1. ANTECEDENTES TEÓRICOS

La planeación y el diseño de obras hidráulicas están relacionados con eventos hidrológicos futuros, cuyo tiempo de ocurrencia o magnitud no pueden predecirse, ya que no están gobernados por leyes físicas o químicas conocida, sino por las leyes de azar. Es por ello que la probabilidad y la estadística juegan un papel muy importante para pronosticar eventos hidrológicos.

Debido a que en hidrología se cuenta con periodos muy cortos de precipitaciones para poder estimar la lluvia de diseño de una avenida, se requiere buscar entre las distintas funciones de distribución de probabilidad teóricas la que se ajuste mejor a los datos medidos, y usar esta función para poder extrapolar los eventos de diseño, ya sea por medios gráficos o por medio de la obtención de los parámetros de su función de distribución. El presente capítulo describe estas funciones y los métodos de ajustes utilizados.

1.1 Variable, Muestra y Población

Para facilitar la comprensión de algunos términos que se usaran en las siguientes páginas, se da su definición a continuación:

Variable: es una descripción numérica del resultado de un experimento, asocia un valor numérico con cada resultado experimental posible. Es discreta si su conjunto de valores posibles es finito, o se puede enumerar en una sucesión finita, y es continua cuando sus valores posibles abarcan un intervalo completo sobre la línea de los números reales.

Población: es el conjunto de todos los posibles valores que podría tener la variable x.

Resultado: es un dato aislado, obtenido mediante la observación de una variable cualquiera x en estudio.

Muestra: es un conjunto de resultados obtenidos para la variable x en cuestión, es un subconjunto de la población. Una muestra aleatoria es aquella que se obtiene completamente al azar, sin dar preferencia a algún tipo de valores. En contraste, se dice que una muestra es sesgada cuando fue obtenida dando preferencia a algún tipo de resultados.

En muchos casos es prácticamente imposible obtener muestras completamente aleatorias; en estos casos debe tenerse al menos una idea de cuáles fueron los sesgos introducidos al momento de obtener la muestra.

1.2 Funciones de distribución

Para poder hacer deducciones probabilísticas en relación con alguna variable hidrológica de interés, es necesario estudiar primero la forma de caracterizar a las poblaciones de las que la muestra en estudio forma parte. Con este objeto, se definen algunas funciones típicas que permiten caracterizar estadísticamente a una población, así como la forma de calcular sus parámetros.

Entre las funciones de distribución de probabilidad más usadas en hidrología se destacan las siguientes:

- Normal
- Lognormal
- Pearson III
- Gumble
- Doble Gumbel

1.2.1 Propiedades de las funciones de distribución

Se define a la función de distribución asociada a una variable aleatoria *u*, que puede tomar valores en el campo de los números reales, como la probabilidad de que dicha variable tome valores menores o iguales que un valor fijo *x* para toda *x* comprendida entre los reales, esto es:

$$F_u(x) = Prob\,\{u \leq x\}\; u, x\; \varepsilon\; R$$

Esta función (Figura 1.1) corresponde a la idea del histograma de frecuencias acumuladas

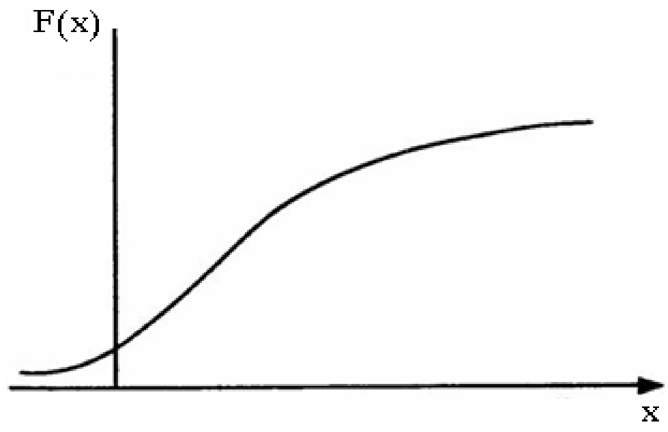

Figura 1.1 Función de distribución

Sus principales propiedades son las siguientes:

1. $F(\infty) = 1$

2. $F(-\infty) = 0$

3. $F(x + \Delta x) \geq F(x) \qquad\qquad si\;\; \Delta x > 0$

De acuerdo con la definición, si se conoce la función de distribución de probabilidad de una variable aleatoria, la probabilidad de que la variable tome valores en un intervalo *(a, b)*, se calcula como:

$$prob(a \leq u \leq b) = F_u(a) - F_u(b)$$

En resumen, la función de distribución de probabilidad de la población de valores posibles de una variable cualquiera, *u*, $F_u(x)$, corresponde a la idea de frecuencia relativa acumulada asociada a los valores de una muestra, y mide la probabilidad de que *u* tome valores menores o iguales que un valor especificado *x*.

1.2.2 Función de densidad

Una función de densidad de probabilidad, integrada entre *a* a *b* (con *a*≤*b*), da la probabilidad de que la variable aleatoria correspondiente tomará un valor en el intervalo entre *a* a *b*.

Una función con valores f(x), definida con respecto al conjunto de todos los números reales, se denomina función de densidad de probabilidad de la variable aleatoria continua X si :

$$P(a \leq b) = \int_a^b f(x)dx$$

Para cualesquiera constantes reales *a* y *b*, con *a*≤*b*.

A esta función de densidad también se le conoce con el nombre de densidades de probabilidades, funciones de densidad, densidades y funciones de densidad de probabilidad (que se abrevia como f.d.p.) La representación gráfica se muestra en la figura 1.2

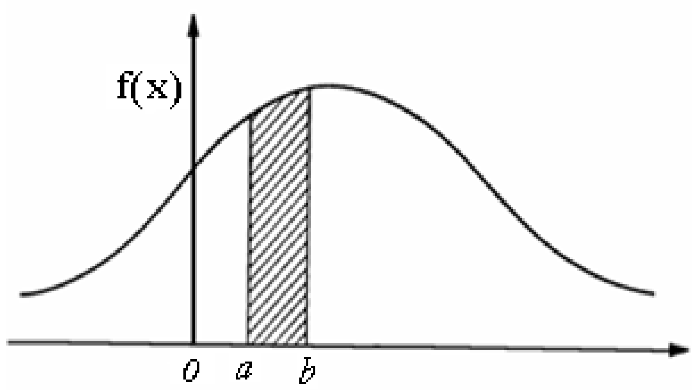

Figura 1.2 Función de densidad

Una función puede desempeñar el papel de una función de densidad de una variable aleatoria X si sus valores f(x), cumplen que:

a) $f(x) \geq 0 \; para \; -\infty < x < \infty$

b) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx \; = 1$

Si X es una variable aleatoria continua la función dada por

$$F(X) = \; P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt \qquad para \; -\infty < x < \infty$$

Donde *f(t)* es el valor de la función de densidad de probabilidad de X en *t*. F(x) se llama función de distribución o función acumulada de X. Por tanto se deduce:

Si f(x) y F(x) son, respectivamente, valores de la distribución de probabilidad y la función de distribución X en x, entonces

$$P(a \leq X \leq b) = \; F(a) - F(a)$$

Para dos constantes reales cualesquiera *a* y *b* con *a*≤*b* se tiene que

$$f(x) = \; \frac{dF(x)}{dx}$$

Por tanto la derivada de la función de distribución de probabilidad es la función de densidad de probabilidad.

1.2.3 Función de distribución normal

Una distribución muy importante y mayormente usada es la Distribución Normal o de Gauss. La ecuación matemática de la función de Gauss es la siguiente:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx$$

Y la función de densidad se define de la siguiente manera:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \qquad ; \quad -\infty < x < \infty$$

Donde:

µ = media

e =2.7182…

π=3.1415…

σ =desviación estándar

x = variable aleatoria

La distribución normal es una curva con forma de campana, con eje de simetría en el punto correspondiente al promedio del universo μ. La distancia entre el eje de simetría de la campana y el punto de inflexión de la curva es igual a σ, la desviación estándar de la población. El área total debajo de la curva es igual a 1.

1.2.4 Función de distribución lognormal

Si la variable aleatoria Y= log X está normalmente distribuida, entonces se dice que X está distribuida en forma lognormal. La función de distribución de probabilidad es:

$$F(x) = \int_{0}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\Pi}} \frac{1}{x\beta} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln -\alpha}{\beta}\right)^2} dx$$

Y su función de densidad presenta la siguiente forma

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\Pi}} \frac{1}{x\beta} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln -\alpha}{\beta}\right)^2}$$

Donde α y β son los parámetros de la distribución, estos parámetros corresponden a la media y desviación estándar de los logaritmos de la variable aleatoria. La figura 1.3 muestra la representación grafica de esta distribución.

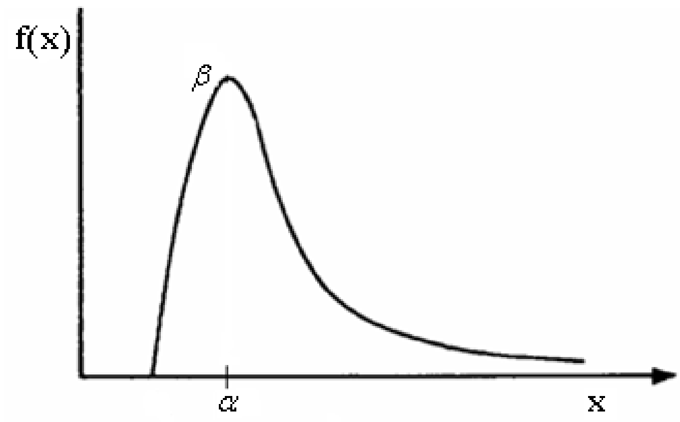

Figura 1.3 Función de densidad Lognormal

Esta distribución tiene la ventaja sobre la distribución normal de que está limitada (X>0) y de que la transformación log tiende a reducir la asimetría positiva comúnmente encontrada en información hidrológica, ya que al tomar logaritmos se tiene una reducción en una proporción mayor los números grandes que los números pequeños. Las desventajas de esta distribución son que se tiene solamente dos parámetros en la función y que se requiere que los logaritmos de los datos sean simétricos con respecto a la media.

1.2.5 Función de distribución exponencial

Está definida por:

$$F(h) = 1 - e^{-y}$$

Donde

F(x) probabilidad de que c ≤ h

y variable reducida, que se calcula como:

$$y = \frac{x - \beta}{\alpha}$$

α y β parámetros que definen la función Exponencial

α desviación estándar

β cota inferior

Los parámetros estadísticos de esta función son:

Media $\mu = \alpha + \beta$

Variancia $\sigma^2 = \alpha^2$

La figura 1.4 muestra la representación gráfica de la función exponencial.

Figura 1.4 Función de probabilidad exponencial

La función exponencial se utiliza para describir los tiempos de interarribo de choques aleatorios a sistemas hidrológicos, tales como volúmenes de escorrentía contaminada que entra en los ríos a medida que la lluvia lava los contaminantes localizados en la superficie del río. La ventaja de esta distribución es que es fácil estimar sus parámetros a partir de la información observada y esta distribución se adapta muy bien a estudios teóricos. La desventaja es que es necesario que la ocurrencia de cada evento sea completamente independiente de sus vecinos.

1.2.6 Función de distribución Pearson III o Gama de tres parámetros

La función de densidad está dada por:

$$f(x) = \frac{1}{\alpha_1 \Gamma(\beta_1)} \left\{\frac{x-\delta_1}{\alpha_1}\right\}^{\beta_1 - 1} e^{-\frac{x-\delta_1}{\alpha_1}}$$

Donde α_1, β_1 y δ_1 son los parámetros de la función y $\Gamma(\beta_1)$ es la función Gamma. La gráfica correspondiente a esta función se muestra en la figura 1.5.

Y su función de distribución de probabilidad, es igual a:

$$F(x) = \frac{1}{\Gamma(\beta_1)} \int_0^x e^{-\left(\frac{x-\delta_1}{\alpha_1}\right)} \left(\frac{x-\delta_1}{\alpha_1}\right)^{\beta-1} dx$$

La distribución Pearson tipo III se uso en hidrológica por primera vez en 1924 por Foster para describir la distribución de probabilidad de picos de gastos máximos anuales.

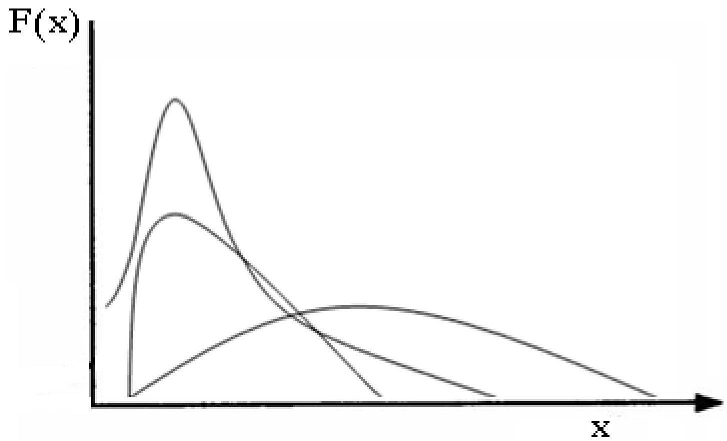

Figura 1.5 Función de densidad Pearson III o Gamma de 3 parámetros

1.2.7 Función de distribución Gumbel

En los estudios realizados para eventos hidrológicos extremos se incluye la selección de una secuencia de observación ya sean máximas o mínimas de un conjunto de datos, por ejemplo en el estudio de los gastos picos en una estación hidrométrica se utilizan solamente los valores máximos registrado cada año, entre todos los valores registrados. Es por ello que se utiliza la función de valores extremos I o también llamada Gumbel en hidrología, ya que esta función de distribución se utiliza para determinar la probabilidad de que se presenten grandes avenidas, debido a que se ha demostrado teóricamente que se ajusta a los valores máximos.

La función de distribución de probabilidad se representa por la siguiente ecuación:

$$F(x) = e^{-e^{-\alpha(x-\beta)}}$$

La función de densidad de probabilidad es la siguiente:

$$f(x) = \alpha \, e^{[-\alpha(x-\beta)-e^{-\alpha(x-\beta)}]}$$

Donde:

α parámetro de forma

β parámetro de escala

x variable aleatoria

Los parámetros α y β se estiman por el método de momentos, el cual se detallará en las páginas siguientes, como:

$$\alpha = \frac{1.2825}{s}$$

$$\beta = \bar{x} - 0.45s$$

Donde:

s es la desviación estándar que se calcula con la siguiente ecuación

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i-1}^{n}(x_i - \bar{x})}{n-1}}$$

$\bar{x}$ representa la media de la muestra, la cual se calculará con al siguiente expresión.

$$\bar{x} = \sum_{i-1}^{n} \frac{x_i}{n}$$

La gráfica representativa de la función de distribución Gumbel se muestra en la figura 1.6

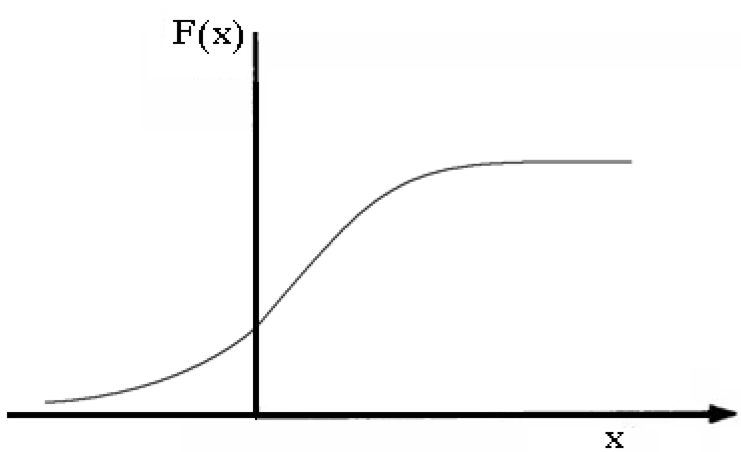

Figura 1.6 Función de distribución Gumbel

La distribución de probabilidad Gumbel se utiliza para el estudio de los gastos máximos anuales en un río o de precipitaciones máximas anuales en un sitio, y por lo tanto para la determinación de avenidas de diseño.

Se puede definir a una variable reducida *y* como:

$$y = -\alpha(x - \beta)$$

Si sustituimos la variable reducida en la función de distribución de probabilidad se tiene que

$$F(x) = e^{-e^{y}}$$

Despejando “y” de la ecuación anterior, aplicando logaritmo natural en dos ocasiones se obtiene.

$$y = -Ln\left[Ln\left(\frac{1}{F(x)}\right)\right]$$

Los valores *x* y *y* pueden graficarse en una recta, tal como se muestra en la figura 1.7

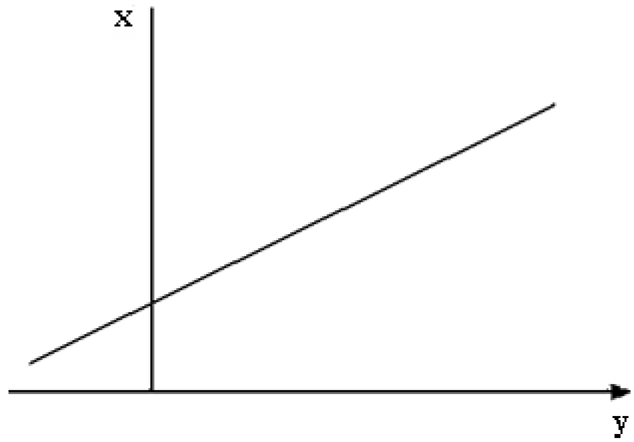

Figura 1.7 Distribución Gumbel, variable *x* contra variable reducida *y*.

1.2.8 Función de distribución para dos poblaciones o Doble Gumbel

En nuestro país, existen diversos lugares donde los gastos máximos anuales pertenecen a dos poblaciones diferentes, debido a los ciclones que se presentan en ciertas zonas y por las precipitaciones relacionadas con los fenómenos meteorológicos dominantes de la región. Esta variación también se ven reflejadas en zonas, donde se tiene datos de gastos producidos por las precipitaciones y otros por gastos provenientes de deshielos. En estas situaciones se dice que llegamos a tener dos poblaciones para una misma zona en estudio.

Es por ello que fue necesario desarrollar la función de distribución Doble Gumbel, dada por la siguiente expresión:

$$F(x) = p\left(e^{-e^{-\alpha_1(x-\beta_1)}}\right) + (1-p)\left(e^{-e^{-\alpha_2(x-\beta_2)}}\right)$$

donde α_1 y β_1 son los parámetros correspondientes a la población no ciclónica y α_2 y β_2 corresponden a la ciclónica, *p* es la probabilidad de que en un año cualquiera el gasto máximo no sea producido por una tormenta ciclónica.

Los valores α_1 y β_1 se obtienen ajustando por momentos una función Gumbel a los datos de la primera población y los valores de α_2 y β_2 ajustando otra función de Gumbel a los datos de la segunda población.

Los parámetros α_1 y α_2 definen una cierta inclinación de las curvas, entre más pequeñas más fuerte es la inclinación. Y β_1, β_2 son parámetros de escala, el valor más grande que pueden tomar es el máximo valor de la muestra obtenido para las poblaciones 1 y la 2.

Para estimar los parámetros se recomienda minimizar el error cuadrático

$$z = \left[\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x_i})^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

Donde x_i y $\overline{x_i}$ son los valores medidos y los valores estimados con la función de distribución de probabilidad, y *n* es el número de valores que contiene la muestra.

Para obtener la combinación de valores *p,* α_1 , β_1 , α_2 y β_2 que hacen mínima la función *Z*, se recomienda hacer primero una gráfica en la que se dibujen los puntos correspondientes a las parejas de valores $[Q_i\, , F(Q_i)]$. Para dibujar los puntos en la gráfica se utiliza el papel de Gumbel.

El papel de Gumbel tiene en el eje de las abscisas los valores de $y = -LnLn\left[\frac{F(x)}{F(x)-1}\right]$ y en las ordenadas los de x . Con esto se logra separar a las dos poblaciones que se agrupan en sendas rectas.

La figura 1.8 muestra un salto brusco en el gráfico, por los valores de los gastos no ciclónicos y los ciclónicos.

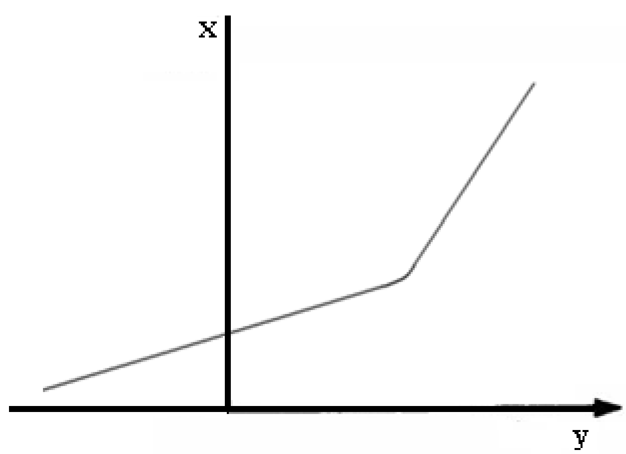

Figura 1.8 Distribución doble Gumbel

No es posible determinar una ecuación para el cálculo de gastos máximos debido a que la función de distribución de probabilidad de Gumbel de dos poblaciones es implícita, eso implica que la solución de dicha ecuación debe realizarse a través de algún método para determinar raíces en una función.

Para poder utilizar esta función es necesario estimar *p,* lo cual se puede realizar de diferentes maneras, puede ser al consultar los boletines meteorológicos, preguntar a los habitantes de la zona o examinando los gastos máximos anuales.

El valor de *p* será entonces:

$$p = \frac{N_n}{N_T}$$

Siendo N_n el número de años de registro en que el gasto máximo no se produjo por una tormenta ciclónica y N_T el número total de años de registro. De acuerdo con la experiencia en México, en el uso de esta distribución de probabilidad para los valores máximos anuales se ha utilizado una p de 0.84.

1.3 Métodos de ajustes

Debido a que una distribución de probabilidad es una función que representa la probabilidad de ocurrencia de una variable aleatoria. Mediante el ajuste de dicha función a los datos de una muestra, gran cantidad de información probabilística en la muestra puede resumirse en forma compacta en la función y en sus parámetros asociados. Ajustar una función de distribución a un grupo de datos significa encontrar la función que, a juzgar por los datos de la muestra, mejor representa la población de valores posibles de la variable en estudio.

En el proceso de ajuste se debe llevar a cabo en dos pasos importantes: el primero es encontrar el tipo de función de distribución adecuada y en segundo lugar obtener los parámetros del tipo de función elegida. En hidrología una elección apresurada de cualquiera de las funciones podría traer como consecuencias tener una estructura sobrediseñada y costosa o subdiseñada y por tanto riesgosa. El ajuste de distribución se puede realizar por diferentes métodos, en seguida se describen algunos de ellos.

1.3.1 Análisis gráfico

Este método consiste simplemente en observar una grafica donde se dibujara cada una de las diferentes funciones junto con los puntos medidos, la función de distribución que se seleccionara será aquella que se apegue visualmente mejor a los datos medidos.

Este método es subjetivo, no es muy recomendable, sin embargo es muy ilustrativo y puede ser usado con otros métodos, si lo llega a aplicar una persona con experiencia puede llegar a ser el mejor de los métodos.

1.3.2 Método de mínimos cuadrados

El método de ajuste por mínimos cuadrados consiste en estimar los parámetros de la función de distribución seleccionada, que hagan mínima la expresión:

$$Z = \sum_{i=1}^{n} \{P(x_i) - F(x_i)\}^2$$

Donde

$F(x_i)$ función de distribución en estudio, valuada en x_i

$P(x_i)$ probabilidad "observada" de la muestra, que se estima mediante la fórmula de Weibull

$$P(x_i) = \frac{N + 1 - m}{N + 1}$$

Donde:

N número de datos

m número de orden que ocupa x_i en la serie de los datos, si se ordenan de mayor a menor

1.3.3 Método de los momentos

Una forma de estimar los parámetros de una función de distribución, para que se "ajuste" a un conjunto de datos, consiste en igualar los valores de las características estadísticas de la muestra con las de la población; esto es, hacer que la media de los valores muestreados sea igual a la de la función de distribución (a la que se llamará primer momento), que las varianzas sean iguales (segundo momento), el coeficiente de asimetría (tercer momento), etc., hasta establecer tantas ecuaciones como parámetros tenga la función.

1.3.4 Método de Máxima Verosimilitud

Supone que el mejor parámetro de una función debe ser aquel que maximiza la probabilidad de ocurrencia de la muestra observada. Se utiliza la función de verosimilitud L(x). Mientras mayor sea esta función mayor será el ajuste de la función de distribución a los datos.

La función de verosimilitud es el producto de los valores de la función de densidad de probabilidad teórica, calculada para cada valor x_i de la muestra, es decir:

$$L = \prod_{i=1}^{n} f(x_i) = f(x_i) * f(x_2) * f(x_3) * \dots f(x_n)$$

Donde $\prod_{i=1}^{n}$ 0 es el operador que indica el producto de los valores que comprende.

Debido a que varias funciones de densidad de probabilidad son exponenciales, es conveniente trabajar con la función logaritmo de la función de verosimilitud

$$H = \ln L = \sum_{i=1}^{n} ln[f(x_i)]$$

De esta manera para poder estimar los valores de los parámetros de la función que hacen máxima a la función H, se deriva dicha función con respecto a cada uno de los parámetros y el resultado se iguala a cero. Al igualar a cero cada una de las derivadas se tendrán tantas ecuaciones como parámetros tenga la función de probabilidad, y de estas se despejan los parámetros para hacer el ajuste respectivo.

Este método teóricamente es el más correcto para ajustar distribuciones de probabilidad a información, ya que produce los estimativos de parámetros más eficientes, aquellos que estiman los parámetros de la población con los menores errores promedio, sin embargo para algunas distribuciones de probabilidad, no existe una solución matemática y al maximizar la función logaritmo de verosimilitud resulta bastante complicado, es por ello que en general el método de los momentos es más fácil de aplicar que el método de la máxima verosimilitud y resulta ser el más apropiado para los análisis prácticos en hidrología.

1.4 Periodo de retorno

El periodo de retorno se usa comúnmente en lugar de la probabilidad p para definir crecientes de diseño. Se define como el lapso promedio entre la ocurrencia de un evento igual o mayor a una magnitud dada. Asociado a eventos máximos anuales, se define como el tiempo dentro del cual ese evento puede ser igualado o excedido una vez en promedio.

Una excedencia es un evento con magnitud igual o mayor que cierto valor, algunas veces el tiempo real entre excedencias es llamado intervalo de recurrencia, el intervalo de recurrencia para un cierto evento será igual al período de retorno del evento, en la práctica los dos conceptos son sinónimos.

Cuando se habla de una tormenta o creciente con período de retorno de 100 años, se entiende entonces que dicho evento será igualado o excedido en promedio una vez cada 100 años, en el transcurso de un gran número de años, por ejemplo 1000 años.

En hidrología se utilizan muestras formadas por eventos hidrológicos anuales, se podrá plantear la siguiente ecuación tomando en cuenta el concepto de probabilidad

$$P(X \geq x) = \frac{1}{Tr}$$

La ecuación anterior nos muestra que si un evento hidrológico X igual o mayor a *x*, ocurre una vez en Tr años, su probabilidad de excedencias es 1/Tr, por ejemplo si una excedencia ocurre en promedio cada 100 años, la probabilidad de que tal evento ocurra en cualquier año es 1/100, que es igual al 1%. Entonces, las probabilidades de excedencias $P(X \geq x)$ y de no excedencia $P(X \leq x)$ y el periodo de retorno están relacionadas por las siguientes ecuaciones:

$$Tr = \frac{1}{P(X \geq x)} = \frac{1}{1 - P(X \leq x)}$$

Existen otras expresiones con las cuales podemos obtener un valor para el periodo de retorno según la muestra de los datos, a continuación se enlistan algunas de ella.

Según Weibull se puede estimar el periodo de retorno con la siguiente ecuación (fórmula de Weibull; Weibull, 1939 referencia dada en Willson, 1990):

$$Tr(x_i) = \frac{1}{1 - P(x_i)} = \frac{N+1}{m}$$

Donde:

$T_r(x_i)$ período de retorno del evento x_i

x_i magnitud del evento

m es el número de orden al ordenar los datos de mayor a menor, es la clasificación del evento de acuerdo con su magnitud.

N es el total de eventos, numero de años de registro

Otra ecuación utilizada es la de California (California Department of Public Works, 1923 dada en Willson, 1990):

$$Tr = \frac{n}{m}$$

También está la fórmula de Hazen:

$$Tr = \frac{2n}{m-1}$$

Estas dos últimas también se toman con reservas. Una que da resultados más satisfactorios es la debida a Gringorten (Willson, 1990) :

$$Tr = \frac{(n + 0.12)}{(m - 0.44)}$$

Otra forma sencilla es la recomendada por Cunnane:

$$Tr = \frac{n+12}{m-0.4}$$

Debido a que cuando se trabaja con avenidas de diseño es común que lo que interesa sea la probabilidad de que dicha avenida exceda una determinada magnitud. Como frecuentemente se trabaja con probabilidades de frecuencias muy cercanas a cero, se utiliza el concepto de período de retorno *T,* que se define como el número de años, en promedio, en el que un evento puede ser igualado o excedido. Como ya se ha mencionado, los conceptos anteriores se pueden relacionar mediante la expresión:

$$Tr(x) = \frac{1}{1-F(x)}$$

Donde:

Tr(x) periodo de retorno, en años, asociado a un valor

x valores máximos anuales

F(x) función de distribución de los valores máximos anuales

Para una serie de valores máximos anuales medidos $x_1, x_2, \ldots, x_n$, el método básico para estimar en cada uno de esos valores el periodo de retorno *T(x)* es el siguiente: Se ordenan los valores en orden descendente según su magnitud y se asigna a cada uno un número de orden "*m*", correspondiendo *m* =1 al valor máximo, para calcular el periodo de retorno se utilizan las ecuaciones antes mencionadas.

Una vez que las series se han ordenado de mayor a menor (o de menor a mayor si se analizan eventos mínimos) se pueden dibujar en gráficas relacionando a la variable analizada con su periodo de retorno Tr o bien con *p*.

Así pues tomando como ejemplo la distribución de probabilidad Gumbel

$$F(x) = e^{-e^{-\alpha(x-\beta)}}$$

Donde

$$y = -Ln\left[Ln\left(\frac{1}{F(x)}\right)\right]$$

Despejando 1/F(x) de

$$Tr = \frac{1}{1 - F(x)}$$

Se tiene que

$$\frac{1}{F(x)} = \frac{Tr}{Tr - 1}$$

Si se llega a dibujar en una gráfica para la distribución Gumbel los valores x serán los gastos medios diarios máximos anuales en el eje de las ordenadas, y en el eje de la abscisas se tendrá

$$y = -Ln\left[Ln\left(\frac{Tr}{Tr - 1}\right)\right]$$

Teniendo un gráfico como el de la figura 1.9

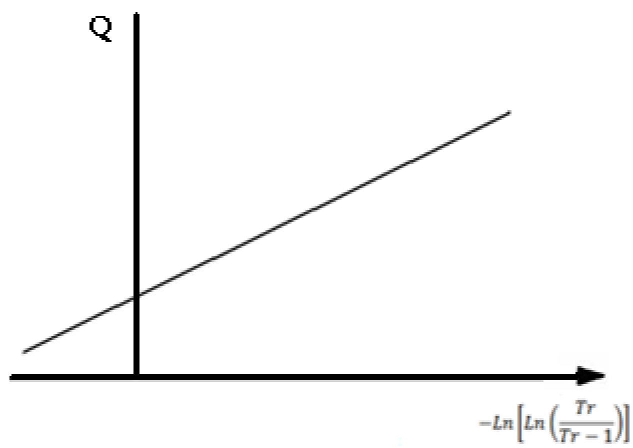

Figura 1.9 Ajuste una función de distribución

1.5 Método de cálculo de lluvias de diseño

La precipitación que una tormenta produce en una cuenca puede llegar a variar desde un máximo en uno o varios puntos, hasta tener valores nulos en la frontera de dicha tormenta. Estas variaciones también se presentan en los registros mensuales y anuales de las estaciones pluviométricas, lo cual llega a originar problemas al determinar la precipitación media en la cuenca.

Una tormenta de diseño es un patrón de precipitación que se emplea en el diseño de un sistema hidrológico. Se define a partir de una lámina de lluvia total, un patrón temporal y un mapa de distribución espacial de la lluvia. Llega a ser complejo relacionar estos tres elementos, por esto se considera solamente la probabilidad de excedencia de la lámina de precipitación total, y la distribución tanto espacial como temporal se calcula usando otros métodos.

El concepto de tormentas de diseño es generalmente usado debido a ciertas razones, la escasez de registros de gastos lo suficientemente largos para realizar análisis de frecuencias de tal manera que sean confiables, una mayor disponibilidad de registros de lluvias y el carácter cambiante de las características físicas de la cuenca en estudio.

Existen diferentes métodos para obtener las tormentas de diseño, los más empleados son los que se basan en las curvas intensidad-duración-periodo de retorno (curvas IDT). Estos métodos asignan intensidades a la tormenta de diseño que corresponden a una probabilidad constante durante toda la duración del evento. Sin embargo se ha comprobado que a partir de varias observaciones en diferentes lugares, una tormenta con una distribución uniforme de frecuencias durante toda su duración no existe o que ocasionalmente puede llegar a ocurrir. Además una tormenta de diseño corresponde a un patrón de precipitación que intenta representar las tormentas típicas de una determinada zona donde una tormenta real puede tener un gran número de combinaciones de duración, intensidad, patrón temporal y distribución espacial.

Es por ello que es más común utilizar modelos lluvia-escurrimiento con tormentas de diseño históricas, para realizar análisis estadísticos a las avenidas resultantes. Las tormentas históricas ofrecen una mejor representatividad de la variabilidad de las tormentas reales en cuanto a su patrón temporal y espacial en comparación con las tormentas de diseño obtenidas mediante curvas IDT. Este método modo requiere de numerosos cálculos, resultando ser muy laborioso cuando la cuenca en estudio es muy grande.

Se han incluido nuevos elementos en el cálculo de las tormentas de diseño, tales como las relaciones precipitación-duración y precipitación-área, lo cual ha ayudado a entender la variabilidad temporal y espacial de la precipitación.

1.5.1 Variación espacial de la precipitación

La variabilidad espacial de la lluvia se basa en dos aspectos importantes, el primero se refiere a la variabilidad de las propiedades estadísticas de la lluvia entre diferentes regiones geográficas, y el segundo a la no uniformidad de la distribución espacial de la lluvia sobre las cuencas.

El origen de la tormenta en cada zona, es un factor que condiciona la distribución espacial de la lluvia. En una misma cuenca, la precipitación llega a presentarse con una gran variación en su distribución espacial. Dos tormentas pueden llegar a tener la misma precipitación media areal, mientras que su distribución espacial puede ser muy distinta ya que la precipitación se concentra en puntos diferentes dentro de la región provocando distintos gastos en su sistema de drenaje.

En la práctica generalmente se supone que la lluvia es uniforme, al aplicar modelos hidrológicos en pequeñas cuencas. La variabilidad espacial debe tomarse en cuenta con el objetivo de mejorar la estimación del volumen de entrada en la cuenca. Por esta situación surge el concepto de Factor de Reducción por Área (FRA) el cual toma en cuenta el efecto de la variabilidad espacial de la precipitación, y sobre todo, considera la simultaneidad con la que se presentan las lluvias máximas.

Las mediciones de la lluvia se realizan de forma puntual, por ello no es de esperar que sea la misma en toda la cuenca de estudio, por ese motivo, diversos autores han propuesto ecuaciones empíricas para la reducción de la precipitación en función del tipo de tormenta y de la cuenca de estudio al calcular el Factor de Reducción por Área, es una foma práctica que considera la no simultaneidad de las lluvias máximas en las estaciones dentro del área así como también la reducción de la lámina de precipitacion media sobre una determinada área a medida que aumente dicha área.

El factor puede calcularse según las siguientes expresiones

a) Para tormentas de tipo convectivo y área inferior a 50 km^2. Woolhiser (1959) propone

$$FRA = \frac{P_a}{P_p} = 1 - \frac{1.94}{P_p} A^{0.6}$$

Donde:

P_a precipitación media en la cuenca para la duración y zona de interés

P_p media de los valores puntuales para la misma zona y duración.

A área de la cuenca en estudio

b) Para ciclones extratropicales o borrascas atlanticas, Boyer obtuvo:

$$FRA = \frac{P_a}{P_p} = \frac{1.68}{\left({}^{d}\!/_{D}\right)} \left[1 - \left(1.09\frac{d}{D} + 1\right) e^{-\left(1.09\frac{d}{D}\right)}\right]$$

Siendo

d distancia al centro del ciclón

D distancia al centro para ${}^{P_a}\!/_{P_p} = 0.5$ se debe estimar

c) Egleson(1972) propone la siguiente fórmula:

$$FRA = \frac{P_a}{P_p} = 1 - e^{-1.1T^{0.25}} + e^{-1.1T-0.01A}$$

Donde

T duración de la tormenta

A área de la cuenca (expresada en millas cuadradas)

1.5.2 Métodos de interpolación de lluvias

La información necesaria para realizar estudios hidrológicos a veces llega a ser escasa debido a la falta de estaciones de medición en los sitios de interés, la precipitación generalmente es registrada por los pluviómetros y pluviógrafos, este equipo mide la lluvia de manera puntual, esta información llega a ser insuficiente en algunos estudios ralizados a las cuencas. Por ello es necesario realizar un proceso de interpolacion de los valores observados puntualmente con el objetivo de obtener informción de los sitios donde no existen mediciones, de esta manera podemos tener el comportamiento y la distribución de la lluvia en el espacio.

La interpolación espacial es un método para inferir valores de una variable a partir de observaciones realizadas de la misma variable en puntos cercanos al lugar de interés.

Existen diversos métodos que pueden emplearse para interpolar, la selección de uno u otro método dependerá de la forma en que el modelo representa el fenómeno real. Lo diversos métodos que existen se pueden clasificar como determinísticos o estocásticos. Los primeros son métodos de interpolación que modelan la variable a través de una función específica, al contrario de la segunda clasificación. La magnitud de las diferencias entre las dos clasificaciones depende de las características de la zona estudiada, del tamaño, la configuración y la densidad de la red de observaciones con que se cuente.

Se presentaran a continuación tres procedimientos para la interpolación y promediación de la precipitación sobre una cuenca, a partir de las precipitaciones conocidas en varios puntos.

1.- Polígonos de Thiessen

Este método está basado en la ley del vecino más cercano, se toma como hipótesis de partida que la precipitación en un punto de la cuenca cualquiera es la misma que la registrada en el pluviógrafo más cercano. A cada estación se le asigna un área de influencia o polígono, el cual se construye de modo que cada punto dentro del polígono esté más cercano a su estación que de cualquier otra.

Los polígonos estarán formados por las mediatrices de los segmentos que une cada estación con las contiguas. La configuración de los polígonos depende de la forma en que las estaciones de medición se encuentran distribuidas espacialmente.

Estas áreas asignadas, divididas por la total de la cuenca, son los coeficientes que ponderan la precipitación de cada estación. El método no toma en cuenta la orografía, pero es un método de gran simplicidad en su aplicación, pero representativo del fenómeno real.

La fórmula que se usa en este método es la siguiente

$$\bar{P} = \frac{1}{A}\sum_{i=1}^{n} A_i\, P_i$$

Siendo

P precipitación media en la cuenca

A superficie de la cuenca

n número de pluviógrafos

A_i área de influencia del pluviógrafo

P_i precipitación registrada por el pluviógrafo

2.- Medias ponderadas

Por este método se extiende la precipitación de las estaciones de la cuenca, a toda ella. Este procedimiento no toma en cuenta la colocación de las estaciones ni el relieve dentro de la cuenca. Se basa en la división de la superficie de la cuenca en celdas elementales, con lo que la precipitación en cada una de ellas se obtendrá aplicando la siguiente ecuación:

$$P_i^* = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} w_i}\sum_{i=1}^{n} w_i P_i$$

Donde

P_i^* precipitación ponderada en la celda i

w_i coeficiente de ponderación, el cual se calcula como

$$w_i = \frac{1}{d_i^c}$$

Siendo

d_i distancia del pluviómetro i a la celda i

Donde *c* es el coeficiente de ponderación, que normalmente es 2, con lo que al procedimiento se le conoce como “inverso de la distancia al cuadrado”. El proceso de promediación se realiza en base al número de celdas en las que se divide la cuenca en el estudio, y se obtendrá la media aritmética de las precipitaciones de las celdas.

$$\bar{P} = \frac{1}{a}\sum_{1}^{a} P_i^*$$

3.- Isoyetas

Las isoyetas son líneas que unen los puntos de igual precipitación. Estas líneas se pueden trazar como curvas de nivel, a partir de precipitaciones en las diversas estaciones y la orografía y su influencia. La gran ventaja de este método es la posibilidad de incluir efectos orográficos no considerados en otros métodos. El volumen descargado sobre la cuenca se determina calculando la superficie afectada por cada isoyeta y multiplicando por su precipitación.

La ecuación a utilizar en este método es la siguiente:

$$\bar{P} = \frac{1}{A}\sum_{i=1}^{n} A_i \frac{P_i + P_{i+1}}{2}$$

Donde

$\bar{P}$ precipitación media en la cuenca

A área de la cuenca

A_i área entre isoyetas

N número de franjas entre isoyetas considerado

P_i precipitación en la isoyeta

Los tres métodos vistos anteriormente para las precipitaciones en una cuenca, podrán aplicarse de la misma forma con intensidades en lugar de precipitaciones.