ANFEI

asociación nacional de facultades y escuelas de ingeniería

TACUBA No. 5 TEL. 512-54-72
MEXICO 1, D. F.

385

INGENIERIA DE COSTOS Y OPTIMIZACION

437

DIRECTORIO DE PROFESORES DEL CURSO

INGENIERIA DE COSTOS Y OPTIMIZACION

C.P. ALEJANDRO CANO DIAZ
Gerente Administrativo
Internado Interior Palmira
Cuernavaca, Mor.
Tel. 42865

DR. VICTOR GEREZ GREISER
PROFESOR TITULAR
Ingeniería Mecánica y Eléctrica
Facultad de Ingeniería
UNAM
México 20, D.F.
Tel. 550.52.15 Ext. 3746

ING. LUIS PABLO M. GRIJALVA LOPEZ
Investigador
Instituto de Investigaciones Eléctricas
División de Sistemas de Potencia
Shakespeare No. 6-3°
México, D.F.
Tel.: 511.34.74

ING. JOSE ARMANDO TORRES FENTANES
Investigador y Coordinador
Sistemas y Circuitos Electromecánicos
Departamento de Ingen iería Mecánica y Eléctrica
Facultad de Ingeniería
UNAM
México 20, D.F.
Tel. 550.52.15 Ext. 3752

'edcs

INGENIERIA DE COSTOS Y OPTIMIZACION

Fecha	Duración	Tema	Profesor
Agosto 10	17 a 21 h	INTRODUCCION	DR. VICTOR GEREZ GREISER
Agosto 11	9 a 14 h	Uso de Tabla y Calculadora en Ingeniería Económica y Ejemplos	ING. LUIS P. GRIJALVA LOPEZ
Agosto 17	17 a 21 h	INTERES CONTINUO, RENTABILIDAD E INFLACION	" " " " "
Agosto 18	9 a 14 h	SIMULACION, PROBLEMAS DE INVENTARIO Y COLAS	ING. ARMANDO TORRES FENTANES
Agosto 24	17 a 21 h	OPTIMIZACION DE UNA Y VARIAS VARIABLES Y PROG. LINEAL	ING. ARMANDO TORRES FENTANES
Agosto 25	17 a 21 h	PROGRAMACION NO LINEAL	" " " "
Agosto 31	17 a 21 h	PROGRAMACION DINAMICA	DR. VICTOR GEREZ GREISER
Septiembre 7	17 a 21 h	ESTIMACION	C.P. ALEJANDRO CANO
Septiembre 8	9 a 14 h	CONTROL DE COSTOS	C. P. ALEJANDRO CANO

centro de educación continua
división de estudios superiores
facultad de ingeniería, unam

INGENIERIA ECONOMICA

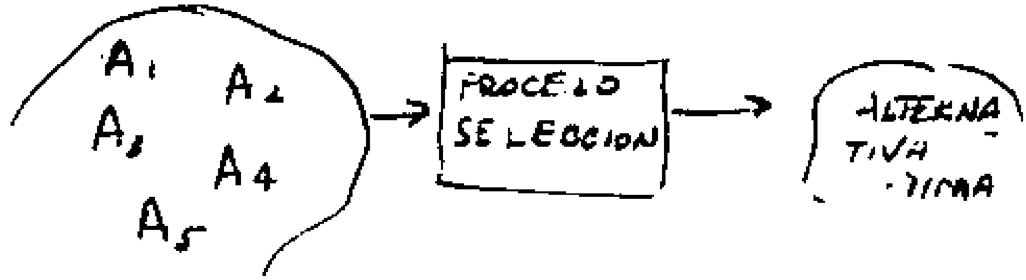
OPTIMIZACION PROGRAMACION LINEAL

M. EN C. JOSE A. TORRES FENTANES

AGOSTO, 1979.

OPTIMIZACION

INTROD. OPTIMIZAR $\triangleq$ SELECCIONAR LA MEJOR ALTERNATIVA DE ACUERDO CON UN CRITERIO



TIPOS DE OPTIMIZACION:

- CUALITATIVA (EXPER. Y PREFER.)
- CUANTITATIVA (MATEMÁTICA)

DONDE SE EMPLEA

EN DIVERSOS PROBLEMAS (ING., APLIC. SOCIOECONOMICAS, ETC), COMO SON:

- DISEÑO
- PLANEACION
- ASIGNACION DE RECURSOS Y USO

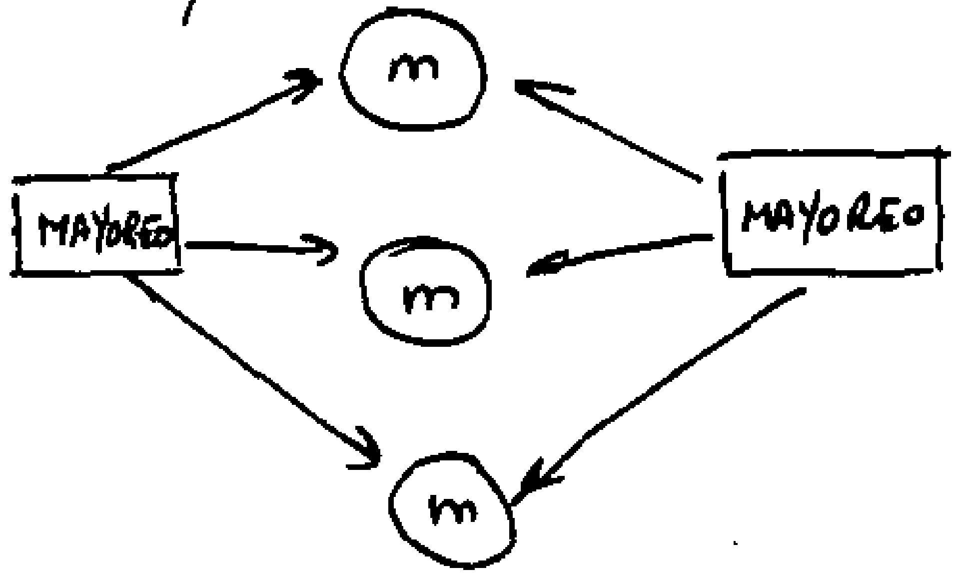
CON EL OBJETO DE MAXIMIZAR O MINIMIZAR UNA FUNCION OBJETIVO LA CUAL PUEDE ESTAR SUJETA A RESTRICCIONES O NO.

EL VALOR DE LA FUNCION PUEDE REPRESENTAR:

- COSTOS DE DISEÑO O PRODUCC
- BENEFICIOS DE UNA POLITICA DE VENTAS O ASIG. DE RECURSOS
- ESPECIFICACIONES DE DISEÑO O CONSTRUCCION.

Ejemplo

Transportar mercancía



- función objetivo
  minimizar costos de transporte

- costos asociados
  costo de transporte/unidad desde c/centro de mayoreo a c/centro de menudeo

- restricciones
  demanda de menudeo
  inventarios de mayoreo
  cantidad de mercancía enviada debe ser ≥ 0

QUE ETAPAS INVOLUCRA

1. FORMULACION DEL PROBLEMA

2. SELECCIONAR METODO DE OPTIMIZACION
   - ANALITICO : Método matemático
   - NUMERICO : Algoritmos iterativos (simultáneos o secuenciales) empleando computadora
   - GRAFICOS : A partir de la tabla o gráfica de la f. objetivo determinar visualmente el punto óptimo
   - INCREMENTAL : variar c/una de las var. indep. a la vez hasta detectar un valor óptimo

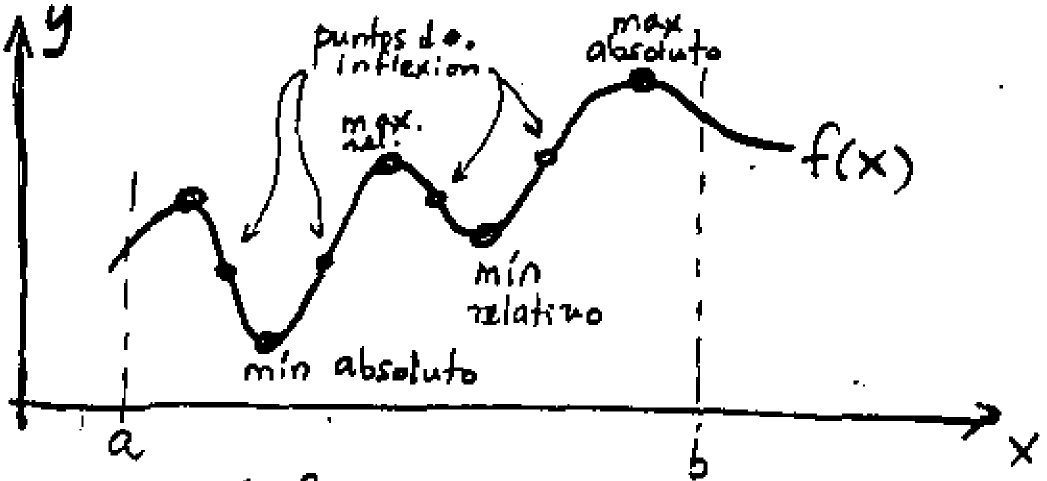
3. EN EL CASO DE METODO ANALITICO O NUMERICO DETERMINAR EL ALGORITMO A EMPLEAR Y OBTENER EL MODELO MATEMATICO DEL PROBLEMA.

4. INTERPRETAR LOS RESULTADOS
   - ¿Es la respuesta factible?
   - ¿Es la respuesta óptima?
   - ¿Qué tan sensible es el valor óptimo y qué tan rápido varía cuando cambian los parámetros y entradas? (ANALISIS DE SENSIBILIDAD).

Tipos de problemas

Problema		Método de Solución
F. Objetivo unidimensional con y sin restricción, lineal y no lineal.	Analítica	Diferenciación.
	Numérica	B. Aleatoria B. Trisección B. Exhaustiva.
Función objetivo multidimensional sin restricción, lineal o no lineal.	Analítica	Diferenciación.
	Numérica	M. Rejilla M. Gradiente M. Newton.
Función objetivo multimimensional con restricciones, lineal o no lineal.	Analítica	Multiplicadores de lagrange.
	Numérica	M. Rejilla M. Gradiente M. Newton.
F. Objetivo lineal y restricciones lineales, variables no negativas.		Programación lineal (Método Simplex).
F. Objetivo seccionalmente lineal y restricciones seccionalmente lineales, variables no negativas.		Programación Separable.
F. Objetivo cuadrática y restricciones lineales, variables positivas.		Programación Cuadrática.
F. objetivo lineal, variables con valores enteros.		Programación Entera.
Ordenar actividades para minimizar tiempo de ejecución y empleo óptimo de recursos.		Ruta Crítica.
Determinar combinación de decisiones que de la eficiencia máxima de conjunto.		Programación Dinámica.

OPTIMIZACION DE FUNCIONES UNIDIMENSIONALES



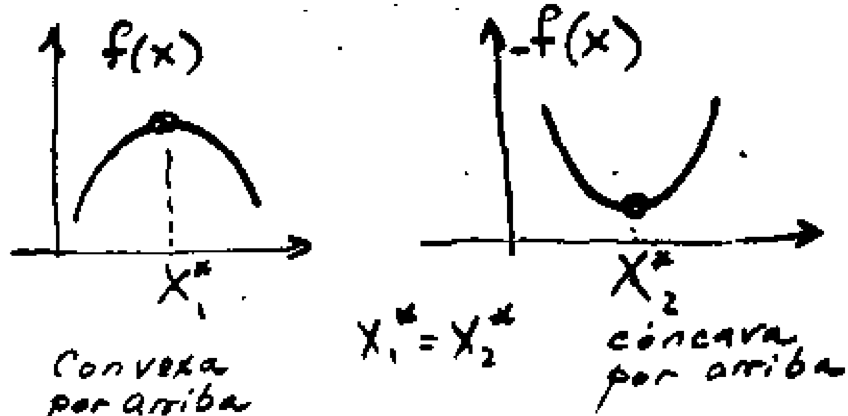
$S = \{ x \mid x \in [a,b] \}$

METODO ANALITICO

MAX. ABSOLUTO EN S SI: $f(x) \leq f(x^*)$ para algún
(MIN. ABSOLUTO) $[f(x) \geq f(x^*)]$ $x^* \in S$
y $x \in [a,b]$

MAX. RELATIVO SI: la relación anterior solo se
(MIN. RELATIVO) cumple en una vecindad de x^*
o LOCAL

NOTESE QUE: $\max f(x) \triangleq \min [-f(x)]$



CONDICIONES NECESARIAS PARA PUNTO OPTIMO

a) $f(x)$ es continua para $\forall x \in S$

b) $\frac{df}{dx}$ — — —

c) $\frac{d^2f}{dx^2}$ — — —

CONDICIONES SUFICIENTES PARA PUNTO OPTIMO

1) Si $\left.\frac{df}{dx}\right|_{x=x^*}=0$ y $\left.\frac{d^2f}{dx^2}\right|_{x=x^*}>0$

entonces x^* es un mínimo (local o global)

2) Si $\left.\frac{df}{dx}\right|_{x=x^*}=0$ y $\left.\frac{d^2f}{dx^2}\right|_{x=x^*}<0$

entonces x^* es un máximo (local o global)

3) Si $\left.\frac{df}{dx}\right|_{x=x^*}=0$ y $\left.\frac{d^2f}{dx^2}\right|_{x=x^*}=0$

entonces x^* es un punto de inflexión.

<u>NOTA</u>.- Si existen restricciones estas se emplean para decidir cuáles de los puntos estacionarios son óptimos.

<u>Ejemplo</u>

El costo por unidad en una fábrica de cámaras fotográficas es \$ 3000.00. Los gastos generales para la producción son \$ 300,000/SEMANA. El fabricante sabe que si pone un precio de 'p' pesos por cámara donde $3000 \leq p \leq 8{,}598$, puede esperar una venta de $5732-\frac{2}{3}p$ cámaras por semana (su capac. max. de producción es 3732 cám/sem.). ¿Qué cantidad de cámaras debe producir y a qué precio debe venderlas para tener un beneficio máximo?

* SOLUCION

$$f(p) = np - 300{,}000 - 3000n$$

$$n = 5732 - \frac{2}{3}p$$

$$\Rightarrow p = \frac{3}{2}[5732 - n]$$

$$\therefore f(n) = 8598n - 1.5n^2 - 300{,}000 - 3000n$$
$$= -1.5n^2 + 5598n - 300000$$

$$\frac{df}{dn} = -3n + 5598 = 0$$

$$\Rightarrow n = \frac{5598}{3} = 1866 \text{ CÁMARAS/SEM.}$$

$$p = \$5{,}799^{00}/\text{CÁMARA}$$

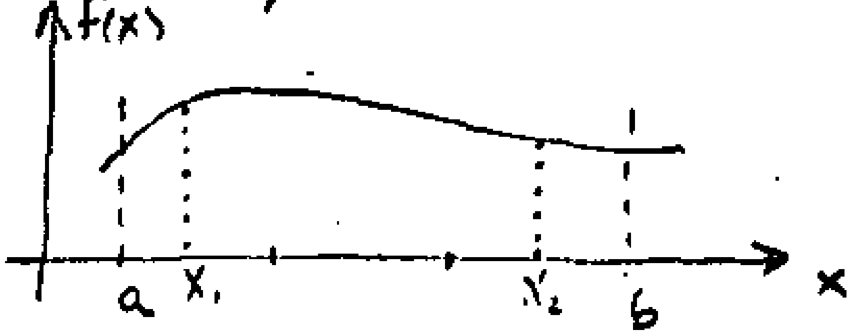
$$f(p) = \$1{,}440{,}978/\text{SEMANA} \left(\begin{smallmatrix}\text{BENEF.}\\ \text{MÁX.}\end{smallmatrix}\right)$$

METODOS NUMERICOS

a) B. EXHAUSTIVA : Dividir el intervalo de búsqueda [a,b] en 'n' subintervalos y muestrear f(x) en cada punto. Comparar valores obtenidos en cada punto y seleccionar el máx. o min. de acuerdo con las restricciones.
Proceso simultáneo que no requiere que la función sea continua y diferenciable

b) B. por Trisección

Requiere que la función sea continua y monotónicamente creciente (MAX) o decreciente (MIN) en el intervalo de búsqueda
Es de tipo secuencial

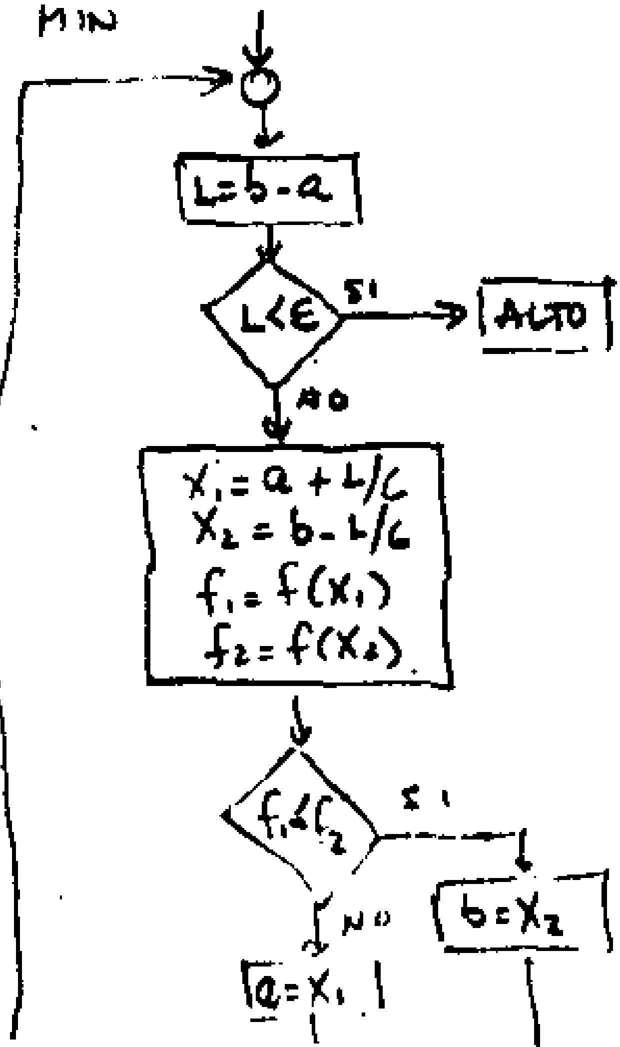


si $f(X_1) > f(X_2)$

$\Rightarrow$ máx $\in [a, X_2]$

mín $\in [X_1, b]$

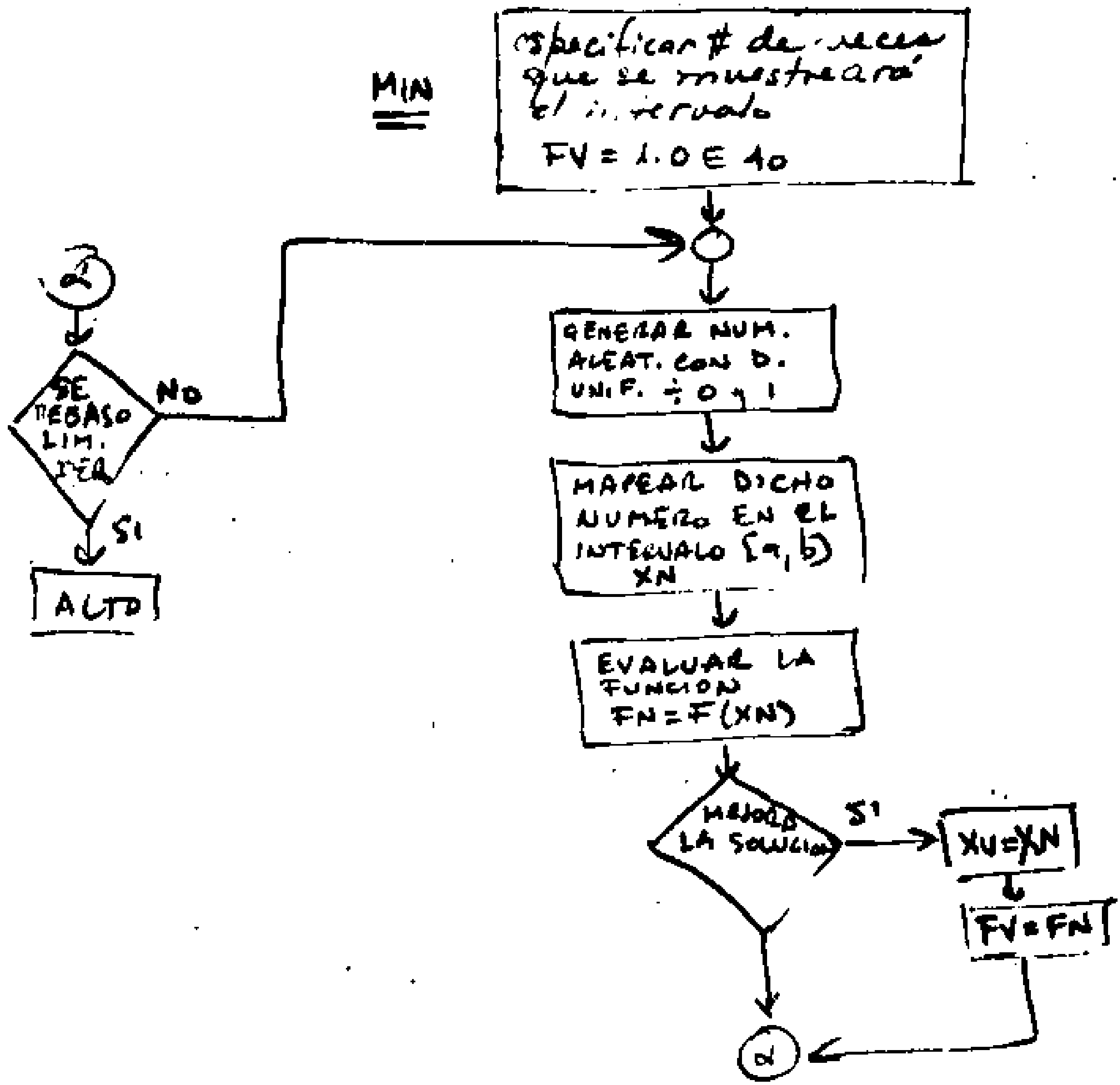
PARA MIN



c) B. Aleatoria

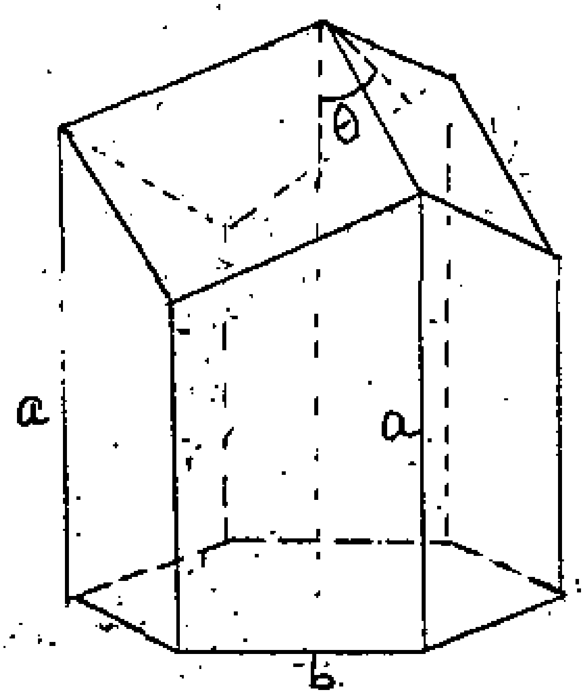
Es un método de búsqueda simultáneo que obtiene el óptimo global en la región de búsqueda, no requiriendo que la función sea continua y diferenciable.

Consiste en un muestreo aleatorio del intervalo de búsqueda reteniendo el máx (o mín) valor de la función encontrado hasta el momento.



Ejemplo:

Una celda de un panal de abejas es un prisma hexagonal regular, con un extremo abierto y con el otro formado por tres caras (ver figura). Las abejas forman la superficie usando cera. Para un volumen de celda dado, es conveniente minimizar la cantidad de cera empleada, por lo que se debe escoger el ángulo θ de inclinación de cada cara superior de tal forma que se minimice la superficie de la celda.



Una celda de panal de abejas

El área total de la celda está dada por :

$$f(\theta)=6ab+\frac{3}{2}b^2\left(-\cot\theta+\frac{\sqrt{3}}{\operatorname{sen}\theta}\right)$$

en función del ángulo θ, la altura a de las tres aristas mayores del prisma hexagonal y la longitud b de un lado del hexágono (ver figura 18.5). Obtener el valor de θ que minimice la superficie de la celda si h=7 mm y s=2 mm. Considerar que θ varía entre 10° y 90°.

Es interesante hacer notar que el ángulo óptimo θ = arccos 54.7o = 0.955 radianes, que se puede obtener igualando la derivada de $f(\theta)$ a 0 y que depende de a y b, no difiere significativamente del ángulo empleado por las abejas.

NUMERO DE ITERACIONES A EFECTUAR= 500

COTA INFERIOR DEL INTERVALO DE BUSQUEDA= 1.74500E-01

COTA SUPERIOR DEL INTERVALO DE BUSQUEDA= 1.57080E+00

TIPO DE OPTIMIZACION= MINI

LOS RESULTADOS SON

COTA DEL INTERVALO QUE OPTIMIZA LA FUNCION= 9.55828011E-01

VALOR OPTIMO DE LA FUNCION= 9.24852829E+01

EJEMPLO

OBTENER EL MAXIMO DE LA FUNCION

$y = 0.4x^2 + 4x$

NUMERO DE ITERACIONES A EFECTUAR= 250

COTA INFERIOR DEL INTERVALO DE BUSQUEDA= 0.00000E-01

COTA SUPERIOR DEL INTERVALO DE BUSQUEDA= 1.00000E+01

TIPO DE OPTIMIZACION= MAXI

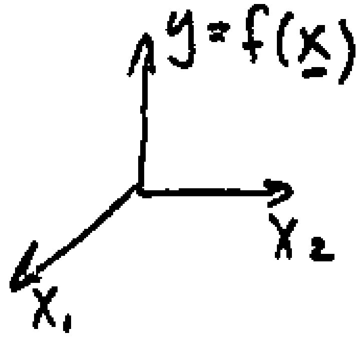
LOS RESULTADOS SON

COTA DEL INTERVALO QUE OPTIMIZA LA FUNCION= 4.99023437E+00

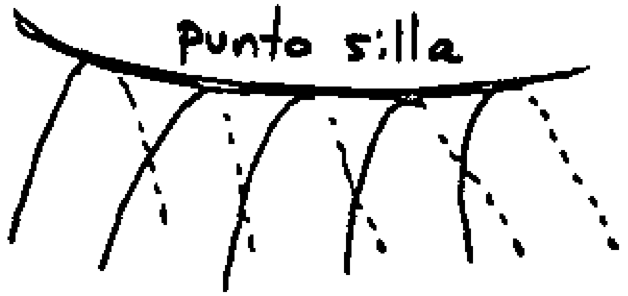
VALOR OPTIMO DE LA FUNCION= 9.99996185E+00

OPTIMIZACION DE FUNCIONES MULTIDIMENSIONALES

METODO ANALITICO : Diferenciación



$S \in \mathbb{R}_n$
región de búsqueda



$f(\underline{x})$ es una función real, donde

$\underline{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ es un vector de dimensión n cuyos elementos son escalares y reales.

$f(\underline{x})$ tiene máximo absoluto en S si $\exists\ \underline{X}^*$ tal que $f(\underline{x}) \leq f(\underline{X}^*)$ para toda $\underline{X} \in S$

$f(\underline{x})$ tiene un máximo relativo si la expresión anterior sólo es válida en un entorno cercano a $\underline{X}^*$

El mínimo absoluto o relativo se define igual con la desigualdad invertida

CONDICIONES NECESARIAS PARA TENER UN PUNTO OPTIMO

a) $f(\underline{x})$ continua para toda $x \in S$

b) El gradiente (∇f) de la función f es continuo para toda $\underline{x} \in S$

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)$$

c) La matriz de orden $(n \times n)$ $\frac{\partial^2 f}{\partial \underline{x}^2}$ es continua para toda $\underline{x} \in S$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \underline{x}^2} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & & & \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \cdots & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{bmatrix}$$

CONDICIONES SUFICIENTES PARA TENER UN PUNTO OPTIMO

1) Si $\nabla f \big|_{\underline{x}=\underline{x}^*} = 0$ y $\frac{\partial^2 f}{\partial \underline{x}^2}\Big|_{\underline{x}=\underline{x}^*}$ es positiva definida (sus valores carac. son >0 ó sus menores ppales son >0) entonces $\underline{x}^*$ es un <u>mínimo</u> (local o global)

2) Si $\nabla f \big|_{\underline{x}=\underline{x}^*} = 0$ y $\frac{\partial^2 f}{\partial \underline{x}^2}\Big|_{\underline{x}=\underline{x}^*}$ es

negativa definida (sus valores caract. son <0 o sus menores ppales son <0) entonces $\underline{X} = \underline{X}^*$ es un <u>máximo</u>

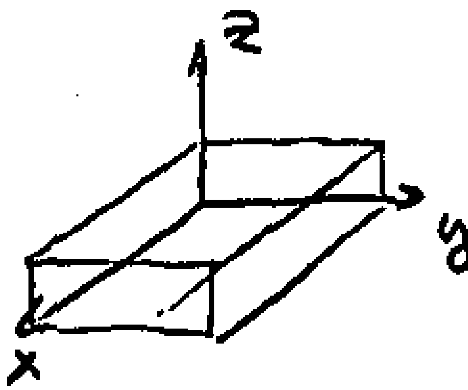
3) Si $\vec{\nabla} f \Big|_{\underline{X}=X^*} = 0$ y $\dfrac{\partial^2 f}{\partial \underline{X}^2}\Big|_{\underline{X}=X^*}$ no es neg. ni posit. definida, entonces se tiene punto estacionario (máx, mín. o pto silla).

<u>NOTA</u>.- Si se tienen restricciones usar Multiplicadores de Lagrange o tratar de incorporar las restricciones en la función objetivo

EJEMPLO

Se desea construir una caja rectangular abierta en un extremo en forma tal que su volumen sea 32 ft^3 y su superficie total sea mínima. ¿Cuáles deben ser sus dimensiones?.

* SOLUCION



$$V = xyz = 32$$
$$S = 2xz + 2yz + xy$$

- Eliminando restricc.:

$$z = \frac{32}{xy}$$

$$\Rightarrow S(x,y) = xy + \frac{64}{x} + \frac{64}{y}$$

- condiciones para obtener $\underline{x} = \underline{x}^*$

$$\nabla S\Big|_{\underline{x}=\underline{x}^*} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \left.\dfrac{\partial S}{\partial x}\right|_{\underline{x}=\underline{x}^*} = 0 \\ \left.\dfrac{\partial S}{\partial y}\right|_{\underline{x}=\underline{x}^*} = 0 \end{cases}$$

$$\left.\frac{\partial^2 S}{\partial \underline{x}^2}\right|_{\underline{x}=x^*} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 S}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 S}{\partial x \partial y} \\ \dfrac{\partial^2 S}{\partial x \partial y} & \dfrac{\partial^2 S}{\partial y^2} \end{bmatrix}_{\underline{x}=x^*}$$ Sea posit. def!

$$\Rightarrow \begin{cases} \left.\dfrac{\partial^2 S}{\partial x_0^2}\right|_{\underline{x}=\underline{x}^*} > 0 \\ \left.\dfrac{\partial^2 S}{\partial x^2}\dfrac{\partial^2 S}{\partial y^2} - \left[\dfrac{\partial^2 S}{\partial x \partial y}\right]^2\right|_{\underline{x}=\underline{x}^*} > 0 \end{cases}$$

- Substituyendo:

$$\frac{\partial S}{\partial x} = y - \frac{64}{x^2} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial S}{\partial y} = x - \frac{64}{y^2} = 0$$

$$\Rightarrow x^2 y = 64 = x y^2 \Rightarrow x = y$$

$$\therefore x^3 = 64 \Rightarrow \left.\begin{matrix} x = 4 \\ y = 4 \\ z = 2 \end{matrix}\right\} = \underline{x}^*$$

$$\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} = \left.\frac{128}{x^3}\right|_{\underline{x}^*} = 2 > 0 \quad ; \quad \frac{\partial^2 S}{\partial y^2} = \left.\frac{128}{y^3}\right|_{\underline{x}^*} = 2 \, ; \left.\frac{\partial^2 S}{\partial x \partial y}\right|_{x^*} = 1$$

b) MULTIPLICADORES DE LAGRANGE

Sea una función objetivo

$$f(\underline{X})$$

con restricciones

$$g_1(\underline{X}) = 0$$
$$g_2(\underline{X}) = 0$$
$$\vdots$$
$$g_m(\underline{X}) = 0$$

El óptimo de $f(\underline{X})$ será igual al óptimo de la función

$$L = f(\underline{X}) + \lambda_1 g_1(\underline{X}) + \dots + \lambda_m g_m(\underline{X})$$

donde $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ se conocen como multiplicadores de Lagrange.

Para encontrar un punto óptimo se deberá satisfacer

$$\left.\frac{\partial L}{\partial X_1}\right|_{\underline{A}=\underline{X}^*,\underline{\lambda}^*} = 0 \quad \dots\dots \quad \left.\frac{\partial L}{\partial X_n}\right|_{\underline{A}=\underline{X}^*,\lambda^*} = 0$$

$$\left.\frac{\partial L}{\partial \lambda_1}\right|_{\underline{A}=X^*,\underline{\lambda}^*} = 0 \quad \dots\dots \quad \left.\frac{\partial L}{\partial \lambda_m}\right|_{\underline{A}=\underline{X}^*,\underline{\lambda}^*} = 0$$

Cabe mencionar que en ocasiones este conjunto de ecuaciones no tiene solución analítica.

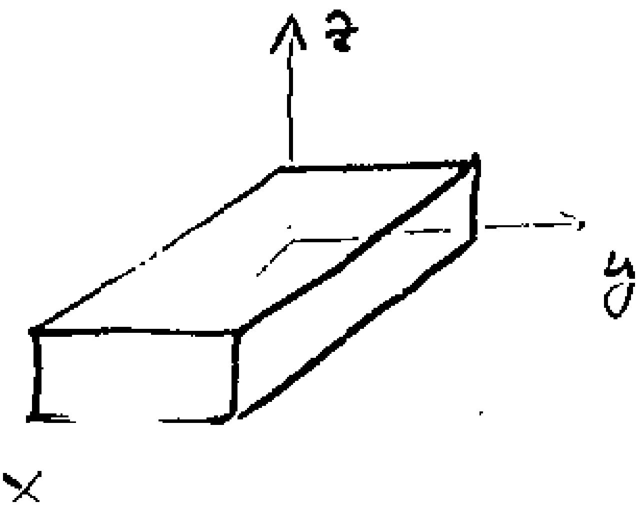
EJEMPLO

OBTENER LAS DIMENSIONES DE UNA CAJA ABIERTA POR UNO DE SUS EXTREMOS EN FORMA TAL QUE SU VOLUMEN SEA $32\,ft^3$ Y LA SUPERFICIE DE LAS CARAS SEA MINIMA

→ SOLUCION

$$S = xy + 2xz + 2yz$$

$$V = xyz = 32$$



$$L = S + \lambda(V - 32)$$

$$= xy + 2xz + 2yz + \lambda(xyz - 32)$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = y + 2z + \lambda yz = 0 \\[2mm] \dfrac{\partial L}{\partial y} = x + 2z + \lambda xz = 0 \\[2mm] \dfrac{\partial L}{\partial z} = 2x + 2y + \lambda xy = 0 \\[2mm] \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = xyz - 32 = 0 \end{cases}$$

$$\left.\begin{aligned} &(1)\quad y(1-\lambda z) + 2z = 0 \\ &(2)\quad x(1-\lambda z) + 2z = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow x = y$$

$$(3)\quad 2x + 2y + \lambda xy = 0 \Rightarrow 4x + \lambda x^2 = 0 \therefore \lambda = -\frac{4}{x}$$

$$(4)\quad xyz = 32$$

(1)

$$x(1+\lambda z)+2z=0$$
$$x-4z+2z=0$$
$$x-2z=0$$
$$x=2z \Rightarrow z=\frac{x}{2}$$

subst. en (4):

$$x\cdot\frac{x}{2}\cdot x=32 \Rightarrow x^3=64$$

$$\therefore \boxed{\begin{array}{l} x=4 \\ y=4 \\ z=2 \\ \lambda=-1 \end{array}}$$

METODO NUMERICO

Solo se tratará el caso de minimización dado que:

$$\max f(x) \equiv \min[-f(x)]$$

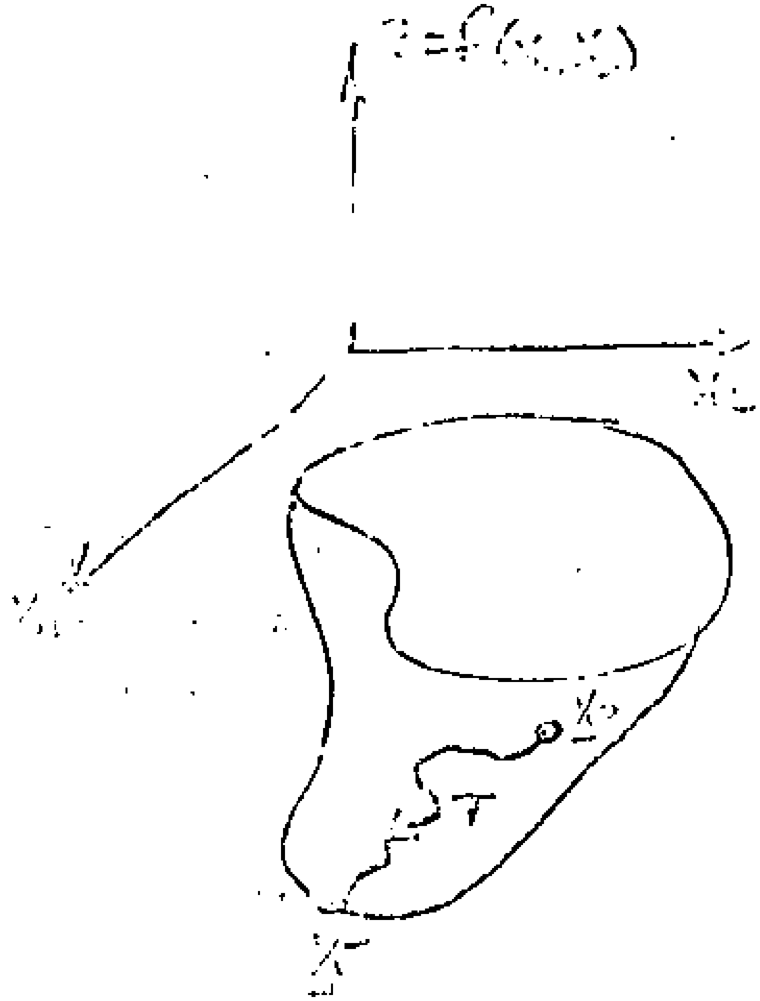
Es un proceso iterativo de tipo secuencial (requiere que la función sea continua y diferenciable en S) que a partir de un punto inicial

$$\underline{X} = \underline{X}_0$$

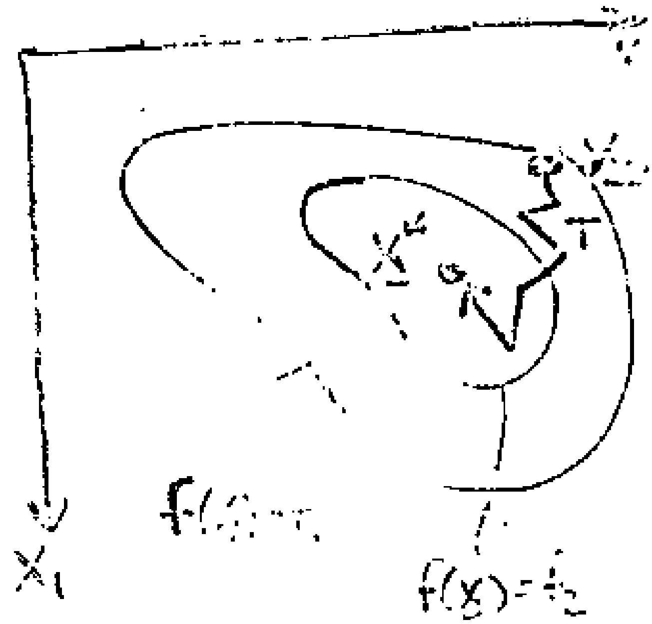
conduce iterativamente al punto óptimo

$$\underline{X} = \underline{X}^*$$

Su finalidad es buscar la trayectoria (T) que lleve más rápidamente al valor mínimo de la función. Vgr. Al bajar una colina buscar ladera con mayor declive.



[illegible] DIMENSIONAL



[illegible] MENSIONAL
[illegible] NIVEL

PREGUNTAS A RESPONDER EN C/ETAPA

- ¿Cuál es la mejor dirección?
- ¿Qué tanto moverse en dicha dirección?

A continuación se demostrará que el gradiente de la función f da la dirección de máxima pendiente de la función. El gradiente de la función f (X) se define como el siguente Vector renglón de dimensión n:

$$\nabla f = \left[\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right] \qquad (1)$$

Si dicho Vector se evalúa en el punto $X=X_i$ cumple con lo -- siguiente:

- es perpendicular a la línea tangente al contorno de f (X) en el punto X_i.

- apunta en la dirección de máximo ascenso.

La figura 1 ilustra estos conceptos.

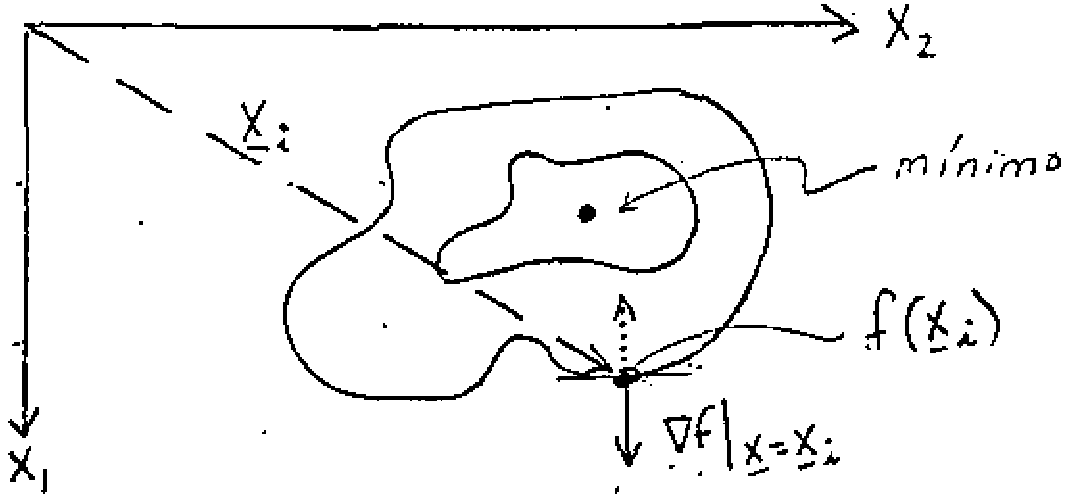


Fig. 1 Contornos de curvas de nivel de $f(\underline{X})$ en el plano (X_1, X_2) mostrando las propiedades del gradiente de la función en el punto $\underline{X}=\underline{X}_i$.

El encontrar la direccion óptima implica obtener los incrementos diferenciales $d\underline{x}$ de las variables $\underline{X}$, que dan el -- decremento diferencial máximo df de la función a partir del punto considerado X_i. La diferencial de f está dada por:

$$df = \frac{\partial f}{\partial X_1} dX_1 + \frac{\partial f}{\partial X_2} dX_2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial X_n} dX_n \qquad (2)$$

o sea:

$$df = (\nabla f)^T d\underline{X} \qquad (3)$$

para determinar la dirección $d\underline{x}$ de máxima pendiente de la función f a partir de un punto $\underline{X}_i$, se analiza una vecindad alrededor de $\underline{X}_i$; para ello se restringe la búsqueda a una hiperesfera de radio r centrada en $\underline{X}_i$ para la cual se cumple:

$$(dX_1)^2 + (dX_2)^2 + \ldots + (dX_n)^2 = |d\underline{X}|^2 = r^2 \qquad (4)$$

Se puede observar que este es un problema típico de optimizar una función (df) sujeta a una restricción $(|d\underline{x}|^2 = r^2)$ que puede resolverse empleando multiplicadores de Lagrange. El lagrangiano en este caso está dado por:

$$L = df + \lambda\left(|d\underline{x}|^2 - r^2\right) \qquad (5)$$

o sea:

$$L = \nabla f^T d\underline{x} + \lambda\left(|d\underline{x}|^2 - r^2\right) \qquad (6)$$

Para encontrar todos los máximos o mínimos locales se deben resolver las siguientes ecuaciones:

$$\frac{\partial L}{\partial (x_j)} = \frac{\partial f}{\partial x_j} + 2\lambda\, dx_j = 0 \quad ; j = 1, \ldots, n \qquad (7)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = |d\underline{x}|^2 - r^2 = 0 \qquad (8)$$

donde λ es el multiplicador de Lagrange.
de (7) se obtiene:

$$dx_j = -\frac{1}{2\lambda}\frac{\partial f}{\partial x_j} \quad ; j = 1, \ldots, n \qquad (9)$$

o sea

$$d\underline{x} = \rho \nabla f \qquad (10)$$

donde $\rho = -1/2\lambda$. Esta expresión indica que el máximo cambio de la función f ocurre en la dirección del gradiente, como se quería demostrar.

Lo único que queda por determinar es el valor de ρ, es decir, qué tanto debemos movernos en la dirección ∇f. Dicho valor deberá ser aquél que encuentre el mínimo valor de f (X) a lo largo de la dirección de descenso más rápido, a partir de un punto $\underline{X}_i$; es decir, será el valor de ρ que minimice la expresión:

$$f\left(\underline{X}_i + \rho \nabla f \Big|_{\underline{X}=\underline{X}_i}\right) \qquad (11)$$

por lo que el problema de optimización multidimensional se convierte en uno de optimización unidimensional en la variable ρ. Para encontrar el valor óptimo de ρ a partir de la expresión (11) se puede emplear el método de búsqueda aleatoria definido en la sección anterior.

Un procedimiento numérico para encontrar el mínimo de la función f (X) por el método del gradiente es:

1. Escoger un punto inicial de arranque. $\underline{X}_i = \underline{X}_0$

2. Evaluar el gradiente de la función ∇f en el punto X_i empleando la siguiente aproximación para las derivadas parciales:

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} \cong \frac{f(x_1, \ldots, x_j + \Delta x_j, \ldots, x_n) - f(x_1, x_2, \ldots, x_j, \ldots, x_n)}{\Delta x_j} \qquad (12)$$

donde: $\Delta x_j \to 0$ y $j = 1, \ldots, n$

③ Obtener el valor óptimo de ρ, o sea ρ^*, minimizando la expresión.

$$f\left(\underline{x}_i + \rho \nabla f \Big|_{\underline{x}=\underline{x}_i} \right) \qquad (13)$$

empleando algún método de optimización unidimensional.

④ Obtener un nuevo punto de la trayectoria para encontrar el mínimo de la función.

$$\begin{aligned} i &= i+1 \\ \underline{x}_i &= \underline{x}_{i-1} + \rho^* \nabla f \Big|_{\underline{x}=\underline{x}_{i-1}} \end{aligned} \qquad (14)$$

⑤ Repetir el procedimiento a partir del paso ② hasta que:

$$\left| f(\underline{x}_i) - f(\underline{x}_{i-1}) \right| < \varepsilon \qquad (15)$$

donde ε representa el criterio de convergencia, ó

$$\nabla f \Big|_{\underline{x}=\underline{x}_i} \doteq 0$$

o se exceda al máximo número de iteraciones permitido

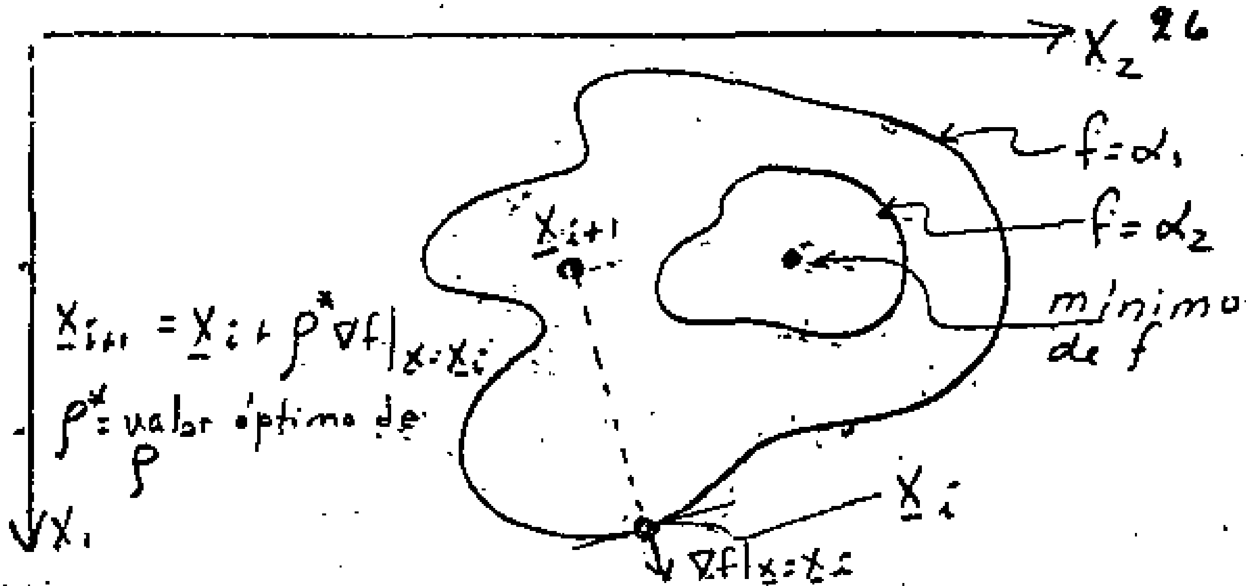


Fig. 18.8 Representación esquemática del método del gradiente en la iteración i.

Se dice que el método del gradiente es secuencial debido a que el valor del nuevo punto X_i depende del valor anterior del vector $\underline{x}$ ($\underline{X}_{i-1}$).

El método del gradiente es fácil de implementar en una computadora digital y si los problemas son bien comportados conduce rápidamente a una región cercana al valor óptimo de la función. Sin embargo, existen algunos problemas ó dificultades asociadas con el método:

- El tiempo de cómputo depende de la sensitividad de la función a cambios en cada una de las variables independientes X_j; para corregir esto, en ocasiones es posible escalar las variables independientes de tal forma que los cambios unitarios de las variables afecten a la función f ($\underline{X}$) en la misma proporción. Con esto se logra reducir la excentricidad geométrica de la función en el punto óptimo.

- Si la trayectoria de búsqueda cruza una región en la cual $\nabla f \simeq 0$, el método no converge al óptimo global y solo - obtiene un mínimo local.

- Cuando el punto $\underline{X}_i$ se encuentra cercano a la solución el método converge muy lentamente hacia el punto óptimo. Para corregir esto generalmente se diseña un algoritmo híbrido - que en su primera fase utilice el método de gradiente (para acercarse al punto óptimo) y, en la segunda fase, emplee el método de Newton para obtener el valor óptimo de $\underline{X}$ en forma rápida.

Existen algoritmos del método del gradiente modificado que dan una solución de compromiso entre el método del gradiente y el método de Newton, es decir, convergen más rápidamente que el - método del gradiente pero más lentamente que el de Newton - y requieren más proceso de computación que el método del gradiente pero menos que el de Newton.

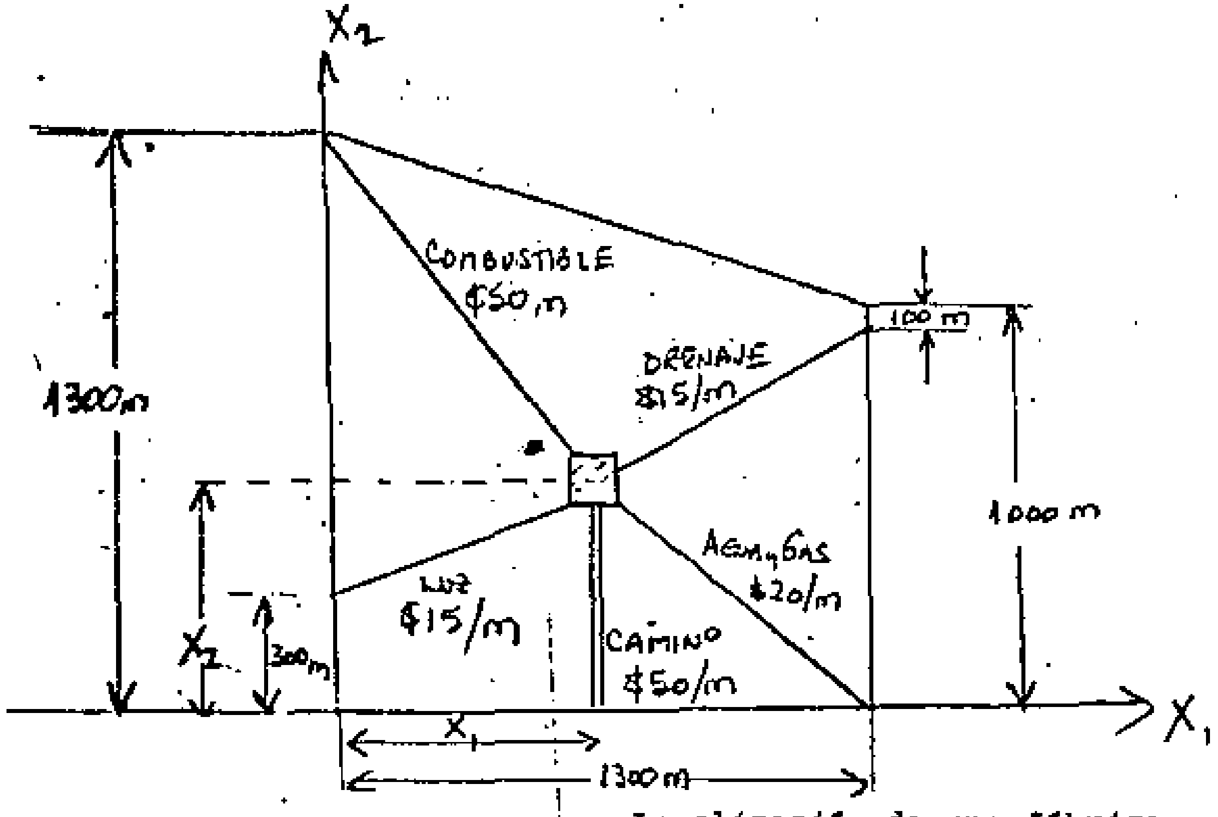
$$\underline{X}_{i+1} = \underline{X}_i - \left[\frac{\partial^2 f}{\partial \underline{X}^2} \Big|_{\underline{X}=\underline{X}_i} \right]^{-1} \nabla f \Big|_{\underline{X}=\underline{X}_i}$$

Ejemplo:

Se piensa construir una fábrica en el predio mostrado en la **figura** . Las tomas de agua, combustible, etc. tienen **la** localización mostrada. Dados los costos por metro hasta **la fábrica** de los diversos servicios, el costo total de las **instalaciones** está dado por:

$$f(X_1, X_2) = 50|X_2| + 15[X_1^2 + (X_2 - 300)^2]^{1/2} + 50[X_1^2 + (1300 - X_2)^2]^{1/2} + 15[(1300 - X_1)^2 + (900 - X_2)^2]^{1/2} + 20[(1300 - X_1)^2 + X_2^2]^{1/2}$$

que se obtiene aplicando repetidamente el principio de Pitágoras **para triángulos** rectángulos. Determinar la localización óptima **(x,y)** de la fábrica dentro del predio que minimice los costos de **las** instalaciones.



Localización de una fábrica dentro de un predio.

MINIMIZACION DE UNA FUNCION POR EL METODO DEL GRADIENTE

NUMERO DE VARIABLES= 2

MAXIMO NUMERO DE ITERACIONES A EFECTUAR= 5000

COTA INFERIOR PARA BUSQUEDA DEL PARAMETRO DE LAGRANGE= -2.00000E+01

COTA SUPERIOR PARA BUSQUEDA DEL PARAMETRO DE LAGRANGE= 2.00000E+01

VALOR INICIAL DE LAS VARIABLES PARA ARRANCAR EL METODO

X(1)= 5.00000000E+02
X(2)= 5.00000000E+02

LOS RESULTADOS PARA CADA ITERACION SON

VALOR DE LA FUNCION EN LA ITERACION= 1.12532023E+05

VALOR DE LAS VARIABLES=
5.00000000E+02
5.00000000E+02

VALOR DEL PARAMETRO DE LAGRANGE(RO)= -9.10156250E+00

VALOR DE LA FUNCION EN LA ITERACION= 1.09996906E+05

VALOR DE LAS VARIABLES=
3,57788086E+02
2.86682129E+02

VALOR DEL PARAMETRO DE LAGRANGE(RO)= -1.17187500E-01

VALOR DE LA FUNCION EN LA ITERACION= 1.09996867E+05

VALOR DE LAS VARIABLES=
3.57788086E+02
2.87597656E+02

VALOR DEL PARAMETRO DE LAGRANGE(RO)= 0.00000000E-01

NUMERO DE ITERACIONES EMPLEADO= 3

L VALOR OPTIMO DE LA FUNCION ES= 1.09996867E+05

VALOR DE LAS VARIABLES QUE OPTIMIZA LA FUNCION

X(1)= 3.57788086E+02
X(2)= 2.87597656E+02

Ejemplo:

Considérese el siguiente problema, [redacted]. Se desea construir una caja abierta de longitud x_1, ancho x_2 y altura x_3 para transportar $120m^3$ de material del otro lado de un río. El costo de construcción de la caja es de $\$.50/m^2$ para el fondo y los lados, y de $\$.75/m^2$ para los extremidades. Un viaje redondo atravesando el río cuesta \$.30. Determinar las dimensiones óptimas de la caja y el número n de viajes redondos que se deben hacer para minimizar el costo total para transporte del material.

El costo del fondo de la caja es de $.50x_1x_2$, de los lados $2x.50x_1x_3$, del frente y el lado de atrás $2x.75x_2x_3$ y del número de viajes $.30n$, por lo que el costo total de transporte es de:

$$C = .5x_1x_2 + x_1x_3 + 1.5x_2x_3 + .3n$$

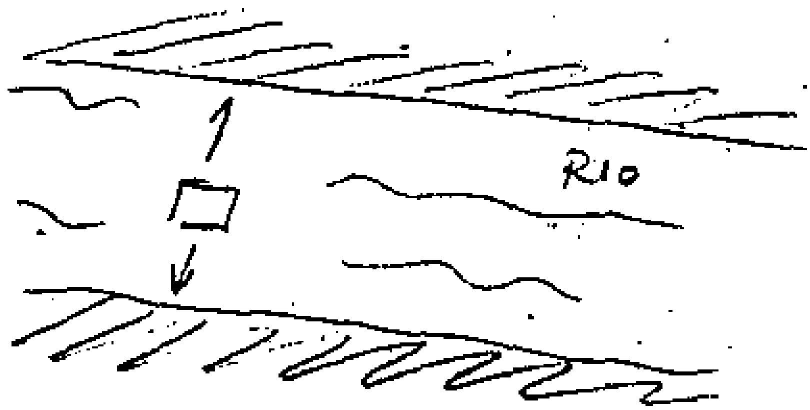
El problema tiene una restricción: el volumen de la caja por el número de viajes redondos debe ser igual al volumen total transportado:

$$x_1x_2x_3n = 120$$

De la restricción se puede despejar $n=120/x_1x_2x_3$ y sustituir en la función objetivo para reducir a tres el número de variables independientes:

$$C = .5x_1x_2 + x_1x_3 + 1.5x_2x_3 + \frac{36}{x_1x_2x_3}$$

Optimizar esta función objetivo, considerando que todas las dimensiones (x_1,x_2,x_3) tienen que ser positivas.



MINIMIZACION DE UNA FUNCION POR EL METODO DEL GRADIENTE

NUMERO DE VARIABLES= 3

MAXIMO NUMERO DE ITERACIONES A EFECTUAR= 2000

COTA INFERIOR PARA BUSQUEDA DEL PARAMETRO DE LAGRANGE= -2.00000E+01

COTA SUPERIOR PARA BUSQUEDA DEL PARAMETRO DE LAGRANGE= 2.00000E+01

VALOR INICIAL DE LAS VARIABLES PARA ARRANCAR EL METODO

X(1)= 1.00000000E+00
X(2)= 1.00000000E+00
X(3)= 1.00000000E+00

LOS RESULTADOS PARA CADA ITERACION SON

VALOR DE LA FUNCION EN LA ITERACION= 3.90000000E+01

VALOR DE LAS VARIABLES=
1.00000000E+00
1.00000000E+00
1.00000000E+00

VALOR DEL PARAMETRO DE LAGRANGE(RO)= -3.90625000E-02

VALOR DE LA FUNCION EN LA ITERACION= 1.90541458E+01

VALOR DE LAS VARIABLES=
2.34631991E+00
2.32679939E+00
2.30727887E+00

VALOR DE LA FUNCION EN LA ITERACION= 1.50017910E+01

VALOR DE LAS VARIABLES=
2.91628885E+00
2.03395486E+00
1.00707829E+00

VALOR DEL PARAMETRO DE LAGRANGE(RO)= -3.51562500E-01

VALOR DE LA FUNCION EN LA ITERACION= 1.50014257E+01

VALOR DE LAS VARIABLES=
2.93104100E+00
2.03160787E+00
1.01110160E+00

VALOR DEL PARAMETRO DE LAGRANGE(RO)= -3.90625000E-02

VALOR DE LA FUNCION EN LA ITERACION= 1.50012407E+01

VALOR DE LAS VARIABLES=
2.93152523E+00
2.03004336E+00
1.00834489E+00

VALOR DEL PARAMETRO DE LAGRANGE(RO)= -1.17187500E-01

VALOR DE LA FUNCION EN LA ITERACION= 1.50011320E+01

VALOR DE LAS VARIABLES=
2.93398380E+00
2.02713776E+00
1.00432158E+00

VALOR DEL PARAMETRO DE LAGRANGE(RO)= -1.17187500E-01

VALOR DE LA FUNCION EN LA ITERACION= 1.50000887E+01

VALOR DE LAS VARIABLES=
2.98185349E+00
2.00810146E+00
1.00070810E+00

VALOR DEL PARAMETRO DE LAGRANGE(RO)= -3.51562500E-01

VALOR DE LA FUNCION EN LA ITERACION= 1.50000677E+01

VALOR DE LAS VARIABLES=
2.98520637E+00
2.00743103E+00
1.00204921E+00

VALOR DEL PARAMETRO DE LAGRANGE(RO)= -3.90625000E-02

VALOR DE LA FUNCION EN LA ITERACION= 1.50000572E+01

VALOR DE LAS VARIABLES=
2.98528075E+00
2.00702119E+00
1.00134134E+00

VALOR DEL PARAMETRO DE LAGRANGE(RO)= -3.90625000E-02

NUMERO DE ITERACIONES EMPLEADO= 44

EL VALOR OPTIMO DE LA FUNCION ES= 1.50000563E+01

VALOR DE LAS VARIABLES QUE OPTIMIZA LA FUNCION

X(1)= 2.98542976E+00
X(2)= 2.00676036E+00
X(3)= 1.00093162E+00

{ PROGRA[illegible]AL }

PROBLEMAS
- asignar facilidades de producción
- asignar recursos
- transporte
- Selección de componentes

EN FORMA TAL QUE SE MAXIMICE UN BENEFICIO O SE MINIMICE UN COSTO

↓

MODELO [illegible]TICO
- Función objetivo [illegible]
- [illegible] (matrices)

↓

PROG. LINEAL

- Estructura del modelo

$$\begin{matrix}\max \\ \min\end{matrix} \; z = \sum_{i=1}^{n} C_i X_i \quad (\text{f. obj.})$$

s/t

$$X_i \geq 0 \quad (\text{no negativ.})$$

$$\left.\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n} A_{ki} X_i \geq B_K \; ; \; k=1,\dots,f \\
&\sum_{i=1}^{n} A_{ki} X_i = B_K \; ; \; k=f+1,\dots,g \\
&\sum_{i=1}^{n} A_{ki} X_i \leq B_K \; ; \; k=g+1,\dots,m
\end{aligned}\right\} \text{restricc.}$$

- características
  - a) determinístico
  - b) variables positivas
  - c) divisibilidad
  - d) proporcionalidad
  - e) aditividad
- solución
  - a) Gráfica (2 dim. máx)
  - b) Simplex (Método de G. Jordan con estrategia para selecc. el elemento pivote.
- tipo de soluciones
  - a) No acotada } REVISAR PLANTEAM.
  - b) No existe }
  - c) Única $\Rightarrow z$ tg. a un punto esquina
  - d) Múltiple $\Rightarrow z \parallel$ a alguna restricc.

MÉTODO GRÁFICO

NOTA: Sólo es útil para resolver problemas de 2 variables.

Pasos:

1. Dibujar todas las rectas de restricción en el plano (X_1, X_2)
2. Identificar la región convexa de soluciones factibles
3. Dibujar la recta correspondiente a diferentes valores de la función objetivo (Z) y moverla a través de la región convexa hasta alcanzar el punto óptimo

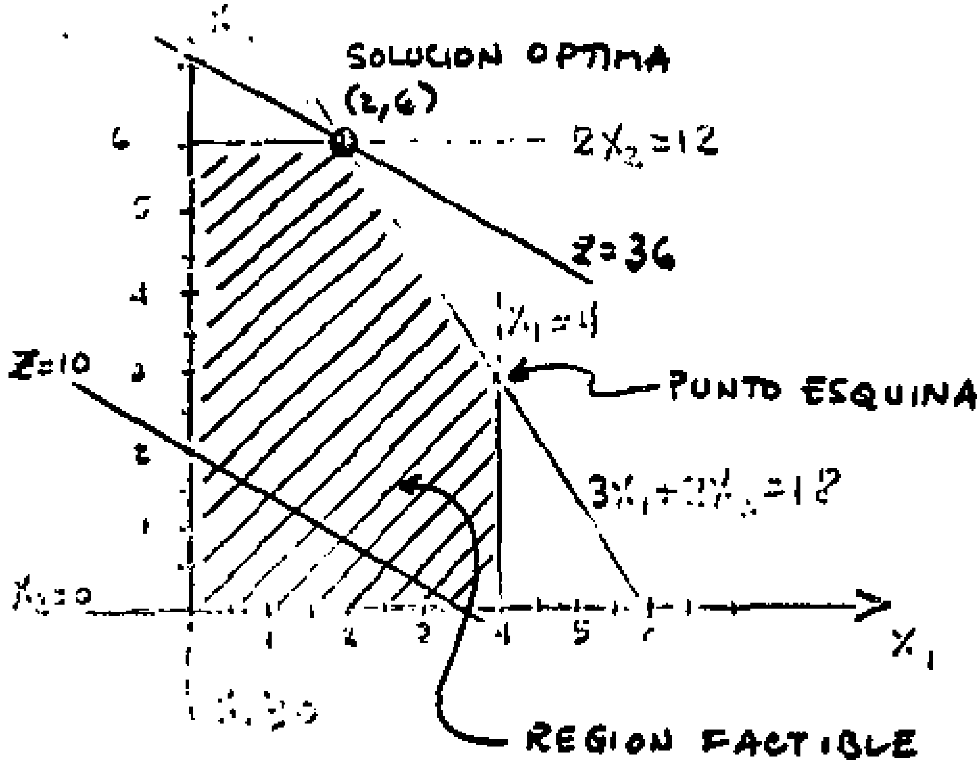
EJEMPLO

Una compañía produce dos artículos (uno de madera y el otro de aluminio). Determine la cantidad de artículos que debe producir de cada tipo para tener un beneficio máximo si la información disponible es:

Planta \ Tipo	Horas [illegible] A	[illegible] B	Capacidad [illegible] disponible [illegible]
1	1	0	4
2	0	[illegible]	12
[illegible]	[illegible]	[illegible]	18

[illegible]

Resolver por el método gráfico.



DEFINICIONES

REGION [illegible] CONVEXA = CONJUNTO DE [illegible]UCIONES [illegible]SIBLES [illegible]

SOLUCION [illegible]SICA FACTIBLE = SOL. NO [illegible]TIMA QUE SATISFACE LAS [illegible]STRICC.

BASE = CONJUNTO DE VARIABLES QUE FORMAN PARTE DE LA [illegible]LUCION B[illegible] FACTIBLE

SI LA SOLUCION [illegible]TIMA ES MULTIPLE ⇒

Z [illegible] PARALELA A ALGUNA [illegible]TRICCION

SI LA SOLUCION OPTIMA ES UNICA [illegible] Z ES

TANGENTE A ALGUN PUNT[illegible]UINA

METODO ANALITICO

OBTENCION DE LA FORMA CANONICA

Consiste en transformar las desigualdades en ecuaciones, es decir, obtener lo siguiente:

$$\max \quad z - \sum_{j=1}^{m} C_j X_j = 0$$

$$\text{s.a.} \quad \sum_{i=1}^{m} A_{ki} X_i = B_k \quad , k=1,\dots,n$$

$$X_i \geq 0$$

1. AGREGUE O RESTE CANTIDADES POSITIVAS (VARIABLES DE HOLGURA) PARA TRANSFORMAR LAS DESIGUALDADES EN IGUALDADES. LOS COEF. DE DICHAS VARIABLES EN LA FUNCION OBJETIVO SON NULOS, ES DECIR, $C_j = 0$

2. PARA OBTENER LA SOLUCION BASICA FACTIBLE INICIAL DEL SISTEMA DE 'n' ECUACIONES, AGREGUE LAS VARIABLES ARTIFICIALES QUE SEAN NECESARIAS PARA TENER UN CONJUNTO DE 'm' VECTORES UNITARIOS LINEALMENTE INDEPENDIENTES EN LA MATRIZ DE PARAMETROS ESTRUCTURALES (EN C/ECUACION DEBE APARECER UNA VAR. QUE NO APAREZCA EN LAS OTRAS Y CON COEF. UNITARIO POSITIVO). ESTAS VAR SE AGREGAN EXCLUSIVAMENTE EN LAS IGUALDADES O DESIGUALDADES $\geq$.

PARA EXCLUIR ESTAS VARIABLES DE LA SOL. OPTIMA, SUS COEFICIENTES DE COSTOS DENTRO DE LA FUNCION OBJETIVO DEBEN SER:

$$C_j \gg 0 \quad \text{PARA MINIMIZACION}$$

$$C_j \ll 0 \quad \text{PARA MAXIMIZACION}$$

<u>EJEMPLO</u>

$$\max z = 3X_1 + 4X_2 + 5X_3 \quad \} \text{ f. OBJET.}$$

$$\left.\begin{array}{lrrrl} \text{s.a.} & X_1 & +X_2 & +2X_3 & \leq 0 \\ & X_1 & -2X_2 & +X_3 & = 5 \\ X_i \geq 0 & X_1 & & -3X_3 & \geq 12 \end{array}\right\} \text{RESTRICC.}$$

a) VAR. DE HOLG.

$$\begin{array}{lllllll} X_1 & + X_2 & + 2X_3 & + X_4 & & = 0 \\ X_1 & - 2X_2 & + X_3 & & & = 5 \\ X_1 & & - 3X_3 & & - X_5 & = 12 \end{array}$$

nótese q' si: $X_1 = X_2 = X_3 = 0$

$\Rightarrow X_4 = 0$, $0 = 5$ ¿? y $X_5 = -12$ ¿?

b) VAR. ARTIFICIALES

$$\begin{array}{llllllll} X_1 & + X_2 & + 2X_3 & + X_4 & & & & = 0 \\ X_1 & - 2X_2 & + X_3 & & & + X_6 & & = 5 \\ X_1 & & - 3X_3 & & - X_5 & & + X_7 & = 12 \end{array}$$

c) f. OBJETIVO

$$\max z = 3X_1 + 4X_2 + 5X_3 + 0X_4 + 0X_5 - MX_6 - MX_7$$

d) MATRIZ DE PARAMETROS ESTRUCTURALES

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -3 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

conjunto de 3 vectores unit. linealm. indep.

14. PROGRAMACION LINEAL

14.1 Introducción

En diversas situaciones para la toma de decisiones relacionadas con el uso eficiente de una serie de recursos o asignación óptima de recursos limitados, es necesario construir un modelo matemático. Si dicho modelo matemático se puede expresar como un sistema de desigualdades lineales, dadas por las restricciones en la disponibilidad de los recursos, y una función que representa la meta u objetivo a alcanzar, también de tipo lineal, se dice que se trata de un problema de programación lineal. La función objetivo generalmente representa costos o utilidades.

En términos generales el sistema de desigualdades lineales tendrá más variables o incógnitas que desigualdades , para su solución se requerirá convertir el sistema de desigualdades en ecuaciones pero el sistema será de tipo indeterminado, sin embargo, la combinación de las restricciones con la función objetivo transforma el sistema determinado en un sistema determinado que tendrá solución única y además dicha solución optimizará la función objetivo.

El propósito de la programación lineal es encontrar dicha solución óptima. De los métodos existentes probablemente el más empleado sea el método Simplex de Dantzig.

La estructura general de un problema de programación lineal es:

$$\begin{matrix}\max\\ \acute{o}\\ \min\end{matrix}\; Z = \sum_{i=1}^{n} C_i X_i \qquad (14.1)$$

sujeta a:

$$\left.\begin{aligned} & X_i \geq 0 \quad , i=1, \ldots, n \\ & \sum_{i=1}^{n} A_{ki} X_i \leq B_k \quad , k=1, \ldots, \ell \end{aligned}\right\} \qquad (14.2)$$

$$\sum_{i=1}^{n} A_{ki}X_i \geq B_k \quad , k=f+1, \ldots, g$$

$$\sum_{i=1}^{n} A_{ki}X_i = B_k \quad , k=g+1, \ldots, m \qquad (14.2)$$

donde $m < n$, Z es la función objetivo a optimizar, a los valores C_i se les denomina coeficientes de costos, las variables X_i son las incógnitas del problema, a los coeficientes A_{ki} se les denomina coeficientes estructurales y a las constantes B_k se les denomina estipulaciones. Las restricciones del problema están dadas por el sistema de desigualdades (14.2)

Las características que debe de reunir un problema de programación lineal son:

1) que el modelo sea determinístico,
2) variables positivas,
3) que el único objetivo sea maximizar o minimizar
4) divisibilidad de las variables, es decir, que puedan adquirir valores fraccionarios.

Se denomina solución básica factible del sistema:

$$\sum_{i=1}^{l} A_{ki}X_i = B_k \quad , k=1, \ldots, m \qquad (14.3)$$

a un conjunto de "m" valores X_i tal que satisfaga el sistema de ecuaciones (14.3) y que no necesariamente optimiza la función objetivo. A cada una de las "m" variables X_i se les denomina variables básicas y deberán ser positivas para garantizar una posible solución y evitar que degenere el método a emplear.

Para convertir las desigualdades en igualdades es necesario agregar ciertas variables al sistema como se muestra a continuación.

Sea el sistema de desigualdades:

$$\begin{aligned} X_1 + X_2 + 2X_3 &\leq 10 \\ X_1 - 2X_2 + X_3 &= 5 \\ X_1 - 3X_3 &\geq 12 \end{aligned} \tag{14.4}$$

considerando que toda X_i es positiva, la conversión de las desigualdades en igualdades se logrará agregando o restando cantidades positivas como se muestra a continuación:

$$\begin{aligned} X_1 + X_2 + 2X_3 + X_4 &= 10 \\ X_1 - 2X_2 + X_3 + X_6 &= 5 \\ X_1 - 3X_3 - X_5 + X_7 &= 12 \end{aligned} \tag{14.5}$$

Las variables X_1, X_2, X_3 se conocen como variables estructurales y tienen significado físico; las variables X_4 y X_5 se conocen como variables de holgura, tienen significado físico y sus coeficientes en la función objetivo son nulos; a las variables X_6 y X_7 se les denomina variables artificiales, no tienen significado físico alguno y se agregan para poder formar la primera solución básica del sistema, pero se debe garantizar su exclusión de la solución óptima del sistema. Esto último se logra asignándoles coeficientes de costos C_i muy negativos cuando se desee maximizar o mucho mayores que cero cuando se desee minimizar.

14.2 Método Simplex

14.2.1 Objeto

Dado el modelo de programación lineal para un sistema, en la forma:

$$\begin{gathered} \underset{\text{min}}{\overset{\text{max}}{\text{ó}}}\; Z_1 = \sum_{i=1}^{n} C_i X_i \\ \text{s/a} \\ \sum_{i=1}^{n} A_{ki} X_i \gtreqless B_k, \quad k = 1, \ldots, m \end{gathered} \tag{14.6}$$

obtener los valores X_i que optimizan la función Z mediante el método Simplex en forma computacional.

14.2.2 Método

Para obtener la solución del modelo (14.6) es necesario convertir las desigualdades en igualdades, o sea, llegar al siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{array}{ll} \underset{\text{min}}{\overset{\text{max}}{\text{ó}}} \; Z = \sum_{i=1}^{\ell} C_i X_i & \\ \text{s/a} & \\ \sum_{i=1}^{\ell} A_{ki} X_i = B_k \,, \; k=1, \ldots, m & \end{array} \tag{14.7}$$

donde las variables X_i para $i=n+1, \ldots, \ell$ son variables de holgura y/o artificiales y los coeficientes C_i desde $i=n+1, \ldots, \ell$ tienen el siguiente valor:

$$\underset{i=n+1,\ldots,\ell}{C_i} \begin{cases} 0 & \text{si corresponde a una variable de holgura} \\ \gg 0 & \text{si corresponde a una variable artificial y se está minimizando Z} \\ \ll 0 & \text{si corresponde a una variable artificial y se está maximizando Z} \end{cases}$$

A continuación se forma la siguiente tabla que suele denominarse como TABLEAU:

I		II								
Base	C de la base	Sol. básica	C_1 / P_1	C_2 / P_2	...	C_i / P_i	...	C_n / P_n	...	C_ℓ / P_ℓ
X_1^*	C_1^*	B_1^*	A_{11}^*	A_{12}^*	...	A_{1i}^*	...	A_{1n}^*	...	$A_{1\ell}^*$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
X_k^*	C_k^*	B_k^*	A_{k1}^*	A_{k2}^*	...	A_{ki}^*	...	A_{kn}^*	...	$A_{k\ell}^*$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
X_m^*	C_m^*	B_m^*	A_{m1}^*	A_{m2}^*	...	A_{mi}^*	...	A_{mn}^*	...	$A_{m\ell}^*$
valor de Z		Z_0	Z_1-C_1	Z_2-C_2	..	Z_i-C_i	..	Z_n-C_n	..	$Z_\ell-C_\ell$

Fig. 14.1 Tableau para aplicar el Método Simplex computacional

La primera solución básica estará formada por las variables de holgura y variables artificiales que tengan coeficiente unitario positivo, habrá "m" variables que cumplan lo anterior; las variables que no forman parte de la base tienen valor nulo.

El proceso del método Simplex consiste en ir cambiando las variables que pertenecen a la base en forma sistemática hasta optimizar la función objetivo. Para describir el proceso se considerará que se desea min Z, lo anterior no origina ninguna restricción puesto que min Z equivale a max(-Z).

Al seleccionar la primera base o solución factible inicial del sistema, los elementos del Tableau de la fig. 14.1 tendrán el siguiente valor:

$A_{ki}^* = A_{ki}$
$B_k^* = B_k$
$Z_i - C_i = C_i$

$Z_0 = C_1^* B_1^* + \ldots + C_m^* B_m^*$

$X_1^*, \ldots, X_m^*$: variables que forman la primera solución básica

$C_1^*, \ldots, C_m^*$: coeficientes de costos correspondientes a las variables de la solución básica

Para resolver el sistema de ecuaciones representado por el Tableau se aplica el método de Gauss-Jordan a la sección II del Tableau, la selección del elemento pivote para efectos de minimización se describe a continuación:

1. Analizar los elementos $Z_i - C_i$ para toda "i" a fin de determinar si ya se optimizó la función objetivo. El mínimo se obtiene cuando $(Z_i - C_i) \leq 0$ para toda "i", si se cumple lo anterior se detiene el proceso y el valor de las incógnitas que forman la base es la solución óptima. En caso contrario continuar.
2. Buscar todos los $(Z_i - C_i) > 0$ y seleccionar como columna del elemento pivote aquélla columna "i" para la que se cumpla que $(Z_i - C_i) > 0$ es el máximo.
3. Para asegurar la factibilidad de la nueva solución, el renglón "k" del elemento pivote será aquél para el cual se tenga el $\min_k (B_k^* / A_{ki}^*)$ tal que $A_{ki}^* > 0$, "i" corresponde a la columna seleccionada en el paso 2. La solución será <u>no</u> <u>acotada</u> cuando $A_{ki}^* \leq 0$ para toda "k".
4. Introducir en la base la nueva variable básica X_i, es decir, hacer $X_k^* = X_i$ y $C_k^* = C_i$.
5. Aplicar el método de eliminación de Gauss-Jordan a la sección II del Tableau pivoteando sobre el elemento A_{ki}^*. Al efectuar esta eliminación, los nuevos valores B^* corresponderán a los valores de las variables que forman la base X^*.
6. Regresar al paso 1

Se puede presentar el caso de que el problema sea cíclico o degenerativo, lo cual es una posibilidad muy remota en

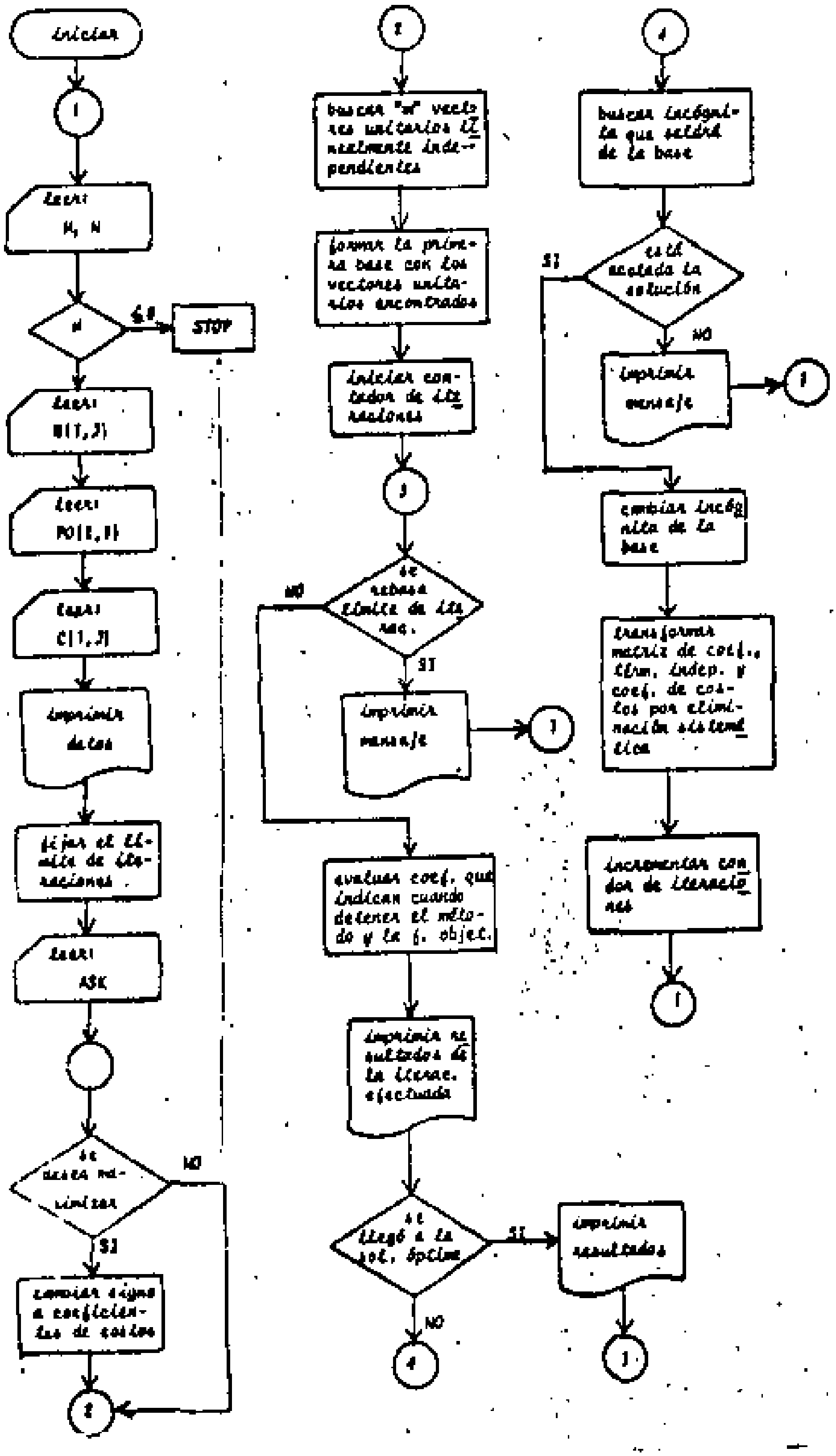


Fig. 14.2 Diagrama de bloques del programa principal

```
C
C     BUSQUEDA DE LOS M VECTORES UNITARIOS LINEALMENTE INDEPENDIENTES
C     PARA LA PRIMERA ITERACION
C
    8 DO 10 J=1,N
      L=0
      K=0
      DO 9 I=1,M
      IF(B(I,J).EQ.0.0) GO TO 9
      K=I
      L=L+1
    9 CONTINUE
      IF(L.NE.1) GO TO 10
      IF(B(K,J).NE.1) GO TO 10
      LA(K,1)=J
      COI(K,1)=C(1,J)
   10 CONTINUE
      ITERA=1
C     PROCEDIMIENTO ITERATIVO
   11 IF(ITERA.LT.LIM) GO TO 12
      WRITE(6,500)
      GO TO 1
   12 DO 13 I=1,N
   13 D(1,I)=0.0
      VALZ=0.0
C
C     OBTENCION DEL VALOR DE LA FUNCION OBJETIVO QUE SE ESTA OPTIMIZANDO
C
      DO 14 K=1,M
   14 VALZ=VALZ + PO(K,1)*COI(K,1)
C
C     CALCULO DE LOS EVALUADORES NETOS QUE INDICAN CUANDO PARAR
C
      DO 17 J=1,N
      DO 16 I=1,M
   16 D(1,J)=D(1,J) + B(I,J)*COI(I,1)
      D(1,J)=D(1,J) - C(1,J)
   17 CONTINUE
C
C     IMPRESION DE LOS EVALUADORES NETOS
C
      WRITE(IW,550) ITERA
      WRITE(IW,600)
      DO 18 I=1,M
   18 WRITE(IW,650) LA(I,1),PO(I,1)
      IF(ASK.EQ.ALF) WRITE(IW,700) VALZ
      IF(ASK.NE.ALF) WRITE(IW,700) -VALZ
      WRITE(IW,750)
      WRITE(IW,250) (D(1,J),J=1,N)
      AMAX=D(1,1)
      LC=1
C
C     SE INDAGA SI YA TERMINO EL PROCESO, EN CASO CONTRARIO SE BUSCA LA
C     INCOGNITA QUE ENTRARA A LA BASE
C
      DO 19 J=1,N
      IF(AMAX.GE.D(1,J)) GO TO 19
      AMAX=D(1,J)
      LC=J
   19 CONTINUE
      IF(AMAX.GT.0.0) GO TO 21
C
C     IMPRESION DE LOS VALORES QUE OPTIMIZAN LA FUNCION
C
      WRITE(IW,800)
      DO 20 I=1,M
   20 WRITE(IW,650) LA(I,1),PO(I,1)
      IF(ASK.EQ.ALF) WRITE(IW,700) VALZ
      IF(ASK.NE.ALF) WRITE(IW,700) -VALZ
      GO TO 1
   21 L=0
      K=0
```

14.2.4 Ejemplo

En un taller se cuenta con tres tipos de máquinas: cortadora (A), torno (B) y taladro (C). En dicho taller se fabrican cuatro productos: 1, 2, 3, 4. Cada producto debe de pasar por cada máquina con la secuencia ABC. El tiempo (horas) empleado por cada máquina para el acabado del producto, la cantidad de horas efectivas de trabajo de cada máquina y la utilidad neta obtenida por la venta de cada producto terminado son:

Tipo de Máq.	Tiempo útil de trabajo	Productos 1	2	3	4
A	3,500	2	1.5	3.0	1.5
B	8,000	1.5	5.5	1.5	4.0
C	4,500	2	3.5	4.0	1.5
	utilidad unitaria ($)	70	90	100	60

Para que la producción sea rentable se requiere que la cantidad de artículos elaborados sea mayor de 500.

Determine la cantidad de artículos de cada tipo que se deben producir en el año para que la ganacia obtenida sea máxima. Considere que todos los productos elaborados son vendidos.

SOLUCION

El modelo matemático del problema planteado es:

$$\max Z = 70X_1 + 90X_2 + 100X_3 + 60X_4$$

$$\begin{aligned} s/a \quad 2X_1 + 1.5X_2 + 3.0X_3 + 1.5X_4 &\leq 3500 \\ 1.5X_1 + 5.5X_2 + 1.5X_3 + 4.0X_4 &\leq 8000 \\ 2X_1 + 3.5X_2 + 4.0X_3 + 1.5X_4 &\leq 4500 \\ X_1 + X_2 + X_3 + X_4 &\geq 500 \end{aligned}$$

Eliminando desigualdades:

$$\max Z = 70X_1 + 90X_2 + 100X_3 + 60X_4 + 0X_5 + 0X_6 + 0X_7 + 0X_8 - 10,000X_9$$

s/a

$$\begin{aligned}
2X_1 + 1.5X_2 + 3X_3 + 1.5X_4 + X_5 &= 3500 \\
1.5X_1 + 5.5X_2 + 1.5X_3 + 4.0X_4 + X_6 &= 8000 \\
2.0X_1 + 3.5X_2 + 4.0X_3 + 1.5X_4 + X_7 &= 4500 \\
X_1 + X_2 + X_3 + X_4 - X_8 + X_9 &= 500
\end{aligned}$$

TABLA 14.1 *Datos para el problema del ejemplo 14.2.4*

M= 4

N= 9

$$\underline{B} = \begin{bmatrix} 2.0 & 1.5 & 3.0 & 1.5 & 1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 1.5 & 5.5 & 1.5 & 4.0 & 0.0 & 1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 2.0 & 3.5 & 4.0 & 1.5 & 0.0 & 0.0 & 1.0 & 0.0 & 0.0 \\ 1.0 & 1.0 & 1.0 & 1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & -1. & 1.0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{PO} = \begin{bmatrix} 3500 \\ 8000 \\ 4500 \\ 500 \end{bmatrix}$$

$\underline{C}$ = [70, 90, 100, 60, 0, 0, 0, 0,-10000]

ASK= MAX

TABLA 14.2 *Resultados del problema del ejemplo 14.2.4*

EL ORDEN DE LA MATRIZ DE COEFICIENTES ES 4X 9

LA MATRIZ DE COEFICIENTES DEL SISTEMA ES

.20000E+01	.15000E+01	.50000E+01	.15000E+01	.10000E+01	0.	0.	0.	0.
.15000E+01	.55000E+01	.15000E+01	.40000E+01	0.	.10000E+01	0.	0.	0.
.25000E+01	.15000E+01	.40000E+01	.15000E+01	0.	0.	.10000E+01	0.	0.
.10000E+01	.10000E+01	.10000E+01	.10000E+01	0.	0.	0.	-.10000E+01	.10000E+01

EL VECTOR DE CONSTANTES INDEPENDIENTES ES

.35000E+04
.60000E+04
.45000E+04
.50000E+03

LOS COEFICIENTES DE LA FUNCION A OPTIMIZAR SON

.70000E+02	.90000E+02	.10000E+03	.60000E+02	0.	0.	0.	0.	-.10000E+05

*** ITERACION NUMERO 1

INCOGNITAS QUE FORMAN LA BASE	VALOR DE LAS INCOGNITAS
X5	.35000000E+04
X6	.60000000E+04
X7	.45000000E+04
X9	.50000000E+03

VALOR DE LA FUNCION QUE SE ESTA OPTIMIZANDO -.50000000E+07

VALOR DE LOS COEFICIENTES QUE INDICAN CUANDO DETENER EL PROCESO

.10070E+05	.10090E+05	-.11000E+05	.10060E+05	0.	0.	0.	-.10000E+05	0.

*** ITERACION NUMERO 2

INCOGNITAS QUE FORMAN LA BASE	VALOR DE LAS INCOGNITAS
X5	.20000000E+04
X4	.72500000E+04
X7	.25000000E+04
X3	.50000000E+03

VALOR DE LA FUNCION QUE SE ESTA OPTIMIZANDO .50000000E+05

VALOR DE LOS COEFICIENTES QUE INDICAN CUANDO DETENER EL PROCESO

-.30000E+02 -.10000E+02 0. -.40000E+02 0. 0. 0. .10000E+03
-.10100E+05

*** ITERACION NUMERO 3

INCOGNITAS QUE FORMAN LA BASE	VALOR DE LAS INCOGNITAS
X5	.12500000E+03
X4	.43125000E+04
X8	.62500000E+03
X3	.11250000E+04

VALOR DE LA FUNCION QUE SE ESTA OPTIMIZANDO .11250000E+06

VALOR DE LOS COEFICIENTES QUE INDICAN CUANDO DETENER EL PROCESO

.20000E+02 .25000E+01 0. .22500E+03 0. 0. -.25000E+02 0.
-.10000E+05

*** ITERACION NUMERO 4

INCOGNITAS QUE FORMAN LA BASE	VALOR DE LAS INCOGNITAS
X4	.33333333E+03
X4	.31666667E+04
X6	.43333333E+03
X3	.10000000E+04

VALOR DE LA FUNCION QUE SE ESTA OPTIMIZANDO .12000000E+06

VALOR DE LOS COEFICIENTES QUE INDICAN CUANDO DETENER EL PROCESO

-.10000E+02 .70000E+01 0. 0. -.40000E+02 0. .30000E+02 0.
-.10000E+05

*** ITERACION NUMERO 3

INCOGNITAS QUE FORMAN LA BASE	VALOR DE LAS INCOGNITAS
X4	.14022949E+04
X2	.35432144E+03
X6	.15459770E+04
X3	.20735632E+03

VALOR DE LA FUNCION QUE SE ESTA OPTIMIZANDO .14494253E+06

VALOR DE LOS COEFICIENTES QUE INDICAN CUANDO DETENER EL PROCESO

.65057E+01 0. 0. 0. -.15747E+02 -.46274E+01 -.11379E+02 0.
-.10000E+05

*** ITERACION NUMERO 4

INCOGNITAS QUE FORMAN LA BASE	VALOR DE LAS INCOGNITAS
X4	.11084957E+04
X2	.50000000E+03
X6	.16521739E+04
X1	.54347826E+03

VALOR DE LA FUNCION QUE SE ESTA OPTIMIZANDO .14954522E+06

VALOR DE LOS COEFICIENTES QUE INDICAN CUANDO DETENER EL PROCESO

0. -.14087E+02 0. -.20000E+02 -.26087E+01 -.11043E+02 0.
-.10044E+05

*** LOS VALORES QUE OPTIMIZAN LA FUNCION SON

INCOGNITA	VALOR
X4	.11084957E+04
X2	.50000000E+03
X6	.16521739E+04
X1	.54347826E+03

EL VALOR OPTIMO DE LA FUNCION ES .14954522E+06

MODELO 1

EL PROBLEMA DE LA DIETA Y SU DUAL

DEFINICION DEL PROBLEMA DE LA DIETA.

Suponga que un dietista está tratando de seleccionar una combinación de cinco tipos de alimentos (naranja, manzana, lechuga, chícharo y zanahoria) de manera que el alimento resultante de esta combinación reuna ciertos requerimientos nutricionales y tenga un costo mínimo. Los requerimientos nutricionales que debe tener el alimento resultante es de al menos 21 unidades de vitamina A y al menos 12 unidades de vitamina B. Las propiedades de los cinco elementos disponibles son:

ALIMENTO	CONTENIDO DE VITAMINA A POR UNIDAD DE ALIMENTO.	CONTENIDO DE VITAMINA B POR UNIDAD DE ALIMENTO.	COSTO POR UNIDAD DE ALIMENTO.
1 (Naranja)	1	0	20
2 (Manzana)	0	1	20
3 (Lechuga)	1	2	31
4 (Chícharo)	1	1	11
5 (Zanahoria)	2	1	12

El problema a que se enfrenta el dietista se puede modelar como un problema de programación lineal (o programa lineal), de la siguiente manera.

Sea x_i la cantidad de alimento i $(i = 1, 2, \ldots, 5)$ que debe estar en el alimento resultante de la combinación de los cinco alimentos. Por lo tanto, el costo de introducir el alimento i en la mezcla será su costo unitario por la cantidad x_i que esta presente en la mezcla. El costo total de la combinación de los cinco alimentos será la suma de los costos al combinar x_1, x_2, ... y x_5 unidades de cada alimento, ie. si z es el costo total entonces

$$z = 20x_1 + 20x_2 + 31x_3 + 11x_4 + 12x_5$$

Ya que el objetivo del dietista es minimizar este costo total, entonces este objetivo se puede representar a través de la siguiente función objetivo

$$\min \ z = 20x_1 + 20x_2 + 31x_3 + 11x_4 + 12x_5 \qquad (1)$$

Los requerimientos nutricionales de vitamina A se pueden representar en la siguiente forma. Si el alimento nutricional i está presente en una cantidad x_i entonces proporciona una cantidad de vitamina A igual al producto de vitamina A que contiene una unidad de alimento por la cantidad x_i. La cantidad total proporcionada por los cinco alimentos será la suma de vitamina A con que controbuye cada alimento y esta deberá ser mayor que el contenido mínimo requerido que es de 21 unidades, ie.

$$x_1 \qquad + x_3 + x_4 + 2x_5 \geq 21 \qquad (2)$$

Similarmente, los requerimientos de vitamina B se pueden representar por

$$x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 \geq 12 \qquad (3)$$

Por último, otra restricción que debe estar presente en el problema del dietista es que la cantidad x_i que interviene en la mezcla debe ser mayor o igual a cero, ie.

$$x_i \geq 0 \qquad i = 1,2,\ldots,5 \qquad (4)$$

Esta restricción es impuesta ya que no tiene sentido hablar de que una cantidad negativa x_i está formando parte de la combinación de alimentos.

En resumen el problema del dietista es encontrar valores $x_1, x_2, \ldots, x_5$ para los cuales la función objetivo (1) alcance su mínimo y satisfagan las restricciones (2), (3) y (4). Reescribiendo las ecuaciones del (1) al (4), el problema del dietista está simbólicamente dado por

$$\min \ z = 20x_1 + 20x_2 + 31x_3 + 11x_4 + 12x_5 \qquad (*)$$

$$\left.\begin{array}{l} x_1 \qquad + x_3 + x_4 + 2x_5 \geq 21 \\ \quad x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 \geq 12 \\ \qquad x_i \geq 0 \end{array}\right\} \qquad (**)$$

La formulación anterior, (*) y (**), se acostumbra representar en un tablero (llamado también tableau) que aparecerá abajo. Esta representación es solo una abreviación de escritura (o manera de una taquigrafía de programación lineal) que es útil en el algoritmo de solución, en el proceso convencional al procesar el problema por computadora y por una gran claridad en la formulación del problema dual que se presentará después. La representación de un programa lineal en forma de tablero consiste representar cada ecuación o desigualdad únicamente por los coeficientes de las variables omitiendo la escritura de sus correspondientes variables. Para conocer a que variable pertenece un coeficiente que aparece en este esquema se da la posición del coeficiente, escribiéndolo en la columna encabezada por la variable que le corresponde.

Para nuestro problema (*) y (**), la representación a través de un tablero está dada por

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5		
20	20	31	11	12	z	(min)
1	0	1	1	2	$\geq$	21
0	1	2	1	1	$\geq$	12

$$x_i \geq 0$$

EL ORDEN DE LA MATRIZ DE COEFICIENTES ES 2X 7

LA MATRIZ DE COEFICIENTES ESTRUCTURALES DEL SISTEMA ES

.10000E+01	0.	.10000E+01	.10000E+01	.20000E+01	-.10000E+01	0.
0.	.10000E+01	.20000E+01	.10000E+01	.10000E+01	0.	-.10000E+01

EL VECTOR DE CONSTANTES INDEPENDIENTES ES

.21000E+02
.12000E+02

LOS COEFICIENTES DE COSTOS DE LA FUNCION A OPTIMIZAR SON

.20000E+02	.20000E+02	.31000E+02	.11000E+02	.12000E+02	0.	0.

**TIPO DE OPTIMIZACION DESEADA= MIN

+++ ITERACION NUMERO 1

INCOGNITAS QUE FORMAN LA BASE	VALOR DE LAS INCOGNITAS
X 1	.21000000E+02
X 2	.12000000E+02

VALOR DE LA FUNCION QUE SE ESTA OPTIMIZANDO .66000000E+03

EVALUADORES NETOS QUE INDICAN CUANDO DETENER EL PROCESO

0.	0.	.29000E+02	.29000E+02	.48000E+02	-.20000E+02	-.20000E+02

+++ ITERACION NUMERO 2

INCOGNITAS QUE FORMAN LA BASE	VALOR DE LAS INCOGNITAS
X 5	.10500000E+02
X 2	.15000000E+01

VALOR DE LA FUNCION QUE SE ESTA OPTIMIZANDO .15600000E+03

EVALUADORES NETOS QUE INDICAN CUANDO DETENER EL PROCESO

-.24000E+02	0.	.50000E+01	.50000E+01	0.	.40000E+01	-.20000E+02

+++ ITERACION NUMERO 3

INCOGNITAS QUE FORMAN LA BASE	VALOR DE LAS INCOGNITAS
X 5	.10000000E+02
X 3	.10000000E+01

VALOR DE LA FUNCION QUE SE ESTA OPTIMIZANDO .15100000E+03

EVALUADORES NETOS QUE INDICAN CUANDO DETENER EL PROCESO

-.22333E+02	-.33333E+01	0.	.33333E+01	0.	.23333E+01	-.16667E+02

*** I ACION NUMERO 4

INCOGNITAS QUE FORMAN LA BASE	VALOR DE LAS INCOGNITAS
X 5	.90000000E+01
X 4	.30000000E+01

VALOR DE LA FUNCION QUE SE ESTA OPTIMIZANDO .14100000E+03

EVALUADORES NETOS QUE INDICAN CUANDO DETENER EL PROCESO .

-.19000E+02	-.10000E+02	-.10000E+02	0.	0.	-.10000E+01	-.10000E+02

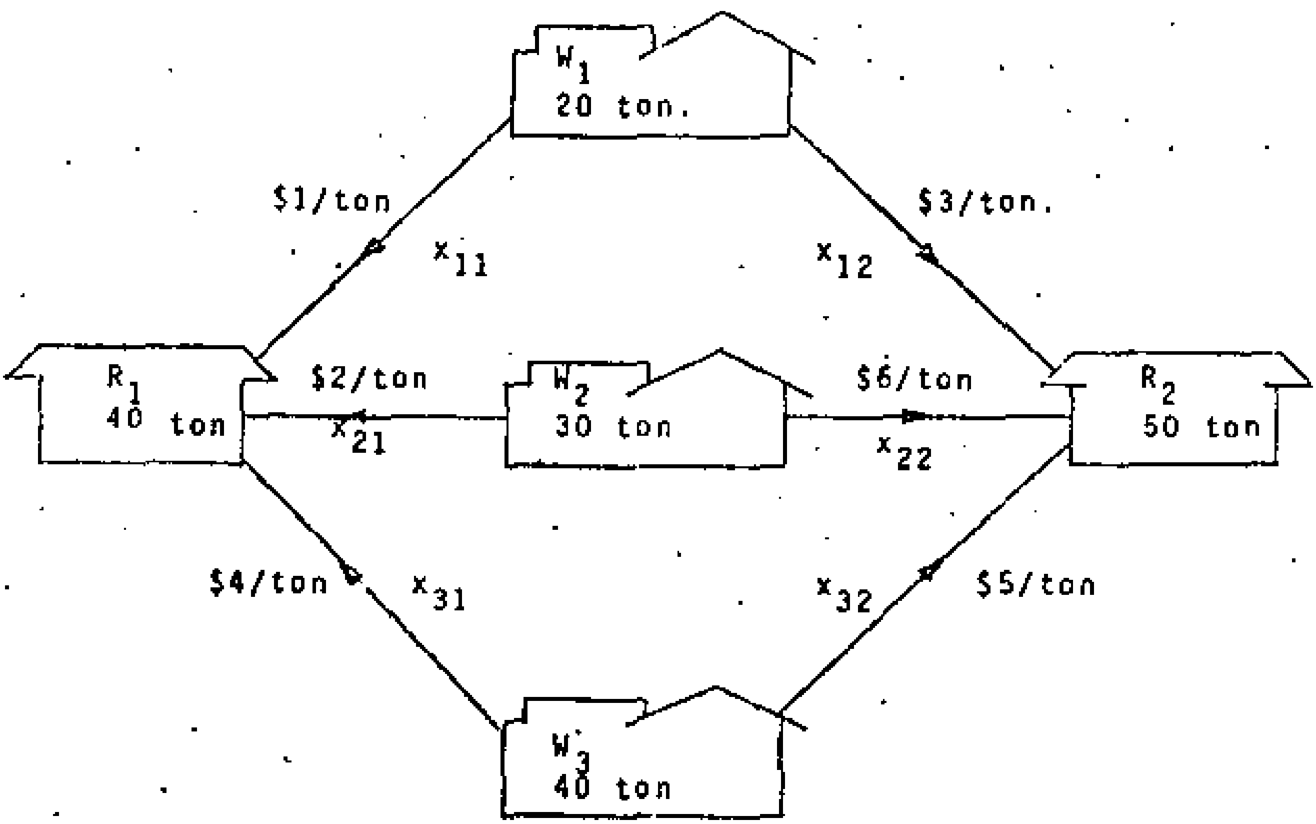
*** LOS VALORES QUE OPTIMIZAN LA FUNCION SON

INCOGNITA	VALOR
X 5	.90000000E+01
X 4	.30000000E+01

VALOR DE LA FUNCION QUE SE ESTA OPTIMIZANDO .14100000E+03

MODELO 2

- Una compañia tiene tres almacenes W_1, W_2, y W_3, y dos tiendas de ventas al por menor, R_1, R_2. Las demandas en las tiendas al por menor y el inventario en los almacenes, se muestra en las respectivas cajas de la siguiente figura. Los costos de envio por tonelada también se muestran en la figura. La compañia desea determinar la manera de realizar los envios en forma tal que minimize los costos totales de envios, satisfaga las demandas de las tiendas de menudeo, y no excedan los inventarios en los almacenes.



Sea x_{ij} las toneladas del almacen W_i a la tienda de menudeo R_j . Entonces x_{32} representa el tonelaje enviado del almacen W_3 a la tienda de menudeo R_2.

Si z representa el costo total de envios, entonces nuestro problema se puede formular por:

$$\min z = 1x_{11} + 3x_{12} + 2x_{21} + 6x_{22} + 4x_{31} + 5x_{32} \qquad (*)$$

sujeta a

Restricciones sobre disponibilidad de almacenes

$$x_{11} + x_{12} \leq 20$$
$$x_{21} + x_{22} \leq 30$$
$$x_{31} + x_{32} \leq 40$$

Restricciones sobre la damanda en tiendas de de menudeo $\qquad (**)$

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} \geq 40$$
$$x_{12} + x_{22} + x_{32} \geq 50$$

La formulacion anterior, (*) y (**), se acostumbra representar (por convenencia algoritmo de solución y del proceso convencional en el procesamiento en computadora) en la siguiente tabla:

x_{11}	x_{12}	x_{21}	x_{22}	x_{31}	x_{32}	
1	3	2	6	4	5	= z
1	1	0	0	0	0	$\leq$ 20
0	0	1	1	0	0	$\leq$ 30
0	0	0	0	1	1	$\leq$ 40
1	0	1	0	1	0	$\geq$ 40
0	1	0	1	0	1	$\geq$ 50

REPRESENTACION MATRICIAL. La formulación (*) y (**), se puede representar matricialmente como sigue:

$$\min z = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 6 & 4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ x_{21} \\ x_{22} \\ x_{31} \\ x_{32} \end{bmatrix}$$

sujeta a

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ x_{21} \\ x_{22} \\ x_{31} \\ x_{32} \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 20 \\ 30 \\ 40 \\ 40 \\ 50 \end{bmatrix}$$

COMENTARIOS. El problema de programación lineal anterior ocurre tan frecuentemente en la practica, que se le ha dado un nombre especial: el problema de transporte. Los problemas de transporte en geneal, tienen tablas ralas (o matrices ralas), lo cual significa que la tabla tiene muchos ceros o sea pocos elementos distintos de cero. Dantzig y otros han desarrollado métodos especiales para la solución rápida de estos problemas.

Otro comentario importante, es la característica que presentan cada una de las columnas de la matriz de restricciones: observe que cada una tiene dos unos y los demas elementos son todos ceros.

EL ORDEN DE LA MATRIZ DE COEFICIENTES ES 5X13

LA MATRIZ DE COEFICIENTES ESTRUCTURALES DEL SISTEMA ES

0.	.10000E+01	0.	.10000E+01	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	.10000E+04	0.
0.	0.	0.	0.	0.	.10000E+01	0.	.10000E+01	0.	0.	0.	0.	.10000E+01
.10000E+01	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	.10000E+01	.10000E+01	0.	0.
0.	.10000E+01	-.10000E+01	0.	0.	.10000E+01	.10000E+01	0.	0.	.10000E+01	0.	0.	0.
0.	0.	0.	.10000E+01	-.10000E+01	0.	0.	.10000E+01	.10000E+01	0.	.10000E+01	0.	0.

EL VECTOR DE CONSTANTES INDEPENDIENTES ES

.20000E+02
.30000E+02
.40000E+02
.40000E+02
.50000E+02

LOS COEFICIENTES DE COSTOS DE LA FUNCION A OPTIMIZAR SON

0.	.10000E+01	0.	.30000E+01	0.	.20000E+01	.10000E+05	.60000E+01	.10000E+05	.90000E+01	.50000E+01	0.	0.

**TIPO DE OPTIMIZACION DESEADA= MIN

*** ITERACION NUMERO 1

INCOGNITAS QUE FORMAN LA BASE	VALOR DE LAS INCOGNITAS
X 7	.20000000E+02
X 8	.30000000E+02
X 9	.40000000E+02
X12	.40000000E+02
X13	.50000000E+02

VALOR DE LA FUNCION QUE SE ESTA OPTIMIZANDO .90000000E+06

EVALUADORES NETOS QUE INDICAN CUANDO DETENER EL PROCESO

.99990E+04 -.10000E+05 .99970E+04 -.10000E+05 .99980E+04 0. .99940E+04 0. .99960E+04 .99950E+04 0. 0.

+++ ITERACION NUMERO 2

INCOGNITAS QUE FORMAN LA BASE	VALOR DE LAS INCOGNITAS
X 1	.20000000E+02
X 8	.30000000E+02
X 9	.40000000E+02
X12	.20000000E+02
X13	.50000000E+02

VALOR DE LA FUNCION QUE SE ESTA OPTIMIZANDO .70002000E+06

EVALUADORES NETOS QUE INDICAN CUANDO DETENER EL PROCESO

-.20000E+01 .99980E+04 .99940E+04 .99960E+04 .99950E+04 -.99990E+04 0.

*** ITERACION NUMERO 5

T3

INCOGNITAS QUE FORMAN LA BASE	VALOR DE LAS INCOGNITAS
X 1	.10000000E+02
X 2	.10000000E+02
X 6	.40000000E+02
X 3	.30000000E+02
X13	0.

VALOR DE LA FUNCION QUE SE ESTA OPTIMIZANDO .30000000E+03

EVALUADORES NETOS QUE INDICAN CUANDO DETENER EL PROCESO

-.99950E+04 -.99980E+04 -.10000E+05 -.20000E+01 -.20000E+01 0. -.10000E+01 0. -.99970E+04 -.99960E+04

*** LOS VALORES QUE OPTIMIZAN LA FUNCION SON

INCOGNITA	VALOR
X 1	.10000000E+02
X 2	.10000000E+02
X 6	.40000000E+02
X 3	.30000000E+02
X13	0.

VALOR DE LA FUNCION QUE SE ESTA OPTIMIZANDO .30000000E+03

Ejemplo

Un constructor de casas desea construir 3 tipos de casas: 2 recámaras, 3 recámaras y 4 recámaras.

Su problema es: determinar cuántas casas debe construir de c/tipo para tener beneficio máximo.

sujeto a las siguientes condiciones:

1. Presupuesto no debe exceder \$9,000 000 us
2. # de unidades (lote económico) mínimo es 350
3. De acuerdo con un estudio de mercado se prevee una demanda de:

# recámaras	% del total
2	20%
3	60%
4	40%
	120%

$\Rightarrow$ demanda > oferta

4. Costos totales (construcción, terreno, mano de obra)

# rec.	Costo
2	\$ 20,000.= us
3	\$ 25,000.= us
4	\$ 30,000.= us

5. Beneficios esperados

# rec.	Beneficio
2	\$ 2000 = us
3	\$ 3000 = us
4	\$ 4000 = us

* SOLUCION

INCOGNITAS : X_1 = # casos 2 recám.
X_2 = ✓ 3 recám.
X_3 = # ✓ 4 ✓

ESCALANDO PRECIOS ÷ 1000.

F. OBJETIVO : $\max Z = 2X_1 + 3X_2 + 4X_3$

RESTRICC. :

$20X_1 + 25X_2 + 30X_3 \leq 9000$ presup. lotoiza.
$X_1 + X_2 + X_3 \geq 350$
$X_1 \leq 0.2$ del total
$X_2 \leq 0.6$ ✓
$X_3 \leq 0.4$ ✓
demanda

VAR HOLGURA

$$20X_1 + 25X_2 + 30X_3 + X_4 = 9000$$
$$X_1 + X_2 + X_3 - X_5 = 350$$

$\Rightarrow$ TOTAL = $350 + X_5$

$$\therefore \left.\begin{array}{l} X_1 - 0.2X_5 \leq 70 \\ X_2 - 0.6X_5 \leq 210 \\ X_3 - 0.4X_5 \leq 140 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} X_1 - 0.2X_5 + X_6 = 70 \\ X_2 - 0.6X_5 + X_7 = 210 \\ X_3 - 0.4X_5 + X_8 = 140 \end{array}$$

VAR. ARTIF.

$\max Z = 2X_1 + 3X_2 + 4X_3 - 10000\,X_9$

s/t

$$20X_1 + 25X_2 + 30X_3 + X_4 = 9000$$
$$X_1 + X_2 + X_3 - X_5 + X_9 = 350$$
$$X_1 - 0.2X_5 + X_6 = 70$$
$$X_2 - 0.6X_5 + X_7 = 210$$
$$X_3 - 0.4X_5 + X_8 = 140$$

EL ORDEN DE LA MATRIZ DE COEFICIENTES ES 5X 9

LA MATRIZ DE COEFICIENTES ESTRUCTURALES DEL SISTEMA ES

.20000E+02	.25000E+02	.30000E+02	.10000E+01	0.	0.	0.	0.	0.
.10000E+01	.10000E+01	.10000E+01	0.	-.10000E+01	0.	0.	0.	.10000E+01
.10000E+01	0.	0.	0.	-.20000E+00	.10000E+01	0.	0.	0.
0.	.10000E+01	0.	0.	-.60000E+00	0.	.10000E+01	0.	0.
0.	0.	.10000E+01	0.	-.40000E+00	0.	0.	.10000E+01	0.

EL VECTOR DE CONSTANTES INDEPENDIENTES ES

.90000E+04
.35000E+03
.70000E+02
.21000E+03
.14000E+03

LOS COEFICIENTES DE COSTOS DE LA FUNCION A OPTIMIZAR SON

.20000E+01	.30000E+01	.40000E+01	0.	0.	0.	0.	0.	-.10000E+04

**TIPO DE OPTIMIZACION DESEADA= MAX

+++ ITERACION NUMERO 1

C2

INCOGNITAS QUE FORMAN LA BASE | VALOR DE LAS INCOGNITAS

INCOGNITAS QUE FORMAN LA BASE	VALOR DE LAS INCOGNITAS
X 4	.90000000E+04
X 9	.35000000E+03
X 6	.70000000E+02
X 7	.21000000E+03
X 8	.14000000E+03

VALOR DE LA FUNCION QUE SE ESTA OPTIMIZANDO -.35000000E+06

EVALUADORES NETOS QUE INDICAN CUANDO DETENER EL PROCESO

0.	.10020E+04	.10030E+04	.10040E+04	0.	-.10000E+04	0.	0.	0.

+++ ITERACION NUMERO 2

INCOGNITAS QUE FORMAN LA BASE	VALOR DE LAS INCOGNITAS
X 4	.46000000E+04
X 9	.21000000E+03
X 6	.70000000E+02
X 7	.21000000E+03
X 3	.14000000E+03

VALOR DE LA FUNCION QUE SE ESTA OPTIMIZANDO -.20944000E+06

EVALUADORES NETOS QUE INDICAN CUANDO DETENER EL PROCESO

.10020E+04	.10030E+04	0.	0.	-.57840E+03	0.	0.	-.10040E+04

INCOGNITAS QUE FORMAN LA BASE	VALOR DE LAS INCOGNITAS
X 2	.16000000E+03
X 8	.20000000E+02
X 1	.70000000E+02
X 7	.50000000E+02
X 3	.12000000E+03

VALOR DE LA FUNCION QUE SE ESTA OPTIMIZANDO .11000000E+04

EVALUADORES NETOS QUE INDICAN CUANDO DETENER EL PROCESO

0. -.99800E+03	0.	0.	-.20000E+00	-.20000E+01	-.10552E-10	0.	0.

*** LOS VALORES QUE OPTIMIZAN LA FUNCION SON

INCOGNITA	VALOR
X 2	.16000000E+03
X 8	.20000000E+02
X 1	.70000000E+02
X 7	.50000000E+02
X 3	.12000000E+03

VALOR DE LA FUNCION QUE SE ESTA OPTIMIZANDO .11000000E+04

5

Casos especiales

Problema	Cómo resolverlo
Minimizar Z	Max (−Z)
Empate de variable de entrada $C_j^* = C_i^*$ $\quad i < j$ tal que $C_j^* \le 0,\ C_i^* < 0$ $\lvert C_j\rvert^*_{max} = \lvert C_i\rvert^*_{max}$	Seleccionar variable con mínimo índice X_i
Empate de variable saliente $\frac{B_r^*}{A_{ri}} = \frac{B_s^*}{A_{si}}$	Conducen a soluciones degeneradas porque la variable no seleccionada adquiere valor = 0. Seleccione variable con mínimo índice si $r < s$ Xr Esto puede conducir a loops infinitos (rara vez ocurre en problemas reales) limitar=4m iteraciones, m=# restric.
No. ∃ variable saliente $A_{ki}^* \le 0$ ∀ variable básica	⇒ problema no acotado revisar planteamiento.
Solución óptima múltiple: sucede cuando $C_k^* = 0$ para variable no básica y Z es óptima.	Para encontrar otra solución óptima seleccionar dicha variable como variable entrante.
No. ∃ solución ⇒ ∀ solución óptima tiene cuando menos una variable artificial ≠ 0	Revisar planteamiento o aumentar magnitud de los coeficientes de las variables artificiales.
Variables negativas acotadas $X_j \ge L_j,\ L_j < 0$	$X_j' = X_j - L_j \ge 0$, substituir, X_j por $X_j' + L_j$ en el modelo.
Variables negativas no acotadas $-\infty < X_j < \infty$	$X_j = X_j' - X_j''$ $\quad X_j' \ge 0,\ X_j'' \ge 0$ y para cada solución $X_j' X_j'' = 0$

TEOREMA DUAL

$$\max \ z = \sum_{j=1}^{m} c_j \cdot x_j$$

S/t

$$\sum_{j=1}^{m} a_{ij} \cdot x_j \leq b_i \quad \text{para } i = 1, \dots, n$$

ES EQUIVALENTE A:

$$\min \ y_0 = \sum_{i=1}^{n} b_i \cdot y_i$$

$$\text{s/t} \ \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \, y_i \geq c_j \quad , j = 1, \dots, m$$

EJEMPLO

$$\text{Max } z = 3x_1 + 5x_2$$

st

$$x_1 \leq 4$$
$$2x_2 \leq 12$$
$$3x_1 + 2x_2 \leq 18$$

y $\underline{x} \geq 0$

var. originales.

$$\min \ Y = 4y_1 + 12y_2 + 18y_3$$

S/t

$$y_1 + 3y_3 \geq 3$$
$$2y_2 + 2y_3 \geq 5$$
$$\underline{y} \geq 0$$

var de holgura

SENSIBILIDAD : - Variar alguna de las parám. básicas alrededor del óptim.
- evaluar tableau resultante a partir de la última sol. para encontrar la nva.

centro de educación continua
división de estudios superiores
facultad de ingeniería, unam

INGENIERIA ECONOMICA

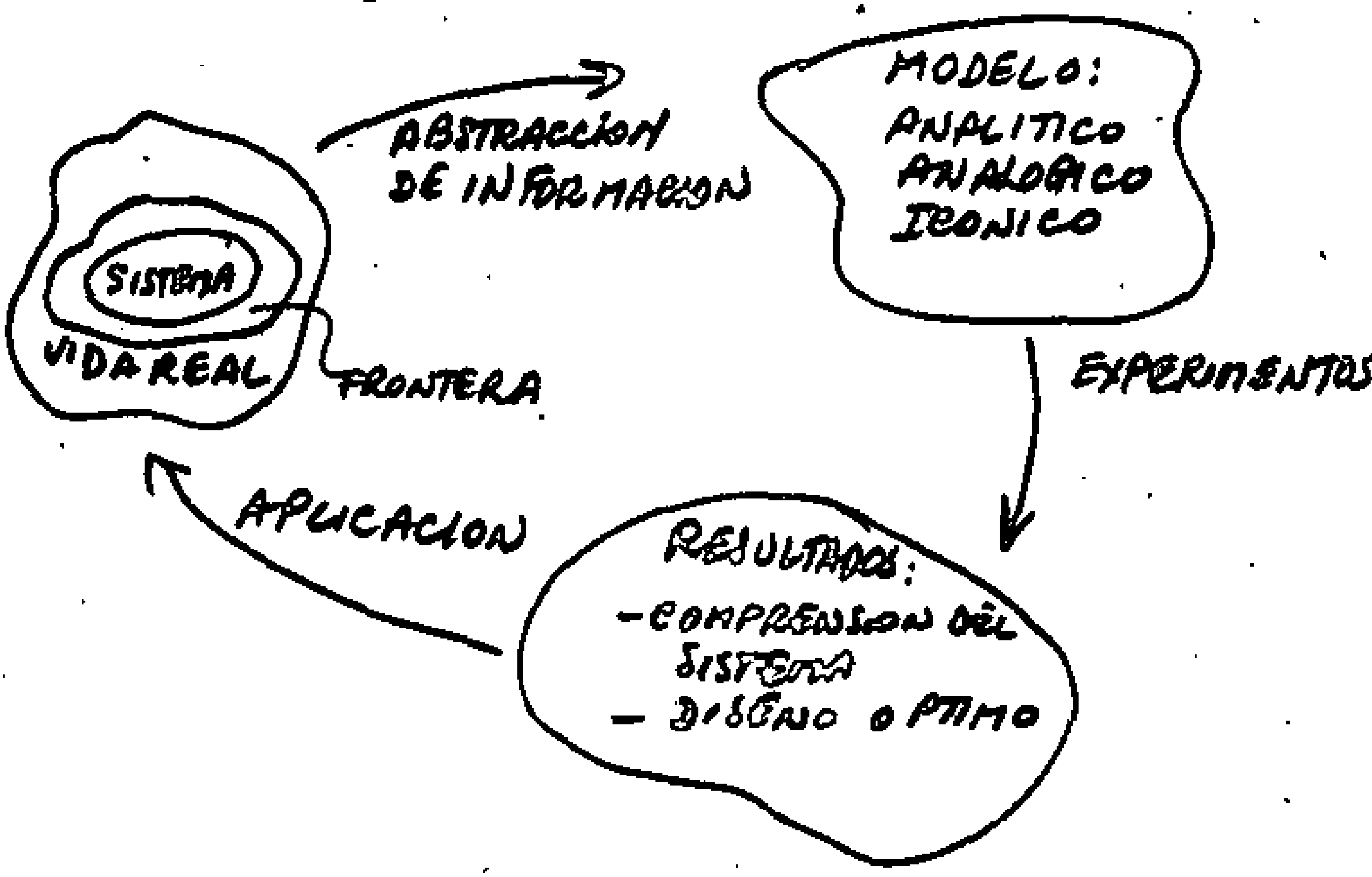
SIMULACION COLAS INVENTARIOS

M. EN C. JOSE A. TORRES FENTANES

AGOSTO, 1979.

SIMULACION

ES EL PROCESO DE EFECTUAR EXPERIMENTOS CON UN MODELO DEL SISTEMA QUE SE ESTA ESTUDIANDO O DISEÑANDO



SIMULACION

<u>ENTRADAS</u> CONJUNTO DE EVENTOS Y CONDICIONES A LAS CUALES PUEDE ESTAR SUJETO EL SISTEMA EN LA VIDA REAL

SALIDAS: PRONOSTICOS SOBRE LAS RESPUESTAS DEL SISTEMA

MODELOS

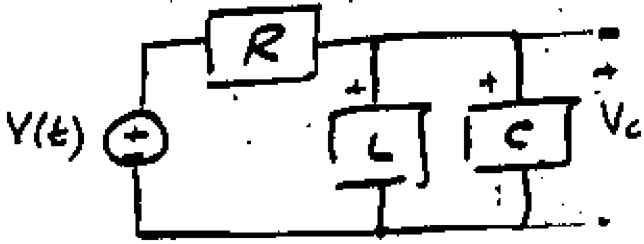
CONFIAB. / ACEPTABLES: UN BUEN MODELO DEBE REPRESENTAR LAS CARACTERISTICAS DEL SISTEMA DE TAL FORMA QUE LOS RESULTADOS DE LA SIMULACION REFLEJEN LO MAS FIELMENTE POSIBLE EL COMPORTAMIENTO DEL SISTEMA

TIPOS DE MODELOS.

a) ANALITICOS
- ESTATICOS
- DINAMICOS
- DETERMINISTICOS
- PROBABILISTICOS

Sistema puede ser descrito matemáticamente. Empleo de computadoras digitales para la simulación.

Por ejemplo: - Modelos con variables de edo. / Estado del sistema es la mínima cantidad de información que permite resumir el efecto de entradas anteriores.



$$\begin{bmatrix} \dot{V}_c \\ \dot{I}_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/RC & -1/C \\ \frac{1}{L} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_c \\ I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{RC} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$V_c = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_c \\ I_L \end{bmatrix} + [0] V(t)$$

b) ANALOGICOS

El sistema real se modela mediante un medio físico completamente diferente. Vgr: Simular estructuras o sistemas mecánicos mediante circuitos eléctricos.

c) ICONICOS:

Réplicas físicas del sistema real a una escala reducida. Vgr: Usar túneles de viento para diseñar aviones.

OBJETIVO DE LA SIMULACION

- ENTENDER MEJOR EL PROBLEMA Y OPERACION DEL SISTEMA
- IDENTIFICAR FACTORES IMPORTANTES
- RESOLVER PROBLEMAS O DISEÑAR SISTEMAS OPTIMOS
- PREDECIR COMPORTAMIENTO DEL SISTEMA

VENTAJAS

- PROPORCIONA UN MEDIO PARA RESOLVER PROBLEMAS QUE NO PODRIAN RESOLVERSE PORQUE:
  a) FORMULACION ANALITICA NO ES POSIBLE
  b) O NO ES ECONOMICAMENTE FACTIBLE
  c) EXPERIMENTAR SOBRE EL SISTEMA REAL ⟹ DESTRUIRLO

- PERMITE ANALIZAR EL COMPORTAMIENTO DEL SISTEMA PARA DIFERENTES TIPOS DE ENTRADA EN TIEMPOS RELATIVAMENTE CORTOS.

DONDE SE PUEDE EMPLEAR

- INGENIERIA
- ECONOMIA
- ADMINISTRACION
- MEDICINA
- ETC.

CALIDAD DE LOS RESULTADOS

- INV. PROPORC. A $\sqrt{\text{NUMERO DE SIM.}}$
- DIRECT. PROPORC. A LA BONDAD DE LA INFORMACION

PROBLEMAS DE LA SIMULACION

- ENTENDER PROBLEMA REAL Y OBTENER ESPECIFICACIONES
- ENCONTRAR LA DESCRIPCION O MODELO ADECUADO
- CALIDAD DE LA INFORM. DISPONIBLE
- INTERPRETACION DE LAS ESPECIF POR QUIEN IMPLEMENTA EL MODELO
- INTERPRETACION DE RESULTADOS.

TIPOS DE PROBLEMAS Y SISTEMAS EN LA VIDA REAL

- DETERMINISTICOS

  Parámetros y entradas conocidas sin incertidumbre.

  Vgr: Modelo matemático de un Sistema lineal (suspensión de un automóvil)

  Son simplificaciones de la vida real.

- NO DETERMINISTICOS o PROBABILISTICOS

  Involucran situaciones de incertidumbre. Por ejemplo:

  llegada de usuarios, tiempos de servicio, número de compras, etc.

  Los valores de las variables o parámetros deben caracterizarse mediante sus propiedades estadísticas

  $\Downarrow$

  CONOCIMIENTOS DE PROBABILIDAD Y ESTADISTICA

PROBABILIDAD DE UN EVENTO A

$$P(A) = \frac{\#\ \text{veces q' ocurre } A}{\#\ \text{veces q' se efectua el experimento}}$$

Vgr:

$$P(\text{águila}) = \frac{6}{12} = 0.5$$

ESPACIO DE EVENTOS (S)

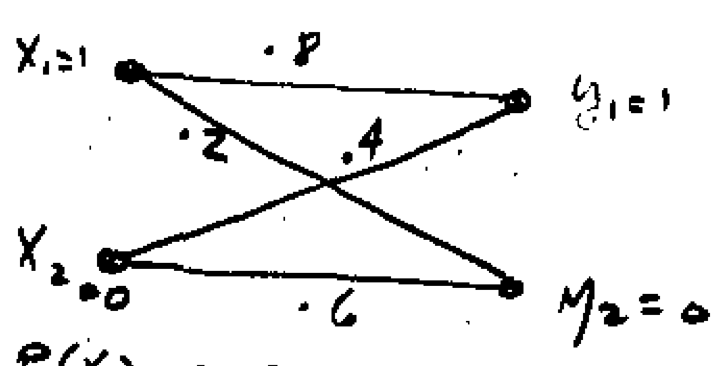
Son todas las posibles salidas de un experimento

PROPIEDADES:

a) $P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB)$
b) $P(AB) = P(A)\,P(B|A)$
c) $P(A) \geq 0 \quad \forall\ A \in S$
d) $P(S) = 1$
e) $P(A') = 1 - P(A)$
f) $P(A+B) = P(A) + P(B) \Rightarrow$ mutuamente exclus.
g) $P(AB) = P(A)P(B) \Rightarrow$ independientes

EJEMPLO

1) Dado el canal asimétrico de información mostrado, obtener $P(\text{ERROR})$
$P(\text{TRANSM. CORRECTA})$

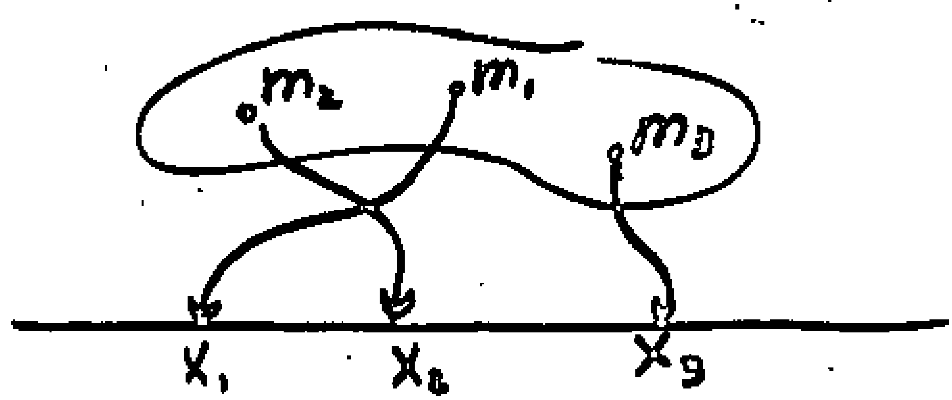


$P(X_1) = 0.5$
$P(X_2) = 0.5$

2) P(OBTENER 1 AGUILA y 1 SOL ARROJANDO LA MONEDA 4 VECES)?

VARIABLE ALEATORIA

ES UNA FUNCION $X(m_j)$ QUE ASIGNA UN VALOR A C/PUNTO DEL ESPACIO DE EVENTOS (m_j).



ESTO PERMITE HACER REFERENCIA A UN VALOR DE UNA VARIABLE EN LUGAR DE LA SALIDA DEL EXP.

Ejemplo

Lanzar 3 veces al aire una moneda y defina 2 v.a.:

h = # soles

r = # caras iguales sucesivas

	h	r
SSS	3	3
SSA	2	2
SAS	2	1
SAA	1	2
ASS	2	2
ASA	1	1
AAS	1	2
AAA	0	3

Tipos de v.a.:
- Discretas
- Continuas

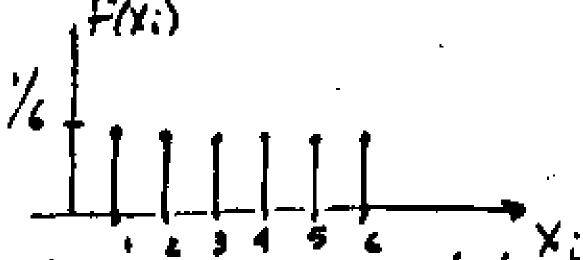
FUNCION DENSIDAD DE PROBABILIDAD $f(x)$

Es la distribución estadística asociada a una v.a que cumple:

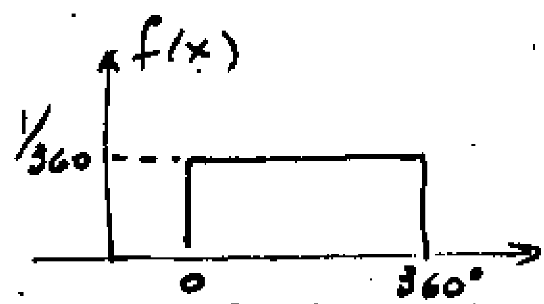
$$\begin{cases} f(X_i) = P_i = P(X_i) \\ 0 \le f(X_i) \le 1 \\ \sum_1^n f(X_i) = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} P(X_1 \le X \le X_2) = \int_{X_1}^{X_2} f(x)\,dx \\ f(x) \ge 0 \quad a \le x \le b \\ \int_a^b f(x)\,dx = 1 \end{cases}$$

Ejemplo



salidas de un dado



angulo de rueda ruleta

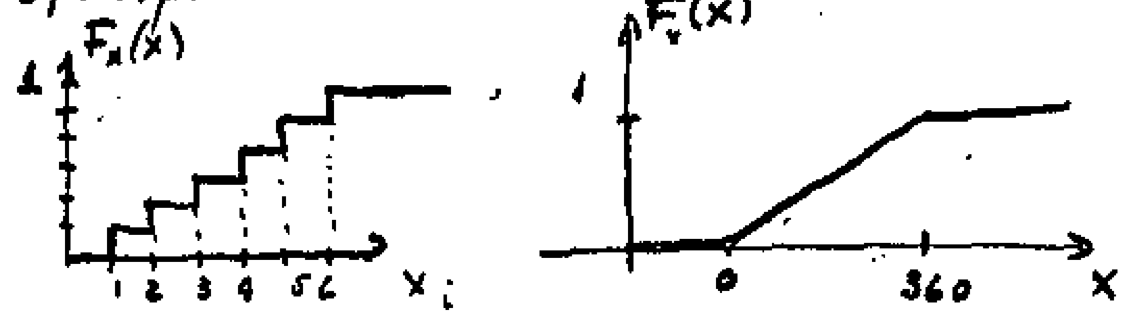
FUNCION DE DENSIDAD ACUMULADA (fda) $F_x(x)$

Da la probabilidad de que el valor de una variable aleatoria sea menor o igual que un valor t, es decir

$$F_x(t) = P(X_i \le t) = \begin{cases} \sum_{i=1}^{k} f(X_i), & X_k \le t \\ 0, & t < X_i \ \forall i \\ 1, & t \ge X_i \ \forall i \end{cases}$$

$$\begin{cases} P(a \le x \le b) = F_x(b) - F_x(a) \,, \quad a \le x \le b \\ F_x(b) = 1 \\ F_x(a) = 0 \\ \frac{d}{dx} F(x) = f(x) \\ F_x(t) = \int_a^t f_x(x)\,dx \end{cases}$$

Ejemplo



PROPIEDADES DE LAS FUNCIONES DE DISTRIBUCION

MEDIA

$$\mu_X = \sum_{i=1}^{n} X_i f(X_i)$$

$$\mu_X = \int_a^b X f(x)\,dx$$

Representa el valor promedio o esperado

VARIANCIA

$$\sigma_X^2 = \sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu_x)^2 f(X_i)$$

$$\sigma_X^2 = \int_a^b (x - \mu_x)^2 f(x)\,dx$$

Medida del cuadrado de la dispersión alrededor de la media

DESVIACION ESTANDAR

$$\sigma_X = \sqrt{\sigma_x^2}$$

Medida de la dispersión alrededor de la media.

ESTIMADORES DE LOS ESTADISTICOS

MEDIA ARITMETICA $\quad M_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$

VARIANCIA $\quad S_n^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (X_i - M_n)^2$

TIPOS DE DISTRIBUCIONES

Se nombran de acuerdo con sus características:

- uniforme
- gaussiana
- poisson
- exponencial

Las simulaciones requieren de los valores de las var. aleat. ⇒ generar números aleatorios mediante:

- tablas
- dados
- baraja
- ruleta
- métodos analíticos.

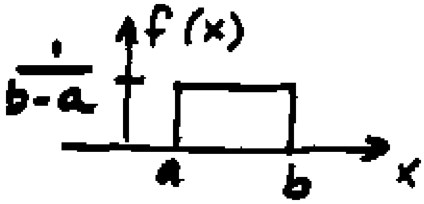
GENERACION DE NUMEROS PSEUDO ALEATORIOS

NUMERO PSEUDOALEAT: LAS secuencias son reproducibles a partir de ciertas condiciones.

Ventajas

- permite verificar resultados
- someter diferentes modelos a las mismas condiciones.

a) DISTRIB. UNIFORME



$\mu_x = \frac{a+b}{2}$

$\sigma_x = \frac{b-a}{2\sqrt{3}}$

$0 \le X_i \le m-1$

$0 \le r_i = \frac{X_i}{m} \le 1$

$a \le y_i = a + (b-a) r_i \le b$

Usos: - generac. de pseudoal. con otra distrib.
- Simulaciones

Método de Generación: CONGRUENCIAL

$X_{n+1} = (aX_n + c) \bmod m$

a, x_n, c, m enteros

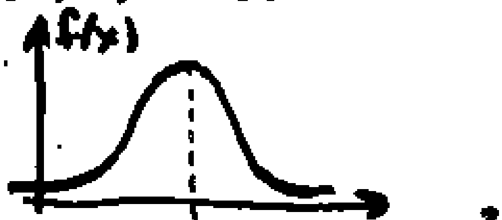
$X_{n+1} = l - \text{int}\left(\frac{l}{m}\right) * m$

$m = 2^p$

$a = 8t \pm 3$

$a \doteq 2^{p/2}$

b) DIST. GAUSSIANA



$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu_x)^2}{\sigma^2}}, \quad -\infty < x < \infty$

$z = \frac{x-\mu}{\sigma}$ está tabulada

$P\left(\frac{X_1-\mu}{\sigma} \le z \le \frac{X_2-\mu}{\sigma}\right) = P(X_1 \le x \le X_2)$

$f(r = \sum X_i) \rightarrow$ fdp gaussiana

Usos: - control de calidad
- tiempos de consumo, serv. etc.
- fdp de suma de var. independ.

Método de Generación: POLAR

$z = (-2 \ln r_1)^{1/2} \cdot \cos 2\pi r_2$

r_1 y r_2 unif. dist.

$x = \mu + z\sigma$

c) POISSON

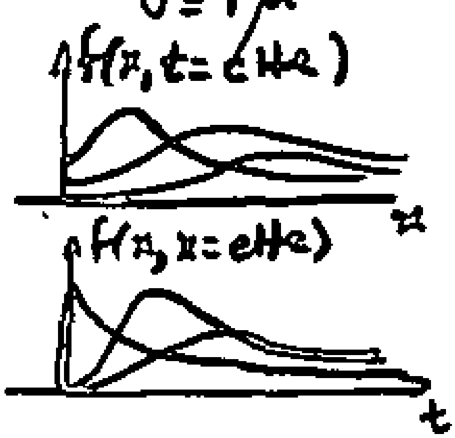
$$f_x(x) = \frac{(\lambda t)^x e^{-\lambda t}}{x!} = \frac{\mu^x e^{-\mu}}{x!}, \quad x = 0, 1, \ldots$$

λ: valor esperado de llegadas en la unidad de tiempo

t: intervalo de tiempo

μ: promedio de llegadas en t

$$\sigma = \sqrt{\mu}$$



Usos: - eventos discretos que se suceden aleatoriamente en un intervalo continuo

- número de acc.
- llegada de clientes
- número de fallas

Método de generación:

ITERATIVO

Dado

$X_k = \prod z_i \quad , \quad 0 \le z_i \le 1$

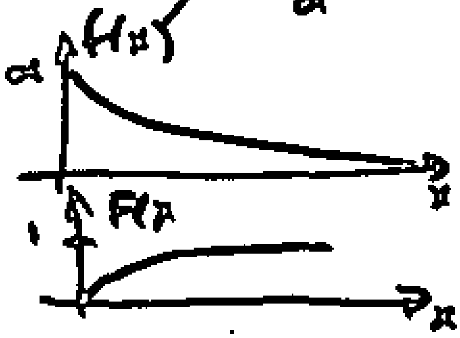
k será el # con d. de Poisson

$\iff X_k \le e^{\mu}$

d) EXPONENCIAL

$$f_x(x) = \alpha e^{-\alpha x}, \quad x \ge 0$$

$$\mu = \frac{1}{\alpha} = \sigma$$



Usos:

- intervalo de tpo. entre llegadas
- tiempo entre fallas
- tiempo entre llamadas

Método de generación:

TRANSF. INVERSA

Sea $r \in (0,1)$

$r = F(x) = 1 - e^{-\alpha x}$ pero $\exists$ $1-r$

$x = -\mu \ln(r)$

MONTE CARLO

- TECNICA DE SIMULACION QUE EMPLEA SISTEMATICAMENTE VARIABLES y NUMEROS ALEATORIOS.
- SIRVE TANTO PARA PROBLEMAS DETERMINISTICOS COMO NO DETERMINISTICOS
- LA SIMULACION REQUIERE DE NUMEROS ALEATORIOS CON DIFERENTES TIPOS DE DISTRIBUCION y PUEDE EFECTUARSE EN ESCRITORIO O MEDIANTE COMPUTADORA.
- PROBLEMAS EN QUE SE PUEDE EMPLEAR:

Simulación de Demandas
Evaluación de Integrales
Simulación de Tiempos de Servicio
" " " llegadas
Colas o Líneas de Espera
Inventarios
Etc.

EJEMPLOS

1) UN SEMAFORO TIENE UN CICLO DE t_0 MINUTOS ENTRE C/LUZ ROJA. SI EL TIEMPO DE LLEGADAS DE LOS VEHICULOS AL SEMAFORO PUEDE CONSIDERARSE COMO V. A. UNIF. EN $[0, t_0]$. SIMULE LA LLEGADA DE 40 VEHICULOS SI $t_0 = 1$ minuto.

2) ALTURA DE ADULTOS SE DEBE A VARIOS FACTORES

$$H = \Sigma X_i$$

DONDE Y_i SON V.A. DE DISTRIB. DESCONOC. SIMULE LA ALTURA DE UN GRUPO DE 35 ADULTOS CON DIST. NORMAL $\mu = 1.70$ m y $\sigma = 10$ cm.

GENERACION DE NUMEROS ALEATORIOS POR EL METODO CONGRUENCIAL

CANTIDAD DE NUMEROS A GENERAR= 40

SEMILLA DE LA SECUENCIA= 5.30000E+01

TABLA DE NUMEROS ALEATORIOS

DISTRIB. UNIFORME ENTRE 0 Y M-1 (X)	DISTRIB. UNIFORME ENTRE 0 Y 1 (R)
407.	0.397460937
749.	0.731445312
767.	0.749023437
229.	0.223632812
39.	0.038085937
29.	0.028320312
783.	0.764648437
661.	0.645507812
439.	0.428710937
589.	0.575195312
543.	0.530273437
325.	0.317382812
583.	0.569335937
381.	0.372070312
47.	0.045898437
245.	0.239257812
471.	0.459960937
429.	0.418945312
319.	0.311523437
421.	0.411132812
103.	0.100585937
733.	0.715820312
335.	0.327148437
853.	0.833007812
503.	0.491210937
269.	0.262695312
95.	0.092773437
517.	0.504882812
647.	0.631835937
61.	0.059570312
623.	0.608398437
437.	0.426757812
535.	0.522460937
109.	0.106445312
895.	0.874023437
613.	0.598632812
167.	0.163085937
413.	0.403320312
911.	0.889648437
21.	0.020507812

GENERACION DE NUMEROS ALEATORIOS CON DISTRIBUCION GAUSSIANA

CANTIDAD DE NUMEROS A GENERAR=   35

MEDIA DE LA DISTRIBUCION= 0.17000E+01

DESVIACION ESTANDAR DE LA DISTRIBUCION= 0.10000E+00

SEMILLA EMPLEADA PARA GENERAR X1= 0.98000E+02

SEMILLA EMPLEADA PARA GENERAR X2= 0.63000E+02

TABLA DE NUMEROS ALEATORIOS

X1(USANDO COSENO)	X2(USANDO SENO)
1.64504945E+00	1.61203384E+00
1.74296868E+00	1.64131451E+00
1.77842104E+00	1.68289483E+00
1.79462767E+00	1.74983549E+00
1.84643292E+00	1.78414416E+00
1.70662749E+00	1.81988966E+00
1.49896669E+00	1.68393016E+00
1.76173258E+00	1.60637224E+00
1.70417249E+00	1.56404066E+00
1.63840234E+00	1.75652134E+00
1.60615945E+00	1.93889678E+00
1.47759736E+00	1.97441506E+00
1.59226060E+00	1.48264790E+00
1.68156981E+00	1.82972622E+00
1.62091541E+00	1.80006564E+00
1.68265080E+00	1.68286240E+00
1.80277276E+00	1.55595958E+00
1.78037095E+00	1.65115476E+00
1.61724913E+00	1.58095777E+00
1.61804128E+00	1.60137331E+00
1.69308603E+00	1.75336003E+00
1.65275574E+00	1.83463788E+00
1.72303331E+00	1.77118623E+00
1.58915389E+00	1.77505291E+00
1.95918024E+00	1.60184586E+00
1.60195434E+00	1.73576152E+00
1.79079485E+00	1.69832850E+00
1.74504495E+00	1.67556655E+00
1.75802147E+00	1.63356578E+00
1.62091374E+00	1.83380258E+00
1.92287087E+00	1.76315153E+00
1.72248292E+00	1.75335038E+00
1.75871003E+00	1.71356273E+00
1.81342125E+00	1.68246365E+00
1.68774915E+00	1.71908629E+00

4. Ejemplo

Los átomos de una substancia radioactiva se desintegran emitiendo partículas α. Si el número de átomos es muy grande y la substancia se desintegra lentamente, el número de partículas α que llega a un contador en intervalos constantes y pequeños de tiempo tiene distribución de Poisson.

Los datos de la tabla 16.1 dan el número de desintegraciones radioactivas observadas experimentalmente y el número calculado empleando la distribución de Poisson de media $\mu = 3.870$. El número de intervalos de tiempo del experimento fué 2680 y su duración de 7.5 segundos.

Generar 40 números aleatorios con distribución de Poisson de media $\mu = 3.87$. Para comparar su distribución con la experimental y con la teórica de la tabla, es necesrio multiplicar la frecuencia de ocurrencia de cada valor 0, 1,2,3,... por el factor 2680/40.

K	Experimental	Poisson
0	57	54.399
1	203	210.523
2	383	407.361
3	525	525.496
4	532	508.418
5	408	393.515
6	273	253.817
7	139	140.325
8	45	67.882
9	27	29.189
10	16	17.075
TOTAL:	2680	2680.000

Tabla 16.1 Número de desintegraciones radioactivas.

NUMEROS ALEATORIOS CON DISTRIBUCION DE POISSON

LA MEDIA DE LA DISTRIBUCION ES= 3.86999989E+00

LA SEMILLA EMPLEADA ES= 1.70000000E+01

TABLA DE NUMEROS ALEATORIOS

```
          4
          4
          4
          2
          1
          3
          1
          6
          5
          8
          5
          1
          6
          3
          4
          2
          4
          5
          4
          3
          5
          2
          4
          1
          1
          4
          4
          2
          5
          6
          7
          5
          7
          4
          4
          3
          4
          6
          3
          2
```

4 - SE PIENSA CONSTRUIR UN HOSPITAL Y
SE DESEA SABER EL Nº DE CUARTOS QUE
DEBE TENER. SE ESTIMA QUE LA FREC.
DE NACIM. TIENE DISTRIB. EXPONENCIAL
DE MEDIA $\mu = 20$ NACIMIENTOS/DIA.
SIMULE LA FREC. DE NACIMIENTOS DIARIA
DURANTE UN MES.

GENERACION DE NUMEROS ALEATORIOS CON DISTRIBUCION EXPONENCIAL

CANTIDAD DE NUMEROS ALEATORIOS A GENERAR= 30

MEDIA DE LA DISTRIBUCION= 2.00000E+01

SEMILLA EMPLEADA PARA GENERAR LA SECUENCIA= 3.90000E+01

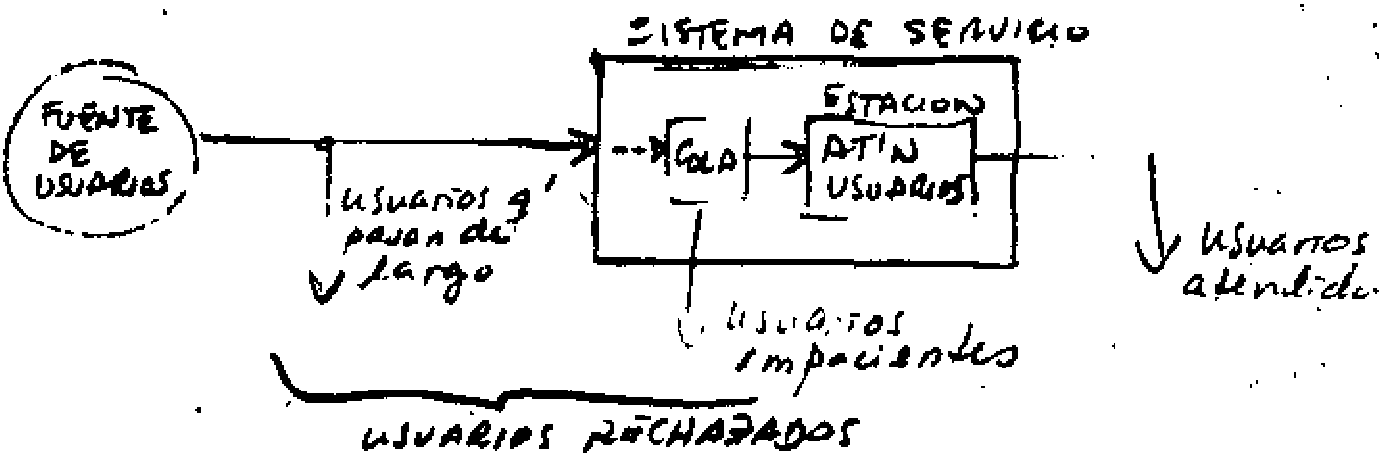
TABLA DE NUMEROS ALEATORIOS

7.12835236E+01
5.36678219E+00
8.75435925E+00
1.69394474E+01
1.10609131E+01
1.26872492E+01
2.29529343E+01
1.12656918E+01
1.97734489E+01
6.16264839E+01
2.86042709E+01
1.55322742E+01
1.74002991E+01
2.33256149E+01
1.77767811E+01
4.59348602E+01
6.68652201E+00
2.23468266E+01
3.65424490E+00
1.42176332E+01
2.67352085E+01
4.75518990E+01
1.36685791E+01
9.18250942E+00
5.64119568E+01
9.93850517E+00
1.70307713E+01
1.29841022E+01
4.48024788E+01
2.69296145E+00

...S DE ESPERA o COLAS

- LA SIMULACION CONSISTE EN SIMULAR LAS LLEGADAS DE ALGUN TIPO DE UNIDADES DE ENTRADA A UNA O MAS ESTACIONES DE SERVICIO.
- USUALMENTE LOS TIEMPOS DE LLEGADA ASI COMO LOS DE SERVICIO SON ALEATORIOS
- GENERALMENTE SE REQUIERE BALANCEAR EL COSTO MARGINAL DE ESPERA DE LOS USUARIOS CONTRA EL COSTO MARGINAL DEL TIEMPO MUERTO.

DESCRIPCION



DATOS NECESARIOS

- Distribución de los tiempos ÷ llegadas
- Distribución " " " de servicio
- Costo mantenimiento y servicio
- Costo de rechazo y espera
- Necesidades que deben ser cubiertas y su prioridad

ACCIONES QUE SE PUEDEN TOMAR

- incrementar estaciones de servicio
- cambiar tiempos de servicio
- cambiar disciplina en las colas
- cambiar política de servicio

PASOS A SEGUIR

- Determinar propiedades y especificaciones
- Formular modelo matemático
- Analizar y Evaluar la Sol. óptima

TIPOS: SE CLASIFICAN DE ACUERDO CON

- ENTRADAS
  - finitas
  - infinitas
- COLA
  - finita
  - infinita
  - única
  - múltiple
- ESTRUCTURA DEL SERVICIO
  - # de canales
  - # de fases

NOMENCLATURA:
T = tiempo [h, s, etc]
T_a = tiempo ÷ llegadas
T_s = tiempo de servicio/unidad
C_t = Costo total variable /unidad tpo.
C_w = costo espera /usuario - unidad tpo
C_f = Costo de servicio a una unidad
L = # canales
λ = promedio de llegadas/unidad tpo
μ = promedio tiempo de serv. /usuario
χ = factor de carga = λ/μ
N = número usuarios.

EJEMPLOS

1) LINEA CON UN CANAL, FASE SIMPLE, COLA UNICA CON TIEMPOS ÷ LLEGADAS Y DE SERVICIO CONSTANTES. Vgr. llegada de envases a una envasadora. OBTENER TIEMPO OPTIMO DE SERVICIO.

$T_A < T_S$. [seg]

#usuarios/seg = $\frac{1}{T_A}$

costo de espera por periodo

$C_w \frac{1}{T_a} T_s$

usuarios atendidos/seg = $\frac{1}{T_s}$

Costo de servicio por periodo

$C_f \frac{1}{T_s}$

costo total por periodo

$$C_t = \frac{C_w}{T_a} T_s + \frac{C_f}{T_s}$$

para óptimo

$$\frac{dC_t}{dT_s} = \frac{C_w}{T_a} - \frac{C_f}{T_s^2} = 0$$

$$C_{t\,opt} = 2\sqrt{\frac{C_f C_w}{T_a}}$$

$$T_{s\,opt} = \sqrt{\frac{C_f T_a}{C_w}}$$

DATOS

promedio de llegadas = 3/hora

C_f = \$25/hora para servir 4 unidades

C_w = \$2400/día-unidad

Hallar costo min/unidad.

$C_f = \frac{25}{4} = \$6.25$ unidad/hora

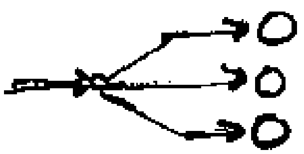
$T_a = \frac{1}{3}$ hr ÷ llegadas

$C_w = \frac{2400}{24} = \$100$/hr-unidad

$T_{s_{opt}} = \sqrt{\frac{6.25(1/3)}{100}} = 0.1443$ hr

$C_{t\,opt} = 2\sqrt{\frac{6.25(100)}{1/3}} = \$86.6$/hr por 3 unidades

2) LINEA DE ESPERA DE FASE UNICA Y CANALES MULTIPLES. Por ejemplo



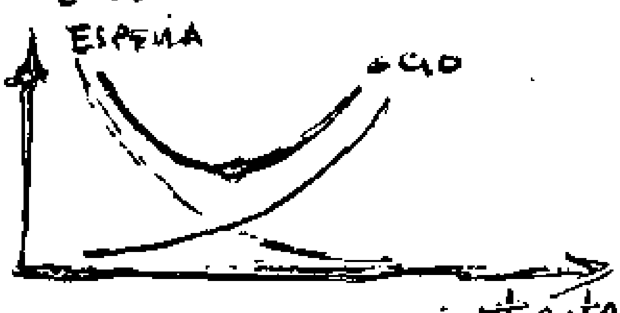
- Gasolinera
- cajas de banco, supermercado
- despacho de mercancía
- pistas de aeropuerto

ESPECIFICACIONES

a) USUARIOS SE FORMAN EN COLA MINIMA

b) USUARIOS SE SIGUEN DE LARGO SI TODAS LAS COLAS TIENEN LIM USUARIOS ⇒ COLAS FINITAS

c) UNA VEZ EN COLA SE ESPERA A SER ATENDIDO (PACIENTE) Y NO CAMBIA DE COLA



d) SE DESEA ATENDER UN PORCENTAJE MINIMO DE USUARIOS

e) SE DESEA EVALUAR LOS COSTOS DE OPERACION (TIEMPO MUERTO, SERVICIO, MANTENIMIENTO, TIEMPO DE ESPERA Y USUARIOS RECHAZADOS) PARA LA SOL. OPTIMA

f) OBTENER GRAFICA DE TIEMPOS, COSTOS, AUTOS RECHAZADOS

Datos

Una gasolinera recibe 40 carros/hr con distribución exponencial. El tiempo de servicio por bomba es 6 min con desviación promedio de 2 min. La cola máxima permisible por bomba es de 5 carros. Determine el número de bombas necesarias para atender por lo menos el 90% de los clientes y evaluar el costo de la solución.

Costo de espera es \$3/min-carro, costo de servicio es \$5/carro, costo de mantenimiento es \$2/min-bomba, costo de tiempo ocioso es \$10/min-bomba, costo de vehículo rechazado es \$50.

Obtenga las gráficas de:

- vehículos rechazados
- tiempo ocioso
- tiempo espera
- costos

contra el número de bombas

$C_t = [\, C_e$ (Tiempo de espera) $+ C_s$ (# vehículos atendidos) $+ C_m$ (# bombas x T) $+ C_o$ (Tiempo ocioso) $+ C_r$ (# vehículos rechazados)$\,]$.

LA SIMULACION SE EFECTUARA CON LOS SIGUIENTES PARAMETROS

MAXIMO NUMERO DE CANALES PERMITIDO= 10

NUMERO DE USUARIOS= 200

MAXIMO NUMERO DE USUARIOS PERMITIDO EN LA COLA DE CADA CANAL= 5

PORCENTAJE MINIMO DE USUARIOS QUE DEBERA SER ATENDIDO= 90.0000

MEDIA DE LOS TIEMPOS ENTRE LLEGADAS= 1.50000E+00

MEDIA DE LOS TIEMPOS DE SERVICIO= 6.00000E+00

DESVIACION ESTANDAR DE LOS TIEMPOS DE SERVICIO= 2.00000E+00

LOS VALORES OBTENIDOS SON

NUMERO DE CANALES= 1

TOTAL DE USUARIOS= 200.

TIEMPO TOTAL DE LLEGADAS= 2.80054596E+02

USUARIOS RECHAZADOS= 148

PORCENTAJE DE USUARIOS ATENDIDOS= 2.6000E+01

TIEMPO OCIOSO ESPERADO= 0.00000E-01

TIEMPO DE ESPERA ESPERADO= 5.46557E+00

LOS VALORES OBTENIDOS SON

NUMERO DE CANALES= 2

TOTAL DE USUARIOS= 200

TIEMPO TOTAL DE LLEGADAS= 3.01341614E+02

USUARIOS RECHAZADOS= 91

PORCENTAJE DE USUARIOS ATENDIDOS= 5.450 +01

TIEMPO OCIOSO ESPERADO= 1.04266E-02

TIEMPO DE ESPERA ESPERADO= 1.09748E+01

LOS VALORES OBTENIDOS SON

NUMERO DE CANALES= 3

TOTAL DE USUARIOS= 200

TIEMPO TOTAL DE LLEGADAS= 2.98974365E+02

USUARIOS RECHAZADOS= 42

PORCENTAJE DE USUARIOS ATENDIDOS= 7.9000E+01

TIEMPO OCIOSO ESPERADO= 4.99296E-02

TIEMPO DE ESPERA ESPERADO= 1.35562E+01

RESULTADOS DE LA SIMULACION

NUMERO DE CANALES EMPLEADO= 4

NUMERO DE USUARIOS= 200

TIEMPO TOTAL DE LLEGADAS= 2.93057E+02

NUMERO DE USUARIOS RECHAZADOS= 1

PORCENTAJE DE USUARIOS ATENDIDOS= 9.9500E+01

TIEMPO OCIOSO PROMEDIO= 2.57772E-01

TIEMPO DE ESPERA PROMEDIO= 9.99831E+00

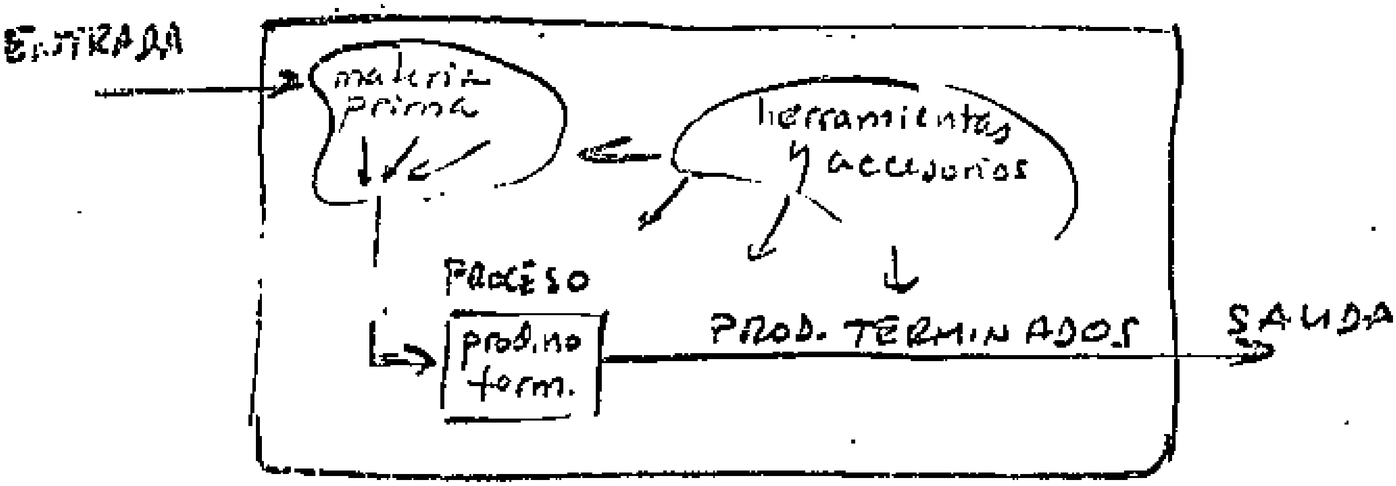
D.

EL RESULTADO DE LA SIMULACION ES OPTIMO

>

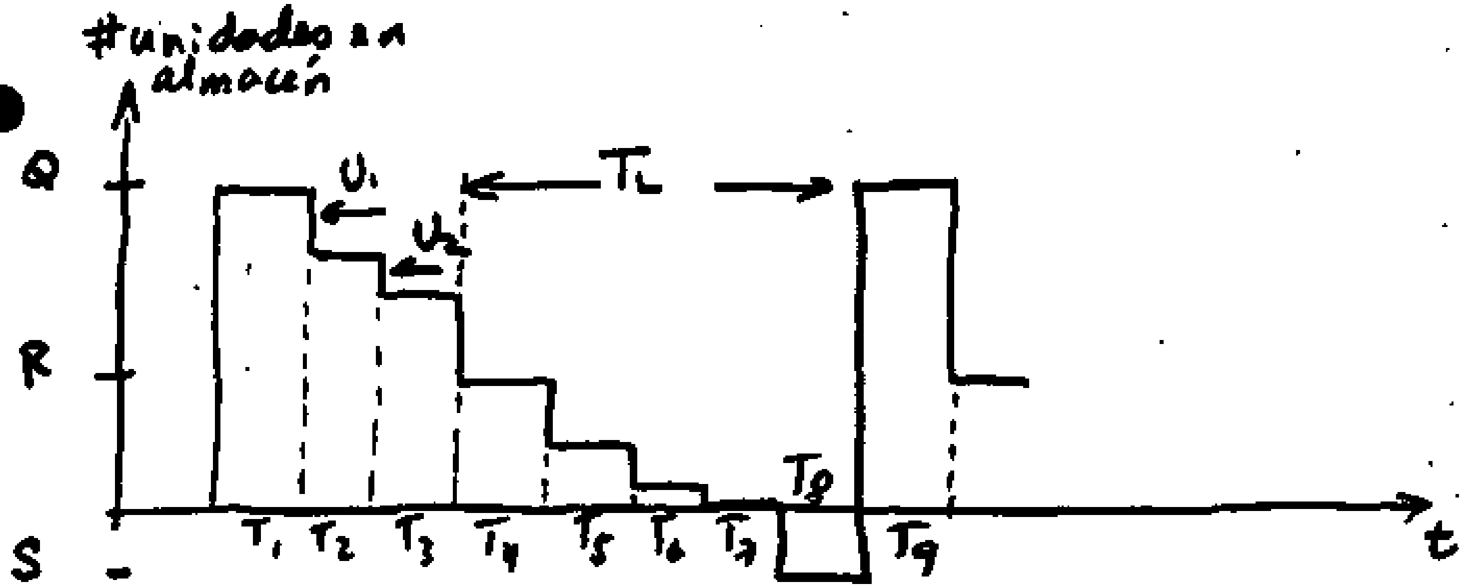
INVENTARIOS

- Inventario es una reserva física de unidades que tienen un valor, las cuales pueden ser material, dinero o fza laboral.
- El material de inventario puede ser
  - MATERIA PRIMA
  - HERRAMIENTAS
  - PRODUCTOS NO TERMINADOS
  - PRODUCTOS TERMINADOS



- El modelo es analítico pero incluye factores no determinísticos como pueden ser: tiempo de surtido, demanda de artículos, etc.
- Para analizar el comportamiento de un inventario dado se puede emplear:
  - Técnica analítica
  - Simulación (Monte Carlo).
- Un modelo de inventarios básico es el que incluye los factores:
  - Fábrica
  - Mayoreo
  - Menudeo

DESCRIPCION DEL MODELO GRAL



Q = cantidad de unidades recibidas (nivel max.)
U_1 y U_2 = salidas (pedidos)
R = nivel base de inventarios ⇒ poner orden para resurtir y volver a tener Q unid.
T_L = periodos de tiempo requeridos para poner una orden en el almacén
S = carestía o inventario con balance negativo ⇒ Backorders ≡ pedidos tomados pero no surtidos

TIPOS DE INVENTARIOS Se clasifican de acuerdo con:

- tasa de entrega < finita / infinita (todas las unidades se entregan en una remesa)
- nivel base o de reserva < CON / SIN
- Backorders < SÍ / NO
- Tipo de clientes < pacientes / impacientes.

COSTOS INVOLUCRADOS

- COSTO ASOCIADO CON EL TAMAÑO Y NUMERO DE LOTES — gastos fijos
- COSTOS DE PRODUCCION — movim. / limpieza / organiz.

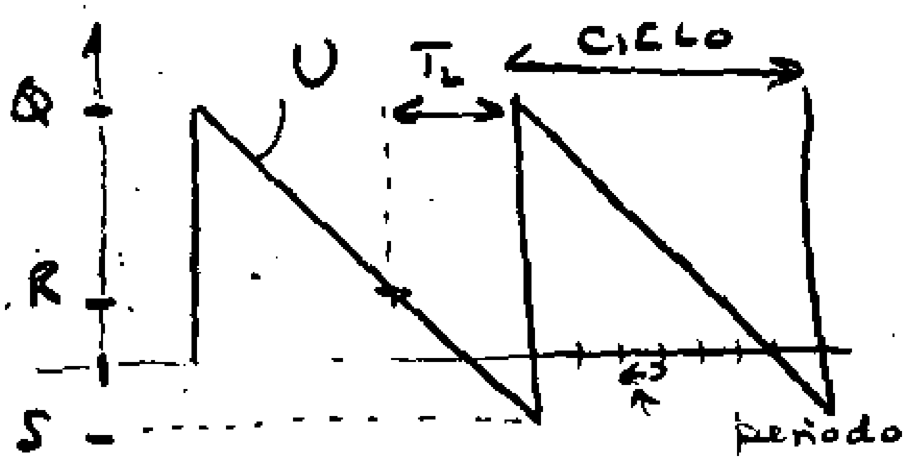
COSTOS DE ALMACENAMIENTO

- COSTOS DE 'CARENCIA' DE MATERIAL
- COSTOS DE CAPITAL

EJEMPLO

1) SE TRATARA ANALITICAMENTE LA NATURALEZA DINAMICA DE UN SISTEMA DE INVENTARIOS FABRICA-MAYOREO-MENUDEO CON DIFERENTES POLITICAS PARA EL CONTROL DE REORDENES.

EL DIAGRAMA DEL MODELO A TRATAR SERA:



U = tasa de pedidos = pendiente de la recta.

N

2) SIMULACION DE UN INVENTARIO MEDIANTE MONTE CARLO.

DISTRIB. DE LA DEMANDA			
DEM.	P(U)	$F_x(U)$	# aleat.
2	.05	.05	01-05
3	.15	.2	06-20
4	.20	.4	21-40
5	.30	.7	41-70
6	.20	.9	71-90
7	.1	1	91-00

DISTRIB. DEL TIEMPO DE ADEL.			
T_L	$P(T_L)$	$F_x(T_L)$	# aleat
3	0.25	0.25	01-25
4	0.5	0.75	26-75
5	0.25	1.00	76-00

$\mu_U = 4.7$ unidades/día

$\mu_{T_L} = 4$ días

COSTO DE ORDENAR UNA ORDEN = $15

COSTO DE INVENTARIO = $1 / DIA-UNIDAD

COSTO DE DEFICIT = $2 / DIA-UNIDAD

LAS ORDENES SE ENVIAN Y RECIBEN AL FINAL DEL DIA. COSTOS SE EVALUAN EN BASE AL INVENTARIO DEL FIN DEL DIA PERO ANTES DE LA LLEGADA DEL NVO. LOTE

DETERMINE EL TAMAÑO DE LOTE OPTIMO Y EL NIVEL DE REORDEN

ASUMA Q = 30 , R = 20

inventario inicial = 20

LISTE COSTO ACUMULADO.

Table 10.17T1 Monte Carlo Method for Example 10.17E1 with $Q = 30$, $R = 20$

Cycle	Period cumulative	Random no.	Demand	Random no.	Lead time	Stock end of day	Shortage cost, \$	Inventory cost, \$	Lot order cost, \$	Cumulative cost, \$	Average cost per period, \$
	0			79	5	20					
1	1	13	3			17	0	17	0	17	17
	2	28	4			13	0	13	0	30	15
	3	77	6			7	0	7	0	37	12
	4	60	5			2	0	2	0	39	10
	5	29	4			−2	4	0	0	43	9
	6	16	3			30 − 2 − 3 = 25	0	25	15	83	14
	7	70	5	64	4	20	0	20	0	103	15
2	8	09	3			17	0	17	0	120	15
	9	24	4			13	0	13	0	133	14
	10	16	3			10	0	10	0	143	14
	11	19	3			7	0	7	0	150	14
	12	14	3			30 + 7 − 3 = 34	0	34	15	199	17
	13	29	4			30	0	30	0	229	18
	14	49	5			25	0	25	0	254	18
	15	08	3			22	0	22	0	276	18
	16	80	6	45	4	17	0	17	0	293	18

MODELADO Y SIMULACION DE INVENTARIOS

1. Modelo del Sistema de Inventarios

No es difícil encontrarse Compañías Manufactureras, en las cuales el 25 % o más de total de su capital lo tienen invertido en inventarios. Lockheed Aircraft Co. en Diciembre 1969 tenía $ 500,000,000 (us dls) en inventarios, General Electric también en Diciembre de 1969 tenía $ 1,482,000,000 en inventarios, General Motors, en la misma fecha tenía $ 3,700,000,000 en inventarios. Hoy en día los directivos de empresas están conscientes del problema que representan los inventarios. En esta parte del curso, veremos como se plantea un modelo general de inventarios, un modelo para estimar el lote económico en los inventarios, así como dos programas de computadora que simulan lo anterior.

Es importante que los modelos de los sistemas de inventarios reflejen el incremento de los costos asociados a las diferentes políticas. Los siguientes costos afectan el modelo de inventarios:

Costo que Depende del Número de Lotes.

Al decidir en el tamaño o número de lotes a comprar, hay que recordar que existen gastos fijos internos de oficina, que permanecen constantes, y estos -

gastos no varían con el tamaño del lote pedido, una gran parte de los costos totales de las operaciones de compra son costos fijos.

Costos de Producción.

Existen en los modelos de inventarios costos de producción que están ligados con el inventario, como son costos de movimiento de materiales, limpieza y organización de los mismos. Además de estos existen otros costos que deben reflejarse en el modelo de inventarios como pueden ser: pago de tiempo extra, fluctuaciones en los costos de producción, costos efectuados en el balance del inventario, etc.

Costos de Almacenamiento y Movimiento de Materiales.

Estos costos resultan también importantes en el modelo, pues mover materiales dentro y fuera del almacén "cuesta", además de otros costos como seguros de materiales almacenados, impuestos, renta, mermas y costos de capital.

Costos de "Falta de Material".

Este costo es extremadamente importante en el modelo. Este costo nunca aparece en los records, o balances del inventario. Por Ejemplo, sea la falta de algún material que ocasiona el paro total o parcial de la producción. La pérdida de algún cliente al cual no se pudo satisfacer. Lotes incompletos que no pueden salir al mercado, etc. En el segundo ejemplo de este curso se dará énfasis a este costo, este costo resulta difícil de cuantificar

Costos de Capital.

El invertir en inventarios, resulta ser un incremento de costos de importancia en el diseño de modelos de inventarios.

Este costo según el valor unitario de los materiales, el tiempo que los materiales están en inventario, y la tasa de interés.

Objetivos de la Dirección o la Administración.

El objetivo de la dirección es minimizar los costos descritos con anterioridad.

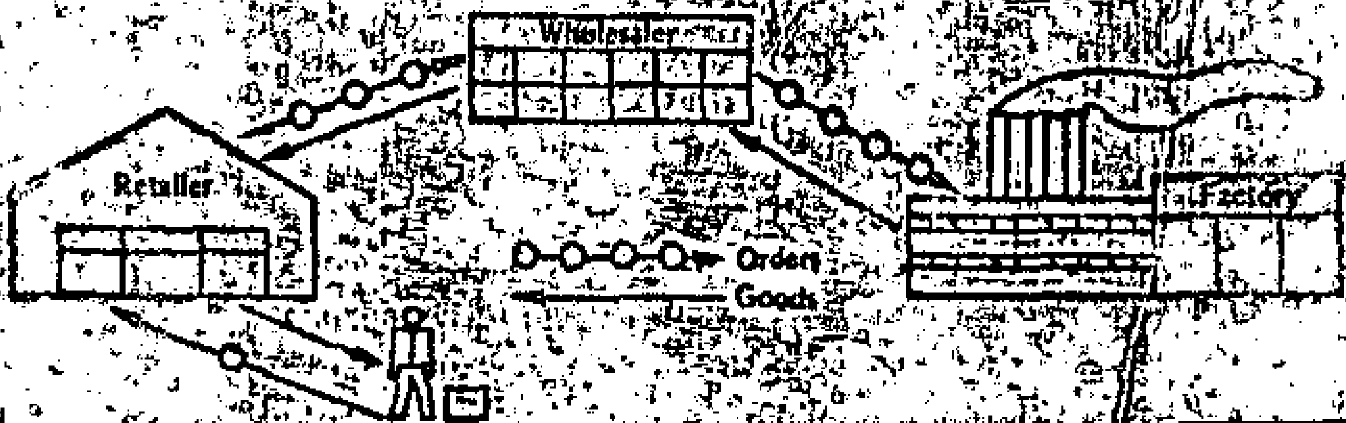
El costo de sistemas Producción-Distribución, se encuentra completamente distribuido desde la entrada de la materia prima, a través de los pasos intermedios, hasta la venta. Por lo que si la dirección quiere obtener mayores ganancias y/o menor precio de venta al público, tendrá que seguir una política de inventarios de acuerdo a ciertos objetivos.

Empezaremos el análisis de inventarios desde un punto de vista simple, a través de un ejemplo. Complicaremos la situación en el segundo ejemplo a tratar, y al final daremos 2 programas de computadora, en los cuales se simular las situaciones de los ejemplos vistos. El primer caso a tratar es el modelo de un sistema de inventario con una estructura simple.

El propósito de un inventario es proveer una separación en tiempo o localidad entre bienes de producción y bienes de consumo. En las economías modernas centros de producción especializada, con grandes volúmenes de bienes.

Los sistemas inventarios en nuestra economía funcionan de la siguiente manera: El mayorista provee una separación en tiempo entre el menudeo y la fábrica. De la misma manera en la mayoría de los casos la fábrica provee un desacoplamiento en localidad, debido a que los productos se distribuyen en diferentes áreas geográficas.

El propósito de este ejemplo es ilustrar la naturaleza dinámica de un sistema de inventarios fábrica-mayoreo-menudeo. Se utiliza un programa de computadora para simular el modelo. El usuario podrá en el modelo cambiar la política de inventarios en el menudeo y mayoreo, para controlar el sistema global.



I) MODELO FABRICA MAYOREO-MENUDEO

1.- La función del menudeo es la siguiente (ver Fig. 1)

a) Toma órdenes de los clientes.

b) Provee al cliente con bienes tomados del inventario (de los anaqueles).

c) Reordena bienes del mayorista

d) Recibe la entrega del mayorista.

2. La función del mayorista es semejante a la del menudeo, excepto en el cliente del mayorista es el menudeo y existe un retraso en tiempo entre la orden y entrega de bienes. El mayorista debe:

a) Recibir órdenes del menudeo

b) Mandar bienes del almacén del mayoreo al menudeo

c) Reordenar de la fábrica.

d) Recibir entregas de la fábrica.

3. Finalmente la fábrica debe:

a) Producir bienes un cierto volumen o cantidad.

b) Cambiar el volumen de producción, según sea la demanda del mayoreo.

II) FORMULAS PARA EL MODELO MENUDEO

Las fórmulas aquí expuestas, es la interpretación matemática de lo escrito anteriormente.

Ventas de Menudeo.- Estas ventas estan controladas por el cliente, para este ejemplo vamos a considerar que las ventas a los clientes es de 100 unidades por semana. APROXIMADAMENTE

Entradas de Bienes de Menudeo. - Son la cantidad de unidades recibidas (que manda el mayorista), cada lunes por la mañana y que fueron ordenadas el Viernes de la semana ante-anterior (10 días).

Nivel del Inventario de Menudeo. - Son el número de unidades que se tienen el viernes a las 12:00 hrs. al hacer el balance, este nivel varía como muestra la fig. 2.

nivel del inventario = nivel anterior + entradas - ventas

Ordenes del Menudeo. - Estas ordenes son pedidas al mayorista cada Viernes por la tarde, después del balance, bajo la siguiente política.

Ordenes de menudeo = Ventas menudeo + (100-Nivel del inventario)

Por ejemplo suponga que en una semana "normal" se tuvo lo siguiente:

Ventas Menudeo = 100

Entrada de Bienes = 100

Nivel de Inventario = 100+100-100=100

Ordenes de Menudeo = 100+ (100-100) = 100

En una semana en la cual las ventas aumentan se tiene:

Ventas menudeo = 109

Entrada de bienes = 100

Nivel de Inventario = 100+100-110=90

Orden de Menudeo = 110 + (100-90) = 120

FIGURA 2

III FORMULAS PARA EL MODELO DE MAYORISTA

Envío de Materiales, Mayoreo.- Estas salen cada vez, de acuerdo a las órdenes de compra del menudeo, hechas el Viernes anterior, y es entregada el Lunes, (recibo de materiales).

Envío de Mayoreo = Ordenes Menudeo (Viernes anterior)

Recibo de Materiales Mayoreo.- Es la producción de la fábrica de la semana anterior y es recibida el Lunes por la mañana.

Recibo de Materiales = Producción de la Fábrica (semana anterior)

Nivel de Inventario Mayoreo.- Es el número de unidades después del balance del Viernes por la tarde, este nivel varía como se muestra en la fig. 3

FIG 3

La expresión siguiente nos determina el nivel del inventario el Viernes por la tarde:

Nivel de Inventario Mayoreo= Nivel Anterior+Llegadas-Salidas

Ordenes de Mayoreo.- Estas órdenes se mandan a la fábrica cada Viernes por la tarde, una vez hecho el inventario. La fábrica, requiere cambiar su volumen de producción, hace que 2 semanas pasan hasta que el mayorista recibe su órden. La política a seguir es ordenar para la semana en curso + 200 unidades esto es:

Ordenes de Mayoreo = Envios Mayoreo + (200-Nivel del Inventario)

Sea por ejemplo en una semana "normal" se tendrá:

Envios Mayoreo = 100

Recibo Mayoreo = 100

Nivel Inventario Mayoreo = 200+100-100=200

Ordenes de Mayoreo = 100 + (200-200) =100

En una semana en que los envíos "bajan":

Envíos mayoreo = 90

Recibo Mayoreo = 100

Nivel Inventario Mayoreo=200+100-90=210

Ordenes de Mayoreo = 90 + (200-210) = 80

Notemos que en presente modelo, el mayorista solo provee a un vendedor de menudeo, obviamente es una simplificación, pero creemos que los asistentes al curso no tendrán ninguna dificultad, para generalizar los resultados.

Volumen de Producción de la Fábrica.

En este modelo la fábrica no mantiene inventario, la fábrica produce cierto volumen, según sean las órdenes del mayoreo; sin embargo hay un retraso de una semana, para que la fábrica cambie su volumen de producción. Esto lo podemos ver en la siguiente figura.

Week number	*Wholesale order*	*Factory rate*	*Wholesale receipts*
1	100	100	100
2	120	100	100
3	80	100	100
4	100	120	100
5	100	80	120
6	100	100	80

Política a Seguir.

La regla normal de compra es la siguiente:

"ordene lo que vendió esta semana mas (o menos) otra cantidad para que el inventario tenga su nivel normal"

Por Ejemplo: si las ventas de menudeo son 100 en las semanas 1 y 2 y aumentan a 110 en las semanas 4,5,6 y 7 los resultados pueden observarse en la figura 8, y son calculados de la siguiente manera.

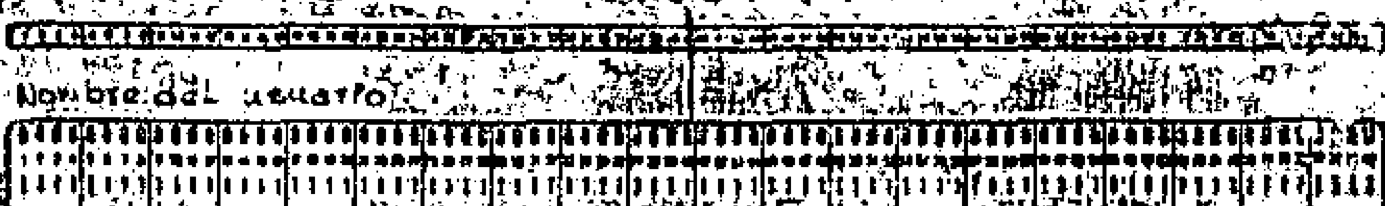
Ordenes Menudeo = Venta de la Semana + (100 - Nivel de Inventario)

Las órdenes de menudeo en la quinta semana son 120 unidades, dado que:

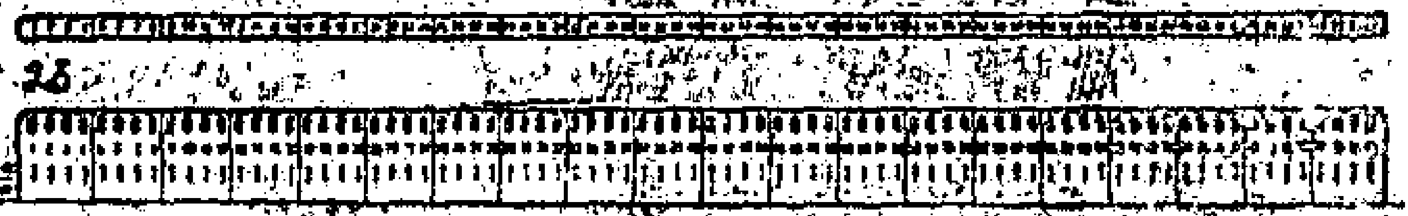
Ordenes Menudeo = 110 + (100 - 90) = 120

Entrada de datos en la Computadora.

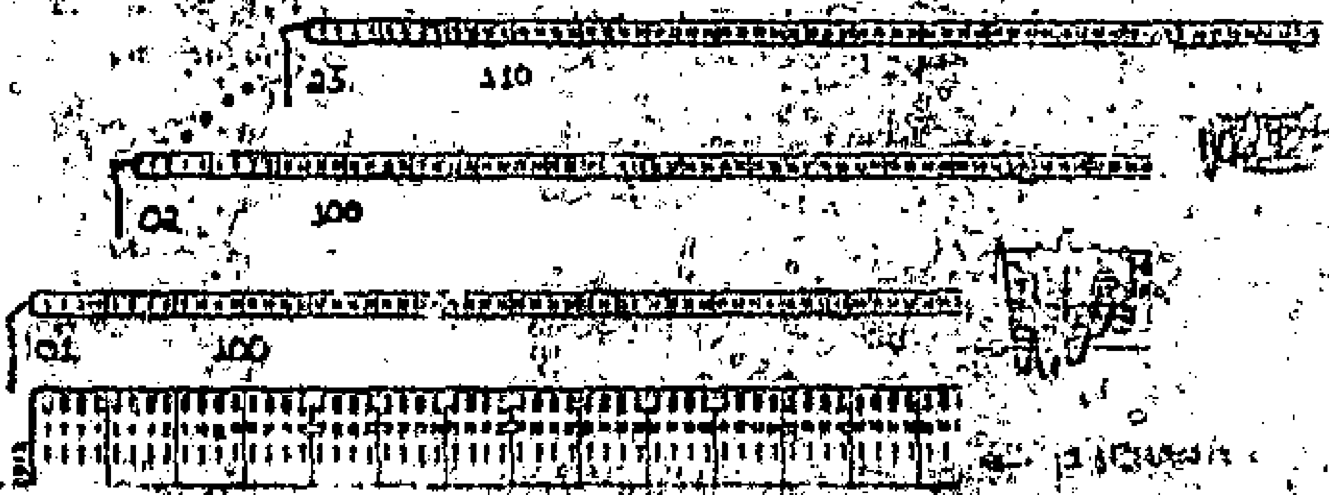
1a. Tarjeta (hasta 40 caracteres empezando de la columna 1)



En la 2a. Tarjeta pondremos en las columnas 1 y 2 el número de semanas que se analizan.



De la 3a. Tarjeta (y 24 año) pondremos en las primeras 2 columnas el número de la semana, y en las columnas 11, 12 y 13 la venta en consumo en esa semana



Los resultados arrojados por la computadora se ven en la figura 7, en caso en que los datos sean erroneos, la computadora imprimira el mensaje "algo esta mal en los datos"

PROGRAM INSYS FOR EXERC, [illegible] HARRIS

WEEK NO.	RETAIL SALES	REC	INV	ORDER	WHOLESALE SHIP	REC	INV	ORDER	FACTORY RATE
1	100	100	100	100	100	100	200	100	100
2	100	100	100	100	100	100	200	100	100
3	110	100	90	120	100	100	200	100	100
[illegible]	110	100	80	130	120	100	100	100	100
5	110	120	90	120	120	100	150	100	100
6	110	130	110	100	120	100	130	100	100
7	110	120	100	90	200	140	170	120	100
8	110	100	110	100	90	100	260	30	[illegible]
9	110	90	90	120	100	100	300	0	30
10	110	100	90	130	120	120	300		30
11	110	120	90	120	120	90	[illegible]		[illegible]
12	110	130	110	100	120	0	140	100	0
13	110	120	120	90	100	0	40	[illegible]	70
14	110	100	110	70	90	70	20	[illegible]	100
15	110	90	90	140	100	100	100	[illegible]	100
16	110	100	[illegible]	130	120	200	[illegible]		[illegible]
17	110	120	90	120	130	270	300		[illegible]
18	110	130	110	100	120	200	400		00
19	110	120	120	70	100	00	440		
20	110	100	110	100	90	0	350		
21	110	90	[illegible]	120	100	0	250	[illegible]	
22	110	100	[illegible]	130	120	0	110	100	
23	110	120	90	130	130	0		330	
24	110	130	110	[illegible]	100	00		32	[illegible]
25	110	120	110	90	100	100	[illegible]	[illegible]	[illegible]

26 WEEKS RUN

Que podemos decir de esta [illegible] comentarios.

De la [illegible] nada buena, puede [illegible] fluctuació [illegible] vendas de consumo [illegible] una fluctuación [illegible] en las ventas [illegible] y volúmenes de producción. Observamos que en la semana 20 el [illegible] su inventario 100 unidades, el [illegible] y el volumen de la fábrica va a [illegible] que hay que controlar el volumen de [illegible]

CONTROL DE REORDENES

En esta sección consideramos el problema de controlar la fluctuación en un sistema de inventarios, cambiando las políticas del menudeo y del mayoreo. El concepto básico es el de cargar un amortiguador. Esto se implementa cambiando la política de reorden haciendo decrecer la cantidad a surtir. La nueva política y el resultado de la computadora se muestran a continuación.

La política que habíamos seguido (con malos resultados) para el pedido de bienes en el menudeo era:

Ordenes de Menudeo = Ventas Menudeo + (100-nivel inventario)

Esta política parece a primera vista razonable, pero resulta ser miope, puesto que supone

a) Las ventas de la próxima semana serán las mismas que las ventas de la presente semana.

b) El inventario es resurtido de inmediato.

La primera suposición implica cierto riesgo para cualquier sistema, y la segunda resulta falsa en el modelo descrito.

Una manera de corregir lo anterior, es amortiguar las oscilaciones (ver fig 7)

(100-inventario)

vemos est

de 110 unidad

política Nueva

(100-50

(100 - 50)

bajan tendr

política Nueva

(100-110)

bio.

(50)

tica se

en el pr

siguiente

Tarjet

del número

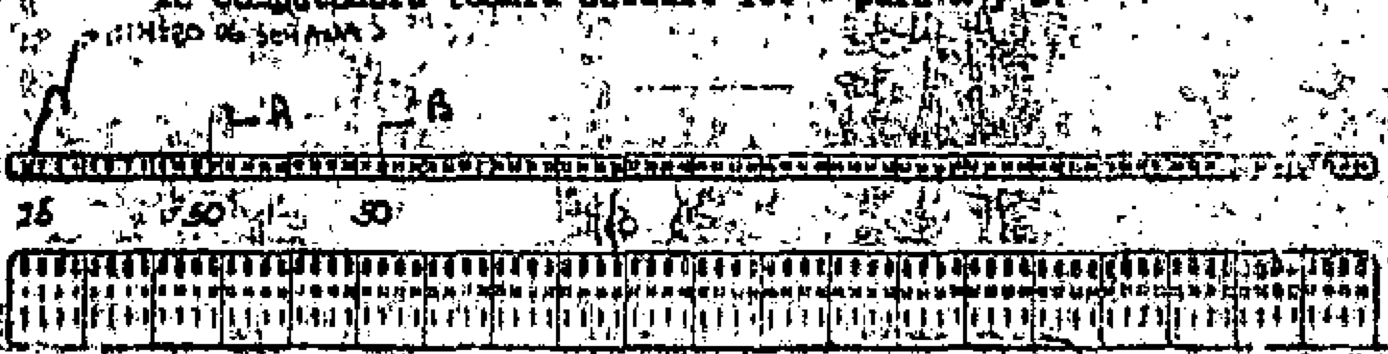
A y

11-

21-22 respectivamente, en

que

la computadora tomará default 100 para A y D.



los resultados obtenidos los podemos ver en las figuras

siguientes.

DATOS DE ENTRADA

EXERCISE TWO BY ROY HARRIS

25	50	50
01	100	
02	100	
03	110	
04	110	
05	110	
06	110	
07	110	
08	110	
09	110	
10	110	
11	110	
12	110	
13	110	
14	110	
15	110	
16	110	
17	110	
18	110	
19	110	
20	110	
21	110	
22	110	
23	110	
24	110	
25	110	

PROGRAM INSTS FOR EXERCISE TWO BY ROY HARRIS

WEEK	-------	RETAIL	-------		-------	WHOLESALE	-------		FACTORY
NO.	SALES	REC	INV	ORDER	SHIP	REC	INV	ORDER	RATE
1	100	100	100	100	100	100	200	100	140
2	100	100	100	100	100	100	200	100	140
3	110	100	90	116	100	100	200	100	140
4	110	100	80	120	115	100	185	123	140
5	110	115	85	116	120	100	165	134	140
6	110	120	95	113	116	100	140	[illegible]	123
7	110	116	103	10[illegible]	11[illegible]	123	156	134	130
8	110	113	105	108	107	138	106	116	144
9	110	109	104	108	108	164	223	[illegible]	134
10	110	108	101	109	108	136	240	94	110
11	110	108	99	110	109	116	254	81	[illegible]
12	110	109	99	111	110	96	240	[illegible]	[illegible]
13	110	110	99	110	111	84	214	[illegible]	[illegible]
14	110	111	100	110	110	82	185	118	[illegible]
15	110	110	100	110	110	90	165	127	[illegible]
16	110	110	100	110	110	104	150	13[illegible]	140
17	110	110	100	110	110	110	147	120	147
18	110	110	100	110	110	127	109	116	14[illegible]
19	110	110	100	110	110	130	205	107	140
20	110	110	100	110	110	120	221	[illegible]	[illegible]
21	110	110	100	110	110	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
22	110	110	100	110	110	107	[illegible]	[illegible]	[illegible]
23	110	110	100	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
24	110	110	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
25	110	110	100	110	110	[illegible]	106	[illegible]	[illegible]

25 WEEKS RUN $4,80[illegible]

En esta sección considera un control en el [illegible] control de adelanto en el tiempo).

El concepto básico es cambiar [illegible] para que el sistema responda a los cambios. Este concepto se implementa cambiando los [illegible] del sistema, así como el tiempo de cambio en los volúmenes de producción.

CONCEPTO DE ADELANTO DE TIEMPO

Dentro de circunstancias normal[illegible] tiempo en el sistema son 1.- la órden y [illegible] del menudeo y 2.- entre la órden y el [illegible] de bienes de [illegible] fábrica, y esto es:

ADELANTO NORMAL DE TIEMPO EN EL MENUDEO

Ordenado en — Entregado en

1a. semana Viernes — 3a. semana Lunes

ADELANTO NORMAL DE ADELANTO EN EL MAYOREO

Ordenado en — Cambio Volumen — Bienes Entregados

1a. semana Viernes — semana 3 — Lunes 4a. semana

Como notamos la fábrica toma 7 semanas para responder a un cambio en el menudeo.

Veamos que sucede si aminoramos el tiempo de adelanto cambiando la política.

REDUCCION DE TIEMPO EN EL MENUDEO

Ordenado en — Entregado en

Viernes 1a. semana — Lunes 2a. semana

Similarmente el tiempo de adelanto de mayoreo puede cambiarse si la fábrica cambia su volumen de producción sin tener una semana de retraso y si la fábrica hace los envios en el fin de la semana.

REDUCCION DE TIEMPO DE ADELANTO DEL MAYORISTA

Ordenado en — Cambio en — Entregado en

Viernes 1a. semana — semana dos — tercera semana

En la computación de ... de lo siguiente ...

El adelanto en pesos ... el consumo ...

... columna 31 y ... en la ...

... ta de control ... art.

...	50	90	1	1

... resultados obtenidos se ... los ...

... tras.

DATOS DE ENTRADA

	INDICE INGRESO		HARRIS
	50	30	1
[illegible]	10[illegible]		
[illegible]	10[illegible]		
	11[illegible]		
	11[illegible]		
[illegible]	11[illegible]		
[illegible]	11[illegible]		
[illegible]	11[illegible]		
[illegible]	11[illegible]		
[illegible]	11[illegible]		
[illegible]	11[illegible]		
[illegible]	11[illegible]		
[illegible]	11[illegible]		
4	11[illegible]		
1[illegible]	11[illegible]		
1[illegible]	11[illegible]		
1[illegible]	11		
1[illegible]	11[illegible]		
[illegible]	11		
1[illegible]	11		
2[illegible]	11	0	
[illegible]	11[illegible]		
[illegible]	11[illegible]		
[illegible]	11[illegible]		
[illegible]	11[illegible]		
[illegible]	11[illegible]		

PROGRAM INVSYS FOR EXERCISE THREE BY ROY HARRIS

WEEK	RETAIL				WHOLESALE				FACTORY
NO.	SALES	REC	INV	ORDER	SHIP	REC	INV	ORDER	RATE
1	100	100	100	100	100	100	200	100	100
2	100	100	100	100	100	100	200	100	100
3	110	100	90	115	115	100	185	123	100
4	110	115	95	113	113	100	173	126	123
5	110	113	98	111	111	123	184	119	126
6	110	111	99	111	111	126	199	111	119
7	110	111	99	110	110	119	208	106	111
8	110	110	100	110	110	111	209	106	106
9	110	110	100	110	110	106	205	107	106
10	110	110	100	110	110	106	201	110	107
11	110	110	100	110	110	107	198	111	110
12	110	110	100	110	110	110	198	111	111
13	110	110	100	110	110	111	199	111	111
14	110	110	100	110	110	111	200	110	111
15	110	110	100	110	110	111	200	111	110
16	110	110	100	110	110	110	201	110	110
17	110	110	100	110	110	110	200	110	110
18	110	110	100	110	110	110	200	110	110
19	110	110	100	110	110	110	200	110	110
20	110	110	100	110	110	110	200	110	110
21	110	110	100	110	110	110	200	110	110
22	110	110	100	110	110	110	200	110	110
23	110	110	100	110	110	110	200	110	110
24	110	110	100	110	110	110	200	110	110
25	110	110	100	110	110	110	200	110	110

26 WEEKS RUN 00.50

MODELO PARA ESTABLECER UNA POLITICA
DE REORDENES EN INVENTARIOS

El topico de este modelo será el de resurtir inventarios, el modelo aunque fundamental establece el tamaño del lote económico. Primeramente se desarrollará el modelo básico, después introducirá el descuento en el precio en la compra; al final se introduciran el efecto debido a la falta de material, así como limitaciones físicas del almacén y sus efectos en el inventario.

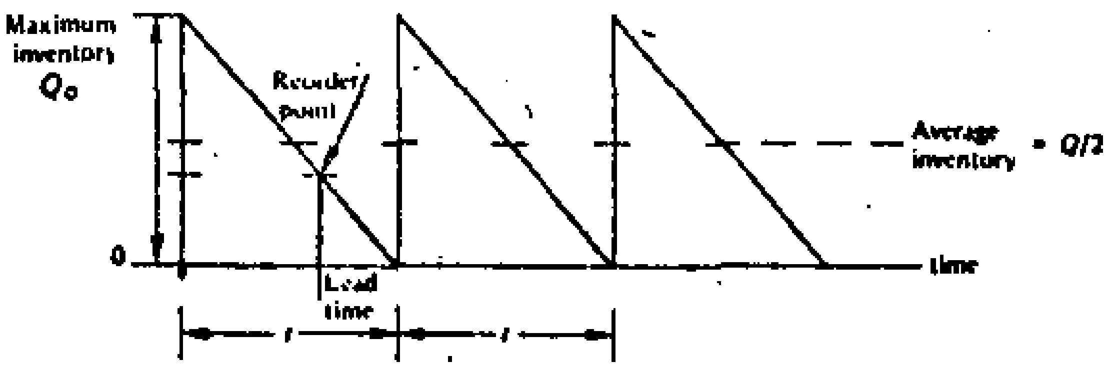
La única base que trataremos y bajo la cual estimaremos nuestro inventario es la económica. Existen costos asociados al tamaño (o vólumen) del inventario, impuestos, seguros, interés en el capital, etc. Existen también cos-- tos en que los cuales se incurre cada vez que se compra, - (por ejemplo: papelería, movimiento de materiales, etc.)

A través de este ejemplo veremos los efectos al cambiar las ordenes económicas.

LOTE ECONOMICO

En esta sección se introducen las bases para establecer el lote económico, así como los datos que hay que dar a la - computadora y los resultados de la misma.

La primera suposición en el modelo, es que el consumo - del inventario es constante a través del tiempo, y que se --



puede resurtir el inventario rápidamente, la cantidad de bienes en el inventario en cualquier tiempo puede verse en la figura 1.

COSTO DEL INVENTARIO

La base para determinar el nivel del inventario es la comparación entre costo de mantener un inventario y el costo de no mantener un inventario. El costo de mantener un inventario resulta ovbio, aunque no tanto el de no mantenerlo pues en este modelo se supone que el inventario se surte instantaneamente, parece a primera vista que no existe penalización si no se mantiene un inventario, este sería el caso del ama de casa la cual va 3 veces a la tienda para cada comida que tiene que hacer, obviamente hay un costo al adquirir bienes (además del bien en si).

El punto a tratar es el de establecer un modelo cuantitativo que nos determine el vólumen del inventario a lo largo del tiempo. Tendremos básicamente 2 costos, el primero de ellos será el de mantener un inventario, y el segundo de ellos será el costo que se incurre al ordenar bienes (o productos), estas dos curvas las podemos ver en la figura 2, la tercer curva que aparece en la parte superior de la figura es el costo total incremental que se sostiene de sumar las 2 curvas anteriores.

Costo Total Incremental = Costo de Mantener el Inventario + Costo de Compra.

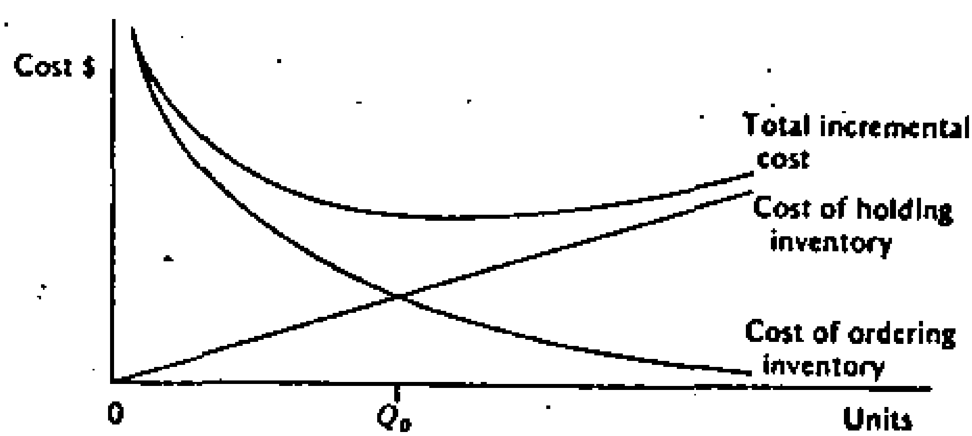


Fig. 2.

Costo de Mantener el Inventario = Promedio Inventario x(Costo Unitario de mantener el inventario por un año)

$$= \left(\frac{Q}{2}\right) \times (P \times Fh)$$

donde Q = cantidad ordenada

P = Precio unitario

Fh = costo anual unitario dado como porcentaje del precio unitario, Costo de Compra = (número de órdenes hechas por año) x (costo de cada órden)

$$= \left(\frac{R}{Q} \right) \times Cp$$

Donde:

R = unidades requeridas anualmente, (nivel de demanda)

Cp = Costo que se incurre al hacer cada compra

Este costo incluye (papelería, movimiento de materiales, etc)

Costo del Inventario = (precio unitario) x (requerimiento anual) = P x R

Costo total = Costo de Mantener el Inventario+costo de compra + costo de inventario

costo de mant. inv. — costo de compra — costo del inv.

$$\text{Costo Total} = \frac{QxPxPh}{2} + \frac{RxCp}{Q} + PxR$$

$$\text{Costo total incremental} = \frac{QxPxPh}{2} + \frac{RxCp}{Q}$$

El punto económico es donde las curvas del costo de mantener el inventario y costo de compra se cortan, a este punto de intersección le llamamos Q.

$$\frac{Q}{2} \; (P \times Ph) = \frac{R}{Q} \; Cp. \quad \text{— igualando las curvas.}$$

quitando denominador

$$Q (Q) (P \times PH) = 2R \times Cp$$

$$Q^2 = \frac{2RCp}{P \times FM}$$

$$Q = \sqrt{\frac{2R\,Cp}{PxFM}}$$

Otra manera de obtener el mismo resultado es igualando 1 a cero y derivando respecto a Q.

EJEMPLO

Se requiere determinar el lote económico dado

R = 1600 unidades (Requerimiento anual)

Cp = \$ 5.00 (costo de una compra)

P = \$ 1.00 (costo unitario del producto)

FM = 0.10 (costo unitario, mantener inventario)

$$Q = \sqrt{\frac{2x\ 1600 \times 5.00}{1.00 \times 0.1}} = 400 \text{ unidades}$$

$$\text{Costo Total (TC)} = \frac{400x1.00x0.1}{2} + \frac{1600x5.00}{400} + 1.00x1600$$

$$= 20 + 20 + 1600$$

$$TC = \$\ 1640$$

Hasta ahora el modelo resulta bastante simple (y los calculos), pero mas adelante se analizarán varias alternativas.

PROBLEMA RESUELTO CON COMPUTADORA

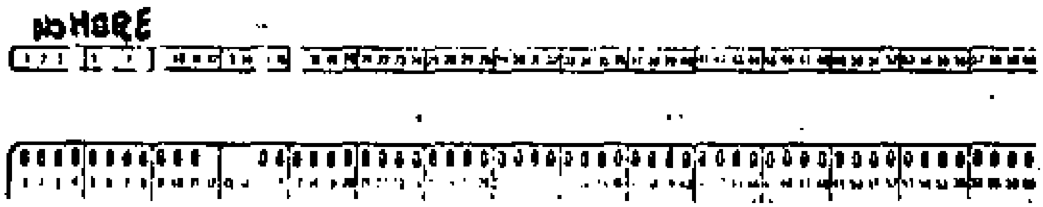
Resolvamos ahora el mismo problema utilizando el programa que se incluye.

Este programa es aplicable a sistemas de inventarios en los cuales la orden de compra y la cantidad son fijas, todas las cantidades son expresadas en anualidades, en este caso R. (requerimiento anual), se calcula a través del año, o sea, que hay que convertir las entradas de días, semanas o meses a la misma unidad de tiempo.

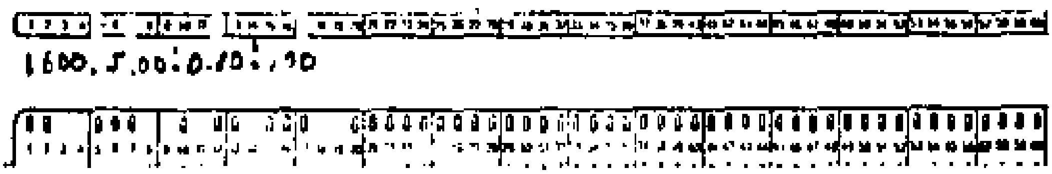
Este programa requiere además que costo de mantener un inventario, se exprese como porcentaje del valor unitario del inventario.

Se necesitan solamente dos tarjetas en este modelo.

La primera:



La segunda de datos:



La solución será

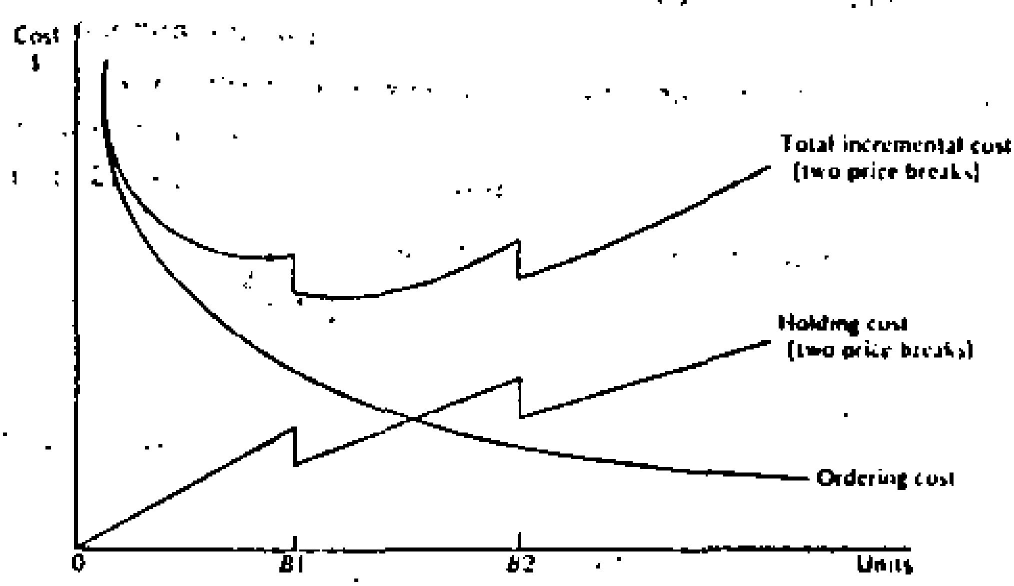
```
PROGRAM EOQ FOR HAGGARD EOQ PROBLEM ONE
INPUT DATA IS ***********
     R      CP     FH    P1     CS     B1     P2     B2    P3     W
  1600    5.00    .10  1.00      0      0      0      0     0     0

ANALYSIS RESULTS ARE ****
 OPTIMUM ORDER QUANTITY IS                              400.00
 AT A PRICE PER ITEM OF                                   1.00
 YIELDING A TOTAL INVENTORY COST OF                    1640.00
 WHERE THE NUMBER OF ORDER CYCLES PER YEAR IS             4.00
```

<u>DESCUENTOS</u>

El modelo pasado no incluye descuentos en el precio debido a cantidades compradas, sin embargo dichos descuentos existen en la realidad.

El costo total incremental (TIC) se verá afectado por dichos descuentos, tal como se ve en la figura 5.



El camino a seguir para determinar el lote optimo consiste el examinar la curva en cada punto de descuento, y puntos aledaños, veamos esto con el siguiente ejemplo:

Ejemplo Dos

El proveedor examina su política de ventas y ofrece los siguientes descuentos. Si se ordena un lote de tamaño B1 ($Q_{B1} = 300$) el precio unitario será de 0.90 (P_2) si se ordena una cantidad B2 ($Q_{B2} = 2000$) el precio -- unitario será de 0.80 (P_3)

<u>Solución:</u> (con dos descuentos)

Primero calcule Q3 usando P3, si es mas grande que - QB, ordene Q3, si es menos que QB no es una solución factible.

Segundo calcule Q2 usando P2 si $Q2 > Q\ B2$ ordene QB2

Si $Q2 < QB2$ pero mayor que QB1 ie $QB1 < Q2 < QB2$

Compare TC2 con TCB2

Si $TC\ 2 > TC\ B2$ ordene QB2

Si $TC\ 2 < TC\ B2$ ordene Q2

Si $Q2 < QB1$ calcule Q1

Si $Q1 > QB1$ entonces compare TC B1 con TCB2

Si $TCB1 > TC\ B2$ ordene QB2

Si $TC\ B1 < TC\ B2$ ordene QB1

R= 1600   PH = .10
CP = 5.00
P1, P2, P3   P1 1.00 , P2: .90 , P3: .80

Si Q1 $<$ QB1, compare TC1 con TCB1 y con TCB2

Ordene la cantidad correspondiente al mínimo costo total

$$Q_3 = \sqrt{\frac{2(1600)\ (5.00)}{0.80\ (\ 0.10\ )}} = 447.2 \ (\text{ usando } P_3\ )$$

Como $Q_3 < Q_{B2}$, calcule Q_2 usando P_2

$$Q_2 = \sqrt{\frac{2\ (1600)\ (5.00)}{0.90\ (\ 0.10\ )}} = 421.6 \ (\text{ usando } P_2\ )$$

Como Q_2 es menor que Q_{B2} (200) pero mayor que Q_{B1} (300) compramos TC_2 con TC_{B2}

$$TC_2 = \frac{(\ 0.90\ )\ (0.10)\ (421.6)}{2} + \frac{1600(5.00)}{421.6} + 1600\ (.90)$$

$$= 18.97 + 18.97 + 1440$$

$$= \$\ 1477.98$$

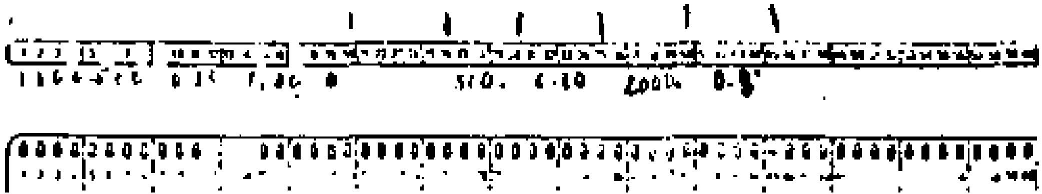
$$TC_{B2} = \frac{0.80\ (\ 0.10\ )\ (300)}{2} + \frac{1600\ (5.00\ )}{2000} + 1600\ (0.80)$$

$$= 80.00 + 4.00 + 1280.00$$

$$= 1364.00$$

Vemos que $TC_{B2} > Tc_2$ por lo que tenemos que ordenar cantidades B2 (Q_{B2} = 2000 a \$ 0.80/unidad)

En la Computadora



La segunda tarjeta sería.

COLUMNA	FORMATO	DATO
1-5	F5.0	Requerimiento anual
6-10	F5.0	Costo de Compra
11-15	F5.0	Costo de Mantener el Inventario
16-20	F5.0	Precio unitario
21-25	F5.0	Costo de falta de material
26-30	F5.0	Cantidad mínima de compra-1er.descuento Q1
31-35	F5.0	Precio unitario 1er. descuento P1
36-40	F5.0	Cant. mínima de compra-2o. descuento Q
41-45	F5.0	Precio unitario segundo descuento P2

y los resultados serán:

```
PROGRAM EOQ FOR HAGGARD EOQ PROBLEM TWO, PRICE DISCOUNTS
INPUT DATA IS ***********
    R     CP    FH.    P1     CS    Q1    P2    Q2    P3    W
  1600  5.00   .10   1.00     0   300   .90  2000   .80    0

ANALYSIS RESULTS ARE ****
 OPTIMUM ORDER QUANTITY IS                        2000.00
 AT A PRICE PER ITEM OF                               .80
 YIELDING A TOTAL INVENTORY COST OF               1304.00
 WHERE THE NUMBER OF ORDER CYCLES PER YEAR IS         .80
```

COSTOS DEBIDOS A LA FALTA DE MATERIA EN INVENTARIO

Estas son debidas a que una orden no puede surtirse debido a la falta de material en inventario, y estos costos generalmente son:

A) posible baja en las ventas

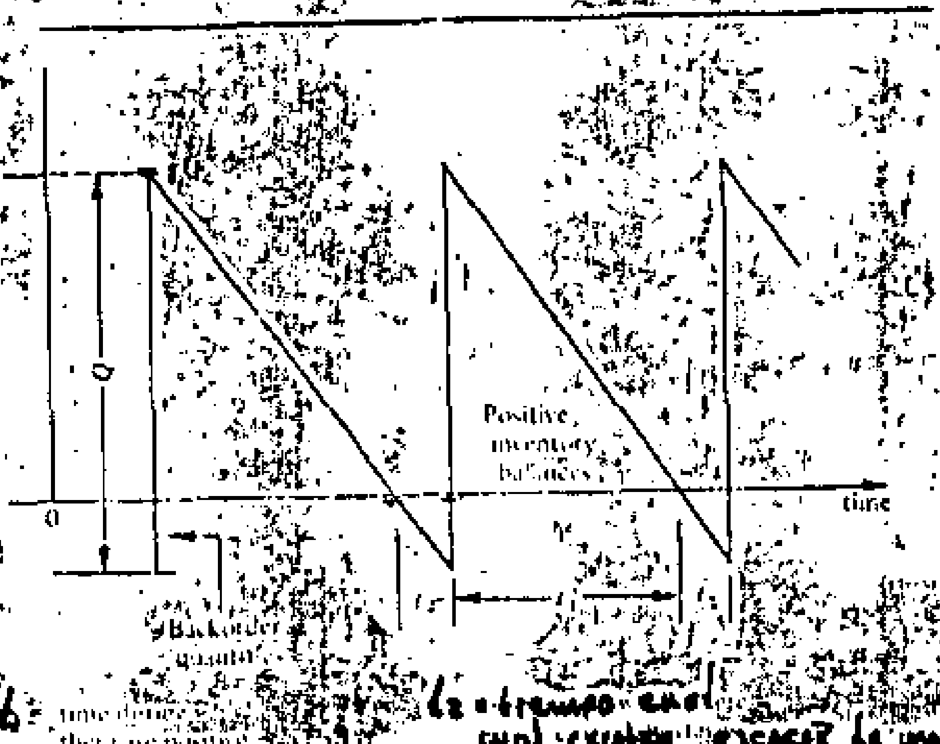
b) posible pérdida de clientes

c) no poder satisfacer pedidos urgentes

d) En caso de producción parar algún equipo debido a la falta de piezas para su reparación, etc.

e) tener lotes incompletos

Un inventario en el cual falta material se verá de la siguiente forma:



es el tiempo en el cual existen escasez la cual es

Otro tiempo durante el cual se mantiene un balance positivo

Se permiten Q- Backorders

Las Fórmulas Básicas serán:

Cp-Costo que se incurre al hacer una compra (no cambia)

$$\frac{(P \times PH)(I_{max})}{2} \times t_1$$

C_2 = Costo de mantener un inventario positivo

t_1 = tiempo en el cual se tiene un balance positivo (fracción anual)

Imax = Nivel máximo de inventario

como

$$t_1 = \frac{I\ max}{R}$$

Podemos Escribir

$$\frac{(P \times PH)\ I^2\ max}{2\ R}$$

$$Co = \frac{(Q - I\ max)^2}{2\ R}$$

Donde Co= Costo por falta de Material.

El costo total incremental se obtiene en un ciclo t1 + t2 es

$$Cp + (P \times PH)\ \frac{(I^2\ max)}{2\ R} + \frac{Co\ (Q - I\ max)^2}{2\ R}$$

El costo total incremental será:

$$TIC = \underbrace{\frac{R \times C_p}{Q}}_{} + \underbrace{\frac{(P \times PH)\ (I^2\ max)}{2Q}}_{} + \underbrace{\frac{Co\ (Q - Imax)^2}{2Q}}_{}$$

Para determinar los valores optimos de Q e I max, tomaremos derivadas parciales de la ecuación anterior con respecto a Q, e I max y obtenemos:

$$Q = \sqrt{\frac{2RCp}{P \times PH}} \times \sqrt{\frac{(P \times PH) + Co}{Co}}$$

$$I_{max} = \sqrt{\frac{2RCp}{P \times FH}} \times \sqrt{\frac{Cs}{(P \times FH) + Cs}}$$

$$TIC = \sqrt{2(P \times FH)\, RCp} \times \sqrt{\frac{Cs}{(P \times FH) + Cs}}$$

En la Computadora:

Lo único que hay que hacer en las columnas 21-925 perforar el costo de falta de material, para el caso que se ha venido utilizando el Cs = $ 0.30.

Los resultados serán:

```
PROGRAM EOQ FOR HAGGARD EOQ PROBLEM THREE, SHORTAGE COST
INPUT DATA IS ************
     R     CP     FH     P1     CS     R1     P2     H2     P3     W
  1600   5.00    .10   1.00    .30      0      0      0      0     0

ANALYSIS RESULTS ARE ****
 OPTIMUM ORDER QUANTITY IS                                 461.88
 WITH OPTIMUM INVENTORY OF                                 346.41
 AT A PRICE PER ITEM OF                                      1.00
 YIELDING A TOTAL INVENTORY COST OF                       1634.64
 WHERE THE NUMBER OF ORDER CYCLES PER YEAR IS                3.46
```

ESTO MISMO PROGRAMA PUEDE AMPLIARSE, LIMITANDO EL TAMAÑO FISICO DEL INVENTARIO, ESTO ES

$$I_{max} \leq X \qquad Q = \sqrt{\frac{2C_pR_t + (P \times FH) I_{max}^2 + C_s I_{max}^2}{C_s}}$$

DIRECTORIO DE ASISTENTES AL CURSO: INGENIERIA ECONOMICA DE COSTOS Y DE OPTIMIZACION, DEL 10 DE AGOSTO AL 8 DE SEPTIEMBRE DE 1979.

NOMBRE Y DIRECCION	EMPRESA Y DIRECCION
1. GERARDO AGUILAR SASAGURI Campana 15-12 Col. Ins. Mixcoac Tel. 550-25-33	DELEGACION ALVARO OBREGON Av. Revolución y Madero Col. San Angel México 20, D. F. Tel. 550-25-33
2. OSCAR M. ARENAZA GONZALEZ Av. Talismán 123 Col. Estrella México 14, D. F. Tel. 759-14-73	MEXICO COMPAÑIA CONSTRUCTORA, S. A. Insurgentes Sur 432-8° piso Col. Roma Sur México 7, D. F. Tel. 574-01-22 ext. 146
3. ARMANDO ARIAS MONROY And. 37 del temoloco triplex 12-5 Col. Acueducto de Gpe. México 14, D. F. Tel. 392-08-22	DELEGACION DE COYOACAN Jardín Hidalgo No. 1 Col. Del Carmen México 20, D. F. Tel. 554-78-22 Ext. 110-112
4. EMILIO CARLOS ARTEAGA RIOS Río de la Loza 148-10 Col. Doctores México 7, D. F. Tel. 578-40-36	S.A.R.H. Reforma 35-Mezzanine Tel. 546-59-28
5. MA. ELENA BARRAZA DE MARQUEZ Mitla 113 Col. Narvarte México 12, D. F. Tel. 519-76-06	S.A.H.O.P. Xola y Universidad Col. Narvarte México 20, D. F. Tel. 530-33-36
6. FRANCISCO JAVIER CALDERON Manuel Ma. Contreras 32-14 Col. San Rafael México 4, D. F. Tel. 592-33-50	DELEGACION ALVARO OBREGON Av. Revolución y Madero Col. San Angel México 20, D. F. Tel. 550-25-33

DIRECTORIO DE ASISTENTES AL CURSO: INGENIERIA ECONOMICA DE COSTOS Y DE OPTIMIZACION, DEL 10 DE AGOSTO AL 8 DE -- SEPTIEMBRE, DE 1979.

NOMBRE Y DIRECCION	EMPRESA Y DIRECCION
7. HUGO NORBERTO CICERI Cuauhtémoc 918-4 Col. Narvarte México 12, D. F.	E.N.E.P. ZARAGOZA, UNAM Calz. Ignacio Zaragoza s/n Col. Ejército de Oriente México 9, D. F. Tel. 765-10-95
8. OFELIA CRUZ VALDEZ Retorno 45 Av. del Taller 24-C Col. Jardín Balbuena México 9, D. F. Tel. 552-14-97	S.A.R.H. Reforma 51-15° piso Col. Centro México 1, D. F. Tel. 566-97-83
9. VICTOR SINUHE DAMM RAMIREZ Río Elota 188 ote. Col. Guadalupe Cd. Culiacán, Sin. Tel. 2-48-33 3-53-32	INDUSTRIAS ALUMINIO CONSTRUCTA, S.A. Niños Héroes 2485 Col. Jardín del Bosque Guadalajara, Jal. Tel. 21-60-49
10. MANUEL DAVILA FIGUEROA Dr. Atl. No. 6-2° Piso Col. Sta. Ma. la Ribera México 4, D. F. Tel. 535-12-73	S.A.R.H. Dr. Atl. 6-2° piso Col. Sta. Ma. la Ribera México 4, D. F. Tel. 535-19-40
11. JESUS MA. DE LA GARZA RODRIGUEZ Félix Cuevas 904-401 Col. del Valle México 12, D. F. Tel. 559-57-07	GRUPO ICA Minería 145 Col. Escandón México 18, D. F. Tel. 516-04-60 ext. 825
12. JOSE AGUSTIN DE OVANDO PACHECO Loma de Vista Hermosa 418 Col. L. Vista Hermosa México 10, D. F. Tel. 570-23-33	PETROLEOS MEXICANOS Marina Nacional 329 Col. Anzures México 17, D. F. Tel. 250-08-56

DIRECTORIO DE ASISTENTES AL CURSO: INGENIERIA ECONOMICA DE COSTOS DE OPTIMIZACION, DEL 10 DE AGOSTO AL 8 DE SEPTIEMBRE DE 1979.

NOMBRE Y DIRECCION	EMPRESA Y DIRECCION
13. RUBEN DIAZ NOGUEZ Av. Cuauhtémoc 2 Bis. San Juán Teotihuacan	DIESEL NACIONAL, S.A. Domicilio Conocido Cd. Sahagún, Hgo. Tel. 3-05-00 ext. 294
14. MOISES DIAZ GUZMAN Calle R-34-1 Unidad Alianza Popular México 21, D. F. Tel. 250-08-56	PETROLEOS MEXICANOS Marina Nacional 329-8° piso B-1 Col. Anzures México 17, D. F. Tel. 250-08-56
15. JUAN MANUEL FERNANDEZ CORONA Tapioca No. 104 Col. Esmeralda México 13, D. F. Tel. 582-80-43	S.A.H.O.P. Xola y Universidad Col. Narvarte México 12, D. F. Tel. 530-33-36
16. RAUL FLORES PABLO Honduras 67 Col. Centro México 1, D. F.	D.D.F. Revolución y Madero Col. San Angel México 20, D. F. Tel. 550-25-33
17. JORGE FLORES SANCHEZ Volcán Tayamulco 27 Col. Ampliación Providencia México 14, D. F. Tel. 794-16-25	HOOVER MEXICANA, S.A. DE C.V. Norte 45 No. 502 Col. Industrial Vallejo México 15, D. F. Tel. 537-02-00
18. CARLOS W. GARCIA PESCADOR Lerdo 272-420 E Edif. Fco. Zarco Unidad Tlatelolco México 3, D. F. Tel. 583-10-42	S.A.H.O.P. Xola y Universidad Col. Narvarte Tel. 530-33-36

DIRECTORIO DE ASISTENTES AL CURSO: INGENIERIA ECONOMICA DE COSTOS Y DE OPTIMIZACION, DEL 10 DE AGOSTO AL 8 DE SEPTIEMBRE DE 1979.

NOMBRE Y DIRECCION	EMPRESA Y DIRECCION
19. GUILLERMO GASTELUM GAXIOLA Rumanía 309-7 Col. Portales México 13, D. F. Tel. 532-21-62	S.A.R.H. Reforma 51-15° piso Col. Centro México 1, D. F. Tel. 535-54-83
20. ARMANDO GUERRERO RODRIGUEZ Cruz Azul 263 Col. Industrial México 14, D. F. Tel. 537-78-05	DELEGACION ALVARO OBREGON Revolución y Madero Col. San Angel México 20, D. F. Tel. 550-25-33 ext. 161
21. MOISES HERNANDEZ MIRANDA 1°. de mayo 63 Bis Col. Nativitas México 13, D. F. Tel. 579-49-28	S.A.R.H. Reforma 51-15° piso Col. Centro México 1, D. F.
22. SERGIO HURTADO PEDRAZA Albino García 270-6 Col. Viaducto Piedad México 13, D. F. Tel. 538-88-31	S.A.R.H. Ignacio Ramírez 20-4° piso Col. San Rafael México 4, D. F. Tel. 566-38-48
23. ADOLFO JIMENEZ ALGARIN Cto. las Fuentes 49 Col. Ftes. de Ecatepec Ecatepec, Edo. de México	S.A.R.H. Reforma 51-17° piso Col. Centro México 1, D. F. Tel. 566-97-69
24. ALEJANDRO ALFREDO JIMENEZ RAMIREZ Dr. Gastón Melo Andrade 101-B Pachuca, Hgo. Tel. 2-17-23	DIESEL NACIONAL, S.A. Cd. Sahagún Sahagún, Hgo. Tel. 3-05-00

DIRECTORIO DE ASISTENTES AL CURSO: INGENIERIA ECONOMICA DE COSTOS Y DE OPTIMIZACION, DEL 10 DE AGOSTO AL 8 DE SEPTIEMBRE DE 1979.

NOMBRE Y DIRECCION	EMPRESA Y DIRECCION
25. JOSE PERFECTO LARA GUERRERO Chihuahua 214 Fracc. Jacarandas Edo. de México Tel. 397-46-93	S.A.R.H. Plaza de la República 31-2° piso
26. ROBERTO A. LOPEZ ALVAREZ Natal 568 Col. Lindavista México 14, D. F. Tel. 587-54-70	COMISION DE AGUAS DEL VALLE DE MEXICO Balderas 55-3° piso Col. Centro México 1, D. F. Tel. 585-50-66 ext. 315
27. GILBERTO FRANCISCO LOPEZ GARCIA San Juan de Letrán 41-217 Col. Centro México 1, D. F.	ESTRUCTURAS Y CIMENTACIONES, S.A. Minería 145 Col. Escandón México 18, D. F. Tel. 516-04-60 ext. 119
28. MODESTO MALACARA CORONADO	S.A.H.O.P. Xola y Universidad
29. MARTHA MARGARITA MONOBE HERNANDEZ Av. Américas 81-201 Col. Moderna México 13, D. F. Tel. 566-60-27	S.A.R.H. Reforma 51-15° piso Col. Centro México 1, D. F. Tel. 566-97-92
30. DOROTEO MORALES ORTIZ Morelos 419 Pachuca, Hgo. Tel. 2-08-03	DIESEL NACIONAL, S.A. Cd. Sahagún Hgo. Tel. 3-05-00 ext. 294

DIRECTORIO DE ASISTENTES AL CURSO: INGENIERIA ECONOMICA DE COSTOS Y DE OPTIMIZACION, DEL 10 DE AGOSTO AL 8 DE SEPTIEMBRE DE 1979.

NOMBRE Y DIRECCION	EMPRESA Y DIRECCION
31. F. MUNGUIA V. Rocío 14 Col. A. Vista Hermosa Tlalnepantla, Edo. de Méx. Tel. 562-51-63	
32. ANDRES NAVARRETE RUIZ Calz. de la Viga No. 1418 Edif. D-402 Col. Sifón México 8, D. F. Tel. 670-34-10	DIESEL NACIONAL, S.A. Cd. Sahagún, Hgo. Tel. 3-05-00
33. ROBERTO NIGENDA VELASCO	COMISION FEDERAL DE ELECTRICIDAD
34. JOSE LUIS ONTIVEROS POCEROS M. 327 L-59 Av. 5° Sol No. 16 Ciudad Azteca Ecatepec, Edo. de Méx. Tel. 569-44-47	CIA. DE LUZ Y FUERZA DEL CENTRO Melchor Ocampo 171 Col. Anáhuac Tel. 546-11-55
35. SERGIO MIGUEL PEREZ LOPEZ Edif. H-9 4-23 Lomas de Plateros México 19, D. F.	DELEGACION ALVARO OBREGON Av. Revolución esq. Madero Col. San Angel México 20, D. F. Tel. 550-25-33
36. LUIS JESUS PAREDES CARBAJAL Río Lerma 50-F Col. Cuauhtémoc México 5, D. F. Tel. 514-54-06	LIQUID CARBONIC DE MEXICO, S.A. Pte. 48 No. 3804 Col. Clavería México 16, D.F. Tel. 527-61-94

DIRECTORIO DE ASISTENTES AL CURSO: INGENIERIA ECONOMICA DE COSTOS Y DE OPTIMIZACION, DEL 10 DE AGOSTO AL 8 DE SEPTIEMBRE DE 1979.

	NOMBRE Y DIRECCION	EMPRESA Y DIRECCION
37.	CUAUHTEMOC E. ROJAS IBARRA Cuauhtémoc 829-1 Col. Narvarte México 13, D. F.	SIDERURGICA NACIONAL Miguel Angel de Quevedo 980 Col. Coyoacán México 21, D. F. Tel. 658-15-00 Ext. 120
38.	MANUEL ROMERO RODRIGUEZ Amado Nervo 19 Col. Sta. Ma. la Ribera México 4, D. F. Tel. 541-03-02	CAPFCE Vito Alessio Robles Col. Tecoyotitla México 20, D. F. Tel. 554-67-91
39.	ING. JORGE RUIZ BLANCAS Faisán No. 9 Col. Fuentes de Satélite Edo. de Méx. Tel. 572-35-79	CIA. MEXICANA AEROFOTO, S.A. 11 de Abril 338 Col. Escandón México 18, D. F. Tel 516-07-40
40.	JUAN PABLO SENTIES SANTOS	COMISION FEDERAL DE ELECTRICIDAD
41.	OSCAR VERA SMITH Reforma 51-15° piso Col. Centro México 1, D. F. Tel. 566-97-83	S.A.R.H. Reforma 51-15° piso Col. Centro México 1, D. F. Tel. 566-97-83
42.	JORGE ZAMORA GARZA Retorno de las petunias 315 Col. la Florida Edo. de Méx. Tel. 562-37-42	PETROLEOS MEXICANOS Cerro Azul, Ver.

DIRECTORIO DE ASISTENTES AL CURSO: INGENIERIA ECONOMICA DE COSTOS Y OPTIMIZACION, DEL 10 DE AGOSTO AL 8 DE SEPTIEMBRE, 1979.

NOMBRE Y DIRECCION	EMPRESA Y DIRECCION
43. HECTOR F. QUIROZ VILCHIS Bélgica 1003 Col. Portales México 13, D. F. Tel. 532-26-00	S.A.R.H. Plaza de la República 31-7° piso Col. San Rafael México 4, D. F. Tel. 535-70-02
44. JOSE ALEJANDRO RAMIREZ FLORES Canarias 926-303 Col. Portales México 13, D. F.	CIA. DE LUZ Y FUERZA DEL CENTRO, S.A. Melchor Ocampo 171 Col. Anáhuac Tel. 518-00-80 ext. 213
45. FRANCISCO ROBLEDO ZEPEDA Olivo s/n esq. 2 de marzo Texcoco, Méx.	S.A.H.O.P. Xola y Universidad

EVALUACION DE LA ENSEÑANZA

Curso: INGENIERIA DE COSTOS Y OPTIMIZACION

Fechas: 10 de agosto al 8 de septiembre, 1979

	DOMINIO DEL TEMA	EFICIENCIA EN EL USO DE AYUDAS AUDIOVISUALES	MANT. DEL INTERES (AMENIDAD, FACILIDAD DE EXPRESION, COMUNICACION CON LOS ASISTENTES)	PUNTUALIDAD
Introducción (Dr. Víctor Gerez Greiser)				
Uso de Tabla y Claculadora en Ingeniería Económica y Ejemplos (Grijalva López)				
Interés continuo, rentabilidad e Inflación. (Grijalva)				
Simulación, problemas de inventario y colas. (Torres)				
Optimización de una y varias varibles y prog. (Torres)				
Programación no lineal (Torres)				
Programación dinámica (Gerez)				
Estimación (Cano)				
Control de Costos (Cano)				
ESCALA DE EVALUACION DEL 1 AL 10				

EVALUACION DEL CURSO

	CONCEPTO	EVALUACION
1.	APLICACION INMEDIATA DE LOS CONCEPTOS EXPUESTOS	
2.	CLARIDAD CON QUE SE EXPUSIERON LOS TEMAS	
3.	GRADO DE ACTUALIZACION LOGRADO CON EL CURSO	
4.	CUMPLIMIEN TO DE LOS OBJETIVOS DEL CURSO	
5.	CONTINUIDAD EN LOS TEMAS DEL CURSO	
6	CALIDAD DE LAS NOTAS DEL CURSO	
7	GRADO DE MOTIVACION LOGRADO CON EL CURSO	

ESCALA DE EVALUACION DE 1 A 10

1. ¿Qué le pareció el ambiente del Centro de Educación Continua?

Muy agradable ☐ Agradable ☐ Desagradable ☐

2. Medio de comunicación por el que se enteró del curso:

Periódico Excélsior ☐ Periódico Novedades ☐ Folleto del Curso ☐

Cartel mensual ☐ Radio Universidad ☐ Comunicación carta, teléfono, verbal, etc. ☐

3. Medio de transporte utilizado para venir al Palacio de Minería:

Automóvil particular ☐ Metro ☐ Otro medio ☐

4. ¿Qué cambios haría usted en el programa para tratar de perfeccionar el curso? ____________________

____

____

5. ¿Recomendaría el curso a otras personas? Si ☐ No ☐

6. ¿Qué curso le gustaría que ofreciera el Centro de Educación Continua? ____________________

____

____

7. ¿Qué servicios desearía que tuviese el CEC para los asistentes a cursos?

____

____

____

8. Otras sugestiones:

____

____

____