



Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ingeniería

**Locomoción stokeana en líquidos
viscoelásticos**

Tesis

que para obtener el título de

Ingeniero Mecánico

presenta

Julián Espinosa García

Director de tesis: Dr. Roberto Zenit Camacho

A Arlequín, el invisible

Resumen

En el presente trabajo se investigó el efecto que tiene la elasticidad del medio en la locomoción de microorganismos flagelados en regímenes a bajos números de Reynolds. Para lograrlo se diseñó un sistema experimental no invasivo para el estudio del fenómeno y se fabricaron fluidos de trabajo con propiedades reológicas controladas. Videos de alta definición fueron tomados y analizados mediante un algoritmo de procesamiento de imágenes. Para diferenciar los efectos elásticos de los viscosos se comparó el desempeño del nado de un microrobot en un líquido newtoniano de referencia y un líquido de Boger altamente elástico de la misma viscosidad que el newtoniano; variando parámetros como la longitud de la cola y la frecuencia de oscilación y realizando un análisis adimensional se obtuvieron resultados que muestran el punto óptimo de propulsión. Si las condiciones se alejan de esta condición óptima entonces la velocidad de propulsión decae. El resultado más importante es que, no importando la condición, la velocidad de nado siempre es mayor en el fluido de Boger, comparada con el fluido newtoniano. Adicionalmente se realizaron mediciones mediante la técnica de PIV (particle image velocimetry) para visualizar el flujo alrededor de la cola.



Agradecimientos

Me tomo la libertad de dedicar unas páginas para agradecerle a todas las personas que me ayudaron a realizar este trabajo. Sin lugar a dudas éste es un compendio del apoyo que recibí por parte de cada uno de ustedes.

Quiero agradecer a Roberto Zenit, tutor admirable y estimado compañero. Con profundo cariño y respeto te doy las gracias por formarme dentro de tu laboratorio y permitirme ser partícipe de tan atesoradas experiencias.

A Alberto Caballero, por brindarme tu cordial e invaluable asesoría sin importar si me presentaba cual paracaidista. Sin tu ayuda no hubiera sido posible diseñar el dispositivo electrónico; y muchas gracias por prestarme tu equipo.

Muchas gracias también a José Castillo por dedicarme el tiempo y asesorarme aún cuando no tenías ni idea de quién era el estudiante loco.

A Enrique Guzmán, por nuestras invaluable y entretenidas tertulias que me ayudaron en los momentos más difíciles. Gran amigo, gran y sabio experimentalista, muchas gracias por todo.

A Enrique Chávez, por ilustrarme en el campo de la reología y aceptarme en sus cursos de posgrado. Por enseñarme la belleza y complejidad del comportamiento viscoelástico en nuestras tertulias nocturnas en el posgrado de química.

A Arturo Mendoza, por darme una invaluable asesoría con respecto a los fluidos tipo Boger, enseñarme a prepararlos e introducirme al campo de la reología. Muchas gracias.

A Ernesto Mancilla, te escribiría muchas cosas pero se que de todas formas responderás con un comentario soez (ja!). Mejor solo te doy las gracias.

A Mariana Ramírez Gilly, Luis Medina y Enrique Soto por ayudarme a caracterizar los fluidos viscoelásticos y enseñarme a utilizar un reómetro.

Muchas gracias a Mónica Martínez por convencerme a entrar en el laboratorio, tu y Roberto iniciaron todo.

A todos mis compañeros del laboratorio de flujos multifásicos del IIM. Todos y cada uno de ustedes han aportado algo en mi formación. Muchas gracias a Roger, a Esli, Ernesto (de nuevo), (al Kraken), a Charly, al Cantante original, a Carolina, el Mijito, Enrique, Federico,





Santos, Horacio, al rey del chat, Susana, Gerardo. Gracias por los buenos momentos.

A Juan Hernández y sus pupilos por los buenos momentos de fútbol (teórico y práctico), por los convivios ocasionales y los periódicos comentarios sagaces y mordaces teledirigidos.

A mis padres y a mi hermano, (casi) todo lo que soy se lo debo a ustedes; no hay mejor ejemplo.

A mis amigos de toda la vida, gracias por compartir esta etapa de la vida conmigo.

Al *invisible* que sabotaba mis experimentos. ¿Dónde estaría la diversión de no ser así?

A todos los que, en su incondicional apoyo, me enseñaron a seguir adelante.

A la Universidad Nacional Autónoma de México y a la Facultad de Ingeniería.

A las circunstancias que me han formado como soy, para bien y para mal...o no.





“I was taught that the way
of progress was neither
swift nor easy”

MARIE CURIE



Índice general

1. Introducción	1
1.1. Análisis dimensional y semejanza dinámica	2
1.1.1. Número de Reynolds	4
1.2. Locomoción a bajo número de Reynolds	6
1.2.1. Reducción de las ecuaciones de Navier-Stokes	6
1.2.2. Teorema de Purcell	8
1.2.3. Técnicas de nado en bajos Reynolds	10
1.2.4. Cilios	10
1.2.5. Flagelos	11
1.2.6. Mecanismos artificiales de nado	20
1.3. Número de espermatozoides	22
1.4. Resultados experimentales previos	23
2. Arreglo Experimental	25
2.1. Nadadores	27
2.2. Generación del campo magnético oscilante	28
2.3. Fluidos	29
2.4. Procedimiento experimental	32
2.5. Métodos de visualización y captura de datos	34
2.6. Visualización PIV	36

3. Caracterización reológica	37
3.1. Flujo cortante simple	38
3.2. Pruebas de relajación de esfuerzo	40
3.3. Flujo oscilatorio de pequeña amplitud	40
4. Resultados	47
4.1. Primera campaña de mediciones	48
4.2. Segunda campaña	51
4.3. Mediciones del campo de velocidad alrededor del nadador	58
5. Conclusiones	63
A. Dispositivo electrónico experimental	65
Bibliografía	69

Índice de figuras

1.1. Nadador de un grado de libertad	9
1.2. Nado ciliar	11
1.3. Arrastre de Stokes	13
1.4. Onda propagada por un espermatozoide	14
1.5. Anisotropía del arrastre	19
1.6. Nadador de cola flexible	20
2.1. Nadador magnético	27
2.2. Circuito del sistema	29
2.3. Pruebas de flujo cortante simple de las muestras	30
2.4. Arreglo experimental	33
2.5. Variación del número de esperma	34
2.6. Procesamiento de videos	35
2.7. Imagen típica de PIV	36
3.1. Prueba de flujo cortante simple estacionario	39
3.2. Prueba de relajación de esfuerzo	41
3.3. Pruebas oscilatorias	44
4.1. Resultados con distintos tamaños de colas	48
4.2. Resultados adimensionales con distintos tamaños de colas	50

4.3. Resultados del caso de 2.5 cm	52
4.4. Resultados adimensionales del caso de 2.5 cm	53
4.5. Comparación de posición y ángulo	55
4.6. Evolución de la cola	56
4.7. Relación de velocidades	57
4.8. Campo de velocidad	58
4.9. Promedio de la magnitud del tensor rapidez de deformación	60
A.1. Circuito generador de señales	66
A.2. Circuito de potencia	67

La locomoción es esencial para la supervivencia de muchos organismos, ya sea para evitar el peligro, cazar, buscar una pareja, etc. Soluciones a este problema se presentan en diversas formas, desde mecanismos articulados complejos que necesariamente requieren de extremidades, como lo son los artrópodos, bípedos, cuadrúpedos o incluso los gastrópodos en tierra; y en el agua medios de locomoción como el nado inercial tuneiforme, caringuiforme, subcaringuiforme, anguiliforme, etc. Las especies marinas, terrestres, subterráneas y aéreas tienen que enfrentarse a ambientes físicos muy distintos y sin embargo todas las formas de locomoción pueden ser clasificadas en un pequeño grupo fundamental de clases [40]. De éstas, el movimiento ondulatorio, que se basa en la propagación de ondas a través del cuerpo para poder moverse, es ampliamente utilizado especialmente porque no requiere de extremidades complejas para lograrlo, sólo un cuerpo deformable.

Los microorganismos son muy pequeños como para tener extremidades complejas, por lo que no es de sorprender que recurran al movimiento ondulatorio para desplazarse. Bacterias y muchas células eucariotas se mueven utilizando un apéndice llamado flagelo, y eucariotas más evolucionados mediante cilios o flagelos más complejos.

Es interesante resaltar que el entorno físico al que se enfrentan los microorganismos es muy diferente al que nos enfrentamos nosotros los seres macroscópicos; es un mundo en el que la inercia no juega ningún papel, los métodos intuitivos de nado no son efectivos debido a la reversibilidad dinámica (que se explicará en la siguiente sección).



Además, células como los espermatozoides se enfrentan a secreciones poliméricas orgánicas que presentan un comportamiento reológico complejo, como el de la mucosa cervical o el semen. Entender la respuesta del espermatozoide a este tipo de entornos viscoelásticos es esencial para comprender el movimiento de los mismos *in vivo* [18].

1.1. Análisis dimensional y semejanza dinámica

El universo es dinámico, los materiales y otros elementos constitutivos del universo (los flujos de energía y demás) siempre están interactuando entre ellos. Estas interacciones pueden ser bien conocidas o no necesariamente; sin embargo, en muchas ocasiones es difícil determinar las relaciones y las variables involucradas que existen entre dichas interacciones y mucho menos *a priori*. La Biología por ejemplo, es una de las disciplinas que estudian fenómenos e interacciones sumamente complejas. Sin embargo, muchas veces los fenómenos son causados por la interacción de dos factores que compiten entre ellos. Existe una herramienta que puede decirnos cómo están relacionadas las variables físicas involucradas en un fenómeno cuando están elaboradas en un sistema dimensional congruente ¹. Éste método es llamado análisis dimensional. La adimensionalidad tiene en la biología un atractivo adicional: evita que el tamaño confunda los análisis, y no es poca cosa cuando los elementos de su campo de estudio tienen tamaños que abarcan ocho órdenes de magnitud [51].

El análisis dimensional es un método para reducir la complejidad y el número de las variables experimentales involucradas en algún fenómeno físico. Históricamente, la primera persona en escribir extensivamente acerca del razonamiento de dimensiones y unidades en relaciones físicas fue Euler en 1765. Las ideas de Euler estaban muy adelantadas a su época, así como lo estaban las de Joseph Fourier, plasmadas en su libro *Analytical theory of heat* en 1822, donde estableció lo que ahora se conoce como homogeneidad dimensional. En el libro de Lord Raileigh *Theory of sound* en 1877, donde propuso un "método de dimensionesz se

¹En el ámbito ingenieril es común utilizar dos: el sistema absoluto (MTL θ) y el gravitacional (FTL θ) donde M (masa), F (fuerza), T (tiempo) y θ (temperatura) representan a las unidades dimensionales fundamentales.



dieron algunos ejemplos de análisis dimensional. El avance definitivo que estableció el método como lo conocemos ahora fue publicado en 1914 por E. Buckingham en un artículo llamado *On physically similar systems. Illustrations of the use of dimensional equations* [6][52].

El teorema de Buckingham establece que el número de grupos adimensionales independientes que deben emplearse para describir un fenómeno físico en el que intervienen n variables es igual a $n - m$, donde m es la característica de la matriz dimensional (que en la mayoría de los casos es igual al número de dimensiones fundamentales incluidas en el problema).

Un resultado del análisis dimensional es la teoría de modelos, que establece que un modelo y un prototipo son semejantes si los números adimensionales pertinentes son los mismos para ambos casos. Esta semejanza permite obtener leyes de escalamiento.

Ejemplo ilustrativo, semejanza de condiciones físicas

Vogel en [51] ilustra la utilidad del análisis dimensional de la siguiente manera:

El análisis dimensional no está limitado a establecer las reglas de semejanza, también pueden decirnos los límites a los que cierto fenómeno está confinado, especialmente si éstos vienen dados por la interacción de dos factores que compiten entre ellos. Imaginemos el caso de una pared hecha mediante el apilamiento de bloques. El problema puede ser bastante complicado si se intenta analizar la relación esfuerzo-deformación que sufre en la base; si se debe considerar un criterio de cedencia, etc. Con un análisis dimensional el límite permisible se puede determinar con facilidad.

La relación entre el esfuerzo en la base de la pila a la resistencia a la compresión del material no puede exceder a uno; es decir:

$$\frac{\rho gh}{\sigma_{comp}} < 1 \quad (1.1)$$

donde ρ es la densidad del material, g es la aceleración gravitatoria, h es la altura de la pared y σ_{comp} es el esfuerzo último del material a compresión. Con esta





relación se pueden insertar valores y ver que, por ejemplo, los ladrillos ordinarios no pueden pasar de unos 400 metros de apilamiento antes de que se aplasten a sí mismos, mientras que el granito puede llegar a casi 5000 metros y que impresionantemente materiales como el hueso o la madera pueden ser apilados a más de 8000 metros de altura. Si en la relación en lugar de usar el esfuerzo último a la compresión se utiliza a tensión, el límite impuesto será el de la longitud a la cual un cable se rompe por su propio peso; y por ejemplo expone la imposibilidad de bajar una cuerda desde un satélite en órbita geosíncrona hasta la superficie del planeta Tierra, una idea surgida (y refutada) en 1966.

1.1.1. Número de Reynolds

Algunos parámetros adimensionales que aparecen con frecuencia en fenómenos físicos llevan el nombre de la(s) persona(s) que los descubrieron o que los hicieron famosos; para el caso de la mecánica de fluidos, el parámetro más importante lleva el nombre de Osborne Reynolds, uno de los personajes más importantes en esta área. Éste está definido como:

$$Re = \frac{\rho v l}{\mu} \quad (1.2)$$

donde v y l son una velocidad y dimensión características, μ es la viscosidad dinámica del fluido y ρ es la densidad del fluido. Este parámetro puede ser interpretado de distintas maneras según la forma en la que se haya obtenido. Una de las formas en las que se puede obtener es a partir de las ecuaciones de Navier-Stokes. Las ecuaciones de Navier-Stokes para un fluido incompresible son:

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \right) = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{v} + \rho \mathbf{F} \quad (1.3)$$

donde se establece que la aceleración que sufre el fluido (temporal y convectiva) es causada por las fuerzas de cuerpo y de superficie a las que esté sujeto. Las fuerzas de superficie pueden ser viscosas o de presión. Si se analizan las componentes de los términos convectivo y viscoso se puede notar que el primero tiene las componentes $\frac{\rho v v}{L}$ y el segundo de $\frac{\mu v}{L^2}$. Si se



relacionan ambos términos se obtiene el número de Reynolds, el cual es:

$$\frac{Inercia}{Viscosos} = \frac{\rho v L}{\mu} = Re \quad (1.4)$$

El número de Reynolds relaciona los efectos inerciales con los efectos viscosos en un flujo. Sin embargo, existen otras interpretaciones como por ejemplo:

$$Re = \frac{\rho v L}{\mu} = \frac{\rho v^2}{\underbrace{\mu \frac{v}{L}}_1} = \frac{v L^2}{\underbrace{L \nu}_2} = \frac{t_{diff}}{t_{conv}} \quad (1.5)$$

Se puede observar que además es una comparación entre el flujo convectivo de momentum y el flujo difusivo de momentum dado por el término inercial no lineal (1) y es, también una comparación de escalas de tiempo de proceso convectivo (escala de tiempo para que una perturbación local de velocidad sea transportada convectivamente por el flujo a lo largo del cuerpo, $t_{conv} = \frac{L}{v}$) y difusivo (escala de tiempo para que esa perturbación sea disipada debido a la viscosidad, $t_{diff} = \frac{L^2}{\nu}$) en (2). Cuando el número de Reynolds es pequeño, el transporte está completamente dominado por la difusión viscosa[31].

Con esta definición del número de Reynolds, se puede comenzar a imaginar cómo es el flujo cuando este número es muy pequeño. El número de Reynolds (Re) característico de un flujo será pequeño si la velocidad a la que ocurre el flujo es muy pequeña, si la viscosidad es muy grande o la longitud característica es muy pequeña. En el caso de estudio en esta tesis tanto la longitud característica como la velocidad son muy pequeñas. Vogel [50] da algunos ejemplos del número de Reynolds típico para una diversa gamma de seres vivos. La información se muestra en la tabla 1.1.



	Número de Reynolds
Ballena nadando a 10 m/s	300,000,000
Atún nadando a la misma velocidad	30,000,000
Pato volando a 20 m/s	300,000
Libélula volando a 7 m/s	30,000
Copépodo nadando a 0.2 m/s	300
Insectos voladores más pequeños	30
Larva invertebrada de 0.3 mm nadando a 1 mm/s	0.3
Espermatozoide	0.003
Bacterias nadando a 0.01 mm/s	0.00001

Tabla 1.1: Números de Reynolds característicos para distintos seres vivos [50]

1.2. Locomoción a bajo número de Reynolds

1.2.1. Reducción de las ecuaciones de Navier-Stokes

Existen muchas soluciones para lograr la locomoción animal. Dentro del grupo de animales acuáticos se pueden distinguir diversas formas según su morfología y tamaño. De entre esas soluciones podemos encontrar para el nado inercial al menos tres formas:

- a) Propulsión anguiliforme ($Re < 10^4$), es dentro de las formas inerciales la más lenta, el cuerpo es muy flexible se basa en la propagación de ondas a través de todo el cuerpo. Todo el cuerpo ayuda a la generación de empuje.
- b) Caringiforme ($Re > 10^4$), es la forma más común en la naturaleza. El cuerpo es semirígido, la propulsión se genera en la parte posterior del cuerpo. Es más rápida que la anguiliforme.
- c) Tuniforme ($Re > 10^4$), la propulsión se genera únicamente en la aleta dorsal mediante un movimiento de vaivén. Es la forma que genera más empuje de todas y por ende la más rápida.

Todas estas formas se basan en la transferencia de momento hacia el fluido para lograr el empuje, pero cuando el entorno se vuelve no inercial las cosas cambian de manera drástica. Para poder entender mejor cómo es afectado el entorno es necesario acudir a las ecuaciones de Navier-Stokes, obtener las ecuaciones adimensionales y luego suponer que el número de Reynolds es casi cero.



Se pueden adimensionalizar las ecuaciones de Navier-Stokes escogiendo adecuadamente las variables de escalamiento de la siguiente manera: Como el flujo es de naturaleza oscilatoria, la velocidad característica es $U_c = \frac{L}{T}$ donde T es el periodo de oscilación. Se pueden considerar las siguientes variables:

$$\text{Variables adimensionales} = \begin{cases} v^* = \mathbf{v} \frac{T}{L_c} & \text{velocidad adimensional} \\ \xi^* = \frac{\mathbf{x}}{L_c} & \text{longitud adimensional} \\ \tau^* = \frac{t}{T} & \text{escala de tiempo} \\ \Pi = \frac{P}{\rho} & \text{presión referida al flujo difusivo de momentum} \\ \Psi = \frac{\mathbf{g}}{g} & \text{fuerzas de cuerpo referidas a la aceleración gravitacional} \end{cases}$$

donde T y L_c son un período y tamaño característico respectivamente.

Utilizando estas variables las ecuaciones de Navier-Stokes (ecuaciones 1.3) adimensionales (considerando a aceleración gravitatoria como única fuerza de cuerpo) quedan como:

$$Re \left(\frac{\partial v^*}{\partial \tau^*} + v^* \cdot \nabla v^* \right) = -\nabla \Pi + \nabla^2 v^* + \frac{Re}{Fr^2} \Psi \quad (1.6)$$

Si el número de Reynolds es muy pequeño, las ecuaciones se reducen a:

$$\nabla \Pi = \nabla^2 v^* \quad (1.7)$$

o de manera dimensional como:

$$\nabla P = \mu \nabla^2 \mathbf{v} \quad (1.8)$$

La ecuación resultante es lineal, lo que permite la superposición de soluciones.

Otro detalle que se debe analizar es que debido a que se desprecian los efectos inerciales, todas las fuerzas actuando en cada elemento de fluido están en equilibrio. Así mismo, el





fluido actuando sobre un microorganismo está actuando con un sistema de fuerzas tal que siempre está en equilibrio debido a que las tasas de cambio de momento y momento angular del microorganismo son irrelevantes en comparación con las fuerzas individuales viscosas que actúan sobre él. A esto se le llama la condición de nado libre, es decir, que independientemente de si el nadador se está moviendo o no, éste está en equilibrio de fuerzas y torques.

1.2.2. Teorema de Purcell

De la ecuación 1.8 lo primero que se puede notar es que no hay dependencia del tiempo. Al haber eliminado los términos inerciales de las ecuaciones de Navier-Stokes se puede notar es que el flujo es instantáneo; si algo se mueve en ese medio lo hará por la acción de las fuerzas que actúen sobre él en ese momento solamente, y en el instante en que ésta deje de actuar se detiene todo el movimiento. La única dependencia del tiempo que puede haber es si las condiciones de frontera mismas dependen del tiempo. Una consecuencia inmediata de la instantaneidad es que el flujo se vuelve reversible en el tiempo.

Purcell[43] ilustra claramente cómo es que los resultados anteriores afectan la forma de locomoción a pequeñas escalas, y lo llama el teorema de la almeja (*Scallop Theorem*). Si se toma un mecanismo de un grado de libertad, como lo es una almeja que sólo abre y cierra su concha a distintas velocidades en el agua para moverse y se le somete a las condiciones de números de Reynolds suficientemente bajos, la cantidad de fluido que mueva al abrir y cerrar su concha será la misma, sin importar a que velocidad lo haga. Esto es causa directa de la reversibilidad temporal antes mencionada. La conclusión contundente es que los movimientos recíprocos no generan propulsión en estos entornos. Para que un organismo sea capaz de nadar debe de poder deformar su cuerpo de una manera no recíproca.

Esto se puede explicar adimensionalmente de la siguiente manera con ayuda de la imagen 1.1: si el nadador sólo puede abrir y cerrar sus apéndices (como lo haría una almeja), entonces el impulso que genere depende de si la inercia o la disipación viscosa dominan. El impulso está dado por la ecuación 1.9:



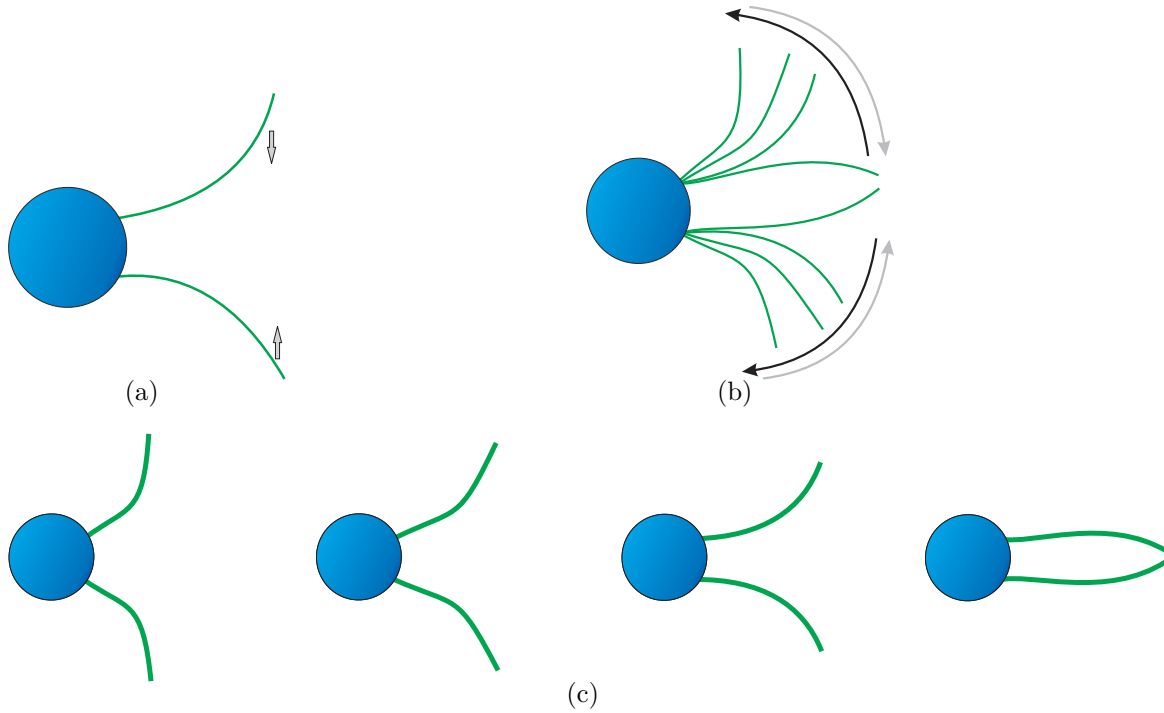


Figura 1.1: Nadador hipotético del teorema de Purcell. La forma en que mueve sus apéndices en b y c .

$$I = \int_0^T F dt \quad (1.9)$$

donde F es la fuerza actuando en los apéndices y T es la duración del empuje de los apéndices. Si la inercia domina entonces la fuerza que los apéndices ejercen sobre el fluido está dominada por la fuerza inercial y se escala con el cuadrado de la velocidad v , por lo tanto $F \sim v^2$, y entonces el impulso se escala como:

$$I \sim v^2 T \sim v \sim L/t \quad (1.10)$$

El penúltimo paso sale del hecho de que la velocidad se escala con el inverso del periodo ($1/T$) entonces el impulso depende de la velocidad. Si por el contrario, la fuerza está dominada por efectos viscosos, entonces el término que domina es el viscoso de las ecuaciones de Navier-Stokes que depende linealmente de v , por lo que $F \sim v$ y el impulso entonces se escala como:



$$I \sim vT \sim L \quad (1.11)$$

El impulso no depende de la velocidad sino solamente de la distancia recorrida por los apéndices. Entonces, si el movimiento es simétrico, el nadador de la figura 1.1 no puede desplazarse.

1.2.3. Técnicas de nado en bajos Reynolds

Existen al menos dos formas en que los distintos organismos han logrado resolver el problema de reversibilidad temporal para lograr locomoción.

1.2.4. Cilios

Los cilios utilizan el cambio de geometrías para lograr el impulso. Según la ecuación 1.11, si el impulso es constante a lo largo del periodo de acción T entonces el impulso es: $I = F \cdot T$. Como en el flujo de Stokes la fuerza de arrastre hidrodinámico está dada por $F_d = kvl\mu$, donde k es un valor que depende de la geometría y la orientación con respecto al flujo y l es un tamaño característico, entonces el impulso generado es:

$$I = k v l \mu T = k \mu l^2 \quad (1.12)$$

Una vez más se puede apreciar que el impulso depende únicamente de la distancia recorrida; sin embargo, el valor que toma esa constante k puede cambiar si los cilios cambian su configuración geométrica. La figura 1.2 muestra la forma en la que los cilios cambian su configuración para lograr impulso neto en un flujo de Stokes. Si en la mitad del ciclo logran una longitud proyectada al flujo muy grande lograrán un impulso tal que $I \sim l_{grande}$ y si en la otra mitad reducen ese tamaño generan un impulso en sentido contrario pero con magnitud menor, de tal forma que el impulso neto no será cero sino:



$$\begin{aligned}
 I_{empuje} &= k_{grande} \mu l_{grande}^2 \\
 I_{rec} &= k_{chica} \mu l_{chica}^2 \\
 I_{neto} &= I_{empuje} - I_{rec} \\
 &= \mu (k_{grande} l_{grande}^2 - k_{chica} l_{chica}^2)
 \end{aligned}
 \tag{1.13}$$

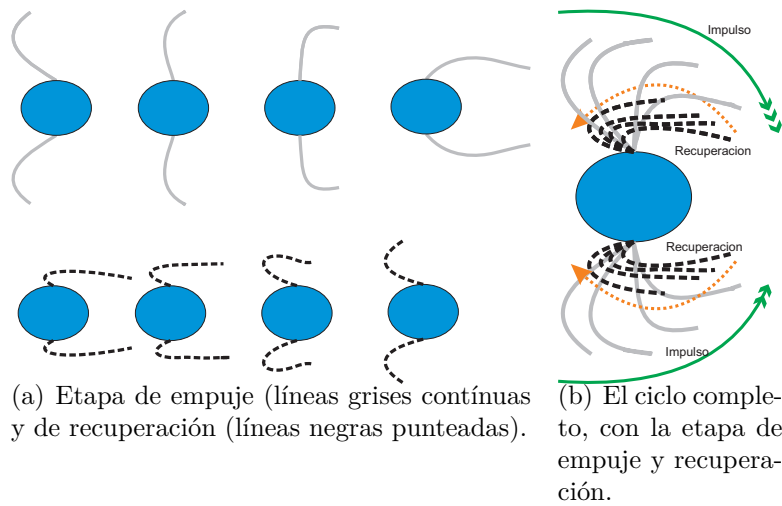


Figura 1.2: Estrategia del movimiento ciliar

Los cilios se expanden proyectando un área muy grande en el fluido mientras se mueven en la etapa de empuje, logrando un impulso grande. Cuando termina la etapa de empuje a la mitad del ciclo los cilios regresan a su posición inicial con un cambio de geometría que genere poco arrastre en el fluido, generando una cantidad de impulso pequeña en comparación con el generado en la etapa de empuje. El impulso neto (que es la suma de todo el impulso generado en el ciclo) no es cero gracias a esos cambios geométricos.

1.2.5. Flagelos

El movimiento flagelado es más complejo de analizar que el ciliar. Éste se basa en la propagación de ondas a través del mismo para romper la simetría y aprovechando la anisotropía



del arrastre hidrodinámico. Fauci y Dillon [18] realizaron un resumen acerca de los avances biológico-mecánicos de la reproducción mediante mezcla de gametos espermatozoide-óvulo y en él realizaron un compendio de trabajos sobre la mecánica de fluidos involucrada en la locomoción que vale la pena revisar. El primer trabajo publicado acerca de la mecánica de fluidos del movimiento flagelado lo hizo G.I. Taylor[47], quien analizó el nado de un plano infinito propagando ondulaciones de pequeña amplitud inmerso en un fluido viscoso.

Subsecuente a Taylor, Gray y Hancock[22] en 1955 desarrollaron una teoría basados en la suposición del flujo lineal de Stokes llamada “teoría de la fuerza resistiva” (o *Resistive-Force Theory*) en la que describen al flagelo como una serie de pequeños cilindros. La fuerza en cada uno de ellos se calcula suponiendo que los mismos se están moviendo en una dirección en ausencia de cilindros diferenciales vecinos. Esta teoría calcula los coeficientes de resistencia provenientes de la ley de Stokes para el arrastre viscoso y que, además, supone que la amplitud de la oscilación es pequeña. Lighthill[34][35] mejoró la teoría incorporando aproximaciones de cuerpo delgado debido a que el flagelo es mucho más largo que ancho. Otros trabajos numéricos han investigado la propulsión flagelar bi y tridimensional en un dominio de fluido infinito en reposo o con alguna interacción de pared (Dresdner et al. (1980) [16]; Higdon (1979)[24]; Phan–Thien et. al. (1987)[42]); sin embargo, es necesario recalcar que estas teorías suponen la forma y la cinemática de la perturbación como conocida aunque en realidad la forma en la que los flagelos oscilan es una propiedad particular de cada sistema y pueden ser muy diferentes[18].

Con base en el trabajo de Lauga y Powers[31], se explicará la forma en que ocurre el empuje. Independientemente de la teoría, está claro que el empuje es generado por el arrastre. Para poder explicar cómo es que se genera el empuje, es necesario retomar la ley del arrastre de Stokes. En la figura 1.3 se puede apreciar que si un cilindro se mueve en cierta dirección, el fluido lo empujará en la dirección opuesta con una fuerza igual a $F_n = k_n U_n l \mu$ si se mueve en la dirección paralela al eje del cilindro y $F_t = k_t U_t l \mu$ si se mueve en una dirección perpendicular al eje. Los coeficientes k son llamados coeficientes de resistencia y dependen de la geometría del cuerpo.

El origen del empuje basado en el arrastre (como inicialmente lo proponen Gray y Han-



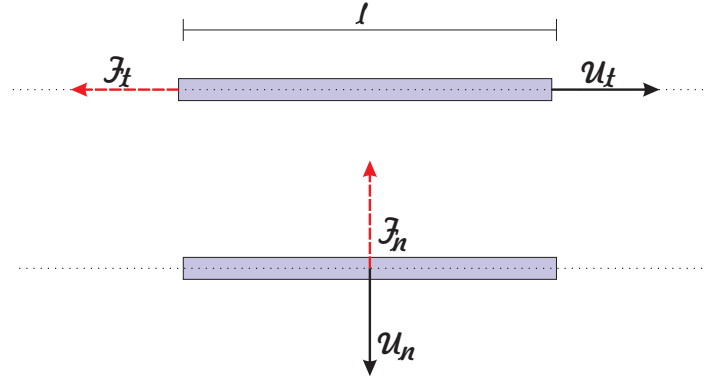


Figura 1.3: Arrastre viscoso en un cilindro

cock en 1955[22]) se basa en las siguientes dos ideas físicas: la existencia de una anisotropía en el arrastre para que pueda generarse una fuerza propulsora con la orientación adecuada con respecto a la dirección del movimiento del filamento y segundo, que el flagelo se puede deformar en una forma periódica y sin embargo generar propulsión neta a lo largo del ciclo. Para ilustrar estas ideas se considerarán las características de la onda ideal generada por un espermatozoide en la figura 1.4(a) y al espermatozoide nadando de la figura 1.4(b).

El método propuesto por Gray y Hancock[22] consiste en discretizar al flagelo en elementos diferenciales ds y hacer un balance de fuerzas en cada uno de ellos suponiendo que no hay interacción entre ellos. En la figura 1.4(b) se muestra un “espermatozoide” prescribiendo una onda de descripción geométrica conocida, nadando en la dirección X con una velocidad U . En el acercamiento del elemento ds , éste se está moviendo en la dirección Y con una velocidad V debido a la propagación de la onda y al mismo tiempo en X por el hecho de estar nadando. El elemento ds tiene una orientación en ese momento de θ grados con respecto a la dirección del nado.

Para analizar a ese elemento diferencial y ver que fuerzas están actuando, es necesario descomponer al vector velocidad en sus componentes tangente y normal. Como el elemento se está moviendo en un fluido de viscosidad μ , éste ejercerá una fuerza de arrastre en dirección contraria al movimiento. En la imagen se muestran dos fuerzas de arrastre, una por el movimiento en la dirección X y otra por el movimiento en la dirección Y . Por simplicidad la viscosidad será contenida en los términos k_i ya que éstos dependen linealmente de esa pro-

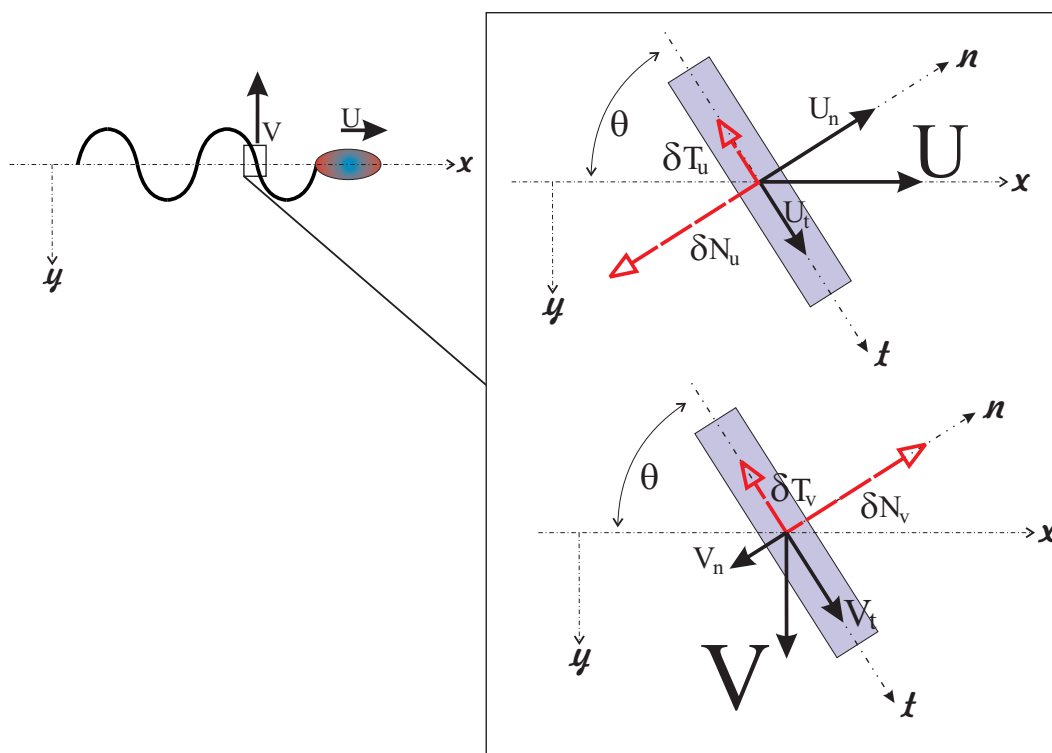
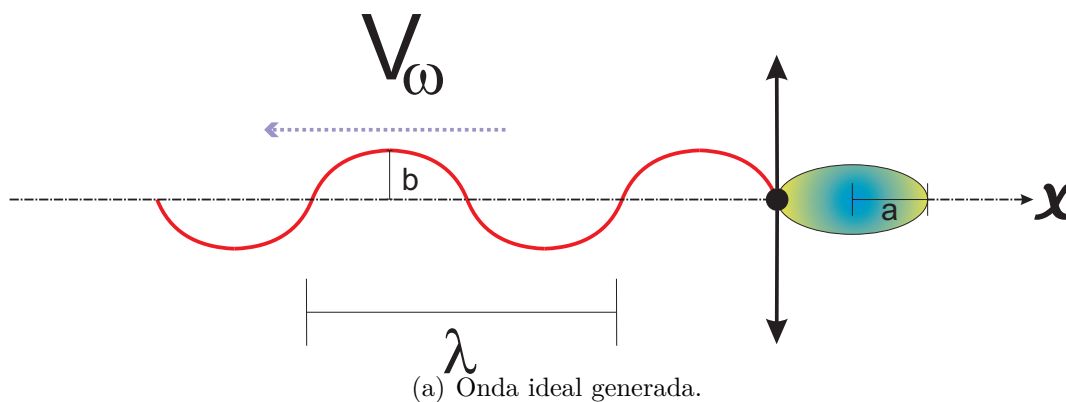


Figura 1.4: a) La onda ideal propagada a través del flagelo tiene una amplitud pequeña b y longitud de onda λ ; hay que mencionar que aunque el flagelo mismo sólo oscile en la dirección Y según el sistema de referencia, la onda propagada se mueve a una velocidad V_ω alejándose de la cabeza.

b) Las fuerzas de arrastre proyectadas en las direcciones normal y tangencial al elemento.



piedad (ley del arrastre de Stokes). Las fuerzas de arrastre también se pueden descomponer en las direcciones normal y tangencial al elemento ds de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}\delta T_u &= k_t U \cos \theta ds \\ \delta N_u &= k_n U \sin \theta ds \\ \delta T_v &= k_t V \sin \theta ds \\ \delta N_v &= k_n V \cos \theta ds\end{aligned}\tag{1.14}$$

Una vez descompuestas las fuerzas en sus componentes, se pueden agrupar las fuerzas tangentes y normales:

$$\begin{aligned}\delta N &= \delta N_v - \delta N_u \\ &= k_n (V \cos \theta - U \sin \theta) ds \\ \delta T &= \delta T_v + \delta T_u \\ &= k_t (V \sin \theta + U \cos \theta) ds\end{aligned}\tag{1.15}$$
$$\tag{1.16}$$

El empuje generado, según el sistema de referencia escogido, actúa en la dirección X y es entonces la suma de fuerzas en esa dirección:

$$\begin{aligned}dF_{empuje} &= \delta N \sin \theta - \delta T \cos \theta \\ &= (k_n - k_t) V \sin \theta \cos \theta ds - U (k_n \sin^2 \theta + k_t \cos^2 \theta) ds \\ &= \frac{(k_n - k_t) V \tan \theta - U (k_t + k_n \tan^2 \theta)}{1 + \tan^2 \theta} ds\end{aligned}\tag{1.17}$$
$$\tag{1.18}$$

Se puede notar que si se ignora la velocidad de nado U , la ecuación 1.17 se reduce a la que utilizan Lauga y Powers en [31]. De esta ecuación se puede notar que si no existe





anisotropía en el arrastre (es decir, si $k_n = k_t$) entonces no se generará propulsión. Así mismo, para generar propulsión a partir de un movimiento periódico, se puede ver que tanto la velocidad del elemento V como su orientación deben de variar periódicamente en el tiempo. Por ejemplo, si se toma como referencia la configuración mostrada en un instante dado (V y θ), el cambio de configuración conjunta $V \rightarrow -V$ y $\theta \rightarrow \pi - \theta$ generará propulsión. Si por el contrario sólo ocurre el cambio de configuración $V \rightarrow -V$ sin el cambio de orientación el impulso neto será cero.

La condición para que exista empuje es que $\delta N > 0$, entonces se tiene que cumplir que $V > U \tan \theta$ y por lo tanto $k_n > k_t$.

Si la amplitud de la onda es pequeña con respecto al periodo, entonces podemos suponer que $\frac{dy}{dx} \ll 1$ y por lo tanto $\frac{dy}{dx} = \tan \theta \ll 1$. Además, sabiendo que $V = \frac{dy}{dt}$ la ecuación 1.19 se puede reescribir como:

$$dF_{empuje} = \frac{(k_n - k_t) \frac{dy}{dt} \frac{dy}{dx} - U(k_t + k_n \tan^2 \theta)}{1 + \tan^2 \theta} ds \quad (1.19)$$

$$= \left((k_n - k_t) \frac{dy}{dt} \frac{dy}{dx} - U k_t \right) ds \quad (1.20)$$

Ahora, si se toma en cuenta una forma de onda senoidal que describa la posición del flagelo $y(x, t) = b \sin \frac{2\pi}{\lambda}(x + V_\omega t)$ (ver figura 1.4(a)) propagándose con una velocidad V_ω en dirección $-x$ se puede entonces calcular $\frac{dy}{dt}$ y $\frac{dy}{dx}$ y por lo tanto:

$$dF_{empuje} = \left\{ (k_n - k_t) \frac{4\pi^2 b^2}{\lambda^2} V_\omega \cos^2 \left[\frac{2\pi}{\lambda}(x + V_\omega t) \right] - k_t U \right\} ds \quad (1.21)$$

Ahora, al haber supuesto la condición de amplitud pequeña, entonces se puede decir también que $ds \sim dx$ y por lo tanto, si se integra sobre todo un ciclo de la onda, la fuerza de empuje generada será:



$$F_{empuje} = \int_0^\lambda \left\{ (k_n - k_t) \frac{4\pi^2 b^2}{\lambda^2} V_\omega \cos^2 \left[\frac{2\pi}{\lambda} (x + V_\omega t) \right] - k_t U \right\} dx$$

$$F_{empuje} = (k_n - k_t) \frac{2\pi^2 b^2}{\lambda} V_\omega - U k_t \lambda \quad (1.22)$$

$$(1.23)$$

F_{empuje} es la fuerza total en el flagelo actuando en la dirección X .

De aquí se pueden considerar dos casos. El primero es no considerar una cabeza. Para este caso entonces se tiene que suponer que $\sum F_{empuje} = 0$ por la condición impuesta por la instantaneidad. Para este caso, se puede expresar la velocidad de propulsión referida a la velocidad de propagación de la onda como:

$$\sum F_{empuje} = 0$$

$$\frac{U}{V_\omega} = \frac{2\pi^2 b^2}{\lambda^2} \left(\frac{k_n - k_t}{k_t} \right) \quad (1.24)$$

$$(1.25)$$

De las ecuaciones 1.25 se puede notar que la velocidad es función de la forma de la onda y de los coeficientes de arrastre ($= f(\frac{b}{\lambda}, \frac{k_n}{k_t})$). Gray y Hancock[22] suponen que $k_n = 2k_t$ aunque ha habido debate con respecto a esto (Lighthill[35] propone que debería ser de 1.5 a 1.7)[55][27]. Si se hace esto, entonces la ecuación 1.24 se reduce a:

$$\frac{U}{V_\omega} = \frac{2\pi^2 b^2}{\lambda^2} \quad (1.26)$$

y para una onda de frecuencia f , se cumple que $V_\omega = f\lambda$ entonces:

$$U = \frac{2f\pi^2 b^2}{\lambda} \left(\frac{k_n - k_t}{k_t} \right) \quad (1.27)$$

El segundo caso es involucrar la interacción con una cabeza. En este caso el empuje generado tiene que balancear el arrastre generado por la cabeza. Además se puede hacer la





integral de la ecuación 1.23 a valores de $n\lambda$, haciendo al flagelo más largo y no necesariamente con un solo periodo.

El arrastre generado por la cabeza será de nuevo obtenido con la ley del arrastre de Stokes y para un elipsoide será : $D_{cabeza} = hk_t a U$, donde h es un coeficiente de la forma de la cabeza y a es un tamaño característico. La ecuación de instantaneidad queda entonces como:

$$nF_{empuje} = D$$

$$\frac{2n\pi^2 b^2 V_\omega}{\lambda} (k_n - k_t) - nUk_t \lambda = hk_t a U$$

$$\frac{U}{V_\omega} = \frac{2\pi^2 b^2}{\lambda^2} \left(\frac{k_n - k_t}{k_t} \right) \frac{1}{1 + \frac{ha}{n\lambda}} \quad (1.28)$$

$$(1.29)$$

Si se compara con el caso en el que se ignoró a la cabeza (ecns 1.28 y 1.24) se puede notar que la única diferencia radica en el término $\frac{1}{1 + \frac{ha}{n\lambda}}$ el cual es el arrastre extra agregado. Si $a = 0$ entonces se tiene el caso que no considera a la cabeza, pero para cualquier otro valor, la velocidad de propulsión se verá disminuida.

Es interesante notar que en todo este análisis la viscosidad no aparece explícitamente. Por facilidad la viscosidad fue agrupada en los términos k_t y k_n ya que por la ley del arrastre de Stokes es sabido que éstos dependen linealmente de la viscosidad pero al final esta propiedad puede ser factorizada y eliminada de las ecuaciones. Obviamente esta aseveración se sostiene solamente si se puede mantener la misma velocidad de propulsión de la onda (V_ω), que requeriría de más energía.

La velocidad de propulsión entonces depende de seis factores resumidos en la tabla 1.2:

- | |
|--|
| 1) frecuencia de la onda ω |
| 2) b amplitud de la onda |
| 3) los coeficientes de arrastre (resistive coeficient) |
| 4) número de onda n |
| 5) λ Periodo de la onda |
| 6) geometría de la cabeza ha |

Tabla 1.2: Factores de los cuales depende la velocidad de propulsión según la teoría de la fuerza resistiva.



Para ilustrar un poco mejor lo que es la anisotropía del arrastre se considera un ejemplo sencillo como el que se muestra en la figura 1.5. La figura muestra a un cilindro de dimensiones conocidas moviéndose en un fluido viscoso, con una orientación y una velocidad dadas. De nuevo, el arrastre será en el sentido contrario al movimiento. Como se hizo anteriormente, se descomponen estas fuerzas en sus componentes normal y tangencial. Geométricamente se pueden sumar las componentes de las fuerzas de arrastre generadas en el caso 1 y en el caso 2, que dan como resultado las fuerzas resultantes R_1 y R_2 . La suma de las fuerzas resultantes en ambos casos no es cero, sino que la fuerza residual (flecha verde F) queda en la dirección x , y es esa fuerza la que genera un impulso neto distinto de cero.

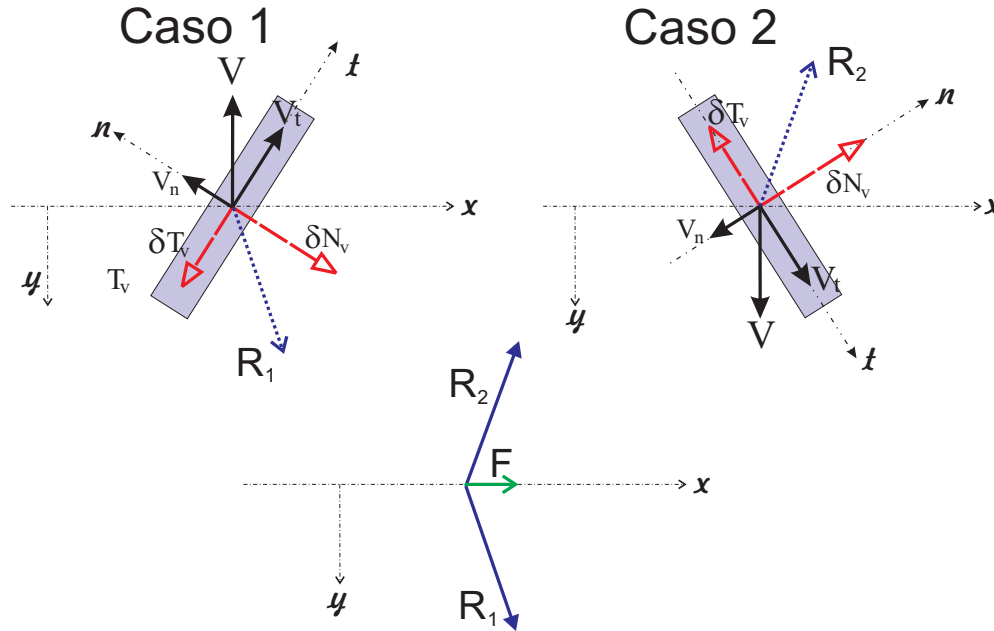


Figura 1.5: Ejemplo de la anisotropía del arrastre. Las flechas negras con punta rellena son velocidades. Las flechas con punta vacía y líneas segmentadas rojas son las fuerzas de arrastre. Las flechas punteadas con cabeza sin área azul marino son las fuerzas resultantes y la flecha verde (F) es la fuerza remanente que queda al sumar ambas resultantes.

Childress [10] optimizó este método dándole una perspectiva vectorial y logra obtener, entre otras cosas, una eficiencia que para el nado flagelar es de aproximadamente 2%.

Otro método un poco más preciso es el llamado teoría del cuerpo delgado (*Slender body theory*), propuesto por Lighthill en 1975[34] en la que se propone una distribución de singularidades en el flujo en la línea central del flagelo.



1.2.6. Mecanismos artificiales de nado

Hay descritas al menos dos estrategias para aprovechar la anisotropía del arrastre. Como ya se mostró, se tiene que romper la simetría temporal de alguna manera ya sea con la propagación de ondas a través de un filamento flexible como lo hace un espermatozoide, o a través de un flagelo rígido con una geometría tal que rompa la simetría temporal. Un ejemplo de este mecanismo es el que utilizan muchas bacterias como la *E. Coli* y es el que Purcell[43] denominó como ‘sacacorchos’. Es una estructura tridimensional helicoidal rígida que al girar produce un movimiento cinemáticamente no reversible. Sin embargo, ha habido muchos mecanismos hipotéticos que en teoría pueden generar propulsión. Ejemplos de ellos son el mecanismo de tres eslabones de Purcell, toroides con movimientos periódicos radiales, etc.

El caso importante para este trabajo es el del filamento flexible, sin embargo, no se conoce a ningún organismo que se mueva mediante éste método.

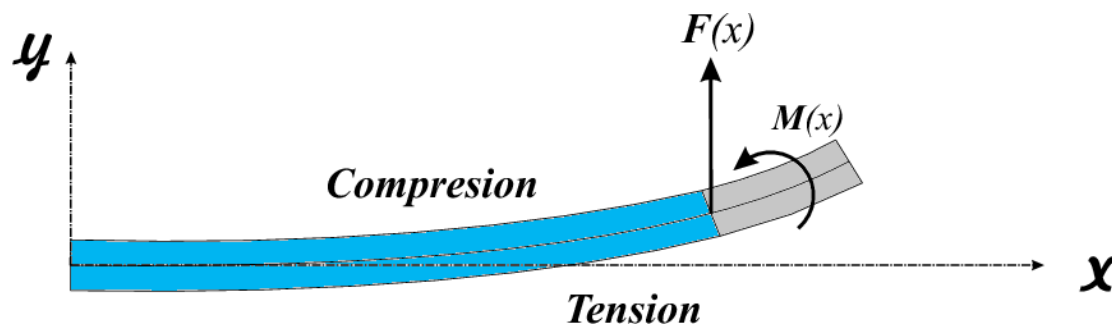


Figura 1.6: Una viga flexionada empotrada en el origen. La región gris (oscura) ejerce un momento y una fuerza sobre la región azul (clara) a través de la sección transversal en x , donde ocurre el cambio de colores. Figura tomada de la referencia [31].

Se considerará un cilindro delgado de longitud L alineado al eje x en ausencia de cargas externas. También se considerarán deflexiones pequeñas $h(x)$ desde el estado en reposo en ausencia de flexión. Cuando el cilindro es flexionado, una parte del cilindro está sujeto a tensión mientras que la otra parte está sujeto a esfuerzos de compresión como se muestra en la figura 1.6. Entonces, la sección del cilindro a la derecha de la frontera (región más

oscura) ejerce un momento de flexión $M = A\kappa(x) \approx A\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}$ sobre la sección a la izquierda de la frontera (región clara), donde A es el módulo a flexión y $\kappa(x)$ es la curvatura del cilindro en esa frontera[31]. Un balance de momentos sobre un elemento diferencial dx implica que:

$$\frac{\partial M}{\partial x} + F_y = 0 \quad (1.30)$$

Entonces, si el cilindro presenta una deflexión $h(x)$, una fuerza elástica:

$$f_y dx = \frac{\partial F_y}{\partial x} dx = -A \frac{\partial^4 h}{\partial x^4} dx \quad (1.31)$$

actúa en el elemento diferencial dx en la frontera. Al balancear esta fuerza elástica con la fuerza viscosa en dirección normal de la teoría de fuerza resistiva se obtiene una ecuación llamada de hiperdifusión:

$$k_n \frac{\partial h}{\partial t} = -A \frac{\partial^4 h}{\partial x^4} \quad (1.32)$$

Las condiciones de frontera necesarias para resolver esta ecuación son por lo general fuerzas y momentos nulos en el extremo libre (cuando $x = L$) y en el origen condiciones de desplazamiento oscilatorio en la dirección Y de la forma $h(0, t) = b \cos \omega t$ y con una condición de empotramiento de ángulo $\left. \frac{\partial h}{\partial x} \right|_{x=0} = 0$ o de oscilación de ángulo de la forma:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial h}{\partial x} \right|_{x=0} &= \theta \cos \omega t \\ h(0, t) &= 0 \end{aligned} \quad (1.33)$$

Estas últimas condiciones de frontera son las que más se asemejan al experimento realizado en este trabajo. Es de notar que la aparición del término $\partial h / \partial t$ en la ecuación 1.32 rompe con la reversibilidad cinemática[31] incluso si la actuación es recíproca como la condición de frontera $h(0, t) = b \cos \omega t$.





Físicamente, la reversibilidad cinemática se rompe ya que la flexibilidad ocasiona que los extremos más distantes respondan con un retraso con respecto a los extremos cerca de la perturbación.

1.3. Número de esperma

Para el caso especial de la interacción estructura-fluido se puede introducir un grupo adimensional adicional. Este grupo adimensional fue descrito por primera vez por Lowe[37] en 2003 y surge a partir de un modelo de un flagelo con secciones eslabonadas como se supone en la teoría de fuerza resistiva.

El modelo en cuestión considera que el movimiento es determinado por un balance entre las fuerzas que mueven al filamento, las fuerzas de fricción que ejerce el fluido en la vecindad debidas al arrastre y fuerzas de flexión que tratan de volver al estado de equilibrio al eslabón. Para este modelo se pueden expresar las magnitudes relativas de las fuerzas viscosas y de flexión en el grupo adimensional llamado *número de esperma*.

$$Sp = \left(\frac{L^4 \omega k_n}{G} \right)^{\frac{1}{4}} \quad (1.34)$$

Donde L es una dimensión característica, ω es una frecuencia de oscilación, k_n es el coeficiente de resistencia en la dirección normal y G es el módulo elástico a corte del material. Si se ignoran las interacciones entre eslabones se puede aproximar el valor de k_n como: $k_n \approx 4\pi\eta/\ln(L/a)$, donde L es el largo del flagelo y a es el radio de la sección transversal circular [31]. Si se considera una sección transversal, entonces $I = \pi a^4/4$ y el número de esperma se puede escribir como:

$$Sp = 2 \left(\frac{\eta\omega}{G} \right)^{\frac{1}{4}} \frac{L^*}{(\ln L^*)^{\frac{1}{4}}} \quad (1.35)$$

Donde $L^* = L/a$ es el tamaño adimensional del flagelo. El número entre los paréntesis es un pseudo número de Weissenberg que relaciona los esfuerzos viscosos en el fluido con los esfuerzos elásticos en el flagelo.

Es interesante notar los límites de este grupo adimensional. Si es casi cero será por que la fre-



cuencia de oscilación es muy pequeña o porque el módulo elástico del flagelo es muy grande. Cualquiera de los dos casos significa que se llegan a las condiciones del teorema de Purcell y no habrá propulsión. Por otro lado, altos números se logran si la frecuencia es muy grande (con lo cual se puede salir de la condición no inercial) pero también si el módulo elástico del flagelo es muy pequeño, con lo que la difusión viscosa domina tan abrumadoramente que la onda no es capaz de propagarse antes de que sea transportada por los efectos viscosos lejos de la cola y hacia el fluido. Si es el caso tampoco se generará propulsión. Entonces es de suponerse que existe un número de espermatozoos óptimo para el nado no inercial.

1.4. Resultados experimentales previos

Para comenzar esta sección no hay nada mejor que hablar del artículo pionero en la locomoción de micronadadores magnéticos realizado por Honda et. al en 1996[25]. Ellos hicieron un nadador que consistió en un imán impulsado por campos magnéticos rotacionales, de tal manera que mimetizaba la forma de nado de las bacterias como la *E. Coli*. Con sus trabajos experimentales obtuvieron curvas de velocidad en función de la frecuencia de rotación y encontraron una muy buena correspondencia con la teoría de Gray & Hancock[22] y la mejorada de Lighthill[35].

Otros trabajos previos como el de Zhang et. al. [53][54], Sudo et. al.[46], Dreyfus et. al.[17], etc han obtenido resultados similares aunque con diferencias sutiles en cuanto a la actuación y generación de la onda en distintos números de Reynolds.

Más recientemente ha habido trabajos tanto teóricos como experimentales acerca del impacto que la viscoelasticidad u otras propiedades reológicas complejas tienen en este fenómeno. Dentro de esta categoría se encuentran trabajos teóricos como los de Fu y Powers[19] que sugieren que la viscoelasticidad (para el modelo covariante de Maxwell) tiende a disminuir la velocidad de nado y que además puede cambiar la dirección del movimiento con cambios en la forma de oscilación; Lauga en [30] demuestra analíticamente que para movimientos periódicos de pequeña amplitud, la velocidad de nado se ve reducida como función del número de Deborah, independientemente de la ecuación constitutiva viscoelástica; y en [32] demues-





tra cómo el teorema de Purcell se rompe con la existencia de propiedades reológicas no lineales y establece que se pueden explotar estas características para generar nuevas formas de nado. Shen & Arratia [44] encontraron en su trabajo experimental la formación de un punto hiperbólico en el flujo en fluidos viscoelásticos (y adelgazantes) que no ocurre en el caso newtoniano, y tienen gran impacto en la propulsión de la lombriz *C. Elegans*; concluyen que la velocidad de nado se ve disminuida debido a los efectos viscoelásticos.

Por otro lado, Teran, et. al.[48] sugieren que la viscoelasticidad puede incrementar la velocidad de propulsión para nado ondulatorio y lo atribuyen a que los esfuerzos elásticos generados por un fluido deformado pueden ser liberados al final del flagelo; así mismo, los experimentos de Liu et. al.[36] sugieren que existe un número de Deborah (alrededor de uno) para el cual el nado es más efectivo en el fluido viscoelástico (modelo de Oldroyd B) para el caso del nado helicoidal, y que a partir del cual, si se sigue incrementando la viscoelasticidad, el desempeño cae por debajo del caso newtoniano.



Arreglo Experimental

Dado que la distancia de interacción en medios donde predominan los efectos viscosos es muy grande (infinita si $Re=0$), moverse significa no sólo deformar al fluido en la vecindad sino todo alrededor a una distancia considerable. Por esta razón es indispensable que si se quiere lograr la similaridad dinámica con un nadador artificial, éste debe ser energizado sin la necesidad de cables que alteren la actuación del mismo en el fluido [25]. Por lo anterior, se ideó una forma de mover y energizar unos nadadores flagelados mediante la interacción de imanes y campos magnéticos.

Un campo magnético uniforme se puede generar con una bobina de Helmholtz; el campo magnético será uniforme si se alimenta con corriente directa. Si se quiere variar la dirección del campo se deben de invertir las terminales de conexión. Al tener dentro del campo magnético un imán permanente, si existe una diferencia direccional entre el campo magnético y el momento magnético del imán, se generará un torque \mathbf{T} en el imán hasta que éste quede alineado, dado por la expresión:

$$\mathbf{T} = \mathbf{M} \times \mathbf{H} \quad (2.1)$$

Donde \mathbf{H} es la intensidad del campo magnético externo y \mathbf{M} es el momento magnético del imán permanente.

Si se considera ahora solamente la magnitud en lugar de la identidad vectorial, la ecuación 2.1 se puede expresar como:

$$T = mH \sin \theta \quad (2.2)$$



donde θ es el ángulo que existe entre el campo magnético y el momento magnético del imán permanente.

Si el imán permanente está sometido a la acción de un campo magnético uniforme de dirección fluctuante y de magnitud suficientemente grande, lo que ocurrirá es que los polos del mismo girarán hasta alinearse con el campo debido al torque definido en la ecuación 2.1, y al estar sometido a un campo oscilante éste también oscilará.

Lo que se decidió para lograr la locomoción en un medio viscoso es tener un nadador magnético (un imán permanente con un flagelo en uno de sus polos) movido por la acción del torque magnético generado con un campo magnético externo oscilante. El resultado es que el flagelo se deforma periódicamente con la misma frecuencia de oscilación que la del campo magnético, y genera una fuerza propulsora en el nadador, como se ilustra en la figura 2.1.



2.1. Nadadores

Los nadadores se construyeron con imanes de aleación de neodimio, hierro y boro de campo remanente de 1 Tesla y densidad relativa de 7.45 contenidos en unos tubos de estireno de diámetro externo de 4mm y un largo de 1.3cm con una burbuja de aire contenida en el espacio libre para lograr una flotación neutra. El flagelo consiste en un filamento de fibra óptica de sección circular de diámetro constante de $64\mu\text{m}$. La masa total del nadador es de 0.43g y densidad cercana a la del fluido ($1.3\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$).

Los nadadores están contenidos en un recipiente de sección interna cilíndrica de 50.7 mm de diámetro exterior y sección externa cuadrada de 10cm de lado, concéntricos de 30.6cm de alto para minimizar la distorsión óptica. En el recipiente interno se tienen contenidos los fluidos de trabajo y es donde ocurre el fenómeno estudiado.

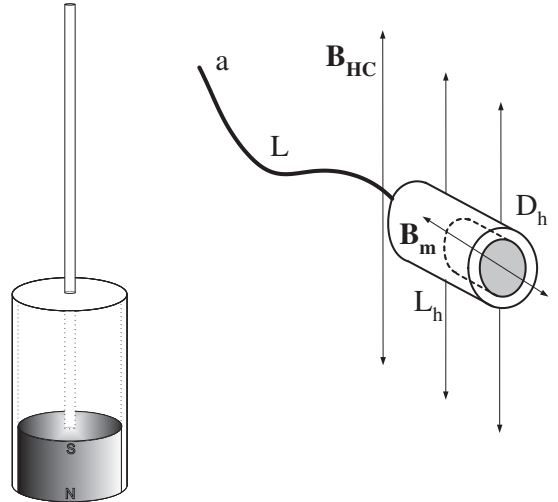


Figura 2.1: Nadador magnético

Dibujo representativo del nadador magnético. A la izquierda se ven los elementos con los que está hecho. Un imán permanente, un encapsulado de estireno y un flagelo de fibra de vidrio. A la derecha el nadador y los campos magnéticos interactuando. El campo remanente del imán permanente (B_m), el campo magnético generado por las bobinas de Helmholtz (B_{HC}), el largo de la cabeza (L_h), el diámetro de la cabeza (D_h), el largo de la cola (L) y el radio de la cola (a).



2.2. Generación del campo magnético oscilante

El campo magnético necesario para mover a los dispositivos fue generado por una bobina de Helmholtz. Ésta tiene un radio de 20 cm, tiene aproximadamente 450 vueltas y es alimentada con una corriente conmutada de intensidad nominal de 4 A en corriente directa. El campo que esta bobina genera está dado por la ecuación 2.3:

$$B = \left(\frac{4}{5}\right)^{3/2} \frac{\mu_0 n I}{R} \quad (2.3)$$

De esta manera, el campo magnético que se genera es de aproximadamente 8×10^{-3} Tesla.

El sentido del campo es controlado con una fuente oscilante que alimenta a la bobina, la cual puede controlar tanto el voltaje como la frecuencia de oscilación de la salida. La fuente consiste en un circuito oscilador de cuatro cuadrantes en el que se alimenta una señal de control digital y un voltaje deseado de salida; la señal de control se utiliza como referencia para saber la frecuencia deseada y ésta se convierte en una señal de disparo que alimenta a una serie de transistores bipolares de compuerta aislada (IGBT) conectados en un arreglo de cuatro cuadrantes o “puente H”; éstos se activan según la señal de disparo y conmutan un nodo flotante con el voltaje de línea. En última instancia, lo que se aprecia a la salida es una señal cuadrada de frecuencia y voltaje controlado. En el apéndice se muestra el funcionamiento detallado del circuito.

La figura 2.2 muestra el diagrama de funcionamiento del circuito.



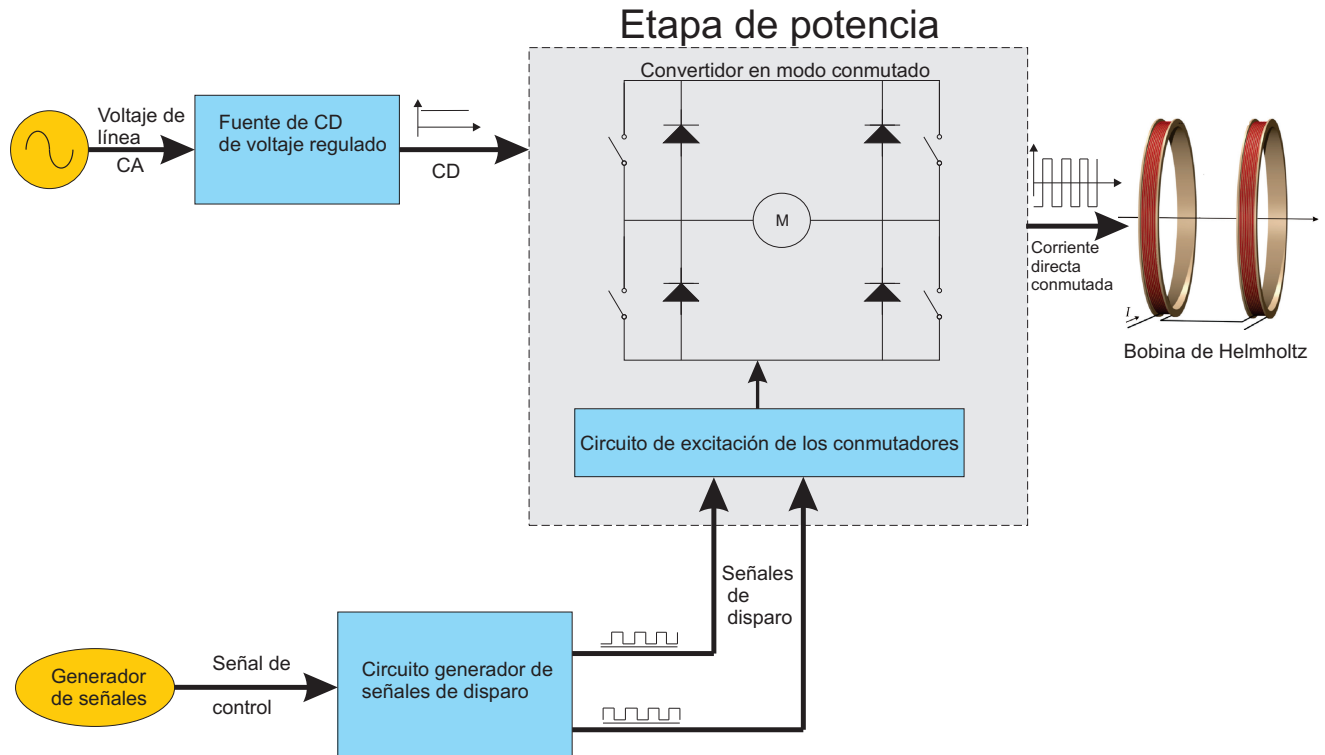


Figura 2.2: Esquema del funcionamiento de la fuente conmutada

2.3. Fluidos

Para distinguir los efectos viscosos de los elásticos, se preparó un fluido tipo Boger (alta elasticidad y viscosidad constante al corte) y comparar el desempeño del nadador en un fluido newtoniano de la misma viscosidad al corte. Ambos fluidos fueron hechos con una mezcla de glucosa y agua. Para para conferir propiedades elásticas, se añadió una pequeña concentración de poliacrilamida. En el siguiente capítulo se describe la caracterización reológica de los fluidos de trabajo.

El fluido de Boger utilizado tiene una composición en porcentaje masa de 84.96 % Glucosa, 0.04 % de poliacrilamida (Separan AP-30) y 15 % de agua. Para llegar a esta composición fue necesario hacer muchas pruebas, variando la concentración de los componentes y mediante las pruebas reológicas pertinentes decidir si eran adecuadas para el experimento. Los parámetros de diseño del líquido deseado eran: viscosidad constante al corte , alta elasticidad y acceso óptico (líquido transparente). Además, se requería tener una viscosidad alta para lograr locomoción en régimen reptante. Sin embargo, si el fluido fuera demasiado viscoso, el torque



magnético no resultaría suficiente para propulsarlo, así que se decidió por un valor intermedio.

Se hicieron muestras a distintas concentraciones de poliacrilamida y glucosa, mostradas en la figura 2.3, donde resume la caracterización reológica de pruebas de flujo cortante simple estacionario.

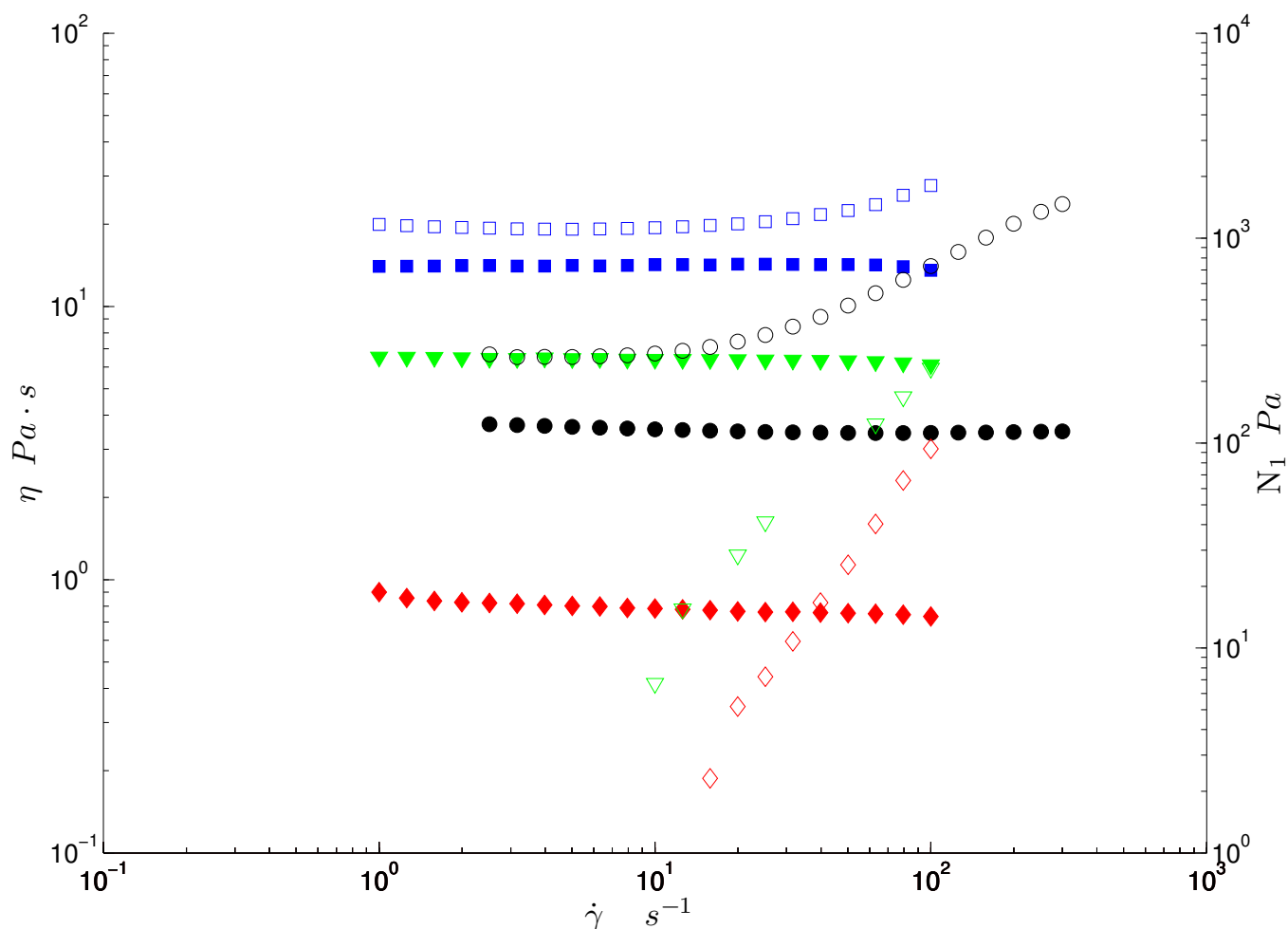


Figura 2.3: Pruebas de flujo cortante simple de las muestras. Las figuras vacías representan la primera diferencia de esfuerzos normales y las rellenas los datos de viscosidad. (\square) 10 % agua y 0.02 %PA. (∇) 5 % peso de agua, (\diamond) 20 % agua y 0.02 %PA, y (\circ) 15 % agua y 0.04 % PA.

El proceso de fabricación de los fluidos fue el siguiente: se mezcló la poliacrilamida en un volumen del agua a utilizar, mezclando vigorosamente para disolver grumos o concentraciones sin diluir; posteriormente se añadió a la glucosa y se agitó lentamente durante dos o tres días. Al líquido se le dejó en reposo por una semana. El mezclado se realizó a



temperatura ambiente como lo sugiere Boger [5] aunque otros autores sugieren el manejo del fluido hasta 35 °C [11] o incluso 60 °C [45]. Es importante mencionar que el principal problema que se buscó evitar fue el adelgazamiento. Si la relación de poliacrilamida, agua o una combinación de las dos excede ciertos valores particulares a la glucosa utilizada entonces el fluido comienza a ser altamente adelgazante. Por otro lado, una relación pequeña de agua o poliacrilamida permiten que la viscosidad sea casi constante al corte; sin embargo, si la cantidad de poliacrilamida es poca, los efectos elásticos no son apreciables y si el agua no es suficiente el fluido seguirá siendo muy viscoso.

El fluido newtoniano de trabajo es una mezcla de glucosa y agua que debe tener la misma viscosidad al corte del líquido elástico. La relación agua-glucosa para el fluido newtoniano es un poco diferente debido a que no existe la contribución del polímero. La composición final en porcentaje masa es de 89 % glucosa y 11 % agua.

Para ambos fluidos se añadió benzoato de sodio como conservador en una relación de 0.1g por cada litro de fluido. El cálculo del tiempo característico del fluido se realizó de diferentes maneras y se compararon los resultados entre los distintos métodos. Estos se describen en el capítulo 4. En resumen, las composiciones finales para los dos fluidos de trabajo en porcentaje masa son:

Tabla 2.1: Ingredientes de los fluidos de trabajo

		Concentración			Propiedades				
		Separán AP-30	Glucosa	Agua	η	$Pa \cdot s$	$\rho \frac{g}{cm^3}$	λs	n
Campaña 1	Boger	0.04 %	84.96 %	15 %	3.7	1.34	1.23	0.987	
	newtoniano	0	89 %	11 %	3.5	1.4	0	1	
Campaña 2	Boger	0.04 %	84.96 %	15 %	2.7	1.35	1.03	0.967	
	newtoniano	0	89 %	11 %	2.8	1.4	0	1	

Todas las pruebas fueron realizadas con rapidezces de corte en el rango de 10^{-1} a $10^3 s^{-1}$.





2.4. Procedimiento experimental

Una fuente conmutada energiza a una bobina de Helmholtz, generando un campo magnético uniforme que orienta al nadador en su dirección debido al torque magnético; la fuente conmutada alterna el campo magnético uniforme a una frecuencia asignada en el control y se mantiene la misma intensidad, de tal forma que el resultado en el flagelo es un pandeo oscilatorio con la misma frecuencia de oscilación que la del campo magnético. Este pandeo en el flagelo es lo que permite la locomoción del elemento. Es importante mencionar que el ángulo de oscilación de la cabeza magnética y la amplitud de la oscilación depende de la frecuencia de oscilación del campo aplicado. Esto se debe a que el torque magnético tiene más tiempo para girar la cabeza en frecuencias bajas que en frecuencias altas, donde la cabeza sigue en movimiento cuando el sentido cambia nuevamente.

Para este caso de estudio se variaron dos parámetros: la longitud de la cola del nadador y la frecuencia de oscilación. Se estudió el impacto de estos dos factores en el desempeño del nado en dos fluidos de viscosidad similar, uno con características viscoelásticas y el otro newtoniano. Se analizaron cuatro longitudes de cola: 1cm, 2.5cm, 3.5cm y 6cm. Estas longitudes de cola se escogieron tomando como referencia los valores críticos del número de esperma para una frecuencia fija de 1Hz. La cola de un centímetro era un valor por debajo de la unidad y la de dos y medio era muy cercano a uno. Distintos autores como Lowe[37] y Dreyfus et. al.[17] han reportado que el nado es más eficiente cuando el número de esperma es cercano a la unidad.

Se llevaron a cabo dos campañas experimentales. Los cambios de frecuencia se realizaron con valores desde 0.2 Hz hasta 4Hz en la primera y desde 0.01Hz hasta 4Hz en la segunda campaña. La variación del número de esperma para la primera campaña está resumido en el gráfico 2.5. Para una sección transversal de la cola ($r = 64\mu m$) y viscosidad ($\mu = 3.6Pa \cdot s$) constantes, el número de esperma es función de la longitud de la cola y de la frecuencia de oscilación.

Se tomaron videos de alta definición para cada condición experimental. Los videos fueron



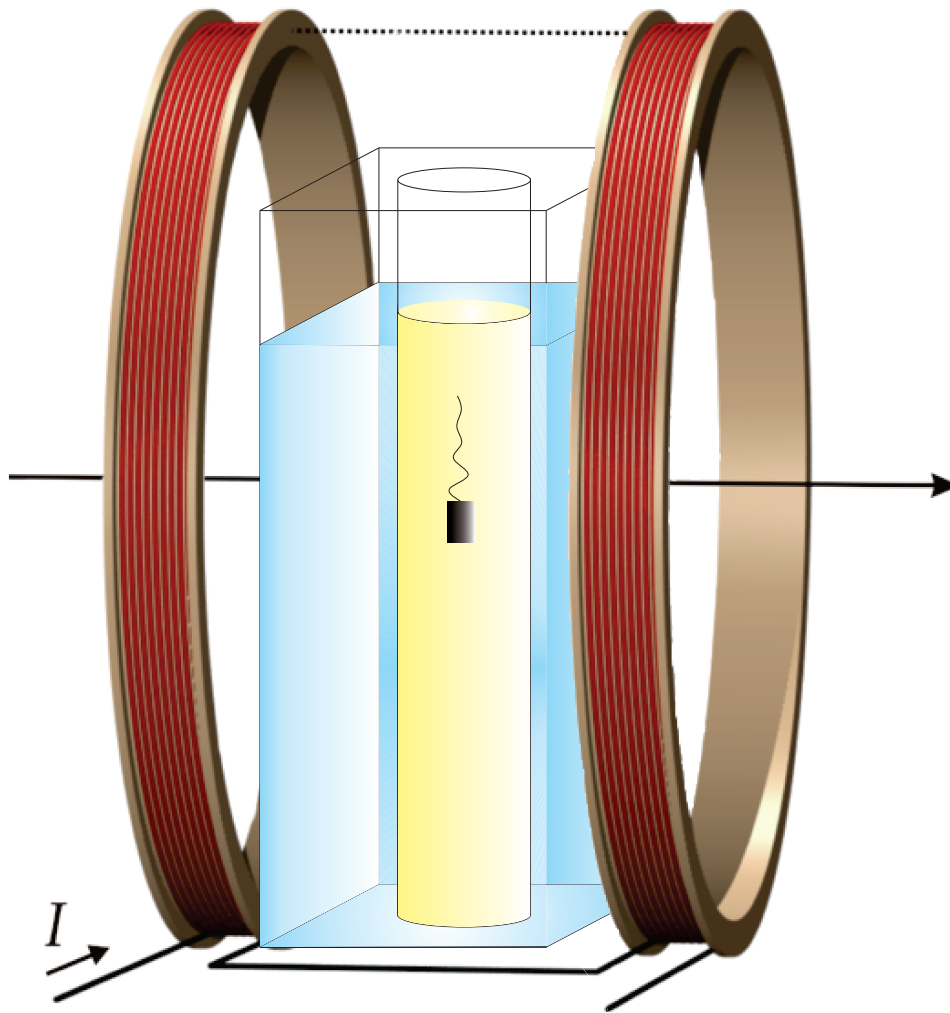


Figura 2.4: Diagrama esquemático del arreglo experimental

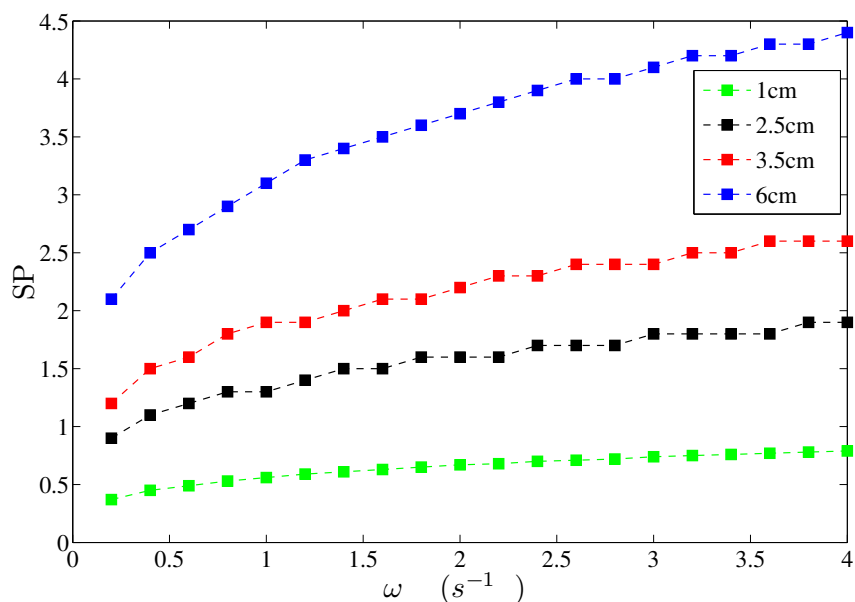


Figura 2.5: La variación del número de espermatozoides para los cuatro casos de la primera campaña como función de la frecuencia de oscilación.

realizados primero con el nadador en ausencia del campo magnético para poder medir la velocidad de asentamiento (aunque los dispositivos casi tenían flotación neutra, siempre se observó una pequeña velocidad de asentamiento). Posteriormente se fue incrementando la frecuencia. Todos los experimentos fueron realizados a 25°C.

2.5. Métodos de visualización y captura de datos

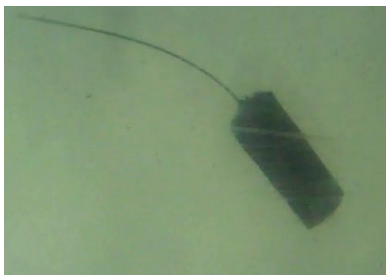
La iluminación se realizó con lámparas de luz difusa de corriente continua de 30 Watts cuya luz se hacía pasar a través de una pantalla difusora.

El nado de los robots magnéticos se filmó con una cámara de alta definición (Mino HD, Flip Video). Las imágenes fueron procesadas digitalmente con el método descrito a continuación.

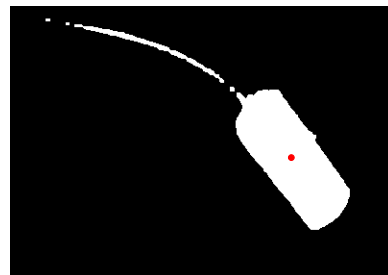
El método consiste en separar el video en una sucesión de imágenes, para luego convertir



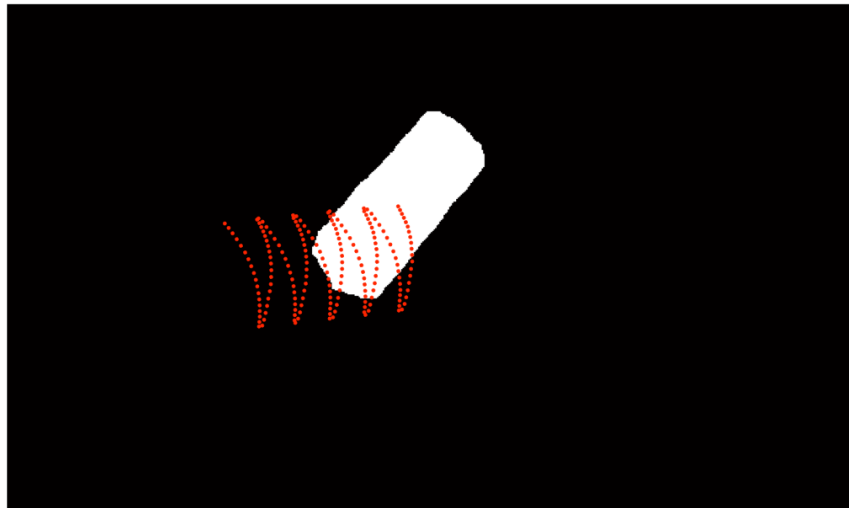
la imagen en un mapa binario (en blanco y negro exclusivamente), como se muestra en la figura 2.6. A partir de un umbral establecido, se calcula el centroide de la sección resultante en blanco y se obtiene su posición. Se realiza lo mismo para el siguiente cuadro y se obtiene la nueva posición. Calculando la diferencia de posición entre las imágenes y sabiendo el tiempo entre cada cuadro se puede obtener una velocidad entre esas dos, y una historia de velocidades a lo largo del video tomado. El promedio de esa historia de velocidades es la velocidad reportada. Las imágenes se capturaron a una tasa de 60 cuadros por segundo, con una resolución de 1000 x 1000 píxeles. La conversión entre píxeles y milímetros fue de 15 píxeles/mm.



(a)



(b)



(c)

Figura 2.6: Imágenes procesadas donde se observa cómo se toma un cuadro del video. a) Imagen original. b) imagen binaria y c) rastreo del centroide.



2.6. Visualización PIV

Se realizaron algunas pruebas con la técnica de visualización de PIV para estudiar el flujo alrededor del nadador y comparar cada caso. En particular, se buscaron diferencias en los patrones de flujo, o la deformación local del fluido para los dos tipos de fluido, o ambos.

Las pruebas fueron realizadas con un nadador de cola plana para asegurar que el plano láser pase por la cola. Las frecuencias de trabajo fueron de 0.2 Hz a 2Hz en intervalos de 0.2Hz. La figura 2.7 muestra una imagen característica de las pruebas realizadas con esta técnica.

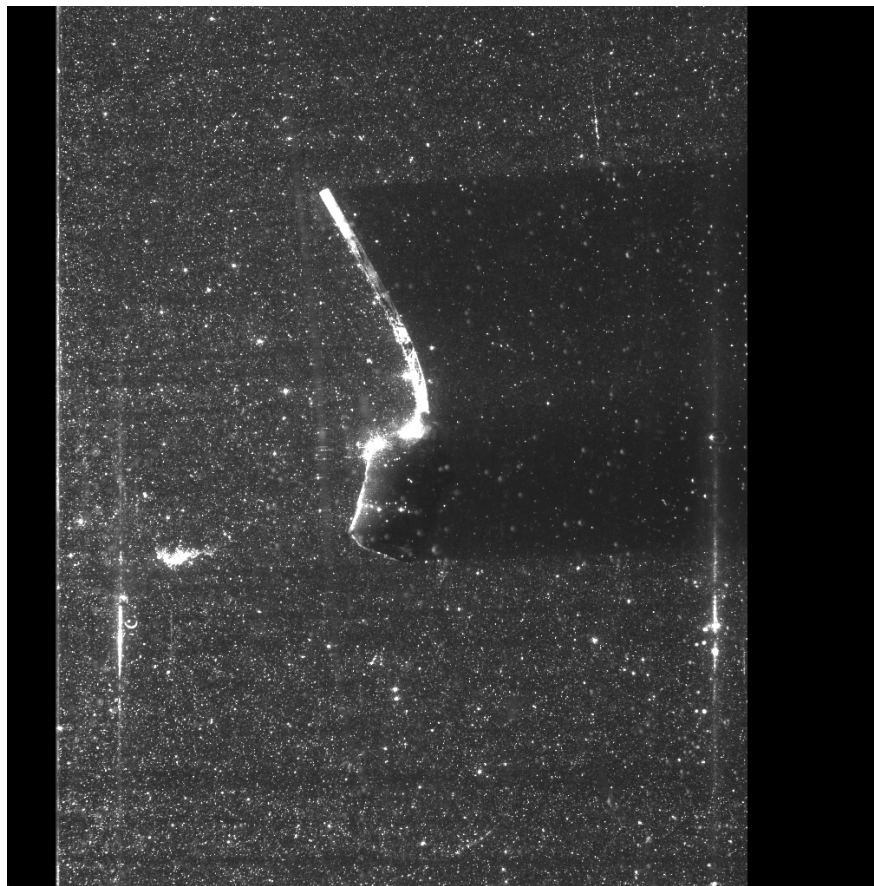


Figura 2.7: Imagen típica obtenida a partir de la técnica de PIV.

Caracterización reológica

La propiedad material que refleja el grado de viscoelasticidad que un material posee es llamada tiempo de relajación [39].

Este tiempo característico se incorpora al modelo de Maxwell y relaciona los esfuerzos viscosos con los esfuerzos elásticos, aunque es una propiedad física como tal.

En esta sección se discuten los métodos utilizados para calcular un tiempo característico del fluido que permita dar una idea del nivel de viscoelasticidad. Existen distintos métodos para obtener dicho tiempo que requieren de algunas pruebas para conocer las distintas funciones viscométricas[4].

Se realizaron tres tipos de pruebas para estudiar las propiedades de los fluidos tipo-Boger:

1. Prueba de flujo cortante simple en estado estacionario

Para esta prueba se aplica un esfuerzo y se mide la tasa de deformación en condiciones de estado estacionario. Este proceso se repite para un barrido de esfuerzos y así obtener la curva de esfuerzo en función de la tasa de deformación, de la que se calcula la curva de viscosidad contra tasa de deformación. También se puede medir la primer diferencia de esfuerzos normales y su dependencia con la tasa de deformación.



2. Prueba de relajación del esfuerzo

En este caso se aplica un esfuerzo determinado, posteriormente se libera y se mide el esfuerzo residual que permite conocer el módulo de relajación en función del tiempo $G(t)$. Con los resultados de esta prueba es posible ajustar los datos a varios modelos de relajación exponencial derivados del modelo de Maxwell y con eso obtener uno o varios tiempos característicos según el número de modos de la aproximación.

3. Prueba oscilatoria de pequeña amplitud.

Consiste en aplicar una pequeña deformación periódica a una frecuencia dada, lo que permite conocer las funciones viscoelásticas lineales del módulo de pérdidas G'' y el módulo de almacenamiento G' como función de la frecuencia en el plano complejo, y su dependencia con la frecuencia de deformación.

Las pruebas se realizaron con un reómetro marca TA Instruments, modelo ARES–RFS III, que es un reómetro de deformación controlada. La geometría utilizada fue cono y plato con ángulo de 0.1 rad y 25mm de radio.

3.1. Flujo cortante simple

Por medio de esta prueba se puede estimar el tiempo de relajación con base en la constante de tiempo elástica de flujo cortante simple también llamado tiempo de relajación de segundo orden definido como:

$$\lambda = \frac{N_1}{2\eta_0\dot{\gamma}^2} \quad (3.1)$$

Este método es utilizado por diversos autores como Chhabra et. al. [9], Jones y Walters et. al. [28], Chmielewsky et, al. [11], Choplin et. al. [12]. Los datos obtenidos a partir de la prueba de flujo cortante simple para los fluidos de trabajo se muestran en la figura 3.1.



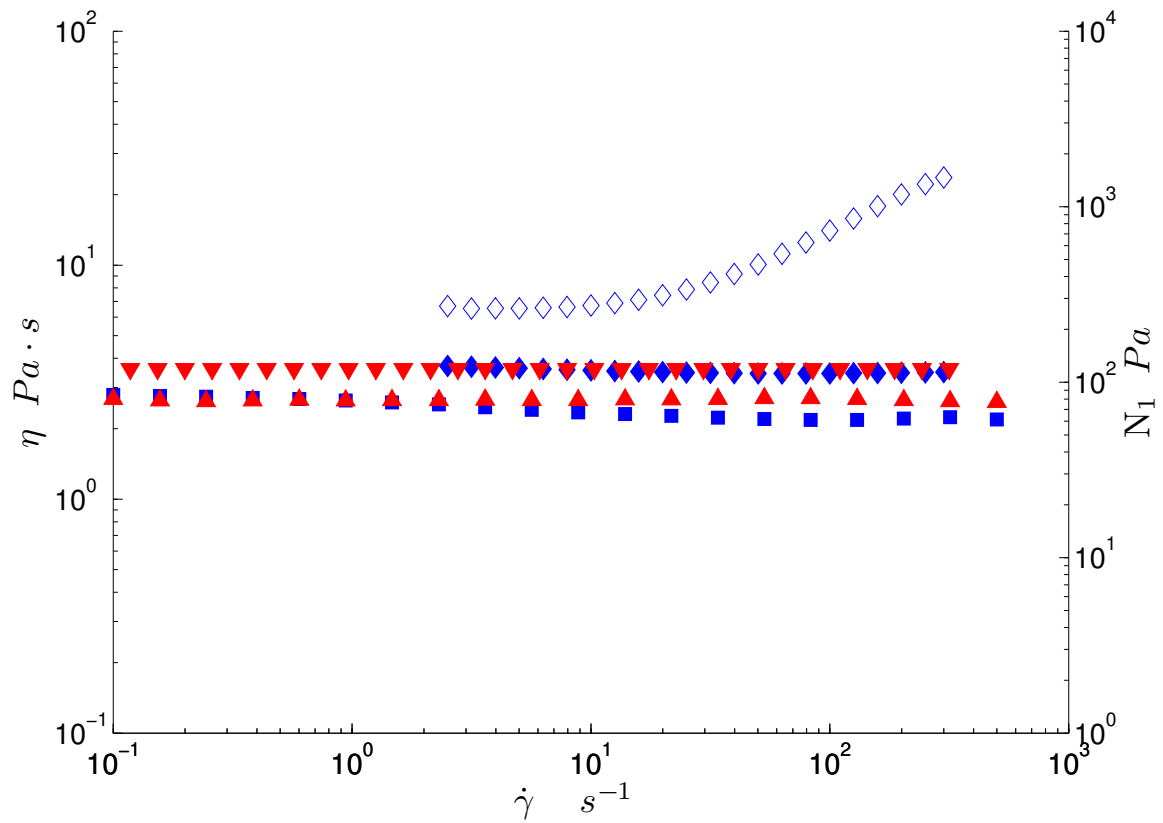


Figura 3.1: Los símbolos vacíos representan la primer diferencia de esfuerzos normales. \diamond es el fluido de Boger y ∇ es el fluido newtoniano de la primera campaña experimental; \triangle es el fluido newtoniano y \square es el fluido de Boger de la segunda campaña experimental.



Conociendo la función viscosidad y la función del primer coeficiente de esfuerzos normales con la prueba de flujo cortante simple se puede hacer un cálculo del tiempo de relajación como función de la tasa de deformación y, posteriormente, hacer un promedio. Sin embargo, esta fórmula surge del modelo del fluido de segundo orden[39], y por lo tanto no es adecuada para cualquier caso, ya que dicho modelo, aunque predice esfuerzos normales, no es viscoelástico (el modelo es una expansión a segundo orden de la relación constitutiva newtoniana en el tensor gradiente de deformación).

Con los datos de la figura 3.1, también se puede realizar el ajuste al modelo de la ley de potencias de viscosidad para comprobar su independencia con la tasa de deformación mediante el exponente n . En la tabla 2.1 se muestra el exponente de la ley de potencias y, como su valor es muy cercano a la unidad, se puede decir que la dependencia de la viscosidad con la tasa de deformación no es importante para los resultados obtenidos.

3.2. Pruebas de relajación de esfuerzo

La prueba de relajación de esfuerzo consiste en imponer una deformación controlada instantánea al fluido y medir la relajación del esfuerzo como función del tiempo. Los resultados de la prueba de relajación de esfuerzo que se realizó al fluido de Boger (de la primera campaña) se ajustaron al modelo exponencial generalizado de Maxwell-Weichert para obtener los tiempos característicos dominantes. El gráfico 3.2 muestra la prueba de relajación y el ajuste realizado con la ecuación 3.2 con cuatro tiempos dominantes:

$$G(t) = \sum_{i=0}^n G_i e^{-t/\lambda_i} \quad (3.2)$$

3.3. Flujo oscilatorio de pequeña amplitud

La prueba consiste en hacer oscilar una geometría definida a distintas frecuencias e ir midiendo las funciones viscoelásticas lineales atribuidas a las propiedades elásticas (conservativas) y viscosas (disipativas).



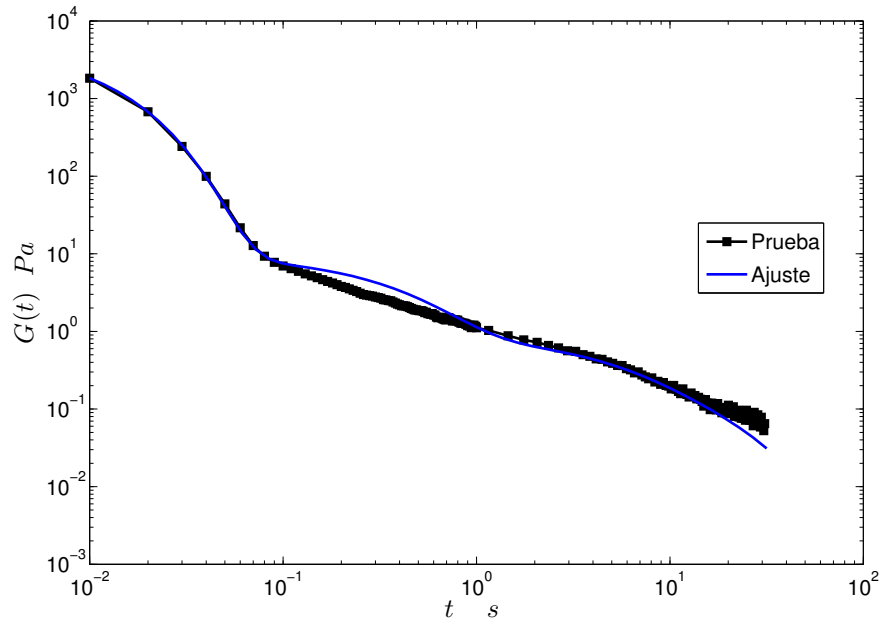


Figura 3.2: Prueba de relajación de esfuerzos del Boger de la campaña 1.

Conociendo la dependencia del módulo complejo con la frecuencia, $G^*(\omega) = G'(\omega) + iG''(\omega)$, se pueden obtener varios tiempos característicos. Para el caso de fluidos que cumplen con el modelo de Maxwell, el tiempo característico se calcula cuando el módulo de almacenamiento y de pérdidas (G' y G'' respectivamente) son iguales. Comúnmente se le conoce como el punto de cruce (cross over).

Existen varias maneras de determinar el tiempo de relajación. Una de ellas es un tiempo de relajación maxwelliano para pruebas de baja frecuencia y poca amplitud definido como [4],[7]:

$$\lambda = \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{\eta''/\omega}{\eta'} = \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{G'}{\omega G''} \quad (3.3)$$

De esta manera se obtiene una función tiempo de relajación como función de la frecuencia mientras ésta sea muy baja. Como en las pruebas de flujo cortante estacionario, se hace un promedio y es el que se reporta. Para el fluido usado en la primera campaña se encontró que $\lambda = 0.118$ s. Se debe cumplir con las pendientes de 1 y 2 para la zona de bajas frecuencias para que este tiempo sea representativo.



El tiempo de relajación se puede también calcular a partir de la definición del módulo de almacenamiento (G') del modelo de viscoelasticidad lineal de Maxwell. El modelo relaciona a G' como:

$$G' = \frac{\eta\lambda\omega^2}{1 + \omega^2\lambda^2} \quad (3.4)$$

Si se supone que el término $(\lambda\omega)^2 \ll 1$ entonces se puede decir que:

$$\lambda = \frac{G'}{\omega^2\eta} \quad (3.5)$$

Este procedimiento es el mismo que el caso anterior y solo es válido para el caso de Maxwell. Al igual que con los otros modelos, se obtuvo un promedio para cada una de las pruebas oscilatorias. Dichos tiempos de relajación maxwellianos promedio resultan en $\lambda_1 = 13.7$ ms y $\lambda_2 = 242.9$ ms.

Esta definición del tiempo de relajación maxwelliano ha sido utilizada por autores como Tirtaatmadja et. al. [49] o Mackay y Boger [38].

Cuando el fluido no sigue el modelo de Maxwell se puede utilizar el caso generalizado y en particular el modelo generalizado de Oldroyd-B y después obtener un tiempo dominante promedio por medio de un ajuste de datos. Éste se obtiene de los parámetros de ajuste g_i . El modelo propuesto por Liu et. al.[36]es:

$$G'(\omega) = \sum_{i=1}^n \frac{g_i\tau_i^2\omega^2}{1 + \omega^2\tau_i^2} + \eta_s\omega \quad (3.6)$$

$$G''(\omega) = \sum_{i=1}^n \frac{g_i\tau_i\omega}{1 + \omega^2\tau_i^2} \quad (3.7)$$

$$\langle\tau\rangle = \frac{\sum_{i=1}^n g_i\tau_i^2}{\sum_{i=1}^n g_i\tau_i} \quad (3.8)$$



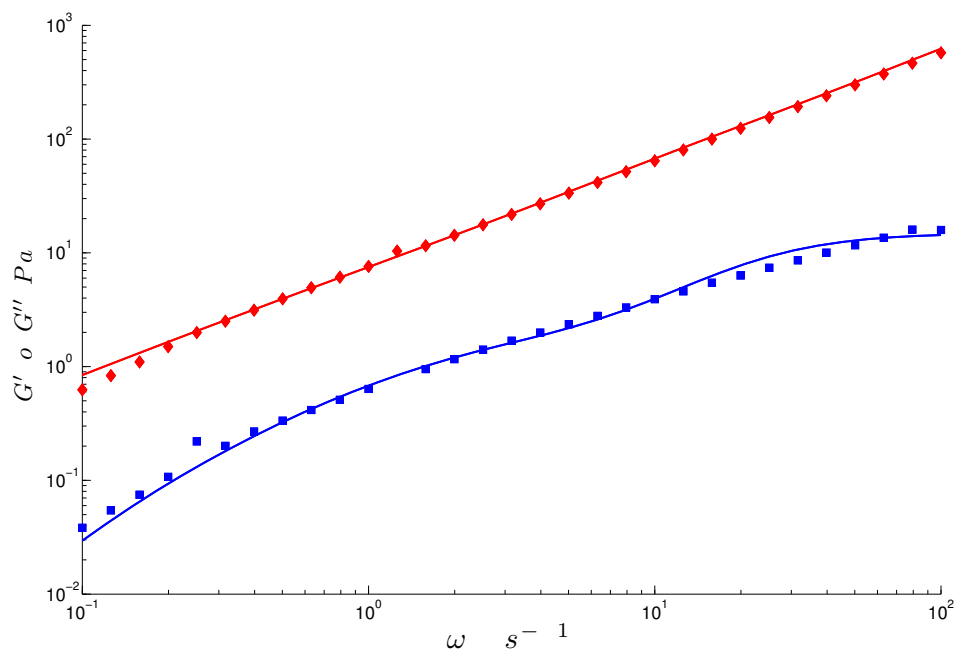
donde η_s es la contribución viscosa del solvente newtoniano.

Los datos de las pruebas para ambos fluidos se ajustaron a este modelo. Los resultados son resumidos en la tabla 3.1. Un buen ajuste se logró con cuatro tiempos dominantes, al igual que en [36].

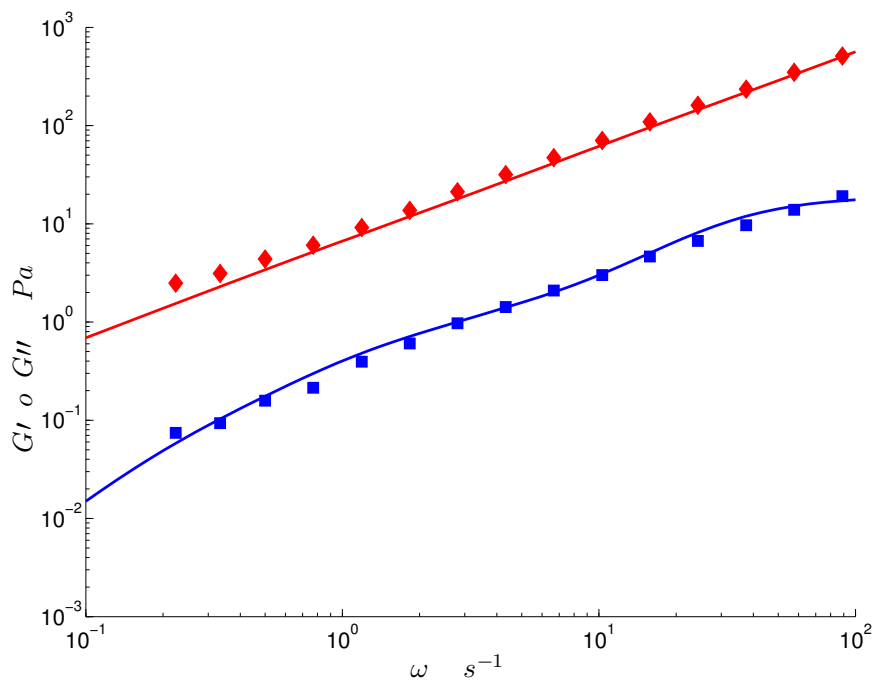
Tabla 3.1: Resultados del modelo generalizado de Oldroyd B

	τ_1	τ_2	τ_3	τ_4	$\langle\tau\rangle$
Campaña 1	0.046 s	0.54 s	1.5 s	4.5 s	1.23 s
Campaña 2	0.032 s	0.27 s	0.9 s	3.8 s	1.03 s

Los resultados de las pruebas reométricas con el ajuste mencionado de Liu et. al. [36] se muestran en la figura 3.3.



(a) Prueba oscilatoria del fluido de Boger de la primera campaña



(b) Prueba oscilatoria del fluido de Boger de la segunda campaña

Figura 3.3: Pruebas oscilatorias realizadas. a) fluido de la primera campaña y b) segunda campaña experimental. Los cuadrados son el módulo de almacenamiento y los rombos son el módulo de pérdidas.



Los resultados de los tiempos de relajación calculados con los distintos métodos se muestran en la tabla 3.2. Por consistencia con las referencias, se eligió el método del ajuste al modelo generalizado de Oldroyd B.

Tabla 3.2: Tiempo de relajación calculado a partir de los métodos mencionados.

	Corte simple estacionario	Relajación de esfuerzo	Oscilatoria
Campaña 1	0.014 s	1.18 s	1.23 s
Campaña 2	0.013 s	-	1.03 s

La tabla 3.3 resume las propiedades reológicas de los fluidos de trabajo (densidad, viscosidad, exponente de la ley de potencias y tiempo de relajación promedio) de ambas campañas experimentales.

Tabla 3.3: Propiedades de los fluidos de trabajo

Fluido	ρ (kg/m ³)	η (Pa·s)	n	λ s
Boger C1	1340	3.7	0.98	1.23
Newtoniano C1	1390	3.5	1.0	—
Boger C2	1350	2.7	0.98	1.03
Newtoniano C2	1400	2.8	1.0	—



Se llevaron a cabo dos campañas experimentales: en la primera se midió el desempeño del nado variando la frecuencia de excitación para nadadores con colas de diferente largo; después se realizó una segunda campaña de medición para un nadador (un solo largo de cola) con más detalle, en particular, para para frecuencias bajas. Todas las pruebas se realizaron considerando una intensidad de campo magnético constante.

Dada la naturaleza inestable de los fluidos de trabajo, se tuvieron que fabricar dos pares de fluidos ya que después de un período de aproximadamente 12 semanas, las propiedades reológicas cambian. A pesar de que las fórmulas de preparación fueron nominalmente iguales, se encontraron propiedades distintas (ver capítulo 4).

En la primera campaña se realizaron pruebas con todos los tamaños de cola, variando la frecuencias de 0 Hz a 4 Hz en intervalos de 0.2Hz. Además, se realizaron pruebas de visualización con la técnica de PIV para estudiar el campo de velocidades alrededor del nadador. Para facilitar la visualización, se utilizó un nadador con cola plana en lugar de uno con cola cilíndrica.

Para la segunda campaña se realizaron experimentos con un nadador con cola de 2.5 cm de largo, variando la frecuencia desde 0.01 Hz hasta 4 Hz. Todas las pruebas se repitieron tres veces para obtener un promedio estadístico satisfactorio.



4.1. Primera campaña de mediciones

Los resultados obtenidos en la primera campaña se muestran en la figura 4.1, que presentan la velocidad de propulsión en función de la frecuencia de oscilación para las cuatro longitudes de la cola.

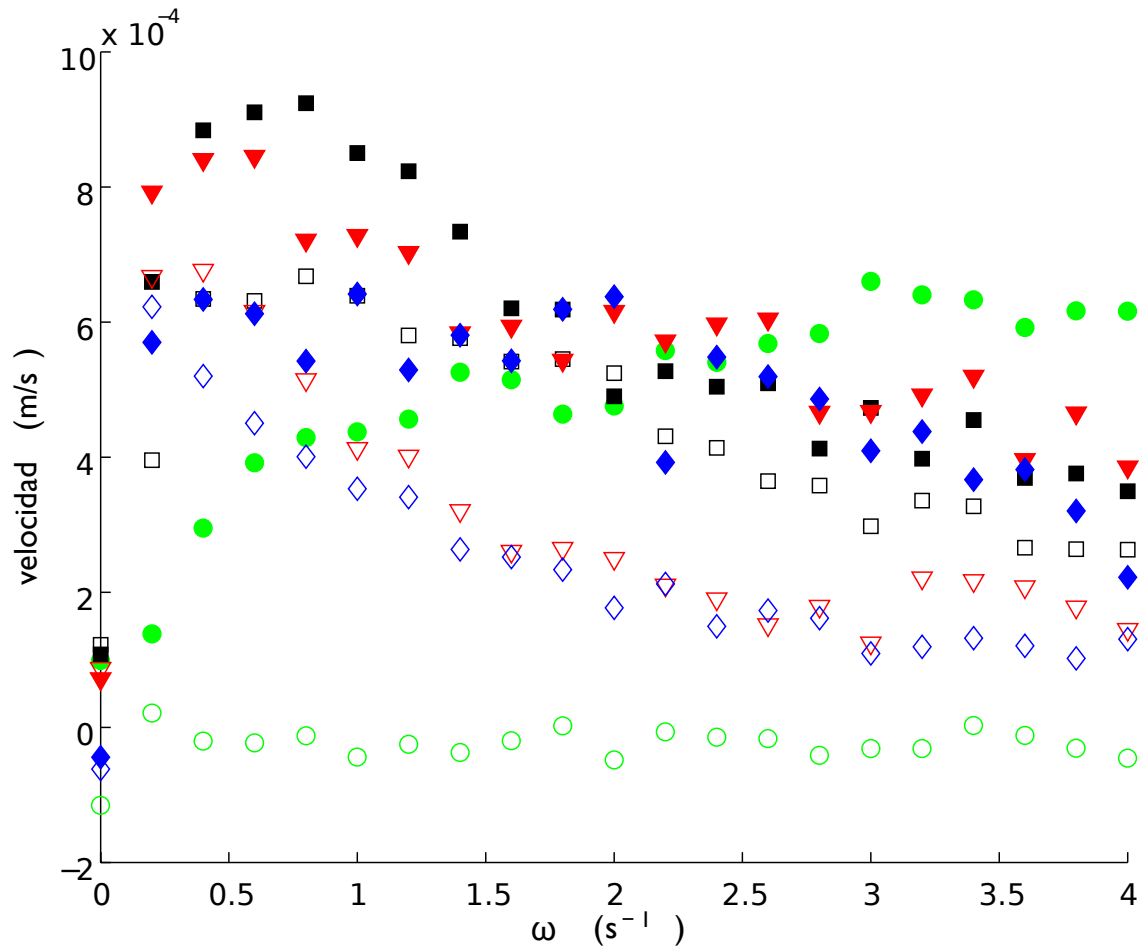


Figura 4.1: Resultados de las pruebas con los fluidos de la primera campaña, con cuatro tamaños de cola distinta. Los símbolos rellenos corresponden a los resultados con el Boger y los vacíos al caso newtoniano. El verde son los resultados de la cola de 1cm, el negro son de la cola de 2.5 cm, rojo son los de la cola de 3.5cm y el azul son los de la cola de 6cm.

Se pueden notar dos aspectos: en casi todos los casos la velocidad de propulsión es mayor en el fluido de Boger, y que se alcanza siempre una velocidad máxima para una frecuencia dada. A frecuencias mayores a ésta, la velocidad comienza a disminuir. Es interesante notar



que dentro de los cuatro casos, es el de la cola de 2.5 cm es el que alcanza la mayor velocidad de propulsión.

Se puede tratar de explicar este comportamiento de la siguiente manera: la propulsión se genera en el apéndice, por lo tanto depende de sus propiedades materiales y geométricas. Si éste es muy corto no se genera propulsión porque no habrá perturbación en el fluido; si por el contrario, el apéndice es muy largo, éste generará mucho arrastre viscoso y tampoco podrá moverse. El caso de la rigidez es un poco más sutil porque afecta la flexión y restitución del apéndice (término A de la ecuación 1.32). Si es muy rígido, no habrá pandeo y se cumplirán las condiciones del teorema de Purcell; si es poco rígido, la deformación local generada por la oscilación no se propagará a lo largo del apéndice, por lo tanto no habrá pandeo ni restitución al estado inicial de equilibrio y consecuentemente no se generará propulsión. Con esto en mente se puede inferir que debe haber un punto óptimo entre flexión y disipación viscosa en la que puede generarse propulsión. El número de esperma relaciona estos dos efectos y el punto óptimo se encuentra cuando el número de esperma es aproximadamente 1 según Lowe[37]. La figura 2.5 muestra la variación del número de esperma para los distintos tamaños de cola. El nadador con cola de 2.5 cm es el que más se acerca al valor de uno y es por este motivo que alcanza la mayor velocidad de propulsión.

Se puede notar que para el caso de la cola más corta, la velocidad de propulsión se incrementa como función de la frecuencia de oscilación sin aparentemente llegar nunca a un máximo. Es interesante resaltar que la propulsión experimentada en el fluido de Boger es mayor que en su caso newtoniano. Esto se debe a que la cola es tan corta que el número de esperma es pequeño (menor a 1). Esto significa que la cola es relativamente rígida por lo que el comportamiento es cercano al del teorema de Purcell para el caso newtoniano ya que, a pesar del incremento de la frecuencia de oscilación, la velocidad de propulsión no se ve afectada. En el caso del Boger la velocidad de propulsión se incrementa como función de la frecuencia sin llegar a un máximo. Claramente la velocidad de nado es mayor en el fluido de Boger (símbolos rellenos) que en el newtoniano (símbolos vacíos). En el caso de la cola de dos centímetros y medio, la velocidad de propulsión se incrementa en ambos casos hasta





llegar a un máximo (con valor correspondiente a $Sp \approx 1$) y donde a partir del cual comienza a descender.

Para adimensionalizar estos resultados se necesita un tiempo característico del sistema (es decir el inverso de la frecuencia) y el tamaño característico del elemento propulsor (el tamaño de la cola). Se puede comparar la velocidad adimensional con el número de esperma, debido a que la propulsión se genera en la cola al almacenar energía elástica en el pandeo y competir con la difusión causada por la fricción viscosa. Los resultados adimensionales se muestran en la figura 4.2.

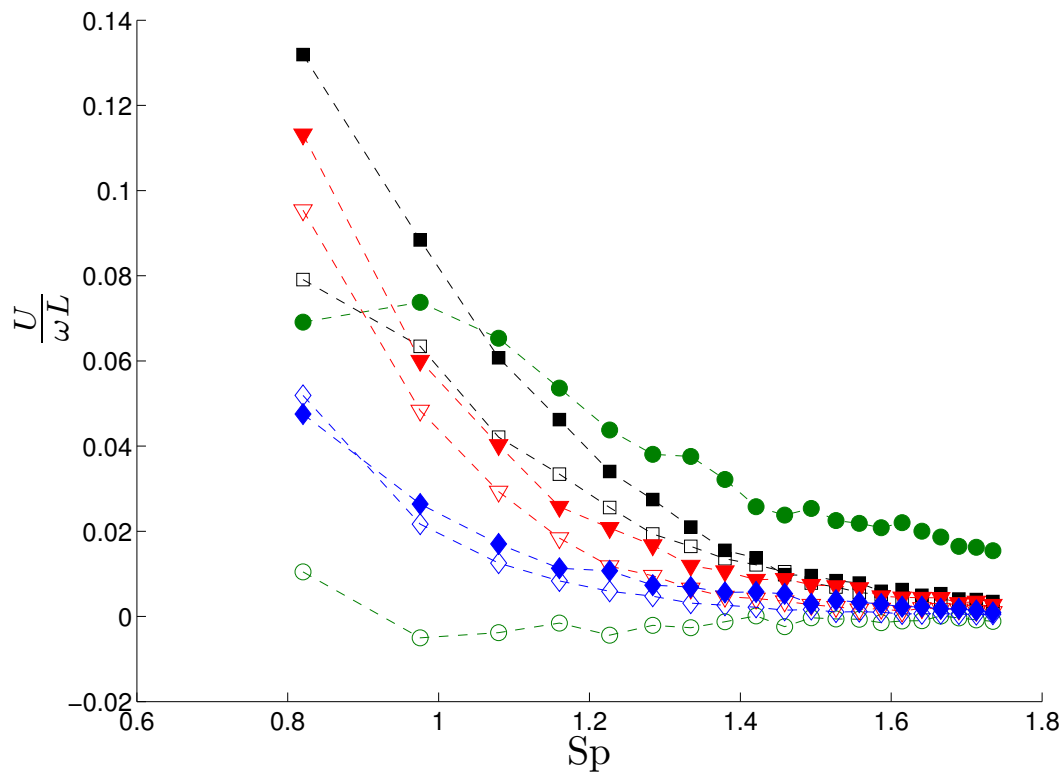


Figura 4.2: Velocidad adimensional como función del número de esperma para las mediciones de la primera campaña experimental. Mismos símbolos que la figura 4.1



La velocidad adimensional es considerablemente grande para valores del número de esperma cercanos a uno comparados con los del número de esperma grandes; sin embargo, debe existir un máximo ya que para $Sp \approx 0$ la velocidad adimensional debe ser también cercana a cero.

En la primera campaña experimental se realizaron también pruebas con un nadador con cola rígida para verificar el teorema de Purcell en fluidos viscoelásticos; sin embargo, para las condiciones del experimento no se observó una propulsión medible.

4.2. Segunda campaña

Dado que el nadador con cola de 2.5cm resultó tener la velocidad más alta, se decidió realizar una segunda campaña experimental con éste. Se prepararon nuevos fluidos y se amplió el rango de frecuencias de medición, enfocados sobre todo en frecuencias menores a 1 Hz. Para poder tener un buen promedio estadístico cada experimento se repitió al menos tres veces. Las frecuencias de trabajo para esta nueva campaña fueron de 0.01 Hz hasta 4 Hz.

La figura 4.3 muestra los resultados de la velocidad de nado para este nadador. Se muestra una comparación de los dos pares de fluidos utilizados (Boger y newtoniano de ambas campañas experimentales).

Se puede apreciar que en ambos casos el comportamiento es similar: la velocidad de nado se incrementa con la frecuencia hasta alcanzar un valor crítico de ésta donde se alcanza una velocidad máxima; posteriormente, conforme continúa incrementando la frecuencia, la velocidad decrece. Es interesante notar que el comportamiento es similar para los fluidos newtoniano y viscoelástico; sin embargo, la velocidad de nado para el fluido de Boger es ligeramente mayor.

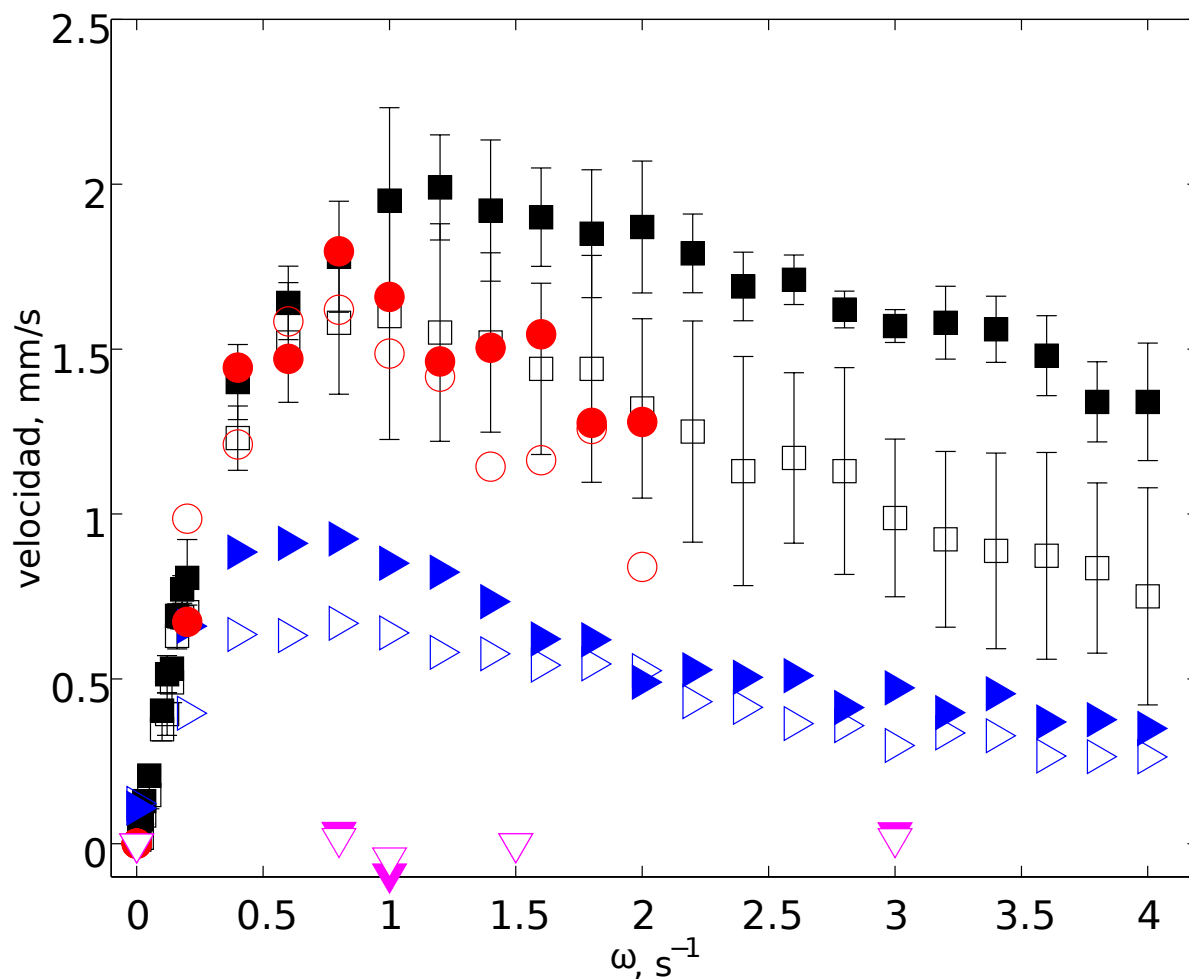


Figura 4.3: Velocidad de nado como función de la frecuencia de oscilación para el nadador con cola de 2.5 cm. Los símbolos negros (\square) son los resultados promedio de la segunda campaña. Los símbolos azules (\triangleright) son los resultados del nadador en los fluidos de la primera campaña. Los resultados en magenta (∇) son los resultados de la cola rígida y los resultados en rojo (\circ) son los del nadador de cola plana. Todos los símbolos rellenos fueron realizadas en fluidos de Boger y los vacíos en fluidos newtonianos.



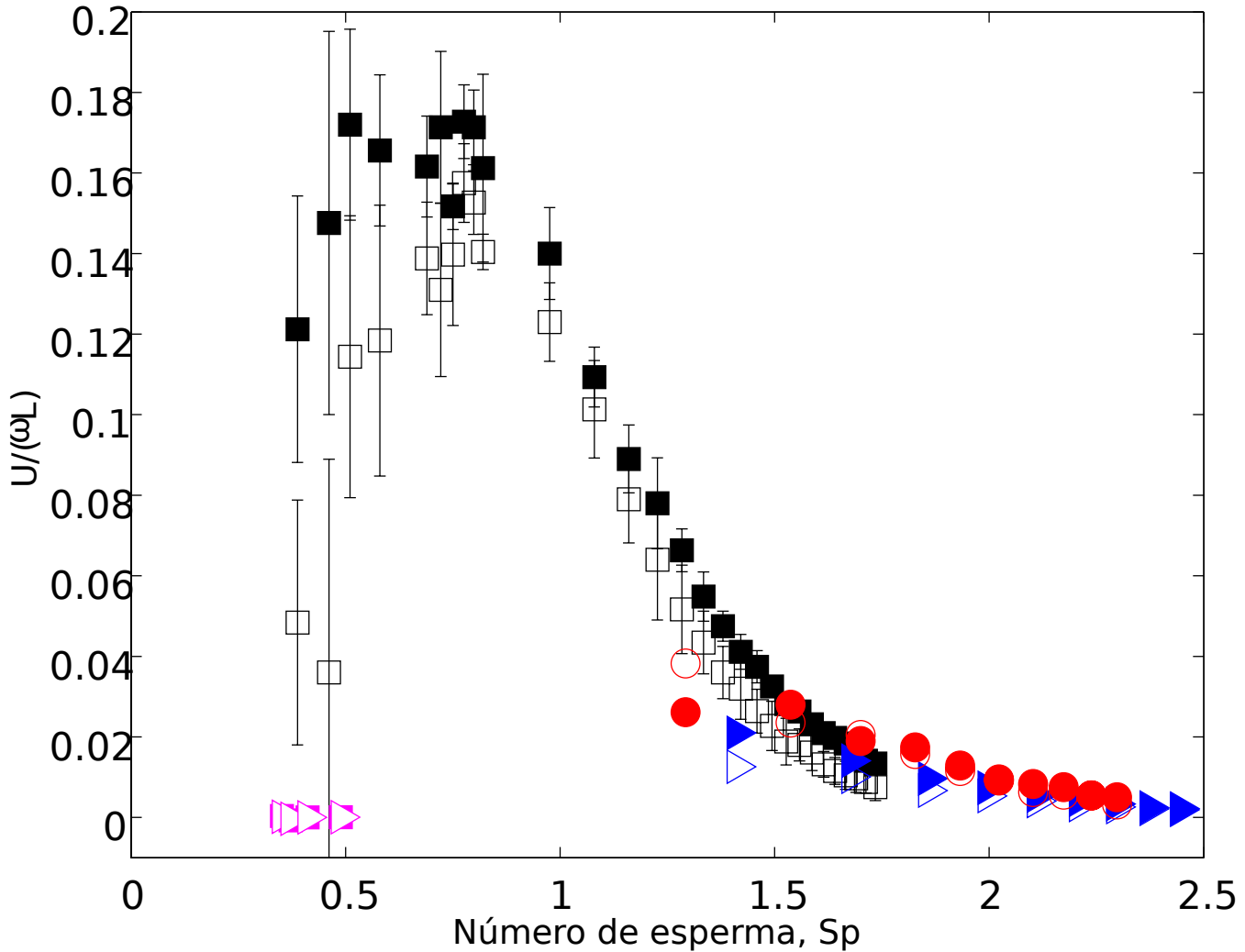


Figura 4.4: Velocidad adimensional como función del número de esperma para el nadador de 2.5cm. Mismas figuras que en el gráfico 4.3.

La figura 4.4 muestra las mediciones de velocidad de forma adimensional. La velocidad se adimensionalizó considerando una velocidad característica ωL . La frecuencia de oscilación se adimensionalizó considerando el número de esperma (ecuación 1.35).

Al presentar los datos de esta manera es evidente que existe una región donde la velocidad es máxima en un número de esperma de alrededor de 0.8. Es interesante notar que el comportamiento para el fluido viscoelástico es muy similar al newtoniano, variando sólo en la magnitud del nado.



Para explicar estos resultados se analizan los detalles del movimiento. Se comparó el ángulo de oscilación de la cabeza, así como la amplitud de la oscilación para una misma frecuencia en ambos fluidos de la misma viscosidad al corte como se muestra en la figura 4.5. La figura 4.5 muestra los resultados obtenidos del rastreo del centroide del nadador de 2.5 cm para una frecuencia de oscilación de 1Hz en ambos fluidos. Se puede notar que la amplitud de oscilación es ligeramente más grande en el fluido de Boger. Mena et. al [8] y Chhabra et al [9] encontraron que la viscoelasticidad reduce el arrastre hidrodinámico en flujo reptante (o a bajos Re). El coeficiente de arrastre en flujo reptante es función del número de Weissenberg y se puede reducir hasta en un 25 % en un Weissenberg crítico alrededor de 0.7. Si este efecto ocurre también para el nadador, bajo una misma potencia de entrada, la amplitud de oscilación tendría que ser mayor para el fluido viscoelástico, que es lo que se observa en las mediciones.

La figura 4.6 muestra un rastreo de la cola del nadador a lo largo de un ciclo de oscilación a la misma frecuencia en ambos fluidos. Se separó el video en cuadros y se trazó la posición de la cola en cada instante de tiempo hasta completar el ciclo de oscilación. El centro de rotación corresponde con el centroide de la cabeza.

Una vez más se aprecia que la cola cubre más distancia en el fluido de Boger que en el newtoniano aunque parece más prudente atribuirle el hecho a la reducción del arrastre que a algún efecto de memoria. Si se analizan las posiciones de la cola se verá que para el caso newtoniano las posiciones extremas de la cola corresponden con las posiciones extremas de la cabeza, mientras que para el caso del fluido de Boger las posiciones extremas de la cola corresponden con posiciones de la cabeza en una parte del ciclo que ya va de regreso. Esto hace suponer que hay efectos de relajación actuando en la vecindad de la cola.



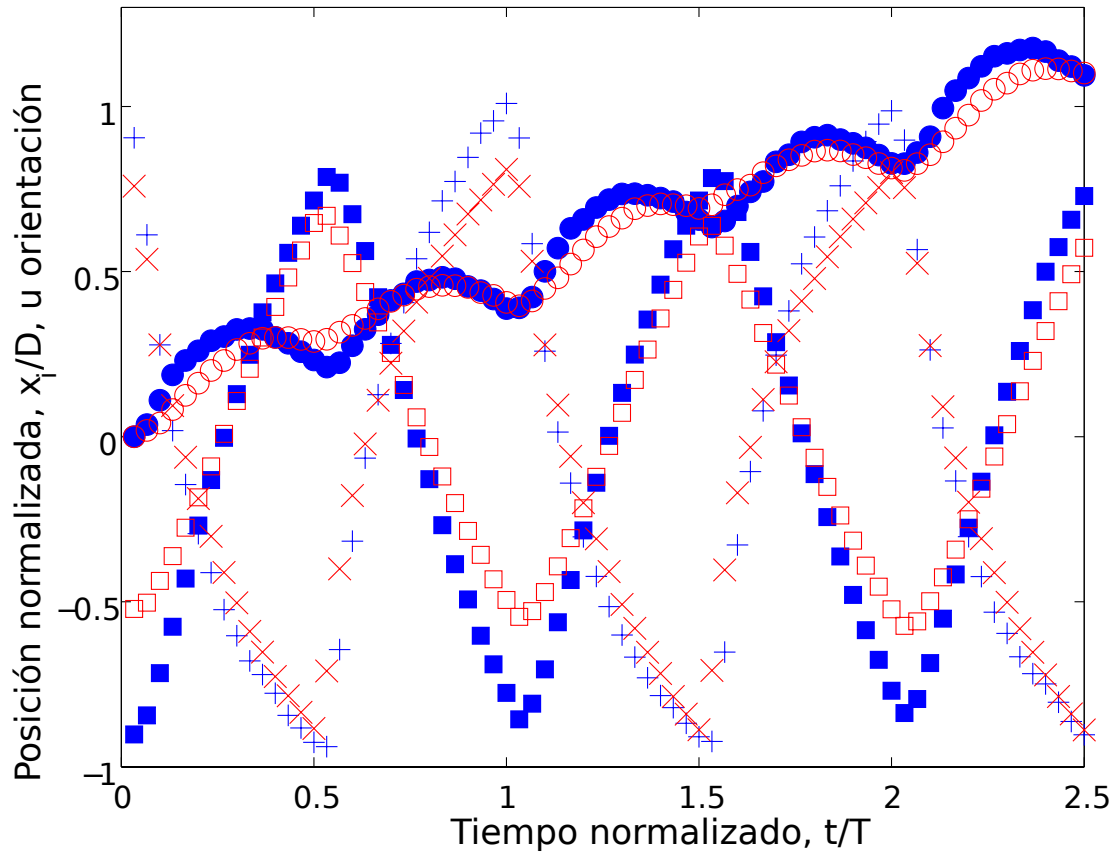


Figura 4.5: Posición normalizada del centroide en la dirección perpendicular al nado (\square), en la dirección del nado (\circ) y el ángulo de inclinación de la cabeza ($+$ y \times). Las figuras rellenas azules y ($+$) son el caso del fluido de Boger; las vacías rojas y (\times) son el caso del fluido newtoniano. Las posiciones están adimensionalizadas con el diámetro de la cabeza y el ángulo está en radianes.

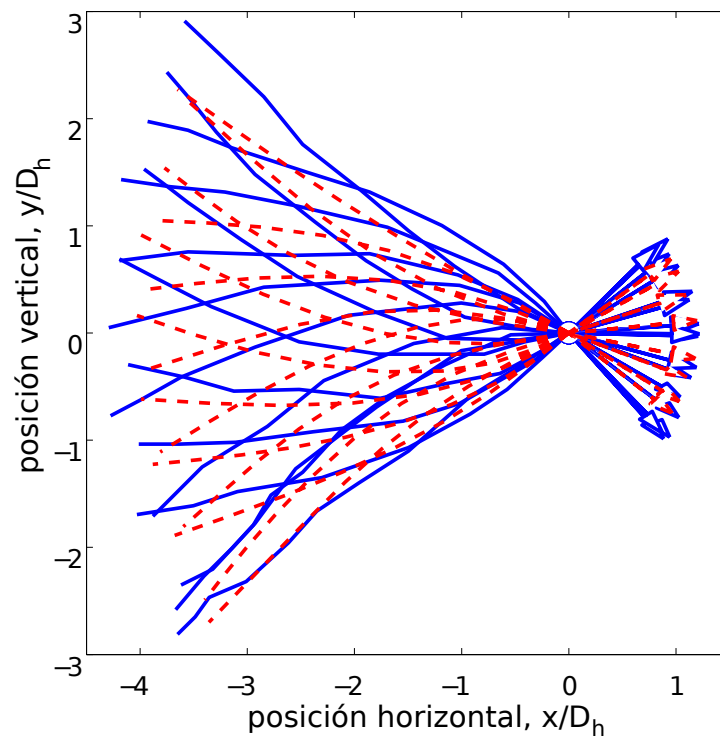


Figura 4.6: Rastreo de la cola a lo largo de un ciclo de oscilación para una misma frecuencia en el fluido de Boger (línea continua azul) y en el fluido newtoniano (línea discontinua roja).

Para ver cómo afecta el grado de viscoelasticidad a la velocidad de propulsión, se puede referenciar la velocidad de nado del fluido no newtoniano a la velocidad newtoniana y comparar la variación de ésta relación contra el número de Deborah $De = \lambda\omega$ (el número que dice el grado de viscoelasticidad del flujo). El resultado se muestra en la figura 4.7.

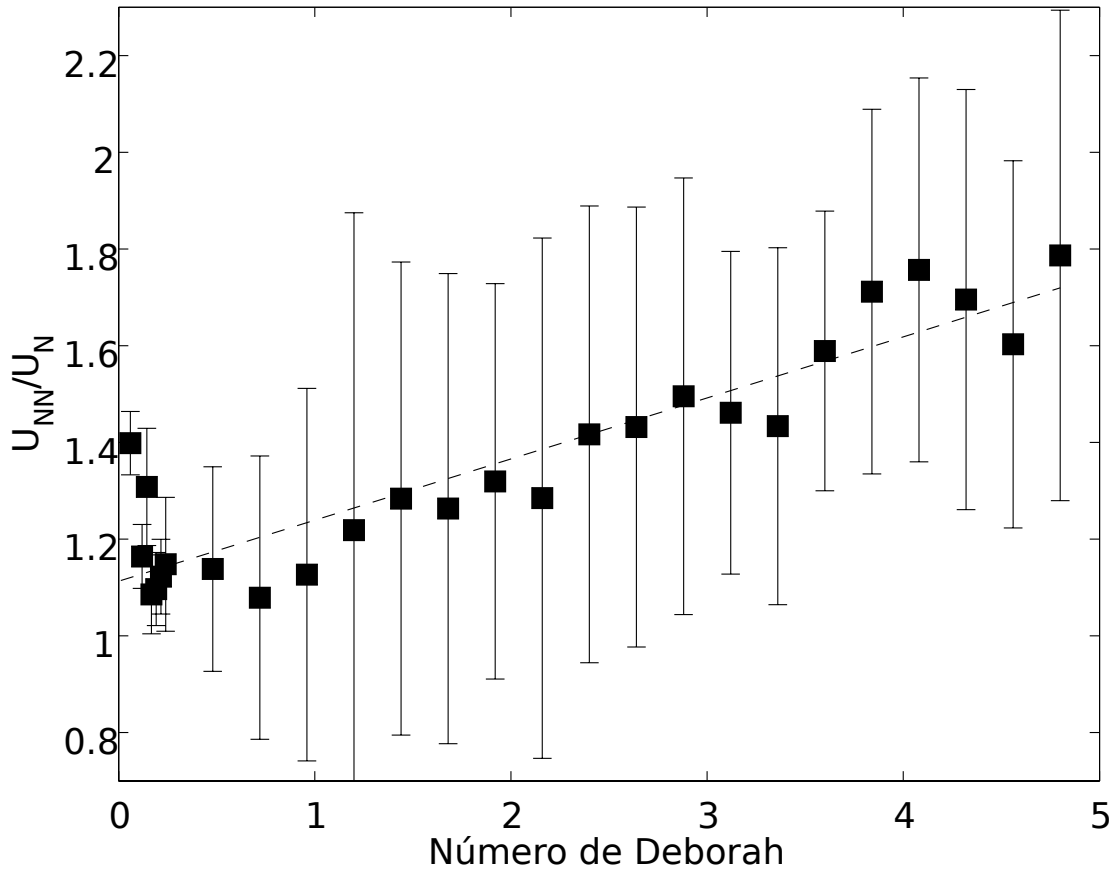


Figura 4.7: Relación de la velocidad de propulsión no newtoniana a newtoniana como función del número de Deborah. La línea punteada es un ajuste lineal realizado con todos los datos.

En la figura 4.7 se puede apreciar que a pesar de la incertidumbre debida a las variaciones en las mediciones, la tendencia es clara. El nado es siempre más rápido en un fluido no newtoniano, y la relación de velocidad entre los dos fluidos aumenta sistemáticamente con el número de Deborah para las condiciones experimentales, contrario a [36] y [48], quienes encuentran un De crítico donde la relación es máxima, después comienza a decaer incluso por debajo de la newtoniana.

4.3. Mediciones del campo de velocidad alrededor del nadador

Para analizar las diferencias en el flujo alrededor del nadador con los dos fluidos se realizaron pruebas con la técnica de PIV; éstas se hicieron únicamente con frecuencias de 0.2Hz a 2Hz con el nadador de la cola plana. No se encontraron diferencias sustanciales; por ejemplo, no se observó la formación de la estela negativa ni la aparición de un punto hiperbólico [44]. Esto es debido a que los efectos viscoelásticos son moderados para el fluido de trabajo.

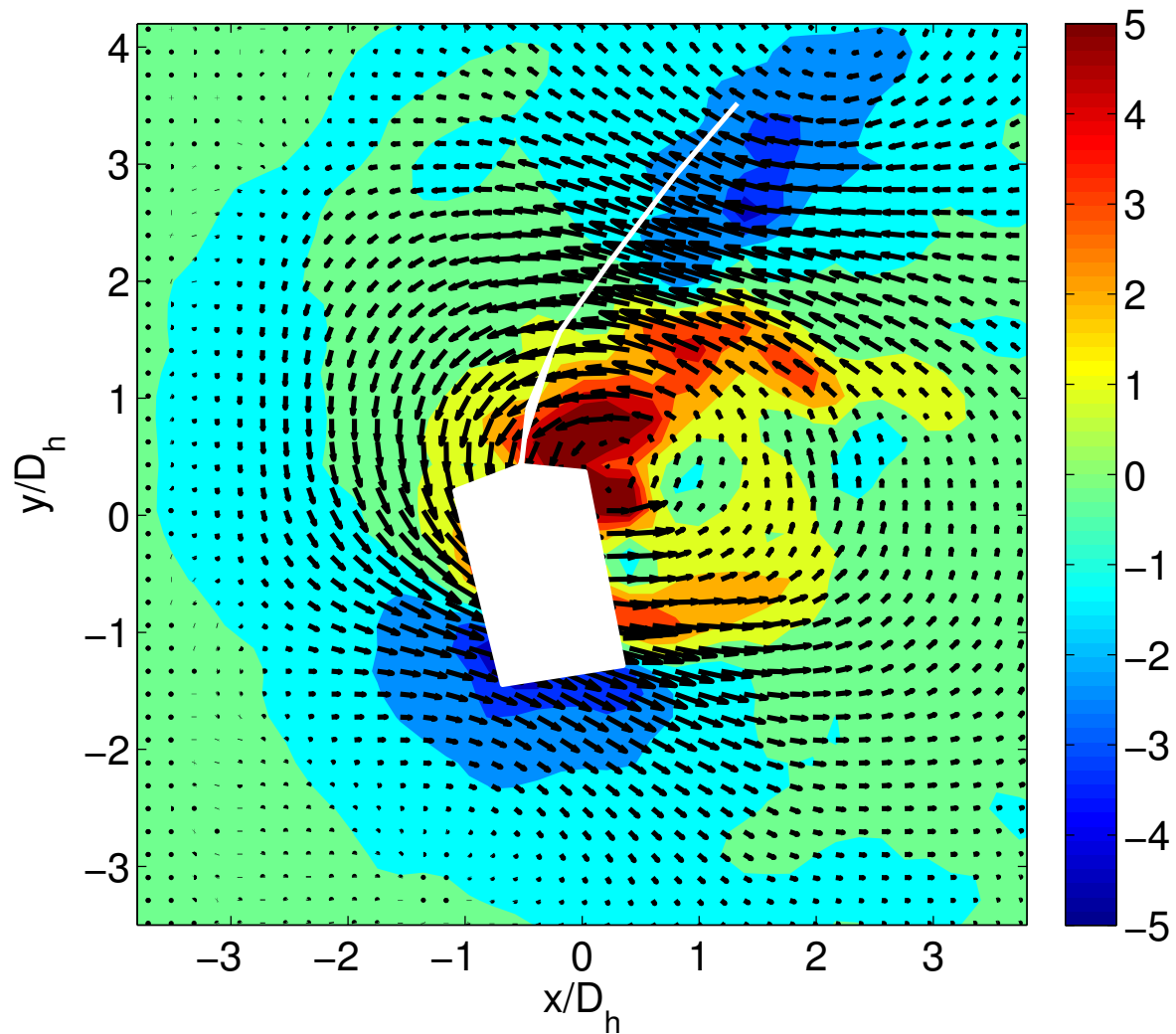


Figura 4.8: Campo de velocidad y superficies de isovorticidad para el caso de 1 Hz en el fluido de Boger en un instante de tiempo. La posición está expresada en términos del diámetro de la cabeza. La barra de colores es la vorticidad normalizada con la frecuencia.

La figura 4.8 muestra un resultado típico de visualización de PIV. Mediante esta técnica de visualización se pueden conocer las componentes del campo de velocidad en un plano y, con esa información, calcular la componente perpendicular al plano de la vorticidad. Se puede notar un vórtice generado alrededor del nadador. En un ciclo de oscilación se desarrolla un vórtice, se disipa rápidamente a la mitad del ciclo y se genera otro en sentido contrario que vuelve a disiparse rápidamente al terminar el ciclo.

Con el campo de velocidad también se pueden calcular las cuatro componentes del tensor gradiente de deformación y con ellas su parte simétrica, llamado tensor rapidez de deformación \mathbf{D} definido como:

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2} [\nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^T] \quad (4.1)$$

donde \mathbf{v} es el campo de velocidad. Como el flujo es de naturaleza oscilatoria, se puede promediar la magnitud del tensor rapidez de deformación en todo el ciclo de oscilación como:

$$|\mathbf{D}| = \langle \sqrt{\mathbf{D} : \mathbf{D}} \rangle \quad (4.2)$$

donde $\langle \cdot \rangle$ representa el promediado en el tiempo.

La figura 4.9 es un promedio de todo el ciclo de oscilación de la magnitud de la parte simétrica del tensor gradiente de deformación \mathbf{D} calculado a partir de la ecuación 4.2. La región en blanco es la posición de la cabeza a lo largo del ciclo y fue omitida del promedio dado que en realidad no es parte del fluido.

Es interesante notar que la magnitud del tensor es más grande en la parte posterior que en la parte anterior del nadador. Ésto da cabida a una discusión en el sentido siguiente: la reducción del arrastre hidrodinámico es resultado de propiedades viscoelásticas. Para fluidos no newtonianos existen tres diferentes efectos físicos que pueden ser explotados para lograr la locomoción en pequeñas escalas[33]. En primer lugar, los fluidos no newtonianos poseen en general propiedades que dependen del segundo invariante del tensor rapidez de deformación. Muy en particular Lauga[33] habla acerca de la dependencia de la viscosidad (para este caso

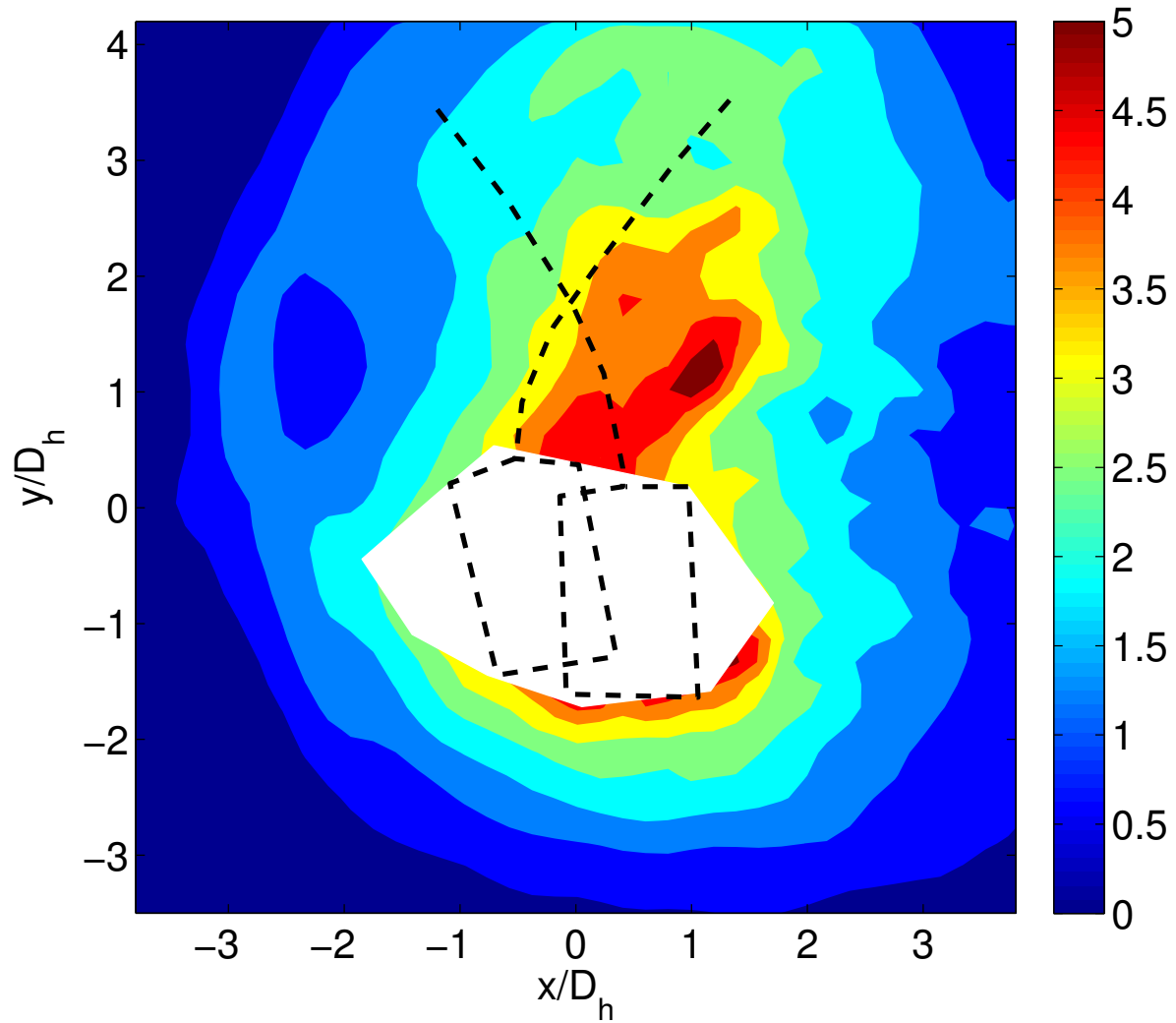


Figura 4.9: Promedio de la magnitud del tensor rapidez de deformación para una frecuencia de 1Hz. La posición está normalizada con el diámetro de la cabeza y la magnitud del tensor está normalizada con la frecuencia. Las líneas punteadas representan la posición del nadador en distintas partes del ciclo.

la viscosidad se mantiene constante); sin embargo, otras propiedades materiales como el primer coeficiente de esfuerzos normales pueden depender del mismo, lo que lleva al segundo efecto físico.

Este segundo efecto son las propiedades reológicas del primer y segundo coeficiente de esfuerzos normales, que dependen de la primera y segunda diferencia de esfuerzos normales y surgen del estiramiento de la microestructura en suspensión en los fluidos poliméricos. Como las diferencias de esfuerzos normales se escalan de manera cuadrática con el esfuerzo aplicado, éstos permanecen idénticos en una inversión en el tiempo a pesar de que el movimiento sea recíproco y por lo tanto pueden generar propulsión[33].

Se puede usar este argumento para interpretar la figura 4.9. En la figura se ve claramente que la velocidad de deformación generada promedio es más grande en la región de la cola y por lo tanto es de suponerse que, si el fluido es viscoelástico, entonces se deben generar esfuerzos normales que serán siempre en la misma dirección y que probablemente estén empujando al nadador. Con esto en mente se puede decir que el efecto físico responsable del incremento de velocidad de propulsión pueden ser los efectos extensionales.

Sin embargo, Lauga habla de un tercer efecto que puede explotarse para lograr la locomoción, el cual es el efecto de memoria del fluido o de la relajación del esfuerzo. Aún no hay experimentos que se aprovechen explícitamente de esta propiedad, ya que es una alternativa interesante aunque muy poco estudiada. Este efecto de memoria se le atribuye a la propiedad material del tiempo de relajación (λ), y es el responsable de la restitución parcial del material sujeto a una deformación. Cabe resaltar que el teorema de Purcell surge de las ecuaciones de Navier-Stokes. Si desde el principio no se puede contar con ellas entonces no se puede asegurar que incluso en estas escalas deba cumplirse el teorema. La ecuación constitutiva viscoelástica más sencilla ya involucra un tiempo característico con una derivada parcial temporal, por lo que la condición de Stokes no necesariamente asegura que se cumpla el teorema de Purcell.

Este efecto de memoria puede utilizarse para desfasar la deformación del esfuerzo debidos a efectos de restitución elástica y almacenamiento de energía.





Conclusiones

En este trabajo se analizó el efecto de la viscoelasticidad en la propulsión en bajos números de Reynolds. Si bien hay algunos trabajos teóricos al respecto, los estudios experimentales son muy escasos. Para el caso del nadador de cola flexible no existe ningún estudio hasta la fecha.

Se mostró que la viscoelasticidad, dado que no se tienen cambios en la viscosidad, beneficia al nado al menos bajo las condiciones de este estudio (isotorque, presión y temperatura constante, etc.). Tanto los esfuerzos normales como los efectos de memoria actúan en conjunto produciendo una reducción del arrastre. Se puede decir que las propiedades viscoelásticas en su conjunto proveen de las condiciones favorables para la locomoción pero cabe resaltar que este experimento no reproduce las condiciones de nado libre real, las cuales son que el cuerpo sumergido está libre de fuerzas y de torques. En este arreglo se puede argumentar que los cuerpos están libres de fuerzas externas (ya que el peso y la flotación están balanceados) pero por la naturaleza magnética, y debido a que es un campo externo el que lo energiza, el nadador no está libre de torques. De cualquier manera, los resultados obtenidos muestran con claridad que la viscoelasticidad mejora el desempeño del nado en condiciones de flujo reptante.



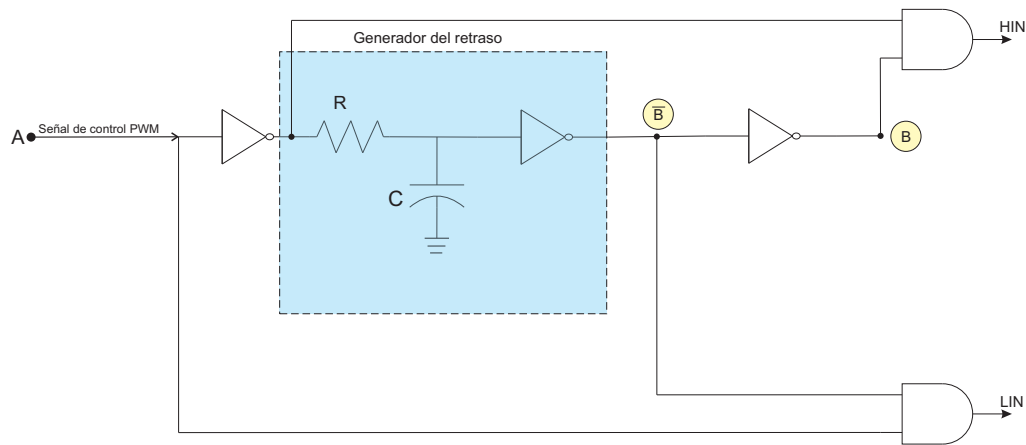
Dispositivo electrónico experimental

En esta sección se explica el diseño del circuito electrónico. El objetivo es modular y conmutar la alimentación de una carga inductiva para poder revertir la dirección del campo magnético generado por una bobina de Helmholtz, que puede ser considerada como un sistema RL. Paul Domínguez[15] realizó un trabajo similar pero, en contraste con su trabajo, la modulación para este caso debió ser a frecuencias muy bajas (de 0.1 Hz a 10Hz).

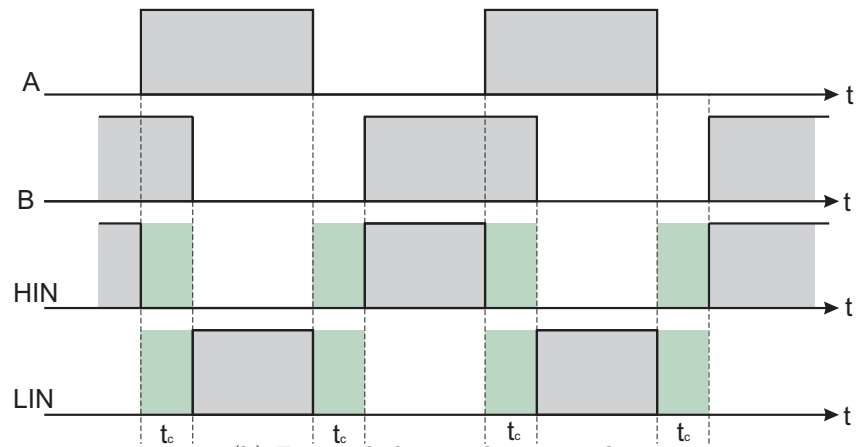
Para lograrlo, se diseñó un convertidor en modo conmutado de cuatro cuadrantes. Se escogieron como elementos conmutadores los semiconductores IGBT debido a sus características de velocidad de conmutación, nivel de corriente y nivel de voltajes manejados; así como la facilidad de activación y la robustez del elemento.

El circuito se divide en dos etapas: la etapa de control, que genera las señales que coordinan la activación de los conmutadores, y la etapa de potencia, que los maneja a partir de esa señal de control.

Para generar las señales de control, se realizó un circuito desfasador que, además, genere un tiempo muerto para evitar que se activen al mismo tiempo pares de conmutadores mientras el otro par se descarga, pues esto puede dañar seriamente al equipo y a la instalación eléctrica. La figura A.1 muestra el circuito así como la forma de las señales generadas. El tiempo muerto es el producto de RC [13]; el resto de los elementos son operadores Booleanos *AND* y *NOT*. La señal A, generada por un generador de señales, debe ser una onda cuadrada.



(a) Circuito generador de señales de control



(b) Forma de las señales generadas

Figura A.1: Circuito generador de señales en a) y la forma de las señales en b). Las señales HIN y LIN son las que se envían a la etapa de potencia, marcadas como S_1 y S_2 . El tiempo muerto (t_c) generado es de 6.8 ms, calculado para que represente menos del 5% del periodo a una frecuencia máxima de 5Hz.

La etapa de potencia consiste en dos elementos controladores IR2110 (que coordinan la conmutación entre pares de IGBT/MOSFET a partir de la entrada de la señal de control) junto con sus elementos necesarios, como capacitores de acoplamiento, diodos, etc[56]. La figura A.2 muestra el diagrama eléctrico del sistema.

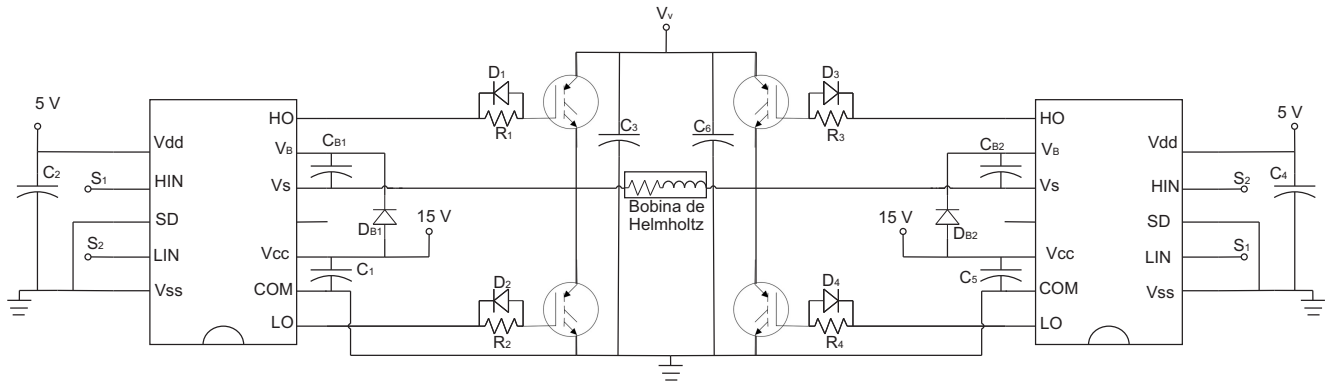


Figura A.2: Circuito de potencia, donde V_V es el voltaje suministrado por una fuente de CD de potencia, y S_1 y S_2 son las señales de control (generadas por la segunda sección del circuito). Los elementos D_{Bi} son diodos ultrarápidos (MUR160) de acoplamiento, R_i son resistencias de 10Ω , C_2 y C_4 son capacitores de $4.7\mu\text{F}$, y los capacitores C_1 y C_{B1} son de 1 y $0.1\mu\text{F}$ respectivamente, al igual que los capacitores C_5 y C_{B2} .

Los capacitores C_2 y C_4 sirven para volver al sistema RL un sistema de segundo orden RLC sobreamortiguado, y evitan los picos de corriente generados en un inductor cada vez que el voltaje en el mismo conmuta[41].



Bibliografía

- [1] John J. Aklonis & William J. MacKnight. *Introduction to polymer viscoelasticity*. John Wiley and sons USA, 2nd ed, 1983

- [2] H. A. Barnes, J.F. Hutton, K. Walters. *An introduction to rheology*, Rheoseries 3, Elsevier, Amsterdam, 1993.

- [3] L.E. Becker, G.H. McKinley, H.K. Rasmussen, O. Hassager. The unsteady motion of a sphere in a viscoelastic fluid. *Journal of rheology*, 32(2), 1994.

- [4] R.B. Bird, R.C. Armstrong, O. Hassager, *Dynamics of polymeric liquids, Vol 1*, John Wiley & Sons, 2nd ed, Canada, 1987.

- [5] D.V. Boger, D. V. A Highly elastic constant-viscosity fluid. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 3, 1977/1978.

- [6] E. Buckingham. On physically similar systems. Illustrations of the use of dimensional equations. *Physical Review*, No 4, Vol. 4, 1914.

- [7] M.B. Bush. On the stagnation flow behind a sphere in a shear-thinning viscoelastic liquid. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 55, 1994.
- [8] B. Caswell, O. Manero & B. Mena. Recent developments on the slow viscoelastic flow past spheres and bubbles. *Rheology Reviews*, 2004.
- [9] R.P. Chhabra, P.H.T. Uhlherr, D.V. Boger. The influence of fluid elasticity on the drag coefficient for creeping flow around a sphere. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 6, 1980.
- [10] Stephen Childress. *Mechanics of Swimming and Flying* Cambridge University Press, NY, USA. 1981.
- [11] C. Chmielewsky, K.I. Nichols, K. Jayaraman. A comparison of the drag coefficients of spheres translating in corn-syrup-based and polybutene-based Boger fluids *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 35, 1990.
- [12] L. Choplin, P.J. Carreau, A.A. Kadi. Highly elastic-constant viscosity fluids. *Polymer Engineering and Science*, vol. 23, num. 8, 1983.
- [13] R.F. Coughlin, D.F. Frederick. *Amplificadores operacionales y circuitos integrados lineales*, Prentice Hall, México, 5ta ed. 1999.
- [14] R.G. Cox. The motion of long slender bodies in a viscous fluid, part 1. General theory, *Journal of Fluid Mechanics*, No 44 pp. 1970.

- [15] Paul Domínguez Méndez. *Sistema de control de velocidad para tanques agitados*. FI–UNAM, Tesis de Licenciatura, México, 2007.
- [16] R.D. Dresdner, D.F. Katz, S. Berger. The propulsion by large amplitude waves of uniflagellar micro–organisms of finite length. *Journal of Fluid Mechanics*, No 97, 1980.
- [17] R. Dreyfus, J. Baudry, M.L. Roper, M. Fermigier, S. Marc, A. Howard & J. Bibette. Microscopic artificial swimmers *Nature*, Vol 437, 2005.
- [18] L.J. Fauci & R. Dillon. Biofluidmechanics of reproduction *Annual Review of Fluid Mechanics*, Vol. 38, 2006.
- [19] H.C. Fu, C. Henry and T.R. Powers. Theory of Swimming Filaments in Viscoelastic Media *Physical Review Letters*, Vol 99, 2007.
- [20] J. Gray. Undulatory Propulsion, *Quarterly Journal of Microscopical Science*, Vol 94, parte 4. 1953.
- [21] J. Gray. The Movement of Sea–Urchin Spermatozoa, *Journal of Experimental Biology*, No 32, Vol 4. 1955.
- [22] J. Gray & G. J. Hancock. The propulsion of sea–urchin spermatozoa, *Journal of Experimental Biology*, No 32, Vol 4. 1955.
- [23] G.J. Hancock. The self–propulsion of microscopic organisms through liquids. *Proceedings of the Royal Society. A*, 217, 1953.

- [24] J.L.L. Higdon. A hydrodynamic analysis of flagellar propulsion. *Journal of Fluid Mechanics*, No 90, 1979.
- [25] T. Honda, K.I. Arai, K. Ishiyama. Micro swimming mechanisms propelled by external magnetic fields *IEE transactions on magnetics*, Vol 32, No 5, 1996.
- [26] D.F. James. Boger Fluids. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 41, 2009.
- [27] R.E. Johnson & C.J. Brokaw. Flagellar hydrodynamics, a comparison between Resistive–Force Theory and Slender–Body Theory, *Biophysical Journal, Biophysical Society*, Vol. 25, 1979.
- [28] W.M. Jones, A.H. Price, K. Walters. The motion of a sphere falling under gravity in a constant-viscosity elastic liquid *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 53, 1990.
- [29] P. Kundu & I. Cohen. *Fluid Mechanics*. Oxford: Elsevier. 2008.
- [30] E. Lauga. Propulsion in a viscoelastic fluid, *Physics of Fluids*, Vol. 19. 2007.
- [31] E. Lauga & T.R. Powers. The hydrodynamics of swimming microorganisms *Reports on Progress in Physics*, Vol. 72. 2009.
- [32] E. Lauga. Life at high Deborah number, *Europhysics Letters*, Vol. 86. 2009.
- [33] E. Lauga. Life around the scallop theorem *The Royal Society of Chemistry, Soft Matter*, Vol. 7, 2011.

- [34] J. Lighthill. *Mathematical Biofluidynamics*, SIAM, Filadelfia, 1975.
- [35] J. Lighthill. Flagellar hydrodynamics, *SIAM Review*, Vol 18, 1976.
- [36] B. Liu, T.R. Powers, K.S. Breuer. Force free swimming of a model helical flagellum in viscoelastic fluids *PNAS*, Vol 108, No 49, 2011.
- [37] C.P. Lowe. Dynamics of filaments: modelling the dynamics of driven microfilaments *Philosophical Transaction of the Royal Society of London, Biological Sciences*, Vol. 358, 2003.
- [38] M.E. Mackay, D.V. Boger. An explanation of the rheological properties of Boger fluids. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 22, 1987.
- [39] F. Morrison. *Understanding rheology*. Oxford University Press. New York, 2001.
- [40] N. Cohen & J.H. Boyle. Swimming at low Reynolds number: a beginners guide to undulatory locomotion *Contemporary Physics*, Vol. 51, No. 2, 2009.
- [41] K. Ogata. *Ingeniería de Control Moderna*, Prentice Hall, Madrid, 4ta edición, 2007.
- [42] N. Phan–Thien, T. Tran–Cong, M. Ramia. A boundary element analysis of flagellar propulsion. *Journal of Fluid Mechanics*, No 184, 1987.
- [43] E.M. Purcell. Life at low Reynolds number, *American Journal of Physics* Vol 45, No 1. 1977.

- [44] X.N. Shen & P.E. Arratia. Undulatory swimming in viscoelastic fluids *Physical Review Letters*, 106, 2011.
- [45] M.J. Solomon, S.J. Muller. Flow past a sphere in polystyrene-based Boger fluids: the effect on the drag coefficient of finite extensibility, solvent quality and polymer molecular weight. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 62, 1995.
- [46] S. Sudo and T. Honda. Magnetic Swimming Mechanism in a Viscous Liquid, *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, Vol 17. 2006.
- [47] G. Taylor. Analysis of the Swimming of Microscopic Organisms *Proceedings of the Royal Society of London A*, No. 209, 1951.
- [48] J. Teran, L. Fauci & M. Shelley. Viscoelastic fluid response can increase the speed and efficiency of a free swimmer. *Physical Review Letters*, 104, 2010.
- [49] V. Tirtaatmadja, P.H.T. Uhlherr, T. Sridhar. Creeping motion of spheres in fluid M1 *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 35, 1990.
- [50] S. Vogel. *Life in Moving Fluids, The physical Biology of Flow*, Princeton University Press, New Jersey, 2nd ed, 1994.
- [51] S. Vogel. Exposing life's limits with dimensionless numbers. *Physics today*, November, 1998.
- [52] F.M. White. *Fluid Mechanics*, McGraw Hill, USA, 4ta ed.



- [53] L. Zhang, J.J. Abbott, D. Jake, L. Dong, K.E. Peyer, B. E. Kratochvill, H. Zhang, C. Bergeles and B. J. Nelson. Characterizing the Swimming Properties of Artificial Bacterial Flagella, *Nanno Letters*, Vol 9, No 10. 2009.
- [54] L. Zhang, J.J. Abbott, L. Dong, B. E. Kratochvill, D. Bell and B. J. Nelson. *Applied Physics Letters*, No 94. 2009.
- [55] 1.961 - Lecture 19 - Flagellar propulsion, Massachusetts Institute of Technology. (<http://mit.tv/ynDPRS>).
- [56] Hoja de datos PD60147 rev.U. *IR2110/IR2113 High and low side drivers*. International Rectifier, 2005.