DISEÑO SISMICO DE ESTRUCTURAS ESPECIALES

DIRECTORIO DE PROFESORES

1.- PROFR. ARTURO ARIAS SUAREZ
INVESTIGADOR DE TIEMPO COMPLETO
INSTITUTO DE INGENIERIA, UNAM
Ciudad Universitaria
México 20, D.F.
548-54-79

2.- DR. PORFIRIO BALLESTEROS BAROCIO
JEFE DE LA SECCION DE
MECANICA TEORIA Y APLICADA
DIVISION DE ESTUDIOS DE POSGRADO
FACULTAD DE INGENIERIA, UNAM
Ciudad Universitaria
México 20, D.F.
550-52-15 ext. 4490

3.- M. en I. ABRAHAM DIAZ RODRIGUEZ
JEFE DE LA SECCION DE MECANICA DE SUELOS
DIVISION DE ESTUDIOS DE POSGRADO
FACULTAD DE INGENIERIA, UNAM
Ciudad Universitaria
México 20, D.F.
550-52-15 ext. 4490

4.- ING. RAUL FLORES BERRONES
JEFE DE LA OFICINA DE INVESTIGACIONES
DIRECCION GENERAL DE CAMINOS RURALES
SECRETARIA DE ASENTAMIENTOS HUMANOS Y OBRAS PUBLICAS
CENTRO SCOP
Xola y Av. Universidad
México, D.F.
590-27-45

5.- ING. BELSAY MARTINEZ ROMERO
INVESTIGADOR
INSTITUTO DE INGENIERIA, UNAM
Ciudad Universitaria
México 20, D.F.
548-54-79

6.- M. en I. VICTOR PAVON

7.- DR. OCTAVIO RASCON CHAVEZ
INVESTIGADOR
INSTITUTO DE INGENIERIA, UNAM
Ciudad Universitaria
México 20, D.F.
550-52-15 ext. 4473

8.- DR. DANIEL RESENDIZ NUÑEZ
DIRECTOR
INSTITUTO DE INGENIERIA, UNAM
Ciudad Universitaria
México 20, D.F.
548-30-44

9.- ING. NEFTALI RODRIGUEZ CUEVAS
INVESTIGADOR
INSTITUTO DE INGENIERIA, UNAM
Ciudad Universitaria
México 20, D.F.
548-54-79

10.- DR. LEONARDO ZEEVAERT WIECHERS
PROFESOR
SECCION DE MECANICA DE SUELOS
D.E.P.F.I., UNAM
Ciudad Universitaria
México 20, D.F.
550-52-15 ext. 4490

'mrs

DISEÑO SISMICO DE ESTRUCTURAS ESPECIALES

Fechas	Duración	Tema	Profesor
Julio 24	17 a 20 h	PRESAS Y TALUDES	Dr. Daniel Resendiz Núñ
Julio 26	17 a 20 h	PUENTES	M. en I. Víctor Pavón
Julio 31	17 a 20 h	TANQUES Y TUBERIAS	Prof. Arturo Arías Suáre
Agosto 2	17 a 20 h	TORRES Y CHIMENEAS	M. en I. Neftalí Rodrígu Cuevas
Agosto 7	17 a 18:30 h	PROSPECCION SISMICA	Ing. Belsay Martínez
Agosto 7	18:30 a 20 h	Determinación Experimental de las Propiedades Dinámicas de los Suelos. Variación del Módulo de Cortante con el Nivel de Deformación.	M. en I. Abraham Díaz Rodríguez
Agosto 9	17 a 18:30 h	Cimentaciones: Introducción. Vibraciones Verticales Horizontales y de Cabeceo en Cimentaciones.	Dr. Octavio A. Rascón Chávez
Agosto 9	18:30 a 20 h	Interacción Dinámica Suelo Estructura	Dr. Raúl Flores Berrone
Agosto 14	17 a 20 h	Criterios de Diseño Sísmico de Cimentaciones.	Dr. Leonardo Zeevaert W.
Agosto 16	17 a 20 h	CASCARONES	Dr. Porfirio Ballestero Barocio.

centro de educación continua
división de estudios superiores
facultad de ingeniería, unam

V CURSO INTERNACIONAL DE INGENIERIA SISMICA

DISEÑO SISMICO DE ESTRUCTURAS ESPECIALES

PUENTES

M. EN I.VICTOR M. PAVON RODRIGUEZ

JULIO,1979.

CURSO DE DISEÑO SISMICO DE ESTRUCTURAS ESPECIALES
PUENTES.

Julio 26 de 1979. M. en I. Víctor M. Pavón R.

INTRODUCCION:

A raíz del temblor de San Fernando en 1971, ha sido puesta en práctica una extensa revisión a los criterios de análisis y diseño de puentes, a causa de las numerosas y catastróficas fallas en estructuras de puentes. En el Japón, sitio de frecuentes e intensos sismos, el colapso de este tipo de estructuras ha sido también objeto de profunda preocupación.

Es bien sabido, que la falla de la estructura de un puente, además del número de víctimas, en el caso de vehículos que en el momento del colapso total caigan al vacío, se agregan el costo de reposición de una estructura en sí costosa y lo que es peor, los trastornos ocasionados a la economía de una región por la falta de comunicación y transporte, muchas veces de elementos vitales para el auxilio de los afectados por el sismo, en los días inmediatamente después de la ocurrencia del mismo y a largo plazo mientras se repone o repara a la estructura destruída o dañada.

En lo que sigue, se pretende proporcionar algunos lineamientos un tanto someros, por las restricciones de tiempo, de algunos criterios para el establecimiento de las fuerzas, así como del análisis estructural, una vez establecidas éstas en una estructura de puente. Se proporcionan asimismo, recomendaciones para suministrar ductilidad tanto en la superestructura como en los elementos de apoyo y se sugieren algunos detalles constructivos que los expertos en ingeniería de puentes en zonas sísmicas consideran que pueden ser la diferencia entre la supervivencia y la falla catastrófica de una estructura de puente.

En la construcción de puentes, es necesario considerar dos aspectos, a saber: los elementos de apoyo o infraestructura y la cubierta o superestructura. Por tal motivo se fijan las diferencias fundamentales en el análisis de cada una de estos aspectos. Resulta indispensable recalcar que en un puente, las aceleraciones debidas a un sismo, pueden presentarse longitudinalmente al eje del puente, así como transversal y verticalmente.

Puesto que el estudio de las vibraciones en puentes soportados por cables, ya sea dispuestos parabólicamente o en forma recta, representa un capítulo muy especializado en la ingeniería de puentes, no se cubren en esta presentación.

1.- ESPECIFICACIONES PARA PUENTES EN ZONAS SISMICAS.-

CALIFORNIA. Antes del sismo de San Fernando de 1971, poco daño se había ob servado en puentes por el efecto de vibraciones debidas a sismos. Las fallas que habían ocurrido, no sólo en California, sino en general en un ámbito mundial, se limitaban a los siguientes efectos:

(1) Inclinación, asentamiento y volcamiento de las subestructuras,

(2) Desplazamiento de los apoyos y ruptura de los pernos de anclaje, y

(3) Asentamiento de los rellenos en los accesos y daño en los aleros de los muros de retención.

Hasta entonces, los puentes carreteros de California, se analizaban para las cargas sísmicas, empleando un criterio basado, en parte, en los requerimientos para fuerzas laterales aplicados a edificios, criterio fundamentado en el reglamento de la Asociación de Ingenieros de Estructuras y el reglamento Unificado para la Construcción de Edificios (UBC).

Después del sismo de 1971, se observó un considerable efecto de las vibraciones sobre las estructuras de puentes. Este efecto, fue el resultado de aceleraciones de gran magnitud en los sentidos vertical y horizontal, quizá del orden de 0.5 g. (Véase la referencia 8 para Análisis Dinámico).

Posteriormente a un examen a las consecuencias del sismo de San Fernando, se pusieron de evidencia dos aspectos fundamentales:

1.- Algunos puentes en la región del movimiento sísmico más intenso, sobrevivieron con daños desde insignificantes a moderados, y pudieron soportar el tránsito casi de inmediato.

2.- Las fallas y colapsos más espectaculares, tuvieron lugar debido a las deficiencias en los detalles, especialmente en las conexiones.

Basándose en estas conclusiones se tomó la decisión de:

(1) Emprender un programa para desarrollar criterios racionales de diseño que considerasen las características dependientes del lugar y las propiedades vibratorias del puente.

(2) Incorporar de inmediato una mejoría en los detalles de todos los puentes que se diseñasen y constuyesen, y

(3) Evaluar y determinar prioridades para determinar la resistencia a los sismos de los puentes existentes.

En lo que sigue, se resumen las disposiciones sísmicas para puentes en el Estado de California, que ha sido adoptadas para uso nacional en los E.E U.U. por AASHTO.

"Todos los puentes deberán diseñarse para resistir movimientos sísmicos, tomando en consideración la relación del sitio, con fallas activas, la respuesta sísmica de los suelos en el sitio y las características de respuesta dinámica del puente en conjunto, de conformidad con los criterios siguientes."

Método de la Fuerza Estática Equivalente.- En puentes con miembros de apoyo con rigideces aproximadamente iguales, se podrá aplicar una fuerza horizontal equivalente, EQ. La distribución de la fuerza deberá considerar la rigidez de la superestructura y los miembros de apoyo, restricción de los estribos y posición flexionada del puente.

$$EQ = C\ F\ W \qquad (1)$$

en que EQ = fuerza estática horizontal equivalente, aplicada en el centro de gravedad del puente; F = factor de estructuración = 1.0 para puentes con una sola columna o pila, para resistir las fuerzas sísmicas e, = 0.8 para puentes en que una estructura contínua resiste las fuerzas horizontales aplicadas a lo largo de ella; W = la carga muerta total producida por el peso del puente; y

$$C = \frac{A\ R\ S}{Z} \qquad (2)$$

en que C = coeficiente combinado de respuesta. El coeficiente C no será menor que 0.10 para estructuras con A mayor o igual a 0.3 g, y 0.06 para estructuras con A menor a 0.3 g.

Para los diferentes valores de C, véanse, las gráficas publicadas en la Ref. 8 de Análisis Dinámico o en las Especificaciones AASHTO (12a. edición). El valor máximo de C en columnas = 0.25 A = aceleración máxima esperada de la roca en el sitio. (Véase el mapa de riesgo sísmico de los E.E.U.U., en las referencias recién mencionadas.).

Se tomarán valores más exactos de los valores máximos de la aceleración de la roca, en zonas en que se cuenta con mapas de "Aceleraciones Máximas Esperadas en la Roca":

Zona I	A = 0.09 g
Zona II	A = 0.22 g
Zona III	A = 0.50 g

g = aceleración de la gravedad, igual a 9.81 m/seg^2.

R.- Respuesta Normalizada de la Roca. (Véase la figura 2 de la ref. 8 mencionada)

S.- Relación espectral de la amplificación del suelo (Véase la figura 4 de la ref. 8 mencionada.).

El factor ARS combinado, puede verse en la figura 5 de la ref. 8 mencionada.

2.- Reducción por la ductilidad y riesgo asignados.

Se supone un factor de ductilidad entre 4 y 6 para columnas de concreto reforzado detalladas adecuadamente.

Se asigna un coeficiente de reducción del riesgo de 2, en columnas de puentes rígidos, de claros cortos, con periodos fundamentales de 0.6 segundos o menos. A partir de ese valor, el factor de riesgo se disminuye linealmente hasta 1.0 para puentes con un periodo de 3 segundos.

Las reducciones por ductilidad y riesgo combinadas, producen una curva de reducción para columnas, en que Z varía desde 8.0 para periodos de 0.6 seg. hasta 4.0 para periodos de 3 segundos.

$$T = 0.32\sqrt{\frac{W}{P}} \qquad (3)$$

en que T es el periodo del puente, en segundos. P es igual a la fuerza uniforme total que se requiere para provocar una deflexión horizontal máxima de 25 mm. - (1 pulgada) en todo el puente. Podrá calcularse el periodo mediante un análisis dinámico.

Método de Espectro de Respuesta.- En puentes complejos,para el análisis - sísmico se utilizará un enfoque dinámico mediante un espectro de respuesta. Se emplearán las curvas mencionadas para C, o curvas equivalentes, modificadas por el factor F, como espectros de diseño.

Casos Especiales.- Los puentes cercanos a fallas activas, sitios de condiciones geológicas no usuales, puentes no comunes, y aquellos que tengan un periodo-fundamental mayor que 3.0 segundos, se considerarán casos especiales. Estos puentes, requerirán un diseño empleando técnicas actualizadas de sismicidad, respuesta del suelo, y un análisis dinámico.

Diseño de Unidades de Restricción o Trabazón.- Las unidades de restricción - utilizadas para limitar los desplazamientos de la superestructura, tales como tirantes en las articulaciones, topes de cortante, etc., se diseñarán para la fuerza siguiente:

EQ = 0.25 x la carga muerta tributaria - cortante en las columnas debidas a EQ. (4)

La carga muerta tributaria se determina mediante un examen de todo el marco. Por ejemplo: un solo claro, empotrado en un extremo y deslizante en el otro, tendrá a toda la estructura como "carga muerta tributaria" para las fuerzas longitudinales en el estribo empotrado, en tanto que la mitad de la carga muerta de la superestructura actuará en cada estribo, para fuerzas transversales.

Para una estructura de, digamos dos tramos, la longitud total del puente deberá utilizarse como la longitud tributaria en la dirección longitudinal. Puede - reducirse la fuerza resultante, restando el cortante en la columna debido al sismo.

Para trabazones de articulación, úsese 0.25 de la carga muerta del menor de los dos marcos y dedúzcanse los cortantes en las columnas debidas a EQ.

JAPON.

Especificaciones Japonesas Para Puentes Carreteros con Claros Menores A Los 200 Metros.

Las especificaciones básicamente implican métodos de coeficientes sísmicos y proporcionan dos métodos para determinar estos. Uno es el método convencional del coeficiente sísmico que se aplica al diseño de estructuras relativamente rígidas. El otro, es el método del coeficiente sísmico que considera la respuesta estructural que se aplica al diseño de estructuras relativamente flexibles.

Los puntos principales de las especificaciones son como sigue:

1.- El coeficiente sísmico horizontal de diseño para una estructura rígida se determina sistemáticamente, dependiendo de la localización geográfica del sitio donde se ubica el puente, las condiciones del suelo en cada uno de los sitios de la subestructura y la importancia del puente. El coeficiente horizontal de diseño para una estructura flexible se determina dependiendo del período fundamental de cada sistema estructural.

a) En el método del coeficiente sísmico que se emplea para estructuras relativamente rígidas; el coeficiente horizontal de diseño sísmico (k_h) se determinará mediante:

$$k_h = \nu_1 \nu_2 \nu_3 k_o \qquad (5)$$

en que:

k_h.- Coeficiente horizontal de diseño sísmico.

k_o.- Coeficiente horizontal estándar de diseño sísmico = 0.2

ν_1.- Factor sísmico de zona.

ν_2.- Factor de las condiciones del terreno.

ν_3.- Factor de importancia.

Los valores de ν_1 ν_2 ν_3 se muestran en las tablas 1, 2, y 3 respectivamente. Se tomará un valor mínimo de k_h = 0.10

Tabla 1 FACTOR SISMICO DE ZONA ν_1 PARA PUENTES CARRETEROS.

Zona	Valor de ν_1
A	1.00
B	0.85
C	0.70

Las zonas A, B y C es una clasificación dada en el archipiélago Japonés, y en la que burdamente corresponde la zona A a la región oriente, la zona B a la poniente y la C a fracciones al norte de la Isla Hokkaido y al sur poniente de Kyushu.

Tabla 2 FACTOR DE LAS CONDICIONES DEL TERRENO PARA PUENTES CARRETEROS

Grupo	Definiciones (1)	Valor de v_2
1	(1) Suelo de la era Terciaria o más antiguo (que en lo sucesivo se define como roca). (2) Estrato Diluvial (2) con un espesor menor a 10 m. sobre la roca.	0.9
2	(1) Estrato Diluvial (2) con un espesor mayor a 10 m. sobre la roca. (2) Estrato Aluvial (3) con un espesor menor a 10 m. sobre la roca.	1.0
3	Estrato Aluvial (3) con espesor menor a 25 m., que contiene un manto suave de espesor menor a 5 metros. (4)	1.1
4	Otros	1,2

Notas. (1) Puesto que estas definiciones no son muy inteligibles, la clasificación de las condiciones del terreno, se hará considerando adecuadamente el sitio del puente.

La profundidad del manto indicado se mide a partir de la superficie real del terreno.

(2) Un Estrato Diluvial implica un estrato Aluvial denso, tal como un estrato arenoso denso, estrato de grava, o de cantos rodados.

(3) Un estrato Aluvial implica un nuevo manto sedimentario formado por un deslizamiento de tierra.

(4) El estrato Suave se define como "Estrato de suelo cuya capacidad de soporte se desprecia en Diseño Sísmico".

Tabla 3 FACTOR DE IMPORTANCIA v_3 PARA PUENTES CARRETEROS.

Grupo	Definiciones	Valor de v_3
1	Puentes sobre autopistas (carreteras de acceso limitado) carreteras nacionales en general y carreteras principales de prefecturas. Puentes importantes en carreteras de prefecturas generales y municipales.	1.0
2	Otros.	0.8

Nota: El valor de v_3 podrá incrementarse hasta 1.25 para casos especiales en el Grupo I.

b) En el método del coeficiente sísmico modificado que considera la respuesta estructural que se emplea para estructuras relativamente flexibles; tales como - - puentes con pilas de altura mayor a 25 m. con un período fundamental mayor de - 0.5 segundos, el coeficiente horizontal de diseño sísmico K_{hm} resulta igual a:

$$k_{hm} = \beta k_h \qquad (6)$$

en que:

K_{hm} .- Coeficiente horizontal de diseño sísmico en el método del método modificado de coeficiente sísmico que toma en cuenta la respuesta estructural.

k_h .- Coeficiente dado por la ecuación (5)

β .- Factor que depende del período fundamental del puente y que se obtiene de la figura (1).
Para aquellas estructuras cuyos períodos fundamentales son menores a 0.5 segundos, β se puede tomar igual a 1.0.

El valor mínimo de k_{hm} será igual a 0.05.

(2) El coeficiente vertical de diseño sísmico, puede en general considerarse igual a cero, excepto para proporciones especiales tales como apoyos.

(3) El coeficiente horizontal de diseño sísmico para partes de la estructura, suelos y aguas bajo la superficie del terreno, puede considerarse igual a cero.

(4) Las especificaciones establecen las presiones hidrodinámicas durante sismos. En especificaciones relacionadas, se establecen las presiones de tierra durante sismos.

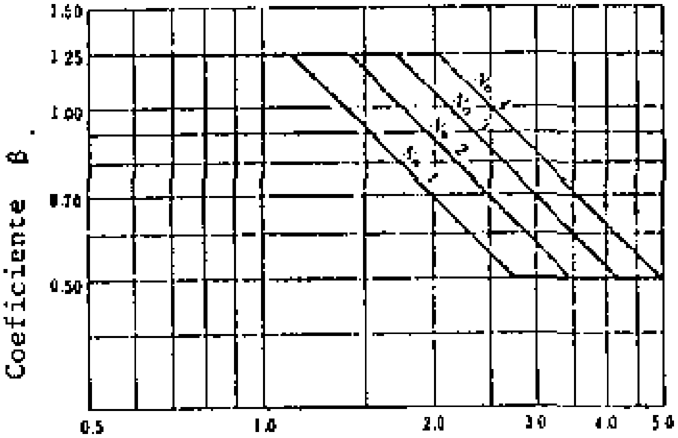
(5) Se da una atención específica a los estratos de suelos muy suaves y estratos de suelos vulnerables a la licuación durante los sismos. En el diseño, se - desprecian las capacidades de carga de estos estratos, con objeto de asegurar una alta resistencia asísmica para las estructuras construidas sobre - ellos.

(6) Se debe dar también una atención especial al diseño de los detalles estructurales , tomando en consideración, el daño previamente experimentado de las - estructuras de puentes. Para este propósito, se prescriben estipulaciones - especiales tanto para los apoyos, como para dispositivos para evitar la caída de las trabes de puentes.

(7) Se permiten incrementos en los esfuerzos permisibles de los materiales en el diseño de estructuras resistentes a sismos, las magnitudes de los incremen-

tos de varios materiales se establecen en las especificaciones relacionadas. Los porcentajes de incrementos son como sigue:

Concreto en estructuras de concreto reforzado	50%
Refuerzo de estructuras de concreto reforzado	50%
Acero estructural para las superestructuras	70%
Acero estructural para subestructuras	50%
Concreto en estructuras de concreto presforzado sometido a fuerzas de compresión.	65%
Suelos para cimentación.	50%



Periodo Natural del Puente, en Segundos.

Figura 1.- COEFICIENTE DE RESPUESTA DINAMICA.

CONSIDERACIONES EN EL ANALISIS SISMICO DINAMICO.- A diferencia de otras formas de cargas dinámicas, en el análisis sísmico, la excitación se aplica en forma de movimiento de los apoyos en vez de fuerzas aplicadas externamente. Por tanto, la respuesta de un sistema sujeto a acciones sísmicas consiste en definir la historia de las fuerzas externas que resultan de un determinado movimiento de los apoyos.

Otra suposición que es usual en el tratamiento de las excitaciones sísmicas es la de que el mismo tipo de movimiento actúa simultáneamente en todos sitios de la cimentación de la estructura estudiada. Si se desprecian los movimientos de rotación del suelo, la suposición anterior equivale a considerar un suelo o roca rígido. Esta hipótesis no es congruente con el concepto de que las ondas - sísmicas se propagan en la corteza terrestre a partir de un punto de una falla. Sin embargo, si las dimensiones de una estructura son pequeñas en relación en la longitud de onda que corresponde al suelo sobre el que descansa la cimentación, la hipótesis puede aceptarse. Sin embargo estructuras de gran longitud, como - puede ser un puente, estarán sujetas a diferentes tipos de movimientos a lo largo de ellas. Aun cuando esta práctica no se toma en cuenta en el análisis de puentes, análisis preliminares han puesto en evidencia que pueden contribuir en forma importante a su respuesta dinámica. Por tanto, es importante, desarrollar métodos de análisis capaces de tomar en cuenta excitaciones múltiples de los apoyos, esto es, diferentes excitaciones sísmicas aplicadas separadamente en los puntos de apoyo.

La otra cuestión que debe considerarse, es la interacción dinámica entre la base de la cimentación y el suelo de apoyo, así como la interacción entre el suelo y los estribos.

En el estudio de la referencia 3 de Análisis Dinámico se hace ver que las fuerzas dinámicas que los rellenos ejercen sobre los estribos, especialmente en puentes de corta longitud, de uno o varios tramos, influyen en forma importante en las fuerzas sísmicas máximas que se originan en la estructura en conjunto.

Asimismo, los puentes del tipo arriba señalado, normalmente tienen columnas cortas muy rígidas que interactúan con el suelo de la cimentación. Si estos efectos se desprecian, ello puede conducir a errores de gran magnitud en la predicción de las cargas de diseño.

Este aspecto de la interacción no se consideran en el presente capítulo de este curso, aunque se trata en forma especial e importante en otros.

EXCITACION SISMICA DEL MOVIMIENTO RIGIDO DEL APOYO .- En el capítulo 3.2 del ejemplo para análisis dinámico de puentes, se hace notar que el movimiento considerado es el de movimiento rígido del apoyo, en tanto que en 4.1 se establece la expresión que difine los factores de participación utilizados en el programa STRUDL.

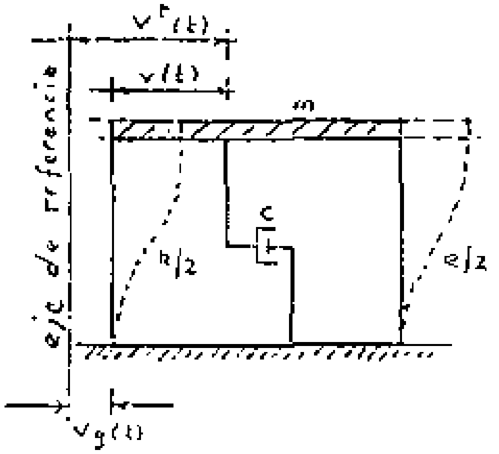
En lo que sigue, se efectuará la derivación de los conceptos señalados, según el capítulo 27 del libro Dynamics of Structures de Clough y Penzien.

Caso 1.- Sistemas de 1 Grado de Libertad.

En un sistema de un grado de libertad (SUGL) con masa discreta, la respuesta sísmica toma la forma:

$$m\,\ddot{v}^t + c\,\dot{v} + k\,v = 0 \qquad (1)$$

en que el superíndice ^{t} indica el desplazamiento total. Véase la figura (a),



(a)

La fuerza sísmica efectiva que produce la respuesta dinámica del sistema, resulta del hecho de que el término que contiene a la fuerza de inercia en la Ec. (1) depende del movimiento total, en tanto que las fuerzas de amortiguamiento y elástica, dependen del movimiento relativo.

Si se observa de la fig. (a) que $v^t = v_g + v$, en que v_g es el desplazamiento del terreno y v es el desplazamiento de la masa relativa al terreno, la ecuación (1) puede escribirse en términos de este movimiento relativo, como:

$$m\,\ddot{v} + c\,\dot{v} + k\,v = p_{ef} \qquad (2)$$

en que la fuerza efectiva está dada por:

$$p_{ef} = -m\,\ddot{v}_g \qquad (3)$$

Si se emplea la integral de Duhamel, (si bien podría emplearse una integración númerica paso a paso, como se señala en el ejemplo presentado más adelante) el que ya se ha discutido en otros capítulos de este curso de Ingeniería Sísmica, los desplazamientos relativos, indicados en la Ec. (2), quedan:

$$v\ (t) = \frac{1}{\omega}\, V\ (t) \qquad (4)$$

en que ω es la frecuencia natural circular del sistema y V(t) es la integral de respuesta del sismo o integral de Duhamel, que como ya se ha visto, se define por:

$$V(t) = \int_0^t \ddot{v}_g\ (\tau)\ \exp\left[-\xi\omega\ (t-\tau)\right]\ \text{sen}\ \omega\ (t-\tau)\ d\tau \qquad (5)$$

Nótese que se introduce la frecuencia no amortiguada en vez de la correspondiente amortiguada, pero la diferencia al fin y al cabo es de poca cuantía y más si se toman en cuenta las incertidumbres relativas al movimiento del terreno. También, se ha hecho caso omiso del signo negativo del 2º miembro de la Ec. 3, pues el signo o sentido del desplazamiento es irrelevante en el análisis sísmico.

De primordial interés en el análisis sísmico es el de evaluar el movimiento relativo que se indica en la Ec. 4, así como la fuerza asociada a las deformaciones elásticas. Por lo tanto, se tiene:

$$f_s(t) = k\ v(t) \qquad (6a)$$

en que $f_s(t)$ es la fuerza desarrollada en un sistema elástico con rigidez k y que experimenta una deformación v(t). Tanto f_s como v, son por supuesto, función del tiempo en un problema de respuesta sísmica y por ello se indican como $f_s(t)$ y v(t). En una vibración libre no amortiguada, la ecuación de equilibrio dinámico, toma la forma:

$$f_I + f_s = 0 \qquad (7)$$

en que para movimientos armónicos:

$$f_I = m\ \ddot{v}(t) = -m\ \omega^2\ v(t) \qquad (8)$$

Substituyendo (4) y (8) en (7), la fuerza elástica:

$$f_s(t) = m\ \omega\ V(t) \qquad (6b)$$

También podría haberse obtenido (6b) a partir de 6a si se recuerda que $\omega^2 = k/m$.

Si se supone que el amortiguamiento contribuye poco al equilibrio en la Ec. (1), y se desprecia el término correspondiente, la aceleración total está aproximadamente dada por:

$$\ddot{v}^t(t) = -\omega^2\ v(t) \doteq \omega\ V(t) \qquad (9)$$

Las ecs. 4, 6b y 9 proporcionan las diferentes formas de la respuesta del SUGL, en cada una de ellas aparece la integral V(t). La evaluación numérica de esta integral para un sismo dado, con objeto de obtener toda la historia de la respuesta de una estructura dada, involucra una considerable labor, pero si por otra parte se cuenta con el espectro de respuesta del movimiento del terreno, resulta muy sencillo obtener a partir de él la respuesta máxima del sistema.

Por definición, la velocidad espectral representa el valor máximo de la integral de Duhamel, esto es:

$$S_v\ (\xi, T) \doteq V_{max}\ (\xi, T) \qquad (10)$$

en que S_v es la llamada seudovelocidad, toda vez que la integral del miembro de la derecha tiene unidades de velocidad.

Las respuestas máximas de la estructura se pueden obtener directamente del espectro de respuesta de velocidades, para los valores correspondientes al periodo y factor de amortiguamiento de la estructura. Se tiene:

$$v_{max} = \frac{T}{2\pi} S_v (\xi, T) = S_d (\xi, T)$$

$$f_{s\ max} = m \frac{2\pi}{T} S_v (\xi, T) = m S_a (\xi, T)$$

en que:

$$S_a = \frac{2\pi}{T} S_v (\xi, T) = \ddot{v}^t_{max}$$

o en términos de la frecuencia circular:

$$v_{max} = \frac{1}{\omega} S_v (\xi, T) = S_d (\xi, T)$$

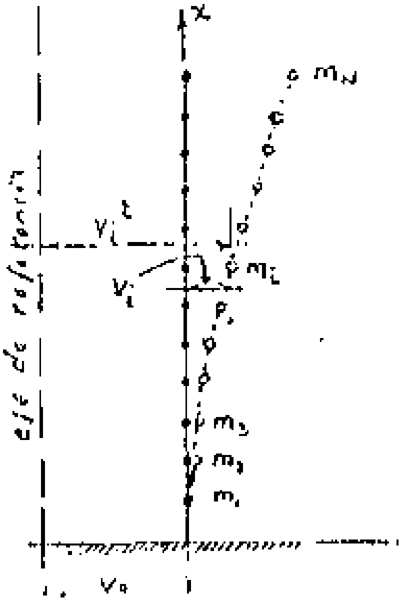
$$f_{s\ max} = m\, \omega\, S_v (\xi, T) = m S_a (\xi, T)$$

lo anterior significa que el deplazamiento en el espectro de respuesta proporciona el desplazamiento máximo, el producto de la masa por la aceleración espectral o seudo aceleración, proporciona la fuerza elástica máxima, en tanto que la aceleración espectral es una aproximación de la aceleración máxima.

Caso 2.- Sistemas Discretos de Varios Grados de Libertad.

Análogamente el análisis anterior, para el caso de varias masas concentradas, se puede proceder a la formulación de la respuesta sísmica utilizando notación matricial.

Así las ecuaciones del movimiento para la estructura mostrada en (b) se pueden escribir en forma enteramente similar a la Ec. (1)'



(b)

$$m\,\ddot{v}^t + c\,\dot{v} + k\,v = 0 \qquad (11)$$

y nuevamente la fuerza sísmica efectiva se puede derivar expresando los desplazamientos totales, como la suma de los movimientos relativos más los desplazamientos que resultan directamente de los movimientos del apoyo. Para el sistema de la figura (b) esta relación se puede anotar:

$$v^t = v + \{1\}\,v_g \qquad (12)$$

en que $\{1\}$ representan una columna de unos. Este vector expresa el hecho de que una translación estática unitaria de la base de la estructura, produce directamente una desplazamiento unitario de todos los grados de libertad.

Substituyendo (12) en (11), se llega a las ecuaciones de respuesta relativas del movimiento.

$$m\,\ddot{v} + c\,\dot{v} + k\,v = p_{ef}\,(t) \qquad (13)$$

en que:

$$p_{ef}\,(t) = -\,m\,\{1\}\,\ddot{v}_g\,(t) \qquad (14)$$

Si se transforma el sistema (13) a uno de coordenadas normales, el resultado es una serie de N ecuaciones modales desacopladas de la forma:

$$M_n\,\ddot{Y}_n + C_n\,\dot{Y}_n + K_n\,Y_n = P_n\,(t) \qquad (15)$$

en que M_n , C_n y K_n , son las propiedades generalizadas asociadas con el modo n, dadas por:

$$M_n = \phi_n^t\;m\;\phi_n$$

$$C_n = \phi_n^t\;c\;\phi_n = 2\,\xi_n\,\omega_n\,M_n$$

$$K_n = \phi_n^t\;k\;\phi_n = \omega_n^2\,M_n$$

Y_n es la amplitud de la respuesta modal, y la fuerza generalizada resultante de la excitación sísmica:

$$P_n = \phi_n^t\;m\,\{1\} = \pounds_n\,\ddot{v}_g(t) \qquad (16)$$

en que para la estructura de la figura (b) el factor de participación modal dado por:

$$\pounds_n = \phi_n^t\,.\,m\,\{1\} \qquad (17)$$

En las expresiones anteriores ϕ_n es la forma modal del enésimo modo. Para cada uno de los modos de la estructura, la respuesta máxima puede determinarse directamente del espectro de respuesta, como se señala para el SUGL.

Por ejemplo, el desplazamiento máximo en el modo enésimo se puede obtener de:

$$V_{n,\,max} = \phi_n \frac{\mathcal{L}_n}{M_n} S_d\,(\xi_n, T_n) \qquad (\ 18\ )$$

en que $S_d\ (\xi_n, T_n)$ es el desplazamiento espectral que corresponde al amortiguamiento y período del enésimo modo de vibrar. Asimismo el vector de la fuerza elástica máxima en el modo enésimo queda dado por:

$$f_{s_n},\,max = m\,\phi_n \frac{\mathcal{L}_n}{M_n} S_a\,(\xi_n, T_n) \qquad (\ 19\ )$$

en que $S_a\ (\xi_n, T_n)$ es la aceleración espectral o seudo aceleración para el modo n.

Con todo, la respuesta total máxima no puede, en general, obtenerse con sólo sumar los máximos modales, ya que éstos no ocurren al mismo tiempo. Casi siempre, cuando un modo logra su respuesta máxima, las otras respuestas modales son menores que el máximo en cada una de ellas. Por consiguiente, aun cuando la superposición de los valores espectrales modales, proporciona un límite superior para la respuesta total, generalmente sobreestima al máximo en forma considerable.

Para obtener una estimación razonable de la respuesta máxima de los valores espectrales, la fórmula más sencilla y usada es la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de las respuestas modales.

Así de la Ec.(18), el deplazamiento total vale aproximadamente,

$$V_{max} \doteq \sqrt{(V_1)^2_{max} + (V_2)^2_{max} + \ldots} \qquad (\ 20\ )$$

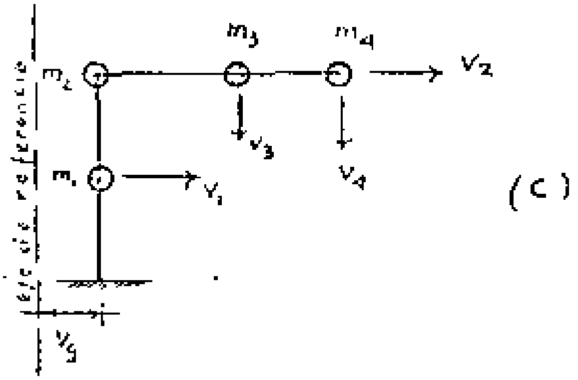
en que los términos bajo el radical representan vectores de los desplazamientos modales al cuadrado. En forma similar, las fuerzas máximas en cada masa concentrada, se puede obtener aproximadamente de los máximos modales de la Ec.(19), como sigue:

$$f_{s,max} \doteq \sqrt{(f_{s_1})^2_{max} + (f_{s_2})^2_{max} + \ldots} \qquad (\ 21\ )$$

En las Ecs. (18) y (19) sólo necesitan incluirse las contribuciones modales importantes y ya que cada término se eleva al cuadrado, en general, es necesario considerar tan sólo unos cuantos modos.

Al principio de este caso 2, se señaló que el tipo de sistema mostrado en la fi gura (b) con un eje vertical sujeto a la excitación horizontal, representa una clave especial de problema sísmico, para el cual la relación entre los movimientos totales y relativos toma la forma de la Ec. 12.

En un caso más general, en que no todos los desplazamientos relativos se miden paralelos al movimiento del terreno, como se ilustra en la figura (c), el desplazamiento total se puede expresar como la suma de los desplazamientos,



relativos y los seudoelásticos v^s que resultan de un desplazamiento estático del apoyo, esto es:

$$v^t = v + v^s \qquad (22)$$

Los desplazamientos seudoestáticos se pueden expresar convenientemente mediante el sector de coeficientes de influencia N , que representa los desplazamientos resultantes de un desplazamiento unitario del apoyo; así:

$$v^s = N v_g \quad y \quad v^t = v + N v_g \qquad (23)$$

Si se comparan las Ecs. (12) y (21), es evidente que N es un vector de unos para la estructura de la figura (a) y para la de la figura (c) estará dado por:

$$N^t = 1 \ 1 \ 0 \ 0$$

Esta generalización afecta sólamente al sector de fuerza efectiva generado por el movimiento sísmico; esto es, en lugar de la Ec. (14) que se derivó para el vector de influencia de desplazamientos estáticos especial, la expresión generalizada, es:

$$P_{ef} \ f \ t) = - m N \ddot{v}_g(t) \qquad (24)$$

Y análogamente, la forma general del factor modal de la excitación sísmica que remplaza a la Ec. (17) es:

$$\mathcal{L}_n = \phi_n^t \, m \, N \qquad (25)$$

Con esta forma generalizada de $\mathcal{L}_n$, las Ecs. (18) y (19) son aplicadas a formas generales de estructuras con masas concentradas, como la que se tiene para el ejemplo que se presenta enseguida y en que la Ec.(25), justifica la ecuación 4.1 del propio ejemplo.

Debe hacerse notar que las fuerzas elásticas actúan en las direcciones de los desplazamientos correspondientes, v ; por consiguiente, tendrán que derivarse nuevas expresiones para las fuerzas resultantes (tales como cortante en la base y momento), que sean apropiadas a la configuración estructural dada.

EJEMPLO DE APLICACION PARA ANALISIS DINAMICO.

1.- Se presenta el ejemplo de un puente estudiado por el Earthquake Engineering Research Center de la Universidad de California (Véase la nota al respecto, en la bibliografía de Análisis Dinámico).

En este ejemplo, se utilizan tres procedimientos de análisis, a saber: el método de espectro de respuesta; análisis lineal historia-tiempo y análisis no lineal de historia-tiempo.

Puesto que el comportamiento poselástico no se considera específicamente, se aplica un factor de ductilidad para reducir las fuerzas obtenidas con el análisis lineal de espectro de respuesta. Los factores de ductilidad utilizados en el análisis de puentes, han sido extrapolados de las investigaciones en estructuras de edificios, en razón a que poco se sabe de la ductilidad en puentes.

En este ejemplo, no se ha considerado la interacción entre el suelo y la estructura.

2.- Propiedades del Puente.-

Es una estructura de seis tramos, de trabe en cajón de concreto reforzado, con una junta de expansión intermedia localizada a la mitad entre estribos.

La longitud total del puente es de 211.70 m., con longitudes de tramos 30.5, 43.6, 35.7, 35.7, 35.7 y 30.5 m. El puente describe un curva relativamente cerrada. Los marcos están constituidos de una sola columna de sección constante. Estas son relativamente cortas y rígidas y de alturas aproximadamente iguales. Los ejes principales de las columnas son radiales y tangentes a la superestructura en curva. En la tabla2, se muestran las propiedades de las columnas.

Las articulaciones en la junta de expansión, son un diseño típico en California, con cojinetes de apoyo elastoméricos y unidades de restricción o trabazón de cable de acero. Debido a la curvatura y la longitud relativamente corta de la cubierta, son pequeñas las holguras en las unidades de restricción y en el asiento de la junta de expansión. Las propiedades de la junta de expansión se muestran en la tabla 3.

Esta puente fue diseñado por el Departamento de Transportación de California. Este tipo de puente es común en California y es el que típicamente se emplea en los intercambios de tránsito en los viaductos de vía rápida.

En el temblor de San Fernando de 1971, algunas de las fallas más espectaculares se presentaron en este tipo de puentes. Algunas de las principales causas de las fallas resultantes, fueron la separación de las articulaciones de las juntas de expansión y como resultado, todas las estructuras de este tipo, diseñadas después de este temblor, incluyendo la del ejemplo, han sido dotadas con unidades de trabazón diseñadas para evitar la separación. Estas unidades deben tener una holgura que permita movimientos de temperatura, etc.

En la figura 1 se muestra una articulación en la junta de expansión.

3.- Métodos de Análisis.-

3.1 Programas de Computadora.-

Se efectuaron 3 tipos de análisis.

Análisis Modal de Especto de Respuesta (E.R.)
Historia-Tiempo Lineal (H-T.L.)
Historia-Tiempo No Lineal (H-T. N.L.)

STRUDL para los análisis de espectro de respuesta e historia-tiempo lineal.

NEABS para el análisis no lineal.

Este programa utiliza integración paso a paso con un comportamiento lineal seccionado (piecewise) para cada incremento del tiempo.

BSAP como revisión de NEABS.

3.2 Excitación Sísmica.

Se utilizó el movimiento rígido del apoyo y la historia-tiempo del movimiento del terreno S 18 + desarrollado por Seed y Idress (9) para la simulación de un sismo con magnitud de Richter 8 +. El espectro de respuesta se generó en STRUDL para 5 por ciento de amortiguamiento. La gráfica historia-tiempo y el correspondiente espectro de respuesta se muestran en las figuras (6) y (7) respectivamente. Este movimiento del terreno se aplicó a los puentes en dos direcciones ortogonales. El movimiento longitudinal se introdujo en la dirección paralela a una linea recta entre los estribos. El movimiento transversal fue perpendicular al longitudinal.

Debido a los costos involucrados en el análisis no lineal y las pruebas pre vias para determinar el instante más crítico después de iniciado el movimiento, algunos de los análisis no se corrieron para toda la duración del movimiento del terreno. La tabla 4 muestra la duración del movimiento del terreno usado en cada análisis.

Se estudiaron, por lo tanto, 6 casos para el puente: Tres tipos de análisis con dos direcciones del movimiento.

3.3. Modelado.-

La cubierta y columnas se modelaron como miembros de marcos en el espacio. Las masas en la cubierta se discretizaron en los cuartos del claro. Las masas de las columnas se discretizaron en los tercios del claro. Las bases de las columnas se supusieron empotradas en las zapatas. Véase la figura 5

Se usó un programa de generación estructural para desarrollar el modelo para STRUDL. Este programa modela la libertad del movimiento en los estribos - y articulaciones empleando relevadores (releases) de los miembros en un miembro corto en estos sitios. Esto se hace para asegurarse que la masa de la superestructura se discretiza en la porción apropiada a la superestructura.

La porción curva de la superestructura se modela con miembros rectos de marcos en el espacio entre cuerdas, ya que STRUDL no tiene opción para miembros curvos.

La articulación para STRUDL se modela liberando las fuerzas axiales y los momentos transversal y longitudinal en la articulación. El efecto de las trabazones se representa colocando miembros de marcos espaciales excéntricamente -- transversales entre ambos miembros de la superestructura (figura 4). Esta idealización supone que no hay holgura y que existen tensión y compresión en las trabazones.

El ensamble básico de miembros en BSAP y NEABS es similar al empleado por STRUDL, con unas cuantas excepciones. Primero, la superestructura curva se representa por vigas en curva circular. En segundo lugar, la libertad en los estribos y en la junta de expansión se modelan con elementos especiales de resortes en la cimentación y la junta de expansión. Estos elementos hacen innecesarios usar miembros cortos de marcos en el espacio para asegurar una discretización apropiada de la masa.

El elemento de la junta de expansión de NEABS, tiene parámetros no lineales que deben alimentarse. En los planos, se muestran los valores de diseño para la holgura de asiento y liga. En realidad, estos valores varían dependiendo de factores tales como la temperatura y contracción. Las rigideces de las trabazones de cables, se calcularon suponiendo un módulo efectivo de Young de 970 ton/cm^2. La fuerza de fluencia en una trabazón típica de 19 mm. se tomó igual a

13.89 ton. La rigidez al cortante de las almohadillas elastoméricas de apoyo, se calcularon con base a un módulo al cortante supuesto de 9.51 kg/cm^2. El coeficiente de fricción se supuso igual a 0.4. Para las placas en deslizamiento lubricadas, la rigidez al cortante se supuso muy alta y la fricción muy baja.

Para propósitos de modelar el impacto de la superestructura, el resorte de impacto se supuso con rigidez axial de la sección adyacente más corta de la superestructura. Se usaron elementos no lineales de columna en los lugares donde puede esperarse que fluya ésta.

En NEABS, las columnas no lineales se modelaron introduciendo parámetros obtenidos de un programa para el análisis de columnas llamado YIELD. Se requieren las constantes normalizadoras que definen la superficie de fluencia.

4. Resultados del Análisis.

4.1. Períodos y factores de participación.

El período de la estructura se determinó usando STRUDL y BSAP.

Los factores de participación se calcularon con la expresión:

$$F.P. = \phi^{T} \; M \; N$$

en que ϕ es la matriz de eigenvectores, normalizados respecto a la masa unitaria.

M es la matriz de inercia unitaria.

N vectores de cuerpo rígido, que relacionan el movimiento en cada junta - al movimiento del apoyo.

4.2. Reacciones de Carga Muerta.-

Se calcularon en la base de las columnas con el programa NEABS antes de efectuar el análisis no lineal.

La estructura se analiza en 3 dimensiones para determinar las fuerzas por carga muerta en los miembros. El programa NEABS utiliza internamente estos valores, puesto que el efecto de la carga muerta se debe considerar para determinar la respuesta no lineal.

Para un análisis elástico, esto no es necesario. Por lo tanto, con objeto de hacer más significativa la comparación de resultados, fue necesario adicionar las fuerzas en los miembros debidas a la carga muerta, a las fuerzas sísmicas obtenidas de un análisis elástico. Las reacciones de carga muerta y los momentos correspondientes, se proporcionan en la base de la columna en sistema de coordenadas local, en que la dirección longitudinal se define como la tangente o paralela a la superestructura y la transversal es radial o perpendicular a ella.

4.3. Momento Máximo en la Base de la Columna y el Cortante Correspondiente.-

Se comparan los momentos y cortantes en las columnas para los 3 tipos de análisis. Los momentos y cortantes de carga muerta se suman a los resultados del análisis elástico. Los momentos de fluencia que se muestran en la gráfica, se tomaron de la superficie de interacción de fluencia de las columnas, suponiendo una reacción vertical igual a la reacción de carga muerta.

Los momentos y cortantes están dados en el sistema local de coordenadas. Las aceleraciones del terreno debidas al sismo, se aplican en la dirección paralela a una línea recta entre los estribos.

La excitación transversal es a 90° con la longitudinal.

La práctica actual consiste en la aplicación individual de las excitaciones en las dos direcciones horizontales ortogonales, para determinar las fuerzas máximas en los miembros. No se acostumbra superponer los efectos del sismo en las dos direcciones horizontales o la vertical.

Los efectos de acoplamiento de que se informa en estos resultados sugieren que las disposiciones para el diseño sísmico de puentes, deben considerar el efecto de la aplicación simultánea de componentes en las 3 direcciones ortogonales.

Los resultados para el espectro de respuesta son la raíz cuadrada media (RCM) de las respuestas modales individuales. Los valores que se presentan tanto para el espectro de respuesta como el análisis historia-tiempo, son para los máximos en el tiempo, que no necesariamente ocurren en la columna al mismo tiempo. Estos valores son la envolvente de las peores condiciones que serían más que razonables para usarse bajo los criterios actuales de diseño sísmico, para el diseño de la columna. Los momentos no lineales resultantes representan valores máximos trazados en la superficie de fluencia y no son de utilidad directa para el diseñador, excepto para verificar los valores supuestos de las demandas de ductilidad.

4.4. Fuerzas Transversales Máximas en los Topes de Cortante.-

Se proporcionan las fuerzas cortantes transversales máximas en los topes de cortante y en los estribos. Se consideran a los miembros conectados a los estribos, como empotrados en la dirección transversal en el análisis lineal como en el no lineal Las articulaciones intermedias se conectan con miembros horizontales que poseen compatibilidad de desplazamientos en la dirección transversal, para el análisis lineal. Para el modelo no lineal se utiliza un resorte rígido para conectar los miembros que concurren a la articulación, en la dirección transversal.

4.5. Desplazamientos Máximos de la Cubierta.-

Se han tabulado los desplazamientos máximos horizontal en la cubierta en los puntos sobre los apoyos. Los resultados son máximos para cada localización y cada dirección y no necesariamente ocurren al mismo tiempo. Todos los resultados han sido proporcionados en el sistema de coordenadas globales.

4.6. Movimiento de la Articulación y Fuerzas de Restricción Máximas.

Los movimientos máximos de la articulación están dados donde se localizan las trabazones de la articulación que están cerca de las orillas izquierda y derecha de la cubierta. Para el análisis elástico se proporcionan a los movimientos como valores absolutos y pueden representar ya sea una oclusión o una separación en las juntas de expansión. Se tabulan las fuerzas máximas de trabazón para los correspondientes movimientos de restricción. Para el análisis elástico las fuerzas de trabazón son valores absolutos y por consiguiente, pueden ser tensión o compresión. Sin embargo, el análisis no lineal, considera el hecho de que la compresión no puede tener en la trabazón. Además, se incluye el efecto de las fuerzas de fluencia en la trabazón. Por lo tanto, el análisis no lineal es el enfoque más racional para determinar las fuerzas efectivas o reales en las trabazones. Como en los otros casos, todos los valores son máximos y no necesariamente ocurren al mismo tiempo.

4.7. Desplazamiento de la Cubierta en Primera Fluencia.-

Los desplazamientos de la cubierta ante el primer signo de fluencia en una o más de las columnas, se han anotado en la tabla 14 a partir del análisis no lineal historia - tiempo. Estos desplazamientos ocurren sobre los marcos y se proporcionan en el sistema de coordenadas globales.

5. Interpretación de los Resultados.-

5.1. Período de la Estructura y Factores de Participación.

Existe una buena concordancia entre los resultados de STRUDL y BSAP en la determinación de los primeros 10 modos de vibración. El programa STRUDL utiliza el método Householder - Ortega - Wielandt para la solución del problema de eigenvalores.

BSAP resuelve este problema bien sea mediante una solución de rastreo de determinantes o una interacción en un subespacio, dependiendo del número de grados de libertad.

La diferencia principal entre las dos idealizaciones estructurales fue que la estructura del puente para STRUDL, consiste de ocho miembros rectos en el espacio y -- BSAP empleó miembros curvos en el espacio. La gran concordancia en los períodos estructurales indican que el modelo con miembros rectos proporciona resultados satisfactorios para el diseño de las columnas con las discretizaciones empleadas, por otra parte, son las que se usan normalmente para simular en un análisis dinámico los efectos de inercia en la cubierta del puente.

Los factores de participación tabulados, representan la magnitud en que el movimiento del sismo dirigido en las direcciones de las coordenadas de referencia tiende a excitar la respuesta en el modo de vibrar dado.

Períodos de la estructura para los 10 primeros modos (tabla 7). Se concentran en un rango de 0.40 a 0.22.

Los factores de participación para el 2° y 3° modo indican que existe acoplamiento en las dos direcciones horizontales.

Este efecto de acoplamiento es más pronunciado para este tipo de puente, debido al alto grado de curvatura de la cubierta.

Los períodos de ambos modos difieren entre sí tan sólo en 0.004 segundos. Ambos períodos tienen como resultado una respuesta prácticamente máxima para el sistema S I8 +, lo que indica que estos modos simultáneamente contribuyen en forma importante a la respuesta total de este puente.

Los signos de los factores de participación para el 2° y 3° modo indican una respuesta fuera de fase debida a la excitación transversal.

El primer modo de vibrar está acoplado en las direcciones vertical y horizontal. Como se muestra en el trazo de este modo, la respuesta vertical predomina a la izquierda de la articulación intermedia donde las longitudes de los tramos están en cierto modo, fuera de balance.

El alto grado de acoplamiento de este puente, indica que el criterio de diseño debe considerar un método que combine la respuesta debida al movimiento en las tres direcciones ortogonales en este tipo de puentes, o para estructuras con efectos de acoplamiento similares.

5.2. Reacciones por Carga Muerta.-

Las reacciones en las columnas debidas a la carga muerta que se tabulan en la tabla 8 son iguales a aproximadamente el 10% de la capacidad última por carga axial de las columnas. Este es generalmente el caso típico para la mayoría de las estructuras de puente.

La presencia de pequeños momentos en la dirección transversal se debe a la curvatura de la superestructura.

Los momentos longitudinales de carga muerta son en general muy pequeños.

5.3. Momentos Máximos en la Base de las Columnas y los Correspondientes Cortantes.

Los momentos flexionantes máximos, transversales y longitudinales en la base -

de las columnas, se tabulan separadamente para las excitaciones longitudinales y transversales a los correspondientes cortantes en las columnas, encerrados en paréntesis, se muestran abajo de los momentos.

Los momentos se tabulan para los tres tipos de análisis.

Los momentos máximos en las direcciones transversal y longitudinal para el análisis de historia-tiempo en un cierto instante, no necesariamente ocurren al mismo tiempo. Los valores mostrados son las componentes máximas individuales que ocurrieron durante el análisis de historia-tiempo. Estos valores son en general los que deben utilizarse para el diseño. Aun cuando resulte algo conservador, las cargas para diseño deben ser la envolvente del caso máximo.

Al diseñar una columna para los resultados del análisis del espectro de respuesta, el diseñador utiliza por regla general, los valores individuales de la raíz cuadrada media para los momentos flexionantes en las dos direcciones ortogonales. Esto también es en general conservador, pero constituirá una envolvente de las máximas condiciones instantáneas de carga.

Los momentos de fluencia tabulados en las direcciones transversal y longitudinal corresponden a las fuerzas axiales por carga muerta.

Los momentos máximos que se presentan durante el análisis no lineal, incluyen el efecto de la carga muerta y de las cargas axiales impuestas por el análisis de historia-tiempo. Los momentos máximos tabulados para el análisis no lineal difieren de los momentos de fluencia tabulados debido a la fuerza axial instantánea y el momento ortogonal correspondiente.

Las demandas de ductilidad máxima local o rotacional anotadas en la tabla 16, se calcularon usando el procedimiento básico de Tseng y Penzien (4). La rotación de fluencia en flexión de las columnas, y las correspondientes longitudes de articulación plástica se muestran en la tabla 15.

5.3.1. Excitación transversal.-

En la tabla 5 se resumen los casos estudiados que se describen en el capítulo 3. Los números impares corresponden a las excitaciones transversales. La dirección transversal se toma normal a la cuerda que conecta ambos estribos. Las cargas sísmicas aplicadas en la dirección transversal generalmente generan el máximo momento en la columna en los marcos de una sola columna debido a la flexión en voladizo de ésta. Este caso recibe, por lo general una consideración adicional en el diseño, debido a una inestabilidad potencial, a causa de la ausencia de miembros redundantes en la dirección transversal. Ello se toma en cuenta, reduciendo en esa dirección transversal, el factor de ductilidad permisible.

En la tabla 9, casos (1,3 y 5) se muestran los momentos máximos y las correspondientes cortantes en la base de la columna. Los resultados para el espectro de respuesta para los momentos transversales son menores que para el análisis lineal de historia-tiempo. Las diferencias van desde un 21 por ciento en el marco 2, hasta 11 por ciento en el marco 6. Estas diferencias en el momento transversal son el resultado de reemplazar el dominio en el tiempo por una técnica de promedios estadísticos. Cuando dos modos se presentan muy cercanos entre sí, cerca del pico o máximo del espectro de respuesta, los dos resultados modales, se deben sumar algebraicamente.

Las diferencias entre los resultados de la R.C.M. e H.T.L. para el momento longitudinal son en cierto modo erráticos-

Los resultados del espectro de respuesta para los momentos longitudinales son por lo general mayores, escepto en el marco 3 donde son menores en un 63%. La máxima diferencia se presenta en el marco 2 en que el resultado del espectro de respuesta es 94 por ciento mayor que el momento obtenido del análisis H.T.L. Puesto que no hay una tendencia congruente, se presenta remota la posibilidad de utilizar otros medios para combinar estadísticamente los resultados modales del espectro de respuesta. Más aún, si se modifica la práctica actual de diseño para que incluya la combinación de un porcentaje de los resultados para un movimiento horizontal ortogonal, será virtualmente imposible obtener resultados realistas para este tipo de puente, mediante un enfoque en el espectro de respuesta.

El análisis H.T.N.L. cuyos resultados se muestran en la tabla 16 indica que se ha presentado fluencia en todas las columnas, a causa del movimiento transversal. Las rotaciones de fluencia en flexión se calcularon utilizando los valores de la tabla 15.

Aun cuando la demanda máxima de ductilidad rotacional de la tabla 16, en el marco 4, queda bien abajo de la ductilidad que generalmente se considera disponible en la columna, el trazo historia-tiempo de las deformaciones no lineales, indican que han ocurrido varias excursiones en el rango inelástico. Con este grado de fluencia cíclica, es muy posible que tenga lugar un daño estructural de consideración con una degradación en la rigidez de las columnas como resultado. Esto antepone la duda en cuanto a la validez de la demanda de máxima ductilidad como una medida de la habilidad para soportar daño ante cargas sísmicas. También subraya la importancia de considerar la degradación de la rigidez en el análisis.

La reducción en los momentos derivada de un análisis lineal historia-tiempo indican que un factor de reducción de ductilidad entre 3 y 4 ha tenido como resultado un diseño similar de columnas para esta carga sísmica. Sin embargo, la práctica actual es usar un factor de reducción de 3 para marcos de una sola columna multiplicados por -

un factor de riesgo de 2 para estructuras en este rango de período. Esto hubiese resultado en una capacidad en el momento de la columna, abajo del valor usado en el análisis no lineal. Con la cantidad de fluencia cíclica que ocurrió en el caso 5, resulta dudoso que la estructura en la forma analizada se hubiera comportado satisfactoriamente durante el sismo S 18 +, y mucho menos una estructura más débil.

Una de las razones principales de las fluencias cíclicas tan extensas de esta estructura fue su rango de períodos que resultaron en un mayor número de excursiones no lineales. Sin embargo, la práctica actual especifica una reducción del riesgo en estructuras de período corto. Los resultados no lineales para este puente indican que esta práctica debe reconsiderarse.

Cuando fluyen las columnas, sus cortantes se reducen con objeto de satisfacer la estática. Además, las fuerzas cortantes se transfieren a los estribos rígidos a través de la superestructura. Si se considera la reducción en la suma de las fuerzas cortantes ocasionadas por la fluencia de las columnas, el nivel total de la fuerza se reduce por un factor de aproximadamente 2.5 para este puente.

.3.2. Excitación Longitudinal.-

Los casos señalados con números pares corresponden a las excitaciones en el sentido longitudinal. Este es paralelo a la cuerda que conecta los estribos. En general el movimiento longitudinal del terreno no es tan crítico como el transversal, lo que se debe a los siguientes factores:

- Las columnas participan en forma más uniforme porque están conectadas por una cubierta axialmente rígida.
- La continuidad de las columnas y la superestructura permite a las columnas tomar una mayor fuerza cortante sin fluir en flexión.
- El efecto de otras condiciones de carga, tales como la carga muerta, viva, movimientos térmicos, etc. tienden a afectar el diseño de las columnas en esta dirección más que en la dirección transversal.

La continuidad de la superestructura con la subestructura hace más redundante el sistema resistente para cargas longitudinales. Esto se refleja en los reglamentos de diseño en mayores factores de reducción por ductilidad.

En estructuras con gran curvatura, como la de este ejemplo, el movimiento longitudinal del terreno puede producir fuerzas de volteo radiales a la cubierta de significación. La interacción de los momentos radiales y tangentes puede ser crítica.

5.3.2.1. Casos 2, 4 y 6.

En la tabla 10 se muestran los momentos flexionantes máximos y los cortantes correspondientes en la base de las columnas debidas al sismo longitudinal. Los resultados del espectro de respuesta para el momento longitudinal son aproximadamente 30% menores que los predichos mediante el análisis H.T.L. Los momentos transversales con el criterio de la raíz cuadrada, son en varios casos mayores que los resultados de H.T.L. En el marco 4, por ejemplo, el análisis de E.R. predice un momento transversal casi del doble del momento longitudinal.

Esta estructura, debido a sus períodos cercanos y el grado de acoplamiento, es particularmente inadecuada para analizarse mediante el método del espectro de respuesta.

Las demandas de ductilidad máxima rotacional relativamente uniformes que aparecen en la tabla 16, muestran la participación relativamente uniforme de todas las columnas debidas al movimiento longitudinal del terreno. Nótese que las dos columnas que soportan una sección de aproximadamente el mismo peso a la izquierda de la articulación tienen una demanda de ductilidad mayor, que las tres columnas a la derecha.

5.4. Fuerza Transversal Máxima en los Topes de Cortante

Las fuerzas cortantes que ocurren durante un sismo, en los estribos y las articulaciones son en cierto modo más críticas en el sentido de que estas fuerzas deben de ser resistidas mediante componentes no dúctiles como lo son los topes de cortante. El problema de obtener fuerzas realísticas en estos sitios mediante un análisis lineal se complica por el hecho de que la fluencia en componentes dúctiles redistribuye las fuerzas a las componentes más rígidas pero menos dúctiles.

El movimiento transversal controla aquí el diseño, que es el caso general.

5.4.1. Casos 1 al 6.

Las fuerzas máximas en los topes de cortante se tabulan en la tabla 11.

Los valores del espectro de respuesta son ligeramente menores que el de historia-tiempo para el sismo transversal en los casos 1 y 3. En el caso 5, los resultados del análisis no lineal son 46 por ciento y 28 por ciento mayores en los estribos 1 y 7 respectivamente. El incremento en la fuerza cortante puede atribuirse a la fluencia en las columnas y la redistribución de las fuerzas en los estribos. La fuerzas cortante en la articulación intermedia determinada mediante el análisis con el espectro de respuesta, es menor en un 14% que la obtenida con el análisis lineal historia-tiempo, lo que corresponde a la diferencia obtenida en los momentos en las columnas en el tramo adyacente a aquel que contiene la - articulación. El análisis no lineal, indica una reducción en el nivel de la fuerza por un factor de 2.6 en la articulación, que corresponde a su vez, a la reducción total de 2.5 previamente mencionada en 5.3.1.1. para la estructura en conjunto.

Las fuerzas cortantes tabuladas debido a las excitaciones longitudinales son menores a las obtenidas para la transversal y consecuentemente no controlan el - diseño, si bien indican la existencia del acoplamiento.

5.5. Desplazamientos Máximos de la Cubierta.-

Las combinaciones de la raíz cuadrada de la suma de cuadrados de los resultados modales para el análisis de espectro de respuesta, proporcionan resultados para los desplazamientos de la cubierta que no concuerdan en muchos casos con los de H.T.L. Estas diferencias son más pronunciadas en puentes en que las respuestas modales importantes se presentan en uno o más modos. Los desplazamientos de los análisis no lineales son en general inferiores a los de los análisis lineales. Esto - es contrario a lo que podría esperarse puesto que es de suponerse que la fluencia debiera producir mayores deformaciones.

Sin embargo, la disipación de energía ocasionada por la fluencia de las columnas, reduce la respuesta y consecuentemente también los desplazamientos netos. Existen excepciones en que las deformaciones adicionales cuando fluye la columna, exceden las deformaciones calculadas mediante el análisis lineal. Esto usualmente ocurre al inicio de la fluencia en que la reducción en el desplazamiento debida a la disipación de energía, es menor que la energía contenida en el sistema.

5.5.1. Casos 1 - 6.

Los desplazamientos máximos de la cubierta debidos a las excitaciones transversales (Casos 1,2 y 5) se muestran en la tabla 14. Los desplazamientos del espectro de respuesta en los marcos, en la dirección transversal son considerablemente menores que los valores obtenidos en el análisis H.T.L. Ello se debe a que hay 3 modos con períodos muy cercanos y es muy posible que las respuestas modales máximas tiendan a ocurrir simultáneamente. Los valores de la raíz cuadrada media de las respuestas modales proporcionará, por lo tanto, menores desplazamientos.

Para los desplazamientos longitudinales debidos a la misma excitación los valores de la raíz cuadrada media del espectro de respuesta varía drásticamente con desplazamientos menores a los de H.T.L. Esto se debe nuevamente a las pequeñas diferencias en períodos y al grado de acoplamiento entre las direcciones longitudinal y transversal del puente.

Los desplazamientos no lineales de la cubierta en la dirección transversal - debidas a la excitación transversal son menores entre un 27 y un 37 por ciento - a los del H.T.L. Esta reducción en el desplazamiento es ocasionada por la reducción en respuesta debida a la disipación de energía en las columnas. Los desplazamientos que ocurrieron durante la primera excursión en el rango no lineal a los 4.40 segundos, excedieron los valores ocurridos al mismo tiempo, con el análisis lineal. Ello se debe al incremento de deformación ocasionado inicialmente por la fluencia. Sin embargo, con subsecuentes inversiones en la dirección de la aceleración del terreno, la disipación de energía y reducción en las fuerzas elásticas - de restauración que ocurren en la columna, la respuesta máxima de la estructura, se reduce.

Puede notarse que hay un pequeño pero importante incremento en los desplazamientos longitudinales, en los marcos 3, 4 y 5. Ello se debe al hecho de que estos tres marcos tienen momentos de carga muerta importantes, debido al desbalance en - la longitud de los tramos. Durante la fluencia inicial de estos marcos, ocurren -- deformaciones rotacionales que tienden a relevar los momentos longitudinales de -- carga muerta. Esto sucede, aun con componentes longitudinales de momento sísmico, relativamente pequeños.

Una vez que ha ocurrido la fluencia, las fluencias subsecuentes de la columna se deberán enteramente a las fuerzas sísmicas. De manera que las deformaciones rotacionales debidas a los momentos longitudinales por carga muerta ocasionan en la estructura, deformaciones permanentes no lineales, resultando en una respuesta sísmica sesgada u oblicua, para la dirección longitudinal. Ello resulta en mayores desplazamientos longitudinales como puede verse en los resultados.

Los desplazamientos máximos de la cubierta debidos a la excitación longitudinal (Casos 2,4 y 6) se muestran en la tabla 12. Los valores de los desplazamientos longitudinales para el análisis del espectro de respuesta son también consistentemente menores que los de H.T.L. Esta diferencia es menor a la izquierda en la articulación en que el modo 2 domina el movimiento longitudinal. Para los desplazamientos transversales debidos a la excitación longitudinal, el análisis del espectro de respuesta concuerda del todo con los resultados del H.T.L. Esto también se debe a que los períodos están muy cercanos y existe un acoplamiento fuera de fase entre el 2° y -- 3er. modo.

Los desplazamientos no lineales en la dirección longitudinal debidos al sismo - longitudinal son asimismo, menores a los que resultan del H.T.L.

Los desplazamientos a la izquierda de la articulación en los marcos 2 y 3 se reducen más que los ubicados a la derecha; (marcos 4 y 6). Esto se debe en parte, a la mayor fluencia y disipación de energía y a los efectos de compensación de los momentos desbalanceados en los marcos a la izquierda de la articulación.

Los mayores momentos de carga muerta a la derecha de la articulación tienen un efecto en estos desplazamientos en un movimiento longitudinal oblicuo, aunque esto no es tan obvio como en el ejemplo previo. Este efecto de sesgo causado al relevar los momentos de carga muerta puede ser también la razón de que la diferencia en los desplazamientos de la cubierta sean menores que los desplazamientos transversales debidos al sismo transversal. Puesto que los momentos transversales no se afectan y por lo tanto, no experimentan una reducción similar a los desplazamientos longitudinales.

5.6. Movimientos de la Articulación y Fuerzas de Restricción.

Las suposiciones inherentes en el enfoque mediante el análisis elástico que se emplea en la actualidad y generalmente disponible para el diseñador de puentes limita las capacidades de modelado en la articulación de la junta de expansión intermedia. Las idealizaciones que se utilizan actualmente, son aproximadas en el sentido de que la unidad de trabazón debe tomar tanto compresión como tensión y se ignoran las aberturas proporcionadas para los movimientos por temperatura. Los efectos de choque que se ocasionan al cerrarse la abertura de asiento y la fluencia de la barra de sujeción no pueden incorporarse al modelo. Estas suposiciones impuestas por las limitaciones de un análisis elástico, han sido de mayor preocupación para el proyectista de puentes, tanto en los efectos de las respuestas en conjunto, como en los efectos locales de las unidades de restricción. Básicamente, el punto de vista del proyectista ha sido que las suposiciones inherentes en este enfoque no tengan un efecto importante en la respuesta de conjunto y proporcionen resultados en la unidad de trabazón que sean aproximados. Posteriormente, se verifica que estas fuerzas sean cuando menos un 25 por ciento de la carga muerta del marco más pequeño.

5.6.1. Casos (1 al 6).-

En la tabla 13 se anotan las separaciones máximas de la articulación y las fuerzas correspondientes de trabazón debidas tanto a las excitaciones longitudinales, como transversales.

Los resultados del análisis con el espectro de respuesta son de 6 a 10 veces mayores, para el sismo transversal, que para el análisis de H.T.L. Estas diferencias tan grandes se deben a la respuesta fuera de fase que ocurre entre el segundo y tercer modo de vibrar. Al tener cada modo una contribución importante en la respuesta total del sistema, no se suman algebraicamente como en el análisis H.T.L. Contrariamente a esto, los resultados para el movimiento longitudinal, concuerdan bastante bien, dentro de un 10% para ambas unidades de trabazón.

El movimiento longitudinal es el que generalmente controla y para este puente es menor a las 246 ton. obtenidas usando el mínimo especificado por el código.

El análisis no lineal no proporcionó fuerzas de trabazón indicando que la holgura de temperatura de 3 cm. en la trabazón, no se consideró en los movimientos transversal o longitudinal.

Las gráficas historia-tiempo de los movimientos de la junta de expansión a la derecha o a la izquierda en la orilla de la cubierta, tanto para los movimientos transversal y longitudinal, indican que los movimientos de la articulación son lo suficientemente grandes como para ocasionar fuerzas en las trabazones. También, las holguras en el asiento están lo suficientemente cercanas como para proporcionar solo una mínima cantidad de acción de choque en la articulación. Las gráficas del movimiento de la junta de expansión para el movimiento transversal indican la tendencia de la junta a abrirse debido al comportamiento no lineal que ocurre al puente. Este movimiento oblicuo, será más pronunciado con una fluencia adicional de las columnas o deslizamiento del apoyo de la junta de expansión. Considerando el número de excursiones de las columnas en el rango no lineal para esta estructura de período corto, y la probable reducción en la rigidez de la columna, resulta muy probable la apertura oblicua de la articulación de tal manera que provoque fuerzas en las trabazones. La magnitud real de estas fuerzas requerirá estudios analíticos adicionales con la posibilidad de incluir la degradación en la rigidez de las columnas. Suponiendo, sin embargo, que las columnas puedan mantener su integridad y, que la degradación en la rigidez en los ciclos poselásticos no sea significante, los requisitos mínimos del reglamento parecen ser conservadores.

6. Conclusiones y Recomendaciones.-

6.1. Conclusiones.

6.1.1. Características Dinámicas del Puente.

Para predecir con precisión las respuestas de estructuras complejas de puente a movimientos sísmicos intensos, se requiere el uso de sofisticados programas de computadora para análisis dinámico no lineal, que generalmente no se encuentran disponibles para el ingeniero proyectista de puentes. El complejo comportamiento no lineal que ocurre en los puentes sujetos a sismos, actualmente se toma en cuenta reduciendo los resultados obtenidos en un análisis elástico, mediante un factor de ductilidad supuesto. Esto no toma en cuenta la redistribución de fuerzas debidas al comportamiento no lineal ni predice las áreas de máxima demanda de ductilidad.

Los actuales métodos que se usan generalmente para la predicción de fuerzas lineales, incluyen la fuerza estática equivalente, el análisis mediante un espectro de respuesta o un análisis lineal de historia-tiempo. El método de la fuerza estáticamente equivalente está en cierta forma limitado, puesto que sólo puede aplicarse a estructuras sencillas con un solo, predeterminado modo de vibrar. Para estructuras más complejas que requieren un análisis tridimensional, tal como el puente seleccionado para este estudio, se requiere un análisis de respuesta, más sofisticado. En tanto que el uso de un análisis elástico dinámico previo al diseño, es un progreso importante respecto a la práctica antigua y en muchos casos será suficiente, no debiera sin embargo, verse como la última herramienta para usarse en el diseño de puentes en zonas de alta sismicidad. Las técnicas del análisis no lineal que incluyen el comportamiento no lineal de la fluencia en las columnas, discontinuidad en las articulaciones, cimentaciones y absorción de energía, deberían implementarse al diseño en esas regiones críticas.

Las dos idealizaciones estructurales que se usan en este estudio emplean miembros rectos y curvos para la superestructura. De ello resultó evidente que los miembros rectos proporcionan casi resultados idénticos debido a la discretización de las masas, que normalmente se hacen en los cuartos del claro.

A causa de los efectos de acoplamiento de los modos y las contribuciones de varios modos, se requiere el análisis tridimensional para predecir la respuesta de puentes con curvas horizontales. Esto también implica que el efecto de la excitación en direcciones ortogonales debe sobreponerse a los resultados del movimiento en una dirección.

6.1.2. Análisis de Espectro de Respuesta.-

El método de espectro de respuesta, en general, parece ser satisfactorio para el diseño sísmico de puentes.

En el puente analizado, cuando se tienen dos modos de vibrar con períodos aproximadamente iguales, la combinación de la raíz cuadrada media para los resultados, no concuerda con los del análisis lineal historia-tiempo, como se expuso en el capítulo 5.

6.1.3. Comportamiento no lineal observado.-

El comportamiento no lineal como se observa de los tres análisis llevados a cabo, indican que la redistribución de las fuerzas y la localización y la magnitud de las demandas máximas de ductilidad no se pueden predecir acertadamente mediante un análisis elástico. La primera excursión en el rango no lineal produjo desplazamientos mayores a los determinados mediante un análisis lineal. Con las excursiones subsecuentes, sin embargo, se redujeron los desplazamientos ilustrando los efectos de la absorción de energía debido a la acción no lineal de las columnas. Los desplazamientos máximos para el análisis no lineal fueron menores que los resultados del análisis lineal donde hubo fluencia en la estructura.

Cuando ocurrió fluencia local, sin embargo, los desplazamientos máximos fueron algo mayores. Por tanto, es casi imposible predecir los efectos no lineales a partir de un análisis lineal.

6.1.3.1. Columnas.-

Las demandas máximas de ductilidad rotacional son menores a las que corrientemente se suponen(se suponen)disponibles para el diseño. En la estructura examinada, la fluencia total acumulada ocurrida, fue mucho mayor que la de otras estructuras que tienen demandas de ductilidad comparables o mayores. Por lo tanto, las demandas máximas de ductilidad como se conciben ordinariamente no indican el daño potencial máximo o la cantidad de absorción de energía requerida por la estructura durante un sismo máximo creible.

Los factores clásicos de reducción de la ductilidad para fuerzas sísmicas que se derivan para sistemas elasto-plásticos sencillos, al igualar las respuestas elásticas e inelásticas en términos de energía o deflexión no se aplican para el sistema complejo como el puente examinado en este estudio.

Las disposiciones que corrientemente se usan para el diseño de momento positivo en las trabes debido a las cargas muertas y vivas, no incluyen los efectos de aliviar la capacidad de la columna en el momento de carga muerta ocasionada por la formación de articulaciones plásticas durante un sismo.

Las rigideces variables de las columnas, provocan la redistribución de las fuerzas a otras columnas. Esto tiene como resultado una fluencia no uniforme en las --

columnas. Ello puede dar como resultado, demandas altas de ductilidad en sitios aislados durante un sismo, aun de intensidad moderada.

6.1.3.2. Estribos.-

La redistribución de fuerzas debida a la fluencia de las columnas tiene como resultado, un incremento de la fuerza en los topes de cortante no dúctiles en los estribos. Las disposiciones actuales de AASHTO para diseño sísmico en que los espectros de respuesta se reducen con factores de ductilidad proporcionará fuerzas en los componentes no dúctiles, tales como topes de cortante que quedan bien por abajo de las fuerzas realmente experimentadas.

6.1.3.3. Juntas de Expansión.-

La fluencia no uniforme de las columnas del puente da como resultado mayores fuerzas de trabazón en aquellas estructuras que tienen más de una articulación intermedia.

La respuesta de conjunto de la estructura examinada no parece afectarse en forma importante por el comportamiento no lineal en las articulaciones de las juntas de expansión. Las holguras de la barra de sujeción y del asiento de la junta de expansión, que normalmente se requieren para consideraciones de temperatura, excluyen sus efectos, mientras no ocurran la fluencia y la disipación de energía en las columnas. También la posibilidad de insertar dispositivos de absorción de energía en las juntas de expansión intermedias, para reducir la respuesta de la estructura o limitar el daño en una columna, están limitadas por este tipo de comportamiento. Se reducen las fuerzas transversales en los topes de cortante en la junta intermedia, debido a la fluencia de la columna en estructuras que tienen aproximadamente la misma rigidez en las columnas.

6.2. Recomendaciones.-

6.2.1. Práctica y Disposiciones Reglamentarias en el Diseño.-

Con base en la comparación de resultados, se recomiendan que se consideren los cambios siguientes que se sugieren para la práctica del diseño sísmico y/o disposiciones reglamentarias.

a.- Los espectros de diseño actualmente en uso en la especificación AASHTO, deben modificarse para eliminar la reducción por ductilidad. Las reducciones por ductilidad deben hacerse en base a cada una de las componentes.

b.- Las disposiciones para diseño sísmico deben considerar la aplicación simultánea del movimiento del sismo, en las tres direcciones de las componentes, puesto que, existe acoplamiento entre las direcciones de las componentes en cada modo de vibrar.

c.- La combinación probabilística de la raíz cuadrada media de las combinaciones modales resultantes del espectro de respuesta es un adelanto para puentes analizados utilizando la técnica de espectro de respuesta y potencialmente puede utilizarse para puentes que tengan dos modos de vibrar con dos períodos -- aproximadamente iguales.

d.- Como un indicador de la severidad de un movimiento sísmico, deberán emplearse algunos medios para evaluar el daño potencial total en un puente. Esto podría lograrse sumando las demandas totales de ductilidad en la disipación total de energía durante la historia-tiempo del movimiento.

e.- Las disposiciones para diseño sísmico deben establecer alguna ductilidad mínima para sismos moderados que se espera que ocurran varias veces durante la vida esperada del puente. La necesidad de este aspecto se hace primordial cuando se considera la distribución desigual de las demandas de ductilidad en una estructura que tienen rigideces no uniformes en las columnas.

f.- El diseño sísmico debe tomar en cuenta un incremento de las fuerzas en los estribos de 1.5 a 2, obtenidas en un análisis elástico si se espera la ocurrencia de la fluencia en las columnas.

g.- Las disposiciones de diseño para combinar los momentos en las trabes debidas a las cargas muertas y vivas, deberían incluir los efectos de la redistribución de momentos por carga muerta debida a un posible alivio de los momentos de carga muerta en los sitios donde aparezcan articulaciones plásticas en una columna, durante un sismo.

h.- De ser posible, debe evitarse el uso de articulaciones intermedias en puentes localizados en áreas de gran intensidad sísmica.

i.- Deben modificarse las disponibilidades de computación no lineal tales como las desarrolladas en las etapas iniciales de este proyecto, para el uso del ingeniero proyectista y divulgadas en la profesión para poder ser usadas en:

1.- El estudio del comportamiento sísmico de puentes.

2.- Mejorar las disposiciones las reglamentaciones actuales para el diseño sísmico.

3.- El análisis de estructuras complejas.

5.2.2. Estudios Futuros.-

Las dudas surgidas en este estudio, indican la necesidad de investigación futura en las siguientes áreas.

a.- Degradación de la Rigidez. El efecto de la degradación en la rigidez en la respuesta dinámica no lineal deberá tomarse en cuenta en estudios futuros.

b.- Absorción de energía. Deberá estudiarse el papel importante de la absorción inelástica de energía en las columnas y las trabazones de las juntas de expansión. Deberá darse una especial atención al desarrollo de una comprensión más clara del concepto de ductilidad y de cómo se relaciona con el diseño de puentes, de tal forma que las técnicas del análisis elástico pueden ser utilizadas por el proyectista de puentes. De especial importancia es el problema de una definición de "daño potencial" de un sismo a una cierta estructura.

c.- Unidades de trabazón. La fluencia y demandas de ductilidad no uniforme en las columnas, tienen como resultado mayores fuerzas en las unidades de trabazón en puentes con más de una articulación intermedia. Estos efectos deben recibir un mayor estudio, para investigar las especificaciones mínimas vigentes en los reglamentos y si las técnicas de análisis elástico actualmente en uso pueden predecir estas fuerzas de trabazón.

d.- Análisis especiales para mejorar los resultados logrados mediante un análisis de espectro de respuesta. Es de especial necesidad, la determinación del medio más eficaz de combinar los resultados modales para un cierto tipo de puente.

PROPIEDADES DE LA SUPERESTRUCTURA.

$L = 211,70$ m

$A = 7,78$ m^2

$I_x = 7,03$ m^4

$I_y = 3,05$ m^4

$I_z = 111.07$ m^4

Carga Muerta: 18.70 ton/m.

$E = 210000$ Kg/cm^2

$R = 182.88$ m^2

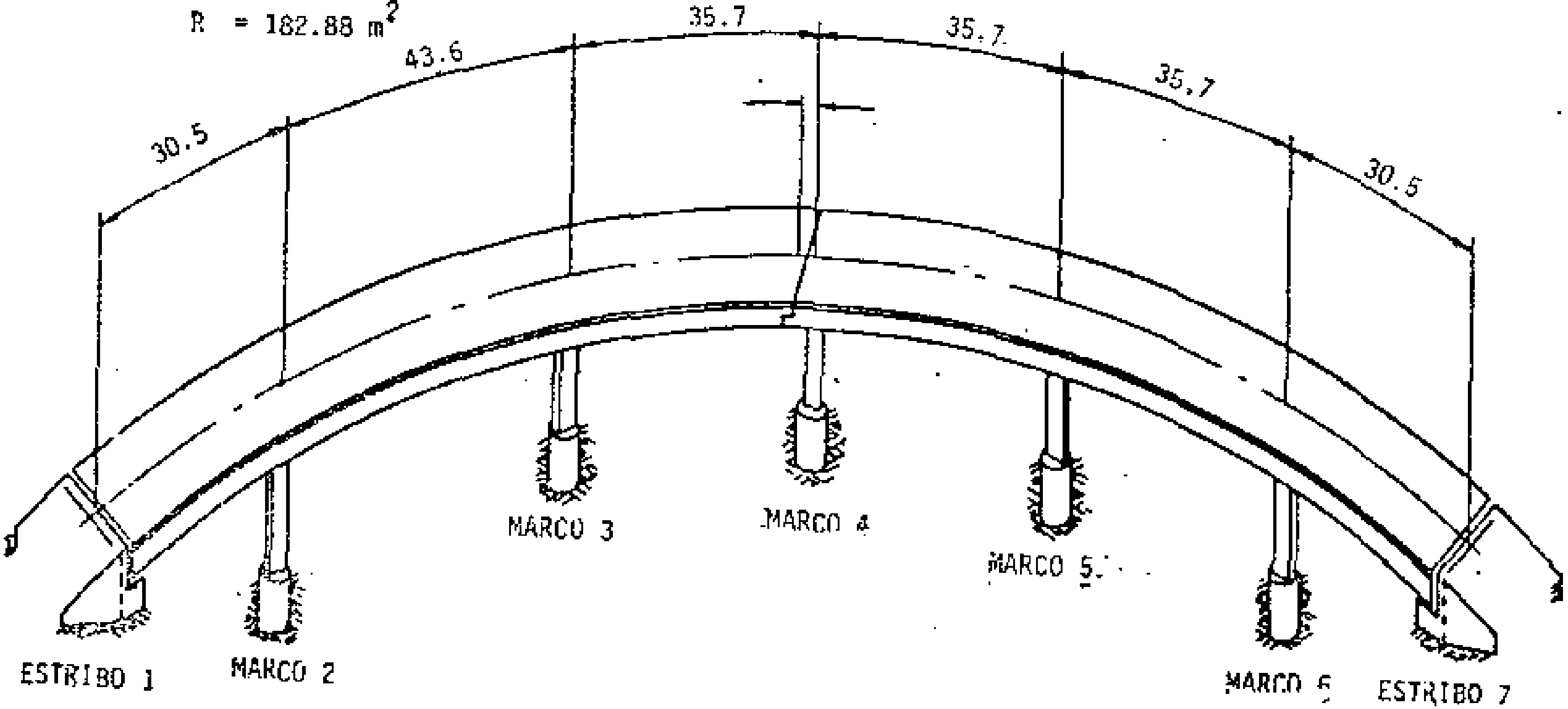
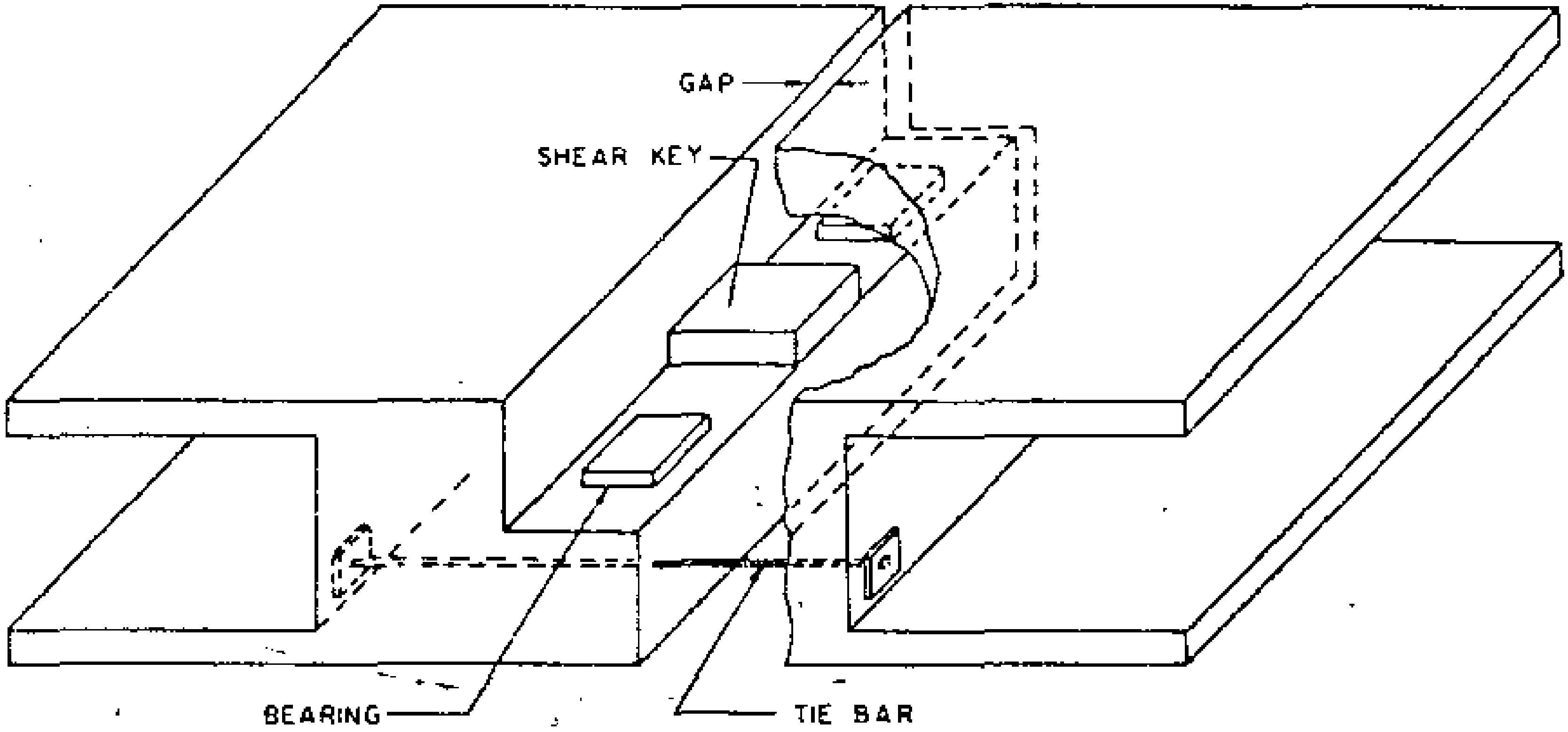


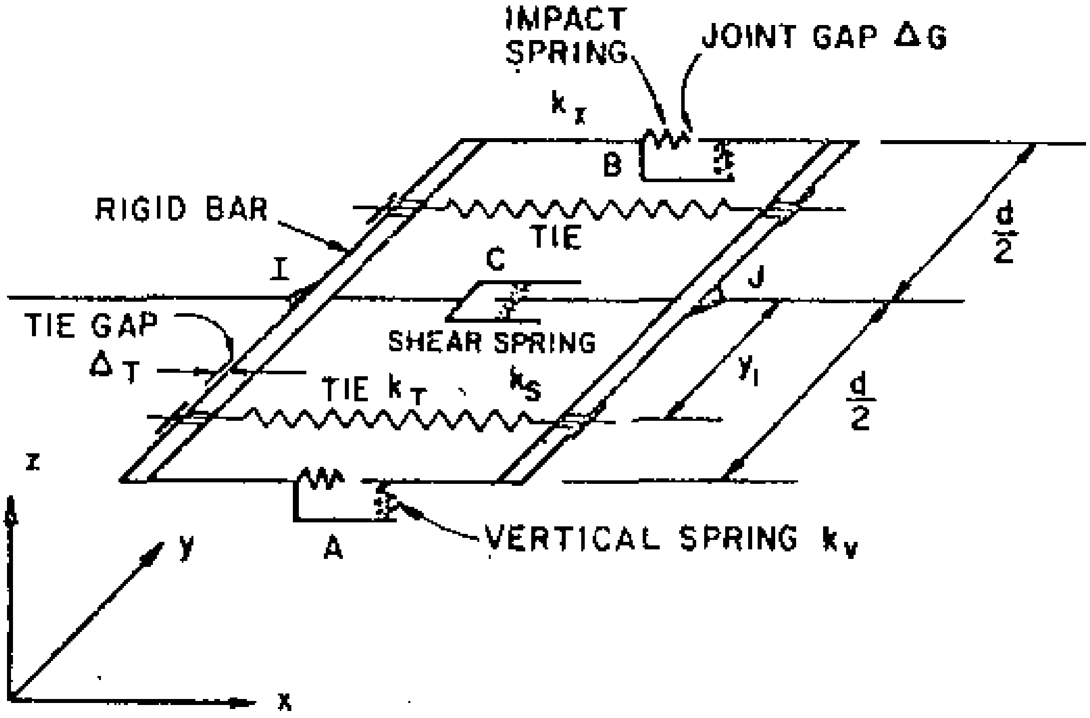
FIGURA 1

ROUTE 80 ON-RAMP OVERCROSSING



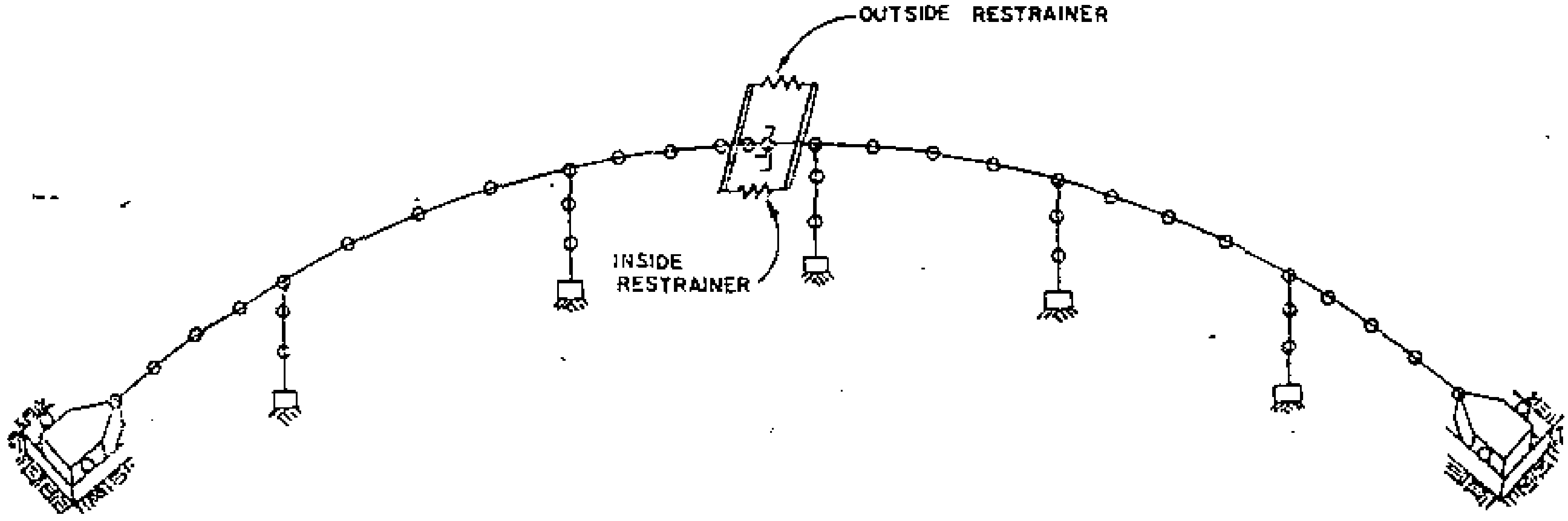
TYPICAL BRIDGE EXPANSION JOINT

FIGURA 2



NEABS HINGE IDEALIZATION

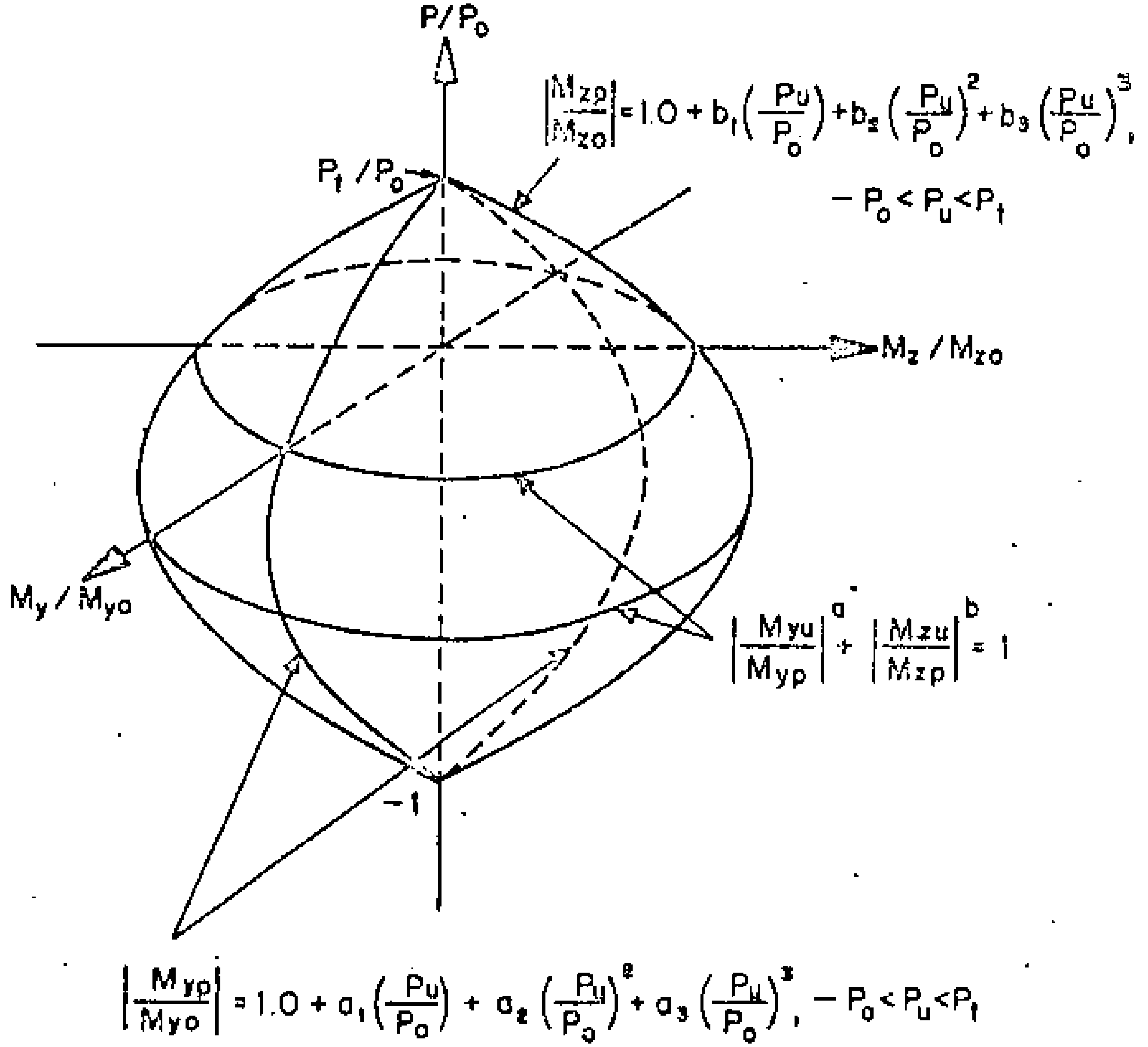
FIGURA. 3



BRIDGE I

ROUTE 80 ON-RAMP

FIGURA 4



NEABS/ YIELD BRIDGE COLUMN INTERACTION
YIELD SURFACE DESCRIPTION

FIGURA 5

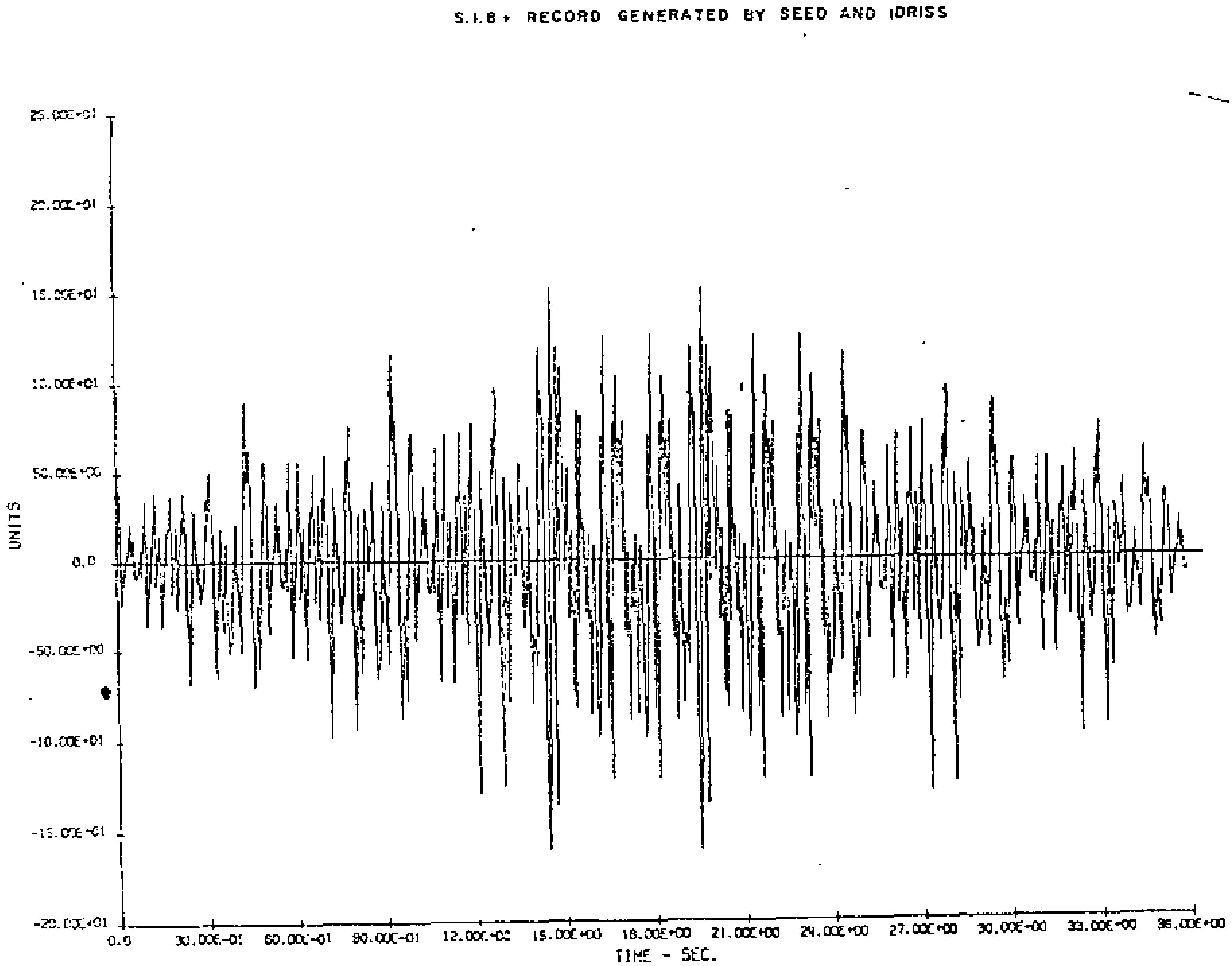


FIGURA 6

P-35 f

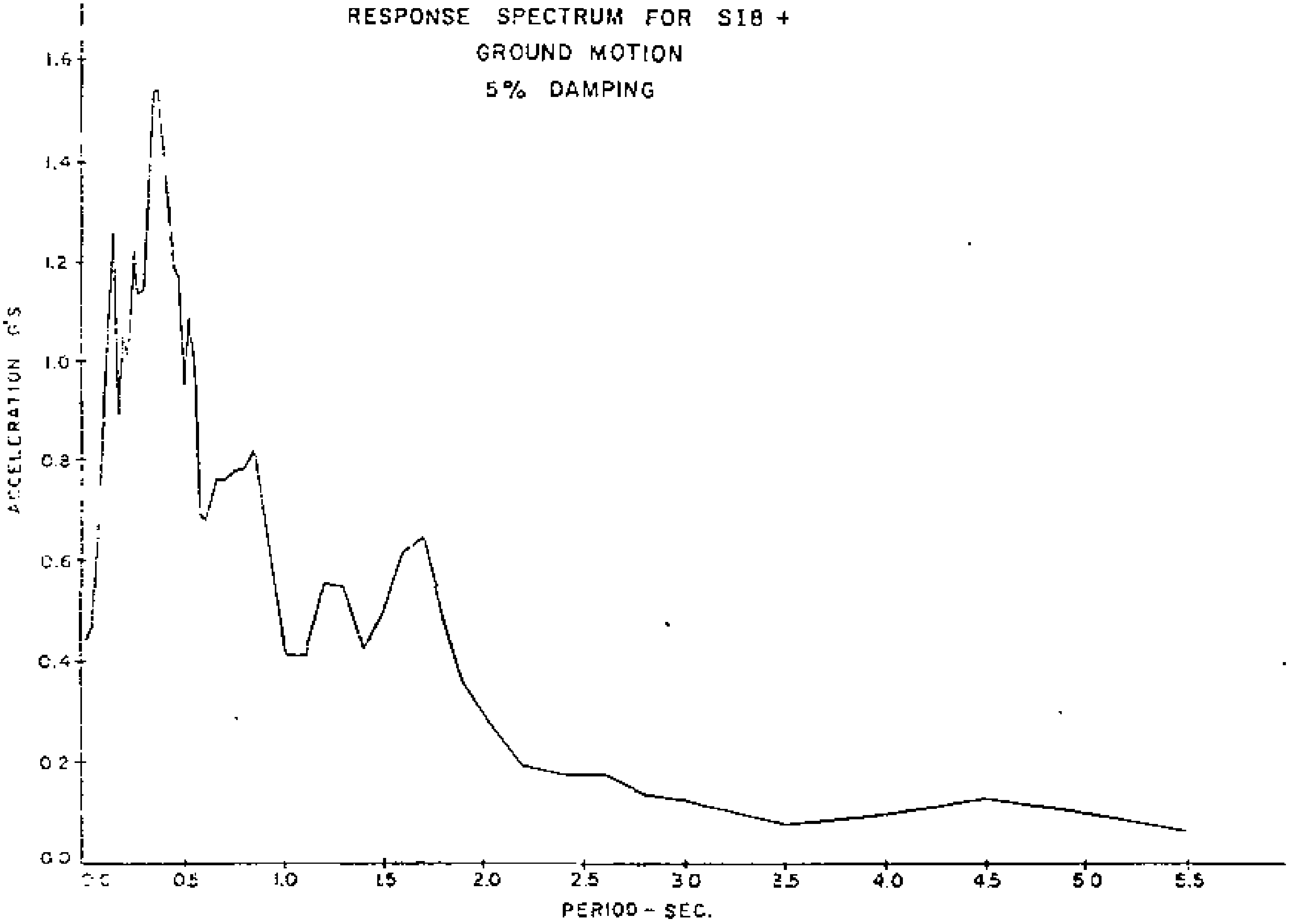
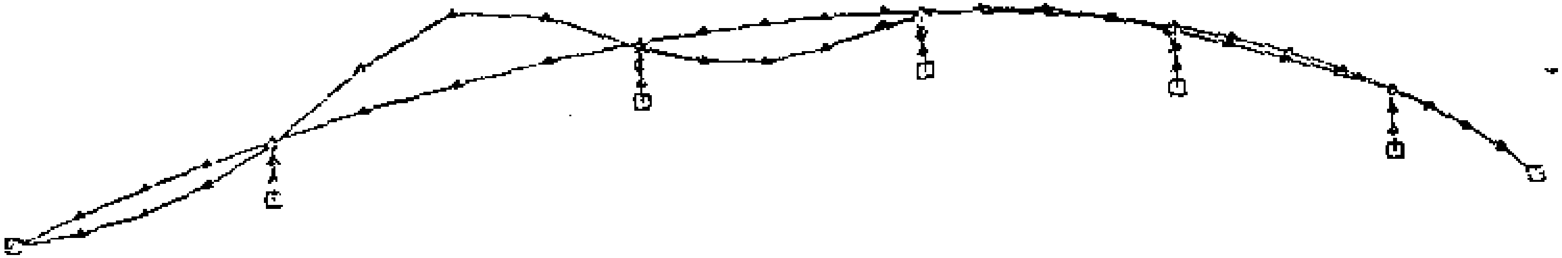
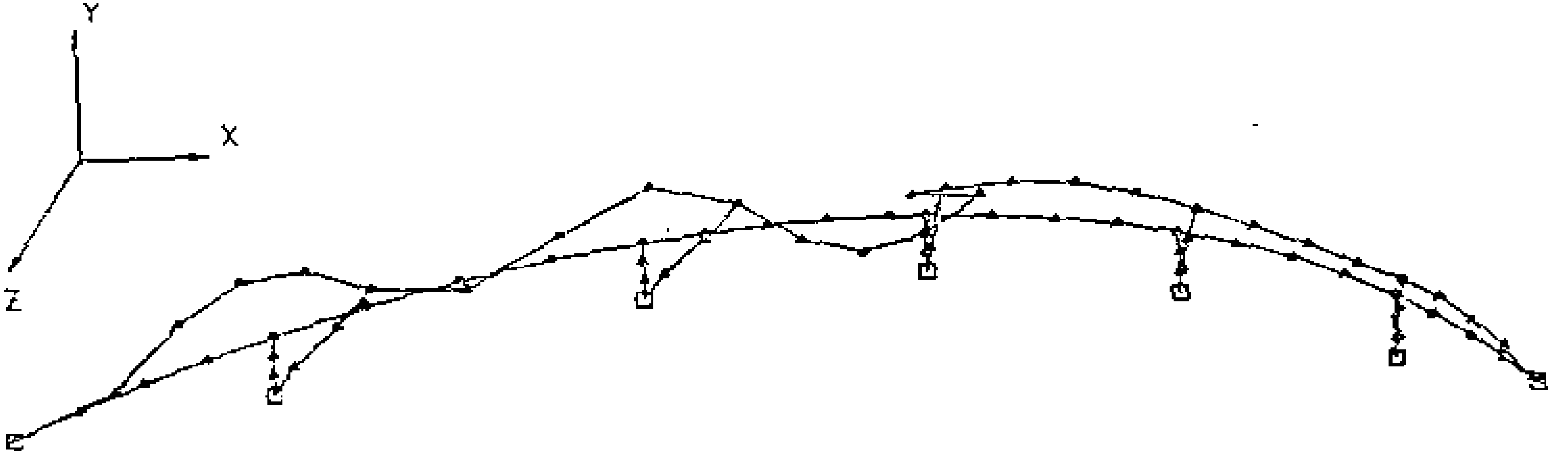

RESPONSE SPECTRUM FOR S18 +
GROUND MOTION
5% DAMPING
ACCELERATION G'S
1.6
1.4
1.2
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0.0
0.0
0.5
1.0
1.5
2.0
2.5
3.0
3.5
4.0
4.5
5.0
5.5
PERIOD - SEC.

FIGURA 7

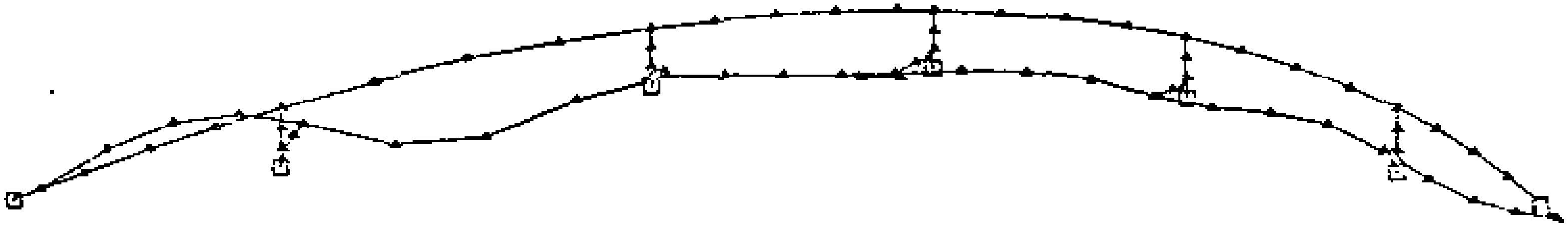


MODE 1

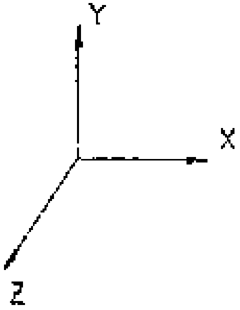


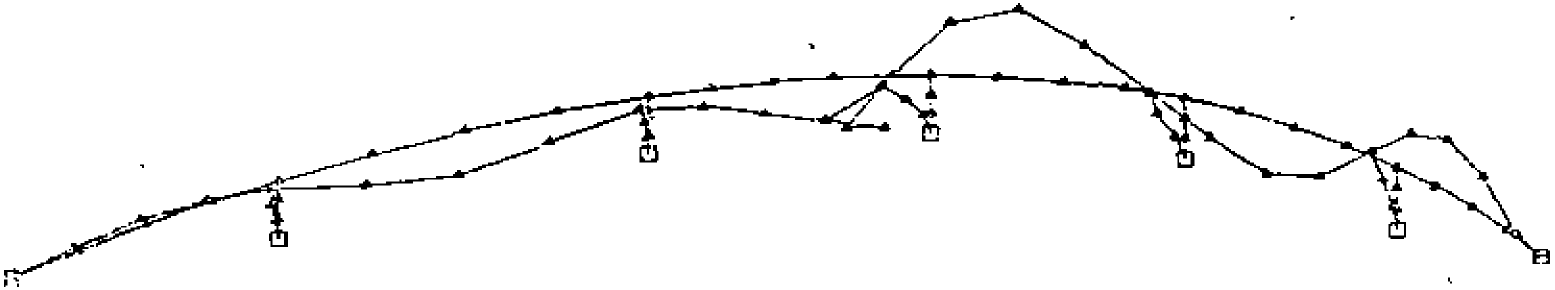
MODE 2

BRIDGE 1



MODE 3

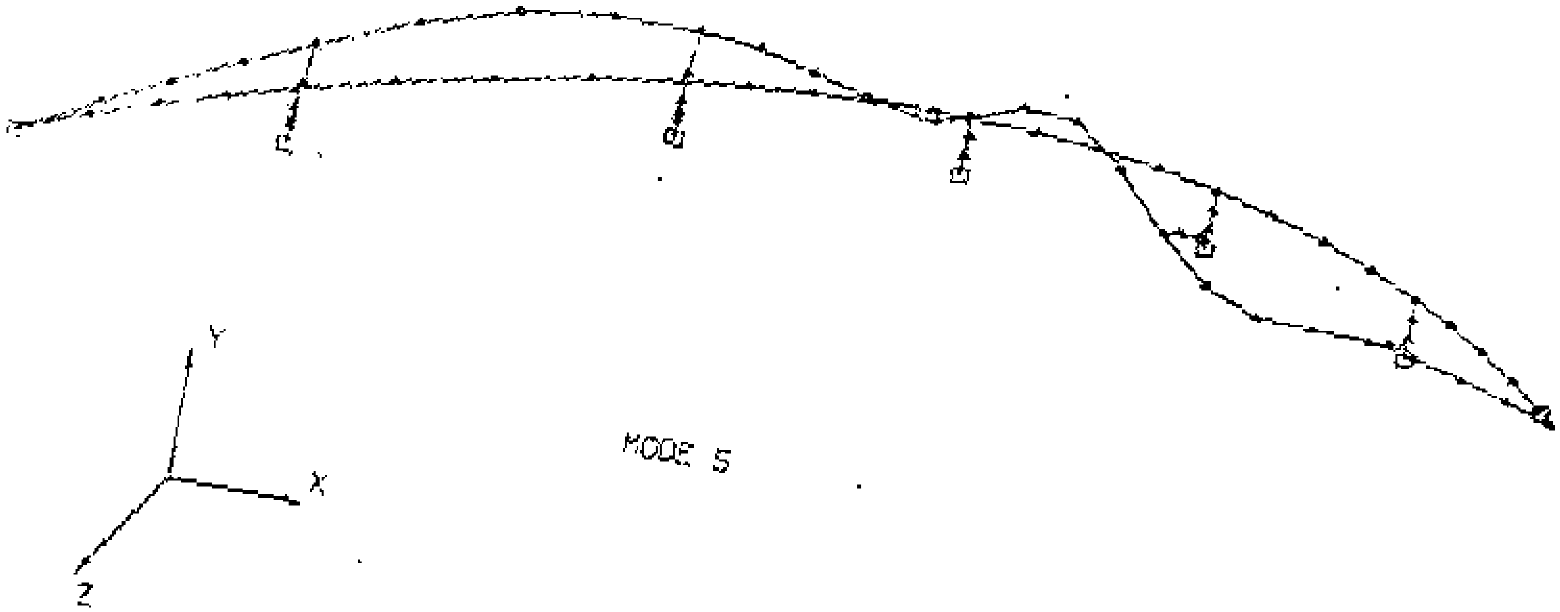




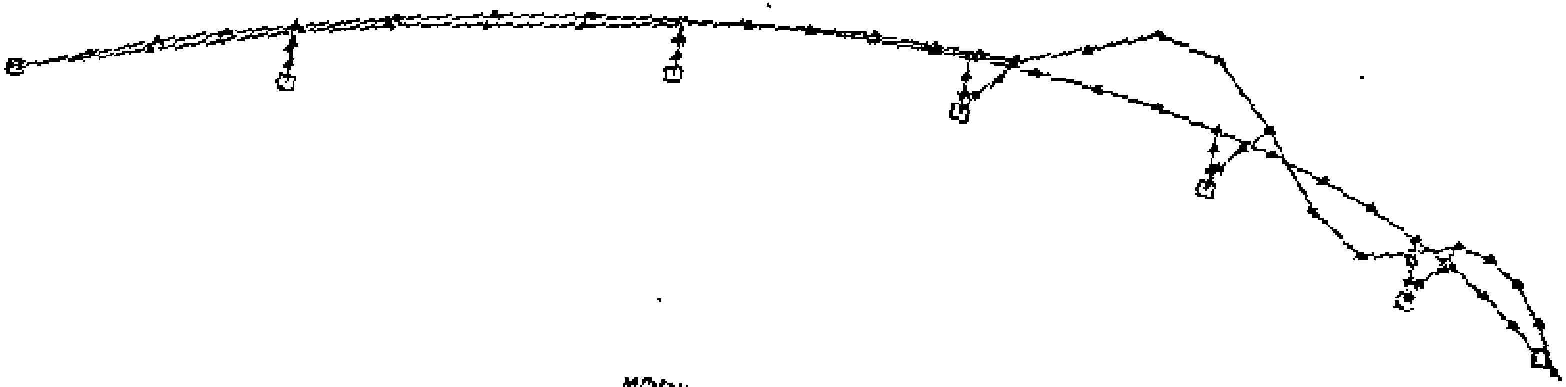
MODE 4 5

BRIDGE 1

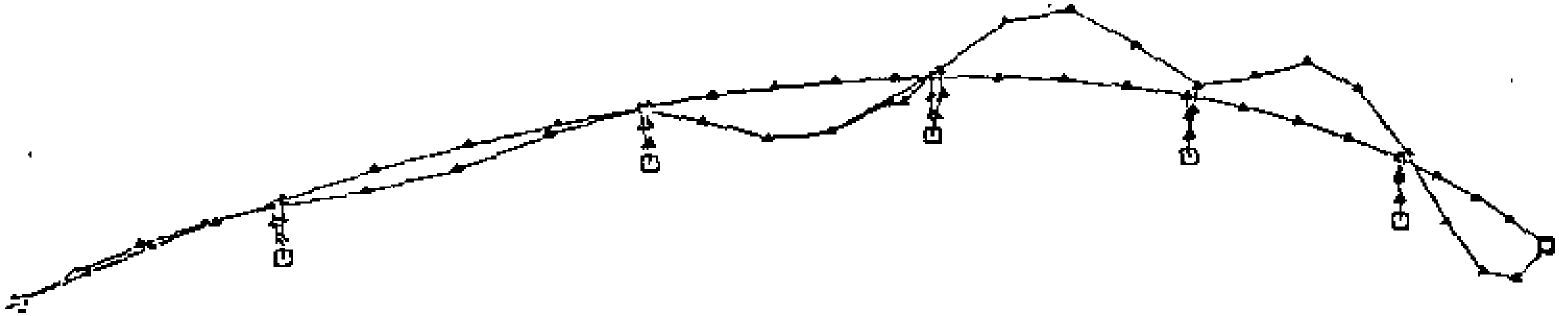
P35



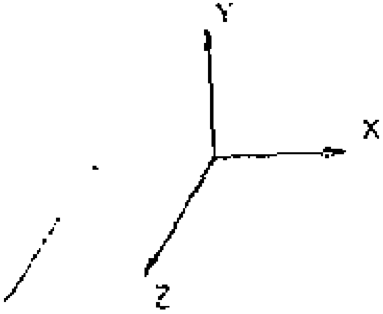
MODE 5

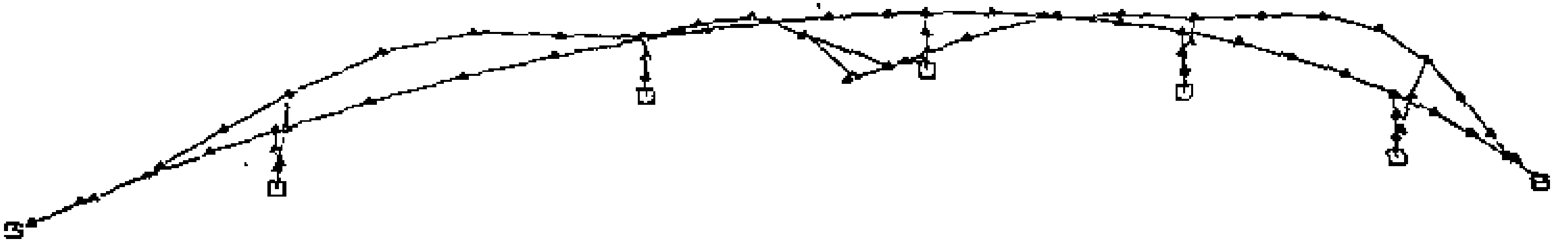


MODE 6
BRIDGE 1



MODE 7

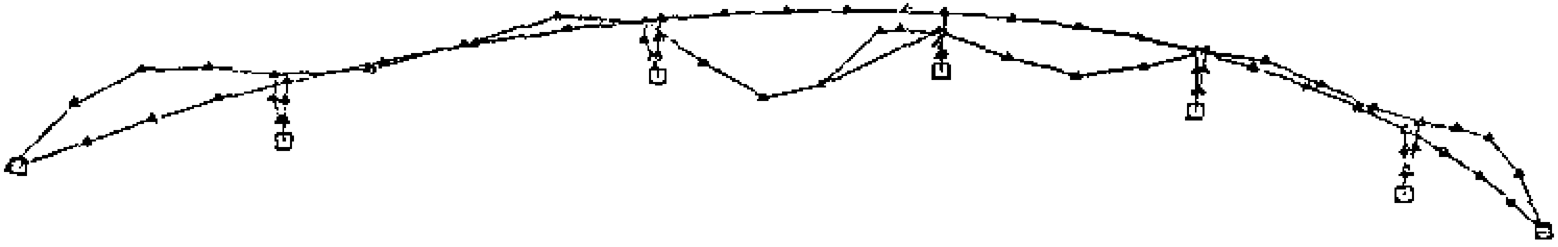


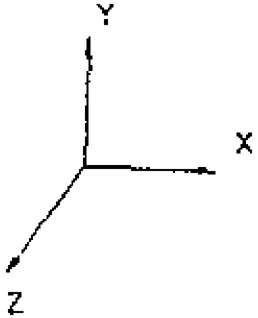


MODE 8

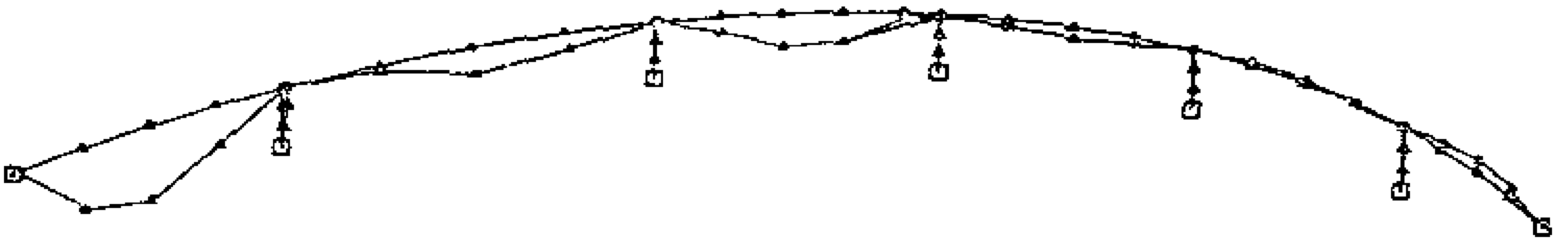
BRIDGE 1

P-36 K



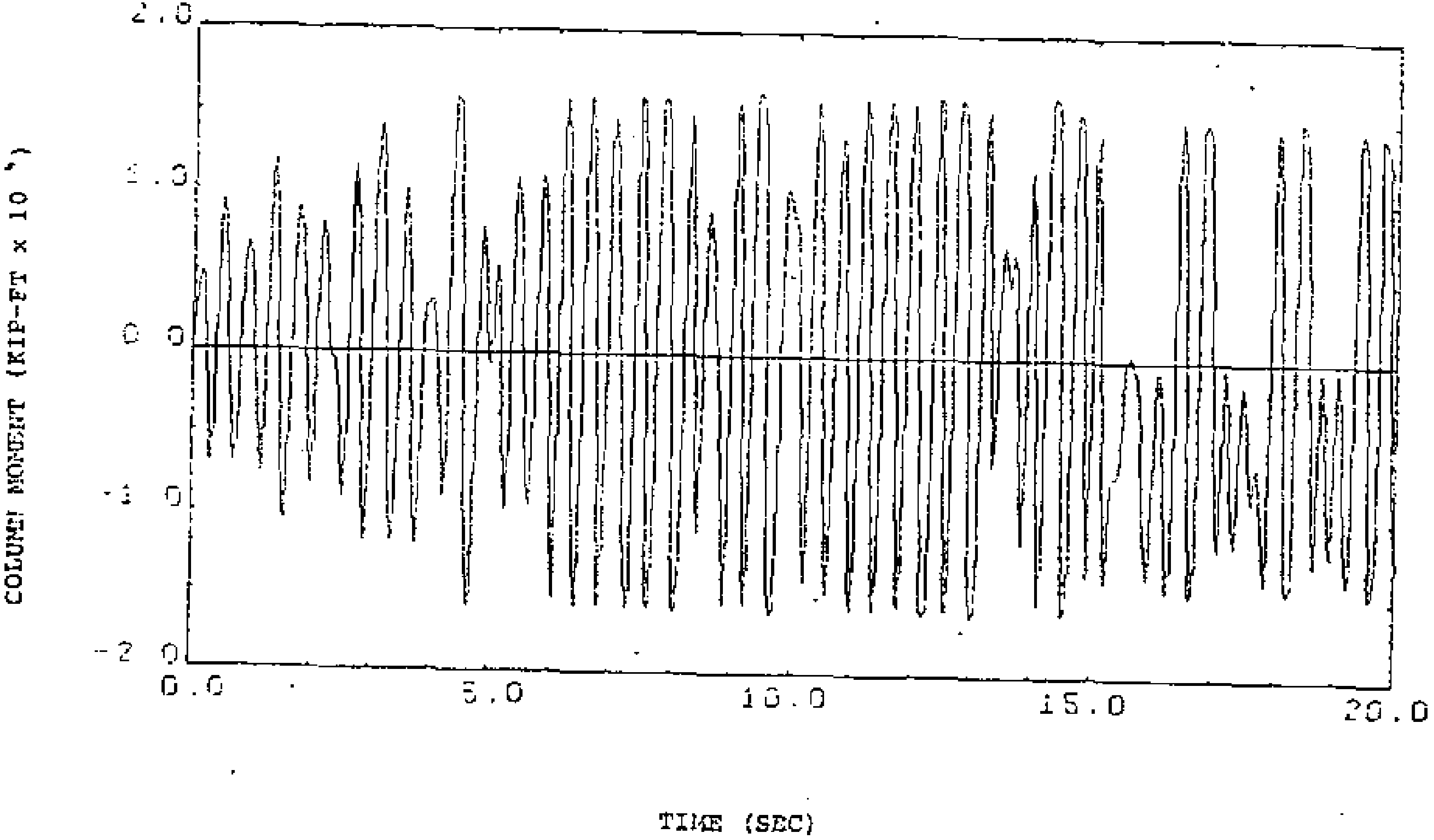


MODE 9



MODE 10

BRIDGE 1



Transverse Moment at Base of Column - Bent 4

Bridge 1 - Case 5

Longitud (m)	211.67
No. de tramos	6
Radio de Curvatura (m)	183
No. de columnas por marco	1
Long. de las columnas (m):	
Mínima	7.41
Máxima	8.02
Articulaciones :	
No.	1
tramo en que se localizan	3
Períodos de los primeros 20 modos (seg)	
Máximo	0.40
Mínimo	0.07

ANALISIS DINAMICO. TABLA 1.- CARACTERISTICAS BASICAS DEL PUENTE.

			Capacidad ultima.		
Marco No.	Longitud * (metros)	Area de refuerzo (cm^2)	Axial P_o (ton)	Momento Long. M_{yo} (ton.m)	Momento Transv. M_{zo} (ton.m)
2	7.41	697	7990	1285	1776
3	7.41	697	7990	1285	1776
4	7.41	697	7990	1285	1776
5	7.72	697	7990	1285	1776
6	8.02	697	7990	1285	1776

* Desde la cara superior de la zapata al eje neutro de la cubierta.

ANALISIS DINAMICO. TABLA 2. PROPIEDADES DE LA COLUMNA.

Localización de la articulación de la junta de expansión:	Tramo 3
Número de Unidades de Restricción	2
Localización transversal de las Unidades de Restricción	± 3.92 m
Abertura de la Restricción (Nominal)	0.03 m
Rigidez Axial de la Unidad de Restricción	1824 ton/m
Fuerza Axial de Fluencia de la Unidad de Restricción	524 ton
Abertura del Asiento de la Junta de Expansión (Nominal)	0.02 m
Coeficiente de Fricción de los Apoyos	0.4
Rigidez Total al Cortante de los Apoyos	1043 ton/m

ANALISIS DINAMICO. TABLA 3. PROPIEDADES DE LA ARTICULACION.

Descripción del Análisis.	Sistema de Cómputo Utilizado.	Long.	Transv.
Vibración libre	BSAP STRUDL	--	--
Espectro de Respuesta (ER)	BSAP STRUDL	36	36
No lineal, historia - tiempo, para las cols. y -- junta de expansión.	NEABS	20	20

ANALISIS DINAMICO. TABLA 4. DURACION DEL MOVIMIENTO DEL TERRENO DEL SI8+ (seg)

A N A L I S I S

Espectro de Respuesta		Historia - Tiempo Lineal.		Historia - Tiempo No Lineal	
Excitación transversal 1	Excitación longitudinal 2	Excitación transversal 3	Excitación longitudinal 4	Excitación transversal 5	Excitación longitudinal 6

ANALISIS DINAMICO. TABLA 5. NUMERO DE LOS CASOS.

Marco No.	a	a_1	a_2	a_3	b	b_1	b_2	b_3
2 al 6	1.0	-3.307	-4.764	-0.457	1.0	-3.216	-4.897	-0.681

ANALISIS DINAMICO. TABLA 6. CONSTANTES DE LAS FUNCIONES DE FLUENCIA EN LAS COLUMNAS.

Modo	Período (seg)		Factores de Participación.		
	STRUDL	BSAP	X (Long.)	Y (Vert.)	Z (transv.)
1	0.399	0.398	1.6	26.8	28.7
2	0.371	0.371	83.3	- 0.8	-75.3
3	0.367	0.367	55.6	- 6.5	115.2
4	0.340	0.340	-66.5	0.2	3.2
5	0.309	0.309	-30.4	4.5	- 3.3
6	0.294	0.294	73.6	0.3	2.6
7	0.261	0.261	- 3.9	- 9.5	- 5.1
8	0.240	0.239	4.3	14.6	-34.4
9	0.234	0.233	-15.8	-22.7	4.0
10	0.221	0.222	17.0	-74.8	- 4.8

ANALISIS DINAMICO. TABLA 7. PERIODOS Y FACTORES DE PARTICIPACION DE LA ESTRUCTURA.

Localización	Fuerza axial (ton)	Cortante transv. (ton)	Cortante long. (ton)	Momento de torsión (ton.m)	Momento long. (ton.m)	Momento transv. (ton.m)
Estribo 1	0	1.6	190	-34	0	0
Marco 2	818	9	73	- 0.83	- 190	29
Marco 3	829	12	- 73	- 0.55	160	46
Marco 4	631	3.6	78	1	- 131	39
Marco 5	734	10	- 62	2	205	39
Marco 6	741	4	- 17	1	86	10
Estribo 7	0	1.4	190	-34	0	0

ANALISIS DINAMICO.- TABLA 8.- FUERZAS EN LOS APOYOS, POR CARGA MUERTA.

Marco No.	Dirección de cortante y Momento.	Momento de Fluencia*	Caso No.		
			1 (E.R.)	3 (H-T. L)	5 (H-T. N.L.)
2	transv.	2 271	3 131 # (472) +	3 975 (596)	2 062 (312)
	long.	1 656	4 313 (1047)	2 400 (630)	1 297 (346)
3	transv.	2 276	6 154 (898)	7 688 (1128)	2 312 (330)
	long.	1 660	506 (1213)	1 162 (305)	623 (183)
4	transv.	2 311	7 349 (1075)	8 558 (1235)	2 282 (359)
	long.	1 582	844 (300)	299 (149)	396 (101)
5	transv.	2 228	6 097 (866)	7 084 (1002)	2 253 (321)
	long.	1 624	1 636 (410)	1 462 (364)	736 (321)
6	transv.	2 232	3 338 (467)	3 730 (514)	1 988 (275)
	long.	1 627	2 005 (438)	2 020 (444)	1 082 (255)

* Momento correspondiente a la carga muerta.

Momento máximo en la base de la columna (ton.m)

\+ Cortante máximo en la base de la columna (ton).

ANALISIS DINAMICO.- TABLA 9.- MOMENTOS MAXIMOS EN LAS COLUMNAS Y CORRESPONDIENTES CORTANTES DEBIDOS AL SISMO TRANSVERSAL.

Marco No.	Dirección de cortante y Momento.	Momento de Fluencia*	Caso No.		
			2 (E.R)	4 (H-T.L)	6 (H-T. N.L.)
2	transv.	2 271	2 134 # (333) +	1 349 (236)	891 (150)
	long.	1 656	4 584 (1121)	4 932 (1208)	1 702 (463)
3	transv.	2 276	3 724 (554)	1 257 (214)	928 (137)
	long.	1 660	4 333 (1066)	5 134 (1274)	1 696 (468)
4	transv.	2 311	4 063 (586)	1 052 (154)	514 (73)
	long.	1 582	2 307 (605)	3 220 (779)	1 653 (422)
5	transv.	2 228	3 574 (517)	2 114 (330)	2 156 (194)
	long.	1 624	3 030 (829)	3 993 (1025)	1 652 (194)
6	transv.	2 232	2 089 (301)	1 606 (249)	1 057 (157)
	long.	1 627	2 319 (536)	3 070 (670)	1 671 (144)

* Momento correspondiente a la carga muerta.

\# Momento máximo en la base de la columna (ton.m)

\+ Cortante máximo en la base de la columna (ton)

ANALISIS DINAMICO. TABLA 10.- MOMENTOS MAXIMOS EN LAS COLUMNAS Y CORRESPONDIENTES CORTANTES DEBIDOS AL SISMO LONGITUDINAL.

Caso	LOCALIZACION Estribo 1 (ton)	Estribo 2 (ton)	Articulación tramo 3 (ton)
1	106	150	364
3	118	152	425
5	172	195	163
2	85	no	216
4	114	143	104
6	81	109	N.D.

ANALISIS DINAMICO. TABLA 11.- FUERZA TRANSVERSAL MAXIMA EN LOS TOPES PARA CORTANTE PARA SISMOS LONGITUDINAL Y TRANSVERSAL.

Localización	Dirección Global	Sismo transversal.			Sismo longitudinal.		
		Caso No.					
		1 (E.R.)	3 (H-T. L.)	5 (H-T.N.L.)	2 (E.R.)	4 (H-T.L.)	6 (H-T.N.L)
Estribo 1	Transv.	0.020	0.011	0.009	0.021	0.022	0.019
	Long.	0.031	0.017	0.013	0.033	0.034	0.028
Marco 2	Transv.	0.023	0.031	0.019	0.023	0.017	0.011
	Long.	0.035	0.007	0.007	0.033	0.039	0.032
Marco 3	Transv.	0.039	0.052	0.034	0.027	0.008	0.005
	Long.	0.040	0.003	0.007	0.035	0.042	0.036
Marco 4	Transv.	0.049	0.058	0.042	0.027	0.066	0.004
	Long.	0.003	0.002	0.007	0.021	0.029	0.027
Marco 5	Transv.	0.046	0.053	0.033	0.026	0.013	0.008
	Long.	0.004	0.001	0.007	0.021	0.029	0.027
Marco 6	Transv.	0.031	0.035	0.023	0.019	0.012	0.011
	Long.	0.008	0.006	0.007	0.019	0.028	0.025
Estribo 7	Transv.	0.012	0.012	0.009	0.013	0.017	0.015
	Long.	0.018	0.018	0.014	0.019	0.026	0.022

ANALISIS DINAMICO. TABLA 12.- DESPLAZAMIENTO MAXIMOS DE LA CUBIERTA DEBIDOS AL SISMO EN LAS DIRECCIONES TRANSVERSAL Y LONGITUDINAL.

	Máx. Movimiento de la Articulación (m)		Máx. Fuerza Restrictiva (ton.)	
Caso	Unidad Interior (Derecha)	Unidad Exterior (Izquierda)	Unidad Interior (Derecha)	Unidad Exterior (Izquierda)
1	0.037	0.040	68	72
3	0.004	0.007	7	12
5	0.013	0.015	0	0
2	0.038	0.040	69	73
4	0.034	0.035	62	64
6	0.025	0.025	0	0

ANALISIS DINAMICO.- TABLA 13.- SEPARACIONES MAXIMAS DE LA ARTICULACION Y FUERZAS DE RESTRICCION DEBIDAS A LAS EXCITACIONES LONGITUDINAL Y TRANSVERSAL.

P-35 w

Localización	Excitación Transversal		Excitación Longitudinal	
	Desplazamiento		Desplazamiento	
	Transversal	Longitudinal	Transversal	Longitudinal
Estribo 1	- 0.0035	0.0054	0.0069	- 0.0106
Marco 2	- 0.0106	0.0015	0.0022	- 0.013
Marco 3	- 0.0158	- 0.0003	- 0.0009	- 0.0141*
Marco 4	- 0.0165*	0.0004*	- 0.0002	- 0.0117
Marco 5	- 0.0156	0.0002	0.0004	- 0.0119
Marco 6	- 0.0110	- 0.0015	- 0.0019	- 0.0114
Estribo 7	- 0.0037	- 0.0056	- 0.0061	- 0.0093

* Marco en el que se presenta la primera fluencia
o todos los resultados corresponden al análisis
historia - tiempo, no lineal.

ANALISIS DINAMICO.- TABLA 14.- DESPLAZAMIENTO DE LA CUBIERTA, AL INICIO DE LA FLUENCIA EN LA COLUMNA, EN METROS.

Marco No.	E (ton/m^2)	I_y long. m^4	M_{yp} ton.m	h_y m	θ_y^y (rad x 10^{-3})	I_z m^4	M_{zp} ton.m	h_z m	θ_z^y rad x 10^{-3}
2 216	2.1 x 10^6	0.63	1 656	2.14	1.715	1.23	2 208	1.52	1.633

ANALISIS DINAMICO.- TABLA 15.- ROTACIONES DE FLUENCIA DE FLEXION EN LAS COLUMNAS

Localización	Distorsión Rotacional Máxima No lineal		Demanda de Ductilidad Rotacional Máxima	
	Movimiento Transversal (Rad.x 10^{-3})	Movimiento Longitudinal (Rad. x 10^{-3})	Movimiento Transversal	Movimiento Longitudinal
Marco 2	1.337	3.176	1.79	2.86
Marco 3	2.456	3.238	2.50	2.89
Marco 4	3.588	1.781	3.20	2.04
Marco 5	2.625	2.155	2.58	2.26
Marco 6	0.989	1.729	1.59	2.01

ANALISIS DINAMICO.- TABLA 16.- DEMANDAS DE DUCTILIDAD MAXIMAS LOCALES EN LAS BASES DE LAS COLUMNAS.

Bibliografía relativa al Análisis Dinámico de Puentes.-

El ejemplo presentado se ha tomado prácticamente en forma textual de "Seismic Response of Bridges. Case Studies" por Roy A. Imbsen, Richard V. Nutt y Joseph Penzien. Es este un informe a U.S. Department of Transportation, Federal Highway Administration, y publicado por el Earthquake Engineering Research Center, College of Engineering, University of California, Berkeley. Informe No. UCB/EERC-78/14 de Junio de 1978.

Las publicaciones adicionales del UCB/EERC que se pueden consultar en referencia al análisis dinámico de puentes, son las siguientes:

1.- Seismic Studies of the Articulation for the Dumbarton Bridge Replacement Structure. Frank Baron y Raymond E. Hamati. 2 vols. Informes EERC 75-8 y 75-9. Febrero de 1975.

2.- Determination of Seismic Design Criteria for the Dumbarton Bridge Replacement Structure. Frank Baron y S.H. Pang. 2 vols. Informes EERC 75-1 y 75-2, Febrero de 1975

3.- Analytical Investigations of Seismic Response of Short, Single,or Multiple Span Highway Bridges. Ma-Chi Chen y J. Penzien. Informe EERC 75-4. Enero de 1975.

4.- Analytical Investigations of the Seismic Response of Long Multiple Span Highway Bridges. W. S. Tseng y J. Penzien. Informe EERC 73-12. Junio de 1973.

5.- Nolinear Soil Structure Interaction of Skew Highway Bridges. Ma-Chi Chen y J. Penzien. Informe UCB/EERC 77/24. Agosto de 1977.

6.- Experimental Model Studies of the Seismic Response of High Curved Overcrossings. David Williams y William G. Godden. Informe EERC 76-18. Junio de 1976.

Consúltense también las siguientes referencias:

8.- California's Seismic Design Criteria for Bridges, por J. Gates. Journal of the Structural Division, ASCE, Vol. 102, No. ST12, Dic. de 1976, pags. 2301-2313.

9.- Rock Motion Acceleregrams for High Magnitud Earthquakes. I.B. Seed e I.M. Idriss. Informe EERC 69-7, 1969.

Las referencias 1, 2, 3, 4 y 6 pueden también consultarse en los artículos abreviados publicados en los Proceedings of the U.S. National Conference on Earthquake Engineering, Junio de 1975. Ann Arbor, Michigan editados por Earthquake Engineering Research Institute. Pags. 176 a 205.

II.- VIBRACIONES EN VIGAS.

Supóngase la viga esbelta y elástica, que se muestra en la figura 2.1 y cuya sección transversal puede ser variable a lo largo de ella, de tal forma que su masa varía también por unidad de longitud. Esto es, la masa y la rigidez pueden representarse como m(x) y EI(x) respectivamente.

La carga que actúa sobre la estructura es de tal naturaleza, que varía de sección en sección en cualquier instante y su intensidad en una sección dada, asimismo varía con el tiempo. Esta carga se puede representar por w(x,t).

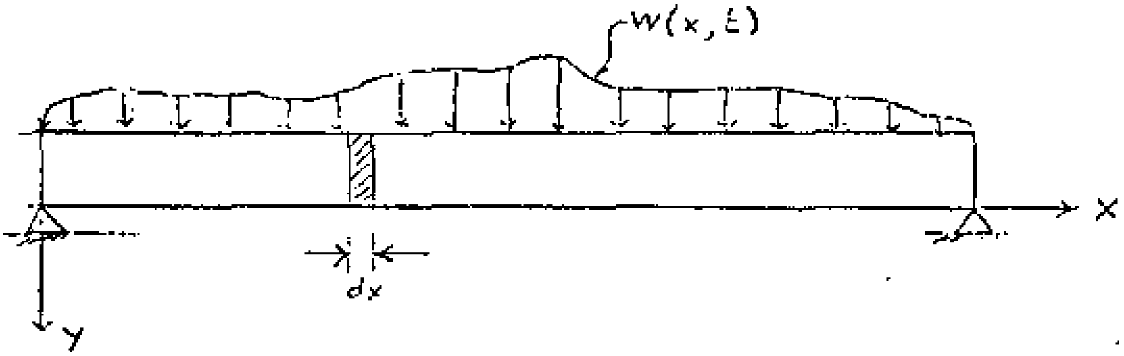


Figura 2.1

El movimiento en la viga que resulta de la aplicación de la carga, da lugar a fuerzas cortantes, V(x,t); momentos flexionantes, M(x,t); deflexiones Y(x,t); velocidades, $\partial y/\partial t$ y aceleraciones $\partial^2 y/\partial t^2$.

Considerando un diagrama del cuerpo libre de un elemento dx, en la figura 2.2, se tiene la siguiente ecuación del equilibrio de las fuerzas a la dirección vertical:

Por la 2a. ley de Newton,

$$\Sigma Fy = m\ dx\ \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \qquad (2.1)$$

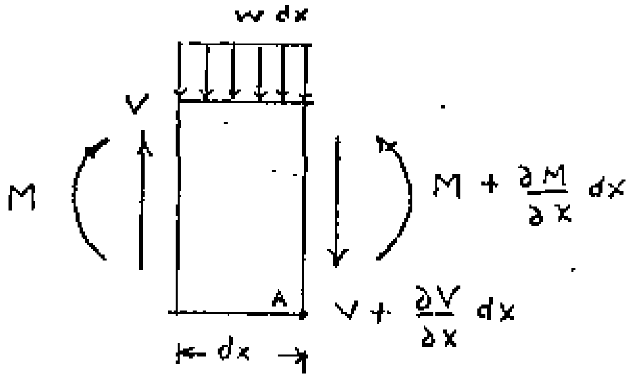


Figura 2.2

en que mdx es la masa total del elemento de longitud dx. Si ahora se substituyen las fuerzas verticales que aparecen en la figura 2.2 en el miembro de la izquierda de la ecuación (2.1), obtenemos:

$$wdx + V + \frac{\partial V}{\partial x}dx - V = mdx\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \qquad (2.2)$$

simplificando:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = m\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - w \qquad (2.3)$$

En las ecuaciones (2.2) y (2.3) se ha tomado como positiva la dirección hacia abajo del eje Y.

Si suponemos que la aplicación de las cargas es gradual, de tal manera que las fuerzas de inercia sean despreciables, la suma de momentos respecto a un punto A del elemento, resulta:

$$Vdx - wdx\frac{dx}{2} + M - M - \frac{\partial M}{\partial x}\ dx = 0 \qquad (2.4)$$

De esta expresión puede despreciarse por ser de orden superior, al término que contiene a w. Consecuentemente, (2.4) queda:

$$V = \frac{\partial M}{\partial x} \qquad (2.5)$$

De (2.3) y (2.5) se obtiene:

$$\frac{\partial^2 M}{\partial x^2} = m\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - w \qquad (2.6.)$$

Obsérvese en (2.6) que si tratase de un problema estático, obtendríamos la expresión conocida:

$$\frac{d^2 M}{dx^2} = - w \qquad (2.7)$$

Asimismo (2.6) ha sido desarrollada con la sola inclusión de las ecuaciones de equilibrio de fuerzas y momentos y es válida independientemente de la naturaleza del material de la viga, con tal de que dicho material tenga una distribución continua de su masa.

Se intentará enseguida, expresar el momento flexionante en una sección, en términos de la deflexión.

El esfuerzo normal en una fibra cualquiera, está dado por la fórmula conocida de la " escuadría ".

$$\sigma = \frac{M \cdot c}{I} \qquad (2.8)$$

en que M, es el momento flexionante, que se considera positivo cuando provoca compresiones en las fibras superiores de la viga; I es el momento de inercia de la sección transversal y c es la distancia vertical entre el centroide de la sección y la fibra donde interesa valuar σ. La distancia c se considera positiva si se mide hacia abajo.

Considérese una fibra de la viga, localizada abajo del eje centroidal. Cuando una fibra se encuentra abajo del eje neutro y el momento aplicado es positivo, esas fibras inferiores se alargan y las superiores se acortan.

Si la longitud del elemento diferencial en consideración, es dx para un momento positivo, el extremo izquierdo del elemento se desplazará u, y el lado derecho u + du, por lo que es cambio neto de longitud será du. La deformación unitaria vale por lo consiguiente du/dx, por definición, ya que du es la deformación total y dx es la longitud original. Véase la figura 2.3.

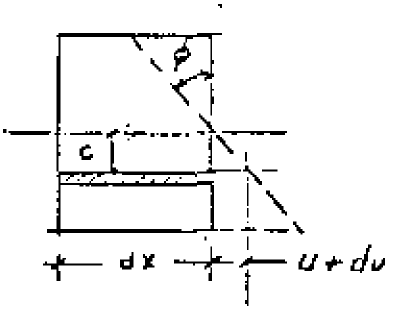


Figura 2.3

Sin embargo, puesto que el momento que da lugar a las deformaciones varía con el tiempo como ya se ha asentado, la deformación misma también variará con el tiempo, y por lo tanto, la deformación unitaria debe representarse como una derivada parcial respecto a x:

$$\epsilon = \frac{\partial u}{\partial x} \qquad (2.9)$$

De conformidad con la convención de signos adoptada, obsérvese que la pendiente $\partial y/\partial x$ resulta positiva cuando la sección gira en el sentido del reloj y como consecuencia de un momento negativo.

En la figura 2.3 se observa que un momento positivo da lugar a una pendiente de magnitud:

$$\tan\phi = -\frac{u+du}{c} \approx -\frac{u}{c} \qquad (2.10)$$

Para ángulos pequeños:

$$\tan\phi = \phi \qquad (2.11)$$

La pendiente de la elástica será para el mismo momento:

$$\tan\phi = \frac{\partial y}{\partial x} \qquad (2.12)$$

Combinando (2.10), (2.11) y (2.12), se obtiene:

$$u = -c\,\frac{\partial y}{\partial x} \qquad (2.13)$$

Derivando (2.13) respecto a x; se obtiene de (2.9)

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -c\,\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \epsilon \qquad (2.14)$$

Los materiales que cumplen con la ley de Hooke, son aquellos que tienen un comportamiento elástico y entonces:

$$\sigma = \epsilon E \qquad (2.15)$$

o sea que, de (2.8),(2.14) y (2.15), se puede obtener:

$$\sigma = -c\,\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\,E$$

y De (2.8)

$$\sigma = \frac{Mc}{I}$$

finalmente:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -\frac{M}{EI} \qquad (2.16)$$

Si utilizamos ahora (2.6) obtenemos finalmente la ecuación fundamental elástica de una viga esbelta.

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(EI\,\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right) + m\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = w \qquad (2.17)$$

Si no existen cargas exteriores, (2.17) simplemente se transforma a:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(EI\,\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right) + \frac{m\partial^2 y}{\partial t^2} = 0 \qquad (\ 2.18\ )$$

Todavía más: si la viga fuese de sección uniforme en toda su longitud, conservándose constante E e I, se tiene:

$$\frac{\partial^4 y}{\partial x^2} + \frac{m}{EI}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0 \qquad (\ 2.19\ )$$

Esta es una ecuación en derivadas parciales con las siguientes características: es lineal, de 4o orden y coeficientes constantes.

Se buscan soluciones para la ecuación (2.18), de la forma:

$$y = Xq \qquad (\ 2.20\ )$$

donde X es función solamente de x y se le designa como "función de forma" para la viga, en tanto que q es función del tiempo sólamente y se le llama "función de tiempo" de la viga.

Substituyendo (2.20) (2.19), se obtiene:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(EI\,\frac{\partial^2 X}{\partial x^2}\right) q + mX\,\ddot{q} = 0 \qquad (\ 2.21\ )$$

en que $\ddot{q}$ representa la 2a derivada de q respecto a t, y

$$\frac{\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(EI\,\frac{\partial^2 X}{\partial x^2}\right)}{m\,X} = -\frac{\ddot{q}}{q} \qquad (\ 2.22\ )$$

puesto que el miembro de la izquierda depende sólo de x, en tanto que el de la derecha depende sólo de t y como ambos miembros son iguales, tal hecho sólo puede cumplirse si ambos son iguales a la misma constante, que elegimos sea p^2. De esta manera podemos igualar ambos miembros a p^2 y desacoplar las ecuaciones; quedando:

$$\ddot{q} + p^2 q = 0 \qquad (\ 2.23\ )$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(EI\,X''\right) - mp^2\,X = 0 \qquad (\ 2.24\ )$$

en el caso de la ecuación (2.19), con EI constante, (2.24) se transforma en:

$$EIX^{IV} - mp^2X = 0 \qquad (2.25)$$

Es conveniente introducir la siguiente notación:

$$\beta = \sqrt[4]{\frac{mp^2}{EI}} \qquad (2.26)$$

y escribir:

$$X^{IV} - \beta^4 X = 0 \qquad (2.27)$$

en que β es el llamado parámetro de forma y p es la frecuencia circular.

La solución de (2.27) contiene cuatro constantes arbitrarias de integración, ya que la ecuación es de cuarto orden en x. Puede hacerse ver que,

$$X = C_1 \operatorname{sen} \beta x + C_2 \cos \beta x + C_3 \operatorname{senh} \beta x + C_4 \cosh \beta x \qquad (2.28)$$

La ecuación (2.23.) es de la misma forma que la que describe el movimiento vibratorio de una estructura con un solo grado de libertad y su solución es:

$$q = A \operatorname{sen} pt + B \cos pt \qquad (2.29)$$

o

$$q = C \cos (pt - \alpha) \qquad (2.30)$$

De (2.20); la solución $y = X\cos (pt - \alpha)$ (2.31)

en la que la constante C queda involucrada en las constantes de (2.28). En tanto que A, B y C se determinan a partir de las condiciones iniciales del problema y α es el ángulo de fase.

En la ecuación (2.28), los constantes de integración C_1, C_2, C_3 y C_4, se determinan en forma similar a partir de las condiciones de frontera del problema.

Ejemplo: Se trata de analizar una pila para puente se sección constante representada en la figura 2.4 a (Okamoto, pag. 311).

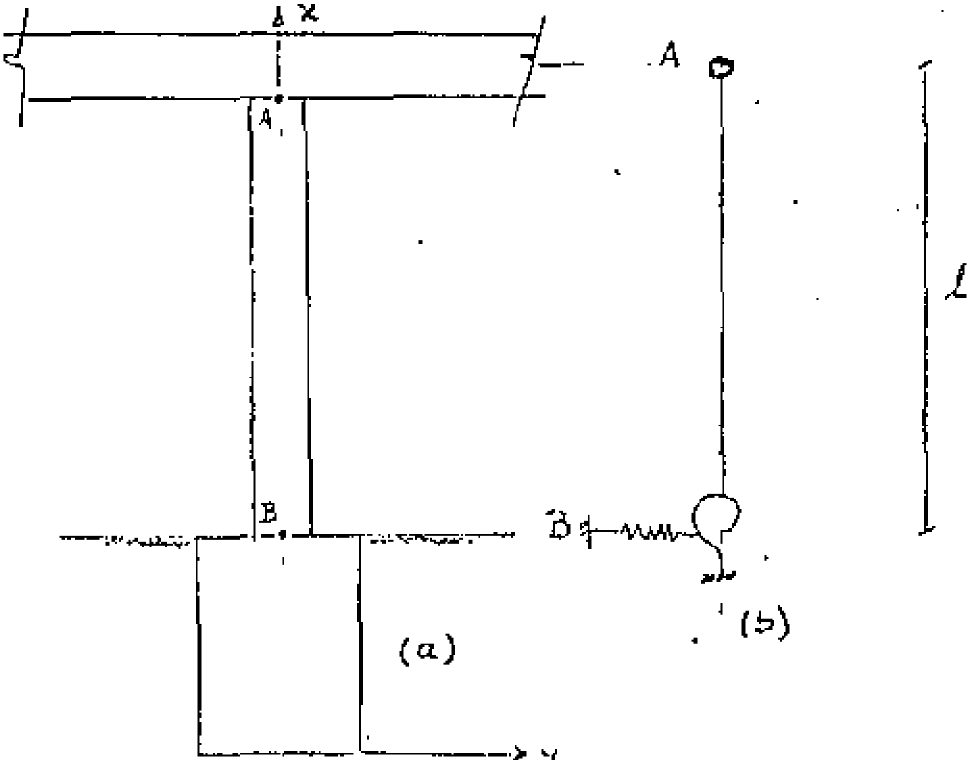


Figura 2.4

La pila se encuentra empotrada en el terreno y con una trabe descansando en su parte superior, o sea que la pila es un voladizo y la trabe colocada en su parte superior se considera como una masa considerable que se agrega en su parte superior. El modelo que representa a la estructura, es el mostrado en la figura 2.4b, en que hay un resorte entre la cimentación y el terreno que aplica una reacción proporcional al desplazamiento horizontal de la cimentación y un momento proporcional al ángulo de rotación de la cimentación.

Si el terreno vibra con una aceleración sísmica $\ddot{U}$, la vibración del puente ocasionada por esta vibración del terreno, se representa por la ecuación 2.18, modificada en la forma siguiente:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(EI\ \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right) + m(\ddot{y} + \ddot{U}) = 0 \qquad (\ 2.32\ )$$

en que y: es el desplazamiento o la deflexión de la pila, respecto al terreno.

U: es el desplazamiento del terreno durante el temblor.

m: es la masa por unidad de longitud de la pila.

EI: rigidez a la flexión de la pila.

El primer término contiene la fuerza que tiende a restaurar la deformación de la pila producida por la fuerza de inercia debida a la masa acelerada de la pila. Se supone que la fuerza axial del peso de la pila y de la trabe, se pueden despreciar.

En la parte superior de la pila, el momento flexionante vale 0 y la fuerza cortante es igual a la fuerza de inercia de la trabe. Si se designa con M a la masa de la trabe, las condiciones para $x = \ell$, en la parte superior de la pila, son:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial}{\partial x}\left(EI\ \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right) = M\ (\ \ddot{y} + \ddot{U}\ ) \qquad (\ 2.33\ )$$

En el fondo de la pila, el momento flexionante y la fuerza cortante son proporcionales al ángulo de rotación y la deflexión de la pila, respectivamente. Si llamamos K_1 y K_2 a las rigideces de cada uno de esos resortes, tendremos:

$$EI\ \frac{\partial^2 y}{\partial x2} = K_1\ \frac{\partial y}{\partial x} \quad ; \quad \frac{\partial}{\partial x}\left(EI\ \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right) = K_2 Y \qquad (\ 2.34\ )$$

Si la aceleración del terreno $\ddot{U}$ es un dato, el comportamiento de la pila durante un sismo puede determinarse mediante las ecuaciones (2.31), (2.32) y (2.33).

Supóngase ahora en forma simple, que $\ddot{U} = 0$, para una vibración libre y una sección uniforme de la pila, podremos utilizar la ecuación (2.19) y mediante el método de separación de variables ya descrito, obtenemos las ecuaciones 2.26 y y 2.27, así como la solución para X de la ecuación (2.28).

Las condiciones iniciales en este caso son:

Para x = L, el momento en el extremo superior vale cero: $\frac{d^2X}{dx^2} = 0$ (2.35)

el cortante en el extremo superior es igual a la fuerza de inercia de la masa de la trabe:

$$EI\,\frac{d^3X}{dx^3} = -M\,p^2\,X \qquad (\;2.36\;)$$

En (2.36) se obtienen unidades de fuerza, ya que p^2, el cuadrado de la frecuencia circular se puede escribir $\frac{K}{M}$ y KX tiene unidades de fuerza.

El signo menos proviene del hecho de que la fuerza cortante en la pila es contraria a la fuerza de inercia.

Para x=0 La rotación y el desplazamiento del empotramiento de la pila, se puede representar similarmente a la ecuación 2.33:

$$EI\,\frac{d^2X}{dx^2} = K_1\,\frac{dX}{dx}\;; \qquad (\;2.37\;)$$

$$EI\,\frac{d^3X}{dx^3} = K_2\,X \qquad (\;2.38\;)$$

Substituyendo las ecuaciones 2(35-37) en la ecuación (2.28), se plantean cuatro ecuaciones homogéneas para las cuatro constantes de integración C_1, C_2, C_3 y C_4. Para que el sistema planteado tenga soluciones diferentes a la trivial, el determinante de los coeficientes debe ser igual a cero. Esto es:

$$\begin{vmatrix} -\operatorname{sen}\beta l & -\cos\beta l & \operatorname{senh}\beta l & \cosh\beta l \\ \frac{Mp^2}{\beta^3 EI}\operatorname{sen}\beta l - \cos\beta l & \frac{Mp^2}{\beta^3 EI}\cos\beta l + \operatorname{sen}\beta l & \frac{Mp^2}{\beta^3 EI}\operatorname{senh}\beta l + \cosh\beta l & \frac{Mp^2}{\beta^3 EI}\cosh\beta l + \\ \frac{K_1}{\beta EI} & 1 & \frac{K_1}{\beta EI} & \\ 1 & \frac{K_2}{\beta^2 EI} & -1 & \frac{K_2}{\beta^3 EI} \end{vmatrix} = 0 \qquad (2.39)$$

La frecuencia natural se obtiene resolviendo la expresión anterior, en la que se determina primeramente $\beta\ell$ y de ahí se substituye para hallar p. Existe un número infinito de valores de p que satisfacen la ecuación (2.38), de manera que una vez determinando un valor de p, se obtiene una relación entre las cuatro constantes de integración, la cual proporciona un modo de la vibración libre. El número de modos de la vibración libre, es asimismo infinito.

Si la sección transversal de la pila no es uniforme, es difícil resolver la ecuación diferencial de partida (2.17) ó (2.18) en forma analítica. Es necesario resolverla por métodos numéricos. Véase por ejemplo, la solución mediante diferencias finitas de Okamoto, (Ref. 3 pag. 313).

En seguida, se presenta una relación de las condiciones de frontera aplicables para cada tipo de apoyo, en la solución de la ecuación diferencial. Para apoyos localizados en $x = x_1$.

Apoyos simples.- $X''(x_1) = X(x_1) = 0$

Deflexión y momento nulo en cualquier apoyo, para cualquier valor de t.

Empotramientos.- $X(x_1) = X'(x_1) = 0$

Deflexión y pendiente nulas en el apoyo empotrado.

Extremo libre.- $X''(x_1) = X'''(x_1) = 0$

Momento y cortante nulos en el extremo libre.

III VIBRACIONES EN VIGAS CONTINUAS.

a) VIGAS DE DOS CLAROS:

Considérese la viga contínua de dos claros L_1 y L_2, que descansa en una cimentación rígida, con los valores de m, E e I constantes en todo el claro. Los apoyos extremos giran libremente.

Se presenta enseguida, la solución matemática de las vibraciones libres de la estructura.

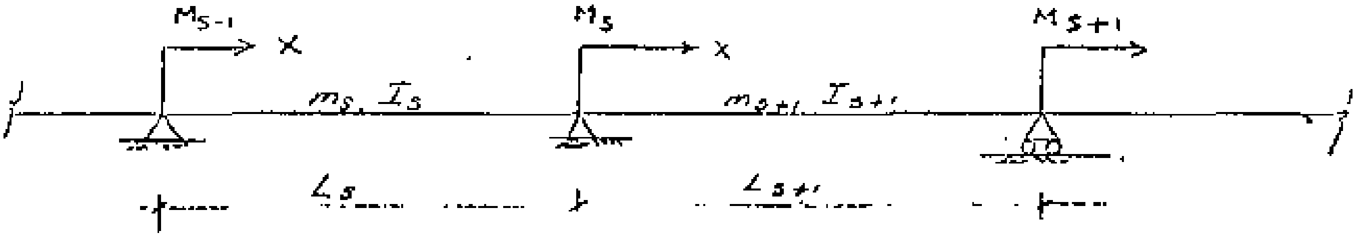


Figura 3.1

Para este caso es aplicable en cualquiera de los claros y con cualesquier con diciones de apoyo, la ecuación (2-21) y su solución (2.28). Consecuentemente para un modo n y un claro s, la forma característica queda así:

$$X_s(x) = C_1 \text{ sen } \beta_s x + C_2 \cos \beta_s x + C_3 \text{ senh } \beta_s x + C_4 \cosh \beta_s x$$

$$X_s'(x) = \beta_s \; (C_1 \cos \beta_s x + C_2 \text{ sen } \beta_s x + C_3 \text{ senh } \beta_s x + C_4 \cosh \beta_s \;)$$

$$X_s''(x) = \beta_s^2 \; (-C_1 \text{ sen } \beta_s x - C_2 \text{ sen } \beta_s x + C_3 \text{ senh } \beta_s x + C_4 \cosh \beta_s x \;)$$

en que X_s' (x) y X_s'' (x) son la primera y segunda derivada con respecto a x, y

$$\beta_s = \sqrt[4]{\frac{m_s p_n^2}{EI_s}}$$

en que p_n es la frecuencia asociada al enésimo modo. Si la vibración es libre, las frecuencias asociadas a cada uno de los claros, deben ser las mismas, puesto que estamos tratando con una viga contínua.

Las condiciones de frontera para dos claros adyacentes, quedan establecidas de la forma siguiente:

$$X_s\ (0) = 0 (a);\ X_s\ (L_s) = 0\ (b);\ X_s'\ (L_s) = X_{s+1}'\ (0) \qquad (\ c\ )$$

$$EI_s\ X_s''\ (L_s) = EI_{s+1}\ X_{s+1}''\ (0) = -M_s \qquad (\ d\ )$$

$$X_{s+1}\ (0) = 0 \qquad (\ e\ )$$

expresiones que significan que en la forma modal, las deflexiones son nulas en los apoyos y que las pendientes y momentos flexionantes de dos claros adyacentes y que concurren al mismo apoyo, deben ser iguales. Si ahora substituímos las expresiones para la forma modal y sus derivadas, en las condiciones de frontera, debemos obtener:

(f) $\qquad C_2 + C_4 = 0$

(g) $C_1 \text{ sen } \beta_s L_s + C_2 \cos \beta_s L_s + C_3 \text{ senh } \beta_s L_s + C_4 \cosh \beta_s L_s = 0$

(h) $C_1 \cos \beta_s L_s - C_2 \text{ sen } \beta_s L_s + C_3 \cosh \beta_s L_s + C_4 \text{ senh } \beta_s L_s = \dfrac{\beta_{s+1}}{\beta_s} \; (D_1 + D_3)$

(i) $-C_1 \text{ sen } \beta_s L_s - C_2 \cos \beta_s L_s + C_3 \text{ senh } \beta_s L_s + C_4 \cosh \beta_s L_s = \dfrac{\beta_{s+1}^2}{\beta_s^2} \; \dfrac{EI_{s+1}}{EI_s} \; (-D_2+D_4)$

(j) $\qquad D_2 + D_4 = 0$

en que las constantes D_i se refieren al claro (s+1).

Si primero se suman y luego se restan g) e i) y usando j); g) + i) :

$$2C_3 \text{ senh } \beta_s L_s + 2\, C_4 \cosh \beta_s L_s = -\frac{\beta_{s+1}^2}{\beta_s^2} \; \frac{I_{s+1}}{I_s} \; (-2\, D_2)$$

g-i) $$2\,C_1 \operatorname{sen} \beta_s L_s + 2\,C_2 \cos \beta_s L_s = \frac{\beta_{s+1}^2}{\beta_s^2}\;\frac{I_{s+1}}{I_s}\;(\,2\,D_2\,)$$

k) $$D_1 = -D_2$$

l) $$C_3 \operatorname{senh} \beta_s L_s - C_2 \cosh \beta_s L_s = -D_2\,\frac{\beta_{s+1}^2}{\beta_s^2}\;\frac{I_{s+1}}{I_s}$$

m) $$C_1 \operatorname{sen} \beta_s L_s + C_2 \cos \beta_s L_s = D_2\,\frac{\beta_{s+1}^2}{\beta_s^2}\;\frac{I_{s+1}}{I_s}$$

de donde se obtiene:

n) $$C_3 = \frac{C_2 \cosh \beta_s L_s - D_2\,\dfrac{\beta_{s+1}^2}{\beta_s^2}\,\dfrac{I_{s+1}}{I_s}}{\operatorname{senh} \beta_s L_s}$$

o) $$C_1 = \frac{-C_2 \cos \beta_s L_s + D_2\,\dfrac{\beta_{s+1}^2}{\beta_s^2}\,\dfrac{I_2}{I_1}}{\operatorname{sen} \beta_s L_s}$$

Sumando n) y o):

$$C_1 + C_3 = C_2 \left(\frac{\cosh \beta_s L_s}{\operatorname{senh} \beta_s L_s} - \frac{\cos \beta_s L_s}{\operatorname{sen} \beta_s L_s} \right) - D_2\,\frac{\beta_{s+1}^2}{\beta_s}\;\frac{I_{s+1}}{I_s} \left(\frac{1}{\operatorname{senh}\beta_s L_s} - \frac{1}{\operatorname{sen} \beta_s L_s} \right)$$

pudiendo escribir:

p) $$C_1 + C_3 = C_2\,G_s - D_2\,\frac{\beta_{s+1}^2}{\beta_s}\;\frac{I_{s+1}}{I_1}\;H_s$$

pues hemos hecho que:

q) $$G_s = \coth \beta_s L_s - \cot \beta_s L_s$$

y

r) $$H_s = \operatorname{cosech} \beta_s L_s - \operatorname{cosec} \beta_s L_s$$

Ahora incrementemos en 1, todos los subíndices de G, β, I y H, en p), al mismo tiempo que substituimos las constantes C, por D y D por F para representar a los tramos (s+1) y (s+2) respectivamente.

La expresión resultante que es igual a $D_1 + D_3$, se substituye en el miembro de la derecha de h) y si n) y o) junto con $C_4 = -C_3$ se substituyen en el miembro de la izquierda de la misma ecuación h), queda lo siguiente:

$$p') \quad D_1+D_3 = D_2\ G_s + 1 - F_2 \left(\frac{\beta_{s+2}^2}{\beta_{s+1}^2} \quad \frac{I_{s+2}}{I_{s+1}} \right) H_s + 1 \quad ;$$

$$\frac{-C_2 \cos \beta_s L_s + D_2 \dfrac{\beta_{s+1}^2}{\beta_s^2} \dfrac{I_{s+1}}{I_s}}{\operatorname{sen} \beta_s L_s} \cos \beta_s L_s - C_2 \ (\operatorname{sen} \beta_s L_s + \operatorname{senh} \beta_s L_s)$$

$$+ \frac{C_2 \cosh \beta_s L_s - D_2 \dfrac{\beta_{s+1}^2}{\beta_s^2} \dfrac{I_{s+1}}{I_s}}{\operatorname{senh} \beta_s L_s} \cosh \beta_s L_s = \left(D_2\ G_{s+1} - F_2 \frac{\beta_{s+2}^2}{\beta_{s+1}^2} \frac{I_{s+2}}{I_{s+1}} \ H_{s+1} \right) \frac{\beta_{s+1}}{\beta_s}$$

$$- C_2 \ \left(\frac{\cos^2 \beta_s L_s + \operatorname{sen}^2 \beta_s L_s}{\operatorname{sen} \beta_s L_s} \right) + C_2 \ \left(\frac{\cosh^2 \beta_s L_s - \operatorname{senh}^2 \beta_s L_s}{\operatorname{senh} \beta_s L_s} \right)$$

$$-D_2 \frac{\beta_{s+1}^2}{\beta_s^2} \ \frac{I_{s+1}}{I_s} \quad (\cot \beta_s L_s - \coth \beta_s L_s) = (D_2\ G_{s+1} - F_2 \frac{\beta_{s+2}^2}{\beta_{s+1}^2} \ \frac{I_{s+2}}{I_{s+1}}) \ \frac{\beta_{s+1}}{\beta_s} \quad ;$$

$$-C_2 \ (\operatorname{cosec} \beta_s L_s - \operatorname{cosech} \beta_s L_s) - D_2 \frac{\beta_{s+1}^2}{\beta_s} \ \frac{I_{s+1}}{I_s} \ G_s - D_2 G_{s+1} \frac{\beta_{s+1}}{\beta_s} + F_2 \frac{\beta_{s+2}^2}{2\beta_{s+1}^2} \frac{I_3}{I_2} H_{s+1} \ \frac{\beta_{s+1}}{\beta_s}$$

Finalmente:

$$s) \quad C_2\ H_s - D_2 \ \left(\frac{\beta_{s+1}^2}{\beta_s} G_s + D_2 \frac{\beta_{s+1}}{\beta_s} G_{s+1}\right) + F_2 \ \frac{\beta_{s+2}^2}{\beta_s \ \beta_{s+1}} \ \frac{I_{s+2}}{I_{s+1}} \ H_{s+1} = 0$$

De d),:

$$-M_s = EI_{s+1} \ (-D_2 + D_4) \ \beta_{s+1}^2$$

y puesto que $D_4 = -D_2$

$$t) \qquad D_4 = - \frac{M_s}{2EI_{s+1}\beta_{s+1}^2}$$

Substituyendo t) en s) y sus equivalentes incrementados y disminuidos en 1 y cancelando términos iguales:

$$M_{s-1} \frac{H_s L_s}{(\beta_s L_s) I_s} - M_s \left[\frac{G_s L_s}{(\beta_s L_s) I_s} + \frac{G_{s+1} L_{s+1}}{(\beta_{s+1} L_{s+1}) I_{s+1}} \right] + M_{s+1} \frac{H_{s+1} L_{s+1}}{(\beta_{s+1} L_{s+1}) I_{s+1}} = 0 \qquad (3.1)$$

(3.1) es la ecuación de los Tres Momentos que puede utilizarse para obtener las frecuencias naturales de los modos normales. Es equivalente a la ecuación de los tres momentos del análisis estático y para la determinación de las cargas de pandeo. La ecuación (3.1) se aplica a cada uno de los pares de tramos adyacentes. Si el apoyo exterior está articulado, el momento en ese punto vale cero. Si ese extremo está empotrado, la ecuación se aplica de tal modo que M_s es el momento del extremo empotrado, y en tal caso el momento de inercia I del tramo ficticio exterior al apoyo externo, se toma igual a infinito.

Con el procedimiento señalado, se establece una ecuación para cada momento del apoyo correspondiente, resultanto un sistema de ecuaciones simultáneas. Los momentos M son aquellos que ocurren durante la vibración libre en un modo determinado, los que por supuesto no se conocen. Sin embargo, para que sea posible la presencia de una vibración, el determinante de los coeficientes de las M, debe ser nulo. Si se expande ese determinante, se obtiene una ecuación de frecuencias, cuyas raíces son $\beta_n L$, que están directamente relacionadas con p_n. Una vez obtenidas las frecuencias, se determinan las formas características substituyendo cada una de las raíces en las condiciones de frontera de las ecuaciones f) a j). El número de ecuaciones requeridas, es uno menos que el número de coeficientes β_n que se van a determinar. El procedimiento descrito se ilustra con los ejemplos siguientes:

Viga de dos claros. Supóngase la viga de la figura (3.2) la ecuación (3.1) se plantea una sola vez, en que M_s es el momento del apoyo interior y $M_{s-1} = M_{s+1} = 0$. Entonces:

$$-M_s \left[\frac{G_s L_s}{(\beta_s L_s) I_s} + \frac{G_{s+1} L_{s+1}}{(\beta_{s+1} L_{s+1}) I_{s+1}} \right] = 0 \qquad (3.2)$$

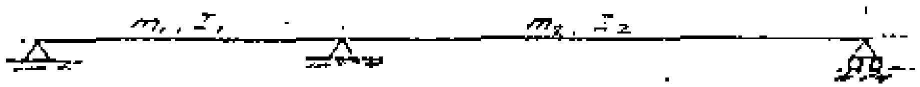


Figura 3.2

La ecuación de frecuencias:

$$\frac{G_1 L_1}{(\beta_1 L_1) I_1} + \frac{G_2 L_2}{(\beta_2 L_2) I_2} = 0 \qquad (3.3)$$

Sabemos que:

$$G_1 = \coth \beta_1 L_1 - \cot \beta_1 L_1$$

$$G_2 = \coth \beta_2 L_2 \qquad \cot \beta_2 L_2$$

$$\beta_{n1} = \sqrt[4]{\frac{m_1 pn^2}{EI_1}}$$

El problema consiste ahora en determinar los valores de $\beta_n L$ que satisfacen esta ecuación. Nótese que $\beta_{n1} L_1$ y $\beta_{n2} L_2$ tienen una relación constante para las propiedades dadas de una viga y por consiguiente una puede substituirse por una constante multiplicada por la otra. En general, tales ecuaciones de frecuencia no se resuelven fácilmente y debe emplearse un procedimiento de aproximaciones sucesivas. Este procedimiento puede acelerarse mediante el uso de valores tabulados de G y H.

Supóngase el caso particular de una viga de dos claros con rigidez, longitud y masa iguales. La ecuación de frecuencia queda:

$$G_{n1} + G_{n2} = 0$$

Ecuación que tiene dos juegos de raíces, la primera corresponde a:

$$G_{n1} \pm G_{n2} = \pm \infty$$

y la segunda a:

$$G_{n1} = G_{n2} = 0, \text{ esto es:}$$

$$\coth \beta_{n1} L_1 - \cot \beta_{n1} L_1 = \coth \beta_{n2} L_2 - \cot \beta_{n2} L_2$$

para el caso especial en que $L_1 = L_2$

$$\cot \beta_n L = \coth \beta_n L$$

Las raíces son:

$$\beta_n L = \pi,\ 2\pi,\ 3\pi \ldots$$

y

$$\beta_n L = 3.92,\ 7.06,\ 10.2\ldots$$

y las frecuencias naturales:

$$p_n^{\,2} = \frac{EI\,\beta_n^4}{m} = \frac{EI}{m\ell^4}\ (\pi^4,\ 3.92^4,\ (2\pi)^4;\ 7.06^4\ldots)$$

Las formas características de los cuatro primeros modos se muestra en la figura 3.3.

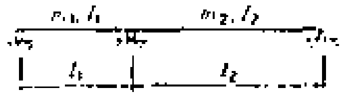
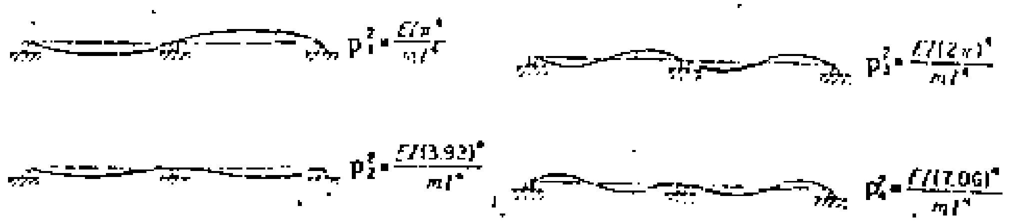


Figura 3.3.

MODOS NATURALES DE DOS CLAROS IDENTICOS



MODOS NORMALES DE UNA VIGA DE DOS CLAROS.

En general, el primer juego de raíces, los modos impares, corresponden a los modos antisimétricos que corresponden a los modos de una viga simplemente apoyadas y los modos simétricos o el segundo juego de raíces, corresponden a una viga con un extremo empotrado y otro simplemente apoyado. Obsévese que en los modos antisiméticos o impares existe un nudo en el apoyo central y por lo consiguiente un claro no afecta al comportamiento del otro. Por otra parte, en el modo simétrico no hay rotación en el apoyo central, como si existiera un empotramiento en ese apoyo:

Supóngase ahora una viga de tres claros. La ecuación (3.2) debe plantearse dos veces. Véase la figura 3.4.

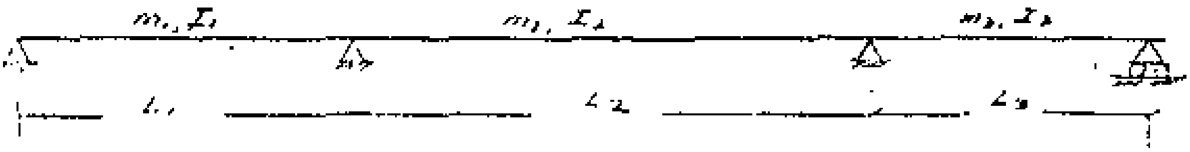


Figura 3.4

$$-M_1\left[\frac{G_1\,L_1}{(\beta_1L_1)\,I_1}+\frac{G_2\,L_2}{(\beta_2L_2)\,I_2}\right]+M_2\left[\frac{H_2\,L_2}{(\beta_2L_2)I_2}\right]=0$$

$$M_1\left[\frac{H_2\,L_2}{(\beta_2L_2)\,I_2}\right]-M_2\left[\frac{G_2\,L_2}{(\beta_2L_2)\,I_2}+\frac{G_3\,L_3}{(\beta_3L_3)\,I_3}\right]=0$$

La ecuación de frecuencias se obtiene como ya sabemos, expandiendo el determinante de los coeficientes de las M.

$$\left[\frac{G_1\,L_1}{(\beta_1L_1)\,I_1}+\frac{G_2L_2}{(\beta_2L_2)\,I_2}\right]\left[\frac{G_2\,L_2}{(\beta_2L_2)\,I_2}+\frac{G_3\,L_3}{(\beta_3L_3)\,I_3}\right]-\left[\frac{H_2\,L_2}{(\beta_2L_2)\,I_2}\right]^2=0$$

Para el caso de tres claros idénticos:

$$4\,G_n^2-H_n^2=0$$

ó

$$2\,G_n=\pm H_n$$

en que G_n y H_n se aplican para cualesquiera de los claros. Los tres juegos de raíces son:

(1) $G_n = H_n = \pm\infty$

cuya primera raíz es $\beta_1 L = \pi$ y el juego completo corresponde a los modos de una viga simplemente apoyada.

(2) $2\,G_n = -H_n$

cuya primera raíz es el segundo modo de la viga: $\beta_2 L = 3.55$ y todos los modos de este juego tienen un nodo al centro del claro intermedio.

(3) $2\,G_n = +H_n$

cuya primera raíz o tercer modo, es $\beta_3 L = 4.30$. Véase la figura 3.5.

MODOS NATURALES DE TRES CLAROS IDENTICOS.

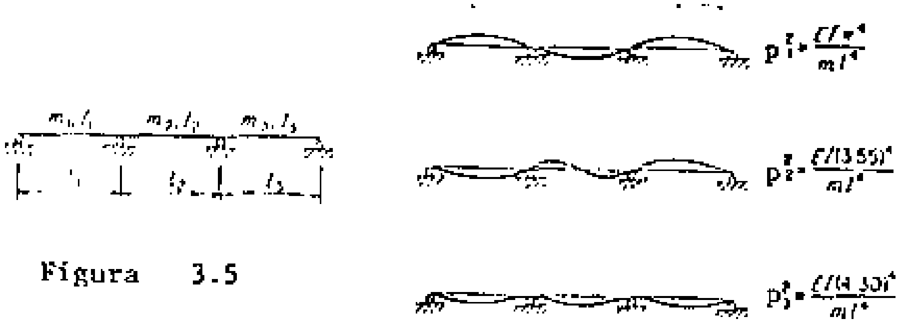


Figura 3.5

MODOS NORMALES PARA UNA VIGA DE TRES CLAROS.

La ecuación de frecuencia de una viga de cuatro claros, puede investigarse en forma similar, pero es más complicada. Para claros idénticos se reduce a:

$$2 \quad G_n = \pm H_n$$

véase la figura 3.6.

MODOS NATURALES DE CUATRO CLAROS IDENTICOS.

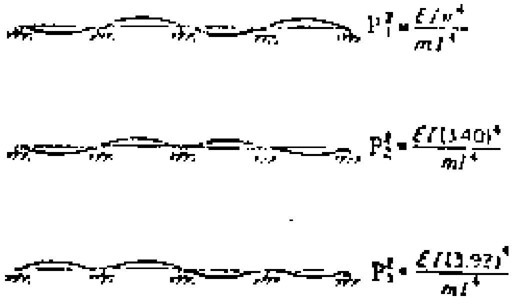


Figura 3.6

MODOS NORMALES DE UNA VIGA DE CUATRO CLAROS.

De todo lo anterior, resulta que para un número cualquiera de claros idénticos articuladas en los apoyos exteriores, el modo fundamental es igual a la de una viga simplemente apoyada. Los modos superiores de un solo claro son también modos superiores del caso de varios claros, pero están combinados con otros. Existe otro grupo de modos simétricos con pequeñas rotaciones en los apoyos interiores que corresponden burdamente a un claro empotrado y simplemente apoyado. Además, hay varias combinaciones de estos dos tipos, que se incrementan con el número de claros.

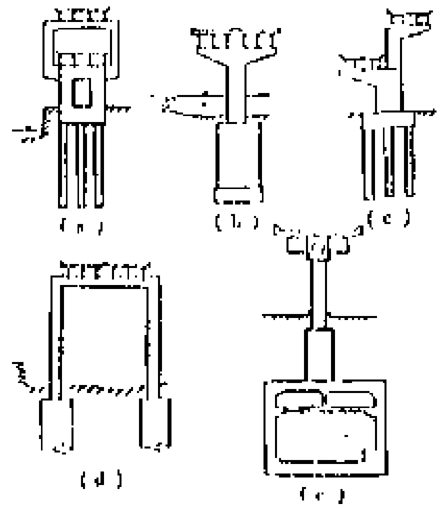


Figura 3.7

Vibraciones de los modos naturales de un puente contínuo de grandes claros, en la dirección perpendicular al eje del puente.

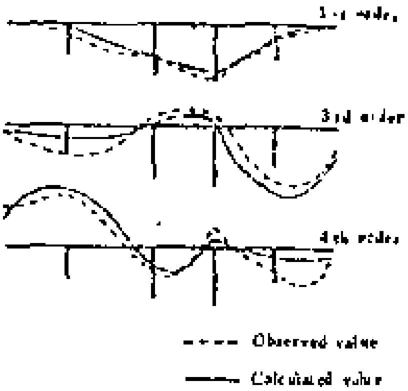


Figura 3.8

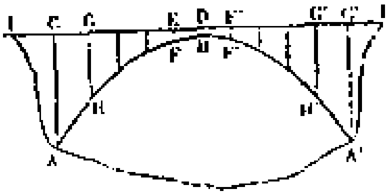
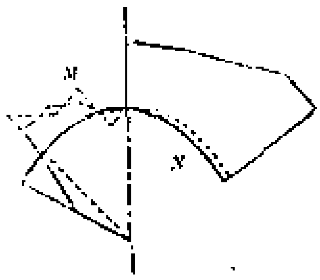


Figura 3.9



IV CIMENTACIONES

ESTRIBOS.-

El daño más común en los estribos de puentes, son el asentamiento, volcamiento y falla por cortante. Una forma de daño local, es cuando las trabes chocan violentamente contra el estribo, causando agrietamientos de los muros de retención del estribo o descascarando el concreto en los asientos de las trabes.

El volcamiento de los estribos, usualmente se provoca por una debilidad en su resistencia a las presiones de tierra. En muchas ocasiones, la razón del volteo, es la poca profundidad del desplante de la cimentación. Puesto que los estribos normalmente se encuentran lejos del lecho del río y no hay peligro de socavación, los desplantes tienden a ser de poca profundidad, pero puesto que en este tipo de cimentaciones la capacidad de soporte del terreno, se afecta considerablemente durante un temblor, es imperiosa una cimentación profunda.

El efecto del cortante ocurre a menudo en las juntas de construcción del concreto simple, por lo que es necesaria una cuidadosa selección de ellas. Cuando no sea posible utilizar un tipo de estribo de concreto reforzado,debe además de supervisarse adecuadamente la localización y construcción de las juntas, colocar refuerzo en las mismas juntas, para lograr una buena transferencia del cortante mediante adherencia.

Aun cuando el estribo mismo no resulte dañado, hay muchos casos en que el suelo volcado a los lados y en la parte de atrás, se hunde y ocurre un colapso del muro de retención, lo que interrumpe el tránsito. Las causas principales del asentamiento son la diferencia entre las condiciones de vibración de los estribos y el terraplén y la consolidación insuficiente del suelo atrás del estribo. Es aconsejable que el material del terraplén sea de grava de calidad especial o roca triturada.

La estabilidad de un estribo durante un sismo, se logra de la manera siguiente: en la figura 4.1, las fuerzas externas que actúan sobre el estribo, consisten de la fuerza sísmica debida al peso de la trabe que se transmite a los apoyos, las fuerzas sísmicas debidas al peso del estribo y la presión de tierra en la parte trasera del estribo, que se trasmite durante el sismo. La fuerza que resiste la presión de tierra sobre la parte anterior del estribo, es la fuerza de reacción del terreno que actúa sobre la superficie inferior DO. Estas fuerzas se calculan de la siguiente manera:

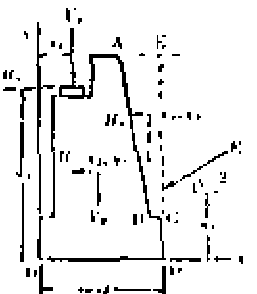


Figura 4.1

a) Si el peso de la trabe que actúa sobre el apoyo es W, la fuerza vertical V_1 que se aplica al estribo en el sismo, vale:

$$V_1 = (1 - k_v)\ W$$

donde k_v es el coeficiente sísmico vertical. Ya que el estribo tiende a volcar o deslizarse con mayor facilidad, al reducirse el peso de las trabes y el estrib debido al movimiento vertical hacia arriba, esta ecuación sirve para asegurar la estabilidad bajo las condiciones más desfavorables. El punto de aplicación de V_1, es el centro del apoyo y la distancia horizontal al talón posterior se expresa mediante x_1. La fuerza horizontal de la trabe es:

$$H_1 = k_h\ W$$

en que k_h es el coeficiente sísmico horizontal. La altura de la línea de acción de H_1, se supone coincidente con la superficie superior del apoyo y y_1, desde el fondo del estribo.

b) La fuerza sísmica debida al peso del estribo, cuando su peso es G, tiene los valores que se indican enseguida. El punto de aplicación es su centroide (x_2, y_2).

$$V_2 = (1 - k_v)\ G, \qquad H_2 = k_h\ G$$

c) Puede afirmarse que la presión de tierra que actúa sobre el estribo (y que actúa sobre el estribo) y actuando en la línea vertical DE, el peso de la masa del suelo ABCE y la fuerza sísmica que actúa arriba. La presión de tierra puede calcularse mediante métodos reconocidos. Su punto de aplicación se encuentra a 1/3 de la altura de la línea ED y su dirección tiene una inclinación $\varphi/2$ respecto a la línea ED.

La fuerza sísmica debida a la masa de tierra ABCE cuando el peso es w, tiene la magnitud dada enseguida, con el punto de aplicación en el centroide (x_3, y_3) de la masa.

$$V_3 = (1 - k_v)\ w, \qquad H_3 = k_h w$$

Cuando las componentes horizontal y vertical de la resultante R de las fuerzas externas señaladas sean H y V:

$$H = H_1 + H_2 + H_3 + E \cos \varphi/2, \qquad V = V_1 + V_2 + V_3 + E \text{ sen } \varphi/2$$

Cuando el punto en el que la línea de acción de la fuerza resultante corta a la superficie inferior el estribo sea F y la distancia de F a partir del punto O, sea x_0, entonces x_0, se puede determinar, considerando el momento de la fuerza exterior respecto al punto O.

$$x_o = \frac{1}{V} \{ \ (x_1 V_1 + x_2' V_2 + x_3 V_3 + \ell E \operatorname{sen} \varphi/2)$$

$$- (y_1 H_1 + {}_1 y_2 H_2 + y_3 H_3 + y_4 E \cos \varphi/2) \ \}$$

Si la componente horizontal de la resistencia producida en la superficie inferior del estribo, se expresa por Q y la componente vertical por P, $Q = H$ y $P = V$.

Suponiendo que la distribución de P en la superficie inferior, sea trapezoidal y si las intensidades de las fuerzas reactivas en ambos extremos son p_1 y p_2 (Véase la figura 4.2).

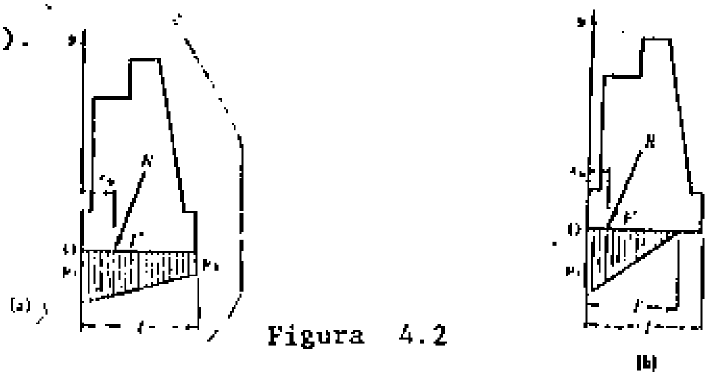


Figura 4.2

$$\ell/2 \ (p_1 + p_2) = P$$

$$(\ell/3) \ \frac{2 p_2 + p_1}{p_1 + p_2} = x_o$$

Por consiguiente:

$$p_2 = \frac{2P}{\ell} \left\{ \frac{3 x_o}{\ell} - 1 \right\} \quad ; \quad p_1 = \frac{2P}{\ell} \left\{ 2 - \frac{3 x_o}{\ell} \right\}$$

De acuerdo con lo anterior, cuando x_o sea $\ell/3$ o menor, p_2 se vuelve negativa, pero puesto que el suelo ordinariamente no resiste tensiones, se supone una distribución triangular de la fuerza de reacción, como se muestra en la figura 4.2b. Las condiciones de equilibrio serán.-

$$1/2 \ p_1 \ \ell' = P \ ; \ \frac{1}{3} \ell' = x_o$$

y por tanto:

$$\ell' = 3 x_o \qquad p_1 = \frac{2P}{3 x_o}$$

En otras palabras, la fuerza de reacción p_1, es grande si x_o es pequeña. Pero mientras x_o sea positiva, esto es; mientras F no quede fuera de la superficie inferior, si el terreno de la cimentación es capaz de soportar a p_1, no habrá volcamiento. La resistencia horizontal Q es la fricción en la superficie de contacto. Si μ es el coeficiente de fricción queda expresada por:

$$Q = \mu V$$

Normalmente, μ se supone aproximadamente igual a 0.7, y si no hay suficiente resistencia, se incrementa la profundidad de desplante o se clavan pilotes para aumentar esa resistencia. A partir de la experiencia de sismos previos, la resistencia al simo de un estribo, se incrementa si existe tierra al frente del estribo.

Cajones.

En lo referente a cajones, los problemas que se presentan cuando esta cimentación está sujeta a presiones sísmicas, son probablemente la capacidad de soporte o apoyo y la magnitud del desplazamiento. Respecto a la primera existe un método mediante el cual puede determinarse la profundidad de empotramiento.

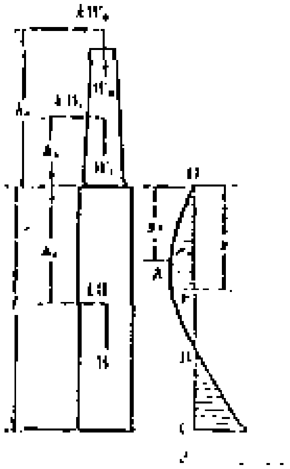


Figura 4.3

En la figura 4.3, las fuerzas externas que actúan sobre la pila, son el peso Wo de la trabe, el peso W_1 de la pila, el peso W del cajón y la fuerza sísmica. La presión de tierra es resistente. Suponiendo que las presiones de tierra se distribuyan parabólicamente, la presión de tierra se representa por:

$$p = \frac{p_1 y}{y_1^2} \; (2 y_1 - y) \qquad (4.1)$$

en que p_1 es la máxima intensidad de la reacción del terreno, y y_1 es la profundidad de la sección en que se presenta p_1. Tanto p_1 como y_1 son cantidades desconocidas y se determinan de las fuerzas externas y sus reacciones. En otras palabras, cuando

ℓ: longitud del cajón

W: peso del cajón

k: coeficiente sísmico.

H: Fuerza sísmica horizontal que actúa sobre la trabe y la pila del puente, y

M: momento de la fuerza sísmica que actúa sobre la trabe y la pila del puente respecto a la parte superior del cajón.

Se tendrá, entonces:

$$\left.\begin{aligned} H + kW &= \int_0^l \frac{p_1 y}{y_1^2}(2y_1 - y)\,dy \\ \frac{kWl}{2} - M &= \int_0^l \frac{p_1 y^2}{y_1^2}(2y_1 - y)\,dy \end{aligned}\right\} \qquad (\ 4.2\ )$$

cuya solución es:

$$y_1 = \frac{3l - 4e}{8l - 12e}\,l \qquad (\ 4.3\ )$$

siempre que:

$$e = \frac{\frac{kWl}{2} - M}{H + kW}$$

y

$$p_1 = \frac{\frac{kWl}{2} - M}{2y_1 - \frac{3}{4}l} \cdot \frac{3y_1^2}{l^3} \qquad (\ 4.4\ )$$

Con estas ecuaciones se determina el valor máximo del esfuerzo p_1. si el valor obtenido es menor que la presión pasiva del suelo a la profundidad y_1 durante el sismo, el cajón será estable. Además, al determinarse la distribución de esfuerzos en el suelo, pueden calcularse fácilmente los momentos flexionantes y fuerzas cortantes.

Si se emplea este método de análisis, un problema altamente indeterminado de la distribución de la fuerza de reacción de una cimentación en cajón, se convirtió en un problema estáticamente determinado, empleando una suposición sencilla. La estructura geológica de estrato superficial del suelo, es en ocasiones muy complejo. Posteriormente, debido al hincado del cajón se perturba la estructura del suelo, pudiéndose decir entonces que es imposible calcular con precisión la presión de tierra resultante sobre el cajón. El método arriba mencionado proporciona una regla para este complicado problema.

Este método es sencillo, pero puesto que la estructura real del terreno no puede incluirse en los cálculos, no proporciona datos acertados en todos los casos. Además, aun cuando se tiene el dato de la fuerza de reacción, no es factible determinar el desplazamiento del cajón que ella provoca. Es necesario un análisis fiel de estos fenómenos. T. Ikehara considera al cajón como un cuerpo rígido, suponiéndolo soportado por resortes elásticos en ambos lados y en los planos inferiores, con las constantes de resorte en los planos laterales, proporcionales a la profundidad, obteniendo los resultados siguientes. Sin embargo, se desprecia la resistencia horizontal de la superficie inferior.

Cuando la fuerza reacción en el fondo, actúa dentro del núcleo de la sección inferior, su máxima intensidad en la pared lateral del cajón p_1, y la presión en la fibra extrema que se produce en la superficie inferior, q_1 y q_2, resultan

$$p_1=\frac{3\{kWl^2+3Hl^2+4Ml+8a_xa^3(kW+H)\}^2}{4bl^2(l^3+24a_xa^3)(kWl+4Hl+6M)} \qquad (4.5)$$

$$y_1=\frac{kWl^2+3Hl^2+4Ml+8a_xa^3(kW+H)}{2l(kWl+4Hl+6M)} \qquad (4.6)$$

$$\left.\begin{matrix}q_1\\q_2\end{matrix}\right\}=\frac{N+W}{A}\pm\frac{3a_x(kWl+4Hl+6M)}{b(l^3+24a_xa^3)} \qquad (4.7)$$

Cuando la reacción en el fondo, actúa fuera del núcleo de la sección inferior, p_1, q_1 y q_2 se convierten en:

$$p_1=\frac{3\{kWl^2+3Hl^2+4Ml+8m_xa^3(kW+H)\}^2}{4bl^2(l^3+24m_xa^3)(kWl+4Hl+6M)} \qquad (4.8)$$

$$y_1=\frac{kWl^2+3Hl^2+4Ml+8m_xa^3(kW+H)}{2l(kWl+4Hl+6M)} \qquad (4.9)$$

$$q_1=\frac{3a_x(kWl+4Hl+6M)(1\pm\cos\beta)}{b(l^3+24m_xa^3)} \qquad (4.10)$$

en que:

N: suma de las fuerzas verticales que actúan en la trabe y la pila;

A: área del cajón en la sección inferior;

2a: peralte del cajón, paralelamente a la dirección de la fuerza sísmica;

2b: ancho del cajón, perpendicularmente a la dirección de la fuerza sísmica;

α: coeficiente determinado por la forma de la sección inferior. (Véase la fig.4.4).

K_1: coeficiente de la reacción lateral del suelo para una profundidad unitaria;

K_2: coeficiente de la reacción vertical del suelo para una profundidad unitaria;

κ : K_2/K_1

Los factores β, m_1 y m_2 que se usan para efectuar estos cálculos, se obtienen resolviendo las tres ecuaciones simultáneas que se muestran enseguida:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{6\kappa a^3 m_1(kBT+4Hl+6M)}{P+24m_2\kappa a^3}=N+W \\ &m_1=\frac{1}{3}\sin^3\beta+\frac{\sin\beta\cos^2\beta}{2}+\frac{1}{2}(\pi-\beta)\cos\beta \\ &m_2=\frac{3}{2}\left(\frac{\pi-\beta}{8}+\frac{1}{3}\sin^3\beta\cos\beta+\frac{\sin 4\beta}{32}\right) \end{aligned}\right\} \qquad (4.11)$$

La tabla I proporciona datos burdos de las constantes de resorte del terreno. Sin embargo, es aconsejable confirmarlas mediante pruebas de campo.

No se ha establecido aún, un método para predecir el desplazamiento residual del cajón durante un sismo, es que el suelo alrededor del cajón, que fué pertirbado durante la construcción, no se ha consolidado. Por ello, es necesaria un cuidadoso tratamiento de la superficie en el fondo del cajón.

TABLA 1 COEFICIENTES DE REACCION DEL SUELO.

SUELO	K_1 (Kg/cm^3)	K_2 (Kg/cm^3)
Arcilla muy suave	menos de 1	-------
Suelo suave, cohesivo, arena suelta	1 a 2	--------
Arena suelta, arcilla dura	2 a 4	3 a 5
Arena ligeramente suelta, arcilla muy dura	4 a 8	5 a 15

Arena compactada, arena-grava	8 a 15	15 a 25
Arena muy compacta, grava, piedra todosa	más de 15	más de 25

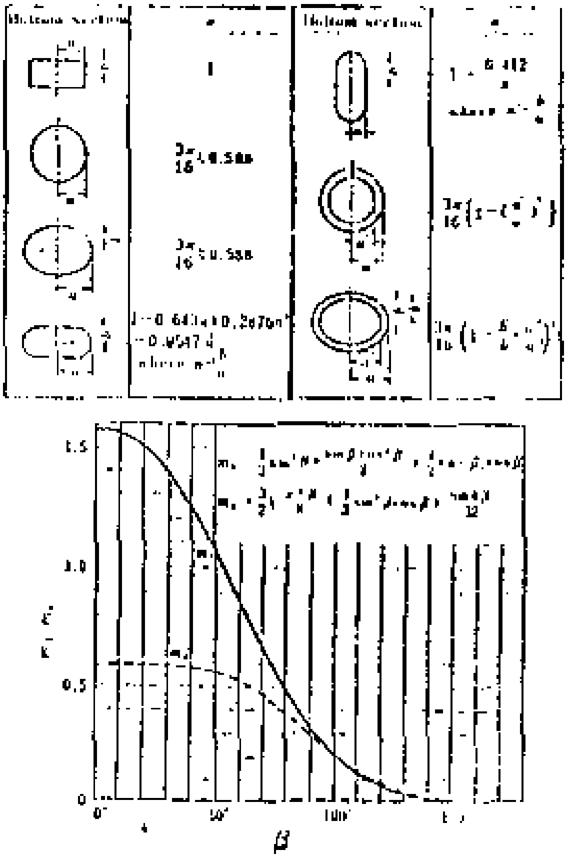


Figura 4.4.

Figura 5.1 a) Restricción a la articulación empleada en puentes existentes. Se hacen aberturas a través de la cubierta y los agujeros se abren con taladros de diamante, a través de los diafragmas.

1.- Agujero de 7"
2.- Placas de acero.
3.- Tubo de 6"
4.-Cables de 7- 3/4"
5.-Poliestireno
6.- Neopreno.

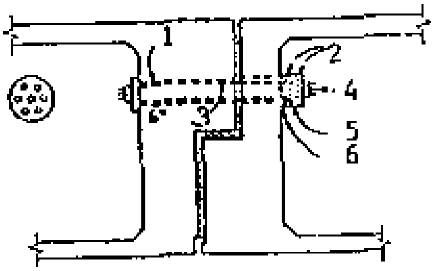


Figura 5.1 a)

Figura 5.1 b) Restricción a la articulación para puentes nuevos.

1.- Tubo galvanizado de 6"
2.- Placa de acero.
3.- Cables de 7- 3/4"
4.- Poliestireno.
5.- Amortiguador elastomérico
6.- Neopreno.

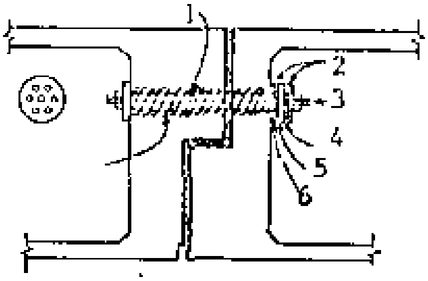
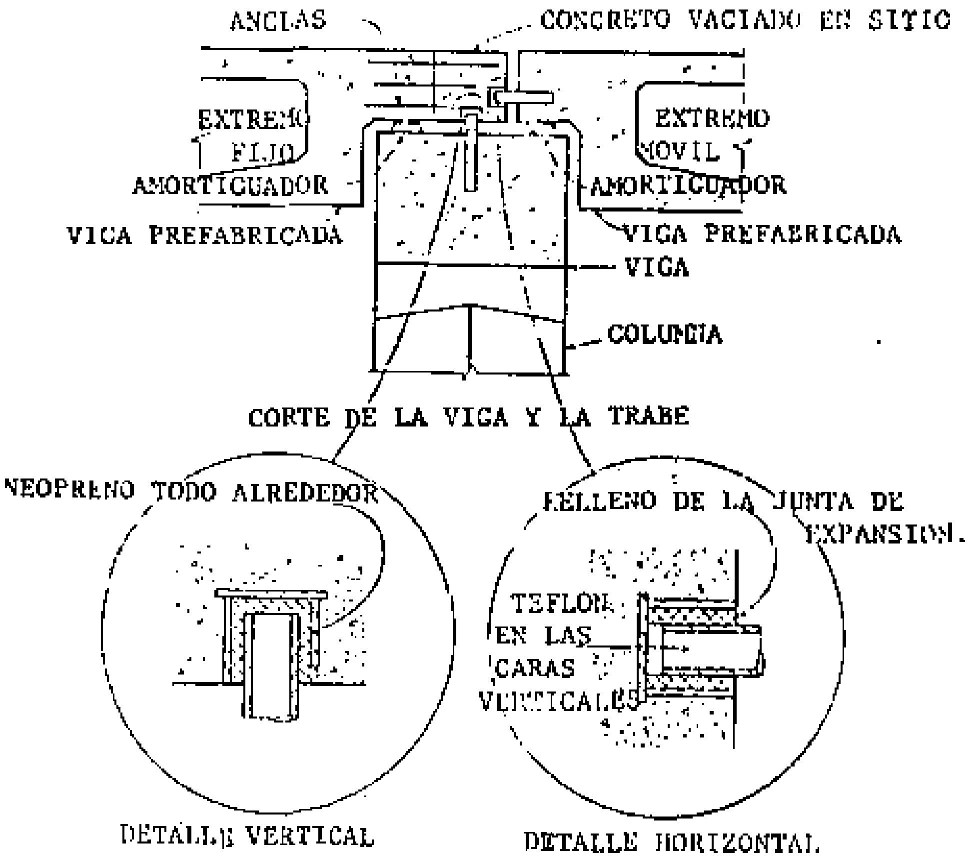


Figura 5.1 b)

Figura 5.2 CONEXION DE TRABE A VIGA.



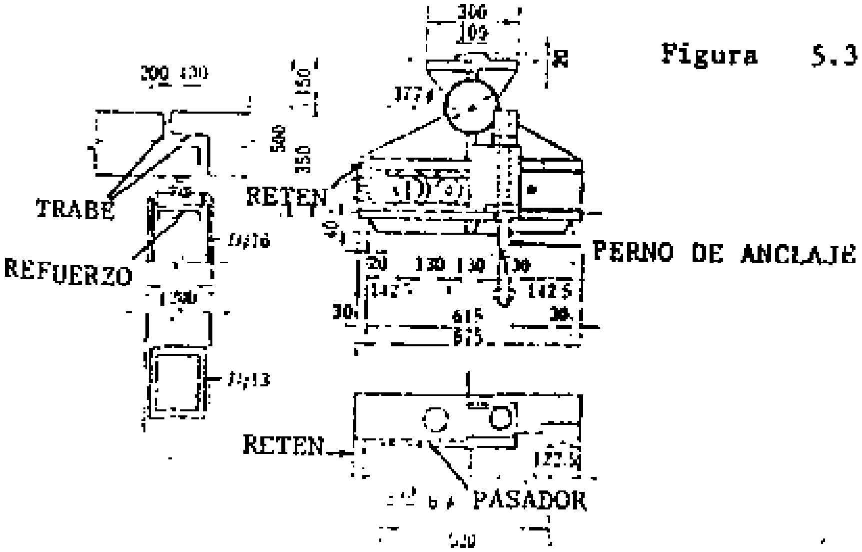


Figura 5.3

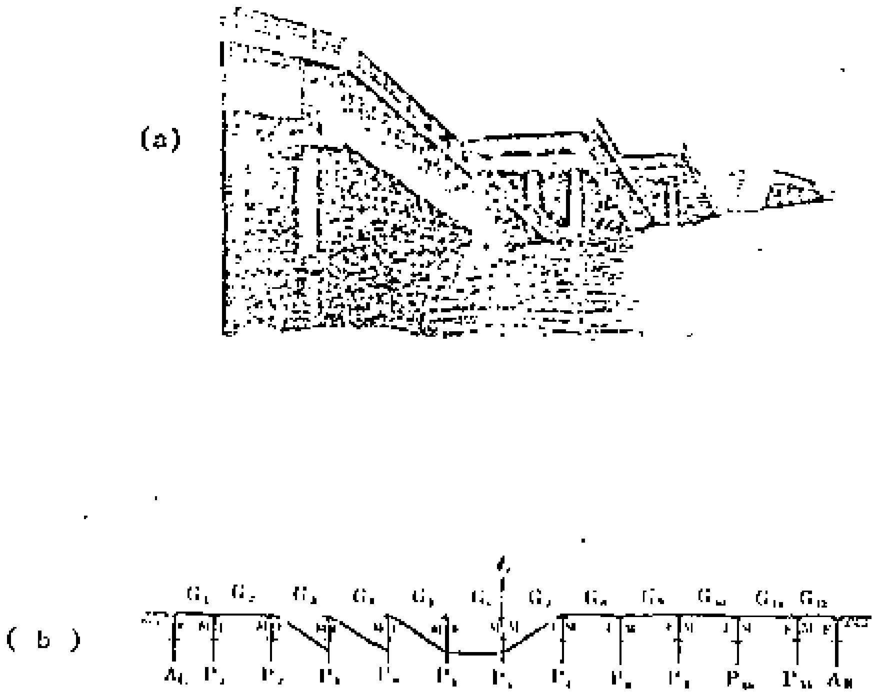


Figura 5.4

ILUSTRACION DE LA CAIDA DE LAS TRABES DEL PUENTE SHŌWA-ŌHASHI (TEMBLOR DE NIIGATA DE JUNIO 16 DE 1964.)

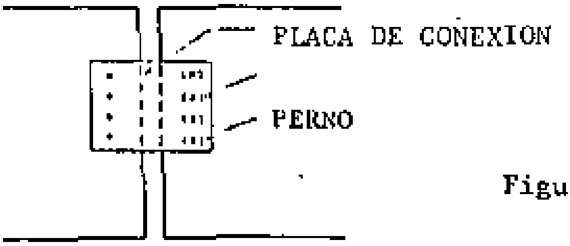


Figura 5.5

PLACA DE CONEXION PARA EVITAR LA CAIDA DE LAS TRABES.

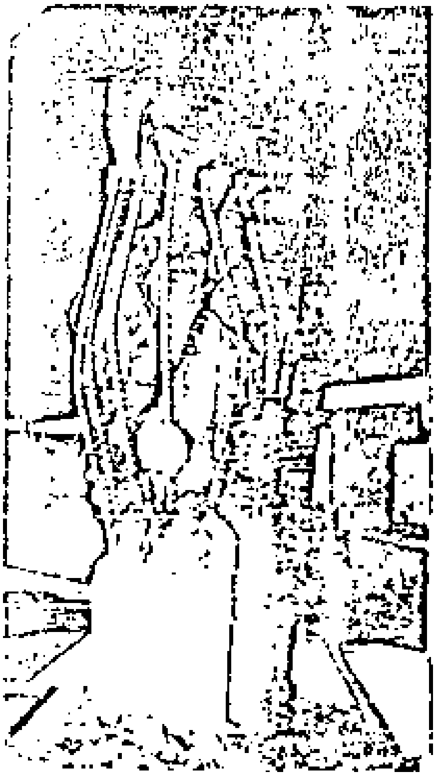


Figura 5,6

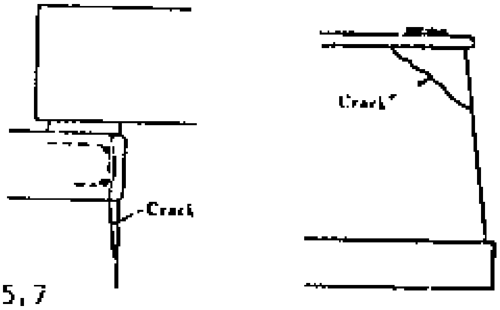


Figura 5,7

crete structures. A thorough investigation was carried out by the California Department of Transportation immediately after the earthquake to determine the cause of the bridge damage which did occur. This investigation revealed that there was not a single failure in any superstructure. Some of the superstructures broke upon impact with the ground, but many remained intact even after they had fallen. The cause of the damage was due to failure of the supports i.e., either a structural failure of pier columns or loss of support due to movement of the substructure causing the hinges to separate or the ends of the spans to be pulled off their bearings.

There are two solutions to the problem of earthquake movements moving the substructure causing the superstructure to fall from its bearings. One is to build the superstructure continuous over the entire length of the bridge and supporting it by a means which allows a relative movement between the earth and the superstructure. The superstructure can be built continuous by fully developed and established methods such as: casting span after span on movable falsework and formwork and coupling the tendons or by incremental launching as discussed in Chapter 5. Bearings, such as the one shown by Fig. 2.32 can be provided to allow the superstructure to float with a limited displacement.[2.4] This bearing has two restraining devices separated by a neoprene damper. Should a large earthquake movement occur, the first restrainer shears off allowing additional movement to be resisted by the neoprene damper and stopped by the second restrainer.

In some cases, it may be impractical to make the superstructure continuous, or the expected earthquake forces and movements may be such that movement allowances cannot be made in the bearings. In these cases, the expansion points must be tied together in such a way that they can move as required, but be restrained when subjected to a strong motion. Fig. 2.33, 2.34, and 2.35 show details of some typical restraining devices. Since earthquake movements can occur in any direction, restraint must be provided in all directions. Fig. 2.33, for instance, shows cables providing longitudinal restraint and a vertical restrainer (see Fig. 2.36 for details) providing vertical and horizontal restraint.

The implementation of these restraining devices in conjunction with the improvements in design analysis which are now included in the AASHTO Specifications, should minimize the damage due to an earthquake. These details, which are simple and relatively inexpensive, should be given serious consideration for bridges likely to be subjected to moderate or severe earthquakes.

2.8 ANCHORAGE STRESSES

2.8.1 Bearing Stresses

Section 1.6.6 (B) (4) of the AASHTO Specifications limits the allowable anchorage bearing stress to 3,000 psi or .9 f_c, whichever is smaller. While these specifications are generally satisfactory for box girder bridges cast on falsework, they become unnecessarily restrictive for application to

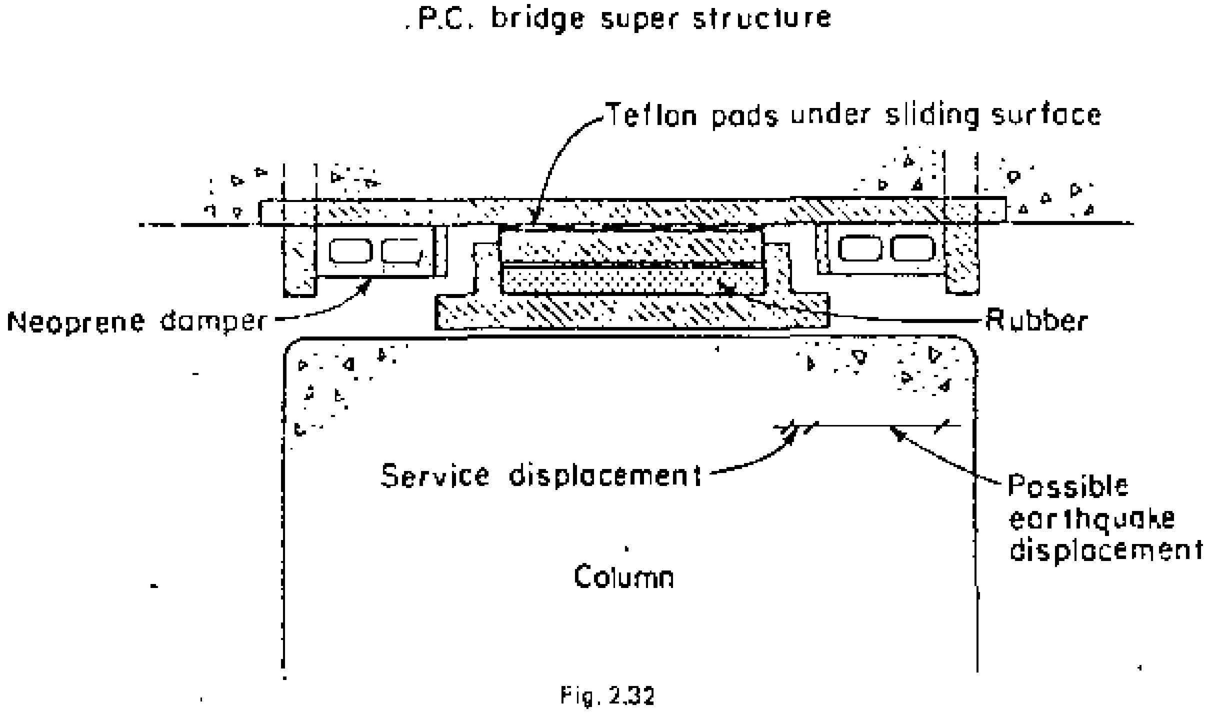


Fig. 2.32

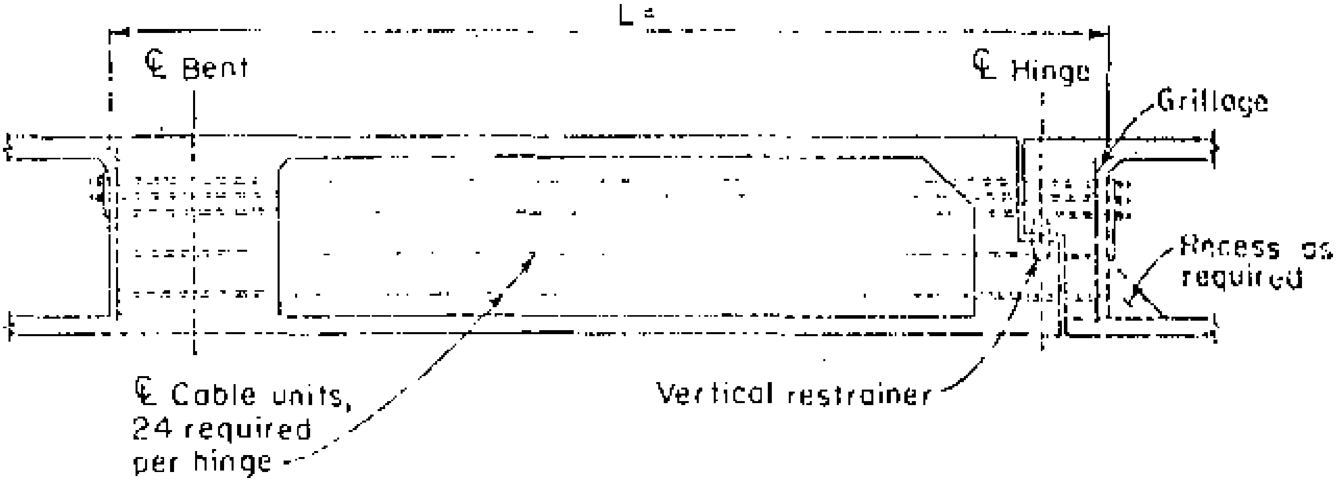


Fig. 2.33 Longitudinal and Vertical Restraints to Prevent Excessive Movements at the Hinge

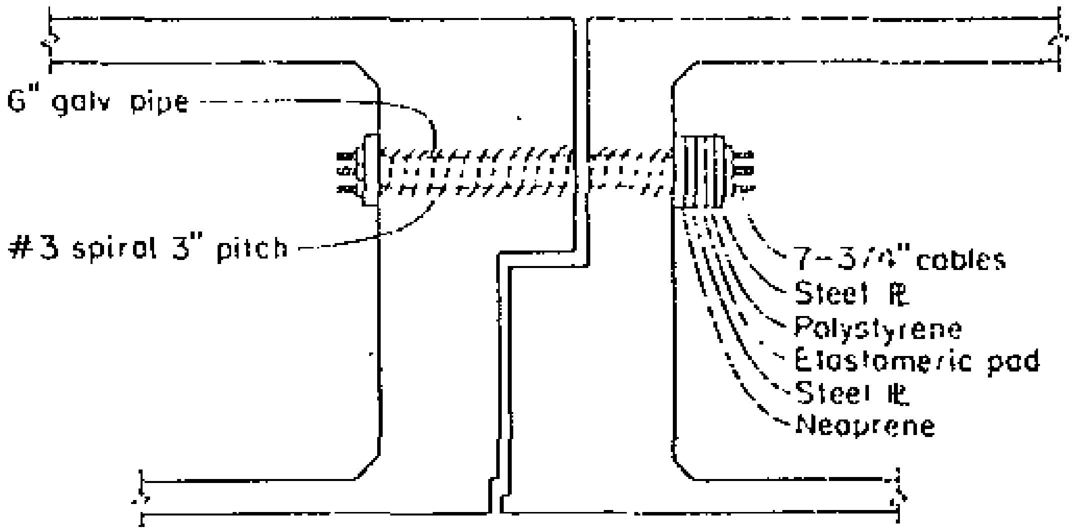


Fig. 2.34

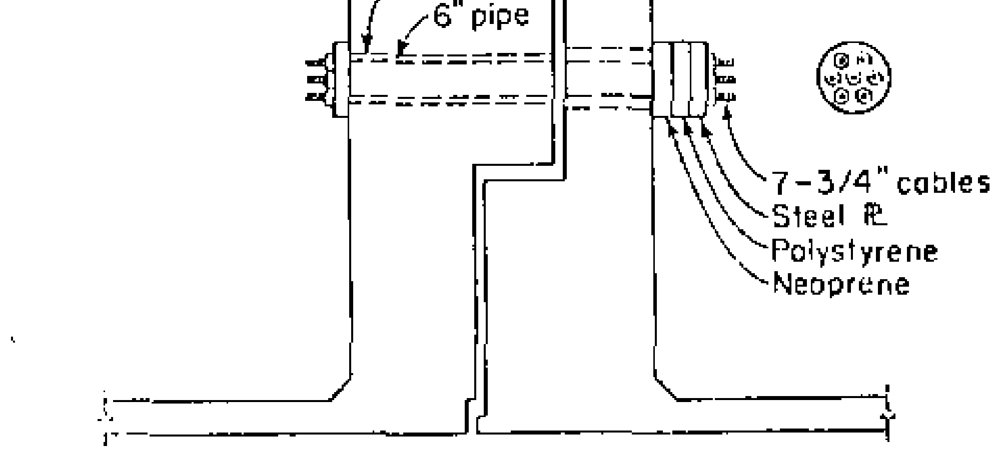


Fig. 2.35

REFERENCIAS PARA CONSULTA ADICIONAL.

LIBROS.-

1.- Biggs John M. Introduction to Structural Dynamics: Capítulo 8.- Mc. Graw Hill, 1964.

2.- Norris Charles H. y coautores. Structural Design for Dynamic Loads, page 444, 445 Mc. Graw Hill, 1959.

3.- Okamoto Shunzo. Introduction to Earthquake Engineering.- Halsted Press. John Wiley & Sons, 1973. Capítulo 12.

4.- Roger Grover L. Dynamics of Framed Structures.- Capítulos 5 y 8, Wiley 1959.

PUBLICACIONES DIVERSAS.-

5.- Kuang Han Chu y Marvin Jones. Theory of Dynamic Analysis of Box Girder Bridges Memorias IABSE 36-II-1976. Páginas 121-131.

6.- Marvin Jones y Kuang Han Chu. Dynamic Analysis of a Box Girder Gridges *Op. cit.* Páginas 133-145.

7.- Frank Baron, Metin Arikan y Raymond E. Hamati. The Effects of Seismic Disturbanc on The Golden Gate Bridge. Informe No. EERC 76-31, Noviembre de 1976. University of California, Berkeley.

AMERICAN SOCIETY OF CIVIL ENGINEERS.-

8.- Bengt B. Broms. Lateral Resistance of Piles in Cohesive Soils.- Vol.90, SM2 Marzo de 1964. Página 27.

9.- Trevor J. Poskitt. Structural Analysis of Suspension Bridges.- Vol. 92 ST 1, Febrero de 1966. Página 49.

10.- Grant A. Ross, H. Bolton Seed y Ralph Migliaccio. Bridge Foundation Behavior in the Alaska Earthquake. Vol. 95, SM4, Julio de 1969. Página 1007.

11.- Anestis S. Veletsos y Ian. G. Currie. Analysis of Dynamic Response of Highway - Bridges. Vol. 96 EM5, Octubre de 1970. Página 593.

12.- Robin Shepherd y Richard E. Mc..Connel. Seismic Response Predictions of Bridge Pier.- Vol. 98, EM3, Junio de 1972. Página 609.

13.- Richard F. Domínguez y Charles E. Smith. Dynamic Analysis of Cable Systems. -- Vol. 98. ST8, Agosto de 1972. Página 1817.

14.- Nicholas F. Morris. Dynamic Analysis of Cable Stiffened Structures. Vol. 100 ST 5, Mayo de 1974. Página 971.

15.- Ahmed M. Abdel-Ghaffar. Free Lateral Vibrations of Suspension Bridges. Vol.104 ST3. Marzo de 1978. Página 503.

16.- Sharad M. Mote y Kuang-Han Chu. Cable Trusses Subjected to Earthquake Vol.104 ST4, Abril de 1978. Página 667.

17.- Arthur L. Elliot: The San Fernando Earthquake.- A Lesson in Highway and Bridges Design. Civil Engineering, Septiembre de 1972. Página 95.

18.- Keith D. Bull. Seismic Design of Highway Bridges. Vol. 98. ST8, Agosto de 1972. Página 1741.

OTRAS PUBLICACIONES.-

19.- I. Kawasaki y E. Kuribayashi.- On Specifications for Earthquake Resistant Design of Honshu-Shikoky Bridges. Memorias, International Symposium on Earthquake -- Structural Engineering.- Agosto 19-21 de 1976. Vol. II. Página 711. Department of Civil Engineering. University of Missouri-Rolla.

20.- K. Kawakami, E. Kuribayashi, T. Iwasaki y Y. Iida. On Specifications for --- Earthquake-Resistant Design of Highway Bridges. *op.cit.* Vol. II. Página 771.

21.- E. A. Egeseli y J.F. Fleming.- Dynamic Behavior of Cable Stayed Bridges. *op.cit.* Vol. I. Página 59.

22.- R.D. Sharpe y A.J. Carr. The Inelastic Seismic Response of Bridge Structures. *op. cit.* Vol. I. Página 91.

23.- A. Páez. Vibraciones en Puentes: Hormigón y Acero No. 102 Asociación Técnica Española del Pretensado. 1er. Trimestre de 1972. Página 23.

24.- Iikunishi y Y. Yamada. Earthquake Response and Earthquake Resistant Design of Long Span Suspension Bridges. Memorias, Third World Conference on Earthquake Engineering.- Nueva Zelanda, Vol. II, 1965. Página IV/K/12.

25.- Edward Margason. Earthquake Effect of Embedded Pile Foundations. Piletips. Seminar on Current Practices in Pile Design and Instalation. San Francisco 1977. Página 65. Publicado por Associated Pile & Fitting Corp. 262 Rutherford Blvd., Clifton, N.J. 07014.

26.- Leonardo Zeevart.- Pile Design and Installation in Earthquake Areas. *op. cit.* Página 109.

27.- Especificaciones AASHTO.- Duodécima Edición, 1977.

centro de educación continua
división de estudios superiores
facultad de ingeniería, unam

V CURSO INTERNACIONAL DE INGENIERIA SISMICA

DISEÑO SISMICO DE ESTRUCTURAS ESPECIALES

COMPORTAMIENTO SISMICO DE TUBERIAS ENTERRADAS

PROF. ARTURO ARIAS

AGOSTO,1979.

COMPORTAMIENTO SISMICO DE TUBERIAS ENTERRADAS UN ANALISIS CINEMATICO (*)

Arturo Arias(1)

RESUMEN

Después de destacar la importancia que tiene el buen comportamiento de los sistemas urbanos de canalizaciones subterráneas en emergencias sísmicas, se describen brevemente algunos resultados de la observación y experimentación sobre este tipo de obras. Se expone un modelo cinemático que explica algunas de las circunstancias observadas en el comportamiento sísmico de tuberías de diámetros pequeños o intermedios.

INTRODUCCION

El presente trabajo se refiere al comportamiento sísmico de conductos subterráneos de diámetro pequeño; en esta clasificación quedan incluidos oleoductos, gasoductos y otras canalizaciones subterráneas, en especial las destinadas a los servicios urbanos de agua, gas, alcantarillado, electricidad y teléfonos. Atendiendo a su uso, se trata de obras cuyo buen funcionamiento es vital aun en circunstancias normales y cuya falla en caso de sismo puede agravar los efectos directos o convertirlos en un desastre de grandes proporciones. Desde el punto de vista del análisis y diseño sísmico, la característica más importante que presenta este tipo de obra es su gran longitud; es precisamente esta característica la que da lugar a problemas especiales que no ocurren en otras obras civiles.

El examen de algunos antecedentes históricos hace evidente la necesidad de diseñar adecuadamente estas estructuras, de modo que continúen en operación durante las emergencias sísmicas. Las fallas más serias que se han observado son las relacionadas con la interrupción del servicio urbano de agua: la falta de agua potable ha favorecido la propagación de enfermedades epidémicas y, en varios casos, la interrupción en los sistemas de aducción y distribución ha impedido el control de incendios. Por ejemplo, el gran incendio que siguió al terremoto de San Francisco, en 1906, abarcó una superficie de 12 km^2; sólo 31 manzanas de 521 escaparon indemnes. El incendio continuó durante 36 horas sin control, por causa principalmente de los daños en las tuberías matrices de aducción; como consecuencia de ello, el 80% de los daños sufridos por la ciudad son atribuibles al incendio.

---

(1) Investigador de tiempo completo, Instituto de Ingeniería, Universidad Nacional Autónoma de México.

(*) Este trabajo se presentó en la sesión inaugural.

Dos de los tres principales depósitos de agua que surtían la ciudad estaban situados cerca de la falla de San Andrés, pero ninguno sufrió daños importantes. Sin embargo, las tres matrices de aducción resultaron dañadas en el cruce con la falla o en lugares en que atravesaban terrenos blandos o de relleno. La falta de agua se debió a la rotura de estas matrices, así como a cientos de roturas en las líneas de distribución. Miles de conexiones domiciliarias resultaron rotas a consecuencia del movimiento mismo e indirectamente por efecto de los incendios.

El terremoto de Kanto (Japón, 1923) rompió todas las matrices de agua de Tokio. Los incendios, avivados por un fuerte viento, duraron tres días y destruyeron el 40% de la ciudad (447,128 edificios resultaron totalmente destruidos por el fuego, contra 128,166 totalmente destruidos y 126.233 parcialmente destruidos por efectos directos del movimiento sísmico; Ref. , p. 397). El suministro de agua potable constituyó un problema sumamente grave. La reposición del servicio normal se logró sólo después de tres meses; la reposición parcial fue posible sólo al cabo de una semana.

En Yokohama, con ocasión del mismo terremoto, la rotura de las matrices, junto con impedir el control de los incendios, provocó inundaciones graves. En algunos sectores de la ciudad, el agua alcanzó casi un metro de profundidad, dificultando las operaciones de rescate y reparación.

Otros terremotos que han producido fallas importantes en las conducciones de agua son los de Fukui (1948), Niigata (1964) y San Fernando (California, 1971). Ese mismo año, un terremoto produjo grandes daños en Valparaíso. Afortunadamente no hubo incendios de importancia, y decimos afortunadamente porque un catastro de daños en viviendas, realizado con el propósito de evaluar el déficit adicional de habitaciones provocado por el sismo y en el cual le tocó participar al autor, reveló que una buena parte de la ciudad carecía de grifos contra incendio, amén de que todos los cuarteles de bomberos estaban situados en la zona baja de ella.

La ruptura de las canalizaciones de gas es otro de los problemas críticos subsiguientes a los grandes terremotos. En el terremoto de Long Beach (California, 1933), se denunciaron 19 incendios, 7 de los cuales fueron atribuidos a fallas en el sistema de distribución de gas o a roturas en los equipos quemadores. Las fallas en el servicio de gas contribuyeron a los grandes incendios de San Francisco y Tokio.

Aunque se trata de estructuras de dimensiones transversales más grandes que las que aquí nos preocupan, conviene mencionar brevemente los daños sufridos por túneles y otras canalizaciones mayores. Estas estructuras tienen de común con las de nuestro interés su gran extensión longitudinal. El terremoto de Kern County (California), causó daños graves a cuatro túneles de ferrocarril, por desplazamientos en fallas, hundimientos debidos a presiones excesivas, pandeo y agrietamiento en los revestimientos provocados por fuerzas axiales. Daños similares ocurrieron en dos túneles de ferrocarril con ocasión del terremoto de San Francisco. El terremoto de Kanto dañó 25 túneles, con numerosos derrumbes y roturas de revestimientos. En California, durante los últimos 100 años, por lo menos 20 terremotos han dañado de manera significativa canales y tuberías, siendo las causas directas principales de estos daños los desplazamientos en fallas tectónicas, deslizamiento de taludes en suelos blandos, asentamientos de suelos por vibración y licuación de suelos granulares saturados.

El crecimiento de las grandes aglomeraciones urbanas requerirá cada vez más de la construcción de obras como las que aquí nos preocupan. Simultáneamente, la mayor concentración geográfica de la población y de las inversiones en edificación, instalaciones y equipos industriales o de otra índole, hará más crítica la necesidad de que los servicios urbanos se mantengan operantes en una emergencia sísmica. En otras palabras, debemos esperar que el potencial de daños por falla de canalizaciones urbanas a causa de sismos sea mayor y que aumente consiguientemente la presión sobre nuestra profesión para producir obras confiables. Un examen somero de la situación actual muestra que los problemas sísmicos a que dan lugar las tuberías subterráneas han recibido atención marginal. Por ejemplo, las exigencias de la mayoría de los reglamentos, ordenanzas o normas de diseño y construcción vigentes, en lo que se refiere a los aspectos sísmicos, están orientados principalmente a edificios y otras construcciones elevadas y tienen poco o nada que ver con las estructuras subterráneas. Del mismo modo, la atención dedicada en la literatura técnica al desarrollo de criterios y métodos de análisis y diseño de este tipo de obras ha sido relativamente escasa.

Es poco lo que sabemos sobre el análisis dinámico de tuberías subterráneas sometidas a movimientos sísmicos. Las dificultades derivan de dos circunstancias: la gran longitud de este tipo de obras y nuestro escaso conocimiento del problema de interacción dinámica entre una estructura deformable y el suelo que la rodea.

Una buena parte de la teoría de la respuesta sísmica está construida sobre la hipótesis de que la excitación queda bien representada por la aceleración de un punto de la cimentación. Este enfoque dista mucho de ser válido en el caso de tuberías: se necesita conocer no sólo la evolución temporal del movimiento del terreno sino, además, su distribución espacial. La circunstancia de que la excitación en un mismo instante varía de un punto a otro de la estructura es demasiado importante para ser ignorada.

Para una tubería construida sobre apoyos aislados, el problema de interacción suelo-cimentación-estructura, se reduce al de la interacción entre el suelo y la cimentación, para el cual disponemos de soluciones relativamente satisfactorias. El problema de la interacción entre una tubería subterránea y, más en general, el de estructuras subterráneas, con el suelo circundante ha recibido comparativamente mucho menos atención de parte de los investigadores, seguramente porque, aún en casos ideales, y aunque se empleen modelos matemáticos muy simplificados, hay dificultades para obtener soluciones analíticas.

El asunto se complica aún más por la escasez de información empírica. Poco es la disponible acerca de la distribución espacial del movimiento de terrenos superficiales durante temblores intensos; por otra parte, los daños observados en tuberías enterradas han ocurrido generalmente en suelos blandos y han estado asociados a efectos francamente no lineales que todavía no han sido explorados suficientemente por los mecánicos de suelos y para cuya representación disponemos sólo de unos esquemas teóricos bastante burdos.

El número de problemas se multiplica si pensamos que aun para el diseño bajo cargas estáticas, las solicitaciones a que está sometida una tubería subterránea dependen de factores relacionados con los procedimientos constructivos que son, por lo general, de difícil evaluación numérica: los empujes de tierra, por ejemplo, quedan fuertemente influidos por la manera de ejecutar el relleno y efectuar su compactación; si la tubería ha sido colocada en zanja o no, si se ha dispuesto bajo ella una base de otro material (hormigón o grava, por ejemplo), influirá sobre la distribución de empuje que debe considerarse en el diseño. Desde otro punto de vista, la presencia de singularidades como ser codos, curvas, derivaciones, conexiones de válvulas, cámaras de inspección, anclajes, etc. multiplica el número de casos especiales que se deben analizar.

Todas estas dificultades obligan a empezar el desarrollo de una teoría del comportamiento dinámico de tuberías subterráneas con la consideración de modelos muy sencillos, válidos para los casos más simples. La resolución de estos casos permitirá confrontar las hipótesis con los hechos observados, modificarlas adecuadamente, si es necesario, elaborar modelos más realistas y recién entonces abordar los casos más complejos que se presentan en el análisis y diseño de estructuras reales.

En la construcción de los modelos matemáticos debemos guiarnos por los resultados de la observación y la experimentación. Para nuestros propósitos bastará una reseña muy breve de lo que puede encontrarse en la literatura técnica.

COMPORTAMIENTO DE TUBERIAS EN SISMOS REALES

Por limitaciones de espacio nos referiremos brevemente a unos pocos casos.

Terremoto de Kanto (1923). En Tokyo la distribución geográfica de los daños en tuberías de agua fue muy diferente a la de los edificios. Los daños más grandes en edificios (excluidos los debidos al fuego) ocurrieron en la zona de la ciudad cimentada sobre suelos aluviales, mientras que los daños más importantes sufridos por las tuberías se concentraron en la transición de los suelos firmes de las laderas de los cerros a los suelos blandos de la parte central de la ciudad. En los suelos blandos los corrimientos fueron grandes, no así en los suelos más competentes de las laderas; la mayor concentración de daños en la zona de transición debe atribuirse entonces a la ocurrencia de corrimientos diferenciales importantes entre dos tipos de suelos diferentes. No importa, pues, tanto el valor absoluto de los corrimientos del suelo, sino la diferencia de ellos entre puntos cercanos de la tubería. Aunque en los suelos blandos los corrimientos absolutos fueron mayores, los relativos entre puntos cercanos aparentemente fueron menores que en la zona de transición.

Otra observación interesante extraida de la experiencia del terremoto de Kanto se refiere al comportamiento de tuberías de cerámica (alcantarillado) instaladas a distinta profundidad. Mientras que el 33% de las tuberías instaladas a 1.20 m de profundidad falló, no hubo fallas en las tuberías enterradas a 2.40 m. Esta observación es congruente con el conocido efecto de amplificación que se produce cerca de la superficie y viene a reforzar lo dicho anteriormente sobre la importancia de los corrimientos diferenciales.

Los caños de fundición de las matrices de distribución de Tokyo (diámetro 1100 mm) sufrieron numerosas fallas, así como fueron numerosas las fallas en singularidades de la línea (válvulas, codos, arranques). En Yokohama las líneas de distribución fallaron sistemáticamente: hubo que excavar prácticamente todas las líneas para reponer caños quebrados y sellar juntas. (OKAMOTO, 1973, pp 65-6).

Terremoto de Fukui (1948). Se observó que las matrices de distribución orientadas de norte a sur sufrieron mayores daños que las que corrían de este a oeste. Muchos tramos de las primeras experimentaron, en promedio, 80 roturas por km. Las tuberías rectas se cizallaron en las bridas de unión; hubo fallas en codos y, especialmente, se presentaron daños cuantiosos en bloques de anclaje. Hubo numerosos fracasos en singularidades: válvulas de control que sometidas a fuerzas axiales reventaron, uniones en T cizalladas, grifos cizallados por su base. (OKAMOTO, 1973, p. 76).

Terremoto de Tokachi (1952). Las tuberías no metálicas exhibieron especial debilidad en las uniones. Las líneas de distribución de la ciudad de Kushiro estaban formadas por caños de fundición conectados mediante bridas; las fallas se produjeron en las bridas. Hubo fallas en puntos de ramificación. (OKAMOTO, 1973, p. 78).

Terremoto de Niigata (1964). Cerca del 68% de las matrices de distribución de agua resultaron dañadas. La falla más frecuente fue por deslizamiento en las uniones. Los daños se concentraron en la zona de suelos malos y fueron relativamente pequeños en la parte alta de la ciudad. Se observó relación entre la cuantía de los daños y la orientación de la tubería, siendo mayor la proporción en aquellos tramos perpendiculares al curso del río Shinano. En general los daños fueron menores en las tuberías más profundas.

Hubo una relación estrecha entre los daños y el tipo de unión empleada. Las uniones de enchufe en tuberías de fierro fundido resultaron poco flexibles. Las uniones mecánicas en ese tipo de tuberías así como las de collar en tubos de asbesto-cemento delizaron o produjeron agrietamiento. No se observaron diferencias notables entre los daños en tramos de distribución resueltos con tubos de fierro fundido y los construidos a base de tubos de asbesto-cemento, excepto donde la intensidad del movimiento fue muy grande. Los mayores daños en tubos de asbesto cemento se observaron en los casos de diámetros pequeños (100 a 150 mm). En tuberías de asbesto-cemento de diámetro superior a 150 mm hubo pocas roturas de tubos, pero numerosas uniones fallaron por deslizamiento. Las tuberías de acero soldadas resultaron las más resistentes.

Observaciones análogas a las transcritas valen para las tuberías de gas. La mayor parte de los daños ocurrieron cerca del río Shinano. Hubo allí rotura de matrices y ramales con deslizamiento en uniones. El 70% de las matrices de esa zona requirió reparación. Las tuberías de distribución de acero fundido sufrieron deslizamiento en uniones, especialmente en los tramos perpendiculares al curso del río. Hubo uniones de tubos de fierro fundido que fallaron reventándose por compresión axial. Se presentaron casos de flotación de tuberías por licuación de suelos.

Temblores de Matsushiro (1965-1967). Varios temblores de moderada intensidad ocurrieron en la zona de Matsushiro, Japón, entre agosto de 1965 y marzo de 1967. Algunos investigadores (SAKURAI y TAKAHASAI, 1969) aprovecharon la ocasión para estudiar el comportamiento sísmico de tuberías subterráneas. Los datos obtenidos son muy valiosos para la formulación de los modelos teóricos.

La aceleración máxima del terreno registrada durante los experimentos fue de 83 gal y el temblor de mayor magnitud aprovechado para las mediciones tuvo una magnitud Richter de 5.3. Los diámetros de las tuberías de acero estudiadas eran 270 mm y 90 mm, aproximadamente. Se experimentó también con un conducto de concreto de sección rectangular (500 x 630 mm).

Las principales conclusiones obtenidas son las siguientes:

1. No se observó diferencia entre los corrimientos de las tuberías y del suelo.

2. Los corrimientos horizontales del suelo en las direcciones axial y transversal fueron aproximadamente iguales.

3. En tramos rectos, las deformaciones unitarias axiales resultaron mayores que las deformaciones unitarias por flexión.

4. Las deformaciones por flexión en la cercanía de codos y curvas fueron del mismo orden que las observadas en tramos rectos.

5. Las deformaciones máximas de la tubería no ocurrieron en la fase del movimiento que contenía las aceleraciones máximas, sino más bien después de ocurrida esa fase. Igual conclusión se obtuvo para las deformaciones máximas del terreno en la superficie.

6. No se observó que existiera una frecuencia natural de la tubería, ni que hubiera resonancia con algunas frecuencias.

7. No se observaron ondas de corte puro en la superficie.

8. Aparentemente los autores concluyen que las ondas que influyen más en las deformaciones unitarias de la tubería son las ondas superficiales (Love y Rayleigh). Esta conclusión aparece corroborada por la observación de que en la fase de aceleraciones máximas se detectaron períodos en el movimiento del terreno de 0.15 y 0.25 seg, mientras que el período predominante en las deformaciones de la tubería fue de 0.40 seg, que coincide con el período observado en el movimiento del terreno en la fase posterior a la llegada de las ondas S. Sin embargo, durante la fase S pueden aparecer deformaciones importantes si el terreno no es homogéneo.

EXPERIMENTOS DE CAMPO

NASU et al. (1973) efectuaron experimentos de campo con una tubería de acero (ϕ = 1219 mm, e = 11.7 mm, L = 84 m) compuesta por siete caños de 12 m unidos por soldadura. La tubería iba colocada en zanja y cubierta por relleno. El terreno superficial en el cual se excavó la zanja estaba formado por una primera capa de relleno de 3.4 m de espesor sobre una arcilla limosa (γ = 1.4 a 1.5 T/m^2; W% = 80 - 110; W_L% = 90 - 120, q_u = 0.15 - 0.20 T/m^2) con un espesor de 14.5 m, que yacía sobre capas más profundas de arcillas duras, y grava con arena. Se midieron las siguientes velocidades de propagación α y β de ondas P y ondas S:

Suelo	Profundidad (m)	α (m/seg	β (m/seg)
Relleno	0 - 3.4	360 - 410	120 - 130
Arcilla limosa	3.4 - 17.9	—	80
Capas profundas de arcillas y de grava arenosa	17.9	—	250 - 300

Se efectuaron experimentos con diversos tipos de ondas generadas por varios métodos: explosivos, impacto horizontal y disparos horizontales, hinca de pilotes, vehículos en movimiento.

Se encontró que cualquiera que fuera el método empleado para generar las ondas, la tubería se movió junto con el suelo. No se observaron diferencias de fase significativas entre la deformación de la tubería y la del suelo. Sin embargo, las ondas de deformación por flexión observadas son más simples (menor contenido de frecuencias altas) que las de deformación axial del tubo y decaen más rápidamente en el tiempo. No se pudo determinar un período natural de vibración de la tubería.

Las deformaciones unitarias axiales durante la vibración resultaron ser predominantes.

EXPERIMENTOS DE LABORATORIO

Estudios en modelos (GOTO et al., 1973; OKAMOTO et al. 1973) confirman que el desplazamiento de la tubería difiere poco del desplazamiento del suelo circundante y que este último es esencialmente el desplazamiento de campo libre. Cuando el modelo de la tubería atraviesa tipos diferentes de suelos, los esfuerzos axiales máximos y los momentos de flexión máximos se producen en la vecindad de la transición. Asimismo, si el modelo está formado por tramos articulados entre sí, la reducción del momento de flexión beneficia a un largo relativamente pequeño del conducto a ambos lados de la articulación.

DAÑOS OBSERVADOS

Aunque los datos de que disponemos no permiten un análisis estadístico de los daños, se pueden extraer de ellos las siguientes conclusiones:

1. Un estudio del comportamiento de tuberías en el terremoto de San Fernando, muestra que los daños decrecen rápidamente con la distancia al epicentro. Los daños fueron escasos en aquellos lugares en que la aceleración máxima fue inferior a 300 gal.

2. Si se excluyen las roturas debidas a grandes desplazamientos en fallas geológicas, licuación de suelos granulares saturados, deslizamiento de taludes y asentamientos en suelos poco densos, las principales causas de fallas observadas son: a) deformaciones axiales provocadas por ondas sísmicas por efecto de la diferencia de fase de los corrimientos del suelo en distintos puntos de la tubería, b) movimientos relativos debidos a falta de homogeneidad de los suelos atravesados por la tubería

3. Parece haber cierta relación entre el número de fallas por kilómetro

de largo y la orientación del eje de la tubería respecto de la dirección de propagación de las ondas. Sin embargo, la información disponible en este respecto es contradictoria, seguramente porque el ángulo formado por el eje de la tubería y la dirección de propagación influye de distinta manera según sea el tipo de onda de que se trate. Así, por ejemplo, en el terremoto de San Fernando se observó una mayor incidencia de fallas en las tuberías orientadas en la dirección de propagación (2.4 veces más que en tuberías que estaban orientadas perpendicularmente a la dirección de propagación). Observaciones realizadas en Japón muestran que las fallas por esfuerzo axial predominaron cuando la tubería estaba orientada paralelamente o perpendicularmente a la dirección de propagación. En suelos blandos las fallas más numerosas son atribuibles a flexión y, según investigadores japoneses, son más frecuentes en tuberías cuya orientación es oblicua respecto de la dirección de propagación.

4. La ductilidad del material de la tubería tiene marcada influencia en el número de fallas por unidad de largo. En general, las tuberías de acero presentan menos fallas que las de fierro fundido.

ANALISIS CINEMATICO

El caso más simple que puede presentarse es el de un conducto subterráneo recto, uniforme, continuo y de longitud indefinida. La hipótesis más sencilla que podemos hacer sobre su comportamiento dinámico es admitir que el suelo impone a la tubería corrimientos iguales a los que se producirían si la obra no existiera. Esto es lo mismo que afirmar que no se produce interacción entre la estructura y el medio que la rodea; se admite por hipótesis que el movimiento de este último en la vecindad de la tubería es el movimiento de "campo libre".

Dado el movimiento de campo libre, se conocerán entonces las deformaciones de la tubería y, a través de las ecuaciones de la resistencia de materiales o de la teoría de la elasticidad, se podrían calcular las tensiones correspondientes. No habrá propiamente análisis dinámico; todas las circunstancias de interés serán conocidas a través de un análisis cinemático y de las relaciones esfuerzo-deformación.

En los párrafos siguientes haremos este análisis cinemático para varios tipos de ondas elementales. La teoría que exponemos no es original. Hipótesis similares han sido hechas por varios investigadores (SAKURAI y TAKAHASHI, 1969; KUESEL, 1969; NEWMARK, 1968, 1972; HADJIAN, 1970; NEWMARK y ROSENBLUETH, 1971, p. 318; YEH, 1974). Nuestra contribución consiste en aclarar la influencia relativa de los corrimientos axiales y transversales sobre las solicitaciones máximas para diversos tipos de ondas.

ONDAS P. Consideremos una onda de compresión, plana y armónica que se propaga horizontalmente en una dirección que forma el ángulo θ con el eje de la tubería (Fig. 1). Sean α la velocidad de propagación, ω la frecuencia circular, k el número de onda, λ la longitud de onda y A la amplitud de los corrimientos de las particuals del terreno. Los corrimientos axial, u, y transversal, v, del eje de la tubería quedan dados por

$$(1)\qquad \begin{aligned} u(x,t) &= A \operatorname{sen}\left[k(x\cos\theta - \alpha t) + \varphi\right]\cos\theta \\ v(x,t) &= A \operatorname{sen}\left[k(x\cos\theta - \alpha t) + \varphi\right]\operatorname{sen}\theta \end{aligned}$$

en que x es la abscisa de una sección cualquiera de la estructura referida a un eje coordenado $0x$ coincidente con el eje de ella y de origen arbitrario, y φ es un ángulo de fase dependiente de la elección de 0 y del origen del tiempo.

De estas ecuaciones se deduce que la perturbación se propaga sobre la tubería con una velocidad aparente c dada por

$$(2)\qquad c = \frac{\alpha}{\cos\theta}$$

La deformación unitaria del eje de la tubería será

$$(3)\qquad \frac{\partial u}{\partial x} = kA\cos\left[k(x\cos\theta - \alpha t) + \varphi\right]\cos^2\theta$$

y su curvatura

$$(4)\qquad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = -k^2 A \operatorname{sen}\left[k(x\cos\theta - \alpha t) + \varphi\right]\cos^2\theta \operatorname{sen}\theta$$

Se deduce unmediatamente que las tensiones unitarias en una sección dada correspondientes a la deformación axial y a la flexión están en cuadratura.

La amplitud de la tensión unitaria debida a los corrimientos axiales es

$$(5)\qquad \sigma_N = kAE\cos^2\theta$$

en que E es el módulo de Young del material de la tubería. Esta tensión unitaria resulta máxima cuando la onda P se propaga en dirección paralela al eje:

$$(6)\qquad (\sigma_N)_{max} = kAE = \frac{\omega A E}{\alpha}$$

Observemos que σ_N y $(\sigma_N)_{max}$ son proporcionales a ωA; es decir, a la amplitud de la velocidad de las partículas del terreno.

La amplitud de la tensión unitaria máxima de flexión es

$$(7) \qquad \sigma_F = \frac{E I k^2 A}{W} \cos^2\theta \operatorname{sen}\theta$$

en que I y W son, respectivamente, el momento de inercia y el módulo de flexión de la sección transversal del tubo. El mayor valor de σ_F se alcanza cuando θ es raíz de la ecuación

$$(8) \qquad \operatorname{sen}^2\theta = \frac{1}{3} \qquad (\theta \approx \pm 35° 16')$$

Se obtiene

$$(9) \qquad (\sigma_F)_{max} = \frac{2\sqrt{3}\, E I k^2 A}{9W} = \frac{2\sqrt{3}\, E I \omega^2 A}{9\alpha^2 W} \approx 0.385 \frac{E I \omega^2 A}{}$$

Nótese que, tanto σ_F como $(\sigma_F)_{max}$ resultan proporcionales a $\omega^2 A$, es decir, a la amplitud de la aceleración del terreno.

De las ecuaciones (6) y (9) resulta

$$(10) \qquad \frac{(\sigma_F)_{max}}{(\sigma_N)_{max}} = \frac{2\sqrt{3}\, I \omega}{9 \alpha W}$$

Para un tubo circular de pared delgada y radio R se tiene, aproximadamente,

$$(11) \qquad \frac{I}{W} = R$$

Luego

$$(12) \qquad \frac{(\sigma_F)_{max}}{(\sigma_N)_{max}} \approx 0.385 \frac{R\omega}{\alpha}$$

Se deduce de aquí que las tensiones unitarias de flexión tendrán importancia frente a las debidas a deformación axial solamente en tuberías de gran diámetro y para ondas de frecuencias relativamente alta. Se deduce, además, que las tensiones de flexión cobrarán más importancia mientras menor sea la velocidad de propagación α; es decir, mientras más blando sea el terreno.

Estas conclusiones se pueden formular de manera más precisa, mediante el siguiente análisis que permite fijar el valor del parámetro $\frac{IK}{W} \left(\approx \frac{R\omega}{\alpha}\right)$ a partir del cual la flexión tiene influencia:

Dado que las tensiones unitarias por flexión y por deformación axial están en cuadratura, la amplitud σ de la tensión en la fibra más solicitada queda expresada por

$$(13) \qquad \sigma = \sqrt{\sigma_N^2 + \sigma_F^2} = k A E \cos^2\theta \sqrt{1 + \left(\frac{Ik}{W} \operatorname{sen}\theta\right)^2} = \sigma(\theta)$$

Considerando σ como función de θ, la expresión de ec. (13) presenta extremos cuando $\theta = 0$ y cuando θ es raíz de la ecuación

$$(14) \qquad \operatorname{sen}^2\theta = \frac{1}{3} - \frac{2}{3}\left(\frac{W}{Ik}\right)^2$$

Llamemos σ_1 y σ_2 estos extremos, respectivamente; se tiene

$$(15) \qquad \begin{aligned} \sigma_1 &= k A E = \sigma_N \\ \sigma_2 &= \frac{2\sqrt{3}}{9} k A E \left[1 + \left(\frac{W}{Ik}\right)^2\right] \sqrt{1 + \left(\frac{Ik}{W}\right)^2} \end{aligned}$$

Es fácil demostrar que σ_1 corresponde a un máximo si $\frac{Ik}{W} < \sqrt{2}$ se trata de un mínimo cuando $\frac{Ik}{W} > 2$. El segundo extremo σ_2 existe siempre que se tenga $\frac{Ik}{W} > \sqrt{2}$ y, en tal caso, corresponde a un máximo y, además, $\sigma_2 > \sigma_1$. Cuando $\frac{Ik}{W} = \sqrt{2}$, se verifica que $\sigma_1 = \sigma_2$.

Se concluye, entonces, que el valor del parámetro $\frac{Ik}{W}$ es el que determina si hay o no influencia de la flexión en las solicitaciones máximas. Quedan definidos dos intervalos

$$i) \qquad 0 \leq \frac{Ik}{W} \leq \sqrt{2}$$

$$ii) \qquad \frac{Ik}{W} > \sqrt{2}.$$

Si el parámetro $\frac{Ik}{W}$ está en el primero de ellos la tensión máxima está dada por la primera de las ecuaciones (15) y no hay influencia de la flexión sobre la tensión unitaria máxima. El efecto de la flexión en la tensión máxima se produce solamente si $\frac{Ik}{W} > \sqrt{2}$. Es decir:

$$(16) \qquad \frac{\sigma_{max}}{(\sigma_N)_{max}} = \begin{cases} 1 , & 0 \leq \frac{Ik}{W} \leq 2 \\ \frac{2\sqrt{3}}{9}\left[1 + \left(\frac{W}{Ik}\right)^2\right] \sqrt{1 + \left(\frac{Ik}{W}\right)^2} , & \frac{Ik}{W} > \sqrt{2} \end{cases}$$

La relación (16) ha sido representada en la Fig. 2.

Para valores de ω dentro del rango en que los movimientos sísmicos tienen amplitudes de alguna significación, y valores de R y α razonables, todos los tubos de la práctica quedan incluidos en el intervalo i). Por lo tanto, cuando se trata de ondas P, las tensiones por flexión carecen del interés. Podemos entonces simplificar el análisis, teniendo en cuenta solamente las tensiones por deformación axial y, a la vez, generalizarlo, considerando ondas planas que no sean armónicas. El caso más crítico será aquel en que la dirección de propagación coincide con el eje de la tubería; pondremos entonces

$$(17) \qquad u(x,t) = F(x - \alpha t)$$

Por lo tanto

$$\sigma(x,t) = E\frac{\partial u}{\partial x} = E\,F'(x-\alpha t) = -\frac{E}{\alpha}\frac{\partial u}{\partial t}$$

de donde

$$(18) \qquad |\sigma(x,t)|_{max} = \frac{E}{\alpha}\,|\dot{u}|_{max}$$

Es decir la tensión unitaria máxima es proporcional a la velocidad máxima del terreno e inversamente proporcional a la velocidad de propagación.

ONDAS DE LOVE. En un medio elástico estratificados, formado por una capa superficial de espesor uniforme que yace sobre un medio elástico semi-infinito, o sobre un conjunto de estratos elásticos, es posible la propagación de ondas armónicas superficiales polarizadas horizontalmente siempre que la velocidad de propagación de las ondas de corte en el material de la capa superficial sea menor que en el medio subyacente. La velocidad de propagación c_L de esas ondas superficiales está comprendido entre la velocidad de las ondas de corte en el material de la capa superficial y la velocidad de las ondas de corte en el medio subyacente. El valor de c_L depende de la frecuencia del movimiento; por lo tanto, se produce el fenómeno de dispersión: la fase relativa de las componentes armónicas de un tren de ondas planas va variando según se propaga la perturbación. Resulta entonces complicado estudiar el caso general de un tren de ondas y, por esa razón, nos limitaremos al caso de una onda plana y armónica.

Con una notación similar a la empleada en el caso de las ondas P, las componentes del corrimiento del eje de la tubería quedan expresadas por

$$(19) \qquad \begin{aligned} u(x,t) &= A \operatorname{sen}\left[k(x\cos\theta - c_L t) + \varphi\right]\operatorname{sen}\theta \\ v(x,t) &= -A \operatorname{sen}\left[k(x\cos\theta - c_L t) + \varphi\right]\cos\theta \end{aligned}$$

La velocidad aparente c con que se propaga la perturbación a lo largo del tubo es ahora

$$c = \frac{c_L}{\cos\theta} \tag{20}$$

Las amplitudes de las tensiones debidas a los corrimientos axiales y transversales quedan expresadas respectivamente por

$$\sigma_N = k A E \operatorname{sen}\theta \cos\theta \tag{21}$$

$$\sigma_F = \frac{E I k^2 A}{W} \cos^3\theta \tag{22}$$

Los valores máximos de estas amplitudes como funciones de θ son

$$(\sigma_N)_{max} = \frac{k A E}{2} = \frac{\omega A E}{2 c_L} \tag{23}$$

$$(\sigma_F)_{max} = \frac{E I k^2 A}{W} = \frac{E I \omega^2 A}{W c_L^2} \tag{24}$$

y se producen respectivamente para $\theta = 45°$ y $\theta = 0$.

De nuevo resulta que σ_N y $(\sigma_N)_{max}$ son proporcionales a la amplitud de la velocidad, mientras que σ_F y $(\sigma_F)_{max}$ son proporcionales a la amplitud de la aceleración.

En una sección dada, las tensiones por corrimientos axiales y las debidas a flexión están en cuadratura; por lo tanto, la amplitud de la tensión en la fibra más solicitada es

$$\sigma(\theta) = \sigma = \sqrt{\sigma_N^2 + \sigma_F^2} = k A E \cos\theta \sqrt{\operatorname{sen}^2\theta + \left(\frac{I k}{W}\cos^2\theta\right)^2} \tag{25}$$

Los extremos de la función $\sigma(\theta)$ ocurren cuando θ satisface la ecuación

$$\left[3\left(\frac{I k}{W}\right)^2 \cos^4\theta - 2\cos^2\theta + 1\right] \operatorname{sen}\theta \cos\theta = 0 \tag{26}$$

La expresión entre corchetes no admite raíces reales, salvo que se tenga

$$\left(\frac{I k}{W}\right)^2 = \frac{1}{3} \tag{27}$$

En tal caso, dicha expresión se reduce a $\operatorname{sen}^4\theta$ y las raíces de (26) son $\theta = 0$ y $\theta = \frac{\pi}{2}$. La primera de ellas corresponde a un máximo de $\sigma(\theta)$. Obtenemos así

$$(28) \qquad \sigma_{max} = \frac{E I k^2 A}{W} = 2(\sigma_N)_{max} \frac{I k}{W}$$

Resulta entonces que

$$(29) \qquad \frac{\sigma_{max}}{(\sigma_N)_{max}} = \begin{cases} 1 \ , & 0 \leq \frac{Ik}{W} \leq \frac{1}{2} \\ \frac{2Ik}{W} \ , & \frac{Ik}{W} > \frac{1}{2} \end{cases}$$

Para conductos circulares delgados se tiene, de acuerdo con la ec. (11),

$$(30) \qquad \frac{Ik}{W} \approx \frac{R\omega}{c_L}$$

Se deduce que la tensión máxima es la debida a deformación axial si

$$\omega \leq \frac{c_L}{2R}$$

y que la flexión influirá en las tensiones máximas si y sólo si $\omega > \frac{c_L}{2R}$.

En suelos muy blandos, como los que ocurren en la zona de suelos altamente compresibles de Ciudad de México, la velocidad de propogación c_L puede ser bastante pequeña (30 a 50 m/seg). En tales casos la flexión puede resultar de alguna importancia aún en tubos de diámetro no muy grande. Por ejemplo, con $c_L = 40$ m/seg y $R = 1$ m , resulta

$$\frac{c_L}{2R} = 20 \ \mathrm{rad/seg}$$

o sea que influirá sobre las tensiones máximas la flexión inducida por ondas cuyo período sea menor que 0.314 seg.

ONDAS DE RAYLEIGH. Los corrimientos del eje de la tubería quedan dados por

$$u(x,t) = A \cos\left[k(c_R t - x\cos\theta) + \varphi\right] \cos\theta$$

$$(31) \qquad v(x,t) = A \cos\left[k(c_R t - x\cos\theta) + \varphi\right] \operatorname{sen}\theta$$

$$w(x,t) = B \operatorname{sen}\left[k(c_R t - x\cos\theta) + \varphi\right] .$$

en que A y B son, respectivamente, las amplitudes horizontal y vertical del movimiento del terreno, c_R es la velocidad de propagación de las ondas de Rayleigh y u, v, w son, respectivamente, las componentes del corrimiento del eje de la tubería en la dirección axial, horizontal transversal, y vertical.

La amplitud de la tensión por deformación axial es

$$(32) \qquad \sigma_N = k A E \cos^2\theta$$

Por lo tanto

$$(33) \qquad (\sigma_N)_{max} = k A E$$

La tensión en una fibra cualquiera está dada por

$$(34) \qquad \sigma(x,t;\theta,\psi) = E\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{EI_y}{W_y}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\cos\psi - \frac{EI_z}{W_z}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\operatorname{sen}\psi$$

en que ψ es
el ángulo polar, medido desde un plano horizontal por el eje de la tubería que define la posición de la fibra en cuestión, I_y, W_y son el momento de inercia y el módulo de flexión de la sección para flexión lateral; I_z, W_z las magnitudes correspondientes para flexión vertical.

En un tubo circular, la situación más crítica se produce para $\theta = 0$, $\psi = \frac{\pi}{2}$. Se obtiene en tal caso

$$(35) \qquad \sigma_{max} = kAE + k^2BRE = \frac{\omega AE}{c_R} + \frac{\omega^2 BRE}{c_R^2}$$

$$(36) \qquad \sigma_{max} = (\sigma_N)_{max}\left[1 + \frac{\omega BR}{c_R A}\right]$$

Se deduce inmediatamente que para un tren de ondas de Rayleigh

$$\sigma_{max} \leq \frac{E}{c_R}\left\{ |v|_{max} + \frac{R|a|_{max}}{c_R} \right\}$$

en que $|v|_{max}$ es la máxima velocidad horizontal del terreno y $|a|_{max}$ la máxima aceleración vertical.

A diferencia de lo que ocurre en el caso de las ondas P y las ondas de Love, en el caso de las ondas de Rayleigh no existe un dominio de frecuencias bajas dentro del cual la flexión no influya sobre las tensiones máximas. Es decir, para ondas de Rayleigh, cualesquiera que sean las frecuencias de las ondas y el diámetro del tubo, las tensiones máximas posibles se producen por combinación de esfuerzos axiales y de flexión.

Para suelos tan blandos como los de la zona de suelos altamente compresibles de Ciudad de México se tiene

$$\frac{B}{A} \approx 1.8$$

$$c_R = 36 \text{ m/seg}$$

Por consiguiente, en esos suelos

$$\frac{\sigma_{max}}{(\sigma_N)_{max}} = 1 + \frac{\omega B R}{c_R A} = 1 + 0.05\,\omega R$$

con ω en rad/seg y R en metros. Con $\omega = 20$ rad/seg y $R = 1$ m, la tensión máxima por combinación de flexión y esfuerzo axial resulta igual al doble de la producida por los corrimientos axiales.

CONCLUSIONES

1. El análisis cinemático aquí expuesto indica que para onda P y ondas de Love existen dos rangos de frecuencias definidos, en cada caso, por las ecuaciones (16) y (29), respectivamente. En el dominio de bajas frecuencias las tensiones máximas estarán entonces asociadas a los corrimientos axiales. Sólo en el de frecuencias altas la flexión influye sobre las tensiones máximas.

2. Se puede afirmar que, en la práctica, todos los tubos caerán en el dominio de bajas frecuencias; es decir, las tensiones máximas provocadas por ondas P y ondas de Love se deben a los corrimientos axiales. Sólo por excepción, en suelos muy blandos y para tubos de gran diámetro se debe esperar que las tensiones por flexión provocada por ondas de Love puedan tener alguna importancia.

3. En el caso de ondas de Rayleigh, la tensión máxima resulta de combinar las debidas a corrimientos axiales con las de flexión cualesquiera que sean la frecuencia de las ondas y las dimensiones de la sección transversal. A diferencia de lo que ocurre con las ondas P y de Love, no existen en este caso dos dominios de frecuencias. Se debe esperar que en suelos blandos y para tubos de diámetro intermedio o grande se produzcan tensiones de flexión apreciables en el rango de las frecuencias altas e intermedias.

BIBLIOGRAFIA

1. AOKI, Y.; HAYASHI, S. (1973) "Spectra for earthquake resistive design of underground long structures" 5th World Conference on Earthquake Engineering, Rome 1973, Prepints, Paper No. 61 Session 2 B.

2. ARIAS, A. (1976) "Notas" del Curso Internacional de Ingeniería Sísmica, División de Estudios Superiores, Facultad de Ingeniería, UNAM (inédito).

3. ASCE, Los Angeles Section (1974) "Earthquake damage evaluation and design considerations for underground structures", Los Angeles, Calif.

4. DOUGLAS, W.S; WARSHAW, R. (1971) "Design of seismic joint for San Francisco Bay Tunnel" Journ. Struct. Div, ASCE, 97, ST4, Proc. Paper 8040, 1129-1141.

5. DUKE, C. M. (1971) "Damage to water supply systems" in The San Fernando, California, Earthquake of February 9, 1971, U.S. Department of Commerce.

6. GOTO, Y.; OTA, J.; SATO, T. (1973) "On the earthquake response of submerged tunnels" 5th WCEE, Rome 1973, Prepints, Paper No. 63, Session 2 B.

7. GOTO, H.; TOKI, K.; TAKADA, S. (1972) "Dynamic characteristics of underground pipes" Proceedings 12th meeting on earthquake engineering, JSCE, July 17-18, 1972, Japan Society of Civil Engineers, Tokyo.

8. HADJIAN, A. H. (1970) Discusión del artículo "Earthquake design criteria for subways" por R. T. Kuesel, J. Struct. Div. ASCE, 96, 159-160.

9. JAPAN WATERWORKS ASSOCIATION (1960) "Earthquake-proof measures for a water supply system", en Earthquake Resistant Design for Civil Engineering Structures, Earth Structures and Foundations in Japan, compilado por The Japan Society of Civil Engineers, pp. 57-72. (Hay versiones más recientes con el mismo título, publicadas en 1968 y 1973).

10. KUBO, K. (1972) "Damage characteristics of water supply pipes in Los Angeles Proc. 12th meeting on earthquake engineering, JSCE, July 17-8, 1972, Japan Society of Civil Engineers, Tokyo.

11. KUBO, K. (1973) "Behavior of underground water pipes during an earthquake" 5th WCEE, Rome 1973, Prepints, Paper No. 62, Session 2 B.

12. KUESEL, R. T. (1969) "Earthquake design criteria for subways". *J. Struct. Div. ASCE*, 95, 1213-1231

13. KURIBAYASHI, E.; IWASAKI, T. (1973) "Effects of soil deposits on seismic behavior of prefabricated highway tunnels" *5th WCEE, Rome 1973*, Prepints, Paper No. 332 Session 7 C.

14. NEWMARK, N. M.; ROSENBLUETH, E. (1971) *Fundamentals of Earthquake Engineering*, Prentice-Hall Englewood cliffs, N. J.

15. SAKURAI, A.; TAKAHASHI, T (1969) "Dynamic stresses of underground pipeline during earthquakes" *Proc. 4th WCEE*, Santiago , Chile, Vol. II

16. U. S. DEPARTMENT OF COMMERCE, N. O. A. A. (1973) *San Fernando, California Earthquake of February 9, 1971*, Washington, D. C. Especialmente el Vol II "Utilities, transportation, and sociological aspects".

17. YEH, G. C. K. (1974) "Seismic analysis of slender buried beams" *Bull, Seism. Soc. Amer.*, 64, No. 5, pp. 1551-1562.

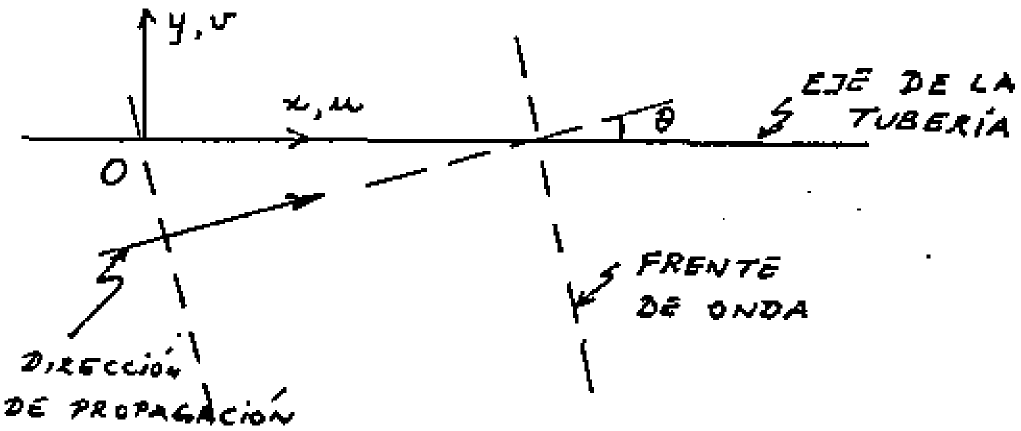

y, v
x, u
O
θ
EJE DE LA TUBERÍA
FRENTE DE ONDA
DIRECCIÓN DE PROPAGACIÓN

FIG. 1.

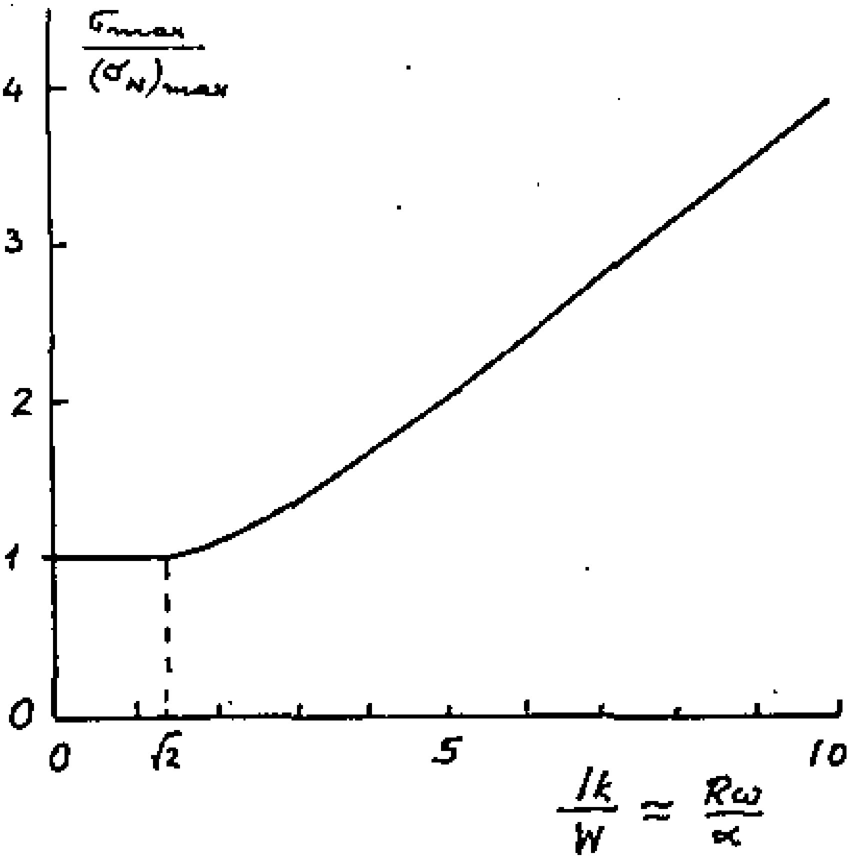

$\frac{\sigma_{max}}{(\sigma_N)_{max}}$
4
3
2
1
0
0
$\sqrt{2}$
5
10
$\frac{lk}{W} \approx \frac{R\omega}{\alpha}$

FIG. 2

centro de educación continua
división de estudios superiores
facultad de ingeniería, unam

V CURSO INTERNACIONAL DE INGENIERIA SISMICA

DISEÑO SISMICO DE ESTRUCTURAS ESPECIALES

TORRES Y CHIMENEAS

M. en I. NEFTALI RODRIGUEZ CUEVAS

AGOSTO, 1979

Torres y chimeneas

Prof. Neftalí Rodríguez Cuevas

1. Introducción.

Las torres y chimeneas son estructuras esbeltas, de funciones múltiples, que se deben diseñar para soportar la acción de fuerzas horizontales, provocadas por viento o sismo, las cuales inducen efectos dinámicos en las estructuras de soporte

En las fig 1 a 5 se muestran algunos de los tipos comunes de torres y chimeneas construidas en diversas partes del mundo.

El análisis dinámico de estas estructuras requiere de algunos aspectos que no son comunes a otros tipos de estructuras, y en este trabajo se muestran las consideraciones comunes para su análisis.

2. Idealización para fines de análisis dinámico.

Las estructuras de este tipo se idealizan comúnmente como vigas Bernoulli-Euler, y su análisis se realiza en base a la teoría elemental de flexión, la cual implica que las secciones transversales permanecen planas al deformarse bajo la acción de fuerzas normales a su eje medio. Se acepta que los esfuerzos son proporcionales a las deformaciones unitarias, con flexión en un solo plano. Se considera además, que los desplazamientos son pequeños y que la deformación en cortante es pequeña.

Se consideran solo los efectos de inercia provocados

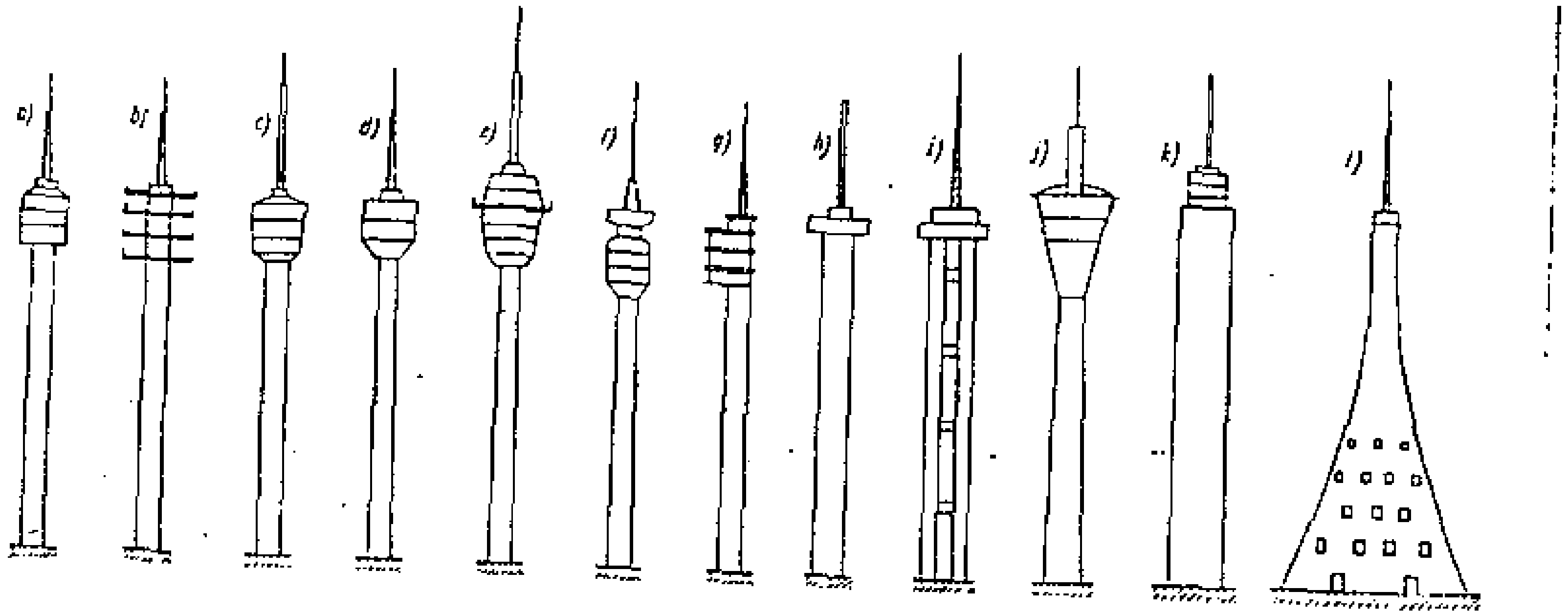


FIG 1 . Algunos tipos de torres construidas en diversas partes del mundo.

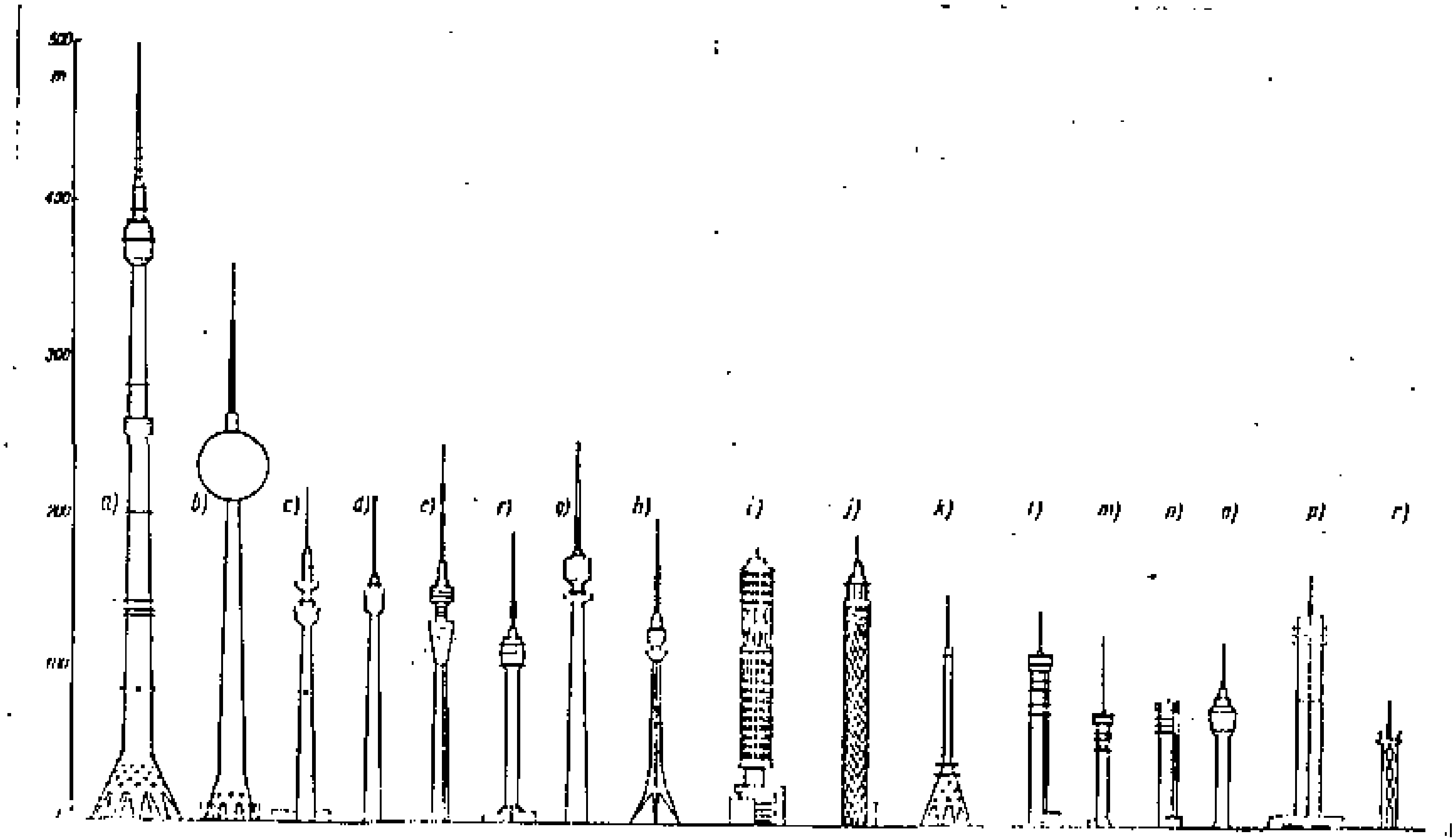
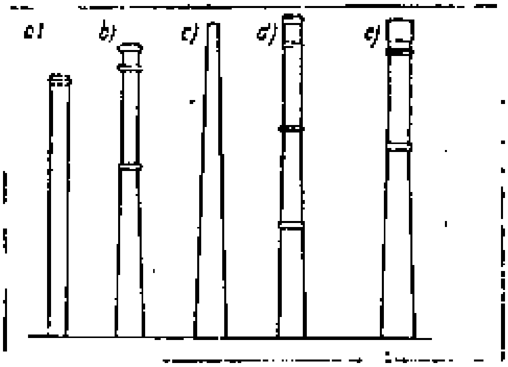


FIG 2. Caracteristicas geométricas de torres

a) Moscú
b) Berlin
c) Dortmund
d) Stuttgart
e) Dresden
f) Dequede
g) Donauturm, Viena
h) Belgrado
i) Londres
j) Cairo
k) Polonia
l) Zippendorf
m) Petersberg
n) Rhinow
o) Kulpenberg
p) Estocolmo
r) Hannover



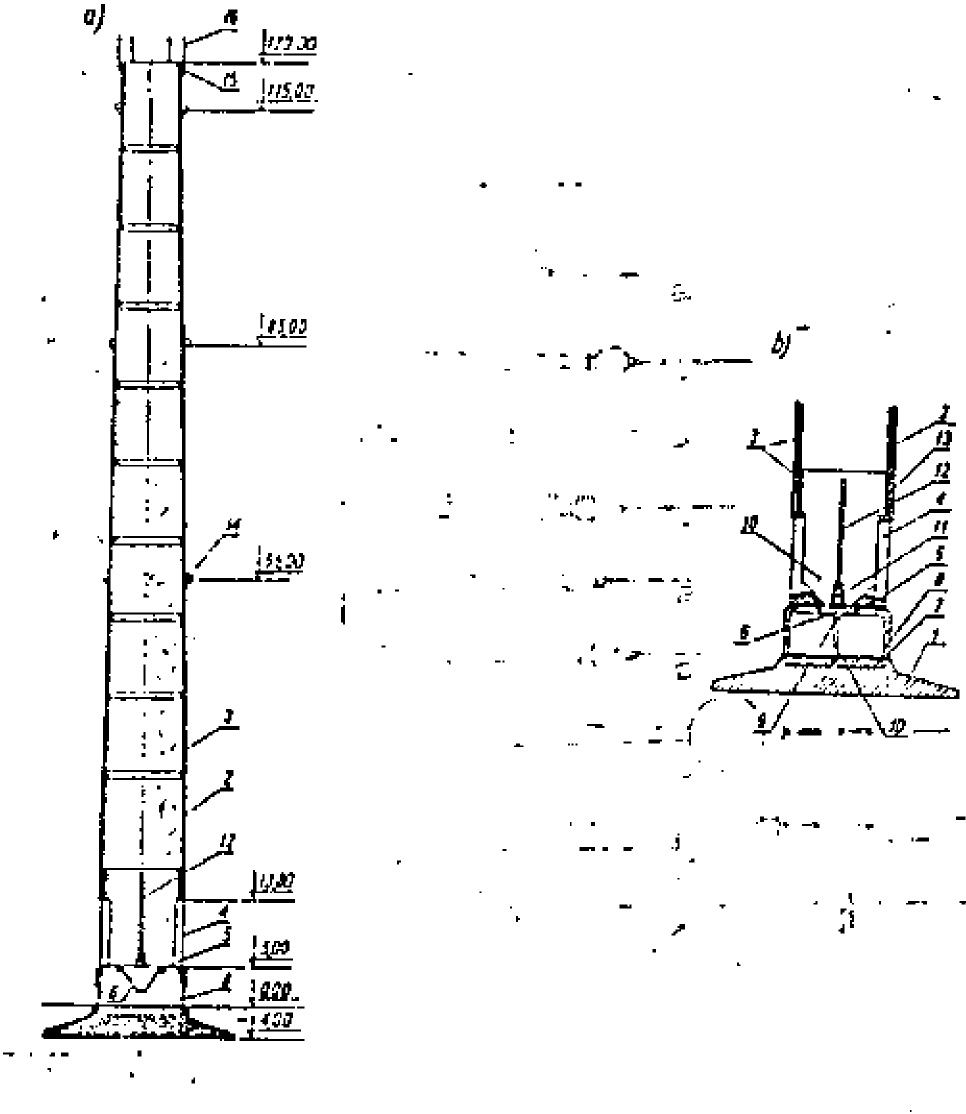


FIG 3 Caracteristicas principales de chimeneas.

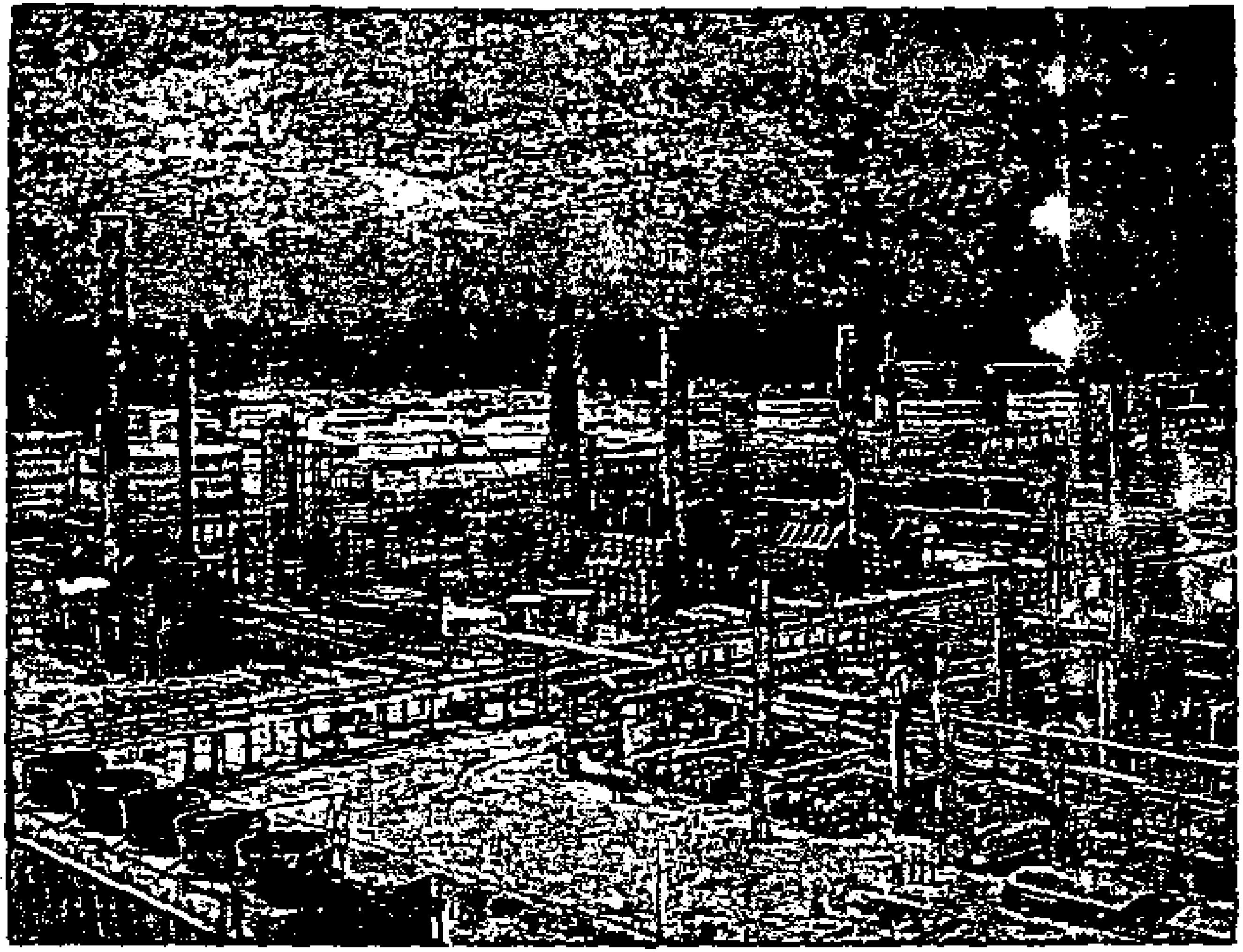


FIG. 4 Refinería en el norte del país, con torres y chimeneas..

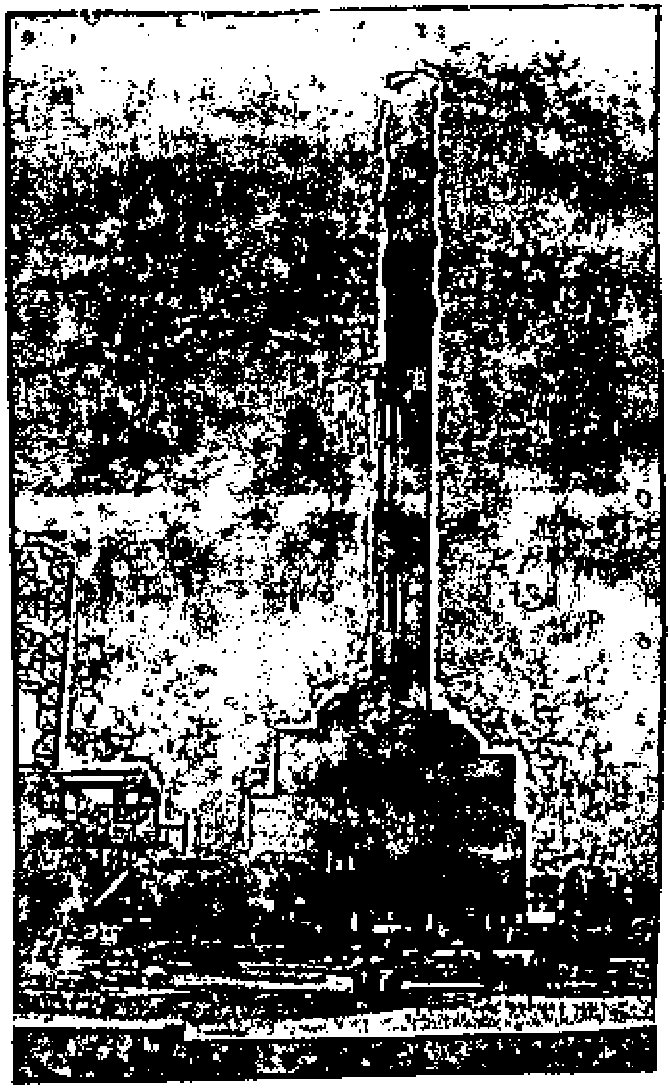


FIG 5. Aspectos parciales de chimeneas y torres.

por la traslación normal al eje de elementos diferenciales de la viga. No se considera el efecto de la inercia rotacional, igual a $-I\frac{\partial^3 v}{\partial x \partial t^2}$ por unidad de longitud, provocado por el giro angular $\frac{\partial v}{\partial x}$ de cada elemento, siendo v la translación normal al eje de la barra.

Cuando las dimensiones de la viga en su sección transversal no son pequeñas en comparación con su longitud, análisis que consideran los efectos de la fuerza cortante y la inercia rotacional se deben llevar a cabo.

En este escrito se presentan los aspectos sobresalientes del análisis dinámico de este tipo de estructuras, presentando la influencia relativa de la fuerza cortante y la inercia rotacional, así como de la fuerza normal. Cuando se considera que estos efectos no son significativos, se realizan análisis dinámicos simplificados que permiten conocer los desplazamientos y elementos mecánicos que permiten a su vez, revisar el análisis de las características geométricas y del material que forma a estas estructuras.

3. Viga Bernoulli-Euler

Al considerar la viga BE, cuyas características se muestran en la fig 6, sometida a la acción de efectos dinámicos, considere que $r = v(x,t)$ sea el desplazamiento transversal del eje neutro y

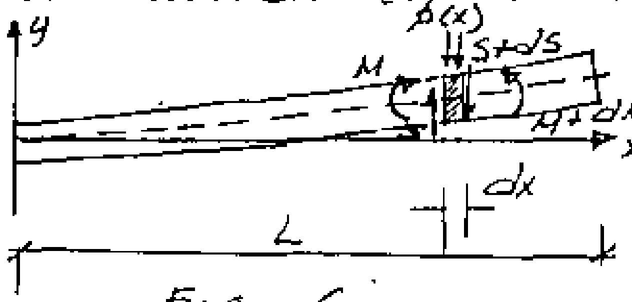


Fig 6

$\mu(x)$ la masa por unidad de longitud. Los desplazamientos $v(x,t)$ producidos por la carga $p=p(x,t)$ son gobernados por la ecuación diferencial

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(EI\,\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right) = -\mu\,\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + p \quad \ldots(3.1)$$

Cuando se generan vibraciones libres, es decir $p=0$, aparecen modos normales de vibrar del tipo

$$v(x,t) = \phi(x)\,\mathrm{sen}\,(\omega t+\varepsilon) \qquad (3.2)$$

que al ser sustituidas en (3.1) conducen a la siguiente ecuación diferencial

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(EI\,\frac{d^2}{dx^2}\phi\right) = \omega^2\mu\,\phi \qquad (3.3)$$

Esta ecuación, junto con las condiciones de frontera de la viga, constituyen un problema de valores características, cuya solución conduce al conocimiento de las frecuencias naturales de cada uno de los i-esimos modos de vibrar y a la definición de sus formas características.

Vibraciones libres en piezas de sección constante.

Cuando $EI=\text{cte}$, la ec 3.3 admite la solución general

$$\phi(x) = C_1\,\mathrm{Ch}\left(\frac{\lambda x}{L}\right) + C_2\,\mathrm{Sh}\left(\frac{\lambda x}{L}\right) + C_3\cos\left(\frac{\lambda x}{L}\right) + C_4\,\mathrm{sen}\left(\frac{\lambda x}{L}\right) \quad (3.4)$$

donde $\lambda = L\sqrt[4]{\mu\omega^2/EI}$

Para torres y chimeneas, las condiciones de frontera resultan ser $\phi(0) = \phi'(0) = \phi''(L) = \phi'''(L) = 0$ a partir de las cuales se obtiene la ecuación característica de frecuencias

$$\cos\lambda\,\mathrm{Ch}\,\lambda + 1 = 0 \qquad (3.5)$$

cuyas raíces resultan ser :

$\lambda_1 = 1.8751$, $\lambda_2 = 4.6941$, $\lambda_3 = 7.8548$, $\lambda_4 = 10.9955$

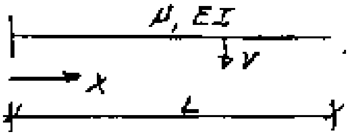
y para valores grandes de n

$$\lambda_n = (2n-1)\pi/4 \qquad (3.6)$$

con las formas modales correspondientes

$$\phi_n(x) = Ch\left(\frac{\lambda_n x}{L}\right) - \cos\left(\frac{\lambda_n x}{L}\right) - \frac{Ch\,\lambda_n + \cos\lambda_n}{Sh\,\lambda_n + sen\,\lambda_n}\left[Sh\left(\frac{\lambda_n x}{L}\right) - sen\left(\frac{\lambda_n x}{L}\right)\right] \qquad (3.7)$$

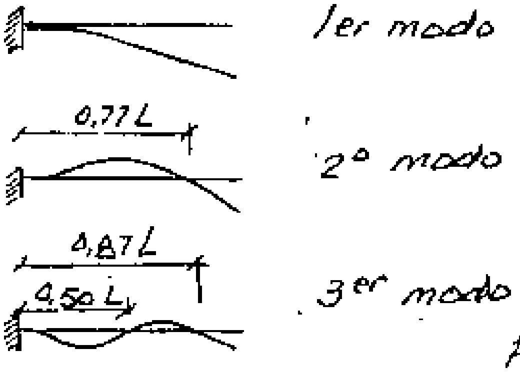
Las frecuencias naturales resultan ser:



$$\omega_1 = \frac{(0.597\pi)^2}{L^2}\sqrt{\frac{EI}{\mu}}$$

$$\omega_2 = \frac{(1.4942\pi)^2}{L^2}\sqrt{\frac{EI}{\mu}}$$

$$\omega_3 = \frac{(1.8636\pi)^2}{L^2}\sqrt{\frac{EI}{\mu}}$$



$$\omega_n \doteq \frac{(n-\frac{1}{2})^2\pi^2}{L^2}\sqrt{\frac{EI}{\mu}}$$

Fig 7

a partir de los valores anteriores, se obtienen los periodos correspondientes mediante $T_n = 2\pi/\omega_n$

Las formas características deben ser funciones que satisfacen las siguientes condiciones de ortogonalidad

$$\begin{aligned} \int_0^L \mu\,\phi_n\,\phi_m\,dx &= 0 \quad si \quad m \neq n \\ &= m_n \quad si \quad m = n \\ \int_0^L EI\,\phi_n''\,\phi_m''\,dx &= 0 \quad si \quad m \neq n \\ &= m_n\omega^2 \quad si \quad m = n \end{aligned} \qquad (3.8)$$

donde $\int_0^L \mu\,\phi_n^2\,dx = m_n$

- Vibraciones forzadas sin amortiguamiento

Cuando se considera a la viga sometida a un sistema excitador definido por una carga distribuida $p = p(x,t)$ y a una o más fuerzas concentradas P_i a distancias x_i del apoyo, la ecuación de Lagrange conduce a: la expresión

$$v(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\phi_n(x)\left[A_n\cos\omega_n t+B_n\,\mathrm{sen}\,\omega_n t+\frac{1}{m_n\omega_n}\int_0^L Q_n(\tau)\,\mathrm{sen}\,\omega_n(t-\tau)\,d\tau\right]\qquad(3.9)$$

donde Q_n es la fuerza generalizada definida por

$$Q_n(t)=\int_0^L p(x,t)\,\phi_n(x)\,dx+\sum_i P_i(t)\,\phi_n(x_i)\qquad(3.10)$$

y los valores de A_n y B_n quedan definidos por:

$$A_n=\frac{1}{m_n}\int_0^L v_0\,\mu\,\phi_n\,dx$$
$$B_n=\frac{1}{m_n\omega_n}\int_0^L \dot{v}_0\,\mu\,\phi_n\,dx\qquad(3.11)$$

Vibraciones forzadas con amortiguamiento.

Cuando en la viga (BE) existe una fuerza de amortiguamiento distribuida, igual a $c(x)\,\dot{v}$, donde $c(x)$ es un coeficiente de amortiguamiento viscoso, variable en x, definido como $c(x)=\beta\,\mu(x)$ donde β es una constante positiva, el desplazamiento normal v queda descrito por:

$$v(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\phi_n(x)\left[e^{-\frac{\beta t}{2}}\left(A_n\cos p_n t+B_n\,\mathrm{sen}\,p_n t\right)+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{m_n p}\int_0^L Q_n(\tau)\,e^{-\frac{\beta}{2}(t-\tau)}\,\mathrm{sen}\,p_n(t-\tau)\,d\tau\right]\qquad(3.12)$$

donde

$$p_n=\sqrt{\omega_n^2-\left(\frac{\beta}{2}\right)^2}$$

y $\quad A_n=\dfrac{1}{m_n}\displaystyle\int_0^L v_0\,\mu\phi_n\,dx \qquad B_n=\dfrac{1}{m_n p_n}\displaystyle\int_0^L \dot{v}_0\,\mu\phi_n\,dx+\dfrac{\beta A_n}{2p_n}$

4. Influencia de las condiciones de cimentación

En torres y chimeneas las condiciones de cimentación son importantes en su comportamiento bajo la acción dinámica de fuerzas horizontales.

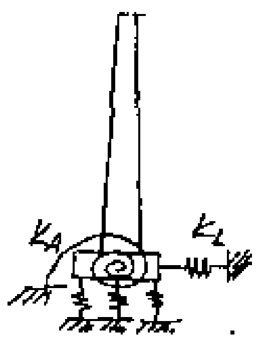


Fig 8

Las propiedades del terreno y el tipo de cimentación seleccionado influyen de manera importante en el analisis dinámico de estas estructuras.

Al considerar resortes que definen la acción del suelo sobre la chimenea, estos alteran los periodos naturales de la estructura y la forma de los modos de vibrar.

La ecuación característica se transforma en

$$x\left[\frac{x^2}{j}-\frac{1}{i}\right]\operatorname{Sen} x \operatorname{Ch} x + x\left[\frac{x^2}{j}+\frac{1}{i}\right]\cos x \operatorname{Sh} x - \left[\frac{x^4}{ij}+1\right]\cos x \operatorname{Ch} x + \left[\frac{x^4}{ij}-1\right]=0 \qquad (4.1)$$

donde

$$j=\frac{K_L}{EI/L^3} \qquad i=\frac{K_A}{EI/L}$$

K_L rigidez del resorte horizontal

K_A rigidez angular del resorte que restringe el giro de la cimentación.

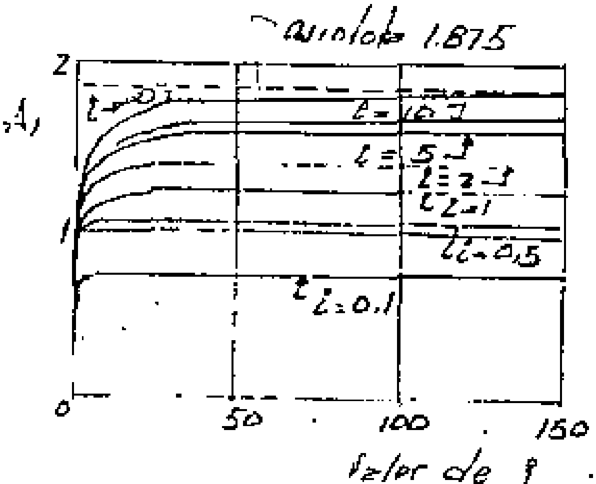
$x = \omega L$

ω frecuencia del primer modo

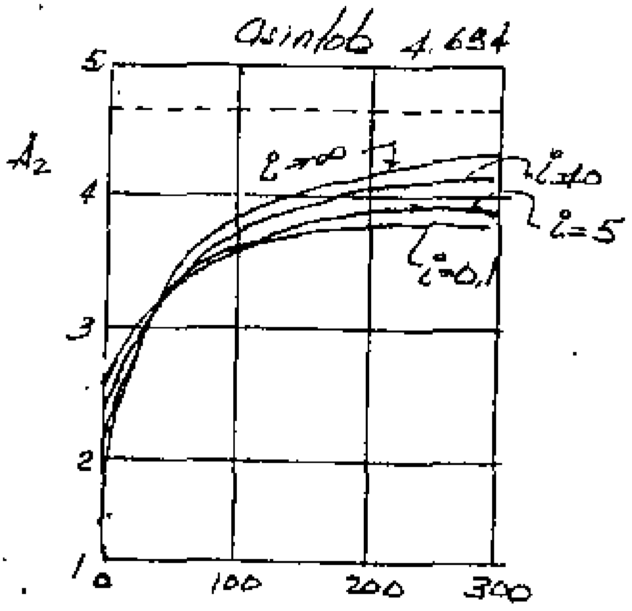
La frecuencia natural de la estructura puede ser escrita como

$$\omega_i = \frac{A_i^2}{L^2}\sqrt{\frac{EI}{\mu}} \qquad (4.2)$$

Los valores de A_i dependen de las características de los resortes K_A y K_L. Para estimarlos se puede recurrir a los diagramas siguientes; (ref 1):



Coeficiente A_1 para primer modo



Coeficiente A_2 para el segundo modo.

Fig 9

El análisis de este tipo de resultados a permitido establecer las siguientes condiciones para los análisis dinámicos:

a) Cuando i y j son superiores a 10, para el análisis dinámico se puede recurrir al planteamiento del capítulo 3, a fin de estimar periodos formas características y respuesta dinámica, considerando empotrada la estructura.

b) Cuando $0.1 < i < 10$ y $1 < j < 10$ se deberá considerar la interacción suelo estructura a fin de efectuar el análisis dinámico.

c) Si $i < 0.1$ y $j < 1$, se recomienda revisar las condiciones de cimentación para alcanzar valores comprendidos en el inciso a) o b).

Esta última limitación se debe a que la carga crítica vertical de la estructura es sensible a la rigidez de los resortes K_A y K_L; cuando existe $K_L \neq 0$ y K_A resulta inferior a

$$(K_A)_{crit} = \sqrt{PEI}\,\tan\sqrt{\frac{PL^2}{EI}} \qquad (4.3)$$

donde P es la carga vertical, la viga BE se vuelve inestable. Así, si se establecen las condiciones c) la estructura resulta inestable y tiende a producir desplazamientos grandes al generarse la acción de fuerzas horizontales.

Las fuerzas horizontales, al actuar en la sección transversal, y modificar la rigidez, alteran también las frecuencias y modos de la estructura. Para estimar este efecto se utiliza la expresión

$$\omega_p = \frac{A^2}{L^2}\sqrt{\frac{EI}{\mu}}\sqrt{1-\frac{PL^2}{D^2EI}} \qquad (4.4)$$

donde ω_p frecuencia modificada por la fuerza axial P

D coeficiente obtenido de la siguiente gráfica.

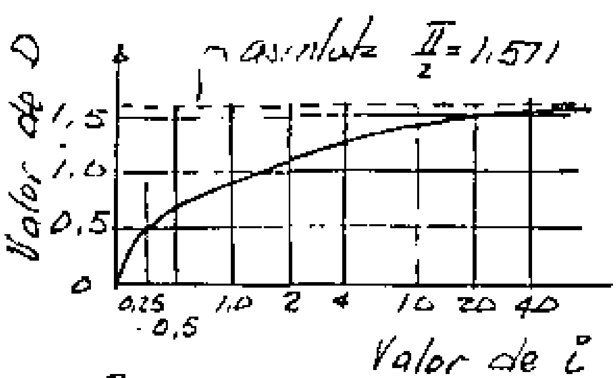


Fig 10

La fuerza axial P queda definida por el peso por unidad de longitud de la viga (BE), multiplicado por la altura L de la estructura.

En adición a los análisis previos, se debe revisar la estabilidad contra momento de volteo M, calculado a nivel de la cara inferior de la losa inferior de la subestructura

En cimentaciones por ampliación de base, en las cuales d es el diámetro exterior medio de la subestructura, es recomendable lograr que:

a) En suelos con capacidad inferior a 50 kg/cm²

$M_r \leq 0.3\,Pd$ para zapata circular u octagonal

$M_r \leq$ el menor de $0{,}3\left[1+\left(\frac{d_2}{d_1}\right)^2\right]Pd$, ó $0{,}375\,Pd$ para zapatas anulares, donde d_1 es el diámetro exterior y d_2 el diámetro interior

b) En suelos con capacidad superior a 50 kg/cm²

$M_r \leq 0{,}325\,Pd$

Cuando en la cimentación se recurre a pilotes se buscará evitar la aparición de tensiones en los pilotes, a menos de que se justifique el anclaje adecuado del pilote a la subestructura, y que el refuerzo sea suficiente.

Es recomendable en este último tipo de cimentación que la distribución de pilotes sea óptima a fin de soportar el momento de volteo, considerando la interacción entre los pilotes que forman a la cimentación. Análisis de grupos de pilotes, mediante algoritmos numéricos debe efectuarse para verificar que las sobrecargas producidas por fuerzas horizontales sean soportadas sin daño, ni pérdida de capacidad.

5. Efecto del cortante y la inercia rotacional.

El análisis clásico de (BE) es inadecuado para aquellas vigas en las cuales sus dimensiones de la sección transversal sean grandes. Rayleigh (ref 2) introdujo el efecto de inercia rotacional y Timoshenko (ref 3 y 4) consideró, en adición, el efecto de la distorsión producida por cortante.

Las ecuaciones acopladas para el desplazamiento total v, y la pendiente producida por flexión ψ, desarrolladas por Timoshenko son:

$$EI\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + k\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \psi\right)AG - \frac{I\gamma}{g}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = 0$$

$$\frac{\gamma A}{g}\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - k\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial\psi}{\partial x}\right)AG = 0 \qquad (5.1)$$

Huang (ref 5) desacopló las expresiones anteriores, obteniendo

$$EI\frac{\partial^4 v}{\partial x^2} + \frac{\gamma A}{g}\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \left(\frac{\gamma I}{g} + \frac{EI}{gk}\frac{\gamma}{G}\right)\frac{\partial^4 v}{\partial x^2\partial t^2} + \frac{\gamma I}{g}\frac{\gamma}{gkG}\frac{\partial^4 v}{\partial t^4} = 0$$

$$EI\frac{\partial^4\psi}{\partial x} + \frac{\gamma A}{g}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} - \left(\frac{\gamma I}{g} + \frac{EI}{gk}\frac{\gamma}{G}\right)\frac{\partial^4\psi}{\partial x^2\partial t^2} + \frac{\gamma I}{g}\frac{\gamma}{gkG}\frac{\partial^4\psi}{\partial x^4} = 0$$

(5.2)

donde:

E módulo de elasticidad

G. módulo de rigidez al cortante

I. momento de inercia de la sección transversal

A.- área de la sección transversal

γ peso por unidad de volumen

k constante del factor de forma de la sección

g. aceleración de la gravedad.

Haciendo $v = Y e^{ipt}$ $\quad Y, \Psi$ formas modales

$\psi = \Psi e^{ipt}$ $\quad p$ frecuencia angular

$\xi = x/L$ $\quad i = \sqrt{-1}$

Las ecuaciones (5.2) se transforman en:

$$\frac{\partial^4 Y}{\partial\left(\frac{x}{L}\right)^4} + b^2(r^2+s^2)\frac{\partial^2 Y}{\partial\left(\frac{x}{L}\right)^2} - b^2(1-b^2r^2s^2)Y = 0$$

$$\frac{\partial^4}{\partial\left(\frac{x}{L}\right)^4}\Psi + b^2(r^2+s^2)\frac{\partial^2 \Psi}{\partial\left(\frac{x}{L}\right)^2} - b^2(1-b^2r^2s^2)\Psi = 0 \qquad (5.3)$$

donde $b^2 = \frac{1}{EI}\frac{\gamma A}{g}L^4p^2$; $r^2 = \frac{I}{AL^2}$; $s^2 = \frac{EI}{kAGL^2}$

A partir de estas expresiones y al considerar las condiciones de frontera siguientes:

para $\xi = 0$ $\quad Y(0) = 0$, $\Psi(0) = 0$

$\xi = 1$ $\quad \frac{1}{L}Y'(1) - \Psi(1) = 0$, $\Psi'(1) = 0$

se obtiene la ecuación característica

$$2 + \left[b^2(r^2-s^2)^2+2\right]\operatorname{Ch} b\alpha \cos b\beta - \frac{b(r^2+s^2)}{\sqrt{1-b^2r^2s^2}}\operatorname{Sh} b\alpha \operatorname{sen} b\beta = 0$$

$$\text{donde} \quad \begin{matrix}\alpha\\ \beta\end{matrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\mp(r^2+s^2)+\sqrt{(r^2-s^2)^2+\frac{4}{b^2}}} \qquad (5.4)$$

Las formas características de los modos correspondientes quedan descritas por:

$$Y = D\left[\operatorname{Ch} b\alpha\xi - \lambda\mathcal{L}\delta\operatorname{Sh} b\alpha\xi - \cos b\beta\xi + \delta\operatorname{sen} b\beta\xi\right] \qquad (5.5)$$

$$\Psi = H\left[\operatorname{Ch} b\alpha\xi + \frac{\theta}{\lambda\mathcal{L}}\operatorname{Sh} b\alpha\xi - \cos b\beta\xi + \theta\operatorname{sen} b\beta\xi\right]$$

donde

$$\delta = \frac{\frac{1}{\lambda}\operatorname{Sh} b\alpha - \operatorname{sen} b\beta}{\mathcal{L}\operatorname{Ch} b\alpha + \cos b\beta} \qquad \theta = -\frac{\lambda\operatorname{Sh} b\alpha + \operatorname{sen} b\beta}{\frac{1}{\mathcal{L}}\operatorname{Ch} b\alpha + \cos b\beta}$$

$$\lambda = \frac{\alpha}{\beta} \qquad \mathcal{L} = \frac{\alpha^2+r^2}{\alpha^2+s^2} = \frac{\beta^2-s^2}{\beta^2-r^2}$$

A partir de los resultados previos se pueden obtener

1° El desplazamiento total

$$v=\sum_{i=1}^{\infty} a_i Y_i e^{\sqrt{-1}\, p_i t+\epsilon_i}$$

2° La pendiente generada por flexión

$$\psi=\sum_{i=1}^{\infty} \bar{a}_i \Psi_i e^{\sqrt{-1}\, p_i t+\bar{\epsilon}_i}$$

3° La pendiente producida por cortante

$$\phi=\frac{\partial v}{\partial x}-\psi$$

4° El momento flexionante

$$M=-EI\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

5° La fuerza cortante

$$Q=k\phi A G$$

Las constantes $a_i, \epsilon_i, \bar{a}_i, \bar{\epsilon}_i$ se valuan en términos de las condiciones iniciales de las vibraciones libres en estudio.

A fin de ilustrar el efecto de la inercia rotacional y el cortante, a continuación se muestran resultados obtenidos al aceptar $\frac{E}{kG}=4$ $S=2r$ en piezas de acero en el cálculo de los cinco primeros modos.

Si $r=0.02$ se obtiene

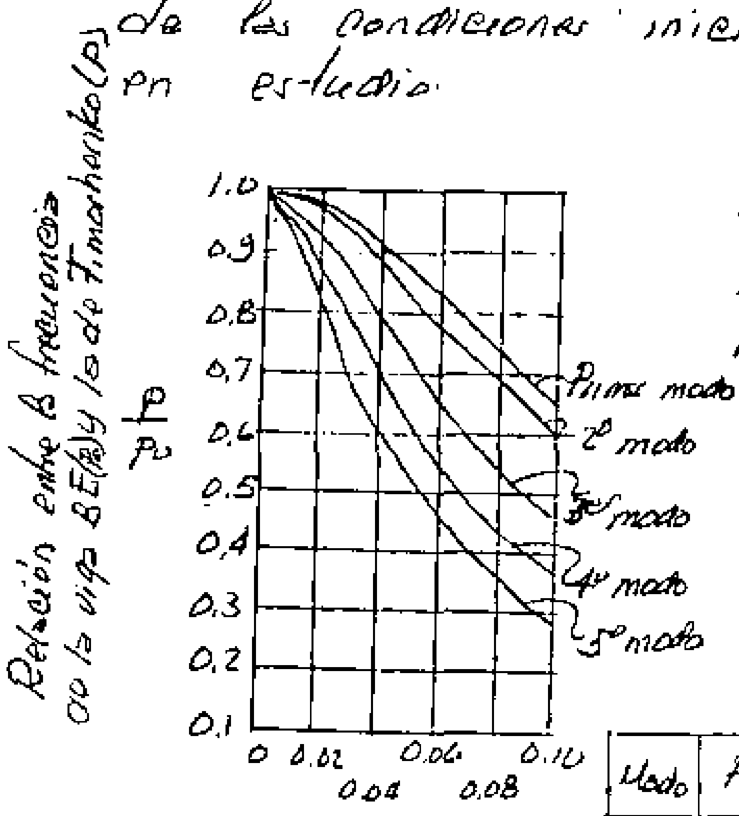
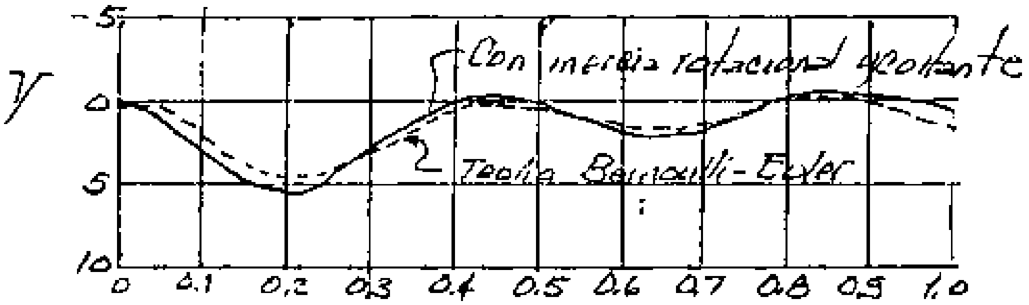


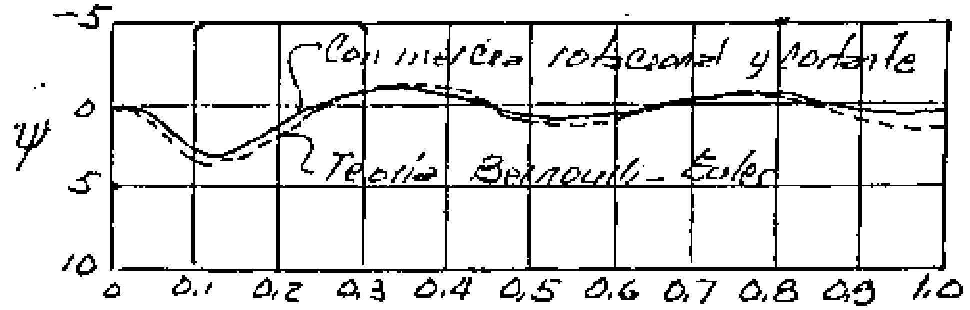
Fig 11

Modo	Primero	Segundo	tercero	cuarto	quinto	[illegible]
p/p_0	0.985	0.975	0.930	0.883	0.835	P. frecuencia calculada
% error	2	3	8	13	20	Po frecuencia ec. (BE)

Por lo que respecta a la forma distorsionada de la estructura, en la figura siguiente se muestra el efecto de la inercia rotacional y el cortante



a) Desplazamiento



b) Pendiente provocada por flexión

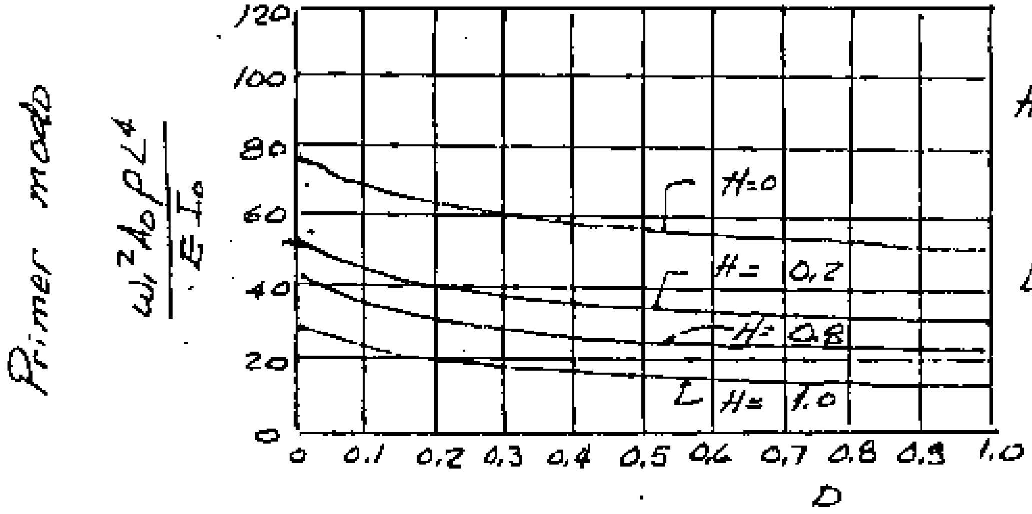
Fig 11

Planteamientos recientes (ref 6) en vigas donde se considera la aparición de amortiguamiento de un sólido viscoelástico muestran la posibilidad de incluir estos efectos en el análisis dinámico de estructuras esbeltas.

c. Influencia del cambio en momento de inercia.

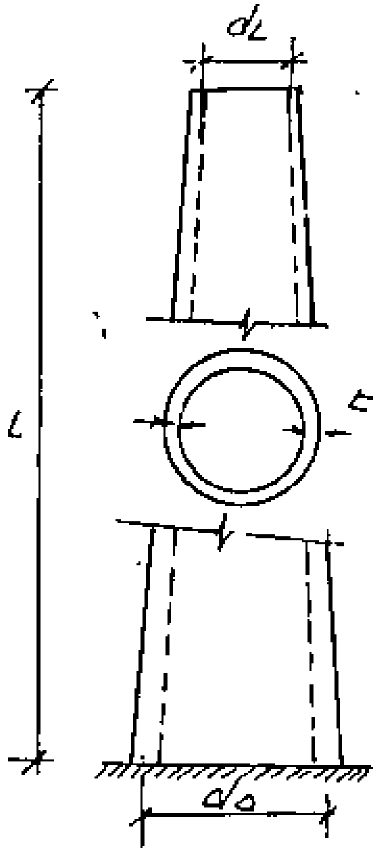
En ocasiones las chimeneas y torres se hacen con momento de inercia variable con la altura, ocasionado por el cambio en diámetro y espesor de la pared.

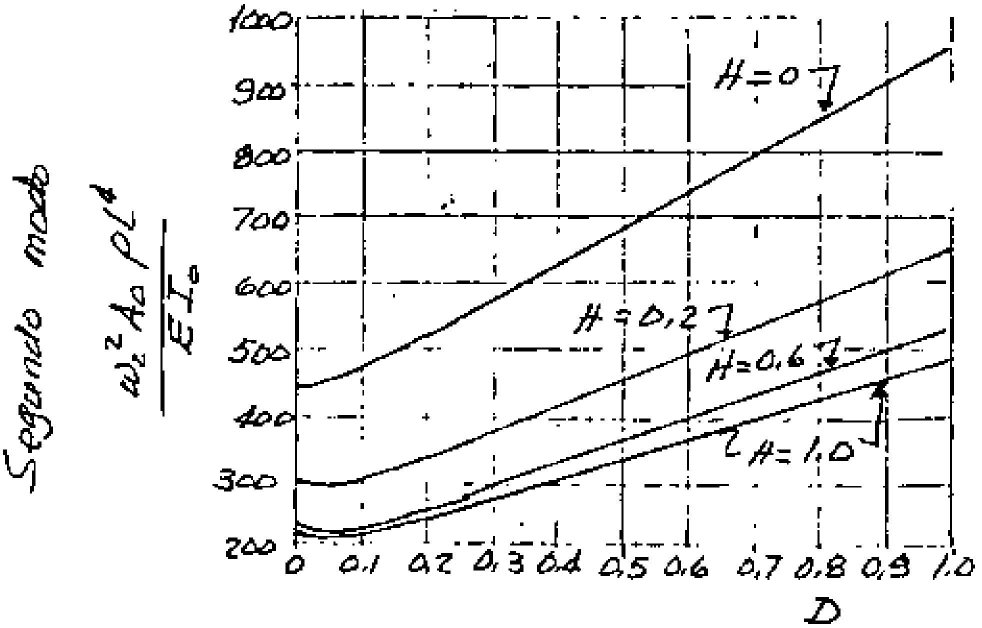
En este caso, el análisis dinámico parte de la ecuación diferencial (3.1), y mediante métodos numéricos se encuentra la solución al problema de definir las frecuencias y formas características.



$H = \frac{t_L}{t_o}$

$D = \frac{d_L}{d_o}$





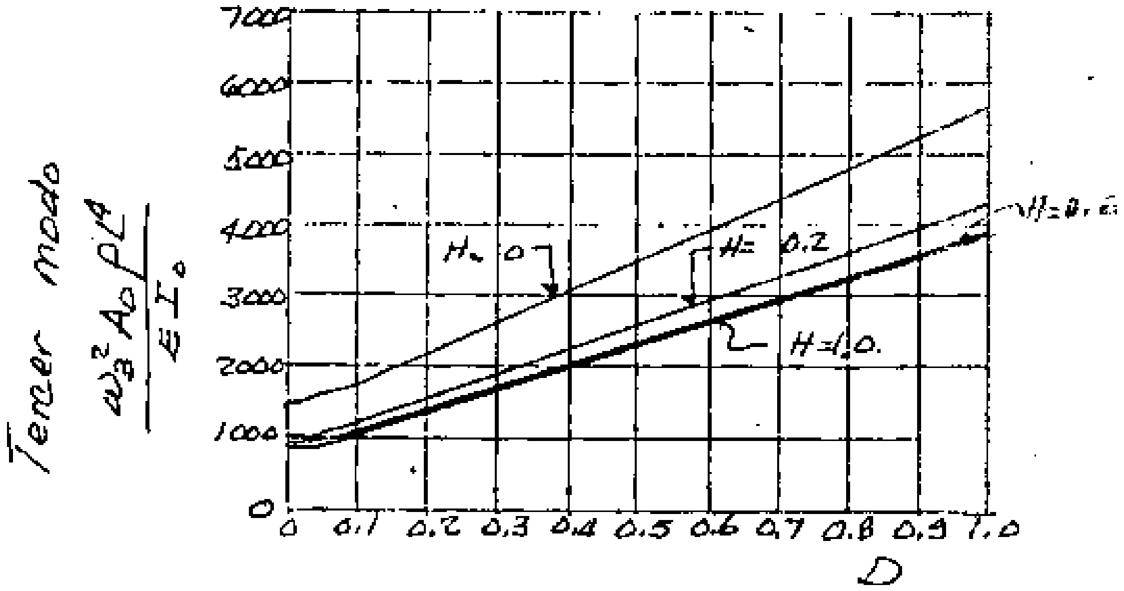


Fig 12
Curvas para obtener las frecuencias naturales de modos de vibrar.

En la ref (7) se proporcionan tablas de desplazamientos y sus primeras y segundas derivadas de las formas modales así como las frecuencias correspondientes. En la fig 13 se condensan los resultados para estructuras cónicas truncadas de espesor linealmente variable, que permiten definir las frecuencias de los tres primeros modos de vibrar.

Para chimeneas con porción cilíndrica y cónica, usualmente se recurre a buscar una chimenea de diámetro constante, d_s, igual al de la porción cilíndrica y se usa una altura equivalente

$$H_e = H_i + H_s \left(\frac{2d_s}{d_s + d_b}\right)^2 \qquad (6.1)$$

donde

H_e altura equivalente
H_i altura del cono inferior
H_s altura del cilindro
d_s diámetro medio de la parte cilíndrica
d_s diámetro medio en la base de la chimenea

7. Influencia de la distribución de masa

En torres y chimeneas puede suceder que se presenten masas concentradas a lo largo del eje de la chimenea o torre. Esto puede alterar notablemente la idealización de la estructura y conducir a sistemas masa-resorte, en los cuales sea necesario recurrir a métodos numéricos para resolver el problema de valores característicos. En la fig 13 de muestra la idealización común de una chimenea con muros de aislamiento sobre ménsulas. En estas estructuras el análisis se realiza concentrando la masa del fuste, el muro de aislamiento, los revestimientos y las ménsulas en la posición de estas últimas.

Los tramos de fuste, que funcionan como resortes equivalentes, presentan desplazamientos, rotaciones y momentos flexionantes y fuerzas cortantes que son descritas por las siguientes matrices de transferencia:

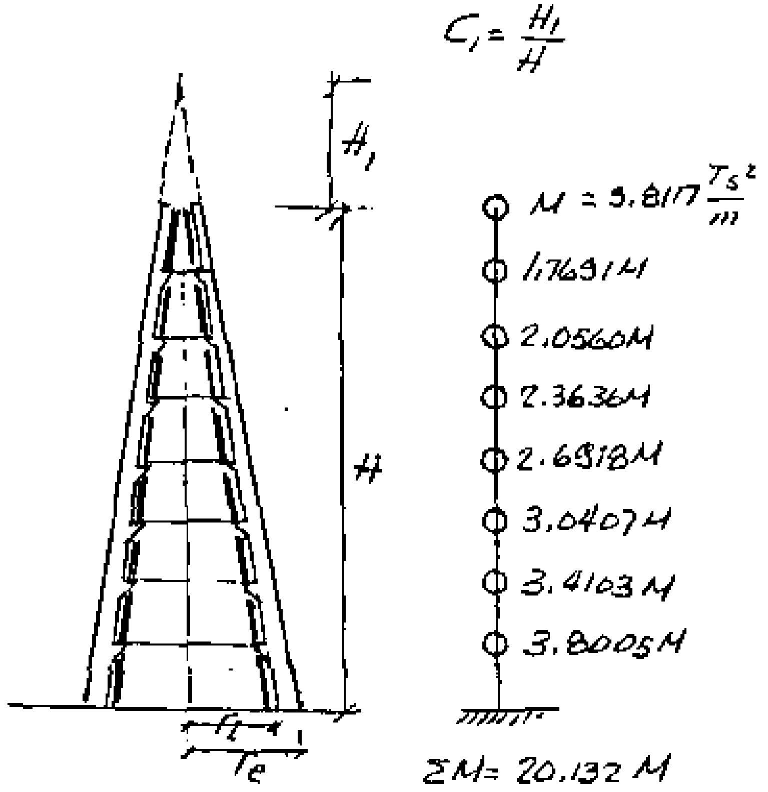


Fig 13. Chimenea y su idealización en sistema de masas y resortes.

a) Vigas Bernoulli-Euler

$$\begin{bmatrix} -v \\ \psi \\ M \\ T \end{bmatrix}_i = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{GA} \\ 0 & 0 & \frac{1}{EI} & 0 \\ 0 & -\mu\rho^2\omega^2 & 0 & 1 \\ \mu\omega^2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -v \\ \psi \\ M \\ T \end{bmatrix}_{i-1} \qquad (7.1)$$

donde

i, sección en la que se valúan los elementos mecánicos

v, ψ, M, T desplazamiento, giro, momento y fuerza cortante

ρ radio de giro de la sección transversal

ω frecuencia circular de vibración

μ masa por unidad de longitud.

b) Vigas de Timoshenko sometidas a fuerza axial

$$\begin{bmatrix} -v \\ \psi \\ M \\ T \end{bmatrix}_i = \begin{bmatrix} C_0-\sigma C_2 & l[C_1-(\sigma+\tau)C_3] & aC_2 & \frac{al}{\beta^4}[-\sigma C_1+(\beta^4+\sigma^2)C_3] \\ \frac{\beta^4}{l}C_3 & C_0-\tau C_2 & \frac{a}{l}(C_1-\tau C_3) & aC_2 \\ \frac{\beta^3}{a}C_2 & \frac{l}{a}[-\tau C_1+(\beta^4+\tau^2)C_3] & C_0-\tau C_2 & l[C_1-(\sigma+\tau)C_3] \\ \frac{\beta^4}{al}(C_1-\sigma C_3) & \frac{\beta^4}{a}C_2 & \frac{\beta^4}{l}C_3 & C_0-\sigma C_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -v \\ \psi \\ M \\ T \end{bmatrix}_{i-1}$$

donde

$$a = \frac{l^2}{EI}$$

$$\beta^4 = \frac{\mu\omega^2}{EI} l^4$$

$$\sigma = \frac{\mu\omega^2}{GA} l^2$$

$$\tau = \frac{Pl^2}{EI} + \frac{\beta^2\mu\omega^2}{EI} l^2$$

$$C_0 = \Lambda(\lambda_2^2 \operatorname{ch}\lambda_1 + \lambda_1^2 \cos\lambda_2)$$

$$C_1 = \Lambda\left(\frac{\lambda_2^2}{\lambda_1}\operatorname{Sh}\lambda_1 + \frac{\lambda_1^2}{\lambda_2}\operatorname{sen}\lambda_2\right) \qquad (7.2)$$

$$C_2 = \Lambda(\operatorname{Ch}\lambda_1 - \cos\lambda_2)$$

$$C_3 = \Lambda\left(\frac{1}{\lambda_1}\operatorname{Sh}\lambda_1 - \frac{1}{\lambda_2}\operatorname{sen}\lambda_2\right)$$

$$\lambda_{1,2} = +\sqrt{\sqrt{\beta^4+\frac{1}{4}(\sigma-\tau)^2} \mp \frac{1}{2}(\sigma+\tau)} \qquad \Lambda = \frac{1}{\lambda_1^2+\lambda_2^2}$$

l es la longitud entre las secciones i $i-1$

P es la fuerza normal media en el tramo

G módulo de rigidez al esfuerzo cortante

A área de la sección transversal

Se observa que el cálculo de las constantes de resorte resulta muy laborioso, cuando se incluye el efecto de inercia rotacional, fuerza cortante y fuerza normal.

Conocidas las masas y las constantes de resorte se plantean las ecuaciones del movimiento reducidas y se obtienen los valores característicos y las formas modales correspondiente.

En la práctica es común recurrir al método de Newmark para valuar las constantes de resorte; para resolver la ecuación de frecuencias y obtener las modos naturales, se recurre a programas que resuelven el problema en ordenadores digitales. Así, para una chimenea de 80 m de altura, cuya distribución de masas aparece en la fig 3, se obtuvieron las frecuencias, periodos y factores de participación de modo que aparecen en la siguiente tabla

Modo	Frecuencia $\left(\frac{rad}{seg}\right)$	Periodo (seg)	Coeficiente de participación modal
1°	3.4756	1.807766	0.845840
2°	15.3280	0.409913	−0.078441
3°	38.2289	0.164356	−0.003048
4°	71.8242	0.087482	−0.000645
5°	115.7396	0.054287	+0.000196
6°	168.0762	0.037382	+0.000075
7°	225.5712	0.027854	+0.000035
8°	295.8688	0.021236	−0.000020

Se observa que la participación de los modos superiores es poco significativa en la respuesta, debido a la diferencia notable en los coeficientes de participación modal.

Por ello, en ocasiones para estimar el periodo del primer modo se recurre al método de Dunkerley, en el cual

$$\omega_1 \leq \frac{1}{\sqrt{\sum_{i} m_i v_i^*}} \qquad (7.3)$$

donde m_i es la iesima masa

v_i^* el desplazamiento de la chimenea, en la i-esima masa, al ser sometida a la acción de su peso propio.

Estudios en mas de 40 chimeneas mostraron que el periodo natural del primer modo varía linealmente con la altura, una vez que se definen H, r_e y c, obteniéndose valores comprendidos entre

$$0.008\,H < T \leq 0.020\,H \qquad (7.4)$$

donde T periodo natural en seg
H altura de la chimenea, en m.

8. Consideraciones sobre análisis sísmico.

La respuesta de torres y chimeneas es compleja con aspectos dinámicos importantes. Existen demasiadas incógnitas para predecir con certidumbre la respuesta de estas estructuras bajo la acción de sismos futuros. Se tiene que depender en aspectos cualitativos, en los cuales el buen juicio debe estar presente y de análisis cuantitativos de respuesta en base a sismos registrados en el pasado.

Normalmente el ingeniero recurre a simplificaciones contenidas en reglamentos, como el del diseño en el Distrito Federal, o al SEADC en los cuales se establecen espectros de diseño en base a los cuales se define la respuesta estructural.

En lo que sigue se presenta un análisis simplificado y la secuencia de análisis dinámico comúnmente usada en nuestro medio.

Las torres y chimeneas se analizarán de manera independiente en dos direcciones ortogonales, y se verificará que las estructuras sean capaces de resistir cada una de estas condiciones por separado.

En la revisión se deberán buscar los desplazamientos, y elementos mecánicos en diversas secciones transversales, así como las aceleraciones que se presentan en los conos de aislamiento. Se revisarán además las condiciones de estabilidad de la cimentación. De ello se dispone de los siguientes procedimientos

a) Estático equivalente
b) Dinámico espectral
c) Dinámico bajo la acción de sismos registrados.

El primer procedimiento, basado en la experiencia obtenida al resolver decenas de chimeneas, es aplicable cuando la cimentación satisface las condiciones descritas en el cap 4, cuando $\hat{\imath}$ y $\hat{J}$ son superiores a 10.

Para fines de diseño inicial, se aceptará la existencia de una carga estática que actúe lateralmente contra la chimenea, con una distribución bilineal definida a continuación:

a) En la base, la fuerza será nula, aumenta linealmente con la altura hasta 0.3H, donde la carga será igual al 15% del valor máximo en la parte superior de la chimenea y es igual, a la altura 0,3H, a $0.35 C_M W/H$, siendo C_M el coeficiente sísmico mínimo, W, el peso total de la chimenea sobre la cimentación y H la altura total de la chimenea.

b) Desde 0.3H hasta H, se aceptará otra variación lineal de la fuerza sísmica, con un valor máximo en la parte superior, igual a $2{,}35 C_M W/H$

La distribución de fuerzas cortantes y momentos flexionantes, así como los desplazamientos horizontales, se estimación en base a la distribución bilineal antes descrita.

El momento de volteo en la base de la chimenea resulta próximo a $M_v = C_M W H / \sqrt{2.15}$

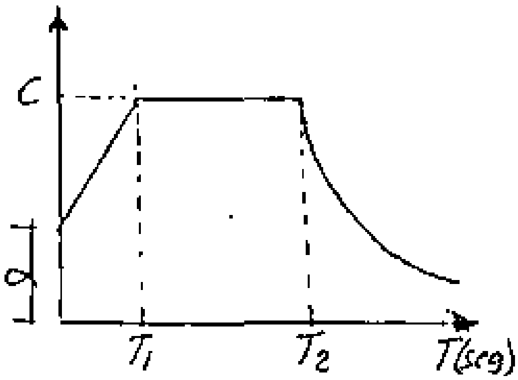
Cuando no exista mejor información, es posible estimar el valor de C_M, en base a la siguiente tabla, en la que aparecen las cuatro regiones sísmicas en las que se ha dividido el país

Zona sísmica	A	B	C	D
Coeficiente C_M	0.03	0.06	0.09	0.18

El análisis dinámico espectral, considera a las estructuras como sistemas masas-resortes, en los cuales se aplican aceleraciones definidas por espectros de diseño. Este procedimiento es válido cuando las condiciones de cimentación tienen i y j mayores a 10, y considera tres tipos de suelos

Tipo I	Terreno firme, similar a conglomerados compactos, areniscas medianamente cementadas, o arcillas compactas.
Tipo II	Suelos de baja rigidez, como arenas sin cementar, limos de mediana o alta compacidad ó arcillas de mediana compacidad
Tipo III	Arcillas blandas muy compresibles.

Los coeficientes de diseño sísmico se definen mediante espectros cuyas características se describen en la tabla siguiente



Forma del espectro

FIG 14

Zona sísmica	Tipo de suelo	C	T_1	T_2	α
A	I	0.10	0.40	0.60	0.05
	II	0.16	0.75	1.50	
	III	0.21	1.00	2.50	
B	I	0.21	0.40	0.60	0.10
	II	0.26	0.75	1.50	
	III	0.31	1.00	2.50	
C	I	0.31	0.30	0.50	0.15
	II	0.29	0.60	1.20	
	III	0.47	0.80	2.20	
D	I	0.62	0.20	0.40	0.30
	II	0.73	0.40	1.00	
	III	0.83	0.60	2.00	
			seg	seg	

Se considera que las zonas del espectro, en cada intervalo, queda definida en forma por las expresiones

$$C_D = \alpha + (C-\alpha)\frac{T}{T_1} \quad , \text{si} \quad T < T_1$$

$$C_D = C \qquad \text{si} \quad T_1 < T < T_2$$

$$C_D = C\left(\frac{T_2}{T_1}\right) \quad , \text{si} \quad T > T_2$$

donde T es el periodo natural de alguno de los modos de vibración, en seg.

Ya que en estos espectros se han considerado efectos inelásticos, considerando una ductilidad definida por un factor de ductilidad $Q=2$, solo los momentos flexionantes y fuerzas cortantes se dividirán entre 2 si $T > T_1$, ó entre $1 + T/T_1$ en caso contrario.

Finalmente el procedimiento de análisis dinámico bajo la acción de sismos registrados es aconsejable para aquellas estructuras en las cuales debe considerarse la interacción suelo-estructura, como puede verse en la ref 8.

9. Análisis dinámico simplificado.

A fin de ilustrar la aplicación del procedimiento espectral simplificado, existe un programa elaborado en el Instituto de Ingeniería, UNAM, que permite realizar el análisis dinámico modal de chimeneas, siguiendo la siguiente secuencia:

a) Calcula el volumen de fuste y de las ménsulas y lo multiplica por la masa específica para definir la masa asociada a cada ménsula.

b) Obtiene la masa de los conos de aislamiento y la agrega a la masa de la estructura en cada ménsula.

c) Calcula la matriz de rigideces del sistema de resortes equivalentes, recurriendo al método de Newmark.

d) Resuelve el problema de valores característicos y define las frecuencias y modos naturales de vibración

e) Obtiene la respuesta, a partir de un espectro de diseño, pudiendo seguir cualquiera de los siguientes criterios: $R_1 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} R_i^2}$, $R_2 = |\sum_{i=1}^{n} R_i|$ y el tercero $R_3 = (R_1 + R_2)/2$.

f) Calcula momentos flexionantes, fuerzas cortantes y desplazamientos y los grafica automáticamente.

A continuación se muestran los resultados obtenidos en el análisis dinámico modal de una chimenea de concreto, de 80 m de altura, de sección variable, con un radio exterior en la base de 4.625 m y un radio interior en la base igual a 4.125 m. Se considera $H_1 = 202$ m para el cono exterior y 246.4 m en el cono interior. En el análisis se aceptó $E = 2.51\ T/m^2$, $\nu = 0.15$; un peso volumétrico del fuste de $2.4\ T/m^3$ y una resistencia del concreto igual a $2500\ T/m^2$.

Se dividió a la chimenea en 8 tramos de 10 m colocando muros aislantes con un peso de $2.3\ T/m^3$ y en el recubrimiento exterior; $2\ T/m^3$. Para el mortero se consideró $0.55\ T/m^3$. El ancho del tabique refractario se consideró de 23 cm; el ancho del recubrimiento adicional de 0.065 m y 0.003 m de mortero.

El análisis modal proporcionó los siguientes resultados

Modo	Frecuencia	Periodo	Coeficiente de participación modal
1	5.4415	1.1547	+0.405973
2	25.9263	0.2423	+0.0112654
3	61.9485	0.1043	-0.001328
4	97.8793	0.0642	+0.000450
5	116.2822	0.0540	-0.000022
6	128.9721	0.0487	-0.0000048
7	149.9023	0.0419	-0.0000005
8	189.8007	0.0331	+0.0000001

Se seleccionó un espectro de diseño correspondiente a la zona D, con un suelo tipo II, considerando un valor máximo de $c = 0.730$ y se empleó un factor de ductilidad igual a 2.

Se hicieron análisis comparativos considerando la participación de 1 hasta 8 modos, y se calcularon las respuestas R_1, R_2 y R_3, las cuales aparecen en las siguientes tablas:

Desplazamientos máximos en las masas

Masa	Un solo modo			Todos los modos		
	R_1	R_2	R_3	R_1	R_2	R_3
1	0.4327	0.4327	0.4327	0.4328	0.4446	0.4387
2	0.3518	0.3518	0.3518	0.3518	0.3568	0.3543
3	0.2723	0.2723	0.2723	0.2723	0.2732	0.2727
4	0.1974	0.1974	0.1974	0.1974	0.2017	0.1996
5	0.1307	0.1307	0.1307	0.1308	0.1361	0.1335
6	0.0755	0.0755	0.0755	0.0756	0.0805	0.0781
7	0.0343	0.0343	0.0343	0.0344	0.0376	0.0360
8	0.0089	0.0089	0.0089	0.0089	0.0100	0.0094

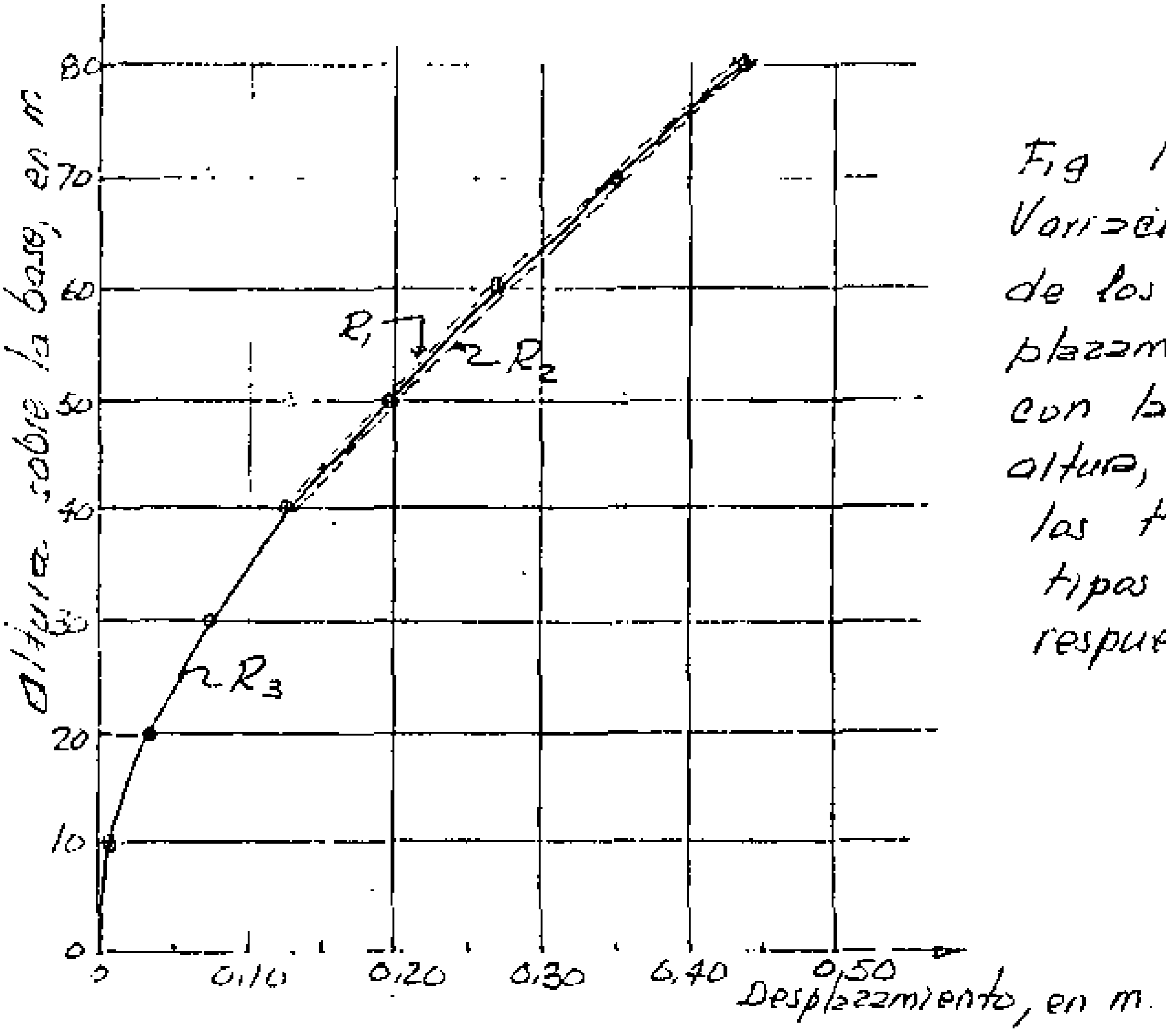


Fig 15. Variación de los desplazamientos con la altura, con las tres tipos de respuesta.

Momentos flexionantes en las masas

Masa	Un solo modo			Todos los modos		
	R_1	R_2	R_3	R_1	R_2	R_3
1	0	0	0	0	0	0
2	355.5	355.5	355.5	474.6	909.6	692.1
3	2042	2042	2042	2327	3718	3022
4	4884	4884	4884	5197	7051	6124
5	8660	8660	8660	8878	10960	9919
6	13120	13120	13120	13200	15120	14160
7	18020	18020	18020	18020	18870	18450
8	23130	23130	23130	23200	25270	24230
Base	28300	28300	28300	28560	33500	31030

En ton - m

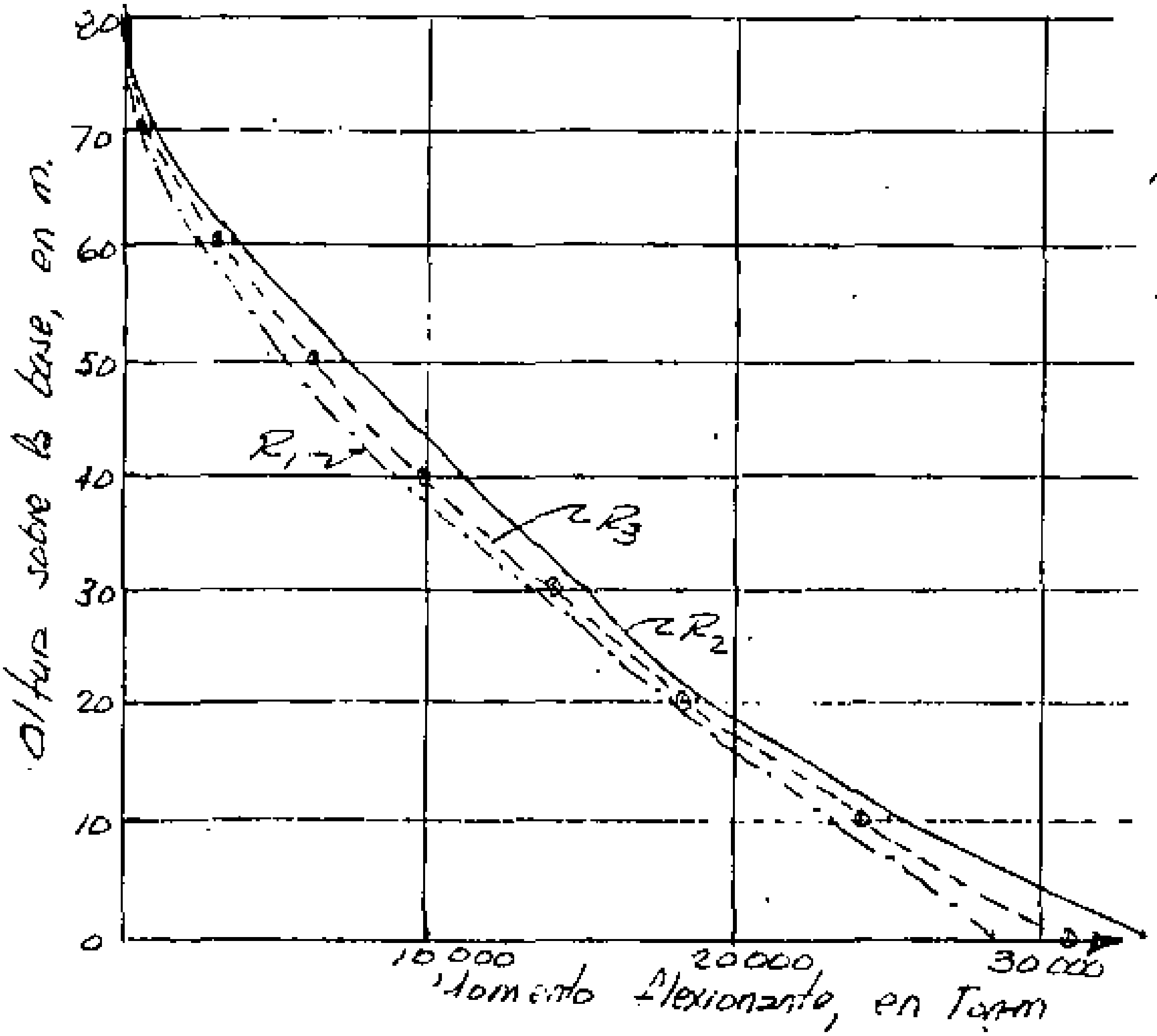


Fig 16

Variación del momento flexionante con la altura, con los tres tipos de respuesta.

Finalmente, para la variación de la fuerza cortante se obtuvieron los siguientes resultados, en tons.

Masa	Un solo modo			Todos los modos		
	R_1	R_2	R_3	R_1	R_2	R_3
1	0	0	0	0	0	0
2	35.55	35.55	35.55	47.46	90.96	69.21
3	168.7	168.7	168.7	187.4	280.9	234.1
4	284.2	284.2	284.2	294.2	392.8	343.5
5	377.6	377.6	377.6	381.1	464.1	422.6
6	446.0	446.0	446.0	452.1	574.2	513.1
7	489.6	489.6	489.6	507.9	657.1	582.5
8	511.3	511.3	511.3	545.6	780.3	662.9
Base	517.4	517.4	517.4	563.3	883.3	723.3

10. Referencias

1. Ciesielski, R, et all: "Behälter, Bunker, Silos, Shornsteine, Fernsehtürme und Freileitungsmaste. W. Ernst & Sons. 1970
2. Lord Rayleigh: "Theory of Sound". Mc.Millan Co. N.Y. pp 293-294
3 Timoshenko, S.P. "On the correction for shear of the differential equation for transverse vibrations of prismatic bars" Phyl. Mag. Vol 41, 1921
4. Timoshenko, S.P. "On the transverse vibrations of bars of uniform cross sections". Phyl. Mag. serie 6, vol 43, 1922; pp 125-131
5 Huang, T.C: "The effect of rotatory inertia and of shear deformation on the frequency and normal mode equations of uniform Beams with simple end conditions". J. Applied Mech. Trans ASME. Dec. 1961, pp 579
6. De Silva, C.W: "Dynamic Beam model with Internal Damping, Rotatory Inertia and Shear Deformation". AIAA Journal, Vol 14, No 5, 1978, pp 676-680
7.- Housner, G.W., Keightley, W.O: "Vibrations of linearly tapered Cantilever Beams". Trans ASCE, 128, 1963, pp 1020-1048
8.- Novak, M: "Effect of soil on structural response to wind and earthquake". Pub. BLWT-5, 1973. University of Waterloo, Canada

centro de educación continua
división de estudios superiores
facultad de ingeniería, unam

V. CURSO INTERNACIONAL DE INGENIERIA SISMICA

DISEÑO SISMICO DE ESTRUCTURAS ESPECIALES

DETERMINACION EXPERIMENTAL DE LAS PROPIEDADES DINAMICAS DE LOS SUELOS

J. ABRAHAM DIAZ RODRIGUEZ
AGOSTO, 1979

DETERMINACION EXPERIMENTAL DE LAS PROPIEDADES DINAMICAS DE LOS SUELOS

por

J. ABRAHAM DIAZ RODRIGUEZ[*]

INTRODUCCION

Grandes avances se han realizado en años recientes en el desarrollo de procedimientos analíticos para calcular la respuesta del terreno bajo la acción de cargas sísmicas. Sin embargo, el uso de tales procedimientos requiere del conocimiento de las propiedades dinámicas de los suelos para llegar a soluciones satisfactorias.

Teniendo en cuenta que las cargas dinámicas pueden producir un amplio intervalo de deformaciones en los suelos, se puede afirmar que no existe un ensaye único que sea adecuado para cubrir todo el intervalo de deformaciones requerido en los problemas de ingeniería sísmica.

En la fig 1 se muestran en forma aproximada los rangos de aplicabilidad de los distintos ensayes tanto de campo como de laboratorio.

---

[*] Profesor y Jefe de la Sección de Mecánica de Suelos, DESFI, UNAM

Las principales propiedades que se necesitan en dinámica de suelos e ingeniería sísmica son:

- Módulo de Young, E
- Módulo de rigidez al cortante, G
- Relación de Poisson, ν
- Fracción del amortiguamiento crítico, ζ
- Información esfuerzo-deformación
- Resistencia al esfuerzo cortante
- Parámetros de licuación

TECNICAS DE LABORATORIO

Algunos ensayes de laboratorio tienen como finalidad la medición de alguna propiedad específica tal como resistencia al esfuerzo cortante o el módulo de rigidez al cortante, en tanto que otros ensayes tienen como objetivo la simulación de situaciones o estados.

Efecto de la velocidad de deformación

Importantes esfuerzos se han dirigido hacia la determinación del comportamiento de los suelos sometidos a carga cíclica, para tratar de contestar a la pregunta de cómo será el comportamiento de una muestra cargada estáticamente con respecto a otra cargada dinámicamente.

La resistencia dinámica de una muestra de suelo cargada súbitamente será generalmente mayor que la resistencia estática.

Las principales variables que se ven afectadas por la velocidad de deformación o por la velocidad de aplicación de carga son:

- La presión de poro
- Las relaciones esfuerzo-deformación
- La resistencia al esfuerzo cortante

En lo que sigue se describirán los equipos y procedimientos para la determinación de las propiedades dinámicas de los suelos, principalmente respecto al módulo de rigidez al cortante y amortiguamiento.

Prueba de columna resonante

Este tipo de prueba permite estudiar el comportamiento de muestras de suelo en un intervalo de deformaciones que va desde deformaciones pequeñas ($\simeq 10^{-5}$), como las inducidas por vibraciones de maquinaria hasta deformaciones relativamente grandes ($\simeq 10^{-3}$), como las inducidas por un sismo.

Los especímenes pueden ser excitados en el sentido longitudinal o en torsión. Por lo tanto, se pueden determinar módulos dinámicos tanto de Young, E, como de rigidez al cortante, G, ver fig 2.

Los especímenes son de geometría cilíndrica, ya sea sólidos o huecos. Las dimensiones usualmente empleadas son: 3.6cm(≃ 1 1/2") a 7.2cm(≃ 3") de diámetro por 15cm(≃ 3") a 25cm(≃ 10").

La muestra cilíndrica (sólida o hueca) se apoya sobre una base rígida y se fija en ella. En su parte superior se instala la cabeza excitadora.

En esta forma se tiene una probeta fija en su base y libre en su parte superior, que es excitada longitudinal o torsionalmente.

En la realización de la prueba la frecuencia se va variando hasta encontrar la frecuencia de resonancia del espécimen. El módulo correspondiente se calcula con el dato de la frecuencia de resonancia, la geometría del espécimen y las características de excitación.

La ecuación propuesta por Wilson y Dietrich (1960), es:

$$E \text{ ó } G \text{ (psi)} = 2.39 \times 10^{-5} f^2 H^2 \gamma \qquad (1)$$

en donde

f   frecuencia de resonancia longitudinal para E o torsional para G , en Hz

H   altura del espécimen, en pulgadas

γ   peso volumétrico, en pcf

determinación de las propiedades de amortiguamiento consiste conseguir en estado establecido de vibración y suspender súbitamente la acción forzadora y obtener la gráfica de decaimiento de la amplitud de vibración de la cual se calculará el decremento logarítmico y con la ec (2) se obtiene la fracción del mortiguamiento crítico.

$$\delta = \ell_n \frac{x_n}{x_{n+1}} = \frac{2\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \qquad (2)$$

Actualmente hay varias versiones del aparato de columna resonante, prácticamente todas estas versiones dan resultados consistentes, (Skoglund, Marcuson y Cunny, 1976).

Prueba de Pulsos

Esta prueba consiste en generar mediante cristales piezoeléctricos ondas ultrasónicas ya sea longitudinales o de torsión y medir su velocidad de propagación. Para ello se excita mediante un pulso de esfuerzo un extremo del espécimen y se mide el tiempo de llegada en el otro extremo.

Mayores detalles se describen por Lawrence (1963).

Uno de los mayores inconvenientes consiste en la identificación e interpretación del tiempo de llegada de las ondas.

Prueba de Vibración Torsional Libre

La fig 3 ilustra el aparato desarrollado por Zeevaert (1967), el cual consiste en una cámara triaxial modificada, que permite someter a la muestra a diferentes presiones de confinamiento, esto permite conocer la variación del módulo G con la presión de confinamiento.

Un brazo horizontal, sobre el cual se colocan masas que guardan simetría con el eje de la muestra, da lugar a un sistema de un grado de libertad. Al brazo se le da un pequeño impulso inicial permitiendo que el sistema vibre libremente. La vibración como respuesta de los elementos elásticos del suelo se registra y de esta información se calcula el módulo G y el amortiguamiento de acuerdo con la expresión

$$G = \frac{w_s^2}{1-\left(\frac{w_s}{w_a}\right)^2} K \qquad (3)$$

en donde

w_s	frecuencia natural amortiguada del sistema
w_a	frecuencia natural amortiguada del aparato
K	constante característica de la geometría del sistema

La fracción del amortiguamiento crítico se calcula con la expresión del decremento logarítmico.

En general los valores de las propiedades medidas con este aparato resultan menores que los obtenidos con otros procedimientos para un nivel de deformaciones equivalentes.

Prueba Triaxial Cíclica

La prueba triaxial cíclica se desarrolló con el objetivo de ejecutar ensayes bajo carga repetida.

ed y Lee (1966) fueron los primeros en utilizar cámara triaxial cíclica, con objeto de reproducir la condición de esfuerzos a que se halla sujeto un elemento de suelo durante un temblor (atribuyendo el estado de deformaciones del suelo a la propagación de ondas de cortante).

Si la superficie del terreno es horizontal, antes del temblor no hay esfuerzos cortantes en planos horizontales (fig 4a). Durante el temblor, los esfuerzos normales permanecen constantes, pero se generan esfuerzos cortantes (figs 4b y 4c).

En una cámara triaxial cíclica, la condición de esfuerzos señalada antes se produce en un plano a 45°.

En la prueba triaxial cíclica, se coloca un espécimen de suelo en la cámara el cual se satura y consolida bajo una presión confinante. Después se somete la muestra a un esfuerzo desviador cíclico de amplitud constante bajo condiciones no drenadas en tanto que se registra la variación de la presión de poro y deformación axial, ver fig 5.

El comportamiento de las muestras de arena suelta, sometidas al ensaye propuesto por Seed y Lee, se caracteriza por un aumento gradual de la presión de poro sin que haya deformación axial apreciable, hasta que se produce el incremento que eleva la presión de poro al mismo valor de la presión confinante "licuación inicial", momento a partir del cual la muestra se deforma súbitamente más del 20%. Las arenas en estado compacto exhiben un comportamiento similar al de las arenas sueltas, pero al llegar a la "licuación inicial" no se presenta una deformación grande en forma súbita, sino que la deformación se incrementa gradualmente.

Según el concepto de Seed y Lee, cualquier espécimen de arena es susceptible de licuarse no importando su compacidad relativa.

Los parámetros más importantes según estos investigadores son: el número de ciclos de esfuerzo (Nd_c) para alcanzar la condición $u = \bar{\sigma}_1$, la relación entre el esfuerzo cortante máximo y el esfuerzo confinante, $\frac{\sigma_{dc}}{2\bar{\sigma}_3}$ y la relación de vacíos.

Castro (1969) al realizar sus ensayes en cámara triaxial cíclica observó que durante la prueba se desarrollan heterogeneidades en las muestras, de manera especial en la zona superior. Atribuye a estas heterogeneidades, inducidas por el ensaye, el que especímenes densos alcancen la condición $u = \bar{\sigma}_3'$.

Al comparar los ensayes realizados por Castro y por Seed y Lee, se aprecia que la frecuencia de aplicación de carga hace que el comportamiento de prueba Quasi estática sea diferente al de prueba cíclica.

Además de la medición de las características de licuación de los suelos, la cámara triaxial cíclica se utiliza para medir tanto el módulo E , el cual se determina de la relación esfuerzo axial entre deformación axial; el amortiguamiento ζ según se indica en la fig 6. El módulo G se puede determinar indirectamente si se conoce la relación de Poisson ν , de acuerdo a la expresión

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \qquad (4)$$

Las limitaciones de este aparato se encuentran en la literatura, Seed y Lee (1966), Castro y Poulos (1977) y Annaki y Lee (1977).

Lee (1976) dice "... Haciendo las consideraciones apropiadas de las limitaciones conocidas, la cámara triaxial ofrece un medio popular y razonable entre una prueba idealmente perfecta y la realidad práctica".

Sin embargo, Seed y Lee admiten que para estudiar el comportamiento de suelos sometidos a excitación sísmica el equipo de corte simple cíclico o torsión cíclica son más apropiados que la cámara triaxial cíclica.

Prueba de Corte Simple Cíclico

La prueba de corte simple cíclico se desarrolló con la idea de conseguir mayor aproximación a las condiciones de campo que la lograda con cámara triaxial.

Uno de los primeros aparatos de corte simple fue el desarrollado por *Swedish and Norwegian Geotechnical Institutes* (Kjellman, 1951). Sin embargo, este aparato tenía el inconveniente de utilizar muestras cilíndricas (los esfuerzos cortantes en una sección horizontal no pueden ser uniformes).

Roscoe (1953) modificó el aparato, utilizando muestras de sección rectangular y paredes rígidas.

En la Universidad de California, en Berkeley, Peacock y Seed (1968) desarrollaron un aparato de corte simple, que utilizaron para examinar la tendencia a licuarse de una muestra de arena sometida a este tipo de esfuerzo. También en la Universidad de British Columbia, Pickering y Finn (1969), Finn et al (1970 y

1971) han utilizado corte cíclico simple para el estudio de licuación.

En las figs 7 y 8 se ilustran los resultados obtenidos por Peacock y Seed.

A la prueba de corte simple cíclico (fig 9) se le han señalado limitaciones tales como la generación de condiciones de no uniformidad de esfuerzos en las fronteras, lo cual causa la falla de las muestras a esfuerzos menores que aquéllos requeridos en el campo. Aunque esto se puede minimizar con una cuidadosa preparación de la muestra.

La prueba permite la determinación directa del módulo G, aunque los valores medidos resultan menores que los determinados en el campo, ver fig 6.

Prueba de Corte Simple Cíclico Torsional

Este aparato se desarrolló en un intento por evitar alguna de las limitaciones asociadas al aparato de corte simple e incorporar la posibilidad de controlar los esfuerzos laterales.

Entre los investigadores que han contribuido al desarrollo de esta prueba se deben mencionar a Ishihara y Li (1972), Hardin (1971), Drnevich (1972), Yoshimi y Oh-Oka (1973), Ishibashi y Sherif (1974), Ishihara y Yasuda (1975), Cho, Rizzo y Humphries (1976) y Iwasaki, Tatsuoka y Tokagi (1977).

El equipo desarrollado por Drnevich (1972) tiene la ventaja de que permite realizar ensayes como columna resonante o como tor sión cíclica. Drnevich ha estudiado las propiedades de rigidez y amortiguamiento de arenas saturadas en condiciones no-drenadas.

Ensayes en Mesa Vibradora

Este tipo de ensayes generalmente consiste en colocar un recipiente o caja con arena saturada, sobre una mesa vibradora (Díaz y Del Valle, 1977) y estudiar el comportamiento de la muestra de arena (medir la aceleración de la mesa vibradora a la cual ocurre la licuación).

Maslov (1957) realizó ensayes con especímenes cilíndricos de 2.5 m de altura y 1.4 m de diámetro. Los ensayes los realizó con el objeto de comprobar su teoría de filtración. Los ensayes los realizaba sin aplicar sobrecarga. Medía la presión de poro en cinco puntos del interior de la muestra, por medio de tubos piezométricos. Los experimentos comprobaron que a una cierta aceleración (crítica), se produce aumento de la presión de poro y posteriormente consolidación del espécimen.

Yoshimi (1967) hizo experimentos utilizando el equipo de la fig 10, con arenas sueltas sometidas a vibración horizontal. Los resultados muestran que la presión de poro se incrementa uniforme y simultáneamente hasta un punto, en el cual un incremento rápido (mayor que los anteriores), eleva la presión de poro a un valor al esfuerzo total, la estructura del suelo colapsa, y se forma una capa de agua en la parte superior de la muestra.

Finn, Emery y Gupta (1970, 1971) también hicieron pruebas en Mesa Vibradora utilizando un recipiente de paredes rígidas como se puede apreciar en la fig 11. Un ejemplo de los resultados obtenidos se muestran en la fig 12.

Whitman (1970) menciona los factores que afectan los resultados de mesa vibradora y su influencia en la interpretación de los mismos:

1. Frecuencia de vibración
2. Duración de vibración
3. Tamaño y geometría del recipiente
4. Características de deformación del recipiente
5. Método de colocación de la muestra
6. Control del drenaje
7. Aparatos de medición de deformaciones
8. Presión confinante

Tal vez la principal objeción del uso de recipientes rígidos sobre mesa vibradora es que no se conoce el esfuerzo cortante actuante en la masa, que en gran parte es tomado por el recipiente, además impone condiciones de frontera que no representan condiciones de campo.

Con objeto de superar las limitaciones anteriormente descritas, Díaz, Weckmann e Iturbe (1973) diseñaron en el Instituto de Ingeniería, UNAM, un recipiente D-W-72 que permite: simular el efecto de sobrecarga (fuerzas de inercia), imponer condiciones de deformación controlable (corte simple en una sola dirección), ensayar muestras grandes (30x60x90 cm), y la colocación de instrumentación en él interiormente. Un croquis del aparato diseñado se muestra en la fig 13.

De Alba, Seed y Chan (1976) y Seed, Mori y Chan (1977) han estudiado el comportamiento de muestras de arena de 230 x 110 x 10cm de espesor, sometidas a esfuerzo cortante simple cíclico en una dirección. En estos ensayes se registraron deformaciones cortantes, presión de poro y aceleraciones.

Para estudiar los efectos de movimientos multidireccionales, Pyke, Seed y Chan (1975) y Seed, Pyke y Martin (1978) realizaron ensayes de especímenes excitados en dos direcciones horizontales perpendiculares, de los cuales encontraron que los asentamientos provocados por movimientos multidireccionales son mayores que los provocados por movimientos en una sola dirección.

Resumen de Resultados

Módulo de rigidez al cortante

Hardin y Richart (1963) y Hardin y Black (1968) proponen para deformaciones angulares inferiores a 10^{-4} las siguientes expresiones:

- Para arenas y gravas con granos redondeados

$$G_{máx} = \frac{2630\ (2.17 - e)^2}{1+e}\ \bar{\sigma}_o^{0.5} \qquad (5)$$

- Para arenas con granos angulosos

$$G_{máx} = \frac{1230\ (2.97 - e)^2}{1+e}\ \bar{\sigma}_0^{0.5} \qquad (6)$$

en las que:

G módulo de rigidez al cortante en ℓb/pulg²

e relación de vacíos

$\bar{\sigma}_0$ $(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)/3$, esfuerzo octaédrico normal efectivo

Hardin y Black (1968, 1969) proponen

- Para arcillas

$$G = \frac{G_{máx}}{1 + \gamma/\gamma_r} \qquad (7)$$

$$G_{máx} = 326\ \frac{(2.973 - e)^2}{1+e}\ (OCR)^a\ \bar{\sigma}_0^{0.5} \qquad (8)$$

El valor de a depende del PI según la tabla

PI	0	20	40	60	80	>100
a	0	0.18	0.30	0.41	0.48	0.50

$$\gamma_r = \frac{\tau_{máx}}{G_{máx}}$$

$$\tau_{máx} = \left\{ \left[\frac{(1+K_0)}{2}\ \bar{\sigma}_v\ \text{sen}\ \bar{\phi} + \bar{C}\ \cos\ \bar{\phi} \right]^2 - \left[\frac{(1-K_0)}{2}\ \bar{\sigma}_v \right]^2 \right\}^{0.5} \qquad (9)$$

en donde

G módulo secante de rigidez al cortante en kg/cm²

γ	deformación angular en cm/cm
e	relación de vacíos
OCR	relación de preconsolidación
$\bar{\sigma}_m$	esfuerzo efectivo principal medio en kg/cm^2
$\bar{\sigma}_v$	esfuerzo vertical efectivo en kg/cm^2
K_o	coeficiente de esfuerzo lateral en reposo
$\bar{C}$	cohesión, en términos de esfuerzos efectivos en kg/cm^2
$\bar{\phi}$	ángulo de fricción interna en términos de esfuerzos efectivos

Con base en los resultados experimentales y teóricos publicados por diversos investigadores, Seed e Idriss (1970) proponen el siguiente procedimiento para calcular los valores del módulo de rigidez al cortante y del amortiguamiento en suelos.

- Para arenas

$$G = 22\ K_2\ (\bar{\sigma}_m)^{\frac{1}{2}} \tag{10}$$

Para arenas, K_2 depende de la relación de vacíos y de la amplitud de las deformaciones. Las figuras 14 y 15 muestran los valores de K_2 obtenidos experimentalmente para dos valores distintos de la densidad relativa, para diversas muestras de arena. En las mismas figuras se muestran las curvas medias que representan a los datos empíricos, y en la 16 las curvas empíricas correspondientes a varias densidades relativas. Como este parámetro se correlaciona con la prueba de penetración estándar, en muchos problemas prácticos el procedimiento consistirá en efectuar un sondeo de penetración, usar los datos de campo para estimar la densidad relativa, y a partir de ella, el módulo de elasticidad secante, empleando la fig 16 y la ec(10).

Los datos de la fig 16 se muestran también en la fig 17, en donde aparecen los valores de G, normalizados respecto al valor de G para $\gamma = 10^{-4}$ por ciento, en función de la deformación angular. Se considera que cuando se aplican los métodos geosísmicos ordinarios para determinar las velocidades de propagación de ondas longitudinales y de cortante las deformaciones angulares que se generan tienen valores del orden de las que sirvieron de base para la normalización citada, y que por lo tanto, el valor de G que corresponde a cualquier deformación angular se puede estimar a partir de la fig 17.

Seed e Idriss comentan que los valores que ellos proponen para G, en arenas, deben utilizarse cuando los datos de campo se obtienen mediante el método de penetración estándar, mientras que para otros casos es deseable utilizar los resultados de Hardin y Drnevich.

Amortiguamiento

Hardin (1965) propone

a Para arenas

$$\zeta_{máx} = D-1.5 \log_e N \qquad (11)$$

° Para arcillas saturadas

$$\zeta_{máx} = 31-(3+0.3f)(\overline{\sigma}_m)^{0.5}+1.5f^{0.5}-1.5\log_e N \qquad (12)$$

en donde

ζ	fracción del amortiguamiento crítico
N	número de ciclos
f	frecuencia de la carga aplicada en Hz
D	en arenas limpias se especifican valores del 33 y 28 por ciento para estados secos y saturados respectivamente

Seed y Lee (1970), estiman

° Para arenas

Que el amortiguamiento calculado con la curva llena de la fig 18 proporciona buenos resultados para efectos prácticos. Además, recomiendan que en caso de obtenerse en forma experimental el amortiguamiento asociado a dos valores de la deformación angular, se haga pasar una curva paralela a la dada por la curva llena de la fig 18 y, así, obtener la variación completa del amortiguamiento con la deformación angular.

° Para arcillas saturadas

Los datos experimentales disponibles para calcular este parámetro son muy escasos y se muestran en la fig 19. Debido a su gran dispersión es difícil determinar los factores principales que intervienen en su cuantificación. Según Seed e Idriss el valor medio representativo para la curva llena de la fig 19 proporciona valores del amortiguamiento con suficiente aproximación para problemas prácticos. También sirve de base para cuantificar la variación del amortiguamiento respecto a la deformación angular cuando solo se conocen dos valores del amortiguamiento para determinadas deformaciones, haciendo pasar por dichos valores una curva paralela a la llena.

TECNICAS DE CAMPO

Existen tres métodos de campo para determinar el "*módulo de rigidez al cortante*" de los suelos:

1. Pruebas geofísicas
2. Pruebas de vibración
3. Pruebas de placa

Diagramas de cada uno de estos procedimientos de prueba se muestran en la fig 20.

Los dos primeros métodos consisten en la medición de la velocidad de propagación de las ondas a través del suelo.

Considerando que el medio es elástico, el módulo de Young E, y el módulo G, se pueden calcular de la velocidad de propagación de ondas (P), compresionales, v_p, o de ondas (S) de cortante, v_s, usando las siguientes expresiones

$$E = \rho v_p^2 \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{(1-\nu)} \qquad (14)$$

$$G = \rho v_s^2 \qquad (15)$$

en las cuales

ρ densidad de masa

ν relación de Poisson

El método de la prueba de placa consiste en someter una placa que descansa sobre la superficie del terreno a la aplicación de carga repetida con objeto de obtener la relación carga-deformación. De esta información se calcula el módulo E, mediante

$$E = \frac{P(1-\nu^2)}{r\pi w} \tag{16}$$

y considerando un valor para ν se puede calcular

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \tag{17}$$

en donde

r radio de la placa de carga

w deformación vertical

P carga

7. *Métodos Geofísicos*

a) <u>Prueba de medición en sondeos</u>

Este método consiste en medir el tiempo requerido para que las ondas generadas en un punto, mediante el impacto de un martillo pesado o una explosión, lleguen a uno o más geófonos colocados dentro de un barreno.

A continuación se describirá en forma breve el método conocido como "*de sondeo en paralelo*" (Cross-Hole survey) ya que se consi dera en opinión de muchos ingenieros como el método de campo más digno de confianza para medir el módulo G.

El método consiste en medir la velocidad de propagación de ondas de cuerpo entre dos puntos en la masa de suelo. Las ondas de cuerpo se generan mediante un impulso vertical aplicado en el fondo de un sondeo.

La llegada de la energía en forma de ondas compresionales o cortantes se registra en un segundo sondeo mediante un geófono vertical. Conociendo la distancia horizontal entre los dos sondeos la velocidad de las ondas se puede calcular.

Sin embargo, en determinaciones bajo el nivel freático (NF) la V_p determinada será la del líquido no la del suelo, en tanto que la velocidad V_s determinada arriba o abajo del NF será la del suelo.

El método requiere de 4 elementos

i) sondeos
ii) fuente de generadora de ondas
iii) equipo de captación (geófono)
iv) equipo de registro

b) <u>Método geosísmico de refracción</u>

Este método es aplicable sólo en medios sobre el nivel freático y cuando las velocidades en cada estrato se incrementan con la profundidad. Un esquema de este método se presenta en la fig 21.

2. *Prueba de Vibración*

Este procedimiento consiste en colocar en la superficie del terreno un vibrador de alta frecuencia (30 a 1000 Hz) y uno de baja frecuencia (hasta 30 Hz), para generar ondas de Rayleigh, que para propósitos prácticos tienen una velocidad (V_r) semejante a la V_s. La velocidad se calcula midiendo la longitud de onda, λ , medida con geófonos a lo largo de la superficie del terreno y la frecuencia de vibración de la fuente (vibrador), usando la expresión:

$$V_s \simeq V_r = \lambda f \qquad (18)$$

en donde

λ longitud de onda

f frecuencia de vibración

La velocidad (V_r) medida, se considera que corresponde a la velocidad de propagación en el suelo a una profundidad de un medio de λ . Al variar la frecuencia de la fuente se cambia λ , y se puede conocer la variación de (V_r) con la profundidad, ver fig 20.b

3. *Pruebas de Placa*

El módulo del suelo se puede determinar, bajo condiciones no drenadas, ya sea mediante la aplicación de carga repetida y midiendo la pendiente de la curva carga-deformación o mediante la medición de la frecuencia de resonancia con un vibrador, fig 20.c.

BIBLIOGRAFIA

1. Anderson, D.G. and Woods, R.D. (1975) "Comparison of Field and Laboratory Shear Moduli", *Proceedings of the Conference on In Situ Measurement of Soil Properties*, Geotechnical Engineering Division (ASCE) Specialty Conference, Rayleigh, North Carolina, June 1-4, Vol. 1, pp 69-92.

2. Annaki, M. and Lee, K.L. (1977) "Equivalent Uniform Cycle Concept of Soil Dynamics", *Journal of the Geotechnical Engineering Division*, ASCE, Vol. 103, No. GT6, Proc. Paper 12991, June, pp 549-564.

3. Arango, I. and Moriwaki, Y. (1978) "Comparison Between In Situ and Laboratory-Determined Dynamic Shear Velocity and Modulus", *Proceedings of the Conference on Earthquake Engineering and Soil Dynamics*, Geotechnical Engineering Division, ASCE, Pasadena, June 19-21.

4. Ballard, R.F., Jr. (1976) "Method for Crosshole Seismic Testing", *Geotechnical Engineering Division*, ASCE, Vol. 102, No. GT12, Dec. Proc. Paper 12646, pp 1261-1273.

5. Ballard, R.F., Jr. and McLean, F.G. (1975) "Seismic Field Methods for In Situ Moduli", *Proceedings of the Conference on In Situ Measurement of Soil Properties*, Geotechnical Engineering Division (ASCE) Specialty Conference, Raleigh, North Carolina, June 1-4, Vol. 1, pp 121-150.

6. Bamert, E., Shnitter, G. and Weber, M. (1967) "A Field Method of Determining Soil Properties by Impact Loading", *Proceedings of International Symposium on Wave Propagation and Dynamic Properties of Earth Materials*, Albuquerque, N.M., Aug. 23-25, pp 265-274.

7. Bjerrum, L. and Landva, A. (1966) "Direct Simple Shear Tests on a Norwegian Quick Clay", *Geotechnique*, Vol. 26, No. 1, pp 1-20.

8. Casagrande, A. (1976) "Liquefaction and Cyclic Deformation of Sands--A Critical Review", Harvard Soil Mechanics Series No. 88, Harvard University, Cambridge, Mass.

9. Casagrande, A. and Shannon, W.L. (1948) "Stress Deformation and Strength Characteristics of Soils under Dynamic Loads", *Proceedings of the Second International Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering*, Rotterdam, Vol. V, pp 29-34..

10. Castro, G. (1969)
"Liquefaction of Sands", *Harvard Soil Mechanics Series No. 81*, Cambridge, Mass., Jan.

11. Castro, G. and Poulos, S.J. (1977)
"Factor Affecting Liquefaction and Cyclic Mobility", *Journal of the Geotechnical Engineering Division*, ASCE, Vol. 103, No. GT6, June, pp 501-516.

12. DeAlba, P., Seed, H.B. and Chan, C.K. (1976)
"Sand Liquefaction in Large-Scale Simple Shear Tests", *Journal of the Geotechnical Engineering Division*, ASCE, Vol. 102, No. GT9, Proc. Paper 12403, Sept., pp 909-927.

13. Díaz, A., Weckmann, O. e Iturbe, R. (1973)
"Licuación de Arenas-Primera Parte", Instituto de Ingeniería, UNAM.

14. Díaz, J.A. and Del Valle, E. (1977)
"Dynamics laboratory of the National University of Mexico", *6th World Conference on Earthquake Engineering*, New Delhi.

15. Drnevich, V.P. (1977)
"Resonant Column Testing - Problems and Solutions", ASTM *Symposium on Dynamic Soil and Rock Testing in the Field and Laboratory for Seismic Studies*, Denver, June.

16. Drnevich, V.P., Hardin, B.O. and Shippy, D.J. (1977)
"Modulus and Damping of Soils by the Resonant Column Method", *Symposium on Dynamic Soil and Rock Testing in the Field and Laboratory for Seismic Studies*, Denver, June.

17. Finn, W.D.L. (1972)
"Soil Dynamics - Liquefaction of Sands", *Proceedings of the International Conference on Microzonation*, Seattle, Oct. 30-Nov. 3, Vol. 1, pp 87-112.

18. Finn, W.D.L., Bransby, P.L. and Pickering, D.J. (1970)
"Effect of Strain History on Liquefaction of Sands", *Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division*, ASCE, Vol. 96, No. SM6, Nov., Proc. Paper 7670, pp 1917-1934.

19. Finn, W.D.L., Emery, J.J. and Gupta, Y.P. (1970)
"A Shaking Table Study of the Liquefaction of Saturated Sands During Earthquakes", *Proc. 3rd European Symposium on Earthquake Engineering*, Sept., pp 253-262.

20. Finn, W.D.L., Emery, J.J. and Gupta, Y.P. (1971)
"Liquefaction of Large Samples of Saturated Sand on a Shaking Table", *Proc. 1st Canadian Conf. on Earthquake Engineering*, Vancouver, May, pp 97-110.

21. Finn, W.D.L., Pickering, D.J. and Bransby, P.L. (1971) "Sand Liquefaction in Triaxial and Simple Shear Tests", *Journal of the Soil Mechanics and Foundation Division*, ASCE, Vol. 97, No. SM4, Proc. Paper 8039, April, pp 639-659.

22. Finn, W.D.L. and Vaid, Y.P. (1977) "Liquefaction Potential from Drained Constant Volume Cyclic Simple Shear Tests", *Preprints of Sixth World Conference on Earthquake Engineering*, New Delhi, Jan. 10-14, Vol. 6, pp 7-12.

23. Hall, J.R., Jr. and Richart, F.E., Jr. (1963) "Dissipation of Elastic Wave Energy in Granular Soils", *Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division*, ASCE, Vol. 89, No. SM6, Nov., pp 27-56.

24. Hardin, B.O. (1965) "The Nature of Damping in Sands", *Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division*, ASCE, Vol. 91, No. SM1, Part I, Jan., pp 63-97.

25. Hardin, B.O. (1970) "Suggested Methods of Test for Shear Modulus and Damping of Soils by the Resonant Column", *ASTM Special Technical Publication 479*, pp 516-529.

26. Hardin, B.O. and Black, W.L. (1968) "Vibration Modulus of Normally Consolidated Clay", *Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division*, ASCE, Vol. 94, No. SM2, Proc. Paper 5833, March, pp 353-368.

27. Hardin, B.O. and Drnevich, V.P. (1972) "Shear Modulus and Damping in Soils: Measurement and Parameter Effects", *Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division*, ASCE, Vol. 98, No. SM6, Proc. Paper 8977, June, pp 603-624.

28. Hardin, B.O. and Music, J. (1965) "Apparatus for Vibration of Soil Specimens During the Triaxial Test", *Instruments and Apparatus for Soil and Rock Mechanics*, ASTM STP 392, Am. Soc. Testing Mats., pp 55-74.

29. Humphries, W.K. and Wahls, H.E. (1968) "Stress History Effects on Dynamic Modulus of Clay", *Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division*, ASCE, Vol. 94, No. SM2, Proc. Paper 5834, March, pp 371-389.

30. Hvorslev, M.J. and Kaufman, R.I. (1952) *Torsion Shear Apparatus and Testing Procedures*, USAE Waterways Experiment Station, Bulletin No. 38, May, 76 pp

31. Ishibashi, I. and Sherif, M.A. (1974)
"Soil Liquefaction by Torsional Simple Shear Device", *Journal of the Geotechnical Engineering Division*, ASCE, Vol. 100, No. GT8, Proc. Paper 10752, Aug., pp 871-888.

32. Ishihara, K. and Li, S. (1972)
"Liquefaction of Saturated Sand in Triaxial Torsion Shear Test", *Soils and Foundations*, Vol. 12, No. 2, June, pp 19-39.

33. Ishihara, K. and Yasuda, S. (1975)
"Sand Liquefaction in Hollow Cylinder Torsion Under Irregular Excitation", *Soils and Foundations*, Vol. 15, No. 1, March, pp 45-59.

34. Kjellman, W. (1951)
"Testing of Shear Strength in Sweden", *Geotechnique*, Vol. 2, pp 225-232.

35. Lawrence, F.V., Jr. (1963)
"Propagation Velocity of Ultrasonic Waves Through Sand", MIT Research Report R63-8, March.

36. Lee, K.L. (1976)
"Fundamental Considerations for Cyclic Triaxial Tests on Saturated Sands", *Proc. Int. Conf. on Behavior Offshore Structures*, BOSS "76", Trondheim, Norway, Aug., Vol. 1, pp 355-373.

37. Lee, K.L., Seed, H.B. and Dunlop, P. (1969)
"Effect of Transient Loading on the Strength of Sand", *Proceedings of the Seventh International Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering*, Mexico City, Vol. 1, pp 239-247.

38. Maslov, N.M. (1957)
"Questions of Seismic Stability of Submerged Sandy Foundations and Structures", *Proceedings of the Fourth International Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering*, London, Vol. 1, pp 368-372.

39. Mulilis, J.P., Chan, C.K. and Seed, H.B. (1975)
"The Effects of Method of Sample Preparation on the Cyclic Stress-Strain Behavior of Sands", *Report No. EERC 75-18*, Earthquake Engineering Research Center, University of California, Berkeley, July.

40. Murphy, V.J. (1972)
"Geophysical Engineering Investigation Techniques for Microzonation", *Proceedings of the International Conference on Microzonation*, Vol. 1, pp 135-159.

41. Pyke, R., Seed, H.B. and Chan, C.K. (1975)
"Settlement of Sands Under Multidirectional Shaking", *Journal of the Geotechnical Engineering Division*, ASCE, Vol. 101, No. GT4, April, Proc. Paper 11251, pp 379-398.

42. Richart, F.E., Jr., Hall, J.R., Jr. and Woods, R.D. (1970)
Vibrations of Soils and Foundations, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 414 pp.

43. Roscoe, K.H. (1953)
"An Apparatus for the Application of Simple Shear to Soil Samples", *Proceedings, Third International Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering*, Zurich, Vol. 1, pp 186-191.

44. Seed, H.B. (1976)
"Evaluation of Soil Liquefaction Effects on Level Ground During Earthquakes", *State-of-the-Art Paper*, Liquefaction Problems in Geotechnical Engineering, Meeting Preprint 2752, ASCE Annual Convention, Sept. 27 - Oct. 1, Philadelphia, Pa., pp 1-104.

45. Seed, H.B., Kenji, M. and Chan, C.K. (1977)
"Influence of Seismic History on Liquefaction of Sands", *Journal of the Geotechnical Engineering Division*, ASCE, Vol. 103, No. GT4, Proc. Paper 12841, April, pp 257-270.

46. Seed, H.B. and Lee, K.L. (1966)
"Liquefaction of Saturated Sands During Cyclic Loading", *Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division*, ASCE, Vol. 92, No. SM6, Nov., pp 105-134.

47. Seed, H.B. and Lundgren, R. (1954)
"Investigation of the Effect of Transient Loading on the Strength and Deformation Characteristics of Saturated Sands", *Proceeding* ASTM, Vol. 54, pp 1288-1306.

48. Seed, H.B., Mori, K. and Chan, C.K. (1977)
"Influence of Seismic History on Liquefaction of Sands", *Journal of the Geotechnical Engineering Division*, ASCE, Vol. 103, No. GT4, Proc. Paper 12841, April, pp 257-270.

49. Seed, H.B. and Peacock, W.H. (1971)
"Test Procedure for Measuring Soil Liquefaction Characteristics", *Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division*, ASCE, Vol. 97, No. SM8, Aug., pp 1099-1119.

50. Seed, H.B., Pyke, R.M. and Martin, G.R. (1978)
"Effect of Multidirectional Shaking on Pore Pressure Development in Sands", *Journal of the Geotechnical Engineering Division*, ASCE, Vol. 104, No. GT1, Jan., Proc. Paper 13485, pp 27-44.

51. Seed, H.B. and Silver, M.L. (1972)
"Settlement of Dry Sands During Earthquakes", *Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division*, ASCE, Vol. 98, No. SM4, Proc. Paper 8844, April, pp 381-397.

52. Sherif, M.A. and Ishibashi, I. (1976)
"Dynamic Shear Moduli for Dry Sands", *Journal of the Geotechnical Division*, ASCE, Vol. 102, No. GT11, Proc. Paper 12572, Nov., pp 1171-1184.

53. Silver, M.L. (1976)
"Laboratory Triaxial Testing Procedures to Determine the Cyclic Strength of Soils", *Report No. NUREG-31*, U.S. Nuclear Regulatory Commission, Washington, D.C., Dec. 70 pp.

54. Silver, M.L., Chan, C.K., Ladd, R.S., Lee, K.L., Tiedemann, D.A., Townsend, F.C., Valera, J.E. and Wilson, J.H. (1976)
"Cyclic Triaxial Strength of Standard Test Sand", *Journal of the Geotechnical Engineering Division*, Vol. 102, No. GT5, May, pp 511-523.

55. Silver, M.L. and Park, T.K. (1975)
"Testing Procedure Effects on Dynamic Soil Behavior", *Journal of the Geotechnical Engineering Division*, ASCE, Vol. 101, No. GT10, Proc. Paper 11671, Oct., pp 1061-1083.

56. Silver, M.L. and Seed, H.B. (1971)
"Deformation Characteristics of Sands Under Cyclic Loading", *Journal of the Soil Mechanics and Foundation Division*, ASCE, Vol. 97, No. SM8, Aug., pp 1081-1098.

57. Skoglund, G.R., Marcuson, W.F. III, and Cunny, R.W. (1975)
"Evaluation of Resonant Column Dynamic Testing Devices", Misc. Paper 5-75-2, U.S. Army Engineer Waterways Experiment Station, Vicksburg, Feb.

58. Skoglund, G.R., Marcuson, W.F. III, and Cunny, R.W. (1976)
"Evaluation of Resonant Column Test Devices", *Journal of the Geotechnical Engineering Division*, ASCE, Vol. 102, No. GT11, Nov., Proc. Paper 12567.

59. SW-AA (1974)
"Soil Behavior Under Earthquake Loading Conditions, In Situ Impulse Test", *Progress Report*, Contract No. AT(04-3)-954, U.S. Atomic Energy Commission, June. [Shannon & Wilson, Agbabian Associates joint venture].

60. SW-AJA (1971)
"Soil Behavior Under Earthquake Loading Conditions", Interim Report No. 1, Subcontract No. 3354, Union Carbide Corporation, for U.S. Atomic Energy Commission, Contract W-7405-eng-26, Dec. 186 pp. (SW-AJA is Shannon & Wilson and Agbabian-Jacobsen Associates joint venture).

61. SW-AJA (1972a)
"Soil Behavior Under Earthquake Loading Conditions, State-of-the Art Evaluation of Soil Characteristics for Seismic Response Analysis", Under subcontract No. 3354, Union Carbide Corporation for U.S. Atomic Energy Commission, Contract No. W-7405-eng-26, Jan.

62. SW-AJA (1972b)
"Soil Behavior Under Earthquake Loading Conditions, Interim Report No. 2", prepared under Subcontract No. 3354, Union Carbide Corp., for U.S. Atomic Energy Commission, Contract No. W-7405-eng-26, Feb.

63. Taylor, D.W. and Whitman, R.V. (1954)
"The Behavior of Soils Under Dynamic Loadings-3", *Final Report on Laboratory Studies*, Civil Engineering Dept., MIT, Aug.

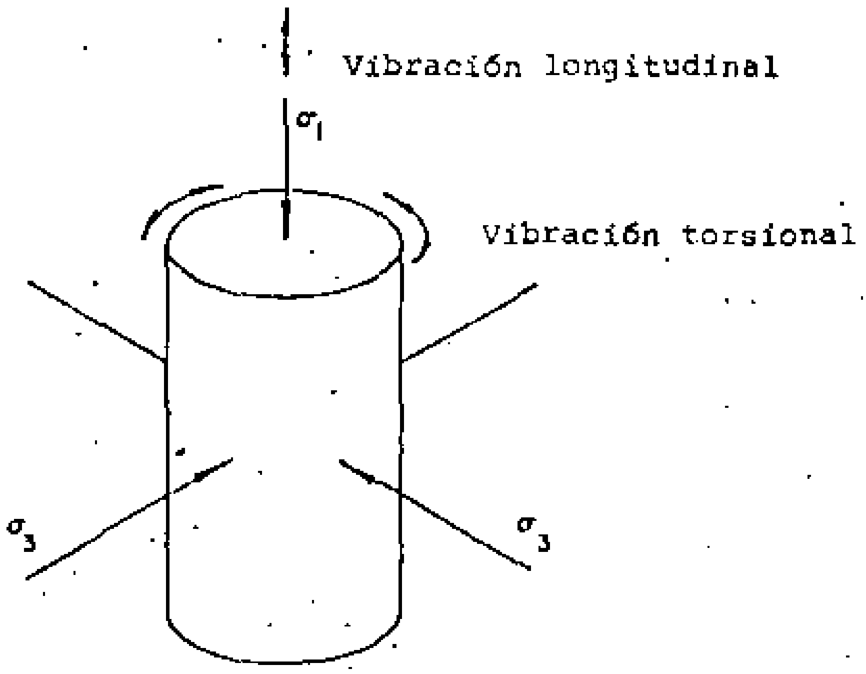
64. Townsend, F.C., Marcuson, W.F. III, and Mulilis, M. (1978)
"Cyclic Triaxial and SPT for Predicting Liquefaction", *Proceedings of the Conference on Earthquake Engineering and Soil Dynamics*, Geotechnical Engineering Division, ASCE, Pasadena, June 19-21.

65. Whitman, R.V. (1970b)
"Summary of Results from Shaking Table Tests at University of Chile using a Medium Sand", MIT, Progress Report No. 9, Effect of Local Soil Conditions Upon Earthquake Damage Research Report R 70-25, Soils Publication No. 258, May.

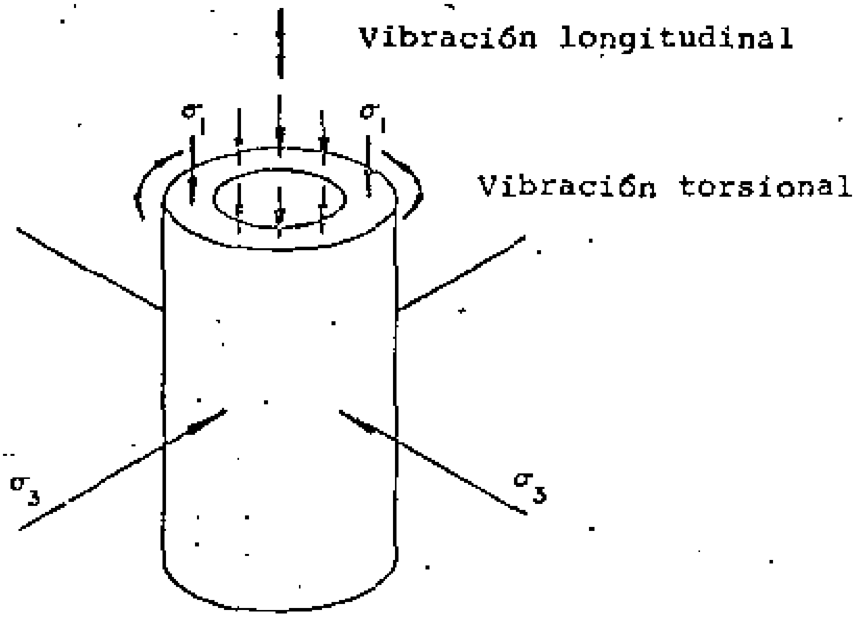
66. Whitman, R.V. and Ortigosa de Pablo, P. (1968)
"Densification of Sand by Vertical Vibrations, Rep. No. 4 - Repeated Load and Vibration Tests upon Sand", MIT, Civil Engineering Tech. Paper No. T68-5, Soils Pub. No. 222, Aug.

67. Wilson, S.D. and Dietrich, R.J. (1960)
"Effect of Consolidation Pressure on Elastic and Strength Properties of Clay", *Proceedings ASCE Research Conference on Shear Strength of Cohesive Soils*, Boulder, Colo., June, pp 419-435.

68. Zeevaert, L. (1967)
"Free Vibration Torsion Tests to Determine the Shear Modulus of Elasticity on Soils", *Proc., 3rd Panamerican Conf. on Soil Mech. and Foundation Eng.*, Caracas, Vol. 1, pp 111-129.



a. Cilindro Sólido



b. Cilindro Hueco

Fig 2 PRUEBA DE COLUMNA RESONANTE

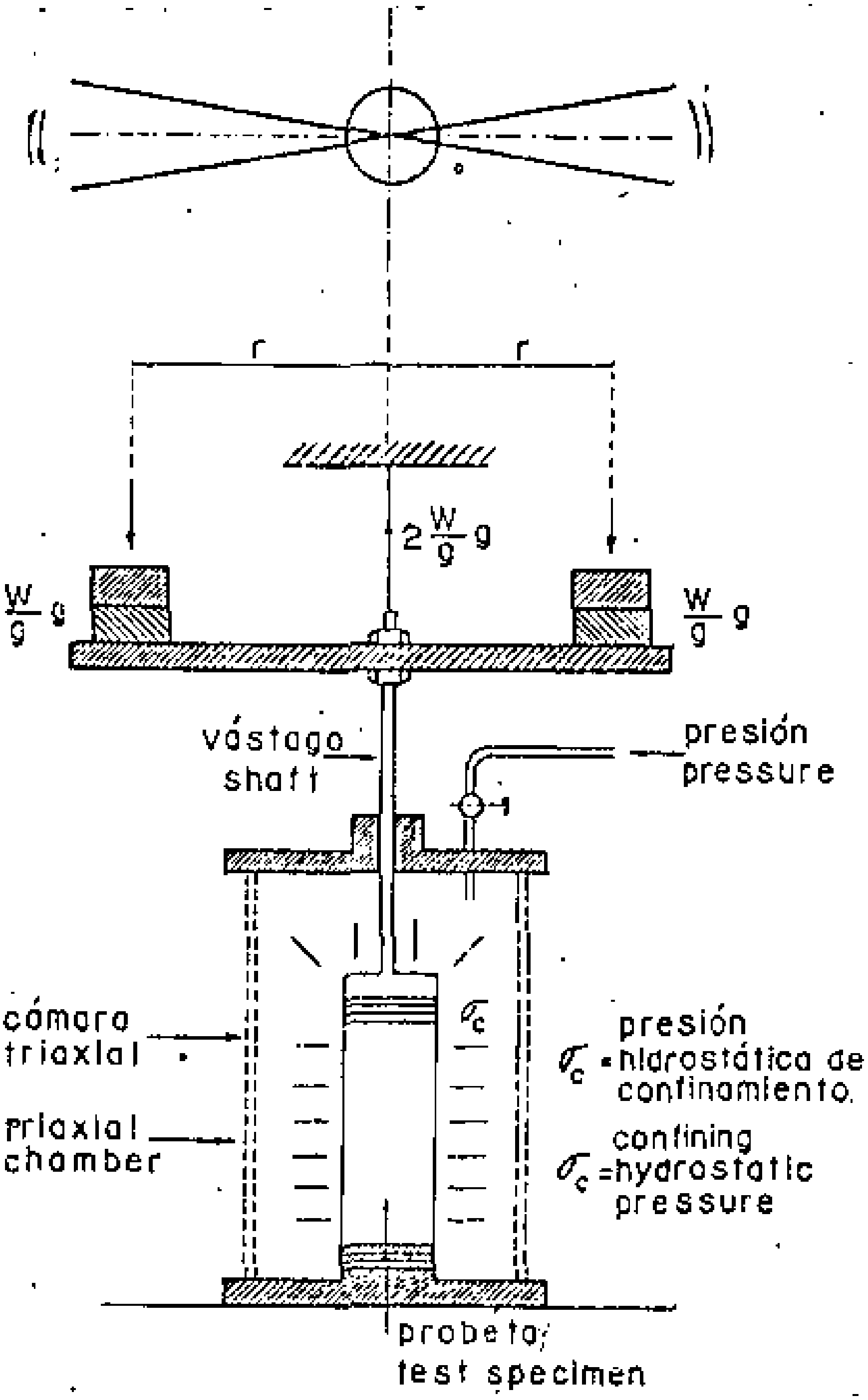


Fig 3 DISPOSITIVO PARA PRUEBAS DINAMICAS DE TORSION, (Zeevaert,1967)

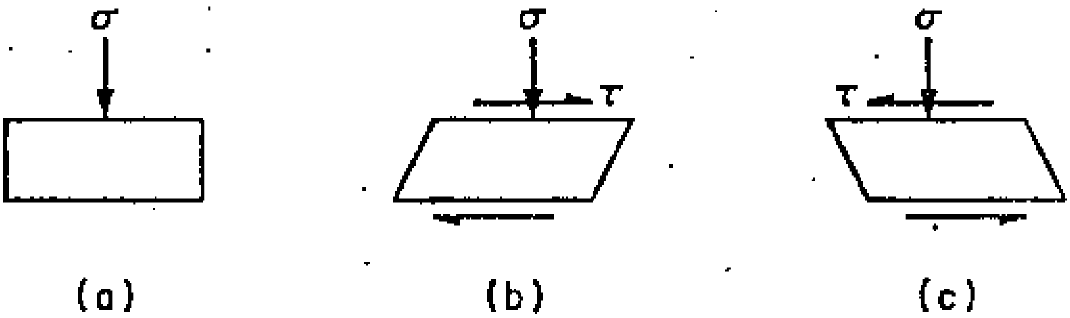


Fig 4. Condiciones de esfuerzo idealizadas para un elemento de suelo bajo la superficie, durante un sismo (Seed y Lee, 1966)

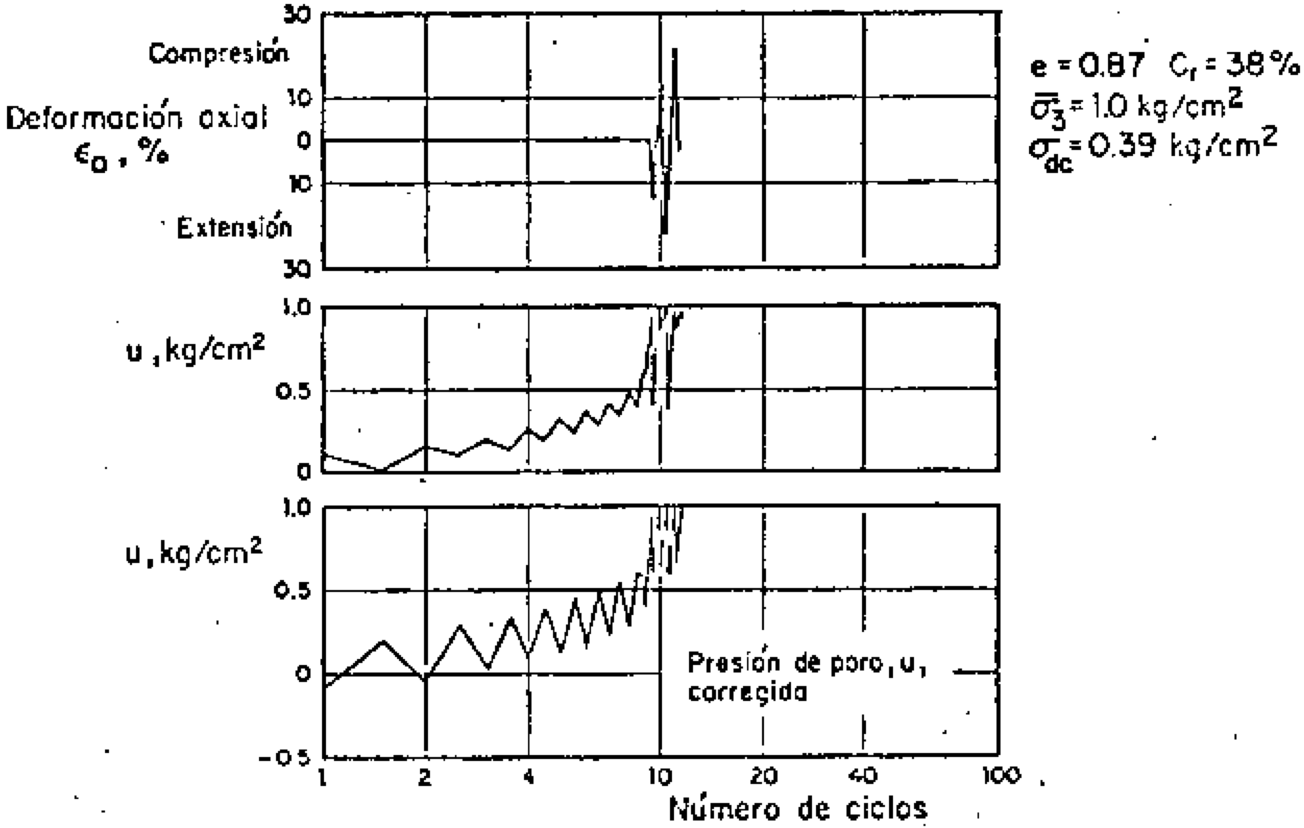
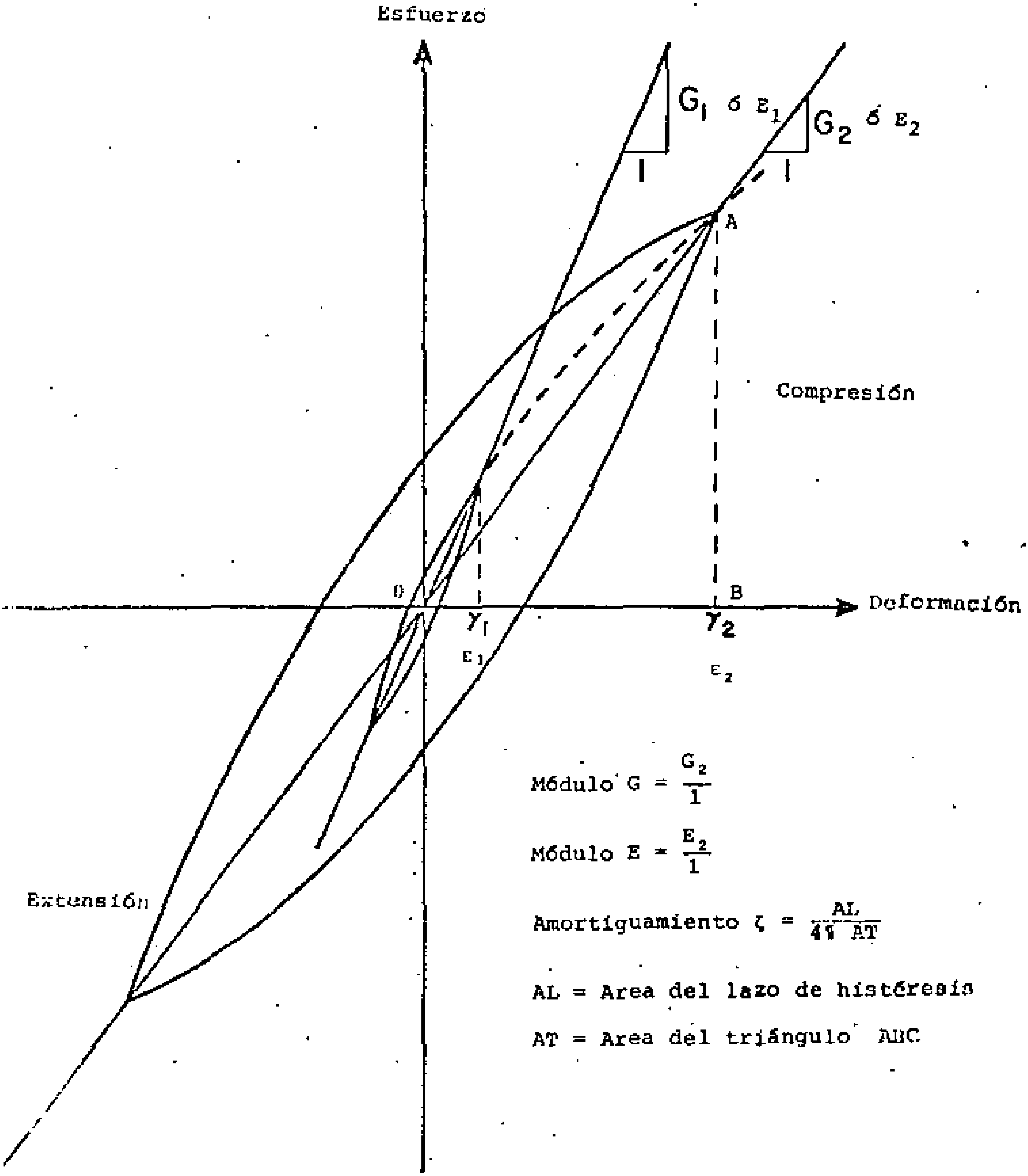


Fig 5. Prueba de carga cíclica, típica en arena suelta (Seed y Lee, 1966)



Módulo $G = \frac{G_2}{1}$

Módulo $E = \frac{E_2}{1}$

Amortiguamiento $\zeta = \frac{AL}{4\pi\ AT}$

AL = Area del lazo de histéresis

AT = Area del triángulo ABC

Fig 6 RELACION HISTERETICA ESFUERZO-DEFORMACION PARA DIFERENTES AMPLITUDES DE DEFORMACION

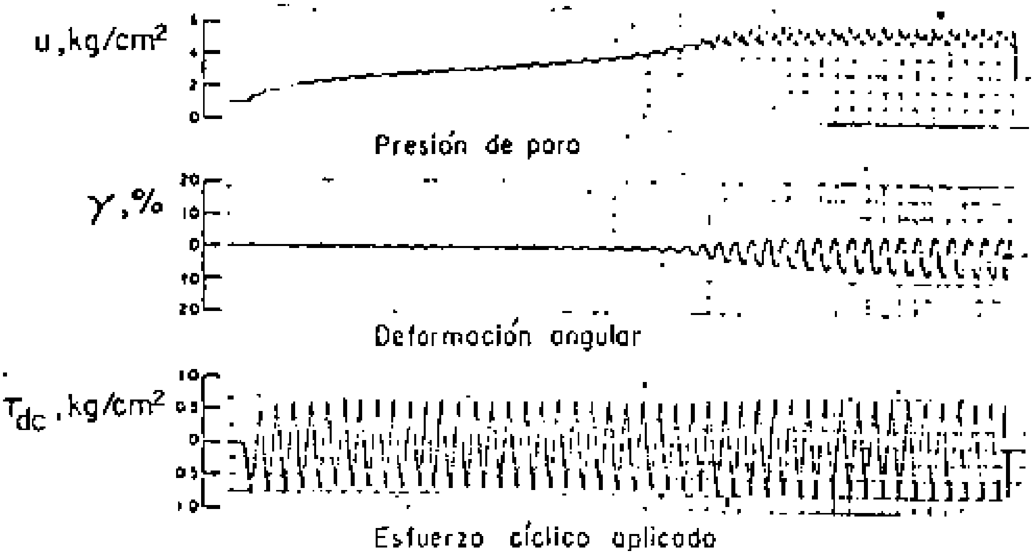


Fig 7 Prueba típica de corte simple en arena compacta (Peacok y Seed, 1968)

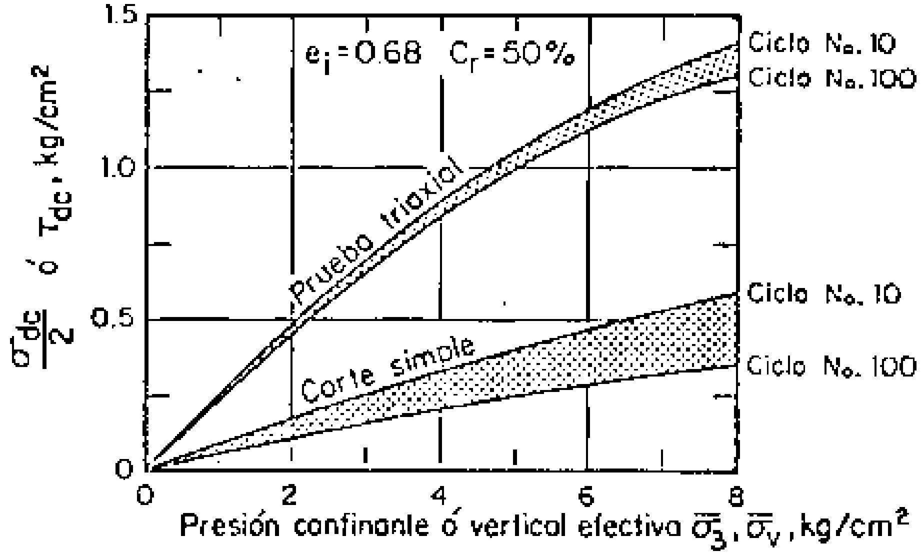


Fig 3 Comportamiento de arena suelta en corte simple y en prueba triaxial cíclica (Peacok y Seed, 1968)

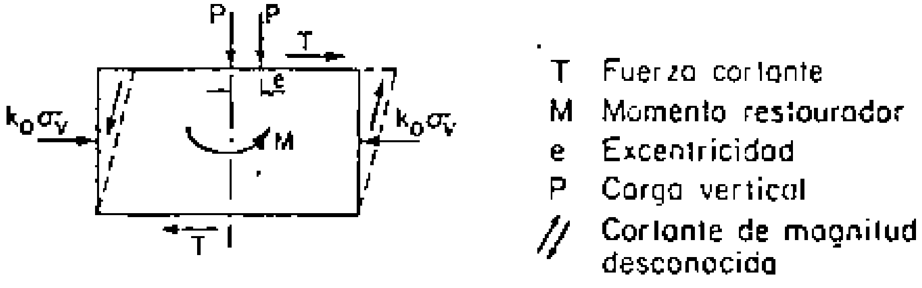


Fig 9 Equilibrio estático de fuerzas en un espécimen sometido a corte simple

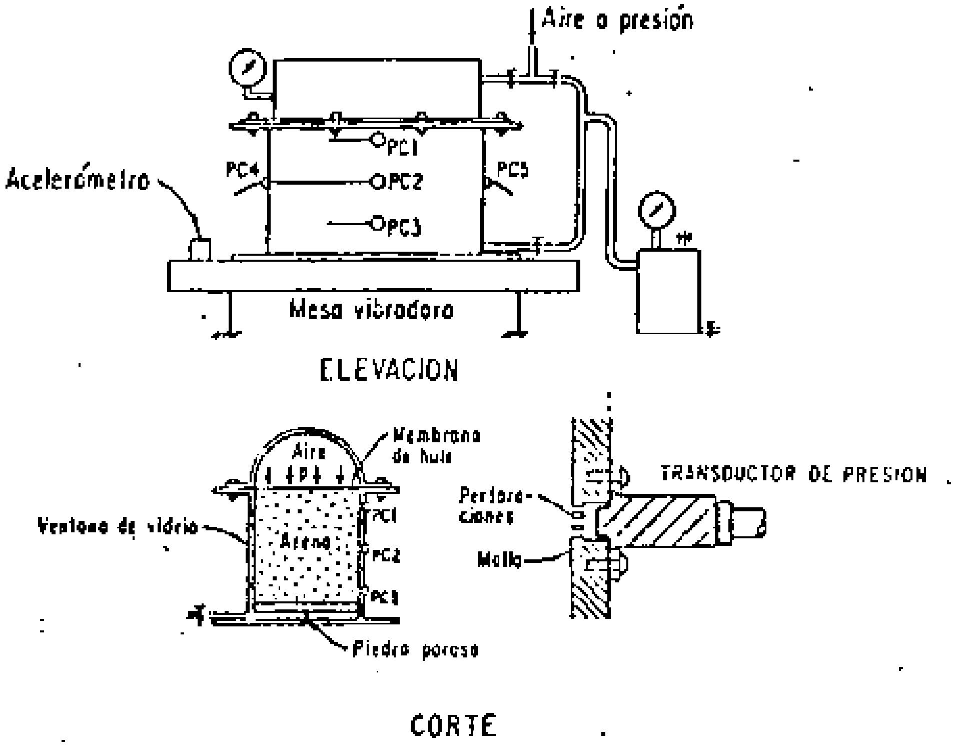
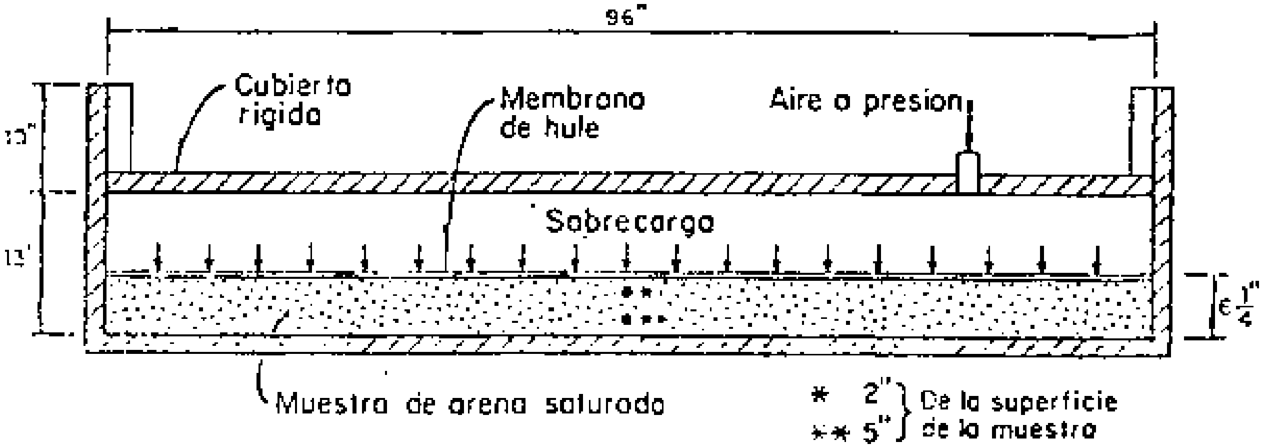


Fig 10 Recipiente para probar arenas en mesa vibradora (Yoshimi, 1967)

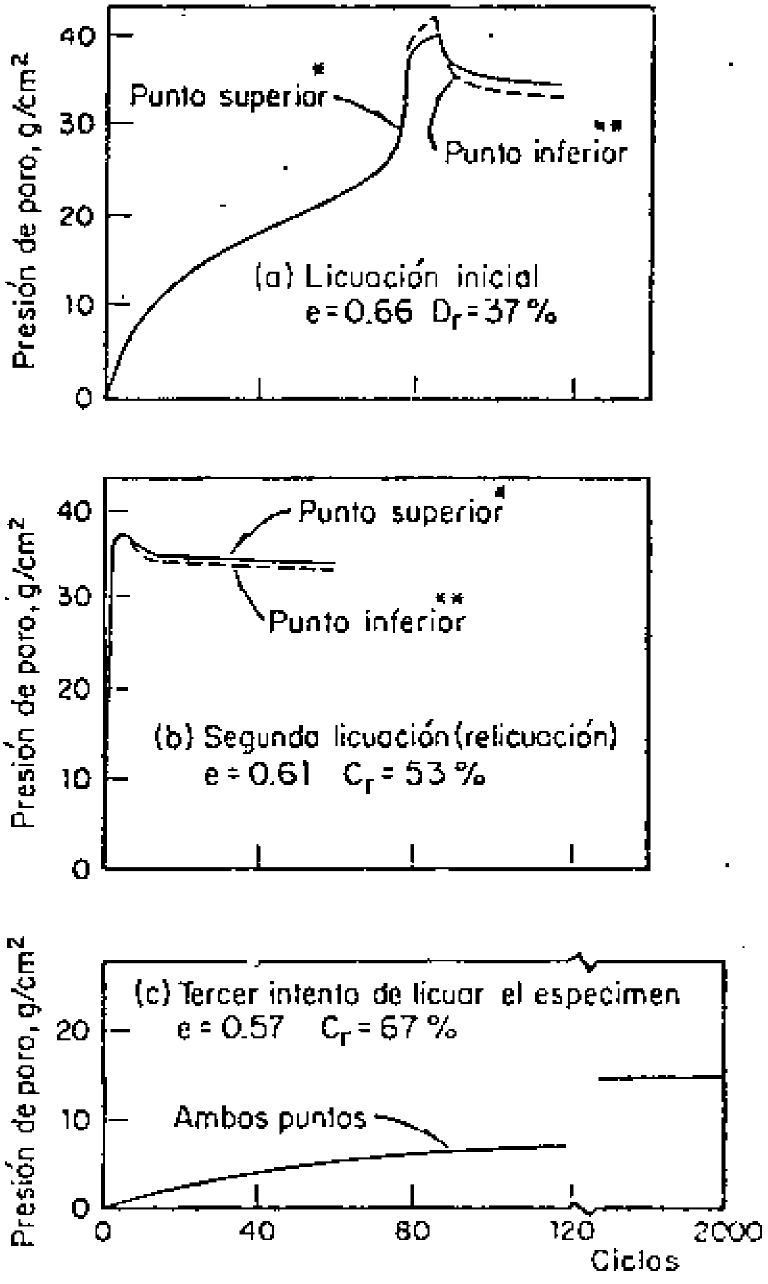


Muestra de arena saturada

* 2" } De la superficie
** 5" } de la muestra

Acotaciones en pulg

Fig 11 Corte del modelo de arena de 18" de ancho en el recipiente (Finn et al, 1970)

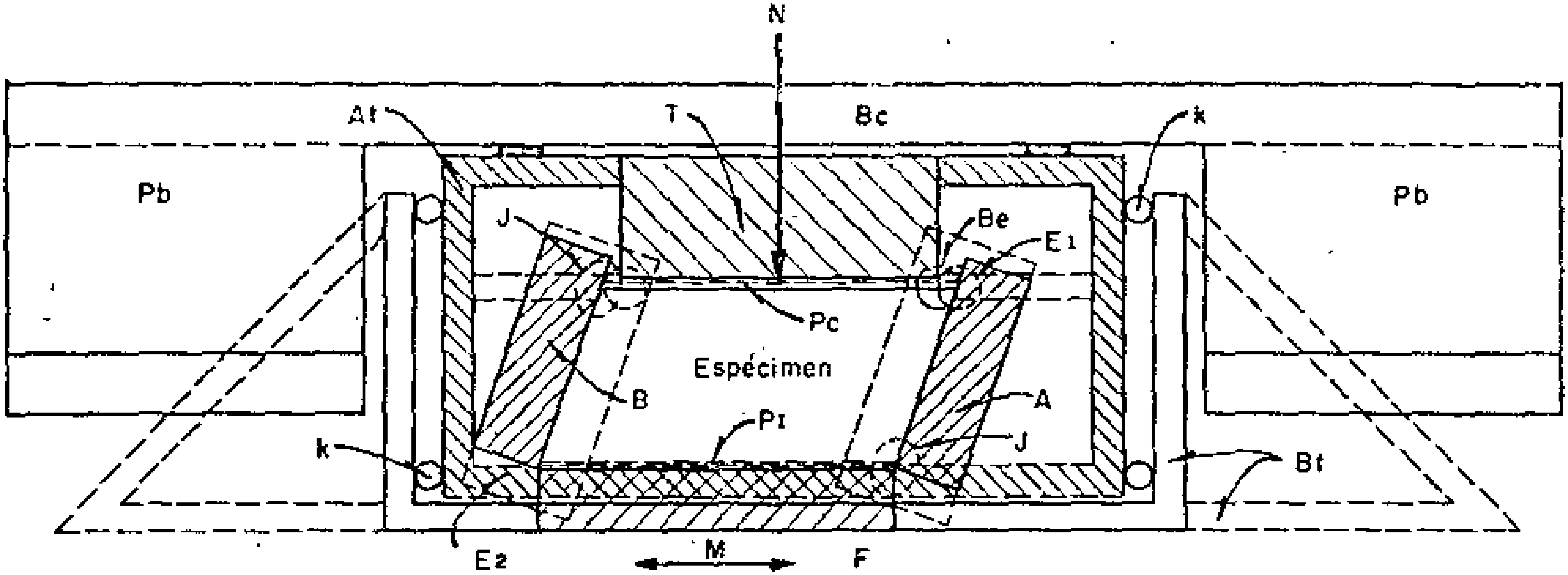


Presión total en el punto inferior** (36+13) = 49 g/cm²

Presión total en el punto superior* (36 + 5) = 41 g/cm²

Aceleración senoidal, amplitud = 0.25 g , Frecuencia 2 Hz

Fig 12 Presión de poro vs número de ciclos (Finn et al, 1970)



A, B	Paredes inclinables	J	Movimiento vertical de cojinetes de las paredes inclinables
At	Armazón de la tapa	k	Cojinetes-guía
Bc	Bastidor de carga	M	Movimiento alternado de la mesa vibradora
Be	Movimiento vertical de cojinetes de la tapa	N	Carga normal sobre la tapa
Bt	Bastidor para la tapa	Pb	Masas de plomo
E_1,E_2	Ejes de las paredes inclinables	Pc	Placa de carga
F	Fondo del recipiente	T	Tapa del recipiente

Fig 13 Corte transversal del aparato mostrado en el límite de su carrera
(Díaz, Weckmann e Iturbe, 1973)

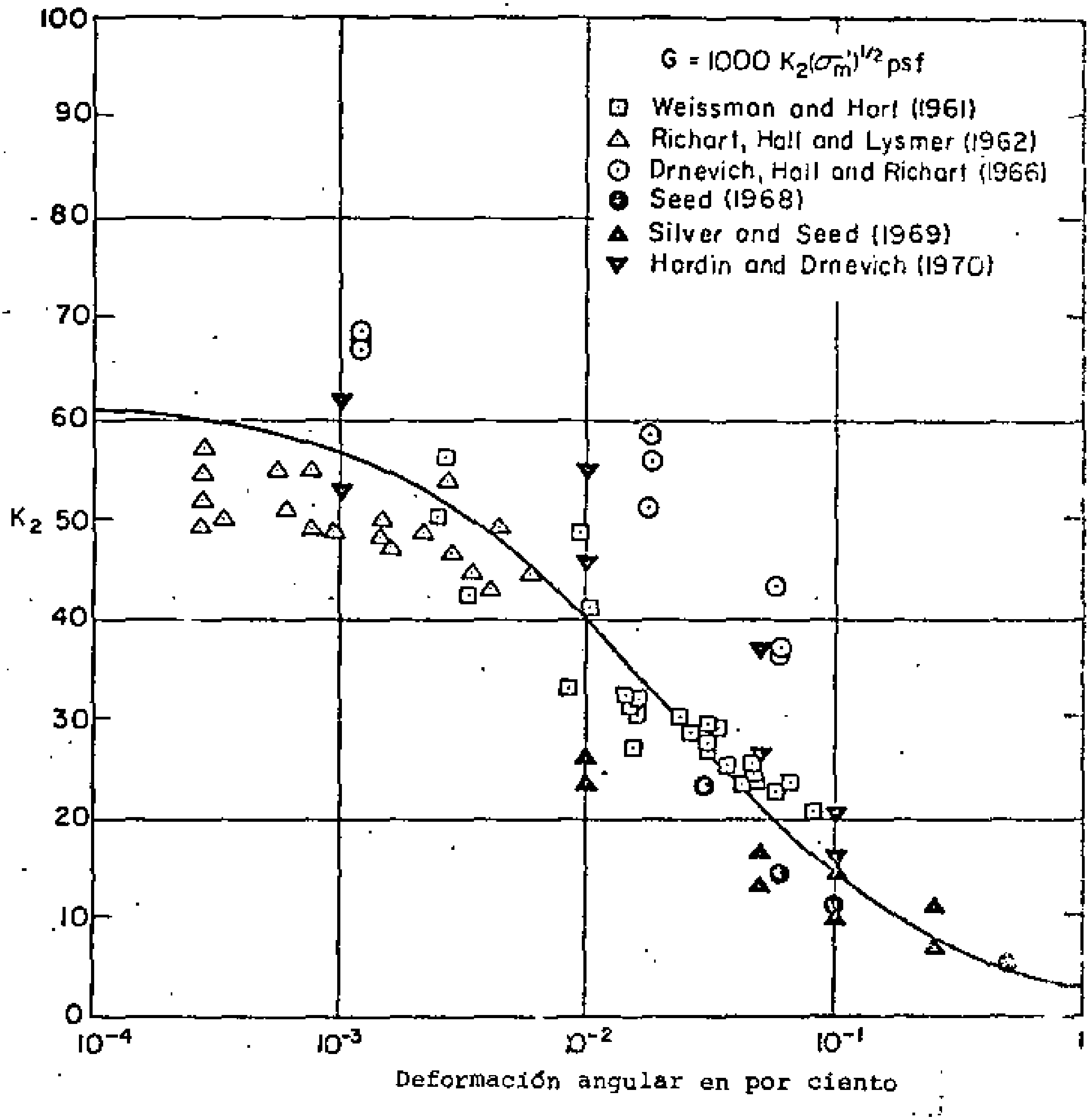


Fig 14 MODULO DE RIGIDEZ AL CORTANTE PARA ARENAS, C_r = 75% (Seed e Idriss, 1970)

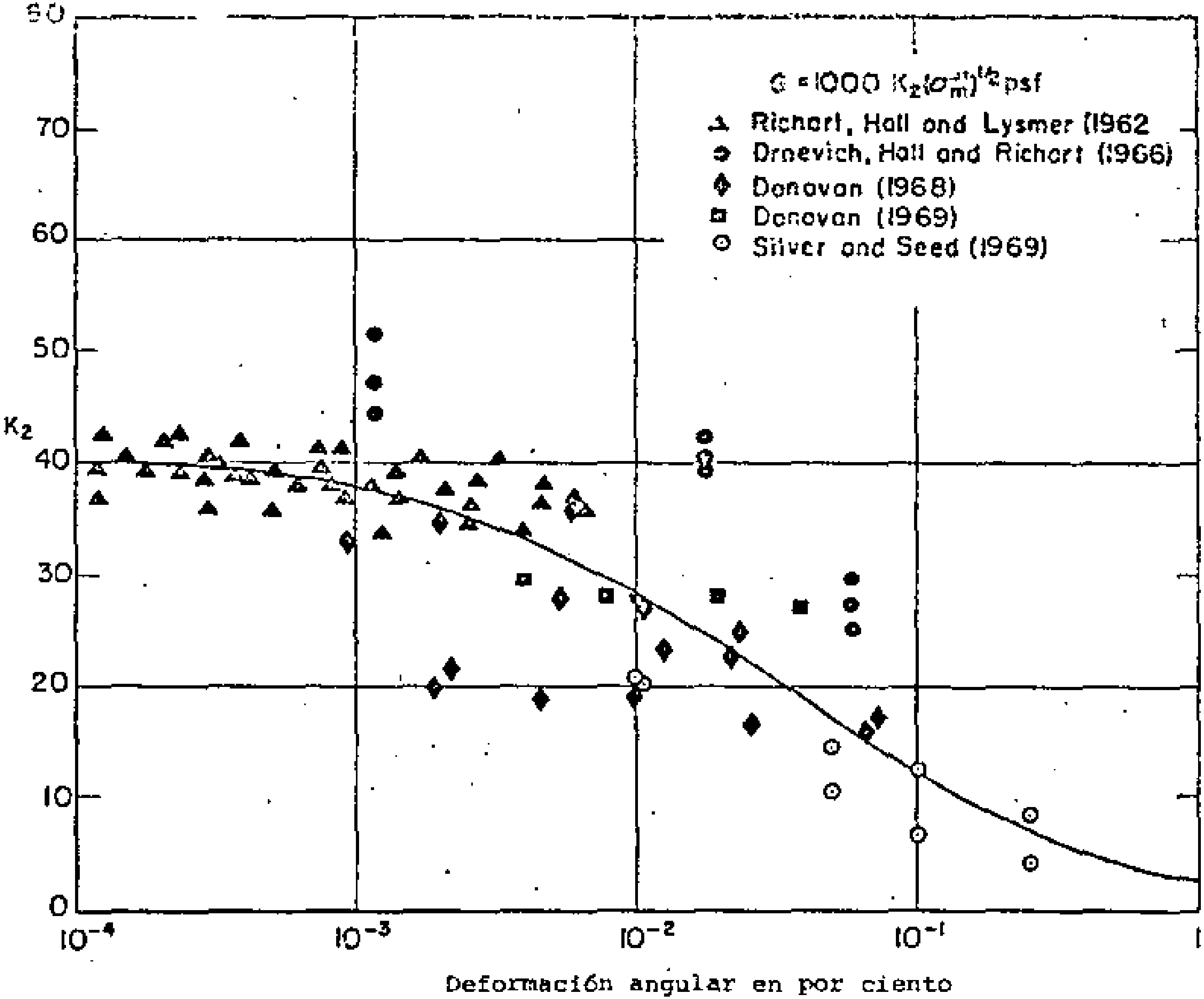


Fig 15 MODULO DE RIGIDEZ AL CORTANTE PARA ARENAS,
C_r = 40% (Seed e Idriss, 1970)

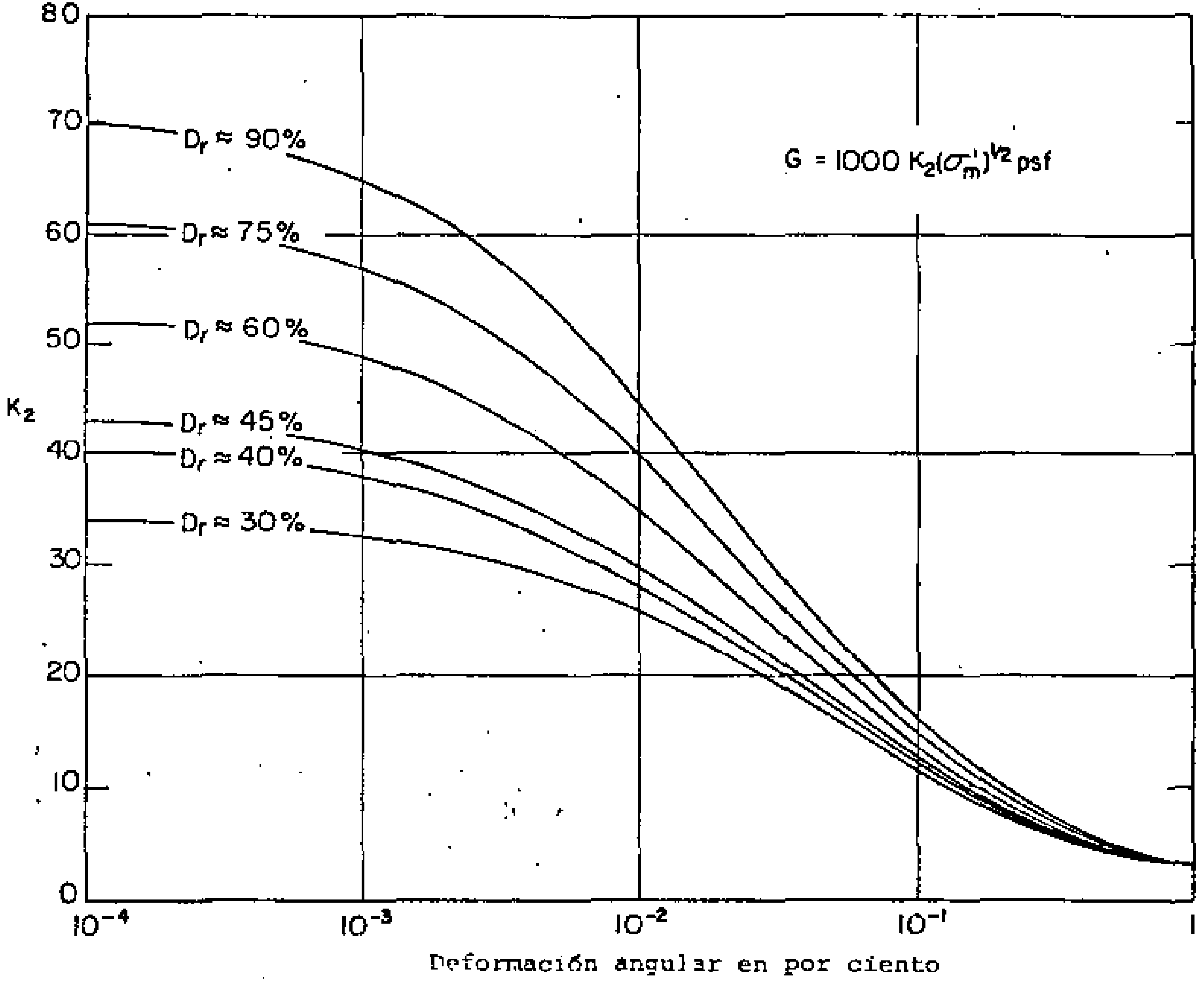


Fig 16 MODULO DE RIGIDEZ AL CORTANTE PARA ARENAS
(Seed e Idriss, 1970)

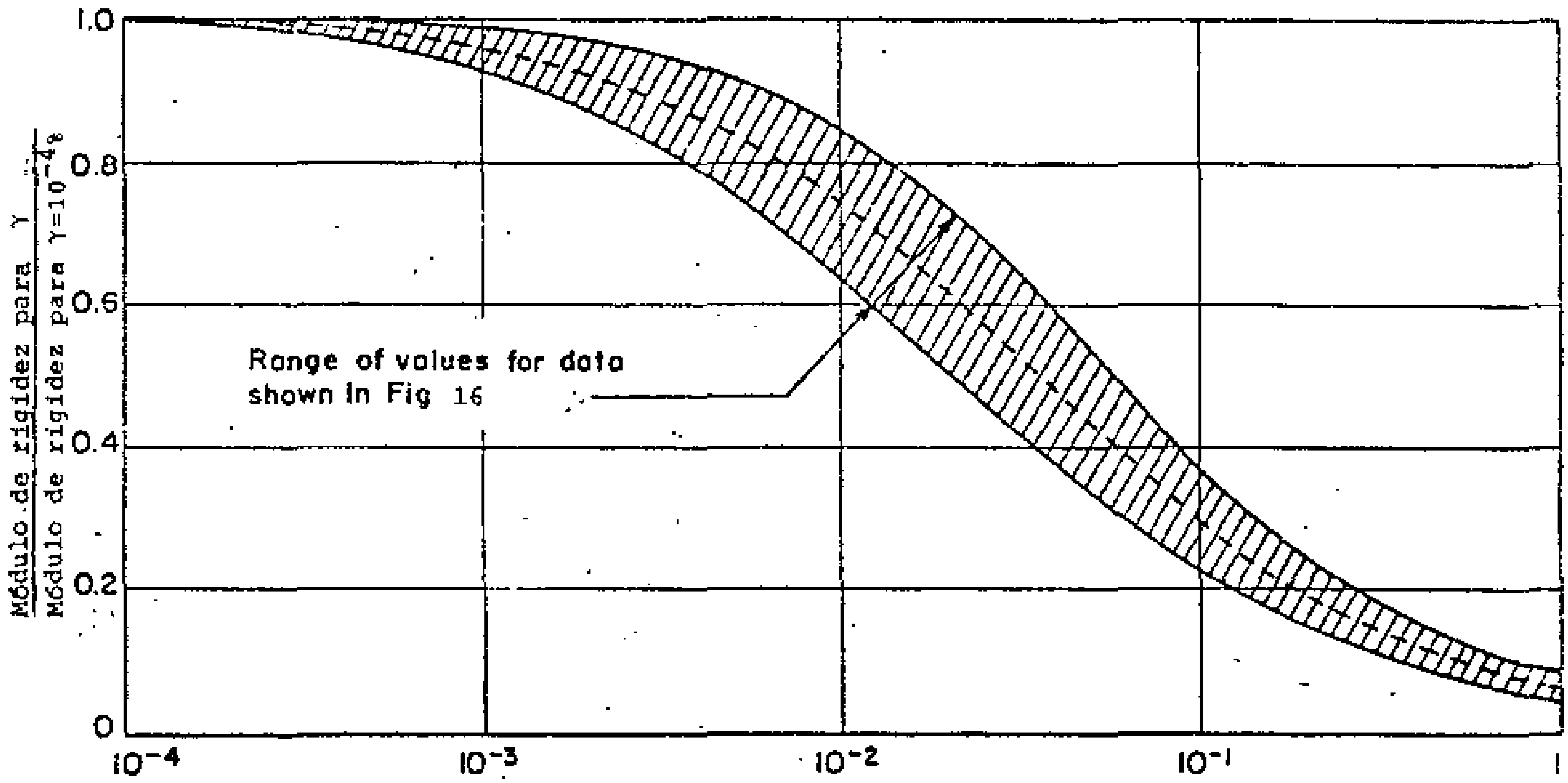


Fig 17 MODULO DE RIGIDEZ AL CORTANTE NORMALIZADO PARA ARENAS
(Seed e Idriss, 1970)

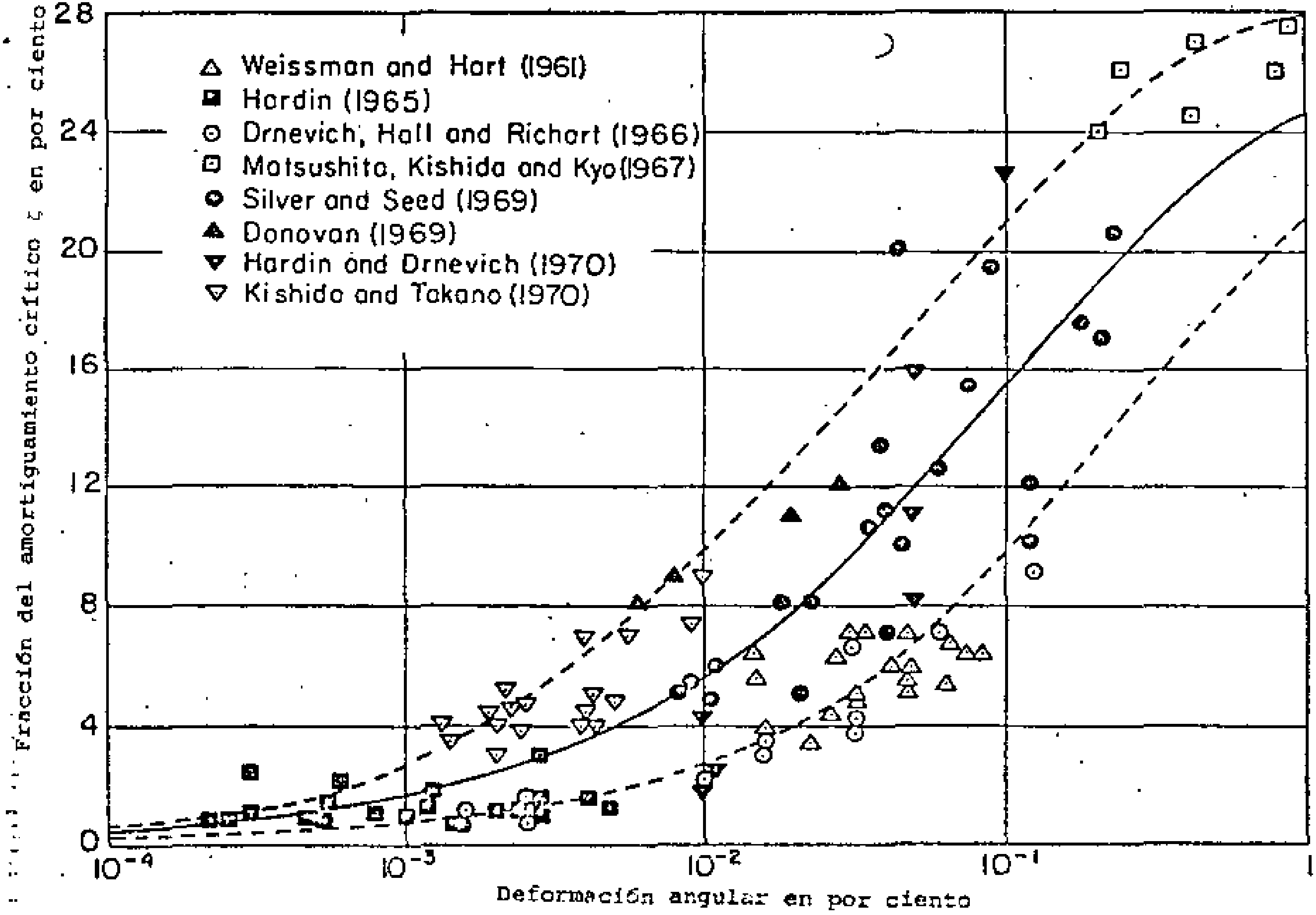


Fig 18 AMORTIGUAMIENTO PARA ARENAS
(Seed e Idriss, 1970)

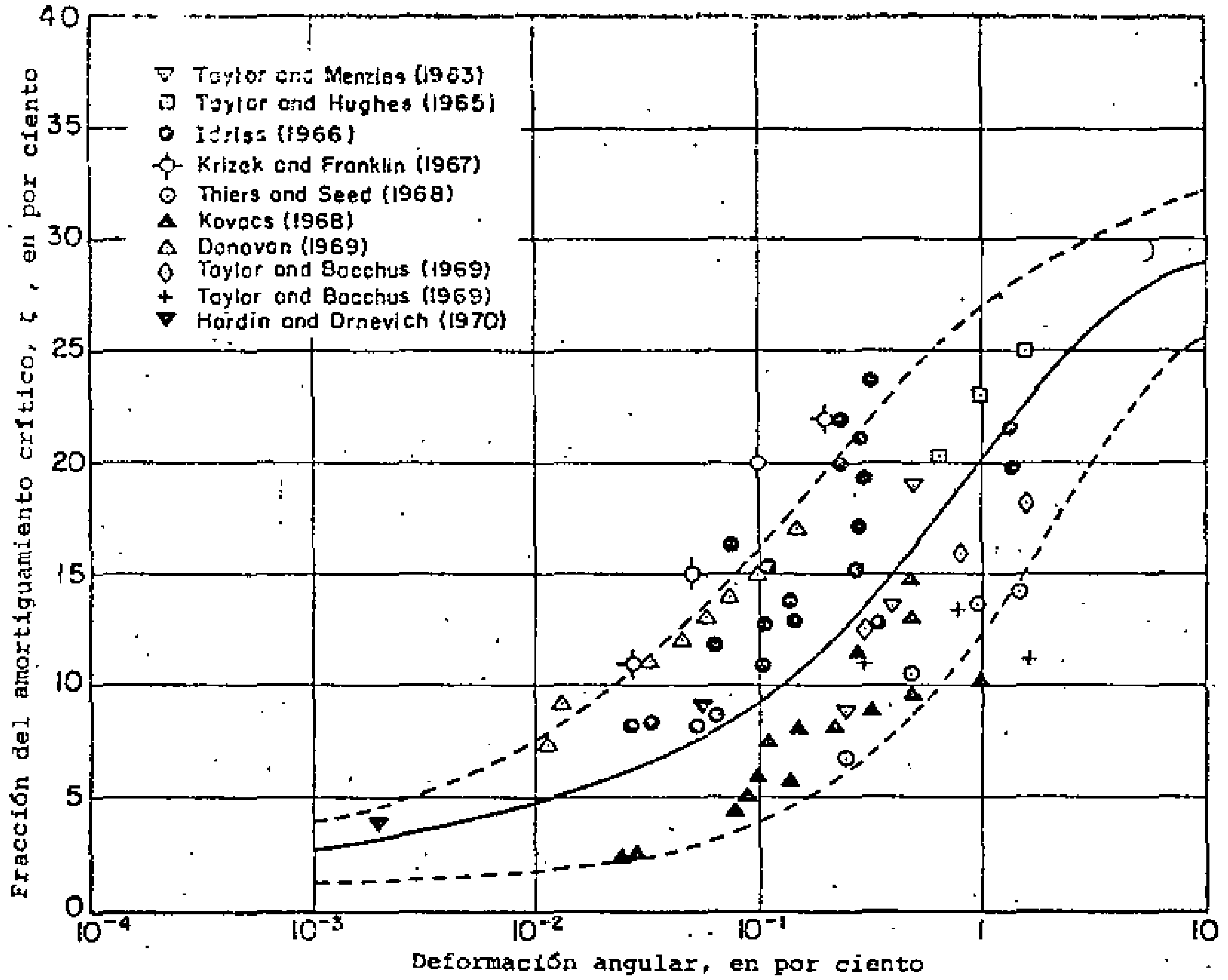
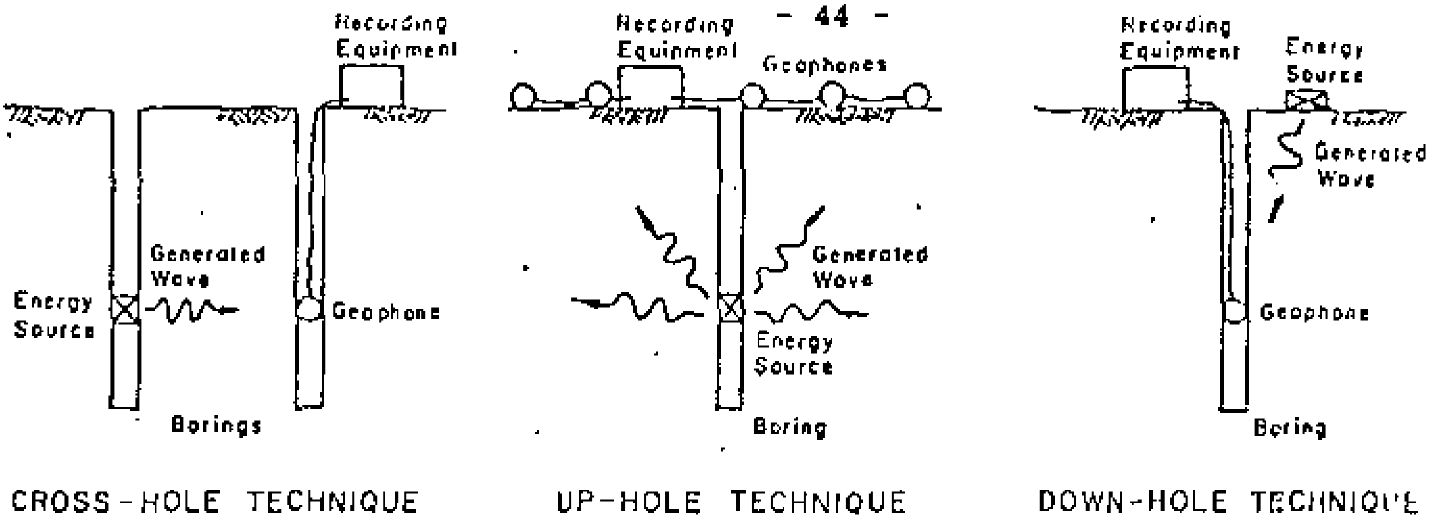
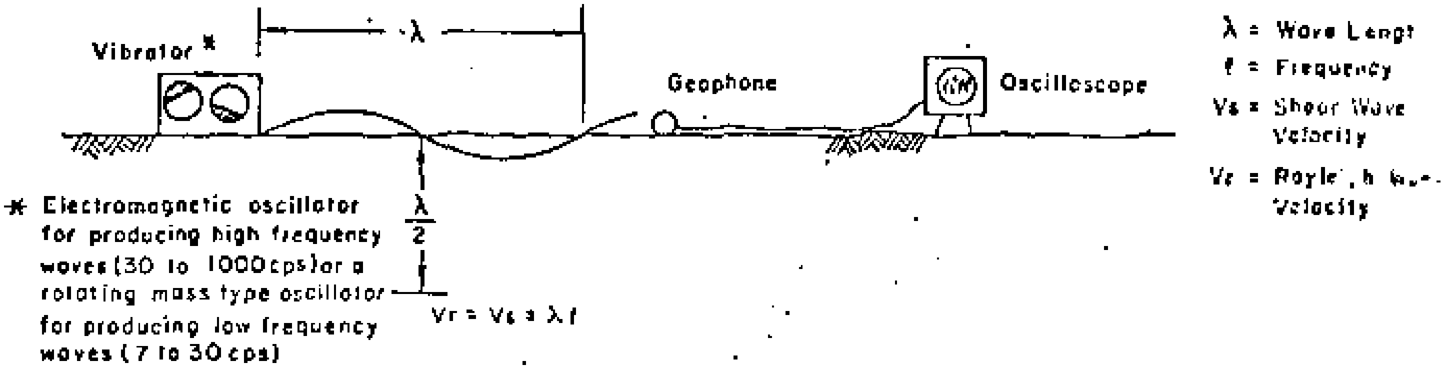


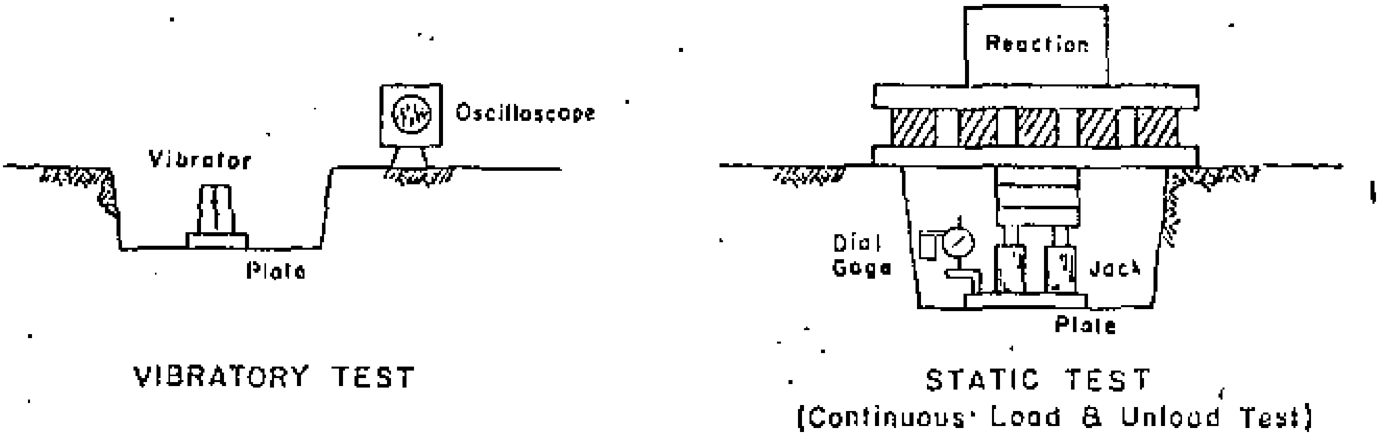
Fig 19 AMORTIGUAMIENTO PARA ARCILLAS SATURADAS



a. Pruebas Geofísicas

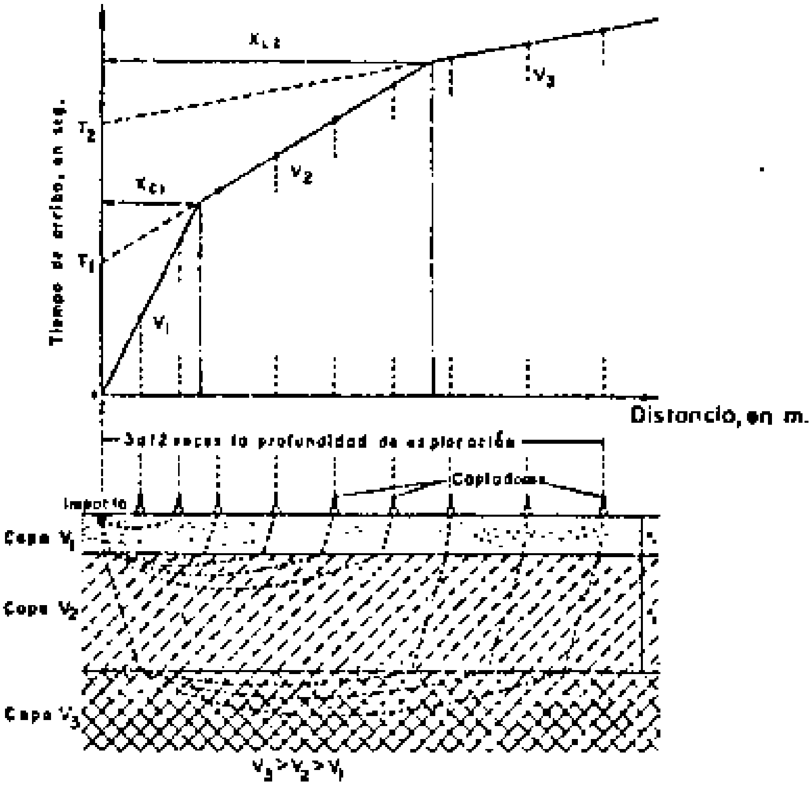


b. Pruebas de Vibración

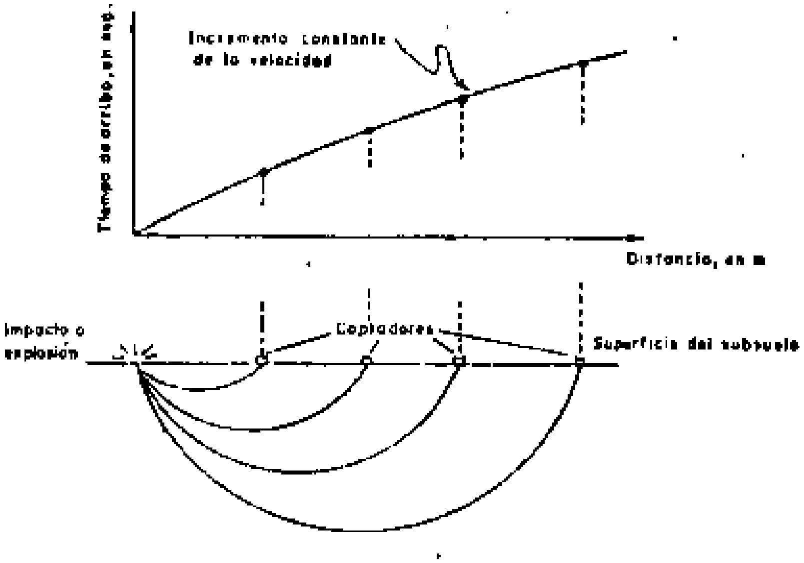


c. Pruebas de Placa

Fig 20 PRUEBAS DE CAMPO PARA DETERMINAR EN MODULO DE RIGIDEZ AL CORTANTE, G. (SW-AJA,1972a)



a) Material estratificado



b) Material homogéneo

Fig. 21 Gráficas distancia - tiempo de llegada en prospección horizontal

centro de educación continua
división de estudios superiores
facultad de ingeniería, unam

V. CURSO INTERNACIONAL DE INGENIERIA SISMICA

DISEÑO SISMICO DE ESTRUCTURAS ESPECIALES

INTERACCION DINAMICA SUELO-ESTRUCTURA DURANTE SISMOS

DR. RAUL FLORES BERRONES
AGOSTO, 1979

Palacio de Minería   Calle de Tacuba 5,   primer piso.   México 1, D. F.

INTERACCION DINAMICA SUELO-ESTRUCTURA
DURANTE SISMOS

Por: RAUL FLORES BERRONES
Profesor de la DESFI
U N A M

I. INTRODUCCION

La interacción dinámica entre una estructura y un suelo se refiere a la manera como se comporta o *responde* un suelo cuando sobre él se encuentra apoyada o encajonada la cimentación de una obra y existen fuerzas dinámicas producidas por sismos o maquinaria.

Como consecuencia de esta interacción se tiene que, dependiendo del tipo de terreno de cimentación, el suelo afecta los movimientos de la estructura y ésta a la vez afecta los movimientos del suelo. En el caso de movimientos originados por sismos, el efecto de interacción quedaría representado por la diferencia en los movimientos de un punto bajo la cimentación de una estructura y los que se tendrían en el suelo si la estructura no existiera. Este efecto sería, por ejemplo, la diferencia en los movimientos que se tendrían entre los puntos A y B de la fig 1; dicha diferencia es menor a medida que la rigidez del suelo aumenta.

Experimentalmente se ha observado que la interacción (refiriéndonos a sus efectos) es más importante en estructuras rígidas (como las de concreto) que en flexibles (como es el caso de las de ace ro), Whitman (Ref 1) señala algunos casos reales donde se ha podido analizar la influencia de la interacción; la tabla 1 reproduce algunos casos de edificios cimentados en diferentes clases de terreno.

TABLA 1. COMPARACIONES DE MOVIMIENTOS HORIZONTALES REGISTRADOS EN CIMENTACIONES DE EDIFICIOS Y LOS REGISTRADOS EN PUNTOS DE SUELO LOCALIZADOS EN CAMPO LIBRE

TIPO DE EDIFICIO	TIPO DE TERRENO DE CIMENTACION	EFECTO DE INTERACCION OBSERVADA	REFERENCIA
Laboratorio sismológico en Pasadena	Arena y grava	Diferencia en movimientos despreciable considerando las variaciones observadas en distintos tipos de terreno	Gutenberg (1957)
Almacén de 43 m	Arena con gravas	La aceleración máxima en el sótano y en la superficie del terreno fueron prácticamente las mismas en el sismo de 1952. Sin embargo, durante el de 1971 la aceleración máxima de la cimentación fue de 0.6 a 0.7 el valor máximo de aceleración en el terreno cercano	Housner (1957) y Whitman (1971)
Edificios de 20 y 25 pisos	Arena y grava	Las aceleraciones máximas y los espectros de respuesta fueron aproximadamente los mismos en los sótanos que en la superficie del terreno	Blume (1969)

continuación tabla 1

Edificios de 13 y 22 pisos	Arcilla	Aceleraciones máximas en las cimentaciones y en el terreno natural, aproximadamente las mismas	Esteva (1969)
Edificios de varios niveles	Arena y grava	Idem	Ohsaki (1969)
Edificio de 5 niveles	Arenisca	Las aceleraciones máximas del edificio, aproximadamente la mitad de las del suelo al nivel del sótano	Osawa (1969)
Edificio en San Francisco de Southern Pacific	Arcilla	Ninguna diferencia importante en los movimientos	Borcherdt (1970)

Los métodos que actualmente se utilizan en el análisis de la interacción son básicamente dos:

a) el llamado del semiespacio que modela al suelo mediante resortes y amortiguadores, y

b) el del elemento finito que idealiza al suelo y las estructuras precisamente en elementos finitos rectangulares o triángulares donde se estiman las deformaciones y esfuerzos.

Ambos métodos tienen sus ventajas y limitaciones, las cuales se señalan más adelante en este trabajo.

Se describe primeramente en que consiste y cómo se aplica el método del semiespacio y posteriormente se indica el uso del método del elemento finito en análisis de interacción junto con algunos ejemplos de aplicación. Se describe también el caso de la interacción del suelo con cimentaciones del tipo profundo (pilas y pilotes).

II. METODO DEL SEMIESPACIO

Este método consiste fundamentalmente en suponer que la estructura se encuentra apoyada o encajonada en un medio semiinfinito elástico y que las restricciones o resistencia que el suelo presenta a los diversos movimientos de la cimentación durante un sismo, se pueden representar por resortes y amortiguadores en la forma señalada por la fig 2.

La determinación de los parámetros que gobiernan el comportamiento de estos resortes y amortiguadores se realiza a partir de la teoría que analiza la respuesta de una masa vibrando sobre un medio semiinfinito elástico (Ref 10). Lo que se hace es determinar primeramente esta respuesta para un cierto modo de vibración y expresarla en la forma como se establece la ecuación de equilibrio en sistemas de un grado de libertad sujetos a ese mismo tipo de vibración. Por ejemplo, para el modo vertical de vibración de una masa circular rígida, la fig 3 muestra cual es la expresión que gobierna su comportamiento y cuales serían los valores de k y c que representan respectivamente la rigidez y el amortiguamiento del suelo. Al amortiguamiento determinado de esta forma se le conoce como radial o geométrico y es debido a la disipación de energía que se efectúa por las ondas que se generan en la zona de excitación y se propagan radialmente alejándose y llevándose parte de la energía generada en esa zona. Para tener el amortiguamiento total, expresado comúnmente en términos del amortiguamiento crítico ($D = \frac{c}{c_{crít}} = \frac{c}{2\sqrt{kM}}$), habrá que sumarle a este amortiguamiento radial el amortiguamiento in terno debido principalmente a la fricción entre las partículas de suelo. La tabla 2 presenta en forma sintetizada los valores de k y D que frecuentemente se usan en la práctica para los diversos modos de vibración.

Ahora bien, respecto a los valores de k y c obtenidos mediante la teoría del semiespacio, conviene señalar que ambos valores dependen de (Ref 10) :

1. El tipo de distribución de esfuerzos en el área de contacto. La fig 4 muestra la influencia de dicha distribución en las curvas de respuesta; a través de estas curvas se puede deducir que los valores de k y c disminuyen considerablemente al cambiar una distribución del tipo rígida a una del tipo parabólica.

2. Estratigrafía. Es obvio que la rigidez y el amortiguamiento del suelo variarían con la profundidad si el terreno de cimentación consiste de estratos cuyas características mecánicas (compresibilidad, resistencia al cortante y permeabilidad) son distintas en cada uno de ellos. Aunque existen procedimientos simplistas para estimar los datos de k y c en base de suponer valores promedios de estas características (Ref 1), actualmente se puede considerar el efecto de la estratificación a través de métodos más exactos (11 y 12).

3. Encajonamiento. En general, el efecto que produce el meter (parcial o totalmente) la cimentación dentro del terreno donde quedará ubicada, consiste en un aumento en la rigidez (k)

TABLA 2. VALORES DE k Y D PARA LOS DIVERSOS MODOS DE VIBRACION PARA UNA CIMENTACION CIRCULAR RIGIDA, OBTENIDOS A PARTIR DE LA TEORIA DEL SEMIESPACIO

TIPO DE EXCITACION	k	D*
Vertical	$\frac{4GR}{1-\nu}$	$0.85\sqrt{\frac{\rho R^3}{M(1-\nu)}}$
Horizontal	$\frac{8GR}{2-\nu}$	$0.58\sqrt{\frac{2\rho R^3}{M(2-\nu)}}$
Cabeceo	$\frac{8\ GR^3}{3(1-\nu)}$	$\frac{0.15}{(1+B_r)\sqrt{B_r}}$
Torsión	$\frac{16GR^3}{3}$	$\frac{0.5\rho R^5}{\rho R^5+2I_t}$

* A este amortiguamiento hay que sumarle el interno para tener el valor del amortiguamiento total.

$$B_r = \frac{3(1-\nu)I}{8\ \rho R^5}$$

I = momento de inercia con respecto al eje de cabeceo

I_t - momento de inercia respecto al eje vertical de rotación y en el amortiguamiento (D). La tabla 3 presenta las recomendaciones que da Whitman (1) para tomar dicho efecto en cuenta. La fig 5 ilustra la forma como quedaría una cimentación encajonada.

4. Forma de la cimentación. Para calcular el valor de k correspondiente a los diversos modos de vibración en una cimentación cuadrada o rectangular, se puede hacer uso de la tabla 4 y la fig 6. En el caso del amortiguamiento éste se puede estimar calculando el radio de una cimentación equivalente con la misma área (modos vertical u horizontal) o igual momento de inercia (modos torsional o de cabeceo) que la cimentación real, y utilizando los valores presentados en la tabla 2.

5. Nivel de deformaciones. Según se puede observar en la fig 7, el valor del módulo al cortante G (del cual depende directamente el valor de la rigidez k) y el valor del amortiguamiento interno dependen del nivel de deformaciones. Para valores menores de la deformación al cortante γ, de 10^{-4}%, se ha observado que para la mayoría de los suelos tanto G como D_{int} se mantienen constantes; para valores de γ mayores de esta frontera, el valor de G disminuye y el de D aumenta en la forma ilustrada en la fig 7. Este efecto habrá de tomarse en cuenta en los valores de estos dos parámetros (G y D_{int}) determinados mediante ensayes de laboratorio o pruebas de campo (Ref 13). La misma fig 7 indica el rango de deformaciones al cortante con el que se efectúan

TABLA 3. EXPRESIONES APROXIMADAS PARA CONSIDERAR EL EFECTO DE ENCAJONAMIENTO

MODO	k/k_o	D/D_o
Vertical	$1+0.6(1-\nu)\frac{h}{R}$	$\frac{1+1,9(1-\nu)h/R}{\sqrt{k/k_o}}$
Horizontal	$1+0,55(2-\nu)\frac{h}{R}$	$\frac{1+1.9(2-\nu)h/R}{\sqrt{k/k_o}}$
Cabeceo	$1+1,2(1-\nu)\frac{h}{R}+$ $0,2(2-\nu)\,{\frac{h}{R}}^{3}$	$\frac{1+0,7(1-\nu)\frac{h}{R}+0,6(2-\nu)\,{\frac{h}{R}}^{3}}{\sqrt{k/k_o}}$

Notas: K_o y D_o son los valores de la rigidez y el amortiguamiento correspondientes a cimentaciones superficiales; h es la profundidad de encajonamiento y R el radio equivalente.

TABLA 4. CONSTANTES DE RESORTE PARA UNA BASE RECTANGULAR RIGIDA APOYADA EN EL SEMIESPACIO

MOVIMIENTO	CONSTANTE DE RESORTE *
Vertical	$k_v = \frac{G}{1-\nu}\,\beta_v\sqrt{BL}$ **
Horizontal	$k_h = 2(1+\nu)G\beta_h\sqrt{BL}$
Cabeceo	$k_r = \frac{G}{1-\nu}\,\beta_r BL^2$

* Los valores de β_v, β_h y β_r están dados por la fig 6

** B = ancho de la cimentación y L = longitud de la cimentación (en el plano de rotación en caso de cabeceo) los procedimientos más comunes para la determinación de G y D; nótese que el rango de deformaciones que abarca la mayoría de los sismos se encuentra aproximadamente entre 10^{-3} y 10^{-1} %.

6. Esfuerzos de confinamiento. Se ha observado experimentalmente que el valor de G (o de k) es proporcional a $\bar{\sigma}_o^{1/2}$, donde $\bar{\sigma}_0$ es el esfuerzo normal octaédrico efectivo ($= \frac{\bar{\sigma}_1 + \bar{\sigma}_2 + \bar{\sigma}_3}{3}$). De hecho, una fórmula semiempírica utilizada frecuentemente para estimar el valor de G, es la siguiente (Ref 14)

$$G_{máx} = 14{,}760 \left(\frac{2.97 - e}{1+e}\right) \bar{\sigma}_o^{1/2} \qquad (1)$$

donde

$G_{máx}$ es el máximo valor del módulo al cortante expresado en libras/pie^2, y "e" es la relación de vacíos del suelo

La fig 8 muestra que, para el caso de arenas, el efecto de aumentar los esfuerzos de confinamiento se traduce en una disminución del amortiguamiento. La experiencia que hasta ahora se tiene en el caso de las arcillas indica que la variación de los esfuerzos de confinamiento influye muy poco en los valores de amortiguamiento interno.

Para una correcta consideración de este efecto, es importante tomar en cuenta que la magnitud de los esfuerzos de confinamiento para un punto del terreno de cimentación, son función de: a) la profundidad en la que se localiza dicho punto y b) las fuerzas estáticas y dinámicas producidas por la estructura y la cimentación.

7. Relación de vacíos. La ecuación (1) muestra la influencia de la relación de vacíos "e" en el valor de G ; en el caso de arenas esta influencia se puede señalar en términos de la densidad relativa, ya que existe una relación directa entre ambos conceptos. La fig 9 indica dicha influencia. El efecto de e en el amortiguamiento es muy pequeño en comparación con la influencia que sobre él ejercen los demás efectos.

8. Otros efectos. Flores (Ref 13) señala la influencia que ejercen sobre k algunos otros factores como son la duración de la carga y la historia de esfuerzos. Dichos factores se deberán también tomar en consideración para la correcta interpretación de los ensayes de laboratorio.

Del análisis efectuado sobre un modelo en tres dimensiones, similar al de la fig 2, se obtuvieron las siguientes conclusiones (Ref 1):

1) Durante un temblor la interacción puede aumentar la respuesta al moverse el período fundamental de un valle a un valor máximo en el espectro de respuesta (ver fig 10).

2) Desde el punto de vista de diseño, la interacción producida por el movimiento de cabeceo tiende a disminuir los esfuerzos dentro de la estructura debido a que se aumenta el período fundamental y, por tanto, disminuye la aceleración espectral para el primer modo de vibración (fig 11).

3) La interacción que producen los movimientos horizontales de una estructura puede conducir a incrementar los esfuerzos de la estructura, a menos que el efecto causado por el aumento en el amortiguamiento anule dicho incremento.

4) La interacción aumenta el desplazamiento total cerca de la parte superior de la estructura.

Al hacer una combinación de todos los factores que intervienen en el análisis de interacción a través del modelo señalado, se concluyó que en general la interacción disminuye los esfuerzos en una estructura.

Un estudio semejante al anterior, pero sobre modelos de varios grados de libertad, indicó que los efectos resultantes de la interacción eran muy semejantes a los obtenidos en el modelo de 3 grados de libertad, y que la importancia global de la interacción se puede en general estimar considerando el efecto de la interacción sobre el primer modo de vibración.

VENTAJAS Y DESVENTAJAS DEL METODO

Las principales ventajas del método del semiespacio en el análisis de interacción son:

a) es un método simple, versátil y fácil de aplicar una vez que se han estimado convenientemente la inercia, las rigideces y los elementos de amortiguamiento en el sistema suelo-estructura

b) a través de él se pueden estimar las respuestas básicas y efectuar estudios paramétricos en un tiempo razonablemente corto

c) permite comprender o entender más fácilmente el mecanismo de la interacción entre el suelo y la estructura

d) puede considerar una configuración tridimensional.

Entre las desventajas se tienen las siguientes (Ref 16):

1. No toma en cuenta la variación de las aceleraciones del suelo con la profundidad ya que por lo general supone que dicha aceleración es constante; en la realidad el suelo se deforma y las aceleraciones durante sismos no tienen porque ser constantes.

2. Se considera que la aceleración en la base de la cimentación es la misma que la de campo libre; aquí no se está tomando en cuenta la forma como la estructura modifica los movimientos del suelo y, por tanto, no se está considerando convenientemente la influencia de la interacción en dichos movimientos de ambos elementos (suelo y estructura).

3. Existen dificultades en evaluar correctamente los efectos combinados del amortiguamiento radial y el interno; resulta que por lo general el amortiguamiento interno se estima y al radial se le aplica un factor de seguridad de dos, dando como resultado evaluaciones de la respuesta que pueden estar muy del lado de la seguridad.

4. Los efectos en la interacción debido a otras estructuras vecinas, no son tomados en cuenta mediante este procedimiento.

5. El método del semiespacio no proporciona directamente las deformaciones que se producen en el suelo, lo cual significa dificultad de seleccionar apropiadamente el módulo de deformación (que sabemos depende precisamente del nivel de deformaciones).

III. METODO DEL ELEMENTO FINITO

La secuencia que se utiliza en la aplicación del método del elemento finito para análisis de interacción, se muestra en la fig 12. En dicha figura se puede observar que el primer paso requerido se refiere a la determinación de los movimientos en el estrato resistente, lo cual permitirá producir ciertos movimientos especificados en un punto de control; esto se puede hacer a través de un programa apropiado de computadora en el que se hace, por ejemplo, un análisis de amplificación del suelo en el campo libre. El segundo paso está encaminado a utilizar esta misma excitación para un análisis bidimensional del sistema suelo-estructura y determinar los movimientos en ciertos puntos claves, tales como la cimentación y el primer nivel de la estructura.

Conviene señalar que al emplear este método es posible utilizar valores adecuados de las propiedades del suelo (compatibles a los niveles de deformación calculados) a lo largo todo el perfil estratigráfico correspondiente al sitio en cuestión; esto se hace a través de un procedimiento iteractivo de convergencia rápida. Un ejemplo donde se aplicó este método se muestra en las figs 13 a 15.

En la última de estas figuras, donde se presentan los resultados del ejemplo, se puede observar que el espectro de respuesta correspondiente a los movimientos de un punto alejado de la estructura (como es el punto A), es muy similar al espectro del punto de control en el campo libre; nótese también que los movi mientos calculados en la base y en el primer nivel de la estructura, son significativamente diferentes a los obtenidos en los mismos niveles en el campo libre.

Las principales ventajas de este método son las siguientes (Ref 16):

1. El análisis puede tomar en consideración la *deformabilidad* del suelo vecino a la estructura y las variaciones de las aceleraciones a lo largo del perfil de suelos.

2. El análisis no involucra que los movimientos en la base de la estructura y en el campo libre sean necesariamente los mismos.

3. El procedimiento que se emplea permite determinar los *movimientos* del suelo cercano a la estructura.

4. La compatibilidad del módulo de deformación y el amortiguamiento del suelo con el nivel de las deformaciones se puede tomar en cuenta en una forma racional.

5. Se puede incorporar al análisis el amortiguamiento interno; además, el radial se incluye apropiadamente.

6. Se pueden considerar los efectos de estructuras adyacentes.

Entre los inconvenientes que presenta el método del elemento finito están:

1. Se requiere un amortiguamiento variable en el sistema suelo-estructura y en ocasiones dicha variación no se toma en

cuenta convenientemente. Es decir, debido a la variación del nivel de las deformaciones en los distintos puntos del suelo y la estructura, es necesario controlar la variación de los amortiguamientos; sin embargo, algunos procedimientos hasta ahora empleados para dicho control no son del todo perfectos y producen ciertos errores en la respuesta. La fig 16 muestra los resultados obtenidos en el ejemplo de la fig 11 utilizando dos procedimientos diferentes para tomar en cuenta la variación de los amortiguamientos con el nivel de las deformaciones; de la observación de la fig 15 se puede deducir lo siguiente: 1) existen diferencias notables en los resultados y 2) es muy conveniente utilizar para el análisis con elemento finito, procedimientos que consideren amortiguamiento variable.

2. Cuando el amortiguamiento se expresa como una combinación lineal de las matrices de masa y rigidez del sistema para considerar la variación del amortiguamiento en los distintos elementos, se tiene que la proporción del amortiguamiento crítico aumenta con la frecuencia a medida que ésta crece. Esta dependencia del amortiguamiento sobre la frecuencia puede conducir a valores muy altos del amortiguamiento para frecuencias altas, lo que hará que la respuesta durante las mismas sea prácticamente nula; este hecho es de importancia para el caso de instalaciones de equipo con altas frecuencias naturales de vibración.

3. Se requiere un control muy cuidadoso de la selección del tamaño de los elementos finitos en la malla, en particular en la dirección vertical y en los casos donde los efectos de las altas frecuencias son importantes. A fin de que exista una efectiva trasmición de ondas en el sentido que estas se propagan, Kuhlemeyer y Lysmer (Ref 17) han propuesto que el tamaño de la malla no deberá ser mayor de 1/4, y de ser posible 1/8, de la longitud de onda del movimiento. La fig 17 muestra este efecto para ondas de corte trasmitiéndose en el sentido vertical.

4. Influencia de la extensión de la malla de los elementos finitos. Resulta que una malla muy extensa lateralmente requiere mucho tiempo de computación y si las fronteras de dicha malla se colocan muy cerca de la estructura, parte de la energía que se debería disipar se regresa ocasionando cambios en la respuesta. Una de las formas como se ha vencido este inconveniente es a través del uso de fronteras absorventes de energía (Refs 18 y 19).

5. Los análisis que se efectúan a través del elemento finito generalmente se hacen utilizando modelos bidimensionales; esta simplificación puede conducir a errores hasta del 20% en los movimientos calculados en la base de una estructura. Esta deficiencia está, sin embargo, siendo actualmente eliminada mediante el desarrollo de análisis tridimensionales que utilizan programas no muy caros de computación.

INTERACCION SUELO-PILOTES-ESTRUCTURA

En el momento que una estructura piloteada experimenta los movimientos de un sismo, sobre los pilotes ocurren dos tipos de acciones. La primera de ellas es producida por el suelo que los rodea, el cual induce fuerzas a lo largo del pilote durante su movimiento (fig 18). La segunda acción es debida a las fuerzas que trasmite la estructura a la cabeza de los pilotes; es decir, al efecto de la fuerza cortante y el momento de volteo que la superestructura tiene durante un sismo al nivel de la base (fig 19).

Por efecto del momento de volteamiento, es obvio que los pilotes de la orilla tendrán que soportar, por un lado, fuerzas adicionales verticales, pero en el lado opuesto se tendrán fuerzas de tensión que habrán que considerarse en la revisión por análisis sísmico. Las fuerzas horizontales producidas por el movimiento de traslación de la estructura, son fuerzas que actúan prácticamente sobre la cabeza de los pilotes; ello significa que es necesario analizar cuidadosamente los esfuerzos en esa parte del pilote, ya que en ella se tendrá por lo general un punto crítico.

En cuanto al efecto que produce el suelo que rodea al pilote; se puede estudiar fácilmente si se supone que no existe la carga vertical que se apoya sobre el pilote, y que el pilote se encuentra simplemente hincado dentro de un estrato de suelo (fig 18).

Al ocurrir un sismo, el suelo se mueve como consecuencia del mismo, y tenderá a mover al pilote junto con él; habrá por tanto fuerzas del suelo que harán que precisamente se mueva el pilote. Una manera de absorber las fuerzas laterales provenientes de la superestructura, es a través de encajonamiento (fig 20). Es decir, a través de empujes pasivos del terreno de cimentación, se pueden absorber las fuerzas sísmicas que la superestructura trata de trasmitir a los pilotes a través de su cabeza; este procedimiento resulta práctico cuando se desea disminuir el refuerzo en la parte superior de los pilotes. Las referencias 20 y 21 tratan con detalle el análisis sísmico de cimentaciones piloteadas.

Ahora bien, considerando solo la acción del suelo, se puede decir que la mayoría de los pilotes siguen más o menos el desplazamiento del mismo; sin embargo, como lo demuestra Ohsaki (Ref 7), existen elementos rígidos como los cilindros y pilas de gran diámetro que afectan considerablemente la respuesta sísmica de las estructuras que sobre ellos se apoyan. Al observar las figs 21 y 22 se puede ver como la rigidez de las cimentaciones sobre pilas hace que los valores máximos de los espectros de respuesta en suelos blandos ocurran en períodos más cortos en comparación a los que se tienen en cimentaciones piloteadas.

De acuerdo con la Ref 20, se puede establecer un límite a partir del cual la rigidez de los pilotes no afectan la respuesta de la estructura; en la misma se indica que para el caso de suelos homogéneos, dicho límite está dado por:

Pilotes flexibles $\lambda \geq 5$

Pilotes rígidos $\lambda < 5$

donde

$$\lambda = \frac{kDH^4}{4EI}$$

k	módulo de reacción horizontal del suelo
D	diámetro del pilote
H	longitud del pilote
EI	producto del módulo de Young por el momento de inercia del pilote

En el caso de pilotes dentro del rango flexible (en el cual caen la mayoría de los elementos que en la práctica se conocen como pilotes), se puede aplicar el siguiente procedimiento simplista para estimar los movimientos de un pilote y su interacción con el suelo y la estructura.

1) Calcular el desplazamiento superficial del suelo (sin estructura) causado por el sismo de diseño; dicho desplazamiento para el caso que se está considerando es el mismo que el de los pilotes. Este cálculo se puede hacer mediante uno de los programas de computadora que se utilizan para encontrar la respuesta del suelo a un sismo. (Por ejemplo el que considera la teoría de amplificación).

2) La aceleración en la cabeza del pilote encontrada en el paso (1), se multiplica por la masa de la estructura que se considera apoyada sobre el pilote para obtener la carga inicial apli

cada en su cabeza; esta carga causa desde luego desplazamientos adicionales en la estructura y en el pilote.

En este segundo paso se pueden reemplazar los pilotes por resortes y amortiguadores que representen la resistencia de los pilotes al desplazamiento o rotación de su cabeza. Dichos elementos se obtienen en la misma forma como se indicó en el método del semiespacio. [Para considerar en este segundo paso los efectos de interacción entre los pilotes que actúan en grupo, se pueden emplear los factores de interacción usados en problemas estáticos (Ref 22)].

3) Se suman los resultados obtenidos en los pasos (1) y (2) para obtener la respuesta total del pilote.

Desde luego que el análisis de interacción suelo-pilote estructura se puede hacer también a través del método de elementos finitos utilizando modelos tridimensionales (Refs 20 y 23). El problema que se ha encontrado hasta ahora con dicho método es el de modelar adecuadamente a grupos de pilotes en tres dimensiones. La Ref 24 trata con mayor amplitud la respuesta de pilotes sometidos a perturbaciones sísmicas.

CONCLUSIONES

En este trabajo se ha señalado en forma general en que consisten cada uno de los dos métodos que actualmente se utilizan para el análisis de interacción suelo estructura. Para el entendimiento del mecanismo de interacción, el método del semiespacio presenta mayor ventaja sobre el del elemento finito; sin embargo, este último método ofrece en general más ventajas y la tendencia actual en la práctica común del análisis consiste precisamente en utilizarlo cada vez más.

Aunque para la mayoría de las estructuras que se han analizado ha resultado que el efecto de la interacción ayuda a las estructuras en su comportamiento durante sismos, y por tanto si no se considera dicho efecto se estará del lado conservador, para otras estructuras ha resultado que tal efecto es perjudicial al señalado comportamiento. Por otro lado si se toma en cuenta que actualmente se disponen de herramientas adecuadas para hacer correctamente este análisis, es siempre conveniente el llevarlo a cabo, en particular en estructuras importantes donde el efecto de interacción puede ser grande.

Para el caso de la interacción suelo-pilote, es indispensable tomar en consideración el efecto del movimiento del terreno de cimentación durante sismos; dicho efecto es frecuentemente ignorado por una gran mayoría de analistas.

...

REFERENCIAS

1. Whitman, R.V., 1971, '*Apuntes de Dinámica de Suelos*", M.I.T.
2. Gutenberg, B., "*Effect of Ground on Earthquake Motion*", Bull Seismological Soc Am., Vol 47, pp 221-250
3. Housner, G.W., 1957, "*Interaction of Building and Ground During an Earthquake*", Bull Seismological Soc Am., Vol 47, No. 3, pp 179-186
4. Whitman, R.V., J.T. Christian and J.M. Biggs, 1971, "*Parametric Analysis of Soil-Structure Interaction for Reactor Building*", 1st International Conference on Structural Mechanics and Reactor Technology, Berlin, 1971, Session K3, paper No. 7
5. Blume, J.A., 1969, "*Response of High Rise Buildings to Ground Motion from Underground Nuclear Detonations*", Bull Seismological Society Am., Vol 58, No. 6
6. Esteva, L., O. Rascón y A. Gutiérrez, 1969, "*Lessons from Some Recent Earthquakes Buildings in Latin America*", Proc 4th World Conf on Earthquake Engineering, Santiago, Chile, Vol III, Section J-2, pp 58-73
7. Ohsaki, Y., 1969, "*Effects of Local Soil Conditions upon Earthquake Damage*", Proc Soil Dynamics Specialty Session, 7th Interntl. Conf. Soil Mech and Found Engineering, Mexico City
8. Osawa, et al, 1969, Proc Soil Dynamics Specialty Session 7th Interntl. Conf Soil Mech and Found Engineering, Mexico City
9. Borcherdt, R.W. 1959, "*Effect of Local Geology on Ground Motion Near San Francisco Bay*", Bull Seismological Soc America
10. Flores, J.R., 1977, "*Parametros de Diseño en Cimentaciones de Maquinaria*", Publicación No. 389 del Instituto de Ingeniería, UNAM
11. Kausel, E. Roesset, J.M. y Waas, G., 1975, "*Dynamic analysis of Footings on Layered Media*", Procs ASCE, 101, EM-5, pp 679-95
12. Johnson, G.R. Christiano, P. y Howard, I., 1975, "*Stiffness Coefficients for embedded Footings*", Journal of the Geotechnical Engineering Division, ASCE, 101, Gt8, pp 789-800
13. Flores, J.R., 1978, "*Comportamiento Dinámico de Suelos*", Cap III de Apuntes de Dinámica de Suelos; DESFI, UNAM

14. Hardin, B.D. y Drnevich, V.P., 1972, "*Shear Modulus and Damping in Soils II.* Design equations and curves, Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division, Procs ASCE, 98, SM7, pp 667-92

15. Seed, H.B. e Idriss, I.M., 1970, "*Soil Moduli and Damping Factors for Dynamic Response Analysis*", EERC 70-10, University of California, Berkeley

16. Seed, H.B., Lysmer, J., and Hwang, R., 1974, "*Soil-Structure Interaction Analysis for Evaluating Seismic Response*", EERC 74-6, University of California, Berkeley

17. Kuhlemeyer, R.L. and Lysmer, J., 1973, "*Finite Element Method Accuracy for Wave Propagation Problems*", Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division, ASCE, Vol 99, No. SM5, pp 421-427

18. Lysmer, J. and Kuhlemeyer, R.L., 1969, "*Finite Dynamic Model for Infinite Media*", Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE, Vol 95, No. EM4, Proc paper No. 6719, pp 859-877

19. Isenberg, J., 1970, "*Interaction Between Soil and Nuclear Reactor Foundation During Earthquakes*", Report to the Research Foundation, University of Toledo

20. Flores, J.R., 1977, "*Respuesta Dinámica de Pilotes de Punta Sujetos a Sismos*", Sección de Mecánica de Suelos, DESFI, UNAM

21. Zeevaert, L., 1976, "*Dragging Forces on Pier Foundations*", Cimientos Profundos Colados en Sitio, pp 39-75. Sociedad Mexicana de Mecánica de Suelos, 1976

22. Poulos, H.G., 1971-b, "*Laterally Loaded Piles: II-Pile Group*", Journal ASCE, Vol 97, No. SM5

23. Blaney, G.W., 1974, "*Dynamic Stiffness of Piles*", Tesis de Maestría, M.I.T.

24. Flores, J.R., 1978, "*Respuesta de Pilotes Sometidos a una Perturbación Sísmica*", Revista de Ingeniería, Vol XLVIII, No. 1, Enero-marzo

25. Barneich, J.A., Johns, D.H., and McNeill, R.L., "*Soil Structure Interaction Parameters for a Seismic Design of Nuclear Power Stations*", Woodward-McNeilland Associates

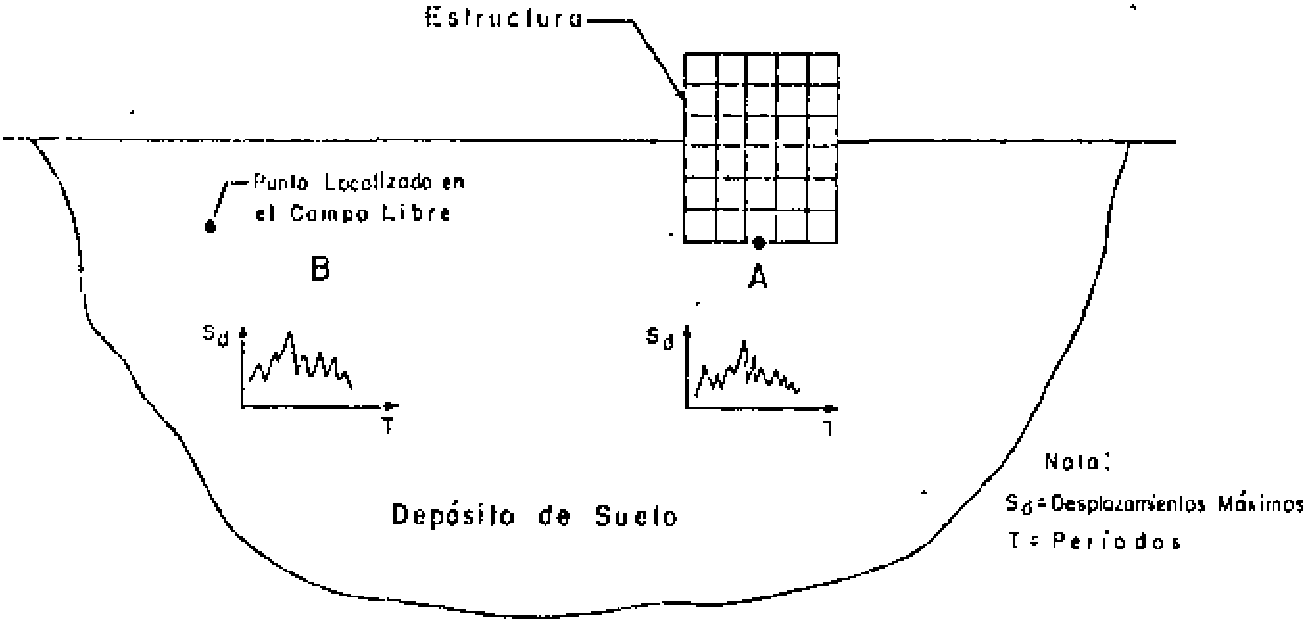


FIG. I CARACTERIZACION DE LA INTERACCION SUELO-ESTRUCTURA MEDIANTE LA DIFERENCIA EN LA RESPUESTA A UN SISMO DE LOS PUNTOS A y B

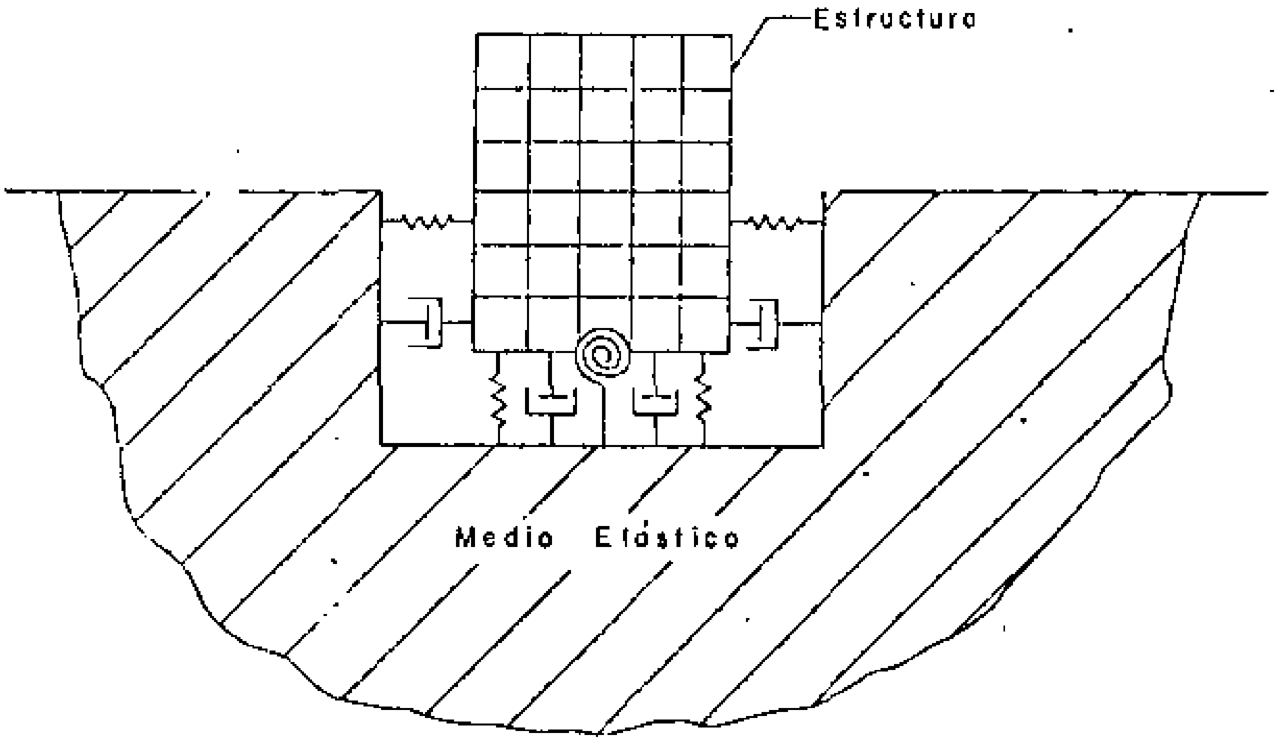
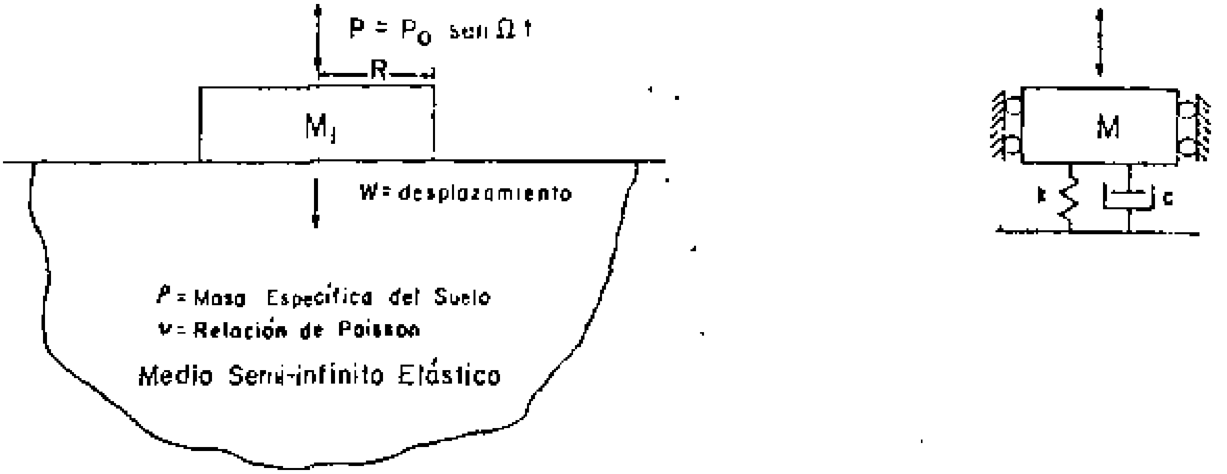


FIG. 2 MODELO DE INTERACCION USANDO LA TEORIA DEL SEMIESPACIO



a) Sistema de una masa circular rígida vibrando verticalmente sobre la superficie de un semiespacio elástico

b) Sistema equivalente con parámetros M, k y c constantes

FIG. 3 DETERMINACION DE LOS PARAMETROS k Y c EN UN SISTEMA SUJETO A CARGAS DINAMICAS VERTICALES

Ec. que gobierna el comportamiento de la masa M_1 :

$$M\ddot{W} + c\dot{w} + kw = P$$

donde $M = M_1 + M_2$

$$c = F\,C_v \simeq F\frac{4}{1-\nu}\sqrt{G\rho}\,R^2$$

y $$k = \frac{4\,GR}{1-\nu}$$

M_2 es una masa virtual de suelo que varía con la frecuencia de excitación; para fines prácticos M_2 es aproximadamente:

$M_2 \approx \dfrac{1.03\,\rho R^3}{1-\nu}$. Sin embargo muchos autores prefieren usar $M_2 = 0$ y hacer $M = M_1$

F es una función que depende también de la frecuencia de excitación Ω ; sin embargo, para el rango de frecuencias donde caen la mayoría de los problemas prácticos, $F_2 \simeq 0.85$.

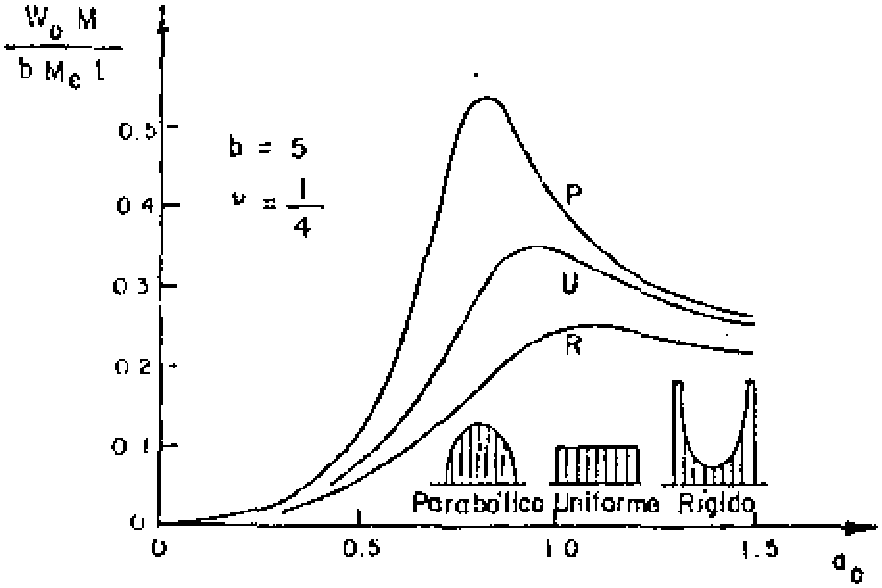


FIG. 4 EFECTO DEL TIPO DE DISTRIBUCION DE ESFUERZOS EN LAS CURVAS DE RESPUESTA (REF. Nº I)

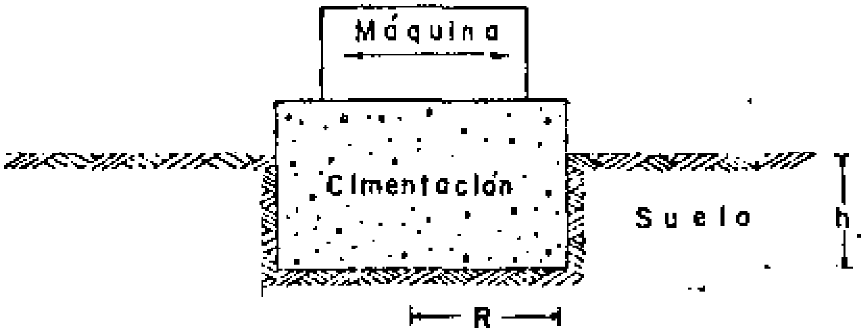


FIG. 5 CIMENTACION ENCAJONADA DENTRO DEL TERRENO

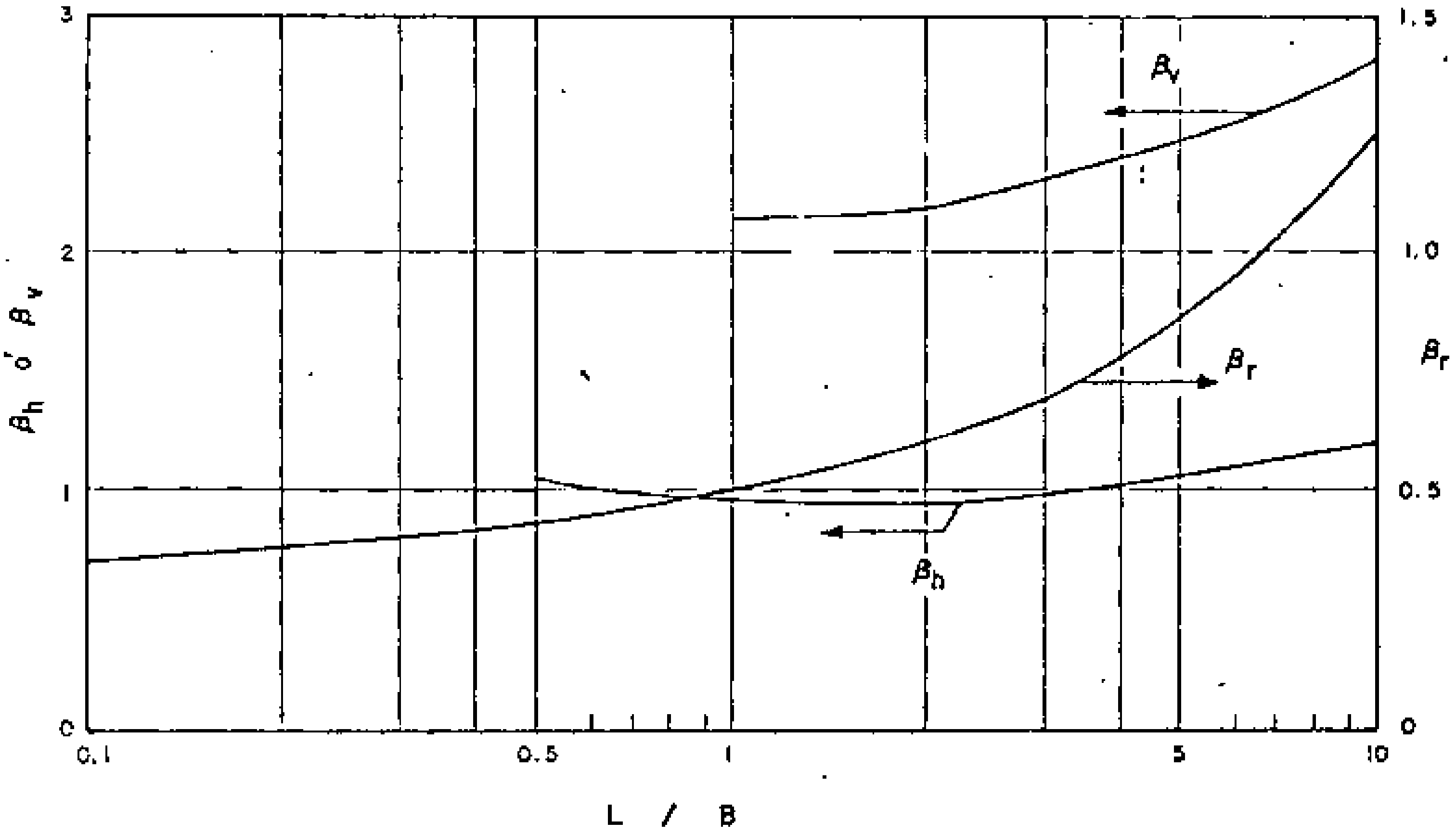


FIG. 6 COEFICIENTES β_v, β_h Y β_r PARA ZAPATAS RECTANGULARES (REF. N° 1)

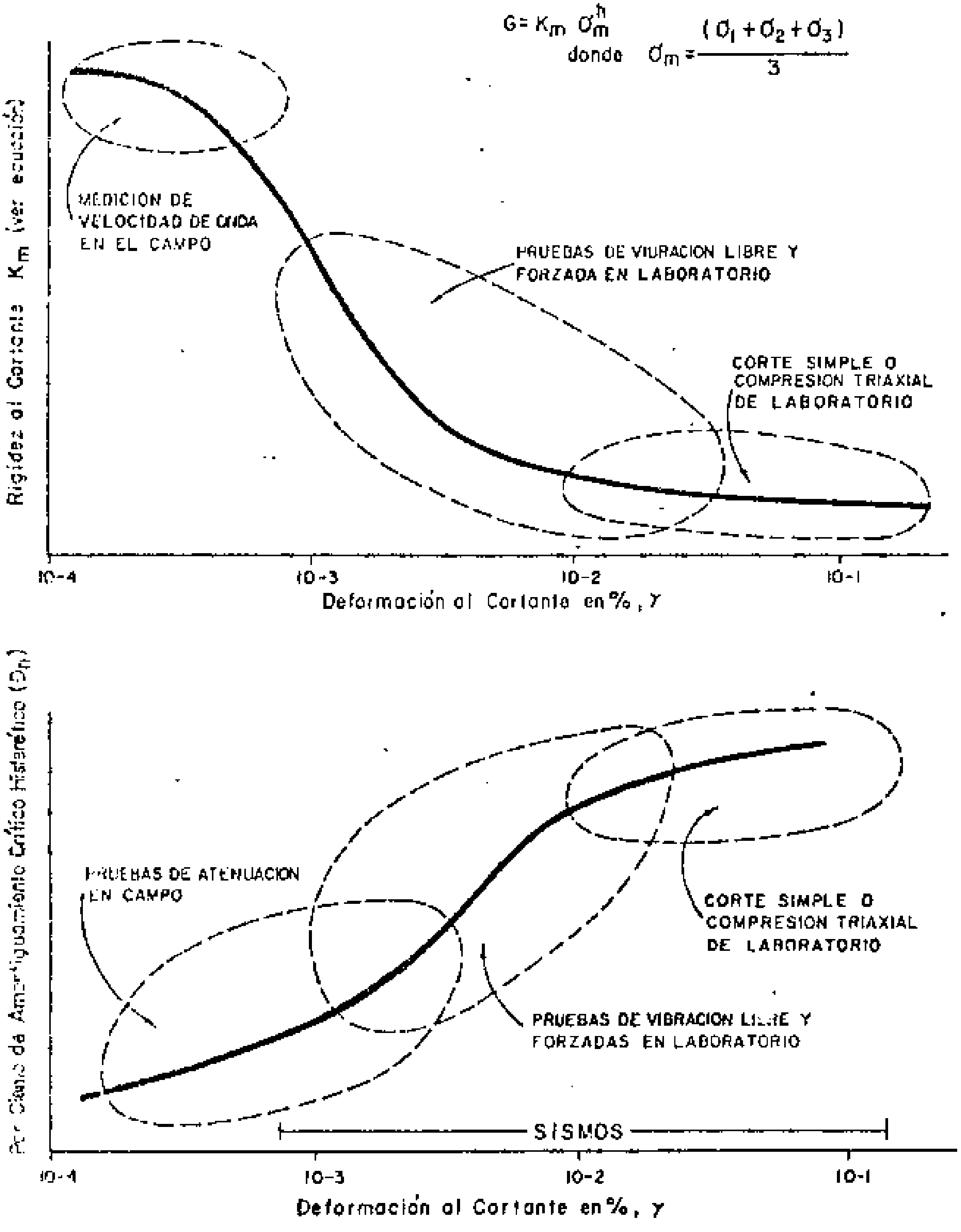


FIG. 7 MODULO AL CORTANTE Y AMORTIGUAMIENTO HISTERETICO COMO FUNCION DE DEFORMACION AL CORTE (REF. Nº 25)

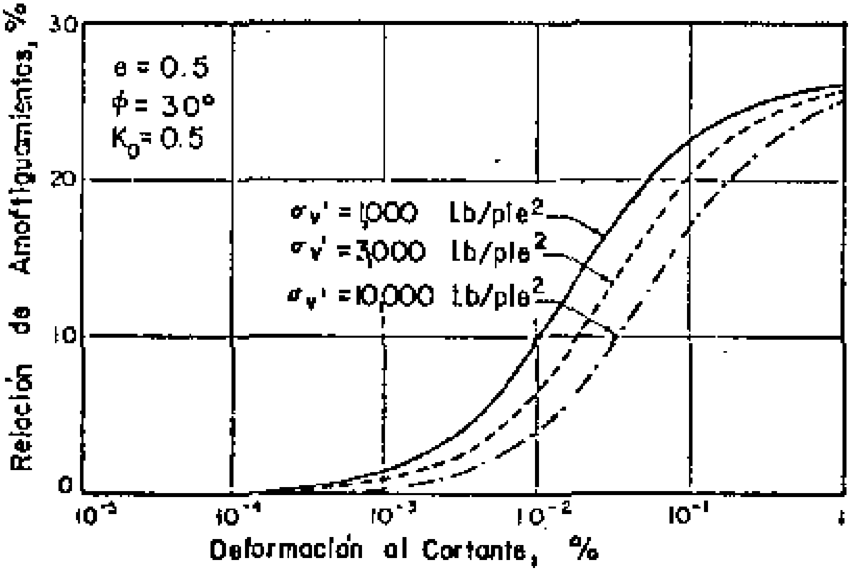


FIG. 8a. INFLUENCIA DE PRESION DE CONFINAMIENTO EN LA RELACION DE AMORTIGUAMIENTOS EN ARENAS SATURADAS.

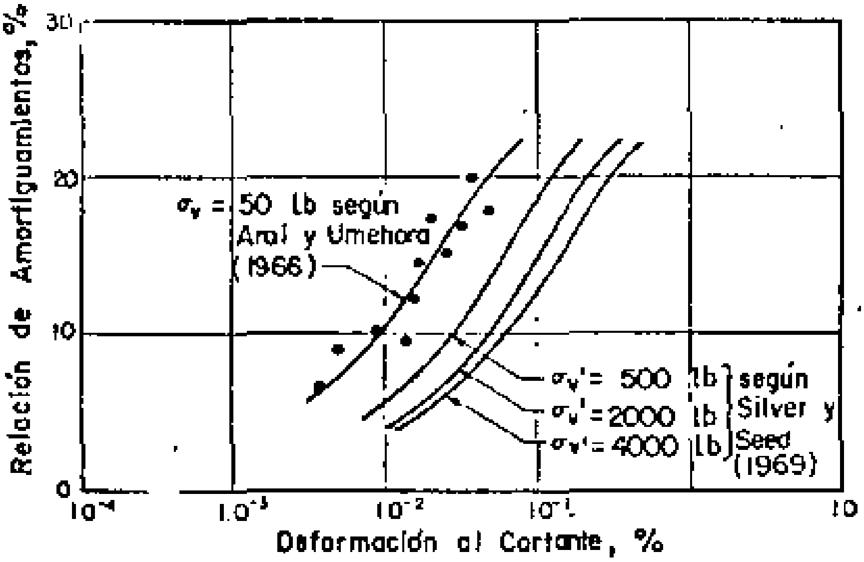


FIG. 8b. INFLUENCIA DE PRESION DE CONFINAMIENTO EN LA RELACION DE AMORTIGUAMIENTOS EN ARENAS SECAS (REF. N° 15).

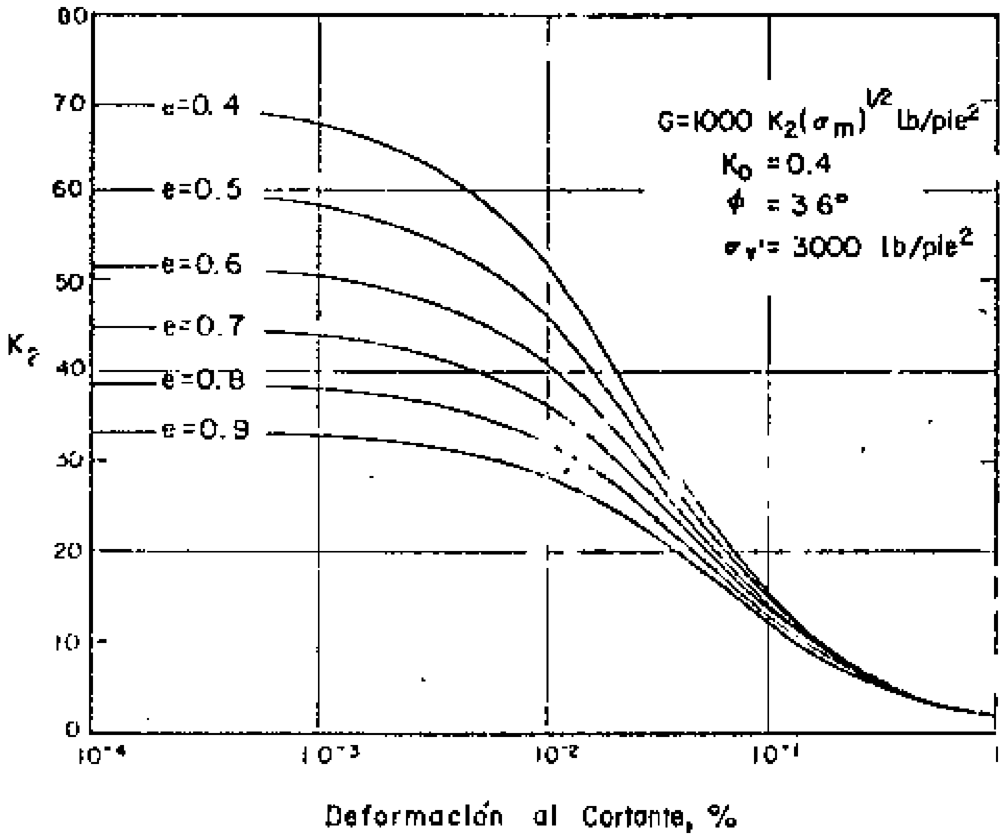


FIG. 9 MODULOS AL CORTANTE EN ARENAS PARA DIFERENTES RELACIONES DE VACIOS (REF. Nº 15)

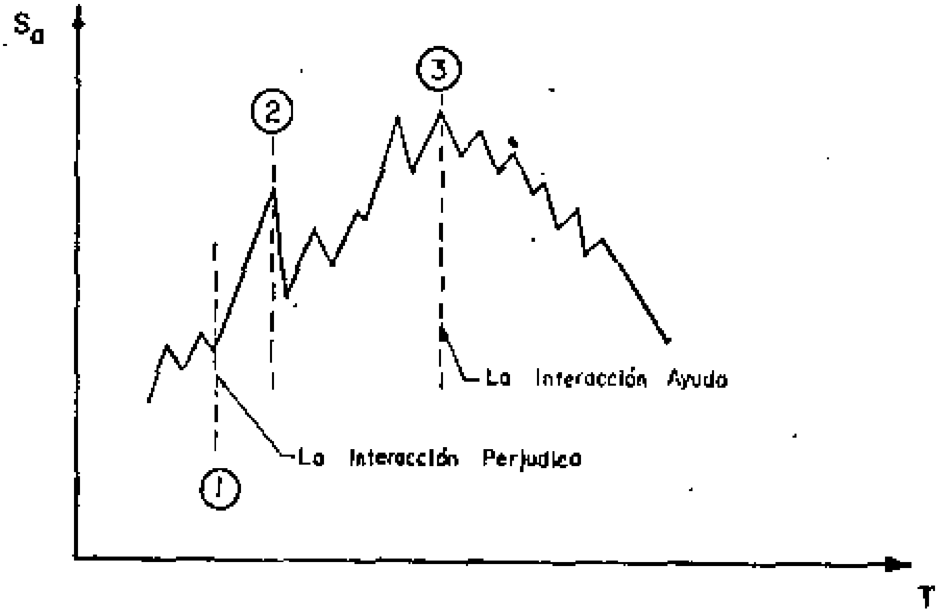
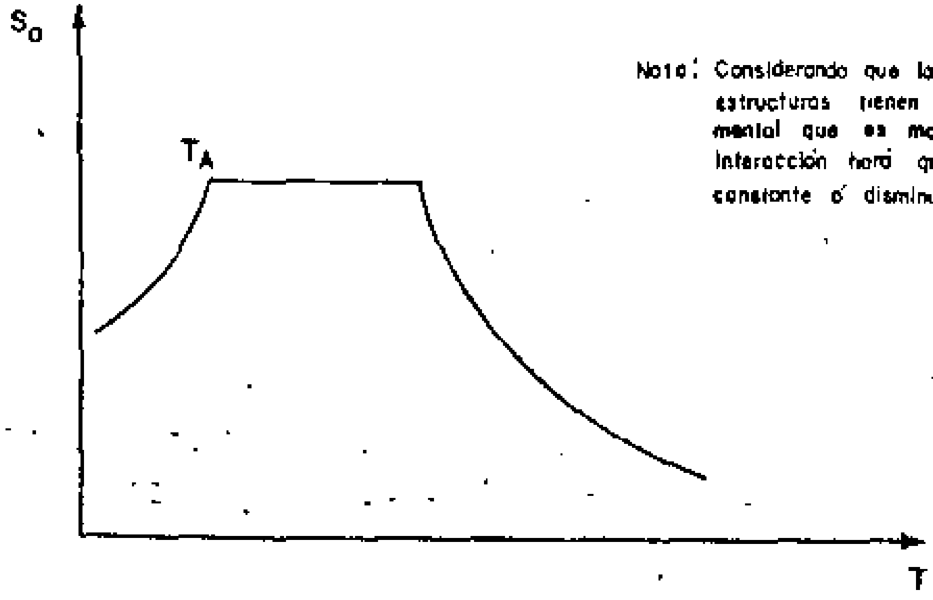


FIG. 10 EFECTO DE LA INTERACCION EN EL ESPECTRO DE UN TEMBLOR



Nota: Considerando que la mayoría de las estructuras tienen un periodo fundamental que es mayor a T_A, la interacción hará que S_a permanesca constante ó disminuya.

FIG. 11 EFECTO DE LA INTERACCION CONSIDERANDO UN ESPECTRO SUAVISADO.

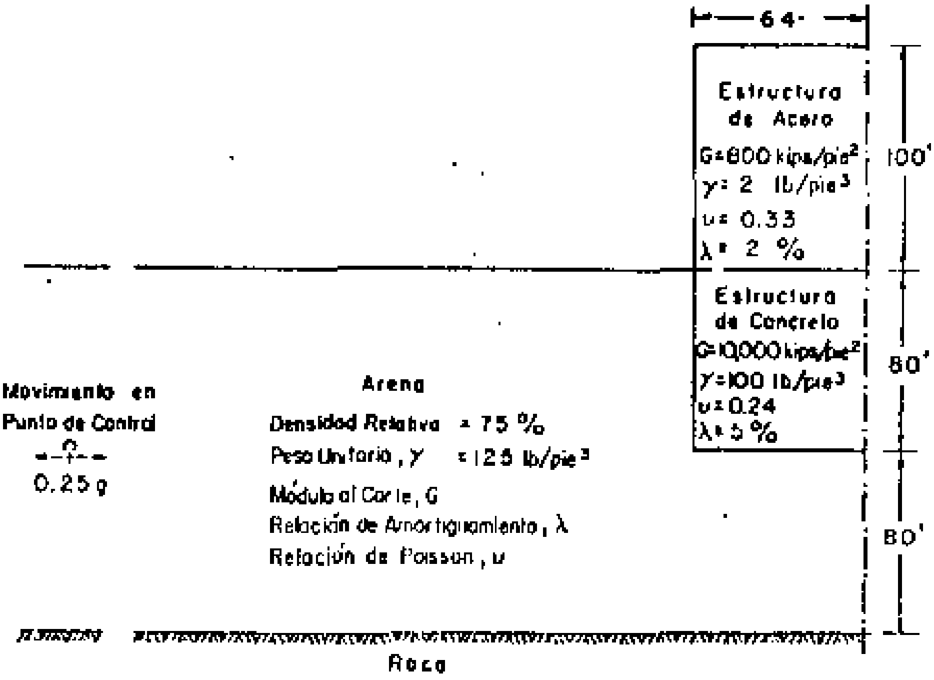


FIG. 13 SISTEMA DE INTERACCION SUELO-ESTRUCTURA USADO PARA EL ANALISIS (REF. Nº 16)

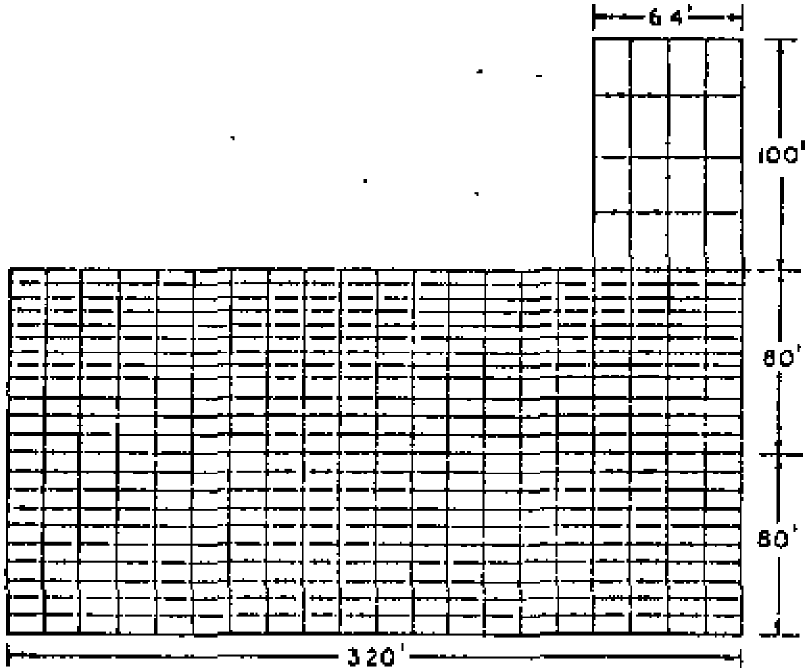


FIG. 14 REPRESENTACION DE ELEMENTO FINITO PARA UN SISTEMA SUELO-ESTRUCTURA (REF. Nº 16)

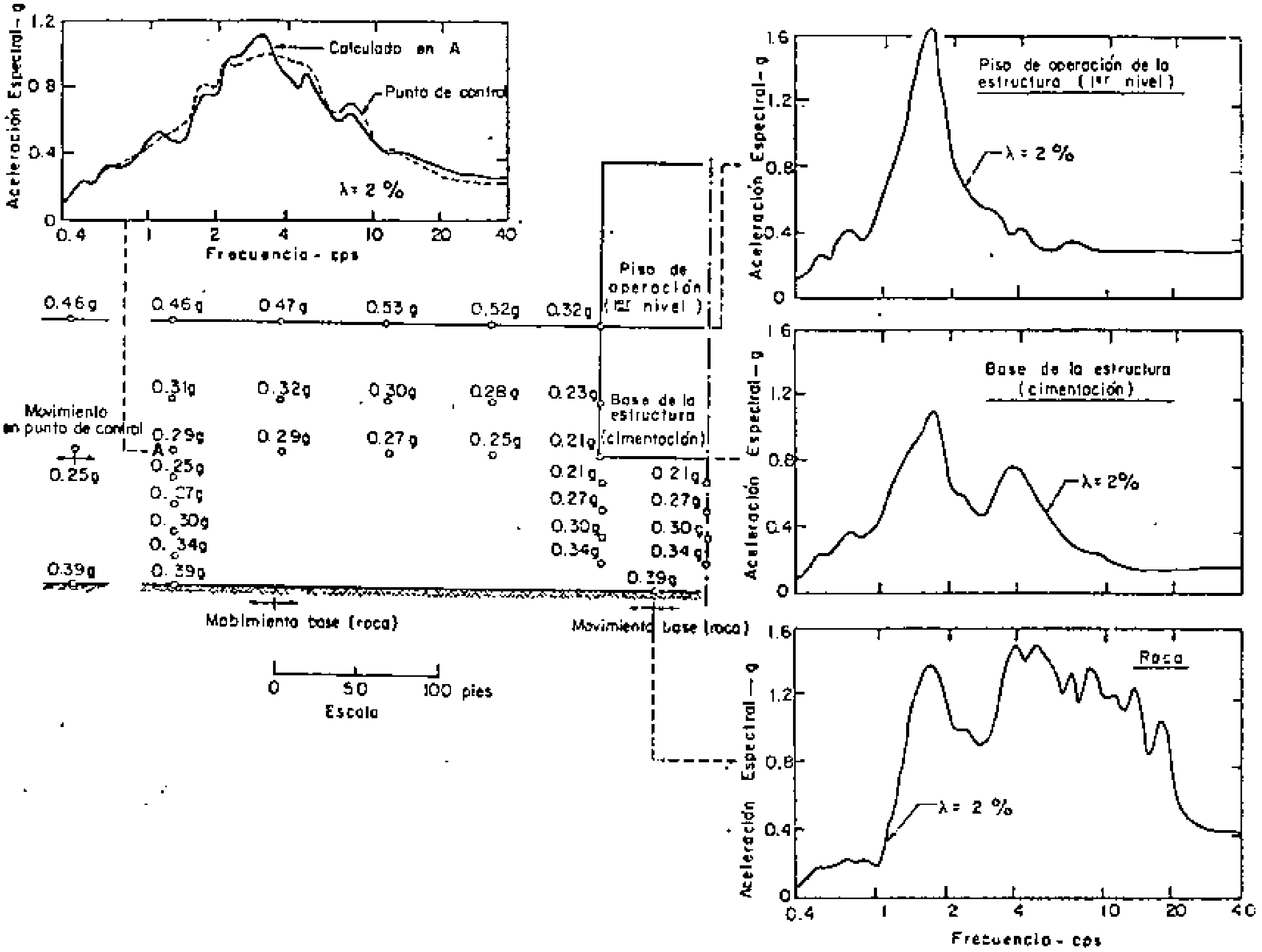
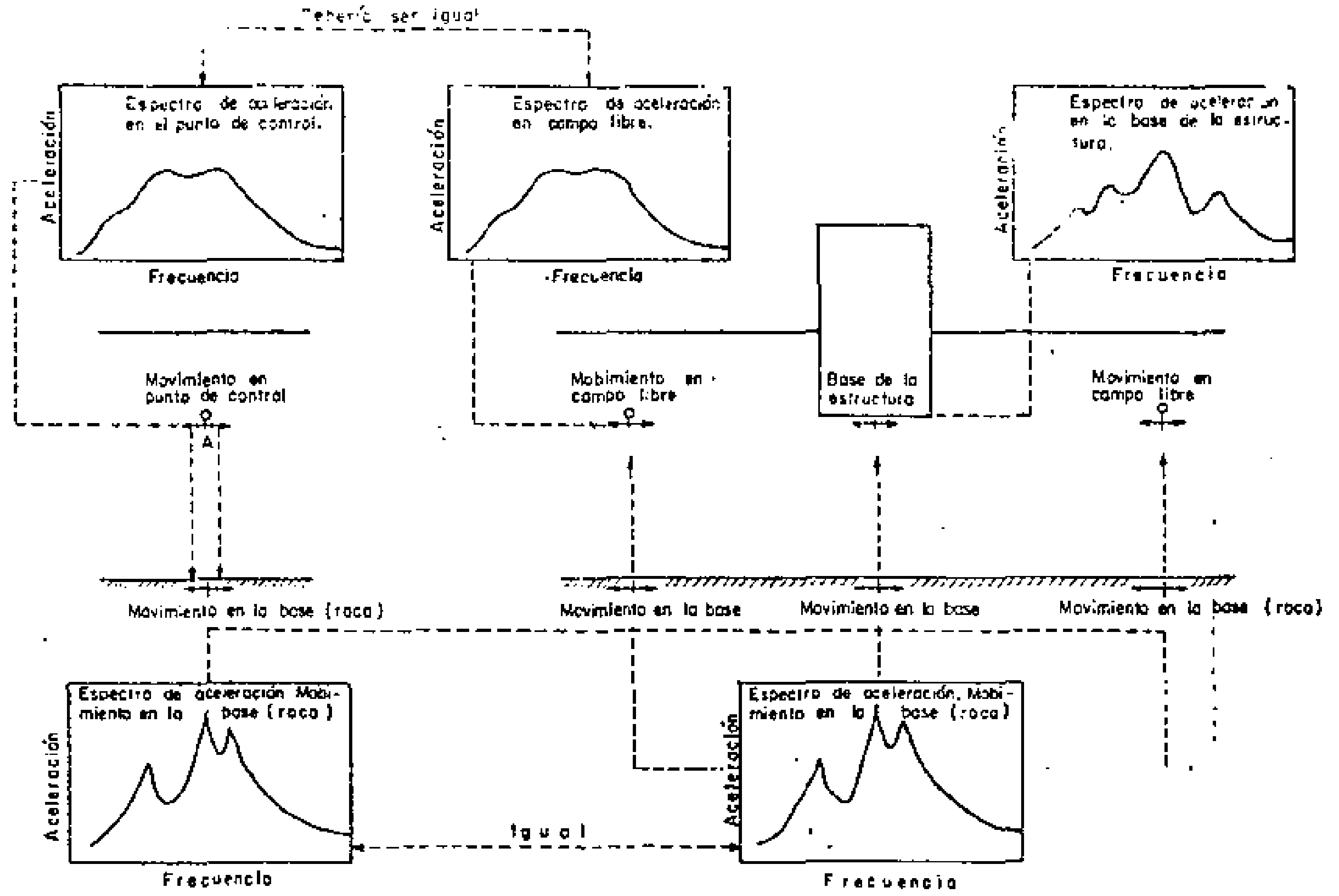


FIG. 15 RESPUESTA CALCULADA USANDO UN ANALISIS DE ELEMENTO FINITO CON AMORTIGUAMIENTO VARIABLE (REF. Nº 16)



(a) Modelo de depósito de suelo

(b) Modelo de elemento finito en el sistema suelo - estructural

FIG. 12 REPRESENTACION ESQUEMATICA DEL ANALISIS DE INTERACCION SUELO – ESTRUCTURA USANDO EL MODELO DE ELEMENTOS FINITOS (REF. N° 16)

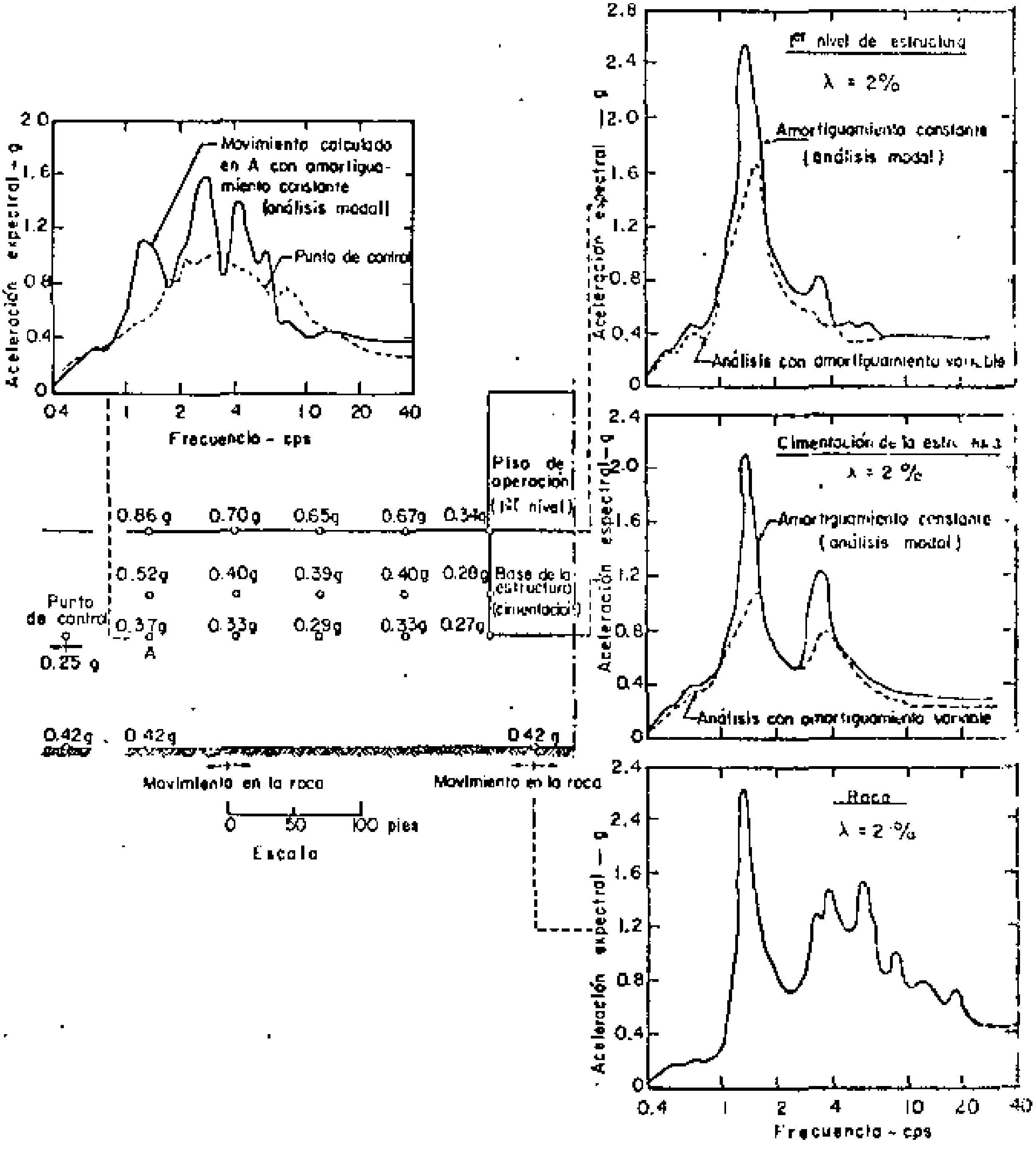


FIG. 16 RESPUESTA CALCULADA MEDIANTE EL ANALISIS DE ELEMENTO FINITO CON AMORTIGUAMIENTO CONSTANTE (ANALISIS MODAL — 7 % DE AMORTIGUAMIENTO) (REF. N° 16).

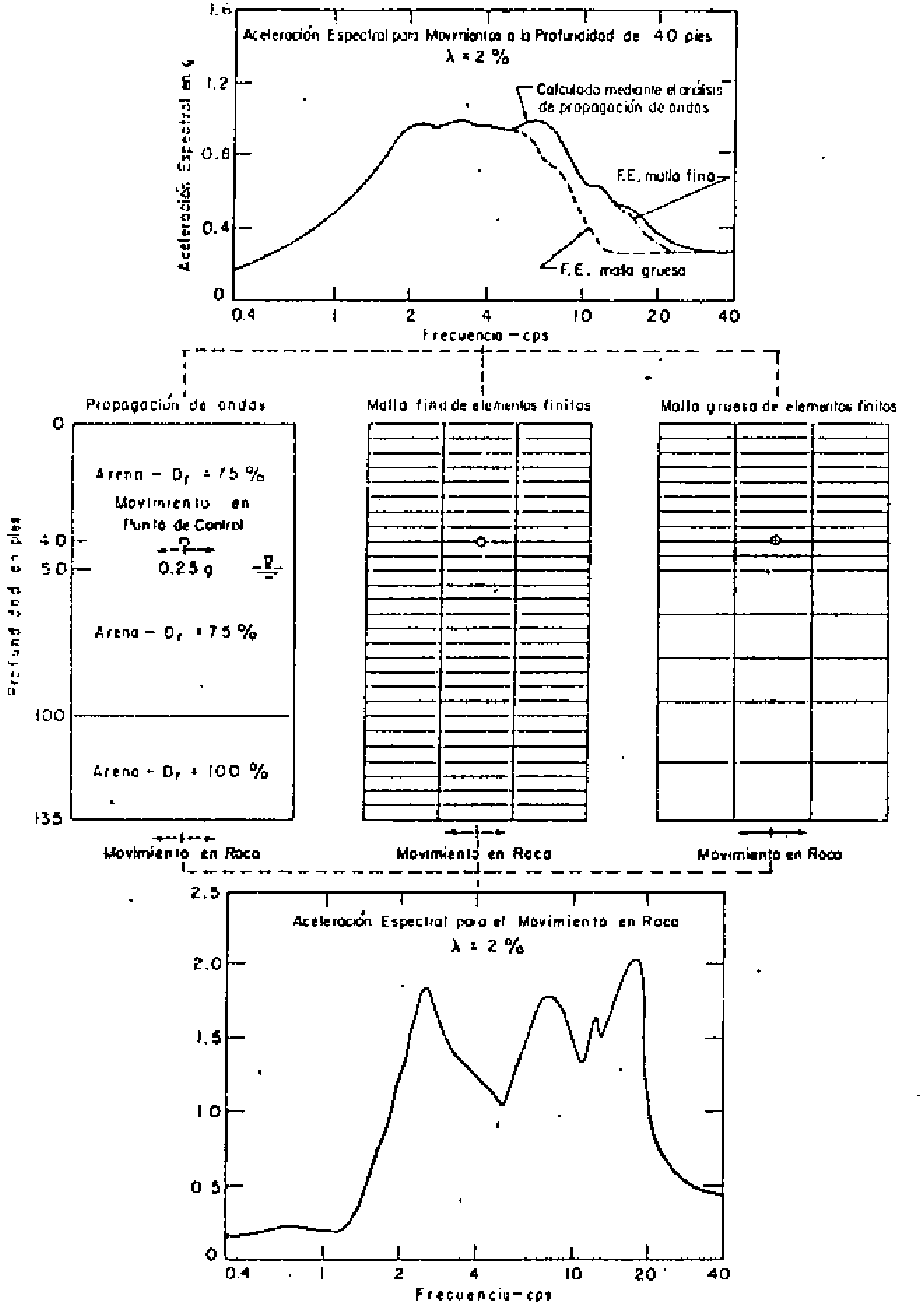


FIG. 17 INFLUENCIA DEL TAMAÑO DE LA MALLA EN LAS CARACTERISTICAS DE FRECUENCIA PARA LOS MOVIMIENTOS ESTIMADOS MEDIANTE EL ANALISIS DE ELEMENTOS FINITOS (REF. Nº 16)

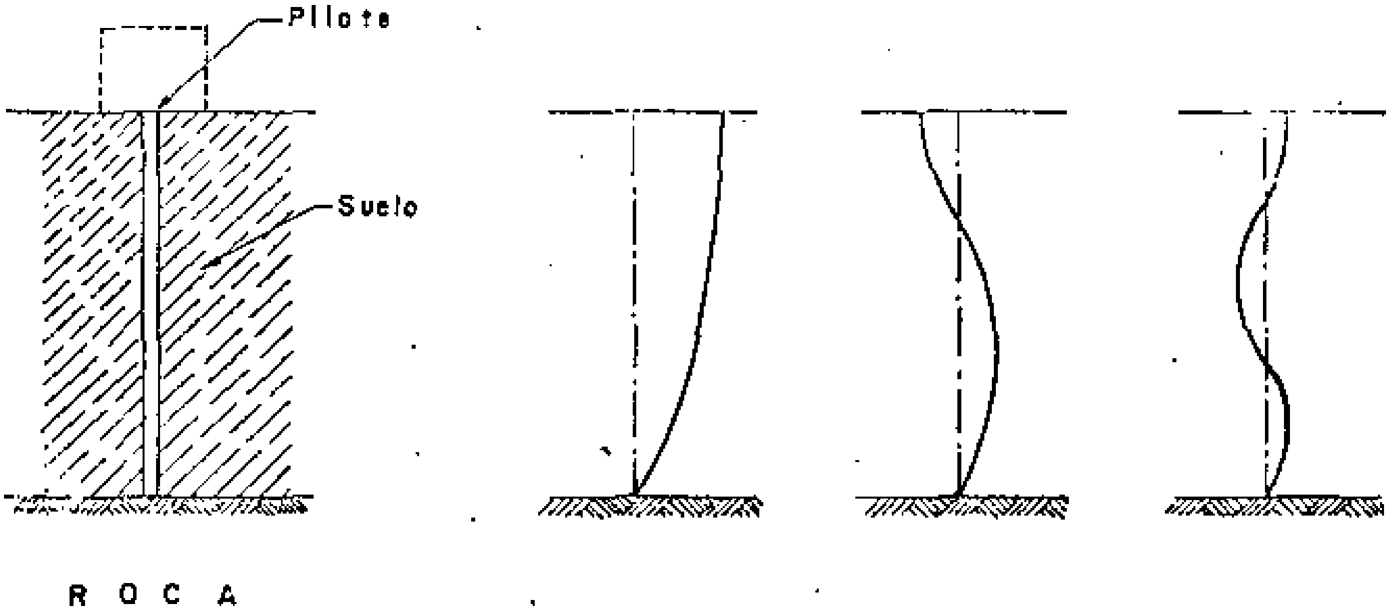


FIG. 18 DESPLAZAMIENTOS DE UN PILOTE POR EFECTO DEL MOVIMIENTO DEL SUELO

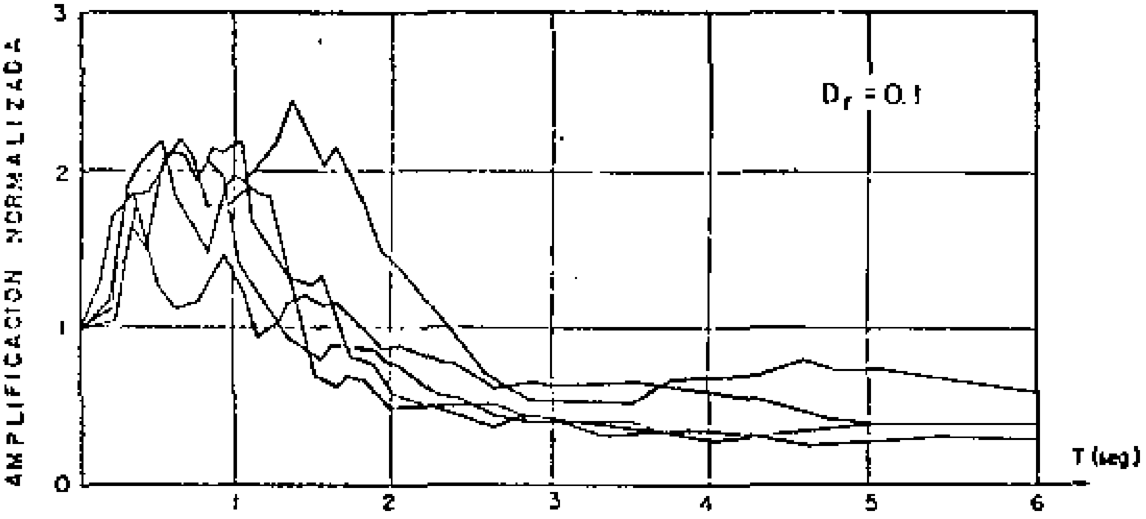


FIG. 21 ESPECTRO NORMALIZADO DE ACELERACION PARA CIMENTACIONES PILOTEADAS EN SUELOS BLANDOS (REF.N° 7)

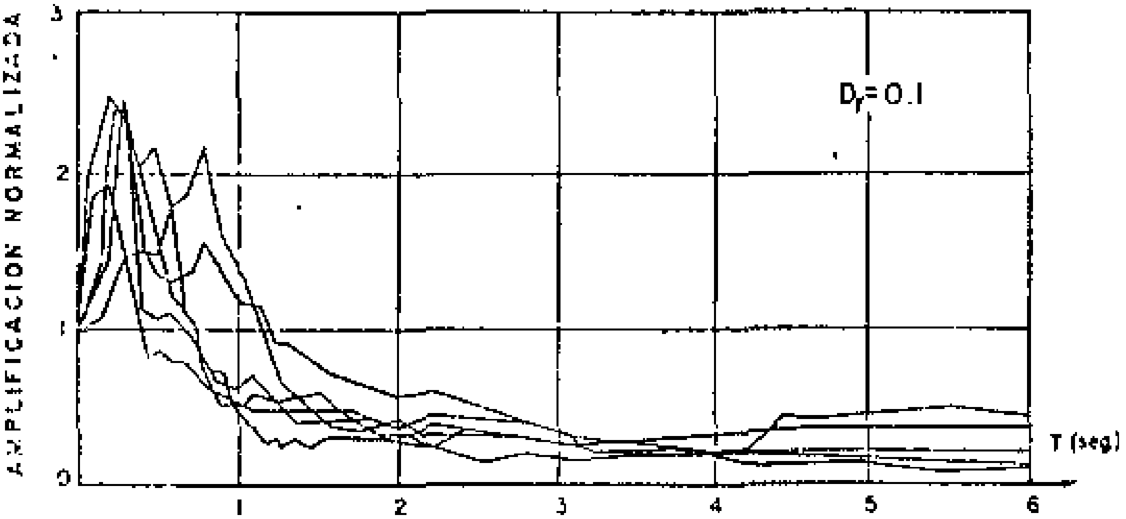


FIG. 22 ESPECTRO DE ACELERACION NORMALIZADA DE CIMENTACIONES RIGIDAS EN SUELOS BLANDOS (REF. N° 7)

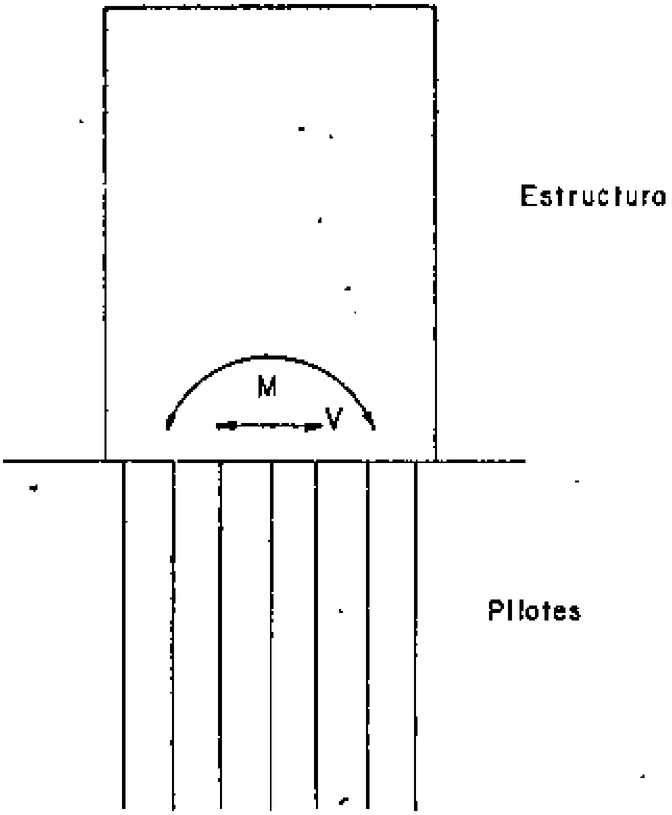


FIG. 19 FUERZAS SISMICAS PRODUCIDAS POR EL MOVIMIENTO DE LA ESTRUCTURA SOBRE EL PILOTE.

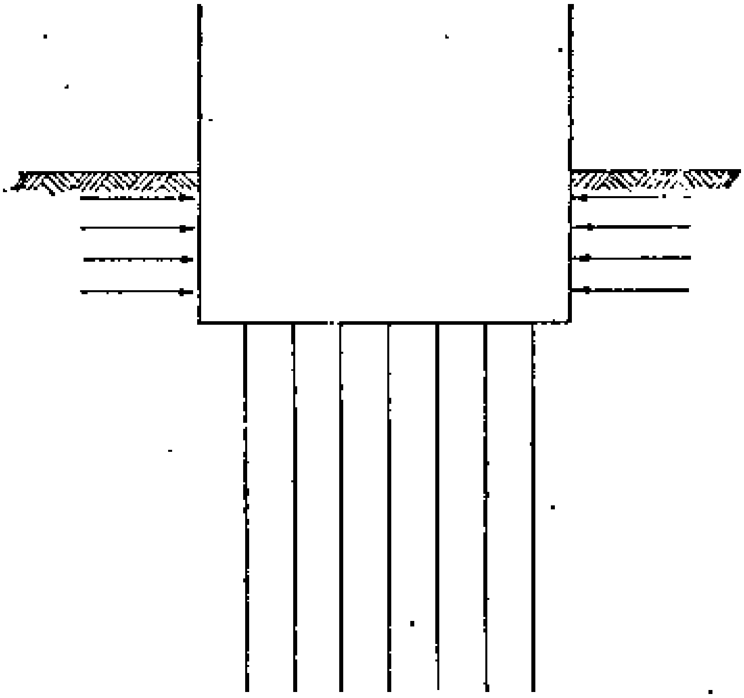


FIG. 20 ENCAJONAMIENTO DE LA CIMENTACION PARA ABSORVER LAS FUERZAS HORIZONTALES PRODUCIDAS POR LA SUPERESTRUCTURA.

V. CURSO INTERNACIONAL DE INGENIERIA SISMICA

DISEÑO SISMICO DE ESTRUCTURAS ESPECIALES

DISEÑO SISMICO DE CIMENTACIONES

DR. LEONARDO ZEEVAERT
AGOSTO, 1979

CONTENIDO

LISTA DE FIGURAS

I.- INTRODUCCION

En numerosas ocasiones durante la práctica profesional se ha podido comprobar que el buen comportamiento de una estructura durante temblores de tierra fuertes, depende en alto grado de un diseño adecuado de la cimentación tanto para cargas estáticas como para las sísmicas. Una cimentación podrá haber sido diseñada y construída para trabajar satisfactoriamente con cargas estáticas y, sin embargo, su comportamiento sísmico podría ser defectuoso afectándose la respuesta sísmica de la superestructura. La cimentación es el elemento que transmite las fuerzas sísmicas a la superestructura, consecuentemente ésta será la responsable del comportamiento del edificio aún y cuando ésta haya sido bien diseñada.

La respuesta sísmica de la cimentación es función de varios factores, a saber:

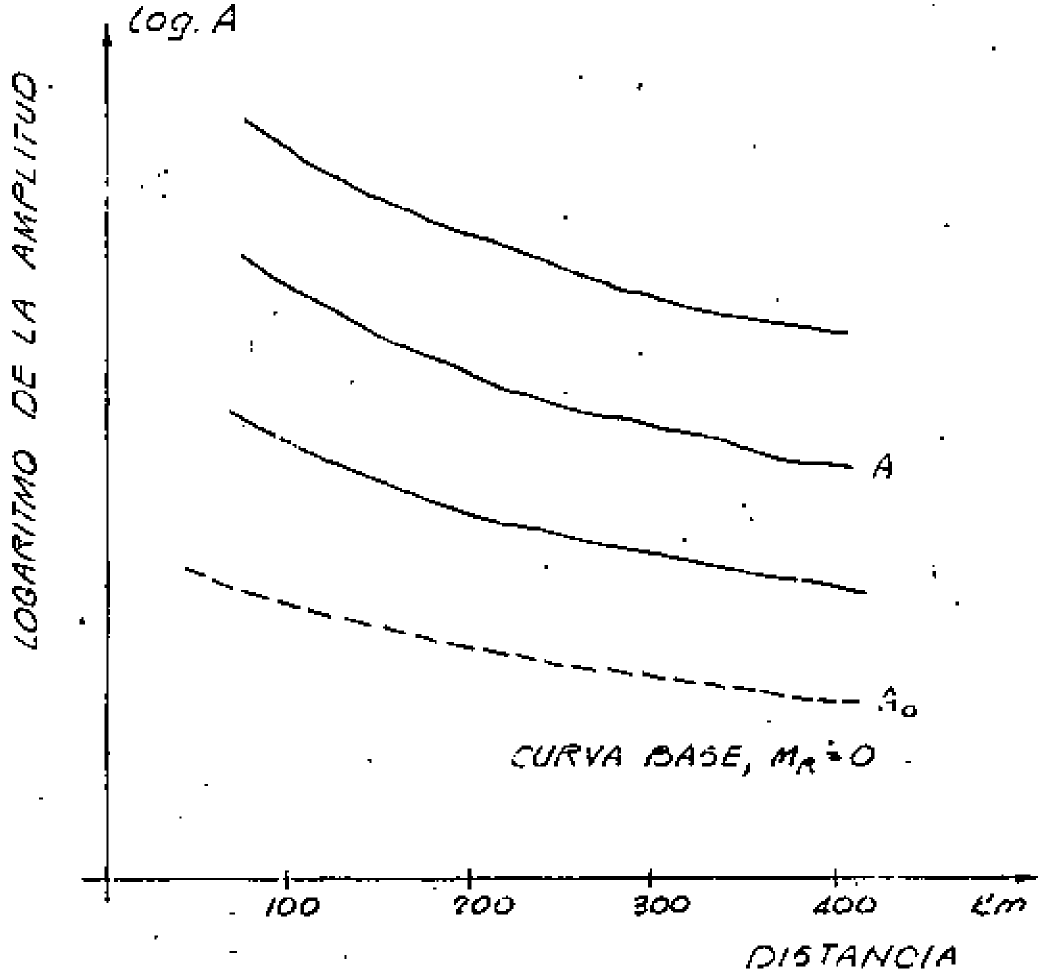
a.- Características del sismo.
b.- Características estratigráficas e hidráulicas y de resistencia del subsuelo.
c.- Propiedades dinámicas del subsuelo.
d.- Comportamiento dinámico del subsuelo.
e.- Estructuramiento y rigidez de la estructura de cimentación.
f.- Interacción entre el suelo y la estructura de cimentación.
g.- Magnitud de los esfuerzos de contacto.

En la práctica profesional el subsuelo no se puede considerar homogéneo e isótropo. Generalmente está constituído por una serie de depósitos de sedimentos con propiedades mecánicas variables que definen las propiedades de los diferentes estratos. Sin embargo, desde un punto de vista práctico, se podrá considerar que cada estrato del subsuelo puede ser representado por sus características geotécnicas medias, esto es: su geometría, propiedades de resistencia y de esfuerzo-deformación. Las fórmulas de cálculo basadas exclusivamente en propiedades del subsuelo como un medio homogéneo e isótropo no podrán proporcionar resultados cercanos a la realidad, más que en casos particulares. La respuesta sísmica de la cimentación dependerá, por tanto, de las condiciones estratigráficas reales y de las propiedades dinámicas de los estratos involucrados en el movimiento sísmico. Así también del nivel de esfuerzos a que será sometido el subsuelo durante el fenómeno sísmico.

Aún tomando en cuenta las condiciones reales del subsuelo y procedimientos de cálculo afines a las condiciones ambientales del lugar en cuestión, los resultados dependerán fundamentalmente de la precisión con que se conozcan las propiedades estratigráficas y dinámicas del subsuelo para un sismo de ciertas características predeterminadas. En estas condiciones la respuesta sísmica de la cimentación podrá conocerse con precisión práctica que permita analizar los esfuerzos y deformaciones de la cimentación y los efectos que su comportamiento induce en la superestructura.

II.- CARACTERISTICAS DE LOS SISMOS

El ingeniero de cimentaciones deberá identificar los sismos por su Magnitud o Intensidad y elegir las características del sismo que utilizará como base para poder efectuar un diseño sísmico lo más apegado a la realidad cuando quiera llevar a cabo una mejor visualización de los fenómenos involucrados, y los cuales deberán cumplir como mínimo con los códigos legales de diseño establecidos. Los códigos para las diferentes regiones sísmicas han sido elaborados con la intención de cubrir por medio de factores las peores condiciones que podrían presentarse y que por experiencia local han sido observadas en la región considerada. No siempre los códigos así aplicados proporcionan diseños seguros. El principal defecto es que el ingeniero de cimentaciones pierde contacto con la física elemental del problema dinámico. El código siendo una legislación deberá, sin embargo, respetarse como una condición mínima. Por otro lado, el ingeniero diseñador no deberá perder de vista cualesquie



$$M_R = \log \frac{A}{A_o}$$

FIG.1 MAGNITUD RICHTER

ra de los aspectos físicos y ambientales que puedan afectar su diseño sísmico de la cimentación y superestructura.

En ingeniería práctica se pueden considerar los conceptos elementales básicos de magnitud e intensidad sísmica. Así pues, la magnitud de un sismo se mide indirectamente por la cantidad de energía potencial liberada en la zona focal y por tanto es independiente de la distancia. Sin embargo, a determinada distancia la intensidad sísmica se mide por la amplitud del movimiento sísmico registrado en un sismógrafo de especificaciones determinadas. El Profesor Richter estableció la escala de magnitud sísmica que lleva su nombre, con base en una magnitud mínima consistente en la medición de una amplitud de una micra de desplazamiento observada a la distancia de 100 Km, y medida con un sismógrafo de determinadas características, así también encontró que independientemente de la distancia el logaritmo de la relación de amplitudes de desplazamientos, esto es, la observada A a la de la base A_o se mantiene aproximadamente constante, Fig. 1;

$$M_R \approx \log \frac{A}{A_o} \qquad - (1)$$

De lo anterior Richter formuló su escala de donde se observa que si A_o representa una determinada energía potencial liberada, el valor $M_R = 3$ significa que A, tendría un valor de 1 milímetro y representará una energía liberada en el foco 10^3 veces mayor. Así una magnitud Richter, $M_R = 7$, será una energía liberada en el foco 10^7 mayor que la base y 10 veces mayor que $M_R = 6$. De aquí se deduce que la escala de Richter sirve para estimar la posible energía liberada en los focos sísmicos y su apreciación de los efectos producidos en el lugar de observación deberá de interpretarse cuidadosamente. En efecto, si una $M_R = 6.0$ produce determinado nivel de daño en una región lejos del foco, podría pensarse que la liberación del doble de energía correspondiente a $M_R = 6.3$ produciría el doble de daños.

Para poder precisar mejor los efectos de determinada magnitud sísmica

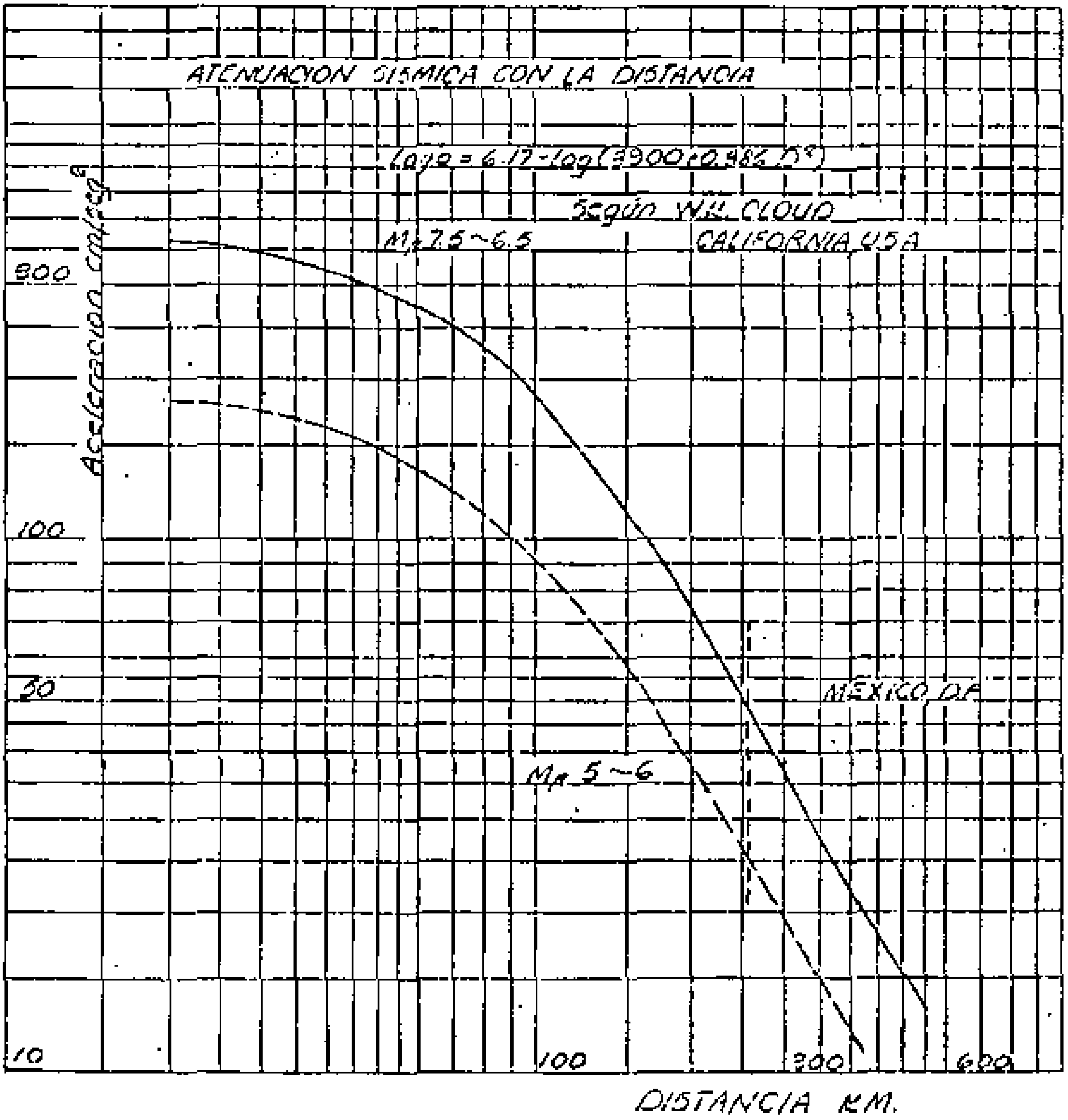


FIG. 2 ACELERACION VS. DISTANCIA

en el lugar de observación se utilizan las escalas de "Intensidad Sísmica". La intensidad sísmica representa los efectos producidos en el lugar de observaciones los cuales pueden ser medidos en fuerza, aceleración o por los daños producidos. De tal manera que, en una región podrán establecerse lugares donde sean observadas las mismas intensidades sísmicas para un sismo de cierta magnitud obteniéndose así las cartas isosísmicas, Fig. 2. La intensidad se tabula por escalas de grados sísmicos, como la bien conocida escala modificada de Mercalli usada en América y Europa. Las escalas de intensidad han sido también estudiadas en términos de la aceleración máxima en la superficie del suelo por Cancani-Sieberg, y correlacionadas con la escala modificada de Mercalli la cual corresponde en términos de aceleración a una escala de dimensiones geométricas. Así pues, la intensidad de grado VII es doble del grado VI y el grado VIII es cuatro veces mayor. En términos de aceleración aproximadamente: VI = 25 cm/seg^2, VII = 50 cm/seg^2, y VIII = 100 cm/seg^2.

Desde el punto de vista de ingeniería sísmica de diseño, sin embargo, el conocimiento de la intensidad sísmica para el lugar de interés no es suficiente información para efectuar un diseño apropiado de la cimentación y estructura de un edificio, ya que la respuesta sísmica es función de las características geotécnicas del subsuelo y de la flexibilidad de la estructura.

Se puede demostrar que las ondas principales que se producen en la zona de generación sísmica corresponden a ondas compresionales, conocidas como ondas P, ondas de dilatación, que requieren para su transmisión que el suelo sufra cambios de volumen. Dichas ondas se desplazan con una velocidad ν_{α} en el sentido de la compresión y dilatación. Las otras ondas importantes se transmiten sin cambio de volumen y se conocen como ondas S, ondas equivolumétricas o de esfuerzo cortante y producen distorsión en el suelo perpendicular a la dirección de translación con velocidad ν_{S} .

Las ecuaciones de movimiento de estas ondas en una de sus componentes son:

ondas P: $$\left(\frac{\lambda+2\mu}{\rho}\right)\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \tag{2}$$

ondas S: $$\left(\frac{\mu}{\rho}\right)\frac{\partial^2 v}{\partial^2 x} = \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \tag{3}$$

Las ecuaciones anteriores para su estudio pueden representarse por:

$$c\,\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} \tag{4}$$

en donde C es una constante propiedad del suelo y φ la componente de desplazamiento. La ecuación diferencial puede resolverse por medio de funciones periódicas, a saber

1) del tiempo $$f_1\left(\frac{2\pi}{T}\cdot t\right) \tag{5}$$

2) del espacio $$f_2\left(\frac{2\pi}{L}\cdot x\right) \tag{6}$$

por consiguiente, se puede escribir como solución general

$$\varphi = \varphi_0\, f_1\left(\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\cdot f_2\left(\frac{2\pi}{L}\cdot x\right) \tag{7}$$

substituyendo en la ecuación diferencial (4) se tiene:

$$-c\,\varphi_0\cdot f_1''\left(\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\left(\frac{2\pi}{L}\right)^2\cdot f_2''\left(\frac{2\pi}{L}x\right) = -\varphi_0\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2\cdot f_1'\left(\frac{2\pi}{T}t\right)^2\cdot f''\left(\frac{2\pi}{L}\cdot x\right)$$

o bien

$$c\left(\frac{2\pi}{L}\right)^2 = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \quad \therefore \quad C = \left(\frac{L}{T}\right)^2$$

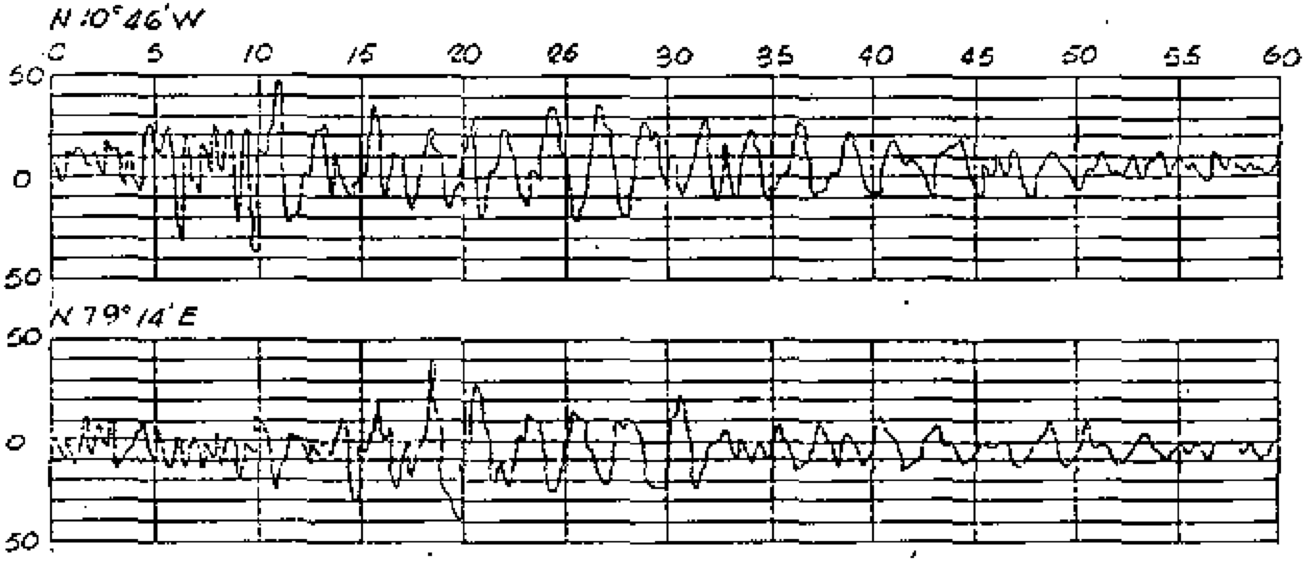


FIG.3 ACELEROGRAMA MAYO 11, 1962 CIUDAD DE MEXICO

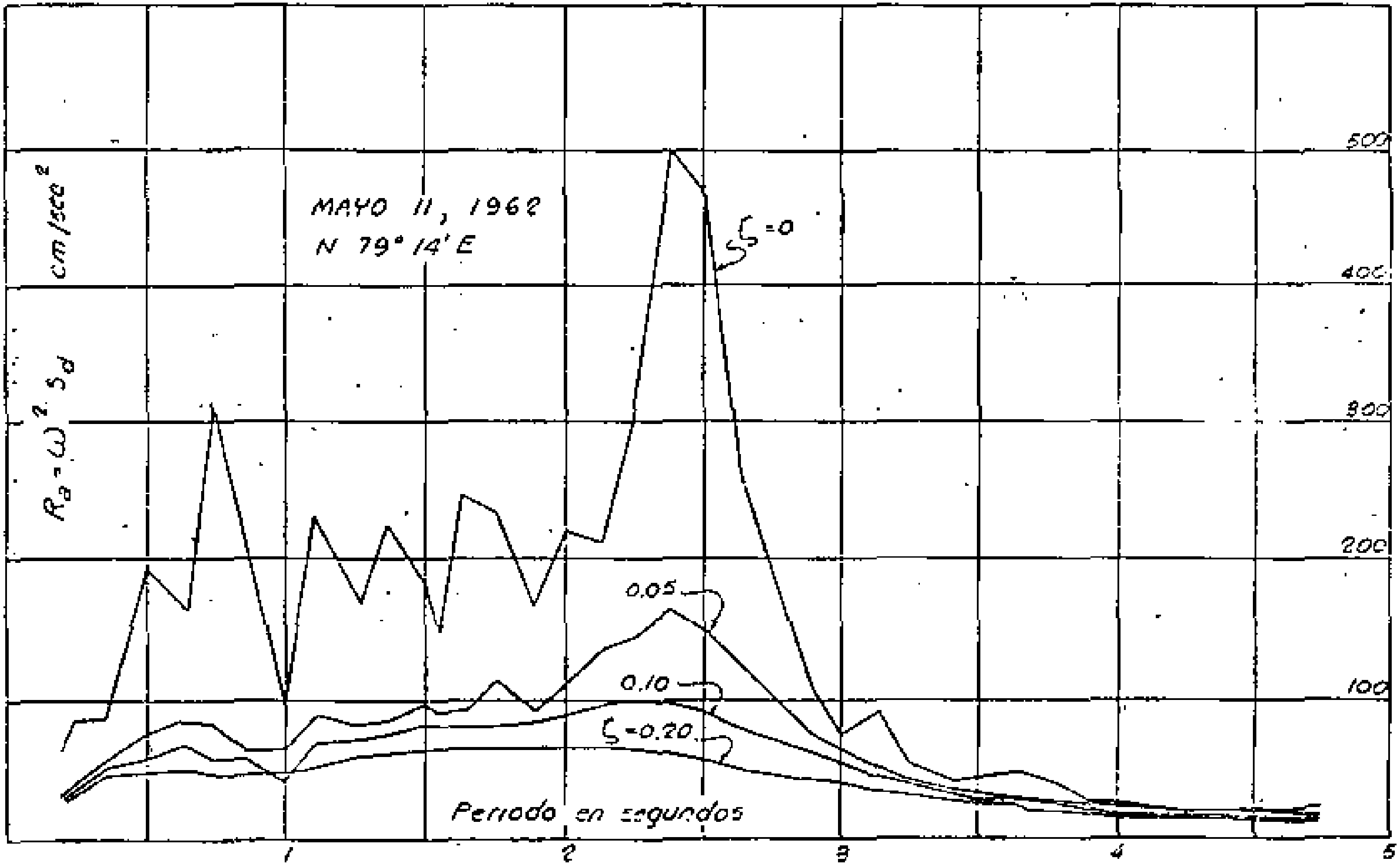


FIG. 4 ESPECTRO DE SEUDO-ACELERACION MAYO 11, 1962
CIUDAD DE MEXICO

de donde la velocidad de la onda es: $\frac{L}{T} = \sqrt{C}$

De aquí se deduce que

1) La velocidad de las ondas P ; $v_d = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}$ (8)

2) La velocidad de las ondas S ; $v_s = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$ (9)

De la teoría de elasticidad el valor λ queda definido por: $\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$, substituyendo en (8) se obtiene:

$$v_d = \left(\sqrt{\frac{2(1-\nu)}{1-2\nu}}\right) \cdot \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$$

o bien

$$v_d = \left(\frac{2(1-\nu)}{1-2\nu}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot v_s \qquad (10)$$

De aquí se deduce que la velocidad de las ondas P es función de la relación de Poisson y tienen una velocidad mayor que las ondas S, que pueden determinarse directamente conociendo únicamente el módulo de rigidez del suelo μ y la masa unitaria ρ . Para un suelo saturado donde el cambio de volumen no puede verificarse en forma instantánea el valor de v_d tiende a ser varias veces mayor que v_s . Por lo anterior se puede también deducir que las deformaciones sísmicas ocasionadas por las ondas S serán de mayor importancia.

Para calcular la respuesta sísmica en un determinado lugar se hace necesario conocer la historia de aceleración del sismo, lo cual se determina registrando el movimiento sísmico por medio de un acelerógrafo. En la Fig. 3 se muestra un acelerograma registrado en Mayo 11, 1962 para la parte central de la Ciudad de México.

Se puede demostrar que la respuesta sísmica máxima puede determinarse por la siguiente expresión:

$$R_v = \int_0^t a(\tau)\, e^{-\xi\omega_0(t-\tau)} \cdot \operatorname{sen}\omega_d(t-\tau)\, d\tau \Big|_{max.} \qquad (11)$$

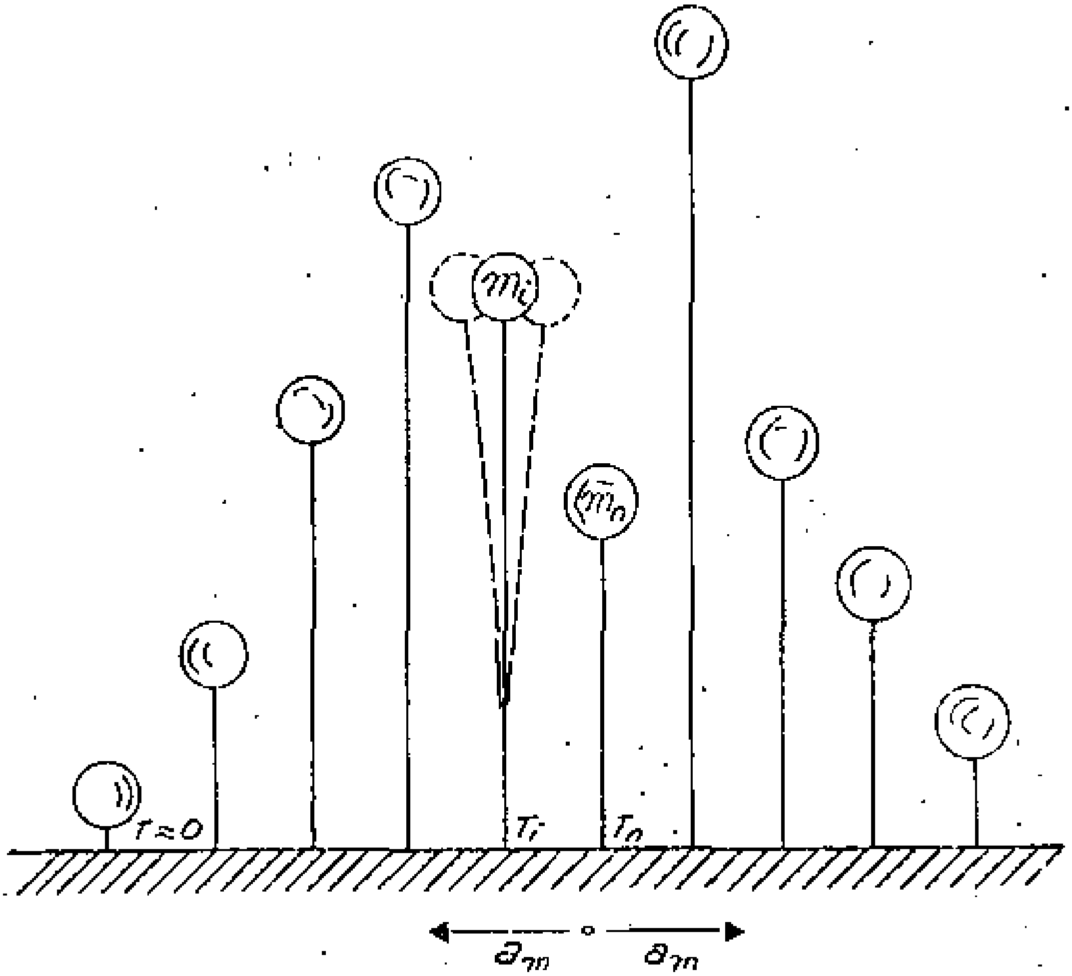
el valor de R_v representa la integración de los impulsos transmitidos por la aceleración $a(\tau)$ a la base de una estructura equivalente a un grado de libertad con frecuencia circular libre ω_0 y amortiguada $\omega_d = \omega_0(1-\xi_0^2)$, en donde ξ_0 representa la fracción de amortiguamiento crítico de la estructura.

Para el diseño sísmico de la estructura al ingeniero le interesa fundamentalmente la fuerza de inercia que se genera en el centro de la masa, esto es:

$$V_m = M \cdot R_a \qquad (12)$$

El valor de $R_a = \omega_0 R_v$, se conoce como la respuesta de pseudo-aceleración y la relación R_a vs T el espectro de pseudo-aceleración. Por medio del acelerograma de la Fig. 3 y la expresión (11) se obtuvieron los espectros de respuesta de aceleración que muestra la Fig. 4 para diferentes amortiguamientos críticos y para el centro de la Ciudad de México. Para una estructura rígida donde $T \approx 0$ la aceleración será la de la superficie del suelo obtenida como máxima del acelerograma. Nótese que a medida que la estructura se hace más flexible aumenta la respuesta hasta llegar a un valor máximo después del cual declina hasta hacerse pequeña.

Para comprender el significado físico del espectro de respuesta, supongamos Fig. 5, una serie de edificios en la zona de estudio representados por péndulos con períodos T diferentes, representativos del modo fundamental de vibrar de dichos edificios. Supongamos períodos que varían desde $T \approx 0$ hasta $T = 4$ seg. Ahora imaginemos que en la interfase con el suelo firme se producen trenes de on-



$$V_m = f_{ai}(m_i\, a_m)$$

FIG. 5 PENDULOS DE DIFERENTES PERIODOS

das de esfuerzo cortante con velocidad de traslación v_s pero con diferentes períodos y longitudes de tal manera que

$$v_s = \frac{L_1}{T_1} = \frac{L_2}{T_2} = \dots = \frac{L_i}{T_i} \qquad (13)$$

El suelo también se puede considerar como un vibrador a la vez, por tanto tendrá una serie de períodos de vibración libre dependiendo de las condiciones estratigráficas y de sus propiedades dinámicas. Se encontrará que existirá un período máximo de vibración o fundamental el cual puede ser excitado por la perturbación sísmica más fácilmente que los armónicos más altos.

Supongamos que el período fundamental del suelo es T_{S1}, cuando dicho período sea aproximadamente coincidente con alguno de los períodos de los péndulos representativos de los edificios, dicho péndulo entrará en resonancia produciéndose en su centro de masa una amplificación de la aceleración con respecto a la aceleración máxima de la superficie del suelo. La aceleración de la superficie del suelo será tomada únicamente por el péndulo de alta rigidez; $T \approx 0$. Así pues, los picos en el espectro de respuesta de pseudo-aceleración serán representativos de las amplificaciones producidas cuando las longitudes de las ondas sean compatibles con la estratigrafía del subsuelo y, por tanto, producen períodos en éste cercanos a los períodos fundamentales de las estructuras. El período fundamental T_{S1} del subsuelo resulta el más importante de considerar ya que produce la máxima respuesta y consecuentemente la amplificación máxima para determinado amortiguamiento crítico, y por tanto, puede servir como base para formular un espectro práctico de diseño. Designemos la amplificación de la aceleración por $f_a = R_a / a_m$ y dibujemos en escalas log-logarítmicas el espectro de respuesta de aceleración en términos de f_a vs T_o/T_{S1}, en donde T_o es el período equivalente de la estructura como si fuese de un grado de libertad. El dibujo se efectuará de tal manera que represente la envolvente de todos los picos en el rango de T_o/T_{S1} pequeño, hasta $T_o/T_{S1} \simeq 3$. El valor $T_o/T_{S1} = 1$ representará la coincidencia del período

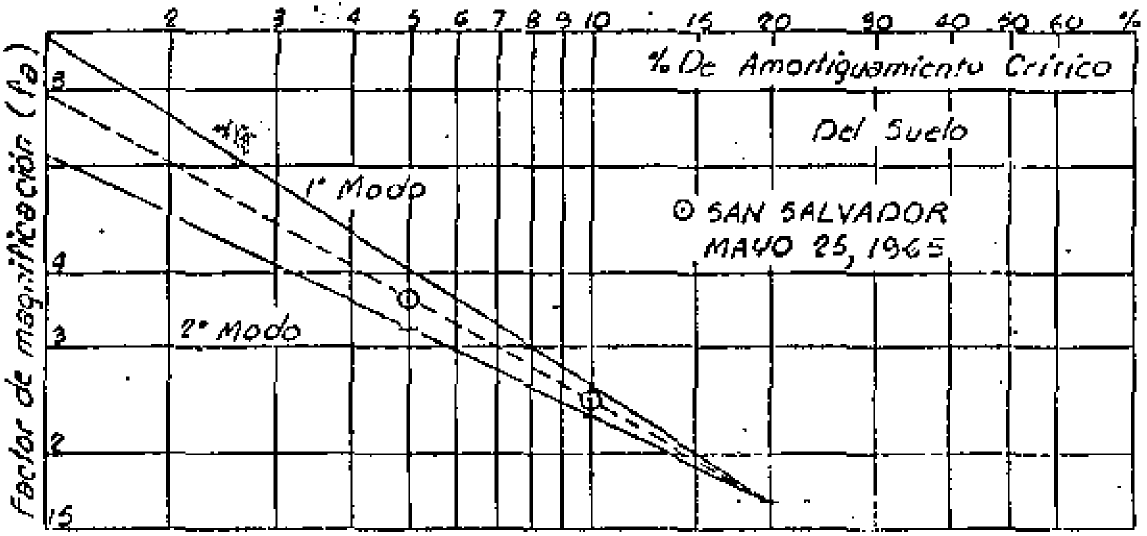


FIG. 6 FACTORES DE MAGNIFICACION PARA EL SUBSUELO DE LA CIUDAD DE MEXICO

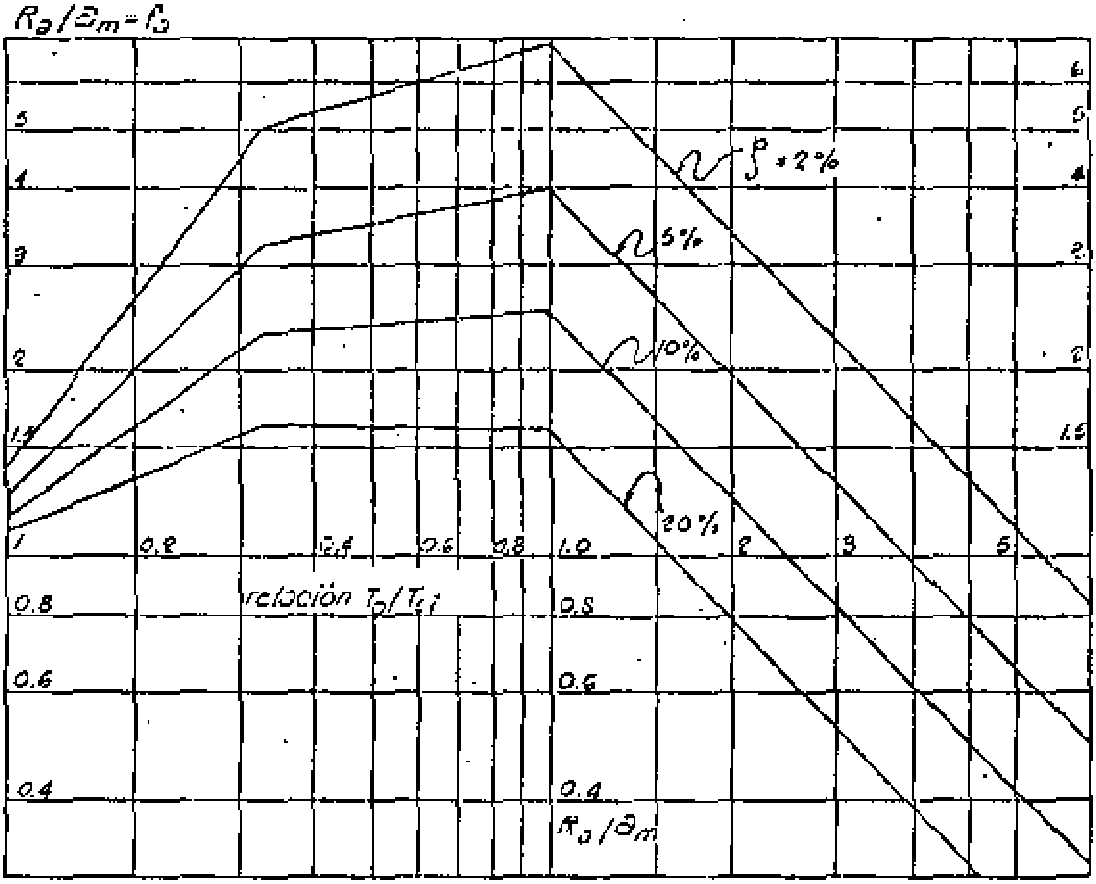


FIG. 7 ESPECTRO ENVOLVENTE DE DISEÑO SISMICO

de la estructura y cimentación con el del subsuelo, y por tanto se obtendrá la respuesta máxima f_a, Figs. 5 y 7.

De la anterior discusión se ve la importancia de poder conocer el período fundamental del subsuelo. También son importantes el segundo y tercer modos para el caso de sedimentos suaves como es el de la Ciudad de México. El uso del espectro que muestra la Fig. 7 es fácil; imaginemos que el subsuelo tiene un período dominante de $T_{S1} = 1.0$ seg, una estructura tiene un período fundamental de $T_0 = 2.0$ seg, por consiguiente $T_0/T_{S1} = 2.0$ y de la Fig. 7 se obtiene $f_a = 2.0$ para un amortiguamiento de $\zeta_0 = 5\%$. De donde la fuerza de inercia en el centro de masa de la estructura será

$$V_m = 2 \times (M a_m) \tag{14}$$

Si h_m es la altura del centro de masa desde la interfase del suelo con la cimentación, el momento de volteo será

$$O_r = V_m \cdot h_m \tag{15}$$

y la fuerza cortante en la base : $V_B = V_m$.

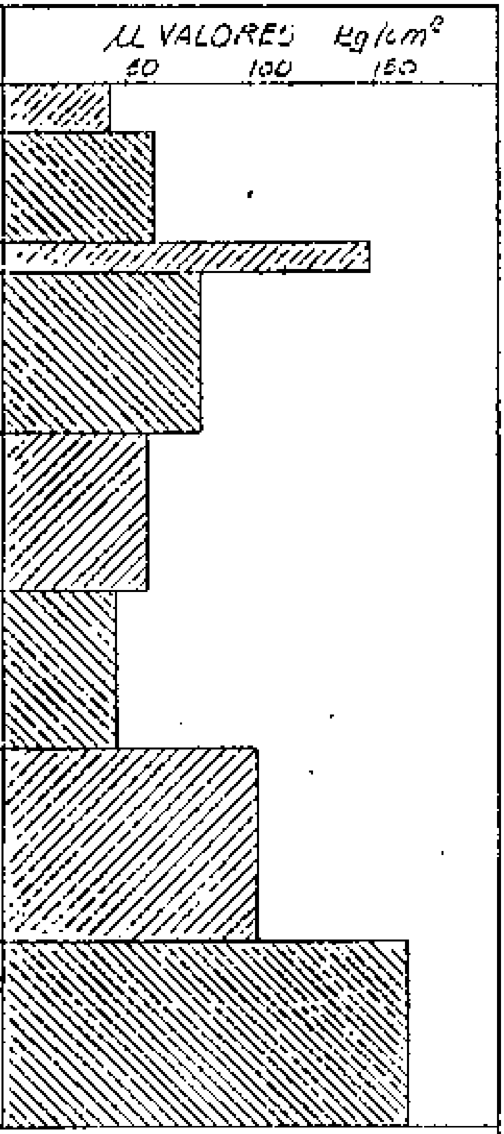
III.- PROPIEDADES DINAMICAS DEL SUELO

En párrafos anteriores se mencionó la importancia de conocer las propiedades dinámicas del suelo, para lo cual es necesario investigar cada uno de los estratos que lo forman hasta alcanzar la base firme.

De la experiencia se conoce que en sedimentos no consolidados los efectos más importantes de movimiento sísmico son los producidos por las ondas de esfuerzo cortante con velocidad

PERFIL DE MODULO DINAMICO DE ELASTICIDAD AL CORTANTE

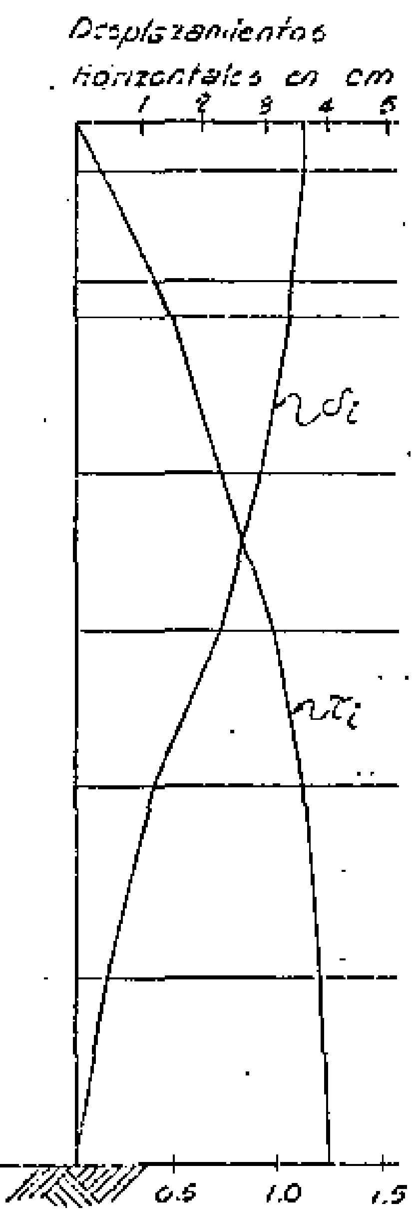
	ESTRATO	Z	d	W	S_s	γ
A	Relleno		1.5	—	—	1.70
B	Arcilla Limosa Café	5	3.5	60	2.58	1.62
C			1.0	80	2.65	1.55
D	Arcilla Limosa Café olivo	10	5.0	320	2.52	1.17
E	idem	15	5.0	270	2.38	1.19
F	idem	20	5.0	250	2.58	1.20
G	idem	25	6.0	280	2.45	1.22
H	idem	30	6.0	250	2.54	1.22
		35			Suelo Firme	



Z Profundidad en (m)
d Espesor en m.
W Contenido de agua
S_s Gravedad específica
γ Peso unitario

FIG. 8

ESTRATO		t/m³	t·seg²/m⁴	t/m²	m/seg	seg	seg
N°	d	γ	ρ	μ	v_s	$\sum\Delta i$	$\sum\Delta i$
A	1.5	1.70	0.170	450	51.4	0.117	
B	3.5	1.62	0.165	640	62.5	0.540	
C	1.0	1.55	0.156	1500	98.1	0.585	
D	5.0	1.17	0.119	880	85.0	0.624	1.12
E	5.0	1.19	0.121	600	70.4	0.905	
F	5.0	1.20	0.122	460	61.4	1.23	
G	6.0	1.22	0.124	1060	92.0	1.49	
H	6.0	1.23	0.125	1620	115.8	1.70	



$T_{s1} = 1.70$ seg $T_{s2} = 1.12$ seg

FIG. 9 COMPORTAMIENTO SISMICO DEL SUBSUELO

$$v_s = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \tag{16}$$

en donde μ es la rigidez del suelo ó módulo de elasticidad al esfuerzo cortante, y ρ la masa unitaria. El valor de μ puede ser determinado en probetas de suelo inalterado representativas de cada uno de los estratos del subsuelo. Conociendo la velocidad de la onda de cortante en cada estrato podrá calcularse aproximadamente el período fundamental del suelo. Supongamos que se conoce la estratigrafía y valores de v_s de cada uno de los estratos que lo forman, Figs. 8 y 9. Sea v_{si}, d_i, la velocidad de la onda y espesor respectivamente del estrato i. El tiempo que la onda tardaría en atravesar dicho estrato es

$$\Delta t_i \doteq \frac{d_i}{v_{si}} \tag{17}$$

Al recorrer la onda de la base firme a la superficie del suelo donde será reflejada nuevamente hacia la base firme el tiempo transcurrido será 1/4 del período fundamental, así también la distorsión total del suelo en la superficie representará la amplitud del movimiento, Fig. 9. Por consiguiente

$$\frac{1}{4} T_{s1} = \sum_{1}^{n} \frac{d_i}{v_{si}}$$

o bien

$$T_{s1} = 4 \sum_{1}^{1} \frac{d_i}{v_{si}} \tag{18}$$

Para calcular las distorsiones relativas y esfuerzos cortantes en el subsuelo producidos por cierta aceleración sísmica en la superficie establecemos las expresiones paramétricas del movimiento para el caso de ondas de esfuerzo cortante que viajan desde el estrato firme hacia la superficie. De la Fig.10 se establece el equilibrio dinámico de un elemento de suelo a la profundidad $z = i$ como sigue :

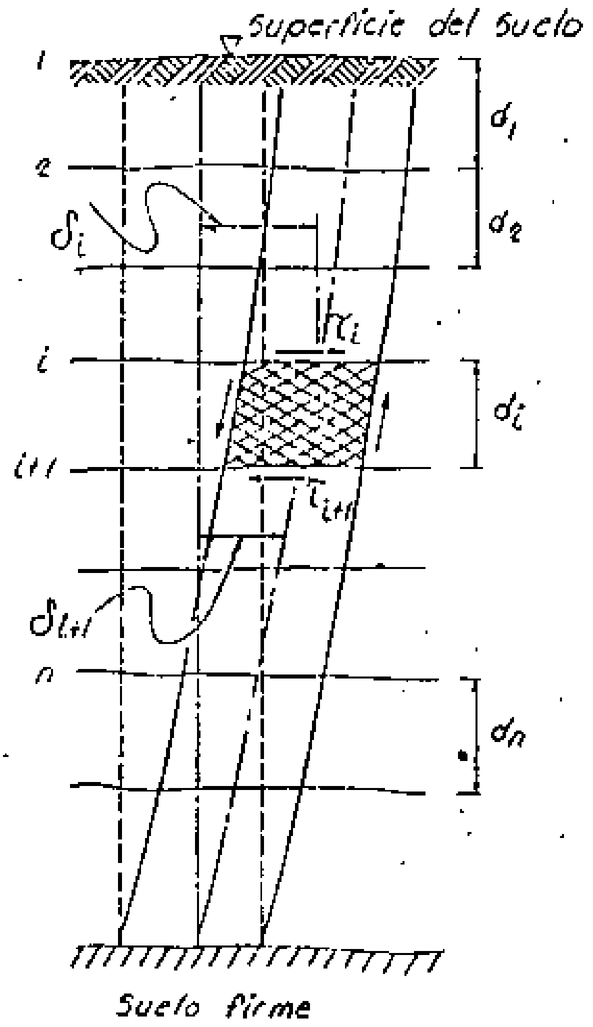


FIG. 10 COLUMNA DE SUELO SUJETA A MOVIMIENTO SISMICO

1) Equilibrio dinámico del elemento

$$(\tau_{i+1} - \tau_i) = (\rho d_i)\frac{1}{2}(\delta_i + \delta_{i+1})\omega_n^2 \qquad (19)$$

2) Distorsión del elemento

$$\frac{\delta_i - \delta_{i+1}}{d_i} = \frac{\tau_i + \tau_{i+1}}{2\mu} \qquad (20)$$

De las expresiones anteriores se encuentran los algoritmos para el cálculo de δ, τ y ω, a saber

$$\delta_{i+1} = A_i\delta_i - B_i\tau_i \qquad (21)$$

$$\tau_{i+1} = C_i(\delta_i + \delta_{i+1}) + \tau_i \qquad (22)$$

en donde los parámetros

$$A_i = \frac{1 - N_i}{1 + N_i} \qquad B_i = \frac{1}{1 + N_i} \cdot \frac{d_i}{\mu_i}$$

$$C_i = \frac{1}{2}\rho_i d_i \omega_n^2 \qquad N_i = \frac{\rho_i d_i^2 \omega_n^2}{4\mu_i} \qquad (23)$$

Conociendo la aceleración máxima a_m de la superficie del suelo se calcula el desplazamiento horizontal correspondiente: $\delta_{si} = a_m / \omega_n^2$ en donde ω_n es la frecuencia circular de la masa del subsuelo desde la superficie hasta la base firme. En la superficie del suelo $\tau_i = 0$, por consiguiente con un valor aproximado de ω_n obtenido de la (18) se determinan A_i, B_i y C_i, y se calcula de (21) el valor siguiente del desplazamiento horizontal δ_{i+1} y luego de la (22) τ_{i+1}. Con los valores de δ_{i+1} y τ_{i+1} se entra nuevamente en la

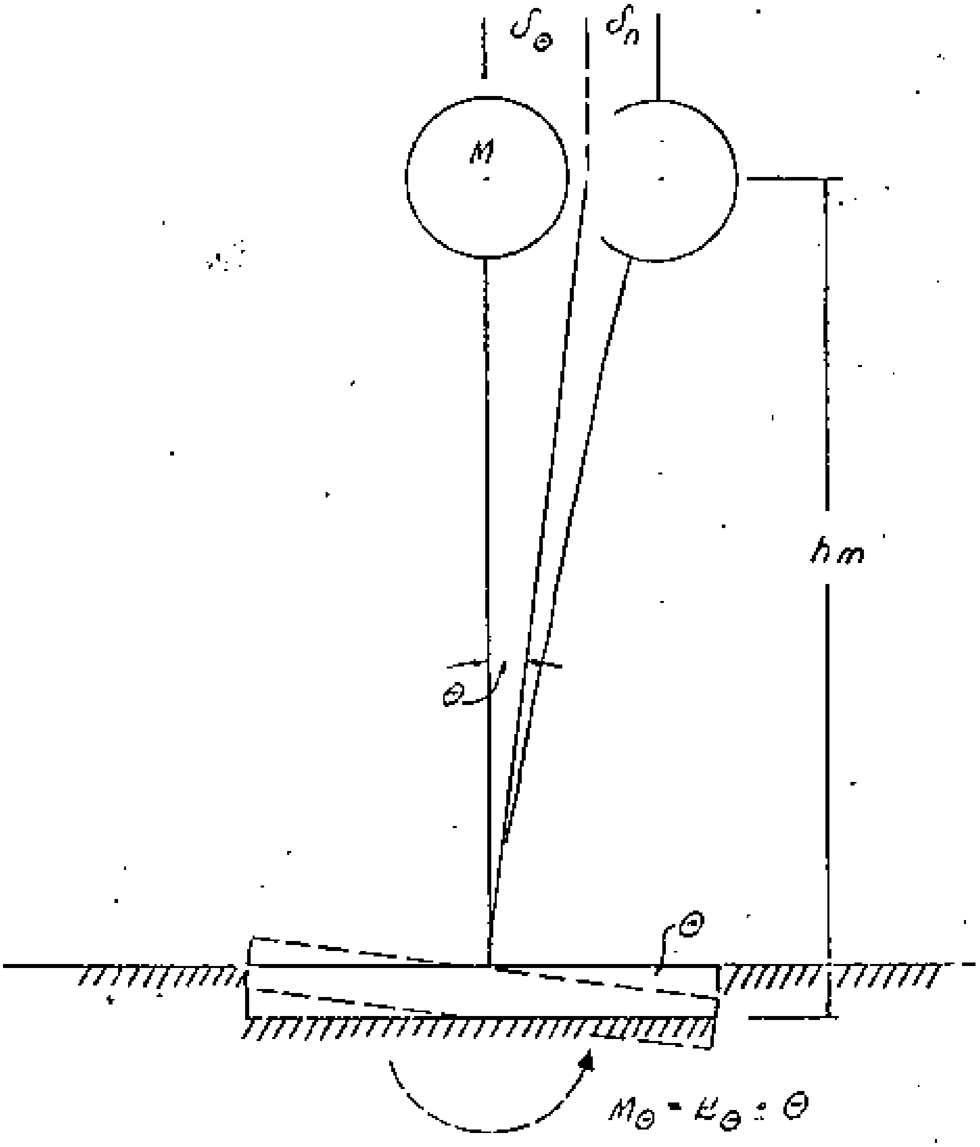


FIG.11 DEFORMACION DE LA ESTRUCTURA Y DE LA CIMENTACION

(21) y se calculan los próximos valores de δ_{i+2}, y con (22) el valor de τ_{i+2}. En esta forma paso a paso se integran las expresiones (21) y (22) hasta llegar a la base firme donde $\delta_{sb} = 0$ y τ_{sb} es máxima. Si $\delta \neq 0$ al llegar a la base, se rectifica el valor de ω_n y se repite el cálculo hasta satisfacer la frontera en la base firme. En la misma forma se puede investigar el comportamiento dinámico del subsuelo para otras frecuencias circulares del subsuelo.

IV.- RESPUESTA SISMICA DE LA CIMENTACION

Supongamos una estructura y su cimentación representada esquemáticamente como muestra la Fig. 11. La fuerza de inercia máxima durante el movimiento sísmico es

$$V_m = (\delta_\theta + \delta_n)\,\omega_0^2 M \tag{24}$$

y el momento de volteo

$$O_r = V_m \cdot h_m \tag{25}$$

Por otro lado las fuerzas de restitución:

por flexibilidad de la estructura; $(K_n \cdot \delta_n)$, y por la rotación de la cimentación : $(K_\theta \cdot \theta)$.

El equilibrio dinámico requiere

$$K_\theta \cdot \theta = (\delta_\theta + \delta_n)\,\omega_0^2 \cdot M \cdot h_m \tag{26}$$

pero $\theta = \dfrac{\delta_\theta}{h_m}$

$$\frac{1}{\omega_0^2} = \frac{(\delta_\theta + \delta_n) \cdot M}{K_\theta \dfrac{\delta_\theta}{h_m^2}}$$

$$\frac{1}{\omega_0^2} = \frac{h_m^2 \cdot M}{K_\theta} + \frac{\delta_n}{\delta_\theta}\,\frac{h_m^2 \cdot M}{K_\theta} \tag{27}$$

pero

$$h_m \delta_n K_n = K_\theta \frac{\delta_\theta}{h_m}$$

$$\frac{\delta_n}{\delta_\theta} = \frac{K_\theta}{K_n}\cdot\frac{1}{h_m^2}.$$

substituyendo en (18)

$$\frac{1}{\omega_0^2} = \frac{h_m^2 M}{K_\theta} + \frac{M}{K_n} \tag{28}$$

Por otro lado, se encuentra que para $\delta_n = 0$ la frecuencia circular por rotación es: $\omega_\theta^2 = K_\theta/M\cdot h_m^2$ y para $\delta_\theta = 0$ la frecuencia circular de la superestructura: $\omega_n^2 = K_n/M$, substituyendo estos valores en (28):

$$\frac{1}{\omega_0^2} = \frac{1}{\omega_\theta^2} + \frac{1}{\omega_n^2} \tag{29}$$

o bien ya que: $\omega = \frac{2\pi}{T}$

$$T_0^2 = T_\theta^2 + T_n^2 \tag{30}$$

En donde T_n es el período de la estructura. De donde se deduce que el período equivalente acoplado de la estructura y su cimentación puede ser obtenido por la (30). El período de rotación T_θ es función de las propiedades dinámicas y estratigráficas del subsuelo y de la rigidez de la cimentación. Esto es:

$$T_\theta = 2\pi h_m \sqrt{\frac{M}{K_\theta}} \tag{31}$$

El problema consistirá en determinar el módulo de cimentación por rotación K_θ. Por lo tanto, conocido el período fundamental del suelo T_{S1} se encuentra T_o / T_{S1} y con el amortiguamiento crítico equivalente ξ_o se entra al espectro normalizado de respuesta y se determina f_a, por consiguiente los valores de V_B y O_T.

La expresión (31) es también válida para los períodos amortiguados cuando $\xi_o <$ 20%, de donde se puede escribir:

$$T_{od}^2 \approx T_{\theta d}^2 + T_{nd}^2 \tag{32}$$

Sea ξ_o el amortiguamiento crítico equivalente del sistema estructura- cimentación, ξ_θ el amortiguamiento crítico de la cimentación y ξ_n el de la superestructura, por tanto

$$\begin{aligned} T_o &= T_{od}(1-\xi_o^2) \\ T_\theta &= T_{\theta d}(1-\xi_\theta^2) \\ T_n &= T_{nd}(1-\xi_n^2) \end{aligned} \tag{33}$$

substituyendo en (32) y efectuando operaciones algebraicas:

$$(1-\xi_o^2) = \frac{(1-\xi_\theta^2)(1-\xi_n^2)T_o^2}{(1-\xi_n^2)T_n^2 + (1-\xi_\theta^2)T_\theta^2} \tag{34}$$

considerando que $(1-\xi^2) = 1-2\xi^2+\xi^4 \approx 1-2\xi^2$ para valores $\xi <$ 0.20, de la (34) se obtiene:

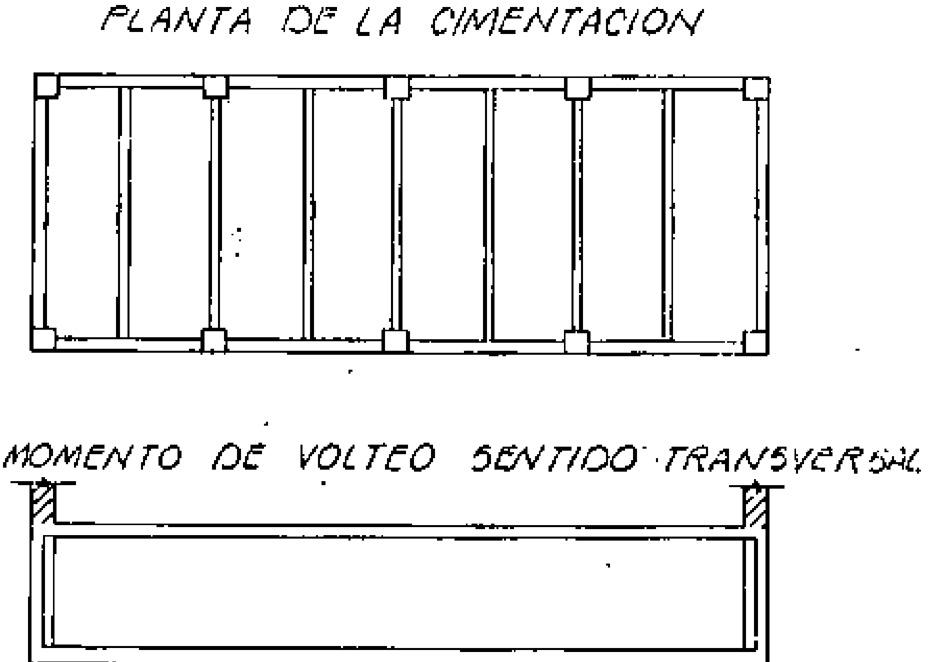
$$\xi_o^2 = \frac{\xi_\theta^2 T_\theta^2 + \xi_n^2 T_n^2}{(1-2\xi_n^2)T_\theta^2 + (1-2\xi_n^2)T_n^2} \tag{35}$$

Por consiguiente, conociendo los valores de T_θ, ξ_θ y T_n, ξ_n se podrá calcular de (30) y (35) los valores del período T_0 y amortiguamiento equivalente ξ_0 respectivamente. Los amortiguamientos de las estructuras se encuentran en rangos de $\xi_n = 2\%$ a 5% y para las cimentaciones aproximadamente:

En sedimentos	ξ_θ
muy suaves	20% - 15%
suaves	15% - 12%
rígidos	12% - 8%
muy rígidos	8% - 6%
duros	5%

V.- REACCIONES SISMICAS

Para el cálculo de K_θ se procede como sigue: supongamos una cimentación como la que se indica en la Fig. 12 de planta rectangular formada por un sistema de vigas cortas y dos vigas longitudinales donde las cortas apoyan, y que en conjunto con la losa inferior de reacción y la losa superior sobre las vigas forman en conjunto un cajón rígido capaz de trabajar en forma continua a la flexión, fuerzas cortantes y torsión. La rigidez en sentido largo es $(EI)_\ell$ y en sentido corto $(EI)_c$. Se divide la superficie de apoyo en fajas transversales de igual área $\bar{a}$ y tantas como se haga necesario para obtener precisión práctica. Supongamos seis fajas para ilustrar el procedimiento. Carguemos una faja, Fig. 12, con una carga unitaria $\Delta q_i = +1$ y calculemos la influencia I_{ji}^N que dicha carga unitaria induce en el subsuelo al centro de los estratos considerados, en este caso cuatro, y debajo de cada una de las bandas. Las compresiones dinámicas volumétricas se designan por α_{ci}^N para cada estrato. Por consiguiente, de acuerdo con la Fig.12 se pueden encontrar los desplazamientos verticales δ_{ji} al centro de las bandas que dicha carga unitaria produce en los puntos 1 a 6 cuando ésta se aplica sucesivamente en cada una de las bandas consideradas. En forma matricial estos valores se calculan como sigue:



PLANTA DE LA CIMENTACION

MOMENTO DE VOLTEO SENTIDO TRANSVERSAL

	Δq_1 1 ▥	Δq_2 2 $\Delta q = +1$	Δq_3 3	Δq_4 4	Δq_5 5	Δq_6 6	
A	I_{11}^{A}	I_{21}^{A}	I_{31}^{A}	I_{41}^{A}	I_{51}^{A}	I_{61}^{A}	α_d^{A}
B	I_{11}^{B}	I_{21}^{B}	I_{31}^{B}	I_{41}^{B}	I_{51}^{B}	I_{61}^{B}	α_d^{B}
C	I_{11}^{C}	I_{21}^{C}	I_{31}^{C}	I_{41}^{C}	I_{51}^{C}	I_{61}^{C}	α_d^{C}
D	I_{11}^{D}	I_{21}^{D}	I_{31}^{D}	I_{41}^{D}	I_{51}^{D}	I_{61}^{D}	α_d^{D}

FIG. 12 INFLUENCIAS POR CARGA UNITARIA

$$
\begin{aligned}
\left|\bar{\delta}_{j1}\right| &= \left[I_{j1}\right]^T \cdot \left|\alpha_d^N\right| \\
\left|\bar{\delta}_{j2}\right| &= \left[I_{j2}\right]^T \cdot \left|\alpha_d^N\right| \\
\cdot \quad &= \quad \cdot \qquad \cdot \\
\left|\bar{\delta}_{ji}\right| &= \left[I_{ji}\right]^T \cdot \left|\alpha_d^N\right|
\end{aligned}
\qquad (36)
$$

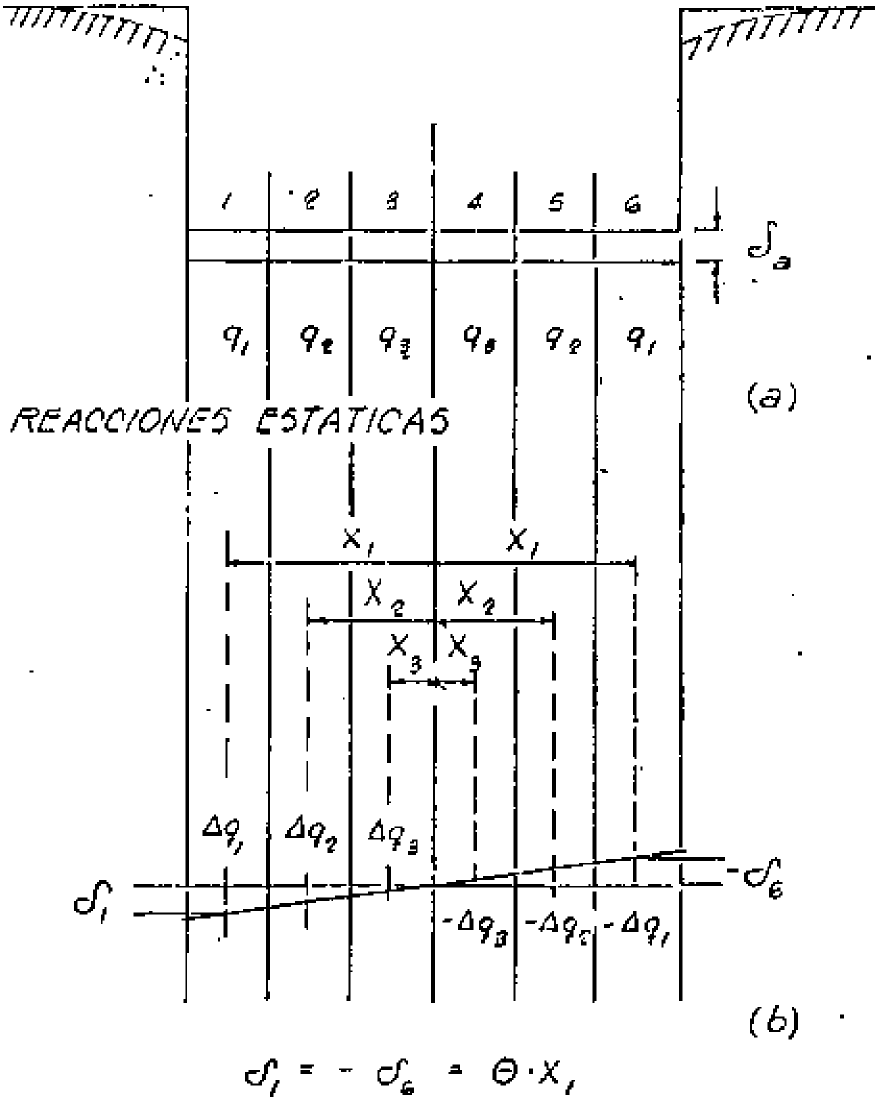
en donde:

$\left[I_{ji}\right]^T$,	matriz transpuesta de las influencias en j debido a la carga unitaria aplicada en i en cada estrato.
$\left\|\alpha_d^N\right\|$,	matriz columnar de las compresiones volumétricas en los estratos de A a N por condiciones dinámicas.
$\left\|\bar{\delta}_{ji}\right\|$,	desplazamiento vertical en puntos j debido a la carga vertical en la banda i

Con los valores de (36) se forma la matriz general de influencia o desplazamientos unitarios como sigue:

$$
\begin{bmatrix}
\bar{\delta}_{11} & \bar{\delta}_{12} & \bar{\delta}_{13} & \bar{\delta}_{14} & \bar{\delta}_{15} & \bar{\delta}_{16} \\
\bar{\delta}_{21} & \bar{\delta}_{22} & \bar{\delta}_{23} & \bar{\delta}_{24} & \bar{\delta}_{25} & \bar{\delta}_{26} \\
\bar{\delta}_{31} & \bar{\delta}_{32} & \bar{\delta}_{33} & \bar{\delta}_{34} & \bar{\delta}_{35} & \bar{\delta}_{36} \\
\bar{\delta}_{41} & \bar{\delta}_{42} & \bar{\delta}_{43} & \bar{\delta}_{44} & \bar{\delta}_{45} & \bar{\delta}_{46} \\
\bar{\delta}_{51} & \bar{\delta}_{52} & \bar{\delta}_{53} & \bar{\delta}_{54} & \bar{\delta}_{55} & \bar{\delta}_{56} \\
\bar{\delta}_{61} & \bar{\delta}_{62} & \bar{\delta}_{63} & \bar{\delta}_{64} & \bar{\delta}_{65} & \bar{\delta}_{66}
\end{bmatrix}
\times
\begin{vmatrix}
\Delta q_1 \\ \Delta q_2 \\ \Delta q_3 \\ \Delta q_4 \\ \Delta q_5 \\ \Delta q_6
\end{vmatrix}
=
\begin{vmatrix}
\delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \delta_4 \\ \delta_5 \\ \delta_6
\end{vmatrix}
$$

CIMENTACION RIGIDA



$$\delta_1 = -\delta_6 = \Theta \cdot X_1$$

$$\delta_2 = -\delta_5 = \Theta\ X_2$$

$$\delta_3 = -\delta_4 = \Theta \cdot X_3$$

FIG. 13 REACCIONES DINAMICAS MAXIMAS

Los desplazamientos debidos a las cargas unitarias Δq_1 a Δq_6 aplicadas en las bandas consideradas serán:

$$\left| \delta_i \right| = \left[\bar{\delta}_{ji} \right]^T \cdot \left| \Delta q_i \right|$$

o bien

$$\left| \delta_i \right| = \left| \bar{\delta}_{ij} \right| \cdot \left| \Delta q_i \right| \qquad (37)$$

Si la estructura de la cimentación se considera rígida debido a un giro θ los desplazamientos verticales de las bandas con respecto al centro de giro, Fig. 13, serán

$$\begin{aligned} \delta_1 &= -\delta_6 = \theta x_1 \\ \delta_2 &= -\delta_5 = \theta x_2 \\ \delta_3 &= -\delta_4 = \theta x_3 \end{aligned} \qquad (38)$$

Substituyendo en (37) se tiene:

$$\left| \theta x_i \right| = \left[\bar{\delta}_{ij} \right] \cdot \left| \Delta q_i \right| \qquad (39)$$

o bien

$$\left| \frac{\Delta q_i}{\theta} \right| = \left[\bar{\delta}_{ij} \right] \cdot \left| x_i \right| \qquad (40)$$

Solucionando el sistema de ecuaciones simultáneas que representa la ecuación matricial (40) se determinan los valores $(\Delta q_i / \theta)$. El momento de volteo será:

$$O_T = \theta \sum \left(\frac{\Delta q_i}{\theta} \right) \bar{a} \cdot x_i \qquad (41)$$

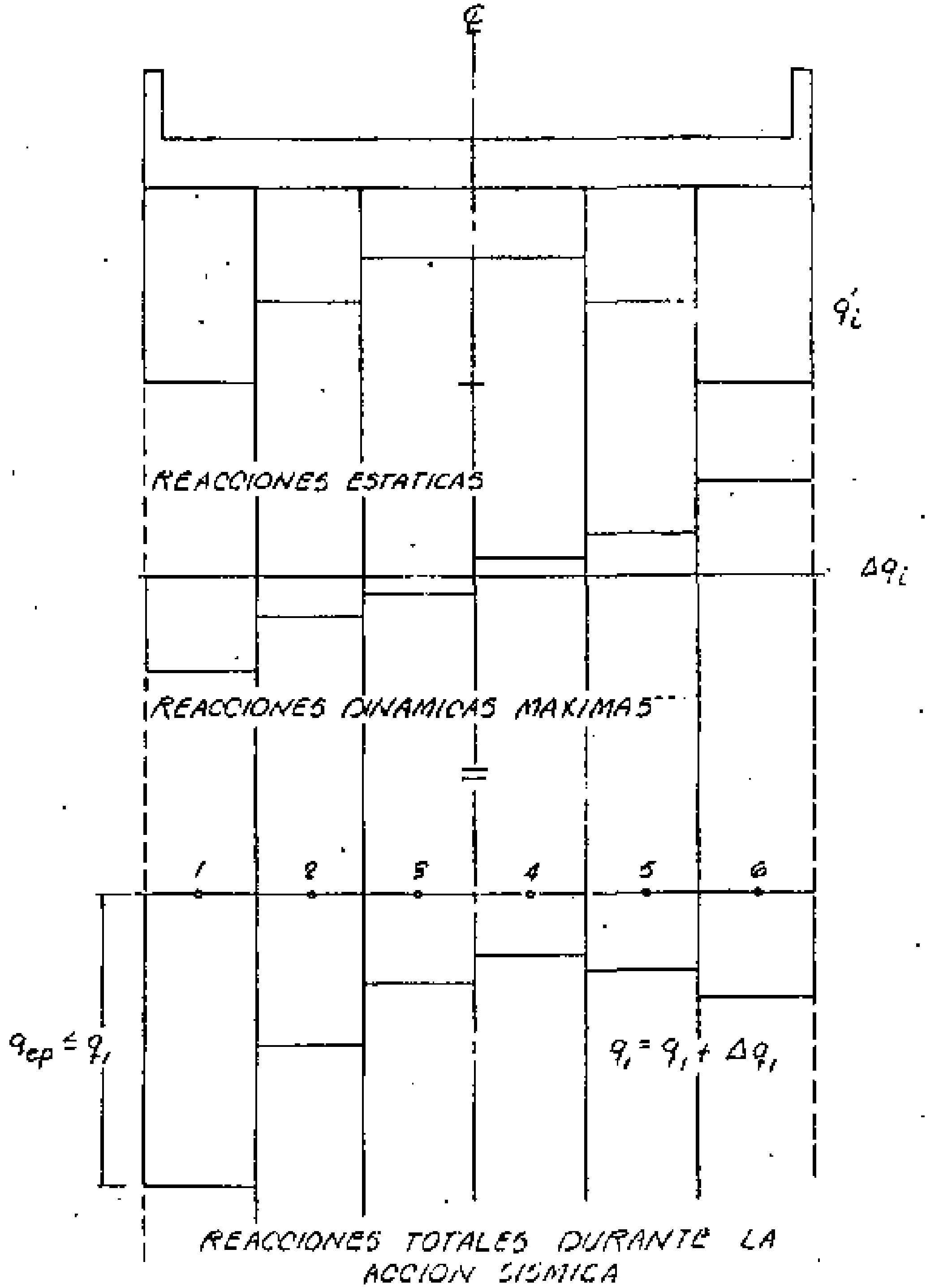


FIG. 14 DISTRIBUCION DE ESFUERZOS DE CONTACTO AL NIVEL DE DESPLANTE DE LA CIMENTACION

El módulo de cimentación por rotación queda definido por $K_\theta = O_T/\theta$, entonces

$$K_\theta = \bar{a} \sum_{1}^{6} \left(\frac{\Delta q_i}{\theta} \right) x_i \tag{42}$$

Conociendo K_θ se calcula T_θ y el valor $T_0 = \sqrt{T_\theta^2 + T_r^2}$ y con el amortiguamiento crítico equivalente ζ_0 se entra al espectro de diseño con T_0/T_s, y se encuentra f_a ; así también

$$O_T = f_a \left(a_m \cdot M \cdot h_m \right) \tag{43}$$

así pues la amplitud del ángulo que gira la cimentación será

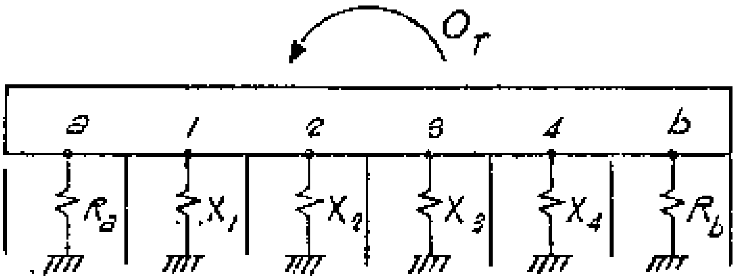
$$\theta = \frac{f_a \left(a_m M h_m \right)}{K_\theta} \tag{44}$$

el incremento de esfuerzos en la interfase de la estructura de cimentación y el suelo es

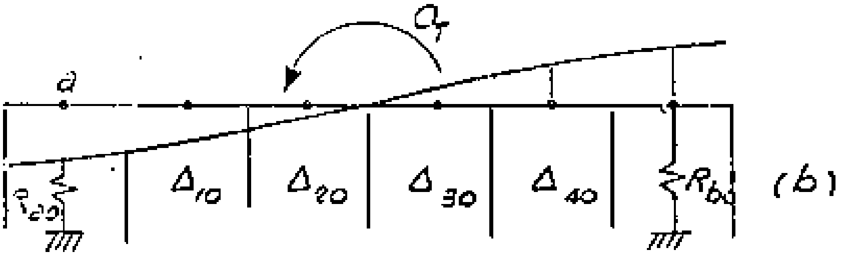
$$\Delta q_i = \left(\frac{\Delta q_i}{\theta} \right) \cdot \theta \tag{45}$$

Los esfuerzos sísmicos de reacción de la cimentación se suman a los ya determinados para las condiciones estáticas, Fig. 14. Se examina si los esfuerzos máximos en las orillas de la cimentación no sobrepasan la resistencia del suelo en esos lugares.

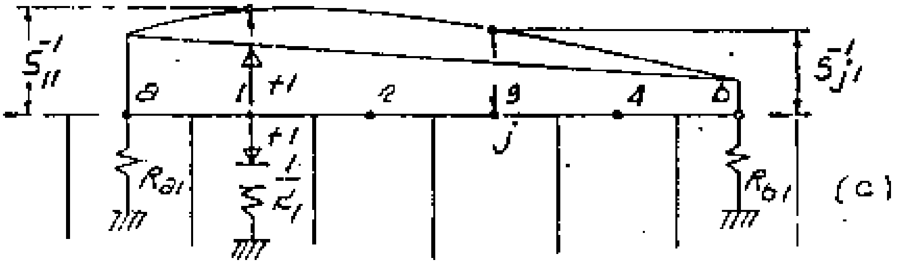
Cuando la cimentación es flexible habrá necesidad de establecer la compatibilidad de deformaciones entre el suelo y la estructura de cimentación tomando en cuenta la rigidez (EI) en el sentido de la flexión, para lo cual se establece la matriz de flexibilidades de la estructura de la cimentación. Sea la Fig. 15 la estructura a resolver donde los valores X_1 a X_4 son las reacciones incóg-



CONDICION: $X_i = 0$



CONDICION: $X_1 = +1$



CONDICION: $X_2 = +1$

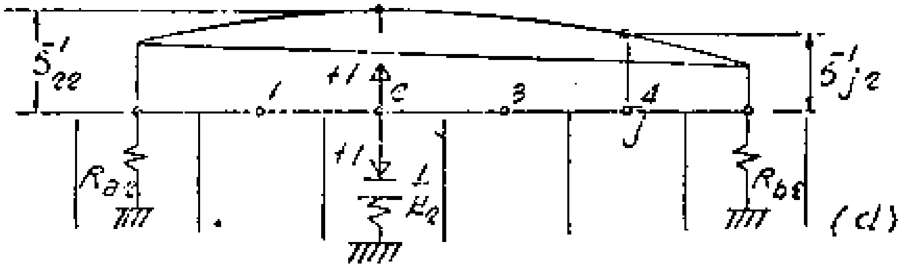


FIG. 15 DEFORMACIONES DE LA ESTRUCTURA DE LA CIMENTACION EN LAS CONDICIONES $X_i = 0$ Y $X_i = +1$, RESPECTIVAMENTE

nitas, esto es: $X_i = \Delta q_i \cdot \bar{a}$. Lo anterior implica la solución de un sistema estructural estáticamente indeterminado. Sin embargo, haciendo $X_1 = X_2 = X_i = 0$ esto es, CONDICION $X_i = 0$, Fig. 15b, la estructura de cimentación será estáticamente determinada con apoyos en a y b, y reacciones R_{a0} y R_{b0} respectivamente. En estas condiciones se podrán calcular los desplazamientos por flexión y por ceder los apoyos debido a un momento arbitrario de volteo O_r^n , estos corrimientos se designarán por Δ_{i0} , esto es, desplazamiento vertical en el punto i originado por la CONDICION $X_i = 0$. Para considerar los efectos de las reacciones X_i , se suponen CONDICIONES $X_i = +1$ en cada uno de los puntos representativos de las bandas consideradas en el análisis, según muestra la Fig. 15c y d. Las condiciones de apoyo serán las mismas que para la CONDICION $X_i = 0$. Se aplica una carga unitaria en la estructura en el punto i e igual y contraria en el suelo. Si K_i representa el módulo de cimentación para la banda i , la deformación del suelo será $1/K_i$, en la estructura se originará un desplazamiento por ceder los apoyos y flexión $\bar{S}'_{ii}$; por consiguiente el desplazamiento total en i será

$$\bar{S}_{ii} = \bar{S}'_{ii} + \frac{1}{K_i} \qquad (46)$$

En cualquier otro punto j de la estructura se tendrá un desplazamiento $\bar{S}_{ji} = \bar{S}'_{ji}$. Por el teorema de Maxwell $\bar{S}_{ji} = \bar{S}_{ij}$. Esto es: "el desplazamiento vertical en j debido a una carga unitaria aplicada en i será igual al desplazamiento en i debido a la misma carga unitaria aplicada en j ". Así pues, para establecer la compatibilidad de deformación o interacción entre la estructura de cimentación y el suelo en el punto i se deberá tener la siguiente condición:

$$\bar{S}_{i1} X_1 + \bar{S}_{i2} X_2 + \bar{S}_{i3} X_3 + \cdots + \bar{S}_{ii} X_i + \cdots + \bar{S}_{in} X_n = \Delta_{i0} \qquad (47)$$

Aplicando la expresión anterior al caso de la Fig. 15 con 4 incógnitas se tiene

$$\begin{aligned} \bar{S}_{11}X_1 + \bar{S}_{12}X_2 + \bar{S}_{13}X_3 + \bar{S}_{14}X_4 &= \Delta_{10} \\ \bar{S}_{21}X_1 + \bar{S}_{22}X_2 + \bar{S}_{23}X_3 + \bar{S}_{24}X_4 &= \Delta_{20} \\ \bar{S}_{31}X_1 + \bar{S}_{32}X_2 + \bar{S}_{33}X_3 + \bar{S}_{34}X_4 &= \Delta_{30} \\ \bar{S}_{41}X_1 + \bar{S}_{42}X_2 + \bar{S}_{43}X_3 + \bar{S}_{44}X_4 &= \Delta_{40} \end{aligned} \tag{48}$$

Puesto que el caso de momento de volteo provoca una rotación simétrica se establece que: $X_1 = -X_4$ y $X_2 = -X_3$, por lo anterior se puede reducir la (48):

$$\begin{bmatrix} (\bar{S}_{11} - S_{14}) & (\bar{S}_{12} - \bar{S}_{13}) \\ (\bar{S}_{21} - S_{24}) & (\bar{S}_{22} - \bar{S}_{23}) \end{bmatrix} \times \begin{vmatrix} X_1 \\ X_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \Delta_{10} \\ \Delta_{20} \end{vmatrix} \tag{49}$$

Para solucionar la ecuación matricial (49) será necesario conocer los valores de los módulos de cimentación para las bandas respectivas considerando que el suelo es uniforme en la extensión de la cimentación: $K_a = K_b$, $K_1 = K_4$ y $K_2 = K_3$. Sin embargo, estos valores son función de la rigidez de la cimentación y distribución de reacciones finales; por consiguiente para una primera aproximación se considera la cimentación rígida, de la (38) y (45) se obtiene para un momento arbitrario θ'

$$\begin{aligned} R'_a &= \Delta q'_a \cdot \bar{a}, & \delta'_a &= \theta' x_a & \therefore\ K'_a &= \frac{R'_a}{\delta'_a} \\ X'_1 &= \Delta q'_1 \cdot \bar{a}, & \delta'_1 &= \theta' x_1 & \therefore\ K'_1 &= \frac{X'_1}{\delta'_1} \\ X'_2 &= \Delta q'_2 \cdot \bar{a}, & \delta'_2 &= \theta' x_2 & \therefore\ K'_2 &= \frac{X'_2}{\delta'_2} \end{aligned} \tag{50}$$

Conociendo los valores de K' se resuelve la (49) encontrando valores de $X'_1 = -X'_4$

y $X_2'' = -X_3''$, de donde se calcula: $\Delta q_{f_a}'' = -\Delta q_{b}''$, $\Delta q_{1}'' = -\Delta q_{f_4}''$ y $\Delta q_{f_2}'' = -\Delta q_{f_3}''$. Estos valores se substituyen en la ecuación matricial de desplazamientos verticales (37) y se calculan nuevos valores de: $\delta_a'' = -\delta_b''$, $\delta_1'' = -\delta_4''$ y $\delta_2'' = -\delta_3''$, con lo cual se determinan nuevos valores de $K_i'' = X_i''/\delta_i''$ y se vuelve a entrar en la (49) para encontrar valores mejorados de X_i^n, se prosigue con el ciclo de iteraciones hasta que los valores de X_i^n, $\Delta q_{f_i}^n$ no cambien substancialmente. El momento de volteo será

$$O_T^n = 2\left(R_a^n x_a + X_1^n x_1 + X_2^n \cdot x_2\right) \tag{51}$$

El giro equivalente es

$$\theta^n = \frac{1}{3}\left(\frac{\delta_a^n}{x_a} + \frac{\delta_1^n}{x_1} + \frac{\delta_2^n}{x_2}\right) \tag{52}$$

Por consiguiente el módulo por rotación y el período respectivamente

$$K_\theta = \frac{O_T^n}{\theta^n} \quad y \quad T_\theta = 2\pi h_m \sqrt{\frac{M}{K_\theta}} \tag{53}$$

de donde $T_o^2 = T_n^2 + T_\theta^2$ así también se encuentra el valor ξ_o de la (35). Se entra con este valor y T_o / T_{S1} en el espectro de diseño, Fig. 6, y se obtiene la amplificación f_a, de donde la respuesta sísmica es:

1) Cortante en la base $\quad V_0 = f_a \cdot M a_m \quad$ (54)

2) Momento de volteo $\quad O_T = (f_a M a_m) \cdot h_m \quad$ (55)

Las reacciones finales se obtendrán multiplicando por la relación O_T / O_T^n los valores de R_2^n , X_1^n y X_2^n etc., encontrados anteriormente por suponer un momento de volteo arbitrario O_T^n . Finalmente, se suman las reacciones unitarias sísmicas finales a las estáticas, Fig. 14, y se revisa que las reacciones máximas no sobrepasen las admisibles en los bordes de la cimentación.

centro de educación continua
división de estudios superiores
facultad de ingeniería, unam

V. CURSO INTERNACIONAL DE INGENIERIA SISMICA

DISEÑO SISMICO DE ESTRUCTURAS ESPECIALES

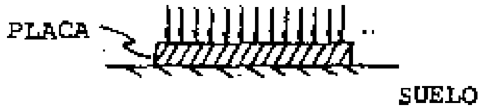
PROPIEDADES ELASTICAS DE LOS SUELOS

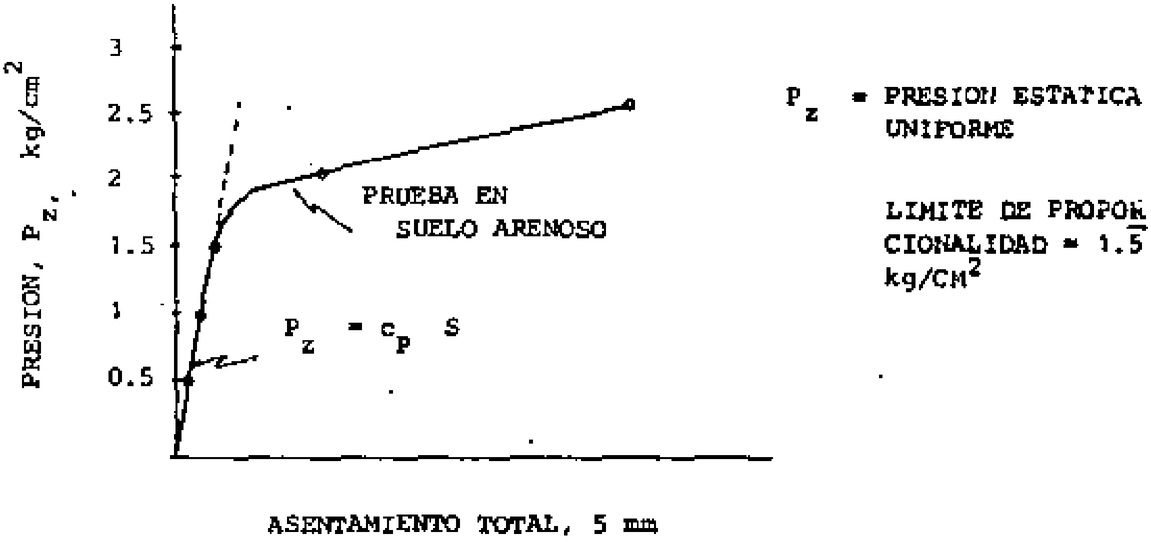
DR. OCTAVIO A. RASCON CHAVEZ
AGOSTO, 1979

PROPIEDADES ELASTICAS DE LOS SUELOS *

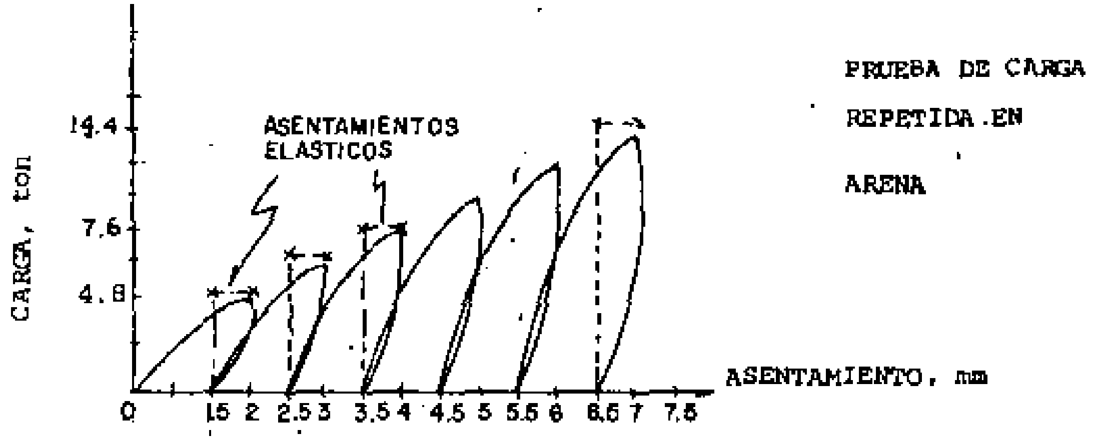
Por Octavio A. Rascón

1. COEFICIENTE DE REACCION DEL SUELO, c_p



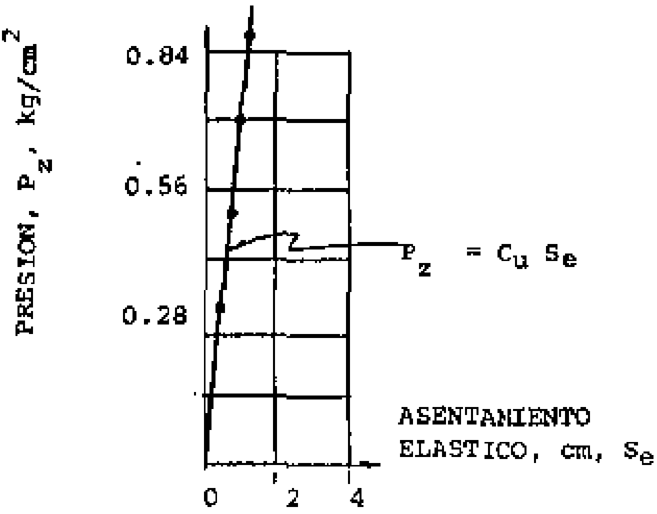


2. COEFICIENTE DE COMPRESION ELASTICA UNIFORME, c_u



---

* TOMADO DE "DYNAMICS OF BASES AND FOUNDATIONS", POR D.D. BARKAN, McGRAW HILL (1962)



$$C_u = \frac{E}{1-D^2} \frac{C_s}{\sqrt{A}}$$

RELACION LARGO/ANCHO	C_s
1.0	1.06
1.5	1.07
2.0	1.09
3.0	1.13
5.0	1.22
10.0	1.41

BAJO LA HIPOTESIS DE ASENTAMIENTO UNIFORME DE UNA PLACA CIRCULAR INFINITAMENTE RIGIDA, EN TERMINOS DE LA TEORIA DE ELASTICIDAD SE OBTIENE QUE

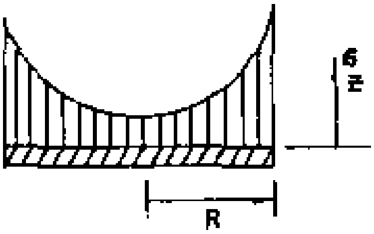
$$C_u = 1.13 \frac{E}{1-D^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{A}}$$

E = MODULO DE ELASTICIDAD

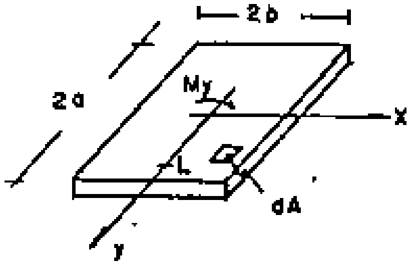
D = MODULO DE PISSON

A = AREA DE CONTACTO DE LA PLACA

ESTA HIPOTESIS LA DISTRIBUCION DE ESFUERZOS BAJO LA PLACA ES DE LA FORMA:



3. COEFICIENTE DE COMPRESION NO UNIFORME, $C\phi$



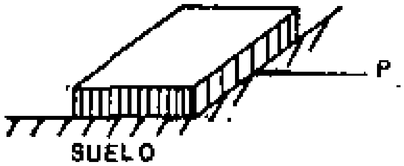
M_y = MOMENTO ESTATICO ALREDEDOR DEL EJE y

dp_z = $(L\psi)\ C\psi dA$

$$C\varphi = \frac{E}{1-D^2}\ \frac{k\psi}{\sqrt{A}}$$

RELACION LARGO/ANCHO	kφ
1.0	1.984
1.5	2.254
2.0	2.510
3.0	2.955
5.0	3.700
10.0	4.981

4.- COEFICIENTE DE CORTANTE ELASTICA UNIFORME, C_T



AL APLICAR P ESTATICAMENTE:

$$\overline{\tau} = C_T\ S'_e$$

$\overline{\tau}$ = ESFUERZO CORTANTE PROMEDIO EN LA ZONA DE CONTACTO

S'_e = DESPLAZAMIENTO ELASTICO PROMEDIO BAJO LA ACCION DE $\overline{\tau}$

D = MODULO DE POISSON DEL SUELO

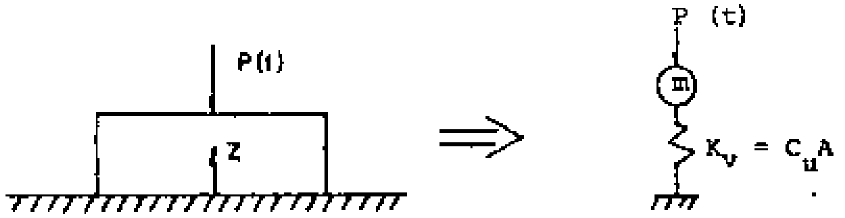
C_T = COEFICIENTE DE PROPORCIONALIDAD

$$C_T = \frac{E}{1-D^2}\ \frac{k_T}{\sqrt{A}}$$

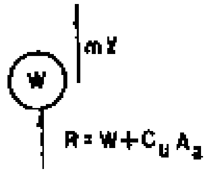
D	RELACION LARGO/ANCHO						
	0.5	1.0	1.5	2.0	3.0	5.0	10.0
0.1	1.040	1.000	1.010	1.020	1.050	1.150	1.250
0.2	0.990	0.938	0.942	0.945	0.975	1.050	1.160
0.3	0.926	0.868	0.864	0.870	0.906	0.950	1.040
0.4	0.884	0.792	0.770	0.784	0.806	0.850	0.940
0.5	0.770	0.704	0.692	0.686	0.700	0.732	0.940

CUANDO LAS FUERZAS O MOMENTOS QUE SE APLICAN A LA CIMENTACION SON DINAMICAS ES NECESARIO TOMAR EN CUENTA QUE PARTE DE LA ENERGIA ES DISIPADA A TRAVES DEL SUELO; A ESTE PROBLEMA SE LE DENOMINA DE INTERACCION DINAMICA SUELO - ESTRUCTURA.

VIBRACIONES VERTICALES DE UNA PLACA INFINITAMENTE RIGIDA SOBRE UN MEDIO SEMINFINITO.



m = W/g , W = PESO DE CIMENTACION + MAQUINA



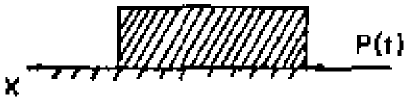
$$m\ddot{z} - W + W + C_uAz - P(t) = 0$$

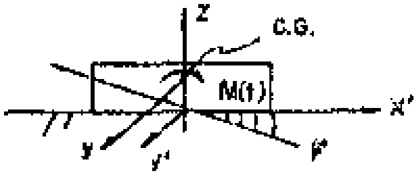
$$mz + C_uAz = P\ (t)$$

CURSO DE VIBRACIONES LIBRES (P (t) = 0)

$$\ddot{z} + W_v^2 z = 0 \quad ; \quad W_v^{\,2} = \frac{C_uA}{m} = \frac{E}{1 - D^2}\ C_s\ \frac{\sqrt{A}}{m}$$

ESTE PLANTEAMIENTO ADOLECE DEL DEFECTO DE QUE NO SE TOMA PARTE DEL SUELO QUE SE "ADHIERE" A LA CIMENTACION FORMANDO PARTE DE LA MASA TOTAL DEL SISTEMA, NI LA DISIPACION DE ENERGIA A TRAVES DEL SUELO. COSA SEMEJANTE SUCEDE EN LOS CASOS DE VIBRACIONES HORIZONTALES, DE CABECEO O TORSION; EN LOS PRIMEROS DOS CASOS SE OBTIENE



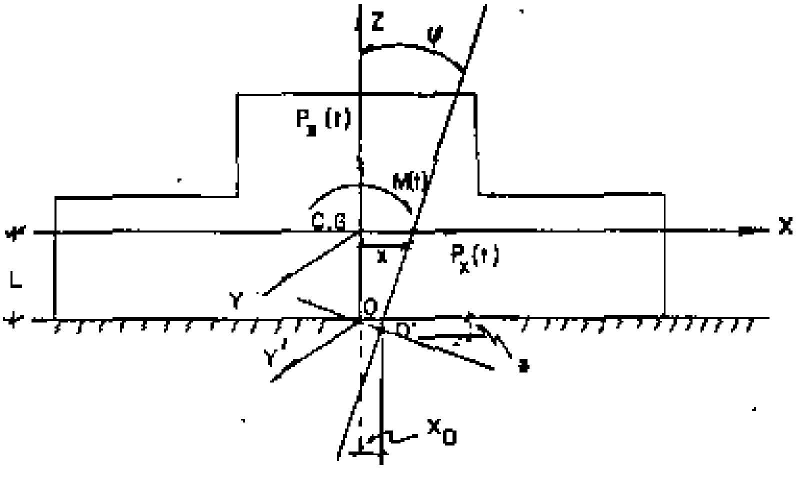


$$\ddot{x} + w_H^{2} x = P(t) \;;\quad w_H^{2} = \frac{E}{1-D^{2}}\, K_T\, \frac{\sqrt{A}}{m}$$

$$\ddot{\varphi} + w_c^{2}\varphi = M(t)$$

$$w_c^{2} = \frac{E}{1-D^{2}}\, K\varphi\, \frac{I}{\sqrt{A}\; I_o}$$

EN DONDE I = MOMENTO DE INERCIA DEL AREA QUE CONSTITUYE LA BASE DE LA CIMENTACION, CON RESPECTO AL EJE y', e I_o = MOMENTO DE INERCIA DE MASA CON RESPECTO AL EJE y QUE PASA POR EL CENTRO DE GRAVEDAD DE LA CIMENTACION Y LA MAQUINA. EN ESTAS MISMAS CONDICIONES, SI SE PLANTEA EL PROBLEMA DE VIBRACIONES VERTICALES, HORIZONTALES Y DE CABECEO SIMULTANEAMENTE SE TENDRA (pág. 110 DEL BARKAN)



$m\ddot{z} + C_u A z = P_z(t)$ ECUACION INDEPENDIENTE DE x y φ

$m\ddot{x} + C_T A x - C_T A L \varphi = P_x(t)$

$I_o \ddot{\varphi} - C_T A L x + (C\varphi I - WL + C_T A L^{2})\varphi = M(t)$ ECUACIONES ACOPLADAS

LAS OBJECIONES CITADAS ANTERIORMENTE HAN SIDO YA SORTEADAS EN ALGUNOS MODELOS MATEMATICOS "EXACTOS" QUE DAN LA SOLUCION A VIBRACIONES FORZADAS CON EXCITACION ARMONICA, EN VIBRACION DESARROLLADA EN CADA COORDENADA GENERALIZADA.

EN LA INVESTIGACION PUBLICADA POR J.A. NIETO, E. ROSENBLUETH Y O. RASCON, "MODELO MATEMATICO PARA REPRESENTAR LA INTERACCION DINAMICA DE SUELO Y CIMENTACION", EN EL BOLETIN DE LA SOCIEDAD MEXICANA DE INGENIERIA SISMICA, VOL. 3, No. 2, QUE SE ANEXA, SE APROVECHAN ALGUNAS DE LAS SOLUCIONES "EXACTAS" MENCIONADAS PARA PROPONER MODELOS BASADOS EN SISTEMAS DE UN GRADO DE LIBERTAD PARA CADA CASO (TRANSLACION, CABECEO O TORSION), QUE CUBRAN SATISFACTORIAMENTE LOS RANGOS DE PERIODOS DE INTERES EN DISEÑO SISMICO.

EN ESTOS MODELOS SE PRESCRIBE UN PRISMA DE SUELO QUE HAY QUE AGREGAR A LA CIMENTACION, UN RESORTE Y UN AMORTIGUADOR (TABLAS 1 y 2 DE LA PUBLICACION MENCIONADA).

centro de educación continua
división de estudios superiores
facultad de ingeniería, unam

V CURSO INTERNACIONAL DE INGENIERIA SISMICA

DISEÑO SISMICO DE ESTRUCTURAS ESPECIALES

CASCARONES

DR. PORFIRIO BALLESTEROS B.

AGOSTO DE 1979

relato general del tema IV métodos prácticos para el análisis de estructuras laminares

PORFIRIO BALLESTEROS*

Los trabajos presentados en este tema son los siguientes:

The supporting frames of cylindrical north-light shells
Amin Ghali (Canadá)

Umbrella hyperbolic paraboloidal shell
Carlos A. Brebbia (Argentina)

Contribution to a simplified calculation of thin elastic shallow shells having a positive gaussian curvature index
H. Hotzler (Berlín)

On the design of uniformly loaded spherical caps based on a load buckling analysis
Donald E. Milks and *Howard P. Harrenstien* (USA)

Stresses in hyperboloids of revolution
P. L. Gould and *S. L. Lee* (USA)

Cálculo simplificado de los esfuerzos de membrana en una cubierta de concreto tipo cascarón en forma de cono
Arq. Jorge Molina Montes (México)

The supporting frames of cylindrical north-light shells

Amin Ghali (Canadá)

El autor ha presentado un análisis de esfuerzos de la estructura de soporte de cascarones cilíndricos apoyados en los extremos con abertura de iluminación. Considera los efectos de temperatura y establece que sólo son necesarias las juntas de dilatación en los muros de apoyo, Fig. 1.

Para el análisis de esfuerzos utiliza los procedimientos de energía de deformación, transporta los ejes de referencia al centro elástico de la estructura, las ecuaciones si-

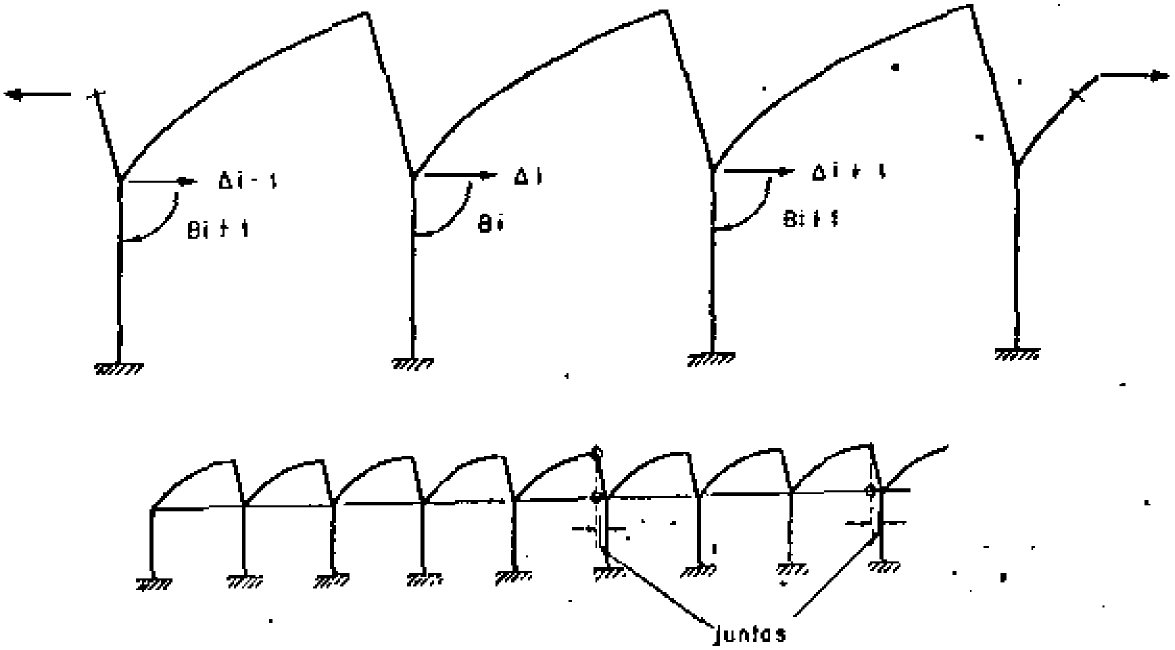


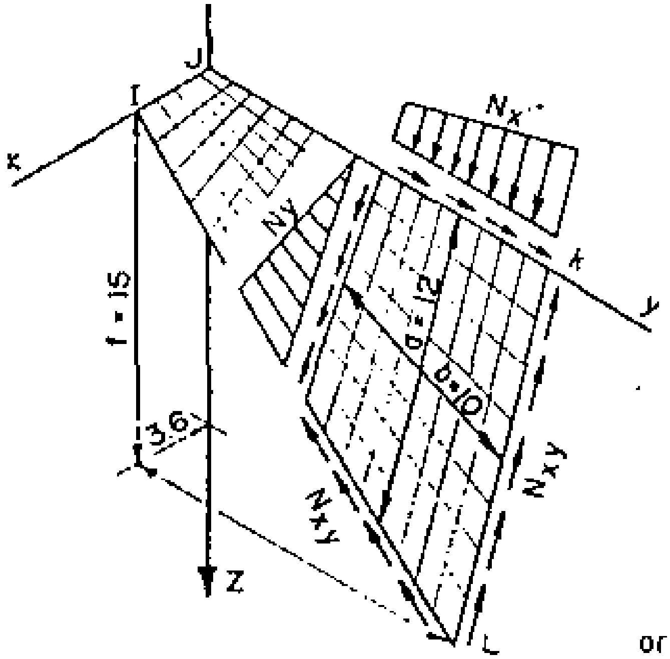
Fig. 1

---

* Doctor en Ingeniería. Profesor, Ingeniería Civil, Universidad de Nuevo León. Ingeniero Consultor, Monterrey, México.

$$E = 2.1 \times 10 \frac{10^5}{cm^2}; \; h = 5\ cm; \; \nu = 0.15; \quad D = 2.19 \times 10^6\ kg\ cm$$

$$Nm = 430 \frac{kg}{m}; \; (N_{xy})m = 2.235 \frac{kg}{m}$$



$$N_{CR} = \frac{r^2 D}{a^2}\left(1 + \frac{a^2}{b^2}\right) \quad (1)$$

$$(N_{xy})_{CR} = 5.7\, \frac{r^2 D}{b^2} \quad (1)$$

$$N_{CR} = 4.050 \frac{kg}{m}$$

$$(N_{xy})_{CR} = 15.400 \frac{kg}{m}$$

$$\boxed{\frac{N_{CR}}{Nm} = 9.42; \; \frac{(N_{xy})_{CR}}{(N_{xy})\ m} = 6.9}$$

orden de magnitud de la carga crítica

Fig. 2

multáneas resultantes, las expresa en forma matricial. En realidad este trabajo no tiene nada que ver con el análisis de cascarones, se refiere a la solución de una estructura indeterminada de alto orden.

Existe gran incertidumbre al calcular las cargas que trasmite el cascarón a la estructura de soporte, basándose sólo en la teoría de vigas.

Umbrella hyperbolic paraboloidal shell

Carlos A. Brebbia (Argentina)

El autor expone que la teoría membranal de Aimond, en los cascarones paraboloides hiperbólicos tipo paraguas, no respeta las condiciones de compatibilidad de deformaciones entre vigas de borde y cascarón.

En algunos casos el despreciarlo puede conducir a condiciones peligrosas.

Las pruebas de Rowe,[1] efectuadas en la Asociación del Cemento y Concreto de Londres, mostraron que los esfuerzos de flexión son importantes en las proximidades del cascarón con la viga de borde.

Yu y Kriz[1] concluyeron que el análisis de esfuerzos de membrana es satisfactorio para propósitos de diseño. En este trabajo el autor analiza elásticamente la teoría de flexión por el procedimiento de desplazamientos elementales finitos. Muestra los resultados obtenidos por medio de computadoras electrónicas para diferentes relaciones de *c/t*, donde se observa la importancia en la distribución interna de esfuerzos. Concluye que para grandes valores de *c/t*, y bajo la acción de cargas verticales, domina el comportamiento de teoría de membrana, y para pequeños valores de *c/t*, la flexión. Calcula gráficas de diseño para una relación de Poisson de 0.15 y para valores de *c/t* comprendidos entre los 25 y 100.

Establece algunas consideraciones de estabilidad y estudia la flexión por cargas de viento.

Respecto a las condiciones de pandeo, es

---

[1] Referencias 1 y 2 citadas por el autor.

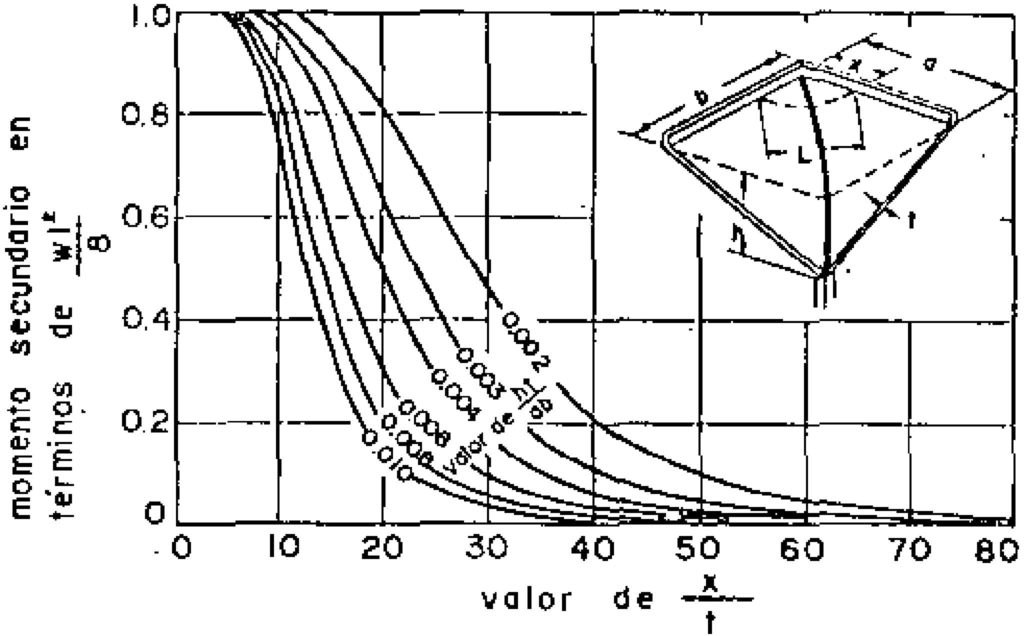


Fig. 3

importante mencionar que esta clase de superficies, debido a la curvatura Gaussiana negativa, tiene una gran capacidad de carga crítica. Sólo en algunos casos de cascarones muy aperaltados es conveniente analizar el orden de magnitud de la carga normal y corte crítico, lo cual es posible hacer comparando la zona de menor curvatura con la placa equivalente comprimida en dos direcciones perpendiculares, y bajo la acción de esfuerzos de corte;[2] en la figura 2, se presenta un análisis de un cascarón aperaltado, en el cual fue importante conocer el orden de magnitud de la carga normal y cortante crítico.[3] La carga crítica en las vigas de borde de compresión, prácticamente no existe por estar éstas conectadas por medio del refuerzo a la superficie del cascarón.

A. L. Parme,[4] presentó un estudio aproximado de esfuerzos de flexión en cascarones paraboloides hiperbólicos tipo paraguas. Considera la flexión de los arcos parabólicos que generan la superficie, independientemente uno del otro. Se considera que estos valores deben compararse con los presentados por el autor. En la figura 3 se presentan gráficamente los resultados de Parme.

El trabajo presentado por el autor es una excelente aportación de esfuerzos por medio de computadoras en cascarones paraboloides hiperbólicos.

Contribution to a simplified calculation of thin elastic shallow shells having a positive Gaussian curvature index

H. Hotzler (Berlín)

El autor presenta un procedimiento aproximado para determinar los momentos de flexión y torsión en las proximidades de los apoyos, en cascarones de doble curvatura positiva, las fórmulas que concluyen son prácticas y fáciles de aplicar.

Es importante mencionar que en este tipo de cascarones raras veces los esfuerzos de membrana originan dificultades en su diseño. El espesor nunca se determina en función de los esfuerzos membranales, generalmente es definido por los esfuerzos de pandeo, y en raras ocasiones por esfuerzos de flexión y temperatura. La determinación de esta clase de esfuerzos presenta dificultades matemáticas, pero existen soluciones aproximadas basadas en las suposiciones de Geckler,[5] las cuales han sido establecidas dando valores adecuados para fines prácticos.

---

[2] Stephen P. Timoshenko and James M. Gere Teory of Elastic Stability, Mc.Graw Hill, 1961.
[3] P. Ballesteros, "Procedings of World Conference of Shells Structures, pp. 355-356, San Francisco, 1962.
[4] A. L. Parme, Transcations ASCE, Vol. 121, pp. 1023-1025, 1956.
[5] Stephen P. Timoshenko and James M. Gere. Theory of Elastic Stability, Mc Graw Hill, 1961.

Esfuerzos de flexión debidos a las cargas. La discrepancia de los desplazamientos entre cascarón y vigas de borde origina perturbaciones de flexión en las proximidades de las vigas de borde, estos se determinan por medio del cilindro tangente equivalente. Se supone que el corte transversal toma la totalidad de la carga a través del arco de borde. Siendo R el radio de curvatura, q la carga por unidad de área, y h el espesor, el momento máximo en función de las hipótesis anteriores viene expresado por

$$M_{\text{máx}} = -0.289\, q\, R\, h \qquad (1)$$

valor que se abate rápidamente y tiende a cero a una distancia del arco de aproximadamente cuatro veces el espesor.

Flexión debida a temperaturas diferenciales entre el arco y cascarón. Si el cascarón se encuentra a una temperatura ΔT mayor que la de los arcos de borde, y si este estuviese libre, su desplazamiento radial sería

$$u = -\alpha\, R\, \Delta T \qquad (2)$$

en el cual α es el coeficiente de expansión térmica del concreto.

La teoría de cascarones cilíndricos, considerando el cilindro tangente equivalente, prueba que si el desplazamiento definido por la fórmula (2) es prevenido por los arcos de borde, se inducen los siguientes cortantes y momentos entre arco de borde y cascarón, Fig. 4.

$$Q_T = \frac{\alpha\, E\, h\, k\, \Delta T}{R} \qquad (3)$$

$$M_T = \frac{\alpha\, E\, h\, k^2\, \Delta T}{2R} \qquad (4)$$

en donde:

Q = cortante por unidad de longitud entre cascarón y arco de borde,

M = momento por unidad de longitud entre cascarón y arco de borde,

α = coeficiente de expansión térmica del concreto,

E = módulo de elasticidad del concreto,

h = espesor del concreto,

ΔT = diferencia de temperatura entre cascarón y arco de borde, y

$k = 0.76\sqrt{Rh}$.

El orden de magnitud de los valores definidos por (3) y (4), concluye que en la práctica es imposible prever suficiente sección y refuerzo para tomar dichos valores, lo cual origina una rotación plástica en la conexión con los arcos de borde, y no afecta la estabilidad de la estructura, sólo es recomendable que los anclajes del arco de refuerzo entre viga de borde y cascarón sean adecuados.

Esfuerzos debidos a temperaturas diferencial entre las superficies interior y exterior del cascarón. El valor de estos esfuerzos se aproxima por medio del cascarón esférico equivalente, con un radio medio R, igual al promedio de los dos radios de curvatura principal, y se obtienen los siguientes valores:

$$\sigma_e = \frac{1}{2}\,\alpha E \left[1 - \frac{2}{3}\,\frac{h}{R} \right] \Delta T \qquad (5)$$

$$\sigma_i = \frac{1}{2}\,\alpha E \left[1 + \frac{2}{3}\,\frac{h}{R} \right] \Delta T \qquad (6)$$

Desde el punto de vista de diseño los esfuerzos definidos por (5) y (6) no requieren especial atención.

Se considera importante hacer una comparación numérica entre los valores anteriores y los propuestos por H. Hotzler.

La carga de pandeo se discute en la siguiente ponencia.

La aportación presentada por el autor es de gran importancia en el diseño de cascarones de curvatura gaussiana positiva.

On the design of uniformly loaded spherical caps based on a load buckling analysis

Donald E. Milks and *Howard P. Harrenstien* (USA)

Los autores basados en las tres ecuaciones de equilibrio y en las cuatro condiciones de deformación, planteadas por Eric Riessener,[a] las resuelven por medio de una solución de serie de potencias, bajo las condiciones de borde de: No resistencia a la deflexión y rotación (momento meridional y esfuerzo normal cero), resistencia completa a la rotación y deflexión (rotación meridional y desplazamiento radial cero) y bajo la suposición intermedia de que el momento meridional y el desplazamiento radial son cero, establecen las condiciones de límite superior, intermedio e inferior de carga de pan-

---

[a] Referencia 2 citada por los autores.

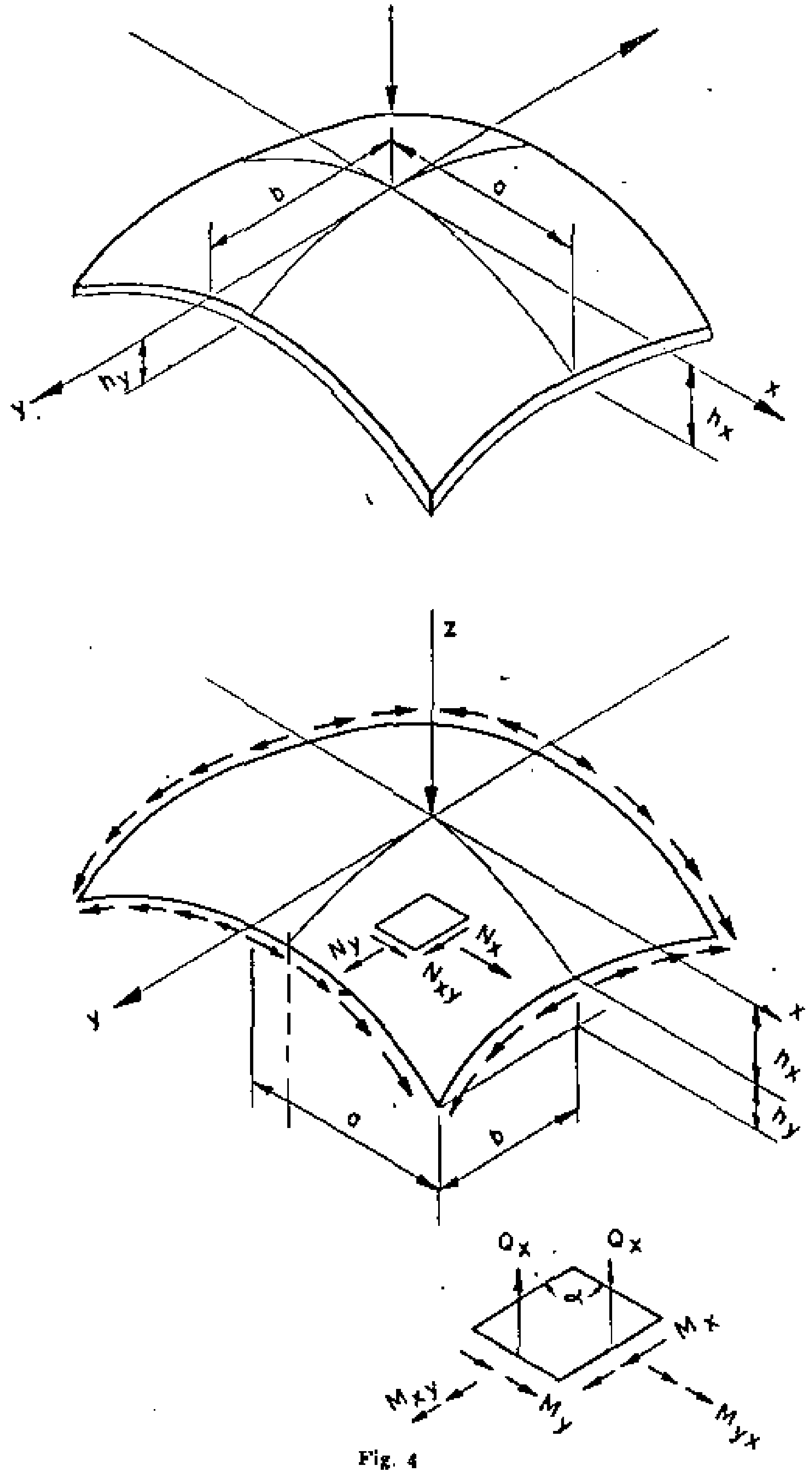


Fig. 4

deo para cascarones esféricos. Determinan valores numéricos para la carga crítica y verifican experimentalmente, en modelos de un material plástico, que los valores se encuentran entre los límites superior e inferior.

Es conveniente mencionar lo siguiente:

A. Van der Neut,[7] determinó la siguiente expresión para la carga de pandeo de cascarones esféricos.

$$q_{cr} = \frac{2Et}{R(1-\nu^2)} \left[\sqrt{\frac{1-\nu^2}{3}} \frac{t}{R} - \frac{\nu t^2}{2R^2} \right] \quad (7)$$

En donde, E es el módulo de elasticidad, t el espesor, R el radio de curvatura y ν la relación de Poisson. La fórmula (7) para $\nu = 0.10$, y despreciando el término t^2/R^2 con respecto a $\frac{t^2}{R^2}$ se transforma en

$$q_{cr} = CE \left(\frac{t}{R} \right)^2$$

en la cual $C = 1.155$. El resultado anterior obtenido por medio de una teoría de primer orden, fue refinado posteriormente por Theodore von Kármán y H. S. Tsien;[8] ellos probaron que el coeficiente C debe ser reducido a 0.312. Una experiencia de P. Csonka,[9] ha probado que en cascarones de concreto, inclusive el menor de los valores anteriores es peligrosamente alto. Un cascarón paraboloide elíptico de planta regular, construido por Csonka en Budapest falló por pandeo dos años después bajo la acción de una carga excepcional de nieve. La experiencia anterior indujo a los investigadores a las evaluaciones límites superior e inferior de cargas de pandeo. Posteriormente, Eduardo Torroja, después de un estudio experimental en cascarones de concreto propone, como un valor seguro para el coeficiente C, a 0.05. A continuación se presenta una gráfica comparativa de los valores mencionados en la ponencia presentada por Milks y Harrenstien, Fig. 5.

Es de mencionarse que la aportación presentada por los autores es de gran importancia tanto desde el punto de vista de la mecánica aplicada como de la práctica relacionada con el diseño de cascarones.

Stresses in hyperboloids of revolution

P. L. Gould and *S. L. Lee* (USA)

Los autores, introduciendo variables auxiliares, la relación de Gauss Codazzi, desarrollando la carga que actúa en el cascarón por series de Fourier, transforman las ecuaciones generales de equilibrio de cascarones de revolución.

Primero, bajo las condiciones membranales, obtienen una ecuación diferencial no homogénea de segundo orden, cuya incógnita es una función del esfuerzo meridional. Consideran los casos de carga muerta, sísmica y viento. La solución de la ecuación diferencial para el caso particular de las torres de enfriamiento de superficie hiperboloide de revolución, la obtienen dividiendo el cascarón en segmentos horizontales, y las constantes de integración las determinan de las condiciones de borde referidas a la parte superior del cascarón, Fig. 6.

Para cada una de las condiciones anteriores presentan gráficas de diseño de gran utilidad práctica.

Para estudiar la flexión, transforman las ecuaciones de equilibrio, y compatibilidad de deformaciones, en un sistema de dos ecuaciones diferenciales de segundo orden en términos de variables complejas. Las resuelven bajo las condiciones de borde referentes a deformaciones y esfuerzos en el anillo superior del cascarón y proporcionan gráficas de diseño para las tres condiciones de carga mencionadas previamente.

Los resultados determinados por los autores verifican los obtenidos previamente por: Rabich y Krätzing en Alemania, Scriven y Albasiny en Inglaterra y Layrange en Francia.

Realmente no se sabe con exactitud el orden de magnitud del error obtenido en la teoría, por introducir las hipótesis de $M_{\theta\phi} = M_{\phi\theta}$, $N_{\theta\phi} = N_{\phi\theta}$, $Q_{\phi} = Q_{\theta} = 0$, pero si no se hacen estas hipótesis actualmente no sería posible resolver el problema. Los autores han presentado una excelente aportación tanto para la mecánica aplicada como para la práctica de las estructuras de cascarón.

---

[7] A. Van der Neut, Dissertation, Delf, 1932.

[8] Referencias 9 y 10 citadas por el autor.

[9] The buckling of Spheroidal Shell Curved in Two Directions", by P. Csonka, Acta Technica, Academiae Scientiarum Hungaricae, Budapest, Tomus XIV, 1956.

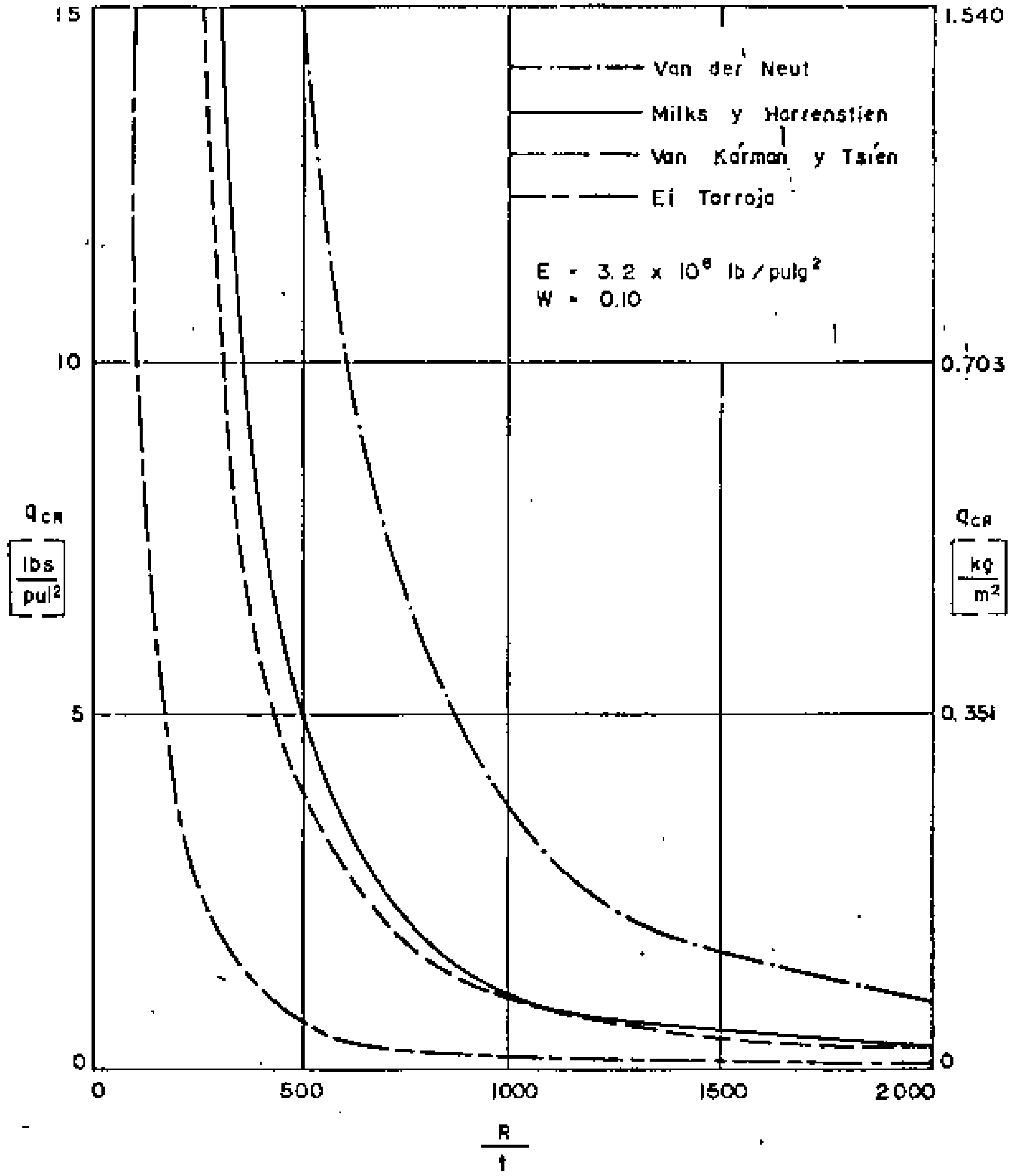


Fig. 5

Cálculo simplificado de los esfuerzos de membrana en una cubierta de concreto tipo "Cascarón", en forma de cono

Arq. Jorge Molina Montes (México)

El autor, en un cascarón cónico invertido, deduce los valores de los esfuerzos de membrana por medio del equilibrio del elemento diferencial de cascarón en coordenadas cilíndricas y posteriormente verifica los valores considerando el equilibrio membranal bajo las condiciones de carga y apoyo de revolución.

PROF. DR. A. M. HAAS

I shall make a comment about the comparison between the investigations performed by Harrestien and others on critical load. In the figure in which this comparison was stated there was a curve derived from an investigation on type of double curvature shell that was not a sphere.

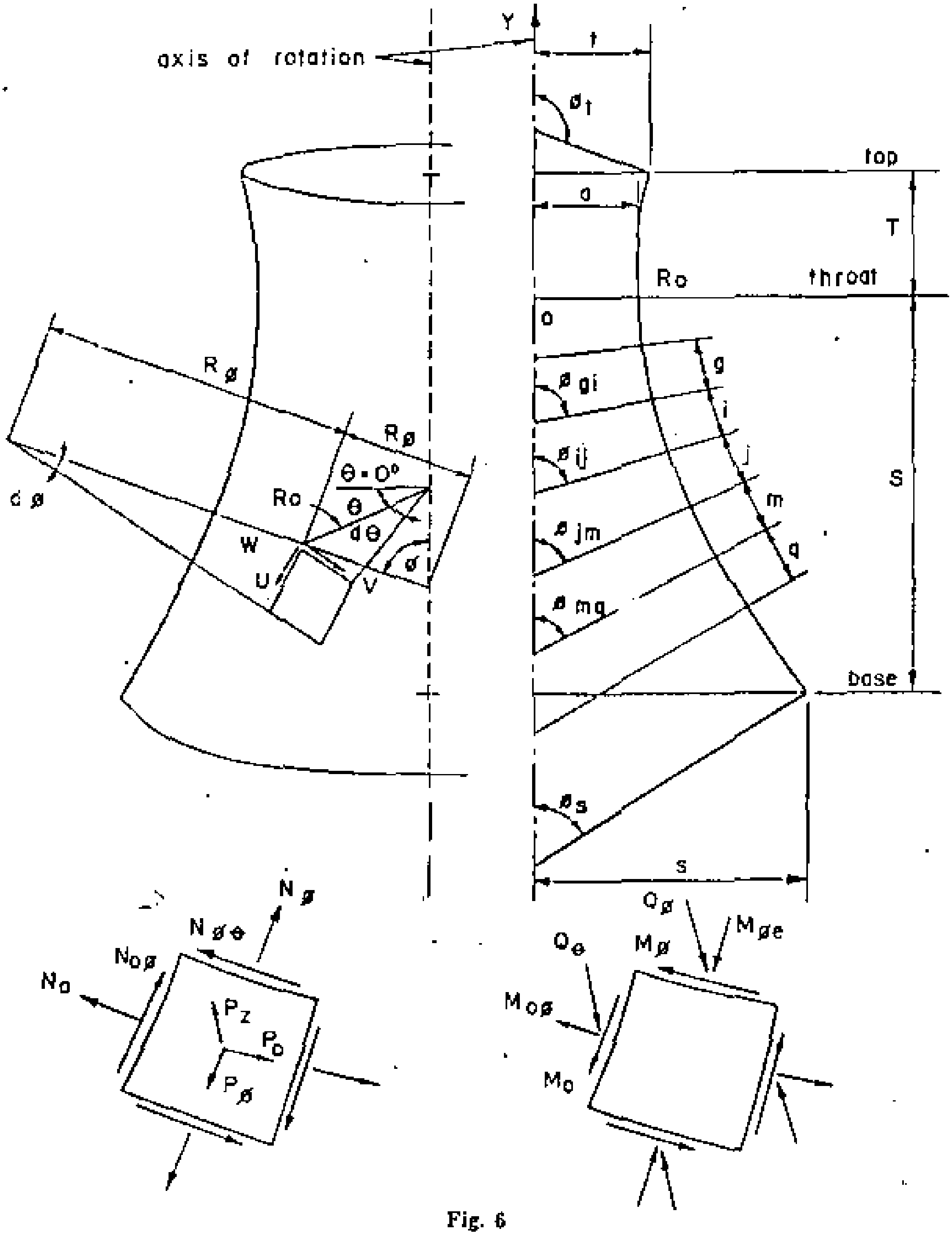


Fig. 6

Dr. Porfirio Ballesteros

That curve was derived from an investigation on eliptic paraboloid shell of rectangular plant, but this surface is equivalent to spherical surface. This kind of shell is in the condition of lower limit of critical load, because they are supported at the four corners and they are more closer to the lower limit.

Prof. Dr. Haas

I really think, that it would not really be compared directly with the spherical investigations.

Porfirio Ballesteros

Elementary Analysis of Hyperbolic Paraboloid Shells

Introduction

The rapid growth of interest in one of the newest forms of shell roof construction—the hyperbolic paraboloid—is due largely to its economical use of construction materials, the simplicity of its structural action and to its inherent beauty.

The hyperbolic paraboloid is one of the types of construction that make efficient use of materials by relying on form or shape for strength rather than on mass. Double curvature enables loads to be transferred to supports entirely by direct forces so that all material in the cross-section of the shell is uniformly stressed.

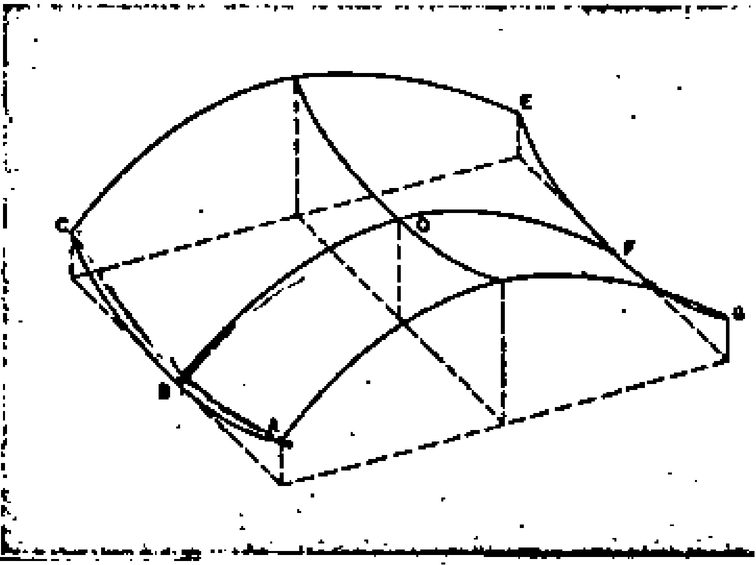
Although intricacies of mathematics obscured the analysis of hyperbolic paraboloids for many years, it will be shown that the underlying static principles are not difficult to understand or to apply and that the design can be handled as easily as the design of many other types of structures.

Economy in the construction and design of hyperbolic paraboloids allows the architect to depart from the conventional practice of forcing all structures to conform to networks of linear members confined to three perpendicular planes and to make imaginative use of the many graceful shapes that may be developed.

Surface Definition

The doubly curved surface of the hyperbolic paraboloid may be defined in two ways, either as a surface of translation or as a warped parallelogram. In the first case the surface can be defined by translating or moving a vertical parabola having upward curvature over another parabola with downward curvature, the parabola of translation lying in a plane perpendicular to the first but moving parallel to it. This is shown graphically in Fig. 1 where the saddle-shaped surface is formed by moving parabola *ABC* over parabola *BOF*.

Fig. 1



The hyperbolic paraboloid surface may also be generated as shown in Fig. 2 by moving along the *Y* axis a straight line that remains parallel to the *XZ* plane at all times but pivots while sliding along the straight line *ABC*. The resulting surface is represented in Fig. 2 by the grid of straight lines h_n and i_n, and every point on it may be considered to be the intersection of two such lines contained in the surface. This surface can be visualized by considering the horizontal plane *A'C'E'G'* to be warped by vertically depressing corners *A'* and *E'* to new positions *A* and *E*. Straight lines h_n and i_n are, of course, longer in the warped surface than in the projected horizontal surface in order that an intersection such as *A* may remain directly under *A'*.

Structural Shapes

A variety of roof forms may be developed either by use of the entire warped surface or by combining parts of it in various ways. A few of these are illustrated in Fig. 3.

The surface in Fig. 3a has been used successfully to give a striking appearance to such diverse structures as churches, banks and restaurants. This is the complete warped surface identical to that shown in Fig. 2.

Surfaces in Figs. 3b, 3c and 3d are formed by combining in various ways one quadrant of the surface in Fig. 2. For example, consider quadrant *ABOH* in which lines *BO* and *OH* are horizontal, coincident with the axes *OX* and *OY*. In Fig. 3b four of these quadrants are joined, with the horizontal edges of each quadrant at the exterior of the roof and all depressed corners *A* at the single center column. This shape is commonly known as the inverted umbrella.

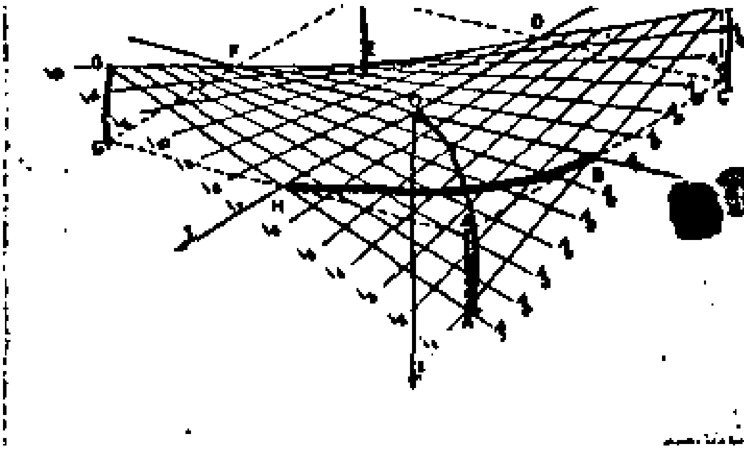
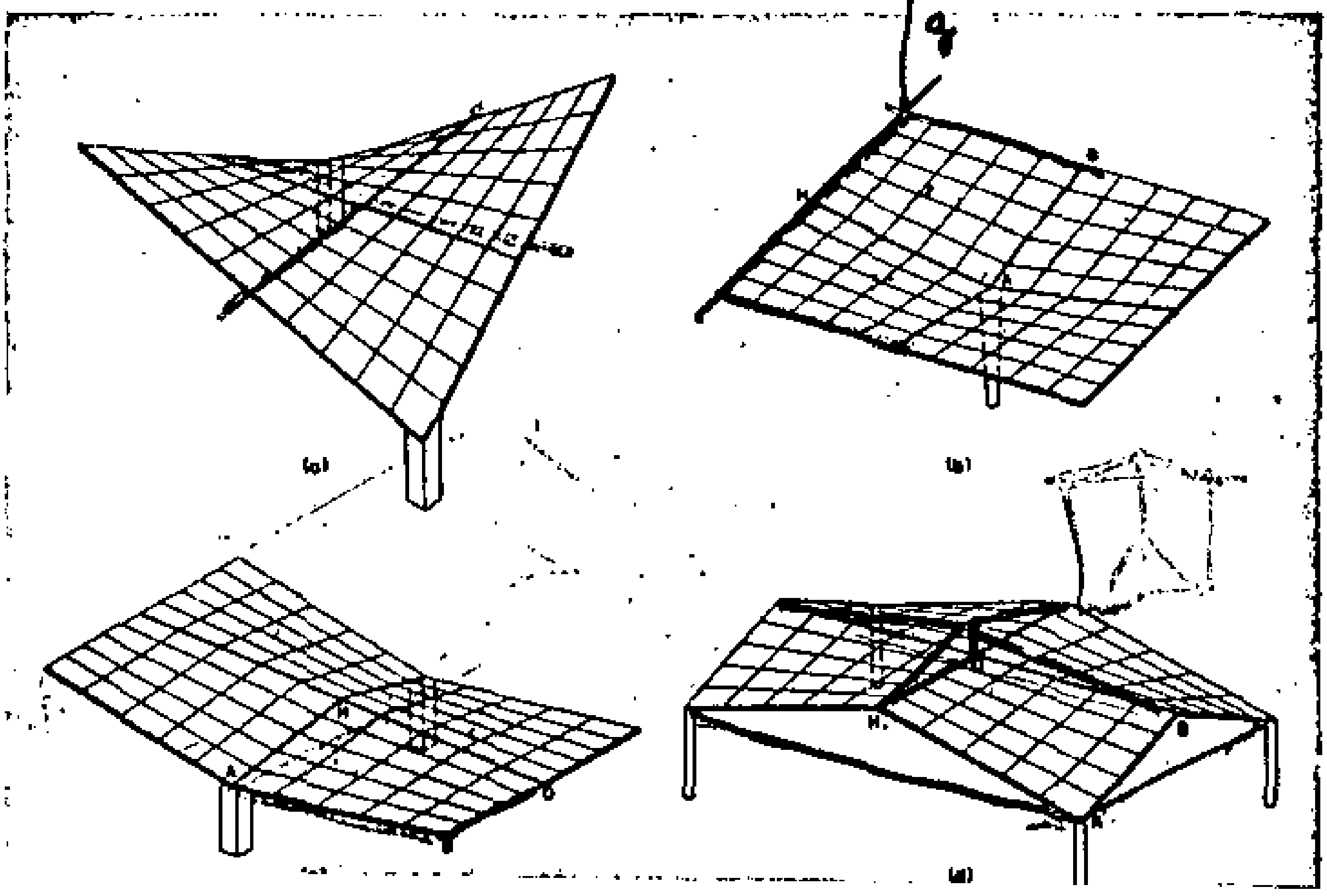


Fig. 2. Surface definitions.

In Fig. 3c, edges *HO* and *OB* of the near quadrant are horizontal, while the depressed corner *A* is at the column. A corresponding arrangement of the other three sections of the roof results in one horizontal ridge line and two horizontal exterior edges. In contrast to Fig. 3c, both ridge lines in Fig. 3d are horizontal, the roof dropping to each of the corner columns. Roof types in Figs. 3b, 3c and 3d are well suited for covering the large rectangular areas common to industrial plants.

Fig. 3. (Edge beams and ties not shown)



(a)

(b)

(d)

Construction

One of the principal economies of the hyperbolic paraboloid is that its forming is simple, even though the doubly curved surface has the appearance of posing a complicated forming problem. Because the surface is defined by two intersecting systems of straight lines, the formwork requires only straight wood joist generators. The smooth, warped surface may be secured merely by covering those joists with flexible plywood sheathing.

Stresses in the hyperbolic paraboloid roof are low and require only a minimum thickness of concrete. In fact, the roof of the Cosmic Ray Pavilion at the University of Mexico has a thickness of only ⅝ in. Generally, however, shell thickness depends upon the concrete cover required for the reinforcement, with 3 in. being an average figure.

Geometry

The study of the hyperbolic paraboloid may be confined to the basic quadrant *ABOH* of the surface shown in Fig. 2. Referring to Fig. 4, any point on the surface may be defined in terms of x, y and z, where z equals the product of the x and y coordinates and a constant h/ab. For example, in triangle *HA'A*, by similar triangles,

$$\frac{c}{h} = \frac{x}{a} \text{ or } c = \frac{xh}{a}$$

Similarly in triangle *EA'A*,

$$\frac{z}{c} = \frac{y}{b}$$

From which

$$z = \frac{yc}{b} = \left(\frac{y}{b}\right)\left(\frac{xh}{a}\right) = xy\left(\frac{h}{ab}\right)$$

Letting $k = \dfrac{h}{ab}$

$$z = kxy \tag{1}$$

For convenience in analysis, axes *OX* and *OY* shown in Fig. 4 are rotated through an angle $\phi = 45°$ so that the axis *OY'* lies in a vertical plane with *OA*. Using the standard formulas for transformation of coordinates by rotation and letting $\phi = 45°$ in Fig. 5, gives

$$x = x' \cos\phi - y' \sin\phi = 0.707\,(x' - y') \tag{2a}$$

and

$$y = y' \cos\phi + x' \sin\phi = 0.707\,(x' + y') \tag{2b}$$

Substituting equations (2a) and (2b) into equation (1) gives

$$\boxed{\begin{aligned} z &= kxy = 0.5k\,(x' + y')\,(x' - y') \\ &= 0.5k\left[(x')^2 - (y')^2\right] \end{aligned}} \tag{3}$$

which defines the surface of the hyperbolic paraboloid in terms of the new coordinate system. The rotated position of the coordinates above the quadrant *ABOH* is shown in Fig. 6.

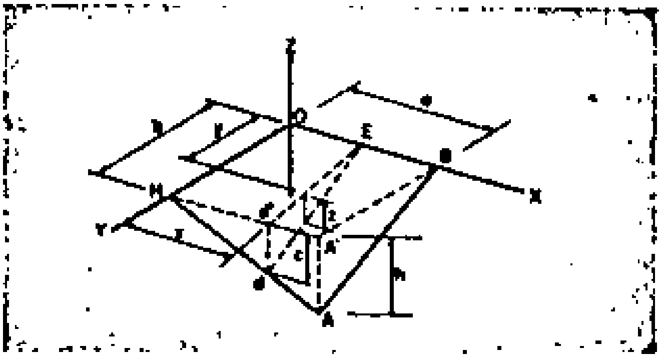


Fig. 4

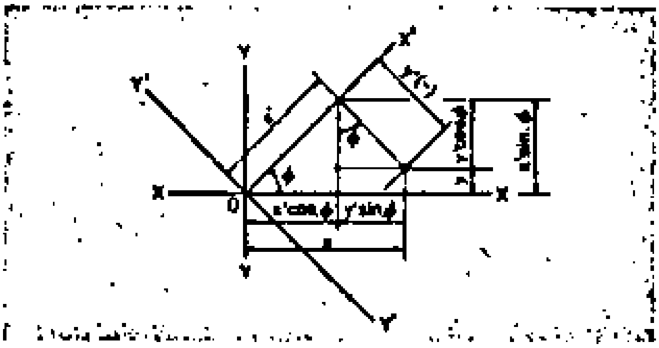
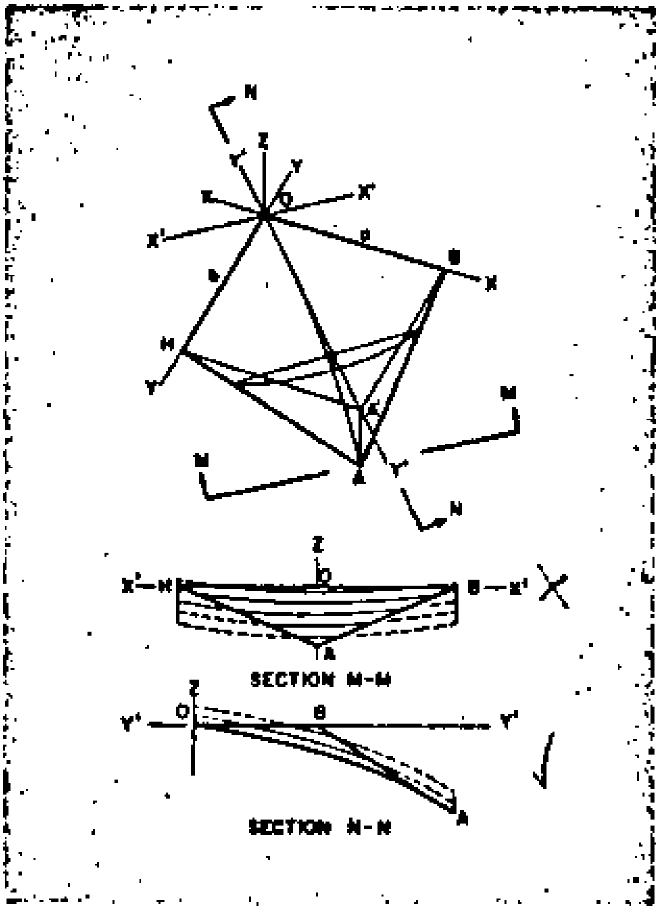


Fig. 5

Fig. 6



A study of physical properties of the surface is possible by introducing specific values of x', y' and z into equation (3). When x' is constant,

$$z - 0.5k\,(x')^2 = z - k_1 = z' = -0.5k\,(y')^2 \qquad (4)$$

which is the equation of a parabola lying either in or parallel to the $Y'Z$ plane. The vertex of the parabola defined by setting $x' = 0$ intersects the X' axis at the origin of the X', Y' and Z axes, but for any other value of x' the vertex is above the $X'Y'$ plane. In any case the principal axes of all these parabolas are parallel to the Z axis and lie in the $X'Z$ plane.

In a similar manner, if y' is constant,

$$z + 0.5k\,(y')^2 = z + k_1 = z' = 0.5k\,(x')^2 \qquad (5)$$

Equation (5) is the general expression for a parabola lying either in or parallel to the $X'Z$ plane. If $y' = 0$ the equation represents a parabola having a vertex which intersects the Y' axis at the origin. Any other value of y' defines a parabola having its vertex below the $X'Y'$ plane but with its principal axis parallel to the Z axis and lying in the $Y'Z$ plane.

It is important to note in equations (4) and (5) that for any given warped surface the value of either x' or y' may be varied without affecting the term "0.5k" in the equation for the parabola. As a result, all parabolas in both directions have the same shape. Also note that one of the expressions is positive while the other is negative. This difference in sign indicates that parabolas parallel to the $X'Z$ plane are concave upward, while those parallel to the $Y'Z$ plane are concave downward.

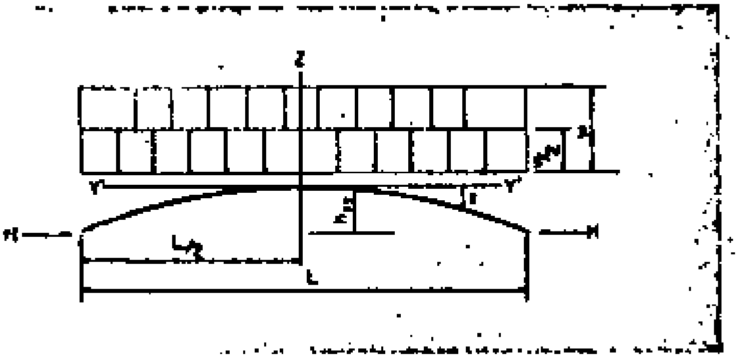
If z is given a constant value in equation (3),

$$1 = k_1\left[(x')^2 - (y')^2\right] \qquad (6)$$

This is the equation of a horizontal plane cutting the warped surface, the elevation of which depends on the particular value given to z. This cutting plane forms a hyperbola, thereby indicating the reason for the designation hyperbolic paraboloid for the surface.

Design

In Fig. 7, a typical parabolic arch is shown representing a strip cut parallel to the $Y'Z$ plane. Since the surface is made up entirely of two sets of parabolic arches, one set normal to the other and all having the same shape, it can be assumed that the total load w is divided equally in two directions. Any given arch will, therefore, carry a load of intensity $w/2$.



The internal moment in any two-hinged arch is equal to the simple beam bending moment minus the moment due to the horizontal reaction H. Midspan simple beam bending moment due to uniform load is $\left(\frac{w}{2}\right)\left(\frac{L^2}{8}\right)$. The bending moment throughout a parabolic arch supporting only a uniform load equals zero. Hence moment produced by horizontal thrust must be equal and opposite to the simple beam bending moment. Therefore, thrust moment Hh_m, at midspan is

$$H(-h_m) = \frac{w}{2}\,\frac{L^2}{8} \qquad (7a)$$

$$\text{or } H = -\frac{w}{4}\,\frac{L^2}{4h_m} \qquad (7b)$$

But the expression for all arches in this direction has been shown in equation (4) to be:

$$z' = -0.5k(y')^2$$

Letting $z' = h_m$ and $y' = \frac{L}{2}$:

$$h_m = -0.5k\left(\frac{L^2}{4}\right)$$

$$\text{or } \frac{L^2}{4h_m} = -\frac{1}{0.5k}$$

gab
2h

Substituting this in equation (7b) gives

$$H = -\frac{w}{4}\left[-\frac{1}{0.5k}\right] = \frac{w}{2k} = \frac{wab}{2h} \qquad (8)$$

Equation (8) gives the tensile or compressive thrust, induced in the shell by a uniform load. The shell must be reinforced only for this force. Actually, since the slope of the surface steepens near the column, the load is not strictly uniform; but the departure from uniform loading is insignificant.

Proof of Analysis

In the foregoing it has been assumed that the arches are properly supported at their ends. The validity of this assumption will be demonstrated.

Fig. 8a shows theoretical positions of typical parabolic arches and indicates their action on edge members of the roof. Each arch exerts both a vertical and horizontal force at its ends. It is seen in Fig. 8b that where two perpendicular arches intersect an edge, the normal components H_N of H are equal in magnitude but opposite in direction. As a result both components cancel each other and there is no force normal to any edge.

The other components of the horizontal forces H, called S_p in Fig. 8b, act in the same direction for both sets of arches and, therefore, are additive. When applied to the surface of length ds, each force equals $S_y ds$ or $H \sin\phi\, ds$. To determine the intensity of shear S per unit of length along the edge beam, an equation of equilibrium is written for forces parallel to the edge acting on the small triangular wedge:

$$2H \sin\phi\, ds = S\, dx$$

from which

$$S = 2H \sin\phi \frac{ds}{dx} = 2H \sin\phi \cos\phi$$

With $\phi = 45°$ and $H = \dfrac{w}{2k}$

$$S = 2\left[\frac{0.5w}{2k}\right] = \frac{w}{2k} = \frac{wab}{2h} \qquad (9)$$

The effect of vertical components V along horizontal edges OB and OH is different from that at the sloped edges AB and AH. In either case, because the thrust line in a parabolic arch supporting a uniform load follows the centroidal axis, the combined vertical component at any point due to the thrust in the two arches is

$$V = \Sigma H \tan\theta = H\frac{dz}{dy'} + H\frac{dz}{dx'} \qquad (10)$$

where the angle θ lies in a vertical plane between the arch thrust line and its horizontal projection as shown in Fig. 8c. From equation (3), slopes of the arches are

$$\frac{dz}{dy'} = (-0.5k)(2y') = -ky' \qquad (11a)$$

and

$$\frac{dz}{dx'} = (0.5k)(2x') = +kx' \qquad (11b)$$

At any point on the horizontal edge OH, $x' = y'$ as evident in Fig. 6. Therefore by equations (11) the slope of two arches must be equal but of different sign. Vertical components, therefore, cancel because they are equal in magnitude and opposite in direction. Vertical components along edge OB also nullify each other.

Along sloping edges, coordinates x' and y' are not equal at any point. With edge OB in Fig. 6 equal to a and OH equal to b, the equation of line AB is from the general expression $y = mx + b$:

$$y' = x' - a\sqrt{2} \qquad (12)$$

Substituting this value in equations (11), slopes of arches at edge AB are

$$\frac{dz}{dy'} = -k\left(x' - a\sqrt{2}\right) \qquad (13a)$$

and

$$\frac{dz}{dx'} = kx' \qquad (13b)$$

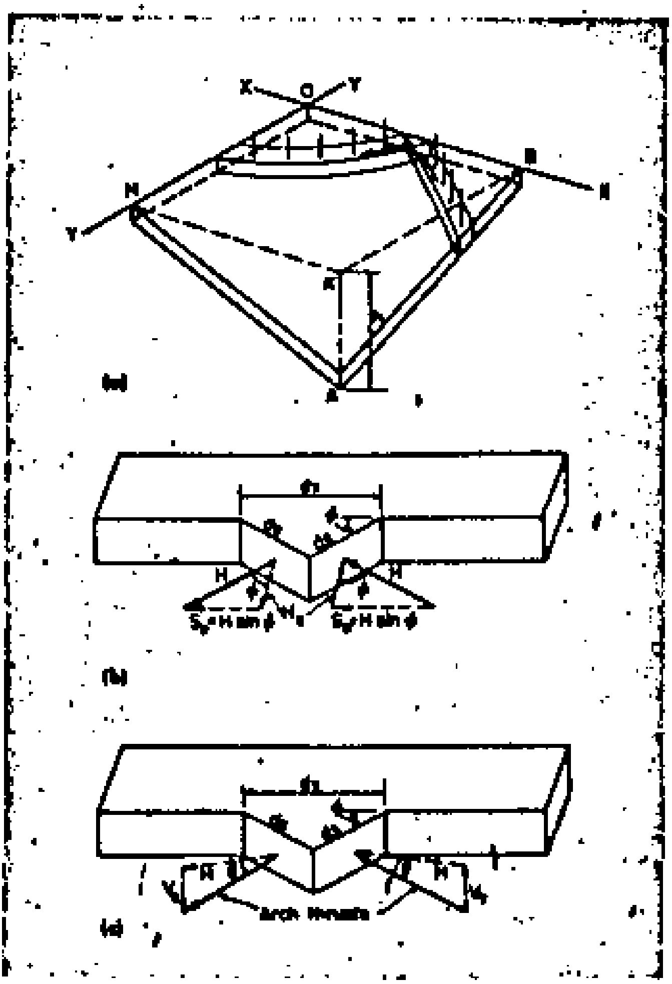


Fig. 8

Substituting in equation (10), net vertical component of arch thrusts at the edge is

$$V = H\left[-k\left(x' - a\sqrt{2}\right)\right] + H\left(kx'\right) = Hka\sqrt{2} \qquad (14)$$

With $k = \dfrac{h}{ab}$ equation (14) may be written

$$V = H\frac{h}{ab}a\sqrt{2} = \frac{Hh\sqrt{2}}{b} \qquad (15)$$

The force V is applied on the surface having the length ds in Fig. 8c. To determine intensity V' per unit length of the edge beam,

$$V'dx = V ds = \frac{Hh\sqrt{2}}{b} ds$$

$$V' = V\frac{ds}{dx} = V\cos\phi = \frac{V}{\sqrt{2}}$$

Therefore, from equation (15)

$$V' = \frac{Hh\sqrt{2}}{b}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{Hh}{b} \qquad (16a)$$

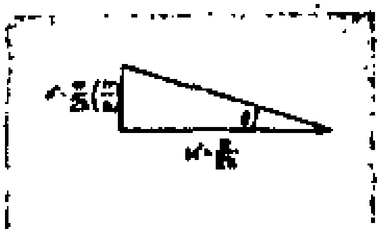


Fig. 9

In a similar manner it can be shown that the vertical force exerted by the shell along edge *HA* is

$$V' = \frac{Hh}{a} \qquad (16b)$$

If there were no other force present along the inclined edges, the shell would require vertical supports. However, as shown previously the arches simultaneously exert a horizontal force in the plane of the edge. The two forces, horizontal and vertical, combine as shown in Fig. 9 to produce a resultant force parallel to the edge.

In summary, the net result of the interaction of the two systems of arch elements is that they exert merely shearing forces parallel to the edges. Therefore, the assumption that the ends of the arches are adequately supported is justified, proper support being provided by the presence of members parallel to the edges only, as shown in Fig. 10.

Statical Check

The horizontal thrust given by equation (8) may be checked by comparing it with the thrust determined statically using the total shell as a free body. In the elevation view of Fig. 11, assume the structure left of section *PP* to be a cantilever beam carrying the uniform load *w*. Moment at section *PP* equals $2wba\frac{a}{2}$. Dividing this by the height *h* gives thrust

$$\frac{2wba^2}{2}\left(\frac{1}{h}\right) = \frac{wba^2}{h} \qquad (17)$$

The force expressed by equation (17) may be thought of as the force which occurs in the top and bottom flanges of an I-beam, with the flanges represented here by edge [illegible]. In the lower or sloping edge beam this thrust is the horizontal component of the axial force in the beam. The corresponding vertical component is

$$\frac{wba^2}{h}\left(\frac{h}{a}\right) = wba \qquad (18)$$

This indicates that of the total vertical roof load $2wba$ applied left of section *PP*, an amount wba is carried down beam *HA* and that the remainder, or $2wba - wba = wba$, must be carried down beams *AB* and *AB'* as shown in plan, Fig. 11. Shears acting on the shell adjacent to these beams are shown in section *PP*, and vertical components of these shears must add up to the load wba. Calling S_s the shear intensity per unit length in the

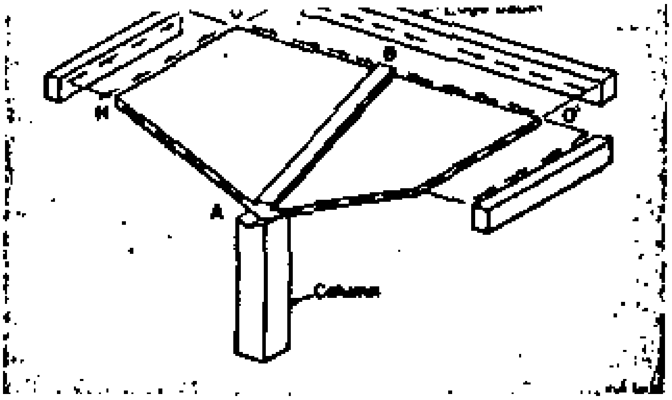


Fig. 10

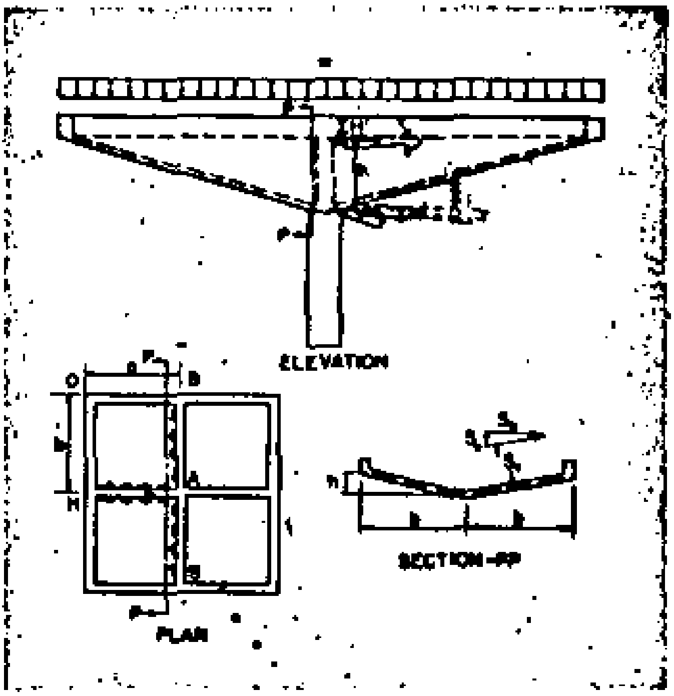


Fig. 11

sloped direction and assuming it uniformly distributed along the shell, total shear in the sloped direction is found by multiplying S_s by the total sloped length, or

$$S_s\left(2\sqrt{h^2 + b^2}\right)$$

The total vertical component then is expressed as

$$S_s\left(2\sqrt{h^2 + b^2}\right)\left(\frac{h}{\sqrt{h^2 + b^2}}\right) = wba$$

from which

$$S_s = \frac{wba}{2h} = \frac{w}{2k} \qquad (19)$$

which agrees with equation (9).

It should be noted that S_s in section *PP*, Fig. 11, is not a vertical shear, but is the vertical component of the thrust in the shell. The presence of any radial shear would necessitate bending in the shell, a condition which does not exist under uniform loads.

Skewed Hyperbolic Paraboloids

The preceding discussion concerns hyperbolic paraboloids that are rectangular in plan. However, the same basic approach may be applied to the more general case of roofs skewed in plan as shown in Fig. 12. In this case the surface is defined by the equation

$$z = \frac{h}{ab}\,uv \qquad (20)$$

in which u and v represent skewed coordinates. In this system the location of any point is designated by a distance u measured parallel to the U axis and a distance v measured parallel to the V axis. Hence the surface still contains two systems of straight lines parallel to the coordinate axes, U and V.

As with the rectangular surface, it is necessary first to determine the directions of the load-carrying parabolic arches. The procedure for determining this direction is developed in the Appendix. Briefly it consists of rotating the axes U and V (Fig. 12), skewed at the angle ω, through the angle ϕ to new positions U' and V'. The angle of rotation ϕ which defines the positions of the parabolas is given by the expression

$$\sin\phi = \frac{\sin\omega}{\sqrt{2}} \qquad (21)$$

Note that the parabolas as well as the axes intersect at the angle ω instead of being perpendicular to each other as in the rectangular roof.

As shown in the derivation in the Appendix, arch thrusts in the skewed shell are

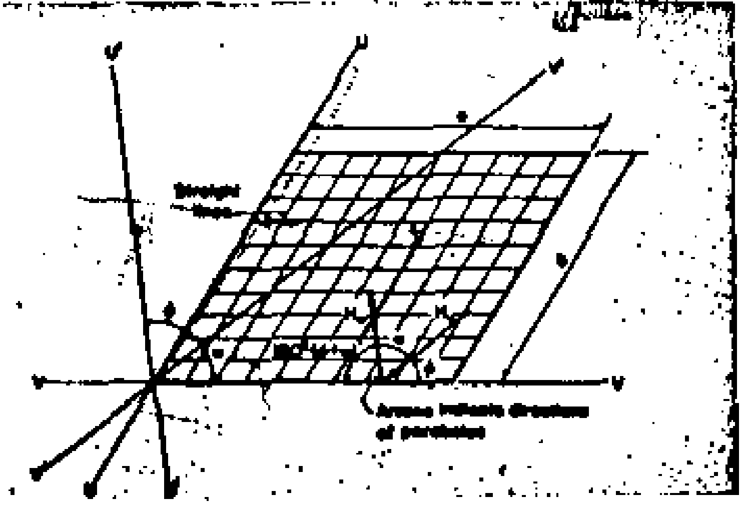
$$H_{V'} = \left(\frac{wab}{4h}\right)\frac{\sqrt{2}\sin\omega}{\sin(\omega-\phi)}, \qquad (22a)$$

$$\text{and } H_{U'} = \left(\frac{wab}{4h}\right)\frac{\sqrt{2}\sin\omega}{\sin(\omega+\phi)} \qquad (22b)$$

equations (22) correspond to equation (8) and give thrusts induced in the V' and U' directions. Shear at the boundaries is equal to

$$S = \frac{wab}{2h}\sin\omega \qquad (23)$$

Fig. 12



The derivation in the Appendix also shows that the horizontal components of the thrusts of any two arches intersecting at the edge of the surface combine so that no force is exerted normal to the edge. Only shears parallel to the edge exist, and these can be resisted effectively by an edge member.

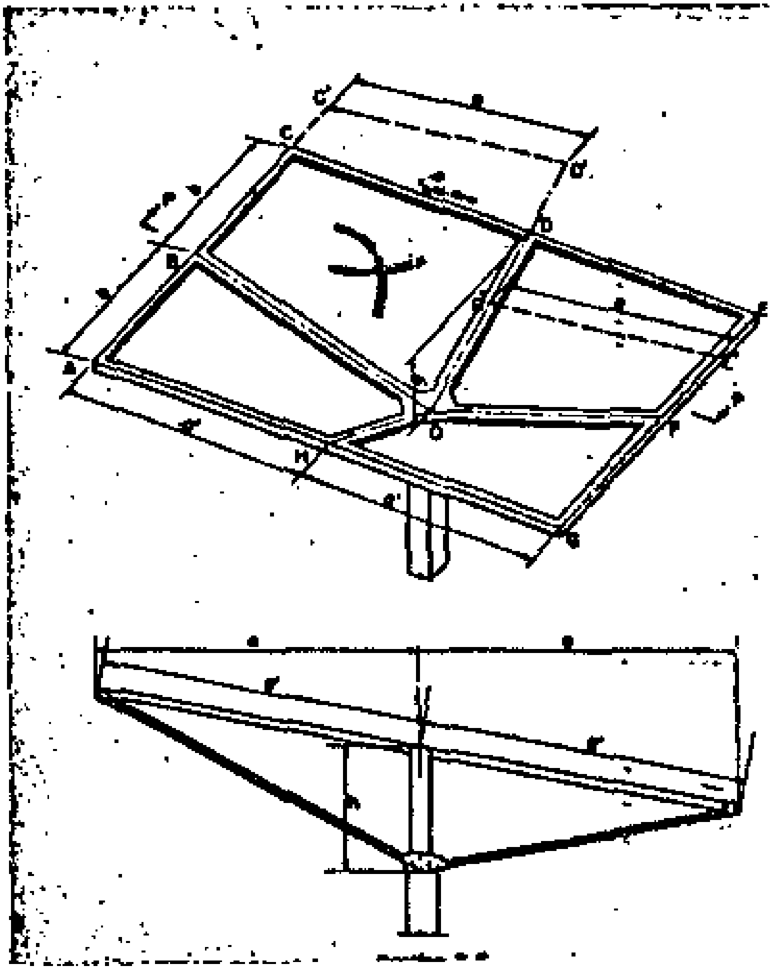
Sloping Hyperbolic Paraboloids

In the previous derivations it was assumed that each hyperbolic paraboloid shell has two horizontal intersecting edge beams. However, this is not a necessary condition. The method is equally suitable for a sloping hyperbolic paraboloid shown in Fig. 13. For example, each quadrant of the structure in Fig. 13 is composed of hyperbolic paraboloids with one horizontal and three sloping edge beams. The magnitude of the forces acting in the arches can be determined by extending the shell in quandrant $BCDO$ so that two edges BC' and $C'D'$ are horizontal, and substituting the dimensions of $BC'D'O$ in equation (9). Since, in previous derivations, it was shown that components of the arch thrust perpendicular to sections parallel to the axis nullify each other, the force obtained for quadrant $BC'D'O$ applies equally well to quadrant $BCDO$ even though edge CD is free. If the preceding operation is performed in general terms the resulting equation reduces to

$$\boxed{H = \pm\frac{wab}{2h}} \qquad (24)$$

Nxy

Fig. 13



Equation (24) is the same as equation (9). It should be noted that dimension a is the projected length rather than the true length of the edge beam. The same expression may be derived by considering quadrant *DEFO*. The horizontal edges in this case are *E'F* and *E'D'* or *EE'* and *E'D''*, and the dimensions of *D'E'FO* or *D'E'ED* may be used to substitute in equation (9). As previously, total force in any edge beam equals the sum of the shear forces acting along its length. For example,

$$T = \frac{wab}{2h} a' \text{ etc.} \qquad (25)$$

Design Example

The following example illustrates the design of a typical hyperbolic paraboloid shell roof.

Consider a roof unit of the shape shown in Fig. 3b having exterior edges horizontal. A unit 40x40 ft. in plan is selected as being typical of the unobstructed floor area generally required for industrial buildings. Because compressive stresses in the concrete are quite low, shell thickness is controlled only by requirements of adequate coverage for reinforcement, and in this case a thickness of 3 in. is selected. Vertical rise h of the shell from column to exterior edge beam is chosen to be 5½ ft. A live load of 30 psf plus 5 psf to account for the weight of the edge beams is added to the 37.5 psf for weight of the shell to give a uniform load w of 72.5 psf.

Horizontal thrusts created in the parabolic arches by this load are, by equation (8),

$$H = \pm \frac{wab}{2h} = \pm \frac{72.5 \times 20 \times 20}{2 \times 5.5}$$

$$= \pm 2{,}640 \text{ lb. per ft.}$$

Reinforcement required for negative thrust is

$$A_s = \frac{2{,}640}{20{,}000} = 0.132 \text{ sq.in. per ft.}$$ 13

Compressive stress in the concrete is 3

$$f_c = \frac{2{,}640}{3 \times 12} = 74 \text{ psi}$$ — 3000

Although no reinforcement is indicated in the direction of the parabolic arches under compression, a nominal amount should be used to take care of shrinkage stresses. In Fig. 14, reinforcement is shown placed diagonally, but if due account is taken of the direction of the stress it can be placed parallel to the edges.

Total force in any edge beam equals the sum of the shear forces acting along its length. In the horizontal edge members of this example, tension at the roof corner is zero and increases to a maximum value at the center. Therefore, the maximum force equals the sum of shear forces acting over only one-half the length of the edge beam.

Tension in the horizontal edge beams is

$$H_e = 2{,}640 \times 20 = 52{,}800 \text{ lb.}$$

from which

$$A_s = \frac{52{,}800}{20{,}000} = 2.64 \text{ sq.in.}$$

The steel should be detailed so that its centroid coincides with the line of application of the shear forces, otherwise due account should be taken of the eccentricity. In this connection, the effect of secondary bending moments induced near the corners and discussed under the heading of Secondary Stresses should also be included in the design of the edge members.

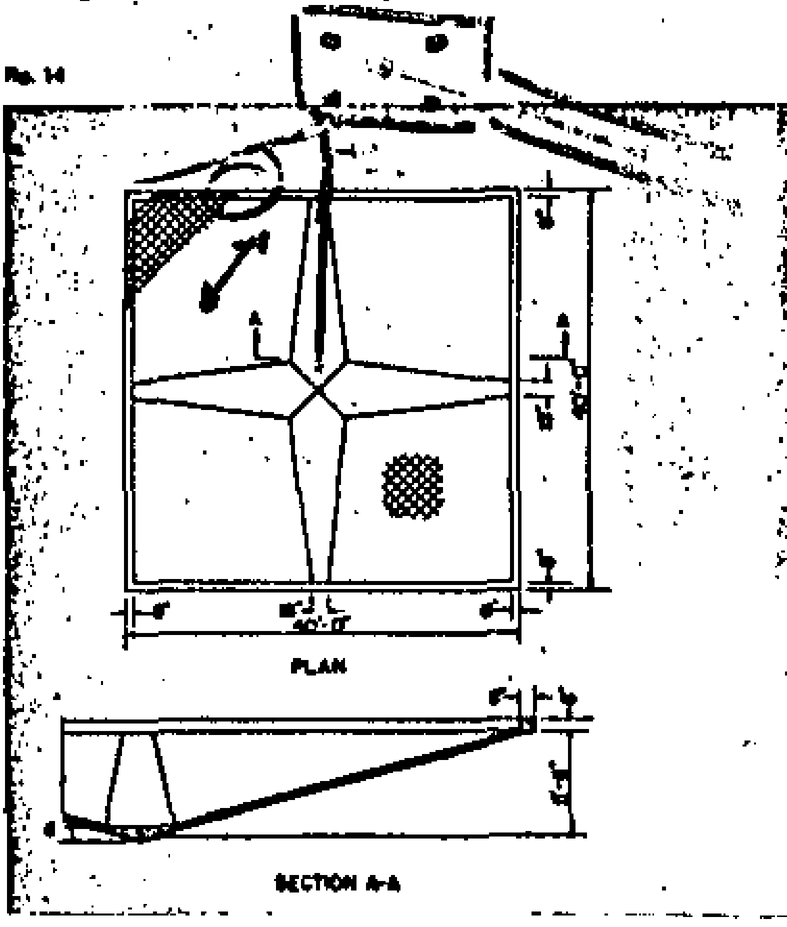
Compression in the sloped edge members is

$$2H_e \frac{20.75}{20} = 2 \times 52{,}800 \times \frac{20.75}{20} = 109{,}560 \text{ lb.}$$

Note that the shearing force at both sides of a sloped member contributes to its total axial force.

There is some question regarding the allowable stress and method of analysis to be used in determining the area of the compression member in the valley of the shell. Because this member is only subject to an axial thrust with small eccentricity, the use of column formulas is indicated. But since the member also acts as the flange of an I-beam having the shell as a web, the use of the allowable compressive stress permitted in flexure is justified. For average spans the section area obtained from column formulas is small and a design is not penalized by this conservative interpretation. Furthermore, it is desirable to reduce strains in edge members as much as possible to minimize bending moments caused by the interaction of shell and edge beam. Although analysis of the shell does not include effect of no strains parallel to the edge beam, strains occurring in the edge beam are

Fig. 14



PLAN

SECTION A-A

reflected into the shell because the two are joined integrally. This effect is reduced when beams are slightly larger than required.

Using the standard formula for tied columns with a percentage of steel $p_g = 0.01$, the gross area required at the valley for the sloped beam is

$$A_g = \frac{P}{0.8(0.225f'_c + f_s p_g)}$$

$$= \frac{100{,}500}{840 + 16{,}000 \times 0.01} = 157 \text{ sq in.}$$

With a rise of 5½ ft. in 20 ft., the depth d shown in section AA of Fig. 14 is

$$d = \sqrt{\frac{157 \times 5.5}{20}} = 7 \text{ in.}$$

A depth of 9 in. will be used at this point to provide sufficient strength in bending for unsymmetrical loading conditions.

Groined Vaults

The approach just outlined—examining a shell in terms of the behavior of individual arches—can also be employed in considering other shells. One of these is the groined vault made by the hyperbolic paraboloid surface as shown in Fig. 15. Although for clarity only the rectangular plan is shown, intersecting barrels can also be adapted in many ways to triangular or polygonal plans.

The chief difference between previously discussed shells and the groined vault is that in the former case the free edges were placed along the straight lines, but in this case the free edges occur as shown in Fig. 15, parallel to the arches. For one particular segment as previously derived, the equation of the surface is

$$z = kuv = \frac{h_z}{a^2b^2}uv \tag{26}$$

This expression can be altered to the form

$$\boxed{z = -h_x\left(\frac{x}{a}\right)^2 + h_y\left(\frac{y}{b}\right)^2} \tag{27}$$

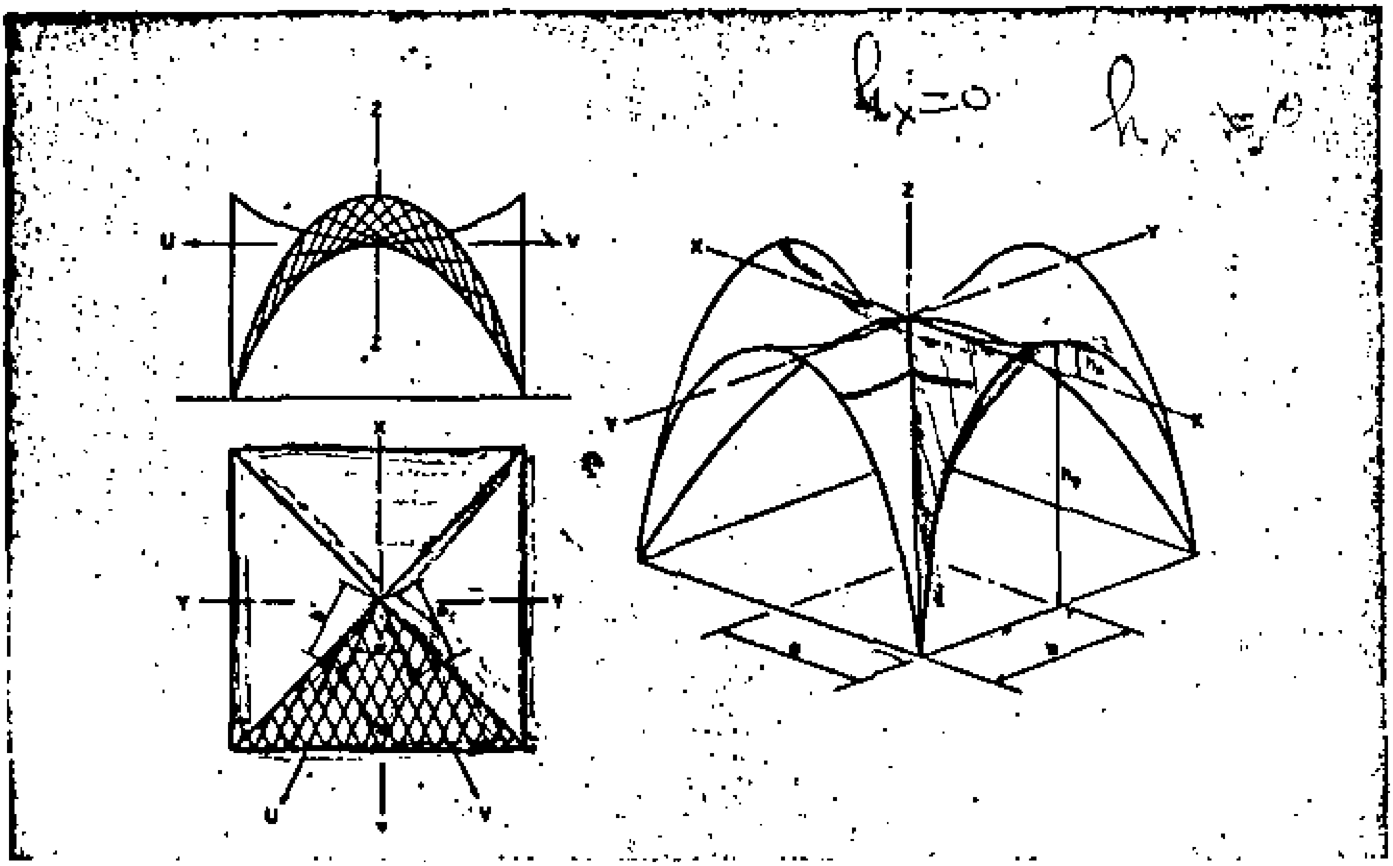
which may be more suitable in preparing a layout and studying the general arrangement.

In the case of the groined vault it is advantageous to consider arches that are parallel and perpendicular to the free edges. It is apparent that the arches normal to the free edge, being unrestrained at that edge, can offer little resistance to the load. Hence, loads are carried mainly by the arches acting parallel to the free edges.

In the case of a uniform load, these arches are completely free of bending, and thus the load is transmitted directly to the intersection of the barrels as pure axial thrust. The horizontal component of this thrust is merely equal to $wa^2/2h_x$ or $wb^2/2h_y$, depending on the barrel that is being considered. However, for this type of hyperbolic paraboloid the dead load of structure cannot be assumed as uniform, since the weight per square foot of projected area is considerably more at the support than at the crown.

For this loading condition, if the shell is considered as a series of independent arches parallel to the free edges, each arch would be subject to bending as well as axial load.

Fig. 15



although the calculated bending moments in the arches would be relatively small, such moments do not exist in the shell. Hence, a modification of the general arch treatment is necessary.

If the arches are to be completely free of bending, the thrust line must follow the axis of the arch. The dead load cannot by itself satisfy the requirement. However, as an arch tends to deflect, it creates a difference in shear between itself and the neighboring arch. This difference in shear between the various elements can be regarded as an external load on the arch. The magnitude and distribution of this shear must be such that the thrust line produced by the shear and dead load lies on the axis of the arch. Since the edge of the shell is completely free of shear, one could commence from this plane and by trial and error determine the shear required at various sections to maintain the arches free of bending. Such a procedure is, however, very lengthy and involved. To simplify the task, Table 1 gives force coefficients to permit rapid calculation of internal forces throughout a shell.

To obtain a generalized solution it was found more advantageous to solve the differential equations expressing the behavior of the shell, rather than a lengthy arch analysis. Further simplification was achieved by assuming that the dead weight varied as

$$w = w_c\left[k_1 + k_2 \cos\frac{\pi y}{2b}\right] \qquad (28)$$

In Table 1, T_x, T_y and S represent the internal forces acting tangent to the surface in pounds per foot occurring in the shell at various points designated as y/b in the first column and as $(1 - x/a)\sqrt{k_x/k_y}$ in the top row.

As noted in Table 1 the formulas and coefficients are applicable only to shells where $h_x \neq 0$. If the dimension h_x becomes zero, the groined vault is no longer composed of hyperbolic paraboloids. The component units are sections of parabolic cylinders. The formulas for the limiting condition $h_x = 0$ are transformed to

$$T_x = \frac{k_2 a^2}{16 h_y} w_c k\left[\pi^2\left(1 - \frac{x}{a}\right)^2 \cos\frac{\pi y}{2b}\right] \qquad (29a)$$

$$T_y = -\frac{k_1 b^2}{2 h_y}\,\frac{w_c}{k}\left[\frac{k_2}{k_1}\cos\frac{\pi y}{2b} + 1\right] \qquad (29b)$$

$$S = \frac{k_2 ab}{4 h_y} w_c\left[\pi\left(1 - \frac{x}{a}\right)\sin\frac{\pi y}{2b}\right] \qquad (29c)$$

The definition of the various symbols is the same as in the table.

The foregoing analysis has been predicated on the basis that the shell is rigidly supported along the intersections or groins. Since this is not the case, the groin must be designed to transmit the reaction from the shell to the support. Depending on the type of support, the groin can be considered either as a fixed or two-hinged arch. For small spans (because of the small stiffness occurring at the crown) it is possible to consider the groin as three-hinged.

To determine the moments and stresses produced in the arch, it is necessary to estimate what portion of the shell acts as the arch. For a very conservative estimate, it could be assumed that half the width of the arch is equal to eight times the thickness of the shell. For a more realistic figure, it could be assumed that the effective width acting as an arch equals $\boxed{1.52\sqrt{rt}}$, in which r is the average radius at the intersection. Even when a constant effective width is assumed, the moment of inertia will vary because the cross-section of the arch rib depends on the slope at which the two adjacent shells intersect, the angle or V being most acute near the corner.

The analysis for an arch consists of solving for the unknown horizontal reaction by means of the moments produced by the external loads and the elastic properties of the arch. Two methods can be used to determine the loading which the arch is subjected to. The first and most natural one is to compute the internal forces acting in the shell along the intersection. These forces are then resolved into vertical and horizontal forces in the plane of the arch, and used as external loads on the arch. This method has the disadvantage that the determination of the angle at the intersections and the components of the forces parallel to the arch is complicated.

The second method, shown in Fig. 16, consists of treating an entire section of the shell as a free body. In such a free body, the moment parallel to the direction of the arch axis produced by the external loads and the internal forces can be obtained quite readily. For example, the moment at C equals the algebraic sum of the moments of the load w and the reaction V as in an ordinary arch, and the moments of the internal forces T_x and S. The internal forces are computed from Table 1. For these forces, only the component of the moment acting parallel to the arch axis is used. It will be necessary to find the slope of the

Fig. 16

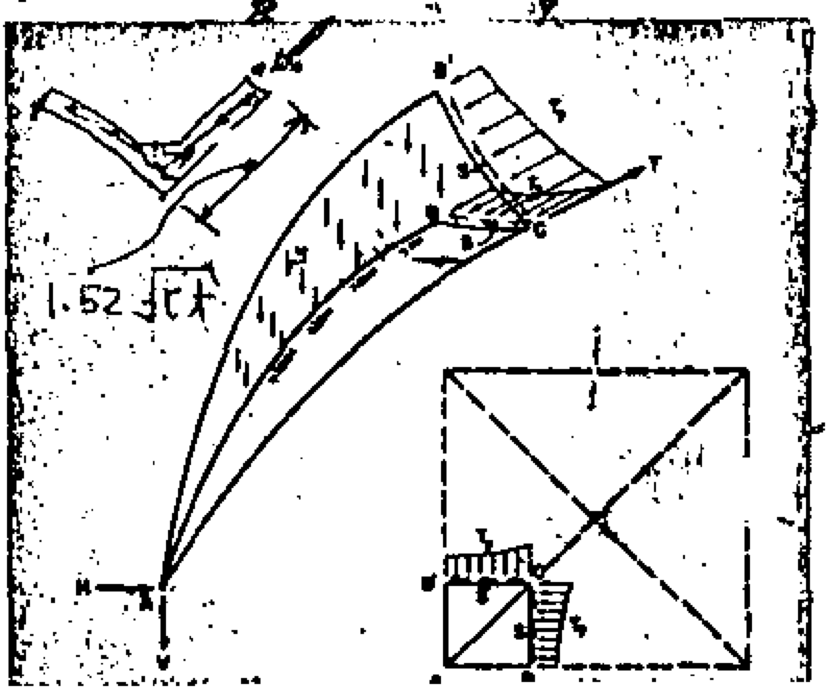


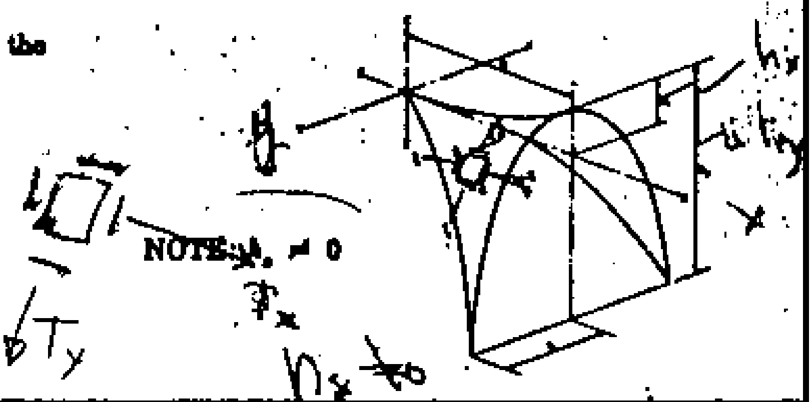
Table 1—Internal Forces in Groined Vaults for Dead Loads

w_c = intensity of distributed load at the crown, (lb. per sq.ft.)

$$k = \sqrt{\frac{1 + \left[(2h_x/a)(x/a)\right]^2}{1 + \left[(2h_y/b)(y/b)\right]^2}}$$

$$h_1 = \sqrt{1 + (2h_y/b)^2}$$

$$h_2 = 1 - h_1$$



NOTE: $h_x \neq 0$

$$\left(1 - \frac{x}{a}\right)\sqrt{h_x/h_y}$$

$$T_x = -\frac{h_1 a^2}{2h_x} w_c k \text{ (coefficient)}$$

Force	y/b	0	0.04	0.08	0.12	0.16	0.20	0.24	0.28	0.32	0.36	0.40	0.45	0.50	0.55	0.60	0.65	0.70	0.75
T_x	0	.0000	.0020	.0079	.0177	.0314	.0489	.0702	.0952	.1237	.1557	.1910	.2396	.2929	.3506	.4122	.4775	.5460	.6173
	0.10	.0000	.0019	.0076	.0173	.0310	.0483	.0694	.0940	.1223	.1530	.1886	.2366	.2893	.3442	.4071	.4716	.5393	.6097
	0.20	.0000	.0019	.0073	.0166	.0299	.0465	.0666	.0903	.1176	.1481	.1816	.2279	.2786	.3334	.3920	.4541	.5193	.5871
	0.30	.0000	.0018	.0070	.0158	.0280	.0436	.0626	.0848	.1103	.1387	.1702	.2135	.2610	.3123	.3673	.4255	.4865	.5500
	0.40	.0000	.0016	.0064	.0143	.0254	.0396	.0568	.0770	.1001	.1259	.1545	.1936	.2370	.2834	.3335	.3865	.4417	.4994
	0.50	.0000	.0014	.0056	.0125	.0222	.0346	.0497	.0673	.0875	.1101	.1350	.1694	.2071	.2479	.2915	.3376	.3861	.4365
	0.60	.0000	.0012	.0046	.0104	.0185	.0288	.0413	.0559	.0727	.0915	.1123	.1408	.1722	.2060	.2423	.2807	.3209	.3630
	0.70	.0000	.0009	.0036	.0080	.0143	.0222	.0319	.0432	.0562	.0707	.0867	.1088	.1330	.1591	.1871	.2166	.2479	.2805
	0.80	.0000	.0006	.0024	.0053	.0097	.0151	.0217	.0294	.0382	.0481	.0590	.0740	.0905	.1083	.1274	.1476	.1687	.1908
	0.90	.0000	.0003	.0013	.0028	.0049	.0077	.0110	.0149	.0193	.0244	.0299	.0375	.0458	.0548	.0645	.0747	.0854	.0966
	1.00	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000

$$T_y = -\frac{h_1 b^2}{2h_y}\,\frac{w_c}{k}\left[1 + \frac{h_2}{h_1}\text{ (coefficient)}\right]$$

Force	y/b	0	0.04	0.08	0.12	0.16	0.20	0.24	0.28	0.32	0.36	0.40	0.45	0.50	0.55	0.60	0.65	0.70	0.75
T_y	0	1.0000	.9980	.9921	.9823	.9686	.9511	.9298	.9048	.8763	.8443	.8090	.7604	.7071	.6494	.5878	.5225	.4540	.3827
	0.10	.9877	.9857	.9799	.9702	.9567	.9393	.9183	.8937	.8655	.8339	.7991	.7510	.6984	.6415	.5806	.5161	.4484	.3780
	0.20	.9511	.9492	.9434	.9342	.9212	.9045	.8843	.8605	.8334	.8030	.7694	.7232	.6725	.6177	.5590	.4969	.4318	.3640
	0.30	.8910	.8892	.8840	.8752	.8630	.8474	.8284	.8062	.7808	.7523	.7208	.6775	.6300	.5787	.5237	.4655	.4045	.3410
	0.40	.8090	.8074	.8026	.7947	.7836	.7694	.7523	.7320	.7089	.6831	.6545	.6152	.5721	.5254	.4755	.4227	.3673	.3096
	0.50	.7071	.7057	.7015	.6946	.6849	.6725	.6574	.6398	.6196	.5970	.5721	.5377	.5000	.4593	.4156	.3695	.3210	.2706
	0.60	.5878	.5866	.5831	.5774	.5693	.5590	.5465	.5318	.5151	.4963	.4755	.4470	.4156	.3817	.3455	.3071	.2668	.2249
	0.70	.4540	.4531	.4504	.4459	.4397	.4318	.4221	.4108	.3979	.3833	.3673	.3457	.3210	.2948	.2668	.2372	.2061	.1737
	0.80	.3090	.3084	.3066	.3035	.2993	.2939	.2873	.2796	.2708	.2609	.2500	.2350	.2185	.2007	.1816	.1615	.1403	.1183
	0.90	.1564	.1561	.1552	.1537	.1515	.1488	.1454	.1415	.1371	.1321	.1266	.1190	.1104	.1016	.0919	.0817	.0710	.0599
	1.00	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000

$$S = \frac{h_2\, ab}{2\sqrt{h_x h_y}}\, w_c \text{ (coefficient)}$$

Force	y/b	0	0.04	0.08	0.12	0.16	0.20	0.24	0.28	0.32	0.36	0.40	0.45	0.50	0.55	0.60	0.65	0.70	0.75
S	0	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
	0.10	.0000	.0098	.0196	.0293	.0389	.0483	.0576	.0666	.0754	.0838	.0920	.1016	.1106	.1190	.1266	.1334	.1394	.1445
	0.20	.0000	.0194	.0387	.0579	.0768	.0955	.1138	.1316	.1489	.1656	.1816	.2007	.2185	.2350	.2500	.2635	.2753	.2855
	0.30	.0000	.0285	.0569	.0851	.1129	.1403	.1671	.1933	.2187	.2433	.2669	.2948	.3210	.3452	.3673	.3871	.4045	.4194
	0.40	.0000	.0369	.0737	.1101	.1462	.1816	.2164	.2503	.2832	.3150	.3455	.3817	.4156	.4470	.4755	.5012	.5237	.5430
	0.50	.0000	.0444	.0886	.1325	.1759	.2185	.2603	.3011	.3407	.3789	.4156	.4592	.5000	.5377	.5721	.6029	.6300	.6533
	0.60	.0000	.0508	.1014	.1516	.2012	.2500	.2978	.3445	.3897	.4335	.4755	.5254	.5721	.6152	.6545	.6898	.7208	.7474
	0.70	.0000	.0559	.1117	.1670	.2216	.2753	.3280	.3794	.4293	.4774	.5237	.5787	.6300	.6775	.7208	.7597	.7939	.8232
	0.80	.0000	.0597	.1192	.1782	.2365	.2939	.3501	.4049	.4581	.5096	.5590	.6177	.6725	.7233	.7694	.8109	.8474	.8787
	0.90	.0000	.0620	.1238	.1851	.2456	.3052	.3636	.4205	.4758	.5292	.5806	.6415	.6984	.7510	.7991	.8421	.8800	.9125
	1.00	.0000	.0628	.1253	.1874	.2487	.3090	.3681	.4258	.4818	.5358	.5878	.6494	.7071	.7604	.8090	.8526	.8910	.9239

T_y and S before proceeding with the summation of moments. The angle ψ which T_y makes with the horizontal is obtained from the relationship that

$$\tan\psi = \frac{2h_y y}{b^2} \qquad (30a)$$

and angle ϕ between force S and the horizontal can be calculated from the relationship that

$$\tan\phi = \frac{2h_x x}{a^2} \qquad (30b)$$

Design Example

The following example illustrates the design of a typical groined vault using Table 1.

Consider the unit shown in Fig. 17. The roof is 100x 100 ft. in plan with a maximum height $h_y = 37.5$ ft. The rise of the central arch $h_x = 6.0$ ft. and the shell thickness is 4 in. The dead load of the shell, roofing, etc. is $w_c = 60$ psf, with a uniform live load equal to 30 psf.

Before the calculation of internal forces the quantities k_1 and k_2 must be computed from the expressions shown in Table 1.

$$k_1 = \sqrt{1 + (2h_y/b)^2} = \sqrt{1 + (2 \times 37.5/50)^2} = 1.8$$

$$k_2 = 1 - k_1 = 1 - 1.8 = -0.80$$

and

$$\frac{k_2}{k_1} = \frac{-0.8}{1.8} = -0.444$$

The internal forces will be obtained for $\frac{x}{a}$ and $\frac{y}{b}$ varying at intervals of 0.2, therefore coefficient k must also be evaluated for the same points from the equation for k shown in Table 1. For example at point $\frac{x}{a} = 0.6$, $\frac{y}{b} = 0.4$,

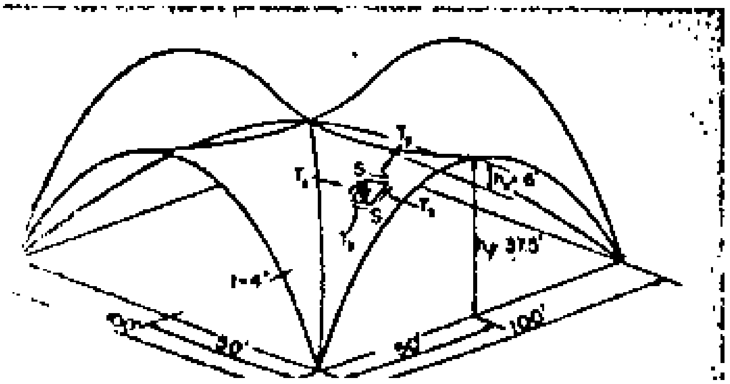
$$k = \sqrt{\frac{1 + [(2h_x/a)(x/a)]^2}{1 + [(2h_y/b)(y/b)]^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{1 + [(2 \times 6/50)(0.6)]^2}{1 + [(2 \times 37.5/50)(0.4)]^2}} = 0.866$$

The values of the coefficient k for the remaining points on the shell are shown in the first section of Table 2.

All the constants required to determine internal forces are now available. The procedure will be illustrated by calculating forces at the same point $\frac{x}{a} = 0.6$, $\frac{y}{b} = 0.4$.

Fig. 17



From Table 1, for $\frac{y}{b} = 0.4$ and

$$\left(1 - \frac{x}{a}\right)\sqrt{h_x/h_y} = (1 - 0.6)\sqrt{6/37.5} = 0.16$$

the coefficients for T_x, T_y and S are 0.0254, 0.7836 and 0.1462 respectively. Using the equations shown in Table 1,

$$T_x = \frac{k_2 a^2}{2h_x} w_c k \text{ (coefficient)}$$

$$= \frac{-0.8 \times 50^2}{2 \times 6} \times 60 \times 0.866 \times 0.0254$$

$$= -220 \text{ lb. per ft.}$$

$$T_y = -\frac{k_1 b^2}{2h_y}\left(\frac{w_c}{k}\right)\left[1 + \frac{k_2}{k_1}\text{(coefficient)}\right]$$

$$= -\frac{1.8 \times 50^2}{2 \times 37.5} \times \frac{60}{0.866}\left[1 - 0.444 \times 0.7836\right]$$

$$= -2{,}700 \text{ lb. per ft.}$$

$$S = \frac{k_2 ab}{2\sqrt{h_x h_y}} w_c \text{ (coefficient)}$$

$$= \frac{-0.8 \times 50 \times 50}{2\sqrt{6 \times 37.5}} \times 60 \times 0.1462$$

$$= -585 \text{ lb. per ft.}$$

The internal forces due to dead load for the entire shell are shown in Table 2. It should be noted that values below the horizontal broken line in the tables were omitted because these points lie below the groin. Calculations of constants beyond the boundary of the shell are only needed when it is necessary to obtain values at the groin by interpolation.

As mentioned previously, uniform load such as live load is transmitted to the support by pure axial thrust; therefore only forces T_y exist for this loading condition. The horizontal component T_y^H of this thrust with a live load of 30 psf for all points on the shell is

$$T_y^H = \frac{wa^2}{2h_y} = \frac{30 \times 50^2}{2 \times 37.5} = 1{,}000 \text{ lb. per ft.}$$

The axial thrust is obtained from

$$T_y = \frac{T_y^H}{\cos\psi}$$

where angle ψ is evaluated from equation (30a):

$$\tan\psi = \frac{2h_y y}{b^2}$$

For all points along the line $\frac{y}{b} = 0.4$,

$$\tan\psi = \frac{2 \times 37.5}{50} \times 0.4 = 0.6$$

and therefore

$$\cos\psi = 0.857$$

$$\text{Therefore } T_y = -\frac{1{,}000}{0.857} = -1{,}166 \text{ lb. per ft.}$$

and the final dead plus live load force is

$$T_y = -(2{,}709 + 1{,}166) = -3{,}875 \text{ lb. per ft.}$$

Internal forces T_x and S are a function of dead load only, and are not increased by the live load.

Examination of Table 2 shows that the forces are compressive throughout the shell. Furthermore, their magnitude is very small. The maximum compressive force T_y occurs at $\frac{x}{a} = 1.0$, $\frac{y}{b} = 1.0$. The live load force at this point is −1,803 lb. per ft. and the dead load force from Table 2 is −6,316 lb. per ft. Thus the maximum compressive stress is

$$f_c = -\frac{1{,}803 + 6{,}316}{4 \times 12} = -169 \text{ psi}$$

Compressive stresses due to T_x are considerably smaller. The maximum shear stress shown in Table 2 is

$$v = \frac{866}{4 \times 12} = 18 \text{ psi}$$

By inspection of Table 2 it is evident that the combined stresses are small; therefore it will not be necessary to compute them. Although the above stresses do not require any reinforcing, it is advisable to provide at least the minimum steel specified by the ACI Code to accommodate unsymmetrical loads and stresses due to volumetric changes.

The last step is the analysis and design of the groin arch by either one of the two procedures already described. The forces computed in Table 2 should be used in determining the loading to which the arch is subjected.

Unsymmetrical Loads

In the preceding discussion it was assumed that all of the quadrants were equally and uniformly loaded. In certain cases, however, such as the inverted umbrella shown in Fig. 3b, it may be desirable to investigate the effect of unsymmetrical loading or the effect of lateral loads.

To visualize readily the behavior of a shell under unsymmetrical loading, it is preferable to consider the action of the shell and the edge beams separately. Furthermore, in the initial stage the edge beams must be considered restrained in a manner similar to the fictitious clamping assumed in the moment distribution technique.

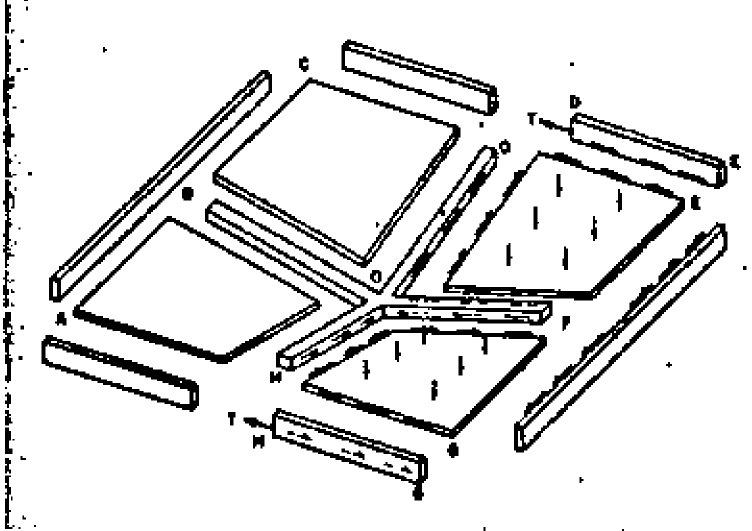
From the physical relationship just discussed, it should be apparent that a uniform load on any one quadrant will create internal forces in the shell of that quadrant in accordance to formulas previously derived. For example, a uniform load on the two quadrants in Fig. 18 is resisted by parabolic arches which require only shearing forces at their ends for stability. These shearing forces are computed by equation (8). Thus even though only part of the structure is loaded, the shell proper is in equilibrium with the stresses readily determinable.

Table 2—Coefficient k and Internal Forces for Dead Loads in Example Groined Vault

		$\frac{x}{a}$					
	$\frac{y}{b}$	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
		$[1-(x/a)]\sqrt{k_x/k_y}$					
		0.40	0.32	0.24	0.16	0.08	0
k	0	1.000	1.001	1.005	1.010	1.018	1.028
	0.2		0.959	0.962	0.968	0.975	0.985
	0.4			0.861	0.866	0.873	0.882
	0.6				0.751	0.757	0.764
	0.8					0.652	0.658
	1.0						0.570
T_x	0	−1910	−1238	−706	−317	−80	0
	0.2		−1128	−643	−289	−73	0
	0.4			−487	−220	−56	0
	0.6				−139	−35	0
	0.8					−14	0
	1.0						0
T_y	0	−2305	−2193	−2101	−2030	−1977	−1945
	0.2		−2363	−2273	−2196	−2143	−2110
	0.4			−2783	−2709	−2632	−2614
	0.6				−3381	−3323	−3481
	0.8					−4769	−4720
	1.0						−6316
S	0	0	0	0	0	0	0
	0.2		−396	−433	−307	−155	0
	0.4			−866	−585	−293	0
	0.6				−803	−404	0
	0.8					−477	0
	1.0						0

Note: Coefficient k is dimensionless. Forces T_x, T_y and S are in lb. per ft.

Fig. 18



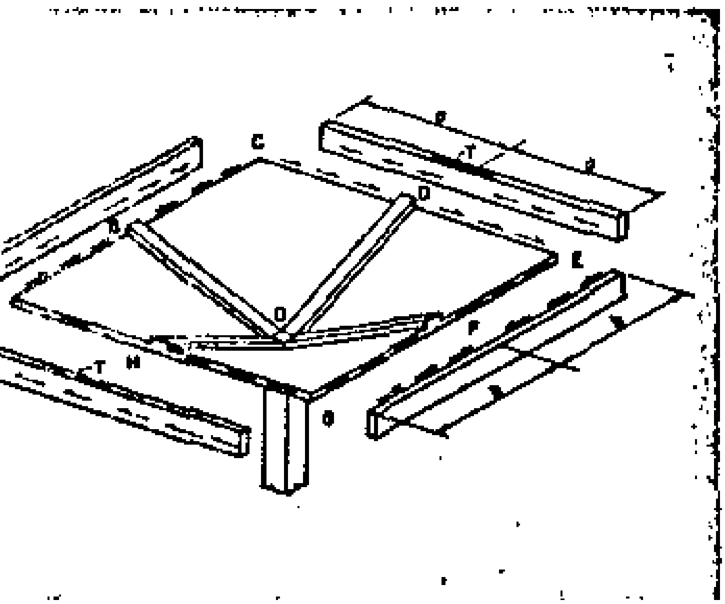


Fig. 19

Tensile and compressive forces in the edge beams can be determined from these. Assuming the column capable of resisting horizontal forces, all edge beams are in equilibrium except beams *AHC* and *CDE*. For these beams, the shear acts in only one direction. To maintain equilibrium, a concentrated force *T* is needed at *D* and *H*. If it is assumed that restraint exists at *D* and *H*, then the force *T* can be considered as an external load.

This is contrary to the actual boundary conditions. Hence, a concentrated load equal and opposite to *T* must be applied at *D* and *H*. In this case, the entire roof is considered to act as a unit (see Fig. 19). Determination of the exact distribution of stresses created by this horizontal load involves lengthy and complex arithmetical calculations. Fortunately, as in the case of flat plate floors, such refinement is not necessary. The effect of this concentrated load can be bracketed within narrow ranges.

Since the concentrated load acts parallel to the edge beam, it is reasonable to assume that resistance to the load will be provided by nonuniform tangential shears acting at the junction of the shell and edge beam with the maximum intensity at center. Hence, the shell proper is subject to a shearing force parallel to the exterior edges. If there was no warping of the shell surface, the shearing forces would penetrate to the interior edge with only a slight change in their distribution. However, because of warping, the direction of the tangential shear at any section or at the interior edges is different than that at the exterior. For equilibrium of forces of a section of the shell as a free body, shears normal to the surface as well as tangential shears must be created. These normal shearing forces, generally termed radial shears, are naturally concentrated in that area near the valley at which the change in elevation is most pronounced.

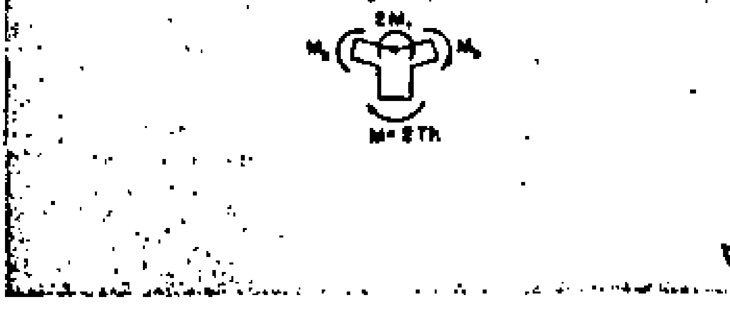
ASCE Manual No. 31, *Design of Cylindrical Concrete Shell Roofs*, indicates that the bending moment produced by tangential shears in a shell is very small. On this basis, most of the shell is relatively free of bending, with bending moments concentrated only in that area near the column support at which radial shears are developed. However, in this area, since the edge beams stiffen the shell, it is probable that only slight bending is developed. Consequently for average spans, the bending moments produced in the shell are not usually critical.

But the presence of radial shears near the column produces bending of the two interior sloping edge beams parallel to the direction of *T*, and torsion of the edge beams perpendicular to the force *T*. Considering only the concentrated load *T*, because it is antisymmetrical, the moment resisted by the two interior edge beams must be equal and opposite as shown in Fig. 20. In this figure, the concentrated load is shown as *T* because the effect at the two edges, the near and the far, are considered. A force of *T*/2 is considered acting respectively on *AH* and *CD*.

If it were not for the presence of the torsional resisting moment M_t provided by members *HO* and *OD*, the moments M_t acting at the junction of the members and the column, could be determined exactly, and would be equal to *Th*. Since it is difficult to ascertain how much help the torsional resistance contributes, a conservative approach is to design the area near edge beams *BO* and *OF* at the columns for a moment *Th*. From a consideration of the geometry of Fig. 20 and strain relationship, the magnitude of the moment along the valley reduces to zero at *B* and *F*. A conservative assumption is that the moment varies linearly from *O* to *B* and *O* to *F*.

The minimum depth of the resisting moment arm at the junction of the edge beam and column can be taken as the depth of the beam. At this and other sections some

Fig. 20



The structural action of a hyperbolic paraboloid shell is due to the fact that its curved surface resists the load by two sets of parabolic arches perpendicular to each other, as shown in Fig. 8a. Therefore, some insight into the effect of curvature can be obtained by examining a strip parallel to the arches as a free body. If the shearing forces and normal forces on the two opposite faces are ignored, and if it is assumed that the ends of the arches are not free to move, then the secondary bending moments due to lack of curvature can be determined as for an arch. The result of such a study is presented in Fig. 21 for various ratios of $\frac{ht}{ab}$.

The secondary bending moment at various distances from the corner, designated by the dimensionless quantity x/t, is expressed in terms of the simple-beam bending moments occurring in a strip of length L. Fig. 21 indicates that because the ratio of rise to span approaches zero at the corner, the load is carried entirely by beam action, which is contrary to what can be expected from membrane theory. For strips farther away from the corner, the secondary moment decreases. The rate of the decrease is a function of $\frac{ht}{ab}$. The larger the ratio of $\frac{ht}{ab}$, the more rapid the decrease in the magnitude of the secondary moments. The usual value of $\frac{ht}{ab}$ for the umbrella type of hyperbolic paraboloid is approximately 0.004. Assuming that the thickness is 3 in., the secondary moment becomes unimportant at a distance of approximately 5 ft. from the corner.

Fig. 21 shows another important characteristic observed on some of the shells that have been built. At the corner the load is carried mainly by ordinary beam action. Hence, the load is transmitted to the edge beams principally by radial shears. The edge beams near the corner are thus loaded vertically and act as cantilevers for a small part of their length. Consequently, the edge beams in this vicinity should not only be designed for the tension computed by membrane theory, but should also be deepened to prevent excessive deflection and should be reinforced for negative moment. This is especially desirable when the edge beam is upturned.

Because the value of L increases linearly in proportion to the distance from the corner, it is more expedient to show the effect of axial strains in terms of the secondary flexural stresses that are created. Such values are plotted in Fig. 22, which brings into sharper relief the importance of curvature on the magnitude of the secondary stresses. For an umbrella type of hyperbolic paraboloid subjected to a load of 72 psf and with a ratio of $\frac{ht}{ab} = 0.004$, the maximum secondary stresses occur at $x/t = 20$ and are

$$f_s = \frac{145 \times 72}{144} = 72 \text{ psi.}$$

Fig. 21

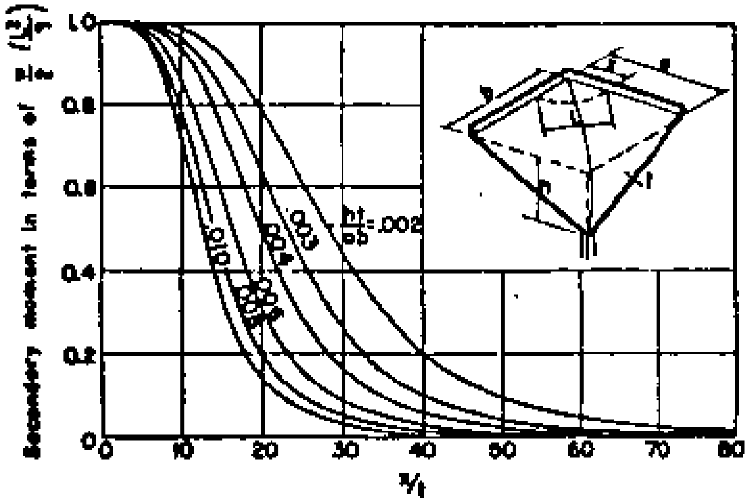
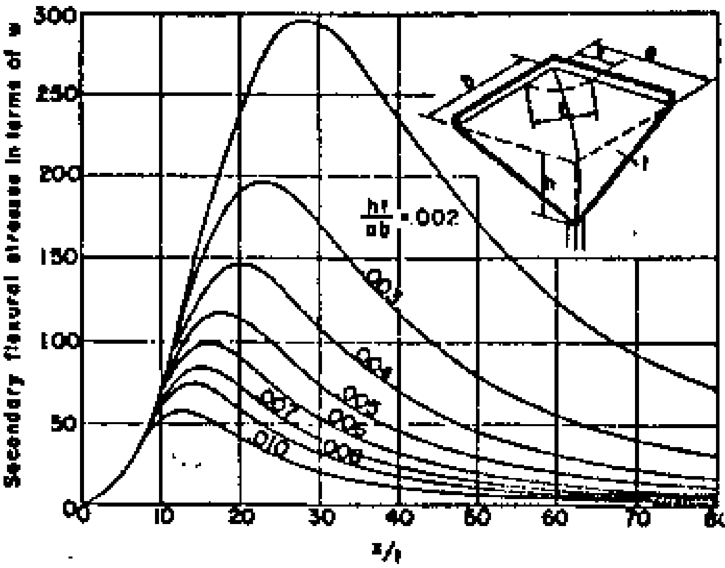
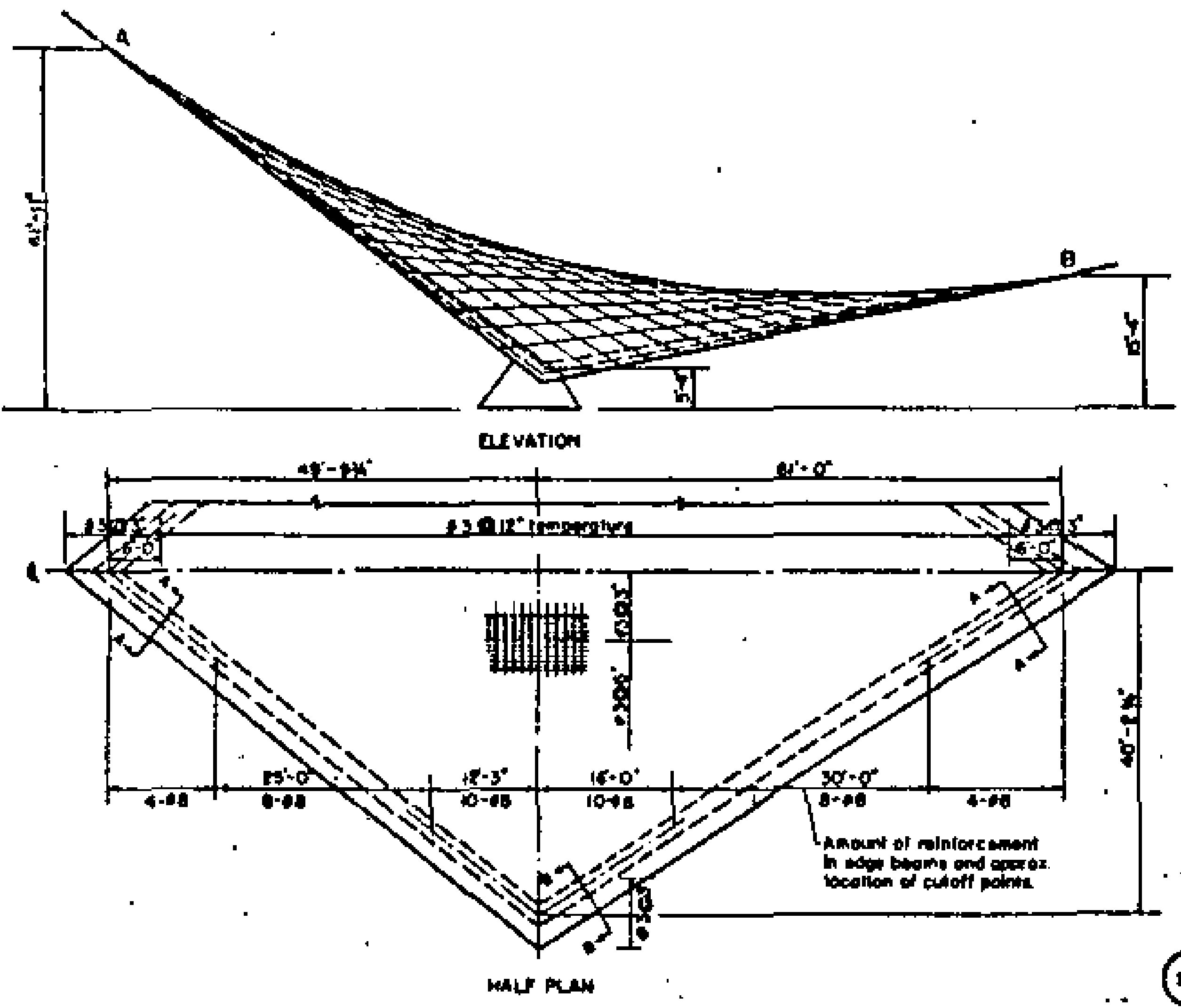


Fig. 22

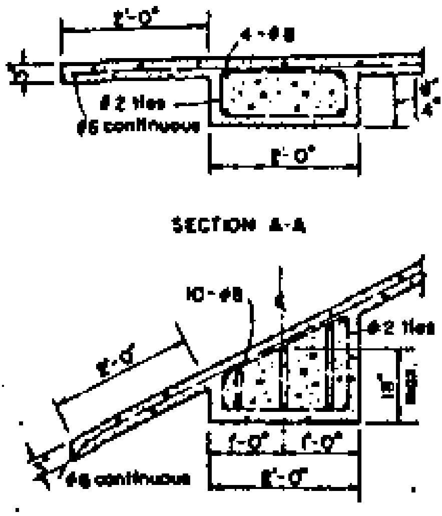




23a

Examples

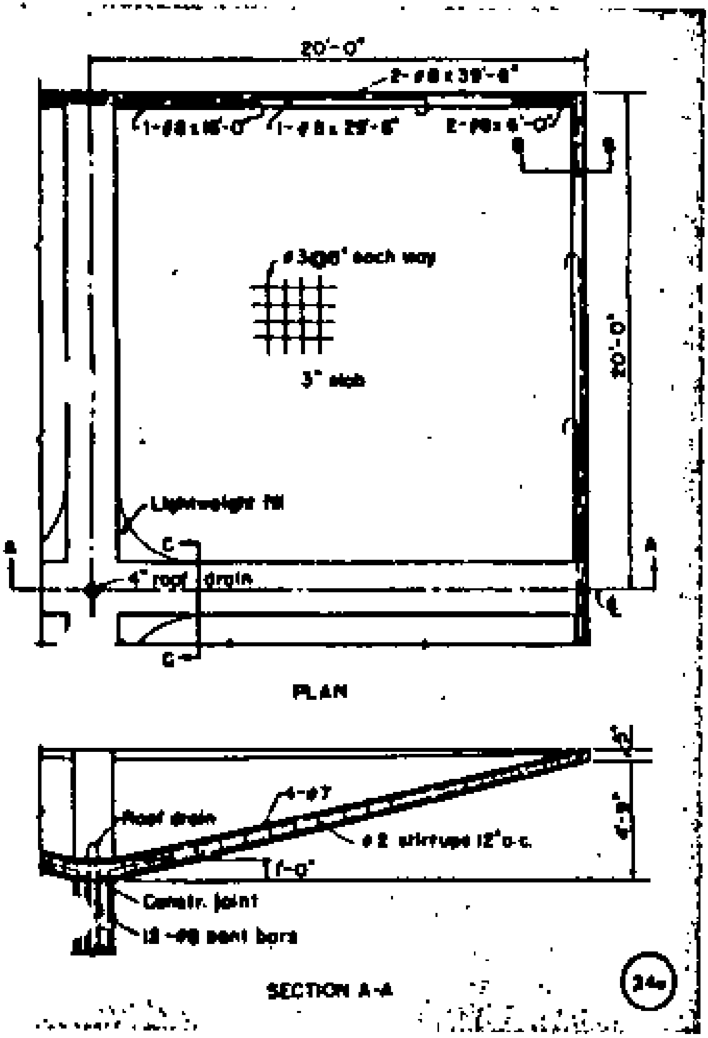
The previous discussion on secondary stresses pointed out the importance of providing sufficient curvature in a hyperbolic paraboloid surface. Since there has not yet been developed any exact method of determining the minimum rise-to-span ratio which can be tolerated, salient features of three shells selected from the large number already built are presented merely as a guide. The dimensions do not represent limits of applicability. These typical shells have been built in accordance with theory presented previously and are behaving satisfactorily.

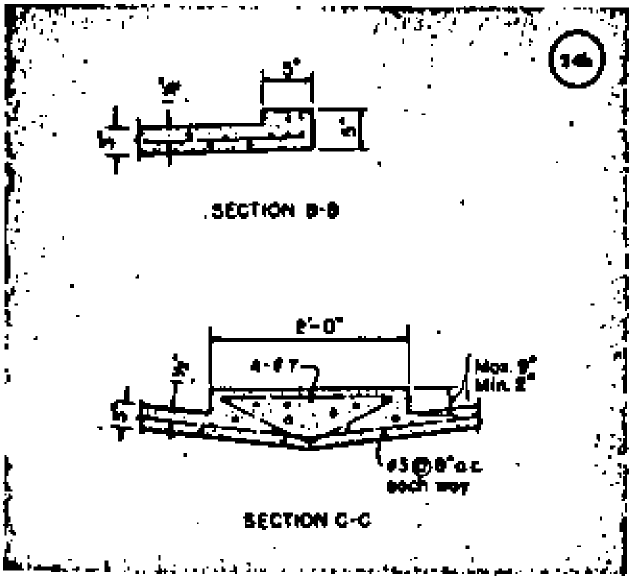


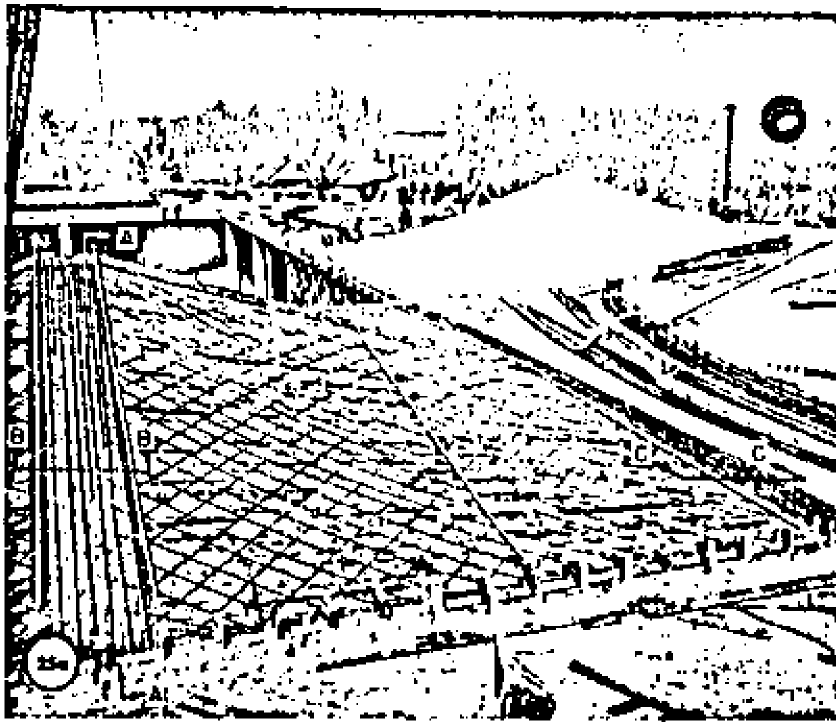
23b

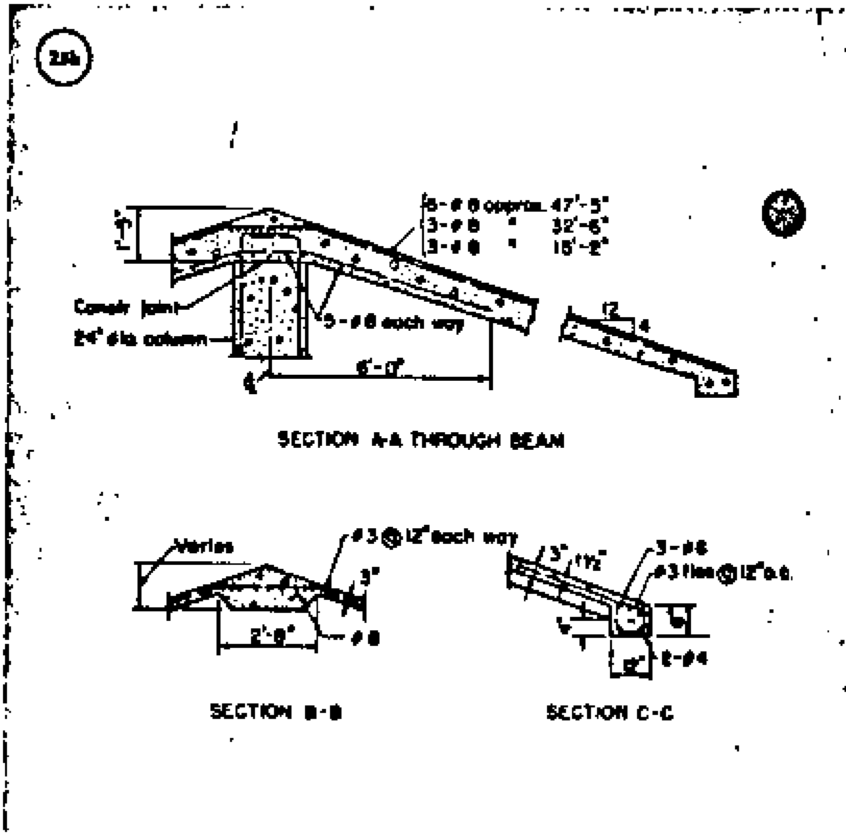
Figs. 23 a, b. The roof of St. Edmund's Episcopal Church, Elm Grove, Wis., features a 3-in. thick hyperbolic paraboloid shell supported on two narrow concrete buttresses. The tilt of the saddle shape gives the effect of spaciousness in the sanctuary. Architect was Wm. P. Wenzler of Milwaukee, Wis. General contractor was Gebhard-Berghammer, Inc., of Milwaukee.

Figs. 24 a, b. Ralph's Supermarket in Wichita, Kan., has nine [illegible] hyperbolic paraboloid shells, each 40 ft. square, covering [illegible] store, work rooms and outside walks. For a live load of 30 psf, each shell has an average thickness of 4.3 in. and 2.4 lb. of reinforcement per square foot. A roof drain is located at the low point of each shell, with the drain line carried down through the column core. Architects were Vanlandingham and Haney. Structural engineers were O. Hartwell and Co. of Wichita. General contractor was H. P. Sell Construction Co. of Wichita.









Figs. 25 a, b. Fifty-two hyperbolic paraboloid concrete shells form new roof for Argentine reservoir in Kansas City, Kan. Measuring 45 ft. 6 in. square with a rise of 7 ft. 8 in., the 3-in. thick shells were built with movable forms constructed in two sections that match on centerline of the shell. Design live load was 30 psf. An average thickness of 4.6 in. and 2.7 lb. of reinforcement per square foot were required for each shell. Design was by Burns and McDonnell Engineering Co. of Kansas City, Mo., for the Board of Public Utilities, Kansas City, Kan. General contractor was [illegible] Construction Co. of Kansas City, Mo.

Appendix

Derivation of Formulas for Skewed Hyperbolic Paraboloid Shells

The derivation of formulas for analyzing hyperbolic paraboloid surfaces is somewhat similar to the derivation for those rectangular in plan.

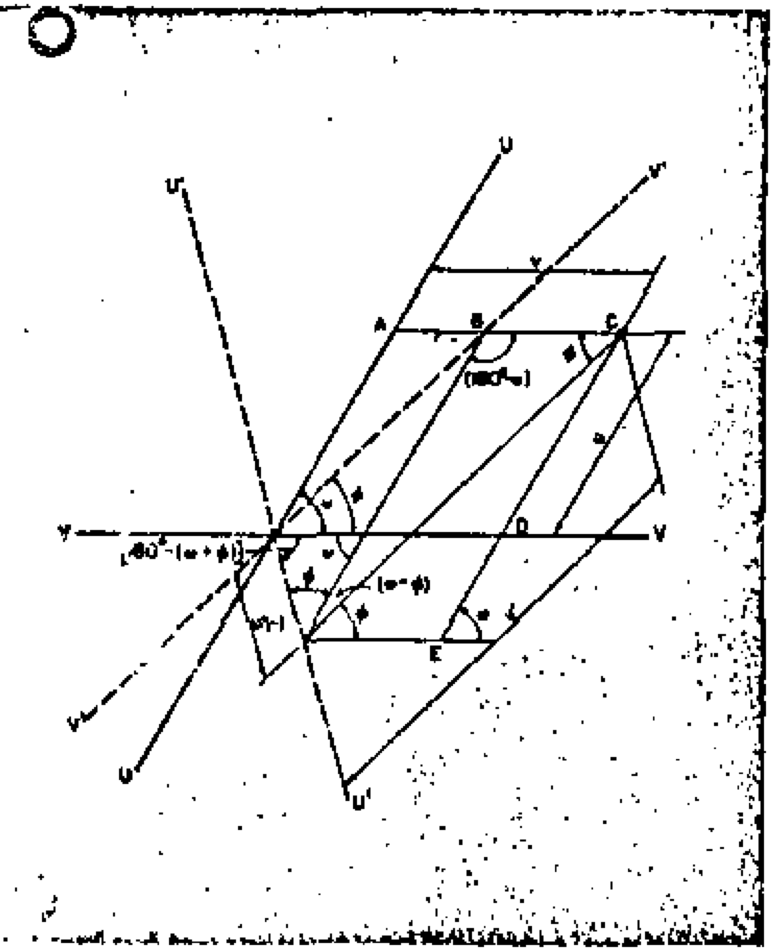
With reference to Fig. 26, in accordance with the law of sines,

$$BC = \frac{v' \sin(\omega - \phi)}{\sin(180^\circ - \omega)} = \frac{v' \sin(\omega - \phi)}{\sin \omega}$$

and

$$AB = \frac{-u' \sin \phi}{\sin \omega}$$

Fig. 26



Therefore, since $v = AB + BC$,

$$v = \frac{1}{\sin \omega}\left[v' \sin(\omega - \phi) - u' \sin \phi \right] \tag{31}$$

Also,

$$CE = \frac{v' \sin \phi}{\sin \omega}$$

and

$$DE = \frac{-u'}{\sin \omega} \sin\left[180^\circ - (\omega + \phi)\right] = \frac{-u' \sin(\omega + \phi)}{\sin \omega}$$

hence

$$u = CE - DE = \frac{1}{\sin \omega}\left[v' \sin \phi + u' \sin(\omega + \phi) \right] \tag{32}$$

Substituting equations (31) and (32) into equation (20) gives

$$z = \frac{k}{ab}\, uv = \frac{k}{ab \sin^2 \omega}\left\{ \left[v' \sin(\omega - \phi) - u' \sin \phi \right]\left[v' \sin \phi + u' \sin(\omega + \phi) \right] \right\}$$

Expanding this expression and substituting the trigonometric identity $\sin^2\omega - \sin^2\phi$ for $\sin(\omega - \phi)\sin(\omega + \phi)$, gives

$$z = \frac{k}{ab \sin^2 \omega}\left\{ \sin \phi \left[(v')^2 \sin(\omega - \phi) - (u')^2 \sin(\omega + \phi) \right] + v'u'\left[\sin^2 \omega - 2 \sin^2 \phi \right] \right\} \tag{33}$$

The coefficient of $v'u'$ becomes zero where the value of ϕ is chosen so that

$$\sin \phi = \frac{\sin \omega}{\sqrt{2}} \tag{34}$$

Designating the particular value which will satisfy this condition as ϕ_s, equation (33) reduces to

$$z = \frac{h}{ab \sin^2 \omega} \sin \phi_s \Big[(v')^2 \sin(\omega - \phi_s)$$

$$- (u')^2 \sin(\omega + \phi_s) \Big] \tag{35}$$

It should be noted that equation (35) is of the same form as equation (3) because ω and ϕ_s are constants for a particular angle of skew ω. Therefore, the oblique surface $z = \frac{huv}{ab}$ can also be formed by translating one parabola along another. In this general case, however, the parabolas are not perpendicular to each other as in the specific rectangular case, but are skewed at the angle ω.

At the edge of the skewed surface horizontal arch thrusts H_U' and H_V' of the two systems of arches are determined in a manner similar to that illustrated in equations (7) and (8). For example, thrust H_V' may be expressed

$$H_V' = \frac{w}{4}\left(\frac{L^2}{4h_{sv}}\right) \tag{36}$$

If the term involving u'^2 in equation (35) is constant, the expression for parabolas parallel to the V' axis is

$$z' = \frac{h \sin \phi_s}{ab \sin^2 \omega}\left[v'^2 \sin(\omega - \phi_s) \right] \tag{37}$$

Letting $z' = h_{sv}$ at $v' = L/2$ gives

$$\frac{L^2}{4h_{sv}} = \frac{ab}{h}\left[\frac{\sin^2 \omega}{\sin \phi_s \sin(\omega - \phi_s)}\right] \tag{38}$$

Substituting equation (38) into equation (36) gives

$$H_V' = \frac{w}{4}\left(\frac{ab}{h}\right)\frac{\sin^2 \omega}{\sin \phi_s \sin(\omega - \phi_s)}$$

But from equation (34) $\sin \phi = \frac{\sin \omega}{\sqrt{2}}$; therefore

$$H_V' = \frac{wab}{4h}\left[\frac{\sqrt{2} \sin \omega}{\sin(\omega - \phi_s)}\right] \tag{39}$$

In a similar manner it may be shown that

$$H_U' = \frac{wab}{4h}\left[\frac{\sqrt{2} \sin \omega}{\sin(\omega + \phi_s)}\right] \tag{40}$$

To prove that components of the horizontal thrust acting normal to the edge of the surface nullify each other, the combined normal components of both H_U' and H_V' are expressed

$$H_N = H_V' \sin^2 \phi_s - H_U' \sin^2(\omega + \phi_s) \tag{41}$$

Substituting equations (39) and (40) in equation (41),

$$H_N = \frac{wab\sqrt{2} \sin \omega}{4h}\left[\frac{\sin^2 \phi_s}{\sin(\omega - \phi_s)} - \sin(\omega + \phi_s)\right] \tag{42}$$

or

$$H_N = \frac{wab\sqrt{2} \sin \omega}{4h}\left[\frac{2 \sin^2 \phi_s - \sin^2 \omega}{\sin(\omega - \phi_s)}\right] \tag{43}$$

However, the numerator of the term inside the bracket was previously made equal to zero. Therefore, equation (43) equals zero, indicating that the combined thrusts exerted by intersecting arches produce no force normal to the edge.

Shear exerted along the edge of the skewed surface is obtained by adding algebraically the components of the horizontal thrusts H_U' and H_V' parallel to the edge:

$$S = H_V' \sin \phi_s \cos \phi_s - H_U' \sin(\omega + \phi_s) \cos(\omega + \phi_s)$$

Substituting for H_V' and H_U', their values given by equations (39) and (40),

$$S = \frac{wab \sin \omega}{2\sqrt{2}\, h}\left[\frac{\sin \phi_s \cos \phi_s}{\sin(\omega - \phi_s)} - \cos(\omega + \phi_s)\right] \tag{44}$$

Utilizing the identity that $\sin \omega \cos \omega - \sin \phi \cos \phi = \cos(\omega + \phi) \sin(\omega - \phi)$, equation (44) reduces to

$$S = \frac{wab \sin \omega}{2\sqrt{2}\, h}$$

$$\left[\frac{\sin \phi_s \cos \phi_s - \sin \omega \cos \omega + \sin \phi_s \cos \phi_s}{\sin \omega \cos \phi_s - \cos \omega \sin \phi_s}\right]$$

Substituting for $\sin \phi_s$ its value given by equation (34), then

$$S = \frac{wab \sin \omega}{2\sqrt{2}\, h}\left[\frac{\sqrt{2} \sin \omega \cos \phi_s - \sin \omega \cos \omega}{\sin \omega \cos \phi_s - \frac{\cos \omega \sin \omega}{\sqrt{2}}}\right]$$

$$= \frac{wab \sin \omega}{2h} \tag{45}$$

Adopting this coordi[illegible] convenience, a representative small element of a shell of double curvature is formed, as shown in Fig. 1, by two radial planes whose horizontal lines are parallel to the y-axis and by two other radial planes in which the horizontal lines are parallel to the x-axis. The direct forces, T_x and T_y, measured in pounds per unit length, are considered positive when they create tension. The shearing force, S, also measured in pounds per unit length, is positive when it creates tension in the diagonal direction of increasing values of x and y. The surface load, w, is considered positive when acting downward. The forces acting on the element are resolved into components that are parallel to the coordinate system but have their direction tangential to the surface. Thus, force T_x is parallel to the (xz)-plane but is inclined by the angle, ϕ, to the (xy)-plane.

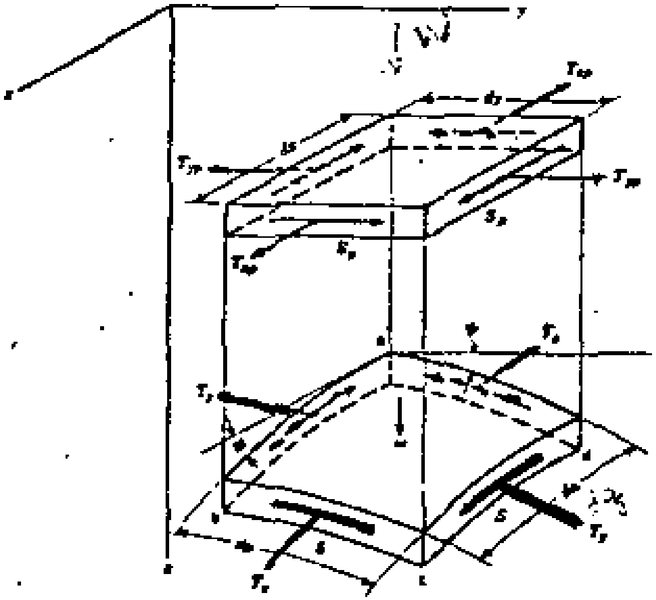


Fig. 1.—Element of a Shell of Double Curvature

A considerable simplification[1] in the expressions for the equilibrium of forces parallel to the various axes results if the actual forces are transformed into fictitious forces acting on the projected area of the lower element in Fig. 1. From geometry it is evident that

$$dp\cos\psi = dy \quad \text{(1a)}$$

and

$$dq\cos\phi = dx \quad \text{(1b)}$$

The horizontal component of the normal force, T_x, acting on face ad is $T_x\cos\phi\,dp$ which, by introducing the notation of Eq. 1a, becomes T_x (co[illegible]) dy. If the projected element is to have the same total force acting on it as the act[illegible] element,

$$T_{xp}\,dy = T_x\frac{\cos\phi}{\cos\psi}\,dy \quad \text{(2a)}$$

or

$$\underline{T_{xp} = T_x\frac{\cos\phi}{\cos\psi}} \quad \text{(2b)}$$

Similarly,

$$\underline{T_{yp} = T_y\frac{\cos\psi}{\cos\phi}} \quad \text{(3)}$$

Equating the horizontal component of the shear acting on face ad to the shear on the projected element,

$$S\,dp\cos\psi = S_p\,dy \quad \text{(4a)}$$

Substituting for the value of dp its value from Eq. 1a results in

$$\underline{S = S_p} \quad \text{(4b)}$$

Assuming that only a vertical load acts on the shell and recognizing that the forces acting on the element vary from the near face to the far face, the equilibrium of forces in the x-direction expressed in terms of T_{xp}, T_{yp}, and S_p (horizontal components of the actual forces) yields

$$\frac{\partial T_{xp}}{\partial x} + \frac{\partial S_p}{\partial y} = 0 \quad \text{(5)}$$

Equilibrium of the forces in the y-direction results in

$$\frac{\partial T_{yp}}{\partial y} + \frac{\partial S_p}{\partial x} = 0 \quad \text{(6)}$$

In order to establish the equations of equilibrium of forces in the z-direction, it is necessary first to obtain their vertical components. The vertical component of the normal force, T_x, acting on face ad is $T_x\sin\phi\,dp$. Substituting for T_x and dp their values as given by Eqs. 2b and 1a yields

$$T_{xp}\frac{\sin\phi}{\cos\psi}\,dy = T_{xp}\tan\phi\,dy = T_{xp}\frac{\partial z}{\partial x}\,dy \quad \text{(7)}$$

T_x

The vertical component acting per unit of length along the y-axis is, therefore,

---

[1] "Stress Conditions in Shells Neglecting Bending," by K. W. Johansen, Bygningsstatiske Meddelelser, Dansk Selskab for Bygningsstatik, Copenhagen, 19[illegible], pp. 61–64.

$T_{xp}\,(\partial z/\partial x)$. Similarly, the vertical component of T_y per unit of length along the x-axis is $T_{yp}\,(\partial z/\partial y)$. The vertical component of the shear force on face *ad* is $S\,dp \sin\psi$, which equals $S_p\,(\partial z/\partial y)\,dy$ which, per unit of length along the y-axis, equals $S_p\,(\partial z/\partial y)$. Similarly, the vertical component of shear acting on face *ab* is $S_p\,(\partial z/\partial x)$. Taking into account the variation in the magnitude of forces from one face to the other, the summation of forces in the z-direction yields

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(T_{xp}\frac{\partial z}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(T_{yp}\frac{\partial z}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(S_p\frac{\partial z}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(S_p\frac{\partial z}{\partial x}\right) + w_z = 0 \ldots\ldots (8a)$$

in which w_z is the load per unit of projected area. Eq. 8a reduces to

$$T_{xp}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + T_{yp}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + 2\,S_p\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial z}{\partial x}\left(\frac{\partial T_{xp}}{\partial x} + \frac{\partial S_p}{\partial y}\right) + \frac{\partial z}{\partial y}\left(\frac{\partial T_{yp}}{\partial y} + \frac{\partial S_p}{\partial x}\right) = -\,w_z \ldots\ldots (8b)$$

By Eqs. 5 and 6, the terms in the parentheses equal zero. Hence, Eq. 8b reduces to

$$T_{xp}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + T_{yp}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + 2\,S_p\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = -\,w_z \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (8c)$$

Eqs. 5, 6, and 8c can be reduced to a single equation with one unknown by introducing the function, F, so that

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = T_{xp} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (9a)$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = T_{yp} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (9b)$$

and

$$-\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y} = S_p \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (9c)$$

These values satisfy the requirements of Eqs. 5 and 6 and reduce Eq. 8c to

$$\boxed{\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - 2\,\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = -\,w_z} \ldots\ldots\ldots (10)$$

Except for a few special cases, the algebraic solution of differential Eq. 10 is difficult, and a numerical procedure such as finite differences must be used.

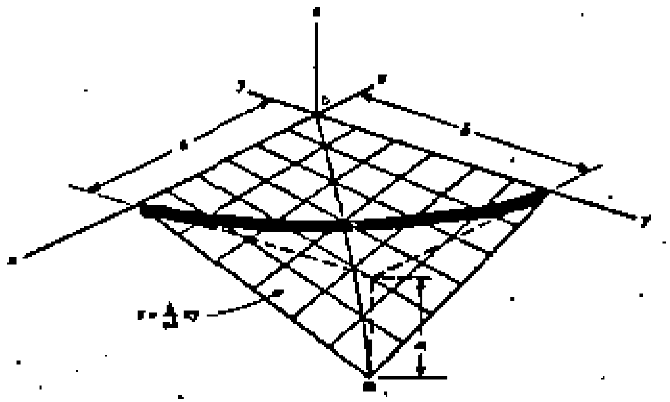


Fig. 2.—Sections of a Hyperbolic Paraboloid Surface Taken at 45° to the Coordinate Axes

One of the simpler cases to solve is the hyperbolic paraboloid shell subject to a uniform load. The surface of a hyperbolic paraboloid shell (Fig. 2) is formed by a series of straight lines parallel to the (xz)-plane and (zy)-plane and, hence, is defined by

$$z = \frac{h}{a\,b}\,x\,y \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (11)$$

The second differential of Eq. 11 equals zero. Therefore, for a hyperbolic paraboloid shell, Eq. 10 becomes

$$-\,2\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y}\frac{h}{a\,b} = w \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (12)$$

which simplifies by means of Eq. 9c to

$$\boxed{S_p = \frac{a\,b}{2\,h}\,w} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (13)$$

Because the differential of S_p with respect to y and x is zero, when the direct forces normal to the edge are zero, it is seen from the relationships in Eqs. 5 and 6 that

$$T_{xp} = T_{yp} = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (14)$$

Eq. 14 indicates that the entire shell is subject solely to pure shear of constant intensity when uniformly loaded. Along the edges this uniform shear must be resisted by the edge member.

This state of pure shear, which actually resolves into principal stresses of equal and opposite magnitude acting on sections at 45° to shear plane, can be deduced from purely physical considerations without recourse to differential equations. As shown in Fig. 2, sections of a hyperbolic paraboloid surface taken at 45° to the coordinate axes form identical parabolic arches. In other words, the surface shown in Fig. 2 can be obtained by translating (moving) a parabolic curve along curve om. The parabolas parallel to om curve downward, whereas those at right angles to these parabolas curve in the opposite direction.

Assuming that the load is equally divided between the two sets of perpendicular parabolas, it is evident that at the edge the parabolas parallel to curve om exert an outward thrust, whereas those perpendicular to this curve exert an inward pull. Although opposite in character, the magnitude of these forces intersecting at any point on the boundary of the surface is equal because the intersecting parabolas are identical. The net effect, as shown in Fig. 3, is that the outward force acting on the edge is cancelled and only pure shear acts along the edge.[4] This shear must be resisted by a rigid edge member. Because horizontal reactions are supplied to the ends of the parabolas by the interaction of one on the other, it is valid to assume that the load is carried by a series of parabolas.

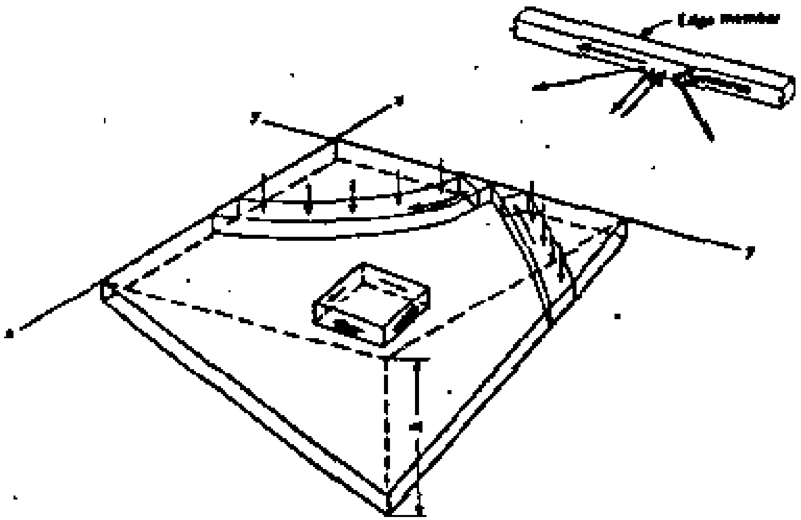


FIG. 3.—FORCES ACTING ON EDGE MEMBERS OF PARABOLIC ARCHES

For most hyperbolic paraboloid shells of moderate rise, it is satisfactory to consider the load as being uniform. However, when the rise is great the dead load can no longer be considered as acting uniformly on the projected area. For this condition the dead load of the shell is

$$w_s = \frac{w}{\cos\phi\,\cos\psi} \qquad \text{(15a)}$$

which, by trigonometry, can be shown to equal

$$w_s = w\sqrt{\left[1 + \left(\frac{h\,x}{a\,b}\right)^2\right]\left[1 + \left(\frac{h\,y}{a\,b}\right)^2\right]} \qquad \text{(15b)}$$

Neglecting

$$\left(\frac{h\,x}{a\,b}\right)^2\left(\frac{h\,y}{a\,b}\right)^2$$

because it is small, Eq. 15b reduces to

$$w_s = w\sqrt{1 + \left(\frac{h\,x}{a\,b}\right)^2 + \left(\frac{h\,y}{a\,b}\right)^2} \qquad \text{(15c)}$$

From Eqs. 10 and 13,

$$-\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y}\frac{2\,h}{a\,b} = S_{xy}\frac{2\,h}{a\,b} = w\sqrt{1 + \left(\frac{h\,x}{a\,b}\right)^2 + \left(\frac{h\,y}{a\,b}\right)^2} \qquad \text{(16)}$$

Differentiating Eq. 16 and integrating according to Eqs. 5 and 6 yields

$$T_{xx} = -w\frac{y}{2}\log\left[\frac{h\,x}{a\,b} + \sqrt{1 + \left(\frac{h\,x}{a\,b}\right)^2 + \left(\frac{h\,y}{a\,b}\right)^2}\right] + f(y) \qquad \text{(17)}$$

$$T_{yy} = -w\frac{x}{2}\log\left[\frac{h\,y}{a\,b} + \sqrt{1 + \left(\frac{h\,x}{a\,b}\right)^2 + \left(\frac{h\,y}{a\,b}\right)^2}\right] + f(x) \qquad \text{(18)}$$

in which $f(y)$ and $f(x)$ are constants of integration. With only one constant of integration available for each normal force and with two edges for each force—that is, at $x = 0$ and $x = a$ for T_{xx}, or at $y = 0$ and $y = b$ for T_{yy}—it is evident that, for pure membrane or direct-force action, normal reactions are required. If normal reactions are not provided along at least one of the two parallel edges, the surface is subject to bending moments.

The elliptical paraboloid is another surface that is amenable to algebraic solution, although it is slightly more involved than the solution for the hyperbolic paraboloid surface. This surface is generated by moving a parabolic curve along another parabola, as shown in Fig. 4(a). The equation of this surface is

$$\boxed{z = \frac{h_y\,y^2}{b^2} + \frac{h_x\,x^2}{a^2}} \qquad \text{(19)}$$

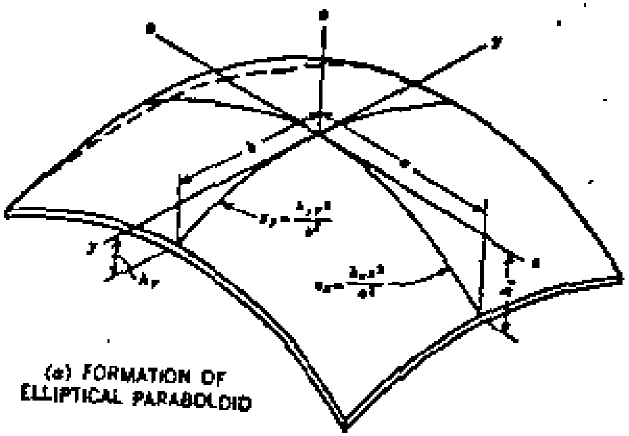
The second differentials of the foregoing expression with respect to x and y are

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{2\,h_x}{a^2} \qquad \text{(20a)}$$

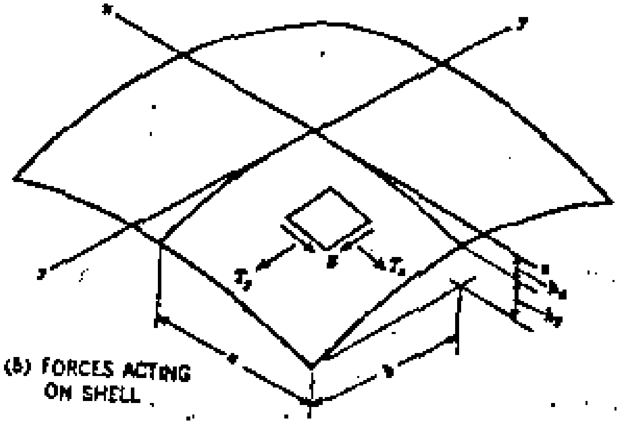
$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{2\,h_y}{b^2} \qquad \text{(20b)}$$

and

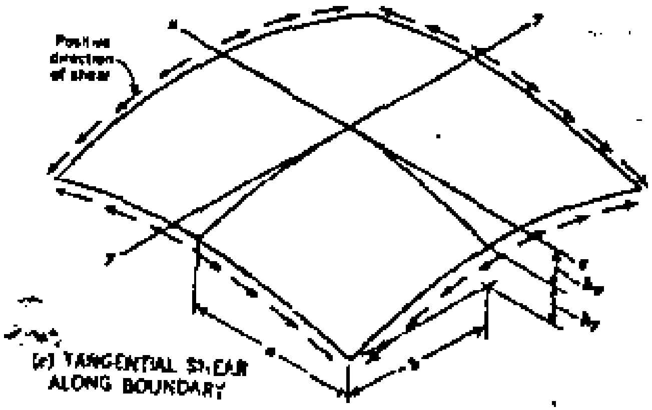
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = 0 \qquad \text{(20c)}$$



(a) FORMATION OF ELLIPTICAL PARABOLOID



(b) FORCES ACTING ON SHELL



(c) TANGENTIAL SHEAR ALONG BOUNDARY

FIG. 4.—ELLIPTICAL PARABOLOID SHELL

Substituting these expressions in Eq. 10, for a uniform load, $w_z = w$,

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{h_y}{h_x}\frac{a^2}{b^2}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = -\frac{a^2}{2\,h_x}\,w \qquad (21)$$

Differential Eq. 21 is satisfied if

$$F = -\left[\sum_{n=1,3,\ldots}^{\infty} A_n\,(\cosh \beta\,x)\,(\cos \lambda\,y)\right] - \frac{a^2\,y^2\,w}{4\,h_x} \qquad (22)$$

in which

$$\beta = \sqrt{\frac{h_x}{h_y}}\,\frac{n\,\pi}{2\,a} \qquad (23a)$$

and

$$\lambda = \frac{n\,\pi}{2\,b} \qquad (23b)$$

In the foregoing expressions, the values of n considered are the odd integers. This can be checked by differentiating Eq. 22 and substituting the resulting values in Eq. 21. If the value of F is used in accordance with Eqs. 9, the expressions for the forces are

$$T_x = \left[\sum_{n=1,3,\ldots}^{\infty} A_n\,\lambda^2\,(\cosh \beta\,x)\,(\cos \lambda\,y)\right] - \frac{a^2\,w}{2\,h_x} \qquad (24a)$$

$$T_y = -\sum_{n=1,3,\ldots}^{\infty} A_n\,\beta^2\,(\cosh \beta\,x)\cos \lambda\,y \qquad (24b)$$

and

$$S_x = -\sum_{n=1,3,\ldots}^{\infty} A_n\,\beta\,\lambda\,(\sinh \beta\,x)\sin \lambda\,y \qquad (24c)$$

At the boundary, $y = \pm b$, $T_y = 0$ because $\cos \lambda\,b = 0$ for all values of n. In order to satisfy the condition that $T_x = 0$ at $x = \pm a$, it is necessary that $\frac{a^2\,w}{2\,h_x}$ be expressed as a Fourier series. The general expression of the trigonometric series for a constant is

$$1 = \sum_{n=1,3,\ldots}^{\infty} \frac{4\,(-1)^{(n-1)/2}\cos \lambda\,y}{n\,\pi} \qquad (25$$

Therefore, at $x = \pm a$, Eq. 24a becomes

$$T_x = 0 = \sum_{n=1,3,\ldots}^{\infty} \left\{A_n\,\lambda^2\cosh \beta\,a - \left[\frac{4\,(-1)^{(n-1)/2}}{n\,\pi}\,\frac{a^2\,w}{2\,h_x}\right]\right\}\cos \lambda\,y \qquad (26)$$

This expression can equal only zero for all values of y if

$$A_n = \frac{2\,a^2\,w\,(-1)^{(n-1)/2}}{n\,\pi\,h_x\,\lambda^2\cosh \beta\,a} \qquad (27)$$

Substituting A_n in Eqs. 24 and can[illegible]ng the common terms results in

$$T_{xp} = \frac{w a^2}{k_x}\left[\frac{2}{\pi}\sum_{n=1,3,\ldots}^{\infty}\frac{(-1)^{(n-1)/2}\cosh\beta x}{n\cosh\beta a}\cos\lambda y - \frac{1}{2}\right] \qquad (28a)$$

$$T_{yp} = -\frac{w b^2}{k_y}\left[\frac{2}{\pi}\sum_{n=1,3,\ldots}^{\infty}\frac{(-1)^{(n-1)/2}\cosh\beta x}{n\cosh\beta a}\cos\lambda y\right] \qquad (28b)$$

and

$$S_p = -\frac{w a b}{\sqrt{k_x k_y}}\left[\frac{2}{\pi}\sum_{n=1,3,\ldots}^{\infty}\frac{(-1)^{(n-1)/2}\sinh\beta x}{n\cosh\beta a}\sin\lambda y\right] \qquad (28c)$$

By means of Eq. 28 and Eqs. 2b, 3, and 4b, the actual internal forces can be computed as the sum of a series. If k_x/k_y is greater than unity, rapid convergence of the series is obtained for most values, and, therefore, only the first three or four terms ($n = 1,3,5,$ and 7) are required to obtain sufficient accuracy. However, at the boundary $x = \pm a$ the expression for shear converges very slowly. In this case one can restate Eq. 28c at the boundary $x = a$ as

$$S_p = -\frac{w a b}{\sqrt{k_x k_y}}\left\{\frac{2}{\pi}\sum_{n=1,3,\ldots}^{\infty}\left[\left(\frac{\sinh\beta a}{\cosh\beta a} - 1\right) + 1\right]\frac{(-1)^{(n-1)/2}}{n}\right\}\sin\lambda y \qquad (29)$$

However,

$$\sum_{n=1,3,\ldots}^{\infty}\frac{(-1)^{(n-1)/2}}{n}\sin\lambda y = \frac{1}{4}\log\left(\sec\frac{\pi y}{2b} + \tan\frac{\pi y}{2b}\right)^2 \qquad (30)$$

Therefore, Eq. 29 reduces to

$$S_p = -\frac{w a b}{\sqrt{k_x k_y}}\left[\frac{1}{2\pi}\log\left(\sec\frac{\pi y}{2b} + \tan\frac{\pi y}{2b}\right)^2 - \frac{2}{\pi}\sum_{n=1,3,\ldots}^{\infty}(1 - \tanh\beta a)\frac{(-1)^{(n-1)/2}}{n}\sin\lambda y\right] \qquad (31)$$

For values of k_x/k_y greater than 1, for practical purposes, $\tanh\beta a$ is equal to 1. Therefore, the second term in Eq. 31 can be ignored; thus, the expression for shear converges rapidly.

At $y = \pm b$, sec $(\pi y/2b)$ and tan $(\pi y/2b)$ are infinite. Therefore, the log of these values is also infinite. Consequently, Eq. 31 indicates that the shear at the corner is infinite. This would be true if the corner were completely free of normal forces and if the shell had no bending resistance. However, because of the integral action of the supporting ribs and shell, normal forces do exist at the corner. These normal forces alter the resistance to the extent that the shear does not need to be infinite to satisfy statics. Moreover, at the corner some of the load can be, and is, resisted by flexural resistance. From studies made of cylindrical shells, it has been found that this flexural action is confined to a distance of approximately $0.4\sqrt{r\,t}$ from the rib, in which r is the radius of the shell and t is the shell thickness. Therefore, it is felt that [illegible] 28c and 31 do not apply within the distance $0.4\sqrt{r\,t}$ from the corner. [illegible] can be considered maximum at the point $y = b - 0.4\sqrt{r\,t}$.

The symbols, T_x, T_y, and S, represent forces per unit of length. In order to obtain stresses, these values must be divided by the thickness of the shell.

The trigonometric functions involved in Eqs. 2b, 3, and 4b can be readily expressed as functions of x and y. Differentiating Eq. 19 with respect to x yields

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2 k_x}{a}\frac{x}{a} = \tan\phi \qquad (32)$$

By utilizing

$$\tan^2\phi = \frac{1}{\cos^2\phi} - 1 \qquad (33)$$

Eq. 2b reduces to

$$\left(\frac{2 k_x}{a}\frac{x}{a}\right)^2 + 1 = \frac{1}{\cos^2\phi} \qquad (34)$$

or

$$\cos\phi = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{2 k_x}{a}\frac{x}{a}\right)^2}} \qquad (25a)$$

Similarly,

$$\cos\psi = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{2 k_y}{b}\frac{y}{b}\right)^2}} \qquad (25b)$$

and, therefore,

$$\frac{\cos\phi}{\cos\psi} = \sqrt{\frac{1 + \left(\frac{2 k_y}{b}\frac{y}{b}\right)^2}{1 + \left(\frac{2 k_x}{a}\frac{x}{a}\right)^2}} \qquad (35c)$$

In order to avoid mathematical complications, the value of w_z was assumed to be constant in establishing Eq. 21. However, although the algebraic computations become extensive and rather formidable, the procedure outlined for the uniform load can also be applied to the case of any symmetrical loading, such as the dead weight of the shell. In this case the load is expressed in terms of the double Fourier series,

$$w_z = \sum_{m=1,3,\ldots}^{\infty}\sum_{n=1,3,\ldots}^{\infty}\beta_{mn}\cos\gamma x\cos\lambda y \qquad (36)$$

in which $\gamma = m\pi/2a$.

The resulting expressions for T_{xp} and T_{yp}, obtained by expressing w_z in this manner, indicate that any symmetrical loading can be resisted by direct forces without the necessity for lateral or normal forces at the boundaries. The behavior of the elliptical paraboloid shell under dead load therefore differs from that of the hyperbolic paraboloid shell, for which the dead load induces some bending if no lateral restraint is provided.

TABLE 1.—COEFFICIENTS FOR COMPUTING FORCE COMPONENTS OF ELLIPTICAL PARABOLOID SHELL

Value of x/a

y/b	Force component	(a) $h_x/h_y = 1.0$					(b) $h_x/h_y = 0.8$				
		0	0.25	0.50	0.75	1.0	0	0.25	0.50	0.75	1.0
0.00	T_y	0.250	0.233	0.182	0.101	0	0.289	0.270	0.218	0.119	0
	T_x	0.250	0.267	0.318	0.399	0.500	0.211	0.230	0.282	0.381	0.500
	S	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0.25	T_y	0.267	0.250	0.199	0.111	0	0.304	0.286	0.228	0.130	0
	T_x	0.233	0.250	0.301	0.389	0.500	0.196	0.214	0.272	0.370	0.500
	S	0	0.029	0.068	0.096	0.108	0	0.034	0.069	0.100	0.114
0.50	T_y	0.318	0.301	0.250	0.150	0	0.347	0.331	0.277	0.169	0
	T_x	0.182	0.199	0.250	0.350	0.500	0.153	0.169	0.223	0.331	0.500
	S	0	0.068	0.140	0.210	0.344	0	0.064	0.139	0.214	0.334
0.75	T_y	0.399	0.389	0.350	0.250	0	0.416	0.406	0.369	0.270	0
	T_x	0.101	0.111	0.150	0.250	0.500	0.084	0.094	0.131	0.230	0.500
	S	0	0.096	0.210	0.334	0.464	0	0.081	0.201	0.343	0.469
1.0	T_y	0.500	0.500	0.500	0.500	0	0.500	0.500	0.500	0.500	0
	T_x	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	S	0	0.108	0.343	0.464	∞	0	0.101	0.329	0.443	∞

y/b	Force component	(c) $h_x/h_y = 0.6$					(d) $h_x/h_y = 0.4$				
		0	0.25	0.50	0.75	1.0	0	0.25	0.50	0.75	1.0
0.00	T_y	0.336	0.316	0.252	0.143	0	0.394	0.374	0.307	0.180	0
	T_x	0.164	0.184	0.248	0.357	0.500	0.106	0.126	0.193	0.320	0.500
	S	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0.25	T_y	0.348	0.329	0.267	0.154	0	0.403	0.383	0.319	0.192	0
	T_x	0.152	0.171	0.233	0.346	0.500	0.097	0.117	0.181	0.308	0.500
	S	0	0.021	0.067	0.103	0.130	0	0.026	0.060	0.101	0.128
0.50	T_y	0.383	0.367	0.312	0.197	0	0.426	0.410	0.357	0.236	0
	T_x	0.117	0.133	0.188	0.303	0.500	0.074	0.090	0.143	0.264	0.500
	S	0	0.060	0.123	0.210	0.366	0	0.049	0.115	0.208	0.374
0.75	T_y	0.436	0.426	0.392	0.294	0	0.459	0.451	0.419	0.331	0
	T_x	0.064	0.074	0.108	0.206	0.500	0.041	0.049	0.081	0.169	0.500
	S	0	0.061	0.183	0.342	0.494	0	0.066	0.164	0.316	0.508
1.00	T_y	0.500	0.500	0.500	0.500	0	0.500	0.500	0.500	0.500	0
	T_x	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	S	0	0.089	0.208	0.413	∞	0	0.070	0.173	0.343	∞

y/b	Force component	(e) $h_x/h_y = 0.2$				
		0	0.25	0.50	0.75	1.0
0.00	T_y	0.462	0.446	0.388	0.248	0
	T_x	0.038	0.054	0.112	0.252	0.500
	S	0	0	0	0	0
0.25	T_y	0.466	0.451	0.396	0.261	0
	T_x	0.034	0.049	0.104	0.239	0.500
	S	0	0.014	0.049	0.088	0.128
0.50	T_y	0.473	0.463	0.414	0.303	0
	T_x	0.027	0.037	0.086	0.197	0.500
	S	0	0.027	0.074	0.174	0.289
0.75	T_y	0.484	0.480	0.456	0.383	0
	T_x	0.016	0.020	0.044	0.117	0.500
	S	0	0.024	0.068	0.244	0.316
1.00	T_y	0.500	0.500	0.500	0.500	0
	T_x	0	0	0	0	0
	S	0	0.038	0.106	0.288	∞

In order to expedite the analysis of the elliptical paraboloid shells and to obtain a better understanding of their load-carrying characteristics, Table 1 has been compiled on the basis of Eqs. 28 and Fig. 4(b). The expressions inside the parentheses in Eqs. 28 contain only the parameter, h_x/h_y. Therefore, the behavior of this doubly curved shell can be expressed as a function of this single parameter.

Coefficients are given for computing the three force components, T_x, T_y, and S, at the eighth points of a dome. The forces determined by multiplying the coefficients by constants are

$$\boxed{\begin{aligned} T_y &= -\frac{w\,b^2}{k\,h_y}\,(\text{coefficient}) \qquad (37a)\\ T_x &= -\frac{w\,a^2\,k}{h_x}\,(\text{coefficient}) \qquad (37b)\\ S &= -\frac{w\,a\,b}{\sqrt{h_x\,h_y}}\,(\text{coefficient}) \qquad (37c)\end{aligned}}$$

and

$$k = \sqrt{\frac{1 + [(2\,h_x/a)(x/a)]^2}{1 + [(2\,h_y/b)(y/b)]^2}} \qquad (37d)$$

These constants are dependent only on the selected dimensions of the shell and on the load. In this connection for the sake of completeness, the factor k has been included. In practice the additional accuracy secured by the inclusion of this term is unwarranted because the stresses due to T_x and T_y are never critical. Except in the zone near the corners in which the principal stress due to the combination of the three force components is tensile, the stresses are so low in compression for spans being considered that an investigation of the stresses in a dome is of academic interest only. Therefore, the real reason and need for computing stresses in a shell with a fair degree of accuracy are to obtain a reliable determination of the tangential load which must be carried by the supporting arches.

For this purpose the tangential shear existing along the boundaries (Fig. 4(c)) at the tenth intervals of half the chord are shown in Table 2. Table 2 also permits a better evaluation of the tension near the corner because the principal stresses are primarily related to S.

A graphical presentation of the values in Table 1 for T_{yy} at midspan is shown in Fig. 5 for various values of h_x/h_y. The values of T_{yy} for h_x/h_y from 1.0 to 5.0 are obtained from the values of T_{xy} by symmetry. For example, the value of T_{yy} at $y = 0$ for $h_x/h_y = 5$ is the same as the value of T_{xy} at $x = 0$ for $h_x/h_y = 0.2$. At $x = \pm a$, for all values of h_x/h_y,

$$T_{yy} = -\frac{0.5\,w\,b^2}{h_y} = -\frac{0.125\,w\,L^2}{h_y} \qquad (38)$$

The last term in Eq. 38 is the thrust in a parabolic arch subject to the uniform load, w. This identity is not surprising because at the boundary the force normal to the edge was made equal to zero. Consequently, the imposed condition of restraint compels the entire load in the immediate vicinity of the edge to be carried by arch action in the y-direction. Furthermore, $0.5\,b^2/h_y$ equals the radius of the parabola at its crown. Therefore, the value T_{yy} at $x = a$ and $y = 0$ represents merely the thrust induced in a ring with the appropriate radius due to a radial load, w.

Near the crown, marked variations in the value of T_{yy} occur as h_x/h_y varies. When the rise in the x-direction is small compared with the rise in the y-direction—for example, when $h_x/h_y = 0.2$—the curves in Fig. 5 are almost horizontal, indicating that a large proportion of the load is being resisted in the y-direction. This can be anticipated from the geometry of the shell. As the curvature in one direction is flattened, thereby approaching a horizontal plane as a limit, it is natural that the load is transmitted in the other direction.

TABLE 2.—SHEAR ALONG THE EDGES OF ELLIPTICAL PARABOLOID SHELL

y/b	h_x/h_y				
	1.0	0.8	0.6	0.4	0.2
	At $x = \pm a$				
0.0	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.1	0.0419	0.0388	0.0343	0.0307	0.0187
0.2	0.0854	0.0785	0.0701	0.0630	0.0386
0.3	0.1310	0.1221	0.1088	0.0972	0.0481
0.4	0.1836	0.1721	0.1446	0.1344	0.0731
0.5	0.2432	0.2294	0.2081	0.1724	0.1074
0.6	0.3204	0.3066	0.2848	0.2496	0.1810
0.7	0.4071	0.3887	0.3627	0.3172	0.2296
0.8	0.5363	0.5176	0.4867	0.4400	0.3043
0.85	0.6279	0.6080	0.5781	0.4797	0.4306
0.9	0.7570	0.7279	0.7074	0.6647	0.5454
0.95	0.9777	0.9483	0.9276	0.8763	0.7741
1.0	∞	∞	∞	∞	∞
x/a	At $y = \pm b$				
0.0	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.1	0.0419	0.0444	0.0488	0.0488	0.0600
0.2	0.0854	0.0908	0.0980	0.0990	0.1014
0.3	0.1310	0.1391	0.1460	0.1519	0.1555
0.4	0.1836	0.1890	0.2019	0.2096	0.2140
0.5	0.2432	0.2548	0.2643	0.2742	0.2709
0.6	0.3204	0.3317	0.3426	0.3510	0.3571
0.7	0.4071	0.4218	0.4348	0.4448	0.4425
0.8	0.5363	0.5516	0.5650	0.5787	0.5856
0.85	0.0279	0.6484	0.6567	0.6707	0.6748
0.9	0.7570	0.7728	0.7878	0.8004	0.8081
0.95	0.9777	0.9986	1.0087	1.0214	1.0290
1.0	∞	∞	∞	∞	∞

With no normal forces along the edges, it follows that the increase in the proportion of load carried in the y-direction as h_x/h_y decreases must be accompanied by an increase in the tangential shears along the edges, $x = \pm a$. Such an increase is confirmed by the coefficients listed in Table 2. Although these coefficients diminish at $x = \pm a$ as h_x/h_y decreases, they do not diminish as rapidly as $\sqrt{h_x/h_y}$.

For large values of h_x/h_y, the values of T_{yy} become appreciably smaller as the crown is approached, and, therefore, for such shells only the exterior portion of the shell is resisting load in the y-direction. At the crown the curve for $h_x/h_y = 1.0$ shows that half of the load is carried in one direction and the remaining half is carried in the other direction, which is natural from the condition of equal rise in the two directions.

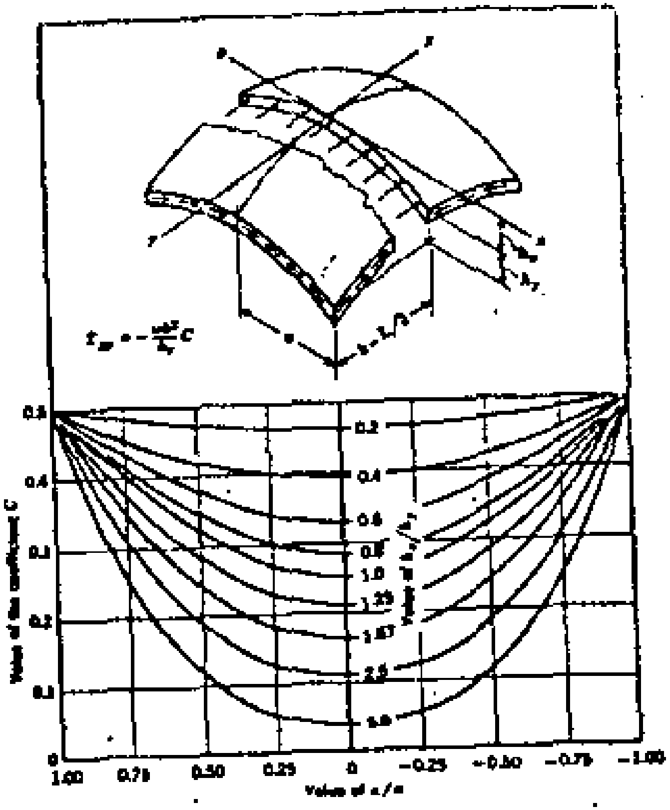


FIG. 5.—COEFFICIENT VALUES FOR VARIOUS VALUES OF h_x/h_y

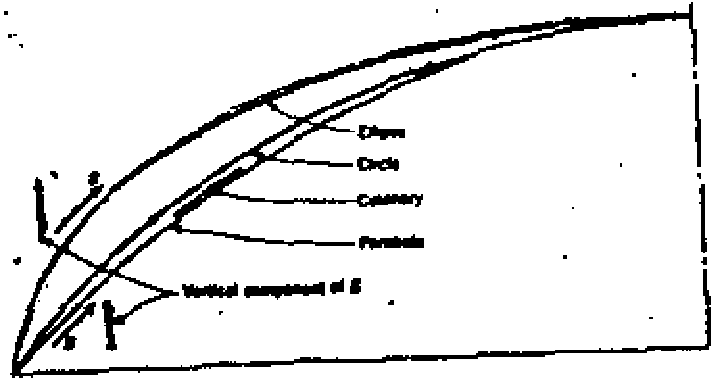
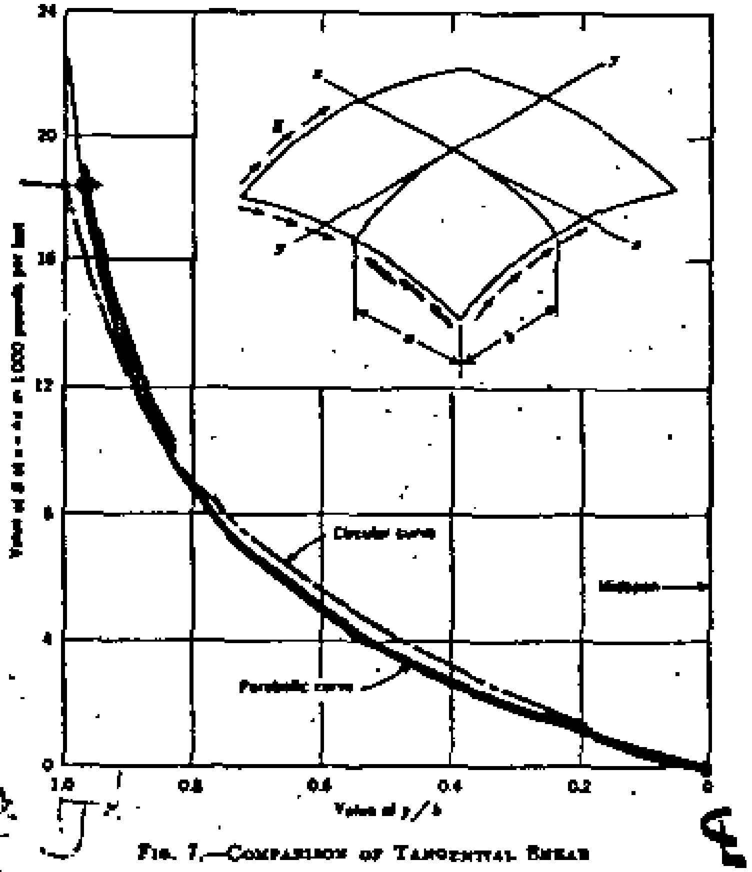


FIG. 6.—SLOPE COMPARISON FOR VARIOUS CURVES

An interesting question is whether or not the coefficients in Tables 1 and 2 can be applied to domes of other shapes with an equal rise and span. As cited previously, the critical stresses are a function of the shear near the corners. However, the summation of the vertical components of the shear along an edge must equal the load on the shell. If the same variation of shear along an edge is assumed for all shapes, it is apparent that, to satisfy the foregoing condition of equilibrium, the intensity of the tangential shear is dependent on the steepness of the slope near the corner. This is particularly true because the maximum shear occurs at the corner.



$.4\sqrt{rh}$ / h

FIG. 7.—COMPARISON OF TANGENTIAL SHEAR

The slope near the corner of most of the commonly used shells of other curvature generally will be steeper than the slope of the elliptical paraboloid, as shown in Fig. 6. Consequently, the shear at the edge should be less for the shells of other curvature than for an elliptical paraboloid of the same dimensions. The magnitude of the reduction is dependent on the relative slopes near the corners of the surfaces being compared. For domes whose edges are elliptical, the magnitude of the shear should be considerably less than that for domes with other shapes. If the edge of the dome is circular, the tangential shear should be approximately the same as for an elliptical paraboloid.

To confirm this hypothesis, Fig. 7 compares the tangential shear computed[3] for domes at a factory in Brynmawr, England, and that obtained for an elliptical paraboloid of the same dimensions. The shape used for the Brynmawr domes was a surface of translation generated by moving one vertical circle on another. Fig. 7 shows good agreement between the two curves except in the immediate vicinity of the corner, in which a finite value is given for the circular curve in contrast to the infinite value implied for the parabolic curve. The reason for this apparent discrepancy is that, due to mathematical difficulties, a numerical procedure based on finite-differences equations was used to determine the forces for the Brynmawr dome. Because this procedure is based on the average value between the chosen interval, a finite value results at the corner. If a rigorous mathematical solution had been used, an infinite value for the circular curve would have resulted.

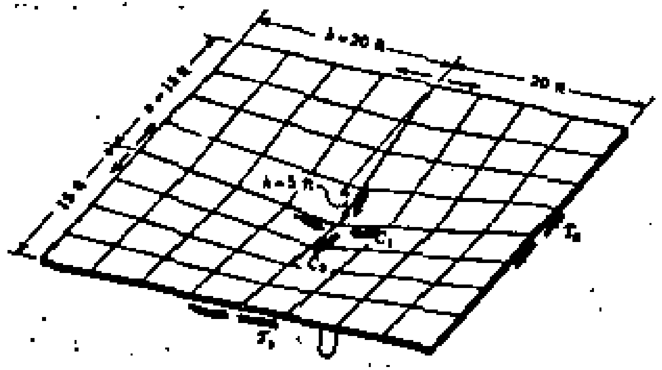


FIG. 8.—ROOF DESIGNED IN EXAMPLE 1

At $y = b - 0.4\sqrt{r\,t}$, the point previously recommended as the breakoff place for shear evaluation, the shear computed for the parabolic curve is approximately 7% higher than that for the circular curve. Whether this difference is real or merely due to dissimilarity in methods of computation is not known. However, the difference is in the proper direction.

Example 1.—A hyperbolic paraboloid shell with a column at the center is designed. The roof shown in Fig. 8 is obtained by joining four identical sections in a manner similar to the method used in Fig. 2. Many other arrangements can be used,[4] all of which are designed in the same manner by considering each quadrant of a rectangular unit individually.

Assuming $w = 60$ lb per sq ft, the internal forces at the critical points of the shell roof shown in Fig. 8 are

$$S = \frac{w\,a\,b}{2\,h} = \frac{60 \times 15 \times 20}{2 \times 5} = 1{,}800 \text{ lb/ft}$$

lbs/ft

$$T_1 = -\cancel{S_l}\,1{,}800 \times 20 = 36{,}000 \text{ lb}$$

---

[3] "The Design of a Reinforced Concrete Factory at Brynmawr, South Wales," by Ove Nyquist Arup and Ronald Jenkins, Pt. III, *Proceedings*, Inst. C. E., London, December, 1953, pp. 345–397.

[4] "Structural Applications of Hyperbolic Paraboloidical Shells," by Felix Candela, *Journal*, A.C.I., Vol. 26, No. 5, 1955, pp. 397–415.

and

$$T_x = -C_1\,1{,}800 \times 15 = 27{,}000 \text{ lb}$$

Because the shell is subject to pure shear, the principal tensile force will also be 1,800 lb per ft. An allowable steel stress of 20,000 lb per sq in. results in a required area of steel of 0.09 sq in. per ft. Therefore, No. 2 bars, 6 in. on centers, are sufficient. This reinforcement should be placed diagonally, extending from one free edge to the other.

The shell exerts a constant shear on the edge members, which have been omitted in Fig. 8. The total thrust or pull exerted by this shear is equal to the product of the length of the edge member affected and the magnitude of the shear. In this example this equals 36,000 lb. Because there is no external reaction acting on the edge beams, either at the corners or along the edge, it is evident that the maximum tension or compression in the edge members occurs at the midspan. The tension and compression in the edge member diminish along the length to zero at the ends.

TABLE 2.—INTERNAL FORCES IN AN ELLIPTICAL PARABOLOID SHELL FOR EXAMPLE NO. 2

x/a	Force	Value of y/b				
		0	0.25	0.50	0.75	1.00
0	$T_x h$ T_y/h S	−4,300 −1,900 0	−4,100 −2,100 0	−3,500 −2,600 0	−1,800 −3,500 0	0 −4,600 0
0.25	$T_x h$ T_y/h S	−4,800 −1,800 0	−4,300 −2,000 − 400	−3,400 −2,800 − 800	−2,000 −3,400 −1,300	0 −4,600 −1,300
0.50	$T_x h$ T_y/h S	−5,300 −1,400 0	−5,000 −1,600 − 900	−4,200 −2,100 −1,600	−3,600 −3,000 −2,500	0 −4,600 −3,000
0.75	$T_x h$ T_y/h S	−6,300 − 900 0	−6,100 − 900 −1,100	−5,600 −1,300 −2,400	−4,100 −2,100 −4,100	0 −4,600 −6,800
1.00	$T_x h$ T_y/h S	−7,500 0 0	−7,500 0 −1,300	−7,500 0 −2,700	−7,500 0 −4,300	0 0 ∞

To determine the type of force (compression or tension) present in the edge members, it is recommended that free body diagrams be drawn of the member being considered rather than relying merely on a sign convention. Thus, the possibility of making serious errors in complicated layouts will be minimized. For this case the layout is so simple that the type of force present can be ascertained by inspection. Because the shear is positive and the coordinate of each quadrant occurs at the corner, the shear is outward along the four horizontal edges and inward along the four sloping edges. Hence, the edge beams at the exterior edges are in tension, whereas those extending out from the column are in compression.

Example 2.—An elliptical paraboloid shell is designed. Table 3 shows the internal forces divided by h or $1/h$ acting in an elliptical paraboloid subject to a uniform load of 60 lb per sq ft and spanning 100 ft in one direction and 70 ft in the other with a total rise of 18 ft. These values are obtained by multiplying the coefficients for $h_x/h_y = 0.8$ shown in Table 1 by one of the following values:

For T_y—

$$\frac{w\,b^2}{h_y} = \frac{60\,(50)^2}{10} = 15{,}000 \text{ lb per ft}$$

For T_x—

$$\frac{w\,a^2}{h_x} = \frac{60\,(35)^2}{8} = 9{,}200 \text{ lb per ft}$$

For S—

$$\frac{w\,a\,b}{\sqrt{h_x h_y}} = \frac{60\,(50)\,(35)}{\sqrt{8\,(10)}} = 11{,}700 \text{ lb per ft}$$

Because the stresses are small the effect of k is ignored. The maximum compression due to an assumed load of 60 lb per sq ft on the shell is 7,500 lb per ft. If the thickness of the shell is assumed as 3 in., the maximum compressive stress is only

$$f_c = \frac{7{,}500}{3 \times 12} = 208 \text{ lb per sq in.}$$ << 3000

which is considerably lower than the allowable stress of concrete.

TABLE 4.—SHEAR S AND PRINCIPAL STRESS S' ALONG EDGE

x = a						
y/b S S'	0 0 0	0.1 − 400 30	0.2 − 890 110	0.3 −1,440 270	0.4 −2,010 500	0.5 −2,650 800
y/b S S'	0.6 −3,380 1,440	0.7 −4,460 2,150	0.8 −6,080 3,200	0.85 −7,130 4,300	0.9 −8,630 4,800	0.95 −11,300 8,000
y = b						
x/a S S'	0 0 0	0.1 − 530 60	0.2 −1,080 230	0.3 −1,630 530	0.4 −2,260 920	0.5 −2,980 1,460
x/a S S'	0.6 −3,880 2,210	0.7 −4,830 3,140	0.8 −6,450 4,450	0.85 −7,830 5,570	0.9 −9,040 7,000	0.95 −11,400 9,400

To obtain knowledge of the tensile forces existing in the shell, the minimum principal stresses have been evaluated along the edges in Table 4. The value of the shear, S, is computed by using Table 2, with the multiplier in this case being 11,700 lb per ft taken from Table 3. The principal stress, S', is computed as described in most standard mechanics textbooks. The direct force at $y = b$ is 4,600 lb per ft, and the direct force at $x = a$ is 7,500 lb per ft. In most of the cases these principal values along the shell represent the maximum value in their zone.

At the corner the radius of curvature in the x-direction can be computed from

$$R_x = \frac{\left[1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2\right]^{3/2}}{\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}} \qquad (39)$$

in which

$$z = \frac{8\,x^2}{35^2} + \frac{10\,y^2}{50^2}$$

and

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{16\,x}{35^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{16}{35^2}$$

At the corner $x = 35$, Eq. 39 yields

$$R_x = \frac{35^2\,[1 + (16/35)^2]^{3/2}}{16} = 102 \text{ ft}$$

and, similarly,

$$R_y = 156 \text{ ft}$$

The maximum shear can therefore be expected to be at

$$\frac{x}{a} = \frac{35 - 0.4\sqrt{101 \times \frac{1}{4}}}{35} = 0.94$$

and at

$$\frac{y}{b} = \frac{50 - 0.4\sqrt{156 \times \frac{1}{4}}}{50} = 0.95$$

Therefore, from Table 4 the largest minimum principal stress along the edges is 9,500 lb per ft. Several points in the interior should be investigated also to determine the extent of the tensile area. Using the internal forces shown in Table 3, the principal stress at $y/b = x/a = 0.75$ and at $y/b = x/a = 0.5$ is

$$S' = -\left(\frac{4{,}100 + 2{,}100}{2} - \sqrt{\frac{2{,}000^2}{4} + 4{,}100^2}\right) = 1{,}100 \text{ lb per ft}$$

and

$$S' = -\left(\frac{4{,}200 + 2{,}100}{2} - \sqrt{\frac{2{,}100^2}{4} - 1{,}600^2}\right) = -1{,}200 \text{ lb per ft}$$

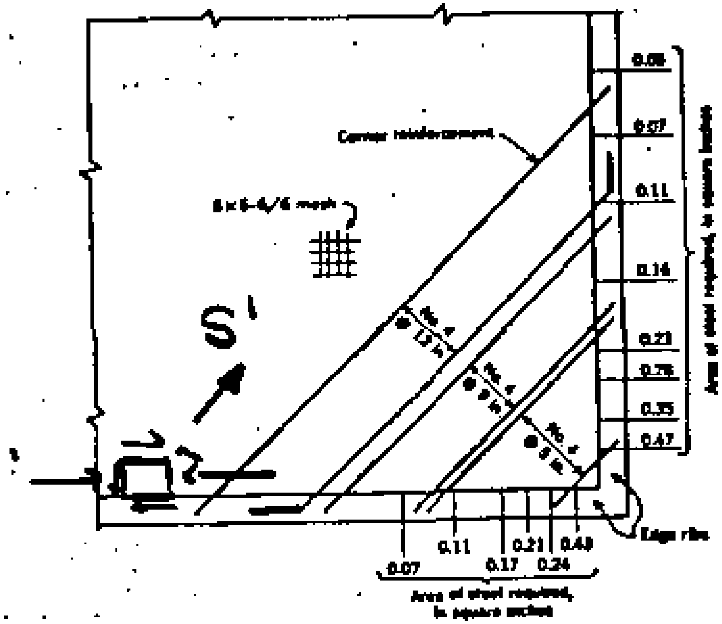


Fig. 9.—Required Steel for Elliptical Paraboloid Shell

Assuming a linear variation in principal stress between these points, zero tension would occur at $x/a = y/b = \frac{2}{3}$.

From a theoretical point of view, the reinforcement should follow the lines of principal stress. However, this is not practical, and, therefore, it is customary to place the reinforcement in the corners along diagonal lines, as shown in Fig. 9. For this particular example and probably for all instances, the controlling tension for any group of bars occurs at the edge. The amount of reinforcement, with $f_s = 20{,}000$ lb per sq in., computed from the principal stresses shown in Table 4 is shown along the edge ribs of one corner.

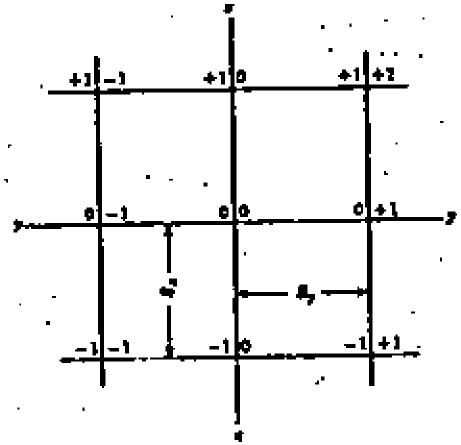


Fig. 10.—Finite-Differences Equations Notation

For most of the shells of double curvature, even for such a simple case as a translational shell formed by moving one circular curve on the other, an algebraic solution becomes extremely involved. In such cases the conversion of the various differential equations into finite-differences equation[4] is

---

[4] "Solution of Difficult Structural Problems by Finite Differences," by Alfred Parme, Journal, A.C.I., Vol. 22, November, 1950, pp. 237–256.

more practical. This [illegible] consists of substituting for the surface a grid of evenly [illegible] the [illegible]simulate the behavior of the surface. For each intersection, a finite-differences equation is established that expresses the relationship between the stresses or functions of the stresses at this point and at neighboring points and the load at the intersection.

Using the notation in Fig. 10, the general finite-differences equation equivalent to differential Eq. 10 is

$$F_{0,1} - 2F_{0,0} + F_{0,-1} + k_1 (F_{1,0} - 2F_{0,0} + F_{-1,0})$$
$$- 0.5\, k_2 (F_{1,1} - F_{-1,1} - F_{1,-1} + F_{-1,-1}) = -\frac{w_z S_y^2}{\partial^2 z/\partial x^2} \quad (40)$$

in which

$$k_1 = \frac{\partial^2 z/\partial y^2}{\partial^2 z/\partial x^2} \frac{S_y^2}{S_x^2} \quad (41a)$$

and

$$k_2 = \frac{\partial^2 z/\partial x\, \partial y}{\partial^2 z/\partial x^2} \frac{S_y^2}{S_x S_y} \quad (41b)$$

The finite-differences equations for Eqs. 9a and 9b are, respectively,

$$T_{xx} = \frac{F_{0,-1} - 2F_{0,0} + F_{0,1}}{S_y^2} \quad (42)$$

and

$$T_{yy} = \frac{F_{1,0} - 2F_{0,0} + F_{-1,0}}{S_x^2} \quad (43)$$

Because of the quantity of equations which result even with a coarse grid, a direct solution of the simultaneous equations obtained from Eq. 40 is not feasible. Generally, an iteration process called the relaxation method[4] is used.

Eqs. 42 and 43 have a disadvantage in that a value for F must be determined quite accurately to obtain reliable stress values. With the stress equal to the second differences in F (Eqs. 9), minor errors in F greatly affect the value of the stresses. In addition it is somewhat difficult to estimate the initial values to commence the iteration process. For this reason finite-differences equations based on the internal forces are preferable. For the general case these equations become cumbersome. However, for the case of translational shells, the resulting equations are no more complicated than Eq. 40.

To express the relationship in terms of the internal forces, first express T_{xx} in terms of T_{yy} by differentiating Eqs. 5 and 6 with respect to x and y, respectively, which yields

$$\frac{\partial^2 T_{xx}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 T_{yy}}{\partial y^2} = 0 \quad (44)$$

Because $\partial^2 z/\partial x\, \partial y = 0$, Eq. 8c can be rewritten as

$$T_{xx} + T_{yy} \frac{\partial^2 z/\partial y^2}{\partial^2 z/\partial x^2} = -\frac{w_z}{\partial^2 z/\partial x^2} \quad (45)$$

---

[4] "Some Improvements in the Use of Relaxation Methods for the Solution of Ordinary and Partial Differential Equations," Proceedings, Royal Soc. of London, Series A-[illegible], 1947.

Differentiating Eq. 45 twice with respect to x and subtracting Eq. 44 from the result yields

$$\frac{\partial^2 T_{yy}}{\partial y^2} + k_1 \frac{\partial^2 T_{yy}}{\partial x^2} + 2\, k_2 \frac{\partial T_{yy}}{\partial x} + k_3 T_{yy} = -k_4 \quad (46)$$

in which

$$\left.\begin{aligned} k_1 &= \frac{\partial^2 z/\partial y^2}{\partial^2 z/\partial x^2} \\ k_2 &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 z/\partial y^2}{\partial^2 z/\partial x^2}\right) \\ k_3 &= \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial^2 z/\partial y^2}{\partial^2 z/\partial x^2}\right) \\ k_4 &= \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{w_z}{\partial^2 z/\partial x^2}\right) \end{aligned}\right\} \quad (47)$$

Allowing T to equal T_{yy}, the finite-differences equation corresponding to differential Eq. 46 is

$$T_{0,1} - 2T_{0,0} + T_{0,-1} + \left(\frac{S_y}{S_x}\right)^2 k_1 (T_{1,0} - 2T_{0,0} + T_{-1,0})$$
$$+ \frac{k_2 S_y^2}{S_x} (T_{1,0} - T_{-1,0}) + k_3 T_{0,0} = -k_4 S_y^2 \quad (48)$$

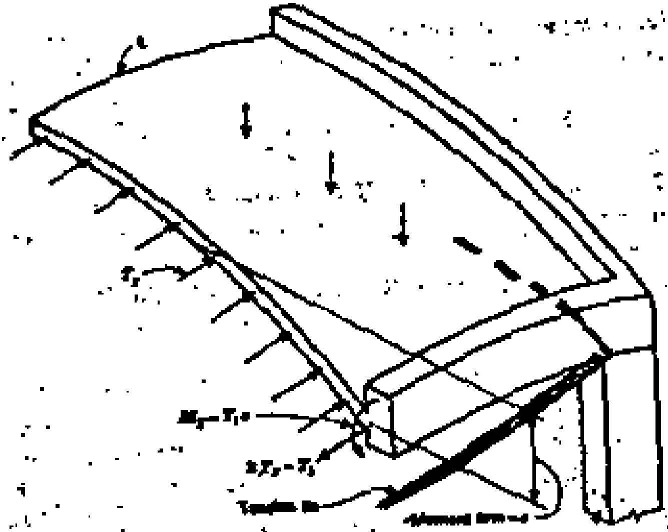


FIG. 11.—BENDING MOMENT IN SHELLS OF DOUBLE CURVATURE

The ribs supporting the arches must be designed to carry the tangential shear load imparted to them by the shell. Because this problem involves only a routine analysis of an arch, this subject will not be examined herein except to note that the analysis of the arch can be made by deali[illegible]ly with the bending with an equivalent plate under compressive normal stress and shear stresses[1], an analysis of a deep shell, it shows in fig. 2 it was important to know the magnitude order of the normal load and critical shear[2]. The critical load for the edge beams does not practically exist, as they are connected by means of the reinforcement to the surface of the shell.

A. L. Parme[3] presented an approximate study of bending stresses in umbrella hyperbolic paraboloidal shells. He considers bending of of the parabolic arches that generate the surface, independant one either. We consider that these values must be compared with those presented by the author. In figure 3 the results of Dr. Parme are graphically represented. The work presented by the author is a very good contribution to the analysis by means of computer of hyperbolic paraboloidal shells.

Contribution to a simplified calculation of thin elastic shallow shells having a positive Gaussian curvature index.

H. HOTZLER (Berlin)

The author presents an aproximate procedure to determine the bending and torsion moments near the supports, in shells of double positive curvature. The final formulae are practical and easy to apply.

It is important to mention that in this type of shells the membrane stresses rarely originate difficulties in its design. The thickness is never determined in function of membrane stresses, but it is generally established by buckling stresses and very seldom by bending and temperature stresses. The determination of this type of stresses has mathematical difficulties, but there are approximate solutions based on the assumptions of Geckler[1] which have been established by giving adequate values for practical purposes.

Bending stresses due to loads. The discrepancy of displacements between shell and edge beams, originate bending near edge beams, and they are determined by means of the equivalent tangent cylinder. We assume that the transversal section takes the total load through the edge arch. Being R^{-1} the curvature, q the load per unit area and h thickness, the maximum moment according to the previous hypothesis is given by

$$M_{max} = -0.289\, q\, R\, h\,.$$

This value decreases very quickly and becomes zero on a distance from the arch about four times the thickness.

Bending due to differential temperatures between arch and shell. If the shell had a temperature ΔT larger than edge arches, and if shell was free, its radial displacement would be.

$$W = -\alpha R \Delta T.$$

Where α is the concrete thermic expansion coefficient.

The theory of cylindrical shells shows that, if we consider the equivalent tangent cylinder

---

[1] S. P. Timoshenko and J. M. Gere: «Theory of Elastic Stability». Mc. Graw Hill, 1961.

[2] P. Ballesteros: «Proceedings of World Conference of Shell Structures», pp [illegible], S. Francisco, [illegible].

[3] A. L. Parme: Transactions ASCE, vol. 126, pp. [illegible], [illegible].

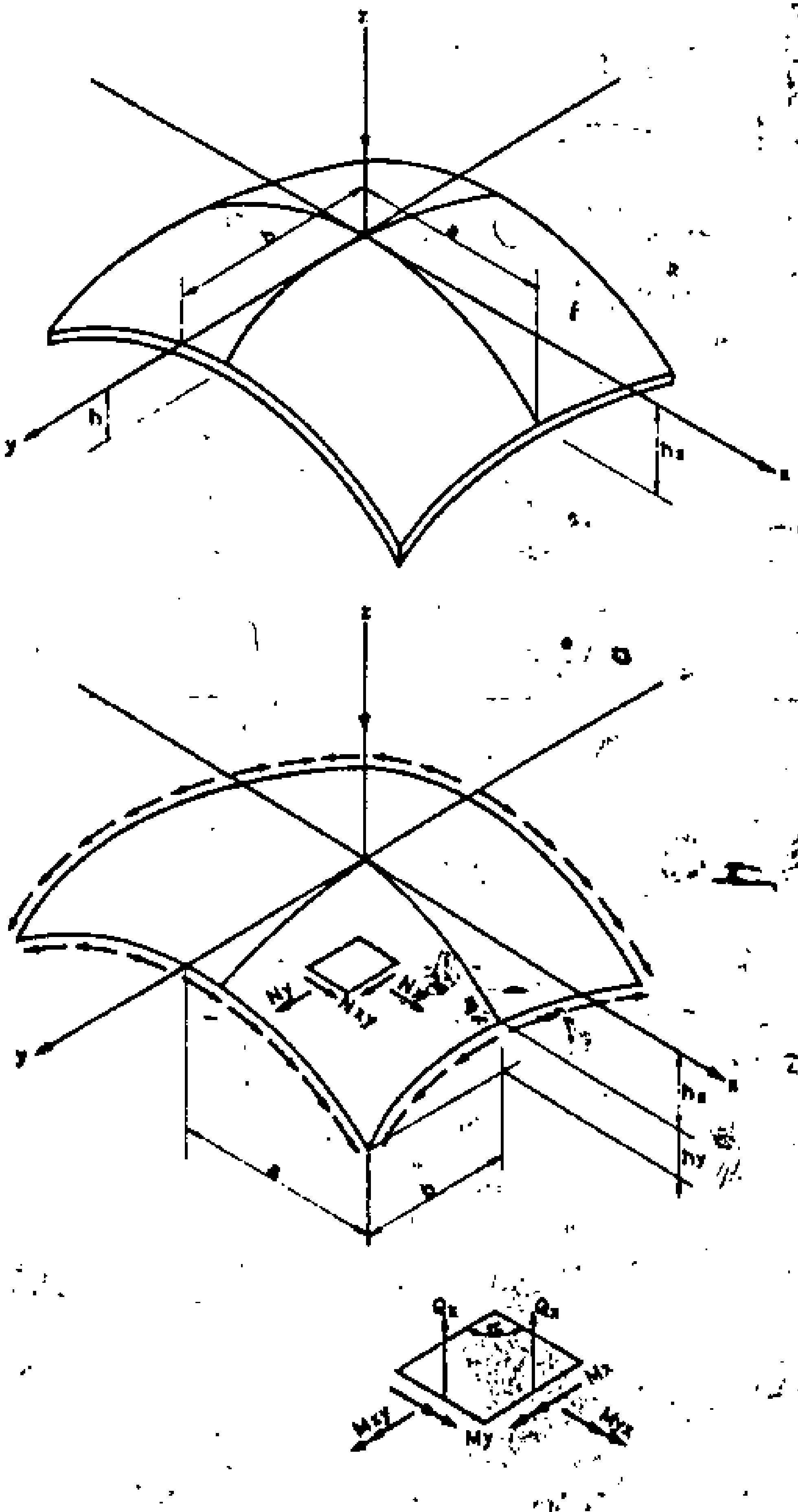
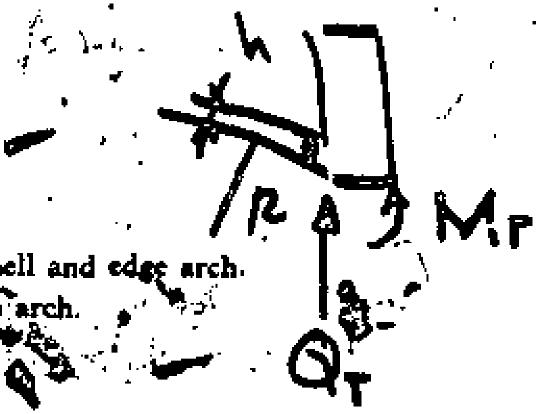


Fig. 4

and if the displacement determined by formula [2] is prevented by edge arches, the following shear and bending moments between edge arch and shell appears (fig. 4).

$$Q_r = \frac{\alpha E h k}{R} \Delta T$$

$$M_r = \frac{\alpha E h k^2}{2 R} \Delta T$$



Where:

Q_T Q = shear-stress resultant per unit of length between shell and edge arch.
M = moment per unit of length between shell and edge arch.
α = concrete thermic expansion coefficient.
h = concrete thickness.
ΔT = temperature difference between shell and edge arch.
$k = 0.76 \sqrt{R h}$

The magnitude order of the values determined by [3] and [4] conclude that in practice it is impossible to foresee enough area and reinforcement to take those values, and this originates a plastic rotation in the coupling with edge arches and does not influence the stability of the structure. It is only convenient that the anchorages of the reinforcements between edge beam and shell are adequate. Stresses due to differential temperatures between the internal and external surfaces of the shell. The value of these stresses can be calculated approximately by means of the equivalent spherical shell, with a mean radius R, equal to the average of the two main curvature radios, and we obtain the following values:

$$\sigma_e = \frac{1}{2} \alpha E \left(1 - \frac{2}{3} \frac{h}{R} \right) \Delta T$$

$$\sigma_i = \frac{1}{2} \alpha E \left(1 + \frac{2}{3} \frac{h}{R} \right) \Delta T$$

From the point of view of design, the stresses determined by [5] and [6] do not require special attention.

It could be interesting to compare the preceding values and those proposed by H. Hotzler.

The buckling load will be discussed in the following report. The contribution presented by author has a great importance in the design of positive Gaussian curvature shells.

On the design of uniformly loaded spherical caps based on a load buckling analysis.

D. E. MILKS and H. P. HARRENSTIEN (USA)

The authors are based upon the three equation of equilibrium and the four deformation conditions set up by Eric Riessener[1], and solve them expanding the solution in exponential series, under the following edge conditions of: free deflexion and rotation (meridional bending moment and transversal force zero), clamped to rotation and radial deflexion (meridio-

---

[1] Reference 2 mentioned by the authors.

nal rotation and radial bending displacement zero) and under the intermediate assumption that the meridional bending moment and radial displacement are zero, they present the conditions of upper, intermediate and lower bound of buckling load for spherical shells. They determine numerical values for the critical load and test experimentally, in plastic models, that the values are between the higher and lower limits.

It is convenient to mention the following:

A. Van der Neut [1], determined the following expresion for the buckling load of spherical shells,

$$q_{cr} = \frac{2Et}{R(1-\nu^2)}\left(\sqrt{\frac{1-\nu^2}{3}}\,\frac{t}{R} - \frac{\nu t^2}{2R^2}\right)$$

Where, E is the elasticity modulus, t is thickness, R is the radius of curvature and ν is the relation of Poisson. The formula [7] for $\nu = 0.10$ and neglecting the term t^3/R^3 with respect of t^2/R^2 is transformed in

$$q_{cr} = C\,E\left(\frac{t}{R}\right)^2$$

where $C = 1.155$. The resultant previously obtained by means of a theory of first order was lately determined by Theodore von Kármán and H. S. Tsien [2], they proved that the coefficient C must be reduced to 0.312. An experience of P. Csonka [3], has proved that in concrete shells, even the lower value of the preceding one is dangerously high. An elliptical paraboloidal shell of rectangular plan form built by Csonka in Budapest, it failed by buckling two years afterwards under the action of one exceptional load of snow. The former experience leaded the researchers to try to find higher and lower limit valuations of buckling loads. Later on Eduardo Torroja, after an experimental study in *concrete* shells, proposes 0.05 as a sure value for the coefficient C. We present now a comparative diagram of the values mentioned in the paper presented by Milks and Harrenstien (fig. 5).

It is to be mentioned that the contribution presented by the authors is of a great importance from the point of view of the applied mechanic as well as from the practice related to shell design.

Stresses in hyperbolids of revolution.

P. L. GOULD and S. L. LEE (USA)

The authors, introducing auxiliary variables, the Gauss Codazzi relationship, developping the shell acting load by Fourier series, modifie the general equilibrium equations of revolution shells. First of all, under the membrane conditions, they obtain a non-homogeneous differential equation of second order, whose unknown is a function of the meridional stress. They consider the cases of dead and seismic load and wind. They obtain the solution of the differential equation for the particular case of the hyperbolic cooling towers of revolution dividing the shell into horizontal segments and they determine the integration constants from the edge conditions referring to the top of the shell (fig. 6).

They present very useful design diagrams for each one of the above mentioned cases.

---

[1] A. Van der Neut: Dissertation, Delft. [illegible]

[2] References 8 and 10 mentioned by the author.

[3] «The buckling of Spheroidal Shell curved in two directions», by P. Csonka, Acta Technica, Academiae Scientiarum Hungaricae, Budapest, tomus XIV, [illegible]

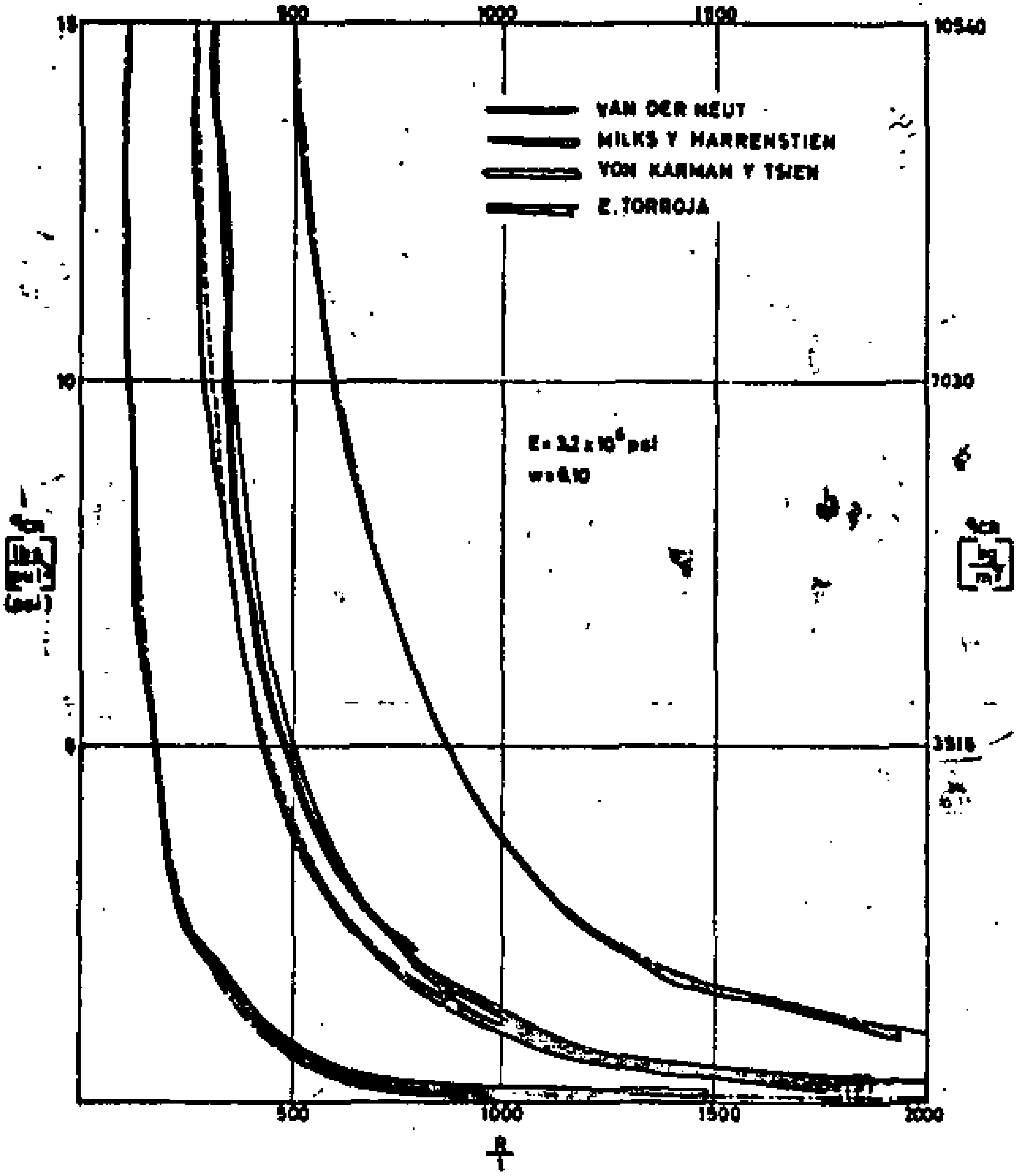
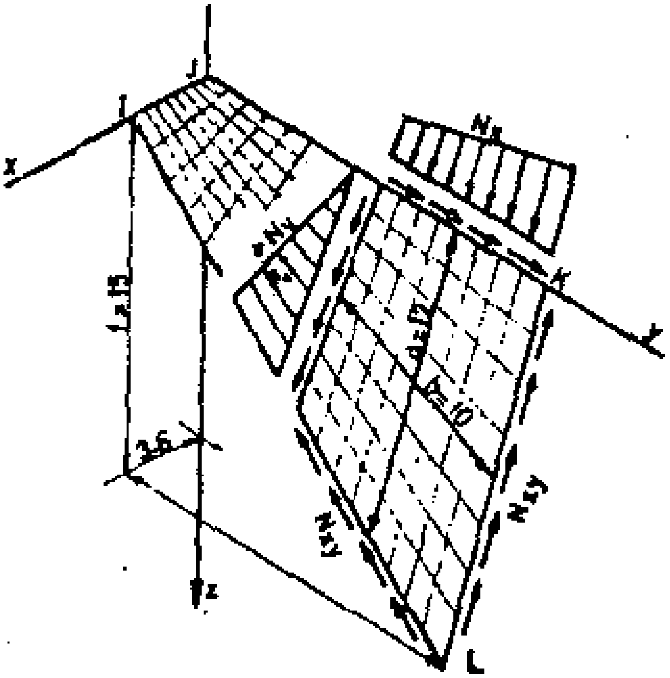


Fig. 8

To study bending, they change the equations of equilibrium, and strain compatibility conditions, into a system of two differential equations of second order in terms of complex variables. They solve them considering the boundary conditions concerning stress-resultants and displacements along the upper ring of the shell and they supply us design diagrams for the three load conditions previously mentioned.

$E = 2.1 \times 10^{5} \frac{kg}{cm^2}$; $h = 8 cm.$; $V = 0.15$; $D = 2.19 \times 10^{6}$ kg.cm.

$N_m = 430 \frac{kg}{m.}$; $(N_{xy})_m = 2.235 \frac{kg}{m.}$



$N_{cr} = \frac{\pi^2 D}{a^2}\left(1 + \frac{a^2}{b^2}\right)$ (1)

$(N_{xy})_{CR} = 5.9 \frac{\pi^2 D}{h^2}$ (1)

$N_{CR} = 4.050 \frac{kg}{m.}$

$(N_{xy})_{CR} = 15.400 \frac{kg}{m.}$

$$\boxed{\frac{N_{CR}}{N_m} = 9.42 \;;\; \frac{(N_{xy})_{CR}}{(N_{xy})_m} = 6.9}$$

Fig. 2

VALUES OF THE CRITICAL LOAD

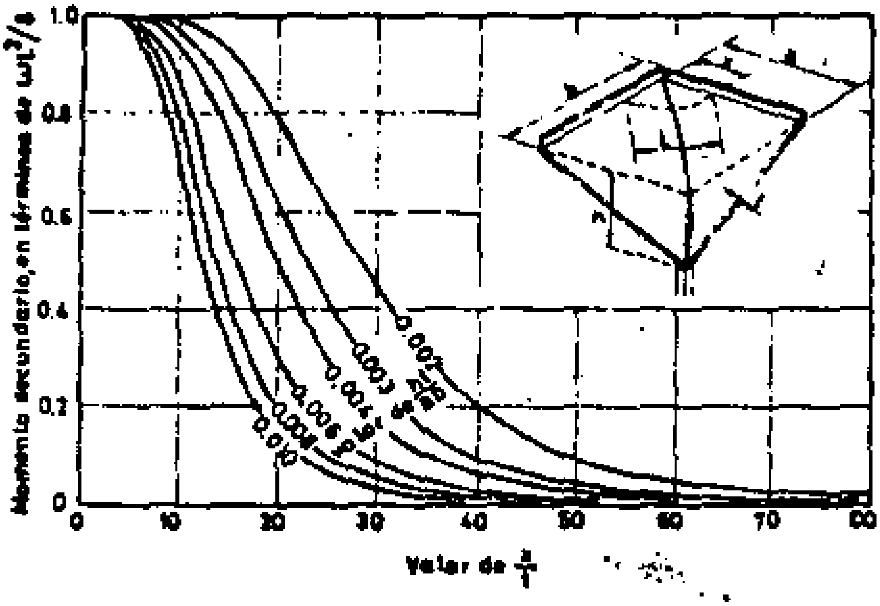


Fig. 3

SECUNDARY BENDING MOMENTS

PROCEEDINGS

WORLD CONFERENCE ON
SHELL STRUCTURES

OCTOBER 1-4, 1962
SAN FRANCISCO
CALIFORNIA

PRESENTED BY

UNIVERSITY OF CALIFORNIA
BERKELEY

INTERNATIONAL ASSOCIATION FOR SHELL STRUCTURES
MADRID

BUILDING RESEARCH ADVISORY BOARD
NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES • NATIONAL RESEARCH COUNCIL
WASHINGTON, D. C.

EDITORIAL COMMITTEE
S. J. MEDWADOWSKI
CHAIRMAN
WILLIAM R. DAWSON
ROBERT M. DILLON
FRANK J. HEGER
JOE W. KELLY
HENRY J. LAGORIO
HUGH D. McNIVEN

TECHNICAL EDITOR
R. W. SPANGLER
BRAB

NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES — NATIONAL RESEARCH COUNCIL
WASHINGTON, D. C.
PUBLICATION NO. 1187

WORLD CONFERENCE ON SHELL STRUCTURES
Sciences Copyright 1964

STRESS ANALYSIS AND DESIGN OF OUR LADY OF FATIMA CHURCH

PORFIRIO BALLESTEROS
Structural Engineer, Monterrey, Mexico

INTRODUCTION

In the Catholic religion, the Church is the Mystical Body of Christ. Since Christ is the Head of the Church and since Catholics are members of the same body, there exist two component parts. The Head of the Church placed precisely in the sanctuary in that section set off at the presbyterium or the part proper to the presbyter, the priest. Then comes the nave or ship of the transient dwelling of God, and this is the section appropriate to the members of the Mystical Body which Christ founded.

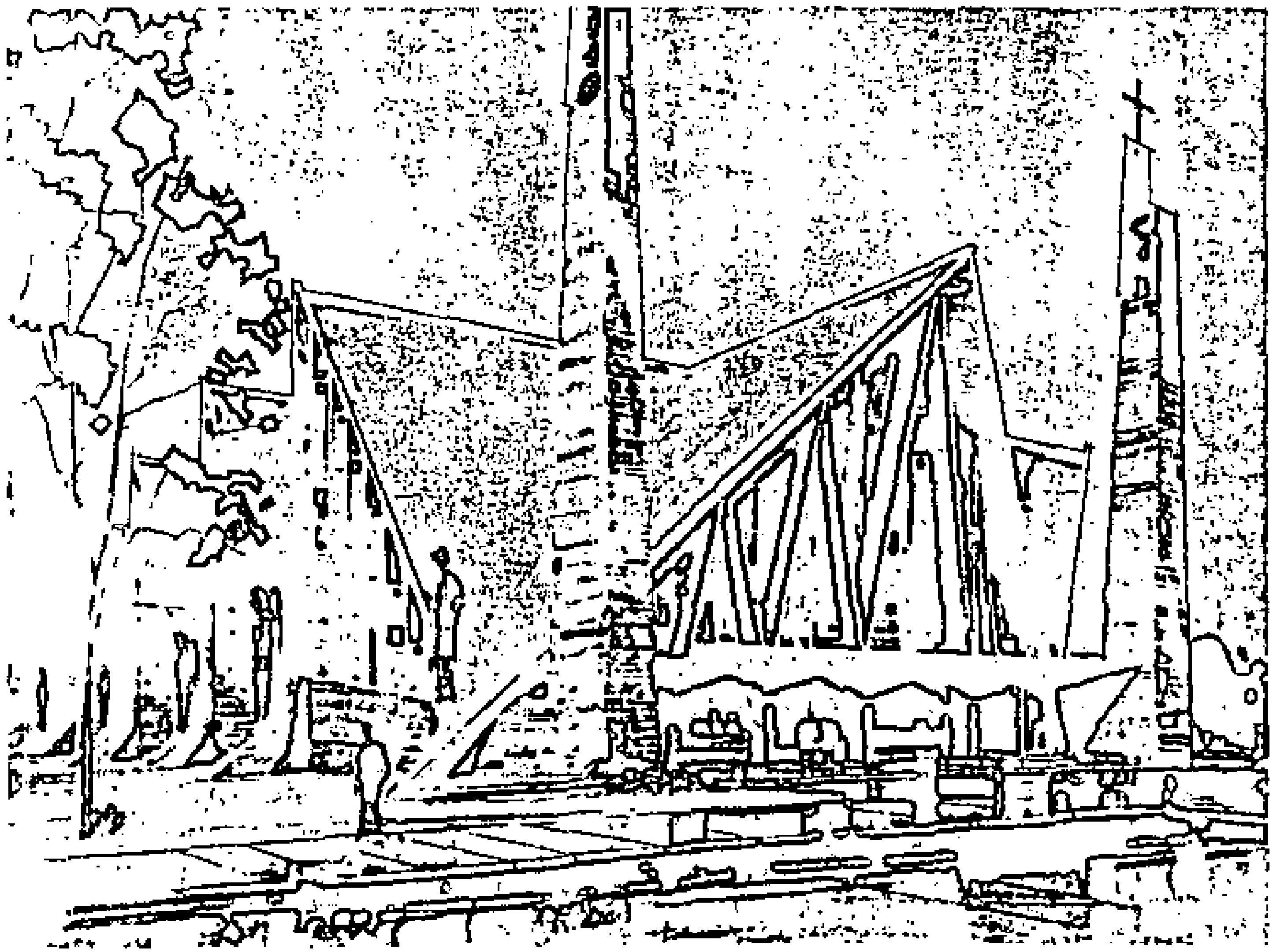
The Church that He founded was formed of His Redemption; it had its birth in His death the symbol of which is the Cross. It is the Cross which dominates the entire structural concept. It is made manifest by the crossing of the two main border beams *AN* and *OF* (Figures 3 and 4), that is to say, the longitudinal axis at the center and upper part with the transverse axis *FG*.

At the time Christ died and the Holy Spirit came to dwell in the Body of the Church, Christ founded His Church as said above with Himself as Head and with twelve

ABSTRACT

Hyperbolic paraboloidal shells of wide span for the structure of Our Lady of Fatima Church at Monterrey, Mexico, have recently been designed by the author and are now under

Our Lady Of Fatima Church.



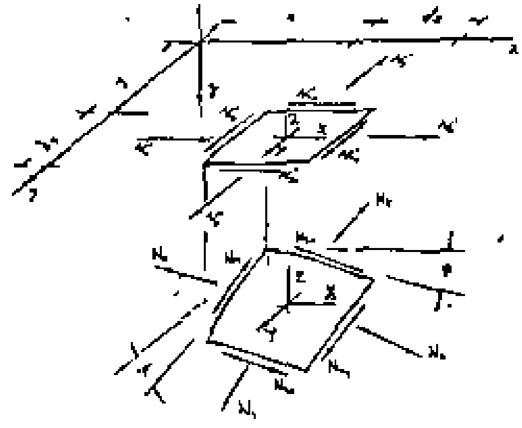


Figure 1. Shell element of arbitrary shape and its projection on the x, y plane.

construction with the author in charge.

In the shells EFGH *and* IJKL *(Figures 3 and 4), numerical values for the membrane stresses were determined analytically, and in the shells* ABCD *and* MNOP, *they were found by relaxation procedures. Since this theory is well established, only the results of the calculations as in Figures 2 through 7 are shown. The order of magnitude of the critical load is discussed. All the important design and construction details are presented.*

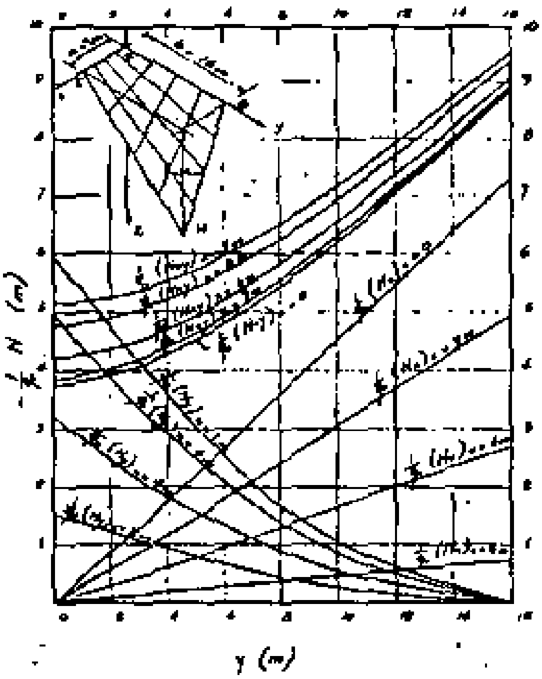


Figure 2. Stresses in shell EFGH.

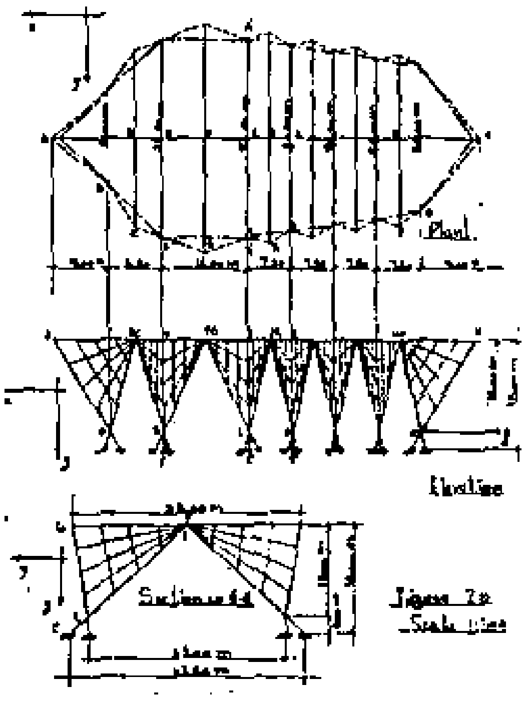


Figure 4. Structure projection.

Apostles, members upon whom rested the responsibility of teaching His doctrine. Twelve supports will hold the nave (*H,L,S, . . . O*), and they will serve as pedestals for twelve sculptures representing each of the Apostles. The increase in the transverse spaces *BC*, *FG*, *JK*, . . ., *MP*, will tend to bring closer to Him these members of the Christ in the presbyterium and also to solve the illumination problem which has been designed to carry the light toward the sanctuary.

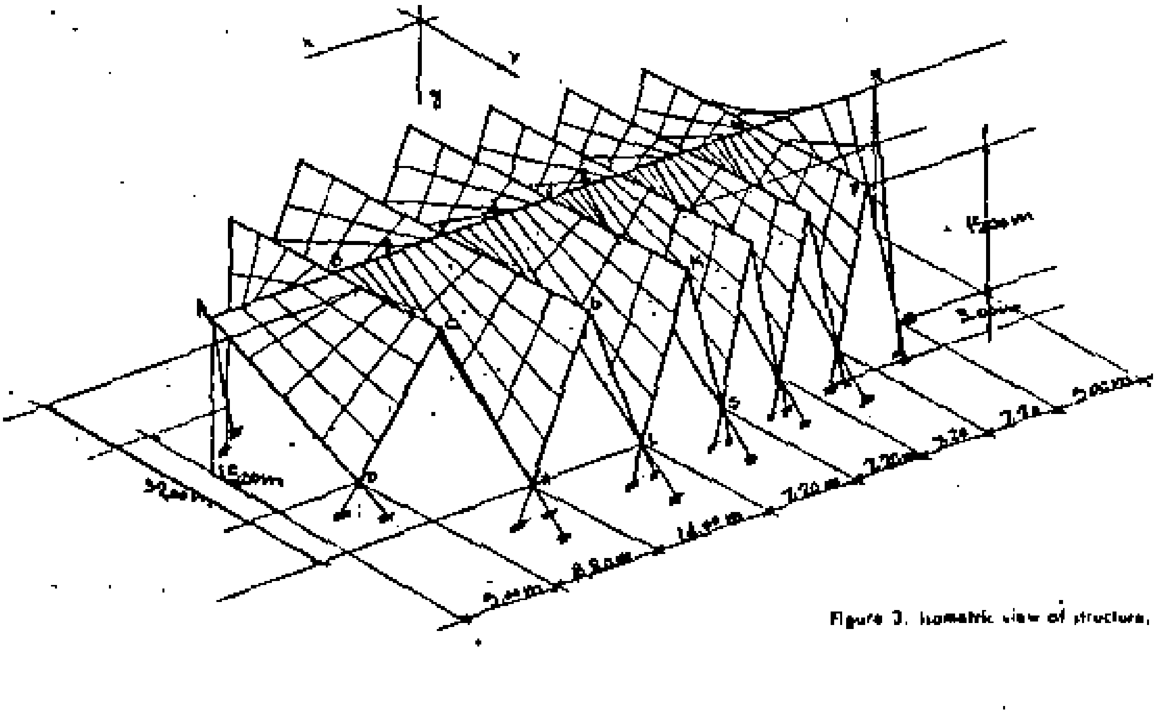


Figure 3. Isometric view of structure.

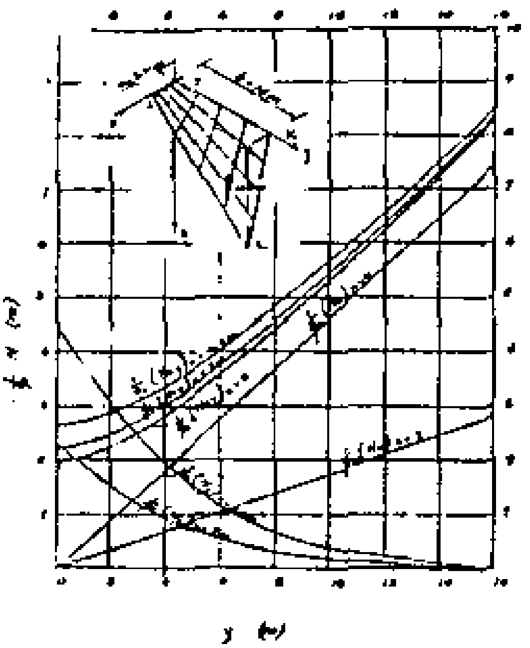


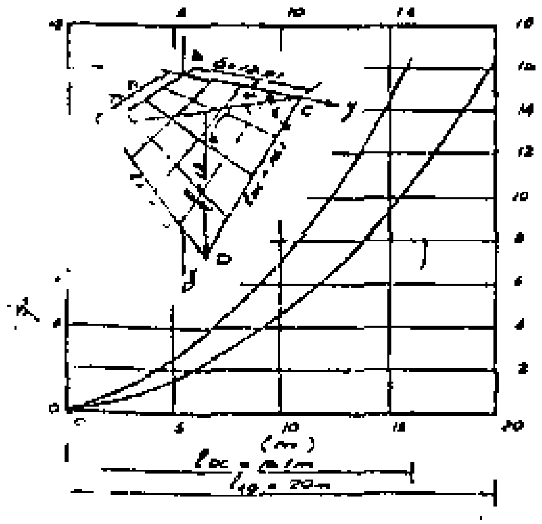
Figure 5. Stresses in shell IJKL.

The cantilever at end *A* tends to cover the altar, and the cantilever at end *N* serves to cover the portic, the narthex, and the choir.

ORDER OF MAGNITUDE OF CRITICAL LOAD

Since there is a portion of the shells *IJKL* and *EFGH* that is almost plane, it was useful to know the buckling load of the equivalent simply supported rectangular plate compressed in two perpendicular directions, and also the corresponding buckling of the same plate under the action of shearing stresses. These values are shown in Figure 7.

Figure 6. Shearing stress at boundary in shell ABCD.



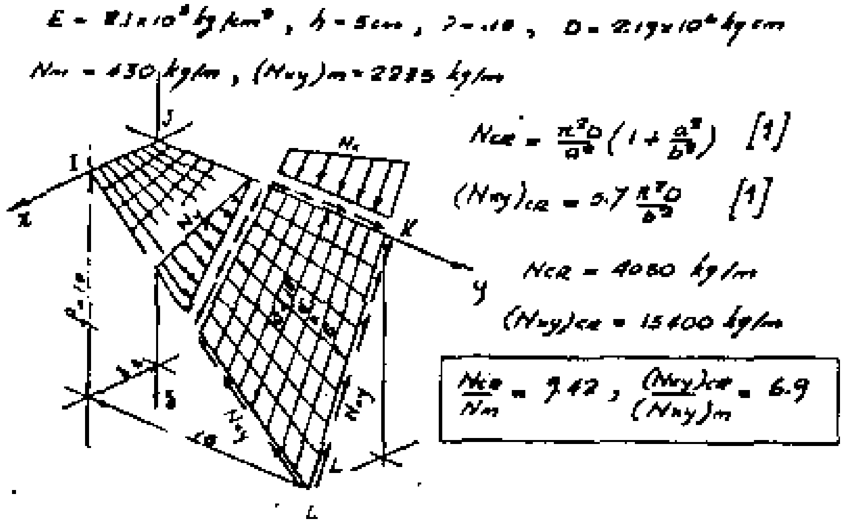


Figure 7. Order of magnitude of critical load.

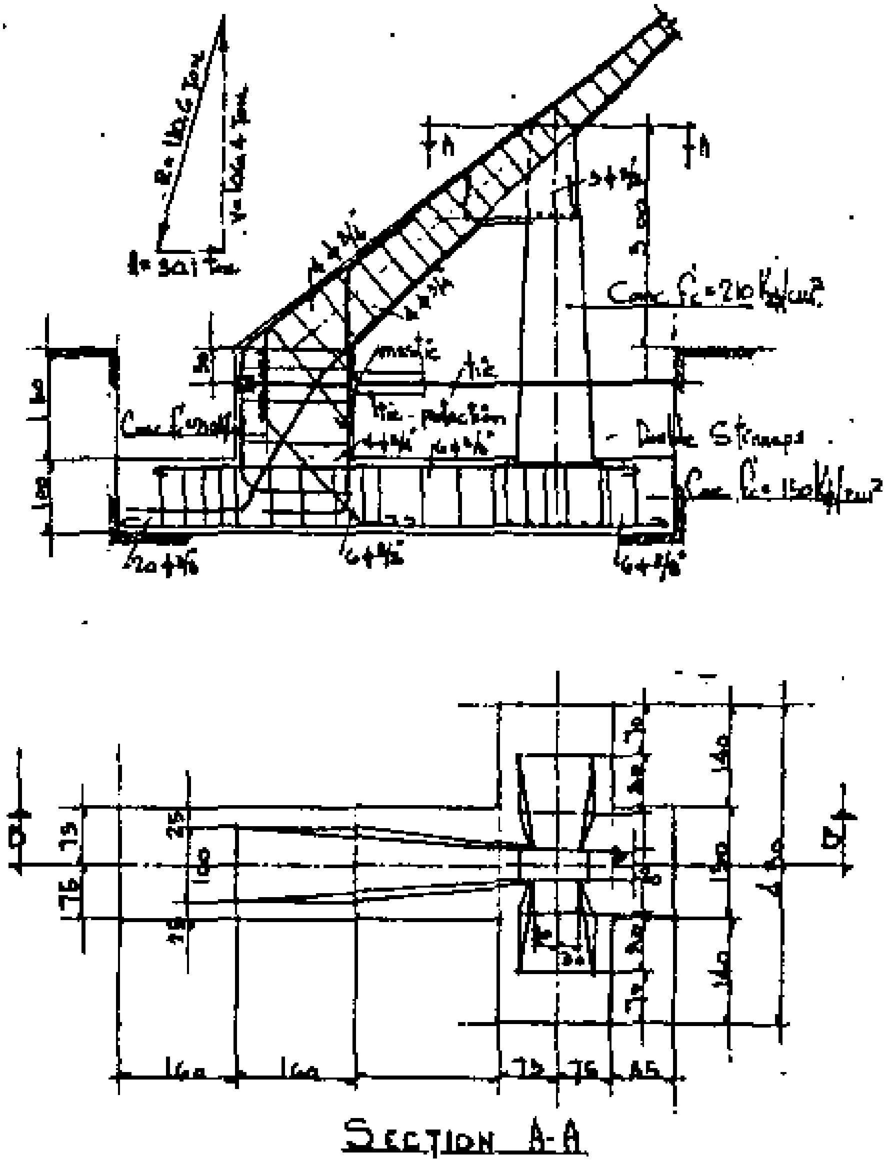


Figure 8. Typical support.

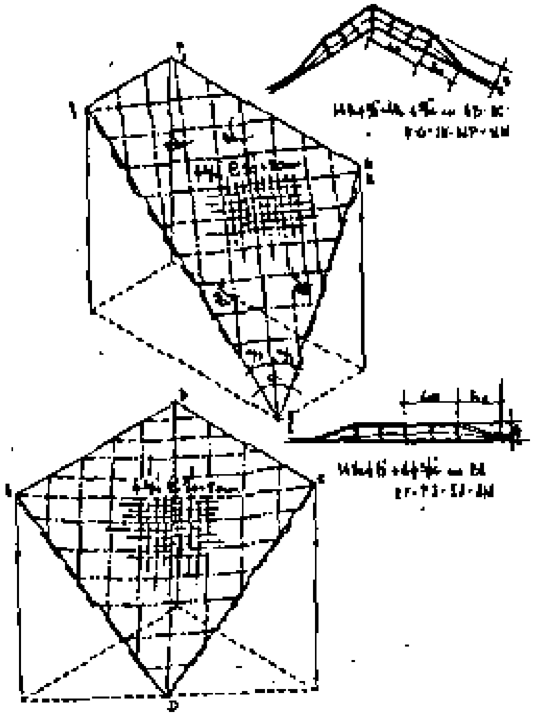


Figure 9. Reinforcing steel in shells (isometric views).

DESIGN AND CONSTRUCTION DETAILS

In the typical support shown in Figure 8, the static analysis was made such that the resultant force is vertical and it goes through the centroidal point of the contact section; the figure is explanatory in itself. The reinforcement of the shells is shown in Figure 9.

ACKNOWLEDGEMENTS

With sincere gratitude, the writer wishes to thank architect Eduardo Padilla for the architectural project of the Church. Grateful acknowledgement is also extended to Mr. Edgardo Taroco of Montevideo, Uruguay, for doing most of the numerical work and to Mr. Gregorio Cruz for doing the structural drawings of this project.

SUPPLEMENTARY NOTATION

h	shell thickness
a,b,f	shell dimensions (length, width, rise)
E	modulus of elasticity
ν	Poisson's ratio
D	flexural rigidity $[Eh^3/12(1-\nu^2)]$
X,Y,Z	components of surface load per unit area
N_x,N_y,N_{xy}	normal and shearing forces per unit distance in middle surface of shell
N_{cr}	critical force per unit distance in the middle surface of shell
$A,B,C,\ldots$	constants
γ	weight per unit volume
g_s	weight per unit area of shell (γh)
F	stress function

REFERENCES

[1] Stephen P. Timoshenko and James M. Gere. *Theory of Elastic Stability*. McGraw-Hill. 1961.

[2] A. L. Parme. "Shells of Double Curvature," *Transactions ASCE*, Vol. 123, 1958, pp. 989-1025.

[3] Shisuo Ban. "Deformation of Hyperbolic Paraboloid Shells," *Publications, International Assn. for Bridge and Structural Eng.*, Zurich, Vol. 13, 1953, p. 1.

[4] R. S. Jenkins. "Theory of New Forms of Shell," Paper No. 7, Symposium on Concrete Shell Roof Construction, Cement and Concrete Assn., London, July 1952.

[5] I. Fylos. "Hyperbolic Paraboloid Shells." *Technika Chronika*, Athens, Vol. 26, Nos. 295-296, 1949, pp. 35-44.

[6] M. P. Borkowski. "Doubly Curved Thin Slab Structures," *Translation No. 31*, Cement and Concrete Assn., London, 1951.

[7] A. Pucher. "Calculations for Shells of Double Curvature Using Differential Equations," *Bauingenieur*, Vol. 18, 1937, p. 118.

[8] F. Aimond. "Treatise on Statics of Parabolic Hyperboloidal Shells not Stiff in Bending," *Publications, Intl. Assn. for Bridge and Structural Eng.*, Zurich, Vol. 4, 1936, p. 1.

[9] B. Laffaille. "General Investigation Concerning Skew Surface Shells," *Publications, Intl. Assn. for Bridge and Structural Eng.*, Zurich, Vol. 3, 1935, p. 295.

[10] B. Laffaille. "Thin Shells in the Shape of Hyperbolic Paraboloids," *Le Genie Civile*, Paris, Vol. 104, 1934, pp. 409-410.

Wind and seismic stresses in hyperbolic paraboloid shells

P. BALLESTEROS

Summary

Considering that the wind pressure vector is always normal to the surface of the shell, a solution is determinated for membrane stresses. Seismic stresses are also studied. The application of all these studies is illustrated for the particular case of the Sanctuary «Nuestra Señora de Fátima» (Fig. 1) and some values are compared with that previously obtained in the analysis of vertical loads (2).

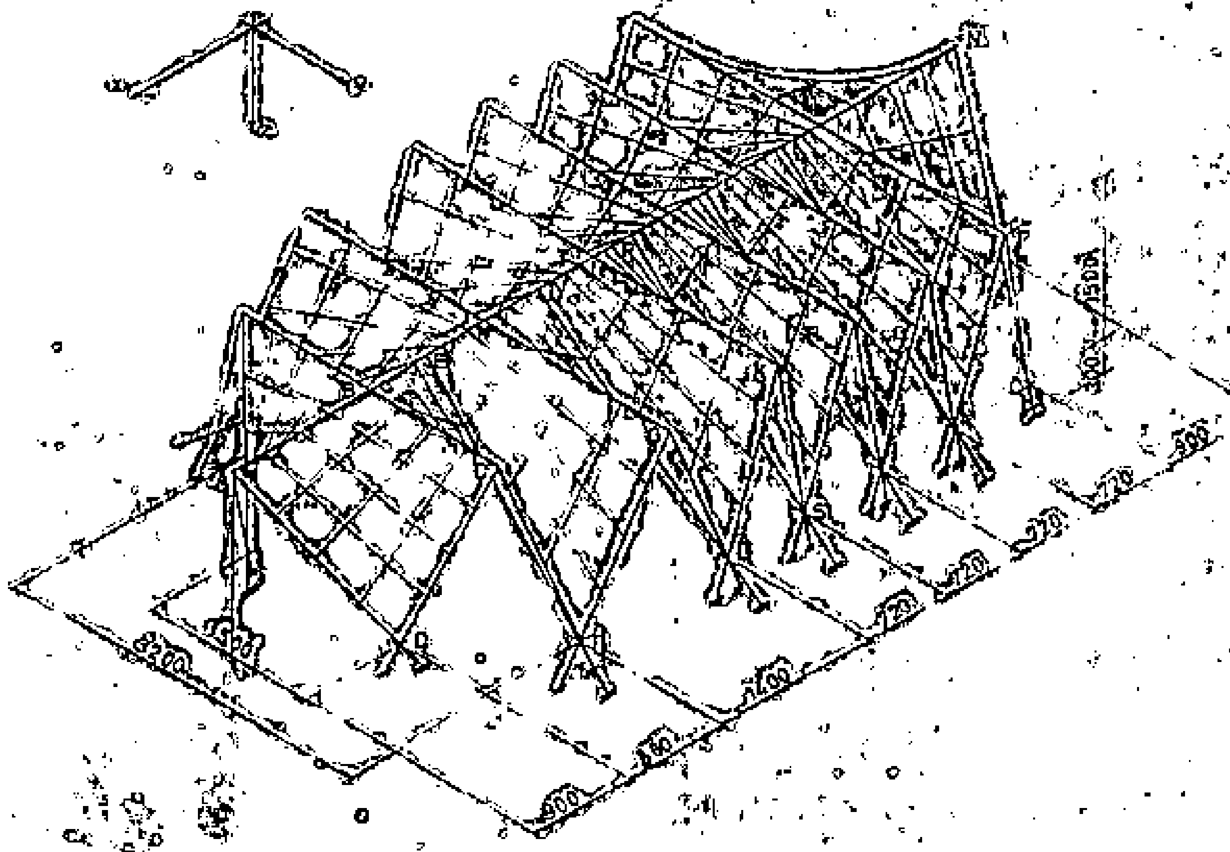


Fig. 1. Isometric view of the structure.

---

[1] University of «Nuevo León», Monterrey, Mexico.

[2] University of Montevideo, Montevideo, Uruguay.

Notation

$\overline{W}$ = Total load acting on the differential element of the shell.

p = Wind pressure vector, function of (x, y) which is always normal to the surface of the shell.

$(\overline{i}, \overline{j}, \overline{k})$ = Unitary vectors which are respectively parallel to axes x, y, z.

(a, b, h) = Dimensions of the shell: length, wide and height.

$C = \frac{ab}{h}$ = Constant depending of the dimensions of the shell.

(x, y, z) = Rectangular coordinates.

(X', Y', Z') = Components of the load by unit of area in the proyected element of the shell.

(X, Y, Z) = Components of the load by unity of area in the element of the shell.

N'_x, N'_y, N'_{xy} = Stress-resultants by unity of length in the element of the proyected shell.

N_x, N_y, N_{xy} = Stress-resultants by unity of lenght in the element of the shell.

α = Maximum seismic acceleration.

g = Acceleration of the gravity.

$C = \frac{\alpha}{g}$ = Maximum seismic constant, comparation between the maximum seismic acceleration and the acceleration of the gravity.

γ = Specific weight.

t = Thickness of the shell.

$p_x = \frac{\partial p}{\partial x}$ = Partial derivative of the wind pressure function with respect to x.

$p_y = \frac{\partial p}{\partial y}$ = Partial derivative of the wind pressure functon with respect to y.

$z_x = \frac{\partial z}{\partial x}$ = Partial derivative of z with respect to x.

$z_y = \frac{\partial z}{\partial y}$ = Partial derivative of z with respect to y.

$z_{xx} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ = Second derivative of z with respect to x.

$z_{yy} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ = Second derivative of z with respect to y.

${}_{xy} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ = Second derivative of z with respect to x and with respect to y.

Resultants due to wind loads

Representing the middle surface of the shell by a function $z(x, y)$, referred to a Cartesian coordinates system. The total load acting on the differential element of the area dA (Fig. 2) is as follows:

$$W = (\bar{u} \times \bar{v})\, p(x, y) = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ dx & 0 & z_x dx \\ 0 & dy & z_y dy \end{vmatrix} p(x, y) \qquad [1]$$

From the development of the determinant [1] it is noticed that the load component acting on the projection element *dxdy* are:

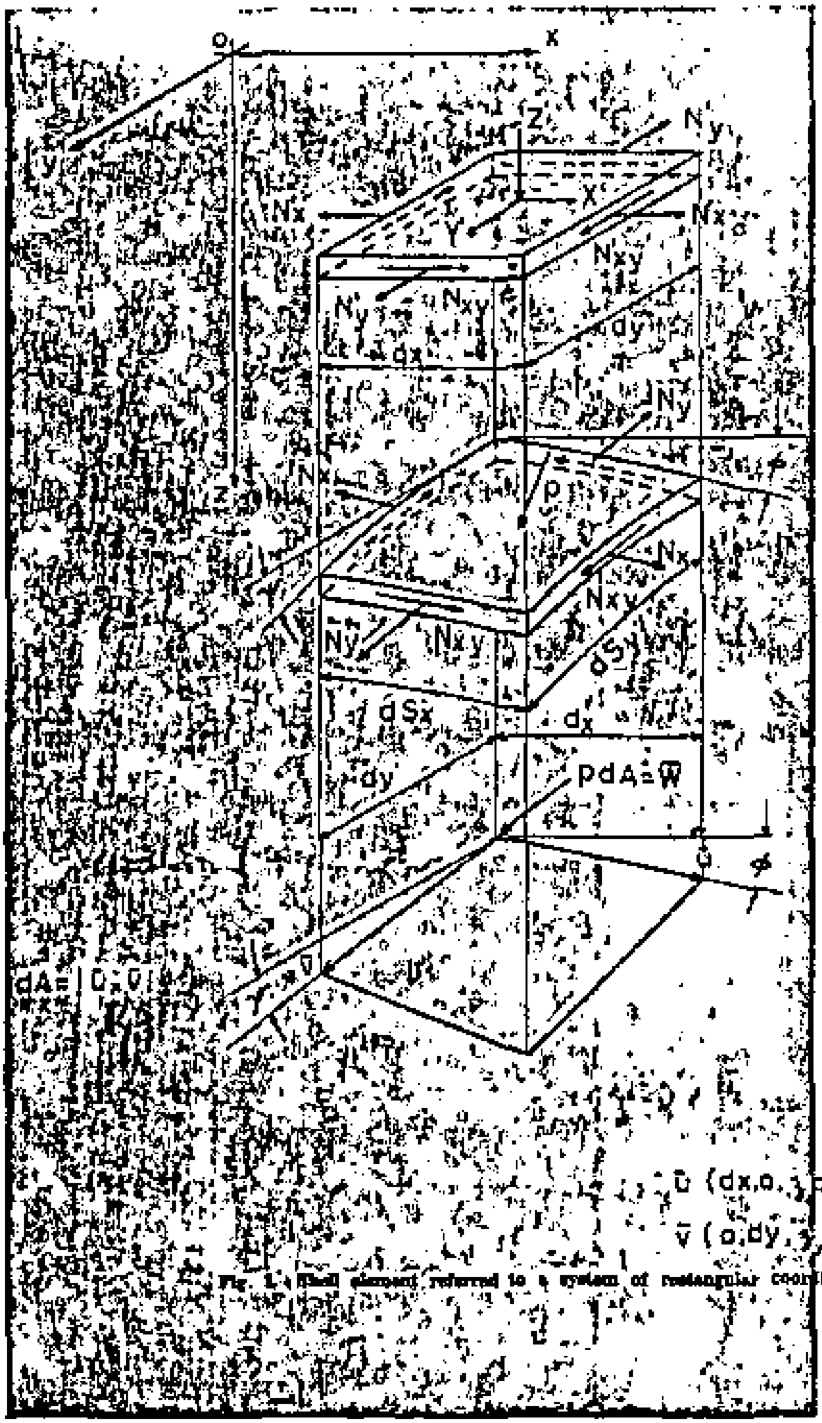
$$X' = -z_x p$$
$$Y' = -z_y p \qquad [2]$$
$$Z' = p$$

Substituting [2] in the three equilibrium equation, the following equations are obtained:

$$\frac{\partial N'_x}{\partial x} + \frac{\partial N'_{xy}}{\partial x} - z_x p = 0$$

$$\frac{\partial N'_y}{\partial y} + \frac{\partial N'_{xy}}{\partial y} - z_y p = 0 \qquad [3]$$

$$N'_x z_{xx} + N'_y z_{yy} + 2N'_{xy} z_{xy} + z_x^2 p + z_y^2 p + p = 0$$



Projected element

Shell element

Vectorial representation of the differential area

Fig. 1. Shell element referred to a system of rectangular coordinates.

Substituting the hyperbolic paraboloid equation in [3] and integrating, becomes:

$$N'x = \int \left[\frac{2py}{c} + \frac{p_z}{2c}(x^2 + y^2 + c^2) \right] dx + f_1(y) .$$

$$N'y = \int \left[\frac{2px}{c} + \frac{p_z}{2c}(x^2 + y^2 + c^2) \, dy + f_2(x) . \qquad [4]$$

$$N'xy = -\frac{p}{2c}(x^2 + y^2 + c^2) .$$

For the boundary conditions $(N'x)_{x=a} = (N'y)_{y=b} = 0$ and $p =$ constant, the general equations [4] became transformed as follows:

$$N'x = \frac{2p}{c} y (x - a) .$$

$$N'y = \frac{2p}{c} x (y - b) . \qquad [5]$$

$$N'xy = -\frac{p}{2c}(x^2 + y^2 + c^2) .$$

The relationship between the projected and the real stress-resultants in the element for the hyperbolic paraboloid, are:

$$Nx = \frac{\cos \Psi}{\cos \Phi} N'x = \sqrt{\frac{c^2 + y^2}{c^2 + x^2}} N'x .$$

$$Ny = \frac{\cos \Phi}{\cos \Psi} N'y = \sqrt{\frac{c^2 + x^2}{c^2 + y^2}} N'y . \qquad [6]$$

$$Nxy = N'xy .$$

Substituting [5] into [6], it is obtained:

$$Nx = \frac{2p}{c} y (x - a) \sqrt{\frac{c^2 + y^2}{c^2 + x^2}} .$$

$$Ny = \frac{2p}{c} x (y - b) \sqrt{\frac{c^2 + x^2}{c^2 + y^2}} . \qquad [7]$$

$$Nxy = -\frac{p}{2c}(x^2 + y^2 + c^2) .$$

Equations [7] are determining the membrane stress-resultants for hyperbolic paraboloid when they are supporting a wind pressure p which is constant in magnitude, but with variable direction, being always normal to the surface of the shell. In Figure 3 are plotted stress resultants for the case of the structure of Fatima.

ic stress-resultants

The differential element weight is:

$$dP = \sqrt{1 + z^2_x + z^2_y}\, y t \, dx \, dy \qquad [8]$$

The load produced by the seismo in the differential element will be:

$$Y = -\frac{k}{c} \sqrt{x^2 + y^2 + c^2} . \qquad [9]$$

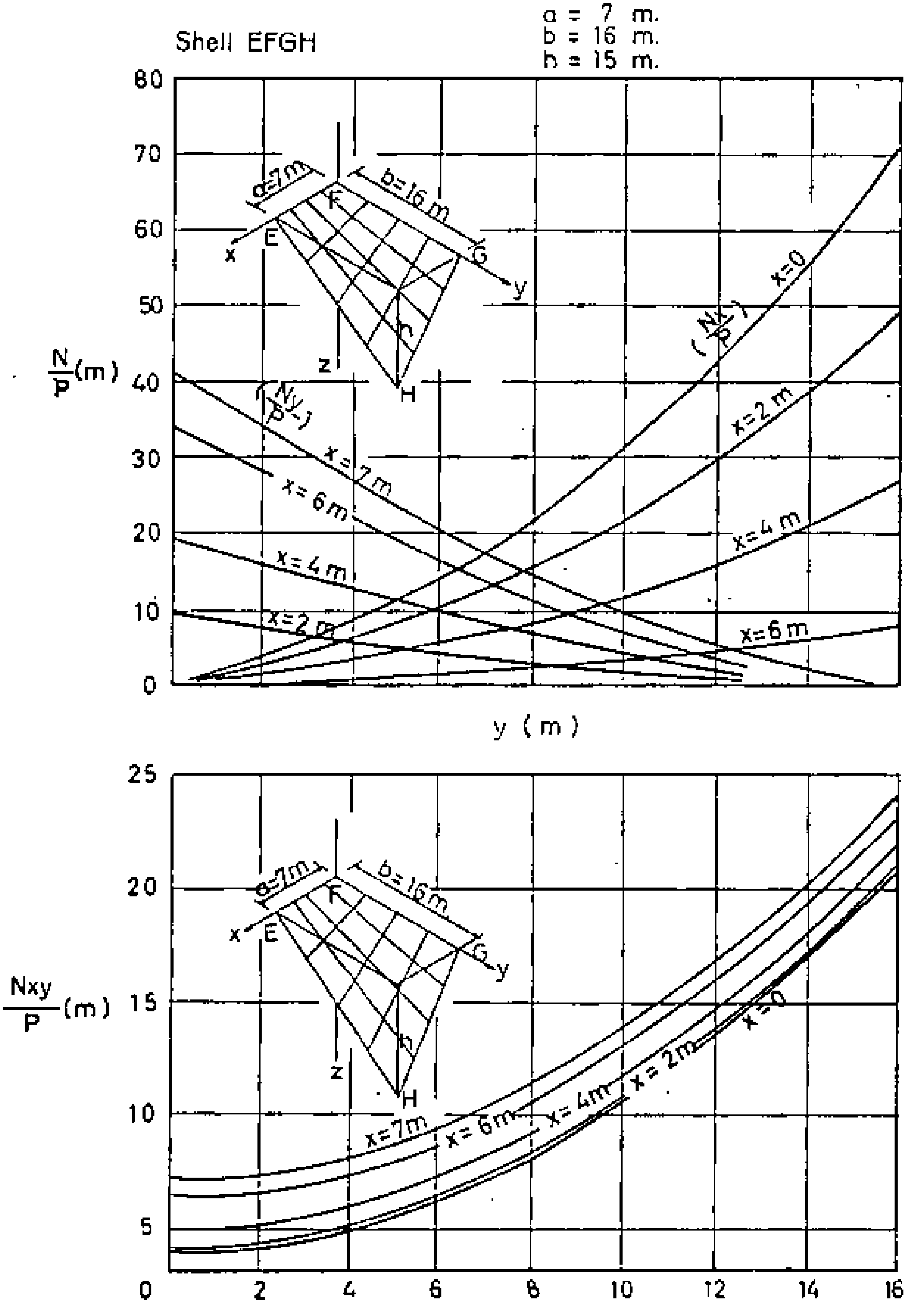


Fig. 3. Variation of the wind stress-resultants.

Where $k = \gamma t$. The equilibrium equations for the hyperbolic paraboloid, in this case, will be reduced into:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial N'x}{\partial x} + \frac{\partial N'xy}{\partial y} = 0 .\\
&\frac{\partial N'y}{\partial y} + \frac{\partial N'xy}{\partial x} = \frac{k}{c}\sqrt{x^2 + y^2 + c^2} .\\
&\frac{2N'xy}{c} = -\frac{kx}{c^2}\sqrt{x^2 + y^2 + c^2} .
\end{aligned}
\qquad [10]
$$

Introducing [10c] in [10a] and integrating, it is obtained:

$$
N'x = \frac{ky}{2c}\sqrt{x^2 + y^2 + c^2} + f_1(y) . \qquad [11]
$$

and conisdering the boundary conditions $(N'x)_{x=a} = 0$, then

$$
f_1(y) = -\frac{ky}{2c}\sqrt{y^2 + a^2 + c^2} . \qquad [12]
$$

Substituting [10c] in [10b] and integrating, becomes:

$$
N'y = \frac{3ky}{4c}\sqrt{x^2 + y^2 + c^2} + \frac{k}{4c}(3c^2 + 5x^2)\log\left(y + \sqrt{x^2 + y^2 + c^2}\right) + f_2(x) . \qquad [13]
$$

From the boundary condition $(N'y)_{y=b} = 0$ it is obtained:

$$
f_2(x) = -\frac{3kb}{4c}\sqrt{x^2 + b^2 + c^2} - \frac{k}{4c}(3c^2 + 5x^2)\log\left(b + \sqrt{x^2 + b^2 + c^2}\right) \qquad [14]
$$

From the equations [6], [10], [11], [12], [13] and [14] the following seismic stress-resultants are determinated:

$$
\begin{aligned}
Nx &= \frac{ky}{2c}\sqrt{\frac{c^2 + y^2}{c^2 + x^2}}\left(\sqrt{x^2 + y^2 + c^2} - \sqrt{y^2 + a^2 + c^2}\right) .\\
Ny &= \frac{k}{4c}\sqrt{\frac{c^2 + y^2}{c^2 + x^2}}\left[3\left(y\sqrt{x^2 + y^2 + c^2} - b\sqrt{x^2 + b^2 + c^2}\right) + \right.\\
&\qquad \left. + (3c^2 + 5x^2)\log\frac{y + \sqrt{x^2 + y^2 + c^2}}{b + \sqrt{x^2 + b^2 + c^2}}\right] .\\
Nxy &= -\frac{kx}{2c}\sqrt{x^2 + y^2 + c^2} .
\end{aligned}
\qquad [15]
$$

Where $k = \frac{\alpha}{g}\gamma t$.

es 4 showes the variation of the seismic stress-resultants determinated by [15] for the ular case of the shell of Fatima.

parison between stress-resultants due to seismic vertical and wind

Numerical data for shell EFGH:

$$
\begin{aligned}
&t = 0.05 \text{ m.} && f = 15 \text{ m.}\\
&\gamma = 2\,500 \text{ kg/m}^3. && c = \frac{ab}{f} = 7.47 \text{ m.}\\
&a = 7 \text{ m.} && C = 0.10\\
&b = 16 \text{ m.} && p = 50 \text{ kg/m}^2.
\end{aligned}
\qquad [16]
$$

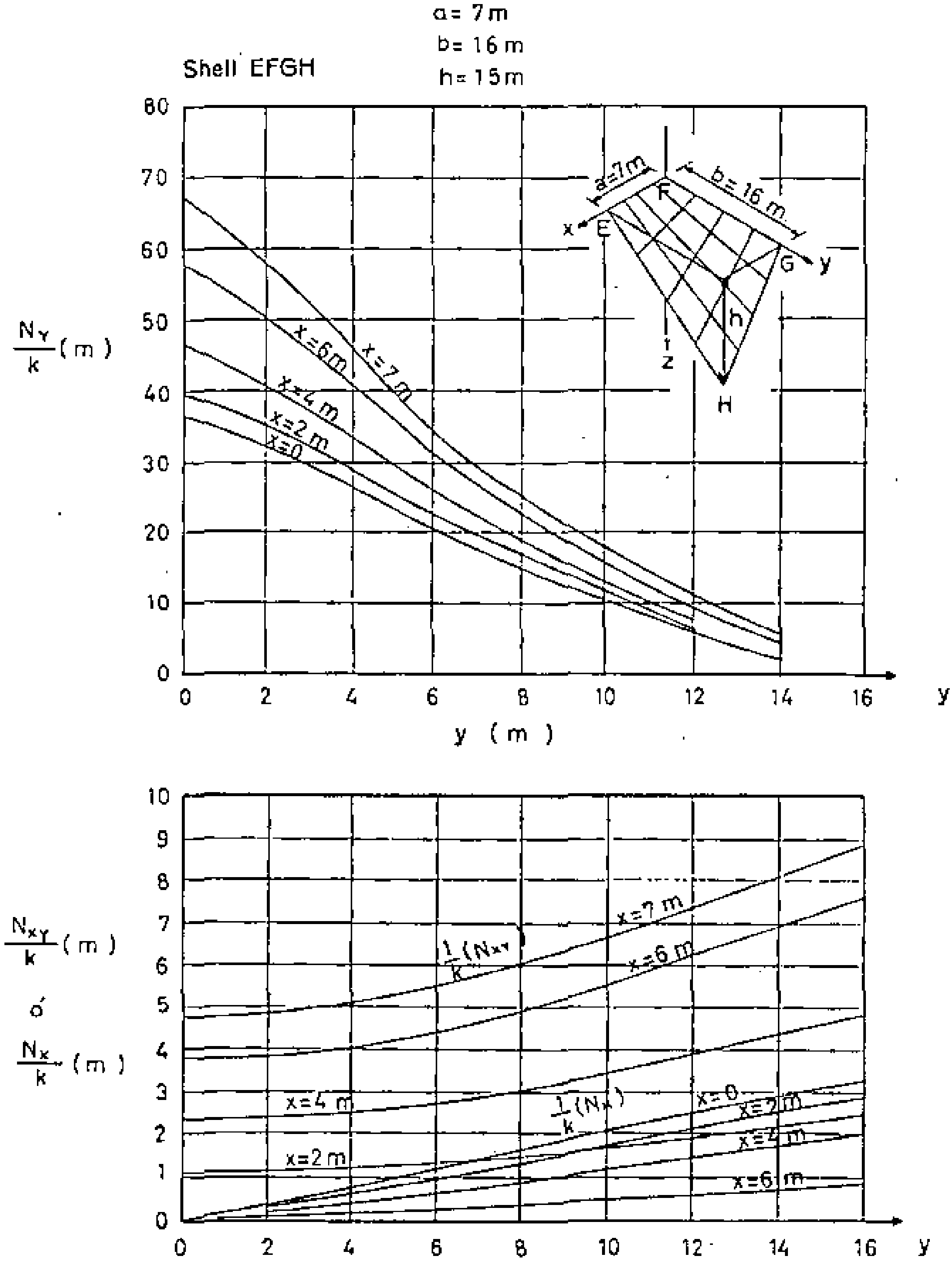


Fig. 4. Seismic stress-resultants in shell E F G H.

With data of [16] and following the graphic for N (Reference 2, page 356, figure 2) and graphics of figures 3 and 4, it is obtained the stress-resultants dues to dead load, wind and seismo as well as combinations of dead load with wind and dead with seismo, which have been all indicated in Table I.

Stress	Dead load	Wind	Seismo	Dead load and wind	Dead load and seismo
Nx $\begin{matrix} x = 0 \\ y = 16 \end{matrix}$	912 kg/m	3 550 kg/m	40 kg/m	4 462 kg/m	952 kg/m
Ny $\begin{matrix} x = 7 \\ y = 0 \end{matrix}$	738 kg/m	2 100 kg/m	837 kg/m	2 838 kg/m	1 675 kg/m
Nxy $\begin{matrix} x = 7 \\ y = 16 \end{matrix}$	1 200 kg/m	1 200 kg/m	111 kg/m	2 400 kg/m	1 311 kg/m

TABLE I. Comparison between maximum stress-resultans

Conclusions

In Table I a comparison between maximum stresses is established for a specific problem, due to the following load conditions:

a) Vertical loads (dead and live load).
b) Vertical and seismic loads.
c) Vertical loads and wind.

It is observed that the less favourable load condition is that resulting of combination of vertical loads with wind, because it increases approximately four times, the middle stresses due to vertical loads. Of course, the value of the middle pressure of wind p, that was supposed of 50 kg/m^2, could be diminished by forms of aereodinamic characteristics which have their own surface.

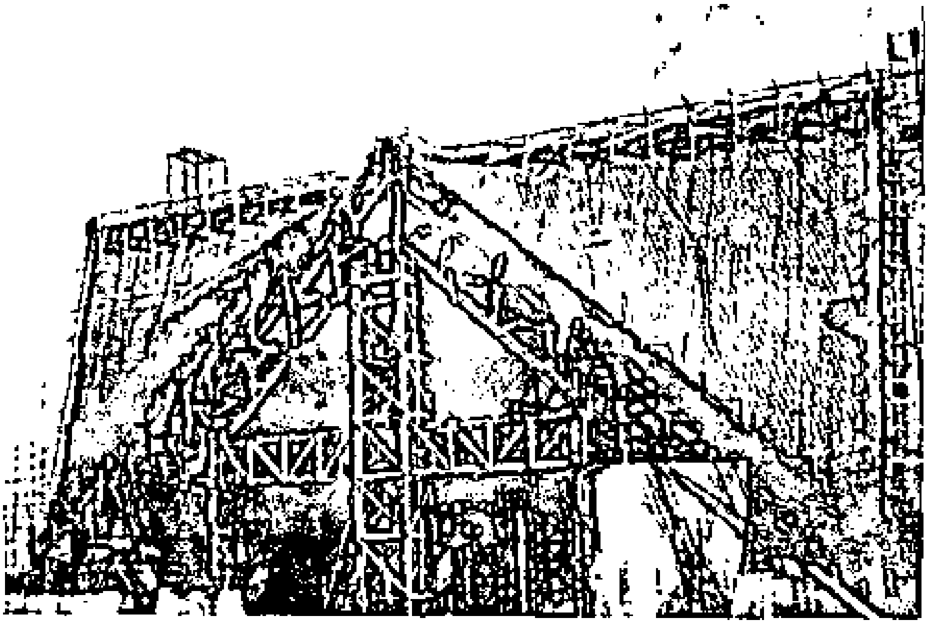
Reduced models can be used to study the real distribution of the wind pressure p, and by means of hydraulical similitude existing between the Euler, Reynolds and Froude numbers it can be determinated the distribution of the wind pressure of the prototype, and substituting this function of the wind pressure in equations [4], it is possible to obtain a more rigorous solution of that problem. However, for practical results can be considered the pressure wind vector of constant modulus but of variable direction i.e. normal to the middle surface of the shell.

For that reason, we consider very important in paraboloidal hyperbolic shells, to take into account the stresses due to wind loads, and to compare them with the order of magnitude of critical stresses (Reference 1).

Generally, in these cases, seismic stresses are not of importance, as it can be observed in the values expressed in Table I.

It is very important to mention that every solution obtained by means of the membrane theory, represent only one form of all that can be obtained with equilibrium configurations, giving different values to functions $f_1(y)$ and $f_2(x)$ in equations [4]. In the case presented the selected functions has been choosen such as the boundary conditions at $x = a$ and $y = b$, having zero normal stress-resultans Nx and Ny, and in this way the selected equilibrium stresses-resultants shape is consistent with the real conditions of the structure support. If all these conditions can not be obtained, the theory of the membrane could not reach satisfactory results, and then it would be necessary to get the compatibility conditions by strain between edge beam and shell, and to derive the stresses from these conditions.

Advantageously in the above particular case studied, the theory of membrane solution, gives satisfactories values.



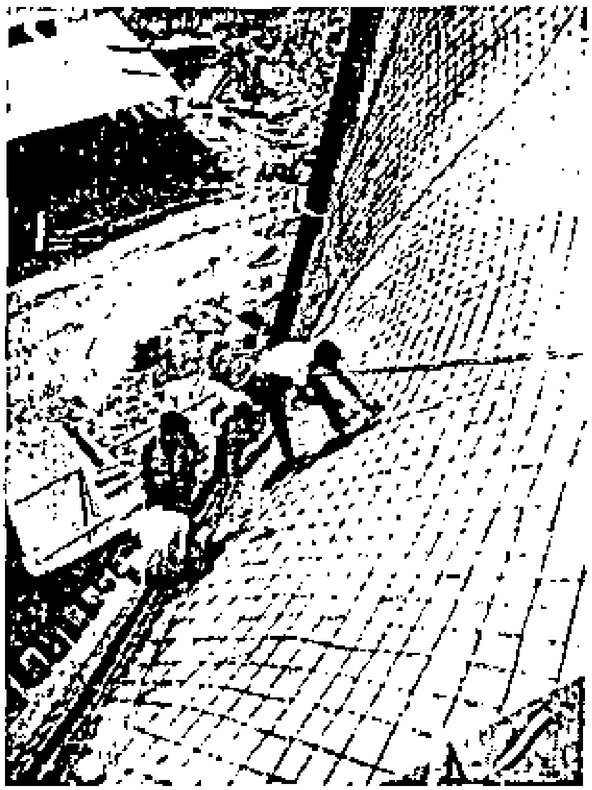
View of scaffolder in shell A B C D.

Bibliography

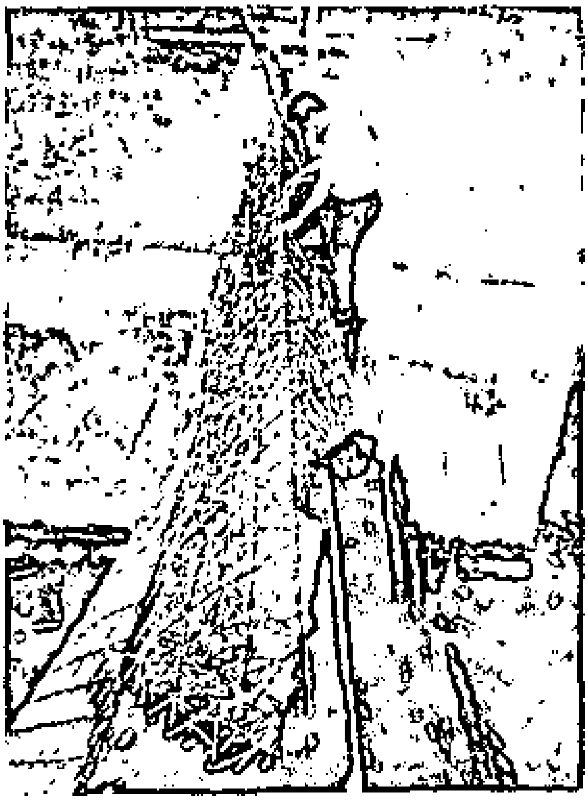
(1) K. G. Tester: «Beitrag zur berechung der hyperbolischen Paraboloidschale». Ingenieur-Archiv, vol. 16, 1947, pp. 39-44.

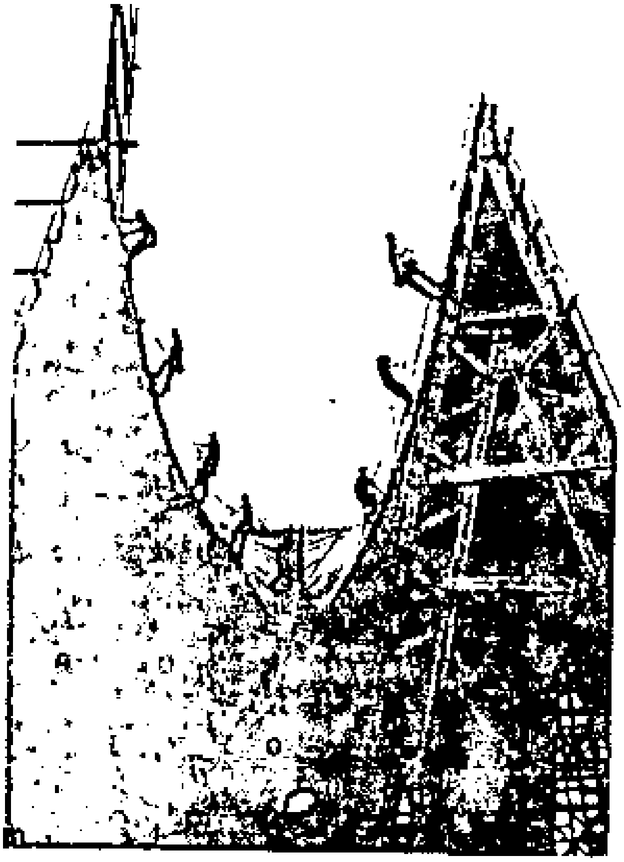
(2) P. Ballesteros: «Stress Analysis and Design of Our Lady of Fatima Church». World Conference in Shell structures San Francisco, Cal. 1962. National Academy of Sciences. National research council publication No. 1187.

Detail of the reinforcement of shell E F G H.

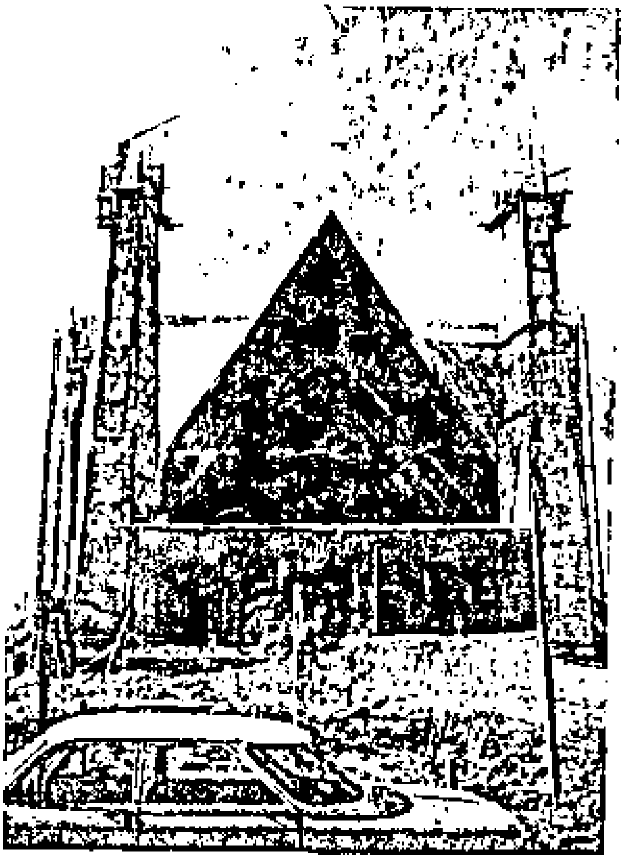


Reinforcement of the edge beam M N.



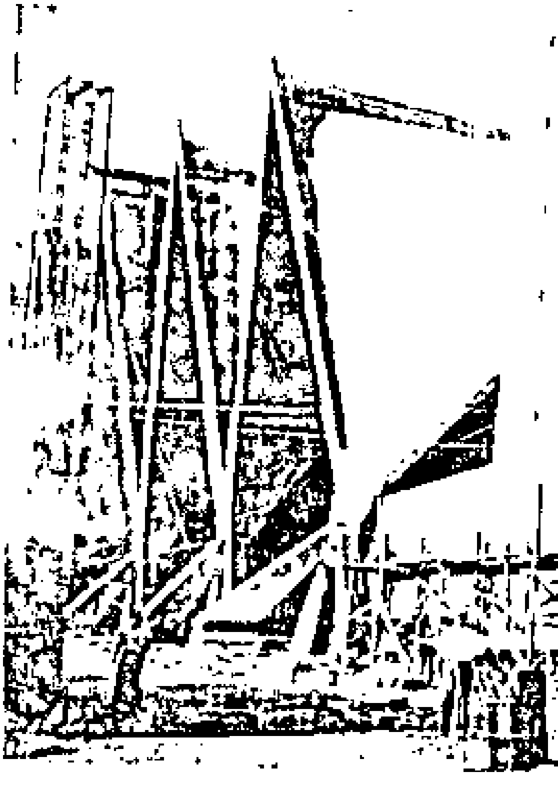


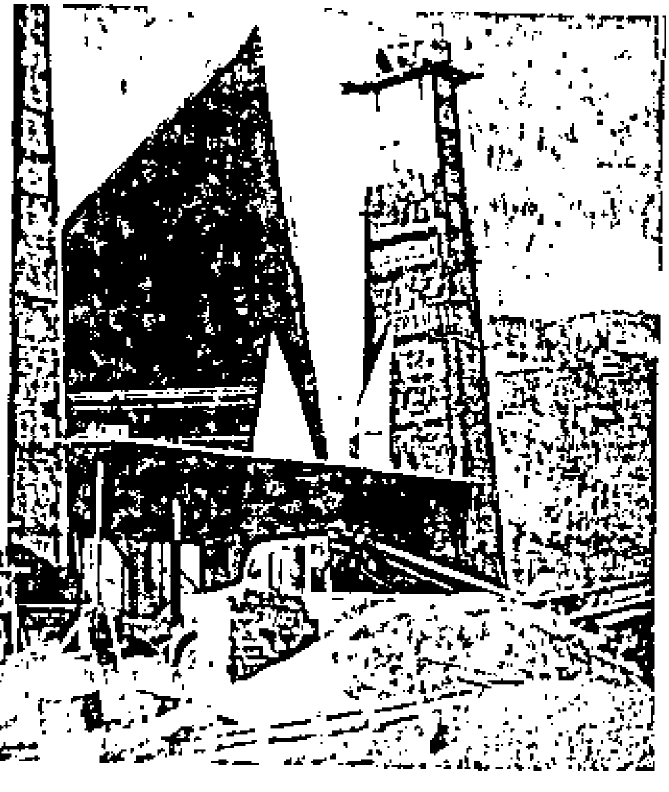
Scaffolder and laying of reinforcement.

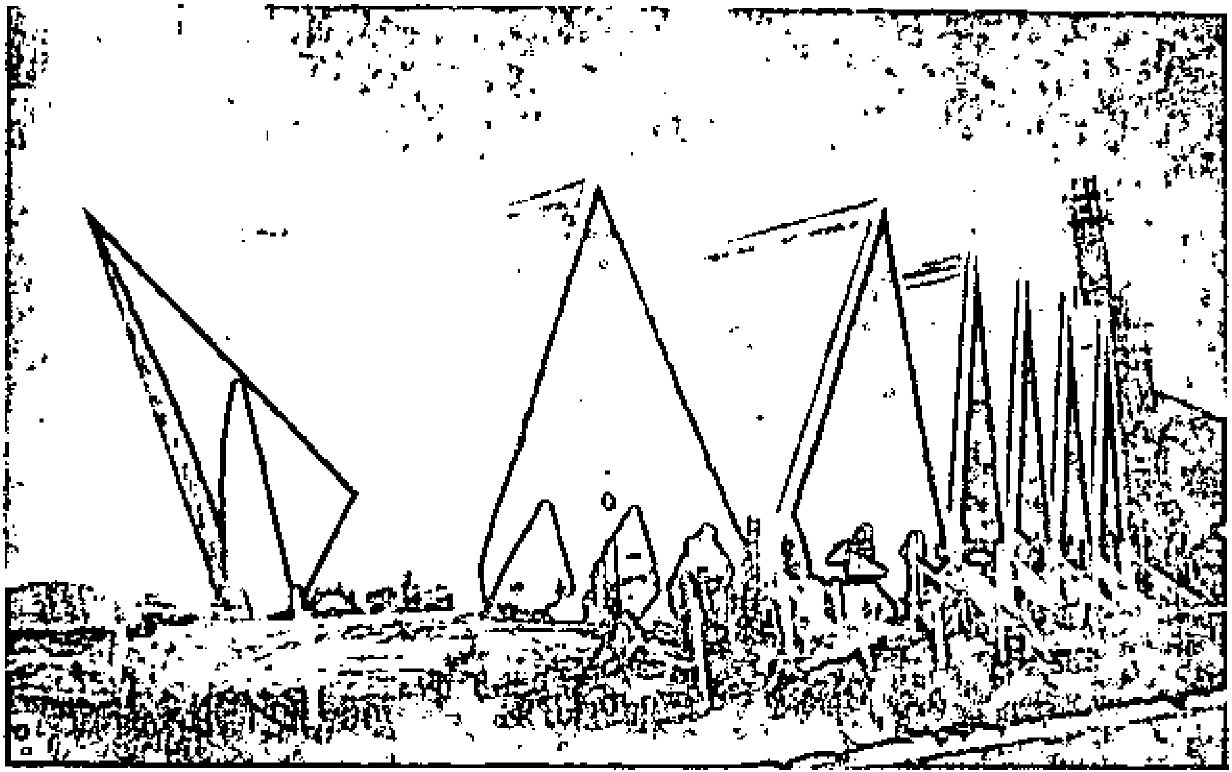


View of the main façade.

View of the main façade without screen.

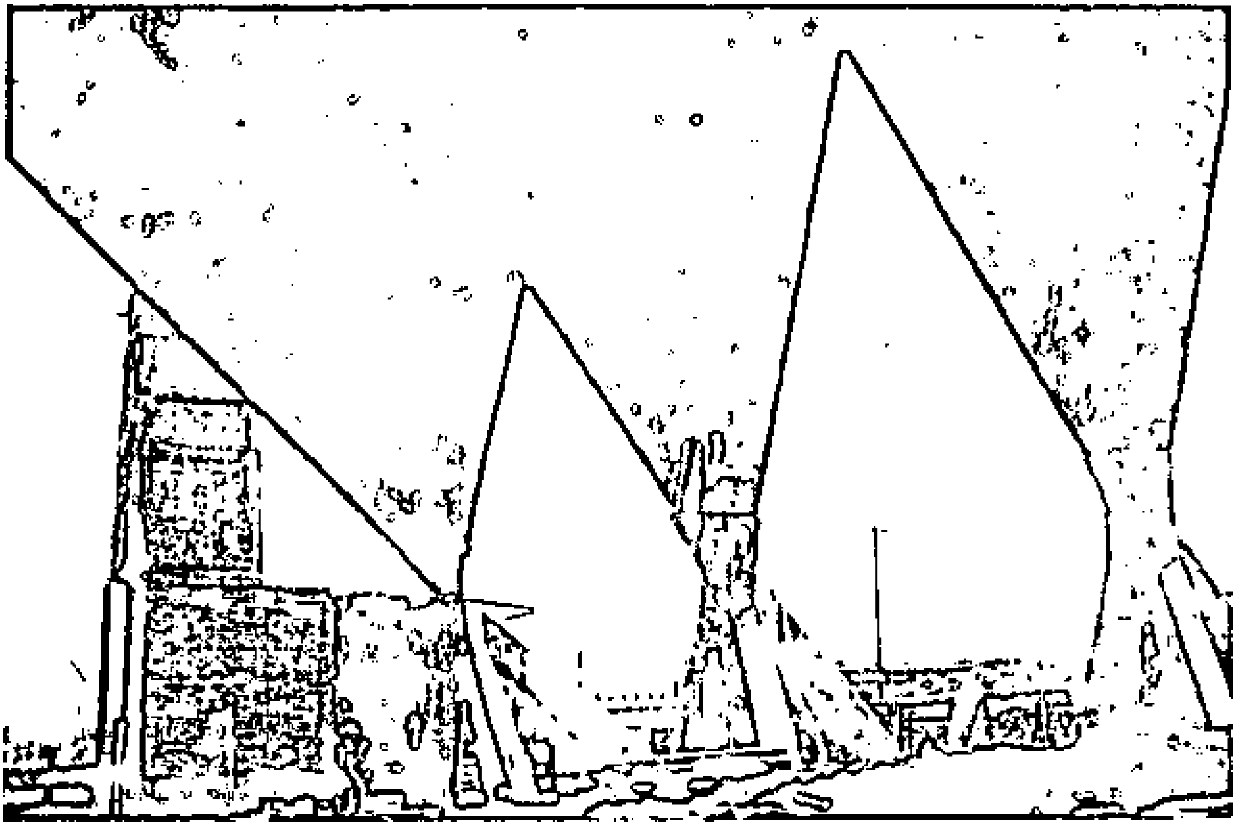


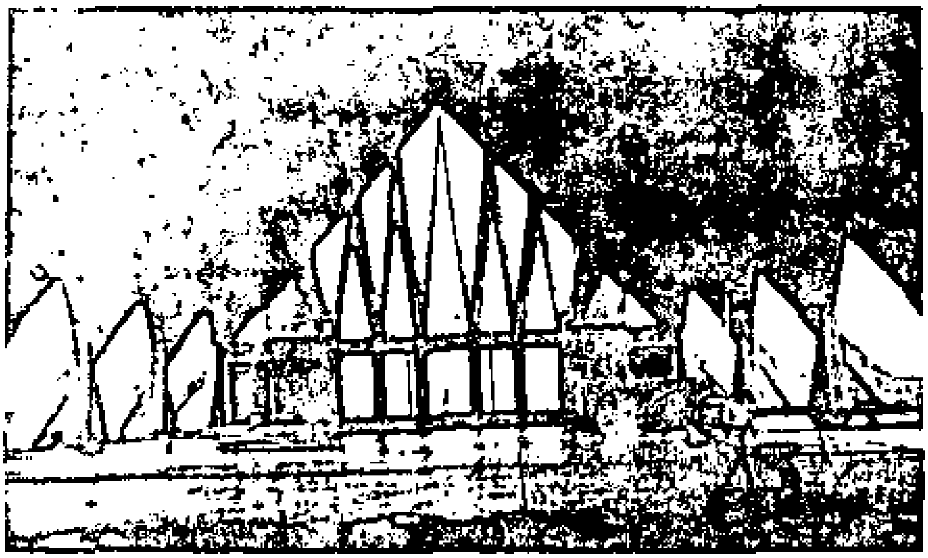




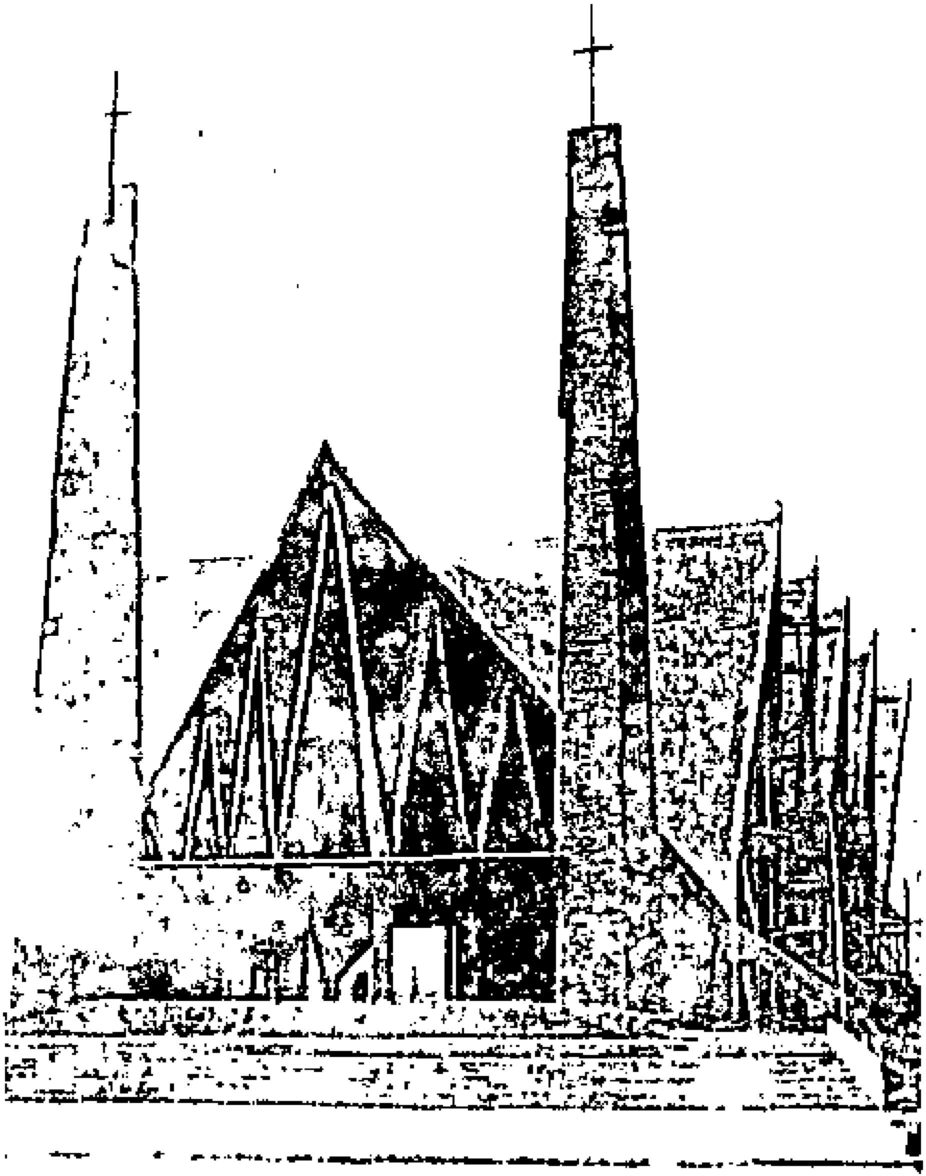
Shell completely poured.

Interior view of the supports.





Interior view of the main façade.



View of the main façade with screens.

DIRECTORIO DE ASISTENTES AL CURSO: DISEÑO SISMICO DE ESTRUCTURAS ESPECIALES
(DEL 24 DE JULIO AL 16 DE AGOSTO DE 1979)

	NOMBRE Y DIRECCION	EMPRESA Y DIRECCION
1.	ING. CARLOS HUMBERTO ALVAREZ GUILLEN Bertha No. 111-4 Col. Nativitas México 13, D.F. Tel. 539-64-62	S. A. H. O. P. Xola y Av. Universidad Col. Narvarte México 12, D.F. Tel. 32-54-38
2.	ING. HECTOR A. AVILA CASTAÑEDA Lago Patzcuaro No. 13 Bis Col. Anáhuac México 17, D.F. Tel. 545-41-95	PETROLEOS MEXICANOS Av. Marina Nacional No. 329 Col. Anáhuac México 17, D.F. Tel. 545-74-60 Ext. 3018
3.	ING. WILFREDO CARIAS PINEDA Calle los Acacios E-1 Col. Resid. Sta. María San Salvador, El Salvador Tel. 25 61 54	DIRECCION GENERAL DE URBANISMO Y ARQ. 1a. Av. Sur San Salvador, El Salvador Tel. 22 24 66
4.	ING. JULIO CESAR CASAL España No. 127 Norte San Juan, Argentina Tel. 2-39-68	INST. NAL. DE PREVENCION SISMICA Roger Balet No. 47 Norte Desamparados San Juan, Argentina Tel. 301-63 Y 3 06-00
5.	ING. JESUS ANTONIO CASTRO Degollado No. 502-C La Paz, B.C.S. Tel. 2-69-13	INST. TECNOLOGICO REGIONAL DE LA PAZ Km. 3.5 Carr. al Sur La Paz, B.C.S. Tel. 2-69-13
6.	ING. ANTONIO COVA RIOS Urb. Villa Delicias Calle 51 A NG-26 Maracaibo, Venezuela Tel. 42-36-68	UNIVERSIDAD DE ZULIA FAC. DE INGENIERIA Apartado 126 Maracaibo, Venezuela Tel. 51-22-09

DIRECTORIO DE ASISTENTES AL CURSO: DISEÑO SISMICO DE ESTRUCTURAS ESPECIALES
(DEL 24 DE JULIO AL 16 DE AGOSTO DE 1979)

	NOMBRE Y DIRECCION	EMPRESA Y DIRECCION
7.	ING. HERNAN CUEVA AGUILERA Av. 12 de Octubre No. 1135 Quito, Ecuador Tel. 23-66-82	PROYECTOS ESTRUCTURALES UNIVERSIDAD CENTRAL ECUADOR Av. de las Americas Quito, Ecuador Tel. 54-79-98
8.	ING. CESAR A. CHACON PIÑANGO Edf. Cerro Grande Aptm 6.35 El Valle, Caracas Tel. 69-16-19	FUNDACION VENEZOLANA DE INVESTIGACION SISMOLOGICAS Av. Washington Urb. San Bernardino Caracas, Venezuela Tel. 52-97-11
9.	ING. JOSE EMILIO DEL VALLE RUIZ Cecilio Robelo Ret. 48 No. 12 Col. Jardín Balbuena México 9, D.F. Tel. 571-00-62	INSTITUTO DE INVESTIGACIONES ELECTRICAS Melchor Ocampo No. 403-2o.Piso Col. Anzures México 5, D.F. Tel. 511-42-63
10.	ING. RAFAEL ECHAVARRIA ALFARO Peten No. 501 Col. Narvarte México 13, D.F. Tel. 575-31-48	IPESA, CONSULTORES San Lorenzo No. 153-6o. Piso Col. Del Valle México 12, D.F. Tel. 575-40-77
11.	ING. VICTOR GARCIA DELGADO Larroque No. 1783 Col. Nurva Mexicali, B.C. Tel. 2-94-31	U.A.B.C. Blv. Benito Juárez Baja California Tel. 8 34-70
12.	ING. JUAN ALFONSO GARCIA FRANCO D. Kennedy Edif. 19-D-6 Col. Jardín Balbuena México 9, D.F. Tel. 552-69-36	PETROLEOS MEXICANOS Campos Eliseos Esq. Anatole F[illegible] Col. Polanco México, D.F. Tel.

DIRECTORIO DE ASISTENTES AL CURSO: DISEÑO SISMICO DE ESTRUCTURAS ESPECIALES
(DEL 24 DE JULIO AL 16 DE AGOSTO DE 1979)

	NOMBRE Y DIRECCION	EMPRESA Y DIRECCION
13.	ING. BENITO GARCIA LOZADA Manizales No. 785 Col. Lindavista México 14, D.F. Tel. 586-70-47	S. A. H. O. P. Constituyentes No. 947 Col. Belén de las Flores México, D.F. Tel. 271-30-00 Ext. 409
14.	ING. JOSE LUIS GOMEZ MORALES Campo Guiro No. 64 Col. Amp. San Antonio México 16, D.F. Tel. 561-18-89	PETROLEOS MEXICANOS Marina Nacional No. 329 Col. Anáhuac México 17, D.F. Tel. 520-22-69
15.	ING. JOSE ANTONIO GONZALEZ SIFUENTES Gra. Pérez Treviño Ote No. 1029 Saltillo, Coah. Tel. 3-69-64	FAC. DE INGENIERIA CIVIL UNIVERSIDAD AUTONOMA DE AOAHUILA Unidad Campo Redondo Saltillo, Coah. Tel. 2-15-51
16.	ING. JOHNNY GRANADOS BLOISE Apartado No. 5856 San José,Costa Rica Tel. 32-73-89	INSTITUTO COSTARRICENSE DE ELECTRICIDAD Apartado No. 10032 San José, Costa Rica Tel.
17.	ING. JORGE GUERRERO GUERRA Medanos No. 160-1 Las Aguilas México 20, D.F. Tel. 651-66-14	
18.	ING. MARIO HELGUERA MATEOS	S. A. R. H. DIR. GRAL. DE CAPTACIONES Y CONDUCCIONES DE AGUA
9	ING. CANDIDO NICOLAS LOPEZ Tokio No. 711-2 Col. Portales México 13, D.F. Tel. 532-62-87	S. A. H. O. P. Universidad y Xola Col. Narvarte México 13, D.F. Tel. 530-30-00 Ext. 384

DIRECTORIO DE ASISTENTES AL CURSO: DISEÑO SISMICO DE ESTRUCTURAS ESPECIALES
(DEL 24 DE JULIO AL 16 DE AGOSTO DE 1979)

	NOMBRE Y DIRECCION	EMPRESA Y DIRECCION
20	ING. ANTONIO LOPEZ SANTOS Niños Héroes No. 14 Col. Sn. Antonio Chilpancingo, Gro.	ESCUELA DE INGENIERIA DE LA U.A.G. Av. de la Juventud S/N Ciudad Universitaria Chilpancingo, Gro. Tel. 2-27-41
21.	ING. ALFREDO MEDINA PEÑA Calle 2 No. 12 Urb. Independencia Snto.Domingo, Rep. Dominicana Tel. 5-32-49-91	CORPORACION DOMINICANA DE ELECTRICIDAD Av. Independencia Santo Domingo, Rep. Dominicana Tel. 533-11-31
22.	RAUL MONTES VARELA Alvarez No. 41 Chilpancingo, Gro. Tel. 2-43-62	U.A.G. ESC. DE INGENIERIA
23.	AURELIO MORALES TORRES Av. Huancayo No. 717 Col. Lindavista México 14, D.F. Tel. 7-54-28-17	COMISION FEDERAL DE ELECTRICIDAD Melchor Ocampo No. 469-7o. Piso Col. Anzures México 5, D.F. Tel. 528-89-25
24.	ING. MARIANELA MORENO CEBALLOS Dr. Betances Edif. 4 Apt. 2-1 Reparto París Santo Domingo, Rep. Dominicana Tel. 682-23-27	SECRETARIA DE ESTADO DE OBRAS PUBLICAS Av. San Cristobal Santo Domingo, Rep. Dominicana Tel. 567-45-95
25.	ENRIQUE NAVARRO RUIZ Andrés Figueroa No. 3 Col. Lomas Huizachal México 10, D.F. Tel. 589-81-48	S. A. H. O. P. Av. Constituyentes No. 947 Col. Belén de las Flores México 10, D.F. Tel. 271-30-00 Ext. 400-403

DIRECTORIO DE ASISTENTES AL CURSO DISEÑO SISMICO DE ESTRUCTURAS ESPECIALES
(DEL 24 DE JULIO AL 16 DE AGOSTO DE 1979)

NOMBRE Y DIRECCION	EMPRESA Y DIRECCION
26. ING. DARIO PINEDA BONILLA Av. Canada Mza. 14-Lote 14 San Luis Tel: 710692	EMPRESA NACIONAL DE PUERTOS (ENAPU-PERU) Oficina Principal Terminal Marítimo de Callao-Perú Tel:299210
27. ING. ROSENDO PUJOL M. Sabanilla Montes de Oca San José Costa Rica Tel: .2593-15	UNIVERSIDAD DE COSTA RICA San José Costa Rica Tel: 25-55-55
28. ING. RAMIRO RAYA VERDUZCO El Marco Edif. 54-303 Col. Rinconada del Sur México 23, D. F.	DIRECCION GENERAL DE CONSTRUCCION Y OPERACION HIDRAULICA, D.D.F. San Antonio Abad No. 231-8 Col. Obrera México 8, D. F. Tel: 5-78-33-90
29. EDGAR M. ROBAYO ESPINEL Carrera 56 No. 42-18 Bogotá, Col. Tel: 2-69-35-97	UNIVERSIDAD DE LOS ANDES-BOGOTA Carrera 1a. Calle 18 Facultad de Ingeniería Bogotá, Col. Tel: 2-84-49-11
30. JOEL RODRIGUEZ BETANCOURT	IPESA, CONSULTORES San Lorenzo 153-6o. Piso Col. del Valle México 12, D. F. Tel: 5-75-40-77
31. ING. DUILIO RODRIGUEZ ROSATI Risco No. 39 Ampl. V. Hermosa Tlalnep. Edo. de México Tel: 5-72-04-84	PETROLEOS MEXICANOS Campos Eliseos 317 Col. Polanco México 5, D. F. Tel: 5-20-29-14
32. ING. ISAIAS ROMANO PEREZ Misión Loreto 51 Col. Ferrocarril Mexicali, B. C. Tel: 72314	UNIVERSIDAD AUTONOMA DE BAJA CALIFORNIA Ciudad Universitaria Mexicali, B. C. Tel: 8-17-50

DIRECTORIO DE ASISTENTES AL CURSO DISEÑO SISMICO DE ESTRUCTURAS ESPECIALES
(DEL 24 DE JULIO AL 16 DE AGOSTO DE 1979)

NOMBRE Y DIRECCION	EMPRESA Y DIRECCION
33. ING. JOSE SALCEDO LUNA Calle 106 No. 22-175 Santander, B. Tel: 54724	UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER Santander, B. Tel: 56141
34. JESUS A. SANTAMARIA HERNANDEZ H. Puebla 508-2 Veracruz, Ver. Tel: 35912	UNIVERSIDAD VERACRUZANA Carretera Mocambo s/n Veracruz, Ver. Tel: 35477
35. ING. ALFREDO TREJOS DE LA PEÑA Copilco No. 300 Edif. 10 Depto. 304 Copilco Universidad México 21, D. F. Tel: 5-44-57-91	
36. ING. LUIS VALDES ARRIAGA Antillas 407 Col. Portales México 13, D. F. Tel: 5-39-83-04	PETROLEOS MEXICANOS Av. Marina Nacional No. 329 México, D. F. Tel: 5-31-72-22
37. ING. A. HOMERO VINTIMILLA CORDOVA Alfonso Borrero.y Ado.Loja Cuenca, Ecuador Tel: 82-10-48	