

2

IV CURSO INTERNACIONAL DE INGENIERIA SISMICA

DINAMICA ESTRUCTURAL
(del 3 al 21 de julio, 1978)

FECHA	HORARIO	TEMA	PROFESOR
3, 5 y 7 de julio	17 a 20 h cada día	Introducción. Vibración de Sistemas Elásticos e Inelásticos de un grado de libertad	DR. OCTAVIO A. RASCON CHAVEZ
10 y 12 de julio	17 a 20 h cada día	Vibraciones libres y forzadas de sistemas elásticos lineales de varios grados de libertad. Métodos de Holtzer y Newmark. Análisis modal.	M. EN C. JORGE PRINCE A.
14 de julio	17 a 18:30 h	Método β de Newmark para obtener la respuesta sísmico de sistemas inelásticos.	DR. OCTAVIO A. RASCON CHAVEZ
	18:40 a 20:10 h	Respuesta sísmica de sistemas no lineales con varios grados libertad.	DR. LUIS ESTEVA MARABOTO
17 de julio	17 a 19 h	Vibración de vigas de flexión y vigas de cortante	DR. OCTAVIO A. RASCON CHAVEZ
	19:10 a 20:10 h	Introducción al método del elemento finito	DR. PORFIRIO BALLESTEROS B.
19 y 21 de julio	17 a 20 h	Introducción al método del elemento finito	DR. PORFIRIO BALLESTEROS B.
		CLAUSURA	

'pmc.



3

DIRECTORIO DE PROFESORES
DINAMICA ESTRUCTURAL
1978

DR. PORFIRIO BALLESTEROS BAROCIO
JEFE DE LA SECCION
MECANICA TEORIA Y APLICADA
DIVISION DE ESTUDIOS SUPERIORES,
FACULTAD DE INGENIERIA, UNAM
CIUDAD UNIVERSITARIA
MEXICO 20, D.F.
TEL: 550. 52.15 ext. 4498

M. EN C. JORGE PRINCE ALFARO
SUBDIRECTOR
INSTITUTO DE INGENIERIA, UNAM
CIUDAD UNIVERSITARIA
MEXICO 20, D.F.

DR. OCTAVIO A. RASCON CHAVEZ
INVESTIGADOR
INSTITUTO DE INGENIERIA, UNAM
CIUDAD UNIVERSITARIA
MEXICO 20, D.F.
TEL: 550. 52. 15 ext. 4473

DR. LUIS ESTEVA MARABOTO
INVESTIGADOR
INSTITUTO DE INGENIERIA, UNAM
CIUDAD UNIVERSITARIA
MEXICO 20, D.F.
TEL: 548. 97. 94

'pmc.



4
centro de educación continua
división de estudios superiores
facultad de ingeniería, unam



IV CURSO INTERNACIONAL DE INGENIERIA SISMICA

DINAMICA ESTRUCTURAL

DR. OCTAVIO A. RASCON CHAVEZ

JULIO, 1978.

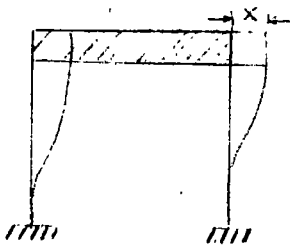
DINAMICA ESTRUCTURAL

DR. OCTAVIO A RASCON CH.

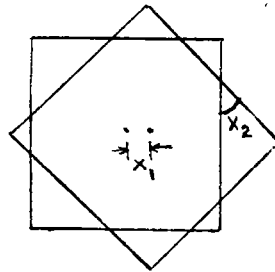
DEFINICION.

GRADOS DE LIBERTAD = NUMERO DE COORDENADAS GENERALIZADAS (DESPLAZAMIENTOS O GIROS) QUE SE REQUIEREN PARA DEFINIR LA POSICION DEL SISTEMA EN CUALQUIER INSTANTE.

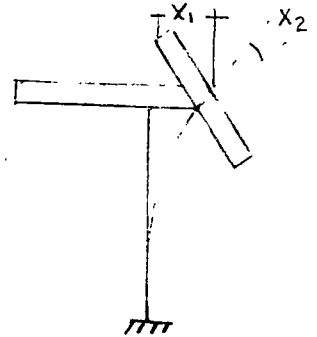
EJEMPLOS



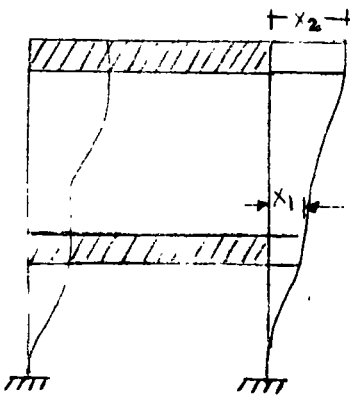
UN GRADO DE LIBERTAD



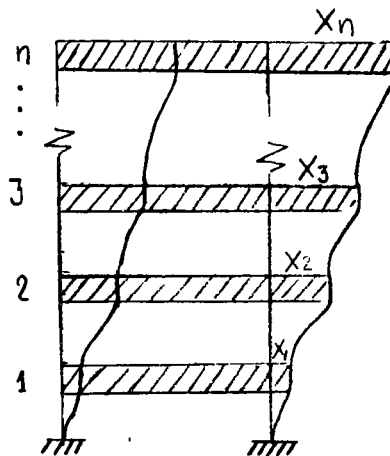
DOS GRADOS DE LIBERTAD



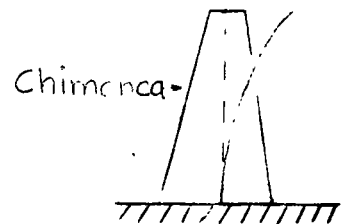
DOS GRADOS DE LIBERTAD



DOS GRADOS DE LIBERTAD



n GRADOS DE LIBERTAD

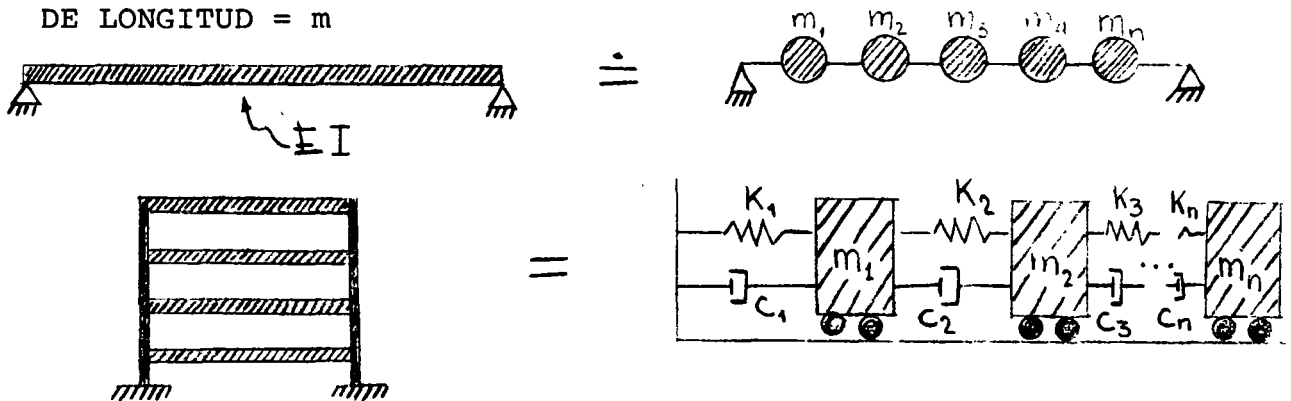


INFINITO NUMERO DE GRADOS DE LIBERTAD

MÉTODOS DE DISCRETIZACIÓN DE SISTEMAS CONTINUOS

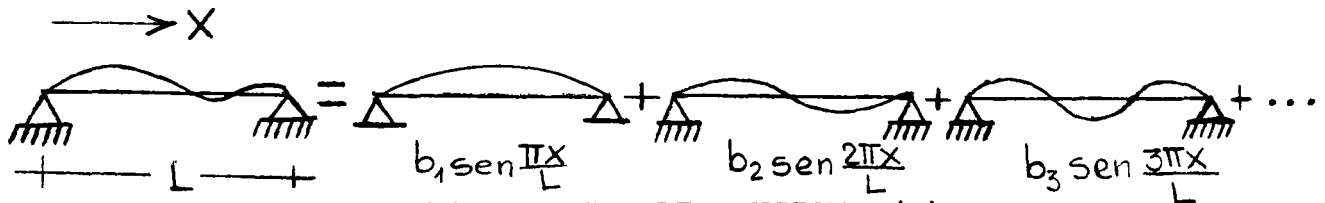
1. POR CONCENTRACION DE MASAS

MASA POR UNIDAD
DE LONGITUD = m



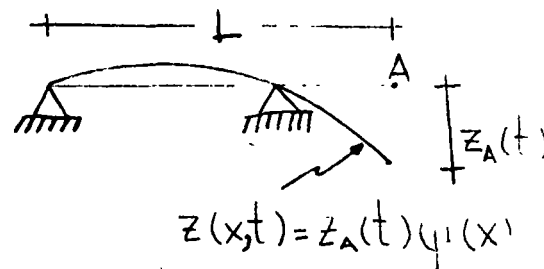
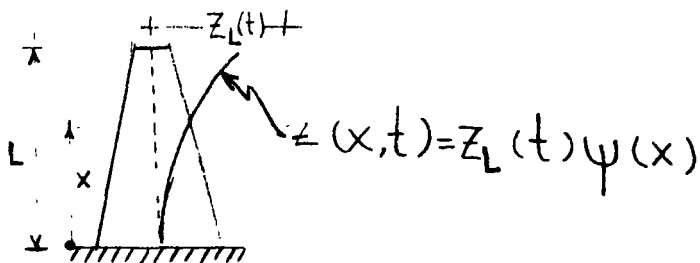
2. EXPRESANDO LA CONFIGURACION DE VIBRACION DE LA ESTRUCTURA COMO UNA SERIE DE FUNCIONES ESPECIFICADAS. POR EJEMPLO, SI ESTAS FUNCIONES SON ARMONICAS:

$$z(x, t) = \sum_{i=1}^N b_i \text{sen} \frac{i\pi x}{L}$$

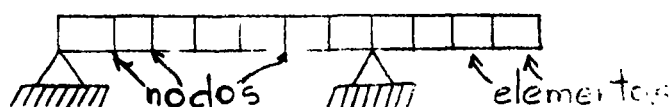


EN GENERAL, PARA CUALQUIER TIPO DE FUNCION \$\psi(x)\$:

$$z(x, t) = \sum_{i=1}^N z_i(t) \psi_i(x)$$



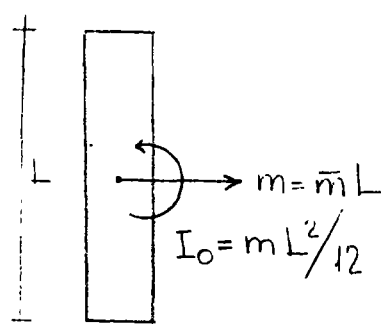
3. MEDIANTE ELEMENTOS FINITOS



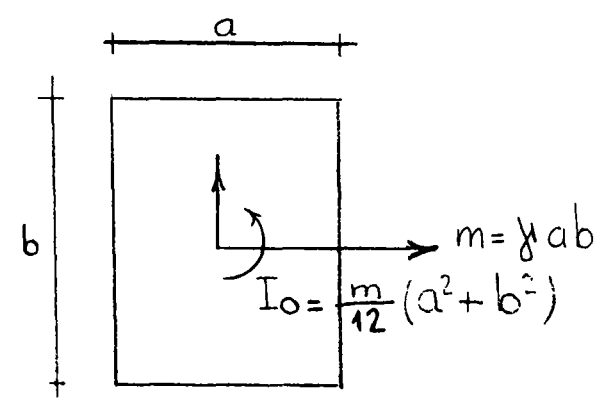
AL PLANTEAR LAS ECUACIONES DE EQUILIBRIO DE CUERPOS RIGIDOS ES A MENUDO NECESARIO CONOCER LOS MOMENTOS DE INERCIA DE MASA. A CONTINUACION SE PRESENTAN ALGUNOS CASOS:

\bar{m} = MASA POR UNIDAD DE LONGITUD

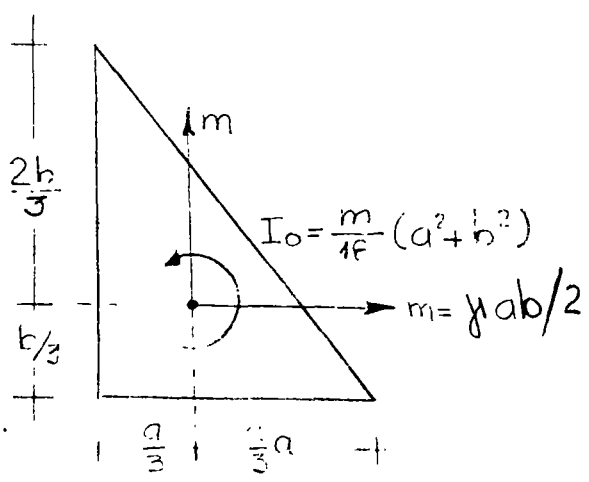
γ = MASA POR UNIDAD DE AREA



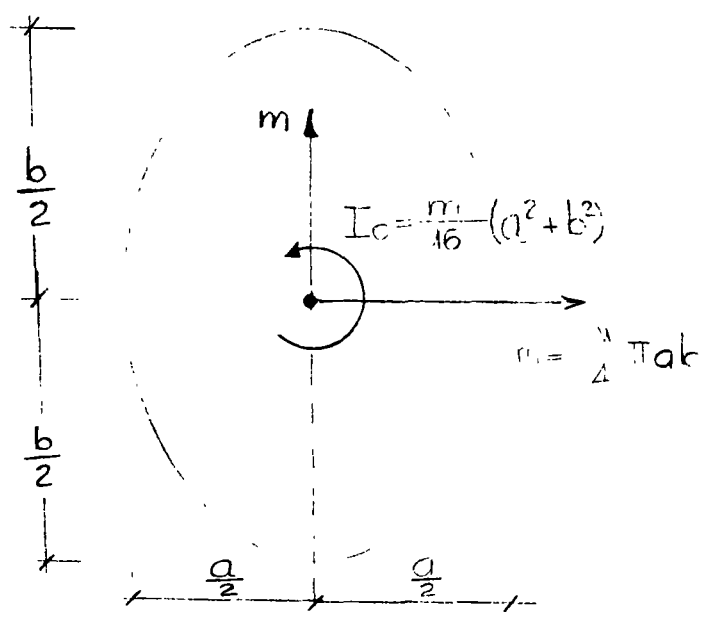
BARRA UNIFORME



PLACA UNIFORME RECTANGULAR

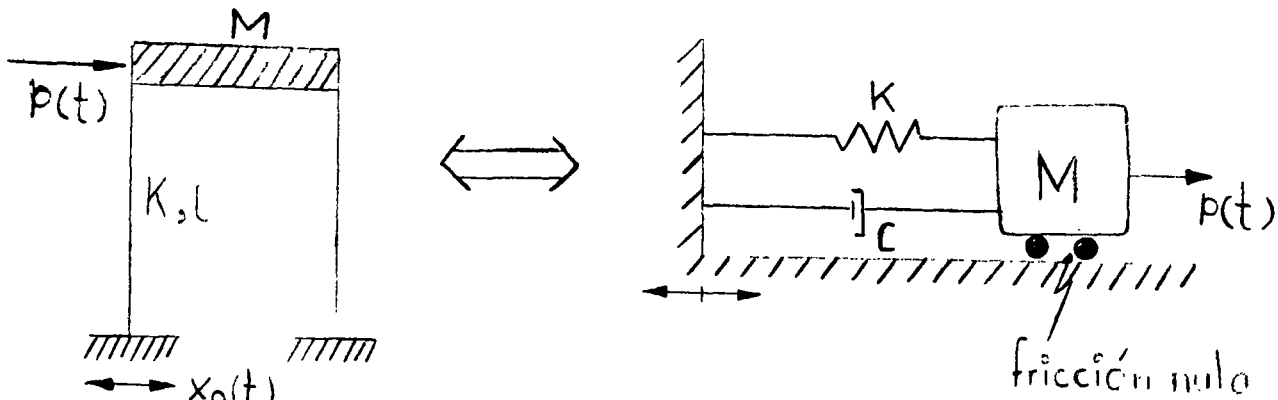


PLACA UNIFORME TRIANGULAR



PLACA UNIFORME ELIPTICA

RESPUESTA DINAMICA DE SISTEMAS ELASTICOS LINEALES DE UN GRADO DE LIBERTAD
CON AMORTIGUAMIENTO VISCOSO



$t =$ TIEMPO

$M =$ MASA

$K =$ RIGIDEZ

$C =$ AMORTIGUAMIENTO

$f(t) =$ FUERZA EXTERNA

$x_0(t) =$ DESPLAZAMIENTO DEL SUELO

EL AMORTIGUAMIENTO VISCOSO ES TAL QUE PRODUCE UNA FUERZA DE RESTAURACION PROPORCIONAL A LA VELOCIDAD RELATIVA DE LA MASA RESPECTO AL SUELO.

EL AMORTIGUAMIENTO SE DEBE PRINCIPALMENTE A LA FRICCIÓN INTERNA ENTRE LOS GRANOS O PARTICULAS DEL MATERIAL DE LA ESTRUCTURA, Y A FRICCIÓN EN LAS JUNTAS Y CONEXIONES DE LA MISMA. ES EL ELEMENTO DEL SISTEMA QUE DISIPA ENERGIA.

2a. LEY DE NEWTON:

"LA RAPIDEZ DE CAMBIO DEL MOMENTUM DE CUALQUIER MASA, m , ES IGUAL A LA FUERZA QUE ACTUA SOBRE ELLA"

$$p(t) = \frac{d}{dt} \left(m \frac{dx}{dt} \right) = \frac{d}{dt} (m\dot{x})$$

$p(t)$ = FUERZA ACTUANTE

x = DESPLAZAMIENTO

t = TIEMPO

SI m ES CONSTANTE: $p(t) = m\ddot{x}$

PRINCIPIO DE D'ALAMBERT

SI LA 2a. LEY DE NEWTON LA ESCRIBIMOS COMO

$$p(t) - m\ddot{x} = 0$$

AL SEGUNDO TERMINO DE LA ECUACION SE LE CONOCE COMO FUERZA DE INERCIA; EL CONCEPTO DE QUE UNA MASA DESARROLLA UNA FUERZA DE INERCIA PROPORCIONAL A SU ACELERACION Y QUE SE OPONE A ELLA SE CONOCE COMO PRINCIPIO DE D'ALAMBERT, Y PERMITE QUE LAS ECUACIONES DE MOVIMIENTO SE EXPRESEN COMO ECUACIONES DE EQUILIBRIO DINAMICO.

ECUACION DE EQUILIBRIO

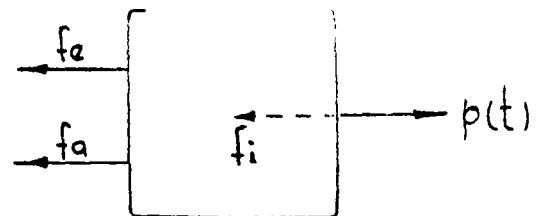
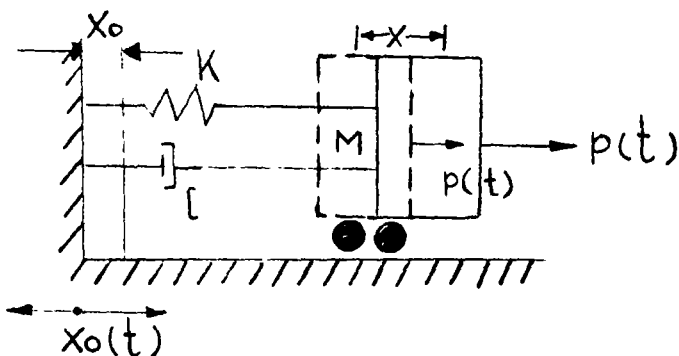


DIAGRAMA DE CUERPO LIBRE

$$\text{EQUILIBRIO: } f_e + f_a + f_i = p(t) \quad (1)$$

$$\text{PARA UN SISTEMA ELASTICO: } f_e = K(x - x_0) = ky$$

$$\text{PARA AMORTIGUAMIENTO VISCOSO: } f_a = c(\dot{x} - \dot{x}_0) = c\dot{y} \quad (2)$$

$$\text{POR EL PRINCIPIO DE D'ALAMBERT: } f_i = m\ddot{x} = m(\ddot{y} + \ddot{x}_0)$$

SUSTITUYENDO LAS ECS. 2 EN LA EC. 1 SE OBTIENE:

$$m(\ddot{y} + \ddot{x}_0) + \dot{c}y + \dot{k}y = p(t)$$

DE DONDE

$$\boxed{\ddot{M}y + \dot{c}y + Ky = p(t) - \ddot{M}x_0} \quad (3)$$

DIVIDIENDO ENTRE M AMBOS MIEMBROS DE LA EC. 3:

$$\ddot{Y} + \frac{C}{M} \dot{Y} + \frac{K}{M} Y = \frac{p(t)}{M} - \ddot{x}_0$$

SI $\frac{C}{M} = 2h$, Y $\frac{K}{M} = \omega^2$, DONDE $\omega =$ FRECUENCIA CIRCULAR NATURAL, EN RAD/SEG:

$$\boxed{\ddot{Y} + 2h \dot{Y} + \omega^2 Y = \frac{p(t)}{M} - \ddot{x}_0} \quad (4)$$

CUANDO SE TIENEN EXCITACIONES EN EL SISTEMA SE TRATA DE UN PROBLEMA DE VIBRACIONES FORZADAS; EN CASO CONTRARIO EL PROBLEMA ES DE VIBRACIONES LIBRES.

VIBRACIONES LIBRES

EN ESTE CASO LA ECUACION DIFERENCIAL DE EQUILIBRIO RESULTA SER

$$\ddot{y} + 2h \dot{y} + \omega^2 y = 0$$

CUYA SOLUCION ES

$$y(t) = e^{-ht} (C_1 \text{ sen } \omega' t + C_2 \text{ cos } \omega' t) \quad (5)$$

DONDE $\omega' = \sqrt{\omega^2 - h^2}$ = FRECUENCIA CIRCULAR NATURAL AMORTIGUADA

Y C_1 Y C_2 SON CONSTANTES QUE DEPENDEN DE LAS CONDICIONES INICIALES

(EN $t=0$) DE DESPLAZAMIENTO Y VELOCIDAD QUE TENGA LA MASA DEL SISTEMA.

ESTAS RESULTAN SER

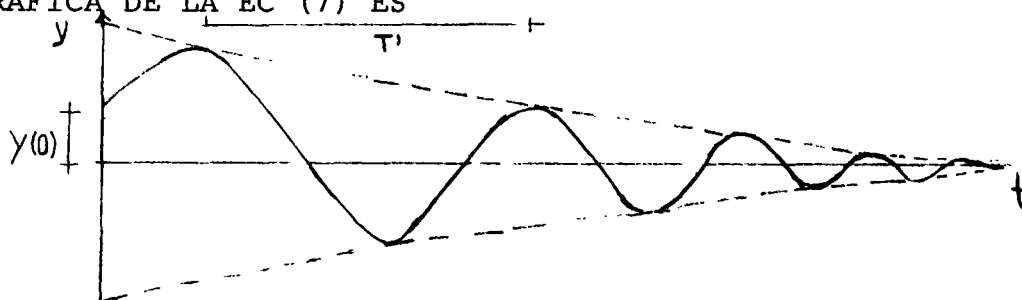
$$\boxed{C_1 = \frac{\dot{y}(0) + hy(0)}{\omega'}} \quad \text{Y} \quad \boxed{C_2 = y(0)} \quad (6)$$

LA EC (5) SE PUEDE ESCRIBIR TAMBIEN COMO:

$$y(t) = Ae^{-ht} \cos(\omega't - \theta) \quad (7)$$

DONDE $A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}$ Y $\theta = \tan^{-1} \frac{C_1}{C_2} = \text{ANGULO DE FASE}$

LA GRAFICA DE LA EC (7) ES



$$T' = \frac{2\pi}{\omega'} = \text{PERIODO NATURAL AMORTIGUADO, SEG}$$

$$f' = \frac{1}{T'} = \text{FRECUENCIA NATURAL AMORTIGUADA, cps}$$

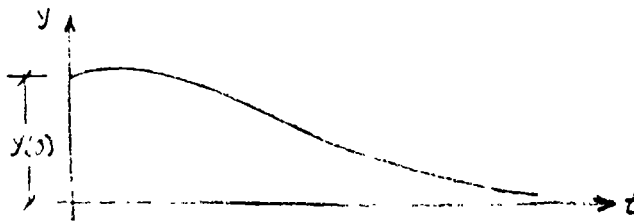
VEAMOS EL CASO ESPECIAL DE LA EC. (5) EN QUE $h \rightarrow \omega$. EN TAL CASO,

$\omega' = \sqrt{\omega^2 - h^2} \rightarrow 0$, $\cos \omega't \rightarrow 1$ Y $\sin \omega't \rightarrow \omega't$, CON LO CUAL LA EC. (5) SE

REDUCE A

$$\begin{aligned} y(t) &= e^{-\omega t} \left\{ \left[\frac{\dot{y}(0) + hy(0)}{\omega'} \right] (\omega't) + y(0) \right\} \\ &= e^{-\omega t} [\dot{y}(0)t + (1 + \omega t)y(0)] \end{aligned}$$

LA GRAFICA DE ESTA ECUACION ES



Y OBTIENIENDO UN MOVIMIENTO OSCILATORIO, POR LO CUAL
SI $h = \omega$ SE DICE QUE SE TIENE AMORTIGUAMIENTO CRITICO. EN TAL CASO:

$$h_{cr} = \omega = \frac{C_{cr}}{2M} = \sqrt{\frac{K}{M}}$$

DE DONDE $C_{cr} = 2\sqrt{KM}$. (8)

A LA RELACION $\zeta = C/C_{cr}$ SE LE LLAMA FRACCION DEL AMORTIGUAMIENTO CRITICO.

DESPEJANDO A M DE LA EC. (8) Y SUSTITUYENDOLA EN LA EC. $h = C/(2M)$
SE OBTIENE:

$$h = \frac{C}{2 \frac{C_{cr}}{4K}} = \frac{C}{C_{cr}} \frac{2K}{2\sqrt{KM}} = \zeta \sqrt{\frac{K}{M}} = \zeta \omega$$

ADEMAS:

$$\omega' = \sqrt{\omega^2 - h^2} = \sqrt{\omega^2 - \omega^2 \zeta^2} = \omega \sqrt{1 - \zeta^2}$$

$$\omega' = \omega \sqrt{1 - \zeta^2} \tag{9}$$

LOS VALORES USUALES EN ESTRUCTURAS QUE ASUME ζ VARIAN ENTRE 2 Y 5%.
EN ESTE INTERVALO ω' Y ω SON CASI IGUALES; VEAMOS, POR EJEMPLO,
EL CASO EN QUE $\zeta = 0.1$

$$\omega' = \omega \sqrt{1 - 0.01} = 0.995\omega$$

OTRA FORMA DE MEDIR EL GRADO DE AMORTIGUAMIENTO QUE TIENE UNA ESTRUCTURA ES MEDIANTE EL DECREMENTO LOGARITMICO, EL CUAL SE DEFINE COMO EL LOGARITMO DEL COCIENTE DE DOS AMPLITUDES CONSECUTIVAS

$$L = \ln \frac{y(t)}{y(t+T')} = \ln \frac{Ae^{-ht} \cos(\omega't - \theta)}{Ae^{-h(t+T')} \cos[\omega'(t+T') - \theta]}$$

$$= \ln \left\{ \frac{e^{-ht}}{e^{-h(t+T')}} \frac{\cos(\omega't - \theta)}{\cos(\omega't + \omega'T' - \theta)} \right\}$$

$$= \ln \left\{ \frac{e^{-ht}}{e^{-ht} e^{-hT'}} \frac{\cos(\omega't - \theta)}{\cos(\omega't - \theta + 2\pi)} \right\}$$

$$= \ln e^{+hT'} = hT' = \zeta\omega T' = \zeta\omega \frac{2\pi}{\omega\sqrt{1-\zeta^2}}$$

$$L = \frac{2\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}$$

(10)

SI ζ ES PEQUEÑO,

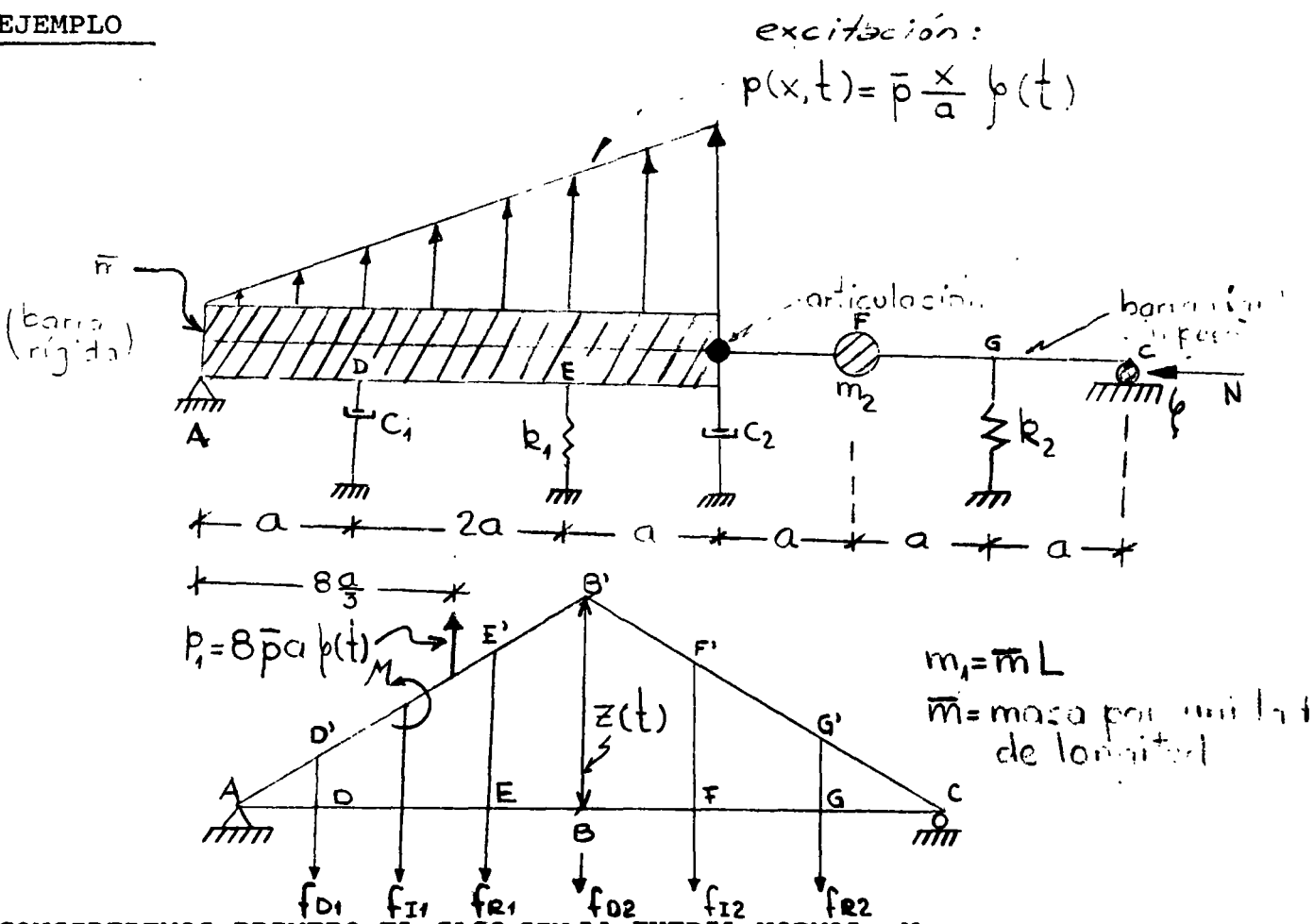
$$L \doteq 2\pi\zeta$$

(11)

ECUACION DE MOVIMIENTO GENERALIZADA.

HAY PROBLEMAS QUE APARENTEMENTE CORRESPONDE A VIBRACIONES DE SISTEMAS DE VARIOS GRADOS DE LIBERTAD PERO QUE EN REALIDAD SON DE UN GRADO SOLAMENTE.

EJEMPLO



CONSIDEREMOS PRIMERO EL CASO SIN LA FUERZA NORMAL, N.

TOMANDO COMO COORDENADA GENERALIZADA A $z(t)$:

$$f_{R1} = k_1(EE') = k_1 \frac{3}{4} z(t) ; \quad f_{R2} = k_2(GG') = k_2 \frac{1}{3} z(t)$$

$$f_{D1} = C_1 \left(\frac{d}{dt} DD' \right) = C_1 \frac{1}{4} \dot{z}(t) ; \quad f_{D2} = C_2 \dot{z}(t)$$

$$f_{I1} = m_1 \frac{1}{2} \ddot{z}(t) = \bar{m}L \frac{1}{2} \ddot{z}(t) = 2a\bar{m}\ddot{z}(t)$$

$$f_{I2} = m_2 \frac{2}{3} \ddot{z}(t)$$

$$M = I_0 \frac{1}{4a} \ddot{z}(t) = \frac{\bar{m}L}{4a} \frac{L^2}{3} \ddot{z}(t) = \frac{4}{3} a^2 \bar{m} \ddot{z}(t)$$

$$p_1 = 8\bar{p}a\zeta(t)$$

LA ECUACION DE MOVIMIENTO DEL SISTEMA SE PUEDE ESTABLECER IGUALANDO A CERO EL TRABAJO VIRTUAL REALIZADO POR TODAS LAS FUERZAS AL DARLE AL SISTEMA UN DESPLAZAMIENTO VIRTUAL EN EL PUNTO B IGUAL A δZ . EN TAL CASO

$$\begin{aligned} \delta W = & -k_1 \frac{3}{4} z(t) \left(\frac{3}{4} \delta Z\right) - k_2 \frac{1}{3} z(t) \left(\frac{1}{3} \delta Z\right) - c_1 \frac{\dot{z}(t)}{4} \left(\frac{\delta Z}{4}\right) - \\ & - c_2 \dot{z}(t) (\delta Z) - 2a\bar{m} \ddot{z}(t) \left(\frac{\delta Z}{2}\right) - m_2 \frac{2\ddot{z}(t)}{3} \left(\frac{2}{3} \delta Z\right) - \\ & - \frac{4}{3} a^2 \bar{m} \ddot{z}(t) \left(\frac{\delta Z}{4a}\right) + 8\bar{p}a\zeta(t) \left(\frac{2}{3} \delta Z\right) = 0 \end{aligned}$$

SIMPLIFICANDO SE OBTIENE

$$\left[\left(a\bar{m} + \frac{a\bar{m}}{3} + \frac{4m_2}{9} \right) \ddot{z}(t) + \left(\frac{c_1}{16} + c_2 \right) \dot{z}(t) + \left(\frac{9}{16} k_1 + \frac{k_2}{9} \right) z(t) - \frac{16}{3} \bar{p}a\zeta(t) \right] \delta Z = 0 \quad (A)$$

COMO EL DESPLAZAMIENTO VIRTUAL δZ NO ES CERO, SE DEBE CUMPLIR QUE EL TERMINO ENTRE PARENTESIS ES CERO. EN TAL CASO:

$$\boxed{\ddot{m} \ddot{z}(t) + \ddot{c} \dot{z}(t) + \ddot{k} z(t) = \ddot{p}(t)}$$

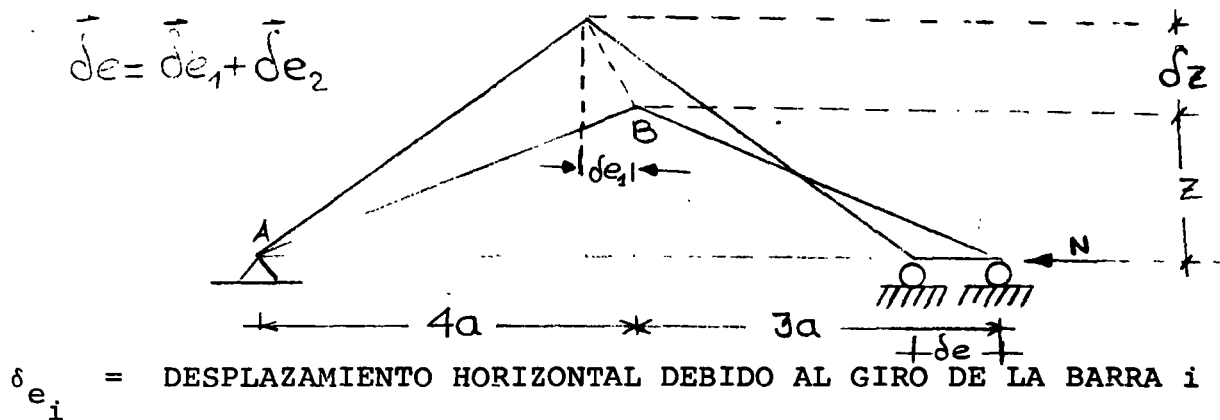
EN DONDE

$$\tilde{m} = \frac{4}{3} \bar{m}a + \frac{4}{9} m_2 \quad ; \quad \tilde{c} = \frac{c_1}{16} + c_2$$

$$\tilde{k} = \frac{9}{16} k_1 + \frac{k_2}{9} \quad ; \quad \tilde{p}(t) = \frac{16}{3} \bar{p}a\zeta(t)$$

ESTOS PARAMETROS SE DENOMINAN MASA, AMORTIGUAMIENTO, RIGIDEZ Y FUERZA GENERALIZADAS, RESPECTIVAMENTE.

CONSIDEREMOS AHORA EL CASO DE LA FUERZA NORMAL N SOLAMENTE:



$$\delta e_1 = \frac{z}{4a} \delta Z \quad ; \quad \delta e_2 = \frac{z}{3a} \delta Z$$

$$\therefore \delta e = \frac{7}{12} \frac{z}{a} \delta Z$$

EL TRABAJO VIRTUAL ES:

$$\delta W = N \delta e = \frac{7}{12} \frac{NZ}{a} (\delta Z)$$

COMO EL SISTEMA ES LINEAL SE PUEDE SUMAR ESTE TRABAJO VIRTUAL AL DE LA ECUACION (A), CON LO CUAL LA RIGIDEZ GENERALIZADA SE MODIFICA, QUEDANDO EN LA FORMA:

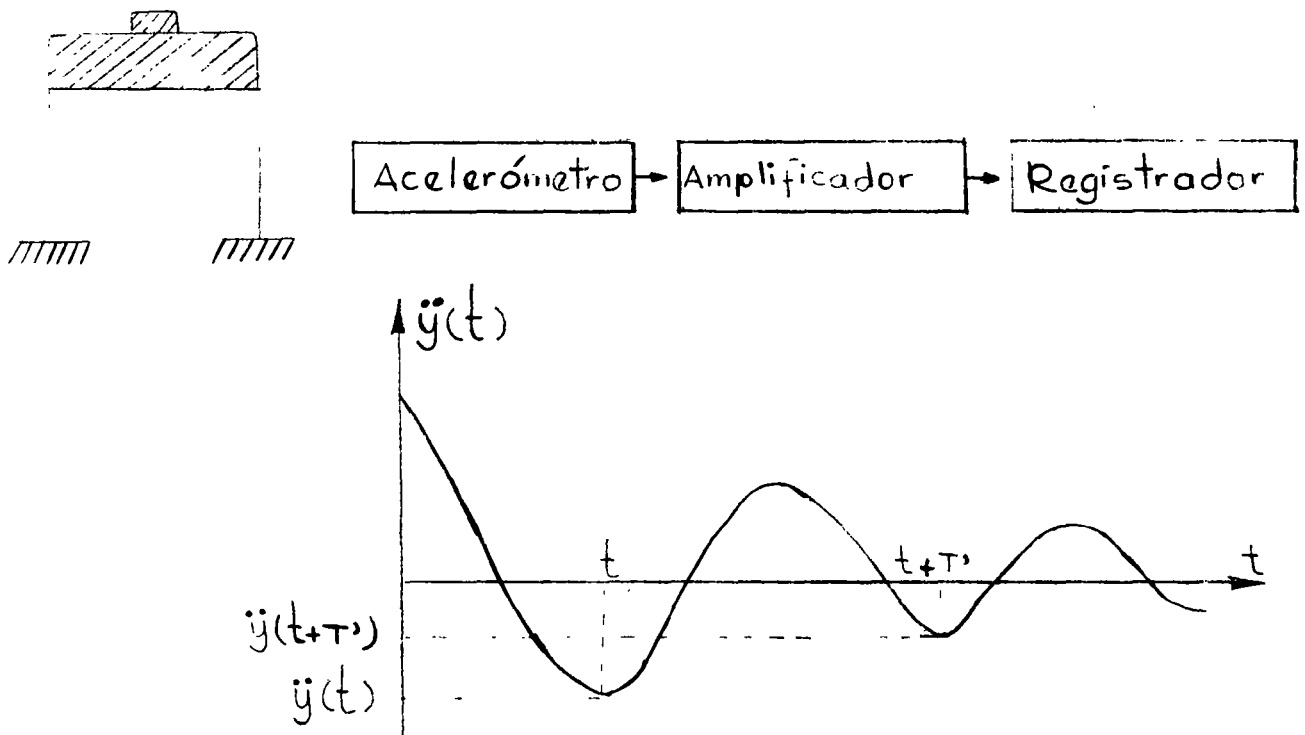
$$\tilde{k} = \frac{9}{16} k_1 + \frac{1}{9} k_2 \quad \boxed{\frac{7}{12} \frac{N}{a}}$$

DE ESTA RIGIDEZ SE PUEDE SACAR, DE PASO, LA CARGA CRITICA DE PANDEO HACIENDO $\tilde{k} = 0$:

$$N_{cr} = \left(\frac{27}{28} k_1 + \frac{4}{21} k_2 \right) a$$

DETERMINACION EXPERIMENTAL DE ζ EN ESTRUCTURAS REALES O EN MODELOS

SI SE REALIZA UN EXPERIMENTO EN EL CUAL SE SACA A LA ESTRUCTURA DE SU POSICION SE SACA A LA ESTRUCTURA DE SU POSICION DE EQUILIBRIO ESTATICO Y SE DEJA VIBRANDO LIBREMENTE, EL REGISTRO DE LAS ACELERACIONES QUE SE REGISTREN EN LA MASA TENDRA LA MISMA FORMA QUE LA GRAFICA DE LA EC. 7.



SI DE DICHO REGISTRO SE MIDEN $\ddot{y}(t + T)$ y $\ddot{y}(t)$ SE PUEDE OBTENER L Y, DE LA EC. (11), DESPEJAR A ζ

$$\zeta = \frac{L}{2\pi}$$

PRINCIPIO DE HAMILTON

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta(T-V) dt + \int_{t_1}^{t_2} \delta W_{nc} dt = 0$$

DONDE

T = ENERGIA CINETICA TOTAL

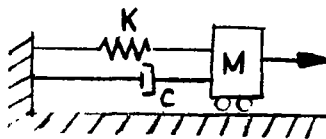
V = ENERGIA POTENCIAL TOTAL, INCLUYENDO ENERGIA DE DEFORMACION Y ENERGIA POTENCIAL DE LAS FUERZAS CONSERVATIVAS

W_{nc} = TRABAJO REALIZADO POR LAS FUERZAS NO CONSERVATIVAS
(TALES COMO LAS DE AMORTIGUAMIENTO)

δ = VARIACION TOMADA DURANTE EL INTERVALO DE TIEMPO DE t_1
A t_2

EN ESTE PRINCIPIO SE ASUME QUE LA VARIACION, δx , DEL DESPLAZAMIENTO EN LOS INSTANTES t_1 Y t_2 ES NULO.

EJEMPLO



$$T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 ; V = \frac{1}{2} kx^2 \quad (\text{ES LA ENERGIA DE DEFORMACION, UNICAMENTE})$$

$$\delta W_{nc} = p(t) \delta x - c \dot{x} \delta x$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta \left(\frac{1}{2} m \dot{x}^2 - \frac{1}{2} kx^2 \right) dt + \int_{t_1}^{t_2} (p(t) \delta x - c \dot{x} \delta x) dt$$

$$\int_{t_1}^{t_2} (m \dot{x} \delta \dot{x} - kx \delta x) dt + \int_{t_1}^{t_2} (p(t) - c \dot{x}) \delta x dt = 0$$

$$\int_{t_1}^{t_2} [m \dot{x} \delta \dot{x} - (c \dot{x} + kx - p(t)) \delta x] dt = 0$$

INTEGRANDO POR PARTES EL PRIMER TERMINO DE ESTA INTEGRAL;

$$\int_{t_1}^{t_2} m \dot{x} \delta \dot{x} dt = m \dot{x} \delta x \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} m \ddot{x} \delta x dt$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} m \ddot{x} \delta x dt$$

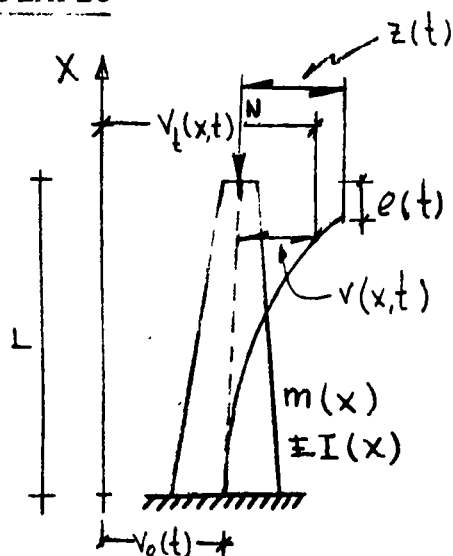
POR LO QUE

$$\int_{t_1}^{t_2} [-m \ddot{x} - c \dot{x} - kx + p(t)] \delta x dt = 0$$

PUESTO QUE δx ES ARBITRARIA, LA ECUACION ANTERIOR SE SATISFACE EN GENERAL SOLO SI

$$m \ddot{x} + c \dot{x} + kx - p(t) = 0$$

EJEMPLO



$$v(x,t) = \psi(x)z(t)$$

APLICANDO EL PRINCIPIO DE HAMILTON

$$T = \frac{1}{2} \int_0^L m(x) (\dot{v}_t(x,t))^2 dx$$

ENERGIA POTENCIAL POR DEFORMACION:

$$V = \frac{1}{2} \int_0^L EI(x) (v''(x,t))^2 dx$$

$$e(t) = \frac{1}{2} \int_0^L [v'(x,t)]^2 dx$$

ENERGIA POTENCIAL DEBIDA A LA FUERZA NORMAL:

$$V_N = -\frac{N}{2} \int_0^L [v'(x,t)]^2 dx$$

EN ESTAS ECUACIONES: $\dot{v} = dv/dt$; $v' = dv/dx$
 $v'' = d^2v/dx^2$

PUESTO QUE NO HAY FUERZAS DINAMICAS EXTERNAS, Y SI CONSIDERAMOS AMOR-
 TIGUAMIENTO NULO, ENTONCES $\delta W_{nc} = 0$, POR LO QUE

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta(T-V) dt = 0 \quad \circ$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[\int_0^L m(x) \dot{v}_t(x,t) \delta \dot{v}_t dx - \int_0^L EI(x) v''(x,t) \delta v'' dx + \right. \\ \left. + N \int_0^L v'(x,t) \delta v' dx \right] = 0$$

TOMANDO EN CUENTA QUE

$$\dot{v}_t = \dot{v} + \dot{v}_0, \quad v'' = \psi''Z, \quad v' = \psi'Z, \quad \dot{v} = \psi \dot{Z}$$

$$\delta \dot{v}_t = \delta \dot{v}, \quad \delta v'' = \psi'' \delta Z, \quad \delta v' = \psi' \delta Z, \quad \delta \dot{v} = \psi \delta \dot{Z}$$

SE OBTIENE

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[\dot{z} \delta \dot{z} \int_0^L m(x) \psi^2 \delta x + \delta \dot{z} \dot{v}_0(t) \int_0^L m(x) \psi \delta x - \right. \\ \left. - z \delta z \int_0^L EI(x) (\psi'')^2 \delta x + Nz \delta z \int_0^L (\psi'')^2 \delta x \right] dt = 0$$

INTEGRANDO POR PARTES LAS PRIMERAS DOS INTEGRALES Y HACIENDO

$$\bar{m} = \int_0^L m(x) \psi^2 dx = \text{MASA GENERALIZADA}$$

$$\tilde{k} = \int_0^L EI(x) (\psi'')^2 dx = \text{RIGIDEZ GENERALIZADA SIN CONSIDERAR FUERZA NORMAL}$$

$$\circ \quad \tilde{k} = \int_0^L EI(x) (\psi'')^2 dx - N \int_0^L (\psi')^2 dx = \text{RIGIDEZ GENERALIZADA CON N}$$

$$\tilde{p}(t) = \text{FUERZA GENERALIZADA EFECTIVA} = - \ddot{v}_0 \int_0^L m(x) \psi dx$$

SE OBTIENE LA ECUACION

$$\int_{t_1}^{t_2} [\ddot{m}z + \tilde{k}z - \tilde{p}(t)] \delta z dt = 0$$

POR LO QUE

$$\ddot{m}z + \tilde{k}z = \tilde{p}(t)$$

CASO PARTICULAR. CONSIDEREMOS $EI = \text{cte}$ Y $m = \text{cte} = \bar{m}$

SEA $\psi(x) = 1 - \cos \frac{\pi x}{2L}$; EN TAL CASO:

$$\tilde{m} = \int_0^L \bar{m} (\psi)^2 dx = \bar{m} \int_0^L (1 - \cos \frac{\pi x}{2L})^2 dx = 0.228 \bar{m}L$$

SI $N=0$:

$$\tilde{k} = \int_0^L EI (\psi'')^2 dx = EI \int_0^L \left(\frac{\pi^2}{4L^2} \cos \frac{\pi x}{2L} \right)^2 dx = \frac{\pi^4}{32} \frac{EI}{L^3}$$

$$\tilde{p}(t) = -\ddot{v}_0(t) \int_0^L \bar{m} \psi dx = -\bar{m} \ddot{v}_0(t) \int_0^L (1 - \cos \frac{\pi x}{2L}) dx = -0.364 \bar{m} L \ddot{v}_0(t)$$

SI $N \neq 0$:

$$\tilde{k} = \frac{\pi^4}{32} \frac{EI}{L^3} - N \int_0^L (\psi')^2 dx = N \int_0^L \left(\frac{\pi}{2L} \text{sen} \frac{\pi x}{2L} \right)^2 dx$$

$$\tilde{k} = \frac{\pi^4}{32} \frac{EI}{L^3} - \frac{N\pi^2}{8L}$$

PARA CARGA DE PANDEO: $\frac{\pi^4}{32} \frac{EI}{L^3} - \frac{N_{cr}\pi^2}{8L} = 0 \Rightarrow N_{cr} = \frac{\pi^2}{4} \frac{EI}{L^2}$

CON LO QUE $\tilde{K} = \frac{\pi^4 EI}{32L^3} \left(1 - \frac{N}{N_{cr}}\right)$ Y LA ECUACION DE EQUILIBRIO

QUEDA EN LA FORMA:

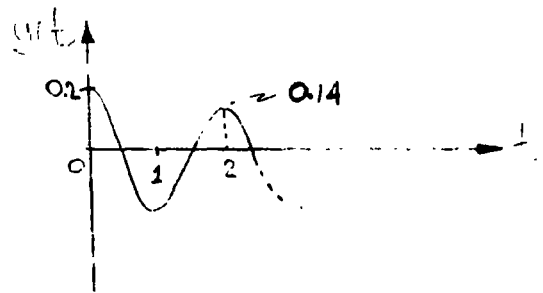
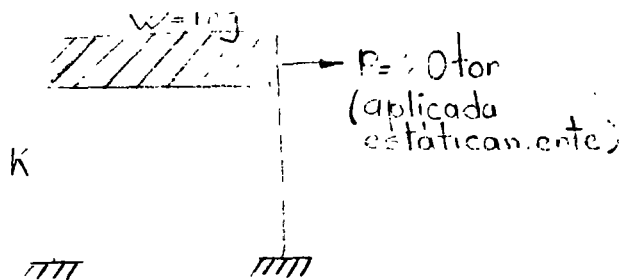
$$0.228 \bar{m}L\ddot{z}(t) + \frac{\pi^4 EI}{32L^3} \left(1 - \frac{N}{N_{cr}}\right) z(t) = 0.364\bar{m}L\ddot{v}_o(t)$$

LA FRECUENCIA CIRCULAR NATURAL CORRESPONDIENTE ES

$$\omega = \sqrt{\frac{\pi^4 EI \left(1 - \frac{N}{N_{cr}}\right)}{7.296 \bar{m}L^4}}$$

EJEMPLO

A UNA ESTRUCTURA DE UN PISO SE LE APLICA UNA CARGA HORIZONTAL DE 20 TON EN SU MASA, OBSERVANDOSE UN DESPLAZAMIENTO ESTÁTICO DE 0.2 CM. AL SOLTAR SUBITAMENTE LA FUERZA SE REGISTRA UN PERIODO DE OSCILACION DE 0.2 SEG, Y QUE LA AMPLITUD EN EL SEGUNDO CICLO ES DE 0.14 CM.



CALCULAR ω , ω' , f' , L Y ζ

$$1. \quad \text{DE } T' \doteq \frac{2\pi}{\omega} = \frac{\pi^2}{\sqrt{\frac{K}{M}}} = \frac{2\pi\sqrt{W}}{\sqrt{Kg}} = 0.2 \quad \text{Y} \quad K = \frac{2.0}{0.2} = 100 \frac{\text{TON}}{\text{CM}}$$

SE OBTIENE

$$W \doteq T'^2 \text{ Kg} / 4\pi^2 = (0.2)^2 \times 100 \times 981 / 4\pi^2 = \frac{0.04 \times 100 \times 981}{4 \times 9.87}$$

$$W \doteq 99.4 \text{ TON}$$

$$2. \quad \omega' = \frac{2\pi}{T'} = \frac{2\pi}{0.2} = 10\pi \frac{\text{RAD}}{\text{SEG}} ; \quad f' = \frac{1}{T'} = \frac{1}{0.2} = 5 \text{ cps}$$

$$3. \quad L = \ln \frac{0.2}{0.14} = \ln 1.43 = 0.357$$

$$\zeta \doteq \frac{L}{2\pi} = \frac{0.357}{2\pi} = 0.0568 \quad \text{O} \quad \zeta = 5.68 \%$$

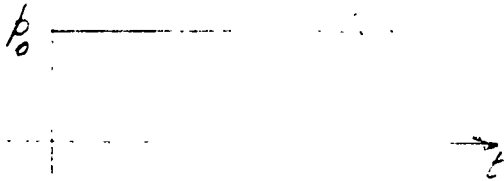
$$C = \zeta C_{cr} = \zeta 2\sqrt{KM} = 0.1132 \sqrt{100 \times 99.4 / 981}$$

$$= 1.132 \times 0.318 = 0.36 \text{ TON SEG/CM}$$

EJEMPLO

CALCULAR LA RESPUESTA DE UN SISTEMA DE UN GRADO DE LIBERTAD SUJETO A LA SIGUIENTE EXCITACION:

$p_0 \delta(t)$



CON $C = 0$

$$m\ddot{x} + kx = p_0$$

$$x = C_1 \operatorname{sen}\omega t + C_2 \operatorname{cos}\omega t + p_0/k$$

SI EN $t = 0$, $x = 0$ Y $\dot{x} = 0$:

$$C_2 = -F_0/k \quad \text{Y} \quad C_1 = 0$$

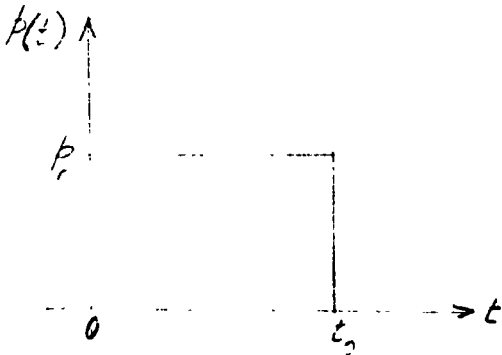


$$\therefore x = \frac{p_0}{k} (1 - \operatorname{cos}\omega t);$$

$$B = \text{FACTOR DE AMPLIFICACION DINAMICA} = \frac{x}{\left(\frac{p_0}{k}\right)} = (1 - \operatorname{cos}\omega t)$$

$$B_{\text{MAX}} = 2, \text{ EN } t = T/2, 3T/2 \dots$$

AHORA, SI LA EXCITACION ES DE DURACION t_0 :



SI $t < t_0$:

$$x = \frac{p_0}{k} (1 - \operatorname{cos}\omega t)$$

$$\dot{x}(t) = \frac{\omega p_0}{k} \operatorname{sen}\omega t$$

EN $t = t_0$:

$$x(t_0) = \frac{p_0}{k} (1 - \operatorname{cos}\omega t_0)$$

$$\dot{x}(t_0) = \frac{\omega p_0}{k} \operatorname{sen}\omega t_0$$

CONDICIONES INICIALES PARA $t > t_0$

SI $t > t_0$, $x = A \cos \omega t' + B \sin \omega t'$, CON $t' = t - t_0$

EN $t' = 0$ ($t = t_0$), SE DEBEN CUMPLIR LAS CONDICIONES INICIALES ANTERIORES, LO CUAL CONDUCE A

$$A = \frac{p_0}{k} (1 - \cos \omega t_0) \quad Y \quad B = \frac{p_0}{k} \sin \omega t_0$$

POR LO QUE $x = \frac{p_0}{k} (1 - \cos \omega t_0) \cos \omega t' + \frac{p_0}{k} \sin \omega t_0 \sin \omega t'$

$$= \frac{p_0}{k} \sqrt{(1 - \cos \omega t_0)^2 + \sin^2 \omega t_0} \sin(\omega t' - \theta)$$

0

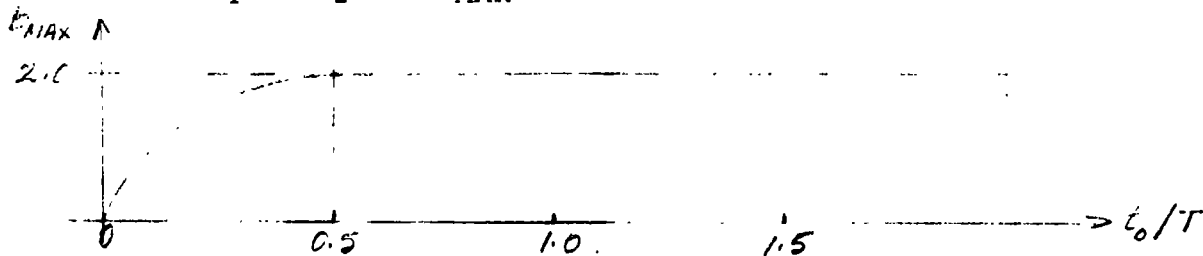
$$x = \frac{p_0}{k} \sqrt{2(1 - \cos t_0)} \sin(\omega t' - \theta)$$

$$= \frac{p_0}{k} \underbrace{\left(2 \sin \frac{\omega t_0}{2} \right)}_{B} \sin(\omega t' - \theta)$$

B = FACTOR DE AMPLIFICACION

$$B_{MAX} = 2 \sin \frac{\omega t_0}{2} = 2 \sin \left(\pi \frac{t_0}{T} \right)$$

CUANDO $\frac{\pi t_0}{T} = \frac{\pi}{2}$, $B_{MAX} = 2$



EL MAXIMO
OCURRE DES-
PUES DE LA
EXCITACION

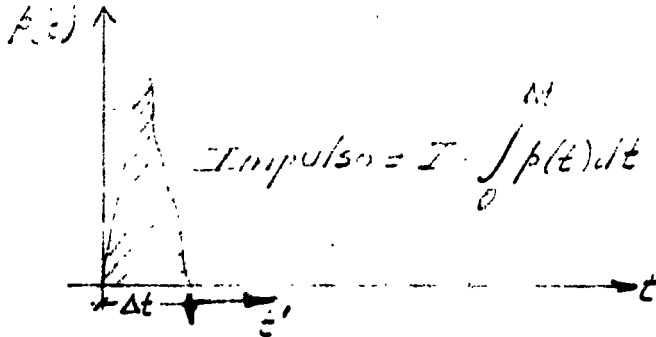
EL MAXIMO OCURRE DURANTE LA EXCITACION

SI t_0/T ES MUY PEQUEÑO, $\sin \frac{\pi t_0}{T} = \pi t_0/T$

$$Y \ x_{\text{MAX}} = \frac{2p_0}{k} \frac{\pi t_0}{T} = \frac{2p_0}{\frac{mk}{m}} \frac{\omega t_0}{2} = \frac{p_0 t_0}{m\omega} = \frac{I}{m\omega}$$

EN DONDE $i = p_0 t_0 = \text{AREA BAJO LA EXCITACION}$

EJEMPLO: EXCITACION DADA POR UN IMPULSO.-SEA UN IMPULSO APLICADO DURANTE UN INTERVALO DE TIEMPO Δt MUY PEQUEÑO, TAL QUE $\Delta t/T \ll 1$:



POR EL PRINCIPIO IMPULSO - MOMENTO SE TIENE QUE

$$I = \int_0^{\Delta t} p(t) dt = m \dot{x}$$

EN DONDE \dot{x} ES LA VELOCIDAD QUE EL IMPULSO LE IMPRIME A LA MASA DEL SISTEMA. DESPUES DE Δt EL SISTEMA QUEDA VIBRANDO LIBREMENTE CON VELOCIDAD INICIAL $\dot{x}(0) = \frac{I}{m}$, MIDIENDO EL TIEMPO EN LA ESCALA DE t' , Y CON DESPLAZAMIENTO INICIAL QUE PUEDE CONSIDERARSE NULO, DEBIDO A QUE EN EL CORTO INTERVALO DE TIEMPO Δt LA MASA ADQUIERE UN DESPLAZAMIENTO DE MAGNITUD DESPRECIABLE. EN TAL CASO LA RESPUESTA RESULTA SER

$$x(t') = \frac{\dot{x}(0)}{\omega} \text{sen} \omega t' = \frac{I}{m\omega} \text{sen} \omega t'$$

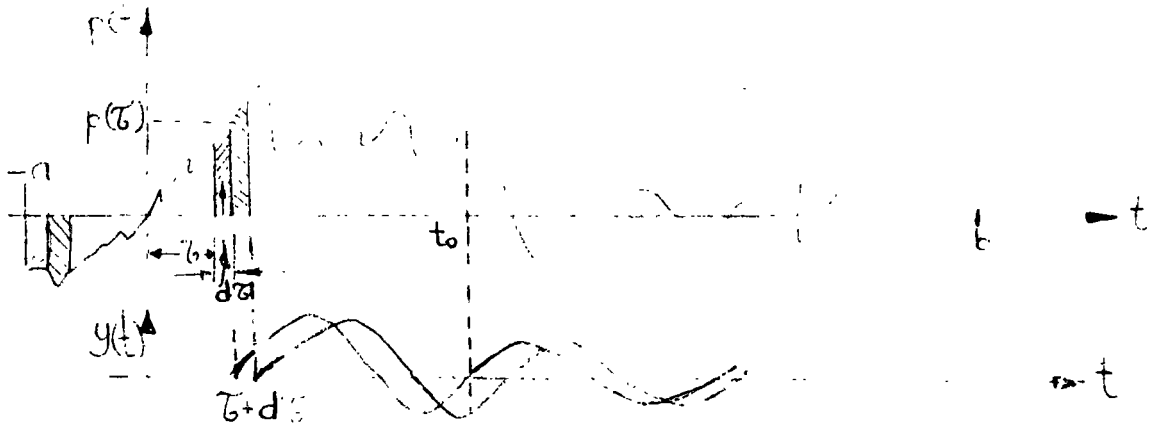
SI EL SISTEMA TIENE AMORTIGUAMIENTO,

$$x(t') = \frac{I}{m\omega} e^{-\zeta \omega t'} \text{sen} \omega' t'$$

SOLUCION AL PROBLEMA DE VIBRACIONES FORZADAS

A. FUERZA EXTERNA

VEAMOS PRIMERO EL CASO EN QUE EXISTE $p(t)$ Y QUE $\ddot{x}_0(t) = 0$,
SIENDO $p(t)$ ARBITRARIA



PUESTO QUE $d\tau \ll T$, LA FUERZA APLICADA EN $t = \tau$ PRODUCIRA UN INCREMENTO INSTANTANEO EN LA VELOCIDAD DE LA MASA IGUAL A

$$\dot{y} = \frac{p(\tau)d\tau}{M}$$

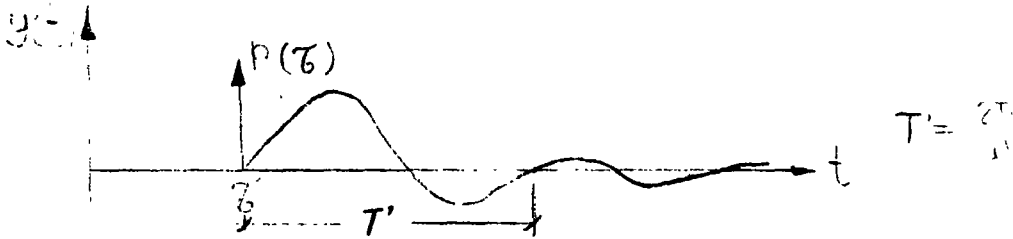
Y UN INCREMENTO INSTANTANEO NULO EN EL DESPLAZAMIENTO, ES DECIR, $y=0$. TOMANDO ESTOS INCREMENTOS COMO CONDICIONES INICIALES EN $t = \tau$, LA EC. 5 DA COMO RESULTADO

$$y(t) = \frac{p(\tau)d\tau}{M\omega'} \text{ sen } \omega'(t-\tau) e^{-h(t-\tau)} ; t \geq \tau$$

PUESTO QUE EL SISTEMA ES LINEAL ES POSIBLE SUPERPONER LOS EFECTOS OCACIONADOS POR LOS IMPULSOS APLICADOS EN CADA τ QUE HAYAN OCURRIDO ANTES DEL INSTANTE t DE INTERES; ES DECIR,

$$y(t) = \frac{1}{M\omega'} \int_{-\infty}^t p(\tau) e^{-h(t-\tau)} \text{sen}\omega'(t-\tau) d\tau \quad (12)$$

LA FUNCION $\frac{1}{M\omega'} e^{-h(t-\tau)} \text{sen}\omega'(t-\tau)$, QUE ES LA RESPUESTA A UN IMPULSO INSTANTANEO UNITARIO DE FUERZA, SE LE CONOCE COMO FUNCION DE TRANSFERENCIA DEL SISTEMA.



LA SOLUCION DADA EN LA EC. (12) SE DENOMINA INTEGRAL DE DUHAMEL. ESTA CONSTITUYE LA SOLUCION PARTICULAR DE LA ECUACION DIFERENCIAL DE EQUILIBRIO; LA SOLUCION GENERAL ES:

$$y(t) = Ae^{-ht} \cos(\omega't - \theta) + \frac{1}{M\omega'} \int_{-\infty}^t p(\tau) e^{-h(t-\tau)} \text{sen}\omega'(t-\tau) d\tau$$

EN DONDE A Y θ DEPENDEN DE LAS CONDICIONES INICIALES DE DESPLAZAMIENTO Y VELOCIDAD, $y(0)$ Y $\dot{y}(0)$, RESPECTIVAMENTE. EN GENERAL LA PARTE DE LA RESPUESTA DADA POR LA SOLUCION PARTICULAR ES LA MAS IMPORTANTE, YA QUE LA OTRA PARTE SE AMORTIGUA RAPIDAMENTE.

B. MOVIMIENTO DEL SUELO

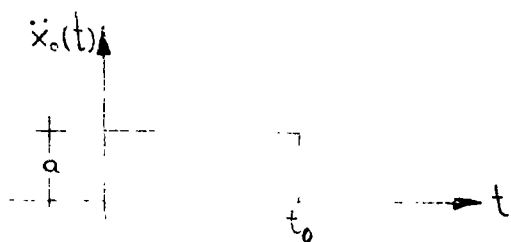
PARA ESCRIBIR LA SOLUCION PARTICULAR DE LA ECUACION DIFERENCIAL DE EQUILIBRIO PARA EL CASO DE VIBRACION FORZADA POR MOVIMIENTO DE LA BASE DE LA ESTRUCTURA, BASTA CAMBIAR $p(\tau)/M$ DE LA EC. (12) POR $-\ddot{x}_0$, YA QUE EN DICHA ECUACION APARECE EN EL MIEMBRO DERECHO $p(t)/M$ CUANDO LA EXCITACION ES $p(t)$ Y APARECE $-\ddot{x}_0$ CUANDO LA EXCITACION ES POR MOVIMIENTO DEL SUELO. EN ESTE CASO

LA SOLUCION PARTICULAR ES, ENTONCES

$$y(t) = \frac{-1}{\omega} \int_{-\infty}^t \ddot{x}_0(\tau) e^{-h(t-\tau)} \operatorname{sen} \omega'(t-\tau) d\tau \quad (14)$$

EJEMPLO

CALCULAR LA RESPUESTA DE UN SISTEMA DE UN GRADO DE LIBERTAD CON AMORTIGUAMIENTO NULO, CUANDO LA EXCITACION ES LA SIGUIENTE:



$$\begin{aligned} \zeta &= 0 \\ \ddot{x}_0(t) &= a, \text{ SI } 0 \leq t \leq t_0 \\ \ddot{x}_0(t) &= 0, \text{ SI } t < 0 \text{ Ó } t > t_0 \end{aligned}$$

CONSIDERESE QUE $y(0)=0$ Y $\dot{y}(0)=0$. PUESTO QUE LAS CONDICIONES INICIALES SON NULAS SE TIENE QUE $A=0$ (UTILIZANDO LA EC. (13) Y LA SOLUCION PARTICULAR QUE SIGUE, EC. (A)):

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{-1}{\omega} \int_{-\infty}^t a \operatorname{sen} \omega(t-\tau) d\tau = \frac{-a}{\omega} \int_0^t \operatorname{sen} \omega(t-\tau) d\tau \\ &= \frac{-a}{\omega^2} (1 - \cos \omega t) \quad \text{SI } 0 \leq t \leq t_0 \end{aligned} \quad (A)$$

PARA FINES DE DISEÑO ESTRUCTURAL ES IMPORTANTE CONOCER LA RESPUESTA MAXIMA; ESTA OCURRE CUANDO $\cos \omega t = -1$, O SEA, CUANDO

$$\omega t = \pi \quad \text{O} \quad t = \frac{\pi}{\omega} = \frac{\pi}{\frac{2\pi}{T}} = \frac{T}{2}$$

Y VALE

$$\text{MAX} \{ |y(t)| \} = \frac{2a}{\omega^2} = \frac{a}{2\pi^2} T^2, \text{ SI } 0 \leq \frac{T}{2} \leq t_0 \quad \text{O} \quad 0 \leq T \leq 2t_0$$

PARA $t > t_0$, O SEA, PARA $T/2 > t_0$ ES NECESARIO OBTENER LA RESPUESTA EN VIBRACION LIBRE CON LAS CONDICIONES INICIALES DE VELOCIDAD Y DESPLAZAMIENTO CORRESPONDIENTES A $t = t_0$:

$$y(t_0) = \frac{-a}{\omega^2} (1 - \cos \omega t_0) ; \quad \dot{y}(t_0) = \frac{-a}{\omega} \text{sen} \omega t_0$$

APLICANDO LAS ECS. (5) Y (6) OBTENEMOS:

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{-a}{\omega^2} [\text{sen} \omega t_0 \text{sen} \omega t' - (1 - \cos \omega t_0) \cos \omega t'] \\ &= \frac{-a}{\omega^2} \sqrt{\text{sen}^2 \omega t_0 + (1 - \cos \omega t_0)^2} \text{sen} (\omega t' - \vartheta) \end{aligned}$$

$$y(t) = \frac{-2a}{\omega^2} \frac{\text{sen} \omega t_0}{2} \text{sen} (\omega t' - \vartheta)$$

$$\text{DONDE } t' = t - t_0 \quad \text{Y } \vartheta = \tan^{-1} \left(\frac{1 - \cos \omega t_0}{\text{sen} \omega t_0} \right)$$

EL VALOR MAXIMO DE LA RESPUESTA EN ESTE INTERVALO ES

$$\text{MAX} \{ |y(t)| \} = \frac{2a}{\omega^2} \left| \text{sen} \frac{\omega t_0}{2} \right|, \text{ SI } t > t_0 \quad \text{O} \quad T > 2t_0$$

EXCITACION ARMONICA

CONSIDEREMOS AHORA EL CASO EN QUE LA ESTRUCTURA ES EXCITADA POR LA FUERZA ARMONICA

$$p(t) = p_0 \text{ sen}\Omega t$$

DE DURACION INDEFINIDA.

LA SOLUCION DE ESTE PROBLEMA SE PUEDE ENCONTRAR SUSTITUYENDO A $p(t) = p_0 \text{ sen}\Omega t$ EN LA INTEGRAL DE DUHAMEL Y OBTENIENDO SU SOLUCION. SIN EMBARGO, EL RESULTADO LO OBTENDREMOS DE LA CONSIDERACION DE QUE PARA QUE EL MIEMBRO DERECHO DE LA ECUACION DIFERENCIAL DE EQUILIBRIO APAREZCA UN TERMINO ARMONICO ES NECESARIO QUE EN EL IZQUIERDO SE TENGAN COMBINACIONES DE TERMINOS TAMBIEN ARMONICOS. CONSIDEREMOS, POR LO TANTO, LA SOLUCION

$$y(t) = A \text{ sen}\Omega t + B \text{ cos}\Omega t \quad (14)$$

Y DETERMINEMOS LOS VALORES QUE DEBEN TENER A Y B PARA SATISFACER LA ECUACION DIFERENCIAL DE EQUILIBRIO, PARA LO CUAL HAY QUE SUSTITUIR A $y(t)$, $\dot{y}(t)$ Y $\ddot{y}(t)$ EN LA ECUACION DIFERENCIAL. HACIENDO ESTO Y FACTORIZANDO:

$$\begin{aligned} &(-A\Omega^2 - 2h\Omega B + \omega^2 A) \text{ sen}\Omega t + \\ &(-B\Omega^2 + 2h\Omega A + \omega^2 B) \text{ cos}\Omega t = \frac{P_0}{M} \text{ sen}\Omega t + 0 \times \text{cos}\Omega t \end{aligned}$$

PARA QUE ESTA IGUALDAD SE CUMPLA SE REQUIERE QUE

$$\begin{aligned} -A\Omega^2 - 2h\Omega B + \omega^2 A &= \frac{P_0}{M} \\ -B\Omega^2 + 2h\Omega A + \omega^2 B &= 0 \end{aligned}$$

RESOLVIENDO ESTE SISTEMA DE ECUACIONES SE OBTIENE:

$$A = \frac{\frac{P_0}{M} (\Omega^2 - \omega^2)}{(\omega^2 - \Omega^2)^2 + 4h^2 \Omega^2}$$

$$B = \frac{-2h\Omega \frac{P_0}{M}}{(\omega^2 - \Omega^2)^2 + 4h^2 \Omega^2}$$

SUSTITUYENDO A Y B EN LA EC. (14) :

$$y(t) = \frac{\frac{P_0}{M}}{(\omega^2 - \Omega^2)^2 + 4h^2 \Omega^2} \{ (\Omega^2 - \omega^2) \text{ sen} \Omega t - 2h\Omega \text{ cos} \Omega t \} \quad (15)$$

O, TAMBIEN

$$y(t) = \frac{\frac{P_0}{M}}{\sqrt{(\omega^2 - \Omega^2)^2 + 4h^2 \Omega^2}} \text{ sen}(\Omega t - \vartheta) \quad (16)$$

$$\text{EN DONDE } \vartheta = \text{ANG TAN} \left(\frac{-B}{A} \right) = \text{TAN}^{-1} \frac{2h\Omega}{\omega^2 - \Omega^2} = \text{ANGULO DE FASE} \quad (17)$$

DIVIDIENDO NUMERADOR Y DENOMINADOR DE LAS ECS. (16) Y (17) ENTRE ω^2

SE OBTIENE:

$$y(t) = \frac{\frac{P_0}{k}}{\sqrt{\left(1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2}\right)^2 + (2\zeta -)^2}} \text{ sen}(\Omega t - \vartheta) \quad (18)$$

$$\vartheta = \text{TAN}^{-1} \frac{2\zeta \frac{\Omega}{\omega}}{1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2}} \quad (19)$$

SI SE TIENE EXCITACION ARMONICA EN LA BASE DE LA ESTRUCTURA

$x_0(t) = a \sin \Omega t$, O SEA, $\ddot{x}_0 = a \Omega^2 \sin \Omega t$, BASTA CAMBIAR A p_0/M EN LA EC. (16) POR $-a \Omega^2$; HACIENDO ESTO SE OBTIENE

$$y(t) = \frac{(\Omega/\omega)^2}{\sqrt{(1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2})^2 + (2\zeta\frac{\Omega}{\omega})^2}} a \sin(\Omega t - \theta) \quad (20)$$

FACTOR DE AMPLIFICACION DINAMICA DE DESPL. = $B_d = \text{MAX} \left| \frac{y(t)}{a} \right|$

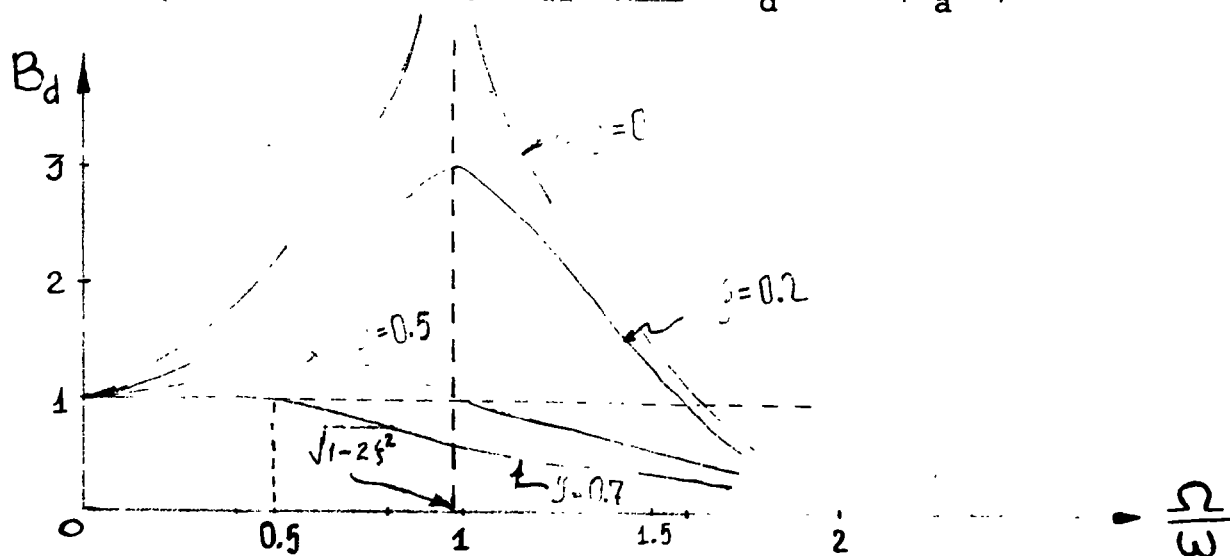


FIG. 1. CURVAS DE AMPLIFICACION DINAMICA PARA EL CASO DE FUERZA EXTERNA

$$B_d = \frac{1}{\sqrt{(1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2})^2 + (2\zeta\frac{\Omega}{\omega})^2}} \quad (21)$$

LOS FACTORES DE AMPLIFICACION DINAMICA DE VELOCIDAD Y ACELERACION SE PUEDEN OBTENER DERIVANDO RESPECTO A t LA EC. (16) O LA (20), SEGUN SEA EL CASO. LOS RESULTADOS SON, RESPECTIVAMENTE,

$$\text{MAX} \left| \frac{\dot{y}(t)}{a\omega} \right| = B_v = \frac{\Omega}{\omega} B_d \quad \text{Y} \quad B_a = \left(\frac{\Omega}{\omega}\right)^2 B_d = \text{MAX} \left| \frac{\ddot{y}(t)}{a\omega^2} \right| \quad (22)$$

EJEMPLO

CON UNA MAQUINA VIBRATORIA PORTATIL QUE PRODUCE FUERZAS ARMONICAS

SE PROBO UNA ESTRUCTURA, AJUSTANDO LA MAQUINA EN LAS FRECUENCIAS

$\Omega_1 = 16 \frac{\text{RAD}}{\text{SEG}}$ Y $\Omega_2 = 25 \frac{\text{RAD}}{\text{SEG}}$, CON UNA FUERZA MAXIMA DE 500 LB EN CADA

CASO. LAS AMPLITUDES Y ANGULOS DE FASE DE LA RESPUESTA QUE SE MIDIE-

RON FUERON:

$$\rho_1 = 7.2 \times 10^{-3} \text{ in}, \theta_1 = 15^\circ (\cos\theta_1 = 0.966 ; \text{sen}\theta_1 = 0.259)$$

$$\rho_2 = 14.5 \times 10^{-3} \text{ in}, \theta_2 = 55^\circ (\cos\theta_2 = 0.574; \text{sen}\theta_2 = 0.819)$$

EVALUAR LAS PROPIEDADES DINAMICAS DEL SISTEMA.

HACIENDO:

$$\rho_i = \frac{p_o}{k} B_{d_i} = \frac{p_o}{k} \frac{1}{1 - \beta^2} \left\{ \frac{1}{1 + [2\zeta\beta/(1-\beta^2)]^2} \right\}^{1/2} \frac{1}{\cos\theta_i}$$

$$\rho_i = \frac{p_o}{k} \frac{\cos\theta_i}{1 - \beta^2} ; \beta = \Omega/\omega$$

$$k - k\beta^2 = \frac{p_o \cos\theta_i}{\rho_i} = k - \Omega^2 m \quad (23)$$

SUSTITUYENDO LOS VALORES EXPERIMENTALES DE LAS DOS PRUEBAS:

$$\left. \begin{aligned} k - (16)^2 m &= \frac{500 (0.966)}{7.2 \times 10^{-3}} \\ k - (25)^2 m &= \frac{500 (0.574)}{14.5 \times 10^{-3}} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &\rightarrow k = 100\,000 \frac{\text{lb}}{\text{in}} \\ &\rightarrow m = 128.5 \frac{\text{lb SEG}^2}{\text{in}} \\ &\Downarrow \\ &\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = 27.9 \frac{\text{RAD}}{\text{SEG}} \end{aligned}$$

USANDO LAS ECS. (17) Y (23) SE OBTIENE:

$$\zeta = \frac{p_o \operatorname{sen} \theta_i}{2\beta_i k\rho_i} ; \text{ DE DONDE } \zeta = \frac{500 (0.259)}{2 \frac{16}{27.9} 100\,000 (7.2 \times 10^{-3})} = 15.7\%$$

RESONANCIA

CUANDO LA EXCITACION TIENE FRECUENCIA IGUAL A LA NATURAL DEL SISTEMA, SE DICE QUE SE PRESENTA EL CASO DE RESONANCIA. DE LA EC. (20) ES EVIDENTE QUE SI $\beta = \Omega/\omega = 1$ SE TIENE

$$y(t) = \underbrace{\frac{1}{2\zeta}}_{B_d} a \operatorname{sen}(\Omega t - \theta)$$

$O(B_d)_{\text{res}} = \frac{1}{2\zeta}$ EN CASO DE MOVIMIENTO DEL SUELO Y DE FUERZA EXTERNA

SIN EMBARGO, AUNQUE ESTA RESPUESTA ES CASI IGUAL A LA MAXIMA, ESTA OCURRE CUANDO $\Omega = \omega \sqrt{1-2\zeta^2}$. EN EL CASO DE $\dot{y}(t)$ Y $\ddot{y}(t)$, EL MAXIMO OCURRE, RESPECTIVAMENTE, CUANDO

$$\Omega = \omega \quad \text{Y} \quad \Omega = \frac{\omega}{\sqrt{1-2\zeta^2}} \quad \text{SI} \quad \zeta \leq 20\%, \text{ LOS VALORES DE ESTAS } \Omega \text{ NO}$$

DIFIEREN EN MAS DE 2%.

EL MAXIMO VALOR DE B_d (PARA $\Omega = \omega \sqrt{1-2\zeta^2}$) ES

$$(B_d)_{\text{MAX}} = \frac{1}{2\zeta \sqrt{1-\zeta^2}} \quad \text{O} \quad (B_d)_{\text{MAX}} = \frac{(\Omega/\omega)^2}{2\zeta \sqrt{1-\zeta^2}}$$

SI SE TIENE FUERZA EXTERNA O MOVIMIENTO DEL SUELO, RESPECTIVAMENTE.

SE OBSERVA EN ESTAS ECUACIONES QUE SI $\zeta=0$, $(B_d)_{\text{MAX}} = \infty$.

SI SE ANALIZA LA SOLUCION GENERAL DE LA ECUACION DIFERENCIAL DE MOVIMIENTO PARA EL CASO DE CONDICIONES INICIALES NULAS Y $\delta=1$ SE TIENE QUE:

$$y(t) = e^{-ht} (A \operatorname{sen} \omega' t + B \operatorname{cos} \omega' t) - \frac{p_0}{k} \frac{\operatorname{cos} \omega t}{2\zeta}$$

$$y(0) = B - p_0 / (2\zeta k) = 0$$

DE DONDE, HACIENDO $y(0)=0$ Y $\dot{y}(0)=0$, SE OBTIENEN:

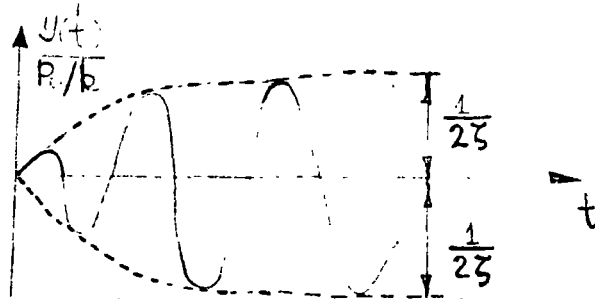
$$A = \frac{p_0}{k} \frac{\omega}{2\omega'} = \frac{p_0}{k} \frac{1}{2\sqrt{1-\zeta^2}} ; B = \frac{p_0}{k} \frac{1}{2\zeta}$$

POR LO QUE

$$y(t) = \frac{1}{2\zeta} \frac{p_0}{k} [e^{-ht} (\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \operatorname{sen} \omega' t + \operatorname{cos} \omega' t) - \operatorname{cos} \omega t]$$

PARA AMORTIGUAMIENTOS PEQUEÑOS:

$$\frac{y(t)}{p_0/k} \doteq \frac{1}{2\zeta} (e^{-ht} - 1) \operatorname{cos} \omega t$$

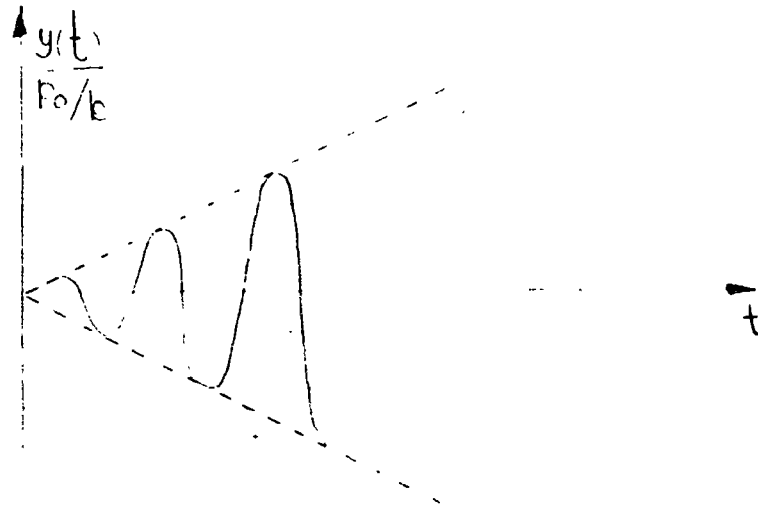


Si $\zeta > 0$ y $\beta=1$

SI $\zeta=0$, APLICANDO LA REGLA DE L'HOSPITAL, SE OBTIENE:

$$\frac{y(t)}{p_0/k} = \frac{1}{2} (\operatorname{sen} \omega t - \omega t \operatorname{cos} \omega t)$$

O SEA, EL MAXIMO DE LA RESPUESTA TIENDE A INFINITO GRADUALMENTE.



CARACTERISTICAS DINAMICAS DE LOS REGISTRADORES DE SISMOS.

SI LA ACELERACION DE LA BASE DE UN INSTRUMENTO ES ARMONICA, DADA POR LA ECUACION

$$\ddot{x}_0(t) = a \operatorname{sen} \Omega t$$

EL FACTOR DE AMPLIFICACION RESULTA SER

$$\bar{B}_d = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2}\right)^2 + \left(2\zeta \frac{\Omega}{\omega}\right)^2}} \quad \frac{1}{\omega^2} = \frac{B_d}{\omega^2}$$

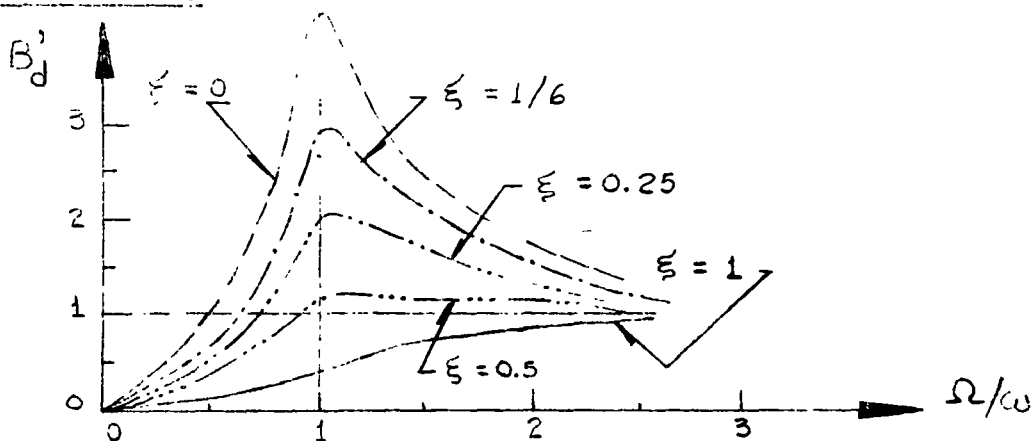
PUESTO QUE LA FIG I CORRESPONDE A B_d , Y EN ELLA SE OBSERVA QUE PARA $\zeta = 0.7$ SE TIENE $B_d \doteq 1$ PARA $0 \leq \Omega/\omega \leq 0.6$, SE CONCLUYE QUE EL DESPLAZAMIENTO DE LA MASA DE UN SISTEMA ES PROPORCIONAL A LA ACELERACION DE SU BASE, SI ESTE TIENE AMORTIGUAMIENTO DEL 70% Y SI LAS EXCITACIONES QUE SE TRATAN DE REGISTRAR TIENEN FRECUENCIAS INFERIORES AL 60% DE LA FRECUENCIA NATURAL DEL SISTEMA. SI ESTO SE CUMPLE, EL APARATO RESULTA SER UN ACELEROMETRO.

EN INGENIERIA SISMICA LA MAXIMA FRECUENCIA DE INTERES ES DEL ORDEN DE 10 CPS ($T = 0.1$ SEG), POR LO QUE LOS ACELEROMETROS TIENEN FRECUENCIA NATURAL DE 16 A 20 CPS.

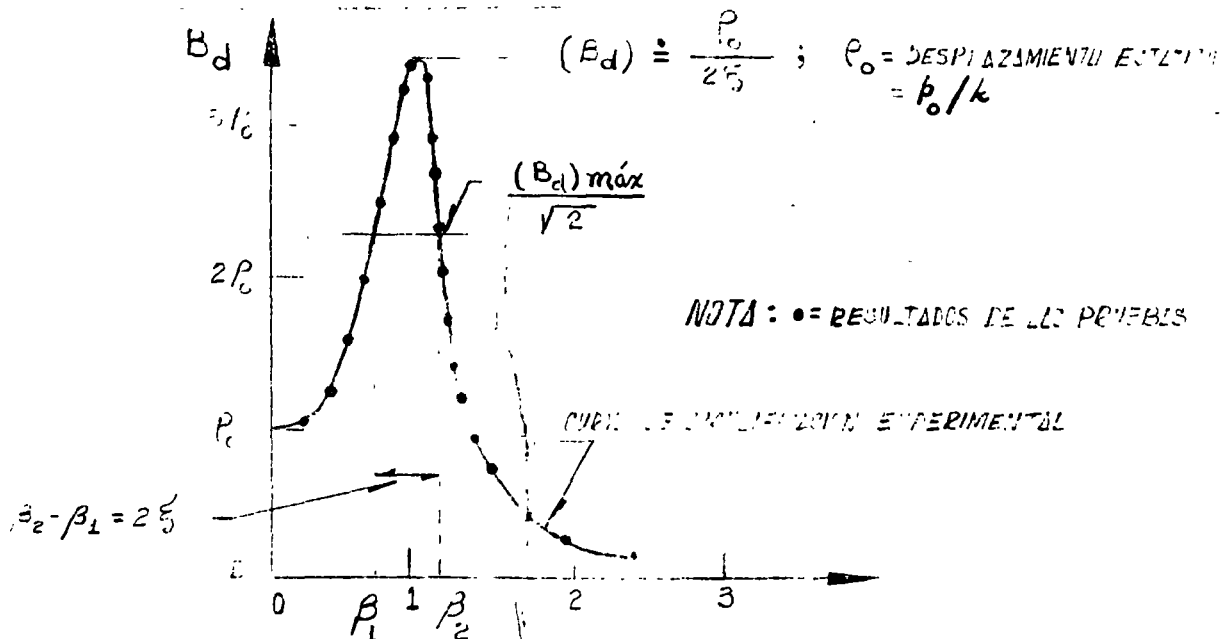
POR OTRA PARTE SI LA EXCITACION DEL SUELO ES $x_0 = a \text{ sen } \Omega t$, O SEA, $\ddot{x} = -a \Omega^2 \text{ sen } \Omega t$, ENTONCES EL FACTOR DE AMPLIFICACION RESULTA SER EL SEÑALADO EN LA ECUACION (20), ES DECIR,

$$B'_d = \frac{(\Omega/\omega)^2}{\sqrt{(1 - (\Omega/\omega)^2)^2 + (2\zeta\Omega/\omega)^2}}$$

EN LA GRAFICA CORRESPONDIENTE SE OBSERVA QUE SI $\zeta=0.5$ Y $\Omega > \omega$ EL DESPLAZAMIENTO DE LA MASA ES PROPORCIONAL AL DEL SUELO; SI ESTO SE CUMPLE, EL APARATO, CONSTITUYE UN DESPLAZOMETRO, CONOCIDO TAMBIEN COMO SISMOMETRO.



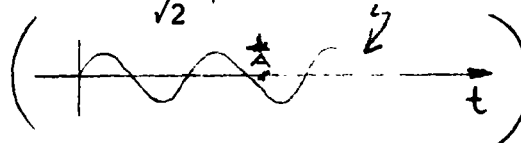
DETERMINACION EXPERIMENTAL DEL AMORTIGUAMIENTO DE UNA ESTRUCTURA MEDIANTE VIBRACIONES FORZADAS ARMONICAS



SI SE DETERMINA B_d EXPERIMENTALMENTE MEDIANTE UNA SERIE DE PRUEBAS DE VIBRACION FORZADA CON FUERZAS ARMONICAS, Y ADEMAS SE DETERMINA ρ_o , ENTONCES

$$\zeta \doteq \frac{\rho_o}{2(B_d)_{MAX}} \quad (24)$$

OTRO METODO PARA DETERMINAR ζ CON BASE EN LA CURVA EXPERIMENTAL DE B_d SE CONOCE CON EL NOMBRE DE "METODO DEL ANCHO DE BANDA DE LA MITAD DE POTENCIA". ESTE SE BASA EN DETERMINAR LAS FRECUENCIAS QUE CORRESPONDEN AL VALOR rms DE LA AMPLITUD EN RESONANCIA, EL CUAL VALE $(B_d)_{MAX}/\sqrt{2}$; SEAN β_2 Y β_1 ESTAS FRECUENCIAS. DE LA ECUACION DE B_d SE OBTIENE:

$$rms = \frac{A}{\sqrt{2}} = \text{RAIZ CUADRADA DEL VALOR MEDIO CUADRATICO}$$


$$\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\rho_o}{2\zeta} = \rho_o / \sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\zeta\beta)^2}$$

ELEVANDO AL CUADRADO AMBOS MIEMBROS:

$$\frac{1}{8\zeta^2} = \frac{1}{(1-\beta^2)^2 + (2\zeta\beta)^2}$$

$$\text{DE DONDE } \beta^2 = 1 - 2\zeta^2 \pm 2\zeta\sqrt{1 + \zeta^2}$$

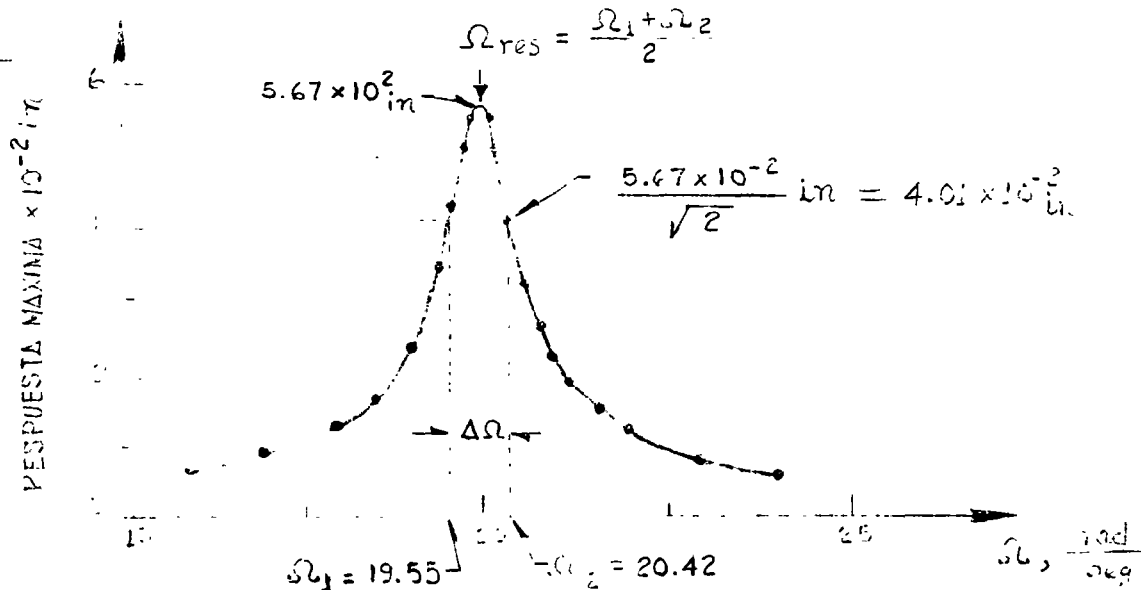
DE AQUI, DESPRECIANDO EL TERMINO ζ^2 DEL RADICAL, SE OBTIENE

$$\begin{aligned} \beta_1^2 &\doteq 1 - 2\zeta - 2\zeta^2 & ; & & \beta_1 &\doteq 1 - \zeta - \zeta^2 \\ \beta_2^2 &\doteq 1 + 2\zeta - 2\zeta^2 & ; & & \beta_2 &\doteq 1 + \zeta - \zeta^2 \\ & & & & \beta_2 - \beta_1 &\doteq 2\zeta \end{aligned}$$

DE DONDE

$$\zeta = \frac{\beta_2 - \beta_1}{2} \quad (25)$$

EJEMPLO



DE LA EC (25)

$$\Delta\Omega = \Omega_2 - \Omega_1 = 0.87 \frac{\text{RAD}}{\text{SEG}}$$

$$\zeta = \frac{\beta_2 - \beta_1}{2} = \frac{\frac{\Omega_2}{\Omega_{\text{res}}} - \frac{\Omega_1}{\Omega_{\text{res}}}}{2} = \frac{\Omega_2 - \Omega_1}{\Omega_2 + \Omega_1} = \frac{0.87}{39.97} = 2.18\%$$

METODO NUMERICO β DE NEWMARK PARA RESOLVER EL PROBLEMA DE VIBRACIONES FORZADAS.

EL METODO QUE A CONTINUACION SE DESCRIBE ES ADAPTABLE A SISTEMAS NO LINEALES CON VARIOS GRADOS DE LIBERTAD.

PROCEDIMIENTO:

- SEAN $y_i, \dot{y}_i, \ddot{y}_i$, CONOCIDOS EN EL INSTANTE t_i , Y $t_{i+1} = t_i + \Delta t$.
SUPONGAMOS EL VALOR DE \ddot{y}_{i+1}
- CALCULEMOS $\dot{y}_{i+1} = \dot{y}_i + (\ddot{y}_i + \ddot{y}_{i+1})\Delta t/2$ (26)

3. CALCULEMOS $y_{i+1} \doteq y_i + \dot{y}_i \Delta t + \left(\frac{1}{2} - \beta\right) \ddot{y}_i (\Delta t)^2 + \beta \ddot{y}_{i+1} (\Delta t)$ (27).

4. CALCULEMOS UNA NUEVA APROXIMACION PARA \ddot{y}_{i+1} A PARTIR DE LA ECUACION DIFERENCIAL DE EQUILIBRIO:

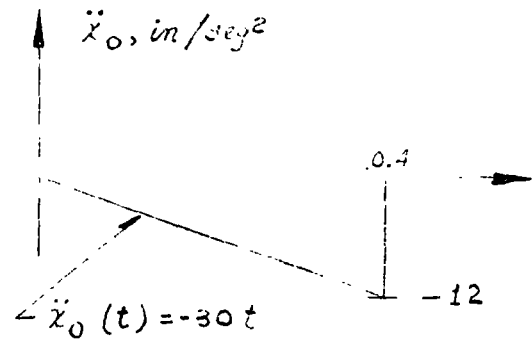
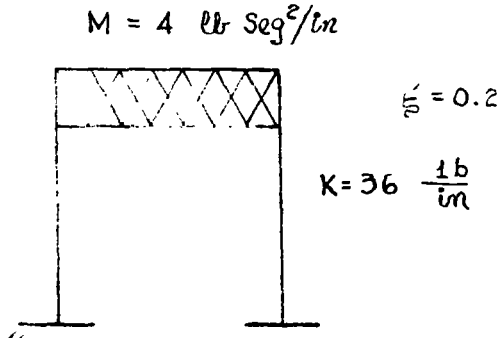
$$\ddot{y}_{i+1} \doteq -2\zeta\omega\dot{y}_{i+1} - \omega^2(y_{i+1} - y_{est}) - (\ddot{x}_0)_{i+1} \quad (28)$$

DONDE $y_{est} = p(t_{i+1})/k$

5. REPITAMOS LAS ETAPAS 2 A 4 EMPEZANDO CON EL NUEVO VALOR \ddot{y}_{i+1} HASTA QUE EN DOS CICLOS CONSECUTIVOS SE TENGAN VALORES DE \ddot{y}_{i+1} CASI IGUALES.

SE RECOMIENDAN VALORES DE β DE 1/6 A 1/4 Y $\Delta t \doteq 0.1T$ PARA ASEGURAR CONVERGENCIA Y ESTABILIDAD.

EJEMPLO



CALCULAR LA RESPUESTA DE LA ESTRUCTURA APLICANDO EL METODO β DE NEWMARK

$$\omega = \sqrt{K/M} = \sqrt{36/4} = 3 \frac{\text{RAD}}{\text{SEG}}$$

$$h = \zeta\omega = 0.2 \times 3 = 0.6 \quad ; \quad T = \frac{2\pi}{3} = 2.09 \text{ SEG}$$

TOMAREMOS $\beta=0.2$ Y $\Delta t = 0.2$ ($\hat{=} 0.1T$) SUSTITUYENDO EN LAS ECS. (26),

(27) y (28):

$$\dot{y}_{i+1} \hat{=} y_i + 0.1 (\ddot{y}_i + \ddot{y}_{i+1})$$

$$y_{i+1} \hat{=} y_i + 0.2\dot{y}_i + 0.012\ddot{y}_i + 0.008\ddot{y}_{i+1}$$

$$\ddot{y}_{i+1} = -1.2\dot{y}_{i+1} - 9y_{i+1} - (\ddot{x}_0)_{i+1}$$

EN $t=0$ SABEMOS QUE SE TIENE $y=0$, $\dot{y}=0$ Y $\ddot{y}=0$

EN $t=0 + \Delta t = 0.2 \text{ SEG}$; SUPONGAMOS $\ddot{y}_{i+1} = 5.0 \text{ IN/SEG}^2$; $\ddot{x}_0 = -6$

$$y_i = 0$$

$$\dot{y}_i = 0$$

$$1^{\circ} \text{ CICLO} \left\{ \begin{array}{l} \dot{Y}_{i+1} = 0 + 0.1 (0 + 5) = 0.5 \quad ; \quad Y_{i+1} = 0 + 0 + 0 + 0.008 \times 5 = 0.04 \\ \ddot{Y}_{i+1} = -1.2 \times 0.5 - 9 \times 0.04 - (-30 \times 0.2) = 5.04 \end{array} \right.$$

$$2^{\circ} \text{ CICLO} \left\{ \begin{array}{l} \dot{Y}_{i+1} = 0 + 0.1 (0 + 5.04) = 0.504 \quad ; \quad Y_{i+1} = 0 + 0 + 0 + 0.008 \times 5.04 = 0.04032 \\ \ddot{Y}_{i+1} = -1.2 \times 0.504 - 9 \times 0.4032 - (-6) = 5.033 \text{ IN/SEG}^2 \end{array} \right.$$

ESTOS CALCULOS SE PUEDEN ORGANIZAR MEDIANTE UNA TABLA COMO LA SIGUIENTE:

t SEG	\ddot{x}_0 IN/SEG ²	\ddot{Y} ING/SEG ²	\dot{Y} ING/SEG	Y IN
0	0	0	0	0
0.2	-6	5.0000	0.5000	0.04000
		5.040	0.5040	0.04032
		5.033	0.5033	0.04026
		5.034	0.5034	0.04027
0.4	-12	8.0000	1.8078	0.26536
		7.442	1.7510	0.26079
		7.534	1.7602	0.26163
		7.533	1.7601	0.26162
0.4 ⁺	0	-4.467	1.7601	0.26162
0.6	0	-6.000	0.7134	0.51204
		-5.464	0.7670	0.51633
		-5.550	0.7584	0.51564
		.	.	.
		.	.	.

EN $t = 0.2 + \Delta t = 0.4$ SEG: $\ddot{x}_0 = -30 \times 0.4 = -12$

$$\ddot{y}_i = 5.034, \quad \dot{y}_i = 0.5034, \quad y_i = 0.04027$$

SUPONIENDO $\ddot{y}_{i+1} = 8.000$ SE OBTIENE:

$$1^{\text{er}} \text{ CICLO } \left\{ \begin{array}{l} \dot{y}_{i+1} = 0.5034 + 0.1 (5.034 + 8.000) = 1.8068 \\ y_{i+1} = 0.04027 + 0.2 \times 0.5034 + 0.012 \times 5.034 + 0.008 \times 8 = 0.26536 \\ \ddot{y}_{i+1} = -1.2 \times 1,8068 - 9 \times 0.26536 - (-12) = 7.442 \text{ IN/SEG}^2 \end{array} \right.$$

EN $t = 0.4^+$ SOLO CAMBIA \ddot{y} : $\ddot{y}_{0.4+} = \ddot{y}_{0.4-} + \ddot{x}_0 = 7.533 - 12 = -4.467$

EN $t = 0.6$, $\ddot{y}_i = -4.467$) $\dot{y}_i = 1.7601$; $y = 0.26162$

ESPECTROS DE RESPUESTA ESTRUCTURAL

RECORDEMOS QUE LA SOLUCION DEL PROBLEMA DE VIBRACIONES FORZADAS CON EXCITACION SISMICA ES

$$y(t) = \frac{-1}{\omega'} \int_{-\infty}^t \ddot{x}_0(t-\tau) e^{-\zeta\omega(t-\tau)} \text{sen } \omega'(t-\tau) d\tau$$

DE LA OBSERVACION DE ESTA ECUACION SE CONCLUYE QUE EL DESPLAZAMIENTO RELATIVO, $y(t)$, ES FUNCION DEL TIEMPO, t , EL AMORTIGUAMIENTO, ζ , Y LA FRECUENCIA CIRCULAR NATURAL, ω (O DEL PERIODO NATURAL):

$$y(t) = f(t, \omega, \zeta)$$

FIJEMOS UN VALOR DE ζ , POR EJEMPLO $\zeta=0$, Y LUEGO ASIGNEMOS VALORES A ω , POR EJEMPLO 0.1, 0.2, 0.3, ETC, HASTA CUBRIR UN INTERVALO DE INTERES, Y PARA CADA CASO CALCULEMOS LA FUNCION RESULTANTE DE APLICAR LA ECUACION ANTERIOR. CON ESTA OBTENEMOS

$$y_1(t) = f_1(t, 0.1, 0) = f_1(t)$$

$$y_2(t) = f_2(t, 0.2, 0) = f_2(t)$$

$$y_3(t) = f_3(t, 0.2, 0) = f_3(t)$$

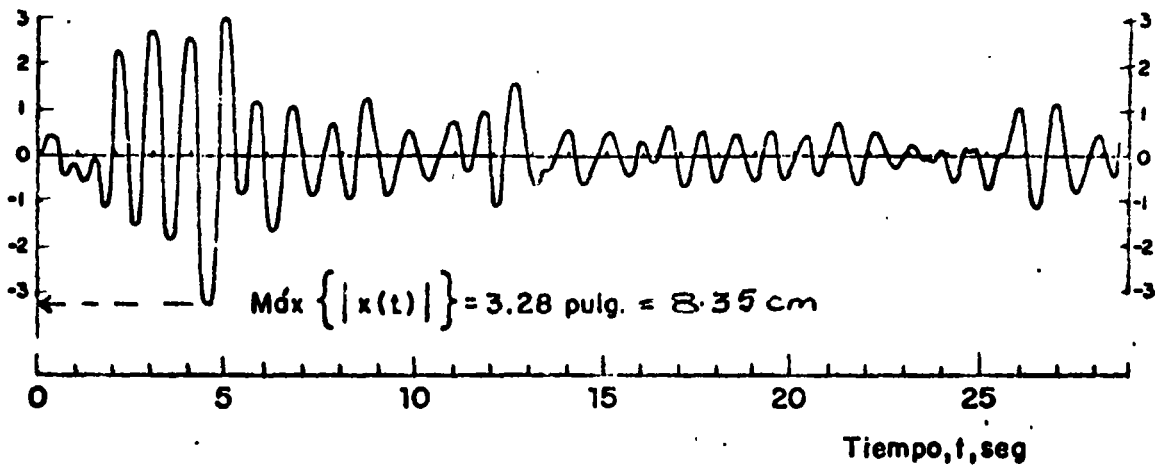
$$\text{SEAN } D_1 = \text{MAX} |y_1(t)| = D(\omega_1, \zeta)$$

$$D_2 = \text{MAX} |y_2(t)| = D(\omega_2, \zeta)$$

$$D_3 = \text{MAX} |y_3(t)| = D(\omega_3, \zeta)$$

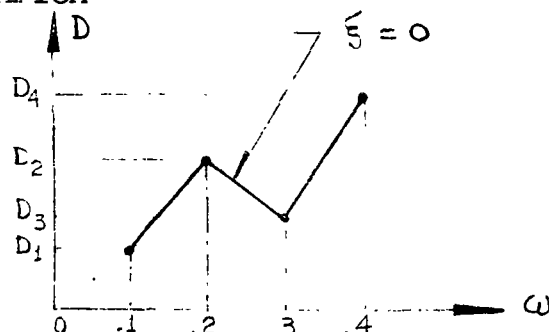
•
•
•

Desplazamiento relativo,
 $X(t)$, pulg



Respuesta de un sistema amortiguado simple
con $T_1 = 1.0$ seg y $\zeta = 0.10$, al sismo de
El Centro, Cal., 1940, componente N-S

EN TAL CASO, LA GRAFICA



ES EL ESPECTRO DE RESPUESTA DE DESPLAZAMIENTOS PARA $\zeta = 0$. SI ESTE PROCESO DE REPITE FIJANDO OTROS VALORES DE ζ . POR EJEMPLO, $\zeta = 0.02, 0.05, 0.1, 0.2$, ETC, SE OBTENDRAN LOS ESPECTROS DE DESPLAZAMIENTOS CORRESPONDIENTES

DE MANERA ANALOGA SE PUEDEN OBTENER LOS ESPECTROS PARA OTROS TIPOS DE RESPUESTA, TALES COMO VELOCIDAD RELATIVA, ACELERACION ABSOLUTA, ETC, QUE SON, RESPECTIVAMENTE

$$V = \text{MAX} |\dot{y}(t)|_{\zeta, \omega} ; \quad A = \text{MAX} |\ddot{x}(t)|_{\zeta, \omega} \quad (29)$$

PSEUDO - ESPECTROS

ESTADISTICAMENTE SE HA ENCONTRADO QUE

$$S_V = \omega D \dot{=} V \quad (30)$$

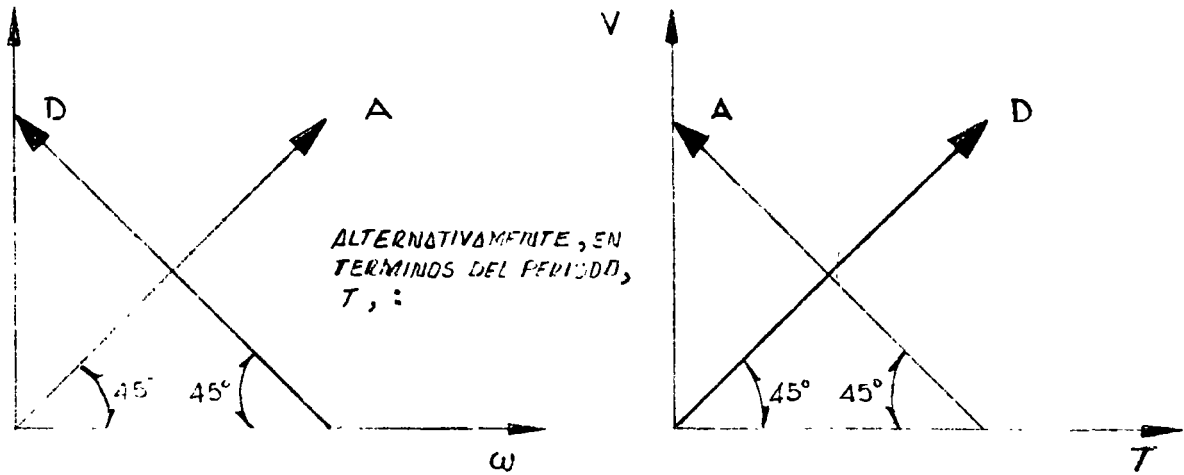
$$S_A = \omega^2 D \dot{=} A \dot{=} \omega V \quad (31)$$

A S_V Y S_A SE LES LLAMA PSEUDOESPECTROS.

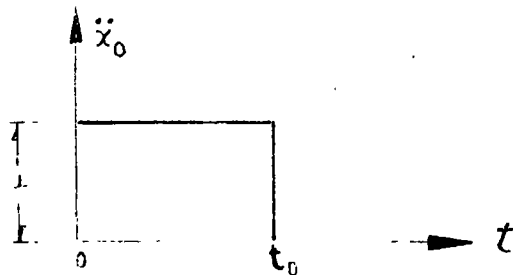
DE LA EC. (30): $\log D = \log V - \log \omega = \log V + \log T - \log 2\pi$

DE LA EC. (31): $\log A = \log V + \log \omega = \log V - \log T + \log 2\pi$

ESTAS ECUACIONES CORRESPONDEN A LINEAS RECTAS EN PAPEL LOGARITMICO; LA PRIMERA CON PENDIENTE -1 Y LA SEGUNDA CON PENDIENTE +1, SI SE USA ω COMO VARIABLE INDEPENDIENTE; SI SE USA T, LA PRIMERA TENDRA PENDIENTE + 1, Y LA SEGUNDA, -1.

**EJEMPLO**

CALCULAR EL ESPECTRO CORRESPONDIENTE A LA EXCITACION (CONSIDERESE $\zeta=0$)



EN UN EJEMPLO ANTERIOR SE OBTUVO

$$y(t) = \frac{-a}{\omega^2} (1 - \cos \omega t), \text{ SI } 0 \leq t \leq t_0$$

$$D = \text{MAX}|y(t)| = \frac{2a}{\omega^2} ; 0 \leq \frac{T}{2} \leq t_0, (0 \leq T \leq 2t_0)$$

$$S_V = \omega D = \frac{2a}{\omega} , S_A = \omega V = 2a$$

$$Y \quad D = \text{MAX}|y(t)| = \frac{2a}{\omega^2} \text{sen} \frac{\omega t_0}{2} , \text{ SI } T > 2 t_0$$

$$S_V = \omega D = \frac{2a}{\omega} \left| \text{sen} \frac{\omega t_0}{2} \right| ; S_A = \omega V = 2a \left| \text{sen} \frac{\omega t_0}{2} \right|$$

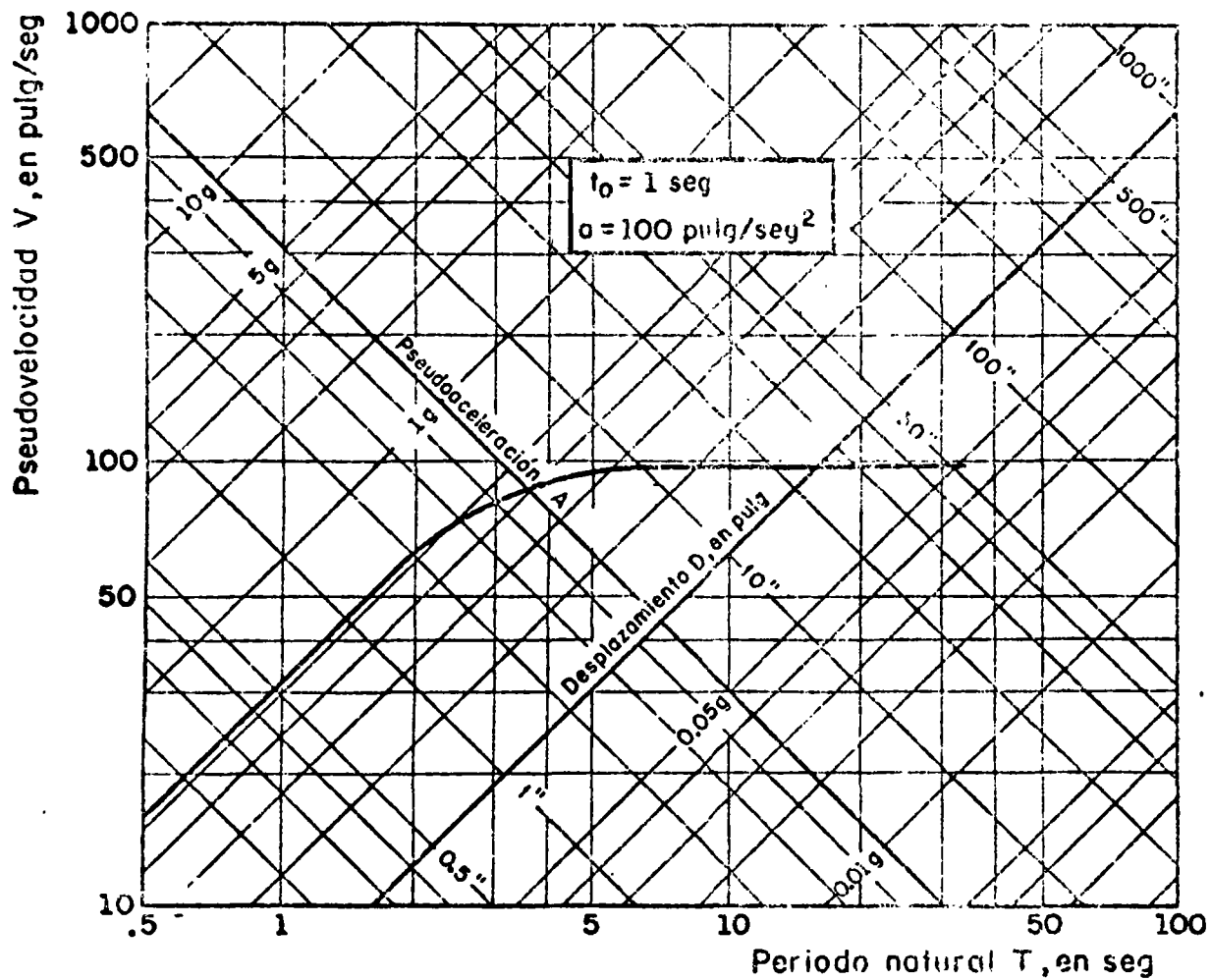
$$\text{LIM}_{\omega \rightarrow 0} S_V = \text{LIM}_{\omega \rightarrow 0} \left\{ a t_0 \frac{\text{sen} \frac{\omega t_0}{2}}{\frac{\omega t_0}{2}} \right\} = a t_0$$

CASO PARTICULAR: SI $t_0 = 1$ SEG y $a = 100$ IN/SEG²

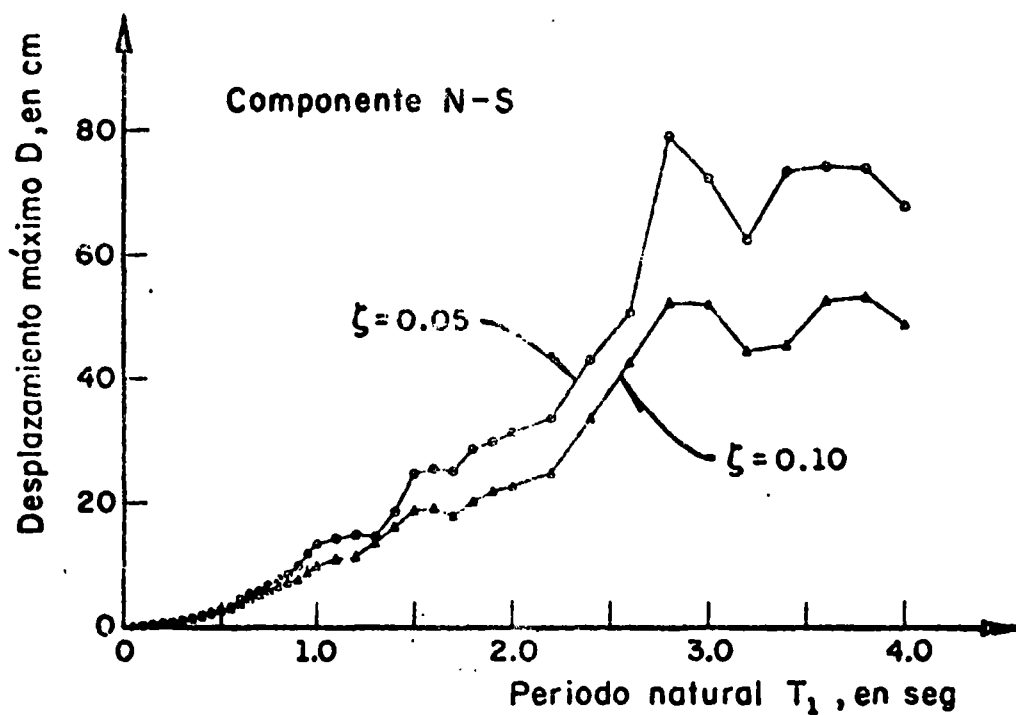
$$S_V = \frac{2 \times 100}{\frac{2\pi}{T}} = \frac{100}{\pi} T , \text{ SI } 0 \leq T \leq 2 \text{ SEG}$$

$$S_V = \frac{100T}{\pi} \left| \text{sen} \frac{\frac{2\pi}{T} x 1}{2} \right| =$$
$$= \frac{100T}{\pi} \left| \text{sen} \frac{\pi}{T} \right| \text{ SI } T > 2 \text{ SEG}$$

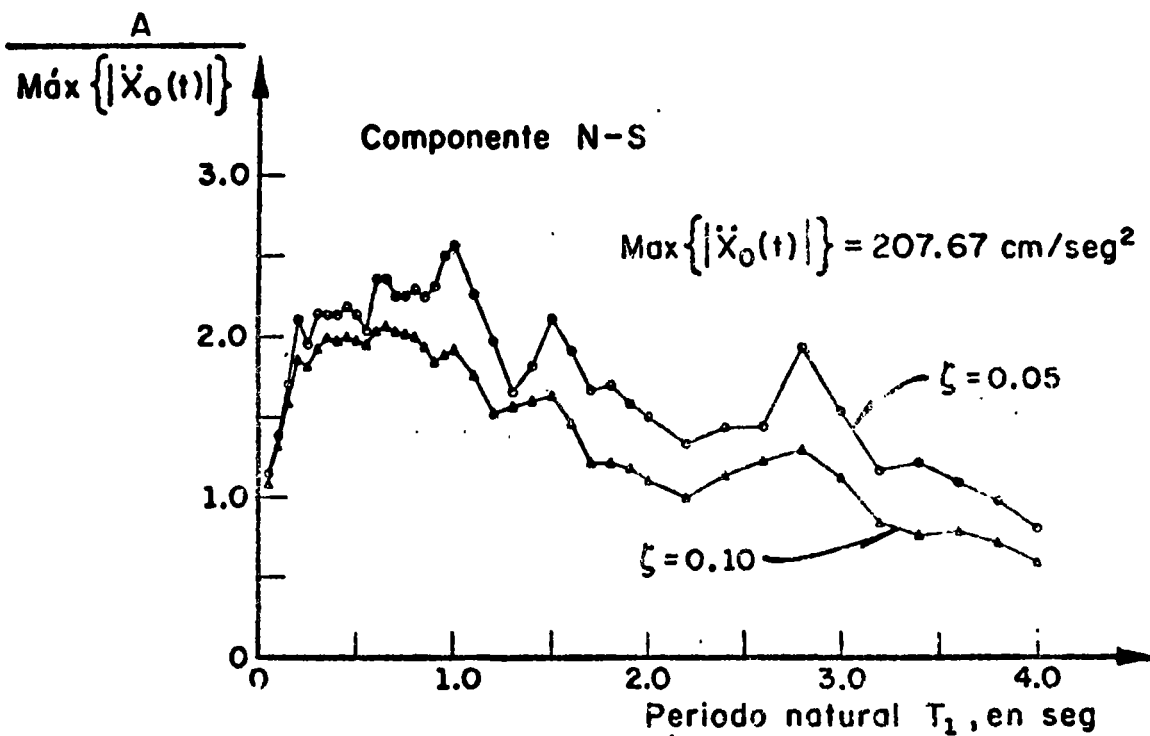
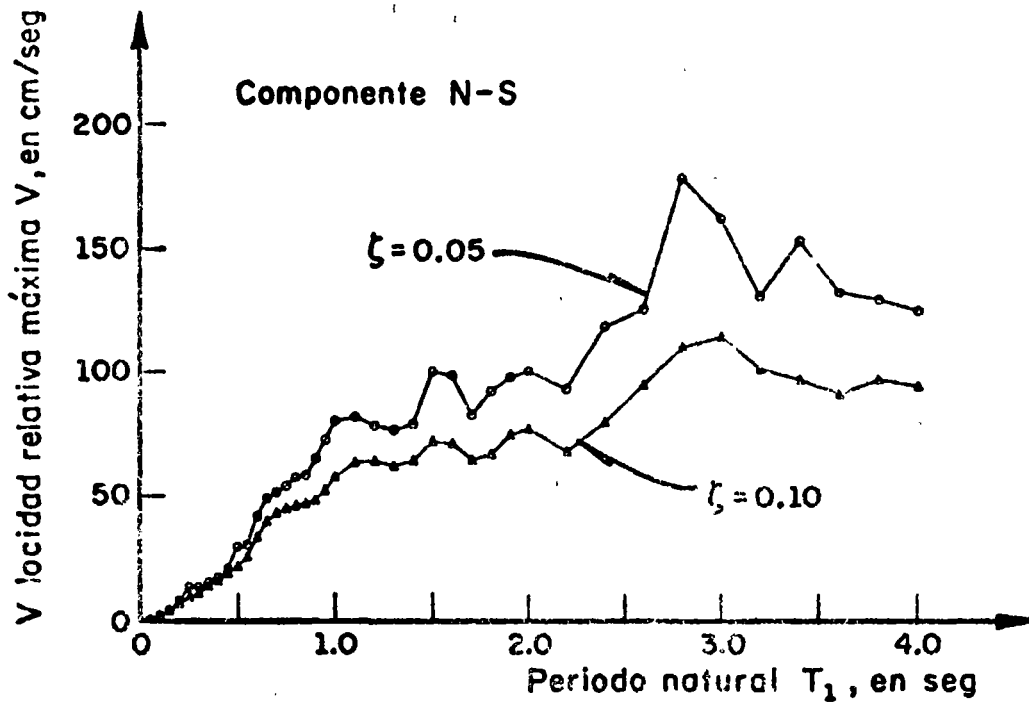
$$\lim_{T \rightarrow \infty} S_V = 100 \text{ IN/SEG}$$



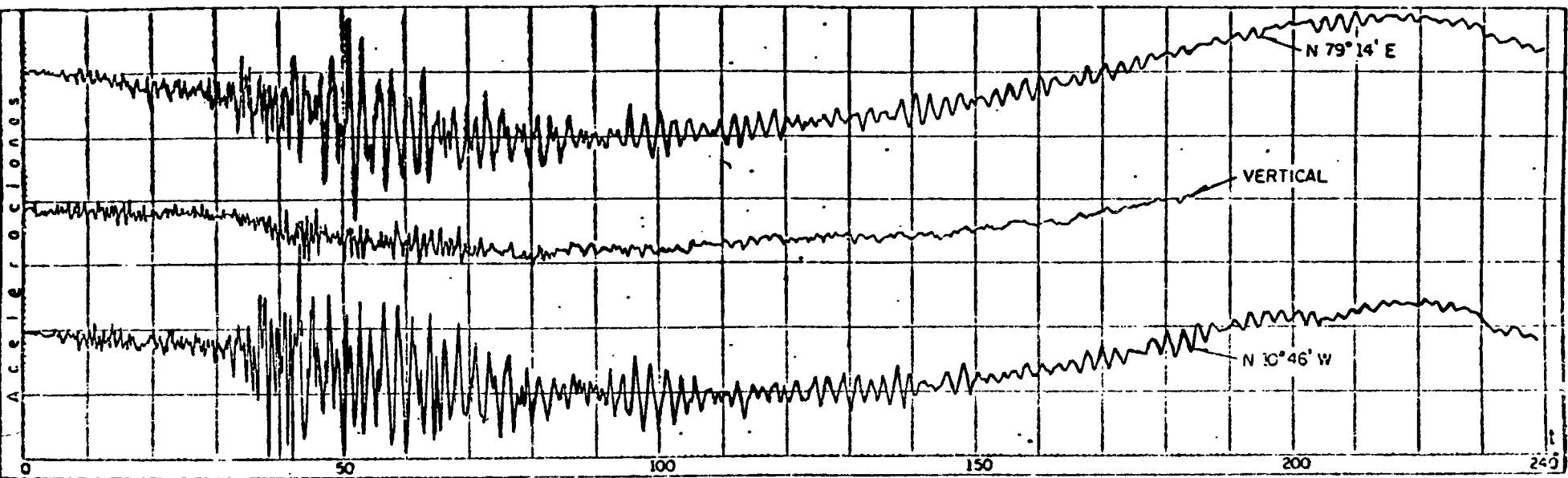
Espectro no amortiguado correspondiente a un pulso rectangular de aceleraciones. Según N. Newmark y E. Rosenblueth, ref 1



Espectro de desplazamientos. Sismo de Tokachi-Oki, Japón (1968). Según H. Tsuchida, E. Kurata y K. Sudo, ref 4

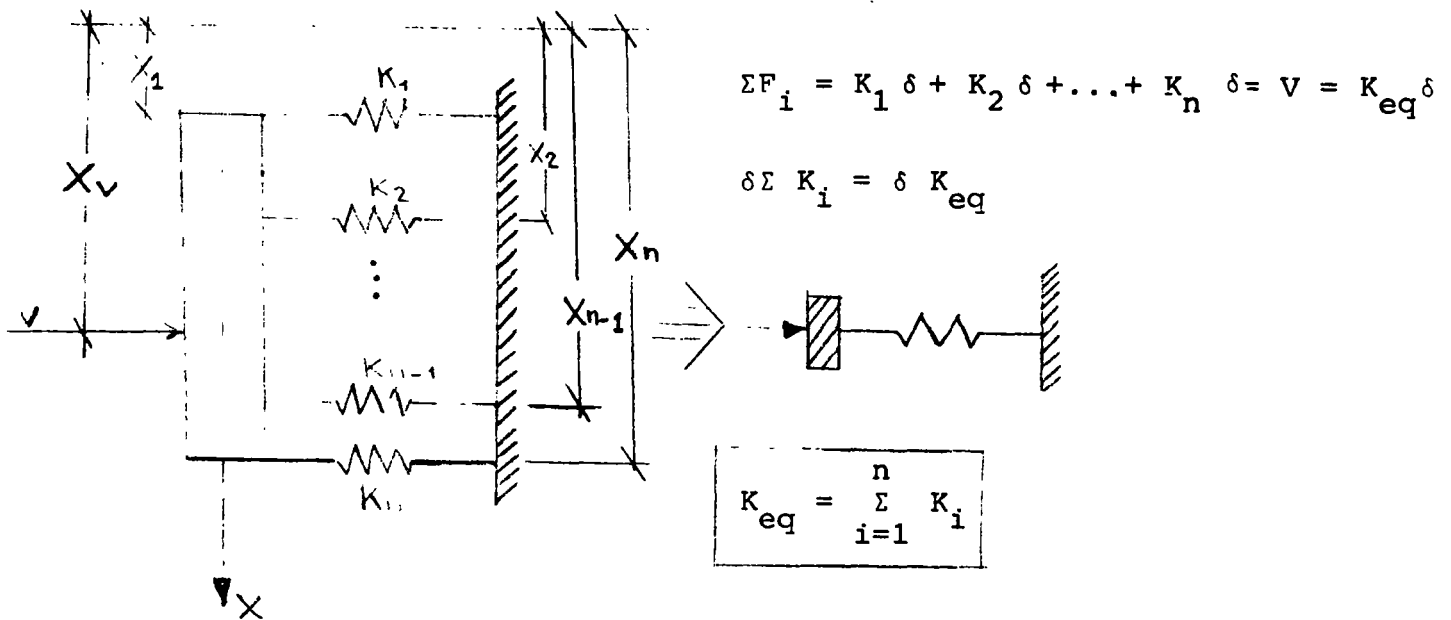


Espectros de velocidades y de aceleraciones. Sismo de Tokachi-Oki, Japón (1968). Según H. Tsuchida, E. Kurata y K. Sudo, ref 4



Acelerogramas originales del sismo registrado el 11-V-1962 , en la ALAMEDA CENTRAL, Mex. D. F.

DISTRIBUCION DE LAS FUERZAS CORTANTES EN UN ENTREPISO

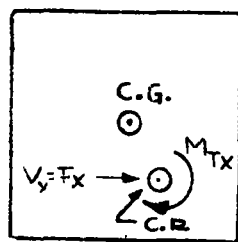
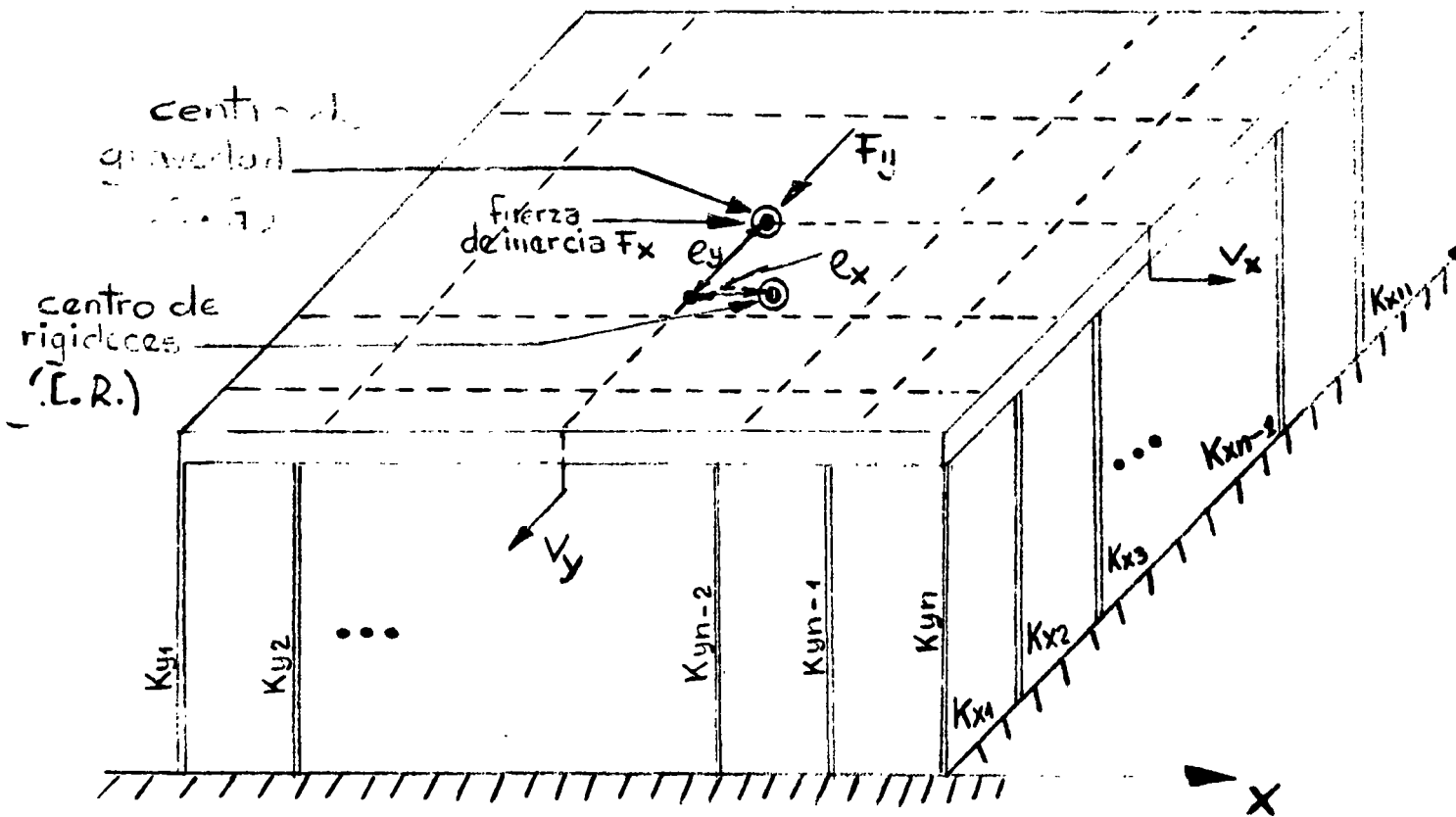


$$\Sigma M_i = \Sigma F_i X_i = \Sigma K_i \delta X_i = \delta \Sigma K_i X_i = V X_v = K_{eq} \delta X_v$$

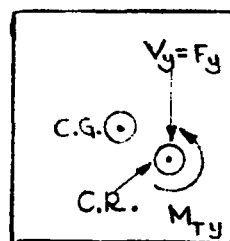
$$X_v = \frac{\sum_{i=1}^n K_i X_i}{\sum_{i=1}^n K_i}$$

← POSICION DEL CENTRO DE RIGIDECES

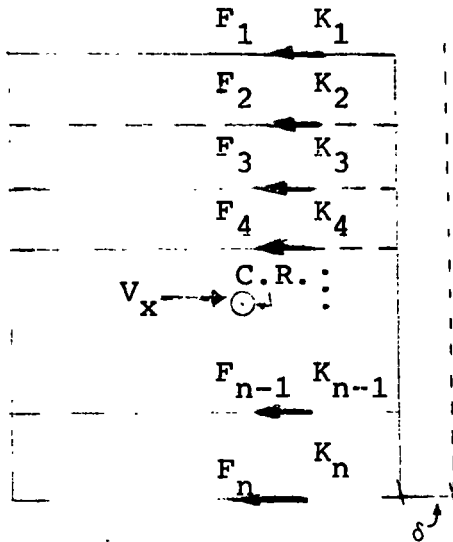
DISTRIBUCION DE FUERZAS CORTANTES DIRECTAS Y POR TORSION



+



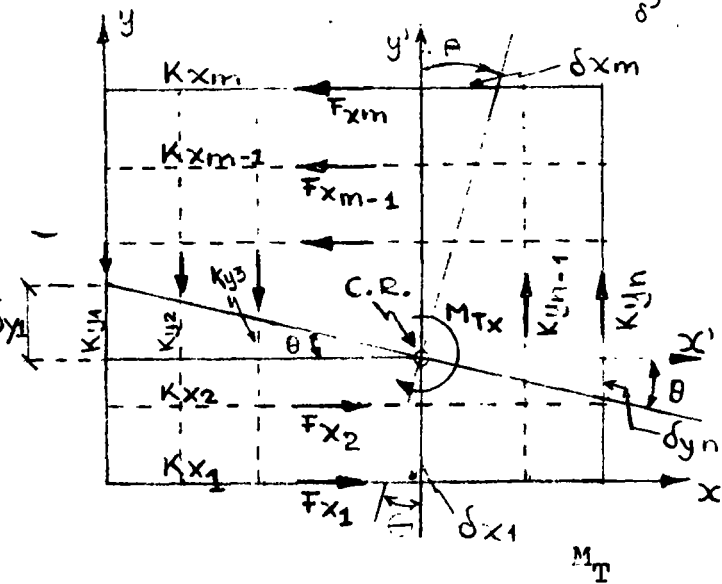
VEAMOS COMO SE DISTRIBUYEN LAS FUERZAS CORTANTES EN LOS MARCOS



$$F_i = K_i \delta$$

$$\Sigma F_i = \Sigma K_i \delta = V_x \therefore \delta = \frac{V_x}{\Sigma K_i}$$

$$F_i = V_x \frac{K_i}{\Sigma_{i=1}^n K_i}$$



$$F_{x_i} = K_{x_i} \delta_{x_i} = K_{x_i} X'_i \theta$$

$$F_{y_i} = K_{y_i} \delta_{y_i} = K_{y_i} Y'_i \theta$$

$$\Sigma M_{C.R.} = \Sigma F_{x_i} X'_i + \Sigma F_{y_i} Y'_i$$

$$= \theta (\Sigma K_{x_i} X_i'^2 + \Sigma K_{y_i} Y_i'^2)$$

$$= M_{T_x}$$

DE DONDE $\theta = \frac{M_{T_x}}{\Sigma K_{x_i} X_i'^2 + \Sigma K_{y_i} Y_i'^2}$

POR LO QUE

$$F_{x_i} = M_{T_x} \frac{K_{x_i} X_i'}{\Sigma K_{x_i} X_i'^2 + \Sigma K_{y_i} Y_i'^2}$$

$$F_{y_i} = M_{T_x} \frac{K_{y_i} Y_i'}{\Sigma K_{x_i} X_i'^2 + \Sigma K_{y_i} Y_i'^2}$$

SISTEMAS NO LINEALES DE UN GRADO DE LIBERTAD

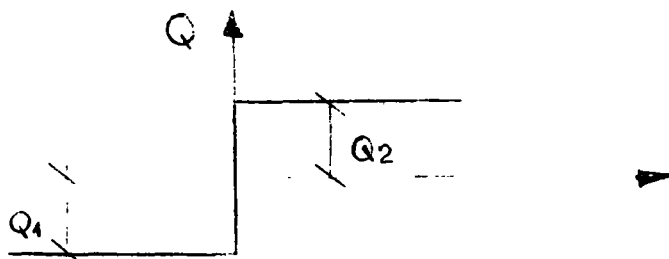
ECUACION DE MOVIMIENTO:

$$M\ddot{x} + Q(y, \dot{y}) = P(t) \quad ; \quad y = x - x_0 = \text{DESPLAZAMIENTO RELATIVO}$$

SI $Q(y, \dot{y}) = KY + C\dot{y}$ SE TIENE EL SISTEMA ELASTICO LINEAL

MODELOS PARTICULARES

1. RIGIDO-PLASTICO



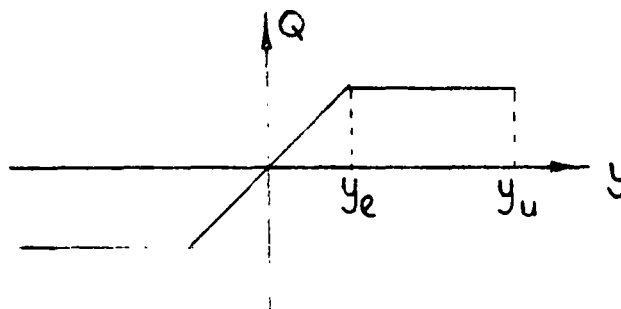
$$Q = -Q_1 + C\dot{y}, \text{ SI } \dot{y} < 0$$

$$Q = Q_2 + C\dot{y}, \text{ SI } \dot{y} > 0 \quad \text{EN DONDE } C = \text{CONSTANTE. SE HA EMPLEADO COMO}$$

MODELO EN EL ANALISIS DE TALUDES Y CORTINAS DE PRESAS DE TIERRA

Y ENROCAMIENTO

2. ELASTO-PLASTICO



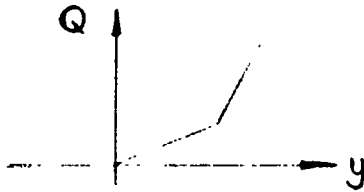
$$Q = Q_1(y) + C\dot{y}$$

SE EMPLEA COMO MODELO EN EL ANALISIS DE ESTRUCTURAS DUCTILES.

$$\text{FACTOR DE DUCTILIDAD} = \mu = y_u / y_e$$

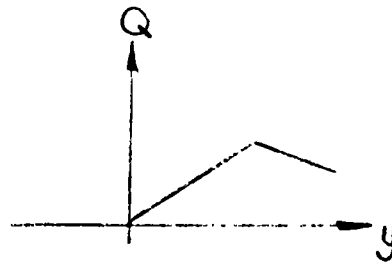
y_u = DESPLAZAMIENTO MAXIMO QUE PUEDE SOPORTAR EL SISTEMA SIN FALLAR.

3. SISTEMA BILINEAL



CON ENDURECIMIENTO

SE USA COMO MODELO PARA ANALISIS
DE Puentes COLGANTES

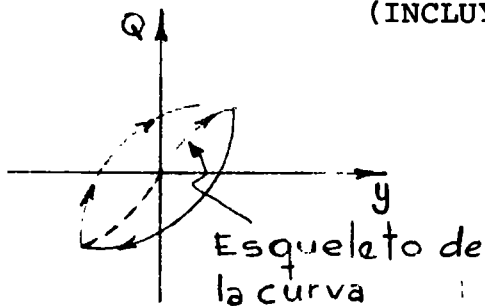


CON ABLANDAMIENTO

SE USA COMO MODELO DE SISTEMAS
QUE SE DEGRADAN POR AGRIETA-
MIENTO (MUROS DE MAMPOSTERIA,
POR EJEM).

4. TIPO MASING

(INCLUYE A LOS ANTERIORES COMO CASOS ESPECIALES)

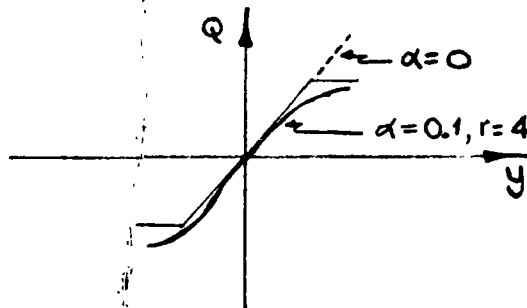
 $Q_0 =$ FUERZA EN $y = y_0$

$y_0 =$ DESPLAZAMIENTO EN EL CUAL EL PROCESO SE INVIRTIÓ (Y CAMBIO
DE SIGNO) POR ÚLTIMA VEZ

$$\frac{Q - Q_0}{2} = Q_1 \left(\frac{y - y_0}{2} \right)$$

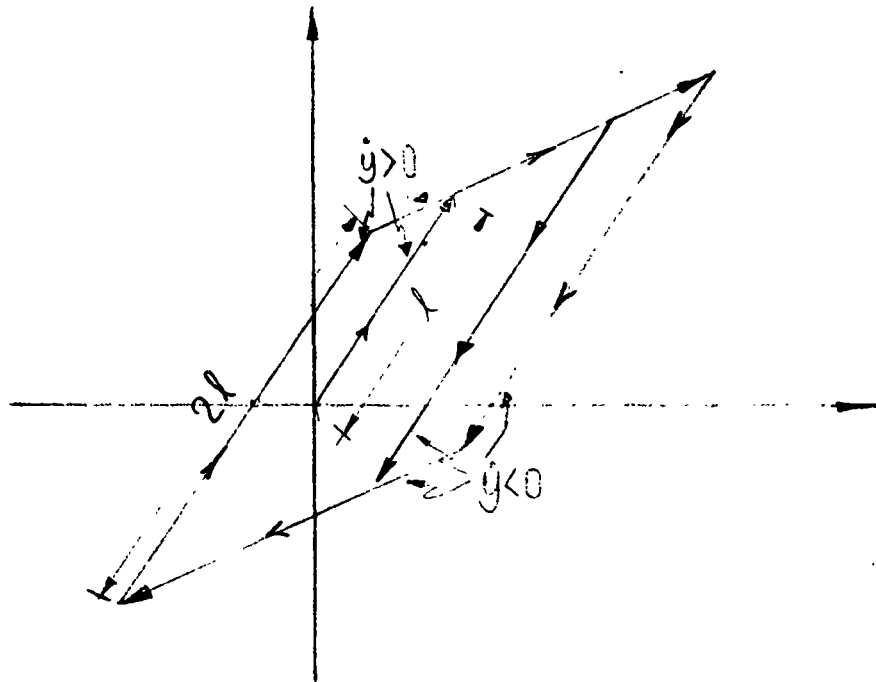
CASO PARTICULAR DEL ESQUELETO

$$\frac{y}{y_1} = \frac{Q}{Q_1} + \alpha \left(\frac{Q}{Q_1} \right)^r \quad (\text{MODELO RAMBER - OSGOOD})$$

DONDE y_1 , Q_1 , α y r SON CONSTANTES POSITIVAS

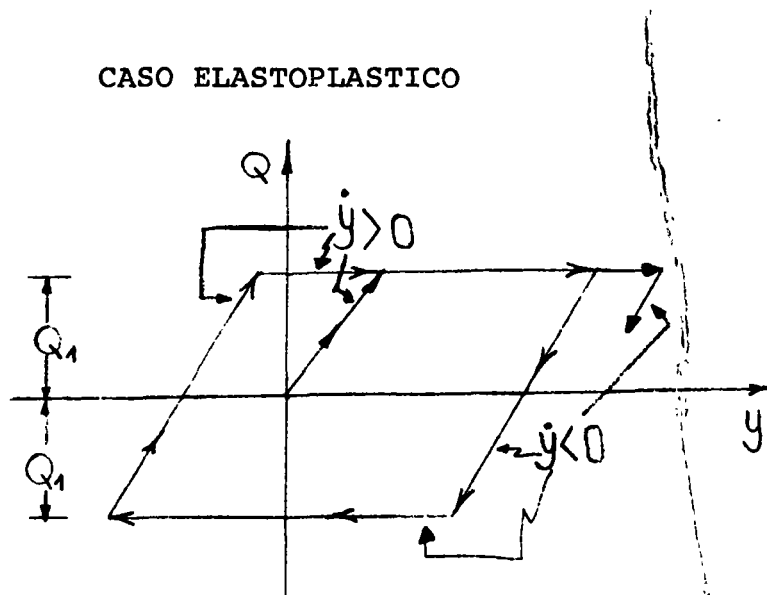
EJEMPLO:

CASO BILINEAL



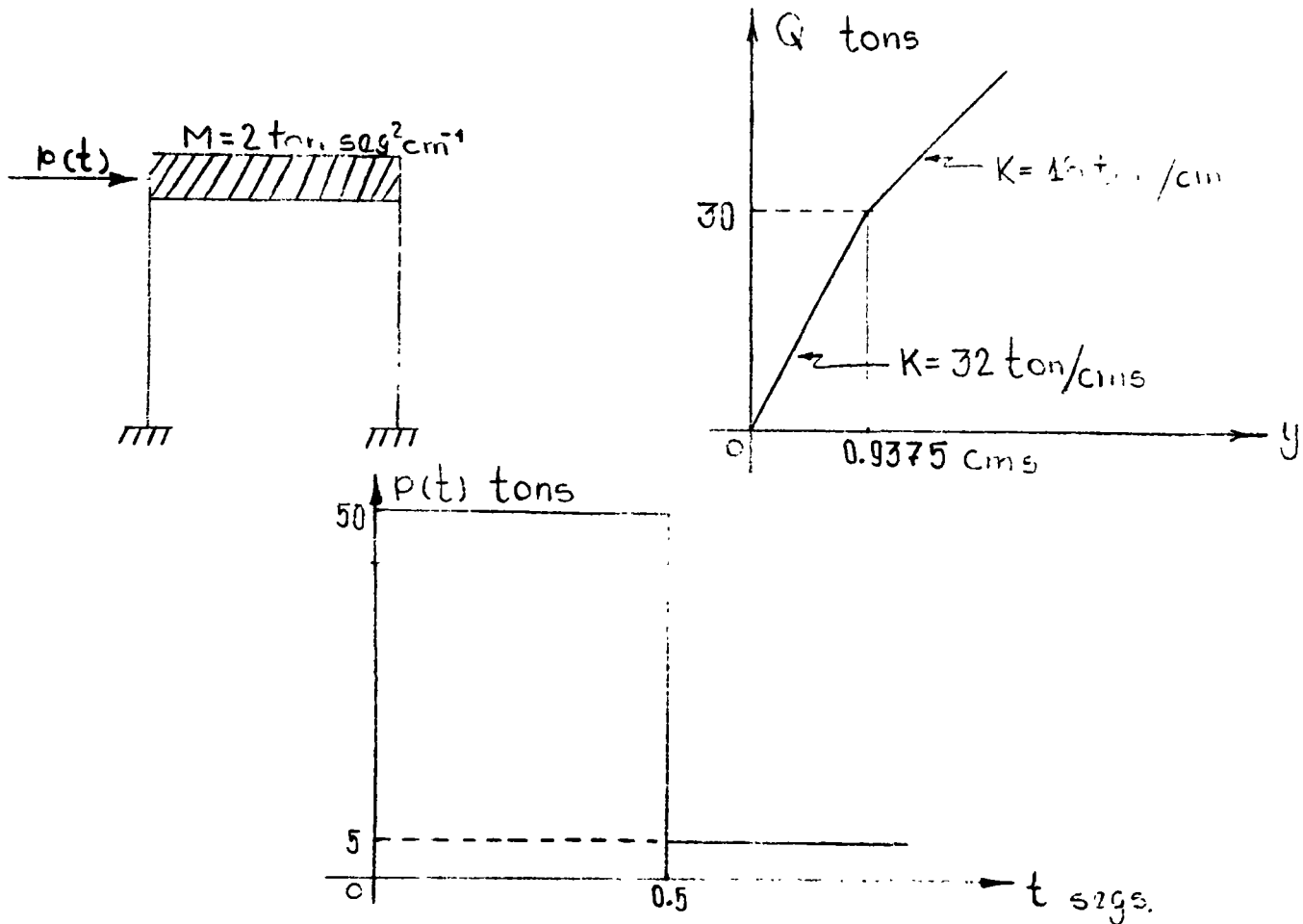
EJEMPLO

CASO ELASTOPLASTICO

METODO β DE NEWMARK

PARA EL ANALISIS DE SISTEMAS NO LINEALES SE PUEDE USAR EL METODO β DE NEWMARK DESCRITO ANTERIORMENTE.

EJEMPLO



ECUACION DE EQUILIBRIO DINAMICO , $M\ddot{Y} + Q(Y) = P(t)$

$$\ddot{Y} = \frac{P(t) - Q(Y)}{M} = \frac{P(t) - Q(Y)}{2} \quad (I)$$

PARA LA APLICACION DEL METODO DE NEWMARK SE TIENEN LAS SIGUIENTES EXPRESIONES:

$$t_{i+1} = t_i + \Delta t$$

$$\dot{Y}_{i+1} = \dot{Y}_i + (\ddot{Y}_i + \ddot{Y}_{i+1}) \Delta t / 2$$

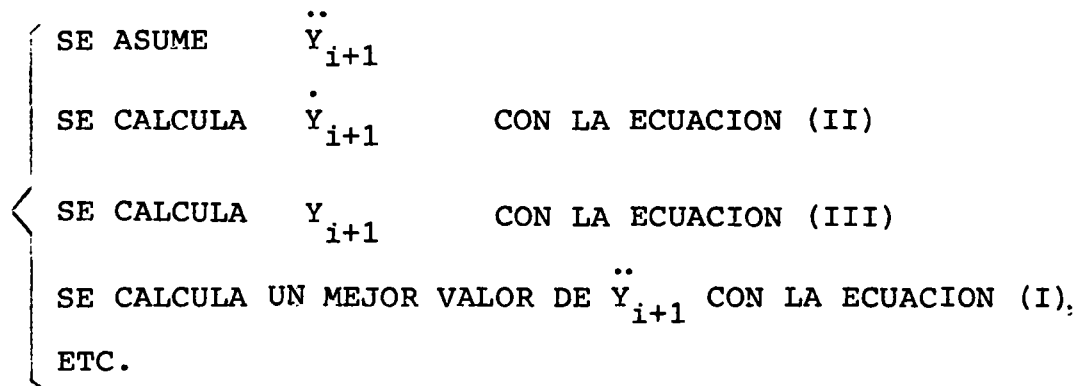
$$Y_{i+1} = Y_i + \dot{Y}_i \Delta t + (0.5 - \beta) \ddot{Y}_i (\Delta t)^2 + \beta \ddot{Y}_{i+1} (\Delta t)^2$$

CONSIDERANDO $\Delta t = 0.10 \text{ SEG.}$ Y $\beta = 1/6$ SE PUEDE ESCRIBIR;

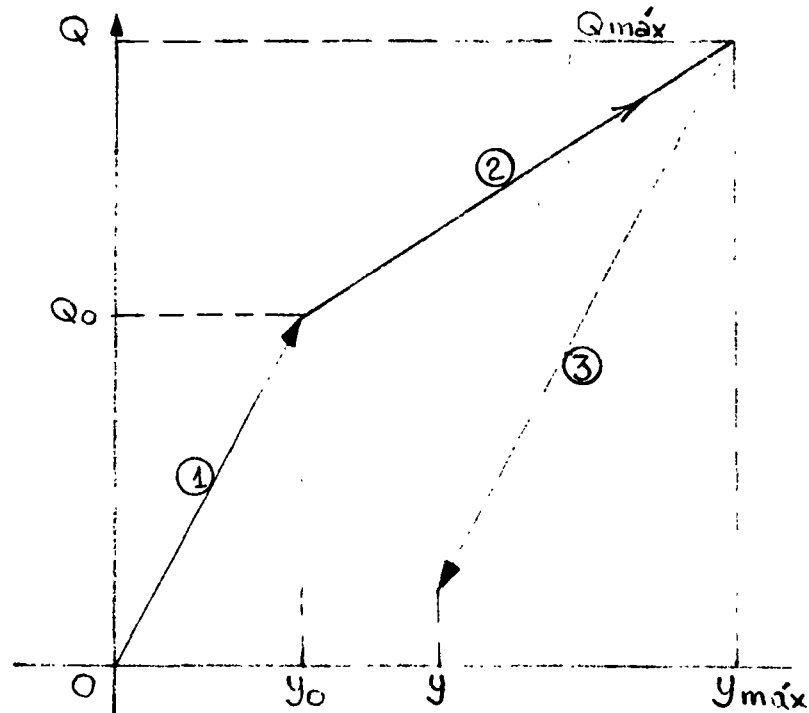
$$\dot{Y}_{i+1} = \dot{Y}_i + \frac{1}{20} (\ddot{Y}_i + \ddot{Y}_{i+1}) \quad (\text{II})$$

$$Y_{i+1} = Y_i + \dot{Y}_i (0.10) + \frac{1}{600} (2\ddot{Y}_i + \ddot{Y}_{i+1}) \quad (\text{III})$$

EL PROCEDIMIENTO DE CALCULO ES COMO SIGUE:



PARA LA FUNCION DE RESISTENCIA Q SE TIENEN LOS SIGUIENTES CASOS:



1. COMPORTAMIENTO ELASTICO , $Q = 32 Y$ TONS
2. CAMBIO DE RIGIDEZ , $Q = 30 + 18 (Y - Y_0)$ TON
3. DESCARGA , $Q = Q_{\max} - 32 (Y_{\max} - Y)$ TONS

ESTA ULTIMA EXPRESION MANTIENE SU VALIDEZ HASTA QUE, $(Y_{\max} - Y) \leq 2Y_0$

$$Y_0 = 0.9375 \text{ CMS} \quad ; \quad Q_0 = 30.0 \text{ TON}$$

$$\text{PARA } t = 0, \quad \ddot{Y} = \frac{P}{M} = \frac{50}{2} = 25 \quad ; \quad y = 0; \quad \dot{Y} = 0$$

$$\text{PARA } t = 0.10, \quad y_i = \dot{Y}_i = 0 \quad ; \quad \ddot{Y}_i = 25$$

1er. CICLO

SEA $\ddot{Y}_{i+1} = 20$ COMO PRIMER TANTEO. EN TAL CASO

$$\dot{Y}_{i+1} = 0 + \frac{1}{20} (0 + 25) = 2.25$$

$$y_{i+1} = 0 + 0.10 \times 0 + \frac{1}{600} (2 \times 25 + 20) = 0.1167$$

$$Q = 32 \times 0.1167 = 3.7330$$

$$\ddot{Y}_{i+1} = \frac{50 - 3.733}{2} = 23.134$$

2o. CICLO

$$\dot{Y}_{i+1} = 23.134/2 = 16.567$$

$$y_{i+1} = 73.134/600 = 0.1219$$

$$Q = 32 \times 0.1219 = 3.9000$$

$$\ddot{Y}_{i+1} = (50 - 3.9)/2 = 23.050$$

3er. CICLO

.

.

.

40. CICLO

$$\ddot{y}_{i+1} = 23.052$$

$$\dot{y}_{i+1} = 23.052/2 = 2.4026$$

$$y_{i+1} = 73.052/600 = 0.12175$$

$$Q = 32 \times 0.12175 = 3.8960$$

$$\ddot{y} = (50 - 3.8960)/2 = 23.052 \quad \dots \text{ETC.}$$

LOS CALCULOS BASICOS SE MUESTRAN EN LA TABLA SIGUIENTE:

t SEGS	P TONS	\ddot{Y} CM SEG ⁻²	\dot{Y} CM SEG ⁻¹	Y CMS	Q TONS
0.0	50.00	25.000	0.00	0.00	0.00
0.10	50.00	20.000	2.2500	0.1167	3.7330
		23.134	2.4070	0.1219	3.9000
		23.050	2.4025	0.12175	3.3960
		23.052	2.4026	0.12175	3.8960
0.20	50.00	20.000	4.5552	0.4722	15.110
		17.445	4.4270	0.46793	14.970
		17.513	4.4310	0.46804	14.977
		17.511	4.43075	0.46204	14.977
0.30	50.00	10.000	5.8060	0.98610	30.8750
		9.560	5.7840	0.98540	30.8620
		9.569	5.7848	0.98543	30.8630
0.40	50.00	0.00	6.2630	1.5958	41.849
		4.0750	6.4670	1.6026	41.972
		4.0141	6.4640	1.6025	41.970
		4.0150	6.4640	1.60250	41.970
0.50 ⁻	50.00	0.00	6.6650	2.2623	53.846
		-1.9230			
		-1.9000	6.56975	2.2591	53.789
		-1.8944			
		-1.8946	6.5700	2.25912	53.789
0.50 ⁺	5.00	-24.3946	6.5700	2.25912	53.789
0.60	5.00	-30.000	3.8503	2.7848	63.251
		-29.126	3.8940	2.78626	63.278
		-29.136	3.89347	2.78624	63.277
		-29.138	3.89347	2.78624	63.277
0.70	5.00	-32.000	0.83657	3.025127	67.577
		-31.289			
		-31.320	0.87057	3.02626	67.598
		-31.299			
		-31.301	0.87147	3.02641	67.600
0.7278	5.00	-31.620	-0.00313	3.03850	67.818
		-31.409			
		-31.420	-0.000352	3.03853	67.818
		-31.4093	-0.000205	3.03853	67.818

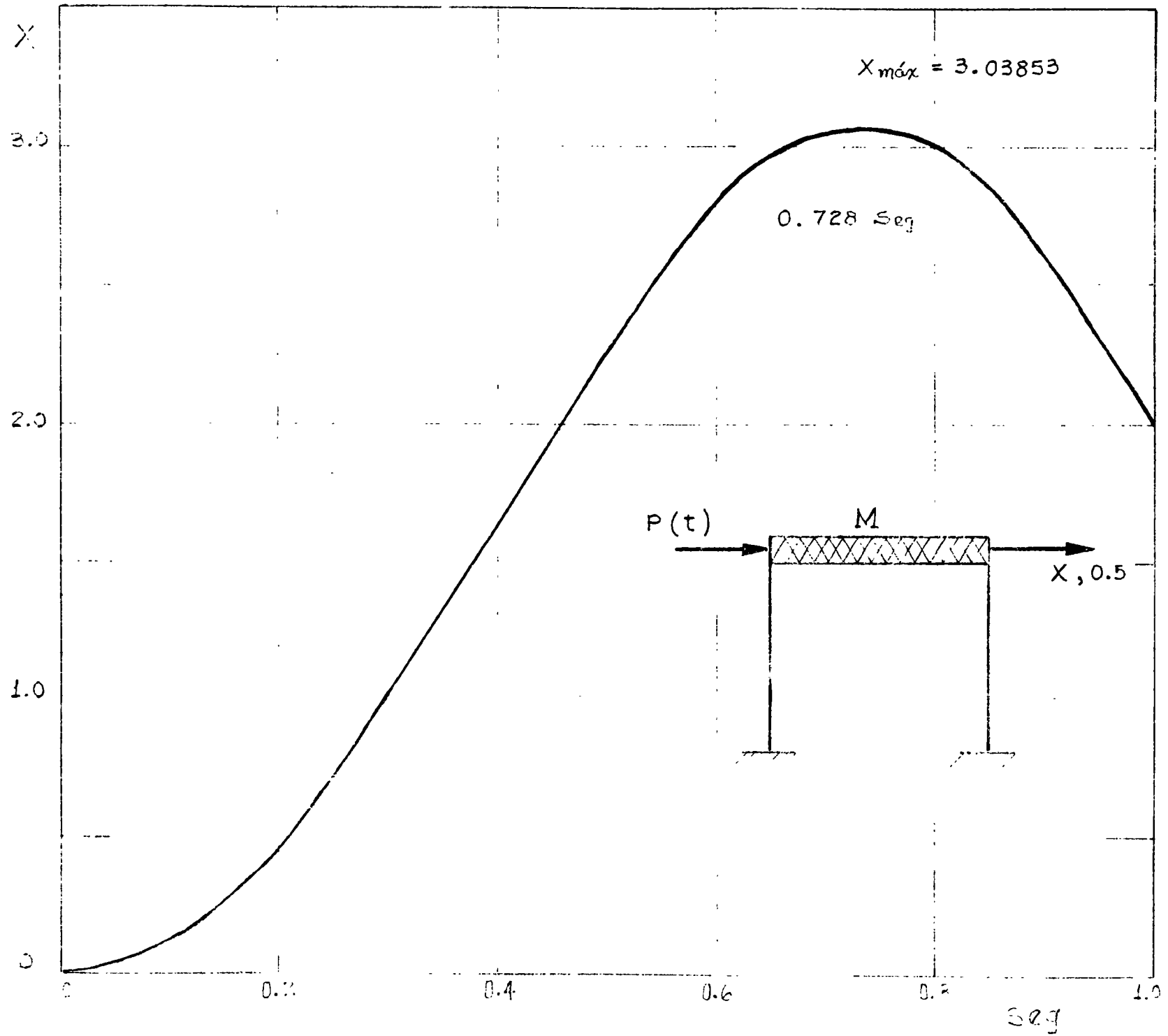
En $t=0.5 + \text{SEG}$, $\Delta\ddot{Y} = -45/2 = -22.5 \therefore -22.5 - 1.8946 = -24.3946$

CONTINUACION DEL CUADRO ANTERIOR

t	p	\ddot{y}	\dot{y}	y	Q
0.80	5.0	-28.000	-2.1449	2.959611	65.293
		-30.146			
		-30.000	-2.21708	2.957874	65.237
		-30.118			
		-30.117	-2.22127	2.95777	65.234
0.90	5.0	-27.00	-5.07712	2.59025	53.473
		-24.236			
		-25.00	-4.97712	2.59358	53.580
		-24.290			
		-24.294	-4.94182	2.59476	53.617
		-24.308	-4.94242	2.59474	53.617
1.00	5.0	-14.00	-6.85782	1.99614	34.461
		-14.7305			
		-14.7200	-6.89382	1.99494	34.423
		-14.7120	-6.89342	1.99495	34.423

EN ESTOS CALCULOS SE INTRODUJO $t = 0.50^-$ Y 0.50^+ PORQUE PARA ESTE INSTANTE SE PRODUCE UN CAMBIO BRUSCO EN LA CARGA $P(t)$ DE 50.00 TONS A 5.00 TONS, CON LO CUAL SE PRODUCE UN CAMBIO BRUSCO EN LA ACELERACION DEL SISTEMA \ddot{y} . EN ESTE INSTANTE NO SE PRODUCEN CAMBIOS EN \dot{y} Y y . EL TIEMPO $t = 0.7273$ SEG. SE INTRODUJO POR LA NECESIDAD DE CALCULAR LOS VALORES DE y Y DE Q , PUES A PARTIR DE DICHO INSTANTE SE INICIA LA DESCARGA DEL SISTEMA. ESTA CONDICION SE ENCONTRO SOBRE LA BASE DE APROXIMAR \dot{y} A CERO, OBTENIENDOSE $y_{MAX}=3.03853$ CMS Y $Q_{MAX} = 67.818$ TON.

EN EL CUADRO SIGUIENTE SE PRESENTA UN RESUMEN DE LOS RESULTADOS.



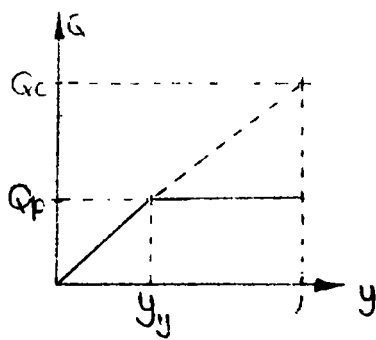
t Seg.	\ddot{Y} (supuesta) Cm Seg ⁻²	P Ton	Y Cm.	Q Ton	\ddot{Y} (calculado) Cm Seg ⁻²	\dot{Y} Cm Seg ⁻¹	NOTAS
0.0	- -	50.00	0.00	0.00	25.00	0.00	
0.10	23.0520	50.00	0.12175	3.896	23.0520	2.40260	
0.20	17.5110	50.00	0.46804	14.977	17.5110	4.43075	
0.30	9.5690	50.00	0.98543	30.863	9.5690	5.78480	CAMBIO DE RIGIDEZ
0.40	4.0150	50.00	1.60250	41.970	4.0150	6.4640	
0.50 ⁻	-1.8946	50.00	2.25912	53.789	-1.8946	6.5700	
0.50 ⁺	- -	5.00	2.25912	53.789	-24.3945	6.5700	CAMBIO DE CARGA
0.60	-29.1380	5.00	2.78624	63.277	-29.1380	3.89347	
0.70	-31.3010	5.00	3.02641	67.600	-31.3010	0.87147	
0.7278	-31.4093	5.00	3.03853	67.818	-31.4093	-0.000205	Q _{máx} , Y _{máx} .
0.800	-30.1170	5.00	2.95777	65.234	-30.1170	-2.22127	
0.90	-24.3080	5.00	2.59474	53.617	-24.3080	-4.94242	
1.00	-14.7120	5.00	1.99495	34.423	-14.7120	-6.89342	

RESPUESTA MAXIMA

$$\left\{ \begin{array}{l} Y_{\text{máx}} = 3.03853 \text{ cms} \\ Q_{\text{máx}} = 67.818 \text{ tons} \end{array} \right.$$

CRITERIOS PARA TRAZAR ESPECTROS DE DISEÑO ELASTOPLASTICOS A PARTIR DEL ELASTICO

1. CRITERIO DE IGUAL DESPLAZAMIENTO MAXIMO DEL SISTEMA ELASTICO Y EL ELASTOPLASTICO DE IGUAL PERIODO:



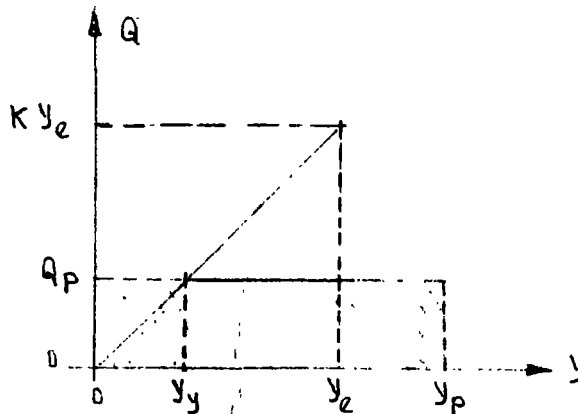
$$Q_p = Ky_y = \frac{Ky_{MAX}}{\mu} = \frac{Q_e}{\mu}$$

$$y_{MAX} = D_e = \mu y_y = \mu D_p$$

$$D_p = \frac{D_e}{\mu}$$

$$y_{MAX} = \mu y_y$$

2. CRITERIO DE IGUAL ENERGIA ABSORVIDA POR LA ESTRUCTURA:



$$\frac{Ky_e y_e}{2} = \frac{Ky_y y_y}{2} + Ky_y (y_p - y_y)$$

$$\frac{1}{2} y_e^2 = \frac{1}{2} y_y^2 + y_y y_p - y_y^2 = y_y y_p - \frac{y_y^2}{2}$$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{y_e}{y_y}\right)^2 = \frac{y_p}{y_y} - \frac{1}{2} = \mu - \frac{1}{2}$$

$$\frac{y_e}{y_y} = \sqrt{2\mu - 1}$$

$$y_y = \frac{y_e}{\sqrt{2\mu - 1}}$$

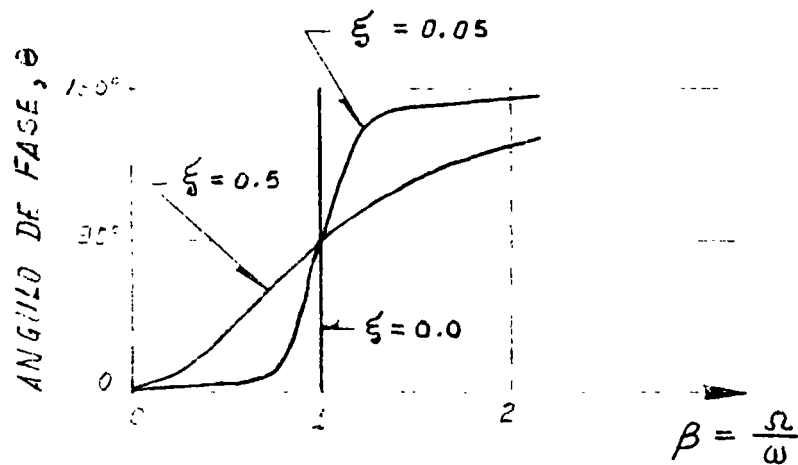
$$y_y \text{] MAX} = D_p = \frac{y_e \text{] MAX}}{\sqrt{2\mu - 1}} = \frac{D_e}{\sqrt{2 - 1}}$$

POR LO TANTO

$$D_p = D_e / \sqrt{2\mu - 1} \quad \text{Y} \quad Q_p = Q_e / \sqrt{2\mu - 1}$$

AMORTIGUAMIENTO HISTERETICO

SI SE CUENTA CON EQUIPO PARA MEDIR EL ANGULO DE FASE ENTRE LA FUERZA DE EXCITACION Y EL DESPLAZAMIENTO RESULTANTE, SE PUEDE EVALUAR EXPERIMENTALMENTE EL AMORTIGUAMIENTO DEL SISTEMA CON UNA SOLA PRUEBA DE VIBRACION ARMONICA EN RESONANCIA. ESTA SE LOGRA CUANDO SE AJUSTA LA FRECUENCIA DEL EXCITADOR DE TAL MANERA QUE EL ANGULO DE FASE SEA 90°, YA QUE:



EN ESTAS CONDICIONES LA FUERZA DE EXCITACION QUEDA EN FASE CON LA VELOCIDAD DE LA MASA YA QUE

$$y = A \operatorname{sen}(\omega t - \theta) = -A \operatorname{cos} \omega t, \quad \text{SI } \theta = 90^\circ$$

$$Y \quad \dot{y} = A \omega \operatorname{sen} \omega t \quad ; \quad \ddot{y} = A \omega^2 \operatorname{cos} \omega t$$

Y DE LA ECUACION DIFERENCIAL DE EQUILIBRIO:

$$M A \omega^2 \operatorname{cos} \omega t + C A \omega \operatorname{sen} \omega t + K(-A \operatorname{cos} \omega t) = p_0 \operatorname{sen} \omega t$$

SE VE QUE SE DEBE CUMPLIR QUE:

$$C A \omega = p_0 \quad , \quad \text{DE DONDE} \quad \boxed{C = \frac{p_0}{A \omega}} \quad (I)$$

DE LAS ECUACIONES ANTERIORES SE DEDUCE QUE:

$$y^2 = A^2 \operatorname{cos}^2 \omega t \quad ; \quad \frac{y^2}{A^2} = \operatorname{cos}^2 \omega t$$

Y

$$p^2 = p_0^2 \operatorname{sen}^2 \omega t \quad ; \quad \frac{p^2}{p_0^2} = \operatorname{sen}^2 \omega t$$

$$\text{SUMANDO:} \quad \frac{y^2}{A^2} + \frac{p^2}{p_0^2} = \operatorname{sen}^2 \omega t + \operatorname{cos}^2 \omega t$$

QUE ES LA ECUACION DE UNA ELIPSE CON LOS EJES COORDENADOS y Y p ,
 ASI (fig 1):

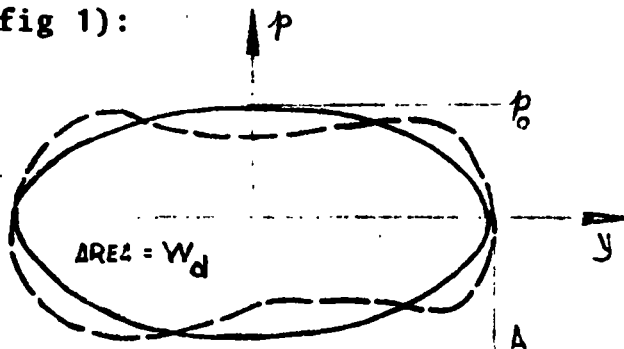


FIG 1

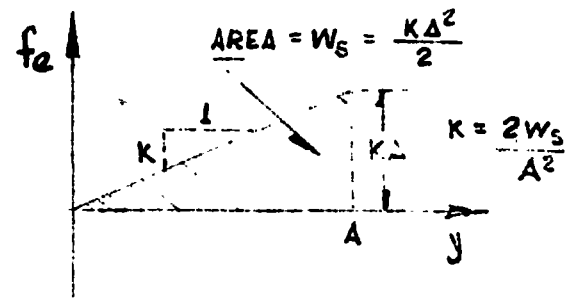


FIG 2

SI EL AMORTIGUAMIENTO NO ES EXACTAMENTE VISCOZO, LA GRAFICA QUE SE OBTENDRIA DE p CONTRA y NO SERIA EXACTAMENTE ELIPTICA, SINO ALGO COMO LA LINEA PUNTEADA AHI MOSTRADA. EN ESTE CASO SE PUEDE UTILIZAR UN AMORTIGUAMIENTO VISCOZO EQUIVALENTE, DE TAL MANERA QUE EL AREA W_d , DE ESTA CURVA SEA IGUAL A LA DE LA ELIPSE EQUIVALENTE, $W_{eq} = \pi A p_0$, ES DECIR

$$W_d = \pi A p_0, \text{ DE DONDE } p_0 = \frac{W_d}{\pi A}$$

POR LO QUE, DE LA EC. (I)

$$c_{eq} = \frac{W_d}{\pi \omega A^2} \quad (II)$$

ADEMAS, $c_{cr} = 2\sqrt{KM'} = 2K/\omega$; DE FIG. 2 : $c_{cr} = 2\left(\frac{2W_S}{A^2}\right)/\omega$, DE DONDE

$$\zeta_{eq} = \frac{c_{eq}}{c_{cr}}$$

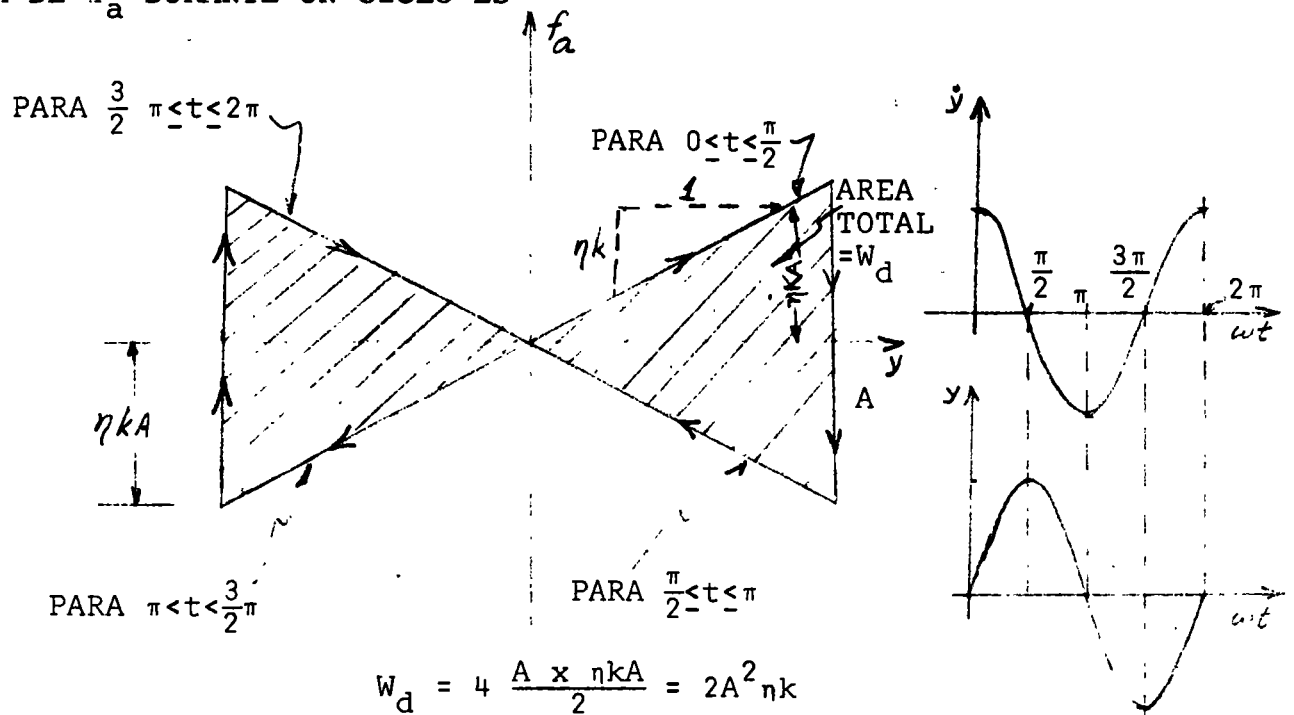
$$\zeta_{eq} = W_d / (4\pi W_S) \quad (II')$$

DE LAS ECS. (I) Y (II) SE CONCLUYE QUE EL FACTOR DE AMORTIGUAMIENTO VISCOSO ES FUNCION DE LA FRECUENCIA, ω .

EXISTE OTRO TIPO DE AMORTIGUAMIENTO QUE ES INDEPENDIENTE DE LA FRECUENCIA, QUE SE CONOCE COMO AMORTIGUAMIENTO HISTERETICO, EL CUAL PRODUCE UNA FUERZA EN FASE CON LA VELOCIDAD RELATIVA DE LA MASA, PERO PROPORCIONAL AL DESPLAZAMIENTO, ES DECIR

$$f_a = \eta k |y(t)| \frac{\dot{y}(t)}{|\dot{y}(t)|} \quad (\text{III})$$

DONDE η ES EL COEFICIENTE DE AMORTIGUAMIENTO HISTERETICO. EL DIAGRAMA DE f_a DURANTE UN CICLO ES



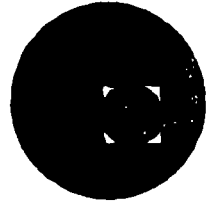
SI SE CONSIDERA QUE LA ENERGIA PERDIDA POR HISTERESIS SE PUEDE REPRESENTAR MEDIANTE UN AMORTIGUADOR VISCOSO, ENTONCES, DE LA EC. (II') Y

FIG 2:

$$\zeta = \frac{2A^2 \eta k}{4\pi \frac{KA^2}{2}} = \frac{\eta}{\pi} \quad \text{O} \quad \boxed{\eta = \pi \zeta} \quad (\text{IV})$$



centro de educación continua
división de estudios superiores
facultad de ingeniería, unam



IV CURSO INTERNACIONAL DE INGENIERIA SISMICA

DINAMICA ESTRUCTURAL
(SEGUNDA PARTE)

DR. OCTAVIO A. RASCON CHAVEZ

JULIO, 1978.



METODO β DE NEWMARK PARA SISTEMAS LINEALES DE VARIOS
GRADOS DE LIBERTAD

EJEMPLO

$$\underline{K} = \begin{bmatrix} 10 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \quad \underline{M} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} ; \quad C_i = 0 \text{ para todo } i$$

$$\dot{X}_{i+1} = \dot{X}_i + (\ddot{X}_i + \ddot{X}_{i+1}) \frac{\Delta t}{2}$$

$$X_{i+1} = X_i + \dot{X}_i \Delta t + \left(\frac{1}{2} - \beta\right) \ddot{X}_i (\Delta t)^2 + \beta \ddot{X}_{i+1} (\Delta t)^2$$

$$\Delta t = 0.2 ; \beta = 1/6$$

PARA CADA
MASA O GRADO
DE LIBERTAD

MOVIMIENTO DEL SUELO: $X_0 = 1.2t$ (X_0 EN CM Y t EN SEGUNDOS)

SI $0 \leq t \leq 2$ SEG, Y $X_0 = 4.8 - 1.2t$ SI $0 \leq 2 \leq 4$ SEG

Y $X_0 = 0$ SI $t < 0$ 0 $t > 4$ SEG

SI $Y_1 = X_1 - X_0$ Y $Y_2 = X_2 - X_0$

$$\underline{M} \ddot{\underline{Y}} + \underline{K} \underline{Y} = \underline{0} \rightarrow \underline{M} \ddot{\underline{Y}} + \underline{Q} = \underline{0} ; \quad \underline{Q} = \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix}$$

(PUESTO QUE $\ddot{X}_0 = 0$)

$$m_1 \ddot{Y}_1 + Q_1 = 0 \quad \rightarrow \quad \ddot{Y}_1 = -Q_1/m_1$$

$$m_2 \ddot{Y}_2 + Q_2 = 0 \quad \rightarrow \quad \ddot{Y}_2 = -Q_2/m_2$$

EN $t=0$, $Y_i=0$, $\dot{Y}_i=0$, $\ddot{Y}_i=0$

EN $t=0.2$, SUPONGAMOS $\ddot{X}_1=1.35$ Y $\ddot{X}_2=1.50 \frac{\text{CM}}{\text{SEG}^2}$

$$X_0 = 1.2 \times 0.2 = 0.24$$

PARA LA MASA 1:

$$\dot{x}_1 = 0 + (1.35 + 0) \frac{0.2}{2} = 0.135$$

$$x_1 = 0 + 0 + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6}\right) (0.2)^2 \times 0 + \frac{1}{6} \times 1.35 (0.2)^2 = 0.009 \text{ CM}$$

$$y_1 = 0.009 - 0.24 = -0.231$$

PARA LA MASA 2:

$$\dot{x}_2 = 0 + (1.5 + 0) \frac{0.2}{2} = 0.15$$

$$x_2 = 0 + 0 + 0 + \frac{1}{6} \times 1.5 (0.2)^2 = 0.01$$

$$y_2 = 0.01 - 0.24 = -0.23$$

$$\begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix} = Q = \begin{bmatrix} 10 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.231 \\ -0.23 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2.54 \\ -1.381 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{aligned} \ddot{x}_1 &= 2.54/2 = 1.27 = \ddot{y}_1 \\ \ddot{x}_2 &= 1.381/1 = 1.381 = \ddot{y}_2 \end{aligned} \rightarrow \text{ETC.}$$

TABLE 2.1, EXAMPLE 2.1X

τ	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	u	x_2	x_2	x	x^2	τ
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0.2	2.546	1.500	0.127	0.0635	-0.2515	1.490	1.500	0.150	0.0150	0.102	0.2
0.4	2.546	1.274	0.127	0.0635	-0.2515	1.386	1.386	0.138	0.0191	0.230	0.4
0.6	2.546	1.274	0.127	0.0635	-0.2515	1.386	1.386	0.138	0.0191	0.230	0.6
0.8	4.548	2.300	0.484	0.0662	-0.4118	2.468	2.100	0.465	+0.0697	-0.4107	0.8
1.0	4.548	2.274	0.481	0.0660	-0.4140	2.455	2.468	0.523	0.0275	-0.407	1.0
1.2	4.548	2.274	0.481	0.0660	-0.4140	2.455	2.455	0.522	0.0274	-0.407	1.2
1.4	4.548	2.274	0.481	0.0660	-0.4140	2.455	2.455	0.522	0.0274	-0.407	1.4
1.6	5.585	2.700	0.978	0.2105	-0.5095	2.960	3.200	1.088	0.2301	-0.489	1.6
1.8	5.581	2.793	0.987	0.2111	-0.5089	2.967	2.960	1.064	0.2285	-0.4915	1.8
2.0	5.580	2.790	0.987	0.2111	-0.5089	2.966	2.967	1.065	0.2286	-0.4914	2.0
2.2	5.580	2.790	0.987	0.2111	-0.5089	2.966	2.966	1.065	0.2286	-0.4914	2.2
2.4	5.409	2.900	1.556	0.4650	-0.4950	2.790	2.980	1.650	0.5010	-0.4500	2.4
2.6	5.423	2.704	1.536	0.4637	-0.4963	2.798	2.790	1.641	0.4907	-0.4600	2.6
2.8	5.422	2.711	1.537	0.4638	-0.4962	2.797	2.798	1.642	0.4998	-0.4602	2.8
3.0	5.422	2.711	1.537	0.4638	-0.4962	2.797	2.797	1.642	0.4998	-0.4602	3.0
3.2	4.104	2.150	2.023	0.8216	-0.3784	1.977	2.200	2.142	0.8800	-0.3198	3.2
3.4	4.111	2.052	2.013	0.8210	-0.3790	1.985	1.977	2.120	0.8787	-0.3213	3.4
3.6	4.111	2.055	2.014	0.8210	-0.3790	1.985	1.985	2.121	0.8787	-0.3213	3.6
3.8	4.111	2.055	2.014	0.8210	-0.3790	1.985	1.985	2.121	0.8787	-0.3213	3.8
4.0	1.930	0.950	2.315	1.2575	-0.1825	0.712	0.700	2.390	1.3341	-0.1059	4.0
4.2	1.930	0.965	2.316	1.2576	-0.1824	0.712	0.712	2.391	1.3341	-0.1059	4.2
4.4	1.930	0.965	2.316	1.2576	-0.1824	0.712	0.711	2.391	1.3341	-0.1059	4.4
4.6	-0.657	0.320	2.381	1.7316	0.0516	-0.735	-0.800	2.382	1.8165	0.1369	4.6
4.8	-0.657	-0.326	2.380	1.7315	0.0515	-0.735	-0.735	2.388	1.8169	0.1369	4.8
5.0	-0.657	0.320	2.380	1.7315	0.0515	-0.735	0.735	2.388	1.8169	0.1369	5.0
5.2	-2.029	-1.500	2.197	2.1932	0.2732	-2.026	-2.100	2.104	2.2707	0.3507	5.2
5.4	-2.029	1.541	2.193	2.1929	0.2729	-2.029	-2.026	2.111	2.2712	0.3512	5.4
5.6	-2.029	1.541	2.193	2.1929	0.2729	-2.029	-2.029	2.111	2.2712	0.3512	5.6
5.8	-4.830	-2.500	1.789	2.5943	0.4343	-2.869	-2.900	1.618	2.6471	0.4871	5.8
6.0	4.836	-2.415	1.797	2.5949	0.4349	-2.871	-2.869	1.621	2.6473	0.4873	6.0
6.2	-4.836	-2.418	1.797	2.5949	0.4349	-2.871	-2.871	1.621	2.6473	0.4873	6.2
6.4	-5.547	-2.800	1.275	2.9034	0.5034	-3.069	3.000	1.034	2.9131	0.512	6.4
6.6	-5.549	-2.774	1.278	2.9036	0.5036	-3.068	-3.069	1.027	2.9127	0.5127	6.6
6.8	-5.549	-2.774	1.278	2.9036	0.5036	-3.068	-3.068	1.027	2.9127	0.5127	6.8

TABLE 2.1, EXAMPLE 2.7B

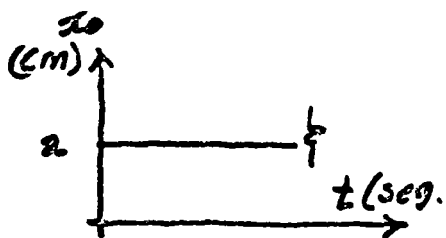
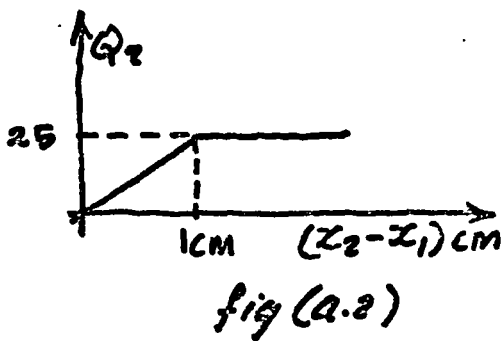
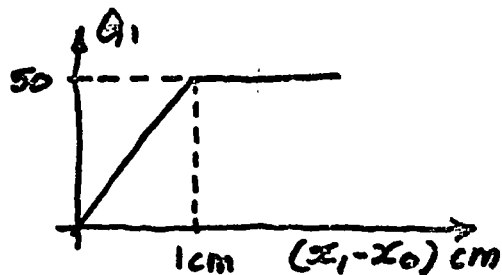
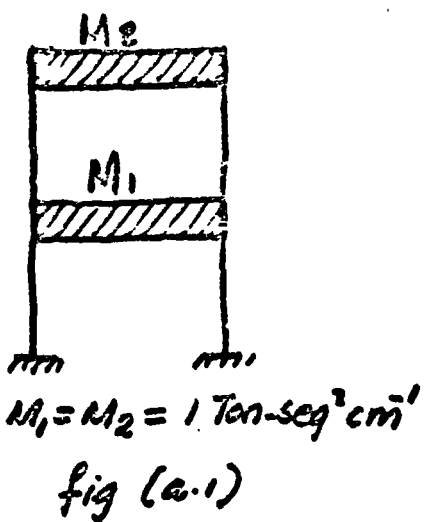
	Q ton	X cm	\dot{X} cm/sec	X_1 cm	\dot{X}_1 cm/sec	Q_1 ton	X cm	\dot{X} cm/sec	X_1 cm	\dot{X}_1 cm/sec	X_2 cm	\dot{X}_2 cm/sec
1	-0.100	-5.500	0.481	3.0879	0.9776	-5.332	-5.460	0.174	3.0408	0.9776	3.0408	0.9776
2	-0.100	-5.500	0.493	3.0883	0.9783	-5.337	-5.337	0.187	3.0417	0.9817	3.0417	0.9817
3	-0.100	-5.503	0.493	3.0883	0.9783	-5.337	-5.337	0.186	3.0417	0.9817	3.0417	0.9817
4	-0.578	-6.200	-0.705	3.0731	1.1531	-6.386	-6.200	-0.968	2.9665	1.0465	2.9665	1.0465
5	-0.578	-6.289	-0.644	3.0772	1.1572	-6.383	-6.386	-0.987	2.9652	1.0452	2.9652	1.0452
6	-0.578	-6.289	-0.646	3.0770	1.1570	-6.383	-6.383	-0.986	2.9652	1.0452	2.9652	1.0452
7	-0.578	-6.308	-0.646	3.0770	1.1570	-6.383	-6.383	-0.986	2.9652	1.0452	2.9652	1.0452
8	-2.388	-6.200	-1.897	2.8225	1.1425	-5.958	-6.000	-2.224	2.6429	0.9629	2.6429	0.9629
9	-2.388	-6.194	-1.896	2.8225	1.1425	-5.959	-5.958	-2.220	2.6432	0.9632	2.6432	0.9632
10	-2.388	-6.194	-1.896	2.8225	1.1425	-5.959	-5.959	-2.220	2.6432	0.9632	2.6432	0.9632
11	-9.573	-4.300	-2.945	2.3320	0.8920	-4.155	-4.100	-3.206	2.0925	0.6525	2.0925	0.6525
12	-9.540	-4.787	-2.994	2.3289	0.8888	-4.150	-4.155	-3.212	2.0921	0.6521	2.0921	0.6521
13	-9.541	-4.770	-2.992	2.3289	0.8889	-4.150	-4.150	-3.211	2.0921	0.6521	2.0921	0.6521
14	-9.541	-4.770	-2.992	2.3289	0.8889	-4.150	-4.150	-3.211	2.0921	0.6521	2.0921	0.6521
15	-4.687	-2.500	3.719	1.6502	0.4502	-1.376	-1.400	-3.766	1.3853	0.1853	1.3853	0.1853
16	-4.698	-2.343	-3.703	1.6513	0.4513	-1.378	-1.376	-3.764	1.3854	0.1854	1.3854	0.1854
17	-4.698	-2.349	-3.704	1.6513	0.4513	-1.378	-1.378	-3.764	1.3854	0.1854	1.3854	0.1854
18	1.090	0.800	-3.859	0.8845	-0.0755	1.748	1.700	-3.732	0.6255	-0.3345	0.6255	-0.3345
19	1.106	0.545	-3.884	0.8828	-0.0772	1.748	1.748	-3.727	0.6259	-0.3341	0.6259	-0.3341
20	1.105	0.553	-3.883	0.8829	-0.0771	1.748	1.748	-3.727	0.6259	-0.3341	0.6259	-0.3341
21	1.105	0.553	-3.883	0.8829	-0.0771	1.748	1.748	-3.727	0.6259	-0.3341	0.6259	-0.3341
22	6.608	3.600	-3.468	0.1377	-0.5823	4.506	4.700	-3.082	-0.0649	-0.7849	-0.0649	-0.7849
23	6.629	3.304	-3.438	0.1357	-0.5843	4.515	4.506	-3.101	-0.0662	-0.7862	-0.0662	-0.7862
24	6.628	3.314	-3.439	0.1358	-0.5842	4.515	4.515	-3.100	-0.0661	-0.7861	-0.0661	-0.7861
25	6.628	3.314	-3.439	0.1358	-0.5842	4.515	4.515	-3.100	-0.0661	-0.7861	-0.0661	-0.7861
26	0.578	5.400	-2.568	-0.4718	-0.9518	6.251	6.900	-1.958	-0.5799	-1.0599	-0.5799	-1.0599
27	0.589	5.289	-2.579	-0.4725	-0.9525	6.277	6.251	-2.023	-0.5842	-1.0642	-0.5842	-1.0642
28	0.589	5.299	-2.577	-0.4725	-0.9525	6.277	6.277	-2.020	-0.5841	-1.0641	-0.5841	-1.0641
29	0.589	5.299	-2.577	-0.4725	-0.9525	6.277	6.277	-2.020	-0.5841	-1.0641	-0.5841	-1.0641
30	2.277	6.200	-1.427	-0.8760	-1.1160	6.612	6.800	-0.712	-0.8760	-1.1099	-0.8760	-1.1099
31	2.277	6.200	-1.434	-0.8764	-1.1164	6.618	6.612	-0.731	-0.8764	-1.1003	-0.8764	-1.1003
32	2.277	6.200	-1.434	-0.8764	-1.1164	6.618	6.618	-0.730	-0.8763	-1.1003	-0.8763	-1.1003
33	11.327	5.600	-0.260	-1.0441	-1.0441	5.454	5.400	0.472	0.8763	0.8763	0.8763	0.8763
34	11.327	5.600	-0.255	-1.0437	-1.0437	5.453	5.454	0.477	0.8763	0.8763	0.8763	0.8763
35	11.327	5.600	-0.255	-1.0437	-1.0437	5.453	5.453	0.477	0.8763	0.8763	0.8763	0.8763
36	10.700	5.350	0.846	-0.9836	-0.9836	5.330	5.300	1.549	-0.8763	-0.8763	-0.8763	-0.8763
37	10.700	5.350	0.846	-0.9836	-0.9836	5.330	5.330	1.552	-0.8763	-0.8763	-0.8763	-0.8763

Método β de Newmark

Comportamiento inelástico

Ejemplo

Cada masa rígida del sistema de la fig. (a.1) pesa 9.81 Ton (métricas). Ambos resortes son elasto plásticos con rigideces iniciales de 50 y 25 Ton/cm. para el primero y segundo entrepiso respectivamente. Calcúlese numéricamente el desplazamiento máximo absoluto, en valor numérico, del primer piso como respuesta a un desplazamiento brusco de 2cm. del apoyo ($x_0 = 0$ para $t \leq 0$, $x_0 = 2$ cm para $t > 0$).



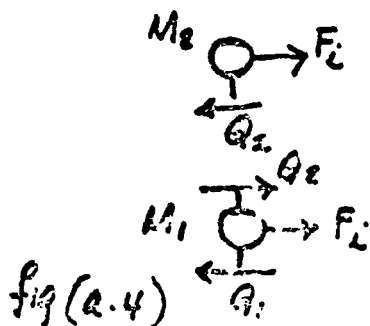
Ecuaciones del movimiento

$$M_1 \ddot{x}_1 + Q_1 - Q_2 = 0 \quad (a.1)$$

$$M_2 \ddot{x}_2 + Q_2 = 0 \quad (a.2)$$

como se puede concluir de la figura a.4.

$$\underline{M} \ddot{\underline{x}} + \underline{Q} = \underline{0}$$



Procedimiento iterativo :

1. Supondremos los valores de Q_1 y Q_2
2. Calculamos \ddot{x}_1 y \ddot{x}_2 de (a.1) y (a.2).
3. Obtenemos \dot{x}_1 y x_1 ; \dot{x}_2 y x_2 con las expresiones del β -newmark.
4. Obtenemos Q_1 y Q_2 en función de $(x_1 - x_0)$ y $(x_2 - x_1)$ respectivamente.

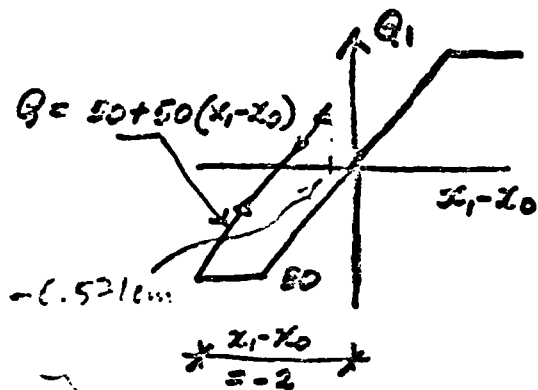
Si las Q calculadas difieren de las supuestas se repite el ciclo.

Expresiones del β -Newmark para $\beta = \frac{1}{6}$ y $\Delta t = 0.1 \text{ seg.}$

$$\begin{aligned} \dot{x}_{i+1} &= \dot{x}_i + \frac{0.1}{2} (\ddot{x}_i + \ddot{x}_{i+1}) \\ &= \dot{x}_i + 0.05 (\ddot{x}_i + \ddot{x}_{i+1}) \dots \dots \dots (a.3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_{i+1} &= x_i + 0.1 \dot{x}_i + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6}\right) (0.1)^2 \ddot{x}_i + (0.1)^2 \left(\frac{1}{6}\right) \ddot{x}_{i+1} \\ &= x_i + 0.1 \dot{x}_i + \frac{10^{-2}}{3} \ddot{x}_i + \frac{10^{-2}}{6} \ddot{x}_{i+1} \dots \dots \dots (a.4) \end{aligned}$$

Expresiones para la determinación de Q_1 y Q_2 .



$$Q_1 = \begin{cases} -50 \text{ Ton} & \text{en } t = 0^+ \dots \dots (a.5) \\ -50 + 50x_1 & \text{en } t \geq 0 \text{ (descarga)} \end{cases}$$

$$Q_2 = 25 (x_2 - x_1) \dots \dots \dots (a.6)$$

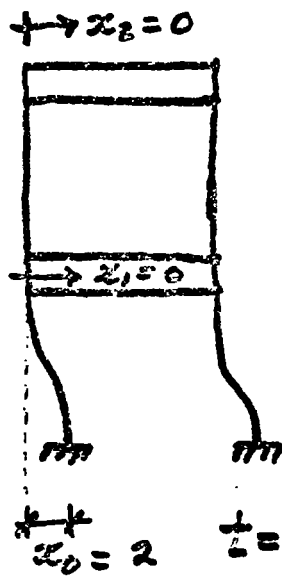
Para $t = 0^+$, $x_0 = 2.0$, $q_1 = -50$, $q_2 = 0.0$
 aplicando las ec 2.1 y 2.2 obtenemos

$$\ddot{x}_1 = \frac{q_2 - q_1}{M} = 50 \quad ; \quad \ddot{x}_2 = -\frac{q_2}{M} = 0.0$$

$$\dot{x}_1 = 0 \quad ; \quad x_1 = 0 \quad ; \quad \Rightarrow \quad x_1 - x_0 = -2$$

$$\dot{x}_2 = 0 \quad ; \quad x_2 = 0 \quad ; \quad \Rightarrow \quad x_2 - x_1 = 0$$

como se muestra en la siguiente figura



Para $t = 0.1$ seg.

1^{er} C.

$$q_1 = -50, \quad q_2 = 0.0$$

$$\ddot{x}_1 = 50, \quad \ddot{x}_2 = 0.0$$

$$\dot{x}_1 = 0 + 0.05(50 + 50) = 5$$

$$x_1 = 0 + 0.1(0) + \frac{10^{-2}}{3}(50) + \frac{10^{-2}}{6}(50)$$

$$= 0.25$$

$$\dot{x}_2 = 0 + 0.05(0 + 0) = 0.0$$

$$x_2 = 0 + 0.1(0) + \frac{10^{-2}}{3}(0) + \frac{10^{-2}}{6}(0) = 0.0$$

$$q_1 = -50 + 50x_1 = -37.50$$

$$q_2 = 25(x_2 - x_1) = 25(0 - 0.25) = -6.25$$

en esta forma se contruye la siguiente tabla

t	t_0	Q_1	Q_2	x_1	x_2	x_1	x_2	x_1	x_2
0.0	2.0	-50.00	0.000	50.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.1	2.0	-50.00	0.000	50.000	0.000	5.000	0.250	0.000	0.000
		-37.500	-6.25	37.500	0.313	4.795	0.209	0.313	0.010
		-38.542	-5.465	32.292	0.273	4.115	0.200	0.273	0.009
		-38.976	-5.272	33.511	0.264	4.176	0.203	0.264	0.009
		-38.874	-5.355	33.602	0.268	4.180	0.223	0.268	0.009
		-38.867	-5.352	33.572	0.268	4.176	0.223	0.268	0.009
0.2	2.0	-20.00	-10.000	10.000	1.036	6.352	0.769	1.036	0.070
		-11.552	-13.467	1.552	1.409	5.927	0.755	1.709	0.093
		-12.256	-16.806	-5.211	1.376	5.571	0.744	1.376	0.082
		-12.820	-16.559	-3.986	1.364	5.652	0.746	1.364	0.081
		-12.717	-16.619	-3.842	1.367	5.630	0.746	1.367	0.081
		-12.705	-16.616	-3.914	1.366	5.656	0.746	1.366	0.081
0.3	2.0	10.000	-25.000	-35.000	3.447	3.710	1.240	3.447	0.315
		12.010	-23.134	-37.010	3.354	3.610	1.237	3.354	0.312
		11.843	-23.136	-34.977	3.354	3.711	1.240	3.354	0.312
		12.012	-23.211	-35.142	3.357	3.703	1.240	3.357	0.312
		11.998	-23.208	-35.209	3.357	3.700	1.240	3.357	0.312
0.4	2.0	25.000	-25.000	-50.000	5.767	-0.56	1.409	5.767	0.767
		21.993	-16.057	-35.993	5.320	0.090	1.431	5.320	0.752
		21.549	-16.980	-37.606	5.366	0.059	1.430	5.366	0.753
		21.498	-16.916	-38.478	5.363	0.016	1.429	5.363	0.753
		21.425	-16.894	-38.341	5.362	0.022	1.429	5.362	0.753
		21.437	-16.895	-38.331	5.362	0.023	1.429	5.362	0.753

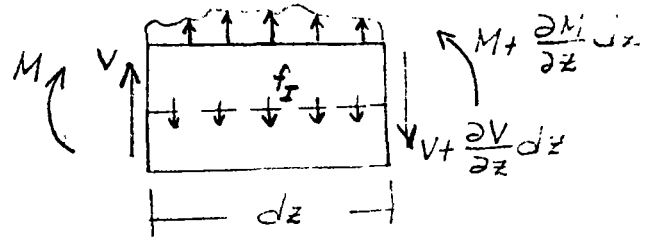
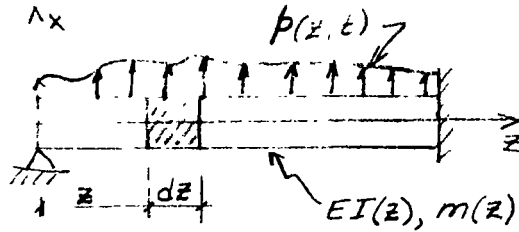
La velocidad se hizo casi nula
por lo cual el desplazamiento
máximo será de:

$$(x_1)_{\max} \approx 1.43 \text{ cm.}$$

$$\text{Desplazamiento Relativo} = x_1 - x_0 = -0.571 \text{ cm}$$

VIBRACION DE VIGAS EN FLEXION

a. AMORTIGUAMIENTO NULO



$$V + pdz - (V + \frac{\partial V}{\partial z} dz) - f_I dz = 0 \quad (1)$$

$$\text{EN DONDE } f_I dz = mdx \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} \quad (2)$$

SUSTITUYENDO (2) EN (1) Y SIMPLIFICANDO:

$$\frac{\partial V}{\partial z} = p - m \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} \quad (3)$$

$$M + Vdz - (M + \frac{\partial M}{\partial z} dz) = 0 \quad \frac{\partial M}{\partial z} = V \quad (4)$$

(DESPRECIANDO LOS TERMINOS DE SEGUNDO ORDEN DE LOS MOMENTOS DE p Y f_I)

SUSTITUYENDO (4) EN (3) SE OBTIENE

$$\frac{\partial^2 M}{\partial z^2} + m \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = p \quad (4')$$

TOMANDO EN CUENTA QUE $\frac{M}{EI} = \frac{\partial^2 x}{\partial z^2}$ SE OBTIENE FINALMENTE

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} (EI \frac{\partial^2 x}{\partial z^2}) + m \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = p \quad (5)$$

b. AMORTIGUAMIENTO VISCOSO

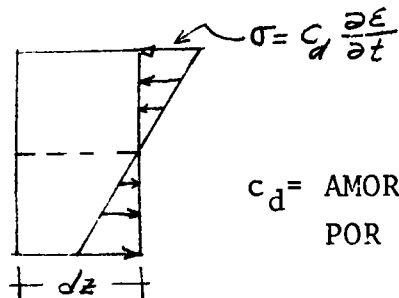
- FUERZA DE AMORTIGUAMIENTO POR

$$\text{VELOCIDAD TRANSVERSAL} = c(z) \frac{\partial x}{\partial t}$$

$$\frac{\partial V}{\partial z} = p - m \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} - c \frac{\partial x}{\partial t} \quad (6)$$

- FUERZA DE AMORTIGUAMIENTO POR DEFORMACION DE LA VIGA.

ACEPTANDO LA HIPOTESIS DE NAVIER DE DEFORMACION PLANA



$$M_{\text{amort}} = \int \sigma y da = c_d I(z) \frac{\partial^3 x}{\partial z^2 \partial t}$$

c_d = AMORTIGUAMIENTO
POR DEFORMACION

INCORPORANDO EL MOMENTO DEBIDO AL AMORTIGUAMIENTO EN LA
EC. (5)

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(EI \frac{\partial^2 x}{\partial z^2} + C_d I \frac{\partial^3 x}{\partial z^2 \partial t} \right) + m \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + c \frac{\partial x}{\partial t} = p \quad (6)$$

SI LA EXCITACION ES POR MOVIMIENTO DE LOS APOYOS, SE PUEDE
DEMOSTRAR (CLOUGH Y PENZIEN, PAG 303) QUE:

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(EI \frac{\partial^2 x}{\partial z^2} + C_d I \frac{\partial^3 x}{\partial z^2 \partial t} \right) + m \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + c \frac{\partial x}{\partial t} = p_{\text{efect.}}$$

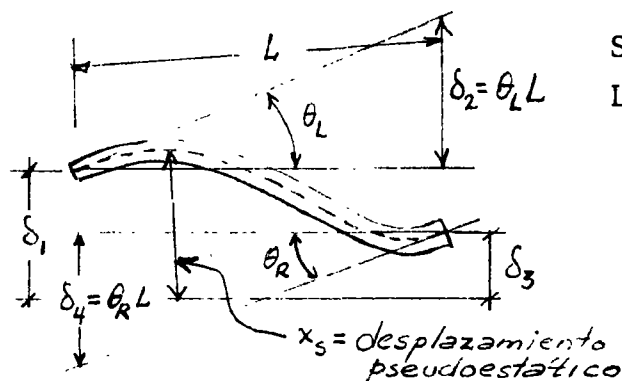
EN DONDE

$$p_{\text{efect}} = - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(EI \frac{\partial^2 x_s}{\partial z^2} + C_d I \frac{\partial^3 x_s}{\partial z^2 \partial t} \right) - m \frac{\partial^2 x_s}{\partial t^2} - c \frac{\partial x_s}{\partial t} \quad (7)$$

$$x(z,t) = x_{\text{est}}(z,t) + x(z,t)$$

x_s = DESPLAZAMIENTO PSEUDOESTATICO OCASIONADO POR EL MOV. DE
LOS APOYOS DE MANERA ESTATICA

x = DESPLAZAMIENTO DINAMICO



SI SE TIENE UNA ROTACION Y UNA TRAS-
LACION POR APOYO:

$$x_s = \sum_{i=1}^4 \theta_i \delta_i(t) \quad (8)$$

$\theta_i(z)$ = CONFIGURACION DE LA VIGA
DEBIDA A $\delta_i=1$

INCORPORANDO (8) EN (7):

$$P_{\text{efect}} = -\sum_{i=1}^4 \left\{ m \theta_i \ddot{\delta}_i(t) + c \theta_i \dot{\delta}_i(t) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left[c_d I(z) \frac{\partial^2 \theta_i(z)}{\partial z^2} \delta_i(t) \right] \right\} \quad (9)$$

EN LA MAYORIA DE LOS CASOS EL AMORTIGUAMIENTO INFLUYE POCO EN LA FUERZA
EFECTIVA Y LA EC. (9) SE SIMPLIFICA A

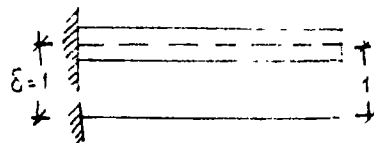
$$P_{\text{efect}} = -\sum_{i=1}^4 m \theta_i(z) \ddot{\delta}_i(t)$$

EN EL CASO DE UN VOLADIZO

$$\theta_1(z) = 1$$

Y

$$P_{\text{efect}} = -m(z) \ddot{\delta}_1(t)$$



ANALISIS DE VIBRACIONES LIBRES

CONSIDEREMOS UNA VIGA DE SECCION CONSTANTE ($EI = \text{CONSTANTE}$; $\bar{m} = \text{MASA}$ POR UNIDAD DE LONGITUD).

$$\text{DE LA EC. (5): } EI \frac{\partial^4 x}{\partial z^4} + \bar{m} \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = 0$$

$$\frac{\partial^4 x}{\partial z^4} = -\frac{\bar{m}}{EI} \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = 0 \quad (10)$$

RESOLVIENDO LA EC. (10) POR SEPARACION DE VARIABLES:

$$x(z, t) = \theta(z) Y(t)$$

$$\theta^{IV}(z) Y(t) + \frac{\bar{m}}{EI} \theta(z) \ddot{Y}(t) = 0 ; \frac{\theta^{IV}(z)}{\theta(z)} + \frac{\bar{m}}{EI} \frac{\ddot{Y}(t)}{Y(t)} = 0$$

POR LO QUE

$$\frac{\theta^{IV}(z)}{\theta(z)} = -\frac{\bar{m}}{EI} \frac{\ddot{Y}(t)}{Y(t)} = C = a^4 \quad (C = \text{CONSTANTE})$$

POR LO TANTO OBTENEMOS DOS ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS:

$$\theta^{IV}(z) - a^4 \theta(z) = 0$$

$$\ddot{Y}(t) + \omega^2 Y(t) = 0 \quad \text{DONDE} \quad \omega^2 = \frac{a^4 EI}{\bar{m}}$$

$$O \quad a^4 = \frac{\omega^2 \bar{m}}{EI}$$

LA SOLUCION DE LA SEGUNDA DE ESTAS ES:

$$Y(t) = \frac{\dot{Y}(0)}{\omega} \text{sen} \omega t + Y(0) \text{cos} \omega t \quad (11)$$

LA SOLUCION DE LA PRIMERA ES:

$$\theta(z) = A_1 \operatorname{sen} az + A_2 \cos az + A_3 \operatorname{senh} az + A_4 \operatorname{cosh} az \quad (12)$$

EN DONDE LAS A_i SE CALCULAN EN FUNCION DE LAS CONDICIONES DE FRONTERA DE LA VIGA EN AMBOS EXTREMOS.

EJEMPLO

VIGA SIMPLEMENTE APOYADA

LAS CUATRO CONDICIONES DE FRONTERA SON:

$$\text{en } z=0: \quad \theta(0)=0, \quad M(0) = EI \ddot{\theta}(0) = 0$$

$$\text{en } z=L: \quad \theta(L)=0, \quad M(L) = EI \theta''(L) = 0$$

SUSTITUYENDO $\theta(0)=0$ Y $\theta''(0)=0$ EN LA EC. (12) Y SU SEGUNDA DERIVADA:

$$\left. \begin{aligned} \theta(0) &= A_2 + A_4 \operatorname{cosh} 0 = 0 \\ \theta''(0) &= a^2(-A_2 + A_4 \operatorname{cosh} 0) = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow A_2 = A_4 = 0$$

HACIENDO LO MISMO CON $\theta(L) = 0$ y $\theta''(L) = 0$:

$$\left. \begin{aligned} \theta(L) &= A_1 \operatorname{sen} aL + A_3 \operatorname{senh} aL = 0 \\ \theta''(L) &= a^2(-A_1 \operatorname{sen} aL + A_3 \operatorname{senh} aL) = 0 \end{aligned} \right\} \rightarrow A_3 = 0$$

$$\text{POR LO TANTO, } \theta(L) = A_1 \operatorname{sen} aL = 0$$

PUESTO QUE $A_1=0$ ES LA SOLUCION TRIVIAL, SE DEBE TENER QUE A_1 SEA ARBITRARIA Y QUE

$$\operatorname{sen} aL = 0 \rightarrow aL = n\pi; \quad n = 0, 1, 2, \dots, \infty$$

POR LO TANTO, $a = n\pi/L$. RECORDANDO QUE

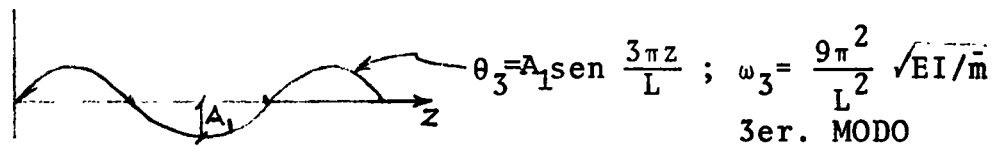
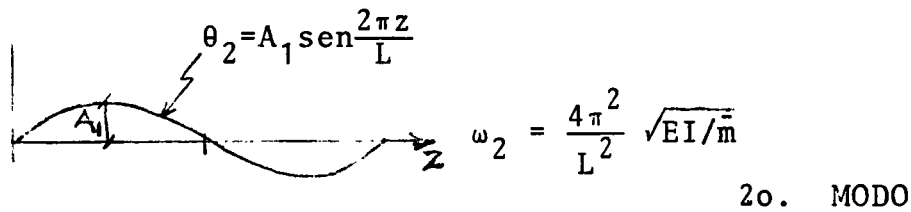
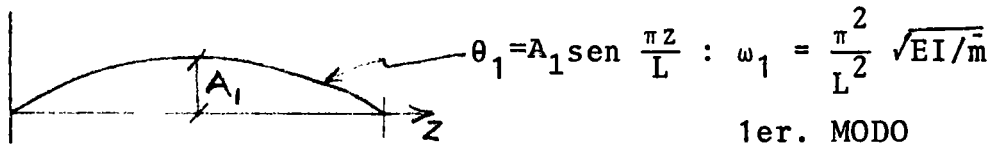
$$a^4 = \omega^2 \bar{m}/EI, \text{ SE TIENE QUE}$$

$$\omega_n^2 = (n\pi/L)^4 EI/\bar{m} \quad 0 \quad \omega_n = \frac{n^2 \pi^2}{L^2} \sqrt{EI/\bar{m}}$$

SON LAS FRECUENCIAS CIRCULARES NATURALES DE VIBRACION DE LA VIGA.

LAS CONFIGURACIONES MODALES SON

$$\theta_n(z) = A_1 \operatorname{sen} \frac{n\pi}{L} z$$



⋮

$$\omega_1 : \omega_2 : \omega_3 :: 1 : 4 : 9$$

$$\omega_i = n^2 \omega_1$$

1. ECUACION DIFERENCIAL DE MOVIMIENTO DE UNA VIGA QUE SE DEFORMA EXCLUSIVAMENTE POR CORTE

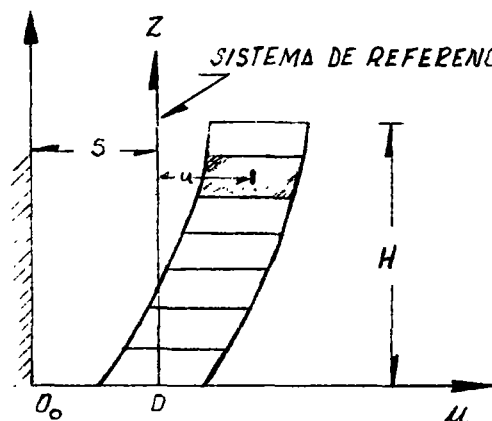


FIG 1a

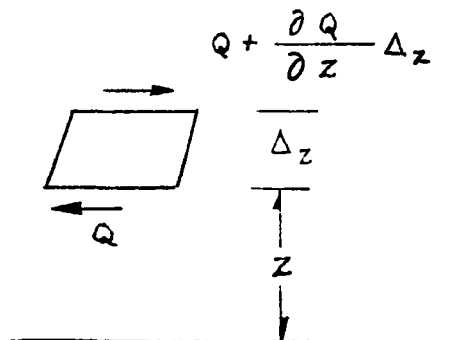


FIG 1b

Consideraremos el problema del movimiento de una viga en voladizo, empotrada en un extremo y libre en el otro, que tiene la propiedad de deformarse exclusivamente por efecto de las fuerzas cortantes. Este sistema puede servir de modelo sencillo para estudiar, al menos cualitativamente, el comportamiento de edificios altos estructurados a base de marcos rígidos así como la transmisión de ondas planas de corte que se propagan verticalmente en un estrato de suelo horizontal. No obstante lo dicho, la ecuación diferencial se establecerá con alguna generalidad algo mayor de manera que sea aplicable a otros casos.

Consideremos la viga de Fig. 1a, empotrada en 0 y libre en su otro extremo. El movimiento lo referiremos a un sistema de referencia absoluta (sistema inercial); elegiremos además un sistema de referencia móvil, solidario con la base de la estructura y animado de un movimiento de traslación horizontal y rectilíneo.

De manera que si O_0 y 0 son, respectivamente, los orígenes de los

dos sistemas de referencia mencionados

$$\overline{O_0O} = S(t) \quad (1)$$

es una función conocida del tiempo t , que representa el movimiento del suelo en la dirección Ox . Supondremos que el movimiento de la base es inexorable; es decir, la base tiene un movimiento impuesto por el suelo, no hay desplazamiento de la base respecto del suelo circundante, ni tampoco la base gira. Dicho de otro modo, ignoramos o no tenemos en cuenta la interacción dinámica entre el suelo y la estructura. Tendremos, entonces, que

$$\ddot{S}(t) = a(t) \quad (2)$$

es la componente horizontal de la aceleración del suelo en la dirección Ox .

Llamaremos, $x(z,t)$ el desplazamiento horizontal de la estructura en el punto de cota z , referido a su base O ; z la cota de un punto cualquiera de la viga; A el área de la sección transversal de la viga, G el módulo de elasticidad transversal del material de la viga, K un factor que depende la forma de la sección transversal (adimensional) y H el largo de la viga, que representa la altura total del edificio que pretendemos modelar, o el espesor de la capa de suelo, si es eso lo que pretendemos representar. Finalmente, llamaremos m la masa por unidad de largo de la viga y Q el esfuerzo cortante en la sección a cota z .

Del segundo principio de Newton aplicado a un segmento de viga (ver Fig 1b) obtenemos la ecuación diferencial

$$m \Delta z \frac{\partial^2}{\partial t^2}(x + s) = -Q + Q + \frac{\partial Q}{\partial z} \Delta z$$

O BIEN

$$m \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + ma(t) = \frac{\partial Q}{\partial z} \quad (3)$$

La ecuación constitutiva de la viga de corte es

$$Q = KAG \frac{\partial x}{\partial z} \quad (4)$$

eliminando Q entre las ecuaciones (3) y (4), obtenemos

$$m \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + ma(t) = \frac{\partial}{\partial z} [KAG \frac{\partial x}{\partial z}] \quad (5)$$

En general, m y KAG son funciones de z (viga de sección variable y con distribución variable, mejor dicho no uniforme, de la masa). En el caso general tendremos, entonces, poniendo explícitamente esta dependencia funcional

$$\left. \begin{array}{l} m = m(z) \\ KAG = k(z) \end{array} \right\} \quad (6)$$

en que $m(z)$ y $k(z)$ representan la masa local y la rigidez de corte local de la viga.

En el caso particular de una viga uniforme, que será el que trataremos en detalle, $m(z)$ y $k(z)$ son constantes y la ecuación (5) toma la forma

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = \frac{KAG}{m} \frac{\partial^2 x}{\partial z^2} - a(t) \quad (7)$$

Pondremos

$$c^2 = \frac{KAG}{m} \quad (8)$$

con lo cual la ecuación (7) se transforma en

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 x}{\partial z^2} - a(t) \quad (9)$$

que es la forma más simple de la *ecuación de ondas*.

El parámetro c tiene dimensiones $|LT^{-1}|$ y, según veremos, representa la velocidad de propagación de las ondas a lo largo de la viga.

Para resolver cualquiera de las dos ecuaciones (5) o (9) necesitamos conocer las condiciones iniciales y las condiciones en los extremos o condiciones de borde. Las primeras se refieren al estado en que se encuentra la viga en un instante determinado, $t=0$, por ejemplo. Las segundas describen las condiciones de vínculo.

Las condiciones iniciales se pueden dar especificando, por ejemplo, la posición y la velocidad de todos los puntos de la viga en el instante $t=0$:

$$x(z,0) = f_1(z) \quad (10)$$

$$x_H(z,0) = f_2(z) \quad (11)$$

Las condiciones de borde pueden ser muy variadas. En nuestro caso se tiene

$$x(0,t) = 0 \quad (12)$$

$$x'_H = (H,t) = 0 \quad (13)$$

La primera de estas ecuaciones dice que el extremo inferior de la viga se mueve junto con la base. La última expresa que el esfuerzo

de corte es nulo en el extremo superior.

Observemos, aunque sea trivial, que la ecuación diferencial |ec (5) o ec (9), según el caso| es independiente de las condiciones iniciales y de borde; por lo tanto, su validez es general. Esto fluye indistintamente del borde de dichas condiciones no han tenido para que ser tomadas en cuenta en la deducción de la ecuación diferencial y que la consideración del caso particular de la viga en voladizo no ha tenido otro fin que fijar la atención sobre un caso concreto.

2. MODOS NORMALES DE LA VIGA DE CORTE EN VOLADIZO

Consideramos el caso particular de una viga uniforme en voladizo que se deforma por corte exclusivamente, suponiendo que la base se encuentra en reposo ($S(t) = \text{constante}$). Trataremos de determinar movimientos en que $x(z,t)$ pueda expresarse como el producto de dos funciones, una que depende exclusivamente de z , y otra que es función de t solamente. Veremos que esto es posible siempre que la función de t sea una función sinusoidal cuya frecuencia sea igual a uno de un conjunto de valores discretos. Resultará así que todos los puntos de la viga se moverán con movimiento armónico simple, con la misma frecuencia y en fase o en oposición. Las funciones de z quedarán completamente determinadas, salvo un factor de amplitud arbitrario. A estos movimientos tan especiales los llamaremos *modos normales* o *modos principales* de oscilar.

Pongamos entonces

$$x(z,t) = \emptyset(z)f(t) \qquad (1)$$

La ecuación diferencial para la viga uniforme con base fija ($s(t) = \text{constante}$) se obtiene de la ecuación (1.9) poniendo en ella $a(t) = 0$. Resulta

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 x}{\partial z^2} \quad (2)$$

Sustituyendo la expresión (1) obtenemos

$$\emptyset(z) \frac{d^2 f}{dt^2} = c^2 \frac{d^2 \emptyset}{dz^2} f(t)$$

o bien

$$\frac{\frac{d^2 f}{dt^2}}{f(t)} = c^2 \frac{\frac{d^2 \emptyset}{dz^2}}{\emptyset(z)} \quad (3)$$

Ahora bien, el primer miembro de (3) es función de t solamente, mientras que el segundo miembro depende sólo de z . Pero t y z son variables independientes; luego, para que se pueda cumplir (3) es preciso que ambos miembros sean iguales a una misma constante.

Llamemos $-\omega^2$ dicha constante. Obtenemos así las dos ecuaciones diferenciales ordinarias siguientes

$$\frac{d^2 f}{dt^2} + \omega^2 f = 0 \quad (4)$$

$$\frac{d^2 \emptyset}{dz^2} + \frac{\omega^2}{c^2} \emptyset = 0 \quad (5)$$

Decimos que hemos logrado *separar* las variables de la ecuación en derivadas parciales (2), o que hemos *separado* dicha ecuación en dos ecuaciones diferenciales ordinarias. La constante ω recibe por ello el nombre de *constante de separación*.

La solución general de (4) se puede escribir en la forma

$$f(t) = R \cos(\omega t + \epsilon) \quad (6)$$

que representa una oscilación armónica simple de frecuencia circular ω y fase inicial ϵ .

La solución general de (5) es

$$\vartheta(z) = A \operatorname{sen}\left(\frac{\omega z}{c}\right) + B \operatorname{cos}\left(\frac{\omega z}{c}\right) \quad (7)$$

Recurrimos ahora a las condiciones de borde (1.12) y (1.13) que se pueden expresar en la forma

$$\left. \begin{array}{l} \vartheta(0) = 0 \\ \vartheta'(H) = 0 \end{array} \right\} \quad (8)$$

Sustituyendo la expresión de $\vartheta(z)$ encontrada en (7) obtenemos

$$\left. \begin{array}{l} B = 0 \\ \frac{\omega}{c} A \operatorname{cos}\left(\frac{\omega H}{c}\right) = 0 \end{array} \right\} \quad (9)$$

Este sistema admite la solución trivial $\frac{\omega A}{c} = 0$, $B = 0$, que corresponde al reposo en la posición de equilibrio y no nos interesa. Por lo tanto, suponemos $\frac{\omega A}{c} \neq 0$, con lo cual nos vemos obligados a concluir que un movimiento del tipo postulado sólo es posible si ω es raíz de la ecuación trascendente

$$\operatorname{cos}\left(\frac{\omega H}{c}\right) = 0 \quad (10)$$

cuyas soluciones son

$$\omega_n = (2n-1) \frac{\pi c}{2H} \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (11)$$

Las frecuencias ω_n reciben el nombre de *frecuencias normales* o *frecuencias naturales* de la viga. La ec (10) es la *ecuación de frecuencias*.

Observemos que

$$\omega_1: \omega_2: \omega_3: \dots = 1: 3: 5: \dots \quad (12)$$

Las frecuencias naturales, ordenadas de menor a mayor, son entre sí como la sucesión de los números impares. Los períodos correspondientes valen

$$T_n = \frac{4H}{c} \cdot \frac{1}{(2n-1)} \quad (13)$$

y forman, por consiguiente, una *progresión armónica*.

Finalmente el conocimiento transversal de la sección de la viga situada a la cota z , para un instante t cualquiera, está dado por

$$x_n(z, t) = A_n \operatorname{sen}\left(\frac{2n-1}{2H}\pi z\right) \cos(\omega_n t + \epsilon_n) \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (14)$$

Cada uno de estos movimientos recibe el nombre de *modo normal* o *modo principal* de oscilar. Nótese que las constantes A_n y ϵ_n han quedado sin determinar. Esto es así porque no hemos hecho uso de las condiciones iniciales. A_n es la *amplitud* del modo de orden n ; ϵ_n es su *fase inicial* o simplemente *fase*. Al modo de menor frecuencia se le da el nombre de *modo fundamental*. Los demás se designan como 2o., 3er...modo, o, genéricamente, como *modos superiores*. En el caso particular que nos ocupa, dada la relación armónica de los períodos, establecida anteriormente, se habla de *armónicas superiores*.

Las frecuencias ω_n y las funciones $\phi_n(z)$ reciben el nombre de *frecuencias modales y funciones modales*, respectivamente. También se usan los apelativos de *frecuencia característica, valor característico, frecuencia propia, valor propio, eigenvalue* y los correspondientes *función característica, etc.*

Convendremos en normalizar o estandarizar las funciones modales, eligiendo su amplitud igual a la unidad. Con esta convención tendremos

$$\phi_n(z) = \text{sen} \frac{(2n-1)\pi z}{2H} \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (15)$$

Las fuerzas cortantes del modo de orden n quedan dados (para $A_n=1$) por

$$Q_n(z, t) = kAG \frac{\partial x_n(z, t)}{\partial z} = kAG \frac{(2n-1)\pi}{2H} \cos \frac{(2n-1)\pi z}{2H} \cos(\omega_n t + \epsilon_n)$$

El corte en la base es (para $A_n=1$)

$$Q_n(0, t) = kAG \frac{(2n-1)\pi}{2H} \cos(\omega_n t + \epsilon_n) \quad (16)$$

Luego, el corte en la sección situada en la cota z referido al corte basal valdrá

$$\frac{Q_n(z, t)}{Q_n(0, t)} = \cos \frac{(2n-1)\pi z}{2H} \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (17)$$

El momento de volteo (positivo en el sentido trigonométrico positivo 7) está dado por (para $A_n=1$)

$$M_n(z,t) = kAG \left[(-1)^n + \operatorname{sen} \frac{(2n-1)\pi z}{2H} \right] \cos(\omega_n t + \epsilon_n)$$

Luego

$$M_n(o,t) = (-1)^n kAG \cos(\omega_n t + \epsilon_n) \quad (18)$$

Por lo tanto el momento de volteo referido al momento de volteo local es

$$\frac{M_n(z,t)}{M_n(o,t)} = 1 + (-1)^n \operatorname{sen} \frac{(2n-1)\pi z}{2H} \quad (19)$$

Finalmente, llamemos k_n la altura a la cual habría que aplicar el corte basal para obtener en la base un momento estático igual (numéricamente, o sea, en valor absoluto) al momento de volteo basal.

Tendremos

$$|Q_n(o,t)| h_n = |M_n(o,t)|$$

de donde

$$\frac{h_n}{H} = \frac{2}{(2n-1)\pi} \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (20)$$

expresión que se ha tabulado a continuación.

n	$\frac{h_n}{H}$
1	0.6366
2	0.2122
3	0.1273
4	0.0909
5	0.0707

La tabla anterior da los valores de $\frac{h_n}{H}$ para los cinco primeros modos. Así, si se aplica el corte basal correspondiente al primer modo como una fuerza estática horizontal a la cota $0,6366 H$, el momento de dicha fuerza respecto de la base es igual al momento de volteo basal en el modo fundamental. El resultado de ec (20) y la tabla muestran que, a igualdad de corte basal, el modo fundamental es el que tiene importancia predominante en el momento de volteo basal.

A una conclusión análoga llegamos examinando las ecuaciones (16) y (18). A igualdad de amplitud de oscilación, mientras los cortes basales máximos crecen con el número de orden del modo, según la serie de los números impares (1, 3, 5,...), el momento de volteo basal máximo permanece el mismo (en valor absoluto) para todos los modos.

En la Fig 2 hemos representado esquemáticamente las funciones modales y las razones $\frac{Q_n(z,t)}{Q_n(o,t)}$, $\frac{M_n(z,t)}{M_n(o,t)}$ para $n = 1, 2, 3$

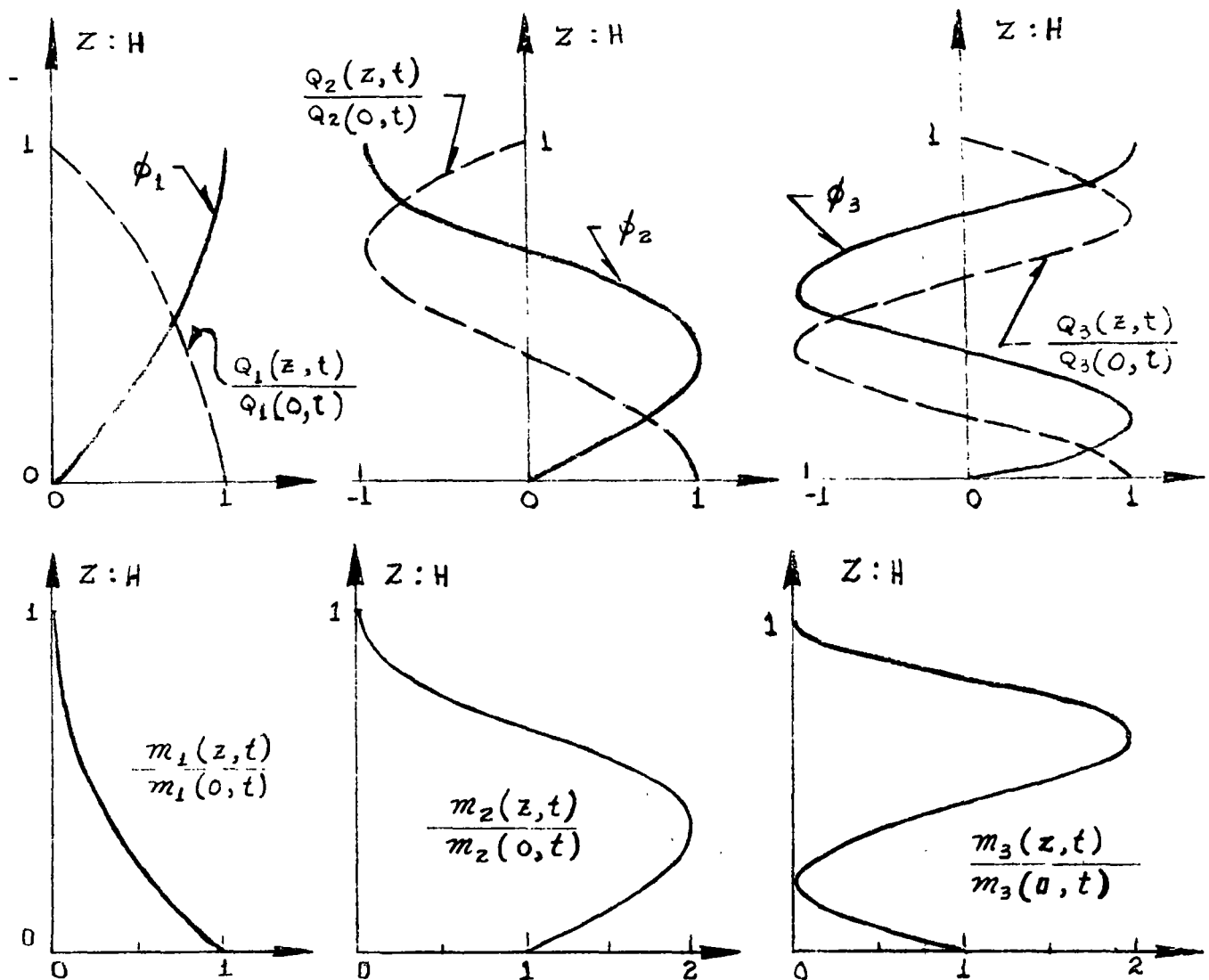


FIGURA 2

Los puntos para los cuales $\phi_n(z)$ se anula se llaman *nodos*; aquéllos para los cuales $\phi_n(z)$ es extremo (máximo o mínimo) se llaman *vientres*. Podemos observar que $\phi_n(z)$ presenta exactamente n vientres y n nodos (si se cuenta con tal el punto $z=0$).

Observemos también que, salvo para $x=1$, en que el mayor momento de volteo ocurre en la base, en los modos superiores el momento de volteo máximo no ocurre en la base y es numéricamente igual al doble del momento de volteo máximo basal.

3.- ORTOGONALIDAD DE LOS MODOS NORMALES, VIBRACIONES LIBRES

Las funciones modales encontradas en la Sección 2 satisfacen la relación de ortogonalidad

$$\int_0^H m \phi_i(z) \phi_j(z) dz = 0 \quad \text{para } i \neq j \quad (1)$$

En efecto

$$\int_0^H \text{sen} \frac{(2i-1)\pi z}{2H} \text{sen} \frac{(2j-1)\pi z}{2H} dz = \frac{1}{2} \int_0^H \left[\cos \frac{(i-j)\pi z}{H} - \cos \frac{(i+j-1)\pi z}{H} \right] dz$$

$$= 0 \quad (i \neq j)$$

Esta propiedad tiene extraordinaria importancia para el desarrollo de la teoría de las vibraciones libres y de las vibraciones forzadas.

Las funciones $\phi_i(z)$ forman una base ortogonal (completa) en el intervalo $(0,H)$ y, con algunas restricciones que no tienen importancia en las aplicaciones prácticas, cualquiera función se puede representar en dicho intervalo como una combinación lineal de las $\phi_i(z)$.

No entraremos aquí a establecer la posibilidad de tal representación ni su unicidad. Nos limitaremos a establecer cómo se pueden calcular los coeficientes de la combinación lineal.

Sea

$$f(z) \quad 0 < z < H$$

una función cualquiera de z , y admitamos que es posible representarla en la forma

$$f(z) = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \phi_i(z) \quad (2)$$

Para determinar los coeficientes α_j multiplicamos ambos miembros de (2) por $\phi_j(z)$ e integramos entre 0 y H, teniendo en cuenta las relaciones de ortogonalidad. Obtenemos

$$\alpha_j = \frac{\int_0^H f(z) \phi_j(z) dz}{\int_0^H \phi_j^2(z) dz} \quad (3)$$

Que la representación (2) es única es una consecuencia directa del hecho que las funciones $\phi_i(z)$ son linealmente independientes.

El resultado recién encontrado nos permite resolver de inmediato el problema de las vibraciones libres. Se trata de resolver el sistema diferencial

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} &= c^2 \frac{\partial^2 x}{\partial z^2} \\ x(0,t) &= 0, \quad x_z(H,t) = 0 \\ x(z,0) &= f_1(z), \quad x_t(z,0) = f_2(z) \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

correspondiente a las vibraciones libres de una viga uniforme que se deforma exclusivamente por corte, empotrada en $z=0$ y libre en $z=H$, sujeta a las condiciones iniciales expresadas en la última línea de (4).

La función

$$x(z,t) = \sum_{i=1}^{\infty} [\alpha_i \cos \omega_i t + \beta_i \operatorname{sen} \omega_i t] \phi_i(z) \quad (5)$$

satisface la ecuación diferencial y las condiciones de borde. Determinaremos los coeficientes α_i, β_i de manera que las condiciones iniciales queden también cumplidas.

Derivando (5) respecto del tiempo obtenemos

$$x_t(z,t) = \sum_{i=1}^{\infty} \left[-\omega_i \alpha_i \operatorname{sen} \omega_i t + \omega_i \beta_i \cos \omega_i t \right] \phi_i(z) \quad (6)$$

Haciendo $t=0$ en (5) y (6) y tomando en cuenta las condiciones iniciales, obtenemos

$$x(z,0) = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \phi_i(z) = f_1(z) \quad (7)$$

y

$$x_t(z,0) = \sum_{i=1}^{\infty} \omega_i \beta_i \phi_i(z) = f_2(z) \quad (8)$$

Por lo tanto

$$\alpha_i = \frac{\int_0^H f_1(z) \phi_i(z) dz}{\int_0^H \phi_i^2(z) dz} \quad (9)$$

$$\omega_i \beta_i = \frac{\int_0^H f_2(z) \phi_i(z) dz}{\int_0^H \phi_i^2(z) dz} \quad (10)$$

y el problema queda resuelto. La vibración libre consiste en una superposición de movimientos armónicos simples de frecuencias iguales a las frecuencias modales, cuyas amplitudes y fases quedan determinadas por las condiciones iniciales.

Pongamos

$$\xi_i(t) = \alpha_i \cos \omega_i t + \beta_i \operatorname{sen} \omega_i t \quad , \quad (11)$$

entonces

$$x(z,t) = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i(t) \phi_i(z) \quad (12)$$

Los variables $\xi_i(t)$ las llamaremos coordenadas normales del sistema.

4.- SIGNIFICADO FISICO DE LAS RELACIONES DE ORTOGONALIDAD, OSCILADORES MODALES

En la Sección 3 hemos establecido las relaciones de ortogonalidad para las funciones modales de la viga de corte en voladizo como una propiedad matemática de dichas funciones. Queremos ahora darle a dichas relaciones un significado o interpretación física.

Empezaremos por establecer expresiones para la energía cinética y la energía potencial de la viga cuando ésta se encuentra animada de un movimiento libre arbitrario que como hemos visto recién se puede representar por la expresión (3.12).

Por definición la energía cinética del sistema es

$$T = \frac{1}{2} \int_0^H m \left(\frac{\partial x}{\partial t} \right)^2 dz = \frac{m}{2} \int_0^H \left[\sum_{i=1}^{\infty} \dot{\xi}_i \phi_i(z) \sum_{j=1}^{\infty} \xi_j \phi_j(z) \right] dz \quad (1)$$

Invirtiendo el orden de integración y de suma y teniendo en cuenta las relaciones de ortogonalidad obtenemos

$$T = \frac{m}{2} \sum_{i=1}^{\infty} \dot{\xi}_i^2(t) \int_0^H \phi_i^2(z) dz \quad (2)$$

Para obtener la energía potencial observamos que ésta es simplemente el trabajo acumulado por las fuerzas internas (esfuerzos de corte) desde la posición de equilibrio en reposo (configuración no deformada) basta la configuración definida por (3.12). En un elemento de viga como el de fig 1a se ha acumulado la energía

$$\delta V = \frac{1}{2} Q \gamma \delta z \quad (3)$$

en que Q es el corte y γ la distorsión. Pero según (1.4)

$$Q = kAG \frac{\partial x}{\partial z}$$

y para pequeñas amplitudes

$$\gamma = \frac{\partial x}{\partial z}$$

Luego,

$$\delta V = \frac{1}{2} kAG \left(\frac{\partial x}{\partial z} \right)^2 \delta z \quad (4)$$

y por lo tanto

$$V = \frac{1}{2} kAG \int_0^H \left[\sum_{i=1}^{\infty} \xi_i \phi_i'(z) \sum_{j=1}^{\infty} \xi_j \phi_j'(z) \right] dz \quad (5)$$

Una integración por partes nos da

$$\int_0^H \phi_i'(z) \phi_j'(z) dz = \left[\phi_i' \phi_j \right]_0^H - \int_0^H \phi_i''(z) \phi_j(z) dz \quad (6)$$

Pero, según las condiciones de borde $\phi_j(0) = 0$, $\phi_i'(H) = 0$; luego, el primer término del segundo miembro es nulo para toda combinación de i y de j . Por otro lado según la ec (2.5)

$$\phi_i''(z) = - \frac{\omega_i^2}{c^2} \phi_i(z) \quad (7)$$

Luego, la integral

$$\int_0^H \phi_i'(z) \phi_j'(z) dz \quad (6 \text{ bis})$$

es nula si $i \neq j$, en virtud de las relaciones de ortogonalidad,

Cuando $i = j$ tenemos

$$\int_0^H \phi_i'(z) \phi_i'(z) dz = \int_0^H \left[\phi_i'(z) \right]^2 dz = \frac{\omega_i^2}{c^2} \int_0^H \left[\phi_i(z) \right]^2 dz \quad (8)$$

En consecuencia, invirtiendo en (5) el orden de integración y suma:

$$V = \frac{1}{2} \frac{kAG}{c^2} \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i^2(t) \omega_i^2 \int_0^H \phi_i^2(z) dz \quad (9)$$

Pero

$$c^2 = \frac{kAG}{m}$$

Luego, finalmente

$$V = \frac{1}{2} m \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i^2(t) \omega_i^2 \int_0^H \phi_i^2(z) dz = \frac{1}{2} kAG \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i^2 \int [\phi_i'(z)]^2 dz \quad (10)$$

Lo interesante de los resultados (2) y (10) es que en las expresiones de V y de T solamente aparecen cuadrados de las coordenadas normales ξ_i (en la expresión de V) o cuadrados de los derivadas temporales $\dot{\xi}_i$ de dichas coordenadas (en la expresión de T). No aparecen productos de la forma $\xi_i \xi_j$ o $\dot{\xi}_i \dot{\xi}_j$ con $i \neq j$.

Este resultado lo expresamos diciendo que hemos diagonalizado simultáneamente las expresiones de la energía cinética y de la energía potencial. La consecuencia inmediata es que la ecuación del movimiento (2.2). que es una ecuación a derivadas parciales, se puede representar por una infinidad numerable de ecuaciones diferenciales ordinarias no acopladas; es decir, en cada una de las cuales aparece una y sólo una de las coordenadas ξ_i . Esto facilita enormemente el problema de integrar las ecuaciones del movimiento.

Empleando las ecuaciones de Lagrange

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = - \frac{\partial V}{\partial q_i} \quad (i=1, 2 \dots) \quad (11)$$

encontramos inmediatamente que las coordenadas normales satisfacen las ecuaciones

$$\ddot{\xi}_i + \omega_i^2 \xi_i = 0 \quad (i = 1, 2, 3, \dots) \quad (12)$$

Como era de esperar, si se tiene en cuenta la relación (3.11). Cada modo normal se comporta, entonces, como un oscilador armónico simple, independiente de los demás. Si M_i y K_i son, respectivamente, la masa y la constante elástica del oscilador que corresponde al modo i , debemos tener necesariamente

$$\frac{K_i}{M_i} = \omega_i^2 \quad (i = 1, 2, 3, \dots) \quad (13)$$

Por lo tanto, para determinar completamente el oscilador que representa al $i^{\text{ésimo}}$ modo nos bastará determinar su masa M_i . La ecuación de frecuencias y ecs. (13) nos dan los K_i .

Llamaremos oscilador modal equivalente o simplemente oscilador modal, a un oscilador armónico simple cuya masa y rigidez (o constante elástica) son tales, que es capaz de oscilar de manera que, en cada instante, su energía cinética, su energía potencial y su cantidad de movimiento sean iguales a los del sistema estudiado oscilando en un modo normal.

Si M_i y K_i son respectivamente, la masa y la constante elástica del oscilador modal equivalente al $i^{\text{ésimo}}$ modo debemos tener

$$\frac{1}{2} M_i R_i^2 \dot{\xi}_i^2 = \frac{m}{2} \dot{\xi}_i^2 \int_C^H \rho_i^2(z) dz \quad (14)$$

$$\frac{1}{2} K_i R_i^2 \xi_i^2 = \frac{m}{2} \xi_i^2 \omega_i^2 \int_0^H \vartheta_i^2(z) dz \quad (15)$$

$$M_i R_i \dot{\xi}_i = m \dot{\xi}_i \int_0^H \vartheta_i(z) dz \quad (16)$$

en que R_i es un factor de escala.

De (14) y (15) obtenemos inmediatamente (13), dividiendo miembro a miembro. Elevando al cuadrado (16) y dividiendo por (14) resulta

$$M_i = m \frac{[\int_0^H \vartheta_i(z) dz]^2}{\int_0^H \vartheta_i^2(z) dz} = \frac{[\int_0^H m \vartheta_i(z) dz]^2}{\int_0^H m \vartheta_i^2(z) dz} \quad (17)$$

Sustituyendo en (17) las expresiones de las funciones modales encontradas en (2.15), concluimos que las masas de los osciladores modales para una viga uniforme en voladizo que se deforma exclusivamente por corte están dadas por la expresión

$$M_i = \frac{8M}{(2i-1)^2 \pi^2} \quad (i = 1, 2, 3, \dots) \quad (18)$$

en que M es la masa total de la viga.

La tabla siguiente da los valores de M_i/M para los cinco primeros modos.

i	$\frac{M_i}{M}$
1	0.81057
2	0.09006
3	0.03242
4	0.01654
5	0.01001

Observemos que los osciladores modales de los tres primeros modos contienen, en conjunto, poco más del 93% de la masa total de la viga, y que entre los cinco primeros completan alrededor del 96%.

Se demuestra en los libros de teoría de las series de Fourier que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8} \quad (19)$$

Concluimos, entonces, que

$$\sum_{i=1}^{\infty} M_i = M \quad (20)$$

La suma de las masas de los osciladores modales, definidos en la forma que se ha hecho más arriba, es igual a la masa total de la estructura. Podemos establecer este resultado sin necesidad de recurrir a la relación (19). Concibamos un movimiento impulsivo de la viga a partir de su configuración de equilibrio

con reposo, por el cual damos a cada punto de la viga una velocidad igual a la unidad. Evidentemente la cantidad de movimiento inicial de la viga será igual a su masa total M .

Ahora bien, para este movimiento tan especial tenemos las condiciones iniciales

$$x(z,0) = 0 = f_1(z) \quad (21)$$

$$x_t(z,0) = 1 = f_2(z) \quad (22)$$

Luego, las ecuaciones (3.9) y (3.10) nos dan

$$\alpha_i = 0 \quad (23)$$

$$\omega_i \beta_i = \frac{\int_0^H \phi_i(z) dz}{\int_0^H \phi_i^2(z) dz} \quad (24)$$

y la cantidad de movimiento inicial será, de acuerdo con (3.8),

$$\begin{aligned} \int_0^H m x_t(z,0) dz &= \int_0^H \sum_{i=1}^{\infty} m \omega_i \beta_i \phi_i(z) dz = \sum_{i=1}^{\infty} m \frac{\left[\int_0^H \phi_i(z) dz \right]^2}{\int_0^H \phi_i^2(z) dz} = \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} M_i \end{aligned} \quad (25)$$

por (17). Luego, $\sum_{i=1}^{\infty} M_i = M$.

Profundizando en el significado físico de las relaciones de ortogonalidad, demostraremos que: el trabajo virtual de las fuerzas de inercia desarrolladas en un modo para un desplazamiento virtual correspondiente a un modo distinto es idénticamente nu-

lo. Análogamente, el trabajo virtual de las fuerzas elásticas internas (esfuerzos de corte) desarrollado en un modo para un desplazamiento correspondiente a un modo distinto e idénticamente nulo.

En efecto, las fuerzas de inercia correspondientes al modo están dadas por (ver ec. 3.12)

$$- m \ddot{\xi}_i(t) p_i(z) dz \quad (26)$$

y un desplazamiento virtual correspondiente al modo j está dado por

$$\dot{\xi}_j(t) \vartheta_j(z) \delta t \quad (27)$$

Llamemos δW_{ij} el trabajo virtual; tendremos

$$\delta W_{ij} = -m \ddot{\xi}_i(t) \dot{\xi}_j(t) \delta t \int_0^H \vartheta_i(z) \vartheta_j(z) dz \quad (28)$$

$$\text{Si } i \neq j \quad \delta W_{ij} = 0 \quad (i \neq j) \quad (29)$$

en virtud de las relaciones de ortogonalidad

Para $i=j$, la ec. (28) da

$$\delta W_{ii} = -m \ddot{\xi}_i \dot{\xi}_i \delta t \int_0^H \vartheta_i^2(z) dz$$

o sea

$$\delta W_{ii} = - \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} m \dot{\xi}_i^2 \int_0^H \vartheta_i^2(z) dz \right] \delta t = -\delta T_i \quad (30)$$

El trabajo de las fuerzas de inercia desarrolladas en el modo i para un desplazamiento correspondiente al mismo modo es igual al decremento de la energía cinética de dicho modo.

Analizando ahora el trabajo virtual de las fuerzas elásticas internas, encontramos, llamando δU_{ij} el trabajo realizado por las fuerzas elásticas del modo i para un desplazamiento correspondiente al modo j

$$\delta U_{ij} = \int_0^H Q_i \frac{\partial \dot{x}_j}{\partial z} \delta t dz \quad (31)$$

pero
$$Q_i = KAG \frac{\partial x_i}{\partial z} = KAG \xi_i(t) \vartheta'_i(z) \quad (32)$$

y
$$\frac{\partial \dot{x}_j}{\partial z} = \dot{\xi}_j(t) \vartheta'_j(z) \quad (33)$$

Luego
$$\delta U_{ij} = \delta t KAG \dot{\xi}_j(t) \xi_j(t) \int_0^H \vartheta_i^1(z) \vartheta_j^1(z) dz \quad (34)$$

que según hemos demostrado en (6 bis) es igual a cero para $i \neq j$.

Ahora bien, para $i=j$, tenemos

$$\delta U_{ii} = \delta t KAG \xi_i(t) \dot{\xi}_i(t) \int_0^H [\vartheta_i^1(z)]^2 dz$$

o sea

$$\delta U_{ii} = \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} KAG \xi_i^2(t) \int_0^H [\vartheta_i^1(z)]^2 dz \right] \delta t = \delta V_i \quad (35)$$

en que V_i es la energía elástica del modo i . Tenemos en consecuencia que el trabajo de las fuerzas elásticas desarrolladas en el modo i para un desplazamiento correspondiente a ese mismo modo es igual a la variación de la energía potencial del modo en cuestión.

Con esto terminamos la demostración de que no hay interacción entre los modos de vibrar durante una oscilación libre. Cada modo se comporta como si los demás no existieran. Resulta, entonces, que no sólo el sistema como un todo es conservativo, sino que, además, la energía se conserva dentro de cada modo.

5. RESPUESTA DE LA VIGA DE CORTE EN VOLADIZO PARA UN MOVIMIENTO ARBITRARIO DE SU BASE.

Supongamos cumplidas las hipótesis sobre el movimiento del suelo enunciadas al comienzo de la sección 1. Las expresiones de la energía cinética y potencial en términos de las coordenadas normales, serán (nótese que T es la energía cinética absoluta; es decir, la del movimiento referido a un sistema inicial):

$$T = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2} M_i (R_i \dot{\xi}_i + \dot{S})^2 \quad (1)$$

$$V = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2} K_i R_i^2 \xi_i^2 \quad (2)$$

Las ecuaciones de Lagrange

$$\frac{\delta}{\delta t} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\xi}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial \xi_i} = - \frac{\partial V}{\partial \xi_i} \quad (i=1, 2, 3, \dots) \quad (3)$$

nos dan

$$M_i R_i^2 \ddot{\xi}_i + M_i R_i \ddot{S}(t) = - K_i R_i^2 \xi_i$$

o bien

$$\ddot{\xi}_i + \omega_i^2 \xi_i = - \frac{a(t)}{R_i} \quad (i=1, 2, 3, \dots) \quad (4)$$

La solución de estas ecuaciones esta dada por la conocida integral de Duhamel

$$\xi_i = - \frac{1}{\omega_i R_i} \int_{-\infty}^t a(\tau) \text{sen } \omega_i (t-\tau) d\tau \quad (i=1, 2, 3, \dots) \quad (5)$$

Recurriendo a la ecuación (3.12) obtenemos inmediatamente para el corrimiento lateral de la sección de la viga a la cota z en

el instante t :

$$x(z,t) = - \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\phi_i(z)}{\omega_i R_i} \int_{-\infty}^t a(\tau) \text{sen } \omega_i (t-\tau) d\tau \quad (6)$$

De la ec (4.16 se tiene, tomando en cuenta (4.17),

$$\frac{1}{R_i} = \frac{M_i}{m \int_0^H \phi_i(z) dz} = \frac{\int_0^H \phi_i(z) dz}{\int_0^H \phi_i^2(z) dz} \quad (7)$$

Luego, finalmente,

$$x(z,t) = - \sum_{i=1}^{\infty} \phi_i(z) \frac{\int_0^H \phi_i(z) dz}{\int_0^H \phi_i^2(z) dz} \frac{1}{\omega_i} \int_{-\infty}^t a(\tau) \text{sen } \omega_i (t-\tau) d\tau \quad (8)$$

La respuesta queda así expresada como una superposición de las funciones, modales multiplicada cada una por una función del tiempo que no es otra cosa que la respuesta del oscilador modal correspondiente y que un factor constante, característico de cada modo, que se ha dado en llamar factor de participación. Para nuestro caso dicho factor vale

$$\frac{1}{R_i} = \frac{\int_0^H \phi_i(z) dz}{\int_0^H \phi_i^2(z) dz} \quad (i=1,2,3\dots)$$

Sustituyendo las expresiones de $\phi_i(z)$, encontramos

$$\frac{1}{R_i} = \frac{4}{(2i-1)\pi} \quad (9)$$

En la tabla siguiente se dan los valores de $\frac{1}{R_i}$ para los cinco primeros modos de la viga de corte uniforme en voladizo

i	$\frac{1}{R_i}$
1	1.2732
2	0.4244
3	0.2546
4	0.1819
5	0.1415

Para el esfuerzo cortante tenemos la expresión

$$Q(z,t) = KAG \frac{\partial x_e(z,t)}{\partial z} = - KAG \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\phi'_i(z)}{\omega_i R_i} \int_{-\infty}^t a(\tau) \text{sen } \omega_i(t-\tau) d\tau \quad (10)$$

y para el momento volcante

$$M(z,t) = - KAG \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^i + \phi_i(z)}{\omega_i R_i} \int_{-\infty}^t a(z) \text{sen } \omega_i(t-\tau) d\tau \quad (11)$$

6. EJEMPLO.

Calcular las respuestas modales máximas de una viga de corte uniforme, en voladizo, cuyo período fundamental es 3 seg, sometido a un "temblor" cuyo espectro de aceleraciones absolutas $S_a(T_0)$ es el dado por la Fig. 3.

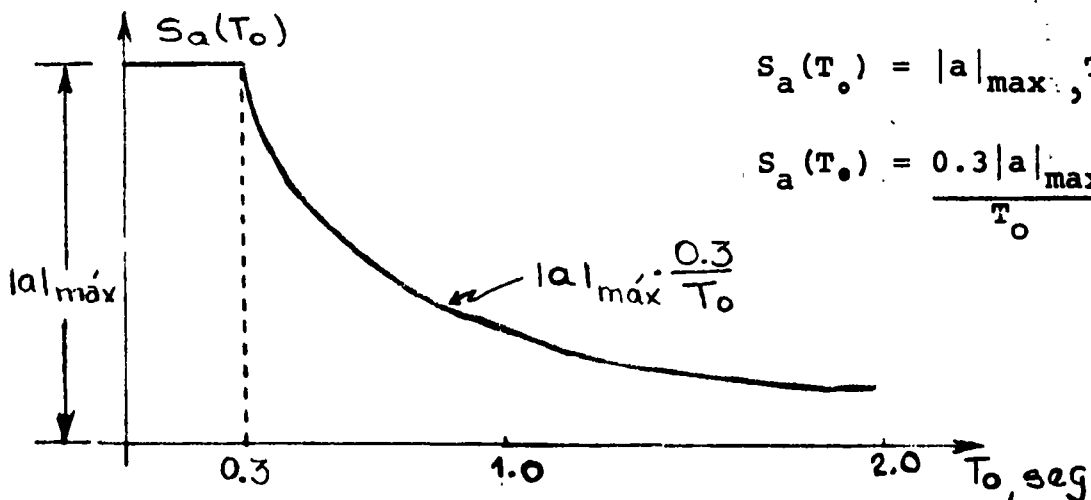


Fig. 3

El espectro dado corresponde al que se puede obtener en un terreno relativamente duro. En ese tipo de terreno y para una estructura de período fundamental igual a 3 seg, la interacción entre el nulo y la estructura puede no tenerse en cuenta, aunque esta asección debe tomarse con alguna precaución.

La estructura misma podría ser el modelo ultra-simplificado de un edificio en forma de torre, estructurado a base de marcos rígidos de acero, de unos 30 a 35 pisos de altura.

No nos va a interesar el valor mínimo de cada una de las respuestas modales, sino más bien comparar la influencia relativa de las diferentes modos. No interesa, por lo tanto, el valor absoluto de las ordenadas espectrales, sino su forma en relación con los períodos de la estructura.

El espectro de desplazamientos relativos $S_d(T_o)$ (para amortiguamiento nulo) está relacionado con el de aceleraciones absolutas a través de la ecuación.

$$S_d(T_o) = \frac{1}{\omega_o^2} S_a(T_o) = \frac{T_o^2 S_a(T_o)}{4\pi^2} \quad (1)$$

Entonces

$$S_d(T_o) = \frac{T_o^2}{4\pi^2} |a|_{\max} \quad \text{para } T_o \leq 0.3 \text{ seg} \quad (2)$$

$$S_d(T_o) = \frac{0.3T_o}{4\pi^2} |a|_{\max} \quad \text{para } T_o \geq 0.3 \text{ seg} \quad (3)$$

Los períodos naturales cumplen la relación

$$T_1 : T_2 : T_3 : \dots = 1 : \frac{1}{3} : \frac{1}{5} : \dots$$

Luego, con $T_1 = 3$ seg, tendremos $T_2 = 1$ seg, $T_3 = 0.6$ seg, ...

El corte basal máximo para el modo $i^{\text{ésimo}}$ se puede expresar en la forma siguiente

$$|Q_i(o,t)|_{\text{Máx}} = M_i S_a(T_i)$$

en que M_i es la masa del oscilador modal correspondiente al modo i . Llamando W el peso total de la viga obtenemos los cortes basales máximos por modo que se tabulan a continuación

i	$\frac{W_i}{W} = \frac{M_i}{M}$	T_i (seg)	$\frac{S_a(T_i)}{g}$	$ Q_{i\text{basal}} _{\text{máx}}$
1	0.81057	3.000	0.1 $\frac{ a _{\text{máx}}}{g}$	0.081057 $W a _{\text{máx}}:g$
2	0.09006	1.000	0.3 "	0.027018 $W a _{\text{máx}}:g$
3	0.03242	0.600	0.5 "	0.016210 $W a _{\text{máx}}:g$
4	0.01654	0.429	0.7 "	0.011578 $W a _{\text{máx}}:g$
5	0.01001	0.333	0.9 "	0.009009 $W a _{\text{máx}}:g$
6	0.00670	0.273	1.0 "	0.006700 $W a _{\text{máx}}:g$

La suma de los cortes basales modales máximos, tomados en valor absoluto, representa una cota superior para el corte basal total, ya que los máximos de cada modo no ocurren simultáneamente. A partir del sexto modo $T_i \leq 0.3$ seg; luego, a partir de dicho modo, las ordenadas del espectro de aceleraciones son cortantes, e iguales, a $|a|_{\text{máx}}$. Luego,

$$|Q|_{\text{base}} < \sum_{i=1}^{\infty} |Q_i|_{\text{base,máx}} = \left[0.144872 + \sum_{n=6}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \cdot \frac{8}{\pi^2} \right] \frac{W|a|_{\text{máx}}}{g}$$

La serie que aparece en esta expresión es convergente y sus valores

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \frac{8}{\pi^2} - \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1}^5 \frac{1}{(2n-1)^2} = 1 - \sum_{i=1}^5 \frac{M_i}{M} = 1 - 0.45960 = 0.04040$$

Luego

$$\sum |Q_i|_{\text{base,máx}} = 0.185272 \frac{W|a|_{\text{máx}}}{g} ; |Q|_{\text{base}} < 0.185272 \frac{W|a|_{\text{máx}}}{g}$$

Por otro lado, la expresión

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} Q_i^2 \text{ base,máx}}$$

llamada superposición cuadrática representa el valor más probable de $|Q|_{\text{basal}}$, en la hipótesis de que las respuestas modales no están correlacionadas entre sí. Esta expresión da una estimación por defecto, ya que la hipótesis de partida es falsa. Efectuado el cálculo obtenemos

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} Q_i^2 \text{ base,máx}} = 0.08877 \frac{W|a|_{\text{máx}}}{g}$$

Entonces

$$0.08877 \frac{W|a|_{\text{máx}}}{g} < |Q|_{\text{base}} \text{ máx} < 0.18527 \frac{W|a|_{\text{máx}}}{g}$$

Desgraciadamente no disponemos de una teoría realmente confiable para tener estimaciones más estrechas y realistas de $|Q|_{\text{base}} \text{ máx}$

basados en un análisis modal. La norma chilena para el diseño sísmico de edificios permite emplear el promedio de los resultados

o))

obtenidos superponiendo los valores modales en valor absoluto y en forma cuadrática y exige emplear, por lo menos, los tres primeros modos. Procediendo de esta manera resulta

$$|Q_{\text{base}}|_{\text{máx}} = 0.106 \dot{w} \frac{|a|_{\text{máx}}}{g}$$

si se consideran los tres primeros modos

$$|Q_{\text{base}}|_{\text{máx}} = 0.137 w \frac{|a|_{\text{máx}}}{g}$$

si se consideran todos los modos.

En la Fig 4, hemos representado los cortes (en valor absoluto) como función de $\frac{Z}{H}$ para los tres primeros modos, a una misma escala. La Fig 5, muestra los cortes de los tres primeros modos superpuestos en valor absoluto.

Se puede apreciar que la influencia de los modos 2o. y 3o. es muy importante en el tercio superior de la estructura. En los que en lenguaje vulgar se describe con los nombres de efecto de "chicoteo" o de "coleo".

Consideremos ahora el caso de una viga más rígida, con un período fundamental de 0.3 seg, que podría corresponder a un edificio de hormigón armado de unos cuatro o cinco pisos.

Repitiendo los cálculos tenemos

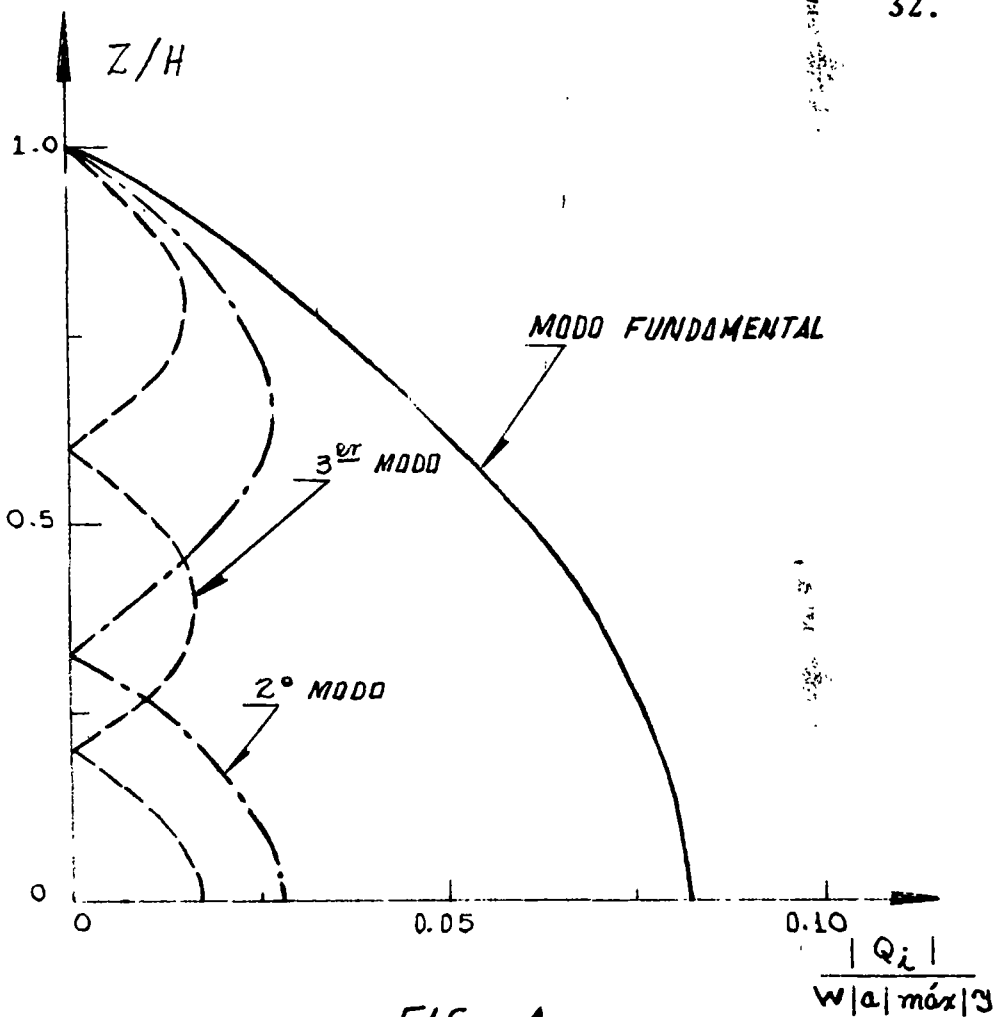


FIG 4

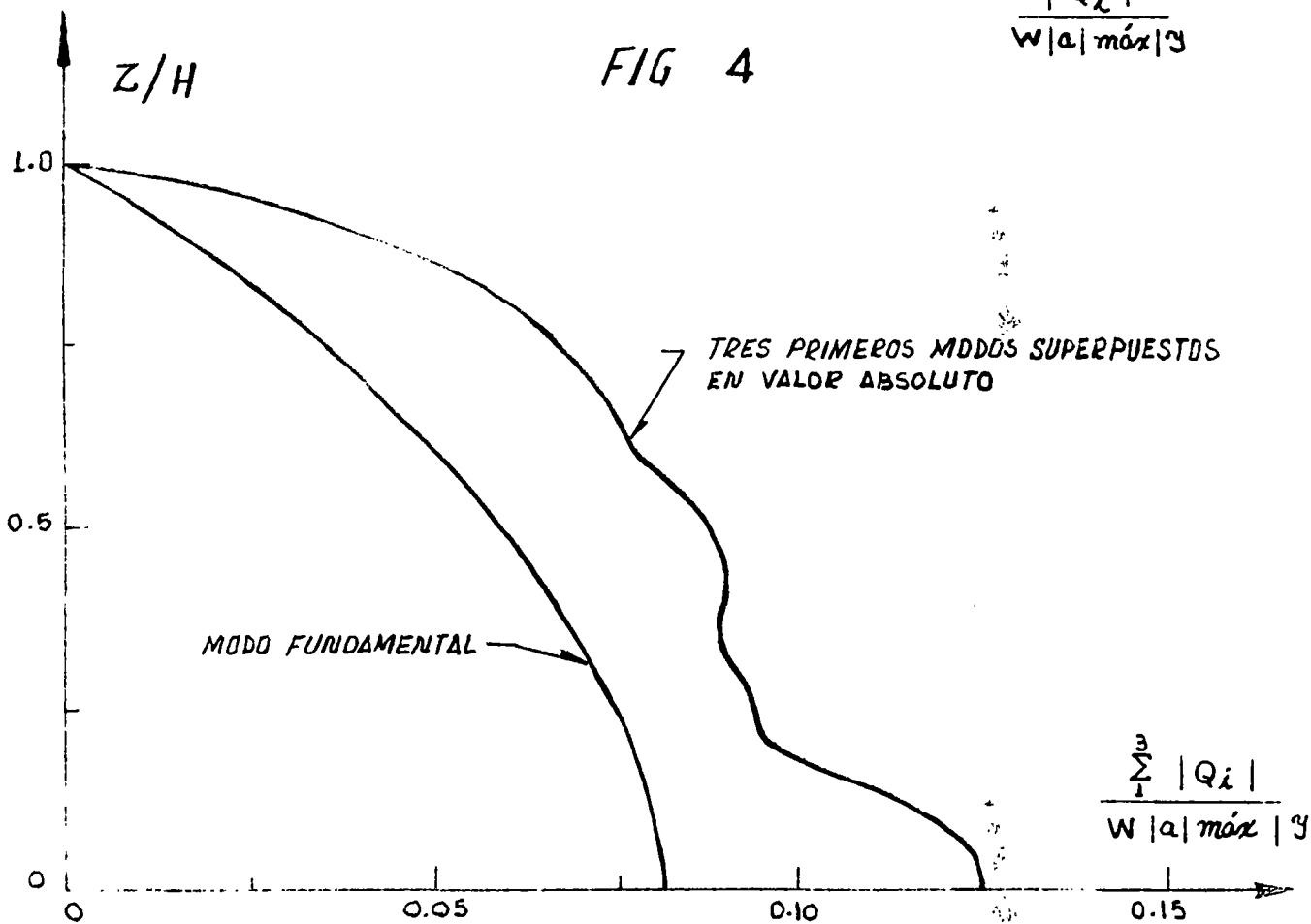


FIG 5

i	$\frac{W_i}{W} = \frac{M_i}{M}$	T_i (seg)	$\frac{S_a(T_i)}{g}$	$ Q_i \text{ base} _{\text{máx}}$
1	0.81057	0.3	$ a _{\text{máx}}/g$	$0.81057 \cdot W a _{\text{máx}}/g$
2	0.09006	0.1	"	0.09006 "
3	0.03242	0.06	"	0.03242 "
4	0.01654	0.0429	"	0.01654 "
5	0.01001	0.0333	"	0.01001 "
Σ				$W a _{\text{máx}}/g$

La superposición en valor absoluto dá simplemente

$$\Sigma |Q_i \text{ base}| = W|a|_{\text{máx}}/g$$

Mientras que la superposición cuadrática dá:

$$\sqrt{\Sigma Q_i^2 \text{ base, máx}} = 0.816 W|a|_{\text{máx}}/g$$

Ahora las dos estimaciones son más parecidas y podemos encerrar

$|Q_{\text{base, máx}}|$ entre límites más estrechos

$$0.816 W|a|_{\text{máx}}/g < |Q_{\text{base, máx}}| < W|a|_{\text{máx}}/g$$

La Fig 6 muestra que en las estructuras de período relativamente corto (para el espectro de respuesta que hemos supuesto), la influencia de los modos superiores es menor importante que en la del período fundamental largo. También resulta menos importante el efecto de "chicoteo"

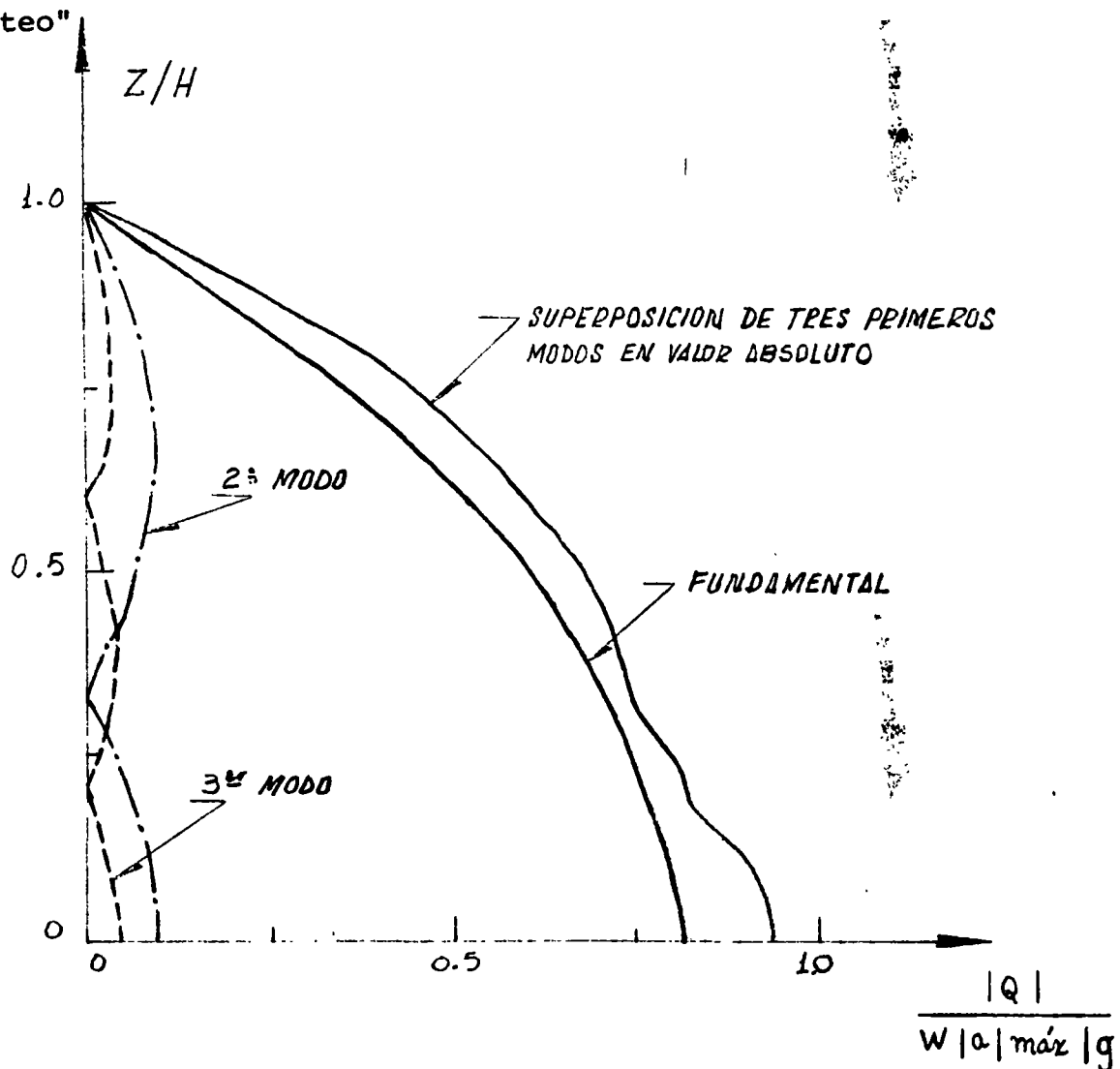


FIG 6

Examinemos ahora los momentos de volteo. Para ello aprovechamos el resultado encontrado en (2.20) que determina el momento de volteo basal en función del corte basal para cada modo. Encontramos para la viga cuyo período fundamental es 3 seg, los valores que se anotan en la tabla que va a continuación.

i	$\frac{ M_i \text{ máx} _{\text{base}}}{WH a _{\text{máx}}/g}$
1	0.05160
2	0.00573
3	0.00206
4	0.00105
5	0.00064

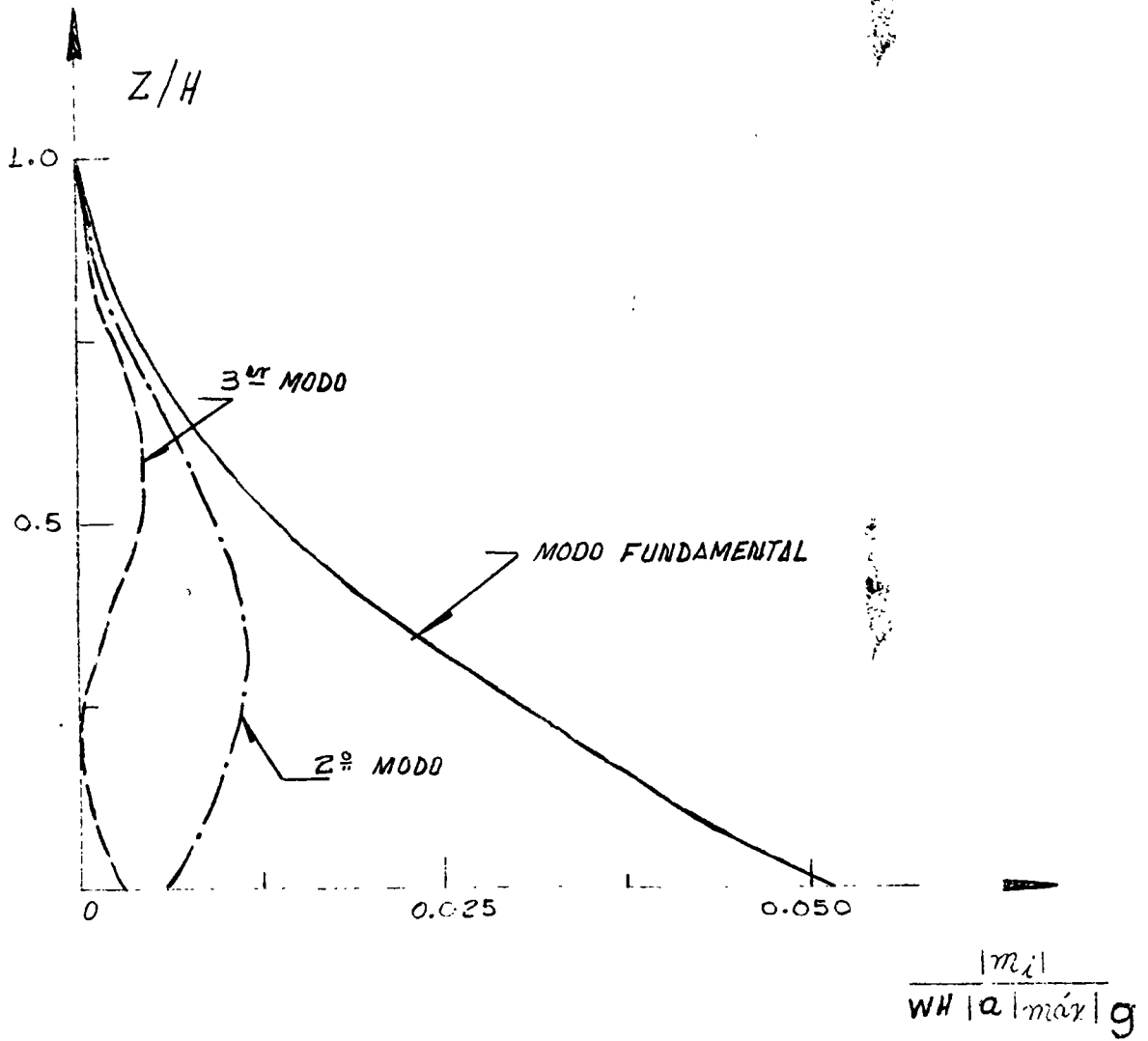
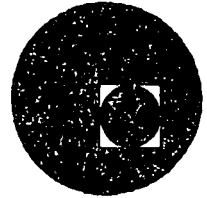


FIG 7



6
centro de educación continua
división de estudios superiores
facultad de ingeniería, unam



IV CURSO INTERNACIONAL DE INGENIERIA SISMICA

DINAMICA ESTRUCTURAL

VIBRACION DE SISTEMAS DISCRETOS DE VARIOS
GRADOS DE LIBERTAD

M. en C. JORGE PRINCE ALFARO.

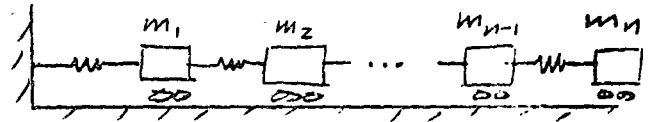
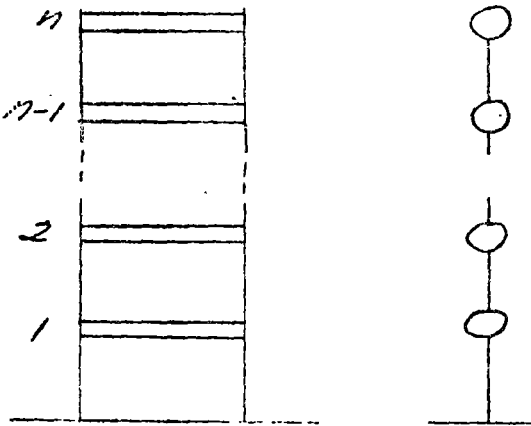
JULIO 1978.

VIBRACION DE SISTEMAS DISCRETOS DE VARIOS GRADOS DE LIBERTAD

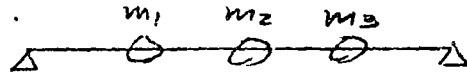
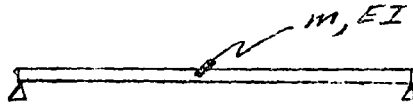
Ejemplos de sistemas de n GL

Características:

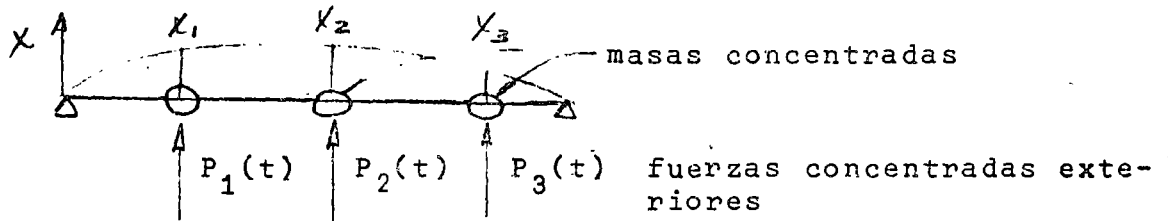
- masas concentradas rígidas
- columnas solo se deforman lateralmente
- con una coordenada por masa queda definida la configuración del sistema
- equivale a:



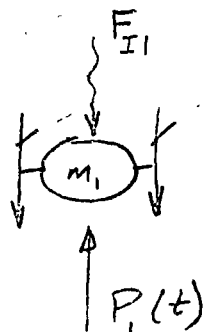
Además, la consideramos elástica, lineal



Supongamos:



aislemos una masa:



$$F_{r1} = -\sum \text{fuerzas resistencia elástica a la deformación}$$

Las ecuaciones condensadas de movimiento serán:

$$F_{I1} + F_{r1} = P_1(t)$$

$$F_{I2} + F_{r2} = P_2(t)$$

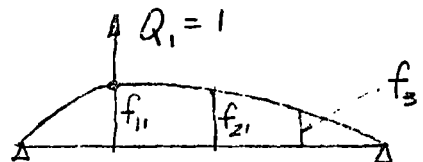
$$F_{I3} + F_{r3} = P_3(t)$$

Fuerzas asociadas al desplazamiento, NO al movimiento

∴ la determinación de estas fuerzas es un problema estático.

Coefficientes de influencia

1. De flexibilidad



f_{ij} = despl. de la coord. i debido a una carga unitaria en coord. j (desplazamiento y fuerza en = dirección)

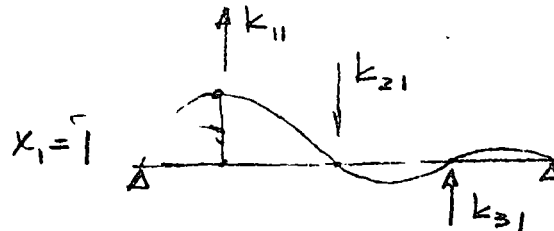
Por superposición

$$X_1 = f_{11} Q_1 + f_{12} Q_2 + f_{13} Q_3$$

$$X_2 = f_{21} Q_1 + f_{22} Q_2 + f_{23} Q_3 \quad \text{inv. (1)}$$

$$X_3 = f_{31} Q_1 + f_{32} Q_2 + f_{33} Q_3$$

2. De rigidez:



K_{ij} = fuerza en coordenada i por un desplazamiento unitario en coordenada j.

Por superposición

$$\begin{aligned} Q_1 &= K_{11} X_1 + K_{12} X_2 + K_{13} X_3 \\ Q_2 &= K_{21} X_1 + K_{22} X_2 + K_{23} X_3 \\ Q_3 &= K_{31} X_1 + K_{32} X_2 + K_{33} X_3 \end{aligned} \quad (2)$$

Desde luego $K_{ij} = K_{ji}$ (y $f_{ij} = f_{ji}$) (Maxwell-Mohr)

La ecuación 2 también puede escribirse:

$$Q_i = \sum_{j=1}^3 K_{ij} X_j$$

o bien, en notación matricial

$$\begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{Bmatrix}$$

matriz de rigideces

Ponemos:

$$\{Q\} = [K] \{X\}$$

$$\text{Claro que } [K]^{-1} = [F] = [f_{ij}]$$

Sustituyendo (2) o (3) en ecuaciones de movimiento:

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{X}_1 + K_{11} X_1 + K_{12} X_2 + K_{13} X_3 &= P_1(t) \\ m_2 \ddot{X}_2 + K_{21} X_1 + K_{22} X_2 + K_{23} X_3 &= P_2(t) \\ m_3 \ddot{X}_3 + K_{31} X_1 + K_{32} X_2 + K_{33} X_3 &= P_3(t) \end{aligned}$$

o bien:

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_1(t) \\ P_2(t) \\ P_3(t) \end{Bmatrix}$$

o también:

$$\begin{aligned} [M] \{ \ddot{x} \} + [K] \{ x \} &= \{ P(t) \} \quad (\text{vibración forzada}) \\ &= \{ 0 \} \quad (\text{vibración libre}) \end{aligned}$$

1. VIBRACION LIBRE

$$[M] \{ \ddot{x} \} + [K] \{ x \} = \{ 0 \} \tag{1.1}$$

Supongamos la solución

$$\begin{aligned} \{ x \} &= \underbrace{\{ r \}}_{\substack{\text{constante} \\ \text{con } t}} (A \text{ sen } pt + B \text{ sen } pt) = \{ r \} Y(t) \\ &\quad \text{escalar} \quad \longrightarrow \quad \text{define:} \\ &\quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad - \text{variación armónica} \\ &\quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad - \text{amplitud} \end{aligned}$$

tenemos:

$$\begin{aligned} \{ x \} &= \{ r \} (A \text{ sen } pt + B \text{ cos } pt) = r \cdot Y(t) \\ \{ \dot{x} \} &= \{ r \} (Ap \text{ cos } pt - B p \text{ sen } pt) \tag{1.2} \\ \{ \ddot{x} \} &= \{ \dot{r} \} (-Ap^2 \text{ sen } pt - B p^2 \text{ cos } pt) = -p^2 \{ r \} Y(t) \end{aligned}$$

Sustituyendo 1.2 en 1.1 y dividiendo entre Y(t) nos queda:

$$-p^2 [M] \{ r \} + [K] \{ r \} = \{ 0 \}$$

o sea:

$$\underbrace{[K] - p^2 [M]}_{[E]} \{ r \} = \{ 0 \} \tag{1.3}$$

$$\begin{aligned}
 [K] \{r\} &= p^2 [M] \{r\} & [K] \{r\} &= p^2 [M] \{r\} \\
 \text{pre x } [M]^{-1} & & \text{pre x } [K]^{-1} & \cdot \frac{1}{p^2} \\
 [M]^{-1} [K] \{r\} &= p^2 \{r\} & \frac{1}{p^2} \{r\} &= [K]^{-1} [M] \{r\}
 \end{aligned}$$

∴

En las dos formas llegamos a un problema de VAC

$$[L] \{u\} = \lambda \{u\}$$

Problema de valores característicos:

- Dada una matriz cuadrada de orden $(n \times n)$ $[L]$, que representa una transformación lineal de vectores n -dimensionales, debe encontrarse un vector $\{u\}$ que transformado por $[L]$ resulte en otro vector $\lambda \{u\}$ en la misma "dirección". O sea, $[L]$ solo cambia la magnitud de $\{u\}$ sin cambiar la dirección.

El vector es un vector característico (o eigenvector) de $[L]$. λ (escalar) representa la relación entre las "longitudes" antes y después de la transformación y para llegar a los VEC debe tomar valores de un conjunto de valores característicos (VAC) (o eigenvalores).

El problema de encontrar frecuencias y modos naturales puede considerarse un problema de VAC. - (STD)

Tenemos

$$[K] - p^2 [M] \{r\} = \{0\} \quad (1.3)$$

Si en el sistema de ecuaciones

$$[A] \{x\} = \{0\}$$

$[A]$ es no singular, la solución única es la trivial

$\{x\} = \{0\}$, de donde; nos interesa el caso en que $[A]$ es singular. En este caso la adjunta* $[\hat{A}]$ existe y puede pre X por ella, con el resultado

$$|A| \{x\} = \{0\}$$

porque $[\hat{A}] [A] = |A| [I] \quad \forall [A] \text{ (nxn)}$

Puesto que $|A| = 0$, $\{x\}$ no necesariamente es nulo, pero si se asigna un valor dado a uno de sus elementos los demás quedan determinados en forma única.

También notamos que si $\{x\}$ es solución de $[A] \{x\} = \{0\}$ y α es una constante, entonces $\alpha \{x\}$ es también solución.

Por lo tanto, hay un número infinito de soluciones. Todos estos se considerarán juntas y hablaremos de una "solución" como un conjunto de relaciones entre los elementos de $\{x\}$.

$$\text{Volvemos a } \begin{bmatrix} [K] & -p^2 [M] \\ [E] \end{bmatrix} \{r\} = \{0\} \quad (1.3)$$

Al desarrollar $|E| = 0$ llegamos a una ecuación de grado n en p^2 , cuyas raíces son los VAC.

- Como $[K]$ y $[M]$ son simétricas y positivas definidas*,

*Transpuesta de la matriz de cofactores.

** $[A]$ es POS. DEF. si $\{q\} [A] \{q\} > 0$ para todo $\{q\}$ no nulo

puede demostrarse que las raíces de la ecuación característica son reales y positivas. Las llamamos $p_1^2, p_2^2, \dots, p_n^2$.

Las n frecuencias naturales son los términos positivos de las raíces y la más baja es llamada frecuencia fundamental.

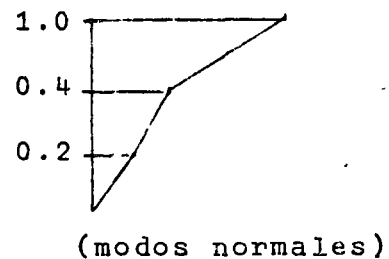
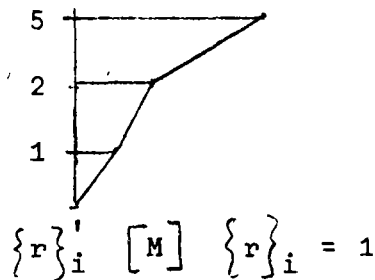
- Para la gran mayoría de los casos de interés las frecuencias son diferentes entre sí.
- Para cada frecuencia p_i existe una VEC asociado:

$$[K] \{r\}_i = p_i^2 [M] \{r\}_i \quad i = 1, \dots, n$$

o sea para cada p_i existe una solución $\{r\}$ no trivial

- Normalización (solo conveniencia, sin significado físico)

Varias formas:



- Los modos y frecuencias naturales del sistema son propiedades características derivadas de las propiedades de inercia y rigidez expresadas por los elementos de $[M]$ y $[K]$.
- Llamaremos matriz modal $[R]$ a la que tiene los VEC, o vectores modales, como columnas.

ORTOGONALIDAD DE MODOS DE VIBRACION

Se dice que dos vectores $\{a\}$ y $\{b\}$ son ortogonales con respecto a la matriz simétrica $[J]$ si

$$\{a\}' [J] \{b\} = \{b\}' [J] \{a\} = 0$$

Demostremos que dos vectores modales $\{r\}_i$ y $\{r\}_j$, asociados a frecuencias diferentes ($p_i \neq p_j$) son ortogonales con respecto a las matrices de inercia y elástica.

- Cada uno de estos vectores satisface la ecuación 1.3

$$p^2 [M] \{r\} = [K] \{r\} \quad [M] \{r\} = \frac{1}{p^2} [K] \{r\}$$

es decir:

$$p_i^2 [M] \{r\}_i = [K] \{r\}_i \quad [M] \{r\}_i = \frac{1}{p_i^2} [K] \{r\}_i$$

$$p_j [M] \{r\}_j = [K] \{r\}_j \quad [M] \{r\}_j = \frac{1}{p_j^2} [K] \{r\}_j$$

pre X i y j por $\{r\}'_j$ y $\{r\}'_i$ respectivamente

$$\begin{aligned} p_i^2 \{r\}'_j [M] \{r\}_i &= \{r\}'_j [K] \{r\}_i & \{r\}'_j [M] \{r\}_i &= \frac{1}{p_i^2} \{r\}'_j [K] \{r\}_i \\ p_j^2 \{r\}'_i [M] \{r\}_j &= \{r\}'_i [K] \{r\}_j & \{r\}'_i [M] \{r\}_j &= \frac{1}{p_j^2} \{r\}'_i [K] \{r\}_j \end{aligned} \quad (a)$$

pero como $[M]$ y $[K]$ son simétricas:

$$\begin{aligned} \{r\}'_j [K] \{r\}_i &= \{r\}'_i [K] \{r\}_j \\ \{r\}'_j [M] \{r\}_i &= \{r\}'_i [M] \{r\}_j \end{aligned}$$

∴, restando miembro a miembro en ecuaciones (a):

$$(p_i^2 - p_j^2) \left(\{r\}'_i [M] \{r\}_j \right) = 0 \quad 0 = \left(\frac{1}{p_i^2} - \frac{1}{p_j^2} \right) \{r\}'_i [K] \{r\}_j$$

y como $p_i^2 \neq p_j^2$

$$\{r\}'_i [M] \{r\}_j = 0 \quad \{r\}'_i [K] \{r\}_j = 0$$

Tenemos ecuaciones de ortogonalidad:

$$\{r\}'_i [M] \{r\}_j = 0$$

$$\{r\}'_i [K] \{r\}_j = 0 \quad \text{si } i \neq j$$

La ec

$$[M] \{\ddot{x}\} + [K] \{x\} = \{0\} \quad (a)$$

y la matriz modal $[R]$

Hagamos:

$$\{x\} = [R] \{y\}$$

y sustituyendo en (a):

$$[M] [R] \{\ddot{y}\} + [K] [R] \{y\} = \{0\}$$

premultiplicando por $[R]'$:

$$\underbrace{[R]' [M] [R]}_{\text{diagonales}} \{\ddot{y}\} + \underbrace{[R]' [K] [R]}_{\text{diagonales}} \{y\} = \{0\} \quad (b)$$

 $\{r\}'_i$

M, K

$i \neq j$

Llamemos

$$[R]' [M] [R] = [m^*]$$

$$[R]' [K] [R] = [k^*]$$

∴ la ec (b) (p. 14) puede ponerse:

$$[M^*] \{\ddot{y}\} + [K^*] \{y\} = \{0\}$$

que equivale a:

$$m_{11}^* \ddot{y}_1 + k_{11}^* y_1 = 0$$

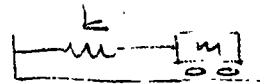
$$m_{22}^* \ddot{y}_2 + k_{22}^* y_2 = 0$$

$$m_{nn}^* \ddot{y}_n + k_{nn}^* y_n = 0$$

de las que

$$p_1^2 = \frac{k_{11}^*}{m_{11}^*}, \dots, p_n^2 = \frac{k_{nn}^*}{m_{nn}^*}$$

Recordar que para



$$m\ddot{x} + kx = 0$$

$$\ddot{x} + p^2 x = 0 \quad y \quad p^2 = \frac{k}{m}$$

O sea, con la transformación

$$\{x\} = [R] \{y\}$$

aplicada a la ecuación

$$[M] \{\ddot{x}\} + [K] \{x\} = \{0\}$$

hemos descompuesto un sistema de 1GL en n sistemas de 1GL independientes.

Consideremos el producto

$$\begin{aligned} [M^*]^{-1} [K^*] &= ([R]^T [M] [R])^{-1} [R]^T [K] [R] = [K^*] [M^*]^{-1} \\ &= [R]^{-1} [M]^{-1} [R]^T [R]^T [K] [R] \\ &= [R]^{-1} [M]^{-1} [K] [R] = [P] \end{aligned}$$

$[P]$ contiene las frecuencias naturales en la diagonal principal

∴ El problema de encontrar frecuencias y modos naturales equivale al de encontrar la matriz $[R]$ que diagonalice $[M]$ y $[K]$ de acuerdo con

$$\begin{aligned} [R]^T [M] [R] &= [M^*] \\ [R]^T [K] [R] &= [K^*] \end{aligned}$$

Las frecuencias naturales se obtendrán de

$$[M^*]^{-1} [K^*] = [K^*] [M^*]^{-1} = [P]$$

Veámoslo en otra forma

$$[M] \{\ddot{x}\} + [K] \{x\} = \{P(t)\}$$

Sustituyendo $\{x\} = [R] \{y\}$

$$[M] [R] \{\ddot{y}\} + [K] [R] \{y\} = \{P(t)\}$$

premultiplicando por $\{r\}_j^T$

$$\underbrace{\{r\}_j^T [M] [R] \{\ddot{y}\}}_{(a)} + \underbrace{\{r\}_j^T [K] [R] \{y\}}_{(b)} = \underbrace{\{r\}_j^T \{P(t)\}}_{\text{escalar}}$$

En los productos (a) y (b) solo queda (por ortogonalidad):

$$\{r\}_j^T [M] \{r\}_j \ddot{y}_j + \{r\}_j^T [K] \{r\}_j y_j = \{r\}_j^T \{P(t)\}$$

$$M_j^* \ddot{y}_j + K_j^* y_j = P_j^*(t)$$

$$K_j^* = p_j^2 M_j^* \quad P_j^* = \sum_i P_i r_{ij}$$

y para el modo j tenemos:

$$M_j^* \ddot{y}_j + p_j^2 M_j^* y_j = P_j^*(t)$$

o bien

(1.5)

$$M_j^* \ddot{y}_j + K_j^* y_j = P_j^*(t)$$

análoga a la ecuación de movimiento para 1 GL:

$$m \ddot{x} + k x = P(t)$$

En (1.5) tenemos:

n ecuaciones independientes para n GL

1 ecuación independiente para cada modo

Para vibración libre (1GL)

$$\ddot{x} + p^2 x = 0 \quad p^2 = \frac{k}{m}$$

la solución es:

$$x = A \cos pt + B \operatorname{sen} pt \quad (c)$$

y para el modo j tendremos ($P_j(t) = 0$)

$$y_j = A_j \cos p_j t + B_j \operatorname{sen} P_j t \quad (d)$$

Si en (c) hacemos

$$\vec{x}|_{t=0} = X_0 \quad \dot{\vec{x}}|_{t=0} = \dot{X}_0$$

llegamos a

$$x(t) = X_0 \cos pt + \frac{\dot{X}_0}{p} \operatorname{sen} pt$$

y \therefore en (d):

$$y_j = y_{0j} \cos p_j t + \frac{\dot{y}_{0j}}{P_j} \operatorname{sen} P_j t$$

Cualquier configuración del sistema puede expresarse como una suma de formas modales multiplicadas por ciertos coeficientes.

Esquemáticamente:

$$\begin{aligned} \left\{ X \right\} &= \left\{ r \right\}_1 Y_1 + \left\{ r \right\}_2 Y_2 + \left\{ r \right\}_3 Y_3 + \dots \\ \text{estática} & \\ \text{o} & \\ \text{dinámica} & \end{aligned} \quad (Y = Y(t))$$

$$\left(\left\{ X \right\} = \left\{ X(t) \right\} \right)$$

En nuestra expresión

$$\{x\} = [R] \{y\} \quad 1.4$$

$\{x\}$ puede no ser función de t , por ejemplo:



$$\{1\} = [R] \{c\} \quad (e)$$

donde $\{c\}$ es el vector de constantes que prex $[R]$ nos da la configuración $\{1\}$

De la ec. (e):

$$\{c\} = [R]^{-1} \{1\} \quad ([R] \text{ NO SING})$$

En 1.4 también podríamos hacer

$$\{Y\} = [R]^{-1} \{x\}$$

pero sigamos otro camino, premultiplicando por $\{r\}'_j [M]$
o por $\{r\}'_j [K]$

$$\begin{aligned} \{r\}'_j [M] \{x\} &= \{r\}'_j [M] [R] \{y\} = \{r\}'_j [M] \{r\}'_1 y_1 + \\ &+ \{r\}'_j [M] \{r\}'_2 y_2 + \dots \\ &+ \{r\}'_j [M] \{r\}'_n y_n \end{aligned}$$

Por ortogonalidad todos estos productos son nulos, excepto el término

$$\{r\}'_j [M] \{r\}'_j y_j$$

de donde tenemos

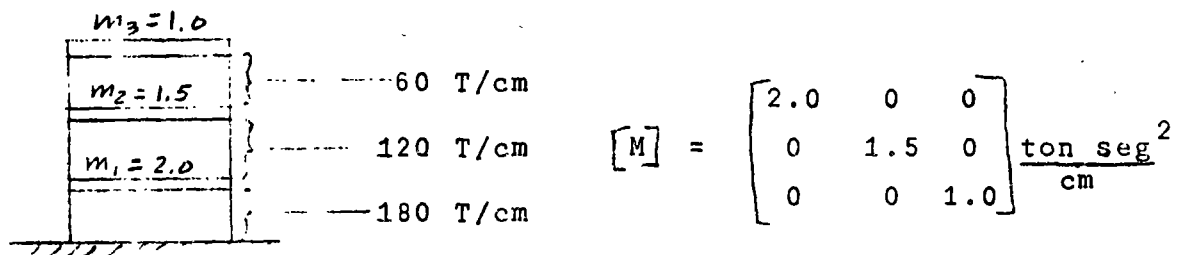
$$\{r\}'_j \cdot [M] \{x\} = \{r\}'_j [M] \{r\}_j y_j$$

de donde:

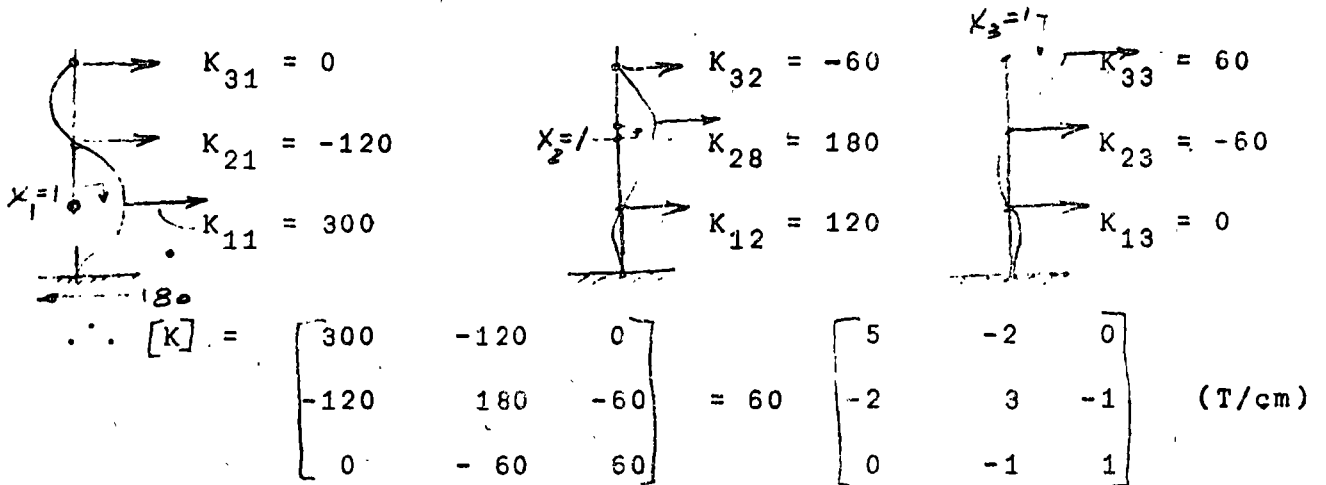
$$y_j = \frac{\{r\}'_j [M] \{x\}}{\{r\}'_j [M] \{r\}_j} = \frac{\{r\}'_j [M] \{x\}}{M_j^*} = \frac{\{r\}'_j [K] \{x\}}{K_j^*} = \frac{\{r\}'_j [K] \{x\}}{P_j^2 M_j^*}$$

(coeficiente de participación)

Ejemplo (vigas rígidas)



Matriz de rigideces



$$[E] = [K] - p^2 [M] \quad M = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1.5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= 60 \begin{bmatrix} (5 - \frac{2}{60} p^2) & -2 & 0 \\ -2 & (3 - \frac{1.5}{60} p^2) & -1 \\ 0 & -1 & (1 - \frac{1}{60} p^2) \end{bmatrix}$$

si $d = p^2/60$:

$$[E] = 60 \begin{bmatrix} (5-2d) & -2 & 0 \\ -2 & (3-1.5d) & -1 \\ 0 & -1 & (1-d) \end{bmatrix}$$

$$|E| = 0 = 60 (d^3 - 5.5 d^2 + 7.5 d - 2) = 0$$

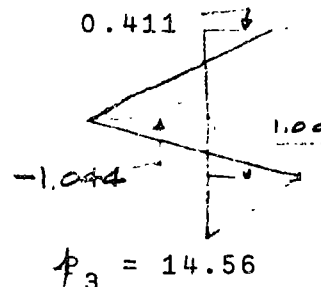
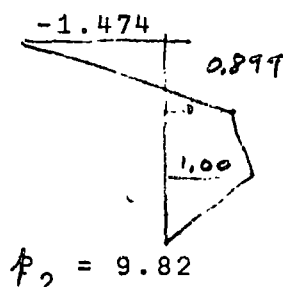
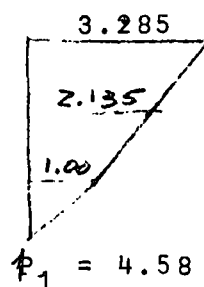
$$d_1 = 0.35$$

$$d_2 = 1.61$$

$$d_3 = 3.54$$

$$p^2 = 60 d: \quad \left. \begin{array}{ll} p_1^2 = 21.0 & p_1 = 4.58 \\ p_2^2 = 96.5 & p_2 = 9.82 \\ p_3^2 = 212.4 & p_3 = 14.56 \end{array} \right\} \text{frecuencias naturales}$$

Modos:



$$[R] = \begin{bmatrix} 1.000 & 1.000 & 1.000 \\ 2.135 & 0.899 & -1.044 \\ 3.285 & -1.474 & 0.411 \end{bmatrix}$$

$$[M^*] = [R]' [M] [R] = \begin{bmatrix} 19.629 & 0.038 & 0.007 \\ 0.037 & 5.386 & -0.014 \\ 0.006 & -0.014 & 3.804 \end{bmatrix}$$

Ej:

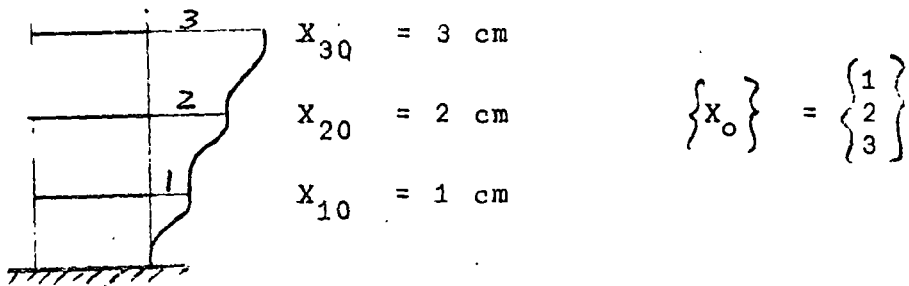
$$19.6296 = \{r\}'_1 [M] \{r\}_1 = M_1^* = \sum_i r_{i1}^2 m_i$$

$$[K^*] = [R]' [K] [R] = 60 \begin{bmatrix} 6.899 & 0.042 & 0.034 \\ 0.042 & 8.651 & -0.040 \\ 0.034 & -0.040 & 13.473 \end{bmatrix}$$

$$\text{Comprobación con } [K^*] = [P^2 M^*] =$$

$$= \begin{bmatrix} 412.209 & 0 & 0 \\ 0 & 519.749 & 0 \\ 0 & 0 & 807.970 \end{bmatrix} = [P^2 M^*]$$

$$[K^*] = \begin{bmatrix} 413.940 & 0 \dots & 0 \dots \\ 0 \dots & 519.060 & 0 \dots \\ 0 \dots & 0 \dots & 808.380 \end{bmatrix}$$



$$Y_{01} = \frac{\{r\}_1^T [M] \{x_0\}}{M_1^*} = \frac{2.0 + 6.405 + 9.855}{19.629} = 0.9303 \text{ cm}$$

$$Y_{02} = \frac{\{r\}_2^T [M] \{x_0\}}{M_2^*} = \frac{2.0 + 2.697 - 4.422}{5.386} = 0.0511$$

$$Y_{03} = \frac{\{r\}_3^T [M] \{x_0\}}{M_3^*} = \frac{2.0 - 3.132 + 1.233}{3.804} = 0.0266$$

Modo $Y_1(t)$

$$P_1 = 4.58$$

$$P_2 = 9.82$$

$$P_3 = 14.56$$

En p.

0.930 cm

0.051 cm

0.026 cm

son amplitudes de los
modos

Para obtener los desplazamientos de las masas debemos multiplicar por las configuraciones modales:

$$x_{i1} = \{r\}_1 \quad Y_1(t) = \begin{Bmatrix} 1.0 \\ 2.135 \\ 3.285 \end{Bmatrix} \quad 0.93 \cos 4.58 t$$

$$x_{i2} = \{r\}_2 \quad Y_2(t) = \begin{Bmatrix} 1.0 \\ 0.899 \\ -1.474 \end{Bmatrix} \quad 0.051 \cos 9.82 t$$

$$x_{i3} = \{r\}_3 \quad Y_3(t) = \begin{Bmatrix} 1.00 \\ -1.044 \\ 0.411 \end{Bmatrix} \quad 0.0266 \cos 14.56 t$$

y sumar. O sea los desplazamientos $x_i(t)$ de las masas serán

$$\{x(t)\} = [R] \{y(t)\}$$

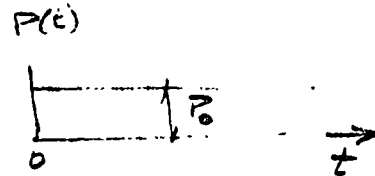
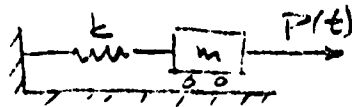
$$x_1(t) = r_{11} Y_1(t) + r_{12} Y_2(t) + r_{13} Y_3(t)$$

$$x_2(t) = r_{21} Y_1(t) + r_{22} Y_2(t) + r_{23} Y_3(t)$$

$$x_3(t) = r_{31} Y_1(t) + r_{32} Y_2(t) + r_{33} Y_3(t)$$

Otro ejemplo

Para 1GL teníamos



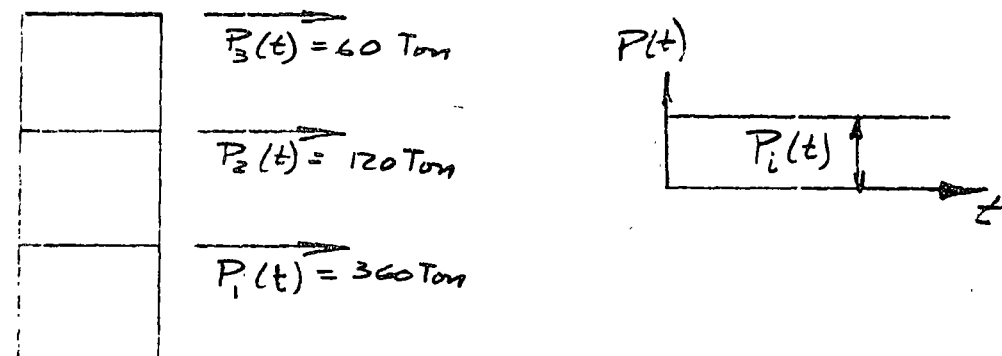
La ec:

$$x + P^2 x = \frac{P(t)}{m} = \frac{P_0}{m}$$

y para CI = 0 la solución

$$x = \frac{P_0}{K} (1 - \cos pt)$$

Tenemos ahora el problema de encontrar la respuesta de



Para el modo j :

$$\ddot{Y}_j + \phi_j^2 Y_j = \frac{P_j^*(t)}{M_j^*} = \frac{P_{j0}^*}{M_j^*} \quad \text{cuya solución es:}$$

$$Y_j = \frac{P_{j0}^*}{K_j^*} (1 - \cos p_j t) = \frac{P_{j0}^*}{p_j^2 M_j^*} (1 - \cos p_j t)$$

Cálculo de P_j^*

$$P_j^* = \{r\}'_j \{P(t)\} = \{r\}'_j \begin{pmatrix} 360 \\ 120 \\ 60 \end{pmatrix}$$

modo

$$\begin{aligned} 1) \quad P_1^* &= P_1 r_{11} + P_2 r_{21} + P_3 r_{31} = 360 + 256.2 + 197.1 = 813.3 \\ 2) \quad P_2^* &= P_1 r_{12} + P_2 r_{22} + P_3 r_{32} = 360 + 107.88 - 88.4 = 379.48 \\ 3) \quad P_3^* &= P_1 r_{13} + P_2 r_{23} + P_3 r_{33} = 360 - 125.28 + 24.66 = 259.98 \end{aligned}$$

Ahora bien,

$$Y_{j(st)} = \frac{P_j^*}{\phi_j^2 M_j^*} = \frac{P_j^*}{K_j^*}$$

$$Y_{1(st)} = \frac{813.30}{21 \times 19.629} = 1.973 \text{ cm}$$

$$Y_{2(st)} = \frac{379.48}{965 \times 5.386} = 0.730 \text{ cm}$$

$$Y_{3(st)} = \frac{259.38}{212.4 \times 3.804} = 0.321 \text{ cm}$$

de donde

$$Y_j = \frac{P_j^*}{P_j^2 M_j^*} (1 - \cos P_j t), \text{ y tenemos:}$$

$$Y_1(t) = Y_{1(st)} (1 - \cos p_1 t)$$

$$Y_2(t) = Y_{2(st)} (1 - \cos p_2 t)$$

$$Y_3(t) = Y_{3(st)} (1 - \cos p_3 t)$$

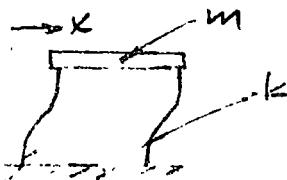
y, finalmente:

$$\{x(t)\} = \{r_1\} Y_1(t) + \{r_2\} Y_2(t) + \{r_3\} Y_3(t) = [R] \{Y\}$$

$$\begin{Bmatrix} X_1(t) \\ X_2(t) \\ X_3(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1.000 \\ 2.135 \\ 3.285 \end{Bmatrix} 1.973 (1 - \cos p_1 t) + \dots + \begin{Bmatrix} 1.000 \\ -1.044 \\ 0.411 \end{Bmatrix} 0.321 (1 - \cos p_3 t)$$

EXCITACION SISMICA

A. Sistemas 1GL

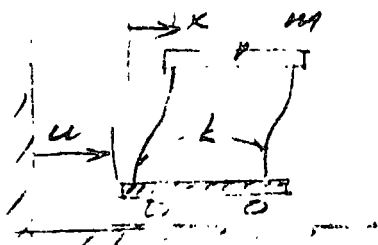


$$m \ddot{x} + kx + P(t) \quad (a)$$

Para $P(t)$ cualquiera y para $CI \neq 0$ la solución de (a) es:

$$x(t) = x_0 \cos pt + \frac{\dot{x}_0}{p} \sin pt + \frac{1}{mp} \int_0^t P(\tau) \sin p(t-\tau) d\tau$$

Para excitación sísmica:



$$m(\ddot{x} + \ddot{u}) + kx = 0$$

o sea,

$$m \ddot{x} + kx = -m\ddot{u} \quad (b)$$

De la comparación de (a) y (b), la solución completa de ésta es:

$$x(t) = x_0 \cos pt + \frac{\dot{x}_0}{p} \sin pt - \frac{1}{p} \int_0^t \ddot{u}(\tau) \sin p(t-\tau) d\tau$$

B. Sistemas de nGL:

$$[M] \{\ddot{x}\} + [k] \{x\} = \{P(t)\} = \begin{Bmatrix} P_1(t) \\ P_2(t) \\ \vdots \\ P_n(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -m_1 \ddot{u} \\ -m_2 \ddot{u} \\ \vdots \\ -m_n \ddot{u} \end{Bmatrix}$$

$$= - \begin{Bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ m_n \end{Bmatrix} \ddot{u} \quad \ddot{u} = - \{m\} \ddot{u}$$

Es decir, tenemos:

$$[M] \{\ddot{x}\} + [K] \{x\} = \{P(t)\} = - \{m\} \ddot{u}$$

sust. $\{x\} = [R] \{y\}$

$$[M] [R] \{\ddot{y}\} + [K] [R] \{y\} = \{P(t)\} = - \{m\} \ddot{u}(t)$$

pre x $\{r\}'_j$

$$\{r\}'_j [M] [R] \{\ddot{y}\} + \{r\}'_j [K] [R] \{y\} = \underbrace{\{r\}'_j \{P\}}_{P_j^*} = - \underbrace{\{r\}'_j \{m\}}_{m_j^*} \ddot{u}$$

por ortogonalidad:

$$\{r\}'_j [M] \{r\} \ddot{y}_j + \{r\}'_j [K] \{r\} y_j = P_j^* = U_j^*$$

y queda:

$$M_j^* \ddot{y}_j + K_j^* y_j = P_j^* = U_j^* = - m_j^* \ddot{u}$$

∴ la solución (CI = 0) de esta ecuación es:

Para P_j^* :

$$y_j(t) = \frac{1}{\phi_j M_j^*} \int_0^t P_j^*(z) \operatorname{sen} \phi_j(t-z) dz$$

Para U_j^* :

$$y_j(t) = \frac{1}{\phi_j M_j^*} \int_0^t U_j^*(z) \operatorname{sen} \phi_j(t-z) dz$$

que puede escribirse:

$$y_j(t) = - \frac{m_j^*}{p_j M_j^*} \int_0^t \ddot{u}(z) \operatorname{sen} p_j(t-z) dz$$

$$+ y_{0j} \cos p_j t + \frac{\dot{y}_{0j}}{p_j} \operatorname{sen} p_j t \quad \begin{array}{l} \text{término a} \\ \text{para} \\ \text{CI} \neq 0 \end{array}$$

Una vez obtenidos los elementos de $\{y\}$ solo falta premultiplicar por $[R]$ para obtener $\{x\}$:

$$\{x(t)\} = [R] \{y(t)\}$$

GENERALIZACION DE LAS CONDICIONES DE ORTOGONALIDAD

Tenemos la ecuación:

$$[K] - p^2 [M] \{x\} = \{0\}$$

que convenimos en escribir en la forma:

$$(K - p^2 M) x = 0$$

como los vectores modales la satisfacen:

$$K r_j = p_j^2 M r_j \quad (a)$$

y premultiplicando por: $r_i^1 M M^{-1}$ tenemos:

$$r_i^1 M M^{-1} K r_j = p_j^2 M M^{-1} M r_j = p_j^2 M M^{-1} K r_j = 0$$

que puede escribirse

$$r_i' M (M^{-1} K)^2 r_j = 0$$

y así podría seguirse para llegar a:

$$r_i' M (M^{-1} K)^l r_j = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} l \text{ entero} \\ -\infty < l < \infty \end{array} \right.$$

$$r_i' M (M^{-1} K)^l r_j = 0 \quad (b)$$

en forma análoga podemos obtener

$$r_i' (M F)^l M r_j = 0 \quad (c)$$

$$r_i' (K M^{-1})^l K r_j = 0$$

En (b):

$$\begin{aligned} l = -2 \quad M (M^{-1} K)^{-2} &= M (M^{-1} K)^{-1} (M^{-1} K)^{-1} \\ \text{(en (c), con } l=2) \quad &= M K^{-1} M K^{-1} M = \underline{M F M F M} \end{aligned}$$

$$l = -1 \quad M (M^{-1} K)^{-1} = M K^{-1} M = \underline{M F M}$$

$$l = 0 \quad M (M^{-1} K)^0 = \underline{M}$$

$$l = 1 \quad M (M^{-1} K)^1 = M M^{-1} K = \underline{K}$$

$$l = 2 \quad M (M^{-1} K)^2 = M M^{-1} K M^{-1} K = \underline{K M^{-1} K}$$

$$l = 3 \quad M (M^{-1} K)^3 = M M^{-1} K M^{-1} K M^{-1} K = \underline{K M^{-1} K M^{-1} K}$$

VIBRACION LIBRE Y FORZADA DE SISTEMAS DE N GL CON AMORTIGUAMIENTO

Las ecuaciones de equilibrio dinámico son:

$$\{F_I\} + \{F_a\} + \{F_r\} = \{P(t)\}$$

Ya tenemos:

$$\{F_I\} = [M] \{\ddot{x}\}$$

$$\{F_r\} = [K] \{x\}$$

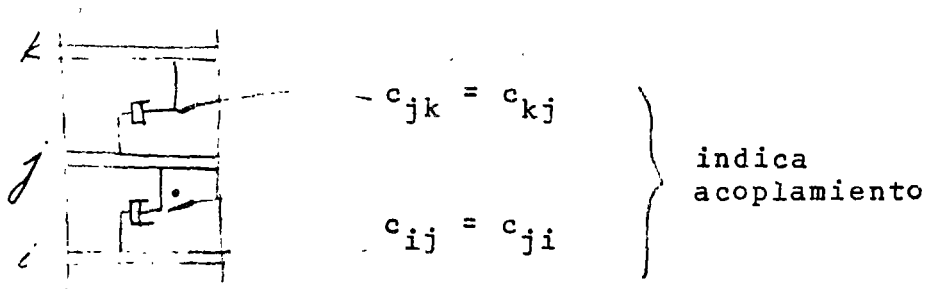
y ahora hacemos

$$\{F_a\} = [c] \{\dot{x}\}$$

donde

$$[c] = [c_{ij}]$$

y c_{ij} = fuerza de amortiguamiento en la coordenada i debido a una velocidad unitaria en la coordenada j .



La ecuación de movimiento es

$$[M] \{\ddot{x}\} + [c] \{\dot{x}\} + [K] \{x\} = \{P(t)\}$$

Hagamos: $\{x\} = [R] \{y\}$ premultiplicando por $\{r\}'_j$

$$\{r\}'_j [M] [R] \{\ddot{y}\} + \{r\}'_j [C] [R] \{\dot{y}\} + \{r\}'_j [K] [R] \{y\} = \{r\}'_j \{P(t)\}$$

Para desacoplar estas ecuaciones debemos tener

$$\left. \begin{aligned} \{r\}'_j [M] \{r\}_i &= 0 & i \neq j \\ \{r\}'_j [K] \{r\}_i &= 0 & i \neq j \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{cierto por} \\ \text{ortogonalidad} \end{array}$$

$$\{r\}'_j [C] \{r\}_i = 0 \quad i \neq j \quad \text{¿pero ésta? (a)}$$

1° admitamos que se cumple:

Ya definimos

$$\{r\}'_j [M] \{r\}_j = M_j^*$$

$$\{r\}'_j \{P(t)\} = P_j^*$$

$$\{r\}'_j [K] \{r\}_j = K_j^*$$

y ahora

$$\{r\}'_j [C] \{r\}_j = C_j^* = 2\beta_j \rho_j M_j^*$$

y nuestra ecuación para el modo j queda:

$$M_j^* \ddot{y}_j + 2\beta_j \rho_j M_j^* \dot{y}_j + \rho_j^2 M_j^* y_j = P_j^*$$

o bien:

$$\ddot{y}_j + 2\beta_j \rho_j \dot{y}_j + \rho_j^2 y_j = \frac{P_j^*}{M_j^*}$$

Como las soluciones para un sistema de 1GL (cuya ec. es $\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + p^2x = \frac{P(t)}{m}$) ya las conocemos, solo nos falta saber cómo debe ser $[C]$ para que se cumpla

$$\{r\}'_i [C] \{r\}_j = 0 \quad i \neq j \quad (a)$$

además, claro, de

$$y \quad \left. \begin{array}{l} \{r\}'_i [M] \{r\}_j = 0 \\ \{r\}'_i [K] \{r\}_j = 0 \end{array} \right\} i \neq j$$

La ec. (a) se satisface si

i) $[C]$ es proporcional a $[M]$ o a $[K]$

ii) $[C]$ es una combinación lineal de $[M]$ y $[K]$, o sea:

$$[C] = a_0 [M] + a_1 [K]$$

esto es muy restringido.

iii) En forma más general:

$$[C] = [M] \sum_1^l a_l [M^{-1}K]^l = \sum_1^l [C_l] \quad (38.1)$$

pues ya sabemos que todas las posibles formas

$$[M] [M^{-1}K]^l \text{ son satisfactorias y (38.1) es}$$

una C. L. de matrices de este tipo.

La selección adecuada de a_1 dará a $[C]$ las propiedades deseadas, o sea, podremos dar valores específicos a los elementos de $[C]$. ¿Cuáles le damos?

Asignamos un cierto valor de β a cada modo.

$$C_{j1}^* = \underbrace{\{r\}_j'}_A [C] \{r\}_j = 2\beta_j \underbrace{\phi_j^2 M_j^*}_{\text{---}} = \sum_1 \{r\}_j' [C_1] \{r\}_j = \sum_1 C_{j1}^* \quad (38.2)$$

De 38.1 y A

$$C_{j1}^* = \{r\}_j' [M] [M^{-1}K]^{-1} \{r\}_j a_1 \quad (38.3)$$

Por otra parte, para vibración libre:

$$(K - \phi_j^2 M) r_j = 0$$

$$K r_j = \phi_j^2 M r_j \leftrightarrow \frac{1}{\phi_j^2} r_j = F M r_j$$

premultiplicando por $r_j' M$:

$$\frac{1}{\phi_j^2} r_j' M r_j = r_j' M F M r_j$$

es decir

$$(\phi_j^2)^{-1} M_j^* = r_j' M (M^{-1} K)^{-1} r_j$$

y así podríamos llegar a que, para cualquier 1:

$$(\phi_j^z)^1 M_j^* = r_j^1 M (M^{-1} K)^1 r_j = \frac{C_{j1}^*}{a_1} \quad 39.1$$

por 38.3

De 39.1:

$$C_{j1}^* = (\phi_j^2)^1 M_j^* a_1$$

$$C_{j1}^* = (\phi_j^2)^1 M_j^* a_1$$

y sumando sobre 1:

$$\sum_1 C_{j1}^* = \sum_1 (\phi_j^2)^1 M_j^* a_1$$

pero ya teníamos que

$$\sum_1 C_{j1}^* = 2\beta_j \phi_j M_j^*$$

$$2\beta_j \phi_j M_j^* = \sum_1 (\phi_j^2)^1 M_j^* a_1$$

de donde:

$$\beta_j = \frac{1}{2\phi_j} \sum_1 (\phi_j^2)^1 a_1$$

Con los n valores de β_j para los n modos podemos resolver para los n valores de a_1 y formar nuestra $[C]$ con la ecuación

$$[C] = [M] \sum_1 a_1 [M^{-1}K]^1$$

Por ejemplo para nuestra estructura de 3GL asignemos:

$$\beta_1 = 0.10, \quad \beta_2 = 0.05, \quad \beta_3 = 0.02$$

$$\beta_1 = 0.10 = \frac{1}{2\phi_1} \left[a_{-1}(\phi_1^2)^{-1} + a_0(\phi_1^2)^0 + a_1(\phi_1^2)^1 \right]$$

$$\beta_2 = 0.05 = \frac{1}{2\phi_2} \left[a_{-1}(\phi_2^2)^{-1} + a_0(\phi_2^2)^0 + a_1(\phi_2^2)^1 \right]$$

$$\beta_3 = 0.02 = \frac{1}{2\phi_3} \left[a_{-1}(\phi_3^2)^{-1} + a_0(\phi_3^2)^0 + a_1(\phi_3^2)^1 \right]$$

o, en forma matricial:

$$\begin{Bmatrix} 0.10 \\ 0.05 \\ 0.02 \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1/\phi_1^3 & 1/\phi_1 & \phi_1 \\ 1/\phi_2^3 & 1/\phi_2 & \phi_2 \\ 1/\phi_3^3 & 1/\phi_3 & \phi_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_{-1} \\ a_0 \\ a_1 \end{Bmatrix}$$

al resolver para a_1 resulta

$$[C] = a_{-1} [MFM] + a_0 [M] + a_1 [K]$$

En p. tenemos que para $CI = 0$ y $\beta = 0$, para excitación sísmica

$$y_j(t) = - \frac{m_j^*}{P_j M_j^*} \int_0^t u_j(\xi) \sin P_j(t-\xi) d\xi$$

coeficiente de participación

$$C_j = \frac{m_j^*}{M_j^*} = \frac{\{r\}_j^T \{m\}}{\{r\}_j^T [M] \{r\}_j} = \frac{\sum_{i=1}^m m_i r_{ij}}{\sum_{i=1}^m m_i r_{ij}^2}$$

y \therefore podemos poner:

$$y_j(t) = C_j z_j(t)$$

en la que C_j está definida arriba y

$$z_j(t) = -\frac{1}{\beta_j} \int_0^t \ddot{u}(z) \operatorname{sen} \beta_j(t-z) dz$$

(y semejante si $\beta \neq 0$)

$$y_j(t) = C_j z_j(t)$$

Además, tenemos

$$\{X\} = [R] \{y\}$$

o sea

$$\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_i \\ \vdots \\ X_n \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \dots & r_{1j} & \dots & r_{1n} \\ r_{21} & r_{22} & \dots & r_{2j} & \dots & r_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ r_{n1} & r_{n2} & \dots & r_{nj} & \dots & r_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ Y_n \end{Bmatrix}$$

††
∴

$$x_i = \sum_{j=1}^n r_{ij} y_j = \sum_{j=1}^n r_{ij} C_j z_j(t)$$

De aquí (sin sumar para todos los modos)

$$\left. \begin{aligned} |X_{ij}|_{\max} &= r_{ij} C_j |z_j(t)|_{\max} = r_{ij} C_j S_d \\ &= r_{ij} C_j \frac{S_a}{\rho_j^z} \end{aligned} \right\} S_a = p S_v = p^2 S_d$$

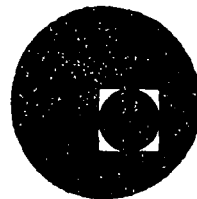
De esta ec. pasamos a:

$$|X_i|_{\max}^{\text{ABS}} = \sum_{j=1}^n r_{ij} C_j S_d = \sum_{j=1}^n r_{ij} C_j \frac{S_a}{\rho_j^z}$$

$$|x_i|_{\max}^{\text{PROB}} = \sqrt{\sum (|X_{ij}|_{\max})^2}$$



centro de educación continua
división de estudios superiores
facultad de ingeniería, unam



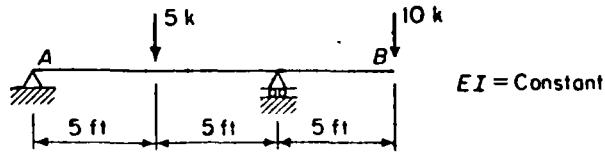
IV CURSO INTERNACIONAL DE INGENIERIA SISMICA

DINAMICA ESTRUCTURAL

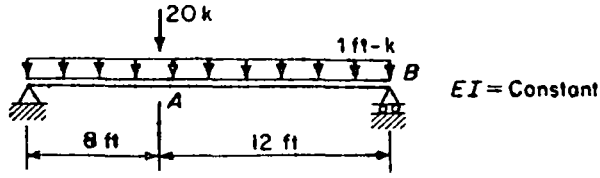
INTRODUCCION AL METODO DEL ELEMENTO FINITO

DR. PORFIRIO BALLESTEROS BAROCIO

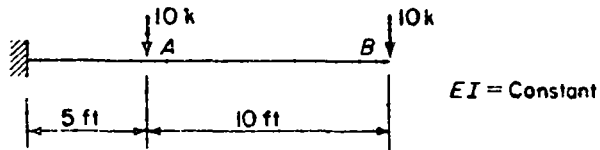
JULIO, 1978.



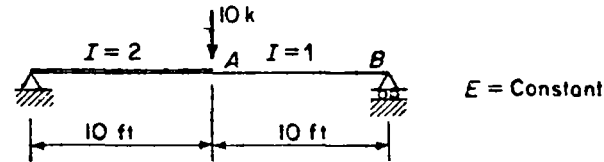
Prob. 3-1



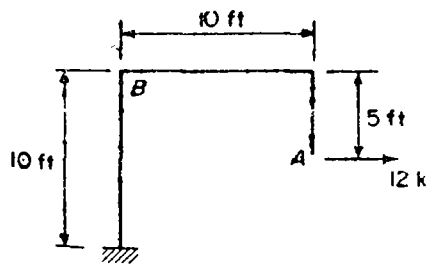
Prob. 3-2



Prob. 3-3

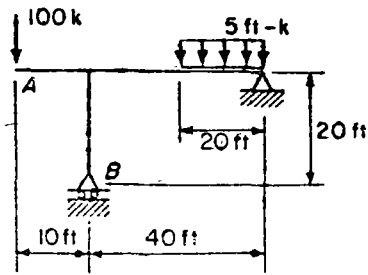


Prob. 3-4



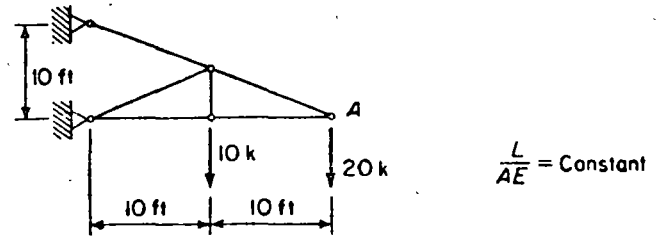
$EI = \text{Constant}$

Prob. 3-5



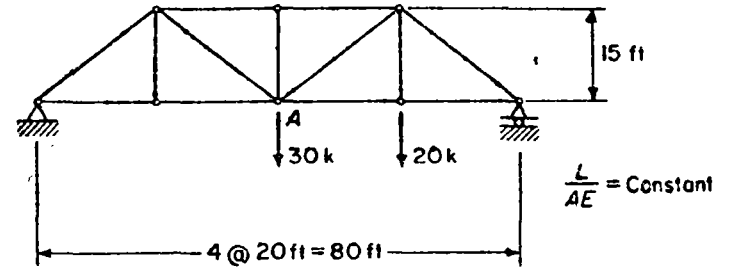
$EI = \text{Constant}$

Prob. 3-6



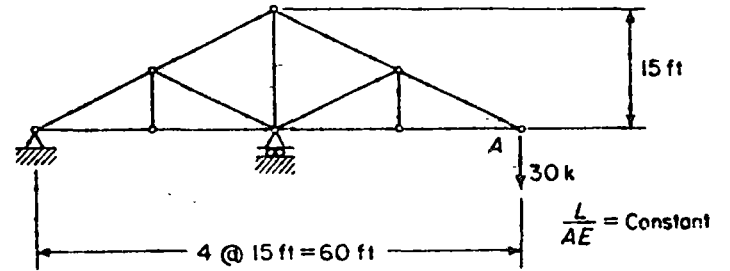
$\frac{L}{AE} = \text{Constant}$

Prob. 3-7



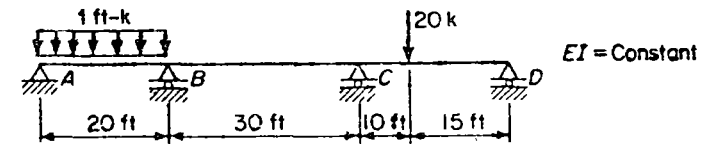
$\frac{L}{AE} = \text{Constant}$

Prob. 3-8



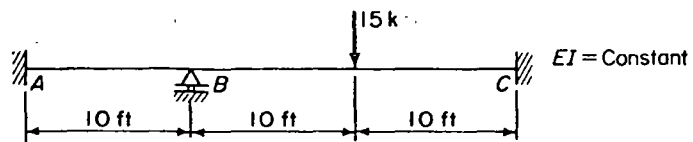
$\frac{L}{AE} = \text{Constant}$

Prob. 3-9

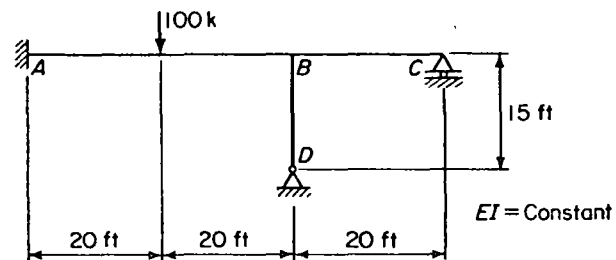


$EI = \text{Constant}$

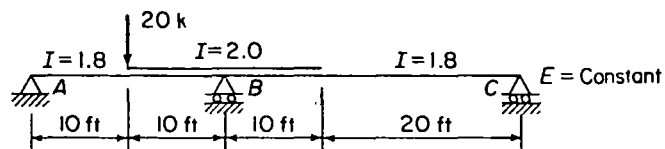
Prob. 3-16



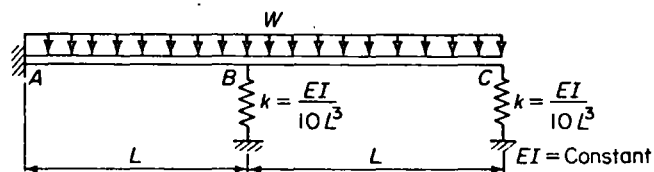
Prob. 3-17



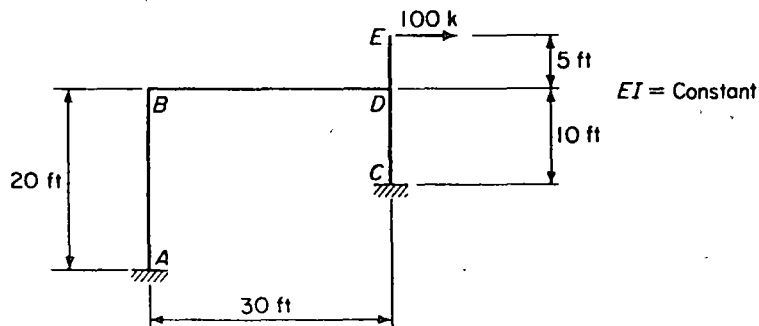
Prob. 3-18



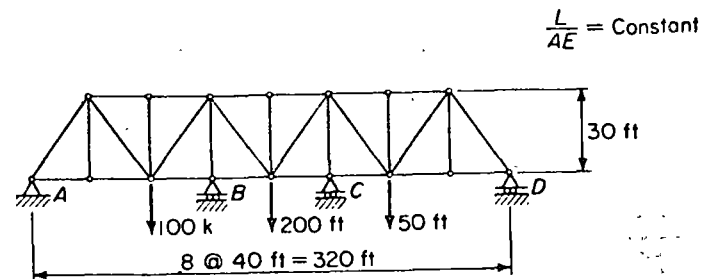
Prob. 3-19



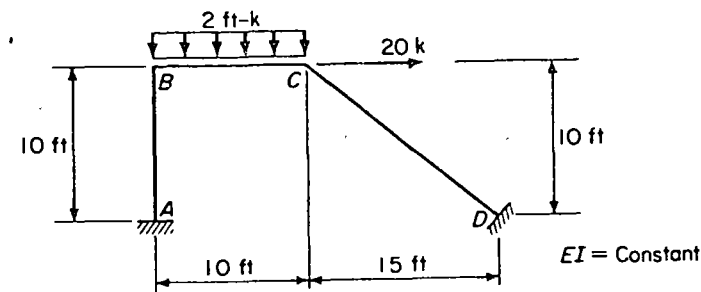
Prob. 3-20



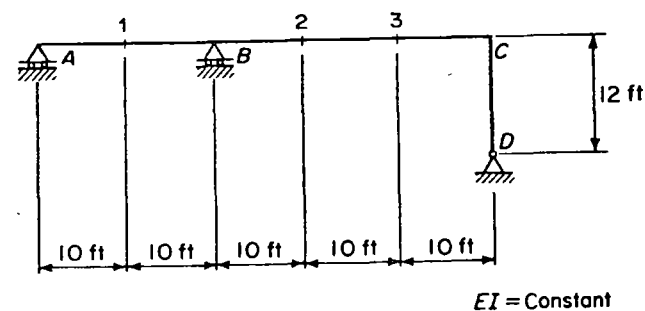
Prob. 3-21



Prob. 3-22



Prob. 3-23



Load case 1 – a single vertical 20 k load at point 1
 Load case 2 – a single vertical 20 k load at point 2
 Load case 3 – a single vertical 20 k load at point 3

Prob. 3-24

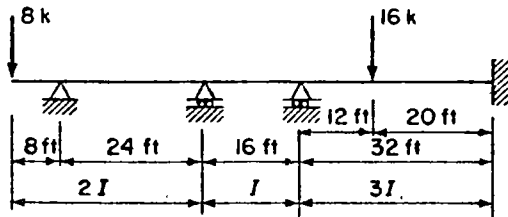
SELECTED REFERENCES

- 3-1 Rogers, G. L. and M. L. Causey, *Mechanics of Engineering Structures*. New York: John Wiley & Sons, Inc., 1962.
- 3-2 Carpenter, Samuel, *Structural Mechanics*. New York: John Wiley & Sons, Inc., 1960.

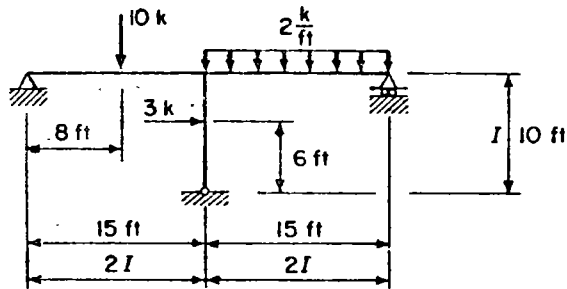
4-7

Problems

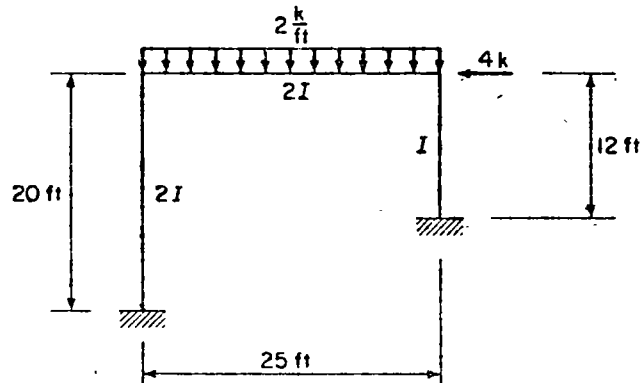
4-1 to 4-6. Analyze the structural system for the indicated loading, and draw the shear and moment diagrams for each member; $E = \text{constant}$ and the relative value of moment of inertia is indicated for each member.



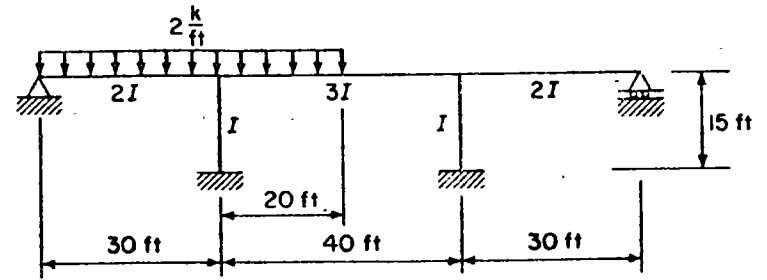
Prob. 4-1



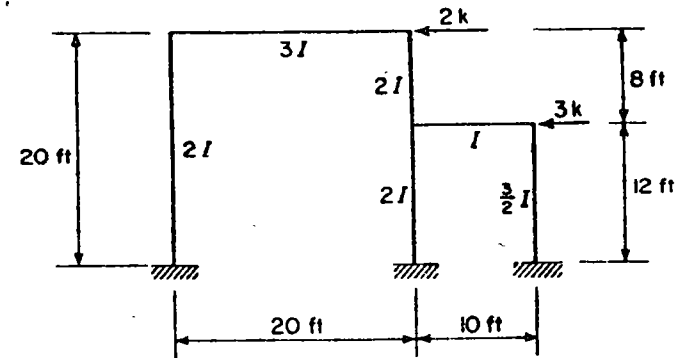
Prob. 4-2



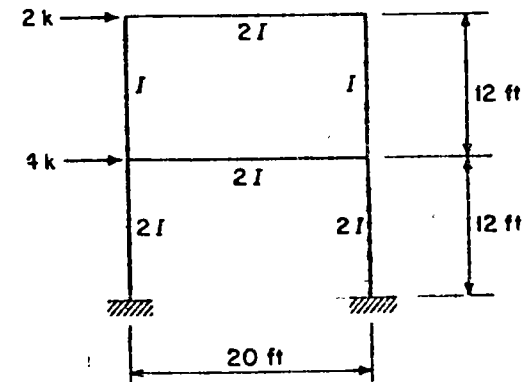
Prob. 4-3



Prob. 4-4



Prob. 4-5



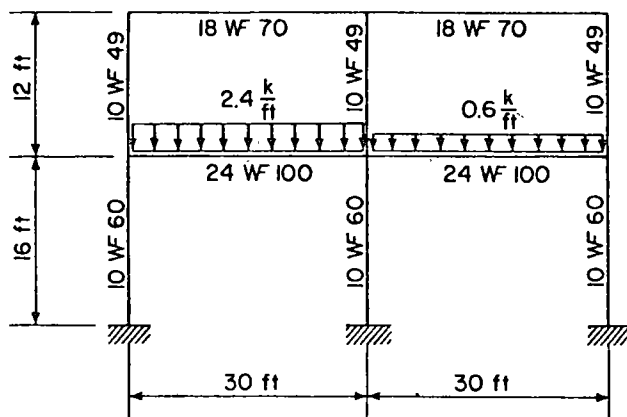
Prob. 4-6

4-7. Analyze the rigid frame of Prob. 4-2 for a settlement of the center support of 0.6 in.; $I = 500 \text{ in}^4$, $E = 30,000 \text{ ksi}$.

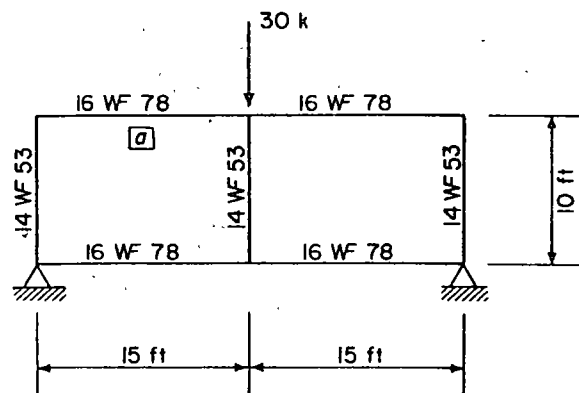
4-8. Determine the final member end actions and the support reactions for the frame of Prob. 4-3 caused by a clockwise rotation of the left support of 2° ; $I = 5000 \text{ in}^4$, $E = 3000 \text{ ksi}$.

4-9. Analyze the planar orthogonal frame of Prob. 4-4 for a settlement of the left column support of 0.6 in. and of the right column support of 0.8 in.; $I = 6000 \text{ in}^4$, $E = 3000 \text{ ksi}$.

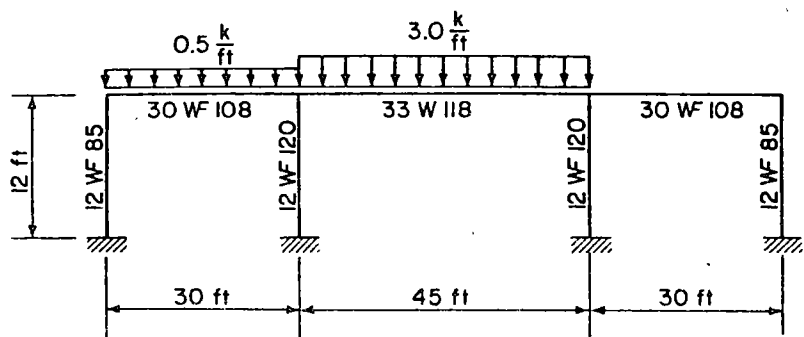
4-10 to 4-12. Calculate the final member end actions and the support reactions for the indicated loading of the structure, and draw the shear and moment diagrams for each member; $E = 30,000 \text{ ksi}$.



Prob. 4-10



Prob. 4-11

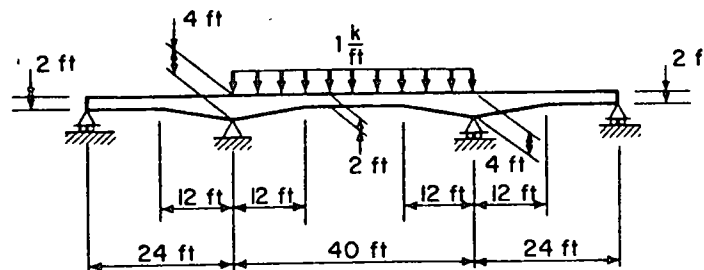


Prob. 4-12

4-13. Determine the final member end actions and the support reactions for the frame of Prob. 4-11 if member a is fabricated with a 6° bend (rotating the right end of the member counterclockwise) at a point 5 ft from the left end of the member.

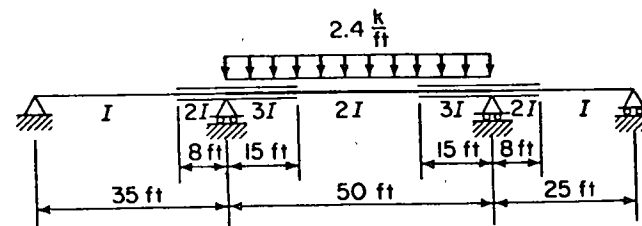
4-14. Analyze the frame of Prob. 4-12 for a fabrication error of 0.75 in. which resulted in the 33 WF 118 being too short.

4-15. Analyze the continuous beam for the given loading. The beams are 1.5-ft wide and have straight haunches; $E = 3000 \text{ ksi}$.



Prob. 4-15

4-16. Analyze the continuous beam for the indicated loading condition. Draw the shear and moment diagrams for each beam. The relative values of moments of inertia for each member are indicated; $E = \text{constant}$.



Prob. 4-16

4-17. Write a computer program using the stiffness method to analyze a continuous beam for a uniform vertical load applied to any span and acting over the entire span. Assume that the moment of inertia is constant over the span of each beam and is different for each beam; E is constant for the structure.

4-18. Develop a computer program to analyze a general planar orthogonal frame by the stiffness method for the following load cases: (1) a uniform normal load over the span of a member; (2) a normal concentrated load applied at point within the span of a member; (3) a vertical or horizontal concentrated load applied at a joint; and (4) a moment applied at a joint. Assume that the beam elements are prismatic and that E is constant for the structure.

4-19. Write a computer program to develop the member stiffness matrix and to compute the fixed end actions for a uniform normal load acting over the entire span for a non-prismatic beam element.

SELECTED REFERENCES

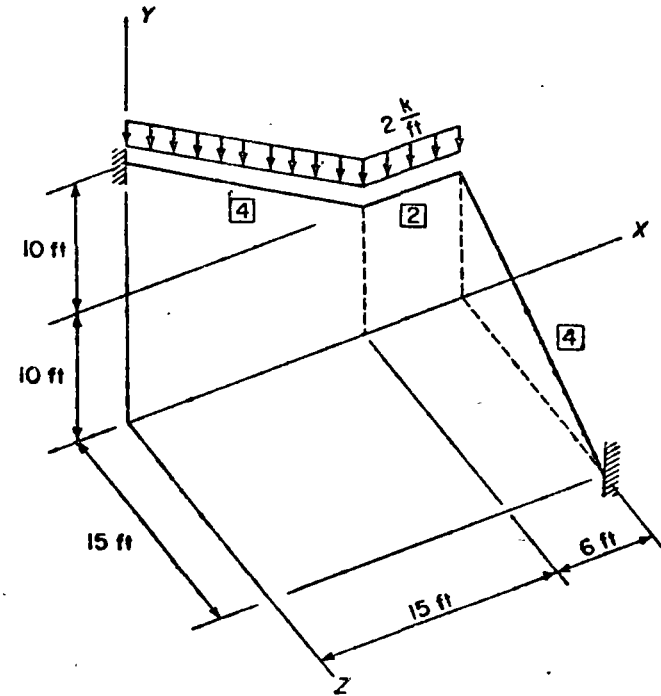
- 4-1 Pei, Ming L., "Stiffness Method of Rigid Frame Analysis," ASCE, *Second Conference on Electronic Computation*. Pittsburgh, Pa.: September 8 and 9, 1960.
- 4-2 Kinney, J. Sterling, *Indeterminate Structural Analysis*. Reading, Mass.: Addison-Wesley Publishing Co., Inc., 1957.
- 4-3 Gere, James M., and William Weaver, Jr., *Analysis of Framed Structures*. Princeton, N.J.: D. Van Nostrand Co., Inc., 1965.
- 4-4 Wang, Chu-Kia, *Statically Indeterminate Structures*. New York: McGraw-Hill Book Company, 1953.
- 4-5 Morice, P. B., *Linear Structural Analysis*. London: Thames and Hudson, 1959.
- 4-6 Hall, A. S., and R. W. Woodhead, *Frame Analysis*. New York: John Wiley & Sons, Inc., 1961.
- 4-7 Rubinstein, Moshe F., *Matrix Computer Analysis of Structures*. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, Inc., 1966.
- 4-8 Willems, Nicholas, and William M. Lucas, Jr., *Matrix Analysis for Structural Engineers*. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, Inc., 1968.
- 4-9 Livesley, R. K., *Matrix Methods of Structural Analysis*. New York: The Macmillan Company, Inc., 1964.

The stiffness method is a very powerful tool when coupled with the electronic digital computer for analyzing complex as well as simple structures. The procedure for carrying out the analysis is a very orderly, systematic procedure that is not restricted to a particular type of system. Only those matrices that are required to describe the behavior of particular structural elements are different. Thus, the problem of analyzing a given structure becomes one of developing the proper matrices to describe the response of the elements which make up the system.

6-9

Problems

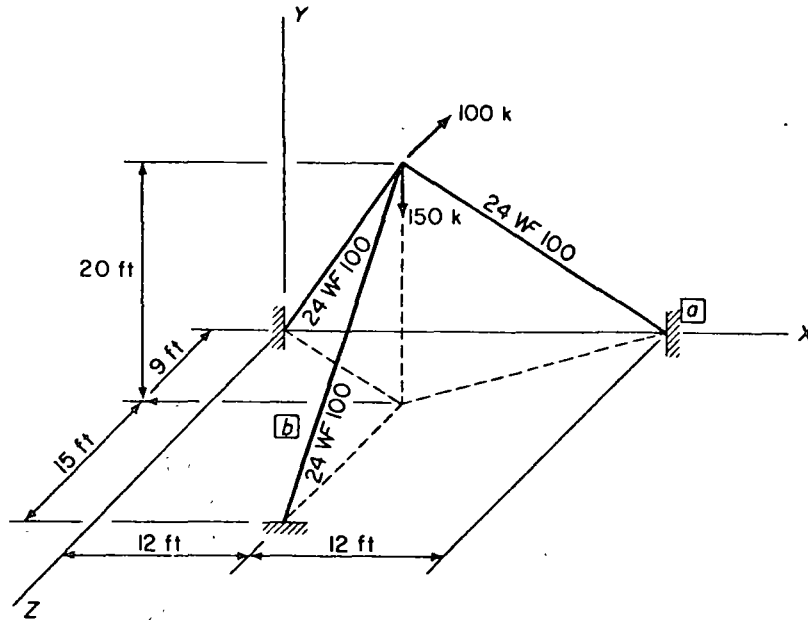
6-1. Determine the final end actions developed at the end of each member and the support reactions of the rigid frame caused by the indicated loading. For each member, $I_x = 3I/2$, $I_y = 2I$, $I_z = 4I$, and $A_x = I/4$; $E = \text{constant}$ and $G = E/2$. The relative value of I for each member is given in the box adjacent to the member. The y_m-x_m plane of each member is perpendicular to the $X-Z$ reference.



Prob. 6-1 Note: The y_m-x_m plane of each member is perpendicular to the $X-Z$ plane.

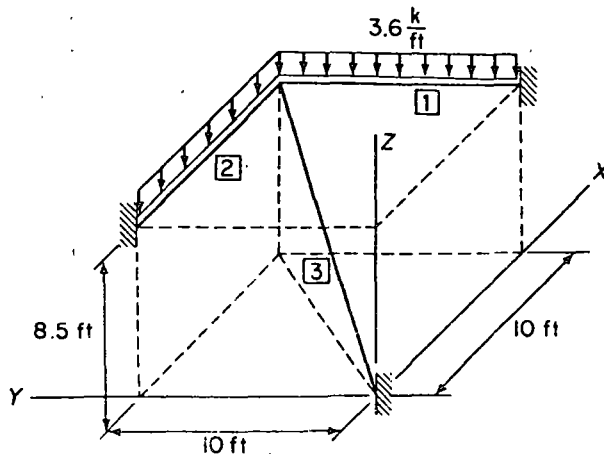
6-2. Analyze the space frame for the imposed loading condition. The members are prismatic 24 W_F 100 steel beams; $E = 30,000$ ksi and $G = 12,000$ ksi. The members are

oriented such that the y_m-x_m plane of each beam, where the y_m axis defines the minor axis of the cross-section, is perpendicular to the $X-Z$ reference plane.



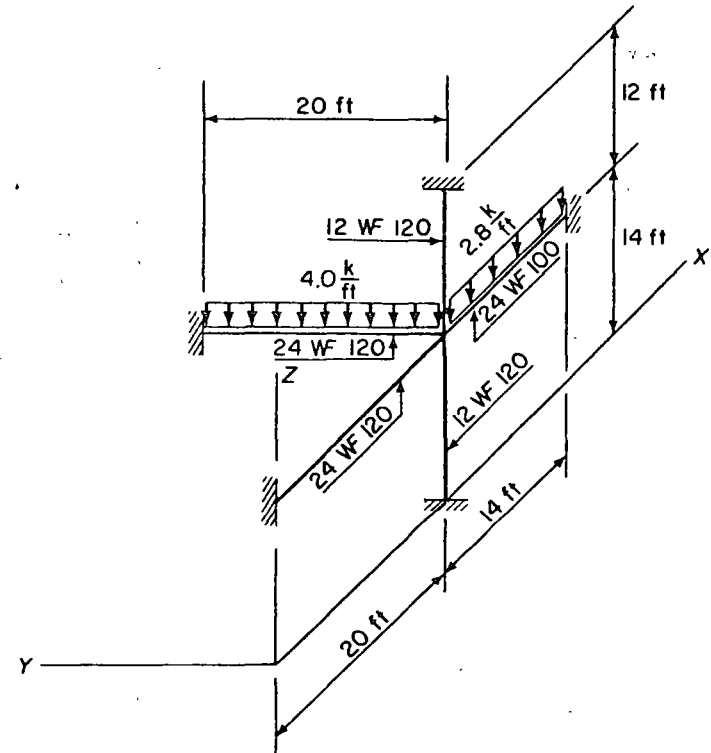
Prob. 6-2 Note: The y_m-x_m plane of each member is perpendicular to the $X-Z$ plane.

6-3. Compute the support reactions and final end actions. For members 1 and 2, $I_x = 2I/3$, $I_y = I$, $I_z = 3I$, and $A_x = I/5$; for member 3, $I_x = I$, $I_y = 2I$, $I_z = 5I$, and $A_x = I/4$; $E = \text{constant}$ and $G = E/2$. The y_m-x_m plane of each beam is perpendicular to the $X-Y$ reference axis.



Prob. 6-3 Note: The y_m-x_m plane of each member is perpendicular to the $X-Y$ plane.

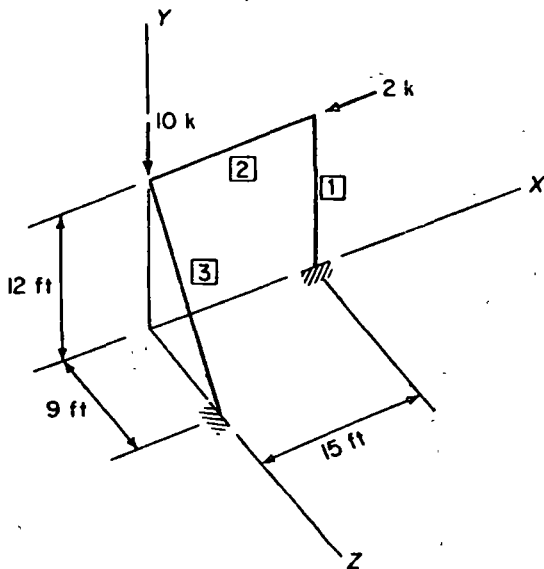
6-4. The space frame is to be analyzed for the indicated loading condition. With the y_m axis defining the minor principal axis of the cross-section, the y_m-x_m plane of each beam is perpendicular to the $X-Y$ reference plane and the y_m-x_m plane of each column is perpendicular to the $X-Z$ reference plane; $E = 30,000$ ksi and $G = 12,000$ ksi.



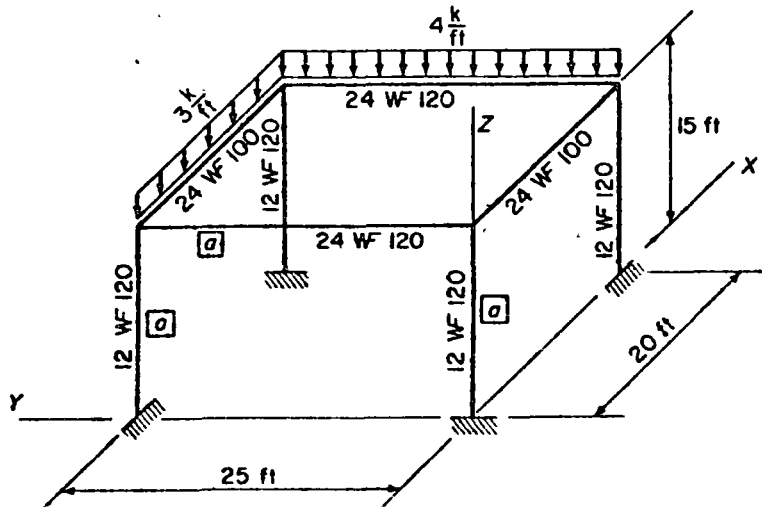
Prob. 6-4 Note: The y_m-x_m planes of the beams are perpendicular to the $X-Y$ plane, and the y_m-x_m planes of the columns are perpendicular to the $X-Z$ plane.

6-5. Determine the final end actions for each member and the support reactions for the structure caused by the applied loading. For members 1 and 2, $I_x = I/2$, $I_y = 6I$, $I_z = 8I$, and $A_x = I/5$; for member 3, $I_x = I$, $I_y = 10I$, $I_z = 10I$, and $A_x = I/4$; $E = \text{constant}$ and $G = E/2$. Letting the y_m axis define the minor principal axis of a member's cross-section, the y_m-x_m plane of members 2 and 3 are perpendicular to the $X-Z$ reference plane and the y_m-x_m plane of member 1 coincides with the $X-Y$ reference plane.

6-6. Develop the complete structure stiffness matrix for the rigid space frame described in the figure and set up the complete joint load matrix for the indicated loading condition. Letting the y_m axis define the minor principal axis of a cross-section, the y_m-x_m plane of each column is parallel to the $Y-Z$ reference plane and for each beam is perpendicular to the $X-Y$ reference plane; $E = 30,000$ ksi and $G = 12,000$ ksi.



Prob. 6-5 Note: The y_m-x_m plane of member 1 coincides with the $X-Y$ reference plane. The y_m-x_m plane of members 2 and 3 is perpendicular to the $X-Z$ plane in both cases.



Prob. 6-6

6-7. Analyze the frame of Prob. 6-2 for a vertical settlement of 0.75 in. of the support a .

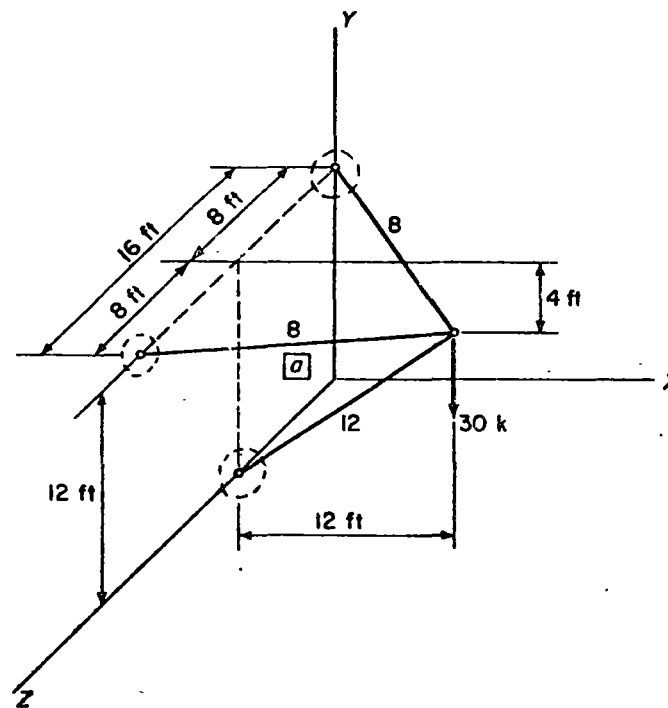
6-8. Determine the final end actions and support reactions developed by the rigid frame of Prob. 6-2 if member b is fabricated 1 in. too short.

6-9. Analyze the space frame of Prob. 6-5 for a vertical settlement of 0.5 in. of the support of member 1. Let $I = 1000 \text{ in}^4$, $E = 3000 \text{ ksi}$, and $G = 1000 \text{ ksi}$.

6-10. Analyze the rigid space frame of Prob. 6-6 for the indicated loading.

6-11. Analyze the rigid frame structure of Prob. 6-6 for an increase in temperature of 40° of members a over the other members of the structure.

6-12 to 6-15. Determine the bar forces developed in the space truss. The orientation of the local axes for each member may be selected for convenience of computation; $E = 30,000 \text{ ksi}$. The cross-sectional area of each member (in terms of sq in.) is indicated adjacent to the member.



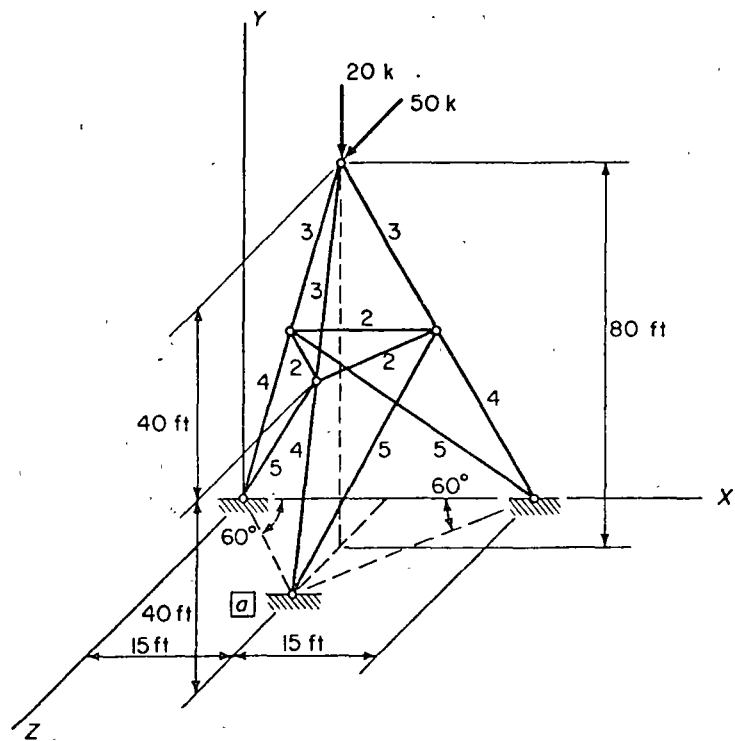
Prob. 6-12

6-16. Compute the bar forces developed in the space truss of Prob. 6-12 if member a is fabricated 0.5 in. too short.

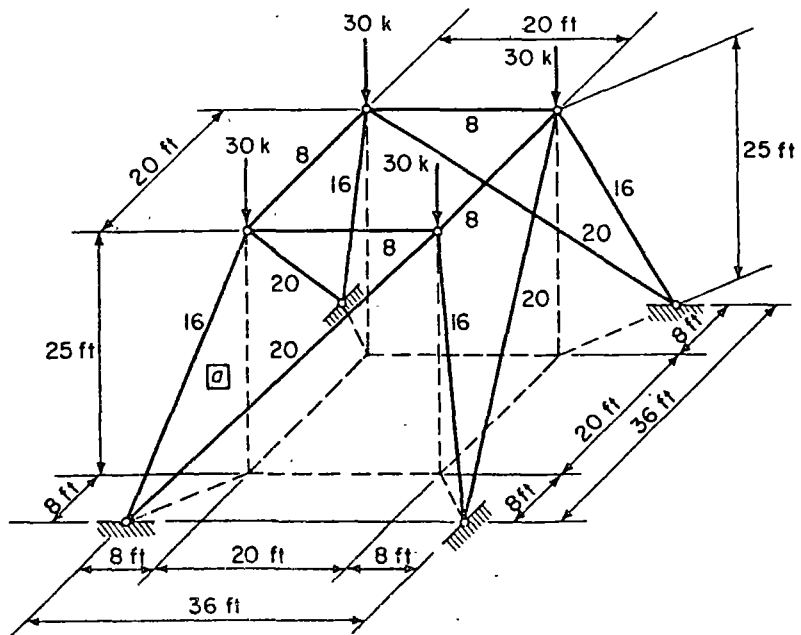
6-17. Analyze the space truss of Prob. 6-13 for a settlement of support a of 0.75 in.

6-18. Determine the bar forces in each member and the support reactions for the structure if member a of the truss of Prob. 6-14 is fabricated 0.25 in. too long.

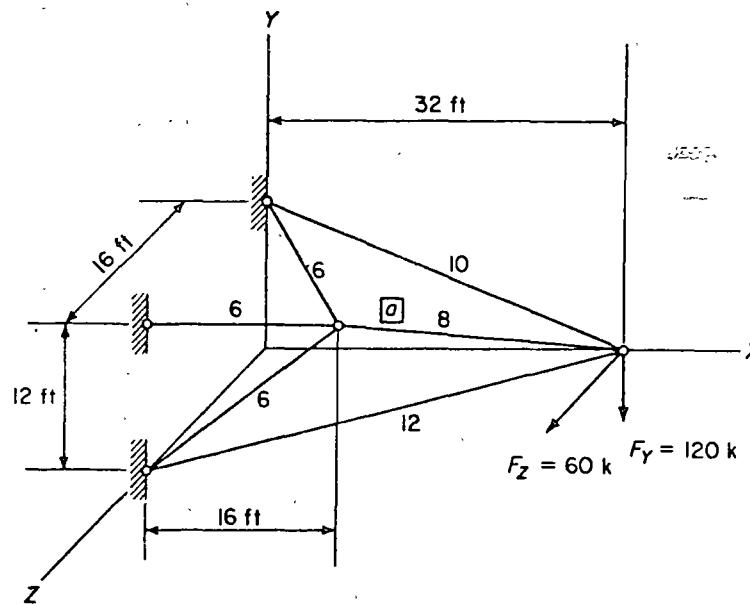
6-19. Analyze the structure of Prob. 6-15 for a fabrication error of 0.3 in. shortening the length of member a .



Prob. 6-13

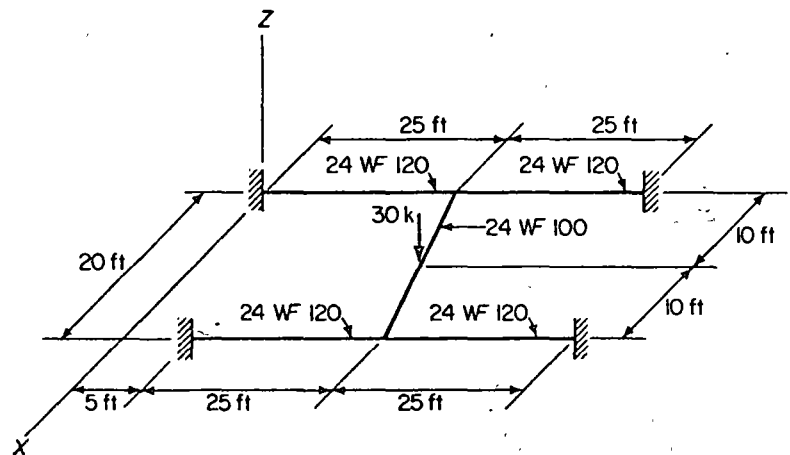


Prob. 6-14

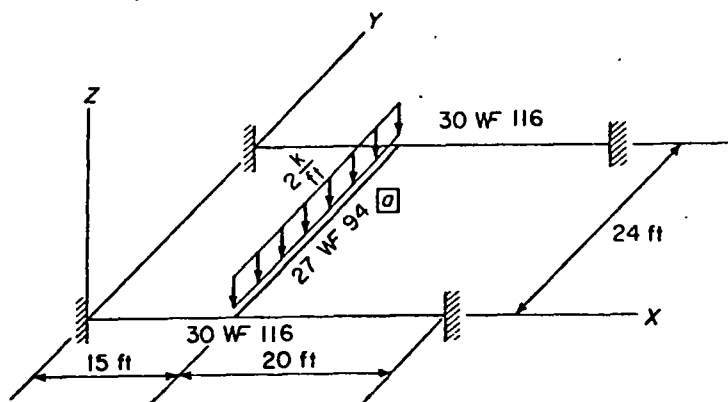


Prob. 6-15

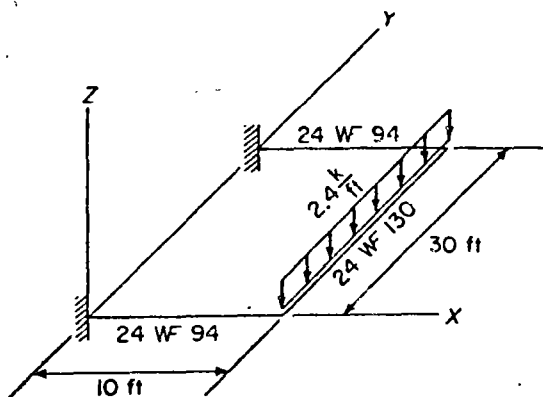
6-20 to 6-23. Analyze the planar grid structures for the indicated loading. Each member is positioned in the X - Y reference plane so that the major principal axis (y_m) of each cross-section lies in the plane; $E = 30,000$ ksi and $G = 12,000$ ksi.



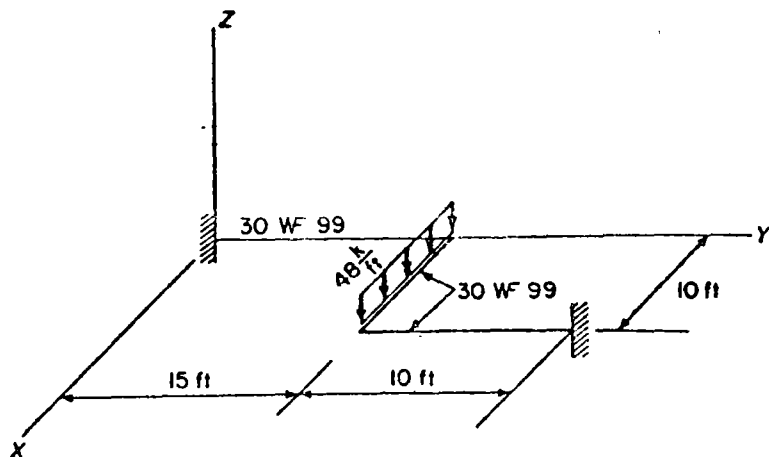
Prob. 6-20 Note: Major principal axis of the cross section each member lies in the X - Y reference plane.



Prob. 6-21 Note: Major principal axis of the cross section of each member lies in the X - Y reference plane.

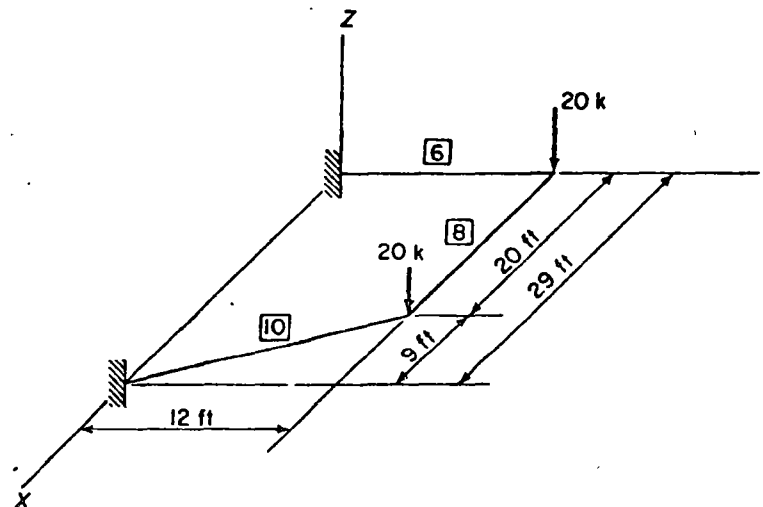


Prob. 6-22 Note: Major principal axis of the cross section of each member lies in the X - Y reference plane.



Prob. 6-23 Note: Major principal axis of the cross section of each member lies in the X - Y reference plane.

6-24. Analyze the planar grid structure shown in the figure for the indicated loading. For each member, $I_x = 3I/2$, $I_y = 2I$, $I_z = I$, and $A_x = I/6$. The major principal axis (y_m) of the cross-section of each member lies in the X - Y reference plane. The relative value of I for each member is given in the box adjacent to the member; $E = \text{constant}$ and $G = E/3$.



Prob. 6-24 Note: Major principal axis of the cross section of each member lies in the X - Y reference plane.

6-25. Determine the final end actions and the support reactions for the structure of Prob. 6-21 if member a is fabricated with a bend of 5° (rotating right end in a counter-clockwise direction) at midspan.

6-26. (a) Establish all of the matrices for a beam element with either a variable or constant cross-section over its span length, arbitrarily oriented in a three-dimensional space, with both ends of the member restrained against translation in the x_m , y_m , and z_m directions, both ends restrained against rotation about the x_m and y_m axes, and both ends free to rotate about the z_m axis so that this type of member could be handled in a stiffness analysis.

(b) Evaluate the member stiffness matrix for this beam element if it were a prismatic member.

6-27. Develop the grid member stiffness matrix $[K_G]_l$ for a prismatic grid member with a pin at the j -end of the member so that it is free to rotate about the major principal axis y_m . The member is assumed to be restrained against all other possible components of end displacement. Also, establish the transformation matrix $[T_G]_l$ and the transformed grid member stiffness matrix $[K_G]_l$ for this member.

6-28. Establish the member stiffness matrix $[K^*]_l$ for a prismatic 12 in. $[25\#]$ beam. Note that for this member the shear center and the centroid of the cross-section do not

coincide. The x_m axis will define the centroidal axis of the beam and the z_m principal axis will contain both the centroid and the shear center of the channel section.

6-29. Develop a computer program to analyze by the stiffness method a planar grid frame for any possible loading condition. *Hint:* Let fixed end actions be input data.

6-30. Write a computer program to analyze by the stiffness method a space truss system for loads applied only at the joints.

6-31. Write a computer program to carry out the analysis of a rigid space frame by the stiffness method for any possible loading condition. *Hint:* Use fixed end actions as input.

SELECTED REFERENCES

- 6-1 Willems, Nicholas, and William M. Lucas, Jr., *Matrix Analysis for Structural Engineers*. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, Inc., 1968.
- 6-2 Gere, James M., and William Weaver, Jr., *Analysis of Framed Structures*. Princeton, N.J.: D. Van Nostrand Company, Inc., 1965.
- 6-3 Seely, Fred B., and James O. Smith, *Advanced Mechanics of Materials*, 2nd ed. New York: John Wiley & Sons, Inc., 1952.
- 6-4 Timoshenko, S. P., and J. H. Goodier, *Theory of Elasticity*, 2nd ed. New York: McGraw-Hill Book Company, 1951.

1 METODO DE LAS RIGIDECES PARA ANALIZAR ESTRUCTURAS ORTOGONALES PLANAS

1.1 Convención de signos.

La siguiente convención de signos será utilizada en el desarrollo del método de las rigideces y sus aplicaciones en marcos ortogonales planos.

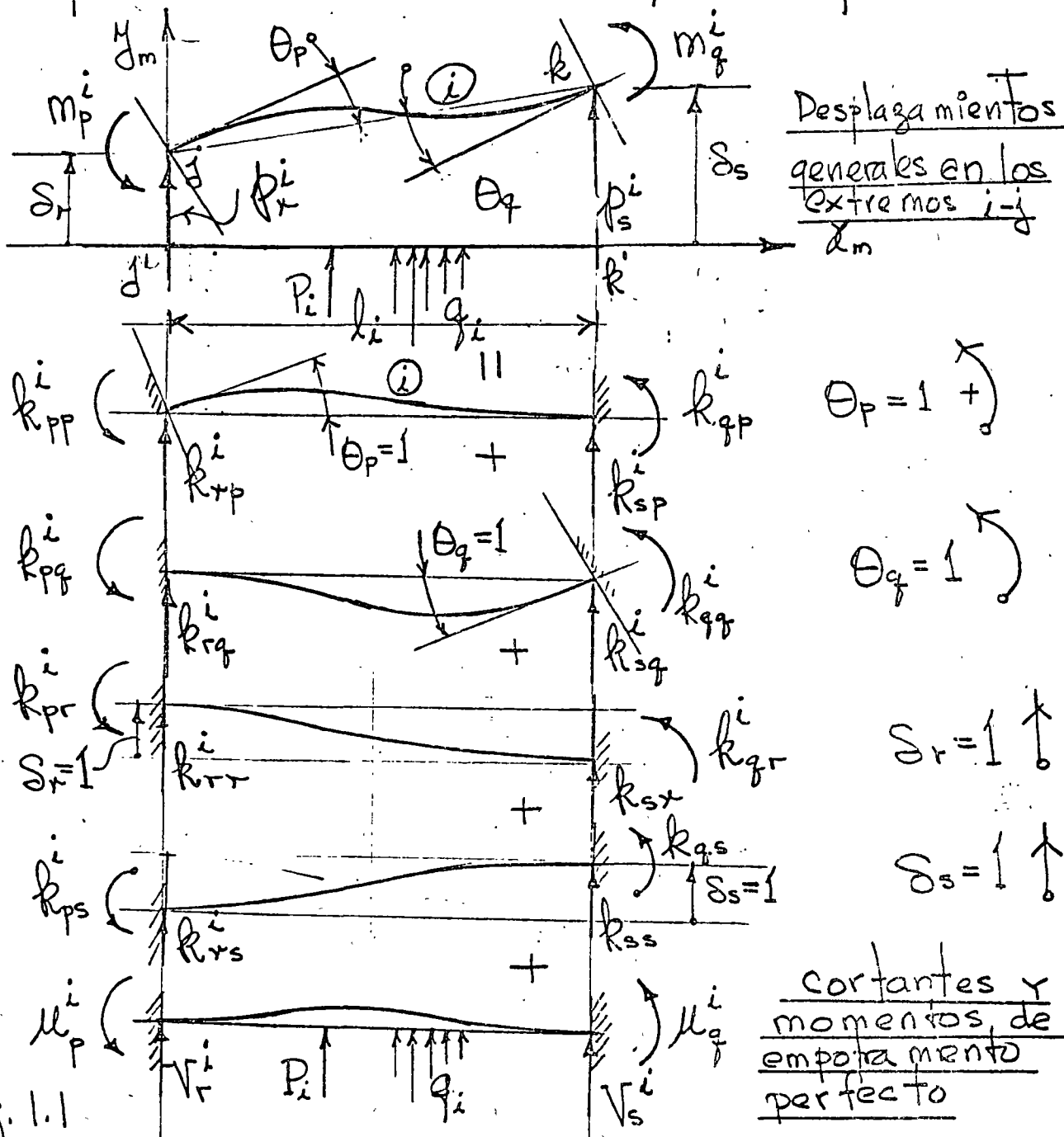


Fig. 1.1

42 301 30 SHEETS 5 COPIES
 42 302 30 SHEETS 5 COPIES
 42 303 30 SHEETS 5 COPIES
 42 304 30 SHEETS 5 COPIES
 42 305 30 SHEETS 5 COPIES
 42 306 30 SHEETS 5 COPIES
 42 307 30 SHEETS 5 COPIES
 42 308 30 SHEETS 5 COPIES
 42 309 30 SHEETS 5 COPIES
 42 310 30 SHEETS 5 COPIES

De la Fig. 11 aceptando el principio de superposición se tiene:

$$\begin{aligned} m_p^i &= k_{pp}^i \theta_p + k_{pq}^i \theta_q + k_{pr}^i \delta_r + k_{ps}^i \delta_s + \mu_p^i \\ m_q^i &= k_{qp}^i \theta_p + k_{qq}^i \theta_q + k_{qr}^i \delta_r + k_{qs}^i \delta_s + \mu_q^i \\ p_r^i &= k_{rp}^i \theta_p + k_{rq}^i \theta_q + k_{rr}^i \delta_r + k_{rs}^i \delta_s + V_r^i \\ p_s^i &= k_{sp}^i \theta_p + k_{sq}^i \theta_q + k_{sr}^i \delta_r + k_{ss}^i \delta_s + V_s^i \end{aligned} \quad (1.1)$$

en (1.1) se desprecia el efecto de la carga normal expresando (1.1) matricialmente se tiene

$$\{m\}_i = [k]_i \{\delta\}_i + \{\mu\}_i \quad (1.2)$$

donde:

$$\{m\}_i = \begin{Bmatrix} m_p \\ m_q \\ p_r \\ p_s \end{Bmatrix}_i ; \{\delta\}_i = \begin{Bmatrix} \theta_p \\ \theta_q \\ \delta_r \\ \delta_s \end{Bmatrix}_i ; \{\mu\}_i = \begin{Bmatrix} \mu_p \\ \mu_q \\ V_r \\ V_s \end{Bmatrix}_i \quad (1.3)$$

$\{m\}_i$; componentes de acciones sobre barra para mantener equil.

$\{\delta\}_i$; Desplazamientos en los extremos del miembro (i)

$\{\mu\}_i$; Momentos y cortantes de empotramiento perfecto en (i)

$[k]_i$; Matriz de rigidez del miembro (i), la cual despreciando el efecto de cortante y carga normal, para un miembro de sección constante es:

$$[R]_i = \begin{bmatrix} \frac{4EI}{l} & \frac{2EI}{l} & \frac{6EI}{l^2} & -\frac{6EI}{l^2} \\ \frac{2EI}{l} & \frac{4EI}{l} & \frac{6EI}{l^2} & -\frac{6EI}{l^2} \\ \frac{6EI}{l^2} & \frac{6EI}{l^2} & \frac{12EI}{l^3} & -\frac{12EI}{l^3} \\ -\frac{6EI}{l^2} & -\frac{6EI}{l^2} & -\frac{12EI}{l^3} & -\frac{12EI}{l^3} \end{bmatrix} \begin{matrix} \delta \\ \theta \\ r \\ s \end{matrix} \quad (1.4)$$

La filosofía básica del método de las rigideces ha sido presentada, antes de aplicarlo a diversos sistemas estructurales su procedimiento conviene organizarlo en un programa sistemático y las ecuaciones básicas del análisis presentarlas en términos generales. Como ejemplo consideraremos el marco siguiente.

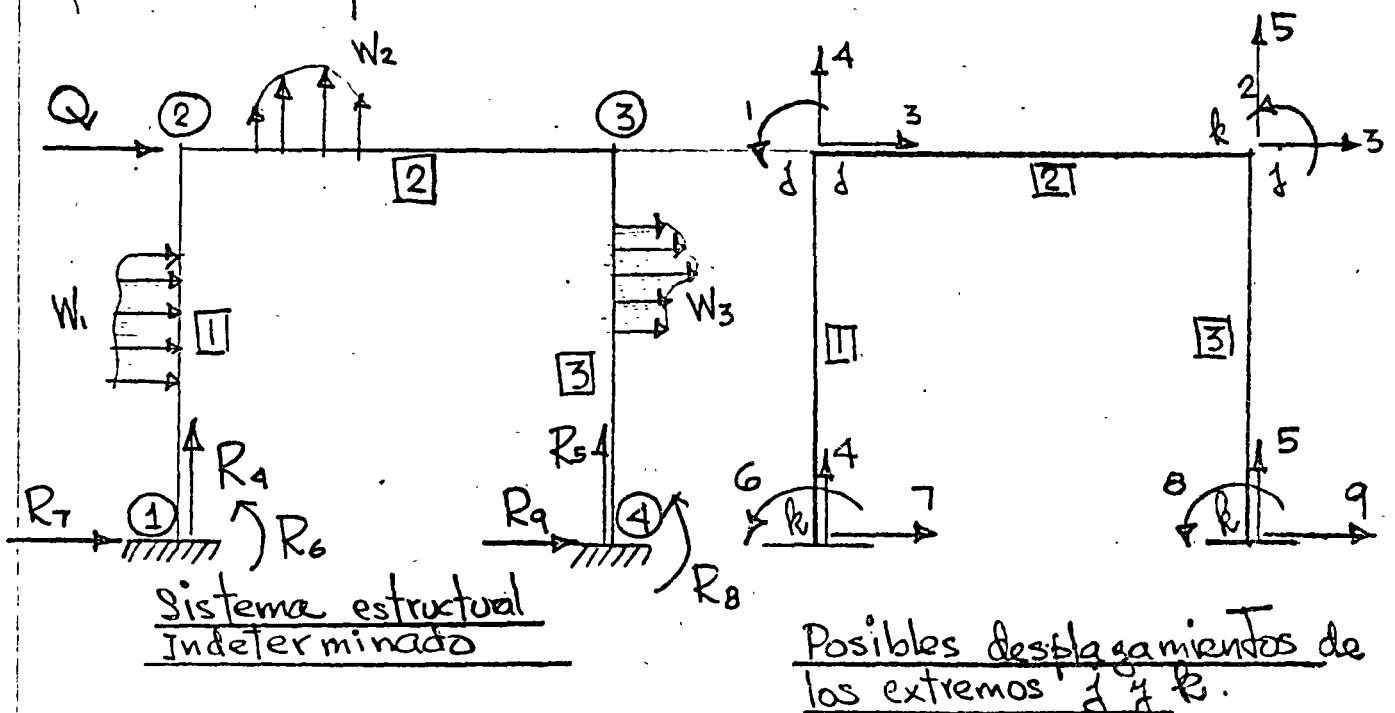


Fig. 1.2

El pórtico de la Fig. 1.2 es indeterminado de tercer grado con θ_1 , θ_2 y δ_3 , porque las condiciones de apoyo anulan a δ_4 , δ_5 , θ_6 , δ_7 , θ_8 , δ_9 . Como primera etapa consideramos la estructura con los nudos fijos determinando la suma de momentos y cortantes correspondientes S_{mo} .

Aplicando las ecuaciones (1.1) al marco de la Fig. 1.2

$$\begin{array}{l} \text{Miembro 1} \\ \left[\begin{array}{l} m_1' = k_{11}' \theta_1 + k_{16}'(0) + k_{13}' \delta_3 + k_{17}'(0) + \mu_1' \\ m_6' = k_{61}' \theta_1 + k_{66}'(0) + k_{63}' \delta_3 + k_{67}'(0) + \mu_6' \\ \phi_3' = k_{31}' \theta_1 + k_{36}'(0) + k_{33}' \delta_3 + k_{37}'(0) + V_3' \\ \phi_7' = k_{71}' \theta_1 + k_{76}'(0) + k_{73}' \delta_3 + k_{77}'(0) + V_7' \end{array} \right. \end{array} \quad (1.5)$$

$$\begin{array}{l} \text{Miembro 2} \\ \left[\begin{array}{l} m_1^2 = k_{11}^2 \theta_1 + k_{12}^2 \theta_2 + k_{14}^2(0) + k_{15}^2(0) + \mu_1^2 \\ m_2^2 = k_{21}^2 \theta_1 + k_{22}^2 \theta_2 + k_{24}^2(0) + k_{25}^2(0) + \mu_2^2 \\ \phi_4^2 = k_{41}^2 \theta_1 + k_{42}^2 \theta_2 + k_{44}^2(0) + k_{45}^2(0) + V_4^2 \\ \phi_5^2 = k_{51}^2 \theta_1 + k_{52}^2 \theta_2 + k_{54}^2(0) + k_{55}^2(0) + V_5^2 \end{array} \right. \end{array} \quad (1.6)$$

$$\begin{array}{l} \text{Miembro 3} \\ \left[\begin{array}{l} m_2^3 = k_{22}^3 \theta_2 + k_{28}^3(0) + k_{23}^3 \delta_3 + k_{29}^3(0) + \mu_2^3 \\ m_8^3 = k_{82}^3 \theta_2 + k_{88}^3(0) + k_{83}^3 \delta_3 + k_{89}^3(0) + \mu_8^3 \\ \phi_3^3 = k_{32}^3 \theta_2 + k_{38}^3(0) + k_{33}^3 \delta_3 + k_{39}^3(0) + V_3^3 \\ \phi_9^3 = k_{92}^3 \theta_2 + k_{98}^3(0) + k_{93}^3 \delta_3 + k_{99}^3(0) + V_9^3 \end{array} \right. \end{array} \quad (1.7)$$

Como se demostró previamente el análisis de la estructura indeterminada de la Fig. 1.2 puede ser evaluado de

$$[S_{ij}] \{ \delta_i \} = \{ Q_{ij} \} \quad (1.8)$$

en el caso de la Fig. 1.2, (1.8) es igual a

$$\begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} \\ S_{31} & S_{41} & S_{51} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \delta_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mu'_{21} + \mu^2_{23} \\ \mu^2_{32} + \mu^3_{34} \\ V^1_{21} + V^3_{24} - Q \end{Bmatrix} \quad (1.9)$$

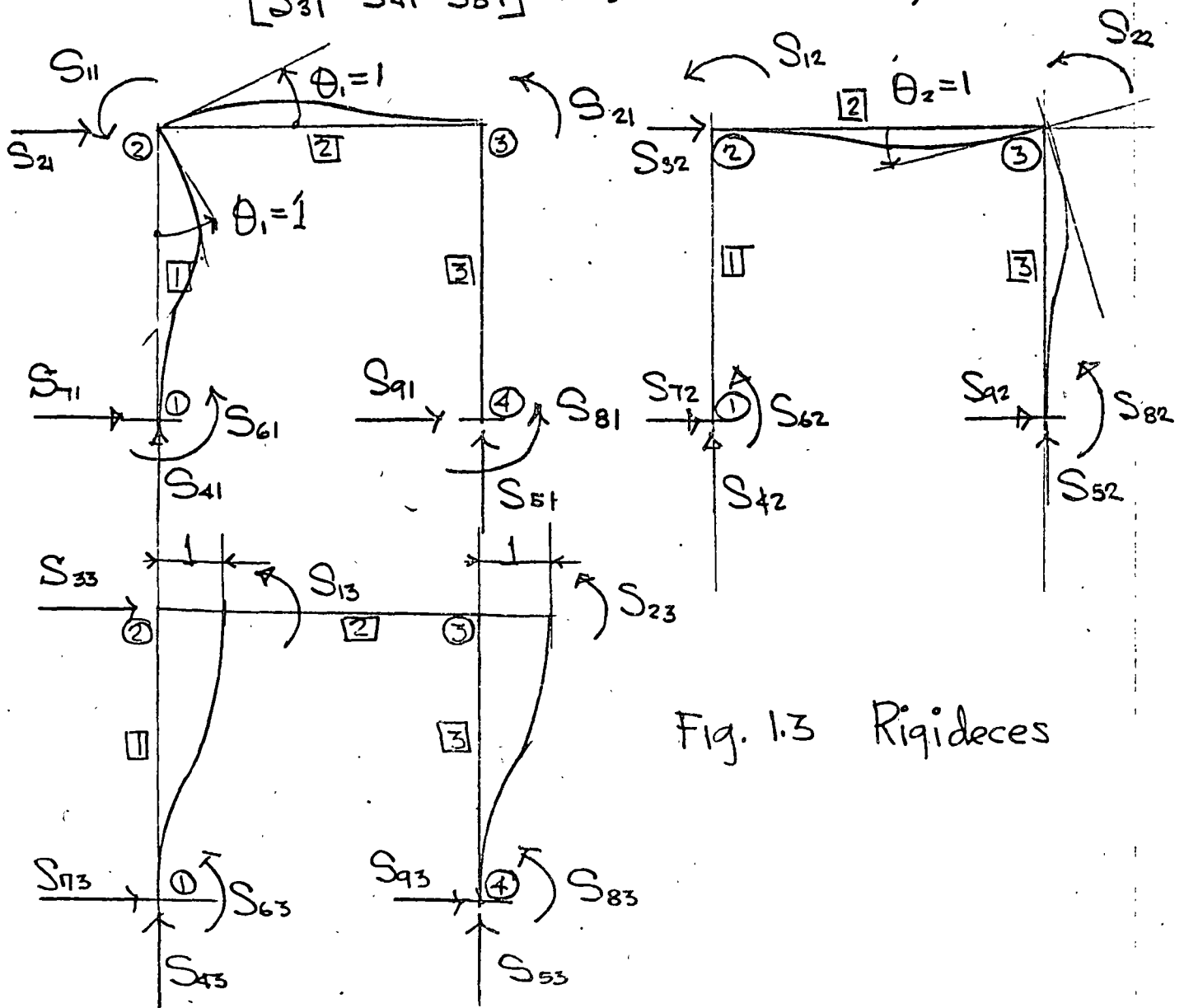


Fig. 1.3 Rigideces

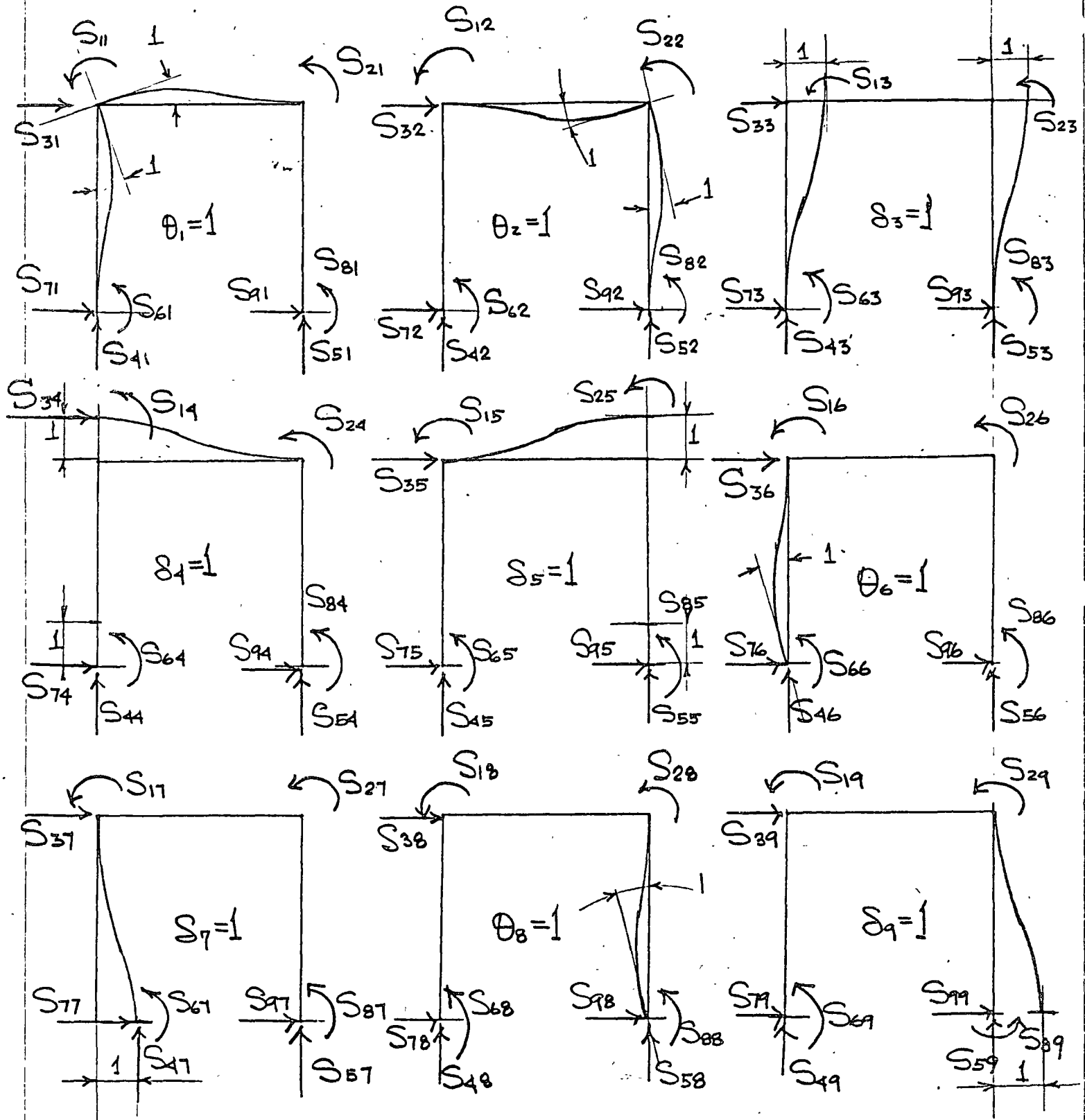


Fig. 1.4 Rigideces considerando todos los posibles grados de libertad despreciando deformaciones axiales (se suponen direcciones positivas)

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{cccccccccc}
 S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} & S_{15} & S_{16} & S_{17} & S_{18} & S_{19} \\
 S_{21} & S_{22} & S_{23} & S_{24} & S_{25} & S_{26} & S_{27} & S_{28} & S_{29} \\
 S_{31} & S_{32} & S_{33} & S_{34} & S_{35} & S_{36} & S_{37} & S_{38} & S_{39} \\
 \hline
 S_{41} & S_{42} & S_{43} & S_{44} & S_{45} & S_{46} & S_{47} & S_{48} & S_{49} \\
 S_{51} & S_{52} & S_{53} & S_{54} & S_{55} & S_{56} & S_{57} & S_{58} & S_{59} \\
 S_{61} & S_{62} & S_{63} & S_{64} & S_{65} & S_{66} & S_{67} & S_{68} & S_{69} \\
 S_{71} & S_{72} & S_{73} & S_{74} & S_{75} & S_{76} & S_{77} & S_{78} & S_{79} \\
 S_{81} & S_{82} & S_{83} & S_{84} & S_{85} & S_{86} & S_{87} & S_{88} & S_{89} \\
 S_{91} & S_{92} & S_{93} & S_{94} & S_{95} & S_{96} & S_{97} & S_{98} & S_{99}
 \end{array} &
 \begin{array}{c}
 \theta_1 \\
 \theta_2 \\
 \theta_3 \\
 \delta_4 \\
 \delta_5 \\
 \theta_6 \\
 \delta_7 \\
 \theta_8 \\
 \delta_9
 \end{array} &
 + &
 \begin{array}{c}
 \mu_{21}^1 + \mu_{23}^2 \\
 \mu_{32}^2 + \mu_{34}^3 \\
 \nu_{21}^1 + \nu_{21}^3 \\
 \nu_{23}^2 \\
 \nu_{32}^2 \\
 \mu_{12}^1 \\
 \nu_{12}^1 \\
 \mu_{43}^3 \\
 \nu_{43}^3
 \end{array} &
 = &
 \begin{array}{c}
 0 \\
 0 \\
 Q \\
 R_4 \\
 R_5 \\
 R_6 \\
 R_7 \\
 R_8 \\
 R_9
 \end{array}
 \end{array} \quad (1.11)$$

$[S_{kl}] \quad \{\delta_i\} \quad \{\mu\} \quad \{R\}$

Expresando (1.11) matricialmente con la notación indicada

$$[S_{kl}]\{\delta_i\} + \{\mu\}_k = \{R\} \quad (1.12)$$

El análisis por el método de las rigideces se reduce a evaluar de (1.8) $\{\delta_i\}$ o sea

$$\{\delta_i\} = [S_{ij}]^{-1} \{Q_i\} \quad (1.13)$$

y substituyendo (1.13) en (1.2) se obtiene para cada barra

$$\{m_i\} = [k]_i [S_{ij}]^{-1} \{Q_i\} + \{\mu\}_i \quad (1.14)$$

y las reacciones se obtienen substituyendo (1.13) en (1.12)

$$\{R\} = [S_{kl}] [S_{ij}]^{-1} \{Q_i\} + \{\mu\}_k \quad (1.15)$$

METODO DE LAS RIGIDECES DE ANALISIS DE ESTRUCTURAS TRIDIMENSIONALES

2.1 ELEMENTO VIGA.

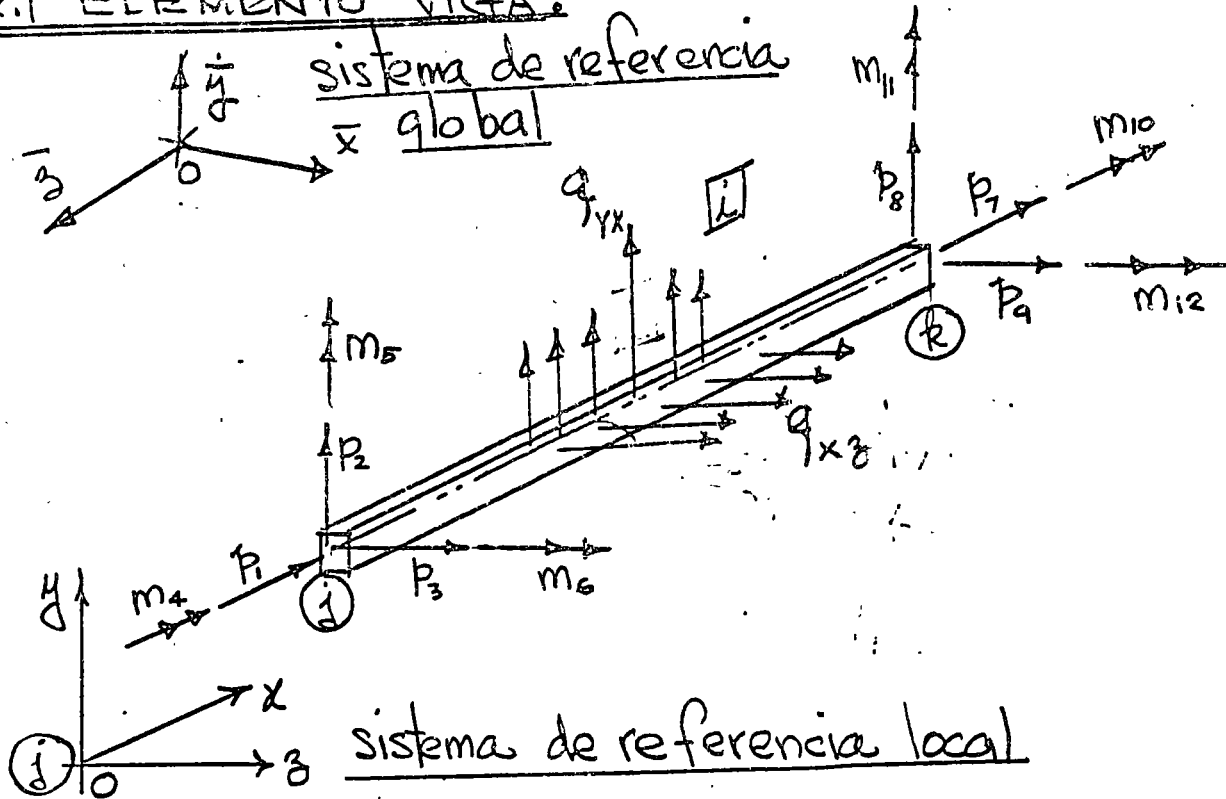


Fig. 2.1 Elemento viga; ejes y, z son centroidales y principales ($Q_y = Q_z = I_{yz} = 0$)

El elemento estructural $j-k$, se supone una barra capaz de resistir fuerzas axiales, momentos flectores respecto a dos ejes principales en el plano de la sección transversal, y momentos de torsión respecto a su eje centroidal. Las siguientes fuerzas actúan en la viga $j-k$: Fuerzas axiales P_1 y P_7 ; Fuerzas cortantes P_2, P_3, P_8 y P_9 ; Momentos flectores m_5, m_6, m_{11} y m_{12} ; y Momentos de torsión m_4 y m_{10} . La localización y dirección positiva se muestra en Fig. 2.1

Los desplazamientos correspondientes serán $u_1, u_2, u_3, \dots, u_{12}$ serán positivos en la dirección positiva de las fuerzas. La posición del elemento viga $j-k$ será especificado por las coordenadas del extremo j y los cosenos directores del eje x (dirección $j-k$) y del eje y con respecto al sistema global $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$.

La matriz de rigidez del elemento viga será de 12×12 pero siempre es posible integrarla con submatrices de 2×2 y 4×4 . De la teoría de flexión y torsión de vigas las fuerzas P_1 y P_2 dependen solo de sus desplazamientos correspondientes; lo mismo es cierto para los momentos torsionantes M_4 y M_{10} . Sin embargo, para una selección arbitraria de los planos de flexión, los momentos flectores y fuerza de corte en el plano xy dependerán no solo de sus desplazamientos correspondientes pero también en los desplazamientos correspondientes a las fuerzas en los planos xy . Soloamente si los xy y xz coinciden con los ejes principales de la sección transversal puede considerarse la flexión y corte sobre dichos planos independiente una de la otra.

$\left. \begin{matrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ m_4 \\ m_5 \\ m_6 \\ p_7 \\ p_8 \\ p_9 \\ m_{10} \\ m_{11} \\ m_{12} \end{matrix} \right\} =$
 $\{p\}_i$

k_{11}	k_{12}	k_{13}	k_{14}	k_{15}	k_{16}	k_{17}	k_{18}	k_{19}	$k_{1,10}$	$k_{1,11}$	$k_{1,12}$
k_{21}	k_{22}	k_{23}	k_{24}	k_{25}	k_{26}	k_{27}	k_{28}	k_{29}	$k_{2,10}$	$k_{2,11}$	$k_{2,12}$
k_{31}	.	k_{33}	$k_{3,12}$
k_{41}	.	.	k_{44}	$k_{4,12}$
k_{51}	.	.	.	k_{55}	$k_{5,12}$
k_{61}	k_{66}	$k_{6,12}$
k_{71}	k_{77}	$k_{7,12}$
k_{81}	.	(simétrica)		.	.	k_{88}	$k_{8,12}$
k_{91}	k_{99}	.	.	.	$k_{9,12}$
$k_{10,1}$	$k_{10,10}$.	.	$k_{10,12}$
$k_{11,1}$	$k_{11,11}$	$k_{11,12}$	
$k_{12,1}$	$k_{12,12}$

$[k_{ij}]$

$\left. \begin{matrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \theta_4 \\ \theta_5 \\ \theta_6 \\ \delta_7 \\ \delta_8 \\ \delta_9 \\ \theta_{10} \\ \theta_{11} \\ \theta_{12} \end{matrix} \right\} =$
 $\{\delta\}_i$

+

$\left. \begin{matrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ \mu_4 \\ \mu_5 \\ \mu_6 \\ p_7 \\ p_8 \\ p_9 \\ \mu_{10} \\ \mu_{11} \\ \mu_{12} \end{matrix} \right\} =$
 $\{\mu\}_i$

(2.1)

Donde:

$\{P\}$; vector de cargas actuando sobre jk

$[k_{ij}]$; matriz de rigidez de la barra jk

$\{S\}$; vector de desplazamientos nodales

$\{U\}$; vector de reacciones de empotramiento perfecto

2.2 Elementos de la matriz de rigidez $[k_{ij}]$.

En el cálculo de las rigideces k_{ij} se utilizan los principios energéticos expuestos considerando la energía elástica de deformación por flexión, corte y carga normal.

2.2.1 Fuerzas axiales P_1 y P_7 .

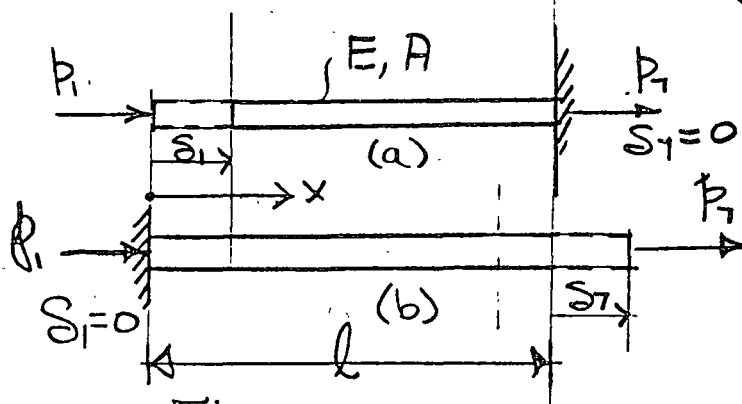


Fig. 2.2.1.1

De la ley de Hooke y la Fig. 2.2.1.2 se obtiene

$$k_{11} = \frac{P_1}{S_1} = \frac{EA}{l} ; \quad k_{71} = -\frac{EA}{l} \quad (a)$$

$$k_{77} = \frac{P_7}{S_7} = \frac{EA}{l} ; \quad k_{17} = -\frac{EA}{l} \quad (b)$$

2.2.2 Momentos de torsión m_4 y m_{10} .

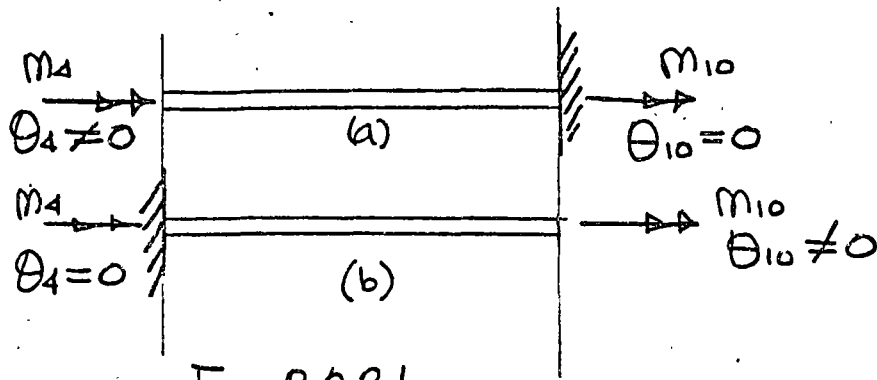


Fig. 2.2.2.1

De la teoría de torsión de barras y la fig. 2.2.2.1 se obtiene

$$k_{44} = \frac{m_4}{\theta_4} = \frac{GJ}{l} \quad ; \quad k_{10,4} = -\frac{GJ}{l} \quad (a)$$

$$k_{10,10} = \frac{m_{10}}{\theta_{10}} = \frac{GJ}{l} \quad ; \quad k_{4,10} = -\frac{GJ}{l} \quad (b)$$

2.2.3 Fuerzas de corte P_2 y P_8 .

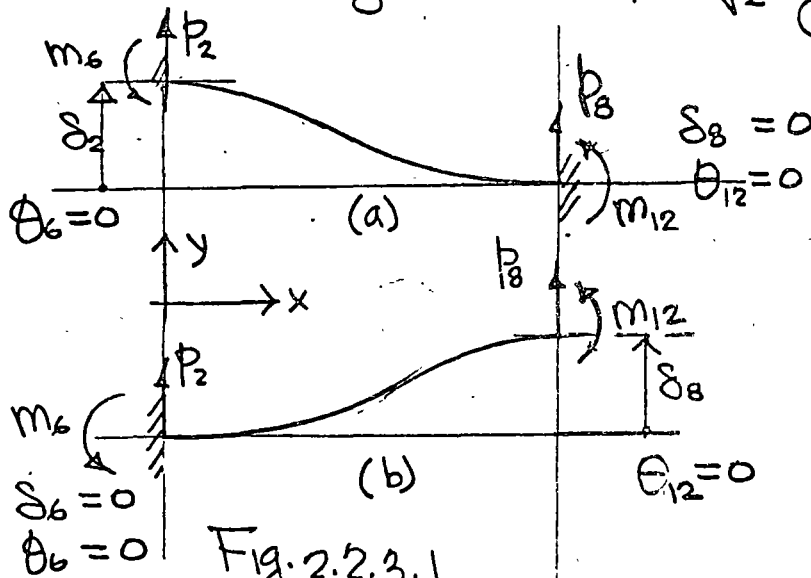


Fig. 2.2.3.1

De la Fig. 2.2.3.1 y los principios energéticos previamente expuestos, considerando la energía de deformación por flexión y cortante se obtiene

$$k_{22} = \frac{P_2}{\delta_2} = \frac{12EI_3}{(1+\phi_r)l^3} \quad a$$

$$k_{62} = \frac{m_6}{\delta_2} = \frac{6EI_3}{(1+\phi_r)l^2} \quad ; \quad k_{26} = \frac{P_2}{\theta_6} = \frac{6EI_3}{(1+\phi_r)l^2} \quad b$$

$$k_{82} = \frac{P_8}{\delta_2} = \frac{-12EI_3}{(1+\phi_r)l^3} \quad ; \quad k_{28} = \frac{P_2}{\delta_8} = \frac{-12EI_3}{(1+\phi_r)l^3} \quad c$$

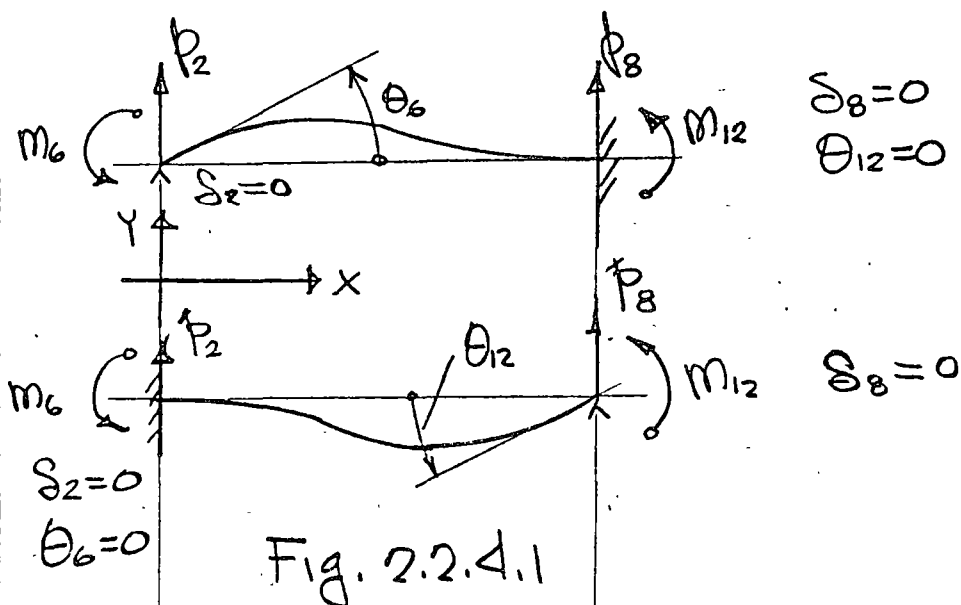
$$k_{12,2} = \frac{m_{12}}{\delta_2} = \frac{6EI_3}{(1+\phi_r)l^2} \quad ; \quad k_{2,12} = \frac{P_2}{\theta_{12}} = \frac{6EI_3}{(1+\phi_r)l^2} \quad d$$

$$k_{88} = \frac{P_8}{\delta_8} = \frac{P_2}{\delta_2} = \frac{12EI_3}{(1+\phi_r)l^3} \quad (\text{si } EI \text{ es constante}) \quad e$$

$$k_{12,8} = \frac{m_{12}}{\delta_8} = \frac{-6EI_3}{(1+\phi_r)l^2} = -\frac{P_2}{\theta_6} = -k_{62} \quad f$$

$$k_{8,12} = \frac{P_8}{\theta_{12}} = \frac{-6EI}{(1+\phi_r)l^2} \quad g$$

2.2.4 Momentos Factores



De la Fig. 2.2.4.1 y los principios energéticos previamente expuestos, considerando la energía de deformación por flexión y corte se obtiene

$$k_{66} = \frac{m_6}{\theta_6} = \frac{(4 + \phi_r) EI_3}{(1 + \phi_r) l} \quad a.$$

$$k_{86} = \frac{p_8}{\theta_6} = -\frac{6 EI_3}{(1 + \phi_r) l^2}; \quad k_{68} = \frac{m_6}{\delta_8} = -\frac{6 EI_3}{(1 + \phi_r) l^2} \quad b.$$

$$k_{12,6} = \frac{m_{12}}{\theta_6} = \frac{(2 - \phi_r) EI_3}{(1 + \phi_r) l}; \quad k_{6,12} = \frac{m_6}{\theta_{12}} = \frac{(2 - \phi_r) EI_3}{(1 + \phi_r) l} \quad c.$$

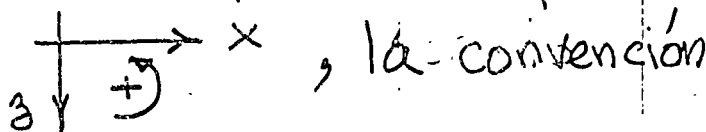
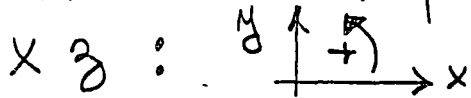
$$k_{12,12} = \frac{m_{12}}{\theta_{12}} = \frac{(4 + \phi_r) EI_3}{(1 + \phi_r) l} \quad d.$$

$$k_{8,12} = \frac{p_8}{\theta_{12}} = -\frac{6 EI_3}{(1 + \phi_r) l^2}; \quad k_{12,8} = \frac{m_{12}}{\delta_8} = k_{8,12} \quad e.$$

$$k_{6,12} = \frac{m_6}{\theta_{12}} = \frac{(2 - \phi_r) EI_3}{(1 + \phi_r) l}; \quad k_{12,6} = \frac{m_{12}}{\theta_6} = k_{6,12} \quad f.$$

2.2.5 Fuerzas de corte p_3 y p_9 .

Los coeficientes de rigidez relacionados con los desplazamientos δ_3 y δ_9 se obtienen de los resultados previos. Debe observarse, que con la convención de signos adoptada en la Fig 2.1 las direcciones de los momentos flectores positivos en el plano $x-y$ son diferentes al plano $x-z$:



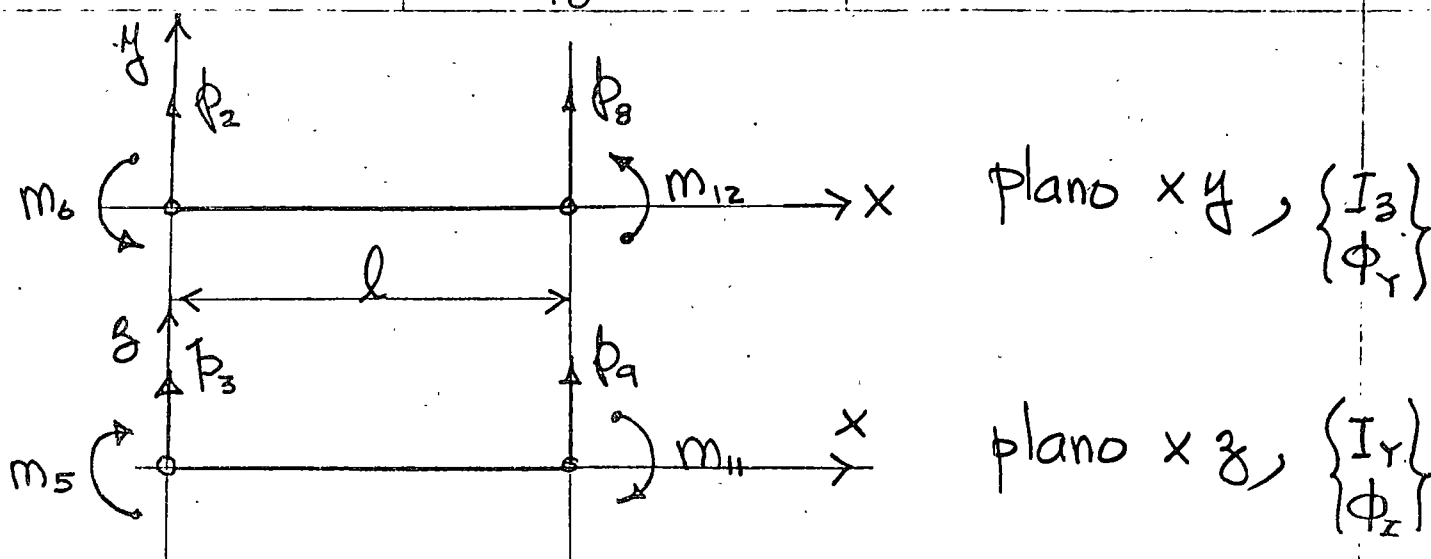


Fig. 2.2.5 Convención de signos para fuerzas de corte y momentos flectores;

de signos se muestra en la Fig. 2.2.5, basado en lo anterior es evidente que

$$k_{33} = \frac{P_3}{\delta_3} \equiv -k_{22} = -\frac{P_2}{\delta_2} \quad a$$

$$k_{53} = \frac{m_5}{\delta_3} \equiv -k_{62} = -\frac{m_6}{\delta_2} \quad b$$

$$k_{93} = \frac{P_9}{\delta_3} \equiv -k_{82} = -\frac{P_8}{\delta_2} \quad c$$

$$k_{11,3} = \frac{m_{11}}{\delta_3} \equiv -k_{12,2} = -\frac{m_{12}}{\delta_2} \quad d$$

$$k_{99} = \frac{P_9}{\delta_9} \equiv -k_{88} = -\frac{P_8}{\delta_8} \quad e$$

$$k_{11,9} = \frac{m_{11}}{\delta_9} \equiv -k_{12,8} = -\frac{m_{12}}{\delta_8} \quad f$$

Debe considerarse en el plano xz a I_Y y ϕ_Z como momento de inercia y parámetro de cortante.

2.2.6 Momentos Factores m_5 y m_{11}

Aplicando las mismas observaciones de la sección anterior, se obtiene

$$k_{55} = \frac{m_5}{\theta_5} \equiv k_{66} = \frac{m_6}{\theta_6} = \frac{(4 + \phi_3) EI_Y}{(1 + \phi_3) l}$$

$$k_{95} = \frac{p_9}{\theta_5} \equiv -k_{86} = -\frac{p_8}{\theta_6} = +\frac{6 EI_Y}{(1 + \phi_3) l} = k_{59}$$

$$k_{11,5} = \frac{m_{11}}{\theta_5} \equiv k_{12,6} = \frac{m_{12}}{\theta_6} = \frac{(2 - \phi_3) EI_Y}{(1 + \phi_3) l} = k_{5,11}$$

substituyendo los valores k_{ij} obtenidos en las subsecciones anteriores se obtiene la matriz de rigidez de la barra k de la Fig. 2.1 ecuación 2.5. en donde

$$\phi_Y = \frac{12 EI_3}{GA_{sY} l^2} = 24(1 + \nu) \frac{A}{A_{sY}} \left(\frac{\Gamma_3}{l} \right)^2 = \frac{12 f_Y EI_3}{GA l^2} \quad (2.3)$$

$$\phi_Z = \frac{12 EI_Y}{GA_{sZ} l^2} = 24(1 + \nu) \frac{A}{A_{sZ}} \left(\frac{\Gamma_Y}{l} \right)^2 = \frac{12 f_3 EI_Y}{GA l^2}$$

ν = relación de Poisson, A = área total de la sección, A_{sY} y A_{sZ} = áreas efectivas en cortante en direcciones y y z resp.

Γ_Y y Γ_3 = radios de giro respecto a y y z resp. a x .

ϕ_Y y ϕ_3 = Parámetros de deformación de corte. Si

Γ_3/l y Γ_Y/l son pequeños comparados con la unidad, como son en elementos flexibles, ambos ϕ_Y y ϕ_3

se pueden considerar cero. Los factores de forma son

$$f_Y = \frac{A}{I_3^2} \int_A \left(\frac{Q_3}{b_3} \right)^2 dA, \quad f_3 = \frac{A}{I_Y^2} \int_A \left(\frac{Q_Y}{b_Y} \right)^2 dA \quad (2.4)$$

$$[k_{ij}] =$$

S_1	S_2	S_3	θ_4	θ_5	θ_6	S_7	S_8	S_9	θ_{10}	θ_{11}	θ_{12}
$\frac{EA}{l}$											
0	$\frac{12EI_z}{l^3(1+\phi_r)}$										
0	0	$\frac{12EI_y}{l^3(1+\phi_z)}$									
0	0	0	$\frac{GJ}{l}$								
0	0	$\frac{-6EI_y}{l^2(1+\phi_z)}$	0	$\frac{(4+\phi_z)EI_y}{l(1+\phi_z)}$							
0	$\frac{6EI_z}{l^2(1+\phi_r)}$	0	0	0	$\frac{(4+\phi_r)EI_z}{l(1+\phi_r)}$						
$-\frac{EA}{l}$	0	0	0	0	0	$\frac{AE}{l}$					
0	$\frac{-12EI_z}{l^3(1+\phi_r)}$	0	0	0	$\frac{-6EI_z}{l^2(1+\phi_r)}$	0	$\frac{12EI_z}{l^3(1+\phi_r)}$				
0	0	$\frac{-12EI_y}{l^3(1+\phi_z)}$	0	$\frac{6EI_y}{l^2(1+\phi_z)}$	0	0	0	$\frac{12EI_y}{l^3(1+\phi_z)}$			
0	0	0	$\frac{-GJ}{l}$	0	0	0	0	0	$\frac{GJ}{l}$		
0	0	$\frac{-6EI_y}{l^2(1+\phi_z)}$	0	$\frac{(2-\phi_z)EI_y}{l(1+\phi_z)}$	0	0	0	$\frac{6EI_y}{l^2(1+\phi_z)}$	0	$\frac{(4+\phi_z)EI_y}{l(1+\phi_z)}$	
0	$\frac{6EI_z}{l^2(1+\phi_r)}$	0	0	0	$\frac{(2-\phi_r)EI_z}{l(1+\phi_r)}$	0	$\frac{-6EI_z}{l^2(1+\phi_r)}$	0	0	0	$\frac{(4+\phi_r)EI_z}{l(1+\phi_r)}$

(Simétrica)

Para problemas Bi-dimensionales, el elemento viga $i-k$ se reduce a seis fuerzas y momentos nodales y seis desplazamientos y rotaciones nodales. Utilizando

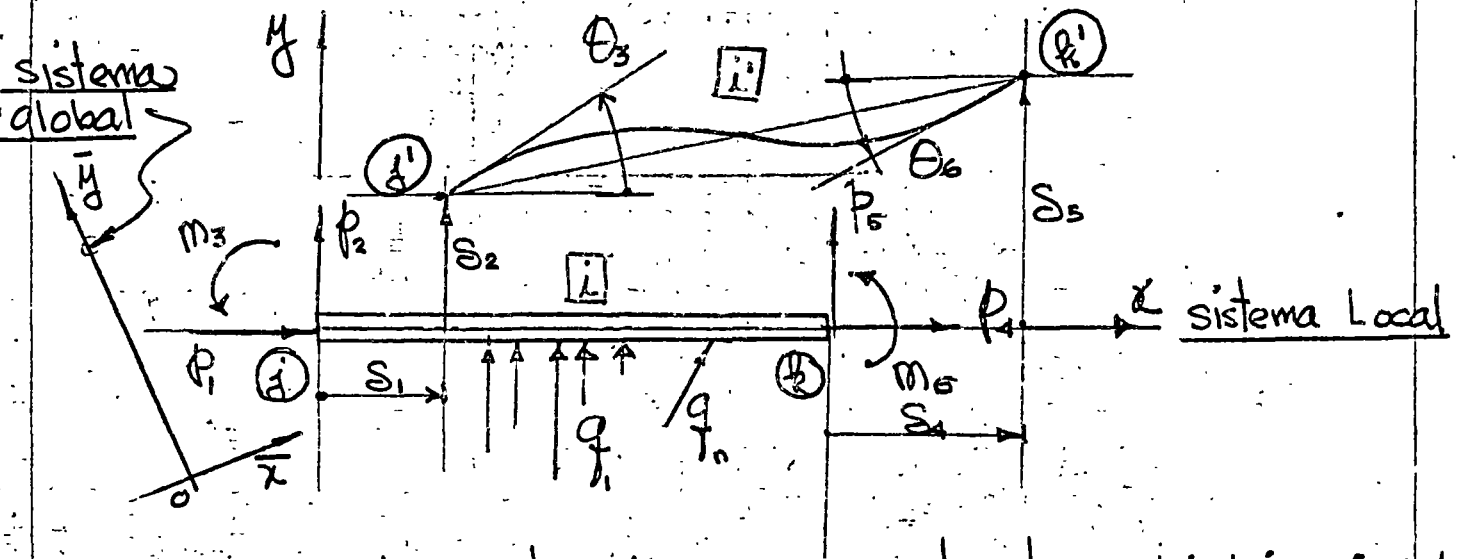


Fig. 2.2 Elemento viga para estructuras bidimensionales

la nomenclatura de la Fig. 2.2 (2.1) queda en

$$\begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ M_3 \\ P_4 \\ P_5 \\ M_6 \end{Bmatrix}_i = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} & k_{15} & k_{16} \\ k_{21} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & k_{26} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ k_{61} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & k_{66} \end{bmatrix}_i \begin{Bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ \theta_3 \\ S_4 \\ S_5 \\ \theta_6 \end{Bmatrix}_i + \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ \mu_3 \\ P_4 \\ P_5 \\ \mu_6 \end{Bmatrix}_i \quad (2.6)$$

o sea: $\{P\}_i = [k_{ij}]_i \{S\}_i + \{\mu\}_i \quad (2.7)$

De los resultados discutidos previamente la matriz de rigidez de la barra i figura 2.2 queda

42.381 30 SHEETS 5 SQUARE
 42.382 180 SHEETS 5 SQUARE
 42.383 200 SHEETS 5 SQUARE
 NATIONAL INSTRUMENTS

$$[k_{ij}] = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI_3}{l^3(1+\phi_r)} & \frac{6EI_3}{l^2(1+\phi_r)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{6EI_3}{l^2(1+\phi_r)} & \frac{(4+\phi_r)EI_3}{l(1+\phi_r)} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-12EI_3}{l^3(1+\phi_r)} & \frac{-6EI_3}{l^2(1+\phi_r)} & 0 & \frac{12EI_3}{l^3(1+\phi_r)} & 0 \\ 0 & \frac{6EI_3}{l^2(1+\phi_r)} & \frac{(2-\phi_r)EI_3}{l(1+\phi_r)} & 0 & \frac{-6EI_3}{l^2(1+\phi_r)} & \frac{(4+\phi_r)EI_3}{l(1+\phi_r)} \end{bmatrix} \begin{matrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \theta_3 \\ \delta_4 \\ \delta_5 \\ \theta_6 \end{matrix} \quad (2.8)$$

Si las deformaciones por cortante son despreciables esto es, $\phi_r = 0$, la matriz de rigidez (2.8) se simplifica a

$$[k_{ij}] = \frac{EI_3}{l^3} \begin{bmatrix} \frac{Al^2}{I_3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 6l & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6l & 4l^2 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{Al^2}{I_3} & 0 & 0 & \frac{Al^2}{I_3} & 0 & 0 \\ 0 & -12 & -6l & 0 & 12 & 0 \\ 0 & 6l & 2l^2 & 0 & -6l & 4l^2 \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

La ecuación matricial relacionando los desplazamientos entre el sistema coordinado local y el global. Puede fácilmente demostrarse para el elemento viga mostrada en

Fig. 2.1 es de la forma

$$\begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \delta_4 \\ \delta_5 \\ \delta_6 \\ \delta_7 \\ \delta_8 \\ \delta_9 \\ \delta_{10} \\ \delta_{11} \\ \delta_{12} \end{bmatrix} = [K] \begin{bmatrix} \lambda_{ox} \\ \lambda_{oy} \\ \lambda_{oz} \\ \lambda_{ox} \\ \lambda_{oy} \\ \lambda_{oz} \\ \lambda_{ox} \\ \lambda_{oy} \\ \lambda_{oz} \\ \lambda_{ox} \\ \lambda_{oy} \\ \lambda_{oz} \end{bmatrix}$$

donde $\lambda_{ox} = [\lambda_{ox} \ m_{ox} \ n_{ox}]$

$\lambda_{oy} = [\lambda_{oy} \ m_{oy} \ n_{oy}]$

$\lambda_{oz} = [\lambda_{oz} \ m_{oz} \ n_{oz}]$

(2.11)

(2.12)

representa las matrices de los cosenos directores

para las direcciones ox , oy y oz , respectivamente, referidas al sistema global \bar{x} , \bar{y} y \bar{z} , y $\{\bar{\delta}\}$ representa los desplazamientos de la barra [1] respecto al sistema global.

Para problemas bidimensionales la matriz de transformación $[\lambda]$ se reduce a

$$[\lambda] = \begin{bmatrix} l_{ox} & m_{ox} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ l_{oy} & m_{oy} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & l_{ox} & m_{ox} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & l_{oy} & m_{oy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

El análisis de marcos tridimensionales se puede describir por las mismas ecuaciones básicas usadas en la descripción del análisis de estructuras planas. Considerando el sistema total, el equilibrio estático nodal es definido por la ecuación matricial

$$[S_c] \{\delta_c\} + \{\mu_c\} = \{R_c\} \quad (2.14)$$

donde:

$[S_c]$ = Matriz de rigidez completa de la estructura.

$\{\delta_c\}$ = vector de desplazamientos nodales completo.

$\{\mu_c\}$ = vector de cargas nodales completo.

$\{R\}$ vector de reacciones de la estructura
y de (2.14) se obtiene la ecuación

$$[S_{uu}]\{S_u\} + \{\mu_u\} = 0 \quad (2.15)$$

de donde se obtiene $\{S_u\}$ y $\{S_c\}$, el que
substituyéndolo en (2.14) y (2.1) se obtiene
 $\{R_c\}$ y $\{\phi\}_i$ como

$$\{R_c\} = -[S_c][S_{uu}]^{-1}\{\mu_u\} \quad (2.16)$$

$$\{\phi\}_i = [k_{ij}]_i [S_{uu}]^{-1}\{\mu_u\} + \{\mu\}_i \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (2.17)$$

Ejemplo: En el sistema estructural de la Fig. 2.3,
determine las reacciones nodales $\{\phi\}_i$ en los extremos
de cada miembro y las reacciones originadas por
las cargas indicadas.

La estructura tiene miembros prismáticos con
las siguientes propiedades:

$$EI_y = EI_z = EI$$

$$GI_x = \frac{EI}{4}$$

$$EA_x = \frac{EI}{4}$$

(2.18)

la estructura es flexible y se puede considerar
la ($\phi_y = \phi_z$) deformación por cortante despreciable

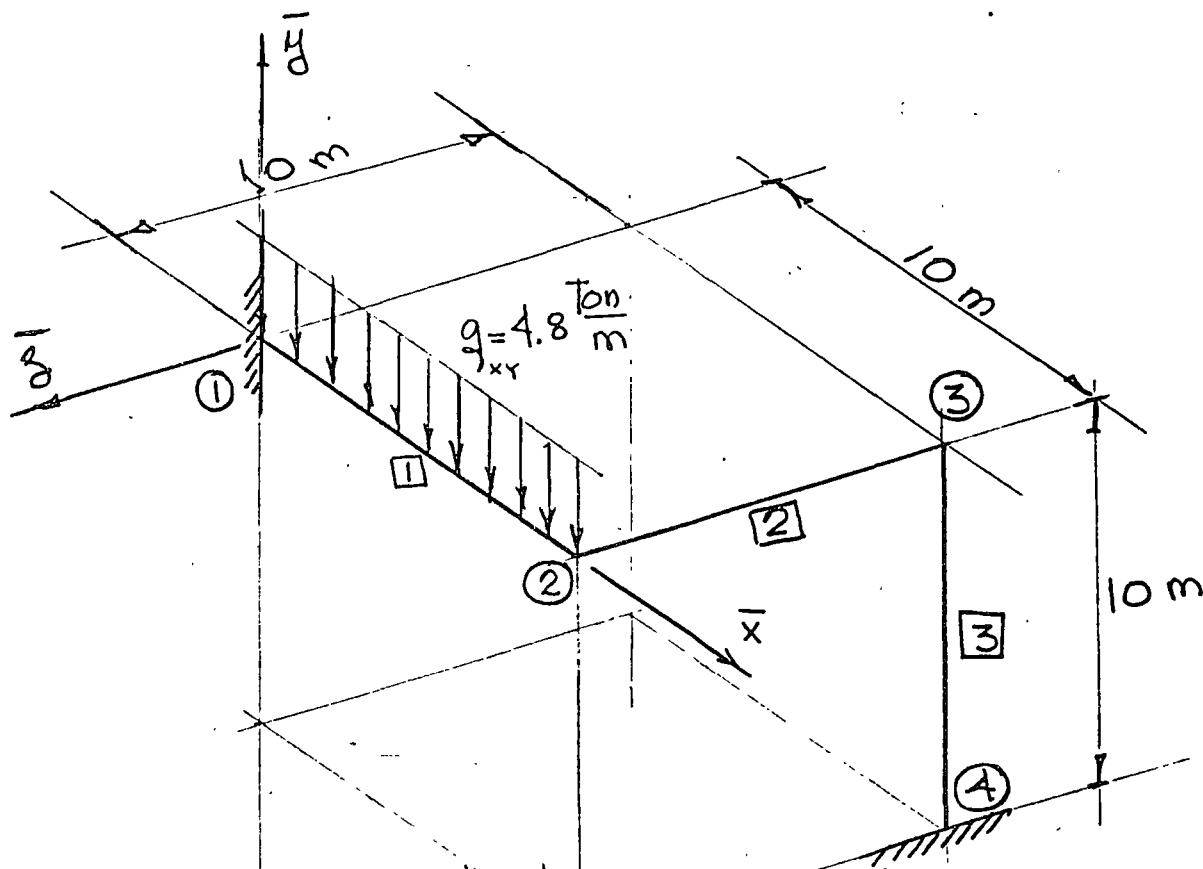


Fig. 2.3 Estructura espacial rígida

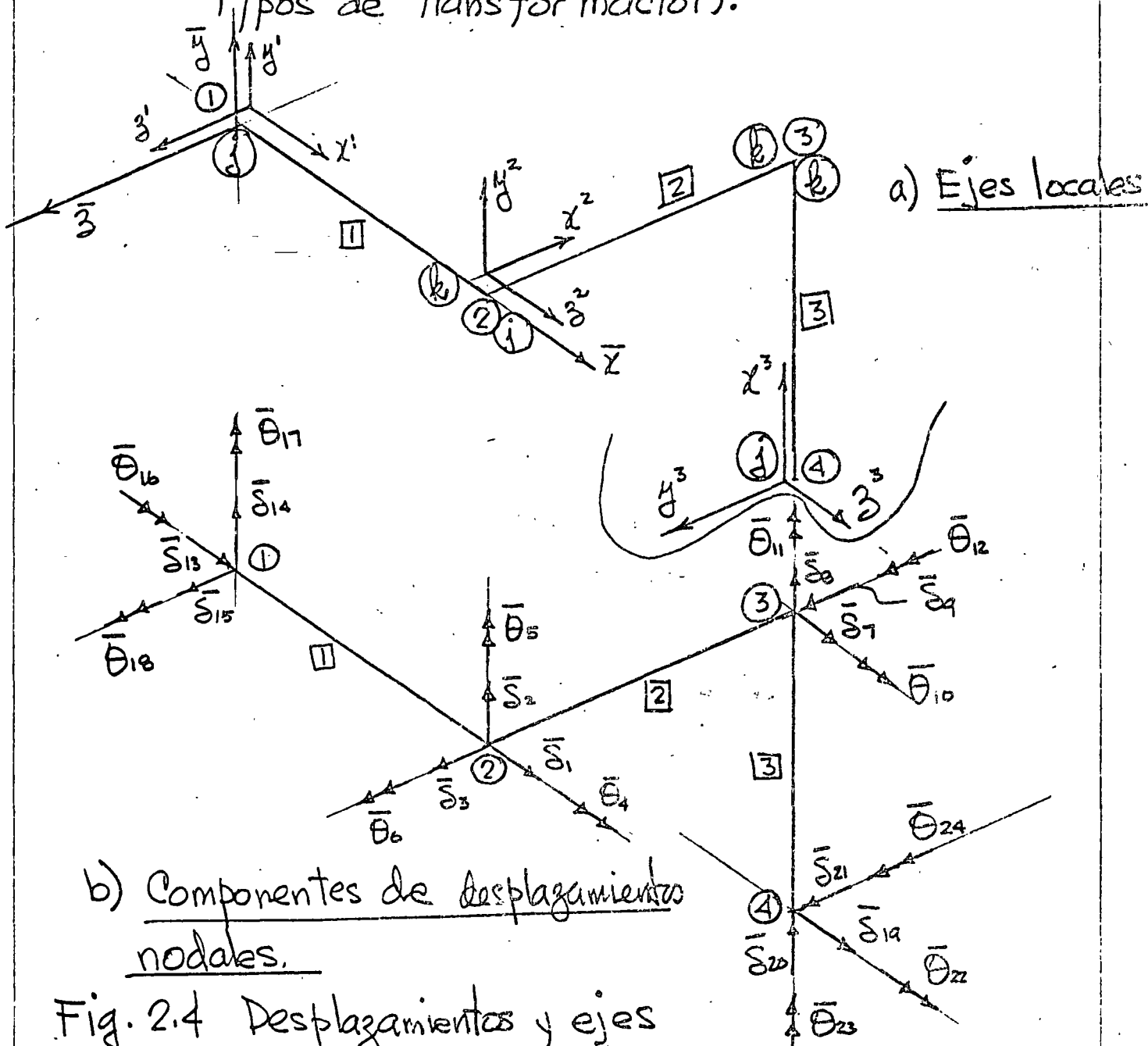
Las tablas 2.1 y 2.2 dan la información requerida para cada nodo y miembro.

Nodo	\bar{x}	\bar{y}	\bar{z}
1	0	0	0
2	10.0	0	0
3	10.0	0	-10.00
4	10.0	-10.00	-10.00

Tabla 2.1 coordenadas nodales en metros.

Barra	Longitud (m)	Nodo		Cosenos directores			TIPO DE TRANSFORMACION	Angulo ψ
		j	k	L_{0j}	M_{0j}	N_{0k}		
1	10.0	1	2	+1	0	0	$y-z-x$	0
2	10.0	2	3	0	0	-1	$y-z-x$	0
3	10.0	4	3	0	+1	0	$z-y-x$	90°

Tabla 2.2 longitudes, Cosenos directores y Tipos de Transformación.



vector columna de desplazamientos nodales $\{\delta_c\}$

$$\{\delta_c\} = \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \theta_4 \\ \theta_5 \\ \theta_6 \\ \delta_7 \\ \delta_8 \\ \delta_9 \\ \theta_{10} \\ \theta_{11} \\ \theta_{12} \\ \delta_{13} \\ \delta_{14} \\ \delta_{15} \\ \theta_{16} \\ \theta_{17} \\ \theta_{18} \\ \delta_{19} \\ \delta_{20} \\ \delta_{21} \\ \theta_{22} \\ \theta_{23} \\ \theta_{24} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{\delta_u\} \\ \{\delta_r\} \end{Bmatrix}$$

(2.19)

Matriz de rigidez de cada miembro

Para cada elemento viga, la matriz de rigidez se establece por medio de (2.1) con respecto a los ejes locales; la matriz de transformación se puede establecer por medio de la expresión (2.10); y la matriz de rigidez de miembro transformada, $[k_{ij}]_i$ respecto al sistema global se obtiene de

$$[k_{ij}]_i = [\lambda]_{ij}^T [k_{ij}]_i [\lambda]_{ij} \tag{2.20}$$

Miembro II

$$[\lambda]_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [I] ; [k_{ij}]_i = [I]_i^T [k_{ij}]_i [I]_i = [k_{ij}]_i \tag{2.21}$$

$$[k_{ij}]_i = EI \begin{matrix} & \begin{matrix} 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 13 \\ 14 \\ 15 \\ 16 \\ 17 \\ 18 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix} & \begin{bmatrix} .025 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -.025 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & .012 & 0 & 0 & 0 & .060 & 0 & -.012 & 0 & 0 & 0 & .060 \\ 0 & 0 & .012 & 0 & -.060 & 0 & 0 & 0 & -.012 & 0 & -.060 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & .025 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -.025 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -.06 & 0 & 0.4 & 0 & 0 & 0 & .06 & 0 & 0.2 & 0 \\ 0 & .06 & 0 & 0 & 0 & 0.4 & 0 & -.06 & 0 & 0 & 0 & 0.2 \\ -.025 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & .025 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -.012 & 0 & 0 & 0 & -.06 & 0 & .012 & 0 & 0 & 0 & -.06 \\ 0 & 0 & -.012 & 0 & .06 & 0 & 0 & 0 & .012 & 0 & .06 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -.025 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & .025 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -.06 & 0 & 0.2 & 0 & 0 & 0 & .06 & 0 & .4 & 0 \\ 0 & .06 & 0 & 0 & 0 & 0.2 & 0 & -.06 & 0 & 0 & 0 & .4 \end{bmatrix} \end{matrix} \tag{2.22}$$

42.381 50 SHEETS 5 SQUARE
 42.382 100 SHEETS 5 SQUARE
 42.383 200 SHEETS 5 SQUARE
 NATIONAL

Miembro [3], De (2.5) se obtiene la matriz de rigidez la cual resulta igual a la de los miembros

[1] y [2]

$$[k_{ij}]_3 = [k_{ij}]_2 = [k_{ij}]_1 \quad (2.26)$$

De (2.12) se obtiene

$$\bar{\lambda}_{0x_3} = [0 \ 1 \ 0]_3, \quad \bar{\lambda}_{0y_3} = [0 \ 0 \ 1]_3, \quad \bar{\lambda}_{0z_3} = [1 \ 0 \ 0]_3 \quad (2.27)$$

De (2.27) y (2.10) se obtiene

$$[\lambda]_3 = \begin{bmatrix} \begin{matrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{matrix} & & & \\ & \begin{matrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{matrix} & & \\ & & \begin{matrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{matrix} & \\ & & & \begin{matrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{matrix} \end{bmatrix} \quad (2.28)$$

De (2.20) (2.26) y (2.28) se obtiene

$$[k_{ij}]_3 = EI \begin{array}{c|cccccccccccc|c} 19 & 20 & 21 & 22 & 23 & 24 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & \\ \hline .012 & 0 & 0 & 0 & 0 & -.06 & -.012 & 0 & 0 & 0 & 0 & -.06 & 19 \\ 0 & .025 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -.025 & 0 & 0 & 0 & 0 & 20 \\ 0 & 0 & .012 & .06 & 0 & 0 & 0 & 0 & -.012 & .06 & 0 & 0 & 21 \\ 0 & 0 & .06 & .4 & 0 & 0 & 0 & 0 & -.06 & .2 & 0 & 0 & 22 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & .025 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -.025 & 0 & 23 \\ -.06 & 0 & 0 & 0 & 0 & .4 & .06 & 0 & 0 & 0 & 0 & .2 & 24 \\ -.012 & 0 & 0 & 0 & 0 & .06 & .012 & 0 & 0 & 0 & 0 & .06 & 7 \\ 0 & -.025 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & .025 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & -.012 & -.06 & 0 & 0 & 0 & 0 & .012 & -.06 & 0 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & .06 & .2 & 0 & 0 & 0 & 0 & -.06 & .4 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -.025 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & .025 & 0 & 11 \\ -.06 & 0 & 0 & 0 & 0 & .2 & .06 & 0 & 0 & 0 & 0 & .4 & 12 \end{array} \quad (2.29)$$

42 SHEETS 5 SQUARE
43 SHEETS 5 SQUARE
22 SHEETS 5 SQUARE
NATIONAL

Matriz de rigidez de la estructura.

La matriz completa de la estructura $[S_c]$ se obtiene sumando los coeficientes de rigidez de miembro dados en las expresiones (2.22), (2.25) y (2.29) con respecto a la identificación de subíndices de los elementos se obtiene

$$[S_c] = EI \begin{bmatrix} .037 & 0 & 0 & 0 & -.06 & 0 & -.012 & 0 & 0 & 0 & -.06 & 0 & 1 \\ 0 & .024 & 0 & .06 & 0 & -.06 & 0 & -.012 & 0 & .06 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & .037 & 0 & .06 & 0 & 0 & 0 & -.025 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & .06 & 0 & .425 & 0 & 0 & 0 & -.06 & 0 & 0.2 & 0 & 0 & 4 \\ -.06 & 0 & .06 & 0 & 0.8 & 0 & .06 & 0 & 0 & 0 & 0.2 & 0 & 5 \\ 0 & -.06 & 0 & 0 & 0 & .425 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -.025 & 6 \\ -.012 & 0 & 0 & 0 & .06 & 0 & .024 & 0 & 0 & 0 & .06 & .06 & 7 \\ 0 & -.012 & 0 & -.06 & 0 & 0 & 0 & .037 & 0 & -.06 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & -.025 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & .037 & -.06 & 0 & 0 & 9 \\ 0 & .06 & 0 & 0.2 & 0 & 0 & 0 & -.06 & -.06 & .8 & 0 & 0 & 10 \\ -.06 & 0 & 0 & 0 & 0.2 & 0 & .06 & 0 & 0 & 0 & .425 & 0 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -.025 & .06 & 0 & 0 & 0 & 0 & .425 & 12 \\ \hline -.025 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 13 \\ 0 & -.012 & 0 & 0 & 0 & .06 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 14 \\ 0 & 0 & -.012 & 0 & -.06 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & -.025 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 16 \\ 0 & 0 & .06 & 0 & 0.2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 17 \\ 0 & -.06 & 0 & 0 & 0 & 0.2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 18 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -.012 & 0 & 0 & 0 & 0 & -.06 & 19 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -.025 & 0 & 0 & 0 & 0 & 20 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -.012 & .06 & 0 & 0 & 21 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -.06 & .2 & 0 & 0 & 22 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -.025 & 0 & 23 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & .06 & 0 & 0 & 0 & 0 & .2 & 24 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} \\ S_{12} \\ \hline S_{21} \\ S_{22} \end{bmatrix} \quad (2.30)$$

De (2.30) se obtiene $[S_{11}]^{-1}$

R. Calleseros

MARZO - 1966

DES FI - UNAM

31

31

(231)

$$\left[\frac{\partial S}{\partial u} \right] = E \cdot I$$

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
38.396	1.266	-6.236	0.001	1.750	0.085	11.279	-0.403	-5.028	-0.503	3.005	-1.578
1.266	210.745	-43.160	-21.908	5.487	30.182	-39.151	11.279	-50.707	-13.286	3.124	7.303
-6.236	-43.160	102.028	2.421	-11.235	-6.537	50.707	5.028	84.038	9.312	-2.752	-7.543
0.001	-21.908	2.421	5.546	-0.346	-3.130	3.124	3.005	2.752	0.688	-0.278	-0.625
1.750	5.487	-11.235	-0.346	3.048	0.888	-13.286	-0.503	-9.312	-1.061	0.688	1.928
0.085	30.182	-6.537	-3.130	0.888	6.698	-7.303	1.587	-7.543	-1.928	0.625	1.425
11.279	-39.151	50.707	3.124	-13.286	-7.303	210.745	1.266	43.160	5.487	-21.908	-30.182
-0.403	11.279	5.028	3.005	-0.503	1.587	1.266	38.396	6.236	1.757	0.001	-0.085
-5.028	-50.707	84.038	2.752	-9.312	-7.543	43.160	6.236	102.028	11.235	-2.421	-6.537
-0.503	-13.286	9.312	0.688	-1.061	-1.928	5.487	1.750	11.235	3.048	-0.346	-0.888
3.005	3.124	-2.752	-0.278	0.688	0.625	-21.908	0.001	-2.421	-0.346	5.546	3.130
-1.587	7.303	-7.543	-0.625	1.928	1.425	-30.182	-0.085	-6.537	-0.888	3.130	6.698

Vector de momentos y reacciones fijas miembro $\boxed{1}$

$$\{\mu\}_1 = \begin{Bmatrix} P_{13} \\ P_{14} \\ P_{15} \\ \mu_{16} \\ \mu_{17} \\ \mu_{18} \\ P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ \mu_4 \\ \mu_5 \\ \mu_6 \end{Bmatrix}_1 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 24 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 40 \\ 0 \\ 24 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -40 \end{Bmatrix}_1 = \{\bar{\mu}\}_1 \quad (2.32)$$

$$\{\bar{\mu}\}_1 = [\lambda]_1^T \{\mu\}_1 \quad (2.33)$$

$$\{\mu\}_2 = 0 \quad ; \quad \{\bar{\mu}\}_2 = 0$$

$$\{\mu\}_3 = 0 \quad ; \quad \{\bar{\mu}\}_3 = 0$$

Habiendo definido las cargas nodales en términos de las acciones fijas en los extremos con respecto a los ejes de referencia, se deduce el vector de cargas nodales completo $\{\mu\}_1$, como.

$$\{\mu_c\} = \begin{Bmatrix} \{\mu_{ij}\} \\ \{\mu_r\} \end{Bmatrix}$$

0	1
-24	2
0	3
0	4
0	5
40.0	6
0	7
0	8
0	9
0	10
0	11
0	12
0	13
-24	14
0	15
0	16
0	17
-40.0	18
0	19
0	20
0	21
0	22
0	23
0	24

(2.34)

Etiqueta de grados de libertad

42.381 50 SHEETS 3 SQUARE
 42.382 100 SHEETS 5 SQUARE
 42.389 200 SHEETS 5 SQUARE
 NATIONAL

Substituyendo (2.31) y (2.34) en (2.15) se obtiene

$$\{\bar{S}_u\} = -[S_{uu}]^{-1} \{R_u\} \quad (2.35)$$

$$\{\bar{S}_u\} = \begin{pmatrix} \bar{S}_1 \\ \bar{S}_2 \\ \bar{S}_3 \\ \bar{\theta}_4 \\ \bar{\theta}_5 \\ \bar{\theta}_6 \\ \bar{S}_7 \\ \bar{S}_8 \\ \bar{S}_9 \\ \bar{\theta}_{10} \\ \bar{\theta}_{11} \\ \bar{\theta}_{12} \end{pmatrix} = \frac{1}{EI} \begin{pmatrix} -26.984 \\ -3850.6 \\ 774.36 \\ 400.592 \\ -96.168 \\ -456.448 \\ 647.504 \\ -207.216 \\ 915.248 \\ 241.744 \\ -49.976 \\ -118.272 \end{pmatrix} \quad (2.36)$$

Los valores de los desplazamientos dados por (2.36) con respecto al sistema global son valores relativos, para obtener los valores se substituye E en ton/m^2 e I en m^4 en (2.36) y se obtiene S_i en metros y θ en radianes.

Acciones Finales en los extremos.

Habiendo evaluado las componentes de los desplazamientos nodales con respecto al sistema global de referencia por medio de (2.10) se evalúan con respecto a las coordenadas locales de cada barra y las acciones

finales para cada miembro de la estructura se calculan de (2.1)

$$\{p\}_i = [k_{ij}] [\lambda]_i \{\bar{S}\}_i + \{\mu\}_i \quad (2.37)$$

De la Fig. 2.4 se tiene para el miembro III

$$\{\bar{S}\}_1 = \begin{Bmatrix} \bar{S}_3 \\ \bar{S}_4 \\ \bar{S}_5 \\ \bar{\theta}_6 \\ \bar{\theta}_7 \\ \bar{\theta}_8 \\ \bar{S}_1 \\ \bar{S}_2 \\ \bar{S}_3 \\ \bar{\theta}_4 \\ \bar{\theta}_5 \\ \bar{\theta}_6 \end{Bmatrix} = \frac{1}{EI} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -26.984 \\ -3850.6 \\ 774.36 \\ 400.592 \\ -96.168 \\ -456.448 \end{Bmatrix} \quad (2.38)$$

De (2.21), (2.38), (2.1) y (2.5) se obtiene

$$\{P\}_1 = \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ M_4 \\ M_5 \\ M_6 \\ P_7 \\ P_8 \\ P_9 \\ M_{10} \\ M_{11} \\ M_{12} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.7 \text{ Ton} \\ 42.8 \text{ Ton} \\ -3.5 \text{ Ton} \\ -10.0 \text{ Ton-m} \\ 27.2 \text{ Ton-m} \\ 179.7 \text{ Ton-m} \\ -0.7 \text{ Ton} \\ 5.2 \text{ Ton} \\ 3.5 \text{ Ton} \\ 10.0 \text{ Ton-m} \\ 8.0 \text{ Ton-m} \\ 8.5 \text{ Ton-m} \end{Bmatrix}$$

(Índices según
convención Fig. 2.4)

(2.39)

Miembro [2] . $\{\bar{S}\}_2 = \{S_u\} = [\lambda]_2 \{\bar{S}_u\}$ y $\{u\}_2 = \{0\}$
De (2.24), (2.25), (2.1) y (2.5) se obtiene

$$\{P\}_2 = \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ M_4 \\ M_5 \\ M_6 \\ P_7 \\ P_8 \\ P_9 \\ M_{10} \\ M_{11} \\ M_{12} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 3.5 \text{ Ton} \\ -5.2 \text{ " } \\ 0.7 \text{ " } \\ 8.5 \text{ Ton-m} \\ -8.0 \text{ " } \\ -10.0 \text{ " } \\ -3.5 \text{ Ton} \\ 5.2 \text{ " } \\ -0.7 \text{ " } \\ -8.5 \text{ Ton-m} \\ 1.2 \text{ " } \\ -41.8 \text{ " } \end{Bmatrix}$$

(Índices según
convención Fig. 2.4)

(2.40)

Miembro [3]

$$\{S\}_3 = \begin{Bmatrix} S_{19} \\ S_{20} \\ S_{21} \\ \theta_{22} \\ \theta_{23} \\ \theta_{24} \\ S_{25} \\ S_{26} \\ S_{27} \\ \theta_{28} \\ \theta_{29} \\ \theta_{30} \\ \theta_{31} \\ \theta_{32} \end{Bmatrix}_3 = \frac{1}{EI} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 647.504 \\ -207.216 \\ 915.248 \\ 241.744 \\ -49.976 \\ -118.272 \end{Bmatrix}_3 \quad (2.41)$$

en [3] también $\{U\}_3 = 0$, De (2.28), (2.29), (2.1) y (2.5) se obtiene

$$\{P\}_3 = \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ M_4 \\ M_5 \\ M_6 \\ P_7 \\ P_8 \\ P_9 \\ M_{10} \\ M_{11} \\ M_{12} \end{Bmatrix}_3 = \begin{Bmatrix} 5.2 \text{ Ton} \\ 3.5 \text{ ''} \\ -0.7 \text{ ''} \\ 1.2 \text{ Ton-m} \\ 15.2 \text{ ''} \\ -6.6 \text{ ''} \\ -5.2 \text{ Ton} \\ -3.5 \text{ ''} \\ 0.7 \text{ ''} \\ -1.2 \text{ Ton-m} \\ -8.5 \text{ ''} \\ 41.8 \text{ ''} \end{Bmatrix}_3 \quad (2.42)$$

Reacciones.

Substituyendo las matrices apropiadas en

$$\{R\} = [S_{ru}] \{S_u\} - \{U_r\}$$

se obtiene

$$\{R\} = \begin{Bmatrix} R_{13} \\ R_{14} \\ R_{15} \\ R_{16} \\ R_{11} \\ R_{18} \\ R_{19} \\ R_{20} \\ R_{21} \\ R_{22} \\ R_{23} \\ R_{24} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.7 \text{ Ton} \\ 42.8 \text{ ''} \\ -3.5 \text{ ''} \\ -10.0 \text{ Ton-m} \\ 27.2 \text{ Ton-m} \\ 179.7 \text{ ''} \\ -0.7 \text{ Ton} \\ 5.2 \text{ ''} \\ 3.5 \text{ ''} \\ -6.6 \text{ Ton-m} \\ 1.2 \text{ ''} \\ 15.2 \text{ ''} \end{Bmatrix}$$

2.43

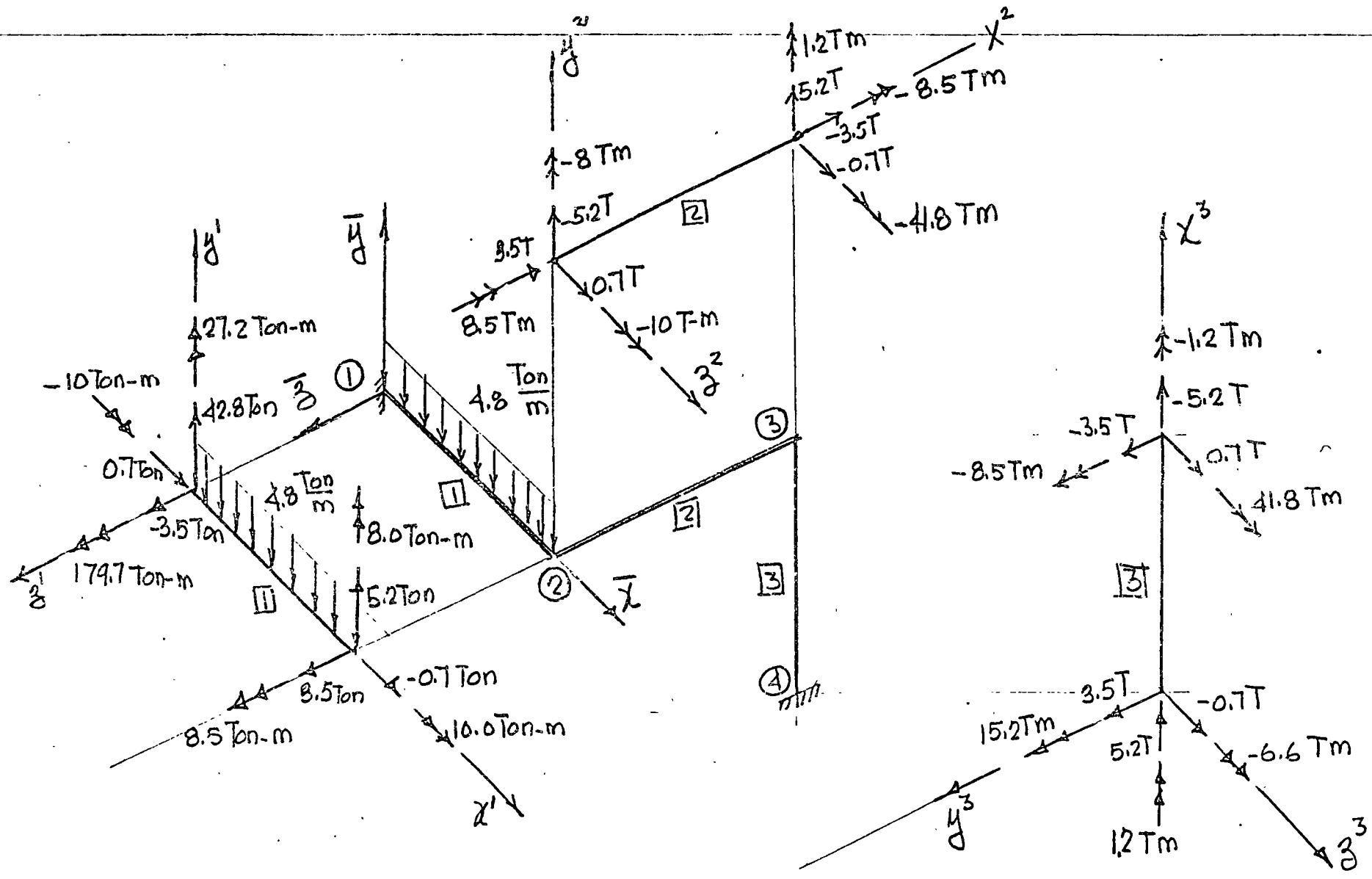


Fig. 2.5 Componentes de acciones finales $\{P_{ij}\}$ en los extremos j k

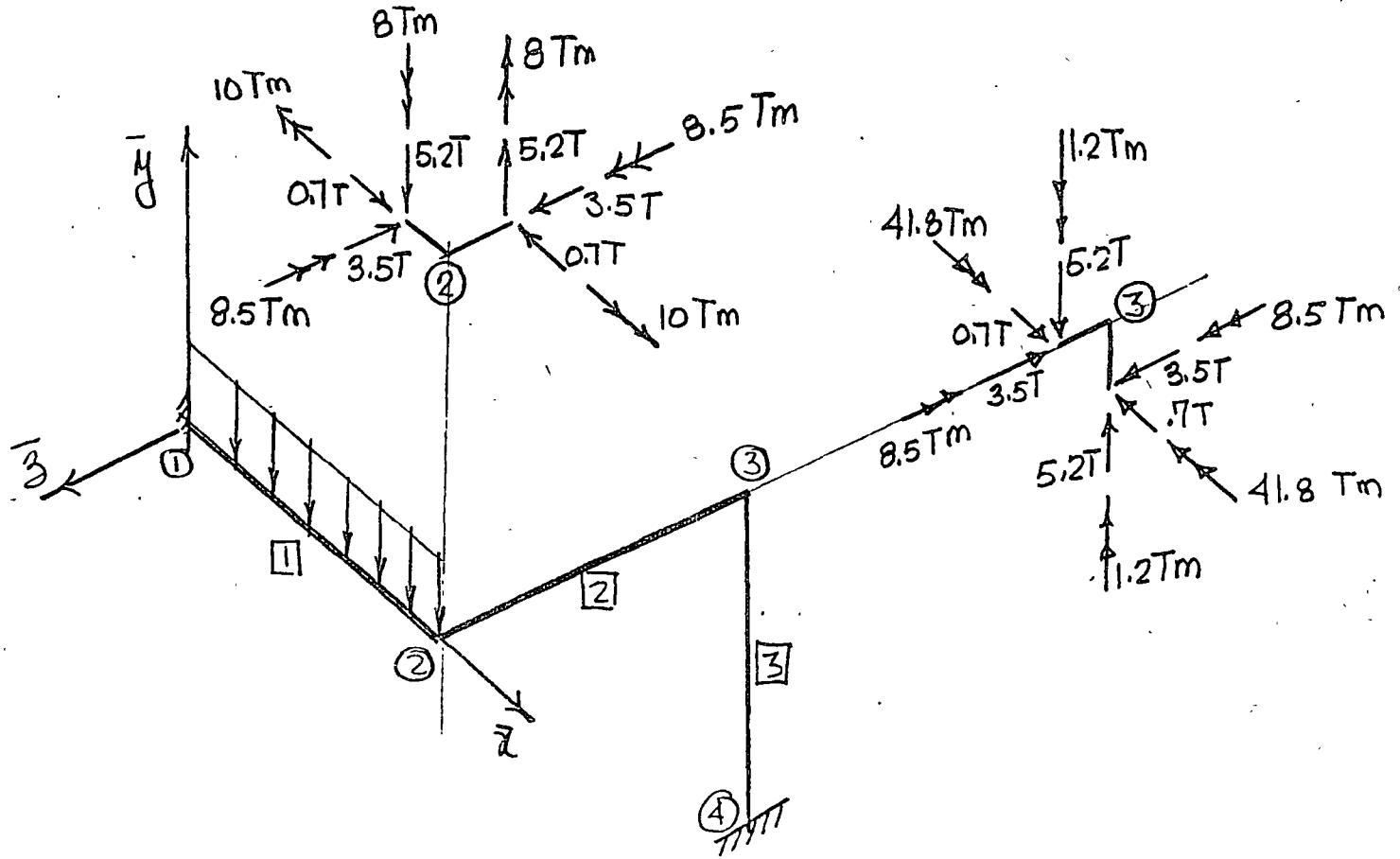


Fig. 2.6 Diagrama de cuerpo libre de los nodos ② y ③

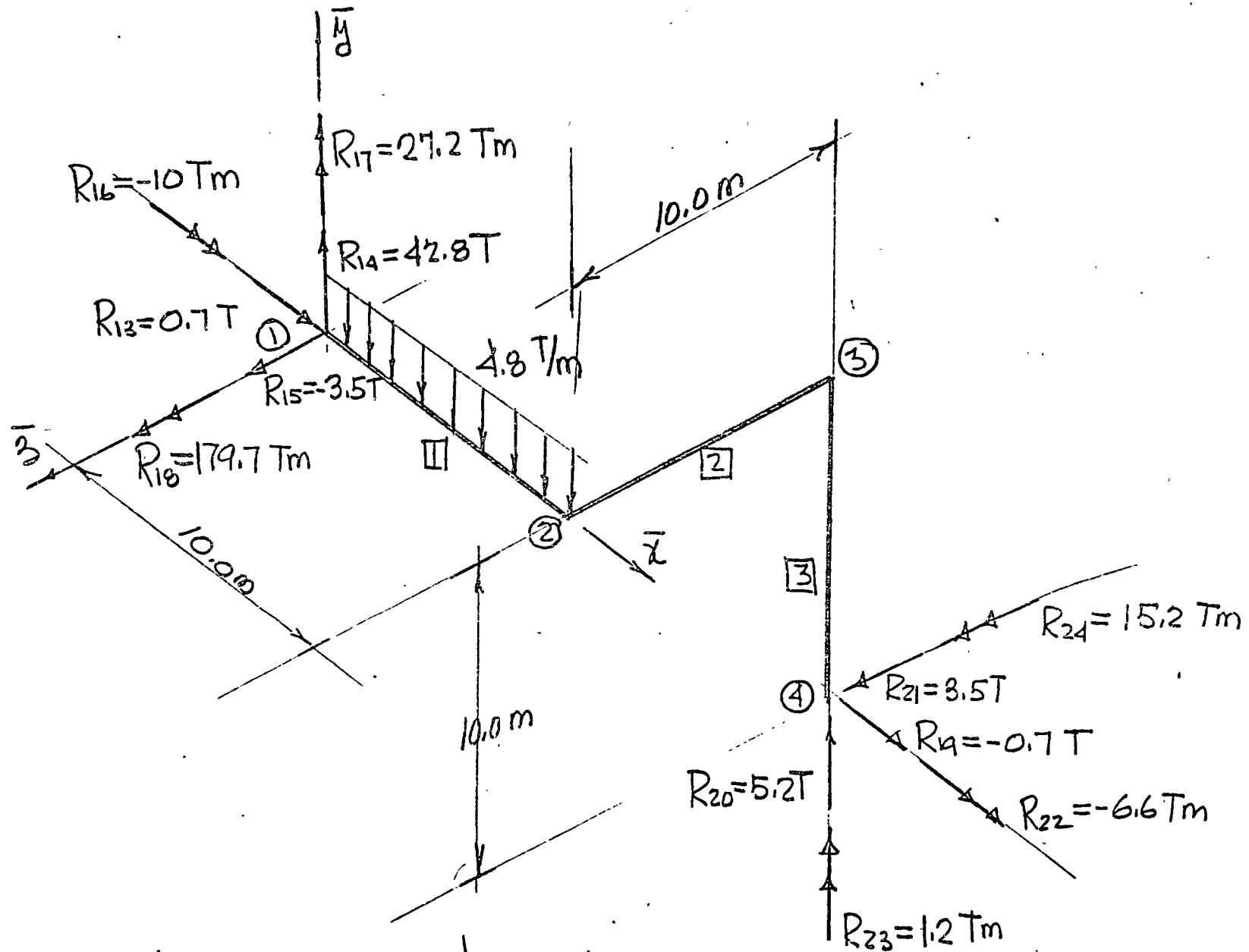


Fig. 2.7 Componentes de las reacciones en los apoyos ① y ④

METODO DE ANALISIS POR ELEMENTOS FINITOS.

INTRODUCCION.

El ingeniero en la busca de los valores numéricos adecuados para describir su proceso de diseño, se encontraba generalmente con formulaciones matemáticas difíciles. Por ejemplo, considerando el simple caso de teoría de flexión de placas, bajo las hipótesis de pequeñas deformaciones y que las secciones planas permanecen planas después de la deformación, la ecuación diferencial que gobierna el análisis para un material elástico lineal homogéneo e isotrópico es

$$\frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 W}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 W}{\partial y^4} = \frac{q}{D} \quad (1)$$

donde W es la deflexión en el punto (x, y) , q es la intensidad de la carga en el punto (x, y) , y $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ es la rigidez flexionante de la placa la cual depende del módulo de elasticidad E , el espesor de la placa h y la relación de Poisson ν . En la Fig. 1 se presenta un elemento diferencial de la placa y las acciones y reacciones sobre él. Combinando la flexión simple en dos direcciones se obtiene para los momentos y cortantes por unidad de longitud de placa lo siguiente:

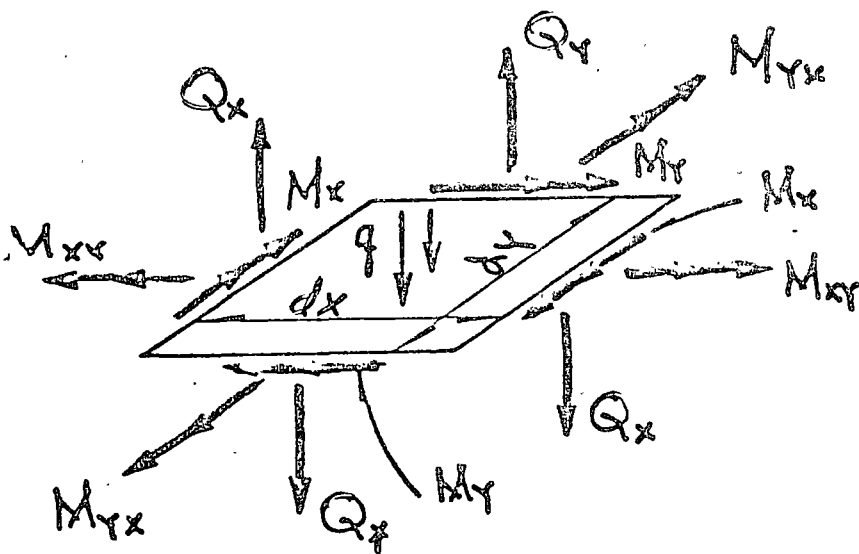
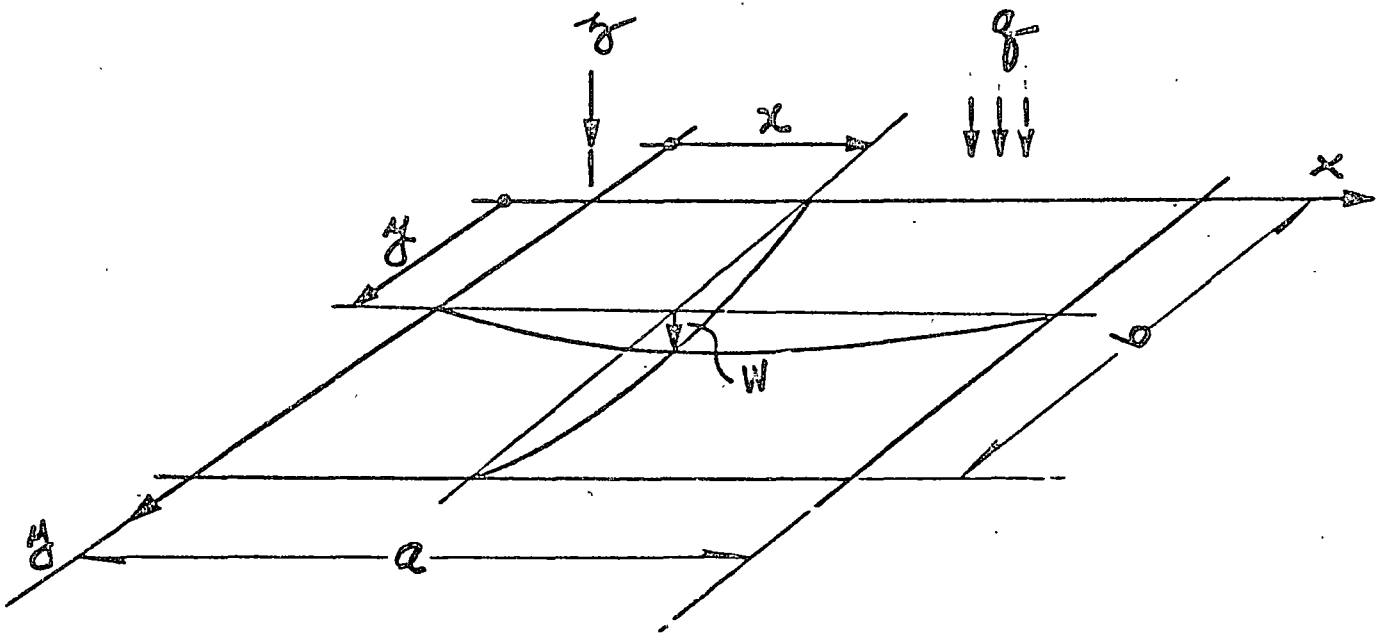


Fig. 1 Superficie media de una placa, y un elemento diferencial dx, dy .

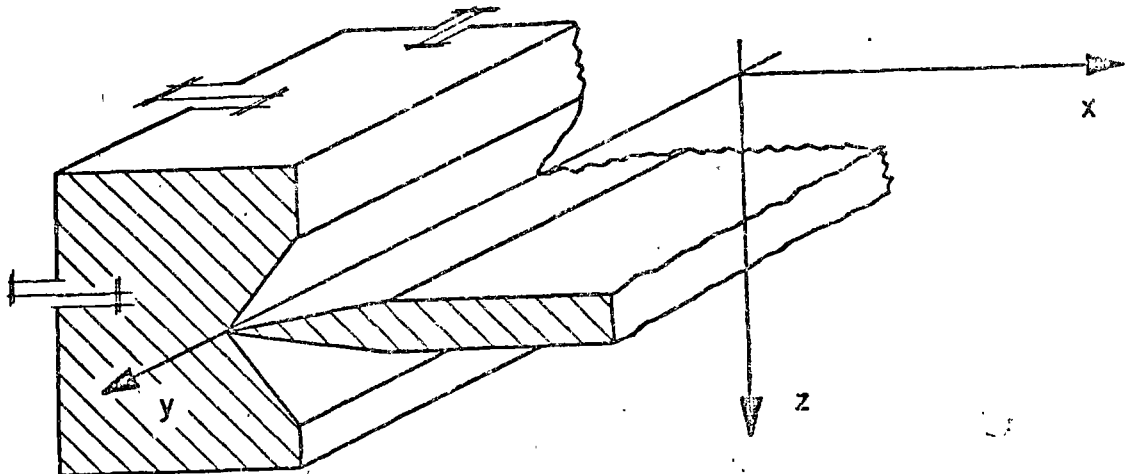
$$\begin{aligned}
 M_x &= -D \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right) \\
 M_y &= -D \left(\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right) \\
 M_{xy} &= D(1-\nu) \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \\
 Q_x &= -D \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 W \\
 Q_y &= -D \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 W
 \end{aligned} \tag{2}$$

donde

$$\nabla^2 W = \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2}$$

Para el caso particular de la placa libremente apoyada, y rectangular, -
cuyas condiciones en la frontera (Fig. 2) son:

$$\begin{aligned}
 W(0, y) &= 0 \\
 W_{xx}(0, y) + \nu W_{yy}(0, y) &= 0
 \end{aligned} \tag{3}$$



Navier en 1820 presentó a la Academia Francesa de Ciencias, la solución representando la carga $q(x, y)$, por medio de una serie trigonométrica doble

$$q(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \operatorname{sen} \frac{m\pi}{a} x \operatorname{sen} \frac{n\pi}{b} y \quad (4)$$

substituye (4) en (1) y considerando las propiedades de ortogonalidad de las series trigonométricas obtiene la solución de la ecuación diferencial bi-armónica

(1) como

$$W = \frac{1}{\pi^4 D} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_{mn}}{\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)^2} \operatorname{sen} \frac{m\pi}{a} x \operatorname{sen} \frac{n\pi}{b} y \quad (5)$$

en donde el coeficiente A_{mn} viene expresado por

$$A_{mn} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b q(x, y) \operatorname{sen} \frac{m\pi}{a} x \operatorname{sen} \frac{n\pi}{b} y \, dx \, dy \quad (6)$$

El procedimiento de Navier consiste en lo siguiente: Conocida la función de carga $q(x, y)$, se substituye en (6) y se obtiene el coeficiente A_{mn} el cual nuevamente se substituye en (5) y se obtiene la deflexión $W(x, y)$, y por medio las ecuaciones (2) se obtienen los momentos y cortantes $\{M\}$ y $\{Q\}$.

Es importante observar que las limitaciones de Navier se refieren a una placa rectangular libremente apoyada y con una función de carga $q(x, y)$ impar con respecto a x , y con respecto a Y , es decir, $f(x) = -f(-x)$ y

Si la función fuese par, la representación de $q(x, y)$ sería mediante una serie de cosenos, y si $q(x, y)$ fuese una función cual

quiera, se representaría mediante una serie trigonométrica doble completa de senos y cosenos, y se tendrían problemas en satisfacer las condiciones en la frontera. Generalmente la convergencia de la serie (5) es lenta, y en algunos casos es necesario considerar más de 500 términos para asegurar la solución correcta.

Posteriormente en 1900 M. Levy cambia de posición los ejes coordenados (Fig. 3) e utiliza una serie trigonométrica simple

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} f_m(y) \operatorname{sen} \frac{m\pi}{a} x \tag{7}$$

El procedimiento de Levy consiste en substituir (7) en (1) obteniendo una ecuación diferencial lineal de cuarto orden en $f_m(y)$ con coeficientes constantes no homogénea con la cual ya es posible satisfacer diferentes condiciones en la frontera $y = \pm \frac{b}{2}$, pero continua limitado a una placa rectangular libremente apoyada en las fronteras $x = 0$ y $x = a$.

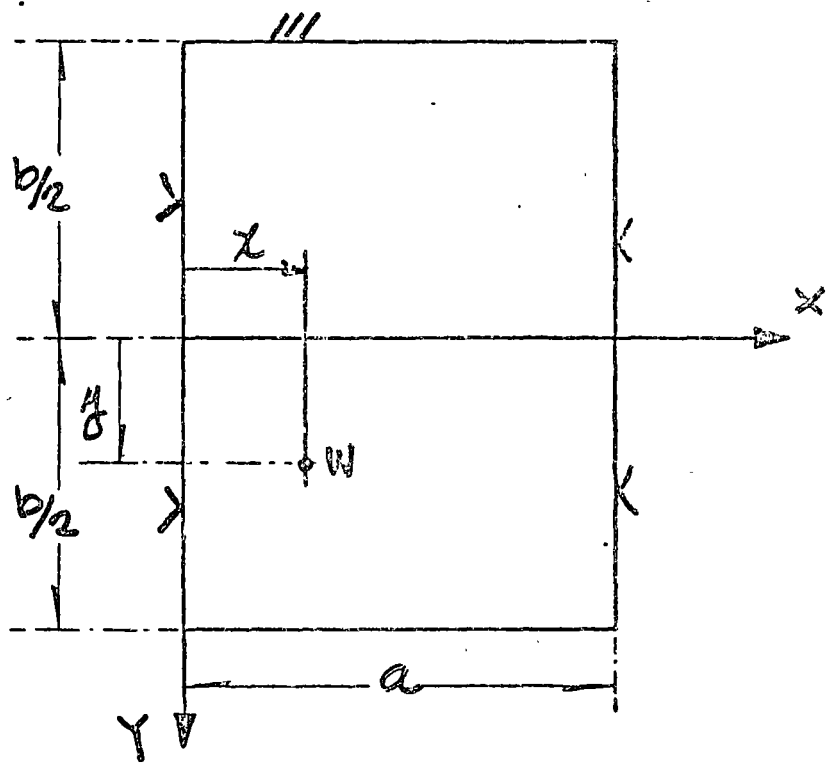


Fig. 3 Posición de ejes en solución de M. Levy.

Las limitaciones de análisis tan restringidas, como los ejemplos anteriores, aparecían en innumerables problemas de ingeniería, lo cual originó el principio de los métodos numéricos, el cual presenta dos etapas de desarrollo. Antes de la época de las computadoras, donde representa un importante papel el Prof. Southwell del Colegio Imperial de Inglaterra, desarrollando y aplicando los métodos numéricos de relajación y diferencias finitas, superando las limitaciones restringidas de los métodos analíticos de solución.

Durante la era de las computadoras digitales, el método de análisis por elementos finitos ha obtenido gran popularidad, puesto que en este procedimiento como resultado de la discretización del medio por analizar, se obtienen sistemas grandes de ecuaciones algebraicas lineales simultáneas, lo cual actualmente su solución no representa ningún problema. Por ejemplo, en el caso de análisis elástico lineal de placas, podemos tener cualquier condición de apoyo, de geometría y de cargas, prácticamente se eliminan la mayoría de las restricciones de las soluciones analíticas mencionadas, el problema más importante es verificar adecuadamente su convergencia.

El primer trabajo referente al método se debe a Hrenikoff Ref. 1 publicado en 1941, y el segundo a McHenry publicado en 1943 en ambos trabajos (Fig. 4) se verifican soluciones de problemas de elasticidad bidimensional en estado plano de esfuerzos, discretizando el medio y buscando la analogía con la solución estructural.

Posteriormente en 1949 Newmark, en su libro de Métodos Numéricos Ref. 3 , presenta los métodos de Hrenikoff y McHenry. Sin embargo, el

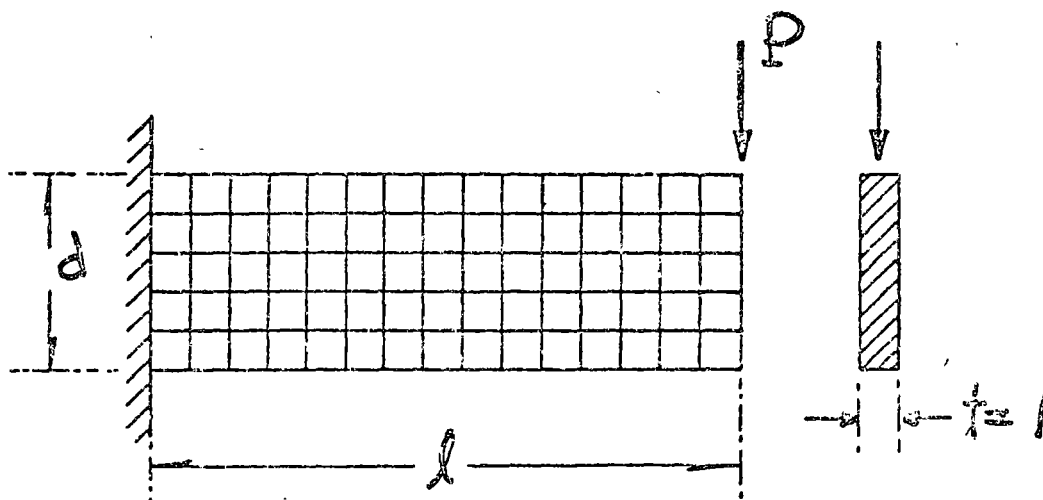


Fig. 4 Primera solución presentada por Hrenikoff en 1941.

crédito de aplicarlo a medios continuos es de Turner, Clough, Martin y Topp Ref. 5, y no es, sino hasta 1960 con Clough, Ref. 6 nace por primera vez el nombre mágico de "Elemento Finito", derivando más correctamente las propiedades básicas del elemento triangular y el rectangular, y el hecho de que en el mismo tiempo la computadora comienza a ser una herramienta muy efectiva, conduce rápidamente a la solución numérica de problemas elástico lineales complejos, en los cuales una solución analítica no era posible.

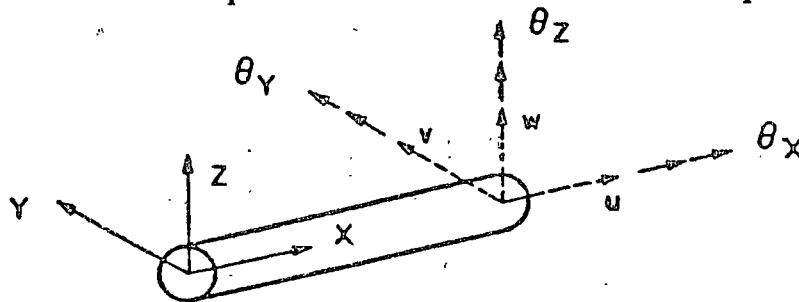
Se inician la derivación de las propiedades de rigidez de los elementos finitos, el campo de desplazamientos en el medio se expresa en función de los desplazamientos nodales del elemento, satisfaciendo continuidad, las fuerzas internas se definen aplicando el principio del trabajo virtual, la identidad de este proceso con el de minimizar la energía potencial total, o sea, el proceso de Rayleigh-Ritz

Ref. 7 es obvia. El desarrollo anterior se acentúa en el campo de la Mecánica de Sólidos y posteriormente Zienkiewicz Ref. 13 y Wilson Ref. 14 lo aplican en Mecánica de fluidos y en problemas de análisis de conducción de calor.

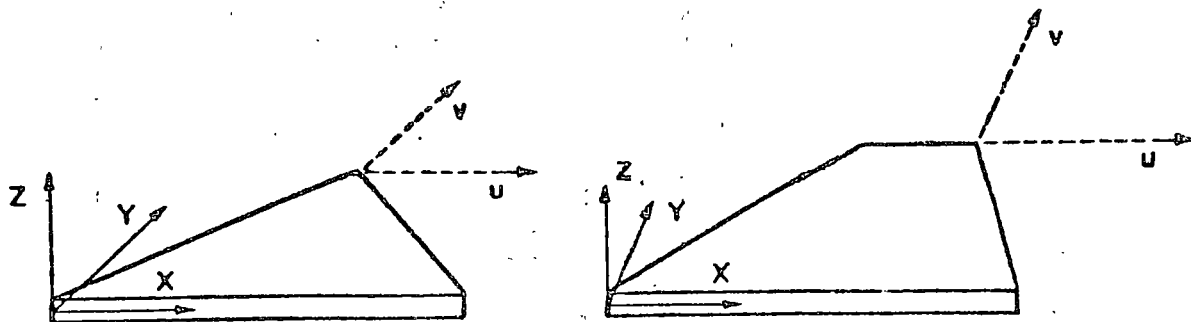
Se presenta al final una lista de referencias de importancia del método del elemento finito.

Al iniciar la determinación de esfuerzos y desplazamientos en cierto problema de diseño, las ecuaciones que gobiernan el problema en cualquier forma deben satisfacer equilibrio y continuidad.

El Método del Elemento Finito es un procedimiento analítico, y cuando se aplica a un medio continuo, éste se modela analíticamente subdividiéndolo en sub-regiones (los elementos finitos) en los que el comportamiento de cada uno es definido por grupos separados de funciones que supuestamente definen esfuerzos y desplazamientos en esa región, las funciones se seleccionan en forma tal que se satisfaga la condición de continuidad a través de todo el medio, por lo tanto, el método del elemento finito en común con las soluciones por series y diferencias finitas representa una aproximación a la solución del problema

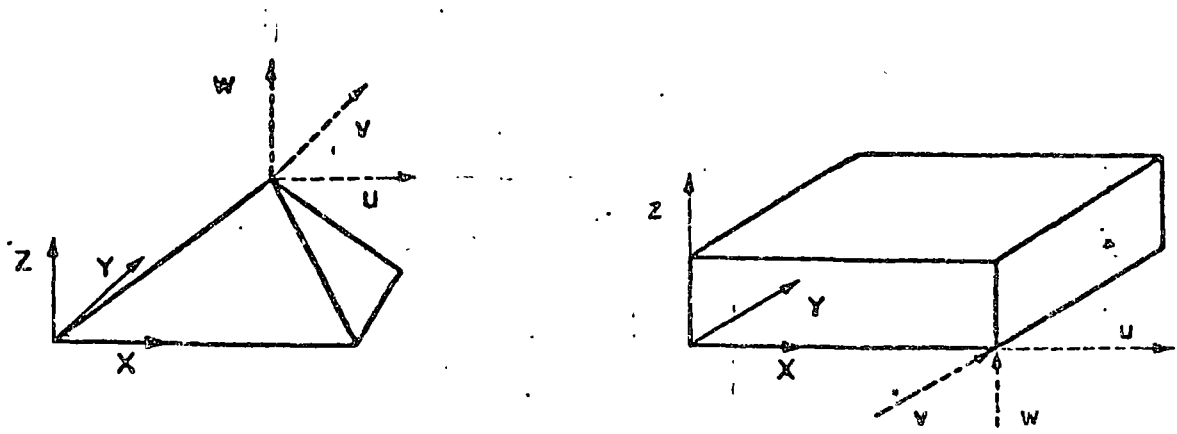


a) Elemento estructural

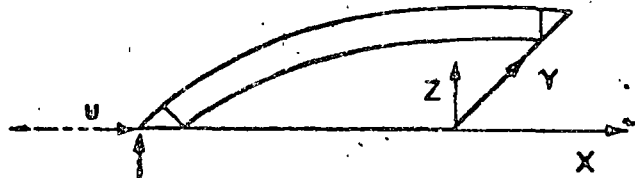


$$\gamma_{XY} = \frac{\partial u}{\partial Y} + \frac{\partial v}{\partial X}$$

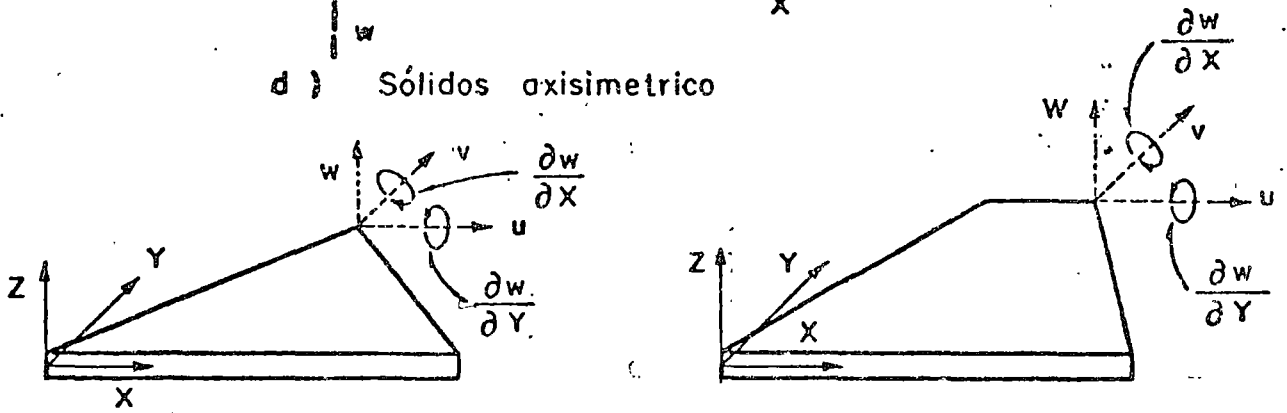
b) Esfuerzos planos



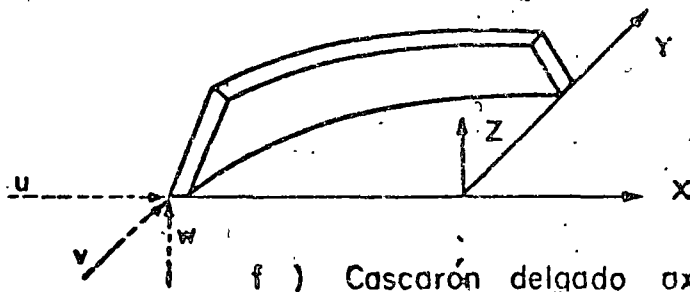
c) Elementos sólidos



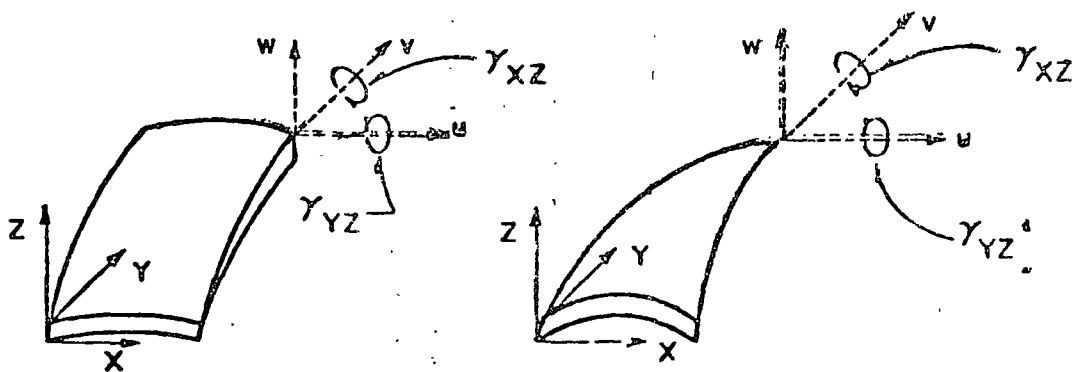
d) Sólidos axisimetrico



e) Flexión de placas



f) Cascarón delgado axisimétrico



g) Cascarones delgados curvos

Fig 5 Tipos de elementos finitos

TIPOS DE ELEMENTOS.

Elementos que son usados comunmente en la práctica son ilustrados en la Fig. 5.

El elemento estructural simple, Fig. 5 (a), es un miembro de la familia - total de elementos finitos. Cuando se usa con elementos del mismo tipo describe armaduras y estructuras espaciales. Cuando se combina con elementos de tipo diferente, especialmente con elementos de placa generalmente se describen miembros de rigidez.

Los elementos básicos en análisis por elementos finitos son placas delgadas con cargas contenidas en su plano (condición de esfuerzos planos), triangulares y cuadriláteros se ilustran en la Fib 5b. Se denominan básicos porque los primeros desarrollos concernientes con el método se refieren a ellos.

Los elementos sólidos, Fig. 5 (c), son la generalización tridimensional de los elementos de esfuerzos planos. El tetrahedro y el hexaedro son las formas más comunes y son esenciales para modelar analíticamente problemas de mecánica de suelos, rocas y estructuras nucleares. Es conveniente mencionar que la única forma práctica de resolver problemas tridimensionales prácticos, es el método de elementos finitos.

Uno de los campos más importantes de aplicación del método de elementos finitos es en el análisis de "sólidos axisimétricos", Fig. 5 (d). Una gran variedad de problemas de ingeniería caen en esta categoría, incluyendo concreto, tanques, recipientes nucleares, rotores, pistones, flechas de motores, y la cabeza de los roquets. Generalmente son medios de carga y geometría axisimétrica.

En la Fig. 5 (d) se muestra el elemento triangular, también se usan secciones cuadriláteras.

Elemento de placa plana en flexión es empleado no solo en conexión con el comportamiento de placas planas, sino también en cascarones y miembros de pared delgada. Fig. 5 (e).

Estructuras de cascarón delgado axisimétricas, Fig. 5 (f), tienen el mismo rango de significado en la aplicación práctica que los sólidos axisimétricos. Sin embargo, las relaciones gobernantes se derivan de la teoría de cascarones delgados.

Cuando una estructura de cascarón delgado que de hecho es curva, es preferible emplear elementos de cascarón curvos delgados para el modelo analítico, tienen la ventaja de describir más aproximadamente la superficie curva del cascarón, y la apropiada representación del acoplamiento de deformación y equilibrio entre cada elemento. Elementos típicos de cascarones de doble curvatura se muestran en Fig. 5 (g). Gran número de formulaciones para este elemento existen.

ALGUNAS APLICACIONES DE ELEMENTOS FINITOS.

Examinaremos algunas aplicaciones del método de elementos finitos en diseño estructural con el objeto de ilustrar la forma en la cual se usan los elementos de la Fig. 5, y la escala y complejidad de los problemas.

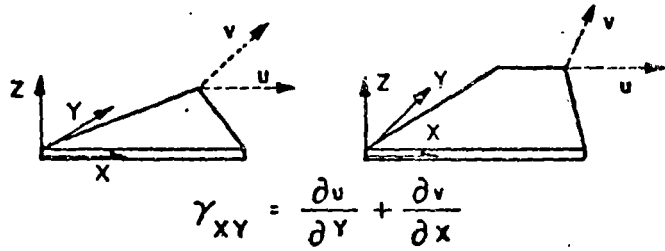
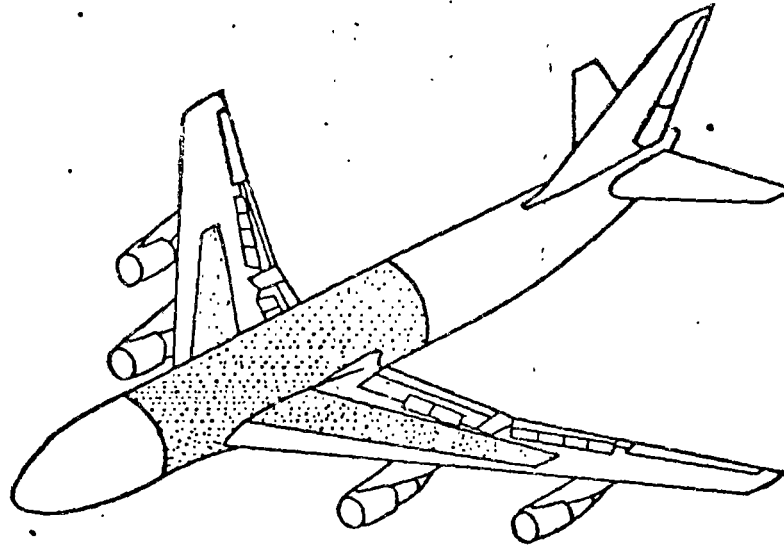
El desarrollo del método del elemento finito se debe a los investigadores relacionados con la industria aeronáutica. La Figura 6 muestra la forma en que

se aplicó el análisis por elementos finitos de una porción del avión Boeing 747. La estructura del fuselaje de un avión consiste de laminas de aluminio ligadas a una estructura interna formada por armaduras y atezadores. La experiencia ha mostrado que los efectos locales de flexión en el cascarón son despreciables, por lo tanto, se supone que consiste de elementos en condición plana de esfuerzos Fig. 5(b). El análisis de elementos finitos del Boeing 747, de la parte achurada, región que conecta el cuerpo o Cascarón Monocoque con las alas, área achurada en Fig. 6, consiste de 7000 incógnitas. Por lo tanto, es común en la práctica dividir la estructura en regiones, o subestructuras, y analizar cada una por elementos finitos con el objeto de producir un superelemento. Los superelementos se ligan entre sí por medio de un procedimiento convencional que determina la fase final del análisis.

El esquema de subestructuración del Boeing 747 es mostrado en la Fig. 6 y los detalles son listados en la Tabla 1.

Sub-Estructura	Descripción	Nodos	Condición Carga	Elemento Viga	Elemento Placa	Grados libertad interacción elementos.	Grado de libertad total.
1	Ala	262	14	355	363	104	796
2	Centro ala	267	8	414	295	198	880
3	Cascarón Monocoque	291	7	502	223	91	1,026
4	Cascarón M.213	213	5	377	185	145	820
5	Cascarón M	292	7	415	241	200	936
6	Caja Tren Aterrizaje	170	10	221	103	126	686
7	Cascarón M	285	6	392	249	233	909
8	Caja Tren Aterrizaje	129	10	201	93	148	503
9	Cascarón M	286	7	497	227	92	1,038
TOTAL		2,195	63	3,374	1,979	555	7,594

Tabla 1 Subestructuración del Boeing 747



Esfuerzos planos

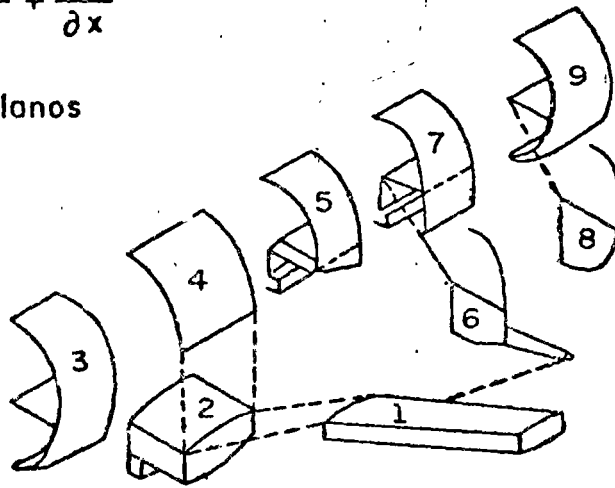


Fig 6 Boeing 747

Como es usual en el diseño de aviones, se hicieron pruebas en el prototipo y los resultados se compararon con la solución por elementos finitos, coincidiendo como se muestra en la Fig. 7

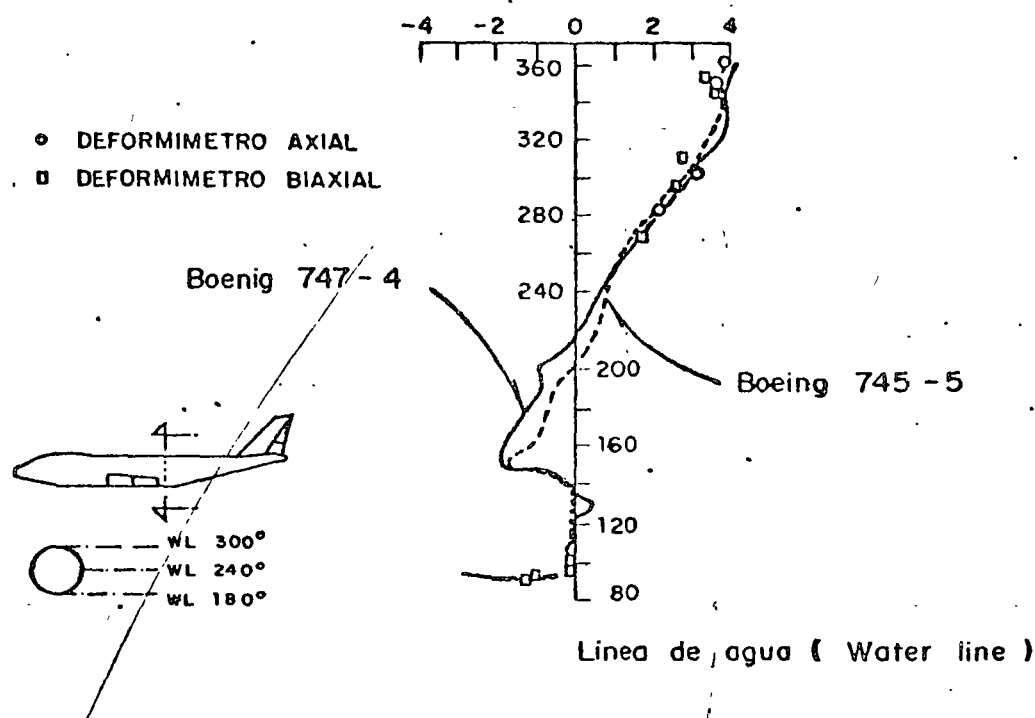


Fig. 7 Comparación entre análisis y experimentación del Boing 747

Es importante agregar que la respuesta dinámica de un avión es muy importante, así como su inestabilidad elástica es una forma importante de falla. Ninguno de estos fenómenos puede tratarse por los métodos simplificados, pero su análisis usando el método de elementos finitos ha probado ser muy aceptable.

Problemas similares se encuentran en Arquitectura Naval. Figura 8 una porción de una estructura de un transbordador. La parte plana es representada por elementos en estado plano de esfuerzos, Fig. 5 (b). Elementos estructurales, Fig. 5 (a), son empleados en la representación de la estructura interna.

El número total de incógnitas para definir las partes importantes de un barco es del orden de 50,000, y de nuevo se subdivide el problema en subestructuras obteniendo menos incógnitas.

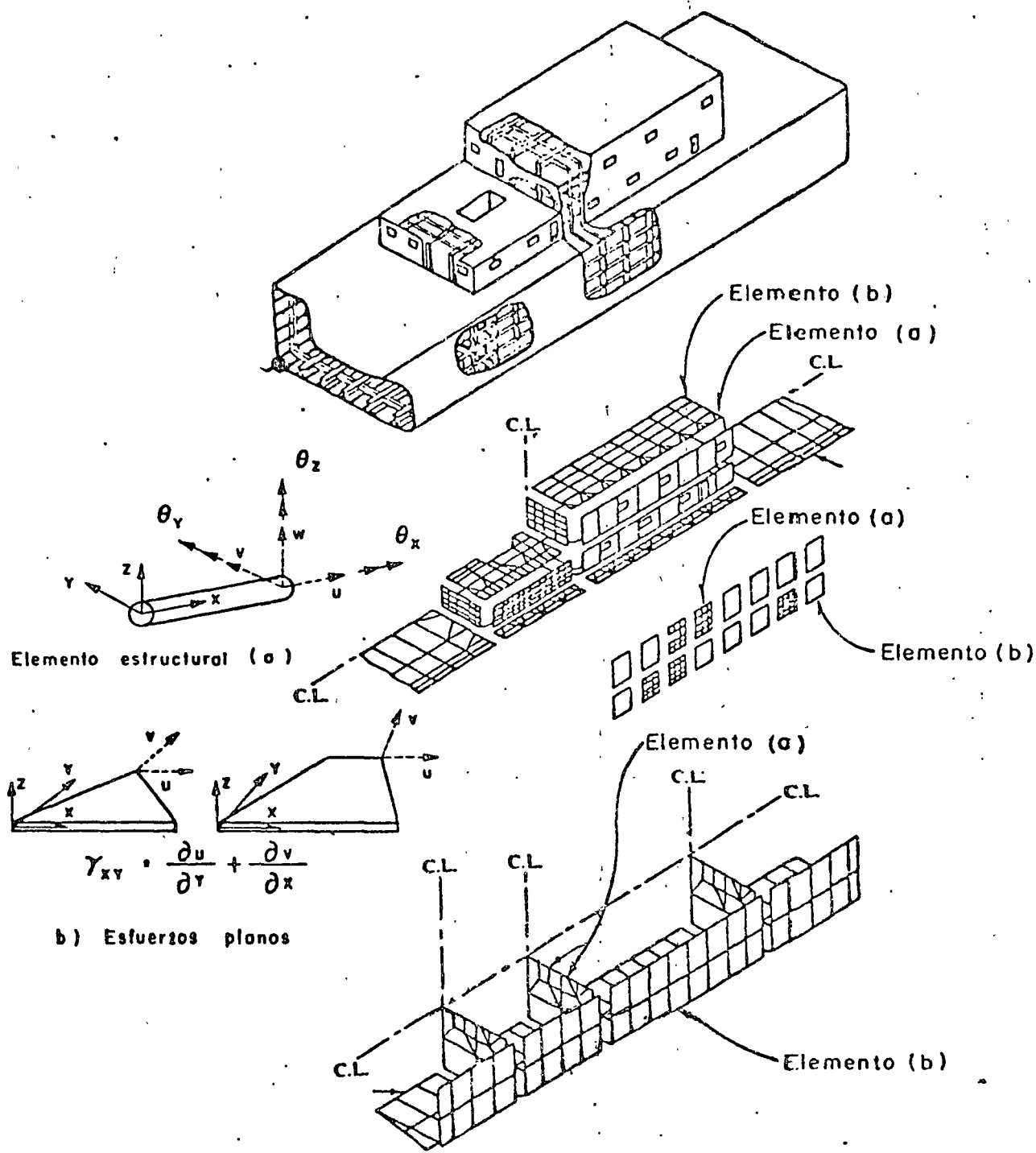


Fig. 8 - Análisis por elemento finito de estructura de un transbordado.

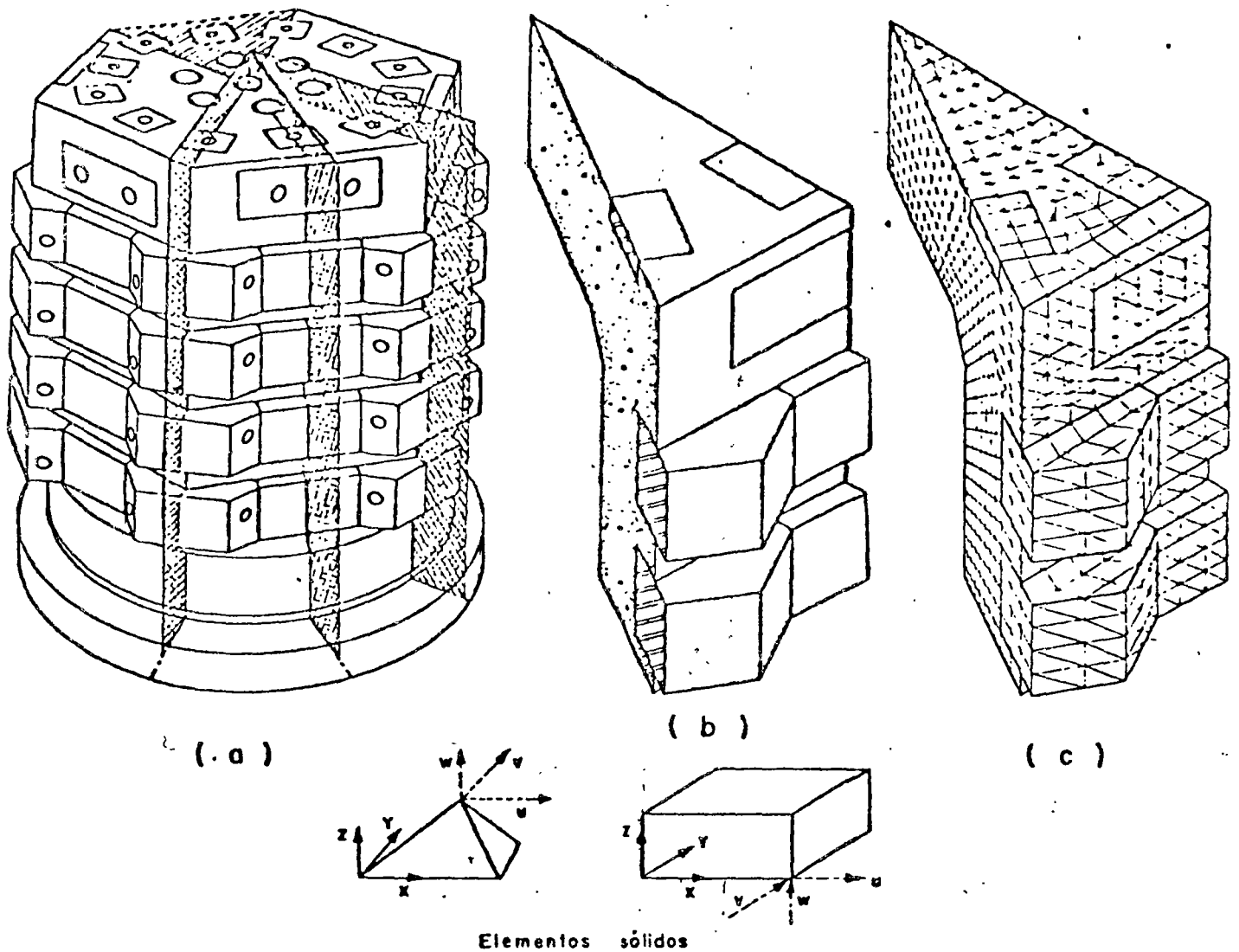


Fig 9 Analisis por elementos finitos de un recipiente reactor de concreto presforzado

Requerimientos de seguridad en el diseño estructural de los reactores nucleares han causado que la industria use ampliamente el análisis por elementos finitos. Figura 9 (a) un recipiente reactor de concreto presforzado. Debido a la simetría es posible analizar solamente un doceavo de la estructura total, - - Fig. 9 (b). Su volumen se modela analíticamente en un ensamble de elementos tetraedrales y hexaedrales, Fig. 5 (c). En problemas de este tipo, el número de incógnitas es del orden de 20,000, y muy común hacer el análisis en condiciones no lineales en material y geometría.

No todos los problemas de aplicación del método de elementos finitos son de proporciones monumentales. Las figuras 10 y 11 muestran aplicaciones básicas a ciertos problemas de ingeniería civil. Una forma de incrementar la eficiencia de diseño en secciones roladas de acero estructural es cortando el alma en la forma dentada mostrada en la Fig. 10 (a), colocando una sección sobre la otra y soldándolas, Fig. 10 (b). Y se obtiene una viga más aperaltada reduciendo el acero en el alma, y por supuesto que en este problema rutinario de diseño, no es necesario el uso del método de elementos finitos.

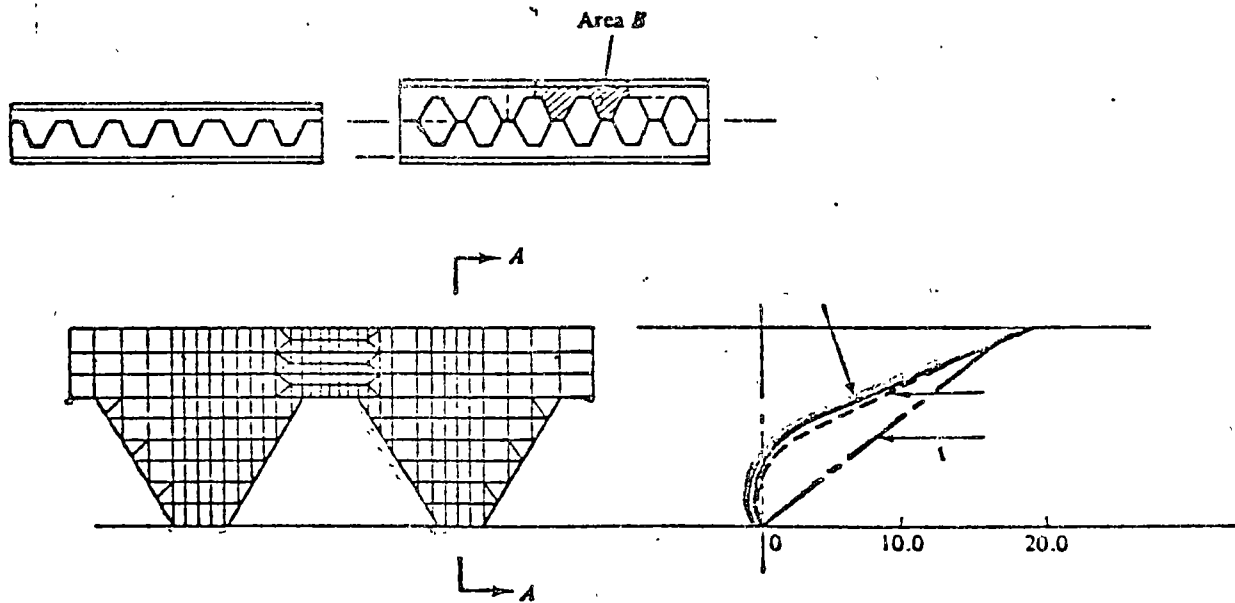


Fig. 10 Análisis de elementos finitos de una viga aperaltada en celosía.

Un problema todavía más común es el de una viga de concreto reforzado, Fig. 11, para el cual se conoce muy poco respecto a la adherencia entre el acero de refuerzo y el concreto, y la formación y crecimiento de las grietas al aumentar la carga. La Figura 11 (a) muestra el modelo analítico de ele-

mentos finitos y la descripción de las trayectorias de grietas y las gráficas de esfuerzos se muestran en la Fig. 11 (b).

Los pocos ejemplos mostrados muestran que el método de elementos finitos puede ser usado ventajosamente en cualquier situación que se requiera la predicción de esfuerzos y deformaciones internas, desplazamientos, vibraciones, inestabilidad elástica, mecánica de fluidos, transferencia de calor. Situaciones que se levantan de diversos campos que tradicionalmente han sido considerados como disciplinas ingenieriles separadas. Ejem., Ingeniería Civil, Mecánica, - Aeroespacial, Arquitectura Naval. El método del elemento finito proporciona una tecnología unificada de análisis en casi todos los campos.

Es nuestro intento en este curso desarrollar los conceptos teóricos básicos y estudiar problemas específicos de carácter práctico. Un compendio de tales problemas llenaría muchos volúmenes, por lo tanto es recomendable consultar las memorias de congresos y publicaciones periódicas correspondientes.

PROGRAMAS DE PROPOSITOS GENERALES.

Se ha indicado que las ecuaciones del método de elementos finitos son de una forma tal que su carácter general permite teóricamente escribir un solo programa de computadora que resuelva la mayoría de los problemas que se presentan en la Mecánica de Medio Continuos. Programas de computadora con este objetivo, aún en escala restringida, son llamados programas "de propósitos generales". La ventaja de programas de propósitos generales no es sólo su capacidad,

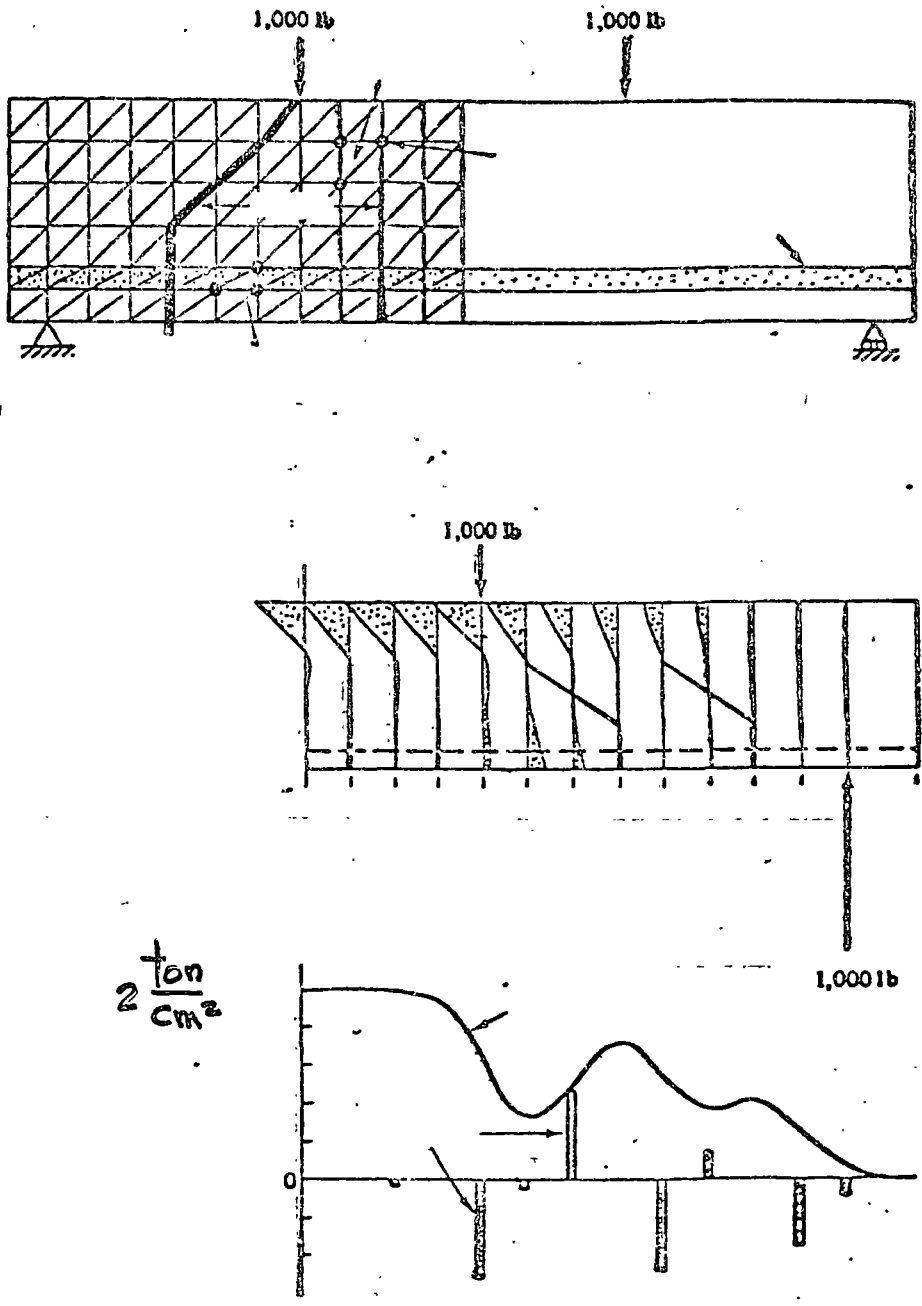


Fig. 11 Análisis por elementos finitos de una viga de concreto reforzado.

sino también en la instrucción de los probables usuarios respecto a la interpretación de la documentación, los datos y procedimientos de entrada y salida de resultados.

El costo de desarrollo de un programa de propósitos generales es usualmente muy alto por lo que la amortización de la inversión es esencial. Ciertos programas de propósitos generales son codificados en un lenguaje computacional que permite operar el programa a muchas organizaciones diferentes localizadas en grandes separaciones geográficas. Otros programas de propósitos especiales de limitada capacidad se usan en organizaciones industriales y gubernamentales con un costo menor en su desarrollo y operación.

Las cuatro componentes mostradas en el diagrama de flujo de la Fig. 12, son comunes en el desarrollo de programas de propósitos generales, fase de datos de entrada, requiere del usuario información del medio o material, descripción geométrica de la representación por elementos finitos y las condiciones de carga y de frontera. Los programas de propósitos generales más sofisticados facilitan el proceso de entrada como propiedades constitutivas del material, almacenados previamente, esquemas de modelar analíticamente el medio, trazar estereográficamente la idealización por elementos finitos en forma tal que los errores pueden detectarse antes de efectuar los cálculos.

La fase de biblioteca de elementos finitos es de interés primordial en el curso. En ella se tienen los procesos de codificación formulativos para los elementos individualmente. La mayoría de los programas de propósitos generales contienen todos los elementos de la Fig. 5, así como ciertas otras alternativas de formulación para un tipo dado de elemento, por ejemplo el trián-

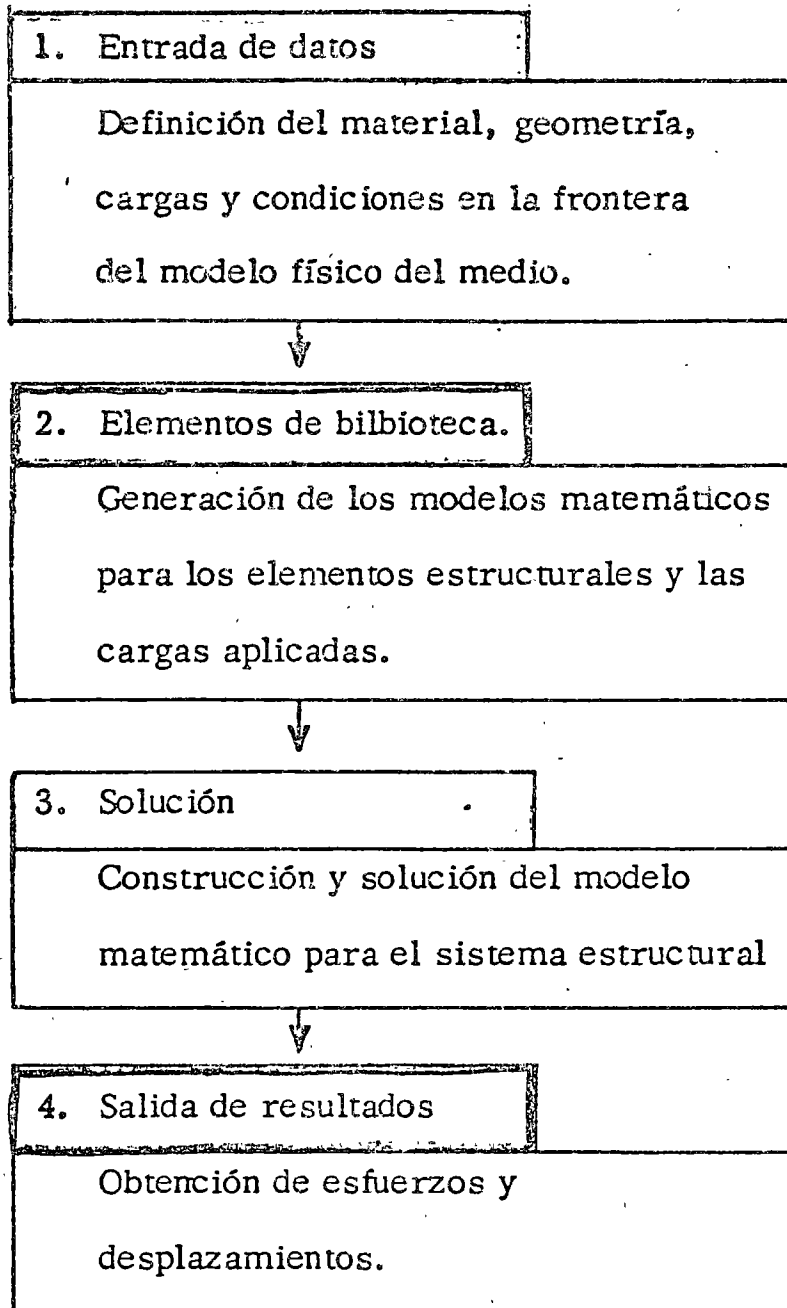


Fig. 12 Diagrama de flujo computacional en Análisis Estructural.

gulo en flexión. Teóricamente el elemento biblioteca es de extremos abiertos y capaz de acomodar cualquier nuevo elemento de cualquier grado de complejidad.

La fase elemento de biblioteca recibe los datos almacenados y establece las relaciones algebraicas del elemento por medio de la aplicación de los procesos formulativos relevantes de codificación. Esta fase del programa de propósitos generales también incluye todas las relaciones algebraicas para interconectar los elementos vecinos y la conexión del proceso en sí. Las operaciones posteriores producen un conjunto de ecuaciones algebraicas lineales simultáneas para representar la estructura completa por elementos finitos.

La fase solución del programa de propósitos generales opera sobre las ecuaciones del problema formadas en la fase anterior. En el caso de un problema de análisis estructural solo significa la solución de un conjunto de ecuaciones lineales algebraicas. Soluciones para respuesta dinámica requerirán computaciones más extensas sobre la historia-tiempo de las cargas aplicadas. En algunos casos hay que operar en regiones subdivididas como en el caso del análisis del Boeing 747, o efectuar operaciones especiales en las ecuaciones construídas originalmente. Incluídas en esta fase están las operaciones necesarias de sustitución para obtener todos los aspectos deseados de la solución.

La fase salida de resultados presenta el análisis con un registro de la solución sobre la cual se pueden tomar decisiones respecto al dimensionamiento estructural o diseño. El registro comunmente es presentado mediante una lista impresa de esfuerzos y desplazamientos de los respectivos elementos. Así como en la fase de entrada existe una fuerte tendencia a la representación gráfica de datos, -

tales como gráficas de trayectorias principales de esfuerzos o modos de pandeo y vibración.

ALGUNOS PROGRAMAS DE PROPOSITOS GENERALES.

ICES-STRUDL II, Integrated Civil Engineering System, (ICES), MIT, Maneja problemas de deformación y esfuerzos planos, cascarones rebajados, sólidos tri dimensionales, flexión de placas con y sin deformación axial. Su uso en problemas muy especializados resulta caro. ASKA, Automatic System for Kinematic Analysis. Desarrollado por J. H. Argyris, H. A. Kamel y otros en la Universidad de Stuttgart. Sistema general muy potente el cual incluye una biblioteca de 42 elementos diferentes. Puede ser costoso para un usuario especializado. SAP, A General Structural Analysis Program, elaborado por E. L. Wilson de la Universidad de California. Incluye análisis lineal estático y dinámico de estructuras elásticas, estructuras tridimensionales, sólidos axisimétricos, sólidos tridimensionales, esfuerzos y deformación plana, placas y cascarones.

Zienkiewicz, O.C., programa desarrollando en la Universidad de Wales, Swansea. Incluye lo de los programas anteriores y problemas de Mecánica de Fluidos y transferencia de calor.

NASTRAN, NAsa STRuctural ANalysis. Desarrollado por U. S. National Aeronautical and Space Administration para análisis elástico de varias estructuras incluye, análisis de expansión térmica, respuesta dinámica a cargas transitorias y excitaciones random, cálculo de valores característicos reales y complejos, estabilidad dinámica. Ofrece capacidad limitada para análisis no lineal.

SAMIS, Structural Analysis and Matrix Interpretative System. Desarrollado por Jet Propulsion Laboratory, y Manned Spacecraft Center. Contiene un elemento unidimensional general y elementos triangulares para deformaciones por flexión y membrana.

ELAS y ELAS 8, Equilibrium Problems of Linear Structures. Desarrollado por el Jet Propulsion Laboratory. Incluye una biblioteca de elementos unidimensionales, triangulares, cuadriláteros, tetraedros, hexaedros, cónicos, sólidos axisimétricos de secciones cuadriláteros y triangulares.

MARC, elaborado por P. V. Marcal, incluye análisis lineal y no lineal de problemas de Mecánica de Medios Continuos.

LISTA DE REFERENCIAS EN ORDEN CRONOLOGICO DEL METODO DE ELEMENTOS FINITOS

- (1) Hrenikoff, A., "Solution of problems in elasticity by the framework method," J. Appl. Mech. 8, A 169-175, 1941.
- (2) McHenry, D., "A lattice analogy for the solution of plane stress problems," J. Inst. Civ. Eng 21, 59-82, 1943.
- (3) Newmark, N. M., "Numerical methods of analysis in bars plates and elastic bodies," "Numerical Methods of Analysis in Engineering," edited by L. E. Grinter, MacMillan (1949).
- (4) Turner, M. J., Clough, R. W., Martin, H. C., and Topp, L. J., "Stiffness and deflection analysis of complex structures," J. Aero Sci. 23, 805-823, 1956; AMR 10 (1957), Rev. 1776.
- (5) Clough, R. W., "The finite element in plane stress analysis," Proc. 2nd. ASCE Conf. on Electronic Computation, Pittsburgh, Pa., Sept. 1960.
- (6) Argyris, J. H., "Energy Theorems and structural analysis," Butterworth, London (1960). (Reprinted from Aircraft Eng. 1954-55); AMR 15 (1962), Rev. 2705.
- (7) Clough, R. W., "The finite element method in structural mechanics," (Ch. 7 "Stress Analysis", O. C. Zienkiewicz and G. S. Holister, edited by, J. Wiley & Son (1965); chapter in AMR 20 (1967), Rev. 3942.
- (8) Courant, R., "Variational methods for the solution of problems of equilibrium and vibration," Bull. Am. Math. Soc. 49, 1-23, 1943.
- (9) Prager, W., and Synge, J. L., "Approximation in elasticity based on the concept of function space," Quart. Appl. Math. 5, 241-69, 1947.
- (10) Synge, J. L., "The hypercircle in mathematical physics, Cambridge Univ. Press (1957); AMR 11 (1958), Rev. 733.
- (11) Schmelter, J., "The energy method of networks of arbitrary shape in problems of theory of elasticity," Proc. IUTAM Symp. on Non-homogeneity in Elasticity and Plasticity, W. Olszak, edited by, Pergamon Press (1959).
- (12) Zienkiewicz, O. C., and Cheung, Y. K., "Finite elements in the solution of field problems," Engineer, 200, 507-510, Sept. 1965.
- (13) Wilson, E. L., and Nickell, R. E., "Application of finite element method to heat conduction analysis," Nuclear Eng. and Design 3, 1-11, 1966.

- (95) Ariett, P. L., Bahrani, A. K., and Zienkiewicz, O. C., "Application of finite elements to the solution of Helmholtz's equation (wave guides)," Proc. Inst. El. Eng. 115, 1762-1964, 1968.
- (96) Zienkiewicz, O. C., and Newton, R. E., "Coupled vibrations of a structure submerged in a compressible fluid," Int. Symp. on finite element techniques in shipbuilding, Stuttgart, 1969.
- (97) Taylor, C., Patil, B. S., and Zienkiewicz, O. C., "Harbour oscillation in a numerical treatment for undamped modes," Proc. Inst. Civ. Eng. 43, 1941-155, 1969.
- (98) Archer, J. S., and Rubin, C. P., "Improved linear axisymmetric-shell - fluid model for launch vehicle longitudinal response analysis," Proc. Conf. Mat. Meth. in Struct. Mech., Wright-Patterson AFB, Ohio, 1965.
- (99) Zienkiewicz, O. C., Irons, B., and Nath P., "Natural frequencies of complex free or submerged structures by the finite element method," Symp. on Vibration in Civ. Eng., Inst. Civ. Eng., (Butterworth), London, 1965.
- (100) Sandhu, R. S., and Wilson, E. L., "Finite element analysis of seepage in elastic media," J. of Engr. Mech. Div., Proc. ASCE 95, 641-651, 1969.
- (101) Rashid, Y. R., "Three-dimensional analysis of elastic solids," Int. J. Solids Struct., " Part I: Analysis procedure," 5, 1311-33, 1969; Part II: " The computational problem," 6, 195-207, 1970.
- (102) Irons, B. M., "A frontal solution program for finite element analysis," Int. J. Num. Meth. in Eng. 2, 5-32, 1970.
- (103) Johnson, W. M., and Mclay, R. W., "Convergence of the finite element method in the theory of elasticity," J. Appl. Mech. Trans. ASME, 274-278, June 1968.
- (104) Przemieniecki, J. S., "Theory of matrix structural analysis," McGraw-Hill, 1968.
- (105) Jenkins, W. M., "Matrix and digital computer methods in structural analysis," McGraw-Hill, 1969.
- (106) Pope, G. G., " The application of the matrix displacement method in plane elastoplastic stress problems," Proc. Conf. Matrix Meth. in Struct. Mech., Wright-Patterson AFB, Ohio, 1965.
- (107) Miller, R. E. and S. D. Hansen, "Large Scale Analysis of Current Aircraft," On General Purpose Finite Element Computer Programs, P. V. Marcal (ed), ASME Special Publication, New York, N. Y., 1970.

- (108) Smith, C. S. and G. Mitchell, "Practical Considerations in the Application of Finite Element Techniques to Ship Structures," Proc. of Symposium on Finite Element Techniques, U. of Stuttgart, Stuttgart, Germany, June, 1969.
- (109) Corum, J. M. and J. E. Smith, "Use of Small Models in Design and Analysis of Prestressed-Concrete Reactor Vessels," Report ORNL-4346, Oak Ridge Nat. Lab., Oak Ridge, Tenn., May, 1970.
- (110) Cheng, W. K., M. U. Hosain, and V. V. Neis, "Analysis of Castellated Beams by the Finite Element Method," Proc. of Conf. on Finite Element Method in Civil Eng., McGill U., Montreal, Canada, 1972, pp. 1105-1140.
- (111) Gallagher, R. H., "Large -Scale Computer Programs for Structural Analysis" in On General Purpose Finite Element Computer Programs, P. V. Marcal (ed.), ASME Special Publication, 1970, pp. 3-34.
- (112) Marcal, P. V., "Survey of General Purpose Programs for Finite Element Analysis," in Advances in Computational Methods in Structural Mechanics and Design, J. T. Oden, et al. (ed.), U. of Alabama Press, University, Ala., 1972.
- (113) Gallagher, R. H. and O. C. Zienkiewicz, Optimum Structural Design, John Wiley & Sons, Inc., New York, N. Y., 1973.

FINITE ELEMENT METHOD THEORY AND APPLICATION

1. INTRODUCTION

1.1 HISTORICAL BACKGROUND

The finite element method (FEM) has become a powerful numerical technique for solving complex problems in science and engineering, mainly due to the advances made earlier in the numerical methods particularly in matrix methods as well as due to the rapid introduction of high speed computers in the market. However, the introduction of concepts and applications of FEM dates back to the era of mathematicians who tried to calculate the perimeter and area of a circle by idealizing it as a regular polygon. It is also interesting to note that the bound solutions which are often discussed in FEM can be traced back to the solution of the area of a circle. If the circle is modelled with an inscribed polygon, a lower bound solution is obtained whereas an upper bound solution is obtained by replacing the circle by a circumscribed polygon. Even though the basic concepts of FEM existed for over two thousand years, for all practical purposes, one can only say that these concepts were actually used for solving physical problems in 1950s by the aeronautical engineers.

In 1956, Turner et al (Ref 1) presented the stiffness analysis for the complex structures, which is the starting point in the rediscovery of FEM. Nevertheless, Clough (Ref 2) was the one who actually used the term FEM in 1960. Since then, a tremendous amount of research has been done in this field and

quite a large number of papers have been published in almost all the journals related to all fields of engineering as well as some in the fields of mathematics and science. In addition, several conferences have been held all over the world and hundreds of papers have been presented in each. The theory and application of FEM have also been presented in numerous text books (Ref 3-22). In order to help the research workers in tracing the references required for their particular work several bibliographies have either been published or under preparation, among them notably Ref (23) is a good source of information.

1.2 APPLICATIONS OF FEM

The FEM is applicable to a variety of boundary value and initial value problems in engineering as well as applied science. Some of these applications are:

1. Stress Analysis of Structures, Stability of Structures, Dynamic response of structures, Thermal Stress Analysis, Torsion of prismatic members
2. Stress Analysis of Geomechanics problems, Soil-Structure Interaction, Slope Stability problems, Soil Dynamics and Earthquake Engineering, Seepage in soils and rocks, Consolidation settlement
3. Solutions in Fluid Mechanics, Harbour oscillations, Pollution Studies, Sedimentation
4. Analysis of Nuclear Reactor Structures
5. Stress Analysis and Flow Problems in Biomechanics
6. Characteristic Study of Composites in Fibre Technology
7. Wave Propagation in Geophysics
8. Field Problems in Electrical Engineering

Apart from the above mentioned areas, the FEM is also applicable to any other problem as long as the analyst makes certain that the problem is amenable to solution based on the assumptions introduced in the formulation of FEM and appropriate material properties can be provided in a realistic manner.

1.3 METHODS OF ANALYSIS

In general, there are four basic methods of analysis in FEM- displacement method, equilibrium method, mixed method and hybrid method. The field variables or unknown quantities in each of these methods are as follows.

Displacement method - displacements and their derivatives

Equilibrium method - stress components

Mixed method - some displacements and some stress components

Hybrid method - displacements or boundary forces

In the displacement method, smooth displacement distribution is assumed within an element, interelement compatibility of displacement is generally assured and minimum potential energy criterion is used in the formulation.

In the equilibrium method, the interior stress distribution is assumed to be smooth, the equilibrium of boundary tractions is maintained and the minimum complementary energy is the basis for the formulation.

In the mixed method which is generally used for plate and shell problems, both displacements and stresses are assumed smooth

in the interior, the displacement components and the equivalent stress components are considered to be continuous at the inter-element boundaries and the formulation is based on Reissner's principle.

In the hybrid method, depending on whether the model is displacement type or equilibrium type, the distribution of displacements or stresses within the element is considered to be smooth and along the interelement boundary either assumed compatible displacements or assumed equilibrating boundary tractions are ensured and either modified complementary energy or modified potential energy principle is adopted for the formulation.

Among these four methods, the displacement method is the most widely used approach. However, for plate bending problems either the equilibrium or mixed method is preferred and for some field problems hybrid method is more suitable.

1.4 DESCRIPTION OF FEM

A structure, continuum or a domain is divided into a number of arbitrary shaped parts or regions known as elements. These elements are interconnected at joints known as nodes. The principal unknown is termed as the field variable. This field variable can be displacement, temperature, pore-pressure or stress. The distribution of the field variable within an element is approximated by the use of certain polynomial functions. Variational methods or residual methods are employed

to develop the finite element equations which relate the field variables at the nodes to the corresponding action vector at the nodes of the element. This relationship is provided by the so called property matrix which is based on the material and the geometric properties of the element. Finally these finite element equations are assembled to form a system of algebraic equations for the entire domain. The unknown field variable is obtained by solving this system of algebraic equations.

1.5 BASIC STEPS IN FE ANALYSIS

The basic steps in the finite element analysis of general problems are as follows.

1. The continuum is divided into finite elements of any arbitrary shape.
2. A suitable polynomial is chosen to represent the distribution of the field variable within an element in terms of its nodal values. Thus, the field variables at the nodes become the primary unknowns.
3. Using variational methods or residual methods, the finite element equations are formulated.
4. The individual finite element equations obtained in step 3 are assembled to form a set of algebraic equations for the overall continuum.
5. The solution of the algebraic equations obtained in step 4 yields the values of the field variables at the nodes.
6. From the field variables at the nodes, the secondary variables such as stress, strain for an element can be obtained.

REFERENCES

1. TURNER, M. J., CLOUGH, R. W., MARTIN, H. C., and TOPP, L. J., "Stiffness and deflection analysis of complex structures", J. Aero, Sci., Vol. 23, No. 9, 1956, pp 805-823
2. CLOUGH, R. W., "The finite element method in plane stress analysis", Proc. 2nd ASCE Conf. on Electronic Computation, Pittsburgh, 1960, pp 345-378
3. ZIENKIEWICZ, O. C. and CHEUNG, Y. K., The Finite Element Method in Structural and Continuum Mechanics, McGraw-Hill, London, 1967
4. ZIENKIEWICZ, O. C., The Finite Element Method in Engineering Science, McGraw-Hill, London, 1971
5. SMITH, G. N., An Introduction to Matrix and Finite Element Methods in Civil Engineering, Applied Science, London, 1971
6. DESAI, C. S. and ABEL, J. F., Introduction to the Finite Element Method, Van Nostrand and Reinhold, New York, 1972
7. ODEN, J. T., Finite Elements of Nonlinear Continua, McGraw-Hill, New York, 1972
8. URAL OKTAY, Finite Element Method, Intext Educational Publishers, New York, 1973
9. MARTIN, H. C. and CAREY, G. F., Introduction to Finite Element Analysis, McGraw-Hill, New York, 1973
10. STRANG, G. and FIX, G. J., An Analysis of the Finite Element Method, Prentice Hall, N. J., 1973
11. BREBBIA, C. A. and CONNOR, J. J., Fundamentals of Finite Element Technique, Butterworths, London, 1973
12. NORRIS, D. H. and de VRIES, G., The Finite Element Method-Fundamentals and Applications, Academic Press, New York, 1973
13. COOK, R. D., Concepts and Applications of Finite Element Analysis, John Wiley, New York, 1974
14. WACHPRESS, E. L., A Rational Finite Element Basis, Academic Press, New York, 1975
15. FENNER, R. T., Finite Element Method for Engineers, MacMillan Press, London, 1975
16. GALLAGHER, R. H., Finite Element Analysis-Fundamentals, Prentice-Hall, N. J., 1975

17. HUEBNER, K. H., The Finite Element Method For Engineers; John Wiley, New York, 1975
18. ROCKEY, K. C., et al, The Finite Element Method, Crosby, Lockwood, Staples, London, 1975
19. CONNOR, J. J. and BREBBIA, C. A., Finite Element Techniques for Fluid Flow, Butterworths, London, 1976
20. ODEN, J. J. and REDDY, J. N., An Introduction to Mathematical Theory of Finite Elements, John Wiley, New York, 1976
21. SEGERLIND, L. J., Applied Finite Element Analysis, John Wiley, New York, 1976
22. BATHE, K. J. and WILSON, E. L., Numerical Methods in Finite Element Analysis, Prentice-Hall, N. J., 1976
23. NORRIE, D. H. and de VRIES, G., "A Finite Element Bibliography (3 Parts), Report No. 57, Mechanical Engineering Department, The University of Calgary, Canada, 1974



APLICACION

MARCO A
200

B. Billestene
200

15

150			200				100				100				210			
22	18	64	87	96	112	128	144	110	150	115	166	182	198	214	23			
8	98	23		113	38	128	53					145	68	158	83			
31	47	63	79	95	111	127	143				165	121	147	213	27			
90	158	105		30	120	45	135		20			60	150	75	165			
30	46	62	78	94	110	126	142				164	120	196	212	28			
7	97	22		112	37	127	52					142	67	157	82			
29	45	61	77	93	109	125	141	9	149	14	163	179	195	211	27			
89	14	104		29	119	44	134					59	149	74	164			
28	44	60	76	92	108	124	140				162	178	194	210	26			
6	96	21		111	36	126	51					141	66	156	81			
27	43	59	75	91	107	123	139				161	177	193	209	25			
83	13	103		28	118	43	133					58	148	73	163			
26	42	58	74	90	106	122	138	8	148	13	164	176	192	208	24			
5	95	20		110	35	125	50					140	65	155	80			
25	41	57	73	89	105	121	137				159	175	191	207	23			
87	12	102		27	117	42	132					57	147	72	162			
24	40	56	72	88	104	120	136				158	174	190	206	22			
4	94	19		109	34	124	49					139	64	154	79			
23	39	55	71	87	103	119	135	7	147	12	157	173	189	205	21			
86	11	101		26	116	41	131					56	146	71	161			
22	38	54	70	86	102	118	134				156	172	188	204	20			
3	93	18		108	33	123	48					138	63	153	78			
21	37	53	69	85	101	117	133				155	171	187	203	19			
85	10	100		25	115	40	130					55	145	70	160			
20	36	52	68	84	100	116	132	6	146	11	154	170	186	202	18			
2	92	17		107	32	122	47					137	62	152	77			
19	35	51	67	83	99	115	131				153	169	185	201	17			
84	9	99		24	114	39	129					54	144	69	159			
18	34	50	66	82	98	114	130				152	168	184	200	16			
1	91	16		106	31	121	46					136	61	151	76			
17	33	49	65	81	97	113	129	15	151		151	167	183	199	15			

TARJETAS DE CONTROL

1	5	7	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65	70	72	75
?	JOB	MURØ/MARCO	;	USER	XYTZ/AB	;	CLASS=3	;	BEGIN	;							
	EXECUTE	(VP80)		DESFI/SMTA/P7405	;												
	PROCESS	180	;	IØ	180	;											
	BCL	TQUE															
—	A11	TITULO	PROBLEMA	GENERAL													
		ANALISIS	DE UNA	ESTRUCTURA	TIPO	MURO	MARCO										
—	A12	ARCHIVOS															
		10	15	20	25	Numero de Cines (Arriba) (Abajo) (Arriba) y (Abajo)											
—	A13	ESTRUCTURAS	POR	ANALIZAR													
		1															
—	A141	TITULO	PROBLEMA	PARTICULAR													
		ANALISIS	DEL	MURO	MARCO	A	(Cualquier informacion de la numeracion)										
—	A142	CANTIDAD	DE	BARRAS,	CUADRADOS,	MATERIAL,	NUDOS	Y	SECCIONES								
		20	165	1	230	2											
—	A143	CARACTERISTICAS	DEL	MATERIAL	(Identificador de material, E, ν , X)												
		1	1500000.0	0.15	2.4												
—	A144	CARACTERISTICAS	DE	LAS	SECCIONES	(Tipo, forma rectangular, b, h)											
		1	2	70.	15.												
		2	2	100.	20.												
—	A145	COORDENADAS	PUNTOS	NODALES													
		1	0.0	0.0													
		16	0.0	13.0	1	(I indica posición verticalmente del nodo (a nodo i))											
		17	0.5	0.0													
		32	0.5	13.0	1	(I indica posición verticalmente del nodo (7 al nodo i))											

— IDENTIFICACION DE LA TARJETA POR PERFORAR (5 SE PERFORA)

U. N. A. M.
INSTITUTO DE INGENIERIA

FORMA PARA CODIFICACION

PROGRAMA MURO-MARCO

CODIFICADO POR Ballesteros

REVISADO POR Salinas

FECHA MARZO 1976

PAGINA 2 DE 10

1	5	7	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65	70	72	75	80
	33			1.0		0.0												
	48			1.0		13.0	1											
	49			1.5		0.0												
	64			1.5		13.0	1											
	65			3.5		0.0												
	80			3.5		13.0	1											
	81			4.0		0.0												
	96			4.0		13.0	1											
	97			4.5		0.0												
	112			4.5		13.0	1											
	113			5.0		0.0												
	128			5.0		13.0	1											
	129			5.5		0.0												
	144			5.5		13.0	1											
	145			6.5		0.0												
	150			6.5		13.0	1											
	151			7.5		0.0												
	166			7.5		13.0	1											
	167			8.025		0.0												
	182			8.025		13.0	1											
	183			8.550		0.0												
	198			8.550		13.0	1											
	199			9.075		0.0												
	214			9.075		13.0	1											
	215			9.600		0.0												

FORMA PARA CODIFICACION

PROGRAMA MURO-MARCO

CODIFICADO POR Prillodinos

REVISADO POR Salinas

FECHA 1.12.20 197

PAGINA 4 DE 1

	5	7	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65	70	72	75
	9		19		18		34		35								
	15		31		30		46		47		1						
	16		34		33		49		50			1					
	23		48		47		63		64		1						
	24		67		66		82		83								
	30		79		78		94		95		1						
	31		82		81		97		98			1					
	38		96		95		111		112		1						
	39		99		98		114		115								
	45		111		110		126		127		1						
	46		114		113		129		130			1					
	53		128		127		143		144		1						
	54		153		152		168		169								
	60		165		164		180		181		1						
	61		168		167		183		184			1					
	68		182		181		197		198		1						
	69		185		184		200		201								
	75		197		196		212		213		1						
	76		200		199		215		216			1					
	83		214		213		229		230		1						
	84		3		2		18		19								
	90		15		14		30		31		1						
	91		18		17		33		34			1					
	98		32		31		47		48		1						
	99		35		34		5		51								

INSTITUTO DE INGENIERIA
FORMA PARA CODIFICACION

PROGRAMA MURO-MARCO

CODIFICADO POR P. de la Cruz

REVISADO POR S. Salinas

FECHA MARZO 1976

PAGINA 5 DE 10

	5	7	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65	70	72	75	80		
105		47		46		62				68										
106		66		65		81				82										
113		80		79		95				96										
114		83		82		98				99										
120		95		94		110				111										
121		98		97		113				114										
128		112		111		127				128										
129		115		114		130				131										
135		127		126		142				143										
136		152		151		167				168										
143		166		165		181				182										
144		169		168		184				185										
150		181		180		196				197										
151		184		183		199				200										
158		198		197		213				214										
159		201		200		216				217										
165		213		212		228				229										
1412		CANTIDAD DE NUDOS RESTRINGIDOS, CONDICIONES DE CARGA Y RIGIDEZ REQUERIDA																		
15		1		0																
1413		TIPO DE RESTRICCIÓN DE NUDOS (nota, rest. en U, rest. en F, rest. A) (10 I B) ...																		
		1111		17111		33111		49111		65111		81111		97111		113111		129111		145111
		151111		167111		183111		199111		215111										
14141		CANTIDAD DE NIVELES Y NUDOS POR NIVEL																		
15		15																		
14142		INDICACION EL CALCULO DE RIGIDEZ DE ENTREPISO																		

1	5	7	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65	70	72	75
CALCULO DE LAS RIGIDECES DE ENTREPISO																	
A14143 CANTIDAD DE NUDOS EN CADA NIVEL																	
	15		15		15		15		15								
A14144 NUMERACION DE LOS NUDOS POR NIVEL																	
	4		20		36		52		68		84		100		116		132
	7		23		39		55		71		87		103		119		135
	10		26		42		58		74		90		106		122		138
	13		29		45		61		77		93		109		125		141
	16		32		48		64		80		96		112		128		144
A14145 ALTURAS DE ENTREPISO																	
		2.60			2.60			2.60			2.60			2.60			
A14146 PESOS POR NIVEL																	
		33.23			33.23			33.23			33.23			33.23			
A14147 COEFICIENTE SISMICO																	
		0.08															
A1415 INDICACION DEL TIPO DE CONDICION DE CARGA																	
ANALISIS DEL MURO MARCO A CONSIDERANDO CARGA ESTATICA Y EFECTO SISMICO																	
A1416 CANTIDAD DE BARRAS Y NUDOS CARGADOS																	
	20		90														
A14171 NUMERO DE BARRAS CON INDICE DE GRAFICACION																	
	1		1		2		1		3		1		4		1		5
	9		1		10		1		11		1		12		1		13
	17		1		18		1		19		1		20		1		
A14172 CARGAS EN LAS BARRAS																	
	1		4														

se hace cada intermedio y barras resistentes con la misma carga

U. N. A. M.

INSTITUTO DE INGENIERIA

FORMA PARA CODIFICACION

PROGRAMA MURO-MARCO

CODIFICADO POR Ballesteros

REVISADO POR Silva

FECHA MARZO 1976

PAGINA 9 DE 10

	5	7	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65	70	72	75	8
221				0.112		-1.491												
10				0.168		-1.491												
26				0.168		-2.982												
42				0.168		-2.982												
58				0.168		-2.982												
74				0.168		-2.982												
90				0.168		-2.982												
106				0.168		-2.982												
122				0.168		-2.982												
138				0.168		-2.982												
148				0.168		-2.982												
140				0.168		-2.982												
176				0.168		-2.982												
192				0.168		-2.982												
208				0.168		-2.982												
224				0.168		-1.491												
13				0.220		-1.491												
29				0.220		-2.982												
45				0.220		-2.982												
61				0.220		-2.982												
77				0.220		-2.982												
93				0.220		-2.982												
109				0.220		-2.982												
125				0.220		-2.982												
141				0.220		-1.982												

U. N. A. M.
 INSTITUTO DE INGENIERIA
 FORMA PARA CODIFICACION

PROGRAMA MURO - MARCO

CODIFICADO POR Ballesteros

REVISADO POR Solinas

FECHA NOV 20 1976

PAGINA 10 DE 10

5	7	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65	70	72	75	80
149			0.220		-2.982												
163			0.220		-2.982												
179			0.220		-2.982												
195			0.220		-2.982												
211			0.220		-2.982												
227			0.220		-1.491												
16			0.280		-1.491												
32			0.230		-2.982												
48			0.280		-2.982												
64			0.280		-2.982												
80			0.280		-2.982												
96			0.280		-2.982												
112			0.280		-2.982												
128			0.280		-2.982												
144			0.280		-2.982												
150			0.280		-2.982												
166			0.280		-2.982												
182			0.280		-2.982												
198			0.280		-2.982												
214			0.280		-2.982												
230			0.280		-1.491												
END	JOB																



20	NO. DE ELEMENTOS
690	NO. DE ECUACIONES
1	NO. DE TIPOS DE MATERIAL
230	NO. DE PUNTOS DE LA ESTRUCTURA
165	NO. DE CUADRIÁTEROS
2	NO. DE TIPOS DE SECCION
0	NO. DEL PRIMER PUNTO FRONTERA

CONSTANTES ELASTICAS DE LOS MATERIALES

MODULO DE ELASTICIDAD (TON/M*2)	COCIENTE DE POISSON	PESO VOLUMETRICO (TON/M*3)
150000.00	0.15	2.400

PARAMETROS QUE DEFINEN LAS SECCIONES

TIPO	SECCION	PARAMETROS
0	ESPECIAL	(A, IZ, FY)
1	RECTANGULAR	(B, H)
2	T	(B, H, V, T)
3	I	(B, H, V, T)
4	CANAL	(B, H, V, T)
	ANGULO	(B, H, V, T)
	CIRCULAR	(D)
	CAJON	(B, H, V, T)
6	CIRCULAR HUECA	(D, T)
9	CRUZ	(B, H, V, T, C)
10	ZETA	(B, H, V, T, C, P)
11	H	(B, H, V, T)

ABREVIATURAS (VER FIGURAS DEL CATALOGO DE SECCIONES)

B	ANCHO DE LA SECCION TIPO 1, 2, 3, 4, 5, 7, 9, 10 Y 11
DI	ANCHO INFERIOR DE LA SECCION TIPO 10
D	DIAMETRO DE LAS SECCIONES TIPO 6 Y 8
H	ALTEZA DE LAS SECCIONES TIPO 1, 2, 3, 4, 5, 7, 9, 10 Y 11
TC	ESPESOR DE LA SECCION CIRCULAR HUECA
V	ANCHO DEL ALMA DE LAS SECCIONES TIPO 2, 3, 4, 7, 9, 10 Y 11
T	ESPESOR DEL PATIN DE LAS SECCIONES TIPO 2, 3, 4, 5, 7, 9 Y 11
TI	ESPESOR DEL PATIN INFERIOR DE LA SECCION TIPO 10
P	ESPESOR DEL PATIN SUPERIOR DE LA SECCION TIPO 10
BS	ANCHO SUPERIOR DE LA SECCION TIPO 10
C	DISTANCIA ENTRE LAS FIBRAS SUPERIORES DEL ALMA Y PATIN RESPECTIVAMENTE RESPECTIVAMENTE DE LAS SECCIONES 9 Y 10

- (CM) CENTIMETROS
- (M*2) METROS A LA SEGUNDA POTENCIA
- (M*4) METROS A LA CUARTA POTENCIA
- A AREA
- I7 MOMENTO DE INERCIA RESPECTO AL EJE Z
- FY FACTOR DE FORMA PARA LA DIRECCION Y

SECCION NO.	TIPO	B-BI-D-A (CI)	H-IZ-TC (CH)	V-FY (CH)
1	1	70.000	15.000	0.000
2	1	100.000	20.000	0.000

SECCION NO.	TIPO	A (I**2)	IZ (I**4)	FY
1	1	0.105000000	0.000176875	1.200000000
2	1	0.200000000	0.000666667	1.200000000

ORDENADA ARSICISA

NO.	(M)	(N)
1	0.000	0.000
2	0.000	0.867
3	0.000	1.733
4	0.000	2.600
5	0.000	3.467
6	0.000	4.333
7	0.000	5.200
8	0.000	6.067
9	0.000	6.933
10	0.000	7.800
11	0.000	8.667
12	0.000	9.533
13	0.000	10.400
14	0.000	11.267
15	0.000	12.133
16	0.000	13.000
17	0.500	0.000
18	0.500	0.867
19	0.500	1.733
20	0.500	2.600
21	0.500	3.467
22	0.500	4.333
23	0.500	5.200
24	0.500	6.067
25	0.500	6.933
26	0.500	7.800
27	0.500	8.667
28	0.500	9.533
29	0.500	10.400
30	0.500	11.267
31	0.500	12.133
32	0.500	13.000
33	1.000	0.000
34	1.000	0.867
35	1.000	1.733
36	1.000	2.600
37	1.000	3.467
38	1.000	4.333
39	1.000	5.200
40	1.000	6.067
41	1.000	6.933

} sigue igual

7.600	6.067
9.600	6.933
0.600	7.800
0.600	8.667
9.600	9.533
9.600	10.400
0.600	11.267
9.600	12.133
9.600	13.000

NO.	RUDD I	RUDD J	MAT. NO.	SEC. NO.	APUY I	APUY J	LONGITUD
1	52	60	1	1	0	0	2.000
2	55	71	1	1	0	0	2.000
3	58	74	1	1	0	0	2.000
4	61	77	1	1	0	0	2.000
5	64	80	1	1	0	0	2.000
6	132	146	1	1	0	0	1.000
7	135	147	1	1	0	0	1.000
8	138	148	1	1	0	0	1.000
9	141	149	1	1	0	0	1.000
10	144	150	1	1	0	0	1.000
11	146	154	1	1	0	0	1.000
12	147	157	1	1	0	0	1.000
13	148	160	1	1	0	0	1.000
14	149	163	1	1	0	0	1.000
15	150	166	1	1	0	0	1.000
16	145	146	1	2	0	0	2.600
17	146	147	1	2	0	0	2.600
18	147	148	1	2	0	0	2.600
19	148	149	1	2	0	0	2.600
20	149	150	1	2	0	0	2.600

270.00 GRADOS, ANGULO ENTRE GRAVEDAD Y EJE X GLOBAL
 0.20 METROS, ESPESOR DOMINANTE EN EL MURO

LISTA NO. TIPO DE ELEMENTO

1	2
2	2
3	2
4	2
5	2
6	2
7	2
8	2
9	2
10	2
11	2
12	2
13	2
14	2
15	2
16	2
17	2
18	2
19	2
20	2
21	2

} sigue igual

142	1
143	1
144	1
145	1
146	1
147	1
148	1
149	1
150	1
151	1
152	1
153	1
154	1
155	1
156	1
157	1
158	1
159	1
160	1
161	1
162	1
163	1
164	1
165	1

ELEM NO=NOOD I=NOOD J=NOOD K=NOOD L=PAT.NO.=ESPFSOR(M) INGEN

1	2	1	17	18	1	0.20	0
2	4	3	19	20	1	0.20	1
3	6	5	21	22	1	0.20	1
4	8	7	23	24	1	0.20	1
5	10	9	25	26	1	0.20	1
6	12	11	27	28	1	0.20	1
7	14	13	29	30	1	0.20	1
8	16	15	31	32	1	0.20	1
9	19	18	34	35	1	0.20	0
10	21	20	36	37	1	0.20	1
11	23	22	38	39	1	0.20	1
12	25	24	40	41	1	0.20	1
13	27	26	42	43	1	0.20	1
14	29	28	44	45	1	0.20	1
15	31	30	46	47	1	0.20	1
16	34	33	49	50	1	0.20	0
17	36	35	51	52	1	0.20	1
18	38	37	53	54	1	0.20	1
19	40	39	55	56	1	0.20	1
20	42	41	57	58	1	0.20	1
21	44	43	59	60	1	0.20	1
22	46	45	61	62	1	0.20	1
23	48	47	63	64	1	0.20	1
24	67	66	82	83	1	0.20	0
25	69	68	84	85	1	0.20	1
26	71	70	86	87	1	0.20	1
27	73	72	88	89	1	0.20	1
28	75	74	90	91	1	0.20	1
29	77	76	92	93	1	0.20	1
30	79	78	94	95	1	0.20	1
31	82	81	97	98	1	0.20	0

} signal

152	186	185	201	202	1	0.20	1
153	188	187	203	204	1	0.20	1
154	190	189	205	206	1	0.20	1
5	192	191	207	208	1	0.20	1
156	194	193	209	210	1	0.20	1
157	196	195	211	212	1	0.20	1
158	198	197	213	214	1	0.20	1
159	201	200	216	217	1	0.20	0
160	203	202	218	219	1	0.20	1
161	205	204	220	221	1	0.20	1
162	207	206	222	223	1	0.20	1
163	209	208	224	225	1	0.20	1
164	211	210	226	227	1	0.20	1
165	213	212	228	229	1	0.20	1

54 ANCHO DE SCRIBANOA DE LA MATRIZ DE RIGIDECES

- 15 NO. DE NUDOS FRONTERA
- 1 NO. DE CONDICIONES DE CARGA
- 0 INDICADOR DE RIGIDECES DE ENTREPISO

NUDOS RESTRICCION	RESTRICCION TIPO 0=LIBRE, 1=FIJO		
	D-X	D-Y	R-Z
1	1	1	1
17	1	1	1
33	1	1	1
49	1	1	1
65	1	1	1
81	1	1	1
97	1	1	1
113	1	1	1
129	1	1	1
145	1	1	1
161	1	1	1
167	1	1	1
183	1	1	1
199	1	1	1
215	1	1	1

NO. DE RESTRICCIONES DE LA ESTRUCTURA 45
 NO. RESTRICCION 0.1. RESTRINGIDO

1	1
2	2
3	3
4	49
5	50
6	51
7	97
8	98
9	99
10	145
11	146

12	147
13	193
14	194
15	195
16	241
17	242
18	243
19	289
20	290
21	291
22	337
23	338
24	339
25	385
26	386
27	387
28	433
29	434
30	435
31	451
32	452
33	453
34	499
35	500
36	501
37	547
38	548
39	549
40	595
41	596
42	597
43	643
44	644
45	645

~~CALCULO DE LAS RIGIDEZES DE ENTREPISO~~

PIUNTOS MODALES EN CADA NIVEL

VEL NO. DE NUDOS

1	15
2	15
3	15
4	15
5	15

NUMERACION DE LOS NUDOS CONTENIDOS EN EL NIVEL NO. 1

4	20	36	52	68	84	100	116	132	148	164	180	196	212	228
---	----	----	----	----	----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----

NUMERACION DE LOS NUDOS CONTENIDOS EN EL NIVEL NO. 2

7	23	39	55	71	87	103	119	135	151	167	183	199	215	231
---	----	----	----	----	----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----

NUMERACION DE LOS NUDOS CONTENIDOS EN EL NIVEL NO. 3

10	26	42	58	74	90	106	122	138	154	170	186	202	218	234
----	----	----	----	----	----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----

NUMERACION DE LOS NUDOS CONTENIDOS EN EL NIVEL NO. 4

13	20	45	61	77	93	109	125	141	147	163	179	195	211	227
----	----	----	----	----	----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----

NUMERACION DE LOS NUDOS CONTENIDOS EN EL NIVEL NO. 5

16	32	48	64	80	96	112	128	144	150	166	182	198	214	230
----	----	----	----	----	----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----

ALTURAS DE LOS ENTREPIEDOS

ENTREPIED NO. ALTURA (M).

1	2.60
2	2.60
3	2.60
4	2.60
5	2.60

PESOS DE LOS NIVELES

NIVEL NO. PESO (TON)

1	33.230
2	33.230
3	33.230
4	33.230
5	33.230

COEFICIENTE SISMICO= 0.080

NIVEL * ALTURA (M) * FZA. RIGIDEZ (TON)

1	2.60	0.886
2	5.20	1.772
3	7.80	2.658
4	10.40	3.545
5	13.00	4.431

RIGIDEZES DE ENTREPIEDOS EN TON/M

2.9836E+04 1.2200E+04 8.2321E+03 5.8534E+03 3.3549E+03

ANALISIS DEL MURO MARCO A CONSIDERANDO CARGA ESTADICA Y VIBRO

1 NO. DE CONDICION DE CARGA
 20 NO. DE BARRAS CARGADAS
 00 NO. DE MUJOS CARGADOS

DATOS PARA EL CASO DE BARRAS CON CARGAS INTERMEDIAS DISTINTAS A PESO PRO	
BARRA NO.	IMP. GRAFI
1	1
2	1
3	1
4	1
5	1
6	1
7	1
8	1
9	1
10	1
11	1
12	1
13	1
14	1
15	1
16	1
17	1
18	1
19	1
20	1

BARRA 1 CARGA DIST UNIFOR CONTIN(TON/M)= 0.5000

BARRA 2 CARGA DIST UNIFOR CONTIN(TON/M)=A LA BARRA ANTERIOR

BARRA 3 CARGA DIST UNIFOR CONTIN(TON/M)=A LA BARRA ANTERIOR

BARRA 4 CARGA DIST UNIFOR CONTIN(TON/M)=A LA BARRA ANTERIOR

BARRA 5 CARGA DIST UNIFOR CONTIN(TON/M)=A LA BARRA ANTERIOR

BARRA 6 CARGA DIST UNIFOR CONTIN(TON/M)= 0.2500

BARRA 7 CARGA DIST UNIFOR CONTIN(TON/M)=A LA BARRA ANTERIOR

BARRA 8 CARGA DIST UNIFOR CONTIN(TON/M)=A LA BARRA ANTERIOR

BARRA 9 CARGA DIST UNIFOR CONTIN(TON/M)=A LA BARRA ANTERIOR

BARRA 10 CARGA DIST UNIFOR CONTIN(TON/M)=A LA BARRA ANTERIOR

BARRA 11 CARGA DIST UNIFOR CONTIN(TON/M)=A LA BARRA ANTERIOR

BARRA 12 CARGA DIST UNIFOR CONTIN(TON/M)=A LA BARRA ANTERIOR

BARRA 13 CARGA DIST UNIFOR CONTIN(TON/M)=A LA BARRA ANTERIOR

- BARRA 14 CARGA DIST UNIFOR CONTIN(TON/M)=A LA BARRA ANTERIOR
- ~~BARRA 15 CARGA DIST UNIFOR CONTIN(TON/M)=A LA BARRA ANTERIOR~~
- BARRA 16 CARGA DIST UNIFOR CONTIN(TON/M)= 0.0000
- BARRA 17 CARGA DIST UNIFOR CONTIN(TON/M)=A LA BARRA ANTERIOR
- ~~BARRA 18 CARGA DIST UNIFOR CONTIN(TON/M)=A LA BARRA ANTERIOR~~
- BARRA 19 CARGA DIST UNIFOR CONTIN(TON/M)=A LA BARRA ANTERIOR
- ~~BARRA 20 CARGA DIST UNIFOR CONTIN(TON/M)=A LA BARRA ANTERIOR~~

CIONES CONCENTRADAS EN LOS NUDOS (EN TON Y TON*M)
 UDO H.O.FZA. HORIZONTAL FZA. VERTICAL MOMENTO

NODO	FZA. HORIZONTAL	FZA. VERTICAL	MOMENTO
1	0.000	-1.491	0.00000
17	0.000	-2.982	0.00000
33	0.000	-2.982	0.00000
49	0.000	-2.982	0.00000
65	0.000	-2.982	0.00000
81	0.000	-2.982	0.00000
97	0.000	-2.982	0.00000
113	0.000	-2.982	0.00000
129	0.000	-2.982	0.00000
145	0.000	-2.982	0.00000
(51	0.000	-2.982	0.00000
167	0.000	-2.982	0.00000
183	0.000	-2.982	0.00000
199	0.000	-2.982	0.00000
215	0.000	-1.491	0.00000
4	0.056	-1.491	0.00000
20	0.056	-2.982	0.00000
36	0.056	-2.982	0.00000
52	0.056	-2.982	0.00000
68	0.056	-2.982	0.00000
84	0.056	-2.982	0.00000
100	0.056	-2.982	0.00000
116	0.056	-2.982	0.00000
132	0.056	-2.982	0.00000
148	0.056	-2.982	0.00000
164	0.056	-2.982	0.00000
180	0.056	-2.982	0.00000
186	0.056	-2.982	0.00000
202	0.056	-2.982	0.00000
218	0.056	-1.491	0.00000
7	0.112	-1.491	0.00000
23	0.112	-2.982	0.00000
39	0.112	-2.982	0.00000
55	0.112	-2.982	0.00000
71	0.112	-2.982	0.00000
87	0.112	-2.982	0.00000
103	0.112	-2.982	0.00000
119	0.112	-2.982	0.00000
135	0.112	-2.982	0.00000
141	0.112	-2.982	0.00000
157	0.112	-2.982	0.00000

173	0.112	-2.982	0.00000
180	0.112	-2.982	0.00000
205	0.112	-2.982	0.00000
221	0.112	-1.491	0.00000
19	0.168	-1.491	0.00000
76	0.168	-2.982	0.00000
42	0.168	-2.982	0.00000
58	0.168	-2.982	0.00000
74	0.168	-2.982	0.00000
93	0.168	-2.982	0.00000
106	0.168	-2.982	0.00000
122	0.168	-2.982	0.00000
138	0.168	-2.982	0.00000
148	0.168	-2.982	0.00000
160	0.168	-2.982	0.00000
176	0.168	-2.982	0.00000
192	0.168	-2.982	0.00000
208	0.168	-2.982	0.00000
224	0.168	-1.491	0.00000
13	0.220	-1.491	0.00000
29	0.220	-2.982	0.00000
45	0.220	-2.982	0.00000
61	0.220	-2.982	0.00000
77	0.220	-2.982	0.00000
93	0.220	-2.982	0.00000
109	0.220	-2.982	0.00000
125	0.220	-2.982	0.00000
141	0.220	-2.982	0.00000
149	0.220	-2.932	0.00000
163	0.220	-2.982	0.00000
179	0.220	-2.982	0.00000
195	0.220	-2.982	0.00000
211	0.220	-2.982	0.00000
227	0.220	-1.491	0.00000
16	0.280	-1.491	0.00000
32	0.280	-2.982	0.00000
48	0.280	-2.982	0.00000
64	0.280	-2.982	0.00000
80	0.280	-2.982	0.00000
96	0.280	-2.982	0.00000
112	0.280	-2.982	0.00000
128	0.280	-2.982	0.00000
144	0.280	-2.982	0.00000
150	0.280	-2.982	0.00000
166	0.280	-2.982	0.00000
182	0.280	-2.982	0.00000
198	0.280	-2.982	0.00000
214	0.280	-2.982	0.00000
230	0.280	-1.491	0.00000

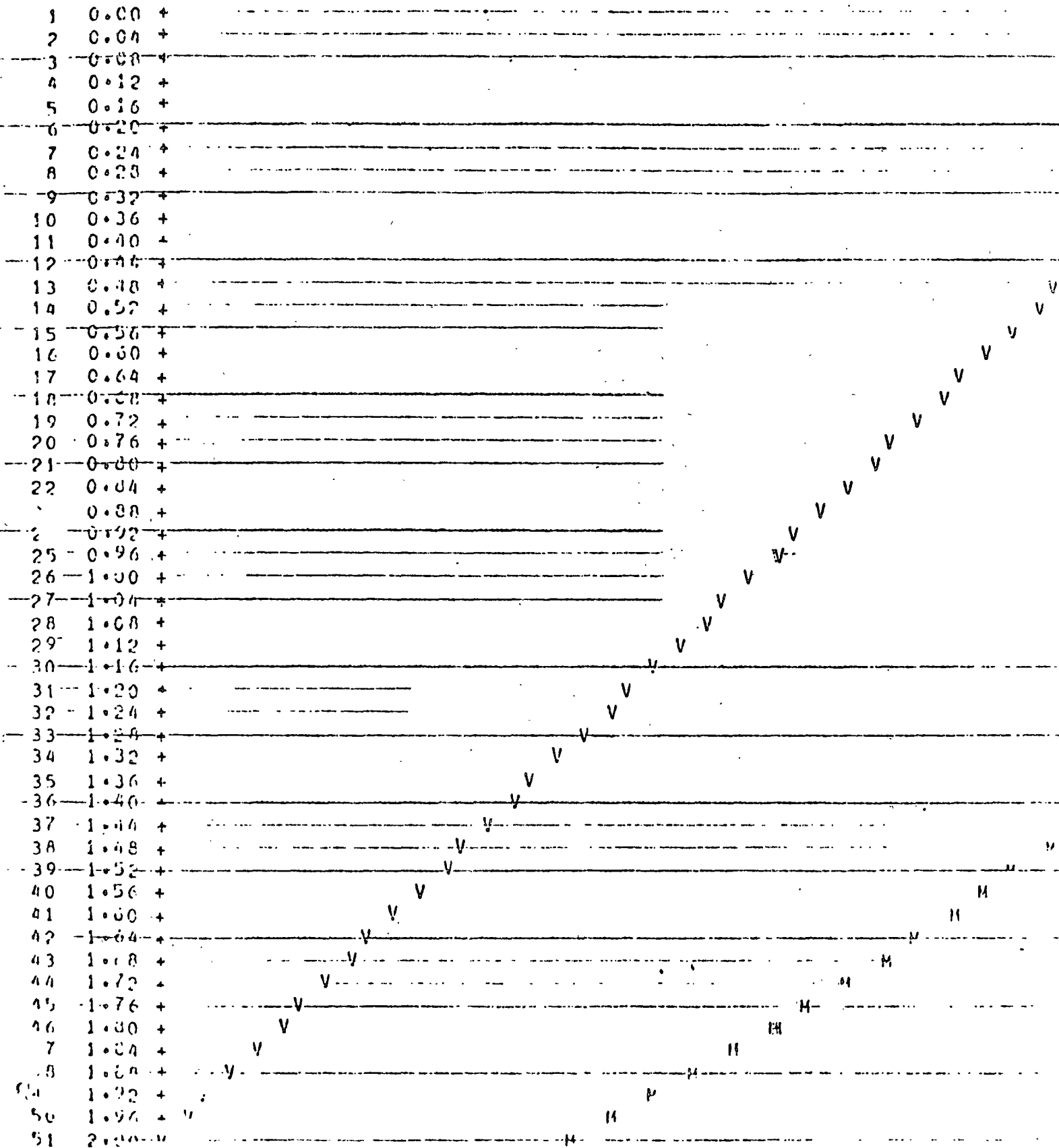
DESPLAZAMIENTOS NODALES DE LA ESTRUCTURA (CM)

NO. NUDO	HORIZONTAL	VERTICAL	GIROS (RAD)
1	0.	0.	0.
2	3.4578361E-05	-4.3734483E-05	-9.6972576E-05
3	1.8176531E-04	-8.8345851E-05	-1.9722313E-04
4	3.6482475E-04	-1.4563486E-04	-2.7239434E-04
5	6.2696880E-04	-1.9244611E-04	-3.3306638E-04
6	9.3653634E-04	-2.4714974E-04	-3.8158451E-04
7	1.2833062E-03	-3.1083084E-04	-4.0188536E-04

} Sigue Igual

ESCALA DE LA GRAFICA= 1,16380E-02 UNIDADES/COLUMA 11
 ORDENADA MENOR = -9.02614E-01
 ORDENADA MAYOR = 2.61184E-01

BARRA NO. 1, NUDO INICIAL= 52, NUDO FINAL



CONTANTES EN TORO Y MOMENTOS EN TORO-M

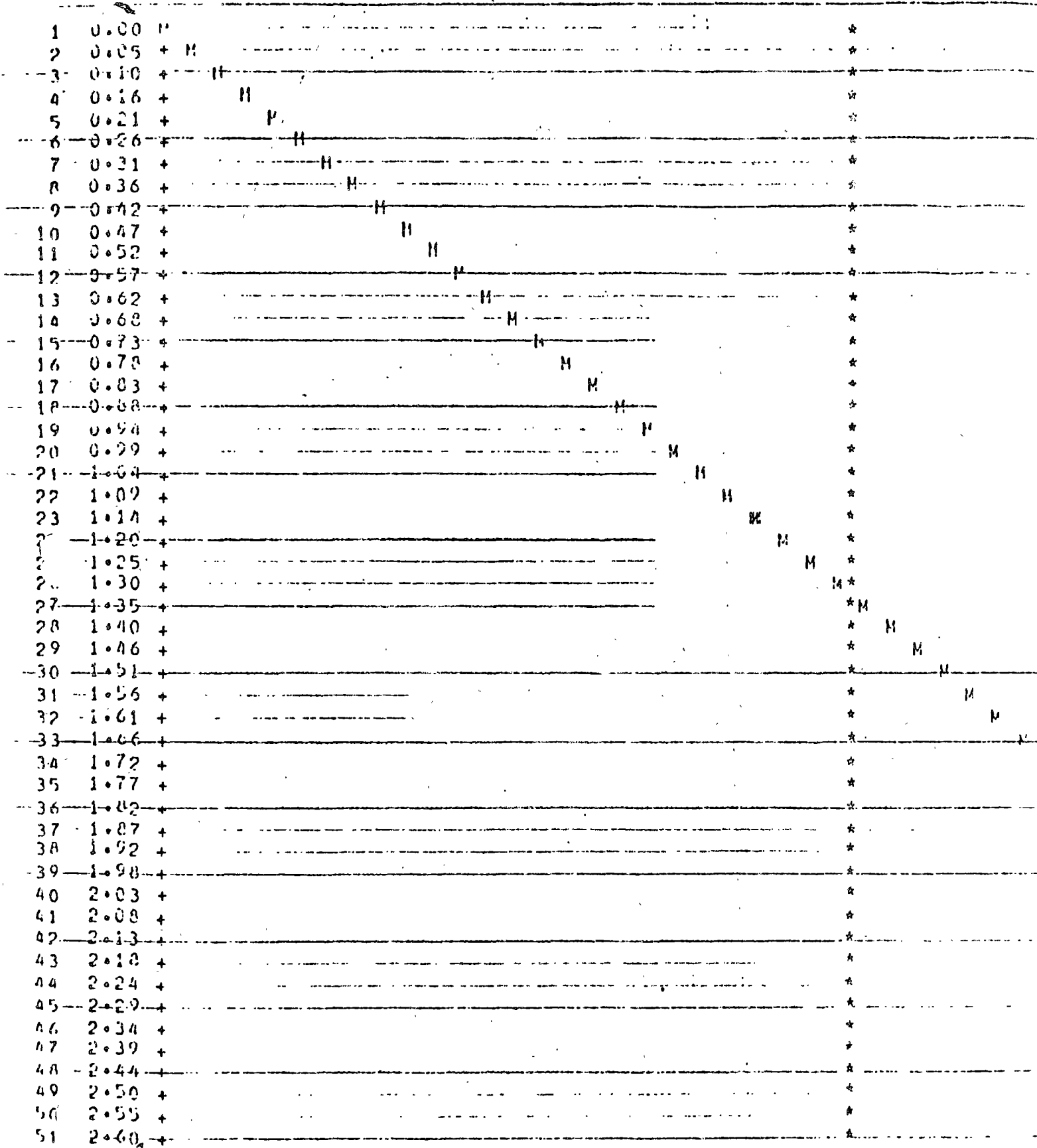
UNION FTNAL = 6A

V M

Symbol	Value	Symbol	Value
		M+	0.74F-02
		M+	7.74F-02
		M	5.74F-02
		M	3.74F-02
		M	1.74F-02
		M	-2.61F-03
		M	-2.26F-02
		M	-4.26F-02
		M	-6.26F-02
		M	-8.26F-02
		M+	-1.03F-01
		M+	-1.23F-01
		M	-1.43F-01
		M	-1.63F-01
		M	-1.83F-01
		M	-2.03F-01
		M	-2.23F-01
		M	-2.43F-01
		M	-2.63F-01
		M	-2.83F-01
		M	-3.03F-01
		M	-3.23F-01
		M	-3.43F-01
		M	-3.63F-01
		M	-3.83F-01
		M	-4.03F-01
		M	-4.23F-01
		M	-4.43F-01
		M	-4.63F-01
		M	-4.83F-01
		M	-5.03F-01
		M	-5.23F-01
		M	-5.43F-01
		M	-5.63F-01
		M	-5.83F-01
		M	-6.03F-01
		M	-6.23F-01
		M	-6.43F-01
		M	-6.63F-01
		M	-6.83F-01
		M	-7.03F-01
		M	-7.23F-01
		M	-7.43F-01
		M	-7.63F-01
		M	-7.83F-01
		M	-8.03F-01
		M	-8.23F-01
		M	-8.43F-01
		M	-8.63F-01
		M	-8.83F-01
		M	-9.03F-01
		M	-9.23F-01
		M	-9.43F-01
		M	-9.63F-01
		M	-9.83F-01
		M	-10.03F-01

ESCALA DE LA GRAFICA= 7.12272E-03 UNIDADES/COLUMNA
 ORDENADA MENOR = -3.59964E-01
 ORDENADA MAYOR = 3.52304E-01

BARRA NO. 16, NUDO INICIAL = 145, NUDO FINAL



CORTANTES EN TON. Y MOMENTOS EN TON-M

AL = 145. NUDO FINAL = 146

V

M

*			V	+	2.74E-01	-3.60E-01		
*			V	+	2.74E-01	-3.46E-01		
*			V	+	2.74E-01	-3.31E-01		
*			V	+	2.74E-01	-3.17E-01		
*			V	+	2.74E-01	-3.03E-01		
*			V	+	2.74E-01	-2.89E-01		
*			V	+	2.74E-01	-2.74E-01		
*			V	+	2.74E-01	-2.60E-01		
*			V	+	2.74E-01	-2.46E-01		
*			V	+	2.74E-01	-2.32E-01		
*			V	+	2.74E-01	-2.18E-01		
*			V	+	2.74E-01	-2.03E-01		
*			V	+	2.74E-01	-1.89E-01		
*			V	+	2.74E-01	-1.75E-01		
*			V	+	2.74E-01	-1.61E-01		
*			V	+	2.74E-01	-1.46E-01		
*			V	+	2.74E-01	-1.32E-01		
*			V	+	2.74E-01	-1.18E-01		
*			V	+	2.74E-01	-1.04E-01		
*			V	+	2.74E-01	-8.93E-02		
*			V	+	2.74E-01	-7.51E-02		
*			V	+	2.74E-01	-6.08E-02		
*			V	+	2.74E-01	-4.66E-02		
*			V	+	2.74E-01	-3.23E-02		
I			V	+	2.74E-01	-1.81E-02		
*			V	+	2.74E-01	-3.83E-03		
M*			V	+	2.74E-01	-1.04E-02		
*	M		V	+	2.74E-01	2.47E-02		
*		M	V	+	2.74E-01	3.80E-02		
*			V	+	2.74E-01	5.32E-02		
*		M	V	+	2.74E-01	6.74E-02		
*			V	+	2.74E-01	8.16E-02		
*			V	+	2.74E-01	9.59E-02		
*			V	+	2.74E-01	1.10E-01		
*			V	+	2.74E-01	1.24E-01		
*			V	+	2.74E-01	1.39E-01		
*			V	+	2.74E-01	1.53E-01		
*			V	+	2.74E-01	1.67E-01		
*			V	+	2.74E-01	1.81E-01		
*			V	+	2.74E-01	1.96E-01		
*			V	+	2.74E-01	2.10E-01		
*			V	+	2.74E-01	2.24E-01		
*			V	+	2.74E-01	2.38E-01		
*			V	+	2.74E-01	2.53E-01		
*			V	+	2.74E-01	2.67E-01		
*			VH	+	2.74E-01	2.81E-01		
*			V	+	2.74E-01	2.95E-01		
*			V	+	2.74E-01	3.10E-01		
*			V	+	2.74E-01	3.24E-01		
*			V	+	2.74E-01	3.38E-01		
*			V	+	2.74E-01	3.52E-01		

BARRA L X T R E M O
NO. INICIAL FINAL

N O R M A L

EYTRERO INICIAL (TON Y TON=M)
C O R T A N T E F L E X T O N A N T E

H

FR. NO.	ECORR. X	CINADAS Y	(M)++	ESTUCIOS REFERIDOS A XY	GE (TON/H*2)	FSF	WZNS	DE	
NO.	X	Y	TXX	U TSS	TYY	O TTT	TXY	O TSY	T11
1	0.250	0.433	2.7130E+00	1.1632E+02	3.2908E+00	2.6178E+00			
2	0.250	2.167	1.6729E+00	1.2962E+02	5.1504E+00	1.4640E+00			
3	0.250	3.900	1.1331E+01	1.1664E+02	2.7319E+00	1.7720E+00			
4	0.250	5.633	1.3500E+00	1.0003E+02	1.3674E+00	1.3850E+00			
5	0.250	7.367	1.8471E+00	1.0671E+02	3.3696E+00	1.7340E+00			
6	0.250	9.100	2.4058E+02	7.8668E+01	3.7715E+01	9.6467E+00			
7	0.250	10.833	1.1813E+00	4.5407E+01	1.7995E+00	1.2507E+00			
8	0.250	12.567	3.4803E+00	3.0996E+01	2.1333E+00	3.3159E+00			
9	0.750	1.300	2.2988E+00	2.0299E+02	6.8115E+00	2.5245E+00			
10	0.750	3.033	1.9747E+00	1.6211E+02	4.5920E+00	2.1031E+00			
11	0.750	4.767	8.6727E+01	1.5610E+02	6.2326E+00	6.1784E+00			
12	0.750	6.500	2.2665E+01	1.1867E+02	4.3487E+00	3.8580E+00			
13	0.750	8.233	9.9559E+01	8.1042E+01	5.8073E+01	9.4970E+00			
14	0.750	9.967	5.4520E+01	7.5519E+01	1.2030E+00	5.2590E+00			
15	0.750	11.700	4.9256E+01	3.8914E+01	1.5712E+00	5.5535E+00			
16	1.250	0.433	3.1459E+01	2.8913E+02	7.2605E+00	3.1255E+00			
17	1.250	2.167	1.9015E+00	2.6637E+02	1.9460E+00	1.4472E+00			
18	1.250	3.900	3.7152E+01	2.0097E+02	3.0142E+00	3.2617E+00			
19	1.250	5.633	4.4169E+00	1.4239E+02	1.2720E+00	4.0043E+00			
20	1.250	7.367	1.9265E+00	1.2741E+02	2.6868E+00	1.9823E+00			
21	1.250	9.100	3.0246E+01	7.7590E+01	2.2454E+01	3.0311E+00			
22	1.250	10.833	5.3077E+00	3.6086E+01	4.4242E+00	4.6846E+00			
23	1.250	12.567	1.7134E+00	4.2566E+01	2.1240E+00	1.8151E+00			
24	3.750	1.300	2.2063E+00	8.4175E+01	7.7766E+00	2.9064E+00			
25	3.750	3.033	9.3962E+00	7.6809E+01	1.3024E+01	1.1321E+00			
26	3.750	4.767	1.8298E+01	1.1618E+02	1.2253E+01	1.6787E+00			
27	3.750	6.500	1.0979E+00	9.2124E+01	4.5565E+00	1.3201E+00			
28	3.750	8.233	1.2549E+01	6.8625E+01	1.1860E+01	1.4266E+00			
29	3.750	9.967	1.9853E+01	2.1638E+01	9.9401E+00	1.9502E+00			
30	3.750	11.700	5.3633E+00	4.8286E+01	1.3925E+00	5.3092E+00			
31	4.250	0.433	1.6443E+01	1.5290E+02	7.9152E+00	1.5096E+00			
32	4.250	2.167	5.8700E+00	1.6255E+02	1.5659E+01	4.3205E+00			
33	4.250	3.900	4.8725E+01	1.3557E+02	1.9736E+01	3.2025E+00			
34	4.250	5.633	6.4613E+00	1.0599E+02	2.1942E+00	6.9197E+00			
35	4.250	7.367	6.1507E+00	1.0897E+02	1.9155E+01	5.1570E+00			
36	4.250	9.100	2.1116E+01	7.7235E+01	1.5605E+01	3.2270E+00			
37	4.250	10.833	6.3101E+00	4.2527E+01	4.9079E+01	6.3150E+00			
38	4.250	12.567	8.9754E+00	3.3925E+01	2.2655E+00	8.6505E+00			
39	4.750	1.300	1.1622E+01	2.3719E+02	1.8896E+01	1.6114E+00			
40	4.750	3.033	1.4896E+00	1.8485E+02	1.1051E+01	8.1702E+00			
41	4.750	4.767	4.9239E+00	1.6749E+02	1.0149E+01	5.5193E+00			
42	4.750	6.500	4.3703E+01	1.2396E+02	1.8857E+01	3.2327E+00			
43	4.750	8.233	4.1312E+00	5.1678E+01	4.2541E+00	3.8003E+00			
44	4.750	9.967	7.1900E+00	7.2009E+01	4.1159E+00	7.4033E+00			
45	4.750	11.700	6.8367E+02	3.7668E+01	1.1248E+01	4.7208E+00			
46	5.250	0.433	4.1364E+01	3.3618E+02	1.4760E+01	4.0633E+00			
47	5.250	2.167	5.6458E+00	2.8689E+02	9.2066E+00	5.9353E+00			
48	5.250	3.900	2.8978E+01	2.1472E+02	5.4979E+00	1.4801E+00			
49	5.250	5.633	2.3122E+01	1.6247E+02	6.4186E+00	2.2227E+00			
50	5.250	7.367	1.5496E+01	1.2399E+02	1.5807E+01	1.7170E+00			
51	5.250	9.100	1.2946E+00	7.5611E+01	2.5903E+00	1.3893E+00			

FSEUEBZOS PRINCIPALTS REFXY (TON/M**2) ++*NDT*PPAI*

T11	T22	TAIIMAX	(GRADOS) T
-2.6178E+00	-1.1642E+02	5.6000E+01	-16.578
-1.4660E+00	-1.2982E+02	6.8179E+01	23.015
1.7720E+01	-1.1670E+02	5.8000E+01	13.307
1.3850E+00	-1.0007E+02	5.0726E+01	10.548
-1.7340E+00	-1.0681E+02	5.2538E+01	18.386
9.6067E+02	-7.0670E+01	3.9383E+01	2.746
-1.2507E+00	-4.5476E+01	2.3363E+01	-22.087
-3.3159E+00	-3.1161E+01	1.3022E+01	44.070
2.5245E+00	-2.0322E+02	1.0287E+02	18.283
-2.1031E+00	-1.6224E+02	8.2160E+01	-16.018
-6.1744E+01	-1.5635E+02	7.7868E+01	22.054
3.8509E+01	-1.1893E+02	5.0608E+01	20.010
9.9070E+01	-8.1046E+01	4.1023E+01	-4.056
-5.2590E+01	-7.5538E+01	3.7506E+01	9.191
5.5535E+01	-3.8976E+01	1.9766E+01	-22.881
-3.1255E+01	-2.8934E+02	1.2008E+02	-16.127
-1.8472E+00	-2.6639E+02	1.3225E+02	0.216
-3.2617E+01	-2.0101E+02	1.0034E+02	0.613
-0.4043E+00	-1.4240E+02	6.8097E+01	-5.282
1.9823E+00	-1.2746E+02	8.4722E+01	11.896
3.0311E+01	-7.7599E+01	3.8951E+01	1.651
-4.6844E+00	-3.6710E+01	1.6013E+01	-80.106
1.8151E+00	-4.2658E+01	2.2241E+01	-27.000
2.9009E+00	-8.4869E+01	4.3885E+01	51.035
1.1321E+01	-7.8733E+01	4.5027E+01	80.063
-1.6787E+01	-1.1769E+02	5.0450E+01	70.281
1.3201E+00	-9.2346E+01	4.6833E+01	27.017
-1.0246E+01	-7.0323E+01	4.2285E+01	01.045
-1.8502E+01	-9.2989E+01	3.7243E+01	77.308
5.3094E+00	-4.8322E+01	2.6861E+01	14.859
-1.5090E+01	-1.5336E+02	6.8684E+01	33.087
-4.3205E+00	-1.6410E+02	7.9891E+01	56.516
3.2025E+00	-1.3837E+02	7.0831E+01	80.805
-6.9197E+00	-1.6645E+02	5.6684E+01	36.458
-5.1578E+00	-1.0996E+02	5.2402E+01	55.867
3.2372E+00	-8.0261E+01	4.1749E+01	100.743
-6.3150E+00	-4.2532E+01	2.4423E+01	-5.757
-8.6505E+00	-3.4250E+01	1.2800E+01	60.683
1.6114E+00	-2.3860E+02	1.2015E+02	45.282
-8.1702E+01	-1.8551E+02	9.2340E+01	30.363
5.5193E+00	-1.6809E+02	8.6803E+01	33.573
3.2327E+00	-1.2675E+02	6.4093E+01	80.332
-3.8083E+00	-8.1911E+01	3.0006E+01	31.321
7.4033E+00	-7.2222E+01	3.0813E+01	29.670
4.7208E+00	-4.2457E+01	2.3589E+01	185.780
-4.0633E+01	-3.3691E+02	1.8818E+02	28.875
5.9353E+00	-2.8718E+02	1.4656E+02	18.008
-1.8891E+01	-2.1446E+02	1.0736E+02	10.678
-2.2827E+01	-1.6277E+02	6.9070E+01	26.317
1.7178E+01	-1.2567E+02	7.1423E+01	62.287
1.3823E+00	-7.5706E+01	3.8540E+01	10.326

Signal
+ Signal
↓

ELEMENTO	GRUPO	Fx	Fy	II
1	2	0.06401	3.01552	0.00000
1	1	0.85426	7.38013	0.00000
1	17	0.71632	4.28767	0.00000
1	18	0.20195	8.65224	0.00000
16	34	2.78918	9.61457	0.00000
16	33	2.02773	18.02470	2.00000
16	49	4.46482	10.93294	0.00000
16	50	0.35209	19.34308	2.00000
31	82	1.77110	5.20475	0.00000
31	81	0.96367	8.96433	1.00000
31	97	2.70536	6.30227	0.00000
31	98	0.02942	10.06185	1.00000
46	114	3.98698	11.91785	0.00000
46	113	2.21670	20.62108	2.00000
46	129	5.91376	13.06553	1.00000
46	130	0.28993	21.76875	2.00000
61	168	1.92696	5.62451	0.00000
61	167	0.90414	9.31794	1.00000
61	163	2.95614	6.82760	0.00000
61	184	0.12503	10.52102	1.00000
76	200	4.38672	13.16723	0.00000
76	199	2.24360	22.61114	3.00000
76	215	6.35623	14.42406	1.00000
76	216	0.27409	23.88797	3.00000
91	18	0.93066	12.98592	1.00000
91	17	2.83964	5.90690	0.00000
91	33	1.70014	14.11524	1.00000
91	34	2.07016	7.03622	0.00000
106	66	0.32843	3.99070	0.00000
106	65	0.98254	1.42865	0.00000
106	81	0.63325	5.15606	0.00000
106	82	0.67772	2.59401	0.00000
121	98	1.89759	16.60583	2.00000
121	97	2.07282	6.44249	0.00000
121	113	2.30616	17.43689	1.00000
121	114	2.06425	7.27354	0.00000
136	152	0.34806	3.76478	0.00000
136	151	0.77590	1.12480	0.00000
136	167	0.61772	5.07866	0.00000
136	168	0.50624	2.43869	0.00000
151	184	2.14604	18.15582	2.00000
151	183	2.30852	6.84765	0.00000
151	199	2.48606	19.04229	2.00000
151	200	1.96850	7.73411	0.00000

17

TIEMPO DE EJECUCION = 118.5033 SEC
 TIEMPO DE ENTRADA Y SALIDA = 27.2667 SEC

TIEMPO DE EJECUCION = 119.0167 SEC
 TIEMPO DE ENTRADA Y SALIDA = 27.6333 SEC

The displacements of a node have two components

$$\{\delta_i\} = \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \end{Bmatrix} \quad (4.1)$$

and the six components of element displacements are listed as a vector

$$\{\delta\}^e = \begin{Bmatrix} \delta_i \\ \delta_j \\ \delta_m \end{Bmatrix} \quad (4.2)$$

4. Plane Stress and Plane Strain

4.1 Introduction

Two-dimensional elastic problems were the first successful examples of the application of the finite element method.^{1,2} Indeed, we have already used this situation to illustrate the basis of the finite element formulation in Chapter 2 where the general relationships were derived. These basic relationships are given in Eqs. (2.1), (2.2), (2.3), (2.9), (2.10), and (2.16) and for quick reference are summarized in Appendix II.

In this chapter the particular relationships for the problem in hand will be derived in more detail, and illustrated by suitable practical examples, a procedure that will be followed throughout the remainder of the book.

Only the simplest, triangular, element will be discussed in detail but the basic approach is general. More elaborate elements to be discussed in later chapters would be introduced to the same problem in an identical manner.

The reader not familiar with the applicable basic definitions of elasticity is referred to elementary texts on the subject, in particular to the text by Timoshenko and Goodier,³ whose notation will be widely used here.

In both problems of plane stress and plane strain the displacement field is uniquely given by the u and v displacements in directions of the cartesian, orthogonal x and y axes.

Again, in both, the only strains and stresses that have to be considered are the three components in the x - y plane. In the case of *plane stress*, by definition, all other components of stress are zero and therefore give no contribution to internal work. In *plane strain* the stress in a direction perpendicular to the x - y plane is not zero. However, by definition, the strain in that direction is zero, and therefore no contribution to internal work is made by this stress, which can in fact be explicitly evaluated from the three main stress components, if desired, at the end of all computation.

4.2 Element Characteristics

4.2.1 Displacement functions. Figure 4.1 shows the typical triangular element considered, with nodes i, j, m numbered in an anti-clockwise order.

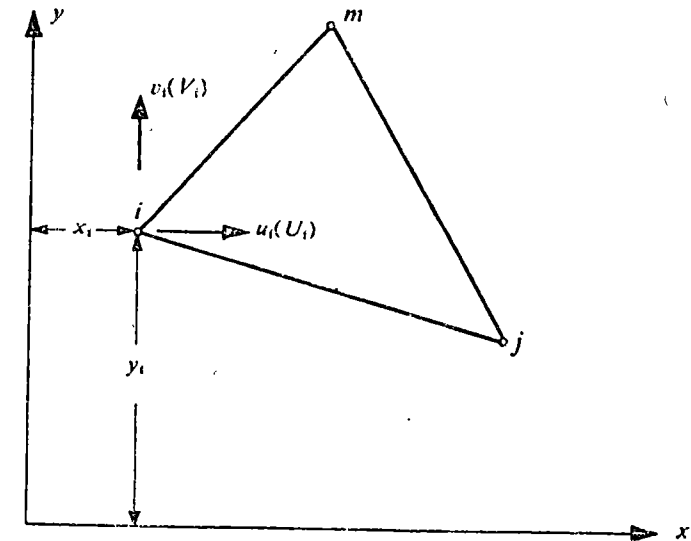


Fig. 4.1 An element of a continuum in plane stress or plane strain

The displacements within an element have to be uniquely defined by these six values. The simplest representation is clearly given by two linear polynomials

$$\begin{aligned} u &= \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y, \\ v &= \alpha_4 + \alpha_5 x + \alpha_6 y. \end{aligned} \quad (4.3)$$

The six constants α can be evaluated easily by solving the two sets of three simultaneous equations which will arise if the nodal co-ordinates are inserted and the displacements equated to the appropriate nodal displacements. Writing, for example,

$$\begin{aligned} u_i &= \alpha_1 + \alpha_2 x_i + \alpha_3 y_i \\ u_j &= \alpha_1 + \alpha_2 x_j + \alpha_3 y_j \\ u_m &= \alpha_1 + \alpha_2 x_m + \alpha_3 y_m \end{aligned} \quad (4.4)$$

we can easily solve for α_1 , α_2 , and α_3 in terms of the nodal displacements u_i , u_j , u_m and obtain finally

$$u = \frac{1}{2\Delta} \{(a_i + b_i x + c_i y)u_i + (a_j + b_j x + c_j y)u_j + (a_m + b_m x + c_m y)u_m\} \quad (4.5a)$$

in which

$$\begin{aligned} a_i &= x_j y_m - x_m y_j \\ b_i &= y_j - y_m = y_{jm} \\ c_i &= x_m - x_j = x_{mj} \end{aligned} \quad (4.5b)$$

with the other coefficients obtained by a cyclic permutation of subscripts in the order, i, j, m , and where

$$2\Delta = \det \begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_m & y_m \end{vmatrix} = 2 \quad (\text{area of triangle } ijm). \quad (4.5c)$$

As the equations for the vertical displacement v are similar we also have

$$v = \frac{1}{2\Delta} \{(a_i + b_i x + c_i y)v_i + (a_j + b_j x + c_j y)v_j + (a_m + b_m x + c_m y)v_m\}. \quad (4.6)$$

Though not strictly necessary at this stage we can represent the above relations Eqs. (4.5a) and (4.6) in the standard form of Eq. (2.1)

$$\{f\} = \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = [N] \{\delta\}^e = [IN'_i, IN'_j, IN'_m] \{\delta\}^e \quad (4.7)$$

with I a two by two identity matrix, and

$$N'_i = (a_i + b_i x + c_i y)/2\Delta \text{ etc.} \quad (4.8)$$

Note: if co-ordinates are taken from the centroid of the element then $x_i + x_m + x_j = y_i + y_j + y_m = 0$ and $a_i = 2\Delta/3 = a_j = a_m$.

The chosen displacement function automatically guarantees continuity of displacements with adjacent elements because the displacements vary linearly along any side of the triangle and, with identical displacement imposed at the nodes, the same displacement will clearly exist all along an interface.

4.2.2 Strain (total). The total strain at any point within the element can be defined by its three components which contribute to internal work.

$$\{\epsilon\} = \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{Bmatrix}. \quad (4.9)$$

Using Eqs. (4.7) or (4.5a) and (4.6) we have

$$\begin{aligned} \{\epsilon\} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial N'_i}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N'_j}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N'_m}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N'_i}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N'_j}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N'_m}{\partial y} \\ \frac{\partial N'_i}{\partial y} & \frac{\partial N'_i}{\partial x} & \frac{\partial N'_j}{\partial y} & \frac{\partial N'_j}{\partial x} & \frac{\partial N'_m}{\partial y} & \frac{\partial N'_m}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \\ u_m \\ v_m \end{Bmatrix} \\ &= \frac{1}{2\Delta} \begin{bmatrix} b_i & 0 & b_j & 0 & b_m & 0 \\ 0 & c_i & 0 & c_j & 0 & c_m \\ c_i & b_i & c_j & b_j & c_m & b_m \end{bmatrix} \{\delta\}^e \end{aligned} \quad (4.10)$$

which defines the matrix $[B]$ of Eq. (2.2) explicitly.

It will be noted that in this case the $[B]$ matrix is independent of the position within the element, and hence the strains are constant throughout it. Obviously, the criterion of constant strain mentioned in Chapter 2 is satisfied by the shape functions.

4.2.3 Initial strain (thermal strain). 'Initial' strains, that is strains which are independent of stress, may be due to many causes. Shrinkage, crystal growth or, most frequently, temperature changes will, in general, result in an initial strain vector.

$$\{\epsilon_0\} = \begin{Bmatrix} \epsilon_{x0} \\ \epsilon_{y0} \\ \gamma_{xy0} \end{Bmatrix}. \quad (4.11)$$

Although this initial strain may, in general, depend on the position within the element, it will usually be defined by average, constant, values. This is consistent with the constant strain conditions imposed by the prescribed displacement function.

Thus, for the case of *plane stress* in an isotropic material in an element subject to a temperature rise θ^e with a coefficient of thermal expansion α ,

we will have, for instance,

$$\{\varepsilon_0\} = \begin{Bmatrix} \alpha\theta^e \\ \alpha\theta^e \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4.12)$$

as no shear strains are caused by a thermal dilatation.

In *plane strain* the situation is more complex. The presumption of plane strain implies that stresses perpendicular to the x - y plane will develop due to thermal expansion even without the three main stress components, and hence the initial strain will be affected by the elastic constants.

It will be shown that in such a case

$$\{\varepsilon_0\} = (1 + \nu) \begin{Bmatrix} \alpha\theta^e \\ \alpha\theta^e \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4.13)$$

where ν is the Poisson's ratio.

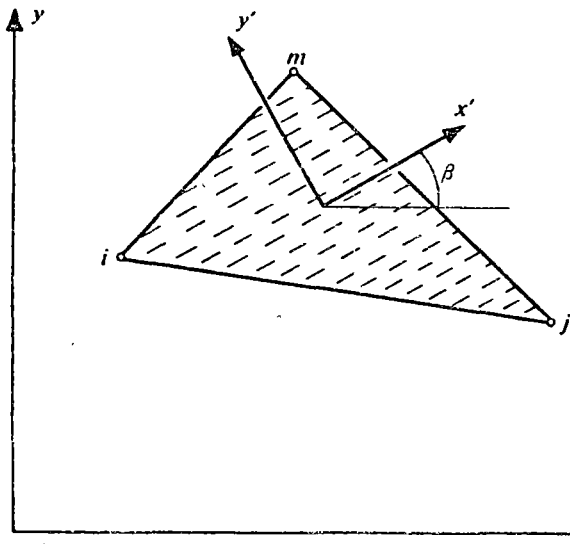


Fig. 4.2 An element of a stratified (transversely-isotropic) material

Anisotropic materials present special problems, since the coefficients of thermal expansion may vary with direction. Let x' and y' in Fig. 4.2 show the principal directions of the material. The initial strain due to thermal expansion becomes, with reference to these co-ordinates for plane stress

$$\{\varepsilon_0\}' = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{x'0} \\ \varepsilon_{y'0} \\ \gamma_{x'y'0} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \alpha_1\theta^e \\ \alpha_2\theta^e \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4.14)$$

where α_1 and α_2 are the expansion coefficients referred to the x' and y' axes respectively.

To obtain the strain components in the x , y system it is necessary to use an appropriate strain transformation matrix $[T]$ giving

$$\{\varepsilon_0\} = [T]^T \{\varepsilon_0\}'. \quad (4.15)$$

With the β as defined in Fig. 4.2 it is easily verified that

$$[T] = \begin{bmatrix} \cos^2 \beta & \sin^2 \beta & -2 \sin \beta \cos \beta \\ \sin^2 \beta & \cos^2 \beta & 2 \sin \beta \cos \beta \\ \sin \beta \cos \beta & -\sin \beta \cos \beta & \cos^2 \beta - \sin^2 \beta \end{bmatrix}$$

Thus, $\{\varepsilon_0\}$ can be simply evaluated. It will be noted that no longer is the shear component of strain equal to zero in the x - y co-ordinates.

4.2.4 *Elasticity matrix.* The matrix $[D]$ of the relation Eq. (2.3)

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = [D] \left(\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} - \{\varepsilon_0\} \right) \quad (4.16)$$

can be explicitly stated for any material (excluding here $\{\sigma_0\}$ which is simply additive).

Plane stress— isotropic material. For plane stress in an isotropic material we have, by definition,

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \sigma_x/E - \nu\sigma_y/E + \varepsilon_{x0} \\ \varepsilon_y &= -\nu\sigma_x/E + \sigma_y/E + \varepsilon_{y0} \\ \gamma_{xy} &= 2(1 + \nu)\tau_{xy}/E + \varepsilon_{xy0}. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Solving the above for the stresses, we obtain matrix $[D]$ as

$$[D] = \frac{E}{1 - \nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1 - \nu)/2 \end{bmatrix} \quad (4.18)$$

in which E is the elastic modulus and ν is the Poisson's ratio.

Plane strain— isotropic material. In this case a normal stress σ_z exists in addition to the three other stress components. For the special case of isotropic thermal expansion we have

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \sigma_x/E - \nu\sigma_y/E - \nu\sigma_z/E + \alpha\theta^e \\ \varepsilon_y &= -\nu\sigma_x/E + \sigma_y/E - \nu\sigma_z/E + \alpha\theta^e \\ \gamma_{xy} &= 2(1 + \nu)\tau_{xy}/E. \end{aligned} \quad (4.19)$$

but in addition

$$\varepsilon_z = 0 = -\nu\sigma_x/E - \nu\sigma_y/E + \sigma_z/E + \alpha\theta^e.$$

On eliminating σ_z and solving for the three remaining stresses we obtain the previously quoted expression for the initial strain Eq. (4.13), and by comparison with Eq. (4.16), the matrix $[D]$

$$[D] = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \nu/(1-\nu) & 0 \\ \nu/(1-\nu) & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-2\nu)/2(1-\nu) \end{bmatrix}. \quad (4.20)$$

Anisotropic materials. For a completely anisotropic material, 21 independent elastic constants are necessary to define completely the three-dimensional stress-strain relationship.^{4,5}

If two-dimensional analysis is to be applicable a symmetry of properties must exist, implying at most six independent constants in the $[D]$ matrix. Thus, it is always possible to write

$$[D] = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} \\ & d_{22} & d_{23} \\ (\text{sym}) & & d_{33} \end{bmatrix} \quad (4.21)$$

to describe the most general two-dimensional behaviour. (The necessary symmetry of the $[D]$ matrix follows from the general equivalent of the Maxwell-Betti reciprocal theorem and is a consequence of invariant energy irrespective of the path taken to reach a given strain state.)

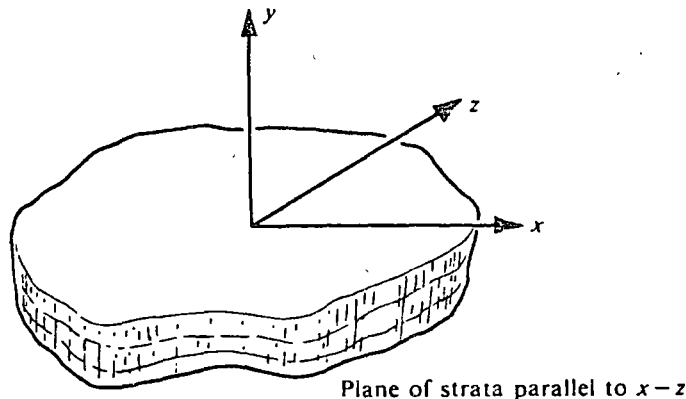


Fig. 4.3 A stratified (transversely-isotropic) material

A case of particular interest in practice is that of a 'stratified' or transversely-isotropic material in which a rotational symmetry of properties exists within the plane of the strata. Such a material possesses only five independent elastic constants.

The general stress-strain relations give in this case, following the notation of Lekhnitskii,⁴ and taking now the y axis as perpendicular to the strata (neglecting initial strain), Fig. 4.3.

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \sigma_x/E_1 - \nu_2\sigma_y/E_2 - \nu_1\sigma_z/E_1 \\ \varepsilon_y &= -\nu_2\sigma_x/E_2 + \sigma_y/E_2 - \nu_2\sigma_z/E_2 \\ \varepsilon_z &= -\nu_1\sigma_x/E_1 - \nu_2\sigma_y/E_2 + \sigma_z/E_1 \\ \gamma_{xz} &= \{2(1+\nu_1)/E_1\}\tau_{xz} \\ \gamma_{xy} &= \frac{1}{G_2}\tau_{xy} \\ \gamma_{yz} &= \frac{1}{G_2}\tau_{yz} \end{aligned} \quad (4.22)$$

in which the constants E_1 , ν_1 (G_1 is dependent) are associated with the behaviour in plane of the strata and E_2 , G_2 , ν_2 with a direction normal to these.

The $[D]$ matrix in two-dimensions becomes now, taking

$$\frac{E_1}{E_2} = n \quad \text{and} \quad \frac{G_2}{E_2} = m$$

$$[D] = \frac{E_2}{(1-\nu_2^2)} \begin{bmatrix} n & n\nu_2 & 0 \\ n\nu_2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & m(1-\nu_2^2) \end{bmatrix} \quad (4.23)$$

for plane stress, or

$$D = \frac{E_2}{(1+\nu_1)(1-\nu_1-2n\nu_2^2)} \begin{bmatrix} n(1-\nu_2^2) & n\nu_2(1+\nu_1) & 0 \\ n\nu_2(1+\nu_1) & (1-\nu_1^2) & 0 \\ 0 & 0 & m(1+\nu_1)(1-\nu_1-2n\nu_2^2) \end{bmatrix} \quad (4.24)$$

for plane strain.

When, as in Fig. 4.2, the direction of strata is inclined to the x -axis then to obtain the $[D]$ matrices in the universal co-ordinates a transformation

is necessary. Taking $[D']$ as relating the stresses and strains in the inclined co-ordinate system (x', y') it is easy to show that

$$[D] = [T][D'][T]^T \quad (4.25)$$

where $[T]$ is the same as given in Eq. (4.15)

If the stress systems $\{\sigma'\}$ and $\{\sigma\}$ correspond to $\{\epsilon'\}$ and $\{\epsilon\}$ respectively then by equality of work

$$\{\sigma'\}^T \{\epsilon'\} = \{\sigma\}^T \{\epsilon\}$$

or

$$\{\epsilon'\}^T [D'] \{\epsilon'\} = \{\epsilon\}^T [D] \{\epsilon\}$$

from which Eq. (4.25) follows on substitution of Eq. (4.15). (See also Chapter 1.)

4.2.5 *The stiffness matrix.* The stiffness matrix of the element ijm is defined from the general relationship Eq. (2.10) as

$$[k] = \int [B]^T [D] [B] t \, dx \, dy \quad (4.26)$$

where t is the thickness of the element and the integration is taken over the area of the triangle. If the thickness of the element is assumed to be constant, an assumption convergent to the truth as size of elements decreases, then, as neither of the matrices contains x or y we have, simply

$$[k] = [B]^T [D] [B] t \Delta \quad (4.27)$$

where Δ is the area of the triangle (defined already by Eq. (3.5)). This form is now sufficiently explicit for computation with the actual matrix operations being left to the computer.

The matrix $[B]$ defined by Eq. (4.10) can be written as

$$[B] = [B_i, B_j, B_m] \quad \text{with} \quad [B_i] = \begin{Bmatrix} b_i & 0 \\ 0 & c_i \\ c_i & b_i \end{Bmatrix} / 2\Delta, \text{ etc.} \quad (4.28)$$

Now the stiffness matrix can be written in a partitioned form as

$$[k] = \begin{bmatrix} k_{ii} & k_{ij} & k_{im} \\ k_{ji} & k_{jj} & k_{jm} \\ k_{mi} & k_{mj} & k_{mm} \end{bmatrix} \quad (4.29)$$

in which the 2 by 2 submatrices are built up as

$$[k_{rs}] = [B_r]^T [D] [B_s] t \Delta. \quad (4.30)$$

This form is often convenient for computation.

4.2.6 *Nodal forces due to initial strain.* These are given directly by the expression Eq. (2.12) which, on performing the integration, becomes

$$\{F\}_{\epsilon_0}^e = -[B]^T [D] [\epsilon_0] t \Delta, \text{ etc.} \quad (4.31)$$

Partitioning, one can write alternatively

$$\{F_i\}_{\epsilon_0}^e = -[B_i]^T [D] [\epsilon_0] t \Delta, \text{ etc.} \quad (4.32)$$

These 'initial strain' forces are contributed to the nodes of an element in an unequal manner and require precise evaluation. Similar expressions are derived for initial stress forces.

4.2.7 *Distributed body forces.* In the general case of plane stress or strain each element of unit area in the x - y plane is subject to forces

$$\{p\} = \begin{Bmatrix} X \\ Y \end{Bmatrix}$$

in the direction of the appropriate axes.

Again, by Eq. (2.11), the contribution of such forces to these at each node is given by

$$\{F_i\}_p^e = - \int [N]^T \begin{Bmatrix} X \\ Y \end{Bmatrix} dx \, dy,$$

or by Eq. (4.7)

$$\{F_i\}_p = - \begin{Bmatrix} X \\ Y \end{Bmatrix} \int N_i \, dx \, dy, \text{ etc.} \quad (4.33)$$

if the body forces X and Y are constant. As N_i is no longer constant the integration has to be carried out explicitly. Some general integration formulae for a triangle are given in Appendix III.

In this special case the calculation will be simplified if the origin of co-ordinates is taken at the centroid of the element. Now

$$\int x \, dx \, dy = \int y \, dx \, dy = 0$$

and on using Eq. (3.8)

$$\{F_i\}_p = - \begin{Bmatrix} X \\ Y \end{Bmatrix} \int a_i \, dx \, dy / 2\Delta = - \begin{Bmatrix} X \\ Y \end{Bmatrix} a_i / 2$$

$$\text{or} \quad \{F_i\}_p = - \begin{Bmatrix} X \\ Y \end{Bmatrix} \Delta / 3 = \{F_j\}_p = \{F_m\}_p \quad (4.34)$$

by relations noted on p. 50.

Explicitly, for the whole element

$$\{F\}_p^e = - \begin{Bmatrix} X \\ Y \\ X \\ Y \\ X \\ Y \end{Bmatrix} \Delta / 3 \quad (4.35)$$

which means simply that the total forces acting in x and y direction due to the body forces are distributed to the nodes in three equal parts. This fact corresponds with physical intuition, and was often assumed implicitly.

4.2.8 *Body force potential.* In many cases the body forces are defined in terms of a body force potential ϕ as

$$X = -\frac{\partial\phi}{\partial x}, \quad Y = -\frac{\partial\phi}{\partial y} \quad (4.36)$$

and this potential, rather than the values of X and Y , is known throughout the region and is specified at nodal points. If $\{\phi\}^e$ lists the three values of the potential associated with the nodes of the element, i.e.,

$$\{\phi\}^e = \begin{Bmatrix} \phi_i \\ \phi_j \\ \phi_m \end{Bmatrix} \quad (4.37)$$

and has to correspond with constant values of X and Y , ϕ must vary linearly within the element. The 'shape function' of its variation will obviously be given by a procedure identical to that used in deriving Eqs. (4.4) to (4.6), and yields

$$\phi = [N'_i, N'_j, N'_m]\{\phi\}^e. \quad (4.38)$$

Thus,

$$X = -\frac{\partial\phi}{\partial x} = -[b_i, b_j, b_m]\{\phi\}^e/2\Delta$$

and

$$Y = -\frac{\partial\phi}{\partial y} = -[c_i, c_j, c_m]\{\phi\}^e/2\Delta. \quad (4.39)$$

The vector of nodal forces due to the body force potential will now replace Eq. (4.35) by

$$\{F\}_p^e = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} b_i & b_j & b_m \\ c_i & c_j & c_m \\ b_i & b_j & b_m \\ c_i & c_j & c_m \\ b_i & b_j & b_m \\ c_i & c_j & c_m \end{bmatrix} \{\phi\}^e \quad (4.40)$$

4.2.9 *Evaluation of stresses.* The formulae derived enable the full stiffness matrix of the structure to be assembled, and a solution for displacements to be obtained.

The stress matrix given in general terms in Eq. (2.15) is obtained by the appropriate substitutions for each element.

The stresses are, by the basic assumption, constant within the element. It is usual to assign these to the centroid of the element, and in most of the examples in this chapter this procedure is followed. An alternative consists of obtaining stress values at the nodes by averaging the values in the adjacent elements. Some 'weighting' procedures have been used in this context on an empirical basis but their advantage appears small.

It is usual to arrange for the computer to calculate the principal stresses and their directions of every element.

4.3 Examples—An Assessment of Accuracy

There is no doubt that the solution to plane elasticity problems as formulated in Section 4.2 is, in the limit of subdivision, an exact solution. Indeed at any stage of a finite subdivision it is an approximate solution as, say, a Fourier series solution with a limited number of terms.

As already explained in Chapter 2 the total strain energy obtained during any stage of approximation will be below the true strain energy of the exact solution. In practice it will mean that the displacements, and hence also the stresses, will be underestimated by the approximation in its *general picture*. However, it must be emphasized that this is not necessarily true at every point of the continuum individually; hence the value of such a bound in practice is not great.

What is important for the engineer to know is the order of accuracy achievable in typical problems with a certain fineness of element subdivision. In any particular case the error can be assessed by comparison with known, exact, solutions or by a study of the convergence, using two or more stages of subdivision.

With the development of experience the engineer can assess *a priori* the order of approximation that will be involved in a specific problem tackled with a given element subdivision. Some of this experience will perhaps be conveyed by the examples considered in this book.

In the first place attention will be focused on some simple problems for which exact solutions are available.

Uniform stress field. If the exact solution is in fact that of a uniform stress field then, whatever the element subdivision, the finite element solution will coincide exactly with the exact one. This is an obvious corollary of the formulation, nevertheless it is useful as a first check of written computer programs.

Linearly varying stress field. Here, obviously, the basic assumption of constancy of stress within elements means that solution will be approximate only. In Fig. 4.4 a simple example of a beam subject to constant

bending moment is shown with a fairly coarse subdivision. It is readily seen that the axial (σ_y) stress given by the element 'straddles' the exact values and, in fact, if the constant stress values are associated with centroids of the elements and plotted, the best 'fit' line represents the exact stresses.

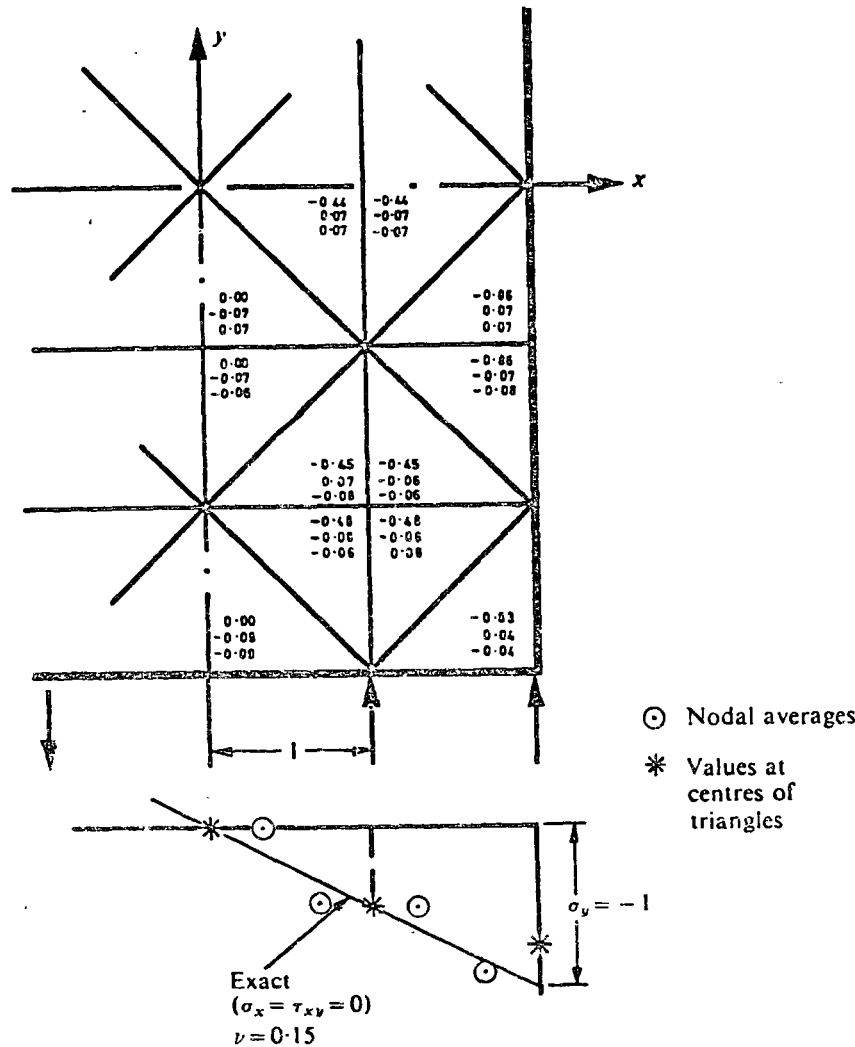


Fig. 4.4 Pure bending of a beam solved by a coarse subdivision into elements of triangular shape. (Values of σ_y , σ_x , and τ_{xy} listed in that order)

The horizontal and shear stress components differ again from the exact values (which are simply zero). Again, however, it will be noted that they oscillate by equal, small amounts around the exact values.

At internal nodes, if the average of stresses of surrounding elements is taken it will be found that the exact stresses are very closely represented. The average at external faces is not, however, so good. The overall improvement in representing the stresses by nodal averages, as shown on Fig. 4.4, is often used in practice for improvement of the approximation.

A weighting of averages near the faces of the structure can further be used for refinement. Without being dogmatic on this point, it seems preferable, when accuracy demands this, simply to use a finer mesh subdivision.

Stress concentration. A more realistic test problem is shown in Figs. 4.5 and 4.6. Here the flow of stress around a circular hole in an isotropic and in an anisotropic stratified material is considered when the stress conditions are uniform.⁶ A graded division into elements is used to allow a more detailed study in the region where high stress gradients are expected. The high degree of accuracy achievable can be assessed from Fig. 4.6 where some of the results are compared against exact solutions.^{3,7}

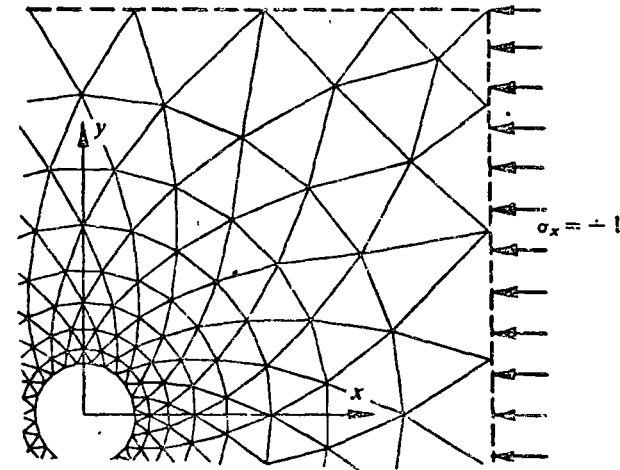


Fig. 4.5 A circular hole in a uniform stress field. (a) isotropic material; (b) stratified (orthotropic) material; $E_x = E_1 = 1$, $E_y = E_2 = 3$, $\nu_1 = 0.1$, $\nu_2 = 0$, $G_{xy} = 0.42$

4.4 Some Practical Applications

Obviously, the practical applications of the method are limitless, and indeed at this moment of time the use of the finite element method is superseding experimental technique for plane problems because of its high accuracy, low cost, and versatility. The ease of treatment of material anisotropy, thermal stresses, or body force problems add to its advantages.

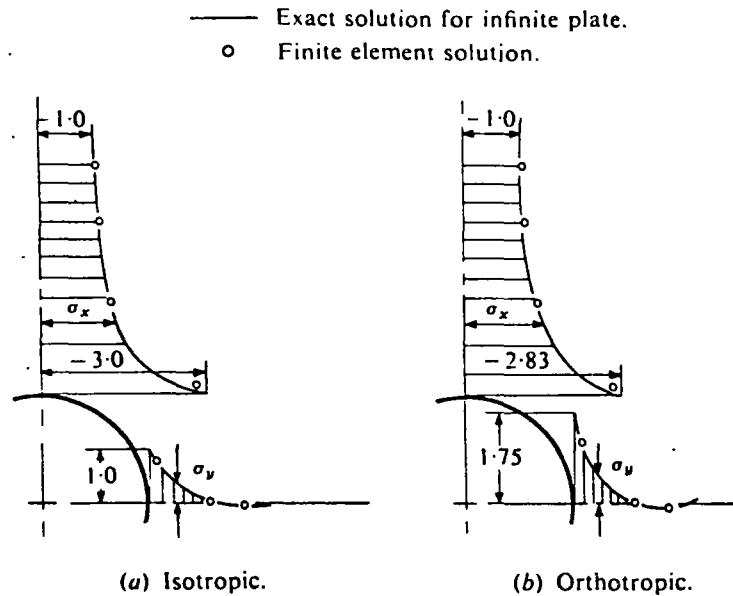


Fig. 4.6 Comparison of theoretical and finite element results for cases (a) and (b) of Fig. 4.5

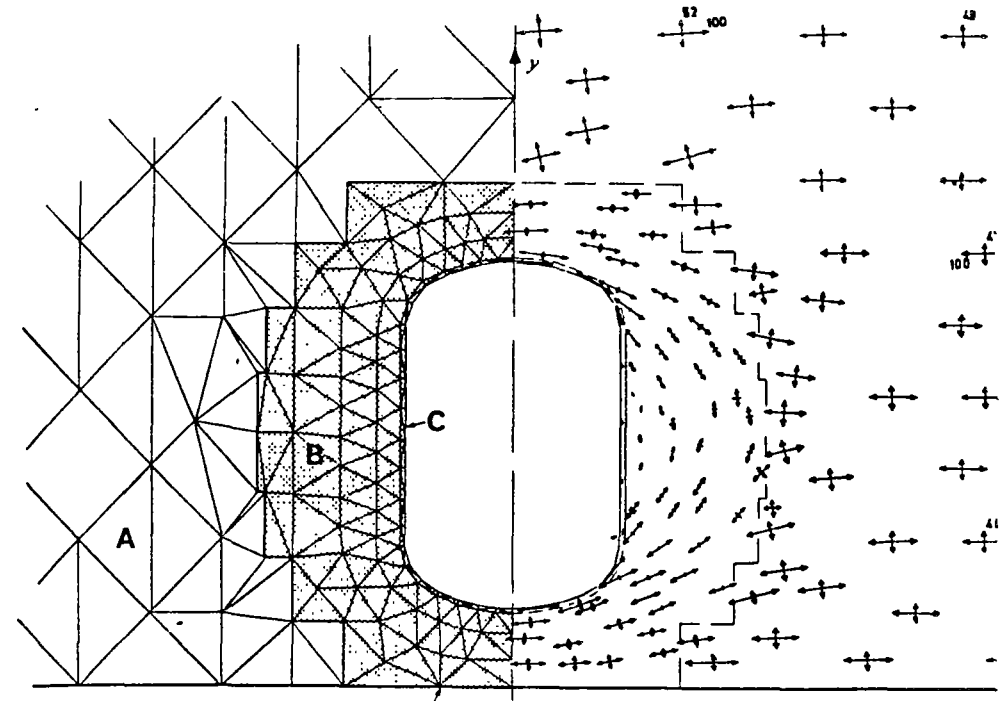
A few examples of actual applications to complex problems of engineering practice will now be given.

Stress flow around a reinforced opening (Fig. 4.7). In steel pressure vessels or aircraft structures, openings have to be introduced in the stressed skin. The penetrating duct itself provides some reinforcement round the edge and, in addition, the skin itself is increased in thickness to reduce the stresses due to the concentration effects.

Analysis of such problems treated as cases of plane stress presents no difficulties. The elements are so chosen as to follow the thickness variation, and appropriate values of this are assigned.

The narrow band of thick material near the edge can be represented either by special beam-type elements, or more easily in a standard programme by very thin triangular elements of the usual type, to which appropriate thickness is assigned. The latter procedure was used in the problem shown in Fig. 4.7 which gives some of the resulting stresses near the opening itself. The fairly large extent of the region introduced in the analysis and the grading of the mesh should be noted.

*An anisotropic valley subject to tectonic stress*⁶ (Fig. 4.8). A symmetrical valley subject to a uniform horizontal stress is considered. The material is stratified, hence is 'transversely isotropic', and the direction of strata varies from point to point.



Restrained in y direction from movement.

Fig. 4.7 A reinforced opening in a plate. Uniform stress field at a distance from opening $\sigma_x = 100$, $\sigma_y = 50$. Thickness of plate regions A, B, and C is in the ratio of 1:3:23

The stress plot shows the tensile region that develops. This phenomenon is of considerable interest to geologists and engineers concerned with rock mechanics.

A dam subject to external and internal water pressures^{8,9} (Fig. 4.9). A buttress dam on a somewhat complex rock foundation is here analysed. The heterogeneous foundation region is subject to plane strain conditions while the dam itself is considered as a plate (plane stress) of variable thickness.

With external and gravity loading no special problems of analysis arise, though perhaps it should be mentioned that it was found worth while to 'automatize' the computation of gravity nodal loads.

When pore pressures are considered, the situation, however, requires perhaps some explanation.

It is well known that in a porous material the water pressure is trans-

mitted to the structure as a *body force* of magnitude

$$X = -\frac{\partial p}{\partial x}, \quad Y = -\frac{\partial p}{\partial y}$$

and that now the external pressure need not be considered.

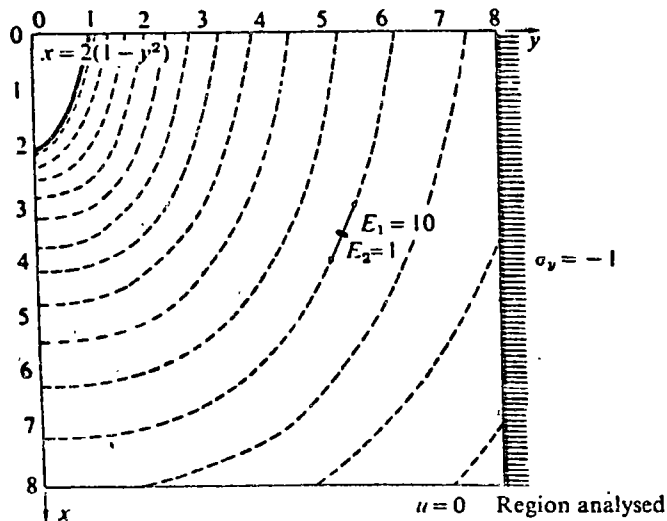
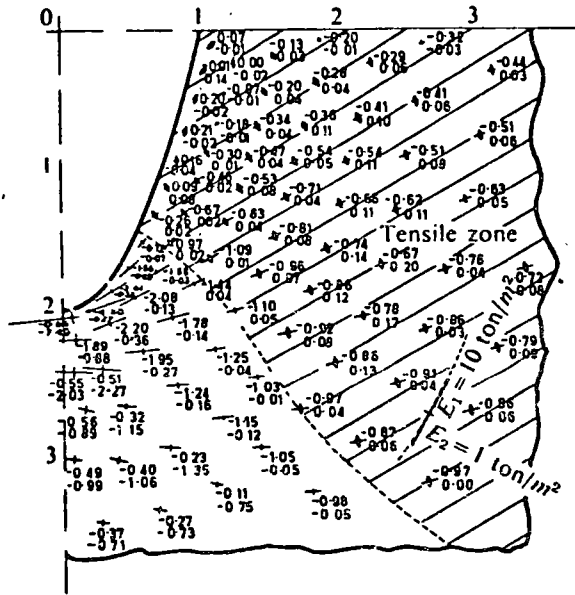
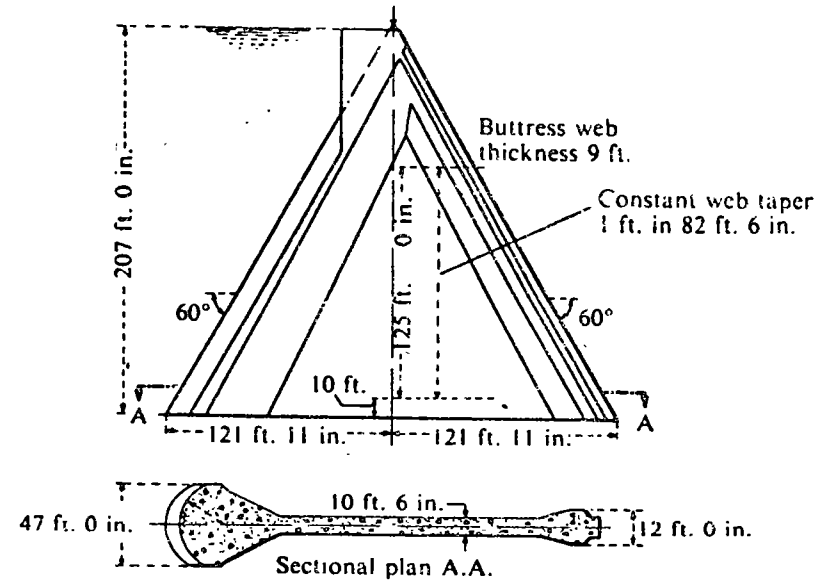
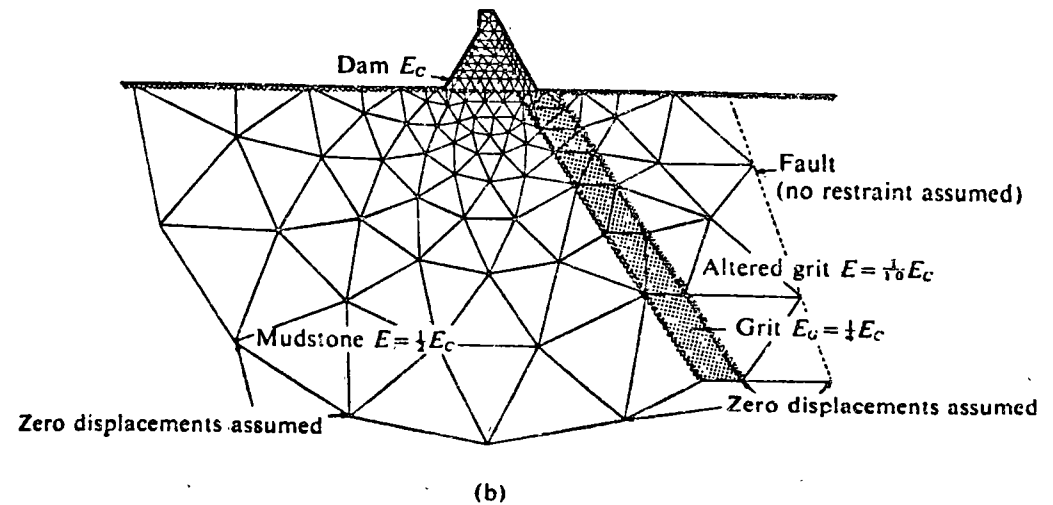


Fig. 4.8 A valley with curved strata subject to a horizontal tectonic stress (plane strain 170 nodes, 298 elements)

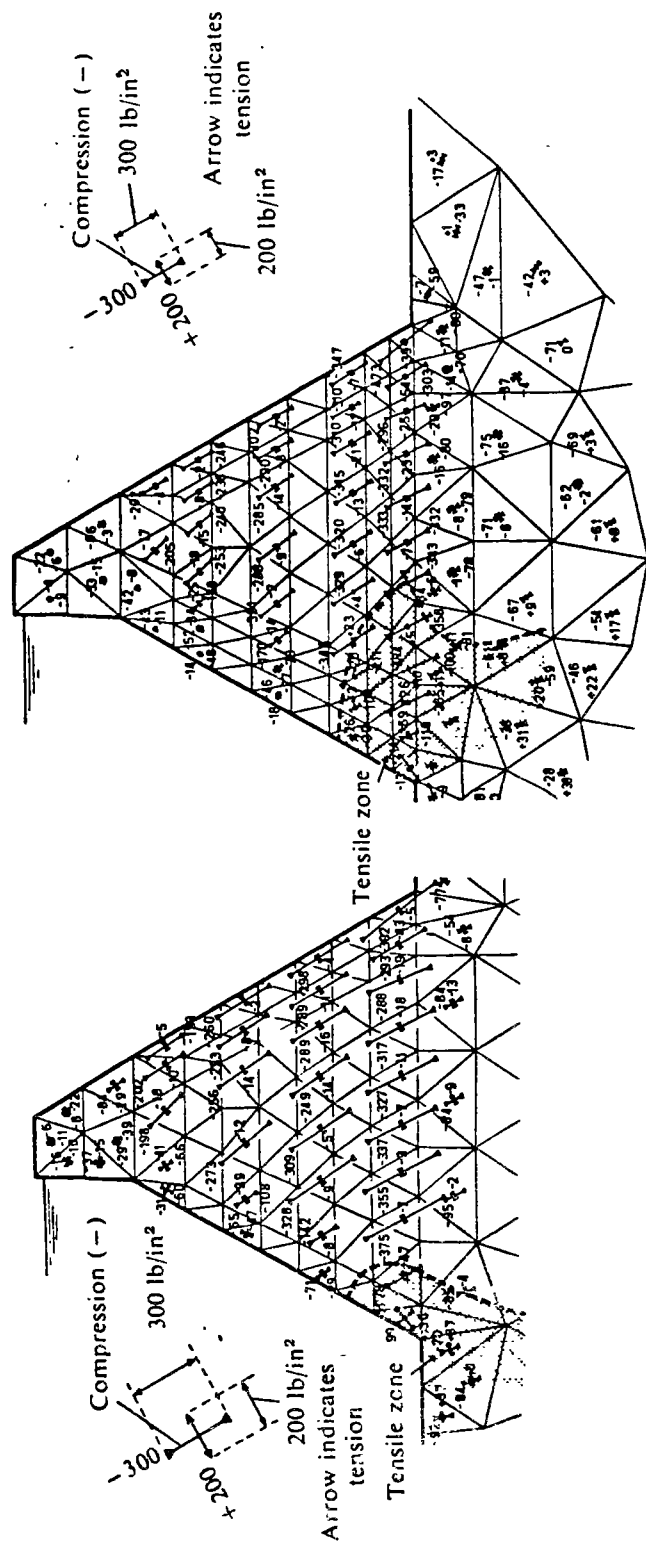


(a)



(b)

Fig. 4.9 Stress analysis of a buttress dam. Plane stress condition assumed in dam and plane strain in foundation. (a) The buttress section analysed. (b) Extent of foundation considered and division into finite elements



Below the foundation initial rock stresses should be superimposed

(a)

(b)

Fig. 4.10 Stress analysis of the buttress dam of Fig. 4.9. Principal stresses for gravity loads combined with water pressures, which are assumed to act (a) as external loads, (b) as body forces due to pore pressure

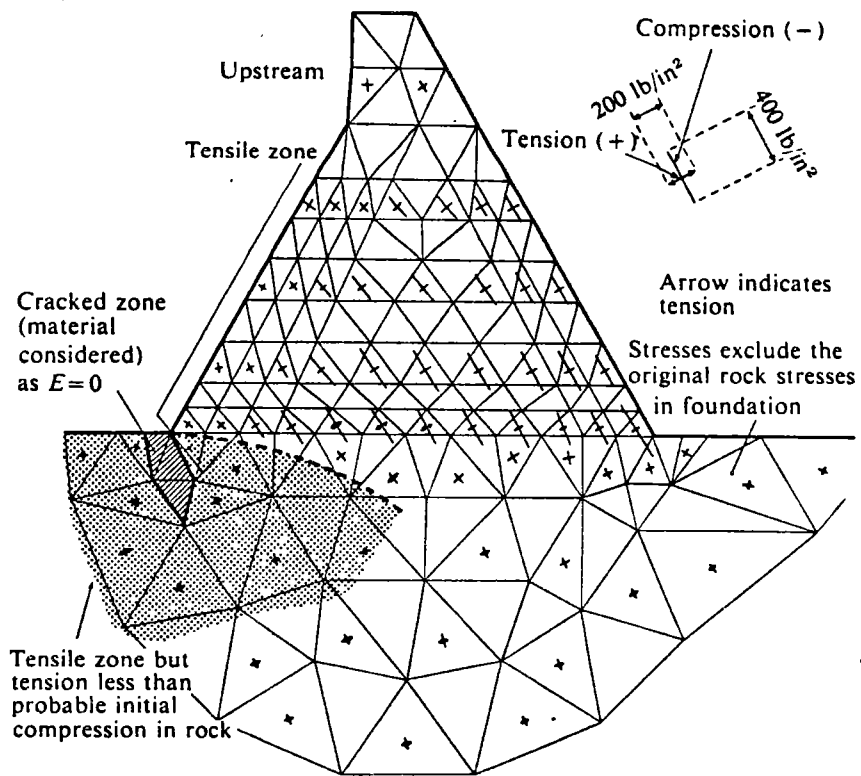


Fig. 4.11 Stresses in a buttress dam. An introduction of a 'crack' modifies stress distribution (same loading as Fig. 4.10(b))

The pore pressure p is, in fact, now a body force potential, as defined in Eq. (4.36). Figure 4.9 shows the element subdivision of the region and the outline of the dam. Figure 4.10(a) and (b) show the stresses resulting from gravity (applied to the dam only) and due to water pressure assumed to be acting as an external load or, alternatively as an internal pore pressure. Both solutions indicate large tensile regions, but the increase of stresses due to the second assumption is important.

Cracking. The tensile stresses in the previous example will doubtless cause the rock to crack. If a stable situation can develop when such a crack spreads then the dam can be considered safe.

Cracks can be introduced very simply into the analysis by assigning zero elasticity values to chosen elements. An analysis with a wide cracked wedge is shown in Fig. 4.11, where it can be seen that with the extent of the crack assumed no tension within the dam body develops.

A more elaborate procedure for following crack propagation and resulting stress redistribution can be developed and will be discussed later (see Chapter 18).

Thermal stresses. As an example of thermal stress computation the same dam is shown under simple temperature distribution assumptions. Results of this analysis are given in Fig. 4.12.

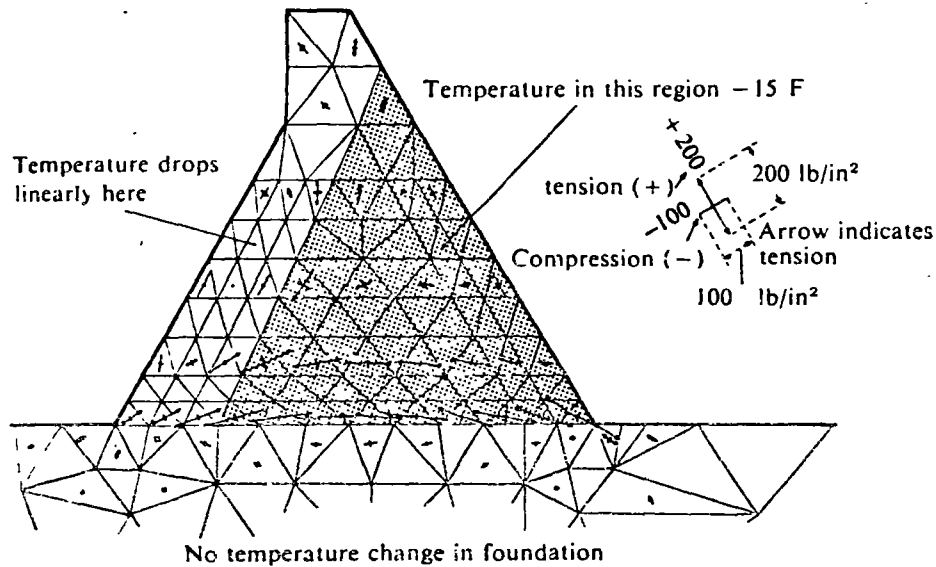


Fig. 4.12 Stress analysis of a buttress dam. Thermal stresses due to cooling of shaded area by 15°F ($E = 3 \times 10^6\text{ lb/in}^2$, $\alpha = 6 \times 10^{-6}/\text{deg F}$)

Gravity dams. A buttress dam is a natural example for the application of finite element methods. Other types, such as gravity dams with or without piers and so on, can also be simply treated. Figure 4.13 shows an analysis of a large dam with piers and crest gates.

In this case an approximation of assuming a two-dimensional treatment in the vicinity of the abrupt change of section, i.e., where the piers join the main body of the dam, is clearly involved, but this leads to localized errors only.

It is important to note here how, in a single solution, the grading of element size is used to study concentration of stress at the cable anchorages, the general stress flow in the dam, and the foundation behaviour. The linear ratio of size of largest to smallest elements is of the order of 30 to 1 (the largest elements occurring in the foundation are not shown in the figure).

Underground power station. This last example illustrated in Figs. 4.14 and 4.15 shows an interesting large-scale application. Here principal stresses are plotted automatically. In this analysis very many different

components of $\{\sigma_c\}$, the initial stress, were used due to uncertainty of knowledge about geological conditions. The rapid solution and plot of many results enabled the limits within which stresses vary to be found and an engineering decision arrived at.

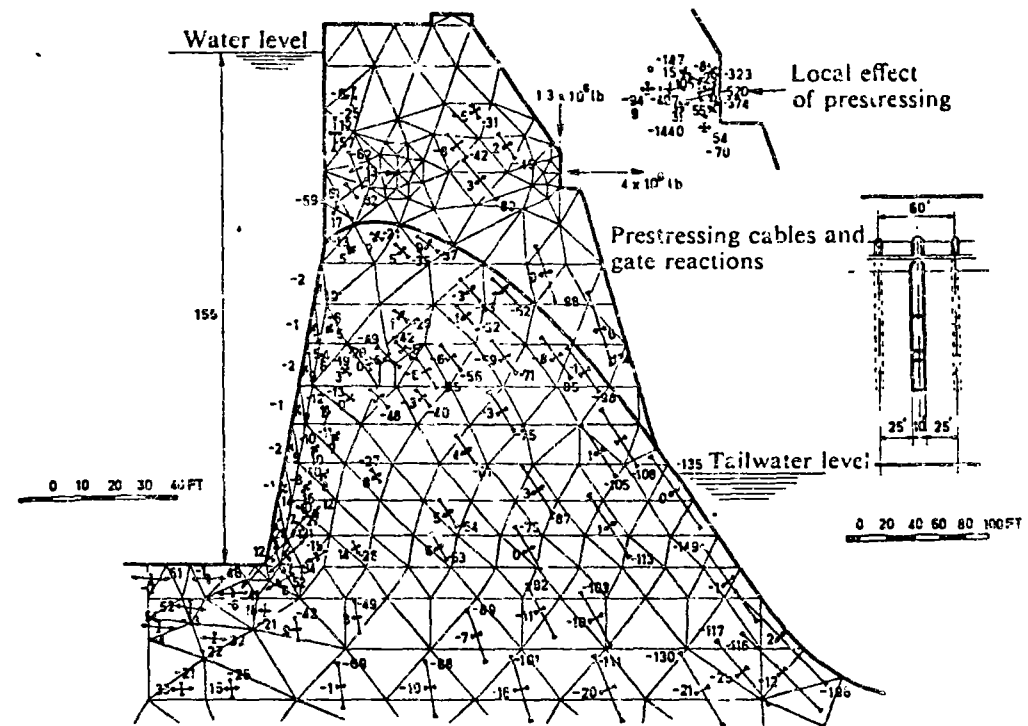


Fig. 4.13 A large barrage with piers and prestressing cables

4.5 Special Treatment of Plane Strain with an Incompressible Material

It will have been noted that the relationship Eq. (4.20) defining the elasticity $[D]$ matrix for an isotropic material breaks down when the Poisson's ratio reaches a value of 0.5 as the factor in the parentheses becomes infinite. A simple way of side-stepping the difficulty presented is to use values of Poisson's ratio approximate to 0.5 but not equal to it. Experience shows, however, that if this is done the approximation of solution deteriorates. An alternative procedure has been suggested by Herrman.¹⁰ This involves the use of a new variational formulation, and readers are referred to his work for details.

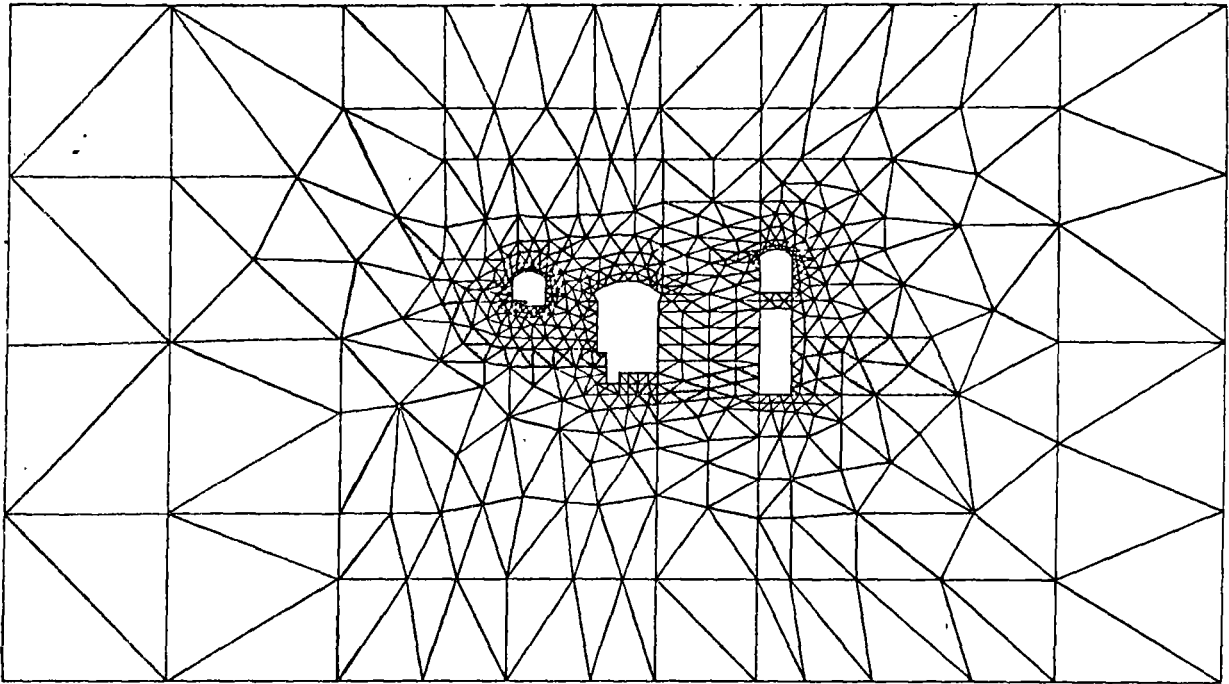


Fig. 4.14 An underground power station. Mesh used in analysis.

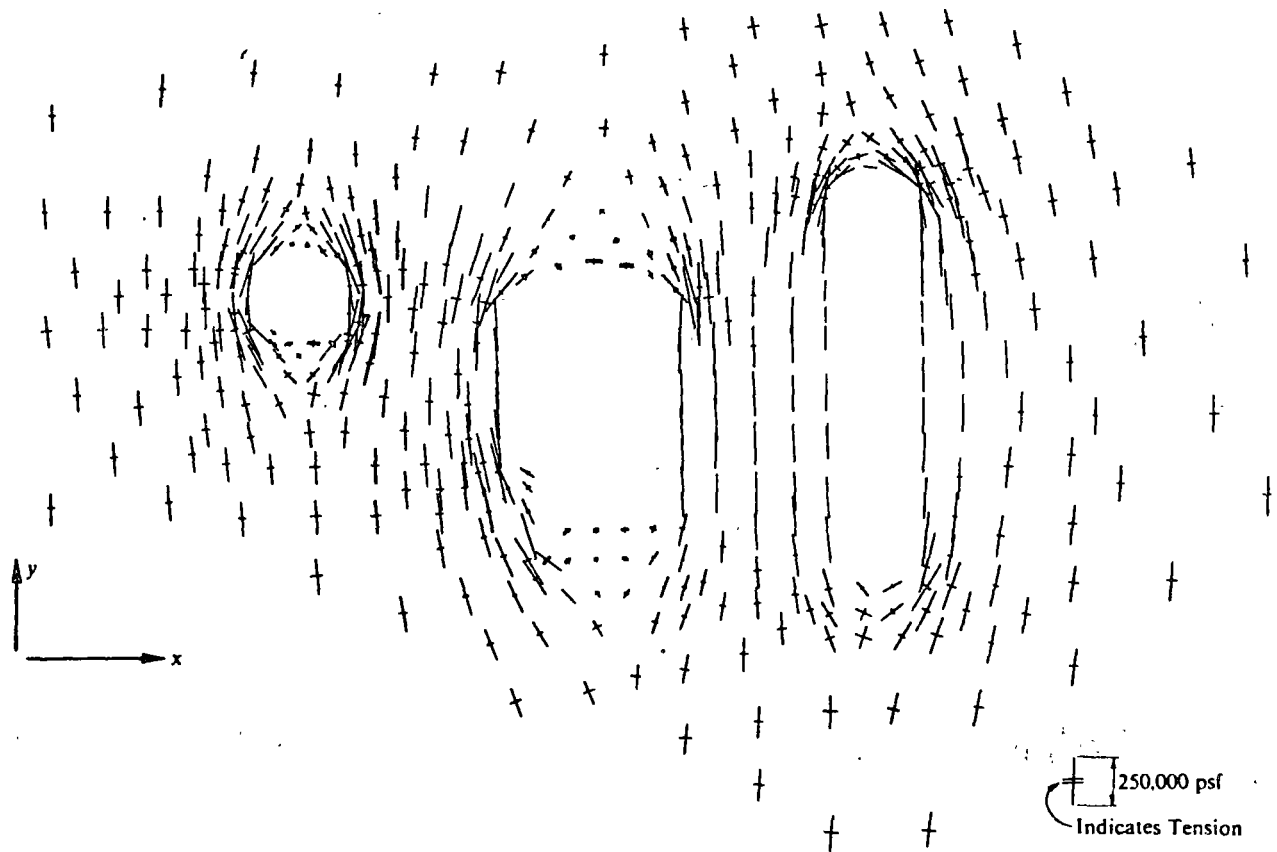


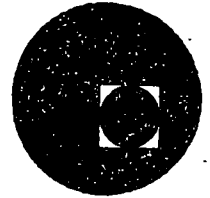
Fig. 4.15 An underground power station. Plot of principal stresses.

References

1. M. J. TURNER, R. W. CLOUGH, H. C. MARTIN, and L. J. TOPP, 'Stiffness and deflection analysis of complex structures', *J. Aero. Sci.*, **23**, 805-23, 1956.
2. R. W. CLOUGH, 'The finite element in plane stress analysis', *Proc. 2nd A.S.C.E. Conf. on Electronic Computation*, Pittsburgh, Pa., Sept. 1960.
3. S. TIMOSHENKO and J. N. GOODIER, *Theory of elasticity*, 2nd ed., McGraw-Hill, 1951.
4. S. G. LEKHNITSKII, *Theory of Elasticity of an Anisotropic Elastic Body*, Translation from Russian by P. Fern, Holden Day, San Francisco, 1963.
5. R. F. S. HEARMON, *An Introduction to Applied Anisotropic Elasticity*, Oxford Univ. Press, 1961.
6. O. C. ZIENKIEWICZ, Y. K. CHEUNG, and K. G. STAGG, 'Stresses in Anisotropic Media with particular reference to problems of rock mechanics', *J. Strain Analysis*, **1**, 172-82, 1966.
7. G. N. SAVIN, *Stress Concentration Around Holes*, Pergamon Press, 1961. (Translation from Russian.)
8. O. C. ZIENKIEWICZ and Y. K. CHEUNG, 'Buttress Dams on Complex rock foundations', *Water Power*, **16**, 193, 1964.
9. O. C. ZIENKIEWICZ and Y. K. CHEUNG, 'Stresses in Buttress Dams', *Water Power*, **17**, 69, 1965.
10. L. R. HERRMANN, 'Elasticity equations for incompressible, or nearly incompressible materials by a variational theorem', *J.A.I.A.A.*, **3**, 1896, 1965.



centro de educación continua
división de estudios superiores
facultad de ingeniería, unam



IV CURSO INTERNACIONAL DE INGENIERIA SISMICA

DINAMICA ESTRUCTURAL

TRABAJO VIRTUAL

DR. PORFIRIO BALLESTEROS B.

JULIO, 1978.

In the above the surface integral is only taken on external boundaries where $\partial u/\partial n$ or $\partial v/\partial n$ is specified. If u and v are given there the equations are not formed in boundary points.

Although a standard form of a finite element relationship has been established the element matrix is not symmetric. Such non-symmetric matrices often arise in flow problems¹⁴ but the reader will observe that here a simple change of sign of Eq. (3.36) re-establishes symmetry after integration by parts. Galerkin process is thus not unique.

An alternative approach to the above problem could be pursued by introducing a stream function concept. If we define

$$u = -\frac{\partial \theta}{\partial y}, \quad v = \frac{\partial \theta}{\partial x} \quad (3.46)$$

then Eq. (3.36) is identically satisfied and we are left with two governing equations:

$$X - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \left(-\frac{\partial \theta}{\partial y} \right) = 0, \quad (3.47)$$

$$Y - \frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right) = 0.$$

Differentiating the first with respect to y and second with respect to x and subtracting, p is eliminated and only one equation is left.

$$\mu \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} = 0. \quad (3.48)$$

A similar process of approximate formulation as before can be adopted and the reader can perform this as an exercise. He will find that now symmetric element matrices arise and indeed the formulation will be very similar to that discussed in the chapter on plate bending. The shape function now, however, will have to satisfy continuity of first derivatives between elements as second order differentials occur in the various integrals. Such problems have been dealt with in an axi-symmetric context by Atkinson *et al.*¹⁴ from the basis of a variational form given in Chapter 15, p. 317.

These examples have been introduced to illustrate the general applicability of the method. The particular problem discussed here, however, is of some considerable engineering interest and much work in the solution of the Navier-Stokes

equation is currently in progress. In the illustration, to linearize the equations, the dynamic terms

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y}, \quad u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y}$$

have been omitted from the two Eqs. (3.35) respectively. Their retention is obviously possible but then it will be found that the resulting equations of the general form (3.43) are non-linear, $[K]$ being dependent itself on the velocities. The derivation is too complex to be discussed in detail here but the reader could consider extension of the non-linear techniques of Chapter 18 to be applicable here.

3.7 Concluding Remarks

In addition to generalizing the finite element concept to that of approximately solving a variational problem, the alternative of proceeding directly by approximating to the differential expression was presented. Both procedures open up many, as yet unexplored, fields of application. Some general ideas in similar context are given by Oden.¹⁵ Other uses of finite element process, such as minimization of the root mean square value of errors, can easily be envisaged.

References

1. S. H. CRANDALL, *Engineering Analysis*, McGraw-Hill, 1956.
2. K. WASHIZU, *Variational methods in elasticity and plasticity*, Pergamon Press, 1968.
3. R. WEINSTECK, *Calculus of variations*, McGraw-Hill, 1952.
4. P. N. BERG, 'Calculus of variations', in *Handbook of Engineering Mechanics* Chapter 16, ed. W. Flügge, McGraw-Hill, 1962.
5. R. V. SOUTHWELL, *Relaxation methods in theoretical physics*, Oxford Univ. Press, 1946.
6. G. E. FORSYTHE and W. R. WASOW, *Finite difference methods for partial differential equations*, J. Wiley & Sons, 1960.
7. T. H. H. PIAN and P. TONG, 'Basis of finite element methods for solid continua', *Int. J. Num. Meth. in Eng.*, 1, 3-28, 1969.
8. R. J. MELOSH, 'Basis for derivation of matrices for the direct stiffness method', *J.A.I.A.A.*, 1, 1631-7, 1963.
9. T. H. H. PIAN, 'Derivation of Element Stiffness Matrices', *J.A.I.A.A.*, 2, 576-7, 1964.
10. I. STAKGOLD, *Boundary value problems in Mathematics and Physics*, Macmillan, N.Y., 1966.
11. B. A. SZABO and G. C. LEE, 'Derivation of stiffness matrices for problems in plane elasticity by Galerkin method', *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 1, 301-10, 1969.
12. P. A. LAGERSTROM and I. D. CHANG, 'Flow at low Reynolds numbers', Chapter 81, *Handbook of Eng. Mech.*, ed. W. Flügge, McGraw-Hill, 1962.
13. L. J. DOCTORS, 'An Application of the finite element technique for boundary value problems of potential flow', *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 2, 243-52, 1970.
14. B. ATKINSON, M. P. BROCKLEBANK, C. C. M. CARD, and J. M. SMITH, 'Low Reynolds number developing flows', *A.I. Ch. Eng. J.*, 5, 548-53, 1969.
15. J. ODN, 'A general theory of finite elements: I - Topological considerations' pp. 205-21; II 'Applications' pp. 247-60; *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 1, 1965.

The displacements of a node have two components

$$\{\delta_i\} = \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \end{Bmatrix} \quad (4.1)$$

and the six components of element displacements are listed as a vector

$$\{\delta\}^e = \begin{Bmatrix} \delta_i \\ \delta_j \\ \delta_m \end{Bmatrix} \quad (4.2)$$

4. Plane Stress and Plane Strain

4.1 Introduction

Two-dimensional elastic problems were the first successful examples of the application of the finite element method.^{1,2} Indeed, we have already used this situation to illustrate the basis of the finite element formulation in Chapter 2 where the general relationships were derived. These basic relationships are given in Eqs. (2.1), (2.2), (2.3), (2.9), (2.10), and (2.16) and for quick reference are summarized in Appendix II.

In this chapter the particular relationships for the problem in hand will be derived in more detail, and illustrated by suitable practical examples, a procedure that will be followed throughout the remainder of the book.

Only the simplest, triangular, element will be discussed in detail but the basic approach is general. More elaborate elements to be discussed in later chapters would be introduced to the same problem in an identical manner.

The reader not familiar with the applicable basic definitions of elasticity is referred to elementary texts on the subject, in particular to the text by Timoshenko and Goodier,³ whose notation will be widely used here.

In both problems of plane stress and plane strain the displacement field is uniquely given by the u and v displacements in directions of the cartesian, orthogonal x and y axes.

Again, in both, the only strains and stresses that have to be considered are the three components in the x - y plane. In the case of *plane stress*, by definition, all other components of stress are zero and therefore give no contribution to internal work. In *plane strain* the stress in a direction perpendicular to the x - y plane is not zero. However, by definition, the strain in that direction is zero, and therefore no contribution to internal work is made by this stress, which can in fact be explicitly evaluated from the three main stress components, if desired, at the end of all computation.

4.2 Element Characteristics

4.2.1 Displacement functions. Figure 4.1 shows the typical triangular element considered, with nodes i, j, m numbered in an anti-clockwise order.

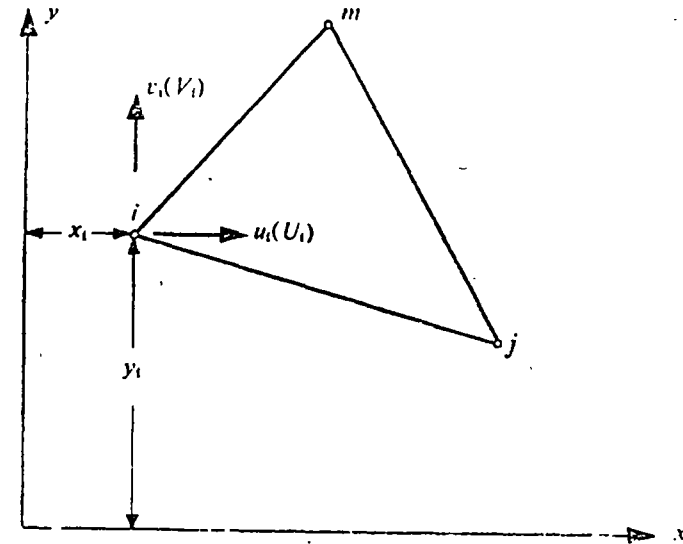


Fig. 4.1 An element of a continuum in plane stress or plane strain

The displacements within an element have to be uniquely defined by these six values. The simplest representation is clearly given by two linear polynomials

$$\begin{aligned} u &= \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y, \\ v &= \alpha_4 + \alpha_5 x + \alpha_6 y. \end{aligned} \quad (4.3)$$

The six constants α can be evaluated easily by solving the two sets of three simultaneous equations which will arise if the nodal co-ordinates are inserted and the displacements equated to the appropriate nodal displacements. Writing, for example,

$$\begin{aligned} u_i &= \alpha_1 + \alpha_2 x_i + \alpha_3 y_i \\ u_j &= \alpha_1 + \alpha_2 x_j + \alpha_3 y_j \\ u_m &= \alpha_1 + \alpha_2 x_m + \alpha_3 y_m \end{aligned} \quad (4.4)$$

we can easily solve for α_1 , α_2 , and α_3 in terms of the nodal displacements u_i , u_j , u_m and obtain finally

$$u = \frac{1}{2\Delta} \{(a_i + b_i x + c_i y)u_i + (a_j + b_j x + c_j y)u_j + (a_m + b_m x + c_m y)u_m\} \quad (4.5a)$$

in which

$$\begin{aligned} a_i &= x_j y_m - x_m y_j \\ b_i &= y_j - y_m = y_{jm} \\ c_i &= x_m - x_j = x_{mj} \end{aligned} \quad (4.5b)$$

with the other coefficients obtained by a cyclic permutation of subscripts in the order, i, j, m , and where

$$2\Delta = \det \begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_m & y_m \end{vmatrix} = 2 \quad (\text{area of triangle } ijm). \quad (4.5c)$$

As the equations for the vertical displacement v are similar we also have

$$v = \frac{1}{2\Delta} \{(a_i + b_i x + c_i y)v_i + (a_j + b_j x + c_j y)v_j + (a_m + b_m x + c_m y)v_m\}. \quad (4.6)$$

Though not strictly necessary at this stage we can represent the above relations Eqs. (4.5a) and (4.6) in the standard form of Eq. (2.1)

$$\{f\} = \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = [N] \{\delta\}^e = [IN'_i, IN'_j, IN'_m] \{\delta\}^e \quad (4.7)$$

with I a two by two identity matrix, and

$$N'_i = (a_i + b_i x + c_i y)/2\Delta \text{ etc.} \quad (4.8)$$

Note: if co-ordinates are taken from the centroid of the element then $x_i + x_m + x_j = y_i + y_j + y_m = 0$ and $a_i = 2\Delta/3 = a_j = a_m$.

The chosen displacement function automatically guarantees continuity of displacements with adjacent elements because the displacements vary linearly along any side of the triangle and, with identical displacement imposed at the nodes, the same displacement will clearly exist all along an interface.

4.2.2 Strain (total). The total strain at any point within the element can be defined by its three components which contribute to internal work.

$$\{\epsilon\} = \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{Bmatrix} \quad (4.9)$$

Using Eqs. (4.7) or (4.5a) and (4.6) we have

$$\begin{aligned} \{\epsilon\} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial N'_i}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N'_j}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N'_m}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N'_i}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N'_j}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N'_m}{\partial y} \\ \frac{\partial N'_i}{\partial y} & \frac{\partial N'_i}{\partial x} & \frac{\partial N'_j}{\partial y} & \frac{\partial N'_j}{\partial x} & \frac{\partial N'_m}{\partial y} & \frac{\partial N'_m}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \\ u_m \\ v_i \\ v_j \\ v_m \end{Bmatrix} \\ &= \frac{1}{2\Delta} \begin{bmatrix} b_i & 0 & b_j & 0 & b_m & 0 \\ 0 & c_i & 0 & c_j & 0 & c_m \\ c_i & b_i & c_j & b_j & c_m & b_m \end{bmatrix} \{\delta\}^e \end{aligned} \quad (4.10)$$

which defines the matrix $[B]$ of Eq. (2.2) explicitly.

It will be noted that in this case the $[B]$ matrix is independent of the position within the element, and hence the strains are constant throughout it. Obviously, the criterion of constant strain mentioned in Chapter 2 is satisfied by the shape functions.

4.2.3 Initial strain (thermal strain). 'Initial' strains, that is strains which are independent of stress, may be due to many causes. Shrinkage, crystal growth or, most frequently, temperature changes will, in general, result in an initial strain vector.

$$\{\epsilon_0\} = \begin{Bmatrix} \epsilon_{x0} \\ \epsilon_{y0} \\ \gamma_{xy0} \end{Bmatrix} \quad (4.11)$$

Although this initial strain may, in general, depend on the position within the element, it will usually be defined by average constant values. This is consistent with the constant strain conditions imposed by the prescribed displacement function.

Thus, for the case of *plane stress* in an isotropic material in an element subject to a temperature rise θ^e with a coefficient of thermal expansion α ,

we will have, for instance,

$$\{\epsilon_0\} = \begin{Bmatrix} \alpha\theta^e \\ \alpha\theta^e \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4.12)$$

as no shear strains are caused by a thermal dilatation.

In *plane strain* the situation is more complex. The presumption of plane strain implies that stresses perpendicular to the x - y plane will develop due to thermal expansion even without the three main stress components, and hence the initial strain will be affected by the elastic constants.

It will be shown that in such a case

$$\{\epsilon_0\} = (1 + \nu) \begin{Bmatrix} \alpha\theta^e \\ \alpha\theta^e \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4.13)$$

where ν is the Poisson's ratio.

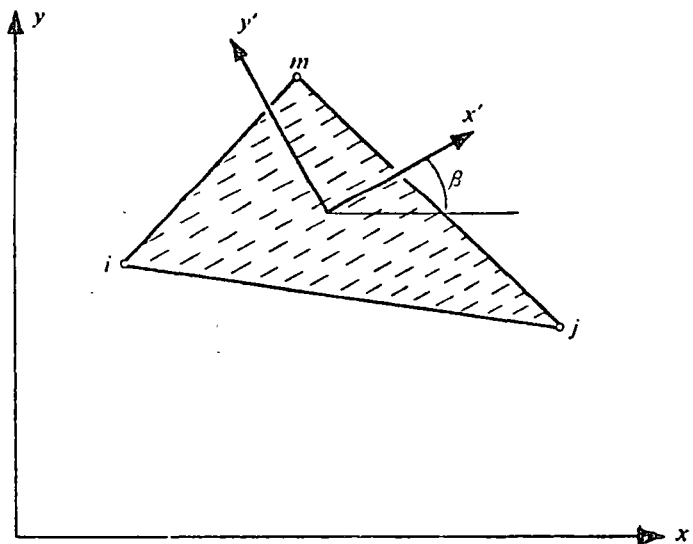


Fig. 4.2 An element of a stratified (transversely-isotropic) material

Anisotropic materials present special problems, since the coefficients of thermal expansion may vary with direction. Let x' and y' in Fig. 4.2 show the principal directions of the material. The initial strain due to thermal expansion becomes, with reference to these co-ordinates for plane stress

$$\{\epsilon_0\}' = \begin{Bmatrix} \epsilon_{x'0} \\ \epsilon_{y'0} \\ \gamma_{x'y'0} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \alpha_1\theta^e \\ \alpha_2\theta^e \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4.14)$$

where α_1 and α_2 are the expansion coefficients referred to the x' and y' axes respectively.

To obtain the strain components in the x, y system it is necessary to use an appropriate strain transformation matrix $[T]$ giving

$$\{\epsilon_0\} = [T]^T \{\epsilon_0\}' \quad (4.15)$$

With the β as defined in Fig. 4.2 it is easily verified that

$$[T] = \begin{bmatrix} \cos^2 \beta & \sin^2 \beta & -2 \sin \beta \cos \beta \\ \sin^2 \beta & \cos^2 \beta & 2 \sin \beta \cos \beta \\ \sin \beta \cos \beta & -\sin \beta \cos \beta & \cos^2 \beta - \sin^2 \beta \end{bmatrix}$$

Thus, $\{\epsilon_0\}$ can be simply evaluated. It will be noted that no longer is the shear component of strain equal to zero in the x - y co-ordinates.

4.2.4 *Elasticity matrix.* The matrix $[D]$ of the relation Eq. (2.3)

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = [D] \left(\begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} - \{\epsilon_0\} \right) \quad (4.16)$$

can be explicitly stated for any material (excluding here $\{\sigma_0\}$ which is simply additive).

*Plane stress—*isotropic material. For plane stress in an isotropic material we have, by definition,

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \sigma_x/E - \nu\sigma_y/E + \epsilon_{x0} \\ \epsilon_y &= -\nu\sigma_x/E + \sigma_y/E + \epsilon_{y0} \\ \gamma_{xy} &= 2(1 + \nu)\tau_{xy}/E + \epsilon_{xy0} \end{aligned} \quad (4.17)$$

Solving the above for the stresses, we obtain matrix $[D]$ as

$$[D] = \frac{E}{1 - \nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1 - \nu)/2 \end{bmatrix} \quad (4.18)$$

in which E is the elastic modulus and ν is the Poisson's ratio.

*Plane strain—*isotropic material. In this case a normal stress σ_z exists in addition to the three other stress components. For the special case of isotropic thermal expansion we have

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \sigma_x/E - \nu\sigma_y/E - \nu\sigma_z/E + \alpha\theta^e \\ \epsilon_y &= -\nu\sigma_x/E + \sigma_y/E - \nu\sigma_z/E + \alpha\theta^e \\ \gamma_{xy} &= 2(1 + \nu)\tau_{xy}/E \end{aligned} \quad (4.19)$$

but in addition

$$\varepsilon_z = 0 = -\nu\sigma_x/E - \nu\sigma_y/E + \sigma_z/E + \alpha\theta^c.$$

On eliminating σ_z and solving for the three remaining stresses we obtain the previously quoted expression for the initial strain Eq. (4.13), and by comparison with Eq. (4.16), the matrix $[D]$

$$[D] = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \nu/(1-\nu) & 0 \\ \nu/(1-\nu) & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-2\nu)/2(1-\nu) \end{bmatrix}. \quad (4.20)$$

Anisotropic materials. For a completely anisotropic material, 21 independent elastic constants are necessary to define completely the three-dimensional stress-strain relationship.^{4,5}

If two-dimensional analysis is to be applicable a symmetry of properties must exist, implying at most six independent constants in the $[D]$ matrix. Thus, it is always possible to write

$$[D] = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} \\ & d_{22} & d_{23} \\ \text{(sym)} & & d_{33} \end{bmatrix} \quad (4.21)$$

to describe the most general two-dimensional behaviour. (The necessary symmetry of the $[D]$ matrix follows from the general equivalent of the Maxwell-Betti reciprocal theorem and is a consequence of invariant energy irrespective of the path taken to reach a given strain state.)

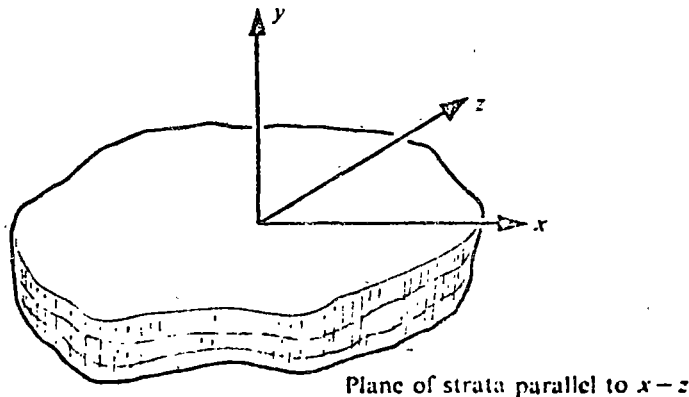


Fig. 4.3 A stratified (transversely-isotropic) material

A case of particular interest in practice is that of a 'stratified' or transversely-isotropic material in which a rotational symmetry of properties exists within the plane of the strata. Such a material possesses only five independent elastic constants.

The general stress-strain relations give in this case, following the notation of Lekhnitskii,⁴ and taking now the y axis as perpendicular to the strata (neglecting initial strain), Fig. 4.3.

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \sigma_x/E_1 - \nu_2\sigma_y/E_2 - \nu_1\sigma_z/E_1 \\ \varepsilon_y &= -\nu_2\sigma_x/E_2 + \sigma_y/E_2 - \nu_2\sigma_z/E_2 \\ \varepsilon_z &= -\nu_1\sigma_x/E_1 - \nu_2\sigma_y/E_2 + \sigma_z/E_1 \\ \gamma_{xz} &= \{2(1+\nu_1)/E_1\}\tau_{xz} \\ \gamma_{xy} &= \frac{1}{G_2}\tau_{xy} \\ \gamma_{yz} &= \frac{1}{G_2}\tau_{yz} \end{aligned} \quad (4.22)$$

in which the constants E_1 , ν_1 (G_1 is dependent) are associated with the behaviour in plane of the strata and E_2 , G_2 , ν_2 with a direction normal to these.

The $[D]$ matrix in two-dimensions becomes now, taking

$$\frac{E_1}{E_2} = n \quad \text{and} \quad \frac{G_2}{E_2} = m$$

$$[D] = \frac{E_2}{(1-n\nu_2^2)} \begin{bmatrix} & n\nu_2 & 0 \\ n\nu_2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & m(1-n\nu_2^2) \end{bmatrix} \quad (4.23)$$

for plane stress, or

$$D = \frac{E_2}{(1+\nu_1)(1-\nu_1-2\nu_1^2)}$$

$$\begin{bmatrix} n(1-n\nu_2^2) & n\nu_2(1+\nu_1) & 0 \\ n\nu_2(1+\nu_1) & (1-\nu_1^2) & 0 \\ 0 & 0 & m(1+\nu_1)(1-\nu_1-2\nu_1^2) \end{bmatrix} \quad (4.24)$$

for plane strain.

When, as in Fig. 4.2, the direction of strata is inclined to the x -axis then to obtain the $[D]$ matrices in the universal co-ordinates a transformation

is necessary. Taking $[D']$ as relating the stresses and strains in the inclined co-ordinate system (x', y') it is easy to show that

$$[D] = [T][D'] [T]^T \quad (4.25)$$

where $[T]$ is the same as given in Eq. (4.15)

If the stress systems $\{\sigma'\}$ and $\{\sigma\}$ correspond to $\{\epsilon'\}$ and $\{\epsilon\}$ respectively then by equality of work

$$\{\sigma'\}^T \{\epsilon'\} = \{\sigma\}^T \{\epsilon\}$$

or

$$\{\epsilon'\}^T [D'] \{\epsilon'\} = \{\epsilon\}^T [D] \{\epsilon\}$$

from which Eq. (4.25) follows on substitution of Eq. (4.15). (See also Chapter 1.)

4.2.5 *The stiffness matrix.* The stiffness matrix of the element ijm is defined from the general relationship Eq. (2.10) as

$$[k] = \int [B]^T [D] [B] t \, dx \, dy \quad (4.26)$$

where t is the thickness of the element and the integration is taken over the area of the triangle. If the thickness of the element is assumed to be constant, an assumption convergent to the truth as size of elements decreases, then, as neither of the matrices contains x or y we have, simply

$$[k] = [B]^T [D] [B] t \Delta \quad (4.27)$$

where Δ is the area of the triangle (defined already by Eq. (3.5)). This form is now sufficiently explicit for computation with the actual matrix operations being left to the computer.

The matrix $[B]$ defined by Eq. (4.10) can be written as

$$[B] = [B_i, B_j, B_m] \quad \text{with} \quad [B_i] = \begin{Bmatrix} b_i & 0 \\ 0 & c_i \\ c_i & b_i \end{Bmatrix} / 2\Delta, \text{ etc.} \quad (4.28)$$

Now the stiffness matrix can be written in a partitioned form as

$$[k] = \begin{bmatrix} k_{ii} & k_{ij} & k_{im} \\ k_{ji} & k_{jj} & k_{jm} \\ k_{mi} & k_{mj} & k_{mm} \end{bmatrix} \quad (4.29)$$

in which the 2 by 2 submatrices are built up as

$$[k_{rs}] = [B_r]^T [D] [B_s] t \Delta. \quad (4.30)$$

This form is often convenient for computation.

4.2.6 *Nodal forces due to initial strain.* These are given directly by the expression Eq. (2.12) which, on performing the integration, becomes

$$\{F\}_{i0}^e = -[B]^T [D] \{\epsilon_0\} t \Delta, \text{ etc.} \quad (4.31)$$

Partitioning, one can write alternatively

$$\{F_i\}_{i0}^e = -[B_{ij}]^T [D] \{\epsilon_0\} t \Delta, \text{ etc.} \quad (4.32)$$

These 'initial strain' forces are contributed to the nodes of an element in an unequal manner and require precise evaluation. Similar expressions are derived for initial stress forces.

4.2.7 *Distributed body forces.* In the general case of plane stress or strain each element of unit area in the x - y plane is subject to forces

$$\{p\} = \begin{Bmatrix} X \\ Y \end{Bmatrix}$$

in the direction of the appropriate axes.

Again, by Eq. (2.11), the contribution of such forces to these at each node is given by

$$\{F_i\}_p^e = - \int [N]^T \begin{Bmatrix} X \\ Y \end{Bmatrix} dx \, dy,$$

or by Eq. (4.7)

$$\{F_i\}_p = - \begin{Bmatrix} X \\ Y \end{Bmatrix} \int N_i \, dx \, dy, \text{ etc.} \quad (4.33)$$

if the body forces X and Y are constant. As N_i is no longer constant the integration has to be carried out explicitly. Some general integration formulae for a triangle are given in Appendix III.

In this special case the calculation will be simplified if the origin of co-ordinates is taken at the centroid of the element. Now

$$\int x \, dx \, dy = \int y \, dx \, dy = 0$$

and on using Eq. (3.8)

$$\{F_i\}_p = - \begin{Bmatrix} X \\ Y \end{Bmatrix} \int a_i \, dx \, dy / 2\Delta = - \begin{Bmatrix} X \\ Y \end{Bmatrix} a_i / 2$$

$$\text{or} \quad \{F_i\}_p = - \begin{Bmatrix} X \\ Y \end{Bmatrix} \Delta / 3 = \{F_j\}_p = \{F_m\}_p \quad (4.34)$$

by relations noted on p. 50.

Explicitly, for the whole element

$$\{F\}_p^e = - \begin{Bmatrix} X \\ Y \\ X \\ Y \\ X \\ Y \end{Bmatrix} \Delta / 3 \quad (4.35)$$

which means simply that the total forces acting in x and y direction due to the body forces are distributed to the nodes in three equal parts. This fact corresponds with physical intuition, and was often assumed implicitly.

4.2.8 *Body force potential.* In many cases the body forces are defined in terms of a body force potential ϕ as

$$X = -\frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad Y = -\frac{\partial \phi}{\partial y} \quad (4.36)$$

and this potential, rather than the values of X and Y , is known throughout the region and is specified at nodal points. If $\{\phi\}^e$ lists the three values of the potential associated with the nodes of the element, i.e.,

$$\{\phi\}^e = \begin{Bmatrix} \phi_i \\ \phi_j \\ \phi_m \end{Bmatrix} \quad (4.37)$$

and has to correspond with constant values of X and Y , ϕ must vary linearly within the element. The 'shape function' of its variation will obviously be given by a procedure identical to that used in deriving Eqs. (4.4) to (4.6), and yields

$$\phi = [N'_i \ N'_j \ N'_m] \{\phi\}^e. \quad (4.38)$$

Thus,

$$X = -\frac{\partial \phi}{\partial x} = -[b_i \ b_j \ b_m] \{\phi\}^e / 2\Delta$$

and

$$Y = -\frac{\partial \phi}{\partial y} = -[c_i \ c_j \ c_m] \{\phi\}^e / 2\Delta. \quad (4.39)$$

The vector of nodal forces due to the body force potential will now replace Eq. (4.35) by

$$\{F\}_p^e = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} b_i & b_j & b_m \\ c_i & c_j & c_m \\ b_i & b_j & b_m \\ c_i & c_j & c_m \\ b_i & b_j & b_m \\ c_i & c_j & c_m \end{bmatrix} \{\phi\}^e \quad (4.40)$$

4.2.9 *Evaluation of stresses.* The formulae derived enable the full stiffness matrix of the structure to be assembled, and a solution for displacements to be obtained.

The stress matrix given in general terms in Eq. (4.5) is obtained by the appropriate substitutions for each element.

The stresses are, by the basic assumption, constant within the element. It is usual to assign these to the centroid of the element, and in most of the examples in this chapter this procedure is followed. An alternative consists of obtaining stress values at the nodes by averaging the values in the adjacent elements. Some 'weighting' procedures have been used in this context on an empirical basis but their advantage appears small.

It is usual to arrange for the computer to calculate the principal stresses and their directions of every element.

4.3 Examples—An Assessment of Accuracy

There is no doubt that the solution to plane elasticity problems as formulated in Section 4.2 is, in the limit of subdivision, an exact solution. Indeed at any stage of a finite subdivision it is an approximate solution as, say, a Fourier series solution with a limited number of terms.

As already explained in Chapter 2 the total strain energy obtained during any stage of approximation will be below the true strain energy of the exact solution. In practice it will mean that the displacements, and hence also the stresses, will be underestimated by the approximation in its *general picture*. However, it must be emphasized that this is not necessarily true at every point of the continuum individually; hence the value of such a bound in practice is not great.

What is important for the engineer to know is the order of accuracy achievable in typical problems with a certain fineness of element subdivision. In any particular case the error can be assessed by comparison with known, exact, solutions or by a study of the convergence, using two or more stages of subdivision.

With the development of experience the engineer can assess *a priori* the order of approximation that will be involved in a specific problem tackled with a given element subdivision. Some of this experience will perhaps be conveyed by the examples considered in this book.

In the first place attention will be focused on some simple problems for which exact solutions are available.

Uniform stress field. If the exact solution is in fact that of a uniform stress field then, whatever the element subdivision, the finite element solution will coincide exactly with the exact one. This is an obvious corollary of the formulation, nevertheless it is useful as a first check of written computer programs.

Linearly varying stress field. Here, obviously, the basic assumption of constancy of stress within elements means that solution will be approximate only. In Fig. 4.4 a simple example of a beam subject to constant

bending moment is shown with a fairly coarse subdivision. It is readily seen that the axial (σ_y) stress given by the element 'straddles' the exact values and, in fact, if the constant stress values are associated with centroids of the elements and plotted, the best 'fit' line represents the exact stresses.

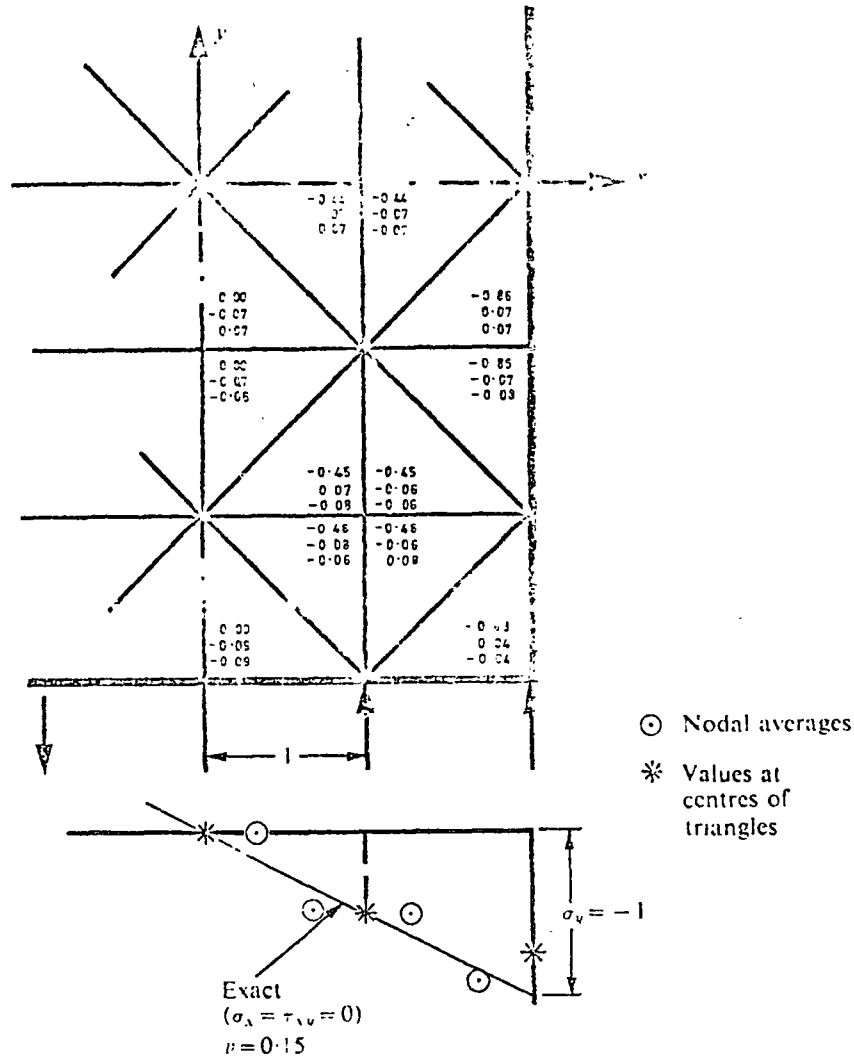


Fig. 4.4 Pure bending of a beam solved by a coarse subdivision into elements of triangular shape. (Values of σ_y , σ_x , and τ_{xy} listed in that order)

The horizontal and shear stress components differ again from the exact values (which are simply zero). Again, however, it will be noted that they oscillate by equal, small amounts around the exact values.

At internal nodes, if the average of stresses of surrounding elements is taken it will be found that the exact stresses are very closely represented. The average at external faces is not, however, so good. The overall improvement in representing the stresses by nodal averages, as shown on Fig. 4.4, is often used in practice for improvement of the approximation.

A weighting of averages near the faces of the structure can further be used for refinement. Without being dogmatic on this point, it seems preferable, when accuracy demands this, simply to use a finer mesh subdivision.

Stress concentration. A more realistic test problem is shown in Figs. 4.5 and 4.6. Here the flow of stress around a circular hole in an isotropic and in an anisotropic stratified material is considered when the stress conditions are uniform.⁶ A graded division into elements is used to allow a more detailed study in the region where high stress gradients are expected. The high degree of accuracy achievable can be assessed from Fig. 4.6 where some of the results are compared against exact solutions.^{3,7}

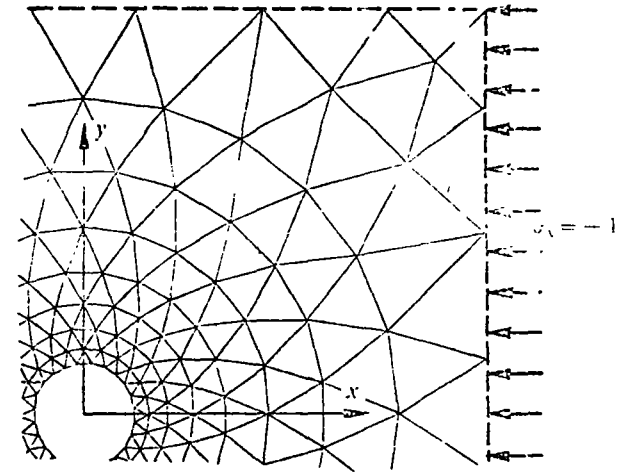


Fig. 4.5 A circular hole in a uniform stress field. (a) isotropic material; (b) stratified (orthotropic) material; $E_x = E_1 = 1$, $E_y = E_2 = 3$, $\nu_1 = 0.1$, $\nu_2 = 0$, $G_{xy} = 0.42$

4.4 Some Practical Applications

Obviously, the practical applications of the method are limitless, and indeed at this moment of time the use of the finite element method is superseding experimental technique for plane problems because of its high accuracy, low cost, and versatility. The ease of treatment of material anisotropy, thermal stresses, or body force problems add to its advantages.

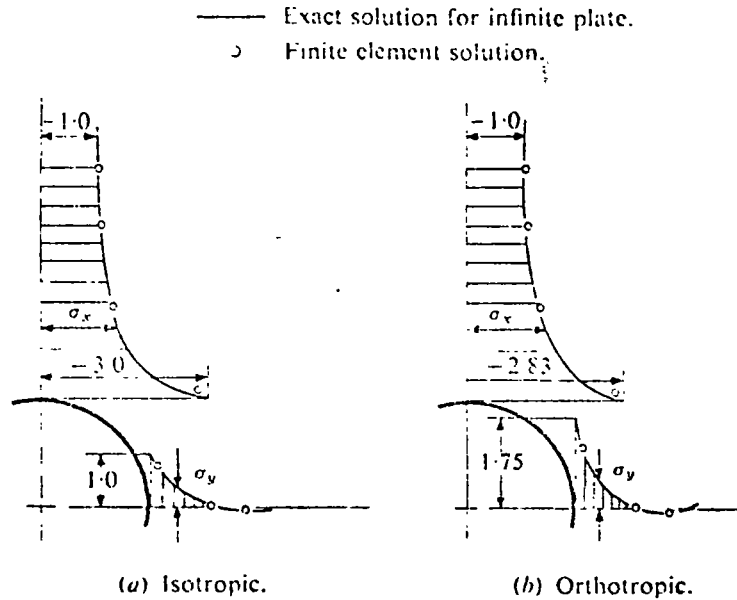


Fig. 4.6 Comparison of theoretical and finite element results for cases (a) and (b) of Fig. 4.5

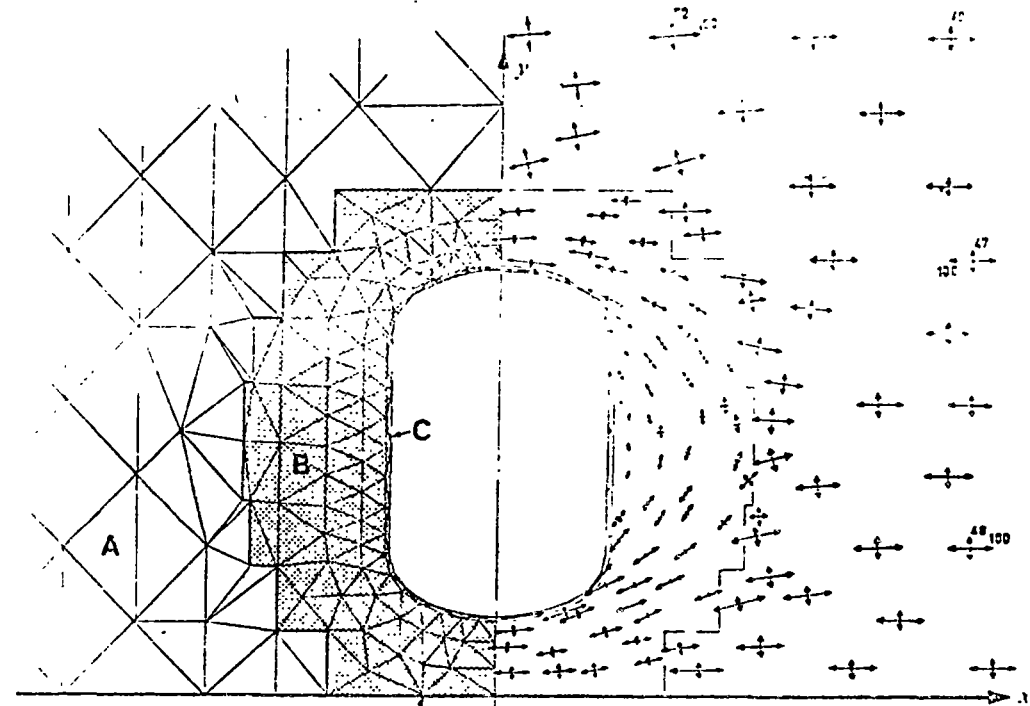
A few examples of actual applications to complex problems of engineering practice will now be given.

Stress flow around a reinforced opening (Fig. 4.7). In steel pressure vessels or aircraft structures, openings have to be introduced in the stressed skin. The penetrating duct itself provides some reinforcement round the edge and, in addition, the skin itself is increased in thickness to reduce the stresses due to the concentration effects.

Analysis of such problems treated as cases of plane stress presents no difficulties. The elements are so chosen as to follow the thickness variation, and appropriate values of this are assigned.

The narrow band of thick material near the edge can be represented either by special beam-type elements, or more easily in a standard programme by very thin triangular elements of the usual type, to which appropriate thickness is assigned. The latter procedure was used in the problem shown in Fig. 4.7 which gives some of the resulting stresses near the opening itself. The fairly large extent of the region introduced in the analysis and the grading of the mesh should be noted.

*An anisotropic valley subject to tectonic stress*⁹ (Fig. 4.8). A symmetrical valley subject to a uniform horizontal stress is considered. The material is stratified, hence is 'transversely isotropic', and the direction of strata varies from point to point.



Restrained in y direction from movement.

Fig. 4.7 A reinforced opening in a plate. Uniform stress field at a distance from opening $\sigma_x = 100$, $\sigma_y = 50$. Thickness of plate regions A, B, and C is in the ratio of 1:3:23

The stress plot shows the tensile region that develops. This phenomenon is of considerable interest to geologists and engineers concerned with rock mechanics.

A dam subject to external and internal water pressures^{8,9} (Fig. 4.9). A buttress dam on a somewhat complex rock foundation is here analysed. The heterogeneous foundation region is subject to plane strain conditions while the dam itself is considered as a plate (plane stress) of variable thickness.

With external and gravity loading no special problems of analysis arise, though perhaps it should be mentioned that it was found worth while to 'automatize' the computation of gravity model loads.

When pore pressures are considered, the situation, however, requires perhaps some explanation.

It is well known that in a porous material the water pressure is trans-

mitted to the structure as a *body force* of magnitude

$$X = -\frac{\partial p}{\partial x}, \quad Y = -\frac{\partial p}{\partial y}$$

and that now the external pressure need not be considered.

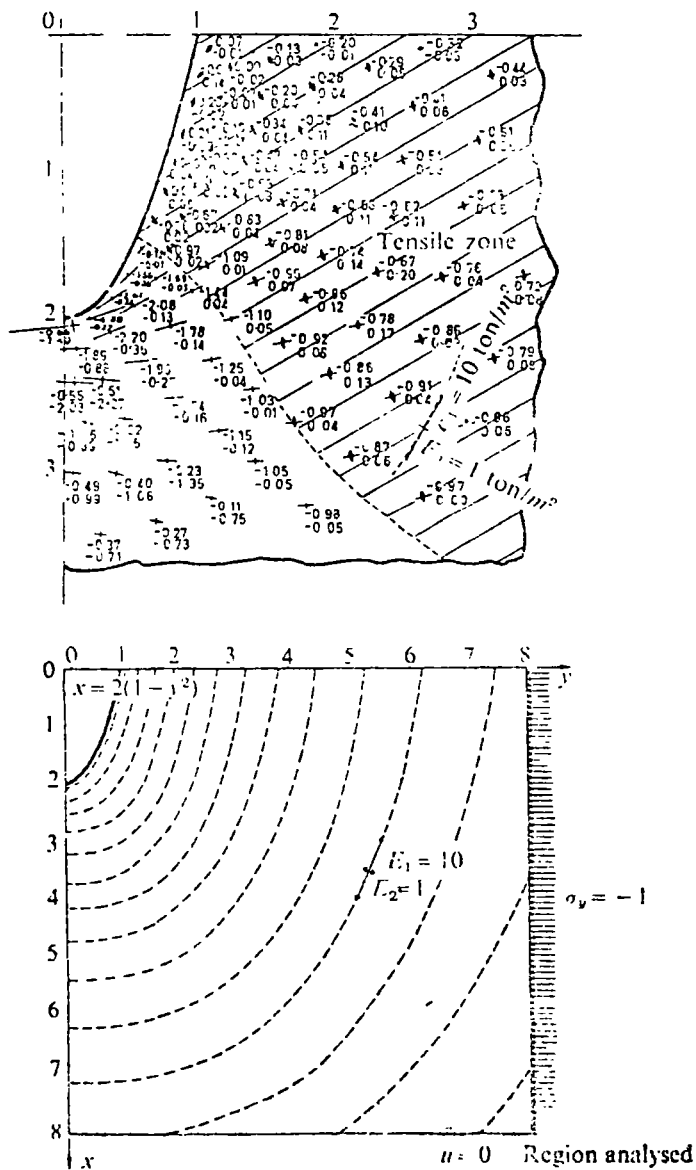


Fig. 4.8 A valley with curved strata subject to a horizontal tectonic stress (plane strain 170 nodes, 298 elements)

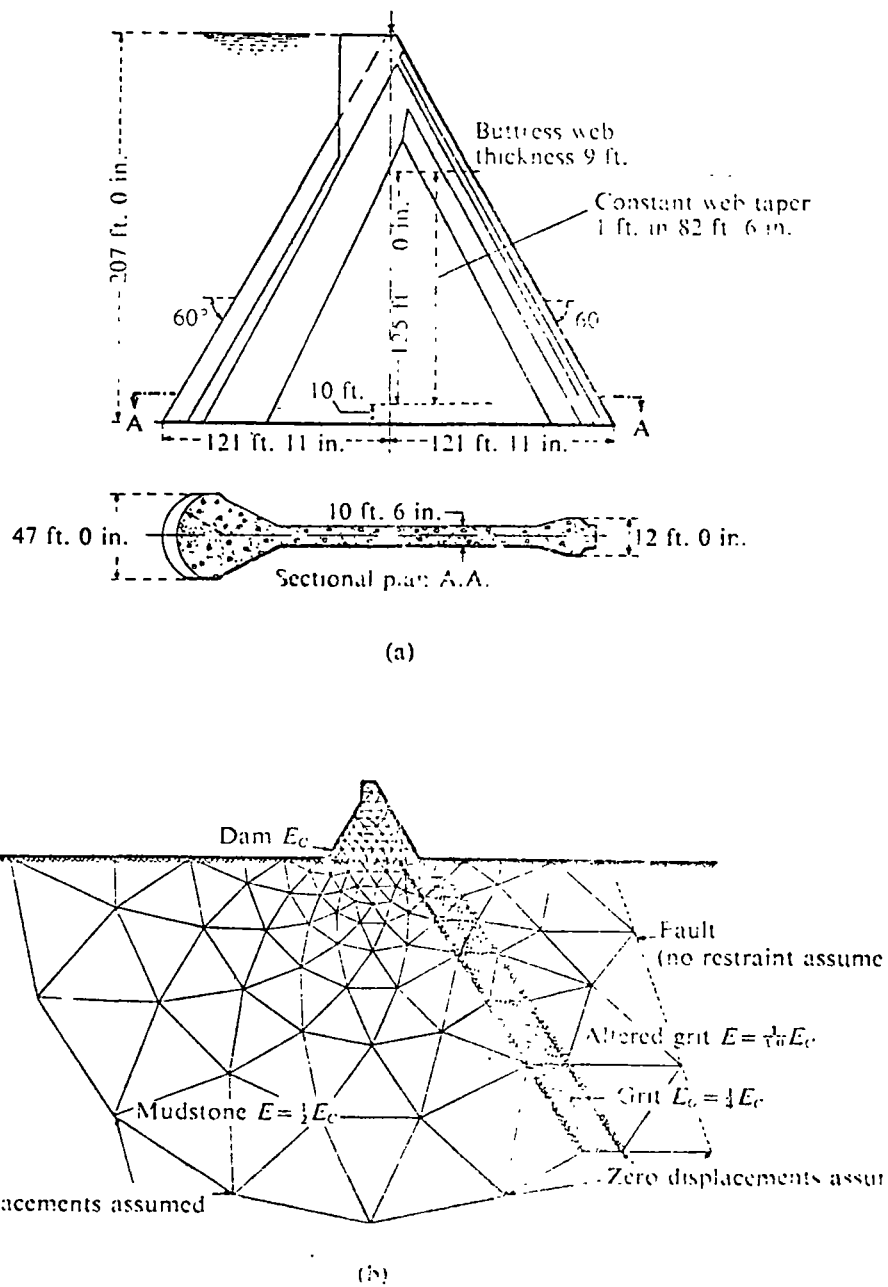
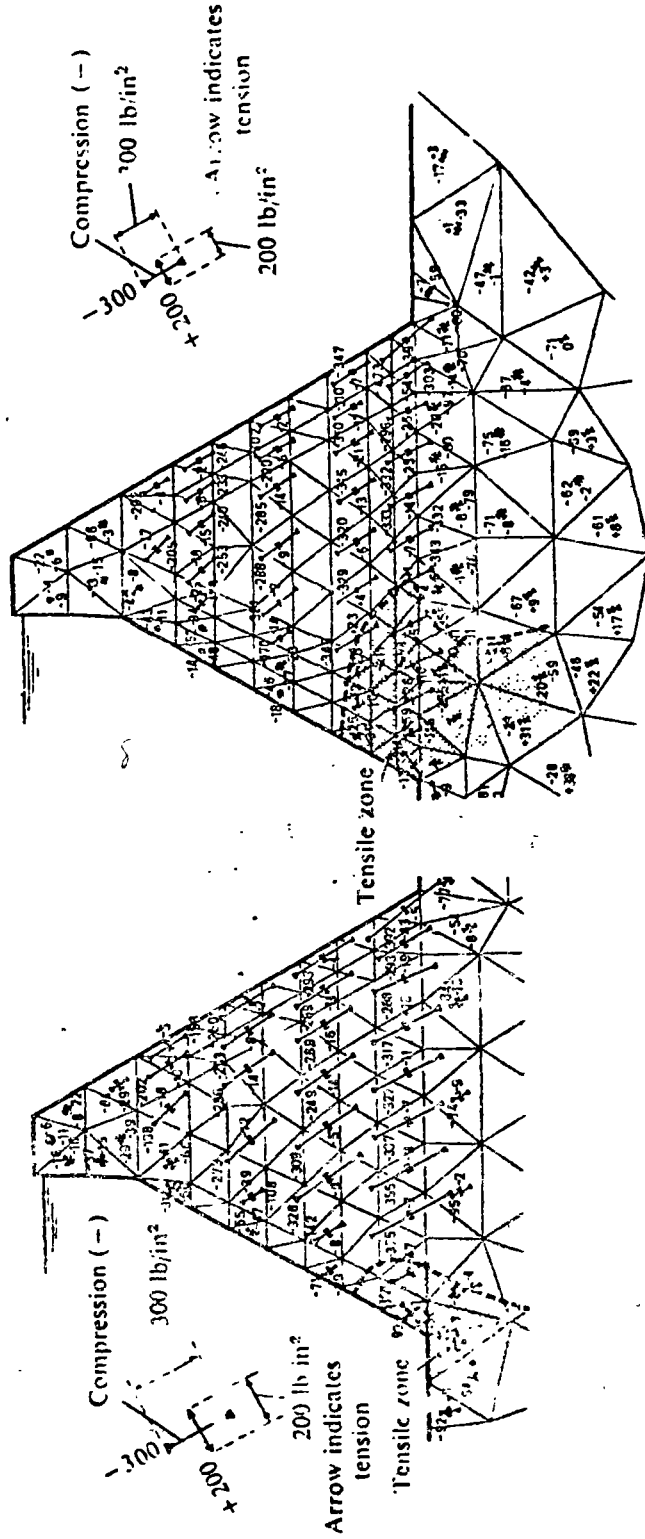


Fig. 4.9 Stress analysis of a buttress dam. Plane stress condition assumed in dam and plane strain in foundation. (a) The buttress section analysed. (b) Extent of foundation considered and division into finite elements



Below the foundation initial rock stresses should be superimposed

(a)

(b)

Fig. 4.9 Stress analysis of the buttress dam of Fig. 4.9. Principal stresses for gravity loads combined with water pressures, which are assumed to act (a) as external loads, (b) as body forces due to pore pressure

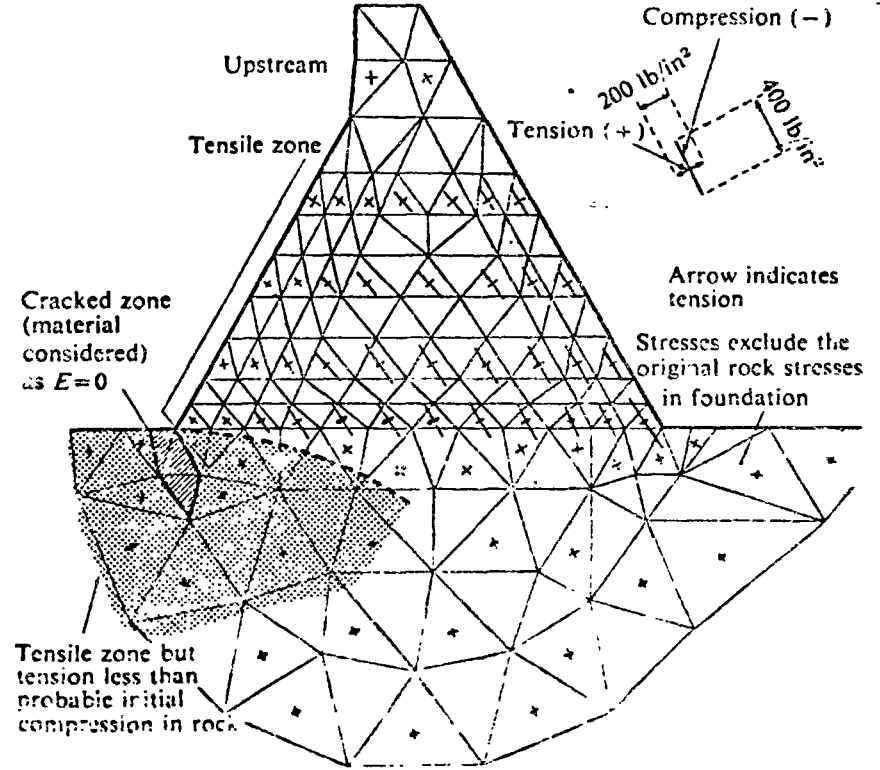


Fig. 4.11 Stresses in a buttress dam. An introduction of a 'crack' modifies stress distribution (same loading as Fig. 4.10(b))

The pore pressure p is, in fact, now a body force potential, as defined in Eq. (4.36). Figure 4.9 shows the element subdivision of the region and the outline of the dam. Figure 4.10(a) and (b) show the stresses resulting from gravity (applied to the dam only) and due to water pressure assumed to be acting as an external load or, alternatively as an internal pore pressure. Both solutions indicate large tensile regions, but the increase of stresses due to the second assumption is important.

Cracking. The tensile stresses in the previous example will doubtless cause the rock to crack. If a stable situation can develop when such a crack spreads then the dam can be considered safe

Cracks can be introduced very simply into the analysis by assigning zero elasticity values to chosen elements. An analysis with a wide cracked wedge is shown in Fig. 4.11, where it can be seen that with the extent of the crack assumed no tension within the dam body develops.

A more elaborate procedure for following crack propagation and resulting stress redistribution can be developed and will be discussed later (see Chapter 18).

Thermal stresses. As an example of thermal stress computation the same dam is shown under simple temperature distribution assumptions. Results of this analysis are given in Fig. 4.12

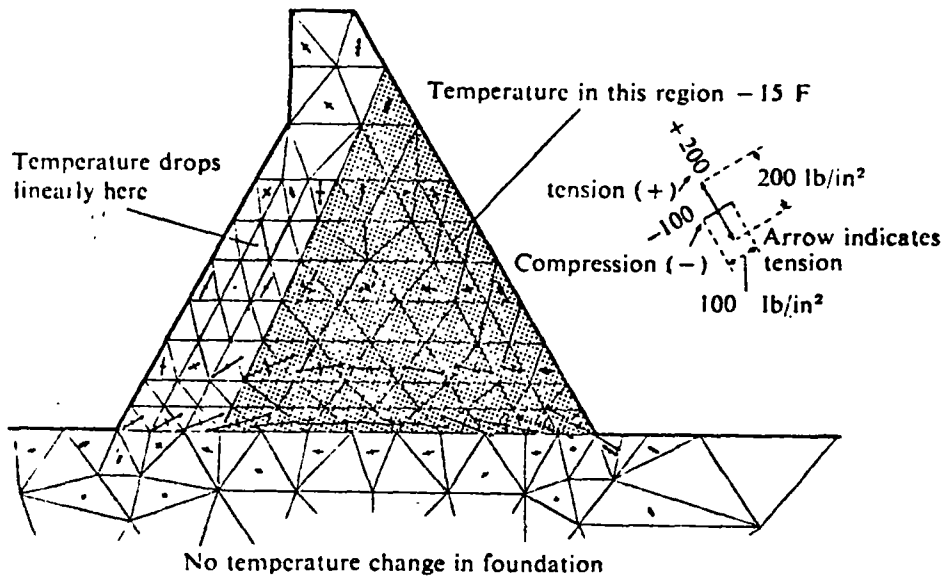


Fig. 4.12 Stress analysis of a buttress dam. Thermal stresses due to cooling of shaded area by 15°F ($E = 3 \times 10^6 \text{ lb/in}^2$, $\alpha = 6 \times 10^{-6}/\text{deg F}$)

Gravity dams. A buttress dam is a natural example for the application of finite element methods. Other types, such as gravity dams with or without piers and so on, can also be simply treated. Figure 4.13 shows an analysis of a large dam with piers and crest gates.

In this case an approximation of assuming a two-dimensional treatment in the vicinity of the abrupt change of section, i.e., where the piers join the main body of the dam, is clearly involved, but this leads to localized errors only.

It is important to note here how, in a single solution, the grading of element size is used to study concentration of stress at the cable anchorages, the general stress flow in the dam, and the foundation behaviour. The linear ratio of size of largest to smallest elements is of the order of 30 to 1 (the largest elements occurring in the foundation are not shown in the figure).

Underground power station. This last example illustrated in Figs. 4.14 and 4.15 shows an interesting large-scale application. Here principal stresses are plotted automatically. In this analysis very many different

components of $\{\sigma_0\}$, the initial stress, were used due to uncertainty of knowledge about geological conditions. The rapid solution and plot of many results enabled the limits within which stresses vary to be found and an engineering decision arrived at.

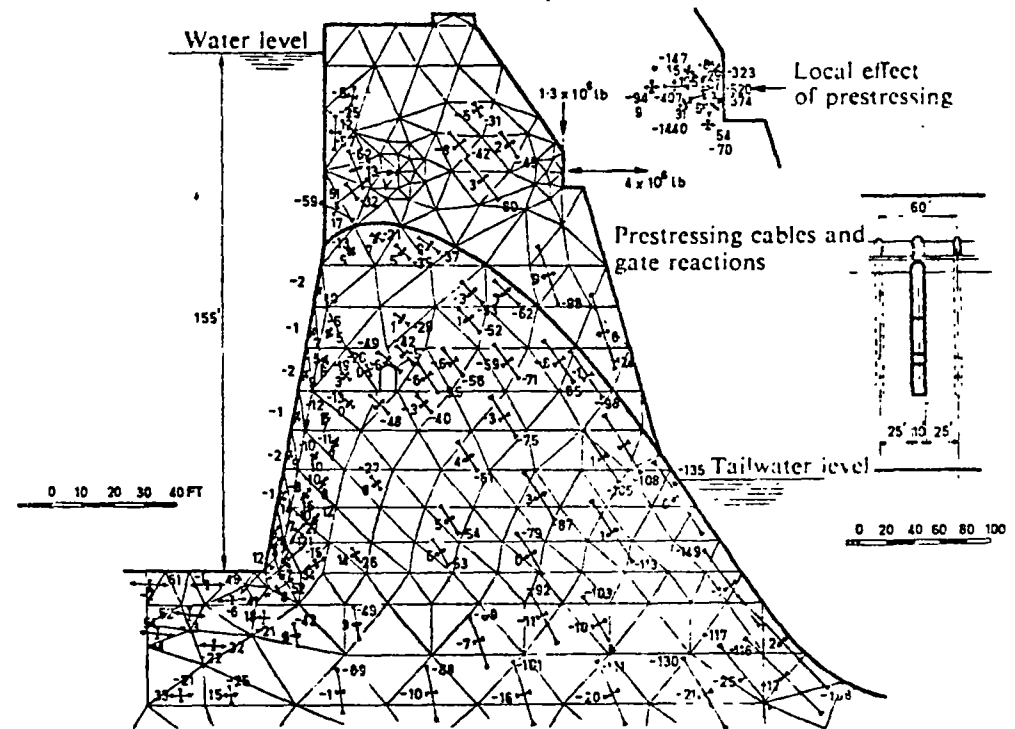


Fig. 4.13 A large barrage with piers and prestressing cables

4.5 Special Treatment of Plane Strain with an Incompressible Material

It will have been noted that the relationship Eq. (4.20) defining the elasticity $[D]$ matrix for an isotropic material breaks down when the Poisson's ratio reaches a value of 0.5 as the factor in the parentheses becomes infinite. A simple way of side-stepping the difficulty presented is to use values of Poisson's ratio approximate to 0.5 but not equal to it. Experience shows, however, that if this is done the approximation of solution deteriorates. An alternative procedure has been suggested by Herrman.¹⁰ This involves the use of a new variational formulation, and readers are referred to his work for details.

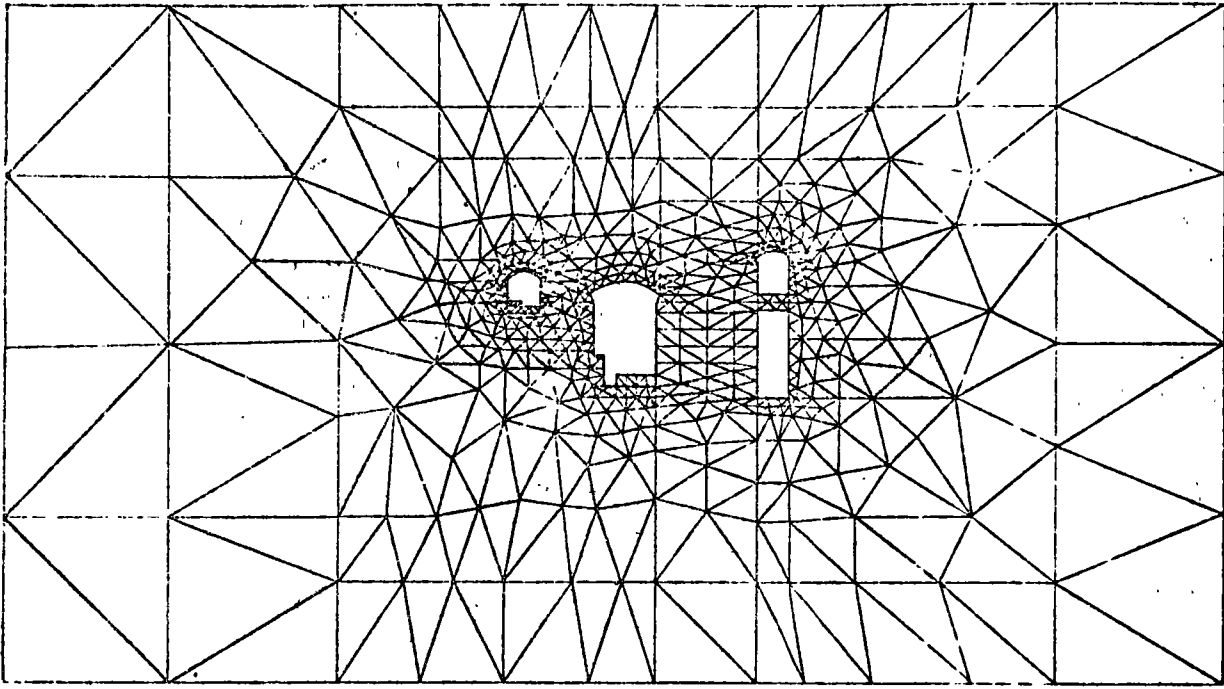


Fig. 4.14 An underground power station. Mesh used in analysis.

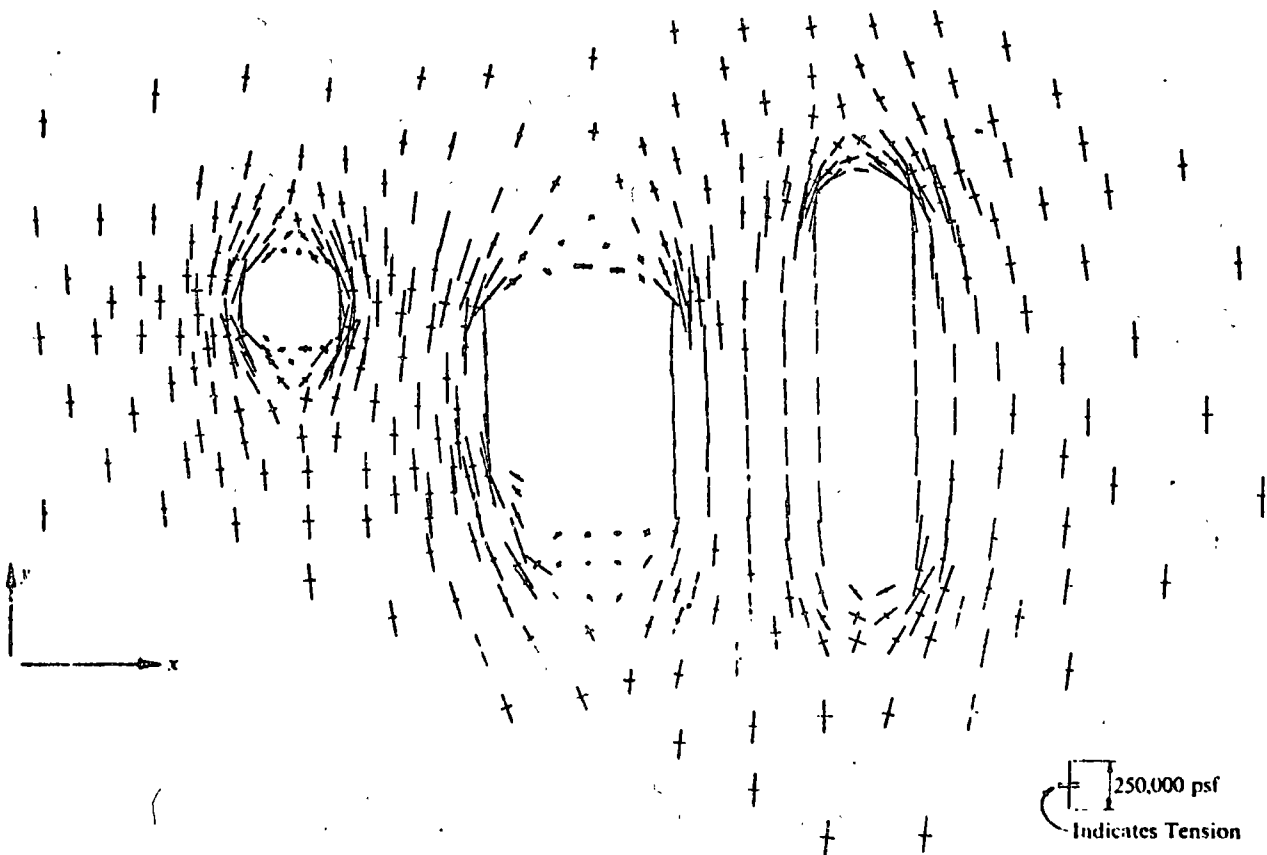
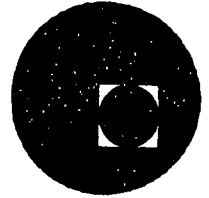


Fig. 4.15 An underground power station. Plot of principal stresses:



centro de educación continua
división de estudios superiores
facultad de ingeniería, unam



IV CURSO INTERNACIONAL DE INGENIERIA SISMICA

DINAMICA ESTRUCTURAL

ELEMENTOS FINITOS

DR. PORFIRIO BALLESTEROS B.

JULIO, 1978.

TRABAJO VIRTUAL

Principio del trabajo virtual: Si una partícula se encuentra en equilibrio, el trabajo total efectuado por todas las fuerzas actuando sobre la partícula, bajo cualquier desplazamiento virtual es cero. Sean

δu , δv , δw : Componentes del desplazamiento virtual en las direcciones x, y, z .

$\sum F_x$, $\sum F_y$, $\sum F_z$: Sumas de fuerzas en las direcciones x, y, z que actúan sobre la partícula o cuerpo rígido.

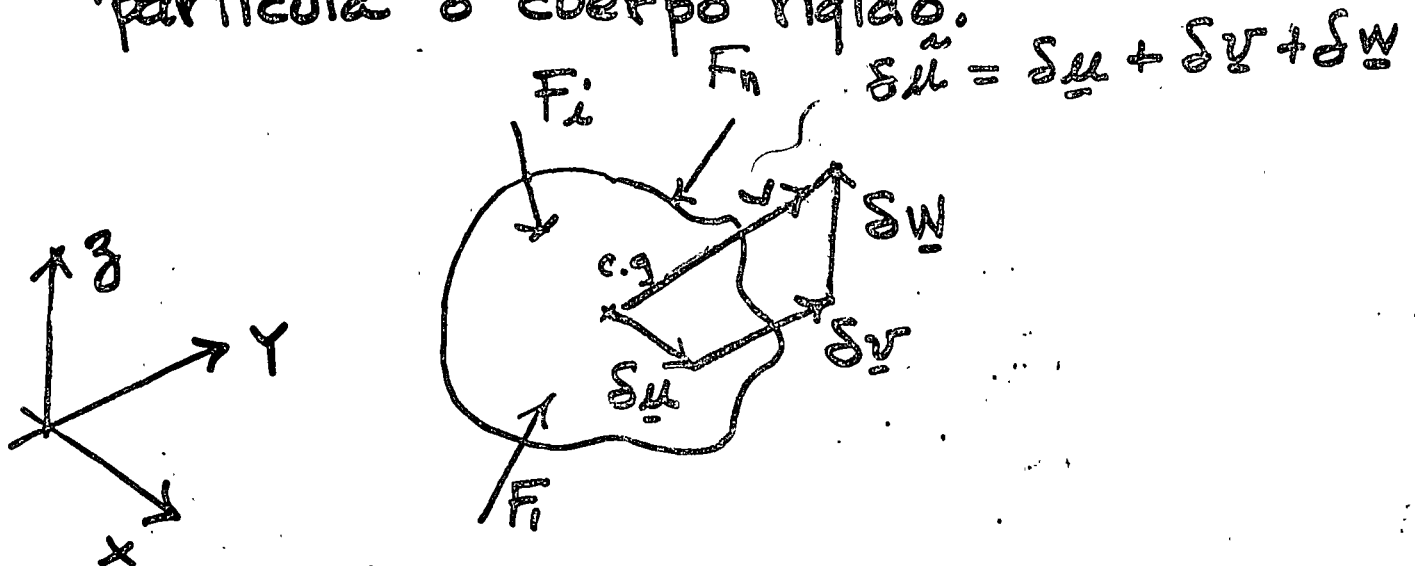


Fig. 1

El principio del desplazamiento virtual establece que

$$\delta u \sum_{i=1}^n F_{xi} = 0$$

$$\delta v \sum_{i=1}^n F_{yi} = 0$$

(1)

$$\delta w \sum_{i=1}^n F_{zi} = 0$$

Si el sistema está en equilibrio y permanece en equilibrio después del desplazamiento virtual se satisface (1).

Un cuerpo elástico en reposo constituye un conjunto de partículas sobre las que en cada elemento actúa un subconjunto de fuerzas en equilibrio. En cualquier desplazamiento virtual, el trabajo virtual sobre cada partícula es cero, por lo tanto el Trabajo virtual total también debe ser cero. Es conveniente que $\delta u, \delta v, \delta w$ sean consistentes con las condiciones de apoyo.

Sean:

P. Ballesteros (3)

$[u \ v \ w]$ componentes de los desplazamientos debido a las cargas en x_i .

$[\delta u \ \delta v \ \delta w]$ componentes del desplazamiento virtual en x_i . (funciones arbitrarias de x_i)

Para deformaciones lineales pequeñas, los desplazamientos virtuales correspondientes a las seis componentes de deformación son

$$\begin{aligned}\delta \epsilon_x &= \frac{\partial}{\partial x} (\delta u), & \delta \gamma_{xy} &= \frac{\partial}{\partial x} (\delta v) + \frac{\partial}{\partial y} (\delta u) \\ \delta \epsilon_y &= \frac{\partial}{\partial y} (\delta v), & \delta \gamma_{yz} &= \frac{\partial}{\partial y} (\delta w) + \frac{\partial}{\partial z} (\delta v) \\ \delta \epsilon_z &= \frac{\partial}{\partial z} (\delta w), & \delta \gamma_{zx} &= \frac{\partial}{\partial z} (\delta u) + \frac{\partial}{\partial x} (\delta w)\end{aligned} \quad (2)$$

y el trabajo virtual en un elemento $dx dy dz$ es

$$\delta U_0 dV = [\sigma_x (\delta \epsilon_x) + \sigma_y (\delta \epsilon_y) + \sigma_z (\delta \epsilon_z) + \tau_{xy} (\delta \gamma_{xy}) + \tau_{yz} (\delta \gamma_{yz}) + \tau_{zx} (\delta \gamma_{zx})] dV \quad (3)$$

Sean:

$\bar{X}dA, \bar{Y}dA, \bar{Z}dA$, Fuerzas de superficie en el elemento $dV = dx dy dz$.

XdV, YdV, ZdV , Fuerzas de cuerpo en el elemento $dV = dx dy dz$.

La afirmación de que el Trabajo virtual es cero es

$$\int_A (\bar{X}\delta u + \bar{Y}\delta v + \bar{Z}\delta w) dA + \int_V (X\delta u + Y\delta v + Z\delta w) dV - \int_V \delta U_0 dV = 0 \quad \text{④}$$

Puesto que las fuerzas de superficie $\{\bar{X}\}$, las de cuerpo $\{X\}$ y los esfuerzos $\{\sigma\}$, no varían durante un desplazamiento virtual pequeño, el símbolo variacional δ se puede sacar fuera del signo integral quedando

5

$$\int_V \underbrace{\rho u_0 dV}_{(a)} - \int_V \underbrace{(Xu + Yv + Zw) dV}_{(b)} - \int_A \underbrace{(\bar{X}u + \bar{Y}v + \bar{Z}w) dA}_{(c)} = 0 \quad (5)$$

P. Bailestero

Matricialmente:

$$\int_V [L \sigma] \{ \epsilon \} - \int_V [X] \{ u \} dV - \int_A [\bar{X}] \{ u \} dA = 0 \quad (6)$$

(a) = Energía potencial de deformación

(b) = " " " fuerzas de cuerpo

(c) = " " " " " superficie

en (6)

$$[L \sigma] = [\sigma_x \sigma_y \sigma_z \tau_{xy} \tau_{yz} \tau_{zx}]$$

$$\{ \epsilon \}^T = \{ \epsilon_x \epsilon_y \epsilon_z \gamma_{xy} \gamma_{yz} \gamma_{zx} \}^T$$

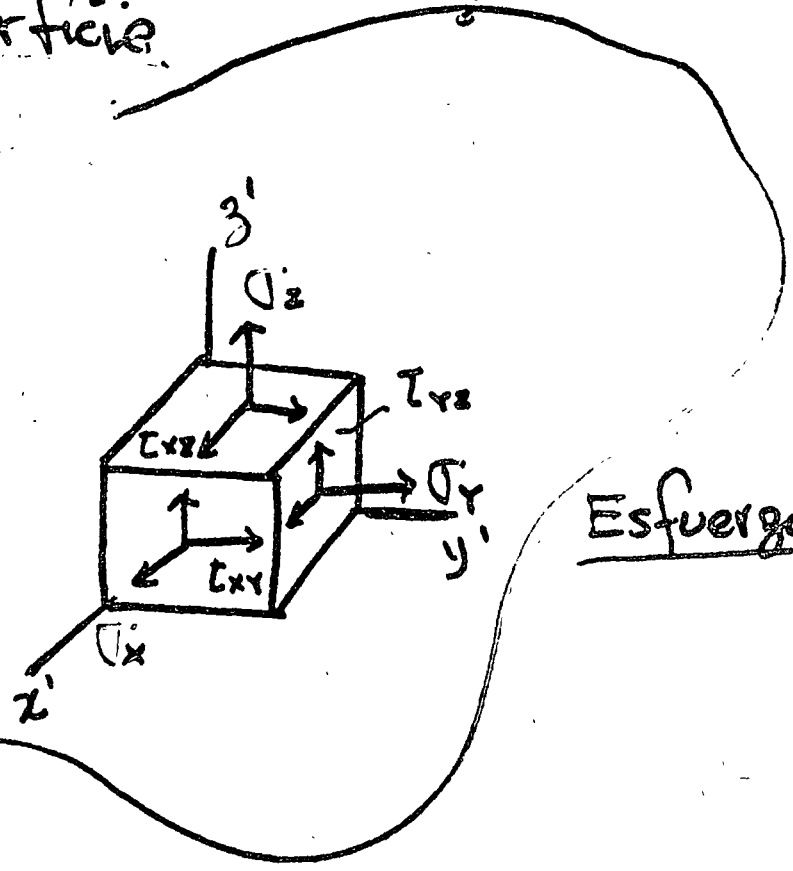
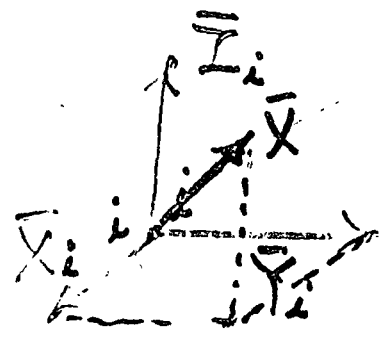
$$[X] = [X \ Y \ Z]$$

$$\{ u \}^T = [u \ v \ w]$$

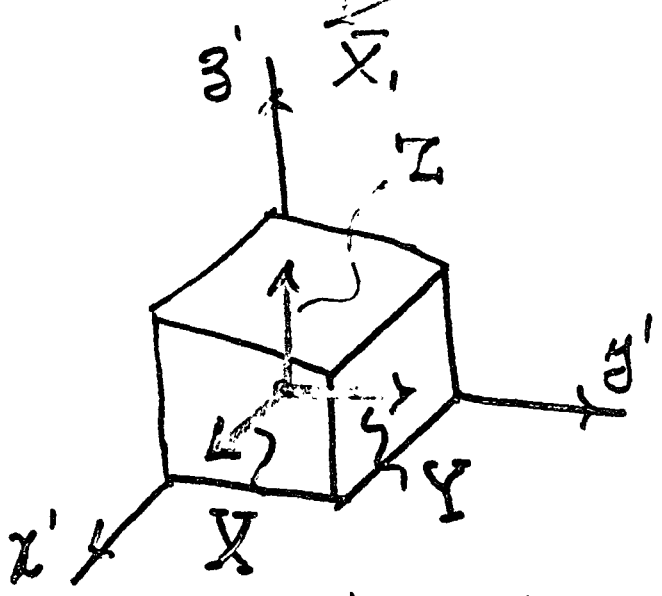
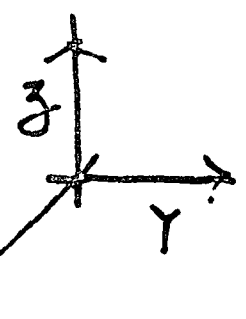
$$[\bar{X}] = [\bar{X} \ \bar{Y} \ \bar{Z}]$$

P. Ballesteros

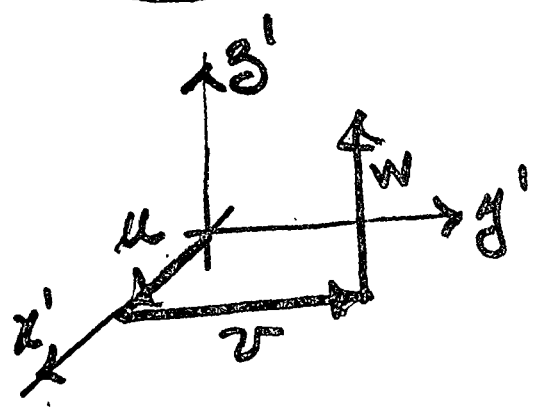
Fuerzas de superficie



Esfuerzos



Fuerzas de cuerpo



desplazamientos

(6) Establece que los desplazamientos δu y δw bajo ciertas fuerzas de superficie y de cuerpo dadas, son tal que la variación de primer orden de la energía potencial total ES CERO para cualquier desplazamiento virtual, o brevemente La energía potencial total es estacionaria.

El término desplazamiento o trabajo virtual implican multiplicadores arbitrarios δu y δw con las ecuaciones de equilibrio, es conveniente referirse a ellos como variaciones de u , w .



IV CURSO INTERNACIONAL DE INGENIERIA SISMICA

DINAMICA ESTRUCTURAL

Dr. Octavio A. Rascón Ch.

METODO β DE NEWMARK

SISTEMAS ELASTICOS LINEALES DE VARIOS GRADOS DE LIBERTAD

PARA CALCULAR LA RESPUESTA DE UN SISTEMA DE N GRADOS DE LIBERTAD Y COMPORTAMIENTO ELASTICO LINEAL SE EMPLEAN LAS MISMAS ECUACIONES QUE PARA UN SISTEMA DE UN GRADO DE LIBERTAD.

$$\dot{x}_j(t_{i+1}) = \dot{x}_j(t_i) + [\ddot{x}_j(t_i) + \ddot{x}_j(t_{i+1})] \frac{\Delta t}{2}$$

$$x_j(t_{i+1}) = x_j(t_i) + \dot{x}_j(t_i)\Delta t + [(1/2 - \beta)\ddot{x}_j(t_i) + \beta\ddot{x}_j(t_{i+1})](\Delta t)^2$$

EN DONDE $j = 1, 2, \dots, N$.

EN ESTE CASO SE RECOMIENDA TAMBIEN UN VALOR DE β COMPRENDIDO ENTRE 1/4 Y 1/6, Y QUE $\Delta t \leq 0.1 T_N$, EN DONDE T_N ES EL PERIODO NATURAL DE VIBRACION MAS PEQUEÑO.

EJEMPLO

SEA UN SISTEMA DE DOS GRADOS DE LIBERTAD CON AMORTIGUAMIENTO NULO, CUYAS MATRICES DE MASAS Y RIGIDECES SON:

$$\underline{K} = \begin{bmatrix} 10 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}, \quad \underline{M} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

USANDO EL METODO β DE NEWMARK CON $\Delta t = 0.2$ seg Y $\beta = 1/6$ CALCULE LA RESPUESTA DINAMICA ANTE UNA EXCITACION DADA POR LOS DESPLAZAMIENTOS DEL SUELO:

$$x_0 = 1.2 t \quad \text{SI} \quad 0 \leq t \leq 2 \text{ seg} \quad (x_0 \text{ EN CENTIMETROS})$$

$$x_0 = 4.8 - 1.2 t \quad \text{SI} \quad 2 \leq t \leq 4 \text{ seg}$$

$$x_0 = 0 \quad \text{SI} \quad t < 0 \text{ o } t > 4 \text{ seg}$$

PUESTO QUE ESTA EXCITACION IMPLICA QUE $\ddot{x}_0(t) = 0$ PARA TODO t , SE TIENE QUE LA ECUACION MATRICIAL DE EQUILIBRIO RESULTA SER

$$\underline{M}\ddot{\underline{Y}} + \underline{K}\underline{Y} = \underline{M}\ddot{\underline{Y}}_0 + \underline{Q} = \underline{0}$$

POR LO QUE

$$m_1 \ddot{y}_1 + Q_1 = 0 \quad + \quad \ddot{y}_1 = Q_1/m_1$$

$$m_2 \ddot{y}_2 + Q_2 = 0 \quad + \quad \ddot{y}_2 = Q_2/m_2$$

EN DONDE $y_1 = x_1 - x_0$ Y $y_2 = x_2 - x_0$

CON $\Delta t = 0.2$ seg Y $\beta = 1/6$, LAS ECUACIONES DEL METODO β DE NEWMARK QUEDAN EN LA FORMA

$$\dot{x}_j(t_{i+1}) = \dot{x}_j(t_i) + 0.1 [\ddot{x}_j(t_i) + \ddot{x}_j(t_{i+1})]$$

$$x_j(t_{i+1}) = x_j(t_i) + 0.1 \dot{x}_j(t_i) + 0.04 [\ddot{x}_j(t_i)/3 + \ddot{x}_j(t_{i+1})/6]$$

$$\text{EN } t = 0, y_i = x_i = 0, \dot{y}_i = \dot{x}_i = 0, \ddot{y}_i = \ddot{x}_i = 0.$$

$$\text{EN } t = 0.2, x_o = 1.2 \times 0.2 = 0.24 \text{ cm; SUPONGAMOS } \ddot{x}_1 = \ddot{y}_1 = 1.35$$

$$\text{Y } \ddot{x}_2 = \ddot{y}_2 = 1.50 \text{ cm/seg:}$$

PRIMER CICLO

$$\text{PARA LA MASA 1: } \dot{x}_1 = 0 + 0.1 (0 + 1.35) = 0.135 \text{ cm/seg}$$

$$x_1 = 0 + 0 + 0.04(0 + 1.35/6) = 0.009 \text{ cm}$$

$$y_1 = 0.009 - 0.24 = -0.231 \text{ cm}$$

$$\text{PARA LA MASA 2: } \dot{x}_2 = 0 + 0.1(0 + 1.50) = 0.15$$

$$x_2 = 0 + 0 + 0.04(0 + 1.50/6) = 0.01$$

$$y_2 = 0.01 - 0.24 = -0.23 \text{ cm}$$

$$Q = \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.231 \\ -0.230 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2.540 \\ -1.381 \end{bmatrix}$$

$$\text{POR LO QUE } \ddot{y}_1 = \ddot{x}_1 = 2.54/2 = 1.27 \neq 1.35$$

$$\ddot{y}_2 = \ddot{x}_2 = 1.381/1 = 1.381 \neq 1.50$$

SEGUNDO CICLO

$$\dot{x}_1 = 0.1 \times 1.27 = 0.127$$

$$x_1 = 0.04 \times 1.27/6 = 0.0085$$

$$y_1 = 0.0085 - 0.24 = -0.2315$$

$$\dot{x}_2 = 0.1 \times 1.381 = 0.138$$

$$x_2 = 0.04 \times 1.381/6 = 0.0092$$

$$y_2 = 0.0092 - 0.24 = -0.2308$$

$$Q = \begin{bmatrix} 10 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.2315 \\ -0.2308 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2.546 \\ -1.386 \end{bmatrix}$$

DE DONDE $\ddot{x}_1 = \ddot{y}_1 = 2.546/2 = 1.273 \doteq 1.27$
 $\ddot{x}_2 = \ddot{y}_2 = 1.386/1 = 1.386 \doteq 1.381$

EN $t = 0.2 + 0.2 = 0.4$ seg SE TIENEN $x_0 = 1.2 \times 0.4 = 0.48$,

$$\begin{aligned} x_1(t_i) &= 0.0085 & ; & & x_2(t_i) &= 0.0092 \\ \dot{x}_1(t_i) &= 0.127 & ; & & \dot{x}_2(t_i) &= 0.138 \\ \ddot{x}_1(t_i) &= 1.273 & ; & & \ddot{x}_2(t_i) &= 1.386 \end{aligned}$$

PRIMER CICLO

SUPONIENDO $\ddot{x}_1(t_{i+1}) = 2.3$ Y $\ddot{x}_2(t_{i+1}) = 2.1$ SE OBTIENEN:

$$\dot{x}_1 = -0.127 + 0.1(1.273 + 2.3) = -0.484$$

$$x_1 = 0.0085 + 0.2 \times 0.127 + 0.04(1.273/3 + 2.3/6) = 0.0662$$

$$y_1 = 0.0662 - 0.48 = -0.4138$$

$$x_2 = -0.138 + 0.1(1.386 + 2.1) = -0.486$$

$$x_2 = 0.0092 + 0.2 \times 0.138 + 0.04(1.386/3 + 2.1/6) = 0.0693$$

$$y_2 = 0.0693 - 0.48 = -0.4107$$

$$Q = \begin{bmatrix} 10 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.4138 \\ -0.4107 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4.548 \\ -2.468 \end{bmatrix}$$

DE DONDE $\ddot{x}_1 = \ddot{y}_1 = 4.548/2 = 2.274 \neq 2.3$
 $\ddot{x}_2 = \ddot{y}_2 = 2.468 \neq 2.1$

ETCETERA. LOS RESULTADOS DEL PROBLEMA SE PRESENTAN EN LA TABLA 1.

Tomado del libro de N. Newmark y E. Rosenblueth D.

TABLA 2.1. Ejemplo 2.7

t seg	Q_j ton	\ddot{y} cm/seg ²	\dot{x} cm/seg	x_j cm	$x_j - x_0$ cm	Q_j ton	\ddot{y} cm/seg ²	\dot{x} cm/seg	x_j cm	$x_j - x_p$ cm	x_p cm
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0.2	2.540	1.350	0.135	0.0090	-0.2310	1.380	1.500	0.150	0.0100	-0.2300	0.24
0.2	2.546	1.270	0.127	0.0085	-0.2315	1.386	1.380	0.138	0.0092	-0.2308	0.24
0.2	2.546	1.273	0.127	0.0085	-0.2315	1.386	1.386	0.138	0.0092	-0.2308	0.24
0.4	4.548	+2.300	0.484	+0.0662	-0.4138	2.468	2.100	0.486	+0.0693	-0.4107	0.48
0.4	4.548	2.274	0.481	0.0660	-0.4140	2.455	2.468	0.523	0.0718	-0.4082	0.48
0.4	4.548	2.274	0.481	0.0660	-0.4140	2.455	2.455	0.522	0.0717	-0.4083	0.48
0.4	4.548	2.274	0.481	0.0660	-0.4140	2.455	2.455	0.522	0.0717	-0.4083	0.48
0.6	5.585	2.700	0.978	0.2105	-0.5095	2.960	3.200	1.088	0.2301	-0.4839	0.72
0.6	5.581	2.793	0.987	0.2111	-0.5089	2.967	2.960	1.064	0.2285	-0.4915	0.72
0.6	5.580	2.790	0.987	0.2111	-0.5089	2.966	2.967	1.065	0.2286	-0.4914	0.72
0.6	5.580	2.790	0.987	0.2111	-0.5089	2.966	2.966	1.065	0.2286	-0.4914	0.72
0.8	5.409	2.900	1.556	0.4650	-0.4950	2.790	2.980	1.660	0.5010	-0.4590	0.96
0.8	5.423	2.704	1.536	0.4637	-0.4963	2.798	2.790	1.641	0.4997	-0.4603	0.96
0.8	5.422	2.711	1.537	0.4638	-0.4962	2.797	2.798	1.642	0.4998	-0.4602	0.96
0.8	5.422	2.711	1.537	0.4638	-0.4962	2.797	2.797	1.642	0.4998	-0.4602	0.96
1.0	4.104	2.150	2.023	0.8216	-0.3784	1.977	2.200	2.142	0.8802	-0.3198	1.20
1.0	4.111	2.052	2.013	0.8210	-0.3790	1.985	1.977	2.120	0.8787	-0.3213	1.20
1.0	4.111	2.055	2.014	0.8210	-0.3790	1.985	1.985	2.121	0.8787	-0.3213	1.20
1.0	4.111	2.055	2.014	0.8210	-0.3790	1.985	1.985	2.121	0.8787	-0.3213	1.20
1.2	1.931	0.950	2.315	1.2575	-0.1825	0.712	0.700	2.390	1.3341	-0.1059	1.44
1.2	1.930	0.965	2.316	1.2576	-0.1824	0.712	0.712	2.391	1.3341	-0.1059	1.44
1.2	1.930	0.965	2.316	1.2576	-0.1824	0.712	0.712	2.391	1.3341	-0.1059	1.44
1.4	-0.653	-0.320	2.381	1.7316	0.0516	-0.735	-0.800	2.382	1.8165	0.1365	1.68
1.4	-0.652	-0.326	2.380	1.7315	0.0515	-0.735	-0.735	2.388	1.8169	0.1369	1.68
1.4	-0.652	-0.326	2.380	1.7315	0.0515	-0.735	-0.735	2.388	1.8169	0.1369	1.68
1.6	-3.083	-1.500	2.197	2.1932	0.2732	-2.026	-2.100	2.104	2.2707	0.3507	1.92
1.6	-3.080	-1.541	2.193	2.1929	0.2729	-2.029	-2.026	2.111	2.2712	0.3512	1.92
1.6	-3.080	-1.540	2.193	2.1929	0.2729	-2.029	-2.029	2.111	2.2712	0.3512	1.92
1.8	-4.830	-2.500	1.789	2.5943	0.4343	-2.869	-2.900	1.618	2.6471	0.4871	2.16
1.8	-4.836	-2.415	1.797	2.5949	0.4349	-2.871	-2.869	1.621	2.6473	0.4873	2.16
1.8	-4.836	-2.418	1.797	2.5949	0.4349	-2.871	-2.871	1.621	2.6473	0.4873	2.16
2.0	-5.547	-2.800	1.275	2.9034	0.5034	-3.069	-3.000	1.034	2.9132	0.5132	2.40
2.0	-5.549	-2.773	1.278	2.9036	0.5036	-3.068	-3.069	1.027	2.9127	0.5127	2.40
2.0	-5.549	-2.774	1.278	2.9036	0.5036	-3.068	-3.068	1.027	2.9127	0.5127	2.40

TABLA 2.1. Ejemplo 2.7 (Cont.)

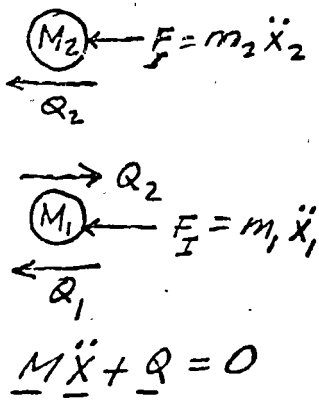
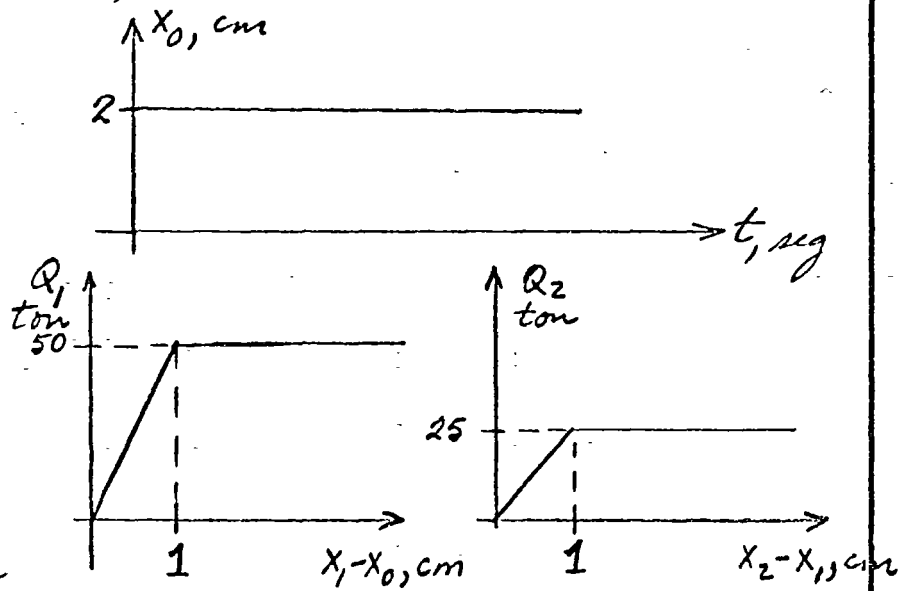
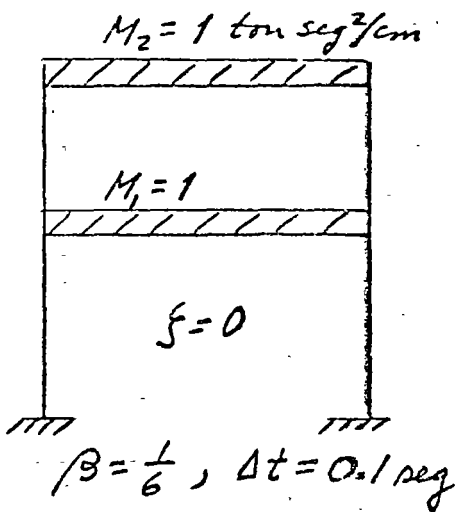
t seg	Q_1 ton	$\frac{x}{cm/seg^2}$	$\frac{x}{cm/seg}$	$\frac{x_1}{cm}$	$\frac{x_1 - x_0}{cm}$	Q_2 ton	$\frac{x}{cm/seg^2}$	$\frac{x}{cm/seg}$	$\frac{x_2}{cm}$	$\frac{x_2 - x_0}{cm}$	$\frac{x_0}{cm}$
2.2	-10.156	-5.200	0.481	30875	0.9275	-5.332	-5.460	0.174	3.0408	0.8808	2.16
2.2	-10.165	-5.078	0.493	30883	0.9283	-5.337	-5.332	0.187	3.0417	0.8817	2.16
2.2	-10.165	-5.083	0.493	30883	0.9283	-5.337	-5.337	0.186	3.0417	0.8817	2.16
2.4	-12.578	-6.900	-0.705	30731	1.1531	-6.386	-6.200	-0.968	2.9665	1.0465	1.92
2.4	-12.617	-6.289	-0.644	30772	1.1572	-6.383	-6.386	-0.987	2.9652	1.0452	1.92
2.4	-12.615	-6.309	-0.646	30770	1.1570	-6.383	-6.383	-0.986	2.9652	1.0452	1.92
2.4	-12.615	-6.308	-0.646	30770	1.1570	-6.383	-6.383	-0.986	2.9652	1.0452	1.92
2.6	-12.388	-6.200	-1.897	28225	1.1425	-5.958	-6.000	-2.224	2.6429	0.9629	1.68
2.6	-12.388	-6.194	-1.896	28225	1.1425	-5.959	-5.958	-2.220	2.6432	0.9632	1.68
2.6	-12.388	-6.194	-1.896	28225	1.1425	-5.959	-5.959	-2.220	2.6432	0.9632	1.68
2.8	-9.573	-4.300	-2.945	23320	0.8920	-4.155	-4.100	-3.206	2.0925	0.6525	1.44
2.8	-9.540	-4.787	-2.994	23288	0.8888	-4.150	-4.155	-3.212	2.0921	0.6521	1.44
2.8	-9.541	-4.770	-2.992	23289	0.8889	-4.150	-4.150	-3.211	2.0921	0.6521	1.44
2.8	-9.541	-4.770	-2.992	23289	0.8889	-4.150	-4.150	-3.211	2.0921	0.6521	1.44
3.0	-4.687	-2.500	-3.719	1.6502	0.4502	-1.376	-1.400	-3.766	1.3853	0.1853	1.20
3.0	-4.698	-2.343	-3.703	1.6513	0.4513	-1.378	-1.376	-3.764	1.3854	0.1854	1.20
3.0	-4.698	-2.349	-3.704	1.6513	0.4513	-1.378	-1.378	-3.764	1.3854	0.1854	1.20
3.2	1.090	0.800	-3.859	0.8845	-0.0755	1.748	1.700	-3.732	0.6255	-0.3345	0.96
3.2	1.106	0.545	-3.884	0.8828	-0.0772	1.748	1.748	-3.727	0.6259	-0.3341	0.96
3.2	1.105	0.553	-3.883	0.8829	-0.0771	1.748	-1.748	-3.727	0.6259	-0.3341	0.96
3.2	1.105	0.553	-3.883	0.8829	-0.0771	1.748	1.748	-3.727	0.6259	-0.3341	0.96
3.4	6.608	3.600	-3.468	0.1377	-0.5823	-4.506	-4.700	-3.082	-0.0649	-0.7849	-0.72
3.4	6.629	3.304	-3.438	0.1357	-0.5843	4.515	4.506	-3.101	-0.0662	-0.7862	-0.72
3.4	6.628	3.314	-3.439	0.1358	-0.5842	4.515	4.515	-3.100	-0.0661	-0.7861	-0.72
3.4	6.628	3.314	-3.439	0.1358	-0.5842	4.515	4.515	-3.100	-0.0661	-0.7861	-0.72
3.6	10.578	5.400	-2.568	-0.4718	-0.9518	6.251	6.900	-1.958	-0.5799	-1.0599	0.48
3.6	10.589	5.289	-2.579	-0.4725	-0.9525	6.277	-6.251	-2.023	-0.5842	-1.0642	0.48
3.6	10.589	5.299	-2.577	-0.4725	-0.9525	6.277	6.277	-2.020	-0.5841	-1.0641	0.48
3.6	10.589	5.299	-2.577	-0.4725	-0.9525	6.277	6.277	-2.020	-0.5841	-1.0641	0.48
3.8	12.259	6.200	-1.427	-0.8760	-1.1160	6.612	6.800	-0.712	-0.8591	-1.0991	0.24
3.8	12.264	6.130	-1.434	-0.8764	-1.1164	6.618	6.612	-0.731	-0.8603	-1.1003	0.24
3.8	12.264	6.132	-1.434	-0.8764	-1.1164	6.618	6.618	-0.730	-0.8603	-1.1003	0.24
4.0	11.323	5.600	-0.260	-1.0441	-1.0441	5.454	5.400	0.472	-0.8821	-0.8821	0
4.0	11.319	5.661	-0.255	-1.0437	-1.0437	5.453	5.454	0.477	-0.8817	-0.8817	0
4.0	11.319	5.660	-0.255	-1.0437	-1.0437	5.453	5.453	0.477	-0.8817	-0.8817	0
4.2	10.705	-5.350	-0.846	-0.9836	-0.9836	5.330	5.300	-1.549	-0.8691	-0.8691	0
4.2	10.705	5.352	0.846	-0.9836	-0.9836	5.329	5.330	1.552	-0.8689	-0.8689	0

DINAMICA ESTRUCTURAL

SISTEMAS DE VARIOS GRADOS DE LIBERTAD CON COMPORTAMIENTO INELASTICO

Método β de Newmark. Ejemplo

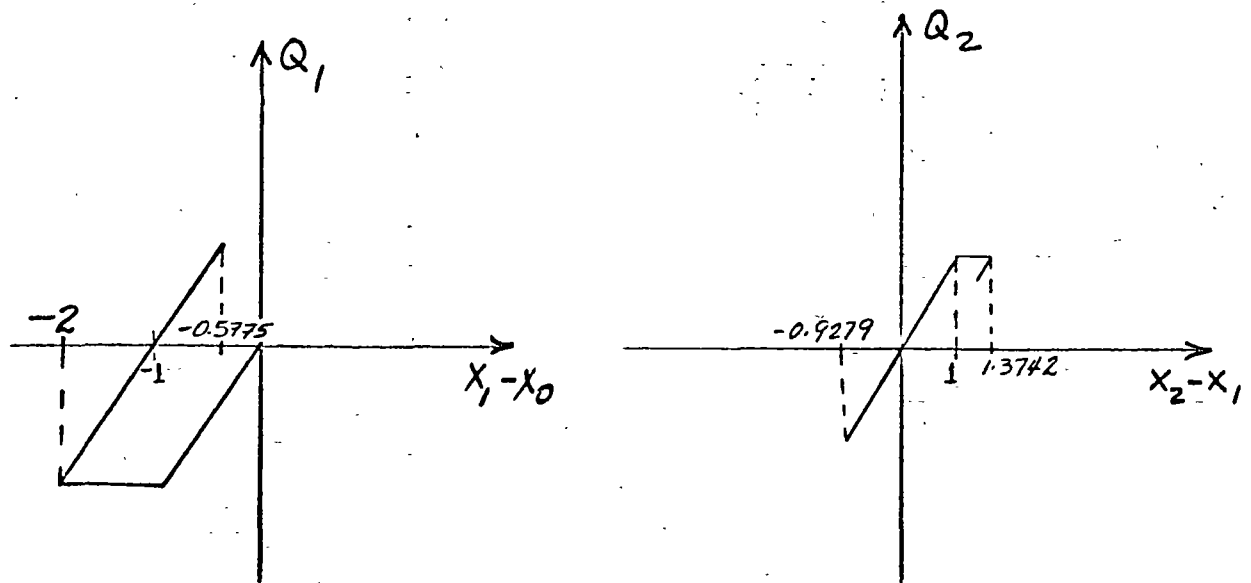
Calcular mediante el método β de Newmark los desplazamientos máximos absolutos del 1º y 2º niveles de la estructura mostrada abajo, cuando es excitada por un desplazamiento súbito de 2 cm en su base.



$$\begin{aligned}
 M_1 \ddot{x}_1 + Q_1 - Q_2 &= 0 \\
 M_2 \ddot{x}_2 + Q_2 &= 0 \\
 \Downarrow \\
 \ddot{x}_1 &= \frac{Q_2 - Q_1}{M_1} \\
 \ddot{x}_2 &= \frac{Q_2}{M_2}
 \end{aligned}
 \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} M_1 \ddot{x}_1 + Q_1 - Q_2 = 0 \\ M_2 \ddot{x}_2 + Q_2 = 0 \\ \Downarrow \\ \ddot{x}_1 = \frac{Q_2 - Q_1}{M_1} \\ \ddot{x}_2 = \frac{Q_2}{M_2} \end{aligned}} \right\} (1)$$

En vez de suponer \ddot{x}_1 y \ddot{x}_2 al inicio de cada ciclo, supondremos Q_1 y Q_2 y calcularemos ambas aceleraciones con base en ellas mediante la ec. (1). Las ecuaciones para la velocidad y el desplazamiento son:

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_{i+1} &= \dot{x}_i + 0.05(\ddot{x}_i + \ddot{x}_{i+1}) \\ x_{i+1} &= x_i + 0.1\dot{x}_i + \frac{1}{600}(2\ddot{x}_i + \ddot{x}_{i+1}) \end{aligned} \right\} (2)$$



t	x_0	Q_1	Q_2	x_1	x_2	x_1	x_1	x_2	x_2	$x_1 - x_0$	$x_2 - x_1$	$x_1 - x_0$	$x_2 - x_1$	OBSERVA- CIONES
seg	cm	ton	ton	cm/seg ²	cm/seg ²	cm/seg	cm	cm/seg	cm	cm	cm	cm/seg	cm/seg	
0	2.0	-50.00	0.00	50.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	-2.00	0.00	0.00	0.00	
.1	2.0	-37.500	-6.25	37.5	6.250	4.375	0.229	0.3125	0.0104	-1.771	-0.2185	4.375	-4.063	
		-38.550	-5.463	32.3	5.463	4.115	0.2205	0.2731	0.0091	-1.7795	-0.2113	4.115	-3.842	
		-38.975	-5.283	33.5125	5.283	4.1756	0.2225	0.2641	0.0088	-1.7774	-0.2136	4.1756	-3.9114	
		-38.875	-5.34	33.593	5.340	4.1796	0.2226	0.2670	0.0089	-1.7773	-0.2137	4.1796	-3.9126	
		-38.870	-5.343	33.530	5.3425	4.1765	0.2225	0.2671	0.0089	-1.7774	-0.2135	4.1765	-3.9093	
.2	0.2	-20.00	-10.00	10.00	10.00	6.353	0.7685	1.0342	0.070	-1.2314	-0.6984	6.353	-5.3188	
		-11.575	-17.46	1.575	17.46	5.9317	0.7545	1.4072	0.083	-1.2455	-0.6919	5.9317	-4.5244	
		-12.275	-16.7975	-5.185	16.7975	5.5937	0.7432	1.3741	0.0814		-0.6617			
		-12.84	-16.5446	-3.9575	16.5446	5.6551	0.7453	1.3614	0.0809		-0.6643			
		-12.735	-16.6076	-3.8096	16.6076	5.6625	0.7455	1.3646	0.0810		-0.6644			
		-12.7216	-16.6100	-3.886	16.6100	5.6587	0.7454	1.3647	0.0811	-1.2546	-0.6642	5.6587	-4.294	
.3	2.0	10.000	-25.00	-35.00	25.00	3.7144	1.2399	3.4452	0.3146		-0.9252			
		11.995	-23.1324	-36.995	23.132	3.6146	1.2366	3.3518	0.3114		-0.9251			
		11.83	-23.1277	-34.963	23.127	3.7162	1.2400	3.3510	0.3114		-0.9285			
		12.00	-23.2129	-35.13	23.213	3.7080	1.2397	3.3558	0.3116		-0.9280			
		11.9885	-23.2018	-35.202	23.202	3.7043	1.2396	3.3552	0.3116	-0.7604	-0.9279	3.7043	-0.3491	
.4	2.0	25.000	-15.00	-40.000	15.000	-0.1193	1.4219	5.3067	0.7520		-0.6698			
		21.095	-16.745	-36.095	16.7457	0.0563	1.4272	5.3853	0.7544		-0.6727			
		21.360	-16.8193	-38.1057	16.8193	-0.0341	1.4245	5.3886	0.7545		-0.6699			
		21.225	-16.7493	-38.0443	16.7493	-0.0313	1.4245	5.3854	0.7544	-0.5755	-0.6700	-0.0313	5.4067	*
.5	2.0	15.00												
		12.64	-10.00	-25.0	10.00	-3.1835	1.2528	6.7228	1.3654		0.1126			
		12.87	2.8159	-22.64	-2.8159	-3.0655	1.2568	6.0818	1.3440		0.0872			
		13.89	2.1819	-10.024	-2.1819	-2.4347	1.2778	6.1137	1.3451		0.0673			
		13.75	1.6833	-11.7081	-1.683	-2.5189	1.2750	6.1387	1.3459		0.0709			
		13.72	1.7853	-11.9459	-1.7853	-2.5308	1.2746	6.1336	1.3457	-0.7254	0.0741	-2.5308	8.6644	
.6	2.0	0.000	15.000	15.000	-15.000	-1.6915	1.0524	5.2943	1.8745		0.8221			
		2.62	20.550	12.38	-20.55	-2.5090	1.0023	5.0168	1.9188		0.9165			
		0.115	22.9139	20.435	-22.9189	-2.1063	1.0157	4.8986	1.9149		0.8992			
		0.785	22.4804	22.1289	-22.4804	-1.9866	1.0185	4.9203	1.9156		0.8971			
		0.925	22.4285	21.5554	-22.4285	-2.050	1.0176	4.9229	1.9157		0.8987			
		0.88	22.4532	21.5485	-22.4532	-2.050	1.0176	4.9216	1.9156	-0.9824	0.8990	-2.050	6.9716	
.615	2.00	-3.00	25.000	28.000	-25.000	-1.6905	0.9894	4.5657	1.9867		0.9973			
		-0.53	24.9334	25.53	-24.9334	-1.6967	0.9894	4.5659	1.9867	-1.0106	0.9973	-1.6967	6.2626	**

$x_1 - x_0 = x_1$ SE HACE CASI CERO, CAMBIO DE POSITIVO A NEGATIVO. $|x_1|_{\text{máx}} = 1.4245 \text{ cm}$

* CAMBIO DE RIGIDEZ EN EL 2o. PISO $x_2 - x_1 = 1.00$, $Q_2 = 25$

t seg	x_0 cm	Q_1 ton	Q_2 ton	\ddot{x}_1 cm/seg ²	\ddot{x}_2 cm/seg ²	\dot{x}_1 cm/seg	x_1 cm	\dot{x}_2 cm/seg	x_2 cm	$x_1 - x_0$ cm	$x_2 - x_1$ cm	$\dot{x}_1 - \dot{x}_0$ cm/seg	$\dot{x}_2 - \dot{x}_1$ cm/seg	OBSERVA- CIONES
0.70	2.00	-10.000	25.000	35.000	-25.000	0.8696	0.9484	2.441	2.285		1.3366			
		-2.580	25.000	27.580	-25.000	0.5728	0.9405	2.441	2.285		1.3445			
		-2.975	25.000	27.975	-25.000	0.5886	0.9409	2.441	2.285		1.3441			
		-2.955	25.000	27.955	-25.000	0.5878	0.9409	2.441	2.285	-1.0591	1.3441	0.5878	1.8532	
0.735	2.00	-1.000	25.000	26.000	-25.000	1.5368	0.98065	1.565	2.3549					
		-0.9675	25.000	25.9675	-25.000	1.5367	0.98065	1.566	2.3549					
		-0.9671	25.000	25.9671	-25.000	1.5367	0.98065	1.566	2.3549	-1.1093	1.3742	1.5367	0.0293	
0.80	2.00	5.000	20.000	15.000	-20.000	2.8823	1.1282	0.09128	2.4068		1.2756			
		6.365	22.575	16.245	-22.595	2.9196	1.0449	0.01343	2.4053		1.3604			
		6.570	22.4619	18.085	-22.469	2.9748	1.1300	0.0173	2.4053		1.2753			
		6.435	22.5613	16.0948	-22.5613	2.9151	1.1288	0.0144	2.4053	-0.8712	1.2765	2.9151	-2.9007	**

** \dot{x}_2 SE HACE CASI CERO
 $|x_2|_{\text{m} \acute{a}x} = 2.4053 \text{ cm}$

RELACION DE ALUMNOS AL CURSO DINAMICA ESTRUCTURAL (IV CURSO INTERNACIONAL DE INGENIERIA SISMICA JULIO, 1978).

1. GUSTAVO AGUIRRE P.
UNIV. TEC. P. DE LOJA
ECUADOR.
P.O. BOX 71 S.A.
TEL. 960375
Av. Col. del Valle 443
México 12, D.F.
Tel. 523.99.90
2. ROBERTO ENRIQUE BRENES BRENES
INST. COSTARRICENSE DE ELECTRICIDAD
SABANA NORTE, SAN JOSE, COSTA RICA
Calle 18, AUS 4-6
Los Angeles, Cartago,
Costa Rica
3. JOSE BENJAMIN DUEÑAS GOMEZ
DIR. GRAL. DE OBRAS MARITIMAS
INSURGENTES SUR 465
MEXICO 11, D.F.
José Ma. Tornell 20-8
San Miguel Chalultepec
México 18, D.F.
Tel. 516.34.70
4. STANISLAW DOROSZ
INST. DE INGENIERIA, UNAM
MEXICO 20, D.F.
TEL. 548.97.94
5. SERGIO OCTAVIO R. ESCOBAR MEDINA
ESC. DE ING.
UNIV. AUTONOMA DE ZACATECAS
TEL. 2.08.27
Juan de Tolosa 809
Zacatecas, Zac.
Tel. 2.11.47
6. JAIME E. FLORES CALDERON
UNIVERSIDAD DE CAUCA
DEPARTAMENTO DE FISICA
7. ELIAS GALINDO VALLARINO
UNIVERSIDAD AUTONOMA DE QUERETARO
CENTRO UNIVERSITARIO
QUERETARO, QRO.
Germán Patiño 36-5
Col. Aragón
Querétaro, Qro.
8. OSCAR JAIME GELBWASER
EURO ESTUDIOS S.A. DE C.V.
GAUSS 9-202
MEXICO 5, D.F.
TEL. 250.70.00
Sudermann 143-1
México 5, D.F.
Tel. 545.55.99
9. TEOFILO LUNA SANCHEZ
BUFETE INDUSTRIAL DISEÑOS Y PROYECTOS SA.
TOLSTOI 22
MEXICO, D.F.
Cuiculco 57-6
México 13, D.F.
Tel. 533.15.00 Ext. 275
10. RAUL MENDOZA MONROY
CIA. DE LUZ Y FUERZA DEL CENTRO S.A.
MELCHOR OCAMPC 171
MEXICO 17, D.F.
TEL. 592.37.18
Lago Victoria 52-2
Col. Anahuac
México 17, D.F.
Tel. 250.30.62

11. ING. RAMON MORALES ROSS
UNIV. JUAREZ AUTO. DE TABASCO
CIUDAD UNIVERSITARIA
VILLAHERMOSA, TAB. Peztaozzi 526-5
Col. Narvarte
México 12, D.F.
Tel. 523.21.52
12. FLORENCIO MORENO LOPEZ
ESC. DE ING.
UNIVERSIDAD AUTONOMA DE QUERETARO
QUERETARO, QRO. Primavera Ote. 35
Querétaro, Qro.
Tel. 2.72.20
TEL. 251.89
13. ING. ROBERTO MORENO QUINTO
CIA. DE LUZ Y FUERZA DEL CENTRO
14. ANTONIO NIETO G.
INDUSTRIAL MINERA MEXICO S.A.
BAJA CALIFORNIA 200 - 12° Piso
MEXICO, D.F. Irlanda 132-30
México 21, D.F.
Tel. 549.68.73
TEL. 564.70.66 EXT.288
15. JOSE ROLANDO PAREDES ESCORZA
DIRECCION GENERAL DE OBRAS MARITIMAS
S. C. T. Rosa Verde 157
Col. Molino de Rosas
MEXICO 19, D.F.
Tel. 651.06.67
INSURGENTES SUR 465
MEXICO 11, D.F.
TEL. 564.77.58
16. JESUS PORRAS MARISCAL
INST. TEC. REGIONAL DE OAXACA
CALZ. INST. TEC. S/N. Calz. Sta. Anita 115
Col. Moderna
México, D.F.
Tel. 690.17.68
OAXACA, CAX.
TEL. 644.13
17. ALFONSO RUIZ VAZQUEZ
ARUA CONSTRUCCIONES
AV. VALLE DE BRAVO NO.19
MEXICO 22, D.F.
TEL. 677.37.30
18. ANTONIO SANCHEZ HERNANDEZ
ESCUELA DE INGENIERIA
UNIVESIDAD AUTONOMA DE QUERETARO
QUERETARO, QRO. San Luis Potosí, 19
Col. Hidalgo
Querétaro, Qro.
Tel. 270.08
TEL. 251.89

19. RAUL SERRANO LIZAOLA
ESC. DE ING. CIVIL
CIUDAD UNIVERSITARIA
PUEBLA, PUE.
Bonampak 4506
Col. Reforma Agua Azul
Puebla, Pue.
Tel. : 4392.96
20. FEDERICO TIRADO INDA
ESC. DE ING.
UNIVERSIDAD AUTONOMA DE GUERRERO
CHILPANCINGO, GRO.
TEL. 227.41
Juárez 57
Chilpancingo, Gro.
Tel. 228.44
21. ANGEL J. VALLEJO GONZALEZ
CIA. DE LUZ Y FUERZA DEL CENTRO S.A.
TLALOC 90
COL. ANAHUAC
México 17, D.F.
Tel. 592.37.18
Valle de Oaxaca 24
Col. Vista del Valle
Naucalpan, Edo. de Méx.
Tel. 560.50.65