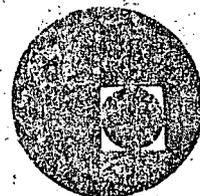




# centro de educación continua

división de estudios superiores  
facultad de ingeniería, unam



A LOS ASISTENTES A LOS CURSOS DEL CENTRO DE EDUCACION  
CONTINUA

Las autoridades de la Facultad de Ingeniería, por conducto del Jefe del Centro de Educación Continua, otorgan una constancia de asistencia a quienes cumplan con los requisitos establecidos para cada curso. Las personas que deseen que aparezca su título profesional precediendo a su nombre en la constancia, deberán entregar copia del mismo o de su cédula a más tardar el SEGUNDO DIA de clases, en las oficinas del Centro con la señorita encargada de inscripciones.

El control de asistencia se llevará a cabo a través de la persona encargada de entregar las notas del curso. Las inasistencias serán computadas por las autoridades del Centro, con el fin de entregarle constancia solamente a los alumnos que tengan un mínimo del 80% de asistencia.

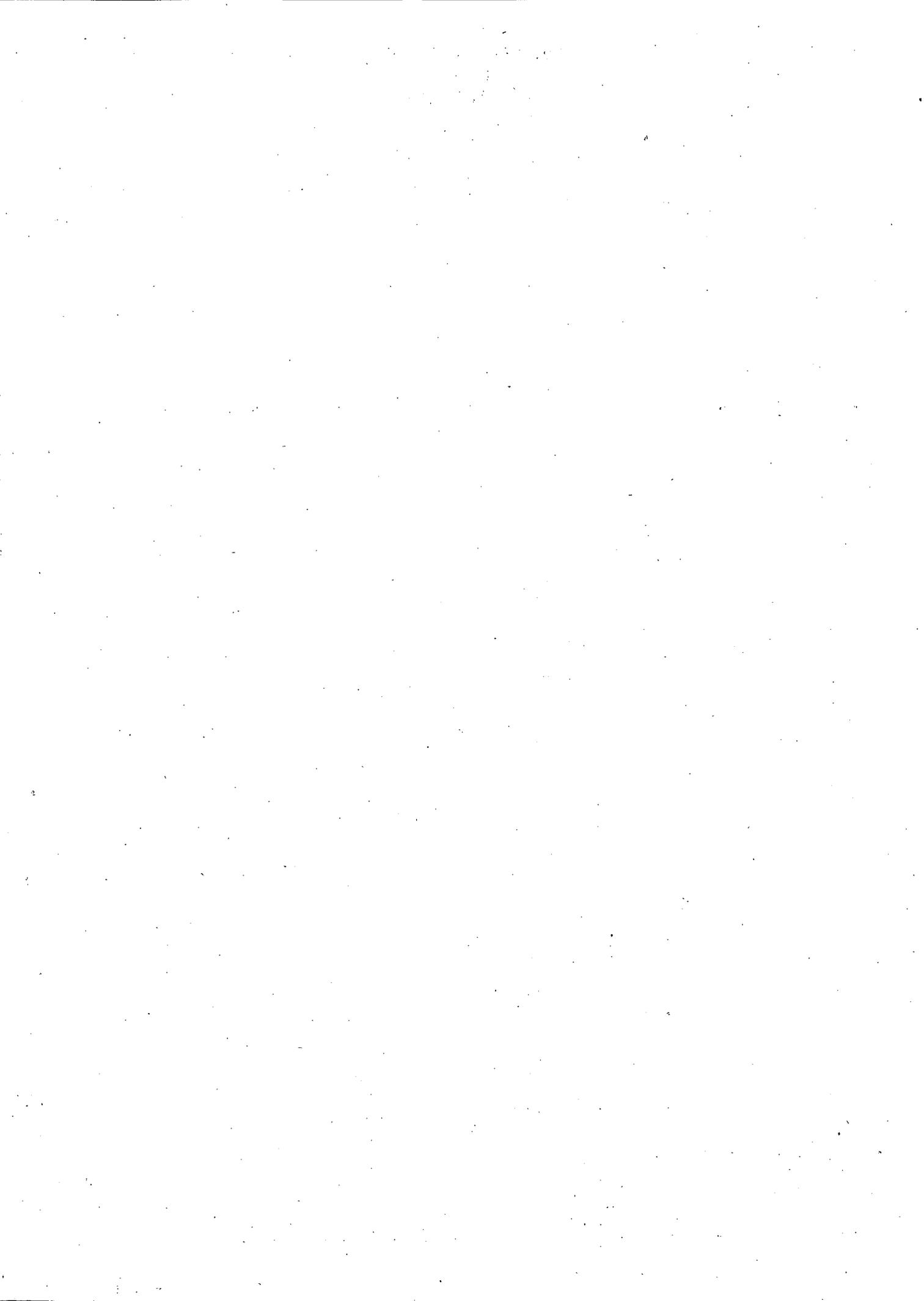
Se recomienda a los asistentes participar activamente con sus ideas y experiencias, pues los cursos que ofrece el Centro están planeados para que los profesores expongan una tesis, pero sobre todo, para que coordinen las opiniones de todos los interesados constituyendo verdaderos seminarios.

Es muy importante que todos los asistentes llenen y entreguen su hoja de inscripción al inicio del curso. Las personas comisionadas por alguna institución deberán pasar a inscribirse en las oficinas del Centro en la misma forma que los demás asistentes, entregando el oficio respectivo.

Con objeto de mejorar los servicios que el Centro de Educación Continua ofrece, al final del curso se hará una evaluación a través de un cuestionario diseñado para emitir juicios anónimos por parte de los asistentes.







CURSO: APROVECHAMIENTOS HIDRAULICOS  
 FECHA: 16 al 27 de Octubre, 1978  
 HORARIO: Lunes a viernes de 17:00 a 21:00 h

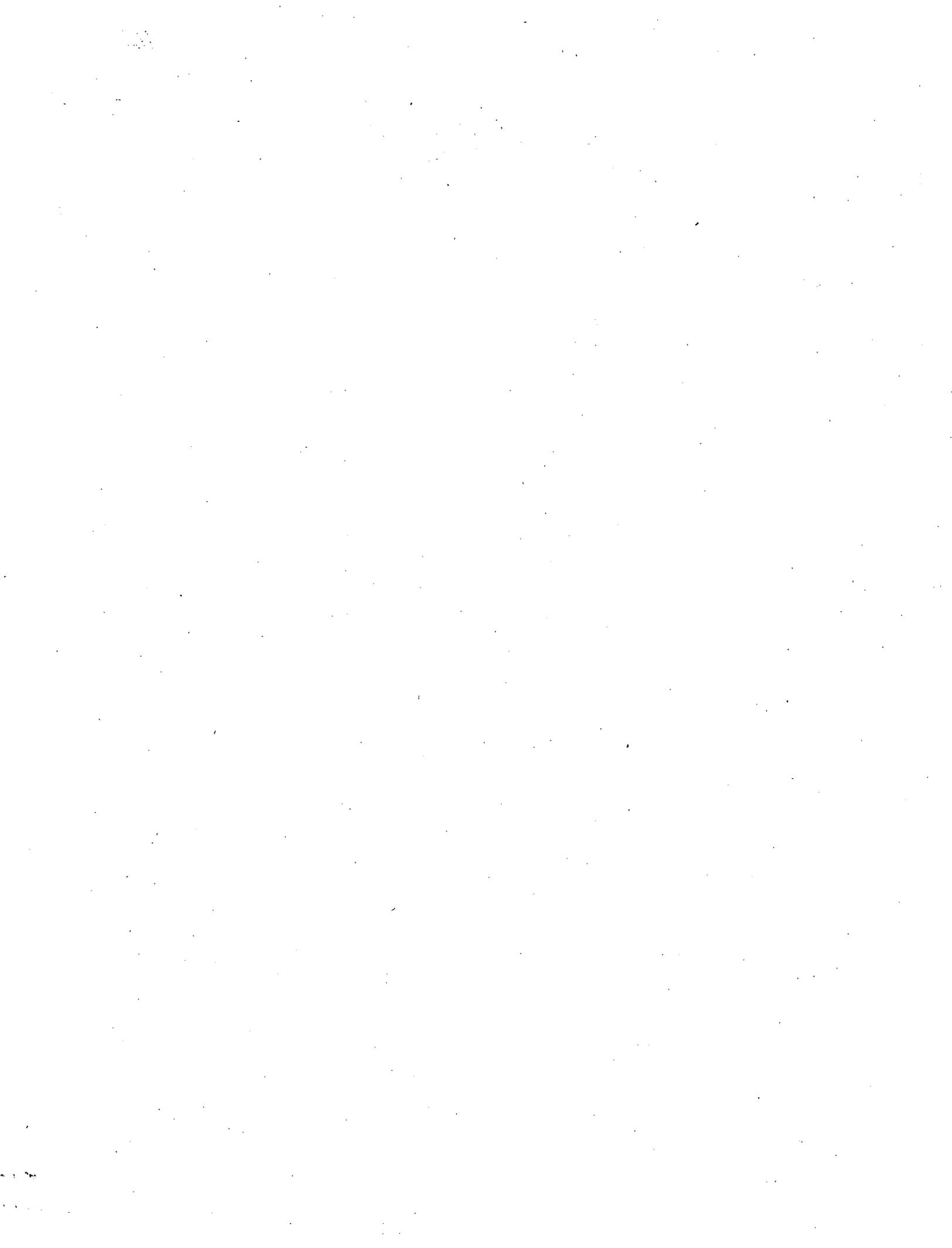
TEMA R I O	PROFESOR	FECHA	HORARIO
1. NATURALEZA DE LOS SISTEMAS	M. en I. Guillermo Ortega	Lunes 16 de octubre	17:00-21:00
1.1 Ciclo hidrológico. Fuentes y usos del agua. Disponibilidad.			
1.2 Características hidrológicas de los sistemas de aprovechamientos hidráulicos.			
1.3 Componentes estructurales de los sistemas de aprovechamientos hidráulicos. Sistemas de capacitación. Sistemas de conducción. Sistemas de distribución.			
2. INTRODUCCION A SU PLANEACION	Ing. Ricardo Martínez H.	Martes 17 de octubre	17:00-19:00
	Ing. Francisco Téllez G.	Martes 17 de octubre	19:00-21:00
2.1 Factores socio-políticos y legales de los aprovechamientos hidráulicos			
2.2 Naturaleza de los sistemas de aprovechamientos hidráulicos.			
3. METODOS Y TECNICAS DE ANALISIS	Ing. Francisco Téllez G.	Miércoles 18 de octubre	17:00-21:00
3.1 Simulación			
3.1.2 Series cronológicas			
3.1.3 Componentes principales			
3.2 Optimización	Ing. Francisco Téllez G.	Jueves 19 de octubre	17:00-21:00
3.2.1 Programación lineal			
3.2.2 Programación dinámica			
3.2.3 Optimización analítica			

## CURSO: APROVECHAMIENTOS HIDRAULICOS

TEMARIO	PROFESOR	FECHA	HORARIO
4. ANALISIS DE DECISIONES	Ing. Juan Huet Morales	Viernes 20, octubre	17:00-21:00
4.1 Sistemas determinísticos			
4.1.1 Conceptos básicos			
4.1.2 Técnicas de Optimización			
4.2 Sistemas probabilísticos. Decisiones bajo incertidumbre			
4.2.1 Conceptos básicos. Reglas de decisión. Utilidad.			
4.2.2 Decisiones Bayesianas. Cálculo de estrategias. Estimación.			
4.3 Aplicaciones a Sistemas Hidráulicos			
4.4 Aplicación de análisis microeconómico a problemas de Decisión.	M. en I. Alexis Aguilar	Lunes 23, octubre	17:00-21:00
4.4.1 Introducción a los elementos de microeconomía			
4.4.2 Planteamiento de los problemas			
5. EVALUACION			
5.1 Conceptos de Evaluación.	M. en C. César Herrera T.	Martes 24, octubre	17:00-21:00
5.1.1 Conceptos de análisis económicos			
5.1.2 Factores de descuento. Tasa de interés.			
5.1.3 Valor presente. Anualidades.			
5.1.4 Relación B/C. Beneficio marginal			
5.1.5 TIR			
5.2 Evaluación de Proyectos	Ing. Francisco Tapia García	Miércoles 25, octubre	17:00-21:00
5.2.1 Riego			
5.2.2 Control de Avenidas			
5.2.3 Usos Múltiples			

CURSO: APROVECHAMIENTOS HIDRAULICOS

T E M A R I O	PROFESOR	FECHA	HORARIO
5.3 Evaluación bajo incertidumbre en un contexto de Objetivos Múltiples. Casos Prácticos.			
5.3.1 El Problema de objetivos y atributos múltiples.			
5.3.2 Desarrollo Nacional vs. Desarrollo Regional.			
5.3.3 Aplicaciones en aprovechamientos hidráulicos.			
5.3.4 Las componentes de incertidumbre en los problemas de evaluación			
5.3.5 Manejo de la incertidumbre (enfoque en primer orden)			
5.3.6 Casos prácticos			
5.3.7 Alcances y limitaciones de las metodologías analizadas	Dr. Jorge Díaz Padilla	Jueves 26, octubre	17:00-21:00
6. PLANEACION DE LOS SISTEMAS DE APROVECHAMIENTOS HIDRAULICOS			
6.1 El proceso de Planeación	Ing. Ricardo Martínez H.	Viernes 27, octubre	17:00-19:00.
6.2 Objetivos y Metas. Coordinación de Programas.			
6.3 Factores Humanos			
6.4 Interacción del Agua con otros recursos			
7. MESA REDONDA	Dr. Rolando Springall G.	Viernes 27, octubre	19:00-21:00



DIRECTORIO DE PROFESORES DE APROVECHAMIENTOS HIDRAULICOS

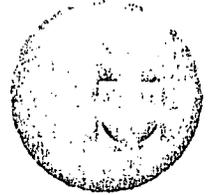
1. ING. ALEXIS AGUILAR MALDONADO  
Jefe de Proyecto  
IPESA  
San Lorenzo No. 153-6° Piso  
575-40-77 ext. 34
2. DR. JORGE DIAZ PADILLA  
Director Técnico  
Felipe Ochoa Rosso y Asociados  
Av. Revolución # 1909-7° Piso  
México 19, D.F.  
548-92-11
3. ING. CESAR HERRERA TOLEDO  
Director de Formulación y Verificación  
Comisión del Plan Nacional Hidráulico  
Tépic # 40-2° Piso  
578-30-20
4. ING. JUAN HUET MORALES  
Jefe de la Unidad de Supervisión  
Dirección General de Estudios  
Secretaría de Agricultura y Recursos -Hidráulicos  
Reforma # 20-Mezanine  
592-22-45
5. ING. RICARDO MARTINEZ H.  
Asesor  
Dirección General de Construcción y Operación Hidráulica  
Departamento del Distrito Federal  
761-39-97
6. ING. GUILLERMO ORTEGA GIL  
Director de la Zona Norte  
Comisión del Plan Nacional Hidráulico  
Tépic # 40-1° Piso  
584-72-01
7. DR. ROLANDO SPRINGALL G.  
Consultores, S. A.  
Insurgentes Sur # 254-Desp. 507  
México, D.F.  
584-77-88
8. ING. FRANCISCO TAPIA  
Director de la Zona Pacífico Centro y Norte  
Comisión del Plan nacional Hidráulico  
Tépic # 40-1° Piso  
584-72-01

9. ING. FRANCISCO TELLEZ GRANADOS  
Jefe del Laboratorio de Hidráulica  
Marítima, Dirección General de Obras  
Marítimas.  
Secretaría de Comunicaciones y Transporte  
San Juan Ixhuatepec, Edo. de México  
569-28-37

'mrs



centro de educación continua  
división de estudios superiores  
facultad de ingeniería, unam

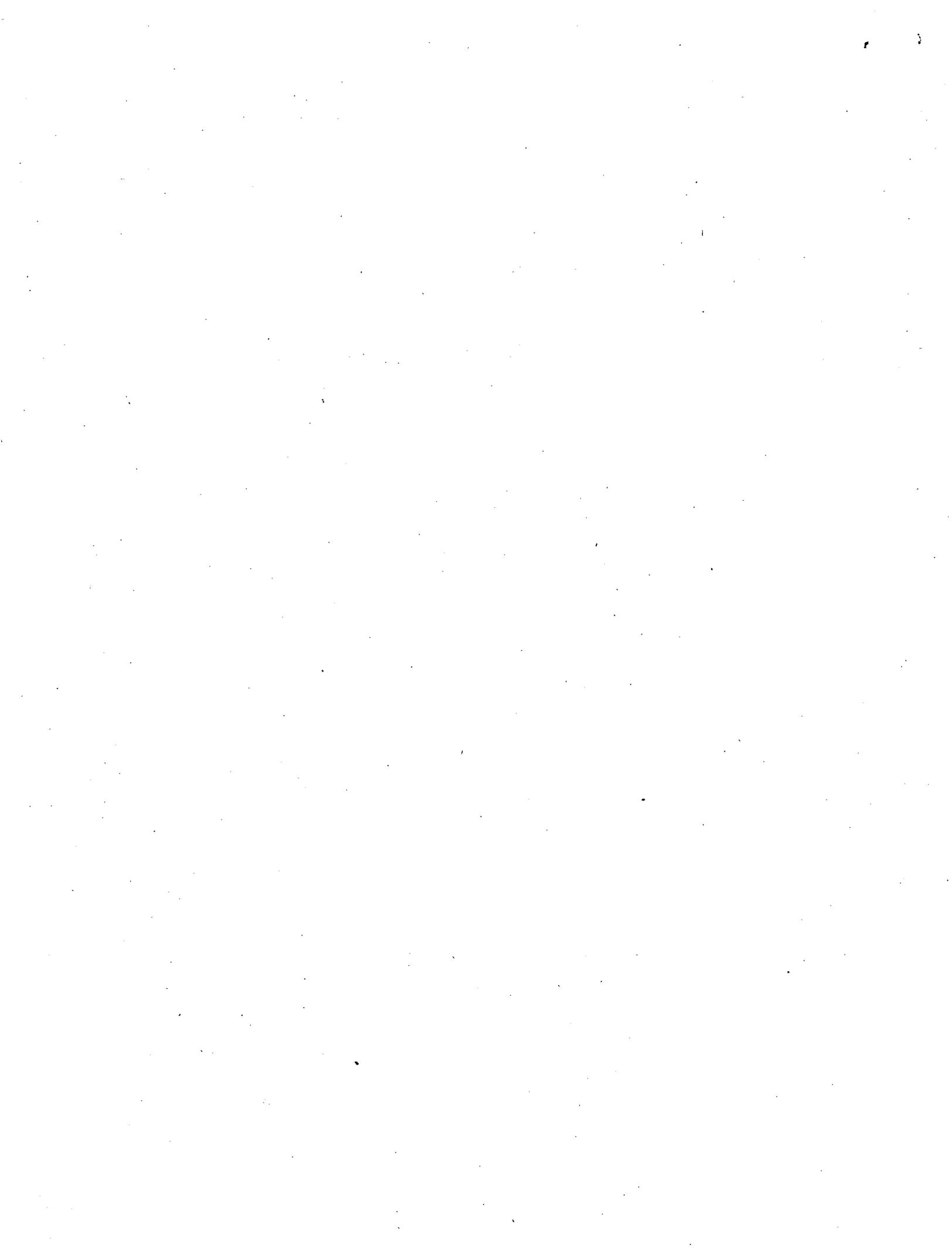


APROVECHAMIENTOS HIDRAULICOS

NATURALEZA DE LOS SISTEMAS

ING. GUILLERMO ORTEGA GIL

OCTUBRE, 1978



## 1. NATURALEZA DE LOS SISTEMAS

### 1.1 Introducción.

A medida que se desarrolla el país y aumenta el número de sus habitantes, crece paralelamente la demanda de agua para todos los usos.

La necesidad de más alimentos, de más satisfactores y servicios-cuya producción implica el riego de superficies mayores de cultivo y el incremento sustancial de la actividad industrial- impone al agua usos cada vez más variados y competitivos. Sin embargo, conviene indicar que su volumen disponible, tanto a nivel nacional como regional, está crudamente limitado por factores geográficos y morfológicos que solo en forma parcial y a muy alto costo se pueden modificar.

La acelerada concentración de grandes grupos humanos en unas cuantas ciudades o regiones hace que las fuentes de aprovechamiento local resulten bien pronto insuficientes. La creciente contaminación -por los desechos de la actividad humana- de los mares, lagos, ríos y otros cuerpos de agua, así como la paulatina degradación de los suelos y la vida silvestre complican y dificultan el aprovechamiento y la preservación del recurso, constituyendo todo ello seria amenaza para el bienestar futuro del hombre (Plan Nacional Hidráulico, 1975).

En consecuencia, al pensar cual es el objetivo final de un

proyecto particular de aprovechamientos hidráulicos, pueden surgir como respuestas posibles producir más electricidad, asegurar la dotación de agua potable, incrementar la producción de alimentos, o alguna otra de esa naturaleza. Sin embargo, se debe admitir que más electricidad o más alimentos no son fines propiamente dichos, ya que en realidad son medios para alcanzar el fin último que es el bienestar de la sociedad.

Si bien el término "bienestar de la sociedad" depende mucho del tipo de personas que conforman la misma, y por lo tanto es bastante difícil definirlo, en cambio si es posible, nombrar una lista de condiciones de vida que pueden proporcionar los ingredientes de lo que se llama bienestar social (E. Kuiper, 1971):

- Comida y vivienda
- Seguridad individual y colectiva
- Salud
- Educación
- Trabajo
- Cierta nivel de cultura, etc.

Sin duda hay algunas características que pueden sumarse a esa lista, así como la importancia de las mismas dependerá de la persona que la elabore. No obstante, lo que se quiere resaltar con esta breve discusión, es el hecho que el objetivo final de todo aprovechamiento hidráulico es el hombre.

Con esa idea en mente, se ha propuesto un procedimiento racional para diseñar los aprovechamientos hidráulicos según los siguientes pasos (A. Maass, et al, 1962):

- a. Identificar los objetivos del proyecto.
- b. Traducir esos objetivos en criterios de diseño.
- c. Utilizando los criterios de diseño formular alternativas con los sistemas específicos de aprovechamientos hidráulicos que mejor cumplan con los criterios establecidos en el punto b.
- d. Evaluar las consecuencias de las alternativas que se formulen.

a. Identificación de los objetivos

Los objetivos de las acciones para el aprovechamiento de los recursos hidráulicos constituyen las orientaciones básicas para cada actividad y se relacionan estrechamente con los aspectos sociales, económicos y de preservación del medio ambiente incluidos en los objetivos nacionales.

Por ejemplo, los objetivos de irrigación y drenaje vinculados con los aspectos sociales de los objetivos nacionales son (Plan Nacional Hidráulico, 1975):

- Contribuir al incremento de la producción agropecuaria, mediante el uso y manejo de los recursos hidráulicos para generar empleo.
- Propiciar el desarrollo rural mediante obras hidroagrícolas.

En general, el principal objetivo de un proyecto de desarrollo de los aprovechamientos hidráulicos puede interpretarse como (N. Buras, 1972):

i) Lograr la eficiencia económica. Esto se refiere a que fijado un objetivo económico, los diferentes componentes del proyecto se traducen en costos y beneficios del mismo.

Como una regla general, los beneficios deben exceder a los costos por un margen suficientes que hagan la propuesta más atractiva que los esquemas alternativos que compiten para alcanzar el objetivo seleccionado.

El éxito de este procedimiento depende del grado con que las ganancias y costos de un proyecto de aprovechamientos hidráulicos pueda cuantificarse.

- ii) Redistribución del ingreso en una región.
- iii) Generación de empleos.
- iv) Promover y apoyar el crecimiento económico.

v) Alcanzar ciertos objetivos no cuantificables como puede ser promover los asentamientos humanos en áreas de escasa densidad demográfica.

b. De los objetivos al criterio de diseño.

Cualquiera que sea la interpretación que se le de al objetivo del proyecto, los tres problemas siguientes deben resolverse en conjunto:

i) Determinar el criterio para seleccionar el mejor diseño, en términos físicos, de las estructuras y componentes del proyecto. Por ejemplo: presas, plantas de generación, estaciones de bombeo, canales, conductos a presión, etc.

ii) Determinar la escala de desarrollo del proyecto. Esto se refiere a fijar las extracciones para riego, generación de energía, nivel de control de avenidas, etc.

iii) Establecer la política de operación del sistema, la cual se refiere a programar en el tiempo los volúmenes que se almacenan o liberan.

c. Formulación de alternativas.

Tomando los criterios de diseño, formular las alternativas posibles desde el punto de vista técnico y económico.

d. Evaluar las consecuencias de las alternativas.

Seleccionar la mejor alternativa utilizando para el análisis el enfoque técnico y económico combinado.

La mejor alternativa será aquella combinación de las unidades del sistema, resultados y procedimientos operativos que cumplan con los objetivos mejor que ninguna otra.

1.2 El enfoque de los sistemas aplicado a los aprovechamientos hidráulicos.

En los últimos años, la planeación de los recursos hidráulicos ha requerido el examen de los efectos que en la sociedad pueden ocasionar un amplio rango de alternativas de desarrollo de ese tipo.

Obviamente, para una cuenca grande en donde se tienen distintos intereses de grupos y algunas alternativas potenciales de desarrollo, la determinación de la mejor alternativa se transforma en un problema bastante complicado. De ahí el intento de usar los modelos matemáticos, que incluyan las características esenciales del sistema real, para estudiar y evaluar los efectos que cada esquema puede ocasionar.

Sin embargo, ningún modelo matemático existente puede captar simultáneamente todos los elementos del problema total de planeación y mantener una solución analítica completa.

En consecuencia, el procedimiento usual ha sido utilizar varios modelos matemáticos, cada uno construido para examinar algún aspecto importante del problema completo de planeación de los aprovechamientos hidráulicos, los cuales se pueden acoplar de alguna manera para identificar el mejor plan de desarrollo.

La selección del modelo utilizado para resolver distintos problemas, en general, depende de:

- La naturaleza del problema
- La experiencia del analista
- La disponibilidad de cierto tipo de modelos matemáticos
- Las restricciones de tiempo y dinero que se impongan al proceso de planeación.

Entre los modelos existentes se pueden distinguir en forma gruesa dos grandes grupos:

a) Los Modelos de Optimización.

Tienen como características esenciales que incorporan relaciones cuantitativas entre las variables del sistema y generan soluciones óptimas, medidas según una jerarquización explícita de alternativas. Tienen como ventaja la posibilidad de generar muchas soluciones a bajo costo. Sin embargo el representar ciertos sistemas complejos, puede ocasionar problemas difíciles de manejar en la computadora por el número

de expresiones, variables y restricciones.

b) Los Modelos de Simulación.

Consisten en una secuencia de instrucciones lógicas y matemáticas que permiten describir el diseño y operación de un sistema. Su utilidad se tiene al predecir y analizar el comportamiento de un posible desarrollo hidráulico. La desventaja principal de esos modelos es que no optimizan directamente el valor de una función objetivo y solo producen una medida del valor de una función objetivo para una configuración particular de un sistema. Por lo tanto, para definir la mejor alternativa con estos modelos puede resultar demasiado costosa por el tiempo de cálculo empleado y su uso para diseño puede convenir solo en los casos en que en una cuenca se tengan un número limitado de configuraciones.

Por lo anterior, se desprende que emplear los modelos descritos en forma separada no ofrece una buena posibilidad para identificar la mejor alternativa de desarrollo.

Esto sugiere que el papel del análisis de sistemas en el proceso de planeación puede iniciarse con el uso de un modelo de optimización para localizar soluciones factibles siguiendo con un examen de estas y la determinación de la mejor alternativa vía modelos de simulación (J.C. Schaake Jr, 1974), acoplados con algún algoritmo de optimización.

1.3 Los aprovechamientos hidráulicos y su relación con otras ciencias.

Esta rama del campo de la ingeniería se encuentra entre el área donde se sobreponen las ciencias naturales y las ciencias sociales sin que por supuesto haya una frontera rígida entre las ciencias naturales y sociales (N. Buras, 1972). Este traslape se extiende desde la ciencia pura básica hasta su aplicación. La Ingeniería de los Aprovechamientos Hidráulicos cubre el traslape y se extiende también dentro del campo de las ciencias naturales y sociales. Ello involucra partes de muchas disciplinas (ingeniería agrícola, ingeniería civil, economía, leyes y otras), sin embargo es imposible identificar alguna de ellas con la ingeniería de los aprovechamientos hidráulicos.

No obstante se puede detectar en la Ingeniería de los Aprovechamientos Hidráulicos afinidades muy cercanas con las disciplinas tradicionales siguientes:

i) Ingeniería Agrícola.-

Un aspecto de la Ingeniería Agrícola trata con el mantenimiento y control de un régimen de humedad adecuado dentro de la zona de raíces en los cultivos. Los problemas de irrigación y drenaje caen bajo esta característica, incluyendo el almacenaje de agua en granjas y distribución de agua para campos diferentes dentro de una empresa agrícola.

Otros aspectos de la ingeniería agrícola que atañen a los aprovechamientos hidráulicos son el control de las aguas negras, la conservación y manejo del suelo.

ii) Ingeniería Civil.-

Si bien un número de disciplinas de ingeniería son incluidas dentro de esta categoría, dos son de importancia particular en la ingeniería de los aprovechamientos hidráulicos: Ingeniería Hidráulica e Ingeniería Sanitaria. La primera esta relacionada con el diseño hidráulico y estructural de presas, tomas, canales, líneas de tubería y obras para la generación de energía, así como la regulación de ríos y obras de navegación (puertos, puentes y esclusas). La segunda trata con la calidad del agua suministrada para usos domésticos e industriales y con el reparto, tratamiento, mejoramiento y reutilización de las aguas negras.

Como parte muy importante de la Ingeniería Hidráulica, la hidrología aplicada es básica en el análisis y solución de los problemas de la Ingeniería de los Aprovechamientos Hidráulicos. Su primera función es la evaluación cuantitativa del suministro de agua en un proyecto de desarrollo de aprovechamientos hidráulicos. En relación con la existencia de registros, la Hidrología Aplicada trata de los escurri-

mientos futuros asociados con probabilidades específicas. Estas probabilidades reflejan un cierto nivel de incertidumbre con el que se enfrentan los que deciden si se desarrolla un cierto proyecto de aprovechamiento hidráulico, desde la determinación del tamaño óptimo de los elementos estructurales hasta las políticas de operación. La incertidumbre es a menudo traducida en términos de riesgo, especialmente cuando se realizan las evaluaciones económicas.

iii) Ingeniería Química.-

Se utiliza en el mejoramiento de la calidad mineral del agua (desalación). Además, se aplica en problemas de transferencia de calor y de masa, termodinámica y otras relaciones de energía, muchas de ellas irreversibles.

iv) Economía.-

La Ingeniería de los Aprovechamientos involucra los aspectos cuantitativos de Economía, Econometría, teoría de decisiones, métodos de programación y otras técnicas de investigación de operaciones son el enlace de las dos disciplinas.

v) Administración Pública.-

Los proyectos de aprovechamientos hidráulicos son a menudo planeados, diseñados, construídos y operados, sujetos

a una ó más restricciones institucionales. El tipo de organización y su administración tiene una influencia marcada en la operación de los sistemas de los aprovechamientos hidráulicos.

vi) Leyes.-

Es difícil que un proyecto de aprovechamientos hidráulicos exista sin estar involucrado con las leyes. Conceptos y doctrinas se desarrollan continuamente y se traducen en leyes.

De la discusión anterior se llega a ver claramente que la ingeniería de los aprovechamientos hidráulicos es una disciplina compleja con muchas facetas. Una de sus cualidades más importantes, es que ella integra varias áreas de las ciencias naturales y sociales, en el análisis y solución de problemas que involucran el desarrollo y utilización de los recursos del agua en una cierta región. Se concluye que la ingeniería de los aprovechamientos hidráulicos deben ser (o llegará a ser por necesidad) generalista en el verdadero sentido de la palabra.

1.4 Ciclo Hidrológico (F. Echavarría, 1977).

El ciclo hidrológico es un proceso continuo por medio del cual el agua es transportada de los océanos a la atmósfera, a la tierra y regresa al mar. Dentro de este ciclo existen diversos subciclos. Un

ejemplo de esto es la evaporación del agua de la superficie terrestre y su subsecuente precipitación sobre ella antes de regresar al océano. La fuerza que controla la totalidad del sistema del transporte del agua proviene del sol, el cuál provee la energía requerida para la evaporación. Cabe hacer notar que las cualidades del agua también cambian durante su paso a través del ciclo; el agua de mar se convierte en agua fresca por la evaporación. En la Fig. 1.1 se muestra la representación cualitativa del ciclo hidrológico y en la Fig. 1.2 las fases que estudia la Hidrología. Como puede observarse en la Fig. 1.2, las componentes del ciclo hidrológico involucran las diversas fases a que esta sujeta una cuenca hidrológica. Esto es básico en el análisis de los procesos hidrológicos y en el desarrollo de modelos de simulación, los cuales tratan el ciclo hidrológico como un sistema cerrado y definen en forma continua los parámetros de entrada y salida a dicho sistema.

#### 1.5 Características Hidrológicas de los Sistemas de Aprovechamientos Hidráulicos. (F. Echavarría, 1977).

De acuerdo con el U.S. Council for Science and Technology "Hidrología es la ciencia que trata de las aguas de la tierra, su ocurrencia, circulación y distribución, sus propiedades químicas y físicas y su reacción con el medio ambiente, incluyendo su relación con los seres vivientes. El dominio de la hidrología abarca la historia de la existencia total del agua sobre la tierra".

Para plantear las aplicaciones de la Hidrología, se debe partir de la premisa de que el hombre no puede existir sin el agua. Aunque el uso del agua para actividades domésticas es vital, su uso en la industria, comercio, agricultura y recreación es básico dentro del desarrollo del país. Dado que el agua es un líquido vital y escaso, es lógico pensar que debemos contar con técnicas adecuadas para la planeación, manejo y desarrollo de los aprovechamientos hidráulicos del país.

Desde el punto de vista de diseño de un aprovechamiento hidráulico, los principales objetivos de la hidrología pueden resumirse en tres grandes grupos:

- a) Obtención de la avenida máxima que con una determinada frecuencia puede ocurrir en un cierto lugar, lo cual es necesario considerar al diseñar vertedores, puentes y drenajes en general.
- b) Conocimiento de la cantidad, calidad, frecuencia y naturaleza de ocurrencia del transporte del agua sobre la superficie terrestre. Esto se requiere en el diseño de sistemas de irrigación, abastecimiento de agua, aprovechamientos hidroeléctricos, navegación de ríos, acuacultura, etc.
- c) Conocimiento de la cantidad, calidad, localización y naturaleza de ocurrencia del agua subterránea. Esto se requiere en el diseño de sistemas de riego, abastecimiento de agua, plantas termoeléctricas,

plantas carboeléctricas, etc.

Por lo que respecta a las limitaciones de la hidrología, éstas se relacionan con la información hidrológica disponible y la dificultad de entender y explicar los procesos naturales con los cuales trata.

Lo anterior involucra que en general cada problema es único y es difícil analizarlo con un sistema deductivo riguroso.

La República Mexicana dispone de una amplia red de estaciones climatológicas controladas, principalmente por la Secretaría de Agricultura y Recursos Hidráulicos y en parte por la Comisión Federal de Electricidad y la Comisión Internacional de Límites y Aguas. En la Tabla 1.1 se muestran las principales publicaciones de que se dispone en el país con información hidrológica. Por otra parte, la Subdirección de Hidrología de la SARH ha dividido el país en 37 regiones hidrológicas y dispone de planos indicando las estaciones Climatológicas e Hidrométricas que se encuentran en cada una de ellas. Además del nombre de la estación, consigna los años de registro y que dependencia la controla.

1.6 Componentes Estructurales de los Sistemas de Aprovechamientos Hidráulicos. (F.Echavarría, 1977).

Un sistema de aprovechamientos hidráulicos se puede dividir principalmente en tres partes; las obras requeridas para la captación del agua en la fuente de aprovechamiento, las obras de conducción al sitio



de aprovechamiento y las obras de distribución del agua para su uso. Para esta última parte, hay que considerar las obras para la eliminación del agua después de su uso o su excedente.

Entre los aprovechamientos hidráulicos más importantes están los destinados a la agricultura, al abastecimiento de agua potable y a la generación de energía eléctrica. Puede tomarse en cuenta también el control de inundaciones, que aunque es en si una obra de defensa, está muy relacionada con el aprovechamiento del agua, ya que en un momento dado permite proteger el mismo aprovechamiento.

Dada la amplitud del tema, en cuanto a las obras que componen un aprovechamiento hidráulico, a continuación se presenta un breve resumen de los tipos de obras, sus diferentes partes y estructuras que lo forman y se dan algunas lineamientos de su diseño.

#### 1.6.1 Obras de Captación.

La captación puede efectuarse de una fuente superficial o subterránea. Para el caso del aprovechamiento de escurrimientos superficiales la obra de captación puede ser una presa de almacenamiento, de derivación o una toma directa. Para el agua subterránea, solamente se tendrá una toma directa, como es el caso de la explotación de pozos, manantiales o galerías filtrantes.

Una presa de almacenamiento permitirá dar carga al sistema

y almacenar los volúmenes necesarios para satisfacer la demanda; en cambio, la presa derivadora solo dará la carga hidráulica necesaria para la conducción del agua al sitio de su aprovechamiento.

Una presa en términos generales estará formada por una cortina que impedirá el paso del agua por su cauce natural y propiciará la formación del vaso; una obra de excedencias para devolver al río los caudales no aprovechables; una obra de toma por la cual se extraerán del vaso los volúmenes de agua por utilizar; y otras estructuras como son: desarenadores, diques, etc.

Las cortinas, en cuanto a su comportamiento y materiales de construcción, se clasifican en flexibles y rígidas. Las primeras permiten asentamientos diferenciales en su cimentación, sin poner en peligro a la estructura, mientras que las rígidas en caso de presentarse ese problema podrá existir la posibilidad de que fallen.

Dentro de las cortinas flexibles se tienen las de material homogéneo (de tierra), enrocamiento y las de materiales graduados, siendo estas últimas una combinación de las dos anteriores y las de mayor uso en nuestro País. Las rígidas pueden ser de gravedad, de arco y aligeradas o de contrafuertes (machones).

Para la sección del tipo de cortina, principalmente se debe tomar en cuenta la geología de la boquilla, la disponibilidad de los ma-

teriales de construcción y como en el caso de México, la localización de la estructura en una zona sísmica. Además, se considera la forma y topografía de la boquilla, el tipo de obra de desvío, la altura del embalse, etc.

La altura de la cortina queda definida de la curva de elevaciones-volúmenes de l vaso, al dimensionar la capacidad para azolves, el volumen útil y el sobrealmacenamiento para la regularización de avenidas. A esta altura se le incrementa el bordo libre para tomar en cuenta el efecto de la marea por viento y el oleaje.

Las fuerzas que intervienen en el diseño de una cortina son: el peso propio de la estructura, la fuerza debida a la presión hidrostática del almacenamiento, la subpresión, las fuerzas sísmicas de la estructura y del cuerpo del agua, el empuje de los azolves y otras de menor valor como son las producidas por el oleaje.

Las obras de excedencia se clasifican en cuanto su colocación en: de cortina, o de ladera; por su control en: de cresta libre y de cresta controlada; por la forma de su cresta en: rectas o curvas; por la forma de entrada del agua en: abanico, canal lateral y embudo.

En términos generales esta estructura se forma de las siguientes partes: canal de acceso o de llamada, cresta vertedora y cimacio, el cual puede tener o no pilas y compuertas, transición de su ancho, rápida o canal de conducción abierto o en túnel, caída y estructura

amortiguadora, y canal de salida. Desde el cimacio hasta la estructura amortiguadora el vertedor se reviste con losas de concreto, las cuales se diseñan considerando las fuerzas debidas al peso propio, al peso de agua, al empuje hidrostático, a la subpresión, y a las hidrodinámicas.

Las obras de toma para riego o abastecimiento de agua potable constan esencialmente de rejillas para evitar la entrada de cuerpos extraños al conducto del vaso hacia aguas abajo de la cortina, caída, estructura amortiguadora y de ser necesaria una transición para que el agua entre a la obra de conducción.

Para el caso de obras de toma para aprovechamientos hidroeléctricos, estas pueden ser: de canal de fuerza, con galería a presión y a pie de presa. La diferencia principal con las de riego y agua potable es que el conducto trabaja a presión, por lo cual se le adicionan otras estructuras auxiliares como es el tanque o pozo de oscilación que protege a la toma en contra del golpe de ariete y las oscilaciones de masa. Al final de la toma se localiza la casa de máquinas, que es donde se transforma la energía hidráulica en mecánica y ésta a su vez en energía eléctrica, a través de las turbinas y generadores.

Como se anotó en un principio, también se tienen tomas directas, generalmente para agua potable, en donde se capta el agua por aprovechar sin necesidad de una presa, con una estructura conectada directamente a la fuente de abastecimiento.

### 1.6.2 Obras de Conducción.

La línea de conducción de la captación al sitio de aprovechamiento podrá realizarse a presión o a superficie libre, dependiendo de las características topográficas que se tengan; aunque en forma general, puede decirse, que para conducción de agua potable se utiliza el sistema forzado o secciones de conducto cerradas para evitar la contaminación del agua y en aprovechamientos agrícolas las conducciones son por gravedad y abiertas.

Una conducción a presión requiere de estaciones de bombeo y rebombeo, de un conducto cerrado y de ciertos mecanismos auxiliares como son las válvulas de limpieza, de alivio de presión, de purga, etc.

Su diseño demanda un balance entre las dimensiones de la conducción y la potencia requerida en los equipos de bombeo.

Las conducciones por gravedad pueden ser sin revestimiento o con él, siendo recomendable lo último para evitar pérdidas por filtraciones. En su recorrido se presentan problemas debidos a los accidentes topográficos que se resuelven con estructuras complementarias como son: sifones, puentes canal, represas, caídas y cruces con otros conductos o vías de comunicación.

### 1.6.3 Obras de Distribución.

Las obras de distribución son las redes de conductos a presión o por gravedad, por las que se reparte el agua, a cada uno de los usuarios para su aprovechamiento.

Para el abastecimiento de agua potable se utilizan redes a presión abiertas o formando circuitos de acuerdo a la importancia de la población por servir. Se requieren otras obras intermedias como son las plantas de tratamientos, tanques de almacenamiento o regularización, estaciones de rebombeo, etc. Paralelamente a la red de distribución de agua potable será necesario contar con la de alcantarillado sanitario y pluvial, para dar salida al agua después de su uso, recolectar el exceso de las precipitaciones y enviar el afluente a algún sitio donde no cauce problemas.

En las zonas de riego las obras de distribución están formadas en la mayoría de los casos por la red de canales principales, secundarios, ramales, regaderas, etc., que permitirán al agricultor llevar el agua a sus parcelas. La red de canales se traza de acuerdo a la topografía y puede presentarse la necesidad de usar estructuras auxiliares iguales a las de las conducciones, además de las de aforo, limpieza y de distribución final. Para este caso se requiere contar con una red de caminos para el mantenimiento y operación de los canales y que permitan transportar todo lo cosechado. Sin embargo, existen para la distribución del agua de riego sistemas a presión, por ejemplo: para riego de goteo o aspersión.

En forma semejante al agua potable, también se deberá tener una red de drenaje formada por drenes que saquen el exceso de agua de las áreas agrícolas.

#### 1.7 Aprovechamientos Hidráulicos de Usos Múltiples.

Una parte muy importante de la infraestructura requerida son las presas de almacenamiento. En 1950 la capacidad de almacenamiento apenas era equivalente al 4% del escurrimiento medio anual, y la mayor parte se dedicaba al riego. En 25 años se construyeron grandes presas en los sitios con mayores atractivos, principalmente para energía eléctrica, más que sextuplicando la capacidad de almacenamiento para llegar en 1975 a contar con una capacidad del 26% del escurrimiento medio anual, como puede observarse en el cuadro 1.1 y en la lámina 1.3. En el período 1975-2000, la importancia relativa del almacenamiento para riego disminuirá ya que, como se mencionó antes, en el 27% de las nuevas tierras que se abrirán al cultivo con infraestructura hidroagrícola se utilizará drenaje y no riego, lo que implica la construcción de presas para control de avenidas que en la mayoría de los casos también serán empleados para generar energía eléctrica en la Zona Golfo y Sureste del país.

Durante el período 1950-2000, el cambio en la proporción de almacenamiento para un uso, del 48% al 29%, comparado con la del

almacenamiento para usos múltiples, del 52% al 71% para ese mismo período, indica una tendencia marcada hacia el incremento de los aprovechamientos de usos múltiples. Esto hace necesario utilizar criterios de diseño adecuados en el futuro, porque las estructuras de muchas de las presas en operación no fueron concebidas con esta finalidad. Además conviene que, en el diseño y operación de las presas, las necesidades de acuacultura y el turismo sean consideradas siempre junto con el riego, la generación y el control de avenidas para lograr así soluciones integrales.

## BIBLIOGRAFIA

Secretaría de Recursos  
Hidráulicos,

"Plan Nacional Hidráulico 1975", Pri-  
mera Parte, Subsecretaría de Planea-  
ción, México, 1976. 180 pp.

E. Kuiper,

"Water Resources Project Economics",  
Butterworth & Co (Publishers), Inglate-  
rra, 1971. pp. 447.

A. Maass, et al,

"Design of Water-Resource Systems",  
Harvard University Press, Cambridge,  
Massachusetts, E.U.A., 1962. 620 pp.

N. Buras,

"Scientific Allocation of Water Resour-  
ces", American Elsevier, Nueva York,  
E.U.A., 1972.

J.C. Schaake, Jr. (Ed).

"Systematic Approach to Water Resources  
Plan Formulation", Report No. 187,  
Part III, Depto. of C. Engr., M.I.T.,  
Cambridge, Massachusetts, E.U.A.,  
Julio 1974. 24 pp.

F. Echavarría Alfaro,

"Naturaleza de los Sistemas", Apuntes,  
"Curso de Aprovechamientos Hidráulicos",  
Centro de Educación Continua, F.I.  
México, Noviembre 1977.

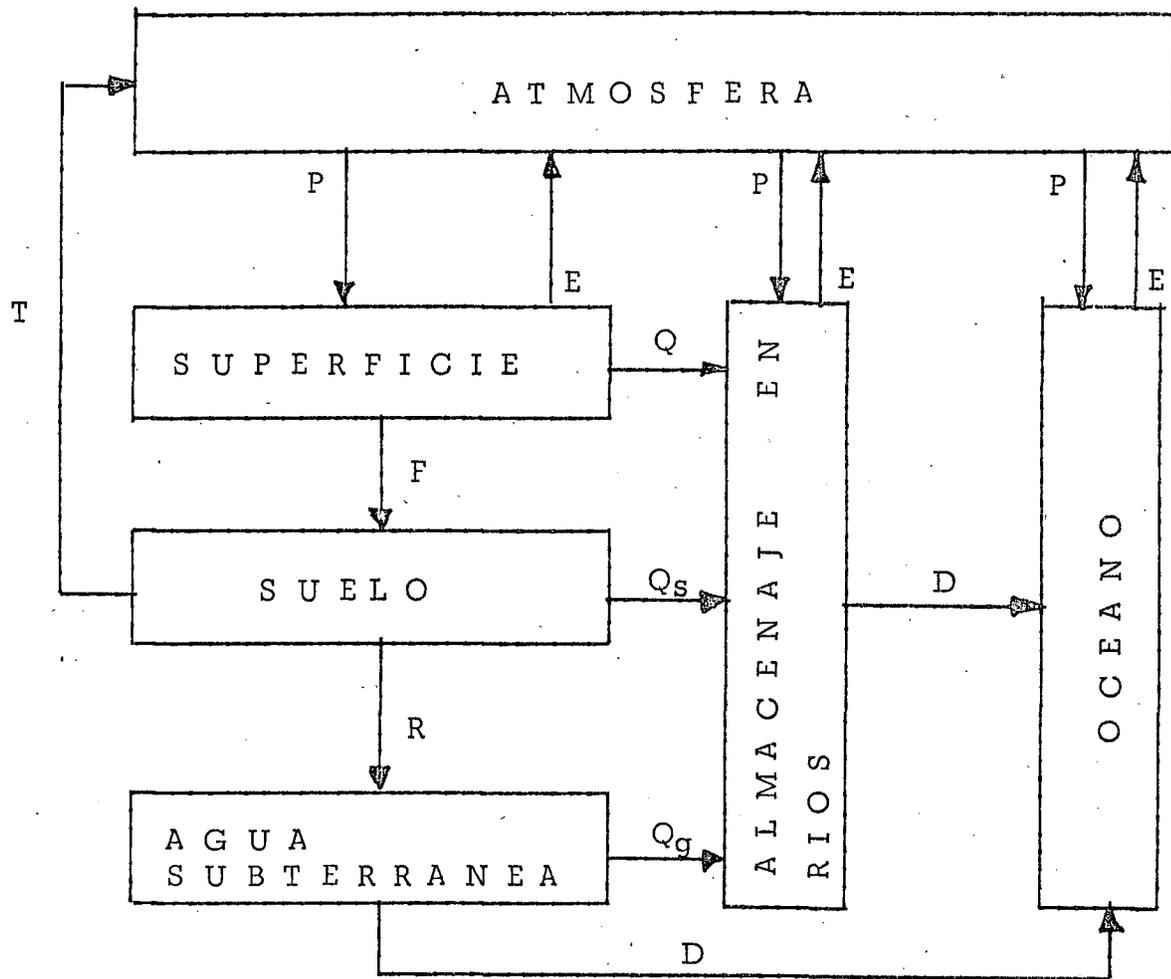
TABLA 1.1

INFORMACION HIDROLOGICA EN LA REPUBLICA MEXICANA.

PUBLICACION	ALCANCE	FRECUENCIA	DEPENDENCIA
Boletín Hidrológico del Valle de México	Datos Hidrométricos y Meteorológicos del Valle de México	Anual	Comisión de Aguas del Valle de México, SARH.
Boletín del Servicio Meteorológico Nacional	Observaciones pluviométricas y termométricas*	Mensual	Dirección General de Geografía y Meteorología, SARH
Boletín Hidrométrico	Escurrimientos del río Colorado y otros ríos internacionales del Oeste.	Anual	Comisión Internacional de Límites y Aguas, SRE
Boletín Hidrométrico	Datos Hidrométricos y climatológicos del río Papaloapan.	Anual	Comisión del Papaloapan, SARH
Boletín Hidrológico	Datos Hidrométricos*	Periódica	Comisión Federal de Electricidad
Boletín Meteorológico	Datos Meteorológicos*	Periódica	Comisión Federal de Electricidad
Boletín Hidrológico	Datos Hidrométricos**	Periódica	Dirección de Hidrología, SARH
Boletín Climatológico	Datos Climatológicos región Hidrológica No.12-A (parcial)	Información hasta Dic.1972	Dirección de Hidrología, SARH

\* Se refieren a sus estaciones en toda la República Mexicana.

\*\* Abarca información por región Hidrológica. El país está dividido en 37 regiones hidrológicas.



- |  |                            |
|--|----------------------------|
| E - Evaporación                                | P - Precipitación          |
| Q - Esguerrimiento Superficial                 | T - Transpiración          |
| Q <sub>s</sub> - Esguerrimiento Subsuperficial | F - Infiltración           |
| Q <sub>g</sub> - Esguerrimiento Subterráneo    | R - Recarga                |
|  | D - Descarga a los océanos |

FIG. 1.1 CICLO HIDROLOGICO. REPRESENTACION CUALITATIVA.

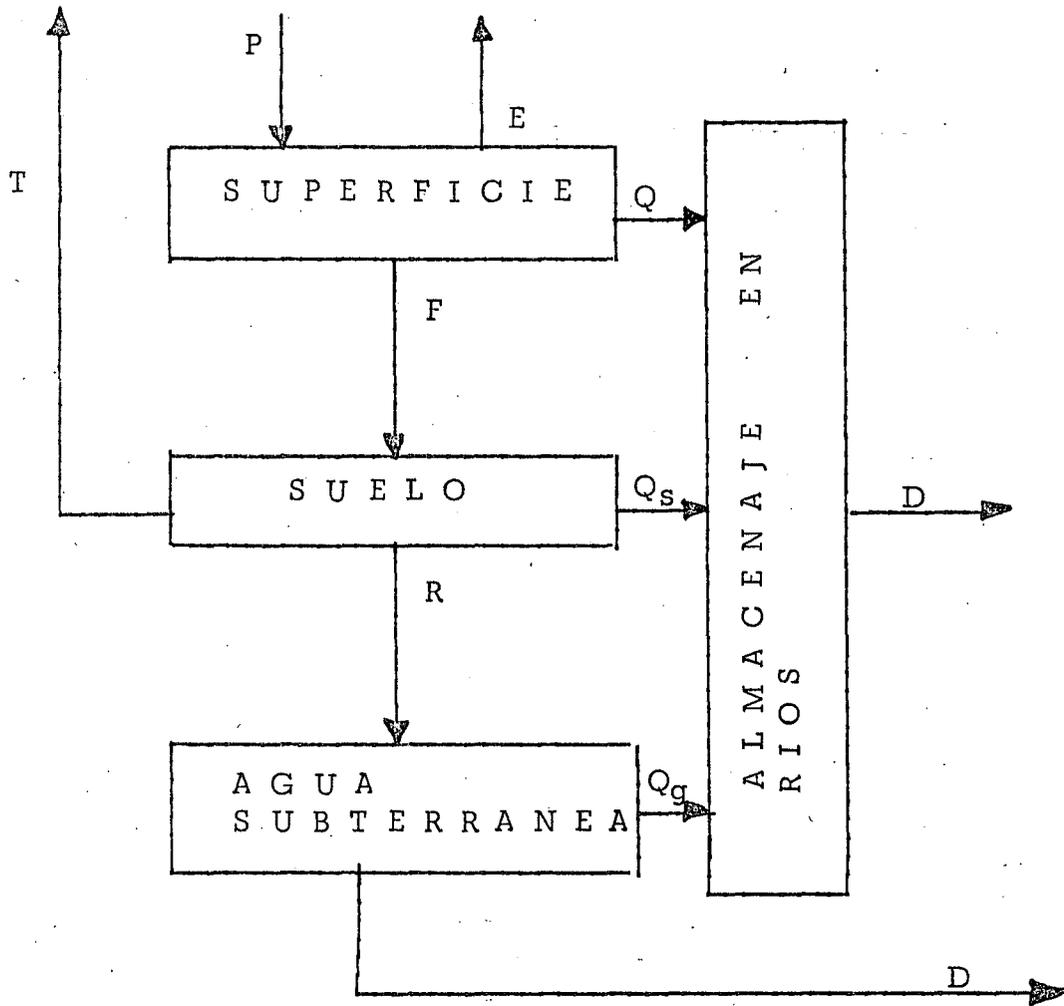
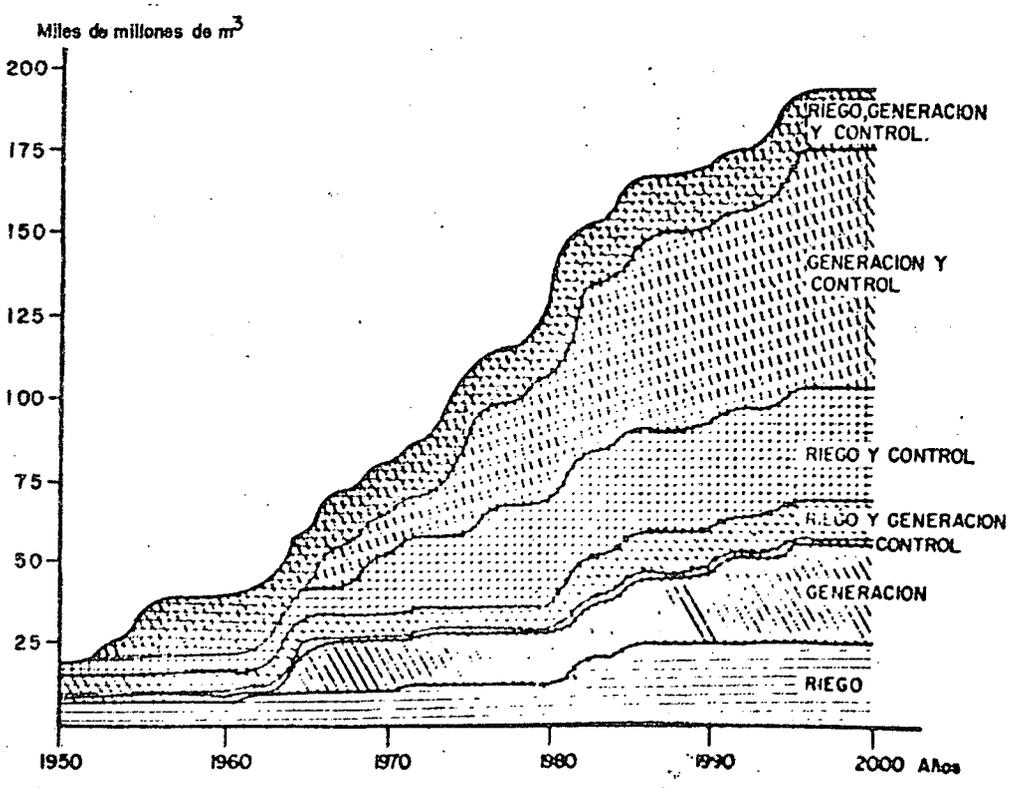


FIG. 1.2 FASES QUE ESTUDIA LA HIDROLOGIA.

		UN USO			DOS USOS			TRES USOS	Total	Porcentaje de la Disponibilidad media anual
		Riego	Generación	Control	Riego	Riego	Generación	Riego		
					Generación	Control	Control	Generación	Control	
1950	Mill.m <sup>3</sup>	6 989	1 068	210	3 470	5 395	0	68	17 200	4%
	(%)	(41)	(6)	(1)	(20)	(32)	(0)	(0)		
1975	Mill.m <sup>3</sup>	12 403	16 392	705	6 890	22 474	31 460	17 476	107 800	26%
	(%)	(11)	(15)	(1)	(6)	(21)	(29)	(17)		
2000	Mill.m <sup>3</sup>	25 707	30 768	705	13 190	34 183	72 075	17 476	194 104	47%
	(%)	(13)	(16)	(-)	(7)	(18)	(37)	(9)		

CUADRO 1.2 CAPACIDAD DE ALMACENAMIENTO EN DIVERSOS USOS, EN EL PERIODO 1950-2000.



USOS DEL ALMACENAMIENTO DE 1950 A 1975 y EVOLUCION ESPERADA PARA EL AÑO 2000

FIG. 1.3 USOS DEL ALMACENAMIENTO DE 1950 A 1975 Y EVOLUCION ESPERADA PARA EL AÑO 2000.



centro de educación continua  
división de estudios superiores  
facultad de ingeniería, unam



APROVECHAMIENTOS HIDRAULICOS

EL PROCESO DE PLANEACION Y EVALUACION

ING. RICARDO MARTINEZ H.  
OCTUBRE DE 1978



## EL PROCESO DE PLANEACION Y EVALUACION

- |   |    |
|---|----|
| 1.- La planeación, Aspectos económico, política, social y técnico. ....                 | 2  |
| 2.- La planeación en México, esfuerzos recientes. ....                                  | 8  |
| 3.- Consideraciones Generales sobre la planeación de aprovechamientos hidráulicos. .... | 16 |
| 4.- Ejemplos de planeación en México. ....  | 18 |
| I.- Plan Nacional Hidráulico  |    |
| II.- Planeación de Sistemas de Abastecimiento Urbano -Industrial.                       |    |
| III.- Planeación de Obras Hidráulicas para la Agricultura                               |    |
| IV.- Planeación de Obras Marítimas (puertos)  |    |

1.- LA PLANEACION.-ENFOQUE ECONOMICO, SOCIAL Y POLITICO.

El desempleo, hambruna, delincuencia, rebeliones, guerras, etc., son expresiones extremas de problemas sociales que <sup>se</sup> manifiestan durante las perturbaciones cíclicas del sistema capitalista. Las perturbaciones económicas (crisis) provocan a la sociedad efectos mucho más devastadores que, por ejemplos: las perturbaciones climáticas: huracanes, sequías, inundaciones, fríos, etc; las perturbaciones geológicas: terremotos, marejadas, erupciones volcánicas; las perturbaciones biológicas: plagas, epidemias, etc.

El deseo de atenuar los efectos nocivos de LAS CRISIS económicas se manifiesta en la planeación, herramienta técnica que persigue comprender e influir en el desarrollo y orientación de los procesos económicos de una nación.

En contraste, en los países con sistemas socialistas <sup>se</sup> dieron condiciones que permitieron el control de los factores que provocan las crisis, eliminando éstas definitivamente. En este caso, la planeación aparece para reemplazar al sistema de mercado como mecanismo impulsador y orientador de los procesos económicos. La planeación tiene, pues, significados diferentes que dependen de las coordenadas geográficas, históricas, políticas y sociales que ubican a un país en el camino de su desarrollo.

Conviene tener muy presentes estas aclaraciones para no perder de vista las fuertes limitaciones que tiene esa <sup>c</sup> técnica y para <sup>estar</sup> alerta en detectar las escasas posibilidades que se presentan en la práctica, en un país con las condiciones que tiene el nuestro, donde la economía tiene un sector empresario privado substancial (economía mixta).

En la práctica actual, las características principales de un plan de desarrollo son:

1. Es un documento que contiene las principales medidas que el gobierno intenta poner en práctica para incrementar el producto per cápita.

2. Consta de:

a) Diagnóstico Económico.--Comprende aspectos como ingreso nacional, productividad, mercado exterior, y tendencias de las mayores industrias.

b) diagnóstico social.--Comprende cambios de población, educación, salud, habitación, seguridad social.

c) evaluación de los planes anteriores.

d) declaración de objetivos económicos, políticos y sociales.

e) establecimiento de metas para cada uno de los sectores económicos y sociales.

f) recomendaciones sobre medidas para elevar la tasa de crecimiento económico; para estimular el ahorro, la inversión y aumentar la productividad; para mejorar la estructura de la actividad económica (reforma agraria, laboral, fiscal, comercial); etc.

g) programa de gasto público (corriente y de inversión)

3. ~~Algunos~~ <sup>Algunos</sup> períodos de 3 a 6 años; en cuyo caso contiene lo que el gobierno intenta hacer; algunos comprenden plazos largos, de 10, 15 y hasta 20 años, en este caso deja de ser programa de gobierno para servir de guía a la planeación de aquellos servicios que requieren una perspectiva a largo plazo, como los puertos, electrificación, agua potable, educación, carreteras, etc.

- 4. En la práctica, el gobierno elabora cada año su presupuesto de gastos, y es éste, más que el plan, el que constituye el verdadero compromiso (El Congreso, en los sistemas federalistas, que reside la soberanía nacional, es el que aprueba el presupuesto). Simultáneamente, las políticas del plan tampoco se incorporan de inmediato en las disposiciones legislativas.
- 5. La planeación ha introducido la política beneficiosa de hacer un examen integral del gasto público a un plazo de varios años, y la fijación de una lista de prioridades.
- 6. También ha impulsado la profundización del análisis de partes de la economía como industria, agricultura, minería, inversión, ahorro y balanza de pagos.
- 7. La naturaleza de un plan depende principalmente de la proporción de que el sector se encuentra bajo el dominio público (propiedad y/o control). Si la propiedad y/o control público del sector es efectivo, el plan se traduce en instrucciones a los directores de empresas y organismos sobre la cantidad de capital a invertir, el nivel de producción de bienes o servicios, y la cantidad de mano de obra y materiales a usar. Esta es la forma que asumen los planes en los países comunistas.

Si por el contrario, predomina el dominio privado el plan sólo puede significar un control negativo, más no un control positivo. O sea, puede señalar prohibiciones de invertir en ciertos campos pero no puede obligar a los individuos a invertir en otros campos si no les conviene, o simplemente no quieren. En estos casos, la planeación

se limita sólo a analizar, informar, convencer e indicar las sugerencias del gobierno, así como señalar los controles restrictivos bajo la cual se administrará el sector.

8. Generalmente en los planes se hacen proyecciones de las tendencias en la economía global, y muchas veces por sectores. Sin embargo, estas proyecciones NO HACEN un PLAN. Sirven más bien como ejercicios de los analistas para evaluar la congruencia de las políticas; se asegura con ello que las suposiciones sobre la inversión sean compatibles con las hipótesis sobre el ahorro, préstamos externos, y superávits; que cada uno de estos sea consistente con las consideraciones sobre ingresos, impuestos, gasto público, demanda y oferta de cada uno de los sectores y subsectores. Las técnicas de la matriz INSUMO-PRODUCTO es el procedimiento adecuado para analizar los pronósticos de la economía.
9. El grado de eficacia de la planeación varía mucho. En pocos casos se sigue cuidadosamente, en otros pocos casos se abandona a escasos meses de su publicación, en la mayoría de los casos quedan entre esos dos extremos. Las causas a menudo son: a) falta de realismo, b) el plan no establece compromisos entre los afectados (gobierno), los sectores privado, y social (o sea no es participativo), c) no hay acuerdo entre los que elaboran el plan y los que toman decisiones, d) falla de las predicciones.
10. Un plan, por ejemplo de 6 años, no es una autorización del gasto -

6

público. En realidad, la autorización es solo anual (revisión del presupuesto por el Congreso), y generalmente se ajusta muy poco a lo que establecen los planes. De este modo, no se garantiza que las intenciones expresadas en los planes se traduzcan en acciones.

11. ¿Para qué se elabore un plan si no se va a intentar su realización? Algunas veces es porque funciona como un programa político de partido; en otras, se busca incrementar la autorización de recursos para el gobierno. Muchos países subdesarrollados han logrado aumentar la proporción de los impuestos justificando las reformas fiscales con planes que establecen metas altas. Generalmente se esgrimen las fallas de las predicciones para explicar las fallas de la planeación. Sin embargo, no es difícil comprender que aún disponiendo de una "bola de cristal" para ver con precisión el futuro, los planes tropiezan contra obstáculos que impiden alcanzar sus fines. Aunque un plan se elabore perfectamente desde el punto de vista TÉCNICO; ¿cuáles pueden ser las razones que hacen fallar los planes?

Como ya se dijo antes, uno de los resultados del proceso de planeación es definir un esquema del gasto público a varios años adelante; también establecer una asignación de recursos (prioridades) a los diferentes sectores de la nación. Cuando la asignación presupuestal de la planeación resulta distinta de la del último ejercicio se requerirá de una fuerza política para imponer la decisión. Si no existe la organización de aquellos sectores sociales hacia quien se pretende canalizar los recursos, entonces los recursos se canalizarán hacia aquellos sectores que si se han organizado para ejercer fuerza y presión sobre el gobierno. El plan fracasara entonces.

En otras palabras, la asignación de los recursos presupuestales no depende de la racionalidad ni de la lógica de un plan bellamente elaborado, sino que es el resultante de un sistema de fuerzas del espacio político que son capaces de atraer hacia sus intereses los recursos monetarios, técnicos, etc., del Estado. Un plan, si es realista debe resultar de la correlación de fuerzas políticas; si no es así, sería un plan ilusorio (no real), demagógico (o tecnocrático); no sería un plan coercitivo, ni siquiera un plan indicativo, sino un plan confundidor.

Sin embargo, un plan escrito (no hablado solamente) proporciona públicamente las coordenadas necesarias para situarse. Un punto de referencia para que la ciudadanía se pronuncie en favor o en contra de las orientaciones que desee imprimir al proceso económico, para apoyar o criticar la política económica del gobierno.

Del mismo modo que la elaboración y realización de un plan es producto del apoyo popular, la manifestación de los intereses en fuerzas políticas se favorece grandemente con un plan escrito. Además el proceso de planeación ayuda a clarificar mentalmente la organización de los pensamientos, esperanzas y deseos, permite detectar incongruencias, así como mejorar el PROCESO de la TOMA DE DECISIONES, aunque no necesariamente las decisiones mismas.

## 2. LA PLANEACION EN MEXICO. ESFUERZOS RECIENTES.

24

La Comisión Nacional estaría integrada por nueve miembros que serían nombrados por el Presidente de la República. La Comisión tendría como función coordinar las actividades nacionales de planeación.

Las Comisiones Sectoriales se encargarían del estudio de actividades específicas e integrarían comisiones de estudio y consulta para cada sector.

La Sub-comisión de Financiamiento estimaría las necesidades de recursos públicos y privados, a corto y largo plazo, para la ejecución del Plan, y las fuentes de financiamiento.

El Plan proponía el establecimiento de Direcciones de Planeación en cada Secretaría y organismos públicos que estuvieran relacionadas con la planeación.

La Sub-comisión de Coordinación Regional, tendría como función estudiar las consecuencias del Plan en las zonas geográficas y prestarle ayuda a los gobiernos estatales.

Se esperaba<sup>45</sup> apicar el proyecto de Ley en enero de 1965, una vez realizado el cambio de gobierno. Antes de la sublevada fecha de aprobación, la Comisión Senatorial se encargaría de recoger los lineamientos de política económica y social del nuevo régimen para proceder a la elaboración del Plan.

Las estimaciones realizadas sobre las características del Plan señalan que este duraría seis años y sólo en casos excepcionales, como en el de grandes obras, su plazo se ampliaría. Los objetivos, determinados por el nuevo gobierno, consistían en alcanzar la tasa de desarrollo que se propusiera como meta para la economía del país, lograr el desarrollo propuesto para cada sector, ejecutar las obras proyectadas, estimar la inversión pública y privada necesaria para alcanzar los objetivos señalados; y poner las repeticiones del plan en el empleo de mano de obra, tanto a nivel nacional como regional, entre otros.

Una vez contando con la aprobación del Ejecutivo, el documento elaborado por la Comisión Senatorial se convirtió en el Plan de Desarrollo Económico y Social de los Estados Unidos Mexicanos.

Finalmente, el proyecto de plan no se presentó al Poder Legislativo, ya que "dados sus precarios fundamentos y sus errores técnicos, no llegó siquiera a ser discutido".

ra a presentarse como iniciativa. La falla principal era no considerar ningún cambio de fondo para resolver los ingentes problemas del desarrollo económico y social, así como pretender hacer una calca de instituciones y procedimientos de otros países, muy alejados de las condiciones de México"<sup>46</sup>.

### 1.9 Los esfuerzos recientes, 1966-1973

La última década ha sido prolífica en intentos de planeación por parte del sector público.

En los últimos diez años se han publicado diversos documentos que persiguen coordinar las actividades productivas y sociales:

1. Plan Nacional de Desarrollo Económico y Social 1966-1970
2. Programa Inversión - Financiamiento del Sector Público Federal, 1971-1976
3. Lineamientos para el Programa de Desarrollo Económico y Social, 1974-1980.

Además, en los últimos cuatro años se han establecido comités promotores del desarrollo económico y social en casi todas las entidades federativas, así como una Comisión Nacional de Desarrollo Regional. También se han establecido organismos públicos encargados de problemas que abarcan regiones considerables del país o áreas localizadas. Asimismo se ha establecido una buena cantidad de fiducicomisos para el estudio y solución de problemas que afectan el desarrollo de algunos estados o regiones.

En el régimen presidencial de 1965-1970, fue publicado por la Comisión Intersecretarial para Formular Planes Nacionales de Desarrollo Económico y Social, el Proyecto de Plan Nacional de Desarrollo Económico y Social que abarca el periodo 1966-1970. La Comisión estaba formada por la Secretaría de la Presidencia y la Secretaría de Hacienda y Crédito Público<sup>47</sup>.

El proyecto se proponía una serie de metas generales de desarrollo y hacía referencia a problemas económicos y sociales. Señalaba que la economía mexicana se había caracterizado, en los últimos años, por un apreciable desarrollo. Sin embargo,

mentonaba el documento, "falta mucho para que el país tenga las condiciones necesarias que aseguren la prosperidad del pueblo. México parece todavía contrastar dramáticos y desequilibrados sociales, económicos y culturales". El propósito del Plan era unir los esfuerzos para acelerar el crecimiento del país en beneficio de todos.

La publicación de este Plan obedeció, según el mismo documento, a la decisión del gobierno de aprovechar al máximo los recursos humanos y naturales, así como la correcta utilización de capital, con el fin de programar en forma sistemática el desarrollo de la nación.

Los objetivos básicos consistían en: lograr que el producto bruto interno real creciera al 6% promedio anual, dar prioridad a las actividades agropecuarias y programar su desarrollo acelerado; impulsar la industrialización y mejorar su eficiencia productiva; incorporar los adelantos de la ciencia y la técnica al desarrollo económico, atenuar y corregir los desequilibrios en el desarrollo; distribuir equitativamente el ingreso nacional; fomentar el ahorro interno; mejorar la educación y las condiciones sanitarias y asistenciales de la población; y, mantener la estabilidad del tipo de cambio y combatir las presiones inflacionarias.

Para alcanzar los objetivos del Plan se señala que "es indispensable coordinar la acción de todos los sectores de la economía y crear mecanismos para que sean compatibles entre sí las decisiones que sea preciso tomar y fuesen un todo congruentes". "Se asignan responsabilidades concretas al sector público, sin menoscabo de la iniciativa de las dependencias, organismos y empresas de participación estatal. Asimismo, se establecen los principios de una coordinación flexible del sector público, que permita que el gasto público se efectúe conforme a las prioridades que deriven del interés y la política nacionales. El sector privado contará con información adecuada y oportuna, y recibirá estímulos, generales y específicos, a fin de orientar su acción de acuerdo con los objetivos establecidos"<sup>48</sup>.

La coherencia económica y financiera — se señalaba — se logrará a través del proceso de planeación y "sentará las bases de un desarrollo más rápido y equilibrado a partir de 1970"<sup>49</sup>.

25

No obstante que en el texto del Plan Nacional de Desarrollo se señalaba la asignación de responsabilidades a los diferentes órganos del sector público y la creación de mecanismos que hicieran posible la consecución de los objetivos mencionados, a lo largo del documento sólo se hace referencia a una serie de lineamientos generales sobre desarrollo económico, desarrollo social, comercio exterior, inversiones extranjeras y crédito externo, inversión pública e incentivos a la inversión privada. Pero no se señalan, en casi todos los casos, los responsables de ejecutar tales políticas, ni los instrumentos para su ejecución. A ningún órgano se hizo responsable de la coordinación, ejecución y evaluación de los resultados del Plan.

Se ha señalado que durante el régimen de 1965-1970, "la planificación cayó en el olvido. No volvió a hablarse de ella ni en proyección ni en revistas especializadas y todos los planes con sus gruesos expedientes y voluminosas estadísticas fueron archivados"<sup>50</sup>.

En el actual gobierno se ha publicado un Programa de inversión financiamiento para el periodo 1971-1976, y un documento que contiene los lineamientos para el programa de desarrollo económico y social que abarca los años 1974-1980<sup>51</sup>.

El Programa de inversión financiamiento del sector público federal 1971-1976 se creó con el propósito de hacer compatible, anualmente, el gasto de inversión y los recursos financieros disponibles. La responsabilidad del trabajo técnico para lograr sus objetivos se asignó a la subcomisión de inversión financiamiento formada por las Secretarías de la Presidencia, y Hacienda y Crédito Público. Compete a ambas Secretarías mantener un diálogo permanente con cada una de las entidades públicas que realizan inversiones.

Los objetivos del Programa de inversión financiamiento consisten en: elevar la generación de empleo productivo fundamentalmente en las áreas rurales deprimidas; impulsar los proyectos que contribuyan a elevar el bienestar social, promover el desarrollo y la integración regional mediante programas coordinados en poblaciones, entidades federativas y zonas

46. *Ibid.*, p. 101.

51. *Plan y programa de desarrollo en México 1966-1970 y el programa para el Programa de Desarrollo Económico y Social, 1971-1980, documento para discusión por las ciudades de programación*. Secretaría de la Presidencia y Hacienda y Crédito Público de 1973 (México, imprenta nacional).

46. *Ibid.*, Los intentos de planeación.

47. *Plan Nacional de Desarrollo Económico y Social 1966-1970*. Proyecto elaborado por la Comisión Intersecretarial. Presidencia y Hacienda (México, imprenta nacional).

48. *Plan Nacional de Desarrollo*.

49. *Plan Nacional de Desarrollo*.

00

reducir las contribuciones a la reducción del déficit en cuenta corriente de la balanza de pagos, mediante la ejecución de proyectos que eleven la oferta de bienes exportables, elevar la productividad del campo, la eficiencia en la preparación de proyectos, así como la complementación y ejecución del capital extranjero.

Por lo que se refiere a la política de financiamiento de la inversión pública, los objetivos fundamentales señalados en el Programa son: mantener el equilibrio entre el gasto y los recursos financieros disponibles, no inflacionarios, elevar el ahorro del sector parastatal para reducir o eliminar las transferencias que reciben del Gobierno Federal, orientar el crédito externo hacia proyectos que contribuyan a reducir el déficit en cuenta corriente de la balanza de pagos, incrementar el ahorro interno captado por el sistema financiero y hacerlo corresponder con el crédito interno, y considerar las necesidades de expansión de la inversión privada y las necesidades crecientes de recursos para el campo y la construcción de viviendas.

Para el sexenio 1971-1976, se espera realizar una inversión aproximada de 240 mil millones de pesos, que se destinarán a cada sector productivo, de acuerdo con las necesidades características de cada uno.

Las inversiones para el sector agropecuario por 28 mil millones de pesos (relativamente escasas comparadas con la inversión para el sector industrial, de 80 mil millones), estarían complementadas por inversiones dirigidas al fomento de las actividades del campo, (señales, caminos, agua potable, electrificación, centros de salud, etc.) que, desde el punto de vista presupuestal, no se consideraban como inversiones al sector agropecuario. Estas inversiones en obras de beneficio social se calcularon en 51 100 millones de pesos, 45 700 millones destinados a transportes y comunicaciones, 2 000 millones para programas especiales, y 3 000 millones en la compra de equipo para administración y defensa.

Los objetivos del Programa de Inversiones — señala el documento — requieren de las decisiones complementarias del sector público respecto de inversiones y reformas administrativas, como es, por ejemplo, solucionar oportunamente los problemas de tenencia de la tierra y asignar los recursos crediticios necesarios para que las obras agropecuarias sean aprovechadas equitativamente.

El Programa de inversión financiamiento promueve el desarrollo en nuevas regiones industriales y turísticas y una serie de proyectos estatales para coordinar las actividades del propio Programa con los de las entidades federativas en la realización de inversiones en obras de pequeña irrigación, bordeo, electrificación, construcción de caminos y escuelas, establecimiento de centros hospitalarios y de servicios de agua potable, y algunas otras. El Programa de inversión financiamiento orienta preferentemente sus esfuerzos a comunidades que cumplan con poblaciones entre los 500 y 2 500 habitantes.

Con el fin de lograr mejores resultados, el programa sugiere algunas recomendaciones al sector público. Sus propósitos son: mantener la anualización de los programas con el fin de hacer compatibles el gasto y el financiamiento, ya que hasta 1966 la autorización de inversiones se otorgaba con plazos indefinidos de ejecución, y en muchos casos las inversiones autorizadas no se ejercían o se realizaban mucho tiempo después de autorizadas, estudiar integralmente los programas de cada entidad del sector público, coordinar las actividades de los grupos de trabajo, determinar los obstáculos en la ejecución de las inversiones y verificar que los gastos correspondan a los recursos previstos y que produzcan los beneficios económicos y sociales esperados; someter al mecanismo inversión-financiamiento los proyectos susceptibles de financiarse con créditos externos; integrar un programa que comprenda y jerarquice todos los estudios de preinversión del sector público; celebrar convenios con los gobiernos de los estados para la realización de obras en cooperación; determinar en cada proyecto la importación directa y el contenido importado de las obras, celebrar seminarios de evaluación de proyectos, y coordinar la acción de los sectores privado y social con los proyectos de inversión.

En la actualidad el mecanismo de inversión-financiamiento funciona dentro de las actividades cotidianas de las Secretarías de Hacienda y de la Presidencia. Tendrá que pasar algún tiempo para poder evaluar objetivamente sus logros y los problemas institucionales que enfrenta. Entre los objetivos del mecanismo inversión-financiamiento, no está la elaboración de un plan nacional de desarrollo económico y social, sino dar prioridad a la asignación de fondos para inversión, tarea fundamental dentro de un proceso general de planeación.

En julio de 1975, se publicó el documento "Lineamientos para el Programa de Desarrollo Económico

y Social, 1974-1980", que estaba preparado por la Secretaría de Hacienda, del Patrimonio Nacional y de la Presidencia, con la colaboración del Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología, el Fondo de Cultura Económica y la Comisión Económica para América Latina. Estos lineamientos para el desarrollo económico y social se prepararon con el fin de discutirse con las unidades de programación creadas recientemente en todos los organismos del sector público,<sup>52</sup> que están asesoradas y coordinadas por la Secretaría de la Presidencia.

El documento de lineamientos es la síntesis de un grupo considerable de estudios sectoriales que abarcan todos los campos de actividad económica: empleo, sector agropecuario, sector industrial, sector externo, gasto público y política fiscal, créditos y política financiera, y aspectos de reforma administrativa.

Sus principales objetivos son: aumentar la capacidad del sistema económico para absorber la mano de obra y distribuir mejor el producto nacional. Se pretende, según el documento, acelerar el crecimiento y afianzar la independencia técnica y económica respecto del exterior. Para satisfacer estos propósitos, se propone aumentar el incremento del producto real, de 7%, tasa media del decenio anterior, a 8% anual.

Los elementos fundamentales del desarrollo económico y social son el gasto público, las exportaciones, el turismo y la mayor demanda que genera un sector agropecuario más activo. El documento sostiene que existen los instrumentos de política necesarios para lograr los objetivos propuestos.

Se recomienda aumentar el gasto público ya que, en relación con otros países, la proporción respecto al producto nacional es baja, y resulta insuficiente para cubrir las necesidades sociales y el fortalecimiento de los sectores productivos básicos de la economía.

Señala que la política fiscal promueve las actividades de exportación y que el aumento en el gasto público destinado a la agricultura eleva la capacidad adquisitiva de la población rural. Al ampliarse el mercado, podrán aprovecharse las ventajas que ofrece la producción en mayor escala, y al aumentar la demanda de bienes de consumo popular aumentará la ocupación.

<sup>52</sup> Las unidades de programación fueron creadas mediante el Decreto publicado en el *Diario Oficial* el 11 de marzo de 1971, y sus funciones son "asesorar a los estados en el establecimiento de programas, la

Subraya que el éxito del Plan, dependerá en buena medida de la eficiencia del aparato administrativo a disposición del Estado. La programación, como instrumento de transformación social de expansión y modernización de la economía, es un proceso permanente. Buena la continuidad y coordinación de las políticas que se adopten, especifica los objetivos globales en cada uno de los niveles, y dirige el esfuerzo colectivo, tanto público como privado, hacia un orden y una jerarquía definidos.

En el ámbito de la reforma administrativa, señala que el Ejecutivo Federal está facultado para realizar casi todas las acciones que demanda un plan de desarrollo. Sin embargo, existen algunos organismos con funciones similares cuya completitud y extensión dentro del aparato administrativo pueden llegar a constituir un obstáculo en el logro de los objetivos. Es necesario buscar una sincronización y coordinación precisa y el menor número de contradicciones y complicaciones. Más que los recursos técnicos y financieros, es el apoyo político el que garantiza el éxito de todo el plan.

Una vez publicado el documento sobre lineamientos de política, en junio de 1975, se realizaron distintas reuniones de trabajo con las Unidades de Programación de los diferentes órganos del sector público y, al poco tiempo, dejó de hablarse de ese documento como guía de las actividades de las secretarías, organismos descentralizados y empresas de participación estatal. Ello puede atribuirse a que si bien el documento contiene una serie de propuestas para la estrategia de desarrollo adoptada, no señala quiénes deberán encargarse de su ejecución ni los mecanismos que se utilizarán para su puesta en práctica. Otras de las razones por las que el documento no se volvió a mencionar como norma de actividad para el sector público, se debe a la situación de emergencia por la que atravesó la economía nacional en el año en que se publicó. Elevados índices de inflación, la insuficiencia de ciertos productos básicos de consumo, y los ritmos reducidos en el crecimiento de la actividad económica, hicieron que se tomaran medidas urgentes dejando a un lado las recomendaciones del documento. La situación que enfrentó la economía nacional, y que en buena medida continúa, refleja alteraciones de la economía mundial derivada de múltiples problemas como la crisis de energéticos y

formulación de planes y proyecciones y la determinación de las acciones necesarias para cumplir dentro de sus atribuciones y funciones específicas, las tareas que corresponden a cada entidad.

La recesión económica de los Estados Unidos, entre otras. Por así como los Lineamientos para el Programa de Desarrollo Económico y Social no prosperaron en su ejecución práctica.

El 28 de enero de 1975, se promulgó un decreto presidencial que creó la Comisión Nacional de Desarrollo Regional. Para cumplir ese acuerdo, el 14 de febrero se estableció formalmente dicha Comisión, cuyas funciones son: generar empleos en la provincia; mejorar la productividad y las condiciones de vida del campesino; coordinar las acciones de cada dependencia para apoyar a los comités promotores de desarrollo socioeconómico de las entidades federativas (comités de reciente creación también); e impulsar la realización de programas de desarrollo económico y social, preferentemente en el medio rural.

La Comisión, presidida por la Secretaría de la Presidencia, se encargará de encargar las inversiones efectuadas en el campo, hacia obras y servicios de interés general. También se buscará la participación de la población local para contribuir al desarrollo de la región.

Las actividades que se propone llevar adelante comprenden: el establecimiento de pequeña y mediana industria en el medio rural, organizada bajo el sistema cooperativo, y la incorporación de grupos campesinos, estudiantes y profesionales a las tareas de mejoramiento social y económico en las áreas rurales.

Entre los cinco trabajos inmediatos que se propone realizar la Comisión destacan, formular para 1976 un programa anual de inversiones y gasto corriente a mediano y largo plazo que presentaran los comités promotores del desarrollo socioeconómico en diversas entidades y regiones del país; establecer criterios para coordinar la acción de las dependencias federales a nivel estatal; promover la formulación de proyectos para la creación de nuevas fuentes de trabajo; y establecer actividades productivas en el medio rural fundamentalmente.

El labor de la comisión es un intento por coordinar y dar coherencia al sector público en la planeación de las actividades económicas y sociales con un enfoque que otorga especial atención al sector rural.

#### 1.10 Comentarios

En los últimos 40 años se han realizado ininterrumpidos esfuerzos para establecer instrumentos de planeación de las actividades productivas y sociales como norma de acción del sector público. La mayoría de los intentos han tenido efectos considerablemente limitados. En ocasiones no se realizó una de las etapas del proceso: fuese ya la evaluación o el control. En todos los casos, el tratamiento dado a estas etapas fue bastante superficial.

Fuera de que se cae en el abuso en cuanto al término se refiere, deben tenerse en cuenta las dificultades de planeación en una economía mixta como la nuestra, con una intervención estatal más intensa cada vez, lo que suscita conflictos de poder entre diferentes secretarías de Estado, especialmente aquellas que intervienen directamente en el proceso: las Secretarías de Hacienda, de la Presidencia y del Patrimonio Nacional.

La Comisión de Inversiones (1953-1958) ha sido el único instrumento en que las actividades del sector público estuvieron sujetas a un control eficiente por parte de una oficina que funcionaba en la dependencia directa del Presidente.

Por otra parte, la concentración de poder en el Presidente de la República representa una ventaja para la definición de los objetivos de política económica que se deseen alcanzar mediante una planeación del desarrollo. Esta ventaja, desde un punto de vista técnico, no ha repercutido favorablemente en los intentos para llevar adelante la planeación económica y social del país. La ventaja aparente de la concentración del poder se diluye en la realidad, dado que la ejecución práctica de las disposiciones de política son realizadas directamente por los secretarías de Estado, directores de organismos y empresas públicas, sin una adecuada coordinación global.

Los problemas a los que se enfrenta la implantación de un proceso planificador en el país no son técnicos, sino fundamentalmente políticos. En tanto no haya la decisión política y el convencimiento de llevar a la práctica la planeación y programación de las actividades económicas y sociales, las elaboraciones técnicas que se realicen quedarán como meros ejercicios de gabinete, que no tendrán ningún efecto sobre la realidad nacional.

Para llevar a la práctica una política de planeación, es necesario la realización de reformas en la administración y en la estructura del sector público. En la actualidad, cada secretaría, organismo descentralizado y empresa de participación estatal elabora sus propios planes y realiza sus programas de inversiones sin consultar con otras.

Indudablemente, el propósito al que un plan obedece es determinante del éxito o fracaso del mismo. En ocasiones, como en el caso de los planes sexenales, estas obediencias a un propósito político interno. Se trataba en ese caso de establecer continuidad entre la política de uno a otro régimen al adoptar el último la política del saliente.

En otros casos, un plan tiene como propósito fundamental presentar una buena imagen que permita obtener recursos externos y, por lo tanto, su implantación no ha sido contemplada; la relevancia del plan es en este caso, limitada.

Finalmente, el plan se estructura para servir a una función económica interna, su ejecución y control no han sido contemplados y, por lo tanto, como en la situación de los planes sexenales, fracasa.

El establecimiento de un proceso de planeación económica y social no podrá llevarse a cabo en tanto no exista la decisión política que asuma la responsabilidad de las implicaciones y consecuencias que el proceso mismo conlleva. Esgrimir argumentos de carácter técnico — falta de estadísticas económicas y sociales, carencia de especialistas en el tema; la no existencia de alguna institución responsable de la ejecución del plan, entre otras — para justificar la imposibilidad de dar coherencia y racionalidad a las actividades económicas y sociales, a través de un plan nacional de desarrollo, es sólo un pretexto para no enfrentar problemas que tradicionalmente padece el país.

#### LA POLITICA HIDRAULICA DESDE 1926

En el pasado se siguieron medidas a menudo conflictivas por la carencia de una política total y detallada que relacionase el uso de los recursos naturales con el crecimiento y el bienestar.

La política hidráulica obtuvo un primer lugar en las décadas pasadas. Este hecho resulta lógico ya

que era necesaria una oferta adecuada de recursos, requeridos directa o indirectamente para apoyar el crecimiento económico. Sin embargo, es reciente que los recursos naturales y su uso empezaron a contemplarse como elementos que, modernizados eficientemente, contribuyen a disminuir los desequilibrios sociales y regionales que surgen del desarrollo.

Desde la época precolombiana el aprovechamiento del agua en México se ha relacionado con el bienestar social y regional: usos urbanos, industriales, de generación de energía, así como control de avenidas y fundamentalmente riego.

Si bien el riego ha estado casi en forma absoluta a cargo de Recursos Hidráulicos, en los otros usos del agua han intervenido diversas instituciones. Las obras de agua potable servían en 1950, a una población de cinco millones, en 1960 a 11.05 millones; en 1970 a 23.74 millones y en 1975 a 35.57 millones.

Las obras de alcantarillado servían en 1960 a 9.95 millones, en 1970 a 11.86 millones y en 1975 la población con servicio de alcantarillado era de 19.93. Es decir, que la realización de obras de agua potable y alcantarillado en los últimos años ha incrementado su ritmo de crecimiento, participando la Secretaría de Recursos Hidráulicos cada vez más activamente.

En cuanto a otros usos del agua en las ciudades, sólo algunas tienen un consumo industrial de cierta importancia, y son unas cuantas ramas las que efectúan el consumo mayor. Estas razones y el hecho de que la industria se encuentra en zonas urbanas, le permite satisfacer su demanda en detrimento de la cantidad y la calidad de líquido, ya que las cinco actividades que utilizan más del 80% del volumen extraído son las que más contaminan el agua.

Como no existe medición directa, no se conoce con precisión la cantidad extraída y consumida por la industria. Los estudios al respecto se realizan con base en índices de uso del agua por valor económico, obtenidos de la literatura internacional vide algunos datos nacionales. Pero es indudable que el derroche deriva de la falta de control y de un enfoque integral que incluya el uso industrial y el abastecimiento de agua potable, el tratamiento de descargas municipales y el reuso del agua.

En la composición del sector eléctrico, las plantas hidroeléctricas aumentaron su participación en cuanto a potencia instalada: del 41% (540 MW) en 1910 a 44% (85 000 MW) en 1922, en tanto que su proporción en la energía generada disminuyó de 47% a 42.500 millones de KWH en 1950 a 43% (14 800 millones de KWH) en 1972.

El potencial hidroeléctrico identificado en el país en plantas en operación, construcción, programa de obra y estudio es de 79 500 millones de KWH de los cuales el 23% se encuentra en operación y construcción.

Por lo que se refiere a la acuacultura, en el país existen 20 estaciones piscícolas donde se cultivan diversas especies, y se cuenta con experiencias exitosas como el caso del cultivo del ostión. Diversas instituciones llevan a cabo investigaciones en ese campo, entre ellas la SIC y el Instituto de Pesca.

La administración actual incorporó a la SRH al campo de la acuacultura, y esta dependencia ha dedicado grandes esfuerzos a incrementar la producción del camarón en las lagunas litorales, creando, en 1972, el primer distrito de acuacultura en Nayarit.

No sólo en lagunas litorales realiza la SRH su actividad en la acuacultura, sino que cultiva especies como la rana toto en los canales de algunos distritos de riego.

El control de las avenidas es otra actividad establecida en la Ley Federal de Aguas y llevada a cabo por la SRH. Actualmente, sólo se han realizado acciones de infraestructura aisladas con fin prioritario de control de avenidas, ya que, en el pasado, la Secretaría se orientó casi exclusivamente al campo de la irrigación. Entre ellas figuran las presas de Malpasos, Temascal y La Amistad, así como bordos de protección de longitud considerable en diversos ríos y algunas rectificaciones y cauces de alivio.

### 2.1 Los recursos hidráulicos

El subdesarrollo económico y social en México presenta marcados contrastes regionales. Influyen, entre otras cosas, el suelo montañoso, lo disperso de los núcleos de población y la relativa escasez de tierra fértil y llana. Las actividades agrícolas absorben una proporción importante de la población económicamente activa y, a pesar de ello, la agricultura ha dispuesto de limitados recursos materia-

les y financieros para un desarrollo más acelerado, acorde con las necesidades del país.

Algunos estudios realizados por la Secretaría de Recursos Hidráulicos<sup>53</sup> han demostrado que más del 40% del territorio nacional lo forman zonas áridas en las que el desarrollo de actividades agrícolas está supeditado a la construcción de obras de riego, el 34% se clasifica como zonas semáridas, donde la agricultura depende fundamentalmente del régimen de lluvias, un 6% son zonas semhúmedas y 7% zonas húmedas. Es decir, más del 75% del territorio nacional requiere de riego para desarrollar la agricultura.

De los 196.7 millones de hectáreas de la superficie nacional, sólo 36% son tierras llanas (71 millones de hectáreas), con pendientes menores de 2.5%, y el resto está ocupado por terrenos accidentados.

El país no tiene un abastecimiento regular y suficiente de agua. En algunas zonas del norte el abastecimiento es nulo; en cambio, las zonas costeras, la península de Yucatán y el sureste cuentan con abundante agua. Al mismo tiempo, donde existen grandes cantidades de agua, hay una densidad muy baja de población y donde se encuentran las mayores concentraciones urbanas, el líquido es escaso. Si se consideran las condiciones aleatorias de la agricultura de temporal, así como las diferencias entre la superficie laborable, las áreas cultivadas y la superficie cosechada, puede comprobarse la evidente importancia de las obras de irrigación.

### 2.2 Algunos antecedentes de la política hidráulica

Durante el régimen porfirista se otorgaron concesiones a empresas colonizadoras e irrigadoras, y en 1908 se estableció la Caja de Préstamos para Obras de Irrigación y Fomento de la Agricultura, que subvencionaba a las empresas lucrativas que emprendieron la construcción de algunas obras de irrigación. Antes de 1910, las obras de riego con que contaba el país cubrían una superficie aproximada de 700 mil hectáreas<sup>54</sup>.

En el periodo revolucionario de 1910-1920 se detuvo la construcción de obras de infraestructura y sólo en los primeros años de la década de los veinte se

53 *Informe Hidráulico de México*, número especial, 1969.

54 Oscar Adolfo, "Las obras de irrigación en México 10 años de Revolución", México: Fondo de Cultura Económica, 1960.

volvió a impulsar la obra de riego. En 1921 se estableció la Dirección de Irrigación, dependiente de la Secretaría de Agricultura y Fomento, y entre 1924 y 1925 funcionó el Departamento de Reglamentación e Irrigación que dependió de la Dirección de Aguas.

La Dirección de Irrigación incrementó y mejoró el servicio hidrológico con la instalación de estaciones pluviométricas y termopluviométricas, estaciones de evaporación y un servicio hidrométrico. Realizó estudios para la utilización de los recursos hidráulicos que sirvieron de base para la ejecución de proyectos posteriores, y ejecutó obras en diferentes lugares del país<sup>55</sup>.

En 1924, por limitaciones presupuestarias, la Dirección de Irrigación se convirtió en Departamento de Reglamentación e Irrigación, mismo que realizó obras de importancia local e inició la reglamentación del uso de aguas de propiedad federal<sup>56</sup>.

### 2.3 La Comisión Nacional de Irrigación, 1926-1946

Una vez que los gobiernos postrevolucionarios se afirmaron en el poder, enfatizaron los problemas nacionales más urgentes, entre los que encontraba un lugar prioritario la producción de alimentos.

En 1925 y en estas condiciones, el gobierno de Plutarco Elías Calles consideró como actividades urgentes la rehabilitación de los transportes y comunicaciones, la reconstrucción del sistema bancario y la ejecución de obras hidráulicas para fomentar la producción agrícola.

En enero de 1926, expidió la Ley sobre Irrigación con Aguas Federales, donde se declaró de utilidad pública la irrigación y se creó la Comisión Nacional de Irrigación; asimismo, se estableció el Fondo Nacional de Irrigación. El decreto posterior declaraba de utilidad pública las obras de abastecimiento de agua de la población rural, la regularización de las corrientes, el alumbramiento y extracción de aguas subterráneas, el drenaje de terrenos con exceso de agua, etc.

La Comisión emprendió la promoción y construcción de grandes distritos de riego en toda la Repú-

blica<sup>57</sup>, en las que se seleccionaron, en un principio, aquellos que rindieron mayores beneficios financieros, e irieno que debió abandonarse ya que los colonos agricultores de los distritos se encontraban en una situación económica deplorable<sup>58</sup>.

Entre las funciones de la Comisión, además de las referentes a la planeación, ejecución y colonización de las obras, figuraba la de los distritos de riego. La Comisión abordó problemas de colonización, crédito y distribución de aguas, considerando que deberían resolverse de manera planeada y conjunta y se enfrentó a aquellos de carácter administrativo al hacerse cargo de obras ya en uso como en Bajío y la región de Tula<sup>59</sup>.

Al inicio de sus actividades, la Comisión debió superar la falta de datos sobre las corrientes fluviales y de personal especializado en irrigación; no obstante, realizó inversiones considerables y obras de importancia en el periodo 1926-1928<sup>60</sup>.

La crisis económica de los años 1929-1933, afectó la construcción de obras públicas; a pesar de ello se terminaron algunas y se iniciaron otras: las del Valle de Juárez, en Chihuahua; la de El Nogal en Coahuila; La Presa Rodríguez; las de mejoramiento en Culiacán y en el Alto Río Lerma. A fines de 1934 los trabajos de la Comisión habían beneficiado una superficie de 128 600 hectáreas<sup>61</sup>.

En 1936, el Banco Nacional de Crédito Agrícola fue responsable de los problemas de colonización, operación y servicios de crédito de los distritos de riego en explotación. De esta manera, el Banco pudo comprobar que ninguno de esos distritos estaba concluido y que les faltaban estructuras, canales secundarios, completar caminos y teléfonos a la vez que carecían de drenaje o eran insuficientes. Además, las cuotas de compensación recibidas por el Banco no eran suficientes para amortizar el valor de las obras y gastos de conservación. Por esta

57 Se realizaron obras en los sistemas de riego de Estación Agrícola en El Nopal, Temascal, Tula, Hgo. San Martín, en Coahuila y San L. Brindón, I. y Gu. Nogal y Mexcala en Coahuila, Ciudad Juárez, Chih. Culiacán, S. y Alto Lerma, Gu.

58 *El factor social*,...

59 Tamayo, José L. *El problema fundamental de la agricultura mexicana en México*, Instituto Mexicano de Investigaciones Económicas, 1964.

60 Rivero Quinto Sigüenza, et al. *El desarrollo agrario y desarrollo agrícola en México*, México: Centro de Investigaciones Agrarias, Fondo de Cultura Económica, 1974.

61 16. Por su parte *El factor social* señala "desde la creación de la Comisión Nacional de Irrigación hasta el momento de iniciarse el periodo para formal el Sr. General Lázaro Cárdenas se abrieron la cantidad de 40 050 hectáreas de las cuales 86 450 se consideraban como tierras nuevas para riego, mientras que las restantes fueron zonas mejoradas".

55 *El factor social dentro de la política hidráulica de la Secretaría de Recursos Hidráulicos Informe preliminar*, México, Secretaría de Recursos Hidráulicos, 1974.

56 *Ibid.*

razón. La operación de los distintos de riego ocasionó un crecimiento débil<sup>62</sup>. Esta situación empeoró en las administraciones posteriores.

En el periodo comprendido entre 1935-1940, se incrementaron notablemente las inversiones del sector público en obras de riego, dándosele especial importancia a la construcción de pequeñas obras de riego. En 1936, el gobierno cardenista creó, para este fin, el Departamento de Pequeña Irrigación, que dependía de la Comisión Nacional de Irrigación. El Departamento se encargó de atender las peticiones relativas al riego en pequeña escala, formuló y ejecutó proyectos y se encargó de vigilar su funcionamiento<sup>63</sup>.

En el periodo de Cárdenas se beneficiaron 118 495 hectáreas y un gran número de obras quedaron en proceso de construcción<sup>64</sup>.

Durante el periodo 1941-1946, las inversiones para riego absorbieron más del 90% de las canalizadas al sector agropecuario; en promedio, las inversiones para la construcción representaron el 15.7% de la inversión total federal alcanzando, en 1946, el 16.5% del gasto total de la inversión, siendo la proporción más alta hasta entonces<sup>65</sup>. Se proporcionó riego a 349 129 hectáreas y se concluyeron obras como la presa El Palmito en la Laguna; La Amargosa en el río Yaqui y la Marte R. Gómez en Tamaulipas. Asimismo se realizaron obras en Sinaloa, Sonora, Puebla, Tamaulipas y Veracruz y continuó la pequeña construcción. En el Programa del Sexenio se estableció la necesidad de planificar y realizar obras, así como estimar los recursos hidráulicos y sus posibilidades para riego.

#### 2.4 La Secretaría de Recursos Hidráulicos

En diciembre de 1946 entró en vigor una nueva Ley de Riegos que responsabilizaba a la Secretaría de Agricultura de la colonización de los terrenos nacionales beneficiados con estas obras, y que transfirió a la Comisión Nacional de Irrigación, ampliando su campo de acción y facultades, en Secretaría de Recursos Hidráulicos, a partir de enero de 1947<sup>66</sup>. La nueva Secretaría recibe la orden de realizar, entre otras obras, las de riego, de alcantarillado de las poblaciones, la defensa contra inundaciones, el estudio del aprovechamiento del agua

62 Tamayo, *op. cit.*

63 Tamayo, *op. cit.*

64 Estratón, *op. cit.*

65 Orive Alba, *op. cit.* y Estratón, *op. cit.*

para generar energía eléctrica, la creación y mejoramiento de flujos fluviales de navegación, etc.

En 1947, se crearon las Comisiones del Papaloapan y del Tepalcatepec. La Comisión del Papaloapan se estableció con el objeto de planear y coordinar los trabajos necesarios para el desarrollo integrado de la cuenca. Debía ocuparse, no sólo de las inversiones en recursos hidráulicos, energía hidroeléctrica y agua potable, sino también de los problemas de salud, vías de comunicación y escuelas, crear, ampliar y mejorar los centros de población, así como de las actividades relativas a la agricultura, industria y problemas sociales. La amplitud del programa perseguía facilitar la intervención de las secretarías y gobiernos estatales en la solución de los problemas mencionados. La Comisión, que dependía directamente de la Secretaría de Recursos Hidráulicos, ejecutó y planeó obras en la Cuenca del Papaloapan. La sede de la Comisión se estableció en Ciudad Alemán y se construyó la Presa Alemán, que abastecía la zona de riego Miguel Alemán<sup>67</sup>. La Comisión realizó trabajos para el control de inundaciones y construyó bordos y obras para el control de avenidas.

La Comisión del Tepalcatepec tenía objetivos similares a la del Papaloapan. Se responsabilizó del desarrollo integrado de la cuenca y se le dieron facilidades para la planeación y construcción de obras de irrigación, así como para el desarrollo de las fuentes de energía, ingeniería sanitaria, carreteras, ferrocarriles, telégrafos y teléfonos. También tuvo ingerencia en la creación y expansión de centros de población; en los problemas de desarrollo agrícola, industrial, de crédito, asuntos agrarios y colonización<sup>68</sup>.

Las inversiones en irrigación realizadas en el periodo 1947-1952, registraron un incremento notable. Se concentraron principalmente en el norte y noroeste, regiones cuya producción agrícola se destina a la exportación, como en Sinaloa, Sonora, Baja California, y Tamaulipas<sup>69</sup>. La superficie beneficiada ascendió a 625 512 hectáreas.

66 Ley de Riegos. Disposiciones generales. Artículo 39. "La Secretaría de Recursos Hidráulicos será la encargada de la aplicación de esta Ley respecto a la planeación, proyectos y construcción de las obras objeto de la misma y la de Agricultura y Ganadería, respecto de la operación de dichas obras y de la colonización de las tierras regadas".

67 Barkin, Harold y Timothy Jung. *Desarrollo económico regional, México en el Siglo XXI*. Editores S.A. 1970.

68 Fernández Bravo, Vicente. *Estudio económico social de la cuenca del río Tepalcatepec*, México. Escuela Nacional de Economía, UNAM, 1954.

69 Estratón, *op. cit.*

Un problema de repercusiones económicas, políticas y sociales de este periodo, fue la modificación del Artículo 27 Constitucional que incluyó disposiciones sobre *infecondabilidades* ganaderas, el aumento del tamaño de la propiedad privada infecondable, el aumento a 10 hectáreas de riego y a 20 de temporal, como mínimo, de la parcela ejidal en los nuevos ejidos, y el derecho de amparo para los propietarios con certificado de infecondabilidad. El neolatifundismo aumentó considerablemente durante el sexenio 1917-1952, sobre todo en los nuevos distritos de riego, en donde se acumularon grandes extensiones de tierra cultivable<sup>70</sup>.

En el periodo presidencial de 1953-1958 se continuó la construcción de obras iniciadas en el periodo anterior y se ejecutó un buen número de obras en diferentes entidades: la Presa Miguel Hidalgo en el río Ezequiel, los canales de la presa Mazúran en el río Mayo; la red de distribución en la presa Alvaro Obregón en el río Yaqui y la red de distribución en la presa Falcón, entre otras. Se creó la Comisión del Grijalva, que realizó trabajos para el control de inundaciones, de drenaje, de caminos y de irrigación en la cuenca<sup>71</sup>.

Entre los principales objetivos de la Secretaría de Recursos Hidráulicos durante la administración 1953-1958 figuraron: coordinar labores con las Secretarías de Agricultura, de Comunicaciones y Transportes, y con la Comisión Federal de Electricidad; contribuir a la satisfacción de la demanda de alimentos, al aumentar las áreas de cultivo y la productividad de la tierra mediante la continuación de obras que controlaran y regularan las corrientes fluviales; garantizar el abastecimiento de agua en las áreas de cultivo existentes y ampliar las superficies de riego, así como el abastecimiento de agua para usos domésticos e industriales de la población.

Las obras que se construyeron durante el periodo de Ruiz Cortines se orientaron a la solución de problemas urgentes, sobre todo a aquellas obras que beneficiaran a un mayor número de habitantes, dando preferencia a zonas donde las lluvias son escasas<sup>72</sup>.

En el periodo presidencial de López Mateos (1959-1964) la inversión pública, en el sector agropecua-

70 *Ibid.*

71 Orive Alba, *op. cit.*

72 En el periodo 1929-1934, se beneficiaron 74 433 Ha. anualmente; entre 1935 y 1940 fueron 19 749 Ha.; de 1941 a 1946 el promedio fue de 91 521 Ha.; y entre 1947 a 1952 fueron 104 252. Orive Alba, Adolfo. *La irrigación en México*, México, Editorial Grijalvo, 1970.

rio, se orientó principalmente (más del 75%) a la construcción de grandes obras de riego. A partir de 1960 la inversión pública cambió su estructura y aumentaron las inversiones de beneficio social, servicios públicos, hospitales, centros convencionales, educación y centros habitacionales y, en consecuencia, se redujeron relativamente las inversiones en el sector agropecuario. Se asignaron menos recursos a las obras de fomento agropecuario, y ello repercutió en el descenso de superficies con riego.

Durante este periodo la Secretaría de Recursos Hidráulicos manejó, para el sector agropecuario, aproximadamente el 90% de la inversión total y la Secretaría de Agricultura el 10% restante. En esta etapa se realizaron grandes proyectos de inversión cuyos resultados se obtendrían a largo plazo, y se dedicó una reducida proporción de fondos a obras de menor magnitud como las obras de pequeña irrigación y bordeo, los programas de extensión y divulgación agrícola, los de saneamiento y desarrollo de la comunidad rural.

Se iniciaron diversos planes regionales: Plan Hidráulico del Noroeste; del Centro; del Golfo; el Plan de Rehabilitación de Aguas de Riego; el Plan de Mejoramiento de la Eficiencia en el Uso del Agua; y el Plan Nacional de Pequeña Irrigación.

Entre 1950 y 1964 la superficie irrigada por obras de la Secretaría de Recursos Hidráulicos aumentó de 1.2 millones de hectáreas a 2.4 millones, registrándose una tasa de incremento del 5.22% anual; en tanto que, en el periodo 1959-1961 el incremento medio anual fue de sólo 1.7%. Las hectáreas beneficiadas con riego en ese sexenio fueron 250 767<sup>73</sup>.

Al inicio del periodo 1965-1970, la Secretaría de Recursos Hidráulicos se encontró ante una situación de proyectos sin terminar y, con la excepción de la Presa Nezahualcóyotl, que regaría 350 000 hectáreas, la Secretaría debía enfrentar la realización de estudios de obras de riego, incluyendo la planeación por cuencas<sup>74</sup>. En ese periodo presidencial, la Secretaría de Recursos Hidráulicos ejecutó un programa de trabajos que estuvo orientado fundamentalmente a continuar las obras iniciadas en periodos anteriores; ejecutar obras de riego que produjeran los mayores beneficios económicos y

73 Estratón, *op. cit.*

74 Orive Alba, *op. cit.*

están promoviendo el uso de mejores técnicas e incrementar los estudios que permitieran planear el aprovechamiento de las aguas disponibles<sup>25</sup>. Además se puso en marcha el Plan Nacional de Pequeña Irrigación, que implicaba inversiones de más de 3 000 millones de pesos y el beneficio en diez años de 306 000 hectáreas y 110 000 familias campesinas<sup>26</sup>. Los objetivos principales del Plan eran satisfacer las necesidades de alimentación de un importante número de poblaciones rurales económicamente débiles, generar actividades remunerativas que permitieran incorporar contingentes de población a la economía nacional y a los beneficios de las obras tratadas evitando el flujo de campesinos hacia los centros de población urbana.

En el primer periodo de ejecución del Plan, 1967-1970, se realizaron inversiones por 1 200 millones de pesos para beneficiar 120 mil hectáreas. La segunda etapa, 1971-1976, requería de una inversión de 2 600 millones de pesos para irrigar 186 000 hectáreas.

El Plan divide al país en seis regiones: Península de Baja California, Noroeste, Nordeste, Centro, Istmica y Península de Yucatán. La zona Centro es la más importante y comprende Aguascalientes, Colima, Guanajuato, Hidalgo, Jalisco, Estado de México, Michoacán, Puebla, Querétaro, Tlaxcala, Veracruz y Zacatecas. Es en este último Estado donde se realiza el mayor número de obras. Para la formulación del Plan Nacional de Pequeña Irrigación se hizo previamente un inventario del aprovechamiento del riego, que permitió definir su programa de obras. Los resultados del Plan preveían beneficios no sólo para el sector agropuario sino para la economía del país.

En 1974 funcionaban en México 154 distritos de riego, cuya superficie irrigable era de 4 857 000 hectáreas<sup>27</sup>.

Los objetivos de la Secretaría de Recursos Hidráulicos para el periodo presidencial 1971-1976, se proponen acelerar las obras en proceso; incrementar la eficiencia de los distritos de riego; acelerar la construcción de obras de pequeña y mediana irrigación; aprovechar ríos caudalosos no utilizados ple-

namente, abastecer de agua a las zonas urbanas e industriales y desarrollar la flora y la fauna en aguas litorales. El logro de los objetivos señalados requiere un sistema organizado de planeación para la propia Secretaría.

Las superficies beneficiadas en los tres primeros años del actual gobierno, ascienden a 511 000 hectáreas, de las que 102 000 corresponden a las pequeñas obras de riego para el desarrollo rural.

Es importante señalar, como tantas veces se ha hecho, que los logros de la política hidráulica están condicionados por la ejecución de una política agraria, y que estas deben ser apoyadas a su vez, por otro conjunto de políticas en lo relativo al crédito, investigación agrícola y extensionismo, fertilizantes, comercialización, entre otras, para lograr que los objetivos que persigue cada una se fijen y actúen de manera coordinada en la consecución de fines comunes.

### 2.3 Problemas administrativos<sup>28</sup>

Antes de la creación de la Secretaría de Recursos Hidráulicos existían diferentes órganos que tenían ingerencia en los asuntos del agua: Agricultura y Ganadería otorgaba concesiones para su uso; la Comisión Nacional de Irrigación construye obras; Salubridad abastecía de agua potable a centros de población; la Comisión Federal de Electricidad se encargaba de la generación de energía eléctrica y Comunicaciones y Transportes realizaba obras contra inundaciones y de navegación fluvial. No había coordinación entre esas instituciones para el aprovechamiento de las aguas.

Para resolver los problemas ocasionados por esa falta de coordinación, se estableció una Secretaría que centralizó la autoridad sobre los recursos hidráulicos y se encargó de estudiar, proyectar y construir obras de riego para uso urbano e industrial.

En 1947, la Secretaría de Recursos Hidráulicos inició sus funciones. Agrupó las actividades relacionadas con el agua, a excepción de las realizadas por

la Comisión Federal de Electricidad y la SSA. Posteriormente, la Secretaría estableció comisiones para el desarrollo de cuencas hidrográficas en los ríos Papaloapan, Balsas, Fuerte y Grijalva, así como las comisiones de estudio de los ríos Lerma, Pánuco y del Valle de México.

La estructura administrativa adoptada por la Secretaría de Recursos Hidráulicos, en 1966, permitió la mejor ejecución de esfuerzos. Una subsecretaría se responsabilizó de la construcción de obras hidráulicas y de la negociación de créditos internos y externos. Otra subsecretaría se encargó de la aplicación de técnicas avanzadas. Además, la Secretaría de Recursos Hidráulicos tiene gerencias generales en todo el país, de las que dependen los distritos de riego.

### 2.6 Problemas de los distritos de riego

Los distritos de riego han sido subsidiados por el Gobierno Federal desde que iniciaron sus funciones. El origen de las pérdidas tradicionales se debe a la diferencia entre los ingresos por cuotas que pagan los usuarios y los gastos de distribución, conservación y operación, no previniéndose la necesidad de ajustar las cuotas en función de los aumentos de los costos de administración.

Las explotaciones agrícolas con características minifundistas en los pequeños distritos de riego, dan como resultado altos costos de operación y complican el uso del agua y su distribución. A pesar de los reglamentos, el agua se distribuye de manera inadecuada, desperdiciándose y limitándose las superficies irrigadas.

Las condiciones en que se aprovechan los distritos de riego, el nivel de vida de los campesinos, y las tecnologías utilizadas, están en buena medida determinadas por el régimen de tenencia de la tierra, extensión de las explotaciones, tamaño de la población, y otros factores. La productividad agrícola en esos distritos es más elevada que la media nacional; las estadísticas de 1965-1966 de la Dirección General de Distritos de Riego muestran que el valor de la producción agrícola por hectárea fue de 3 624 pesos, mientras que el valor de la producción agrícola por hectárea según el promedio nacional fue de 1 975 pesos.

El riego coloca a la agricultura en posibilidades de obtener financiamientos, semillas mejoradas, ferti-

lizantes e insecticidas, en virtud de que los riesgos aleatorios inherentes a las actividades agroparias se reducen sustancialmente una vez que se asegura la disposición de agua durante el ciclo agrícola.

En el valor de la producción total, tiene un lugar importante el valor de la producción de los distritos de riego. Obtenida en 2 065 687 Ha., representó el 25% del valor de la producción total del país. En el Pacífico se registra la mayor superficie cosechada: 735 246 Ha.; el Noroeste: 551 359 Ha.; el Centro: 371 900 Ha.; y, el Sur: 8 669 Ha.

Los cultivos más importantes, según la superficie que utilizaron, fueron trigo, maíz, sorgo, algodón y alfalfa. La superficie cosechada de estos productos representa más del 77% del total. La producción de los distritos de riego tiende a ser especializada o semi-especializada y sólo una minoría de ellos tienen una producción diversificada.

En los distritos de riego del Noroeste, que incluyen los grandes distritos de Culiacán, Valle del Fuerte, del Yaqui, sólo el 2% de la superficie de cultivo no está mecanizada, mientras que en la región Centro este porcentaje llega al 31%. En el Sur la mayoría de los distritos de riego se dedican a regar pequeñas superficies y el porcentaje de la superficie de cultivo no mecanizada alcanza el 64%.

En lo que se refiere a mecanización agrícola, existen grandes diferencias en los distritos de riego en virtud de las condiciones de tenencia de tierra, superficie de las explotaciones, cultivos, condiciones ecológicas y sociales. Respecto a la tenencia de la tierra en los distritos de riego, predomina la propiedad privada sobre la ejidal. De las 100 812 propiedades privadas en los distritos de riego, menos de la mitad de los predios ejidales (248 141) poseían, en 1967, el 53% de la superficie total de riego de los distritos. El promedio nacional de la superficie de cultivo por colono es de casi 12 Ha., y por ejidatario de 4 Ha. La concentración de la propiedad privada, según las estadísticas oficiales se manifiesta en el hecho de que sólo el 1.2% de los usuarios poseen el 19.6% de las tierras de riego del país; es decir, 4 495 propietarios privados poseen 471 150 Ha.

Las características de la propiedad privada varían; en el Sur y Noroeste del país las tierras ejidales de los distritos de riego representaron sólo el 16%; en el

25. Plan Nacional Hidráulico 1975.

26. Plan Nacional de Pequeña Irrigación. La obra de pequeña irrigación en el desarrollo de la comunidad rural. Secretaría de Recursos Hidráulicos, 1969.

27. México 1969-ANH. Programa en el desarrollo de la comunidad rural.

28. Para parte del trabajo se basó principalmente en Estructura agraria, op. cit.

Noroeste alcanza el 41%, en el Norte 50% y en el Centro el sector ejidal abarca el 62% de la superficie.

La extensión media de las explotaciones agrícolas en los distritos de riego es de 15.67 Ha, de 15.17 Ha en el Noroeste, de 3.50 en el Norte, de 3.33 Ha en el Centro y de 3.03 Ha en el Sur.

La desigualdad de tierras regadas per cápita va aumentando del Sur, Norte y Centro, donde son menores, al Noroeste y Noreste. La diferencia en desigualdad de tierras por agricultor, entre los dos grupos de tenencias, se acentúa en el Noroeste, Norte y Noreste en favor de los propietarios privados sobre las propiedades ejidales. La superioridad de la propiedad privada sobre la tierra de riego, ha permitido para este tipo de tenencia un desarrollo agrícola más rápido, más fácil y más mecanizado que el que se ha observado en el sector ejidal de las mismas zonas.

En los distritos de riego se ha presentado el llamado proletariadoismo, que consiste en la formación de grandes unidades que, aparentemente y de acuerdo con la legislación agropecuaria, no rebasan los límites fijados, ya que existen varias propiedades a nombre de diferentes personas de una sola familia y en realidad los terrenos forman una sola explotación.

Estudios realizados por el Centro de Investigaciones Agropecuarias señalan la concentración de tierras en los distritos de riego de la costa de Hermosillo, donde existe un predominio excesivo de propiedad privada.

## 2.7 Proyectos de rehabilitación de los distritos de riego

En la limitación de recursos y la necesidad de lograr beneficios rápidos de las inversiones en obras de riego, se han abierto tierras al cultivo antes de terminar las redes de canales, drenaje y caminos, y otras obras menores en los distritos de riego. Se ha procurado mejorar las obras conforme a las limitadas posibilidades del gobierno, ya que, como se ha señalado, las cuotas por riego han sido insuficientes

para cubrir los diversos gastos de los distritos, lo cual también ha contribuido a posponer el mejoramiento y la conservación de las obras.

En 1959, la Secretaría de Recursos Hidráulicos efectuó una investigación que puso de manifiesto que ninguno de los distritos de riego tenía sus obras terminadas y que requerían urgentemente de rehabilitación y mejoramiento. De esta manera, se inició en 1959 un programa de rehabilitación de las obras existentes y de terminación de las faltantes.

El programa de rehabilitación se dividió inicialmente en varias etapas, la primera, concluida en 1965, abarcó los distritos de Culiacán y El Fuerte, en Sinaloa, y el Mayo y el Yaquí en Sonora. La segunda etapa, iniciada en 1965, comprendió los distritos del bajo río Bravo y bajo río San Juan, en Tamaulipas y en Delicias, Chihuahua. La tercera etapa, iniciada en 1966, comprendió los distritos de la región lagunera, en Coahuila y Durango, y San Juan del Río en Querétaro. La cuarta etapa comprendió los anteproyectos de los distritos del río Colorado, en Baja California y Sonora, y Don Martín en Coahuila y Nuevo León.

En algunos casos, la rehabilitación resultó efectiva.

## 2.8 Las comisiones de desarrollo y de estudio

Con objeto de efectuar programas de planeación regional, surgieron las primeras comisiones. En 1947, fueron creadas las del Papaloapan y del Tepalcatépec, como organismos de desarrollo; la primera se encargó de diseñar y construir las obras requeridas para promover el desarrollo integral y armónico de la cuenca del río Papaloapan que, abarca una superficie de 46 600 km<sup>2</sup>.

En el acuerdo que estableció la Comisión, se señalaba que los frecuentes desbordamientos del río Papaloapan causaban grandes perjuicios materiales y pérdidas de vida que frenaban el desarrollo de la región. También se señalaba que la gran insalubridad y la falta de vías de comunicación impedían el adecuado desarrollo de la cuenca.

Para lograr un desarrollo eficaz del amplio programa previsto —señalaba el acuerdo—, debían ajustarse las acciones a una planeación que necesitaba ser coordinada por un organismo con unidad de acción, tanto técnica, como administrativa.

Mediante otro acuerdo similar, se creó la Comisión del Tepalcatépec, que se encargaría del desarrollo integral y armónico en la cuenca del río, que abarca una extensión de 18 000 km<sup>2</sup> y comprende parte de los estados de Jalisco y Michoacán. La Comisión estudió el aprovechamiento de los recursos hidráulicos del río y sus afluentes, tomando en cuenta fundamentalmente el riego y la generación de energía eléctrica para mejorar las condiciones económicas y sociales de los habitantes de la cuenca.

La Comisión del río Fuerte, creada en 1951, tiene bajo su jurisdicción 35 000 km<sup>2</sup> que abarcan superficies de los estados de Sinaloa, Sonora, Durango y Chihuahua. La Comisión realizó la construcción de la presa Miguel Alemán con el fin de aprovechar las aguas del río para riego y generación de energía eléctrica. Construyó, además, obras de ingeniería sanitaria, obras de defensa del río y vías de comunicación.

En 1952 se creó la Comisión del Grijalva, entre cuyos objetivos estaba proteger de inundaciones la zona agrícola de la Chontalpa. La Comisión construyó 310 km de diques y 150 km de terracería para caminos, además de la presa Netzahualcóvotl, que es obra de usos múltiples. La Comisión realiza un amplio programa en la región de la Chontalpa, canalizando un gran volumen de recursos nacionales e internacionales con el objeto de elevar el nivel de vida de núcleos campesinos a base de obras de riego, drenaje, vías de comunicación y crédito, entre otras actividades.

En 1960 se creó la Comisión del Balsas, que amplió a la Comisión del Tepalcatépec. La jurisdicción de esta comisión se fijó con un criterio geográfico tomando en cuenta el escurrimiento de las aguas. El objeto principal de la Comisión es la construcción de obras hidráulicas para riego, realizando también en cooperación con los gobiernos de los estados de la cuenca y las secretarías correspondientes, caminos, escuelas y sistemas de agua potable. Abarca una superficie de 112 161 km<sup>2</sup> y comprende parte de los estados de México, Michoacán, Guerrero, Oaxaca, Morelos, Puebla, Tlaxcala y Jalisco.

En general, la labor desarrollada por las comisiones ha sido positiva aunque no haya logrado sus objetivos originales por falta de recursos. Han circunscrito su acción a la operación y conservación de las

obras existentes, al mejoramiento de algunas y a la realización de pequeñas obras.

Los beneficiarios de los programas han sido inversionistas y comerciantes que promueven los cultivos y no los agricultores locales. Esto se debe a que en las zonas irrigadas no se ha dispuesto de créditos suficientes y de la ayuda técnica necesaria.<sup>29</sup>

Se ha realizado un importante intento de planificación regional integral que ha tratado de vincular la programación regional con el desarrollo nacional. Este intento surgió por el interés de la Comisión Lerma-Chapala Santiago, la Secretaría de Hacienda, y la Nacional Financiera, al establecer el Plan Lerma de Asistencia Técnica (PLAT), cuyo objetivo es elevar el nivel de vida de la población rural localizada en 150 000 km<sup>2</sup>. El Plan ha realizado investigaciones sobre las características físicas del suelo, clima y agua para evaluar los recursos y orientar la programación de la zona y la elaboración de proyectos. Para el período 1967-1975 fue elaborado un plan Agrícola para las zonas de riego y temporal, así como lineamientos para la ejecución de dicho plan y requerimientos de crédito, asistencia técnica, obras de riego, mecanización, comercialización y tenencia de la tierra. El Plan Lerma Asistencia Técnica ha elaborado un programa ganadero y pecuario y diferentes proyectos de riego en la mayoría de los estados que comprenden la región.

## 2.9 Lineamientos generales de política hidráulica

Evidentemente, el desarrollo futuro de la agricultura dependerá del aprovechamiento, distribución y uso del agua en las diferentes regiones. La distribución desigual de recursos hidráulicos en el país ha limitado el desarrollo de actividades agrícolas e industriales. En gran proporción del territorio que carece del agua suficiente, deberán tomarse medidas para incrementar la disponibilidad del agua mediante: 1) su obtención de las regiones más favorecidas; 2) el empleo de técnicas para desalar agua; 3) el incremento en la precipitación artificial de lluvias; 4) el aumento en el uso eficiente del agua; 5) la determinación de prioridades en su utilización; 6) la reducción de los usos de agua que impliquen su consumo; y el uso del agua en forma repetida y su protección contra la contaminación.

<sup>29</sup> Pérez, Elmore M., *La cuenca del Tepalcatépec*, tomo II, *Desarrollo de Moderno*. Colección SIP-Seremis, No. 172, México, 1973.

Uno de los más agudos problemas que enfrentará la política hidráulica del país, será el distribuir más equitativamente los recursos hidráulicos.

Para el logro de las metas del desarrollo económico y social del país, ocupa un lugar importante la generación de productos agropecuarios para exportación. Dichas exportaciones servirán para obtener divisas para otras actividades productivas.

Se han hecho distintos estudios sobre el número de hectáreas susceptibles de irrigarse<sup>80</sup>, y los cálculos fluctúan entre los 10 millones y los 18 millones de hectáreas. Según estudios recientes<sup>81</sup>, la superficie irrigada por obras gubernamentales asciende en la actualidad a 4 857 600 hectáreas. Es decir, que existe todavía un amplísimo margen para la ejecución de obras de riego, independientemente de que el cálculo correcto sobre la superficie máxima cultivable sean diez o diecisiete millones de hectáreas.

La planeación general del recurso tiene una fuerte base en la Ley Federal de Aguas, y se complementa con las políticas del Plan Nacional Hidráulico cuya versión 1975 se terminó ya. Dichas políticas se agrupan en diferentes rubros que van desde el énfasis a la coordinación central y regional, hasta el financiamiento, pasando por el de investigación y extensión, y la capacitación de recursos humanos.

La coordinación adecuada dependerá del uso al que se someta el recurso; así pues, comprenderá planeación urbana, manejo de cuencas y fundamentalmente integración de organismos responsables del agua.

A través de los proyectos y programas, las políticas hidráulicas serán coherentes con aquellas de desarrollo nacional y regional, minimizándose los periodos de maduración y construcción.

Otras políticas, agrupadas en el rubro de operación, tienden a promover la utilización al máximo de la infraestructura hidroagrícola, de irrigación y drenaje, aplicándose en todos los casos reglas óptimas de operación de almacenamientos superficiales y aguas subterráneas.

La participación en programas educativos que enfatizan el uso racional del agua es otro importante rubro. Por ejemplo, la formación, capacitación y motivación de recursos humanos y todas las tareas de investigación, extensión e información que, en el caso de irrigación y drenaje, tenderán a incorporar más áreas al programa de asesoramiento técnico de las unidades de riego para el desarrollo rural, a conceder mayor atención a la investigación y extensión agrícola y a desarrollar experimentalmente cultivos y cultivos de agua en el caso de la acuicultura.

Las políticas de financiamiento tenderán a asegurar la participación de los usuarios en la medida en que hagan uso de las obras. En irrigación y drenaje se reducirán los subsidios, y para agua potable y alcantarillado se diseñará un sistema financiero interno que incluya fondos rotatorios y pago de los usuarios, y un sistema financiero externo basado en préstamos por programa.

La política más importante en el renglón de agua potable y alcantarillado es sin duda el establecimiento de tarifas basadas en servicio medido y la consideración, al seleccionarse tecnologías y ubicarse las industrias, de la disponibilidad y costo del agua, las demandas de otros usos y los impactos económico, social y ecológico derivados de su uso.

Destacan las políticas particulares que buscan el aumento de eficiencia en los distritos de riego mediante incentivos como tarifas y cobro por volumen, asesoramiento en el riego y crédito, y el control de concesiones y permisos para evitar transferencias de derechos de agua.

En acuicultura, las políticas hidráulicas tenderán al control de la contaminación de los cuerpos de agua superficial dulce y salobre. En el caso de aguas dulces, se manejan integralmente los recursos agua, suelo y bióticos, generalizando la acuicultura intensiva en cuerpos menores de 50 Ha. En aguas salobres se diversificará la explotación y manejo de los recursos bióticos y se considerará el impacto ecológico en las lagunas litorales ocasionado por aprovechamientos hidráulicos aguas arriba.

Las políticas de control de avenidas y protección contra inundaciones prohibirán la ocupación de cauces y reglamentarán, de acuerdo con los riesgos, la construcción en llanuras de inundación. El control de las avenidas mejorará con la sobreexplotación

de instalación de compuertas en presas que lo amenoren.

En el caso de agua para energía eléctrica, las políticas tenderán a asegurar que las regiones con potencial hidroeléctrico se beneficien de la exploración de sus recursos. En la selección de sistemas de enfriamiento y localización de plantas termoeléctricas se tomará en cuenta la disponibilidad de agua, su valor real, la demanda para otros usos y el impacto económico, social y ecológico.

Para la Secretaría de Recursos Hidráulicos, y conforme a las declaraciones del Secretario del Ramo<sup>82</sup>, las tareas futuras "exigen de una evolución que tome en cuenta los conflictos en el uso del agua

y la compleja interacción de factores económicos, sociales, económicos y geopolíticos que han en que el manejo de este recurso requiere de una organización de naturaleza regional, en donde dichos conflictos se resuelven bajo la premisa de que los recursos hidráulicos son propiedad de la Nación y su administración es responsabilidad del Gobierno Federal. De esta manera se prevé el establecimiento de organismos regionales del agua que *obscurecen*, sin duda, la oportunidad para llevar a cabo las políticas de regionalización y descentralización y para promover el establecimiento de sistemas de usuarios responsables que, con apoyo y ayuda del Gobierno, sean capaces de afrontar y resolver los problemas involucrados en el aprovechamiento racional de los recursos hidráulicos"

80. Véase Atlas pp. 20 y 21, y Tomo 2 pp. 100 y 101. Plan Nacional Hidráulico 1975.

82. Leandro Romera Wade, "Presentación ante el Presidente Echeverría", *Excelsior*, 9 de enero de 1976.



### 3.- CONSIDERACIONES GENERALES SOBRE LA PLANIFICACION DE APROVECHAMIENTOS HIDRAULICOS

Con el incremento de las actividades económicas y sociales, algunas regiones bien dotadas reducen progresivamente sus excedentes de aguas, en otras con menores recursos, alta densidad demográfica y/o intensas actividades consumidoras de agua, los déficits se incrementan continuamente. En las primeras el agua se va convirtiendo gradualmente en un recurso económico escaso, por el cual compiten diversos usos alternativos. En las regiones deficitarias el agua se vuelve un factor importante de conflictos por la posesión de los derechos al uso pudiendo llegar a convertirse en una condición restrictiva para el desarrollo de las actividades económicas y sociales; con ello puede alcanzar un alto valor que llega a justificar el financiamiento de costosas inversiones en obras de ingeniería, en incrementos de eficiencia en el uso del agua, y en medidas administrativas.

La multiplicidad de contrastes, conflictos e intereses involucrados y la dificultad de fijar las prioridades sociales y económicas, conlleva a una lucha inter-napor los derechos al uso del agua que se manifiesta en tensiones entre diferentes grupos sociales y entre gobiernos de los estados. En las cuencas en donde se usa el agua para riego, no puede proyectarse la producción de energía eléctrica aguas-abajo. Un cuerpo de agua que se usa con fines de abastecimiento urbano para uso doméstico, o con fines turísticos, no se puede considerar como receptor de aguas-negras e industriales, sin tratamiento. La intensa demanda de algunas de las principales concentraciones urbanas del país exige cada día el cambio del uso del agua con fines de irrigación para las prioridades domésticas e industriales. Algunos --aprovechamientos hidroeléctricos en operación llegan a verse obligados a modificar sus regímenes de operación para permitir el aprovechamiento de las aguas para abas-tecimientos urbanos.)

Los diseños del desague y diseños de alcantarillado pueden verse modi-ficados sensiblemente por necesidades de otros usos del agua.

En la práctica de México, las dectrsiones se producen como resultado de la habilidad, ingenio y sensibilidad de los administradores, responsables del mane-jo del agua. Muchas veces son resultado de enconados pleitos entre diversas Secre-tarias y dependencias descentralizadas, recaen en la discreción de los gobiernos -de los estados, o en el libre arbitrio de acuerdos bilaterales ó multilaterales de los estados. En el mejor de los casos, son producto de la interpretación a corto plazo de los requerimientos del país. Sería mucho esperar de las disciplinas científicas que se responsabilizan del problema, que tuvieran formulas concretas para determi-nar la propuesta de solución adecuada a cada caso específico,

La Nacionalización científica del tratamiento de estos problemas es un problema que en lo general no está resuelto. Como todas las ciencias que interaccio-nan con los intereses sociales, el tratamiento de los aprovechamientos de usos múl-tiples, adolece del defecto característico de las ciencias sociales, que en su etapa



actual de desarrollo sólo se limita a la presentación puramente descriptiva.

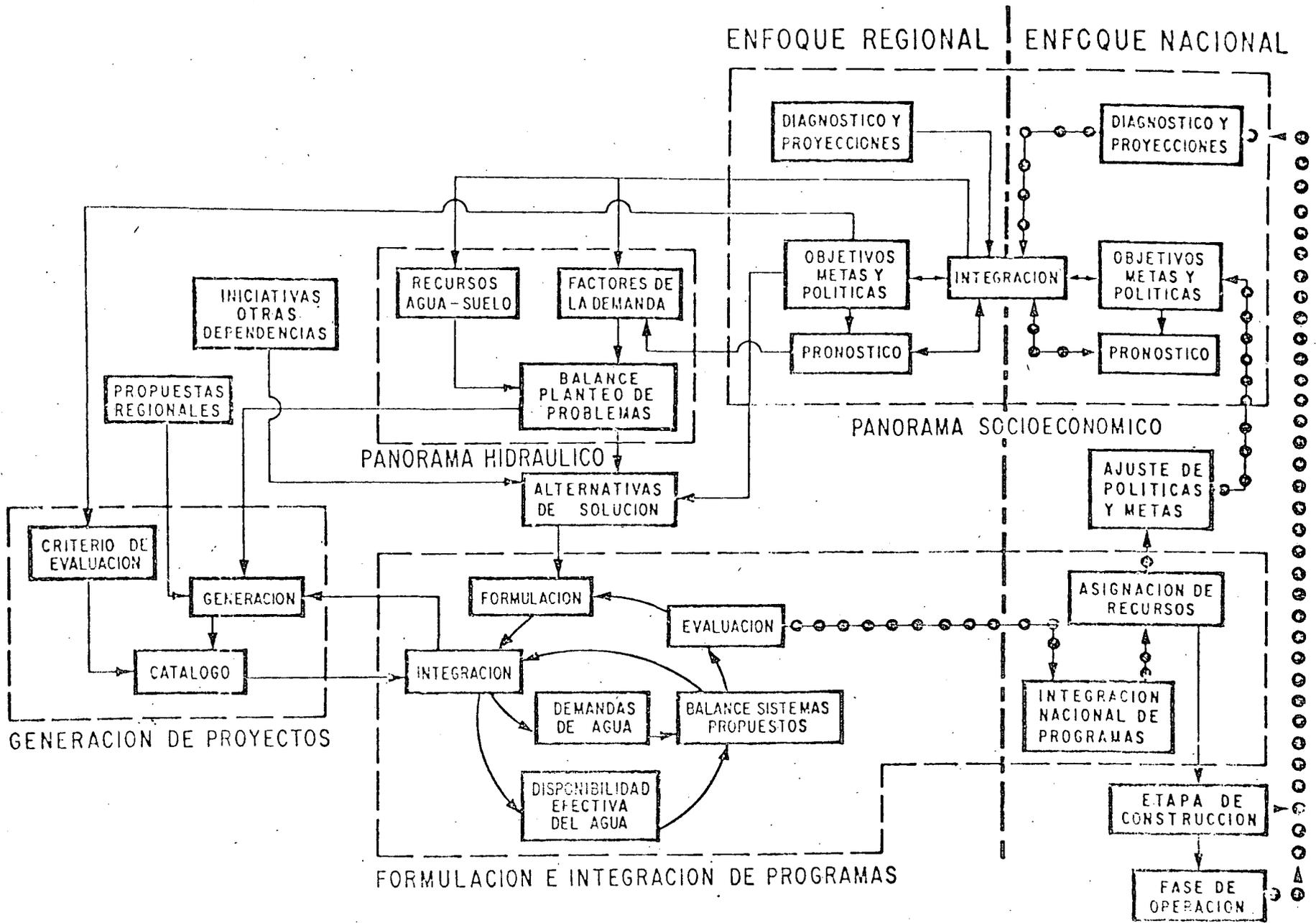
En suma para plantear el desarrollo de las disciplinas que tratan estos problemas se requiere del conocimiento de los hechos de las condiciones necesarias naturales del país, de su nivel de desarrollo técnico potencial y también de sus aspiraciones políticas. Conjuntamente se hace evidente la necesidad de la existencia de una autoridad a un alto nivel que refleje la concentración de las fuerzas sociales que se manifiestan en la voluntad política del país. Sólo de la síntesis de las teorías técnicas y la praxis política podrá derivar la alta eficiencia, que se requiere en el país en la administración de esos recursos, para operar adecuadamente los aprovechamientos hidráulicos existentes y en proyecto, y concilian los intereses cada vez más contradictorios.

La definición de sus líneas generales que oriente la formulación de los programas para el aprovechamiento de los recursos hidráulicos es una tarea que recae necesariamente sobre la representación política del país, o sea en sus condiciones actuales de la Presidencia, el Congreso y la Suprema Corte.

El control del agua constituye una piedra esencial de la política interna para guiar los programas de un plan a largo plazo. Con más razón si se considera que la distribución y estructura de costos constituye una materia de la política del gobierno para el desarrollo de varias regiones y recursos de México. Es evidente que una economía de mercado, en un país como el nuestro, difícilmente puede conducir al aprovechamiento eficiente de las fuentes de recursos al mínimo costo.

## Ejemplos de Planeación en México

- I.- Plan Nacional Hidráulico
- II.- Planeación de Sistemas de Abastecimiento Urbano- Industrial
- III.- Planeación de Obras Hidráulicas para la Agricultura
- IV.- Planación de Obras Marítimas (puertos)



I. - PLAN NACIONAL HIDRAULICO  
Metodología

Fig. 1 A Metodo general de los estudios



### III. METODO DEL PROCESO DE PLANEACION

#### 1. Esquema General del Proceso

En la Figura No. 1. A se presenta de manera esquemática el método general de los estudios propuesto por el grupo de trabajo del PNH, y que sirve de base para su programa de actividades. Este esquema pretende poner de manera explícita, el proceso que, de una u otra forma, se lleva a cabo actualmente entre varias dependencias en forma más o menos completa, para hacer la planeación que en materia hidráulica requiere el país. A continuación se describen las etapas de este proceso, haciendo siempre referencia a la Figura No. 1. A. La gran extensión del territorio nacional y la diversidad de sus recursos plantean la necesidad de conducir los estudios en dos niveles estrechamente interrelacionados, uno nacional y otro regional.

A nivel nacional se examinan las variables asociadas a los aspectos sociales, económicos, institucionales y ecológicos que influyen en el desarrollo del país. La información que en este caso se utilice debe ser agregada a un nivel razonable que permita elaborar el Plan sin reparar en detalles innecesarios.

A nivel regional se pueden abordar los problemas que plantean

las necesidades, restricciones y potencialidades características de cada región, en toda su diversidad y analizar sus interacciones con las variables examinadas a nivel nacional.

\*  
En la fase inicial, panorama socioeconómico, se busca obtener, mediante la recopilación e integración de los estudios existentes, una visión integral del desarrollo económico a nivel nacional y regional, con el fin de definir los objetivos que orienten las actividades del sistema planeado, y de establecer un conjunto de metas coherentes entre sí.

El marco de referencia definido en esta fase permitirá:

- a) Precisar los criterios básicos que permitan tomar en cuenta las políticas fiscales, monetarias, de comercio exterior y otras, que habrán de conducir al logro de las metas previstas.
- b) Continuar con más detalle los estudios sectoriales y los de proyectos específicos.
- c) Fundamentar los programas futuros de financiamiento, en el renglón de los recursos hidráulicos.
- d) Establecer las bases para la definición de las posibilidades de inversión.

---

\* Las frases subrayadas se refieren a las actividades que aparecen en la Figura No. 1.A

e) Evaluar en forma adecuada los efectos de los proyectos.

La primera fase descrita comprende la realización, en primer término, de un análisis de las tendencias históricas del desarrollo y de sus causas probables, integrando un DIAGNOSTICO de la situación actual que permitirá llevar a efecto las PROYECCIONES que describan la situación futura, si se mantienen las tendencias y políticas del pasado. Será necesaria una INTEGRACION que permita compaginar y dar coherencia a los niveles de enfoque regional y nacional. Ya definida esta etapa analítica, se tomarán en cuenta los OBJETIVOS, METAS Y POLITICAS de desarrollo que orientan la economía nacional, para establecer en forma congruente aquéllos correspondientes al incremento de los recursos hidráulicos, en sus niveles nacional y regional.

Por último, en la etapa de PRONOSTICO, se examinarán diversas alternativas futuras respecto a los sistemas de cuentas nacionales y de producciones sectoriales, compatibles con la estructura de la demanda y con el desarrollo previsto para el comercio exterior, así como respecto a los recursos naturales y humanos, sus potencialidades y sus demandas.

En la segunda fase -panorama hidráulico- se definirá el panora

ma de la situación que guardan los problemas hidráulicos en ca da una de las regiones en que, para efectos del PNH, ha sido dividido el país.

En primer término, se hará un inventario de la disponibilidad de RECURSOS DE AGUA, SUELO Y OTROS recursos complementarios, mediante la recopilación y proceso de los datos que puedan ser utilizados en la elaboración de los BALANCES DE USOS Y DISPONIBILIDADES DE AGUA, realizando asimismo el estudio de los FACTORES DE LA DEMANDA. En cuanto a este último, se elaborará una estimación de la demanda presente y futura de agua, tomando en cuenta el efecto de factores tales co mo el nivel de precios y las políticas y reglamentaciones para cada tipo de uso, así como las condiciones de contaminación de rivadas de ellas.

EL BALANCE DE USOS Y DISPONIBILIDADES DE AGUA permitirá hacer el PLANTEAMIENTO DE PROBLEMAS que se derivan de las necesidades, restricciones y potencialidades características de cada región, teniendo en cuenta los aspectos de cantidad y calidad del agua.

De las primeras dos fases discutidas anteriormente se deriva-

rán, enumerándolas en cada región, las ALTERNATIVAS DE SOLUCION que se consideran factibles para abordar los problemas derivados de las metas de desarrollo regional y los planteados en el panorama hidráulico. En la definición de esas soluciones habrán de ser considerados e integrados, en caso de- do, los planes, programas e INICIATIVAS DE OTRAS DEPENDENCIAS del gobierno y de la iniciativa privada, cuyas actividades influyen en el desarrollo y la administración de los recursos hi- dráulicos.

En una tercera fase se abordarán los aspectos relativos a la GENERACION DE PROYECTOS, cuyos antecedentes pueden ra- dicar: a) en el panorama hidráulico, cuando se hace el plantea- miento de los problemas de cada región; b) en las PROPUESTAS REGIONALES originadas en las dependencias foráneas de la Secretaría de Recursos Hidráulicos, en los gobiernos estatales y municipales y en iniciativa privada; c) en la fase de formula- ción e integración de programas que se describe más adelante. Por otra parte, en esta fase se definirán los CRITERIOS DE EVALUACION DE PROYECTOS que interpreten los objetivos y políticas establecidas en la fase de " panorama socioeconómico ", a través de indicadores de evaluación que midan sus efectos pro

bables y su contribución al logro de las metas. La etapa final la constituye la elaboración del CATALOGO DE PROYECTOS donde se enumerarán los proyectos disponibles, con sus características e indicadores respectivos que permitan, posteriormente, hacer la integración de los programas.

Por último, en la cuarta fase -formulación e integración de programas- se concretarán las ALTERNATIVAS DE SOLUCION de los problemas hidráulicos planteados previamente. Aquí están previstos dos ciclos de iteraciones para el mejor ajuste de los programas de cada una de las regiones. Inicialmente se hará una FORMULACION DE PROGRAMAS con alguna combinación de las alternativas de solución. De esta manera, un programa podría consistir en la construcción de obras, o en medidas de tipo administrativo, o bien, una combinación de ambas.

En la etapa de INTEGRACION DE PROGRAMAS se definirán los proyectos del catálogo que sean más adecuados a la formulación de tales programas. Posteriormente, de esta etapa podría surgir la necesidad de realizar estudios sobre proyectos específicos requeridos por los mismos programas. Así, el conjunto de proyectos seleccionados define ya un esquema de aprovechamiento que será estudiado en la etapa denominada BALANCE.

CON LOS SISTEMAS PROPUESTOS, en la cual se analizarán, además de los aspectos concernientes a la DEMANDA DE AGUA y a la DISPONIBILIDAD EFECTIVA DE AGUA, los relativos a materias primas, energía, mano de obra, productos de consumo y a las inversiones que se requieran.

Con el balance se podrá determinar si el programa efectivamente puede ser integrado con los proyectos elegidos. En caso de que no resulte adecuada la combinación propuesta, se modificará la integración del programa con otra combinación que, a su vez, será analizada en otro balance, y así sucesivamente. Estos últimos pasos constituyen el primero de los ciclos de iteración mencionados anteriormente.

De ser factible la integración del programa, entonces se procederá a la EVALUACION DE LOS PROGRAMAS para cuantificar su participación en el logro de las metas establecidas, comparándolo con los recursos necesarios para su realización. En caso de que la evaluación resultara desfavorable, entonces se procedería a modificar la FORMULACION DEL PROGRAMA con otra combinación de las ALTERNATIVAS DE SOLUCION, repitiéndose las mismas etapas ya descritas a partir de la INTEGRACION DE PROGRAMAS. De este modo se completa el segundo

ciclo de iteraciones.

Con los programas que resulten aceptables se procederá, enfocando a nivel nacional, a la INTEGRACION NACIONAL DE LOS PROGRAMAS, procurando que exista congruencia entre los programas regionales. En la siguiente etapa: CALCULO Y/O MODIFICACION DE LA ASIGNACION DE RECURSOS, se cuantificarán los recursos totales necesarios que deban aportar los sectores público y privado para la ejecución del programa nacional. Si la asignación llegara a efectuarse, el programa pasaría a la fase de realización y luego a la de operación, en las cuales habrá retroalimentación para rectificar el DIAGNOSTICO Y PROYECCIONES, en vista de los resultados que efectivamente se vayan obteniendo.

Por el contrario, si la asignación de los recursos no resultara factible a la luz de la realidad socioeconómica e institucional del país, habría necesidad de realizar un AJUSTE DE POLITICAS Y METAS y, si fuera menester, también de los objetivos.

En el Plan Nacional Hidráulico se ha planeado realizar dos ciclos completos de iteraciones. Las actividades previstas en el programa de trabajo, que se presentan en el Anexo, estarán

sujetas a modificaciones durante la realización de los estudios, de acuerdo con la información y los resultados que se vayan obteniendo para completar el proceso antes descrito.



LA PLANEACION DE <sup>S</sup> SISTEMA DE ABASTECIMIENTO DE AGUA POTABLE .

El problema del abastecimiento de agua potable a <sup>una</sup> Ciudad <sup>como</sup> México, consiste en decidir de qué forma se obtendrán los sucesivos incrementos de la oferta y las disminuciones posibles de la demanda. Además de las restricciones sociales y políticas, las decisiones deberán cumplir:

- a) En todo momento se satisfará la curva de demandas estimada.
- b) El valor actualizado del programa de inversiones correspondiente debe ser mínimo.

En las condiciones expuestas se hace necesario la resolución sobre los siguientes puntos:

- 1.- Determinar la curva de demandas de agua, a mediano y largo plazos, derivada del crecimiento de la Ciudad de México, considerando todos los factores, que la afectan:
  - Crecimiento de la población
  - Inmigración
  - Dotación para usos domésticos e industriales
  - Políticas de localización de industrias
  - Eficiencia en la distribución y uso del agua doméstica e industrial.
- 2.- Cada uno de los Factores, de la demanda, y la demanda misma, requieren ser tratados como valores de carácter aleatorio.
- 3.- Identificar y formular, sin restricción alguna, todas las acciones posibles de la Canasta de Proyectos, correspondiente a los programas de:
  - Importaciones
  - Reusos
  - Sustitución
  - Eliminación de Pérdidas
  - Políticas Demográficas
  - Localización Industrial

- Integar el plan de abastecimiento de agua potable mediante:

- La definición de las prioridades de los proyectos
- La formulación de los programas de obras
- De inversiones
- De financiamiento derivados de esa asignación de prioridades.

5.- Definir los sitios en que se hará la entrega del agua en -- bloque y qué población será beneficiada.

Respecto a los puntos señalados, parece recomendable que:

- a) Se mantengan actualizados todos los estudios parciales, realizados sobre los aspectos de crecimiento de población, inmigración, dotaciones, servicios urbanos, localización industrial, y eficiencia del uso del agua.
- b) Se mantenga constantemente actualizada la estimación de la demanda global del agua con alternativas para diversas hipótesis de los factor determinante<sup>es</sup>
- c) El carácter aleatorio de las variables involucradas, podría tomarse en cuenta manejando valores probables con un criterio explícito en un árbol de decisiones.
- d) Que se definan en los guiones de los estudios, de los proyectos específicos, la elaboración con carácter interactivo de los parámetros más importantes que permita la elaboración, iterativa también, de los planes de obras, inversiones y financiamientos.
- e) Especialmente los proyectos del programa de IMPORTACIONES deben corresponder a la definición de las posibles -- etapas.\*

---

\* Las etapas de desarrollo de cada cuenca se definen tomando en cuenta, además de la división hidrológica natural, -- los aspectos ingenieriles y económicos.

- f) Formular y mantener actualizado periódicamente el plan del abastecimiento, definiendo con carácter dinámico las prioridades, los proyectos, y los programas de obras, inversiones y financiamiento que se deriven. El criterio para la programación es el del valor actualizado mínimo.
  
- g) Realizar en forma dinámica la actualización con los datos que se vayan obteniendo sucesivamente y la incorporación de diversas hipótesis alternativas,

---

Que permita la actualización con los datos que se vayan obteniendo progresivamente y la incorporación de diversas hipótesis alternativas.

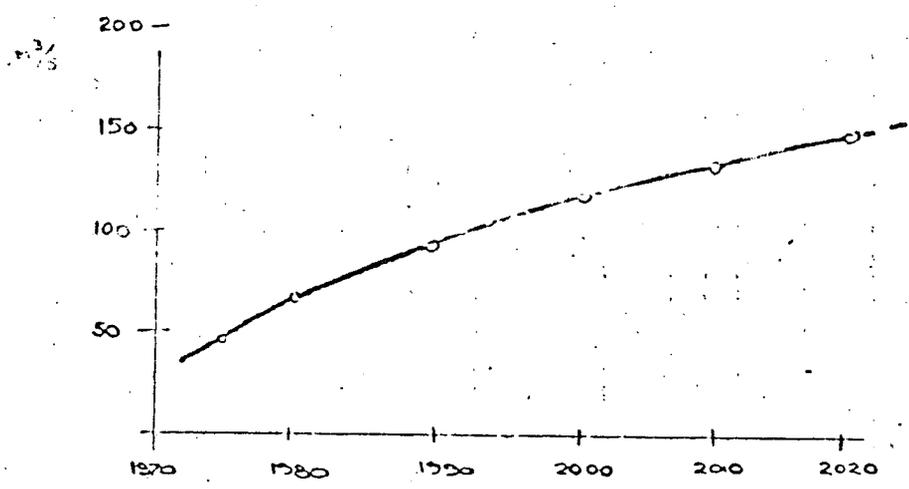
# ABASTECIMIENTO DE AGUA POTABLE PARA USO URBANO-INDUSTRIAL

## ◦ DEMANDA Y OFERTA DE AGUA

La demanda de agua en la Ciudad de México es el resultado de los siguientes factores:

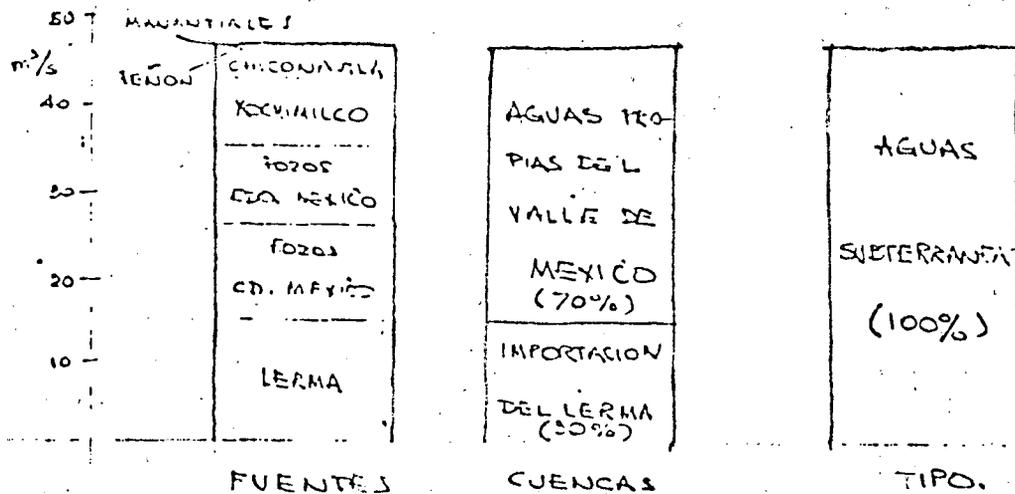
- Crecimiento de la población
- Inmigración a la Ciudad de México
- Dotación para usos domésticos e industrial
- Políticas de servicios urbanos
- Políticas de localización de industrias
- Eficiencia en la distribución y uso del agua doméstica e industrial

De acuerdo con las hipótesis más probables se ha estimado la demanda de agua potable como se indica en la figura.



La modificación de las hipótesis por un cambio en cualesquiera de los factores señalados, al aplicar políticas que incidan sobre ellos, resulta en un cambio de la curva estimada de la demanda. En todo caso, no existe ningún procedimiento que determine la curva de demanda con certeza absoluta. Por ella resulta infructuosa la idea de pretender fijar una cifra única para cada uno de los factores y considerarla como ciertas (por más que siempre será posible hacer el ejercicio aritmético... ó electrónico). Pero, esto no significa, de ningún modo, abandonar la idea de manejar una perspectiva de la demanda a mediano o largo plazos, sino que la cuestión hay que abordarla como un problema de decisiones bajo riesgo, en el cual se asocia a cada factor una probabilidad de ocurrencia (también incierta, pero manejable intuitivamente.)

Hasta la actualidad, la demanda de agua potable se ha atendido mediante aprovechamientos Hidráulicos localizados en las cuencas del Valle de México y del Valle de Toluca.



Recientemente se han realizado otras obras dentro de la Cuenca del Valle de México comprendidas dentro del plan de Acción Inmediata (Teoloyucan, Los Reyes, Netzahualcoyotl). Además, se cuenta con una capacidad instalada de tratamiento de aguas negras de 4.2 m<sup>3</sup>/s. También se ha llevado a cabo, en forma muy incipiente aún, medidas tendientes a eliminación de pérdidas (fugas y desperdicios), de la cual se carecen de datos confiables sobre los resultados obtenidos.

### o PLANEACION DEL SISTEMA ABASTECIMIENTO

Prácticamente la totalidad de las acciones para abastecer de agua potable a la Ciudad de México se ha orientado a través de la ejecución de obras hidráulicas para captar y conducir las aguas de las fuentes disponibles más cercanas a la Ciudad de México. La restricción de esas fuentes para proporcionar incrementos sustanciales ha llevado a adquirir una conciencia clara de un conjunto de acciones, adicionales a la señalada arriba, que puedan aportar en forma significativa elementos importantes para planear la solución del problema. El crecimiento de las necesidades de agua potable se puede satisfacer con la aplicación de los siguientes programas y políticas, ilustradas en la figura.

8

CANASTA DE PROYECTOS

IMPORTACIONES

Tecolotla I  
Tecolotla II  
Tecolotla III  
Oriental  
Amacuzac I  
Cutzamala I  
Cutzamala II  
Cutzamala III  
Tula

ELIMINACION DE PERDIDAS

Reparaciones red distrib.  
Instalaciones domiciliarias  
Aparatos Domésticos

Medidores  
Tarifas

REUSO

Texcoco I  
Texcoco II  
Tula  
Rfo Churubusco  
Emisor Corriente  
Plantas Tratamiento  
Zona Industrial  
Zonas Agrícolas

SUSTITUCION DE

FUENTES

Flores de cultivos  
Aguas negras en negro

Clausura Bombeo Cd. Méx.  
Reducción Bombeo Lerma

DEMOGRAFICA

Servicios Sociales  
Servicios Urbanos

LOCALIZACION INDUSTRIAL

Industrias consumidoras  
Industrias contaminadoras  
Incentivos y restricciones  
Reglamentación

AS  
ON  
ON  
IM  
anta  
REI  
S,

Algunos proyectos no corresponden a las funciones propias de la CAVM. Sin embargo, conviene tenerlos en cuenta para que la CAVM tenga posibilidades adecuadas de negociación en las interacciones con DDF, SP, SHyCP, gobierno de los Estados (México, Hidalgo, Tlaxcala).

Cada uno de los proyectos de la Canasta actúa sobre la solución del problema de abastecimiento con diferentes medidas de efectividad en sus resultados, a diferentes escalas en el tiempo y diferentes costos. Por otro lado, si se considera un lapso suficientemente largo en el horizonte de planeación, resulta evidente que todos los proyectos de la Canasta se tendrán que ejecutar, tarde o temprano. Ante esta perspectiva, y frente al dilema de manejar datos siempre inciertos (población, políticas migratorias, fugas y desperdicios, industrialización, etc.) y tener que tomar decisiones ahora, parece recomendable considerar el problema en su conjunto, incluyendo todas sus partes y sin restricción en el tiempo de planeación, ni en las acciones factibles de realizar.

En las condiciones expuestas surge la pregunta..... ¿Cuándo deben entrar en ejecución cada una de los proyectos enumerados.....?

EL  
em  
Si  
-  
MC  
ion  
-  
LC  
-  
as  
y a  
ci  
NA  
c  
S (

En esencia, el

ahora

problema que se plantea consiste en: Identificar y formular cada uno de los proyectos de la canasta para definir las acciones, sus interacciones y coordinación, así como estimar sus efectos -- posibles y recursos (técnicos, materiales, equipo y financieros) que -- requieren; y, evaluar y seleccionar esos proyectos para fijarles prioridades e Integrar los programas correspondientes.

El problema planteado no tiene solución única, más al contrario, las -- alternativas factibles tienen un carácter muy dinámico. Cambian con el tiempo, las circunstancias y nivel de conocimientos y experiencia, en -- una medida tal, que carece de sentido tratar de enmarcar el problema -- dentro de una concepción rígida. El problema afecta intereses públicos y en esa medida su carácter es eminentemente político. Se engloban, por una parte, factores objetivos, de naturaleza física y del dominio de la técnica, y por otra parte, se involucran factores sociales y políticos, de naturaleza subjetiva, y que resultan de la constelación de fuerzas de los grupos de intereses afectados por el problema.

Para la programación es necesario que cada uno de los proyectos de la -- cartera disponible compitan entre sí libremente. Salta a la vista, entonces, que los aprovechamientos de gran envergadura, como los que contemplan en las cuencas del Cutzamala, Tecolutla y Amacuzac, tienen que considerar en los estudios respectivos que su realización se llevará a cabo por etapas, concebidas éstas como unidades aisladas aunque independientemente entre sí; o sea, las etapas tienen que tomar en cuenta simultáneamente, además de los aspectos hidrológicos, los aspectos ingenieriles, económicos y financieros, y por otro lado, tienen que prever en los diseños respectivos la ampliación y/o adición de nuevas estructuras que puedan ser requeridas al incorporar las etapas sucesivas.

## ● METODO DE PROGRAMACION

La planeación del sistema de abastecimiento de agua potable trata de responder a una serie de interrogantes que surgen a la hora de la toma de decisiones.

A continuación se enumeran algunas de las preguntas fundamentales pensando únicamente en el programa de importaciones, pero que son muy similares para los demás programas ya mencionados:

- ¿CUALES son las etapas \* que se identifican en cada una de las -- cuencas de abastecimiento?
- ¿CUANTA agua proporciona. \*\* cada una de las etapas?
- ¿CUANDO entra en operación cada etapa?
- ¿COMO se va a pagar y operar el sistema?
- ¿QUE población se va a servir?

---

\* En una misma cuenca, cada río establece una etapa natural. El término se usa para indicar que se toman en cuenta, además del hidrológico, los aspectos de ingeniería, económicos y financieros.

\*\* En forma concentrada.

¿DONDE está distribuida en el área urbana?  
¿EN CUALES sitios se proporciona el agua  
en bloque, y cuáles son características?

La programación se puede encauzar a través de métodos tan sofisticados como se quería imaginar, pero en esencia se trata de responder a preguntas tan simples como las enlistadas. Las alternativas de respuestas pueden ser muy numerosas y de gran responsabilidad (y en el caso del Valle de México lo son) a tal grado que el planteamiento de las innumerables combinaciones rebasa la capacidad, sentido común y experiencia de los encargados de tomar las decisiones. Aún más, el problema se complica si se considera que en todos los casos las respuestas factibles, que son las que al final interesa, tienen que cumplir con ciertas restricciones impuestas por limitaciones prácticas de tiempo y espacio, calidades de los materiales disponibles, problemas económicos y financieros del costo, y en fin problemas políticos y sociales de la administración y la propiedad. Algunos de esos aspectos, muchas veces son difíciles o casi imposibles de definir con precisión.

Ante esta perspectiva, y con el afán de encontrar soluciones que sean manejables desde el punto de vista matemático, el enfoque "puramente científico" del problema ignora deliberadamente la mayor parte, y generalmente las más importantes y preocupantes, de las condiciones de restricción enunciadas. Por ello, y tomando en cuenta que hay que reconocer que las decisiones públicas son decisiones políticas, la programación tiene que determinar un rango probable de resultados de un proceso político en el cual se alcanzan las decisiones a través del juego de los diversos conjuntos de grupos con diversas motivaciones.

Volviendo al objetivo central de estas notas, se trata a continuación lo referente al método desarrollado por la Dirección de Programas (D P) de la CAVM. En esencia es semejante al que están implementando en los estudios correspondientes al plan maestro, del proyecto ejecutivo del Cutzamala. El modelo a tiende a la tercera de la lista de preguntas enunciadas en páginas anteriores: ¿ CUANDO entra en operación cada proyecto? Las respuestas deben cumplir con las siguientes restricciones :

- .....- Satisfacer todo momento las demandas estimadas  
.....- Minimizar el valor actualizado \* del programa de inversiones\*\*

Por lo que respecta a la pregunta : ¿ CUANDO ent.....? se parte de una curva de demandas previamente estimada. De la forma y tamaño de esa curva, y de la disponibilidad de proyectos en la cartera dependen los resultados de la programación, que pueden tener diferencias muy significativas.

Ante esta situación se ve la necesidad de que se establezca, en forma sistemática e institucional, una interacción entre los desarrollos de los trabajos respectivos.

Por la fuerte interacción con los estudios de otras dependencias, del DDF, EDO DE MEXICO y otras, parece evidente que la determinación de la curva de demandas es una actividad que se tiene que realizar. Determinada la curva de demandas se podría trabajar independientemente con su modelo para contestar las preguntas : ¿ CUALES..... y CUANTA.....? cuyas respuestas se basarían en la información de la Canasta de Proyectos disponible, para definir una jerarquización, la más conveniente, o varias soluciones alternativas. Las autoridades responsables seleccionarían la que a su juicio considere recomendable.

El resultado final de la planeación del sistema de abastecimiento consiste de los siguientes puntos ; que se ilustran con las figuras correspondientes.

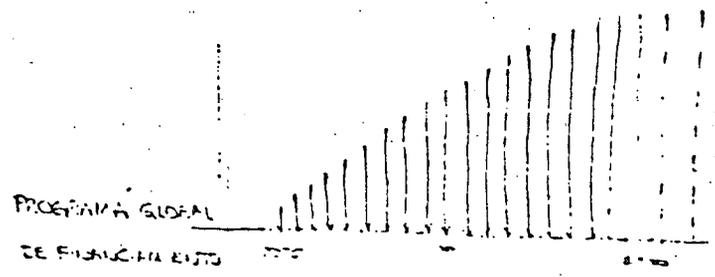
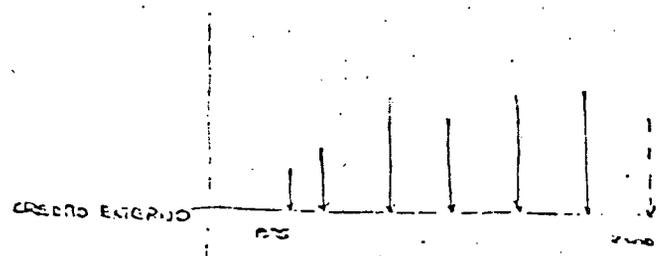
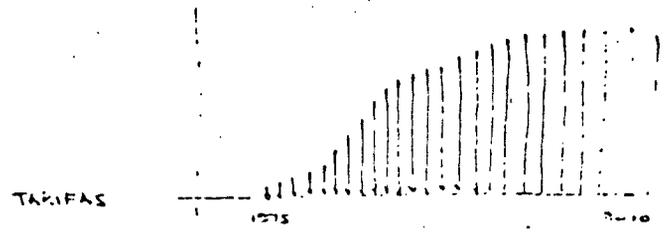
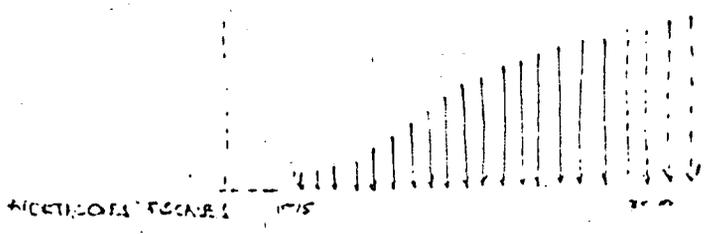
Planeación de las obras  
Planeación de las inversiones  
Planeación del financiamiento

---

\* El valor actualizado, a una tasa de intereses del 10 % anual, por ejemplo, de una inversión que se difiere 5, 10, ó 15 años es del 62 %, 39 % y 24 % respectivamente.

\*\* En terminos prácticos, la restricción implica diferir el máximo de tiempo las inversiones más altas.

12413



PLANEACION DEL FINANCIAMIENTO  
(cómo se financian las inversiones)

# CRITERIOS PARA EVALUACION EN LA PLANEACION DEL ABASTECIMIENTO DE AGUA POTABLE AL VALLE DE MEXICO

## Comparación entre proyectos.

Se dispone de cuatro posibilidades para transferir agua de otras cuencas hacia el Valle de México, que contribuyen a cubrir las demandas de --- agua potable: Cutzamala, Amacuzac Oriental y Tecolutla:

Al nivel del tomador de decisiones (vocalía de CAVM, subsecretaría o --- Secretaría de Recursos Hidráulicos, u otras dependencias) se plantea la siguiente pregunta:

¿Cuál es la mejor de las alternativas ?

Por sentido común se respondería que la mejor es aquélla que corresponda al costo unitario mínimo. En este sentido, si es necesario generalizar, el criterio establecería que dado un grupo de proyectos para abastecimiento de agua potable, estos se jerarquizarán en orden creciente de costos unitarios. (Primero los más baratos y luego los más caros).

Al analizar con más detalle se comprueba que, en efecto, si se programan los proyectos en un orden creciente de costos unitarios se obtendría que el COSTO ACTUALIZADO TOTAL es mínimo, siempre y cuando sea nula o --- muy pequeña la tasa de actualización.

Sin embargo, si la tasa de actualización es alta (10, 15 ó 20% anual, que es la situación real en nuestro medio) se puede demostrar que podrían presentarse casos en que conviene dar prioridad a "proyectos caros".

En el anexo <sup>(dos paginas adelante)</sup> se expone un ejemplo simple <sup>e hipotético</sup> como demostración de que la --- actualización de los costos puede ser mínima a pesar de que se programa proyectos que no estén en orden creciente de costos.

Si se aceptan esos razonamientos se llega a la conclusión de que la pregunta inicial ..... ¿Cuál es la mejor de las alternativas ? ..... carece de sentido, y que en su lugar debería formularse la pregunta equivalente:

¿Cuál es la mejor programación de las alternativas para satisfacer la demanda ?

Esta forma de formular la pregunta conlleva implícitamente algunas afirmaciones:

- a) a). Ningún proyecto es malo; con lo que no existe "el mejor proyecto".
- b). Siempre se tiene presente que el objetivo es satisfacer la demanda; Carece, pues, de sentido contraponer proyectos, -- entre sí. Todos contribuyen a satisfacer la demanda.
- c). Sólo con un mayor-número de alternativas, y con mejores datos sobre ellas es posible encontrar la mejor solución, en lugar de usar prolijos y sofisticados métodos de evaluación de proyectos.
- d). La evaluación de los proyectos individuales tendría por objetivo, únicamente, calcular en forma lo más confiable y precisa posible los indicadores representativos.
- e). Los proyectos para transferir agua de otras cuencas disponibles-entablarán entre sí una competencia por ganar el mejor lugar en el programa de inversiones; el cual podría resultar con proyectos jerarquizados en un orden distinto de los costos crecientes.
- f). A su vez, si el problema se ampliara con proyectos de otro tipo, (como: incremento de eficiencia, reuso, recirculación, relocalización industrial, tarifas, etc.) la competencia se entablaría entre todos los proyectos de la cartera disponible, sin descartar ninguno a priori, (ya sea porque el proyecto actúa sobre la oferta - o sobre la demanda, porque su efecto es a corto o largo plazo, porque es fácil o caro, económico o imposible, etc.).

La respuesta a la pregunta implica que, en lugar de limitarla únicamente a los proyectos aislados, conviene que la evaluación se amplie y dirija hacia los programas globales.

El criterio de evaluación de programas consistiría simplemente en responder a las siguientes preguntas:

- ¿ Cuáles son los programas factibles física y económicamente ?
- ¿ Cuáles de aquellos programas resultan en el menor COSTO ACTUALIZADO TOTAL ?
- ¿ Cuáles son las medidas que se derivarían de esos mejores programas en los aspectos: técnico, administrativo, monetario, recursos humanos, recursos materiales, institucional, legal, social y otros?

- ¿ Es factible la realización del mejor programa propuesto dada una -  
disponibilidad de recursos prevista, en el aspecto financiero ? --  
¿ social? ¿político ? ¿legal?

Es evidente que, dependiendo de la naturaleza de algunas de las medidas complementarias de los programas. (disposiciones legales, conyunturas políticas, demandas sociales, etc). podría ser justificable, por ese sólo hecho, modificar la formulación de los programas propuestos inicialmente y adecuarlos a -- su factibilidad legal, política, financiera o social.

De ese modo, en lugar de que se desvien esfuerzos y recursos hacia la justificación de una decisión, mediante métodos de evaluación económica a posteriori, esos recursos se liberarían para afrontar y resolver los problemas, y salvar, los obstáculos interpuestos a la realización de los programas. Esto -- es especialmente importante cuando las decisiones son de carácter socio-político y tienen que darse a conocer a organismos financieros extranjeros.

## PROGRAMACION DE LAS OBRAS PARA ABASTECIMIENTO DE AGUA POTABLE

Dada las necesidades de agua para los próximos 20 años y un conjunto de proyectos para satisfacerlas, se desea saber cuál es la mejor programación de las obras desde el punto de vista económico.

Si se toma en cuenta que todos los programas que satisfagan la demanda producen el mismo beneficio, resulta evidente que el mejor programa es aquél que se traduzca en el menor costo.

El criterio de programar los proyectos en orden creciente de costos unitarios puede permitir obtener el mejor programa, que tenga el menor Costo Actualizado Total (CAT). Se comprueba fácilmente que el criterio es adecuado sólo si la tasa de actualización es nula (o pequeña, menor que 6 u 8% anual en terminos prácticos) y/o si la capacidad de todos los proyectos es igual o similar.

El criterio deja de tener validez si la tasa de actualización es alta (10, 12, ó 15% anual, común en nuestro medio) y/o los proyectos presentan fuertes diferencias entre sí en sus capacidades. Podría presentarse el caso en que sea más conveniente dar prioridad a los proyectos "más caros". Con fines de demostración se suponen los siguientes datos hipotéticos:

Sistema	Proyecto	Orden de (1) Ejecución	Capacidad m <sup>3</sup> /s	Costo Unitario mill.\$/m <sup>3</sup> , \$/m <sup>3</sup>	Costo Total
1	A B C D	1°	4	400 1.97	1 600
		2°	6	400 1.97	2 400
		3°	10	200 0.98	2 000
		4°	20	600 2.95	12 000
			40		18 000
2	E	1°	6	200 0.98	1 200
3	F G	1°	20	300 1.48	6 000
		2°	20	500 2.46	10 000
			40		16 000

La demanda se supone en 2 m<sup>3</sup>/s cada año.

(1). Las etapas están consideradas como si fueran proyectos independientes, y guardan entre sí un orden de prioridad por razones de carácter físico.

Con los datos del ejemplo es posible formar un gran número de programas alternativos variando la composición de los proyectos y el orden de prioridades.

Si sólo se buscara entregar un volumen de 4 a 6 m<sup>3</sup> es claro que la solución es emplear el más barato de los proyectos pequeños, por ejemplo el E.

En el caso extremo que se deseara abastecer 86 m<sup>3</sup>/s es claro también que todos los proyectos tendrían que formar parte del programa cuyas diferentes alternativas diferirán sólo por las prioridades.

En principio se podrán plantear las siguientes alternativas para abastecer 40 m<sup>3</sup>/s como máximo.

Programa I Proyectos E (200); F (300); A (400); B (400)

En este programa los proyectos aparecen en orden de costos crecientes.

Programa II Proyectos F (300); A (400); B (400); C (200)

En este programa se busca observar el efecto de quitar el proyecto F sustituyéndolo por otro del mismo costo pero cuya entrada es más tarde.

Programa III Proyecto A (400); B (400); C (200); F (300)

es el mismo programa II en donde el proyecto F se relega al final.

Programa IV Proyecto E (200); A (400); B (400); C (200); F (300)

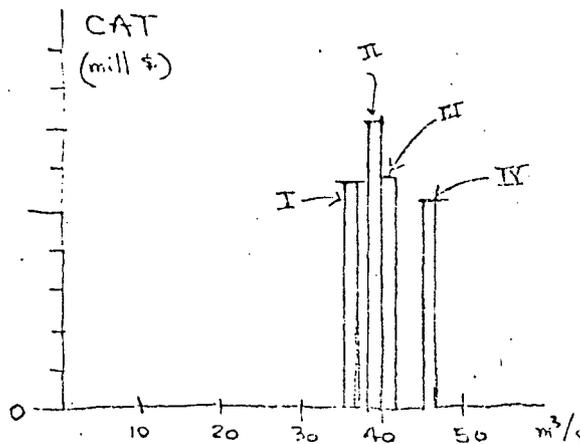
Es el mismo programa III al cual se le adiciona el proyecto E al principio.

(1) Los proyectos se enumeran en orden de prioridad. Las cifras en paréntesis son los costos unitarios.

El análisis de Costos Actualizados totales arroja los siguientes resultados:

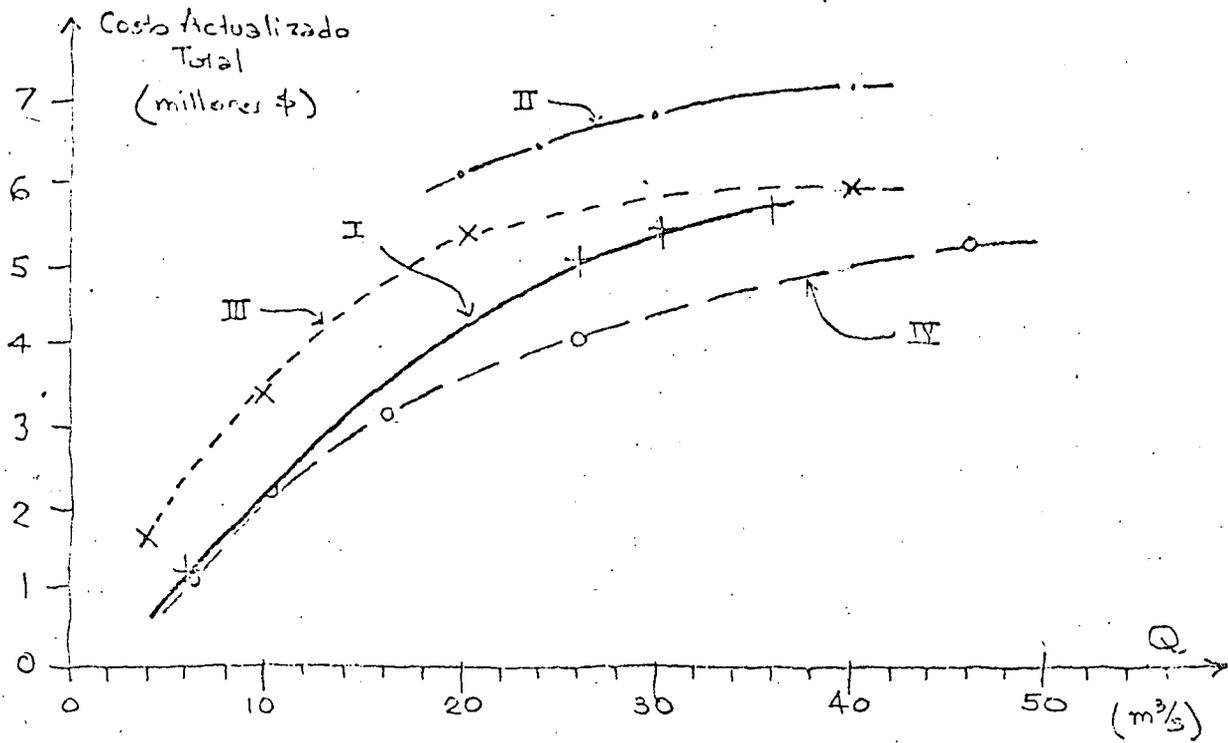
Programa	Capacidades m <sup>3</sup> /s	CAT (miles \$)
I	36	5 700
II	40	7 090
III	40	5 892
IV	46	5 074

Los cálculos se consignan más adelante)



Como puede verse en los resultados anteriores, es irrelevante la condición de que los sistemas tengan la misma capacidad instalada para poder compararlos.

En las figuras se muestra el valor de CAT como función del desarrollo del programa. El programa IV es el que parece en todo momento el más adecuado



Programa	Proyecto	Año Ejec	Capacidad (m3/s)	Costo mill \$/m3/s	\$/m3	Costo T. mill \$	Costo Act mill \$	
I	{	E	0	6	200	0.98	1 200	1 200
		F	3	20	300	1.48	6 000	3 945
		A	13	4	400	1.97	1 600	260
		B	15	6	400	1.97	2 400	295
					<u>36</u>			<u>11 200</u>
II	{	F	0	20	300	1.48	6 000	6 000
		A	10	4	400	1.97	1 000	395
		B	12	6	400	1.97	2 400	449
		C	15	10	200	0.98	2 000	246
					<u>40</u>			<u>12 000</u>
III	{	A	0	4	400	1.97	1 600	1 600
		B	2	6	400	1.97	2 400	1 815
		C	5	10	200	0.98	2 000	994
		F	10	20	300	1.48	6 000	1 483
					<u>40</u>			<u>12 000</u>
IV	{	E	0	6	200	0.98	1 200	1 200
		A	3	4	400	1.97	1 600	1 052
		B	5	6	400	1.97	2 400	1 193
		C	8	10	200	0.98	2 000	654
		F	13	20	300	1.48	6 000	975
			<u>46</u>			<u>13 200</u>	<u>5 074</u>	

RMH/cdm

## Recomendaciones.

Teniendo a la vista que las necesidades de las relaciones interinstitucionales (nivel de la vocalía de la CAVM, Secretaría de Recursos Hidráulicos o de otras dependencias) exigen que la presentación y justificación de los proyectos correspondan a una planeación a más o menos largo plazo, parece conveniente que la evaluación de ellos se oriente dentro del marco de la programación global del problema del abastecimiento de agua potable para uso urbano en el Valle de México.

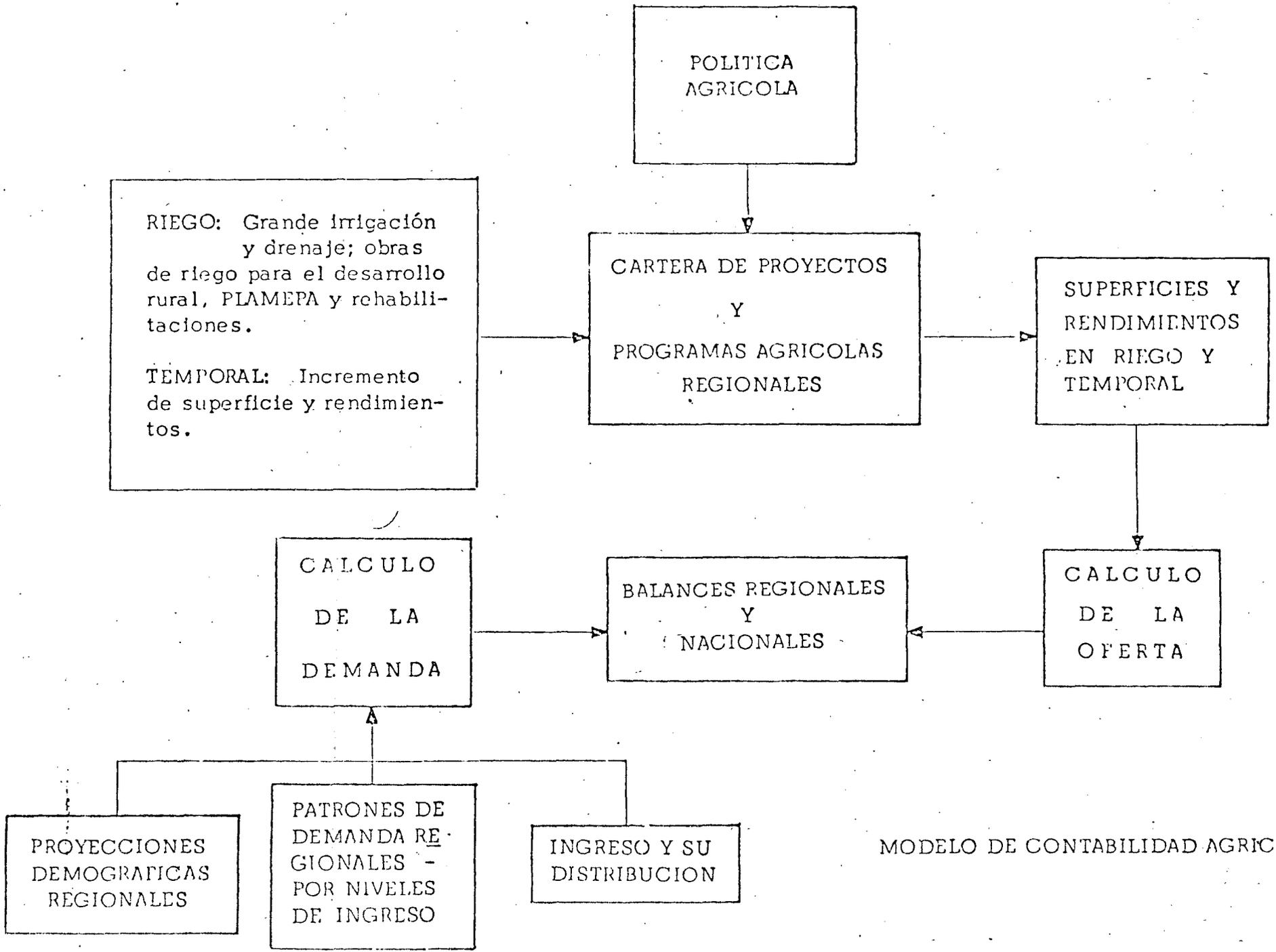
En esa programación el problema consiste en determinar cuál es la jerarquización del conjunto de proyectos de la cartera disponible (sin discriminar ninguno a priori) tal que el COSTO TOTAL ACTUALIZADO sea el menor. Desde este punto de vista es conveniente que los sistemas de gran tamaño (como Tecolutla, Cutzamala, etc.) se presenten evaluados como etapas independientes aunque interrelacionadas y que puedan competir con cualquier otra etapa de otro sistema. Los proyectos que por alguna razón se consideren "muy caros" o poco atractivos, automáticamente quedan relegados en la programación --- hacia el final, o bien se descartaran por sí solos si la cartera disponible --- ofrece abundantes proyectos alternativos para las demandas previstas en el horizonte de planeación.

Con el criterio propuesto se podrán evaluar entérminos monetarios algunos de los factores intangibles, como los políticos y sociales. Si también se hacen entrar en juego proyectos en que predominen esos factores, como los de reuso, incremento de eficiencia, recirculación, tarifas, relocalización industrial, etc.

La evaluación al nivel del tomador de decisiones no tiene que ser tan complicada que aleje de su dominio el proceso de decisiones y que haga depender de suposiciones irrelevantes, que exige el "rigorismo" técnico, las decisiones de tan alta transcendencia económica, financiera y socio-política. Parece perfectamente factible que las evaluaciones puedan hacerse a nivel de los directivos si se prescinden de <sup>algunas</sup> consideraciones --- que a este nivel sólo obscurecen la perspectiva real del problema. En otras palabras, la evaluación al nivel de programas no puede depender de métodos ininteligibles y prolijos, sino al contrario debe ser suficientemente accesibles para su elaboración bajo la supervisión directa de los directivos.

Naturalmente, los estudios que se realicen en la formulación de los proyectos estarán orientados, con el auxilio de la Ingeniería de costos, a la determinación de los presupuestos, lo más reales y confiables posible. Sólo en ciertos casos y en la medida que lo señalen las estimaciones de costos, se orientaran algunos estudios a la investigación de soluciones nuevas y --- menos costosas. La calidad técnica de los proyectos que se formulan queda perfectamente controlada con la precisión y confiabilidad de los costos que se estimen. Evidentemente, más alta será esa calidad en la medida --- que los presupuestos dependan al mínimo de consideraciones subjetiva, --- intuitivas o circunstanciales.

Para lograr las ideas expuestas parece ser suficiente emplear el enfoque de PROGRAMACION DEL ABASTECIMIENTO, en lugar de evaluación de proyectos individuales; disponer de una CARTERA DE PROYECTOS lo más abundante y completa posible; dividir en ETAPAS (punto de vista económico-ingenieril) - los sistemas de gran escala; usar el indicador de COSTO POR m<sup>3</sup>/s INSTALADO y el criterio del COSTO TOTAL ACTUALIZADO.



MODELO DE CONTABILIDAD AGRICOLA.

MILLONES DE TONELADAS

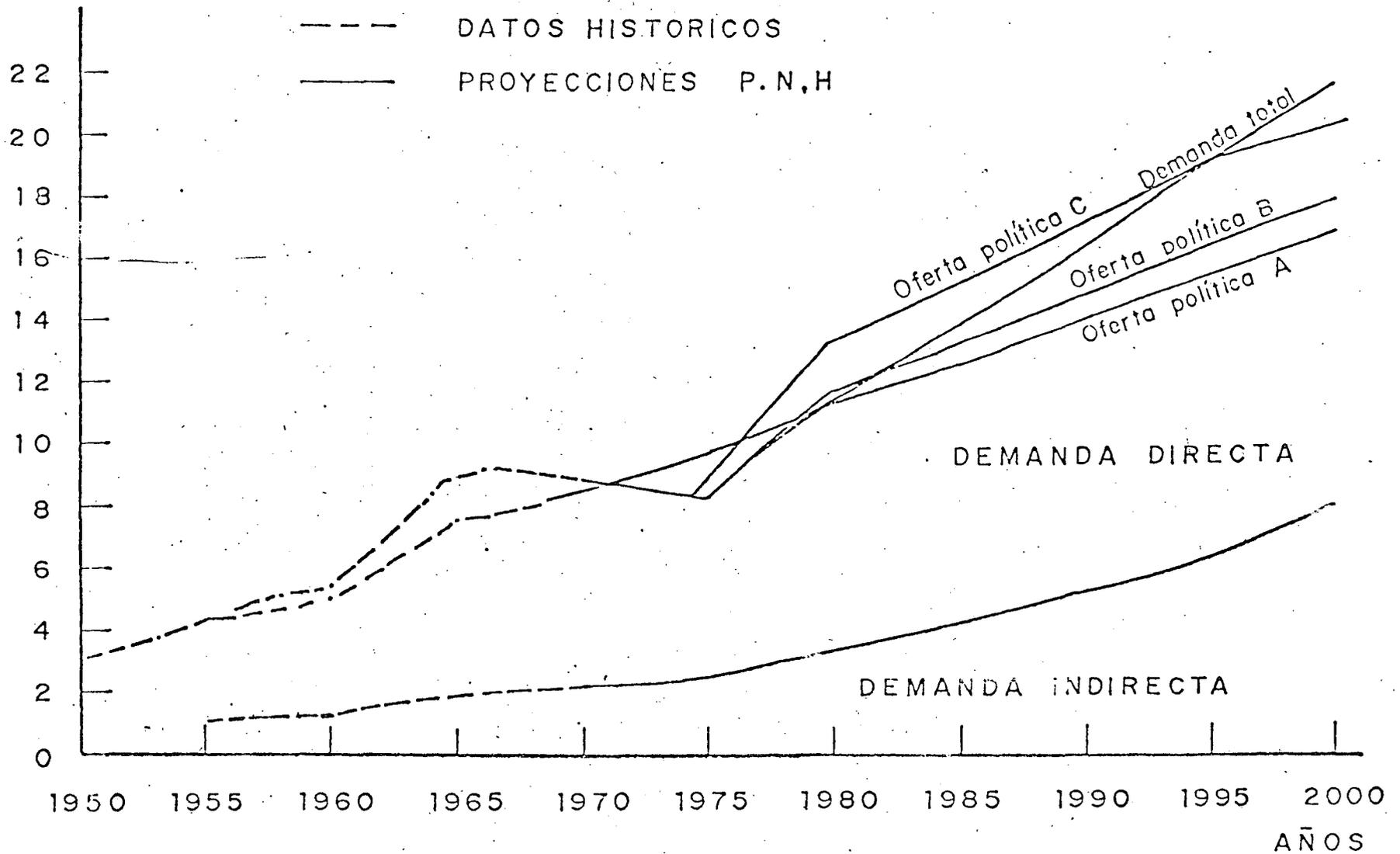
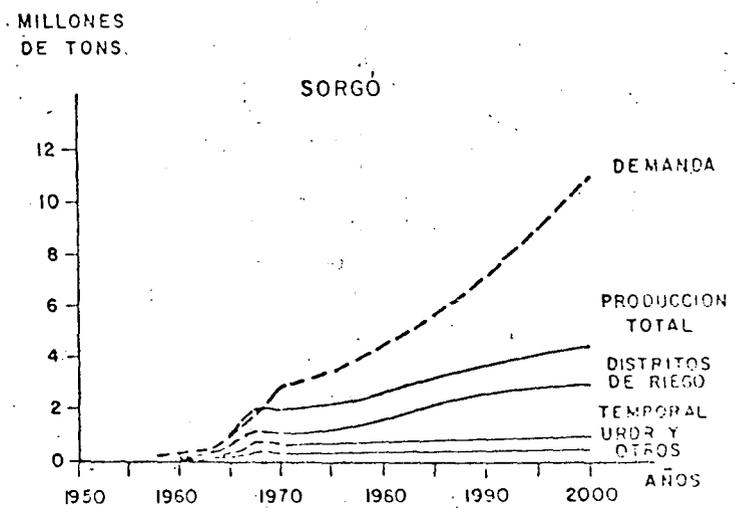
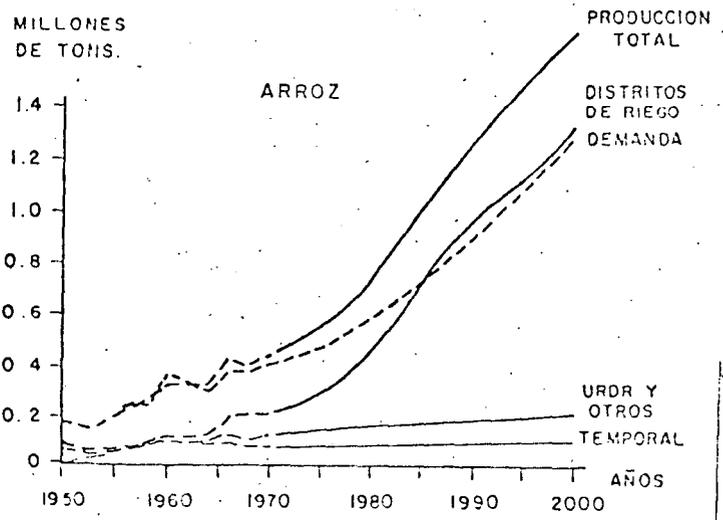
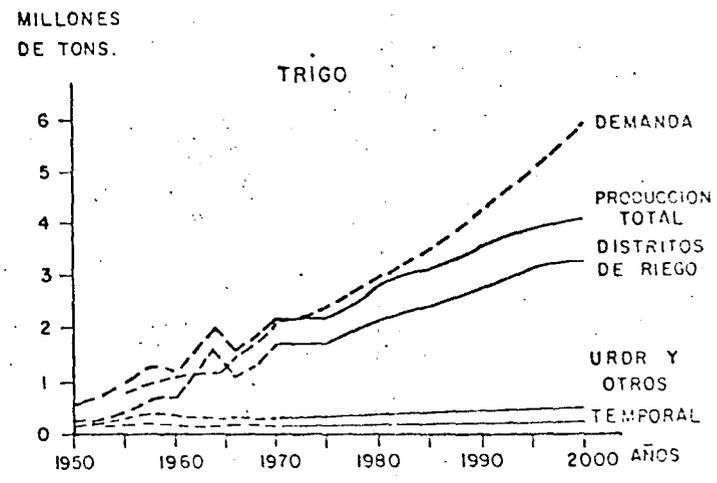
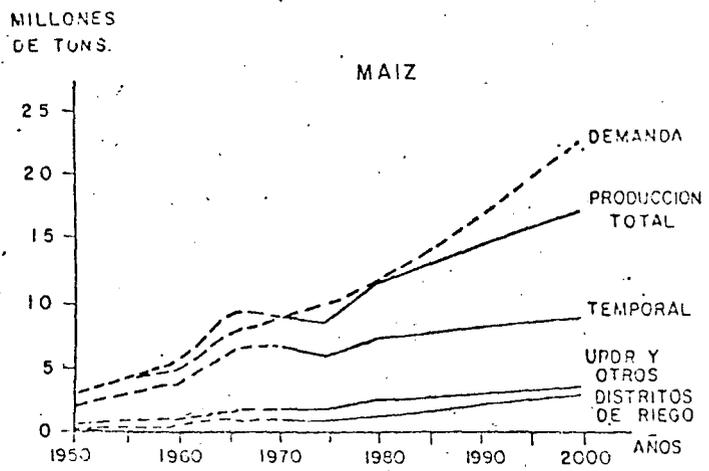


FIG OFERTA Y DEMANDA DE MAIZ



----- DATOS HISTÓRICOS  
 \_\_\_\_\_ PROYECCIONES P.N.H.

FIG. PROYECCIONES DE DEMANDA Y PRODUCCION (POLITICA A)

MILLONES DE PESOS DE 1974

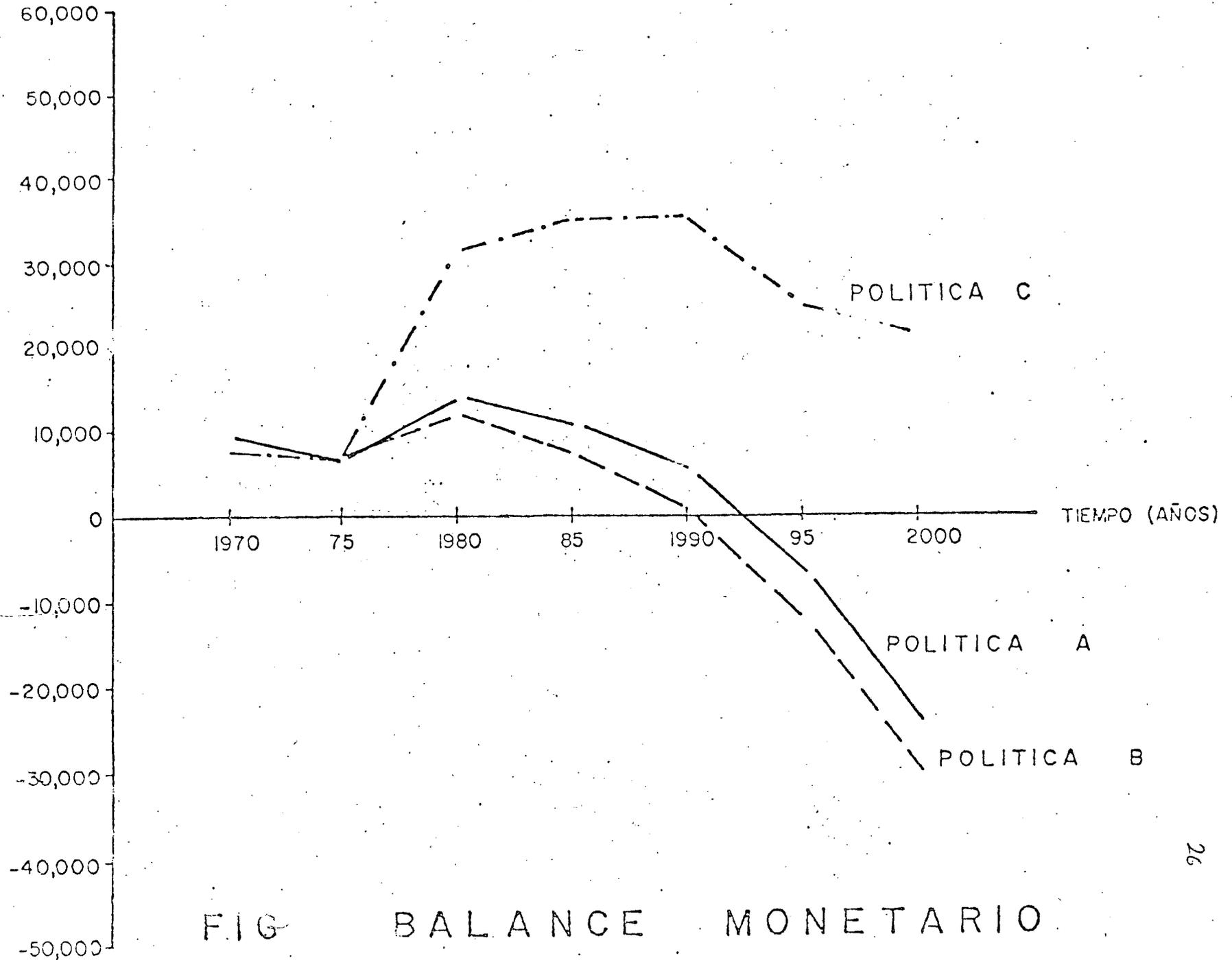


FIG BALANCE MONETARIO

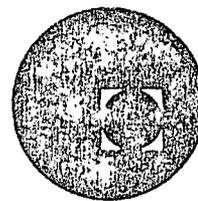
# IV.- PLANEACION DE OBRAS MARITIMAS

## I N D I C E

		Página
VOLUMEN I	RESUMEN	
Capítulo I	INTRODUCCION, OBJETIVOS Y ORGANIZACION DEL ESTUDIO	7
a)	Introducción	8
b)	Objetivos	11
c)	Organización del Estudio	11
Capítulo II	METODOLOGIA GENERAL	15
a)	Las Necesidades del Comercio Marítimo de México	17
b)	Los Costos de Transporte	18
c)	Asignación de Tráfico y Estudios de Alternativas	19
d)	El Plan Nacional de Desarrollo Portuario	21
e)	Planes Maestros	21
Capítulo III	ESTUDIOS BASICOS	23
a)	Previsiones Económicas	26
b)	Costos de Transporte	75
c)	Asignación de Carga a los Puertos	81
Capítulo IV	PLAN NACIONAL DE DESARROLLO PORTUARIO	105
a)	Sistema Portuario Nacional	107
b)	Movimiento de Carga por los Puertos Analizados	112
c)	Plan Nacional de Desarrollo Portuario	113
d)	Demandas 1975 - 1985	113
e)	Demandas 1990 - 1995	114
f)	Planes Maestros de los Puertos Nacionales	
g)	Programa de Inversiones	114
Capítulo V	EVALUACION ECONOMICA DEL PLAN	125
a)	Presentación	127
b)	Resultados	128
Capítulo VI	ESTUDIO FINANCIERO	131
a)	Metodología	133
b)	Resultados Principales	135
c)	Balance	136
Capítulo VII	OTRAS CONCLUSIONES GENERALES	139
a)	Introducción	141



centro de educación continua  
división de estudios superiores  
facultad de ingeniería, unam



APROVECHAMIENTOS HIDRAULICOS

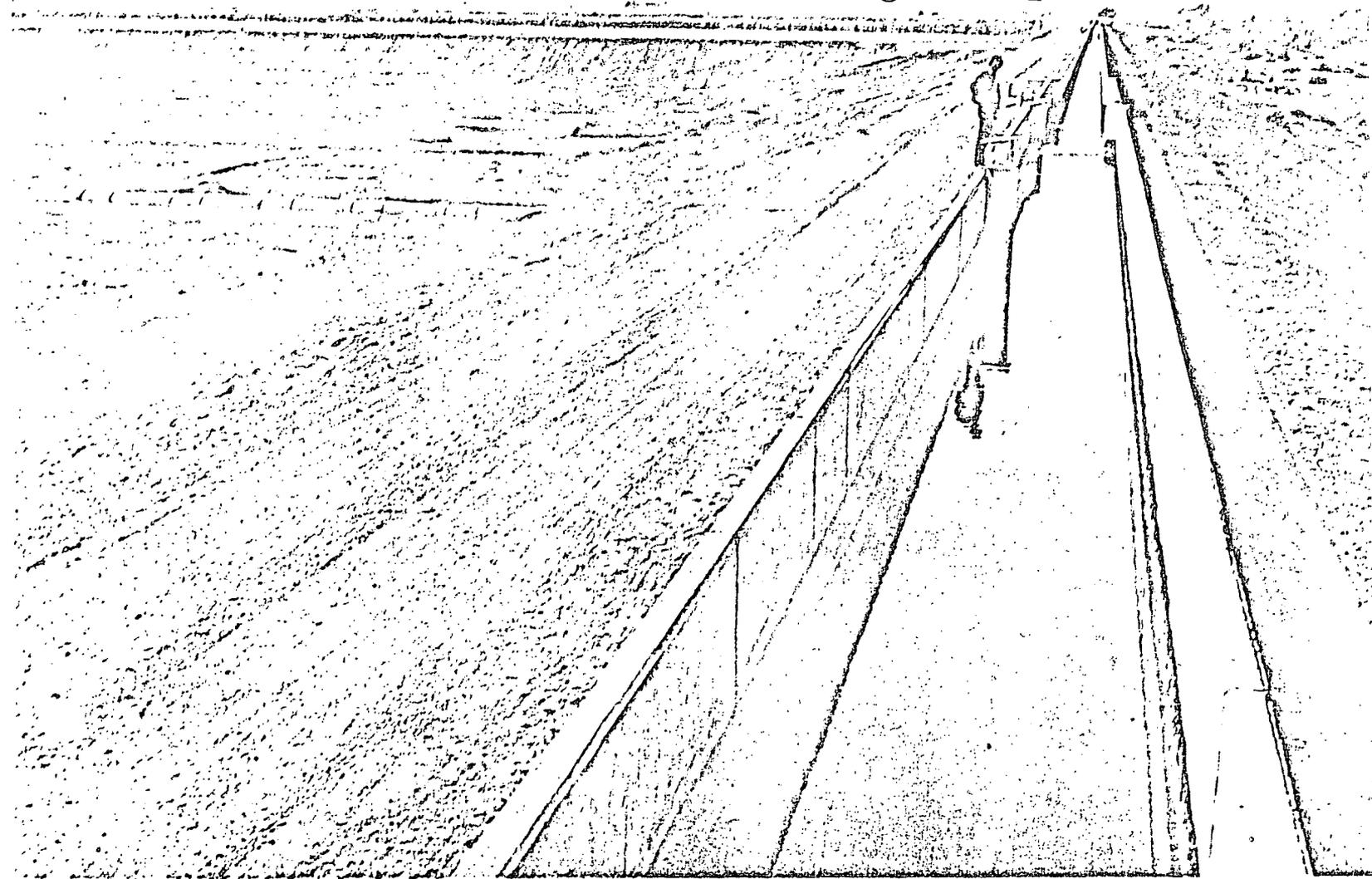
PROGRAMACION LINEAL PARA LA FORMULACION DE PLANES  
DE CULTIVO EN LOS DISTRITOS DE RIEGO  
DEL PAIS

ING. FRANCISCO TELLEZ GRANADOS

OCTUBRE, 1978



# Programación lineal para la formulación de planes de cultivo en los distritos de riego del país



Los obras de riego han costado a México muchos millones de pesos. Es indispensable que los beneficios que el país perciba de ellos, tanto en forma directa, cuanto por los efectos multiplicadores de la economía, sean lo más grande posible.

Carlos Valencia Juárez y Evia\*  
Ingeniero Civil.

Uno de los principales problemas a los que se enfrentan los países en proceso de desarrollo, consiste en la baja eficiencia con que se usan los recursos de que se disponen, pues la utilización que hacen de ellos dista mucho de ser aquella que brinde los mayores resultados posibles. De ahí que sea indispensable que la planeación que en ellos se realice, esté básicamente orientada a lograr incrementar la eficiencia en la utilización de los recursos; a obtener los máximos frutos posibles de cada peso invertido.

Dentro de los aspectos que deben ser contemplados en la planeación que realice la Secretaría de Recursos Hidráulicos, el primer lugar en importancia corresponde a la operación de las áreas que ya han sido beneficiadas con obras de riego, pues en tanto que con obras nuevas sólo puede

beneficiarse anualmente una superficie del orden de las 150 o 200 mil hectáreas, la Secretaría controla y opera distritos de riego en el país con una superficie de más de 3 600 000 hectáreas, en las que ya en la actualidad, se genera más del 42% de la producción agrícola nacional, con un valor estimado superior a los 40 000 millones de pesos en el presente ciclo agrícola.

Para poder llevar a la realidad una planeación agrícola, es indispensable una organización de la producción, la cual existe ya en cada uno de los distritos de riego del país. Cada distrito es operado por un Comité Directivo, en el que se encuentran representados los usuarios del Distrito, y todas las Dependencias del Gobierno Federal que intervienen de alguna manera en la producción agrícola y pecuaria del mismo. La nueva Ley Federal de Aguas, en su artículo 68, otorga a estos comités, las facultades de coordinación que permitirán fácilmente convertir en realidad la planeación agrícola.

\* Director de Análisis de Datos Básicos de la Dirección General de Planeación de la S.R.H.

la del distrito, respaldándolos con otras disposiciones adicionales, entre las que destacan las contenidas en los artículos 66, 70 y 182.

En el funcionamiento de un distrito de riego, intervienen multitud de factores, muchos de ellos totalmente ajenos al funcionamiento directo de las obras hidráulicas, pero que pueden ser representados matemáticamente. Así, por ejemplo, un cultivo tiene un cierto costo de producción, y un determinado calendario de utilización del recurso tierra; ciertos requerimientos sobre los tipos de suelos en que prospera; sus propios calendarios de siembra y de riego, determinadas demandas de insumos, esto es, todo aquello que se requiere para el proceso de producción correspondiente; ciertas condiciones de mercado en su demanda, precios, etc., todos los cuales, repito, pueden ser representados matemáticamente.

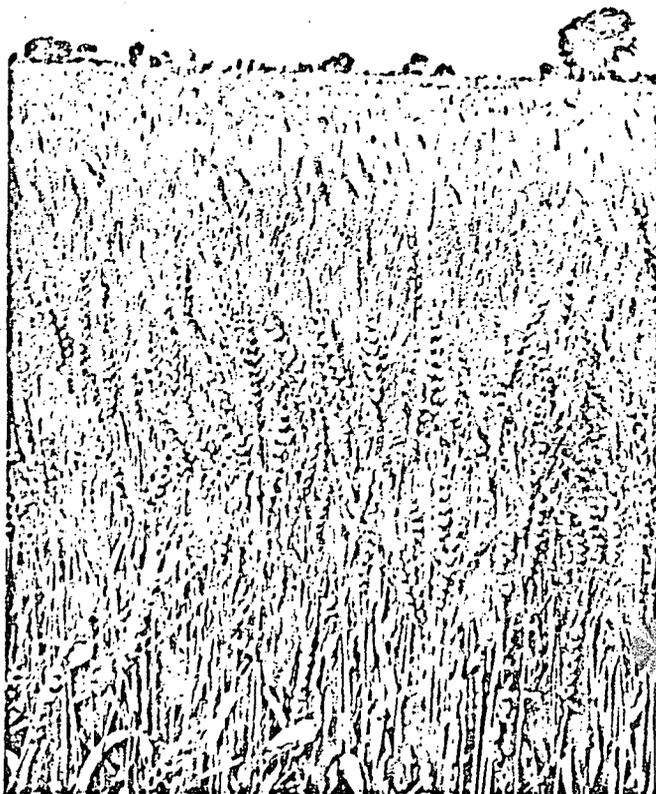
El número de variables que intervienen en el funcionamiento económico de un distrito de riego, es extraordinariamente grande, por lo que su manejo debe necesariamente hacerse con el auxilio del cómputo electrónico. Utilizando las técnicas de programación lineal, es posible definir cuáles son las combinaciones de recursos disponibles con las que es posible obtener los máximos resultados, es decir, los planes óptimos de cultivo.

La Dirección General de Planeación ha iniciado un plan de acción en los distritos de riego, tendiente a optimizar la utilización de los recursos de que en ellos se dispone. Para tal propósito, estamos integrando modelos de programación lineal para computadora, representando, en cada uno de ellos, las disponibilidades de los recursos existentes en el distrito, construyendo así para cada distrito, como un traje a la medida, un modelo que permita que el Comité Directivo pueda conocer los planes de cultivo más convenientes y el orden de magnitud de los resultados de las decisiones que se tomen en la definición de tales planes.

El problema más difícil que representa la integración de este tipo de modelos, consiste en la cuantificación de las limitaciones que, por efecto de mercado, debe considerar la computadora, de manera de lograr nuestra autosuficiencia en producción de alimentos, no sólo sin deteriorar los ingresos del productor, sino garantizándole además, las mayores utilidades posibles.

Los primeros esfuerzos que se realizaron en materia de estudios de mercado, se orientaron a tratar de definir qué era lo que debía producirse en los nuevos proyectos de riego, pero rápidamente nos dimos cuenta de que el camino de análisis era por productos y no por proyectos, ya que en cada una de las nuevas áreas, se repetían muchos de los productos, y que en cada caso era necesario analizar el mercado regional, nacional e internacional de cada cultivo.

Complica el problema, el hecho de que, desde el punto de vista de mercados, distintas variedades



La planeación de la utilización óptima de los recursos disponibles en los Distritos de Riego sera, por su participación en la producción nacional, base fundamental de la planeación agrícola de México.

de un mismo producto, o bien, subproductos de un mismo cultivo, constituyen productos independientes, lo que implica necesariamente que cada uno de ellos sea analizado como un producto diferente. Así, por ejemplo, la fibra y la semilla de algodón, a pesar de nacer y crecer juntas, constituyen dos productos totalmente diferentes, para cada uno de los cuales existen distintas utilidades, entre las que no existe relación alguna: aceite de semilla de algodón e hilados y tejidos de fibra de algodón.

Muchas veces estas interrelaciones entre las áreas de producción, motivan problemas como el que estamos viviendo actualmente en el mismo ejemplo citado. Se ha derrumbado el mercado del algodón como fibra, y es ésta la que, por su precio, constituye la razón de mayor importancia por la que los agricultores la cultivan, y al reducirse el área dedicada a este cultivo, se ha visto afectada también la producción de aceite de semilla de algodón, que en nuestro país constituye la principal oleaginosa, ya que de ella se obtienen las dos terceras partes de la producción nacional de aceite vegetal.

Al tener necesidad de determinar para cuáles cultivos realizar estudios de mercado, nos encontramos con recursos limitados y con un número enorme de productos, entre los que tuvimos que seleccionar los más importantes, habiéndose logrado definir la combinación de los 25 cultivos más importantes, con los que se logra cubrir el 90% del valor de la producción agrícola nacional.

Estos estudios de mercado de productos, constituyen un marco general a nivel total. En cada uno de ellos, se analizó dónde se produce y dónde se consume cada cultivo, así como la forma en que se mueve la producción, desde que sale de la parcela del productor, hasta que llega a su último consumidor, analizando, inclusive, la participación de los intermediarios.

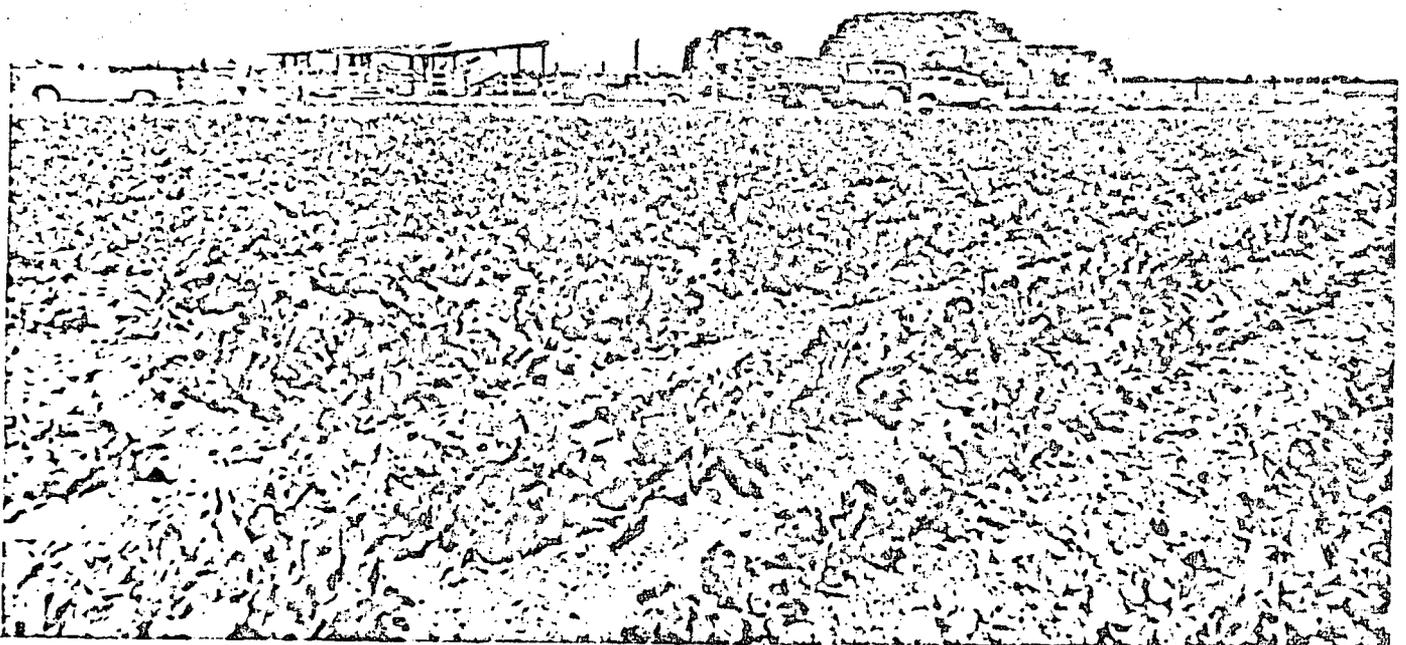
Sin embargo, lo anterior no resulta suficiente para poder establecer a un distrito de riego, que tan sólo representa una pequeña parte de las zonas productoras de ese cultivo, una cuantificación del grado en que deba participar en la producción de él.

Analizando el problema, se llegó a la conclusión de que resultaba indispensable un análisis de

detalle del mercado de cada producto para ese distrito de riego, considerando su posición geográfica con relación a los principales centros de consumo, de forma tal que pudiésemos llegar a delimitarle áreas de influencia para cada producto, de manera que nos permitan definir cuáles centros de consumo deben ser abastecidos de cada producto en particular a lo largo del tiempo, considerando, desde luego, para cada cultivo, toda la producción, no sólo de áreas de riego sino también de las áreas de temporal.

La delimitación de la zona de influencia por mercado de un cierto producto para un distrito de riego se lleva a cabo calculando el precio al que llegaría a cada uno de tales centros de consumo, de manera de que, sin que exista peligro de que tal centro de consumo no sea abastecido totalmente, la producción se genere donde resulte más económico.

Obviamente, en el modelo se representan también todos los datos sobre costo de producción, rendimientos, precios rurales y utilidades de los cultivos, incluyendo no sólo los productos en los que exista experiencia en el distrito, sino tam-



La organización de la producción que el Artículo 68 de la Nueva Ley Federal de Aguas establece en el Comité Directivo de cada Distrito de Riego, permitirá convertir en realidad una planeación agrícola en un plazo muy corto.

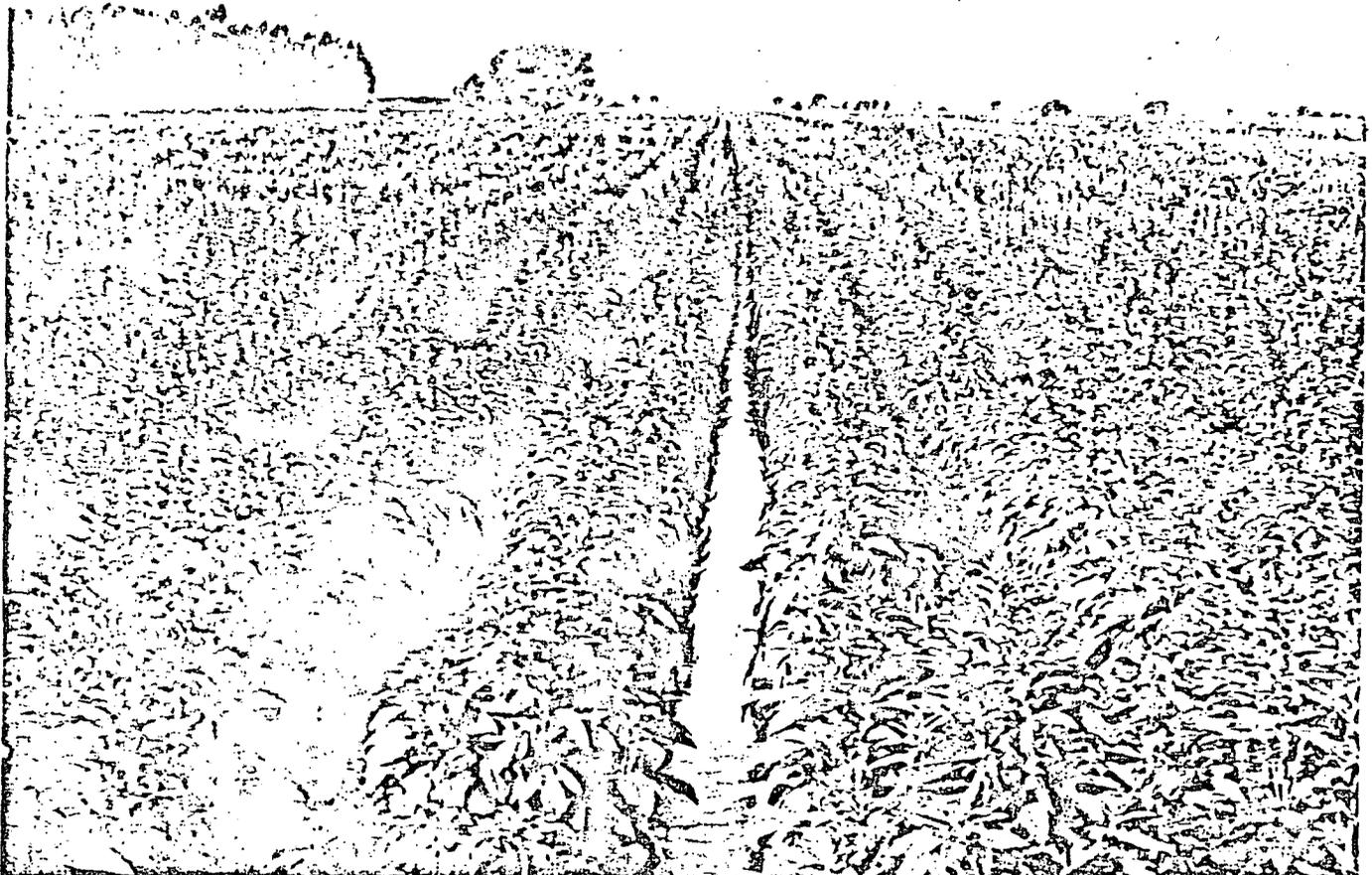
bién aquellos para los que los estudios de mercado determinen buenas posibilidades y para los cuales los estudios agronómicos demuestren que son susceptibles de cultivarse en el distrito con buenos rendimientos, así como sus demandas de riego, calendarios de siembra, distribución de láminas en el tiempo, etc.

El primer modelo que se implementó en esta forma, fue el del distrito de riego de Santo Domingo, en el Estado de la Baja California Sur. Este distrito tiene un problema muy serio con su acuífero; se trata de un aprovechamiento de aguas subterráneas mediante pozos, en el que la extracción ha llegado a ser de un volumen tan grande, que ha superado a la recarga natural del acuífero. Lo más grave de esta situación es que el distrito tiene una escasa elevación con relación al nivel del mar, y que los niveles estáticos del agua dulce se han abatido hasta alcanzar niveles inferiores al nivel del mar, y siendo los suelos de un material permeable, esta situación ha ocasionado que el agua del mar se esté introduciendo en forma subterránea, habiendo ocasionado que parte del distrito de riego haya tenido que abandonarse.

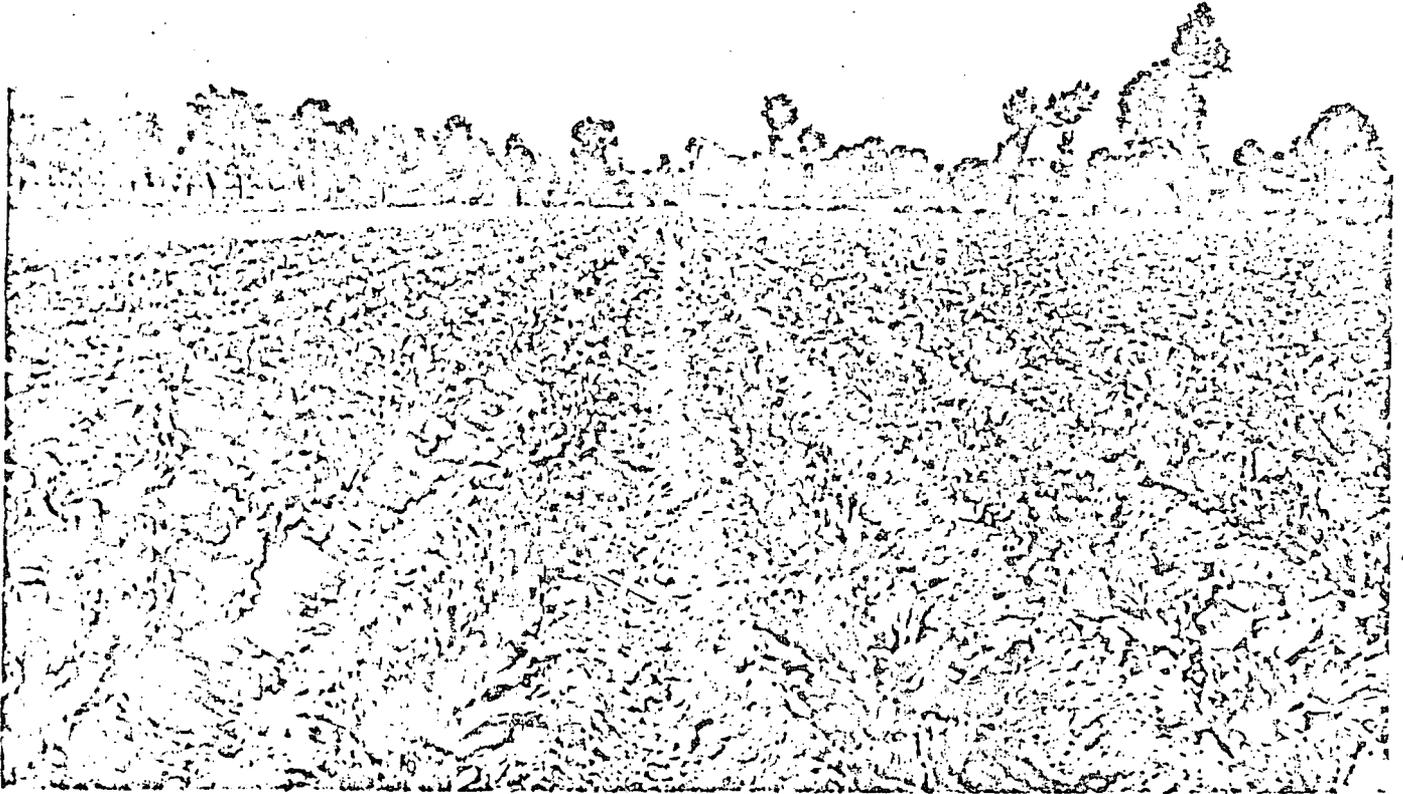
Se estima que la extracción media anual que se hace actualmente en el distrito asciende a más de 300 millones de metros cúbicos, en tanto que la recarga natural del acuífero estimada en los estudios geohidrológicos asciende apenas a unos 150 millones de metros cúbicos.

Se realizaron los estudios de tipo socioeconómico y de mercado en la forma descrita en párrafos anteriores, y con toda esta información, se armó un modelo de programación lineal para la computadora, habiéndose realizado con él hasta el momento, diversos análisis de sensibilidad a la variación de disponibilidades de factores: así, por ejemplo, el primero de estos análisis se hizo con relación a la disponibilidad de agua, encontrándose que, si fuese posible continuar con el mismo nivel de explotación que se tiene actualmente en el distrito, sería posible generar una producción tal que a los agricultores de Santo Domingo les permitiría un incremento del 120% en las utilidades con respecto a las que obtienen actualmente.

El principal problema de Santo Domingo es la necesidad de reducir sus extracciones del acuífero hasta igualar la recarga natural del mismo, por lo



La programación lineal constituye una herramienta para orientar a los comités directivos en la determinación de los planes de cultivo, seleccionando entre todas las combinaciones posibles, aquella que haga que las utilidades de los agricultores sean las más grandes que se pueden lograr con los recursos de que se dispone.



Cada miembro del comité directivo, para los efectos de esta planeación agrícola, deberá fungir como gestor del Distrito de Riego ante su propia dependencia, con su más decidida y desinteresada colaboración, de manera de lograr la coordinación que se requiera para implementar los planes óptimos de cultivo.

que en el primer análisis de sensibilidad que se hizo con el modelo, se fue reduciendo, en una serie de corridas de la computadora, el volumen disponible de agua, encontrándose que es posible reducir la extracción hasta igualar la recarga del acuífero, no solamente sin lesionar la utilidad de los agricultores, sino incrementándose ésta en un 30%.

La principal utilidad de este tipo de modelos consiste en la realización de análisis de sensibilidad del plan de cultivos con respecto a cualquier factor que intervenga en el proceso; es decir, analizar cómo varía el plan de cultivos que define el modelo de programación lineal, al ir variando la magnitud del factor que se desea analizar; así, por ejemplo, en el mismo caso de Santo Domingo, nos encontramos ante la situación de que la computadora eliminaba totalmente el algodón y el trigo del plan de cultivos del distrito. En el caso del algodón, la solución parece lógica, dada la demanda que el cultivo tiene de agua y la situación actual del mercado de la fibra; pero en el caso del trigo, México tiene una gran necesidad insatisfecha de este pro-

ducto, del cual incluso, hemos estado haciendo importaciones; por ello se consideró necesario realizar un análisis de sensibilidad del plan de cultivos con respecto al precio de trigo, de manera de determinar, con base en las condiciones reales del distrito, cuál debería ser el precio del trigo, de manera tal que resultase económicamente ventajosa su introducción en el plan de cultivos. El camino a seguir es muy sencillo: se procede a hacer una serie de corridas en la computadora, dejando fijos todos los demás datos del problema y variando únicamente el factor que se desee analizar; en este caso, el precio del trigo; se hizo una serie de corridas en la computadora, incrementando en cada una de ellas en \$100 por tonelada el precio del trigo, y se encontró que el plan de cultivos, no varía, hasta que el precio del trigo, alcanza un valor de \$2 750.00 por tonelada, con el que el cultivo empieza a ser incluido en el plan, con una superficie de 50 hectáreas. A partir de este valor, la superficie asignada a trigo se incrementa proporcionalmente al incremento en el precio del trigo, hasta

que éste alcanza un valor de \$3 550.00 por tonelada. En estas condiciones, el área asignada al cultivo asciende a unas 5 000 hectáreas. Después de ese precio, ya no se incrementa la superficie. La conclusión es muy clara; mientras el precio del trigo no llegue a \$2 750.00 por tonelada, lo más conveniente es destinar este producto a otros distritos.

En forma similar, el modelo puede utilizarse para analizar el costo de las decisiones que el Comité Directivo tome en la formulación de los planes de cultivo. Si, por ejemplo, se pretende continuar asignando una cierta superficie a un cultivo que la computadora elimina del plan óptimo para el distrito, este dato puede introducirse en una corrida del modelo, obligando a la computadora a considerar tal área como una restricción. Los programas determinan el volumen de recursos que aún queda disponible, y optimizan su utilización, definiendo un segundo plan de cultivos óptimos.

Obviamente, la utilidad obtenida por los agricultores en estas condiciones, será menor a la del plan óptimo absoluto, y la diferencia entre tales utilidades constituye lo que los agricultores dejarán de ganar por su insistencia en sembrar ese cultivo.

Esto es lo que se denomina el costo de su decisión.

Modelos similares se han terminado ya para los distritos de riego de la Región Lagunera, Costa de Hermosillo, Caborca, Guaymas y Río Colorado y por instrucciones de la superioridad, se nos ha establecido como meta el tener terminados, para el 30 de noviembre de 1976, modelos de programación lineal que cubran el 82.5% de la superficie total de los distritos de riego del país. A la fecha se han terminado los estudios de mercado y de recopilación de información en el campo de los Distritos de Riego de: Bajo Bravo, Bajo San Juan y Río Soto La Marina en el Estado de Tamaulipas; Río Culiacán, El Carrizo, Guasave y Río Fuerte en el Estado de Sinaloa; Rosario-El Mezquite en el Estado de Michoacán y se están realizando los estudios de campo para los Distritos de: Río Yaqui, Colonias Yaquis, Río Mayo en el Estado de Sonora, La Begoña en Guanajuato y del Alto Río Lerma en los Estados de Guanajuato y Michoacán. Se tienen programadas las actividades totales de manera de cumplir con la meta citada, mediante una ruta crítica incluyendo el entrenamiento de los comités directivos correspondientes en la utilización de sus modelos.



En un país en pleno proceso de desarrollo, es indispensable lograr los más grandes frutos de los recursos de que se dispone, es decir, debe obtenerse de ellos las máximas utilidades posibles: las óptimas.

### ¿QUE ES LA PROGRAMACION LINEAL? EJEMPLO HIPOTETICO

A efecto de facilitar la comprensión sobre en qué consiste la Programación Lineal, consideramos que lo mejor que podemos hacer, es exponer uno de los casos más sencillos que es posible resolver mediante su aplicación.

Imaginemos el caso hipotético de un agricultor, que dispone de una parcela de 70 ha. y que tiene la opción de poder cultivar tabaco o tomate.

Supongamos que los precios de venta para tabaco y tomate son de \$9.00 y \$2.00 por kilogramo; que los rendimientos por hectárea que puede obtener, son de 2 000 kg. de tabaco o 15 000 kg. de tomate; que la inversión que se requiere por hectárea, como costo de producción, es de \$8 000 para el tabaco y de \$15 000.00 para el tomate. El capital

total de que dispone nuestro agricultor es de \$840 000.00 y las necesidades de agua de riego, en los meses de germinación de noviembre y diciembre son, respectivamente, de 1 500 y de 1 000 m<sup>3</sup> por ha., para el tabaco; y para el tomate, de 1 200 y de 850 m<sup>3</sup> por ha. Consideremos que los volúmenes disponibles de agua fuesen de sólo 100 000 m<sup>3</sup> en noviembre y 80 000 m<sup>3</sup> en diciembre.

El problema sería encontrar el número de hectárea de cada uno de los dos cultivos, de forma tal que la utilidad del agricultor sea la máxima posible.

La solución de nuestro problema se inicia con la formulación de una tabla en la que resumimos todos los datos. Llamemos "X" al número de hectárea que se sembrará de tabaco y "Y" al que se sembrará de tomate. Nuestra tabla de resumen de datos sería la siguiente (figura Núm. 1).

Figura 1

	Superficie ha.	Precio de venta \$ kg.	Rendimiento kg/ha.	Costo de producción \$/ha.	Necesidades de agua m <sup>3</sup> /ha.	
					Nov.	Dic.
Tabaco	X	9	2 000	8 000	1 500	1 000
Tomate	Y	2	15 000	15 000	1 200	850
Disponibilidad Total:	70			840 000	100 000	80 000

De acuerdo con esta tabla, podemos deducir fácilmente que nuestro problema consiste en encontrar los valores de "X" y de "Y", que maximicen las utilidades del agricultor.

La utilidad que se obtenga para cada cultivo será la diferencia entre el valor total de la producción y el costo de producción. Por ejemplo, en el caso del tabaco, el valor total de la producción será el resultado de multiplicar los 2 000 kg. que se pueden obtener por hectárea, por los \$9.00 a que se vende cada kilo, o sean \$18 000; la utilidad se obtiene restando de esta cantidad los \$8 000 que se requieren como costo de producción, o sean, \$10 000 por ha. Por lo tanto, la utilidad total por toda la superficie que se dedique al tabaco, será de \$10 000 multiplicado por "X".

En forma similar, la utilidad total por la superficie que se dedique al tomate, será de 15 000 kg. por ha., multiplicado por \$2.00 por kg. a que se vende, menos los \$15 000 que cuesta producir una hectárea, o sean \$15 000 por ha. La utilidad total por tomate será, de acuerdo con esto, de \$15 000 multiplicado por "Y".

La utilidad total del agricultor equivale a la que obtenga por hectárea de tabaco, multiplicada por el número de hectáreas correspondiente, "X", más la utilidad por hectárea de tomate por el número de hectáreas correspondiente, "Y", o sea:

$$\text{Utilidad} = 10\,000 X + 15\,000 Y$$

Veamos ahora las restricciones de nuestros recursos limitados:

La superficie máxima de que se dispone es el total de la parcela del agricultor, o sean 70 ha. Ahora bien, la superficie sembrada no necesariamente debe alcanzar este total, por lo que esta ecuación constituye una desigualdad:

$$X + Y = 70$$

En forma análoga, se establece que el número de hectáreas sembradas de tabaco, multiplicado por los \$8 000.00 de inversión correspondientes, más el número de hectáreas sembradas de tomate por los \$15 000.00 de inversión que requiere cada hectárea, no podrán sobrepasar los \$840 000.00 de que se dispone:

$$8\,000 X + 15\,000 Y = 840\,000$$

Y, por último, las restricciones impuestas por los volúmenes de agua disponibles y las láminas necesarias para el riego.

En el mes de noviembre, cada una de las "X" hectáreas de tabaco requiere 1 500 metros cúbicos, y cada una de las "Y" hectáreas de tomate, 1 200 metros cúbicos. De acuerdo con esto, la desigualdad que representa esta restricción será:

$$1\,500 X + 1\,200 Y = 100\,000$$

En el caso del mes de diciembre, en una forma similar, la desigualdad sería:

$$1\,000 X + 850 Y = 80\,000$$

De esta forma, queda integrado el sistema de restricciones con el que debemos maximizar la utilidad del agricultor, o sea:

Maximizar:

$$\text{Utilidad} = 10\,000 X + 15\,000 Y$$

Sujeta a las siguientes restricciones:

Por área:  $X + Y = 70$

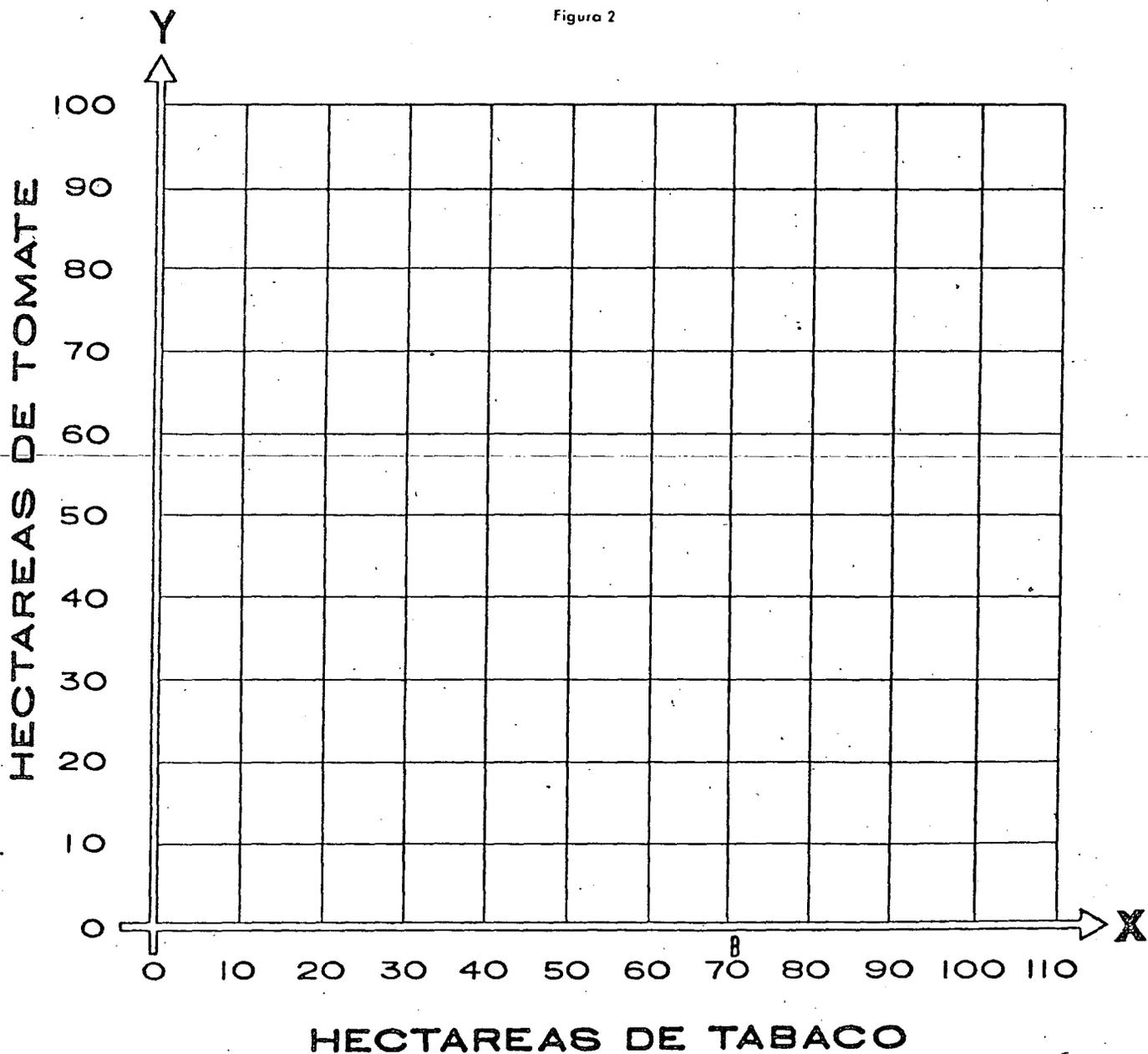
Por capital:  $8\,000 X + 15\,000 Y = 840\,000$

Por agua Nov.:  $1\,500 X + 1\,200 Y = 100\,000$

Por agua Dic.:  $1\,000 X + 850 Y = 80\,000$

Para resolver el problema, utilizamos una representación gráfica de coordenadas cartesianas, en las que "X" y "Y" serán respectivamente, abscisas y ordenadas. Como no es posible pensar en una

Figura 2



superficie negativa, cualquier solución factible real, deberá quedar alojada en el primer cuadrante. (Figura Núm. 2.)

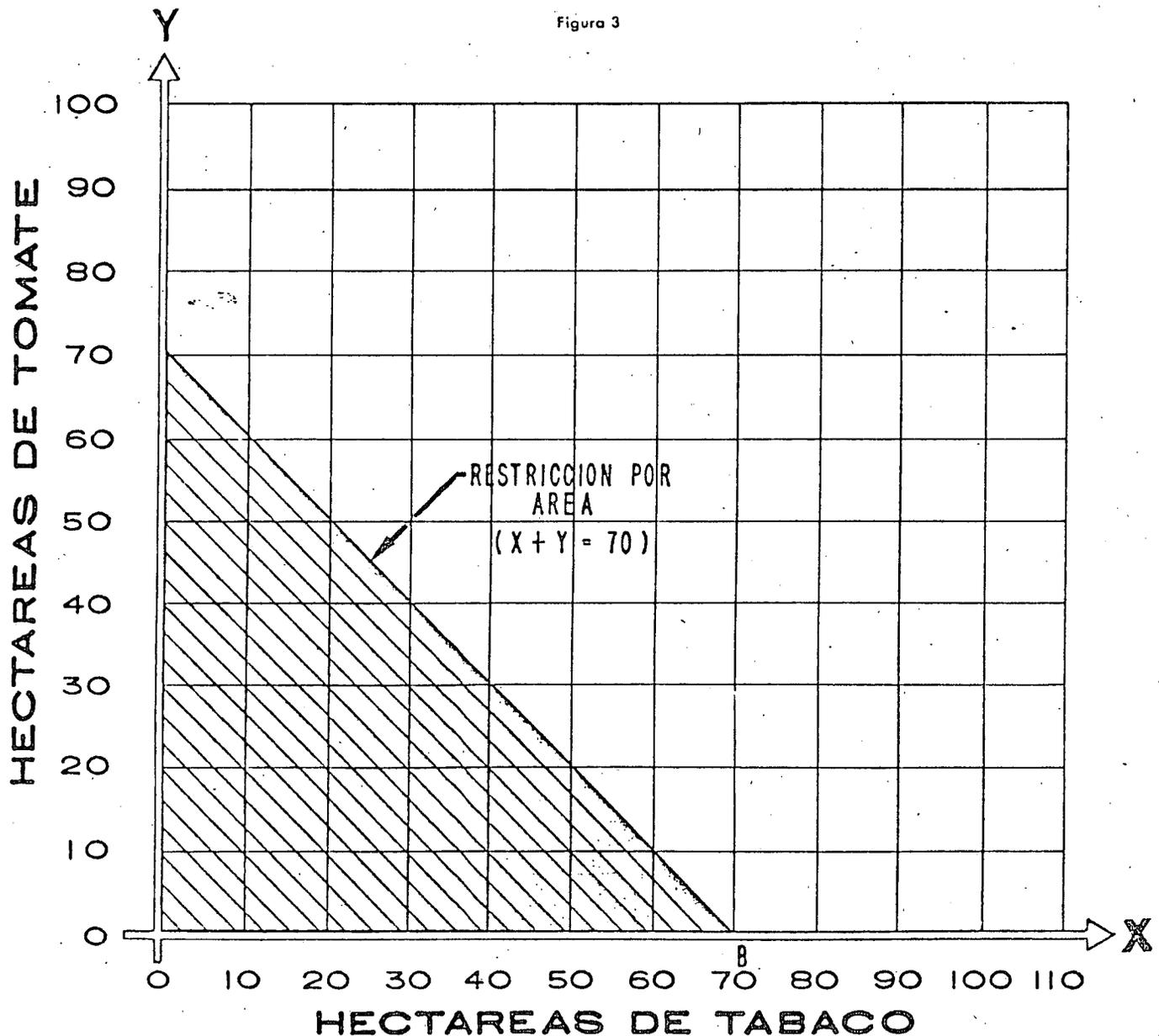
Cada una de las desigualdades puede ser considerada como un conjunto de un número infinito de igualdades; por ejemplo, en el caso de la restricción de área, que queda representada por la desigualdad  $X + Y = 70$ , cualquier ecuación de la forma  $X + Y = B$ , en la que "B" puede tomar cualquier valor comprendido entre 0 y 70, serían igualdades que satisfacen la desigualdad del conjunto.

La representación gráfica de este conjunto de ecuaciones lineales, representa una familia de rectas paralelas entre sí, ya que todas tienen la misma pendiente, y dado que constituyen un número infi-

nito de ellas, ésta puede considerarse como una superficie, delimitada por la condición del máximo  $X + Y = 70$ , y los ejes coordenados que limitan el primer cuadrante. (Figura Núm. 3.)

Esta superficie AOC sería el lugar geométrico de los puntos que satisfacen esa desigualdad. (Figura Núm. 3.)

Si en la misma gráfica dibujamos todas y cada una de estas familias de rectas, correspondientes a cada una de las restricciones, habrá una zona de esas superficies, común a todas las áreas de cada restricción. (Figura Núm. 4.) Los puntos de esta zona satisfacen simultáneamente todas y cada una de las desigualdades, motivo por el que se le denomina área de soluciones factibles. (Poligonal  $\alpha\beta\gamma\Omega$  ).



Cualquier punto de la gráfica representaría un plan de cultivos, esto es una combinación de un número de hectáreas de tomate y de un número de hectáreas de tabaco, por lo que los puntos de esta zona satisfacen simultáneamente todas y cada una de las restricciones, lo que significa que para cualquiera de esos planes de cultivo, a nuestro agricultor le alcanzaría su superficie, su capital y su disponibilidad de agua en noviembre y diciembre.

Por otra parte, la representación gráfica de la ecuación que nos define la utilidad, o sea:

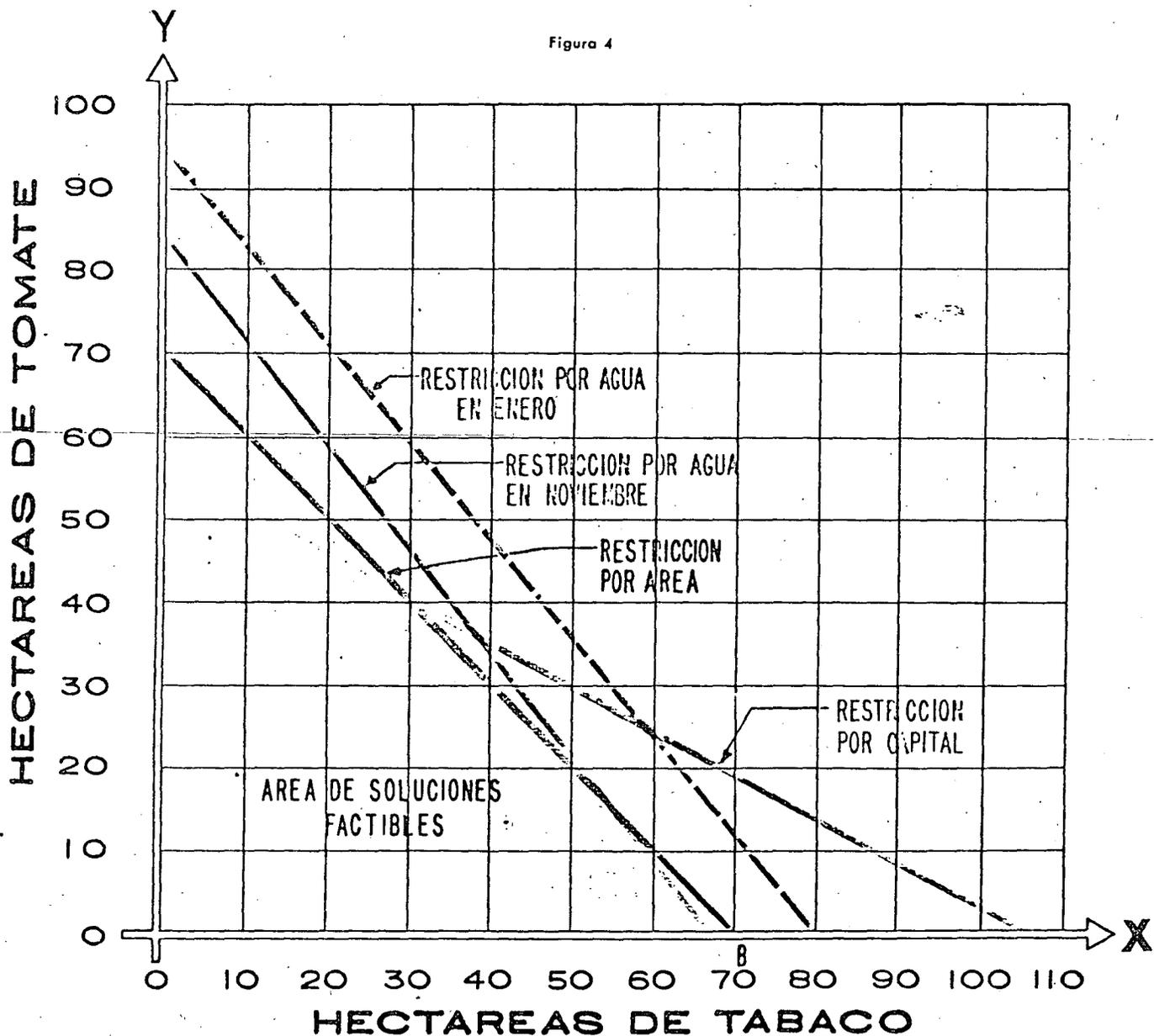
Utilidad = 10 000 X + 15 000 Y, será también una familia de rectas paralelas entre sí, en este caso, sin ningún límite.

Analizando esta ecuación de utilidad, es fácil

concluir que su valor será mayor mientras mayor sea el valor de ambas variables "X" y "Y" o sea, mientras la distancia al origen de esta recta sea más grande.

De acuerdo con lo anterior, se concluye que es necesario encontrar un punto de la zona de soluciones factibles, lo más alejado posible del origen, y que quede también alojado en forma simultánea, sobre una de las rectas de la familia de la utilidad, o sea lo más alejada que sea posible del origen, y que simultáneamente satisfaga todas y cada una de las restricciones, o sea que también debe ser un punto del área de soluciones factibles. Obviamente la satisfacción simultánea de ambos requerimientos, sucede en el punto de tangencia,

Figura 4



que en nuestro ejemplo, coincide con el vértice de la zona de soluciones factibles correspondiente a la intersección de las rectas límites de área y capital. (Figura 5.)

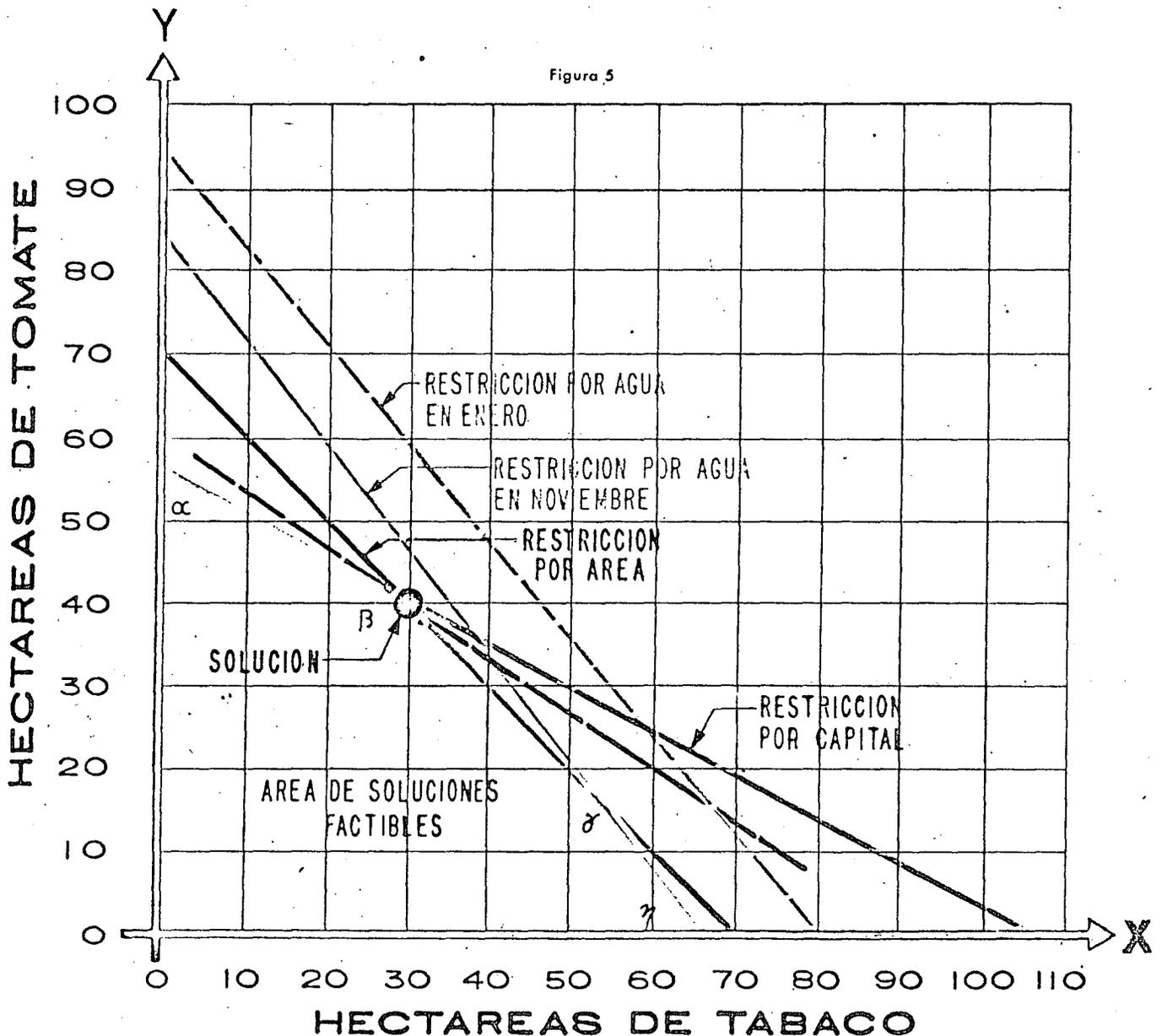
Calculando los valores de las coordenadas correspondientes, mediante geometría analítica, encontramos que la máxima utilidad se obtiene al sembrar 40 ha. de tomate y 30 de tabaco.

El caso que hemos visto, constituye el más sencillo de la programación lineal, ya que al tener solamente dos variables, nos permite una solución gráfica, pero en el caso de un Distrito de Riego, son muchísimas las combinaciones de cultivos para los que habría que determinar las superficies, y el número de restricciones sería también mucho más grande: por condiciones de mercado, por disponi-

bilidad de agua, por disponibilidad de semillas, de crédito, de fertilizantes, de insecticidas, por condiciones de suelos apropiados para cada cultivo, etc.; sin embargo, mediante la utilización del cómputo electrónico, la solución del problema es perfectamente factible, utilizando para ello el método simplex.

**APLICACION DE LA PROGRAMACION LINEAL A LA FORMULACION DE PLANES DE CULTIVO PARA EL DISTRITO DE RIEGO DE SANTO DOMINGO**

El Distrito de Riego de Santo Domingo, ubicado en el Estado de la Baja California Sur, tiene un problema muy serio de sobreexplotación.





Casi la mitad de la producción agrícola nacional, en valor, se genera ya actualmente en los Distritos de Riego. La programación lineal constituye una asesoría para orientar las decisiones de cada comité directivo en forma racional.

Se trata de un aprovechamiento hidráulico por bombeo de aguas subterráneas, en el que la extracción actual, que asciende a unos 300 millones de  $m^3$ , ha superado a la recarga natural del acuífero, que se estima en sólo 150 millones de  $m^3$ , ocasionando una grave intrusión marina.

De continuar esta sobreexplotación, en un lapso máximo de 25 años, el distrito habrá agotado totalmente sus recursos.

De acuerdo con lo anterior, la principal restricción que deberá considerar el modelo de programación lineal de este distrito, deberá ser la correspondiente al volumen disponible de agua.

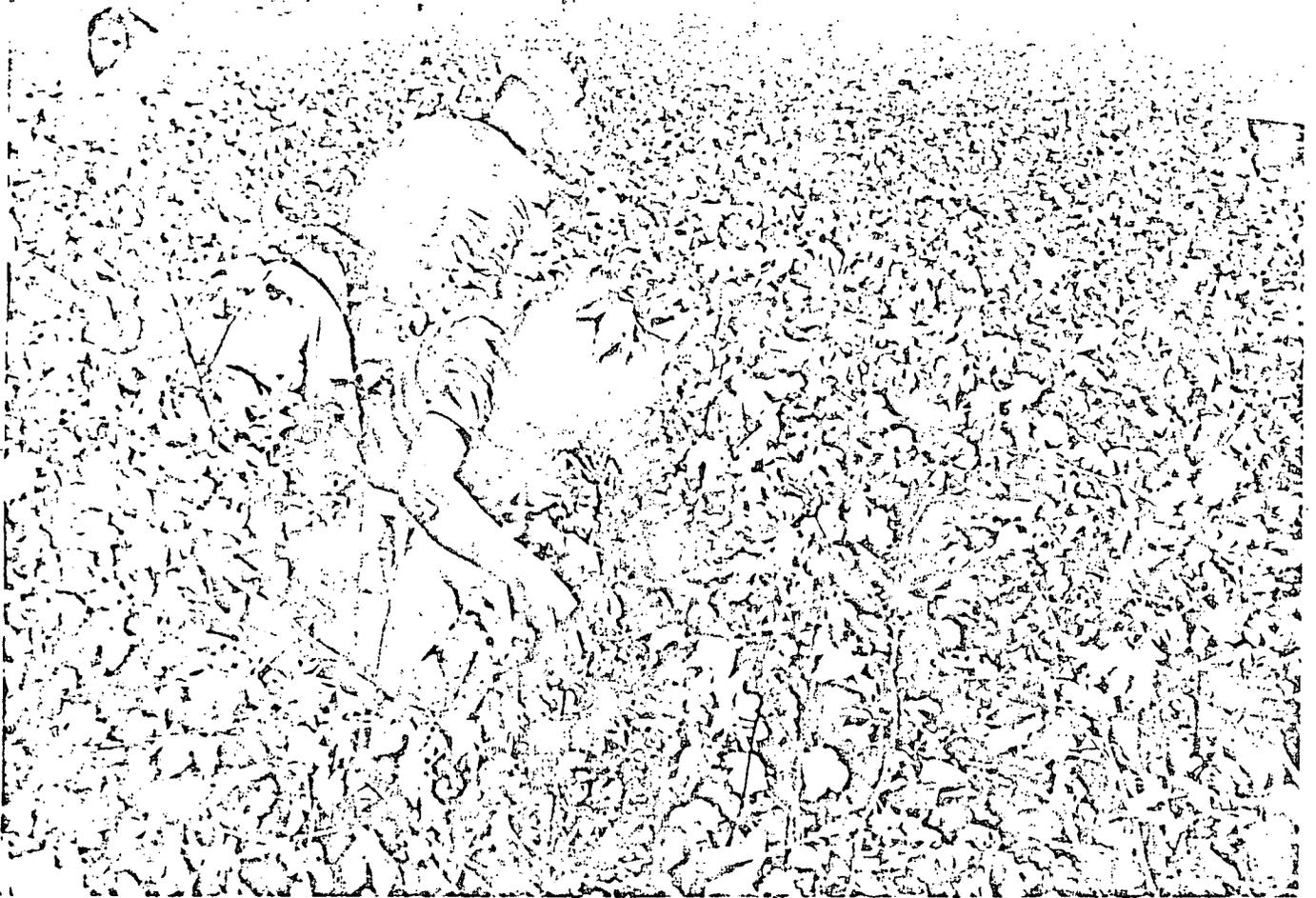
Los estudios se iniciaron con una serie de investigaciones de mercadotecnia y de índole socioeconómica, tendientes a poder representar matemáticamente las condiciones reales del distrito: sus limitaciones de mercado, sus características socioeconómicas y de capacidad instalada en los equipos de bombeo.

Siendo el primer esfuerzo que se desarrolla con un modelo de programación lineal, se consideró necesario estudiar una serie de distintas alterna-

tivas que nos permitiesen un análisis de sensibilidad de los resultados, conforme se iban variando las restricciones, es decir, analizar cómo resultaban afectados los problemas de cultivo que definía la computadora, al ir variando, por ejemplo, los límites impuestos en cuanto a la disponibilidad de agua.

En esta forma, se corrieron en la computadora más de 60 distintas alternativas formuladas, combinando la restricción correspondiente al agua, primero con el volumen total de la concesión, o sean 272 millones de  $m^3$ , y después reduciéndolo de 10% en 10% hasta la mitad.

Para el análisis se consideraron todos aquellos cultivos existentes en el distrito, independientemente de su importancia relativa, y se incluyeron además, aquellos otros para los que los estudios de mercado y los estudios agronómicos permitieron reconocer buenas posibilidades, incluyendo en el modelo para cada uno de ellos los datos correspondientes a su costo de producción, rendimiento promedio y precio medio rural, para determinar el valor de la producción generada y la utilidad obtenida por los agricultores. Asimismo, se consi-



La utilización de modelos de programación lineal para formular los planes de cultivo de cada Distrito de Riego, constituye una planeación que puede significar miles de millones de pesos para México a corto plazo.

deraron las láminas totales de riego, la periodicidad y distribución de las mismas, épocas de cultivo, etc. Se incluyeron también datos de la capacidad de los equipos de bombeo y las limitaciones por condiciones de mercado de productos, tomando en cuenta los niveles de demanda regional, nacional e internacional.

Con base en todo lo anterior, el modelo se orientó a maximizar la utilidad de los agricultores, en función del volumen total explotado.

Los resultados obtenidos en esta forma eliminan totalmente el algodón y el trigo del plan de cultivos para el distrito, así ganando las mayores áreas al cultivo de frijol, que por sus características de un corto ciclo vegetativo, permite su propia repetición en los subciclos de primavera, verano y de invierno, requiriendo una lámina de riego menor.

Considerando que en el área del Distrito de Riego y en su zona de influencia, existe capacidad instalada para el despepite del algodón, así como maquinaria agrícola especializada para el mismo cultivo y para el trigo, se incluyeron en el análisis otras alternativas, en las que se fijaba a la computadora distintas áreas mínimas de estos dos cultivos.

Un resumen de los resultados obtenidos puede observarse en una gráfica, en la que se representan, en el eje vertical, el valor total de la utilidad de los agricultores, en millones de pesos y en el eje horizontal, el volumen de agua utilizado en millones de metros cúbicos. (Figura 6.)

En esta gráfica, el plan de cultivos 1973-74, que consume unos 300 millones de  $m^3$  y produce a los agricultores una utilidad de 176 millones de pesos, correspondería al punto que se señala. (Figura 7.)

Los programas de cultivo óptimos definidos por la computadora en la forma descrita, esto es, partiendo del volumen total de la concesión y reduciéndose cada vez en un 10%, corresponden a los puntos marcados sobre la línea azul. (Puntos: 6A, 5A, 4A, 3A, 2A y 1A.)

Los puntos que aparecen marcados con la letra B, corresponden a distintas combinaciones de cultivo, en los que se obligó a la computadora a incluir ciertas áreas de algodón y trigo con las mismas restricciones de agua consideradas en los planes de cultivo descritos anteriormente.

Así, por ejemplo, el plan de cultivos 6A, con una extracción total de 272 millones de  $m^3$ , podría

STO. DOMINGO, B. C. S.

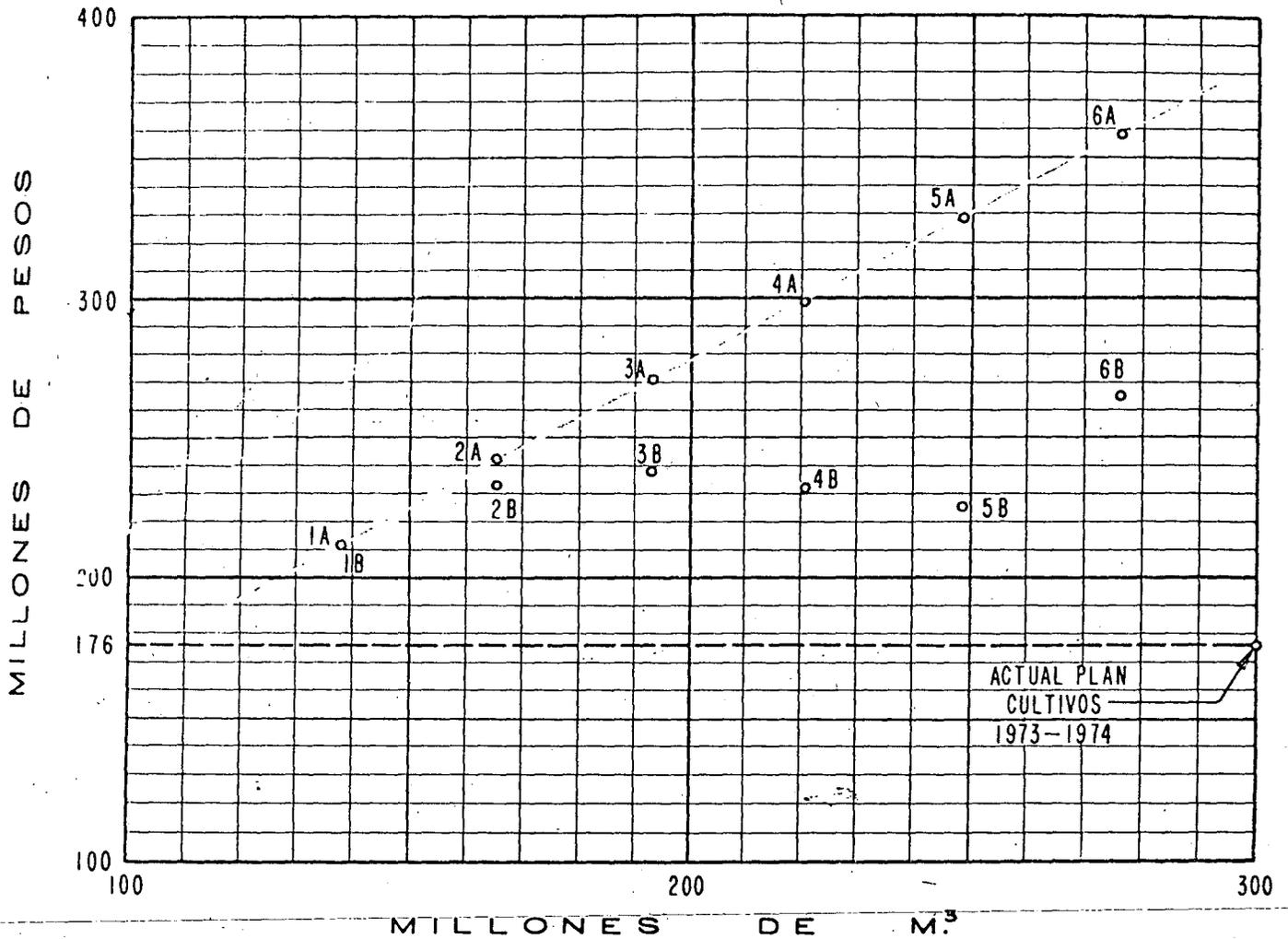
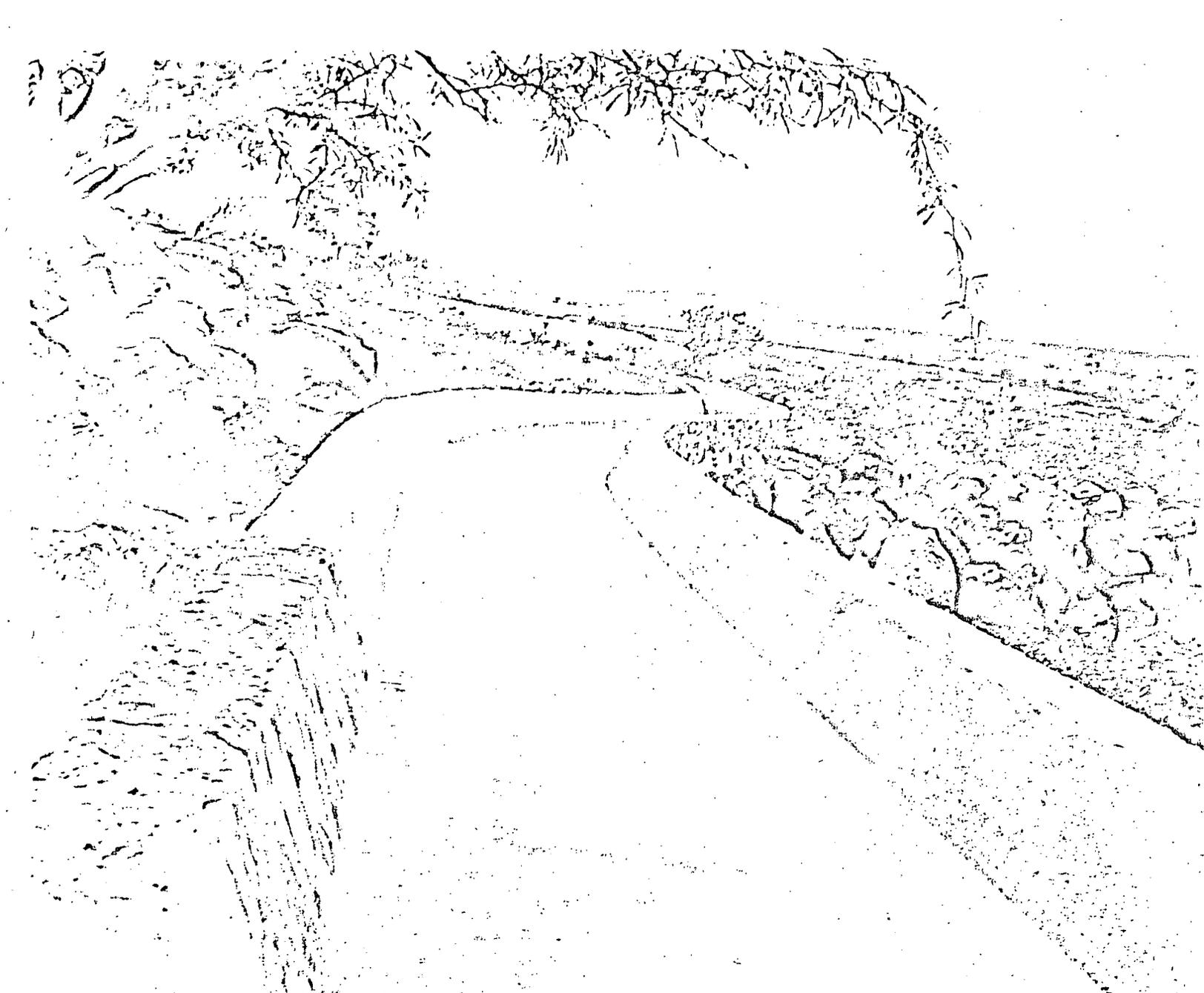


Figura 6

Figura 7

Alternativas Núm.	Volumen requerido mill. m³	Superficie total ha.	Utilidad total mill. \$	Restricciones		
				Algodón ha.	Trigo ha.	Otros cultivos ha.
1-A	138 000.00	34 062.500	211 024 000.160	.000 01	.000 01	34 062.49998
2-A	165 600.240	35 845.070	242 502 295.160	.000 01	.000 01	35 845.06998
3-A	193 200.240	35 845.070	271 240 795.156	.000 01	.000 01	35 845.06998
4-A	220 800.240	35 845.070	299 979 295.156	.000 01	.000 01	35 845.06998
5-A	248 400.600	35 845.10	328 719 224.156	.000 01	.000 01	35 845.09998
6-A	276 000.280	35 845.02	357 456 246.563	.000 01	.000 01	35 845.01998
1-B	138 000.000	34 062.500	211 024 800.160	.000 01	.000 01	34 062.49998
2-B	165 600.302	36 745.075	232 728 117.05	1 000.00	1 000.00	34 745.075
3-B	193 200.000	38 682.500	237 504 800.	5 000.00	2 000.00	31 682.500
4-B	220 800.000	37 212.500	231 744 800.	7 000.00	3 000.00	27 212.500
5-B	248 400.000	35 762.500	225 984 800.	15 000.00	4 000.00	16 762.500
6-B	276 000.000	42 662.500	265 452 800.	15 000.00	4 000.00	23 662.500
Situación actual	300 000.0	34 614.00	176 000 000.0	19 170.00	9 095.0	6 349.00



Se tienen 37 estudios de mercado terminados, con los que se cubre más del 90% de la producción agrícola nacional en valor. Esta información se mantiene constantemente actualizada, y constituye el marco general en que se desenvuelven los modelos de programación lineal, complementados con estudios locales.

producir a los agricultores una utilidad ligeramente superior a 330 millones de pesos.

Con un 10% de reducción en el volumen extraído, el plan óptimo de cultivos sería el 5A, que con una extracción de menos de 250 millones de  $m^3$ , produciría una utilidad de 300 millones de pesos.

Continuando en la misma forma, se llegaría hasta el plan 1A, en el que la extracción se reduce hasta la mitad de la concesión, 140 millones de  $m^3$  y se logra una utilidad de 180 millones de pesos.

Obsérvese la diferencia en utilidad entre los puntos correspondientes, esto es entre 5A y 5B, entre 4A y AB y así sucesivamente. Tales diferencias constituyen lo que se deja de ganar por continuar con los cultivos de algodón y trigo. Esto representa el costo de tal decisión, en millones de pesos.

Obsérvese, finalmente, cómo el plan de cultivos actual constituye un grave desperdicio de agua. Si se le compara con el plan de cultivos 6A, este último, con un consumo de agua menor, produciría una utilidad prácticamente del doble.

La programación lineal constituye una herramienta para orientar las decisiones del comité directivo y de los propios usuarios, ya que les permite analizar cuáles serían los resultados de las decisiones que tomen y dado que ya hemos armado el modelo para este distrito, el análisis de distintas alternativas resulta muy sencillo.

Bastará con que por vía telefónica se comunique a la Dirección de Análisis de Datos Básicos las modificaciones que se desean analizar para que antes de 48 horas se disponga de resultados en el distrito.

La principal conclusión de esta primera aplicación de la programación lineal, consiste en que queda demostrado que es perfectamente factible reducir los volúmenes de extracción, sin lesionar las utilidades de los agricultores.

Queda en las manos del comité directivo y de los usuarios del distrito, que se apliquen las medidas necesarias para la conservación de su patrimonio.

## Síntese

### "PROGRAMAÇÃO LINEAR PARA A FORMULAÇÃO DE PLANOS DE CULTIVO NOS DISTRITOS DE IRRIGAÇÃO DO PAÍS"

Os Distritos de Irrigação operados pela S.R.H. desempenham um papel muito importante na produção agrícola nacional, de onde provém quase a metade do seu produto.

Tomando por base uma série de estudos de mercado de produtos agrícolas, este artigo, com a ajuda de um computador, permitirá a elaboração de planos de cultivo que nos levem a obter os maiores lucros possíveis, dentro das possibilidades de recursos de cada Distrito.

Cada modelo se divide em duas partes:

A primeira, nos permite calcular, para qualquer plano de cultivo, quatro indicadores básicos (lucro total dos

agricultores, valor total da produção, superfície total cultivada e volume de água utilizado). Através desses indicadores poderemos comparar a eficácia de cada plano.

A segunda, que seleciona entre todas as combinações possíveis de planos, a que proporcionará maior lucro aos agricultores.

A faculdade de coordenação que o Artigo 68 da Nova Lei Federal de Águas outorga aos Comitês Diretivos de cada Distrito de Irrigação, os convertem no complemento perfeito para a utilização prática dos modelos. Os resultados obtidos são espetaculares.

## Synthèse

### PROGRAMMATION LINEAIRE DE PRESENTATION DE PLANS DE CULTURE DANS LES DISTRICTS D'IRRIGATION DU PAYS

Les Districts d'Irrigation dépendants du Ministère des Ressources Hydrauliques (S.R.H.) ont atteint une grande importance dans la production agricole nationale, dont la moitié, en valeur, dépend d'eux.

Sur la base d'une série d'études de marché pour produits agricoles, le système décrit dans cet article permet, avec l'aide de l'ordinateur, la définition de plans de culture qui donnent la possibilité d'obtenir le maximum de bénéfices possibles en rapport avec la disponibilité des ressources de chaque District d'Irrigation.

Chaque modèle comprend deux parties: la première permet de calculer, pour n'importe quel plan de culture, quatre indicateurs de base: bénéfice total des agricul-

teurs; valeur totale de la production; superficie totale cultivée, et volume de l'eau utilisée. A travers ces indicateurs, on peut comparer les plans de culture entre eux et une seconde partie du modèle qui sélectionne, entre toutes les combinaisons possibles de plans de culture, celle qui donne le maximum de bénéfice obtenu par les agriculteurs.

Les facultés de coordination que l'Article 68 de la Nouvelle Loi Fédérale des Eaux concède aux Comitês Directeurs de chaque District d'Irrigation convertissent ces derniers en un complément parfait pour la mise en pratique de ces modèles. Les résultats obtenus sont spectaculaires.

## Summary

### LINEAR PROGRAMMING FOR THE FORMULATION OF CULTIVATION PLANS IN THE COUNTRY'S IRRIGATION DISTRICTS

The irrigation districts controlled by the S.R.H. (Department of Hydraulic Resources) have acquired great importance in national agricultural production. Almost half of this production according to worth presently takes place in them.

Based on a series of studies of the market for agricultural products, the system described in this article allows, with the help of the computer, the defining of cultivation plans which allow the earning of the greatest possible profits considering the availability of resources in each irrigation district.

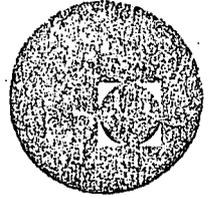
Each model consists of two parts: The first makes it

possible to estimate four basic indicators for any crop plan: total profits for the farmers, total production worth, total surface cultivated, and volume of water utilized. With these indicators the benefits of the cultivation plans can be compared with one another and with a second part of the model, which selects among all the possible combinations of cultivation plans the one which maximizes the profit obtained by the farmers.

The coordination faculties which Article 68 of the New Federal Water Law grants the administrative committees of the irrigation districts makes them the perfect complement for the practical utilization of these models. The results obtained are spectacular.



centro de educación continua  
división de estudios superiores  
facultad de ingeniería, unam

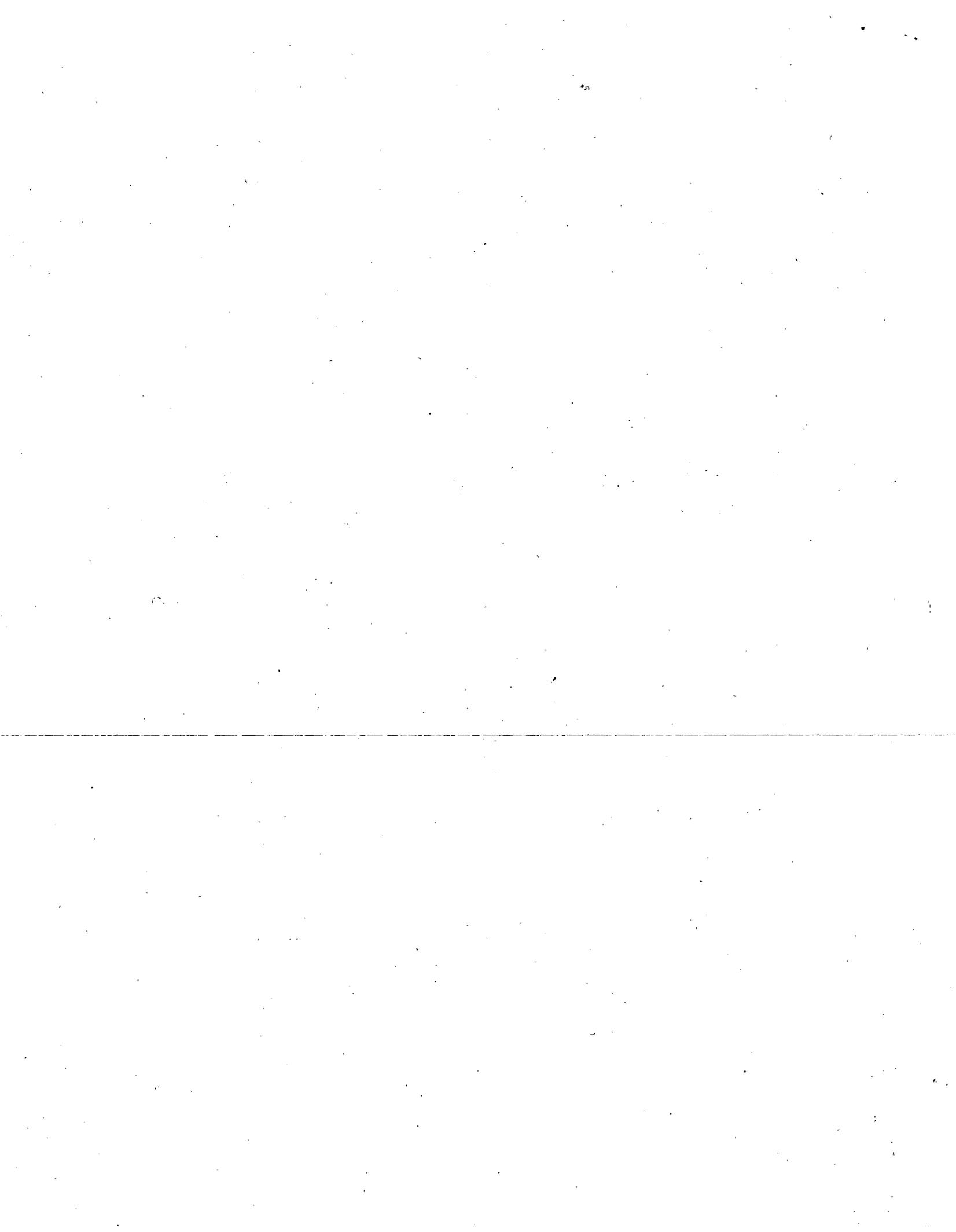


APROVECHAMIENTOS HIDRAULICOS

METODOS Y TECNICAS DE ANALISIS

ING. FRANCISCO TELLEZ G.

OCTUBRE, 1978



### 3. METODOS Y TECNICAS DE ANALISIS

#### 3.1 Simulación

La técnica de simulación ha sido una herramienta importante para el diseñador, ya sea simulando el vuelo de un -- aeroplano en un túnel de viento, o simulando una disposición -- de equipo con modelos a escala de maquinaria. Con la ayuda de las computadoras digitales se han podido simular experimentos en forma rápida, por lo que esta técnica ha cobrado un incremen-- to importante para el investigador de operaciones. Estas no-- tas tratan de presentar el modelo matemático que permite simu-- lar los principales datos hidrológicos y climatológicos que se presentan en los Aprovechamientos Hidráulicos.

##### 3.1.1 Series cronológicas

Una serie de datos que están ligados con el tiempo y que tienen la peculiaridad de ser aleatorios definen lo que se llama una serie cronológica. Por lo tanto, los datos hidroló-- gicos y climatológicos constituyen una serie cronológica.

La teoría de las series cronológicas permite hacer -- predicciones futuras a corto y a largo plazo de estos datos y consiste en lo siguiente: determinar a partir de los datos -- existentes las funciones determinísticas del tiempo y la parte aleatoria que los componen.

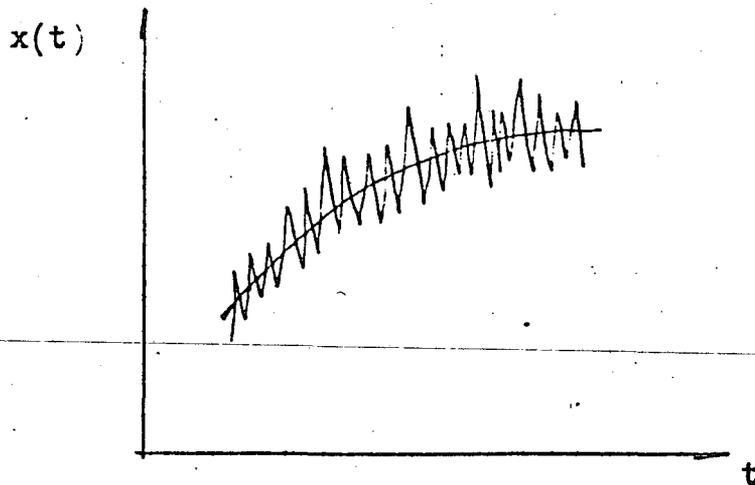
Las funciones determinísticas del tiempo son: la me-- dia y la tendencia, las componentes cíclicas y la autoagresivi-- dad. A la parte aleatoria de los datos se le acostumbra lla-- mar "ruido" y las predicciones futuras podrán realizarse cuando

se logre establecer un modelo matemático que permita generar el ruido.

A continuación se presenta la forma de obtener las funciones determinísticas del tiempo y el ruido de la serie cronológica  $x(t)$ .

#### Media y tendencia

En la serie representada en la figura se aprecia que existe un valor medio. Además, este valor puede crecer (como se observa en la figura) o decrecer con el tiempo. A esta característica se le denomina tendencia de la serie.



Para obtener la media y la tendencia de la serie aceptamos que ésta está definida por la siguiente ecuación:

$$x(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots + \frac{y(t)}{\text{error}}$$

Aplicando la técnica de los mínimos cuadrados se pueden obtener los valores de las constantes  $a_1$

$$\begin{bmatrix} N & \sum t & \sum t^2 & \dots \\ \sum t & \sum t^2 & \sum t^3 & \dots \\ \sum t^2 & \sum t^3 & \sum t^4 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum x \\ \sum xt \\ \sum xt^2 \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix}$$

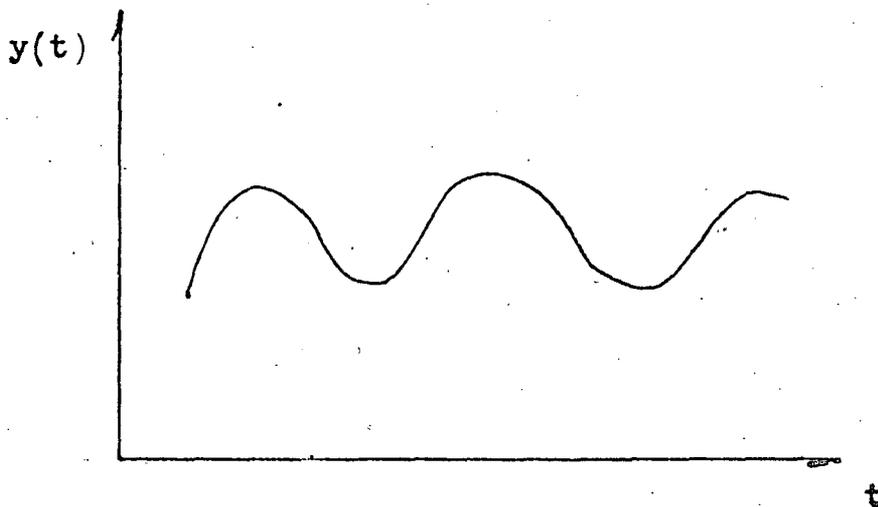
si resulta que  $a_0 \gg a_1$  y  $a_0 \gg a_2$  entonces  $a_0 = \frac{\sum x}{N}$  y se puede concluir que la serie tiene tan solo media (la media permanece constante en el tiempo). En hidrología es común que no exista tendencia.

Quitamos de la serie original la media y la tendencia

$$y(t) = x(t) - \underbrace{(a_0)}_{\text{media}} + \underbrace{(a_1 t + a_2 t^2 + \dots)}_{\text{tendencia}}$$

a ésto se le llama "remoción de la media y la tendencia de la serie original".

Si al remover la media y la tendencia queda la serie como se indica en la figura



no hay duda que existe componente cíclica

Componentes cíclicas

Aceptemos que la nueva serie está dada por la ec

$$y(t) = \underbrace{b_1^c}_{B_1} \underbrace{\text{sen} \theta_1 t}_{X_1(t)} + \underbrace{b_1^s}_{B_2} \underbrace{\text{cos} \theta_1 t}_{X_2(t)} + \underbrace{b_2^c}_{B_3} \underbrace{\text{sen} \theta_2 t}_{X_3(t)} +$$

$$+ \underbrace{b_2^s}_{B_4} \underbrace{\text{cos} \theta_2 t}_{X_4(t)} + \underbrace{z(t)}_{\text{error}}$$

Aplicando las técnicas de mínimos cuadrados se pueden obtener los coeficientes  $B_i$  que representan las amplitudes de las componentes cíclicas

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & C_{24} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & C_{34} \\ C_{14} & C_{24} & C_{34} & C_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \\ B_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{y1} \\ C_{y2} \\ C_{y3} \\ C_{y4} \end{bmatrix}$$

donde

$$C_{11} = \sum_{i=1}^N X_1(t_i) X_1(t_i) = \sum_{i=1}^N \text{sen}(\theta_1 t_i) \text{sen}(\theta_1 t_i)$$

$$C_{22} = \sum_{i=1}^N \text{cos}(\theta_1 t_i) \text{cos}(\theta_1 t_i)$$

$$C_{12} = \sum_{i=1}^N \text{sen}(\theta_1 t_i) \text{cos}(\theta_1 t_i)$$

$$C_{y1} = \sum_{i=1}^N y(t_i) \text{sen}(\theta_1 t_i)$$

$$C_{y2} = \sum_{i=1}^N y(t_i) \text{cos}(\theta_1 t_i)$$

Para obtener el defasamiento aceptemos que

$$y(t) = a_1 \text{sen}(\theta_1 t + k_1) + a_2 \text{sen}(\theta_2 t + k_2) + z(t) =$$

$$= a_1 \left[ \text{sen}(\theta_1 t) \text{cos} k_1 + \text{cos}(\theta_1 t) \text{sen} k_1 \right] + a_2 \left[ \text{sen}(\theta_2 t) \text{cos} k_2 + \right.$$

$$\left. + \text{cos}(\theta_2 t) \text{sen} k_2 \right] + z(t)$$

Al comparar esta expresión con la antes considerada para  $y(t)$  se tiene que

$$y(t) = \underbrace{a_1 \cos k_1}_{b_1^c} \text{sen}(\theta_1 t) + \underbrace{a_1 \text{sen } k_1}_{b_1^s} \text{cos}(\theta_1 t) + \dots$$

$B_1$   $B_2$

hagamos

$$(B_1)^2 + (B_2)^2 = a_1^2(\cos^2 k_1 + \text{sen}^2 k_1) = a_1^2$$

de donde

$$a_1 = \sqrt{(B_1)^2 + (B_2)^2}$$

que es la amplitud de la primer componente cíclica. En forma semejante la amplitud de la segunda componente cíclica es

$$a_2 = \sqrt{(B_3)^2 + (B_4)^2}$$

Ahora, realicemos la siguiente operación

$$\frac{B_2}{B_1} = \frac{a_1 \text{sen } k_1}{a_1 \text{cos } k_1} = \tan k_1$$

de donde

$$k_1 = \text{ang tan } \frac{B_2}{B_1}$$

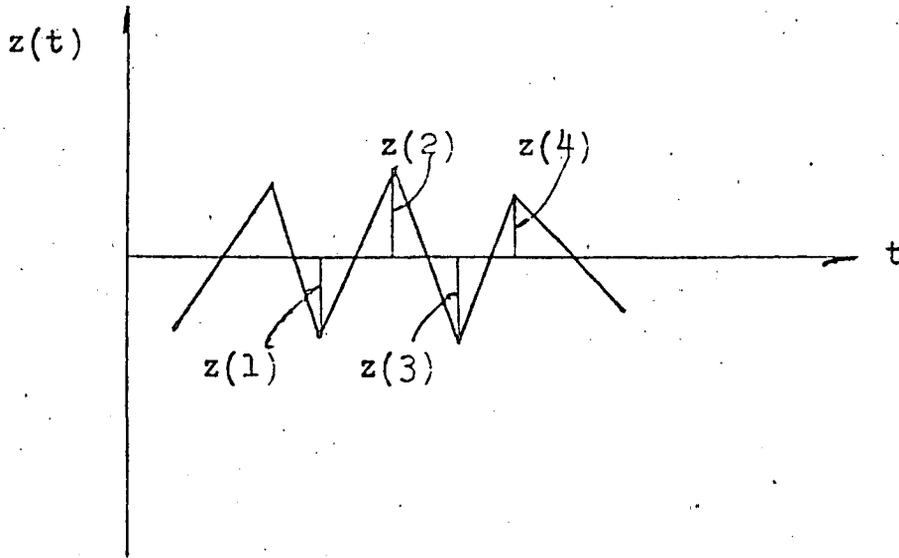
que es el defasamiento de la primer componente cíclica. Análogamente el defasamiento de la segunda componente cíclica es

$$k_2 = \text{ang tan } \frac{B_4}{B_3}$$

Componente autoagresiva

Si se remueven las componentes cíclicas de la serie  $y(t)$  se obtiene la nueva serie  $z(t)$

La nueva interrogante es ¿ $z(4)$  depende de  $z(3)$ ,  $z(2)$ , etc? A esta característica se le denomina componente autorregresiva de la serie. Para obtenerla aceptemos que



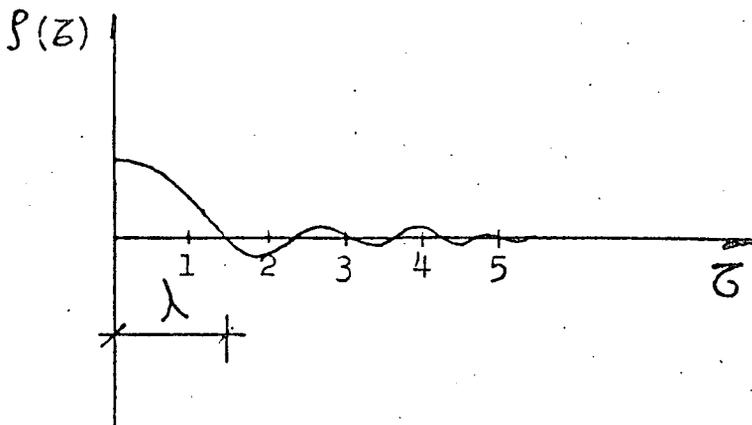
$$z(t) = a_1 z(t-1) + a_2 z(t-2) + a_3 z(t-3) + \dots + \frac{\text{error}}{\epsilon}$$

aplicando las técnicas de mínimos cuadrados se pueden obtener los valores de las constantes  $a_i$

$$\begin{bmatrix} C_z(0) & C_z(1) & C_z(2) \dots \\ C_z(1) & C_z(0) & C_z(1) \dots \\ C_z(2) & C_z(1) & C_z(0) \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \dots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_z(1) \\ C_z(2) \\ C_z(3) \\ \dots \end{bmatrix}$$

donde  $C_z(\tau)$  es la covariancia de  $z$  de orden  $\tau$ .

Si formamos el correlograma de la serie  $z(t)$  se tendría



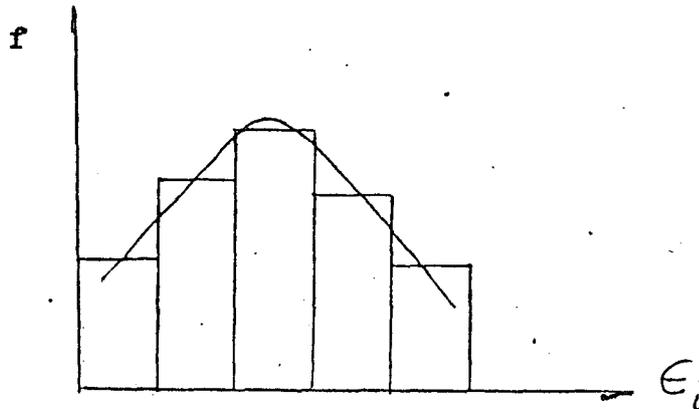
Donde el correlograma corta por primera vez al eje  $\bar{\zeta}$  define el valor del primer alcance,  $\lambda$ . Este parámetro nos indica la autorregresividad de la serie. En la figura  $1 < \lambda < 2$  lo que indica que tan solo existe autorregresividad con el valor anterior. En hidrología es común que no exista autorregresividad en mas de la primera etapa.

El modelo quedaría así:

$$X(t) = \bar{X} + \sum_{j=1}^N b_j \text{sen}(\theta_j t + k_j) + \sum_{k=1}^M a_k z(t-k) + \underbrace{\epsilon}_{\text{ruido}}$$

#### Análisis del ruido

El modelo matemático que permite generar el ruido se apoya en los modelos que proporciona la teoría de probabilidades. Por lo tanto, con los valores  $\epsilon_i$  del ruido se construye un histograma



Este histograma nos da la clave para asociarlo con alguna de las distribuciones de probabilidades conocidas. Por ejemplo, el histograma de la figura tiene tipo de normal, le aplicamos la prueba  $\chi^2$  y comprobamos la hipótesis. Si resulta cierto nuestro modelo quedará así:

$$X(t) = \bar{X} + \sum_{j=1}^N b_j \text{sen}(\theta_j t + k_j) + \sum_{k=1}^M a_k z(t-k) + \epsilon(\text{NOR}, \epsilon, s^2)$$

Una vez que se tiene el modelo se pueden hacer predicciones o simulaciones. Si al realizar predicciones resultan ruidos negativos muy grandes tales que  $X(t)$  sea negativo, aunque comprobemos que el ruido tenía distribución normal, tendremos que cambiar a una distribución lognormal.

Si se tubiera mas de una serie

$$X(t) = \bar{X} + \sum_{j=1}^N b_j \text{sen}(\theta_j t + k_j) + \sum_{k=1}^M a_k z(t-k) + \epsilon(\text{NOR}, \epsilon_x, \bar{s}_x^2)$$

$$y(t) = \bar{y} + \sum_{r=1}^R c_r \text{sen}(\theta_r t + k_r) + \sum_{q=1}^Q d_q z(t-q) + \epsilon(\text{NOR}, \epsilon_y, \bar{s}_y^2)$$

Los ruidos pueden estar correlacionados y no se puede proceder como antes para elaborar los dos modelos. Se necesita aplicar la teoría de las componentes principales a los dos ruidos resultantes de las dos series.

## EJEMPLO DE APLICACION

Los ingresos anuales a una presa están dados por la serie siguiente. Considerándolos como una serie cronológica, formule el modelo de la misma.

t	x(t)	y(t)	y(t)sen30°t	y(t)cos30°t	sen <sup>2</sup> 30°t	cos <sup>2</sup> 30°t	z(t)
1	0.31	0.73	0.37	0.63	0.25	0.75	0.625
2	0.48	0.13	0.81	0.47	0.75	0.25	1.185
3	-2.57	-2.09	-2.09	0	1.0	0.0	-1.543
4	-0.39	0.12	0.10	-0.06	0.75	0.25	0.812
5	-2.83	-2.29	-1.15	1.98	0.25	0.75	-1.638
6	0.36	0.93	0	-0.93	0.0	1.0	1.367
7	-1.04	-0.44	0.22	0.38	0.25	0.75	-0.335
8	0.09	0.72	-0.62	-0.45	0.75	0.25	0.465
9	0.08	0.74	-0.74	0	1.0	0.0	0.193
10	-0.38	0.31	-0.27	0.15	0.75	0.25	-0.382
11	-0.90	-0.18	0.09	-0.16	0.25	0.75	-0.832
12	-0.44	0.31	0	0.31	0	1.0	-0.127
			<u>-3.28</u>	<u>2.64</u>	<u>6</u>	<u>6</u>	<u>-0.21</u>

## MEDIA Y TENDENCIA

Aceptando que

$$x(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots + y(t)$$

y aplicando la técnica de mínimos cuadrados nos queda

$$\begin{bmatrix} 12 & 78 & 144 & 6084 \\ 78 & 144 & 6084 & 60710 \\ 144 & 6084 & 60710 & 630708 \\ 6084 & 60710 & 630708 & 8.12 \times 10^8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7.23 \\ -44.81 \\ -333.91 \\ -2956.73 \end{bmatrix}$$

Resolviendo este sistema de ecuaciones se encuentra que

$$\begin{aligned} a_0 &= -0.39 \\ a_1 &= -0.03 \\ a_2 &= 0 \\ a_3 &= 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$x(t) = -0.39 - 0.03t + y(t)$$

Removiendo la media y la tendencia de la serie original nos queda la nueva serie y(t)

$$y(t) = x(t) - (-0.39 - 0.03t) = x(t) + 0.39 + 0.03t$$

### COMPONENTE CICLICA

Aceptando que

$$\begin{aligned} y(t) &= B_1 \sin \vartheta t + B_2 \cos \vartheta t + z(t) \\ &= a_1 \sin(\vartheta t + k_1) + z(t) \end{aligned}$$

Por tratarse de los ingresos mensuales a una presa, la frecuencia puede seleccionarse como

$$\vartheta = \frac{360^\circ}{12} = 30^\circ$$

Aplicando la técnica de mínimos cuadrados se tiene

$$\begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -3.28 \\ 2.64 \end{Bmatrix}$$

de donde

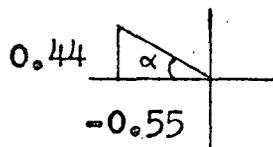
$$\begin{aligned} B_1 &= -0.55 \\ B_2 &= 0.44 \end{aligned}$$

La amplitud de la componente cíclica es

$$a_1 = \sqrt{(-0.55)^2 + (0.44)^2} = 0.70$$

y el defasamiento

$$k_1 = \text{ang tan } \frac{0.44}{0.55}$$



$$\alpha = -38.66^\circ$$

$$k_1 = 180^\circ - 38.66^\circ = 141.34^\circ$$

Por lo tanto

$$y(t) = 0.70 \sin(30^\circ t + 141.34^\circ) + z(t)$$

Removiendo la componente cíclica se tiene la nueva serie  $z(t)$

$$z(t) = y(t) - 0.70 \sin(30^\circ t + 141.34^\circ)$$

### COMPONENTE AUTOAGRESIVA

Para obtener el primer alcance es necesario que la serie  $z(t)$  tenga media cero. Por lo tanto, a la serie  $z(t)$  hay que restarle el valor promedio - que vale

$$\bar{z} = - \frac{0.21}{12} = -0.018$$

$z(t) - \bar{z}$	$\zeta = 1$
0.643	1.203
1.203	-1.525
-1.525	0.830
0.830	-1.620
-1.620	1.385
1.385	-0.317
-0.317	0.483
0.483	0.211
0.211	-0.364
-0.364	-0.814
-0.814	-0.109
-0.109	-

Los valores de la covariancia de  $z$  de orden 0 y 1 son

$$c_z(0) = \frac{1}{12} (10.603)$$

$$c_z(1) = \frac{1}{12} (-6.097)$$

Por lo que el coeficiente de correlación de orden 1 vale

$$\rho(1) = -\frac{6.097}{10.603} = -0.575$$

Puesto que  $\rho(1) < 0$  se puede afirmar que  $\lambda < 1$  y que no existe correlación entre los  $z(t)$ . Por consiguiente  $z(t)$  es ruido puro.

El modelo matemático de la serie nos queda finalmente como

$$x(t) = -0.039 - 0.03t + 0.70 \sin(30t + 141.34^\circ) + \epsilon$$

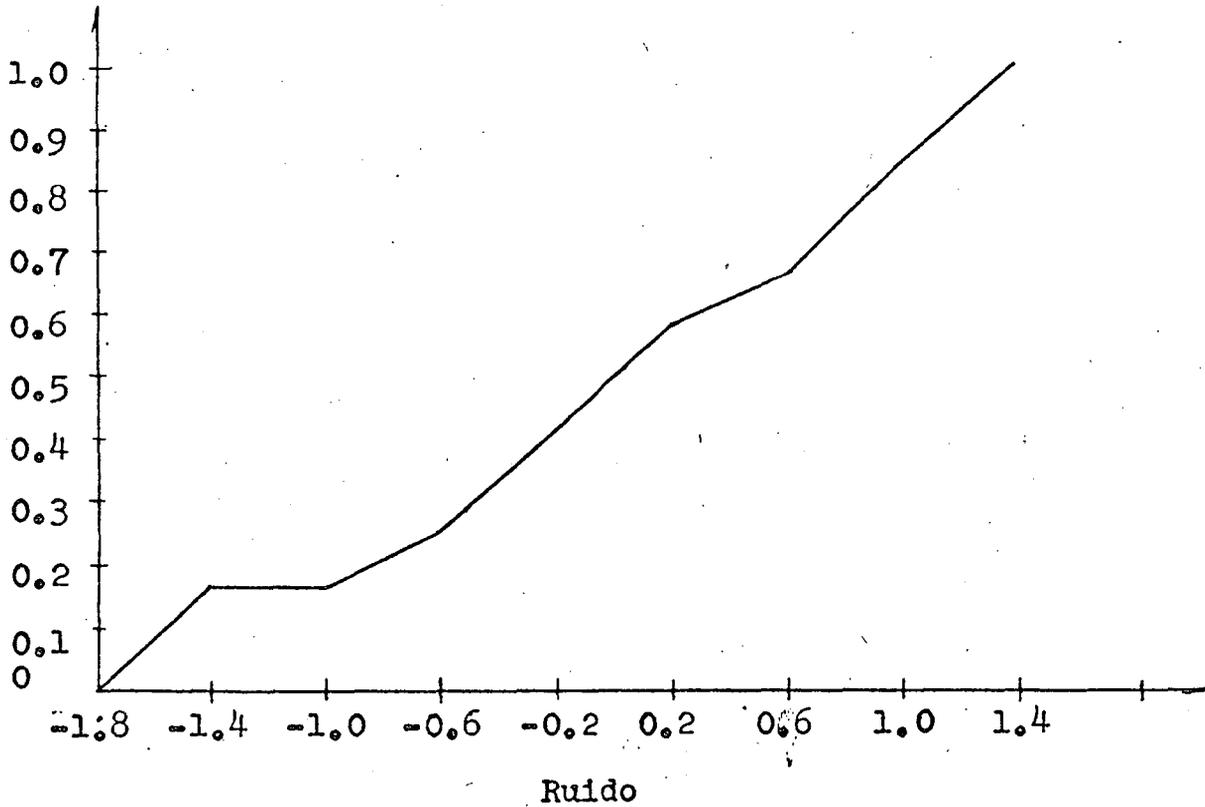
Para simular nuevos valores de la serie es necesario generar el ruido.

### ANALISIS DEL RUIDO

Para analizar el ruido dividamos los valores extremos de este en intervalos y obtengamos su frecuencia y su frecuencia acumulada.

Intervalos	Frecuencia	Frecuencia Acumulada
-1.80 a -1.40	$\frac{2}{12} = 0.167$	0.167
-1.40 a -1.00	0	0.167
-1.00 a -0.60	0.083	0.250
-0.60 a -0.20	0.167	0.417
-0.20 a 0.20	0.167	0.584
0.20 a 0.60	0.083	0.667
0.60 a 1.00	0.167	0.834
1.00 a 1.40	0.167	1.001

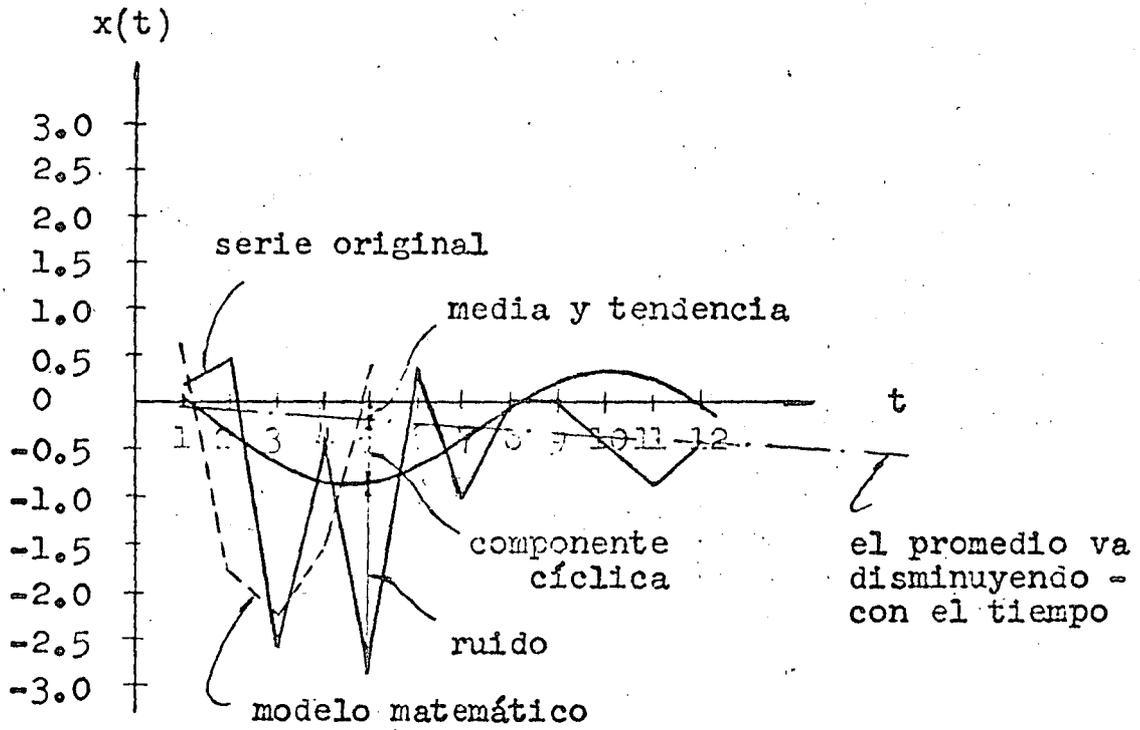
Con esta información es posible graficar la distribución de frecuencias -  
relativas acumuladas del ruido. En base a esta gráfica y una tabla de -  
Frecuencia acumulada



números aleatorios es posible generar el ruido. La forma de hacerlo con  
siste en tomar un número aleatorio (NA) y localizarlo sobre el eje de fre-  
cuencias acumuladas. Refiriéndolo a la curva de frecuencias acumuladas  
y posteriormente al eje del ruido, se obtendrá un ruido que tiene la mis-  
ma distribución de frecuencias que el ruido de la serie original.

t	$-0.039 - 0.03t + 0.70 \text{ sen } (30^\circ t + 141.34^\circ)$	NA	€	X(t)
1	0.036	0.65	0.6	0.636
2	-0.354	0.16	-1.4	-1.754
3	-0.676	0.09	-1.58	-2.256
4	-0.851	0.22	-0.72	-1.571
5	-0.841	0.91	1.22	0.379

En la figura siguiente se grafica la serie original y superpuesta a ella  
los cinco valores simulados con el modelo matemático propuesto.





### 3.1.2. COMPONENTES PRINCIPALES.

#### 1. INTRODUCCION

En este artículo se describen los estudios que el Instituto de Ingeniería ha realizado, por encargo de la Secretaría de Recursos Hidráulicos, para disponer de un modelo matemático que, simulando las más variadas condiciones de funcionamiento de un sistema hidrológico, permita tomar decisiones sobre las obras que han de realizarse, para lograr un mejor aprovechamiento del agua.

Basado en las ideas expuestas por Kendall <sup>(1)</sup> y siguiendo los criterios de Hufschmidt y Fiering <sup>(2,3)</sup> este escrito tiene como meta aclarar y difundir las ideas de estos investigadores, adaptándolas a nuestro medio, con la esperanza de interesar a los ingenieros mexicanos que se dedican a este tipo de actividades.

#### 2. PLANTEAMIENTO

Supóngase, con relación a la figura 1, que en la cuenca B se dispone de una presa en b y se desea tomar la decisión de construir una presa c, o bien una a, o modificar la presa b, o más aún, hacer alguna combinación de todas estas obras para lograr la mejor y más

económica forma de utilizar el agua.

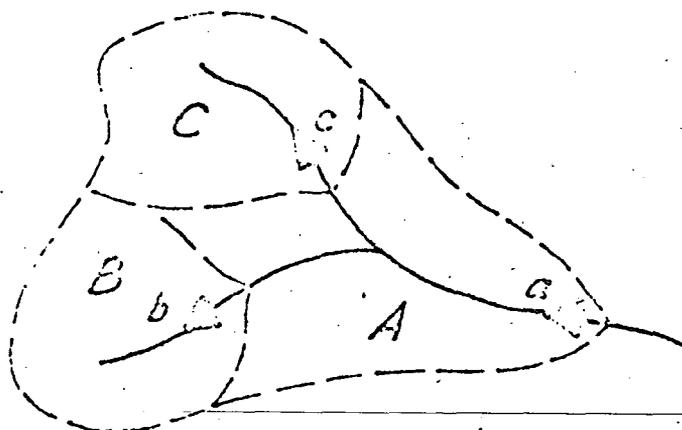


Fig. 1

El procedimiento tradicional consistiría en suponer que se realizan determinados tipos de obra en los sitios a, b y c, para después analizar el funcionamiento de ellas durante los n años de registro simultáneo disponible en los tres sitios. Este enfoque, con ser el mejor de los clásicos, indicaría exclusivamente qué habría pasado en el sistema si hubieran existido las obras propuestas. Después deberían modificarse las características de las obras proyectadas para, nuevamente, efectuar el análisis del funcionamiento conjunto con los mismos datos disponibles, y así sucesivamente hasta encontrar la mejor combinación para lo que habría sucedido si las obras construidas con ese plan hubieran funcionado en ese periodo.

El nuevo enfoque propuesto permite, en cambio, hacer cada uno de los análisis con una gran variedad de posibles condiciones de funcionamiento, que puedan ocurrir en el futuro. Condiciones estadísticamente equivalentes a las del periodo de n años de observación, es decir, según el nuevo enfoque, los datos son una sola de las muchas posibles muestras que se pueden seleccionar para analizar una cualquiera de las combinaciones en proyecto, de tal manera que con el nuevo método la decisión se toma una vez que se conoce un buen número de posibles condiciones de funcionamiento y no las de una sola muestra aislada.

Conviene hacer notar que esta ampliación no requiere de mayor número de datos que los del procedimiento clásico sino que, simplemente, requiere manejarlos de otra manera.

Aparentemente, el volumen de datos por manejar hace inabordable el procedimiento; sin embargo, con las nuevas computadoras este problema ya no existe y si alguna dificultad hubiera, ésta sería la de comprender el fundamento matemático del nuevo enfoque. Este artículo pretende ayudar a esta comprensión.

### 3. MANEJO DE DATOS

Llámense  $x_1(t)$  los gastos medios registrados en a,  $x_2(t)$  en b y  $x_3(t)$  en c, durante el periodo de observación; estos gastos podrían ser, por ejemplo, los medios mensuales.

Si el problema fuera tratar exclusivamente con un solo registro,  $x_2(t)$  por ejemplo, éste se podría analizar como una serie cronológica y estudiar si tiene una cierta tendencia, componentes cíclicas, si es un proceso autorregresivo, etc., en los términos que se describirán en un segundo artículo, para después hacer las posibles simulaciones de condiciones igualmente factibles a la muestra estudiada. Sin embargo, si deben tratarse los tres \* registros simultáneamente, no es posible hacer las simulaciones en forma independiente, toda vez que por la proximidad de las cuencas, los escurrimientos no serán, en general, estadísticamente independientes, de tal suerte que los unos se verán afectados por los otros. Esto implica hacer un análisis llamado de componentes principales, con el que se determinan tres nuevas series cronológicas,  $\xi_j(t)$ , independientes entre sí y que se pueden tratar por separado, de tal forma que permiten simular a las  $x_j(t)$  originales tomando en cuenta sus interrelaciones.

### 4. ANALISIS DE COMPONENTES PRINCIPALES

Es conveniente trabajar con variables estandarizadas, esto es, si se designa con  $m_j$  a la media de  $x_j(t)$  y con  $S_j$  a su desviación estándar, se puede hacer la transformación

---

\* Se habla de solo tres registros por simplicidad; pero obviamente, estas ideas se pueden generalizar a un mayor número de registros.

$x_i = \frac{x_i - m_i}{S_i}$  con lo cual se dispone de una población  $x_i(t)$  con media cero y variancia uno.

Supóngase ahora que existen tres variables  $\xi_i(i)$  tales que

$$S(I) \begin{cases} \xi_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 & (I) \\ \xi_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 & (II) \\ \xi_3 = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 & (III) \end{cases}$$

o en notación matricial

$$\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

o en notación matricial sintética

$$\xi = Ax$$

La variancia de  $\xi_1$ , según S(I)(I) será

$$V_1 = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \xi_1^2(t) = \frac{1}{n} \left( \sum_{i=1}^3 a_{1i}^2 x_i^2 + \sum_{i \neq j} a_{1i} a_{1j} x_i x_j \right) \quad (2)$$

que, llamando  $c_{ij} = \frac{1}{n} \sum x_i x_j$ , puede escribirse

$$V_1 = a_{11}^2 c_{11} + a_{12}^2 c_{22} + a_{13}^2 c_{33} + 2a_{11} a_{12} c_{12} + 2a_{11} a_{13} c_{13} + 2a_{12} a_{13} c_{23} \quad (2')$$

Si se impone la limitación

$$\phi = 1 - (a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{13}^2) = 0 \quad (3)$$

siendo  $\lambda$  un operador indeterminado de Lagrange, véase Sokolnikoff <sup>(4)</sup>, se puede decir que se

requiere maximizar  $V_1$ , definida por 2' con la limitación 3, se requiere que

$$\frac{\partial V_1}{\partial a_{1i}} + \lambda \frac{\partial \phi}{\partial a_{1i}} = 0 \quad (4)$$

en donde  $a_{ji}$  representa a  $a_{11}$ ,  $a_{12}$  ó  $a_{13}$ . Así,  $\lambda$  implica el sistema

$$S(2) \begin{cases} a_{11}c_{11} + a_{12}c_{12} + a_{13}c_{13} = \lambda a_{11} & (I) \\ a_{11}c_{12} + a_{12}c_{22} + a_{13}c_{23} = \lambda a_{12} & (II) \\ a_{11}c_{13} + a_{12}c_{23} + a_{13}c_{33} = \lambda a_{13} & (III) \end{cases}$$

Es obvio que dando a las variancias de  $\xi_2$  y  $\xi_3$  idéntico tratamiento se puede llegar a uno cualquiera de los tres sistemas

$$S(3) \begin{pmatrix} c_{11} - \lambda & c_{12} & c_{13} \\ c_{12} & c_{22} - \lambda & c_{23} \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} - \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{j1} \\ a_{j2} \\ a_{j3} \end{pmatrix} = 0$$

en donde  $a_{ji}$  representa a  $a_{1i}$ ,  $a_{2i}$  ó  $a_{3i}$

Para que cualquiera de los sistemas S(3) tenga solución distinta de la trivial, el determinante de las C debe anularse; esto implica una ecuación de tercer grado en  $\lambda$ , de la forma

$$-\lambda^3 + (c_{11} + c_{22} + c_{33})\lambda^2 + f(c, d) = 0 \quad (5)$$

Si las raíces de 5 son  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  y  $\lambda_3$ , del teorema fundamental del álgebra deberá tenerse

$$-\lambda^3 + (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)\lambda^2 + f(\lambda, \lambda) = 0 \quad (6)$$

de donde se concluye, comparando 5 y 6 que

$$c_{11} + c_{22} + c_{33} = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 3 \quad R(1)$$

pues debe recordarse que por ser estandarizadas las  $X_i$ ,  $C_{ii} = 1$

Supóngase ahora que  $\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3$  y que se asocia  $\lambda_1$  al sistema  $S(1)$  que permite determinar  $a_{1i}$ ,  $\lambda_2$  al que permita determinar  $a_{2i}$  y  $\lambda_3$  al que determina  $a_{3i}$ . En el primero de estos sistemas deberá tenerse

$$S(4) \begin{cases} (c_{11} - \lambda_1) a_{11} + c_{12} a_{12} + c_{13} a_{13} = 0 & (I) \\ c_{12} a_{11} + (c_{22} - \lambda_1) a_{12} + c_{23} a_{13} = 0 & (II) \\ c_{13} a_{11} + c_{23} a_{12} + (c_{33} - \lambda_1) a_{13} = 0 & (III) \end{cases}$$

Para evaluar  $a_{11}$  y  $a_{12}$ , por ejemplo, se puede elegir libremente  $a_{13}$ ,

así, de  $S(4)(I)$  y  $S(4)(II)$

$$a_{11} = a_{13} \left| \begin{array}{cc|cc} -c_{13} & c_{12} & (c_{11} - \lambda_1) & c_{12} \\ -c_{23}(c_{22} - \lambda_1) & & c_{12} & (c_{22} - \lambda_1) \end{array} \right|$$

$$= a_{13} \left| \begin{array}{cc|cc} -c_{13} & c_{12} & (c_{11} - \lambda_1) & c_{12} \\ -(c_{33} - \lambda_1)c_{23} & & c_{13} & c_{23} \end{array} \right| \quad (7)$$

$$y \quad a_{12} = a_{13} \left| \begin{array}{cc|cc} (c_{11} - \lambda_1) & -c_{13} & (c_{11} - \lambda_1) & c_{12} \\ c_{12} & -c_{23} & c_{12} & (c_{22} - \lambda_1) \end{array} \right| \quad (8)$$

La condición impuesta por la doble igualdad 7

$$\left| \begin{array}{cc|cc} -c_{13} & c_{12} & (c_{11} - \lambda_1) & c_{12} \\ -c_{23}(c_{22} - \lambda_1) & & c_{13} & c_{23} \end{array} \right| - \left| \begin{array}{cc|cc} (c_{11} - \lambda_1) & c_{12} & (c_{11} - \lambda_1) & c_{12} \\ c_{12}(c_{22} - \lambda_1) & & -c_{13} & c_{12} \\ & & -(c_{33} - \lambda_1)c_{23} & \end{array} \right| = 0$$

es precisamente la de nulidad del determinante de los sistemas S(3), como fácilmente puede comprobarlo el lector que tenga la paciencia necesaria. Así de 7 y 8 se concluye que de los tres elementos  $a_{11}$ ,  $a_{12}$  y  $a_{13}$  se pueda escoger uno arbitrariamente y quedar definidos los otros dos.

Supóngase que se escogió  $a_{13} = \alpha$ , y que de acuerdo con 7 y 8 resultan ser  $a_{11} = \beta$  y  $a_{12} = \gamma$ , con lo cual podría escribirse

$$\beta^2 + \gamma^2 + \alpha^2 = \delta^2 \quad (9)$$

en donde, siendo  $\delta$  un número distinto de cero, puede escribirse

$$\left(\frac{\beta}{\delta}\right)^2 + \left(\frac{\gamma}{\delta}\right)^2 + \left(\frac{\alpha}{\delta}\right)^2 = 1 \quad (10)$$

y seleccionar así para  $a_{13}$  el valor  $\frac{\alpha}{\delta}$ , en vez del original  $\alpha$ , para cumplir con la restricción 3; obviamente de 7 y 8,  $\frac{\beta}{\delta}$  y  $\frac{\gamma}{\delta}$  son soluciones para  $a_{11}$  y  $a_{12}$ .

Obsérvese que en cambio no se podría seleccionar más de uno de los valores  $a_{1j}$ ; en efecto, para que en S(4)(I) y S(4)(II) pudieran escogerse arbitrariamente  $a_{11}$  y  $a_{13}$ , teniendo en cuenta que

$$(c_{11} - \lambda_1) a_{11} = -[c_{12} a_{12} + c_{13} a_{13}] \quad (11)$$

$$y \quad c_{12} a_{11} = -[(c_{22} - \lambda_1) a_{12} + c_{23} a_{13}] \quad (12)$$

se requerirá que  $c_{11} - \lambda_1 = c_{12}$ ,  $c_{12} = c_{22} - \lambda_1$  y  $c_{13} = c_{23}$ , esto es, que dos de las ecuaciones de S(4) fueran iguales; esto implicaría que las tres ecuaciones de S(4) fueran iguales, pero sobre esto se insistirá después.

Por otra parte, si se designa con  $A'$  a la matriz traspuesta de  $A$  y con  $C$  a la de las  $C_{ij}$ , pueden formarse los productos

$$AC = \begin{pmatrix} a_{11}c_{11} + a_{12}c_{12} + a_{13}c_{13} & a_{11}c_{12} + a_{12}c_{22} + a_{13}c_{23} & a_{11}c_{13} + a_{12}c_{23} + a_{13}c_{33} \\ a_{21}c_{11} + a_{22}c_{12} + a_{23}c_{13} & a_{21}c_{12} + a_{22}c_{22} + a_{23}c_{23} & a_{21}c_{13} + a_{22}c_{23} + a_{23}c_{33} \\ a_{31}c_{11} + a_{32}c_{12} + a_{33}c_{13} & a_{31}c_{12} + a_{32}c_{22} + a_{33}c_{23} & a_{31}c_{13} + a_{32}c_{23} + a_{33}c_{33} \end{pmatrix} \quad (15)$$

y

$$CA' = \begin{pmatrix} a_{11}c_{11} + a_{12}c_{12} + a_{13}c_{13} & a_{21}c_{11} + a_{22}c_{12} + a_{23}c_{13} & a_{31}c_{11} + a_{32}c_{12} + a_{33}c_{13} \\ a_{11}c_{12} + a_{12}c_{22} + a_{13}c_{23} & a_{21}c_{12} + a_{22}c_{22} + a_{23}c_{23} & a_{31}c_{12} + a_{32}c_{22} + a_{33}c_{23} \\ a_{11}c_{13} + a_{12}c_{23} + a_{13}c_{33} & a_{21}c_{13} + a_{22}c_{23} + a_{23}c_{33} & a_{31}c_{13} + a_{32}c_{23} + a_{33}c_{33} \end{pmatrix} \quad (16)$$

Si ahora se escogen para  $a_{1i}$  los valores dados por 10, esto es, valores modificados de  $a_{11}$ ,  $a_{12}$  y  $a_{13}$ , deducidos de  $\lambda$  en el sistema S(4) y si además se forman los sistemas S(5) y S(6) análogos a aquél con los valores  $a_{21}$ ,  $a_{22}$  y  $a_{23}$ , deducidos a partir de  $\lambda_2$  y los valores  $a_{31}$ ,  $a_{32}$  y  $a_{33}$ , deducidos de  $\lambda_3$ , 13 y 14 resultarán ser

$$AC = \begin{pmatrix} \lambda_1 a_{11} & \lambda_1 a_{12} & \lambda_1 a_{13} \\ \lambda_2 a_{21} & \lambda_2 a_{22} & \lambda_2 a_{23} \\ \lambda_3 a_{31} & \lambda_3 a_{32} & \lambda_3 a_{33} \end{pmatrix} \quad (15)$$

y

$$CA' = \begin{pmatrix} \lambda_1 a_{11} & \lambda_2 a_{21} & \lambda_3 a_{31} \\ \lambda_1 a_{12} & \lambda_2 a_{22} & \lambda_3 a_{32} \\ \lambda_1 a_{13} & \lambda_2 a_{23} & \lambda_3 a_{33} \end{pmatrix} \quad (16)$$

para simplificar estas expresiones se puede definir la matriz diagonal  $\Lambda$  como

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \quad (17)$$

y demostrar que

$$\Lambda A = \begin{pmatrix} \lambda_1 a_{11} & \lambda_1 a_{12} & \lambda_1 a_{13} \\ \lambda_2 a_{21} & \lambda_2 a_{22} & \lambda_2 a_{23} \\ \lambda_3 a_{31} & \lambda_3 a_{32} & \lambda_3 a_{33} \end{pmatrix} \quad (18)$$

de 15 y 18 se concluye que

$$AC = \Lambda A \quad (19)$$

en forma análoga puede hacerse ver que

$$CA' = A'\Lambda \quad (20)$$

Si se postmultiplica 19 por  $A'$  y se premultiplica 20 por  $A$ , se tendrá

$$ACA' = \Lambda AA' \quad (21)$$

y

$$ACA' = AA'\Lambda \quad (22)$$

De 21 y 22 se concluye entonces que, si se designa por  $B = AA'$

se tendrá

$$AB = BA \quad (23)$$

como B es del mismo orden que A, deberá tenerse

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} \quad (24)$$

de 23 y 24 se concluye entonces que

$$AB = \begin{pmatrix} \lambda_1 b_{11} & \lambda_1 b_{12} & \lambda_1 b_{13} \\ \lambda_2 b_{21} & \lambda_2 b_{22} & \lambda_2 b_{23} \\ \lambda_3 b_{31} & \lambda_3 b_{32} & \lambda_3 b_{33} \end{pmatrix} \quad (25)$$

y

$$BA = \begin{pmatrix} \lambda_1 b_{11} & \lambda_2 b_{21} & \lambda_3 b_{31} \\ \lambda_1 b_{12} & \lambda_2 b_{22} & \lambda_3 b_{32} \\ \lambda_1 b_{13} & \lambda_2 b_{23} & \lambda_3 b_{33} \end{pmatrix} \quad (26)$$

para que se satisfaga 23, si  $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3$ , se requiere que  $b_{ij} = 0$ , si  $i \neq j$  y, por definición de B, esto exige que cualquier producto de la forma mostrada en 27 sea nulo, esto es:

$$(a_{11} \ a_{12} \ a_{13}) \begin{pmatrix} a_{21} \\ a_{22} \\ a_{23} \end{pmatrix} = 0 \quad (27)$$

La igualdad 27 indica que los vectores  $(a_{11}, a_{12}, a_{13})$ ,  $(a_{21}, a_{22}, a_{23})$  y  $(a_{31}, a_{32}, a_{33})$  son ortogonales si las raíces  $\lambda$  son distintas. Además, como la condición 3 impuesta exige que  $a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{13}^2 = 1$ ,  $a_{21}^2 + a_{22}^2 + a_{23}^2 = 1$  y  $a_{31}^2 + a_{32}^2 + a_{33}^2 = 1$  resultará que

$$AA' = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad R(2)$$

Cuando por lo menos dos de las raíces fueran iguales no sería posible concluir inmediatamente 27; sin embargo, regresando a las ecuaciones 11 y 12, se puede recordar que si las tres ecuaciones de alguno de los sistemas S(4), S(5) ó S(6) son iguales, se podrían seleccionar arbitrariamente dos de las tres componentes de los vectores  $a_{ij}$ ; cualquiera de estos sistemas sería de la forma

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda & a & a \\ a & 1-\lambda & a \\ a & a & 1-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{j1} \\ a_{j2} \\ a_{j3} \end{pmatrix} = 0 \quad S(7)^*$$

con  $1-\lambda=a$ , o bien

$$\lambda = 1-a \quad (28)$$

La existencia de una solución distinta de la trivial exige la nulidad del determinante del sistema S(7), lo que plantea la ecuación cúbica

$$-\lambda^3 + 3\lambda^2 + 3\lambda(a^2-1) - 3a^2 + 2a^3 + 1 = 0 \quad (29)$$

y puesto que, como fácilmente se comprueba

$$\begin{aligned} & (\lambda - [1-a])^2 (\lambda - [1+2a]) = \\ & = -\lambda^3 + 3\lambda^2 + 3\lambda(a^2-1) - 3a^2 + 2a^3 + 1 \end{aligned} \quad (30)$$

\* Recuerdese que  $C_{ij} = 1$

resulta, del teorema fundamental del álgebra, y de acuerdo con 29 y 30, que 29 tiene precisamente dos raíces iguales, resultado que hace ver que, en el caso de tener dos raíces iguales, es posible determinar dos de los vectores  $a_{ij}$  seleccionando arbitrariamente dos de sus componentes. Claro es que estos dos vectores corresponden a dos de los sistemas S(4), S(5) ó S(6) que intentarán resolverse para esas dos raíces iguales; por lo demás, el resultado 27 seguiría siendo válido para la raíz distinta.

Si, entonces, S(4) y S(5) son los sistemas que se van a resolver para

$\lambda_1 = \lambda_2 = 1 - a$ , ambos quedan reducidos simplemente a

$$aa_{11} + aa_{12} + aa_{13} = 0 \quad (31)$$

y

$$aa_{21} + aa_{22} + aa_{23} = 0 \quad (32)$$

De 31 y 32 puede obtenerse, si se impone la condición de ortogonalidad,

$$2a_{12}a_{22} + 2a_{13}a_{23} + a_{12}a_{23} + a_{13}a_{22} = 0 \quad (33)$$

y de aquí, por ejemplo

$$a_{12} = -a_{13} \frac{2a_{23} + a_{22}}{2a_{22} + a_{23}} \quad (34)$$

De acuerdo con 34 podrían escogerse arbitrariamente  $a_{22}$  y  $a_{23}$  (fijando  $a_{21}$  según 32); todavía, escoger  $a_{13}$  y determinar  $a_{12}$  según 34, para calcular  $a_{11}$  según 31.

Todos los razonamientos expuestos en las fórmulas 23 a 34 hacen ver que los resultados de la fórmula 25 y de la propiedad R(2), pueden aplicarse tanto al caso de raíces

1 diferentes como al caso de raíces múltiples.

Volviendo ahora a la fórmula 13, se puede postmultiplicar por la matriz

$A'$ , con lo que se obtiene

$$ACA' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{12} & c_{22} & c_{23} \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \quad (35)$$

Si se compara 35 con el sistema S(1), se puede concluir que

$$ACA' = \frac{1}{n} \begin{pmatrix} \sum \xi_1^2 & \sum \xi_1 \xi_2 & \sum \xi_1 \xi_3 \\ \sum \xi_1 \xi_2 & \sum \xi_2^2 & \sum \xi_2 \xi_3 \\ \sum \xi_1 \xi_3 & \sum \xi_2 \xi_3 & \sum \xi_3^2 \end{pmatrix} \quad (36)$$

La matriz definida en el miembro derecho de 36 se llama de variancia y covariancia de las nuevas variables.

Por otra parte 36 es válida para cualquier matriz  $A$  y su traspuesta  $A'$ ; sin embargo, si se escogen los elementos  $a_{ij}$  de éstas de acuerdo con los valores que resultan de resolver los sistemas S(4), S(5) y S(6), 13 toma la forma 15 y si después se postmultiplica por  $A'$ , se obtendrá

$$ACA' = \begin{pmatrix} \lambda_1 \sum a_{1i}^2 & \lambda_1 \sum a_{1i} a_{2i} & \lambda_1 \sum a_{1i} a_{3i} \\ \lambda_2 \sum a_{1i} a_{2i} & \lambda_2 \sum a_{2i}^2 & \lambda_2 \sum a_{2i} a_{3i} \\ \lambda_3 \sum a_{1i} a_{3i} & \lambda_3 \sum a_{2i} a_{3i} & \lambda_3 \sum a_{3i}^2 \end{pmatrix} \quad (37)$$

que por las propiedades de los elementos  $a_{ij}$  se puede escribir

$$ACA' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \quad R(3)$$

R (3) muestra que la matriz de variancia y covariancia de  $\xi_i$  es precisamente la matriz diagonal  $\Lambda$ , definida en 17, si los elementos  $a_{ij}$  de las matrices A y A' se escogen en la forma indicada; más aún, resulta que procediendo así las  $\xi_i$  no están correlacionadas, puesto que sus covariancias son nulas y de aquí su nombre de componentes principales; además, las variancias de las  $\xi_i$  son precisamente las raíces  $\lambda$  de la ecuación 5. Finalmente, según el razonamiento hecho para encontrar 36, resulta que la variancia total del sistema,  $(\sum \xi_1^2 + \sum \xi_2^2 + \sum \xi_3^2)/n$ , es la suma de las raíces  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  y  $\lambda_3$ , la cual según R(1) es igual a 3, el número de registros considerados (en a, b y c). Este último resultado indica que cocientes de la forma  $\lambda_i/3$  miden el porcentaje de la variancia del conjunto que debe atribuirse a la componente principal  $\xi_i$ , sin olvidar que según 4 las variancias de  $\xi_i$  son las máximas posibles, sujetas a la restricción 3.

Para terminar, volviendo al sistema S(1), se puede afirmar que si los elementos  $a_{ij}$  de las matrices A y A' se escogen con el criterio descrito, resultará, de acuerdo

con  $R(2)$

$$A' \xi = X \quad (38)$$

## 5. RESUMEN DEL ANALISIS DE COMPONENTES PRINCIPALES

Para efectuar la simulación de un sistema de  $p$  registros  $x_i(i)$ , se procede a su estandarización; en seguida se calculan las variancias y covariancias de los elementos del sistema, haciendo

$$c_{ij} = \frac{1}{n} \sum x_i x_j \quad (39)$$

Después se forma con estos valores una matriz  $C$ , de la forma

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{21} & c_{22} & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \quad (40)$$

Se calculan los valores característicos  $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ , de la matriz 40.

Se forman sistemas lineales homogéneos con la matriz  $C$  y cada uno de los valores singulares, como se indica a continuación

$$\begin{pmatrix} c_{11} - \lambda_1 & c_{12} & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{12} & c_{22} - \lambda_1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{j1} \\ a_{j2} \\ \vdots \end{pmatrix} = 0 \quad (41)$$

Así, se encuentran vectores  $(a_{j1}, a_{j2}, a_{j3}, \dots)$  ligados a cada uno de los valores  $\lambda_1$ , mediante sistemas de la forma (41). Estos vectores deberán tener componentes tales que

$$a_{j1}^2 + a_{j2}^2 + a_{j3}^2 + \dots = 1 \quad (42)$$

y además serán ortogonales si los  $\lambda$  son diferentes, o podrán escogerse de modo que lo sean si

hay  $\lambda_j$  iguales. Con los vectores  $a_{ij}$  así escogidos, se podrá formar la matriz

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \quad (43)$$

tal que con su traspuesta, tenga la propiedad

$$AA' = I \quad (44)$$

A partir de la matriz  $A$ , se puede definir un conjunto de variables  $\xi_i$ , ligadas a las originales  $x_i$  mediante el sistema

$$\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \end{pmatrix} \quad (5)$$

Si los elementos  $a_{ij}$  de  $A$  se han seleccionado como se indica en 41, las nuevas variables  $\xi_i$  tendrán solo covariancias nulas, esto es, serán estadísticamente Independientes y las variancias tendrán el máximo valor posible, compatible con la condición 42.

De 44 y 5(8) se concluye, además, que las  $x_i$  quedan determinadas, mediante las  $\xi_i$  por el sistema

$$A'\xi = X \quad (9)$$

De esta manera, para simular las  $x_i$ , se procederá a simular Independientemente cada  $\xi_i$ , para definir cada  $x_i(t)$  mediante cada una de las ecuaciones de 5(9).

Finalmente, la variancia de cada una de las  $\xi_i$  es precisamente  $\lambda_j$

y la variancia total del conjunto es

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \dots = \rho \quad (45)$$

en donde  $\rho$  es el número de  $x_i$  o de  $\xi_i$ .

Así resulta que la contribución de cada una de las  $\xi_i$  a la variancia total es

$$\lambda_i / \rho \quad (46)$$

La expresión 46 permite juzgar, en adición, la importancia de cada una de las  $\xi_i$  en la simulación y decidir, en última instancia, si vale la pena o no, representarla en el sistema.

Los ruidos de dos series cronológicas se enlistan a continuación. Se trata de simular ambos ruidos teniendo en cuenta que pueden estar correlacionados.

$x_1$	$x_2$	$(x_1 - \bar{x}_1)^2$	$(x_2 - \bar{x}_2)^2$	$(x_1 - \bar{x}_1)(x_2 - \bar{x}_2)$
0.90	1.70	1.76	3.44	2.48
-1.35	-1.71	0.87	2.34	1.42
-1.75	-1.11	1.77	0.90	1.26
-0.39	0.35	0.00	0.28	0.02
-0.54	-0.36	0.01	0.03	0.02
2.74	2.95	10.10	9.80	9.90
0.30	1.49	1.49	2.80	2.04
-3.08	-3.52	7.08	11.15	8.90
-3.01	-2.74	6.70	6.56	6.64
1.77	2.21	4.80	5.70	5.23
-1.71	-2.32	1.66	4.56	2.76
<u>0.54</u>	<u>0.98</u>	<u>0.92</u>	<u>1.34</u>	<u>1.11</u>
-5.08	-2.08	37.16	48.90	41.78

Para aplicar la técnica de componentes principales es necesario que los ruidos  $x_1$  y  $x_2$  tengan media cero y variancia uno. Para lograrlo hay que realizar la transformación siguiente:

$$x_1 = \frac{x_1 - \bar{x}_1}{\sigma_{x_1}}$$

Las medias y desviaciones estándar de los ruidos  $x_1$  y  $x_2$  valen:

$$\bar{x}_1 = \frac{-5.03}{12} = -0.42 \quad \sigma_{x_1} = \sqrt{\frac{37.16}{12}} = 1.76$$

$$\bar{x}_2 = \frac{-2.08}{12} = 0.18 \quad \sigma_{x_2} = \sqrt{\frac{48.90}{12}} = 2.02$$

Procedamos ahora al cálculo de la matriz C

$$C_{11} = \frac{1}{N} \sum x_1^2 = 1.0$$

$$C_{22} = \frac{1}{N} \sum x_2^2 = 1.0$$

$$C_{12} = \frac{1}{N} \sum x_1 x_2 = \frac{1}{N} \sum \frac{(x_1 - \bar{x}_1)}{\sigma_{x_1}} \cdot \frac{(x_2 - \bar{x}_2)}{\sigma_{x_2}} = \frac{41.78}{12} \frac{1}{1.76} \frac{1}{2.02} = 0.98$$

$$C = \begin{bmatrix} 1.0 & 0.98 \\ 0.98 & 1.0 \end{bmatrix}$$

Ahora, resolvamos el problema de valores y vectores característicos para la matriz C

$$\begin{vmatrix} 1.0 - \lambda & 0.98 \\ 0.98 & 1.0 - \lambda \end{vmatrix} = 1 + \lambda^2 - 2\lambda - 0.96 = 0$$

$$\lambda^2 - 2\lambda + 0.04 = 0 \quad \lambda = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 0.16}}{2}$$

$$\lambda_1 = 1.98$$

$$\lambda_2 = 0.02$$

Para  $\lambda_1 = 1.98$  se obtiene el siguiente vector característico

$$\begin{bmatrix} 1.0 - 1.98 & 0.98 \\ 0.98 & 1.0 - 1.98 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_{11} \\ a_{12} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$-0.98 a_{11} + 0.98 a_{12} = 0$$

por lo que  $a_{11} = a_{12} = 1.0$

como debe cumplirse que  $a_{11}^2 + a_{12}^2 = 1.0$  se tiene que

$$a_{11} = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0.707$$

$$a_{12} = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0.707$$

En forma similar para  $\lambda_2 = 0.02$  se obtiene el siguiente vector característico

$$a_{21} = 0.707$$

$$a_{22} = -0.707$$

Los ruidos  $X_1$  y  $X_2$  se podrán generar con las siguientes expresiones

$$X_1 = 0.707 f_1 + 0.707 f_2 = 0.707 (f_1 + f_2)$$

$$X_2 = 0.707 f_1 - 0.707 f_2 = 0.707 (f_1 - f_2)$$

Las desviaciones estándar de los ruidos independientes  $f_1$  y  $f_2$  están dadas por

$$\sigma_{\xi_1} = \sqrt{1.98} = 1.41$$

$$\sigma_{\xi_2} = \sqrt{0.02} = 0.14$$

Si aceptamos que de un análisis preliminar se encontró que los ruidos  $x_1$  y  $x_2$  tenían distribución normal, entonces los ruidos independientes  $\xi_1$  y  $\xi_2$  tienen las siguientes distribuciones normales

$$\xi_1 \text{ [NOR , 0 , 1.41]}$$

$$\xi_2 \text{ [NOR , 0 , 0.14]}$$

Para generar nuevos valores de  $\xi_1$  y  $\xi_2$  escojamos una tabla de números aleatorios con distribución normal que tenga media cero y variancia uno

NA <sub>1</sub>	NA <sub>2</sub>	1.41NA <sub>1</sub>	0.14NA <sub>2</sub>	$\xi_1 + \xi_2$	$\xi_1 - \xi_2$	X <sub>1</sub>	X <sub>2</sub>
-0.23	-0.65	-0.32	-0.09	-0.41	-0.23	-0.29	-0.16
0.21	-0.21	0.30	-0.03	0.27	0.33	0.19	0.23
0.27	0.08	0.38	0.01	0.39	0.37	0.27	0.26

Finalmente los nuevos ruidos generados  $x_1$  y  $x_2$  se obtienen por medio de las siguientes transformaciones

$$x_1 = 1.76 X_1 - 0.42$$

$$x_2 = 2.02 X_2 - 0.18$$

$$\begin{matrix} -0.93 \\ -0.08 \\ 0.05 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} -0.50 \\ 0.28 \\ 0.34 \end{matrix}$$

### 3.2. Optimización.

Estas notas tratan de desarrollar algunas de las técnicas más comúnmente asociadas con la investigación de operaciones y sistemas ingenieriles y que son aplicables al diseño y operación de sistemas que conciernen a los ingenieros civiles.

#### 3.2.1 Programación Lineal.

La programación matemática es una de las técnicas más comúnmente usadas para resolver problemas de optimización de sistemas. Para esto se plantea un modelo matemático en el que quedan expresadas las relaciones que existen entre las variables que intervienen en el problema. Estas relaciones están formadas por una función objetivo en la cual queda expresado el objetivo que deseamos alcanzar y las restricciones que indican las limitaciones que se le imponen al problema. Estos problemas se caracterizan por el gran número de soluciones que satisfacen a las restricciones, a las que llamaremos soluciones factibles. Dentro de estas soluciones factibles hay una que optimiza la función objetivo y que llamaremos solución óptima. Cuando las relaciones del modelo matemático son lineales, diremos que se trata de un problema de programación lineal.

El modelo matemático que representa un problema de programación lineal tiene la forma siguiente:

$$\text{Maximize: } Z = b_1 x_1 + b_2 x_2 + \dots + b_n x_n$$

Sujeto a las restricciones

$$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n \leq C_1$$

$$a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \dots + a_{2n} x_n \leq C_2$$

.....

$$a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \dots + a_{mn} x_n \leq C_m$$

$$y \quad x_j \geq 0 \quad j = 1, 2, \dots, n$$

Las cantidades  $b_j$ ,  $C_j$ , y  $a_{ij}$  ( $i = 1, \dots, m$  y  $j = 1, \dots, n$ ) son constantes y conocidas y  $m$  y  $n$  son enteros positivos. Las constantes  $C_j$  son convencionalmente no negativas y las  $b_j$  y  $a_{ij}$  no tienen restricción en signo.

Para obtener la solución óptima en un modelo matemático de este tipo se necesita plantear el algoritmo - procedimiento aritmético - llamado "simplex". Este consiste en efectuar la operación de intercambiar variables que es la base de todos los algoritmos del álgebra lineal.

Para ilustrar en que consiste la operación intercambiar variables, consideramos dos funciones lineales  $Y$ ,  $Y'$  de dos variables independientes,  $x$ ,  $x'$  ;

$$y = ax + bx' + c \tag{1}$$

$$y' = dx + ex' + f \tag{2}$$

suponiendo que  $a \neq 0$ , calculemos  $x$  explícitamente de la primera ecuación y substituyamos este resultado en la segunda ecuación obteniéndose:

$$x = \frac{1}{a} y - \frac{b}{a} x' - \frac{c}{a} \quad (3)$$

$$y' = \frac{d}{a} y + \left(e - \frac{bd}{a}\right) x' + \left(f - \frac{cd}{a}\right) \quad (4)$$

Estas dos nuevas funciones lineales se caracterizan por el hecho de que la variable  $x$  pasa a ser función, mientras que la función  $y$  resulta ahora una variable independiente. De una manera sencilla se puede decir que  $x$  y  $y$  han sido intercambiadas y a la operación total se le denomina un paso de intercambio. Ahora el problema consiste en arreglar este paso de intercambio en la forma de esquemas sencillos de cálculo. Por ejemplo, el intercambio de  $x$  y  $y$  en las ecs. (1) y (2) se representará de aquí en adelante por el siguiente esquema:

		$x$	$x'$			$y$	$x'$	
elemento	$Y =$	$a$	$b$	$c$	$x =$	$\frac{1}{a}$	$-\frac{b}{a}$	$-\frac{c}{a}$
pivote	$y' =$	$d$	$e$	$f$	$y' =$	$\frac{d}{a}$	$e - \frac{bd}{a}$	$f - \frac{cd}{a}$

donde se cruzan el renglón y la columna de las variables que se quieren intercambiar nos define la localización del elemento pivote. Una vez determinado el elemento pivote, los pasos a seguir para intercambiar  $x$  por  $y$  son los siguientes:

1. El elemento pivote se cambia por su recíproco.
2. Los demás elementos de la columna donde se encuentra el pivote se dividen entre éste.
3. Los demás elementos del renglón donde se encuentra el pivote se dividen entre éste y se les cambia el signo.
4. Los restantes elementos se obtendrán como el elemento original menos el producto de los correspondientes dividido entre el pivote.



b y d son los correspondientes del elemento e.

Toda la secuencia anterior se conoce como el algoritmo Simplex.

Consideremos el siguiente problema de programación lineal con dos variables  $x_1$  y  $x_2$ :

$$\text{MAX: } Z = b_1 x_1 + b_2 x_2$$

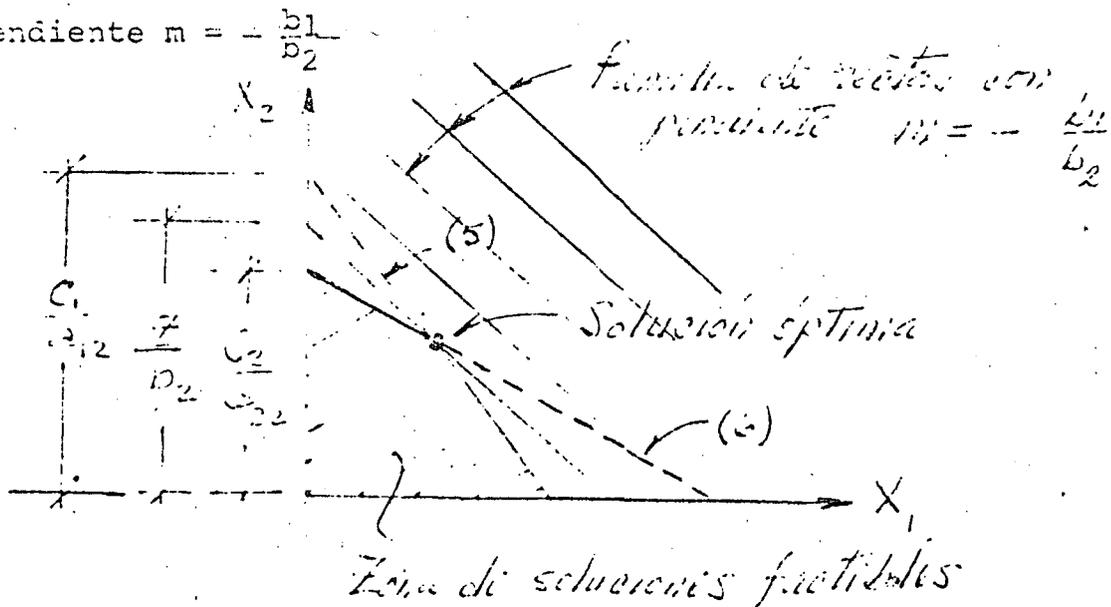
Sujeto a

$$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 \leq C_1 \quad (5)$$

$$a_{21} x_1 + a_{22} x_2 \leq C_2 \quad (6)$$

$$x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0$$

Este tipo de problema es ideal para resolverse por medios gráficos. En un sistema de ejes cartesianos  $x_1, x_2$  las restricciones pueden ser representadas por líneas rectas. Los puntos  $(x_1, x_2)$  que satisfacen estas restricciones definen la zona de soluciones factibles (polígono convexo achurado mostrado en la figura). La función objetivo se puede representar como una familia de rectas con pendiente  $m = -\frac{b_1}{b_2}$ .



De la figura puede observarse que la solución óptima cumple con los requisitos siguientes:

1. Se obtiene para una recta de la familia - - - -  
$$x_2 = -\frac{b_1}{b_2} x_1 + \frac{z}{b_2}$$
 que contenga a un punto del conjunto de soluciones factibles y que además tenga la mayor ordenada al origen
2. La recta anterior tiene una inclinación intermedia entre las rectas (5) y (6) o sea

$$\frac{a_{21}}{a_{22}} < \frac{b_1}{b_2} < \frac{a_{11}}{a_{12}}$$

Para ilustrar que este problema de programación lineal puede resolverse aplicando el algoritmo simplex procedamos de la manera siguiente: agreguemos a las restricciones las cantidades  $y_1$  y  $y_2$  que no se conocen pero que permiten lograr la igualdad

$$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + y_1 = C_1$$

$$a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + y_2 = C_2$$

Del sistema de ecuaciones así formado obtengamos los valores de  $x_1$  y  $x_2$

$$x_1 = \frac{a_{22} (c_1 - y_1) - a_{12} (c_2 - y_2)}{(a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21})}$$

$$x_2 = \frac{a_{11} (c_2 - y_2) - a_{21} (c_1 - y_1)}{(a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21})}$$

Substituyendo en la función objetivo estos valores se obtiene

$$Z = \frac{1}{(a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21})} \left[ a_{22} b_1 c_1 + a_{11} b_2 c_2 - a_{21} b_2 c_1 - a_{12} b_1 c_2 + (-a_{22} b_1 + a_{21} b_2) y_1 + (a_{12} b_1 - a_{11} b_2) y_2 \right]$$

En esta última expresión se puede observar que si los coeficientes de  $y_1$  y  $y_2$  son negativos, entonces lo mejor que puede suceder es que  $y_1$  y  $y_2$  sean iguales a cero para lograr el  $Z$  máximo. Admitiendo a priori que

$$-a_{22} b_1 + a_{21} b_2 < 0, \quad a_{12} b_1 - a_{11} b_2 < 0$$

se obtiene

$$\frac{a_{21}}{a_{22}} < \frac{b_1}{b_2} \quad \frac{b_1}{b_2} < \frac{a_{11}}{a_{12}}$$

juntando estas igualdades se obtiene

$$\frac{a_{21}}{a_{22}} < \frac{b_1}{b_2} < \frac{a_{11}}{a_{12}}$$

lo que indica que la recta que resuelve el problema de máximo tiene una pendiente entre las rectas (5) y (6)

Por otra parte, de la expresión  $Z$  se observa que la solución óptima se obtiene de cambiar las  $x_i$  por las  $y_i$ , que es la característica en que se basa el método simplex

Consideremos ahora el problema de mínimo siguiente

$$\text{MIN } z = c_1 x_1' + c_2 x_2'$$

Sujeto a

$$a_{11} x_1' + a_{21} x_2' \geq b_1$$

$$a_{12} x_1' + a_{22} x_2' \geq b_2$$

$$x_1' \geq 0 \quad x_2' \geq 0$$

donde  $c_i$ ,  $b_i$  y  $a_{ij}$ , son comunes al problema de máximo antes planteado. Procediendo en forma semejante para que el problema de -- máximos se obtiene que

$$z = \frac{1}{(a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21})} \left[ a_{22} b_1 c_1 - a_{12} b_1 c_2 + a_{21} b_2 c_1 + (a_{22} c_1 - a_{12} c_2) n_1 + (a_{11} c_2 - a_{21} c_1) n_2 \right]$$

donde  $n_1$  y  $n_2$  son las cantidades desconocidas que permiten lograr la igualdad de las restricciones. Ahora bien, si los coeficientes de  $n_1$  y  $n_2$  en la expresión de  $z$  son positivos, entonces lo -- mejor que puede suceder es que  $n_1$  y  $n_2$  sean iguales a cero para -- lograr  $z$  mínimo. Aceptando a priori que

$$a_{22} c_1 - a_{12} c_2 > 0$$

se obtiene que

$$\frac{c_1}{a_{12}} > \frac{c_2}{a_{22}}$$

igualdad que define la región permisible para el problema de máximos.

Además, si  $y_1, y_2, n_1$  y  $n_2$  son cero, las expresiones que definen  $Z$  y  $z$  son las mismas. Esto permite afirmar que a cada problema de máximo le corresponde un problema de mínimo. Esto se llama dualidad en programación lineal.

Como la obtención de la solución óptima consiste en efectuar varios pasos de intercambio hasta lograr intercambiar las  $x_i$  por las  $y_i$ , es necesario dar las siguientes reglas para seleccionar el elemento pivote en cada paso de intercambio.

Reglas para escoger el renglón donde se encuentra el pivote.

1. El elemento en la última columna del renglón del pivote tiene que ser menor que cero.
2. Si hay varios valores negativos en la última columna, el renglón del pivote corresponderá al valor más pequeño de estos.

Regla para escoger el pivote en el renglón del pivote.

1. Se seleccionan todos los elementos del renglón del pivote que son  $> 0$  y se forman las correspondientes cantidades características. La más pequeña de estas determina la posición del pivote.

Las reglas anteriores se aplican reiteradamente y se llega a la solución óptima cuando sucede alguna de las siguientes dos cosas:

1. Todos los elementos de la columna  $\bar{z}$  son  $\geq 0$
2. Aunque existan elementos negativos en la columna  $\bar{z}$ , los elementos en los correspondientes renglones son sin excepción  $\leq 0$ .

Esto significa que el problema dado no tiene una única solución.

Ejemplo de aplicación

$$\text{MAX } \bar{z} = 5x_1 + 3x_2 + 2x_3$$

Sujeto a

$$3x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 10$$

$$x_1 - 3x_2 + x_3 \leq 15$$

$$x_1 - 3x_3 \leq 12$$

$$x_i \geq 0$$

	$y_1$	$y_2$	$y_3$	$\bar{z}$	
$x_1$	(3)	1	1	-5	←
$x_2$	3	-3	0	-3	
$x_3$	2	1	-3	-2	
c	10	15	12		
	$\frac{10}{3}$	15	12		

	$x_1$	$y_2$	$y_3$	$Z$
$y_1$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{5}{3}$
$x_2$	1	-4	-1	2
$x_3$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{11}{3}$	$\frac{4}{3}$
c	$\frac{10}{3}$	$\frac{35}{3}$	$\frac{26}{3}$	$\frac{50}{3}$

La solución está regida tan solo por la primera restricción y es -  
la siguiente:

$$x_1 = \frac{10}{3} \quad y_1 = 0$$

$$x_2 = 0 \quad y_2 = \frac{35}{3}$$

$$x_3 = 0 \quad y_3 = \frac{26}{3}$$

$$Z_{\max} = \frac{50}{3}$$

Comprobación:

$$3 \frac{10}{3} = 10 \quad \text{ok}$$

$$\frac{10+35}{3} = 15 \quad \text{ok}$$

$$\frac{10+26}{3} = 12 \quad \text{ok}$$

$$Z = 5 \frac{10}{3} = \frac{50}{3}$$

### 3.2.3. Optimización Analítica.

A diferencia de la programación lineal, el modelo matemático a plantearse para resolver un problema de optimización usando la optimización analítica, está formado por relaciones no lineales. De estas técnicas únicamente abarcaremos la de los "Operadores de Lagrange" que es adecuada en sistemas de bombeo. A continuación se indican los pasos a seguir para aplicar esta técnica.

Se trata de optimizar la función continua de tres variables.

$$F(x_1, x_2, x_3) = 0$$

que debe cumplir con las siguientes condiciones adicionales.

$$f_1(x_1, x_2, x_3) = 0$$

$$f_2(x_1, x_2, x_3) = 0$$

Pasos a seguir:

1. Se fabrica una función de Lagrange

$$L = F - L_1 f_1 - L_2 f_2$$

2. Se procede a calcular las derivadas de L respecto a las  $x_i$  e igualarlas a cero

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = \frac{\partial F}{\partial x_1} - L_1 \frac{\partial f_1}{\partial x_1} - L_2 \frac{\partial f_2}{\partial x_1} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = \frac{\partial F}{\partial x_2} = L_1 \frac{\partial f_1}{\partial x_2} - L_2 \frac{\partial f_2}{\partial x_2} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_3} = \frac{\partial F}{\partial x_3} - L_1 \frac{\partial f_1}{\partial x_3} - L_2 \frac{\partial f_2}{\partial x_3} = 0$$

3. Despejar  $x_1$ ,  $x_2$  y  $x_3$  en términos de  $L_1$  y  $L_2$

4. Substituir en  $f_1$  y  $f_2$  los valores de  $x_1$ ,  $x_2$  y  $x_3$  en términos de  $L_1$  y  $L_2$

5. En el sistema formado por  $f_1(L_1, L_2) = 0$

$$f_2(L_1, L_2) = 0$$

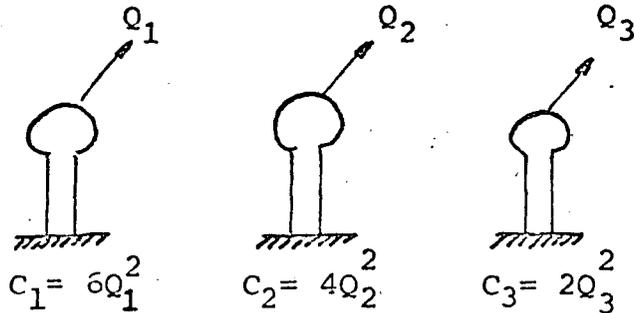
despejar  $L_1$  y  $L_2$

6. Valuar  $x_1$ ,  $x_2$  y  $x_3$  según los valores encontrados en el tercer paso.

7. Estos valores hacen máxima a  $F$  cumpliendo con las restricciones.

### Ejemplo de aplicación

C Consumo de combustible en gal hr.



En las horas de pico se deben suministrar  $5m^3/Seg.$

Para hacer mínimo el gasto de combustible quienes deben ser  $Q_1$ ,

$Q_2$  y  $Q_3$

$$F = 6Q_1^2 + 4Q_2^2 + 2Q_3^2$$

$$f = Q_1 + Q_2 + Q_3 - 5 = 0$$

$$L = 6Q_1^2 + 4Q_2^2 + 2Q_3^2 - L(Q_1 + Q_2 + Q_3 - 5)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial Q_1} &= 12Q_1 - L = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial Q_2} &= 8Q_2 - L = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial Q_3} &= 4Q_3 - L = 0 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} Q_1 &= 0.91 \\ Q_2 &= 1.36 \\ Q_3 &= \frac{2.73}{5.00} \end{aligned}$$

$$\frac{L}{12} + \frac{L}{8} + \frac{L}{4} = 5 \quad ; \quad L = 10.9$$

$$C_1 = 6 (0.91)^2 = 4.96$$

$$C_2 = 4 (1.36)^2 = 7.40$$

$$C_3 = 2 (2.73)^2 = \frac{14.84}{27.70} \text{ gal hr}$$

Hay que realizar chequeos como los siguientes :

Tan solo opera la bomba mas barata

$$C_3 = 2 (5)^2 = 50 > 27.20 \quad \text{ok}$$

Las dos bombas más baratas

$$F = 4Q_2^2 + 2Q_3^2$$

$$f = Q_2 + Q_3 - 5 = 0$$

$$L = 4Q_2^2 + 2Q_3^2 - L (Q_2 + Q_3 - 5)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial Q_2} &= 8Q_2 - L = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial Q_3} &= 4Q_3 - L = 0 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} Q_2 &= \frac{L}{8} \\ Q_3 &= \frac{L}{4} \end{aligned} \quad \begin{aligned} Q_2 &= 1.67 \\ Q_3 &= \frac{3.33}{5.00} \end{aligned}$$

- 4 -

$$\frac{L}{8} + \frac{L}{4} = 5 ; L = 13.33$$

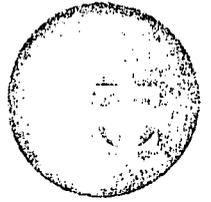
$$C_2 = 4 (.167)^2 = 11.15$$

$$C_3 = 2 (3.33)^2 = \frac{22.18}{33.33} \quad 2720$$

Con esto queda uno convencido que la mejor solución es una combinación de las tres bombas.



centro de educación continua  
división de estudios superiores  
facultad de ingeniería, unam



APROVECHAMIENTOS HIDRAULICOS

ANALISIS DE DECISIONES

PLANTEAMIENTO DE LOS PROBLEMAS Y SOLUCION

ING. ALEXIS AGUILAR M.  
OCTUBRE DE 1978



## 1.1 CAPACIDAD DE LA OBRA DE DESVIO

La capacidad de la obra de desvío depende del tipo de cortina de la presa, -- presentándose generalmente los siguientes comportamientos:

Para presas de concreto, los daños en el sitio por inundación no ponen en pe-- ligro la construcción, además no implica riesgo adicional aguas abajo, pero se provocarían retrasos en el programa. Para este tipo de cortina es facti-- ble disminuir la capacidad de la obra de desvío por túneles, con desvíos adi-- cionales a través del cuerpo de la cortina, tajos en el cauce o sobre parte de la propia cortina.

Para presas de materiales graduados, los daños son mayores bajo una inunda-- ción, aún cargas pequeñas sobre la cortina pueden provocar la falla de la es-- tructura, ocasionándose un peligro adicional aguas abajo. Para éste caso la capacidad de la obra de desvío se verá incrementada debido a factores de se-- guridad mayores.

La capacidad que involucra una obra de desvío constituye una forma de seguro, cuyo volumen debe corresponder a los riesgos que se corre. Siendo la tenden-- cia actual no la de aumentar la magnitud de las obras, sino disminuir los -- riesgos de falla mediante la construcción de la presa rápidamente. Para ello se busca sacar ventaja del período de estiaje y desarrollar técnicas construc

ativas de la presa rápidamente. La tendencia dominante para presas de concreto y las de enrocamiento consiste en reducir todo lo que sea posible la capacidad de los túneles de desvío, tomando en cuenta la inundación del vaso provocado por las ataguías. En este caso, la avenida puede ser desalojada por orificios dejados en la estructura definitiva de concreto, ó bien, es posible considerar el llenado parcial del vaso; en las presas de enrocamiento, la seguridad de la presa se garantiza por una distribución adecuada de las diver--sas categorías de enrocamiento o construyendo rápidamente el paramento impermeable de aguas arriba.

Un problema primordial para la etapa inicial de construcción es la de alcanzar una elevación necesaria para absorber la avenida con la ataguía de aguas arriba. De aquí la razón por la que con mayor frecuencia, se construyen más altas las ataguías de aguas arriba, siempre y cuando ésto sea técnica y económicamente permisible.

El criterio para definir la avenida de diseño durante la construcción, se hace por medio de un análisis de optimización, tomando en cuenta por un lado, el costo de construcción de la ataguía de aguas arriba y de los túneles de des--vío, por otro, el valor de los daños que ocurrirían al sobrepasar las aguas el nivel de la ataguía, así como las pérdidas ocasionadas por el retraso en la terminación de las obras.

## 1.2 FACTORES QUE TIENEN INFLUENCIA EN LAS OBRAS DE DESVÍO Y SU OPERACION.

### 1.2.1 REGIMEN HIDROLOGICO

La operación y el diseño están condicionados por el régimen hidrológico. Este condicionamiento se puede caracterizar por la distribución de los caudales máximos probables durante diferentes períodos en el año.

Los gastos a considerar son: La avenida de diseño de la obra del desvío, el caudal máximo de estiaje y el que se espera ocurra para la hora crítica del río, así como aquellos gastos máximos y medios mensuales para coordinar las diferentes etapas constructivas.

### 1.2.2 CONDICIONES TOPOGRAFICAS Y GEOTECNICAS

Las condiciones topográficas influyen en el tamaño y tipo de las obras de desvío; Un valle angosto puede ser adecuado para la solución clásica de ataguía de lado a lado del río, y un valle ancho puede hacer posible aislar parte del río con una ataguía, mientras el agua sigue corriendo por el resto de la sección.

Las condiciones geotécnicas pueden tener influencia en los túneles de desvío, ya sea limitando su tamaño o que tengan que revestirse debido a las velocidades que permita el tipo de roca. Para el caso de las ataguías, se pueden presentar problemas por erosión en el fondo a la hora del cierre o erosión en las ataguías en la zona de desvío, cuando el cierre sea par-

cial. Cuando los estratos del fondo del cauce sean permeables, se puede requerir un arreglo especial mediante pantallas impermeables o inyecciones.

### 1.2.3 MATERIALES DISPONIBLES

La disponibilidad de materiales para la construcción de las ataguías y el cierre (tierra, arena, aluviones con componentes más o menos gruesos y materiales de excavación), tienen influencia en el tipo de construcción escogido.

La tierra, la arena y material de aluvión pueden emplearse en el cierre, pero solamente en ciertas etapas. Cuando es muy difícil obtener bloques muy pesados, es posible utilizar bloques de forma especial muy resistentes al arrastre, o bien adoptar métodos especiales para el cierre.

### 1.3 METODOLOGIA PARA LA ELECCION DE LA CAPACIDAD DE LA OBRA DE DESVIO.

Como una introducción general de la metodología para la elección de la capacidad de la obra de desvío, así como sus características, se juzga conveniente dividir el estudio en tres etapas:

Estudio Hidrológico

Estudio Hidráulico

Estudio Técnico-Económico

### 1.3.1 ESTUDIO HIDROLOGICO.

Este estudio comprende un análisis preliminar de la información cronológica de los escurrimientos registrados en diferentes estaciones cercanas al sitio. De estas estaciones se hizo un análisis tanto cualitativo como cuantitativo en sus registros, para seleccionar aquellos registros que muestren mayor confiabilidad y un período adecuado que sea representativo del fenómeno.

Una vez seleccionada la información se procedió a hacer un análisis estadístico basado en correlogramas para identificar el tipo de avenidas o trenes de avenidas que presenten cierta uniformidad en el tiempo, correspondientes a gastos máximos registrados. Conjuntamente se realizó un estudio estadístico de valores extremos utilizando los métodos de Levediev, Nash, Gumbel y Warecoun, para asociarlos a diferentes períodos de retorno. En base a los resultados obtenidos y la experiencia que se tiene de ellos, se consideró como representativos los valores obtenidos con el método de Nash.

Con la complementación de los aspectos, forma y magnitud ligados a diferentes frecuencias de ocurrencia, se procedió a seleccionar aquel tipo de avenida que presente condiciones críticas de diseño de la obra de desvío. Lo que se hizo en base a un estudio hidráulico del tránsito de varios tipos de avenidas.

### 1.3.2. ESTUDIO HIDRAULICO

Las condiciones que rigen el diseño son proporcionados por una simulación o tránsito de avenidas que requieren del funcionamiento hidráulico de túneles y de las capacidades de regularización del vaso que están dadas por las alturas de ataguía. Con lo que para cada frecuencia se pueden tener diferentes combinaciones de túneles (número y diámetro) y de ataguía (alturas) que proporcionan una gama de alternativas. Estas alternativas se obtienen de transitar una avenida con un gasto asociado a una probabilidad de ocurrencia, a través de diferentes combinaciones de diámetros y cantidad de túneles, lo cual genera diferentes alturas de ataguía. El mismo procedimiento se aplica a diferentes avenidas asociadas a otros períodos de retorno, con lo que se obtiene una gama de combinaciones de tipo de obra, a las cuales se les puede aplicar un análisis de factibilidad Técnico-Económica.

### 1.3.3 ESTUDIO TECNICO-ECONOMICO

Antes de pasar a formular el análisis económico de las alternativas, se hace necesario un análisis de costos que involucren las cantidades de obra generales, los que serán englobados en un precio índice referido a los metros de excavación para el caso de túneles y para las ataguías un precio índice por material colocado.

De los tránsitos de avenidas se construyeron una serie de curvas de isogasto, que definen para las posibles combinaciones de capacidad de túneles y alturas de ataguías, el funcionamiento de la obra de desvío para un mismo gasto ligado a un período de retorno. El conjunto de estas curvas para una misma cantidad de túneles, se les aplicó un análisis económico, estimando los costos índice antes mencionados como una relación, lo cual nos permite identificar soluciones óptimas desde el punto de vista económico.

Por otro lado se hizo necesario un análisis por restricción de tipo técnico, basado en las velocidades máximas permisibles en los túneles, que restringe a su vez la altura de las ataguías. Considerando estos dos aspectos, por un lado alternativas óptimas económicas y por otro las restrictivas técnicas, se observó que las condiciones que rigen el diseño son las debidas a las limitaciones de velocidad, aplicándose a éstas alternativas los costos que dan las soluciones del diseño.

A las soluciones anteriores de costos de diseño, se les asocia un costo por riesgo, lo cual permite tomar decisiones adecuadas. Estos riesgos -- son los valores esperados del daño, los cuales se estimaron para diferentes soluciones de obras de desvío asociadas a distintos períodos de retorno, como: la suma de los productos del daño más crítico en la vida útil de las obras en caso de inundación por la probabilidad de que ocurra dicho daño.

Los daños consideran la pérdida total de la propia obra, retrasos en la obra e indemnizaciones. Las pérdidas de oportunidad no se tomaron en cuenta pues se piensa que las inversiones destinadas a dichas obras pueden ser transferidas a otros aprovechamientos. Por otra parte el daño subjetivo - de prestigio o aversión al riesgo no se tomó en cuenta.

Finalmente se hace un estudio de sensibilidad modificando varios de los parámetros como son precios, velocidades permisibles y daños subjetivos, que permitan tomar decisiones en caso de posibles cambios.

### 2.2.2. RESULTADOS.

La obtención de resultados se hace a partir de los programas de computadora existentes en la S.R.H., manejando los gastos máximos anuales en las cuatro estaciones hidrométricas antes mencionadas.

Los períodos de retorno considerados son (1, 2, 3, 4, 5, 10, 12.5, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50) para fines de obra de desvío. Se analizan también los períodos de (100, 500, 1000, 5000 y 10 000) para efectuar una comparación entre los cuatro métodos, tratando de estar coherente con los estudios hasta ahora realizados de la obra vertedora.

Del análisis de los cuatro métodos se desprende lo siguiente:

El método de Gumbel resulta ser el más adecuado de tomar en consideración para este caso, puesto que dicho método toma el efecto de una población doble, además permite una modificación hacia el método de Nash, ajustando la distribución de valores extremos por medio de mínimos cuadrados. El efecto de muestras con dos poblaciones es notable en el análisis principalmente para los valores mensuales.

El método de Nash es también bastante confiable para períodos de retorno pequeños, observándose que estas están dentro de rango aceptable.

El método del Water Resource Council es bastante conservador para períodos de retorno grandes y siendo lo menos para valores pequeños. Se descartar

ta totalmente el método en lo que se refiere a gastos mensuales, pues - los resultados que se obtienen se disparan debido a la diferencia poblacional de las muestras.

El método de Levediev es intermedio en los resultados y para gastos mensuales presenta valores disparados por el efecto poblacional.

Cabe mencionar que para el análisis mensual los valores considerados son los gastos máximos mensuales registrados.

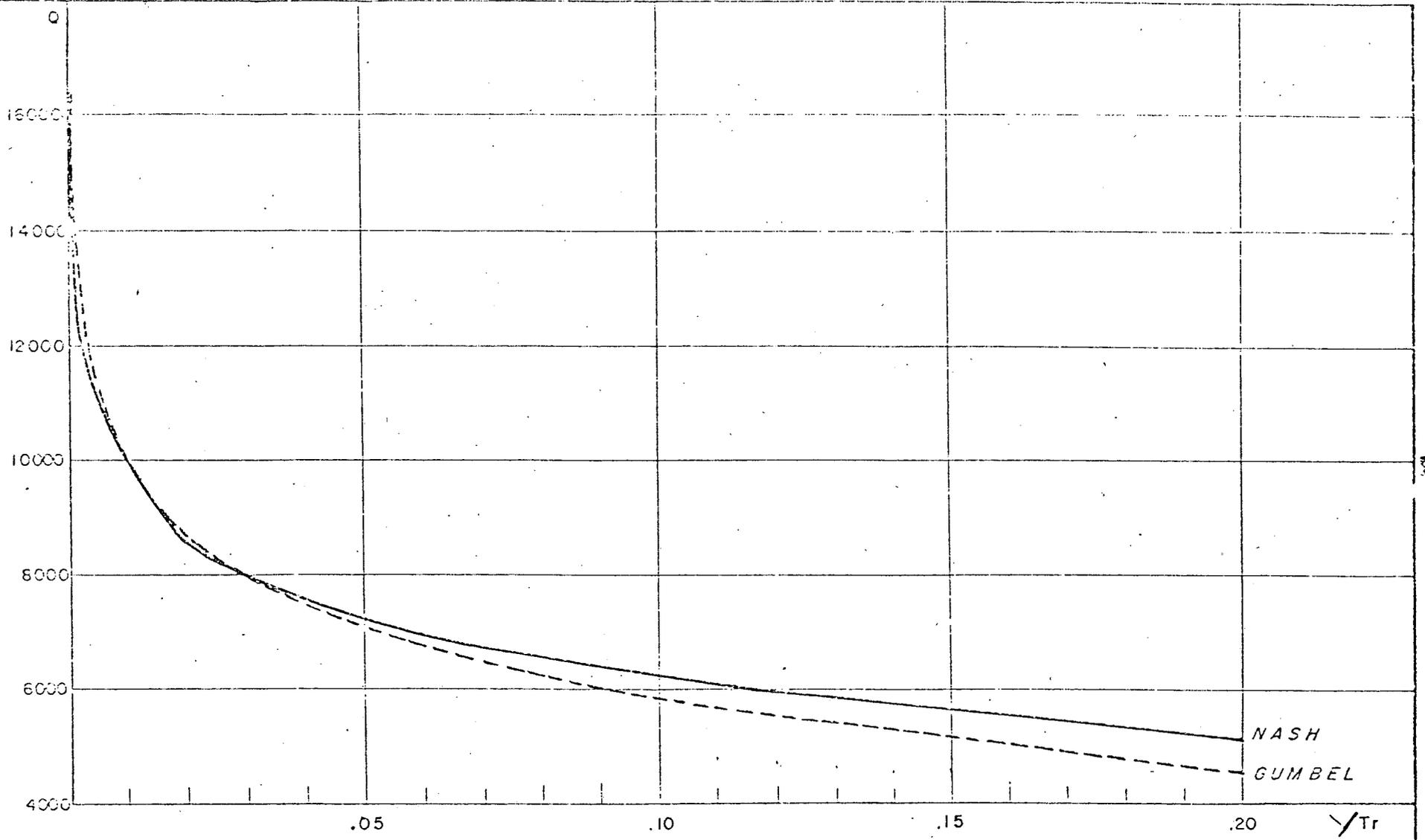
El método de Nash es el recomendado para la obra de desvío, ya que es el más crítico para períodos de retorno pequeños.

Los resultados anuales y mensuales para los métodos y períodos de retorno antes mencionados, se representan en las tablas No. 2, 3, 4, 5, 6 y 7, en las figuras 9, 10 y 11 se presentan las distribuciones.

AGUAMILPA  
 GASTOS MAXIMOS ESPERADOS  
 TABLA No. 2

PERIODO DE RETORNO	50	100	500	1000	5000	10000	AÑOS
METODO	CAPOMAL (18 Km a abajo del sitio)						
*WARECOUN	5459.37	6275.41	7408.92	9117.92	10572.27	12720.64	
LEVEDIEV	6164.63	6930.03	7922.65	9176.70	10127.06	11317.19	
HASH	6393.69	7074.50	8688.29	9387.32	11017.44	11721.82	
+GUMBEL	6230.0	6945.0	8602.0	9314.0	10968.0	11680.0	
	CARRIZAL (5 Km a abajo del sitio)						
*WARECOUN	6918.24	8154.47	9867.09	12522.00	14771.10	18158.79	
LEVEDIEV	8301.32	9569.25	11220.05	13311.82	14930.24	16962.29	
HASH	8419.24	9415.29	11743.76	12753.36	15110.07	16129.31	
+GUMBEL	8065.0	9106.0	11513.0	12549.0	14953.0	15898.0	
	HUAYNAMOTA (afluente)						
*WARECOUN	2562.29	3053.83	3817.61	5046.33	6245.09	8151.59	
LEVEDIEV	2926.36	3182.07	3743.16	4324.80	4766.74	5320.28	
HASH	3027.21	3348.86	4099.61	4424.63	5182.33	5509.67	
+GUMBEL	2958.0	3290.0	4060.0	4390.0	5159.0	5489.0	
	DESPEÑADERO (500 m abajo confluencia)						
*WARECOUN	4485.74	5150.64	6056.96	7417.31	8549.94	10211.95	
LEVEDIEV	5215.09	5898.78	6788.40	7913.25	8768.84	9840.91	
HASH	5381.90	5988.11	7405.35	8019.24	9450.35	10068.54	
+GUMBEL	5294.0	5920.0	7370.0	7994.0	9442.0	10066.0	

\* WATER RESOURCES COUNCIL  
 + VALORES SUPERIORES DEL INTERVALO DE CONFIANZA.



A G U A M I L P A  
G A S T O S - F R E C U E N C I A

DISTRIBUCIONES DE PROBABILIDAD

FIG. No. 9

### 3. ESTUDIO HIDRAULICO

#### 3.0. METODO DE DESVIO DEL RIO

El método para desviar el escurrimiento del río durante la construcción de la cortina, depende del tipo de la misma, del tipo de obras de excedencias y de toma, del flujo probable propiamente dicho, y del espacio disponible en la zona de construcción.

En el caso de una cortina de concreto, ya sea vertedora o no vertedora, que tenga suficiente espacio para el equipo de construcción, a menudo es favorable hacer colado de bloque, y dejar el flujo entre ellos, sin que tenga gran influencia el gasto máximo que brinque sobre la estructura. En otras ocasiones es factible que el flujo pueda pasar a través de un hueco dejado en la estructura.

El desvío por medio de túneles construidos en las laderas de los cañones, y que libren la zona de construcción, pueden tener alguna ventaja en cortinas de concreto, y su uso es casi obligado en cortinas de materiales graduados.

Para cortinas de materiales graduados, con frecuencia existe la necesidad de hacer el desvío en dos etapas: una primera en tajo ó canal y una se-

gunda en túneles ó una combinación de tajo o canal con túneles.

Los túneles de desviación pueden usarse con ventaja en la descarga de vertedores con canal lateral y en obras de toma y de control, por lo que en la planeación general se toma en cuenta esa posibilidad.

El costo del desvío es generalmente mayor para cortina de materiales graduados, que para cortina de concreto, debido a la gran amplitud de la base en las cortinas primeramente señaladas y a la restricción de que brinque alguna avenida sobre el cuerpo de la misma.

Las diferencias en costo de diferentes desvíos, generalmente no son de gran importancia en la selección del tipo de cortina, sin embargo en el caso de que se tenga un río permanente y muy caudaloso la diferencia de costo puede contribuir a la selección de la cortina de concreto.

Según las consideraciones anteriores, la planeación de las estructuras que formarán la obra de desvío, dependerán principalmente de cinco elementos:

- a) Magnitud del flujo por desviar, cuyas características se han discutido anteriormente.
- b) Características físicas del sitio de construcción: topográficas, geológicas, etc., que en parte han sido proporcionadas por el anteproyecto, quedando pendiente algunos estudios básicos que influirán posterior

mente en la elección del tipo de cortina. Sin embargo para la alternativa de una cortina de materiales graduados se desecha la posibilidad de un tajo en el cauce, debido a que el índice (altura de cortina) / (base de boquilla) y los gastos a desviar son muy grandes.

- c) Tipo de cortina por construir. El tipo de cortina, queda sujeto a los estudios básicos de geología, mecánica de suelos y rocas, y de localización de bancos de materiales. Que actualmente se llevan a cabo.

Por lo que este estudio contemplará cálculos hidráulicos tanto para la alternativa de cortina de materiales graduados como de concreto.

- d) Características y localización del resto de las estructuras hidráulicas que forman la presa. En este caso, la altura de la cortina que es del orden de 180 m impide considerar a priori el aprovechamiento de las obras de desvío - como son los túneles - en forma integral con la obra vertedora ó con la obra de toma. Por lo que inicialmente no se considerará esta posibilidad para el análisis de costos.

- e) Secuencia de las operaciones constructivas. La secuencia de las etapas constructivas quedarán definidas posteriormente con un análisis de factibilidad de daños aplicada a diferentes alternativas de obras.

### 3.1. ANALISIS HIDRAULICO DE LAS OBRAS DE DESVIO.

Este análisis contemplará primeramente las obras de desvío para la alternativa de una cortina de materiales graduados y posteriormente la de cortina de concreto.

Para la alternativa de materiales graduados, se calculará la derivación a través de túneles por ser este método el más factible.

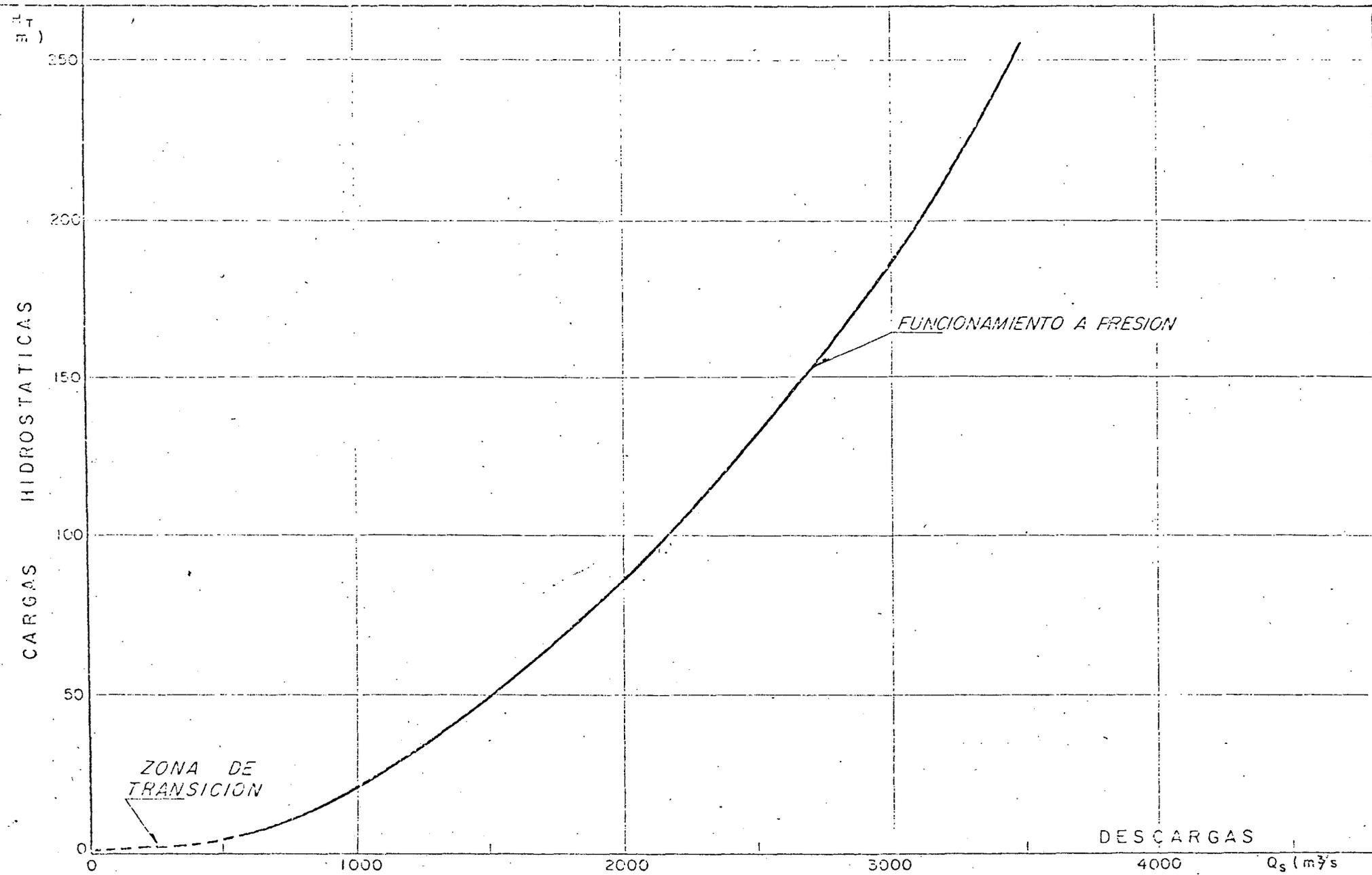
Se considerará inicialmente en los cálculos hidráulicos, túneles sin revestir y con recubrimiento, con velocidades límites de 10 y 20 m/s respectivamente. Dependiendo su modificación en función de los estudios - de la naturaleza de la roca y de su permeabilidad - que se están llevando a cabo.

Se adoptará la forma circular para los túneles, por ser la más eficiente tanto hidráulica como estructuralmente, cuando estos operan a presión.

Los cálculos hidráulicos se harán para una gama de diámetros desde 11 m a 17 m, rango que se considera incluye las alternativas óptimas para la solución del problema.

#### 3.1.1. FUNCIONAMIENTO HIDRAULICO A PRESION

El cálculo hidráulico de un conducto a presión puede basarse en la ecua-



CURVA GASTOS - CARGAS  
 PARA UN TUNEL DE 12.5 DE DIAMETRO

### 3.2. SIMULACION DE TRANSITO DE AVENIDAS.

Para el tránsito de avenidas a través de los túneles de desvío, se aplicó un programa de computación electrónica que está basado en los principios del Método de Goodridge.

Este programa requiere básicamente de la siguiente información:

- . Curva de elevaciones (cargas) - gastos de los túneles (ver. fig.12)
- . Curva de elevaciones - capacidades del vaso aguas arriba de la ataguía (ver fig.13)
- . Hidrograma de la avenida que se desea transitar.

Obteniéndose con dicho programa el hidrograma de descargas, así como las cargas hidráulicas que se requieren para dichas descargas, y que implican las alturas de ataguías que se necesitan.

Primeramente se transitó el tren típico de avenidas de gastos medios y se observó que la regularización por vaso, es prácticamente nula. Resultando ser las avenidas de mayor volumen de escurrimiento, tratadas aisladamente, las que producen la condición mas desfavorable. Los resultados de estos tránsitos aparecen en la sección "A" del apéndice.

# AREAS EN HECTAREAS

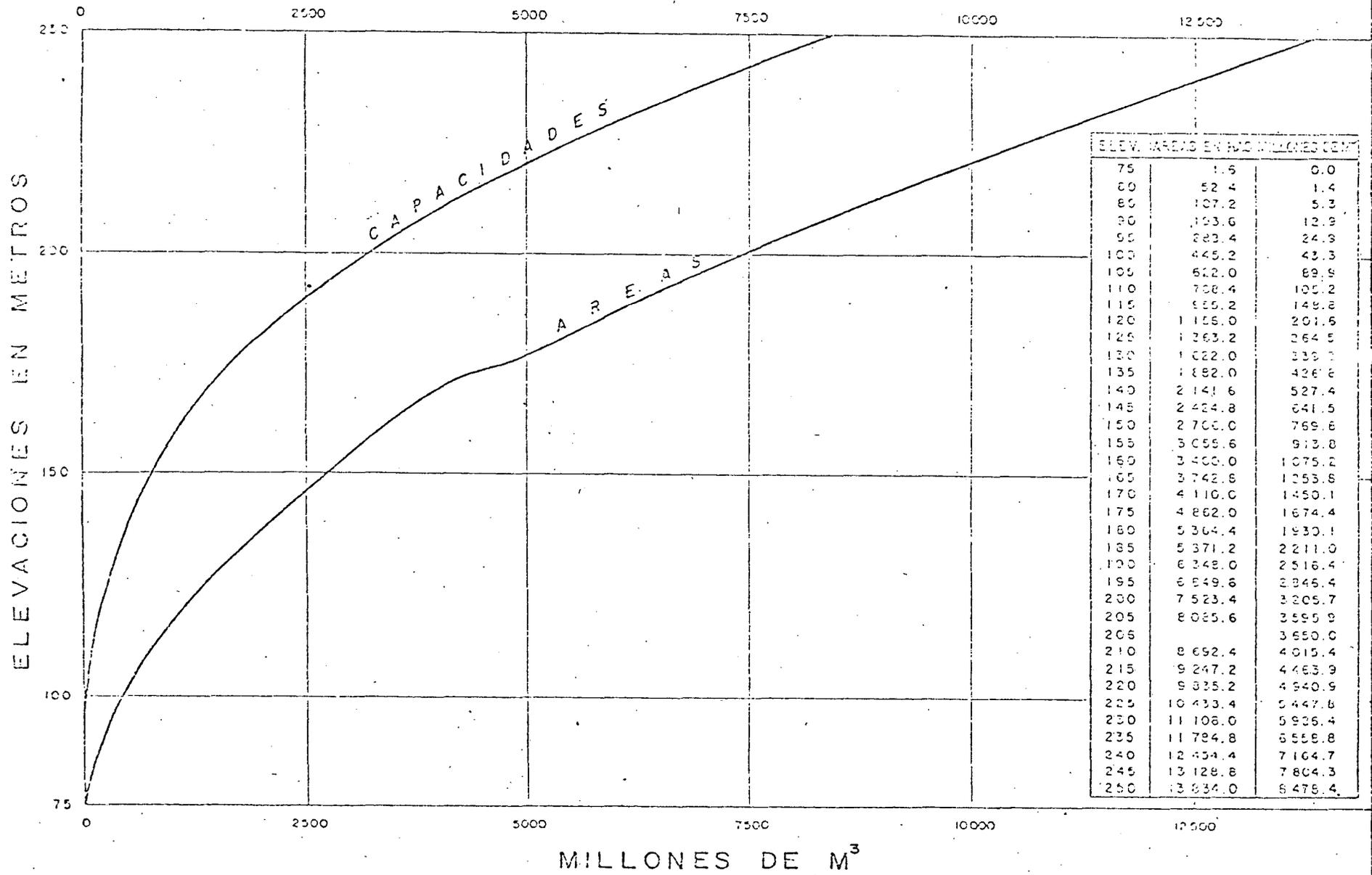


FIG. No.13

Habiéndose seleccionado la avenida registrada el mes de agosto de 1965 como prototipo de la avenida mas desfavorable. Esta avenida fue mayorada a períodos de retorno de 1, 2, 5, 12.5, 25, 50, 100 y 500 años para obtener una gama mayor de condiciones de operación de los túneles, ligadas a diferentes períodos de retorno.

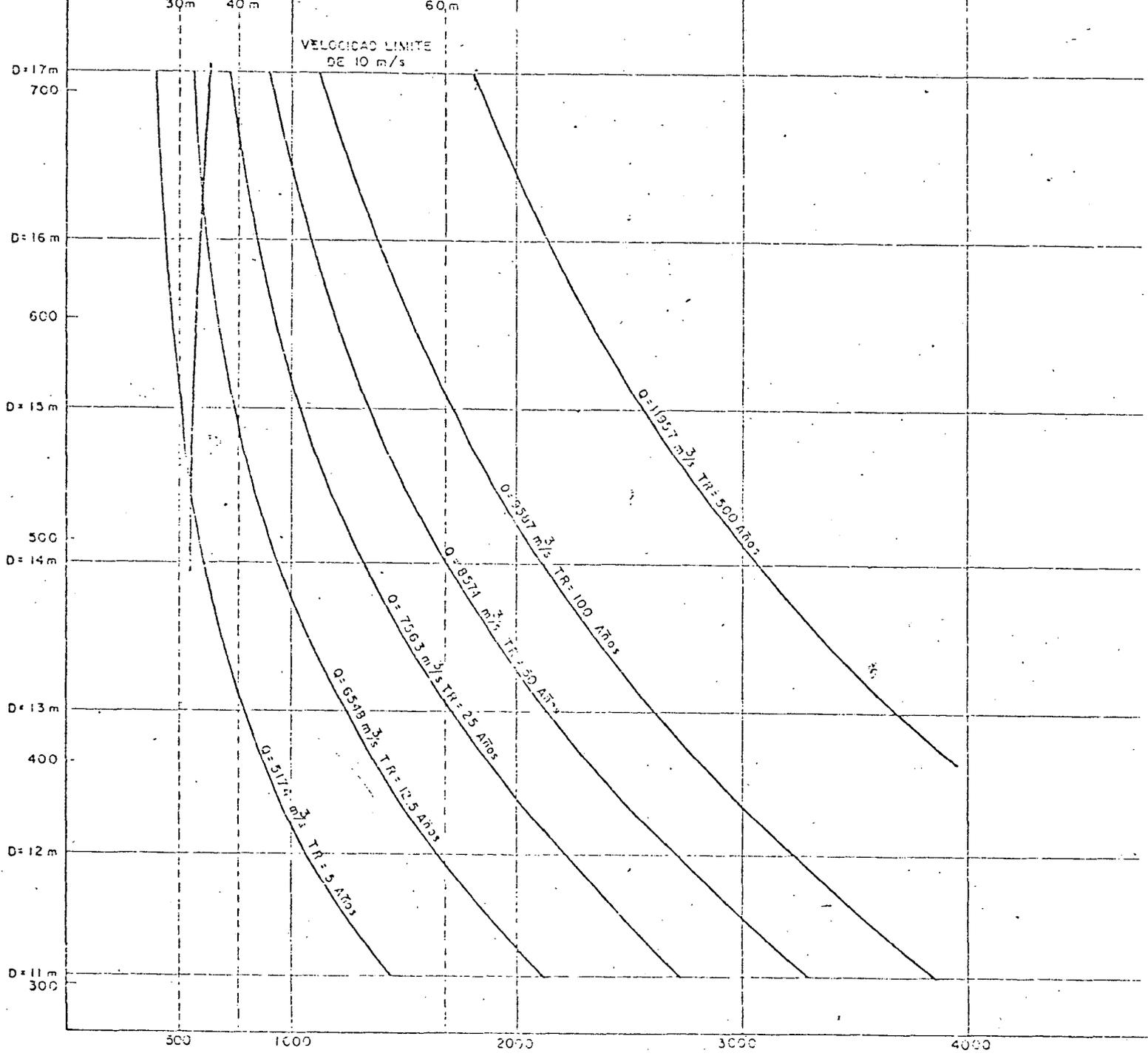
Estas avenidas mayoradas fueron transitadas por 2, 3, 4 y 5 túneles sin revestir y por 2 y 3 túneles revestidos para las alternativas de 11, 12, 13, 14, 15, 16 y 17 m de diámetro. Graficándose los resultados en forma de curvas de isogastos que se muestran con líneas continuas en las figuras 14, 15, 16, 17 y 18

En estas gráficas se muestran los pares coordenados de volúmenes de obra para, túneles - ataguías, ligados a los gastos con diferentes períodos de retorno que fueron considerados.

Para construir las anteriores gráficas, se hicieron las siguientes consideraciones:

- Las cargas hidráulicas necesarias para producir los diferentes escurrimientos, fueron consideradas a partir de la clave de los túneles aguas abajo.
- Para la ataguía aguas arriba, se consideró una sobreelevación por bordo libre de 1.50 m adicional a la elevación por carga hidráulica.

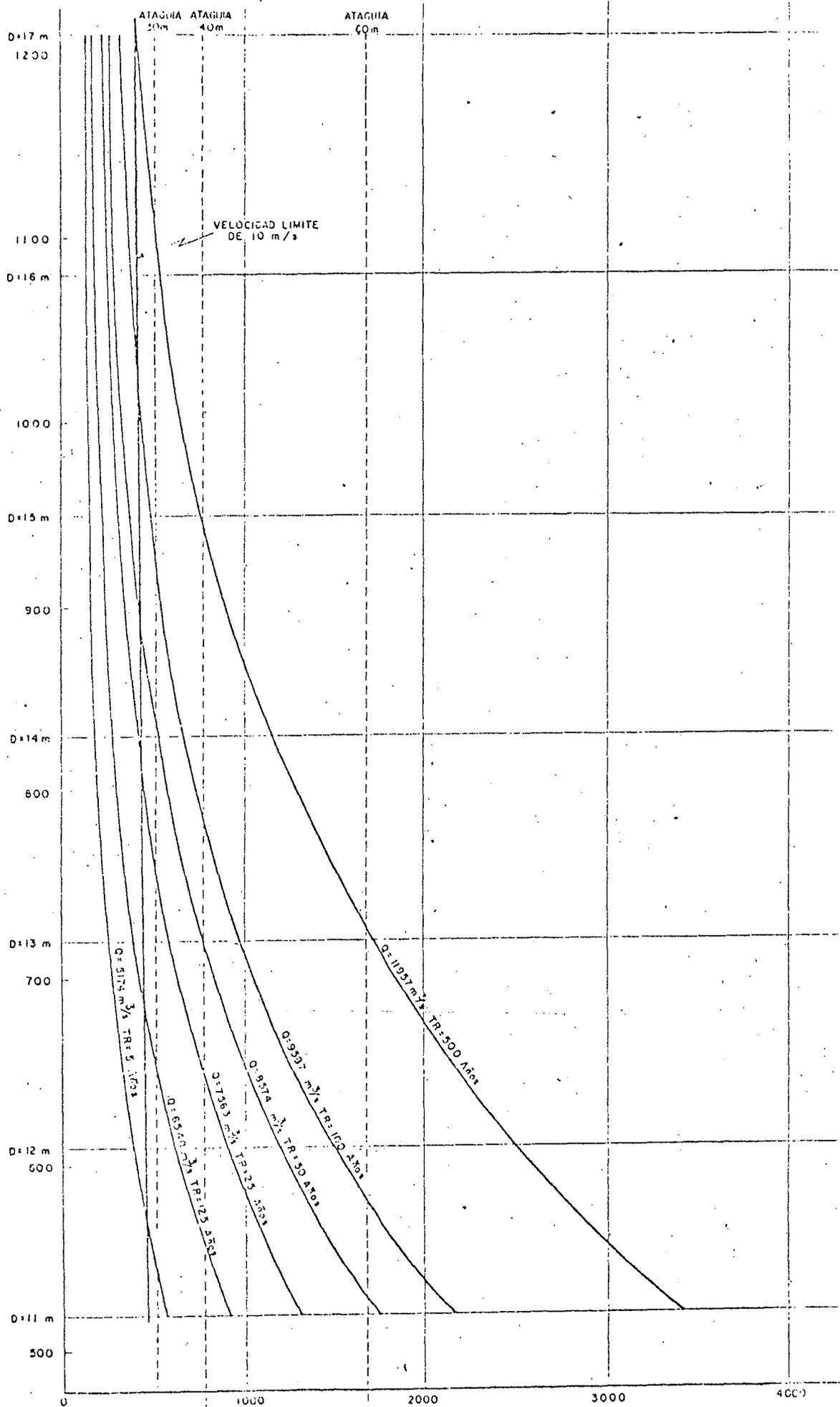
VOLUMEN DE EXCAVACIONES DE TUNELES EN MILES DE m<sup>3</sup>.



VOLUMEN DE MATERIAL DE ATAGUA EN MILES DE m<sup>3</sup>.

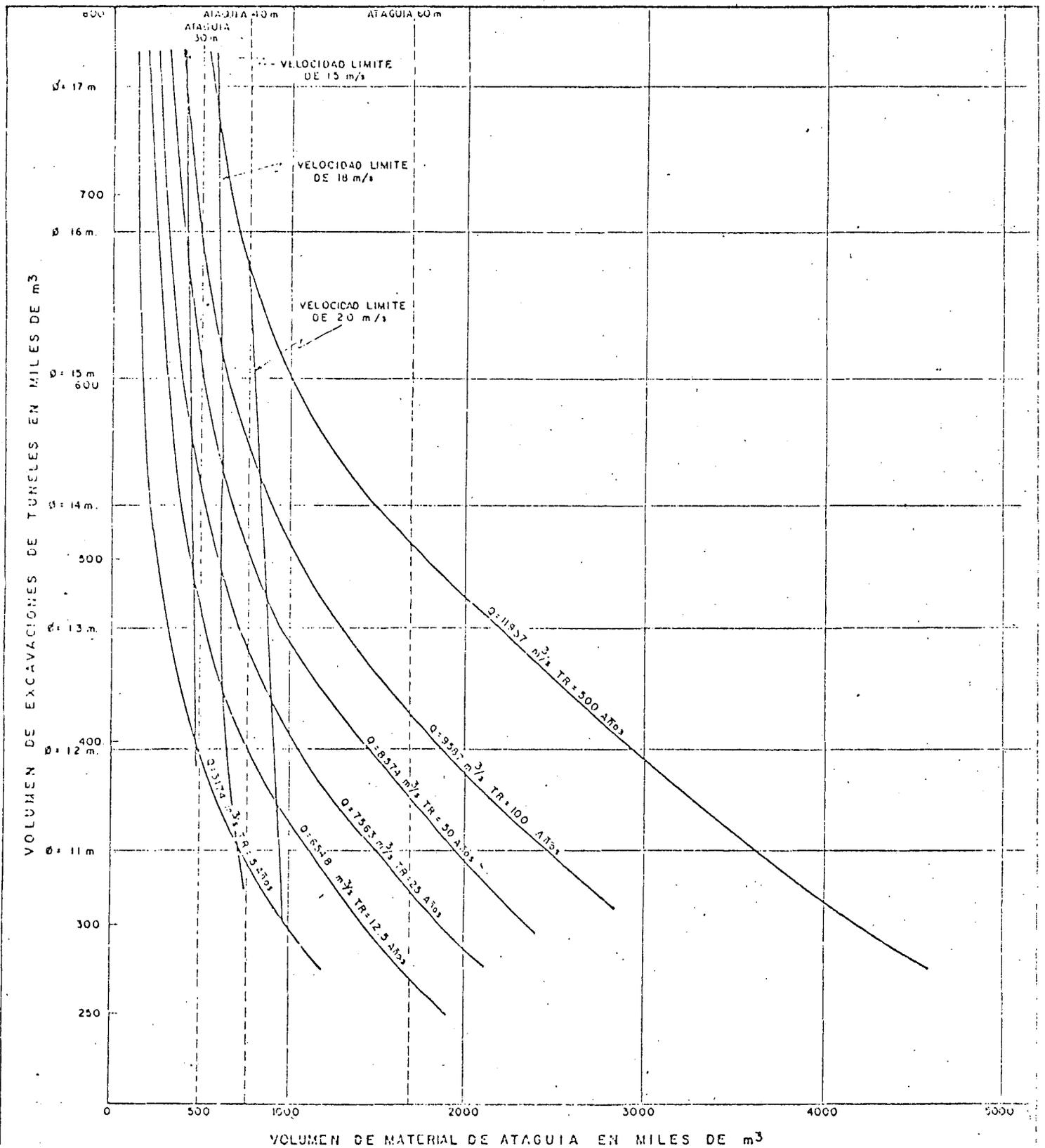
ALTERNATIVA - 3 TUNELES SIN REVESTIR

VOLUMEN DE EXCAVACIONES DE TUNELES EN MILES DE m<sup>3</sup>



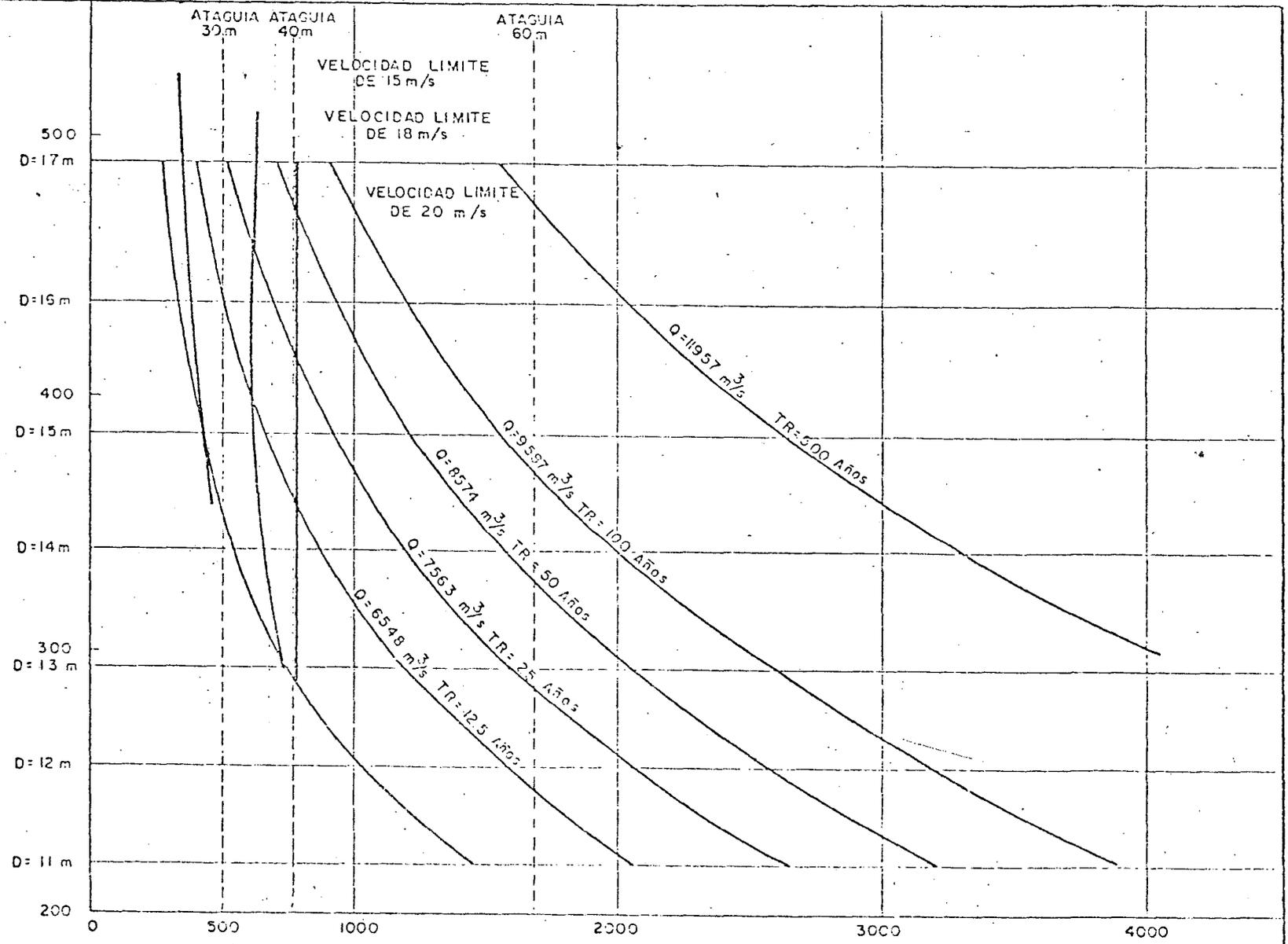
VOLUMEN DE MATERIAL DE ATAGUIA EN MILES DE m<sup>3</sup>

ALTERNATIVA -- 5 TUNELES SIN REVESTIR

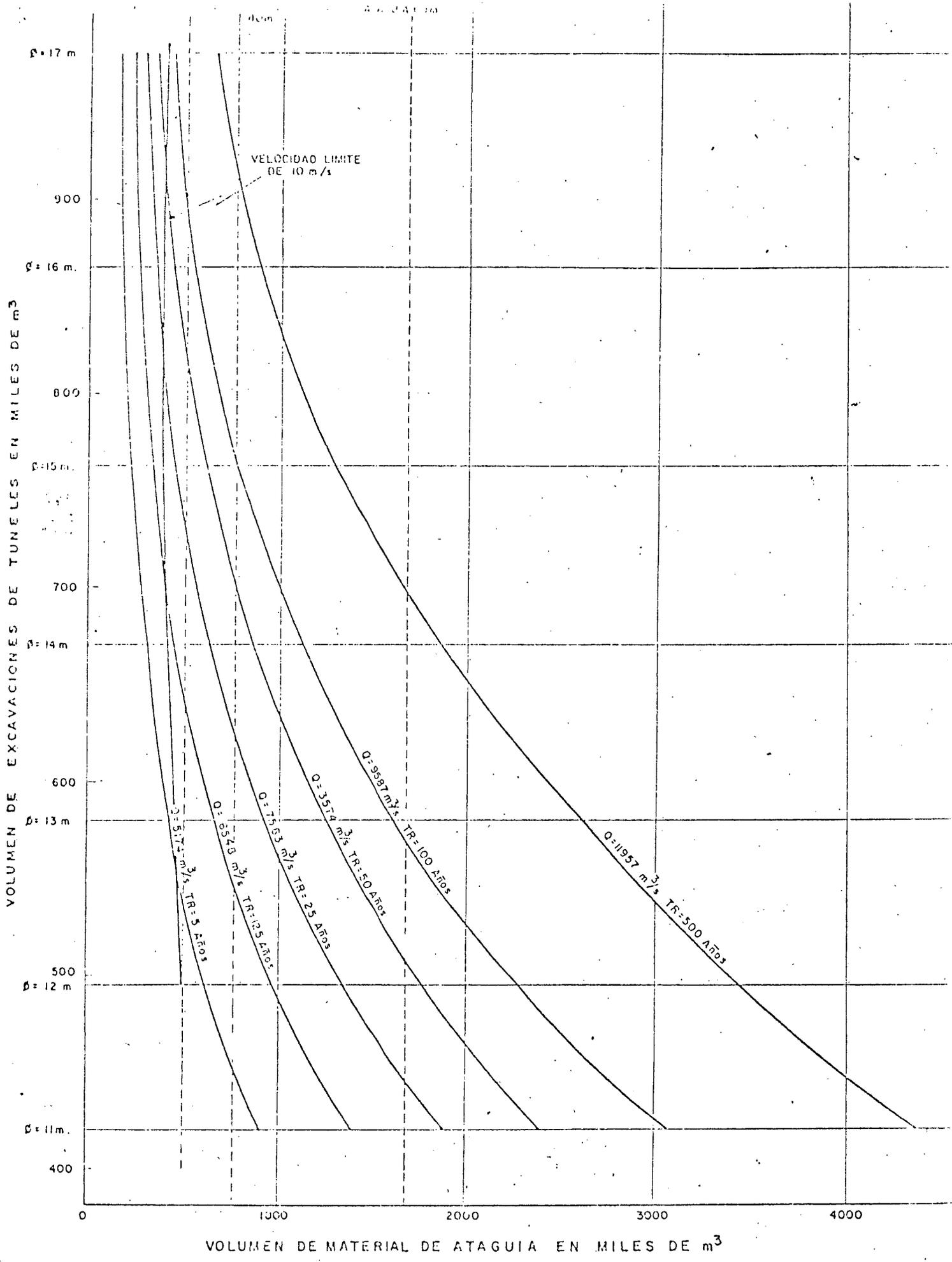


ALTERNATIVA.- 3 TUNELES REVESTIDOS

VOLUMEN DE EXCAVACIONES DE TUNELES EN MILES DE m<sup>3</sup>.



VOLUMEN DE MATERIAL DE ATAGUIA EN MILES DE m<sup>3</sup>  
ALTERNATIVA.- 2 TUNELES REVESTIDOS



ALTERNATIVA.- 4 TUNELES SIN REVESTIR

. Las ataguías de aguas abajo se consideraron de una altura neta de 22 m. En base a la altura máxima de escala registrada de 14.24 m en la estación Carrizal en el mes de septiembre de 1967, teniéndose de esta manera 7.76 m para sobreelevaciones provocadas por turbulencias en la descarga y por bordo libre.

. Los volúmenes de excavación en los túneles incluyen una línea "B" de pago de 20 centímetros.

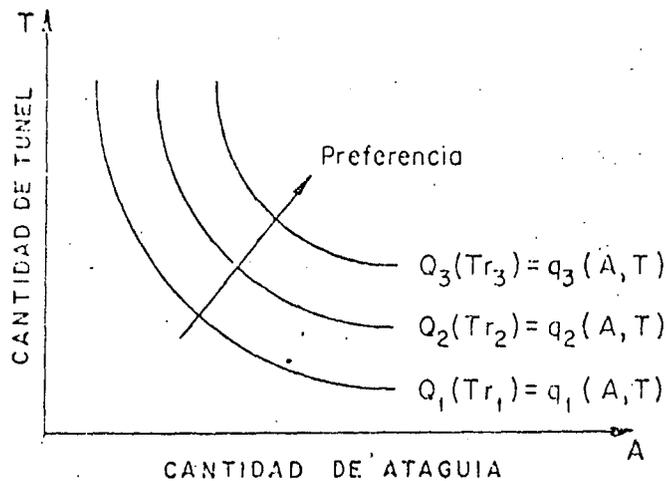
Algunos resultados de los tránsitos realizados, se anexan en la sección "B" del apéndice./

## 5.1.2. ANALISIS ECONOMICO

### 5.1.2.1. Curvas de isógasto

Se llamará curva de isógasto a la curva descrita por aquellos puntos coordinados dados por las combinaciones de ataguía-tunel, que representan el tránsito de un mismo gasto asociado a un período de retorno:

Nivel de Satisfacción.



en donde:

$$Q_3(Tr_3) > Q_2(Tr_2) > Q_1(Tr_1)$$

Con lo cual serán preferibles los niveles de satisfacción que correspondan a gastos mayores ó de un mayor período de retorno.

Estas curvas de isogasto poseen las siguientes características:

- a) Pendiente negativa.
- b) .Alguna curva de isogasto pasa por cada uno de los puntos del espacio de combinaciones de obra.
- c) Las curvas de gasto no se pueden intersectar, y
- d) Son cóncavas vistas desde arriba

#### 5.1.2.2. Tasa marginal de sustitución

La definición de Tasa Marginal de Sustitución para el caso específico de túneles- ataguías puede entenderse como "El número de unidades de cantidad de obra de túneles que pueden intercambiarse con unidades de cantidad de obra en ataguías, en forma tal que se mantenga un mismo nivel de satisfacción ó curva de isogasto.

En que  $q(A, T)$  es el nivel de satisfacción, en donde:  $A$  - Cantidad de ataguía y  $T$  - Cantidad de túnel.

Según la definición de Tasa Marginal de Sustitución, se requiere que para una curva de isogasto se cumpla que  $q(A, T) = CTE$ .

Tomando la derivada total obtenemos:

$$\frac{\partial q}{\partial A} dA + \frac{\partial q}{\partial T} dT = 0$$

Despejando  $-\frac{dT}{dA}$ , que es la pendiente de la curva de isogasto, tenemos:

$$-\frac{dT}{dA} = \frac{(\partial q / \partial A)}{(\partial q / \partial T)}$$

que equivale a la Tasa Marginal de Substitución, que geométricamente queda representada por la pendiente de una curva de isogasto en un punto determinado. La cual equivale a la tangente en dicho punto con pendiente negativa.

### 5.1.2.3. Línea de presupuesto

Haciendo el supuesto de que M es una cantidad fija de presupuesto, en un momento dado, y conociendo los precios de las cantidades de obra de túneles y ataguías, denotados por  $P_T$  y  $P_A$  respectivamente, se tiene que:

$$M \geq A \cdot P_A + T \cdot P_T$$

Que significa que la cantidad gastada en ataguías más la cantidad gastada en túneles no debe exceder el presupuesto estipulado por M.

ada

Considerando la linealidad de los precios con respecto a la cantidad y considerando además la igualdad de la ecuación anterior, se concluye:

$$M = A P_A + T P_T$$

que es la ecuación de una línea recta de la forma:

$$T = \frac{1}{P_T} M - \frac{P_A}{P_T} A$$

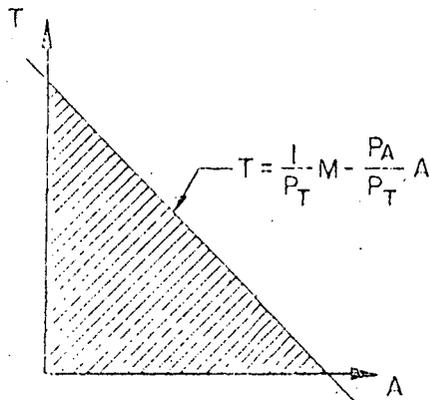
en donde:

T = Cantidad de obra de túnel (variable dependiente)

A = Cantidad de obra de ataguía (variable independiente)

$P_A/P_T$  = Pendiente de la recta (relación de precios índice)

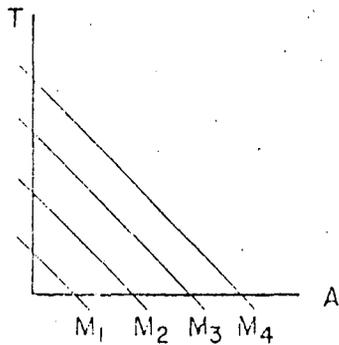
$M/P_T$  = Ordenada al origen



El área sombreada representa el espacio de posibles combinaciones según el presupuesto M.

#### 5.1.2.4. Curvas de isocosto.

Se tiene que para varios presupuestos a precios constantes se pueden construir una serie de rectas que representan varios niveles de presupuesto.



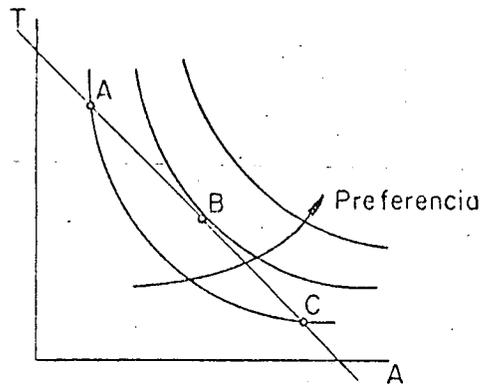
$$M_1 < M_2 < M_3 < M_4$$

para precios constantes son rectas paralelas y se puede interpolar entre ellas.

#### 5.1.2.5. Puntos económicos o de máxima satisfacción

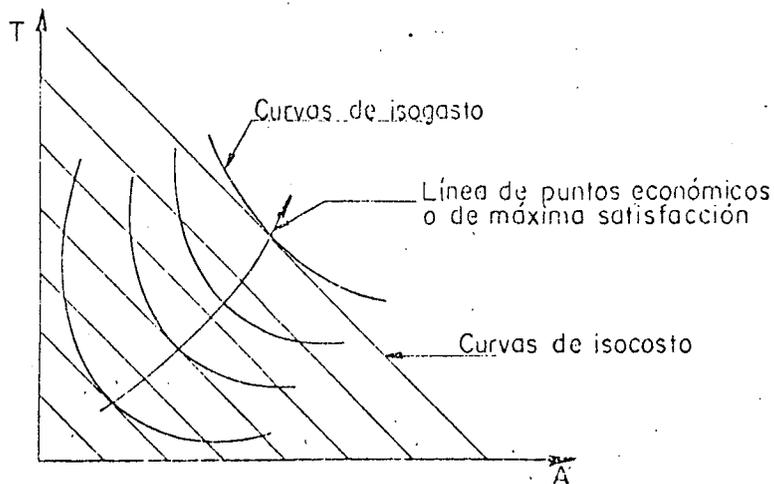
Para alcanzar con un presupuesto dado, un máximo de satisfacción, se requiere un punto donde la línea de presupuesto sea tangencial a la curva de isogasto, como se muestra en la figura. Lo cual se demuestra con la construc-

ción de la mencionada figura, en que se observa que la línea de presupuesto toca en tres puntos (A, B y C) a las curvas de isogasto, pero en el punto B se alcanza el máximo de satisfacción.



Por otra parte se dice que son puntos económicos, pues para un nivel dado de satisfacción, el presupuesto mínimo, es aquél en que la curva de isocosto ó línea de presupuesto es tangente a una curva de isogasto.

Para un conjunto de curvas de isogasto y para varias líneas de isocosto, se obtiene un número de puntos con las características anteriores, que definen una curva que contiene a todos los puntos de presupuesto mínimo y de máxima satisfacción, para los diferentes niveles de satisfacción del mapa de soluciones.



Analíticamente se puede garantizar que los puntos de máxima satisfacción y puntos económicos son aquellos en que la tasa marginal de sustitución de una curva de isogasto y la negativa de la relación de precios de unidad de obra de túnel y ataguía son iguales, ésto es:

$$\text{Dado } Q = q(A, T) \text{ y } M = A P_A + T P_T$$

la elevación al máximo de  $Q$ , sujeta la restricción de  $M$ , es un problema de extremos de Langrange. Elaborando la función:

$$L = q(A, T) - \lambda (A P_A + T P_T - M)$$

donde  $\lambda$  es un multiplicador de Langrange. Las condiciones de primer orden requieren que las dos derivadas parcialmente sean iguales a cero:

$$\frac{\partial L}{\partial A} = \frac{\partial q}{\partial A} - \lambda P_A = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial T} = \frac{\partial q}{\partial T} - \lambda P_T = 0$$

Pasando el segundo término de cada ecuación al lado derecho, y dividiendo la primera ecuación por la segunda, obtenemos:

$$\frac{\frac{\partial q}{\partial A}}{\frac{\partial q}{\partial T}} = \frac{P_A}{P_T}$$

MA

En donde: Tasa Marginal de sustitución =  $\frac{\frac{\partial Q}{\partial A}}{\frac{\partial Q}{\partial T}}$

Con lo que el punto de máxima satisfacción de Q con la restricción de M es cuando la tasa marginal de sustitución es igual a la negativa de la relación de precios.

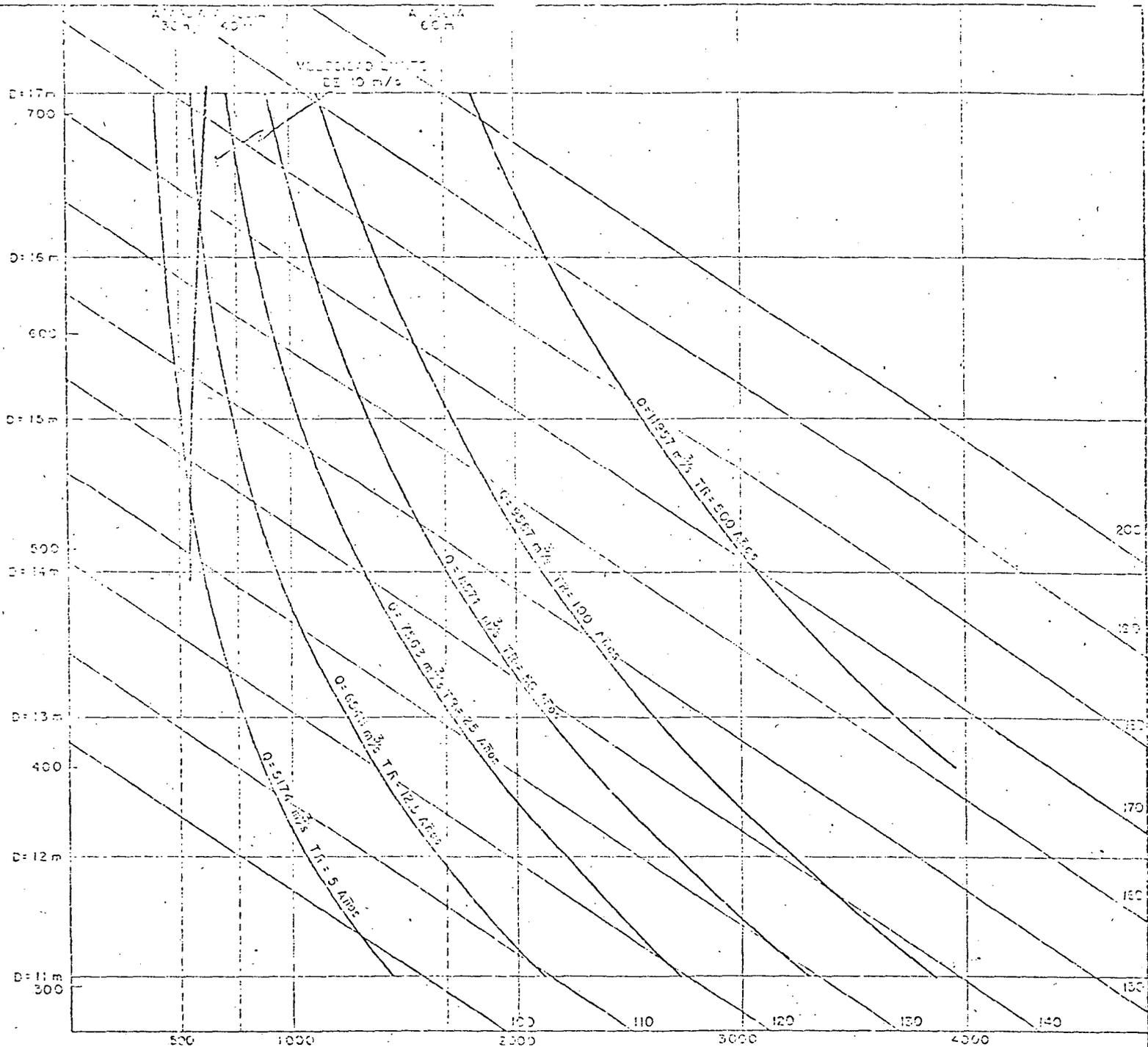
#### 5.1.2.6. Resultados.

Todo el análisis anterior se llevó a cabo para 5 alternativas que cubren la gama de posibilidades para la obra de desvío, de las cuales se tienen dos alternativas para túneles revestidos y tres para túneles sin revestir.

Las alternativas se muestran en las figuras 27, 28, 29, 30 y 31 en cada una se presentan curvas de isogasto para diámetros de 11 a 17 metros y diferentes alturas de ataguía. Asimismo se presentan las curvas para períodos de retorno de 5, 12.5, 25, 100 y 500 años. Además de las curvas de isogasto se tienen las de isocosto, que nos dan los costos aproximados de la obra de desvío que corresponden a un punto de las curvas de isogasto y en general para cualquier punto del mapa de soluciones.

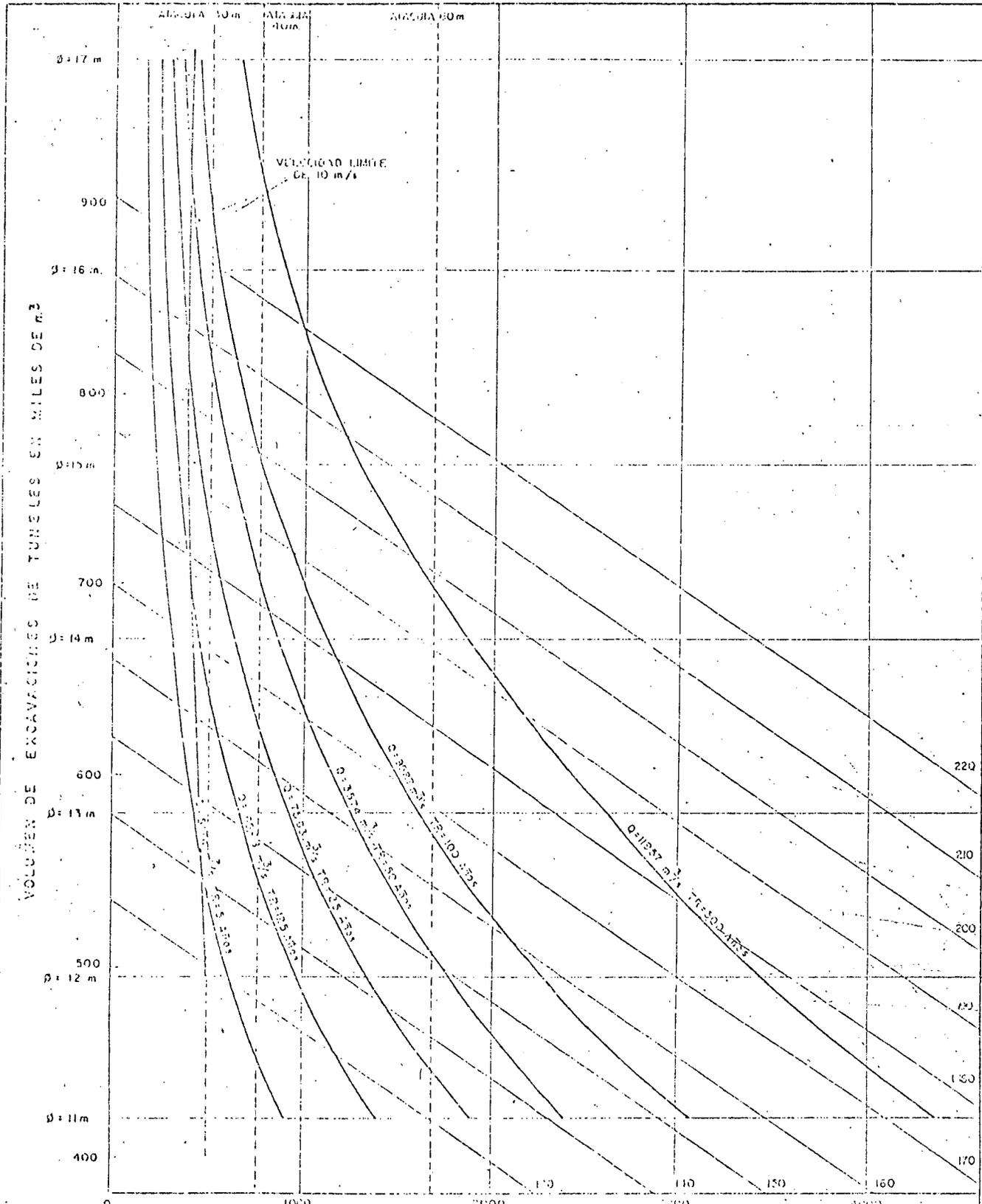
Se presenta también en la figura la curva de óptimos, que por condiciones técnicas no será factible aplicar, ya que las restricciones de velocidad

VOLUMEN DE EXCAVACIONES DE TUNELES EN MILES DE m<sup>3</sup>



VOLUMEN DE MATERIAL DE ATAGUA EN MILES DE m<sup>3</sup>

ALTERNATIVA - 3 TUNELES SIN REVESTIR



VOLUMEN DE MATERIAL DE ATAGUA EN MILES DE m<sup>3</sup>

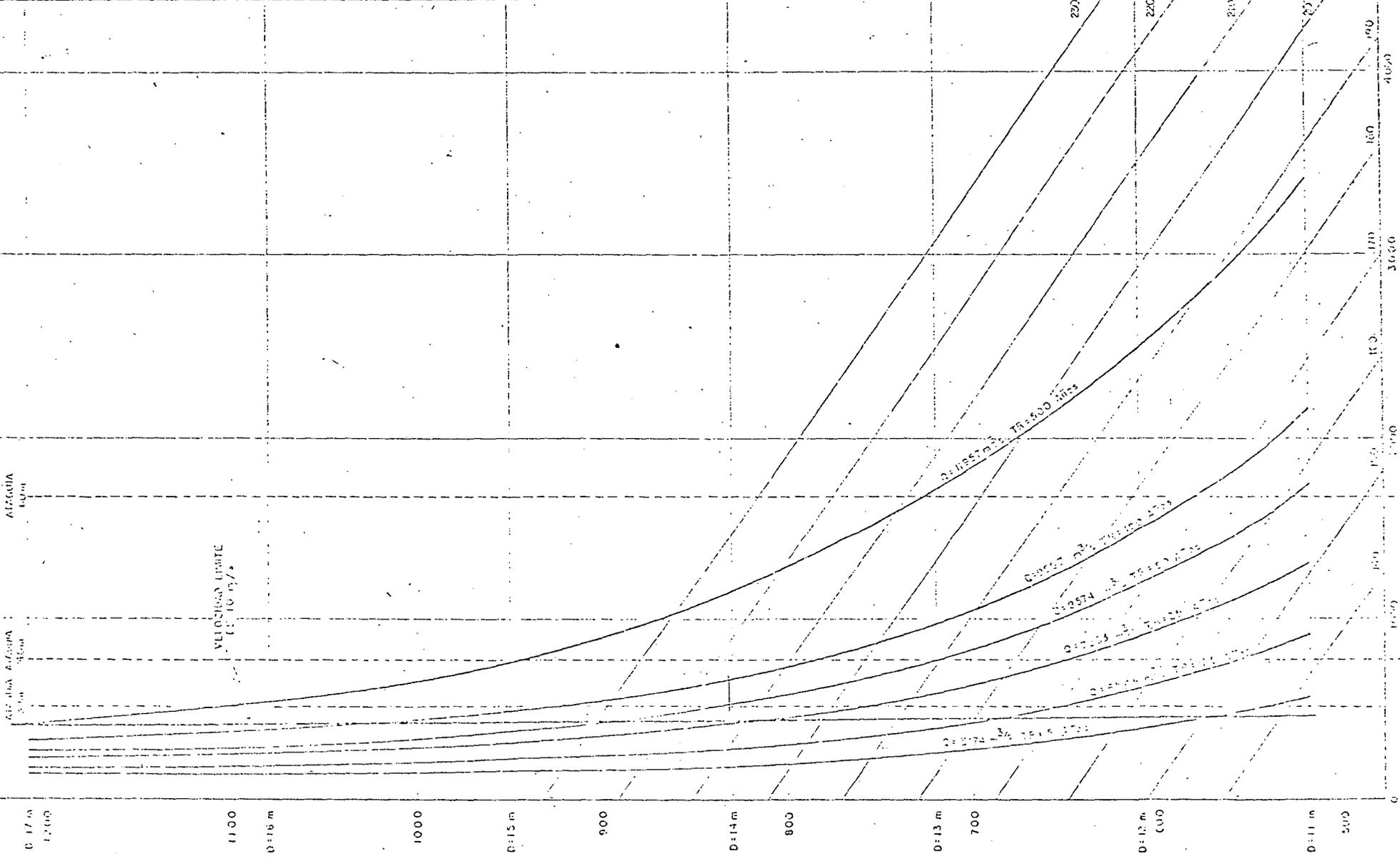
ALTERNATIVA - 4 TUNELES SIN REVESTIR

FIG. 28

VOLUMEN DE EXCAVACIONES DE TUNELES EN MILES DE m<sup>3</sup>

0:17 m  
1:00  
1:10  
1:15 m  
1:20  
1:25 m  
1:30  
1:35 m  
1:40  
1:45 m  
1:50  
1:55 m  
2:00

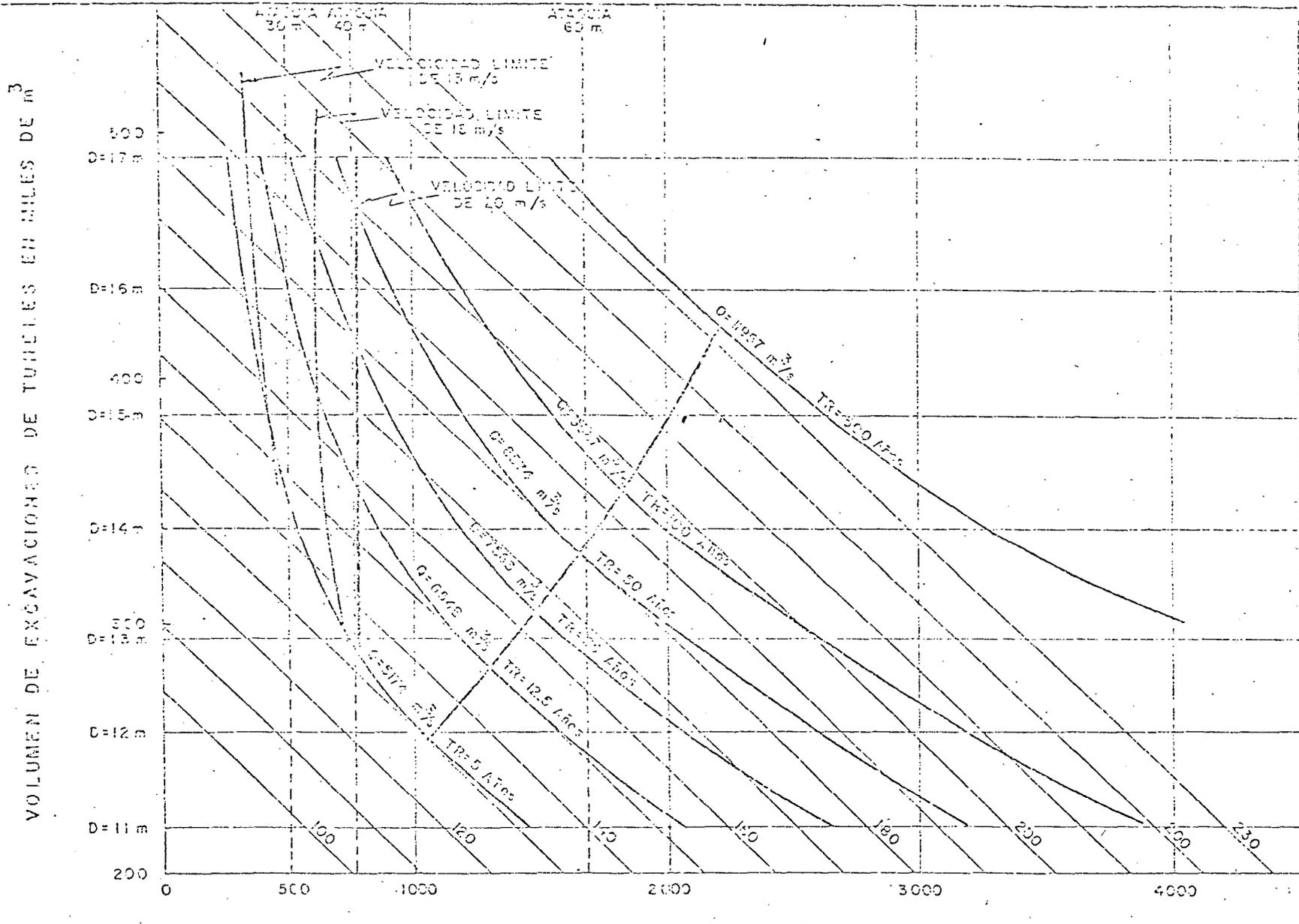
VELOCIDAD LINEAL  
10-16 m/s



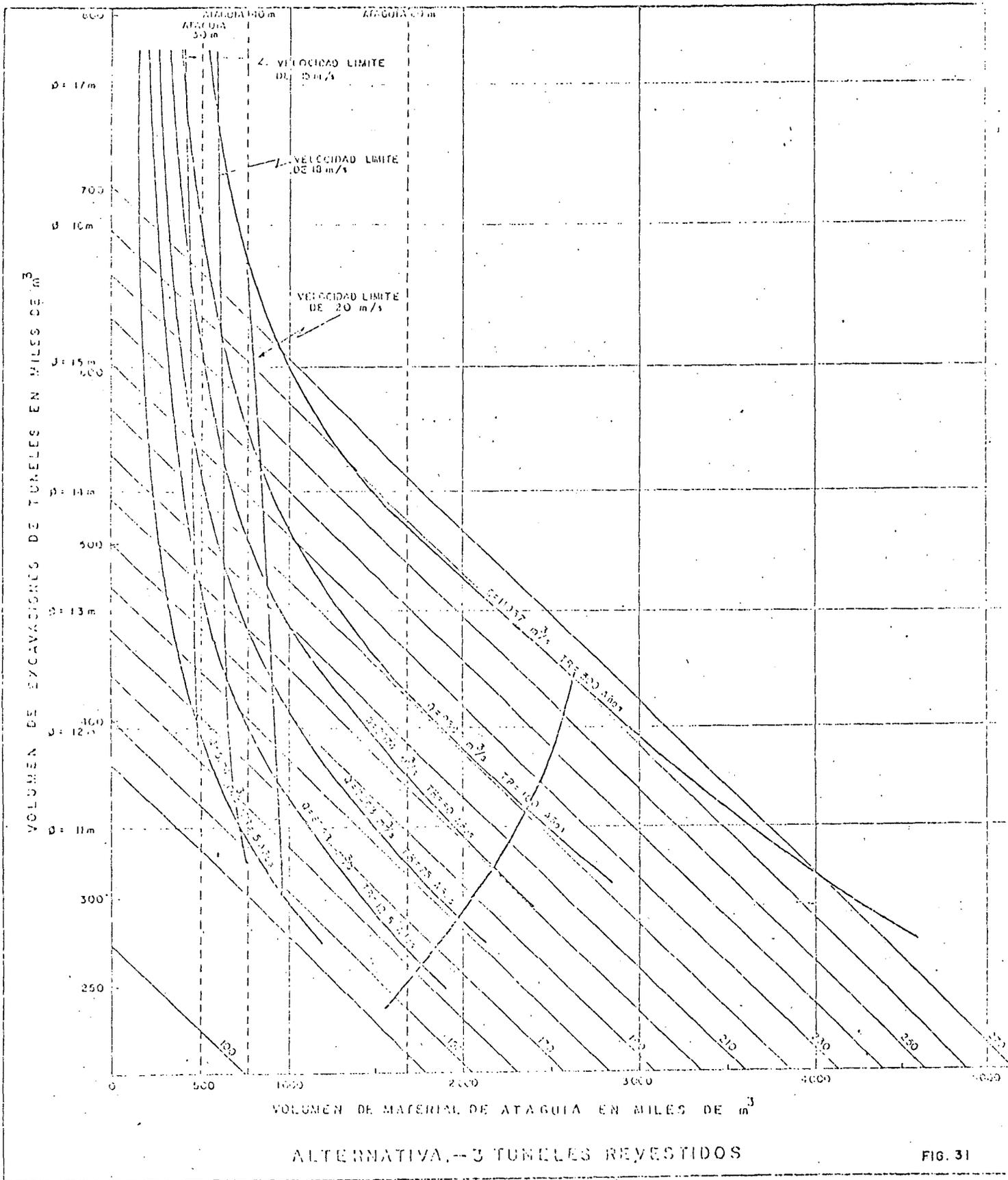
VOLUMEN DE EXCAVACIONES DE TUNELES EN MILES DE m<sup>3</sup>

ALAGUAS

ALAGUAS



VOLUMEN DE MATERIAL DE ATAGUIA EN MILES DE m<sup>3</sup>  
 ALTERNATIVA.- 2 TUNELES REVESTIDOS



tanto para túneles sin revestir y revestidos implicaron alturas de ataguía hasta cierto nivel y que como se muestra en las figuras representan una zona factible más reducida. Las restricciones por velocidad da una curva sobre el mapa de soluciones que en rigor debería de ser vertical pero por condiciones de régimen transitorio entre funcionamiento a presión y a superficie libre, en los túneles, se obtuvieron inclinaciones en las mismas.

Con estas cinco gráficas se está en posibilidad de hacer el análisis de la alternativa más económica, aunando a estos costos los riesgos que involucra cada alternativa.

### 5.1.3. ANALISIS DE DAÑOS.

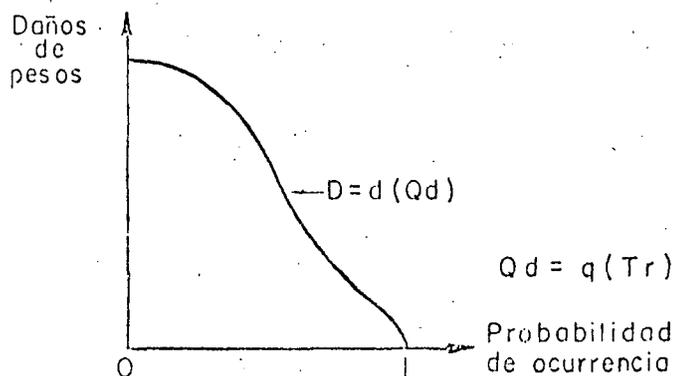
Para una obra de desvío, en que existe la posibilidad de destrucción parcial o total de la misma por inundación, durante su construcción y aún terminada la misma. Es necesario considerar el valor esperado de daños en la toma de decisiones. Este factor puede alcanzar proporciones importantes que alteren las posibles soluciones que se tengan, al considerar solo los costos.

El considerar la existencia de daños para una obra dada, involucra la presencia de escurrimientos mayores a los de diseño. Así, todos aquellos escurrimientos mayores proporcionan una distribución de daños, y la distribu-

ma

///

ción teórica y continua, para una obra determinada, adquiere la forma siguiente.



En donde:

D = Distribución de daños

$Q_d$  = Gasto de diseño asociado a un período de retorno

$T_r$  = Período de retorno

#### 5.1.3.1. Daños nulos

Para una curva de daños se tiene que, los costos por daño son nulos cuando el escurrimiento probable,

$$Q_i = q_i (T_r)$$

es de igual o menor período de retorno que el de diseño

$$Q_{d_j} = q_{d_j} (Tr),$$

lo cual representa un punto coordinado de abscisa (Tr), en el eje de las "Probabilidades de Ocurrencia" y ordenada en el origen (o), en el eje de los "Daños". O sea:

$$Q_i = q_i (Tr) \leq Q_{d_j} (Tr) \implies D = 0$$

#### 5.1.3.2. Daños Totales.

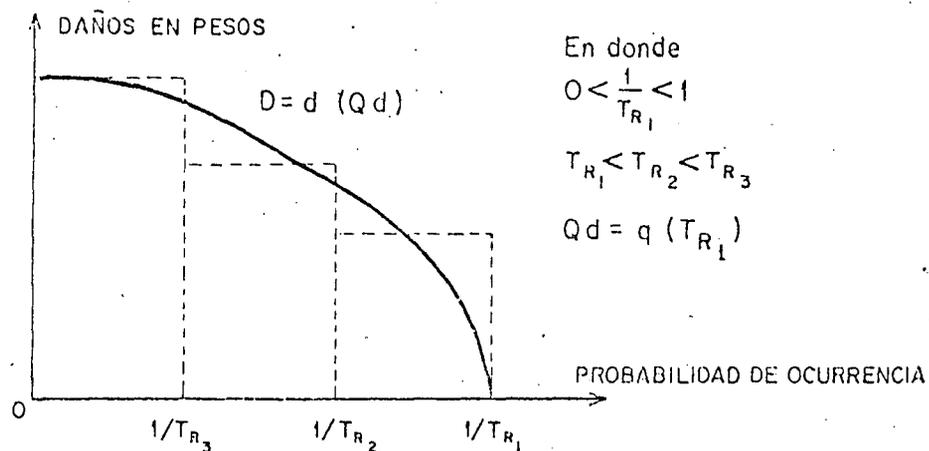
A medida que son mayores los escurrimientos, que el de diseño, los daños se incrementan. Pero para una probabilidad determinada y menores que dicha probabilidad, el daño prácticamente alcanza su valor total posible. Es decir, que la parte de la obra factible de dañarse queda totalmente destruida.

112

### 5.1.3.3. Cálculos de daños.

La distribución del costo por daño para una obra de capacidad de diseño determinada (túnel-ataguía), se estimará como los daños más críticos para cada uno de los ciclos anuales, durante la vida útil de la misma.

Es decir, para una obra de desvío, diseñada para un escurrimiento máximo  $Q_d$ ; con un período de retorno  $T_r$ , se tendrá el siguiente comportamiento.



En donde se observan tres costos de daños (líneas punteadas), el primero corresponde a los daños ocasionados en caso de que el agua rebase la altura de la ataguía, y los siguientes en caso de que se rebase la altura de la cortina, dicha altura está definida por el programa de construcción. Con lo cual la probabilidad de que se presente una inundación es menor.

Si se hiciera un análisis semestral, trimestral, mensual, etc, la gráfica de daños tendería la forma de una curva continua  $D = d (Q_d)$ .

El costo total de daños debe considerar: pérdida de la obra hasta el momento de la inundación, retraso en la terminación del programa e indemnizaciones, costos por pérdida de oportunidad, y un valor subjetivo de -- prestigio o aversión al riesgo, que puede ser importante en la decisión final.

El análisis se hizo para 5 alternativas, que comprenden 2 y 3 túneles revestidos y 3, 4 y 5 túneles sin revestir.

Habiéndose considerado como costos por daño, debido al retraso del programa e indemnizaciones, un porcentaje adicional del daño de la obra perdida en el momento de la inundación, como sigue:

	Valor del Daño	Incremento por retraso en el programa.	DAÑO TOTAL
PRIMER AÑO	$D_1$	$D_1$	$2.0 D_1$
SEGUNDO AÑO	$D_2$	$0.5 D_2$	$1.5 D_2$
TERCER AÑO	$D_3$	$0.33 D_3$	$1.33 D_3$
CUARTO AÑO	$D_4$	$0.25 D_4$	$1.25 D_4$

Por concepto de pérdida de oportunidad no se consideró ningún daño, ya que las inversiones son transferibles a otros aprovechamientos.

Los costos de aversión al daño por prestigio, se consideran después en el análisis de riesgos. Los cálculos y resultados se muestran a continuación en las tablas 12, 13, 14, 15 y 16.

ATAGUIA AGUAS ARRIBA. ELEV. (MIL. m)		D A N O S					
COSTO TOTAL ATAGUIAS (\$124 MILLONES)		(MILLONES DE PESOS)					
ALTERNATIVA DOS TUNELES REVESTIDOS							
PERIODO DE OCURRENCIA AÑOS (m)	(EN AÑOS)	5	12.5	25	50	100	50

5	13.0	ELEVACION PROBABLE DE INUNDACION (m)	111.0	121.2	129.9	137.6	145.5	161
---	------	--------------------------------------	-------	-------	-------	-------	-------	-----

AVANCE DE LA CORTINA		
AÑO	COSTO (MILLONES)	ELEVACION (m)
1	7.6	77.5
2	68.7	111.5
3	129.2	139.0
4	190.3	170.0

12.5	14.4	ELEVACION PROBABLE DE INUNDACION (m)	100.0	111.0	118.5	126.0	133.0	150.
------	------	--------------------------------------	-------	-------	-------	-------	-------	------

AVANCE DE LA CORTINA		
AÑO	COSTO (MILLONES)	ELEVACION (m)
1	7.6	77.5
2	68.7	111.5
3	129.2	139.0
4	190.3	170.0

25	15.5	ELEVACION PROBABLE DE INUNDACION (m)	94.6	104.5	111.0	118.5	125.5	142.
----	------	--------------------------------------	------	-------	-------	-------	-------	------

AVANCE DE LA CORTINA		
AÑO	COSTO (MILLONES)	ELEVACION (m)
1	7.6	77.5
2	68.7	111.5
3	129.2	139.0
4	190.3	170.0

50	16.7	ELEVACION PROBABLE DE INUNDACION (m)	90.4	99.1	106.0	111.0	118.6	134.0
----	------	--------------------------------------	------	------	-------	-------	-------	-------

AVANCE DE LA CORTINA		
AÑO	COSTO (MILLONES)	ELEVACION (m)
1	7.6	77.5
2	68.7	111.5
3	129.2	139.0
4	190.3	170.0

ATAGUIA AGUAS ARRIBA. ELEV. (115.0 m)		D A Ñ O S (MILLONES DE PESOS)						
COSTO TOTAL ATAGUIAS (\$472 MILLONES)		ALTERNATIVA TRES TUNELES REVESTIDOS						
7	0	PERIODO DE OCURRENCIA AÑOS (m)	5	12.5	25	50	100	500

5	10.0	ELEVACION PROBABLE DE FUNDACION (m)	118.0	129.0	138.0	146.0	154.0	174.0
---	------	-------------------------------------	-------	-------	-------	-------	-------	-------

AVANCE DE LA CORTINA								
AÑO	COSTO (MILLONES)	ELEVACION (m)						
1	7.6	77.5	-	54.8	54.8	54.8	54.8	54.8
2	68.7	111.5	-	115.9	115.9	115.9	115.9	115.9
3	129.2	139.0	-	-	176.4	176.4	176.4	176.4
4	190.3	170.0	-	-	-	-	-	-

12.5	11.5	ELEVACION PROBABLE DE FUNDACION (m)	118.0	123.4	131.5	138.6	156.6
------	------	-------------------------------------	-------	-------	-------	-------	-------

AVANCE DE LA CORTINA								
AÑO	COSTO (MILLONES)	ELEVACION (m)						
1	7.6	77.5	-	-	54.8	54.8	54.8	54.8
2	68.7	111.5	-	-	115.9	115.9	115.9	115.9
3	129.2	139.0	-	-	-	-	-	176.4
4	190.3	170.0	-	-	-	-	-	-

25	12.4	ELEVACION PROBABLE DE FUNDACION (m)		118.0	121.8	129.0	146.0
----	------	-------------------------------------	--	-------	-------	-------	-------

AVANCE DE LA CORTINA								
AÑO	COSTO (MILLONES)	ELEVACION (m)						
1	7.6	77.5	-	-	-	54.8	54.8	54.8
2	68.7	111.5	-	-	-	115.9	115.9	115.9
3	129.2	139.0	-	-	-	-	-	176.4
4	190.3	170.0	-	-	-	-	-	-

50	13.2	ELEVACION PROBABLE DE FUNDACION (m)			118.0	122.3	138.5
----	------	-------------------------------------	--	--	-------	-------	-------

AVANCE DE LA CORTINA								
AÑO	COSTO (MILLONES)	ELEVACION (m)						
1	7.6	77.5	-	-	-	-	54.8	54.8
2	68.7	111.5	-	-	-	-	115.9	115.9
3	129.2	139.0	-	-	-	-	-	-
4	190.3	170.0	-	-	-	-	-	-

## 5.1.4. ANALISIS DE RIESGOS

Se define riesgo, como el valor esperado del daño. La estimación de los riesgos se hace en base a las probabilidades de encuentro que recomienda Leon E. Borgam, en su método conocido con el nombre de Criterio de Riesgo. El cual considera la probabilidad de encuentro que depende de la independencia del evento año con año, de la vida útil de la obra y un período de retorno.

*en cuanto a la vida útil de la obra, se debe considerar la probabilidad de que el agua la rebase es demasiado pequeña.*

Se consideró para la obra de desvío, una vida útil de 3 años, que comprende desde el cierre del cauce hasta una etapa constructiva de la cortina, tal que la probabilidad de que el agua la rebase es demasiado pequeña. Con lo cual las probabilidades de encuentro dadas por Borgam, son las siguientes:

Período de retorno en años	Probabilidad de encuentro
5	0.488
12.5	0.229
25	0.115
50	0.059
100	0.030
500	0.006

Por otro lado, los períodos de retorno considerados para el diseño de la obra de desvío fueron de 5, 12.5, 25 y 50 años. Con lo que se construyeron

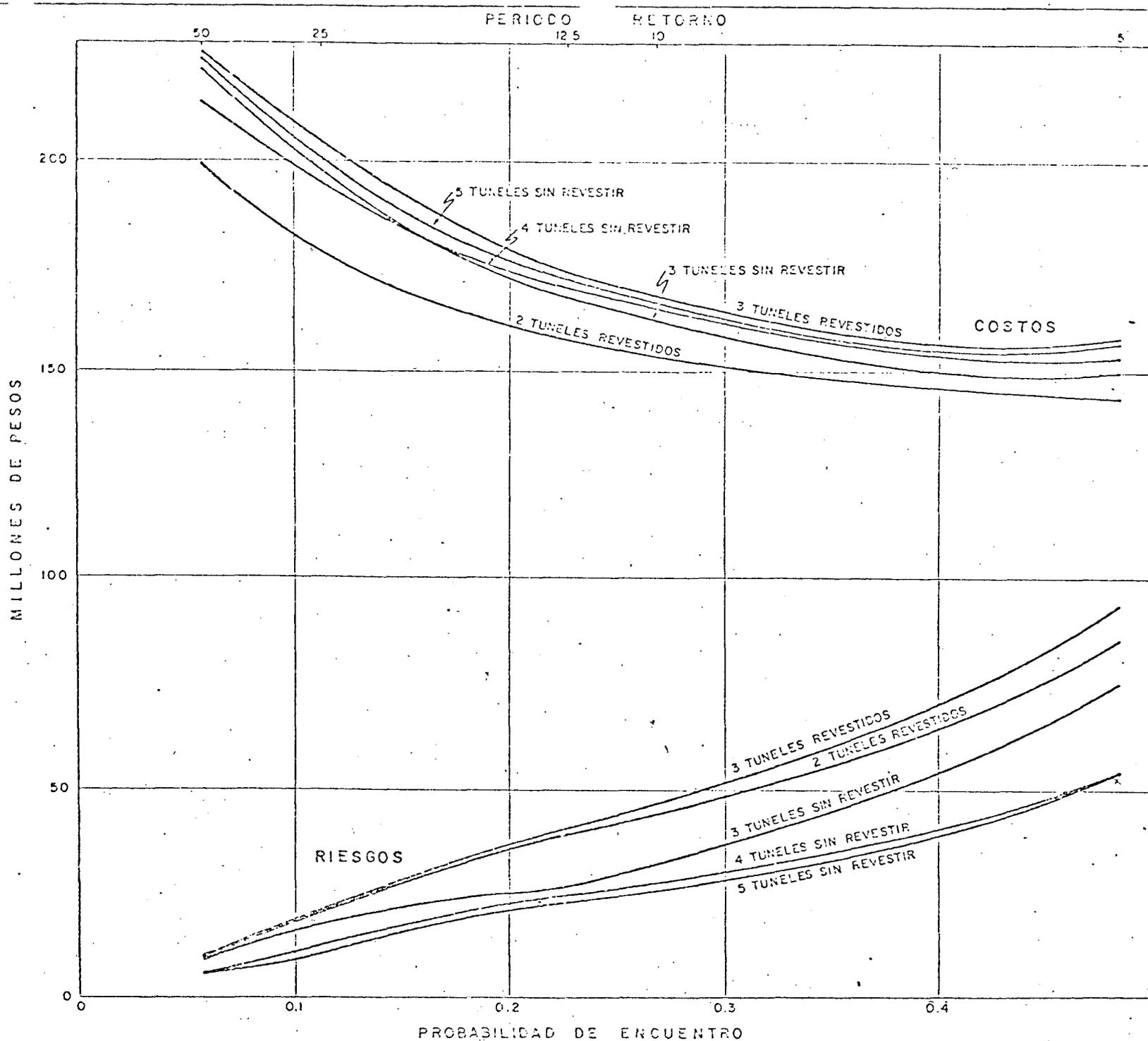
unas gráficas de riesgo para alternativas de 2 y 3 túneles revestidos y 3, 4 y 5 túneles sin revestir, la cual se puede ver en la figura 32.

Posteriormente se estimó un riesgo de aversión al daño o de prestigio con el fin de obtener un índice que permita jerarquizar las distintas alternativas. Para lo cual se consideró el doble de los riesgos calculados con anterioridad.

#### 5.1.5 CURVAS COSTOS + RIESGOS

Finalmente se construyen curvas de costos + riesgo, las cuales comprenden los costos de las alternativas de túneles para los diferentes períodos de retorno considerados y los riesgos de las mismas alternativas. Los resultados considerando los riesgos por daños de inundación y retraso en el programa, así como los que incluyen los riesgos por aversión al daño ó prestigio (costos + 2 riesgos). Se presentan en las gráficas 33 y 34 así como en las tablas 17, 18 y 19.

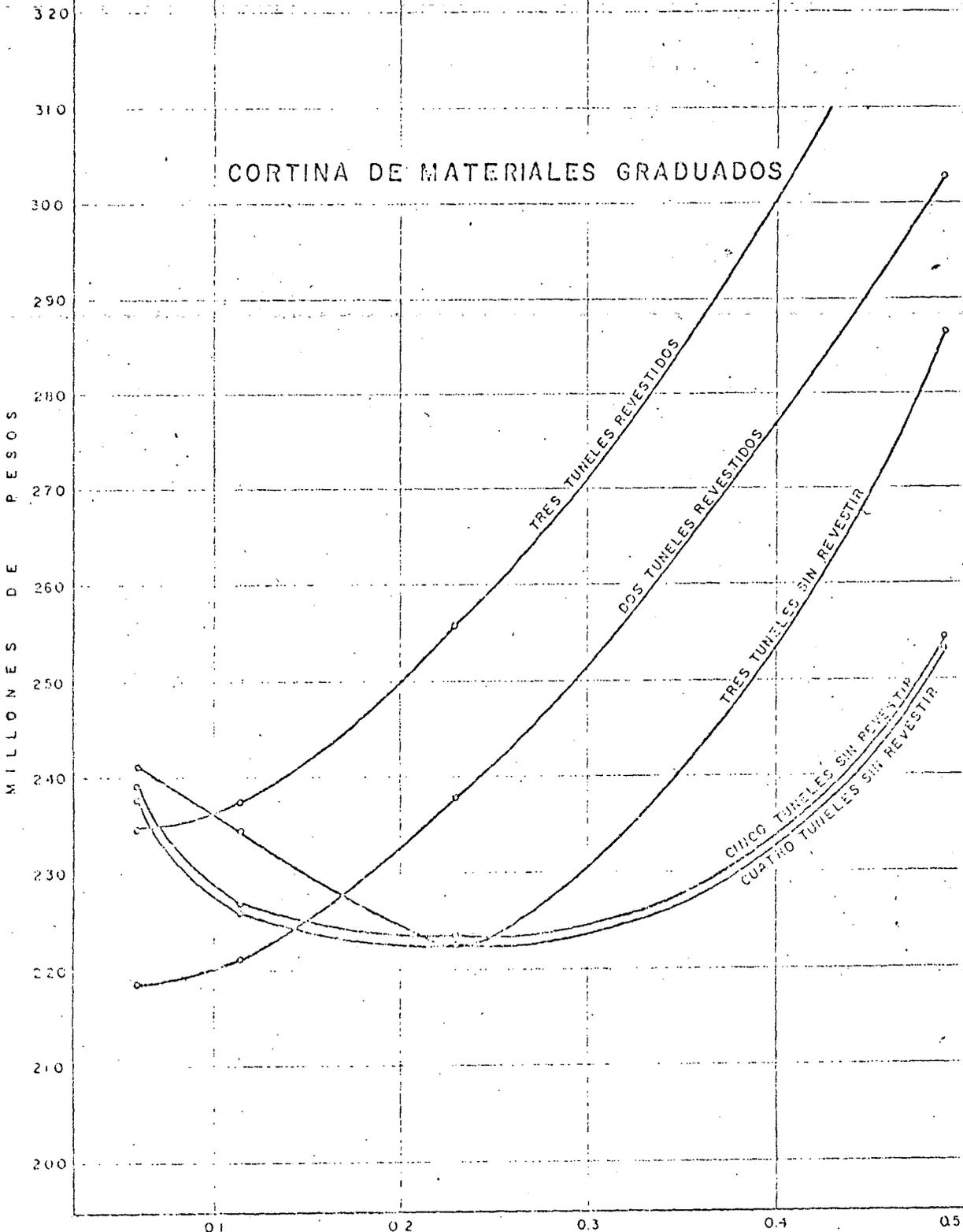
Gráficas que muestran a la alternativa de dos túneles revestidos, como la solución más confiable para períodos de retorno mayores a 12 años, y para períodos menores se observa que la mejor solución es la de cuatro túneles sin revestir.



red

PERIODOS DE RETORNO

50 25 12.5 5



CURVAS DE COSTOS + 2 (RIESGO)

FIG. 33

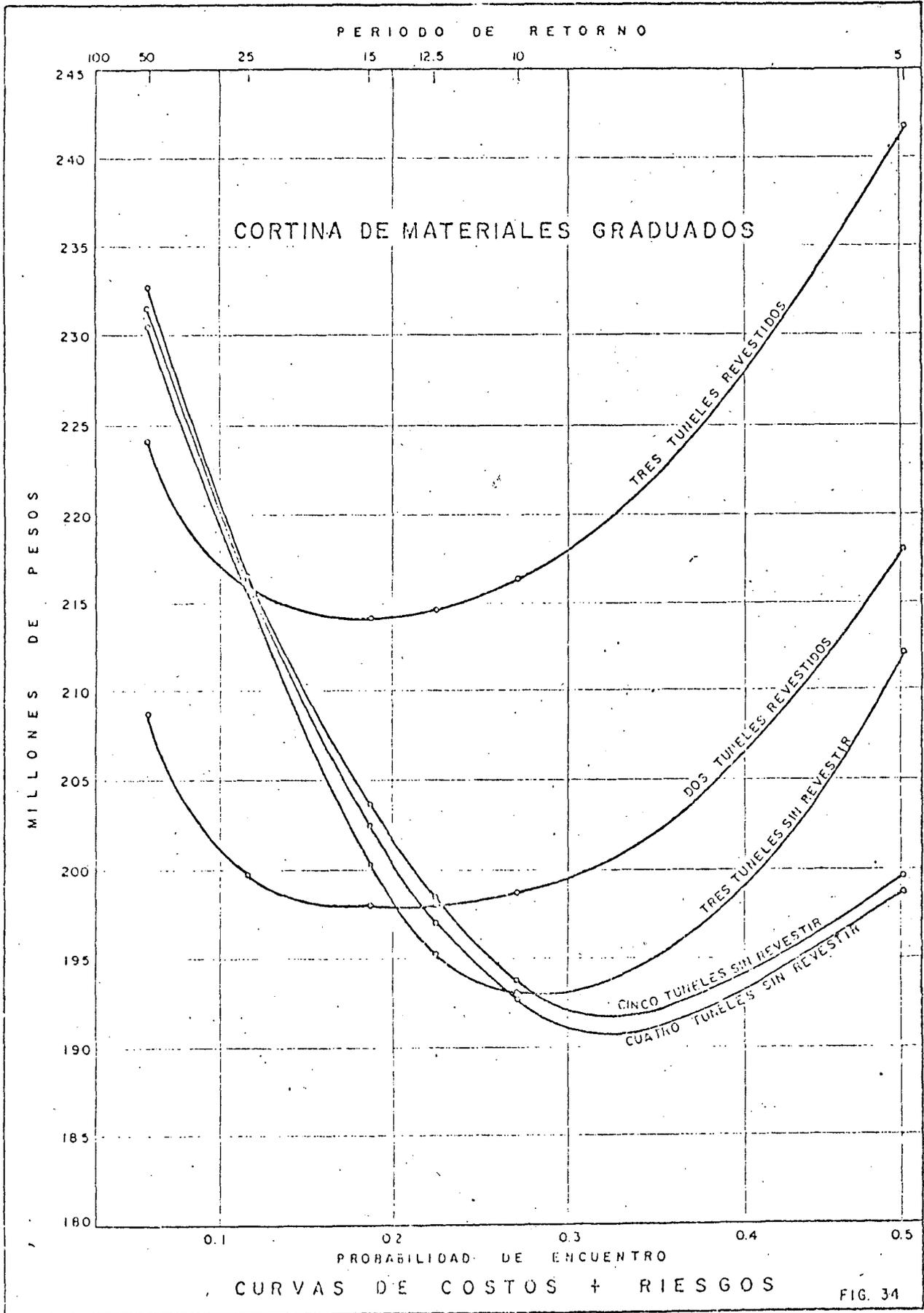


FIG. 34

COSTOS + RIESGOS

	ALTURA DE ATAGUIA	TUNELES REVESTIDOS (20 m/s)				TUNELES SIN REVESTIR (10 m/s)					
		DOS	Ø	TRES	Ø	TRES	Ø	CUATRO	Ø	CINCO	Ø
		40.40		42.0 m		34.5 m		28.0 m		27.0	
Tr	COSTO	133		148		137		142		145	
5	E ( DAÑO )	84.9	12.8	93.8	10.0	75	14.5	54.6	12.75	54.6	11.6
	Σ	217.9		241.8		212		198.6		199.6	
12.5	COSTO	158		173		168		172		174	
	E ( DAÑO )	40	14.3	41.6	11.50	27.6	16.2	25.1	14.4	24.9	12.7
	Σ	198		214.6		195.6		197.2		198.9	
25	COSTO	179		194		198		202		205	
	E ( DAÑO )	20.7	15.5	21.6	12.40	18.2	17.5	12.7	15.5	10.6	13.8
	Σ	199.7		215.6		216.2		214.7		215.6	
50	COSTO	199		214		222		224		226	
	E ( DAÑO )	9.8	16.6	10.2	13.3	9.5		6.5	16.4	6.5	14.5
	Σ	208.8		224.3		231.5		230.5		232.5	

TABLA 17

COSTOS + 2 (RIESGOS)

Tr	ALTURA DE ATAGUIA	TUNELES REVESTIDOS (20 m/s)				TUNELES SIN REVESTIR (10 m/s)					
		DOS	Ø	TRES	Ø	TRES	Ø	CUATRO	Ø	CINCO	Ø
		40.40		42.0		34.5		28.0		27.0	
5	COSTO E ( DAÑO ) Σ	133 169.8 302.8	12.8	148 187.6 335.6	10.0	137 150 287	14.5	142 109.2 251.2	12.75	145 109.2 254.2	11.6
12.5	COSTO E ( DAÑO ) Σ	258 80 238	14.3	173 83.2 256.2	11.5	168 55.2 223.2	16.2	172 50.4 222.4	14.4	174 49.8 223.8	12.7
25	COSTO E ( DAÑO ) Σ	179 41.4 220.4	15.5	194 43.2 237.2	12.4	198 35.4 234.4	17.5	202 25.4 227.4	15.5	205 21.1 226.1	13.8
50	COSTO E ( DAÑO ) Σ	199 19.6 218.6	16.6	214 20.4 234.4	13.3	222 19 241		224 13.0 237.0	16.4	226 13.1 239.1	14.5

TABLA 18

126

116

TABLA 18

122

ALTERNATIVA DE 14 Ø

COSTOS + RIESGO

	ALTERNATIVA	ALTURA ATAGUIA	COSTO	RIESGO	C + R
Tr					
3	3 T. sin revestir	34.5	128	85	213
10	4 T. sin revestir	28.0	170	30	200
10	2 T. revestidos	40.40	153	46	199
30	5 T. sin revestir	27.0	212	12	224
85	3 T. revestidos	42.00	234	3	237

COSTOS + 2. (RIESGOS)

3	3 T. sin revestir	34.5	128	170	298
10	4 T. sin revestir	28.0	170	60	230
10	2 T. revestidos	40.40	153	92	245
30	5 T. sin revestir	27.0	212	24	236
85	3 T. revestidos	42.00	234	6	240

TABLA 19

Sin embargo, considerando la inversión neta, se observa de las gráficas de costos, que la mejor alternativa es la de dos túneles revestidos de diámetro de 15 m.

En el capítulo 6, se incluye un análisis de sensibilidad con el fin de estar en posibilidad de tomar una decisión en base a un conocimiento más amplio de las condiciones de funcionamiento del sistema de la obra de desvío.

## 5.2 PRESA DE CONCRETO

### 5.2.1. COSTOS INDICE

En el análisis de costos índice para la presa de concreto, se consideraron los mismos resultados del análisis de costos correspondientes a la presa de materiales graduados (capítulo 5.1.1).

### 5.2.2. ANALISIS ECONOMICO.

Las consideraciones en que se basó el análisis económico para la presa de concreto, son las mismas que se realizaron para la presa de materiales graduados (capítulo 5.1.2).

#### 5.2.2.1 Resultados.

El análisis económico para la presa de concreto se llevó a cabo para las mismas 5 alternativas que se consideraron en la obra de desvío de la presa

de materiales graduados, las cuales comprenden dos alternativas para túneles revestidos y tres para túneles sin revestir, que cubren una gama de 11 a 17 m de diámetro cada una. Con lo cual las restricciones técnicas debidas a las máximas velocidades permisibles en los túneles, así como las características constructivas, serán las mismas que las mencionadas en el análisis de materiales graduados.

### 5.2.3 ANALISIS DE DAÑOS.

La metodología que se considera para el análisis de daños para la presa de concreto, se basa en las mismas consideraciones que se hicieron en la metodología aplicada a la alternativa de la presa de materiales graduados (capítulos 5.1.3, 5.1.3.1 y 5.1.3.2), con algunas modificaciones referentes a la evaluación del daño por retraso en el programa, así como en los daños posteriores en que la cortina alcanza alturas que permiten no reconstruir las ataguías en caso de que se presente una inundación. Estos aspectos se discuten más ampliamente en el capítulo 5.2.3.1, que se refiere al cálculo de daños correspondientes a la presa de concreto.

#### 5.2.3.1 Cálculo de Daños

Para la estimación de los costos por daños en la presa de concreto, se considera una cantidad por retraso adicional, en función de la elevación de la cortina en el momento de ocurrir la inundación. Estimándose éste en la siguiente forma:

	Elevación de la cortina	Valor del Retraso
PRIMER AÑO	52 m	4.0 millones de pesos
SEGUNDO AÑO	150 m	1.0
TERCER AÑO	240 m	0

En que se observa, que el daño por reposición de las ataguías, se considera solamente en el caso de que la inundación ocurra en el primer año.

Los cálculos realizados se presentan en las tablas 20, 21, 22, 23 y 24.

#### 5.2.4. ANALISIS DE RIESGOS

Para la estimación de los riesgos, se tomaron en cuenta los mismos planteamientos de León.E. Borgam, que se mencionan en el capítulo 5.1.4. Así como las consideraciones referentes a la vida útil de la obra y de los períodos de retorno, mencionados en dicho capítulo.

#### 5.2.5. CURVAS COSTOS + RIESGOS

Finalmente se construyen curvas de Costos + Riesgos, que comprenden los costos de las alternativas de túneles para los diferentes períodos de retorno considerados y los riesgos de dichas alternativas. Los resultados considerando los riesgos por daños de inundación y retraso en el programa, así como los que incluyen los riesgos por aversión al daño o prestigio (Costos + 2 Riesgos). Estos resultados se presentan en las gráficas 35 y 36, así como en las tablas 25 y 26.

Gráficas que muestran a la alternativa de dos túneles revestidos, como la solución mas confiable para períodos de retorno mayores a 7 años, y para períodos menores se observa que la mejor solución es la de tres túneles -- sin revestir.

ATAGUIA AGUAS ARRIBA. ELEV. (115.0m)		D A N O S					
COSTO TOTAL ATAGUIAS (\$47.2 MILLONES)		(MILLONES DE PESOS)					
ALTERNATIVA TRES TUNELES REVESTIDOS		5	12.5	25	50	100	500
Tr	PERIODO DE OCURRENCIA AÑOS (m)						
0	( EN AÑOS )						

3	10.0	ELEVACION PROBABLE DE INUNDACION (m)	118.0	129.0	138.0	146.0	154.0	174.0
---	------	--------------------------------------	-------	-------	-------	-------	-------	-------

AVANCE DE LA CORTINA								
AÑO	COSTO RETRASO	ELEVACION (m)						
1	4.0	52	-	51.2	51.2	51.2	51.2	51.2
2	1.0	150	-	-	-	-	1.0	1.0
3	0	240	-	-	-	-	-	-
4								

12.5	11.5	ELEVACION PROBABLE DE INUNDACION (m)		118.0	123.4	131.5	138.6	156.6
------	------	--------------------------------------	--	-------	-------	-------	-------	-------

AVANCE DE LA CORTINA								
AÑO	COSTO RETRASO	ELEVACION (m)						
1	4.0	52	-	-	51.2	51.2	51.2	51.2
2	1.0	150	-	-	-	-	-	1.0
3	0	240	-	-	-	-	-	-
4								

25	12.4	ELEVACION PROBABLE DE INUNDACION (m)			118.0	121.8	129.0	146.0
----	------	--------------------------------------	--	--	-------	-------	-------	-------

AVANCE DE LA CORTINA								
AÑO	COSTO RETRASO	ELEVACION (m)						
1	4.0	52	-	-	-	51.2	51.2	51.2
2	1.0	152	-	-	-	-	-	-
3	0	240	-	-	-	-	-	-
4								

50	13.2	ELEVACION PROBABLE DE INUNDACION (m)				118.0	122.3	138.5
----	------	--------------------------------------	--	--	--	-------	-------	-------

AVANCE DE LA CORTINA								
AÑO	COSTO RETRASO	ELEVACION (m)						
1	4.0	52	-	-	-	-	51.2	51.2
2	1.0	152	-	-	-	-	-	-
3	0	240	-	-	-	-	-	-
4								

234

ATAGUIA AGUAS ARRIBA. ELEV. (1110 m)		D A N O S					
COSTO TOTAL ATAGUIAS (\$42.4 MILLONES)		(MILLONES DE PESOS)					
ALTERNATIVA DOS TUNELES REVESTIDOS		5	12.5	25	50	100	500
Tr	PERIODO DE OCURRENCIA						
AÑOS (m)	( EN AÑOS )						

5	13.0	ELEVACION PROBABLE DE INUNDACION (m)	111.0	121.2	129.9	137.6	145.5	164.5
---	------	--------------------------------------	-------	-------	-------	-------	-------	-------

AVANCE DE LA CORTINA								
AÑO	COSTO RETRASO	ELEVACION (m)						
1	4.0	52	-	46.4	46.4	46.4	46.4	46.4
2	1.0	150	-	-	-	-	-	1.0
3	0	240	-	-	-	-	-	-
4								

12.5	14.4	ELEVACION PROBABLE DE INUNDACION (m)	100.0	111.0	118.5	126.0	133.0	150.0
------	------	--------------------------------------	-------	-------	-------	-------	-------	-------

AVANCE DE LA CORTINA								
AÑO	COSTO RETRASO	ELEVACION (m)						
1	4.0	52	-	-	46.4	46.4	46.4	46.4
2	1.0	150	-	-	-	-	-	-
3	0	240	-	-	-	-	-	-
4								

25	15.5	ELEVACION PROBABLE DE INUNDACION (m)	94.6	104.5	111.0	118.5	125.5	142.5
----	------	--------------------------------------	------	-------	-------	-------	-------	-------

AVANCE DE LA CORTINA								
AÑO	COSTO RETRASO	ELEVACION (m)						
1	4.0	52	-	-	-	46.4	46.4	46.4
2	1.0	150	-	-	-	-	-	-
3	0	240	-	-	-	-	-	-
4								

50	16.7	ELEVACION PROBABLE DE INUNDACION (m)	90.4	99.1	106.0	111.0	118.6	134.0
----	------	--------------------------------------	------	------	-------	-------	-------	-------

AVANCE DE LA CORTINA								
AÑO	COSTO RETRASO	ELEVACION (m)						
1	4.0	52	-	-	-	-	46.4	46.4
2	1.0	150	-	-	-	-	-	-
3	0	240	-	-	-	-	-	-
4								

TABLA 20

134

ATAGUIA AGUAS ARRIBA, ELEV. (101.0m)			D A Ñ O S (MILLONES DE PESOS)					
COSTO TOTAL ATAGUIAS (\$31.2MILLONES)			ALTERNATIVA TRES TUNELES SIN REVESTIR					
T <sub>p</sub> AÑOS	σ (m)	PERIODO DE OCURRENCIA (EN AÑOS)	5	12.5	25	50	100	500

5	14.8	ELEVACION PROBABLE DE INUNDACION (m)	103.6	113.3	120.7	127.6	134.1	148.8
---	------	--------------------------------------	-------	-------	-------	-------	-------	-------

E = 101.0 \$ = 31.2	AVANCE DE LA CORTINA								
	AÑO	COSTO RETRASO	ELEVACION (m)						
	1	4.0	52	-	35.2	35.2	35.2	35.2	35.2
	2	1.0	150	-	-	-	-	-	-
	3	0	240	-	-	-	-	-	-
4									

12.5	16.5	ELEVACION PROBABLE DE INUNDACION (m)	98.2	105.2	111.0	117.0	123.0	136.4
------	------	--------------------------------------	------	-------	-------	-------	-------	-------

E = 105.4 \$ = 35.2	AVANCE DE LA CORTINA								
	AÑO	COSTO RETRASO	ELEVACION (m)						
	1	4.0	52	-	-	39.2	39.2	39.2	39.2
	2	1.0	150	-	-	-	-	-	-
	3	0	240	-	-	-	-	-	-
4									

25	17.3	ELEVACION PROBABLE DE INUNDACION (m)	96.3	102.4	107.3	112.6	118.3	130.6
----	------	--------------------------------------	------	-------	-------	-------	-------	-------

E = 107.0 \$ = 36.8	AVANCE DE LA CORTINA								
	AÑO	COSTO RETRASO	ELEVACION (m)						
	1	4.0	52	-	-	-	40.8	40.8	40.8
	2	1.0	150	-	-	-	-	-	-
	3	0	240	-	-	-	-	-	-
4									

50	18.2	ELEVACION PROBABLE DE INUNDACION (m)	96.4	100.0	104.1	108.8	114.0	125.0
----	------	--------------------------------------	------	-------	-------	-------	-------	-------

E = 108.0 \$ = 38.4	AVANCE DE LA CORTINA								
	AÑO	COSTO RETRASO	ELEVACION (m)						
	1	4.0	52	-	-	-	-	42.4	42.4
	2	1.0	150	-	-	-	-	-	-
	3	0	240	-	-	-	-	-	-
4									

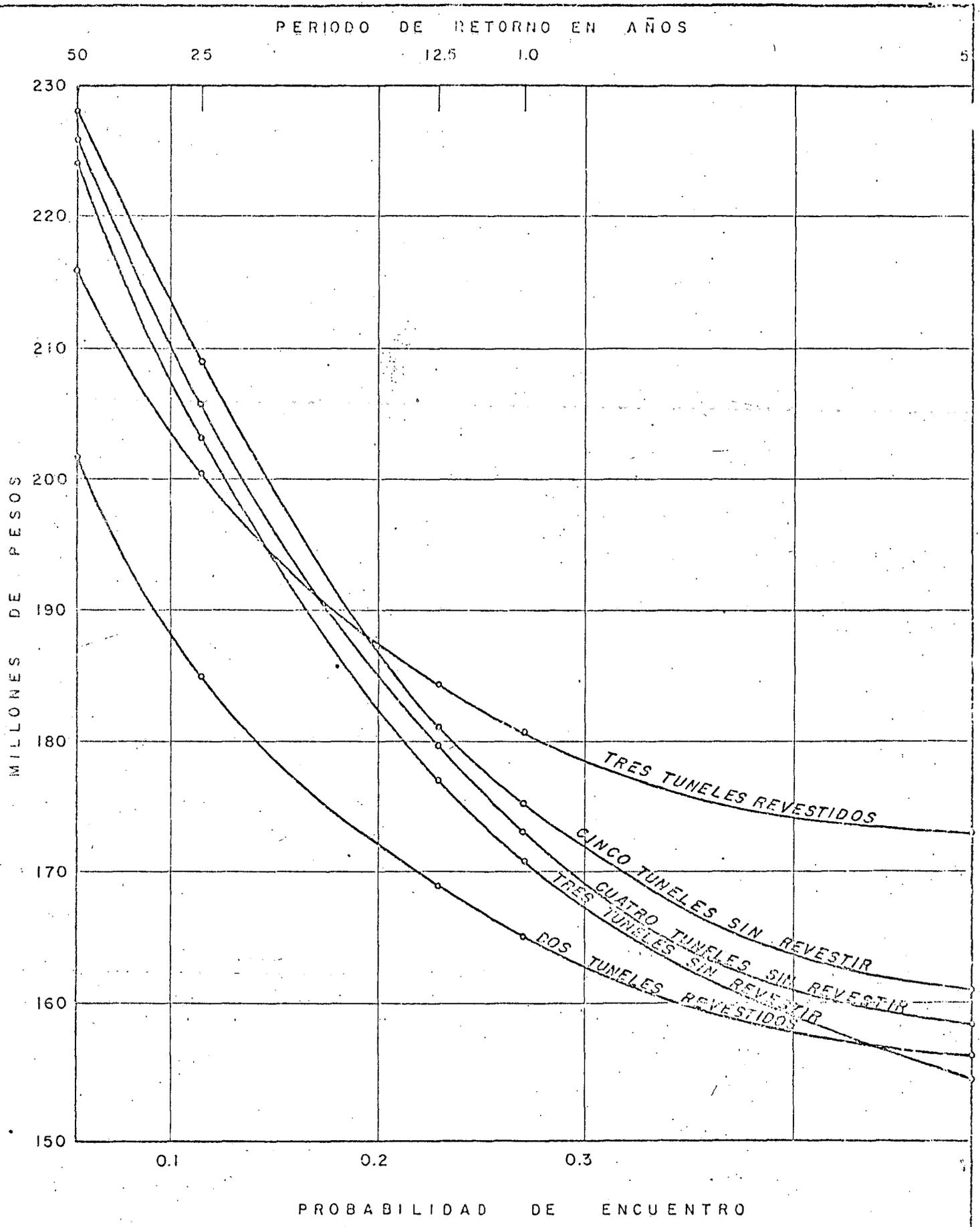


FIG. 35.- CORTINA DE CONCRETO

CONTON I RIESGOS

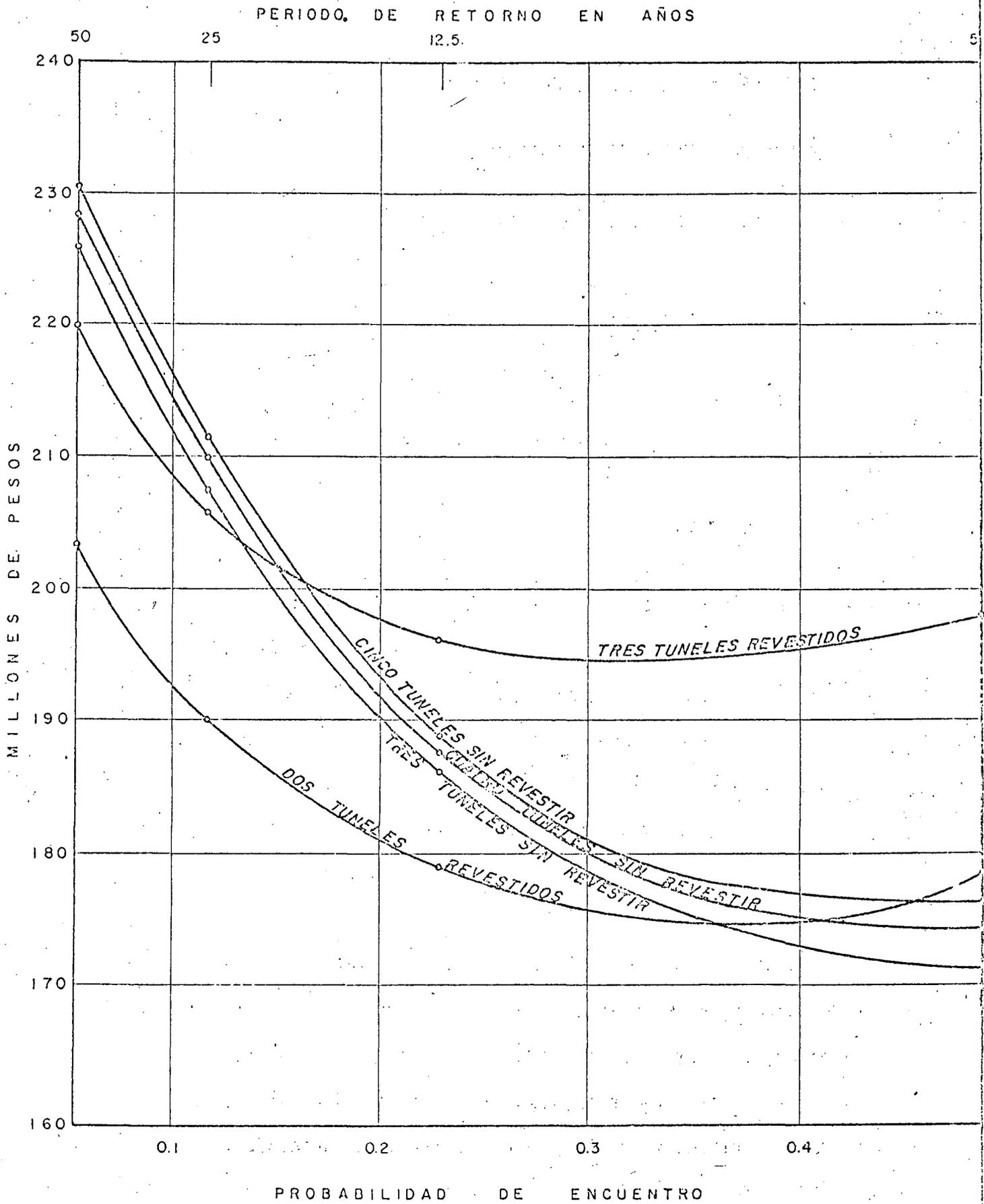


FIG. 36.- CORTINA DE CONCRETO  
COSTOS + (2) RIESGOS

## 6. CONCLUSIONES GENERALES DEL ESTUDIO

### 6.1. PRESA DE MATERIALES GRADUADOS

El estudio de la obra de desvío consta de 3 partes fundamentales, que son:

Estudio Hidrológico

Estudio Hidráulico

Estudio Técnico-Económico

De los cuales se concluye lo siguiente:

#### Estudio Hidrológico.-

Para el cálculo de las avenidas máximas esperadas tanto en magnitud como en forma, fué necesario realizar análisis estadísticos de la información. Para la magnitud, se empleó cuatro métodos estadísticos de uso común para -- este tipo de trabajos. Método de Gumbel, Método de Nash, Método de Levediev y Método de Warecoun (Water Resources Council). De éstos se seleccionó el Método de Nash como el más confiable, aplicadó a la estación Carrizal.

La forma de los hidrogramas se obtuvo en base a la información registrada y calculada en la estación El Capomal. De estos registros y haciendo un análisis de correlogramas de ellos en el tiempo, se concluye que la forma más crítica en que se presentan estas avenidas para el funcionamiento de la obra de desvío, es en forma de trenes horarios. Por consiguiente se seleccionó la avevenida de Septiembre de 1965, que caracteriza en buena forma el tipo de avenida. Esta fué mayorada para los diferentes períodos de recurrencia considerados.

### Estudio Hidráulico.

Consistió principalmente en la simulación de tránsito de avenidas, para diferentes períodos de retorno y una gama de diámetro entre 10 y 18 metros. - De estos tránsitos se construyen curvas de isogasto para cinco alternativas base que son: 2 y 3 túneles revestidos, 3, 4 y 5 túneles sin revestir.

Las características hidráulicas de los túneles son:

Longitud promedio = 1 000/túnel

n (revestidos) = 0.015

n (sin revestir) = 0.030

velocidad permisible (revestidos) 20 m/s

velocidad permisible (no revestidos) = 10 m/s

De los tránsitos se observa lo siguiente: que el funcionamiento hidráulico para túneles revestidos aumenta en un 30% la eficiencia hidráulica, dando así, ataguías más chicas para alternativas equivalentes que en túneles sin revestir o para ataguías de igual altura menores diámetros. Así mismo, se observa que casi no existe regulación por vaso, pues estas son del 15% o menores.

Por otra parte las restricciones de velocidad acotan en gran forma las posibilidades de soluciones para las cinco alternativas.

La sensibilidad con respecto a las velocidades es alta, así como para cambios pequeños en la velocidad. Se disminuye la zona factible de soluciones para cada gasto de diseño.

De una alternativa de menor número de túneles a una mayor, para una misma -- área hidráulica se observa que la carga hidráulica para manejar un mismo volúmen, aumenta, ya que la longitud sujeta a pérdidas por fricción es mayor.

#### Estudio Técnico-Económico

Para llegar a una evaluación de las alternativas en forma adecuada, se hizo necesario el elaborar precios índices para los dos conceptos centrales de la obra de desvío, ataguías y túneles. Los precios convenidos para este efecto son, para ataguías \$ 35.20/m<sup>3</sup> colocado, para túneles sin revestir \$ 242.75/m<sup>3</sup> y revestidos de \$ 367.43/m<sup>3</sup> de excavación de túneles. Estos precios índice engloban en forma general los conceptos que intervienen en la obra.

Las curvas de isogasto resultado de los tránsitos y las nuevas curvas de presupuesto o de isocosto resultantes del análisis de precios índice, presentan en forma muy práctica, la observación de todas las posibles alternativas en todos sus aspectos. Es decir, las curvas de isogasto nos proporciona todas las combinaciones de túnel y ataguía para los diferentes gastos asociados a un período de retorno, dentro de la gama antes mencionada.

Sobre las curvas de isogasto se sobrepone las curvas de isocosto que nos dan el presupuesto óptimo para cualquier alternativa.

Una vez establecido el mapa de soluciones factibles y el costo en que incurre, se obtienen aquellas combinaciones que son las económicamente óptimas. Pero dicha optimización se ve afectada por la restricción técnica de velocidad permisible, disminuyendo la zona factible de soluciones e incrementando el costo de un 2.3% para períodos de retorno chico hasta cerca de un 64% para el caso de períodos de retorno grandes y también el número de túneles se ve aumentado.

La sensibilidad es alta en cambios pequeños de la velocidad para túneles revestidos, pues la velocidad de 20 m/s puede verse afectada por la calidad del acabado del revestimiento. Si la velocidad resultante aumenta, la zona de posibilidad se desplaza hacia costos menores, de lo contrario si la velocidad disminuye la zona se restringe en mucho y el costo aumenta.

Para el caso de túneles sin revestir, la velocidad de 10 m/s puede verse incrementada y disminuir los costos dependiendo de las condiciones naturales de la roca. Por otro lado el que la velocidad disminuya, restringe bastante la zona factible, con lo cual los costos se incrementan grandemente, lo que conducirá seguramente a túneles revestidos.

Las líneas propuestas sobre el mapa de soluciones para las alternativas, con las velocidades de 10 y 20 m/s. Nos indican las soluciones óptimas de factibilidad técnica y sus costos. A estos costos para que sean comparables y tomar la decisión, se les adicionan los valores esperados de daño. (Riesgos).

La cuantificación de daños es dependiente del ritmo de construcción alcanzado para cuando se presente un escurrimiento con características que lo produzcan.

Los rendimientos considerados son de dos tipos unos para una alternativa conservadora y otra optimista.

Los rendimientos promedios que se concluyen para las dos alternativas son:

	Conservadora	Optimista
cortina	12 000 m <sup>3</sup> /día	16 000 m <sup>3</sup> /día
ataguía	12 000 m <sup>3</sup> /día	12 000 m <sup>3</sup> /día
túneles	6.81 m/día/4 frentes	10.23 m/día/4 frentes
Terminación	Septiembre 1980	Marzo 1978

El cálculo de daños considerando estos rendimientos, con la posibilidad de que se presenten en las épocas de lluvias de los tres primeros años después del inicio de la construcción.

Con el valor esperado de los daños, se obtienen los riesgos que en orden cronológico, considerando que el riesgo disminuye son:

- 3 túneles revestidos (mayor riesgo)
- 2 túneles revestidos
- 3 túneles sin revestir
- 4 túneles sin revestir
- 5 túneles sin revestir (menor riesgo)

La decisión óptima, es la del costo total mínimo, que considera el costo por obra más los riesgos que involucra dicha obra. Resultando lo siguiente:

MA

1. La alternativa más económica para períodos de retorno mayores de 10 años es la de dos túneles revestidos. Pues para períodos de retorno de 25 años ya su costo disminuye en 16 millones sobre cualquier alternativa.
2. Para períodos de retorno menores de 10 años, las alternativas por orden económico son las siguientes: 4 túneles sin revestir, 5 túneles sin revestir, 3 túneles sin revestir, 2 y 3 túneles revestidos.
3. Finalmente se observa que los períodos de retorno óptimos para cada alternativa, son:

ALTERNATIVA	Tr Optimo (años)	Costo+Riesgo \$ millones	Altura de Ataguía (m)	Diámetro de Túnel
2 T. Revestidos	12.5	197 <sup>179</sup> <sub>190</sub>	40.40	15
3 T. Revestidos	12.5	213 <sup>41</sup>	42.0	12
3 T. Sin Revestir	10	193	34.5	15.5
4 T. Sin Revestir	8	191	28.0	13.5
5 T. Sin Revestir	8	192	27.0	12.0
14 m Ø	9.0	199		

Se tiene que una solución recomendable es la de dos túneles revestidos, que proporciona períodos adecuados, considerando como adecuados a períodos mayores de 15 años.

Se contempla otra alternativa para el caso en que diámetros mayores de 14 m se descarten por restricciones constructivas. Pero resulta más cara para períodos de retorno adecuados.

Se puede apuntar la seguridad que adquieren paulatinamente algunas alternativas especialmente aquellas de ataguías de poca altura, al ser rebasados el nivel de la ataguía por el avance en la cortina. Por lo que se podría llegar a plantear desde un punto de vista muy conservador alguna posibilidad que contemple este factor.

La sensibilidad de la alternativa de túneles con revestimiento, es muy notable para cambios en la velocidad permisible, notándose lo siguiente:

#### DOS TUNELES REVESTIDOS

COSTOS (Millones)

VELOCIDADES

Tr	20	18	15 (m/s)
5	133	134	154
12.5	158	168	> 230
25	179	189	
50	199	210	

VAB

TRES TUNELES REVESTIDOS  
COSTOS (Millones)  
VELOCIDADES

Tr	20	18	15
5	148	153	167
12.5	173	185	205
25	193	209	234
50	214	232	269
100	239	> 300	> 300

La sensibilidad de las cinco alternativas de los puntos de restricción técnica con respecto a los puntos de tecnología óptima, son en costo las siguientes:

A L T E R N A T I V A

Tr	TUNELES REVESTIDOS		TUNELES SIN REVESTIR		
	DOS	TRES	TRES	CUATRO	CINCO
5	1.023	1.020	1.442	1.256	1.260
12.5	1.053	1.061	1.518	1.434	1.354
25	1.084	1.065	1.680	1.576	1.478
50	1.105	1.070	1.692	1.621	1.50
100		1.081		1.653	1.643
500		1.096			

La sensibilidad para los precios índice aplicadas a las cantidades de obra, no afectan en mucho las decisiones, pues la curvatura de las curvas en este rango de optimalidad es poca. Además los precios no deberán variar en mucho y la pendiente de la curva de isocostos no varía.

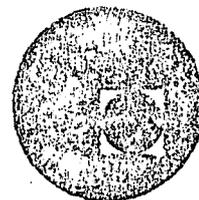
#### RESTRICCION A 14 m DE DIAMETRO

Dado que en el país, no se han construido túneles mayores de 14 m de diámetro, por desconocer su comportamiento, se piensa pueda ser una restricción del estudio. Pero el análisis a este problema muestra que:

TRES TUNELES SIN REVESTIR PROTEGE	Tr <	5
CUATRO TUNELES SIN REVESTIR PROTEGE	Tr =	10
CINCO TUNELES SIN REVESTIR PROTEGE	Tr =	30
DOS TUNELES REVESTIDOS PROTEGE	Tr =	11
TRES TUNELES REVESTIDOS PROTEGE	Tr =	85



centro de educación continua  
división de estudios superiores  
facultad de ingeniería, unam



APROVECHAMIENTOS HIDRAULICOS

EVALUACION DE OBJETOS MULTIPLES Y BAJO CONDICIONES DE  
INCERTIDUMBRE

PROFR. DR. JORGE DIAZ PADILLA  
OCTUBRE DE 1978



# EVALUACION POR OBJETIVOS MULTIPLES Y BAJO CONDICIONES DE INCERTIDUMBRE<sup>1</sup>

Dr. Jorge Díaz Padilla\*

## INTRODUCCION

Durante los últimos años se ha observado una transformación radical no solo de las técnicas computacionales sino de la *filosofía básica* del proceso de evaluación de sistemas y proyectos públicos. Algunos enfoques y técnicas que se emplean actualmente difieren substancialmente del procedimiento tradicional costo-beneficio (que durante muchos años ha sido la herramienta convencional para la evaluación de proyectos) al tomar en cuenta aspectos tales como: no linealidad, incertidumbre, objetivos múltiples, etc.

En este contexto, y con el objeto de ubicar algunas de dichas herramientas dentro de un marco general de referencia, a continuación se clasifican<sup>2</sup> y discuten brevemente ciertos enfoques que han resultado útiles dentro del proceso de evaluación. En la tabla que se presenta a continuación se muestra una posible tipificación de algunas técnicas de evaluación.

---

\* Director Técnico, FOA, Consultores.

1 Curso sobre *Aprovechamientos Hidráulicos*, Centro de Educación Continua, DESFI, UNAM, Nov. 14-25, 1977.

2 R. de Neufville y D.H. Marks, *Systems Planning and Design: Case Studies in Modeling, Optimization and Evaluation*, Prentice-Hall, Inc., 1974.

METODOLOGIA	ATRIBUTOS DE LA EVALUACION			
	no-lineal	incertidumbre	multidimensional	varios decisores
I Costo-Beneficio Estandar	no	no	no	no
II A. no Lineal	si	no	no	no
III A. de Decisiones	si	si	no	no
IV A. por Multiatributos	si	si	si	no
V Objetivos Múltiples	si	si	si	si

#### TIPOLOGIA DE LAS TECNICAS DE EVALUACION

I. El análisis convencional costo-beneficio se emplea en la tabla como punto de partida y representa el procedimiento en el cual los costos y beneficios futuros se descuentan al presente (se actualizan) y posteriormente se comparan entre si. Las hipótesis empleadas son:

- los costos y beneficios se tratan como lineales
- las variables se sustituyen por sus valores esperados
- se considera un solo objetivo
- se tiene un solo decisor

El problema fundamental con este procedimiento (una vez que se aceptan las hipótesis anteriores) es la selección de la *tasa de descuento* ya que los resultados son una función directa del valor que se asigne a este parámetro.

- II. Los costos y beneficios son generalmente no lineales en lo que respecta a su *valor real*. Las funciones de utilidad correspondientes son generalmente no lineales y, para el caso de los beneficios, presentan utilidades marginales decrecientes. La evaluación tipo II trata de incorporar esta propiedad en los análisis y representa un avance sobre el procedimiento convencional aunque presenta ciertas dificultades en la estimación de las funciones de demanda utilidad-cantidad.
- III. Por medio del análisis de decisiones es posible incorporar en el proceso de evaluación a la incertidumbre que rodea al problema. Para esto, se definen funciones de utilidad con respecto al riesgo (generalmente no lineales) que reflejan el valor real que el decisor asigna a los posibles impactos del proyecto.
- IV. El análisis por atributos múltiples permite tomar en cuenta las consecuencias que diferentes planes alternativos pueden ocasionar en varios objetivos y grupos involucrados. Una vez definida una función de utilidades para un conjunto de atributos es posible asignar una calificación relativa a cada acción posible y de esta manera discriminar a la más conveniente. Este tipo de evaluación, sin embargo, presenta importantes limitaciones al definirse las reglas e hipótesis necesarias para combinar varios atributos generalmente no lineales y no independientes entre sí.
- V. Este procedimiento está dirigido a lograr *compromisos* (negociaciones) entre varios objetivos y grupos afectados pensando que el proceso de evaluación es en realidad un proceso político difícil (o imposible) de modelar analíticamente y por lo tanto que la metodología no debe tratar de imponer soluciones tecnócratas en problemas que afecten a la comunidad.

A continuación se discute e ilustra una metodología de evaluación tipo IV que fue desarrollada para su aplicación en el caso de sistemas hidráulicos y que ha sido empleada con éxito en varios casos reales.



# SISTEMAS DE ESTIMACION DE COSTOS EN ETAPAS DE INFLACION SU APLICACION Y EFECTO EN EL DESARROLLO DEL SECTOR AGROPECUARIO<sup>1</sup>

por el

Dr. Jorge Díaz Padilla\*

## I. INTRODUCCION

La fase de estimación de costos constituye una de las etapas más complejas y de mayor relevancia durante el proceso de análisis y evaluación de proyectos de ingeniería. Generalmente, dichas estimaciones se apoyan en información histórica, en comparaciones con proyectos similares, en factores de experiencia y en el conocimiento de la problemática local. Sin embargo, resulta fácil reconocer que las variables en cuestión son inciertas y que en muchos casos, los valores asignados a dichas variables servirán únicamente como indicadores de sus tendencias y no como estimaciones firmes. En el contexto del estudio de un proyecto de rehabilitación o construcción de una zona de riego, es clara la dificultad que existe en asignar valores exactos a los costos de producción de los cultivos, a los costos de operación y mantenimiento del sistema o simplemente al monto de las inversiones iniciales.

En épocas de inflación, la incertidumbre que rodea al problema se incrementa aún más dado que en estos casos resulta necesario recurrir a la formulación de pronósticos para los costos de los insumos de mayor importancia los cuales, generalmente, son inciertos en mayor o menor grado.

---

\* Director Técnico, F. Ochoa y Asociados, Consultores, México, D.F.

<sup>1</sup> Trabajo presentado en el Seminario sobre el papel de la Ingeniería de Costos en la Planeación del Desarrollo del Sector Agropecuario, Sociedad Mexicana de Ingeniería de Costos, A. C., Oaxtepec, Mor., Oct. 1976.

De lo anterior resulta evidente la necesidad de contar con una metodología formal con la cual se pueda tomar en cuenta de manera explícita la incertidumbre de cada una de las componentes del problema y que permita cuantificar la variabilidad total de la eficiencia de cada una de las alternativas de solución para así poder efectuar una toma de decisiones más racional. Asimismo, esta metodología serviría también para identificar a las componentes más relevantes desde el punto de vista de su variabilidad, con lo cual se podrían desarrollar análisis de sensibilidad más completos.

A pesar de esto, las metodologías utilizadas en la práctica para el análisis y evaluación de proyectos se han apoyado tradicionalmente en marcos de referencia de carácter determinístico pues el desarrollo de modelos probabilísticos no se ha dirigido a la solución de problemas reales. Los modelos propuestos, aunque valiosos desde el punto de vista teórico, no han demostrado su factibilidad para utilizarse en la práctica y por lo tanto no han avanzado de un nivel meramente conceptual [7], [8]. Ante esta situación, los efectos de la incertidumbre se han tratado de incorporar indirectamente en los análisis de costos utilizando estimaciones conservadoras de las mismas o recurriendo a análisis de sensibilidad.

En este trabajo se presenta una metodología para la evaluación de proyectos, la cual toma en cuenta explícitamente a la incertidumbre que rodea la estimación de costos de las componentes de los proyectos bajo estudio y permite medir su impacto en la bondad de las alternativas de solución. El modelo que se presenta a continuación es un modelo probabilístico el cual fue ideado y formulado sin perder de vista ni la *factibilidad* ni la *facilidad* de su aplicación a casos reales. Para esto, fué necesario recurrir a un enfoque aproximado de primer orden cuyos detalles matemáticos se discuten en la sección siguiente. Las características fundamentales de un enfoque de este tipo son que las variables aleatorias se caracterizan únicamente por sus dos primeros momentos (en

contraposición con su función completa de densidad de probabilidades) y que la no linealidad de una función de variables aleatorias se elimina desarrollando dicha función en una serie de Taylor. Este enfoque permite desarrollar modelos probabilísticos sumamente poderosos y aplicables a problemas reales aún en aquellos casos en que la información con que se cuente sea escasa o poco confiable [4], [5]. Los conceptos fundamentales del modelo probabilístico se presentan en la Sección 3 y por último en la Sección 4 se hacen algunos comentarios finales. La metodología desarrollada ha sido ya probada y utilizada durante el proceso de evaluación y selección de inversiones en el Valle del Guadiana, Dgo. [6] y actualmente se está utilizando en los estudios de las zonas de Aguamilpa, Nay. y Piaxtla-Elota, Sin.\*

## 2. EL ENFOQUE PROBABILISTICO DE PRIMER ORDEN

El enfoque adoptado para la formulación matemática del modelo tiene las características siguientes ([2], [3]):

- a. La incertidumbre de cualquier variable aleatoria se mide únicamente a través de su coeficiente de variación.
- b. La no linealidad de una función de variables aleatorias se elimina desarrollando dicha función en una serie de Taylor alrededor de los valores esperados de las variables y conservando de dicho desarrollo únicamente los términos de primer orden.

El primero de los puntos anteriores implica que en un análisis probabilístico de primer orden, la componente aleatoria de cualquier variable  $X$  (la desviación de la variable de su valor esperado,  $\mu[X]$ ) se mide únicamente a través de su varianza:

---

\* para las Direcciones Generales de Estudios y de Planeación de la Subsecretaría de Planeación de la S.R.H., respectivamente.

$$E [(X - \mu [X])^2] = \sigma^2 [X] \quad (2.1)$$

en donde  $E[.]$  es el operador "valor esperado" y  $\sigma^2[X]$  representa la varianza de la variable  $X$ . Es decir, el comportamiento de la variable aleatoria se define únicamente con su valor esperado  $\mu[X]$  y su coeficiente de variación  $v[X] = \sqrt{\sigma^2[X]} / \mu[X]$  (o equivalentemente, por su desviación estandar  $\sigma[X] = \sqrt{\sigma^2[X]} = v[X]\mu[X]$ ) y no por su función completa de densidad de probabilidades. Esto constituye una gran ventaja pues implica que la utilización de modelos probabilísticos de este tipo no requieren del conocimiento de la forma de las distribuciones de las variables sino únicamente de sus dos primeros momentos.

Por otro lado, para el caso de dos o más variables, adicionalmente a los valores esperados y a los coeficientes de variación será necesario especificar los coeficientes de correlación,  $\rho[.,.]$ , como medidas de la dependencia probabilística entre dichas variables.

La segunda característica de un análisis de primer orden significa que cuando se tengan funciones no lineales de las variables aleatorias, primero habrá que eliminar la no linealidad de dichas funciones por medio de expansiones en series de Taylor. Por ejemplo, para el caso de una función de una sola variable independiente,  $Z = h(X)$ , el desarrollo en serie de Taylor está dado por:

$$h(\mu[X]) + (\partial h / \partial X)_{\mu[.]} (X - \mu[X]) + (\partial^2 h / \partial X^2)_{\mu[.]} (X - \mu[X])^2 / 2! + \dots \quad (2.2)$$

en donde la expansión se hace alrededor del valor esperado de la variable aleatoria  $X$  y  $(\partial h / \partial X)_{\mu[.]}$  representa la derivada de la función  $h(.)$  con respecto a la variable  $X$  y evaluada en su valor esperado. Una vez linealizada la función, se conservan únicamente los términos de primer orden (los términos lineales) y se procede a calcular la esperanza y la varianza de la expresión resultante por medio de métodos conocidos [1].

Los conceptos anteriores se discuten e ilustran a continuación por medio del cálculo de la incertidumbre asociada con la estimación de los beneficios derivados

de cierto cultivo. En este caso, dichos beneficios están dados por la expresión siguiente:

$$B_n = A (RP - C_p) \quad (2.3)$$

en donde  $B_n$  representa los beneficios netos obtenidos del cultivo (\$),  $A$  el área sembrada (has),  $R$  el rendimiento del cultivo (ton/ha),  $P$  el precio de venta (\$/ton) y  $C_p$  el costo unitario de producción (\$/ha). En el contexto de una evaluación desde el punto de vista nacional, es necesario ajustar los precios de mercado de los costos de producción para que reflejen su verdadero costo de oportunidad social. Tomando en cuenta únicamente la corrección debida al costo de la mano de obra no calificada, la expresión (2.3) toma la forma siguiente:

$$B_n^{(s)} = A (RP - C_p) - \lambda(AC_p\Omega) = A \{RP - C_p (1 + \lambda\Omega)\} \quad (2.4)$$

en donde  $B_n^{(s)}$  representa la contribución al consumo agregado nacional de los beneficios netos obtenidos del cultivo,  $\lambda$  el factor que corrige el costo a precios de mercado de la mano de obra no calificada a su verdadero costo de oportunidad y  $\Omega$  el porcentaje de participación de este tipo de mano de obra en los costos de producción.

En un análisis probabilístico de primer orden, si las variables  $C_p$ ,  $\lambda$  y  $\Omega$  se tratan como variables aleatorias, de acuerdo con lo discutido anteriormente el comportamiento estocástico de dichas variables queda definido por sus valores esperados y sus coeficientes de variación. Los valores esperados son simplemente los valores promedio de las variables y los coeficientes de variación se pueden estimar estadísticamente (si se cuenta con la información adecuada) o bien de manera subjetiva en caso contrario [9]. Como la función es no lineal, para calcular aproximadamente los dos primeros momentos de la variable aleatoria dependiente,  $B_n^{(s)}$ , es necesario en primer lugar desarrollar la expresión (2.4) en una serie de Taylor (ec. (2.2)):

$$B_n^{(s)} \doteq A \{RP - \mu[C_p] (1 + \mu[\lambda] \mu[\Omega])\} + (C_p - \mu[C_p]) (\partial B_n^{(s)} / \partial C_p)_{\mu[\cdot]} + \\ + (\lambda - \mu[\lambda]) (\partial B_n^{(s)} / \partial \lambda)_{\mu[\cdot]} + (\Omega - \mu[\Omega]) (\partial B_n^{(s)} / \partial \Omega)_{\mu[\cdot]} \quad (2.5)$$

en donde ya se han eliminado los términos no lineales. Efectuando las derivaciones:

$$B_n^{(s)} \doteq A \{RP - \mu[C_p] (1 + \mu[\lambda] \mu[\Omega])\} - (C_p - \mu[C_p]) A \mu[\lambda] \mu[\Omega] - \\ - (\lambda - \mu[\lambda]) A \mu[C_p] \mu[\Omega] - (\Omega - \mu[\Omega]) A \mu[C_p] \mu[\lambda] \quad (2.6)$$

La expresión resultante es una aproximación de primer orden a la función original. Como la ec. (2.6) es lineal en las variables aleatorias, el cálculo del valor esperado y de la varianza de la variable dependiente ya no presente dificultad. En este caso,

$$\mu[B_n^{(s)}] \doteq A \{RP - \mu[C_p] (1 + \mu[\lambda] \mu[\Omega])\} \quad (2.7)$$

$$\sigma^2[B_n^{(s)}] \doteq A^2 \{ \mu^2[\lambda] \mu^2[\Omega] \sigma^2[C_p] + \mu^2[C_p] \mu^2[\Omega] \sigma^2[\lambda] + \mu^2[C_p] \mu^2[\lambda] \sigma^2[\Omega] \} \quad (2.8)$$

en donde se supone que las tres variables aleatorias son estocásticamente independientes. Si se substituyen en estas expresiones los valores de los parámetros indicados en la Tabla 2.1, y suponiendo que  $A = 50$  has,  $R = 20$  ton/ha y  $P = \$1000/\text{ton}$ , se obtienen los resultados siguientes:

$$\mu[B_n^{(s)}] \doteq 50 \{20 \times 1000 - 10\,000 (1.0 - 1.0 \times 0.5)\} = \$750\,000$$

$$\sigma^2[B_n^{(s)}] \doteq (50)^2 \{ (1.0)^2 (0.5)^2 (10\,000)^2 (0.3)^2 + (10\,000)^2 (0.5)^2 (1.0)^2 (0.1)^2 + \\ + (10\,000)^2 (1.0)^2 (0.5)^2 (0.2)^2 \} = 8\,750\,000\,000 \text{ \$}^2$$

de donde,

$$\nu[B_n^{(s)}] \doteq \frac{\sqrt{8\,750\,000\,000}}{750\,000} = \frac{93\,541}{750\,000} = 0.12$$

De lo anterior resultan evidentes las ventajas del enfoque. Adoptando las hipótesis de un modelo de primer orden, resulta sencillo el cálculo de la variabilidad de una función de variables aleatorias en términos de las variabilidades de sus componentes individuales. La estimación de los

coeficientes de variación de dichas componentes resulta fácil y conduce a resultados generalmente confiables. Sin embargo, la estimación "directa" del coeficiente de variación de la variable dependiente es difícil y puede llevar a resultados erróneos.

La facilidad con que puede estimarse la variabilidad de una función de variables aleatorias permite efectuar fácilmente análisis de sensibilidad desde el punto de vista de la incertidumbre. Por medio de este tipo de análisis es posible detectar aquellas componentes cuya incertidumbre tiene un efecto importante en la variabilidad total resultante y a aquellas otras que, a pesar de ser inciertas, pueden tratarse como determinísticas dado que sus efectos son despreciables en el cálculo de la incertidumbre total de la función. Por ejemplo, de los cálculos anteriores resulta lo siguiente:

$$\sigma^2[B_n^{(s)}] = 5\,625\,000\,000 + 625\,000\,000 + 2\,500\,000\,000 = 8\,750\,000\,000 \text{ \$}^2$$

de donde puede verse que la incertidumbre asociada a los costos de producción es importante ( $5\,625/8\,750 = 0.64$ ) y que la del factor  $\lambda$  es despreciable desde un punto de vista práctico ( $625/8\,750 = 0.07$ ).

Por otro lado, el coeficiente de variación de la variable  $B_n^{(s)}$  resulta con un valor menor que los de las variables de mayor importancia, lo cual no es evidente a priori.

Variable	$\mu$ [.]	$v$ [.]
$C_p$	\$10 000/ha	0.3
$\lambda$	- 1.0*	0.1
$\Omega$	0.5	0.2

TABLA 2.1 VALORES ASIGNADOS A LOS PARAMETROS \*

\* Este valor implica un exceso de mano de obra no calificada en la zona bajo estudio.

### 3. EL MODELO DE EVALUACION

En esta sección se presenta someramente un modelo de evaluación de proyectos en el cual los costos se tratan como variables aleatorias. El beneficio neto marginal de la situación "con proyecto" comparado con la situación "sin proyecto" se cuantificó mediante el indicador "valor presente neto de los beneficios asociados con el consumo agregado" ( $VPN_s$ ). En este caso, la expresión correspondiente es la siguiente:

$$\begin{aligned}
 VPN_s = & \sum_{t=t_i}^{t_f} \frac{\theta(t)}{(1+i)^t} \left[ \sum_{j=1}^J A_j (R_j P_j - \bar{C}_{pj}) \right] - \sum_{t=t_i}^{t_f} \frac{1}{(1+i)^t} \left[ \sum_{j=1}^J \hat{A}_j (\hat{R}_j \hat{P}_j - \hat{\bar{C}}_{pj}) \right] - \\
 & - \sum_{t=t_0}^{t'} \frac{\bar{C}_i(t)}{(1+i)^t} - \sum_{t=t_i}^{t_f} \frac{\bar{O}}{(1+i)^t} \quad (3.1)
 \end{aligned}$$

en donde,

$A_j$  = área sembrada con el cultivo  $j$

$R_j$  = rendimiento del  $j$ -ésimo cultivo

$P_j$  = precio de mercado del  $j$ -ésimo cultivo

$C_{pj}$  = costos de producción del  $j$ -ésimo cultivo

$\theta(t)$  = función de aprendizaje evaluada en el período  $t$

$J$  = número de cultivos

$C_i(t)$  = costos iniciales en el año  $t$

$O$  = costos periódicos de operación y mantenimiento del proyecto

$t_f$  = período en que termina la vida útil del proyecto

$t_i$  = período en que se inicia la operación del proyecto

$t'$  = período en que se termina la construcción del proyecto

$t_0$  = período en que se inicia la construcción del proyecto

$i$  = tasa de descuento

y los símbolos  $\hat{\cdot}$  y  $\bar{\cdot}$  sobre algunas de las variables indican que dichas cantidades se refieren a la producción actual y a que las variables ya han sido corregidas

en base a sus costos de oportunidad, respectivamente.

En la formulación de un modelo de primer orden, es posible generar expresiones para el cálculo de la esperanza y de la varianza del  $VPN_S$ . Aplicando la metodología indicada en la sección anterior y utilizando la ec. (3.1) se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} \mu[VPN_S] = & \sum_{t=t_i}^{t_f} \frac{\theta(t)}{(1+i)^t} \left\{ \sum_{j=1}^J A_j (R_j P_j - \mu[\bar{C}_{pj}]) \right\} - \left[ \sum_{t=t_i}^{t_f} \frac{1}{(1+i)^t} \left[ \sum_{j=1}^J \hat{A}_j (\hat{R}_j \hat{P}_j - \bar{C}_{pj}) \right] \right] - \\ & - \sum_{t=t_0}^{t'} \frac{\mu[\bar{C}_1(t)]}{(1+i)^t} - \sum_{t=t_i}^{t_f} \frac{\mu[\bar{O}]}{(1+i)^t} \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$\begin{aligned} \sigma^2[VPN_S] = & \left[ \sum_{t=t_i}^{t_f} \frac{\theta(t)}{(1+i)^t} \right]^2 \left\{ \sum_{j=1}^J A_j^2 \sigma^2[\bar{C}_{pj}] \right\} + \left\{ \sum_{t=t_0}^{t'} \sum_{l=t_0}^{t'} \frac{\sigma[\bar{C}_1(t)] \sigma[\bar{C}_1(l)]}{(1+i)^t (1+i)^l} \right\} + \\ & + \left[ \sum_{t=t_i}^{t_f} \frac{1}{(1+i)^t} \right]^2 \sigma^2[\bar{O}] \end{aligned} \quad (3.3)$$

en donde se supone que todos los conceptos de costo son inciertos pero probabilísticamente independientes unos de otros para cualquier período de tiempo. Por otro lado, también se supone que una misma componente se encuentra perfectamente correlacionada a lo largo del horizonte de evaluación.

Para cada alternativa resulta sencillo el cálculo de los dos parámetros anteriores. Los resultados pueden visualizarse fácilmente graficando, para cada proyecto, el valor esperado y la desviación estandar del  $VPN_S$  en un espacio coordinado  $\mu[.] - \sigma[.]$  (ver Fig. 3.1). En este caso, si en dicho espacio se trazan rectas de la forma:

$$\mu[VPN_S] - \beta \sigma[VPN_S] = 0 \quad (3.4)$$

para diferentes valores del parámetro  $\beta$ , será posible definir zonas de aceptación y rechazo de proyectos para diferentes niveles de riesgo. Por ejemplo, si se supone que la variable  $VPN_S$  tiene una distribución del tipo normal, entonces los proyectos cuyas coordenadas  $(\mu[VPN_S], \sigma[VPN_S])$  se localizan por debajo de la

recta con ecuación  $\mu[VPN_S] - 2\sigma[VPN_S] = 0$  tiene una probabilidad superior al 98 % de que su  $VPN_S$  resultante sea positivo\*.

En la Fig. 3.1 se muestran los resultados de este tipo de evaluación para las rehabilitaciones de dos zonas de riego. De la figura puede apreciarse que el proyecto II es aceptable según este tipo de evaluación pero que el proyecto I, a pesar de tener un alto valor esperado del  $VPN_S$ , tiene también un fuerte nivel de incertidumbre y por lo tanto debe de ser rechazado.

#### 4. COMENTARIOS FINALES

De los resultados obtenidos puede verse que la metodología propuesta es sumamente *pragmática y factible* de aplicar a problemas reales. Con el enfoque aquí sugerido, la única información que se necesita para incorporar los efectos de la incertidumbre en la estimación de costos son ciertas medidas de la variabilidad de cada una de las componentes (en forma de coeficientes de variación, por ejemplo) y de los niveles de correlación entre las variables. Para esto último, será importante entender a los fenómenos que controlan las relaciones entre las variables y, en última instancia, invocar hipótesis de independencia o de dependencia perfecta según sea el caso. Sin embargo, estas hipótesis se formularán para las componentes individuales de los costos y no

---

\* Dado que el valor presente neto es una suma de un número grande de variables, a pesar de que se desconozca la forma de la función de densidad de probabilidades para cada beneficio neto en cada uno de los períodos, en virtud del Teorema del Límite Central es muy razonable suponer que la variable  $VPN$  seguirá muy de cerca un comportamiento probabilístico de tipo normal [1]. Sin embargo, si no se desea invocar esta hipótesis de normalidad, se puede utilizar el Teorema de Chebyshev para efectuar el cálculo de probabilidades en forma aproximada. Para el caso de  $\beta=2$ , esta aproximación conduce a un valor de la probabilidad de éxito igual a 0.75.

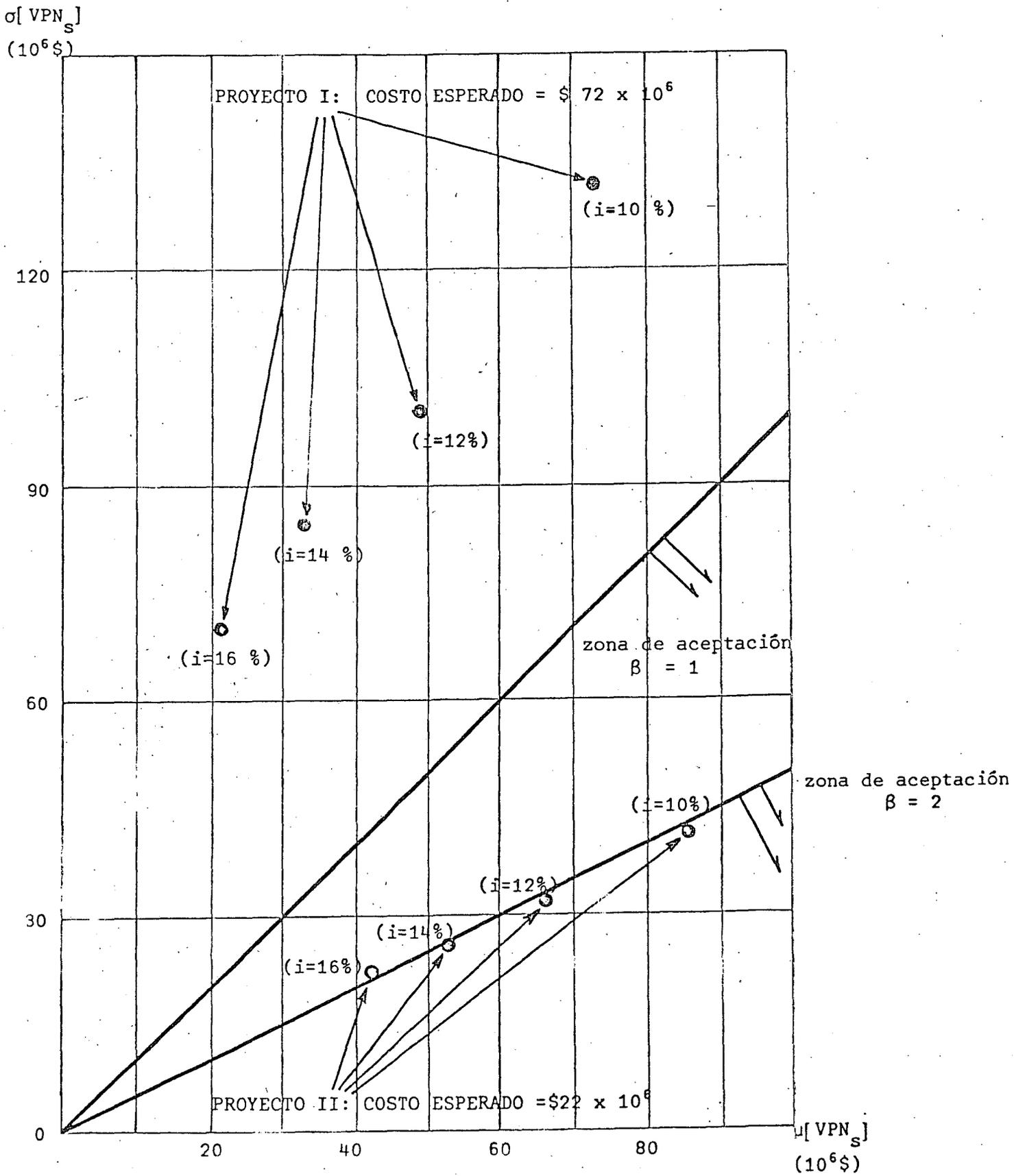


FIG. 3.1 RESULTADOS DE LA EVALUACION DE LAS REHABILITACIONES DE DOS ZONAS DE RIEGO

para los flujos netos de capital\*. Aunque sea de manera aproximada, los efectos de la correlación deben de incluirse en los análisis. En algunas ocasiones, será razonable aceptar la hipótesis de independencia probabilística para algunas de las variables y para un momento dado, pero en general no será posible argumentar esta hipótesis para los costos incurridos durante varios períodos de tiempo. Es decir, debido a que estas variables pueden ser funciones de las mismas componentes durante diferentes períodos de tiempo, en general la correlación puede ser alta y el no tomarla en cuenta puede conducir a variabilidades de las eficiencias de las alternativas mucho menores que las verdaderas y por lo tanto del lado de la inseguridad.

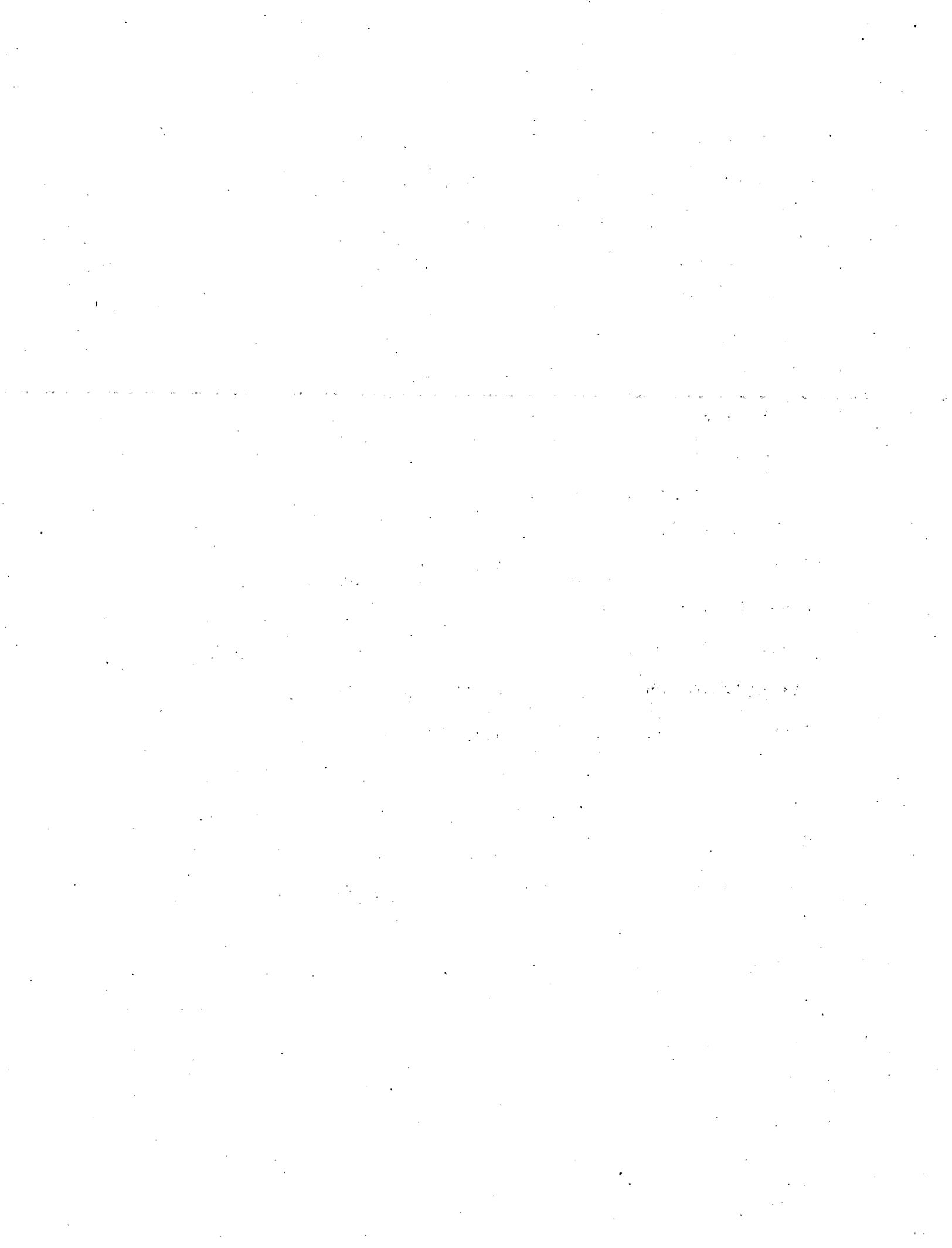
Vale la pena mencionar nuevamente que los resultados obtenidos con este tipo de análisis constituyen aproximaciones a las soluciones exactas. El grado de aproximación dependerá del grado de no linealidad de las funciones y de la forma que tengan las funciones de densidad de probabilidades de las variables. Por ejemplo, si se tiene una función lineal, de variables gaussianas entonces los resultados obtenidos por medio de un análisis de primer orden coincidirán con los exactos. Al ir perdiendo la función su carácter lineal, al irse alejando las funciones de probabilidad de distribuciones simétricas y unimodales, y al ir aumentando la incertidumbre de las variables, los resultados se van haciendo cada vez menos exactos. Sin embargo, el análisis de problemas prácticos dentro de un marco de incertidumbre tiene necesariamente que apoyarse en enfoques pragmáticos como el señalado en este trabajo, principalmente en aquellas situaciones en que la información sea escasa o poco confiable.

---

\* Los modelos probabilísticos propuestos a la fecha se basan en la hipótesis de que "se conoce" la variabilidad de los flujos netos de capital para cada uno de los períodos que definen el horizonte de evaluación. Sin embargo, esta suposición es poco realista en la práctica pues aunque sí es factible estimar la incertidumbre de las componentes individuales que integran a cada uno de los costos, no es sencillo efectuar dicha estimación para los flujos de capital los cuales, en algunos casos, pueden ser funciones complejas de sus componentes.

## 5. REFERENCIAS

- [1] Benjamín, J.R. y C.A. Cornell, "Probability, Statistics, and Decision for Civil Engineers", Mc Graw-Hill Book Co., 1970.
- [2] Cornell, C.A., "First-Order Analysis of Model and Parameter Uncertainty", International Symposium on Uncertainties in Hydrologic and Water Resource Systems, Universidad de Arizona, Tucson, Dic. 1972.
- [3] Cornell, C.A., "Notes on First-Order Uncertainty Analysis", notas no publicadas, Insitute Tecnológico de Massachusetts, Cambridge, 1971.
- [4] Díaz Padilla, J., "Análisis de Inversiones Bajo Condiciones de Incertidumbre", XIV Convención Nacional del IMIQ, Guadalajara, Jal., Nov. 1974.
- [5] F.O.A., Consultores, "Modelos de Reglamentación y de Decisión Bajo Incertidumbre para la Resolución de Solicitudes de Uso del Agua", informe interno a la S.R.H., Subsecretaría de Planeación, Dir. Gral. de Usos del Agua y Prevención de la Contaminación, Dic. 1974.
- [6] F.O.A., Consultores, "Evaluación y Selección de Inversiones en Recursos Hidráulicos para el Valle del Guadiana, Dgo.", informe interno a la S.R.H., Subsecretaría de Planeación, Dir. Gral. de Planeación, Dic. 1974.
- [7] Mao, J.C.T., "Quantitative Analysis of Financial Decisions", Capítulo 8, Investment Decisions Under Conditions of Uncertainty, The Macmillan Co., 1969.
- [8] Oakford, R.V., "Capital Budgeting", Capítulo 11, Probabilistic Treatment of Uncertainty, The Ronald Press Co., 1970.
- [9] Raiffa, H., "Decision Analysis, Introductory Lectures on Choices Under Uncertainty", Addison-Wesley Press Inc., 1968.



A. M. H.

IV CONGRESO NACIONAL DE HIDRAULICA<sup>1</sup>

EVALUACION BAJO INCERTIDUMBRE DE PROYECTOS HIDRAULICOS

Dr. Jorge Diaz Padilla\*      Ing. Eduardo Camhaji Samra\*\*

I. INTRODUCCION

Durante el proceso de evaluación de proyectos, la estimación de costos constituye una de las fases mas complejas. Dicha estimación se apoya, generalmente, en información histórica, en comparaciones con proyectos similares, en resultados obtenidos en regiones cercanas a la beneficiable, en factores de experiencia y en el conocimiento de la problemática local. Sin embargo, las variables involucradas son inciertas en mayor o menor grado y en muchas ocasiones, los valores que se les asignan servirán únicamente como indicadores aproximados lo cual en algunos casos, y en particular en épocas de inflación, puede conducir a decisiones equivocadas.

En el contexto del estudio de proyectos hidráulicos, es evidente la dificultad en asignar valores exactos a los costos y rendimientos de los cultivos, a los costos de las obras y del equipo o simplemente al valor de la componente extranjera de las alternativas. Mas aún, considerando que a ciertos niveles de estudio (Gran Visión y Prefactibilidad), los valores asignados a dichas variables pueden tener errores importantes, el no tomar en cuenta la incertidumbre de los parámetros puede originar que dichos estudios no cumplan su objetivo. Esto es, que los resultados de las evaluaciones conduzcan a tomar decisiones equivocadas

---

\* Director Técnico, FOA, Consultores, México, D. F.

\*\* Jefe de Proyecto, FOA, Consultores, México, D. F.

1 Trabajo presentado en el IV Congreso Nacional de Hidráulica, Acapulco, Gro., Oct. 1976.

tales como seguir estudiando innecesariamente un proyecto que aparentemente puede ser rentable aunque de verdad no lo sea. Aunado a lo anterior, se tiene el efecto de la incertidumbre que rodea a los problemas en épocas de inflación, lo cual constituye un elemento de gran importancia durante la estimación de costos.

Resulta evidente la necesidad de contar con una metodología formal con la que se pueda tomar en cuenta de manera explícita la incertidumbre de cada una de las componentes del problema y permita cuantificar la variabilidad total de la eficiencia de cada una de las alternativas de solución para que de esta manera se puedan realizar tomas de decisión más racionales. Adicionalmente, cualquier metodología que tome en cuenta la incertidumbre de las variables consideradas servirá también para identificar a las componentes de mayor variabilidad, con lo que se podrán desarrollar análisis de sensibilidad más completos.

No obstante lo anterior, las metodologías empleadas en la evaluación de proyectos han sido de tipo determinístico, debido principalmente a que los modelos desarrollados de carácter probabilístico han resultado ser valiosos solo desde el punto de vista teórico ya que su aplicación a problemas reales no ha demostrado ser ni práctica ni sencilla. Por lo tanto, los efectos de la incertidumbre se tratan de incorporar en forma indirecta a través de análisis de sensibilidad y utilizando estimaciones conservadoras de las variables.

En este trabajo se presentan algunos resultados de un modelo probabilístico de evaluación el cual ha sido útil para tomar en cuenta explícitamente la incertidumbre de las variables que intervienen en el análisis de proyectos hidráulicos sin que se pierda de vista ni la factibilidad ni la facilidad de su aplicación práctica.

El modelo probabilístico está basado en un enfoque aproximado de primer orden, el cual permite desarrollar modelos sumamente poderosos y aplicables en forma sencilla a problemas reales, aún cuando la información con que se cuente sea escasa.

La metodología que aquí se presenta ha sido ya probada y utilizada durante el proceso de evaluación de los proyectos: Aguamilpa, Nay., Elota-Pixtla, Sin. y El Tunal, Dgo., para la Secretaría de Recursos Hidráulicos.

## II. EL ENFOQUE PROBABILISTICO DE PRIMER ORDEN

El enfoque probabilístico adoptado para la formulación matemática del modelo de evaluación tiene las características siguientes\*:

- a. La incertidumbre de cualquier variable aleatoria se mide únicamente a través de su coeficiente de variación.
- b. La no linealidad de una función de variables aleatorias se elimina desarrollando dicha función en una serie de Taylor alrededor de los valores esperados de las variables y conservando de dicho desarrollo únicamente los términos de primer orden.

El primero de los puntos anteriores implica que en un análisis probabilístico de primer orden, la componente aleatoria de cualquier variable  $X$  (la desviación de la variable de su valor esperado,  $\mu[X]$ ) se mide únicamente a través de su varianza:

$$E[(X - \mu[X])^2] = \sigma^2 [X] \quad (2.1)$$

en donde  $E[\cdot]$  es el operador "valor esperado" y  $\sigma^2[X]$  representa la varianza de la variable  $X$ . Es decir, el comportamiento de la variable aleatoria se define únicamente con su valor esperado  $\mu[X]$  y su coeficiente de variación

$v[X] = \sqrt{\sigma^2[X]} / \mu[X]$  (o equivalentemente, por su desviación estandar  $\sigma[X] = \sqrt{\sigma^2[X]} = v[X] \mu[X]$ ), y no por su función completa de densidad de

\* Cornell, C. A., "First-Order Analysis of Model and Parameter Uncertainty", International Symposium on Uncertainties in Hydrologic and Water Resource Systems, Univ. de Arizona, Tucson, Ariz., Dic. 1972.

Díaz Padilla, J., "Análisis de Inversiones Bajo Condiciones de Incertidumbre", NIV Convención Nacional, del IMIQ, Guad., Jal., Nov. 1974.

probabilidades. Esto constituye una gran ventaja pues implica que la utilización de modelos probabilísticos de este tipo no requiere del conocimiento de la forma de las distribuciones de las variables sino únicamente de sus dos primeros momentos.

Por otro lado, para el caso de dos o más variables, adicionalmente a los valores esperados y a los coeficientes de variación será necesario especificar los coeficientes de correlación,  $\rho[\dots]$ , como medidas de la dependencia probabilística entre dichas variables.

La segunda característica de un análisis de primer orden significa que cuando se tengan funciones no lineales de las variables aleatorias, primero habrá que eliminar la no linealidad de dichas funciones por medio de expansiones en series de Taylor. Por ejemplo, para el caso de una función de una sola variable independiente,  $Z = h(X)$ , el desarrollo en serie de Taylor está dado por:

$$h(\mu[X]) + \left(\frac{\partial h}{\partial X}\right)_{\mu[\cdot]} (X - \mu[X]) + \frac{1}{2!} \left(\frac{\partial^2 h}{\partial X^2}\right)_{\mu[\cdot]} (X - \mu[X])^2 + \dots \quad (2.2)$$

en donde la expansión se hace alrededor del valor esperado de la variable aleatoria  $X$  y  $\left(\frac{\partial h}{\partial X}\right)_{\mu[\cdot]}$  representa la derivada de la función  $h(\cdot)$  con respecto a la variable  $X$ , evaluada en su valor esperado. Una vez linealizada la función, se conservan únicamente los términos de primer orden (los términos lineales) y se procede a calcular la esperanza y la varianza de la expresión resultante por medio de métodos conocidos\*.

Por último, vale la pena hacer notar que si en un análisis determinístico los valores que se asignan a las variables se toman iguales a sus valores promedio, los resultados obtenidos de dichos análisis coincidirán con los valores esperados de los resultados obtenidos con un modelo probabilístico de primer orden.

\* Benjamin, J. y C. A. Cornell, "Probability, Statistics, and Decision for Civil Engineers", Mc Graw-Hill Book Co., N. Y., 1970.

### III. METODOLOGIA DE EVALUACION

La evaluación de los sistemas hidráulicos alternativos se hace en un contexto de objetivos múltiples, cuantificando el impacto de cada proyecto sobre la economía del país mediante el uso de *parámetros nacionales* los cuales reflejan los objetivos económicos y sociales de la nación.

La interpretación de los objetivos nacionales para los proyectos de la zona beneficiable lleva a la consideración de los siguientes:

- a. Incremento del estándar de vida de los habitantes del país (medido en términos de la contribución de cada alternativa al consumo agregado nacional).
- b. Mayor desarrollo de la zona beneficiable (medido por la redistribución del ingreso hacia dicha región)
- c. Incremento de los ingresos de los ejidatarios de la zona (medido por la redistribución del ingreso hacia los grupos ejidales de la región).

Los objetivos anteriores son claramente distintos y en cierta forma conflictivos. La contribución de las diferentes alternativas a cada uno de dichos objetivos se determina, por tanto, en forma separada y posteriormente se combinan las diferentes contribuciones por medio de una función de valor o preferencia. Para esto, se adopta una función lineal en la cual el *valor presente neto múltiple* de cada alternativa,  $VPN_M$ , se calcula como una combinación convexa de las contribuciones a los objetivos anteriores:

$$VPN_M = VPN_S \alpha_S + VPN_R \alpha_R + VPN_L \alpha_L \quad (3.1)$$

en donde,

$$\alpha_S + \alpha_R + \alpha_L = 1$$

$$\alpha_S, \alpha_R, \alpha_L \geq 0$$

En la ec. (3.1), los parámetros nacionales  $\alpha_S$ ,  $\alpha_R$  y  $\alpha_L$  pretenden reflejar la importancia relativa\* que el Gobierno Federal, encargado de las inversiones, atribuye a cada uno de los objetivos considerados y por otro lado, el valor presente neto social ( $VPN_S$ ), regional ( $VPN_R$ ) y local ( $VPN_L$ ) miden la contribución de cada alternativa a los objetivos indicados.

En la formulación del modelo de evaluación bajo incertidumbre, los siguientes conceptos se tratan como variables aleatorias:

- Rendimientos de los cultivos
- Costos unitarios de la producción agrícola
- Porcentajes de participación de los conceptos en los costos de la producción agrícola
- Costos de construcción de las obras
- Costos del equipo electromecánico para generación de energía
- Porcentajes de participación de los conceptos en los costos de construcción y equipo
- Costos de operación y mantenimiento

El modelo probabilístico resulta al desarrollar las funciones en series de Taylor, eliminar los términos no lineales y calcular los dos primeros momentos, con lo cual se obtienen expresiones que permiten calcular el valor esperado y la varianza del valor presente neto múltiple para cada alternativa. El valor esperado,  $\mu[VPN_M]$ , se calcula con la misma expresión usada en el caso determinístico simplemente considerando los valores de las variables como sus valores esperados. Por otro lado, el riesgo que representa cada una de las alternativas de solución estará medido por la varianza  $\sigma^2[VPN_M]$  y se calcula en base a los coeficientes de variación de las variables y su nivel de dependencia o independencia estocástica.

---

\* Aunque los valores de los parámetros  $\alpha_i$  deberán ser establecidos por el decisor, los siguientes parecen ser aplicables en la mayoría de los casos:  $\alpha_S$  - de 0.6 a 1.0;  $\alpha_R$  - de 0.0 a 0.3;  $\alpha_L$  - de 0.0 a 0.2.

En las expresiones resultantes, a excepción de los rendimientos y costos de producción agrícola (los cuales se suponen perfectamente correlacionados positivamente ya que al aumentar los primeros aumentan también los segundos), se puede suponer que las variables son probabilísticamente independientes para cualquier período de tiempo\*. Por otro lado, si se desea un mayor nivel de aproximación, se puede suponer una estructura de correlación diferente de cero en las variables que representan los porcentajes de participación de los conceptos en los diferentes costos (mano de obra, componente externa, etc.).

De lo anterior se ve que resulta sencillo el cálculo de los parámetros  $\mu[VPN_M]$  y  $\sigma[VPN_M]$  para cada alternativa los que al graficarse en un sistema de ejes coordenados permiten visualizar tanto su bondad como el riesgo asociado. El criterio de selección entre un conjunto de alternativas también se puede establecer en dicho espacio coordenado ya que si en él se trazan rectas de la forma:

$$\mu[VPN_M] - \beta\sigma[VPN_M] = 0 \quad (3.2)$$

para diferentes valores del parámetro  $\beta$ , será posible definir regiones de aceptación y rechazo de alternativas para diferentes niveles de riesgo. Dado que el valor presente neto es la suma de un número grande de variables, e invocado al Teorema de Límite Central, se puede suponer razonablemente que la variable  $VPN_M$  obedece una distribución del tipo normal. En este caso, el nivel de confianza será el área bajo la curva normal estandarizada, calculada para un valor igual a  $\beta$  (en el caso de  $\beta = 2$ , por ejemplo, se obtiene una "confiabilidad" del 98%, o sea, una probabilidad de que el  $VPN_M$  resultante sea menor que cero, igual al 2%).

---

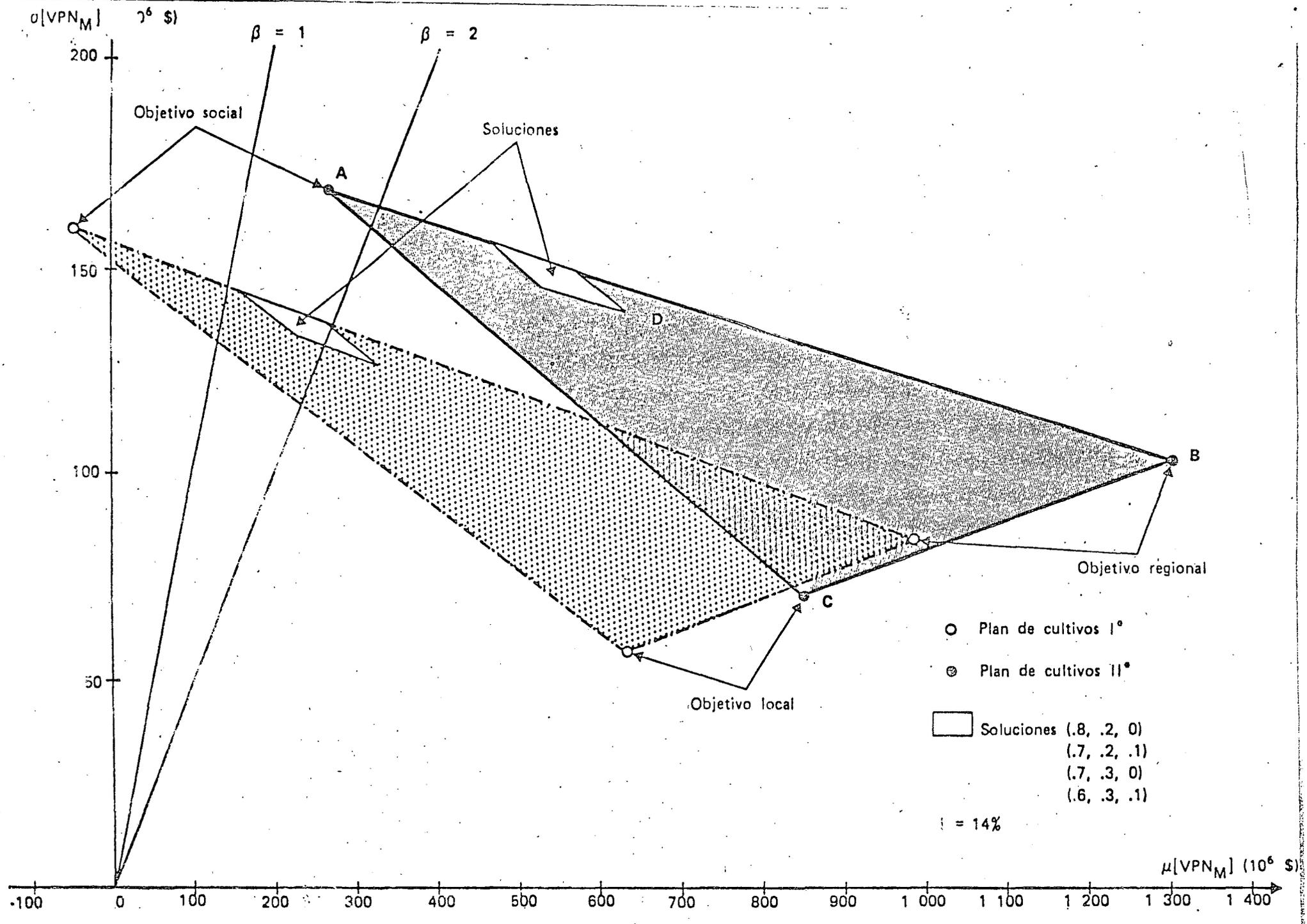
\* Díaz Padilla, J., "Sistemas de Estimación de Costos en Etapas de Inflación, su Aplicación y Efecto en el Desarrollo del Sector Agropecuario", Seminario Sobre el Papel de la Ingeniería de Costos en la Planeación del Desarrollo del Sector Agropecuario, SMIC, Oax., Mor., Oct. 1975.

#### IV. ILUSTRACIONES

Algunos de los resultados obtenidos para los proyectos estudiados se presentan a continuación. En la Fig. 4.1 se indican los resultados de la evaluación de una alternativa en particular del proyecto Elota-Piactla. Variando los valores relativos de los parámetros  $\alpha_i$  en la función objetivo, se obtiene un conjunto de valores  $(\mu[VPN_M], \sigma[VPN_M])$  que definen un espacio de soluciones. Así por ejemplo, el punto A de la figura se obtiene para una combinación:  $\alpha_S = 1$ ,  $\alpha_R = 0$ ,  $\alpha_L = 0$ , mientras que el punto B resulta para  $\alpha_S = 0$ ,  $\alpha_R = 1$ ,  $\alpha_L = 0$  y el C para  $\alpha_S = 0$ ,  $\alpha_R = 0$ ,  $\alpha_L = 1$ . El triángulo que tiene como vértices a los puntos A, B y C limita a todas las soluciones factibles; el punto D, por ejemplo, se obtiene para los valores:  $\alpha_S = 0.6$ ,  $\alpha_R = 0.3$ ,  $\alpha_L = 0.1$ . En la misma figura se observa que si el criterio de aceptación se define con la recta  $\beta = 2$ , el punto A representa una solución no aceptable a pesar de que en un análisis determinístico sí se hubiera aceptado dicha alternativa. Por otro lado, tomando en cuenta adicionalmente a los objetivos regional y local, la alternativa en estudio satisface el criterio anterior.

En la Fig. 4.2 se muestran los resultados de la evaluación de un conjunto de alternativas para el mismo proyecto Elota-Piactla, en donde se consideran dos objetivos únicamente: el nacional y el regional. El punto A, por ejemplo, representa una solución con un valor esperado del valor presente neto múltiple de la alternativa I ( $\mu[VPN_M]$ ) igual a 309 millones de pesos y una desviación estándar para esta misma variable ( $\sigma[VPN_M]$ ) igual a 142 millones de pesos. Este punto representa una combinación de objetivos  $\alpha_S = 1$ ,  $\alpha_R = 0$ , o sea que se calculó dándole todo el peso al objetivo social y despreciando el objetivo regional. De igual manera, el punto B de la misma figura representa una combinación de objetivos  $\alpha_S = 0$ ,  $\alpha_R = 1$  (todo el peso al objetivo regional). El segmento de recta AB define el conjunto de todas las posibles combinaciones de los pesos relativos de los objetivos social y regional.

Asimismo, el criterio de selección empleado fue aceptar todas aquellas alternativas con un  $VPN_M$  positivo para un nivel de confianza mayor del 98% (aquellos proyectos con coordenadas debajo de la recta  $\beta = 2$ ).



• Rendimientos Altos  
 •• No Incluye afectaciones

FIG. 4.1 RESULTADOS DE LA EVALUACION: ALTERNATIVA IIIb<sup>oe</sup>

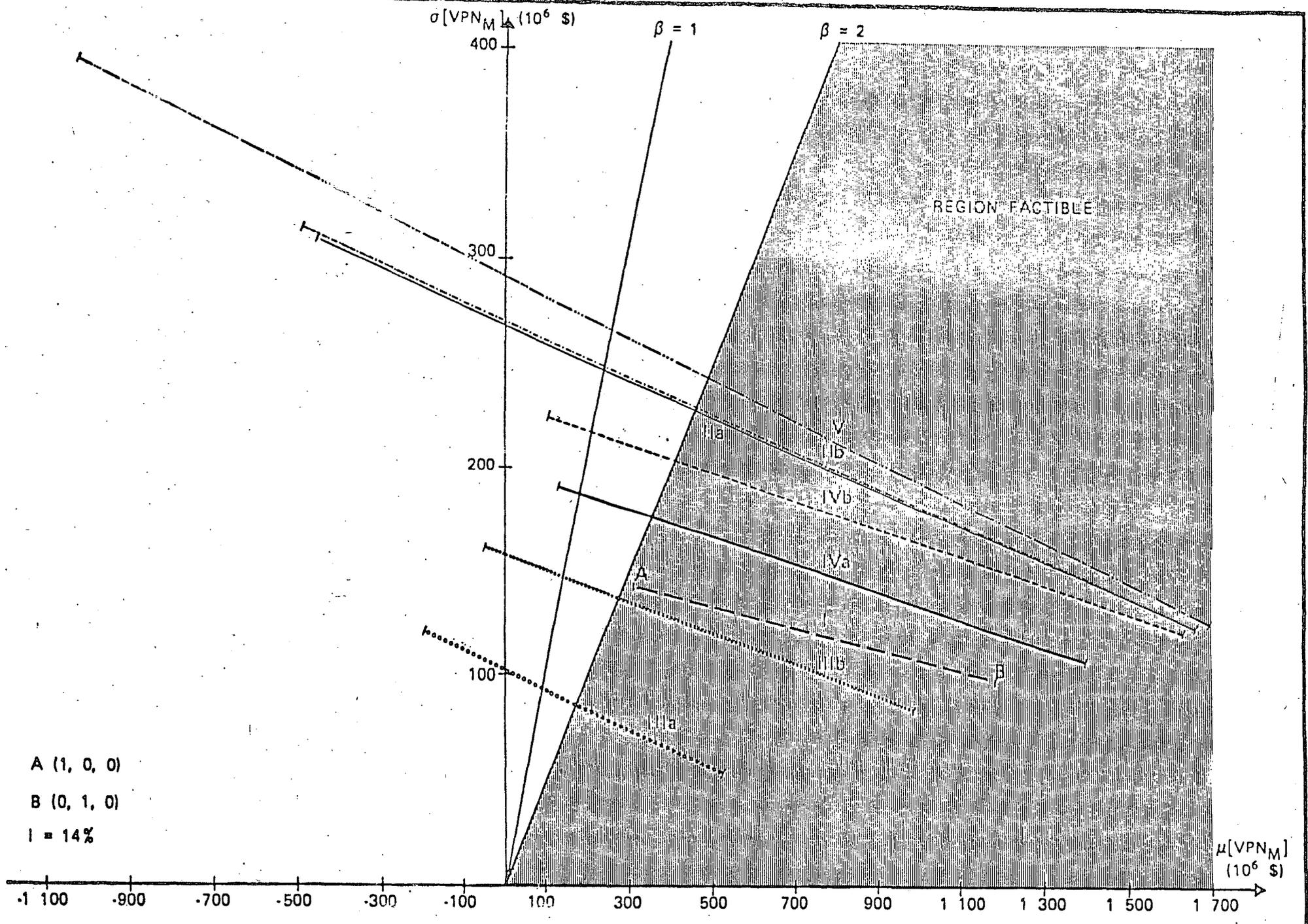


FIG. 4.2 RESULTADOS DE LA EVALUACION: PLAN I, RENDIMIENTOS ALTOS

En la misma figura se observa que si solo interesara el objetivo social, las alternativas I, IVa y IVb resultan con un  $VPN_M$  positivo y por lo tanto, atractivas desde el punto de vista determinístico. Sin embargo, considerando un criterio probabilístico, solo la alternativa I se encuentra en la región factible de acuerdo a lo mencionado anteriormente, y las alternativas IVa y IVb se rechazan según este criterio ya que tienen un fuerte nivel de incertidumbre.

Finalmente, en la Fig. 4.3 se muestra la interpretación probabilística de la tasa interna de retorno para una de las alternativas del proyecto Aguamilpa. De la figura puede verse que desde el punto de vista determinístico, este índice es igual al 39% aunque este valor se ve acompañado de una incertidumbre muy grande.

## V. COMENTARIOS FINALES

De los resultados obtenidos puede verse que la metodología propuesta es sumamente *pragmática y factible* de aplicar a problemas reales. Con el enfoque aquí sugerido, la única información que se necesita para incorporar los efectos de la incertidumbre en la estimación de costos son ciertas medidas de la variabilidad de cada una de las componentes (en forma de coeficientes de variación, por ejemplo) y de los niveles de correlación entre las variables. Para esto último, será importante entender a los fenómenos que controlan las relaciones entre las variables y, en última instancia, invocar hipótesis de independencia o de dependencia perfecta según sea el caso. Sin embargo, estas hipótesis se formularán para las componentes individuales de los costos y no para los beneficios netos\*. Aunque sea de manera aproximada, los efectos de la

---

\* Los modelos probabilísticos propuestos a la fecha se basan en la hipótesis de que "se conoce" la variabilidad de los beneficios netos para cada uno de los períodos que definen el horizonte de evaluación. Sin embargo, esta suposición es poco realista en la práctica pues aunque sí es factible estimar la incertidumbre de las componentes individuales que integran a cada uno de los costos individuales, no es sencillo efectuar dicha estimación para los beneficios netos los cuales, en algunos casos, pueden ser funciones complejas de sus componentes.

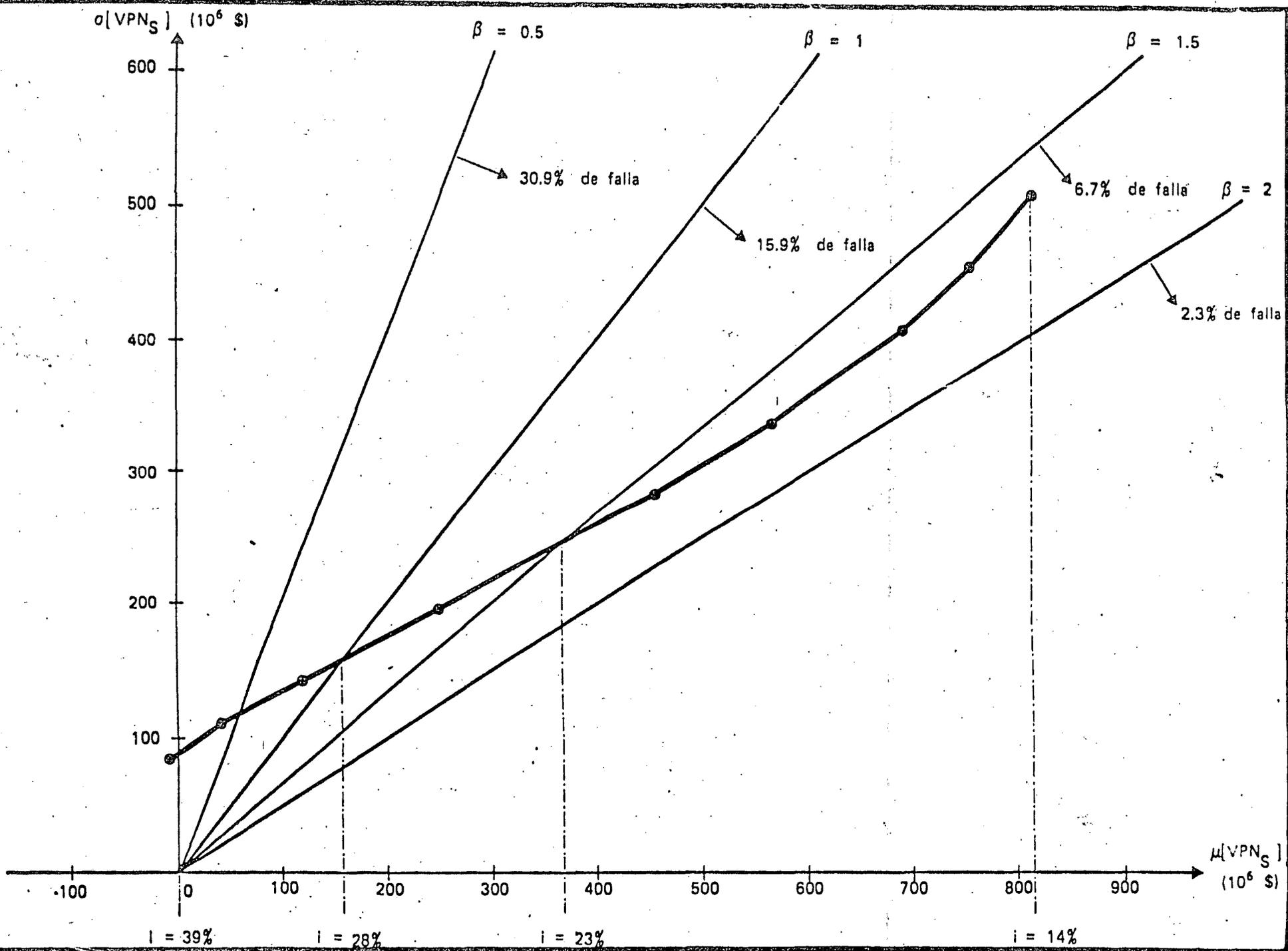
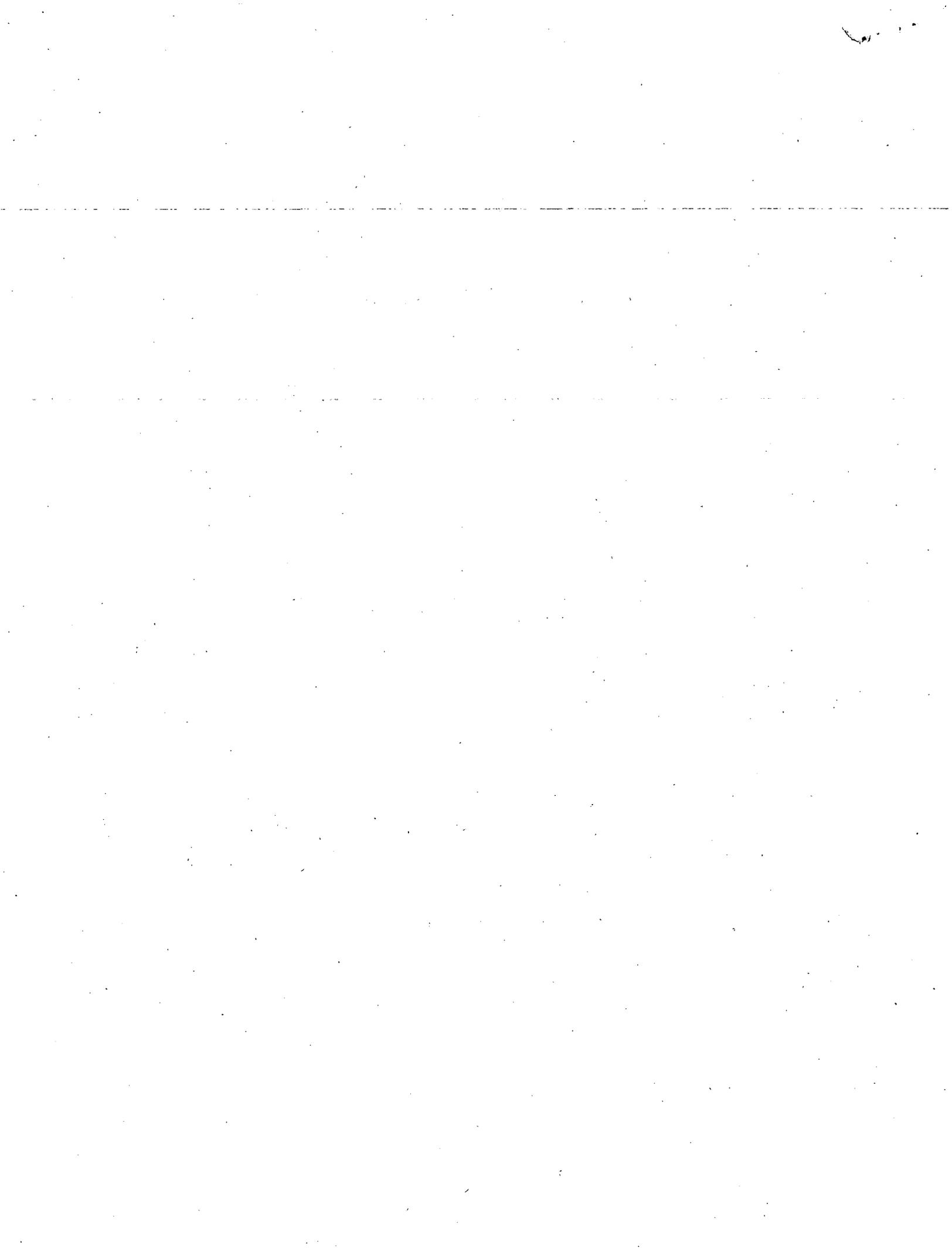


FIG. 4.3 ALTERNATIVA I: TA INTERNA DE RETORNO

dependencia entre las variables deben de incluirse en los análisis. En algunas ocasiones será razonable aceptar la hipótesis de independencia probabilística para algunas de las variables y para un momento dado, pero en general no será posible argumentar esta hipótesis para los costos incurridos durante varios períodos de tiempo. Es decir, debido a que estas variables pueden ser funciones de las mismas componentes durante diferentes períodos de tiempo, en general la correlación puede ser alta y el no tomarla en cuenta puede conducir a variabilidades de las eficiencias de las alternativas mucho menores que las verdaderas y por lo tanto del lado de la inseguridad.

Vale la pena mencionar nuevamente que los resultados obtenidos con este tipo de análisis constituyen aproximaciones a las soluciones exactas. El grado de aproximación dependerá del grado de no linealidad de las funciones y de la forma que tengan las funciones de densidad de probabilidades de las variables. Por ejemplo, si se tiene una función lineal de variables gaussianas, entonces los resultados obtenidos por medio de análisis de primer orden coincidirán con los exactos. Al ir perdiendo la función su carácter lineal, al irse alejando las funciones de probabilidad de distribuciones simétricas y unimodales, y al ir aumentando la incertidumbre de las variables, los resultados se van haciendo cada vez menos exactos. Sin embargo, el análisis de problemas prácticos dentro de un marco de incertidumbre tiene necesariamente que apoyarse en enfoques pragmáticos como el señalado en este trabajo, principalmente en aquellas situaciones en que no se puedan justificar funciones de densidad de probabilidades específicas.





centro de educación continua  
división de estudios superiores  
facultad de ingeniería, unam



APROVECHAMIENTOS HIDRAULICOS

CONCEPTOS DE EVALUACION (Técnicas)

ING. CESAR A. HERRERA TOLEDO  
OCTUBRE DE 1978



#### 4.1 CONCEPTOS DE EVALUACION

La evaluación de proyectos tradicionalmente se ha basado en criterios económicos con el objetivo de máxima eficiencia económica. Es decir, buscando incrementar el ingreso nacional. No es esa la única manera de evaluar los proyectos dado que los objetivos pueden ser variados y la forma de alcanzarlos también.

Actualmente, se ha tratado de incorporar, en el proceso de evaluación, una serie de indicadores que reflejen el impacto que los proyectos puede tener sobre el ambiente, sobre la región, o específicamente en el medio social, en adición al impacto económico. En efecto, en algunos países se han establecido leyes que demandan estudios exhaustivos para determinar el impacto que originan los proyectos. Aún más, se ha incorporado en el proceso de planeación y de decisiones, la participación pública, de manera que el proceso de evaluación resulta muy complejo.

En esta primera parte, denominada conceptos de evaluación, se presenta una serie de métodos que están dirigidos al estudio de alternativas bajo el criterio de eficiencia económica exclusivamente. De hecho, estos criterios se siguen usando ampliamente y son requeridos para la aprobación de proyectos. No debe perderse de vista, sin embargo, la limitación del criterio, cuando se considera dentro de un marco que toma en cuenta aspectos ambientales y sociales a la vez.

#### 4.1.1. Conceptos de Análisis Económico

La preocupación inicial que surge al comparar alternativas es la necesidad de expresar sus consecuencias en términos homogéneos, ya que los proyectos presentan diferencias en tiempo y de clase. El primer paso sería entonces buscar unidades de valores comunes; en decisiones económicas se utilizan unidades monetarias por la facilidad que representa para la gente entenderlas, a diferencia de otras.

Al hacer las comparaciones en términos monetarios, cada valor debe ser identificado por cantidad y tiempo; es decir, no deberán combinarse o compararse cantidades correspondientes a diferentes tiempos.

Se deben hacer equivalentes a través del empleo de factores que reflejen esas diferencias, o bien, que indiquen el cambio de valor del dinero a través del tiempo.

Para ello es necesario recurrir a los conceptos de tasa de interés y de equivalencia, que se describen a continuación:

Tasa de interés.- En forma simplista, interés puede definirse como el dinero que se debe pagar por usar dinero prestado; de otro modo, es el dinero que se obtiene al invertir capital en forma productiva. A la cantidad obtenida o pagada como interés, dividida entre el monto inicial de la inversión ó préstamo respectivamente se le denomina tasa de interés. Así por ejemplo, si el monto de la inversión es de \$ 1 000 y el interés al final de un año es \$ 80, la tasa de interés será de 0.08 ó del 8%.

La tasa de interés que se utiliza en evaluación es de gran importancia en la selección de proyectos, sería motivo de un capítulo completo; base por ahora manejar el concepto y posteriormente se mencionarán algunas observaciones al respecto.

## Equivalencia

La forma de hacer que, pagos correspondientes a distintas alternativas, de diferente magnitud, efectuados en diferentes tiempos, puedan ser comparados en términos equivalentes se explica a través de un ejemplo:

Supóngase que se desea solicitar un préstamo con una tasa de interés del 5% y que existan varios planes de pago. El préstamo es por \$ 100 000 y los planes son:

- a) pagar todo al final de 10 años
- b) pagar cantidades iguales cada año durante los próximos 10 años y;
- c) pagar anualidades de 10 000 de capital más interés a lo largo de los 10 años es decir, que cada año se pague parte del capital del préstamo y los intereses correspondientes a la cantidad de capital que no haya sido pagada (saldos insolutos). En la tabla 1 se presentan las cantidades correspondientes.

TABLA 1. SERIES DE PAGO EQUIVALENTES

Año	Préstamo	Plan 1	Plan 2	Plan 3
0	100 000			
1			12 950	15 000
2			12 950	14 500
3			12 950	14 000
4			12 950	13 500
5			12 950	13 000
6			12 950	12 500
7			12 950	12 000
8			12 950	11 500
9			12 950	11 000
10		100 000	12 950	10 500

Estas tres series de pago son equivalentes, desde el punto de vista de un inversionista con \$ 100 000 pues asegura la recuperación con cualquier serie, desde el punto de vista de la persona que solicita el préstamo, con cualquiera de las tres formas de pago asegura la adquisición del préstamo. En general, los pagos futuros o series de pagos que paguen la cantidad inicial con intereses a una tasa determinada, son equivalentes entre si.

Al analizar los plazos de pago se advierte que la tasa de interés no se aplica una sola vez en todo el período, ni aún en el Plan 1. El tipo de interés empleado aquí se denomina interés compuestos por cuanto a que se aplica a la cantidad en deuda al final del año anterior. Para el Plan 1, por ejemplo, los \$ 162 890 resultan de aplicar la tasa de interés a la cantidad del año anterior, de la siguiente forma :

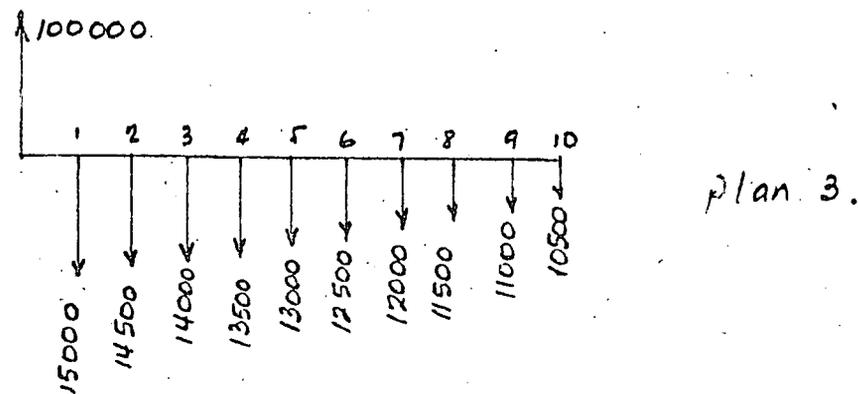
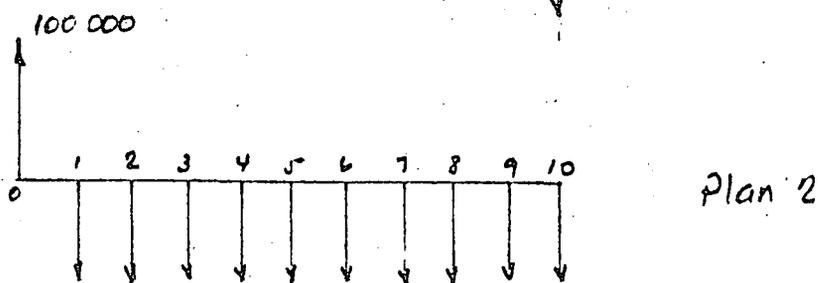
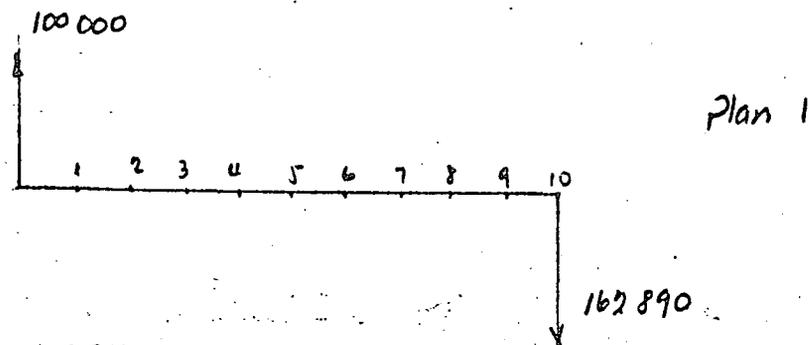
Año 0		
Año 1	$100\ 000 + 0.05 \times 100\ 000 = 105\ 000$	$P + iP = P(1 + i)$
Año 2	$105\ 000 + 0.05 \times 105\ 000 = 110\ 250$	$P(1+i) + iP(1+i) = P(1+i)^2$
Año 3	$110\ 250 + 0.05 \times 110\ 250 = 115\ 762$	$P(1+i)^2 + iP(1+i)^2 = P(1+i)^3$
etc		$P(1+i)^N$

El Plan 2 no es tan sencillo como el primero; corresponde a anualidades uniformes y posteriormente se tratará con detalle.

El Plan 3 es similar al primero, sólo que aquí se descuenta cada año \$ 10 000. Esta se denomina serie de gradiente uniforme y también se analizará después.

Auxiliar en el análisis de series de pagos (y en la comparación de alternativas posteriormente) es el diagrama de flujo de caja. Este es una representación gráfica de las series de pago como las presentadas en la tabla 1.

En las figuras 1, 2, y 3 se muestran los diagramas correspondientes a los tres planes.



En los diagramas se indica en la parte superior la cantidad recibida y en la parte inferior los pagos correspondientes a cada plan. Es importante hacer énfasis en que los tres planes han sido analizados con la misma tasa de interés de 5% anual.

Al hacer comparación de alternativas, éstas pueden tener series de pagos diversas, pero, basados en el concepto de equivalencia, se advierte ya que es posible manejar cantidades en un tiempo determinado, o bien hacer series uniformes o de gradiente que permitan hacer las comparaciones.

Esto se logra a través de la aplicación de una serie de factores denominados de descuento que se describen adelante.

#### 4.1.2. Factores de descuento

Se dividen en 3 tipos: factores de descuento de pagos simples, series uniformes y series de gradiente.

A). Factores de Descuento de pagos simples.- Se utilizan para convertir un valor de una fecha a otro valor en otra fecha. Corresponden a este tipo de factores:

a) Factor de interés compuesto de pago unitario.- Indica la cantidad de pesos que se habrían acumulado después de N años por cada peso que se invierta inicialmente con una tasa de retorno de  $i\%$ .  $\frac{1}{P}$  El factor es:

$$\left( \frac{F}{P}, i\%, N \right) = (1+i)^N = \frac{F}{P} \quad \text{-----} \quad (1)$$

donde

$\frac{F}{P}$  se lee: valor futuro F, dado el valor presente P.

$i$  = tasa de retorno

$N$  = número de períodos (generalmente años)

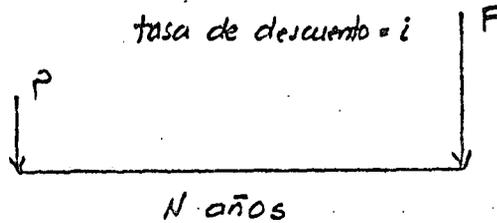
El término izquierdo de la expresión (1) se usa en forma genérica para representar el factor de descuento. Para los otros factores se usará notación similar.

b). Factor de valor presente.- Indica la cantidad de pesos debe invertirse inicialmente a  $i\%$  para tener al final de N períodos un peso. Este factor es inverso del anterior.

$$\left( \frac{P}{F}, i\%, N \right) = \frac{1}{(1+i)^N} = \frac{P}{F} = \text{-----} \quad (2)$$

El diagrama de flujo de caja correspondiente a estos dos factores es el siguiente

!/ En lo sucesivo se utilizarán los términos tasa de interés, tasa de retorno o tasa de descuento, y se les designará con la letra  $i$ . El término tasa de interés se definió anteriormente; la tasa de descuento tiene el mismo significado que la de interés pero se usa comúnmente al calcular valor presente pues a este se le llama descuento. La tasa de re-



El empleo de estos factores se simplifica enormemente al emplear tablas como las que aparecen en el anexo 1. La forma de usarlas se ilustra a través de un ejemplo:

Calcular la cantidad que se habrá acumulado en 5 años si se invierten \$ 15 000 a una tasa de interés del 8% anual.

En este caso se utiliza el factor de interés compuesto de pago unitario de la siguiente manera:

$$\left(\frac{F}{P}, i\%, N\right) = \left(\frac{F}{P}, 8\%, 5\right)$$

En la tabla D- 13, se busca en la columna correspondiente a factor de interés compuesto (F/P) y en la columna n se busca el número de años. El valor del factor resulta: 1.4693. De acuerdo con la expresión (1), siendo P = 15.000, el valor de F se obtiene despejando así:

$$F = \left(\frac{F}{P}, i\%, N\right) \times P = 1.4693 \times 15\,000 = \$ 22\,039.50$$

La aplicación del factor de valor presente es similar si ahora se parte, por ejemplo, de \$ 35 000 dentro de 15 años, y se requiere conocer a cuánto equivale en el presente, a una tasa de interés del 12 % anual.

$$\left(\frac{P}{F}, i\%, N\right) = \left(\frac{P}{F}, 15\%, 12\right)$$

En la tabla D - 17 se busca la columna  $\frac{P}{F}$  y el renglón 15 de la columna n. El valor que ahí aparece es: 0.1827. Sustituyendo en la expresión (2) se obtiene:

$$P = \left(\frac{P}{F}, i\%, N\right) \cdot F = 0.1827 \times 35000 = \text{\$ } 6394.50$$

B) Factores de Series Anuales Uniformes.- Se utilizan para establecer equivalencias entre pagos unitarios en una fecha determinada, con pagos periódicos durante N años. En realidad pueden usarse los factores de pagos unitarios, aplicándolos N veces pero esto es inoperante cuando se trata de muchos períodos. Sin embargo, los programas de computadora usan factores unitarios en la mayoría de los casos. Corresponden a este tipo de factores los dos siguientes casos:

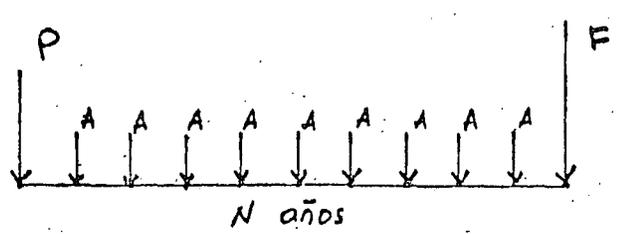
a) Factor de fondo acumulativo.- Indica el número de pesos que deben invertirse en cantidades uniformes a i % de interés durante N años para acumular un peso.

$$\left(\frac{A}{F}, i\%, N\right) = \frac{i}{(1+i)^N - 1} = \frac{A}{F} \dots (3)$$

b) Factor de Recuperación de Capital.- Indica la cantidad de pesos que puede retirar al final de cada uno de los N períodos si se deposita un peso inicialmente.

$$\left(\frac{A}{P}, i\%, N\right) = \frac{i(1+i)^N}{(1+i)^N - 1} = \frac{A}{P} \dots (4)$$

El diagrama de flujo de caja correspondiente a estas dos series se presenta a continuación.



También para estos casos existen tablas que simplifican el cálculo. Así por ejemplo, si

se requiere conocer cuánto se debe pagar anualmente, durante 15 años por un préstamo de \$ 200 000, haciendo pagos uniformes, con una tasa de interés del 18% anual, el cálculo sería el siguiente:

$$\left( \frac{A}{P}, i\%, N \right) = \left( \frac{A}{P}, 18\%, 15 \right)$$

En la tabla D-22, se busca la columna de factor de recuperación de capital ( $\frac{A}{P}$ ) y el renglón 15 de la columna  $n$ . El factor vale 0.19640.

La cantidad anual que tendría que pagar, aplicando la expresión 4 es:

$$A = \left( \frac{A}{P}, i\%, N \right) \cdot P = 0.19640 \times 200\,000 = \$ 39\,280$$

En las tablas aparece también el factor de fondo acumulativo y su aplicación es similar a la presentada para el factor de recuperación de capital.

Dentro de este grupo se incluyen también otros dos factores

c) Series Uniformes.- Factor de interés compuesto

$$\left( \frac{F}{A}, i\%, N \right) = \frac{(1+i)^N - 1}{i} = \frac{F}{A}$$

d) Series uniformes.- Factor de valor presente

$$\left( \frac{P}{A}, i\%, N \right) = \frac{(1+i)^N - 1}{i(1+i)^N} = \frac{P}{A}$$

También se consignan valores para estos factores en las tablas mencionadas y su empleo es similar.

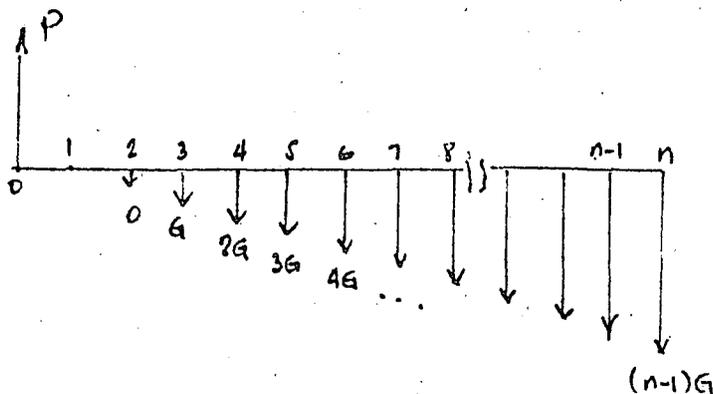
C) Factores de Series de Gradiente Uniforme.- Algunos problemas contienen valores de inversiones que crecen o decrecen uniformemente con el tiempo, ejemplo de ello son los gastos de mantenimiento. Aunque no siempre son uniformes puede asimilarse a una serie con variación uniforme.

En virtud de que la cantidad de dinero es diferente cada po, los factores antes vistos no pueden usarse, a continuación se derivan expresiones para simplificar el cálculo en el caso de series de gradiente.

a) Factor de valor presente en series de gradiente.- Indica la cantidad de pesos que debe invertirse inicialmente con una tasa de interés  $i\%$ , para recibir un peso el año siguiente; dos pesos, dos años después, tres pesos tres años después, etc. hasta  $N$  pesos  $N$  años después. El factor se representa con :

$$\left( \frac{P}{G}, i\%, N \right) = \frac{(1+i)^{N+1} - (1+Ni+i)}{i^2 (1+i)^N} = \frac{P}{G} \dots (7)$$

El diagrama de flujo de caja se presenta a continuación. Es importante observar el año de inicio de la serie. Para claridad se presenta la serie hacia abajo, a diferencia de las otras. El sentido de las flechas se definirá posteriormente.



Conocido el factor  $\frac{P}{G}$  es fácil determinar otros valores a partir de él, así:

b) Conversión de valor presente a serie de gradiente

$$\left( \frac{A}{G}, i\%, N \right) = \left( \frac{P}{G}, i\%, N \right) \left( \frac{A}{P}, i\%, N \right) = \frac{A}{G} \dots (8)$$

Esta expresión resulta de la aplicación de dos factores en forma consecutiva. Primero se convierte la serie de gradiente a valor presente, con la expresión (7) y esa cantidad se

multiplica por el factor de recuperación de capital.

Para las series de gradiente existen tablas que facilitan el cálculo.

Ejemplo

Considérese una inversión de \$ 100 000 el año cero con una tasa de interés del 8%.

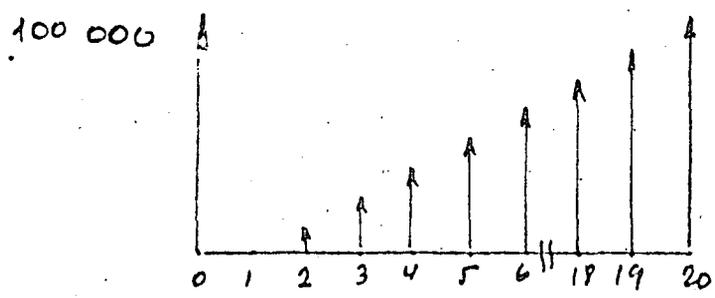
Se plantean las siguientes preguntas.

- a) Cuánto se tendrá al final de 20 años.
- b)Cuál sería la inversión anual equivalente, durante 20 años, para tener los \$ 100 000 en el año cero.
- c) Determine la serie de pagos crecientes, que tendrían que hacerse durante 20 años para lograr una inversión equivalente a los \$ 100 000 de ahora.
- d) A partir de la serie de gradiente calcula la inversión equivalente en pagos uniformes.
- e) Supóngase, partiendo del planteamiento inicial, que en el año 5 se invierten \$ 50 000 y \$ 30 000 en el año 10. Calcule la inversión inicial equivalente y la serie anual equivalente.

a)  $(\frac{F}{P}, 8\%, 20) \times P = 4.6610 \times 100\,000 = \$ 466\,100$

b)  $(\frac{A}{P}, 8\%, 20) \times P = 0.10185 \times 100\,000 = \$ 10\,185$

c) Para resolver este punto obsérvese el diagrama de flujo de caja.



Para utilizar tablas de factores de gradiente, el primer pago se haría el año 2 (así fueron deducidas). Es obvio que pueden determinarse series para incluir el año 1. Para este caso, siguiendo las tablas D-31 se obtiene:

$$\left(\frac{P}{G}, i\%, N\right) = \frac{P}{G}; \text{ como lo que interesa es } G:$$

$$G = \frac{P}{\left(\frac{P}{G}, i\%, N\right)} = \frac{100.000}{69.0898} = \text{f } 1447.39$$

Esto indica que los valores de la serie serán:

año	expresión	inversión (pesos)
0	0	0
1	0	0
2	G	1447.39
3	2 G	2894.78
4	3 G	4342.17
5	4 G	5789.57
19	(N - R) G	26053.05
20	(N - 1) G	27500.44

d) Utilizando la expresión (8):

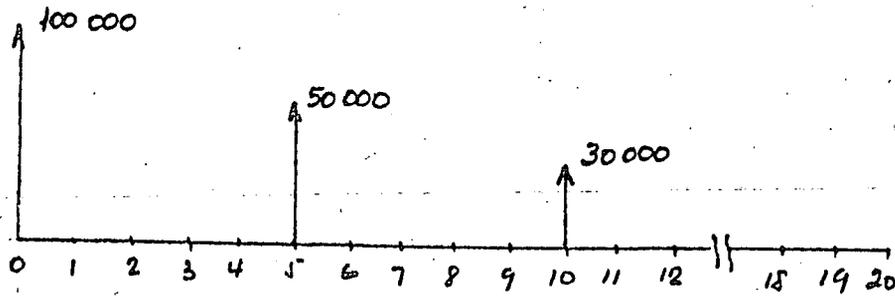
$$A = \left(\frac{P}{G}, i\%, N\right) \left(\frac{A}{P}, i\%, N\right) \cdot G$$

Substituyendo valores de las tablas D-31 y D-13:

$$A = (69.0898)(0.10185) \cdot 1447.39 = \text{f } 10185$$

Este valor corresponde exactamente al obtenido en (b)

e) Para resolver este inciso se usarán diagramas de flujo de caja inicialmente.



El valor presente se obtiene como la suma de las siguientes cantidades:

$$P = 100\,000 + 50\,000 \left( \frac{P}{F}, 8\%, 5 \right) + 30\,000 \left( \frac{P}{F}, 8\%, 10 \right)$$

$$= 100\,000 + 50\,000 (0.6806) + 30\,000 (0.4632) = \$ 147\,926$$

La serie uniforme se puede obtener utilizando el valor obtenido para el año cero. Es decir:

$$A = \left( \frac{A}{P}, 8\%, 20 \right) \times P = 0.10185 \times 147\,926 = \$ 15\,066.26$$

Por supuesto, esto se puede calcular también de la siguiente manera:

$$A = \left( \frac{A}{P}, 8\%, 20 \right) \times 100\,000 + \left( \frac{A}{P}, 8\%, 20 \right) \left( \frac{P}{F}, 8\%, 5 \right) \times 50\,000 + \left( \frac{A}{P}, 8\%, 20 \right) \left( \frac{P}{F}, 8\%, 10 \right) \times 30\,000$$

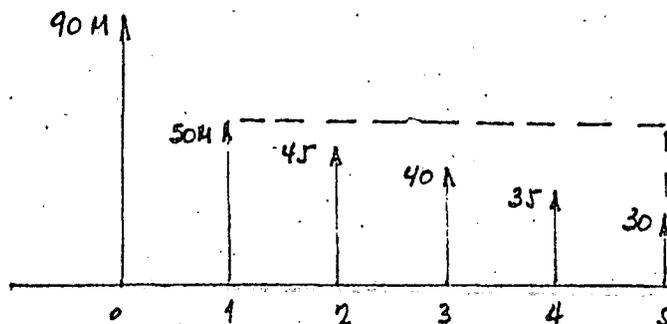
es decir realizando el cálculo para cada uno de los elementos.

Un problema que se encuentra con frecuencia es el de gradientes decrecientes, a diferencia de los mencionados anteriormente para los cuales existen tablas. Para estos casos, se sigue el procedimiento indicado en el siguiente ejemplo.

Supóngase que una compañía renta maquinaria en los siguientes términos: Pago inicial \$ 90 000 y una renta anual (pagadera al final de cada año) de \$ 50 000 el primer año, 45 000 el segundo año, y \$ 5 000 menos cada año. Si se renta por 5 años la máquina, cual será:

- a) el costo anual equivalente si se renta con una tasa de interés del 8%
- b) el costo inicial equivalente si se renta los 5 años con una tasa de 8% anual?

a) El diagrama de flujo de caja es:



Debido a que las tablas de series de gradiente son crecientes, se considera una inversión uniforme (de 50 000 al año) y se resta una serie donde  $G = 5\,000/\text{año}$ . Las anualidades serán:

para la inversión inicial

$$A = \left( \frac{A}{P}, 8\%, 5 \right) \times 90\,000 = 0.2546 \times 90\,000 = \text{f } 22\,914$$

• para la serie uniforme (punteada)

$$A = 50\,000$$

- La serie de gradiente es: (se obtiene el factor directamente de la tabla D-30).

$$A = -5000 \left( \frac{A}{i}, 8\%, 5 \right) = -5000 \times 1.85 = -\$ 9250$$

La serie uniforme resulta:

$$A = 22914 + 50000 - 9250 = \$ 63664$$

- b) La cantidad equivalente en valor presente es:

$$P = \left( \frac{P}{A}, 8\%, 5 \right) \times A = 3.933 \times 63664 = \$ 250390$$

#### 4.1.3. TECNICAS DE DESCUENTO

A continuación se presentan cuatro procedimientos para comparar alternativas que incluyen pagos o ingresos diferentes. Los métodos son:

- Valor presente con una tasa de descuento definida
- Método de la tasa de retorno.
- Método del costo anual
- Relación beneficio-costos

Estas técnicas se utilizan para comprar alternativas mutuamente exclusivas

Por ello debe entenderse que se construye solo una de ellas, de manera que puedan ser alternativas correspondientes a dos proyectos diferentes o a distintos tamaños de un proyecto.

Conviene aquí anotar que la tasa de interés juega un papel preponderante en la comparación, pues sucede que al cambiarla puede cambiar también la alternativa que con la tasa de interés anterior era mejor. Para inversiones privadas, puede usarse una tasa de interés igual a la que ofrecen los bancos al invertir dinero; para el caso de inversiones gubernamentales, algunas veces la tasa de interés está fija por organismos internacionales

(cuando se manejan fondos internacionales), o bien, las dependencias la fijan.

En los cuatro métodos se hará referencia a dos alternativas solamente. El caso de alternativas múltiples lleva al concepto de análisis marginal que solo se mencionará adelante.

Para todos los métodos, el primer paso al analizar alternativas será definir la información básica. Esta por una parte contiene datos de costos de las obras y por otra parte los beneficios. La determinación de costos se obtiene aplicando precios unitarios a cada elemento del proyecto. Los beneficios en algunos casos son fáciles de determinar, sobre todos los beneficios directos (aquellos que resultan de los bienes y servicios originados por el proyecto); sin embargo hay también beneficios indirectos, que por facilidad se calculan en muchos casos como porcentajes de los directos. La evaluación de los beneficios sería motivo de una sesión de cuatro horas, como ésta; sobre el tema, el libro de James and Lee <sup>1/</sup> presenta una explicación amplia.

En los cuatro métodos se usará el siguiente conjunto de datos base, que corresponde a dos alternativas que se desea comparar.

Considérese una zona urbana por la que pasa un arroyo, en donde se han propuesto obras de control para evitar inundaciones cuando ocurren crecientes, se han hecho estimaciones para dos alternativas, uno consiste en el revestimiento de un canal y el otro un almacenamiento en dos etapas para regulación debido al crecimiento futuro.

Se propone hacer el análisis económico para una vida útil de 40 años, con una tasa de retorno del 8% anual.

---

<sup>1/</sup> Referencia 1

Concepto	Alternativa canal	Alternativa presa
Costo de construcción	20 000 000	15 000 000 (1a. etapa) 30 000 000 (2a. etapa)
Operación y mantenimiento	160 000/año durante 40 años	100 000 al año (20 años) 200 000 al año (20 años)
Vida económica de la obra	40 años	40 años cada/etapa
Beneficio anual	4 000 000	5 000 000

A) Método del valor Presente

Este método selecciona el proyecto con mayor valor presente de la diferencia algebraica de los beneficios menos los costos, descontados a un año determinados, esto es en valor presente.

$$VP = \sum_{t=1}^N \left( \frac{P}{F}, i\%, t \right) (B_t - C_t)$$

donde  $C_t$  es el costo y  $B_t$  el beneficio en el año  $t$ ,  $N$  es el período de análisis e  $i$  es la tasa de descuento.

El libro de James and Lee propone una serie de reglas que conviene usar al utilizar este método:

1. Todas las cantidades deben ser descontadas al mismo año base.
2. Todas las cantidades deben ser descontadas (o pasadas a valor presente), con la misma tasa de descuento  $i$ .
3. El período de análisis para todas las alternativas debe ser el mismo.

En relación a la selección de la alternativa, recomienda el libro que si la diferencia  $B_t - C_t$  es negativa se elimine la alternativa y que si son muy parecidas las diferencias en dos alternativas, se seleccione aquella de menor costo.

En el ejemplo mencionado, el análisis de las alternativas sería el siguiente:

Concepto	V. P. Alternativa A	V. P. Alternativa B
V.P. Costo construcción	- \$ 20 000 000	- 15 000 000
		- 30 000 $\left(\frac{P}{F}, 8\%, 20\right)$
V.P. Operación y mant.	- 160 000 $\left(\frac{P}{A}, 8\%, 40\right)$	- 100 000 $\left(\frac{P}{A}, 8\%, 20\right)$
		- 200 000 $\left(\frac{P}{A}, 20\right) \left(\frac{P}{F}, 8\%, 20\right)$
V.P. beneficios	+ 4 000 000 $\left(\frac{P}{A}, 8\%, 40\right)$	+ 5 000 000 $\left(\frac{P}{A}, 8\%, 40\right)$

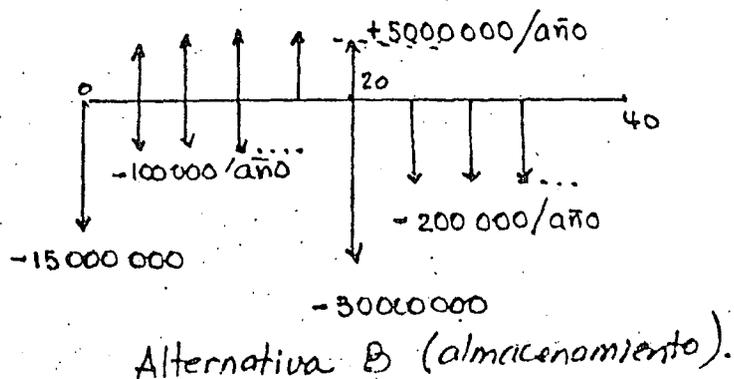
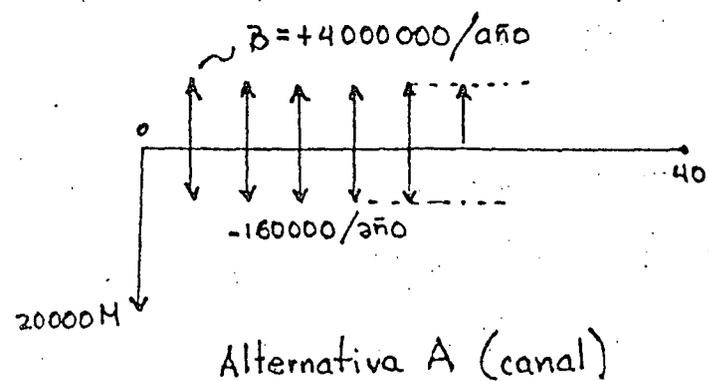
Sustituyendo valores quedará:

$$V.P._A = -20\,000\,000 - 160\,000(11.925) + 4\,000\,000(11.925) = \$25\,792\,000$$

$$V.P._B = -15\,000\,000 - 30\,000(0.2145) - 100\,000(9.818) - 200\,000(9.818)(0.2145) + 5\,000\,000(11.925) = \$36\,787\,000.$$

La selección en este caso recaería sobre el proyecto B, que tiene la mayor diferencia en valor presente. El diagrama de flujo de caja, permite aclarar los cálculos efectuados.

En el diagrama se dibujan los costos hacia abajo y los beneficios hacia arriba.



## B) Método de la tasa de retorno

Se define la tasa de retorno como la tasa de interés a lo cual el valor presente del flujo de caja neto es cero. El proceso de evaluación consta de varias etapas. En primer lugar se calcula la tasa de retorno de cada alternativa y se compara con la tasa de retorno mínima establecida. Si es mayor, entonces se procede a ordenar los proyectos (solo aquellos en que su tasa de retorno sea mayor que la mínima), en orden ascendente y se comparan por pares en la siguiente forma: se calcula primero el flujo de caja neto, posteriormente se pasan a valor presente e igualan a cero. Por prueba y error se obtiene el valor de la tasa de retorno. Para el ejemplo mencionado antes, la segunda parte del cálculo quedaría.

Concepto	Alternativa A	Alternativa B	(A-B)
Costo de construcción	20 000 000	15 000 000	+ 5 000 000
		30 000 000	- 30 000 000
Operación y mantenimiento	160 000	100 000	60 000 (1os. 20 años)
		200 000	- 40 000 (2os. 20 años)
Beneficio anual	4 000	5 000 000	- 1 000 000

El valor presente de la diferencia resulta.

$$V.P. = + 5 000 000 - 30 000 000 \left( \frac{P}{F}, i\%, 20 \right) + 60 000 \left( \frac{P}{A}, i\%, 20 \right) - 40 000 \left( \frac{P}{A}, i\%, 20 \right) \\ \left( \frac{P}{F}, i\%, 20 \right) - 1 000 000 \left( \frac{P}{A}, i\%, 40 \right) = 0$$

Obsérvese que en esta expresión se anotó  $i\%$ , ya que se desconoce la tasa de interés que hace el valor presente cero.

Por tanteos, suponiendo  $i = 15\%$  y dividiendo todo entre 1 000 000.

$$+ 5 - 30 (0.061) + 0.06 (6.259) - 0.04 (6.259) (0.0611) - 1 (6.642) = 0$$

$$+ 5 - 1.833 + 0.376 - 0.015 - 6.642 = - 3.114$$

Con  $i = 20\%$

$$+ 5 - 30 (0.0261) + 0.06 (4.87) - 0.04 (4.87) (0.026) - 1 (4.997) = 0$$

$$+ 5 - 0.783 + 0.292 - 0.005 - 4.497 = 0.007$$

por lo tanto la tasa de retorno es 20%

El resultado indica que el proyecto B es mejor que A si la tasa de retorno mínima es menor que 20%. También puede entenderse de la siguiente manera: la inversión en exceso de B respecto a A es conveniente dado que la tasa de retorno de ese incremento es del 20%, siempre que esta tasa sea mayor que la mínima.

En general la tasa de retorno mínima es mucho menor, algunas veces se considera la tasa de interés bancario como la mínima, mediante el razonamiento de que dinero invertido en un banco cuando menos gana intereses a esa tasa.

### C) Método del Costo Anual

En este método se convierten beneficios y costos a series anuales y se comparan los valores de las series. En este caso, el criterio de decisión es el mismo que en el método del valor presente, es decir, aquella alternativa en que la serie anual de beneficios menos costos sea mayor. Es evidente que en este método puede efectuarse el cálculo a partir de las cantidades obtenidas en valor presente; aunque también puede hacerse pasando a serie anual cada uno de los valores.

A partir de los datos del ejemplo, el cálculo sería el siguiente:

Concepto	Anualidades	
	Alternativa A	Alternativa B
Costo de construcción	- 20.000.000 ( $\frac{A}{P}, 8\%, 40$ )	- 15.000.000 ( $\frac{A}{P}, 8\%, 40$ )
Operación y mantenimiento	- 160.000	- 30.000.000 ( $\frac{A}{P}, 8\%, 40$ ) ( $\frac{P}{F}, 8\%, 20$ )
		- 100.000 ( $\frac{A}{P}, 8\%, 40$ ) ( $\frac{P}{F}, 8\%, 20$ )
Beneficios	+ 4.000.000	- 200.000 ( $\frac{A}{P}, 8\%, 40$ ) ( $\frac{P}{F}, 8\%, 20$ )
		+ 5.000.000 ( $\frac{P}{A}, 8\%, 20$ )

Sustituyendo valores:

$$\text{Serie alternativa A:} = -20.000.000 (0.08386) - 160.000 + 4.000.000 = \$ 2.162.800$$

$$\begin{aligned} \text{Serie alternativa B:} &= -15.000.000 (0.08386) - 30.000.000 (0.08386)(0.2145) - \\ &- 100.000 (0.08386)(9.918) - 200.000 (0.08386)(0.2145)(9.918) + \\ &+ 5.000.000 = \$ 3.084.806 \end{aligned}$$

El mayor valor se obtuvo con la serie B, por lo cual se considera la mejor alternativa.

Estos valores se pueden obtener a partir del cálculo de valor presente, de la siguiente

manera:

$$\text{Serie alternativa A} \quad 25792.000 (\frac{A}{P}, 8\%, 40) = \$ 2.162.917$$

$$\text{Serie alternativa B} \quad 36787.000 (\frac{A}{P}, 8\%, 40) = \$ 3.084.958$$

#### Relación Beneficio-Costo

Acerca de la relación beneficio costo se ha escrito mucho. Generalmente la relación Beneficio Costo se refiere al cociente entre el valor presente de los beneficios de un proyecto y el valor presente de los costos. Así, la siguiente expresión denota la relación mencionada.

$$\frac{B}{C} = \frac{\text{V.P. Benef.}}{\text{V.P. Costo}} = \frac{\sum_{t=1}^N \left(\frac{P}{F}, i\%, t\right) B_t}{\sum_{t=1}^N \left(\frac{P}{F}, i\%, t\right) C_t}$$

donde el significado de las variables corresponde al mencionado al estudiar valor presente.

La relación Beneficio-costo también puede obtenerse como el cociente de las series anuales de beneficios y de costos de un proyecto.

La forma de considerar los costos como tales o como beneficios negativos agrega a este método una característica arbitraria, lo que hace su aplicación cuidadosa. La relación debe ser mayor que uno para garantizar que los beneficios obtenidos con el proyecto superen la inversión.

El análisis de alternativas requiere de los siguientes pasos:

- a) Calcular el cociente B/C para cada proyecto, usando el mismo período de análisis y la misma tasa de descuento.
- b) Elegir la que tenga mayor valor B/C
- c) En caso de que se tengan recursos financieros para realizar varios proyectos mutuamente exclusivos, se ordenan estos en orden creciente (aquellos que tienen  $B/C > 1$ )

y se hace un análisis incremental. Esto es;

- Se calcula la diferencia de beneficios y costos entre la primera y la segunda y se calcula la relación B/C, si ésta es mayor que 1, eso indica que conviene incrementar la inversión.
- Se compara la tercera contra la segunda en forma similar y así sucesivamente.
- En caso de que la relación B/C sea menor que uno, se desecha esa alternativa y se compara con la siguiente, sin tomar en cuenta la alternativa eliminada.

Para el ejemplo, la relación de cada alternativa es:

Alternativa A:

$$V.P. \text{ Beneficios} = 4000000 \left(\frac{P}{A}, 8\%, 40\right) = 40000000 (11.925) = \$ 47700 000$$

$$V.P. \text{ Costos} = 20 000 000 + 160 000 \left(\frac{P}{A}, 8\%, 40\right) = \\ = 20 000 000 + 1908 000 = \$ 21908 000$$

$$\frac{B}{C} = \frac{47 700 000}{21 908 000} = 2.17$$

La relación es mayor que uno, en general no suelen ser tan altos los valores, varían en torno a 1 ó 2.

Para la alternativa B:

$$V.P. \text{ Beneficios} = 59 625 000$$

$$V.P. \text{ Costos} = 22 838 000$$

$$\frac{B}{C} = \frac{59 625 000}{22 838 000} = 2.61$$

Supóngase ahora que se trata de varios proyectos y que se requiere aplicar el análisis incremental.

$$\Delta \text{ Benef.} = 59 625 000 - 47 700 000 = 11 925 000$$

$$\Delta \text{ Costos} = 22 838 000 - 21 908 000 = 930 000$$

$$\frac{\Delta B}{\Delta C} = \frac{11 925}{930} = 12.82$$

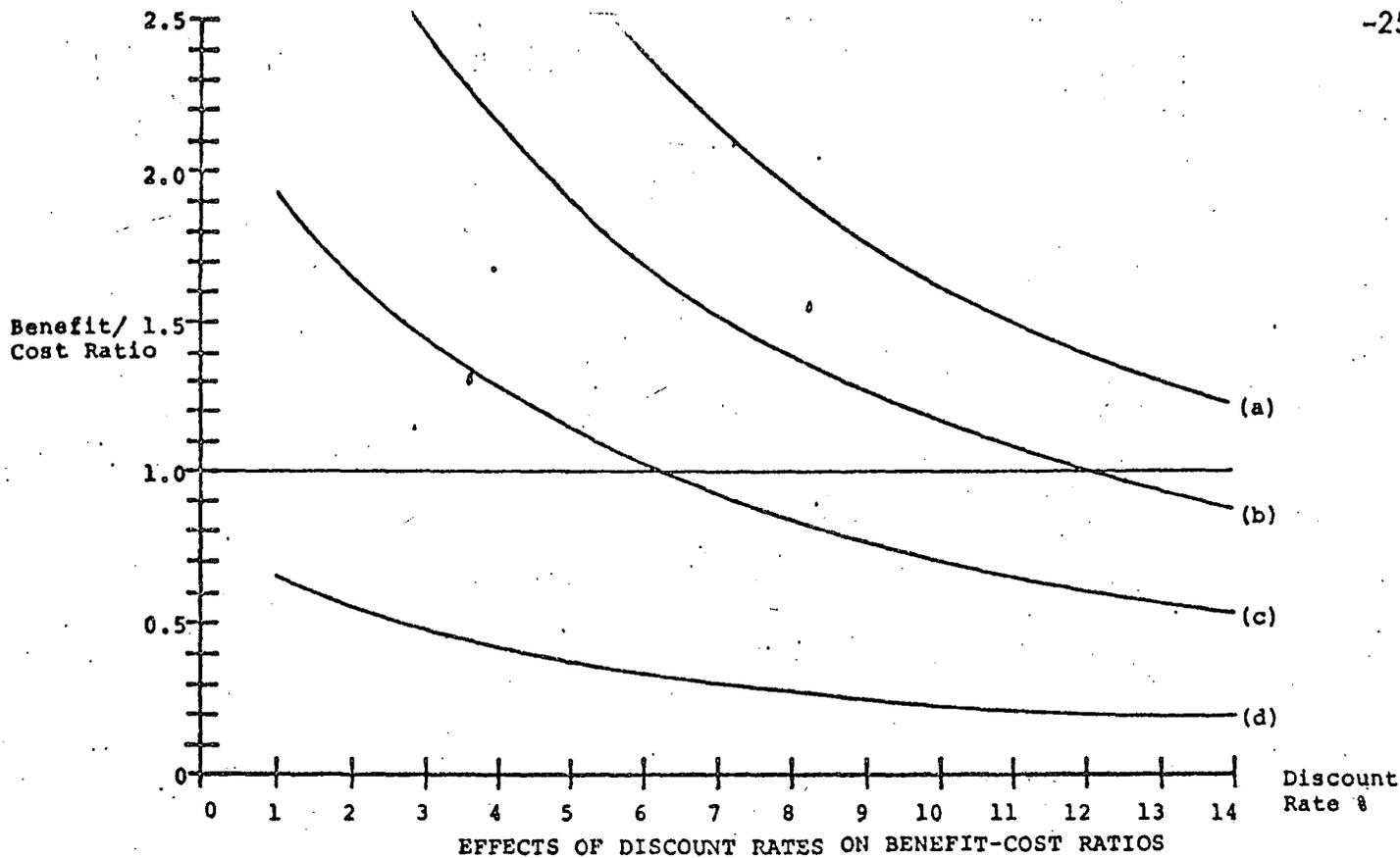
El cociente indica la conveniencia de invertir una mayor cantidad en el proyecto B, puesto que su relación B/C es muy alta.

Cuando se aplica en forma adecuada, la relación beneficio costo resulta idéntica al método del valor presente neto.

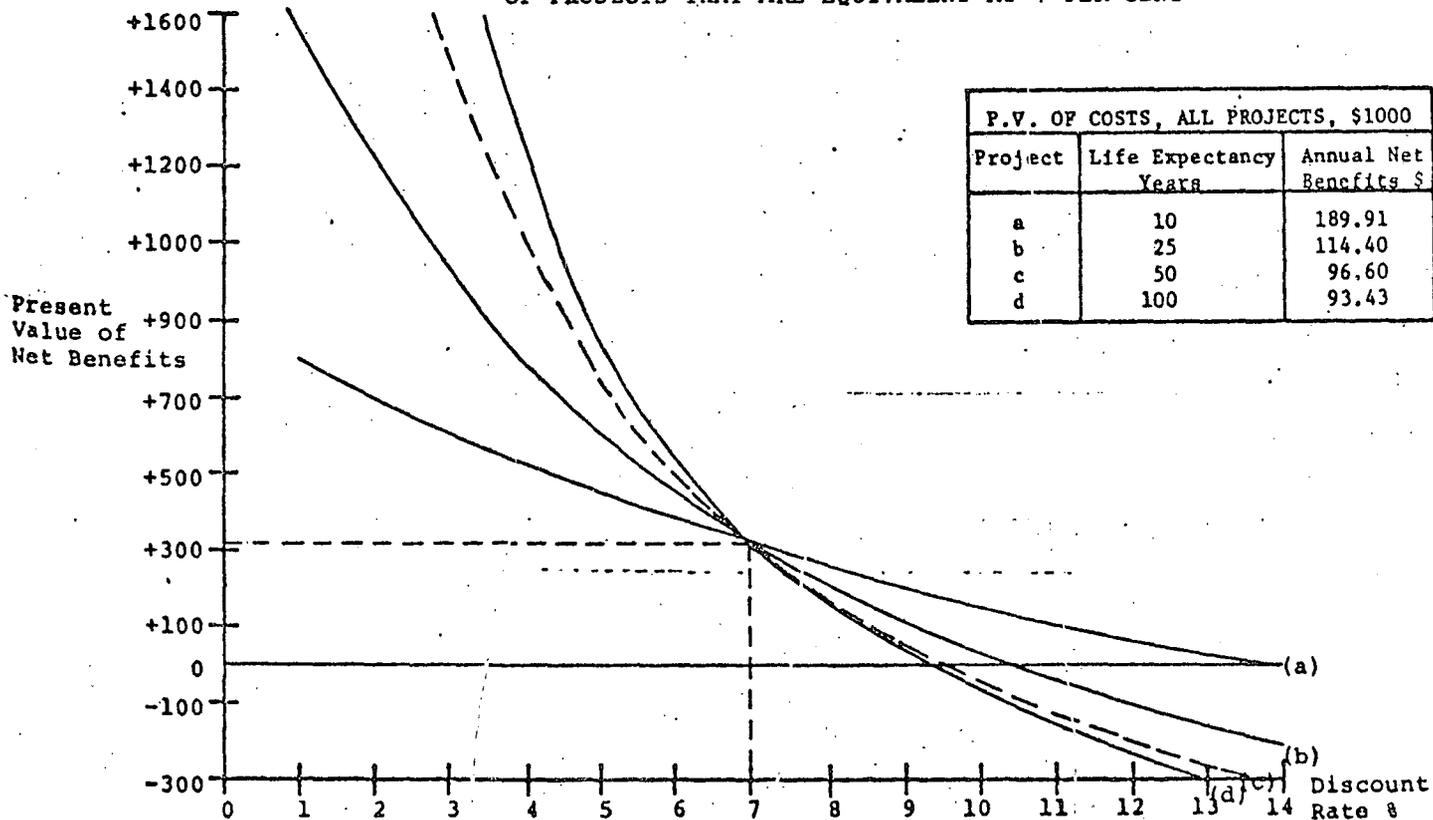
donde  $Q$  es la escala de proyecto.

Observaciones acerca de las técnicas de descuento

- a) El método del valor presente es especialmente útil cuando no existen restricciones de presupuesto y existe una serie de alternativas independientes.
- b) Acerca del método de series anuales, en general presenta pocas ventajas su empleo; se usa con mayor generalidad el método del valor presente, porque el flujo de caja puede ser muy complicado y pasar a anualidades requiere mayor trabajo.
- c) La tasa de retorno, tiene una ventaja fundamental: que los proyectos pueden jerarquizarse sin tener que determinar una tasa de descuento, aunque deberá fijarse una tasa de descuento mínima. Una desventaja de este método es que para algunos flujos de caja, es imposible obtener un valor único de  $i$ ,
- d) El análisis beneficio costo se ha usado ampliamente para justificar proyectos; sin embargo puede usarse como un enfoque para tomar decisiones acerca de la escala de proyecto o la selección de proyectos de una serie de alternativas. En este caso, se requiere que el criterio de selección resida exclusivamente en el objetivo de eficiencia económica o ingreso nacional, y que no existan efectos intangibles considerables, es decir efectos que no puedan cuantificarse monetariamente.
- e) Como se puede observar en la figura, el efecto de la tasa de descuento es notable.
- f) Otro aspecto importante que no debe pasarse por alto, es la definición del horizonte de planeación. En realidad el horizonte de planeación y la tasa de descuento van unidos ya que el tiempo para el cual los beneficios son insignificantes depende de la tasa de descuento. El efecto combinado de estos elementos se muestra en la siguiente tabla.



**EFFECTS OF DISCOUNT RATE CHANGES ON NET BENEFITS OF PROJECTS THAT ARE EQUIVALENT AT 7 PER CENT**



Source: Schramm [1970, p. 49]

i %	Relación B/C	
	vida económica 50 años	vida económica 100 años
2	1.39	1.51
2.5	1.33	1.43
3	1.28	1.35
3.5	1.22	1.28
4	1.17	1.21
5	1.08	1.10
6	1.00	1.00

e) Finalmente, respecto a la relación B/C, existen diversos problemas, algunos relacionados con la medición de beneficios y costo; otros con aspectos conceptuales, y otros con aspectos institucionales. La definición clara de cada uno de ellos influye de manera determinante en los resultados.

## BIBLIOGRAFIA

1. L. Douglas James and Robert R. Lee. "Economics of Water Resources Planning". Mc. Graw Hill. New York. 1971.
2. William T. Morris. "Engineering Economic Analysis". Reston Publishing Co. Virginia. 1976.
3. Eugene L. Grant, W. Grant Ireson and Richard S. Leaven worth. "Principles of Engineering Economy". Ronald Press. Co. New York. 1976.



ANEXO:

TABLAS DE INTERES COMPUESTO



TABLE D-8

4 1/2 % Compound Interest Factors

n	Single Payment		Uniform Series				n
	Compound Amount Factor F/P	Present Worth Factor P/F	Sinking Fund Factor A/F	Capital Recovery Factor A/P	Compound Amount Factor F/A	Present Worth Factor P/A	
	1	1.0450	0.9569	1,000.00	1.045 00	1,000	
2	1.0920	0.9157	0.489 00	0.534 00	2.045	1.873	2
3	1.1412	0.8763	0.318 77	0.363 77	3.137	2.749	3
4	1.1925	0.8386	0.233 74	0.278 74	4.278	3.588	4
5	1.2462	0.8025	0.182 79	0.227 79	5.471	4.390	5
6	1.3023	0.7679	0.148 88	0.193 88	6.717	5.158	6
7	1.3609	0.7348	0.124 70	0.169 70	8.019	5.893	7
8	1.4221	0.7032	0.106 61	0.151 61	9.380	6.596	8
9	1.4861	0.6729	0.092 57	0.137 57	10.802	7.269	9
10	1.5530	0.6439	0.081 38	0.126 38	12.288	7.913	10
11	1.6229	0.6162	0.072 25	0.117 25	13.841	8.529	11
12	1.6959	0.5897	0.064 67	0.109 67	15.464	9.119	12
13	1.7722	0.5643	0.058 28	0.103 28	17.160	9.683	13
14	1.8519	0.5400	0.052 82	0.097 82	18.932	10.223	14
15	1.9353	0.5167	0.048 11	0.093 11	20.784	10.740	15
16	2.0224	0.4945	0.044 02	0.089 02	22.719	11.234	16
17	2.1134	0.4732	0.040 42	0.085 42	24.742	11.707	17
18	2.2085	0.4528	0.037 24	0.082 24	26.855	12.160	18
19	2.3079	0.4333	0.034 41	0.079 41	29.064	12.593	19
20	2.4117	0.4146	0.031 88	0.076 88	31.371	13.008	20
21	2.5202	0.3968	0.029 60	0.074 60	33.783	13.405	21
22	2.6337	0.3797	0.027 55	0.072 55	36.303	13.784	22
23	2.7522	0.3634	0.025 68	0.070 68	38.937	14.148	23
24	2.8760	0.3477	0.023 99	0.068 99	41.689	14.495	24
25	3.0054	0.3327	0.022 44	0.067 44	44.565	14.828	25
26	3.1407	0.3184	0.021 02	0.066 02	47.571	15.147	26
27	3.2820	0.3047	0.019 72	0.064 72	50.711	15.451	27
28	3.4397	0.2916	0.018 52	0.063 52	53.993	15.743	28
29	3.5840	0.2790	0.017 41	0.062 41	57.423	16.022	29
30	3.7453	0.2670	0.016 39	0.061 39	61.007	16.289	30
31	3.9139	0.2555	0.015 44	0.060 44	64.752	16.544	31
32	4.0900	0.2445	0.014 56	0.059 56	68.666	16.789	32
33	4.2740	0.2340	0.013 74	0.058 74	72.756	17.023	33
34	4.4664	0.2239	0.012 98	0.057 98	77.030	17.247	34
35	4.6673	0.2143	0.012 27	0.057 27	81.497	17.461	35
40	5.8164	0.1719	0.009 34	0.054 34	107.030	18.402	40
45	7.2482	0.1380	0.007 20	0.052 20	138.850	19.156	45
50	9.0326	0.1107	0.005 60	0.050 60	178.503	19.762	50
55	11.2563	0.0888	0.004 39	0.049 39	227.918	20.248	55
60	14.0274	0.0713	0.003 45	0.048 45	289.498	20.638	60
65	17.4807	0.0572	0.002 73	0.047 73	366.238	20.951	65
70	21.7841	0.0459	0.002 17	0.047 17	461.870	21.202	70
75	27.1470	0.0368	0.001 72	0.046 72	581.044	21.404	75
80	33.8301	0.0296	0.001 37	0.046 37	729.558	21.565	80
85	42.1585	0.0237	0.001 09	0.046 09	914.632	21.695	85
90	52.5371	0.0190	0.000 87	0.045 87	1145.269	21.799	90
95	65.4708	0.0153	0.000 70	0.045 70	1432.684	21.883	95
100	81.5885	0.0123	0.000 56	0.045 56	1790.856	21.950	100

TABLE D-9

5% Compound Interest Factors

n	Single Payment		Uniform Series				n
	Compound Amount Factor F/P	Present Worth Factor P/F	Sinking Fund Factor A/F	Capital Recovery Factor A/P	Compound Amount Factor F/A	Present Worth Factor P/A	
	1	1.0500	0.9524	1,000 00	1.050 00	1,000	
2	1.1025	0.9070	0.487 80	0.537 80	2.050	1.859	2
3	1.1576	0.8638	0.317 21	0.367 21	3.153	2.723	3
4	1.2155	0.8227	0.232 01	0.282 01	4.310	3.546	4
5	1.2763	0.7835	0.180 97	0.230 97	5.526	4.329	5
6	1.3401	0.7462	0.147 02	0.197 02	6.802	5.076	6
7	1.4071	0.7107	0.122 82	0.172 82	8.142	5.786	7
8	1.4775	0.6768	0.104 72	0.154 72	9.549	6.463	8
9	1.5513	0.6446	0.090 69	0.140 69	11.027	7.108	9
10	1.6289	0.6139	0.079 50	0.129 50	12.578	7.722	10
11	1.7103	0.5847	0.070 39	0.120 39	14.207	8.306	11
12	1.7959	0.5568	0.062 83	0.112 83	15.917	8.863	12
13	1.8856	0.5303	0.056 46	0.106 46	17.713	9.394	13
14	1.9800	0.5051	0.051 02	0.101 02	19.599	9.899	14
15	2.0789	0.4810	0.046 34	0.096 34	21.579	10.380	15
16	2.1829	0.4581	0.042 27	0.092 27	23.657	10.838	16
17	2.2920	0.4363	0.038 70	0.088 70	25.840	11.274	17
18	2.4066	0.4155	0.035 55	0.085 55	28.132	11.690	18
19	2.5270	0.3957	0.032 75	0.082 75	30.539	12.085	19
20	2.6533	0.3769	0.030 24	0.080 24	33.066	12.462	20
21	2.7860	0.3589	0.028 00	0.078 00	35.719	12.821	21
22	2.9253	0.3418	0.025 97	0.075 97	38.505	13.163	22
23	3.0715	0.3256	0.024 14	0.074 14	41.430	13.489	23
24	3.2251	0.3101	0.022 47	0.072 47	44.502	13.799	24
25	3.3864	0.2953	0.020 95	0.070 95	47.727	14.094	25
26	3.5557	0.2812	0.019 56	0.069 56	51.113	14.375	26
27	3.7335	0.2678	0.018 29	0.068 29	54.669	14.643	27
28	3.9201	0.2551	0.017 12	0.067 12	58.403	14.898	28
29	4.1161	0.2429	0.016 05	0.066 05	62.323	15.141	29
30	4.3219	0.2314	0.015 05	0.065 05	66.439	15.372	30
31	4.5380	0.2204	0.014 13	0.064 13	70.761	15.593	31
32	4.7649	0.2099	0.013 28	0.063 28	75.299	15.803	32
33	5.0032	0.1999	0.012 49	0.062 49	80.064	16.003	33
34	5.2533	0.1904	0.011 76	0.061 76	85.067	16.193	34
35	5.5160	0.1813	0.011 07	0.061 07	90.320	16.374	35
40	7.0400	0.1420	0.008 28	0.058 28	120.800	17.159	40
45	8.9850	0.1113	0.006 26	0.056 26	159.700	17.774	45
50	11.4674	0.0872	0.004 78	0.054 78	209.348	18.256	50
55	14.6356	0.0683	0.003 67	0.053 67	272.713	18.633	55
60	18.6792	0.0535	0.002 83	0.052 83	353.584	18.929	60
65	23.8399	0.0419	0.002 19	0.052 19	456.798	19.161	65
70	30.4264	0.0329	0.001 70	0.051 70	588.529	19.343	70
75	38.8327	0.0258	0.001 32	0.051 32	756.654	19.485	75
80	49.5614	0.0202	0.001 03	0.051 03	971.229	19.596	80
85	63.2544	0.0158	0.000 80	0.050 80	1245.087	19.684	85
90	80.7304	0.0124	0.000 63	0.050 63	1594.607	19.752	90
95	103.0357	0.0097	0.000 49	0.050 49	2040.694	19.806	95
100	131.5013	0.0076	0.000 38	0.050 38	2610.025	19.848	100

TABLE D-10

5 1/2 % Compound Interest Factors

Single Payment			Uniform Series				n
Compound Amount Factor F/P	Present Worth Factor P/F	Sinking Fund Factor A/F	Capital Recovery Factor A/P	Compound Amount Factor F/A	Present Worth Factor P/A		
1	1.0550	0.9479	1.000 00	1.055 00	1.000	0.948	1
2	1.1130	0.8985	0.486 62	0.541 62	2.055	1.846	2
3	1.1742	0.8516	0.315 65	0.370 65	3.168	2.698	3
4	1.2388	0.8072	0.230 29	0.285 29	4.342	3.505	4
5	1.3070	0.7651	0.179 18	0.234 18	5.581	4.270	5
6	1.3788	0.7252	0.145 18	0.200 18	6.888	4.996	6
7	1.4547	0.6874	0.120 96	0.175 96	8.267	5.683	7
8	1.5347	0.6516	0.102 86	0.157 86	9.722	6.335	8
9	1.6191	0.6176	0.088 84	0.143 84	11.256	6.952	9
10	1.7081	0.5854	0.077 67	0.132 67	12.875	7.538	10
11	1.8021	0.5549	0.068 57	0.123 57	14.583	8.093	11
12	1.9012	0.5260	0.061 03	0.116 03	16.386	8.619	12
13	2.0058	0.4986	0.054 68	0.109 68	18.287	9.117	13
14	2.1161	0.4726	0.049 28	0.104 28	20.293	9.590	14
15	2.2325	0.4479	0.044 63	0.099 63	22.409	10.038	15
16	2.3553	0.4246	0.040 58	0.095 58	24.641	10.462	16
17	2.4848	0.4024	0.037 04	0.092 04	26.996	10.865	17
18	2.6215	0.3815	0.033 92	0.088 92	29.481	11.246	18
19	2.7656	0.3616	0.031 15	0.086 15	32.103	11.608	19
20	2.9178	0.3427	0.028 68	0.083 68	34.868	11.950	20
21	3.0782	0.3249	0.026 46	0.081 46	37.786	12.275	21
22	3.2475	0.3079	0.024 47	0.079 47	40.864	12.583	22
23	3.4262	0.2919	0.022 67	0.077 67	44.112	12.875	23
24	3.6146	0.2767	0.021 04	0.076 04	47.538	13.152	24
25	3.8134	0.2622	0.019 55	0.074 55	51.153	13.414	25
26	4.0231	0.2486	0.018 19	0.073 19	54.966	13.662	26
27	4.2444	0.2356	0.016 95	0.071 95	58.989	13.898	27
28	4.4778	0.2233	0.015 81	0.070 81	63.234	14.121	28
29	4.7241	0.2117	0.014 77	0.069 77	67.711	14.333	29
30	4.9840	0.2006	0.013 81	0.068 81	72.435	14.534	30
31	5.2581	0.1902	0.012 92	0.067 92	77.419	14.724	31
32	5.5473	0.1803	0.012 10	0.067 10	82.677	14.904	32
33	5.8524	0.1709	0.011 33	0.066 33	88.225	15.075	33
34	6.1742	0.1620	0.010 63	0.065 63	94.077	15.237	34
35	6.5138	0.1535	0.009 97	0.064 97	100.251	15.391	35
40	8.5133	0.1175	0.007 32	0.062 32	136.606	16.046	40
45	11.1266	0.0899	0.005 43	0.060 43	184.119	16.548	45
50	14.5420	0.0688	0.004 06	0.059 06	246.217	16.932	50
55	19.0058	0.0526	0.003 05	0.058 05	327.377	17.225	55
60	24.8398	0.0403	0.002 31	0.057 31	433.450	17.450	60
65	32.4646	0.0308	0.001 75	0.056 75	572.083	17.622	65
70	42.4299	0.0236	0.001 33	0.056 33	753.271	17.753	70
75	55.4542	0.0180	0.001 01	0.056 01	990.076	17.854	75
80	72.4764	0.0138	0.000 77	0.055 77	1 299.571	17.931	80
85	94.7238	0.0106	0.000 59	0.055 59	1 704.069	17.990	85
90	121.8002	0.0081	0.000 45	0.055 45	2 232.731	18.035	90
95	157.8019	0.0062	0.000 34	0.055 34	2 923.671	18.069	95
100	211.4686	0.0047	0.000 26	0.055 26	3 826.702	18.096	100

TABLE D-11

6% Compound Interest Factors

Single Payment			Uniform Series				n
Compound Amount Factor F/P	Present Worth Factor P/F	Sinking Fund Factor A/F	Capital Recovery Factor A/P	Compound Amount Factor F/A	Present Worth Factor P/A		
1	1.0600	0.9434	1.000 00	1.060 00	1.000	0.943	1
2	1.1236	0.8900	0.485 44	0.545 44	2.060	1.833	2
3	1.1910	0.8396	0.314 11	0.374 11	3.184	2.673	3
4	1.2625	0.7921	0.228 59	0.288 59	4.375	3.465	4
5	1.3382	0.7473	0.177 40	0.237 40	5.637	4.212	5
6	1.4185	0.7050	0.143 36	0.203 36	6.975	4.917	6
7	1.5036	0.6651	0.119 14	0.179 14	8.394	5.582	7
8	1.5938	0.6274	0.101 04	0.161 04	9.897	6.210	8
9	1.6895	0.5919	0.087 02	0.147 02	11.491	6.802	9
10	1.7908	0.5584	0.075 87	0.135 87	13.181	7.360	10
11	1.8983	0.5268	0.066 79	0.126 79	14.972	7.887	11
12	2.0122	0.4970	0.059 28	0.119 28	16.870	8.384	12
13	2.1329	0.4688	0.052 96	0.112 96	18.882	8.853	13
14	2.2609	0.4423	0.047 58	0.107 58	21.015	9.295	14
15	2.3966	0.4173	0.042 96	0.102 96	23.276	9.712	15
16	2.5404	0.3936	0.038 95	0.098 95	25.673	10.106	16
17	2.6928	0.3714	0.035 44	0.095 44	28.213	10.477	17
18	2.8543	0.3503	0.032 36	0.092 36	30.906	10.828	18
19	3.0256	0.3305	0.029 62	0.089 62	33.760	11.158	19
20	3.2071	0.3118	0.027 18	0.087 18	36.786	11.470	20
21	3.3996	0.2942	0.025 00	0.085 00	39.993	11.764	21
22	3.6035	0.2775	0.023 05	0.083 05	43.392	12.042	22
23	3.8197	0.2618	0.021 28	0.081 28	46.996	12.303	23
24	4.0489	0.2470	0.019 68	0.079 68	50.816	12.550	24
25	4.2919	0.2330	0.018 23	0.078 23	54.865	12.783	25
26	4.5494	0.2198	0.016 90	0.076 90	59.156	13.003	26
27	4.8223	0.2074	0.015 70	0.075 70	63.706	13.211	27
28	5.1117	0.1956	0.014 59	0.074 59	68.528	13.406	28
29	5.4184	0.1846	0.013 58	0.073 58	73.640	13.591	29
30	5.7435	0.1741	0.012 65	0.072 65	79.058	13.765	30
31	6.0881	0.1643	0.011 79	0.071 79	84.802	13.929	31
32	6.4534	0.1550	0.011 00	0.071 00	90.890	14.084	32
33	6.8406	0.1462	0.010 27	0.070 27	97.343	14.230	33
34	7.2510	0.1379	0.009 60	0.069 60	104.184	14.368	34
35	7.6861	0.1301	0.008 97	0.068 97	111.435	14.498	35
40	10.2857	0.0972	0.006 46	0.066 46	154.762	15.046	40
45	13.7646	0.0727	0.004 70	0.064 70	212.744	15.456	45
50	18.4202	0.0543	0.003 44	0.063 44	290.336	15.762	50
55	24.6503	0.0406	0.002 54	0.062 54	394.172	15.991	55
60	32.9877	0.0303	0.001 88	0.061 88	533.128	16.161	60
65	44.1450	0.0227	0.001 39	0.061 39	719.083	16.289	65
70	59.0759	0.0169	0.001 03	0.061 03	967.932	16.385	70
75	79.0569	0.0126	0.000 77	0.060 77	1 300.949	16.456	75
80	105.7960	0.0095	0.000 57	0.060 57	1 746.600	16.509	80
85	141.5789	0.0071	0.000 43	0.060 43	2 342.982	16.549	85
90	189.4645	0.0053	0.000 32	0.060 32	3 141.075	16.579	90
95	253.5463	0.0039	0.000 24	0.060 24	4 209.104	16.601	95
100	339.3021	0.0029	0.000 18	0.060 18	5 638.368	16.618	100

**TABLE D-12**  
**7% Compound Interest Factors**

Single Payment			Uniform Series				n
Compound Amount Factor F/P	Present Worth Factor P/F	Sinking Fund Factor A/F	Capital Recovery Factor A/P	Compound Amount Factor F/A	Present Worth Factor P/A		
1	1.0700	0.9346	1.000 00	1.070 00	1.000	0.935	1
2	1.1449	0.8734	0.483 09	0.553 09	2.070	1.808	2
3	1.2250	0.8163	0.311 05	0.381 05	3.215	2.624	3
4	1.3108	0.7629	0.225 23	0.295 23	4.440	3.387	4
5	1.4026	0.7130	0.173 89	0.243 89	5.751	4.100	5
6	1.5007	0.6663	0.139 80	0.209 80	7.153	4.767	6
7	1.6058	0.6227	0.115 55	0.185 55	8.654	5.389	7
8	1.7182	0.5820	0.097 47	0.167 47	10.260	5.971	8
9	1.8385	0.5439	0.083 49	0.153 49	11.978	6.515	9
10	1.9672	0.5083	0.072 38	0.142 38	13.816	7.024	10
11	2.1049	0.4751	0.063 36	0.133 36	15.784	7.499	11
12	2.2522	0.4440	0.055 90	0.125 90	17.888	7.943	12
13	2.4098	0.4150	0.049 65	0.119 65	20.141	8.358	13
14	2.5785	0.3878	0.044 34	0.114 34	22.550	8.745	14
15	2.7590	0.3624	0.039 79	0.109 79	25.129	9.108	15
16	2.9522	0.3387	0.035 86	0.105 86	27.888	9.447	16
17	3.1588	0.3166	0.032 43	0.102 43	30.840	9.763	17
18	3.3799	0.2959	0.029 41	0.099 41	33.999	10.059	18
19	3.6165	0.2765	0.026 75	0.096 75	37.379	10.336	19
20	3.8697	0.2584	0.024 39	0.094 39	40.995	10.594	20
21	4.1406	0.2415	0.022 29	0.092 29	44.865	10.836	21
22	4.4304	0.2257	0.020 41	0.090 41	49.006	11.061	22
23	4.7405	0.2109	0.018 71	0.088 71	53.436	11.272	23
24	5.0724	0.1971	0.017 19	0.087 19	58.177	11.469	24
25	5.4274	0.1842	0.015 81	0.085 81	63.249	11.654	25
26	5.8074	0.1722	0.014 56	0.084 56	68.676	11.826	26
27	6.2139	0.1609	0.013 43	0.083 43	74.484	11.987	27
28	6.6488	0.1504	0.012 39	0.082 39	80.698	12.137	28
29	7.1143	0.1406	0.011 45	0.081 45	87.347	12.278	29
30	7.6123	0.1314	0.010 59	0.080 59	94.461	12.409	30
31	8.1451	0.1228	0.009 80	0.079 80	102.073	12.532	31
32	8.7153	0.1147	0.009 07	0.079 07	110.218	12.647	32
33	9.3253	0.1072	0.008 41	0.078 41	118.933	12.754	33
34	9.9781	0.1002	0.007 80	0.077 80	128.259	12.854	34
35	10.6766	0.0937	0.007 23	0.077 23	138.237	12.948	35
40	14.9745	0.0668	0.005 01	0.075 01	199.635	13.332	40
45	21.0025	0.0476	0.003 50	0.073 50	285.749	13.606	45
50	29.4570	0.0339	0.002 46	0.072 46	406.529	13.801	50
55	41.3150	0.0242	0.001 74	0.071 74	575.929	13.940	55
60	57.9464	0.0173	0.001 23	0.071 23	813.520	14.039	60
65	81.2729	0.0123	0.000 87	0.070 87	1146.755	14.110	65
70	113.9894	0.0088	0.000 62	0.070 62	1614.134	14.160	70
75	159.8760	0.0063	0.000 44	0.070 44	2269.657	14.196	75
80	224.2344	0.0045	0.000 31	0.070 31	3189.063	14.222	80
85	314.5003	0.0032	0.000 22	0.070 22	4478.576	14.240	85
90	441.1030	0.0023	0.000 16	0.070 16	6287.185	14.253	90
95	618.6697	0.0016	0.000 11	0.070 11	8823.854	14.263	95
100	867.7163	0.0012	0.000 08	0.070 08	12381.662	14.269	100

**TABLE D-13**  
**8% Compound Interest Factors**

Single Payment			Uniform Series				n
Compound Amount Factor F/P	Present Worth Factor P/F	Sinking Fund Factor A/F	Capital Recovery Factor A/P	Compound Amount Factor F/A	Present Worth Factor P/A		
1	1.0800	0.9259	1.000 00	1.080 00	1.000	0.926	1
2	1.1664	0.8573	0.480 77	0.560 77	2.080	1.783	2
3	1.2597	0.7938	0.308 03	0.388 03	3.246	2.577	3
4	1.3605	0.7350	0.221 92	0.301 92	4.506	3.312	4
5	1.4693	0.6806	0.170 46	0.250 46	5.867	3.993	5
6	1.5869	0.6302	0.136 32	0.216 32	7.336	4.623	6
7	1.7138	0.5835	0.112 07	0.192 07	8.923	5.206	7
8	1.8509	0.5403	0.094 01	0.174 01	10.637	5.747	8
9	1.9990	0.5002	0.080 08	0.160 08	12.488	6.247	9
10	2.1589	0.4632	0.069 03	0.149 03	14.487	6.710	10
11	2.3316	0.4289	0.060 08	0.140 08	16.645	7.139	11
12	2.5182	0.3971	0.052 70	0.132 70	18.977	7.536	12
13	2.7196	0.3677	0.046 52	0.126 52	21.495	7.904	13
14	2.9372	0.3405	0.041 30	0.121 30	24.215	8.244	14
15	3.1722	0.3152	0.036 83	0.116 83	27.152	8.559	15
16	3.4259	0.2919	0.032 98	0.112 98	30.324	8.851	16
17	3.7000	0.2703	0.029 63	0.109 63	33.750	9.122	17
18	3.9960	0.2502	0.026 70	0.106 70	37.450	9.372	18
19	4.3157	0.2317	0.024 13	0.104 13	41.446	9.604	19
20	4.6610	0.2145	0.021 85	0.101 85	45.762	9.818	20
21	5.0338	0.1987	0.019 83	0.099 83	50.423	10.017	21
22	5.4365	0.1839	0.018 03	0.098 03	55.457	10.201	22
23	5.8715	0.1703	0.016 42	0.096 42	60.893	10.371	23
24	6.3412	0.1577	0.014 98	0.094 98	66.765	10.529	24
25	6.8485	0.1460	0.013 68	0.093 68	73.106	10.675	25
26	7.3964	0.1352	0.012 51	0.092 51	79.954	10.810	26
27	7.9881	0.1252	0.011 45	0.091 45	87.351	10.935	27
28	8.6271	0.1159	0.010 49	0.090 49	95.339	11.051	28
29	9.3173	0.1073	0.009 62	0.089 62	103.966	11.158	29
30	10.0627	0.0994	0.008 83	0.088 83	113.283	11.258	30
31	10.8677	0.0920	0.008 11	0.088 11	123.346	11.350	31
32	11.7371	0.0852	0.007 45	0.087 45	134.214	11.435	32
33	12.6760	0.0789	0.006 85	0.086 85	145.951	11.514	33
34	13.6901	0.0730	0.006 30	0.086 30	158.627	11.587	34
35	14.7853	0.0676	0.005 80	0.085 80	172.317	11.655	35
40	21.7245	0.0460	0.003 86	0.083 86	259.057	11.925	40
45	31.9204	0.0313	0.002 59	0.082 59	386.506	12.108	45
50	46.9016	0.0213	0.001 74	0.081 74	573.770	12.233	50
55	68.9139	0.0145	0.001 18	0.081 18	848.923	12.319	55
60	101.2571	0.0099	0.000 80	0.080 80	1253.213	12.377	60
65	148.7798	0.0067	0.000 54	0.080 54	1847.248	12.416	65
70	218.6064	0.0046	0.000 37	0.080 37	2720.080	12.443	70
75	321.2045	0.0031	0.000 25	0.080 25	4002.557	12.461	75
80	471.9548	0.0021	0.000 17	0.080 17	5886.935	12.474	80
85	693.4565	0.0014	0.000 12	0.080 12	8655.706	12.482	85
90	1018.9151	0.0010	0.000 08	0.080 08	12723.939	12.488	90
95	1497.1205	0.0007	0.000 05	0.080 05	18701.507	12.492	95
100	2199.7613	0.0005	0.000 04	0.080 04	27484.516	12.494	100

TABLE D-14

9% Compound Interest Factors

n	Single Payment		Uniform Series			
	Compound Amount Factor F/P	Present Worth Factor P/F	Sinking Fund Factor A/F	Capital Recovery Factor A/P	Compound Amount Factor F/A	Present Worth Factor P/A
1	1.0900	0.9174	1.000 00	1.090 00	1.000	0.917
2	1.1881	0.8417	0.478 47	0.568 47	2.090	1.759
3	1.2950	0.7722	0.305 05	0.395 05	3.278	2.531
4	1.4116	0.7084	0.218 67	0.308 67	4.573	3.240
5	1.5386	0.6499	0.167 09	0.257 09	5.985	3.890
6	1.6771	0.5963	0.132 92	0.222 92	7.523	4.486
7	1.8280	0.5470	0.108 69	0.198 69	9.200	5.033
8	1.9926	0.5019	0.090 67	0.180 67	11.028	5.535
9	2.1719	0.4604	0.076 80	0.166 80	13.021	5.995
10	2.3674	0.4224	0.065 82	0.155 82	15.193	6.418
11	2.5804	0.3875	0.056 95	0.146 95	17.560	6.805
12	2.8127	0.3555	0.049 65	0.139 65	20.141	7.161
13	3.0658	0.3262	0.043 57	0.133 57	22.953	7.487
14	3.3417	0.2992	0.038 43	0.128 43	26.019	7.786
15	3.6425	0.2745	0.034 06	0.124 06	29.361	8.061
16	3.9703	0.2519	0.030 30	0.120 30	33.003	8.313
17	4.3276	0.2311	0.027 05	0.117 05	36.974	8.544
18	4.7171	0.2120	0.024 21	0.114 21	41.301	8.756
19	5.1417	0.1945	0.021 73	0.111 73	46.018	8.950
20	5.6044	0.1784	0.019 55	0.109 55	51.160	9.129
21	6.1088	0.1637	0.017 62	0.107 62	56.765	9.292
22	6.6586	0.1502	0.015 90	0.105 90	62.873	9.442
23	7.2579	0.1378	0.014 38	0.104 38	69.532	9.580
24	7.9111	0.1264	0.013 02	0.103 02	76.790	9.707
25	8.6231	0.1160	0.011 81	0.101 81	84.701	9.823
26	9.3992	0.1064	0.010 72	0.100 72	93.324	9.929
27	10.2451	0.0976	0.009 73	0.099 73	102.723	10.027
28	11.1671	0.0895	0.008 85	0.098 85	112.968	10.116
29	12.1722	0.0822	0.008 06	0.098 06	124.135	10.198
30	13.2677	0.0753	0.007 34	0.097 34	136.308	10.274
31	14.4618	0.0691	0.006 69	0.096 69	149.575	10.343
32	15.7633	0.0634	0.006 10	0.096 10	164.037	10.406
33	17.1820	0.0582	0.005 56	0.095 56	179.800	10.464
34	18.7284	0.0534	0.005 08	0.095 08	196.982	10.518
35	20.4140	0.0490	0.004 64	0.094 64	215.711	10.567
40	31.4094	0.0318	0.002 96	0.092 96	337.882	10.757
45	48.3273	0.0207	0.001 90	0.091 90	525.859	10.881
50	74.3575	0.0134	0.001 23	0.091 23	815.084	10.962
55	114.4083	0.0087	0.000 79	0.090 79	1 260.092	11.014
60	176.0313	0.0057	0.000 51	0.090 51	1 944.792	11.048
65	270.8460	0.0037	0.000 33	0.090 33	2 998.288	11.070
70	416.7301	0.0024	0.000 22	0.090 22	4 619.223	11.084
75	641.1909	0.0016	0.000 14	0.090 14	7 113.232	11.094
80	986.5517	0.0010	0.000 09	0.090 09	10 950.574	11.100
85	1 517.9320	0.0007	0.000 06	0.090 06	16 854.800	11.104
90	2 335.5266	0.0004	0.000 04	0.090 04	25 939.184	11.106
95	3 593.4971	0.0003	0.000 03	0.090 03	39 916.635	11.108
100	5 529.0408	0.0002	0.000 02	0.090 02	61 422.675	11.109

TABLE D-15

10% Compound Interest Factors

n	Single Payment		Uniform Series			
	Compound Amount Factor F/P	Present Worth Factor P/F	Sinking Fund Factor A/F	Capital Recovery Factor A/P	Compound Amount Factor F/A	Present Worth Factor P/A
1	1.1000	0.9091	1.000 00	1.100 00	1.000	0.909
2	1.2100	0.8264	0.476 19	0.576 19	2.100	1.736
3	1.3310	0.7513	0.302 11	0.402 11	3.310	2.487
4	1.4641	0.6830	0.215 47	0.315 47	4.641	3.170
5	1.6105	0.6209	0.163 80	0.263 80	6.105	3.791
6	1.7716	0.5645	0.129 61	0.229 61	7.716	4.355
7	1.9487	0.5132	0.105 41	0.205 41	9.487	4.868
8	2.1436	0.4665	0.087 44	0.187 44	11.436	5.335
9	2.3579	0.4241	0.073 64	0.173 64	13.579	5.759
10	2.5937	0.3855	0.062 75	0.162 75	15.937	6.144
11	2.8531	0.3505	0.053 96	0.153 96	18.531	6.495
12	3.1384	0.3186	0.046 76	0.146 76	21.384	6.814
13	3.4523	0.2897	0.040 78	0.140 78	24.523	7.103
14	3.7975	0.2633	0.035 75	0.135 75	27.975	7.367
15	4.1772	0.2394	0.031 47	0.131 47	31.772	7.606
16	4.5950	0.2176	0.027 82	0.127 82	35.950	7.824
17	5.0545	0.1978	0.024 66	0.124 66	40.545	8.022
18	5.5599	0.1799	0.021 93	0.121 93	45.599	8.201
19	6.1159	0.1635	0.019 55	0.119 55	51.159	8.365
20	6.7275	0.1486	0.017 46	0.117 46	57.275	8.514
21	7.4002	0.1351	0.015 62	0.115 62	64.002	8.649
22	8.1403	0.1228	0.014 01	0.114 01	71.403	8.772
23	8.9543	0.1117	0.012 57	0.112 57	79.543	8.883
24	9.8497	0.1015	0.011 30	0.111 30	88.497	8.985
25	10.8347	0.0923	0.010 17	0.110 17	98.347	9.077
26	11.9182	0.0839	0.009 16	0.109 16	109.182	9.161
27	13.1100	0.0763	0.008 26	0.108 26	121.100	9.237
28	14.4210	0.0693	0.007 45	0.107 45	134.210	9.307
29	15.8631	0.0630	0.006 73	0.106 73	148.631	9.370
30	17.4494	0.0573	0.006 08	0.106 08	164.494	9.427
31	19.1943	0.0521	0.005 50	0.105 50	181.943	9.479
32	21.1138	0.0474	0.004 97	0.104 97	201.138	9.526
33	23.2252	0.0431	0.004 50	0.104 50	222.252	9.569
34	25.5477	0.0391	0.004 07	0.104 07	245.477	9.609
35	28.1024	0.0356	0.003 69	0.103 69	271.024	9.644
40	45.2593	0.0221	0.002 26	0.102 26	442.593	9.779
45	72.8905	0.0137	0.001 39	0.101 39	718.905	9.863
50	117.3909	0.0085	0.000 86	0.100 86	1 163.909	9.915
55	189.0591	0.0053	0.000 53	0.100 53	1 880.591	9.947
60	304.4816	0.0033	0.000 33	0.100 33	3 034.816	9.967
65	490.3707	0.0020	0.000 20	0.100 20	4 893.707	9.980
70	789.7470	0.0013	0.000 13	0.100 13	7 887.470	9.987
75	1 271.8952	0.0008	0.000 08	0.100 08	12 708.954	9.992
80	2 048.4002	0.0005	0.000 05	0.100 05	20 474.002	9.995
85	3 298.9690	0.0003	0.000 03	0.100 03	32 979.690	9.997
90	5 313.0226	0.0002	0.000 02	0.100 02	53 120.226	9.998
95	8 556.6760	0.0001	0.000 01	0.100 01	85 556.760	9.999
100	13 780.6123	0.0001	0.000 01	0.100 01	137 796.123	9.999

TABLE D-16

11% Compound Interest Factors

u	Single Payment		Uniform Series				n
	Compound Amount Factor F/P	Present Worth Factor P/F	Sinking Fund Factor A/F	Capital Recovery Factor A/P	Compound Amount Factor F/A	Present Worth Factor P/A	
1	1.1100	0.9009	1.000 00	1.110 00	1.000	0.901	1
2	1.2321	0.8116	0.473 93	0.583 93	2.110	1.713	2
3	1.3676	0.7312	0.299 21	0.409 21	3.342	2.444	3
4	1.5181	0.6587	0.212 33	0.322 33	4.710	3.102	4
5	1.6851	0.5935	0.160 57	0.270 57	6.228	3.696	5
6	1.8704	0.5346	0.126 38	0.236 38	7.913	4.231	6
7	2.0762	0.4817	0.102 22	0.212 22	9.783	4.712	7
8	2.3045	0.4339	0.084 32	0.194 32	11.859	5.146	8
9	2.5581	0.3909	0.070 60	0.180 60	14.164	5.537	9
10	2.8394	0.3522	0.059 80	0.169 80	16.722	5.889	10
11	3.1518	0.3173	0.051 12	0.161 12	19.561	6.207	11
12	3.4984	0.2858	0.044 03	0.154 03	22.713	6.492	12
13	3.8833	0.2575	0.038 15	0.148 15	26.212	6.750	13
14	4.3104	0.2320	0.033 23	0.143 23	30.095	6.982	14
15	4.7846	0.2090	0.029 07	0.139 07	34.405	7.191	15
16	5.3109	0.1883	0.025 52	0.135 52	39.190	7.379	16
17	5.8951	0.1696	0.022 47	0.132 47	44.501	7.549	17
18	6.5436	0.1528	0.019 84	0.129 84	50.396	7.702	18
19	7.2633	0.1377	0.017 56	0.127 56	56.939	7.839	19
20	8.0623	0.1240	0.015 58	0.125 58	64.203	7.963	20
21	8.9492	0.1117	0.013 84	0.123 84	72.265	8.075	21
22	9.9336	0.1007	0.012 31	0.122 31	81.214	8.176	22
23	11.0263	0.0907	0.010 97	0.120 97	91.148	8.266	23
24	12.2392	0.0817	0.009 79	0.119 79	102.174	8.348	24
25	13.5855	0.0736	0.008 74	0.118 74	114.413	8.422	25
26	15.0799	0.0663	0.007 81	0.117 81	127.999	8.488	26
27	16.7386	0.0597	0.006 99	0.116 99	143.079	8.548	27
28	18.5799	0.0538	0.006 26	0.116 26	159.817	8.602	28
29	20.6237	0.0485	0.005 61	0.115 61	178.397	8.650	29
30	22.8923	0.0437	0.005 02	0.115 02	199.021	8.694	30
31	25.4104	0.0394	0.004 51	0.114 51	221.913	8.733	31
32	28.2056	0.0355	0.004 04	0.114 04	247.324	8.769	32
33	31.3082	0.0319	0.003 63	0.113 63	275.529	8.801	33
34	34.7521	0.0288	0.003 26	0.113 26	306.837	8.829	34
35	38.5749	0.0259	0.002 93	0.112 93	341.590	8.855	35
40	65.0009	0.0154	0.001 72	0.111 72	581.826	8.951	40
45	109.5302	0.0091	0.001 01	0.111 01	986.639	9.008	45
50	184.5648	0.0054	0.000 60	0.110 60	1 688.771	9.042	50
∞				0.110 00		9.091	∞

TABLE D-17

12% Compound Interest Factors

n	Single Payment		Uniform Series				n
	Compound Amount Factor F/P	Present Worth Factor P/F	Sinking Fund Factor A/F	Capital Recovery Factor A/P	Compound Amount Factor F/A	Present Worth Factor P/A	
1	1.1200	0.8929	1.000 00	1.120 00	1.000	0.893	1
2	1.2544	0.7972	0.471 70	0.591 70	2.120	1.690	2
3	1.4049	0.7118	0.296 35	0.416 35	3.374	2.402	3
4	1.5735	0.6355	0.209 23	0.329 23	4.779	3.037	4
5	1.7623	0.5674	0.157 41	0.277 41	6.353	3.605	5
6	1.9738	0.5066	0.123 23	0.243 23	8.115	4.111	6
7	2.2107	0.4523	0.099 12	0.219 12	10.089	4.564	7
8	2.4760	0.4039	0.081 30	0.201 30	12.300	4.968	8
9	2.7731	0.3606	0.067 68	0.187 68	14.776	5.328	9
10	3.1058	0.3220	0.056 98	0.176 98	17.549	5.650	10
11	3.4785	0.2875	0.048 42	0.168 42	20.655	5.938	11
12	3.8960	0.2567	0.041 44	0.161 44	24.133	6.194	12
13	4.3635	0.2292	0.035 68	0.155 68	28.029	6.424	13
14	4.8871	0.2046	0.030 87	0.150 87	32.393	6.628	14
15	5.4736	0.1827	0.026 82	0.146 82	37.280	6.811	15
16	6.1304	0.1631	0.023 39	0.143 39	42.753	6.974	16
17	6.8660	0.1456	0.020 46	0.140 46	48.884	7.120	17
18	7.6900	0.1300	0.017 94	0.137 94	55.750	7.250	18
19	8.6128	0.1161	0.015 76	0.135 76	63.440	7.366	19
20	9.6463	0.1037	0.013 88	0.133 88	72.052	7.469	20
21	10.8038	0.0926	0.012 24	0.132 24	81.699	7.562	21
22	12.1003	0.0826	0.010 81	0.130 81	92.503	7.645	22
23	13.5523	0.0738	0.009 56	0.129 56	104.603	7.718	23
24	15.1786	0.0659	0.008 46	0.128 46	118.155	7.784	24
25	17.0001	0.0588	0.007 50	0.127 50	133.334	7.843	25
26	19.0401	0.0525	0.006 65	0.126 65	150.334	7.896	26
27	21.3249	0.0469	0.005 90	0.125 90	169.374	7.943	27
28	23.8839	0.0419	0.005 24	0.125 24	190.699	7.984	28
29	26.7499	0.0374	0.004 66	0.124 66	214.583	8.022	29
30	29.9599	0.0334	0.004 14	0.124 14	241.333	8.055	30
31	33.5551	0.0298	0.003 69	0.123 69	271.292	8.085	31
32	37.5817	0.0266	0.003 28	0.123 28	304.847	8.112	32
33	42.0915	0.0238	0.002 92	0.122 92	342.429	8.135	33
34	47.1425	0.0212	0.002 60	0.122 60	384.520	8.157	34
35	52.7996	0.0189	0.002 32	0.122 32	431.663	8.176	35
40	93.0510	0.0107	0.001 30	0.121 30	767.091	8.244	40
45	163.9876	0.0061	0.000 74	0.120 74	1 358.230	8.283	45
50	289.0022	0.0035	0.000 42	0.120 42	2 400.018	8.305	50
∞				0.120 00		8.333	∞

TABLE D-18

13% Compound Interest Factors

n	Single Payment		Uniform Series				n
	Compound Amount Factor F/P	Present Worth Factor P/F	Sinking Fund Factor A/F	Capital Recovery Factor A/P	Compound Amount Factor F/A	Present Worth Factor P/A	
1	1.1300	0.8850	1.000 00	1.130 00	1.000	0.885	1
2	1.2769	0.7831	0.469 48	0.599 48	2.130	1.668	2
3	1.4429	0.6931	0.293 52	0.423 52	3.407	2.361	3
4	1.6305	0.6133	0.206 19	0.336 19	4.850	2.974	4
5	1.8424	0.5428	0.154 31	0.284 31	6.480	3.517	5
6	2.0820	0.4803	0.120 15	0.250 15	8.323	3.998	6
7	2.3526	0.4251	0.096 11	0.226 11	10.405	4.423	7
8	2.6584	0.3762	0.078 39	0.208 39	12.757	4.799	8
9	3.0040	0.3329	0.064 87	0.194 87	15.416	5.132	9
10	3.3946	0.2946	0.054 29	0.184 29	18.420	5.426	10
11	3.8359	0.2607	0.045 84	0.175 84	21.814	5.687	11
12	4.3345	0.2307	0.038 99	0.168 99	25.650	5.918	12
13	4.8980	0.2042	0.033 35	0.163 35	29.985	6.122	13
14	5.5348	0.1807	0.028 67	0.158 67	34.883	6.302	14
15	6.2543	0.1599	0.024 74	0.154 74	40.417	6.462	15
16	7.0673	0.1415	0.021 43	0.151 43	46.672	6.604	16
17	7.9861	0.1252	0.018 61	0.148 61	53.739	6.729	17
18	9.0243	0.1108	0.016 20	0.146 20	61.725	6.840	18
19	10.1974	0.0981	0.014 13	0.144 13	70.749	6.938	19
20	11.5231	0.0868	0.012 35	0.142 35	80.947	7.025	20
21	13.0211	0.0768	0.010 81	0.140 81	92.470	7.102	21
22	14.7138	0.0680	0.009 48	0.139 48	105.491	7.170	22
23	16.6266	0.0601	0.008 32	0.138 32	120.205	7.230	23
24	18.7881	0.0532	0.007 31	0.137 31	136.831	7.283	24
25	21.2305	0.0471	0.006 43	0.136 43	155.620	7.330	25
26	23.9905	0.0417	0.005 65	0.135 65	176.850	7.372	26
27	27.1093	0.0369	0.004 98	0.134 98	200.841	7.409	27
28	30.6335	0.0326	0.004 39	0.134 39	227.950	7.441	28
29	34.6158	0.0289	0.003 87	0.133 87	258.583	7.470	29
30	39.1159	0.0256	0.003 41	0.133 41	293.199	7.496	30
31	44.2010	0.0226	0.003 01	0.133 01	332.315	7.518	31
32	49.9471	0.0200	0.002 66	0.132 66	376.516	7.538	32
33	56.4402	0.0177	0.002 34	0.132 34	426.463	7.556	33
34	63.7774	0.0157	0.002 07	0.132 07	482.903	7.572	34
35	72.0685	0.0139	0.001 83	0.131 83	546.681	7.586	35
40	132.7816	0.0075	0.000 99	0.130 99	1 013.704	7.634	40
45	244.6414	0.0041	0.000 53	0.130 53	1 874.165	7.661	45
50	450.7359	0.0022	0.000 29	0.130 29	3 459.507	7.675	50
∞				0.130 00		7.692	∞

TABLE D-19

14% Compound Interest Factors

n	Single Payment		Uniform Series				n
	Compound Amount Factor F/P	Present Worth Factor P/F	Sinking Fund Factor A/F	Capital Recovery Factor A/P	Compound Amount Factor F/A	Present Worth Factor P/A	
1	1.1400	0.8772	1.000 00	1.140 00	1.000	0.877	1
2	1.2996	0.7695	0.467 29	0.607 29	2.140	1.647	2
3	1.4815	0.6750	0.290 73	0.430 73	3.440	2.322	3
4	1.6890	0.5921	0.203 20	0.343 20	4.921	2.914	4
5	1.9254	0.5194	0.151 28	0.291 28	6.610	3.433	5
6	2.1950	0.4556	0.117 16	0.257 16	8.536	3.889	6
7	2.5023	0.3996	0.093 19	0.233 19	10.730	4.288	7
8	2.8526	0.3506	0.075 57	0.215 57	13.233	4.639	8
9	3.2519	0.3075	0.062 17	0.202 17	16.085	4.946	9
10	3.7072	0.2697	0.051 71	0.191 71	19.337	5.216	10
11	4.2262	0.2366	0.043 39	0.183 39	23.045	5.453	11
12	4.8179	0.2076	0.036 67	0.176 67	27.271	5.660	12
13	5.4924	0.1821	0.031 16	0.171 16	32.089	5.842	13
14	6.2613	0.1597	0.026 61	0.166 61	37.581	6.002	14
15	7.1379	0.1401	0.022 81	0.162 81	43.842	6.142	15
16	8.1372	0.1229	0.019 62	0.159 62	50.980	6.265	16
17	9.2765	0.1078	0.016 92	0.156 92	59.118	6.373	17
18	10.5752	0.0946	0.014 62	0.154 62	68.394	6.467	18
19	12.0557	0.0829	0.012 66	0.152 66	78.969	6.550	19
20	13.7435	0.0728	0.010 99	0.150 99	91.025	6.623	20
21	15.6676	0.0638	0.009 54	0.149 54	104.768	6.687	21
22	17.8610	0.0560	0.008 30	0.148 30	120.436	6.743	22
23	20.3616	0.0491	0.007 23	0.147 23	138.297	6.792	23
24	23.2122	0.0431	0.006 30	0.146 30	158.659	6.835	24
25	26.4619	0.0378	0.005 50	0.145 50	181.871	6.873	25
26	30.1666	0.0331	0.004 80	0.144 80	208.333	6.906	26
27	34.3899	0.0291	0.004 19	0.144 19	238.499	6.935	27
28	39.2045	0.0255	0.003 66	0.143 66	272.889	6.961	28
29	44.6931	0.0224	0.003 20	0.143 20	312.094	6.983	29
30	50.9502	0.0196	0.002 80	0.142 80	356.787	7.003	30
31	58.0832	0.0172	0.002 45	0.142 45	407.737	7.020	31
32	66.2148	0.0151	0.002 15	0.142 15	465.820	7.035	32
33	75.4849	0.0132	0.001 88	0.141 88	532.035	7.048	33
34	86.0528	0.0116	0.001 65	0.141 65	607.520	7.060	34
35	98.1002	0.0102	0.001 44	0.141 44	693.573	7.070	35
40	188.8835	0.0053	0.000 75	0.140 75	1 342.025	7.105	40
45	363.6791	0.0027	0.000 39	0.140 39	2 590.565	7.123	45
50	700.2330	0.0014	0.000 20	0.140 20	4 994.521	7.133	50
∞				0.140 00		43	∞

TABLE D-20

15% Compound Interest Factors

n	Single Payment		Uniform Series				n
	Compound Amount Factor F/P	Present Worth Factor P/F	Sinking Fund Factor A/F	Capital Recovery Factor A/P	Compound Amount Factor F/A	Present Worth Factor P/A	
1	1.1500	0.8696	1.000 00	1.150 00	1.000	0.870	1
2	1.3225	0.7561	0.465 12	0.615 12	2.150	1.626	2
3	1.5209	0.6575	0.287 98	0.437 98	3.472	2.283	3
4	1.7490	0.5718	0.200 26	0.350 27	4.993	2.855	4
5	2.0114	0.4972	0.148 32	0.298 32	6.742	3.352	5
6	2.3131	0.4323	0.114 24	0.264 24	8.754	3.784	6
7	2.6600	0.3759	0.090 36	0.240 36	11.067	4.160	7
8	3.0590	0.3269	0.072 85	0.222 85	13.727	4.487	8
9	3.5179	0.2843	0.059 57	0.209 57	16.786	4.772	9
10	4.0456	0.2472	0.049 25	0.199 25	20.304	5.019	10
11	4.6524	0.2149	0.041 07	0.191 07	24.349	5.234	11
12	5.3503	0.1869	0.034 48	0.184 48	29.002	5.421	12
13	6.1528	0.1625	0.029 11	0.179 11	34.352	5.583	13
14	7.0757	0.1413	0.024 69	0.174 69	40.505	5.724	14
15	8.1371	0.1229	0.021 02	0.171 02	47.580	5.847	15
16	9.3576	0.1069	0.017 95	0.167 95	55.717	5.954	16
17	10.7613	0.0929	0.015 37	0.165 37	65.075	6.047	17
18	12.3755	0.0808	0.013 19	0.163 19	75.836	6.128	18
19	14.2318	0.0703	0.011 34	0.161 34	88.212	6.198	19
20	16.3665	0.0611	0.009 76	0.159 76	102.444	6.259	20
21	18.8215	0.0531	0.008 42	0.158 42	118.810	6.312	21
22	21.6447	0.0462	0.007 27	0.157 27	137.632	6.359	22
23	24.8915	0.0402	0.006 28	0.156 28	159.276	6.399	23
24	28.6252	0.0349	0.005 43	0.155 43	184.168	6.434	24
25	32.9190	0.0304	0.004 70	0.154 70	212.793	6.464	25
26	37.8568	0.0264	0.004 07	0.154 07	245.712	6.491	26
27	43.5353	0.0230	0.003 53	0.153 53	283.569	6.514	27
28	50.0656	0.0200	0.003 06	0.153 06	327.104	6.534	28
29	57.5755	0.0174	0.002 65	0.152 65	377.170	6.551	29
30	66.2118	0.0151	0.002 30	0.152 30	434.745	6.566	30
31	76.1435	0.0131	0.002 00	0.152 00	500.957	6.579	31
32	87.5651	0.0114	0.001 73	0.151 73	577.100	6.591	32
33	100.6998	0.0099	0.001 50	0.151 50	664.666	6.600	33
34	115.8048	0.0086	0.001 31	0.151 31	765.365	6.609	34
35	133.1755	0.0075	0.001 13	0.151 13	881.170	6.617	35
40	267.8635	0.0037	0.000 56	0.150 56	1779.090	6.642	40
45	538.7693	0.0019	0.000 28	0.150 28	3585.128	6.654	45
50	1083.6574	0.0009	0.000 14	0.150 14	7217.716	6.661	50
∞				0.150 00		6.667	∞

TABLE D-21

16% Compound Interest Factors

n	Single Payment		Uniform Series				n
	Compound Amount Factor F/P	Present Worth Factor P/F	Sinking Fund Factor A/F	Capital Recovery Factor A/P	Compound Amount Factor F/A	Present Worth Factor P/A	
1	1.1600	0.8621	1.000 00	1.160 00	1.000	0.862	1
2	1.3456	0.7432	0.462 96	0.622 96	2.160	1.605	2
3	1.5609	0.6407	0.285 26	0.445 26	3.506	2.246	3
4	1.8106	0.5523	0.197 38	0.357 38	5.066	2.798	4
5	2.1003	0.4761	0.145 41	0.305 41	6.877	3.274	5
6	2.4364	0.4104	0.111 39	0.271 39	8.977	3.685	6
7	2.8262	0.3538	0.087 61	0.247 61	11.414	4.039	7
8	3.2784	0.3050	0.070 22	0.230 22	14.240	4.344	8
9	3.8030	0.2630	0.057 08	0.217 08	17.519	4.607	9
10	4.4114	0.2267	0.046 90	0.206 90	21.321	4.833	10
11	5.1173	0.1954	0.038 86	0.198 86	25.733	5.029	11
12	5.9360	0.1685	0.032 41	0.192 41	30.850	5.197	12
13	6.8858	0.1452	0.027 18	0.187 18	36.786	5.342	13
14	7.9875	0.1252	0.022 90	0.182 90	43.672	5.468	14
15	9.2655	0.1079	0.019 36	0.179 36	51.660	5.575	15
16	10.7480	0.0930	0.016 41	0.176 41	60.925	5.668	16
17	12.4677	0.0802	0.013 95	0.173 95	71.673	5.749	17
18	14.4625	0.0691	0.011 88	0.171 88	84.141	5.818	18
19	16.7765	0.0596	0.010 14	0.170 14	98.603	5.877	19
20	19.4608	0.0514	0.008 67	0.168 67	115.380	5.929	20
21	22.5745	0.0443	0.007 42	0.167 42	134.841	5.973	21
22	26.1864	0.0382	0.006 35	0.166 35	157.415	6.011	22
23	30.3762	0.0329	0.005 45	0.165 45	183.601	6.044	23
24	35.2364	0.0284	0.004 67	0.164 67	213.978	6.073	24
25	40.8742	0.0245	0.004 01	0.164 01	249.214	6.097	25
26	47.4141	0.0211	0.003 45	0.163 45	290.088	6.118	26
27	55.0004	0.0182	0.002 96	0.162 96	337.502	6.136	27
28	63.8004	0.0157	0.002 55	0.162 55	392.503	6.152	28
29	74.0085	0.0135	0.002 19	0.162 19	456.303	6.166	29
30	85.8499	0.0116	0.001 89	0.161 89	530.312	6.177	30
31	99.5859	0.0100	0.001 62	0.161 62	616.162	6.187	31
32	115.5196	0.0087	0.001 40	0.161 40	715.747	6.196	32
33	134.0027	0.0075	0.001 20	0.161 20	831.267	6.203	33
34	155.4432	0.0064	0.001 04	0.161 04	965.270	6.210	34
35	180.3141	0.0055	0.000 89	0.160 89	1120.713	6.215	35
40	378.7212	0.0026	0.000 42	0.160 42	2360.757	6.233	40
45	795.4438	0.0013	0.000 20	0.160 20	4965.274	6.242	45
50	1670.7038	0.0006	0.000 10	0.160 10	10435.649	6.246	50
∞				0.160 00		6.250	∞

TABLE D-22

18% Compound Interest Factors

n	Single Payment		Uniform Series				n
	Compound Amount Factor F/P	Present Worth Factor P/F	Sinking Fund Factor A/F	Capital Recovery Factor A/P	Compound Amount Factor F/A	Present Worth Factor P/A	
1	1.1800	0.8475	1.000 00	1.180 00	1.000	0.847	1
2	1.3924	0.7182	0.458 72	0.638 72	2.180	1.566	2
3	1.6430	0.6086	0.279 92	0.459 92	3.572	2.174	3
4	1.9388	0.5158	0.191 74	0.371 74	5.215	2.690	4
5	2.2878	0.4371	0.139 78	0.319 78	7.154	3.127	5
6	2.6996	0.3704	0.105 91	0.285 91	9.442	3.498	6
7	3.1855	0.3139	0.082 36	0.262 36	12.142	3.812	7
8	3.7589	0.2660	0.065 24	0.245 24	15.327	4.078	8
9	4.4355	0.2255	0.052 39	0.232 39	19.086	4.303	9
10	5.2338	0.1911	0.042 51	0.222 51	23.521	4.494	10
11	6.1759	0.1619	0.034 78	0.214 78	28.755	4.656	11
12	7.2876	0.1372	0.028 63	0.208 63	34.931	4.793	12
13	8.5994	0.1163	0.023 69	0.203 69	42.219	4.910	13
14	10.1472	0.0985	0.019 68	0.199 68	50.818	5.008	14
15	11.9737	0.0835	0.016 40	0.196 40	60.965	5.092	15
16	14.1290	0.0708	0.013 71	0.193 71	72.939	5.162	16
17	16.6722	0.0600	0.011 49	0.191 49	87.068	5.222	17
18	19.6733	0.0508	0.009 64	0.189 64	103.740	5.273	18
19	23.2144	0.0431	0.008 10	0.188 10	123.414	5.316	19
20	27.3930	0.0365	0.006 82	0.186 82	146.628	5.353	20
21	32.3238	0.0309	0.005 75	0.185 75	174.021	5.384	21
22	38.1421	0.0262	0.004 85	0.184 85	206.345	5.410	22
23	45.0076	0.0222	0.004 09	0.184 09	244.487	5.432	23
24	53.1090	0.0188	0.003 45	0.183 45	289.494	5.451	24
25	62.6686	0.0160	0.002 92	0.182 92	342.603	5.467	25
26	73.9490	0.0135	0.002 47	0.182 47	405.272	5.480	26
27	87.2598	0.0115	0.002 09	0.182 09	479.221	5.492	27
28	102.9665	0.0097	0.001 77	0.181 77	566.481	5.502	28
29	121.5005	0.0082	0.001 49	0.181 49	669.447	5.510	29
30	143.3706	0.0070	0.001 26	0.181 26	790.948	5.517	30
31	169.1774	0.0059	0.001 07	0.181 07	934.319	5.523	31
32	199.6293	0.0050	0.000 91	0.180 91	1 103.496	5.528	32
33	235.5625	0.0042	0.000 77	0.180 77	1 303.125	5.532	33
34	277.9638	0.0036	0.000 65	0.180 65	1 538.688	5.536	34
35	327.9973	0.0030	0.000 55	0.180 55	1 816.652	5.539	35
40	750.3783	0.0013	0.000 24	0.180 24	4 163.213	5.548	40
45	1 716.6839	0.0006	0.000 10	0.180 10	9 531.577	5.552	45
50	3 927.3569	0.0003	0.000 05	0.180 05	21 813.094	5.554	50
∞				0.180 00		5.556	∞

TABLE D-23

20% Compound Interest Factors

n	Single Payment		Uniform Series				n
	Compound Amount Factor F/P	Present Worth Factor P/F	Sinking Fund Factor A/F	Capital Recovery Factor A/P	Compound Amount Factor F/A	Present Worth Factor P/A	
1	1.2000	0.8333	1.000 00	1.200 00	1.000	0.833	1
2	1.4400	0.6944	0.454 55	0.654 55	2.200	1.528	2
3	1.7280	0.5787	0.274 73	0.474 73	3.640	2.106	3
4	2.0736	0.4823	0.186 29	0.386 29	5.368	2.589	4
5	2.4883	0.4019	0.134 38	0.334 38	7.442	2.991	5
6	2.9860	0.3349	0.100 71	0.300 71	9.930	3.326	6
7	3.5832	0.2791	0.077 42	0.277 42	12.916	3.605	7
8	4.2998	0.2326	0.060 61	0.260 61	16.499	3.837	8
9	5.1598	0.1938	0.048 08	0.248 08	20.799	4.031	9
10	6.1917	0.1615	0.038 52	0.238 52	25.959	4.192	10
11	7.4301	0.1346	0.031 10	0.231 10	32.150	4.327	11
12	8.9161	0.1122	0.025 26	0.225 26	39.581	4.439	12
13	10.6993	0.0935	0.020 62	0.220 62	48.497	4.533	13
14	12.8392	0.0779	0.016 89	0.216 89	59.196	4.611	14
15	15.4070	0.0649	0.013 88	0.213 88	72.035	4.675	15
16	18.4884	0.0541	0.011 44	0.211 44	87.442	4.730	16
17	22.1861	0.0451	0.009 44	0.209 44	105.931	4.775	17
18	26.6233	0.0376	0.007 81	0.207 81	128.117	4.812	18
19	31.9480	0.0313	0.006 46	0.206 46	154.740	4.844	19
20	38.3376	0.0261	0.005 36	0.205 36	186.688	4.870	20
21	46.0051	0.0217	0.004 44	0.204 44	225.026	4.891	21
22	55.2061	0.0181	0.003 69	0.203 69	271.031	4.909	22
23	66.2474	0.0151	0.003 07	0.203 07	326.237	4.925	23
24	79.4968	0.0126	0.002 55	0.202 55	392.484	4.937	24
25	95.3962	0.0105	0.002 12	0.202 12	471.981	4.948	25
26	114.4755	0.0087	0.001 76	0.201 76	567.377	4.956	26
27	137.3706	0.0073	0.001 47	0.201 47	681.853	4.964	27
28	164.8447	0.0061	0.001 22	0.201 22	819.223	4.970	28
29	197.8136	0.0051	0.001 02	0.201 02	984.068	4.975	29
30	237.3763	0.0042	0.000 85	0.200 85	1 181.882	4.979	30
31	284.8516	0.0035	0.000 70	0.200 70	1 419.258	4.982	31
32	341.8219	0.0029	0.000 59	0.200 59	1 704.109	4.985	32
33	410.1863	0.0024	0.000 49	0.200 49	2 045.931	4.988	33
34	492.2235	0.0020	0.000 41	0.200 41	2 456.118	4.990	34
35	590.6682	0.0017	0.000 34	0.200 34	2 948.341	4.992	35
40	1 469.7716	0.0007	0.000 14	0.200 14	7 343.858	4.997	40
45	3 657.2620	0.0003	0.000 05	0.200 05	18 281.310	4.999	45
50	9 100.4382	0.0001	0.000 02	0.200 02	45 497.191	4.999	50
∞				0.200 00		5.000	∞

TABLE D-24

25% Compound Interest Factors

n	Single Payment		Uniform Series				n
	Compound Factor F/P	Present Worth Factor P/F	Sinking Fund Factor A/F	Capital Recovery Factor A/P	Compound Amount Factor F/A	Present Worth Factor P/A	
1	1.2500	0.8000	1.000 00	1.250 00	1.000	0.800	1
2	1.5625	0.6400	0.444 44	0.694 44	2.250	1.440	2
3	1.9531	0.5120	0.262 30	0.512 30	3.813	1.952	3
4	2.4414	0.4096	0.173 44	0.423 44	5.766	2.362	4
5	3.0518	0.3277	0.121 85	0.371 85	8.207	2.689	5
6	3.8147	0.2621	0.088 82	0.338 82	11.259	2.951	6
7	4.7684	0.2097	0.066 34	0.316 34	15.073	3.161	7
8	5.9605	0.1678	0.050 40	0.300 40	19.842	3.329	8
9	7.4506	0.1342	0.038 76	0.288 76	25.802	3.463	9
10	9.3132	0.1074	0.030 07	0.280 07	33.253	3.571	10
11	11.6415	0.0859	0.023 49	0.273 49	42.566	3.656	11
12	14.5519	0.0687	0.018 45	0.268 45	54.208	3.725	12
13	18.1899	0.0550	0.014 54	0.264 54	68.760	3.780	13
14	22.7374	0.0440	0.011 50	0.261 50	86.949	3.824	14
15	28.4217	0.0352	0.009 12	0.259 12	109.687	3.859	15
16	35.5271	0.0281	0.007 24	0.257 24	138.109	3.887	16
17	44.4089	0.0225	0.005 76	0.255 76	173.636	3.910	17
18	55.5112	0.0180	0.004 59	0.254 59	218.045	3.928	18
19	69.3889	0.0144	0.003 66	0.253 66	273.556	3.942	19
20	86.7362	0.0115	0.002 92	0.252 92	342.945	3.954	20
21	108.4202	0.0092	0.002 33	0.252 33	429.681	3.963	21
22	135.5253	0.0074	0.001 86	0.251 86	538.101	3.970	22
23	169.4066	0.0059	0.001 48	0.251 48	673.626	3.976	23
24	211.7582	0.0047	0.001 19	0.251 19	843.033	3.981	24
25	264.6978	0.0038	0.000 95	0.250 95	1054.791	3.985	25
26	330.8722	0.0030	0.000 76	0.250 76	1319.489	3.988	26
27	413.5903	0.0024	0.000 61	0.250 61	1650.361	3.990	27
28	516.9879	0.0019	0.000 48	0.250 48	2063.952	3.992	28
29	646.2349	0.0015	0.000 39	0.250 39	2580.939	3.994	29
30	807.7936	0.0012	0.000 31	0.250 31	3227.174	3.995	30
31	1009.7420	0.0010	0.000 25	0.250 25	4034.968	3.996	31
32	1262.1774	0.0008	0.000 20	0.250 20	5044.710	3.997	32
33	1577.7218	0.0006	0.000 16	0.250 16	6306.887	3.997	33
34	1972.1523	0.0005	0.000 13	0.250 13	7884.609	3.998	34
35	2465.1903	0.0004	0.000 10	0.250 10	9856.761	3.998	35
40	7523.1638	0.0001	0.000 03	0.250 03	30088.655	3.999	40
45	22958.8740	0.0001	0.000 01	0.250 01	91831.496	4.000	45
50	70064.9232	0.0000	0.000 00	0.250 00	280255.693	4.000	50
∞				0.250 00		4.000	∞

TABLE D-25

30% Compound Interest Factors

n	Single Payment		Uniform Series				n
	Compound Factor F/P	Present Worth Factor P/F	Sinking Fund Factor A/F	Capital Recovery Factor A/P	Compound Amount Factor F/A	Present Worth Factor P/A	
1	1.3000	0.7692	1.000 00	1.300 00	1.000	0.769	1
2	1.6900	0.5917	0.434 78	0.734 78	2.300	1.361	2
3	2.1970	0.4552	0.250 63	0.550 63	3.990	1.816	3
4	2.8561	0.3501	0.161 63	0.461 63	6.187	2.166	4
5	3.7129	0.2693	0.110 58	0.410 58	9.043	2.436	5
6	4.8268	0.2072	0.078 39	0.378 39	12.756	2.643	6
7	6.2749	0.1594	0.056 87	0.356 87	17.583	2.802	7
8	8.1573	0.1226	0.041 92	0.341 92	23.858	2.925	8
9	10.6045	0.0943	0.031 24	0.331 24	32.015	3.019	9
10	13.7858	0.0725	0.023 46	0.323 46	42.619	3.092	10
11	17.9216	0.0558	0.017 73	0.317 73	56.405	3.147	11
12	23.2981	0.0429	0.013 45	0.313 45	74.327	3.190	12
13	30.2875	0.0330	0.010 24	0.310 24	97.625	3.223	13
14	39.3738	0.0254	0.007 82	0.307 82	127.913	3.249	14
15	51.1859	0.0195	0.005 98	0.305 98	167.286	3.268	15
16	66.5417	0.0150	0.004 58	0.304 58	218.472	3.283	16
17	86.5042	0.0116	0.003 51	0.303 51	285.014	3.295	17
18	112.4554	0.0089	0.002 69	0.302 69	371.518	3.304	18
19	146.1920	0.0068	0.002 07	0.302 07	483.973	3.311	19
20	190.0496	0.0053	0.001 59	0.301 59	630.165	3.316	20
21	247.0645	0.0040	0.001 22	0.301 22	820.215	3.320	21
22	321.1839	0.0031	0.000 94	0.300 94	1067.280	3.323	22
23	417.5391	0.0024	0.000 72	0.300 72	1388.464	3.325	23
24	542.8008	0.0018	0.000 55	0.300 55	1806.003	3.327	24
25	705.6410	0.0014	0.000 43	0.300 43	2348.803	3.329	25
26	917.3333	0.0011	0.000 33	0.300 33	3054.444	3.330	26
27	1192.5333	0.0008	0.000 25	0.300 25	3971.778	3.331	27
28	1550.2933	0.0006	0.000 19	0.300 19	5164.311	3.331	28
29	2015.3813	0.0005	0.000 15	0.300 15	6714.604	3.332	29
30	2619.9956	0.0004	0.000 11	0.300 11	8729.985	3.332	30
31	3405.9943	0.0003	0.000 09	0.300 09	11349.981	3.332	31
32	4427.7926	0.0002	0.000 07	0.300 07	14755.975	3.333	32
33	5756.1304	0.0002	0.000 05	0.300 05	19183.768	3.333	33
34	7482.9696	0.0001	0.000 04	0.300 04	24939.899	3.333	34
35	9727.8604	0.0001	0.000 03	0.300 03	32422.868	3.333	35
∞				0.300 00		3.333	∞

TABLE D-25

30% Compound Interest Factors

n	Single Payment		Uniform Series				n
	Compound Amount Factor F/P	Present Worth Factor P/F	Sinking Fund Factor A/F	Capital Recovery Factor A/P	Compound Amount Factor F/A	Present Worth Factor P/A	
1	1.3000	0.7692	1.000 00	1.300 00	1.000	0.769	1
2	1.6900	0.5917	0.434 78	0.734 78	2.300	1.361	2
3	2.1970	0.4552	0.250 63	0.550 63	3.990	1.816	3
4	2.8561	0.3501	0.161 63	0.461 63	6.187	2.166	4
5	3.7129	0.2693	0.110 58	0.410 58	9.043	2.436	5
6	4.8268	0.2072	0.078 39	0.378 39	12.756	2.643	6
7	6.2749	0.1594	0.056 87	0.356 87	17.583	2.802	7
8	8.1573	0.1226	0.041 92	0.341 92	23.858	2.925	8
9	10.6045	0.0943	0.031 24	0.331 24	32.015	3.019	9
10	13.7858	0.0725	0.023 46	0.323 46	42.619	3.092	10
11	17.9216	0.0558	0.017 73	0.317 73	56.405	3.147	11
12	23.2981	0.0429	0.013 45	0.313 45	74.327	3.190	12
13	30.2875	0.0330	0.010 24	0.310 24	97.625	3.223	13
14	39.3738	0.0254	0.007 82	0.307 82	127.913	3.249	14
15	51.1859	0.0195	0.005 98	0.305 98	167.286	3.268	15
16	66.5417	0.0150	0.004 58	0.304 58	218.472	3.283	16
17	86.5042	0.0116	0.003 51	0.303 51	285.014	3.295	17
18	112.4554	0.0089	0.002 69	0.302 69	371.518	3.304	18
19	146.1920	0.0068	0.002 07	0.302 07	483.973	3.311	19
20	190.0496	0.0053	0.001 59	0.301 59	630.165	3.316	20
21	247.0645	0.0040	0.001 22	0.301 22	820.215	3.320	21
22	321.1839	0.0031	0.000 94	0.300 94	1 067.280	3.323	22
23	417.5391	0.0024	0.000 72	0.300 72	1 388.464	3.325	23
24	542.8008	0.0018	0.000 55	0.300 55	1 806.003	3.327	24
25	705.6410	0.0014	0.000 43	0.300 43	2 348.803	3.329	25
26	917.3333	0.0011	0.000 33	0.300 33	3 054.444	3.330	26
27	1 192.5333	0.0008	0.000 25	0.300 25	3 971.778	3.331	27
28	1 550.2933	0.0006	0.000 19	0.300 19	5 164.311	3.331	28
29	2 015.3813	0.0005	0.000 15	0.300 15	6 714.604	3.332	29
30	2 619.9956	0.0004	0.000 11	0.300 11	8 729.985	3.332	30
31	3 405.9943	0.0003	0.000 09	0.300 09	11 349.981	3.332	31
32	4 427.7926	0.0002	0.000 07	0.300 07	14 755.975	3.333	32
33	5 756.1304	0.0002	0.000 05	0.300 05	19 183.768	3.333	33
34	7 482.9696	0.0001	0.000 04	0.300 04	24 939.899	3.333	34
35	9 727.8604	0.0001	0.000 03	0.300 03	32 422.868	3.333	35
∞				0.300 00		3.333	∞

TABLE D-26

35% Compound Interest Factors

n	Single Payment		Uniform Series				n
	Compound Amount Factor F/P	Present Worth Factor P/F	Sinking Fund Factor A/F	Capital Recovery Factor A/P	Compound Amount Factor F/A	Present Worth Factor P/A	
1	1.3500	0.7407	1.000 00	1.350 00	1.000	0.741	1
2	1.8225	0.5487	0.425 53	0.775 53	2.350	1.289	2
3	2.4604	0.4064	0.239 66	0.589 66	4.172	1.696	3
4	3.3215	0.3011	0.150 76	0.500 76	6.633	1.997	4
5	4.4840	0.2230	0.100 46	0.450 46	9.954	2.220	5
6	6.0534	0.1652	0.069 26	0.419 26	14.438	2.385	6
7	8.1722	0.1224	0.048 80	0.398 80	20.492	2.507	7
8	11.0324	0.0906	0.034 89	0.384 89	28.664	2.598	8
9	14.8937	0.0671	0.025 19	0.375 19	39.696	2.665	9
10	20.1066	0.0497	0.018 32	0.368 32	54.590	2.715	10
11	27.1439	0.0368	0.013 39	0.363 39	74.697	2.752	11
12	36.6442	0.0273	0.009 82	0.359 82	101.841	2.779	12
13	49.4697	0.0202	0.007 22	0.357 22	138.485	2.799	13
14	66.7841	0.0150	0.005 32	0.355 32	187.954	2.814	14
15	90.1585	0.0111	0.003 93	0.353 93	254.738	2.825	15
16	121.7139	0.0082	0.002 90	0.352 90	344.897	2.834	16
17	164.3138	0.0061	0.002 14	0.352 14	466.611	2.840	17
18	221.8236	0.0045	0.001 59	0.351 58	630.925	2.844	18
19	299.4619	0.0033	0.001 17	0.351 17	852.748	2.848	19
20	404.2736	0.0025	0.000 87	0.350 87	1 152.210	2.850	20
21	545.7693	0.0018	0.000 64	0.350 64	1 556.484	2.852	21
22	736.7886	0.0014	0.000 48	0.350 48	2 102.253	2.853	22
23	994.6646	0.0010	0.000 35	0.350 35	2 839.042	2.854	23
24	1 342.7973	0.0007	0.000 26	0.350 26	3 833.706	2.855	24
25	1 812.7763	0.0006	0.000 19	0.350 19	5 176.504	2.856	25
26	2 447.2480	0.0004	0.000 14	0.350 14	6 989.280	2.856	26
27	3 303.7848	0.0003	0.000 11	0.350 11	9 436.528	2.856	27
28	4 460.1095	0.0002	0.000 08	0.350 08	12 740.313	2.857	28
29	6 021.1478	0.0002	0.000 06	0.350 06	17 200.422	2.857	29
30	8 128.5495	0.0001	0.000 04	0.350 04	23 221.570	2.857	30
31	10 973.5418	0.0001	0.000 03	0.350 03	31 350.120	2.857	31
32	14 814.2815	0.0001	0.000 02	0.350 02	42 323.661	2.857	32
33	19 999.2800	0.0001	0.000 02	0.350 02	57 137.943	2.857	33
34	26 999.0280	0.0000	0.000 01	0.350 01	77 137.223	2.857	34
35	36 448.6878		0.000 01	0.350 01	104 136.251	2.857	35
∞				0.350 00		2.857	∞

**TABLE D-27**  
40% Compound Interest Factors

n	Single Payment		Uniform Series				n
	Compound Amount Factor F/P	Present Worth Factor P/F	Sinking Fund Factor A/F	Capital Recovery Factor A/P	Compound Amount Factor F/A	Present Worth Factor P/A	
1	1.4000	0.7143	1.000 00	1.400 00	1.000	0.714	1
2	1.9600	0.5102	0.416 67	0.816 67	2.400	1.224	2
3	2.7440	0.3644	0.229 36	0.629 36	4.360	1.589	3
4	3.8416	0.2603	0.140 77	0.540 77	7.104	1.849	4
5	5.3782	0.1859	0.091 36	0.491 36	10.946	2.035	5
6	7.5295	0.1328	0.061 26	0.461 26	16.324	2.168	6
7	10.5414	0.0949	0.041 92	0.441 92	23.853	2.263	7
8	14.7579	0.0678	0.029 07	0.429 07	34.395	2.331	8
9	20.6610	0.0484	0.020 34	0.420 34	49.153	2.379	9
10	28.9255	0.0346	0.014 32	0.414 32	69.814	2.414	10
11	40.4957	0.0247	0.010 13	0.410 13	98.739	2.438	11
12	56.6939	0.0176	0.007 18	0.407 18	139.235	2.456	12
13	79.3715	0.0126	0.005 10	0.405 10	195.929	2.469	13
14	111.1201	0.0090	0.003 63	0.403 63	275.300	2.478	14
15	155.5681	0.0064	0.002 59	0.402 59	386.420	2.484	15
16	217.7953	0.0046	0.001 85	0.401 85	541.988	2.489	16
17	304.9135	0.0033	0.001 32	0.401 32	759.784	2.492	17
18	426.8789	0.0023	0.000 94	0.400 94	1064.697	2.494	18
19	597.6304	0.0017	0.000 67	0.400 67	1491.576	2.496	19
20	836.6826	0.0012	0.000 48	0.400 48	2089.206	2.497	20
21	1171.3554	0.0009	0.000 34	0.400 34	2925.889	2.498	21
22	1639.8976	0.0006	0.000 24	0.400 24	4097.245	2.498	22
23	2295.8569	0.0004	0.000 17	0.400 17	5737.142	2.499	23
24	3214.1997	0.0003	0.000 12	0.400 12	8032.999	2.499	24
25	4499.8796	0.0002	0.000 09	0.400 09	11247.199	2.499	25
26	6299.8314	0.0002	0.000 06	0.400 06	15747.079	2.500	26
27	8819.7640	0.0001	0.000 05	0.400 05	22046.910	2.500	27
28	12347.6696	0.0001	0.000 03	0.400 03	30866.674	2.500	28
29	17286.7374	0.0001	0.000 02	0.400 02	43214.343	2.500	29
30	24201.4324	0.0000	0.000 01	0.400 02	60501.081	2.500	30
31	33882.0053		0.000 01	0.400 01	84702.513	2.500	31
32	47434.8074		0.000 01	0.400 01	118584.519	2.500	32
33	66408.7304		0.000 01	0.400 01	166019.326	2.500	33
34	92972.2225		0.000 00	0.400 00	232428.056	2.500	34
35	130161.1116			0.400 00	325400.279	2.500	35
∞				0.400 00		2.500	∞

**TABLE D-28**  
45% Compound Interest Factors

n	Single Payment		Uniform Series				n
	Compound Amount Factor F/P	Present Worth Factor P/F	Sinking Fund Factor A/F	Capital Recovery Factor A/P	Compound Amount Factor F/A	Present Worth Factor P/A	
1	1.4500	0.6897	1.000 00	1.450 00	1.000	0.690	1
2	2.1025	0.4756	0.408 16	0.858 16	2.450	1.165	2
3	3.0486	0.3280	0.219 66	0.669 66	4.552	1.493	3
4	4.4205	0.2262	0.131 56	0.581 56	7.601	1.720	4
5	6.4097	0.1560	0.083 18	0.533 18	12.022	1.876	5
6	9.2941	0.1076	0.054 26	0.504 26	18.431	1.983	6
7	13.4765	0.0742	0.036 07	0.486 07	27.725	2.057	7
8	19.5409	0.0512	0.024 27	0.474 27	41.202	2.109	8
9	28.3343	0.0353	0.016 46	0.466 46	60.743	2.144	9
10	41.0847	0.0243	0.011 23	0.461 23	89.077	2.168	10
11	59.5728	0.0168	0.007 68	0.457 68	130.162	2.185	11
12	86.3806	0.0116	0.005 27	0.455 27	189.735	2.196	12
13	125.2518	0.0080	0.003 62	0.453 62	276.115	2.204	13
14	181.6151	0.0055	0.002 49	0.452 49	401.367	2.210	14
15	263.3419	0.0038	0.001 72	0.451 72	582.982	2.214	15
16	381.8458	0.0026	0.001 18	0.451 18	846.324	2.216	16
17	553.6764	0.0018	0.000 81	0.450 81	1228.170	2.218	17
18	802.8308	0.0012	0.000 56	0.450 56	1781.846	2.219	18
19	1164.1047	0.0009	0.000 39	0.450 39	2584.677	2.220	19
20	1687.9518	0.0006	0.000 27	0.450 27	3748.782	2.221	20
21	2447.5301	0.0004	0.000 18	0.450 18	5436.734	2.221	21
22	3548.9187	0.0003	0.000 13	0.450 13	7884.264	2.222	22
23	5145.9321	0.0002	0.000 09	0.450 09	11433.182	2.222	23
24	7461.6015	0.0001	0.000 06	0.450 06	16579.115	2.222	24
25	10819.3222	0.0001	0.000 04	0.450 04	24040.716	2.222	25
26	15688.0173	0.0001	0.000 03	0.450 03	34860.038	2.222	26
27	22747.6250	0.0000	0.000 02	0.450 02	50548.056	2.222	27
28	32984.0563		0.000 01	0.450 01	73295.681	2.222	28
29	47826.8816		0.000 01	0.450 01	106279.737	2.222	29
30	69348.9783		0.000 01	0.450 01	154106.618	2.222	30
∞				0.450 00		2.222	∞

COMPOUND INTEREST TABLES

603

TABLE D-29

50% Compound Interest Factors

n	Single Payment		Uniform Series				n
	Compound Amount Factor F/P	Present Worth Factor P/F	Sinking Fund Factor A/F	Capital Recovery Factor A/P	Compound Amount Factor F/A	Present Worth Factor P/A	
1	1.5000	0.6667	1.000 00	1.500 00	1.000	0.667	1
2	2.2500	0.4444	0.400 00	0.900 00	2.500	1.111	2
3	3.3750	0.2963	0.210 53	0.710 53	4.750	1.407	3
4	5.0625	0.1975	0.123 08	0.623 08	8.125	1.605	4
5	7.5938	0.1317	0.075 83	0.575 83	13.188	1.737	5
6	11.3906	0.0878	0.048 12	0.548 12	20.781	1.824	6
7	17.0859	0.0585	0.031 08	0.531 08	32.172	1.883	7
8	25.6289	0.0390	0.020 30	0.520 30	49.258	1.922	8
9	38.4434	0.0260	0.013 35	0.513 35	74.887	1.948	9
10	57.6650	0.0173	0.008 82	0.508 82	113.330	1.965	10
11	86.4976	0.0116	0.005 85	0.505 85	170.995	1.977	11
12	129.7463	0.0077	0.003 88	0.503 88	257.493	1.985	12
13	194.6195	0.0051	0.002 58	0.502 58	387.239	1.990	13
14	291.9293	0.0034	0.001 72	0.501 72	581.859	1.993	14
15	437.8939	0.0023	0.001 14	0.501 14	873.788	1.995	15
16	656.8408	0.0015	0.000 76	0.500 76	1 311.682	1.997	16
17	985.2613	0.0010	0.000 51	0.500 51	1 968.523	1.998	17
18	1 477.8919	0.0007	0.000 34	0.500 34	2 953.784	1.999	18
19	2 216.8378	0.0005	0.000 23	0.500 23	4 431.676	1.999	19
20	3 325.2567	0.0003	0.000 15	0.500 15	6 648.513	1.999	20
21	4 987.8851	0.0002	0.000 10	0.500 10	9 973.770	2.000	21
22	7 481.8276	0.0001	0.000 07	0.500 07	14 961.655	2.000	22
23	11 222.7415	0.0001	0.000 04	0.500 04	22 443.483	2.000	23
24	16 834.1122	0.0001	0.000 03	0.500 03	33 666.224	2.000	24
25	25 251.1683	0.0000	0.000 02	0.500 02	50 500.337	2.000	25
∞				0.500 00		2.000	∞

604

APPENDIX D.

TABLE D-30

Factors To Convert a Gradient Series to an Equivalent Uniform Annual Series (A/G)

This table contains multipliers for a gradient G to convert the n-year end-of-year series 0, G, 2G, ... (n - 1)G to an equivalent uniform annual series for n years.

n	1%	2%	3%	4%	5%	6%	7%	8%	10%	n
2	0.50	0.50	0.49	0.49	0.49	0.49	0.48	0.48	0.48	2
3	0.99	0.99	0.98	0.97	0.97	0.96	0.95	0.95	0.94	3
4	1.49	1.48	1.46	1.45	1.44	1.43	1.42	1.40	1.38	4
5	1.98	1.96	1.94	1.92	1.90	1.88	1.86	1.85	1.81	5
6	2.47	2.44	2.41	2.39	2.36	2.33	2.30	2.28	2.22	6
7	2.96	2.92	2.88	2.84	2.81	2.77	2.73	2.69	2.62	7
8	3.45	3.40	3.34	3.29	3.24	3.20	3.15	3.10	3.00	8
9	3.93	3.87	3.80	3.74	3.68	3.61	3.55	3.49	3.37	9
10	4.42	4.34	4.26	4.18	4.10	4.02	3.95	3.87	3.73	10
11	4.90	4.80	4.70	4.61	4.51	4.42	4.33	4.24	4.06	11
12	5.38	5.26	5.15	5.03	4.92	4.81	4.70	4.60	4.39	12
13	5.86	5.72	5.59	5.45	5.32	5.19	5.06	4.94	4.70	13
14	6.34	6.18	6.02	5.87	5.71	5.56	5.42	5.27	5.00	14
15	6.81	6.63	6.45	6.27	6.10	5.93	5.76	5.59	5.28	15
16	7.29	7.08	6.87	6.67	6.47	6.28	6.09	5.90	5.55	16
17	7.76	7.52	7.29	7.07	6.84	6.62	6.41	6.20	5.81	17
18	8.23	7.97	7.71	7.45	7.20	6.96	6.72	6.49	6.05	18
19	8.70	8.41	8.12	7.83	7.56	7.29	7.02	6.77	6.29	19
20	9.17	8.84	8.52	8.21	7.90	7.61	7.32	7.04	6.51	20
21	9.63	9.28	8.92	8.58	8.24	7.92	7.60	7.29	6.72	21
22	10.10	9.70	9.32	8.94	8.57	8.22	7.87	7.54	6.92	22
23	10.56	10.13	9.71	9.30	8.90	8.51	8.14	7.78	7.11	23
24	11.02	10.55	10.10	9.65	9.21	8.80	8.39	8.01	7.29	24
25	11.48	10.97	10.48	9.99	9.52	9.07	8.64	8.23	7.46	25
26	11.94	11.39	10.85	10.33	9.83	9.34	8.88	8.44	7.62	26
27	12.39	11.80	11.23	10.66	10.12	9.60	9.11	8.64	7.77	27
28	12.85	12.21	11.59	10.99	10.41	9.86	9.33	8.83	7.91	28
29	13.30	12.62	11.96	11.31	10.69	10.10	9.54	9.01	8.05	29
30	13.75	13.02	12.31	11.63	10.97	10.34	9.75	9.19	8.18	30
31	14.20	13.42	12.67	11.94	11.24	10.57	9.95	9.36	8.30	31
32	14.65	13.82	13.02	12.24	11.50	10.80	10.14	9.52	8.41	32
33	15.10	14.22	13.36	12.54	11.76	11.02	10.32	9.67	8.52	33
34	15.54	14.61	13.70	12.83	12.01	11.23	10.50	9.82	8.61	34
35	15.98	15.00	14.04	13.12	12.25	11.43	10.67	9.96	8.71	35
40	18.18	16.89	15.65	14.48	13.38	12.36	11.42	10.57	9.10	40
45	20.33	18.70	17.16	15.70	14.36	13.14	12.04	11.04	9.37	45
50	22.44	20.44	18.56	16.81	15.22	13.80	12.53	11.41	9.57	50
60	26.53	23.70	21.07	18.70	16.61	14.79	13.23	11.90	9.80	60
70	30.47	26.66	23.21	20.20	17.62	15.46	13.67	12.18	9.91	70
80	34.25	29.36	25.04	21.37	18.35	15.90	13.93	12.33	9.96	80
90	37.87	31.79	26.57	22.28	18.87	16.19	14.08	12.41	9.98	90
100	41.34	33.99	27.84	22.98	19.23	16.37	14.17	12.45	9.99	100

TABLE D-30 Continued

Factors To Convert a Gradient Series to an Equivalent Uniform Annual Series (A/G)

This table contains multipliers for a gradient G to convert the n-year end-of-year series 0, G, 2G, ... (n - 1)G to an equivalent uniform annual series for n years.

n	12%	15%	20%	25%	30%	35%	40%	45%	50%	n
2	0.47	0.47	0.45	0.44	0.43	0.43	0.42	0.41	0.40	2
3	0.92	0.91	0.88	0.85	0.83	0.80	0.78	0.76	0.74	3
4	1.36	1.33	1.27	1.22	1.18	1.13	1.09	1.05	1.02	4
5	1.77	1.72	1.64	1.56	1.49	1.42	1.36	1.30	1.24	5
6	2.17	2.10	1.98	1.87	1.77	1.67	1.58	1.50	1.42	6
7	2.55	2.45	2.29	2.14	2.01	1.88	1.77	1.66	1.56	7
8	2.91	2.78	2.58	2.39	2.22	2.06	1.92	1.79	1.68	8
9	3.26	3.09	2.84	2.60	2.40	2.21	2.04	1.89	1.76	9
10	3.58	3.38	3.07	2.80	2.55	2.33	2.14	1.97	1.82	10
11	3.90	3.65	3.29	2.97	2.68	2.44	2.22	2.03	1.87	11
12	4.19	3.91	3.48	3.11	2.80	2.52	2.28	2.08	1.91	12
13	4.47	4.14	3.66	3.24	2.89	2.59	2.33	2.12	1.93	13
14	4.73	4.36	3.82	3.36	2.97	2.64	2.37	2.14	1.95	14
15	4.98	4.56	3.96	3.45	3.03	2.69	2.40	2.17	1.97	15
16	5.21	4.75	4.09	3.54	3.09	2.72	2.43	2.18	1.98	16
17	5.44	4.93	4.20	3.61	3.13	2.75	2.44	2.19	1.98	17
18	5.64	5.08	4.30	3.67	3.17	2.78	2.46	2.20	1.99	18
19	5.84	5.23	4.39	3.72	3.20	2.79	2.47	2.21	1.99	19
20	6.02	5.37	4.46	3.77	3.23	2.81	2.48	2.21	1.99	20
21	6.19	5.49	4.53	3.80	3.25	2.82	2.48	2.21	2.00	21
22	6.35	5.60	4.59	3.84	3.26	2.83	2.49	2.22	2.00	22
23	6.50	5.70	4.65	3.86	3.28	2.83	2.49	2.22	2.00	23
24	6.64	5.80	4.69	3.89	3.29	2.84	2.49	2.22	2.00	24
25	6.77	5.88	4.74	3.91	3.30	2.84	2.49	2.22	2.00	25
26	6.89	5.96	4.77	3.92	3.30	2.85	2.50	2.22	2.00	26
27	7.00	6.03	4.80	3.94	3.31	2.85	2.50	2.22	2.00	27
28	7.11	6.10	4.83	3.95	3.32	2.85	2.50	2.22	2.00	28
29	7.21	6.15	4.85	3.96	3.32	2.85	2.50	2.22	2.00	29
30	7.30	6.21	4.87	3.96	3.32	2.85	2.50	2.22	2.00	30
31	7.38	6.25	4.89	3.97	3.32	2.85	2.50	2.22	2.00	31
32	7.46	6.30	4.91	3.97	3.33	2.85	2.50	2.22	2.00	32
33	7.53	6.34	4.92	3.98	3.33	2.86	2.50	2.22	2.00	33
34	7.60	6.37	4.93	3.98	3.33	2.86	2.50	2.22	2.00	34
35	7.66	6.40	4.94	3.99	3.33	2.86	2.50	2.22	2.00	35
40	7.90	6.52	4.97	4.00	3.33	2.86	2.50	2.22	2.00	40
45	8.06	6.58	4.99	4.00	3.33	2.86	2.50	2.22	2.00	45
50	8.16	6.62	4.99	4.00	3.33	2.86	2.50	2.22	2.00	50
60	8.27	6.65	5.00	4.00	3.33	2.86	2.50	2.22	2.00	60
70	8.31	6.66	5.00	4.00	3.33	2.86	2.50	2.22	2.00	70
80	8.32	6.67	5.00	4.00	3.33	2.86	2.50	2.22	2.00	80
90	8.33	6.67	5.00	4.00	3.33	2.86	2.50	2.22	2.00	90
100	8.33	6.67	5.00	4.00	3.33	2.86	2.50	2.22	2.00	100

TABLE D-31

Factors To Compute the Present Worth of a Gradient Series - Interest Rates from 1% to 50% (P/G)

This table contains multipliers for a gradient G to find the present worth of the n-year end-of-year series 0, G, 2G, ... (n - 1)G.

n	1%	2%	3%	4%	5%	6%	n
1	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	1
2	0.9803	0.9612	0.9426	0.9246	0.9070	0.8900	2
3	2.9215	2.8458	2.7729	2.7025	2.6347	2.5692	3
4	5.8044	5.6173	5.4383	5.2670	5.1028	4.9455	4
5	9.6103	9.2403	8.8888	8.5547	8.2369	7.9345	5
6	14.3205	13.6801	13.0762	12.5062	11.9680	11.4594	6
7	19.9168	18.9035	17.9547	17.0657	16.2321	15.4497	7
8	26.3812	24.8779	23.8406	22.8806	20.9700	19.8416	8
9	33.6959	31.5720	29.6119	27.8013	26.1268	24.5768	9
10	41.8435	38.9551	36.3088	33.8814	31.6520	29.6023	10
11	50.8067	46.9977	43.5330	40.3772	37.4988	34.8702	11
12	60.5687	55.6712	51.2482	47.2477	43.6241	40.3369	12
13	71.1126	64.9475	59.4196	54.4546	49.9879	45.9629	13
14	82.4221	74.7999	68.0741	61.9618	56.5538	51.7128	14
15	94.4810	85.2021	77.0002	69.7355	63.2880	57.5546	15
16	107.2734	96.1288	86.3477	77.7441	70.1597	63.4592	16
17	120.7834	107.5554	96.0280	85.9581	77.1405	69.4011	17
18	134.9957	119.4581	106.0137	94.3498	84.2043	75.3569	18
19	149.8950	131.8139	116.2788	102.8933	91.3275	81.3062	19
20	165.4664	144.6003	126.7987	111.5647	98.4884	87.2304	20
21	181.6950	157.7959	137.5496	120.3414	105.6673	93.1136	21
22	198.5663	171.3795	148.5094	129.2024	112.8461	98.9412	22
23	216.0660	185.3309	159.6566	138.1284	120.0087	104.7007	23
24	234.1800	199.6305	170.9711	147.1012	127.1402	110.3812	24
25	252.8945	214.2592	182.4336	156.1040	134.2275	115.9732	25
30	355.0021	291.7164	241.3613	201.0618	168.6226	142.3588	30
35	470.1583	374.8826	301.6267	244.8768	200.5807	165.7427	35
40	596.8561	461.9931	361.7500	286.5303	229.5452	185.9568	40
45	733.7038	551.5652	420.6325	325.4028	255.3146	203.1097	45
50	879.4177	642.3606	477.4804	361.1639	277.9148	217.4574	50
n	7%	8%	10%	12%	15%	20%	n
1	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	1
2	0.8734	0.8573	0.8264	0.7972	0.7561	0.6944	2
3	2.5060	2.4450	2.3291	2.2208	2.0712	1.8519	3
4	4.7947	4.6501	4.3781	4.1273	3.7864	3.2986	4
5	7.6467	7.3724	6.8618	6.3970	5.7751	4.9061	5
6	10.9784	10.5233	9.6842	8.9302	7.9368	6.5806	6
7	14.7149	14.0242	12.7631	11.6443	10.1924	8.2551	7
8	18.7889	17.8061	16.0287	14.4715	12.4807	9.8831	8
9	23.1404	21.8081	19.4215	17.3563	14.7548	11.4335	9
10	27.7156	25.9768	22.8913	20.2541	16.9795	12.8871	10
11	32.4665	30.2657	26.3963	23.1289	19.1289	14.2330	11
12	37.3506	34.6339	29.9012	25.9523	21.1849	15.4667	12
13	42.3302	39.0463	33.3772	28.7024	23.1352	16.5883	13
14	47.3718	43.4723	36.8005	31.3624	24.9725	17.6008	14
15	52.4461	47.8857	40.1520	33.9202	26.6930	18.5095	15

TABLE D-31 Continued

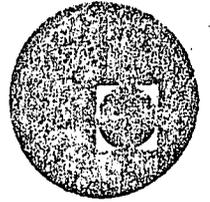
Factors To Compute the Present Worth of a Gradient Series  
 —Interest Rates from 1% to 50% (P/G)

This table contains multipliers for a gradient  $G$  to find the present worth of the  $n$ -year end-of-year series  $0, G, 2G, \dots, (n-1)G$ .

$n$	7%	8%	10%	12%	15%	20%	$n$
16	57.5271	52.2640	43.4164	36.3670	28.2960	19.3208	16
17	62.5923	56.5883	46.5820	38.6973	29.7828	20.0419	17
18	67.6220	60.8426	49.6396	40.9080	31.1565	20.6805	18
19	72.5991	65.0134	52.5827	42.9979	32.4213	21.2439	19
20	77.5091	69.0898	55.4069	44.9676	33.5822	21.7395	20
21	82.3393	73.0629	58.1095	46.8188	34.6448	22.1742	21
22	87.0793	76.9257	60.6893	48.5543	35.6150	22.5546	22
23	91.7201	80.6726	63.1462	50.1776	36.4988	22.8867	23
24	96.2545	84.2997	65.4813	51.6929	37.3023	23.1760	24
25	100.6765	87.8041	67.6964	53.1047	38.0314	23.4276	25
30	120.9718	103.4558	77.0766	58.7821	40.7526	24.2628	30
35	138.1353	116.0920	83.9872	62.6052	42.3587	24.6614	35
40	152.2928	126.0422	88.9526	65.1159	43.2830	24.8469	40
45	163.7559	133.7331	92.4545	66.7343	43.8051	24.9316	45
50	172.9051	139.5928	94.8889	67.7625	44.0958	24.9698	50
$n$	25%	30%	35%	40%	45%	50%	$n$
1	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	1
2	0.6400	0.5917	0.5487	0.5102	0.4756	0.4444	2
3	1.6640	1.5020	1.3616	1.2391	1.1317	1.0370	3
4	2.8928	2.5524	2.2648	2.0200	1.8103	1.6296	4
5	4.2035	3.6297	3.1568	2.7637	2.4344	2.1564	5
6	5.5142	4.6656	3.9828	3.4278	2.9723	2.5953	6
7	6.7725	5.6218	4.7170	3.9970	3.4176	2.9465	7
8	7.9469	6.4800	5.3515	4.4713	3.7758	3.2196	8
9	9.0207	7.2344	5.8887	4.8585	4.0581	3.4277	9
10	9.9870	7.8872	6.3363	5.1696	4.2772	3.5838	10
11	10.8460	8.4452	6.7047	5.4166	4.4450	3.6994	11
12	11.6020	8.9173	7.0049	5.6106	4.5724	3.7842	12
13	12.2617	9.3135	7.2474	5.7618	4.6682	3.8459	13
14	12.8334	9.6437	7.4421	5.8788	4.7398	3.8904	14
15	13.3260	9.9172	7.5974	5.9688	4.7929	3.9224	15
16	13.7482	10.1426	7.7206	6.0376	4.8322	3.9452	16
17	14.1085	10.3276	7.8180	6.0901	4.8611	3.9614	17
18	14.4147	10.4788	7.8946	6.1299	4.8823	3.9729	18
19	14.6741	10.6019	7.9547	6.1601	4.8978	3.9811	19
20	14.8932	10.7019	8.0017	6.1828	4.9090	3.9868	20
21	15.0777	10.7828	8.0384	6.1998	4.9172	3.9908	21
22	15.2326	10.8482	8.0669	6.2127	4.9231	3.9936	22
23	15.3625	10.9009	8.0890	6.2222	4.9274	3.9955	23
24	15.4711	10.9433	8.1061	6.2294	4.9305	3.9969	24
25	15.5618	10.9773	8.1194	6.2347	4.9327	3.9979	25
30	15.8316	11.0687	8.1517	6.2466	4.9372	3.9997	30
35	15.9367	11.0980	8.1603	6.2493	4.9381		35
40	15.9766	11.1071	8.1625	6.2498			40
45	15.9915	11.1099	8.1631				45
50	15.9969	11.1108					50



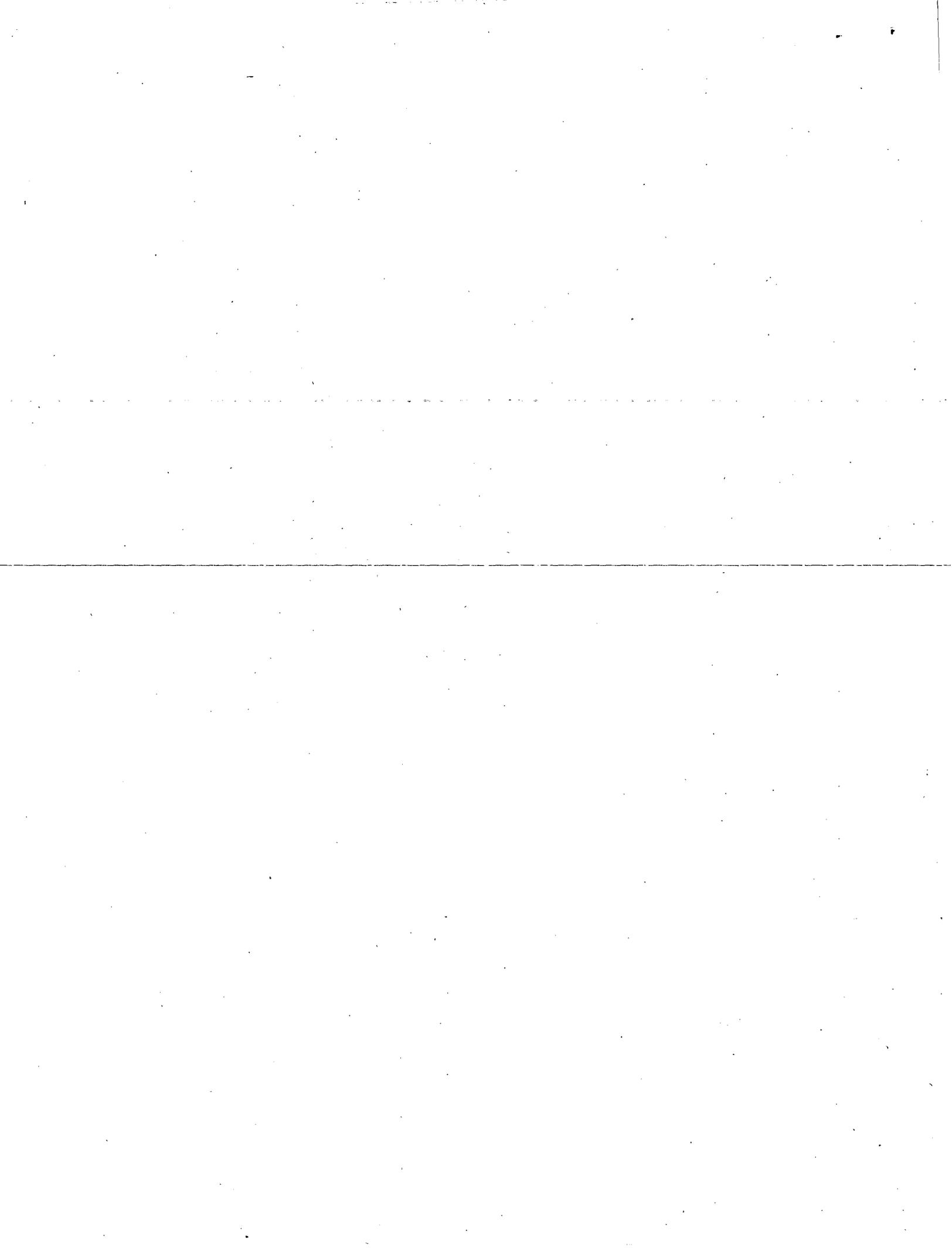
centro de educación continua  
división de estudios superiores  
facultad de ingeniería, unam



APROVECHAMIENTOS HIDRAULICOS

TEORIA DE DECISIONES

ING. A. A. LOPEZ TOLEDO  
OCTUBRE DE 1978



# APROVECHAMIENTOS HIDRAULICOS

Centro de Educación Continua

DESFI - UNAM

## TEORIA DE DECISIONES

por

A. A. López Toledo

### 1. INTRODUCCION

Constantemente nos encontramos tomando decisiones en nuestra vida cotidiana. En general puede decirse que todas las acciones que se realizan en un día, con excepción de las biológicas propias del cuerpo humano, son decisiones que tomamos, basadas normalmente en información disponible.

Muchas de estas decisiones se hacen intuitivamente y no requieren de mayor análisis. Sin embargo, cuando alguna decisión puede conducir a diferentes consecuencias que se distinguen por los beneficios o pérdidas que nos ocasionan, conviene realizar un análisis de nuestros posibles cursos de acción y sus correspondientes consecuencias. En este caso, la teoría de decisiones puede proporcionar las herramientas que apoyen nuestras decisiones y nos permitan seleccionar de manera racional la más conveniente.

### 2. EL CONCEPTO DE INCERTIDUMBRE

La condición de incertidumbre se refiere al desconocimiento del valor verdadero de alguna o algunas variables relacionadas al proceso de decisión. En particular, es de interés la incertidumbre acerca del estado de la naturaleza, o estado real del medio en que se toma la decisión.

Formalmente, al tomar una decisión (un curso de acción), dependiendo del estado real de la naturaleza, se observará la consecuencia de la decisión, que puede estar expresada en términos de pérdidas y ganancias.

Cuando la incertidumbre acerca del estado de la naturaleza se reduce, o equivalentemente se tiene un gran conocimiento acerca de este estado, las consecuencias de una decisión se pueden prever con alto grado de confianza. En el límite, cuando se conocen exactamente las consecuencias de una decisión, se dice que la decisión se hace bajo condiciones de certeza.

### 3. TABLAS DE PERDIDAS Y GANANCIAS

Las pérdidas o ganancias que miden las consecuencias de una decisión pueden expresarse en unidades que representen el cambio neto que experimenta nuestra situación o estado antes de tomar la decisión, por ejemplo, en unidades monetarias.

Considérese por ejemplo el caso de tener que decidir por alguna de dos acciones A y B. Por su parte, los estados posibles de la naturaleza o eventos relacionados a nuestra decisión pueden ser dos I y II. La tabla de pérdidas y ganancias se presenta normalmente como sigue:

		Evento	
		I	II
Decisión	B	\$ 30	- \$ 5
	A	\$ 5	\$ 20

Tabla 1

Por ejemplo, A puede ser la decisión de perforar en una zona dada en busca de petróleo y B la decisión de no perforar. Los eventos podrán ser I el encontrar petróleo y II el no encontrar petróleo. Entonces las pérdidas y ganancias en

unidades monetarias (millones de pesos) para cada combinación decisión - estado de la naturaleza son los elementos de la tabla. Dado que las pérdidas pueden representarse como ganancias con signo negativo, los elementos de la tabla son en general beneficios  $B$ , que dependen de las variables de decisión y eventos:

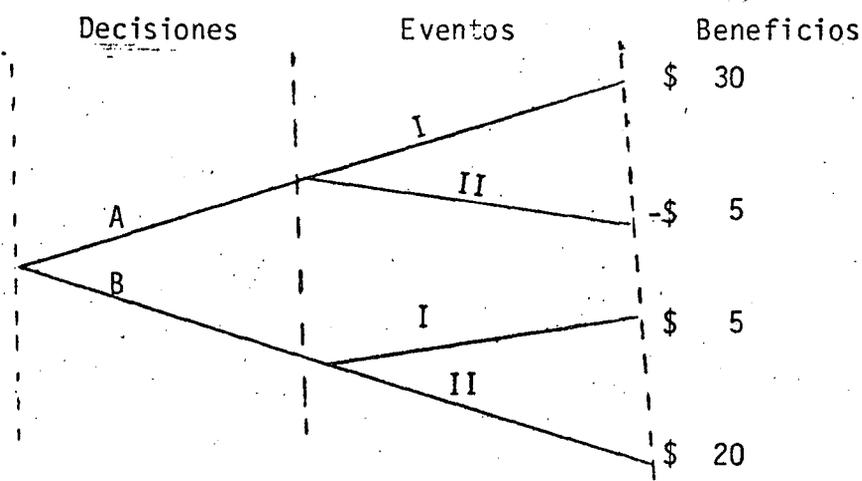
$$B(A, I) = \$ 30$$

$$B(B, I) = \$ 5$$

$$B(A, II) = -\$ 5$$

$$B(B, II) = \$ 20$$

En ocasiones es conveniente representar las combinaciones decisión - eventos por un árbol de decisiones:



Este árbol de decisiones es particularmente útil para problemas que involucran decisiones sucesivas y eventos en el tiempo.

#### 4. CRITERIOS NO - PROBABILISTICOS PARA DECISIONES BAJO INCERTIDUMBRE

Dado un problema de toma de decisiones, la decisión o curso de acción que se tome traerá como consecuencia un beneficio. El problema de toma de decisiones consiste en decidir por aquella acción que traiga como consecuencia máximos beneficios para el decisor.

La definición de beneficio máximo o criterio de decisión para un decisor no es única. Los criterios más comúnmente utilizados en teoría de decisiones pueden clasificarse como probabilísticos y no - probabilísticos, dependiendo de la información disponible al decisor y del uso que le de en la toma de decisiones. Entre los últimos se encuentran los siguientes:

##### *CRITERIO DE MAXIMIN*

La regla de decisión en este criterio dice: para cada acción, encuentre el mínimo beneficio posible y escoja la acción para la cual este mínimo beneficio es el mayor.

En este criterio, el decisor está suponiendo que para cada acción que tome, el peor estado de la naturaleza ocurrirá. El decisor trata entonces de maximizar los mínimos beneficios que podría obtener.

El criterio es desde luego conservador y utiliza poca información de la que se tiene disponible. Ignora por ejemplo la magnitud de los beneficios que no son mínimos para cada decisión y pueden encontrarse ejemplos en que los resultados de esta regla de decisión no sean muy razonables.

En el ejemplo mostrado anteriormente el decisor optaría por la acción B de acuerdo a este criterio, esperando que su ganancia fuese al menos de \$ 5. En este caso, la decisión se observa conservadora pero es razonable.

Considérese sin embargo, la siguiente tabla de pérdidas y ganancias:

		ESTADO	
		I	II
Decisión	A	10 000	-0.01
	B	0	0

Decisión Maximin: Acción B

TABLA 2

En esta situación, la regla de maximin da un resultado poco realista.

#### CRITERIO DE MAXIMAX

La regla de decisión maximax dice: para cada acción, encuentre el máximo beneficio y escoja la acción para la cual este máximo beneficio es el mayor.

En este criterio, el decisor está suponiendo que para cada acción que tome el estado el de la naturaleza será el mejor y trata entonces de maximizar los máximos beneficios que podría obtener.

En contraste con el anterior, este criterio es optimista y para el ejemplo de la Sección 2 (Tabla 1), indicaría que la acción a tomar es la A, o sea, que perforará y espera encontrar petróleo.

Sin embargo, al igual que en el caso anterior, ignora información relativa a los otros beneficios y se pueden obtener por tanto resultados no realistas, como se observa en el siguiente ejemplo:

		EVENTO	
		I	II
Decisión	A	100 000	99 999
	B	100 001	0

Decisión maximax: Acción B

TABLA 3

(Observe sin embargo, que las tablas de pérdidas y ganancias que conducen a resultados poco realistas son muy especiales, en el sentido que los beneficios cambian drásticamente de una acción a otra).

#### CRITERIO DE PERDIDA MINIMAX

La regla de decisión en este criterio dice: para cada acción, encuentre la pérdida más grande y escoja la acción para la cual ésta es mínima.

En el contexto de teoría de decisiones, el concepto de pérdida se interpreta como un costo de oportunidad y, para cada combinación decisión - estado de la naturaleza, este costo es la diferencia entre el beneficio asociado y el máximo beneficio que se podría obtener para el estado de la naturaleza dado.

Dado que este costo de oportunidad equivale al beneficio adicional que se podría haber obtenido al escoger la acción para la cual el estado de la naturaleza dado es el mejor, el criterio se conoce también como el de arrepentimiento minimax.

La tabla de pérdidas (costos de oportunidad) asociadas a las 3 tablas anteriores son respectivamente:

		EVENTO	
		I	II
Decisión	A	0	25
	B	25	0

TABLA 1'

		EVENTO	
		I	II
Decisión	A	0	0.01
	B	10 000	0

TABLA 2'

		EVENTO	
		I	II
Decisión	A	1	0
	B	0	99 999

TABLA 3'

Según el criterio de pérdida minimax para la Tabla 1', el decisor es indiferente entre A y B y, escogería la acción A en las Tablas 2' y 3'. Se observa por tanto que la regla de pérdida minimax no es tan pesimista y conservadora como la regla maximin ni tan optimista y arriesgada como la regla maximax.

##### 5. CRITERIOS PROBABILISTICOS DE DECISION BAJO INCERTIDUMBRE

En ocasiones el decisor cuenta con alguna información relativa a los estados de la naturaleza. Cuando esta información se manifiesta en forma de probabilidades asociadas a los estados de la naturaleza es posible utilizar conceptos de la teoría de probabilidad para evaluar criterios como valores esperados de los beneficios de las acciones a tomar.

En particular, si  $B(A_i, I_j)$  son los beneficios que se obtienen al tomar la acción  $A_i$  y el estado de la naturaleza resulta  $I_j$  y  $p(I_j)$  es la probabilidad de que el estado de la naturaleza sea  $I_j$ , entonces los beneficios esperados al tomar la acción  $A_i$  pueden calcularse por:

$$E \{B/\text{Acción } A_i\} = \sum_j B(A_i, I_j) p(I_j)$$

donde la sumatoria es sobre los estados de la naturaleza.

La distribución de probabilidades sobre los estados,  $p(I_j)$  puede obtenerse de varias maneras. Por ejemplo, a priori puede estimarse cuales son las oportunidades relativas (probabilidades) de cada estado de la naturaleza, bien sea de manera subjetiva o a través de datos históricos relativos al tipo de problema de decisión que se trata de resolver. También puede tenerse información a posteriori relevante al problemas en estudio que afecte nuestro conocimiento a priori del mismo.

#### CRITERIO DEL BENEFICIO ESPERADO

Este criterio es fundamental en la Teoría de Decisiones y establece que el decisor escoja la acción con el máximo beneficio esperado.

De una manera equivalente, el criterio de minimizar la pérdida máxima conduce a los mismos resultados.

El criterio del beneficio esperado incluye los criterios no - probabilísticos de la sección anterior, cuando la distribución de probabilidad  $p(I_j)$  permite que solo un estado de la naturaleza pueda ocurrir (si este es  $k$ ,  $p(I_k) = 1$ ,  $p(I_j) = 0$ , toda  $j \neq k$ ). El criterio es en este sentido por tanto más general que los mencionados y es justificado en la teoría de decisiones en función de que cumple con ciertas características deseables en un criterio de decisión (esta justificación está fuera del alcance del curso; consiste a grandes rasgos en el establecimiento de un perfil ideal para criterios de decisión y la observación de que el criterio del beneficio esperado los cumple).

En el ejemplo de la Tabla 1, considérese por ejemplo que se tiene conocimiento de que existen buenas oportunidades de encontrar petróleo y que esto es manifestado por la distribución de probabilidades:

$$p(I) = 0.8 \qquad p(II) = 0.2$$

Entonces:

$$E \{B/\text{Acción A}\} = 30 \times 0.8 - 5 \times 0.2 = \$ 23$$

$$E \{B/\text{Acción B}\} = 5 \times 0.8 + 20 \times 0.2 = \$ 8$$

y la decisión que maximiza el beneficio esperado es la acción A de realizar la perforación.

Para la Tabla 1' de pérdidas asociadas a este problemas, se tiene que:

$$E \{P/\text{Acción A}\} = 0 \times 0.8 + 25 \times 0.2 = \$ 5$$

$$E \{P/\text{Acción B}\} = 25 \times 0.8 + 0 \times 0.2 = \$ 20$$

y la acción que minimiza la pérdida asociada es la acción A.

### ESTRATEGIAS BAYESIANAS

En ocasiones se tiene información relevante al problema en análisis en forma de observaciones  $Z_k$  que permiten mejorar nuestro conocimiento del estado de la naturaleza.

En este caso, la distribución a priori  $p(I_j)$  de los estados de la naturaleza que refleja nuestro conocimiento de estos estados, es reemplazada por una distribución a posteriori  $p(I_j/Z_k)$  de los estados en el cálculo de los beneficios esperados. La distribución a posteriori  $p(I_j/Z_k)$  refleja un mejor conocimiento del estado de la naturaleza al utilizar la información  $Z$  disponible sobre estos estados.

Para cada observación  $Z_k$  se tiene una distribución a posteriori sobre los estados con la cual se obtiene el beneficio esperado de las acciones  $y_j$  se selecciona la acción óptima que conduce al máximo beneficio esperado. Para un conjunto de  $n$  diferentes observaciones  $Z_1, \dots, Z_n$ , que se puedan tener, se tendrá un conjunto de  $n$  acciones óptimas correspondientes. El conjunto

de parejas observación - decisión óptima constituye lo que se conoce como una estrategia bayesiana.

Las distribuciones a posteriori  $p(I_j/Z_k)$  se obtienen de la regla de Bayes:

$$p(I_j/Z_k) = \frac{p(Z_k/I_j) p(I_j)}{p(Z_k)}$$

$$= \frac{p(Z_k/I_j) p(I_j)}{\sum_{i=1}^n p(Z_k/I_i) p(I_i)} \quad k = 1, \dots, n$$

donde  $p(I_i)$  es la distribución a priori de los estados de la naturaleza y  $p(Z_k/I_i)$  es la probabilidad condicional de observar  $Z_k$  cuando el verdadero estado es  $I_i$ .

Típicamente,  $p(I_i)$  y  $p(Z_k/I_i)$  se obtienen de datos históricos relativos al problema de decisión en análisis.

Por ejemplo, en el problema de decidir sobre la perforación (Tabla 1) en busca de petróleo,  $p(I)$  puede ser el porcentaje de ocasiones en que se ha encontrado petróleo al perforar en medios similares al de estudio. Supóngase que antes de tomar una decisión sobre una perforación en busca de petróleo se hacen pequeñas perforaciones a 5 metros y se analiza el subsuelo. Suponga que se ha observado en estas perforaciones que a los 5 metros la dureza del subsuelo ha sido en dos rangos  $a \leq Z_1 \leq b$  y  $c \leq Z_2 \leq d$ ; entonces  $p(Z_1/I)$  puede ser el porcentaje de ocasiones en que se ha observado  $Z_1$  a los 5 metros cuando se ha encontrado petróleo al continuar la perforación y  $p(Z_2/I)$  es el porcentaje de ocasiones en que se ha observado  $Z_2$  cuando se ha encontrado

petróleo al continuar la perforación y similarmente,  $p(Z_1/II)$  y  $p(Z_2/II)$  son los porcentajes de ocasiones en que se ha observado  $Z_1$  y  $Z_2$  cuando no existe petróleo en el subsuelo.

En este ejemplo, las probabilidades a posteriori  $p(I/Z_1)$ ,  $p(II/Z_1)$  y  $p(I/Z_2)$ ,  $p(II/Z_2)$  reflejan nuestro conocimiento del estado de la naturaleza cuando en nuestro problema en estudio se ha observado  $Z_1$  ó  $Z_2$  a los 5 metros de la perforación de prueba.

Si  $p(I) = 0.8$ ,  $p(II) = 0.2$ ,  $p(Z_1/I) = 0.7$ ,  $p(Z_2/I) = 0.3$ ,  $p(Z_1/II) = 0.4$ ,  $p(Z_2/II) = 0.6$ , entonces:

$$p(I/Z_1) = \frac{0.7 \times 0.8}{0.7 \times 0.8 + 0.4 \times 0.2} = 0.875$$

$$p(II/Z_1) = \frac{0.4 \times 0.2}{0.7 \times 0.8 + 0.4 \times 0.2} = 0.125$$

$$p(I/Z_2) = \frac{0.3 \times 0.8}{0.3 \times 0.8 + 0.6 \times 0.2} = 0.667$$

$$p(II/Z_2) = \frac{0.6 \times 0.2}{0.3 \times 0.8 + 0.6 \times 0.2} = 0.333$$

El beneficio esperado de cada acción para las pérdidas y ganancias de la Tabla 1, considerando las probabilidades a priori es entonces:

		OBSERVACION	
		Z <sub>1</sub>	Z <sub>2</sub>
Acción	A	\$ 25.6	\$ 18.3
	B	\$ 6.87	\$ 10

Ejemplo:

$$E \{ \text{Benef/A, } Z_1 \} = 30 \times 0.875 - 5 \times 0.125 \\ = 25.6$$

$$E \{ \text{Benef/B, } Z_1 \} = 5 \times 0.875 + 20 \times 0.125 \\ = 6.87$$

La estrategia bayesiana es entonces:

Cuando se observa Z<sub>1</sub> decida A

Cuando se observa Z<sub>2</sub> decida A

## 6. EL CONCEPTO DE UTILIDAD

En los ejemplos anteriores, el criterio de beneficio esperado considera las probabilidades de los estados de la naturaleza y supone que los pérdidas y ganancias en unidades monetarias reflejan los beneficios reales del decisor. Sin embargo, existe un factor adicional que debe considerarse y que implica que esta suposición no es siempre cierta: la actitud hacia el riesgo del decisor.

El concepto de utilidad permite tomar en cuenta esta actitud al transformar la escala monetaria de consécuencias de las acciones a una escala de utilidad.

La actitud del decisor hacia el riesgo se observa fácilmente en el siguiente ejemplo:

		ESTADO		
		I	II	E {Benef}
Decisión	A	0	0	0
	B	- 10 000	10 000	0
P(I <sub>j</sub> )		0.5	0.5	

TABLA 4

Suponga que esta tabla se interpreta como una apuesta al decisor: si toma la acción A entonces su riqueza no se altera, independientemente del estado de la naturaleza, pero si toma la decisión B, entonces ganará \$ 10 000 con probabilidad 0.5 o perderá -\$ 10 000 con la misma probabilidad.

Ambas decisiones conducen a un mismo beneficio esperado  $E \{Benef\} = 0$  y en base a este criterio el decisor sería indiferente por la acción A o B. Sin embargo, un decisor que tratara de evitar el riesgo incluido en la acción B tendería a favorecer a la acción A y solo sería indiferente entre A y B cuando la probabilidad de ganar \$ 10 000 fuese mayor que la probabilidad de perder \$ 10 000. Por ejemplo, podría ser indiferente si:

$$P(I) = 0.6$$

$$P(II) = 0.4$$

en cuyo caso:  $E \{Benef/B\} = 10\,000 \times 0.6 - 10\,000 \times 0.4 = \$ 2\,000$

Esta actitud del decisor puede tomarse en cuenta a través de funciones de utilidad, que relacionan valores monetarios con una escala de utilidad. Cuando el criterio de decisión consiste en tomar la decisión que maximiza la utilidad esperada del decisor, la escala de utilidad que se utilice puede ser arbitraria. Convenientemente se podrá escoger entre 0 y 1 ó entre 0 y 100, por ejemplo.

Los tipos de funciones de utilidad que se presentan típicamente se ilustran en la Fig. 1 y cumplen con las siguientes propiedades:

- i) Si el beneficio  $B_1$  es preferido al beneficio  $B_2$ , entonces la utilidad de  $B_1$  es mayor que la de  $B_2$ ,  $u(B_1) > u(B_2)$ , y si ningún beneficio es preferido entonces  $u(B_1) = u(B_2)$ .
- ii) Si el decisor es indiferente entre (a) recibir un beneficio de  $B_1$  con seguridad y (b) entrar a una lotería con probabilidad  $p$  de recibir  $B_2$  y  $1 - p$  de recibir  $B_3$ , entonces:

$$u(B_1) = pu(B_2) + (1 - p) u(B_3)$$

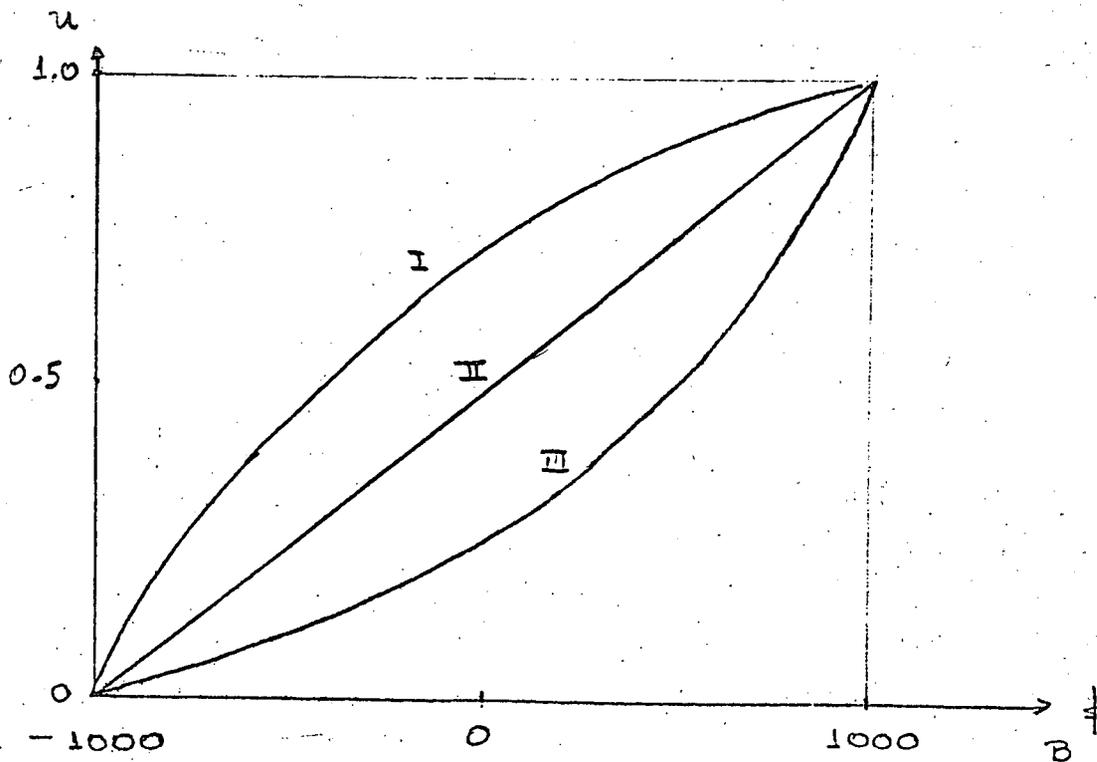


FIG. 1 FUNCIONES DE UTILIDAD

En la figura, la función de utilidad I corresponde a un decisor que trata de evitar el riesgo (es conservador); la curva III corresponde a un decisor que trata de tomar riesgos (es jugador); finalmente, la línea II es sólo un reescalamiento de la escala monetaria y el decisor maximiza el beneficio esperado al maximizar su utilidad esperada.

Una vez conocida la función de utilidad del decisor, la acción  $A_i$  que maximiza su utilidad esperada puede fácilmente determinarse a través de:

$$E\{u/A_i\} = \sum_j u(B(A_i, I_j)) p(I_j)$$

donde  $B(A_i, I_j)$  es el beneficio (pérdida o ganancia monetaria) que resulta al tomar la acción  $A_i$  cuando el estado de la naturaleza es  $I_j$ ,  $u(B(A_i, I_j))$  es la utilidad de este beneficio y  $p(I_j)$  es la probabilidad de que el estado de la naturaleza sea  $I_j$ .

Asimismo, el concepto de estrategia bayesiana puede también aplicarse para determinar la estrategia que maximice la utilidad esperada del decisor en función de observaciones relativas al problema de decisión en estudio.

Finalmente, para determinar la función de utilidad del decisor se puede resumir a preguntas sencillas basadas en la propiedad (ii) de esta función. Por ejemplo, considérese nuevamente el problema de la Tabla 1.

En primer lugar, se obtiene el rango de la escala monetaria de beneficios, identificando los extremos de ganancias y pérdidas. En nuestro caso:

$$B_{\max} = 30$$

$$B_{\min} = -5$$

A continuación, para cualquier beneficio  $B$ , es evidente que  $u(B_{\min}) \leq u(B) \leq u(B_{\max})$ . Supóngase que  $u(B_{\min}) = 0$ ,  $u(B_{\max}) = 1$ .

Ahora, considere las acciones alternativas:

$A_1$ : Recibir B con seguridad

$A_2$ : Recibir  $B_{\max}$  con probabilidad p y  $B_{\min}$  con probabilidad  $1-p$

De acuerdo al criterio de utilidad esperada, el decisor escogerá la acción con mayor utilidad esperada.

Estas son:

$$E \{u/A_1\} = u(B)$$

$$E \{u/A_2\} = pu(B_{\max}) + (1-p) u(B_{\min}) = p$$

entonces, si  $u(B) > p$ , la acción  $A_1$  será seleccionada y si  $u(B) < p$  la acción  $A_2$  será seleccionada; pero si  $u(B) = p$ , el decisor será indiferente entre  $A_1$  y  $A_2$ .

En nuestro ejemplo, valores de utilidad de beneficios en el rango de - \$ 5 a \$ 30 se obtendrán como sigue. Por ejemplo, para  $B = \$ 20$  se tienen las alternativas:

$A_1$  = Recibir \$ 20 con seguridad

$A_2$  = Recibir \$ 30 con probabilidad p y - \$ 5 con probabilidad  $1-p$

Suponga que el decisor puede asegurar que  $A_1$  es claramente preferible a  $A_2$  cuando  $p = 0.7$  y que por el contrario  $A_2$  es preferible cuando  $p = 0.95$  y que después de un análisis decide que es indiferente entre ambas cuando  $p = 0.85$ . Entonces, de acuerdo a nuestro análisis anterior,  $u(20) = 0.85$ .

Similarmemente, para  $B = \$ 5$  considérese:

$A_1$  = Recibir \$ 5 con seguridad

$A_2$  = Recibir \$ 30 con probabilidad p y - \$ 5 con probabilidad  $1-p$

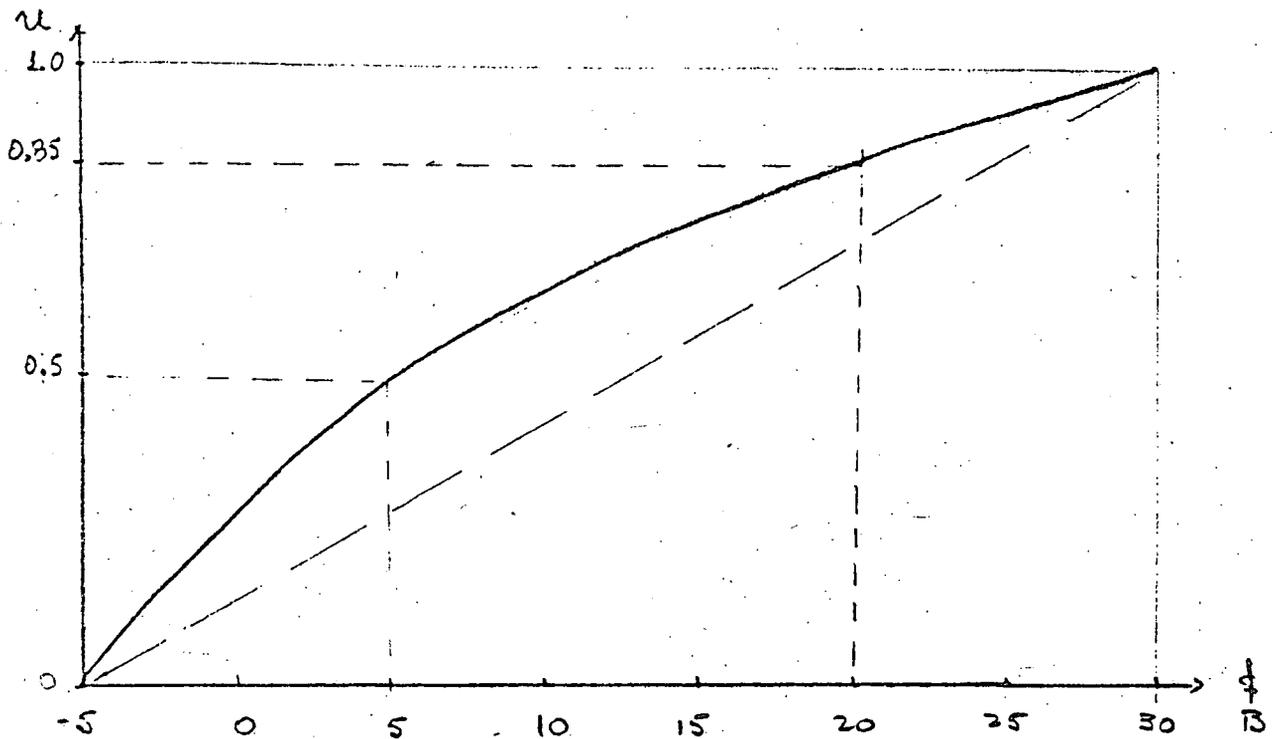


FIG. 2 FUNCIONES DE UTILIDAD. EJEMPLO.

y nuestro decisor indica que es indiferente entre  $A_1$  y  $A_2$  cuando  $p = 0.5$ , luego  $u(5) = 0.5$ .

La función de utilidad en nuestro ejemplo se ilustra en la Fig. 2. En este caso, los 4 puntos cuya utilidad ha sido calculada permiten obtener la tabla de utilidad del problema de decisión asociado a la Tabla 1:

		ESTADO	
		I	II
Decisión	A	1	0
	B	0.85	0.5

El valor esperado de la utilidad para cada acción cuando  $p(I) = 0.8$ ,  $p(II) = 0.2$ , es:

$$E \{u/A\} = 1 \times 0.8 + 0 \times 0.2 = 0.8$$

$$E \{u/B\} = 0.85 \times 0.8 + 0.5 \times 0.2 = 0.78$$

y la decisión que maximiza la utilidad esperada es A. La gráfica de la función de utilidad no ha sido necesaria en este caso. Sin embargo, para problemas que involucran un alto número de estados de la naturaleza y acciones, el obtener la curva a partir de un número reducido de puntos presenta ventajas para el cálculo de la acción óptima.

A continuación se incluye un ejemplo, tomado del libro "Decisions Under Uncertainty" por A. N. Halter y G. W. Dean, editorial South-Western Publishing Co., 1971, referente a aplicaciones de la Teoría de Decisiones en Agricultura.

THE STOCKING PROBLEM UNDER COMPLETE IGNORANCE

We assume initially that the rancher has no idea of the probability distribution of range conditions (that is, no prior information), although this is probably quite unrealistic. As we have argued earlier, it is in fact extremely difficult to think of realistic problems where the decision maker does not have some information, however vague, about the probability of various states of nature.

Assume a rancher with 3,000 acres of range land of varying quality. In a "normal" year, the range produces sufficient feed to carry a 360-cow beef herd, with calves sold at an 8-month weight of 500 pounds. In a "very poor" year there is sufficient feed for only about 230 cows; in an "excellent" year the range can carry 460 cows. To analyze this problem in a decision framework, we define the three components common to all decision models—the states of nature, the actions, and the payoff for each state-action combination. This information is summarized in Table 7.1. We define six states of nature (range conditions) from  $\theta_1$  (very poor) to  $\theta_6$  (excellent). The six actions (herd sizes) range from  $a_1$  (230 cows) to  $a_6$  (460 cows). Thus, the six actions are selected to match the six states of nature, that is, action  $a_1$  is the herd size which utilizes the feed produced in a very poor year ( $\theta_1$ ),  $a_2$  the herd size that utilizes the feed produced in a poor year ( $\theta_2$ ), and so forth.

Each payoff entry in the body of Table 7.1 is the result of a budgeting computation indicating the net farm income that would accrue to the rancher for the specified action and state of nature. An example budget is shown in Table 7.2, indicating a net income of \$5,800 for a 360-cow herd ( $a_4$ ) with normal range conditions ( $\theta_4$ ). Payoff entries for the elements off the diagonal in Table 7.1 are obtained by adjusting net income either for (1) the additional cost of supplemental feeding (for entries above the diagonal), or (2) the small additional income from excess feed (hay) that can be sold (for entries below the diagonal).

In most problems of this type some minor questions arise concerning which costs to include in arriving at the payoff values. Would annual cash income be a more realistic measure of payoff than deducting depreciation (a deferrable cost) to arrive at net farm income? Should unpaid interest on investment (opportunity cost) be deducted in arriving at the payoffs? The general rule is that if a cost differs from cell to cell of the table, it must be considered as a cost in arriving at a complete comparison of payoffs. Thus, in Table 7.1 depreciation is included as a cost because it differs by actions, while unpaid interest is omitted because it is the same for all entries in the table.

TABLE 7.1  
PAYOFF TABLE FOR A COW-CALF OPERATION UNDER UNCERTAINTY OF RANGE CONDITIONS

States of Nature: Range Conditions ( $\theta_j$ )	Actions: Herd Size ( $a_i$ )						Criterion	
	$a_1$ 230 Cows	$a_2$ 280 Cows	$a_3$ 320 Cows	$a_4$ 360 Cows	$a_5$ 415 Cows	$a_6$ 460 Cows	Hurwicz $\alpha = .6$	Insufficient Reason
$\theta_1$ Very poor	-4,580	-6,290	-8,260	-10,040	-12,690	-14,930	0.6	1/6
$\theta_2$ Poor	-3,330	-870	-2,090	-3,970	-6,620	-8,860	0	1/6
$\theta_3$ Fair	-2,530	450	2,830	1,440	600	2,800	0	1/6
$\theta_4$ Normal	-1,890	1,090	4,060	5,800	5,530	2,020	0	1/6
$\theta_5$ Good	-930	2,050	5,020	7,420	10,230	8,510	0	1/6
$\theta_6$ Excellent	130	2,850	5,820	8,220	11,770	13,930	0.4	1/6
Hurwicz ( $\alpha = .6$ ) Insufficient Reason	-2,800	-2,630	-2,630	-2,740	-2,910	-3,390	—	—
$P(\theta) = 1/6$	-2,230	-120	1,230	1,480	1,270	330	—	—

Dollars

TABLE 7.2

COMPUTATION OF NET FARM INCOME FOR A 360-COW HERD (ACTION  $a_1$ ) WITH NORMAL RANGE CONDITIONS (STATES  $\theta_1$ )

Item	Subtotal	Total
	Dollars	
Gross Income (sale of calves, cull cows, and bulls)		53,000
Cash Variable Costs	24,200	
Cultural Costs (fertilizer, seed, gas, oil, etc.)	14,200	
Livestock Costs (veterinary, medicine, replacement bulls, purchased feed, etc.)	10,000	
Cash Fixed Costs (hired labor, taxes, insurance, paid interest, etc.)	15,700	
Depreciation	7,300	
Total Costs (excluding unpaid interest on investment)		47,200
Net Farm Income		5,800

We proceed now to evaluate the decision problem of Table 7.1 under the assumption of complete ignorance, that is, no prior probability distribution of range conditions is known. We apply successively the alternative criteria which have been proposed to handle this type of problem as discussed in Chapter IV.

### Maximin Criteria

A rancher using the maximin criterion assumes that the worst consequence of each act will occur, then selects the action which offers the best of these unfavorable occurrences. In terms of Table 7.1, he in effect assumes that the very poor range conditions ( $\theta_1$ ) will occur, then selects a herd size of 230 cows ( $a_1$ ) as the optimal action because the loss of \$4,580 is less than for any other herd size. This criterion is clearly pessimistic or conservative in that the entire weight in the decision is given only to the worst possible outcomes. The dubious acceptability of this criterion is emphasized by observing that a rancher who stocked only 230 cows ( $a_1$ ) would never sustain a profit regardless of the range condition which actually eventuates. A rancher using the maximin criterion would thus be forced out of business in the long run — exactly the consequence he is probably trying to avoid by being conservative! Intuitively it would ap-

pear that even a very conservative rancher should choose some other action such as  $a_2$  which, although it has slightly worse consequences than  $a_1$  if  $\theta_1$  should occur, has significantly better consequences for all other states of nature. Only if the rancher felt that nature were a conscious adversary, as in game theory, would action  $a_1$  make much sense. Furthermore, such an attitude seems to imply that  $\theta_1$  is "more likely" to occur than other states, which appears inconsistent with our assumption of complete ignorance. This empirical decision problem should raise some doubts in the minds of those who feel that a conservative person should follow a maximin approach to decision making.

### Maximax Criterion

Contrary to the maximin criterion, the maximax criterion places the entire emphasis in decision making on the best outcomes possible. In Table 7.1 the rancher using this criterion would stock 460 cows ( $a_6$ ) since this action includes the possibility of the maximum profit of \$13,930. This criterion hypothesizes a confirmed optimist who takes no account of the possibility of the less favorable consequences of his action. Note that if  $\theta_1$  should occur, the maximax action  $a_6$  could result in a loss of \$14,930. It is difficult to imagine a rancher who would ignore completely all the possibilities other than the most favorable in determining a stocking rate, again raising serious doubts about this as an acceptable criterion.

### The Minimax Regret Criterion

The motivation for the minimax regret criterion is that a person feels dissatisfied when an opportunity has been missed. For example, suppose in Table 7.1 that action  $a_4$  (360 cows) is selected and that  $\theta_6$  occurs. The rancher then makes a net income of \$8,220, which is relatively favorable. On the other hand, if he had known that  $\theta_6$  would occur, he could have made \$13,930 (by choosing  $a_6$ ). His opportunity cost or income foregone of selecting  $a_4$  was \$13,930 - \$8,220 or \$5,710. In decision theory terms, the opportunity cost of \$5,710 is known as regret. On the other hand, suppose  $a_4$  were selected and  $\theta_1$  occurred. If  $\theta_1$  could have been anticipated, action  $a_1$  would have been optimum, incurring a loss of \$4,580 rather than \$10,040; the regret involved in having selected  $a_4$  when  $\theta_1$  occurs is then the difference between these two figures, or \$5,460. In like fashion, the complete regret Table 7.3 is constructed corresponding to payoff Table 7.1. Computationally, to convert the gains to regrets, subtract from the largest gain for each state all the entries in the same row (state).

**TABLE 7.3**  
REGRET TABLE FOR THE COW-CALF OPERATION UNDER UN-  
CERTAINTY OF RANGE CONDITIONS

States of Na- ture: Range Conditions ( $\theta_i$ )	Actions: Herd Size ( $a_j$ )					
	$a_1$ 230 Cows	$a_2$ 280 Cows	$a_3$ 320 Cows	$a_4$ 360 Cows	$a_5$ 415 Cows	$a_6$ 460 Cows
	Dollars					
$\theta_1$ Very poor	0	1,710	3,680	5,460	8,110	10,350
$\theta_2$ Poor	2,460	0	1,220	3,100	5,750	7,990
$\theta_3$ Fair	5,360	2,380	0	1,390	3,430	5,630
$\theta_4$ Normal	7,690	4,710	1,740	0	270	3,780
$\theta_5$ Good	11,160	8,180	5,210	2,810	0	1,720
$\theta_6$ Excellent	14,060	11,080	8,110	5,710	2,160	0

The minimax regret criterion states that the rancher should act so as to minimize the maximum regret which could occur. In terms of Table 7.3 this means that action  $a_4$  (stocking rate of 360 cows) is optimum since its maximum regret of \$5,710 is less than the maximum regret for the other actions. While the maximin criterion directs attention to the worst outcomes, minimax regret directs attention to the largest opportunity losses. In both cases, the tone is pessimistic or conservative. However, the minimax regret is less so, since it takes into account the opportunities foregone in calculating regret. Both criteria, however, can be criticized as ignoring most of the information in the table in making the final choice.

**Hurwicz Optimism-Pessimism Criterion**

As discussed in Chapter IV, Hurwicz has proposed a compromise criterion that incorporates information on both the best and the worse consequences of each act. Specifically, indexes of relative pessimism ( $\alpha$ ) and optimism ( $1 - \alpha$ ) are derived and used in assigning weights to the worst and best consequences of each action. The optimum decision is then the action with the maximum weighted average.

The value of  $\alpha$  for the rancher could be estimated by confronting him with the following simple decision problem. The rancher is asked to select

	$a_1$	$a_2$
$\theta_1$	0	$x$
$\theta_2$	1	$x$

the value of  $x$  that would make him indifferent between action  $a_1$  and  $a_2$ . The two extreme values of  $x$  would be 0 and 1. If the rancher should choose  $x = 0$ , the decision table would look as follows:

	$a_1$	$a_2$
$\theta_1$	0	0
$\theta_2$	1	0

Clearly no weight is being given to  $\theta_2$  if the rancher is indifferent between  $a_1$  and  $a_2$  — he is looking only at the worst that can happen. Thus, a value of  $x = 0$  implies a maximin criterion. Conversely, if the rancher selects  $x = 1$ , the decision table would read as follows:

	$a_1$	$a_2$
$\theta_1$	0	1
$\theta_2$	1	1

Here no weight is given to  $\theta_1$  — the rancher is looking only at the best result for each action and hence is indifferent between  $a_1$  and  $a_2$ ; that is, he is following the maximax criterion.

Suppose the rancher picks some value for  $x$  between 0 and 1, such as  $x = 0.4$ . The table now reads:

	$a_1$	$a_2$
$\theta_1$	0	0.4
$\theta_2$	1	0.4

The implication now is that there is some set of weights  $\alpha$  and  $(1 - \alpha)$  for  $\theta_1$  and  $\theta_2$  that make the decision-maker indifferent between  $a_1$  and  $a_2$ . That is,

$$\alpha 0 + (1 - \alpha) 1 = (\alpha) 0.4 + (1 - \alpha) 0.4 \text{ or}$$

$$\alpha = 0.6 \text{ and } 1 - \alpha = 0.4.$$

(This assignment of values to  $\alpha$  and  $1 - \alpha$ , given  $x$ , assumes that the decision-maker is indifferent between the two actions if they have the same expected value.) The  $\alpha$  and  $1 - \alpha$  indices so derived are then used in determining the  $P(\theta)$  in real decision problems — a very special  $P(\theta)$  in which the “worst” state of nature for each action is assigned a probability of  $\alpha$ , the “best” state of nature a probability of  $1 - \alpha$ , and all other states

a probability of zero. Viewed in this light, the maximin and maximax criteria are simply special cases of the Hurwicz criterion where the pessimism index ( $\alpha$ ) and optimism index ( $1 - \alpha$ ), alternately, take values of 1.

To illustrate the Hurwicz criterion in the range stocking problem of Table 7.1, assume that an index  $\alpha = 0.6$  has been derived as above for the rancher. The optimum action is now either  $a_2$  or  $a_3$  with a weighted average value of  $-\$2,630$ . To break the tie, the rancher would have to flip a coin. Intuitively, the Hurwicz criterion appears to be fairly reasonable in this case. However, the idea of ignoring all the information in the payoff table for intermediate states of nature  $\theta_2$  through  $\theta_6$  is somewhat disturbing. Certainly these values should carry some weight in arriving at a decision.

### The Principle of Insufficient Reason: Equally Likely States

Since we are dealing with decision making under complete ignorance, a reasonable suggestion might be to assume that each state of nature is equally likely to occur. In terms of Table 7.1, this amounts to assuming that each of the six states of nature has a probability of one-sixth. The criterion of insufficient reason would then specify action  $a_4$  (stocking 360 cows) as the optimum action since its expected value of  $\$1,480$  is the maximum of the six alternative actions.

This criterion has considerable appeal in the sense that all of the information in the payoff table is utilized in arriving at the optimum decision, whereas the criteria discussed above concentrate on particular values only. The difficulty with the principle of insufficient reason as a criterion is that it is sensitive to the way in which states are defined. The states of nature must be defined in such a way as to include all possible outcomes. But this can ordinarily be done in many different ways. Unfortunately, the optimum action may depend on these definitions even though the real problem is the same. Suppose, for example, that after developing the six states as specified in Table 7.1, the rancher has second thoughts. He decides that  $\theta_6$  ("excellent" range conditions) is too broad a definition to characterize accurately the more favorable conditions that could occur. Therefore, he replaces old  $\theta_6$  ("excellent" conditions) with a new  $\theta_6$  ("very good" conditions) and  $\theta_7$  ("ideal" conditions). He now assigns equal probabilities to the seven states of nature. The original states  $\theta_1$  through  $\theta_6$  now have probabilities of  $\frac{1}{7}$  rather than  $\frac{1}{6}$ , and it is clear that the resulting decision could change.

Some may object that the new states  $\theta_6$  and  $\theta_7$  should be given probability  $\frac{1}{12}$  and  $\frac{1}{12}$  since they simply split the old  $\theta_6$ , which had a prob-

ability of  $\frac{1}{6}$ . But to do so would imply that we are not in a situation of complete ignorance about the likelihood of alternative states. That is, we would be saying that new  $\theta_6$  and  $\theta_7$  are each only half as likely as states  $\theta_1$  through  $\theta_6$ . Thus, the principle of insufficient reason has the disquieting feature that arbitrary definitions of states may dictate different solutions to the same real problem.

### Evaluation of Criteria

Our earlier examination in Chapter IV of the criteria employed in the range stocking decision problem of this chapter showed that there are serious objections to each. While the various criteria have elements which we have recognized in our own decision-making processes, it seems unlikely that we would be willing to turn our decision making under uncertainty over to a clerk who mechanically used any one of the criteria outlined.

We assert that there probably is no such thing as "complete ignorance" or "absolute uncertainty." Rather, most of us would or could be forced to attach probabilities to the various states of nature in real decision problems, even though these are highly subjective and based on fragmentary evidence. For example, in the range stocking problem, even a rancher with no previous experience in California is likely to have some information about various kinds of weather conditions and feed supplies that he could formulate into subjective probabilities. Alternatively, he might consult an experienced rancher to obtain more definite information, that is, to search for a suitable prior distribution. Another rancher with experience in California would have some personal basis for establishing his prior probabilities. Some ranchers may attempt to analyze published historical rainfall or weather data to supplement their personal experience. In other words, as Horowitz<sup>1</sup> has stated:

In a sense, therefore, and even though there have been no explicit probability assessments, there is still the suggestion of some underlying subjective probability distribution(s) over the states of nature; for there is certainly a probability of distribution(s) over the states of nature against which the decision would be nonoptimal; the latter distribution must have been judged unlikely relative to the set of possible alternative distributions or a different decision would have been made. Thus it is indeed questionable whether or not we can justifiably treat any decision problem, particularly one that actually confronts us in the real world, as a problem under uncertainty.

<sup>1</sup> Ira Horowitz, *An Introduction to Quantitative Business Analysis* (New York: McGraw-Hill, 1965), p. 99.

Consistent with the above quotation, we have shown in Chapter IV that a particular action will be optimum for some probability distribution over the states of nature. Thus, the fact that different people arrive at different decisions to the same problem can be partly explained by their different subjective judgments as to the probability distribution over the states of nature.

### THE STOCKING PROBLEM WITH A PRIOR DISTRIBUTION

We pointed out above that it was highly unrealistic to assume that a rancher has no idea of the probability distribution of range conditions. Even without prior evidence, the rancher would probably search for some information on which to form a prior distribution. One source of such information is the California Crop and Livestock Reporting Service, which has regularly reported an index of range conditions as of the first of the month from 1922 to date. This report is widely circulated among ranchers; many have undoubtedly analyzed the historical record at least informally to gain some idea of the variability of range conditions from year to year.

These data are reported in Table 7.4, by month, January through June, from 1922 through 1965. February through June is the period of year in which most of the plant growth occurs. After June the plants dry out and remain essentially dormant until rains begin the following November or December. Hence, the average range index over the February to June period is a good measure of the level of feed supply available for the entire year. An average range condition of 78 was computed for the period February 1 to June 1 based on the 44 years of observations; this average was defined as a "normal" feed supply. The index for this period, however, ranged from a low of 50 in 1937 to a high of 98 in 1927. The distribution of range conditions was approximated by simply dividing the observations into class intervals and calculating directly the corresponding probabilities. Thus, six class intervals are defined in Table 7.5, with a descriptive name given to each, as was done earlier in Table 7.1. As the reader can verify from counting observations in Table 7.4, "very poor" range conditions (index <55) occurred in only 2 years out of 44, from which we estimate the probability of this state to be 0.045. "Poor" range conditions (index 55 to 64) occurred in 5 years out of 44, or with a probability of 0.114. The other probabilities in Table 7.5 are calculated in like manner.

Table 7.6 presents the same decision problem outlined in the previous

152  
TABLE 7.4  
INDEX OF MONTHLY RANGE CONDITIONS FOR THE  
SACRAMENTO VALLEY, CALIFORNIA

Year	Month						Average Range Condition, Feb. 1-June 1
	Jan.	Feb.	Mar.	Apr.	May	June	
1922	75	66	57	74	73	82	70
1923	96	99	94	65	98	98	91
1924	57	46	73	59	42	47	53
1925	84	71	94	105	108	95	95
1926	82	71	95	90	97	93	89
1927	95	95	96	102	100	96	98
1928	88	86	87	100	98	95	93
1929	80	80	74	76	66	63	72
1930	64	72	84	92	89	90	85
1931	55	62	77	76	50	52	63
1932	63	63	54	76	73	77	69
1933	55	55	50	63	68	63	60
1934	71	86	94	97	88	83	90
1935	94	90	96	96	102	99	97
1936	71	85	87	86	88	87	87
1937	45	23	32	58	70	68	50
1938	93	95	96	98	99	95	97
1939	74	67	53	58	54	56	58
1940	44	62	72	88	96	94	82
1941	86	84	88	92	92	97	91
1942	92	84	84	80	91	92	86
1943	81	75	81	90	90	84	84
1944	63	64	64	61	60	68	63
1945	91	86	84	87	81	79	83
1946	84	81	71	73	79	77	76
1947	71	56	72	84	86	79	75
1948	80	65	54	66	86	91	72
1949	65	44	47	74	68	67	60
1950	61	63	74	82	83	81	77
1951	92	88	89	84	79	85	85
1952	81	78	81	72	85	87	81
1953	76	81	67	70	73	82	75
1954	71	72	76	86	93	91	84
1955	73	69	66	61	70	78	69
1956	74	74	74	71	79	87	77
1957	66	60	73	81	85	88	77
1958	87	86	89	88	88	88	88
1959	63	74	79	70	72	68	73
1960	59	61	68	77	79	81	73
1961	81	80	81	83	80	83	81
1962	73	67	78	81	77	78	76
1963	90	68	85	87	90	92	84
1964	86	82	75	72	68	70	73
1965	84	82	81	85	91	88	85

section, with six actions (herd sizes)<sup>2</sup> and six states (range conditions). There is now, however, the significant additional information represented by the long-run (prior) probabilities of each of the six states of nature  $P(\theta)$ . We are no longer in a situation of complete ignorance, but rather one of risk. By multiplying the payoff for each action by the corresponding probability and summing, we find the expected monetary value for each

TABLE 7.5  
CALCULATION OF PRIOR PROBABILITIES OF RANGE CONDITIONS, SACRAMENTO VALLEY, CALIFORNIA

States of Nature: Average Range Conditions, February 1-June 1 ( $\theta_i$ )		Number of Years Observed <sup>a</sup>	Prior Probabilities
Description	Range Index Interval		
$\theta_1$ Very poor	Less than 55	2	0.045
$\theta_2$ Poor	55 to 64	5	0.114
$\theta_3$ Fair	65 to 74	8	0.182
$\theta_4$ Normal	75 to 84	14	0.318
$\theta_5$ Good	85 to 94	11	0.250
$\theta_6$ Excellent	95 or over	4	0.091
TOTAL	—	44	1.000

<sup>a</sup> From Table 7.4.

action. For example, the expected monetary value of action  $a_6$  is \$1,850, calculated as follows:

$$(-14,930)(0.045) + (-8,860)(0.114) + (-2,800)(0.182) + (2,020)(0.318) + (8,510)(0.250) + (13,930)(0.091) = 1,850.$$

Action  $a_5$  (stock 415 head) provides the maximum expected monetary value of \$3,950. Under the assumptions outlined earlier, a linear utility function and subjective probabilities equal to the empirical probabilities of Table 7.5, we can say unequivocally that action  $a_5$  (415 head) is the optimum stocking rate. In other words, it pays to stock the range at a rate corresponding to "good" conditions, knowing that conditions this favorable (or better) will probably occur about  $\frac{1}{3}$  of the time. While action  $a_6$  will

<sup>2</sup> In this particular case, each of the actions (say  $a_i$ ) was defined as the maximum size of cow herd that can be maintained by optimally allocating the feed supply for the corresponding range condition ( $\theta_i$ ), assuming no supplemental feed is purchased for cattle on range. Thus, the actions were defined by solving six rather simple linear programming problems involving optimum allocation of feed supplies under given range conditions. The off-diagonal payoffs also represent linear programming solutions. They show how action  $a_i$  is adjusted with minimum loss (or maximum profit).

24

TABLE 7.6  
PAYOFF TABLE FOR A COW-CALF OPERATION WITH PRIOR PROBABILITIES OF RANGE CONDITIONS

States of Nature: Range Conditions ( $\theta_i$ )	Actions: Herd Size ( $a_j$ )						Prior Probabilities $P(\theta_i)$
	$a_1$ 230 Cows	$a_2$ 280 Cows	$a_3$ 320 Cows	$a_4$ 360 Cows	$a_5$ 415 Cows	$a_6$ 460 Cows	
Very poor	-4,580	-6,290	-8,260	-10,040	-12,690	-14,930	0.045
Poor	-3,330	-870	-2,090	-3,970	-6,620	-8,860	0.114
Fair	-2,530	450	2,830	1,440	600	-2,800	0.182
Normal	-1,890	1,090	4,060	5,800	5,530	2,020	0.318
Good	-930	2,050	5,020	7,420	10,230	8,510	0.250
Excellent	-130	2,850	5,820	8,220	11,770	13,930	0.091
Expected value	-1,890	820	2,980	3,800	3,950	-1,850	1.000

Dollars

involve buying supplemental feed in approximately  $\frac{2}{3}$  of the years, the opportunities foregone by understocking are even more costly. It is significant to note that in the previous section, where we assumed complete ignorance, none of the criteria selected  $a_5$  as optimal.

In some cases the problem is more complicated than suggested here. For example, the rancher might stock cows for below average range conditions and buy additional stocker animals to graze for a short period if above average feed supplies materialize.<sup>3</sup>

For the rancher who wishes to reevaluate the above problem using his own subjective probabilities, it is necessary to substitute these probabilities for the empirical probabilities, then recalculate the expected monetary values. For the rancher whose utility function is nonlinear, a different complexity arises. If we knew his utility function, we could simply evaluate the utility numbers corresponding to the various gains and losses, substitute the utility numbers for incomes in Table 7.6, and maximize expected utility rather than expected monetary value. However, if no utility function is available, we could make a rough check on whether the rancher's utility function is linear over the relevant range. We might suggest that he ask himself several questions, such as:

"Is my financial position such that I can take the long-run view of this problem, that is, that things 'will average out'?"

"Even if my financial position is such that I can afford to take the long-run view, does a bad year particularly worry me?"

"Is my financial position such that losses of the order which could occur in this decision problem would adversely affect my ability to stay in business?"

Affirmative answers to questions like these suggest that the rancher's underlying utility function is not linear over this range. A more rigorous check on the linearity of the utility function is the test proposed in Chapter III: Pick two dollar values that span the outcomes in the actual problem (for example,  $-\$15,000$  and  $\$15,000$  in our case). Find if the producer is indifferent between the average of these two values ( $\$0$ ) for certain or a contract involving the two extremes values with probability 0.5 each. If the answer to this question is "no," we need to proceed by the methods of Chapter III to the derivation of the utility function.

One advantage of presenting decision problems in the framework similar to that of Table 7.6 is that it forces the decision maker to focus on the aspects of risk inherent in the problem. Most research studies make

<sup>3</sup> For readers interested in these more complex cases, see: G. W. Dean, A. J. Finch, and J. A. Petit, Jr., *Economic Strategies for Foothill Beef Cattle Ranchers*, California Agricultural Experiment Station Bulletin 824 (June, 1966).

recommendations based on single valued estimates, which do not allow the decision maker any flexibility to adjust to the risk in the situation.

### THE STOCKING PROBLEM WITH A POSTERIOR DISTRIBUTION

We now turn to the case in which additional information is used in attempting to predict the state of nature (range condition) that will occur in a specific decision period. In particular, we will be interested in showing how some observation, experiment, or other forecasting device will allow the decision maker to spy on the state of nature. If the state of nature could be predicted prior to the decision with a high degree of accuracy, decisions could then be adjusted to the conditions expected and, over time, the value of gains increased. Formally, as explained in Chapter V, we will estimate posterior probabilities  $P(\theta_i|Z)$  where  $Z$  represents a set of predictors,  $z_k$ , and  $\theta_i$  represents states of nature. These posterior probabilities can then be used to derive the action that maximizes expected value, given the  $z_k$  observed prior to a particular decision. An optimum action can thus be derived for any observed value of  $z_k$ . This set of actions was called the Bayesian strategy; it is a complete set of rules that tells the decision maker how to act in response to any observed conditions  $z_k$ . The expected value of gains using the Bayesian strategy, that is, the data problem, can be compared with the expected value of gains using the optimal action from using the prior probabilities, that is, the no-data problem. The increase in expected value from employing posterior rather than prior probabilities is a measure of the usefulness of the predicting device employed. This gain we have called the value of the experiment in Chapter V.

To illustrate the concepts involved in problems employing posterior distributions, let us turn to a variation of the stocking rate problem on California range land. Instead of a year-around cow-calf operation, we now consider another typical kind of operation of a more seasonal nature, where stocker cattle are purchased in early winter (during January) and sold in early summer (around July 1). Thus, the cattle are on the range only during the green forage period of the year, and stocking rates can be varied easily from year to year depending on the outlook for range conditions. The payoffs for six alternative stocking rates for this type of operation are shown in Table 7.7. Using the same prior probability distribution of range conditions derived in the previous section (Table 7.5), the optimum stocking rate for the no-data problem is shown to be action  $a_4$  (1,345 head).

By January, when the steers are purchased, the operator will have some

idea of whether range conditions during the spring are likely to be relatively favorable or unfavorable, that is, an opinion based on rainfall, temperature, and range conditions up to that date. The operator might use the observed range conditions in January as a predictor or indicator of the true range condition during the subsequent spring grazing period. Casual observation suggests that favorable spring grazing conditions tend to follow favorable conditions early in the season, and vice versa. This casual observation can be made more explicit and useful by judicious analysis of the data presented in Table 7.4. From these data, a table like Table 7.8 can be constructed that shows the conditional probabilities  $P(Z|\theta)$ , that is, the probabilities of observing a particular range condition in January given that the true spring season range condition is  $\theta_i$ . With these conditional probabilities and his own subjective prior probabilities, we could compute the operator's posterior distribution over the states of nature using Bayes' formula.

The data from Table 7.4 are summarized on the left side of Table 7.8 and converted to the conditional probabilities,  $P(Z|\theta)$ , on the right side. To illustrate how these probabilities are calculated and interpreted, consider the second row of Table 7.8. We notice that three out of five years when the spring range conditions were poor, the January range condition was also poor; thus the probability of observing  $z_2$  when  $\theta_2$  is the true state is  $\frac{3}{5} = 0.600$ . Two years out of the five years when the spring range conditions were poor, the January condition was fair, which gives  $P(z_3|\theta_2) = 0.400$ . The other values in the table are obtained in the same manner. The conditional probabilities sum to 1.0 by rows.

The calculations required to obtain a posterior distribution of the spring range conditions using Bayes' formula are now shown. The conditional probabilities of Table 7.8 are reproduced in part A of Table 7.9 along with the ranch manager's prior probability distribution which, for the sake of convenience, we have taken to be the one derived in Table 7.5. Parts B and C of Table 7.9 are derived directly from the two distributions in part A. Part B shows the joint probabilities of the various combinations of  $\theta$  and  $Z$  obtained by multiplying  $P(Z|\theta) P(\theta)$ . For example, part A of Table 7.9 shows that the probability of observing  $z_4$  when the true range condition is  $\theta_6$  is  $P(z_4|\theta_6) = 0.250$ . The probability of  $\theta_6$  is  $P(\theta_6) = 0.091$ . Hence, the joint probability of observing  $z_4$  and state  $\theta_6$  is

$$P(z_4|\theta_6) P(\theta_6) = (0.250) (0.091) = 0.023,$$

as shown in row  $\theta_6$ , column  $z_4$  of part B. The other cells of part B are derived similarly, by multiplying the conditional probabilities  $P(Z|\theta)$  in each row of part A by the  $P(\theta)$  for that row. Summing the probabilities in

TABLE 7.7  
PAYOFF TABLE FOR A STOCKER OPERATION WITH PRIOR PROBABILITIES OF RANGE CONDITIONS

States of Nature: Range Conditions ( $\theta_j$ )	Actions: Stocking Rate ( $a_j$ )*						Probabilities $P(\theta_j)$
	$a_1$ 841 Head	$a_2$ 1,009 Head	$a_3$ 1,177 Head	$a_4$ 1,345 Head	$a_5$ 1,513 Head	$a_6$ 1,681 Head	
$\theta_1$ Very poor	-3,691	-5,585	-7,575	-9,411	-11,395	-13,307	0.045
$\theta_2$ Poor	-3,007	237	-1,753	-3,589	-5,575	-7,485	0.114
$\theta_3$ Fair	-2,407	969	4,147	2,311	327	-1,585	0.182
$\theta_4$ Normal	-1,807	1,569	4,851	8,181	6,197	4,285	0.318
$\theta_5$ Good	1,207	2,169	5,451	8,885	12,067	10,155	0.250
$\theta_6$ Excellent	607	2,869	6,051	9,485	12,773	16,015	0.091
Expected value	-1,879	1,254	3,670	5,274	5,061	3,618	1.000

\* Negative numbers represent negative net incomes (losses).

**TABLE 7.8**  
**NUMBER OF YEARS OF OCCURRENCE OF VARIOUS COMBINATIONS OF RANGE CONDITIONS ON JANUARY 1 AND THE SUBSEQUENT SPRING PERIOD, AND CALCULATION OF CONDITIONAL PROBABILITIES**

Spring Range Conditions ( $\theta_i$ )	Observed Range Conditions, January 1						Total	Conditional Probabilities, $P(Z \theta)$						
	$z_1$	$z_2$	$z_3$	$z_4$	$z_5$	$z_6$		$P(z_1 \theta)$	$P(z_2 \theta)$	$P(z_3 \theta)$	$P(z_4 \theta)$	$P(z_5 \theta)$	$P(z_6 \theta)$	
	Very Poor (<55)	Poor (55-64)	Fair (65-74)	Normal (75-84)	Good (85-94)	Excellent (>95)								
$\theta_1$ Very poor (<55)	1	1					2	0.500	0.500					
$\theta_2$ Poor (55-64)		3	2				5		0.600	0.400				
$\theta_3$ Fair (65-74)		3	1	3	1		8		0.325	0.125	0.375	0.125		
$\theta_4$ Normal (75-84)	1	1	5	5	2		14	0.071	0.071	0.357	0.357	0.143		
$\theta_5$ Good (85-94)		1	2	2	5	1	11		0.091	0.182	0.182	0.454	0.091	
$\theta_6$ Excellent (>95)				1	2	1	4				0.250	0.500	0.250	
<b>TOTAL</b>	<b>2</b>	<b>9</b>	<b>10</b>	<b>11</b>	<b>10</b>	<b>2</b>	<b>44</b>							

**TABLE 7.9**  
**DETERMINATION OF POSTERIOR PROBABILITIES OF SPRING RANGE CONDITIONS BASED ON OBSERVED RANGE CONDITIONS, JANUARY 1<sup>a</sup>**

A. Conditional Probabilities, $P(Z \theta)$								
Spring Range Conditions ( $\theta_i$ )	Observed Range Conditions, January 1 ( $z_i$ )							Prior Probability $P(\theta)$
	$z_1$ Very Poor	$z_2$ Poor	$z_3$ Fair	$z_4$ Normal	$z_5$ Good	$z_6$ Excellent	Sum	
$\theta_1$ Very poor	0.500	0.500					1.000	0.045
$\theta_2$ Poor		0.600	0.400				1.000	0.114
$\theta_3$ Fair		0.375	0.125	0.375	0.125		1.000	0.182
$\theta_4$ Normal	0.071	0.071	0.357	0.357	0.143		1.000	0.318
$\theta_5$ Good		0.091	0.182	0.182	0.454	0.091	1.000	0.250
$\theta_6$ Excellent			0.182	0.250	0.500	0.250	1.000	0.091

B. Joint Probabilities of $\theta$ and $Z$ , $P(Z \theta)P(\theta)$								
Spring Range Conditions ( $\theta_i$ )	Observed Range Conditions, January 1 ( $z_i$ )							Sum
	$z_1$ Very Poor	$z_2$ Poor	$z_3$ Fair	$z_4$ Normal	$z_5$ Good	$z_6$ Excellent		
$\theta_1$ Very poor	0.022	0.022						
$\theta_2$ Poor		0.068	0.048					
$\theta_3$ Fair		0.068	0.023	0.068	0.023			
$\theta_4$ Normal	0.023	0.023	0.114	0.114	0.045			
$\theta_5$ Good		0.023	0.046	0.046	0.114	0.023		
$\theta_6$ Excellent			0.046	0.023	0.046	0.023		
$P(Z)$	0.045	0.204	0.229	0.251	0.228	0.046		1.000

C. Posterior Probabilities, $P(\theta_i Z)$							
Spring Range Conditions ( $\theta_i$ )	Observed Range Conditions, January 1 ( $z_i$ )						
	$z_1$ Very Poor	$z_2$ Poor	$z_3$ Fair	$z_4$ Normal	$z_5$ Good	$z_6$ Excellent	
$\theta_1$ Very poor	0.500	0.111					
$\theta_2$ Poor		0.333	0.200				
$\theta_3$ Fair		0.333	0.100	0.273	0.100		
$\theta_4$ Normal	0.500	0.111	0.500	0.454	0.200		
$\theta_5$ Good		0.111	0.200	0.182	0.500	0.500	0.500
$\theta_6$ Excellent			0.200	0.091	0.200	0.500	0.500
Sum	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000

<sup>a</sup> Original calculations rounded off to three places for presentation in table. Therefore, data presented in tables will not check exactly in the last decimal place.

TABLE 7.10  
COMPUTATION OF BAYESIAN STRATEGY USING POSTERIOR PROBABILITIES:  
VALUE OF A PERFECT PREDICTOR; VALUE OF THE Z PREDICTOR

States of Nature: Range Conditions ( $\theta_j$ )	Actions: Stocking Rates ( $a_i$ )						Posterior Probabilities, $P(\theta Z)$						
	$a_1$ Head	$a_2$ Head	$a_3$ Head	$a_4$ Head	$a_5$ Head	$a_6$ Head	$P(\theta z_1)$	$P(\theta z_2)$	$P(\theta z_3)$	$P(\theta z_4)$	$P(\theta z_5)$	$P(\theta z_6)$	$P(\theta)$
$\theta_1$ , Very poor	-3,691	-5,585	-7,575	-9,411	-11,395	-13,307	0.500	0.111	0.200	0.273	0.100	0.500	0.045
$\theta_2$ , Poor	-3,007	237	-1,753	-3,589	-5,575	-7,485	0.333	0.333	0.100	0.273	0.100	0.500	0.114
$\theta_3$ , Fair	-2,407	969	4,147	2,311	327	-1,585	0.500	0.111	0.500	0.454	0.200	0.500	0.182
$\theta_4$ , Normal	-1,807	1,569	4,851	8,181	6,197	4,285	0.111	0.111	0.200	0.182	0.500	0.500	0.318
$\theta_5$ , Good	-1,207	2,169	5,451	8,885	12,067	10,155	0.200	0.111	0.200	0.182	0.500	0.500	0.250
$\theta_6$ , Excellent	-607	2,869	6,051	9,485	12,773	16,015	0.091	0.111	0.200	0.200	0.200	0.500	0.091

Expected net income from a perfect predictor =  $(-3,691)(.045) + 237(.114) + \dots + 16,015(.091) = \$7,691$

Z Observation:	Expected Net Incomes Given Z Observation						$P(Z)$	Bayesian strategy:
	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	$a_5$	$a_6$		
$z_1$	-2,749	-2,008	-1,362	-615	-2,599	-4,511	0.045	When $z_1$ observed, follow $a_4$
$z_2$	-2,549	197	1,100	424	-985	-2,895	0.204	When $z_2$ observed, follow $a_3$
$z_3$	-1,987	1,363	3,580	5,381	4,430	2,518	0.229	When $z_3$ observed, follow $a_4$
$z_4$	-1,752	1,633	4,877	6,825	6,261	4,818	0.251	When $z_4$ observed, follow $a_4$
$z_5$	-1,327	2,069	5,321	8,207	9,860	8,979	0.228	When $z_5$ observed, follow $a_5$
$z_6$	-907	2,519	5,751	9,185	12,420	13,085	0.046	When $z_6$ observed, follow $a_6$

Expected net income from Z predictor =  $(-615)(.045) + (1,100)(.204) + \dots + (13,085)(.046) = \$5,992$

Value of a perfect predictor =  $\$7,691 - \$5,274 = \$2,417$

Value of the Z predictor =  $\$5,992 - \$5,274 = \$718$

\*  $\$5,274$  represents the expected net income from the optimum action  $a_i$  using only prior probabilities, as shown in Table 7.5.

each column of part B gives  $P(Z)$ , that is, the probability  $P(Z)$  is given by  $P(Z) = P(Z|\theta_1)P(\theta_1) + P(Z|\theta_2)P(\theta_2) + \dots + P(Z|\theta_6)P(\theta_6) = \sum_{\theta=1}^6 P(Z|\theta_i)P(\theta_i)$ . The final section C of Table 7.9 shows the calculation of the posterior distribution  $P(\theta|Z)$  from the components of Bayes' formula given in section B. That is,  $P(\theta|Z) = P(\theta)P(Z|\theta) \div P(Z)$ . Specifically, the joint probabilities  $P(\theta)P(Z|\theta)$  in part B are divided by the marginal probability  $P(Z)$  at the bottom of each column to provide the posterior distribution  $P(\theta|Z)$  in part C. For example,  $P(\theta_1)P(z_1|\theta_1) = 0.022$  in row 1, column 1, part B.  $P(z_1) = 0.045$  at the bottom of column 1, part B. The posterior probability  $P(\theta_1|z_1)$  in row 1, column 1, part C is then  $P(\theta_1)P(z_1|\theta_1) \div P(z_1) = 0.022 \div 0.045 = 0.500$ .

The posterior distributions given in part C of Table 7.9 could be obtained directly from the data in Table 7.8. If instead of dividing each element in a row by the row total, we divided each element in a column by the column total, we would obtain the posterior probabilities directly. For example,  $z_4$  was observed in 11 years. Following a  $z_4$ , states  $\theta_3, \theta_4, \theta_5$ , and  $\theta_6$  occurred 3, 5, 2, and 1 years, respectively. Hence,  $P(\theta_3|z_4) = \frac{3}{11} = 0.273$ ,  $P(\theta_4|z_4) = \frac{5}{11} = 0.454$ ,  $P(\theta_5|z_4) = \frac{2}{11} = 0.182$ , and  $P(\theta_6|z_4) = \frac{1}{11} = 0.091$ . These probabilities appear in the column headed  $z_4$  in part C of Table 7.9. The other values in part C of Table 7.9 could be obtained similarly.

Although the direct method is a more convenient way of obtaining the posterior probabilities, it has the distinct disadvantage that it incorporates the prior distribution given by the same data. Thus, a ranch manager would have no way of modifying these posterior probabilities to conform to his own subjective prior probabilities if he believed that the prior distribution provided by the data did not describe his situation. The conditional probabilities  $P(Z|\theta)$  can be used with any prior distribution whatever in Bayes' formula to obtain the posterior probabilities. It is for this reason that it would be more useful to decision makers to have experimental results summarized in the form of conditional probabilities  $P(Z|\theta)$  than in the posterior probability form of  $P(\theta|Z)$ . This conclusion is made more vivid when one considers the situation in which the decision maker is physically removed from the experimenter or analyst, as is frequently the case in agriculture where the manager is far removed from his sources of information, such as the agricultural experiment station.

Obtaining the Bayesian Strategy

Table 7.10 summarizes the calculations involved in deriving the Bayesian strategy using the posterior probabilities derived in Table 7.9. The

upper left-hand portion of Table 7.10 repeats the payoff Table 7.7, while the upper right-hand portion gives the posterior probabilities. The first step is to derive the expected net income for each action, assuming a particular  $z_k$  observation. For example, suppose  $z_1$  is observed. Given a  $z_1$  observation (very poor range conditions in January), there is, according to the posterior probabilities  $P(\theta|z_1)$ , a 0.500 probability that  $\theta_1$  (very poor spring range conditions) will ensue and also a 0.500 probability that  $\theta_4$  (normal spring range conditions) will follow. Thus, we calculate the expected value of each of the actions when  $z_1$  is observed. For action  $a_1$ , for example, this is  $(-\$3,691)(0.500) + (-\$1,807)(0.500) = -\$2,749$ . For action  $a_2$  it is  $(-\$5,585)(0.500) + (\$1,569)(0.500) = -\$2,008$ . These values and those calculated for  $a_3$  through  $a_6$  are given in the first row of the lower section of Table 7.10. Thus, given a  $z_1$  observation, action  $a_4$  gives the greatest expected net income ( $-\$615$ ).

Given an observation of  $z_2$  the probabilities  $P(\theta|z_2)$  are applied to the original payoff table, resulting in expected values shown in the second row of the lower section of Table 7.10. Given an observation of  $z_2$ , action  $a_4$  provides maximum expected net income ( $\$1,100$ ). Optimum actions can be derived in a similar manner following each of the other observed values of  $z_k$ . It is seen that the Bayesian strategy is  $(a_4, a_3, a_4, a_4, a_5, a_6)$ . In other words, the optimum strategy is:

- When *very poor* range conditions are observed in January, stock 1,345 head.
- When *poor* range conditions are observed in January, stock 1,177 head.
- When *fair* or *normal* range conditions are observed in January, stock 1,345 head.
- When *good* range conditions are observed in January, stock 1,513 head.
- When *excellent* range conditions are observed in January, stock 1,681 head.

While the strategy appears generally quite sensible, the careful reader will note the anomaly of "very poor" range conditions in January leading to a larger stocking rate than when "poor" range conditions are observed. This point is examined in more detail later in this chapter under the heading "Comments on the Adequacy of the Data."

**The Bayesian Strategy with Different Prior Distributions.** Suppose the manager is willing to accept the conditional relationship  $P(Z|\theta)$  between range conditions on January 1 and subsequent spring range conditions. However, suppose he believes that the past 44 years of observed range conditions have been generally more favorable than will be the case in the future. Hence, he forms his own subjective prior distribution  $P'(\theta)$  independently from the range data observed in the past. Suppose he adopts a prior distribution as shown in the upper part of Table 7.11.

This distribution is considerably more pessimistic than the prior distribution  $P(\theta)$  actually observed over the past 44 years (shown in the right-hand column of Table 7.9). Using the new prior distribution  $P'(\theta)$  and the conditional distribution  $P(Z|\theta)$  in Table 7.9, a different set of posterior probabilities  $P'(\theta|Z)$  are calculated using Bayes' formula and presented in the upper part of Table 7.11. Applying these posterior probabilities to the payoffs (upper left-hand portion of Table 7.10), we arrive at the Bayes' strategy  $(a_1, a_3, a_3, a_3, a_4, a_5)$ . Not surprisingly this is a more conservative strategy than the previous strategy  $(a_4, a_3, a_4, a_4, a_5, a_6)$ .

Suppose another manager adopts an optimistic subjective prior distribution  $P''(\theta)$  shown in the lower part of Table 7.11. Again, working through Bayes' formula to obtain the new set of posterior probabilities  $P''(\theta|Z)$  shown in the lower part of Table 7.11 and applying them to the payoffs of Table 7.10, the Bayesian strategy  $(a_4, a_4, a_4, a_4, a_5, a_6)$  is obtained. Because of the more optimistic prior distribution  $P''(\theta)$ , this strategy is somewhat less conservative than the original Bayesian strategy.

These examples demonstrate the way in which subjective prior probability can be incorporated with experimental conditional probabilities in decision making. The results demonstrate the sensitivity of the optimal strategy to the particular subjective prior distribution specified. Furthermore, the fact that operators employ different strategies in actual situations might be explained by their use of different subjective prior distributions, even though they are considering the same actions, states, and payoffs and employing the same source of information as summarized in the conditional probabilities  $P(Z|\theta)$ .

**Comments on the Adequacy of the Data.** The reader may raise a question concerning the relatively high stocking rate following a  $z_1$  observation in the initial Bayesian strategy  $(a_4, a_3, a_4, a_4, a_5, a_6)$ . Examination of data in Table 7.8 indicates the source of this questionable result: There are only two  $z_1$  observations over the 44 years, and one of these occurred in a year in which normal spring range conditions ( $\theta_4$ ) ensued. With only two observations, the probabilities  $P(\theta|z_1)$  are likely to be misleading; likewise,  $P(\theta|z_6)$  may also be misleading since  $z_6$  occurred only twice in the 44 years. In the latter case, however, they occurred for  $\theta_5$  and  $\theta_6$ , which is more intuitively reasonable. A manager confronted with the experimental probabilities  $P(\theta|z_1)$  would likely revise the  $P(\theta|z_1)$  distribution based on experience and intuition. For example, if he substituted subjective probabilities of  $P(\theta_1|z_1) = 0.5$  and  $P(\theta_2|z_1) = 0.5$  for those shown, the Bayesian strategy would be  $(a_2, a_3, a_4, a_4, a_5, a_6)$ .

The above adjustment in the  $P(\theta|z_1)$  distribution indicates the im-

importance of subjective knowledge even in the derivation of conditional probabilities  $P(Z|\theta)$ . Even after all the empirical evidence available is accumulated, there may be inadequacies in the data that will require revision of the empirical probabilities. These inadequacies may arise because of an insufficient number of observations or from errors and biases in reporting. For example, different people have been involved over the years in reporting and making estimates of indices and may not have been entirely consistent in their ratings. Also, in the case of  $P(\theta|z_1)$  and  $P(\theta|z_6)$ , too few observations were available in some critical cells. Thus, an intelligent manager is not likely to use the probabilities mechanically. Instead, he will peruse them carefully and make any adjustments he feels necessary in order to bring them in line with his own subjective evaluation. He is not bound to accept the data uncritically, particularly when there are compelling reasons, such as those mentioned above, for suspecting that the data are inadequate.

The researcher or analyst whose job it is to make recommendations to decision makers based on inadequate data is faced with a somewhat different problem. He cannot simply substitute his own subjective probabilities into the problem where he thinks necessary and present this as objective information to his audience. There are procedures available to the analyst for handling analytical problems of this type, such as "smoothing" procedures that involve fitting continuous functions to the data. Such procedures will be used in later chapters.

**Value of Experiment.** What is it worth to consider additional information of the type used here in attempting to fit stocking rates to range conditions? One way of arriving at the potential worth of additional information is to suppose that we had a forecasting device for range conditions which was perfectly accurate, so that the true state of nature,  $\theta$ , would always be known at decision time. In this case the  $P(\theta_i|Z)$  values of Table 7.10 would be 1's down the diagonal and 0's elsewhere, that is, the true states would be perfectly predicted by the  $z_k$  values. Thus, when  $z_1$  is observed  $\theta_1$  is predicted with certainty, and action  $a_1$  is taken since it maximizes the payoff for that state. Likewise,  $z_2$  predicts  $\theta_2$  without error and  $a_2$  is selected, and similarly for the other observations and states. Therefore, the expected value obtained, if a perfect predictor were available, is \$7,691 as shown in Table 7.10. This value is compared with the expected value of the no-data problem, \$5,274, obtained earlier in Table 7.7. Therefore, the value of a perfect predictor is  $\$7,691 - \$5,274 = \$2,417$ . One way of interpreting this figure is to say that \$2,417 is the

TABLE 7.11  
POSTERIOR PROBABILITIES USING PESSIMISTIC PRIOR AND  
AN OPTIMISTIC PRIOR DISTRIBUTION

Spring Range Conditions ( $\theta_j$ )	Pessimistic Prior Probability	Posterior Probabilities with Pessimistic Prior					
		Observed Range Conditions, January 1 ( $z_k$ )					
		Very Poor $z_1$	Poor $z_2$	Fair $z_3$	Normal $z_4$	Good $z_5$	Excellent $z_6$
$\theta_1$	0.10	0.820	0.126	0.514	0.704	0.532	
$\theta_2$	0.30		0.454	0.215	0.254	0.223	
$\theta_3$	0.40		0.379	0.232	0.254	0.223	
$\theta_4$	0.15	0.180	0.028	0.039	0.042	0.245	1.000
$\theta_5$	0.05		0.013				
$\theta_6$	0.00						
Sum	1.00	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
Spring Range Conditions ( $\theta_j$ )	Optimistic Prior Probability	Posterior Probabilities with Optimistic Prior					
		Observed Range Conditions, January 1 ( $z_k$ )					
		Very Poor $z_1$	Poor $z_2$	Fair $z_3$	Normal $z_4$	Good $z_5$	Excellent $z_6$
$\theta_1$	0.00						
$\theta_2$	0.05		0.213	0.084	0.201	0.073	
$\theta_3$	0.15		0.397	0.083	0.512	0.218	
$\theta_4$	0.40	1.000	0.199	0.601	0.197	0.518	
$\theta_5$	0.30		0.191	0.232	0.090	0.191	0.519
$\theta_6$	0.10						0.481
Sum	1.00	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000

upper limit on the cost that should be expended in obtaining added information to predict the true state of nature.

It is also possible to calculate the value of the data actually used (January range conditions) as a predictor of the true spring range conditions. This value can be calculated using the solution to the data problem by weighting the expected net income of the actions making up the Bayesian strategy with the frequencies from the  $P(Z)$  distribution. Hence, the weighted average return of the optimal strategy is \$5,992 (expected net income from  $Z$  predictor line in Table 7.10). Thus, the "value" of our simple  $Z$  predictor is  $\$5,992 - \$5,274 = \$718$ . Since this observation can be made at essentially no cost, it clearly should be used. However, the difference between the value of our predictor (\$718) and the value of a perfect predictor (\$2,417) suggests that it might be worthwhile to explore other and perhaps more sophisticated predicting devices.

#### SUMMARY

In this chapter we have examined a realistic, straightforward application of decision theory to the agricultural decision-making problem of range stocking rates for beef cattle under uncertainty. Initially, we made the unrealistic assumption that the decision must be made in a framework of complete ignorance (no prior distribution). We examined a number of possible decision criteria in this situation and found each to be seriously lacking when examined from a theoretical point of view. In fact, each of these criteria can be thought of as a special case of maximizing expected value in which the prior probability distribution is pre-specified in a very restricted way (for example, the maximax criterion implies a probability of 1.0 for the most favorable state of nature and zero for all others).

We therefore turned to examination of the range stocking problem in the more general framework of expected value maximization (of money or utility) to be used for the remainder of the empirical applications in this book. In these cases, the decision-maker forms objective or subjective probabilities rather than implicitly accepting a pre-specified "rule" regarding probabilities. In the range stocking problem a prior probability distribution of range conditions was developed from historical data, although it is recognized that individual ranchers might legitimately modify these probabilities either subjectively or on the basis of more detailed information or records regarding their own ranch conditions. On the basis of these probabilities the action that maximized expected monetary value (expected net income) was selected as the optimal decision.

## CHAPTER VII

## Applications in Agriculture I

In this chapter we apply Bayesian decision theory to a stocking rate problem that is typical of many problems in agriculture. We present the problem in three stages of complexity; first assuming no prior distribution, then a prior distribution, and finally a posterior distribution. Throughout this chapter we assume that monetary values adequately reflect payoffs; that is, we assume a linear utility function for money.

### THE STOCKING RATE PROBLEM

There are 30 million acres of foothill land in California suited primarily for livestock grazing. Rainfall in these areas is concentrated in the winter months with essentially no rainfall for at least six months in the summer and fall. Range land that is a lush green during the rainy season becomes parched and tinder-dry in late summer and fall. Thus, the feed supply is highly seasonal, with large amounts available during the winter and spring and little during the summer and fall. Some of the excess feed during the winter and spring can be reserved for summer or fall grazing although it loses a substantial portion of its feed value in the drying process. Year-around grazing operations are therefore feasible, although some supplemental feeding is required during late fall and early winter. The feed supply is not only variable seasonally, but between years, depending on rainfall, temperature, wind, and other factors. Historical studies show that feed supply in a "good" year can be double that in a "bad" year.

One fairly common type of livestock operation in this area is a beef cow herd (cow-calf operation). Brood cows graze year-around on the range land, and their calves are sold at weaning time (8 months of age) weighing around 500 pounds. This type of organization is rather inflexible in that cow numbers cannot be changed easily from year to year in response to weather conditions and feed supply. The rancher's dilemma is to decide on the size of herd to maintain: if the herd is too small, feed will be wasted in many years; if the herd is too large, the feed supply in many years will be inadequate, and expensive supplemental feeds must be purchased.

We then examined a case in which the stocking rate decision could be realistically changed from year to year depending on a forecast of weather conditions. An elementary forecasting device of simply observing actual range conditions ( $Z$ ) prior to the decision point was examined. Conditional probabilities,  $P(Z|\theta)$ , were derived from historical data and Bayes rule used to derive an optimal decision strategy for a given prior distribution. The expected monetary value (net income) from using the forecasting device (data problem) was compared with that from not using a forecasting device (no-data problem) to determine the value of the experiment or the value of the forecast. For the given problem the value of the forecast turned out to be about \$720 per year. A "perfect" predictor would increase expected net income by about \$2,400 per year. Therefore, a useful line of research would appear to be a search for predicting devices of greater accuracy.

It has been the authors' experience that the simple concepts of decision theory can be explained to and understood by ranchers. We have found that a simple decision framework often helps clarify issues that are often vague without such a systematic approach. A typical statement by ranchers is that their decisions are "just a wild gamble" or "pure guesswork." On closer examination, however, it is usually found that they are using some elements of a decision framework. We believe that decisions can be improved by making this framework more explicit.

In the next chapter we turn to somewhat more complex applications of decision theory in agriculture.

DIRECTORIO DE ASISTENTES AL CURSO: "APROVECHAMIENTOS HIDRAULICOS",  
DEL 16 AL 27 DE OCTUBRE DE 1978.

NOMBRE Y DIRECCION

EMPRESA Y DIRECCION

- |   |  |
|---|--|
| 1. MIGUEL ANGEL AGUAYO C.<br>Cultivos No. 144<br>Col. Progreso del Sur<br>México 13, D. F.<br>Tel. 582-61-06                  | COMISION DE AGUAS DEL VALLE DE MEXICO<br>Balderas No. 55-2° Piso<br>México 1, D. F.<br>Tel. 585-50-66 Ext. 206 |
| 2. ALFREDO APARICIO ARANDA<br>Río Usumacinta No. 5305<br>Col. San Manuel<br>Puebla, Pue.<br>Tel. 45-37-94                     | COMISION DEL PAPALOAPAN<br>Cd. Alemán, Ver.  |
| 3. MARIO ARIAS NAVA<br>Rebull No. 71<br>Col. Mixcoac<br>México 19, D. F.<br>Tel. 598-23-81                                    | S.A.R.H.<br>Plaza de la República No. 31-7° piso<br>México 2, D. F.<br>Tel. 535-13-25                          |
| 4. DANER BORDIER LEAL<br>Hércules No. 2677<br>Col. J. del Bosque<br>Guadalajara<br>Tel. 21-69-86                              | S.A.R.H.<br>Federalismo No. 415<br>Guadalajara<br>Tel. 13-86-49  |
| 5. VICTOR GUILLERMO CABRERO IRIBERRI<br>Casa 14 Ref. 18 de Marzo<br>Col. Arzcapotzalco<br>México 16, D. F.<br>Tel. 5-27-13-78 | S.A.R.H.<br>Reforma No. 51-13° piso<br>México, D. F.   |
| 6. FERMIN RUBEN CONTRERAS SANCHEZ<br>Valle Carrizal de los Alguales No. 11-1<br>Col. Valle de Aragón<br>Edo. de México        | SUBDIRECCION DE INGENIERIA AGRICOLA<br>Reforma No. 51-13° piso<br>México 1, D. F.<br>Tel. 535-64-56            |
| 7. ENRIQUE CORONA TOVAR<br>Edif. 50 Ent. B Dpto. 502<br>Col. Vallejo<br>México 14, D. F.<br>Tel. 567-33-53                    | S.A.R.H.<br>Plaza de la República No. 31-2° piso<br>Col. Tabacalera<br>México 2, D. F.<br>Tel. 566-49-38       |

DIRECTORIO DE ASISTENTES AL CURSO: "APROVECHAMIENTOS HIDRAULICOS",  
DEL 16 AL 27 DE OCTUBRE DE 1978.

NOMBRE Y DIRECCION

EMPRESA Y DIRECCION

- |  |   |
|--|---|
| 8. OSCAR COUTIÑO RUIZ<br>Palenque 25-A<br>Col. Narvarte<br>México 12, D. F.<br>Tel. 519-33-10                                  | S.A.R.H.<br>Reforma No. 51<br>Col. San Rafael<br>México, D. F.<br>Tel. 566-97-92                        |
| 9. EFRAIN CRUZ MARTINEZ<br>Tlalpan No. 1215-A8<br>Col. Portales<br>México 13, D. F.<br>Tel. 592-08-78                          | S.A.R.H.<br>Reforma No. 20-1° piso Desp. 104<br>Col. Centro<br>México 1, D. F.<br>Tel. 592-08-78        |
| 10. FERNANDO DE ARTOLA NOBLE<br>Yácatas No. 84<br>Col. Narvarte<br>México 12, D. F.<br>Tel. 519-11-11                          | COMISION DEL PLAN NACIONAL HIDRAULICO<br>Tepic No. 40<br>Col. Roma<br>México 7, D. F.<br>Tel. 574-49-43 |
| 11. ARMANDO DE LOS SANTOS GARCIA<br>Fran Servando Teresa de Mier 308-9<br>México 1, D. F.<br>Tel. 542-0698                     | S.A.R.H.<br>Reforma No. 51-11° piso<br>México 4, D. F.<br>Tel. 546-11-27                                |
| 12. PABLO FERNANDEZ FERNANDEZ<br>Francisco Diaz Covarrubias No. 82-C4<br>Col. San Rafael<br>México 4, D. F.                    | S.A.R.H.<br>Reforma No. 31-15° piso<br>Col. Centro<br>México 4, D. F.<br>Tel. 566-97-69                 |
| 13. FERNANDO FRANCO MORALES<br>Cerro de los Remedios No. 22<br>Col. Campestre Churubusco<br>México 21, D. F.<br>Tel. 544-63-11 | S.A.R.H.<br>Plaza de la República No. 31-6° piso<br>Col. San Rafael<br>Tel. 566-43-54                   |
| 14. CESAR HECTOR GALLARDO LOPEZ<br>Gabino Barrera No. 3-13<br>Col. San Rafael<br>México 4, D. F.                               | S.A.R.H.<br>Reforma No. 20-105<br>Col. Centro<br>México 1, D. F.<br>Tel. 546-46-76                      |

DIRECTORIO DE ASISTENTES AL CURSO: "APROVECHAMIENTOS HIDRAULICOS",  
DEL 16 AL 27 DE OCTUBRE DE 1978.

NOMBRE Y DIRECCION

EMPRESA Y DIRECCION

- |  |   |
|--|---|
| 15. JORGE GAONA GARCIA<br>Museo de Ciencias No. 123<br>Col. Bellavista<br>Cd. Satélite, Edo. de México<br>Tel. 541-13-97 | S.A.R.H.<br>Ignacio Ramírez No. 20-2° piso<br>Col. Centro<br>México 1, D. F.<br>Tel. 566-26-59          |
| 16. GUILLERMO GASTELUM GAXIOLA<br>Rumanía No. 309-7<br>Col. Portales<br>México 13, D. F.<br>Tel. 532-21-62               | S.A.R.H.<br>Reforma No. 51-15° piso<br>Col. Centro<br>México 1, D. F.<br>Tel. 535-82-24                 |
| 17. ALONSO GOMEZ SIERRA<br>Homero 510-403<br>Col. Polanco<br>México 5, D. F.<br>Tel. 250-72-01                           | BANCO INTERAMERICANO DE DESARROLLO<br>Reforma No. 379-7° piso<br>México 5, D. F.<br>Tel. 533-57-09      |
| 18. MARIO GUEMEZ VERA<br>Amado Nervo No. 44-2<br>Col. Sta. Ma. la Ribera<br>México 4, D. F.<br>Tel. 535-94-33            | COMISION DEL PLAN NACIONAL HIDRAULICO<br>Tepic No. 40<br>Col. Roma<br>México 7, D. F.<br>Tel. 574-49-43 |
| 19. JORGE LUIS GRAJALES ESCARPULLI<br>Norte 87-A No. 13<br>Col. Clavería<br>México 16, D. F.<br>Tel. 527-92-55           | S.A.R.H.<br>Ignacio Ramírez No. 20-2° piso<br>México 16, D. F.<br>Tel. 566-26-59                        |
| 20. ROBERTO HEATLEY CORTES<br>Augusto Rodín 358-307<br>Col. Mixcoac<br>México 19, D. F.                                  | S.E.F.I. UNAM.<br>Tacuba No. 5<br>México 1, D. F.   |
| 21. JESUS HERNANDEZ GARIBAY<br>Ote. 33 No. 2<br>Col. Moctezuma<br>México 9, D. F.<br>Tel. 571-23-38                      | S.A.R.H.<br>Balderas No. 55-3° piso<br>Col. Centro<br>México 1, D. F.<br>Tel. 585-50-66 Ext. 300.       |

DIRECTORIO DE ASISTENTES AL CURSO: "APROVECHAMIENTOS HIDRAULICOS",  
DEL 16 AL 27 DE OCTUBRE DE 1978.

NOMBRE Y DIRECCION

EMPRESA Y DIRECCION

- |   |  |
|---|--|
| 22. JOSE MARCELINO HERNANDEZ GUERRERO<br>Manzana 3 lote 86 Andador 19-9<br>Unidad C.T.M.<br>México 14, D. F.                        | S.A.R.H.<br>Reforma No. 20<br>México 14, D. F.<br>Tel. 546-46-76   |
| 23. ANTONIO LARA MONTOYA<br>Teapan lote 5 Manzana 13<br>Col. San Andrés Atzco.<br>México 16, D. F.<br>Tel. 382-01-92                | S.A.R.H.<br>Plaza de la República 31-2° piso<br>Col. Tabacalera<br>México 2, D. F.<br>Tel. 592-18-44                         |
| 24. FRANCISCO MACIAS ALFEREZ<br>Universidad No. 1953-13-202<br>Oxtopulco Universidad<br>México 20, D. F.<br>Tel. 546-95-20 ext. 342 | S.A.R.H.<br>Reforma No. 69   |
| 25. MARIO MEDINA ROSALES<br>Av. Fabián Flores No. 24<br>San Pablo Oztotepec<br>Milpa Alta<br>México 23, D. F.                       | S.A.R.H.<br>Reforma No. 107<br>Col. San Rafael<br>México 4, D. F.<br>Tel. 566-95-58  |
| 26. RAUL MONROY CANDIA<br>Manuel Rivera Cambas No. 54<br>Col. Jardín Balbuena<br>México 9, D. F.<br>Tel. 571-53-08                  | S.A.R.H.<br>Plaza de la República No. 31<br>Col. Tabacalera<br>México 1, D. F.<br>Tel. 535-13-25                             |
| 27. JORGE M. NAVARRO MAYEN<br>Calle San Simón 450-A-2<br>Col. Sta. Ma. Insurgentes<br>México 4, D. F.<br>Tel. 537-52-23             | S.A.R.H.<br>Plaza de la República No. 31<br>Col. Tabacalera<br>México 2, D. F.<br>Tel. 592-18-44                             |
| 28. BRUNO NETTEL HERNANDEZ<br>Clavel 326-7<br>Col. Nueva Sta. María<br>México 16, D. F.<br>Tel. 541-65-67                           | COMISION DE AGUAS DEL VALLE DE MEXICO<br>Balderas No. 55-2° piso<br>Col. Centro<br>México 1, D. F.<br>Tel. 585-50-66 Ext.213 |

DIRECTORIO DE ASISTENTES AL CURSO: "APROVECHAMIENTOS HIDRAULICOS",  
DEL 16 AL 27 DE OCTUBRE DE 1978.

<u>NOMBRE Y DIRECCION</u>	<u>EMPRESA Y DIRECCION</u>
29. ROSALINO ORTIZ MASCOTE Alicia No. 15 Col. Lomas de Chapultepec México 10, D. F. Tel. 517-01-25 Ext. 10	S.A.R.H. Loreto Favela y Río Guadalupe Aragón, D. F. Tel. 517-01-25 Ext. 10
30. JAVIER PALACIOS MONTOYA Juán A. Gutiérrez No. 67-4 Col. Moctezuma México 9, D. F. Tel. 762-32-03	COMISION DEL PLAN NACIONAL HIDRAULICO Tepic No. 40 Col. Roma México 7, D. F. 574-17-50
31. JOSE V. PEREZ ARROYO Div. del Norte 3390-5 Col. Xotepingo México 21, D. F. Tel. 544-95-58	S.A.R.H. Reforma No. 107-1° piso Col. San Rafael México 4, D. F. Tel. 566-91-61
32. G. HECTOR PEREZ MORALES Manuel Payno No. 95-A Col. Obrera México 8, D. F. Tel. 585-45-49	COMISION DEL PLAN NACIONAL HIDRAULICO Tepic No. 40 Col. Roma México 7, D. F. Tel. 574-49-43
33. ANTONIO RAMIREZ RODRIGUEZ Cristal 315 Col. Pensilvania León, Gto. Tel. 2-57-02	LABORATORIO HIDRAULICO Noria Alta s/n Noria Alta Guanajuato, Gto. Tel. 224-52
34. JOSE LUIS RUEDA PALOMEQUE Pino 522-2 Col. Arenal México 15, D. F.	S.A.R.H. Reforma No. 51-17° piso México 1, D. F. Tel. 566-97-69
35. ABELARDO SALAZAR SUMANO Londres No. 217 Col. Coyoacán México 21, D. F. Tel. 554-68-43	COMISION DEL PLAN NACIONAL HIDRAULICO Tepic No. 40 Col. Roma México 7, D. F. Tel. 584-72-45

DIRECTORIO DE ASISTENTES AL CURSO: "APROVECHAMIENTOS HIDRAULICOS",  
DEL 16 AL 27 DE OCTUBRE DE 1978.

<u>NOMBRE Y DIRECCION</u>	<u>EMPRESA Y DIRECCION</u>
36. LEOVIGILDO SOTELO CASTRO Andador 2 de la Hacienda Duplex 7 casa 2 Villa Coapa México 22, D. F. Tel. 594-41-01	S.A.R.H. Ignacio Ramírez No. 20-2° piso Col. Centro México 1, D. F. Tel. 566-26-59
37. JAVIER ENRIQUE TELLEZ NAVARRO Plaza de la República 31-7° piso Col. San Rafael México 4, D. F. Tel. 535-13-25	S.A.R.H. Plaza de la República No. 31-7° piso Col. San Rafael México 4, D. F. Tel. 535-13-25
38. TOMAS TORRES ZAPATA Edif. 35-G-104 Unidad Lindavista México 14, D. F.	S.A.R.H. Plaza de la República No. 31-2° piso Col. Tabacalera México 2, D. F. Tel. 566-49-38
39. JUAN MANUEL TOVAR ALCANTAR Barranca No. 31 Guanajuato, Gto. Tel. 2-17-32	LABORATORIO DE HIDRAULICA Noria Alta S/N Guanajuato, Gto. Tel. 2-24-52
40. ARTURO ALBERTO VARGAS GUZMAN Morelos No. 315 Texcoco, Méx. Tel. 4-01-70	S.A.R.H. Reforma 51-13° piso México 1, D. F. Tel. 546-16-24
41. VELAZQUEZ PEREZ SERGIO Sur 71-B No. 221 Col. Justo Sierra México 13, D. F. Tel. 539-87-83	S.A.R.H. Plaza de la República 31-2° Piso Col. Tabacalera México 1, D. F. Tel. 566-49-38
42. GLORIA VELEZ MORENO Fco. Díaz Covarrubias 82-C-4 Col. San Rafael México 4, D. F.	S.A.R.H. Reforma 51-15° piso México 4, D. F. Tel. 535-54-83

DIRECTORIO DE ASISTENTES AL CURSO: "APROVECHAMIENTOS HIDRAULICOS",  
DEL 16 AL 27 DE OCTUBRE DE 1978.

NOMBRE Y DIRECCION

EMPRESA Y DIRECCION

43. MELITON ALBERTO VILLAGOMEZ RAMIREZ  
Escuela Industrial 295-3  
Col. Industrial  
México 14, D. F.

S.A.R.H.  
Ignacio Ramírez No. 20-2° piso  
Col. Centro  
México 1, D. F.  
Tel. 566-26-59

44. FRANCISCO F. ZAVALA ZAVALA  
Calzada Vallejo 583  
Col. M. de las Salinas  
México 15, D. F.  
Tel. 567-44-79

COMISION DEL PLAN NACIONAL HIDRAULICO  
Tepic No. 40  
Col. Roma  
México 7, D. F.

