



centro de educación continua  
división de estudios superiores  
facultad de ingeniería, unam

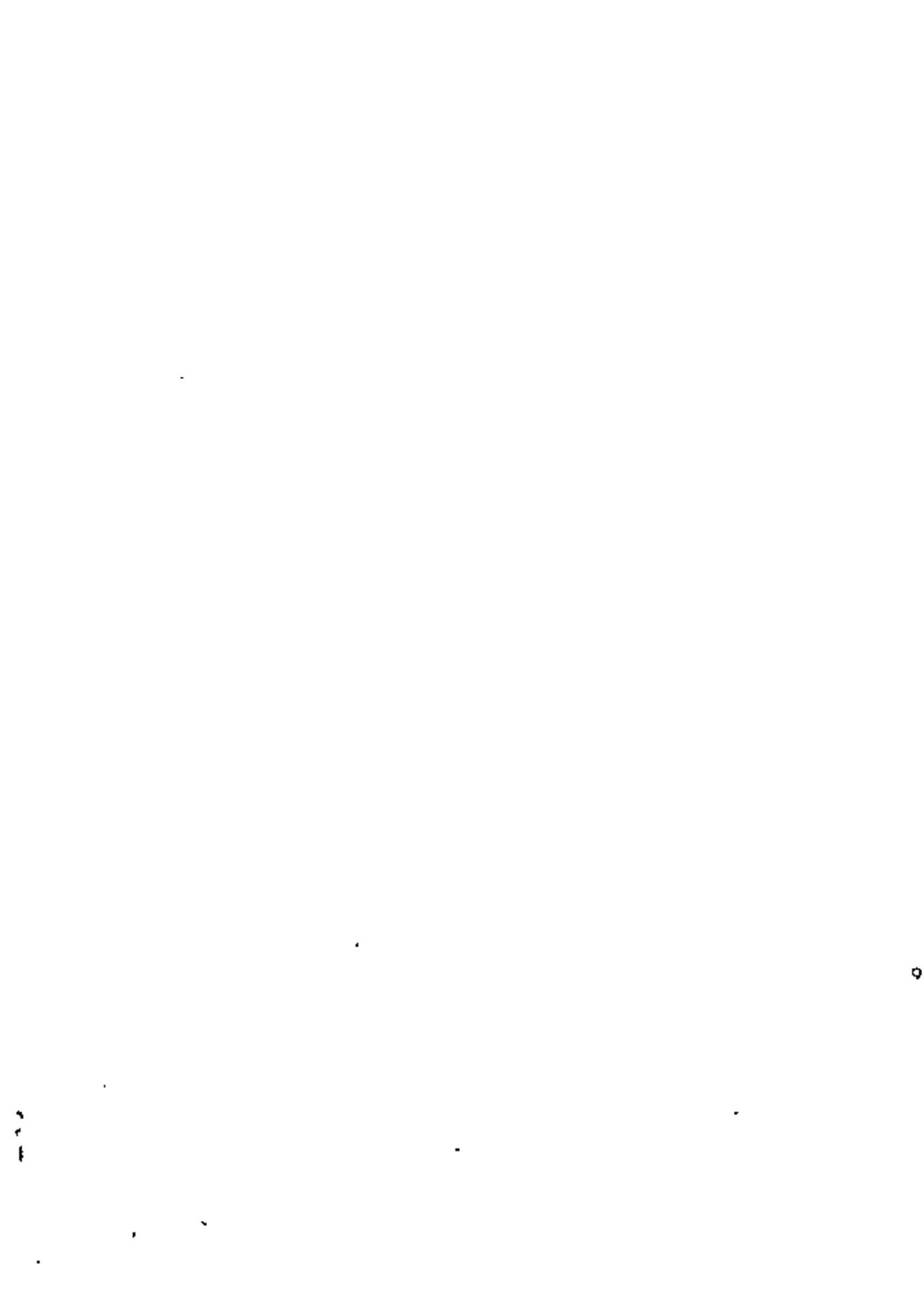


PROBABILIDAD Y ESTADISTICA

INTRODUCCION A LA TEORIA DE PROBABILIDADES

DR. OCTAVIO A. RASCON CHAVEZ

Junio, Julio, 1979



## INTRODUCCION A LA TEORIA DE PROBABILIDADES

POR: DR. OCTAVIO A. RASCON CHAVEZ

## SIMBOLOS DE DESIGUALDADES:

- $<$  menor que  
 $\leq$  menor o igual que  
 $>$  mayor que  
 $\geq$  mayor o igual que  
 $\neq$  diferente de

## TEORIA DE CONJUNTOS

UN CONJUNTO ES UNA COLECCION BIEN DEFINIDA DE OBJETOS.

NOTACION: LOS CONJUNTOS SE DENOTAN USUALMENTE CON LETRAS MAYUSCULAS, Y SUS ELEMENTOS SE ANOTAN DENTRO DE UN PAR DE LLAVES.

EJEMPLOS

A) EL CONJUNTO DE NUMEROS ANOTADOS EN UN DADO ES

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

B) EL CONJUNTO DE LOS NUMEROS ENTEROS MENORES QUE 5 ES

$$S = \{-\infty, \dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$$

$$S = \{x: x \text{ ES ENTERO Y } x < 4\}$$

C) EL CONJUNTO DE LOS NUMEROS ENTEROS POSITIVOS MENORES QUE 5 ES

$$E = \{0, 1, 2, 3, 4\}$$

$$E = \{x: \text{ES ENTERO Y } 0 \leq x < 4\}$$

D) EL CONJUNTO DE LOS CONTINENTES ES

$$C = \{\text{ASIA, EUROPA, AMERICA, AFRICA, OCEANIA}\}$$

E) EL CONJUNTO DE MARCAS QUE TIENE UNA MONEDA ES

$$M = \{\text{CARA, CRUZ}\}$$

F) EL CONJUNTO DE NUMEROS MAYORES DE 5 PERO MENORES O IGUALES QUE 10

$$S_1 = \{x: 5 < x \leq 10\}$$

CONJUNTOS {
   
     FINITOS.- CUANDO TIENEN UN NUMERO FINITO
   
             DE ELEMENTOS
   
     INFINITOS.- CUANDO TIENEN UN NUMERO INFINITO
   
             DE ELEMENTOS

SUBCONJUNTOS

PARA EXPRESAR QUE UN ELEMENTO PERTENECE A UN CONJUNTO SE USA EL
   
 SIMBOLO  $\in$ . PARA EXPRESAR QUE NO PERTENECE SE USA EL SIMBOLO  $\notin$ .

EJEMPLO

SI  $S_1 = \{x: 5 < x < 10\}$ , ENTONCES.

$3 \notin S_1$  ;  $5 \notin S_1$  ;  $8 \in S_1$  ;  $10 \in S_1$

PARA EXPRESAR QUE UN CONJUNTO ESTA CONTENIDO EN OTRO SE USA EL
   
 SIMBOLO  $\subset$ ; SI NO ESTA CONTENIDO SE USA EL SIMBOLO  $\not\subset$ .

PARA QUE UN CONJUNTO ESTE CONTENIDO EN OTRO SE REQUIERE QUE TODOS
   
 SUS ELEMENTOS LO ESTEN, ES DECIR, QUE TODOS SUS ELEMENTOS PERTE-
   
 NEZCAN A AMBOS CONJUNTOS.

EJEMPLO

SEAN  $E = \{3, 5\}$ ;  $F = \{3, 8\}$ ;  $G = \{7, 9\}$ .  $E \subset S_1$  ;  $F \not\subset S_1$  ;  $G \subset S_1$

SI UN CONJUNTO, B, ESTA CONTENIDO EN OTRO, S, SE DICE QUE B
   
 ES SUBCONJUNTO DE S.

EJEMPLO

$B = \{x: 3 < x < 8\}$  Y  $S_1 = \{x: 5 < x < 10\}$

EN ESTE CASO:

$G \subset S_1 \rightarrow G$  ES SUBCONJUNTO DE  $S_1$

$B \not\subset S_1 \rightarrow B$  NO ES SUBCONJUNTO DE  $S_1$

SE DICE QUE DOS CONJUNTOS SON IGUALES CUANDO CONTIENEN LOS MISMOS ELEMENTOS (NO IMPORTA EL ORDEN EN QUE ESTOS SE ESCRIBAN)

EJEMPLO

SEAN  $A=\{1,3,5,7\}$ ,  $B=\{7,5,1,3\}$  Y  $C=\{7,5,1\}$

EN TAL CASO,  $A = B \neq C$

CONJUNTO VACIO

DE LA MISMA MANERA QUE EXISTE EL CERO EN LOS NUMEROS, EN LA TEORIA DE CONJUNTOS EXISTE EL CONJUNTO VACIO, EL CUAL NO TIENE ELEMENTOS. USUALMENTE SE DENOTA  $\emptyset$ .

EJEMPLO

¿CUAL ES EL CONJUNTO DE ELEMENTOS,  $x$ , TALES QUE  $2x=7$  Y  $x$  ES ENTERO?

SOLUCION  $\emptyset$  ES EL CONJUNTO VACIO,  $\emptyset$ .

A  $\emptyset$  SE LE CONSIDERA COMO SUBCONJUNTO DE CUALQUIER CONJUNTO. ASI, POR EJEM, TODOS LOS SUBCONJUNTOS DEL CONJUNTO

$S = \{2,5,10\}$  SON:  $\{2\}; \{5\}; \{10\}; \{2,5\}; \{2,10\}; \{5,10\}; \{2,5,10\}$  Y  $\emptyset$ .

ESPACIO DE EVENTOS

ASOCIADO A UN EXPERIMENTO SIEMPRE HAY UN CONJUNTO DE RESULTADOS POSIBLES; A DICHO CONJUNTO SE LE LLAMA ESPACIO DE EVENTOS.

EJEMPLOS

EL ESPACIO DE EVENTOS ASOCIADO AL EXPERIMENTO DE LANZAR UN DADO Y ANOTAR LA CARA QUE QUEDA HACIA ARRIBA ES

$S = \{1,2,3,4,5,6\}$

EL ESPACIO DE EVENTOS CORRESPONDIENTE AL EXPERIMENTO DE LANZAR DOS DADOS Y ANOTAR LOS NUMEROS QUE QUEDAN HACIA ARRIBA ES

$$S = \left\{ \begin{array}{l} (1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6) \\ (2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6) \\ (3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6) \\ (4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6) \\ (5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5), (5,6) \\ (6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6) \end{array} \right\}$$

SI EN ESTE EXPERIMENTO LA OBSERVACION DE INTERES FUESE LA SUMA DE LOS DOS NUMEROS OBSERVADOS, ENTONCES EL ESPACIO DE EVENTOS DEL EXPERIMENTO SERIA

$$S = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$$

A TODO SUBCONJUNTO DE UN ESPACIO DE EVENTOS SE LE LLAMA EVENTO. A LOS EVENTOS QUE TIENEN UN SOLO ELEMENTO DEL ESPACIO SE LES LLAMA EVENTOS SIMPLES.

SI AL REALIZAR UN EXPERIMENTO SE OBSERVA UN ELEMENTO DEL EVENTO A, ENTONCES SE DICE QUE OCURRIO O SE VERIFICO EL EVENTO A. POR EJEMPLO, SI  $A = \{2, 4\}$  Y AL LANZAR UN DADO SE OBSERVA EL 2 O 4, SE DICE QUE OCURRIO EL EVENTO A; SI SE OBSERVA CUALQUIER OTRO NUMERO, ENTONCES SE DICE QUE NO OCURRIO A.

ESPACIOS DE  
EVENTOS

DISCRETOS- SI SUS ELEMENTOS PUEDEN NUMERARSE O CONTARSE. TIENEN UN NUMERO FINITO O INFINITO NUMERABLE DE ELEMENTOS.

CONTINUOS- SI SUS ELEMENTOS NO PUEDEN ENUMERARSE. TIENEN UN NUMERO INFINITO NO NUMERABLE DE ELEMENTOS

### EVENTOS MUTUAMENTE EXCLUSIVOS

CUANDO DOS O MAS EVENTOS NO PUEDEN OCURRIR SIMULTANEAMENTE AL REALIZAR UNA SOLA VEZ UN EXPERIMENTO, SE DICE QUE ESTOS SON MUTUAMENTE EXCLUSIVOS, ES DECIR, DOS EVENTOS SON MUTUAMENTE EXCLUSIVOS CUANDO NO TIENEN NI UN SOLO ELEMENTO EN COMUN.

#### EJEMPLO

- A) CUALQUIER EVENTO Y SU COMPLEMENTO SON MUTUAMENTE EXCLUSIVOS.  
 B) ¿SON  $E = \{Y: 0 < Y < 25\}$  Y  $A = \{2, 50, 100\}$  MUTUAMENTE EXCLUSIVOS?  
 NO, PORQUE TIENEN EL ELEMENTO 2 EN COMUN.

### OPERACIONES CON EVENTOS

#### UNION

LA UNION DE DOS EVENTOS ES OTRO EVENTO CUYOS ELEMENTOS SON TODOS LOS DE AMBOS. LA OPERACION DE UNION SE DENOTA CON EL SIMBOLO U.

#### EJEMPLOS

- A) SI  $A = \{2, 4, 6\}$  Y  $B = \{1, 6, 12\}$ , ENTONCES  
 $Q = A \cup B = \{1, 4, 6, 12, 2\}$
- B) ¿SON A Y B MUTUAMENTE EXCLUSIVOS? NO PORQUE TIENEN EL 6 EN COMUN.
- C) SI  $D = \{Y: 0 < Y < 13\}$  Y  $E = \{Y: 20 < Y < 50\}$ ,  
 ENTONCES  
 $D \cup E = \{Y: 0 < Y < 13, 20 < Y < 50\}$
- D) SI  $F = \{Y: 8 < Y < 20\}$ , ENTONCES  
 $D \cup F = \{Y: 0 < Y < 20\}$ .
- E) SI  $G = \{Y: 3 < Y < 10\}$ , ENTONCES  
 $D \cup G = \{Y: 0 < Y < 13\} = D$ ; OBSERVESE QUE EN ESTE CASO  $G \subset D$ . EN GENERAL,  
 SI  $A \subset B$ , ENTONCES  $A \cup B = B$ .

EN GENERAL, LA UNION DE VARIOS EVENTOS ES OTRO EVENTO CUYOS ELEMENTOS SON TODOS LOS DE LOS EVENTOS QUE SE UNEN.

EJEMPLO

LOS ESPACIOS DE EVENTOS  $S_1 = \{\text{CARA, CRUZ}\}$ ;  $S_2 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots\}$ ;  
 $S_3 = \{\text{VERDE, ROJO}\}$  SON DISCRETOS. LOS ESPACIOS DE EVENTOS  
 $S_4 = \{X: -\infty < X \leq 0\}$ ;  $S_5 = \{Z: Z \geq 3\}$ ;  $S_6 = \{Y: 3 \leq Y \leq 80\}$   
 SON CONTINUOS.

EJEMPLO

¿QUE TIPOS DE ESPACIOS DE EVENTOS CORRESPONDEN A LOS SIGUIENTES EXPERIMENTOS?

- A) CONTEO DEL NUMERO DE GRANOS DE UNA MAZORCA DE MAIZ  
 $S = \{0, 1, 2, 3, \dots, \infty\}$ , ES DISCRETO E INFINITO
- B) MEDICION DE LA LONGITUD DE UNA ESPIGA DE TRIGO  
 $S = \{X: 0 < X < \infty\}$ , X EN CM, ES CONTINUO E INFINITO
- C) MEDICION DEL EFECTO DE UNA VACUNA, EN TERMINOS DE "EXITO" O "FRACASO"  
 $S = \{\text{EXITO, FRACASO}\}$  ES DISCRETO Y FINITO.
- D) MEDICION DEL ~~CONTEO~~ DE UN ANTIBIOTICO  
 EN UNA CAPSULA  
 $S = \{Y: 0 < Y < \infty\}$  Y en mg, ES CONTINUO E INFINITO.

COMPLEMENTO DE UN EVENTO

EL COMPLEMENTO DE UN EVENTO A ES OTRO EVENTO QUE CONTIENE TODOS LOS ELEMENTOS DEL ESPACIO DE EVENTOS CORRESPONDIENTE QUE NO ESTAN EN A. USUALMENTE SE DENOTA CON UNA TILDE SOBRE EL SIMBOLO QUE CORRESPONDE AL EVENTO QUE COMPLEMENTA,  $\bar{A}$ .

EJEMPLOS

SI  $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  Y  $A = \{1, 3, 5\}$  ENTONCES  $\bar{A} = \{2, 4, 6\}$ .

SI  $S = \{X: 0 < X < 58\}$  Y  $A = \{X: 3 < X \leq 17\}$ , ENTONCES  $\bar{A} = \{X: 0 < X \leq 3, 17 < X < 58\}$

EJEMPLO

$$A \cup B \cup C = K = \{1, 2, 4, 6, y: 8 \leq y \leq 20\}$$

INTERSECCION

LA INTERSECCION DE DOS EVENTOS ES EL CONJUNTO DE ELEMENTOS QUE PERTENECEN SIMULTANEAMENTE A AMBOS. PARA DENOTAR LA OPERACION DE INTERSECCION SE USA EL SIMBOLO  $\cap$ .

EJEMPLOS

A)  $A = \{2, 3, 6\}$  Y  $B = \{2, 6, 10\}$  ENTONCES  $A \cap B = C = \{2, 6\}$

B)  $D = \{y: 4 \leq y \leq 5\}$ , ENTONCES  $A \cap D = \emptyset$ .

OBSERVESE QUE EN ESTE EJEMPLO A Y D SON MUTUAMENTE EXCLUSIVOS, YA QUE NO TIENEN NINGUN ELEMENTO EN COMUN. SIEMPRE QUE DOS EVENTOS SON MUTUAMENTE EXCLUSIVOS, SU INTERSECCION ES EL CONJUNTO VACIO.

EN GENERAL, LA INTERSECCION DE VARIOS EVENTOS ES EL CONJUNTO DE ELEMENTOS QUE TODOS ELLOS TIENEN EN COMUN.

EJEMPLO

SI  $A = \{2, 3, 6, 8\}$ ;  $B = \{2, 3, 10, 100\}$ ;  $C = \{y: 0 \leq y \leq 5\}$  Y  $D = \{y: 2 \leq y \leq 4\}$ ,

ENTONCES

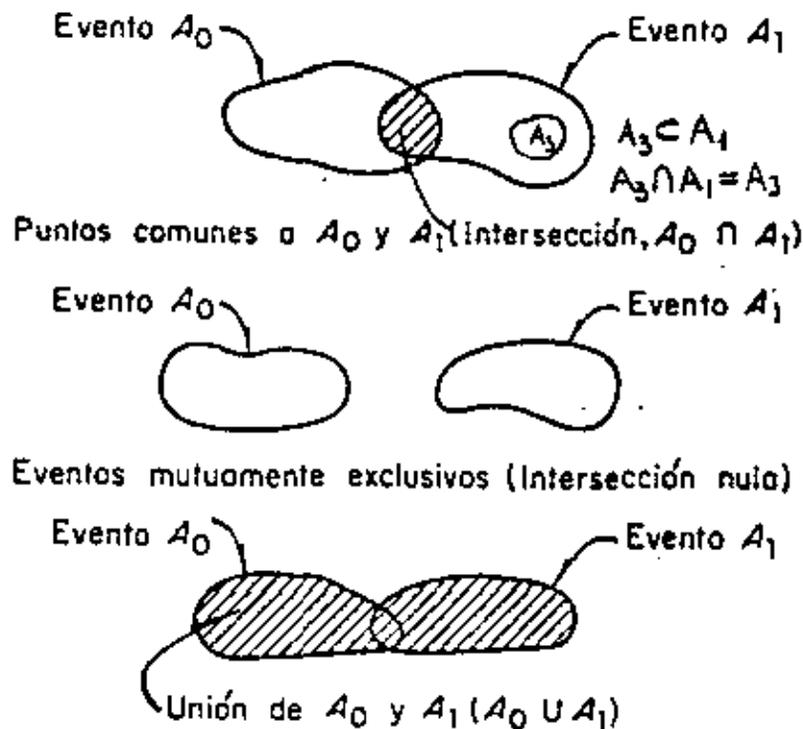
$$A \cap B \cap C \cap D = E = \{2, 3\}$$

$$A \cup B \cup C \cup D = F = \{y: 0 \leq y \leq 5, 6, 8, 10, 100\}$$

LA OCURRENCIA DE UN EVENTO "Y" OTRO IMPLICA LA OCURRENCIA DE AMBOS A LA VEZ, ES DECIR, QUE SE VERIFIQUE LA INTERSECCION. LA OCURRENCIA DE UN EVENTO "O" ALGUN OTRO, IMPLICA LA OCURRENCIA DE CUALQUIERA DE ELLOS, ES DECIR DE LA UNION.

DIAGRAMAS DE VENN

UNA MANERA DE ILUSTRAR GRAFICAMENTE LAS OPERACIONES CON CONJUNTOS ES MEDIANTE LOS DIAGRAMAS DE VENN. EN ESTOS, CADA CONJUNTO SE REPRESENTA POR UNA CURVA CERRADA QUE ENCIERRA LOS ELEMENTOS QUE LE CORRESPONDEN.



*Diagramas de Venn (unión e intersección de eventos)*

EVENTOS COLECTIVAMENTE EXHAUSTIVOS

SE DICE QUE LOS EVENTOS  $B_1, B_2, \dots, B_n$  SON COLECTIVAMENTE EXHAUSTIVOS CUANDO LA UNIÓN DE TODOS ELLOS ES IGUAL AL ESPACIO DE EVENTOS, ES DECIR, SI

$$B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_n = S$$



TEORIA DE PROBABILIDADES

AL LANZAR UNA MONEDA NO PODEMOS PREDECIR CON CERTEZA CUAL CARA QUEDARA HACIA ARRIBA. LO UNICO QUE SE PUEDE ASEGURAR, SI LA MONEDA NO ESTA CARGADA, ES QUE AMBAS CARAS TIENEN LA MISMA OPORTUNIDAD DE SALIR, ES DECIR, QUE LOS EVENTOS SIMPLES (CARA) Y (CRUZ) TIENEN LA MISMA PROBABILIDAD DE OCURRIR.

COMO YA SE DIJO, LA PROBABILIDAD DE QUE OCURRA UN EVENTO ES UNA MEDIDA DEL GRADO DE CONFIANZA QUE SE TIENE DE QUE ESTE OCURRA AL REALIZAR EL EXPERIMENTO CORRESPONDIENTE.

AXIOMAS DE LA TEORIA DE PROBABILIDADES

LAS PROBABILIDADES QUE SE ASIGNAN A LOS DIFERENTES EVENTOS RELACIONADOS CON UN FENOMENO ALEATORIO DEBEN CUMPLIR CON LOS SIGUIENTES TRES AXIOMAS:

AXIOMA 1: LA PROBABILIDAD DE OCURRENCIA DE UN EVENTO A ES UN NUMERO,  $P(A)$ , QUE SE LE ASIGNA A DICHO EVENTO, CUYO VALOR QUEDA EN EL INTERVALO

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

AXIOMA 2: SI S ES UN ESPACIO DE EVENTOS, ENTONCES

$$P(S) = 1$$

AXIOMA 3: LA PROBABILIDAD,  $P(C)$ , DE LA UNION, C, DE DOS EVENTOS MUTUAMENTE EXCLUSIVOS, A Y B, ES IGUAL A LA SUMA DE LAS PROBABILIDADES DE ESTOS, ES DECIR,

$$P(A \cup B) = P(C) = P(A) + P(B)$$

EXISTEN POR LO MENOS CUATRO MANERAS DE ASIGNARLE UNA PROBABILIDAD A UN EVENTO:

1. EN TERMINOS DE LOS RESULTADOS DE REPETIR VARIAS VECES UN EXPERIMENTO (METODO FRECUENCIAL).
2. APLICANDO LA DEFINICION CLASICA DE PROBABILIDADES.
3. CON BASE EN UN MODELO MATEMATICO (PROBABILISTICO) DEL FENOMENO DE QUE SE TRATE.
4. MEDIANTE UN ANALISIS SUBJETIVO DEL PROBLEMA .

METODO FRECUENCIAL

SI  $N(A)$  ES EL NUMERO DE VECES QUE SE OBSERVA EL EVENTO A AL REALIZAR  $N$  VECES UN EXPERIMENTO, LA FRECUENCIA RELATIVA DE A, DEFINIDA COMO  $N(A)/N$ , SE CONSIDERA COMO ESTIMACION DE LA PROBABILIDAD DE A,

$$P(A) = \frac{N(A)}{N}$$

YA QUE, EN EL LIMITE,  $P(A) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N(A)}{N}$

EJEMPLO

DE UNA URNA QUE CONTIENE BOLAS ROJAS, BLANCAS Y AZULES, SE SACO UNA BOLA, SE ANOTO SU COLOR Y SE REGRESO A LA URNA. SI ESTE EXPERIMENTO SE REPITE 20 VECES Y LOS RESULTADOS SON

b, b, a, r, r, r, a, b, r, a, b, b, a, r, b, r, r, a, r, a, DONDE

r = ROJA, b = BLANCA, a = AZUL

¿QUE PROBABILIDADES LE ASIGNARIA A LOS EVENTOS  $B=\{b\}$ ,  $A=\{a\}$ , Y  $R=\{r\}$ , DE ACUERDO CON EL METODO FRECUENCIAL?

EN ESTA MUESTRA SE TIENE QUE  $N(B)=6$ ,  $N(A)=6$ ,  $N(R)=8$ ,  $N=20$

POR LO QUE  $P(B) = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$ ;  $P(A) = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$ ;  $P(R) = \frac{8}{20} = \frac{4}{10}$

NOTESE QUE LOS EVENTOS B, A Y R SON MUTUAMENTE EXCLUSIVOS, YA QUE SON EVENTOS SIMPLES, Y QUE

$$P(B) + P(A) + P(R) = \frac{3}{10} + \frac{3}{10} + \frac{4}{10} = 1 = P(S)$$

EN DONDE  $S = \{r, b, a\}$

DEFINICION CLASICA DE PROBABILIDADES

SI  $M(A)$  ES EL NUMERO DE MANERAS IGUALMENTE PROBABLES EN QUE PUEDE OCURRIR EL EVENTO A Y M ES EL NUMERO TOTAL DE ELEMENTOS DEL ESPACIO DE EVENTOS CORRESPONDIENTE, ENTONCES LA PROBABILIDAD DE A ES

$$P(A) = \frac{M(A)}{M}$$

EJEMPLOS

A) SI EN UNA URNA SE TIENEN 5 BOLAS BLANCAS Y 15 NEGRAS, Y SE VA A SELECCIONAR UNA AL AZAR, ¿CUAL ES LA PROBABILIDAD DE QUE SEA BLANCA ( $A = \{ \text{BLANCA} \}$ ) ?:

$$M = 5 + 15 = 20; M(A) = 5 \Rightarrow P(A) = \frac{5}{20} = \frac{1}{4}$$

B) SI SE LANZAN DOS DADOS, ¿CUAL ES LA PROBABILIDAD DE QUE

1. SALGA UN 2 Y UN 5 (EVENTO B)?
2. LA SUMA SEA 7 (EVENTO A)

PARA EL INCISO 1 EL ESPACIO DE EVENTOS ES:

$$S = \left[ \begin{array}{cccccc} (1,1) & (1,2) & (1,3) & (1,4) & (1,5) & (1,6) \\ (2,1) & (2,2) & (2,3) & (2,4) & (2,5) & (2,6) \\ (3,1) & (3,2) & (3,3) & (3,4) & (3,5) & (3,6) \\ (4,1) & (4,2) & (4,3) & (4,4) & (4,5) & (4,6) \\ (5,1) & (5,2) & (5,3) & (5,4) & (5,5) & (5,6) \\ (6,1) & (6,2) & (6,3) & (6,4) & (6,5) & (6,6) \end{array} \right]$$

SI EL DADO NO ESTA CARGADO, CADA PAREJA DE NUMEROS ES IGUALMENTE PROBABLE. EN TAL CASO,  $M = 36$  Y  $M(B) = 2$  ( APARECE  $(2,5)$  O  $(5,2)$ )

$$\Rightarrow P(B) = 2/36 = 1/18.$$

PARA EL INCISO 2 EL ESPACIO DE EVENTOS ES

$$S_1 = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$$

PERO NO TODOS LOS ELEMENTOS (EVENTOS SIMPLES) SON IGUALMENTE PROBA-

BLES, YA QUE, POR EJEMPLO, EL 2 SOLO APARECERA SI SE OBSERVA LA PAREJA (1,1), EN CAMBIO EL 3 APARECERA SI OCURREN LAS PAREJAS (1,2) O (2,1), ES DECIR, EL 3 TIENE EL DOBLE DE PROBABILIDAD QUE EL 2. POR ESTO, PARA CALCULAR LA PROBABILIDAD DE QUE LA SUMA SEA 7 ES NECESARIO TRABAJAR CON EL ESPACIO S Y CONTAR LAS MANERAS POSIBLES DE QUE LA SUMA SEA 7, LO CUAL OCURRE SI SE OBSERVA CUALQUIERA DE LAS PAREJAS (6,1), (5,2), (4,3), (3,4), (2,5) o (1,6), ES DECIR, HAY 6 MANERAS IGUALMENTE PROBABLES DE QUE OCURRA EL EVENTO A. POR LO TANTO

$$P(A) = \frac{M(A)}{M} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

PROCEDIENDO DE ESTA MANERA SE PUEDEN CALCULAR LAS PROBABILIDADES DE QUE LA SUMA SEA 2,3,4, ETC. LOS RESULTADOS SON:

$$\left. \begin{aligned} P(\{2\}) &= \frac{1}{36}; P(\{3\}) = \frac{2}{36}; P(\{4\}) = \frac{3}{36}; P(\{5\}) = \frac{4}{36}; \\ P(\{6\}) &= \frac{5}{36}; P(\{7\}) = \frac{6}{36}; P(\{8\}) = \frac{5}{36}; P(\{9\}) = \frac{4}{36}; \\ P(\{10\}) &= \frac{3}{36}; P(\{11\}) = \frac{2}{36} \text{ y } P(\{12\}) = \frac{1}{36} \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{DISTRIBUCION} \\ \text{DE} \\ \text{PROBABILIDADES} \end{array}$$

(OBSERVESE QUE  $\sum_{i=2}^{12} P(\{i\}) = 1$ )

#### ASIGNACION DE PROBABILIDADES MEDIANTE UN MODELO MATEMATICO

MEDIANTE ESTE METODO LAS PROBABILIDADES SE ASIGNAN A PARTIR DE UN MODELO MATEMATICO QUE INVOLUCRE TODOS LOS FACTORES POSIBLES QUE INTERVIENEN EN LA ALEATORIEDAD DEL FENOMENO.

#### ASIGNACION DE PROBABILIDADES MEDIANTE UN ANALISIS SUBJETIVO DEL PROBLEMA.

EN ESTE CASO LAS PROBABILIDADES SE ASIGNAN DE MANERA SUBJETIVA, CON BASE EN LA EXPERIENCIA QUE SE TENGA SOBRE UN PROBLEMA SEMEJANTE, - PROPIA O AJENA, DE CARACTER TEORICO O EXPERIMENTAL.

EJEMPLOS

A) EN EL PROBLEMA DEL LANZAMIENTO DE UN DADO QUE NO ESTA CARGADO SE PUEDE ASIGNAR A CADA NUMERO (A CADA EVENTO SIMPLE) UNA PROBABILIDAD DE  $1/6$ , SI  $A=\{2,4\}$  Y  $B=\{5,6\}$ , ENTONCES, PUESTO QUE  $A = \{2\} \cup \{4\}$  Y  $B = \{5\} \cup \{6\}$ , Y QUE LOS EVENTOS ELEMENTALES SON MUTUAMENTE EXCLUSIVOS ENTRE SI, APLICANDO EL AXIOMA 3 SE OBTIENEN:

$$P(A) = P(\{2\}) + P(\{4\}) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$P(B) = P(\{5\}) + P(\{6\}) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

SI  $C=A \cup B$ , Y DADO QUE A Y B SON EVENTOS MUTUAMENTE EXCLUSIVOS:

$$P(C) = P(A) + P(B) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

ADEMAS, OBSERVESE QUE SE CUMPLE CON LOS AXIOMAS 1 Y 2, YA QUE

$$\begin{aligned} P(S) &= P(\{1\}) + P(\{2\}) + P(\{3\}) + P(\{4\}) + P(\{5\}) + P(\{6\}) \\ &= \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{6}{6} = 1 \end{aligned}$$

EJEMPLO

EN EL PROBLEMA DEL LANZAMIENTO DE DOS DADOS, ¿CUAL ES LA PROBABILIDAD QUE AL REALIZAR UNA VEZ EL EXPERIMENTO LA SUMA DE LOS DOS NUMEROS QUE QUEDEN HACIA ARRIBA SEA 7 U 11? ESTO ES EQUIVALENTE A PREGUNTAR POR LA PROBABILIDAD DE QUE OCURRA EL EVENTO  $C = \{7\} \cup \{11\}$ . PUESTO QUE  $\{7\}$  Y  $\{11\}$  SON EVENTOS MUTUAMENTE EXCLUSIVOS:

$$P(C) = P(\{7\}) + P(\{11\}) = \frac{6}{36} + \frac{8}{36} = \frac{8}{36} = \frac{2}{9}$$

EJEMPLO

EN UN LABORATORIO SE PROBARON 100 VIGAS DE CONCRETO REFORZADO NOMINALMENTE IDENTICAS, Y SE ANOTARON LAS CARGAS CON LAS CUALES FALLO CADA UNA. DE ESTA SUCESION DE EXPERIMENTOS SE ASIGNARON, EN TERMINOS DE LAS FRECUENCIAS RELATIVAS CORRESPONDIENTES, LAS SIGUIENTES PROBABILIDADES:

$$\text{SI } A = \{X: 0 < X \leq 20 \text{ ton}\}; \quad P(A) = 0.17 \quad (17/100)$$

$$\text{SI } B = \{X: 20 < X \leq 40 \text{ ton}\}; \quad P(B) = 0.24 \quad (24/100)$$

$$\text{SI } C = \{X: 40 < X \leq 60 \text{ ton}\}; \quad P(C) = 0.27 \quad (27/100)$$

$$\text{SI } D = \{X: 60 < X \leq 80\}; \quad P(D) = 0.13 \quad (13/100)$$

$$\text{SI } E = \{X: 80 < X \leq 100\}; \quad P(E) = 0.11 \quad (11/100)$$

$$\text{SI } F = \{X: 100 \leq X\}; \quad P(F) = \underline{0.08} \quad (8/100)$$

$$\Sigma P(.) = 1.00$$

SI SE REALIZA UNA VEZ MAS EL EXPERIMENTO, CALCULEMOS LAS SIGUIENTES PROBABILIDADES:

A) QUE LA RESISTENCIA SEA MENOR O IGUAL QUE 80 TON. PUESTO QUE  $G = \{X: 0 < X \leq 80 \text{ ton}\}$  SE TIENE QUE  $G = A \cup B \cup C \cup D$ , POR LO QUE

$$P(G) = P(A) + P(B) + P(C) + P(D) = 0.17 + 0.24 + 0.27 + 0.13 = 0.81$$

B) LA PROBABILIDAD QUE RESISTA MAS DE 60 TONS. PUESTO QUE

$$H = \{X: 60 < X \leq \infty\} \text{ O } H = \{X: X > 60\} \text{ SE TIENE QUE } H = D \cup E \cup F,$$

$$\text{POR LO QUE } P(H) = P(D) + P(E) + P(F) = 0.13 + 0.11 + 0.08 = 0.32$$

C) LA PROBABILIDAD QUE RESISTA MAS DE 40 TON, PERO CUANDO MUCHO  
100 TON.

PUESTO QUE  $I = \{X: 40 < X < 100\}$  SE TIENE QUE  $I = C \cup D \cup E$

POR LO QUE  $P(I) = P(C) + P(D) + P(E) = 0.27 + 0.13 + 0.11 = 0.51$

18.

### TEOREMAS

DOS TEOREMAS IMPORTANTES QUE SE DEDUCEN A PARTIR DE LOS AXIOMAS  
SON:

#### TEOREMA 1.

SI A ES UN EVENTO DEL ESPACIO S, ENTONCES  $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

#### DEMOSTRACION

PUESTO QUE A Y  $\bar{A}$  SON MUTUAMENTE EXCLUSIVOS

Y ADEMAS  $A \cup \bar{A} = S$ , ENTONCES,  $P(S) = P(A) + P(\bar{A}) = 1$

$\Rightarrow P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

CASO PARTICULAR: PUESTO QUE  $P(\bar{S}) = 1 - P(S) = 0$  Y  $\bar{S} = \emptyset$ , SE TIENE QUE

$P(\emptyset) = 0$

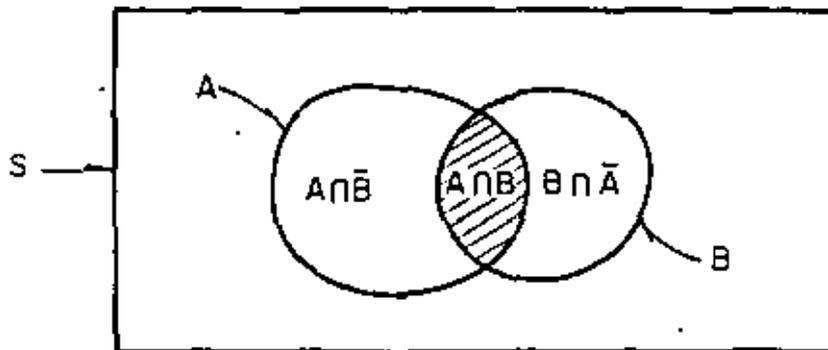
TEOREMA 2.

SI A Y B SON DOS EVENTOS CUALQUIERA DE S, ENTONCES

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

DEMOSTRACION

SEA EL DIAGRAMA DE VENN:



$A \cup B = (A \cap B) \cup (A \cap \bar{B}) \cup (B \cap \bar{A})$ . PUESTO QUE  $A \cap B$ ,  $A \cap \bar{B}$  Y  $B \cap \bar{A}$  SON MUTUAMENTE EXCLUSIVOS, SE TIENE QUE  $P(A \cup B) = P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B}) + P(B \cap \bar{A})$ .

SUMANDO Y RESTANDO  $P(A \cap B)$  Y AGRUPANDO TERMINOS SE OBTIENE

$$P(A \cup B) = [P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B})] + [P(A \cap B) + P(B \cap \bar{A})] - P(A \cap B)$$

$$\text{PERO } A = (A \cap \bar{B}) \cup (A \cap B) \Rightarrow P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B}) = P(A)$$

$$\text{Y } B = (A \cap B) \cup (B \cap \bar{A}) \Rightarrow P(A \cap B) + P(B \cap \bar{A}) = P(B), \text{ POR LO QUE}$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

EJEMPLO

EN UNA URNA SE TIENEN 28 TIRAS DE PAPEL Y EN CADA UNA SE ENCUENTRA ANOTADA UNA LETRA DISTINTA DEL ALFABETO. CALCULE LA PROBABILIDAD DE QUE AL EXTRAER AL AZAR UNA TIRA:

- A) SE OBTENGA UNA VOCAL  
 B) SE OBTENGA a O z  
 C) OCURRAN C Y D, DONDE  $C = \{x, y, z\}$  y  
 $D = \{b, c, y, z\}$   
 D) OCURRA C O D

*Respuestas*

$$A) A = \{a, e, i, o, u\} \Rightarrow P(A) = \frac{5}{28}$$

$$B) B = \{a, z\} \Rightarrow P(B) = \frac{2}{28}$$

$$C) F = C \cap D = \{y, z\} \Rightarrow P(F) = \frac{2}{28}$$

$$D) E = C \cup D = \{b, c, x, y, z\} \Rightarrow P(E) = \frac{5}{28}$$

$$\text{o } P(E) = P(C) + P(D) - P(C \cap D)$$

$$P(C \cap D) = P(F) = \frac{2}{28} \Rightarrow P(E) = \frac{3}{28} + \frac{4}{28} - \frac{2}{28} = \frac{5}{28}$$

REGLAS DE CONTEO

AL ASIGNAR PROBABILIDADES A LOS EVENTOS APLICANDO LA TEORIA CLASICA ES NECESARIO CALCULAR  $N(A)$  Y  $N$  PARA APLICAR LA FORMULA  $P(A) = N(A)/N$ .

SEAN, POR EJEMPLO, LOS EVENTOS  $A = \{b, c\}$  Y  $B = \{a, e, i, o, u\}$  CON LOS CUALES SE FORMAN PALABRAS DE DOS LETRAS, LA PRIMERA DE A Y LA SEGUNDA DE B. EL EVENTO QUE SE FORMA ASI ES

$$C = \{xy : x \in A; y \in B\}$$

SI ENUMERAMOS LOS ELEMENTOS:

|                              |   |              |
|------------------------------|---|--------------|
| CON LA b: ba, be, bi, bo, bu | } | 10 ELEMENTOS |
| CON LA c: ca, ce, ci, co, cu |   |              |

SIN EMBARGO, LA SOLUCION SE PUEDE OBTENER RAPIDAMENTE SIN NECESIDAD DE ENUMERAR TODAS LAS POSIBILIDADES, OBSERVANDO QUE LA PRIMERA LETRA SOLO PUEDE SER DE DOS TIPOS b O c, MIENTRAS QUE LA SEGUNDA, DE CINCO TIPOS a, e, i, o, u, POR LO QUE EL TOTAL DE ELEMENTOS ES  $2 \times 5 = 10$ , ES DECIR, EL EVENTO C PUEDE OCURRIR DE 10 MANERAS DISTINTAS E IGUALMENTE PROBABLES.

REGLA DE LA MULTIPLICACION

EN GENERAL, SI DOS EVENTOS, A Y B, PUEDEN OCURRIR DE  $N(A)$  Y  $N(B)$  MANERAS DISTINTAS, RESPECTIVAMENTE, ENTONCES EL TOTAL DE MANERAS EN QUE AMBOS PUEDEN OCURRIR, EN EL ORDEN INDICADO, ES  $N(A) \times N(B)$ . ESTA REGLA SE PUEDE GENERALIZAR A MAS DE DOS EVENTOS.

EJEMPLO

¿CUANTOS NUMEROS PARES DE TRES CIFRAS SE PUEDEN FORMAR UTILIZANDO LOS DIGITOS 5, 6, 7, 8 Y 9, SIN QUE SE USE EL MISMO DIGITO EN LAS DECENAS Y LAS CENTENAS?

SOLUCION.- SEAN LOS EVENTOS

A = {X: X ESTA EN LAS CENTENAS}

B = {Y: Y ESTA EN LAS DECENAS}

C = {Z: Z ESTA EN LAS UNIDADES Y ES PAR}

D = {XYZ: X ∈ A; Y ∈ B; Z ∈ C}

PUESTO QUE NO SE PERMITE REPETICION DE DIGITOS,  $N(A) = 5$ ,  $N(B) = 4$ .

ADEMAS, PUESTO QUE EL NUMERO DEBE SER PAR,  $N(C) = 2$ , POR LO TANTO

$$N(D) = 5 \times 4 \times 2 = 40$$

SI EL ULTIMO DIGITO NO TUVIESE QUE SER PAR:  $S = \{XYZ: X \in A; Y \in B; Z \in F\}$

DONDE  $F = \{Z: Z \text{ ESTA EN LAS UNIDADES}\}$

ENTONCES  $N(F) = 5$  Y  $N(S) = 5 \times 4 \times 5 = 100$ .

CON ESTO, CALCULEMOS LA PROBABILIDAD DE QUE AL SACAR UN NUMERO DE TRES

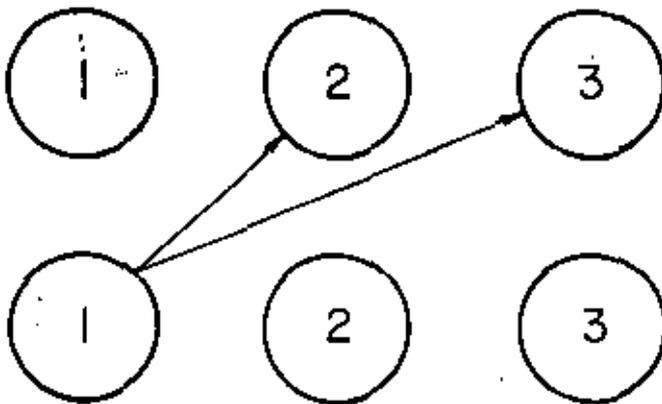
ES 5 Y SE ANOTAN TODOS LOS NUMEROS DEL MISMO EN UNA TIRA DE PAPEL.

AL SACAR UN NUMERO AL AZAR DE UNA URNA, EL NUMERO SEA PAR:

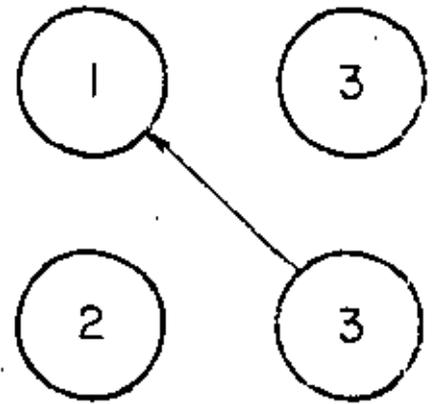
$$P(A) = \frac{N(A)}{N} = \frac{N(A)}{N(S)} = \frac{40}{100} = 0.4$$

## EJEMPLO

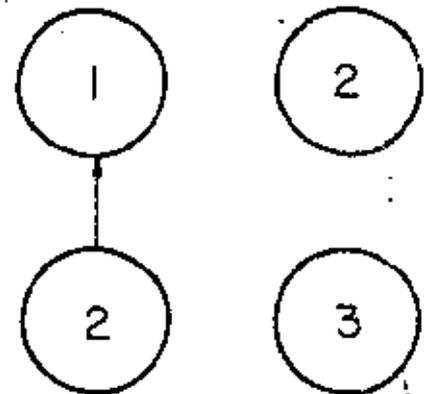
EN UNA CAJA SE TIENEN TRES PERFORACIONES NUMERADAS DEL UNO AL TRES. SI SE HECHAN EN ELLA TRES BOLAS TAMBIEN NUMERADAS DEL 1 AL 3 Y SE AGITA LA CAJA, CALCULAR LA PROBABILIDAD DE QUE NINGUNA BOLA CAIGA EN LA PERFORACION QUE TIENE SU NUMERO (EVENTO A)



2 POSIBILIDADES



1 POSIBILIDAD



1 POSIBILIDAD

$$N(A) = 2 \times 1 \times 1 = 2$$

$$N = 3 \times 2 \times 1 = 6$$

$$P(A) = \frac{N(A)}{N} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

EJEMPLO

SE DISPONE DE TRES BANDERAS: UNA BLANCA, UNA NEGRA Y UNA VERDE.

1. SI CADA PAREJA DE BANDERAS DE DISTINTO COLOR CONSTITUYE UNA SEÑAL, ¿CUANTAS SEÑALES SE PUEDEN HACER SI EL ORDEN DE COLOCACION DE LAS BANDERAS ES IMPORTANTE (EVENTO A)?

$$N(A) = 3 \times 2 = 6$$

2. SI TRES BANDERAS TAMBIEN CONSTITUYEN UNA SEÑAL CUANDO TODAS SON DE DIFERENTE COLOR ¿CUANTAS SEÑALES PODEMOS HACER CON LAS 3 BANDERAS A LA VEZ (EVENTO B)?

$$N(B) = 3 \times 2 \times 1 = 6$$

3. ¿CUANTAS SEÑALES SE PUEDEN HACER CON DOS O TRES BANDERAS EN LAS CONDICIONES ANTERIORES (EVENTOS C)?  $C = A \cup B$

$$N(C) = N(A) + N(B) = 6 + 6 = 12$$

4. SI CADA SEÑAL DEL EVENTO C SE DIBUJA EN UNA TIRA DE PAPEL Y LUEGO SE COLOCAN EN UNA URNA, ¿CUAL ES LA PROBABILIDAD DE QUE SI SE TOMA UNA AL AZAR,

- A) SALGA UNA SEÑAL ESPECIFICA (EVENTO F):  $(S = C)$

$$P(F) = N(F) / N(C) = 1 / 12$$

- B) SALGA UNA SEÑAL CON DOS BANDERAS POR LO MENOS (EVENTO G):

$$G = C \Rightarrow N(G) = 12 \Rightarrow P(G) = \frac{12}{12} = 1$$

- C) SALGA UNA SEÑAL CON DOS BANDERAS, UNA DE ELLAS VERDE (EVENTO H):

$$N(H) = 1 \times 2 + 2 \times 1 = 4 \Rightarrow P(H) = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

- D) SALGA UNA SEÑAL CON TRES BANDERAS, UNA DE ELLAS VERDE (EVENTO I).

$$N(I) = 1 \times 2 \times 1 + 1 \times 1 \times 2 + 2 \times 1 \times 1 = 6$$

$$P(I) = 6 / 12 = 1 / 2 = 50\%$$

E) SALGA UNA SEÑAL CON DOS O TRES BANDERAS EN QUE SE USE UNA VERDE (EVENTO J)

$$J = HUI \Rightarrow N(J) = N(H) + N(I) = 4 + 6 = 10$$

$$P(J) = 10/12 = 5/6$$

### PERMUTACIONES

EL ARREGLO DE N OBJETOS EN CIERTO ORDEN SE DENOMINA PERMUTACION. POR EJEMPLO, TODAS LAS PERMUTACIONES QUE PUEDEN HACERSE CON LAS LETRAS A, B, C SON: ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA. EL TOTAL ES  $3 \times 2 \times 1 = 6$  PERMUTACIONES ( $N=3$ ).

EN GENERAL, EL NUMERO DE PERMUTACIONES ES  $N(N-1)(N-2)(N-3) \times \dots \times 1 = N!$

### EJEMPLO

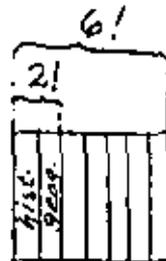
¿CUANTAS PERMUTACIONES SE PUEDEN HACER CON 5 OBJETOS?

$$5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$$

### EJEMPLO

EN UN LIBRERO SE COLOCARAN AL AZAR 7 LIBROS. CALCULEMOS LA PROBABILIDAD DE QUE EL DE HISTORIA Y EL DE GEOGRAFIA QUEDEN JUNTOS (EVENTO A).

$$P(A) = N(A)/N$$

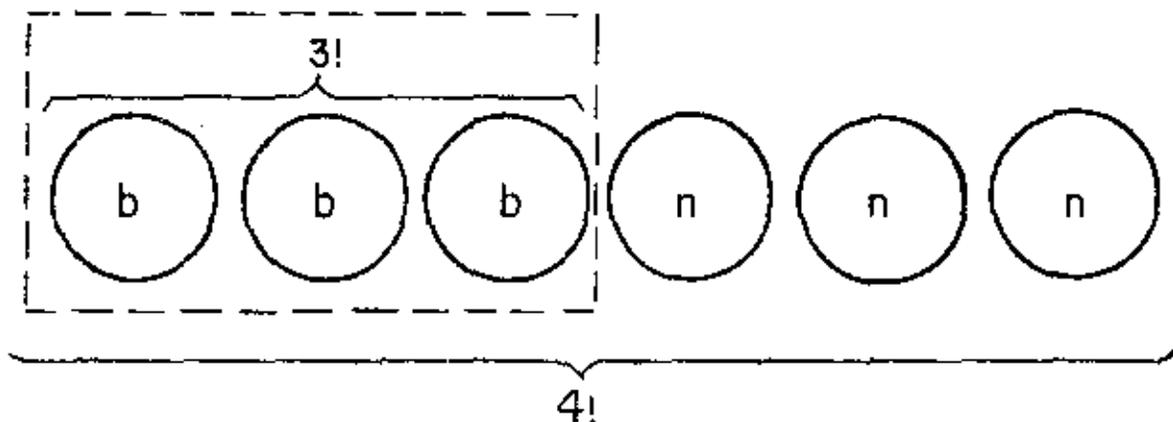


$$N = 7! = 7 \times (6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1) = 7 \times 6!$$

$$N(A) = 2! \times 6! ; P(A) = \frac{2! \times 6!}{7!} = \frac{2! \times 6!}{7 \times 6!} = \frac{2}{7}$$

EJEMPLO

EN UNA URNA SE TIENEN 6 ESFERAS, DE LAS CUALES 3 SON BLANCAS Y 3 SON NEGRAS. SI LAS SEIS SE EXTRAEN AL AZAR, UNA TRAS OTRA, SIN -  
REPLAZO LA PROBABILIDAD DE QUE LAS 3 BLANCAS SALGAN EN FORMA CON-  
SECUTIVA (EVENTO F) ES:



$$N(F) = 3! \times 4! \quad ; \quad N = 6!$$

$$P(F) = N(F)/N = \frac{3! \times 4!}{6!} = \frac{3! \times 4!}{6 \times 5 \times 4!}$$

$$P(F) = \frac{3 \times 2 \times 1}{6 \times 5} = \frac{1}{5}$$

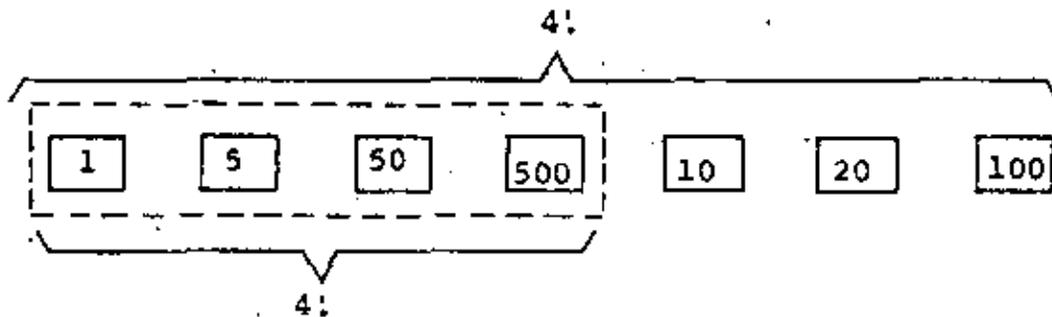
LA PROBABILIDAD DE QUE LAS TRES BLANCAS SALGAN AL PRINCIPIO (EVENTO G)  
ES:

$$N(G) = 3! \times 3! \quad , \quad P(G) = \frac{3! \times 3!}{6!} = \frac{3! \times 3!}{6 \times 5 \times 4 \times 3!} = \frac{1}{20}$$

EJEMPLO

EN UNA URNA SE TIENEN 7 SOBRES IDENTICOS Y CADA UNO CONTIENE UN BILLETE DE DIFERENTE DENOMINACION (1,5,10,20,50,100 y 500 PESOS)

¿CUAL ES LA PROBABILIDAD DE 1,5,50 y 500 PESOS SALGAN CONSECUTIVAMENTE EN CUALQUIER ORDEN, SI SE SACAN LOS SIETE AL AZAR, UNO TRAS OTRO (EVENTO A)?..



$$N(A) = 4! \times 4!; \quad N = 7!$$

$$P(A) = \frac{4! \times 4!}{7!} = \frac{4! \times 4!}{7 \times 6 \times 5 \times 4!} = \frac{4 \times 3 \times 2 \times 1}{7 \times 6 \times 5} = \frac{4}{35}$$

PERMUTACIONES PARCIALES

EL NUMERO DE MANERAS EN QUE SE PUEDEN ORDENAR N OBJETOS TOMANDO DE r EN r ES:

$$N^P_r = \frac{N!}{(N-r)!}$$

ESTO ES EQUIVALENTE A DECIR QUE  $N^P_r$  ES EL NUMERO DE DIFERENTES MANERAS EN QUE r OBJETOS PUEDEN SER SELECCIONADOS DE N OBJETOS ( $r < N$ ) SIN REEMPLAZAR NINGUNO DE ELLOS AL LOTE ANTES DE SACAR EL SIGUIENTE,

OBSERVESE QUE SI  $r=N$ :

$$N^P_N = \frac{N!}{(N-N)!} = \frac{N!}{0!} = N!$$

EJEMPLO

SI SE TIENEN LAS LETRAS A, B, C, D, EL NUMERO DE MANERAS EN QUE SE PUEDEN ORDENAR TOMANDO DE 2 EN 2 ES

$$4^P_2 = \frac{4!}{(4-2)!} = \frac{4 \times 3 \times 2!}{2!} = 12$$

EL CONJUNTO DE ESTAS POSIBILIDADES ES:

$$S = \{AB, AC, AD, BA, BC, BD, CA, CB, CD, DA, DB, DC\}$$

OBSERVESE QUE CUANDO EL ORDEN ES IMPORTANTE, AC NO ES LO MISMO QUE CA, ETC.

LA PROBABILIDAD DE QUE SALGAN CONSECUTIVAMENTE Y EN EL ORDEN 1, 5, 50, 500 ES:

$$N(B) = 1 \times 4! , P(B) = \frac{4!}{7!} = \frac{4!}{7 \times 6 \times 5 \times 4!} = \frac{1}{210}$$

COMBINACIONES

CUANDO EL ORDEN NO ES IMPORTANTE, ES DECIR, SI EL AGRUPAMIENTO GA ES EL MISMO QUE EL AG, A LOS AGRUPAMIENTOS SE LES DENOMINA COMBINACIONES. POR EJEMPLO, SI SE FORMARA UNA COMISION DE 2 INDIVIDUOS DE UN GRUPO DE 8 TOMANDO SUS NOMBRES AL AZAR DE UNA URNA, Y DESEAMOS SABER CUANTOS COMITES DE 2 MIEMBROS PODRIAN FORMARSE COMO RESULTADO DEL PROCESO, ENTONCES LOS RESULTADOS (PEDRO, JOSE) Y (JOSE, PEDRO) CONSTITUIRIAN EL MISMO COMITE, ES DECIR, NO IMPORTARIA EN QUE ORDEN SE SACARAN SUS NOMBRES DE LA URNA.

ASI, SE PUEDE DEMOSTRAR QUE EL NUMERO DE COMBINACIONES POSIBLES DE FORMAR DE N OBJETOS TOMANDO DE r EN r ES:

$${}^N C_r = \binom{N}{r} = \frac{N!}{(N-r)!r!}$$

ESTO EQUIVALE A DECIR QUE  ${}^N C_r$  ES EL NUMERO DE MANERAS DISTINTAS EN QUE r OBJETOS PUEDEN SELECCIONARSE DE N ( $r < N$ ) SIN REEMPLAZO Y SIN IMPORTAR EL ORDEN EN QUE APAREZCAN.

CUANDO UNO SE ENFRENTA A UN PROBLEMA QUE IMPLICA LA REPETICION DE UN EXPERIMENTO, ES NECESARIO DETERMINAR SI HAY O NO REEMPLAZO DE LAS OBSERVACIONES. POR EJEMPLO, EL REPETIR EL LANZAMIENTO DE UN DADO Y OBSERVAR CADA VEZ EL NUMERO QUE QUEDA HACIA ARRIBA LLEVA IMPLICITO QUE HAY REEMPLAZO.

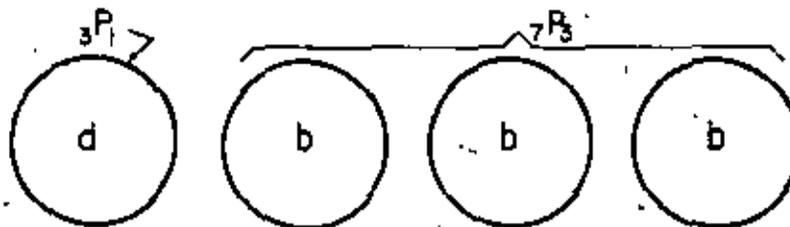
EJEMPLO

UNA CAJA CONTIENE 10 FOCOS, DE LOS CUALES 3 SON DEFECTUOSOS. SI SE LECCIONAMOS 4 AL AZAR SIN REEMPLAZO

- A) ¿CUANTOS SON LOS RESULTADOS POSIBLES, ES DECIR, CUANTOS ELEMENTOS TIENE EL ESPACIO DE EVENTOS?

$$N(S) = {}_{10}P_4 = \frac{10!}{(10-4)!} = 10 \times 9 \times 8 \times 7 = 5040$$

- B) ¿CUANTOS ELEMENTOS DE S TIENEN COMO PRIMER RESULTADO UN FOCO DEFECTUOSO Y TRES FOCOS BUENOS EN LOS OTROS TRES?

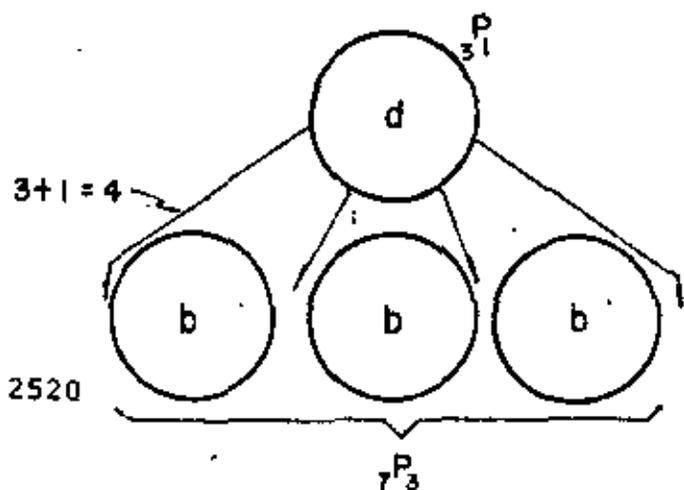


$$N(A) = {}_3P_1 \times {}_7P_3 = \frac{3!}{(3-1)!} \times \frac{7!}{(7-3)!} = \frac{3!}{2!} \times \frac{7!}{4!}$$

$$N(A) = 3 \times (7 \times 6 \times 5) = 630$$

$$\Rightarrow P(A) = 630/5040 = 63/504$$

- C) ¿CUANTOS ELEMENTOS DE S TIENEN UN FOCO DEFECTUOSO Y 3 BUENOS?



$$N(B) = 4 \times {}_3P_1 \times {}_7P_3 = 4 \times 630 = 2520$$

$$\Rightarrow P(B) = \frac{2520}{5040} = \frac{1}{2}$$

PERMUTACIONES DE GRUPOS DE OBJETOS

"EL NUMERO DE PERMUTACIONES POSIBLES DE N OBJETOS DE LOS CUALES SE TIENEN  $N_1$  IGUALES ENTRE SI EN EL PRIMER GRUPO,  $N_2$  IGUALES ENTRE SI EN EL SEGUNDO GRUPO, ETC, HASTA  $N_K$  IGUALES EN EL K-ESIMO GRUPO (LOS GRUPOS SON DISTINGUIBLES ENTRE SI), DE MANERA QUE  $N_1 + N_2 + \dots + N_K = N$  QUEDA DADO POR LA FORMULA:

$${}^N P_{N_1, N_2, \dots, N_K} = \frac{N!}{N_1! N_2! \dots N_K!}$$

EJEMPLO

EN EL INCISO C DEL EJEMPLO ANTERIOR SE TIENEN DOS GRUPOS EN LA MUESTRA, EL DE DEFECTUOSOS CON UN SOLO ELEMENTO, ES DECIR  $N_1=1$ , Y EL DE BUENOS, CON TRES ELEMENTOS,  $N_2=3$ , QUE SE PERMUTAN POR GRUPO DE  ${}^4 P_{1,3} = \frac{4!}{1!3!} = 4$  MANERAS DISTINTAS.

EJEMPLO

ENUMERE LAS PERMUTACIONES QUE SE PUEDEN HACER CON DOS GRUPOS DE BOLAS, 2 NEGRAS Y 2 BLANCAS.

b b n n

$n_1 = 2$

b n b n

b n n b

$n_2 = 2$

n b b n

n n b b

${}^4 P_{2,2} = \frac{4!}{2! 2!} = 6$

n b n b

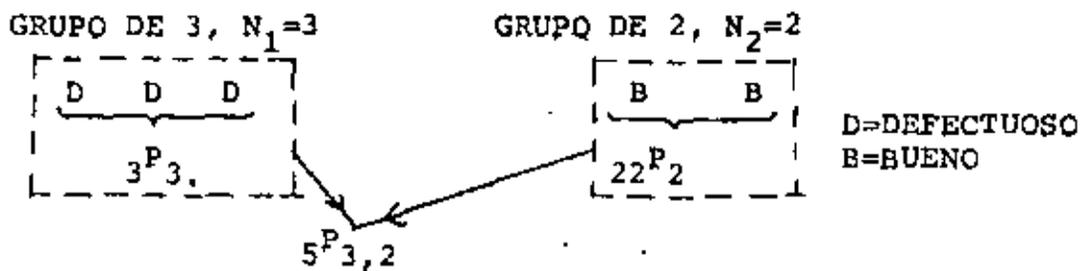
EJEMPLO

UNA CAJA CONTIENE 25 TRANSISTORES DE LOS CUALES 3 SON DEFECTUOSOS.  
¿CUAL ES LA PROBABILIDAD DE QUE, SI SE EXTRAEN 5 AL AZAR SIN  
REEMPLAZO,

- A) SE OBTENGAN LOS 3 DEFECTUOSOS  
B) SE OBTENGAN SOLO 2 DEFECTUOSOS  
C) SE OBTENGA SOLO 1 DEFECTUOSO  
D) NO SE OBTENGA NINGUNO DEFECTUOSO?

SOLUCION:

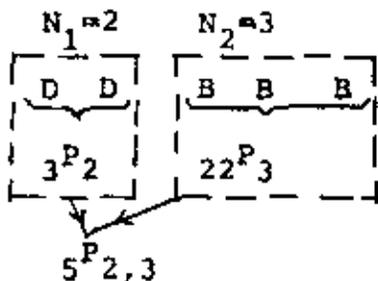
$$A) N(S) = 25^P_5 = \frac{25!}{(25-5)!} = \frac{25!}{20!}$$



$$N(A) = 3^P_3 \cdot 2^P_2 \cdot 5^P_{3,2} = 3! \cdot \frac{2!}{(2-2)!} \cdot \frac{5!}{3! \cdot 2!}$$

$$N(A) = 60 \cdot \frac{2!}{20!}$$

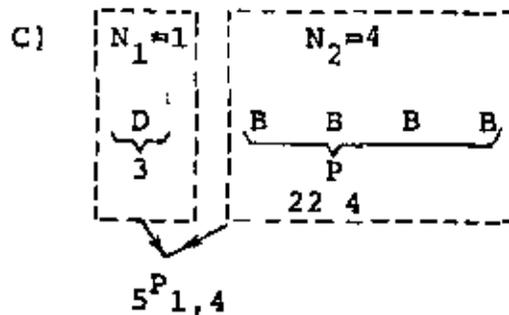
$$P(A) = \frac{60 \cdot \frac{2!}{20!}}{\frac{25!}{20!}} = 60 \cdot \frac{2!}{25!} = \frac{60}{13800}$$



$$N(B) = 3^P 2 \times 22^P 3 \times 5^P 2,3 = \frac{3!}{(3-2)!} \frac{22!}{(22-3)!} \frac{5!}{2! \times 3!}$$

$$N(B) = 3! \frac{22!}{19!} \frac{5 \times 4}{2} = 60 \frac{22!}{19!}$$

$$P(B) = \frac{60 \frac{22!}{19!}}{\frac{25!}{20!}} = 60 \frac{22!}{25!} \frac{20 \times 19!}{19!} = \frac{1200}{13800}$$

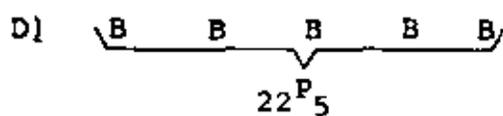


$$N(C) = 3 \times 22^P 4 \times 5^P 1,4$$

$$N(C) = 3 \frac{22!}{(22-4)!} \times \frac{5!}{1! \times 4!}$$

$$N(C) = 3 \frac{22!}{18!} \frac{5 \times 4!}{1 \times 4!} = 15 \frac{22!}{18!}$$

$$P(C) = \frac{15 \frac{22!}{18!}}{\frac{25!}{20!}} = \frac{15 \times 20 \times 19 \times 18!}{\frac{25!}{22!} \times 18!} = \frac{5700}{13800}$$



$$N(D) = 22^P 5 = \frac{22!}{(22-5)!} = \frac{22!}{17!}$$

$$P(D) = \frac{22!/17!}{\frac{25!}{20!}} = \frac{20 \times 19 \times 18 \times 17!}{\frac{25!}{22!} \times 17!}$$

$$P(D) = 6840/13800$$

OBSERVESE QUE EN ESTE EJEMPLO HEMOS CALCULADO LAS PROBABILIDADES DE TODOS LOS ELEMENTOS DEL ESPACIO DE EVENTOS CORRESPONDIENTE AL "NUMERO DE DEFECTUOSOS QUE SE PUEDEN OBSERVAR EN UNA SELECCION AL AZAR DE 5 ELEMENTOS", EN LA CUAL SOLO SE PUEDEN TENER 0, 1, 2, O 3 DEFECTUOSOS, ES DECIR,

$$S = \{0, 1, 2, 3\}$$

VERIFIQUEMOS QUE, EN EFECTO,  $P(S) = 1$ :

$$P(S) = P(\{0\}) + P(\{1\}) + P(\{2\}) + P(\{3\})$$

$$= \frac{6840}{13800} + \frac{5700}{13800} + \frac{1200}{13800} + \frac{60}{13800}$$

$$= \frac{13800}{13800} = 1$$

PROBABILIDAD CONDICIONAL

LA PROBABILIDAD CONDICIONAL,  $P(A|B)$ , DEL EVENTO A, DADO QUE EL B HA OCURRIDO SE CALCULA CON LA FORMULA

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad ; \quad P(B) > 0 \quad (1)$$

EVENTOS INDEPENDIENTES

SI DOS EVENTOS, A Y B, SON INDEPENDIENTES, LA PROBABILIDAD DE A NO SE ALTERA SI OCURRE EL EVENTO B; ES DECIR, DOS EVENTOS SON INDEPENDIENTES SI

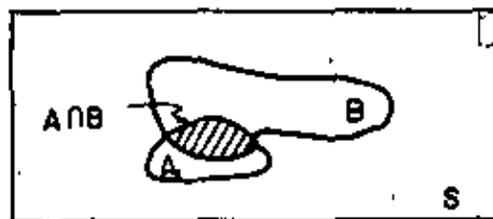
$$P(A|B) = P(A)$$

EN TAL CASO, DE LA ECUACION 1;

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B) \quad (1')$$

PUESTO QUE  $P(A \cap B) = N(A \cap B) / N(S)$  Y  $P(B) = N(B) / N(S)$  LA ECUACION 1 SE PUEDE ESCRIBIR COMO

$$P(A|B) = \frac{\frac{N(A \cap B)}{N(S)}}{\frac{N(B)}{N(S)}} = \frac{N(A \cap B)}{N(B)} \quad (2)$$



EL TRABAJAR CON LA ECUACION 2 EQUIVALE A EMPLEAR UN ESPACIO DE EVENTOS REDUCIDO DE S A B.

EJEMPLO

EN UNA URNA HAY 10 TRANSISTORES BUENOS Y 10 DEFECTUOSOS. ¿CUAL ES LA PROBABILIDAD DE SACAR UNO BUENO Y UNO DEFECTUOSO (EN CUALQUIER ORDEN) AL REALIZAR DOS EXTRACCIONES AL AZAR?, SI HAY REEMPLAZO DEL PRIMER TRANSISTOR OBSERVADO?

HAY VARIAS FORMAS DE RESOLVER ESTE PROBLEMA:

1. PUESTO QUE EL NUMERO DE DEFECTUOSOS ES IGUAL AL DE BUENOS, SE PUEDE FORMULAR EL SIGUIENTE ESPACIO DE EVENTOS, EN EL QUE TODOS LOS ELEMENTOS SON IGUALMENTE PROBABLES:

$$S = \{(d,d), (d,b), (b,b), (b,d)\}$$

EL EVENTO DE INTERES ES:

$$A = \{(d,b), (b,d)\}$$

$$\text{POR LO QUE } N(S) = 4, N(A) = 2$$

$$\text{Y } P(A) = 2/4 = 1/2$$

2. HAY  $10 \times 10$  MANERAS DISTINTAS DE QUE SALGA PRIMERO EL BUENO Y LUEGO EL DEFECTUOSO, Y OTRAS TANTAS DE QUE OCURRA DE MANERA INVERSA. POR LO TANTO:

$$N(A) = (10 \times 10) \times 2 = 200$$

$$N(S) = 20 \times 20 = 400$$

$$P(A) = 200/400 = 1/2$$

3. SEAN LOS EVENTOS

$$B = \{\text{SALE PRIMERO EL BUENO Y LUEGO EL DEFECTUOSO}\} = \{(b, d)\}$$

$$F = \{\text{SALE PRIMERO EL DEFECTUOSO Y LUEGO EL BUENO}\} = \{(d, b)\}$$

$$D = \{\text{SALE PRIMERO EL BUENO}\}$$

$$E = \{\text{SALE SEGUNDO EL DEFECTUOSO}\}$$

$$O = \{\text{SALE PRIMERO EL DEFECTUOSO}\}$$

$$R = \{\text{SALE SEGUNDO EL BUENO}\}$$

POR LO TANTO, AL REALIZAR LAS DOS EXTRACCIONES CONSECUTIVAMENTE:

$$B = D \cap E \quad \text{Y} \quad F = O \cap R$$

SI  $A = \{\text{SALE UNO BUENO Y UNO MALO}\} = B \cup F$

SE TIENE QUE  $P(A) = P(B) + P(F)$

YA QUE B Y F SON MUTUAMENTE EXCLUSIVOS, Y

$$P(B) = P(D \cap E) = \frac{10}{20} \times \frac{10}{20} = \frac{100}{400} = \frac{1}{4}$$

$$P(F) = P(O \cap R) = \frac{10}{20} \times \frac{10}{20} = \frac{1}{4}$$

YA QUE D Y E, Y O Y R SON INDEPENDIENTES. ESTO CONDUCE A

$$P(A) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

RESOLVAMOS AHORA ESTE PROBLEMA SI NO HAY REEMPLAZO:

$$P(D \cap E) = P(E|D)P(D) = \frac{10}{19} \times \frac{10}{20} = \frac{10}{38}, \text{ YA QUE}$$

$$P(D) = 10/20, P(E|D) = 10/19 \text{ ANALOGAMENTE, } P(F) = \frac{10}{38},$$

$$\text{POR LO QUE } P(A) = \frac{10}{38} + \frac{10}{38} = \frac{10}{19}.$$

#### INDEPENDENCIA DE UN GRUPO DE EVENTOS

EN GENERAL, LOS EVENTOS  $A_1, A_2, \dots, A_M$

SON INDEPENDIENTES SI, Y SOLO SI,

$$P(A_{K_1} \cap A_{K_2} \cap \dots \cap A_{K_R}) = P(A_{K_1}) \times P(A_{K_2}) \times \dots \times P(A_{K_R})$$

PARA CUALQUIER GRUPO DE ENTEROS  $K_1, K_2, \dots, K_R$ , CON  $K_R \leq M$  (TODAS LAS PAREJAS, TERCIAS, ETC, DE EVENTOS POSIBLES DE FORMARSE DEBEN SER INDEPENDIENTES).

DICHO DE OTRA MANERA, LOS EVENTOS  $A_1, A_2, \dots, A_M$  SON INDEPENDIENTES SI LOS ELEMENTOS DE TODOS LOS SUBCONJUNTOS POSIBLES DE  $R = \{A_1, A_2, \dots, A_M\}$  SON INDEPENDIENTES.

EJEMPLO

SI  $M=3$ ,  $A_1$ ,  $A_2$  Y  $A_3$  SON INDEPENDIENTES SI, Y SOLO SI,

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1)P(A_2)$$

$$P(A_1 \cap A_3) = P(A_1)P(A_3)$$

$$P(A_2 \cap A_3) = P(A_2)P(A_3)$$

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1)P(A_2)P(A_3)$$

TODAS LAS COMBINACIONES QUE PUE DAN  
FORMARSE CON DOS EVENTOS:

$\{A_1, A_2\}, \{A_1, A_3\}, \{A_2, A_3\}$

SI  $M=4$ , PARA QUE  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $A_3$  Y  $A_4$  SEAN INDEPENDIENTES SE REQUIERE QUE SE CUMPLA QUE

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) = P(A_1)P(A_2)P(A_3)P(A_4)$$

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1)P(A_2)P(A_3)$$

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_4) = P(A_1)P(A_2)P(A_4)$$

$$P(A_2 \cap A_3 \cap A_4) = P(A_2)P(A_3)P(A_4)$$

$$P(A_1 \cap A_3 \cap A_4) = P(A_1)P(A_3)P(A_4)$$

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1)P(A_2)$$

$$P(A_1 \cap A_3) = P(A_1)P(A_3)$$

$$P(A_1 \cap A_4) = P(A_1)P(A_4)$$

$$P(A_2 \cap A_3) = P(A_2)P(A_3)$$

$$P(A_2 \cap A_4) = P(A_2)P(A_4)$$

$$P(A_3 \cap A_4) = P(A_3)P(A_4)$$

TODAS LAS COMBINACIONES DE  
TRES EVENTOS QUE PUE DAN FOR-  
MARSE =  $4^C_3 = \frac{4!}{3!1!} = 4$

TODAS LAS COMBINACIONES DE  
DOS EVENTOS QUE PUE DAN FOR-  
MARSE =  $4^C_2 = \frac{4!}{2!2!} = 6$

EJEMPLO

LA URNA A CONTIENE 10 ARTICULOS, DE LOS CUALES 3 SON DEFECTUOSOS;  
 LA URNA B CONTIENE 6 ARTICULOS DE LOS CUALES 2 SON DEFECTUOSOS.  
 SI SE SACA AL AZAR UNO DE CADA URNA:

- a. ¿CUAL ES LA PROBABILIDAD DE QUE UNO SEA DEFECTUOSO Y EL OTRO NO (EVENTO R)?

SEN LOS EVENTOS

$$C = \{(\text{DEFECTUOSO DE A, BUENO DE B})\}$$

$$D = \{(\text{DEFECTUOSO DE B, BUENO DE A})\}$$

EN TAL CASO

$$P(C) = \frac{3}{10} \times \frac{4}{6} = \frac{1}{5}$$

$$P(D) = \frac{2}{6} \times \frac{7}{10} = \frac{7}{30}$$

$$P(R) = P(C) + P(D) = \frac{1}{5} + \frac{7}{30} = \frac{13}{30}$$

- b. ¿CUAL ES LA PROBABILIDAD DE LOS DOS SEAN DEFECTUOSOS (EVENTO T)?

$$T = \{(\text{DEFECTUOSO DE A, DEFECTUOSO DE B})\}$$

$$P(T) = \frac{3}{10} \times \frac{2}{6} = \frac{1}{10}$$

- c. ¿CUAL ES LA PROBABILIDAD DE QUE LOS DOS SEAN BUENOS (EVENTO V)?

$$V = \{(\text{BUENO DE A, BUENO DE B})\}$$

$$P(V) = \frac{7}{10} \times \frac{4}{6} = \frac{7}{15}$$

$$\text{OBSERVESE QUE } P(R) + P(T) + P(V) = \frac{13}{30} + \frac{1}{10} + \frac{7}{15} = 1$$

EJEMPLO

EN UN ESTUDIO SOCIOLOGICO SE INTERROGARON 1200 PERSONAS DE UNA COLONIA RESIDENCIAL, Y SE OBTUVIERON LOS SIGUIENTES DATOS:

| GUSTO POR LA MUSICA CLASICA | TITULO UNIVER-SITARIO |       | SIN TITULO UNI-VERSITARIO |       | $\Sigma$ |
|-----------------------------|-----------------------|-------|---------------------------|-------|----------|
|                             | VARONES               | DAMAS | VARONES                   | DAMAS |          |
| ALTO                        | 100                   | 50    | 200                       | 250   | 600      |
| BAJO                        | 150                   | 100   | 150                       | 200   | 600      |
| $\Sigma$                    | 250                   | 150   | 350                       | 450   | 1200     |

SI  $A = \{\text{VARON}\}$ ,  $B = \{\text{CON TITULO}\}$   
 $C = \{\text{GUSTO ALTO}\}$

¿CUAL ES LA PROBABILIDAD DE QUE SI SE SELECCIONA UN CIUDADANO AL AZAR DE LA MISMA COLONIA, ESTE SEA VARON, TENGA TITULO Y GUSTO ALTO POR LA MUSICA?

POR EL METODO FRECUENCIAL:

$$\text{NUMERO DE VARONES} = 250 + 350 = 600$$

$$\text{NUMERO DE PERSONAS CON TITULO} = 250 + 150 = 400$$

$$\text{NUMERO DE PERSONAS CON ALTO GUSTO POR LA MUSICA CLASICA} = 600$$

POR LO TANTO

$$P(A) = 600/1200 = 1/2, \quad P(B) = 400/1200 = \frac{1}{3}$$

Y  $P(C) = 600/1200 = 1/2$ . PUESTO QUE

$D = A \cap B \cap C$  Y A, B Y C SON INDEPENDIENTES, SE TIENE QUE

$$P(D) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{12}$$

DE OTRA MANERA:  $P(D) = 100/1200 = 1/12$ .

LEY GENERAL DE MULTIPLICACION:

DE LA ECUACION (1):

$$P(A \cap B) = P(A|B)P(B)$$

ESTA ECUACION SE PUEDE GENERALIZAR A MAS DE DOS EVENTOS ASI:

$$P(E_1 \cap E_2 \cap \dots \cap E_k) = P(E_1)P(E_2|E_1) \dots P(E_k|E_1, E_2, \dots, E_{k-1}) \quad (3)$$

POR EJEMPLO, SI  $k=4$

$$P(E_1 \cap E_2 \cap E_3 \cap E_4) = P(E_1)P(E_2|E_1)P(E_3|E_1, E_2) \times \\ \times P(E_4|E_1, E_2, E_3)$$

EJEMPLO

¿CUAL ES LA PROBABILIDAD DE QUE AL EXTRAER SIN REEMPLAZO CUATRO CARTAS AL AZAR DE UN PAQUETE DE 52, LAS DOS PRIMERAS SEAN DIAMANTES Y LAS DOS ULTIMAS SEAN CORAZONES (EVENTO E)?

SEAN  $A = \{ \text{LA 1a. ES DIAMANTE} \}$ ,  $B = \{ \text{LA 2a. ES DIAMANTE} \}$ ,  
 $C = \{ \text{LA 3a. ES CORAZON} \}$ ,  $D = \{ \text{LA 4a. ES CORAZON} \}$ .

EN TAL CASO

$$E = A \cap B \cap C \cap D = \{ (d, d, c, c) \}$$

$$P(A) = 13/52, P(B|A) = 12/51, P(C|A, B) = 13/50$$

$$P(D|A, B, C) = 12/49$$

APLICANDO LA ECUACION 3 SE OBTIENE

$$P(E) = \frac{13}{52} \frac{12}{51} \frac{13}{50} \frac{12}{49} = \frac{78}{20825}$$

SI LOS EVENTOS  $E_i$  QUE APARECEN EN LA ECUACION (3) SON INDEPENDIENTES, ENTONCES

$$P(E_1 \cap E_2 \cap \dots \cap E_k) = P(E_1) \times P(E_2) \times \dots \times P(E_k)$$

QUE ES LA LEY GENERAL DE MULTIPLICACION

EJEMPLO

SE TIENEN EN UNA URNA TRES BOLAS BLANCAS Y TRES NEGRAS. ¿CUAL ES LA PROBABILIDAD DE QUE APAREZCAN LAS TRES BLANCAS AL PRINCIPIO SI SE EXTRAEN SIN REEMPLAZO SUCESIVAMENTE LAS SEIS?

$$1. \quad \overbrace{b \ b \ b \ n \ n \ n}^{6!}$$

$$\quad \quad \quad \underbrace{3!} \quad \quad \quad \underbrace{3!}$$

CON PERMUTACIONES:

$$N(A) = 3! \times 3!$$

$$N(S) = 6!$$

$$P(A) = 3! \ 3! / 6! = 1/20$$

$$2. \quad \boxed{b \ b \ b} \ n \ n \ n.$$

CON PERMUTACIONES POR GRUPOS:

$$N(A) = 1$$

$$N(S) = 6^{P}_{3,3} = \frac{6!}{3!3!} = 20$$

$$P(A) = 1/20$$

$$3. \quad \begin{array}{ccccccc} & b & b & b & \overbrace{n \ n \ n} & & \\ & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & & \\ \text{PROBABILIDADES:} & \frac{1}{2} & \frac{2}{5} & \frac{1}{4} & 1 & & \end{array}$$

CON PROBABILIDADES CONDICIONALES:

$$P(A) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{20}$$

AHORA, ¿CUAL ES LA PROBABILIDAD DE QUE LAS TRES BLANCAS APAREZCAN CONSECUTIVAMENTE?

$$1. \quad \overbrace{\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline b & b & b & n & n & n \\ \hline \end{array}}^{6!}$$

$$\quad \quad \quad \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{3!} \quad \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{4!}$$

CON PERMUTACIONES:

$$P(A) = \frac{3!4!}{6!} = \frac{1}{5}$$

$$2. \quad \boxed{b \ b \ b} \ n \ n \ n$$

CON PERMUTACIONES POR GRUPOS:

$$N(A) = 4P_{1,3} = \frac{4!}{1!3!} = 4, \quad N(S) = 6P_{3,3} = \frac{6!}{3!3!} = 20$$

$$P(A) = 4/20 = 1/5$$

3.

$$\begin{array}{ccccccc} & b & b & b & n & n & n \\ & \uparrow & \uparrow & \uparrow & & & \\ \text{PROBABILIDADES:} & \frac{1}{2} & \frac{2}{5} & \frac{1}{4} & & & 1 \end{array}$$

CON PROBABILIDADES CONDICIONALES:

$$P(A) = \left(\frac{1}{2} \times \frac{2}{5} \times \frac{1}{4}\right) 4P_{1,3} = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}$$

EJEMPLO

DE UN LOTE DE 100 EJES DE RELOJERIA SE EXTRAEN CUATRO AL AZAR SIN REEMPLAZO, ¿CUAL ES LA PROBABILIDAD DE QUE APAREZCAN DOS DEFECTUOSOS (EVENTO A) SI EN EL LOTE HAY 20 POR CIENTO DE DEFECTUOSOS?

1.

$$\begin{array}{cccc}
 & & \overbrace{4^P 2,2}^6 & & \\
 & & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\
 \text{PROBABILIDADES:} & & \frac{20}{100} & \frac{19}{99} & \frac{80}{98} & \frac{79}{97}
 \end{array}$$

CON PROBABILIDAD CONDICIONAL:

$$P(A) = \frac{20}{100} \frac{19}{99} \frac{80}{98} \frac{79}{97} 6 = 0.15$$

2.

$$\begin{array}{c}
 \overbrace{100^P 4} \\
 \overbrace{d \quad d \quad b \quad b} \\
 \underbrace{20^P 2 \quad 80^P 2} \\
 \swarrow \quad \searrow \\
 4^P 2,2
 \end{array}$$

CON PERMUTACIONES PARCIALES Y EN GRUPOS:

$$P(A) = \frac{20! \cdot 80! \cdot 4!}{18! \cdot 78! \cdot 2!2!} = \frac{100!}{96!}$$

$$= \frac{(20 \times 19)(80 \times 79)(6)}{100 \times 99 \times 98 \times 97} = 0.15$$

LEY GENERAL DE LA ADICION

SI TODOS LOS EVENTOS  $E_i$  SON MUTUAMENTE EXCLUSIVOS ENTRE SI,  
EL AXIOMA 3 TAMBIEN SE GENERALIZA A:

$$P(E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_k) = P(E_1) + P(E_2) + \dots + P(E_k)$$

$$P(\{150\}|A_2) = \frac{P(\{150\})P(A_2|\{150\})}{0.2 \times 0.6076 + 0.5 \times 0.3797 + 0.25 \times 0.0127}$$

$$= \frac{0.12152}{0.12152 + 0.18975 + 0.00318} = \frac{0.12152}{0.31445} = 0.386$$

$$P(\{200\}|A_2) = \frac{P(\{200\})P(A_2|\{200\})}{0.31445} = \frac{0.18975}{0.31445} = 0.604$$

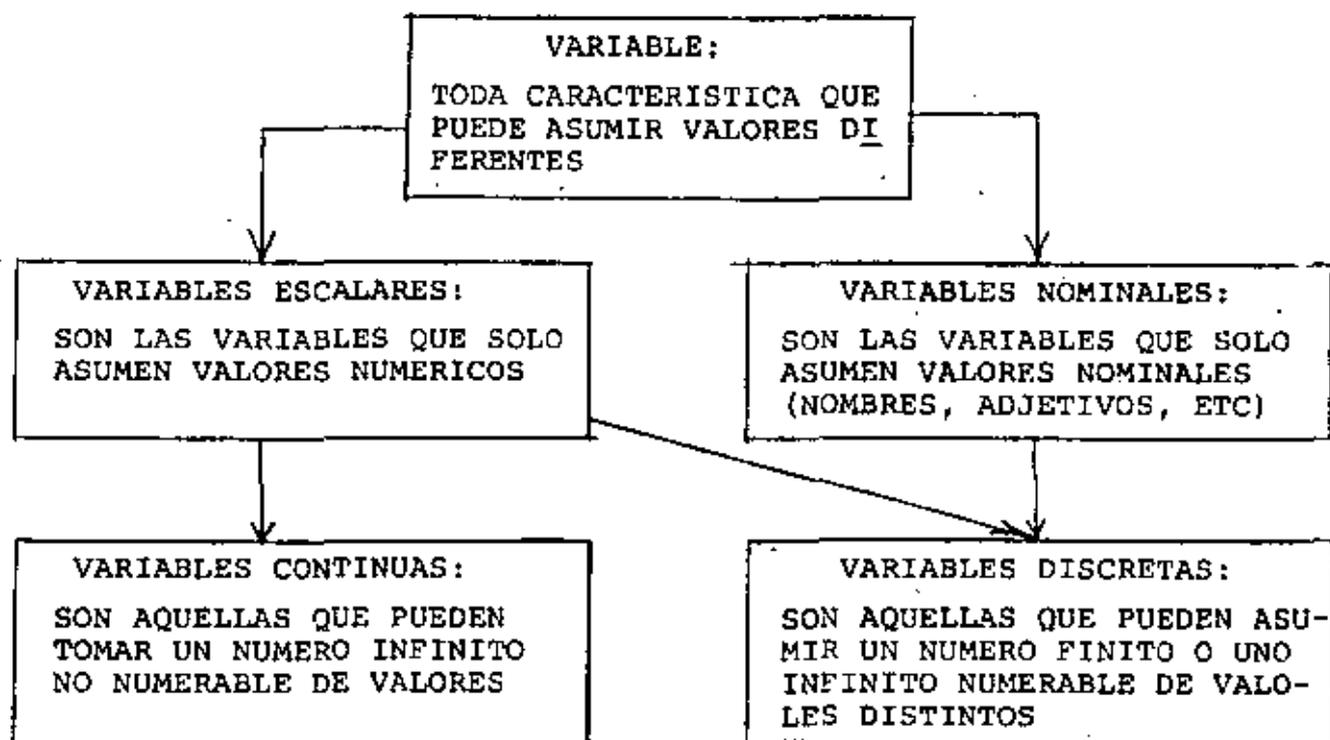
$$P(\{250\}|A_2) = \frac{P(\{250\})P(A_2|\{250\})}{0.31445} = \frac{0.00318}{0.31445} = 0.010$$

QUE SON IGUALES A LAS ANTERIORES.

CON LO ANTERIOR SE DEMUESTRA QUE LAS PROBABILIDADES SE PUEDEN ACTUALIZAR CONFORME SE VA OBTENIENDO NUEVA INFORMACION EXPERIMENTAL.

VARIABLES ALEATORIAS

CLASIFICACION DE VARIABLES



UNA VARIABLE ALEATORIA ES UNA VARIABLE TAL QUE NO PUEDE PREDECIRSE CON CERTEZA EL VALOR QUE ASUMIRA AL REALIZAR UN EXPERIMENTO.

POR EJEMPLO, LA RESISTENCIA O CARGA DE FALLA DE UNAS VIGAS ES UNA VARIABLE ALEATORIA, YA QUE ANTES DE ROMPER UNA VIGA TOMADA AL AZAR NO SE PUEDE PRECISAR CUAL SERA SU RESISTENCIA. EN LA SIGUIENTE TABLA SE PRESENTAN LOS RESULTADOS EXPERIMENTALES CON 15 VIGAS DE CONCRETO REFORZADO, OBSERVANDOSE QUE ESTOS VARIAN DE UNAS A OTRAS DE MANERA ALEATORIA.

TABLA 2. PRUEBAS DE VIGAS DE CONCRETO REFORZADO

| Número de la viga | Carga de agrietamiento, en kg, X | Carga de falla, en kg, Y |
|-------------------|----------------------------------|--------------------------|
| 1                 | 4 700                            | 4 700                    |
| 2                 | 3 840                            | 4 220                    |
| 3                 | 3 270                            | 4 360                    |
| 4                 | 2 310                            | 4 680                    |
| 5                 | 2 950                            | 4 270                    |
| 6                 | 4 810                            | 4 810                    |
| 7                 | 2 720                            | 4 590                    |
| 8                 | 2 720                            | 4 490                    |
| 9                 | 4 310                            | 4 310                    |
| 10                | 2 950                            | 4 630                    |
| 11                | 4 220                            | 4 220                    |
| 12                | 2 720                            | 4 340                    |
| 13                | 2 720                            | 4 340                    |
| 14                | 2 630                            | 4 770                    |
| 15                | 2 950                            | 4 630                    |

A TODO EXPERIMENTO SE LE PUEDE ASOCIAR AL MENOS UNA VARIABLE ALEATORIA, DEPENDIENDO ESTA DEL PROBLEMA QUE SE TENGA PLANTEADO. POR EJEMPLO, EN EL CASO DE LA RESISTENCIA DE LAS VIGAS DE VARIABLE ALEATORIA PUEDE SER DIRECTAMENTE LA DICHA RESISTENCIA, EN CUYO CASO SU ESPACIO DE EVENTOS SERIA

$$S_1 = \{X: 0 < X < \infty\}$$

LA VARIABLE TAMBIEN PUDO HABER SIDO UNA CUYO ESPACIO DE EVENTOS FUERA

$$S_2 = \{\text{EXITO, FRACASO}\}$$

EN DONDE EL EXITO OCURRIRIA SI LA VIGA RESISTIERA MAS DE CIERTA CANTIDAD, POR EJEMPLO 4600 KG, Y EL FRACASO OCURRIRIA SI RESISTIERA MENOS, ES DECIR:

EXITO: SI  $X \geq 4600$  KG

FRACASO: SI  $X < 4600$  KG

### LEYES DE PROBABILIDADES

EL COMPORTAMIENTO DE UNA VARIABLE ALEATORIA SE DESCRIBE MEDIANTE SU LEY DE PROBABILIDADES, LA CUAL PUEDE ESPECIFICARSE DE DIFERENTES FORMAS. LA MANERA MAS COMUN DE HACERLO ES MEDIANTE SU DISTRIBUCION O DENSIDAD DE PROBABILIDADES.

A FIN DE EVITAR CONFUSION, SE EMPLEARA UNA LETRA MAYUSCULA PARA DENOTAR UNA VARIABLE ALEATORIA, Y LA MINUSCULA CORRESPONDIENTE PARA LOS VALORES QUE PUEDE ASUMIR. SI LA VARIABLE ALEATORIA X ES DISCRETA Y PUEDE ASUMIR LOS VALORES  $x_i$ , SU DENSIDAD DE PROBABILIDADES,  $f_X(x)$  SERA EL CONJUNTO DE LAS PROBABILIDADES

$$P_X(x_i) = P(X = x_i)$$

LA CUAL SE LEE "PROBABILIDAD DE QUE  $X = x_i$ ". ESTO ES

$$f_X(x) = \{P_X(x_i)\}$$

PARA QUE UNA DENSIDAD DE PROBABILIDADES SATISFAGA LOS TRES AXIOMAS DE LA TEORIA DE PROBABILIDADES, SE DEBEN CUMPLIR LOS SIGUIENTES REQUISITOS

A)  $0 \leq P_X(x_i) \leq 1$  PARA TODA  $x_i$

B)  $\sum_{i=1}^n P_X(x_i) = 1$ , DONDE  $n$  ES EL NUMERO TOTAL DE VALORES QUE PUEDE ASUMIR X

C)  $P(x_m \leq X \leq x_r) = \sum_{i=m}^{i=r} P_X(x_i)$  ;  $m \leq r$ , DONDE LAS  $x_i$  ESTAN

ORDENADAS EN FORMA CRECIENTE, ES DECIR,

$$x_1 < x_2 < x_3 < \dots < x_n$$

DISTRIBUCION DE PROBABILIDADES ACUMULADAS O FUNCION DE DISTRIBUCION

OTRA FORMA DE ESPECIFICAR LA LEY DE PROBABILIDADES DE UNA VARIABLE ALEATORIA ES MEDIANTE LA DISTRIBUCION DE PROBABILIDADES ACUMULADAS,  $F_X(x)$ , QUE SE DEFINE COMO EL CONJUNTO DE LAS SUMAS PARCIALES DE LAS PROBABILIDADES,  $P_X(x_i)$ , CORRESPONDIENTES A TODOS LOS VALORES DE  $x$  MENORES O IGUALES QUE  $x_1$ . POR LO TANTO, ESTA FUNCION DA LAS PROBABILIDADES DE QUE LA VARIABLE ALEATORIA TOME VALORES MENORES O IGUALES QUE  $x_m$  PARA CUALQUIER  $m$ , ES DECIR

$$F_X(x) = \{F_X(x_m)\} ; m = 1, 2, \dots, n$$

EN DONDE

$$F_X(x_m) = \sum_{i=1}^{i=m} P_X(x_i) = P(X \leq x_m)$$

EJEMPLO

SEA  $X$  LA VARIABLE ALEATORIA DISCRETA "NUMERO TOTAL DE CARROS QUE SE DETIENEN EN UNA ESQUINA DEBIDO A LA LUZ ROJA DE UN SEMAFORO". SI LAS PROBABILIDADES ASOCIADAS A CADA VALOR, DETERMINADAS POR EL METODO FRECUENCIAL, SON

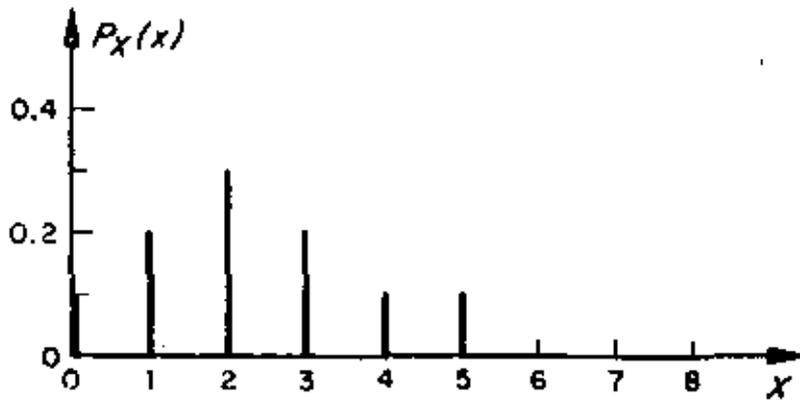
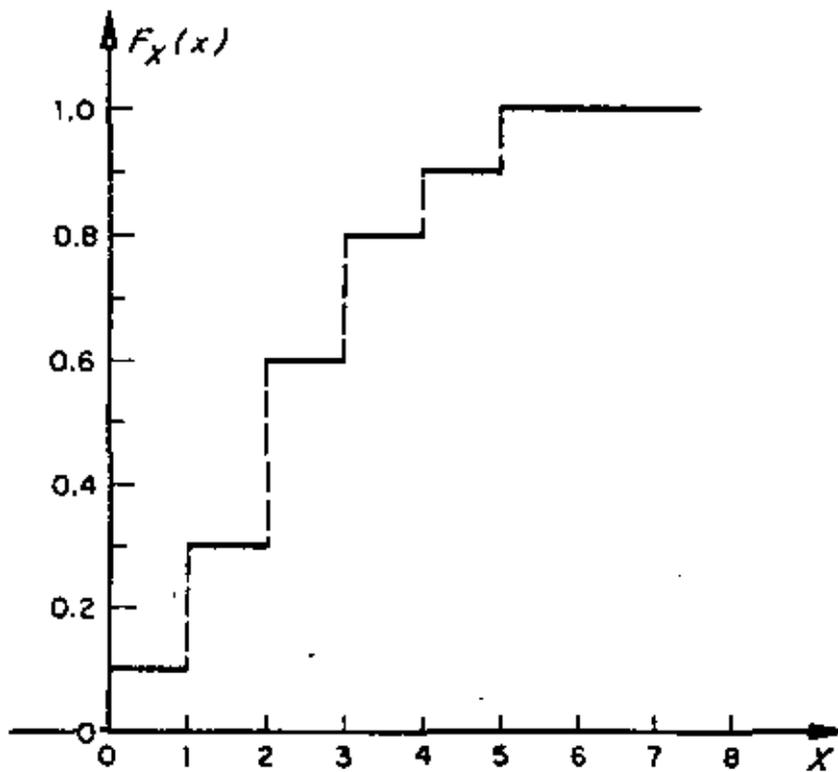
$$P_X(x) = \begin{cases} 0.1 & \text{SI } x = 0 \\ 0.2 & \text{SI } x = 1 \\ 0.3 & \text{SI } x = 2 \\ 0.2 & \text{SI } x = 3 \\ 0.1 & \text{SI } x = 4 \\ 0.1 & \text{SI } x = 5 \\ 0 & \text{SI } x \geq 6 \end{cases}$$

LA DISTRIBUCION DE PROBABILIDADES Y LA DE PROBABILIDADES ACUMULADAS CORRESPONDIENTES SERAN

| $x$      | $f_X(x)$ | $F_X(x)$ |
|----------|----------|----------|
| $< 0$    | 0        | 0        |
| 0        | 0.1      | 0.1      |
| 1        | 0.2      | 0.3      |
| 2        | 0.3      | 0.6      |
| 3        | 0.2      | 0.8      |
| 4        | 0.1      | 0.9      |
| 5        | 0.1      | 1.0      |
| $\geq 6$ | 0        | 1.0      |

O SEA  $F_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{SI } x < 0 \\ 0.1, & \text{SI } 0 \leq x < 1 \\ 0.3, & \text{SI } 1 \leq x < 2 \\ 0.6, & \text{SI } 2 \leq x < 3 \\ 0.8, & \text{SI } 3 \leq x < 4 \\ 0.9, & \text{SI } 4 \leq x < 5 \\ 1.0, & \text{SI } 5 \leq x \end{cases}$

LAS GRAFICAS DE ESTAS DISTRIBUCIONES SE PRESENTAN EN LA FIGURA DE LA SIGUIENTE HOJA.

a) *Distribución de probabilidades*b) *Función de distribución*

*Ley de probabilidades del ejemplo del tráfico*

EJEMPLO

SEA LA VARIABLE ALEATORIA  $X$  DEFINIDA POR LA SUMA DE LOS DOS NUMEROS QUE QUEDEN HACIA ARRIBA AL LANZAR DOS DADOS. EN ESTE CASO EL ESPACIO DE EVENTOS ES

$$S = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$$

Y LA DENSIDAD DE PROBABILIDADES ES

$$f_X(x) = \left( \frac{1}{36}, \frac{2}{36}, \frac{3}{36}, \frac{4}{36}, \frac{5}{36}, \frac{6}{36}, \frac{5}{36}, \frac{4}{36}, \frac{3}{36}, \frac{2}{36}, \frac{1}{36} \right)$$

EN ESTE CASO  $X_1=2, X_2=3, \dots, X_{11}=12$

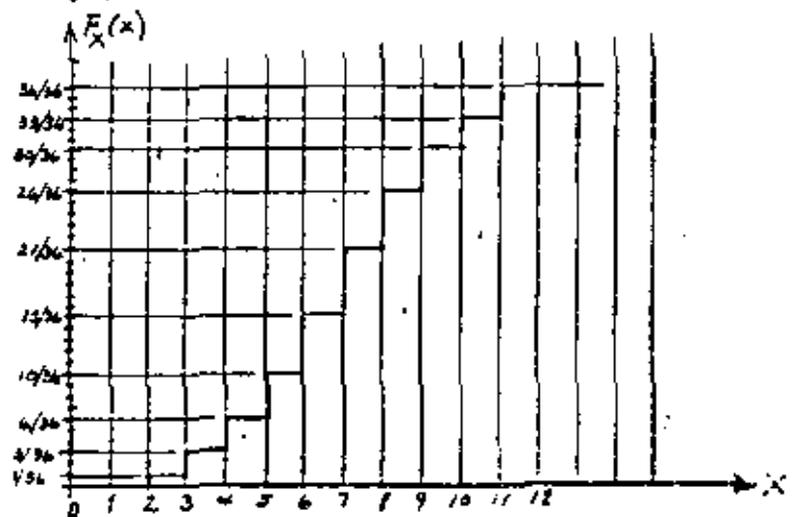
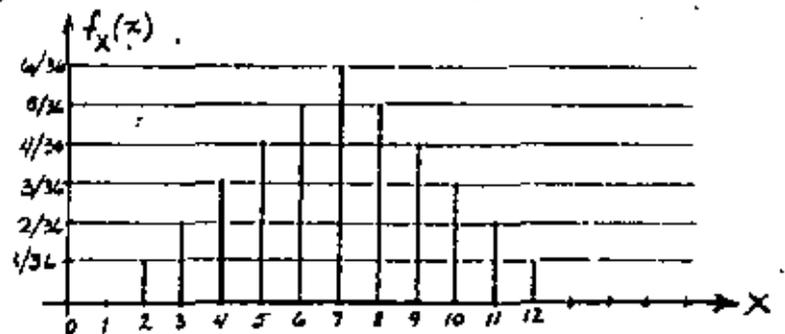
$$Y \quad f_X(2) = \frac{1}{36}, f_X(3) = \frac{2}{36}, \dots, f_X(12) = \frac{1}{36}$$

ESTAS PROBABILIDADES FUERON CALCULADAS EN UN EJEMPLO PREVIO SOBRE PROBABILIDADES DE EVENTOS .

CON ESTAS PROBABILIDADES SE PUEDE OBTENER LA FUNCION DE DISTRIBUCION O DE PROBABILIDADES ACUMULADAS, DE LA SIGUIENTE MANERA:

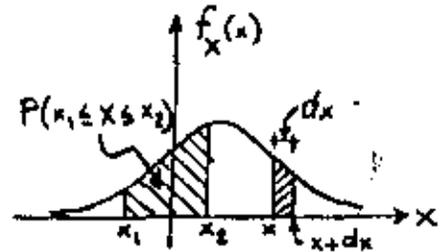
| $x$   | $f_X(x)$ | $F_X(x)$  |
|-------|----------|-----------|
| $<2$  | 0        | 0         |
| 2     | $1/36$   | $1/36$    |
| 3     | $2/36$   | $3/36$    |
| 4     | $3/36$   | $6/36$    |
| 5     | $4/36$   | $10/36$   |
| 6     | $5/36$   | $15/36$   |
| 7     | $6/36$   | $21/36$   |
| 8     | $5/36$   | $26/36$   |
| 9     | $4/36$   | $30/36$   |
| 10    | $3/36$   | $33/36$   |
| 11    | $2/36$   | $35/36$   |
| 12    | $1/36$   | $36/36=1$ |
| $>12$ | 0        | 1         |

$\Sigma=1$



EN EL CASO DE UNA VARIABLE ALEATORIA CONTINUA,  $X$ , LA PROBABILIDAD DE QUE ESTA TOMA UN VALOR COMPRENDIDO ENTRE  $x$  Y  $x + dx$  ESTA DADA POR  $f_X(x)dx$ , DONDE  $f_X(x)$  ES LA DENSIDAD DE PROBABILIDADES DE  $X$ . POR LO TANTO, LA PROBABILIDAD DE QUE  $X$  ASUMA VALORES COMPRENDIDOS EN EL INTERVALO  $x_1 \leq X \leq x_2$  ES

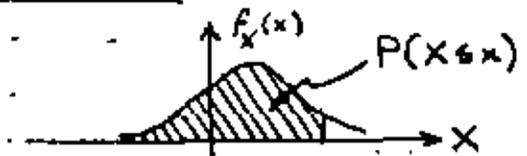
$$P(x_1 \leq X \leq x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f_X(x) dx$$



LA INTERPRETACION GRAFICA DE ESTA PROBABILIDAD ES QUE CORRESPONDE AL AREA BAJO LA CURVA DE  $f_X(x)$  COMPRENDIDA ENTRE  $x_1$  Y  $x_2$ .

PUESTO QUE  $F_X(x) = P(X \leq x) = P(-\infty \leq X \leq x)$ , Y EN VIRTUD DE LA ECUACION ANTERIOR SE TIENE QUE LA FUNCION DE DISTRIBUCION ES:

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(u) du$$



DONDE  $U$  ES SOLO UNA VARIABLE MUDA DE INTEGRACION. EL VALOR DE ESTA INTEGRAL ES IGUAL AL AREA BAJO LA CURVA DE  $f_X(x)$  A LA IZQUIERDA DE  $x$ . DE ESTA ECUACION SE CONCLUYE QUE

$$\frac{dF_X(x)}{dx} = \frac{d}{dx} \left( \int_{-\infty}^x f_X(u) du \right) = f_X(x)$$

ALGUNAS PROPIEDADES DE  $F_X(x)$  SON:

$$0 \leq F_X(x) \leq 1$$

$$F_X(-\infty) = 0$$

$$F_X(\infty) = 1$$

$$F_X(x + \epsilon) \geq F_X(x), \text{ SI } \epsilon \geq 0$$

$$F_X(x_2) - F_X(x_1) = P(x_1 \leq X \leq x_2)$$

PARA SATISFACER LOS AXIOMAS DE LA TEORIA DE PROBABILIDADES SE NECESITA QUE

$$f_X(x) \geq 0 \text{ PARA TODA } x$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) dx = 1$$

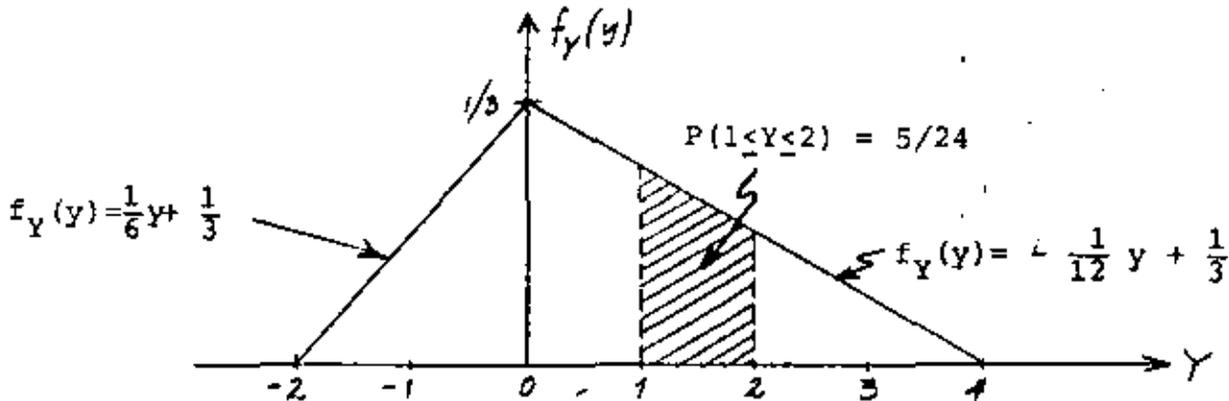
EJEMPLO

SEA UNA VARIABLE ALEATORIA CONTINUA CUYA DENSIDAD DE PROBABILIDADES ES DE FORMA TRIANGULAR DADA POR LAS SIGUIENTES ECUACIONES:

$$f_Y(y) = \frac{1}{6}y + \frac{1}{3}, \text{ SI } -2 \leq y \leq 0$$

$$f_Y(y) = -\frac{1}{12}y + \frac{1}{3}, \text{ SI } 0 \leq y \leq 4$$

$$f_Y(y) = 0 \quad \text{SI } y \leq -2 \text{ O } y \geq 4$$



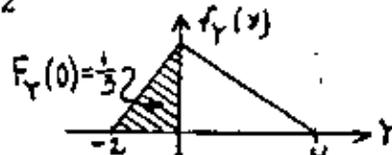
LA DISTRIBUCION DE PROBABILIDADES ACUMULADAS ES, ENTONCES:

$$\text{SI } -2 \leq y \leq 0$$

$$F_Y(y) = \int_{-\infty}^y f_Y(u) du = \int_{-2}^y \left( \frac{1}{6}u + \frac{1}{3} \right) du$$

$$= \left[ \frac{u^2}{12} + \frac{u}{3} \right]_{-2}^y = \frac{y^2}{12} + \frac{y}{3} + \frac{1}{3}$$

$$\text{SI } 0 \leq y \leq 4$$



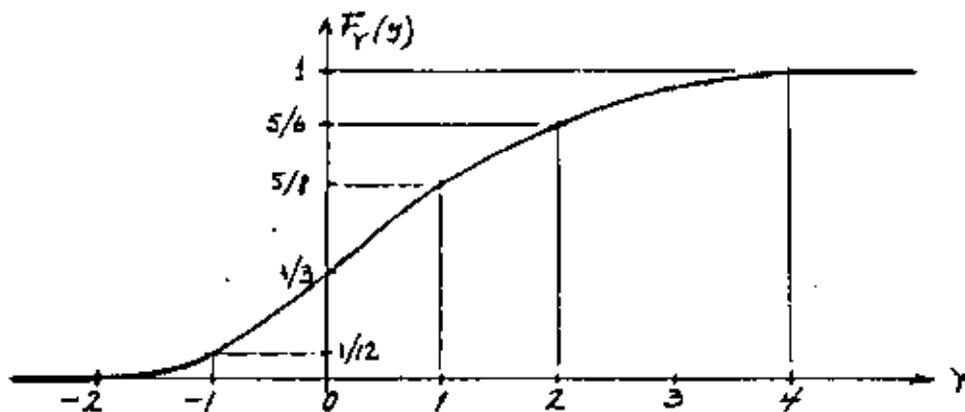
$$F_Y(y) = F_Y(0) + \int_0^y \left( -\frac{1}{12}u + \frac{1}{3} \right) du = \frac{1}{3} + \left[ -\frac{u^2}{24} + \frac{u}{3} \right]_0^y =$$

$$= \frac{1}{3} - \frac{y^2}{24} + \frac{y}{3}$$

$$\text{SI } 0 \leq y \leq 4$$

$$F_Y(y) = 0 \quad \text{SI } y \leq -2$$

$$F_Y(y) = 1 \quad \text{SI } y \geq 4$$



SI SE DESEA CALCULAR LA PROBABILIDAD DE QUE AL REALIZAR UNA VEZ EL EXPERIMENTO QUE INVOLUCRA A DICHA VARIABLE, EL VALOR QUE SE OBSERVE CAIGA EN EL INTERVALO  $1 \leq Y \leq 2$ , ENTONCES

$$P[1 \leq Y \leq 2] = \int_1^2 \left(-\frac{1}{12}y + \frac{1}{3}\right) dy = \left[-\frac{y^2}{24} + \frac{y}{3}\right]_1^2 = \frac{5}{24}$$

o

$$P[1 \leq Y \leq 2] = F_Y(2) - F_Y(1) = \frac{5}{6} - \frac{5}{8} = \frac{5}{24}$$

EJEMPLO

UN INGENIERO ESTA INTERESADO EN DISEÑAR UNA TORRE QUE RESISTA LAS CARGAS DEBIDAS AL VIENTO. DE UNA SERIE DE OBSERVACIONES DE LA MAXIMA VELOCIDAD ANUAL DEL VIENTO CERCA DEL SITIO DE INTERES, SE ENCUENTRA QUE EL HISTOGRAMA PUEDE AJUSTARSE RAZONABLEMENTE, DESDE UN PUNTO DE VISTA ESTADISTICO, MEDIANTE UNA DISTRIBUCION DE PROBABILIDADES EXPONENCIAL DE LA FORMA

$$f_X(x) = Ke^{-\lambda x}; x > 0$$

DONDE X ES LA MAXIMA VELOCIDAD DEL VIENTO,  $\lambda$  ES UNA CONSTANTE Y K ES OTRA CONSTANTE TAL QUE OBLIGA A QUE EL AREA BAJO LA CURVA DE  $f_X(x)$  SEA IGUAL A UNO. POR TANTO,

$$\int_0^{\infty} Ke^{-\lambda x} dx = \frac{-K}{\lambda} [e^{-\lambda x}]_0^{\infty} = \frac{K}{\lambda} = 1.$$

DE DONDE

$$K = \lambda$$

POR TANTO

$$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}; x > 0$$

LA FUNCION DE DISTRIBUCION SERA

$$F_X(x) = \int_0^x f_X(u) du = \int_0^x \lambda e^{-\lambda u} du = [-e^{-\lambda u}]_0^x = 1 - e^{-\lambda x}; x > 0$$

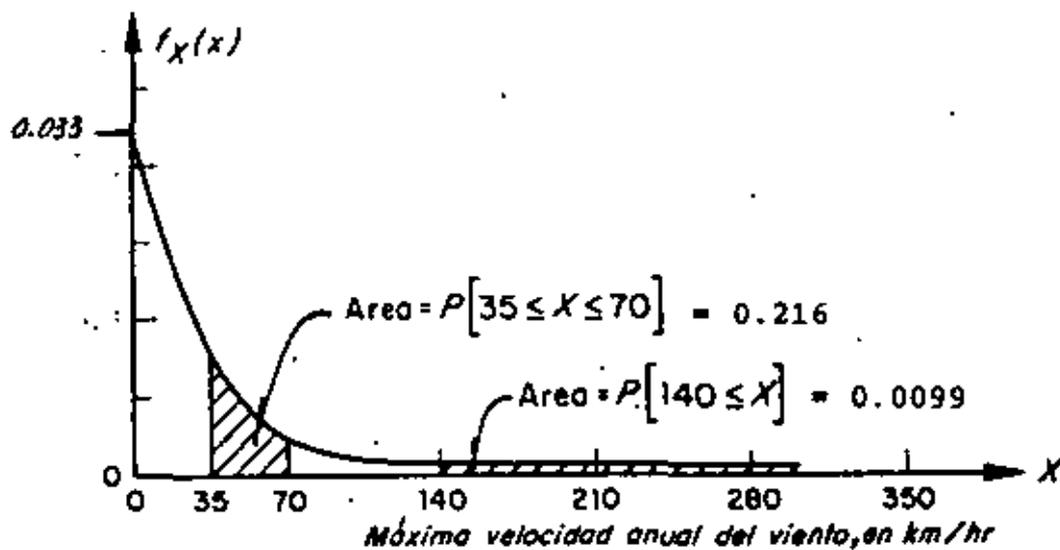
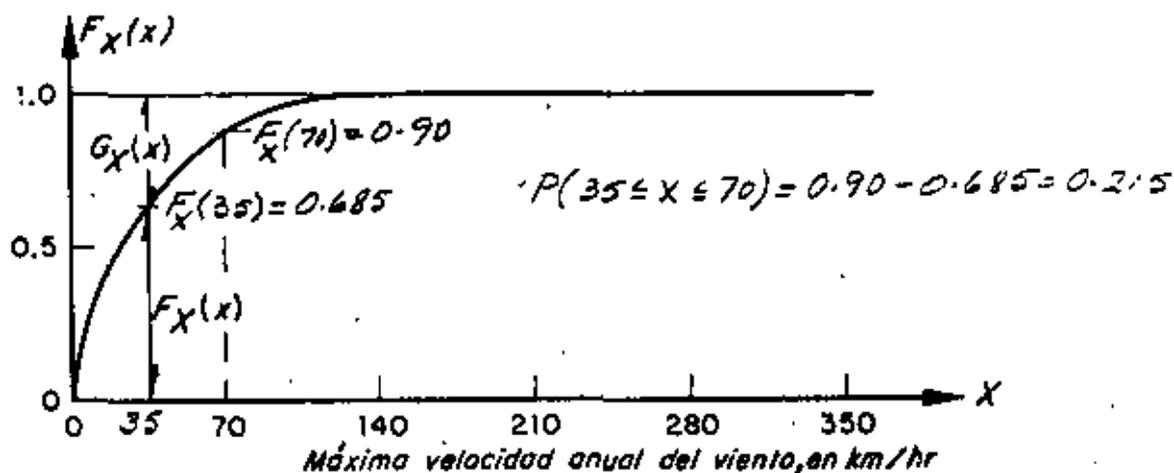
EL VALOR DE  $\lambda$  SE PUEDE TOMAR, POR EJEMPLO, DE MANERA QUE  $F_X(x)$  SE AJUSTE PARA QUE COINCIDA CON UN VALOR EMPIRICO. ASI, SI LA FRECUENCIA RELATIVA DEL EVENTO A = {X ≤ 70 KM/H} ES 0.9, ENTONCES

$$P(0 \leq X \leq 70) = F_X(70) = 0.9$$

DE DONDE

$$0.9 = 1 - e^{-70\lambda}$$

POR LO CUAL  $\lambda = 0.033$ .

a) Densidad de probabilidades de  $X$ b) Función de distribución de  $X$ 

*Ley de probabilidades correspondiente al ejemplo de la máxima  
 velocidad anual del viento*

SI SE DESEA CALCULAR, POR EJEMPLO, LA PROBABILIDAD DE QUE LA VELO-  
 CIDAD MAXIMA DEL VIENTO EN UN AÑO DADO ESTE ENTRE 35 Y 70 KM/H,  
 SE TENDRA:

$$\begin{aligned}
 P(35 \leq X \leq 70) &= \int_{35}^{70} 0.033e^{-0.033x} dx = [-e^{-0.033x}]_{35}^{70} = \\
 &= -e^{-0.033 \times 70} - (-e^{-0.033 \times 35}) = -e^{-2.31} + e^{-1.155} = \\
 &= -0.099 + 0.315 = 0.216
 \end{aligned}$$

EN TERMINOS DE  $F_X(x)$  ESTA PROBABILIDAD QUEDA DADA POR

$$\begin{aligned}
 P(35 \leq X \leq 70) &= F_X(70) - F_X(35) = 0.90 - (1 - e^{-1.155}) = 0.90 - 0.685 \\
 &= 0.215
 \end{aligned}$$

66

### FUNCION DE DISTRIBUCION COMPLEMENTARIA

EL COMPLEMENTO,  $G_X(x)$ , DE LA DISTRIBUCION DE PROBABILIDADES ACUMULADAS SU UTILIZA CUANDO LAS DECISIONES SE TOMAN CON BASE EN PROBABILIDADES DE QUE SE EXCEDA UN VALOR DADO DE LA VARIABLE. LA FUNCION DE DISTRIBUCION COMPLEMENTARIA SE DEFINE COMO

$$G_X(x) = P(X > x) = 1 - F_X(x)$$

### EJEMPLO

PARA EL PROBLEMA ANTERIOR DE LA VELOCIDAD MAXIMA ANUAL DEL VIENTO, CALCULEMOS LA PROBABILIDAD DE QUE ESTA SEA MAYOR DE 140 KM/H:

$$G_X(140) = P(X > 140) = \int_{140}^{\infty} 0.033e^{-0.033x} dx = 0.0099$$

O, ALTERNATIVAMENTE

$$P(X > 140) = 1 - F_X(140) = G_X(140) = 1 - (1 - e^{-0.033 \times 140}) = e^{-4.62} = 0.0099$$

ESPERANZAS

LA ESPERANZA DE UNA FUNCION  $g(x)$ , DE UNA VARIABLE ALEATORIA DISCRETA,  $X$ , ES, POR DEFINICION

$$E(g(x)) = \sum_{i=1}^{i=n} g(x_i) P_X(x_i)$$

O PARA UNA VARIABLE CONTINUA

$$E(g(x)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X(x) dx$$

EJEMPLOS

1. SI  $g(x) = \text{CONSTANTE} = c$

$$E(c) = c \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) dx = c$$

2. SI  $g(x) = x$

$$E[x] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx$$

3. SI  $g(x) = a + bx$

$$E[a + bx] = a \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) dx + b \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx = a + bE[X]$$

4. SI  $g(x) = g_1(x) + g_2(x)$

$$\begin{aligned} E[g_1(x) + g_2(x)] &= \int_{-\infty}^{\infty} g_1(x) f_X(x) dx + \int_{-\infty}^{\infty} g_2(x) f_X(x) dx \\ &= E[g_1(x)] + E[g_2(x)] \end{aligned}$$

5. SI  $g(x) = \frac{x-c}{d} = \frac{1}{d} x - \frac{c}{d}$

$$E\left(\frac{x-c}{d}\right) = \frac{1}{d} E(x) - \frac{c}{d} = \frac{E(x) - c}{d}$$

6. SI  $g(x) = ax^2$

$$E(ax^2) = a \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x) dx = a E(x^2)$$

EJEMPLO

SI X ES UNA VARIABLE ALEATORIA CON DENSIDAD DE PROBABILIDADES EXPONENCIAL, CALCULAR LA ESPERANZA DE LA FUNCION

$$g(X) = X^2$$

EN ESTE CASO SE TIENE QUE

$$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \text{ SI } 0 \leq x < \infty, \text{ Y } f_X(x) = 0, \text{ SI } x < 0$$

POR LO QUE

$$E(X^2) = E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X(x) dx = \lambda \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\lambda x} dx$$

$$= \lambda \left[ \frac{-x^2 e^{-\lambda x}}{\lambda} \right]_0^{\infty} + \frac{2\lambda}{\lambda} \int_0^{\infty} x e^{-\lambda x} dx = \frac{-2}{\lambda^2} \left[ e^{-\lambda x} (1 + \lambda x) \right]_0^{\infty} = \frac{2}{\lambda^2}$$

EN GENERAL, A LA ESPERANZA DE  $X^2$  SE LE DENOMINA VALOR MEDIO CUADRATICO.

Ejemplo. Construcción de la carpeta de una carretera.

Un contratista construirá la carpeta de una carretera en tramos de 50 m; el gobierno aceptará o rechazará cada tramo de acuerdo con una prueba de control de calidad. El contratista tiene la opción de pedir el concreto a una de dos plantas premezcladoras; la planta A cobra 140 pesos/m<sup>3</sup> y la B 160 pesos/m<sup>3</sup>, pero, el control de calidad que se lleva en la planta B es mejor, lo cual hace más probable que un tramo dado pase favorablemente la prueba de aceptación. Tomando en cuenta que en cada tramo se usan 100 m<sup>3</sup> de concreto y que la probabilidad de que el proveniente de la planta A no pase la prueba de control es 0.10, y la de B es 0.05, el constructor deberá decidirse por cuál planta usar. El árbol de decisiones de este problema es el mostrado en la fig 6.4, donde  $P(\theta_1)$  y  $P(\theta_2)$  son las probabilidades de que ocurran  $\theta_1$  y  $\theta_2$ , respectivamente. La utilidad  $U_1 = u(a_1, \theta_1)$  es la que corresponde a utilizar la planta A y que la carpeta pase la prueba de control de calidad; en este caso la utilidad (negativa) es el costo del concreto (\$14,000.00) más la colocación (supongamos \$100,000.00), por lo cual  $U_1 = -114,000.00$ .  $U_2 = u(a_1, \theta_2)$  es la que corresponde a usar la planta A y que la carpeta no pase la prueba de calidad; en este caso el constructor deberá demoler y reconstruir el tramo con los siguientes costos:

|                  |   |                            |    |            |
|------------------|---|----------------------------|----|------------|
| Carpeta demolida | } | Pérdida de prestigio       | \$ | 5,000.00   |
|                  |   | Mano de obra de demolición |    | 15,000.00  |
|                  |   | Concreto                   |    | 14,000.00  |
|                  |   | Mano de obra de colocación |    | 100,000.00 |

|                |   |                  |
|----------------|---|------------------|
| Reconstrucción | $\left\{ \begin{array}{l} \text{Mano de obra} \\ \text{Concreto} \end{array} \right.$ | \$ 100,000.00    |
|                |   | <u>14,000.00</u> |
| T O T A L      |   | \$ 248,000.00    |

De manera similar se obtienen  $u_3$  y  $u_4$ , cuyos valores resultan ser  $u_3 = - \$116,000.00$  y  $u_4 = - \$252,000.00$ .

Si la decisión se tomara sin considerar las probabilidades de aceptar la carpeta, el constructor se decidiría por la planta A, ya que la pérdida (utilidad negativa) sería menor. Si sí se toman en cuenta y adoptamos como *criterio de decisión* el escoger la planta que conduzca a una *esperanza de pérdida* menor se tendrá (recuerde que la esperanza de la variable aleatoria  $X$ ,  $E[X]$ , es  $E[X] = \sum_{i=1}^m P[X_i] X_i$ , donde las  $X_i$  son los valores que puede asumir  $X$ , y  $P[X_i]$  son las probabilidades correspondientes):

Para la planta A:

$$E[U] = 0.90 \times (-114,000) + 0.10 \times (-248,000) = -\$127,400.$$

Para la planta B:

$$E[U] = 0.95 \times (-116,000) + 0.05 \times (-252,000) = -\$122,800.$$

Comparando ambas cifras se concluye que la decisión de comprar el concreto de la planta B conduce a una pérdida esperada menor que la de la planta A, es decir, se escoge la planta B aunque el precio unitario del concreto sea mayor.

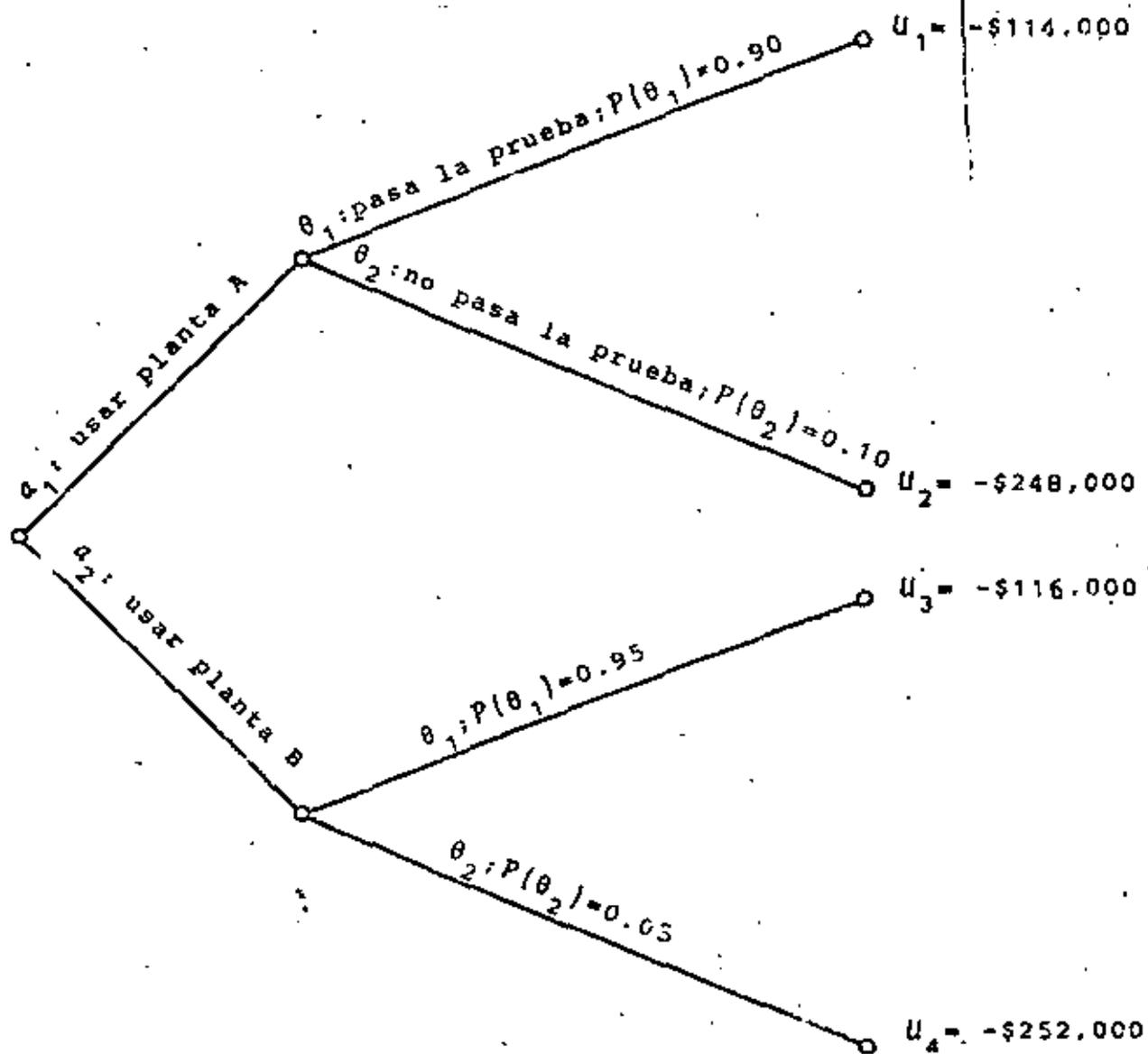


Fig 6.4 Arbol de decisiones del ejemplo 6.2

MEDIDAS DE TENDENCIA CENTRAL

LA MEDIA O ESPERANZA,  $E[X]$ , DE UNA VARIABLE ALEATORIA,  $X$ , SE CALCULA CON LAS ECUACIONES ANTERIORES PARA EL CASO EN QUE  $g(X)=X$ . DE ESTA MANERA, SI LA VARIABLE ES DISCRETA, SU ESPERANZA QUEDA DADA POR

$$E(X) = \sum_{i=1}^{i=n} x_i P_X(x_i)$$

DONDE  $n$  ES EL TOTAL DE VALORES QUE  $X$  PUEDE ASUMIR.

PARA EL CASO DE UNA VARIABLE ALEATORIA CONTINUA, LA MEDIA ES

$$m_x = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx$$

OTRAS MEDIDAS USUALES DE TENDENCIA CENTRAL DE UNA VARIABLE ALEATORIA SON LA MEDIANA Y EL MODO, LA PRIMERA SE DEFINE COMO EL VALOR DE LA VARIABLE AL CUAL CORRESPONDE UNA PROBABILIDAD ACUMULADA DE 50%, Y LA SEGUNDA, COMO EL VALOR DE LA VARIABLE AL CUAL CORRESPONDE LA MAYOR PROBABILIDAD.

#### EJEMPLO

SI LA DENSIDAD DE PROBABILIDADES DE LA VARIABLE ALEATORIA  $X$  CORRESPONDE A LOS ERRORES EN UNA NIVELACION, ES LA DE LA SEGUNDA COLUMNA DE LA SIGUIENTE TABLA, LA MEDIA DE DICHA VARIABLE RESULTA SER 4 167 LA MEDIANA 4000 Y EL MODO 4000 MICRAS. LOS CALCULOS CORRESPONDIENTES SE LOCALIZAN EN LA TERCERA COLUMNA.

| $x_i$ , EN MICRAS                           | $P_X(x_i)$ | $x_i P_X(x_i)$ , EN MICRAS | $F_X(x_i)$  |
|---|------------|----------------------------|-------------|
| 0   | 6/60       | 0                          | 6/60        |
| 1 000                                       | 2/60       | 2 000/60                   | 8/60        |
| 2 000                                       | 4/60       | 8 000/60                   | 12/60       |
| 3 000                                       | 8/60       | 24 000/60                  | 20/60       |
| 4 000                                       | 13/60      | 52 000/60                  | 33/60 = 0.5 |
| 5 000                                       | 12/60      | 60 000/60                  | 45/60       |
| 6 000                                       | 7/60       | 42 000/60                  | 52/60       |
| 7 000                                       | 4/60       | 28 000/60                  | 56/60       |
| 8 000                                       | 2/60       | 16 000/60                  | 58/60       |
| 9 000                                       | 2/60       | 18 000/60                  | 60/60       |
| TOTAL: $E[X] = 250\ 000/60 = 4\ 167$ MICRAS |            |                            |             |

EJEMPLO

CALCULAR LA ESPERANZA DE UNA VARIABLE ALEATORIA CUYA DENSIDAD DE PROBABILIDADES ES TRIANGULAR DADA POR

$$f_Y(y) = \frac{1}{6}y + \frac{1}{3} \quad \text{SI } -2 \leq y \leq 0$$

$$f_Y(y) = -\frac{1}{12}y + \frac{1}{3} \quad \text{SI } 0 \leq y \leq 4$$

$$f_Y(y) = 0 \quad \text{SI } y \leq -2 \quad \text{O} \quad y \geq 4$$

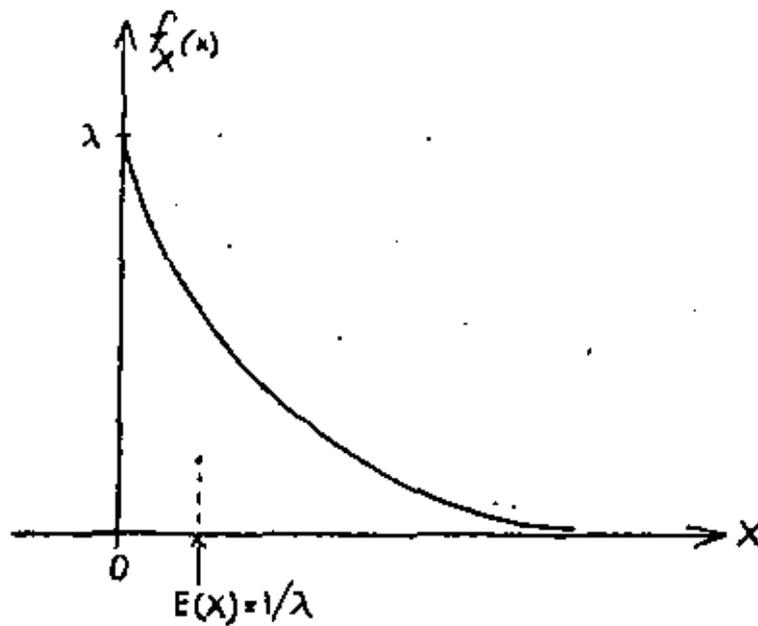
$$\begin{aligned} E(Y) &= \int_{-\infty}^{\infty} y f_Y(y) dy = \int_{-2}^0 y \left( \frac{y}{6} + \frac{1}{3} \right) dy + \int_0^4 y \left( -\frac{y}{12} + \frac{1}{3} \right) dy \\ &= \left[ \frac{y^3}{18} + \frac{y^2}{6} \right]_{-2}^0 + \left[ -\frac{y^3}{36} + \frac{y^2}{6} \right]_0^4 = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

EJEMPLO

CALCULAR LA ESPERANZA DE UNA VARIABLE ALEATORIA CON DENSIDAD DE PROBABILIDADES EXPONENCIAL

$$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}$$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx = \lambda \int_0^{\infty} x e^{-\lambda x} dx = \lambda \left[ \frac{-e^{-\lambda x}}{\lambda^2} (1 + \lambda x) \right]_0^{\infty} = \frac{1}{\lambda}$$



MEDIDAS DE DISPERSION

UNA MEDIDA MUY COMUN DE LA DISPERSION O VARIABILIDAD DE LOS VALORES QUE PUEDE ASUMIR UNA VARIABLE ALEATORIA ES LA VARIANCIA, LA CUAL SE DENOTA COMO  $\sigma^2(X)$  O  $\text{VAR}(X)$ , LA CUAL SE DEFINE COMO LA ESPERANZA DE LA FUNCION  $g(X) = [X - E(X)]^2$ . ASI, PARA UNA VARIABLE ALEATORIA DISCRETA

$$\sigma^2(X) = \text{VAR}(X) = \sum_{i=1}^{i=n} (x_i - E(X))^2 P_X(x_i)$$

Y PARA UNA CONTINUA

$$\sigma^2(X) = \text{VAR}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - E(X))^2 f_X(x) dx$$

DESARROLLANDO EL INTEGRANDO DE ESTA ULTIMA ECUACION:

$$\begin{aligned} \sigma^2(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} (x^2 - 2xE(X) + E^2(X)) f_X(x) dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x) dx - 2E(X) \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx + E^2(X) \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) dx = E[X^2] - E^2[X] \end{aligned}$$

ES DECIR, LA VARIANCIA SE PUEDE CALCULAR COMO LA DIFERENCIA DEL VALOR MEDIO CUADRATICO Y EL CUADRADO DE LA MEDIA DE X.

OTRAS MEDIDAS DE DISPERSION DE LA VARIABLE ALEATORIA X, SON LA DESVIACION ESTANDAR,  $\sigma(X)$ , LA CUAL ES IGUAL A LA RAIZ CUADRADA DE LA VARIANCIA, Y EL COEFICIENTE DE VARIACION QUE SE DEFINE COMO

$$v(X) = \sigma(X) / E(X) \quad , \quad \text{SI } E(X) \neq 0.$$

EJEMPLO

EN LA SIGUIENTE TABLA SE CALCULA LA VARIANCIAS DE LA VARIABLE ALEATORIA  
 CUYA DENSIDAD DE PROBABILIDADES SE PRESENTO EN EL EJEMPLO  
 ANTERIOR ( $E(x) = 4167$  MICRAS)

| $x_i - E(X)$<br>EN MICRAS | $(x_i - E(x))^2$<br>MICRAS <sup>2</sup> | $P_X(x_i)$ | $(x_i - E(X))^2 P_X(x_i)$ ,<br>EN MICRAS |
|---------------------------|---|------------|--|
| -4 167                    | 17 363 889                              | 6/60       | 1 736 388                                |
| -3 167                    | 10 029 889                              | 2/60       | 334 329                                  |
| -2 167                    | 4 695 889                               | 4/60       | 313 059                                  |
| -1 167                    | 1 361 889                               | 8/60       | 181 585                                  |
| - 167                     | 27 889                                  | 13/60      | 6 042                                    |
| 833                       | 693 889                                 | 12/60      | 138 777                                  |
| 1 833                     | 3 359 889                               | 7/60       | 391 987                                  |
| 2 833                     | 8 025 889                               | 4/60       | 535 059                                  |
| 3 833                     | 14 691 889                              | 2/60       | 489 729                                  |
| 4 833                     | 23 357 889                              | 2/60       | 778 596                                  |

TOTAL: 4 405 551 MICRAS<sup>2</sup> =  $\sigma^2(X)$

LA DESVIACION ESTANDAR Y EL COEFICIENTE DE VARIACION DE ESTA VARIABLE  
 ALEATORIA SON, RESPECTIVAMENTE,

$$\sigma(X) = \sqrt{4\,405\,551} = 2\,215 \text{ MICRAS, Y } v(X) = \sigma(X)/E(X) = \frac{2\,215}{4\,167} = 0.531$$

EJEMPLO

SI X ES UNA VARIABLE ALEATORIA CON DISTRIBUCION DE PROBABILIDADES EXPONENCIAL, CALCULAR SU VARIANCIA, DESVIACION ESTANDAR Y COEFICIENTE DE VARIACION:

$$\begin{aligned}\sigma^2(X) &= E(X-E[X])^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x-E[X])^2 \lambda e^{-\lambda x} dx = \lambda \int_0^{\infty} (x^2 - 2xE[X] + E^2[X]) e^{-\lambda x} dx \\ &= \lambda \int_0^{\infty} x^2 e^{-\lambda x} dx - 2E[X] \lambda \int_0^{\infty} x e^{-\lambda x} dx + E^2[X] \int_0^{\infty} \lambda e^{-\lambda x} dx \\ &= \frac{2}{\lambda^2} - 2 \frac{1}{\lambda} \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}\end{aligned}$$

YA QUE  $E(X) = 1/\lambda$ . Y  $E[X^2] = 2/\lambda^2$ .

USANDO LA FÓRMULA  $\sigma^2(X) = E[X^2] - E^2[X]$ , Y TOMANDO EN CUENTA QUE  $E[X^2] = 2/\lambda^2$  SE OBTIENE:

$$\sigma^2(X) = 2/\lambda^2 - 1/\lambda^2 = 1/\lambda^2$$

EN CONSECUENCIA, LA DESVIACION ESTANDAR ES

$$\sigma(X) = \sqrt{1/\lambda^2} = 1/\lambda$$

Y EL COEFICIENTE DE VARIACION

$$v(X) = \sigma(X)/E(X) = \frac{1/\lambda}{1/\lambda} = 1$$

EJEMPLO

SEA Y UNA VARIABLE ALEATORIA CON DENSIDAD DE PROBABILIDADES TRIANGULAR DADA POR

$$f_Y(y) = \frac{1}{6} y + \frac{1}{3} \quad \text{SI } -2 \leq y \leq 0.$$

$$f_Y(y) = -\frac{1}{12} y + \frac{1}{3} \quad \text{SI } 0 \leq y \leq 4$$

$$f_Y(y) = 0 \quad \text{SI } y \leq -2 \text{ O } y \geq 4$$

CALCULAR LA VARIANCIA, LA DESVIACION ESTANDAR Y EL COEFICIENTE DE VARIACION.

CALCULAREMOS PRIMERO EL VALOR MEDIO CUADRATICO PARA LUEGO APLICAR LA ECUACION  $\sigma^2(Y) = E(Y^2) - E^2(Y)$

$$E[Y^2] = \int_{-2}^0 y^2 \left(\frac{1}{6} y + \frac{1}{3}\right) dy + \int_0^4 y^2 \left(-\frac{y}{12} + \frac{1}{3}\right) dy = \left[\frac{y^4}{24} + \frac{y^3}{9}\right]_{-2}^0 + \left[-\frac{y^4}{48} + \frac{y^3}{9}\right]_0^4 = 2$$

$$\sigma^2(Y) = 2 - (2/3)^2 = 14/9$$

$$\sigma(Y) = 1,25 \left(\sqrt{14/9}\right)$$

$$v(Y) = 1,25 / (2/3) = 1,88$$

EJEMPLO

SI SE HACE LA TRANSFORMACION  $Y = ax$ , ¿CUANTO VALE LA VARIANCIA DE Y EN TERMINOS DE LA DE X?

DE LO VISTO ANTERIORMENTE,  $E(Y) = aE(x)$  Y  $E(Y^2) = a^2 E(X^2)$

$$\sigma^2(Y) = E(Y^2) - E^2(Y) = a^2 E(X^2) - a^2 E^2(X) = a^2 [E(X^2) - E^2(X)] = a^2 \sigma^2(X)$$

DISTRIBUCIONES PARTICULARESVARIABLES ALEATORIAS DISCRETASDISTRIBUCION BINOMIAL O DE BERNOULLI

LA DISTRIBUCION BINOMIAL O DE BERNOULLI SE EMPLEA COMO DENSIDAD DE PROBABILIDADES DE VARIABLES ALEATORIAS DISCRETAS ASOCIADOS A EXPERIMENTOS EN LOS QUE SOLO HAY (O SOLO IMPORTAN) DOS RESULTADOS POSIBLES, UNO DE LOS CUALES USUALMENTE SE DENOMINA "EXITO" Y, EL OTRO, "FRACASO". ( $S = \{\text{EXITO}, \text{FRACASO}\}$ ).

SEAN  $p =$  PROBABILIDAD DE OBSERVAR "EXITO" AL REALIZAR UNA VEZ EL EXPERIMENTO

$q =$  PROBABILIDAD DE "FRACASO"  $= 1-p$

$X =$  VARIABLE ALEATORIA "NUMERO DE EXITOS OBSERVADOS AL REPETIR  $n$  VECES EL EXPERIMENTO "CON REEMPLAZO"

LA DISTRIBUCION DE PROBABILIDADES BINOMIAL ES

$$f(x) = \frac{n!}{x!(n-x)!} p^x q^{n-x} : x = 0, 1, \dots, n$$

SE PUEDE DEMOSTRAR QUE LOS PARAMETROS DE ESTA DISTRIBUCION SON

$$E(X) = np, \quad \sigma^2(X) = npq$$

REFERENCIA: W. BEYER, "HANDBOOK OF TABLES FOR PROBABILITY AND STATISTICS", THE CHEMICAL RUBBER, CO. (1966).

DEMOSTRACION

SI  $n=2$ , ENTONCES  $X$  PUEDE ASUMIR LOS VALORES 0, 1 y 2, ES DECIR  $S = \{0, 1, 2\}$ . EL ESPACIO DE EVENTOS DEL EXPERIMENTO ES

$$S_1 = \left\{ \underbrace{(\text{FRACASO}, \text{FRACASO})}_{X=0}, \underbrace{(\text{EXITO}, \text{FRACASO})}_{X=1}, \underbrace{(\text{FRACASO}, \text{EXITO})}_{X=1}, \right. \\ \left. \underbrace{(\text{EXITO}, \text{EXITO})}_{X=2} \right\}$$

$$f_X(x) = \{f_X(0), f_X(1), f_X(2)\}$$

OBSERVESE QUE  $x=0$  OCURRE DE UNA MANERA,  $x=1$ , DE DOS, Y  $x=2$ , DE UNA. ESTOS RESULTADOS SE PUEDEN OBTENER PERMUTANDO DOS GRUPOS, UNO CON  $x$  Y EL OTRO CON  $n-x$  ELEMENTOS:

$$x=0: \quad 2^{P_{0,2}} = \frac{2!}{0!x2!} = 1 ; P(\{0\}) = q \times q = q^2 = p^0q^2$$

$$x=1: \quad 2^{P_{1,1}} = \frac{2!}{1!x1!} = 2 ; P(\{1\}) = 2pq$$

$$x=2: \quad 2^{P_{2,0}} = \frac{2!}{2!x0!} = 1 ; P(\{2\}) = p \times p = p^2 = p^2q^0$$

$$\sum_{i=0}^2 P(\{i\}) = q^2 + 2pq + p^2 = (p+q)^2 = 1$$

(OBSERVESE QUE LOS ELEMENTOS DE  $S_1$  NO SON IGUALMENTE PROBABLES, A MENOS QUE  $p = q = 1/2$ .)

SI  $n = 3$ ,  $S = \{0, 1, 2, 3\}$ ,  $e = \text{EXITO}$  Y  $f = \text{FRACASO}$ , ENTONCES

$$S_1 = \{(f, f, f), (e, f, f), (f, e, f), (f, f, e), (e, e, f), (e, f, e), \\ (f, e, e), (e, e, e)\}$$

$$x = 0: {}_3P_{0,3} = \frac{3!}{0! \times 3!} = 1; P(\{0\}) = 1 p^0 q^3 = q^3$$

$$x = 1: {}_3P_{1,2} = \frac{3!}{1! \times 2!} = 3; P(\{1\}) = 3 p q^2$$

$$x = 2: {}_3P_{2,1} = \frac{3!}{2! \times 1!} = 3; P(\{2\}) = 3 p^2 q$$

$$x = 3: {}_3P_{3,0} = \frac{3!}{3! \times 0!} = 1; \frac{P(\{3\}) = 1 p^3 q^0 = p^3}{\sum_{i=0}^3 P(\{i\}) = (p+q)^3 = 1}$$

PASANDO AL CASO GENERAL DE CUALQUIER VALOR DE  $n$ , LA PROBABILIDAD DE QUE OCURRAN  $x$  EXITOS Y  $n-x$  FRACASOS EN UN ORDEN DETERMINADO ES

$$P(X=x) = p^x q^{n-x}$$

EN VIRTUD DE LA LEY GENERAL DE MULTIPLICACION.

UN ORDEN POSIBLE SERIA, POR EJEMPLO,

$$\underbrace{\text{EXITO, EXITO, \dots, EXITO}}_x, \underbrace{\text{FRACASO, \dots, FRACASO}}_{n-x}$$

AHORA BIEN, LOS  $x$  EXITOS PUEDEN OCURRIR EN  ${}_n P_{x, n-x}$  ORDENES DISTINTOS, CADA UNO CON PROBABILIDAD  $p^x q^{n-x}$ , POR LO TANTO, EN VIRTUD DE LA LEY GENERAL DE ADICION, LA DISTRIBUCION DE PROBABILIDADES DE  $X$  RESULTA SER

$$f_X(x) = \frac{n!}{x!(n-x)!} p^x q^{n-x}; x = 0, 1, \dots, n$$

LA CUAL SE CONOCE CON EL NOMBRE DE BINOMIAL O DE BERNOULLI.

LA ESPERANZA DE LA DISTRIBUCION DE BERNOULLI ES

$$\begin{aligned}
 E(X) &= \sum_{x=0}^n x \frac{n!}{x!(n-x)!} p^x q^{n-x} = \sum_{x=1}^n x \frac{n!}{x!(n-x)!} p^x q^{n-x} \\
 &= np \sum_{x=1}^n \frac{(n-1)!}{(x-1)!(n-x)!} p^{x-1} q^{n-x} = np(p+q)^{n-1} = np
 \end{aligned}$$

LA VARIANCIA DE LA DISTRIBUCION BINOMIAL ES

$$\sigma^2(X) = E[(X-E(X))^2] = E[(X-np)^2]$$

$$\begin{aligned}
 \text{PERO } E[(X-np)^2] &= E(X^2 - 2npX + n^2p^2) = E[X + X(X-1) - 2npX + n^2p^2] \\
 &= E[(1-2np)X] + E[X(X-1)] + E(n^2p^2) \\
 &= (1-2np)np + n^2p^2 + \sum_{x=0}^n \frac{n!}{x!(n-x)!} p^x q^{n-x} x(x-1) \\
 &= np - n^2p^2 + \sum_{x=2}^n n(n-1) \frac{(n-2)!}{(x-2)!(n-x)!} p^2 p^{x-2} q^{n-x} \\
 &= np - n^2p^2 + n(n-1)p^2 \sum_{x=2}^n \frac{(n-2)!}{(x-2)!(n-x)!} p^{x-2} q^{n-x} \\
 &= np - n^2p^2 + n(n-1)p^2 (p+q)^{n-2} = np - np^2 = np(1-p) = npq
 \end{aligned}$$

EN RESUMEN, PARA LA DISTRIBUCION BINOMIAL,

$$E(X) = np ; \sigma^2(X) = npq ; \sigma(X) = \sqrt{npq}$$

TABLA 1  
 FUNCION DE DISTRIBUCION BINOMIAL

$$F_X(x) = \sum_{k=0}^x \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k}$$

| n | x | p      |       |       |       |       |
|---|---|--------|-------|-------|-------|-------|
|   |   | 0.10   | 0.20  | 0.30  | 0.40  | 0.50  |
| 2 | 0 | .8100  | .6400 | .4900 | .3600 | .2500 |
|   | 1 | .9900  | .9600 | .9100 | .8400 | .7500 |
| 3 | 0 | .7290  | .5120 | .3430 | .2160 | .1250 |
|   | 1 | .9720  | .8960 | .7840 | .6480 | .5000 |
|   | 2 | .9990  | .9920 | .9730 | .9360 | .8750 |
| 4 | 0 | .6561  | .4096 | .2401 | .1296 | .0625 |
|   | 1 | .9477  | .8192 | .6517 | .4752 | .3125 |
|   | 2 | .9963  | .9728 | .9163 | .8208 | .6875 |
|   | 3 | .9999  | .9984 | .9919 | .9744 | .9375 |
| 5 | 0 | .5905  | .3277 | .1681 | .0778 | .0312 |
|   | 1 | .9185  | .7373 | .5282 | .3370 | .1875 |
|   | 2 | .9914  | .9421 | .8369 | .6826 | .5000 |
|   | 3 | .9995  | .9933 | .9692 | .9130 | .8125 |
|   | 4 | 1.0000 | .9997 | .9976 | .9898 | .9688 |
| 6 | 0 | .5314  | .2621 | .1176 | .0467 | .0156 |
|   | 1 | .8857  | .6554 | .4202 | .2333 | .1094 |

TABLA 1 (continuación)  
 FUNCION DE DISTRIBUCION BINOMIAL

$$F_X(x) = \sum_{k=0}^x \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k}$$

| n  | x | p      |        |       |       |       |
|----|---|--------|--------|-------|-------|-------|
|    |   | 0.10   | 0.20   | 0.30  | 0.40  | 0.50  |
| 6  | 2 | .9842  | .9011  | .7443 | .5443 | .3438 |
|    | 3 | .9987  | .9830  | .9295 | .8208 | .6562 |
|    | 4 | .9999  | .9984  | .9891 | .9590 | .8906 |
|    | 5 | 1.0000 | .9999  | .9993 | .9959 | .9844 |
| 7  | 0 | .4783  | .2097  | .0824 | .0280 | .0078 |
|    | 1 | .8503  | .5767  | .3294 | .1586 | .0625 |
|    | 2 | .9743  | .8520  | .6471 | .4199 | .2266 |
|    | 3 | .9973  | .9667  | .8740 | .7102 | .5000 |
|    | 4 | .9998  | .9953  | .9712 | .9037 | .7734 |
|    | 5 | 1.0000 | .9996  | .9962 | .9812 | .9375 |
| 8  | 0 | .4305  | .1678  | .0576 | .0168 | .0039 |
|    | 1 | .8131  | .5033  | .2553 | .1064 | .0352 |
|    | 2 | .9619  | .7969  | .5518 | .3154 | .1445 |
|    | 3 | .9950  | .9437  | .8059 | .5941 | .3633 |
|    | 4 | .9996  | .9896  | .9420 | .8263 | .6367 |
|    | 5 | 1.0000 | .9988  | .9887 | .9502 | .8555 |
|    | 6 | 1.0000 | .9999  | .9987 | .9915 | .9648 |
| 9  | 0 | .3874  | .1342  | .0404 | .0101 | .0020 |
|    | 1 | .7748  | .4362  | .1960 | .0705 | .0195 |
|    | 2 | .9470  | .7382  | .4628 | .2318 | .0898 |
|    | 3 | .9917  | .9244  | .7297 | .4826 | .2539 |
|    | 4 | .9991  | .9804  | .9012 | .7334 | .5000 |
|    | 5 | .9999  | .9969  | .9747 | .9006 | .7461 |
|    | 6 | 1.0000 | .9997  | .9957 | .9750 | .9102 |
|    | 7 | 1.0000 | 1.0000 | .9996 | .9962 | .9805 |
| 10 | 0 | .3487  | .1074  | .0282 | .0060 | .0010 |
|    | 1 | .7361  | .3758  | .1493 | .0464 | .0107 |
|    | 2 | .9298  | .6778  | .3828 | .1673 | .0547 |
|    | 3 | .9872  | .8791  | .6496 | .3823 | .1719 |
|    | 4 | .9984  | .9672  | .8497 | .6231 | .3770 |

TABLA 1 (continuación)

## FUNCION DE DISTRIBUCION BINOMIAL

$$F_X(x) = \sum_{k=0}^x \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k}$$

| n  | X      | 0.10   | 0.20   | p      | 0.40  | 0.50  |
|----|--------|--------|--------|--------|-------|-------|
| 10 | 5      | .9999  | .9936  | .9527  | .8338 | .6230 |
|    | 6      | 1.0000 | .9991  | .9894  | .9452 | .8281 |
|    | 7      | 1.0000 | .9999  | .9984  | .9877 | .9453 |
|    | 8      | 1.0000 | 1.0000 | .9999  | .9983 | .9893 |
|    | 9      | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | .9999 | .9990 |
| 11 | 0      | .3138  | .0859  | .0198  | .0036 | .0005 |
|    | 1      | .6974  | .3221  | .1130  | .0302 | .0059 |
|    | 2      | .9104  | .6174  | .3127  | .1189 | .0327 |
|    | 3      | .9815  | .8389  | .5696  | .2963 | .1133 |
|    | 4      | .9972  | .9496  | .7897  | .5328 | .2744 |
|    | 5      | .9997  | .9883  | .9218  | .7535 | .5000 |
|    | 6      | 1.0000 | .9980  | .9784  | .9006 | .7256 |
|    | 7      | 1.0000 | .9998  | .9957  | .9707 | .8867 |
|    | 8      | 1.0000 | 1.0000 | .9994  | .9941 | .9673 |
|    | 9      | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | .9993 | .9941 |
| 10 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | .9995 |       |
| 12 | 0      | .2824  | .0687  | .0138  | .0022 | .0002 |
|    | 1      | .6590  | .2749  | .0850  | .0196 | .0032 |
|    | 2      | .8891  | .5583  | .2528  | .0834 | .0193 |
|    | 3      | .9744  | .7946  | .4925  | .2253 | .0730 |
|    | 4      | .9957  | .9274  | .7237  | .4382 | .1938 |
|    | 5      | .9995  | .9806  | .8822  | .6652 | .3872 |
|    | 6      | .9999  | .9961  | .9614  | .8418 | .6128 |
|    | 7      | 1.0000 | .9994  | .9905  | .9427 | .8062 |
|    | 8      | 1.0000 | .9999  | .9983  | .9847 | .9270 |
|    | 9      | 1.0000 | 1.0000 | .9998  | .9972 | .9807 |
|    | 10     | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | .9997 | .9968 |
| 11 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | .9998 |       |
| 13 | 0      | .2542  | .0550  | .0097  | .0013 | .0001 |
|    | 1      | .6213  | .2336  | .0637  | .0126 | .0017 |
|    | 2      | .8661  | .5017  | .2025  | .0579 | .0112 |
|    | 3      | .9658  | .7473  | .4206  | .1686 | .0461 |
|    | 4      | .9935  | .9009  | .6543  | .3530 | .1334 |
|    | 5      | .9991  | .9700  | .8346  | .5744 | .2905 |
|    | 6      | .9999  | .9930  | .9376  | .7712 | .5000 |
|    | 7      | 1.0000 | .9988  | .9818  | .9023 | .7095 |

80<sup>14</sup>

TABLA 1 (continuación)  
 FUNCION DE DISTRIBUCION BINOMIAL

$$F_X(x) = \sum_{k=0}^x \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k}$$

| n  | x  | p      |        |        |        |        |
|----|----|--------|--------|--------|--------|--------|
|    |    | 0.10   | 0.20   | 0.30   | 0.40   | 0.50   |
| 13 | 8  | 1.0000 | .9998  | .9960  | .9679  | .8666  |
|    | 9  | 1.0000 | 1.0000 | .9993  | .9922  | .9539  |
|    | 10 | 1.0000 | 1.0000 | .9999  | .9987  | .9888  |
|    | 11 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | .9999  | .9983  |
|    | 12 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | .9999  |
|    |    |        |        |        |        |        |
| 14 | 0  | .2288  | .0440  | .0068  | .0008  | .0001  |
|    | 1  | .5846  | .1979  | .0475  | .0081  | .0009  |
|    | 2  | .8416  | .4481  | .1608  | .0398  | .0055  |
|    | 3  | .9559  | .6982  | .3552  | .1243  | .0287  |
|    | 4  | .9908  | .8702  | .5842  | .2793  | .0898  |
|    | 5  | .9985  | .9561  | .7805  | .4859  | .2120  |
|    | 6  | .9998  | .9884  | .9067  | .6925  | .3953  |
|    | 7  | 1.0000 | .9976  | .9685  | .8499  | .6047  |
|    | 8  | 1.0000 | .9996  | .9917  | .9417  | .7850  |
|    | 9  | 1.0000 | 1.0000 | .9983  | .9825  | .9102  |
|    | 10 | 1.0000 | 1.0000 | .9998  | .9961  | .9713  |
|    | 11 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | .9994  | .9935  |
|    | 12 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | .9999  | .9991  |
|    | 13 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | .9999  |
|    |    |        |        |        |        |        |
| 15 | 0  | .2059  | .0352  | .0047  | .0005  | .0000  |
|    | 1  | .5490  | .1671  | .0353  | .0052  | .0005  |
|    | 2  | .8159  | .3980  | .1268  | .0271  | .0037  |
|    | 3  | .9444  | .6482  | .2969  | .0905  | .0176  |
|    | 4  | .9873  | .8358  | .5155  | .2173  | .0592  |
|    | 5  | .9978  | .9389  | .7216  | .4032  | .1509  |
|    | 6  | .9997  | .9819  | .8689  | .6098  | .3036  |
|    | 7  | 1.0000 | .9958  | .9500  | .7869  | .5000  |
|    | 8  | 1.0000 | .9992  | .9848  | .9050  | .6964  |
|    | 9  | 1.0000 | .9999  | .9963  | .9662  | .8491  |
|    | 10 | 1.0000 | 1.0000 | .9993  | .9907  | .9408  |
|    | 11 | 1.0000 | 1.0000 | .9999  | .9981  | .9824  |
|    | 12 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | .9997  | .9963  |
|    | 13 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | .9995  |
|    | 14 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 |

TABLA 1 (continuación)  
 FUNCION DE DISTRIBUCION BINOMIAL

$$F_X(x) = \sum_{k=0}^x \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k}$$

| n  | x      | p      |        |        |        |       |
|----|--------|--------|--------|--------|--------|-------|
|    |        | 0.10   | 0.20   | 0.30   | 0.40   | 0.50  |
| 18 | 0      | .1501  | .0180  | .0016  | .0001  | .0000 |
|    | 1      | .4503  | .0991  | .0142  | .0013  | .0001 |
|    | 2      | .7338  | .2713  | .0600  | .0082  | .0007 |
|    | 3      | .9018  | .5010  | .1646  | .0328  | .0039 |
|    | 4      | .9718  | .7164  | .3327  | .0942  | .0154 |
|    | 5      | .9936  | .8671  | .5344  | .2088  | .0481 |
|    | 6      | .9988  | .9487  | .7217  | .3743  | .1189 |
|    | 7      | .9998  | .9837  | .8593  | .5634  | .2403 |
|    | 8      | 1.0000 | .9957  | .9404  | .7368  | .4073 |
|    | 9      | 1.0000 | .9991  | .9790  | .8653  | .5927 |
|    | 10     | 1.0000 | .9998  | .9939  | .9424  | .7597 |
|    | 11     | 1.0000 | 1.0000 | .9986  | .9797  | .8811 |
|    | 12     | 1.0000 | 1.0000 | .9997  | .9942  | .9519 |
|    | 13     | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | .9987  | .9846 |
|    | 14     | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | .9998  | .9962 |
|    | 15     | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | .9993 |
|    | 16     | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | .9999 |
| 17 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 |       |
| 19 | 0      | .1351  | .0144  | .0011  | .0001  | .0000 |
|    | 1      | .4203  | .0829  | .0104  | .0008  | .0000 |
|    | 2      | .7054  | .2369  | .0462  | .0055  | .0004 |
|    | 3      | .8850  | .4551  | .1332  | .0230  | .0022 |
|    | 4      | .9648  | .6733  | .2822  | .0696  | .0096 |
|    | 5      | .9914  | .8369  | .4739  | .1629  | .0318 |
|    | 6      | .9983  | .9324  | .6655  | .3081  | .0833 |
|    | 7      | .9997  | .9767  | .8180  | .4878  | .1796 |
|    | 8      | 1.0000 | .9933  | .9161  | .6675  | .3238 |
|    | 9      | 1.0000 | .9984  | .9674  | .8139  | .5000 |
|    | 10     | 1.0000 | .9997  | .9895  | .9115  | .6762 |
|    | 11     | 1.0000 | 1.0000 | .9972  | .9648  | .8204 |
|    | 12     | 1.0000 | 1.0000 | .9994  | .9884  | .9165 |
|    | 13     | 1.0000 | 1.0000 | .9999  | .9969  | .9682 |
|    | 14     | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | .9994  | .9904 |
|    | 15     | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | .9999  | .9978 |
|    | 16     | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | .9996 |
| 17 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 |       |

TABLA 1 (continuación)  
 FUNCION DE DISTRIBUCION BINOMIAL

$$F_X(x) = \sum_{k=0}^x \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k}$$

| n  | x      | p      |        |        |        |        |
|----|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
|    |        | 0.10   | 0.20   | 0.30   | 0.40   | 0.50   |
| 16 | 0      | .1953  | .0281  | .0033  | .0003  | .0000  |
|    | 1      | .5147  | .1407  | .0261  | .0033  | .0003  |
|    | 2      | .7892  | .3518  | .0994  | .0183  | .0021  |
|    | 3      | .9316  | .5981  | .2459  | .0651  | .0106  |
|    | 4      | .9830  | .7982  | .4499  | .1666  | .0384  |
|    | 5      | .9967  | .9183  | .6598  | .3288  | .1051  |
|    | 6      | .9995  | .9733  | .8247  | .5272  | .2272  |
|    | 7      | .9999  | .9930  | .9256  | .7161  | .4018  |
|    | 8      | 1.0000 | .9985  | .9743  | .8577  | .5982  |
|    | 9      | 1.0000 | .9998  | .9929  | .9417  | .7728  |
|    | 10     | 1.0000 | 1.0000 | .9984  | .9809  | .8949  |
|    | 11     | 1.0000 | 1.0000 | .9997  | .9951  | .9616  |
|    | 12     | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | .9991  | .9894  |
|    | 13     | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | .9999  | .9979  |
|    | 14     | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | .9997  |
| 15 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 |        |
| 17 | 0      | .1668  | .0225  | .0023  | .0002  | .0000  |
|    | 1      | .4818  | .1182  | .0193  | .0021  | .0001  |
|    | 2      | .7618  | .3096  | .0774  | .0123  | .0012  |
|    | 3      | .9174  | .5489  | .2019  | .0464  | .0064  |
|    | 4      | .9779  | .7582  | .3887  | .1260  | .0245  |
|    | 5      | .9953  | .8943  | .5968  | .2639  | .0717  |
|    | 6      | .9992  | .9623  | .7752  | .4478  | .1662  |
|    | 7      | .9999  | .9891  | .8954  | .6405  | .3145  |
|    | 8      | 1.0000 | .9974  | .9597  | .8011  | .5000  |
|    | 9      | 1.0000 | .9995  | .9873  | .9081  | .6855  |
|    | 10     | 1.0000 | .9999  | .9968  | .9652  | .8338  |
|    | 11     | 1.0000 | 1.0000 | .9993  | .9894  | .9283  |
|    | 12     | 1.0000 | 1.0000 | .9999  | .9975  | .9755  |
|    | 13     | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | .9995  | .9936  |
|    | 14     | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | .9999  | .9988  |
|    | 15     | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | .9999  |
|    | 16     | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 |

TABLA 1 (continuación)  
 FUNCION DE DISTRIBUCION BINOMIAL

$$F_X(x) = \sum_{k=0}^x \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k}$$

| n  | x      | p      |        |        |        |       |
|----|--------|--------|--------|--------|--------|-------|
|    |        | 0.10   | 0.20   | 0.30   | 0.40   | 0.50  |
| 20 | 0      | .1216  | .0115  | .0008  | .0000  | .0000 |
|    | 1      | .3917  | .0692  | .0076  | .0005  | .0000 |
|    | 2      | .6769  | .2061  | .0355  | .0036  | .0002 |
|    | 3      | .8670  | .4114  | .1071  | .0160  | .0013 |
|    | 4      | .9568  | .6296  | .2375  | .0510  | .0059 |
|    | 5      | .9887  | .8042  | .4164  | .1256  | .0207 |
|    | 6      | .9976  | .9133  | .6080  | .2500  | .0577 |
|    | 7      | .9996  | .9679  | .7723  | .4159  | .1316 |
|    | 8      | .9999  | .9900  | .8867  | .5956  | .2517 |
|    | 9      | 1.0000 | .9974  | .9520  | .7553  | .4119 |
| 10 | 1.0000 | .9994  | .9829  | .8725  | .5881  |       |
| 11 | 1.0000 | .9999  | .9949  | .9435  | .7483  |       |
| 12 | 1.0000 | 1.0000 | .9987  | .9790  | .8684  |       |
| 13 | 1.0000 | 1.0000 | .9997  | .9935  | .9423  |       |
| 14 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | .9984  | .9793  |       |
| 15 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | .9997  | .9941  |       |
| 16 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | .9987  |       |
| 17 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | .9998  |       |
| 18 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 |       |

EJEMPLO

SI SE LANZA AL AIRE SEIS VECES UNA MONEDA HOMOGENEA,

- A) ¿CUAL ES LA PROBABILIDAD DE OBTENER DOS "CARAS"?
- B) ¿CUAL ES LA PROBABILIDAD DE OBTENER POR LO MENOS CUATRO "CARAS" ( $X \geq 4$ )?
- C) ¿CUANTO VALEN LA ESPERANZA Y LA DESVIACION ESTANDAR?

SOLUCION

- A) PUESTO QUE LA MONEDA ES HOMOGENEA SE TIENE  $p=1/2$  Y  $q=1-1/2=1/2$ , DONDE  $p$  ES LA PROBABILIDAD DE OBSERVAR "CARA" (CARA = EXITO) EN UN LANZAMIENTO. POR TANTO

$$P[X = 2] = f_x(2) = \frac{6!}{2!(6-2)!} \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^{6-2} = \frac{6!}{2!4!} \left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{15}{64}$$

(DE LA TABLA:  $P(x=2) = P(x \leq 3) - P(x \leq 2) = 0.3438 - 0.1094 = 0.2344$ )

- B) PARA QUE SE CUMPLA  $X \geq 4$  EN SEIS LANZAMIENTOS, SE NECESITA QUE SE OBSERVEN 4, 5 O 6 CARAS. PUESTO QUE ESTOS TRES EVENTOS SON MUTUAMENTE EXCLUSIVOS, SE TIENE

$$P[X \geq 4] = f_x(4) + f_x(5) + f_x(6)$$

CALCULANDO LOS TRES SUMANDOS COMO EN LA PREGUNTA ANTERIOR, RESULTA

$$\begin{aligned} P[X \geq 4] &= \frac{6!}{4!2!} \left(\frac{1}{2}\right)^4 \left(\frac{1}{2}\right)^{6-4} + \frac{6!}{5!1!} \left(\frac{1}{2}\right)^5 \left(\frac{1}{2}\right)^{6-5} + \frac{6!}{6!0!} \left(\frac{1}{2}\right)^6 \left(\frac{1}{2}\right)^{6-6} \\ &= \frac{15}{64} + \frac{6}{64} + \frac{1}{64} = \frac{11}{32} = 0.3438 \end{aligned}$$

(DE LA TABLA:  $P(x \geq 4) = 1 - P(x \leq 3) = 1 - 0.6562 = 0.3438$ )

- C)  $E[X] = np = 6(1/2) = 3$

$$\sigma^2[X] = npq = 6(1/2)(1/2) = 3/2, \quad \sigma(X) = \sqrt{3/2} = 1.22$$

EJEMPLO

SI CON BASE EN LA EXPERIENCIA DE MUCHO TIEMPO SE SABE QUE UNA MAQUINA IMPRIME COLORES DEFECTUOSOS EN UN 5 POR CIENTO DE LAS VECES, CALCULAR LA PROBABILIDAD DE QUE DE 10 IMPRESIONES SE OBTENGA:

- NINGUNA DEFECTUOSA
- UNA DEFECTUOSA
- MAS DE UNA DEFECTUOSA

ASIMISMO, CALCULAR LA MEDIA Y LA DESVIACION ESTANDAR DEL NUMERO DE DEFECTUOSAS.

Solución

SEA EXITO = IMPRESION DEFETUOSA

EN TAL CASO  $p = 0.05$  Y  $q = 1 - 0.05 = 0.95$

- NINGUNA DEFECTUOSA ES LO MISMO

QUE  $X = 0$ ; ENTONCES  $n - x = 10 - 0 = 10$  Y:

$$P(x=0) = f_x(0) = \frac{n!}{x! (n-x)!} = \frac{10!}{0! (10-0)!} (0.05)^0 (0.95)^{10}$$

$$= \frac{10!}{10!} (0.95)^{10} = 0.599 = 59.9\%$$

- UNA DEFECTUOSA ES LO MISMO

QUE  $X = 1$ ; ENTONCES  $n - x = 10 - 1 = 9$  Y:

$$P(x = 1) = f_x(1) = \frac{10!}{1! 9!} (0.05)^1 (0.95)^9$$

$$= \frac{10 \times 9!}{9!} (0.05) (0.6302) = 0.315$$

- MAS DE UNA DEFECTUOSA ES LO MISMO

QUE  $x > 1$

$$P(X > 1) = 1 - P(X \leq 1) = 1 - [P(x = 0) + P(x = 1)]$$

$$= 1 - (0.599 + 0.315) = 0.086$$

$$E(x) = np = 10 \times 0.05 = 0.5$$

$$\sigma^2(x) = npq = 10 \times 0.05 \times 0.95 = 0.0475$$

$$\sigma(x) = \sqrt{0.0475} = 0.2179$$

EJEMPLO

RESOLVER AHORA EL INCISO b. DEL EJEMPLO ANTERIOR, PARA EL CASO EN QUE  $p = 0.1$

$$P(x = 1) = \frac{10!}{1! 9!} (0.10)^1 (0.90)^9 = 0.3874 = 38.74\%$$

USANDO LAS TABLAS DE LA DISTRIBUCION BINOMINAL:

$$\{X = x\} \cup \{X \leq x-1\} = \{X \leq x\}$$

$$\text{POR LO TANTO } P\{X = x\} + P\{X \leq x-1\} = P\{X \leq x\}$$

$$\text{Y } P\{X = x\} = P\{X \leq x\} - P\{X \leq x-1\}$$

EN ESTE EJEMPLO  $x = 1$  y  $x-1=0$ , POR LO QUE

$$\begin{aligned} P(X=1) &= P(X \leq 1) - P(X \leq 0) \\ &= 0.7361 - 0.3487 = 0.3874 \end{aligned}$$

DISTRIBUCION GEOMETRICA

SEA  $p$  LA PROBABILIDAD DE EXITO EN UN EXPERIMENTO. SI EL EXPERIMENTO ES CON REEMPLAZO Y SE REPITE SUCESIVAMENTE HASTA QUE SE OBSERVA UN EXITO, SE TENDRA LA VARIABLE ALEATORIA  $X$ =NUMERO DE REPETICIONES DEL EXPERIMENTO HASTA QUE SE OBSERVA EL PRIMER EXITO. OBTENGAMOS LA DENSIDAD DE PROBABILIDADES DE  $X$  ( $S = \{1, 2, 3, \dots, \infty\}$ ).

EL PRIMER EXITO OCURRIRA EN EL EXPERIMENTO NUMERO  $x$  SI, Y SOLO SI, EN LOS  $x-1$  ANTERIORES HUBO PUROS FRACASOS. LA PROBABILIDAD DE ESTE EVENTO, DADO QUE LOS EXPERIMENTOS SON INDEPENDIENTES, ES

$$f_X(x) = (1-p)^{x-1} p$$

ESTA FUNCION SE DENOMINA DISTRIBUCION GEOMETRICA. SE PUEDE DEMOSTRAR QUE LA DISTRIBUCION DE PROBABILIDADES ACUMULADAS ES

$$F_X(x) = \sum_{x=1}^n p(1-p)^{x-1} = 1 - (1-p)^n$$

Y QUE

$$E(X) = \sum_{x=1}^{\infty} x(1-p)^{x-1} p = 1/p$$

$$\sigma^2(X) = \sum_{x=1}^{\infty} \left(x - \frac{1}{p}\right)^2 (1-p)^{x-1} p = (1-p)/p^2$$

EJEMPLO

¿CUAL ES LA PROBABILIDAD DE OBTENER UN TORNILLO DEFECTUOSO POR PRIMERA VEZ EN LA SEXTA EXTRACCION, SI EL PORCENTAJE DE DEFECTUOSOS DEL LOTE DEL CUAL SE MUESTREA ES DE 5 POR CIENTO?

$$P(X=6) = f_X(6) = (1-0.05)^5 \times 0.05 = 0.95^5 \times 0.05 = 0.03869$$

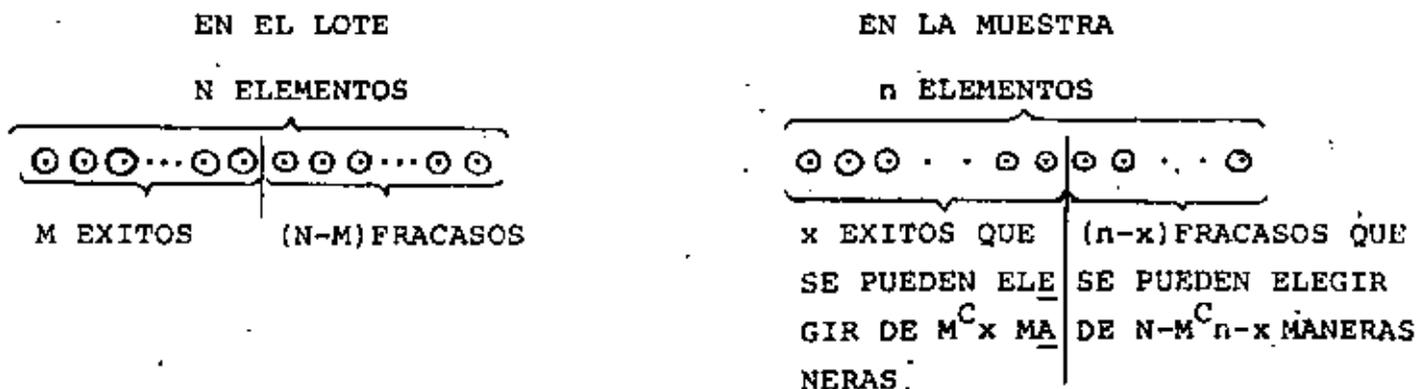
DISTRIBUCION HIPERGEOMETRICA

CUANDO SE TIENE UNA VARIABLE ALEATORIA DISCRETA CUYO ESPACIO DE EVENTOS TIENE SOLO DOS ELEMENTOS, DIGAMOS  $S=(\text{EXITO}, \text{FRACASO})$ , Y SE REALIZA UN MUESTREO SIN REEMPLAZO, ENTONCES LOS RESULTADOS DE CADA EXPERIMENTO NO SON INDEPENDIENTES NI LA PROBABILIDAD DE EXITO PERMANECE CONSTANTE, COMO EN LA DISTRIBUCION BINOMIAL, POR LO QUE ESTA ULTIMA NO ES APLICABLE.

SEA  $X$  LA VARIABLE ALEATORIA NUMERO DE EXITOS OBSERVADOS AL REPETIR  $n$  VECES EL EXPERIMENTO CONSISTENTE EN EXTRAER, SIN REEMPLAZO, ELEMENTOS DE UN LOTE QUE TIENE  $N$  OBJETOS DE LOS CUALES  $M$  SON "EXITOS". EL NUMERO DE ELEMENTOS QUE TIENE EL ESPACIO DE EVENTOS DEL EXPERIMENTO ES

$$N(S) = N C_n$$

EL NUMERO,  $N(\{X=x\})$ , DE MANERAS POSIBLES E IGUALMENTE PROBABLES DE OBTENER  $x$  EXITOS ES



CADA ELECCION POSIBLE DE  $x$  EXITOS SE COMBINA CON CADA ELECCION POSIBLE DE  $(n-x)$  FRACASOS; POR LO TANTO, EL NUMERO TOTAL DE MANERAS DE OBTENER  $x$  EXITOS EN  $n$  EXTRACCIONES SIN REEMPLAZO ES

$$N(\{X=x\}) = \binom{M}{x} \binom{N-M}{n-x}$$

POR LO TANTO

$$P(\{X=x\}) = f_X(x) = \frac{\binom{M}{x} \binom{N-M}{n-x}}{N^C_n} = \frac{\binom{M}{x} \binom{N-M}{n-x}}{\binom{N}{n}} \quad x=0,1,\dots,n$$

EN DONDE  $\binom{M}{x} = \frac{M!}{x!(M-x)!}$  ,  $\binom{N-M}{n-x} = \frac{(N-M)!}{(n-x)!(N-M-n+x)!}$

Y  $\binom{N}{n} = \frac{N!}{n!(N-n)!}$

QUE SE CONOCE COMO DISTRIBUCION HIPERGEOMETRICA, LA MEDIA Y LA VARIAN-  
CIA DE ESTA DISTRIBUCION SON

$$E(X) = \sum_{x=0}^n x \frac{\binom{M}{x} \binom{N-M}{n-x}}{\binom{N}{n}} = nM/N = np, \text{ si } p = M/N$$

Y

$$\sigma^2(X) = \sum_{x=0}^n \left(x - \frac{nM}{N}\right)^2 \frac{\binom{M}{x} \binom{N-M}{n-x}}{\binom{N}{n}} = \frac{Mn(N-M)(N-n)}{N^2(N-1)} = p(1-p) \cdot \frac{n(N-n)}{N-1}$$

RESPECTIVAMENTE.

EJEMPLO

EN UN PROBLEMA DE CONTROL ESTADISTICO DE CALIDAD, SE TIENE UN LOTE DE 100 TRANSFORMADORES DE CORRIENTE ELECTRICA, DE LOS CUALES 40 SON DEFECTUOSOS (NO CUMPLEN LAS NORMAS DE FABRICACION). ¿CUAL ES LA PROBABILIDAD DE OBTENER UNO DEFECTUOSO DE TRES SELECCIONADOS AL AZAR SIN REEMPLAZO?

$$P[X=1] = \frac{\binom{40}{1} \binom{100-40}{3-1}}{\binom{100}{3}} = \frac{\binom{40}{1} \binom{60}{2}}{\binom{100}{3}}$$

$$= \frac{\frac{40!}{39! \times 1!} \times \frac{60!}{58! \times 2!}}{\frac{100!}{97! \times 3!}} = 0.438$$

APROXIMACION DE LA DISTRIBUCION HIPERGEOMETRICA MEDIANTE LA BINOMIAL

CUANDO N ES GRANDE Y n PEQUENO ( $N \geq 10n$ ), LA DISTRIBUCION BINOMIAL SE PUEDE USAR COMO APROXIMACION DE LA HIPERGEOMETRICA. DE ESTA APROXIMACION SE HECHA MANO CUANDO LOS CALCULOS CON ESTA ULTIMA RESULTAN TEDIOSOS. EN EL CASO DEL EJEMPLO ANTERIOR, SI SE USA LA DENSIDAD BINOMIAL SE OBTIENE, CON  $p=40/100 = 0.40$  Y  $n=3$

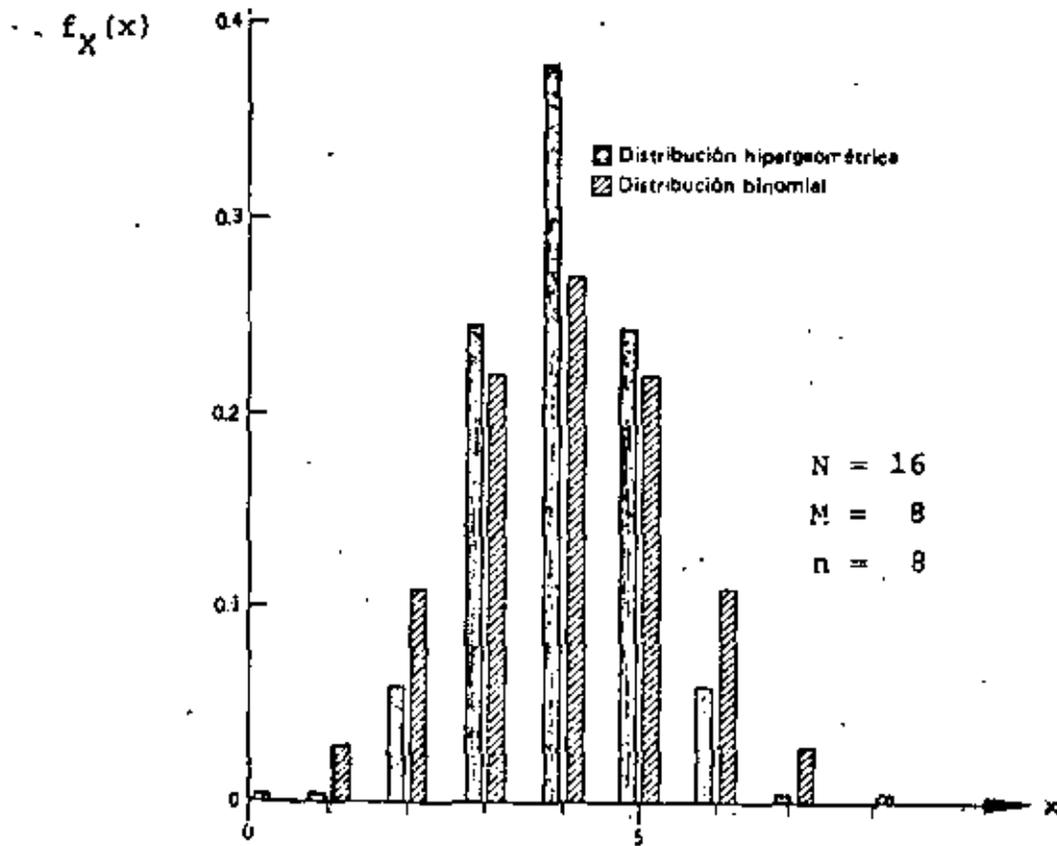
$$P[X=1] = \frac{3!}{1! 2!} (0.40)^1 (0.60)^2 = 0.432$$

## FORMULA DE STIRLING

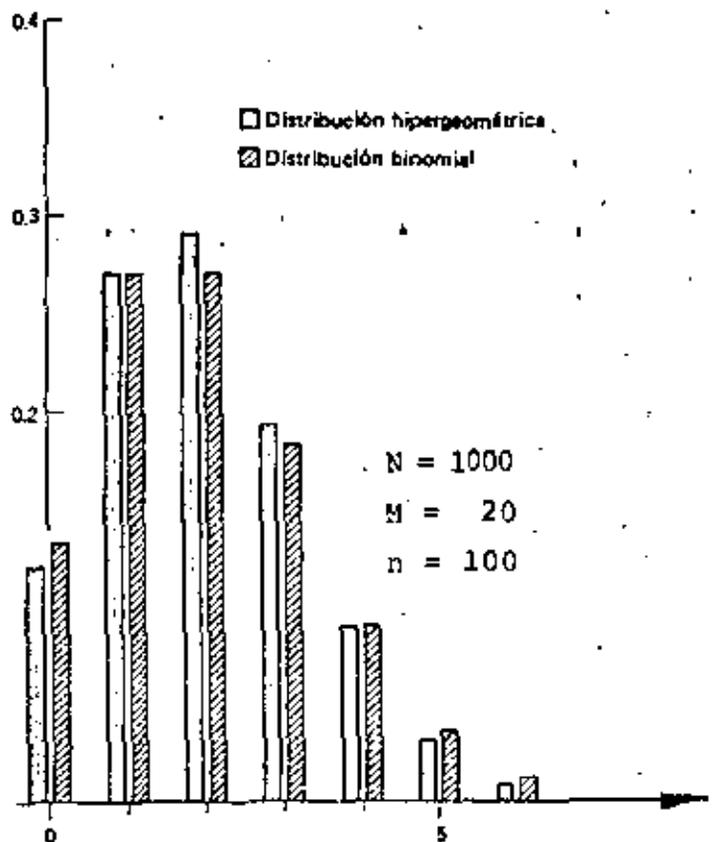
$$N! \approx \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n ; \quad (e = 2.718\dots)$$

Error = 2% SI  $n = 4$

Error = 0.8% SI  $n = 10$



COMPARACION DE LAS DISTRIBUCIONES HIPERGEOMETRICA Y BINOMIAL



DISTRIBUCION DE POISSON

UNA DISTRIBUCION DE PROBABILIDADES PARA UNA VARIABLE ALEATORIA DISCRETA,  $X$ , DE LA FORMA

$$f_X(x) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} ; x = 0, 1, 2, \dots$$

SE LLAMA DISTRIBUCION DE POISSON; EN ESTA ECUACION  $\lambda$  ES UNA CONSTANTE. SE PUEDE DEMOSTRAR QUE LA MEDIA Y LA VARIANCIA PARA ESTA DISTRIBUCION QUEDAN DADAS POR

$$E(X) = \sum_{x \neq 0} x \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} = \lambda$$

$$\sigma^2(x) = \sum_{x \neq 0} (x-\lambda)^2 \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} = \lambda$$

UNA VEZ CONOCIDA  $\lambda$ , CON ESTA DISTRIBUCION SE PUEDEN CALCULAR LAS PROBABILIDADES DE QUE UN EVENTO OCURRA  $x$  VECES.

ES POSIBLE DEMOSTRAR QUE LA DISTRIBUCION DE POISSON PUEDE EMPLEARSE COMO UNA PROXIMACION DE LA DE BERNOULLI, TOMANDO  $\lambda = np$ , CUANDO  $n$  ES GRANDE Y  $p$  PEQUEÑA, PERO DE TAL MANERA QUE  $npq > 1$ . AL RESPECTO, SI  $n=20$  y  $p=0.05$ , ENTONCES EL ERROR QUE SE TIENE AL USAR DICHA APROXIMACION ES MENOR DE 3 POR CIENTO PARA VALORES DE  $X$  MENORES DE 3; PARA  $X=4$  Y  $X=5$  LOS ERRORES RESPECTIVOS SON 15 Y 41 POR CIENTO, DEBIDO A QUE NO SE CUMPLE CON LA CONDICION DE QUE  $npq$  SEA MAYOR DE UNO, YA QUE  $npq = 20 \times 0.05 \times 0.95 = 0.95$



TABLA 2 (continuación)  
 FUNCION DE DISTRIBUCION DE POISSON

$$F_X(x) = \sum_{k=0}^x \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!}$$

| X  | 10.0  | 11.0  | 12.0  | 13.0  | 14.0  | 15.0  |
|----|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 2  | .003  | .001  | .001  | .000  | .000  | .000  |
| 3  | .010  | .005  | .002  | .001  | .000  | .000  |
| 4  | .029  | .015  | .008  | .004  | .002  | .001  |
| 5  | .067  | .038  | .020  | .011  | .006  | .003  |
| 6  | .130  | .079  | .046  | .026  | .014  | .008  |
| 7  | .220  | .143  | .090  | .054  | .032  | .018  |
| 8  | .333  | .232  | .155  | .100  | .062  | .037  |
| 9  | .458  | .341  | .242  | .166  | .109  | .070  |
| 10 | .583  | .460  | .347  | .252  | .176  | .118  |
| 11 | .697  | .579  | .462  | .353  | .260  | .185  |
| 12 | .792  | .689  | .576  | .462  | .358  | .268  |
| 13 | .864  | .781  | .682  | .573  | .464  | .363  |
| 14 | .917  | .854  | .772  | .675  | .570  | .466  |
| 15 | .951  | .907  | .844  | .764  | .669  | .568  |
| 16 | .973  | .944  | .899  | .835  | .756  | .664  |
| 17 | .986  | .968  | .937  | .890  | .827  | .749  |
| 18 | .993  | .982  | .963  | .940  | .883  | .819  |
| 19 | .997  | .991  | .979  | .957  | .923  | .875  |
| 20 | .998  | .995  | .988  | .975  | .952  | .917  |
| 21 | .999  | .998  | .994  | .986  | .971  | .947  |
| 22 | 1.000 | .999  | .997  | .992  | .983  | .967  |
| 23 | 1.000 | 1.000 | .999  | .996  | .991  | .981  |
| 24 | 1.000 | 1.000 | .999  | .998  | .995  | .989  |
| 25 | 1.000 | 1.000 | 1.000 | .999  | .997  | .994  |
| 26 | 1.000 | 1.000 | 1.000 | 1.000 | .999  | .997  |
| 27 | 1.000 | 1.000 | 1.000 | 1.000 | .999  | .998  |
| 28 | 1.000 | 1.000 | 1.000 | 1.000 | 1.000 | .999  |
| 29 | 1.000 | 1.000 | 1.000 | 1.000 | 1.000 | 1.000 |

EJEMPLO

SI LA PROBABILIDAD DE QUE FALLE UNA VARILLA DE ACERO AL APLICARLE UNA DETERMINADA FUERZA DE TENSION ES DE 0,001, ¿CUAL ES LA PROBABILIDAD DE QUE DE 2000 VARILLAS PROBADAS FALLEN A) TRES, B) MAS DE DOS?

CON  $\lambda = 2000 \times 0.001 = 2$  Y CONSIDERANDO QUE  $npq = 1.9 > 1$ , SE PUEDE USAR LA DISTRIBUCION DE POISSON COMO APROXIMACION DE LA BINOMIAL:

$$a) \quad P(X = 3) = \frac{\lambda^3 e^{-\lambda}}{3!}$$

$$P(X = 3) = \frac{2^3 e^{-2}}{3!} = 0.18$$

EN ESTE CASO LA DISTRIBUCION BINOMIAL DA COMO RESULTADO

$$P[X=3] = \frac{2000!}{3! \times 1997!} (0.001)^3 (0.999)^{1997} = 0.184$$

$$b) \quad P[X > 2] = 1 - P[X \leq 2] = 1 - F_X(2) = 1 - \left\{ P[X=0] + P[X=1] + P[X=2] \right\} = 1 - \frac{2^0 e^{-2}}{0!} - \frac{2^1 e^{-2}}{1!} - \frac{2^2 e^{-2}}{2!} = 1 - \frac{1}{e^2} - \frac{2}{e^2} - \frac{2}{e^2} = 1 - \frac{5}{e^2} = 0.323$$

EJEMPLO

UNA COMPANIA ASEGURADORA DESPUES DE MUCHOS AÑOS DE EXPERIENCIA HA HA ESTIMADO QUE EL 0.004% DE LA POBLACION FALLECE ANUALMENTE POR ACCIDENTE AUTOMOVILISTICO. SI ESTA COMPANIA TIENE 40,000 ASEGURADOS, ¿CUAL ES LA PROBABILIDAD DE QUE 2 DE ELLOS MUERAN EN UN AÑO POR ESTE TIPO DE ACCIDENTE?

SEA X EL NUMERO DE PERSONAS QUE MUEREN ANUALMENTE DE ENTRE LOS ASEGURADOS, POR ACCIDENTE, LA MEDIA DE X ES

$$E[X] = 0.00004 \times 40,000 = 1.6 = \lambda$$

ADEMAS, TOMANDO EN CUENTA QUE  $npq > 1$ , SE PUEDE USAR SIN GRAN ERROR LA DISTRIBUCION DE POISSON:

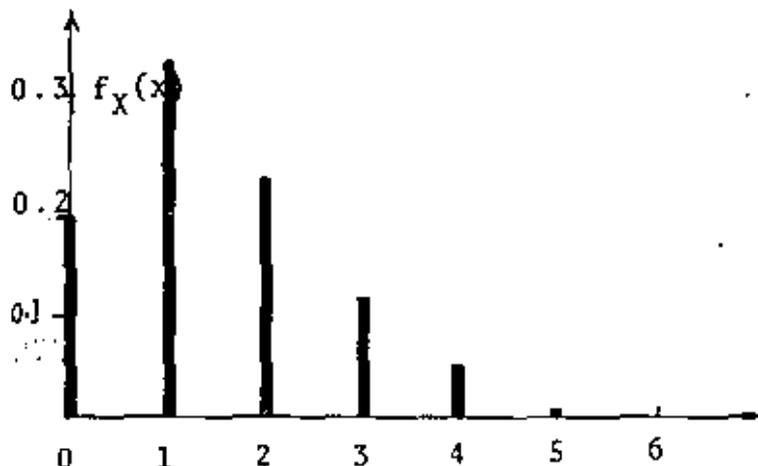
$$P[X=x] = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} = \frac{(1.6)^x e^{-1.6}}{x!}; \quad x=0, 1, 2, \dots$$

POR LO QUE

$$P[X=2] = \frac{(1.6)^2 e^{-1.6}}{2!} = \frac{0.2019 \times 2.56}{2} = 0.26$$

LA DISTRIBUCION DE PROBABILIDADES PARA ESTA VARIABLE ALEATORIA ES:

|          |       |       |       |       |       |       |       |     |
|----------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-----|
| x        | 0     | 1     | 2     | 3     | 4     | 5     | 6     |     |
| $f_X(x)$ | 0.202 | 0.323 | 0.258 | 0.138 | 0.055 | 0.018 | 0.005 | ... |



EJEMPLO

EN LA AMPLIACION DEL CARRIL PARA DAR VUELTA A LA IZQUIERDA EN UNA AVENIDA, SOLO HAY CAPACIDAD PARA 3 AUTOS COMO MAXIMO ESPERANDO LA FLECHA LUMINOSA DEL SEMAFORO. EN UN ESTUDIO ESTADISTICO DEL TRANSITO EN ESE LUGAR SE ENCONTRO QUE EN CADA CICLO DE LUCES DEL SEMAFORO HAY EN PROMEDIO 6 AUTOS QUE VAN A DAR VUELTA. ¿CUAL ES LA PROBABILIDAD DE QUE EN UN CICLO DEL SEMAFORO, TOMADO AL AZAR, SE CONGESTIONE EL TRANSITO POR EXCEDERSE LA CAPACIDAD DEL CARRIL?

$$P\{X > 3\} = ?$$

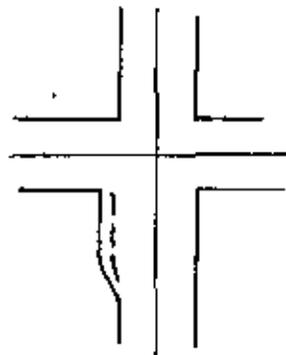
$$\text{SI } A = \{X > 3\}, \bar{A} = \{X \leq 3\}$$

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A) \text{ O } P(A) = 1 - P(\bar{A}), \text{ CON } \lambda = 6,$$

$$P(\bar{A}) = P\{X \leq 3\} = \sum_{x=0}^{x=3} f_X(x) = \sum_{x=0}^{x=3} \frac{e^{-6} 6^x}{x!}$$

$$P(\bar{A}) = e^{-6} \left( 1 + 6 + \frac{6^2}{2} + \frac{6^3}{6} \right) = 61e^{-6} = 0.151$$

$$P\{A\} = P\{X > 3\} = 1 - 0.151 = 0.849$$



PROCESO ESTOCÁSTICO DE POISSON

CON BASE EN LA DISTRIBUCION DE POISSON SE PUEDE DEDUCIR QUE LA DISTRIBUCION DE PROBABILIDADES DEL NUMERO DE OCURRENCIAS DE UN EVENTO DURANTE UN PERIODO  $t$  QUEDA DADA POR

$$f_X(x) = P[X = x \text{ EN UN LAPSO } t]$$

$$f_X(x) = \frac{(\lambda t)^x e^{-\lambda t}}{x!}, \quad x = 0, 1, 2, \dots$$

DONDE

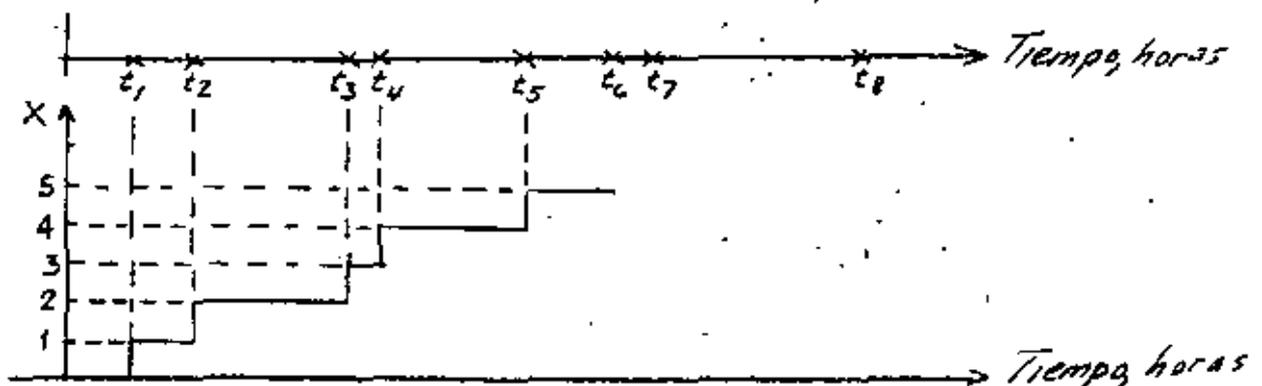
$\lambda$  = NUMERO MEDIO DE OCURRENCIAS POR UNIDAD DE TIEMPO.

LA ESPERANZA Y LA VARIANCIA DE ESTE PROCESO, PARA UN LAPSO  $t$ , SON

$$E(X) = \lambda t$$

$$\sigma^2(X) = \lambda t$$

PARA QUE ESTA DISTRIBUCION SE APLIQUE SE REQUIERE QUE EL EVENTO OCURRA CADA VEZ DE MANERA INDEPENDIENTE DE LAS OCURRENCIAS PREVIAS, Y QUE  $\lambda$  SEA CONSTANTE. A  $\lambda$  SE LE CONOCE COMO INTENSIDAD DEL PROCESO; A SU RECIPROCO,  $1/\lambda$  SE LE DENOMINA PERIODO DE RECURRENCIA.



SE PUEDE DEMOSTRAR QUE CUANDO UN EVENTO OCURRE SIGUIENDO UN PROCESO DE POISSON, LA VARIABLE ALEATORIA "TIEMPO ENTRE UNA OCURRENCIA CUALQUIERA Y LA SIGUIENTE" TIENE UNA DISTRIBUCION DE PROBABILIDADES EXPONENCIAL.

EJEMPLO

SI LOS MAREMOTOS QUE SE REGISTRAN EN UN PUNTO DE LA COSTA MEXICANA DEL OCEANO PACIFICO OCURREN SIGUIENDO UN PROCESO DE POISSON CON  $\lambda = 0.01$ , CALCULAR LA PROBABILIDAD DE QUE ENTRE UN MAREMOTO Y EL SIGUIENTE TRANSCURRA UN TIEMPO

- a. MAYOR DE 100 AÑOS
- b. ENTRE 50 Y 100 AÑOS

$$a. P(t > 100) = \int_{100}^{\infty} \lambda e^{-\lambda t} dt = e^{-0.01 \times 100} = e^{-1} = 36.79\%$$

$$b. P(50 \leq t \leq 100) = \int_{50}^{100} 0.01 e^{-0.01 t} dt = F(100) - F(50)$$

$$= (1 - e^{-0.01 \times 100}) - (1 - e^{-0.01 \times 50}) = e^{-0.5} - e^{-1}$$

$$0.6065 - 0.3679 = 0.2386$$

EJEMPLO

EN UNA CENTRAL DE COMUNICACIONES SE TIENE UNA DEMANDA MEDIA DEL SERVICIO DE 8 LLAMADAS CADA MINUTO. CALCULAR LAS PROBABILIDADES DE QUE EN 2 MINUTOS NO SE SOLICITE EL SERVICIO, DE QUE SE SOLICITE SOLO UNA VEZ, Y MAS DE UNA VEZ.

$$f_X(0) = P[X=0] = \frac{(\lambda t)^0 \cdot e^{-\lambda t}}{0!} = e^{-16} \doteq 0.00004$$

$$f_X(1) = \frac{16^1 e^{-16}}{1!} = 0.00064$$

$$P[X>1] = 1 - (0.00004 + 0.00064) = 0.99932$$

EJEMPLO

MEDIANTE UN ESTUDIO ESTADISTICO SOBRE LA OCURRENCIA DE MAREMOTOS EN LA COSTA MEXICANA DEL OCEANO PACIFICO SE ESTIMO QUE UNA OLA DE 4m DE ALTURA O MAYOR SOBRE EL NIVEL DE LA MAREA TIENE UN PERIODO DE RECURRENCIA DE 100 AÑOS. CALCULAR LAS PROBABILIDADES DE QUE EN LOS PROXIMOS 10, 50 Y 100 AÑOS NO OCURRA NINGUN MAREMOTO EN DICHA REGION CUYA OLA MAXIMA EXCEDE DE 4m; SUPONIENDO QUE LA OCURRENCIA DE LOS MAREMOTOS SE PUEDE MODELAR MEDIANTE UN PROCESO ESTOCASTICO DE POISSON.

LA DISTRIBUCION DE PROBABILIDADES DE LA VARIABLE ALEATORIA  $X$ =NUMERO DE MAREMOTOS CUYA OLA MAXIMA ES MAYOR DE 4m, CON  $\lambda=1/100=0.01$  ES

$$f_X(x) = \frac{(\lambda t)^x e^{-\lambda t}}{x!} = \frac{(0.01t)^x e^{-0.01t}}{x!}$$

POR LO TANTO, PARA  $t=10, 50$  Y  $100$  AÑOS, SE TIENE, RESPECTIVAMENTE, QUE:

$$a) f_X(0) = \frac{(0.01 \times 10)^0 e^{-0.01 \times 10}}{0!} = e^{-0.1} = 0.905$$

$$b) f_X(0) = \frac{(0.01 \times 50)^0 e^{-0.01 \times 50}}{0!} = e^{-0.5} = 0.607$$

$$c) f_X(0) = \frac{(0.01 \times 100)^0 e^{-0.01 \times 100}}{0!} = e^{-1} = 0.368$$

PARA ESTE MISMO PROBLEMA, LAS PROBABILIDADES DE QUE OCURRA AL MENOS UN MAREMOTO CON OLA MAXIMA MAYOR DE 4m SON, RESPECTIVAMENTE,

$$\text{a) } P[X \geq 1] = 1 - f_X(0) = 1 - 0.905 = 0.095$$

$$\text{b) } P[X \geq 1] = 1 - 0.607 = 0.393$$

$$\text{c) } P[X \geq 1] = 1 - 0.368 = 0.632$$

EJEMPLO

SE SABE QUE UNA MAQUINA QUE PRODUCE PAPEL PARA DIBUJO, LO HACE CON UN DEFECTO POR CADA 100 M FABRICADOS

- a. ¿CUAL ES LA PROBABILIDAD DE TENER CERO DEFECTOS EN UN PLIEGO DE 20 M?

$$\lambda = 1/100 = 0.01 \text{ DEFECTOS /METRO}$$

$$P(X = 0) = \frac{\lambda t e^{-\lambda t}}{x!} = \frac{0.01 \times 20 e^{-0.01 \times 20}}{0!} =$$

$$\frac{0.2 e^{-0.2}}{0!} = 0.164$$

(EN ESTE CASO  $t = \text{LONGITUD}$ )

- b. ¿CUAL ES LA PROBABILIDAD DE TENER UN DEFECTO EN 20m)

$$P(X = 1) = \frac{0.2 e^{-0.2}}{1!} = 0.164$$

- c. ¿CUAL ES LA PROBABILIDAD DE TENER UNO O CERO DEFECTOS?

$$P(0 \leq x \leq 1) = P(X = 0) + P(X = 1) = 0.164 + 0.164 = 0.328$$

- d. ¿CUAL ES LA PROBABILIDAD DE TENER MAS DE UN DEFECTO?

$$P(X > 1) = 1 - P(X \leq 1) = 1 - 0.328 = 0.672$$

EJEMPLO

SE SABE QUE EN CIERTA ZONA GEOGRAFICA SE LOCALIZA UNA ESPECIE ANIMAL RARA A RAZON DE 2 EJEMPLARES POR 100 KM<sup>2</sup>. SI SE TOMA UNA FOTOGRAFIA AEREA QUE ABARQUE 120 KM<sup>2</sup>, ¿CUAL ES LA PROBABILIDAD DE LOCALIZAR 5 ANIMALES?

$$\text{CON } \lambda = \frac{2}{100} = 0.02 \text{ ANIMALES/KM}^2$$

$$P(X = 5) = \frac{\lambda t e^{-\lambda t}}{X!} = \frac{0.02 \times 120 e^{-0.02 \times 120}}{5!}$$

$$\frac{2.4 e^{-2.4}}{5!} = \frac{0.219}{5!} = 0.00183$$

(EN ESTE CASO t = AREA)

¿CUAL ES LA PROBABILIDAD DE LOCALIZAR UN ANIMAL?

$$P(X = 1) = \frac{2.4 e^{-2.4}}{1!} = 0.219$$

¿CUAL ES LA PROBABILIDAD DE NO LOCALIZAR NINGUNO?

$$P(X = 0) = \frac{0.219}{0!} = 0.219$$

¿CUAL ES LA PROBABILIDAD DE LOCALIZAR MAS DE UNO?

$$P(X > 1) = 1 - P(X \leq 1) = 1 - (0.219 + 0.219) = 0.562$$

VARIABLES ALEATORIAS CONTINUAS

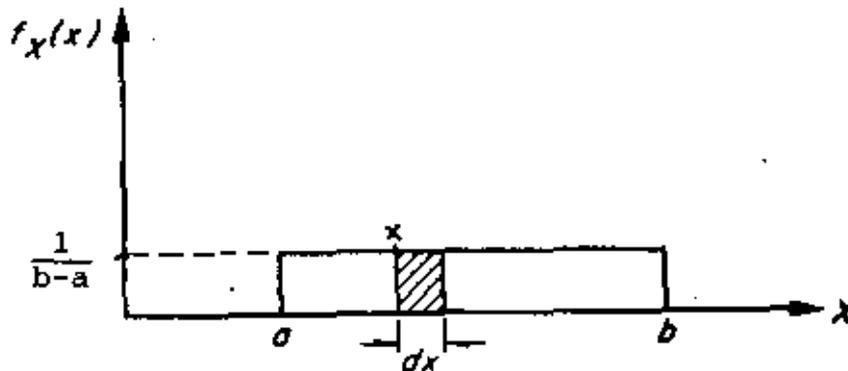
DISTRIBUCION UNIFORME

SE DICE QUE UNA VARIABLE ALEATORIA CONTINUA,  $X$ , TIENE DISTRIBUCION UNIFORME ENTRE  $X = a$  Y  $X = b$  ( $b > a$ ) SI

$$f_X(x) = \text{CONSTANTE} = \frac{1}{b-a} \quad \text{si } a \leq x \leq b$$

LO QUE SIGNIFICA QUE LA PROBABILIDAD DE OBTENER UN VALOR ENTRE  $x$  Y  $x + dx$  ES LA MISMA PARA CUALQUIER  $x$  COMPRENDIDA ENTRE  $a$  Y  $b$ .

LA GRAFICA DE DICHA DISTRIBUCION ES



*Distribución uniforme de una variable aleatoria continua*

LA ESPERANZA Y LA VARIANCIA DE LA DISTRIBUCION UNIFORME SE CALCULAN DE LA SIGUIENTE MANERA:

$$E[X] = \int_a^b x \frac{1}{b-a} dx = \left[ \frac{x^2}{2(b-a)} \right]_a^b = \frac{b^2 - a^2}{2(b-a)} = (b+a)/2$$

$$\sigma^2(X) = \int_a^b (x-E[X])^2 \frac{1}{b-a} dx = \int_a^b \frac{x^2}{b-a} dx + \int_a^b \frac{(E[X])^2}{b-a} dx -$$

$$- \int_a^b \frac{2xE[X]}{a-b} dx$$

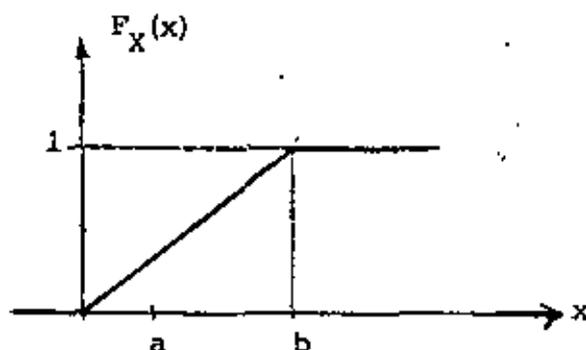
$$= \left[ \frac{x^3}{3(b-a)} \right]_a^b + \left[ \frac{(E[X])^2}{b-a} x \right]_a^b - \left[ \frac{2E[X]}{b-a} \frac{x^2}{2} \right]_a^b =$$

$$= \frac{b^3 - a^3}{3(b-a)} + (E[X])^2 - E[X](b+a) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

LA DISTRIBUCION DE PROBABILIDADES ACUMULADAS ES

$$F_X(x) = \int_a^x f_X(u) du = \int_a^x \frac{1}{b-a} du = \frac{x-a}{b-a}, \quad a \leq x \leq b$$

LA GRAFICA DE ESTA FUNCION ES UNA LINEA RECTA DE  $a$  A  $b$ :



### EJEMPLO

¿CUANTO VALE LA PROBABILIDAD DE QUE  $X$  SEA MENOR QUE  $1/3$ , SI ES UNA VARIABLE ALEATORIA CON DISTRIBUCION UNIFORME EN EL INTERVALO 0-1?

$$F_X\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{x-a}{b-a} = \frac{\frac{1}{3} - a}{b-a}$$

PARA  $a = 0$  Y  $b = 1$  NOS QUEDA

$$F_X\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{\frac{1}{3} - 0}{1 - 0} = \frac{1}{3}$$

DISTRIBUCION NORMAL

UNA DE LAS DISTRIBUCIONES DE VARIABLES ALEATORIAS CONTINUAS MAS UTIL ES LA DISTRIBUCION NORMAL O DE GAUSS, DEFINIDA POR LA ECUACION

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}$$



DONDE  $\mu$  ES LA MEDIA Y  $\sigma$  LA DESVIACION ESTANDAR DE X.

SI SE HACE LA TRANSFORMACION

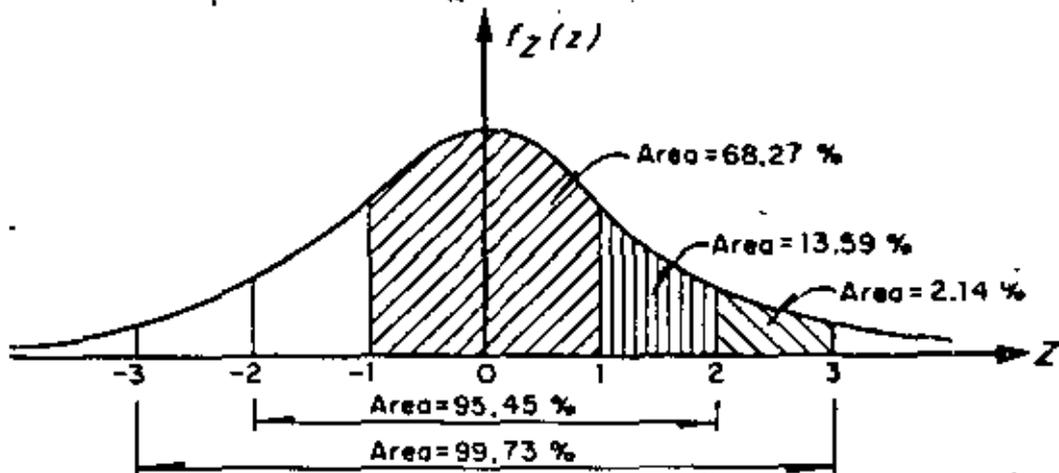
$$Z = (X-\mu)/\sigma \quad (E(Z) = E \frac{X-\mu}{\sigma} = \frac{E(X)-\mu}{\sigma} = 0; \quad \sigma^2(Z) = \frac{\sigma^2(X)}{\sigma^2} = 1)$$

ENTONCES LA ECUACION ANTERIOR SE REDUCE A LA LLAMADA FORMA ESTANDAR, CUYA ECUACION ES

$$f_Z(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2}; \quad F_Z(z) = \int_{-\infty}^z \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2} dz$$

EN ESTE CASO LA VARIABLE ALEATORIA Z TIENE DISTRIBUCION NORMAL CON MEDIA IGUAL A CERO Y VARIANCIA IGUAL A UNO.

EXISTEN TABLAS PARA CALCULAR LAS PROBABILIDADES DE UNA VARIABLE ASOCIADA A UNA DISTRIBUCION NORMAL ESTANDAR. EN LA SIGUIENTE FIGURA SE MUESTRA LA FORMA DE CAMPANA DE ESTA DISTRIBUCION, OBSERVANDOSE LA SIMETRIA RESPECTO A  $Z=E(Z)=0$  Y QUE ES ASINTOTICA AL EJE Z.



Distribución normal de una variable aleatoria continua

LA UTILIDAD DE LA DISTRIBUCION NORMAL ESTANDAR RADICA EN QUE

$$P[x_1 \leq X \leq x_2] = \int_{x_1}^{x_2} f_X(x) dx = P[z_1 \leq Z \leq z_2] = \int_{z_1}^{z_2} f_Z(z) dz$$

DONDE

$$z_1 = \frac{x_1 - \mu}{\sigma} \quad \text{Y} \quad z_2 = \frac{x_2 - \mu}{\sigma}$$

EJEMPLO

COMO RESULTADO DE UNA LARGA SERIE DE EXPERIMENTOS PROBANDO A COMPRESION SIMPLE CILINDROS DE CONCRETO, SE HA ESTIMADO QUE LA ESPERANZA DE LA RESISTENCIA ES DE  $240 \text{ KG/CM}^2$  Y LA DESVIACION ESTANDAR DE  $30 \text{ KG/CM}^2$ .

- A) ¿CUAL ES LA PROBABILIDAD DE QUE OTRO CILINDRO TOMADO AL AZAR RESISTA MENOS DE  $240 \text{ KG/CM}^2$ ?
- B. ¿CUAL ES LA PROBABILIDAD DE QUE RESISTA MAS DE  $330 \text{ KG/CM}^2$ ?
- C) ¿CUAL ES LA PROBABILIDAD DE QUE SU RESISTENCIA ESTE EN EL INTERVALO DE 210 A  $240 \text{ KG/CM}^2$ ?

SUPONGASE QUE LA DISTRIBUCION DE PROBABILIDADES ES NORMAL.

SOLUCION

- A) PARA EMPLEAR LAS TABLAS DE DISTRIBUCION NORMAL ES NECESARIO ESTANDARIZAR LA VARIABLE X, EMPLEANDO  $\mu=240$  Y  $\sigma=30$ , CON  $x_1=240$ :

$$z_1 = \frac{240 - 240}{30} = 0$$

RECURRIENDO A LA TABLA DE LA DISTRIBUCION NORMAL SE OBTIENE

$$P[X \leq 240] = P[Z \leq 0] = 0.5$$

O SEA, LA PROBABILIDAD QUE CORRESPONDE AL AREA SOMBREADA DE LA SIGUIENTE FIGURA:

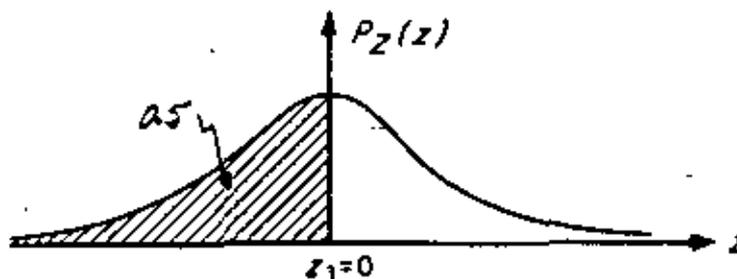


Fig 16. Distribución normal correspondiente al inciso c del ejemplo

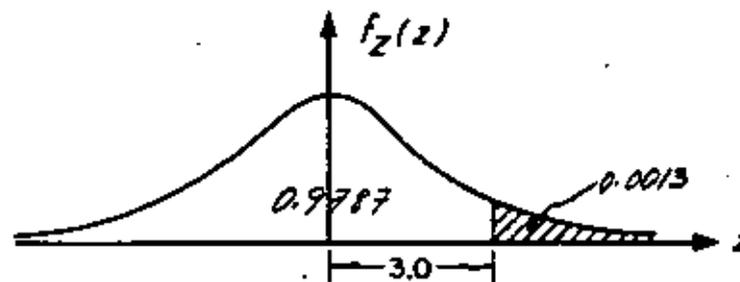
B) EL VALOR ESTANDARIZADO DE LA VARIABLE, PARA  $x_1=330$  KG/CM<sup>2</sup>, ES

$$z_1 = \frac{330 - 240}{30} = 3$$

POR LO QUE

$$P[X \geq 330] = P[Z \geq 3] = 1 - 0.9987 = 0.0013$$

QUE ES EL AREA SOMBRADA DE LA SIGUIENTE FIGURA:



*Distribución normal correspondiente al inciso b del ejemplo*

C) LOS VALORES ESTANDARIZADOS DE LA VARIABLE, PARA  $x_1=210$  Y  $x_2=240$  SON:

$$z_1 = \frac{210 - 240}{30} = -1$$

$$z_2 = \frac{240 - 240}{30} = 0$$

POR LO QUE

$$P[210 \leq X \leq 240] = P[-1 \leq Z \leq 0] = 0.3413$$

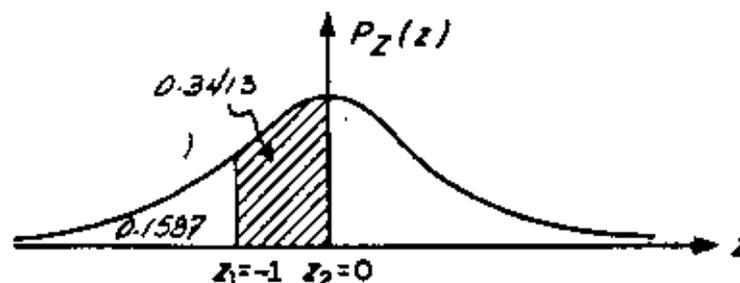


Fig 16. Distribución normal correspondiente al inciso c del ejemplo

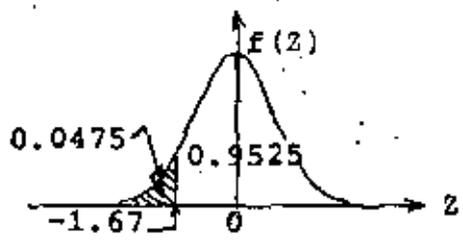
EJEMPLO

SE HA ENCONTRADO QUE LA VARIABLE ALEATORIA "ERROR EN LA MEDICION DE LAS DISTANCIAS ENTRE DOS PUNTOS" TIENE DISTRIBUCION NORMAL CON MEDIA CERO. SI SE SABE QUE EL TAMANO VERDADERO DE UNA LINEA ES DE 2 M Y QUE LA VARIANCIA DE SUMEDICION ES  $9\text{CM}^2$ , CALCULAR LA PROBABILIDAD DE QUE EN UNA MEDICION LA LONGITUD QUE SE REGISTRE SEA

- a. MENOR DE 195 CM
- b. MAYOR DE 203 CM
- c. COMPRENDIDO ENTRE 198 Y 202 CM.

a.  $P(X < 195) = ?$  CON  $\mu = 200$  CM Y  $\sigma = \sqrt{9} = 3$  CM

$$z = \frac{195 - 200}{3} = \frac{-5}{3} = -1.67$$



$$P(X < 195) = P(Z < -1.67) = 0.0475 = 4.75\%$$

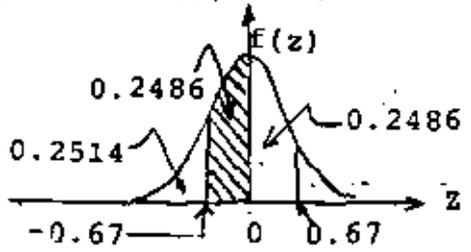
b.  $z = \frac{203 - 200}{3} = 1$

$$P(X > 203) = 1 - P(X \leq 203) = 1 - P(Z \leq 1) = 1 - 0.8413 = 0.1587 = 15.87\%$$

c.  $P(198 < X < 202) = ?$

$$z_1 = \frac{198 - 200}{3} = -0.67, \quad z_2 = \frac{202 - 200}{3} = 0.67$$

$$P(198 < X < 202) = P(-0.67 < Z < 0.67) = 2 \times 0.2486 = 0.4972 = 49.72\%$$



TEOREMA CENTRAL DEL LIMITE

SEAN LAS VARIABLES ALEATORIAS  $X_1, X_2, \dots, X_k$ , <sup>IDENTICAS</sup> CON DENSIDADES DE  
PROBABILIDADES (ARBITRARIAS), CUYA SUMA SE DENOTARA COMO W, ES DECIR

$$W = X_1 + X_2 + \dots + X_k$$

ES POSIBLE DEMOSTRAR EL TEOREMA DENOMINADO TEOREMA CENTRAL DEL LIMITE,  
 CUYO ENUNCIADO INDICA QUE CONFORME AUMENTA EL NUMERO DE VARIABLES  
 INVOLUCRADAS EN LA SUMA ANTERIOR (AL AUMENTAR k), LA DENSIDAD DE  
PROBABILIDADES DE W TIENDE A SER LA DISTRIBUCION NORMAL. ADEMÁS  
 SE PUEDE DEMOSTRAR QUE SI TODAS LAS VARIABLES  $X_1, X_2, \dots, X_k$  TIENEN  
 DISTRIBUCION NORMAL, ENTÓNCESE, RIGUROSAMENTE, W TAMBIÉN LA TIENE,  
 INDEPENDIENTEMENTE DEL NUMERO DE VARIABLES QUE APAREZCAN EN LA SUMA.

A PARTIR DEL TEOREMA DEL LIMITE CENTRAL SE DEMUESTRA QUE LA DISTRI-  
BUCION DE BERNOULLI SE PUEDE APROXIMAR MEDIANTE LA NORMAL CUANDO EL  
 NUMERO DE REPETICIONES DEL EXPERIMENTO ES GRANDE (30 O MÁS), CON  
 LO CUAL SE LOGRA UN AHORRO CONSIDERABLE DE LABOR NUMÉRICA EN LA  
 SOLUCION DE ALGUNOS PROBLEMAS. PARA MEJORAR ESTA APROXIMACION,  
 CONVIENE EFECTUAR UNA CORRECCION POR CONTINUIDAD, LA CUAL SE JUS-  
 TIFICA POR USAR UNA DISTRIBUCION CONTINUA EN VEZ DE UNA DISCRETA,  
SUMANDO O RESTANDO, SEGUN SEA EL CASO, 0.5 AL VALOR DE X QUE SE  
 USE. POR EJEMPLO, SI SE DESEA CUANTIFICAR LA PROBABILIDAD DE QUE  
 DE 2000 ENSAYES SE LOGREN DE 3 A 6 ÉXITOS, LOS LÍMITES REALES QUE  
 SE DEBEN USAR AL APLICAR LA DISTRIBUCION CONTINUA SON  $x_1=2.5$  Y  
 $x_2=6.5$ .

EJEMPLO

SI LA PROBABILIDAD DE QUE FALLE UNA VARILLA DE ACERO AL APLICARLE CIERTA CARGA ES DE 0.001, DETERMINAR LA PROBABILIDAD DE QUE EN 2000 VARILLAS PROBADAS FALLEN MAS DE DOS.

USANDO LA DISTRIBUCION DE BERNOULLI SE OBTIENE

$$\begin{aligned}
 P[X > 2] &= 1 - P[X \leq 2] = 1 - \{P[X = 0] + P[X = 1] + P[X = 2]\} = \\
 &= 1 - \left( \frac{2\,000!}{2\,000! \, 0!} (0.001)^0 (0.999)^{2\,000} + \frac{2\,000!}{1\,999! \, 1!} (0.001)^1 (0.999)^{1\,999} + \right. \\
 &\left. + \frac{2\,000!}{1\,998! \, 2!} (0.001)^2 (0.999)^{1\,998} \right) = 0.3233
 \end{aligned}$$

LOS CALCULOS NECESARIOS PARA OBTENER LA SOLUCION SON BASTANTE MAS TEDIOSOS QUE LOS QUE DEBEN EFECTUARSE APROVECHANDO QUE EL NUMERO DE REPETICIONES DEL EXPERIMENTO ES GRANDE, A FIN DE UTILIZAR LA DISTRIBUCION NORMAL. EN ESTAS CIRCUNSTANCIAS, LA PROBABILIDAD DE QUE  $X < 2$  EN EL CASO DISCRETO, EQUIVALE A LA DE QUE  $X < 2.5$  EN EL CONTINUO; ASI

$$\mu = np = 2\,000 \times 0.001 = 2 \text{ (SE USA LA MISMA MEDIA).}$$

$$\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{2\,000 \times 0.001 \times 0.999} = 1.41$$

$$P[X \leq 2.5] = P\left[Z \leq \frac{2.5 - 2}{1.41}\right] = P[Z \leq 0.355] = 0.6387$$

DE DONDE

$$P[X > 2.5] = 1 - P[X \leq 2.5] = 1 - 0.6387 = 0.3613$$

EJEMPLO

EN UNA SERIE DE 462 EXPERIMENTOS CON FINES ANTROPOLÓGICOS, CONSISTENTES EN MEDIR EL TAMAÑO DE LA CABEZA DE LOS INDIGENAS RESIDENTES EN UNA ZONA TROPICAL, SE OBTUVIERON LOS RESULTADOS ANOTADOS EN LAS DOS PRIMERAS COLUMNAS DE LA SIGUIENTE TABLA. SI LA VARIABLE ALEATORIA "TAMAÑO DE LA CABEZA" SE CONSIDERA QUE TIENE DISTRIBUCION NORMAL, ¿QUE CANTIDAD DE RESULTADOS SE ESPERARIA OBTENER ANTES DE HACER LAS MEDICIONES, SI SE CONSIDERA QUE  $\mu = \bar{x} = 191.8\text{MM}$  Y  $\sigma = s = 6.48\text{MM}$ , DONDE  $\bar{x}$ =PROMEDIO ARITMETICO Y  $s$ =DESVIACION ESTANDAR DE LOS DATOS?

$$z_1 = \frac{171.5 - 191.8}{6.48} = -3.13; \quad z_2 = \frac{175.5 - 191.8}{6.48} = -2.51; \quad x_3 = \frac{179.5 - 191.8}{6.48} =$$

= - 1.90, ETC.

$$P(-3.13 \leq z \leq -2.51) = 0.0051; \quad P(-2.51 \leq z \leq -1.90) = 0.0227;$$

$$P(-1.90 \leq z \leq -1.28) = 0.0716, \text{ ETC.}$$

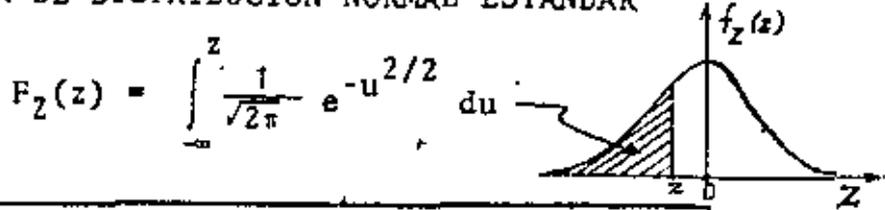
$$462 \times 0.0051 = 2.4; \quad 462 \times 0.0227 = 10.5; \quad 462 \times 0.0716 = 33.1, \text{ ETC.}$$

| INTERVALO DE VALORES DE X, EN MM | NUMERO DE OBSERVACIONES (frecuencia, f) | INTERVALO DE $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$ | PROBABILIDAD $P(z_1 \leq z \leq z_2) = P$ | FRECUENCIA ESPERADA = 462 P |
|----------------------------------|---|---|---|-----------------------------|
| 171.5-175.5                      | 3                                       | (-3.13) - (-2.51)                       | 0.0051                                    | 2.4                         |
| 175.5-179.5                      | 9                                       | (-2.51) - (-1.90)                       | 0.0227                                    | 10.5                        |
| 179.5-183.5                      | 29                                      | (-1.90) - (-1.28)                       | 0.0716                                    | 33.1                        |
| 183.5-187.5                      | 76                                      | (-1.28) - (-0.66)                       | 0.1543                                    | 71.3                        |
| 187.5-191.5                      | 104                                     | (-0.66) - (-0.05)                       | 0.2255                                    | 104.2                       |
| 191.5-195.5                      | 110                                     | (-0.05) - 0.57                          | 0.2356                                    | 108.8                       |
| 195.5-199.5                      | 88                                      | 0.57 - 1.19                             | 0.1673                                    | 77.3                        |
| 199.5-203.5                      | 30                                      | 1.19 - 1.80                             | 0.0811                                    | 37.5                        |
| 203.5-207.5                      | 6                                       | 1.80 - 2.42                             | 0.0281                                    | 13.0                        |
| 207.5-211.5                      | 4                                       | 2.42 - 3.04                             | 0.0066                                    | 3.0                         |
| 211.5-215.5                      | 2                                       | 3.04 - 3.66                             | 0.0011                                    | 0.5                         |
| 215.5-219.5                      | 1                                       | 3.66 - 4.27                             | 0.0001                                    | 0.0                         |

TOTAL: 462

TOTAL: 461.6

TABLA 3  
 FUNCION DE DISTRIBUCION NORMAL ESTANDAR



| z    | 0     | 1     | 2     | 3     | 4     | 5     | 6     | 7     | 8     | 9     |
|------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| -3.  | .0013 |       |       |       |       |       |       |       |       |       |
| -2.9 | .0019 | .0018 | .0017 | .0017 | .0016 | .0016 | .0015 | .0015 | .0014 | .0014 |
| -2.8 | .0026 | .0025 | .0024 | .0023 | .0023 | .0022 | .0021 | .0021 | .0020 | .0019 |
| -2.7 | .0035 | .0034 | .0033 | .0032 | .0031 | .0030 | .0029 | .0028 | .0027 | .0026 |
| -2.6 | .0047 | .0045 | .0044 | .0043 | .0041 | .0040 | .0039 | .0038 | .0037 | .0036 |
| -2.5 | .0062 | .0060 | .0059 | .0057 | .0055 | .0054 | .0052 | .0051 | .0049 | .0048 |
| -2.4 | .0082 | .0080 | .0078 | .0075 | .0073 | .0071 | .0069 | .0068 | .0066 | .0064 |
| -2.3 | .0107 | .0104 | .0102 | .0099 | .0096 | .0094 | .0091 | .0089 | .0087 | .0084 |
| -2.2 | .0139 | .0136 | .0132 | .0129 | .0125 | .0122 | .0119 | .0116 | .0113 | .0110 |
| -2.1 | .0179 | .0174 | .0170 | .0166 | .0162 | .0158 | .0154 | .0150 | .0146 | .0143 |
| -2.0 | .0227 | .0222 | .0217 | .0212 | .0207 | .0202 | .0197 | .0192 | .0188 | .0183 |
| -1.9 | .0287 | .0281 | .0274 | .0268 | .0262 | .0256 | .0250 | .0244 | .0239 | .0233 |
| -1.8 | .0359 | .0351 | .0344 | .0336 | .0329 | .0322 | .0314 | .0307 | .0300 | .0294 |
| -1.7 | .0446 | .0436 | .0427 | .0418 | .0409 | .0401 | .0392 | .0384 | .0375 | .0367 |
| -1.6 | .0548 | .0537 | .0526 | .0516 | .0505 | .0495 | .0485 | .0475 | .0465 | .0455 |
| -1.5 | .0668 | .0655 | .0643 | .0630 | .0618 | .0606 | .0594 | .0582 | .0571 | .0559 |
| -1.4 | .0808 | .0793 | .0778 | .0764 | .0749 | .0735 | .0721 | .0708 | .0694 | .0681 |
| -1.3 | .0968 | .0951 | .0934 | .0918 | .0901 | .0885 | .0869 | .0853 | .0838 | .0823 |
| -1.2 | .1151 | .1131 | .1112 | .1093 | .1075 | .1056 | .1038 | .1020 | .1003 | .0985 |
| -1.1 | .1357 | .1335 | .1314 | .1292 | .1271 | .1251 | .1230 | .1210 | .1190 | .1170 |
| -1.0 | .1587 | .1562 | .1539 | .1515 | .1492 | .1469 | .1446 | .1423 | .1401 | .1379 |
| - .9 | .1841 | .1814 | .1788 | .1762 | .1736 | .1711 | .1685 | .1660 | .1635 | .1611 |
| - .8 | .2119 | .2090 | .2061 | .2033 | .2005 | .1977 | .1949 | .1921 | .1894 | .1867 |
| - .7 | .2420 | .2389 | .2358 | .2326 | .2297 | .2266 | .2236 | .2206 | .2177 | .2148 |
| - .6 | .2743 | .2709 | .2676 | .2643 | .2611 | .2578 | .2546 | .2514 | .2483 | .2451 |
| - .5 | .3085 | .3050 | .3015 | .2981 | .2946 | .2912 | .2877 | .2843 | .2810 | .2776 |
| - .4 | .3446 | .3409 | .3372 | .3336 | .3300 | .3264 | .3228 | .3192 | .3156 | .3121 |
| - .3 | .3821 | .3783 | .3745 | .3707 | .3669 | .3632 | .3594 | .3557 | .3520 | .3483 |
| - .2 | .4207 | .4168 | .4129 | .4090 | .4052 | .4013 | .3974 | .3936 | .3897 | .3859 |
| - .1 | .4602 | .4562 | .4522 | .4483 | .4443 | .4404 | .4364 | .4325 | .4286 | .4247 |
| - .0 | .5000 | .4950 | .4920 | .4880 | .4840 | .4801 | .4761 | .4721 | .4681 | .4641 |



BIBLIOGRAFIA SELECCIONADA SOBRE TEORIA DE LA PROBABILIDAD, ESTADISTICA MATEMATICA, ESTADISTICA APLICADA, MUESTREO, Y PROCESOS ESTOCASTICOS, Y SUS APLICACIONES A LA INGENIERIA, DISPONIBLE EN LA BIBLIOTECA DE LAS DIVISIONES DE INVESTIGACION Y DE ESTUDIOS SUPERIORES.

1. Anderson, T., and D. Darling, Asymptotic theory of certain goodness of fit criteria based on stochastic processes. C-1097, A
2. Arrow, K., et al., Bayes and minimax solutions of sequential decision problems. C-1101, A
3. Balr, D., Experimentation: an Introduction to measurement theory and experiment design, Prentice Hall, 1962. QC39 B2
4. Barucha-Reid, A., ed., Probabilistic methods in applied mathematics, Academic Press, 1968. QA273 B42
5. Bellman, R., Programmed statistics; with chapters on probability, computer theory, and programmed instruction, Holt, Rinehart and Winston, 1970. HA29 B45
6. Benjamin, J., Probability, statistics, and decision for civil engineers, McGraw-Hill, 1970. QA273 B46
7. Bhat, U., Elements of applied process, Wiley, 1972. QA274 B42
8. Blackman, R., Linear data-smoothing and prediction in theory and practice. Addison-Wesley, 1965. QA275 B55
9. Blackwell, D., Another countable Markov process with only instantaneous states. C-1589, B.
10. Box, G., A bayesian approach to some outlier problems. C-1586, B

11. Box, G., Time series analysis; forecasting and control, Holden-Day, 1970. QA276 B6
12. Box, G., Evolutionary operation; a statistical method for process improvement, Wiley, 1969. TP155.7 B66
13. Breiman, L., Probability and stochastic processes, Houghton Mifflin, Co., 1969. QA273 B73
14. Breipohl, A., Probabilistic system analysis; an introduction to probabilistic models, decisions, and applications of random processes, Wiley, 1970. QA273 B746
15. Brown, R., Smoothing, forecasting and prediction of discrete time series, Prentice-Hall, 1963. TA168 B6
16. Brown, W., and C. Palermo, Random processes, communications, and radar, McGraw-Hill, 1969. TK5101 B75
17. Brownlee, K., Statistical theory and methodology in science and engineering, Wiley, 1960. QA276 B77
18. Bruning, J. and B. Kintz, Computational handbook of statistics, Scott, Foreman and Co., 1968. HA29 B77
19. Bush, R., A stochastic model with applications to learning. C-1590, B
20. Castro, G. de, Introduccio ao curso sobre Instrumento matematicos da estatistica. F-2164, C.
21. Clarke, B., Probability and random processes for engineers and scientists, Wiley, 1970. QA273 C48
22. Cochran, W., Experimental designs, Wiley, 1957. Q180 A1C6
23. Conover, W., Practical nonparametric statistics, Wiley, 1971. QA278.8 C65

24. Cooper, G. Probabilistic methods of signal and systems analysis, Holt, Rinehart and Winstons, 1971. TK454.2 C664
25. Cornell, C., A probability-based structural code, ACI, 1968.
26. Derman, C., Finite state markovian decision processes, Academic Press, 1970.
27. Deutsch, R., Nonlinear transformation of random processes, 517.7 D.
28. Dubes, R., The theory of applied probability, Prentice-Hall, 1968. TK5101 D8
29. Dynkin, E., Markow processes; theorems and problems, Plenum Press, 1969. QA273 D894
30. Edwards, A., Experimental design in psychological research, Holt-Rinehart and Winstons, 1968. BF59 E37
31. Ehrenfeld, S. and S. Littauer, Introduction to statistical method, McGraw-Hill, 1964. 519.9 E
32. Esteva, L., Consideraciones prácticas en la estimación bayesiana de riesgo sísmico, México, UNA. Instituto de Ingeniería, 1970. F-8843, E
33. Feller, W., Introducción a la teoría de probabilidades y sus aplicaciones, Limusa-Wiley, 1973. QA273 F3714
34. Forcadas, J., Estadística aplicada a la ingeniería, 1969. QA276 F66
35. Freeman, H., Introducción a la inferencia estadística, Trillas, 1970. QA276 F6845
36. Freund, J., Mathematical statistics, Prentice Hall, 1971. QA276 F692

37. Freudenthal, H., Probability and statistics, Elsevier, 1965. QA273 F75
38. García, A., Elementos de método estadístico, México, UNA, 1966. HA29 G146
39. Gotkin, L., Estadística descriptiva; texto programar, Limusa-Wiley, 1967. HA29 G695
40. Greenwood, A. and H. Martley, Guide to tables in mathematical statistics, Princenton University Press 1962. 519.9 G
41. Grenander, U., Statistical spectral analysis of time series arising from stationary stochastic processes C-1588, G
42. Hanman, H., Modern factor analysis, University of Chicago Press, 1967. QA276 H38
43. Hanna, E., Time series analysis, Methuen, 1960. QA76 H32
44. Hays, W., Statistics: probability inference and decisions, Holt-Rinehart and Winston, 1970. QA276 H3
45. Hoel, P., Elementary statistics, Wiley, 1971. HQ29 H6
46. Hoel, P., et al, Introduction to stochastic processes, Houghton, Mifflin, 1972. QA274 H63
47. Howard, R., Dynamic probabilistic systems, Wiley, 1971. T57.95 H66
48. Iosifescu, M., Random process and learning, Springer Verlag, 1969. QA273 I64
49. Jazwinski, A., Stochastic process and filtering theory, Academic Press, 1970. QA276 J38
50. Keifer, J. and J. Wolfowitz, Stochastic estimation of the maximum of a regression function, C-1481, K

51. Kemeny, J., Finite Markov chains, Van Nostrand, 1960.  
QA273 K33
52. Kish, L., Muestreo de encuestas, Trillas, 1972.  
HN29 K5
53. Kozin, F. and J. Bogdanoff, An introduction to random function for engineer, 1963. F-1930, K
54. Kyburg, H., Probability theory, Prentice-Hall, 1969.  
QA273 K92
55. Lange, F., Correlation techniques: Foundation and applications of correlation analysis in modern communications, measurement and control, Iliffe, 1967.  
TK7870 L34
56. Larson, H., Introduction to probability theory and statistical inference, Wiley, 1969. QA273 L37
57. La Valle, I., An introduction to probability decision, and inference, 1970. QA276 L36
58. Lecture notes in mathematics, probability and information theory, Springer Verlag, 1964. QA1 L42
59. Lee, T., et al, Estimating the parameters of the Markov probability model, North Holland, 1970.  
HB74 M3L43
60. Lindgren, B., Statistical theory, Macmillan, 1968.  
QA276 L55
61. Lin, Y., Random processes, F-8709, L
62. Prelewicz, D., Range of validity of the method of averaging, F-9116, P
63. Prohorov, Y., Probability theory; basic concept, limit theorems, random processes, Springer Verlag, 1969. QA273 P75
64. Raiffa, H. and R. Schlaifer, Applied statistical decision theory, Harvard University Press, 1971.  
QA279.4 R34
65. Raj, D., Sampling theory, McGraw-Hill, 1968.  
QA276.6 R33
66. Raj, D., Design of sample survey, McGraw-Hill, 1972.  
HA312 R33
67. Rascón, O., Introducción a la teoría de probabilidades México, UNA, 1971. QA273 R37
68. Rascón, O., Introducción a la estadística descriptiva, 1970. HA31 R37
69. Ravindra, M., Probabilistic evaluation of safety factors, University of Waterloo, 1969. F-8680, R
70. Robinson, E., Multichannel time series analysis with digital computer programs, Holden-Day, 1967.  
QA276 R633
71. Rosenblueth, E., Current research on probabilistic methods at the National University, C-1517, R
72. Ross, S., Applied probability models with optimization applications, Holden-Day, 1970. QA273 R67
73. Sage, A., Estimation theory with applications to communications and control, McGraw-Hill, 1971.  
QA276.8 S33
74. Savage, L., The theory of static decision, C-1098, S
75. Sawaragi, Y., Statistical decision theory in adaptive control system, Academic Press, 1967. QA402.3 S37
76. Schäl, H., Markov renewal processes with auxiliary phas, C-1617, S

77. Schlaifer, R., Probability and statistics for business decisions and introduction to managerial economics under uncertainty, McGraw-Hill, 1959. HD38 S35
78. Schwartz, J., Statistical methods in traffic engineering, The Ohio State University, 1967. HE336 S7S3
79. Searle, S., Linear models, Wiley, 1971. QA279 S4
80. Sengupta, J., Stochastic programming methods and applications, North Holland, 1973. T57.79 S44
81. Sengupta, S. and S. Jain, A representative theory for measurable random variable. F-5967, 5
82. Sheppard, R., Multidimensional scaling, Seminar Press, 1972. CF39 H84
83. Spiegel, M., Theory and problems of statistics, Schaum's Publishing, Co., 1960. HA29 S65
84. Sterling, T., Introduction to statistical data processing. Prnetice-Hall, 1968. QA276.4 S82
85. Stratonovich, R., Conditional Markow processes and their application to the theory of optimal control. Elsevier, 1968. QA273 S76
86. Symposium on time series analysis proceedings, held at Brown University, June 11-14, 1962, Ed. by Murray Rosenblatt. New York, John Wiley and Sons, 1963. S19.9 S
87. Tannur, H., Statistics: a guide to the unknow, Holden Day, Inc., 1972. QA276 S82
88. Theil, H., Statistical decomposition analysis with applications, North Holland, 1972. H61 T43
89. Thomas J., An introduction to statistical communication theory, Wiley, 1969. TK5102.5 T45
90. Tintner, G., Stochastic economics, stochastic processes, control and programming, Academic Press, 1972. QA274 T54
91. Turkstra, C., Applications of bayesian decision theory, University of Waterloo, 1969. F-8619, T
92. Turkstra, C., Elements of probability theory. F-9105, T
93. Turkstra, C., Theoretical distribution functions. F-9104, T
94. Valdes, R., Nociones de cálculo de probabilidades y estadística, Limusa-Wiley, 1970. QA273 V34
95. Van der Gerr, J., Introduction to multivariate analysis for the social sciences, Freeman, 1971. QA278 V34
96. Vere-Jones, D., Stochastic models for earthquake occurrence; discussion. F-9247, V
97. Waerden, B., Mathematical statistics, Springer-Verlag, 1957. QA276 W3
98. Wold, H., ed., Bibliography on time series stochastic processes: an international team project. Edinburgh, Oliver and Boyd, 1965.
99. Yaglom, A., An Introduction to the theory of stationary random function, Prentice-Hall, 1962. S17.5 Y

Recopilación elaborada por el profesor A. J. Kleiman

BIBLIOGRAFIA DE CONTROL DE CALIDAD

1. Mathematical methods of statistical quality control, V. Sarkadi, Academic Press, 1974
2. Sensibilidad estadística de cartas de control de calidad, Universidad de La Habana, Centro de Información Científica y Técnica, 1971
3. Control de calidad, Seminario, Memoria del Instituto Mexicano del Petróleo, Publicación No. 69 JF/050, Ed. Instituto Mexicano del Petróleo, 1969
4. Control de calidad estadístico, E.L. Grant, Ed. CECSA, 1974
5. Control total de la calidad, A.V. Feigenbaum, Ed. CECSA, 1975
6. Practical Quality Control, Simmons A. David, Ed. Addison-Wesley Publishing Company, 1970
7. Quality Control Handbook, J.M. Juran, Gryna, F.M. y R.J. Bingham, 3a. edición, Ed. McGraw-Hill, 1974
8. Quality Planning and Analysis, J.M.Juran y F.M. Gryna, Ed. McGraw-Hill, 1970
9. Construction Specifications Writing: Principles and Procedures, H.J. Rosen, Ed. J. Wiley, 1974
10. Transactions of the American Society for Quality Control.

---

1. Kreyszig, E., "Introducción a la estadística matemática", Limusa-Wiley (1973)
2. Larson, H.J., "Introducción a la teoría de probabilidades e inferencia estadística", Limusa-Wiley (1978)

1  
2  
3  
4  
5  
6  
7  
8  
9  
10  
11  
12  
13  
14  
15  
16  
17  
18  
19  
20  
21  
22  
23  
24  
25  
26  
27  
28  
29  
30  
31  
32  
33  
34  
35  
36  
37  
38  
39  
40  
41  
42  
43  
44  
45  
46  
47  
48  
49  
50  
51  
52  
53  
54  
55  
56  
57  
58  
59  
60  
61  
62  
63  
64  
65  
66  
67  
68  
69  
70  
71  
72  
73  
74  
75  
76  
77  
78  
79  
80  
81  
82  
83  
84  
85  
86  
87  
88  
89  
90  
91  
92  
93  
94  
95  
96  
97  
98  
99  
100



centro de educación continua  
división de estudios superiores  
facultad de ingeniería, unam



PROBABILIDAD Y ESTADISTICA

ESTADISTICA DESCRIPTIVA

DR. OCTAVIO A. RASCON CHAVEZ

Junio, Julio, 1979



## ESTADISTICA DESCRIPTIVA

POR DR. OCTAVIO A. RASCON CH.

### EXPERIMENTO

PARA FINES DE ESTE CURSO, SE ENTENDERA POR EXPERIMENTO A TODO PROCESO DE OBSERVACION DE UN FENOMENO O VARIABLE DE INTERES. ASI UN EXPERIMENTO PUEDE SER PLANEADO Y REALIZADO POR EL HOMBRE, O PUEDE SER EFECTUADO POR LA NATURALEZA, EN CASO DE UN FENOMENO NATURAL. POR EJEMPLO, EL LANZAR UNA MONEDA O UN DADO Y OBSERVAR LA CARA QUE QUEDA HACIA ARRIBA ES UN EXPERIMENTO PLANEADO Y REALIZADO POR EL HOMBRE. EL OBSERVAR LA CANTIDAD DE AGUA QUE LLUEVE ANUALMENTE EN UNA CIUDAD, ES UN EXPERIMENTO ASOCIADO A UN FENOMENO NATURAL.

AL RESULTADO DE UN EXPERIMENTO SE LE DENOMINA DATO.

A UN GRUPO O COLECCION DE DATOS SE LE LLAMA MUESTRA.

### PROBABILIDAD

ES UNA MEDIDA DE LA CERTIDUMBRE QUE SE LE ASOCIA A LA OCURRENCIA U OBSERVACION DE UN RESULTADO DETERMINADO, AL REALIZARSE EL EXPERIMENTO CORRESPONDIENTE.

LA TEORIA DE PROBABILIDADES ES UNA RAMA DE LAS MATEMATICAS APLICADAS QUE TRATA LO CONCERNIENTE A LA ASIGNACION Y MANEJO DE PROBABILIDADES.

ESTADISTICA: ES LA RAMA DE LAS MATEMATICAS QUE SE ENCARGA DE ENSEÑAR LAS REGLAS PARA COLECTAR, ORGANIZAR, PRESENTAR Y PROCESAR LOS DATOS OBTENIDOS AL REALIZAR VARIAS VECES EL EXPERIMENTO ASOCIADO A UN FENOMENO DE INTERES Y PARA INFERIR CONCLUSIONES ACERCA DE ESTE ULTIMO. PROPORCIONA, ADEMAS, LOS METODOS PARA EL DISEÑO DE EXPERIMENTOS Y PARA TOMAR DECISIONES CUANDO APARECEN SITUACIONES DE INCERTIDUMBRE.

ESTADISTICA

- \* DESCRIPTIVA. - TRATA LO CONCERNIENTE A LA OBTENCION, ORGANIZACION, PROCESAMIENTO Y PRESENTACION DE LOS DATOS.
- \* INFERENCIAL. - TRATA LO CONCERNIENTE A LOS METODOS PARA INFERIR CONCLUSIONES ACERCA DEL FENOMENO DEL CUAL PROVIENEN LOS DATOS

MUESTREO: ES EL PROCESO DE ADQUISICION DE UNA MUESTRA

MUESTREO { CON REEMPLAZO.- CUANDO CADA ELEMENTO OBSERVADO SE REINTEGRA AL LOTE DEL CUAL FUE EXTRAIDO, ANTES DE EXTRAER EL SIGUIENTE.

MUESTREO { SIN REEMPLAZO.- CUANDO CADA ELEMENTO OBSERVADO NO SE REINTEGRA AL LOTE.

POBLACION: TOTAL DE DATOS QUE SE PUEDEN OBTENER AL REALIZAR UNA SECUENCIA EXHAUSTIVA DE EXPERIMENTOS

POBLACION { DISCRETA.- TIENE UN NUMERO FINITO O UN NUMERO INFINITO NUMERABLE DE DATOS POSIBLES

POBLACION { CONTINUA.- TIENE UN NUMERO INFINITO NO NUMERABLE DE DATOS POSIBLES

### EJEMPLOS

1. EXPERIMENTO: LANZAMIENTO DE UNA MONEDA DIEZ VECES

POBLACION: SUCESION INFINITA NUMERABLE DE "CARAS" Y "CRUCES"  
(DISCRETA)

MUESTRA: GRUPO DE 10 OBSERVACIONES

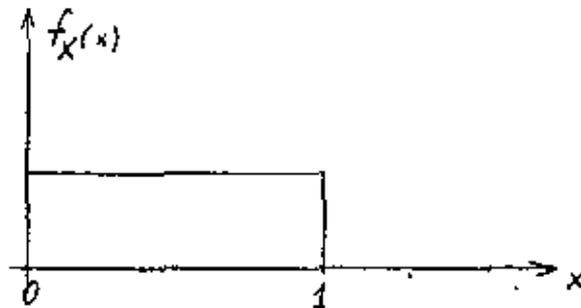
2. EXPERIMENTO: MEDICION DE LA PRECIPITACION PLUVIAL DIARIA EN LA CIUDAD DE MEXICO DURANTE DIEZ AÑOS

POBLACION: SUCESION INFINITA NO NUMERABLE DE VALORES (CONTINUA)

MUESTRA: GRUPO DE 3652 OBSERVACIONES (TOMANDO DOS AÑOS BISIESTOS DE 29 DIAS EN FEBRERO)

MUESTRA ALEATORIA: ES UNA MUESTRA OBTENIDA DE TAL MANERA QUE TODOS LOS ELEMENTOS DE LA POBLACION TIENEN LA MISMA PROBABILIDAD DE SER OBSERVADOS Y, ADEMAS, LA OBSERVACION DE UN ELEMENTO NO AFECTA LA PROBABILIDAD DE OBSERVAR CUALQUIER OTRO, ES DECIR, SI SON INDEPENDIENTES.

TABLA DE NUMEROS ALEATORIOS: ES UNA TABLA QUE CONTIENE NUMEROS QUE CONSTITUYEN UNA MUESTRA ALEATORIA OBTENIDA DE UNA DISTRIBUCION DE PROBABILIDADES UNIFORME, QUE GENERALMENTE CORRESPONDE A UNA VARIABLE ALEATORIA QUE PUEDE ASUMIR VALORES ENTRE 0 Y 1, MULTIPLICADOS POR  $10^r$ , EN DONDE  $r$  ES EL NUMERO DE DIGITOS QUE SE DESEA TENGAN LOS NUMEROS.



LAS TABLAS QUE SE USEN PARA OBTENER UNA MUESTRA ALEATORIA DEBEN CONTENER NUMEROS CON MAYOR NUMERO DE DIGITOS QUE LOS QUE TIENE EL TOTAL DE ELEMENTOS DE LA POBLACION QUE SE VA A MUESTREAR. POR EJEMPLO, SI SE VA A OBTENER UNA MUESTRA ALEATORIA DE UN LOTE DE LENTES PARA MICROSCOPIO QUE TIENE 10,000 ELEMENTOS, LA TABLA QUE SE USE DEBERA TENER NUMEROS ALEATORIOS CON 5 O MAS DIGITOS.

### METODO DE MUESTREO ALEATORIO

1. SE ENUMERAN LOS ELEMENTOS DE LA POBLACION.
2. SE FIJA EL CRITERIO DE SELECCION DE LOS NUMEROS ALEATORIOS (POR EJEMPLO, SE DEFINE QUE RENGLONES Y QUE COLUMNAS SE VAN A LEER).
3. SE INDICA QUE DIGITOS SE VAN A ELIMINAR EN CASO DE QUE LOS NUMEROS DE LA TABLA TENGAN MAS DIGITOS QUE LOS NECESARIOS
4. SE LEEN LOS NUMEROS, DE ACUERDO CON LO FIJADO EN LOS PUNTOS 2 Y 3, Y SE EXTRAEN DEL LOTE LOS ELEMENTOS QUE TIENEN LOS NUMEROS LEIDOS. ESTOS CONSTITUYEN LA MUESTRA FISICA CON LA CUAL REALIZAR LOS EXPERIMENTOS. LAS OBSERVACIONES CONSTITUIRAN LA MUESTRA ALEATORIA DESEADA.

NOTA: TODOS LOS NUMEROS QUE SE REPITAN SE CONSIDERAN SOLO UNA VEZ.

TAMBIEN SE ELIMINAN LOS NUMEROS MAYORES DEL TAMAÑO DEL LOTE.

#### EJEMPLO

SE TIENE UN LOTE DE 1,000 TRANSISTORES NUMERADOS DEL UNO AL MIL, CUYA CALIDAD SE VA A VERIFICAR ESTADISTICAMENTE, PARA LO CUAL SE DECIDE TOMAR UNA MUESTRA DE 40 ELEMENTOS Y MEDIR SU AMPLIFICACION USANDO LA TABLA DE NUMEROS ALEATORIOS ANEXA, CON EL CRITERIO DE TO MAR TODOS LOS RENGLONES IMPARES ELIMINANDO EL ULTIMO DIGITO. LA MUESTRA FISICA SERIAN LOS TRANSISTORES CORRESPONDIENTES A LOS NUME ROS 0415, 0006, 0394, 0998, 0530, 0394, 0160, ETC.

TABLA DE NUMEROS ALEATORIOS

| Columna<br>Renglón | 1     | 2     | 3     | 4     | 5     | 6     | 7     | 8     | 9     | 10    | 11    |
|--------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 1                  | 16408 | 81899 | 04153 | 53381 | 79401 | 21438 | 83035 | 92350 | 36693 | 31238 | 59649 |
| 2                  | 18629 | 81953 | 05520 | 91962 | 04739 | 13092 | 37662 | 94822 | 94730 | 06496 | 35090 |
| 3                  | 73115 | 47498 | 47498 | 87637 | 99016 | 00060 | 88824 | 71013 | 18735 | 20286 | 23153 |
| 4                  | 57491 | 16703 | 23167 | 49323 | 45021 | 33132 | 12544 | 41035 | 80780 | 45393 | 44812 |
| 5                  | 30405 | 03946 | 23792 | 14422 | 15059 | 45799 | 22716 | 19792 | 09983 | 74353 | 68668 |
| 6                  | 16631 | 35006 | 85900 | 32388 | 52390 | 52390 | 16815 | 69298 | 38732 | 38480 | 73817 |
| 7                  | 96773 | 20206 | 42559 | 78985 | 05300 | 22164 | 24369 | 54224 | 35083 | 19687 | 11052 |
| 8                  | 38935 | 64202 | 14349 | 82674 | 66523 | 44133 | 00697 | 35552 | 35970 | 19124 | 63318 |
| 9                  | 31624 | 76384 | 17403 | 03941 | 44167 | 64486 | 64758 | 75366 | 76554 | 01601 | 12614 |
| 10                 | 78919 | 19474 | 23632 | 27889 | 47914 | 02584 | 37680 | 20801 | 72152 | 39339 | 34806 |

### AGRUPAMIENTO DE DATOS

FRECUENCIA DE UN EVENTO: ES EL NUMERO DE VECES QUE OCURRE EL EVENTO AL OBTENER UNA MUESTRA DE LA POBLACION CORRESPONDIENTE.

FRECUENCIA RELATIVA DE UN EVENTO: ES EL COCIENTE DE SU FRECUENCIA ENTRE EL TOTAL DE ELEMENTOS (TAMAÑO) DE LA MUESTRA.

FRECUENCIA RELATIVA ACUMULADA: ES LA ACUMULACION (SUMA) DE LAS FRECUENCIAS RELATIVAS HASTA UN VALOR DADO, PARTIENDO DEL VALOR (O DEL INTERVALO) MAS PEQUEÑO. EN OTRAS PALABRAS, ES LA FRECUENCIA DE VALORES MENORES O IGUALES QUE UN VALOR DADO.

FRECUENCIA COMPLEMENTARIA: ES LA FRECUENCIA DE VALORES MAYORES QUE UN VALOR DADO = NUMERO DE DATOS - FRECUENCIA ACUMULADA.

### DISTRIBUCION DE FRECUENCIAS

CON OBJETO DE FACILITAR LA INTERPRETACION DE LOS DATOS QUE SE TIENEN EN UNA MUESTRA, ES CONVENIENTE AGRUPARLOS POR VALORES O POR INTERVALOS DE VALORES, FORMANDO ASI UNA TABLA DE DISTRIBUCION DE FRECUENCIAS.

PARA FACILITAR EL CALCULO DE LAS FRECUENCIAS ES UTIL ORDENAR LOS DATOS EN FORMA CRECIENTE O DECRECIENTE DE VALORES, FORMANDO ASI UNA TABLA DE DATOS ORDENADOS.

EJEMPLO

EN UNA ESCUELA SECUNDARIA SE LES APLICÓ A 30 PROFESORES UN EXAMEN SOBRE PEDAGOGIA. LAS CALIFICACIONES (DATOS) QUE SE OBTUVIERON FUERON (YA ESTAN ORDENADOS EN FORMA CRECIENTE)

57, 59, 65, 67, 67, 67, 69, 72, 73, 73, 77, 78, 78,

A

B

C

81, 81, 83, 83, 83, 84, 84, 87, 88, 89, 89, 91, 91, 93,

D

E

95, 97, 99

E

## AGRUPAMIENTO DE VALORES

| CALIFICACION | FRECUENCIA | FRECUENCIA RELATIVA | FRECUENCIA RELATIVA ACUMULADA |
|--------------|------------|---------------------|-------------------------------|
| 57           | 1          | 1/30                | 1/30                          |
| 59           | 1          | 1/30                | 2/30                          |
| 65           | 1          | 1/30                | 3/30                          |
| 67           | 3          | 3/30                | 6/30                          |
| 69           | 1          | 1/30                | 7/30                          |
| 72           | 1          | 1/30                | 8/30                          |
| 73           | 2          | 2/30                | 10/30                         |
| 77           | 1          | 1/30                | 11/30                         |
| 78           | 2          | 2/30                | 13/30                         |
| 81           | 2          | 2/30                | 15/30                         |
| 83           | 3          | 3/30                | 18/30                         |
| 84           | 2          | 2/30                | 20/30                         |
| 87           | 1          | 1/30                | 21/30                         |
| 88           | 1          | 1/30                | 22/30                         |
| 89           | 2          | 2/30                | 24/30                         |
| 91           | 2          | 2/30                | 26/30                         |
| 93           | 1          | 1/30                | 27/30                         |
| 95           | 1          | 1/30                | 28/30                         |
| 97           | 1          | 1/30                | 29/30                         |
| 99           | 1          | 1/30                | 30/30=1                       |

$$\Sigma=30$$

$$\Sigma=30/30=1$$

¿CUAL ES LA FRECUENCIA RELATIVA DE VALORES MENORES O IGUALES QUE 93?

AGRUPAMIENTO POR INTERVALOS

LIMITES DE CLASES: SON LOS VALORES MINIMO Y MAXIMO DE CADA INTERVALO

MARCAS DE CLASE: SON LOS VALORES MEDIOS DE CADA INTERVALO DE CLASE

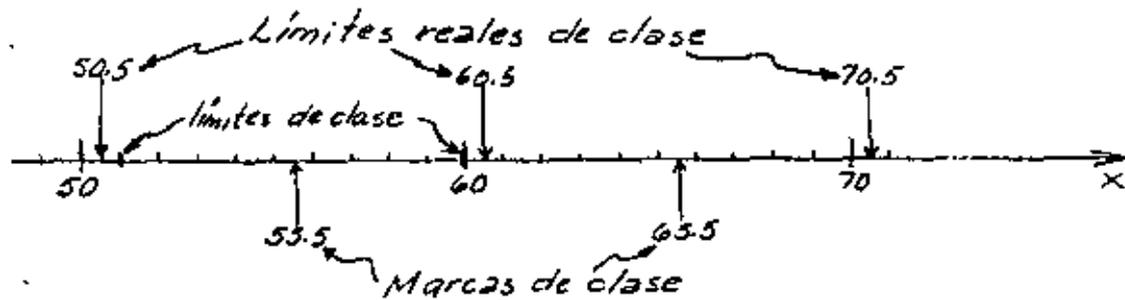
LIMITES REALES DE CLASE: SON LOS VALORES MINIMO Y MAXIMO QUE SON FRONTERA ENTRE LOS INTERVALOS. ESTOS DEBEN TENER UNA CIFRA DECIMAL MAS QUE LOS DATOS.

| EVENTO (INTERVALO DE CALIFICACIONES) | ELEMENTOS OBSERVADOS                 | PRE-FRECUENCIA | FRECUENCIA RELATIVA |
|--------------------------------------|--------------------------------------|----------------|---------------------|
| A = {51-60}                          | 57,59                                | 2              | 2/30                |
| B = {61-70}                          | 65,67,67,67,69                       | 5              | 5/30                |
| C = {71-80}                          | 72,73,73,77,78,78                    | 6              | 6/30                |
| D = {81-90}                          | 81,81,83,83,83,84,<br>84,87,88,89,89 | 11             | 11/30               |
| E = {91-100}                         | 91,91,93,95,97,99                    | 6              | 6/30                |
|                                      |                                      | $\Sigma=30$    | 30/30=1             |

LIMITES INFERIORES DE CLASE      LIMITES SUPERIORES DE CLASE

| EVENTO | LIMITES DE CLASE |          | LIMITES REALES DE CLASE |          | MARCAS DE CLASE |
|--------|------------------|----------|-------------------------|----------|-----------------|
|        | INFERIOR         | SUPERIOR | INFERIOR                | SUPERIOR |                 |
| A      | 51               | 60       | 50.5                    | 60.5     | 55.5            |
| B      | 61               | 70       | 60.5                    | 70.5     | 65.5            |
| C      | 71               | 80       | 70.5                    | 80.5     | 75.5            |
| D      | 81               | 90       | 80.5                    | 90.5     | 85.5            |
| E      | 91               | 100      | 90.5                    | 100.5    | 95.5            |

| Evento    | Elementos corresp.<br>a los intervalos | Frecuencia | Frecuencia<br>relativa | Frecuencia<br>acumulada | Frecuencia relativa<br>acumulada |
|-----------|--|------------|------------------------|-------------------------|----------------------------------|
| A: 51-60  | 59,57                                  | 2          | $2/30=0.067$ (6.7%)    | 2                       | 0.067                            |
| B: 61-70  | 67,65,69,67,67                         | 5          | $5/30=0.166$ (16.6%)   | $2+5=7$                 | $0.067+0.166=0.233$              |
| C: 71-80  | 72,73,73,77,78,78,                     | 6          | $6/30=0.200$ (20%)     | $7+6=13$                | $0.233+0.200=0.433$              |
| D: 81-90  | 83,88,84,89,83,84,<br>89,87,81,83,81   | 11         | $11/30=0.367$ (36.7%)  | $13+11=24$              | $0.433+0.367=0.800$              |
| E: 91-100 | 99,91,97,95,91,93                      | 6          | $6/30=0.200$ (20%)     | $24+6=30$               | $0.800+0.200=1.000$              |
|           |  | <u>30</u>  | <u>1.000</u>           |                         |                                  |



$$A = \{X: 50.5 < X \leq 60.5\}$$

$$B = \{X: 60.5 < X \leq 70.5\}$$

$$C = \{X: 70.5 < X \leq 80.5\}$$

$$D = \{X: 80.5 < X \leq 90.5\}$$

$$E = \{X: 90.5 < X \leq 100.5\}$$

LIMITES REALES  
INFERIORES DE CLASE

LIMITES REALES SUPE-  
RIORES DE CLASE

#### PROCEDIMIENTO DE AGRUPAMIENTO

A MAYOR NUMERO DE DATOS SE REQUIERE MAYOR NUMERO DE INTERVALOS, PERO SE RECOMIENDA QUE ESTE NUMERO ESTE ENTRE 5 Y 20, SUPONIENDO QUE EN PROMEDIO CAIGAN 5 O MAS ELEMENTOS EN CADA INTERVALO. ASI, SI SE TIENEN 30 DATOS, SE RECOMIENDA USAR  $30/5=6$  INTERVALOS.

EL PROCESO DE AGRUPAMIENTO SE INDICARA AL MISMO TIEMPO QUE SE REALIZA EL SIGUIENTE EJEMPLO.

#### EJEMPLO

EN UN ESTUDIO ANTROPOLOGICO SE OBTUVO UNA MUESTRA DE 30 ESTATURAS

DE LOS VARONES ADULTOS RESIDENTES EN UNA REGION. LOS DATOS, ORDENADOS EN FORMA CRECIENTE DE VALORES, FUERON LOS SIGUIENTES:

159, 161, 163, 163, 163, 167, 167, 167, 167, 168, 168, 168, 169, 169, 170, 171, 171, 173, 174, 175, 175, 175, 178, 179, 181, 181, 183, 184, 187, 191 CM.

OBTENER LA TABLA DE DISTRIBUCION DE FRECUENCIAS.

SOLUCION:

1. DETERMINACION DEL RANGO DE LA MUESTRA

$$\text{RANGO} = \text{VALOR MAXIMO} - \text{VALOR MINIMO} = 191 - 159 = 32 \text{ CM}$$

2. DETERMINACION DEL NUMERO DE INTERVALOS

$$\text{NUMERO DE INTERVALOS} = \frac{30}{5} = 6$$

3. DETERMINACION DE LOS LIMITES DE CLASE

$$\text{ANCHO DE LOS INTERVALOS} = \frac{\text{RANGO}}{\text{NUMERO}} = \frac{32}{6} = 5,3$$

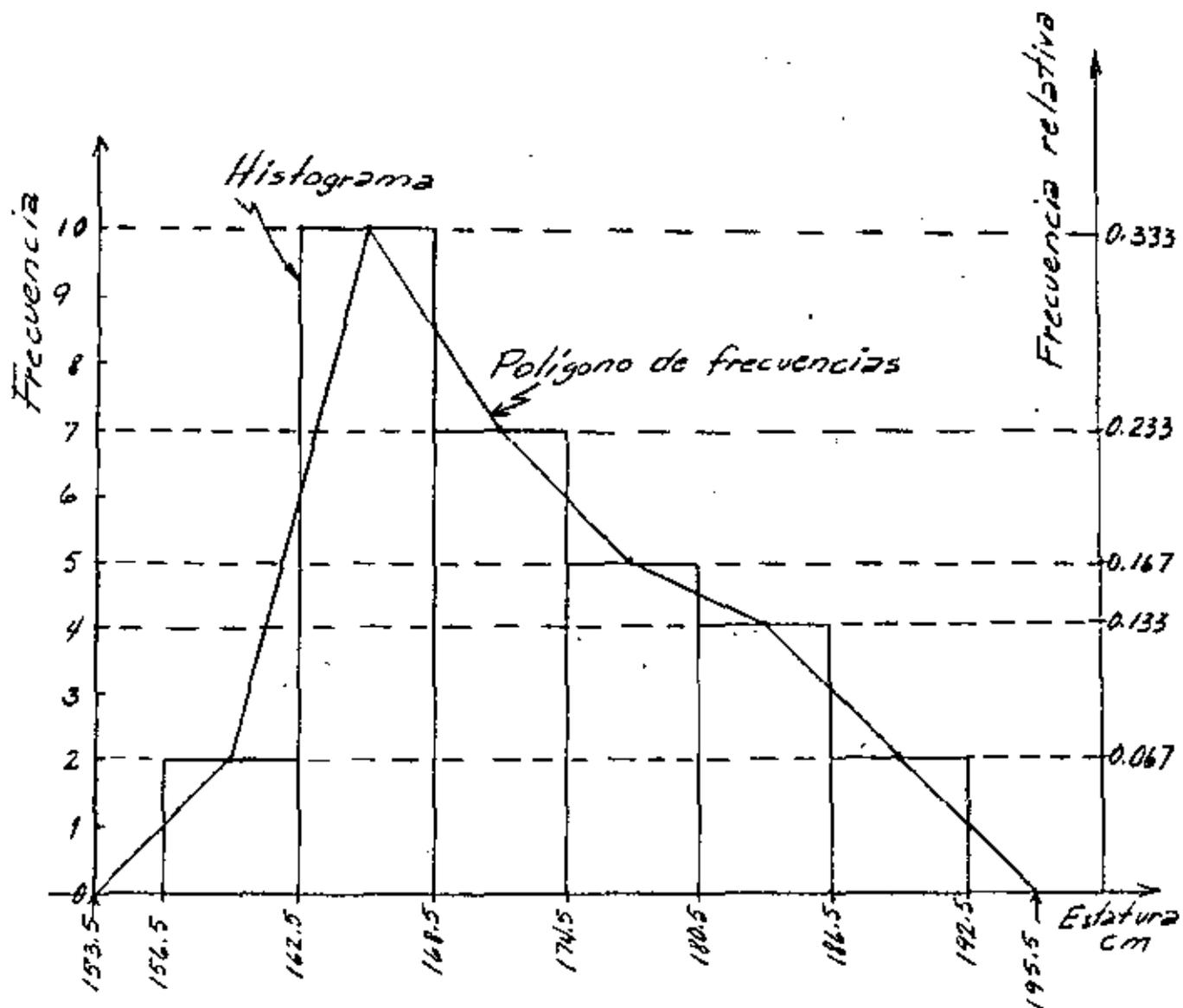
TOMAREMOS UN ANCHO DE 6 CM, CON LO CUAL EL RANGO DEL AGRUPAMIENTO ES  $6 \times 6 = 36$  CM. LA DIFERENCIA DE RANGOS ES  $36 - 32 = 4$ , QUE SE REPARTE EN LOS DOS INTERVALOS EXTREMOS EQUITATIVAMENTE. POR LO TANTO, LOS INTERVALOS RESULTAN SER:

157-162, 163-168, 169-174, 175-180, 181-186, 187-192

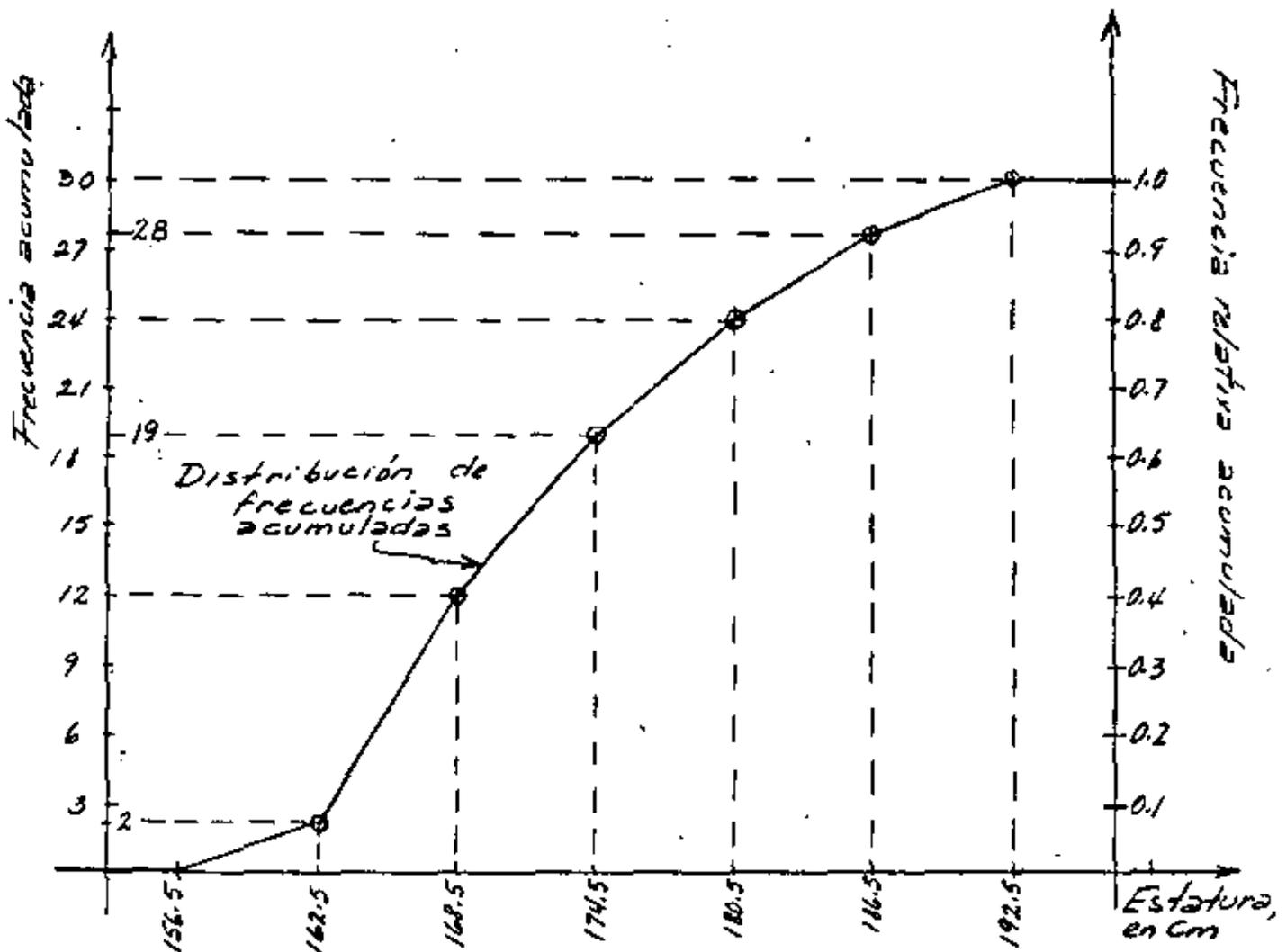
4. INTEGRACION DE LA TABLA:

| INTERVALO | LIMITES REALES |       | FREC.         | FREC. REL.              | FREC. ACUM. | FREC. REL. ACUM. |
|-----------|----------------|-------|---------------|-------------------------|-------------|------------------|
|           | INF.           | SUP.  |               |                         |             |                  |
| 157-162   | 156.5          | 162.5 | 2             | $\frac{2}{30} = 0.067$  | 2           | 0.067            |
| 163-168   | 162.5          | 168.5 | 10            | $\frac{10}{30} = 0.333$ | 12          | 0.400            |
| 169-174   | 168.5          | 174.5 | 7             | $\frac{7}{30} = 0.233$  | 19          | 0.633            |
| 175-180   | 174.5          | 180.5 | 5             | $\frac{5}{30} = 0.167$  | 24          | 0.800            |
| 181-186   | 180.5          | 186.5 | 4             | $\frac{4}{30} = 0.133$  | 28          | 0.933            |
| 187-192   | 186.5          | 192.5 | 2             | $\frac{2}{30} = 0.067$  | 30          | 1.000            |
|           |                |       | $\Sigma = 30$ | $\Sigma = 1.000$        |             |                  |

PRESENTACION GRAFICA DE LAS DISTRIBUCIONES DE FRECUENCIAS



DISTRIBUCION DE FRECUENCIAS DE LOS DATOS DE LAS  
ESTATURAS DE LOS VARONES RESIDENTES EN UNA REGION

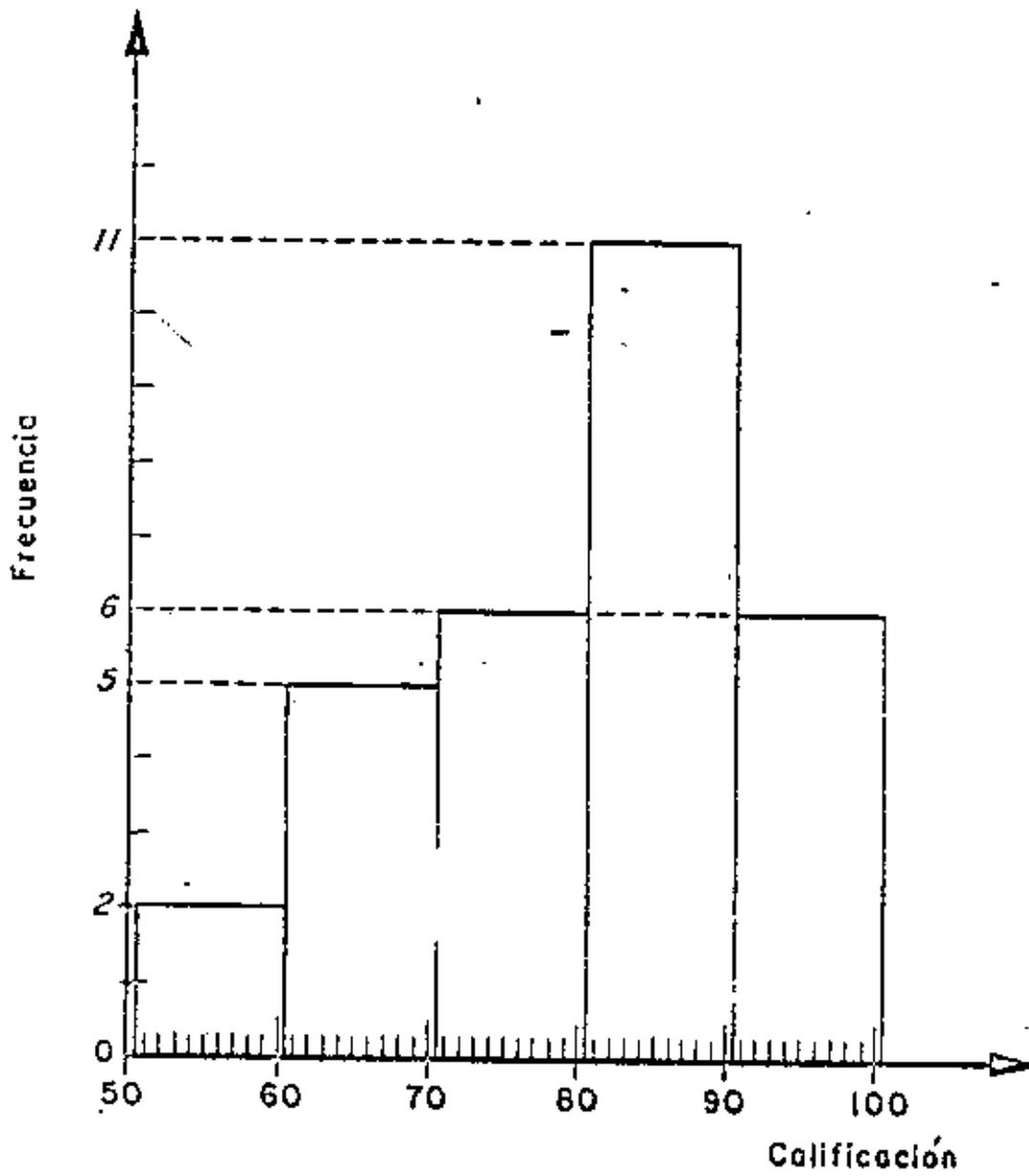


DISTRIBUCION DE FRECUENCIAS ACUMULADAS

¿CUAL ES LA FRECUENCIA DE VALORES MAYORES QUE 180.5?;  $30-24=6$

LA FRECUENCIA RELATIVA ACUMULADA COMPLEMENTARIA ES:  $1-0.800=0.200$  (20%)

HISTOGRAMA DEL PROBLEMA DE LAS CALIFICACIONES EN PEDAGOGIA

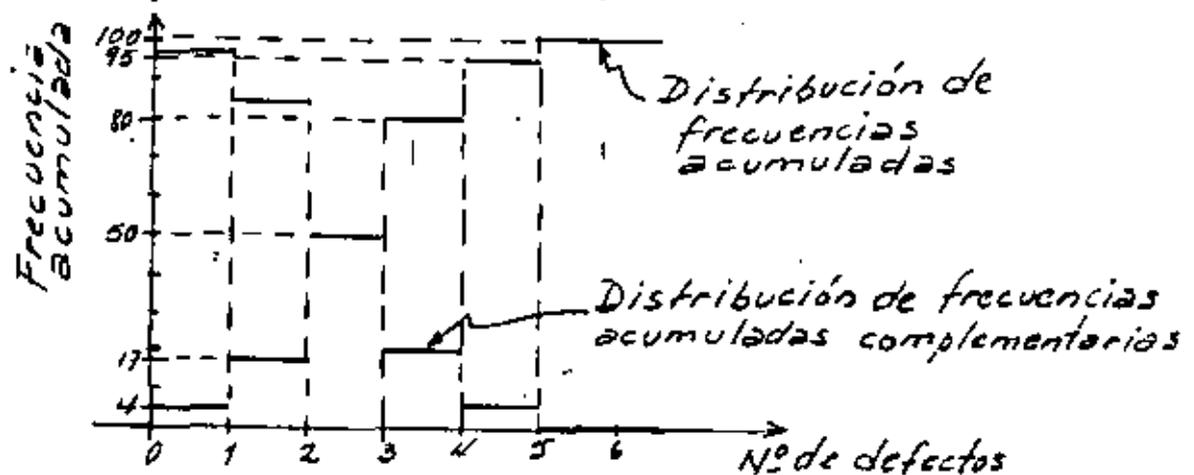
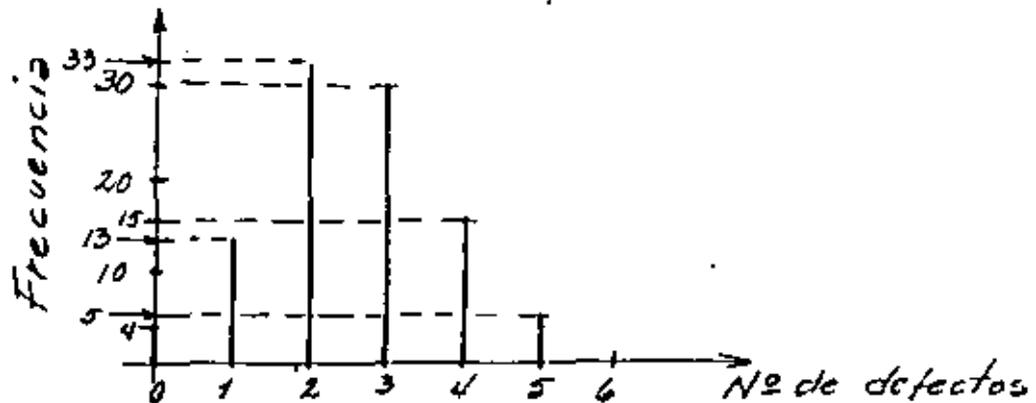


TAREA: DIBUJAR EL POLIGONO, DE FRECUENCIAS Y LAS CURVAS DE FRECUENCIAS RELATIVAS ACUMULADAS Y COMPLEMENTARIAS.

EJEMPLO

EN UN ESTUDIO SOBRE LA CALIDAD DE LOS MONOBLOCKS PRODUCIDOS POR UNA FABRICA, SE OBTUVO UNA MUESTRA ALEATORIA DE 100 ELEMENTOS, A LOS CUALES SE LES CONTO EL NUMERO DE DEFECTOS DE FABRICACION. LA DISTRIBUCION DE FRECUENCIAS QUE SE OBTUVO ES LA SIGUIENTE:

| NUMERO DE DEFECTOS | FRECUENCIA | FRECUENCIA ACUMULADA | FRECUENCIA ACUMULADA COMPLEMENTARIA |
|--------------------|------------|----------------------|-------------------------------------|
| 0                  | 4          | 4                    | 96 (100-4)                          |
| 1                  | 13         | 17                   | 83 (100-17)                         |
| 2                  | 33         | 50                   | 50 (100-50)                         |
| 3                  | 30         | 80                   | 20 (100-80)                         |
| 4                  | 15         | 95                   | 5 (100-95)                          |
| 5                  | 5          | 100                  | 0 (100-100)                         |
|                    | <u>100</u> |                      |                                     |

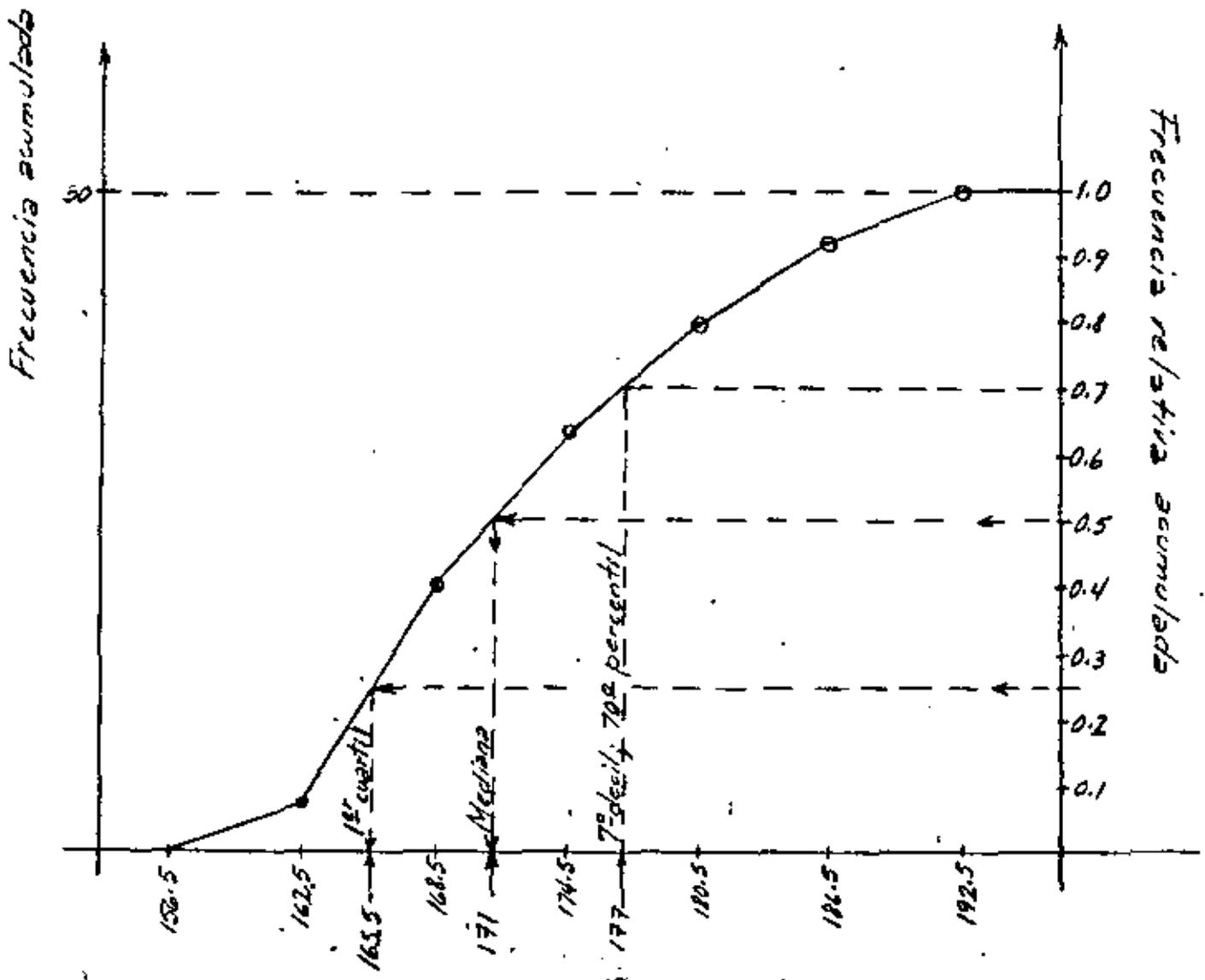


PERCENTILES: SON LOS VALORES DE LA VARIABLE CORRESPONDIENTES A FRECUENCIAS RELATIVAS ACUMULADAS QUE SON MULTIPLOS DE 1 POR CIENTO.

DÉCILES: SON LOS VALORES DE LA VARIABLE CORRESPONDIENTES A FRECUENCIAS RELATIVAS ACUMULADAS QUE SON MULTIPLOS DE 10 POR CIENTO.

CUARTILES: SON LOS VALORES DE LA VARIABLE CORRESPONDIENTES A FRECUENCIAS RELATIVAS ACUMULADAS QUE SON MULTIPLOS DE 25 POR CIENTO.

MEDIANA: VALOR DE LA VARIABLE CORRESPONDIENTE A LA FRECUENCIA RELATIVA ACUMULADA DE 50%.



MEDIDAS REPRESENTATIVAS DE LOS DATOSMEDIDAS DE TENDENCIA CENTRALVALOR MEDIO O PROMEDIO ARITMETICOPARA DATOS NO AGRUPADOS

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

DONDE  $x_i$  SON LOS VALORES DE LOS DATOS Y  $n$  ES EL TAMAÑO DE LA MUESTRA.

SI LOS DATOS ESTAN AGRUPADOS Y  $f_j$  ES LA FRECUENCIA DEL  $j$ -ESIMO INTERVALO Y  $x_j$  ES LA MARCA DE CLASE CORRESPONDIENTE, ENTONCES

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^K f_j x_j \quad ; \quad K = \text{NUMERO DE INTERVALOS}$$

EJEMPLO

SEA EL EJEMPLO ENUNCIADO ANTERIORMENTE DE LOS DEFECTOS EN MONOBLOCKS.  
SE TENIA:

| j   | No. DE DEFECTOS<br>x | FRECUENCIA<br>f | fx           |
|-----|----------------------|-----------------|--------------|
| 1   | 0                    | 4               | 4 x 0 = 0    |
| 2   | 1                    | 13              | 13 x 1 = 13  |
| 3   | 2                    | 33              | 33 x 2 = 66  |
| 4   | 3                    | 30              | 30 x 3 = 90  |
| 5   | 4                    | 15              | 15 x 4 = 60  |
| K=6 | 5                    | 5               | 5 x 5 = 25   |
|     |                      | <u>Σ=100</u>    | <u>Σ 254</u> |
|     |                      |                 | j=1          |

$$\bar{x} = \frac{254}{100}$$

$\bar{x} = 2.54$  DEFECTOS  
POR MONOBLOCK

MODO.- ES EL VALOR DE LA VARIABLE QUE APARECE CON MAYOR FRECUENCIA EN UNA MUESTRA. SI LOS DATOS ESTAN AGRUPADOS, EL MODO ES LA MARCA DE CLASE DEL INTERVALO QUE TIENE LA MAYOR FRECUENCIA.

EJEMPLO

EN EL PROBLEMA DE LOS MONOBLOCKS EL MODO ES 2. EN EL PROBLEMA DE LAS ESTATURAS DE LOS VARONES ADULTOS DE UNA CIUDAD EL MODO ES 165.5 CM.

MEDIANA: ES EL VALOR DE LA VARIABLE QUE CORRESPONDE AL 50% DE LA FRECUENCIA RELATIVA ACUMULADA.

SI LOS DATOS ESTAN AGRUPADOS POR INTERVALOS, LA MEDIANA SE PUEDE CALCULAR CON LA FORMULA (ADEMAS DE GRAFICAMENTE, COMO YA SE VIO):

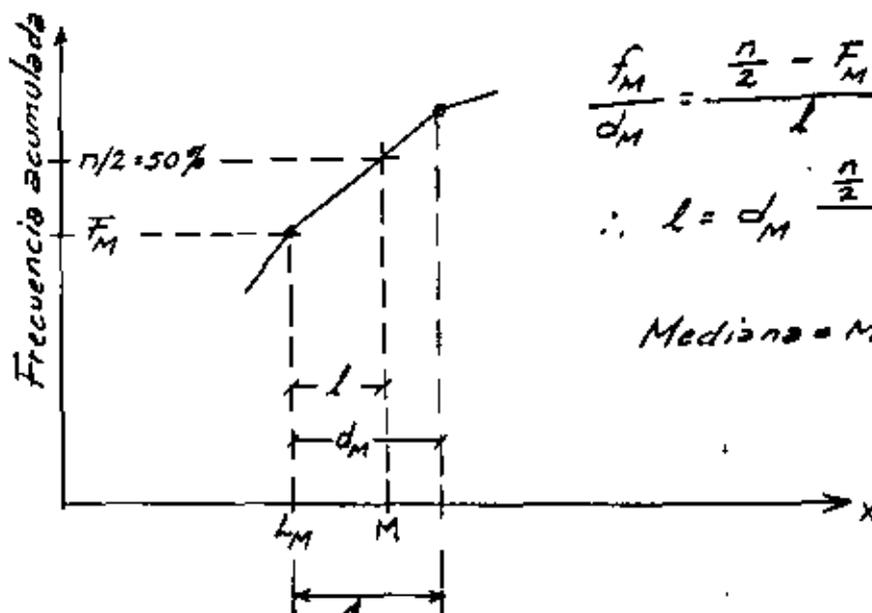
$$\text{MEDIANA} = M = L_M + \frac{\frac{n}{2} - F_M}{f_M} d_M$$

DONDE  $L_M$  = LIMITE INFERIOR REAL DEL INTERVALO QUE CONTIENE A LA MEDIANA

$f_M$  Y  $d_M$  = RESPECTIVAMENTE, A LA FRECUENCIA Y ANCHO DEL INTERVALO QUE CONTIENE A LA MEDIANA

$F_M$  = FRECUENCIA ACUMULADA HASTA EL INTERVALO QUE CONTIENE A LA MEDIANA EXCLUSIVE

$n$  = TAMAÑO DE LA MUESTRA



$$\frac{f_M}{d_M} = \frac{\frac{n}{2} - F_M}{l}$$

$$\therefore l = d_M \frac{\frac{n}{2} - F_M}{f_M}$$

$$\text{Mediana} = M = L_M + l$$

Intervalo que contiene a la mediana

EJEMPLO

EN UN ESTUDIO PARA DETERMINAR LOS TIEMPOS EN QUE UNA MUESTRA ALEATORIA DE INDIVIDUOS REACCIONABA A CIERTOS ESTIMULOS PSICOLOGICOS SE OBTUVO LO SIGUIENTE:

| j   | MARCA DE CLASE<br>x, EN SEG | LIMITES<br>REALES | FRECUENCIA<br>f | FRECUENCIA<br>ACUMULADA, F | f x, SEG                      |
|-----|-----------------------------|-------------------|-----------------|----------------------------|-------------------------------|
| 1   | 0.10                        | 0.075-0.125       | 2               | 2                          | 0.20                          |
| 2   | 0.15                        | 0.125-0.175       | 7               | 9                          | 1.05                          |
| 3   | 0.20                        | 0.175-0.225       | 14              | 23                         | 2.80                          |
| 4   | 0.25                        | 0.225-0.275       | 4               | 27                         | 1.00                          |
| K=5 | 0.30                        | 0.275-0.325       | 3               | 30                         | 0.90                          |
|     |                             |                   | $\Sigma=30$     |                            | $\sum_{j=1}^5 f_j x_j = 5.95$ |

PROMEDIO ARITMETICO

$$\bar{x} = \frac{5.95}{30} = 0.198 \text{ SEG}$$

$$\text{MODO} = 0.20 \text{ SEG}$$

MEDIANA

$$d_M = 0.05, L_M = 0.20 - \frac{0.05}{2} = 0.175, F_M = 9$$

$$n/2 = 30/2 = 15, f_M = 14$$

$$\text{MEDIANA} = M = 0.175 + \frac{15 - 9}{14} 0.05$$

$$M = 0.175 + \frac{0.30}{14} = 0.175 + 0.021 = 0.196 \text{ SEG}$$

MEDIDAS DE DISPERSION

RANGO = MAXIMO VALOR OBSERVADO - MINIMO VALOR OBSERVADO

VARIANCIA - SI LOS DATOS NO ESTAN AGRUPADOS;

$$s_X^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 - \bar{x}^2 = \overline{x^2} - \bar{x}^2$$

SI LOS DATOS ESTAN AGRUPADOS:

$$s_X^2 = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^K f_j (x_j - \bar{x})^2 = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^K f_j x_j^2 - \bar{x}^2 = \overline{x^2} - \bar{x}^2$$

DONDE LAS  $x_j$  SON LOS VALORES DE LAS MARCAS DE CLASE DE LOS INTERVALOS O LOS VALORES DE AGRUPAMIENTO.

DESVIACION ESTANDAR

$$s_X = \sqrt{s_X^2}$$

COEFICIENTE DE VARIACION

$$v_X = s_X / \bar{x}$$

EJEMPLO

EN UN ESTUDIO SOBRE LA TEMPERATURA MAXIMA DIARIA EN UNA CIUDAD SE OBTUVO LO SIGUIENTE DURANTE UNA PRIMAVERA:

| j | INTERVALOS DE TEMPERATURA, °F | MARCA DE CLASE, °F | FRECUENCIA<br>f | xf   | $x - \bar{x}$ | $(x - \bar{x})^2$ | $(x - \bar{x})^2 f$ |
|---|-------------------------------|--------------------|-----------------|------|---------------|-------------------|---------------------|
| 1 | 55 - 63                       | 59                 | 2               | 118  | -21.3         | 453.7             | 907.4               |
| 2 | 64 - 72                       | 68                 | 6               | 408  | -12.3         | 151.3             | 907.8               |
| 3 | 73 - 81                       | 77                 | 7               | 539  | - 3.3         | 10.9              | 76.3                |
| 4 | 82 - 90                       | 86                 | 9               | 774  | 5.7           | 32.5              | 292.5               |
| 5 | 91 - 99                       | 95                 | 6               | 570  | 14.7          | 216.1             | 1296.6              |
|   |                               |                    | 30              | 2409 |               |                   | 3480.6              |

$$\bar{x} = \frac{2409}{30} = 80.3 \text{ °F.}$$

$$S_X^2 = \frac{3480.6}{30} = 116 \text{ °F}^2$$

$$S_X = \sqrt{116} = 10.8 \text{ °F}$$

$$v_X = \frac{10.8}{80.3} = 0.134 \text{ (13.4\%)}$$

$$\text{MODO} = 86$$

$$d_M = 9, L_M = 72.5, f_M = 7, F_M = 8, \frac{n}{2} = \frac{30}{2} = 15$$

$$\text{MEDIANA} = M = 72.5 + \frac{15 - 8}{7} 9 = 72.5 + 9 = 81.5 \text{ °F}$$

## MEDIDA DE DISPERSION ( DATOS AGRUPADOS POR VALORES )

$$\text{Rango} = 1.48 - 0.18 = 1.30$$

| Datos<br>x | Frecuencia | xf               | x <sup>2</sup> | x <sup>2</sup> f  |
|------------|------------|------------------|----------------|-------------------|
| 0.18       | 4          | 0.72             | 0.032          | 0.128             |
| 0.28       | 1          | 0.28             | 0.078          | 0.078             |
| 0.36       | 2          | 0.72             | 0.130          | 0.260             |
| 0.38       | 1          | 0.38             | 0.144          | 0.144             |
| 0.48       | 7          | 3.36             | 0.230          | 1.610             |
| 0.49       | 1          | 0.49             | 0.240          | 0.240             |
| 0.51       | 1          | 0.51             | 0.260          | 0.260             |
| 0.55       | 1          | 0.55             | 0.302          | 0.302             |
| 0.57       | 3          | 1.71             | 0.325          | 0.975             |
| 0.65       | 12         | 7.80             | 0.422          | 5.064             |
| 0.72       | 9          | 6.48             | 0.518          | 4.662             |
| 0.78       | 14         | 10.92            | 0.608          | 8.512             |
| 0.83       | 7          | 5.81             | 0.689          | 4.823             |
| 0.88       | 2          | 1.76             | 0.774          | 1.548             |
| 0.92       | 5          | 4.60             | 0.846          | 4.230             |
| 0.96       | 8          | 7.68             | 0.922          | 7.376             |
| 1.00       | 1          | 1.00             | 1.000          | 1.000             |
| 1.03       | 4          | 4.12             | 1.061          | 4.244             |
| 1.06       | 2          | 2.12             | 1.124          | 2.248             |
| 1.09       | 3          | 3.27             | 1.189          | 3.567             |
| 1.12       | 2          | 2.24             | 1.254          | 2.508             |
| 1.18       | 1          | 1.18             | 1.392          | 1.392             |
| 1.21       | 2          | 2.42             | 1.464          | 2.928             |
| 1.23       | 1          | 1.23             | 1.513          | 1.513             |
| 1.26       | 1          | 1.26             | 1.588          | 1.588             |
| 1.34       | 1          | 1.34             | 1.796          | 1.796             |
| 1.36       | 1          | 1.36             | 1.850          | 1.850             |
| 1.40       | 1          | 1.40             | 1.960          | 1.960             |
| 1.43       | 1          | 1.43             | 2.045          | 2.045             |
| 1.48       | 1          | 1.48             | 2.190          | 2.190             |
|            |            | $\Sigma = 79.62$ |                | $\Sigma = 71.041$ |

$$\bar{X} = \frac{79.62}{100} = 0.796$$

$$S_X^2 = \bar{x}^2 - \bar{x}^2 = 0.710 - 0.634 = 0.076$$

$$\bar{x}^2 = 0.634$$

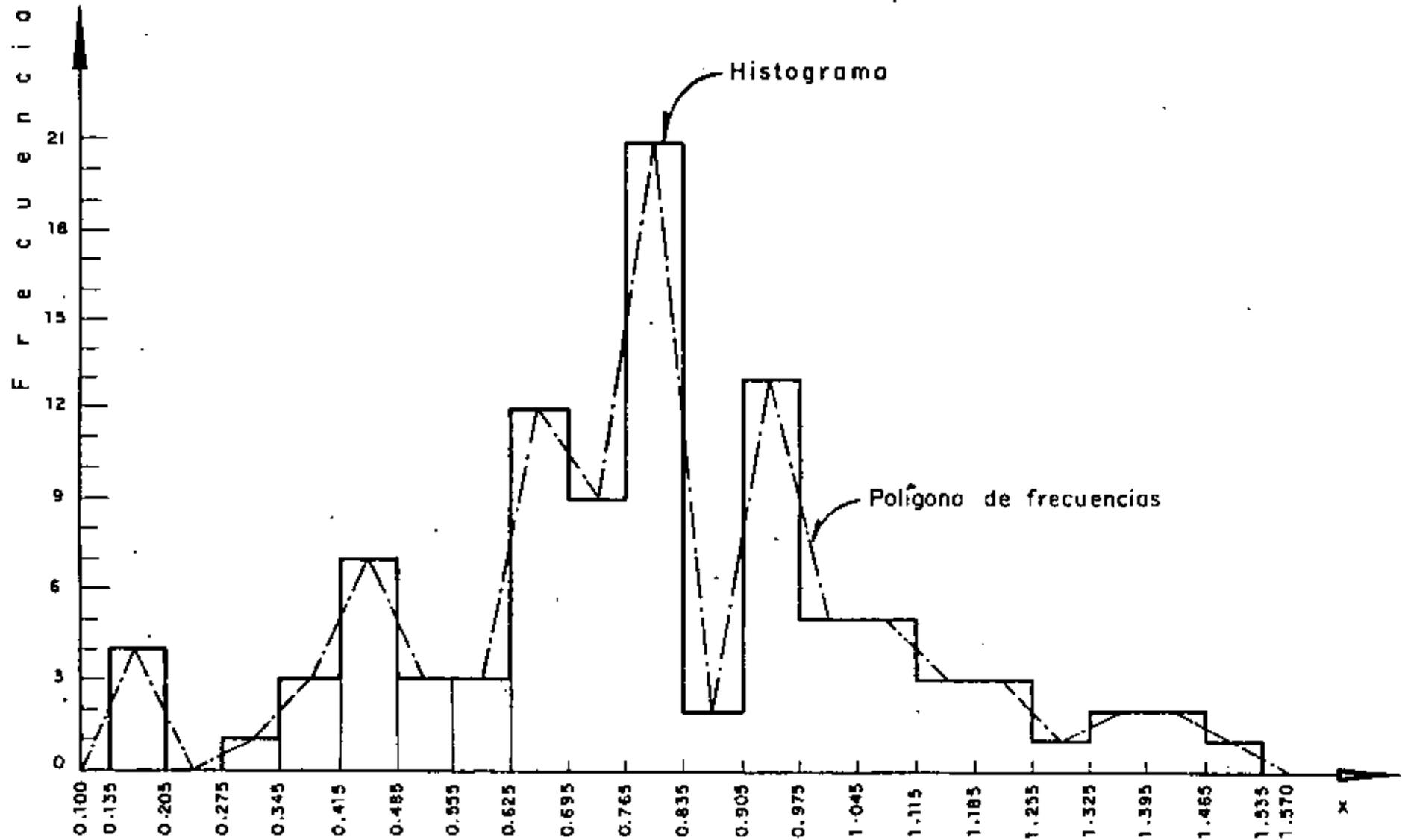
$$S_X^2 = 0.076$$

$$S_X = \sqrt{S_X^2} = \sqrt{0.076} = 0.276$$

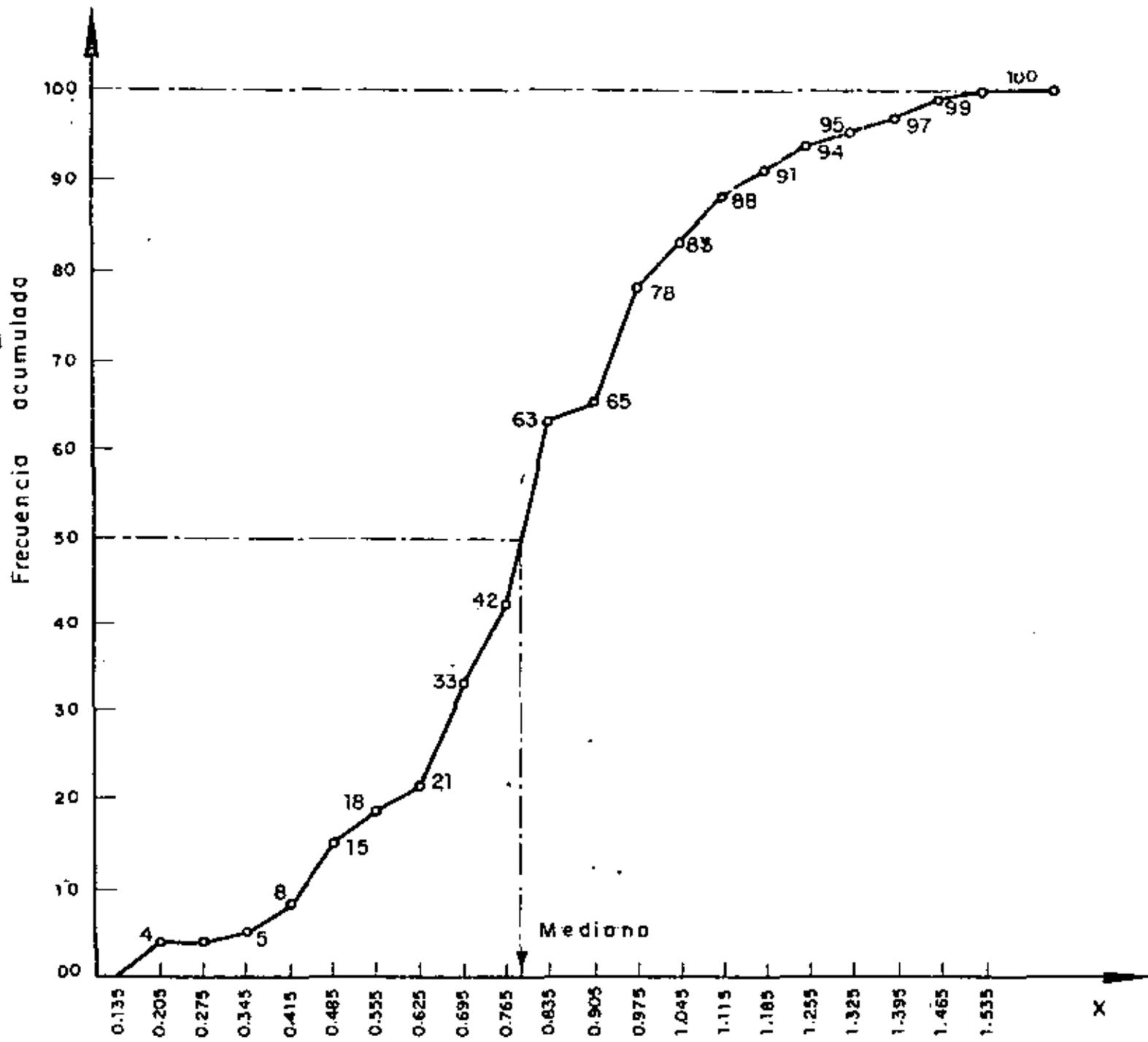
$$\text{Coeficiente de variación} = V_X = \frac{S_X}{\bar{X}} = \frac{0.276}{0.796} = 0.347 = 34.7\%$$

|    | Intervalo | Límites reales |       | PREC.          | FRECUENCIA<br>RELATIVA | FREC.<br>ACUM. | FREC. REL.<br>ACUMULADA |
|----|-----------|----------------|-------|----------------|------------------------|----------------|-------------------------|
|    |           | INF.           | SUP.  |                |                        |                |                         |
| 1  | 0.14-0.20 | 0.135          | 0.205 | 4              | 4/100=0.04             | 4              | 0.04                    |
| 2  | 0.21-0.27 | 0.205          | 0.275 | 0              | 0/100=0.00             | 4              | 0.04                    |
| 3  | 0.28-0.34 | 0.275          | 0.345 | 1              | 1/100=0.01             | 5              | 0.05                    |
| 4  | 0.35-0.41 | 0.345          | 0.415 | 3              | 3/100=0.03             | 8              | 0.08                    |
| 5  | 0.42-0.48 | 0.415          | 0.485 | 7              | 7/100=0.07             | 15             | 0.15                    |
| 6  | 0.49-0.55 | 0.485          | 0.555 | 3              | 3/100=0.03             | 18             | 0.18                    |
| 7  | 0.56-0.62 | 0.555          | 0.625 | 3              | 3/100=0.03             | 21             | 0.21                    |
| 8  | 0.63-0.69 | 0.625          | 0.695 | 12             | 12/100=0.12            | 33             | 0.33                    |
| 9  | 0.70-0.76 | 0.695          | 0.765 | 9              | 9/100=0.09             | 42             | 0.42                    |
| 10 | 0.77-0.83 | 0.765          | 0.835 | 21             | 21/100=0.21            | 63             | 0.63                    |
| 11 | 0.84-0.90 | 0.835          | 0.905 | 2              | 2/100=0.02             | 65             | 0.65                    |
| 12 | 0.91-0.97 | 0.905          | 0.975 | 13             | 13/100=0.13            | 78             | 0.78                    |
| 13 | 0.98-1.04 | 0.975          | 1.045 | 5              | 5/100=0.05             | 83             | 0.83                    |
| 14 | 1.05-1.11 | 1.045          | 1.115 | 5              | 5/100=0.05             | 88             | 0.88                    |
| 15 | 1.12-1.18 | 1.115          | 1.185 | 3              | 3/100=0.03             | 91             | 0.91                    |
| 16 | 1.19-1.25 | 1.185          | 1.255 | 3              | 3/100=0.03             | 94             | 0.94                    |
| 17 | 1.26-1.32 | 1.255          | 1.325 | 1              | 1/100=0.01             | 95             | 0.95                    |
| 18 | 1.33-1.39 | 1.325          | 1.395 | 2              | 2/100=0.02             | 97             | 0.97                    |
| 19 | 1.40-1.46 | 1.395          | 1.465 | 2              | 2/100=0.02             | 99             | 0.99                    |
| 20 | 1.47-1.53 | 1.465          | 1.535 | 1              | 1/100=0.01             | 100            | 1.00                    |
|    |           |                |       | $\Sigma = 100$ | $\Sigma = 1.00$        |                |                         |





Histograma y polígono de frecuencias



Curva de frecuencias acumuladas

2/11

MEDIDAS DE TENDENCIA CENTRAL

| J  | Marca de clase x | Límites reales | Frecuencia f | Frecuencia A- acumulada, F' | fx    |
|----|------------------|----------------|--------------|-----------------------------|-------|
| 1  | 0.17             | 0.135-0.205    | 4            | 4                           | 0.68  |
| 2  | 0.24             | 0.205-0.275    | 0            | 4                           | 0.00  |
| 3  | 0.31             | 0.275-0.345    | 1            | 5                           | 0.31  |
| 4  | 0.38             | 0.345-0.415    | 3            | 8                           | 1.14  |
| 5  | 0.45             | 0.415-0.485    | 7            | 15                          | 3.15  |
| 6  | 0.52             | 0.485-0.555    | 3            | 18                          | 1.56  |
| 7  | 0.59             | 0.555-0.625    | 3            | 21                          | 1.77  |
| 8  | 0.66             | 0.625-0.695    | 12           | 33                          | 7.92  |
| 9  | 0.73             | 0.695-0.765    | 9            | 42                          | 6.57  |
| 10 | 0.80             | 0.765-0.835    | 21           | 63                          | 16.80 |
| 11 | 0.87             | 0.835-0.905    | 2            | 65                          | 1.74  |
| 12 | 0.94             | 0.905-0.975    | 13           | 78                          | 12.22 |
| 13 | 1.01             | 0.975-1.045    | 5            | 83                          | 5.05  |
| 14 | 1.08             | 0.045-1.115    | 5            | 88                          | 5.40  |
| 15 | 1.15             | 1.115-1.185    | 3            | 91                          | 3.45  |
| 16 | 1.22             | 1.185-1.255    | 3            | 94                          | 3.66  |
| 17 | 1.29             | 1.255-1.325    | 1            | 95                          | 1.29  |
| 18 | 1.36             | 1.325-1.395    | 2            | 97                          | 2.72  |
| 19 | 1.43             | 1.395-1.465    | 2            | 99                          | 2.86  |
| 20 | 1.50             | 1.465-1.535    | 1            | 100                         | 1.50  |

$$\sum_{j=1}^{20} f_j \cdot x_j =$$

= 79.79

Promedio aritmético

$$\bar{X} = \frac{79.79}{100} = 0.7979$$

MODO = 0.80

$$\text{Mediana} = M = L_M + \frac{\frac{n}{2} - F_M}{f_M} \cdot d_M$$

$d_M = 0.07$

$L_M = 0.765$

$F_M = 42$

$f_M = 21$

$n = 100$

$$\text{Mediana} = 0.765 + \frac{50-42}{21} \cdot 0.07$$

$$= 0.765 + 0.026 = 0.794$$

MEDIDAS DE DISPERSION ( DATOS AGRUPADOS )

Rango = máximo valor observado - mínimo valor observado  
 = 1.48 - 0.18 = 1.30

| J  | Intervalo | Marca de clase x | Frecuencia f | xf           | x- $\bar{x}$ | (x- $\bar{x}$ ) <sup>2</sup> | (x- $\bar{x}$ ) <sup>2</sup> f |
|----|-----------|------------------|--------------|--------------|--------------|------------------------------|--------------------------------|
| 1  | 0.14-0.20 | 0.17             | 4            | 0.68         | -0.628       | 0.394                        | 1.576                          |
| 2  | 0.21-0.27 | 0.24             | 0            | 0.00         | -0.558       | 0.311                        | 0.00                           |
| 3  | 0.28-0.34 | 0.31             | 1            | 0.31         | -0.488       | 0.238                        | 0.238                          |
| 4  | 0.35-0.41 | 0.38             | 3            | 1.14         | -0.418       | 0.175                        | 0.525                          |
| 5  | 0.42-0.48 | 0.45             | 7            | 3.15         | -0.348       | 0.121                        | 0.847                          |
| 6  | 0.49-0.55 | 0.52             | 3            | 1.56         | -0.278       | 0.077                        | 0.231                          |
| 7  | 0.56-0.62 | 0.59             | 3            | 1.77         | -0.208       | 0.043                        | 0.129                          |
| 8  | 0.63-0.69 | 0.66             | 12           | 7.92         | -0.138       | 0.019                        | 0.228                          |
| 9  | 0.70-0.76 | 0.73             | 9            | 6.57         | -0.068       | 0.004                        | 0.036                          |
| 10 | 0.77-0.83 | 0.80             | 21           | 16.80        | 0.002        | 0.00                         | 0.000                          |
| 11 | 0.84-0.90 | 0.87             | 2            | 1.74         | 0.072        | 0.005                        | 0.010                          |
| 12 | 0.91-0.97 | 0.94             | 13           | 12.22        | 0.142        | 0.020                        | 0.260                          |
| 13 | 0.98-1.04 | 1.01             | 5            | 5.05         | 0.212        | 0.045                        | 0.225                          |
| 14 | 1.05-1.11 | 1.08             | 5            | 5.40         | 0.282        | 0.079                        | 0.395                          |
| 15 | 1.12-1.18 | 1.15             | 3            | 3.45         | 0.352        | 0.123                        | 0.369                          |
| 16 | 1.19-1.25 | 1.22             | 3            | 3.66         | 0.422        | 0.178                        | 0.534                          |
| 17 | 1.26-1.32 | 1.29             | 1            | 1.29         | 0.492        | 0.242                        | 0.242                          |
| 18 | 1.33-1.39 | 1.36             | 2            | 2.72         | 0.562        | 0.316                        | 0.632                          |
| 19 | 1.40-1.46 | 1.43             | 2            | 2.86         | 0.632        | 0.399                        | 0.798                          |
| 20 | 1.47-1.53 | 1.50             | 1            | 1.50         | 0.702        | 0.493                        | 0.493                          |
|    |           |                  | <u>100</u>   | <u>79.79</u> |              |                              | <u>7.768</u>                   |

Mediana =  $\bar{X} = \frac{79.79}{100} = 0.7979$

$S_x^2 = \text{Variancia} = \frac{7.768}{100} = 0.077$

Desviac. estándar =  $S_x = 0.277$  ( $S_x = \sqrt{S_x^2}$ )

Coefficiente de variación =  $V_x = \frac{S_x}{\bar{x}} = \frac{0.277}{0.7979} = 0.347$

T A R E A

|      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |
|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| 0.78 | 0.38 | 0.72 | 0.65 | 0.72 | 0.92 | 0.78 | 0.05 | 0.92 | 0.78 |
| 1.38 | 1.43 | 0.65 | 0.48 | 0.83 | 0.48 | 0.72 | 0.48 | 0.65 | 0.78 |
| 0.55 | 1.00 | 0.78 | 0.78 | 1.03 | 1.26 | 0.48 | 0.48 | 1.06 | 0.96 |
| 0.65 | 0.92 | 0.72 | 0.78 | 0.78 | 0.48 | 0.28 | 0.56 | 0.83 | 0.48 |
| 0.78 | 0.49 | 0.36 | 0.78 | 0.78 | 0.83 | 0.89 | 0.06 | 1.03 | 1.21 |
| 0.68 | 0.57 | 0.72 | 1.03 | 0.92 | 0.96 | 0.78 | 1.09 | 0.92 | 1.12 |
| 0.65 | 0.65 | 0.83 | 0.72 | 0.72 | 0.78 | 0.72 | 1.09 | 0.83 | 0.83 |
| 0.83 | 1.06 | 0.57 | 0.78 | 1.23 | 1.09 | 1.03 | 0.18 | 0.65 | 1.34 |
| 0.96 | 0.65 | 0.48 | 1.18 | 1.12 | 0.18 | 0.48 | 0.72 | 0.57 | 0.65 |
| 0.06 | 0.65 | 0.96 | 0.51 | 0.65 | 1.21 | 1.48 | 0.96 | 0.96 | 1.40 |

1. Agrupar datos por intervalos y elaborar tabla con frecuencias, frecuencias relativas, frecuencias acumuladas y frecuencias relativas acumuladas (anotar límites, límites reales y marcas de clase).
2. Dibujar:
  - a) Histograma
  - b) Polígono de frecuencias
  - c) Curva de frecuencias acumuladas
3. Calcular todas las medidas de tendencia central y de dispersión que se han estudiado
  - a. Sin agrupar datos
  - b. Con datos agrupados

TRANSFORMACION LINEAL DE VARIABLES

SI SE TIENE UNA MUESTRA DE TAMAÑO  $n$  DE LA VARIABLE  $X$ , A CADA VALOR  $x_i$ , DE DICHA MUESTRA LE CORRESPONDE UN VALOR,  $y_i$ , DE LA MUESTRA DE  $Y$ , DADO POR.

$$y_i = a + bx_i$$

POR LO TANTO, EL PROMEDIO ARITMETICO DE LAS  $y_i$  ES

$$\bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (a + bx_i) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a + \frac{b}{n} \sum_{i=1}^n x_i = a + b\bar{x}$$

ANALOGAMENTE, EL VALOR MEDIO CUADRATICO RESULTA SER

$$\begin{aligned} \overline{y^2} &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (a + bx_i)^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a^2 + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n 2abx_i + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n b^2 x_i^2 = \\ &= a^2 + 2ab\bar{x} + b^2 \overline{x^2} \end{aligned}$$

Y, LA VARIANCIA,

$$s^2(y) = \overline{y^2} - \bar{y}^2 = a^2 + 2ab\bar{x} + b^2 \overline{x^2} - (a + b\bar{x})^2 = b^2 \overline{x^2} - b^2 \bar{x}^2 = b^2 s^2(x)$$

ESTAS TRANSFORMACIONES SE PUEDEN EMPLEAR PARA CALCULAR EL PROMEDIO  $\bar{y}$ , Y LA VARIANCIA  $s^2(y)$  DE LA MUESTRA DE UNA VARIABLE QUE RESULTA DE UNA TRANSFORMACION  $Y$ , CON BASE EN ELLOS, CALCULAR  $\bar{x}$  Y  $s^2(x)$  DE LA MUESTRA ORIGINAL, MEDIANTE LAS ECUACIONES

$$\bar{x} = (\bar{y} - a) / b$$

$$s^2(x) = s^2(y) / b^2$$

ESTE PROCEDIMIENTO AHORRA BASTANTE TIEMPO DE CALCULOS CUANDO LOS DATOS ESTAN AGRUPADOS, EN CUYO CASO LOS  $x_i$  SON LAS MARCAS DE CLASE.

EN OCASIONES LA TRANSFORMACION LINEAL SE PLANTEA COMO

$$y = \frac{x - c_1}{c_2}$$

DONDE  $c_1$  y  $c_2$  SON CONSTANTES. EN ESTE CASO SE OBTIENEN

$$\bar{y} = \frac{\bar{x} - c_1}{c_2} \quad \text{y} \quad s^2(y) = \frac{1}{c_2^2} s^2(x)$$

DE ESTAS ECUACIONES SE LLEGA A

$$\bar{x} = c_2 \bar{y} + c_1$$

$$s^2(x) = c_2^2 s^2(y)$$

EJEMPLO

EN EL PROBLEMA DE LOS RESULTADOS,  $x_i$ , DE UN EXAMEN SOBRE PEDAGOGIA SE OBTUVO LA DISTRIBUCION DE FRECUENCIAS INDICADA EN LAS DOS PRIMERAS COLUMNAS DE LA SIGUIENTE TABLA:

| MARCAS DE CLASE<br>$x_i$ | FRECUENCIAS<br>$f_i$ | MARCAS DE CLASE<br>TRANSFORMADA, $y_i$ | $y_i f_i$   | $y_i^2$ | $y_i^2 f_i$ |
|--------------------------|----------------------|--|-------------|---------|-------------|
| 55.5                     | 2                    | -2                                     | -4          | 4       | 8           |
| 65.5                     | 5                    | -1                                     | -5          | 1       | 5           |
| 75.5                     | 6                    | 0                                      | 0           | 0       | 0           |
| 85.5                     | 11                   | 1                                      | 11          | 1       | 11          |
| 95.5                     | 6                    | 2                                      | 12          | 4       | 24          |
|                          | $\Sigma=30$          |  | $\Sigma=14$ |         |             |

$$\bar{y} = 14/30 = 0.467, \overline{y^2} = 48/30 = 1.6, S^2(y) = 1.6 - (0.467)^2 = 1.382$$

$$\bar{x} = 0.467 \times 10 + 75.5 = 80.17, S^2(x) = 1.382 \times 10^2 = 138.2$$

CALCULAREMOS EL PROMEDIO Y LA VARIANCA DE ESTA MUESTRA, CALCULANDO PRIMERO  $\bar{y}$  Y  $S^2(y)$  DE LA TRANSFORMACION

$$y = \frac{x - C_1}{C_2}$$

CON  $C_1$  = MARCA DE CLASE CENTRAL Y

$C_2$  = ANCHO DE CLASE.

TOMANDO  $C_1 = 75.5$  Y  $C_2 = 10$ , SE TIENE  $y_i = (x_i - 75.5)/10$

POR LO QUE

$$y_1 = (-75.5 + 55.5)/10 = -2$$

$$y_2 = (-75.5 + 65.5)/10 = -1$$

$$y_3 = (-75.5 + 75.5)/10 = 0$$

$$y_4 = (-75.5 + 85.5)/10 = 1$$

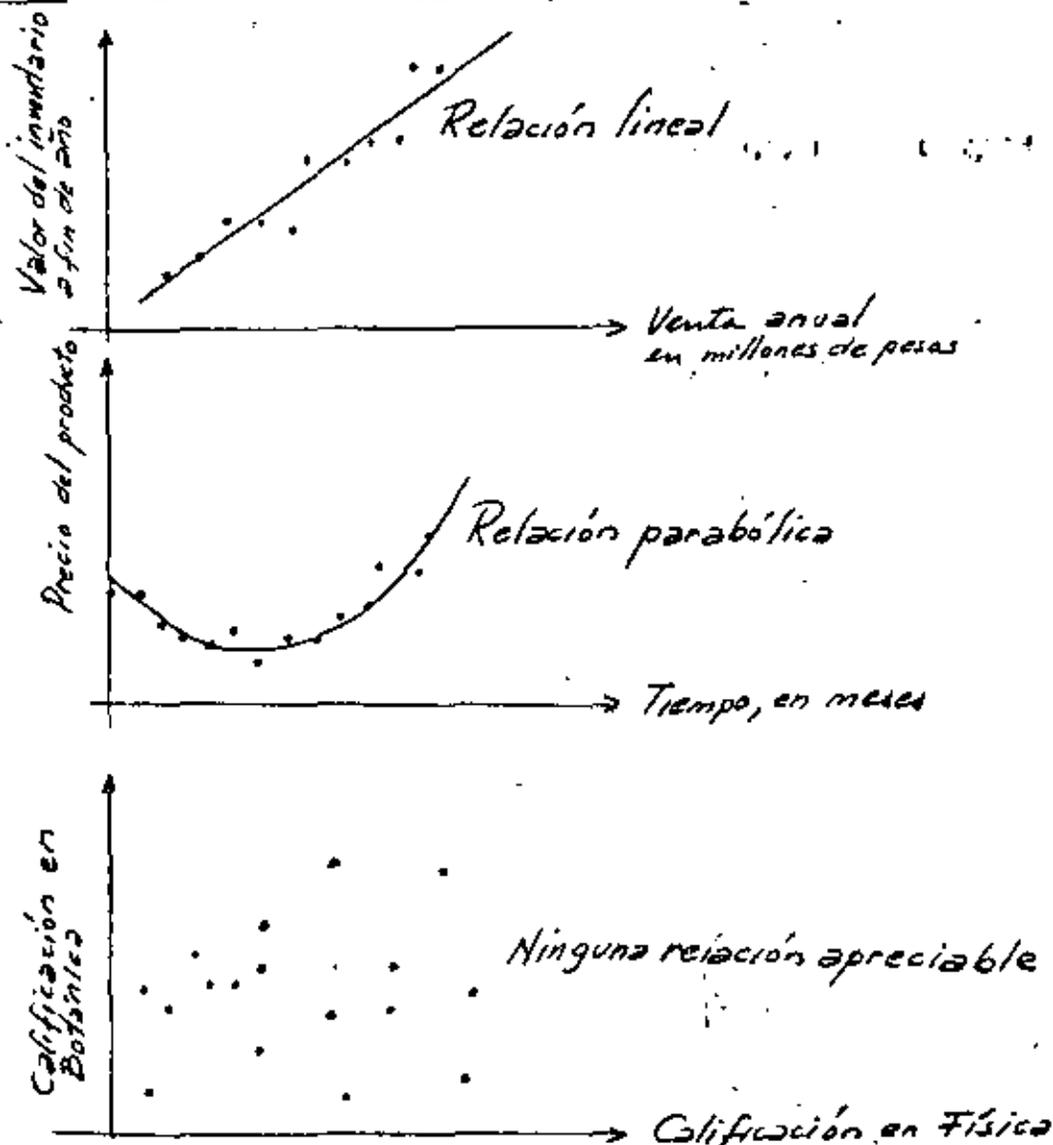
$$y_5 = (-75.5 + 95.5)/10 = 2$$

OBSERVESE QUE SE OBTIENE  $y = 0$  PARA EL INTERVALO CORRESPONDIENTE A  $X_1 = C_1$ , Y PARA LOS INTERVALOS CON VALORES MAYORES DE  $X$  BASTA CON IRLE SUMANDO UNA UNIDAD, MIENTRAS QUE A LOS DE VALORES MENORES, IRLE RESTANDO UNA UNIDAD.

## REGRESION LINEAL

CON MUCHA FRECUENCIA SE PRESENTAN PROBLEMAS EN QUE INTERVIENEN DOS VARIABLES ALEATORIAS (O UNA ALEATORIA Y UNA DETERMINISTA) Y SE DESEA DETERMINAR UNA RELACION FUNCIONAL ENTRE ELLAS. SI SE OBTIENE UNA MUESTRA DE PAREJAS DE DATOS  $(x_i, y_i)$  Y SE ANOTAN EN UNA GRAFICA X-Y, VISUALMENTE SE PODRA PREVEER EL TIPO DE RELACION ENTRE AMBAS VARIABLES, Y LUEGO HACER UN AJUSTE MATEMATICO DE ALGUN TIPO DE CURVA.

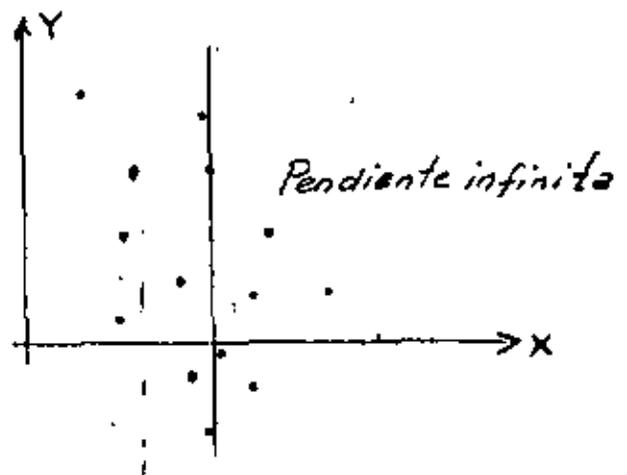
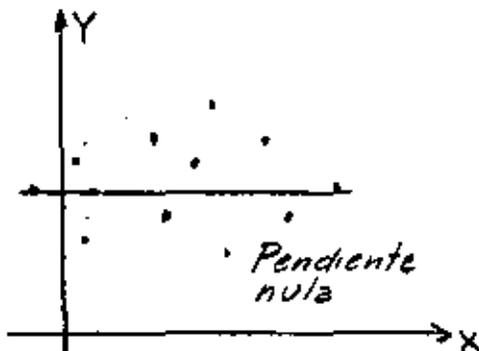
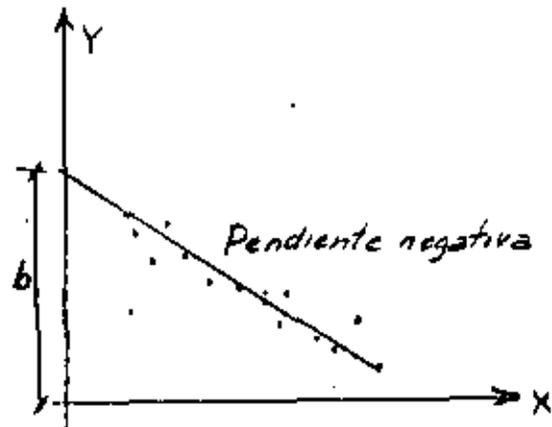
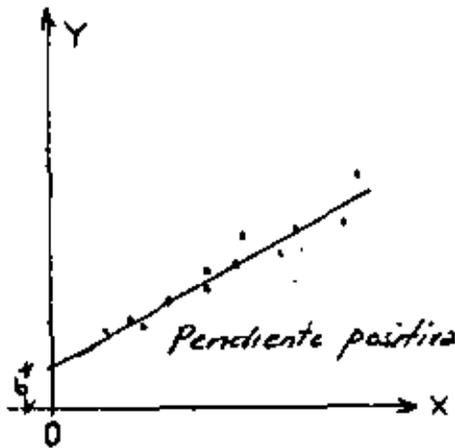
### EJEMPLOS (GRAFICAS DE CORRELACION)

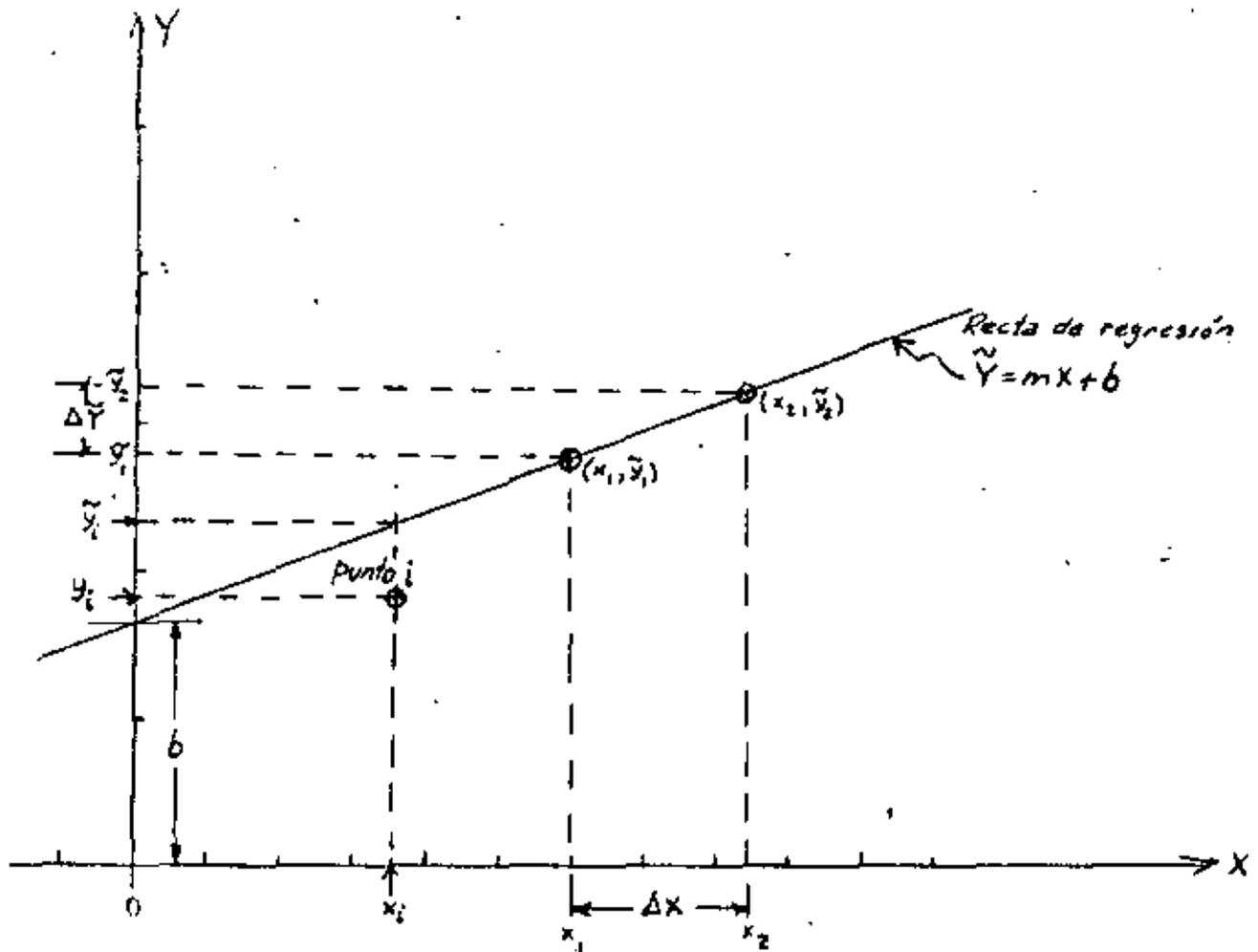


PARA AJUSTAR ALGUNA CURVA A UN GRUPO DE DATOS SE PUEDE PROCEDER DE DIFERENTES MANERAS, DE LAS CUALES LA MAS SENCILLA ES "A OJO", PERO TIENE LA DESVENTAJA DE QUE, POR NO SER SISTEMATICO, DIFERENTES PERSONAS PROPONEN DISTINTAS CURVAS. DE LOS METODOS ANALITICOS O MATEMATICOS, EL MAS COMUN ES EL DE MINIMOS CUADRADOS.

SI X ES LA VARIABLE INDEPENDIENTE Y Y LA DEPENDIENTE, SE DICE QUE LA REGRESION ES DE Y CON BASE EN X, Y VICEVERSA.

EN ESTE CURSO NOS CONCRETAREMOS AL CASO DE UN AJUSTE LINEAL, ES DECIR, MEDIANTE UNA LINEA RECTA, DE ECUACION  $\bar{Y} = mX + b$ , EN DONDE m ES LA PENDIENTE Y b LA ORDENADA AL ORIGEN.





$$m = \Delta \tilde{Y} / \Delta X$$

$$\Delta \tilde{Y} = \tilde{y}_2 - \tilde{y}_1$$

$$\Delta X = x_2 - x_1$$

AGRUPAMIENTO DE DATOS POR PAREJAS

CUANDO SE TIENE UNA MUESTRA CON MUCHOS DATOS TOMADOS POR PAREJAS, CORRESPONDIENTES A DOS VARIABLES ALEATORIAS, ES A MENUDO CONVENIENTE AGRUPARLOS POR VALORES O POR INTERVALOS Y LUEGO OBTENER LA DISTRIBUCIÓN CONJUNTA DE FRECUENCIAS, DE LA MANERA QUE SE MUESTRA EN EL SIGUIENTE EJEMPLO.

EJEMPLO

EN UN ESTUDIO CON FINES ANTROPOLOGICOS REALIZADO EN UNA MATERNIDAD, SE OBTUVO LA MUESTRA POR PAREJAS, MOSTRADA EN LA TABLA 1, CORRESPONDIENTE A LAS VARIABLES ALEATORIAS

X = ESTATURA

Y = CIRCUNFERENCIA DE LA CABEZA

DE LOS NIÑOS AL NACER.

CALCULAR LA DISTRIBUCION CONJUNTA DE FRECUENCIAS Y DIBUJAR EL HISTOGRAMA CORRESPONDIENTE.

PROCEDIMIENTO:

1. Determinar los valores máximos y mínimos de los datos X y Y.
2. Elaborar la tabla de conteo
3. Elaborar la tabla con la distribución conjunta de frecuencias.

TABLA 1, ESTATURA,  $x$  (EN CM), Y CIRCUNFERENCIA DE LA CABEZA,  $y$  (EN CM), EN BEBES AL NACER (DATOS DEL PROF. E. NAVRATIL, UNIVERSITY HOSPITAL, GRAZ, 1962)

|    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |
|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 52 | 36 | 50 | 33 | 51 | 34 | 51 | 36 | 48 | 33 |
| 48 | 34 | 48 | 34 | 49 | 34 | 53 | 33 | 48 | 33 |
| 50 | 34 | 51 | 36 | 51 | 36 | 51 | 36 | 50 | 36 |
| 51 | 34 | 54 | 38 | 51 | 34 | 49 | 34 | 49 | 32 |
| 47 | 35 | 49 | 34 | 50 | 35 | 51 | 35 | 49 | 35 |
| 51 | 35 | 49 | 33 | 47 | 35 | 50 | 34 | 48 | 34 |
| 52 | 36 | 49 | 33 | 49 | 34 | 49 | 35 | 50 | 34 |
| 52 | 36 | 50 | 34 | 49 | 33 | 50 | 33 | 49 | 34 |
| 53 | 37 | 48 | 33 | 49 | 33 | 47 | 33 | 49 | 34 |
| 48 | 34 | 52 | 34 | 52 | 36 | 50 | 35 | 49 | 33 |
| 50 | 34 | 50 | 34 | 51 | 37 | 49 | 34 | 48 | 34 |
| 52 | 37 | 50 | 33 | 50 | 35 | 50 | 34 | 50 | 35 |
| 52 | 36 | 49 | 35 | 56 | 39 | 48 | 34 | 49 | 33 |
| 50 | 35 | 51 | 35 | 52 | 34 | 47 | 35 | 50 | 32 |
| 50 | 34 | 53 | 35 | 47 | 34 | 50 | 35 | 54 | 37 |
| 49 | 34 | 48 | 32 | 53 | 36 | 53 | 36 | 50 | 35 |
| 48 | 34 | 48 | 33 | 49 | 34 | 52 | 36 | 52 | 34 |
| 48 | 33 | 50 | 33 | 49 | 35 | 53 | 38 | 51 | 35 |
| 50 | 33 | 51 | 35 | 49 | 34 | 50 | 34 | 52 | 35 |
| 50 | 35 | 52 | 36 | 51 | 35 | 53 | 39 | 48 | 33 |

TABLA 2, GRAFICA DE CONTEO CORRESPONDIENTE A LA MUESTRA DE LA TABLA 1.

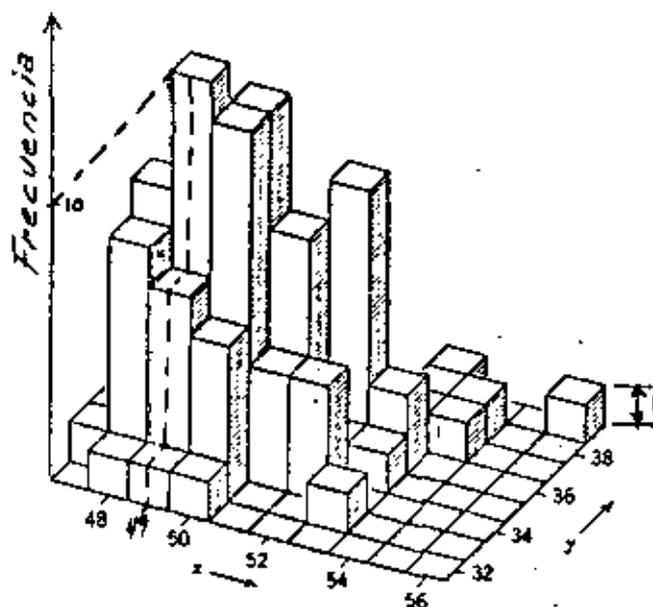
| Circunferencia de la cabeza $y$ (en cm) | Estatura $x$ (en cm) |    |    |    |    |    |    |    |    |    |
|---|----------------------|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
|   | 47                   | 48 | 49 | 50 | 51 | 52 | 53 | 54 | 55 | 56 |
| 39                                      |                      |    |    |    |    |    |    |    |    |    |
| 38                                      |                      |    |    |    |    |    |    |    |    |    |
| 37                                      |                      |    |    |    |    |    |    |    |    |    |
| 36                                      |                      |    |    |    |    |    |    |    |    |    |
| 35                                      |                      |    |    |    |    |    |    |    |    |    |
| 34                                      |                      |    |    |    |    |    |    |    |    |    |
| 33                                      |                      |    |    |    |    |    |    |    |    |    |
| 32                                      |                      |    |    |    |    |    |    |    |    |    |

## CONJUNTA

TABLA 3. DISTRIBUCIÓN DE FRECUENCIAS DE LA MUESTRA DE LA TABLA 11

| Circunferencia de la cabeza y (en cm) | Estatura x (en cm) |    |    |    |    |    |    |    |    |    |
|---------------------------------------|--------------------|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
|                                       | 47                 | 48 | 49 | 50 | 51 | 52 | 53 | 54 | 55 | 56 |
| 39                                    |                    |    |    |    |    |    | 1  |    |    | 1  |
| 38                                    |                    |    |    |    |    |    | 1  | 1  |    |    |
| 37                                    |                    |    |    |    | 1  | 1  | 1  | 1  |    |    |
| 36                                    |                    |    |    | 1  | 4  | 7  | 2  |    |    |    |
| 35                                    | 3                  |    | 5  | 9  | 6  | 1  | 1  |    |    |    |
| 34                                    | 1                  | 7  | 10 | 9  | 3  | 3  |    |    |    |    |
| 33                                    | 1                  | 6  | 5  | 4  |    |    | 1  |    |    |    |
| 32                                    |                    | 1  | 1  | 1  |    |    |    |    |    |    |

HISTOGRAMA CORRESPONDIENTE A LA TABLA 1



METODO DE MINIMOS CUADRADOS

EL METODO DE MINIMOS CUADRADOS TIENE COMO CRITERIO EL QUE LA SUMA DE LOS CUADRADOS DE LAS DESVIACIONES DE LAS ORDENADAS,  $y_i$ , RESPECTO A LA RECTA DE REGRESION,  $\tilde{y}_i$ , SEA MINIMA, ES DECIR, SE TIENE UN METODO DE OPTIMIZACION EN EL QUE SE PRETENDE QUE

$$D = \sum_{i=1}^n (y_i - \tilde{y}_i)^2 \text{ SEA MINIMO}$$

$$D = \sum_{i=1}^n [y_i - (b + mx_i)]^2$$

$$\frac{\partial D}{\partial b} = 2 \sum_{i=1}^n (y_i - b - mx_i)(-1) = 0$$

$$\frac{\partial D}{\partial m} = 2 \sum_{i=1}^n (y_i - b - mx_i)(-x_i) = 0$$

CON ESTO SE TIENE UN SISTEMA DE ECUACIONES LINEALES CON DOS INCOGNITAS, b Y m, QUE CONDUCE A

$$m = \frac{n \sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2} = \frac{\frac{1}{n} \sum x_i y_i - \bar{x} \bar{y}}{S^2(x)} = \frac{\frac{1}{n} \sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{S^2(x)}$$

$$b = \frac{\sum x_i^2 \sum y_i - \sum x_i \sum x_i y_i}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2} = \bar{y} - m \bar{x}$$

ESTA ULTIMA ECUACION INDICA QUE LA RECTA PASA POR EL PUNTO  $(\bar{x}, \bar{y})$ .

SI LAS PAREJAS DE DATOS ESTAN AGRUPADAS EN K CELDAS Y LA FRECUENCIA DE LA CELDA i ES  $f_{ixy}$ , Y  $x_j$  Y  $y_j$  SON SUS MARCAS DE CLASES, ENTONCES,

$$m = \frac{\frac{1}{n} \sum_{j=1}^k f_{jxy} x_j y_j - \bar{x} \bar{y}}{S^2(x)} = \frac{\frac{1}{n} \sum_{j=1}^k f_{jxy} (x_j - \bar{x})(y_j - \bar{y})}{S^2(x)}$$

METODO CORTO PARA CALCULAR LA RECTA DE REGRESION

A MENUDO SE PRESENTAN PROBLEMAS DE REGRESION LINEAL EN LOS QUE SE MANEJAN GRANDES CANTIDADES DE DATOS Y, ADEMAS, SUS VALORES SON DE VARIAS CIFRAS. PARA REDUCIR LA LABOR NUMERICA SE RECURRE A AGRU-  
PAR LOS DATOS Y A TRANSFORMAR LAS VARIABLES DE LA MANERA SIGUIENTE:

$$x' = \frac{x - C_1}{C_2} \quad y' = \frac{y - C_3}{C_4} ; C_2 > 0, C_4 > 0$$

DE DONDE  $x = C_2 x' + C_1$        $y = C_4 y' + C_3$

EN TAL CASO, EL PRIMER TERMINO DEL NUMERADOR DE LA FORMULA PARA CALCULAR  $m$  SE TRANSFORMA A:

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^K f_{jxy} x_j y_j &= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^K f_{jxy} (C_2 x'_j + C_1) (C_4 y'_j + C_3) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^K f_{jxy} (C_2 C_4 x'_j y'_j + C_2 C_3 x'_j + C_1 C_4 y'_j + C_1 C_3) \\ &= C_2 C_4 \frac{1}{n} \sum_{j=1}^K f_{jxy} x'_j y'_j + C_2 C_3 \frac{1}{n} \sum_{j=1}^K f_{jxy} x'_j + C_1 C_4 \frac{1}{n} \sum_{j=1}^K f_{jxy} y'_j + C_1 C_3 \frac{1}{n} \sum_{j=1}^K f_{jxy} \\ &= C_2 C_4 \frac{1}{n} \sum_{j=1}^K f_{jxy} x'_j y'_j + C_2 C_3 \bar{x}' + C_1 C_4 \bar{y}' + C_1 C_3 \end{aligned}$$

EL SEGUNDO TERMINO DE LA MISMA FORMULA QUEDA:

$$\begin{aligned} \bar{x} \bar{y} &= (C_2 \bar{x}' + C_1) (C_4 \bar{y}' + C_3) = C_2 C_4 \bar{x}' \bar{y}' + C_2 C_3 \bar{x}' + \\ &\quad C_1 C_4 \bar{y}' + C_1 C_3 \end{aligned}$$

ADEMAS, TOMANDO EN CUENTA QUE

$$s^2(x) = c_2^2 s^2(x')$$

LA FORMULA PARA CALCULAR LA PENDIENTE CAMBIA A

$$r = \frac{c_4 c_2 \sum_{j=1}^K \frac{1}{n} f_{x_j y_j} - c_2 c_4 \bar{x}' \bar{y}'}{c_2^2 s^2(x')} = \frac{c_4 \left(\frac{1}{n}\right) \sum_{j=1}^K f_{jxy} x'_j y'_j - \bar{x}' \bar{y}'}{c_2^2 s^2(x')}$$

EN ESTAS TRANSFORMACIONES  $c_1$  Y  $c_3$  DEBEN SER IGUALES A ALGUNA DE LAS MARCAS DE CLASE CENTRALES DE  $x$  Y  $y$ , RESPECTIVAMENTE, Y  $c_2$  Y  $c_4$  DEBEN SER IGUALES A LOS ANCHOS DE LOS INTERVALOS DE LOS DATOS DE  $x$  Y DE  $y$ , RESPECTIVAMENTE.

EJEMPLO

CALCULAR LA RECTA DE REGRESION DE LOS DATOS ANOTADOS EN LA SIGUIENTE TABLA, MEDIANTE EL METODO DE MINIMOS CUADRADOS.

| x             | y         | xy         | x <sup>2</sup> |
|---------------|-----------|------------|----------------|
| 8             | 7         | 56         | 64             |
| 6             | 12        | 72         | 36             |
| 4             | 2         | 8          | 16             |
| 6             | 6         | 36         | 36             |
| 13            | 7         | 91         | 169            |
| 10            | 3         | 30         | 100            |
| 1             | 6         | 6          | 1              |
| 7             | 2         | 14         | 49             |
| 3             | 9         | 27         | 9              |
| <u>12</u>     | <u>11</u> | <u>132</u> | <u>144</u>     |
| $\Sigma = 70$ | 65        | 472        | 624            |

$$\bar{x} = 70/10=7, \bar{y} = 65/10=6.5, \bar{x^2} = 624/10=62.4$$

$$S^2(x) = 62.4 - 7^2 = 13.4$$

$$m = \frac{\frac{1}{10} 472 - 7 \times 6.5}{13.4} = 0.13$$

$$b = 6.5 - 0.13 \times 7 = 5.59$$

$$\hat{y} = 0.13 x + 5.59$$

EJEMPLO

OBTENER LA RECTA DE REGRESION DE LAS CARGAS EN LOS PISOS 1 Y 9  
DE UN EDIFICIO

| ZONA | CARGAS EN TON/M <sup>2</sup> |             |
|------|------------------------------|-------------|
|      | PISO 1<br>X                  | PISO 9<br>Y |
| A    | 38                           | 355         |
| B    | 354                          | 370         |
| C    | 207                          | 307         |
| D    | 273                          | 270         |
| E    | 127                          | 182         |
| F    | 324                          | 962         |
| G    | 358                          | 222         |
| H    | 519                          | 405         |
| I    | 147                          | 315         |
| J    | 181                          | 420         |
| K    | 118                          | 484         |
| L    | 114                          | 287         |
| M    | 243                          | 228         |
| N    | 522                          | 470         |
| O    | 236                          | 194         |
| P    | 269                          | 260         |
| Q    | 268                          | 679         |
| R    | 321                          | 366         |
| S    | 305                          | 358         |
| T    | 335                          | 317         |
| U    | 577                          | 368         |
| V    | 271                          | 284         |

RANGO DE X: 577-38

RANGO DE Y: 962-182

TABLA 4. DISTRIBUCION CONJUNTA DE FRECUENCIAS DE LAS CARGAS EN LOS PISOS 1 Y 9.

| Y \ X      | 0.5   | 100.5 | 200.5    | 300.5    | 400.5  | 500.5 | 600.5 | 700.5 | 800.5 | 900.5  |
|------------|-------|-------|----------|----------|--------|-------|-------|-------|-------|--------|
|            | a     | a     | a        | a        | a      | a     | a     | a     | a     | a      |
| X          | 100.5 | 200.5 | 300.5    | 400.5    | 500.5  | 600.5 | 700.5 | 800.5 | 900.5 | 1000.5 |
| 0.5<br>a   |       |       |          |          |        |       |       |       |       |        |
| 100.5<br>a |       |       |          | X (1)    |        |       |       |       |       |        |
| 100.5<br>a |       |       |          |          |        |       |       |       |       |        |
| 200.5<br>a |       | X (1) | X (1)    | X (1)    | XX (2) |       |       |       |       |        |
| 200.5<br>a |       |       |          |          |        |       |       |       |       |        |
| 300.5<br>a |       | X (1) | XXXX (4) | X (1)    |        |       | X (1) |       |       |        |
| 300.5<br>a |       |       |          |          |        |       |       |       |       |        |
| 400.5<br>a |       |       | X (1)    | XXXX (4) |        |       |       |       |       | X (1)  |
| 400.5<br>a |       |       |          |          |        |       |       |       |       |        |
| 500.5<br>a |       |       |          |          |        |       |       |       |       |        |
| 500.5<br>a |       |       |          |          |        |       |       |       |       |        |
| 600.5<br>a |       |       |          | X (1)    | XX (2) |       |       |       |       |        |

CALCULO DE  $\bar{x}$  y  $S(x)$ 

| INTERVALOS  | MARCAS DE CLASE | f           | xf                | $x^2$      | $x^2 f$               |
|-------------|-----------------|-------------|-------------------|------------|-----------------------|
| 0.5 -100.5  | 50.5            | 1           | 50.5              | 2,550.25   | 2,550.25              |
| 100.5-200.5 | 150.5           | 5           | 752.50            | 22,650.25  | 113,251.25            |
| 200.5-300.5 | 250.5           | 7           | 1,753.50          | 62,750.25  | 439,251.25            |
| 300.5-400.5 | 350.5           | 6           | 2,103.00          | 122,850.25 | 737,101.50            |
| 400.5-500.5 | 450.5           | 0           | 0.00              | 164,430.25 | 0.00                  |
| 500.5-600.5 | 550.5           | 3           | 1,651.50          | 303,050.25 | 909,150.75            |
|             |                 | $\Sigma=22$ | $\Sigma=6,311.00$ |            | $\Sigma=2,201,304.50$ |

$$\bar{x} = \frac{6,311.00}{22} = 286.86, \quad \bar{x}^2 = 82,288.66$$

$$\overline{x^2} = \frac{2,201,304.50}{22} = 100,059.30$$

$$S^2(x) = 100,059.30 - 82,288.66 = 17,770.64$$

$$S(x) = \sqrt{17,770.64} = 133.31$$

CALCULO DE  $\bar{y}$  Y  $S(y)$ .

| INTERVALOS   | MARCAS DE CLASE, $y$ | $f$         | $yf$              | $y^2$      | $y^2 f$               |
|--------------|----------------------|-------------|-------------------|------------|-----------------------|
| 100.5-200.5  | 150.5                | 2           | 301.00            | 22,650.25  | 45,300.50             |
| 200.5-300.5  | 250.5                | 6           | 1,503.00          | 62,750.25  | 376,501.50            |
| 300.5-400.5  | 350.5                | 8           | 2,804.00          | 122,850.25 | 982,802.00            |
| 400.5-500.5  | 450.5                | 4           | 1,802.00          | 202,950.25 | 811,801.00            |
| 500.5-600.5  | 550.5                | 0           | 0.00              | 303,050.25 | 0.00                  |
| 600.5-700.5  | 650.5                | 1           | 650.50            | 423,150.25 | 423,150.25            |
| 700.5-800.5  | 750.5                | 0           | 0.00              | 563,250.25 | 0.00                  |
| 800.5-900.5  | 850.5                | 0           | 0.00              | 723,350.25 | 0.00                  |
| 900.5-1000.5 | 950.5                | 1           | 950.50            | 903,450.25 | 903,450.25            |
|              |                      | $\Sigma=22$ | $\Sigma=8,011.00$ |            | $\Sigma=3,543,005.50$ |

$$\bar{y} = \frac{8,011.00}{22} = 364.14, \quad \bar{y}^2 = 132,597.94$$

$$\overline{y^2} = \frac{3,543,005.50}{22} = 161,045.70$$

$$S^2(y) = 161,045.70 - 132,597.94 = 28,447.76$$

$$S(y) = \sqrt{28,447.76} = 168.66$$

TAREA: CALCULAR  $\bar{x}$ ,  $S^2(x)$ ,  $\bar{y}$  Y  $S^2(y)$  DE LOS DATOS AGRUPADOS ANTERIORES, MEDIANTE TRANSFORMACIONES APROPIADAS DE VARIABLES.

| MARCAS DE CLASE |       | FRECUENCIAS   |            |                         |
|-----------------|-------|---------------|------------|-------------------------|
| x               | y     | $f_{xy}$      | xy         | $f_{xy}xy$              |
| 50.5            | 350.5 | 1             | 17,700.25  | 17,700.25               |
| 150.5           | 150.5 | 1             | 22,650.25  | 22,650.25               |
| 150.5           | 250.5 | 1             | 37,700.25  | 37,700.25               |
| 150.5           | 350.5 | 1             | 52,750.25  | 52,750.25               |
| 150.5           | 450.5 | 2             | 67,800.25  | 135,600.50              |
| 250.5           | 150.5 | 1             | 37,700.25  | 37,700.25               |
| 250.5           | 250.5 | 4             | 62,750.25  | 251,001.00              |
| 250.5           | 350.5 | 1             | 87,800.25  | 87,800.25               |
| 250.5           | 650.5 | 1             | 162,950.25 | 162,950.25              |
| 350.5           | 250.5 | 1             | 87,800.25  | 87,800.25               |
| 350.5           | 350.5 | 4             | 122,850.25 | 491,401.00              |
| 350.5           | 950.5 | 1             | 333,150.25 | 333,150.25              |
| 550.5           | 350.5 | 1             | 192,950.25 | 192,950.25              |
| 550.5           | 450.5 | 2             | 248,000.25 | 496,000.50              |
|                 |       | $\Sigma = 22$ |            | $\Sigma = 2,407,155.50$ |

PUESTO QUE  $\bar{x} = 286.86$ ,  $\bar{y} = 364.14$  Y  $S^2(x) = 17,770.64$ .

SE OBTIENE FINALMENTE QUE

$$m = \frac{2,407,155.50}{22} - (286.86)(364.14) = 0.28$$

$$b = \bar{y} - m\bar{x} = 364.14 - 0.28 \times 286.86 = 283.82$$

$$\tilde{Y} = 0.28x + 283.82$$

EJEMPLO

RESOLVER EL PROBLEMA ANTERIOR MEDIANTE EL METODO CORTO.

PARA APLICAR EL METODO CORTO SE EMPLEA UNA TABULACION COMO LA SIGUIENTE:

| $X \backslash Y$     |  |  |  | $f_y$ | $y'$ | $f_y y'$ | $y'^2$ | $f_y y'^2$ | $\sum f_{jxy} x' y'$ |
|----------------------|--|--|--|-------|------|----------|--------|------------|----------------------|
|                      |  |  |  |       |      |          |        |            |                      |
|                      |  |  |  |       |      |          |        |            |                      |
|                      |  |  |  |       |      |          |        |            |                      |
|                      |  |  |  |       |      |          |        |            |                      |
|                      |  |  |  |       |      |          |        |            |                      |
|                      |  |  |  |       |      |          |        |            |                      |
|                      |  |  |  |       |      |          |        |            |                      |
|                      |  |  |  |       |      |          |        |            |                      |
|                      |  |  |  |       |      |          |        |            |                      |
| $f_x$                |  |  |  |       |      |          |        |            |                      |
| $x'$                 |  |  |  |       |      |          |        |            |                      |
| $f_x x'$             |  |  |  |       |      |          |        |            |                      |
| $x'^2$               |  |  |  |       |      |          |        |            |                      |
| $f_x x'^2$           |  |  |  |       |      |          |        |            |                      |
| $\sum f_{jxy} x' y'$ |  |  |  |       |      |          |        |            |                      |

|         |           |                 |           |
|---------|-----------|-----------------|-----------|
| $x' y'$ | $f_{jxy}$ | $f_{jxy} x' y'$ | ← CELDA j |
|---------|-----------|-----------------|-----------|

PARA LA TRANSFORMACION DE VARIABLES

$$x' = \frac{X - C_1}{C_2} \quad Y \quad y' = \frac{Y - C_3}{C_4}$$

TOMAREMOS  $C_1 = 250.5$ ,  $C_2 = 100$ ,  $C_3 = 350.5$  Y  $C_4 = 100$ .

| Y \ X                  | 0.5-100.5<br>50.5    |   |   | 100.5-200.5<br>150.5 |   |    | 200.5-300.5<br>250.5 |   |   | 300.5-400.5<br>350.5 |   |    | 500.5-600.5<br>550.5 |   |    | $f_Y$ | $y'$ | $f_Y y'$ | $y'^2$ | $f_Y y'^2$ | $\Sigma f_{jxy} x' y'$ |
|------------------------|----------------------|---|---|----------------------|---|----|----------------------|---|---|----------------------|---|----|----------------------|---|----|-------|------|----------|--------|------------|------------------------|
|                        | 100.5-200.5<br>150.5 |   |   |                      | 2 | 1  | 2                    | 0 | 1 | 0                    |   |    |                      |   |    |       | 2    | -2       | -4     | 4          | 8                      |
| 200.5-300.5<br>250.5   |                      |   |   | 1                    | 1 | 1  | 0                    | 4 | 0 | -1                   | 1 | -1 |                      |   |    | 6     | -1   | -6       | 1      | 6          | 0                      |
| 300.5-400.5<br>350.5   | 0                    | 1 | 0 | 0                    | 1 | 0  | 0                    | 1 | 0 | 0                    | 4 | 0  | 0                    | 1 | 0  | 8     | 0    | 0        | 0      | 0          | 0                      |
| 400.5-500.5<br>450.5   |                      |   |   | -1                   | 2 | -2 |                      |   |   |                      |   |    | 3                    | 2 | 6  | 4     | 1    | 4        | 1      | 4          | 4                      |
| 600.5-700.5<br>650.5   |                      |   |   |                      |   |    | 0                    | 1 | 0 |                      |   |    |                      |   |    | 1     | 3    | 3        | 9      | 9          | 0                      |
| 900.5-1000.5<br>950.5  |                      |   |   |                      |   |    |                      |   |   | 6                    | 1 | 6  |                      |   |    | 1     | 6    | 6        | 36     | 36         | 6                      |
| $f_X$                  | 1                    |   |   | 5                    |   |    | 7                    |   |   | 6                    |   |    | 3                    |   |    | 22    |      | 3        |        | 63         | 12                     |
| $x'$                   | -2                   |   |   | -1                   |   |    | 0                    |   |   | 1                    |   |    | 3                    |   |    |       |      |          |        |            |                        |
| $f_X x'$               | -2                   |   |   | -5                   |   |    | 0                    |   |   | 6                    |   |    | 9                    |   |    | 8     |      |          |        |            |                        |
| $x'^2$                 | 4                    |   |   | 1                    |   |    | 0                    |   |   | 1                    |   |    | 9                    |   |    |       |      |          |        |            |                        |
| $f_X x'^2$             | 4                    |   |   | 5                    |   |    | 0                    |   |   | 6                    |   |    | 27                   |   |    | 42    |      |          |        |            |                        |
| $\Sigma f_{jxy} x' y'$ |                      | 0 |   |                      | 1 |    |                      | 0 |   |                      | 5 |    |                      | 6 | 12 |       |      |          |        |            |                        |

$$\bar{x}' = \frac{8}{22} = 0.3636; \bar{y}' = \frac{3}{22} = 0.1364; \overline{x'^2} = \frac{42}{22} = 1.9091, \overline{y'^2} = \frac{63}{22} = 2.8636$$

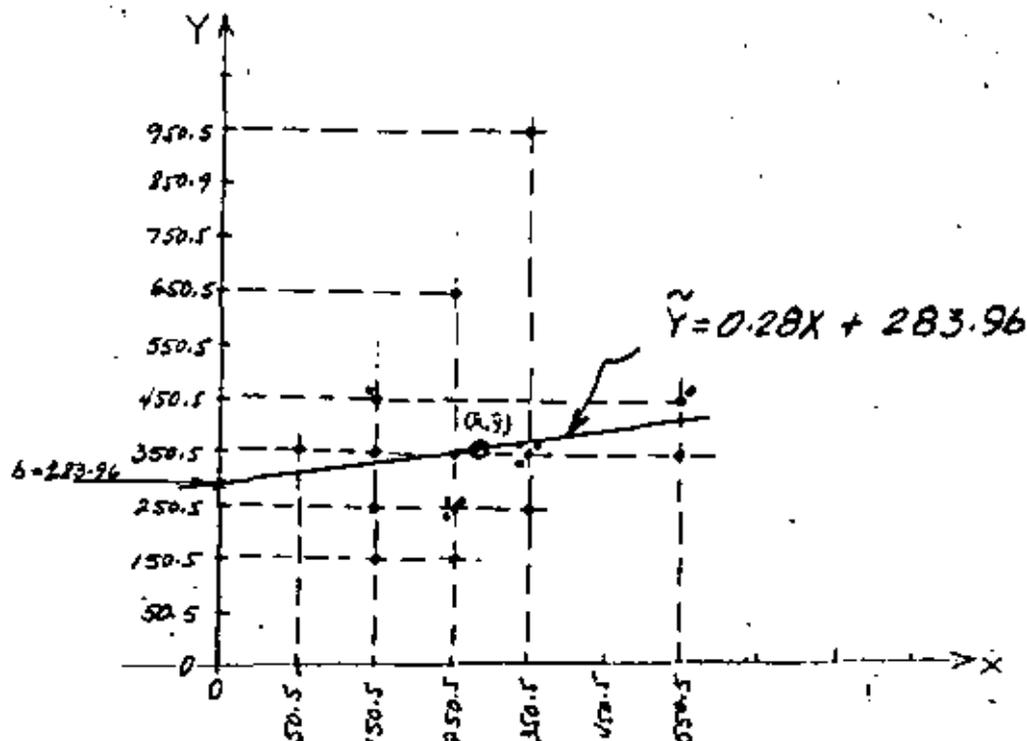
$$s^2(x') = 1.9091 - (0.3636)^2 = 1.7769; s^2(y') = 2.8636 - (0.1364)^2 = 2.8450$$

$$\bar{x} = C_2 \bar{x}' + C_1 = 36.36 + 250.5 = 286.86$$

$$\bar{y} = C_4 \bar{y}' + C_3 = 13.64 + 350.5 = 364.14$$

$$m = \frac{100}{100} \frac{\frac{1}{22} 12 - (0.3636)(0.1364)}{1.7769} = \frac{0.4959}{1.7769} = 0.28$$

$$b = \bar{y} - m\bar{x} = 364.14 - 0.28 \times 286.36 = 283.96$$



**TAREA:** CALCULAR LA RECTA DE REGRESION, Y TRAZAR LA GRAFICA CORRESPONDIENTE, DE LOS DATOS AGRUPADOS DE LA TABLA 3.

VARIANCIA Y ERROR ESTANDAR DE LA ESTIMACION MEDIANTE LE RECTA DE REGRESION

COMO YA SE INDICO, EL TERMINO  $y_i - \tilde{y}_i$  REPRESENTA LA DIFERENCIA ENTRE EL VALOR OBSERVADO DE LA VARIABLE Y Y EL VALOR PREDICHO (LA ORDENADA DE LA RECTA DE REGRESION) CORRESPONDIENTE A  $x_i$ . DICHO TERMINO SE LLAMA ERROR DE PREDICCION O DE ESTIMACION. POR EJEMPLO, SI PARA  $x_3=50$  SE OBSERVA QUE  $y_3=65$ , Y LA ECUACION DE LA RECTA DE REGRESION ES  $\tilde{y}=0.70 x + 21.9$ , EL VALOR PREDICHO RESULTA  $\tilde{y}_3 = 0.70 \cdot x + 21.9 = 56.9$ , Y EL ERROR DE PREDICCION CORRESPONDIENTE ES  $65 - 56.9 = 8.1$ .

LA VARIANCIA DE LA PREDICCION O DE LA ESTIMACION,  $S_{y|x}^2$ , QUE ES UNA ESTIMACION GLOBAL DEL ERROR DE PREDICCION PARA TODOS LOS PUNTOS OBSERVADOS, SE DEFINE MEDIANTE LA FORMULA

$$S_{y|x}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{i=N} (y_i - \tilde{y}_i)^2}{N} \quad (1)$$

EN DONDE N ES EL TOTAL DE DATOS DE Y. ADEMAS, SE PUEDE DEMOSTRAR QUE  $S_{y|x}^2$  SE RELACIONA CON LA PENDIENTE DE LA RECTA DE REGRESION MEDIANTE LA ECUACION

$$S_{y|x}^2 = S_y^2 - m^2 S_x^2$$

PUESTO QUE LA ECUACION  $y = mx + b$  SE OBTIENE MEDIANTE EL METODO DE MINIMOS CUADRADOS, EN EL CUAL  $\sum_{i=1}^{i=N} (y_i - \tilde{y}_i)^2$ , TIENE EL MINIMO VALOR POSIBLE, Y COMO LA VARIANCIA DE LA PREDICCION SE CALCULA CON LA EC (1), LAS PREDICCIONES BASADAS EN LA RECTA DE MINIMOS CUADRADOS SON TALES QUE LA VARIANCIA DE LA PREDICCION ES MINIMA.

IGUAL QUE LA DESVIACION ESTANDAR DE UNA MUESTRA SE DEFINE COMO LA RAIZ CUADRADA DE LA VARIANCIA, EL ERROR ESTANDAR DE LA ESTIMACION O DE LA PREDICION,  $s_{y|x}$ , SE DEFINE COMO LA RAIZ CUADRADA DE LA VARIANCIA DE LA ESTIMACION, ES DECIR

$$s_{y|x} = \sqrt{s_{y|x}^2}$$

YA SE DIJO QUE LA DIFERENCIA  $y_1 - \tilde{y}_1$  REPRESENTA LA DESVIACION DE UNA ORDENADA OBSERVADA RESPECTO A SU ORDENADA PREDICHA MEDIANTE LA RECTA DE REGRESION. EXISTE OTRO TIPO DE DESVIACION: LA DE LAS ORDENADAS PREDICHAS MEDIANTE LA RECTA DE REGRESION,  $\tilde{y}_1$ , RESPECTO AL PROMEDIO ARITMETICO,  $\bar{y}$ , DE LAS ORDENADAS OBSERVADAS,  $y_1$ . ESTA DESVIACION, INDICADA COMO  $\tilde{y}_1 - \bar{y}$ , SE LLAMA DESVIACION EXPLICADA, YA QUE DE LA ECUACION

$$\tilde{y}_1 = mx_1 + b = mx_1 + \bar{y} - m\bar{x} = \bar{y} + m(x_1 - \bar{x})$$

SE OBTIENE

$$\tilde{y}_1 - \bar{y} = m(x_1 - \bar{x})$$

LA CUAL INDICA QUE LAS DESVIACIONES DE  $\tilde{y}_1$  RESPECTO A  $\bar{y}$  SE EXPLICAN EXCLUSIVAMENTE POR (SON FUNCION DE) LA DESVIACION DE  $x_1$  RESPECTO A  $\bar{x}$ .

SI A LA DIFERENCIA  $y_1 - \bar{y}$  SE LE LLAMA DESVIACION TOTAL DE  $y_1$  CON RESPECTO AL PROMEDIO ARITMETICO,  $\bar{y}$ , LA ECUACION

$$y_1 - \bar{y} = (\tilde{y}_1 - \bar{y}) + (y_1 - \tilde{y}_1)$$

INDICA QUE LA DESVIACION TOTAL ES IGUAL A LA DESVIACION EXPLICADA MAS  $y_1 - \tilde{y}_1$ . LAS DESVIACIONES  $y_1 - \tilde{y}_1$  OCURREN AL AZAR, ES DECIR, EN FORMA INEXPLICABLE, DE AHI QUE SE LES CONOZCA CON EL NOMBRE DE

DESVIACIONES INEXPLICADAS (NO EXPLICADAS).

COMO CONSECUENCIA DE LA ECUACION ANTERIOR, SE PUEDE DEMOSTRAR QUE

$$\frac{\sum_{i=1}^{i=N} (y_i - \bar{y})^2}{N} = \frac{\sum_{i=1}^{i=N} (\tilde{y}_i - \bar{y})^2}{N} + \frac{\sum_{i=1}^{i=N} (y_i - \tilde{y}_i)^2}{N}$$

EL MIEMBRO IZQUIERDO DE ESTA ECUACION CORRESPONDE A LA VARIANCIA,  $s^2(y)$ , DE LOS DATOS DE  $y$ . EL SEGUNDO TERMINO DEL MIEMBRO DERECHO ES PRECISAMENTE LA VARIANCIA DE LA PREDICCION,  $s_{y|x}^2$ , CONOCIDA TAMBIEN COMO VARIANCIA INEXPLICADA. EL PRIMER TERMINO DEL MISMO MIEMBRO SE DENOMINA VARIANCIA EXPLICADA, Y SE REPRESENTA CON EL SIMBOLO  $s^2(\tilde{y})$ . EN CONSECUENCIA, SE PUEDE ESCRIBIR

$$s^2(y) = s^2(\tilde{y}) + s_{y|x}^2$$

MEDIDAS DE CORRELACION

CUANDO SE REALIZAN ESTUDIOS ESTADISTICOS EN QUE SE INVOLUCRAN DOS O MAS VARIABLES ES A MENUDO CONVENIENTE CONTAR CON UNA MEDIDA NUMERICA DEL GRADO DE ASOCIACION O RELACION QUE HAY ENTRE ELLAS.

UNA DE ESTAS MEDIDAS SE DENOMINA COVARIANCIA,  $S^2_{XY}$ , LA CUAL SE DEFINE COMO:

$$S^2_{XY} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i y_i - \bar{x} \bar{y}$$

EN DONDE

$(x_i, y_i)$  = PAREJAS DE DATOS

$\bar{x}$  = PROMEDIO DE LOS DATOS DE LA VARIABLE X

$\bar{y}$  = PROMEDIO DE LOS DATOS DE LA VARIABLE Y

N = TOTAL DE PAREJAS DE DATOS

OTRA MEDIDA DE CORRELACION, QUE RESULTA ADIMENSIONAL, ES EL COEFICIENTE DE CORRELACION,  $\rho_{XY}$ , QUE SE DEFINE COMO

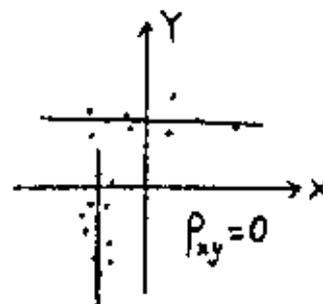
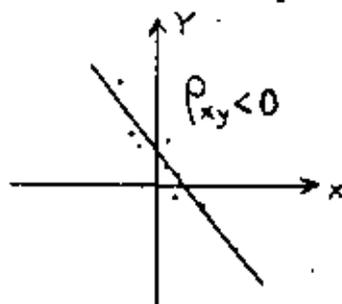
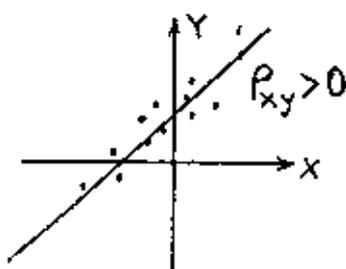
$$\rho_{xy} = \frac{S^2_{xy}}{S(x) S(y)}; \quad -1 \leq \rho_{xy} \leq 1$$

EN DONDE

$S^2_{XY}$  = COVARIANCIA ENTRE X y Y

$S(x)$  = DESVIACION ESTANDAR DE LOS DATOS DE X

$S(y)$  = DESVIACION ESTANDAR DE LOS DATOS DE Y



CASO DE CORRELACION PERFECTA

CUANDO SE PLANTEO EL METODO DE MINIMOS CUADRADOS PARA ESTIMAR LA RECTA DE REGRESION LINEAL ENTRE DOS VARIABLES, ESTE SE DESARROLLO SOBRE LA BASE DE HACER MINIMA LA SUMA DE LOS CUADRADOS DE LA DESVIACION VERTICAL DE CADA PUNTO RESPECTO A LA RECTA DE REGRESION, ESTO ES QUE

$$D = \sum_{i=1}^N (y_i - \tilde{y}_i)^2 = \text{MINIMO} \quad (1)$$

EN DONDE

$$\tilde{y}_i = mx_i + b = mx_i + \bar{y} - m\bar{x} = \bar{y} + m(x_i - \bar{x}) \quad (2)$$

SUSTITUYENDO A  $\tilde{y}_i$  EN LA EC (1) Y AGRUPANDO TERMINOS SE OBTIENE

$$D = \sum_{i=1}^N [(y_i - \bar{y}) - m(x_i - \bar{x})]^2 \quad (3)$$

OBSERVESE QUE D ES CERO SI, Y SOLO SI, CADA SUMANDO ES CERO, ES DECIR, SI

$$y_i - \bar{y} - m(x_i - \bar{x}) = 0 \quad \text{PARA TODO } i$$

PARA LO CUAL SE REQUIERE QUE TODOS LOS PUNTOS  $(x_i, y_i)$  QUEDEN SOBRE LA RECTA DE REGRESION, DADA POR LA EC (2), EN ESTE CASO SE DICE QUE LA REGRESION ES PERFECTA.

POR OTRA PARTE, DESARROLLANDO EL BINOMIO AL CUADRADO DE LA EC (3) OBTENEMOS

$$\begin{aligned} D &= \sum_{i=1}^N [(y_i - \bar{y})^2 - 2m(y_i - \bar{y})(x_i - \bar{x}) + m^2(x_i - \bar{x})^2] \\ &= NS^2(y) - 2mNS_{xy}^2 + NS^2(x)m^2 \end{aligned}$$

EN EL CASO DE QUE TODOS LOS PUNTOS DE LA MUESTRA QUEDEN SOBRE LA RECTA DE REGRESION SE TIENE QUE

$$D = NS^2(y) = 2m NS_{xy}^2 + m^2 NS^2(x) = 0 \quad (4)$$

POR OTRA PARTE, TOMANDO EN CUENTA QUE

$$m = \frac{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{S^2(x)} = \frac{S_{xy}^2}{S^2(x)} \quad (5)$$

LA EC (4) QUEDA EN LA FORMA

$$S^2(y) = 2(S_{xy}^2)^2 / S^2(x) + (S_{xy}^2)^2 / S^2(x) = 0$$

DE DONDE, EN EL CASO DE REGRESION PERFECTA,

$$(S_{xy}^2)^2 = S^2(x) S^2(y) \quad (6)$$

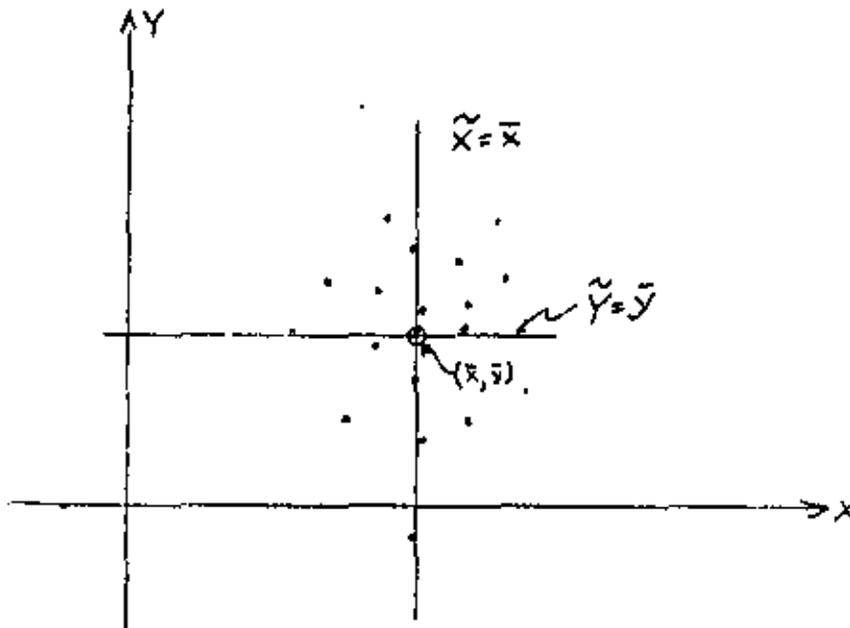
Y, SI  $S(x) > 0$  Y  $S(y) > 0$ ,

$$\rho_{xy}^2 = \frac{(S_{xy}^2)^2}{S^2(x)S^2(y)} = \frac{S^2(x)S^2(y)}{S^2(x)S^2(y)} = 1, \text{ O SEA, } \rho_{xy} = \pm 1$$

CUANDO ESTO SUCEDE, ES DECIR, SI  $\rho_{xy} = 1$  Ó  $\rho_{xy} = -1$ , SE TIENE EL CASO DE CORRELACION PERFECTA.

CASO DE CORRELACION NULA

LA CORRELACION ENTRE LOS DATOS DE DOS VARIABLES ALEATORIAS RESULTA NULA SI  $S_{xy} = 0$  (O  $\rho_{xy} = 0$ ) LO CUAL SUCEDE CUANDO  $m=0$  (VER EC (5)). EN TAL CASO, LA RECTA DE REGRESION DE Y CON BASE EN X TIENE COMO ECUACION A  $\tilde{y} = \bar{y}$ , Y LA DE X CON BASE EN Y, A  $\tilde{x} = \bar{x}$  ( $m=\infty$ ).



RELACION ENTRE EL COEFICIENTE DE CORRELACION Y LA PENDIENTE DE LA RECTA

DE REGRESION

TOMANDO EN CUENTA QUE

$$\rho_{xy} = \frac{S^2_{xy}}{S(x)S(y)}, S^2_{xy} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$$

Y HACIENDO SUSTITUCIONES EN LA ECUACION PARA CALCULAR LA PENDIENTE DE LA RECTA DE REGRESION SE OBTIENE

$$m = \frac{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{S^2(x)} = \frac{S^2_{xy}}{S^2(x)} = \frac{\rho_{xy} S(x)S(y)}{S^2(x)}$$

O SEA

$$m = \rho_{xy} \frac{S(y)}{S(x)} \quad (8)$$

DE ESTA MANERA, SI CALCULAMOS  $m$  MEDIANTE EL METODO CORTO DESCRITO ANTERIORMENTE, PODEMOS CALCULAR  $\rho_{xy}$  DESPEJANDOLA DE LA EC (8), ES DECIR, EMPLEANDO LA ECUACION

$$\rho_{xy} = m \frac{S(x)}{S(y)} \quad (9)$$

ALTERNATIVAMENTE, MEDIANTE EL METODO CORTO SE OBTIENE  $\rho_{xy}$  EN FORMA DIRECTA USANDO LA ECUACION

$$\rho_{xy} = \frac{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f_{ixy} x' y' - \bar{x}' \bar{y}'}{S(x') S(y')} \quad (10)$$

EN DONDE  $f_{ixy}$  ES LA FRECUENCIA DE LA CELDA  $i$ ,  $x'$  Y  $y'$  SON LAS MARCAS DE CLASE DE LOS INTERVALOS,  $\bar{x}'$  Y  $\bar{y}'$  SON LOS PROMEDIOS ARITMETICOS, Y  $S(x')$  Y  $S(y')$  LAS DESVIACIONES ESTANDAR DE LOS DATOS DE  $x'$  Y  $y'$  OBTENIDOS MEDIANTE LAS TRANSFORMACIONES

$$x' = \frac{x - C_1}{C_2} \quad \text{Y} \quad y' = \frac{y - C_3}{C_4}$$

EN DONDE

- $C_1$  = MARCA DE CLASE CENTRAL DE LAS  $x$
- $C_2$  = ANCHO DE LOS INTERVALOS DE CLASE DE LAS  $x$
- $C_3$  = MARCA DE CLASE CENTRAL DE LAS  $y$
- $C_4$  = ANCHO DE LOS INTERVALOS DE CLASE DE LAS  $y$

RANGO DEL COEFICIENTE DE CORRELACION

DE LA ECUACION CON QUE SE CALCULA LA VARIANCIA DE LA ESTIMACION

$$s_{y|x}^2 = s^2(y) (1 - \rho_{xy}^2) \quad (7)$$

SE CONCLUYE QUE  $\rho_{xy}^2 \leq 1$ , YA QUE  $s_{y|x}^2 \geq 0$ ; EN CONSECUENCIA

$$-1 \leq \rho_{xy} \leq 1 \quad (8)$$

EJEMPLO

DIEZ VIGAS DE MADERA NOMINALMENTE IDENTICAS SE PROBARON CON UNA CARGA CONCENTRADA EN EL CENTRO DEL CLARO; LOS RESULTADOS SON LOS ANOTADOS EN LA TABLA SIGUIENTE, CALCULAR EL COEFICIENTE DE CORRELACION, LA RECTA DE REGRESION Y LAS VARIANCIAS EXPLICADA E INEXPLICADA.

| CARGA DE FALLA<br>x, EN KG | DE FLEXION MA-<br>XIMA, y, EN CM | $x - \bar{x}$ | $y - \bar{y}$ | $(x - \bar{x})(y - \bar{y})$ | $(x - \bar{x})^2$  | $(y - \bar{y})^2$ |
|----------------------------|----------------------------------|---------------|---------------|------------------------------|--------------------|-------------------|
| 950                        | 0.33                             | 140           | 0.017         | 2.38                         | 19,600             | 0.000289          |
| 1050                       | 0.37                             | 240           | 0.057         | 13.68                        | 57,600             | 0.003249          |
| 750                        | 0.28                             | -60           | -0.033        | 1.98                         | 3,600              | 0.001089          |
| 900                        | 0.30                             | 90            | -0.013        | -1.17                        | 8,100              | 0.000169          |
| 700                        | 0.27                             | -110          | -0.043        | 4.73                         | 12,100             | 0.001849          |
| 650                        | 0.28                             | -160          | -0.033        | 5.28                         | 25,600             | 0.001089          |
| 950                        | 0.35                             | 140           | 0.037         | 5.18                         | 19,600             | 0.001369          |
| 850                        | 0.40                             | 40            | 0.087         | 3.48                         | 1,600              | 0.007569          |
| 600                        | 0.26                             | -210          | -0.053        | 11.13                        | 44,100             | 0.002809          |
| 700                        | 0.29                             | -110          | -0.023        | 2.53                         | 12,100             | 0.000529          |
| $\Sigma = 8100$            | $\Sigma = 3.13$                  | $\Sigma = 0$  | $\Sigma = 0$  | $\Sigma = 49.20$             | $\Sigma = 204,000$ | 0.020010          |

$$\bar{x} = \frac{8100}{10} = 810 \text{ KG}; \quad \bar{y} = \frac{3.13}{10} = 0.313 \text{ CM}; \quad S_{xy}^2 = \frac{49.20}{10} = 4.92$$

$$S^2(x) = \frac{204,000}{10} = 20,400; \quad S(x) = \sqrt{20,400} = 142.83$$

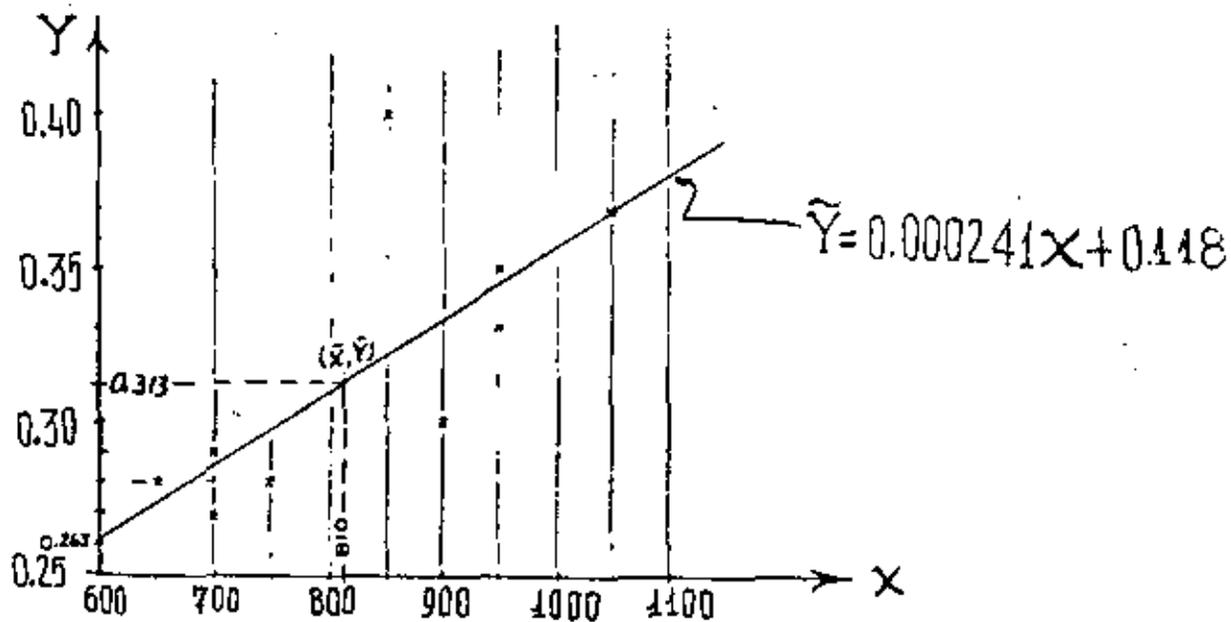
$$S^2(y) = \frac{0.020010}{10} = 0.002001; \quad S(y) = \sqrt{0.002001} = 0.0447$$

$$r_{xy} = \frac{4.92}{142.83 \times 0.0447} = 0.77$$

$$m = r_{xy} S(y)/S(x) = 0.77 \times 0.0447/142.83 = 0.000241 \text{ CM/KG}$$

$$b = 0.313 - 0.000241 \times 810 = 0.118 \text{ CM}$$

$$\tilde{y} = 0.000241 x + 0.118; \text{ SI } x = 600, \tilde{y} = 0.145 + 0.118 = 0.263$$



$$s_{y|x}^2 = s^2(y) (1 - \rho_{xy}^2) = 0.002001 (1 - 0.77)^2 = 0.000106$$

$$s_{y|x} = 0.0103$$

$$s^2(y) = s^2(\tilde{y}) + s_{y|x}^2 \rightarrow s^2(\tilde{y}) = 0.002001 - 0.000106 = 0.001895$$

$$s(\tilde{y}) = 0.0435$$

EL AGRIETAMIENTO QUE SE PREDICE, POR EJEMPLO, PARA UNA CARGA DE 1500Kg, SI EL COMPORTAMIENTO DE LA VIGA CONTINUA IGUAL, SERA

$$\tilde{y} = 0.000241 \times 1500 + 0.118 = 0.480 \text{ CM}$$

EJEMPLO

CALCULAR EL COEFICIENTE DE CORRELACION MEDIANTE EL METODO CORTO DE LOS DATOS LA SIGUIENTE TABLA. OBTENER TAMBIEN LA ECUACION DE LA RECTA DE REGRESION CORRESPONDIENTE.

| CALIFICACION,<br>X | TIEMPO, Y,<br>EN MIN. | CALIFICACION<br>X | TIEMPO, Y,<br>EN MIN. |
|--------------------|-----------------------|-------------------|-----------------------|
| 97                 | 77                    | 87                | 83                    |
| 97                 | 86                    | 87                | 58                    |
| 95                 | 60                    | 87                | 79                    |
| 95                 | 52                    | 86                | 60                    |
| 94                 | 62                    | 85                | 62                    |
| 94                 | 86                    | 83                | 72                    |
| 94                 | 80                    | 82                | 68                    |
| 93                 | 79                    | 82                | 66                    |
| 93                 | 92                    | 83                | 71                    |
| 93                 | 88                    | 81                | 70                    |
| 92                 | 74                    | 80                | 65                    |
| 92                 | 43                    | 80                | 84                    |
| 92                 | 61                    | 79                | 82                    |
| 92                 | 75                    | 79                | 93                    |
| 91                 | 79                    | 79                | 76                    |
| 90                 | 62                    | 78                | 71                    |
| 90                 | 81                    | 77                | 89                    |
| 90                 | 80                    | 77                | 71                    |
| 90                 | 76                    | 77                | 98                    |
| 90                 | 70                    | 76                | 92                    |
| 89                 | 67                    | 76                | 82                    |
| 88                 | 69                    | 74                | 98                    |
| 88                 | 81                    | 72                | 78                    |
| 88                 | 80                    | 79                | 93                    |
| 87                 | 91                    | 70                | 78                    |

## DISTRIBUCION CONJUNTA DE FRECUENCIAS:

| $\begin{matrix} X \\ Y \end{matrix}$ | 70-75 | 76-81 | 82-87 | 88-93 | 94-99 |
|--------------------------------------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 41-50                                |       |       |       | 1     |       |
| 51-60                                |       |       | 2     |       | 2     |
| 61-70                                |       | 2     | 3     | 5     | 1     |
| 71-80                                | 2     | 3     | 3     | 7     | 2     |
| 81-90                                |       | 4     | 1     | 3     | 2     |
| 91-100                               | 2     | 3     | 1     | 1     |       |

| y \ x                           | 72.5 | 78.5 | 84.5 | 90.5 | 96.5 | f <sub>y</sub> | y' | f <sub>y</sub> y' | y' <sup>2</sup> | f <sub>y</sub> y' <sup>2</sup> | Σf <sub>xy</sub> x'y' |   |   |    |    |    |    |    |    |    |     |
|---------------------------------|------|------|------|------|------|----------------|----|-------------------|-----------------|--------------------------------|-----------------------|---|---|----|----|----|----|----|----|----|-----|
| 45.5                            |      |      |      | -2   | 1    | -2             | 1  | -2                | 4               | 4                              | -2                    |   |   |    |    |    |    |    |    |    |     |
| 55.5                            |      |      | 0    | 2    | 0    | -2             | 2  | -4                | 1               | 4                              | -4                    |   |   |    |    |    |    |    |    |    |     |
| 65.5                            |      | 0    | 2    | 0    | 0    | 3              | 0  | 0                 | 0               | 0                              | 0                     |   |   |    |    |    |    |    |    |    |     |
| 75.5                            | -2   | 2    | -4   | -1   | 3    | -3             | 0  | 3                 | 0               | 1                              | 7                     | 2 | 2 | 4  | 17 | 1  | 17 | 1  | 17 | 4  |     |
| 85.5                            |      | -2   | 4    | -8   | 0    | 1              | 0  | 2                 | 3               | 6                              | 4                     | 2 | 8 | 10 | 2  | 20 | 4  | 40 | 4  | 40 | 6   |
| 95.5                            | -6   | 2    | -12  | -3   | 3    | -9             | 0  | 1                 | 0               | 3                              | 1                     | 3 | 7 | 3  | 21 | 9  | 63 | 9  | 63 | 9  | -18 |
| Σf <sub>x</sub>                 | 4    | 12   | 10   | 17   | 7    | 50             |    | 52                |                 | 128                            | -14                   |   |   |    |    |    |    |    |    |    |     |
| x'                              | -2   | -1   | 0    | 1    | 2    |                |    |                   |                 |                                |                       |   |   |    |    |    |    |    |    |    |     |
| Σf <sub>x</sub> x'              | -8   | -12  | 0    | 17   | 14   | 11             |    |                   |                 |                                |                       |   |   |    |    |    |    |    |    |    |     |
| x' <sup>2</sup>                 | 4    | 1    | 0    | 1    | 4    |                |    |                   |                 |                                |                       |   |   |    |    |    |    |    |    |    |     |
| Σf <sub>x</sub> x' <sup>2</sup> | 16   | 12   | 0    | 17   | 28   | 73             |    |                   |                 |                                |                       |   |   |    |    |    |    |    |    |    |     |
| Σf <sub>xy</sub> x'y'           | -16  | -20  | 0    | 14   | 8    | -14            |    |                   |                 |                                |                       |   |   |    |    |    |    |    |    |    |     |

$$C_1 = 84.5; C_2 = 6; C_3 = 65.5; C_4 = 10$$

$$\bar{x}' = 11/50 = 0.22; \bar{y}' = 52/50 = 1.04$$

$$\bar{x} = 6 \times 0.22 + 84.5 = 85.82;$$

$$\bar{y} = 10 \times 1.04 + 65.5 = 75.9$$

$$S^2(x') = 73/50 - (0.22)^2 = 1.42; S(x') = \sqrt{1.42} = 1.19$$

$$S^2(y') = 128/50 - (1.04)^2 = 1.49; S(y') = \sqrt{1.49} = 1.22$$

$$S(x) = 1.19 \times 6 = 7.14; S(y) = 1.22 \times 10 = 12.2$$

$$\rho_{xy} = \frac{-14/50 - 0.22 \times 1.04}{1.19 \times 1.22} = -0.35$$

$$m = -0.35 \times 12.2 / 7.14 = -0.60$$

$$b = 75.9 - (-0.60) \times 85.82 = 127.39$$

TAREA: TRAZAR EL DIAGRAMA DE CORRELACION Y LA RECTA DE REGRESION CORRESPONDIENTE, Y CALCULAR EL ERROR ESTANDAR DE LA ESTIMACION.

SERIES CRONOLÓGICAS O

SERIES DE TIEMPO

Se le denomina serie cronológica o de tiempo a toda serie de observaciones (datos) tomados en tiempos específicos, que en general están igualmente espaciados (cada hora, cada semana, cada mes, cada año, etc.)

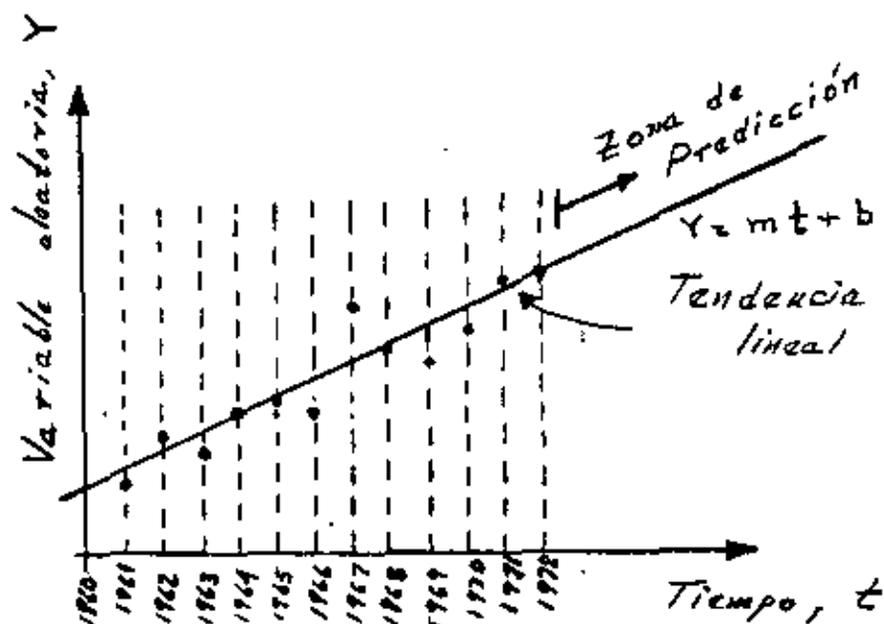
Componentes de  
una serie cro-  
nológica

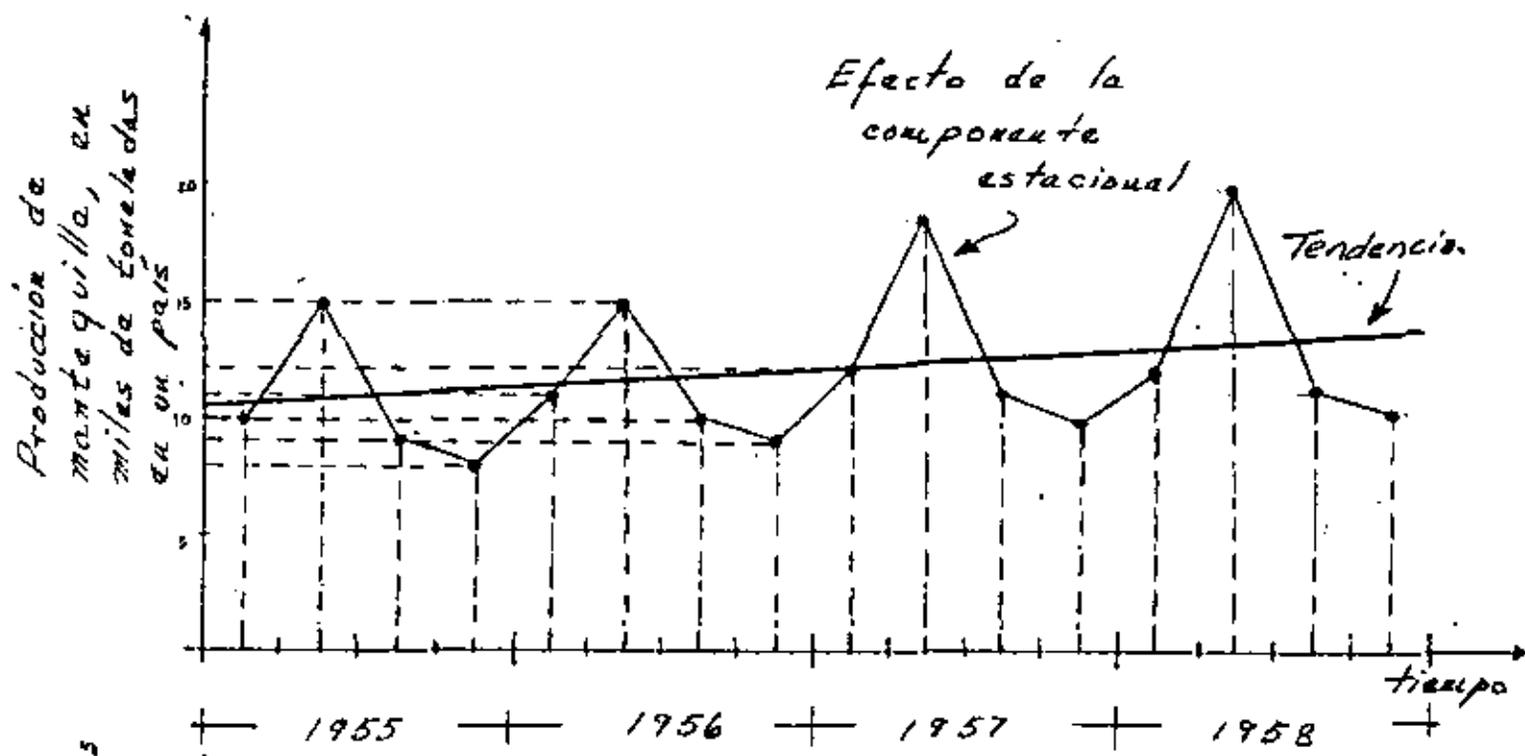
Tendencia general.- Indica hacia dónde tiende la serie cronológica

Componente estacional.- Indica las variaciones periódicas que ocurren a corto plazo (en periodos menores de un año)

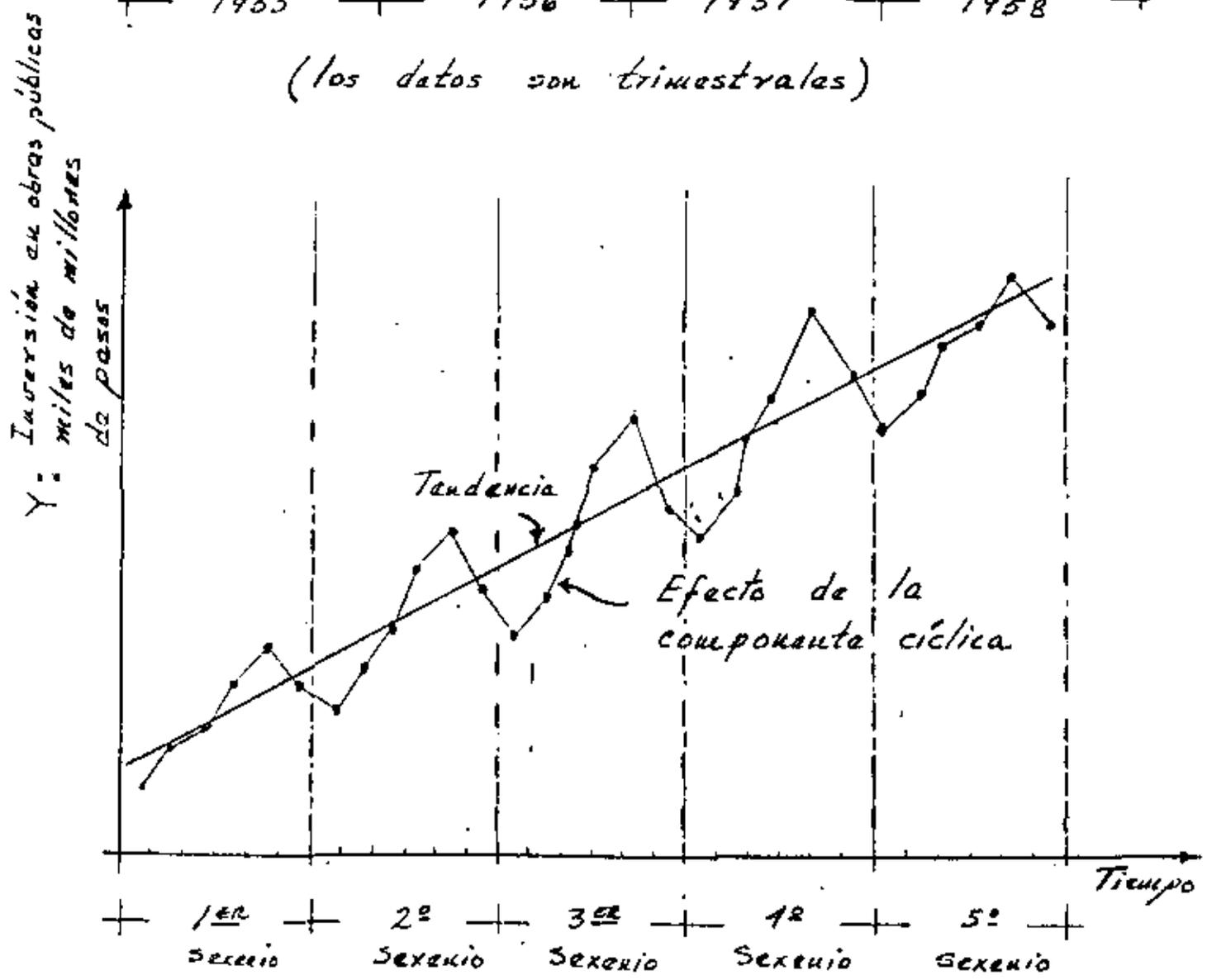
Componente cíclica.- Indica las variaciones periódicas que ocurren a largo plazo (en periodos mayores de un año)

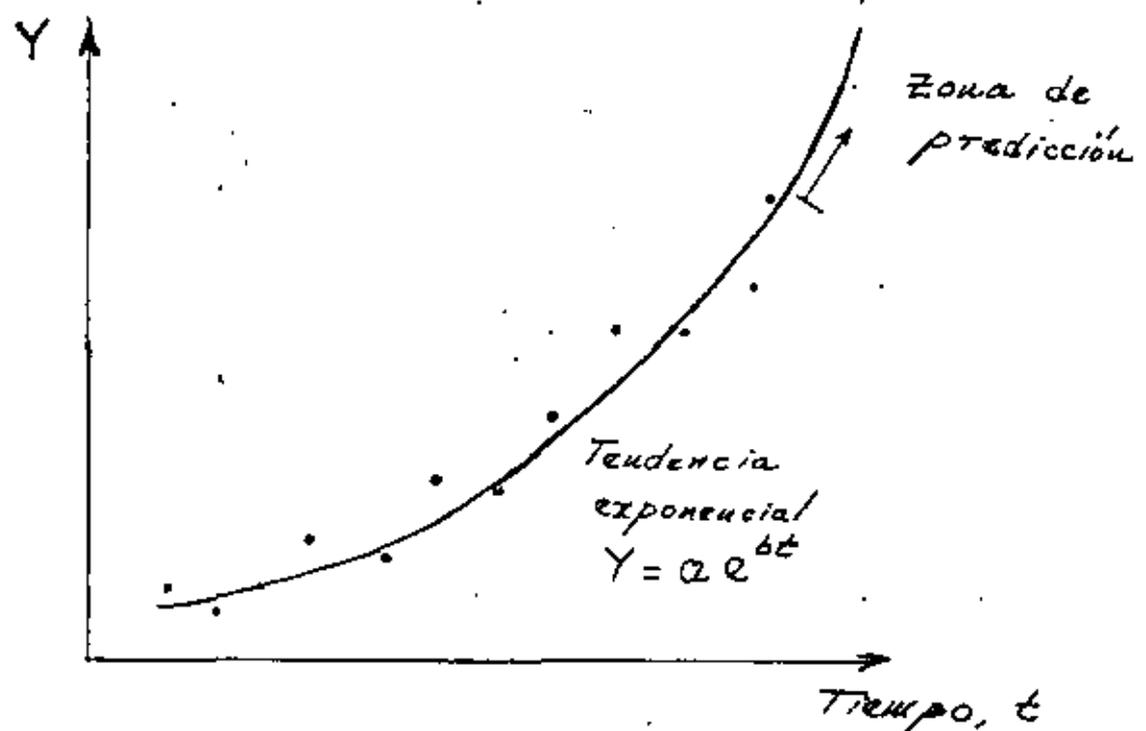
Componente irregular.- Indica las variaciones que ocurren al azar.





(los datos son trimestrales)





### TENDENCIA GENERAL

|                    |   |
|--------------------|---|
| Métodos de cálculo | $\left\{ \begin{array}{l} \text{Mínimos cuadrados} \\ \text{Dos promedios} \\ \text{Promedios móviles} \end{array} \right.$ |
|                    |   |
|                    |   |

### MINIMOS CUADRADOS

El método de mínimos cuadrados se estudió en el capítulo de regresión lineal para el caso de tendencia modelada mediante una línea recta.

Si la tendencia no se puede modelar razonablemente mediante una recta, es necesario emplear una relación no lineal, que puede ser un polinomio de orden M, dado por

$$\tilde{y}(t) = b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + \dots + b_M t^M$$

En este caso las constantes  $b_i$  que hacen mínimo el error cuadrático respecto a la línea de regresión,  $q$ , se obtienen de resolver un sistema de ecuaciones simultáneas que resultan de:

$$\frac{\partial q}{\partial b_0} = 0, \quad \frac{\partial q}{\partial b_1} = 0, \quad \frac{\partial q}{\partial b_2} = 0, \dots, \quad \frac{\partial q}{\partial b_M} = 0$$

en donde

$$q = \sum_{i=1}^n (y_i - \tilde{y}_i)^2$$

En el caso de un ajuste parabólico ( $M = 2$ ), por ejemplo,

$$\tilde{y}(t) = b_0 + b_1 t + b_2 t^2$$

$$\tilde{y}_i = \tilde{y}(t_i) = b_0 + b_1 t_i + b_2 t_i^2$$

$$q = \sum_{i=1}^n (y_i - b_0 - b_1 t_i - b_2 t_i^2)^2$$

$$\frac{\partial q}{\partial b_0} = -2 \sum_{i=1}^n (y_i - b_0 - b_1 t_i - b_2 t_i^2) = 0$$

$$\frac{\partial q}{\partial b_1} = -2 \sum_{i=1}^n (y_i - b_0 - b_1 t_i - b_2 t_i^2) t_i = 0$$

$$\frac{\partial q}{\partial b_2} = -2 \sum_{i=1}^n t_i^2 (y_i - b_0 - b_1 t_i - b_2 t_i^2) = 0$$

Estas tres últimas ecuaciones constituyen un sistema con tres

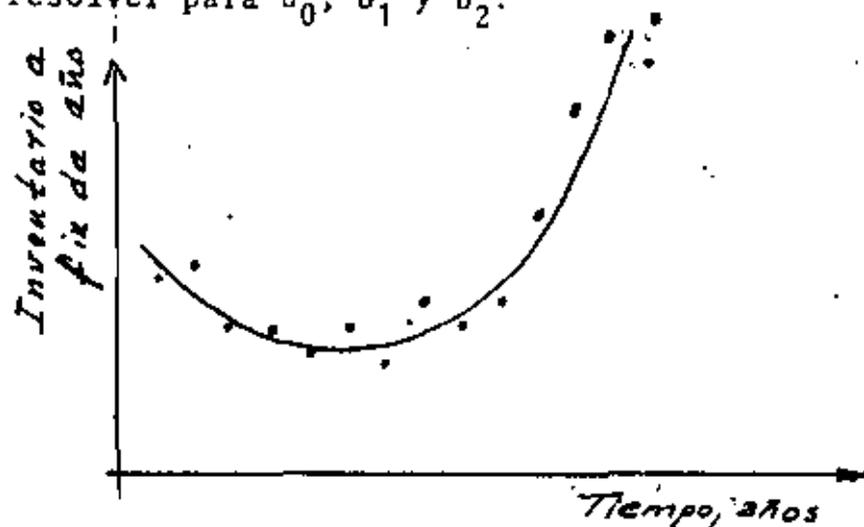
incógnitas,  $b_0$ ,  $b_1$  y  $b_2$ . Este sistema se puede reescribir en la forma:

$$b_0 n + b_1 \sum t_i + b_2 \sum t_i^2 = \sum \tilde{y}_i$$

$$b_0 \sum t_i + b_1 \sum t_i^2 + b_2 \sum t_i^3 = \sum t_i \tilde{y}_i$$

$$b_0 \sum t_i^2 + b_1 \sum t_i^3 + b_2 \sum t_i^4 = \sum t_i^2 \tilde{y}_i$$

Y luego resolver para  $b_0$ ,  $b_1$  y  $b_2$ .



Cuando al observar la gráfica de  $Y$  contra  $t$ , se concluya que es razonable ajustar una función exponencial de la forma

$$\tilde{Y}(t) = ae^{mt}$$

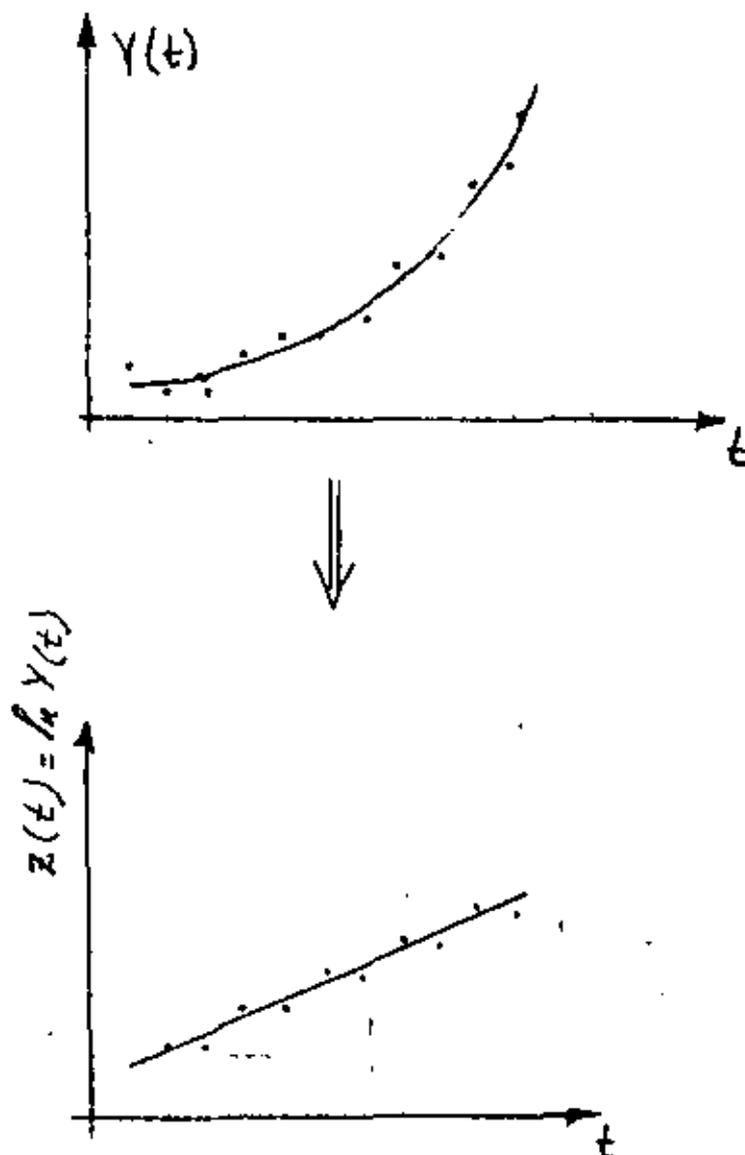
se puede resolver el problema trabajando con logaritmos, ya que, en tal caso,

$$\ln \tilde{Y}(t) = \ln a + mt$$

o sea

$$\tilde{z}(t) = mt + b$$

que es la ecuación de una línea recta y, por lo tanto, las constantes  $m$  y  $b = \ln a$  se calculan mediante las fórmulas que se obtuvieron para el caso de regresión lineal, con  $\tilde{z}_i = \ln \tilde{Y}(t_i)$

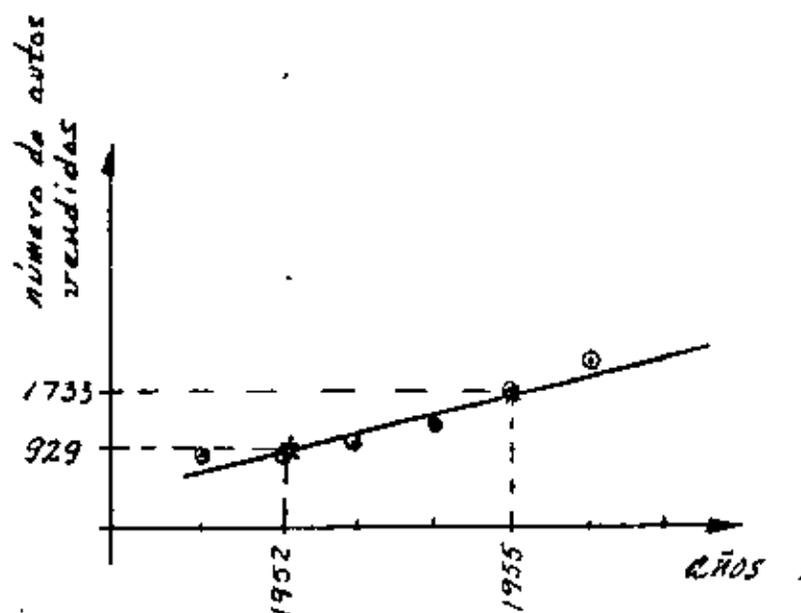


### METODO DE DOS PROMEDIOS

El método de dos promedios consiste en dividir los datos en dos partes y calcular el promedio de las  $Y_i$  y los tiempos centrales correspondientes a cada parte, con lo cual se obtienen los puntos  $(\bar{t}_1, \bar{Y}_1)$  y  $(\bar{t}_2, \bar{Y}_2)$  por los cuales pasa la recta buscada

#### EJEMPLO

| Año  | Número de autos vendidos | Año central | Promedio |
|------|--------------------------|-------------|----------|
| 1951 | 860                      | 1952        | 929      |
| 1952 | 910                      |             |          |
| 1953 | 1018                     |             |          |
| 1954 | 1326                     | 1955        | 1,733    |
| 1955 | 1749                     |             |          |
| 1956 | 2125                     |             |          |

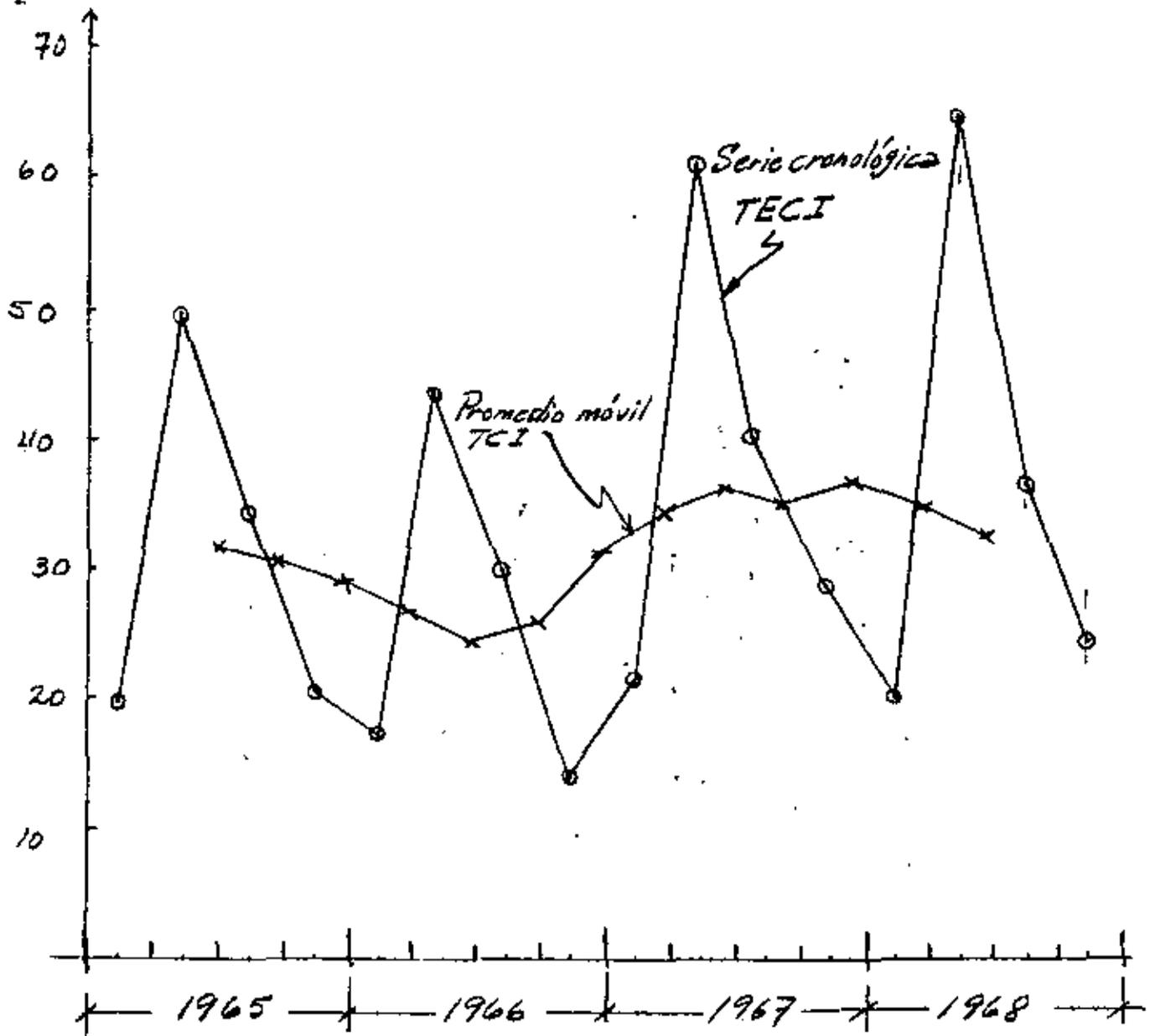


EJEMPLO

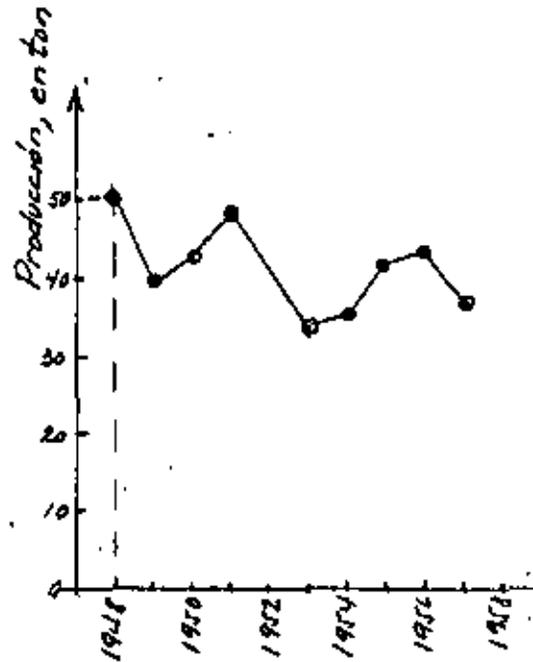
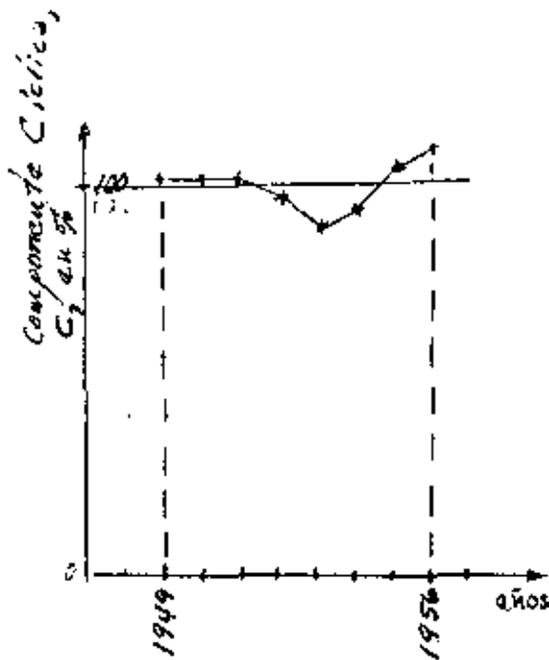
En la siguiente tabla se presenta el consumo promedio por día de fertilizante que se consumió en una región agrícola. Obtener la componente estacional.

| Año  | Trimestre | Consumo, Y<br>ton/día | Suma | Promedio<br>móvil | Promedio móvil<br>centrado, TCI | Porcentaje del<br>promedio móvil<br>$Y/TCI = E, \%$ |
|------|-----------|-----------------------|------|-------------------|---------------------------------|---|
| 1966 | 1         | 20                    |      |                   |                                 |   |
|      | 2         | 50                    |      |                   |                                 |   |
|      | 3         | 35                    |      | 31.5              | 31.3                            | 111.5   |
|      | 4         | 21                    | 126  | 31.0              | 30.2                            | 69.5  |
| 1967 | 1         | 18                    | 124  | 29.3              | 28.7                            | 62.7  |
|      | 2         | 43                    | 117  | 28.0              | 27.3                            | 157.5   |
|      | 3         | 30                    | 112  | 26.5              | 27.0                            | 111.1   |
|      | 4         | 15                    | 106  | 27.5              | 29.8                            | 50.3  |
| 1967 | 1         | 22                    | 110  | 32.0              | 33.2                            | 66.2  |
|      | 2         | 61                    | 128  | 34.3              | 35.9                            | 169.9   |
|      | 3         | 39                    | 137  | 37.5              | 37.4                            | 104.2   |
|      | 4         | 28                    | 150  | 37.3              | 37.6                            | 74.5  |
| 1968 | 1         | 21                    | 149  | 37.8              | 37.6                            | 55.8  |
|      | 2         | 63                    | 151  | 37.3              | 36.8                            | 171.2   |
|      | 3         | 37                    | 149  | 36.3              |                                 |   |
|      | 4         | 24                    | 145  |                   |                                 |   |

Puesto que los datos están dados por trimestre el índice estacional que se obtendrá será para los trimestres, por lo cual los promedios móviles para eliminar, como primer paso, a la componente estacional deben ser de orden 4.



Eliminación de la componente estacional,  $E$ , mediante promedios móviles.



Para evaluar los índices de la componente cíclica es recomendable contar por lo menos con tres periodos completos de datos. Los índices cíclicos se calculan de manera semejante a los estacionales.

EJEMPLO

Supóngase que la componente cíclica de las inversiones anuales en un país con periodo sexenal de gobierno federal es la indicada en la siguiente tabla. Calcular los índices cíclicos.

| Año  | C, en % |
|------|---------|
| 1947 | 85      |
| 48   | 102     |
| 49   | 117     |
| 50   | 126     |
| 51   | 129     |
| 52   | 137     |
| 53   | 79      |
| 54   | 98      |
| 55   | 121     |
| 56   | 127     |
| 57   | 132     |
| 58   | 143     |
| 59   | 59      |
| 60   | 86      |
| 61   | 121     |
| 62   | 122     |
| 63   | 137     |
| 64   | 149     |
| 65   | 89      |
| 66   | 100     |
| 67   | 112     |
| 68   | 129     |
| 69   | 136     |
| 70   | 138     |

| Año del ciclo | Comp. cíclica |     |     |     | Promedio         | Índice cíclico, en % |
|---------------|---------------|-----|-----|-----|------------------|----------------------|
|               | CICLOS        |     |     |     |                  |                      |
|               | 1             | 2   | 3   | 4   |                  |                      |
| 1             | 85            | 79  | 59  | 89  | 78.0             | 67.5                 |
| 2             | 102           | 98  | 86  | 100 | 96.5             | 83.5                 |
| 3             | 117           | 121 | 121 | 112 | 117.8            | 101.9                |
| 4             | 126           | 127 | 122 | 129 | 126.0            | 109.0                |
| 5             | 129           | 132 | 137 | 136 | 133.5            | 115.4                |
| 6             | 137           | 143 | 149 | 138 | 141.8            | 122.7                |
|               |               |     |     |     | $\Sigma = 693.6$ | 600.0                |

$$\frac{600}{693.6} = 0.865$$

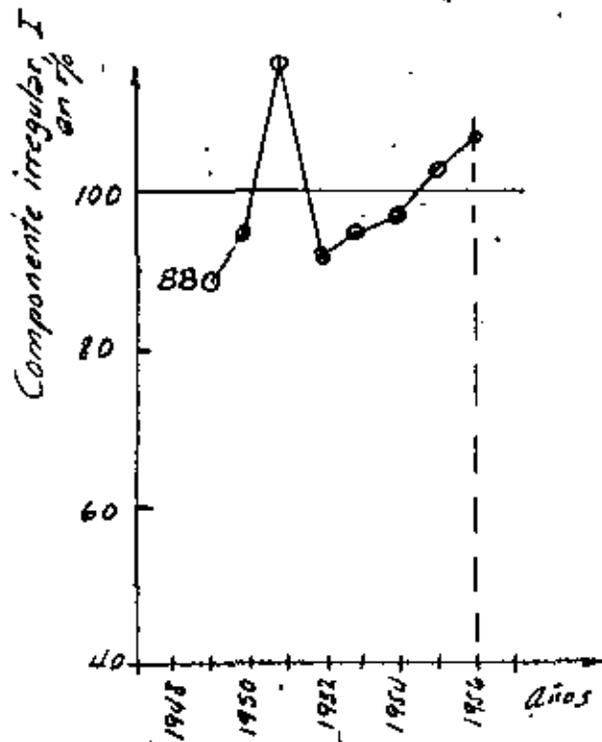
### COMPONENTE IRREGULAR

Como se indicó, la componente irregular de una serie cronológica indica las variaciones que en ésta ocurren al azar.

Una vez que se ha calculado  $C$ , para obtener  $I$  basta dividir  $CI$  entre  $C$ , es decir

$$CI/C = I$$

En la tabla del penúltimo ejemplo se encuentra calculada la componente irregular de la serie cronológica correspondiente a la producción de uva en una granja.





centro de educación continua  
división de estudios superiores  
facultad de ingeniería, unam



PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA. FUNDAMENTOS Y APLICACIONES

INFERENCIA ESTADÍSTICA

M. EN I. AUGUSTO VILLARREAL ARANDA

Junio, Julio, 1979



# INFERENCIA ESTADISTICA

Por: M en I Augusto Villarreal Aranda\*

## 1. Introducción

La parte de la estadística que proporciona las reglas para inferir ciertas características de una población a partir de muestras extraídas de ella, junto con indicaciones probabilísticas de la veracidad de tales inferencias, se llama *inferencia estadística*.

En la inferencia estadística se estudian las relaciones existentes entre una población, las muestras obtenidas de ella, y las técnicas para estimar parámetros, tales como la media y la variancia, o bien para determinar si las diferencias entre dos muestras son debidas al azar, etc.

## 2. Distribuciones muestrales

Si se consideran todas las muestras posibles de tamaño

Secretario Académico, División de Estudios Superiores, Facultad de Ingeniería, UNAM y Profesor investigador, Instituto de Ingeniería, UNAM

n que pueden extraerse de una población, y para cada una se calcula el valor del promedio aritmético, este seguramente variará de una muestra a otra, ya que depende de los valores de los datos que se hayan obtenido en cada muestra. Por lo tanto, el promedio aritmético es en sí una variable aleatoria, como también lo son, por la misma razón, el rango y la variancia de la muestra.

A todo elemento que es función de los valores de los datos que se tienen en una muestra se le denomina *estadística*; toda estadística es, entonces, una variable aleatoria cuya distribución de probabilidades se conoce como *distribución muestral*. Si, por ejemplo, la estadística considerada es la variancia de la muestra, su densidad de probabilidades se llama *distribución muestral de la variancia*.

En forma similar se pueden obtener las distribuciones muestrales de la desviación estándar, del rango, etc., cada una de las cuales tendrá sus propios parámetros, lo que permite hablar de la media y la desviación estándar de la variancia, etc.

### 3. Muestreo con y sin remplazo

Cuando se efectúa un muestreo en una población de tal manera que cada elemento de la misma se pueda escoger más de una vez, se dice que el muestreo es *con remplazo*; en caso contrario, el muestreo es *sin remplazo*. Si de una urna se quiere extraer una muestra de bolas de colores, se puede proceder de dos maneras: se saca al azar una bola, se anota su color y se regresa a la urna antes de obtener otra, y así sucesivamente; en este caso el muestreo es *con remplazo*. La segunda forma consiste en extraer

al azar todas las bolas que constituyen la muestra sin regresarlas a la urna, siendo entonces un muestreo *sin* *reemplazo*.

#### 4. Distribución muestral del promedio aritmético

Supóngase que se extraen sin reemplazo todas las muestras posibles de tamaño  $n$  de una población finita de tamaño  $N_p > n$ . Si la media y la desviación estándar de la distribución muestral del promedio aritmético se denotan con  $\mu_{\bar{X}}$  y  $\sigma_{\bar{X}}$ , y la media y la desviación estándar de la población con  $\mu$  y  $\sigma$ , respectivamente, entonces es posible demostrar que se cumplen las siguientes ecuaciones

$$\mu_{\bar{X}} = \mu$$

$$\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{N_p - n}{N_p - 1}}$$

Además, si la población es infinita (o el muestreo es con reemplazo), los resultados anteriores se reducen a

$$\mu_{\bar{X}} = \mu$$

$$\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

puesto que

$$\lim_{N_p \rightarrow \infty} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{N_p - n}{N_p - 1}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Para valores grandes de  $n$  ( $n \geq 30$ ) se demuestra, empleando el teorema del límite central, que la distribución muestral del promedio aritmético es aproximadamente una distribución normal con media  $\mu_{\bar{X}}$  y desviación estándar  $\sigma_{\bar{X}}$ , independientemente de cuál sea la densidad de probabilidades de  $X$ , la variable aleatoria asociada a la población. Si esta variable tiene distribución normal, la distribución muestral del promedio aritmético también es normal, aun para valores pequeños de  $n$  ( $n < 30$ ).

#### Ejemplo 4.1

Supóngase que se tiene una población finita formada por los datos 1,2,3,4,5. Se desea conocer la media y la desviación estándar de la distribución muestral del promedio aritmético, considerando las muestras de tamaño 3 obtenidas sin remplazo.

*Primer procedimiento.*

Siendo la población finita y el muestreo sin remplazo, es posible obtener la distribución muestral correspondiente para calcular después sus parámetros, considerando que el número total de muestras distintas de tamaño 3 que pueden obtenerse a partir de una población de 5 elementos es

$$\frac{5!}{3!(5-3)!} = 10$$

Dichas muestras son las siguientes, junto con sus promedios aritméticos correspondientes:

|         | $\bar{X}_1$ |         | $\bar{X}_1$ |
|---------|-------------|---------|-------------|
| 1, 2, 3 | 6/3         | 3, 4, 5 | 12/3        |
| 1, 2, 4 | 7/3         | 3, 4, 1 | 8/3         |
| 1, 2, 5 | 8/3         | 4, 5, 1 | 10/3        |
| 2, 3, 4 | 9/3         | 4, 5, 2 | 11/3        |
| 2, 3, 5 | 10/3        | 5, 1, 3 | 9/3         |

Para calcular la media y la desviación estándar, se emplea la siguiente tabla

|               |      |      |      |      |      |      |       |       |       |       |
|---------------|------|------|------|------|------|------|-------|-------|-------|-------|
| $\bar{X}_i$   | 6/3  | 7/3  | 8/3  | 8/3  | 9/3  | 9/3  | 10/3  | 10/3  | 11/3  | 12/3  |
| $\bar{X}_i^2$ | 36/9 | 49/9 | 64/9 | 64/9 | 81/9 | 81/9 | 100/9 | 100/9 | 121/9 | 144/9 |

$$\sum_{i=1}^{10} \bar{X}_i = 90/3$$

$$\sum_{i=1}^{10} \bar{X}_i^2 = 840/9$$

$$\mu_{\bar{X}} = \bar{X} = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} \bar{X}_i = \frac{1}{10} \cdot \frac{90}{3} = 3$$

$$\sigma_{\bar{X}}^2 = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} \bar{X}_i^2 - \bar{X}^2 = \frac{1}{10} \cdot \frac{840}{9} - (3)^2 =$$

$$= 9.333 - 9.000 = 0.333 \Rightarrow \sigma_{\bar{X}} = \sqrt{0.333} = 0.577$$

Es decir,  $\mu_{\bar{X}} = 3$  'y  $\sigma_{\bar{X}} = 0.577$

Segundo procedimiento.

Por tratarse de una población finita, se verifica que

$$\mu_{\bar{X}} = \mu \quad \text{y} \quad \sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{N_p - n}{N_p - 1}}$$

en donde  $N_p = 5$ ,  $n = 3$  y  $\mu = 3$ .

El valor de  $\sigma^2$  de la población es

$$\sigma^2 = \frac{1+4+9+16+25}{5} - (3)^2 = \frac{55}{5} - 9 = 11 - 9 = 2$$

Por lo tanto,  $\sigma = \sqrt{2} = 1.4145$  y

$$\sigma_{\bar{X}} = \frac{1.4145}{\sqrt{3}} \sqrt{\frac{5-3}{5-1}} = (0.8164)(0.7071) = 0.577$$

Es decir,  $\mu_{\bar{X}} = 3$  y  $\sigma_{\bar{X}} = 0.577$

Comparando los resultados, se puede observar que ambos procedimientos conducen a la obtención de los mismos valores de  $\mu_{\bar{X}}$  y  $\sigma_{\bar{X}}$  para la distribución muestral del promedio aritmético.

#### Ejemplo 4.2

En una bodega se tienen cinco mil varillas de acero; el valor medio del peso,  $X$ , de cada varilla es de 5.02 kg, y la desviación estándar 0.3 kg. Hallar la probabilidad de que una muestra de cien varillas, escogida al azar, tenga un peso total

- entre 496 y 500 kg
- de más de 510 kg.

Para la distribución muestral del promedio, se tiene que  $\mu_{\bar{X}} = \mu = 5.02$  kg y, por tratarse de una población finita,

$$\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{N_p - n}{N_p - 1}} = \frac{0.30}{\sqrt{100}} \sqrt{\frac{5000 - 100}{5000 - 1}} = 0.027$$

a. El peso total de la muestra estará entre 496 y 500 kg si el peso promedio de las cien varillas se encuentra entre 4.96 y 5.00 kg. Puesto que la muestra es mayor de 30 elementos se puede considerar como aproximadamente normal a la distribución muestral, y los valores estándar correspondientes a  $\bar{X} = 4.96$  y a  $\bar{X} = 5.00$  se obtienen mediante la transformación

$$z = \frac{\bar{X} - \mu_{\bar{X}}}{\sigma_{\bar{X}}}$$

es decir,

$$z_1 = \frac{4.96 - 5.02}{0.027} = -2.22$$

$$z_2 = \frac{5.00 - 5.02}{0.027} = -0.74$$

En la fig 4.1 se puede apreciar que

$$\begin{aligned} P[496 \leq X \leq 500] &= P[-2.22 \leq Z \leq -0.74] = \\ &= P[-2.22 \leq Z \leq 0] - P[-0.74 \leq Z \leq 0] \end{aligned}$$

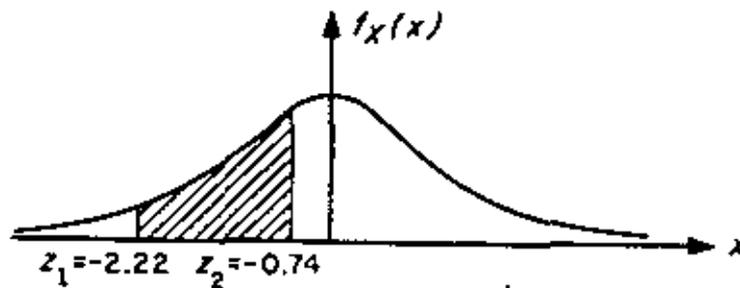


Fig 4.1 Distribución normal correspondiente al ejemplo

Recurriendo a la tabla de áreas bajo la curva normal estándar entre 0 y  $Z$  queda finalmente

$$P[496 \leq X \leq 500] = 0.4868 - 0.2704 = 0.2164$$

b. El peso total de la muestra excederá de 510 kg si el peso promedio de las cien varillas pasa de 5.10 kg.

Estandarizando dicho valor, queda

$$z_3 = \frac{5.10 - 5.02}{0.027} = 2.96$$

Calculando el área bajo la curva normal a la derecha de este valor (fig 4.2), se tiene que

$$\begin{aligned} P[X \geq 510] &= P[Z \geq 2.96] = P[Z > 0] - P[0 \leq Z \leq 2.96] = \\ &= 0.5 - 0.4985 = 0.0015 \end{aligned}$$

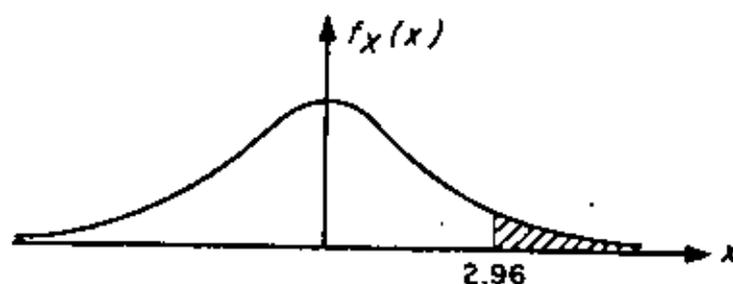


Fig 4.2 Distribución normal correspondiente al ejemplo

#### 5. Distribución muestral de diferencias de promedios aritméticos

Con frecuencia se presenta el caso en el que se tienen datos de dos poblaciones con variables aleatorias asociadas  $X$  y  $Y$ , respectivamente, surgiendo la duda de si estas se pueden considerar como una sola, es decir, si  $X = Y$ . Para probar estadísticamente esta hipótesis (como se verá más adelante), es necesario obtener las distribuciones muestrales de la diferencia de los promedios y de las variancias de las muestras de ambas variables.

Sean  $\bar{X}$  y  $\bar{Y}$  los promedios aritméticos obtenidos de muestras aleatorias de tamaño  $n_X$  y  $n_Y$  de dos poblaciones con características  $X$  y  $Y$ , respectivamente. Se puede demostrar que la distribución muestral de la diferencia de los promedios correspondientes a poblaciones infinitas con medias  $\mu_X$  y  $\mu_Y$  y desviaciones estándar  $\sigma_X$  y  $\sigma_Y$ , tiene los siguientes parámetros:

$$\begin{aligned}\mu_{\bar{X} - \bar{Y}} &= \mu_{\bar{X}} - \mu_{\bar{Y}} = \mu_X - \mu_Y \\ \sigma_{\bar{X} - \bar{Y}} &= \sqrt{\sigma_{\bar{X}}^2 + \sigma_{\bar{Y}}^2} = \sqrt{\frac{\sigma_X^2}{n_X} + \frac{\sigma_Y^2}{n_Y}}\end{aligned}$$

si las muestras son independientes.

Esta distribución también es aplicable a poblaciones finitas si el muestreo es con remplazo. Para el caso de poblaciones finitas en las cuales el muestreo se hace sin remplazo, los parámetros de la distribución muestral de la diferencia de los promedios aritméticos son

$$\mu_{\bar{X}-\bar{Y}} = \mu_{\bar{X}} - \mu_{\bar{Y}} = \mu_X - \mu_Y$$

$$\sigma_{\bar{X}-\bar{Y}} = \sqrt{\sigma_{\bar{X}}^2 + \sigma_{\bar{Y}}^2} = \sqrt{\frac{\sigma_X^2}{n_X} \frac{N_X - n_X}{N_X - 1} + \frac{\sigma_Y^2}{n_Y} \frac{N_Y - n_Y}{N_Y - 1}}$$

suponiendo que las muestras sean independientes.

### Ejemplo 5.1

Considérese que de una población X se obtienen tres muestras posibles, cuyos correspondientes promedios aritméticos son 3, 7 y 8. De otra población Y se extraen dos muestras posibles, con promedios 2 y 4, respectivamente. Se deben obtener los parámetros de la distribución muestral de las diferencias de los promedios aritméticos.

#### Primer procedimiento

Todas las posibles diferencias de promedios aritméticos de X con los de Y serían

$$\begin{array}{ccc} 3 - 2 & 7 - 2 & 8 - 2 \\ 3 - 4 & 7 - 4 & 8 - 4 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{ccc} 1 & 5 & 6 \\ -1 & 3 & 4 \end{array}$$

Es decir,

$$\mu_{\bar{X}-\bar{Y}} = \frac{-1+1+3+4+5+6}{6} = \frac{18}{6} = 3$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\bar{X}-\bar{Y}}^2 &= \frac{(-1-3)^2 + (1-3)^2 + (3-3)^2 + (4-3)^2 + (5-3)^2 + (6-3)^2}{6} \\ &= \frac{34}{6} = \frac{17}{3} \end{aligned}$$

Segundo procedimiento

Se sabe que

$$\mu_{\bar{X}-\bar{Y}} = \mu_{\bar{X}} - \mu_{\bar{Y}} ; \sigma_{\bar{X}-\bar{Y}}^2 = \sigma_{\bar{X}}^2 + \sigma_{\bar{Y}}^2$$

Por ello,

$$\mu_{\bar{X}} = \frac{3+7+8}{3} = \frac{18}{3} = 6$$

$$\mu_{\bar{Y}} = \frac{2+4}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

$$\sigma_{\bar{X}}^2 = \frac{(3-6)^2 + (7-6)^2 + (8-6)^2}{3} = \frac{14}{3}$$

$$\sigma_{\bar{Y}}^2 = \frac{(2-3)^2 + (4-3)^2}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

$$\mu_{\bar{X}-\bar{Y}} = 6 - 3 = 3$$

$$\sigma_{\bar{X}-\bar{Y}}^2 = \frac{14}{3} + 1 = \frac{17}{3}$$

Se observa que ambos procedimientos conducen a los mismos resultados.

### Ejemplo 5.2

Las varillas de acero que fabrica una compañía A tienen un peso medio de 6.5 kg y una desviación estándar de 0.4, en tanto que las producidas por una empresa B tienen un peso medio de 6.3 kg y una desviación estándar de 0.3 kg. Si se toman muestras aleatorias de 100 varillas de cada fábrica, ¿cuál es la probabilidad de que las de la compañía A tengan un peso promedio de por lo menos

- a. 0.35 kg
- b. 0.10 kg

mayor que el de la compañía B?

Se puede suponer en este caso que las distribuciones muestrales involucradas son normales, en virtud de que el tamaño de ambas muestras es mayor de 30 elementos. También se puede suponer que ambas poblaciones son infinitas, y siendo  $\bar{X}_A$  y  $\bar{X}_B$  los pesos promedios de las muestras de las fábricas A y B, respectivamente, entonces

$$\mu_{\bar{X}_A} - \bar{X}_B = \mu_{\bar{X}_A} - \mu_{\bar{X}_B} = 6.5 - 6.3 = 0.20 \text{ kg}$$

$$\sigma_{\bar{X}_A - \bar{X}_B} = \sqrt{\frac{\sigma_A^2}{n_A} + \frac{\sigma_B^2}{n_B}} = \sqrt{\frac{(0.4)^2}{100} + \frac{(0.3)^2}{100}} = 0.05 \text{ kg}$$

La variable estandarizada de la diferencia de los promedios es

$$Z = \frac{(\bar{X}_A - \bar{X}_B) - \mu_{\bar{X}_A - \bar{X}_B}}{\sigma_{\bar{X}_A - \bar{X}_B}} = \frac{(\bar{X}_A - \bar{X}_B) - 0.20}{0.05}$$

a. Estandarizando la diferencia de 0.35 kg se llega a .

$$Z_1 = \frac{0.35 - 0.20}{0.05} = \frac{0.15}{0.05} = 3$$

La probabilidad deseada es el área bajo la curva normal a la derecha de  $Z = 3$ , es decir

$$P[\bar{X}_A \geq \bar{X}_B + 0.35] = P[Z \geq 3] = 0.500 - 0.4987 = 0.0013$$

b. Al estandarizar la diferencia de 0.10 kg, la variable  $Z$  resulta

$$Z_2 = \frac{0.10 - 0.20}{0.05} = \frac{-0.1}{0.05} = -2$$

La probabilidad requerida es el área bajo la curva normal a la derecha de  $Z = -2$ , es decir

$$P[\bar{X}_A \geq \bar{X}_B + 0.10] = P[Z \geq -2] = 0.5 + 0.4772 = 0.9772$$

## 6. Teoría estadística de la estimación

En la práctica profesional a menudo resulta necesario inferir información acerca de una población mediante el uso de muestras extraídas de ella; una parte básica de dicha inferencia consiste en *estimar* los valores de los parámetros de la población (media, variancia, etc.) a partir de las estadísticas correspondientes de la muestra, como se explica a continuación.

## 7. Estimadores puntuales. Clasificación

Si un estimador de un parámetro de la población consiste en un solo valor de una estadística, se le conoce como *estimador puntual* del parámetro.

Cuando la media de la distribución muestral de una estadística es igual al parámetro que se está estimando de la población, entonces la estadística se conoce como *estimador insesgado* del parámetro; si no sucede así, entonces se denomina *estimador sesgado*. Ambos estimadores son puntuales, y sus valores correspondientes se llaman estimaciones insesgadas o sesgadas, respectivamente. Dicho de otra manera, si  $S$  es una estadística cuya distribución muestral tiene media  $\mu_S$ , y el parámetro correspondiente de la población es  $\theta$ , se dice que  $S$  es un estimador insesgado de  $\theta$  si

$$\mu_S = \theta$$

Por otra parte, si la estadística  $S_n$  de la muestra tiene de a ser igual al parámetro  $\theta$  de la población a medida que se

### 8. Estimación de intervalos de confianza para los parámetros de una población

La estimación de un parámetro de una población mediante un par de números entre los cuales se encuentra, con cierta probabilidad, el valor de dicho parámetro, se llama estimación del intervalo del mismo.

Sea  $S$  una estadística obtenida de una muestra de tamaño  $n$  para estimar el valor del parámetro  $\theta$ , y sea  $\sigma_S$  la desviación estándar (conocida o estimada) de su distribución muestral. La probabilidad,  $1 - \alpha$ , de que el valor de  $\theta$  se localice en el intervalo de  $S - z_c \sigma_S$  a  $S + z_c \sigma_S$ , donde  $z_c$  es una constante, se escribe en la forma

$$P[S - z_c \sigma_S \leq \theta \leq S + z_c \sigma_S] = 1 - \alpha$$

Si se fija el valor de  $1 - \alpha$ , se puede obtener el valor de  $z_c$  necesario para que se satisfaga la ecuación anterior, con lo cual queda definido el *intervalo de confianza* del parámetro  $\theta$ ,  $(S - z_c \sigma_S, S + z_c \sigma_S)$ , correspondiente al nivel de confianza  $1 - \alpha$ .

La constante  $z_c$  que fija el intervalo de confianza se conoce como *valor crítico*. Si la distribución de  $S$  es normal, el valor de  $z_c$  correspondiente a uno de  $\alpha$  se obtiene de la tabla de áreas bajo la curva normal o de la tabla 8.1 siguiente.

hace más grande el tamaño de la muestra, entonces la estadística recibe el nombre de *estimador consistente* del parámetro.

Empleando símbolos, si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \theta$$

resulta que la estadística  $S_n$  es un estimador consistente. Por ejemplo, el promedio aritmético es un estimador insesgado y consistente de la media, y la variancia de la muestra es un estimador sesgado y consistente de la variancia de la población.

Si las distribuciones muestrales de varias estadísticas tienen el mismo valor de la media, se dice que la estadística que cuenta con la menor variancia es un *estimador eficiente* de dicha media, en tanto que las estadísticas restantes se conocen como *estimadores ineficientes* del parámetro.

Por ejemplo, las distribuciones muestrales del promedio aritmético y de la mediana cuentan con medias que son, en ambos casos, iguales a la media de la población. Sin embargo, la variancia de la distribución muestral del promedio aritmético es menor que la de la distribución de la mediana, por lo que el promedio aritmético obtenido de una muestra aleatoria proporciona un estimador eficiente de la media de la población, en tanto que la mediana obtenida de la muestra proporciona un estimador ineficiente de dicho parámetro.

TABLA 8.1 VALORES DE  $z_c$  PARA DISTINTOS NIVELES DE CONFIANZA

| Nivel de confianza, en porcentaje | $z_c$ |
|-----------------------------------|-------|
| 99.73                             | 3.00  |
| 99.00                             | 2.58  |
| 98.00                             | 2.33  |
| 96.00                             | 2.05  |
| 95.45                             | 2.00  |
| 95.00                             | 1.96  |
| 90.00                             | 1.64  |
| 80.00                             | 1.28  |
| 68.27                             | 1.00  |
| 50.00                             | 0.674 |

## Ejemplo 8.1

Sea el promedio aritmético  $\bar{X}$  una estadística con distribución normal. Las probabilidades o niveles de confianza de que  $\mu_{\bar{X}}$  (o  $\mu$  de la población) se encuentre localizada entre los límites  $\bar{X} \pm \sigma_{\bar{X}}$ ,  $\bar{X} \pm 2 \sigma_{\bar{X}}$  y  $\bar{X} \pm 3 \sigma_{\bar{X}}$  son 68.26, 95.44 y 99.73%, respectivamente, obteniéndose dichos valores de la tabla de áreas bajo la curva normal. Lo anterior significa que el intervalo  $\bar{X} \pm 3 \sigma_{\bar{X}}$  contendrá a  $\mu_{\bar{X}}$  en el 99.73 por ciento de las muestras de tamaño  $n$ , por lo que los intervalos de confianza de 68.26, 95.44 y 99.73 por ciento para estimar a  $\mu$  son  $(\bar{X} - \sigma_{\bar{X}}, \bar{X} + \sigma_{\bar{X}})$ ,  $(\bar{X} - 2 \sigma_{\bar{X}}, \bar{X} + 2 \sigma_{\bar{X}})$  y  $(\bar{X} - 3 \sigma_{\bar{X}}, \bar{X} + 3 \sigma_{\bar{X}})$ , lo cual se aprecia en la fig 8.1 siguiente.

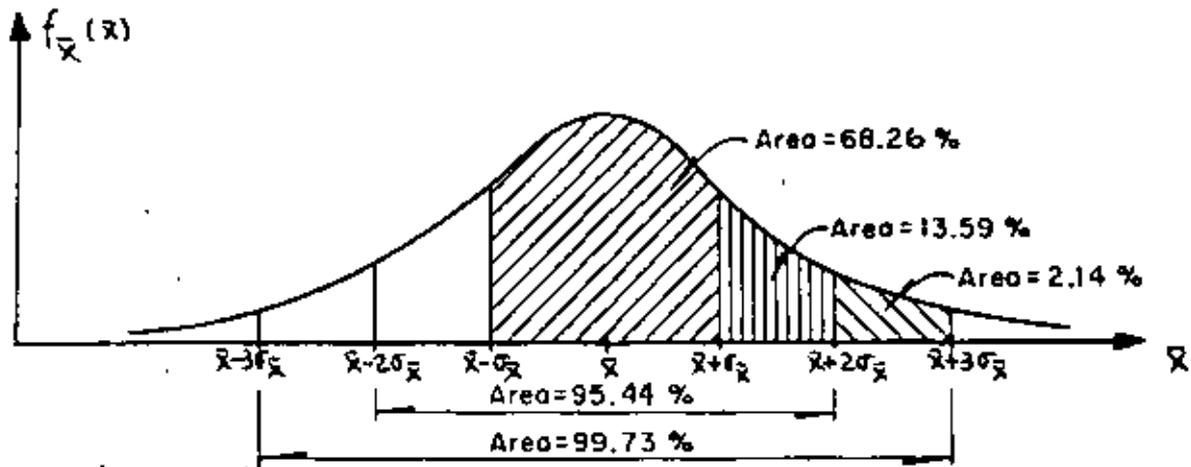


Fig 8.1

### 9. Estimación de intervalos de confianza para la media

Los límites de confianza para la media de una población con variable aleatoria  $X$  asociada están dados por

$$\bar{X} \pm z_c \sigma_{\bar{X}}$$

en donde  $z_c$  depende del nivel de confianza deseado. Si  $\bar{X}$  tiene distribución normal,  $z_c$  puede obtenerse en forma directa de la tabla 8.1. Por ejemplo, los límites de confianza de 95 y 99 por ciento para estimar la media,  $\mu$ , de la población son  $\bar{X} \pm 1.96\sigma_{\bar{X}}$  y  $\bar{X} \pm 2.58\sigma_{\bar{X}}$ , respectivamente. Al obtener estos límites hay que usar el valor calculado de  $\bar{X}$  para la muestra correspondiente.

Entonces, los límites de confianza para la media de la población quedan dados por

$$\bar{X} \pm z_c \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

en caso de que el muestreo se haga a partir de una población infinita o de que se efectúe con remplazo a partir de una población finita, o por

$$\bar{X} = z_c \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{N_p - n}{N_p - 1}}$$

si el muestreo es sin remplazo a partir de una población finita de tamaño  $N_p$ .

#### Ejemplo 9.1

Las mediciones de los diámetros de una muestra aleatoria de 100 tubos de albañal mostraron una media de 32 cm y una desviación estándar de 2 cm. Obténganse los límites de confianza de

- a. 95 por ciento
- b. 97 por ciento

para el diámetro medio de todos los tubos.

- a. De la tabla 8.1, los límites de confianza del 95 por ciento son

$$\bar{X} \pm 1.96\sigma/\sqrt{n} = 32 \pm 1.96(2/\sqrt{100}) = 32 \pm 0.392 \text{ cm}$$

o sea 31.608 y 32.392, en donde se ha empleado el valor de  $S_x$  para estimar el de  $\sigma$  de la población, puesto que la muestra es suficientemente grande (mayor de 30 elementos). Esto significa

que con una probabilidad de 95 por ciento, el valor de  $\mu_x$  se encuentra entre 31.608 y 32.392 cm.

b. Si  $Z = z_c$  es tal que el área bajo la curva normal a la derecha de  $z_c$  es el 1.5 por ciento del área total, entonces el área entre 0 y  $z_c$  es  $0.5 - 0.015 = 0.485$ , por lo que de la tabla de áreas bajo la curva normal se obtiene  $z_c = 2.17$ . Por lo tanto, los límites de confianza del 97 por ciento son:

$$\bar{X} \pm 2.17\sigma/\sqrt{n} = 32 \pm 2.17(2/\sqrt{100}) = 32 \pm 0.434 \text{ cm}$$

y el intervalo de confianza respectivo es (31.566 cm, 32.434 cm).

### Ejemplo 9.2

Una muestra aleatoria de 50 calificaciones de cierto examen de admisión tiene un promedio aritmético de 72 puntos, con desviación estándar igual a 10. Si el examen se aplicó a 1018 personas, obtener

- El intervalo de confianza del 95% para la media del total de calificaciones.
- El tamaño de muestra necesario para que el error en la estimación de la media no exceda de 2 puntos, considerando el mismo nivel de confianza.
- El nivel de confianza para el cual la media de la población sea  $72 \pm 1$  puntos.

a. Si se estima a  $\sigma$  de la población con  $S_x$  de la muestra y se considera que la población es finita, los límites de confianza son, puesto que  $\bar{X} = 72$ ,  $z_c = 1.96$ ,  $S_x = 10$ ,  $N_p = 1018$  y  $n = 50$ ,

$$72 \pm 1.96 \frac{10}{\sqrt{50}} \sqrt{\frac{1018 - 50}{1018 - 1}}$$

$$72 \pm 1.96 (1.4142) (0.9755)$$

$$72 \pm 2.704$$

y el intervalo de confianza respectivo es

$$(69.296, 74.704)$$

b. Puesto que el error en la estimación de la media es, para población finita,

$$\text{Error en la estimación} = z_c \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{N_p - n}{N_p - 1}}$$

en este caso se tendría

$$z_c \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{N_p - n}{N_p - 1}} < 2$$

o sea, para un nivel de confianza de 95%,

$$1.96 \frac{10}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{1018 - n}{1018 - 1}} < 2$$

$$\frac{19.6}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{1018 - n}{1018 - 1}} < 2$$

Elevando al cuadrado la desigualdad, queda

$$\frac{384.16}{n} \frac{1018 - n}{1017} < 4$$

o sea

$$87.85 < n$$

Por lo cual, se requieren al menos 88 elementos en la muestra para que el error en la estimación no exceda de 2 puntos, para  $1 - \alpha = 0.95$ .

c. Los límites de confianza son, en este caso

$$72 \pm z_c \frac{10}{\sqrt{50}} \sqrt{\frac{1018 - 50}{1018 - 1}}$$

$$72 \pm z_c (1.4142) (0.9755)$$

o sea

$$72 \pm 1.3795 z_c$$

Puesto que se desea que el valor de la media sea  $72 \pm 1$  puntos, se verifica que

$$1 = 1.3795 z_c$$

Es decir

$$z_c = \frac{1}{1.3795} = 0.725$$

El área bajo la curva normal estándar entre 0 y  $z_c = 0.725$  es, por interpolación lineal, igual a 0.2657. Por lo tanto, el nivel de confianza es igual al doble del área anterior, es decir,  $2(0.2657) = 0.5314$  (o 53.14%), tal como se muestra en la fig 9.1.

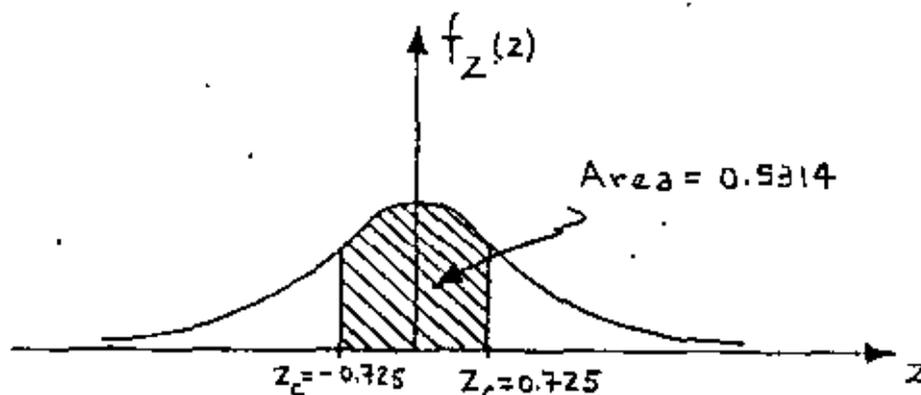


Fig 9.1

#### 10. Intervalos de confianza para diferencias de medias

Los límites de confianza para la diferencia de las medias cuando las poblaciones  $X$  y  $Y$  son infinitas, o cuando el muestreo se realiza con remplazo de poblaciones finitas, se encuentran dados por

$$\bar{X} - \bar{Y} \pm z_c \sigma_{\bar{X} - \bar{Y}} = \bar{X} - \bar{Y} \pm z_c \sqrt{\frac{\sigma_X^2}{n_X} + \frac{\sigma_Y^2}{n_Y}}$$

en donde  $\bar{X}$ ,  $n_X$  y  $\bar{Y}$ ,  $n_Y$  son los respectivos promedios aritméticos y tamaños de las dos muestras extraídas de las poblaciones, y  $\sigma_X$  y  $\sigma_Y$  las desviaciones estándar de estas últimas.

En el caso de que las poblaciones X y Y sean finitas y el muestreo sin remplazo, los límites de confianza son

$$\bar{X} - \bar{Y} \pm z_c \sigma_{\bar{X}-\bar{Y}} = \bar{X} - \bar{Y} \pm z_c \sqrt{\frac{\sigma_X^2}{n_X} \frac{N_X - n_X}{N_X - 1} + \frac{\sigma_Y^2}{n_Y} \frac{N_Y - n_Y}{N_Y - 1}}$$

en donde  $N_X$  y  $N_Y$  son los tamaños de las poblaciones X y Y, respectivamente.

Las dos ecuaciones anteriores son válidas únicamente si las muestras aleatorias seleccionadas son independientes.

#### Ejemplo 10.1

Para el ejemplo de las varillas tratado anteriormente (5.2), encontrar el intervalo de confianza del 95.45% para las diferencias de las medias de las poblaciones.

Siendo  $\bar{X}_A = \mu_A = 6.5$  kg,  $\sigma_A = 0.4$  kg,  $\bar{X}_B = \mu_B = 6.3$  kg,  $\sigma_B = 0.3$  kg y  $n_A = n_B = 100$ , los límites de confianza para la diferencia de las medias son, empleando la tabla 8.1

$$\begin{aligned} \bar{X}_A - \bar{X}_B \pm z_c \sqrt{\frac{\sigma_A^2}{n_A} + \frac{\sigma_B^2}{n_B}} &= 6.5 - 6.3 \pm 2 \sqrt{\frac{(0.4)^2}{100} + \frac{(0.3)^2}{100}} \\ &= 0.2 \pm 0.1 \end{aligned}$$

Por lo tanto, el intervalo de confianza respectivo es (0.1, 0.3).

## Ejemplo 10.2

Se tienen en una bodega 3000 focos de marca X, y 5000 de marca Y. Se extrae una muestra aleatoria de 150 focos de la marca X, y se obtiene una duración promedio de 1400 horas, con desviación estándar igual a 120 horas. Otra muestra aleatoria de 200 focos de la marca Y tuvo una duración promedio de 1200 horas, con desviación estándar igual a 80 horas. Obtener intervalos de confianza de

a. 95%

b. 99%

para la diferencia de los tiempos medios de duración de los focos de ambas marcas.

a: Puesto que se trata de poblaciones finitas y

$\bar{X} = 1400$  h,  $S_X = 120$  h,  $N_X = 3000$ ,  $n_X = 150$ ,  $\bar{Y} = 1200$  h,  $S_Y = 80$  h,  $N_Y = 5000$  y  $n_Y = 200$ , se obtiene, estimando a  $\sigma_X$  y  $\sigma_Y$  con  $S_X$  y  $S_Y$ , respectivamente

$$1400 - 1200 \pm 1.96 \sqrt{\frac{(120)^2}{150} \frac{3000 - 150}{3000 - 1} + \frac{(80)^2}{200} \frac{5000 - 200}{5000 - 1}}$$

$$200 \pm 1.96 (11.04)$$

$$200 \pm 21.638$$

o sea, (178.362, 221.638), puesto que de la tabla 8.1, para un nivel de confianza de 95%,  $Z_c = 1.96$ .

b. En este caso, al emplear la tabla 8.1 se obtiene

$Z_{\alpha} = 2.58$  para un nivel de confianza de 99%, por lo cual los límites son

$$1400 - 1200 \pm 2.58 \sqrt{\frac{(120)^2}{150} \frac{3000 - 150}{3000 - 1} + \frac{(80)^2}{200} \frac{5000 - 2000}{5000 - 1}}$$

$$200 \pm 2.58 (11.04)$$

$$200 \pm 28.483$$

y el intervalo de confianza es

$$(171.517, 228.483)$$

## 11. Pruebas de hipótesis

Supóngase que una empresa armadora de automóviles está en la disyuntiva de emplear una nueva marca de bujías en sus unidades o la que regularmente utiliza, y que su departamento de control de calidad debe decidir, con base en la información de las muestras de las dos marcas distintas. Las decisiones de este tipo, es decir, que se basan en estudios estadísticos, reciben el nombre de *decisiones estadísticas*, y a los procedimientos que permiten decidir si se acepta o rechaza una hipótesis se les llama *pruebas de hipótesis*, *pruebas de significancia* o *reglas de decisión*.

Al tomar decisiones estadísticas, es necesario postular las diversas alternativas o cursos de acción que pueden adoptarse

En el caso particular de una *prueba de hipótesis* solamente se tienen dos cursos de acción posibles, los que se denotarán como  $H_0$  y  $H_1$ . A la acción  $H_0$  se le llama *hipótesis nula*, y a la  $H_1$ , *hipótesis alternativa*. Por ejemplo, si la hipótesis nula establece que  $\mu_1 = \mu_2$ , la hipótesis alternativa puede ser una de las siguientes:

$$\mu_1 > \mu_2, \mu_1 < \mu_2 \text{ o } \mu_1 \neq \mu_2$$

Al realizar una prueba de hipótesis, se prueba siempre la verdad de la hipótesis nula  $H_0$ , aun cuando de antemano se de see rechazarla.

## 12. Errores de los tipos I y II. Nivel de significancia

En muchas ocasiones se presenta el caso de que se recha za una hipótesis nula cuando en realidad debería ser aceptada; cuando esto sucede se dice que se ha cometido un *error de tipo I*. En otras ocasiones se acepta una hipótesis nula siendo en realidad falsa; en este caso se dice que se ha cometido un *error de tipo II*.

Al probar una hipótesis nula, a la máxima probabilidad con la que se está dispuesto a cometer un error del tipo I se le llama *nivel de significancia*,  $\alpha$ , de la prueba, el cual dentro de la práctica se acostumbra establecer de 5 por ciento (0.05) o 10 por ciento (0.1). El complemento del nivel de significancia,  $1 - \alpha$ , se conoce como *nivel de confianza*.

Si, por ejemplo, al realizar una prueba de hipótesis se escoge un nivel de significancia de 10 por ciento, significa que existen 10 posibilidades en 100 de que se rechace ésta cuando debería ser aceptada; es decir, que se rechaza a un nivel de significancia del 10 por ciento, y que la probabilidad de que la decisión haya sido errónea es de 0.1.

### 13. Comportamiento de los errores tipos I y II

Supóngase que se trata de probar la hipótesis nula de que la media,  $\mu_S$ , de la distribución muestral de la estadística  $S$  es  $\mu_1$ , en contra de la hipótesis alternativa que establece que  $\mu_S = \mu_2$ , donde  $\mu_2 > \mu_1$ , es decir

$$H_0 : \mu_S = \mu_1$$

$$H_1 : \mu_S = \mu_2$$

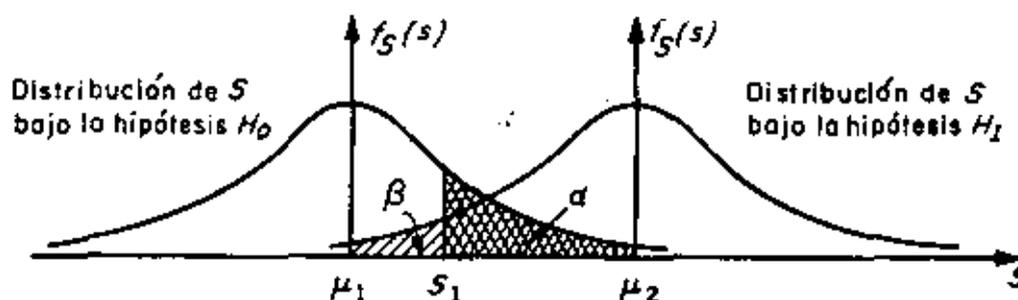
En la fig 13.1 se muestra en forma gráfica la relación entre los errores tipos I y II en el caso en el que la regla de decisión para aceptar o rechazar  $H_0$  es la siguiente:

*Si el valor de la estadística  $S$  obtenido de una muestra excede de cierto valor crítico  $S_1$ , recházese  $H_0$ ; en caso contrario, acéptese.*

Es evidente que si  $H_0$  es verdadera, entonces  $\alpha$  (área con rayado doble) es la probabilidad de que  $S > S_1$ , o sea la de rechazar a  $H_0$  siendo verdadera (error tipo I). Por otro lado, si  $H_1$  es verdadera, entonces  $\beta$  (área con rayado sencillo) es la probabilidad

de que  $S < S_1$ , o sea la de aceptar  $H_0$  siendo falsa (error tipo II).

Obsérvese que si se aumenta el valor de  $S_1$  se reduce la probabilidad  $\alpha$ , pero se incrementa la  $\beta$ ; lo contrario sucede si se disminuye el valor de  $S_1$ .



$$P[S > S_1] = \alpha \text{ (error tipo I)}$$

$$P[S < S_1] = \beta \text{ (error tipo II)}$$

Fig. 13.1 Probabilidades de los errores tipos I y II en pruebas de hipótesis.

En realidad, la única forma posible en la cual se pueden minimizar simultáneamente los errores de tipos I y II es aumentando el tamaño de la muestra, para hacer más "picudas" las distribuciones muestrales de la estadística bajo las hipótesis  $H_0$  y  $H_1$ .

Al observar la fig 13.2 siguiente, es posible concluir

que el tamaño de los errores I y II es menor para un tamaño de muestra igual a 100 que para un tamaño igual a 50, considerando la misma regla de decisión anterior.

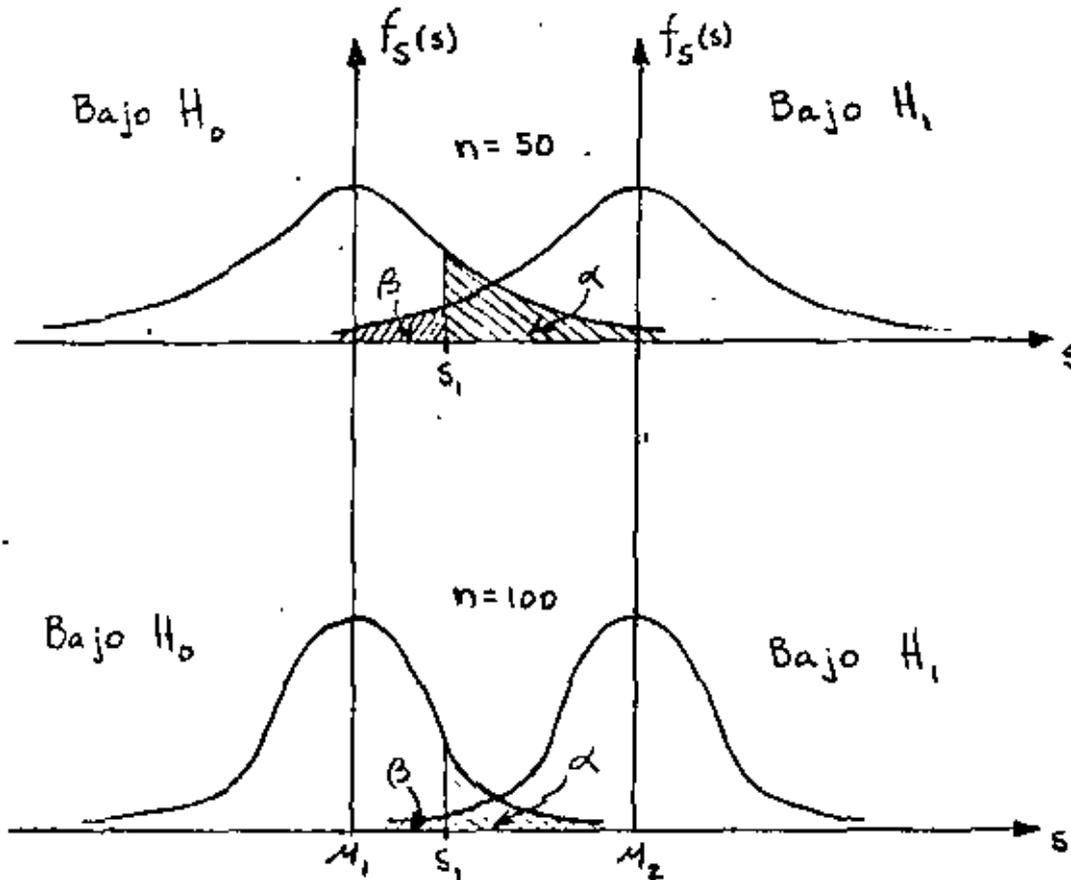


Fig 13.2

Sin embargo, esta técnica de reducción simultánea de ambos tipos de errores no siempre puede ponerse en práctica, debido a razones de costo, tiempo, etc.

14. Regiones críticas, de rechazo o de significancia. Regiones de aceptación.

Cuando una hipótesis nula no se acepta se dice que se rechaza a un nivel de significancia del  $\alpha$  por ciento, o que el valor estandarizado de la estadística involucrada es significativo a un nivel de significancia  $\alpha$ .

Al conjunto de los valores de la estadística en el que se rechaza la hipótesis nula se le denomina *región crítica, de rechazo, o de significancia*. Por el contrario, al conjunto de los valores de la estadística en que se acepta la hipótesis, se le llama *región de aceptación*.

Considérese que la distribución muestral de la estadística  $S$  es normal con desviación estándar  $\sigma_S$ , que la variable  $Z$  resulta de estandarizar a  $S$ , que la hipótesis nula,  $H_0$ , es que la media de  $S$  vale  $\mu_S$ , y que la hipótesis alternativa  $H_1$  es que dicha media es diferente de  $\mu_S$ , es decir, que

$$Z = \frac{S - \mu_S}{\sigma_S}$$

$H_0$ : media de la distribución muestral de  $S = \mu_S$

$H_1$ : media de la distribución muestral de  $S \neq \mu_S$

Si se adopta la regla de decisión de aceptar la hipótesis  $H_0$ , si el valor de  $Z$  cae dentro del intervalo central que encierra al 99 por ciento del área de la distribución de probabilidades, entonces  $H_0$  se aceptará en el caso en que

$$-2.58 \leq Z \leq 2.58$$

empleando la tabla de áreas bajo la curva normal estándar. Pero si el valor estandarizado de la estadística se encuentra fuera de dicho intervalo, se concluye que el evento puede ocurrir con probabilidad de 0.01 si la hipótesis  $H_0$  es verdadera (área rayada total de la fig 14.1). En tal caso, el valor  $Z$  de la variable estándar difiere *significativamente* del que se podría esperar de acuerdo con la hipótesis nula, lo cual inclina a rechazarla a un nivel de confianza del 99 por ciento.

De lo anterior se deduce que el área total rayada de la fig 14.1 es el nivel de significancia  $\alpha$  de la prueba, y representa la probabilidad de cometer un error del tipo I. Por ello, la región de aceptación de  $H_0$  es  $-2.58 < Z < 2.58$ , y la de rechazo es  $Z > 2.58$  y  $Z < -2.58$ .

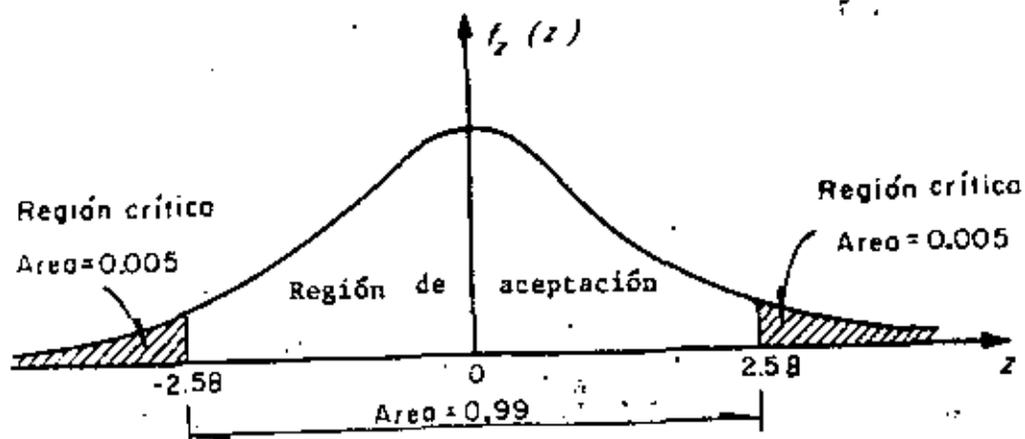


Fig 14.1 Región de significancia

En la tabla 14.1 se presentan los valores de la variable estandarizada,  $Z$ , que limitan las regiones de aceptación y de rechazo para el caso en el que la estadística involucrada en la prueba tenga distribución muestral normal. Cuando en alguna prueba de hipótesis se consideren niveles de significancia diferentes a los que aparecen en la tabla mencionada, resulta necesario emplear la de áreas bajo la curva normal estándar.

TABLA 14.1 VALORES CRÍTICOS DE  $z$

| Nivel de significancia, $\alpha$ | Valores de $z$ para pruebas de una cola | Valores de $z$ para pruebas de dos colas |
|----------------------------------|---|--|
| 0.1                              | -1.281 o 1.281                          | -1.645 y 1.645                           |
| 0.05                             | -1.645 o 1.645                          | -1.960 y 1.960                           |
| 0.01                             | -2.326 o 2.326                          | -2.575 y 2.575                           |
| 0.005                            | -2.575 o 2.575                          | -2.810 y 2.810                           |

#### 15. Pruebas de una y de dos colas

En la prueba de hipótesis del ejemplo anterior, la región de rechazo de la hipótesis nula quedó en ambos extremos (colas) de la distribución muestral de la estadística involucrada en la prueba; a las pruebas de este tipo se les denomina *pruebas de dos colas*. Cuando la región de rechazo se encuentra solamente en un extremo de la distribución muestral en cuestión, se les llama *pruebas de una cola*.

Las pruebas de dos colas se presentan cuando en la hipótesis alternativa aparece el signo  $\neq$  (diferente de), como en el siguiente caso

$$H_0 : \mu_S = \mu_1$$

$$H_1 : \mu_S \neq \mu_1$$

en donde  $\mu_S$  es la media de la estadística  $S$ , y  $\mu_1$  es un valor fijo.

En los casos

$$H_0 : \mu_S = \mu_1$$

$$H_1 : \mu_S < \mu_1$$

y

$$H_0 : \mu_S = \mu_1$$

$$H_1 : \mu_S > \mu_1$$

las pruebas resultan de una cola.

## 16. Pruebas de hipótesis para la media

Para el caso de una población infinita (o finita en que se muestree con remplazo), cuya desviación estándar  $\sigma$  se conoce o se puede estimar adecuadamente, si se tiene que la estadística  $S$  obtenida de la muestra es el promedio aritmético, entonces la media de su distribución muestral es  $\mu_S = \mu_{\bar{X}} = \mu$ , y su desviación estándar es  $\sigma_S = \sigma_{\bar{X}} = \sigma/\sqrt{n}$ , en donde  $\mu$  y  $\sigma$  son, respectivamente, la media y la desviación estándar de la variable aleatoria  $X$  asociada a la población, y  $n$  es el tamaño de la muestra. En tal caso, si  $\bar{X}$  tiene distribución normal, la variable estandarizada correspondiente será

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu_{\bar{X}}}{\sigma_{\bar{X}}} = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$$

Para el caso de muestreo sin remplazo de población finita, se tiene que  $\sigma_S = \sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{N_p - n}{N_p - 1}}$ , en donde  $N_p$  es el tamaño de la población, por lo que la variable estandarizada será

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{N_p - n}{N_p - 1}}}$$

En los dos casos anteriores, el valor de  $Z$  correspondiente al de  $\bar{X}$  de la muestra es el que se debe comparar con el valor crítico correspondiente al nivel de significancia fijado, para así aceptar o no la hipótesis nula (prueba de una cola). Si se trata de una prueba de dos colas, el valor de  $Z$  se debe comparar con los dos valores críticos que corresponden al valor de  $\alpha$  seleccionado. En cualquiera de los casos anteriores, el valor o valores críticos se pueden obtener de la tabla 14.1, para valores comunes de  $\alpha$ .

### Ejemplo 16.1

Se sabe que el promedio de calificaciones de una muestra aleatoria de tamaño 100 de los estudiantes de tercer año de ingeniería civil es de 7.6, con una desviación estándar de 0.2. Si  $\mu$  denota la media de la población de esas calificaciones,  $X$ , y si se supone que  $\bar{X}$  tiene distribución normal, probar la hipótesis

$\mu = 7.65$  en contra de la hipótesis alternativa  $\mu \neq 7.65$ , usando un nivel de significancia de

- a. 0.05
- b. 0.01

Para la solución se deben considerar las hipótesis

$$H_0 : \mu = 7.65$$

$$H_1 : \mu \neq 7.65$$

Puesto que  $\mu \neq 7.65$  incluye valores menores y mayores de 7.65, se trata de una prueba de dos colas.

La estadística bajo consideración es el promedio aritmético,  $\bar{X}$ , de la muestra, que se supone extraída de una población infinita. La distribución muestral de  $\bar{X}$  tiene media  $\mu_{\bar{X}} = \mu$ , y desviación estándar  $\sigma_{\bar{X}} = \sigma/\sqrt{n}$ , en donde  $\mu$  y  $\sigma$  denotan, respectivamente, la media y la desviación estándar de la población de calificaciones.

Bajo la hipótesis  $H_0$  (considerándola verdadera), se tiene que

$$\mu_{\bar{X}} = 7.65 = \mu$$

y utilizando la desviación estándar de la muestra como una estimación de  $\sigma$ , lo cual se supone razonable por tratarse de una muestra grande,

$$\sigma_{\bar{X}} = \sigma/\sqrt{n} = 0.2/\sqrt{100} = 0.2/10 = 0.02$$

a. Para la prueba de dos colas a un nivel de significancia de 0.05 se establece la siguiente regla de decisión

Aceptar  $H_0$  si el valor  $Z$  correspondiente al valor del promedio de la muestra se encuentra dentro del intervalo de -1.96 a 1.96 (tabla 14.1).  
En caso contrario, rechazar  $H_0$ .

Puesto que

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{7.6 - 7.65}{0.02} = -2.5$$

se encuentra fuera del rango de -1.96 a 1.96, se rechaza la hipótesis  $H_0$  a un nivel de significancia de 0.05.

b. Si el nivel de significancia es 0.01, el intervalo de -1.96 a 1.96 de la regla de decisión del inciso a se reemplaza por el de -2.58 a 2.58 tabla (14.1). Entonces, puesto que el valor muestral  $Z = -2.5$  se encuentra dentro de este intervalo, se acepta la hipótesis  $H_0$  a un nivel de significancia de 0.01.

### Ejemplo 16.2

La resistencia media a la ruptura de cables de acero fabricados por la empresa X es de 905 kg. Una empresa consultora sugiere a X que cambie su proceso de manufactura, con lo cual incrementará la resistencia de sus cables. Se prueba el nuevo proceso, y se extrae una muestra aleatoria de 50 cables, obteniéndose para ellos una resistencia promedio de 926 kg, con des-

viación estándar igual a 42 kg. ¿Se puede considerar que el nuevo proceso realmente incrementa la resistencia, con un nivel de confianza de 99%?

En este caso, se debe plantear una prueba de hipótesis de una cola, para la cual

$$H_0 : \mu = 905 \text{ kg}$$

$$H_1 : \mu > 905 \text{ kg}$$

Puesto que el tamaño de la muestra es suficientemente grande, se puede aproximar la distribución muestral de la resistencia promedio mediante una normal, y estimar el valor de  $\sigma$  de la población mediante  $S_X$  de la muestra.

Considerando a la población infinita, y suponiendo como verdadera a  $H_0$ , se tiene que

$$\mu_{\bar{X}} = \mu = 905 \text{ kg}$$

$$\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{42}{\sqrt{50}} = 5.94$$

Para la prueba de una cola a un nivel de significancia de  $\alpha = 1 - (1 - \alpha) = 1 - 0.99 = 0.01$ , la regla de decisión es

Aceptar  $H_0$  si el valor estandarizado de  $\bar{X}$  de la muestra es menor o igual a  $z_c = 2.326$  (tabla 14.1); en caso contrario, rechazar  $H_0$ .

En virtud de que

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu_{\bar{X}}}{\sigma_{\bar{X}}} = \frac{926 - 905}{5.94} = 3.535$$

es mayor de 2.326, se rechaza  $H_0$  a un nivel de significancia de 1%, concluyéndose que en realidad el nuevo proceso sí incrementa la resistencia de los cables.

#### 17. Pruebas de diferencias de medias

Sean  $\bar{X}$  y  $\bar{Y}$  los promedios aritméticos obtenidos de dos muestras de tamaños  $n_X$  y  $n_Y$ , extraídas respectivamente de dos poblaciones con medias  $\mu_X$  y  $\mu_Y$ , y desviaciones estándar  $\sigma_X$  y  $\sigma_Y$ . Se trata de probar la hipótesis nula,  $H_0$ , de que no existe diferencia entre las medias, es decir, que  $\mu_X = \mu_Y$ . Si  $n_X$  y  $n_Y$  son suficientemente grandes ( $>30$ ), la distribución muestral de las diferencias de los promedios es aproximadamente normal. Dicha distribución muestral es rigurosamente normal si las variables aleatorias  $X$  y  $Y$  asociadas a la población tienen distribución normal, aunque  $n_X$  y  $n_Y$  sean menores de 30. Para esta distribución muestral, la variable estandarizada  $Z$ , que se compara con los valores críticos correspondientes, se encuentra dada por

$$Z = \frac{X - Y - \mu_{\bar{X}-\bar{Y}}}{\sigma_{\bar{X}-\bar{Y}}} = \frac{X - Y - 0}{\sigma_{\bar{X}-\bar{Y}}} = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sigma_{\bar{X}-\bar{Y}}}$$

con la cual se puede probar la hipótesis nula  $H_0$  en contra de otras hipótesis alternativas,  $H_1$ , a un nivel apropiado de significancia.

## Ejemplo 17.1

En el laboratorio de pruebas de una empresa fabricante de aparatos electrónicos se ensayaron dos marcas de transistores, A y B, de características similares, con objeto de comprobar su ganancia de voltaje. Se tomaron muestras aleatorias de 100 transistores de cada marca, arrojando una ganancia promedio de 31 decibeles, con desviación estándar de 0.3 decibeles para la marca A, y 30.9 decibeles de ganancia promedio, con desviación estándar de 0.4 decibeles para la otra. ¿Existe una diferencia significativa entre las ganancias en voltaje de los transistores a un nivel de significancia de

a. 0.05

b. 0.01?

Si  $\mu_A$  y  $\mu_B$  son las medias respectivas de las dos poblaciones infinitas a las que corresponden las muestras, la prueba de hipótesis adopta la forma siguiente:

$$H_0 : \mu_A = \mu_B$$

$$H_1 : \mu_A \neq \mu_B$$

Entonces, el valor de  $Z$  es, bajo la hipótesis  $H_0$ :

$$Z = \frac{\bar{X}_A - \bar{X}_B}{\sigma_{\bar{X}_A - \bar{X}_B}} = \frac{\bar{X}_A - \bar{X}_B}{\sqrt{\frac{\sigma_A^2}{n_A} + \frac{\sigma_B^2}{n_B}}} = \frac{31 - 30.9}{\sqrt{\frac{(0.3)^2}{100} + \frac{(0.4)^2}{100}}} = 2$$

a. Puesto que se trata de una prueba de dos colas a un nivel de significancia de 0.05, la diferencia es significativa si el valor de  $Z$  se encuentra fuera del intervalo de -1.96 a 1.96. Como este es el caso, puede concluirse que efectivamente existe diferencia significativa en la ganancia en voltaje de los transistores.

b. Si la prueba es a un nivel de significancia de 0.01, la diferencia es significativa si  $Z$  se encuentra fuera del rango de -2.58 a 2.58. Partiendo del hecho de que  $Z = 2$ , la diferencia entre las ganancias es producto del azar, y se acepta la hipótesis de que ambos tipos de transistores tienen igual ganancia media en voltaje a un nivel de confianza de 99 por ciento.

### Ejemplo 17.2

La estatura promedio de 50 estudiantes varones tomados al azar que participan en actividades deportivas es de 173 cm, con desviación estándar de 6.3 cm. Otra muestra aleatoria de 50 estudiantes varones que no participan en ese tipo de actividades tiene promedio de estatura igual a 171 cm, con desviación estándar igual a 7.1 cm. Probar la hipótesis de que los estudiantes varones que practican deportes son más altos que los que no lo hacen, a un nivel de significancia de 0.05.

Se debe decidir entre las hipótesis

$$H_0 : \mu_X = \mu_Y$$

$$H_1 : \mu_X > \mu_Y$$

siendo  $X$  la variable aleatoria asociada a la población infinita de estaturas de alumnos que practican deportes, y  $Y$  la asociada a la de estudiantes que no lo hacen, que también es infinita.

Bajo la hipótesis  $H_0$ , se tiene que

$$\mu_{\bar{X}-\bar{Y}} = 0$$

$$\sigma_{\bar{X}-\bar{Y}} = \sqrt{\frac{\sigma_X^2}{n_X} + \frac{\sigma_Y^2}{n_Y}} = \sqrt{\frac{(6.3)^2}{50} + \frac{(7.1)^2}{50}} = 1.3424$$

Entonces, el valor de  $Z$  es

$$Z = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sigma_{\bar{X}-\bar{Y}}} = \frac{173 - 171}{1.3424} = \frac{2}{1.3424} = 1.489$$

Puesto que se trata de una prueba de hipótesis de una cola, a un nivel  $\alpha = 0.05$ , se rechazaría  $H_0$  si el valor de  $Z$  muestral fuera mayor del valor crítico para dicho nivel, el cual es  $Z_c = 1.645$ . Puesto que  $Z < Z_c$ , en este caso se concluye que la diferencia en las estaturas de ambos grupos de estudiantes se debe únicamente al azar.

### 3.4 Muestras pequeñas

Como ya se indicó, para muestras grandes ( $n \geq 30$ ) las distribuciones muestrales de muchas estadísticas son aproximadamente normales, siendo tanto mejor la aproximación cuanto mayor es el tamaño de  $n$ . Sin embargo, cuando se trata de muestras en las que  $n < 30$ ; llamadas *muestras pequeñas*, la aproximación no es suficientemente buena, por lo que resulta necesario introducir una teoría apropiada para su estudio.

Al estudio de las distribuciones muestrales de las estadísticas para muestras pequeñas se le llama *teoría estadística de las muestras pequeñas*. Existen al respecto tres distribuciones importantes: *Ji cuadrada*, *F* y *t de Student*.

#### 3.4.1 Distribución Ji cuadrada ( $\chi^2$ )

Hasta ahora solo se ha tratado la distribución muestral de la media. En esta sección se verá lo concerniente a la distribución muestral de la variancia,  $S_x^2$ , para muestras aleatorias extraídas de poblaciones normales. Puesto que  $S_x$  no puede ser negativa, es de esperarse que su distribución muestral no sea una curva normal, ya que esta

tiene ordenadas mayores de cero en el lado de las abscisas negativas. De hecho, la estadística  $S_X^2$  se puede estudiar si se consideran muestras aleatorias de tamaño  $n$  extraídas de una población normal con desviación estándar  $\sigma_X$  y si para cada muestra se calcula el valor de la estadística,

$$\chi^2 = \frac{n \cdot S_X^2}{\sigma^2} \quad (3.14)$$

donde  $S_X^2$  es la variancia de la muestra.

El número de grados de libertad,  $\nu$ , de una estadística se define como

$$\nu = n - k$$

siendo  $n$  el tamaño de la muestra y  $k$  el número de parámetros de la población que deben estimarse a partir de ella.

La distribución muestral de la estadística  $\chi^2$  está dada por la ecuación

$$f(\chi^2) = U \chi^{\nu-2} e^{-1/2 \chi^2}$$

en la que  $U$  es una constante que hace que el área total bajo la curva resulte igual a uno, y  $\nu = n - 1$  es el número de grados de libertad. Esta distribución se llama *Ji cuadrada*, misma que se presenta en la fig 21 para distintos valores de  $\nu$ .

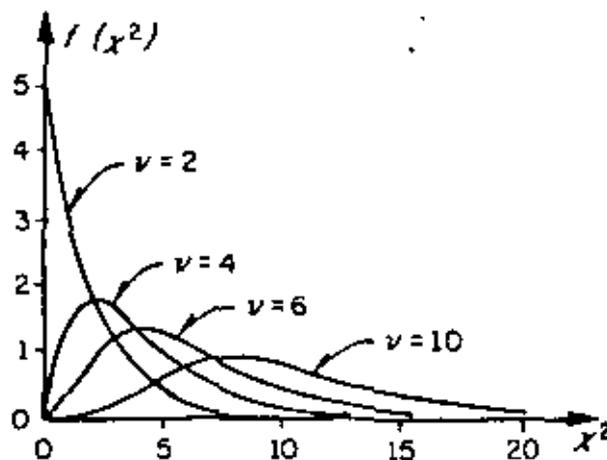


Fig 21. Distribución Ji cuadrada para distintos valores de  $\nu$

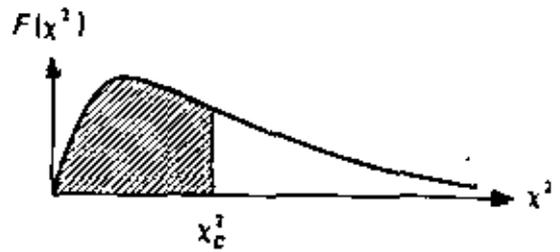


TABLA 8. VALORES CRITICOS  $\chi^2_c$

| $\nu$ | $\chi^2_{.995}$ | $\chi^2_{.99}$ | $\chi^2_{.975}$ | $\chi^2_{.95}$ | $\chi^2_{.90}$ | $\chi^2_{.75}$ | $\chi^2_{.50}$ | $\chi^2_{.25}$ | $\chi^2_{.10}$ | $\chi^2_{.05}$ | $\chi^2_{.025}$ | $\chi^2_{.01}$ | $\chi^2_{.005}$ |
|-------|-----------------|----------------|-----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|-----------------|----------------|-----------------|
| 1     | 7.88            | 6.63           | 5.02            | 3.84           | 2.71           | 1.32           | .455           | .102           | .016           | .0039          | .0010           | .0002          | .0000           |
| 2     | 10.6            | 9.21           | 7.38            | 5.99           | 4.61           | 2.77           | 1.39           | .575           | .211           | .103           | .0506           | .0201          | .0100           |
| 3     | 12.8            | 11.3           | 9.35            | 7.81           | 6.25           | 4.11           | 2.37           | 1.21           | .584           | .352           | .216            | .115           | .072            |
| 4     | 14.9            | 13.3           | 11.1            | 9.49           | 7.76           | 5.39           | 3.36           | 1.92           | 1.06           | .711           | .483            | .297           | .207            |
| 5     | 16.7            | 15.2           | 12.8            | 11.15          | 9.2            | 6.63           | 4.35           | 2.67           | 1.61           | 1.15           | .831            | .554           | .413            |
| 6     | 18.5            | 16.8           | 14.4            | 12.6           | 10.6           | 7.84           | 5.35           | 3.45           | 2.20           | 1.64           | 1.24            | .872           | .676            |
| 7     | 20.3            | 18.5           | 16.0            | 14.1           | 12.0           | 9.04           | 6.35           | 4.25           | 2.83           | 2.18           | 1.69            | 1.24           | .989            |
| 8     | 22.0            | 20.1           | 17.5            | 15.5           | 13.4           | 10.2           | 7.34           | 5.07           | 3.49           | 2.73           | 2.18            | 1.65           | 1.34            |
| 9     | 23.6            | 21.7           | 19.0            | 16.9           | 14.7           | 11.4           | 8.34           | 5.90           | 4.17           | 3.33           | 2.70            | 2.09           | 1.73            |
| 10    | 25.2            | 23.2           | 20.5            | 18.3           | 16.0           | 12.5           | 9.34           | 6.74           | 4.87           | 3.94           | 3.25            | 2.56           | 2.16            |
| 11    | 26.8            | 24.7           | 21.9            | 19.7           | 17.3           | 13.7           | 10.35          | 7.57           | 5.58           | 4.57           | 3.82            | 3.05           | 2.60            |
| 12    | 28.3            | 26.2           | 23.2            | 21.0           | 18.5           | 14.8           | 11.3           | 8.44           | 6.30           | 5.23           | 4.40            | 3.57           | 3.07            |
| 13    | 29.8            | 27.7           | 24.7            | 22.4           | 19.8           | 16.0           | 12.3           | 9.30           | 7.04           | 5.89           | 5.01            | 4.11           | 3.57            |
| 14    | 31.3            | 29.1           | 26.1            | 23.7           | 21.1           | 17.2           | 13.3           | 10.2           | 7.79           | 6.57           | 5.63            | 4.66           | 4.07            |
| 15    | 32.7            | 30.6           | 27.5            | 25.1           | 22.3           | 18.2           | 14.3           | 11.0           | 8.55           | 7.26           | 6.25            | 5.22           | 4.60            |
| 16    | 34.3            | 32.0           | 28.8            | 26.3           | 23.5           | 19.4           | 15.3           | 11.9           | 9.31           | 7.96           | 6.91            | 5.81           | 5.14            |
| 17    | 35.7            | 33.4           | 30.2            | 27.6           | 24.8           | 20.5           | 16.3           | 12.8           | 10.1           | 8.67           | 7.56            | 6.41           | 5.70            |
| 18    | 37.2            | 34.8           | 31.5            | 28.9           | 26.0           | 21.6           | 17.3           | 13.7           | 10.9           | 9.39           | 8.23            | 7.01           | 6.26            |
| 19    | 38.6            | 36.2           | 32.9            | 30.1           | 27.2           | 22.7           | 18.3           | 14.6           | 11.73          | 10.1           | 8.91            | 7.63           | 6.84            |
| 20    | 40.0            | 37.6           | 34.2            | 31.4           | 28.45          | 23.8           | 19.3           | 15.5           | 12.4           | 10.9           | 9.59            | 8.26           | 7.43            |
| 21    | 41.4            | 38.8           | 35.6            | 32.7           | 29.6           | 24.9           | 20.3           | 16.3           | 13.2           | 11.6           | 10.3            | 8.90           | 8.02            |
| 22    | 42.8            | 40.3           | 36.8            | 33.9           | 30.8           | 26.0           | 21.3           | 17.2           | 14.0           | 12.3           | 11.0            | 9.54           | 8.64            |
| 23    | 44.2            | 41.6           | 38.1            | 35.2           | 32.0           | 27.1           | 22.3           | 18.1           | 14.8           | 13.1           | 11.7            | 10.2           | 9.26            |
| 24    | 45.6            | 43.0           | 39.4            | 36.4           | 33.2           | 28.2           | 23.3           | 19.0           | 15.7           | 13.8           | 12.4            | 10.9           | 9.89            |
| 25    | 46.9            | 44.3           | 40.6            | 37.7           | 34.4           | 29.3           | 24.3           | 19.9           | 16.5           | 14.5           | 13.15           | 11.5           | 10.5            |
| 26    | 48.3            | 45.6           | 41.9            | 38.9           | 35.6           | 30.4           | 25.3           | 20.8           | 17.3           | 15.4           | 13.8            | 12.2           | 11.2            |
| 27    | 49.6            | 47.0           | 43.2            | 40.1           | 36.7           | 31.5           | 26.3           | 21.7           | 18.1           | 16.2           | 14.6            | 12.9           | 11.8            |
| 28    | 51.0            | 48.3           | 44.5            | 41.3           | 37.9           | 32.6           | 27.3           | 22.7           | 18.9           | 16.9           | 15.3            | 13.6           | 12.3            |
| 29    | 52.3            | 49.6           | 45.7            | 42.5           | 39.1           | 33.7           | 28.3           | 23.6           | 19.8           | 17.7           | 16.0            | 14.3           | 13.1            |
| 30    | 53.7            | 50.9           | 47.0            | 43.8           | 40.3           | 34.8           | 29.3           | 24.5           | 20.6           | 18.5           | 16.8            | 15.0           | 13.8            |
| 40    | 66.8            | 63.7           | 59.3            | 55.8           | 51.8           | 45.7           | 39.3           | 33.7           | 29.1           | 26.5           | 24.4            | 22.2           | 20.7            |
| 50    | 79.5            | 76.2           | 71.4            | 67.5           | 63.2           | 56.3           | 49.3           | 43.0           | 37.7           | 34.8           | 32.4            | 29.7           | 28.0            |
| 60    | 92.0            | 88.4           | 83.3            | 79.1           | 74.4           | 67.0           | 59.3           | 52.3           | 46.5           | 43.2           | 40.5            | 37.5           | 35.5            |
| 70    | 104.2           | 100.4          | 95.0            | 90.5           | 85.5           | 77.6           | 69.3           | 61.7           | 55.3           | 51.7           | 48.8            | 45.4           | 43.3            |
| 80    | 116.3           | 112.3          | 106.6           | 101.9          | 96.6           | 88.1           | 79.3           | 71.1           | 64.3           | 60.4           | 57.2            | 53.5           | 51.2            |
| 90    | 128.3           | 124.1          | 118.1           | 113.1          | 107.6          | 98.6           | 89.3           | 80.6           | 73.3           | 69.1           | 65.6            | 61.8           | 59.2            |
| 100   | 140.2           | 135.8          | 129.6           | 124.3          | 118.5          | 109.1          | 99.3           | 90.12          | 82.4           | 77.9           | 74.2            | 70.1           | 67.3            |

No obstante que la distribución Ji cuadrada solo se ha presentado en el estudio de las muestras pequeñas, cabe aclarar que es válida para aquellas mayores de 30 si la variable aleatoria involucrada tiene distribución normal.

### 3.4.1.1 Intervalo de confianza para la variancia

Tal como se hizo para la distribución normal, se pueden establecer intervalos de confianza para la variancia de la población en términos de la variancia de una muestra extraída de ella, a un nivel de confianza dado  $1 - \alpha$ , si se hace uso de los valores críticos  $\chi^2_{\alpha}$  de la tabla 8. Por lo tanto, un intervalo de confianza para la estadística  $\chi^2$ , estaría dado por

$$\chi^2_{\alpha} < \frac{n S_x^2}{\sigma^2} < \chi^2_{\alpha}$$

donde  $\chi^2_{\alpha}$  y  $\chi^2_{\alpha}$  son los valores críticos para los cuales el  $(1 - \alpha)/2$  por ciento del área se encuentra en los extremos izquierdo y derecho de la distribución, respectivamente.

Con base en lo anterior, se concluye que

$$\frac{n S_x^2}{\chi^2_{\alpha}} < \sigma^2 < \frac{n S_x^2}{\chi^2_{\alpha}}$$

es un intervalo de confianza para estimar a  $\sigma^2$  a un nivel de confianza  $1 - \alpha$ .

### 3.4.1.2 Prueba de hipótesis para la variancia

La prueba de hipótesis para la variancia de una población normal se efectúa calculando el valor de la estadística  $\chi^2$  y estableciendo las hipótesis  $H_0$  y  $H_1$  apropiadas, es decir, se adoptan reglas de decisión similares a las usadas para la estadística Z.

#### Ejemplo

La variancia del tiempo de elaboración de cierto producto es igual a 40 min; sin embargo, su proceso de manufactura se modifica y se toma una muestra de

veinte tiempos, para la cual la variancia resulta ser igual a 62 min. ¿Es significativo el aumento del tiempo de elaboración a un nivel de significancia de

- a) 0.05
- b) 0.01?

Se debe decidir de entre las hipótesis

$$H_0 : \sigma^2 = 40 \text{ min}$$

$$H_1 : \sigma^2 > 40 \text{ min}$$

Suponiendo que la hipótesis nula es correcta, el valor de la estadística  $\chi^2$  para la muestra considerada es

$$\chi^2 = \frac{n S_x^2}{\sigma^2} = \frac{(20)(62)}{40} = 31$$

a) Como se trata de una prueba de una cola, la hipótesis  $H_0$  se rechazaría si el valor de la estadística  $\chi^2$  fuera mayor que el de  $\chi^2$  para un nivel de significancia igual a 0.05, el cual, para  $\nu = 20 - 1 = 19$  grados de libertad resulta ser 30.1 (tabla 8). Como  $31 > 30.1$ ,  $H_0$  se rechaza a un nivel de significancia de 0.05.

b) En este caso, el valor de  $\chi^2$  para un nivel de significancia de 0.01 y 19 grados de libertad es igual a 36.2. Puesto que  $31 < 36.2$ , se acepta  $H_0$  a un nivel de significancia de 0.01.

### 3.4.2 Distribución F

Al efectuar la prueba de hipótesis de igualdad de medias para muestras pequeñas, en la siguiente sección se supondrá que las variancias de las poblaciones a las que corresponden tales muestras son iguales. Por lo tanto, es necesario probar antes si tal suposición es correcta. Para ello, debe considerarse que si  $S_x^2$ ,  $n_x$  y  $S_y^2$ ,  $n_y$  son respectivamente la variancia y el tamaño de dos muestras extraídas de poblaciones normales que tienen igual variancia, entonces

$$F = \frac{S_x^2}{S_y^2} \tag{3.15}$$

TABLA 9. VALORES  $F_c$  PARA  $\alpha = 0.01$

| $v_2$ = Grados de libertad del denominador | $v_1$ = Grados de libertad del numerador |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |          |
|--|--|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|----------|
|  | 1  | 2     | 3     | 4     | 5     | 6     | 7     | 8     | 9     | 10    | 12    | 15    | 20    | 24    | 30    | 40    | 60    | 120   | $\infty$ |
| 1  | 4.052                                    | 5.000 | 5.403 | 5.625 | 5.764 | 5.859 | 5.928 | 5.982 | 6.023 | 6.056 | 6.106 | 6.157 | 6.209 | 6.235 | 6.261 | 6.287 | 6.313 | 6.339 | 6.366    |
| 2  | 98.50                                    | 99.00 | 99.20 | 99.20 | 99.30 | 99.30 | 99.40 | 99.40 | 99.40 | 99.40 | 99.40 | 99.40 | 99.40 | 99.50 | 99.50 | 99.50 | 99.50 | 99.50 | 99.50    |
| 3  | 34.10                                    | 30.80 | 29.50 | 28.70 | 28.20 | 27.90 | 27.70 | 27.50 | 27.30 | 27.20 | 27.10 | 26.90 | 26.70 | 26.60 | 26.50 | 26.40 | 26.30 | 26.20 | 26.10    |
| 4  | 21.20                                    | 18.00 | 16.70 | 16.00 | 15.50 | 15.50 | 15.00 | 14.80 | 14.70 | 14.50 | 14.40 | 14.20 | 14.00 | 13.90 | 13.80 | 13.70 | 13.70 | 13.60 | 13.50    |
| 5  | 16.30                                    | 13.30 | 12.10 | 11.40 | 11.00 | 10.70 | 10.50 | 10.30 | 10.20 | 10.10 | 9.89  | 9.72  | 9.55  | 9.47  | 9.38  | 9.29  | 9.20  | 9.11  | 9.02     |
| 6  | 13.70                                    | 10.90 | 9.77  | 9.15  | 8.75  | 8.47  | 8.26  | 8.10  | 7.98  | 7.87  | 7.72  | 7.56  | 7.40  | 7.31  | 7.23  | 7.14  | 7.06  | 6.97  | 6.87     |
| 7  | 12.20                                    | 9.55  | 8.45  | 7.85  | 7.46  | 7.19  | 6.99  | 6.84  | 6.72  | 6.62  | 6.47  | 6.31  | 6.16  | 6.07  | 5.99  | 5.91  | 5.82  | 5.74  | 5.65     |
| 8  | 11.30                                    | 8.65  | 7.59  | 7.01  | 6.63  | 6.37  | 6.17  | 6.03  | 5.91  | 5.81  | 5.67  | 5.52  | 5.36  | 5.28  | 5.20  | 5.12  | 5.03  | 4.95  | 4.83     |
| 9  | 10.60                                    | 8.02  | 6.99  | 6.42  | 6.06  | 5.81  | 5.61  | 5.47  | 5.35  | 5.26  | 5.11  | 4.96  | 4.81  | 4.73  | 4.65  | 4.57  | 4.48  | 4.40  | 4.31     |
| 10   | 10.00                                    | 7.56  | 6.55  | 5.99  | 5.64  | 5.39  | 5.20  | 5.06  | 4.94  | 4.85  | 4.71  | 4.56  | 4.41  | 4.33  | 4.25  | 4.17  | 4.08  | 4.00  | 3.91     |
| 11   | 9.66                                     | 7.22  | 6.22  | 5.68  | 5.32  | 5.07  | 4.89  | 4.74  | 4.63  | 4.54  | 4.40  | 4.25  | 4.10  | 4.03  | 3.93  | 3.86  | 3.78  | 3.69  | 3.60     |
| 12   | 9.33                                     | 6.93  | 5.95  | 5.41  | 5.06  | 4.82  | 4.64  | 4.50  | 4.39  | 4.30  | 4.16  | 4.01  | 3.86  | 3.78  | 3.70  | 3.62  | 3.54  | 3.45  | 3.36     |
| 13   | 9.07                                     | 6.70  | 5.74  | 5.21  | 4.86  | 4.62  | 4.44  | 4.30  | 4.19  | 4.10  | 3.96  | 3.82  | 3.66  | 3.59  | 3.51  | 3.43  | 3.34  | 3.25  | 3.17     |
| 14   | 8.86                                     | 6.51  | 5.56  | 5.04  | 4.70  | 4.46  | 4.28  | 4.14  | 4.03  | 3.94  | 3.80  | 3.66  | 3.51  | 3.43  | 3.35  | 3.27  | 3.18  | 3.09  | 3.00     |
| 15   | 8.68                                     | 6.36  | 5.42  | 4.89  | 4.56  | 4.32  | 4.14  | 4.00  | 3.89  | 3.80  | 3.67  | 3.52  | 3.37  | 3.29  | 3.21  | 3.13  | 3.05  | 2.95  | 2.87     |
| 16   | 8.53                                     | 6.23  | 5.29  | 4.77  | 4.43  | 4.20  | 4.03  | 3.89  | 3.78  | 3.69  | 3.55  | 3.40  | 3.26  | 3.18  | 3.10  | 3.02  | 2.93  | 2.84  | 2.76     |
| 17   | 8.40                                     | 6.11  | 5.19  | 4.67  | 4.34  | 4.10  | 3.93  | 3.79  | 3.68  | 3.59  | 3.46  | 3.31  | 3.16  | 3.08  | 3.00  | 2.92  | 2.83  | 2.75  | 2.66     |
| 18   | 8.29                                     | 6.01  | 5.09  | 4.58  | 4.25  | 4.01  | 3.84  | 3.71  | 3.60  | 3.51  | 3.37  | 3.23  | 3.08  | 3.00  | 2.92  | 2.84  | 2.75  | 2.66  | 2.57     |
| 19   | 8.19                                     | 5.93  | 5.01  | 4.50  | 4.17  | 3.94  | 3.77  | 3.63  | 3.52  | 3.43  | 3.30  | 3.15  | 3.00  | 2.92  | 2.84  | 2.76  | 2.67  | 2.58  | 2.49     |
| 20   | 8.10                                     | 5.85  | 4.94  | 4.43  | 4.10  | 3.87  | 3.70  | 3.56  | 3.46  | 3.37  | 3.23  | 3.09  | 2.94  | 2.86  | 2.78  | 2.69  | 2.61  | 2.52  | 2.42     |
| 21   | 8.03                                     | 5.79  | 4.87  | 4.36  | 4.04  | 3.81  | 3.64  | 3.50  | 3.41  | 3.31  | 3.17  | 3.03  | 2.88  | 2.80  | 2.72  | 2.64  | 2.55  | 2.46  | 2.36     |
| 22   | 7.95                                     | 5.72  | 4.83  | 4.31  | 3.99  | 3.76  | 3.59  | 3.45  | 3.35  | 3.26  | 3.12  | 2.98  | 2.83  | 2.75  | 2.67  | 2.58  | 2.50  | 2.40  | 2.31     |
| 23   | 7.88                                     | 5.66  | 4.76  | 4.26  | 3.94  | 3.71  | 3.54  | 3.41  | 3.30  | 3.21  | 3.07  | 2.93  | 2.78  | 2.70  | 2.62  | 2.54  | 2.45  | 2.35  | 2.26     |
| 24   | 7.82                                     | 5.61  | 4.72  | 4.22  | 3.90  | 3.67  | 3.50  | 3.36  | 3.26  | 3.17  | 3.03  | 2.89  | 2.74  | 2.66  | 2.58  | 2.49  | 2.40  | 2.31  | 2.21     |
| 25   | 7.77                                     | 5.57  | 4.68  | 4.18  | 3.86  | 3.63  | 3.46  | 3.32  | 3.22  | 3.13  | 2.99  | 2.85  | 2.70  | 2.62  | 2.53  | 2.45  | 2.36  | 2.27  | 2.17     |
| 30   | 7.56                                     | 5.39  | 4.51  | 4.02  | 3.70  | 3.46  | 3.30  | 3.17  | 3.07  | 2.98  | 2.84  | 2.71  | 2.54  | 2.47  | 2.39  | 2.29  | 2.20  | 2.11  | 2.01     |
| 40   | 7.31                                     | 5.18  | 4.31  | 3.83  | 3.51  | 3.29  | 3.12  | 2.99  | 2.89  | 2.80  | 2.66  | 2.52  | 2.37  | 2.29  | 2.20  | 2.11  | 2.02  | 1.92  | 1.80     |
| 60   | 7.08                                     | 4.98  | 4.14  | 3.65  | 3.34  | 3.12  | 2.95  | 2.82  | 2.72  | 2.63  | 2.50  | 2.35  | 2.20  | 2.12  | 2.03  | 1.94  | 1.84  | 1.73  | 1.60     |
| 120  | 6.65                                     | 4.79  | 3.95  | 3.48  | 3.17  | 2.96  | 2.79  | 2.66  | 2.56  | 2.47  | 2.34  | 2.19  | 2.03  | 1.95  | 1.86  | 1.76  | 1.66  | 1.53  | 1.38     |
| $\infty$                                   | 6.63                                     | 4.61  | 3.78  | 3.32  | 3.02  | 2.80  | 2.64  | 2.51  | 2.41  | 2.32  | 2.18  | 2.04  | 1.88  | 1.79  | 1.70  | 1.59  | 1.47  | 1.32  | 1.00     |

87

resulta ser el valor de una variable aleatoria (estadística) que tiene distribución  $F$ , con parámetros  $\nu_X = n_X - 1$  y  $\nu_Y = n_Y - 1$ . Esta distribución (fig 22) cuenta con dos parámetros,  $\nu_X$  y  $\nu_Y$ , que son los grados de libertad que corresponden a la variancia del numerador y del denominador de la ec 3.15, respectivamente. Cuando se hace referencia a una distribución  $F$  en particular, siempre se dan primero los grados de libertad para la variancia del numerador; es decir,  $F(\nu_X, \nu_Y)$ . En la tabla 9 se presentan los valores críticos  $F_c$  para distintos valores de  $\nu_X$  y  $\nu_Y$  y un nivel de significancia de 0.01. Cuando los grados de libertad  $\nu_X$  o  $\nu_Y$  no se encuentren en dicha tabla, el valor de  $F$  se puede obtener mediante interpolación lineal. Si se desea probar la hipótesis a otros niveles de significancia, es factible emplear las tablas de la distribución  $F$  (refs 9 y 11).

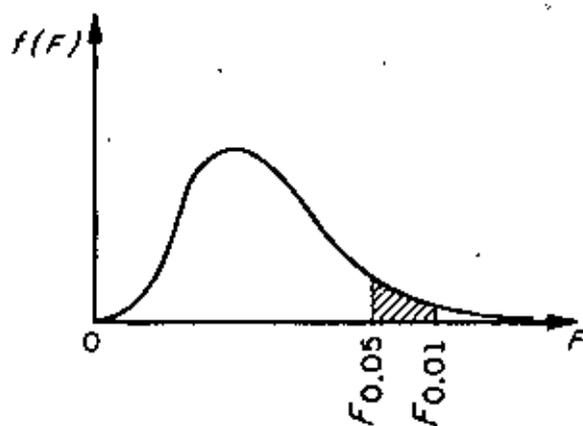


Fig 22. Distribución  $F$ .

De acuerdo con lo anterior, se puede probar la hipótesis nula

$$H_0: \sigma_X^2 = \sigma_Y^2$$

en contra de alguna hipótesis alternativa adecuada haciendo uso del hecho de que el cociente  $S_X^2/S_Y^2$  es una estadística que tiene distribución  $F$ .

**Ejemplo**

Una empresa manufacturera de cartón prensado va a decidir acerca del empleo de una prensadora A o una B a fin de obtener un grosor determinado en su producto. El problema estriba en que ambas prensadoras proporcionan grosores muy similares, es decir, que la variancia de los grosores para las dos máquinas es la misma. Para decidir acertadamente, se toma una muestra aleatoria de 31 cartones prensados por la máquina A y otra de 41 por la B. Como las variancias del grosor para los cartones de las muestras resul-

tan ser de 12 y de 5 micras, respectivamente, se establecen las hipótesis

$$H_0: \sigma_A^2 = \sigma_B^2$$

$$H_1: \sigma_A^2 > \sigma_B^2$$

con objeto de probarlas a un nivel de significancia de 0.01.

El valor de la estadística  $F$  resulta

$$F = \frac{S_A^2}{S_B^2} = \frac{12}{5} = 2.4$$

Puesto que  $\nu_A = 31 - 1 = 30$  y  $\nu_B = 41 - 1 = 40$ , en la tabla 9 se puede ver que para un nivel de significancia de 0.01 el valor,  $F_{\alpha}$ , de  $F(30, 40)$  es 2.11. De acuerdo con estos valores, la hipótesis  $H_0$  se rechazaría si el valor de  $F$  fuera mayor que  $F_{\alpha}(30, 40)$ .

Puesto que lo anterior resulta ser cierto, se rechaza  $H_0$ , concluyéndose que la prensadora B sería la mejor elección.

### 3.4.3 Distribución $t$ de Student

Si se consideran muestras de tamaño  $n$  extraídas de una población normal con media  $\mu$  y variancia desconocida, para cada muestra se puede calcular la estadística  $T$  definida mediante la fórmula

$$T = \frac{\bar{X} - \mu}{S_x} \sqrt{n-1} \quad (3.16)$$

donde  $\bar{X}$  es el promedio y  $S_x$  la desviación estándar de la muestra.

La distribución muestral de  $T$  (fig 23) está dada por la ecuación

$$f(t) = \frac{U}{\left(1 + \frac{t^2}{v}\right)^{(v+1)/2}} \quad \leftarrow \text{ojo: } v \text{ es el exponente}$$

en la que  $U$  es una constante que hace que el área bajo la curva sea igual a uno, y  $v = n - 1$  es el número de grados de libertad.

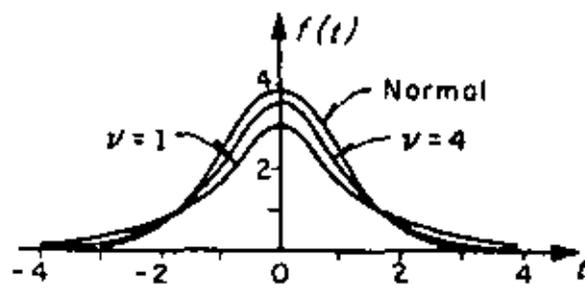


Fig 23. Distribución t de Student para distintos valores de v

En la fig 23 se aprecia que conforme v (o n, el tamaño de la muestra) aumenta, la distribución de f(t) se aproxima a la distribución normal.

### 3.4.3.1 Límites e intervalos de confianza

De manera similar a como se hizo con la distribución normal, es posible estimar los límites de confianza de la media,  $\mu$ , de una población mediante los valores críticos,  $t_c$ , de la distribución t, que dependen del tamaño de la muestra y del nivel de confianza deseado, encontrándose dichos valores en la tabla 10.

Así pues,

$$-t_c < \frac{\bar{X} - \mu}{S_x} \sqrt{n-1} < t_c$$

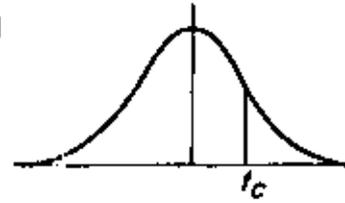
representa un intervalo de confianza para t, a partir del cual se puede estimar que  $\mu$  se encuentra dentro del intervalo

$$\bar{X} - t_c \frac{\sigma_x}{\sqrt{n-1}} < \mu < \bar{X} + t_c \frac{\sigma_x}{\sqrt{n-1}}$$

En términos generales, los límites de confianza para la media de la población se representan como

$$\bar{X} \pm t_c \frac{\sigma_x}{\sqrt{n-1}}$$

TABLA 10. VALORES  $t_c$  PARA LA DISTRIBUCION  
t DE STUDENT



| $\nu$    | $t_{.995}$ | $t_{.99}$ | $t_{.975}$ | $t_{.95}$ | $t_{.90}$ | $t_{.80}$ | $t_{.75}$ | $t_{.70}$ | $t_{.60}$ | $t_{.55}$ |
|----------|------------|-----------|------------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| 1        | 63.66      | 31.82     | 12.71      | 6.31      | 3.07      | 1.376     | 1.000     | .727      | .325      | .158      |
| 2        | 9.92       | 6.96      | 4.30       | 2.92      | 1.89      | 1.061     | .816      | .617      | .289      | .142      |
| 3        | 5.84       | 4.54      | 3.18       | 2.35      | 1.64      | .978      | .765      | .584      | .275      | .138      |
| 4        | 4.60       | 3.75      | 2.78       | 2.13      | 1.53      | .941      | .741      | .569      | .271      | .134      |
| 5        | 4.04       | 3.36      | 2.58       | 2.02      | 1.48      | .920      | .727      | .560      | .267      | .132      |
| 6        | 3.71       | 3.14      | 2.45       | 1.94      | 1.44      | .906      | .718      | .553      | .265      | .131      |
| 7        | 3.50       | 3.00      | 2.36       | 1.91      | 1.43      | .896      | .711      | .549      | .263      | .130      |
| 8        | 3.36       | 2.90      | 2.31       | 1.86      | 1.40      | .889      | .706      | .546      | .262      | .130      |
| 9        | 3.25       | 2.82      | 2.26       | 1.83      | 1.38      | .883      | .703      | .543      | .261      | .129      |
| 10       | 3.17       | 2.76      | 2.23       | 1.81      | 1.37      | .879      | .700      | .542      | .260      | .129      |
| 11       | 3.11       | 2.72      | 2.20       | 1.80      | 1.36      | .876      | .697      | .540      | .260      | .129      |
| 12       | 3.06       | 2.68      | 2.18       | 1.78      | 1.36      | .873      | .695      | .539      | .259      | .128      |
| 13       | 3.01       | 2.65      | 2.16       | 1.77      | 1.36      | .871      | .694      | .538      | .259      | .128      |
| 14       | 2.98       | 2.62      | 2.14       | 1.76      | 1.34      | .868      | .693      | .537      | .258      | .128      |
| 15       | 2.95       | 2.61      | 2.13       | 1.75      | 1.34      | .866      | .691      | .536      | .258      | .128      |
| 16       | 2.92       | 2.58      | 2.12       | 1.75      | 1.34      | .865      | .690      | .535      | .258      | .128      |
| 17       | 2.90       | 2.57      | 2.11       | 1.74      | 1.33      | .863      | .689      | .534      | .257      | .128      |
| 18       | 2.88       | 2.55      | 2.10       | 1.73      | 1.33      | .862      | .688      | .534      | .257      | .128      |
| 19       | 2.87       | 2.54      | 2.09       | 1.73      | 1.33      | .861      | .688      | .533      | .257      | .127      |
| 20       | 2.84       | 2.53      | 2.09       | 1.72      | 1.32      | .860      | .687      | .533      | .257      | .127      |
| 21       | 2.83       | 2.52      | 2.08       | 1.72      | 1.32      | .859      | .686      | .532      | .256      | .127      |
| 22       | 2.82       | 2.51      | 2.07       | 1.72      | 1.32      | .858      | .686      | .532      | .256      | .127      |
| 23       | 2.81       | 2.50      | 2.07       | 1.71      | 1.32      | .858      | .685      | .532      | .256      | .127      |
| 24       | 2.80       | 2.49      | 2.06       | 1.71      | 1.32      | .857      | .685      | .531      | .256      | .127      |
| 25       | 2.79       | 2.48      | 2.06       | 1.71      | 1.32      | .856      | .684      | .531      | .256      | .127      |
| 26       | 2.78       | 2.48      | 2.05       | 1.71      | 1.32      | .856      | .684      | .531      | .256      | .127      |
| 27       | 2.77       | 2.47      | 2.05       | 1.71      | 1.31      | .855      | .683      | .531      | .256      | .127      |
| 28       | 2.76       | 2.47      | 2.05       | 1.70      | 1.31      | .855      | .683      | .530      | .256      | .127      |
| 29       | 2.76       | 2.46      | 2.04       | 1.70      | 1.31      | .854      | .683      | .530      | .256      | .127      |
| 30       | 2.75       | 2.46      | 2.04       | 1.70      | 1.30      | .853      | .683      | .530      | .256      | .127      |
| 40       | 2.70       | 2.43      | 2.02       | 1.68      | 1.30      | .851      | .681      | .529      | .255      | .126      |
| 60       | 2.66       | 2.39      | 2.00       | 1.67      | 1.30      | .848      | .679      | .528      | .254      | .126      |
| 120      | 2.62       | 2.36      | 1.98       | 1.66      | 1.29      | .845      | .677      | .526      | .254      | .126      |
| $\infty$ | 2.58       | 2.33      | 1.96       | 1.645     | 1.28      | .842      | .674      | .524      | .253      | .126      |

### 3.4.3.2 Pruebas de hipótesis

La prueba de hipótesis para la media de una población se puede efectuar con muestras pequeñas en forma análoga a la de muestras de tamaño mayor de 30 si en lugar de utilizar a la estadística  $Z$  se emplea la  $T$ . Entonces, si se consideran dos muestras aleatorias cuyos tamaños, desviaciones estándar y promedios son  $n_X, S_X, \bar{X}$  y  $n_Y, S_Y, \bar{Y}$ , respectivamente, extraídas de poblaciones normales de igual variancia ( $\sigma_X^2 = \sigma_Y^2$ ), se puede probar la hipótesis,  $H_0$ , de que las muestras provienen de una misma población, es decir, de que también sus medias son iguales, utilizando la estadística  $T$  definida por

$$T = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{e \sqrt{\frac{1}{n_X} + \frac{1}{n_Y}}} \quad (3.17)$$

donde

$$e = \sqrt{\frac{n_X S_X^2 + n_Y S_Y^2}{n_X + n_Y - 2}} \quad (3.18)$$

cuya distribución es la  $t$  de Student, con  $\nu = n_X + n_Y - 2$  grados de libertad.

#### Ejemplo

Conforme al plan de desarrollo agrícola de una región, se probó un nuevo fertilizante para maíz. Para ello se escogieron 24 ha de terreno, aplicándose dicho producto a la mitad de ellas. El promedio de producción de maíz en la zona que se usó fertilizante fue de 5.3 ton, con una desviación estándar de 0.40 ton, en tanto que en la otra zona el promedio fue de 5.0 ton, con desviación estándar de 0.36 ton.

De acuerdo con los resultados, ¿se puede concluir que existe un aumento significativo en la producción de maíz al usar fertilizante, si se utiliza un nivel de significancia de

a) 0.01

b) 0.05?

## Solución

Para probar la hipótesis de igualdad de medias es indispensable saber primero si las muestras provienen de dos poblaciones normales de igual variancia. En ese caso, si  $\sigma_X^2$  y  $\sigma_Y^2$  denotan a las variancias de la producción de maíz en la zona tratada y en la no tratada, respectivamente, se debe probar la hipótesis nula  $H_0: \sigma_X^2 = \sigma_Y^2$  en contra de la hipótesis alternativa  $H_1: \sigma_X^2 > \sigma_Y^2$  a los dos niveles de significancia establecidos.

El valor de la estadística  $F$  es, de la ec 3.15,

$$F = \frac{S_X^2}{S_Y^2} = \frac{(0.40)^2}{(0.36)^2} = 1.27$$

y el valor crítico de  $F$  (11, 11), obtenido de la tabla 9 mediante interpolación lineal, resulta 4.47. Por lo tanto, como  $1.27 < 4.47$ , se acepta la hipótesis nula a un nivel de significancia de 0.01.

El valor crítico de  $F$  (11, 11) a un nivel de significancia de 0.05 (ref 9) es 2.82, de ahí que como  $1.27 < 2.82$ , también se acepta la hipótesis  $H_0$ .

Con base en lo anterior, se debe decidir entre las hipótesis

$H_0: \mu_X = \mu_Y$  (la diferencia en los promedios se debe al azar)

$H_1: \mu_X > \mu_Y$  (el fertilizante mejora la producción)

Bajo la hipótesis  $H_0$ , se tiene que

$$\epsilon = \sqrt{\frac{n_X S_X^2 + n_Y S_Y^2}{n_X + n_Y - 2}} = \sqrt{\frac{12(0.40)^2 + 12(0.36)^2}{12 + 12 - 2}} = 0.397$$

por lo cual

$$t = \frac{5.3 - 5.0}{0.397 \sqrt{\frac{1}{12} + \frac{1}{12}}} = 1.85$$

a) Puesto que se trata de una prueba de una cola a un nivel de significancia de 0.01, se rechaza la hipótesis  $H_0$  si  $t$  es mayor que el valor crítico,  $t_c$ , correspondiente a dicho nivel, el cual para  $\nu = n_X + n_Y - 2 = 12 + 12 - 2 = 22$  grados de libertad, se obtiene de la tabla 8 como  $t_c = 2.51$ . Como  $t < t_c$ , la hipótesis  $H_0$  no se puede rechazar a un nivel de significancia de 0.01.

b) Si el nivel de significancia de la prueba es de 0.05, se rechaza  $H_0$  si  $t$  es mayor que el valor  $t_c$  respectivo que para 22 grados de libertad es  $t_c = 1.72$ , por lo que de acuerdo con lo anterior,  $H_0$  se rechaza a un nivel de significancia de 0.05.





centro de educación continua  
división de estudios superiores  
facultad de Ingeniería, unam

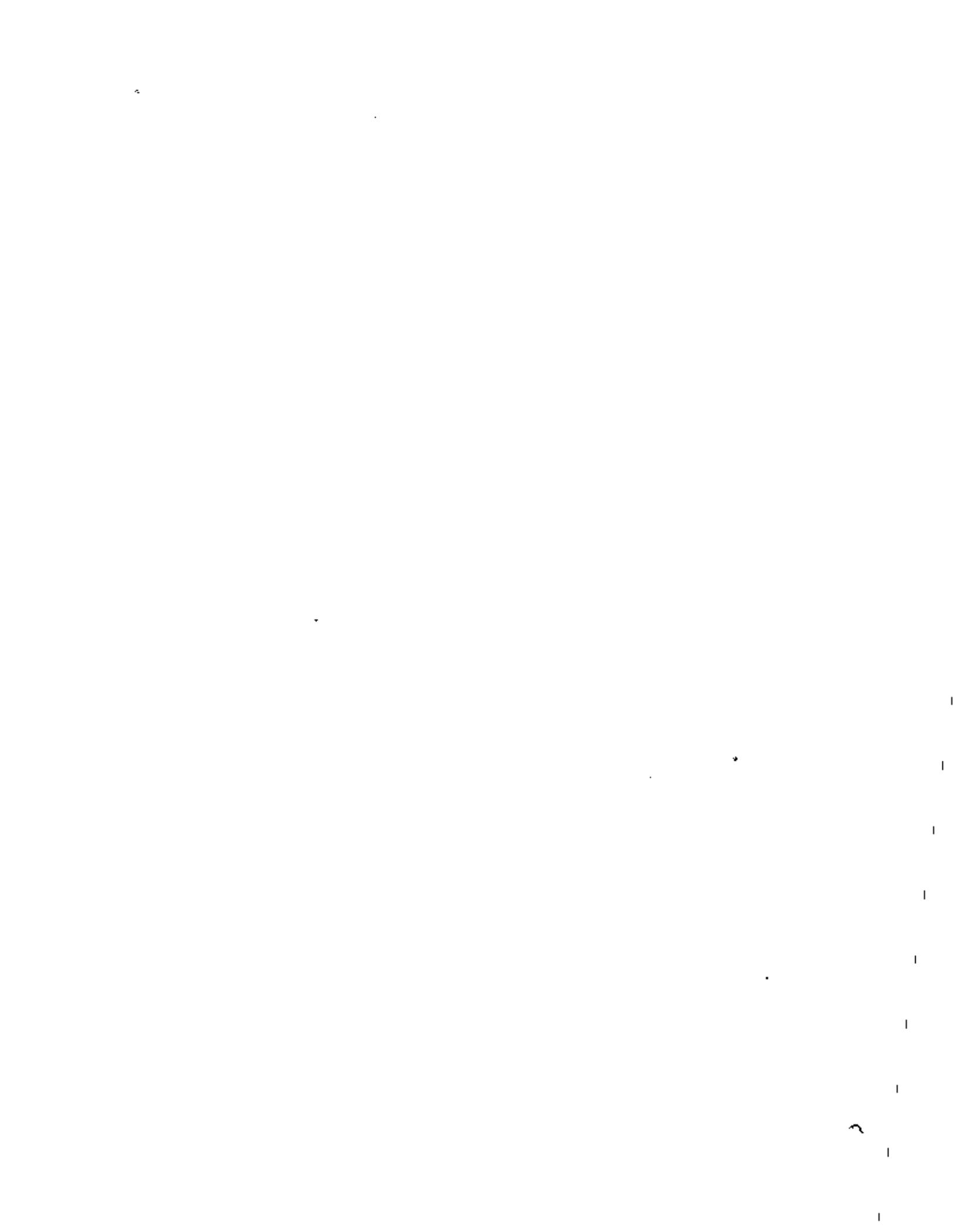


PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA, FUNDAMENTOS Y APLICACIONES

SISTEMAS EN SERIE Y EN PARALELO

DR. OCTAVIO A. RASCON CHAVEZ

Junio, Julio, 1979



### 3.9 Sistemas en serie y en paralelo

Puesto que la confiabilidad se ha definido como una probabilidad, ésta se podrá calcular, para un sistema cualquiera, si se conocen las densidades de probabilidades de falla de cada uno de sus componentes. Estas densidades se pueden obtener mediante experimentos diseñados exprofeso o mediante consideraciones de carácter subjetivo basadas en experiencias previas con componentes semejantes, o en la experiencia del que estudia la confiabilidad del sistema.

Muchos sistemas pueden considerarse con los componentes *en serie o en paralelo*. Se dice que un sistema es *en serie* si sus componentes están conectados entre sí de tal manera que al fallar uno de ellos falla el sistema; en la fig 3.10 se muestra la representación clásica de un sistema de este tipo. Un sistema es *en paralelo* si para que falle éste se necesita que fallen todos sus componentes; en la fig 3.11 se encuentra la representación gráfica de un sistema de este tipo.

Para estimar la confiabilidad de un sistema en serie consideraremos que los componentes del mismo son *independientes*, es decir, que el hecho de que uno falle no influye en la probabilidad de que cualquier otro falle. En otras palabras, la confiabilidad del componente se mantiene inalterada cuando cualquier otro falla.

Puesto que para que un sistema en serie no falle se requiere que ninguno de sus componentes falle, su confiabilidad será igual al producto de las confiabilidades de cada uno de sus componentes (esto se debe a que el evento "no falla el sistema"

es la intersección de los eventos "no falla el componente  $i$ " en donde  $i=1,2,\dots,n$ , y  $n$  es el total de componentes).

En símbolos, la probabilidad de que no falle el sistema antes del tiempo  $t$  es

$$P\{T \geq t\} = R(t) = R_1(t) \times R_2(t) \times \dots \times R_n(t) = \prod_{i=1}^n R_i(t) \quad (3.73)$$

en donde  $T$  es la variable aleatoria "tiempo de falla del sistema",  $t$  es un valor que puede asumir  $T$ ,  $R(t)$  es la probabilidad de que no falle el sistema hasta el tiempo  $t$  (su confiabilidad hasta  $t$ ), y  $R_i(t)$  es la probabilidad de que la componente  $i$  no falle antes de  $t$ . De la ec 3.73 se concluye que la confiabilidad de un sistema en serie decrece conforme aumenta el número de sus componentes, ya que se están multiplicando entre sí números menores de uno. Por ejemplo, si  $n=4$  y  $R_i(t)=0.9$  para toda  $i$  (los componentes son idénticos), entonces  $R(t)=0.9 \times 0.9 \times 0.9 \times 0.9 = 0.6561$ ; si  $n=5$ ,  $R(t)=0.9 \times 0.9 \times 0.9 \times 0.9 \times 0.9 = 0.59049$

Para que un sistema en paralelo falle es necesario que fallen todos sus componentes. Si dichos componentes son independientes, la probabilidad de falla del sistema en algún instante previo a  $t$  será

$$P\{T \leq t\} = F(t) = 1 - R(t) = 1 - \prod_{i=1}^n [1 - R_i(t)] \quad (3.74)$$

por lo que la confiabilidad del sistema será  $1 - P\{T \leq t\}$ , es decir

$$R(t) = \prod_{i=1}^n [1 - R_i(t)] \quad (3.75)$$

Puesto que todas las probabilidades de falla que aparecen en el miembro derecho de la ec 3.74 son menores que uno, el resultado de aplicarla decrecerá conforme aumenta el número  $n$  de componentes, es decir, la probabilidad de supervivencia

de un sistema en paralelo aumenta conforme crece el número de sus componentes y, por consiguiente, su confiabilidad (ec 3.75) aumenta.

Por ejemplo, si un sistema en paralelo tiene cuatro componentes ( $n=4$ ) y si  $R_i(t)=0.9$ , entonces su probabilidad de falla antes del tiempo  $t$  es (ec 3.74)

$$P\{T \leq t\} = F(t) = 0.1 \times 0.1 \times 0.1 \times 0.1 = 0.0001$$

por lo que su confiabilidad (probabilidad de sobrevivencia) es

$$R(t) = 1 - 0.0001 = 0.9999$$

El hecho de que la confiabilidad de un sistema en paralelo es mayor que la de uno en serie, en igualdad del número de componentes y de sus confiabilidades, hace concluir que una manera de aumentar la confiabilidad de un sistema en serie consiste en ponerle algunos componentes en paralelo a aquellos que tengan baja confiabilidad, con lo cual se forma un sistema *mixto*, como el de la fig 3.12. A los componentes que se agregan con este objeto se les llama *redundantes*, porque no son indispensables para que funcione el sistema. Sin embargo, al añadirle componentes redundantes a un sistema se incrementan su costo, volumen, complejidad, etc., lo que en ocasiones desalienta la utilización de este recurso.

Para calcular la confiabilidad de un sistema mixto primero hay que obtener las confiabilidades de los grupos de componentes que están en paralelo, y luego considerar a dicho grupo como si fuese un elemento conectado en serie con una confiabilidad igual a la del grupo en paralelo. Así, en el caso presentado

en la fig 3.12, en que la confiabilidad de cada componente hasta el instante  $t$  está anotada abajo de él, el primer grupo de elementos en paralelo tiene una confiabilidad igual a  $R_1(t) = 1 - 0.3 \times 0.3 \times 0.3 = 0.973$ ; la del segundo grupo es  $R_2(t) = 1 - 0.2 \times 0.2 = 0.96$  (ver fig 3.13). La confiabilidad del sistema es, entonces,

$$R(t) = 0.99 \times 0.95 \times 0.973 \times 0.96 \times 0.90 = 0.7815$$

Si no hubiese habido componentes redundantes, la confiabilidad hubiera sido

$$R(t) = 0.99 \times 0.95 \times 0.70 \times 0.80 \times 0.90 = 0.4740$$

que es bastante menor que la del sistema que sí los tiene.

### 3.10 El modelo exponencial en la confiabilidad de un sistema

En esta sección emplearemos los resultados obtenidos para calcular las confiabilidades de sistemas en serie y en paralelo, suponiendo que las densidades de probabilidades,  $f(t)$ , de los tiempos de falla de los componentes son exponenciales, es decir,

$$f_i(t) = \lambda_i e^{-\lambda_i t}$$

en donde  $\lambda_i$  es la intensidad de fallas (número medio de fallas por unidad de tiempo) del  $i$ -ésimo componente.

Tomando en cuenta que

$$R(t) = 1 - F(t) = 1 - \int_0^t f(t) dt$$

obtenemos

$$R_i(t) = 1 - \int_0^t \lambda_i e^{-\lambda_i t} dt = e^{-\lambda_i t} \quad (3.76)$$

Si el sistema es en serie, su confiabilidad, de acuerdo con la ec 3.73, será

$$R(t) = \prod_{i=1}^n e^{-\lambda_i t} = e^{-\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i\right)t} = e^{-\theta t} \quad (3.77)$$

en donde

$$\theta = \sum_{i=1}^n \lambda_i \quad (3.78)$$

Puesto que el miembro derecho de la ec 3.77 tiene la misma forma que el de la ec 3.76, deducimos que la densidad de probabilidades del sistema en serie también es exponencial con parámetro  $\theta$ , es decir, el número medio de fallas del sistema por unidad de tiempo queda dado por la ec 3.78. Además, puesto que el tiempo medio de falla de cada componente es (sec 3.8.2)

$$E_i(t) = \mu_i = 1/\lambda_i$$

tenemos que el tiempo medio falla del sistema, cuando cada componente que falla se reemplaza de inmediato con otro idéntico, es

$$E|T| = \mu = \frac{1}{\theta} = \frac{1}{\sum_{i=1}^n \lambda_i} = \frac{1}{\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n} = \frac{1}{\frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2} + \dots + \frac{1}{\mu_n}} \quad (3.79)$$

Para el caso de un sistema en paralelo, si las densidades de probabilidades de falla de las componentes son exponenciales, la confiabilidad es

$$R(t) = 1 - \prod_{i=1}^n (1 - e^{-\lambda_i t}) \quad (3.80)$$

Esta probabilidad no se puede factorizar en tal forma que tenga la apariencia de la ec 3.76, como sucedió con el

sistema en serie y, por consiguiente, la distribución de la confiabilidad de un sistema en paralelo no es exponencial. En estas condiciones, la intensidad de falla (fuerza de mortandad) del sistema se tendrá que obtener mediante la ec 3.61, y no resultará ser una constante.

El tiempo medio de falla también es difícil de obtener para el caso general en que las  $\lambda_i$  son diferentes. Si todas las  $\lambda_i$  son iguales a  $\lambda$ , entonces la ec 3.80 resulta en

$$R(t) = 1 - (1 - e^{-\lambda t})^n \quad (3.81)$$

El desarrollo del binomio del miembro derecho de la ec 3.81 conduce a

$$R(t) = \binom{n}{1} e^{-\lambda t} - \binom{n}{2} e^{-2\lambda t} + \dots + (-1)^{n-1} e^{-n\lambda t} \quad (3.82)$$

en donde  $\binom{n}{i}$  denota al número de combinaciones que se pueden formar con  $n$  objetos tomando de  $i$  en  $i$ . Puesto que la densidad de probabilidades es

$$f(t) = \frac{dF(t)}{dt} = \frac{d}{dt} |1 - R(t)| = -\frac{dR(t)}{dt}$$

obtenemos que la densidad de probabilidades del tiempo de falla del sistema en paralelo es

$$f(t) = \lambda \binom{n}{1} e^{-\lambda t} - 2\lambda \binom{n}{2} e^{-2\lambda t} + \dots + (-1)^{n-1} n\lambda e^{-n\lambda t} \quad (3.83)$$

La media del tiempo de falla es, entonces

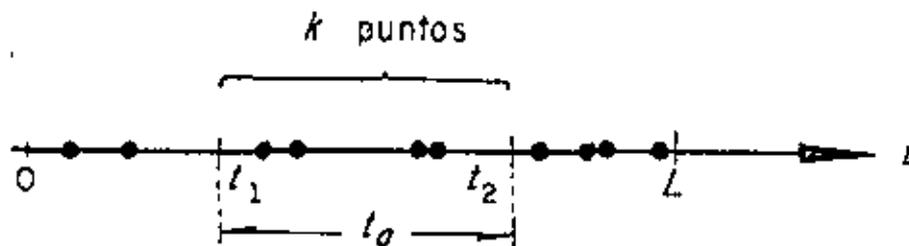
$$\begin{aligned} E(t) = \mu &= \int_0^{\infty} t f(t) dt = \lambda \binom{n}{1} \int_0^{\infty} t e^{-\lambda t} dt - 2\lambda \binom{n}{2} \int_0^{\infty} t e^{-2\lambda t} dt + \dots \\ &+ (-1)^{n-1} n\lambda \int_0^{\infty} t e^{-n\lambda t} dt \\ &= \frac{1}{\lambda} \binom{n}{1} - \frac{1}{2\lambda} \binom{n}{2} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n\lambda} \end{aligned}$$

Por inducción matemática se puede demostrar que esta ecuación es equivalente a

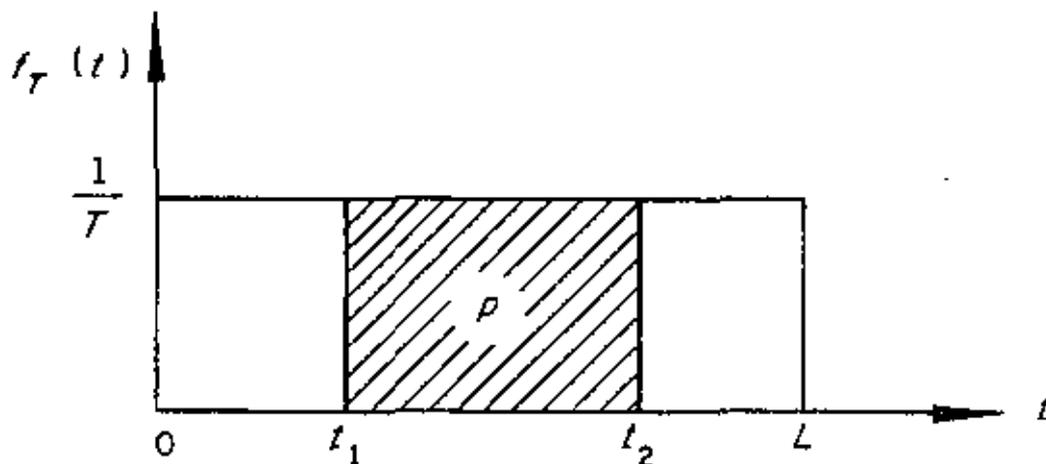
$$\mu = \frac{1}{\lambda} \left( 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \right) \quad (3.84)$$

por lo que la fuerza de mortandad resulta ser

$$\theta = \frac{1}{\mu} = \frac{\lambda}{1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}}$$



(a)



(b)

Fig 3.4 Ocurrencia aleatoria de eventos en un lapso de duración  $L$

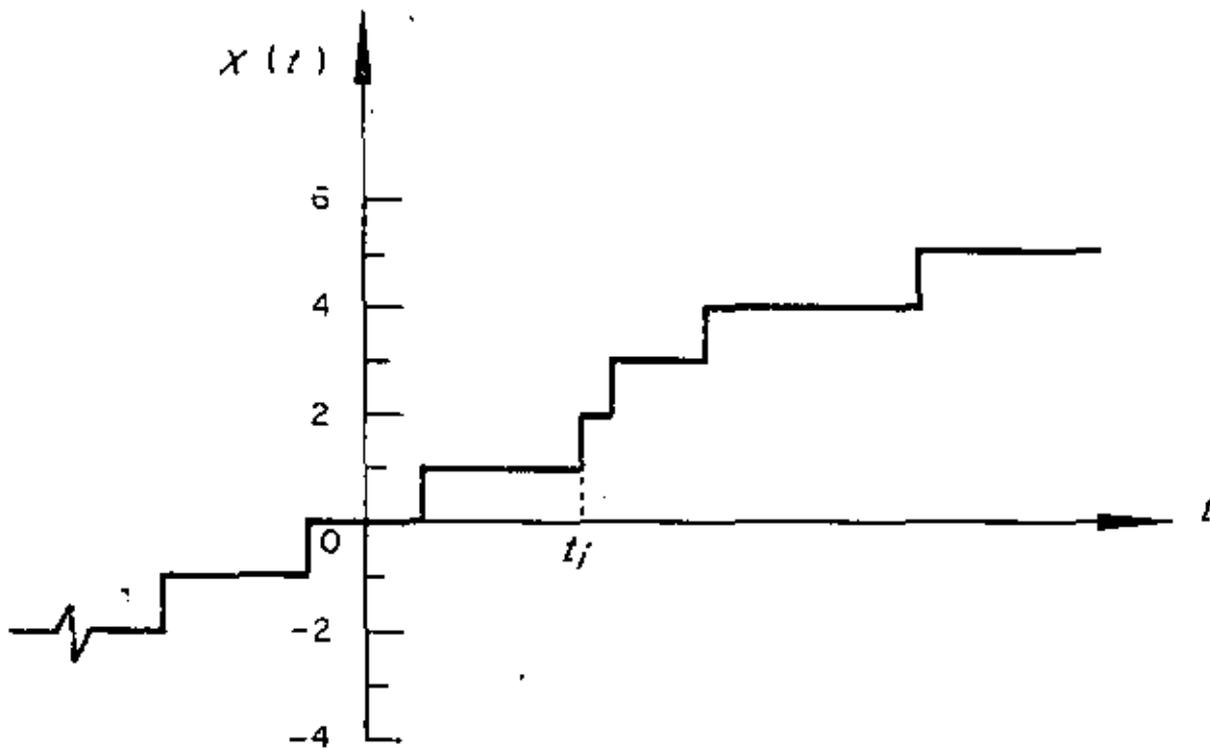


Fig 3.5 Función muestra de un proceso simple de Poisson

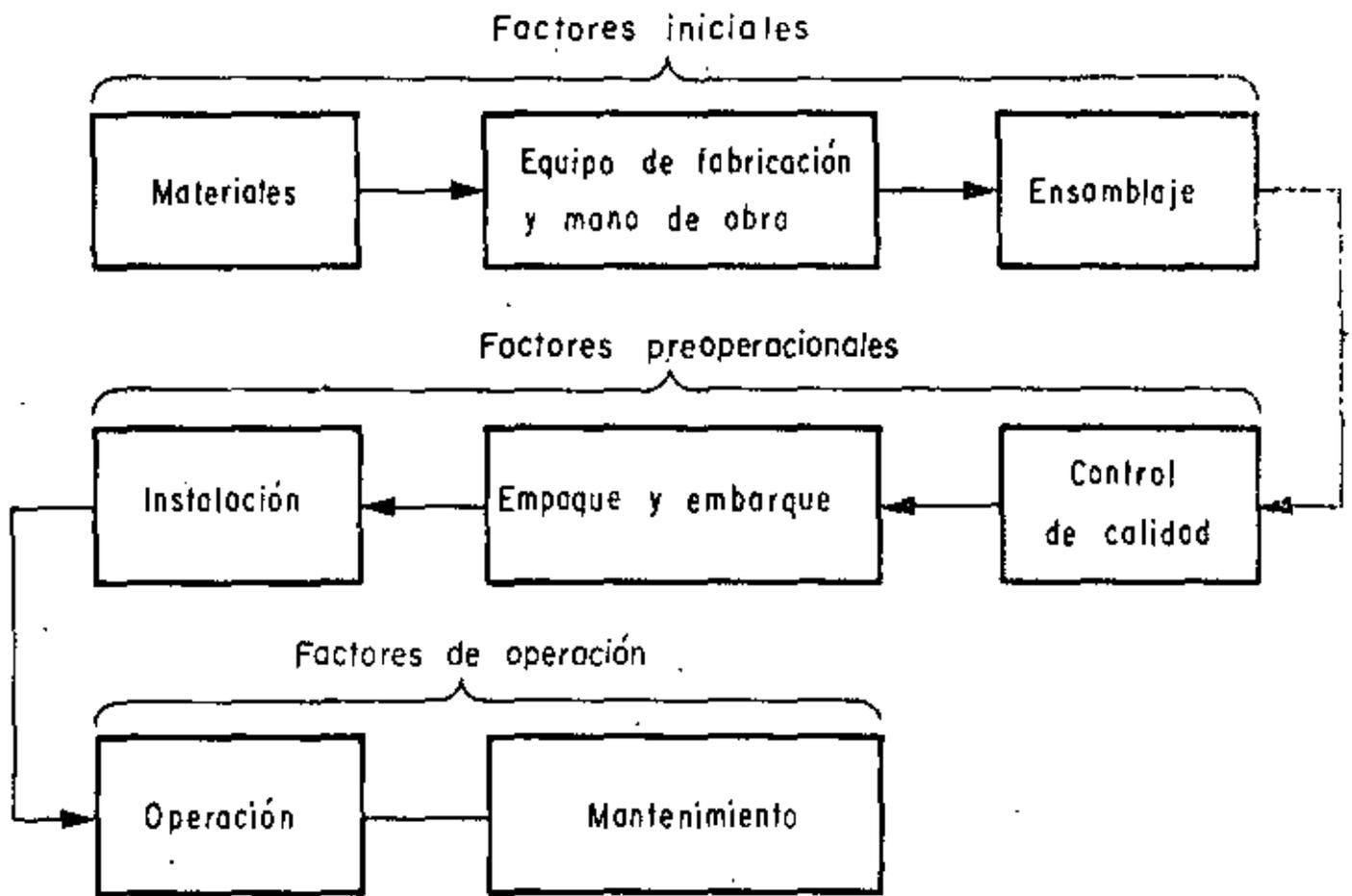


Fig 3.7 Factores que influyen en el comportamiento de un sistema

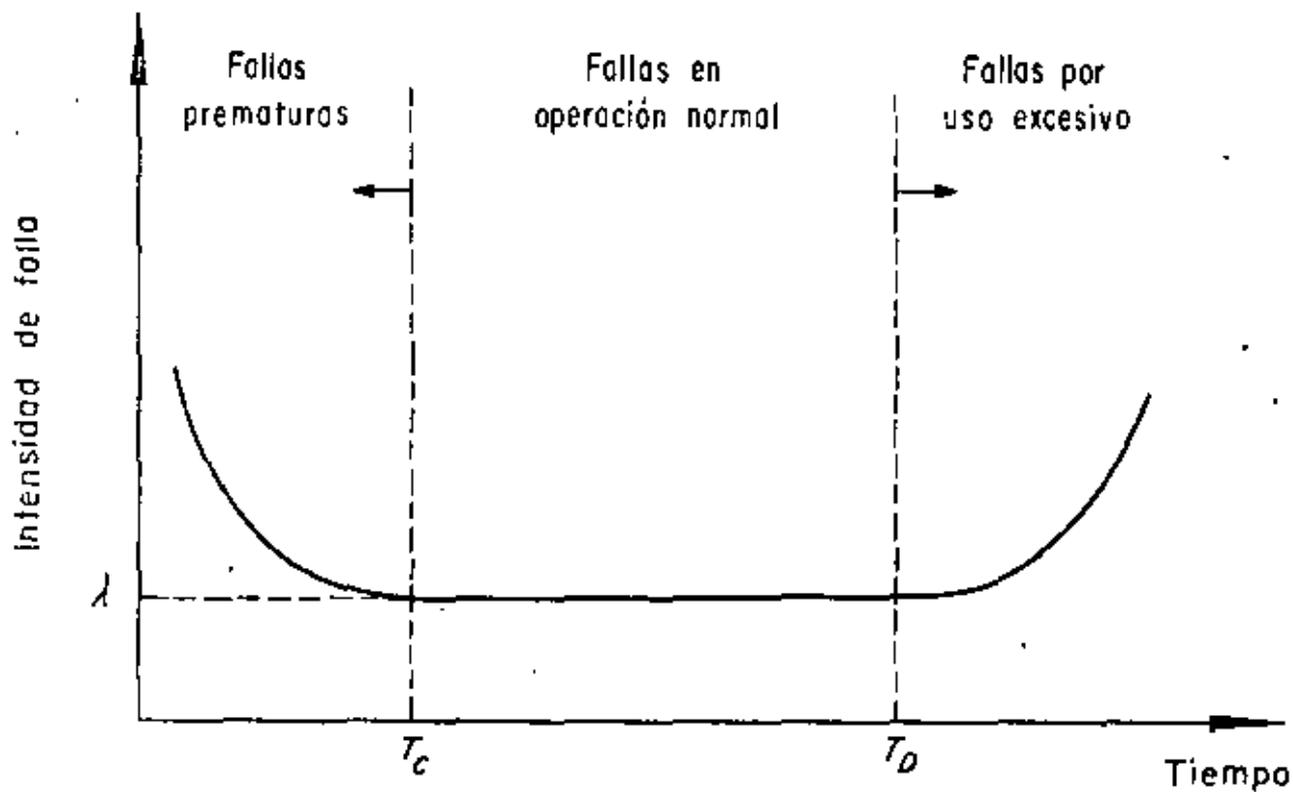


Fig 3.8 Intensidad de falla en función del tiempo de operación

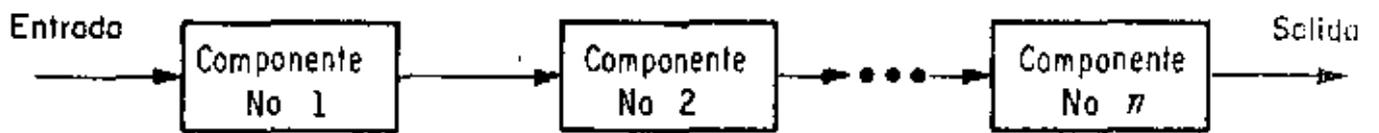


Fig 3.10 Sistema en serie

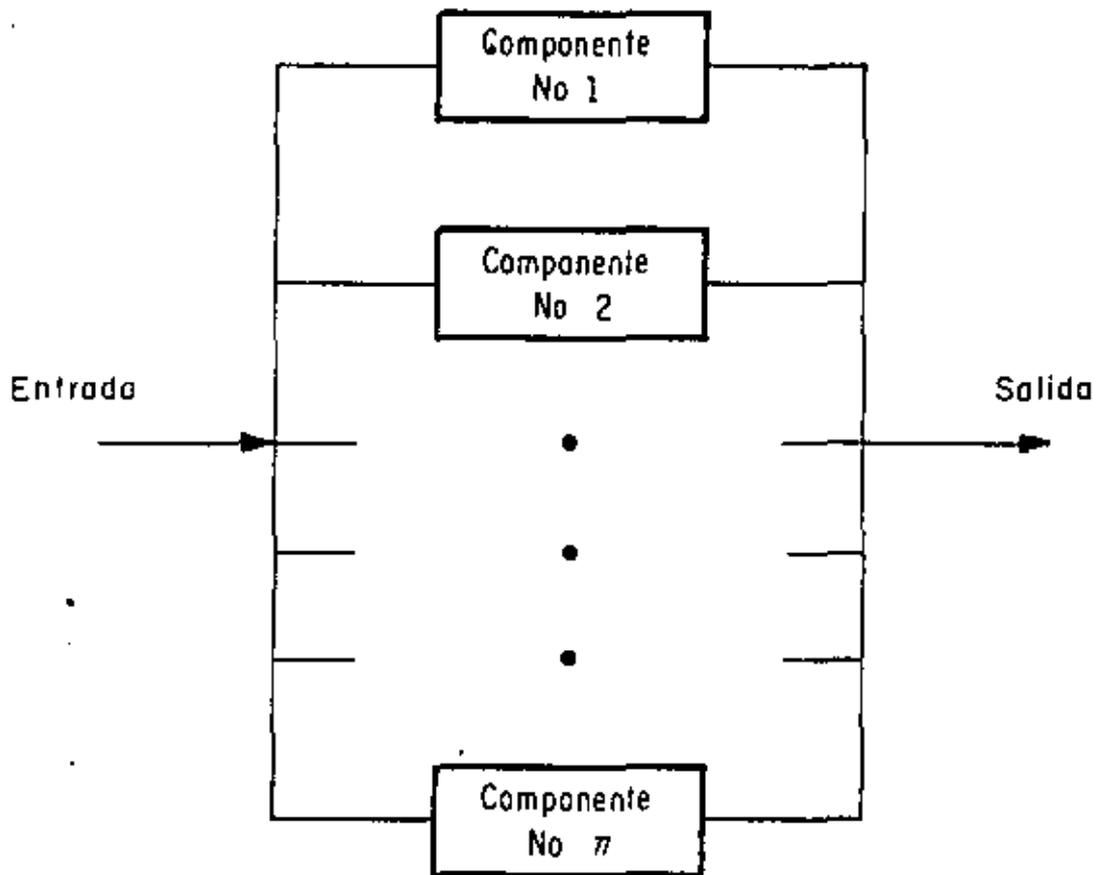


Fig 3.11 Sistema en paralelo

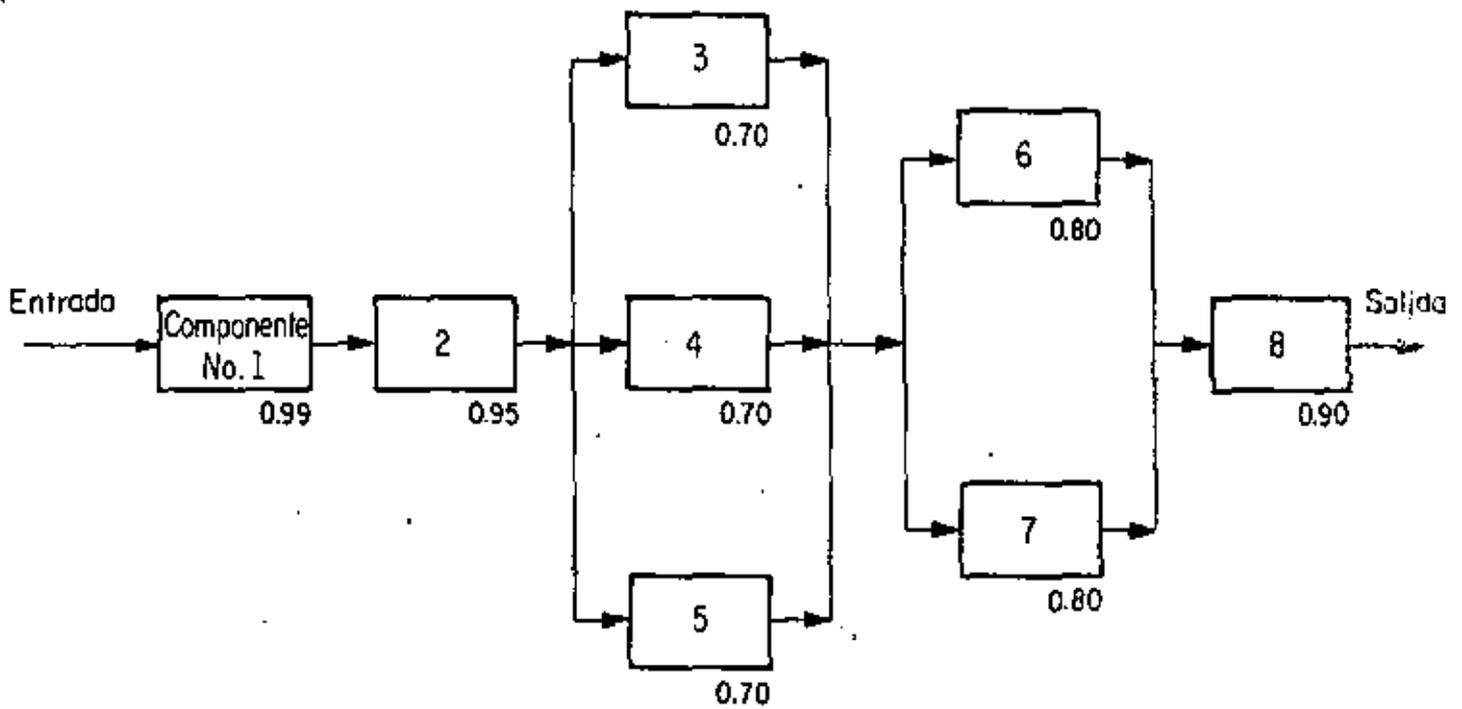


Fig 3.12 Sistema mixto



Fig 3.13 Sistema en serie equivalente al de la fig 3.12

TABLA 2.1

ALGUNAS DISTRIBUCIONES DE PROBABILIDADES

|           | Distribución   | Densidad de probabilidades, $f_X(x)$  | Esperanza     | Variancia       |
|-----------|--|---|---------------|-----------------|
| DISCRETAS | Binomial<br>( $n=1, 2, \dots; 0 \leq p \leq 1; q=1-p$ )                | $\binom{n}{x} p^x q^{n-x}; x = 0, 1, \dots, n$<br>0 ; $x < 0$                 | $np$          | $npq$           |
|           | Poisson<br>( $\lambda > 0$ )   | $\frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!}; x = 0, 1, \dots$<br>0 ; $x < 0$           | $\lambda$     | $\lambda$       |
|           | Geométrica<br>( $0 \leq p \leq 1; q=1-p$ )                             | $pq^{x-1}; x = 0, 1, \dots$<br>0 ; $x < 0$                                    | $1/p$         | $q/p^2$         |
|           | Binomial negativa<br>( $\lambda=1, 2, \dots; 0 \leq p \leq 1; q=1-p$ ) | $\binom{\lambda+x-1}{x} p^\lambda q^x; x = 0, 1, \dots$<br>0 ; $x < 0$        | $\lambda q/p$ | $\lambda q/p^2$ |
| CONTINUAS | Normal<br>( $-\infty < \eta < \infty; 0 \leq \sigma^2 < \infty$ )      | $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-\eta)^2/2\sigma^2}; -\infty < x < \infty$ | $\eta$        | $\sigma^2$      |
|           | Exponencial<br>( $\lambda > 0$ )                                       | $\lambda e^{-\lambda x}; x \geq 0$<br>0 ; $x < 0$                             | $1/\lambda$   | $1/\lambda^2$   |
|           | Uniforme en el intervalo de a a b                                      | $\frac{1}{(b-a)}; a \leq x \leq b$<br>0 ; $a > x > b < x$                     | $(a+b)/2$     | $(b-a)^2/12$    |
|           | $J_i$ -cuadrada ( $\chi^2$ )<br>con n grados de libertad               | $\frac{1}{2^{n/2} \Gamma(\frac{n}{2})} x^{(n/2-1)} e^{-x/2}$                  | $n$           | $2n$            |



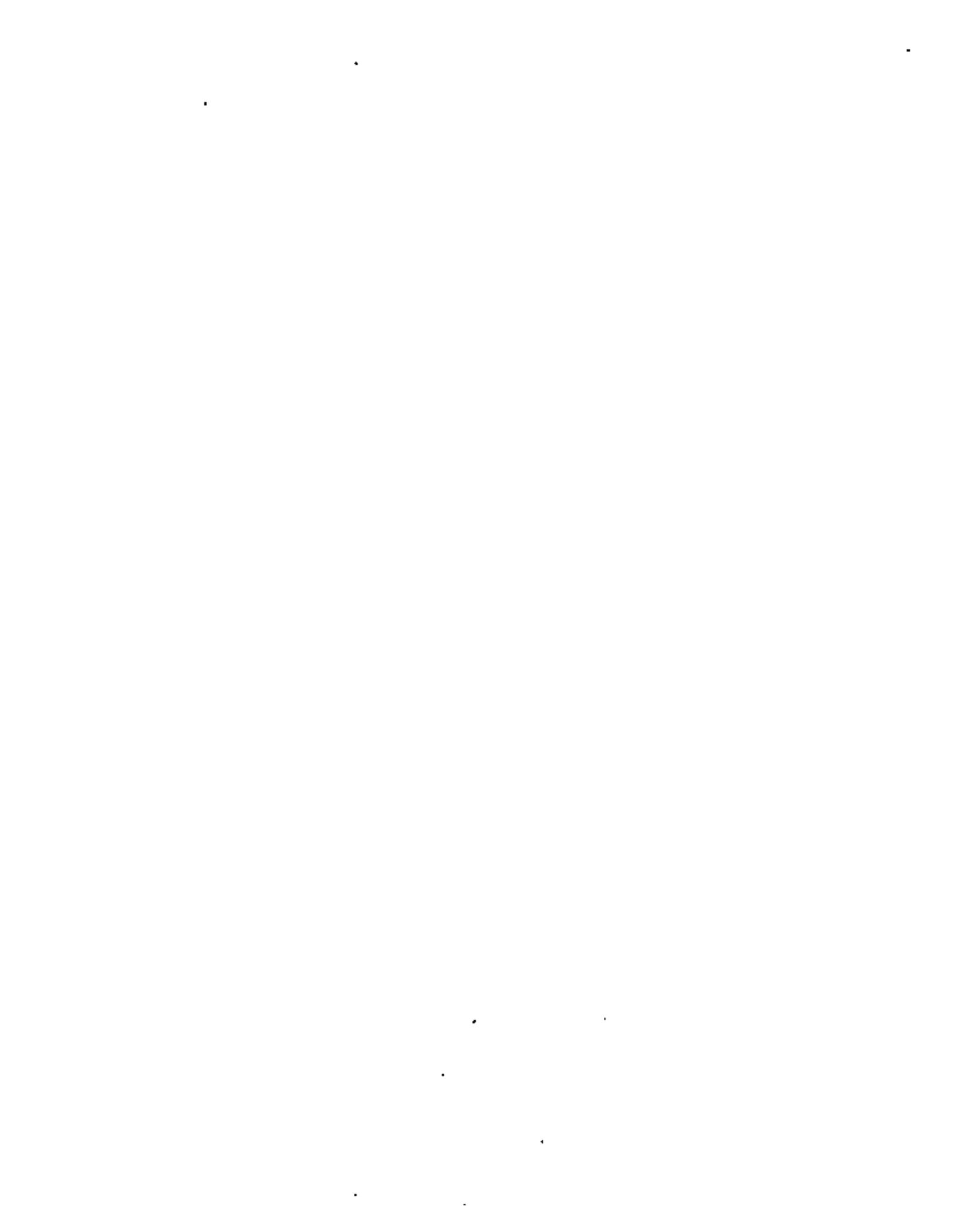
centro de educación continua  
división de estudios superiores  
facultad de Ingeniería, unam



PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA, FUNDAMENTOS Y APLICACIONES

CARTAS DE CONTROL

M. en I. AUGUSTO VILLARREAL ARANDA  
JULIO 1979



## CARTAS DE CONTROL

Por: M en I Augusto Villarreal A.

### INTRODUCCION

Aunque existe la tendencia generalizada a pensar que el Control de Calidad es de desarrollo reciente, realmente no existe nada nuevo en la idea básica de elaborar un producto caracterizado por un alto grado de uniformidad.

Durante siglos, hábiles artesanos han procurado elaborar productos que se distingan por su superior calidad, y una vez que han logrado obtener un cierto estándar de calidad óptimo, eliminar dentro de lo posible la variación entre productos que nominalmente deben resultar iguales.

La idea de que la Estadística puede resultar un instrumento muy útil para asegurar un estándar adecuado de calidad para los productos manufacturados, se remonta no más allá del advenimiento de la producción masiva, y el uso extendido de los métodos estadísticos para resolver problemas de control de calidad es aún más reciente.

Muchos problemas que aparecen durante la elaboración de un producto son susceptibles de ser resueltos empleando tratamientos estadísticos, por lo que al hablar de control estadístico de calidad, nos estaremos refiriendo esencialmente a las dos técnicas especiales que se discutirán en esta parte del curso: uso de las Cartas de Control y muestreo de aceptación.

Profesor Investigador, División de Estudios Superiores e Instituto de Ingeniería, UNAM

Conviene mencionar que la palabra calidad, al ser empleada de aquí en adelante, se referirá a alguna propiedad medible o contable de algún producto, tal como el diámetro de un balín de acero, la resistencia de una viga de concreto, el número de defectos en una pieza de tela, la eficacia de cierta droga, etc.

#### IDEAS SOBRE CARTAS DE CONTROL

A muchos individuos les puede sorprender el hecho de que dos artículos aparentemente idénticos, elaborados bajo condiciones cuidadosamente controladas, de las mismas materias primas, y por una misma máquina con diferencia de pocos segundos, puedan, sin embargo, diferir en muchos aspectos.

En efecto, cualquier proceso de manufactura, aun siendo muy bueno, se encuentra caracterizado por una cierta cantidad de variación - que es de naturaleza aleatoria, y que no puede ser eliminada en forma completa.

Cuando la variabilidad presente en un proceso de producción se limita a variación aleatoria se dice que el proceso se encuentra en un estado de control estadístico.

Tal estado se puede alcanzar cuando se eliminan aquellos problemas causados por otro tipo de variación, llamada variación sistemática, que es de naturaleza más bien determinística, y que se puede achacar, por ejemplo, a operadores mal entrenados, materia prima de baja calidad, máquinas en mal estado, etc.

Ya que los procesos de manufactura se encuentran rara vez libres

de estos problemas, conviene contar con algún método sistemático para detectar desviaciones serias de un estado de control estadístico cuando ocurren, o inclusive antes de que ocurran, tales desviaciones.

Ese método sistemático de detección se puede tener mediante el empleo de las llamadas Cartas de Control.

#### TIPOS DE CARTAS DE CONTROL

En lo que sigue distinguiremos entre las cartas de control para mediciones o variables ( $\bar{X}$ , R,  $\sigma$ ) y las cartas de control para atributos ( $\bar{p}$ , c), dependiendo de que las observaciones que estemos analizando sean mediciones o datos contados o calculados, respectivamente.

Un ejemplo del primer caso sería la longitud de las varillas de acero de una muestra. Como ejemplo del segundo caso tendríamos el número de focos defectuosos en una muestra de tamaño dado.

#### CONFIGURACION DE LAS CARTAS DE CONTROL

En cualquiera de los casos mencionados, una carta de control consiste de una Línea Central, correspondiente a la calidad promedio a la que el proceso debe funcionar, y dos líneas que corresponden al Límite Superior de Control (LSC) y al Límite Inferior de Control (LIC), respectivamente, tal como se muestra en la Fig 1.

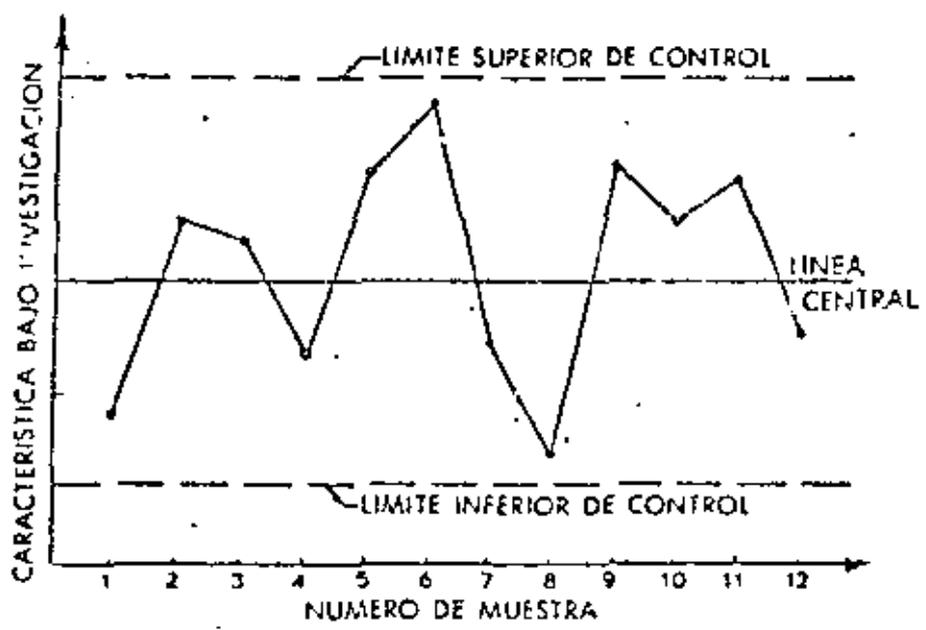


Fig 1. Aspecto general de una carta de control

Estos límites se escogen en forma tal que los valores que se encuentren dentro de ellos se puedan atribuir al azar, en tanto que los valores que caigan fuera de ellos se puedan considerar como indicaciones de falta de control.

No obstante la idea anterior, conviene mencionar que en la Fig 2 que se presenta a continuación se pueden considerar otras posibles situaciones de "falta de control" que ameritan investigarse:

1. Cuando dos de tres puntos sucesivos caen en la zona A.
2. Cuando cuatro de cinco puntos sucesivos caen en la zona B o más allá.
3. Cuando ocho puntos sucesivos caen en la zona C o más allá.

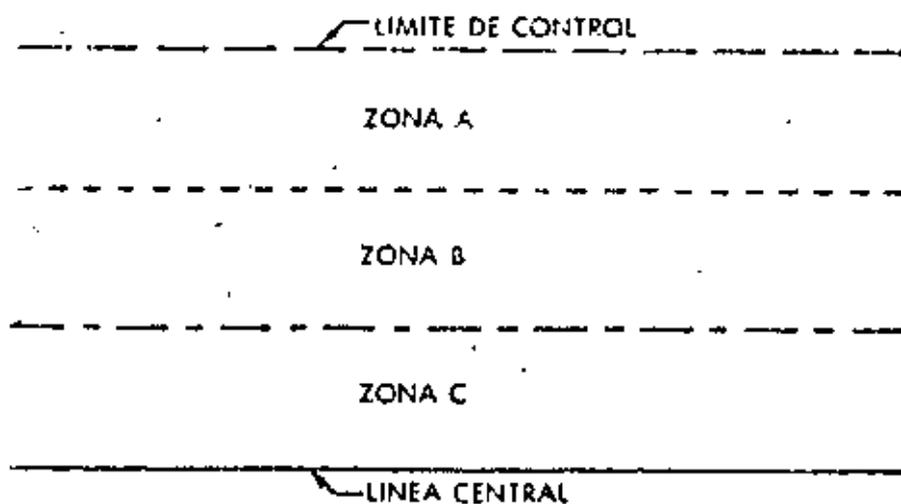


Fig 2 Diagrama que define las zonas A, B y C usadas en el análisis de Cartas de Control.

Debe hacerse notar que cada una de las zonas A, B y C constituye la tercera parte del área entre la línea central y un límite de control, y que las pruebas mencionadas se aplican a ambas mitades de la carta de control, pero se aplican separadamente para cada mitad, y nunca a las dos mitades en combinación.

#### EXPLICACION DEL EMPLEO DE LAS CARTAS DE CONTROL

Si se grafican en una carta los resultados obtenidos a partir de muestras tomadas periódicamente a intervalos frecuentes, es posible verificar por medio de ella si el proceso se encuentra bajo control, o si se encuentra presente en el proceso la variación sistemática del tipo descrito anteriormente.

Cuando un punto graficado cae fuera de los límites de control, es

necesario encontrar el problema que causó tal comportamiento dentro del proceso. Pero aun si los puntos caen dentro de los límites mencionados, alguna tendencia, o cierto patrón de los mismos, puede indicar que se debe llevar a cabo alguna acción para prevenir y así evitar algún problema serio.

La habilidad para "leer" las cartas de control y para determinar a partir de ellas cuál acción correctiva debe llevarse a cabo, se obtiene a partir de la experiencia y del juicio altamente desarrollado. Un practicante del control estadístico de la calidad debe no sólo comprender los fundamentos estadísticos de la materia, sino también encontrarse identificado plenamente con los procesos que desea controlar.

#### CARTAS DE CONTROL PARA MEDICIONES (VARIABLES)

Cuando se requiere establecer control estadístico de la calidad de algún producto en términos de mediciones o variables, es costumbre ejercer tal control sobre la calidad media del proceso, al igual que sobre su variabilidad.

La primera meta se logra al graficar los promedios de muestras extraídas periódicamente en la llamada carta de control para los promedios, o simplemente carta  $\bar{X}$ . La variabilidad se puede controlar de igual forma si se grafican los rangos o las desviaciones estándar de las muestras en las llamadas cartas R o cartas  $\sigma$ , respectivamente, dependiendo de cuál estadística se emplee para estimar la desviación estándar de la población.

Si se conocen la media  $\mu$  y la desviación estándar  $\sigma$  de la pobla-

ción (proceso) y es razonable suponer las mediciones obtenidas como muestras extraídas de una población normal, se puede asegurar que con probabilidad  $1 - \alpha$  el promedio aritmético de una muestra aleatoria de tamaño  $n$  se encontrará entre

$$\mu - z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \bar{y} \leq \mu + z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

ó

$$\mu - z_{\alpha/2} \sigma_{\bar{X}} \leq \bar{y} \leq \mu + z_{\alpha/2} \sigma_{\bar{X}}$$

puesto que  $\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$  para el caso de la distribución muestral del promedio aritmético, cuando se muestrea de una población infinita. La suposición de que la extracción de muestras aleatorias se hace de una población infinita es válida en el caso presente, puesto que, por ejemplo, la producción de cierto producto en una fábrica tiende a infinito conforme pasa el tiempo.

Los dos límites anteriores ( $\mu \pm z_{\alpha/2} \sigma_{\bar{X}}$ ) proporcionan entonces límites inferiores y superiores de control y, bajo las suposiciones anteriores, permiten al practicante del control de calidad determinar si se debe o no llevar a cabo algún ajuste en el proceso, al graficar los promedios aritméticos obtenidos de muestras de tamaño  $n$  en una carta como la que se muestra en la Fig 1.

Conviene establecer en este momento que al emplear una carta de control para los promedios, lo que se hace realmente es probar hipótesis nulas de que a un cierto nivel de confianza  $1 - \alpha$  el valor de la media de la ~~distribución~~ <sup>distribución</sup> muestral de los promedios sea igual al valor de

la calidad nominal del proceso, o al de la calidad media calculada para el mismo,  $\mu_0$ . Para estas pruebas secuenciales de hipótesis, se emplean como estadísticas de prueba los valores de los promedios aritméticos obtenidos de muestras aleatorias extraídas de la población (o proceso). Es decir, se realizan pruebas de hipótesis para las cuales

$$H_0 : \mu = \mu_0$$

(Prueba de dos colas: cada prueba se realiza con el valor  $\bar{X}_i$  de la muestra  $i$ )

$$H_1 : \mu \neq \mu_0$$

en donde  $\mu$  es la media de la distribución muestral del promedio aritmético,  $\mu_0$  la calidad nominal o calidad media calculada del proceso, y  $\bar{X}_i$  ( $i=1,2,3,\dots$ ) el valor del promedio aritmético obtenido de la  $i$ ésima muestra aleatoria. La forma secuencial de estas pruebas de hipótesis se muestra en la Fig 3 que se presenta a continuación.

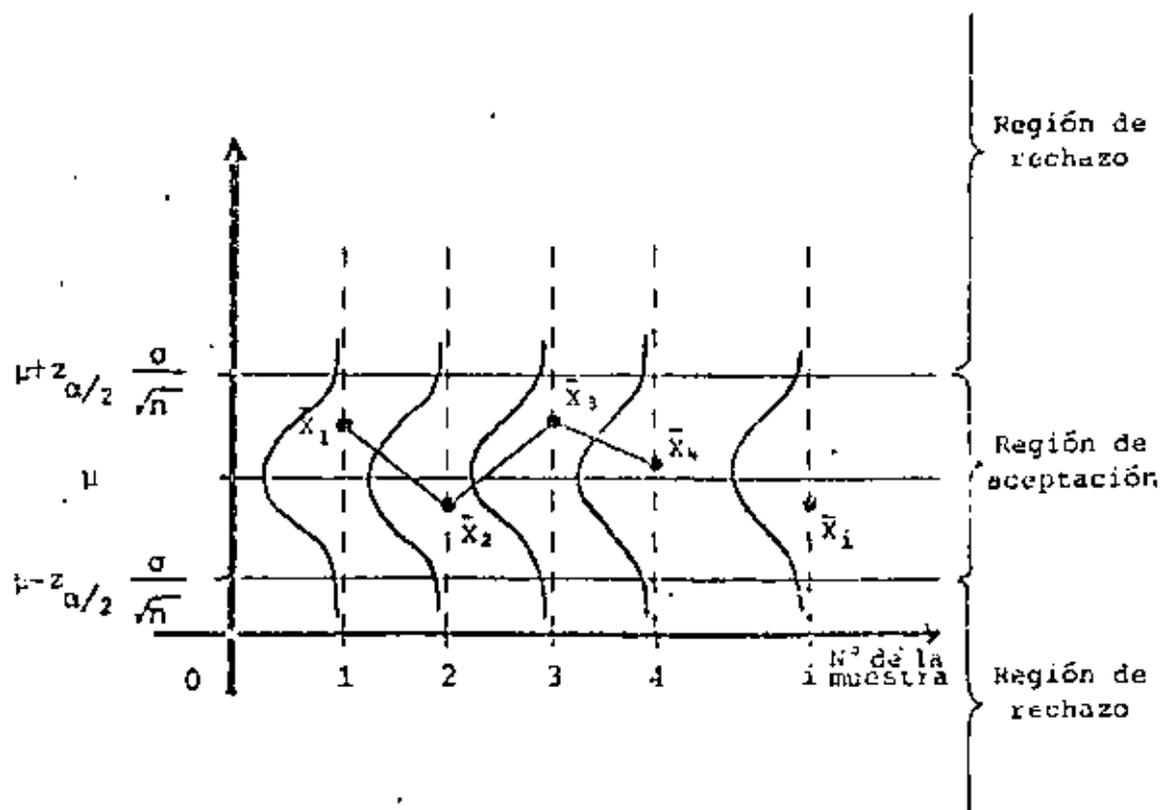


Fig 3. Pruebas de hipótesis que se realizan al emplear una carta de control para los promedios

Si se consideran problemas prácticos, los valores de  $\mu$  y  $\sigma$  del proceso se desconocen, y es entonces conveniente estimar sus valores a partir de muestras tomadas mientras el proceso se encuentre "bajo control", tal como se explica más adelante. En la práctica es entonces difícil llegar a establecer límites de control del tipo  $\mu \pm z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$  al desconocerse  $\mu$  y  $\sigma$ , independientemente de que en muchos casos es demasiado arriesgado considerar a las mediciones como muestras aleatorias extraídas de una población normal.

En lugar de lo anterior, en el control de calidad industrial se emplean comúnmente los límites de control de "tres desviaciones estándar" o de "tres sigmas", que se obtienen al sustituir a  $z_{\alpha/2}$  por un 3 al calcular los límites de control.

Conforme a lo anterior, con los límites de control

$$\mu \pm 3\sigma_{\bar{x}} \quad \text{ó} \quad \mu \pm 3 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

se puede confiar en que en el 99.73% de los casos el proceso no será declarado "fuera de control", cuando de hecho se encuentra "bajo control".

En otras palabras, estos límites de control permiten considerar que la probabilidad máxima de rechazar la hipótesis

$$H_0 : \theta = \theta_0$$

cuando debería de ser aceptada (probabilidad de cometer un error de tipo I) es de 0.27%, siendo  $\theta_0$  un valor de calidad fijo del proceso, y  $\theta$  el del parámetro correspondiente de la distribución muestral de la estadística bajo consideración.

ELABORACION DE LA CARTA DE CONTROL PARA LOS PROMEDIOS ( $\bar{X}$ )

- a. Caso en que se conocen la media  $\mu$  y la desviación estándar  $\sigma$  de la población.

Línea central —————  $\mu$

Límites de control —————  $\mu \pm 3\sigma_{\bar{X}}$  ó  $\mu \pm 3\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

$$\text{ó } \mu \pm A\sigma, \text{ siendo } A = \frac{3}{\sqrt{n}}$$

en donde los valores de A se obtienen de la tabla 1, en función de n, el tamaño de la muestra.

Ejemplo: Sea el proceso de elaboración de varillas de acero para las cuales se sabe que el diámetro medio es de 2.5 cm, con una desviación estándar de 0.01 cm. Se desea efectuar control del diámetro de las mismas, para lo cual se extraen periódicamente muestras de cinco varillas. Se pide establecer la línea central y los límites de control para una carta  $\bar{X}$ .

Solución: Siendo  $\mu = 2.5$  cm,  $\sigma = 0.01$  y  $n = 5$ , se tiene que:

Línea central =  $\mu = 2.5$ .

Límites de control:

$$2.5 \pm 3 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2.5 \pm \frac{3(0.01)}{\sqrt{5}} = 2.5 \pm 0.0134 \Rightarrow 2.5134, 2.4866$$

o, de la tabla I

$$2.5 \pm A\sigma = 2.5 \pm 1.342(0.01) = 2.5 \pm 0.01342 \Rightarrow 2.51342, 2.48658$$



centro de educación continua  
división de estudios superiores  
facultad de Ingeniería, unam



PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA:

FUNDAMENTOS Y APLICACIONES

SOLUCION DE TAREAS

DR. OCTAVIO RASCON CHAVEZ  
AGOSTO, 1979



CENTRO DE EDUCACION CONTINUA  
D.E.S.F.I., UNAM

CURSO: PROBABILIDAD Y ESTADISTICA. FUNDAMENTOS Y APLICACIONES  
*DR. OCTAVIO A. RASCON CH.*  
SOLUCION DE TAREA 1

- 1.- a)  $A \cup B = \{ x: 1 \leq x \leq 10 \} = B$   
b)  $A \cap B = \{ x: x \text{ es entero y } 1 \leq x \leq 10 \} = A$   
c)  $A \cup C = \{ x: x \text{ es entero y } 0 \leq x \leq 10 \}$   
d)  $A \cap C = \{ x: x \text{ es entero y } 1 \leq x \leq 6 \}$   
e)  $A \cup D = \{ x: x \text{ es entero y } 0 \leq x \leq 10 \} \cup \{ 10, 20, 30 \}$   
=  $\{ 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 20, 30 \}$   
f)  $A \cap D = \{ 10 \}$   
g)  $B \cup C = \{ x: 1 \leq x \leq 10, 0 \}$   
h)  $B \cap C = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6 \}$   
i)  $B \cup D = \{ x: 1 \leq x \leq 10, 0, 20, 30 \}$   
j)  $B \cap D = \{ 10 \}$   
k)  $C \cup D = \{ 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 20, 30 \}$   
l)  $C \cap D = \{ 0 \}$   
m)  $A \cup B \cup C = \{ x: 1 \leq x \leq 10, 0 \}$   
n)  $A \cap (B \cup C) = \{ x: x \text{ es entero y } 1 \leq x \leq 10 \}$   
h)

$$o) A \cap B \cap C = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6 \}$$

$$p) C \cup (A \cap B) = \{ 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 \}$$

$$q) (A \cup B) \cap (C \cup B) = \{ x : 1 \leq x \leq 10 \}$$

$$2.- a) \bar{A} = \{ 4, 5, 6, 7, \dots, n \}$$

$$b) \bar{B} = \{ 1, 4, 5, 6, 7, \dots, n-1 \}$$

$$c) \bar{A} \cup \bar{B} = \{ 1, 4, 5, 6, 7, 8, \dots, n \}$$

$$d) A \cap B = \{ 2, 3 \} \Rightarrow \overline{A \cap B} = \{ 1, 4, 5, 6, 7, 8, \dots, n \}$$

$$o \overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$$

$$3.- a) \text{ Si } x \in \overline{A \cup B} \Rightarrow x \notin A \cup B \Rightarrow x \notin A \text{ y } x \notin B \Rightarrow x \in \bar{A} \text{ y } x \in \bar{B} \Rightarrow x \in \overline{A \cap B} \\ \Rightarrow \overline{A \cup B} \subset \overline{A \cap B}$$

$$b) \text{ Si } x \in \overline{A \cap B} \Rightarrow x \in \bar{A} \text{ y } x \in \bar{B} \Rightarrow x \notin A \text{ o } x \notin B \Rightarrow x \notin A \cup B \\ \text{de donde } x \in \overline{A \cup B} \text{ por lo que } \overline{A \cap B} \subset \overline{A \cup B} \text{ y} \\ \overline{A \cup B} = \overline{A \cap B}$$

$$4.- a) \text{ Si } x \in \overline{A \cap B} \Rightarrow x \notin A \cap B \Rightarrow x \notin A \text{ o } x \notin B \\ \Rightarrow x \in \bar{A} \text{ o } x \in \bar{B} \Rightarrow x \in \overline{A \cup B} \Rightarrow \overline{A \cap B} \subset \overline{A \cup B}$$

$$b) \text{ Si } x \in \bar{A} \cup \bar{B} \Rightarrow x \in \bar{A} \text{ o } x \in \bar{B} \Rightarrow x \notin A \text{ o } x \notin B \\ \Rightarrow x \notin A \cap B \text{ y } x \in \overline{A \cap B} \Rightarrow \bar{A} \cup \bar{B} \subset \overline{A \cap B} \\ \therefore \bar{A} \cup \bar{B} = \overline{A \cap B}$$

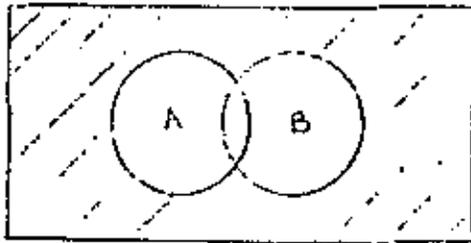
5.

a)



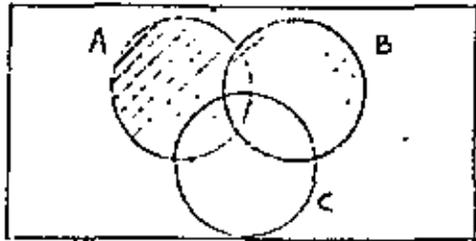
U

b)



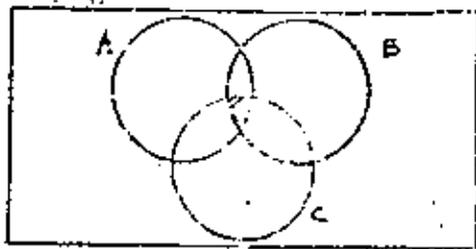
S

c)

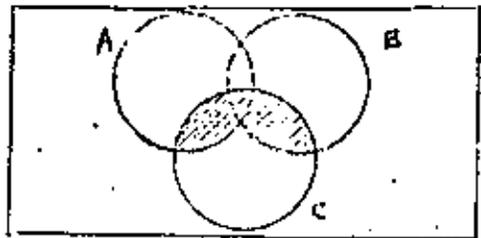


S

d)

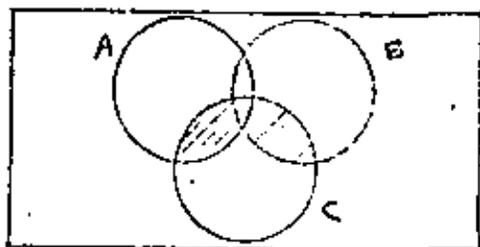


e)



2

f)



CENTRO DE EDUCACION CONTINUA

D.H.S.F.I, UNAM

CURSO: PROBABILIDAD Y ESTADISTICA. FUNDAMENTOS Y APLICACIONES

SOLUCION DE TAREA 2

1.- a) En la revisión del radio  $i$ -ésimo el espacio muestral está dado por  $\Omega_i = \{f, \bar{f}\}$ ,  $f$ : funciona,  $\bar{f}$ : no funciona  
 $\sigma$  En consecuencia el espacio muestral para este experimento es:  $S = \{X_1, X_2, \dots, X_{50} : X_i = f, x_i = \bar{f}\}$

b) Evento de que todos funcionan bien:

$$A = \{f_1, f_2, \dots, f_{50}\}$$

c) Evento de que ninguno funciona correctamente:

$$B = \{\bar{f}_1, \bar{f}_2, \dots, \bar{f}_{50}\}$$

d) Evento los dos primeros no funcionan, pero el resto sí:

$$C = \{\bar{f}_1, \bar{f}_2, f_3, f_4, \dots, f_{50}\}$$

2.- a)  $P(C) = 1/3$

$$a) P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 1/3$$

b)  $P(A \cup B) = 2/3$

$$e) P(\bar{A} \cup \bar{B}) = 1$$

c)  $P(\bar{A}) = 2/3$

$$f) P(B \cup C) = 2/3$$

$$3.- \quad a) P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1/2$$

$$b) P(\bar{B}) = 1 - P(B) = 1/2$$

$$c) P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = \\ = 1/2 + 1/2 - 2/3 = 1/3$$

$$d) P(\overline{A \cap B}) = P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(A \cap B) \\ = 1 - 1/3 = 2/3$$

$$e) P(\overline{A \cup B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) \\ = 1 - 2/3 = 1/3$$

$$f) P(A \cap \bar{B}) = P(A) - P(AB) = 1/2 - 1/3 = 1/6$$

$$g) P(\bar{A} \cap B) = P(B) - P(AB) = 1/6$$

$$h) P(\overline{A \cup B}) = P(\bar{A}) + P(\bar{B}) - P(\bar{A} \cap \bar{B}) \\ = 1/2 + 1/2 - 1/3 = 2/3$$

$$4.- \quad S = \{(1,1,1), (2,1,1), (1,2,1), (1,1,2), (2,2,1), (2,1,2), (1,2,2), \\ (2,2,2)\}$$

$$P\{\sum X_i = 3\} = \frac{1}{6}, P\{\sum X_i = 4\} = \frac{3}{6}, P\{\sum X_i = 5\} = \frac{3}{6}, P\{\sum X_i = 6\} = \frac{1}{6}$$

5.- a)  $P(A) = 1^6/4^0$

d)  $P(D) = 1^5/4^0$

b)  $P(B) = 6/4^0$

e)  $P(E) = 1^7/4^0$

c)  $P(C) = 7/4^0$

f)  $P(F) = \frac{17}{4^0} \cdot \frac{4}{17} = 4/4^0$

6.-  $\binom{9}{3} = \frac{9!}{3! 6!} = 84$

7.- a) Si se permite repetición de letras y números:  $(27)^3 \times 10^3$ , si no:  ${}_{27}P_3 \times {}_{10}P_3$

b)  $(27)^3 \times 10^3 = 196 \times 10^3$ ; o, sin repetición,  ${}_{27}P_3 \times {}_{10}P_3 = 196 \times 10^3$

c)  $(27)^3 \times 10^3 \times 6!$  o, sin repetición,  $({}_{27}P_3 \times {}_{10}P_3) \times 6!$

8.- a)  $\binom{4}{2} \binom{4}{2} \binom{13}{2} \binom{4}{1} / \binom{52}{5}$

b)  $13 \times 12 \binom{4}{3} \binom{4}{2} / \binom{52}{5}$

c)  $4 \binom{13}{5} / \binom{52}{5}$

d)  $\binom{4}{1}^5 \times 10 / \binom{52}{5}$

$$9.- \text{ a) } \binom{10}{7} \left(\frac{1}{3}\right)^7 \left(\frac{2}{3}\right)^3 + \binom{10}{8} \left(\frac{1}{3}\right)^8 \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \binom{10}{9} \left(\frac{1}{3}\right)^9 \left(\frac{2}{3}\right)^1 + \binom{10}{10} \left(\frac{1}{3}\right)^{10} \left(\frac{2}{3}\right)^0 = 0.20$$

$$\text{b) } \sum_{X=7}^{10} \binom{10}{X} \left(\frac{1}{4}\right)^X \left(\frac{3}{4}\right)^{10-X} = 0.0035$$

$$\text{c) } \binom{5}{3} \left(\frac{1}{3}\right)^3 \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \binom{5}{4} \left(\frac{1}{3}\right)^4 \left(\frac{2}{3}\right)^1 + \binom{5}{5} \left(\frac{1}{3}\right)^5 \left(\frac{2}{3}\right)^0 = 0.0087$$

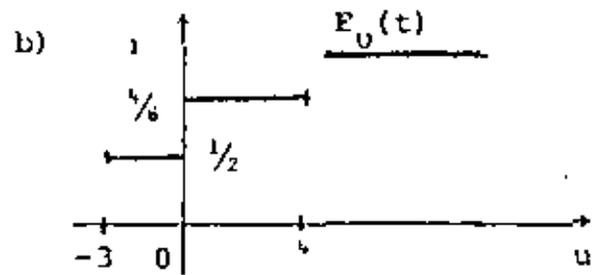
$$\binom{5}{3} \left(\frac{1}{3}\right)^3 \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \binom{5}{4} \left(\frac{1}{3}\right)^4 \left(\frac{2}{3}\right)^1 + \binom{5}{5} \left(\frac{1}{3}\right)^5 \left(\frac{2}{3}\right)^0 = 0.0087$$

$$10.- \text{ a) } \binom{10}{9} \left(\frac{1}{2}\right)^9 \left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{10}{1024} = 0.011$$

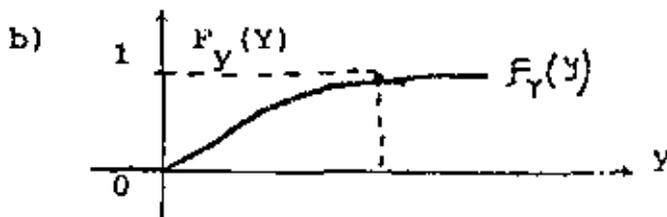
b) sí.



$$a) F_U(u) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < -3 \\ 1/2 & \text{si } -3 \leq u < 0 \\ 5/6 & \text{si } 0 \leq u < 4 \\ 1 & \text{si } t \geq 4 \end{cases}$$



$$7.- a) F_Y(Y) = \begin{cases} 2y - y^2 & \text{si } 0 < y < 1 \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases} \quad (F_Y(Y) = \int_0^y 2(1-u) du)$$



$$8.- a) E\{X\} = 1/3$$

$$c) E\{(x+10)^2\} = 641/6$$

$$e) \sigma_x^2 = 1/18$$

$$b) E\{x^2\} = 1/6$$

$$d) E\left\{\frac{1}{1-x}\right\} = 2$$

$$f) \sigma_x = \frac{1}{\sqrt{27} \times 3}$$

$$9.- q_{20} = 0.00178, \quad P_{20} = 0.99822$$

$$a) E\{x\} = -1000 \times 0.00178 + 5 \times 0.99822 \\ = 4.9911 - 1.78 = 3.22$$

$$b) E\{x^2\} = 1804.955 \Rightarrow \sigma^2(x) = E\{x^2\} - E^2\{x\} = 1804.955 - 10.643 \\ \sigma^2(x) = 1794.64$$

$$10.- P_D = 0.10 \Rightarrow a) (0.90)^{10} \Rightarrow 0.3487,$$

$$b) E\{X\} = np = 10 \times 0.10 = 1$$

$$P_g = 0.9 \Rightarrow a) np = 110 \times 0.9 = 99,$$

$$b) x \cdot p = x \cdot 0.9 = 100$$

$$\Rightarrow x = 100/0.9 = 111.111... \Rightarrow \text{No}$$

12.- a)  $\lambda p = 20 \times 0.05 = 1.0$

b)  $(0.95)^{20} = 0.3585$

13.- a)  $10 \times 0.3585 = 3.585$

b)  $(0.3585)^{10} = 3.5 \times 10^{-5}$

14.- a)  $\binom{8}{x} \binom{2}{5-x} / \binom{10}{5}$

b)  $\binom{2}{x} \binom{8}{5-x} / \binom{10}{5}$

15.- a)  $P(A) = 0.0003 = 8^0 e^{-8} / 0!$

b)  $P(B) = 0.1353 = 2^0 e^{-2} / 0!$

c)  $P(C) = 0.0003 = 8^0 e^{-8} / 0!$

16.- a)  $\lambda = np = 6$

b)  $\sqrt{\lambda} = \sqrt{6}$

c)  $P = 0.6065 = (0.5)^6 e^{-0.5} / 0!$

17.-  $(0.999)^5 \approx 0.995$

18.- a)  $e^{-5} \times \frac{1}{6} = 0.2865$ , b)  $1 - e^{-5} \times \frac{1}{6} = 0.5654$ , c) 0 ya que t es continua

19.- a)  $P(x \geq 31) = P\left(\frac{x-30}{2} \geq \frac{31-30}{2}\right) = P(z \geq 0.5) = 0.3085$

b)  $P(x \leq 32) = P\left(\frac{x-30}{2} < \frac{32-30}{2}\right) = P(z < 1) = 0.8413$

c)  $P(24 \leq x \leq 28) = P(-13 \leq z \leq -1) = P(z \leq -1) - P(z \leq -3) = 0.1574$

20.- a)  $P(z \leq 1.29) = 0.9 \Rightarrow x = 129 + 500 = 629$

b)  $P(z < 1.29) = 0.1 \Rightarrow x = 129 + 500 = 629, Q_1 = 500 - 67 = 433$

c)  $P(z \leq 0) = 0.5 \Rightarrow x = 500 \hat{=} Q_2, Q_3 = 500 + 67 = 567$

$P(x < 585) = P(z < 0.85) = 0.80$

DIRECTORIO DE ASISTENTES AL CURSO: PROBABILIDAD Y ESTADISTICA: FUNDAMENTOS  
Y APLICACIONES ( DEL 12 DE JUNIO AL 2 DE AGOSTO DE 1979)

| <u>NOMBRE Y DIRECCION</u>  | <u>EMPRESA Y DIRECCION</u>   |
|--|--|
| 1. ING. JORGE AGUILAR UGARTE<br>1a. Cda. Tebas No. 5<br>Col. Claveria<br>México 16, D.F.<br>Tel. 399-05-09 527-32-20 | DIR. GRAL. AEROPUERTOS S.O.P.<br>Tonalá Esq. Chiapas<br>Col. Roma<br>México 7, D.F.<br>Tel.  |
| 2. SR. JESUS ALMAZAN   | BANCOMER, S.A.   |
| 3. MANUEL ALMEIDA VAZQUEZ<br>Capilla de los Reyes No. 59<br>Col. Azcapozalco<br>México 16, D.F.<br>Tel. 561-21-39    | COLEGIO DE CIENCIAS Y HUMANIDADES<br>PLANTEL NAUCALPAN<br>Av. de los Remedios No. 10<br>Col. Las Americas<br>Naucalpan, Edo. de Méx. |
| 4. ABDON ZENON ALVARADO ALAVEZ<br>Av. Jalisco No. 288<br>Col. Tacubaya<br>México 18, D.F.<br>Tel. 516-15-99          |  |
| 5. ING. HECTOR GABRIEL AMBRIZ LOPEZ<br>Rubén Darío No. 405<br>Col. Del Valle<br>San Luis Potosí                      | SECRETARIA DE AGRICULTURA Y<br>RECURSOS HIDRAULICOS<br>Mariano Otero No. 600-A<br>San Luis Potosí<br>Tel. 3-49-12                    |
| 6. EMILIA ARRIAGA CROTTE<br>Tabaquitos No. 38<br>Col. Lomas Verdes<br>Naucalpan, Edo. de Méx.                        | COLEGIO DE CIENCIAS Y HUMANIDADES<br>PLANTEL NAUCALPAN<br>Av. de los Remedios No. 10<br>Naucalpan, Edo. de Méx.                      |

DIRECTORIO DE ASISTENTES AL CURSO: PROBABILIDAD Y ESTADISTICA: FUNDAMENTOS  
Y APLICACIONES (DEL 12 DE JUNIO AL 2 DE AGOSTO DE 1979)

NOMBRE Y DIRECCION

EMPRESA Y DIRECCION

7. RAUL CARRILLO VALADEZ  
Manuel González No. 72  
Unidad Tlatelolco  
México 2, D.F.  
Tel. 583-55-94
- ASEGURADORA NACIONAL AGRICOLA Y  
GANADERA, S.A.  
Benjamín Franklin No. 146  
Col. Escandón  
México 18, D.F.  
Tel. 515-50-70 Ext. 133
8. LIC. MA. QUORA CASTILLO BORQUEZ  
Arquitectos No. 37  
Col. Escandón  
México 18, D.F.  
Tel. 516-77-32
- FAC. DE PSICOLOGIA U.N.A.M.  
Ciudad Universitaria  
Tel. 548-17-48
9. ING. RITO CALZADA SALDANA  
Norte 17 No. 5323  
Col. Nueva Vallejo  
México 14, D.F.  
Tel. 567-58-81
- INSTITUTO POLITECNICO NACIONAL
10. ING. PEDRO PABLO CASTELLANOS HDZ.  
Reforma No. 616-1606 Nte.  
Col. Tlatelolco  
México 5, D.F.  
Tel. 529-90-80 Ext. 1606
11. ING. CESAR HECTOR GALLARDO LOPEZ  
Gabino Barrera No. 3-13  
Col. Sn. Rafael  
México 4, D.F.  
Tel.
- SECRETARIA DE AGRICULTURA Y RECURSOS  
HIDRAULICOS  
Reforma No. 20-105  
Col. Centro  
México 1, D.F.  
Tel. 546-46-76
12. ING. ROBERTO HERNANDEZ AGUADO  
Cda. Protasio Tagle No. 36-E  
Col. San Miguel CapulTEpec  
Tel. 516-08-14
- CIA. DE LUZ Y FUERZA DEL CENTRO  
Melchor Ocampo No. 171-4o. Pisc  
México 18, D.F.

DIRECTORIO DE ASISTENTES AL CURSO: PROBABILIDAD Y ESTADISTICA: FUNDAMENTOS  
Y APLICACIONES (DEL 12 DE JUNIO AL 2 DE AGOSTO DE 1979)

NOMBRE Y DIRECCION

EMPRESA Y DIRECCION

- |     |   |  |
|-----|---|--|
| 13. | FRANCISCO HERRERA GARCIA<br>Cordilleras No. 17<br>Col. U. Iztacalco<br>México 8, D.F.                               | CIA. GENERAL DE ELECTRONICA<br>Tezozomoc No. 239<br>Col. Azcapotzalco<br>México 16, D.F.<br>Tel. 561-74-77                     |
| 14. | FELICITAS IBARRA GARCIA<br>Pto. Progreso No. 90<br>Col. Casa Alemán<br>México 14, D.F.<br>Tel. 781-97-75            | DIR. DE ESTUDIOS DEL TERRITORIO NAL.<br>San Antonio Abad No. 124<br>Col. Tránsito<br>México, D.F.<br>Tel. 578-62-00            |
| 15. | LIC. EDGARDO A. JIMENEZ ZARCO<br>Fray Angelico No. 45<br>Col. Mixcoac<br>México 19, D.F.<br>Tel. 598-47-86          | SECRETARIA DE ASENTAMIENTOS<br>HUMANOS Y OBRAS PUBLICAS<br>Lago No. 16<br>Col. Nativitas<br>México 13, D.F.<br>Tel.            |
| 16. | ING. PEDRO ALBERTO LOPEZ GARRIDO<br>Oroya No. 725<br>Col. Lindavista<br>México 14, D.F.<br>Tel. 586-22-85           | ESCUELA SUPERIOR DE INGENIERIA Y<br>ARQUITECTURA<br>Unidad Profesional Zacatenco<br>Col. Lindavista<br>México 14, D.F.<br>Tel. |
| 17. | ALEJO MACIAS NEGRETE<br>Manz. 161 L. 9-10A<br>Col. Las Villas<br>Hda. Ojo de Agua<br>México, D.F.                   | BANAMEX, S.A.<br>Isabel La Católica No. 165-60. Piso<br>México, D.F.<br>Tel. 588-44-00 Ext. 461                                |
| 18. | SALVADOR MANRIQUE IELJA<br>Carreteraco No. 32-A-204<br>Col. Parque San. Andrés<br>México 21, D.F.<br>Tel. 689-17-21 | DIRECCION DE PLANIFICACION D.D.F.<br>Pino Suarez 15-10. Piso<br>Col. Centro<br>México 1, D.F.<br>Tel. 522-64-38                |

DIRECTORIO DE ASISTENTES AL CURSO: PROBABILIDAD Y ESTADISTICA: FUNDAMENTOS  
Y APLICACIONES (DEL 12 DE JUNIO AL 2 DE AGOSTO DE 1979)

NOMBRE Y DIRECCION

EMPRESA Y DIRECCION

- |     |  |   |
|-----|--|---|
| 19. | IGNACION MONSALVO ESCAMILLA<br>Reforma No. 20-1o. Piso<br>Col. Juárez<br>México 6, D.F.<br>Tel. 592-08-78                  | S.A.R.H.<br>Reforma No. 20-1o. Piso<br>Col. Juárez<br>México 6, D.F.<br>Tel. 592-08-78                |
| 20. | ING. JESUS OCEGUEDA NAVARRO<br>Viaducto Miguel Alemán No. 63-9<br>Col. Buenos Aires<br>México 7, D.F.<br>Tel.              | COMISION DEL PLAN NAL. HIDRAULICO<br>Tepic No. 40<br>Col. Roma<br>México 7, D.F.<br>Tel. 574-17-50    |
| 21. | ING. JOSE VALENTIN PEREZ ARROYO<br>Div. del Norte No. 3390-5<br>Col Xotepingo<br>México 21, D.F.<br>Tel.                   | S.A.R.H.<br>Reforma No. 107-1er. Piso<br>Col. Sn. Rafael<br>México 4, D.F.<br>Tel. 566-96-61          |
| 22. | CARLOS RUIZ QUINTANA<br>Edif. C-2 Depto. 304<br>Centro Urbano Pdte. Juárez<br>Col. Roma<br>México 7, D.F.<br>Tel. 64-86-23 |   |
| 23. | ING. PEDRO ROCARTE MIRELES<br>Guanabana No. 310-2<br>Col Nva. Sta. María<br>México 16, D.F.<br>Tel. 355-57-38              | S.A.R.H.<br>Reforma No. 107-1er. Piso<br>Col. Sn. Rafael<br>México 4, D.F.<br>Tel. 566-06-88 Ext. 150 |
| 24. | ING. FELIPE RAMIREZ GOMEZ<br>Luis de la Rosa No. 8 Depto. 3<br>Col. Const. de la Rep.<br>México 14, D.F.<br>Tel.           | S.A.R.H.<br>Sierra Gorda No. 23<br>Col. Lomas<br>México 10, D.F.<br>Tel. 5-40-09-43                   |

DIRECTORIO DE ASISTENTES AL CURSO: PROBABILIDAD Y ESTADISTICA: FUNDAMENTOS  
Y APLICACIONES (DEL 12 DE JUNIO AL 2 DE AGOSTO DE 1979)

NOMBRE Y DIRECCION

EMPRESA Y DIRECCION

25. ING. FCO. MAYOLO RAZO VILLANUEVA  
Ahuizotl No. 37  
Col. La preciosa  
México 16, D.F.  
Tel. 561-37-61
- S.A.R.H.  
Insurgentes Sur No. 670-8o. Piso  
Col. Del Valle  
México, D.F.  
Tel. 536-88-40
26. LIC. NORMA RIVERA CARREÑO  
Av. del Taller Ret. 46 casa 13  
Col. Jardín B.  
México 9, D.F.  
Tel. 571-19-51
27. GUADALUPE SANCHEZ ACUÑA  
Metalurgicos No. 125  
Col. Del Hierro  
México 15, D.F.  
Tel. 567-14-23
- S. A. R. H.  
Sierra Gorda No. 23  
Col. Lomas de Chapultepec  
México 10. D.F.  
Tel. 520-72-46
28. ING. CARLOS P. SAEB GARCIA  
Praga No. 130  
Fracc. Valle Dorado  
Tlalnepantla, Edo. de Méx.  
Tel. 379-02-80
- S. A. R. H.  
Paseo de la Reforma No. 69  
Col. San Rafael  
México 4, D.F.  
Tel. 546-19-51
29. RICARDO THOMPON RAMIREZ  
Uxman 771-302  
Col. Cruz de Atoyac  
México 12, D.F.  
Tel. 559-91-79
- DIR. GRAL. DE CIENCIA Y TECNOLOGIA  
DEL MAR  
Bolivar No. 19-1er. Piso  
Col. Centro  
México 1, D.F.  
Tel. 510-04-40
30. CARLOS VALENCIA CARMONA  
Giotto No. 66-201  
Col. Mixcoac  
México, D.F.  
Tel. 598-50-67
- OBRAS PUBLICAS D.D.F.  
Plaza de la Constitución
31. BERNARDO VILLEGAS ALVAREZ  
P. de la Reforma Nte. No. 616-1606  
Col. Tlatelolco  
México, D.F.  
Tel. 529-90-80

