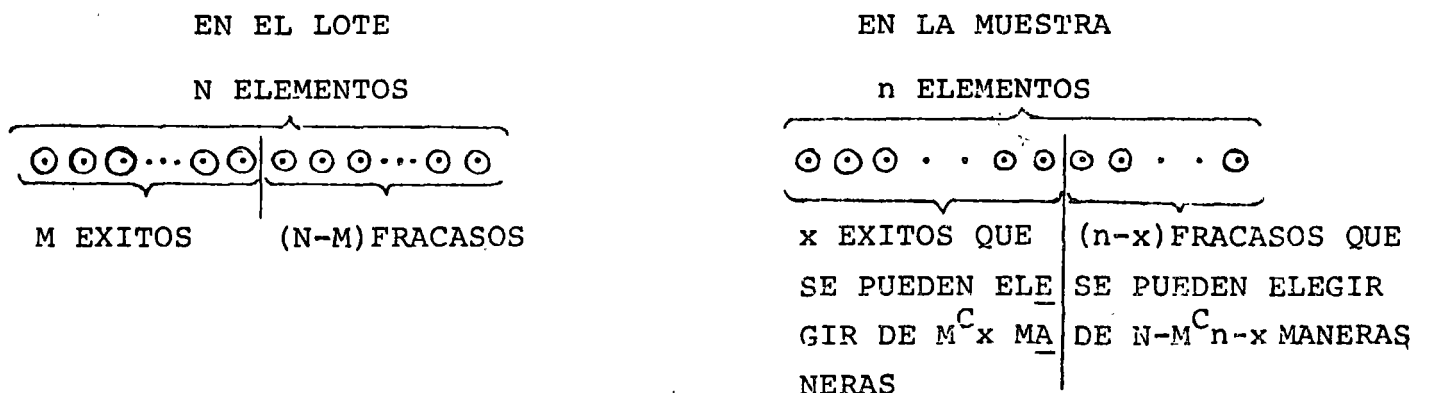
DISTRIBUCION HIPERGEOMETRICA

CUANDO SE TIENE UNA VARIABLE ALEATORIA DISCRETA CUYO ESPACIO DE EVENTOS TIENE SOLO DOS ELEMENTOS, DIGAMOS $S=\{\text{EXITO}, \text{FRACASO}\}$, Y SE REALIZA UN MUESTREO SIN REEMPLAZO, ENTONCES LOS RESULTADOS DE CADA EXPERIMENTO NO SON INDEPENDIENTES NI LA PROBABILIDAD DE EXITO PERMANECE CONSTANTE, COMO EN LA DISTRIBUCION BINOMIAL, POR LO QUE ESTA ULTIMA NO ES APLICABLE.

SEA X LA VARIABLE ALEATORIA NUMERO DE EXITOS OBSERVADOS AL REPETIR n VECES EL EXPERIMENTO CONSISTENTE EN EXTRAER, SIN REEMPLAZO, ELEMENTOS DE UN LOTE QUE TIENE N OBJETOS DE LOS CUALES M SON "EXITOS". EL NUMERO DE ELEMENTOS QUE TIENE EL ESPACIO DE EVENTOS DEL EXPERIMENTO ES

$$N(S) = {}_N C_n$$

EL NUMERO, $N(\{X=x\})$, DE MANERAS POSIBLES E IGUALMENTE PROBABLES DE OBTENER x EXITOS ES



CADA ELECCION POSIBLE DE x EXITOS SE COMBINA CON CADA ELECCION POSIBLE DE $(n-x)$ FRACASOS; POR LO TANTO, EL NUMERO TOTAL DE MANERAS DE OBTENER x EXITOS EN n EXTRACCIONES SIN REEMPLAZO ES

$$N(\{X=x\}) = ({}_M C_x) ({}_{N-M} C_{n-x})$$

POR LO TANTO

$$P(\{X=x\}) = f_X(x) = \frac{\binom{M}{x} \binom{N-M}{n-x}}{N^C_n} = \frac{\binom{M}{x} \binom{N-M}{n-x}}{\binom{N}{n}}, \quad x=0,1,\dots,n$$

EN DONDE $\binom{M}{x} = \frac{M!}{x!(M-x)!}$, $\binom{N-M}{n-x} = \frac{(N-M)!}{(n-x)!(N-M-n+x)!}$,

Y $\binom{N}{n} = \frac{N!}{n!(N-n)!}$

QUE SE CONOCE COMO DISTRIBUCION HIPERGEOMETRICA. LA MEDIA Y LA VARIAN-
CIA DE ESTA DISTRIBUCION SON

$$E(X) = \sum_{x=0}^n x \frac{\binom{M}{x} \binom{N-M}{n-x}}{\binom{N}{n}} = nM/N$$

Y

$$\sigma^2(X) = \sum_{x=0}^n \left(x - \frac{nM}{N}\right)^2 \frac{\binom{M}{x} \binom{N-M}{n-x}}{\binom{N}{n}} = \frac{Mn(N-M)(N-n)}{N^2(N-1)}$$

RESPECTIVAMENTE.

EJEMPLO

EN UN PROBLEMA DE CONTROL ESTADISTICO DE CALIDAD, SE TIENE UN LOTE DE 100 TRANSFORMADORES DE CORRIENTE ELECTRICA, DE LOS CUALES 40 SON DEFECTUOSOS (NO CUMPLEN LAS NORMAS DE FABRICACION). ¿CUAL ES LA PROBABILIDAD DE OBTENER UNO DEFECTUOSO DE TRES SELECCIONADOS AL AZAR SIN REEMPLAZO?

$$P[X=1] = \frac{\binom{40}{1} \binom{100-40}{3-1}}{\binom{100}{3}} = \frac{\binom{40}{1} \binom{60}{2}}{\binom{100}{3}}$$

$$= \frac{40!}{39! \times 1!} \times \frac{60!}{58! \times 2!} = 0.438$$

$$\frac{100!}{97! \times 3!}$$

APROXIMACION DE LA DISTRIBUCION HIPERGEOMETRICA MEDIANTE LA BINOMIAL

CUANDO N ES GRANDE Y n PEQUEÑO ($N \geq 10n$), LA DISTRIBUCION BINOMIAL SE PUEDE USAR COMO APROXIMACION DE LA HIPERGEOMETRICA. DE ESTA APROXIMACION SE HECHA MANO CUANDO LOS CALCULOS CON ESTA ULTIMA RESULTAN TEDIOSOS.

EN EL CASO DEL EJEMPLO ANTERIOR, SI SE USA LA DENSIDAD BINOMIAL SE OBTIENE, CON $p=40/100 = 0.40$ Y $n=3$

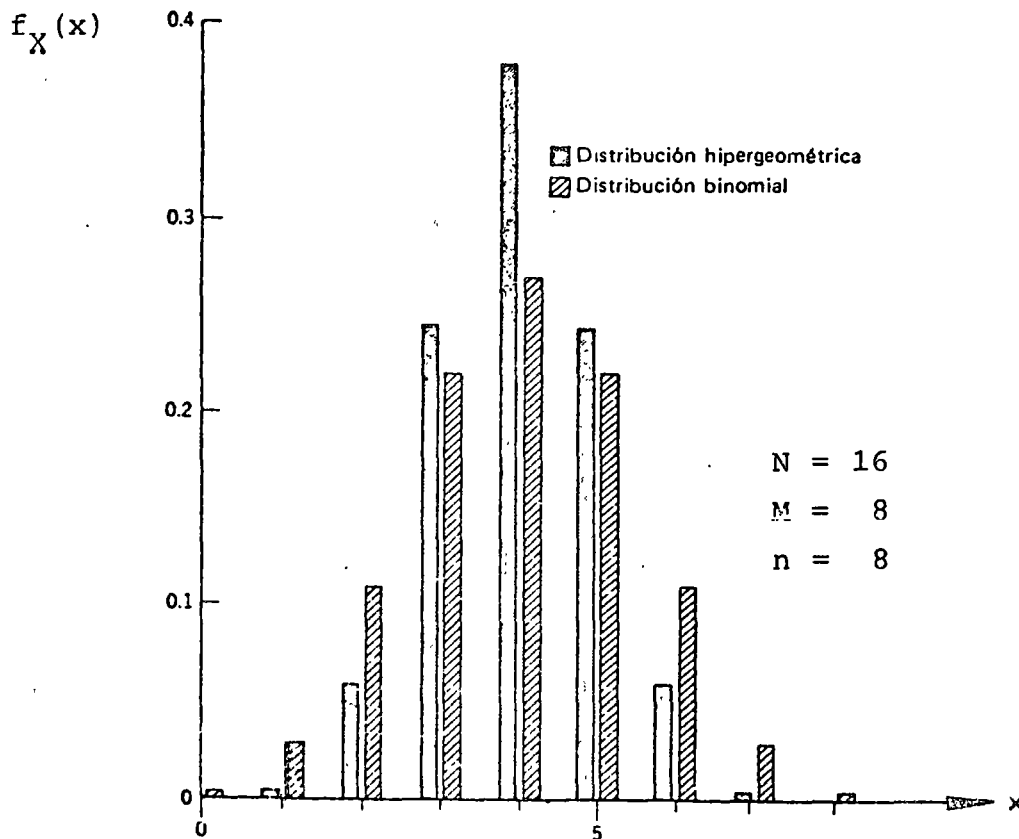
$$P[X=1] = \frac{3!}{1! 2!} (0.40)^1 (0.60)^2 = 0.432$$

FORMULA DE STIRLING

$$N! \approx \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n ; \quad (e = 2.718\dots)$$

Error = 2% SI $n = 4$

Error = 0.8% SI $n = 10$



COMPARACION DE LAS DISTRIBUCIONES HIPERGEOMETRICA Y BINOMIAL

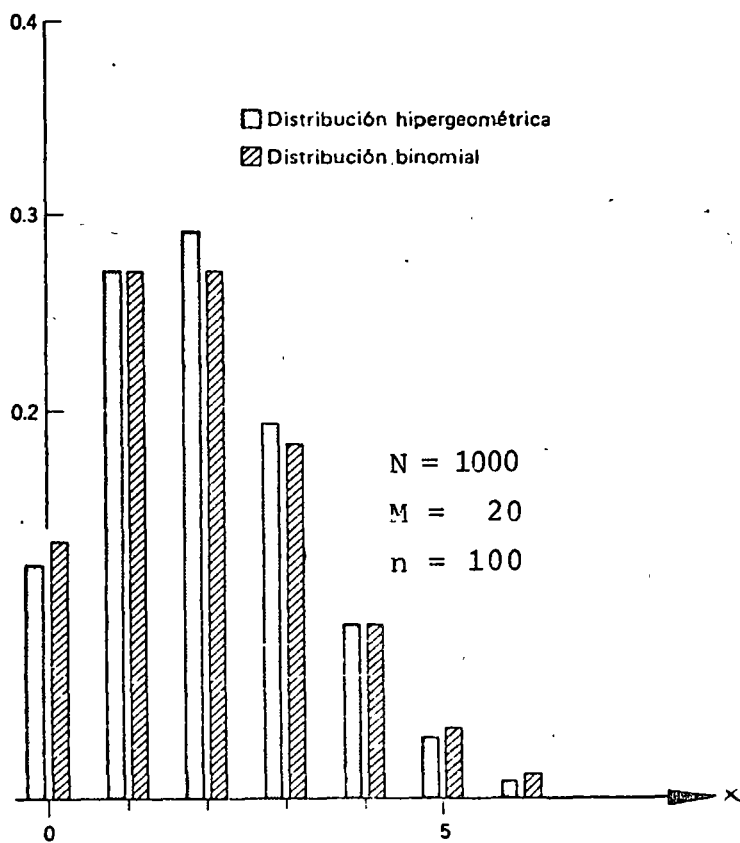


TABLA 2 (continuación)
 FUNCION DE DISTRIBUCION DE POISSON

$$F_X(x) = \sum_{k=0}^x \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!}$$

x	λ					
	10.0	11.0	12.0	13.0	14.0	15.0
2	.003	.001	.001	.000	.000	.000
3	.010	.005	.002	.001	.000	.000
4	.029	.015	.008	.004	.002	.001
5	.067	.038	.020	.011	.006	.003
6	.130	.079	.046	.026	.014	.008
7	.220	.143	.090	.054	.032	.018
8	.333	.232	.155	.100	.062	.037
9	.458	.341	.242	.166	.109	.070
10	.583	.460	.347	.252	.176	.118
11	.697	.579	.462	.353	.260	.185
12	.792	.689	.576	.462	.358	.268
13	.864	.781	.682	.573	.464	.363
14	.917	.854	.772	.675	.570	.466
15	.951	.907	.844	.764	.669	.568
16	.973	.944	.899	.835	.756	.664
17	.986	.968	.937	.890	.827	.749
18	.993	.982	.963	.930	.883	.819
19	.997	.991	.979	.957	.923	.875
20	.998	.995	.988	.975	.952	.917
21	.999	.998	.994	.986	.971	.947
22	1.000	.999	.997	.992	.983	.967
23	1.000	1.000	.999	.996	.991	.981
24	1.000	1.000	.999	.998	.995	.989
25	1.000	1.000	1.000	.999	.997	.994
26	1.000	1.000	1.000	1.000	.999	.997
27	1.000	1.000	1.000	1.000	.999	.998
28	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.999
29	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000

EJEMPLO

EN UNA SERIE DE 462 EXPERIMENTOS CON FINES ANTROPOLOGICOS, CONSISTENTES EN MEDIR EL TAMAÑO DE LA CABEZA DE LOS INDIGENAS RESIDENTES EN UNA ZONA TROPICAL, SE OBTUVIERON LOS RESULTADOS ANOTADOS EN LAS DOS PRIMERAS COLUMNAS DE LA SIGUIENTE TABLA. SI LA VARIABLE ALEATORIA "TAMAÑO DE LA CABEZA" SE CONSIDERA QUE TIENE DISTRIBUCION NORMAL, ¿QUE CANTIDAD DE RESULTADOS SE ESPERARIA OBTENER ANTES DE HACER LAS MEDICIONES, SI SE CONSIDERA QUE $\mu = \bar{x} = 191.8\text{MM}$ Y $\sigma = s = 6.48\text{MM}$, DONDE \bar{x} =PROMEDIO ARITMETICO Y s =DESVIACION ESTANDAR DE LOS DATOS?

$$z_1 = \frac{171.5 - 191.8}{6.48} = -3.13; \quad z_2 = \frac{175.5 - 191.8}{6.48} = -2.51; \quad x_3 = \frac{179.5 - 191.8}{6.48} =$$

= - 190, ETC.

$$P(-3.13 \leq z \leq -2.51) = 0.0051; \quad P(-2.51 \leq z \leq -1.90) = 0.0227;$$

$$P(-1.90 \leq z \leq -1.28) = 0.0716, \text{ ETC.}$$

$$462 \times 0.0051 = 2.4; \quad 462 \times 0.0227 = 10.5; \quad 462 \times 0.0716 = 33.1, \text{ ETC.}$$

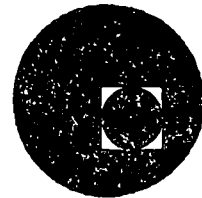
INTERVALO DE VALORES DE X, EN MM	NUMERO DE OBSERVACIONES (frecuencia, f)	INTERVALO DE $Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$	PROBABILIDAD $P(z_1 \leq z \leq z_2) = P$	FRECUENCIA ESPERADA = 462 P
171.5-175.5	3	(-3.13) - (-2.51)	0.0051	2.4
175.5-179.5	9	(-2.51) - (-1.90)	0.0227	10.5
179.5-183.5	29	(-1.90) - (-1.28)	0.0716	33.1
183.5-187.5	76	(-1.28) - (-0.66)	0.1543	71.3
187.5-191.5	104	(-0.66) - (-0.05)	0.2255	104.2
191.5-195.5	110	(-0.05) - 0.57	0.2356	108.8
195.5-199.5	88	0.57 - 1.19	0.1673	77.3
199.5-203.5	30	1.19 - 1.80	0.0811	37.5
203.5-207.5	6	1.80 - 2.42	0.0281	13.0
207.5-211.5	4	2.42 - 3.04	0.0066	3.0
211.5-215.5	2	3.04 - 3.66	0.0011	0.5
215.5-219.5	1	3.66 - 4.27	0.0001	0.0

TOTAL: 462

TOTAL: 461.6



centro de educación continua
división de estudios superiores
facultad de ingeniería, unam



SISMOLOGIA Y SISMICIDAD

AMPLIFICACION DE ONDAS DE RAYLEIGH

S. E. RUIZ

L. ESTEVA

JULIO, 1978

AMPLIFICACION DE ONDAS DE RAYLEIGH

S. E. Ruiz
L. Esteva

RESUMEN

Se analiza la forma en que la presencia de un manto superficial de material compresible afecta las características del movimiento causado por ondas sísmicas de Rayleigh. Los valores de las funciones de amplificación obtenidos se comparan con valores que resultan de emplear el modelo usual unidimensional de ondas de cortante que viajan verticalmente. Se utiliza un modelo numérico bidimensional, y se plantea una formulación mixta de las condiciones de frontera que limitan dicho modelo a un espacio finito.

ABSTRACT

An analysis is presented of the influence of a soft surface layer on the motion produced by seismic Rayleigh waves. Discrete amplification values are compared with those arising from the conventional unidimensional model of vertically-traveling shear waves. A two-dimensional finite-element model is adopted, and a mixed formulation of boundary conditions is used in order to work within a finite space.

* Instituto de Ingeniería, UNAM.

AMPLIFICACION DE ONDAS DE RAYLEIGH

S. E. Ruiz
L. Esteva

1. INTRODUCCION

En la estimación de riesgo sísmico, entre otros problemas de ingeniería, es necesario predecir las características de los temblores en sitios dados, a partir de magnitud y distancia entre foco y sitio. Tal predicción se hace con frecuencia en dos etapas: la primera se refiere a terreno firme y la segunda toma en cuenta la influencia de las condiciones locales.

Estudios recientes (ref 1-4) indican que una parte importante de la energía sísmica originada en un foco poco profundo se propaga en forma de ondas superficiales, tanto a largas distancias como en el campo cercano. La forma en que las condiciones locales, tales como la presencia de mantos de material compresible, afecta las características de los

movimientos sísmicos depende del tipo y dirección de los trenes de ondas que llegan a cada sitio (ref 5, 12); sin embargo, la mayor parte de los estudios relativos a la influencia citada suele tomar en cuenta únicamente las ondas transversales que inciden verticalmente en la superficie de contacto entre las formaciones blandas y el terreno firme.

Los estudios sistemáticos sobre la forma en que las condiciones locales afectan las amplitudes de ondas superficiales datan de unos cuantos años (ref 6-10), y en la mayor parte de los casos se refieren a ondas de Love. En este trabajo se estudia la influencia de mantos de material compresible en los movimientos del terreno causados por ondas de Rayleigh. Para ello, se obtienen puntos discretos de las funciones de amplificación en el dominio de la frecuencia, obtenidas como cocientes de las amplitudes máximas del movimiento en la superficie del material compresible y las que se presentarían en terreno firme, de no ser modificadas por la presencia de dicho material. Las funciones de amplificación que se estudian corresponden a ondas armónicas estacionarias de diversas frecuencias. Estas funciones se comparan con las que resultan de emplear el modelo usual (unidimensional) que supone ondas transversales que inciden verticalmente.

En vista de que las funciones de amplificación son sensibles al tipo de onda, el empleo de las primeras para estudiar la influencia de condiciones locales ante excitaciones sísmicas requiere el conocimiento de la fracción de la energía que llega a la vecindad del sitio de interés en

diversos tipos de ondas. Este problema ha recibido poca atención por parte de ingenieros y deberá ser objeto de estudios futuros.

2. ANALISIS DE RESPUESTA

2.1 Condiciones locales

La fig 1 muestra la configuración de los casos analizados. En cada uno de ellos se supone que un tren de ondas de Rayleigh se propaga bajo condiciones de deformación plana por el medio homogéneo, a la izquierda de la figura, hasta incidir sobre la frontera DEF que separa el medio homogéneo citado (en adelante llamado terreno firme) del manto de material compresible que se encuentra en la parte superior derecha. Se obtiene la relación entre las amplitudes máximas del movimiento del terreno en diversos puntos de la superficie DB y la amplitud de las ondas de llegada en A, para diversas frecuencias de dichas ondas y diversas combinaciones de propiedades mecánicas de los dos medios. El análisis se limita a la condición de sistemas lineales sin viscosidad. Los resultados se comparan con las funciones de amplificación correspondientes a ondas transversales y longitudinales que viajan en dirección vertical.

2.2 Modelo numérico

Se adoptó el criterio de análisis de respuesta compleja en el dominio de la frecuencia. Para ello, se definió un modelo de elementos finitos, con las condiciones de frontera que se describen más adelante, y

se establecieron las ecuaciones de equilibrio dinámico para las condiciones de excitación correspondientes a la llegada, de izquierda a derecha, de ondas de Rayleigh de distintas frecuencias. La relación entre máxima dimensión lineal de los elementos finitos y la mínima longitud de onda excitadora nunca excedió de 4/15. El límite recomendado para los casos en que el análisis se lleva a cabo por criterios de propagación de ondas es 1/12 (ref 11).

2.3 Condiciones de frontera

Si las ondas que entran y salen por una frontera dada son de igual tipo y dirección de propagación, es posible representar las condiciones de frontera mediante sistemas de amortiguadores viscosos. En otros casos tal representación puede lograrse sólo de manera aproximada. En este trabajo se plantea una formulación mixta, en que se estipulan de manera exacta los esfuerzos de las ondas de entrada y se ponen en forma aproximada las condiciones de frontera para las ondas de salida, de tipo y dirección desconocidos.

Considérese una frontera plana, un sistema conocido de ondas penetrando a través de ella a la región R que interesa estudiar, y un sistema desconocido abandonándola (fig 3). Sean σ_1 y τ_1 los esfuerzos normal y tangencial sobre la frontera que resultan del sistema de ondas ini-dentas, y sean σ_2 y τ_2 los que corresponden a las ondas que salen. Defínanse los ejes ξ y η como en la fig 3, y sean u y v los despla-

zamientos paralelos a cada uno de ellos. Los esfuerzos σ_1 y τ_1 se calculan en términos de las expresiones analíticas de las ondas incidentes; σ_2 y τ_2 pueden expresarse en forma sencilla en términos de las velocidades de los puntos de la frontera, si se introducen hipótesis simplificadoras.

Supóngase que σ_2 está provocado por ondas planas longitudinales que viajan paralelamente al eje η . Sean c_p la velocidad de propagación de dichas ondas y v_2 el correspondiente desplazamiento paralelo al eje η . Se tiene

$$\sigma_2 = (\lambda + 2G) \frac{\partial v_2}{\partial \eta} \quad (1)$$

Por otra parte,

$$\frac{\partial v_2}{\partial \eta} = \frac{1}{c_p} \frac{\partial v_2}{\partial t} = \frac{\dot{v}_2}{c_p}$$

teniendo en cuenta que $c_p^2 = (\lambda + 2G)/\rho$, en donde ρ es densidad del material, se obtiene

$$\sigma_2 = -\rho c_p \dot{v}_2 \quad (2)$$

El desplazamiento v es la suma de las contribuciones v_1 y v_2 de las ondas que entran y salen de R. Por lo tanto, $\dot{v}_2 = \dot{v} - \dot{v}_1$, y el esfuerzo resultante en un punto de la frontera AB se determina aproximadamente como sigue:

$$\begin{aligned} \sigma &= \sigma_1 + \sigma_2 = \sigma_1 - \rho c_p (\dot{v} - \dot{v}_1) \\ &= \sigma_1 + \rho c_p \dot{v}_1 - \rho c_p \dot{v} \end{aligned} \quad (3)$$

Es decir, la condición de frontera equivale a considerar un conjunto de amortiguadores viscosos, actuando paralelamente al eje η . La constante de disipación de dichos amortiguadores vale $\rho \cdot c_p$ por unidad de área en el plano de la frontera. Además, sobre la frontera debe aplicarse un esfuerzo igual a $\sigma_1 + \rho c_p \dot{v}_1$.

Un razonamiento análogo conduce a la siguiente condición de frontera referida a esfuerzos tangenciales, en donde c_s es la velocidad de propagación de las ondas transversales.

$$\tau = \tau_1 + \rho c_s \dot{u}_1 - \rho c_s \dot{u} \quad (4)$$

En ciertos casos es posible suponer que la mayor parte de la energía que sale por una frontera está asociada con ondas de tipo y dirección de propagación conocidos. En tal caso, las ecs 3 y 4 se modifican como sigue:

$$\sigma = \sigma_1 + a \rho c_p \dot{v}_1 - a \rho c_p \dot{v} \quad (5)$$

$$\tau = \tau_1 + b \rho c_s \dot{u}_1 - b \rho c_s \dot{u} \quad (6)$$

Aquí, a y b son parámetros que pueden depender o no de la frecuencia, de acuerdo con el tipo de ondas. Para el caso de ondas de Rayleigh en un medio homogéneo (parte izquierda de la fig 1), dichos parámetros fueron determinados por Lysmer y Kuhlemeyer (ref 11) y están dados por las expresiones siguientes (fig 4).

$$a(kz) = \frac{n}{s} \left[1 - \left(\frac{1 - 2s^2}{k} \right) \frac{g'(kz)}{f(kz)} \right] \quad (7)$$

$$b(kz) = n \left[1 + \frac{f'(kz)}{k g(kz)} \right] \quad (8)$$

donde

$$n = 1.08766, \text{ para M\u00f3dulo de Poisson } \nu = 0.25$$

$$s^2 = \text{constante el\u00e1stica} = \frac{1 - 2\nu}{2(1 - \nu)}$$

k = n\u00famero de onda, es decir, relaci\u00f3n entre frecuencia de oscilaci\u00f3n y velocidad de propagaci\u00f3n

$f(kz)$ = variaci\u00f3n del desplazamiento horizontal con la profundidad de una onda Rayleigh en medio homog\u00e9neo

$g(kz)$ = variaci\u00f3n del desplazamiento vertical con la profundidad de una onda Rayleigh en medio homog\u00e9neo

$$f'(kz) = \frac{df}{dz}$$

$$g'(kz) = \frac{dg}{dz}$$

Cuando las ondas de entrada y de salida corresponden al mismo tipo de ondas y direcci\u00f3n de propagaci\u00f3n, se obtiene

$$\sigma = 2 a \rho c_p \dot{v}_1 - a \rho c_p \dot{v} \quad (9)$$

$$\tau = 2 b \rho c_s \dot{u}_1 - b \rho c_s \dot{u} \quad (10)$$

y las condiciones de frontera consisten en el doble sistema de amortiguadores de efectos longitudinales y de cortante, con constantes respectivas $a \rho c_p$, y $b \rho c_s$ por unidad de ancho, sometidos en su base a desplazamientos iguales al doble de los correspondientes a las ondas de llegada.

Los principios anteriores se aplican a continuación a las fronteras AA', BB' y CC' de la fig 2.

Frontera AA'

σ_1 y τ_1 corresponden a las ondas incidentes de Rayleigh (ref 11), para $x = 0$ y z variable:

$$\sigma_1 = k \left[(\lambda + 2G) f(kz) + \lambda g'(kz) \right] e^{i\omega t} \quad (11)$$

$$\tau_1 = Gki \left[f'(kz) - g(kz) \right] e^{i\omega t} \quad (12)$$

Para las ondas de salida se adoptaron en este caso los valores $a = 1$,

$b = 1$ en las ecs 5 y 6.

Frontera BB'

Como en el caso anterior, σ_1 y τ_1 corresponden a ondas incidentes de Rayleigh, pero ahora sus valores corresponden a $z = z_0$ y x variable:

$$\sigma_1 = k \left[(\lambda + 2G) f(kz_0) + \lambda g'(kz_0) \right] e^{i(\omega t - kx)} \quad (13)$$

$$\tau_1 = Gki \left[f'(kz_0) - g(kz_0) \right] e^{i(\omega t - kx)} \quad (14)$$

Para ondas de salida se tomaron $a = 1$, $b = 1$.

Los esfuerzos σ_1 y τ_1 debidos a ondas de Rayleigh son muy pequeños a profundidades mayores que vez y media su longitud de onda. Dado que en el caso en estudio la frontera BB' se colocó a una profundidad $z_0 = 2H$, los esfuerzos en cuestión serán despreciables para ondas de Rayleigh in-

cidentes con longitud de onda menor que H.

Frontera CC'

En este caso, σ_1 y τ_1 son nulos. Para determinar a y b se siguió la formulación de Lysmer y Kuhlemeyer (ref 11), considerando las configuraciones que corresponden al movimiento causado por ondas Rayleigh al viajar a través de un medio estratificado (ref 14). Las expresiones (17) y (18) siguen siendo válidas, con los correspondientes valores de f y g asociados a un medio compresible que está soportado por un medio semi-infinito homogéneo, a saber,

$$f = -k (P \cosh Rz + Q \sinh Rz) + S(A \sinh Rz + B \cos Rz)$$

$$g = R(P \sinh Rz + Q \cosh Rz) - k(A \cosh Sz + B \sinh Sz),$$

para el estrato superior, y,

$$f = -kP'e^{rz} + sA'e^{sz}$$

$$g = rP'e^{rz} - kA'e^{sz}$$

para el medio subyacente

Donde,

P, Q, A, B, P', A' son constantes que se obtienen de las condiciones de frontera en la interfase y en la superficie libre (ref 13).

$$2\pi / \Omega \quad \text{período de las ondas,}$$

$$2\pi / k \quad \text{longitud de onda,}$$

$$V_r \quad \text{velocidad de ondas Rayleigh,}$$

k_1, k_2 número de onda de cortante, manto superficial y subyacente,

h_1, h_2 número de onda longitudinal, manto superficial y subyacente,

$$S^2 = k^2 - k_1^2; \quad s^2 = k^2 - k_2^2$$

$$R^2 = k^2 - h_1^2; \quad r^2 = k^2 - h_2^2$$

$k = \frac{\Omega}{V_r}$, número de onda, obtenida a partir de la ecuación característica o de las curvas de dispersión correspondientes

En este trabajo se analizan casos en los que $k^2 > k_1^2 > h_1^2$.

Para el caso extremo en que las propiedades de los dos medios son iguales, las respuestas obtenidas del análisis de un modelo como el de la fig 2, con condiciones de frontera según los criterios expuestos en los párrafos anteriores, concuerdan razonablemente con las obtenidas analíticamente para un medio homogéneo.

3. VALORES DE LA AMPLIFICACION

3.1 Casos analizados

En las figs 5 a 8 se presentan amplificaciones para diversos puntos en la superficie del manto superior, para cada frecuencia estudiada de las ondas de llegada, y en la fig 9 el valor máximo de la amplificación, sin importar el punto en donde se presenta. Las amplificaciones se comparan con las que se obtendrían según el modelo unidimensional de propagación vertical de ondas de cortante. En ambos casos, la amplifica-

ción se calcula como el cociente de la amplitud del desplazamiento para las condiciones estudiadas entre la que se presentaría de no ser afecta da por las condiciones locales.

La amplificación que sufren los desplazamientos de los puntos ubicados en el manto superficial (fig 1), con respecto a puntos ubicados en el me dio circundante, varía con la longitud de ondas incidentes y con la rela ción de impedancias* existente entre los dos medios. A fin de cono cer la influencia de estos parámetros se estudiaron casos con rela ciones de impedancias igual a 0.22, 0.35, 0.58 y 0.73, excitados por ondas incidentes con frecuencias iguales a las primeras frecuencias na turales del estrato superior idealizado mediante un modelo unidimensio nal con comportamiento semejante al de una viga de cortante.

3.2 Resultados

De los análisis hechos se puede observar lo siguiente

- a) Para una frecuencia de excitación dada, la amplificación máxima disminuye a medida que la relación de impedancias entre el manto superficial y el que lo soporta aumen ta (fig 9).
- b) La amplificación máxima de la componente horizontal pa ra una frecuencia de excitación y una relación de impedan

* Se entiende por impedancia el producto de la densidad de masa por la velocidad de ondas de cortante de un medio ($\rho_i \cdot V_{Si}$). En este trabajo el numerador de la relación de impedancias corresponde a las propiedades del manto superficial.

cias dadas, es en general mayor que la de la componente vertical, siendo más importante la diferencia para relaciones pequeñas de impedancia entre los medios (fig 9).

- c) Para relaciones de impedancia de 0.73, y longitudes de onda de 0.52 H y 0.76 H la amplitud es menor que en el medio circundante (fig 8a y b). Para esta misma relación de impedancias y longitud de onda de 1.25 H no existe amplificación sensible (fig 8c).
- d) La amplificación máxima de la componente de movimiento horizontal causada por ondas Rayleigh que inciden horizontalmente sobre dos medios con las características geométricas antes descritas y con relaciones de impedancia pequeñas (≤ 0.35), es mayor que la obtenida del análisis de un modelo unidimensional con incidencia vertical de ondas de cortante, para las primeras frecuencias naturales del manto superficial. Para otras relaciones de impedancias, las amplificaciones de las ondas de Rayleigh pueden ser menores que las de las ondas de cortante. Los resultados del análisis de un modelo unidimensional se indican con flechas horizontales en la fig 9.

- e) Las figs 5 a 8 muestran que aun para distancias horizontales iguales a cinco veces el espesor del estrato superior ocurren variaciones importantes de amplitud de un punto a otro. En parte, tales variaciones se deben a la perturbación local ocasionada por la discontinuidad entre los dos medios en el tramo DE (fig 2). Es posible que las aproximaciones implícitas en las condiciones de frontera (fig 2) sean en parte responsables de las fluctuaciones en cuestión. Esto sugiere la conveniencia de desarrollar criterios de análisis para este problema en donde no haya que recurrir a condiciones de frontera como las citadas.
- f) Para el rango de relaciones entre longitudes de onda y espesor del manto superficial (λ_1 / H) estudiado, es posible la existencia de las ondas M_2 de Sezawa (ref 14); sin embargo, estas no se consideraron en este estudio.

4. CONCLUSIONES

Las amplificaciones del movimiento sísmico causadas por la presencia de estratos de material de baja rigidez son muy sensibles a los tipos de ondas que causan el movimiento en cuestión. A fin de predecir la influencia de las condiciones locales en las características de los temblores que pueden esperarse en un sitio dado es deseable estimar la

contribución de los distintos tipos de ondas a dichos temblores. Como es muy difícil extraer esta información de los registros de sismos reales, debe acudirse al desarrollo de modelos analíticos que simulen la fuente sísmica y la propagación de las ondas hasta la vecindad del sitio de interés.

Dada la escasez de resultados analíticos sobre la amplificación de ondas de Rayleigh en condiciones comparables a las que aquí se estudian, no fue posible estimar la precisión de los resultados que aquí se incluyen; ni determinar los errores que pueden haberse introducido como consecuencia de las aproximaciones implícitas en las condiciones de frontera; pero se verificó que para el caso de propiedades iguales para estrato superficial y manto inferior la solución concordaba exactamente con la del medio semi-infinito.

5. RECONOCIMIENTO

En la formulación de los programas de computadora se utilizó material proporcionado por G Ayala y R Aranda.

6. REFERENCIAS

1. Trifunac, M D, "Response envelope spectrum and interpretation of strong earthquake ground motion", Bull. Seism. Soc. Am, Vol. 61, No. 2 (1971) pp 343-356.
2. Trifunac, M D, "Investigation of strong earthquake ground motion", Doctoral Thesis, California Institute of Technology, Pasadena, Cal. (1969).

3. Nemani, D y Mal, A K, "Short period surface waves in a layered medium", Sixth World Conference on Earthquake Engng., Delhi (1977).
4. Mal, A K y Duke, C M, "Transfer functions for surface waves", Sixth World Conference on Earthquake Engng., Delhi (1977).
5. Ruiz, S E, "Influencia de las condiciones locales en las características de los sismos", Tesis de Maestría, DESFI-UNAM (1976)
6. Lysmer J y Waas G, "Shear waves in plane infinite structures", J Engng. Mech. Div. ASCE, Vol. 98 (1972), pp 85-105
7. Drake, L A, "Love and Rayleigh waves in non-horizontal layered media", BSSA, Vol. 62, P-2, (1972), pp 1241-1258
8. Drake L A, "Rayleigh waves at a continental boundary by the finite element method", BSSA, Vol. 62, (1972), pp 1259-1268
9. Drake L A, y Mal A K, "Love and Rayleigh waves in the San Fernando Valley", BSSA, Vol 62, P-2 (1972), pp 1673-1690
10. Knopoff L y Hudson J A, "Transmission of Love waves past a continental margin", Journal of Geophysical Research, Vol. 69, No. 8, (1964), pp 1649-1652
11. Lysmer J y Kuhlemeyer R L, "Finite dynamic model for infinite media", Journal of the Engng. Mech. Div. EM4, (1969), pp 859-875
12. Esteva L, "Microzoning: models and reality" contribution to a panel session on ground motion characteristics, Proc. Sixth World Conference Earthquake Eng Delhi (1977)
13. Lee A W, "The effect of geological structure upon microseismic disturbance", Monthly Not. Roy. Astron. Soc.: Geophys Suppl., 3, (1932), pp. 83-105
14. Kanai K, "On the M_2 -waves (Sezawa-waves)", Bull. Earthq. Res. Inst., Vol. XXIV, (1950), pp 39-48

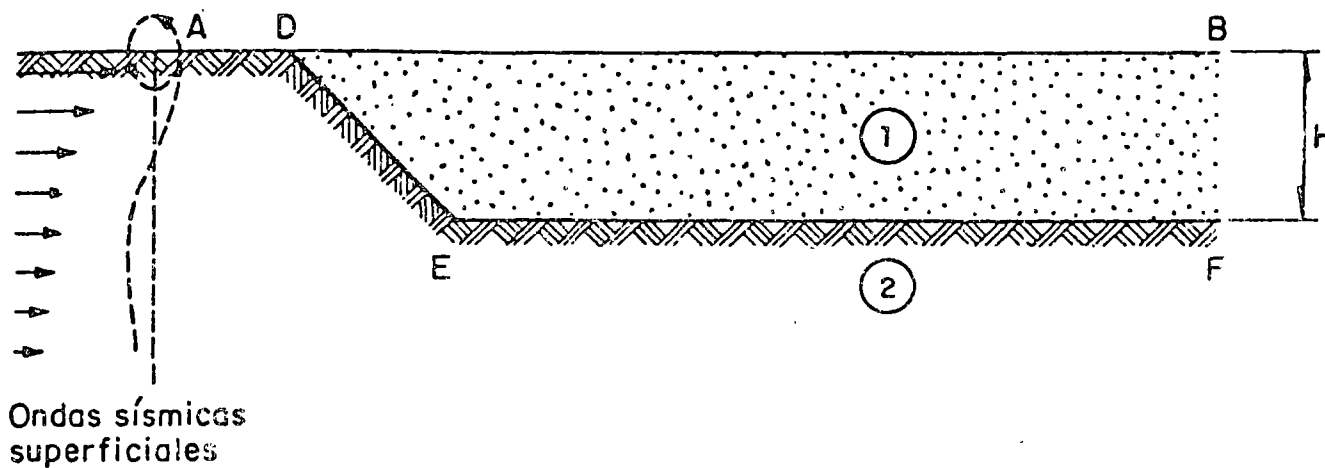


Fig 1 Condiciones locales

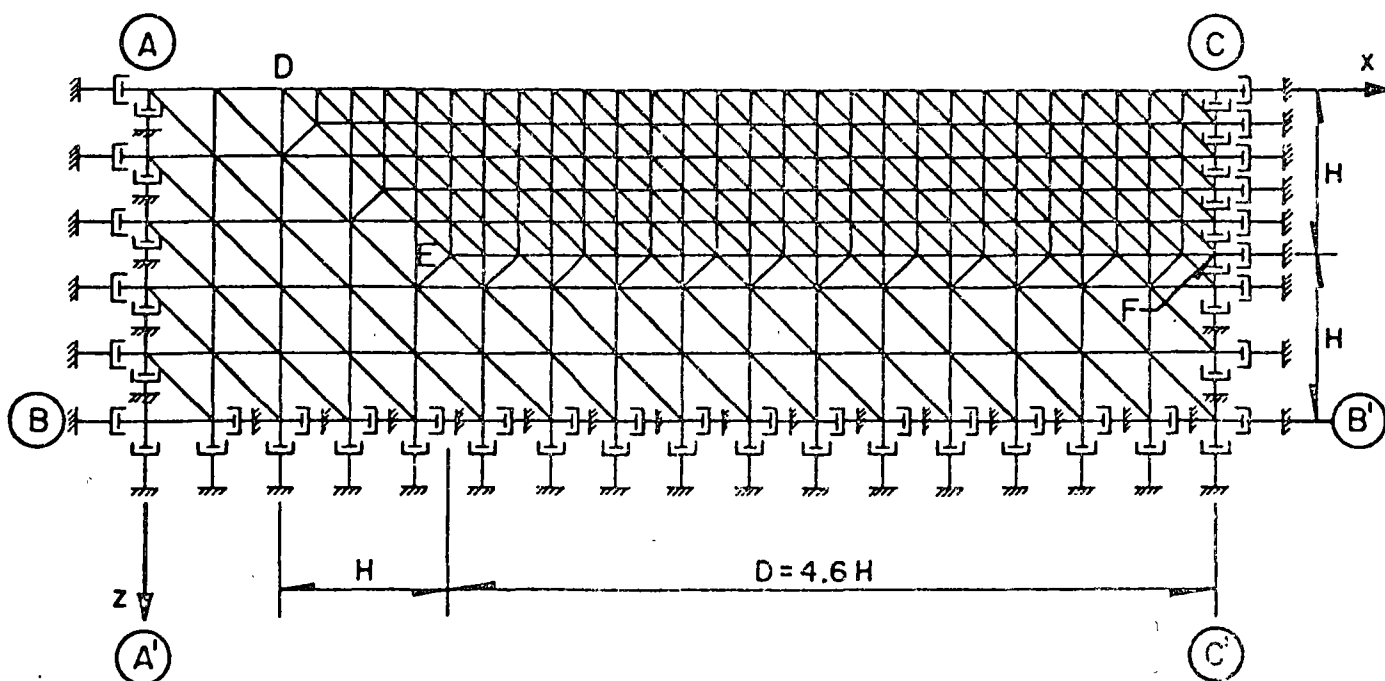


Fig 2 Modelo numérico

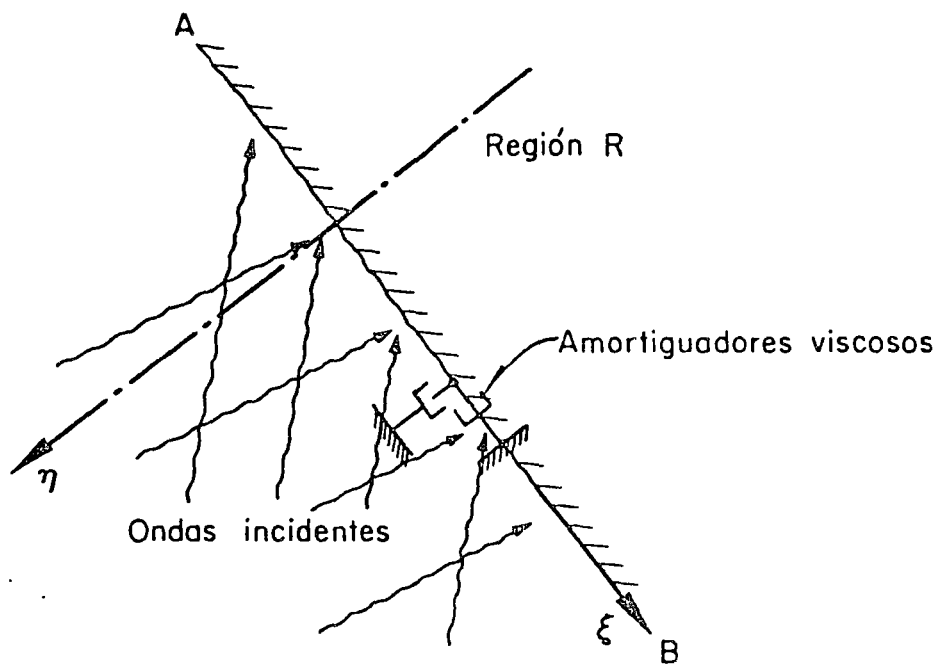


Fig 3 Condiciones de frontera

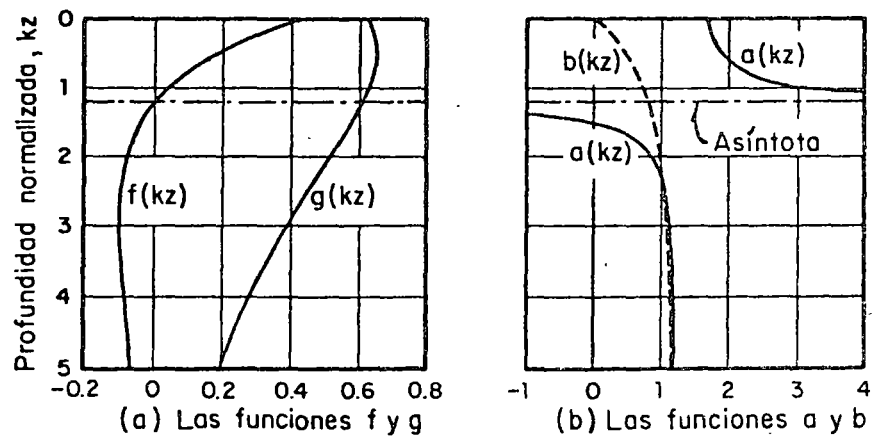


Fig 4 Onda Rayleigh en un semiespacio homogéneo, coeficiente de Poisson = 0.25, (ref 11)

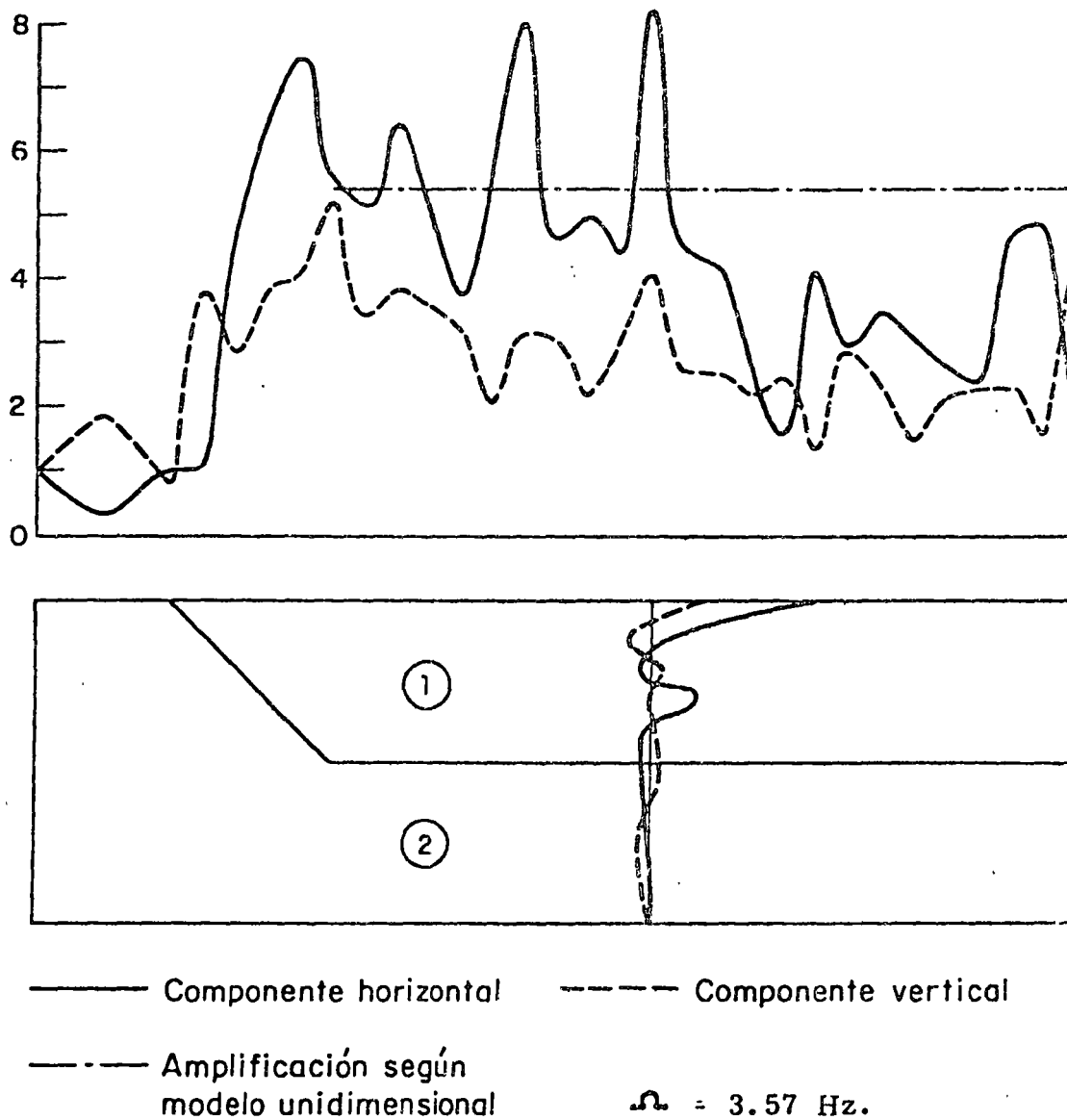


Fig 5a Factor de amplificación de ondas de Rayleigh. Relación de impedancias = 0.22

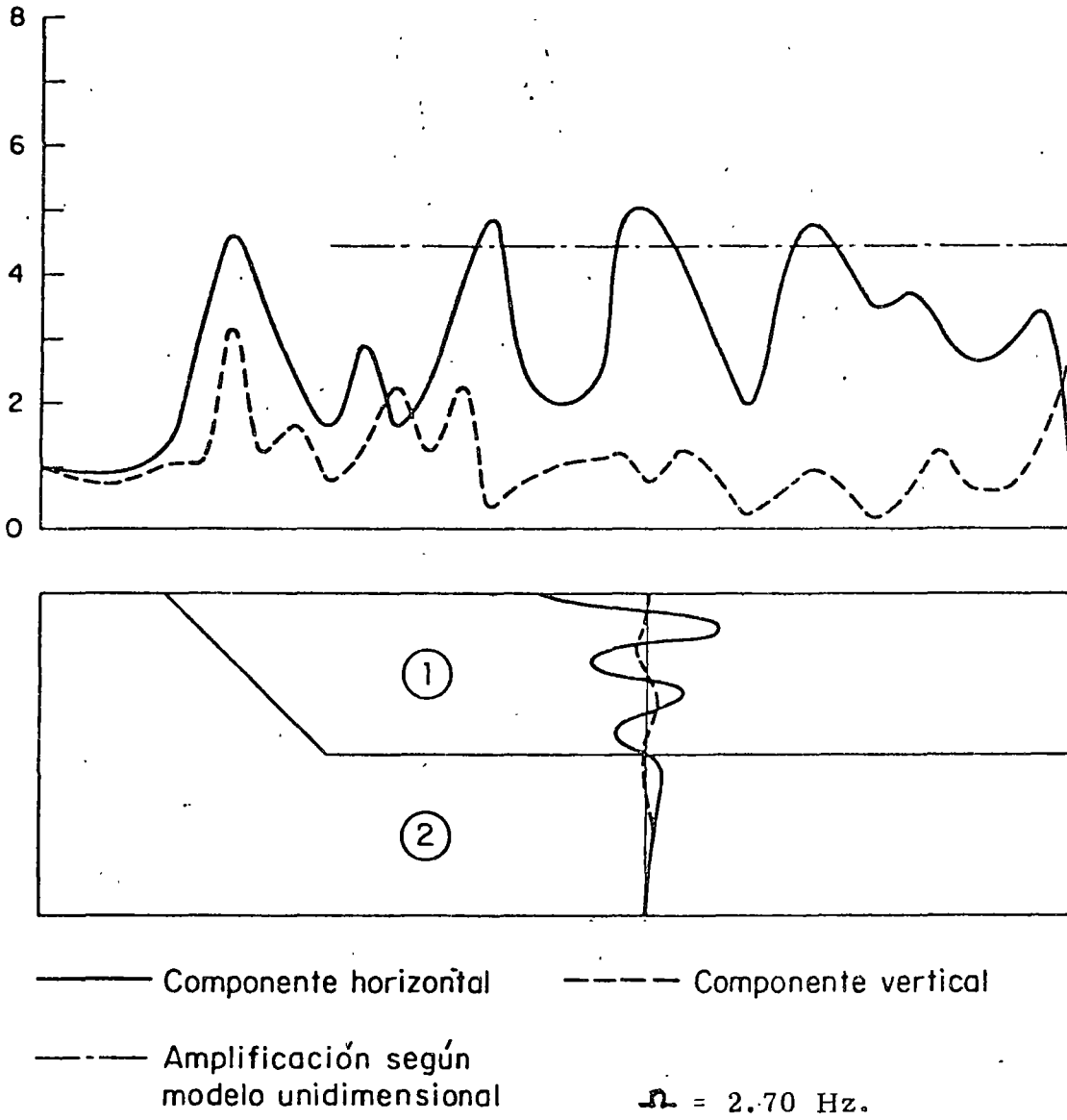


Fig 5b Factor de amplificación de ondas de Rayleigh. Relación de impedancias = 0.22

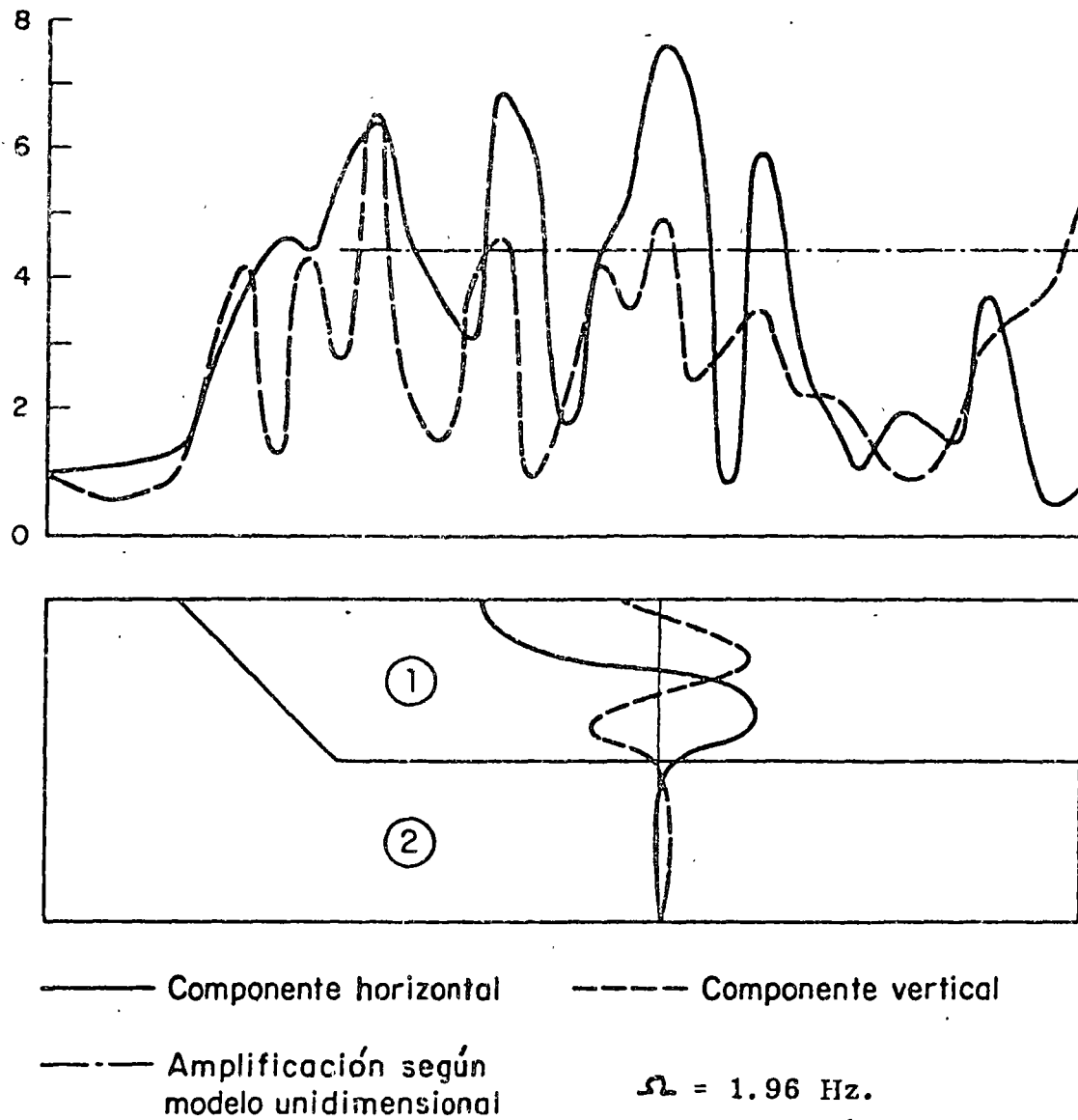


Fig 5c Factor de amplificación de ondas de Rayleigh. Relación de impedancias = 0.22

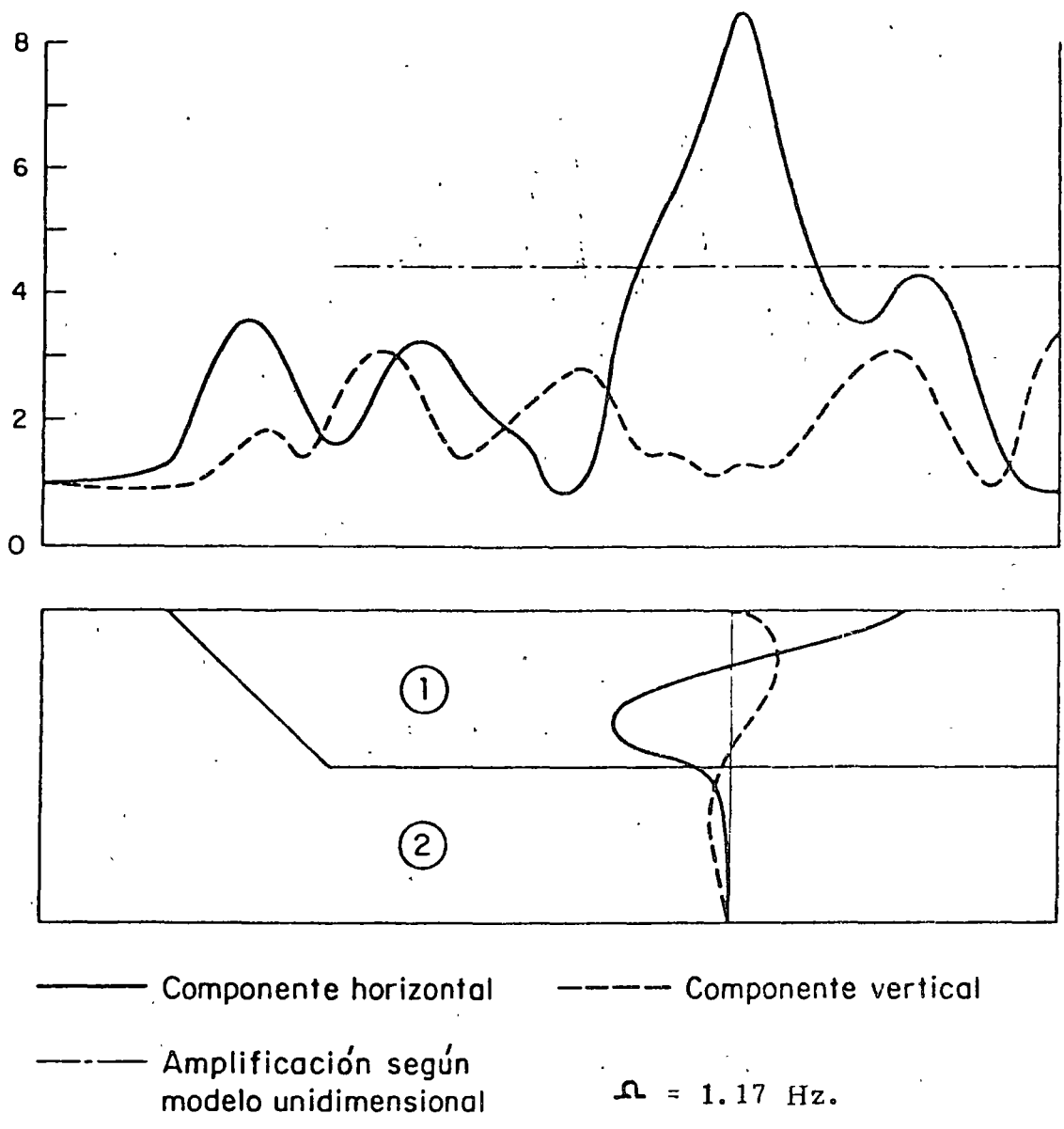


Fig 5d Factor de amplificación de ondas de Rayleigh. Relación de impedancias = 0.22

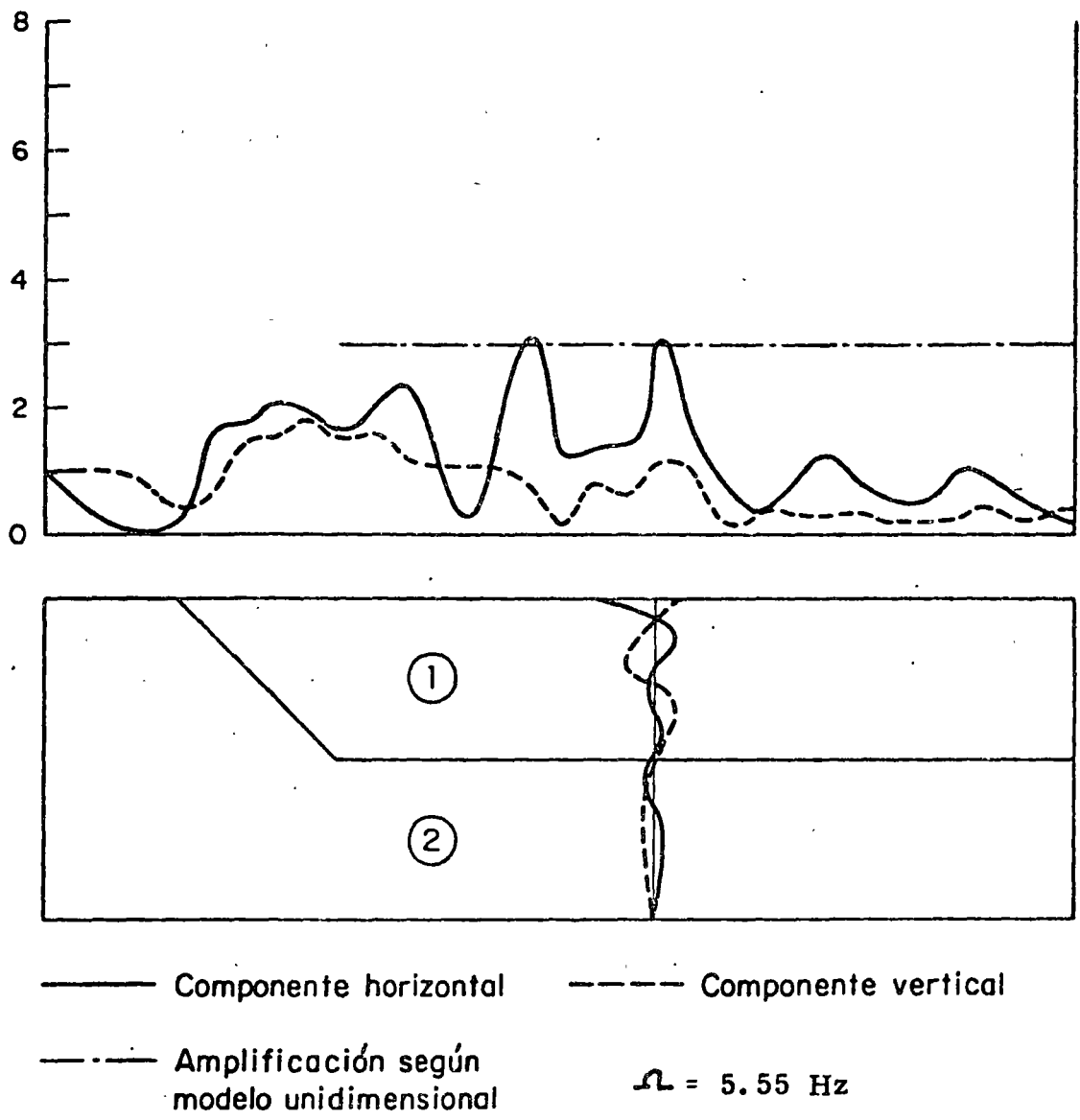


Fig 6a Factor de amplificación de ondas de Rayleigh. Relación de impedancias = 0.35

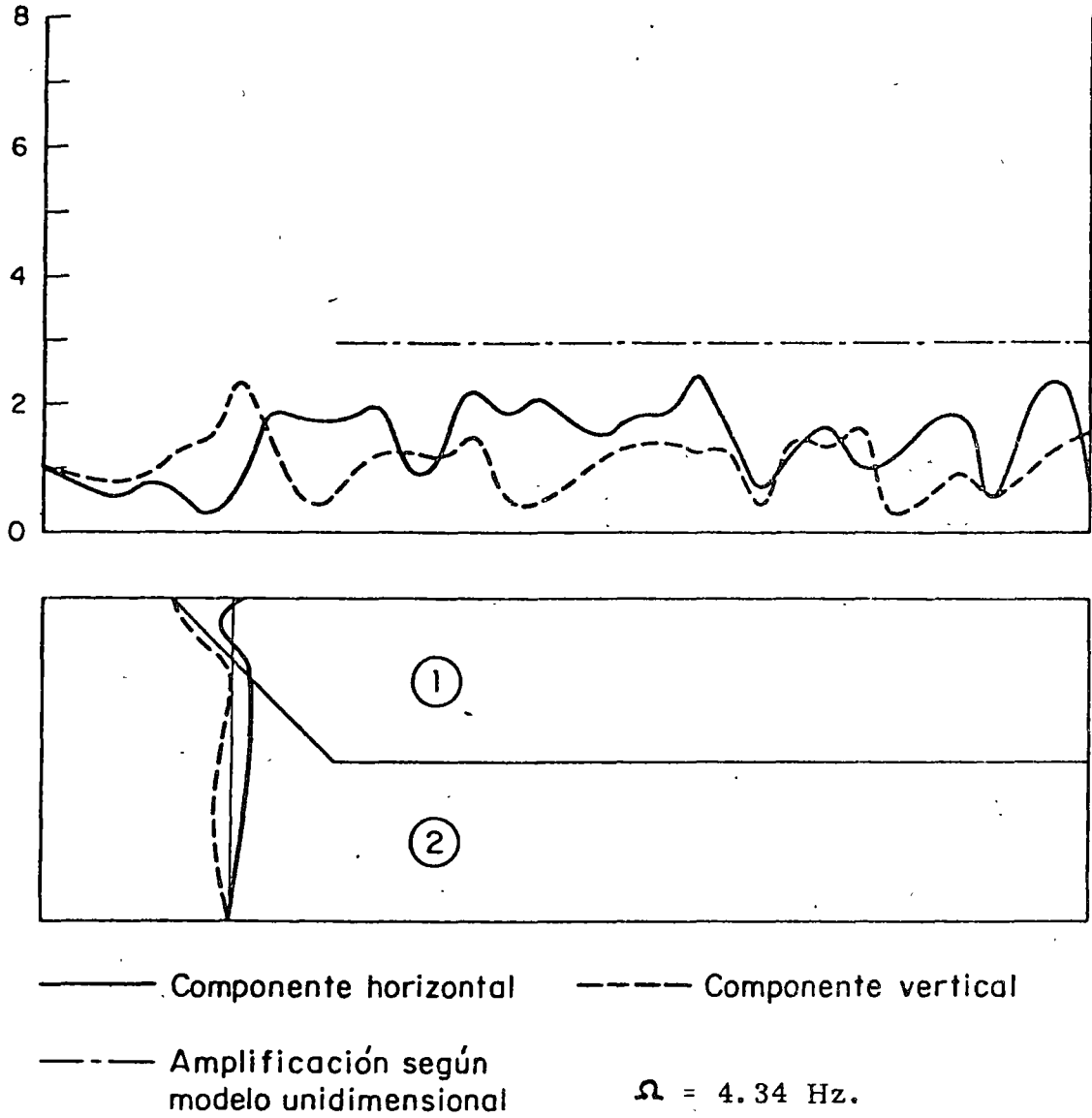


Fig 6b Factor de amplificación de ondas de Rayleigh. Relación de impedancias = 0.35

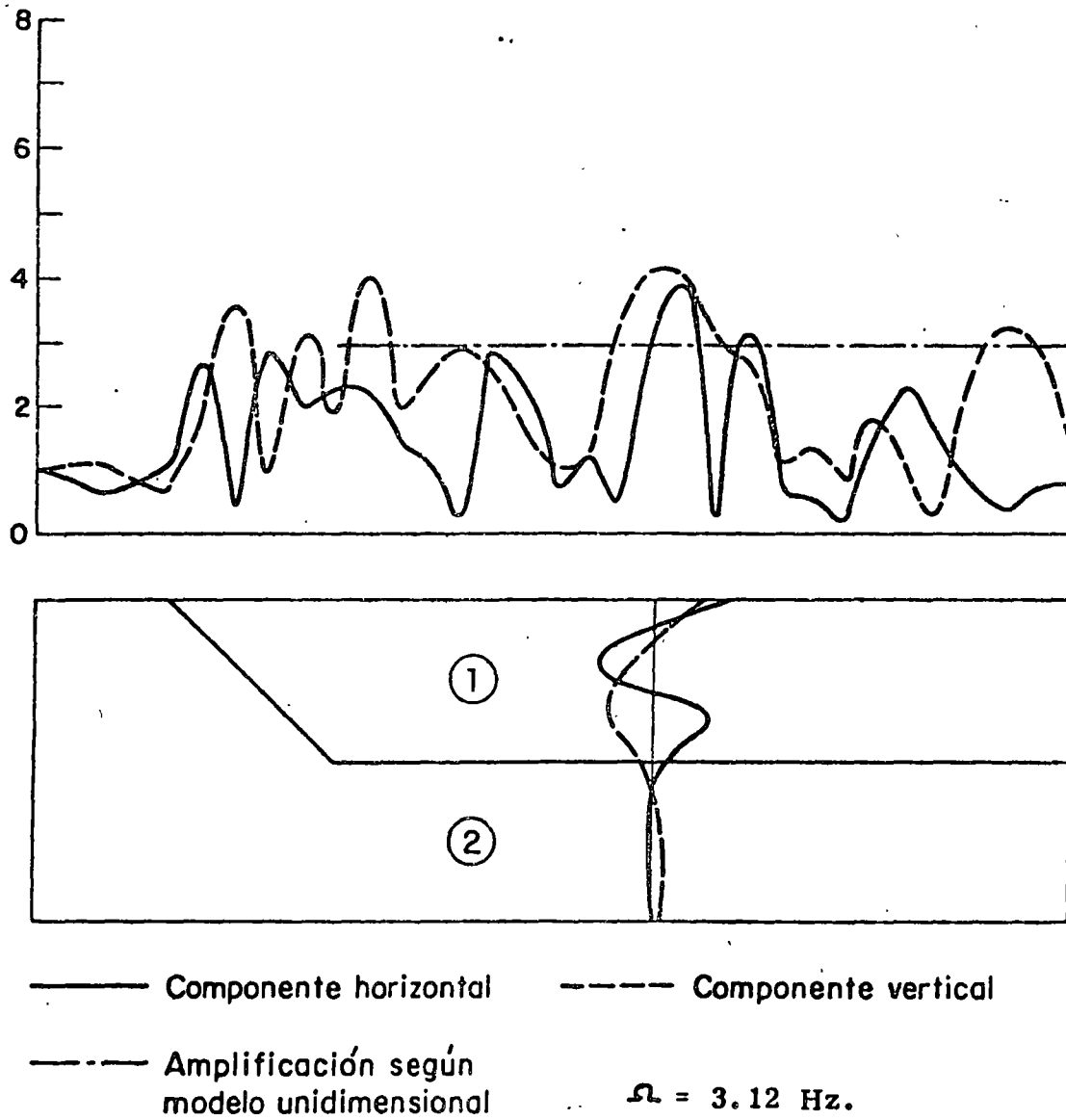


Fig 6c Factor de amplificación de ondas de Rayleigh. Relación de impedancias = 0.35

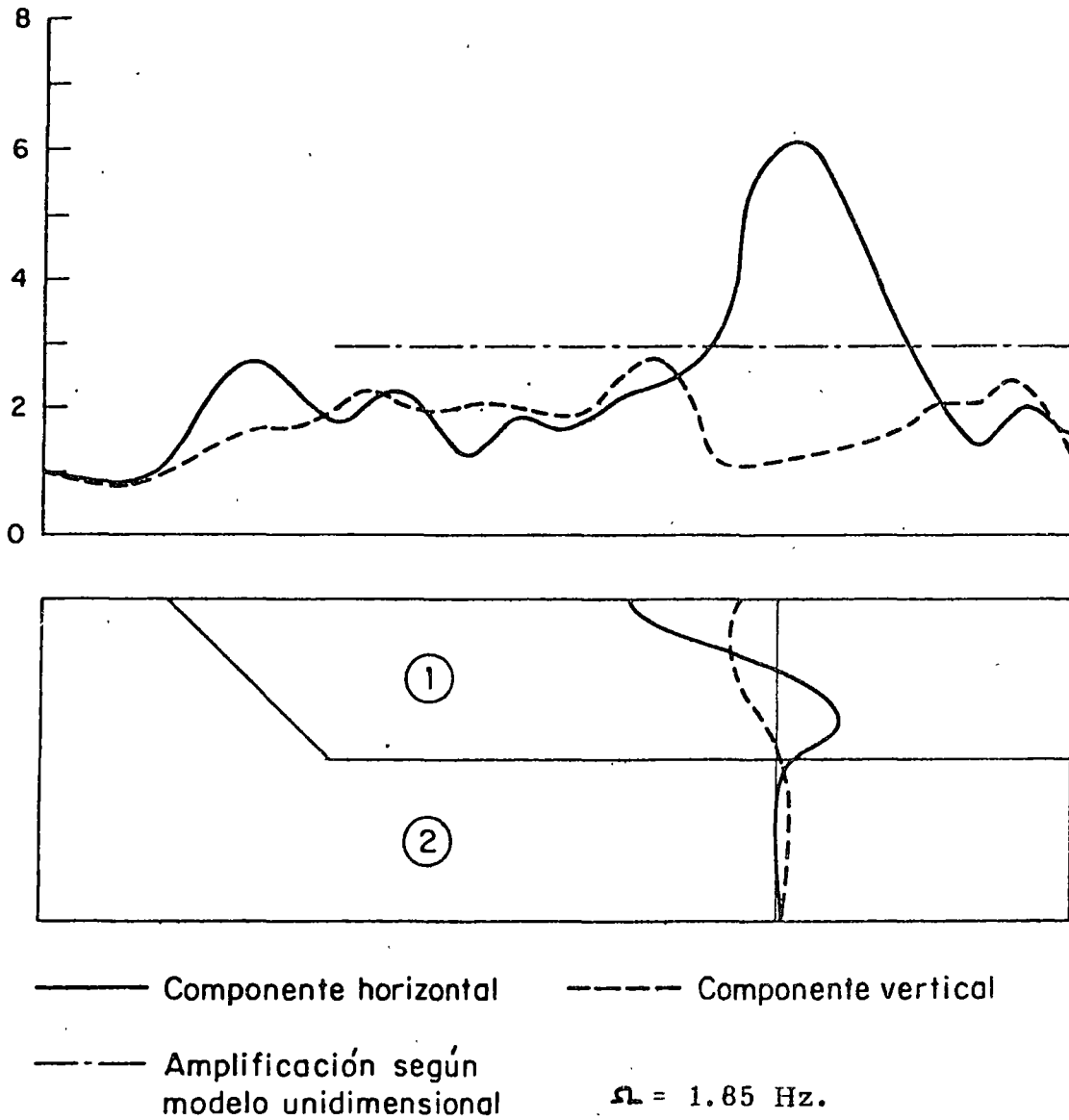


Fig 6d Factor de amplificación de ondas de Rayleigh. Relación de impedancias = 0.35

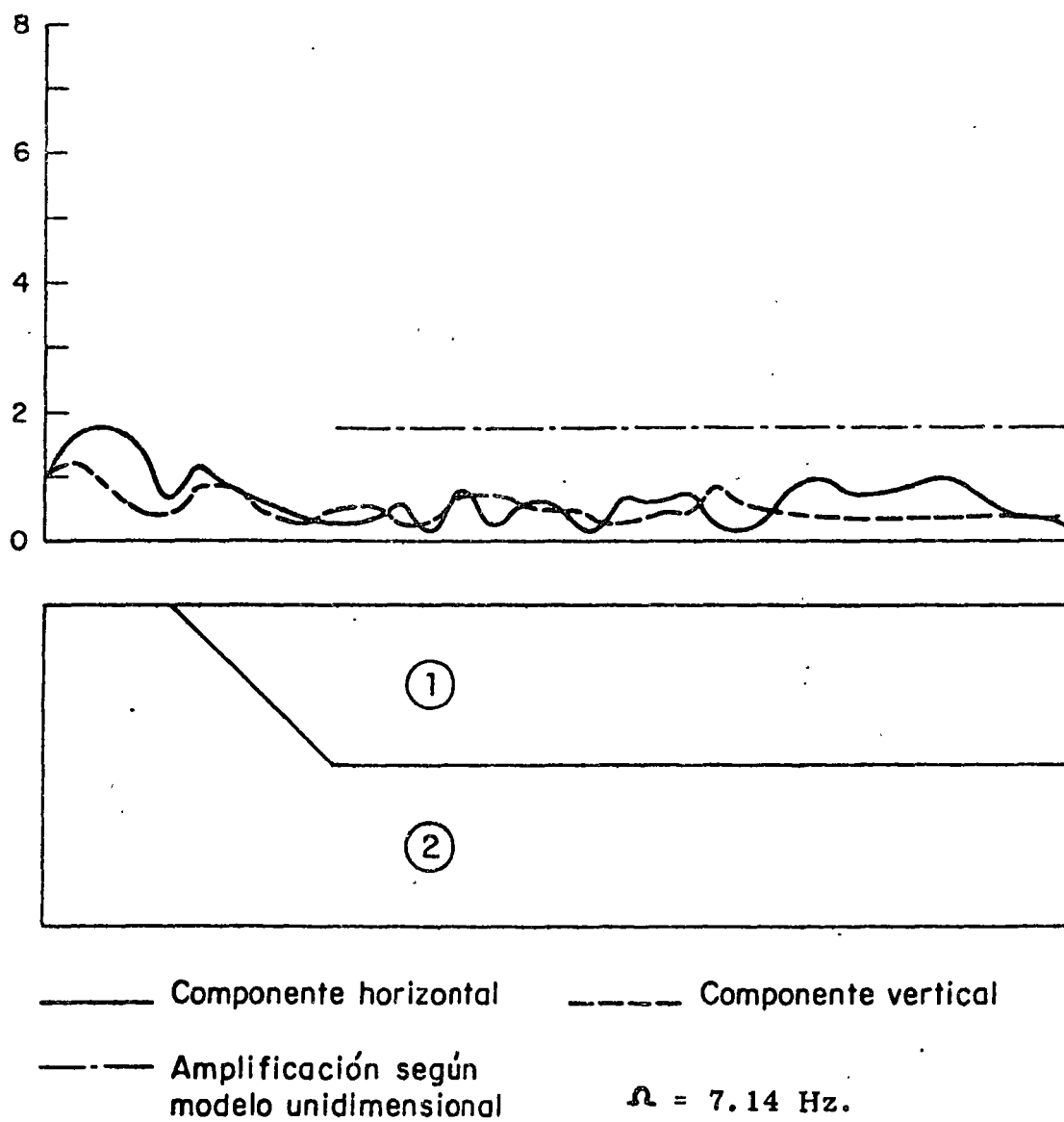


Fig 7a Factor de amplificación de ondas de Rayleigh. Relación de impedancias = 0.57

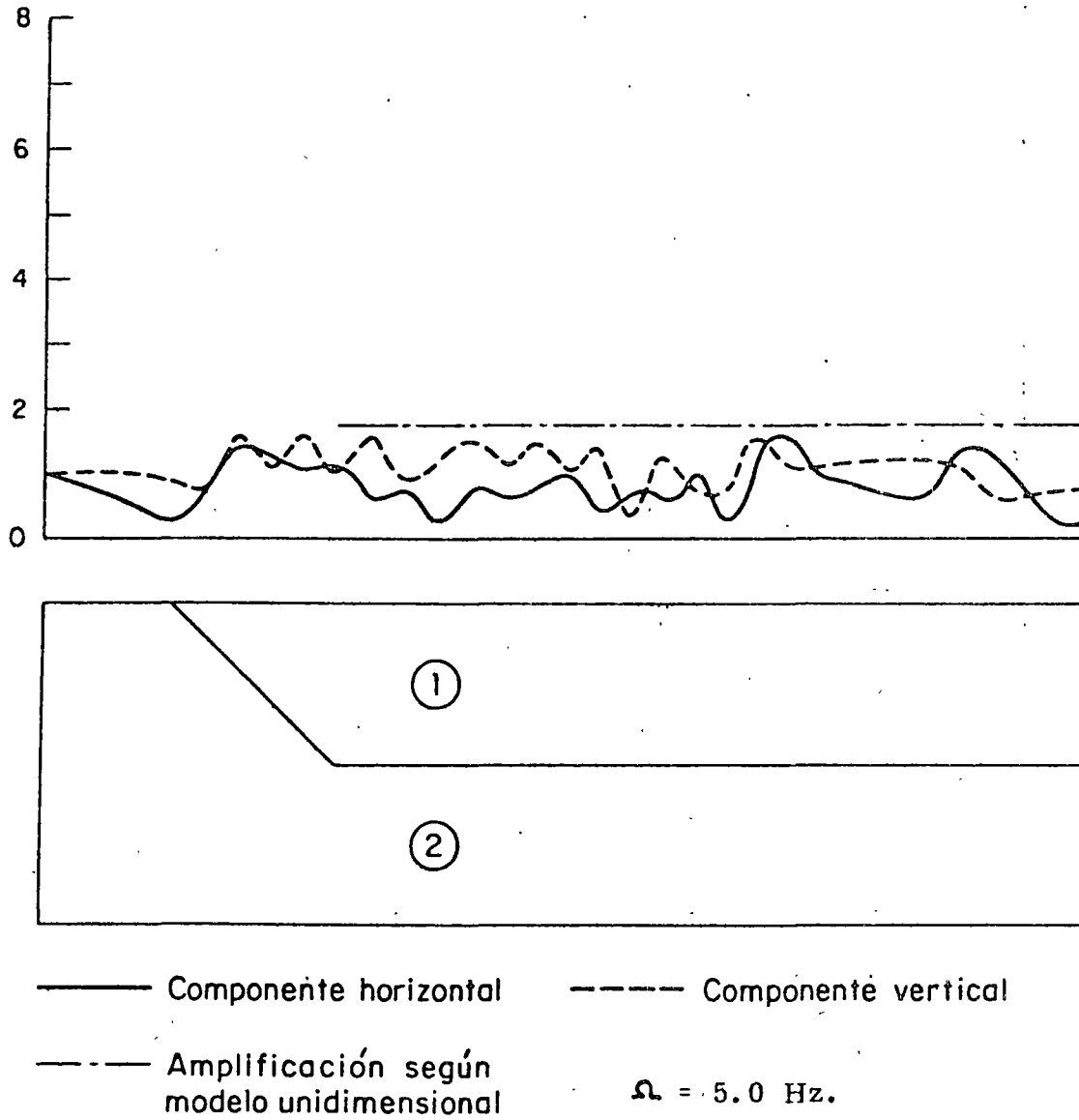


Fig 7b. Factor de amplificación de ondas de Rayleigh. Relación de impedancias = 0.57

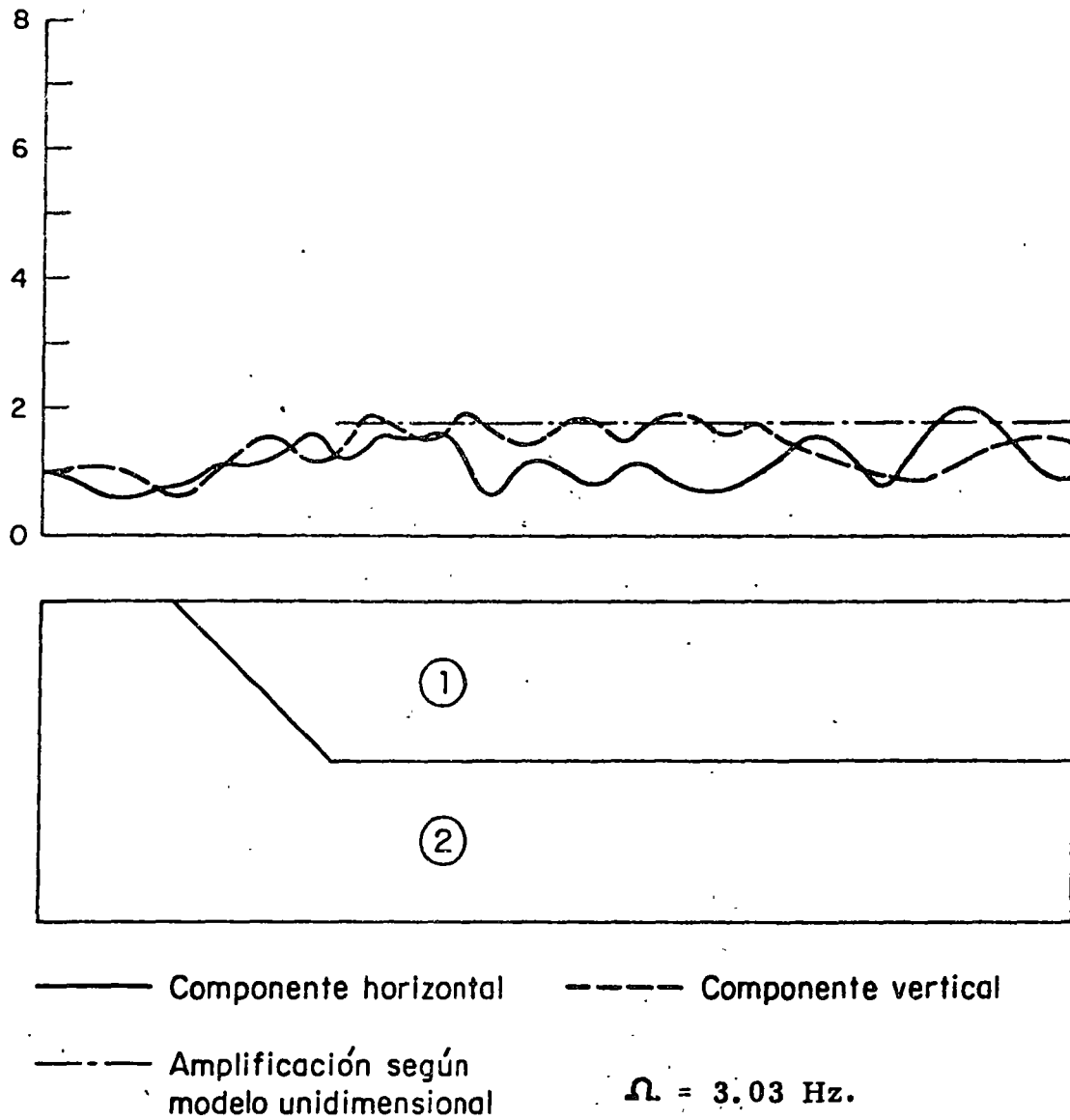


Fig 7c Factor de amplificación de ondas de Rayleigh. Relación de impedancias = 0.57

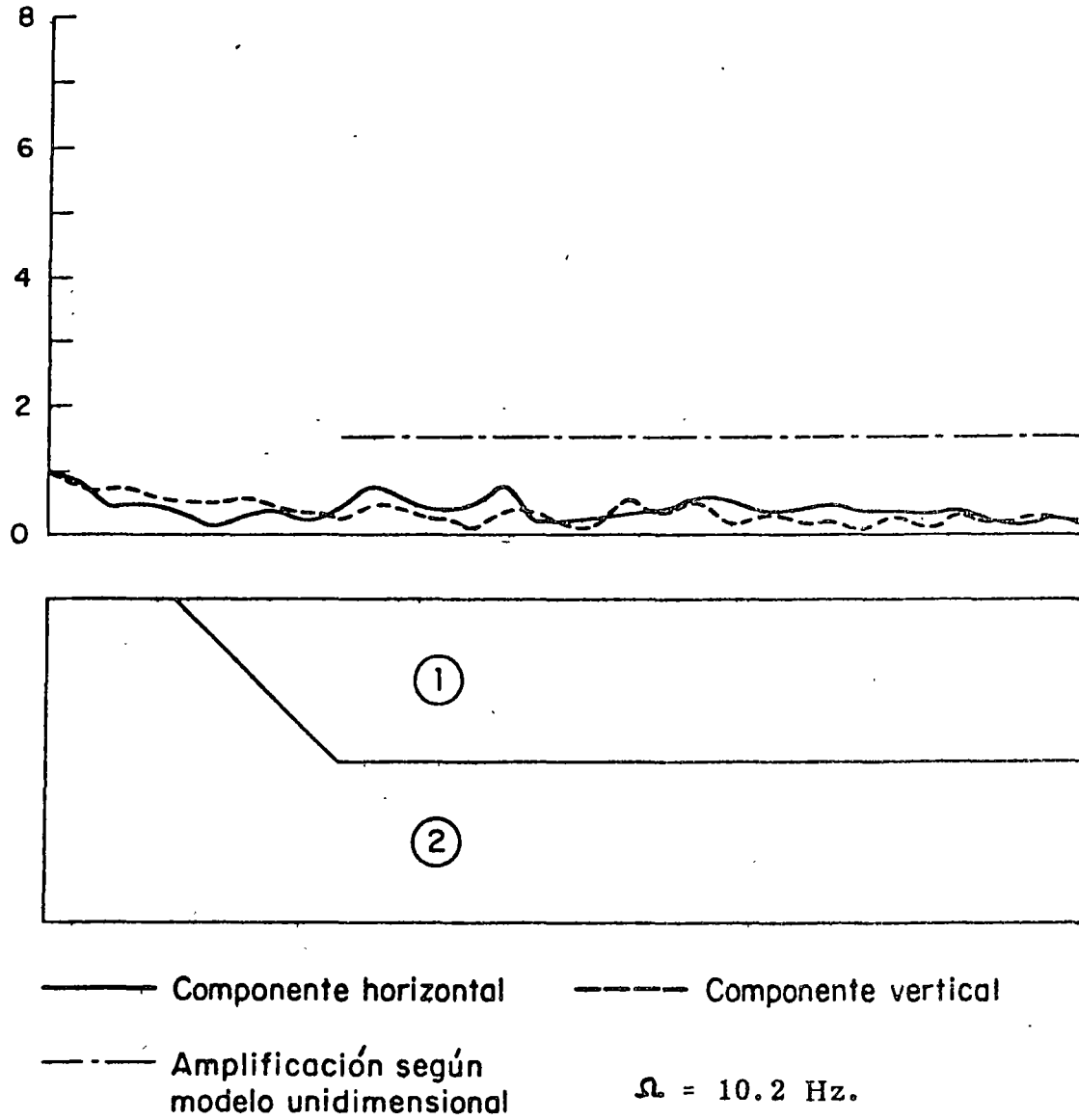


Fig 8a Factor de amplificación de ondas de Rayleigh. Relación de impedancias = 0.73

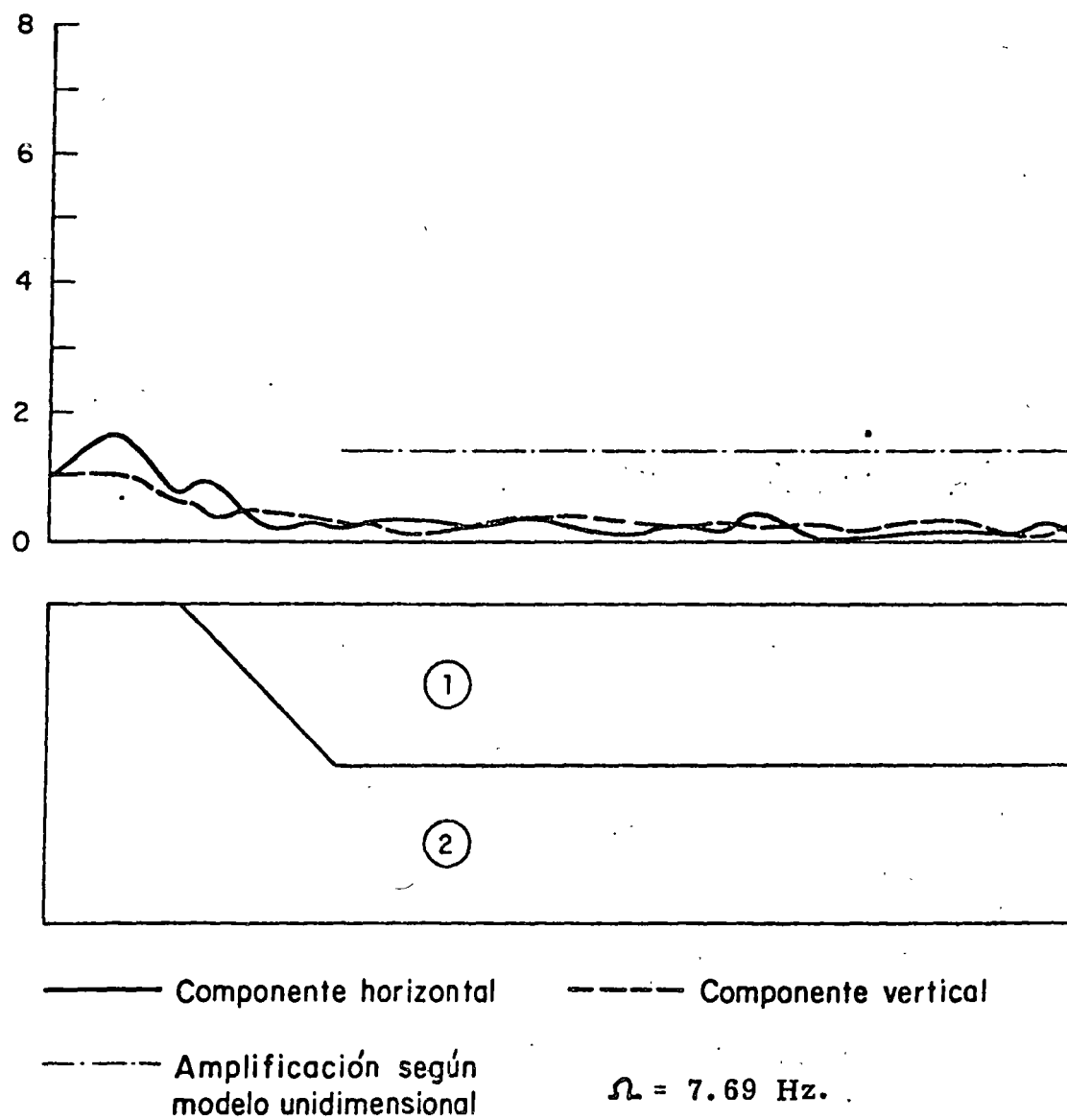


Fig 8b Factor de amplificación de ondas de Rayleigh. Relación de impedancias = 0.73

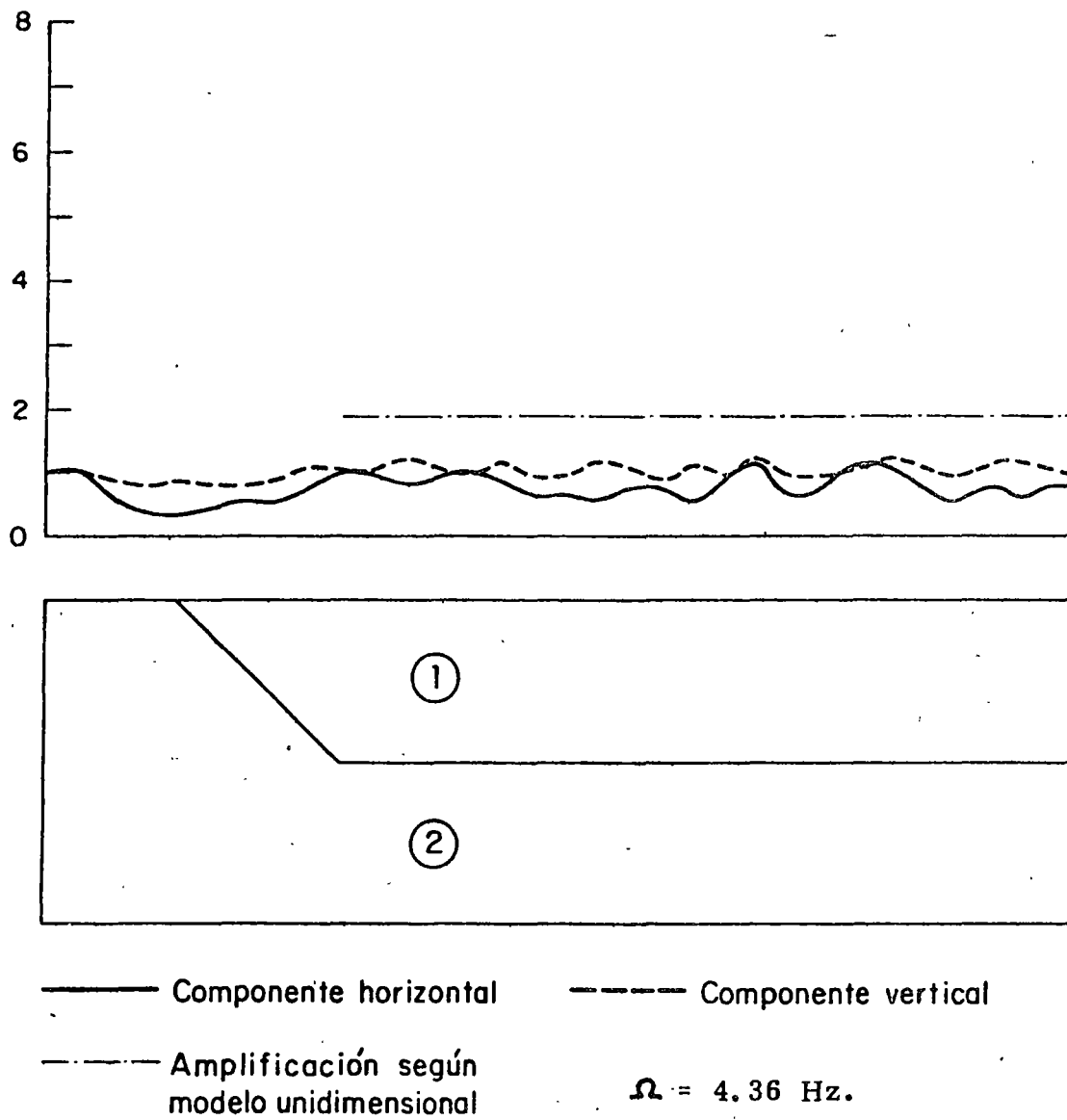


Fig 8c Factor de amplificación de ondas de Rayleigh. Relación de impedancias = 0.73

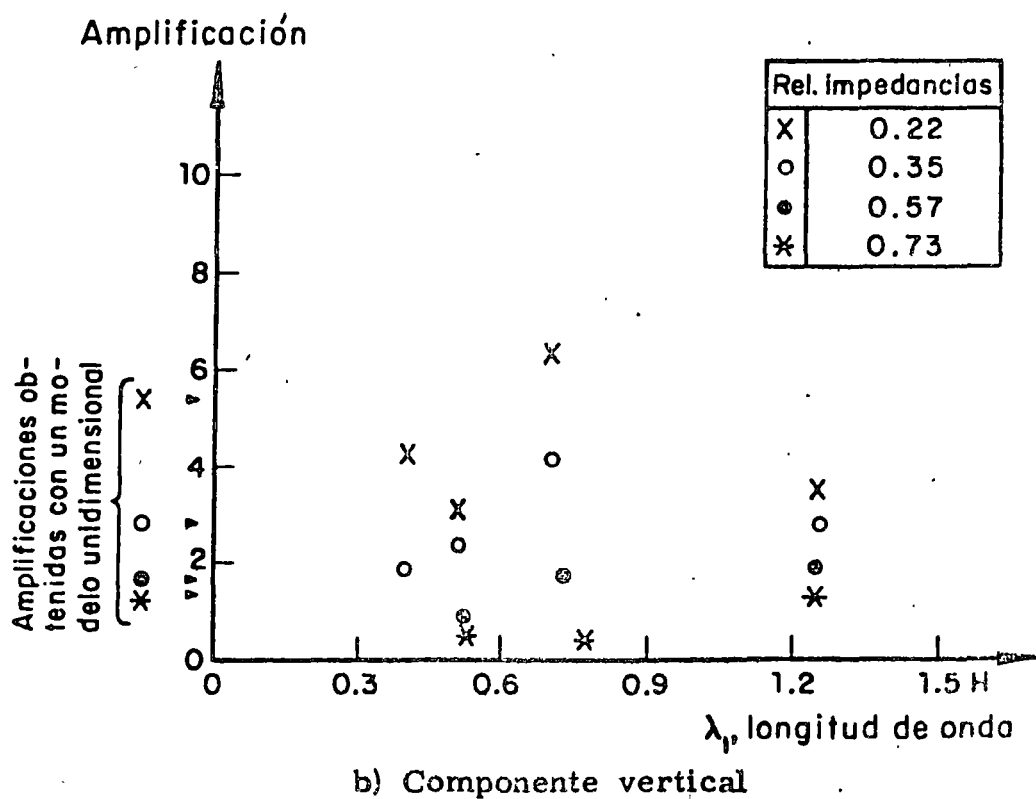
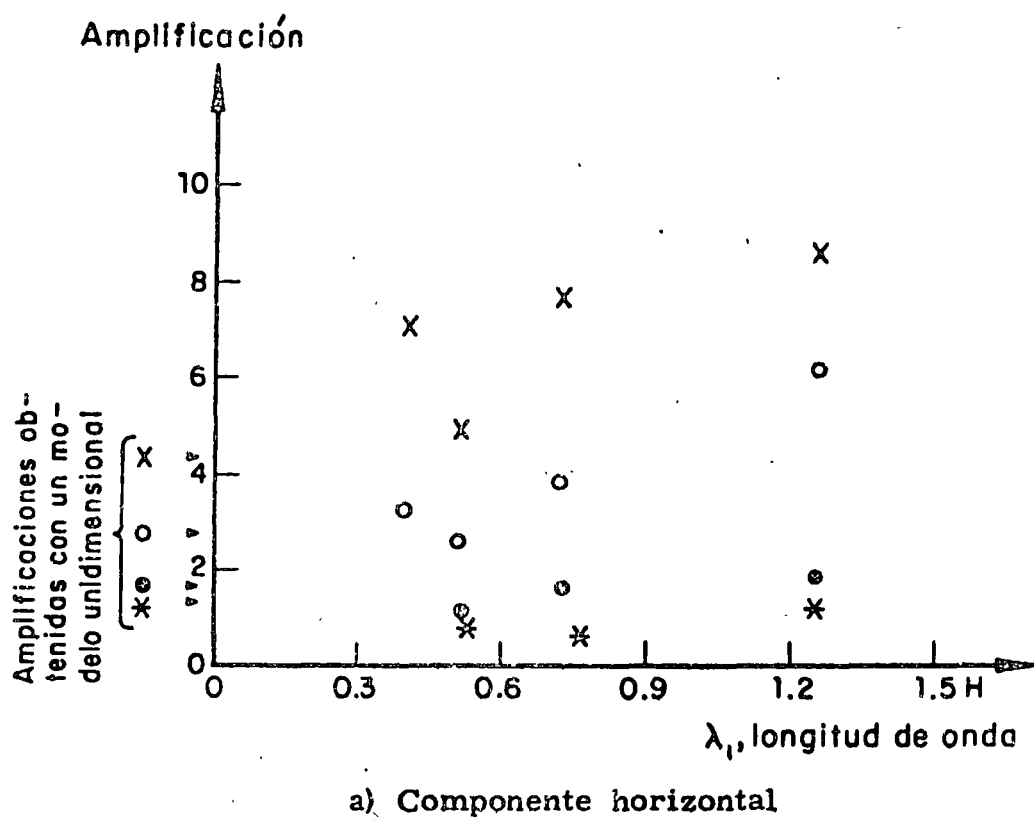


Fig 9 Factor de amplificación máximo de ondas de Rayleigh

VI CURSO INTERNACIONAL DE INGENIERIA SISMICA

SISMOLOGIA Y SISMICIDAD

TRANSMISION DE ONDAS

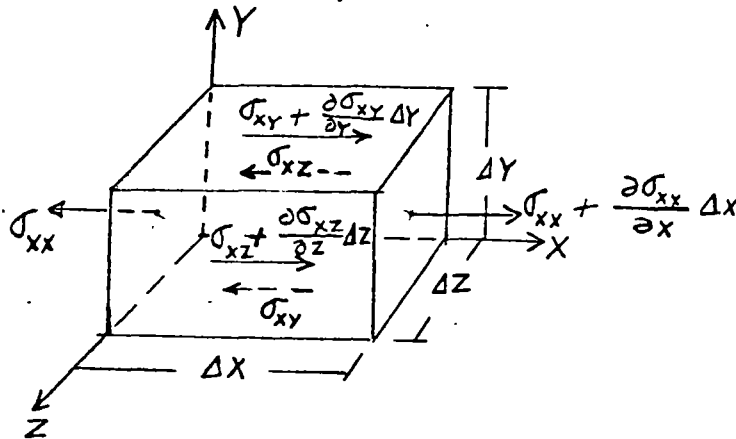
Profesor Octavio A. Rascón Ch.

Julio de 1978

TRANSMISION DE ONDAS

por Dr. Octavio A. Rascón Ch.

SE HACE LA HIPOTESIS DE QUE LAS ONDAS SE TRANSMITEN EN UN MEDIO HOMOGENEO, ELASTICO LINEAL E ISOTROPICO. ANALICEMOS EL PROBLEMA EN LA DIRECCION X.



EQUILIBRIO DE FUERZAS POR UNIDAD DE VOLUMEN:

$$\frac{1}{\Delta x \Delta y \Delta z} \left[\left(\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} \Delta x \right) \Delta y \Delta z + \left(\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} \Delta y \right) \Delta x \Delta z + \left(\frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} \Delta z \right) \Delta x \Delta y \right] \quad (1)$$

$$= \rho \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} \quad ; \quad \rho = \text{MASA POR UNIDAD DE VOLUMEN}$$

(UNA EC SEMEJANTE SE OBTIENE PARA LAS DIRECCIONES Y y Z)

TOMANDO EN CUENTA LAS RELACIONES ESFUERZO - DEFORMACION:

$$\sigma_{xx} = (\lambda + 2\mu) \epsilon_{xx} + \lambda \epsilon_{yy} + \lambda \epsilon_{zz}$$

$$\sigma_{yy} = \lambda \epsilon_{xx} + (\lambda + 2\mu) \epsilon_{yy} + \lambda \epsilon_{zz}$$

(2)

$$\sigma_{zz} = \lambda \epsilon_{xx} + \lambda \epsilon_{yy} + (\lambda + 2\mu) \epsilon_{zz}$$

$$\sigma_{xy} = \mu \epsilon_{xy}, \quad \sigma_{yz} = \mu \epsilon_{yz}, \quad \sigma_{zx} = \mu \epsilon_{zx} = \sigma_{xz}$$

DONDE λ Y μ SON LOS COEFICIENTES DE LAME, SE OBTIENE

$$(\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \mu \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} \right) + (\lambda + \mu) \left(\frac{\partial^2 u_y}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial x \partial z} \right) = \rho \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2},$$

$$\text{YA QUE } \epsilon_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x}, \quad \epsilon_{yy} = \frac{\partial u_y}{\partial y}, \quad \epsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z}, \quad \epsilon_{xy} = \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x},$$

$$\epsilon_{yz} = \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y}, \quad \text{Y } \epsilon_{zx} = \frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z} \quad (3)$$

ECUACIONES SEMEJANTES SE OBTIENEN PARA LAS OTRAS DOS DIRECCIONES.

REFS: J.E.WHITE, "SEISMIC WAVES" (Mc-Graw-Hill)

J.M.PEARSON, "A THEORY OF WAVES" (Allyn & Bacon)

H.HOLSKY, "STRESS WAVES IN SOLIDS" (Dover)

K.E. BULLEN, "AN INTR. TO THE THEORY OF SEISMOLOGY"

CASOS PARTICULARES

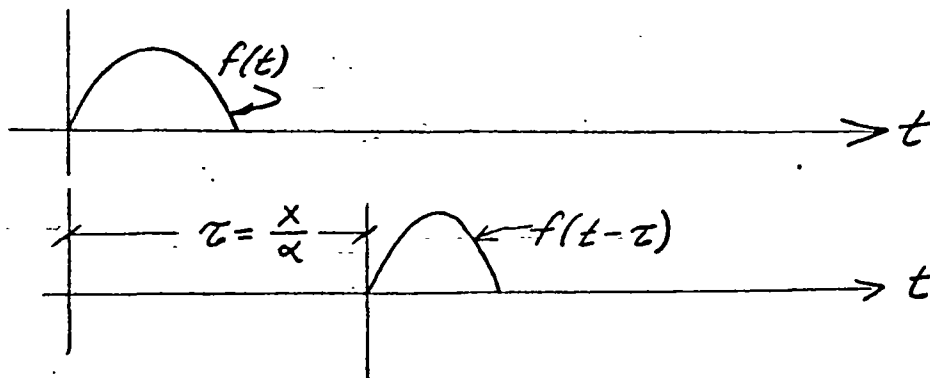
ONDAS PLANAS EN UN SOLIDO INFINITO:

1. CASO EN QUE $u_y = u_z = 0$ Y QUE u_x ES INDEP. DE Y y Z. EN TAL CASO LA EC ANTERIOR SE REDUCE A:

$$(\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} = \rho \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2}$$

UNA SOLUCION DE ESTÁ ECUACION ES:

$$u_x = f\left(t - \frac{x}{\alpha}\right) + g\left(t + \frac{x}{\alpha}\right)$$

DONDE $\alpha = \sqrt{(\lambda + 2\mu) / \rho} = \text{cte}$ 

OBSERVESE QUE CONFORME CRECE X, TAMBIEN τ CRECE, ES DECIR, LA ONDA VIAJA DE IZQUIERDA A DERECHA. ANALOGAMENTE, $g\left(t + \frac{x}{\alpha}\right)$, REPRESENTA UNA ONDA QUE VIAJA DE DERECHA A IZQUIERDA. EN AMBOS CASOS LA VELOCIDAD DE TRANSMISION DE LA ONDA ES α ; ESTE TIPO DE ONDAS SE DENOMINAN LONGITUDINALES O PRINCIPALES (P) (LOS ESFUERZOS CORTANTES SON NULOS).

2. CASO EN QUE $u_x = u_z = 0$ (EL MOV. SE RESTRINGE A LA DIRECCION y), Y u_y ES INDEPENDIENTE DE Y y Z. LA EC. GENERAL DE EQUILIBRIO

EN DIRECCION Y SE REDUCE A

$$\mu \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} = \rho \frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2}$$

QUE ES DE FORMA SEMEJANTE A LA ANTERIOR. EN ESTE CASO LA SOLUCION ES:

$$u_y = F\left(t - \frac{x}{\beta}\right) + G\left(t + \frac{x}{\beta}\right)$$

DONDE

$$\beta = \sqrt{\mu/\rho}$$

ES LA VELOCIDAD DE TRANSMISION; ESTAS ONDAS SE LLAMAN TRANSVERSALES O DE CORTANTE (S, DE SHEAR); YA QUE EL UNICO ESFUERZO QUE APARECE EN EL CORTANTE $\sigma_{xy} = -\rho\beta F'\left(t - \frac{x}{\beta}\right)$, DONDE

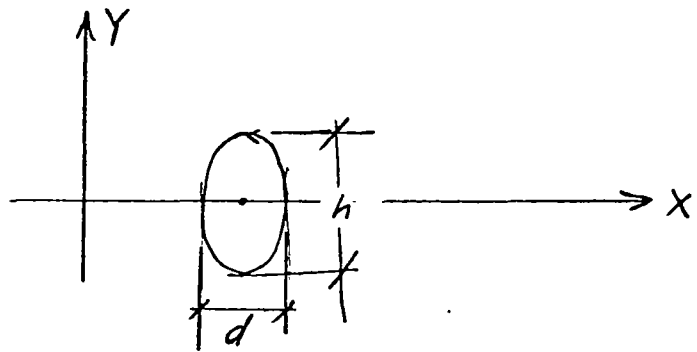
$$F'\left(t - \frac{x}{\beta}\right) = \frac{d}{d\left(t - \frac{x}{\beta}\right)} F\left(t - \frac{x}{\beta}\right).$$

ONDAS SUPERFICIALES.

- RAYLEIGH
- LOVE

LAS ONDAS DE RAYLEIGH SE GENERAN AL INCIDIR LAS ONDAS DE CUERPO EN LA SUPERFICIE DE LA TIERRA. ESTAS VIAJAN CON UNA VELOCIDAD

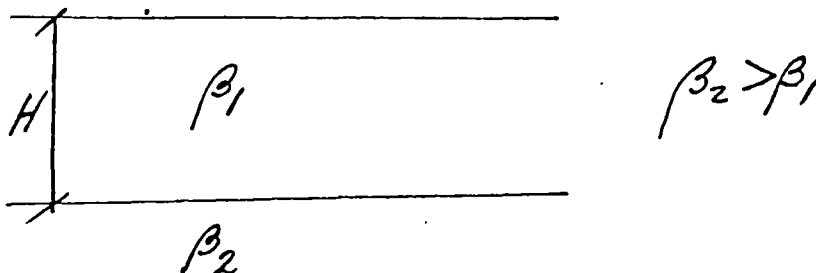
$V_R < \beta$ (SI $\nu = 0.25$, $V_R = 0.92\beta$) Y CADA PARTICULA DESCRIBE UNA ORBITA ELIPTICA



$$h \approx \frac{3}{2} d$$

LAS ONDAS DE LOVE SE GENERAN CUANDO LAS ONDAS DE CUERPO INCIDEN EN MANTOS DE DIFERENTES RIGIDECES, QUE CRECEN CON LA PROFUNDIDAD.

POR EJEMPLO, SI



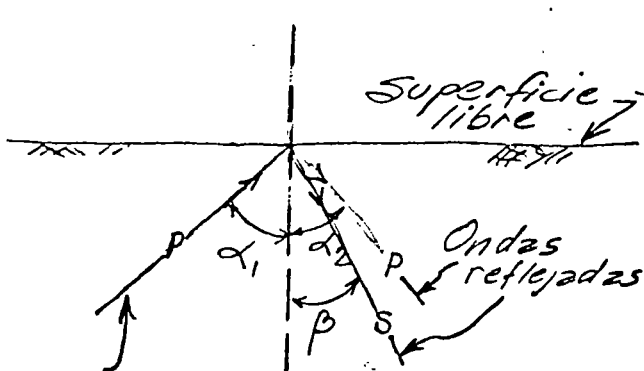
$$\beta_1 < V_L < \beta_2$$

AQUI V_L DEPENDE DE LA FRECUENCIA DE LA ONDA.

ESTAS ONDAS TIENEN COMPONENTES DE DESPLAZAMIENTOS UNICAMENTE HORIZONTALES.

REFLEXION DE ONDAS

REFLEXION DE ONDAS EN UNA SUPERFICIE LIBRE

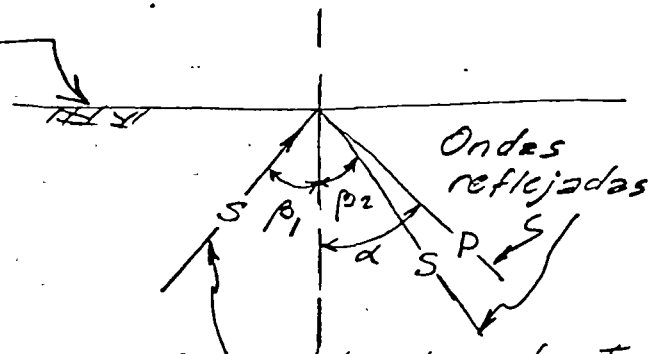


Onda incidente longitudinal

$$\alpha_2 = \alpha_1$$

$$\text{sen } \beta = \frac{v_s}{v_p} \text{sen } \alpha_1$$

Si $\alpha_1 = 0$ no se refleja onda S



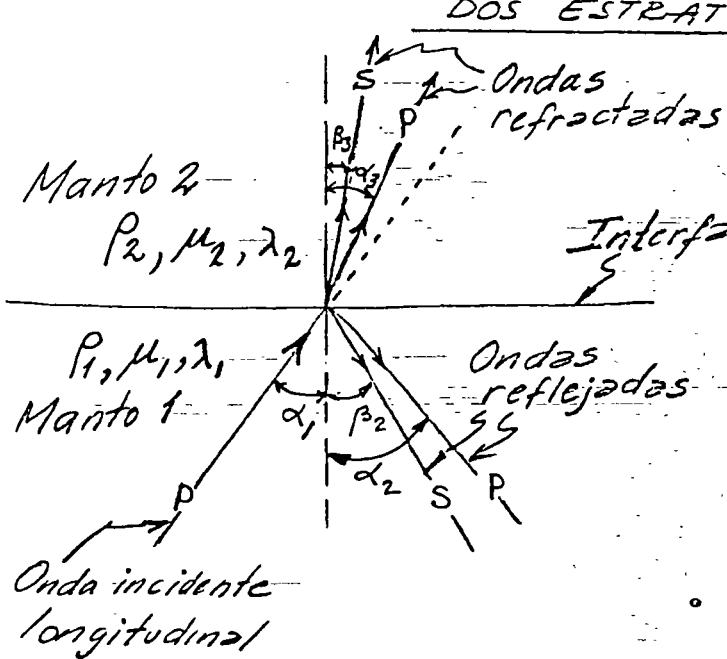
Onda incidente de cortante

$$\beta_2 = \beta_1$$

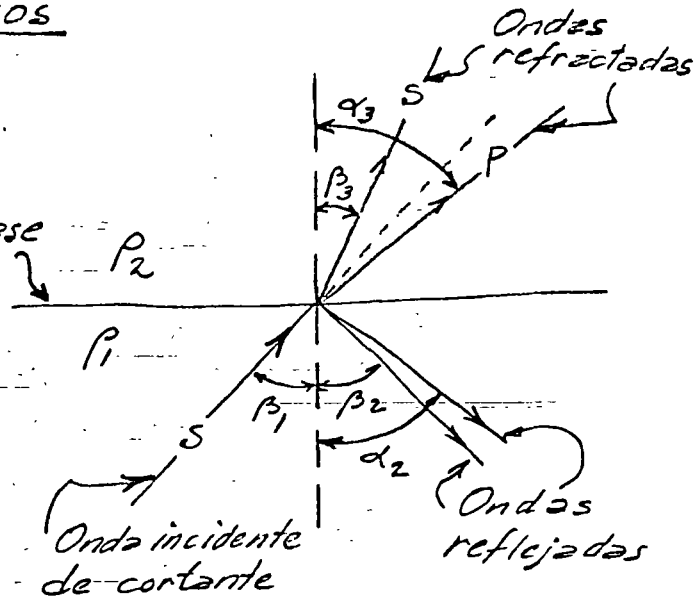
$$\text{sen } \alpha = \frac{v_p}{v_s} \text{sen } \beta_1$$

Si $\beta_1 = 0$ no se refleja onda P

REFLEXION DE ONDAS EN UNA INTERFASE ENTRE DOS ESTRATOS



Onda incidente longitudinal



Onda incidente de cortante

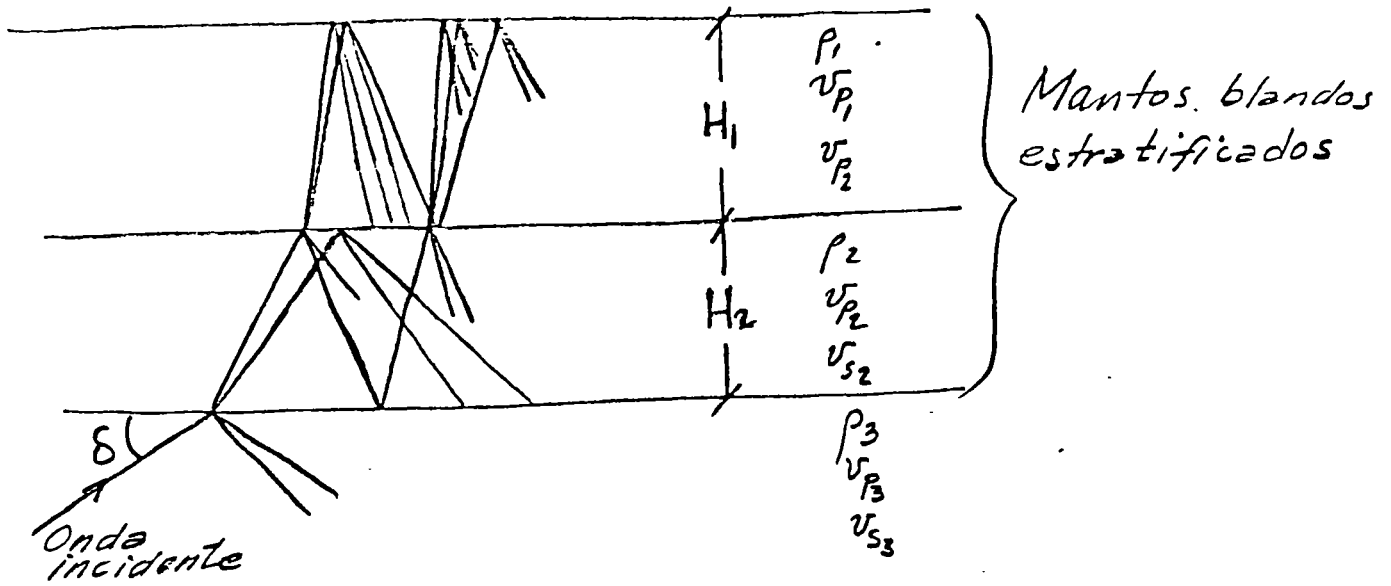
$$\frac{\text{sen } \alpha_1}{v_{p1}} = \frac{\text{sen } \alpha_2}{v_{p1}} = \frac{\text{sen } \beta_2}{v_{s1}} = \frac{\text{sen } \alpha_3}{v_{p2}} = \frac{\text{sen } \beta_3}{v_{s2}}$$

Si $\alpha_1 = 0$, entonces $\alpha_2 = \alpha_3 = \beta_2 = \beta_3 = 0$ y no se reflejan ni refractan ondas de cortante

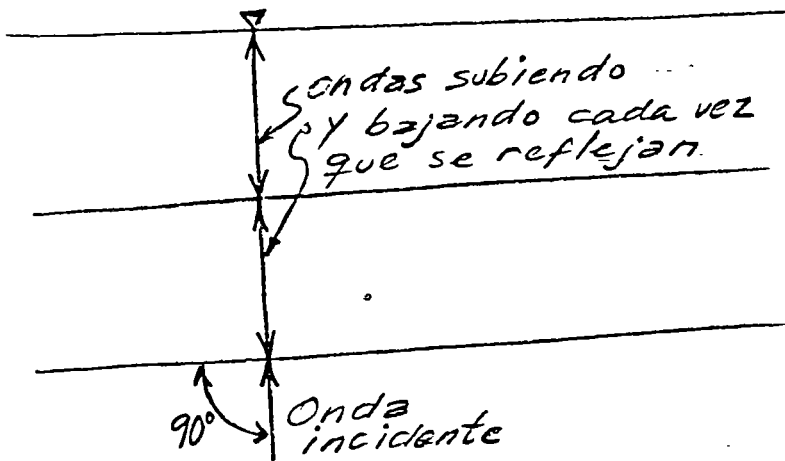
$$\frac{\text{sen } \beta_1}{v_{s1}} = \frac{\text{sen } \beta_2}{v_{s1}} = \frac{\text{sen } \alpha_2}{v_{p1}} = \frac{\text{sen } \alpha_3}{v_{p2}} = \frac{\text{sen } \beta_3}{v_{s2}}$$

Si $\beta_1 = 0$, entonces $\beta_2 = \beta_3 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$ y no se reflejan ondas longitudinales

REFLEXION MULTIPLE EN MANTOS BLANDOS



Si $\delta = 90^\circ$



Directorio de Alumnos al IV CURSO DE INGENIERIA SISMICA (Sismología y Sismicidad. Julio 1978.

1. ING. GUSTAVO AGUIRRE PIEDRA
Universidad Técnica Particular de Loja Ecuador Av. Col. del Valle 443
P.O.Box 71 Sud. A. Col. del Valle
Loja, Ecuador México 12, D.F.
Tel. 960 375 Tel. 523.99.90
2. AR Q. ODON ANGELES RIVERA
Dir. Gral. Prevención y Atención a Emergencias Av. 661 No. 89
Urbanas Col. S. Juan de Aragón
Rubén Darío 13 México 14, D.F.
México 4, D.F. Tel. 789.69.30
Tel. 250.74.22 Ext.130
3. ING. ROBERTO ENRIQUE BRENES BRENES
Inst. Costarricense de Electricidad Calle 18, Aus 4-6
Sabana Nte. San José, Costa Rica Cartago, Costa Rica
4. ING. JOSE BENJAMIN DUEÑAS GOMEZ
Dir. Gral. de Obras Marítimas, S.C.T. José Ma. Torneli 20-8
Insurgentes Sur 465 San Miguel Chapultepec
Roma Sur México 18, D.F.
México, D.F. Tel. 516.34.70
Tel. 564.51.01
5. STANISLAW DOROSZ
Inst. de Ing, UNAM Odontología 57 Depto. 302
México 20, D.F. México 20, D.F.
Tel. 548.97.94 Tel. 550.38.56 Ext.302
6. JAVIER ESCAMILLA GARCIA
Inst. de Invest. Eléctricas Brujas 20
Internado Palmira, Apdo. Postal 475 Col. Burgos
Cuernavaca, Mor. Cuernavaca, Mor.
Tel. 41365
7. ING. SERGIO OCTAVIO R. ESCOBAR MEDINA
Esc. de Ing. Juan de Tolosa 809
Universidad Autónoma de Zacatecas Zacatecas, Zac.
Tel. 21147
8. ING. JOSE ALBERTO ESCOBAR SANCHEZ
Esc. Sup. de Ing. y Arq. Domingo González 27
Unidad Profesional de Zacatenco Sn. Antonio Culhuacán
México 14, D.F. México 13, D.F.
Tel. 582.40.51

9. JAIME E. FLORES CALDERON
Universidad del Cauca
Depto. de Física
10. ELIAS GALINDO VALLARINO
Universidad Autónoma de Querétaro
Centro Universitario
Queretaro, Qro. Germán Patiño 36-5
Col. Aragón
Queretaro, Qro.
11. LUIS GONZALEZ DE VALLEJO
Empresa Nal. Adaro de Investigaciones Mineras
Serrano 116 Madrid 6 España. Paseo de la Habana 33 Madrid 16
España.
Tel. 4574968
12. FLORENCIO MORENO LOPEZ
Esc. de Ing.
Centro Universitario
Querétaro, Qro. Primavera Ote. 35
Querétaro, Qro.
TEL. 27220
Tel. 25189
13. GABRIEL MORENO PECERO
SAHOP
Xola y Ave. Universidad
México 12, D.F. Caobas 22 (Secc. Lomas)
Jardines de Sn. Mateo
Edo. de México
560.49.32
Tel. 530.46.77
14. ANTONIO SANCHEZ HERNANDEZ
Esc. de Ing.
Universidad A. de Querétaro
Tel. 25189 San Luis Potosí, S.L.P.
Col. Hidalgo, Querétaro
Tel. 27008
15. RAMON MORALES ROSAS
Esc. de Ing.
Universidad de Juárez Autónoma de Tab.
Villahermosa, Tab. Pestalozzi 526-5
Col. Narvarte Z.P.12
Tel. 523.21.52
16. JOSE ROLANDO PAREDES ESCORZA
Dirección General de Obras Marítimas
S. C. T.
Insurgentes Sur 465
México 11, D.F. Rosa Verde 157
Col. Molino de Rosas
México 19, D.F.
Tel. 651.06.67
Tel. 564.77.58
17. JESUS PORRAS MARISCAL
Inst. Tec. Regional de Oaxaca
Calz. Inst. Tec. S/n. Calz. Sta. Anita 115
Oaxaca, Oax. Col. Moderna
Oaxaca, Oax.

18. ALFONSO RUIZ VAZQUEZ
ARVA CONSTRUCCIONES
AV. VALLE DE BRAVO NO. 19
VERGEL DE COYOACAN Z.P.22
TEL. 677.37.30
19. ARTURO SANCHEZ VILLASEÑOR
C. F. E.
MELCHOR OCAMPO 455-6°
MEXICO 5, D.F.
TEL. 5 53.71.33 EXT. 2409
20. RAUL SERRANO LIZAOLA
UNIVERSIDAD AUTONOMA DE PUEBLA
ESC. DE ING. CIVIL
CIUDAD UNIVERSITARIA
PUEBLA, PUE. BONAMPAK 4506
COL. REFORMA AGUA AZUL
PUEBLA, PUE.
TEL. 43.92.96
21. FEDERICO TIRADO INDA
ESC. DE ING. JUAREZ 57
UNIVERSIDAD AUTONOMA DE GUERRERO CHILPANCINGO, GRO.
AV. CASA DE LA JUVENTUD S/N
CHILPANCINGO, GRO. TEL. 22844
TEL. 22741
22. ALFONSO URDIALES RAMOS
DIRECCION GENERAL DE PREVEN CION IXTACCIHUATL 140
Y ATENCION DE EMERGENCIAS URBANAS COL. MOCTEZUMA
S. A.H.O.P. MEXICO 9, D.F.
RUBEN DARIO 13
MEXICO 7, D.F. TEL. 762.59.90
TEL. 252.74 22
23. VICTOR PABLO BAZQUEZ MORENO
INST. POLITECNICO NACIONAL OTE. 166 No. 83
E. S. I. A. Col. Moctezuma
PABELLON NO. 4 UNIDAD PROFESIONAL México 9, D.F.
ZACATENCO Tel. 762.02.28
MEXICO 14, D.F.