



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

UNIVERSIDAD NACIONAL  
AUTÓNOMA DE  
MÉXICO

PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN  
INGENIERÍA

FACULTAD DE INGENIERÍA

“ANÁLISIS EXPERIMENTAL DE TORSIÓN  
EN MATERIALES COMPUESTOS LAMINADOS”

T E S I S

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:

INGENIERÍA EN INGENIERÍA

INGENIERÍA MECÁNICA—DISEÑO MECÁNICO

P R E S E N T A :

CNCPTGFWCTFQ'OCV~PG\ 'VQTTGU



TUTOR:

DR.MARIO ACOSTA FLORES

2012

## **Dedicatoria**

Dedico este trabajo a mi abuelo Eduardo Martínez, que fue un gran hombre que compartió conmigo su conocimiento, sabiduría y amistad.

## **Agradecimientos**

Por haberme apoyado agradezco a mi madre Flor, hermanos (Eric y Emmanuel) y en especial a la niña que comparte el calor de mi cuerpo, la cual ha sabido entenderme y apoyarme en esta aventura científica.

Agradezco a mi tutor “Mario Acosta Flores” por todo el apoyo brindado, a los profesores, compañeros y amigos que compartieron su conocimiento y pensamiento científico.

Al CONACYT y a la UNAM porque sin éstas instituciones mi educación de posgrado no hubiera sido posible.

## Resumen

El análisis experimental de esfuerzos en materiales compuestos laminados sometidos a torsión es un área que poco se ha explorado, en algunos trabajos publicados se presentan modelos que tienen que ser resueltos numéricamente [[Stephen R. Swanson](#) "Torsion of laminated rectangular rods", [Marco Savoia & Nerio Tullini](#) "Torsional response of inhomogeneous and multilayered composite beams", [Schulz & Filippou](#) "Generalized warping torsion formulation"] y no son compatibles con las técnicas para el análisis experimental de esfuerzos existentes, lo cual los limita.

El presente trabajo de investigación tiene como objetivo llevar a cabo un estudio y plantear una teoría simple para analizar la distribución de esfuerzos cortantes en un material compuesto laminado isotrópico sometido a torsión. Se presenta un método, con el cual, haciendo una analogía al método de la sección transformada utilizado para la solución de vigas compuestas sometidas a flexión, se determina el esfuerzo cortante máximo en una viga laminada compuesta sometida a torsión. Lo anterior implica que, teniendo un modelo de una viga laminada compuesta isotrópica sometida a un torque  $T$ , en forma virtual, transformarla en un modelo de una viga homogénea e isotrópica, resolver el modelo virtual determinando el esfuerzo cortante máximo, y, regresar al modelo original, para posteriormente, determinar el esfuerzo cortante máximo real.

Para evaluar la efectividad del método propuesto, se determinó el esfuerzo cortante máximo, utilizando el método propuesto y llevando a cabo pruebas experimentales sobre dos vigas laminadas compuestas sometidas a torsión, los resultados mostraron variaciones máximas de 15%.

## Motivos de la investigación.

En las publicaciones científicas que actualmente se encuentran, se muestra información acerca del comportamiento mecánico de los materiales compuestos ortotrópicos sometidos a cargas de torsión pero los modelos que se presentan, no son compatibles con técnicas experimentales, su solución es numérica y se carece de análisis experimental; por lo que se necesita realizar más investigación de forma experimental para complementar y corroborar los estudios que se han desarrollado de forma numérica.

Algunas investigaciones realizan análisis del fenómeno de torsión de forma numérica utilizando el método del elemento finito [Stephen R. Swanson "Torsion of laminated rectangular rods", Marco Savoia & Nerio Tullini "Torsional response of inhomogeneous and multilayered composite beams", Schulz & Filippou "Generalized warping torsion formulation"].

Otros investigadores han realizado estudios relacionados con el tema de torsión, pero éstos contemplan análisis con cargas combinadas de torsión y flexión [Davalos, Qiao & Salim, 1997; Chandra, Ramesh, Chopra & Inderjit, 1991; Friedman & Kosmatka, 2000] y no se analiza únicamente al fenómeno de torsión. Es decir, no se está analizando de forma aislada en materiales compuestos laminados isotrópicos; además no se cuenta con un modelo analítico ó una descripción más amplia para calcular el estado de esfuerzos en un material compuesto laminado isotrópico sometido a torsión; por lo anterior, se desarrolló un modelo simple compatible con la técnica de extensometría eléctrica para determinar los esfuerzos cortantes máximos en vigas compuestas laminadas y así, tener una referencia que muestre la tendencia del comportamiento mecánico de los materiales compuestos laminados isotrópicos en términos del esfuerzo cortante máximo y que contribuya como una herramienta más para el cálculo de esfuerzos cortantes en materiales compuestos.

Este trabajo se realizó a partir de la necesidad de proporcionar bases analíticas simples para el estudio de materiales compuestos laminados isotrópicos sometidos a torsión, así como también, en base al hecho de que el análisis experimental de esfuerzos en materiales compuestos es un fundamento primordial para estudiar el comportamiento mecánico de los mismos, proporcionando valores reales de los esfuerzos presentes en el material compuesto y contemplar un gran número de variables tanto controladas como no controladas, que intervienen en el fenómeno físico de estudio "Torsión".

Hasta la fecha no se conoce una investigación que utilice un método experimental (extensometría eléctrica y/o foto-elasticidad) como base de análisis para el estudio de torsión en vigas de materiales compuestos laminados; algunas investigaciones [Marco Savoia & Nerio Tullini, 1993, Davalos, Qiao & Salim, 1997; Chandra, Ramesh, Chopra & Inderjit, 1991; Friedman & Kosmatka, 2000; Dasgupta, 1988] combinan métodos analíticos y experimentales pero no abarcan las técnicas antes mencionadas, y al final resuelven el problema con apoyo de métodos numéricos (elemento finito).

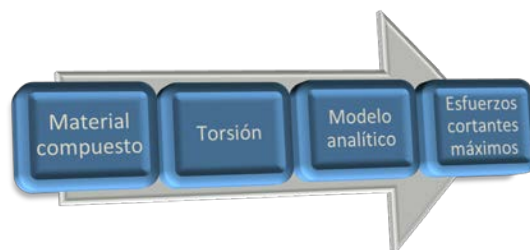


Fig. i Cálculo del esfuerzo cortante en un material compuesto

## **Justificación**

Es importante, para poder hacer investigación y desarrollo tecnológico en el área de análisis del comportamiento mecánico de materiales compuestos, contar con un modelo, con el cual sea posible llevar a cabo análisis de esfuerzos en vigas laminadas compuestas, tanto en forma analítica como en forma experimental.

Las investigaciones mencionadas anteriormente en “Motivos de la investigación” no están determinando el estado de esfuerzos en un punto dado del material, sino que sus resultados son encontrados de forma general en términos del ángulo de torsión y torque ó encuentran, el alabeo de la sección transversal y la rigidez torsional de la sección.

Existen investigaciones relacionadas con el problema de torsión en materiales compuestos, pero se carece de una solución simple con la cual se puedan determinar la distribución de esfuerzos cortantes en una viga compuesta laminada, y que dicha solución sea compatible con técnicas experimentales, tales como la técnica de extensometría eléctrica, fotoelasticidad, etc.

El presente trabajo al proponer una solución confiable de esfuerzos para resolver una viga compuesta laminada sometida a torsión, lo hace relevante y con una aportación importante al estado del arte en el área.

# ÍNDICE

<i>Dedicatoria</i>	
<i>Agradecimientos.</i>	i
<i>Resumen.</i>	ii
<i>Motivos de la investigación.</i>	iii
<i>Justificación.</i>	iv
<i>Índice.</i>	v
<i>Glosario de términos.</i>	ix
<i>Simbología.</i>	xii
Introducción.	xiii
Objetivos.	xvi
Objetivo general.	xvi
Objetivos particulares.	xvi
Contenido.	xvi
<b>Capítulo I. Antecedentes.</b>	<b>1</b>
<b>Capítulo II. Definición del problema.</b>	<b>3</b>
2.1 Problema.	3
2.2 Restricciones.	3
2.3 Hipótesis.	3
<b>Capítulo III. Modelo analítico.</b>	<b>5</b>
3.1 Solución general al problema de torsión.	6
3.1.1 Solución al problema de torsión de vigas delgadas (varias capas).	7

3.2 Transformación virtual de la sección.	10
3.3 Modelos analíticos para solución de torsión de vigas isotrópicas.	11
3.3.1 Modelo analítico (experimental).	11
3.3.2 Modelo analítico (virtual).	12
3.4 Ecuaciones para determinar el esfuerzo cortante a partir de lecturas de deformaciones.	13
3.5 Metodología para calcular el esfuerzo cortante máximo en MCLI.	15
<b>Capítulo IV. Prueba experimental.</b>	<b>16</b>
4.1 Fabricación de probetas.	16
4.2 Pruebas experimentales.	19
4.3 Instrumentación de probetas.	19
4.4 Selección del extensómetro.	20
4.4.1 Tipo	20
4.4.2 Tamaño	20
4.4.3 Ubicación	20
4.5 Evaluación experimental de la distribución de esfuerzos a lo largo de toda la superficie de la viga.	20
4.5.1 Viga de MCL “La-Al-La”	21
4.5.2 Viga en I Latón	22
4.5.3 Viga en I Aluminio	23
4.6 Validación del modelo analítico	23
4.6.1 Probeta rectangular de latón.	23
4.6.2 Probeta MCL “Al-La-Al”	25
4.6.3 Banco de pruebas de torsión	26
4.7 Descripción de pruebas.	26



4.7.1 Pruebas de torsión	27
4.8 Ecuaciones analíticas para el cálculo del esfuerzo cortante en vigas de sección delgada.	28
<b>Capítulo V. Resultados y análisis experimentales.</b>	31
5.1 Lecturas, deformaciones y esfuerzos de la roseta en la Viga del MCL “Al-La-Al”.	31
5.2 Lecturas, deformaciones y esfuerzos de la roseta en la Viga I “La”.	33
5.3 Lecturas, deformaciones y esfuerzos de la roseta en la Viga I “Al”.	33
5.4 Lecturas, deformaciones y esfuerzos de la roseta rectangular de latón.	34
5.5 Lecturas, deformaciones y esfuerzos de la roseta en la Viga del MCL “Al-La-Al”.	35
5.6 Análisis del esfuerzo cortante máximo experimental.	36
5.7 Esfuerzo cortante máximo analítico.	37
5.8 Análisis de las funciones de la probeta del MCL “La-Al-La”.	38
5.8.1 Función en el eje longitudinal (Y)	39
5.8.2 Función en el eje transversal (X)	39
5.8.3 Función en el eje lateral (Z).	40
5.9 Análisis de resultados.	41
<b>Capítulo VI. Conclusiones y recomendaciones.</b>	42
6.1 Conclusiones.	42
6.2 Recomendaciones.	43
<b>Apéndices.</b>	
Apéndice A. Obtención experimental de las propiedades elásticas de los materiales “La” y “Al”.	44
Apéndice B. Consideraciones en una prueba experimental.	51
Deriva.	51
Linealidad.	52

Repetibilidad.	53
Alineación de probetas.	53
Apéndice C. Torsión en elementos circulares.	55
Apéndice D. Solución general al problema de torsión.	59
Apéndice E. Torsión en secciones rectangulares estrechas.	65
Apéndice F. Analogía de la membrana de Prandtl.	68
Apéndice G. Método de la sección transformada.	71
<b>Fuentes consultadas.</b>	<b>74</b>

## Glosario de términos.

**Análisis experimental de esfuerzos:** Es un análisis en donde, de forma sistemática y con ayuda de técnicas experimentales (fotoelasticidad y extensometría eléctrica) se puede conocer el comportamiento mecánico de un elemento o estructura mecánica.

**Capa ó lamina:** Es el componente básico de un laminado.

**Caracterización del material:** Es la obtención de las propiedades mecánicas del material (E, G y  $\nu$ ) por medio de pruebas experimentales.

**Deformación:** Es el desplazamiento relativo entre los puntos de un cuerpo al someterse a una sollicitación.

**Elástico:** Se dice que un material tiene un comportamiento elástico si las deformaciones causadas por la aplicación de cierta carga, desaparecen al quitarla.

**Esfuerzo cortante experimental:** Es el esfuerzo cortante obtenido con ayuda de un método experimental.

**Esfuerzo cortante:** Es el valor límite de las razones (Fuerza cortante / Área).

**Esfuerzo:** Se define como la razón de la magnitud F de la fuerza al área A de la sección transversal. Con signo positivo indicará un esfuerzo de tensión y un signo negativo señalará un esfuerzo de compresión.

**Esfuerzos principales:** Los esfuerzos principales representan el esfuerzo normal máximo y mínimo en el punto de estudio. Cuando se representa el estado de esfuerzo mediante los esfuerzos principales, el esfuerzo cortante es igual a cero.

**Extensómetro:** Un extensómetro o galga extensiométrica es un deformímetro eléctrico que consta de una longitud de alambre delgado, dispuesto en un arreglo específico, adherido a dos piezas de papel; él cual al ser pegado en una superficie, sufre de alargamiento y disminución en diámetro del alambre ó viceversa, provocando que la resistencia eléctrica de la galga extensiométrica aumente; para de ésta forma determinar la deformación en dos puntos.

**Geometría rectangular estrecha:** Es la geometría rectangular que cumple con la relación de que el ancho h es mayor al largo b del rectángulo en un número menor o igual a diez.

**Homogéneo:** Es cuando las propiedades que constituyen un material son independientes del punto de estudio.

**Laminado:** Es aquel que se compone por capas sucesivas de reforzamiento, apiladas unas con otras, las cuales son impregnadas con resinas.

**Lineal:** Concepto que se utiliza para decir que las ecuaciones que modelan a lo que hace referencia, son lineales.

**Material anisotrópico:** Son aquellos materiales con diferentes propiedades en diferentes direcciones.

**Material compuesto:** Un material compuesto es un material que consiste de dos o más fases en una escala macroscópica, las cuales tienen propiedades y características que son designados para ser superiores a aquellas de las que constituían de forma independientemente. Una de las fases es usualmente discontinua, rígida y fuerte y es llamada refuerzo, mientras que la de menor rigidez y que es una fase débil es continua y es llamada matriz.

Las propiedades mecánicas de un material compuesto dependen de las propiedades de sus constituyentes, su geometría y la distribución de sus fases. Uno de los más importantes parámetros es la fracción volumen del refuerzo o el radio de volumen de las fibras. La distribución del refuerzo determina la homogeneidad y uniformidad del sistema que conforma el material.

**Material isotrópico:** Las propiedades mecánicas del material son las mismas en cualquier dirección.

**Modelo:** Es una herramienta analítica con una estructura y proceso que sirve para analizar de forma aproximada el comportamiento de un fenómeno de estudio.

**Módulo de elasticidad (E):** El módulo de elasticidad o de Young representa la relación que existe entre el esfuerzo y la deformación en un material específico siempre y cuando no se exceda el límite de proporcionalidad.

**Módulo de rigidez (G):** El módulo de rigidez o de cortante representa la relación que existe entre el esfuerzo cortante en un plano y la deformación angular en ese mismo plano.

**Momento de inercia ( $I_x, I_y, I_{xy}$ ):** Es una propiedad importante en la ingeniería, ya que debe especificarse o determinarse antes de analizar o diseñar un miembro estructural o pieza mecánica y se define como las integrales del segundo momento de un área.

**Momento de torsión ó torque:** Es cuando una flecha o barra se sujetan a un momento alrededor de su eje longitudinal.

**Momento polar de inercia ( $J_o$ ):** Es un segundo momento de un área pero definido en términos de  $r$ , que es una coordenada polar.

**Relación de Poisson:** Es la relación que existe entre la deformación lateral y la deformación axial de un material.

**Rigidez torsional:** Es la propiedad de un material para soportar esfuerzos debidos a la torsión sin adquirir grandes deformaciones o desplazamientos.

**Roseta de deformación:** Es un arreglo especial de extensómetros para medir tres deformaciones normales  $\epsilon_1, \epsilon_2$  y  $\epsilon_3$ ; existen rosetas a  $45^\circ$  o  $60^\circ$ .

**Solicitación:** Es la condición de frontera que se aplica a un cuerpo de forma externa; desplazamientos, momentos, cargas y otras cosas más.

**Torque:** Es un par que se encuentra en un plano de sección transversal de una barra o de una flecha sobre la cual actúa.

**Torsión:** Es la sollicitación que se presenta cuando se aplica un momento sobre el eje longitudinal de un elemento, como pueden ser ejes, aunque es posible encontrarla en situaciones diversas.

## Simbología

<b>Al</b>	Aluminio	$\gamma_{xy}$	Deformación cortante, plano xy
<b>cm</b>	Centímetros	$\epsilon$	Deformación
<b>E</b>	Módulo de elasticidad	$\epsilon_1$	Deformación principal 1
$E_{(eff)}$	Módulo de elasticidad efectivo	$\epsilon_2$	Deformación principal 2
<b>exp</b>	Experimental	$\epsilon_A$	Deformación en A
<b>F.S.</b>	Factor de seguridad	$\epsilon_B$	Deformación en B
<b>G</b>	Módulo de rigidez	$\epsilon_C$	Deformación en C
$G_{(eff)}$	Módulo de rigidez efectivo	$\epsilon_x$	Deformación en x
<b>G.F.</b>	Factor del extensómetro	$\epsilon_y$	Deformación en y
<b>gr</b>	Gramos	$\nu$	Módulo de Poisson
<b>Kg</b>	kilogramo	$\nu_{(eff)}$	Módulo de Poisson efectivo
<b>La</b>	Latón	$\sigma_1$	Esfuerzo principal 1
<b>m</b>	Metros	$\sigma_2$	Esfuerzo principal 2
$\tau_{max}$	Cortante máximo	$\sigma_{promedio}$	Esfuerzo promedio
<b>MCL</b>	Material compuesto laminado	$\gamma_{xy}$	Deformación cortante, plano xy
<b>MCLI</b>	Material compuesto laminado isotrópico	$\theta$	Ángulo de torsión
<b>n</b>	Razón modular ( $G_1/G_2$ )	<b>UNAM</b>	Universidad Nacional Autónoma de México
<b>N</b>	Newton		
$^\circ$	Ángulo medido en grados		
<b>Pa</b>	Pascales		
<b>S.I.</b>	Sistema Internacional		
<b>T</b>	Torque		
$\gamma$	Deformación cortante		

## Introducción

En la actualidad existen avances tecnológicos en las diversas ramas de la ciencia que contemplan la aplicación de materiales compuestos para satisfacer requerimientos referente al comportamiento mecánico al que están sujetos; sin la utilización de los materiales compuestos el mundo no sería lo que es hoy, ya que estos han aportado una herramienta para reducir el peso e incrementar la resistencia de estructuras y mecanismos utilizados por el hombre. Por lo que el análisis del comportamiento mecánico en los materiales compuestos es un área de estudio fundamental y es necesario estudiarlos sometidos a diversos tipos de sollicitación y cargas. Así mismo, se requiere tener una referencia o conjunto de soluciones analíticas disponibles que abarquen a los materiales compuestos tanto ortotrópicos como isotrópicos, para así resolver problemas que involucren a éstos sin importar el tipo de sollicitación a la que estén sometidos.

Existen modelos matemáticos que analizan el problema de torsión sin embargo, el problema de un material compuesto laminado ortotrópico sometido a torsión (fig. 2), se resuelve de forma numérica [Marco Savoia & Nerio Tullini, 1993; Stephen R. Swanson, 1998] y no se resuelve de forma experimental; también están los trabajos de [Davalos, Qiao & Salim, 1997; Chandra, Ramesh, Chopra & Inderjit, 1991; Friedman & Kosmatka, 2000], que combinan efectos de torsión con flexión o tensión resolviendo de forma numérica y sin tener una visión clara de los efectos de la torsión por el hecho de combinar diferentes tipos de sollicitaciones.

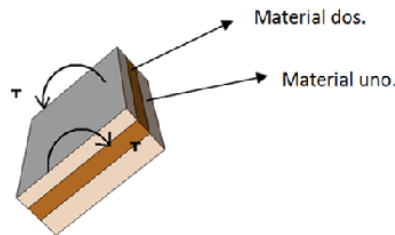


Fig. ii Placa laminada (La-Al-La) sometida a torsión.

El estudio de torsión en un material compuesto tiene muchas incógnitas y los trabajos realizados abarcan en su mayoría un análisis numérico por lo que se llevó a cabo una investigación de forma experimental para el estudio del fenómeno de torsión en los materiales compuestos laminados isotrópicos.

En éste trabajo se propone un modelo analítico, simple y sistemático con el cual se estudia el fenómeno de torsión en un *material compuesto laminado isotrópico* el cual es compatible y se evaluó realizando un análisis experimental utilizando la técnica de extensometría eléctrica. El presente trabajo de investigación tiene como objetivo analizar la distribución de esfuerzos cortantes en un material compuesto laminado isotrópico sometido a torsión. Se presenta un método simple, con el cual, haciendo una analogía al método de la sección transformada para la solución de vigas compuestas sometidas a flexión, se determina el esfuerzo cortante máximo en una viga laminada compuesta sometida a torsión. Lo anterior implica que, teniendo un modelo de una viga laminada compuesta isotrópica sometida a un torque  $T$ , en forma virtual, transformarla en un modelo de una viga homogénea e isotrópica, resolver el modelo virtual determinando el esfuerzo cortante máximo, y, regresar al modelo original, para posteriormente, determinar el esfuerzo cortante máximo real.

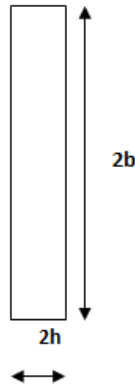
El análisis parte del problema base (material compuesto laminado sometido a torsión) y de una geometría rectangular dada, pasando por un modelo virtual en donde se utiliza el método de la sección transformada *pero con una peculiaridad, ya que se utiliza el módulo de rigidez del material y no el de elasticidad*. Posteriormente, al momento de transformar virtualmente la geometría del material por medio del método de la sección transformada, se puede utilizar un modelo analítico (*desarrollado en esta investigación*) a partir de las ecuaciones que han sido determinadas para resolver las vigas de sección transversal en forma de I <sup>(Advanced strength and applied Elasticity, A.C. Ugural & S.K. Fenster)</sup>. Posteriormente se obtiene el valor del esfuerzo cortante máximo presente en el material compuesto y, así regresar al modelo original con el valor del esfuerzo cortante máximo, sin necesidad de construir físicamente esa transformación.

El valor del esfuerzo cortante máximo correspondiente a las geometrías en I es equivalente al valor del esfuerzo que tiene lugar en el material compuesto laminado siempre y cuando se utilice el cambio correspondiente a la sección modular “n” del método de la sección transformada.

Sin duda esta metodología simplifica el estudio de los materiales compuestos laminados isotrópicos sometidos a torsión, reduciendo así el tiempo de análisis y el esfuerzo para determinar el esfuerzo cortante máximo. La utilización de este método junto con el modelo analítico desarrollado, promete la obtención del esfuerzo cortante máximo en el material compuesto laminado, y es válido ya que el modelo se comprueba con los valores obtenidos en el análisis experimental; cabe mencionar que se muestran también las funciones correspondientes al esfuerzo cortante en los tres ejes longitudinales de la viga del material compuesto laminado.

Para este trabajo se utilizaron únicamente dos MCL formados **por tres láminas o capas**, los cuales fueron simétricos y en el que se analizaron los esfuerzos cortantes que en ellos se presentan.

Para el cálculo del esfuerzo cortante máximo en un material compuesto laminado (formado por láminas), se debe de tomar en cuenta la geometría final que es determinada por la forma de cada lámina.

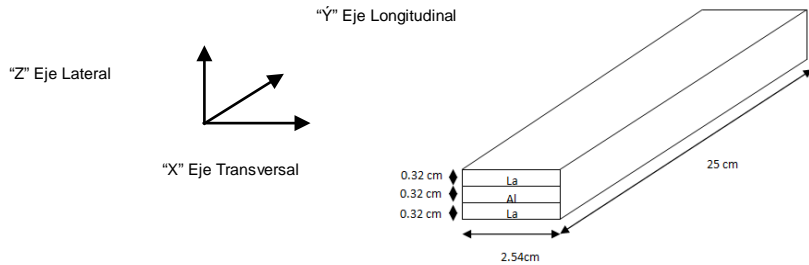


**Fig. iii** Dimensiones de las vigas de latón y aluminio.

Para los materiales compuestos, se utilizaron láminas de latón y aluminio con medidas de (2.54 x 0.32 x 25) cm.



La forma de cada capa es de forma rectangular, por lo que la forma de los materiales compuestos se establecieron con dos capas de latón y una de aluminio para el MCL “La-Al-La” y con dos capas de aluminio y una de latón para el MCL “Al-La-Al”; quedando así una forma rectangular del material compuesto. Lo anterior se puede ver en la siguiente figura.



**Fig. iv** Viga rectangular compuesta por láminas de latón y aluminio.

Cabe mencionar, que el esfuerzo cortante máximo en una figura rectangular se puede calcular utilizando ecuaciones establecidas por diversos autores; cada autor utiliza ecuaciones con diferentes constantes, las cuales se basan en la relación que existe entre la base y altura del rectángulo u otras consideraciones por lo que los resultados de los esfuerzos cortantes máximos varían entre fórmulas.

La forma rectangular del material compuesto será transformada a uno solo, primeramente al de latón y posteriormente al de aluminio ó según sea el caso por medio del método de la sección transformada, ver apéndice J; la obtención de estas nuevas vigas compuestas en su mayoría contienen la peculiaridad de tener la sección transversal con una geometría en forma de I y con la ventaja de que el esfuerzo cortante se presentará en un solo material.

Los resultados obtenidos de forma experimental han sido reproducidos de forma analítica con ayuda del modelo analítico, logrando reproducir los esfuerzos cortantes con un rango de error del 7 al 15 %.

## **Objetivos:**

### Objetivo general

Desarrollar un método y un modelo analítico con el cual sea posible analizar los esfuerzos debido a la torsión en un material compuesto laminado isotrópico, utilizando el método experimental de extensometría eléctrica.

### Objetivos particulares:

1. Familiarización con la solución de problemas de torsión para vigas isotrópicas.
2. Mostrar la importancia de utilizar analogías en los procesos de investigación.
3. En forma experimental evaluar como es la distribución de esfuerzos cortantes en un material compuesto laminado e identificar la zona dónde se produce el esfuerzo cortante máximo en la geometría del material compuesto y en sus correspondientes geometrías provenientes del método de la sección transformada.
  - a) Evaluar el nivel de esfuerzos cortantes máximo a lo largo de los ejes longitudinales, transversal y lateral.
  - b) Proponer las funciones del esfuerzo cortante máximo que prevalecen en un material compuesto laminado sometido a torsión.
  - c) Evaluar experimentalmente la aplicabilidad del método propuesto.
  - d) Obtener los esfuerzos cortantes de las secciones transformadas para compararlas entre sí y también entre el material compuesto laminado.
4. Desarrollar un modelo analítico que permita resolver el problema de torsión en el material compuesto laminado isotrópico.

## **Contenido:**

La presente investigación se divide en seis capítulos.

Los capítulos 1 y 2 presentan el estado del arte, se justifica y se define el problema a resolver en este trabajo de investigación

En el capítulo tres, se justifica y se describe el método con el cual, planteado el modelo analítico, es posible resolver el problema de torsión en un material compuesto laminado isotrópico.

En el capítulo cuatro, resolviendo un problema real, se describen las pruebas experimentales que se realizaron para evaluar el método propuesto, determinando el valor del esfuerzo cortante máximo en la viga del material compuesto laminado.

En el capítulo cinco se presentan los resultados obtenidos y se hace un análisis de los esfuerzos cortantes a partir de las pruebas experimentales y de los esfuerzos calculados de forma analítica.

Finalmente en el capítulo seis, se presentan las conclusiones y recomendaciones de éste trabajo de investigación.

En los apéndices, se incluyen temas que son relevantes para el mejor entendimiento de la investigación aquí presentada.

## Capítulo I. Antecedentes.

Al hablar de materiales compuestos viene a la mente nombres muy populares como el de la fibra de vidrio, fibra de carbono y kevlar, y aunque se conoce una cantidad limitada de materiales compuestos, la diversidad de éstos radica en la imaginación que el ser humano pueda tener por descubrir y combinar los materiales y metales existentes para obtener un nuevo tipo de material compuesto, mismo que combinará las propiedades mecánicas de los elementos que lo conforman.

Esta particularidad de combinar propiedades mecánicas de diferentes elementos, es la principal ventaja de estos materiales, ya que dependiendo de las características físicas de cada material se puede reducir el peso, aumentar la resistencia mecánica, retardar la ignición y otras cosas más; en términos simples se puede manipular las propiedades de los elementos constitutivos de los materiales compuestos para obtener una propiedad mecánica específica y así contribuir con el desarrollo tecnológico en las diversas ramas de la ciencia.

Al estudiar los materiales compuestos se pretende determinar principalmente los esfuerzos a los que están siendo sometidos como producto de las condiciones de frontera y solicitaciones. Si bien la tensión y flexión son solicitaciones muy estudiadas dentro de la ciencia de los materiales compuestos, la torsión es punto y aparte ya que el análisis de esfuerzos muestra una complejidad que no es sencilla de abordar pero que se puede realizar con la ayuda principalmente de la mecánica experimental.

Durante los últimos años, el problema de torsión en vigas prismáticas o de secciones delgadas se ha venido estudiando sin embargo, no se ha profundizado en el estudio de este tipo de vigas cuando éstas son constituidas por un material compuesto, el cual es formado por láminas con la característica particular de isotropía así que actualmente se carece de una solución simple para el problema de torsión en materiales compuestos laminados isotrópicos.

Basados en lo anterior, se ha buscado el estado del arte referente al análisis experimental de torsión en materiales compuestos laminados pero sin dejar de mencionar a Nicholas J. Pagano como pionero en la investigación sobre mecánica de materiales compuestos.

Investigadores como <sup>[Marco Savoia & Nerio Tullini, 1993]</sup> han realizado estudios sobre materiales compuestos sometidos a torsión; en sus investigaciones han analizado la respuesta elástica de vigas no homogéneas anisotrópicas y la respuesta a la torsión de vigas compuestas de sección transversal arbitraria. Para ello, utilizan la analogía de la membrana de Prandtl usando las funciones de esfuerzo de Prandtl para así poder calcular la distribución de esfuerzos cortantes, el alabeo de la sección transversal y la rigidez torsional de la sección. También han desarrollado soluciones exactas para vigas rectangulares ortotrópicas (dos direcciones ortotrópicas paralelas a los ejes de la sección transversal) multicapas con torsión uniforme para obtener la rigidez torsional de la viga de material compuesto. De igual forma se basan en la analogía de la membrana de Prandtl y en la utilización de series de Fourier para encontrar las soluciones de rigidez torsional.

A partir del estudio anterior <sup>[Stephen R. Swanson, 1998]</sup>, realizó una investigación que muestra que es posible extender la aproximación de la analogía de la membrana para incluir barras rectangulares laminadas ortotrópicas con una razón de aspecto alta  $a/b$ . Swanson desarrolló una solución aproximada para vigas rectangulares laminadas ortotrópicas sujetas a torsión utilizando la

teoría de láminas para resolver las ecuaciones de los esfuerzos cortantes y la rigidez torsional de forma numérica. Así mismo, basado en la analogía de la membrana desarrolló formulas que permiten calcular la rigidez y el esfuerzo cortante en secciones rectangulares delgadas ortotrópicas sujetas a torsión lo que también se puede extender a secciones transversales delgadas de forma abierta.

Trabajos como los realizados por [Suresh S. Maddur, Shive K. Chaturvedi, 2000], obtienen la respuesta a la deformación estática de vigas en I de material compuesto formado por fibras reforzadas laminadas sujetas a cargas de torsión pero las ecuaciones analíticas que presentan las resuelven con ayuda del método del elemento finito. Los resultados que obtienen son comparados con los estudios teóricos y experimentales que presenta [Chandra and Chopra, 1991], para vigas en I de material compuesto laminado sujetas a cargas de flexión y torsión; la comparación de resultados es muy aproximada entre éstos estudios, la cual se realiza en términos del ángulo de torsión y el alabeo que sufren los materiales compuestos.

Algunos investigadores [Schulz & Filippou, 1998] se basan en el análisis experimental de elementos rectangulares sometidos a torsión tratando de determinar los esfuerzos cortantes debido a fuerzas de corte, pero al final resuelven por el método del elemento finito.

Científicos como [Davalos, Qiao & Salim, 1997; Chandra, Ramesh, Chopra & Inderjit, 1991; Friedman & Kosmatka, 2000], Tratan el tema de torsión pero no de forma independiente, sino que lo combinan con algún otro efecto como la flexión y en algunos casos con tensión [Dasgupta, 1988].

Hay investigadores como [Qiao, P., Zou, G., Davalos, J.F. 2003] que analizan vigas en I, formadas por un material compuesto ortotrópico ó como [Zhao, Y., Pang, S.S., 1995] que analizan tubos de un material compuesto, el cual es sometido al efecto de torsión. Sin embargo estos investigadores no conformes con el estudio analítico, comprueban su investigación de forma experimental; en algunas ocasiones van más allá, pues comparan sus estudios analíticos y experimentales con los resultados obtenidos en la utilización del método del elemento finito. Los resultados que obtienen en los tres métodos son muy certeros y denotan la validez de sus experimentos.

Otros investigadores solucionan el problema general de torsión de barras compuestas de manera analítica, utilizando principios energéticos [Litvin, Rvachev & Semenova, 1974] ó utilizan el método Muskhelishvili [Zlatanovski, 2010], ó en su defecto utilizan la teoría de paredes delgadas "thin walled theory" [Kuo & Heins, 1971]. El problema de torsión tiene tantas connotaciones que investigadores como [Katsikadelis & Sapountzakis, 1985], resuelven el problema de torsión de forma numérica utilizando el método de frontera de elemento; finalmente se menciona que en la variedad de soluciones al problema de torsión [Ecsedi, 1977] lo analizó utilizando el método de variaciones.

Todos estos estudios proponen una solución al problema de torsión ya sea de forma analítica o numérica y los resultados que se obtienen son muy diversos: ángulos de flexión y torsión, la relación entre el torque aplicado y el esfuerzo cortante, el torque y deformaciones. Sin embargo, estos estudios no se extienden al análisis de *materiales compuestos laminados isotrópicos de forma experimental y de esta forma poder obtener el estado de esfuerzos debido a cargas únicamente de torsión.*

## Capítulo II. Definición del problema.

En este capítulo, en base al estado del arte y dada la importancia de contar con un método con el cual se analice el comportamiento mecánico de un material compuesto laminado sometido a torsión, se define el problema que fue resuelto en forma eficiente en este estudio de investigación, se dan sus restricciones y se plantean las hipótesis desarrolladas.

### 2.1 Problema.

Sea una viga de un material compuesto laminado isotrópico sometido a torsión donde se carece de un modelo con el cual sea posible conocer, en forma analítica y experimental cual es el estado de esfuerzos debido a la torsión en un punto determinado de la superficie; por lo que se requiere determinar un método experimental y modelo analítico para determinar el esfuerzo cortante máximo en la superficie y también, verificar la distribución del esfuerzo cortante a lo largo de los tres ejes de la viga: longitudinal, lateral y transversal.

### 2.2 Restricciones.

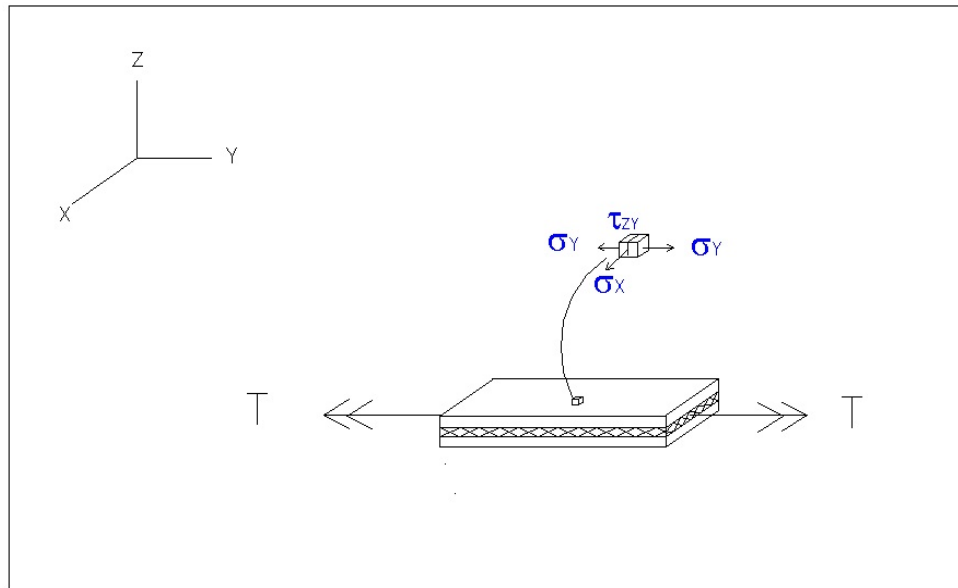
- El laminado compuesto es simétrico
- Se tiene un material compuesto de tres capas.
- El problema es de torsión pura.
- El problema es lineal.
- Las capas del laminado se consideran delgadas e isotrópicas.
- La unión entre capas es perfecta; por lo que los desplazamientos y las deformaciones son continuos a través de ellas.
- El problema a desarrollar es lineal y cumple con las restricciones de la teoría de la elasticidad (lineal, elástico-lineal, continuo y homogéneo).
- Los espesores de las capas son constantes a lo largo de toda la lámina.
- El marco de carga utilizado, transmite torsión pura.

### 2.3 Hipótesis

1. Es posible determinar el estado de esfuerzos debidos a la torsión en un material compuesto laminado isotrópico, si se desarrolla un método análogo al de la sección transformada utilizado para resolver el problema de flexión de vigas compuestas <sup>(Ferdinand P. Beer - E.Russell Johnston, jr )</sup> y se combina con un método experimental para la medición de deformaciones y cálculo de esfuerzos cortantes.
2. Si se conocen las deformaciones en las fronteras de una sección transformada (un solo material con geometría de viga en I), proveniente de un modelo de un material compuesto

laminado isotrópico, se pueden determinar sus esfuerzos debidos a la torsión, siendo estos esfuerzos de igual magnitud.

3. La distribución de esfuerzos a lo largo del eje "Z" es lineal, y constante con respecto a los ejes "X" y "Y".
4. Con el método a desarrollar será posible determinar los esfuerzos debidos a la torsión en un material compuesto laminado y validarlo en forma experimental utilizando la técnica de extensometría eléctrica de resistencia variable.



**Fig. 2.1** Estado de esfuerzos de un punto de un MCL sometido a torsión.

### Capítulo III. Modelo analítico.

En este capítulo se plantea y se justifica el método propuesto y los modelos con los cuales es posible resolver un problema de esfuerzos en un MCL sujeto a torsión.

También se establece una metodología para el cálculo del esfuerzo cortante en un MCL, la cual comprende una transformación virtual de la sección mediante una analogía al método de la sección transformada para obtener los valores de la razón modular “n”, así como los cambios geométricos correspondientes. Posteriormente se utiliza la ecuación planteada en el modelo analítico para calcular el esfuerzo cortante máximo en las vigas virtuales para finalmente utilizar nuevamente la razón modular y obtener los esfuerzos cortantes reales del MCL sometido a torsión.

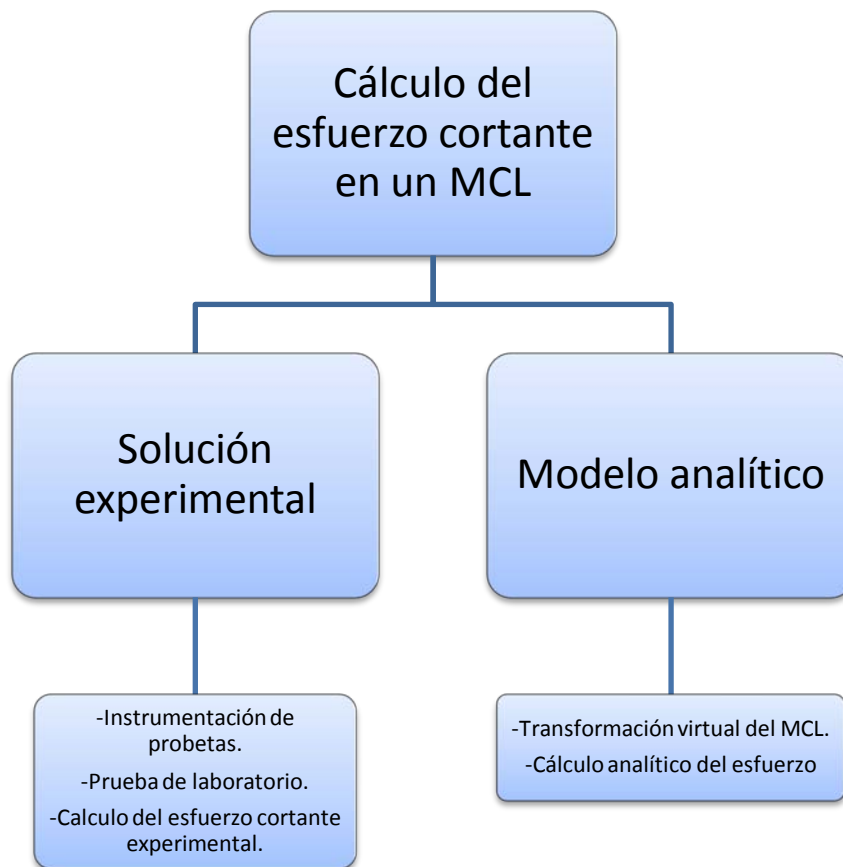


Fig. 3.1 Diagrama de solución para resolver el problema de torsión en Materiales compuestos laminados.



### 3.1 Solución general al problema de torsión.

Se considera el problema de torsión para una sección transversal no circular, donde los desplazamientos en x "u" son diferentes de cero.

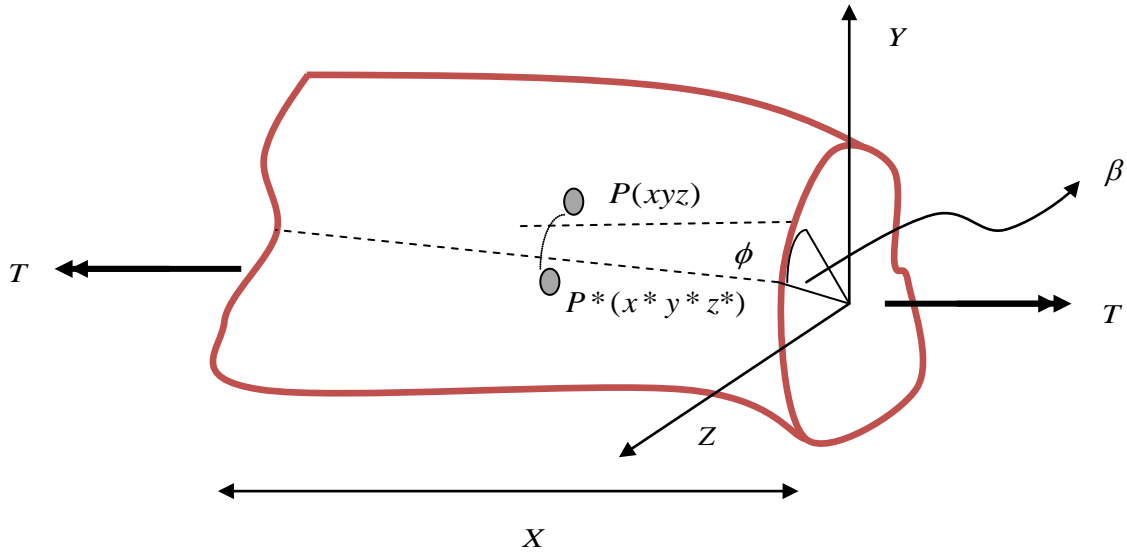


Fig.3.2 Diagrama de solución para resolver el problema de torsión en Materiales compuestos laminados.

$$\begin{aligned}
 u(y, z) &\neq 0 \dots\dots\dots 1 \\
 v(y, z) &= Y^* - Y = \overline{OP} [\text{Cos}(\beta + \phi) - \text{Cos}\phi] \dots\dots\dots 2 \\
 w(y, z) &= Z^* - Z = \overline{OP} [\text{Sen}(\beta + \phi) - \text{Sen}\phi] \dots\dots\dots 3
 \end{aligned}$$

Utilizando identidades geométricas, ecuaciones constitutivas y considerando al material de forma isotrópica obtenemos:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = -2\theta G \dots\dots\dots 4$$

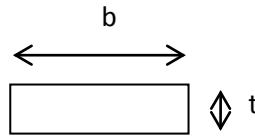
Ahora si se utilizan condiciones de frontera se puede resolver la ecuación anterior obteniendo:

$$T = 2 \iint \phi dz dy \dots\dots\dots 5$$

La ecuación anterior (5), indica que el torque es igual a dos veces el volumen entre la función de esfuerzo  $\phi$  y el plano de la sección transversal. Para mayor referencia de la obtención de ésta ecuación ver sección de apéndices.

### 3.1.1 Solución al problema de torsión de vigas delgadas (varias capas).

Primero se considera una capa rectangular con la siguiente geometría:



Donde:

b=base

t= espesor

Fig.3.3 Geometría de la viga rectangular

La cual es sometida a un torque T y en base a lo establecido por Ugural & Fenster el volumen, el torque y esfuerzo cortante máximo para una capa se calculan en base a la analogía de la membrana de Prandtl Ver apéndice Solución al problema de torsión de vigas delgadas "Narrow rectangular cross section".

El volumen se calcula de la siguiente manera:

$$V = \frac{pb^3}{12S} = \frac{2\theta bt^3G}{12} = \frac{\theta bt^3G}{6} \dots\dots\dots 6$$

El esfuerzo cortante en el plano "zy" y el esfuerzo máximo se determinan:

$$\tau_{zy} = -\frac{\partial z}{\partial x} = 2G\theta x \dots\dots\dots 7$$

$$\tau_{\max} = x = \frac{t}{2}$$

$$\tau_{\max} = \frac{2G\theta t}{2} = G\theta t \dots\dots\dots 8$$

Por lo que el esfuerzo cortante se puede expresar en términos del torque:

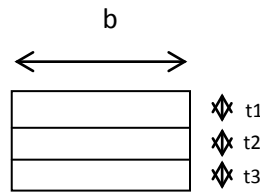
$$\tau = G\theta t = \frac{3T}{bt^2} \dots\dots\dots 9$$

Pero también se había establecido que el torque es igual a dos veces el volumen, por lo que el torque se representa como:

$$T = 2V \dots\dots\dots 10$$

$$T = \frac{bt^3G\theta}{3} \dots\dots\dots 11$$

Ahora si se considera al material compuesto laminado formado por varias capas con la siguiente geometría:



Donde:

b=base

t1= espesor 1

t2= espesor 2

t3= espesor 3

**Fig.3.4** Geometría del MCL.

Y al utilizar tres capas, se descompone al torque en tres torques correspondientes a las capas que lo conforman, se obtiene:

$$T = T_1 + T_2 + T_3 \dots\dots\dots 12$$

$$T_1 = \frac{bG\theta}{3} \left(\frac{t_1}{3}\right)^3 ; T_2 = \frac{bG\theta}{3} \left(\frac{t_2}{3}\right)^3 ; T_3 = \frac{bG\theta}{3} \left(\frac{t_3}{3}\right)^3 \dots\dots 13$$

Por lo que el torque total  $T_T$  corresponderá a la suma de los tres torques:

$$T_T = b \left(\frac{t}{3}\right)^3 G\theta \dots\dots\dots 14$$

Ahora despejando el ángulo  $\theta$ , obtenemos:

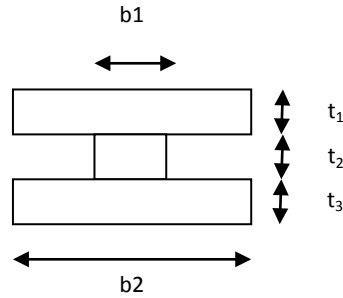
$$\theta = \frac{T_T}{b \left(\frac{t}{3}\right)^3 G} = \frac{T_T}{b \left(\frac{t^3}{27}\right) G} = \frac{27T_T}{bt^3G} \dots\dots\dots 15$$

Representando el esfuerzo cortante como lo establece la ecuación 8, encontramos que:

$$\tau_{\max} = \frac{27T_T}{3bt^2} = \frac{9T_T}{bt^2} \dots\dots\dots 16$$

Ecuación que justifica el esfuerzo cortante máximo para tres capas rectangulares delgadas, ya que es la misma ecuación que se considera para una capa.

Ahora analizando una viga en I.



**Fig. 3.5** Nomenclatura utilizada en una viga en forma de I.

Si se considera al torque total como la suma de los torques que actuan en cada capa:

$$T_T = T_1 + T_2 + T_3 \dots\dots\dots 17$$

*pero*  $T_1 = T_3$

Y sabemos que el torque y el volumen de la tercera capa se representan como:

$$T_3 = 2V_3 \text{ y } V_3 = \frac{\theta b_2 t_3^3 G}{6} \dots\dots\dots 18$$

Despejando el torque tres obtenemos:

$$T_3 = \frac{\theta b_2 t_3^3 G}{3} \dots\dots\dots 19$$

Y según la geometría de la viga en I el torque se determina:

$$T_T = 2T_3 + T_2 = \frac{2\theta b_1 t_1^3 G}{3} + \frac{\theta b_2 t_2^3 G}{3} = \frac{1}{3} \theta G [2b_1 t_1^3 + b_2 t_2^3] \dots\dots\dots 20$$

*Tenemos que el*  $\tau_{\max} = t/2$ ,  $\tau_{\max} = 2\theta Gx = \theta Gt$

Por lo tanto el ángulo de torsión es igual a:

$$\theta = \frac{3T_T}{G[2b_1 t_1^3 + b_2 t_2^3]} Gt = \frac{3T_T t}{[2b_1 t_1^3 + b_2 t_2^3]} \dots\dots\dots 21$$

### 3.2. Transformación virtual de sección.

La transformación virtual de la sección rectangular es un proceso simple que consiste en construir virtualmente los cambios geométricos indicados por medio de la sección transformada a partir del material compuesto laminado.

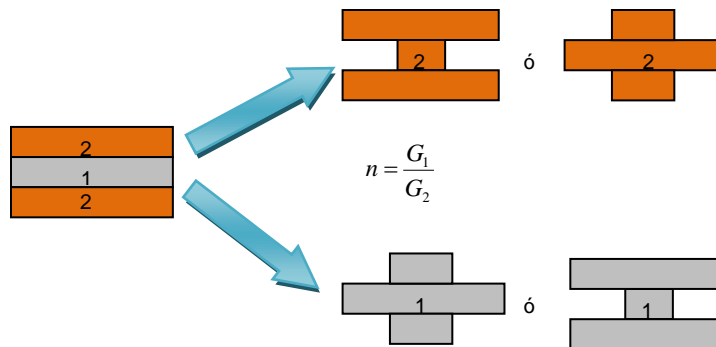
Los pasos para llevar a cabo esta transformación son los siguientes:

1. Obtener las propiedades mecánicas de los materiales que son utilizados.
2. Utilizar la razón modular  $n$  siguiente:

$$n = \frac{G_1}{G_2}; \dots \dots \dots 21$$

Misma que relaciona los módulos de cortante de las capas componentes del material compuesto y obtiene los nuevos cambios geométricos dependiendo del material a transformar.

3. Construir de forma virtual, el nuevo modelo con sus correspondientes cambios geométricos para calcular el esfuerzo cortante máximo en la nueva geometría.



**Fig.3.6** Transformaciones geométricas virtuales a un solo material, a partir de un MCL formado por tres láminas.

### 3.3 Modelos analíticos para solución de torsión de vigas isotrópicas.

#### 3.3.1 Modelo analítico (Experimental).

Se realizaron varios análisis para desarrollar un modelo analítico que fuera capaz de calcular el esfuerzo cortante máximo en la viga de sección transversal en forma de I sometida a torsión, con el que se pudiera pasar de la sección transformada al material compuesto y viceversa; suponiendo que el esfuerzo cortante máximo en las vigas con sección transversal en forma de I sería del mismo valor que el esfuerzo cortante máximo en el material compuesto; por lo tanto se podría conocer el valor del esfuerzo cortante simplemente con el cálculo analítico del esfuerzo cortante en una viga en forma de I sometida a torsión.

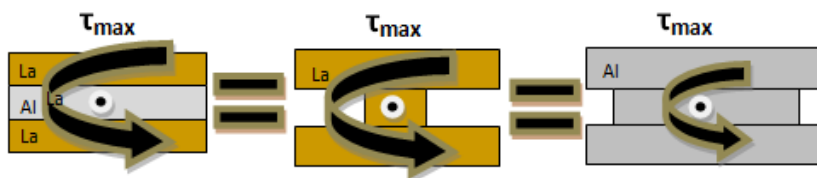


Fig. 3.7 Representación del esfuerzo cortante máximo en la superficie de la viga compuesta "La-Al-La" y las vigas transformadas de "La" y "Al".

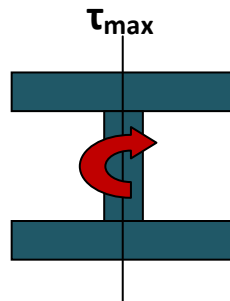


Fig. 3.8 Localización del esfuerzo cortante máxima en una viga en I.

Considerando la geometría rectangular de la viga con sección transversal en forma de I y que el esfuerzo cortante máximo en esta geometría se encuentra en la longitud central de la superficie del patín de la viga, y realizando una analogía con lo descrito y establecido por UGURAL & FENSTER "Advanced Strength and Applied Elasticity" para el cálculo del esfuerzo cortante en Vigas en I sometidas a torsión;

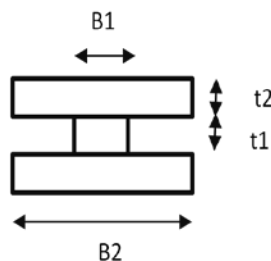


Fig. 3.9 Configuración para el esfuerzo cortante máximo según el modelo analítico.

Y por último, considerando que la parte delgada de la viga corresponde a  $t$  y  $b$  a la base, se obtiene:

$$\tau_{\max} = \frac{3Ti}{b_1 t_1^3 + 2b_2 t_2^3} \dots\dots\dots 22$$

$$T = \frac{\tau_{\max} * (b_1 t_1^3 + 2b_2 t_2^3)}{3ti} \dots\dots\dots 23$$

Donde:

- $\tau_{\max}$  = Esfuerzo cortante máximo
- $T$  = Torque
- $b_1$  = base 1
- $b_2$  = base2
- $t_1$  = espesor 1
- $t_2$  = espesor 2

Las ecuaciones anteriores indican como calcular el esfuerzo cortante máximo y el torque en una geometría distinta a la viga rectangular en un material compuesto laminado isotrópico. El esfuerzo calculado corresponde al de la sección transversal en forma de I y el valor calculado es equivalente al que se presentará en la viga del material compuesto laminado sometido al efecto de torsión siempre y cuando se utilice la analogía al método de la sección transformada y las consideraciones adecuadas para las secciones rectangulares delgadas.

### 3.3.2 Modelo analítico (virtual).

El modelo virtual se obtiene de las secciones transformadas virtualmente a partir del MCL pero con la peculiaridad de que las secciones transformadas no se construyen; sino simplemente se utilizan las geometrías obtenidas y se calcula el esfuerzo cortante sobre ellas con la ecuación 22. Obteniendo así el esfuerzo cortante que será representativo del esfuerzo en el MCL sometido a torsión.

### 3.4 Ecuaciones para determinar el esfuerzo cortante a partir de lecturas de deformaciones.

Los extensómetros que se colocaron, fueron en forma de rosetas a 45°, por lo que, cada roseta de deformación cuenta con tres extensómetros orientados a 45° entre ellos, las deformaciones que marcaban cada uno de ellos correspondían a las deformaciones  $\epsilon_1$ ,  $\epsilon_2$  y  $\epsilon_3$  pero no a las deformaciones en los ejes X, y Y en el plano XY. Por lo anterior se requirió realizar una corrección para calcular dichas deformaciones.

Las fórmulas utilizadas para encontrar las deformaciones  $\epsilon_1$ ,  $\epsilon_2$  y  $\epsilon_3$  en un punto dado fueron:

$$\epsilon_1 = \epsilon_x \times \text{Cos}(\phi_1)^2 + \epsilon_y \times \text{Sin}(\phi_1)^2 + \gamma_{xy} \times \text{Sin}(\phi_1) \times \text{Cos}(\phi_1) \dots \dots \dots 24$$

$$\epsilon_2 = \epsilon_x \times \text{Cos}(\phi_2)^2 + \epsilon_y \times \text{Sin}(\phi_2)^2 + \gamma_{xy} \times \text{Sin}(\phi_2) \times \text{Cos}(\phi_2) \dots \dots \dots 25$$

$$\epsilon_3 = \epsilon_x \times \text{Cos}(\phi_3)^2 + \epsilon_y \times \text{Sin}(\phi_3)^2 + \gamma_{xy} \times \text{Sin}(\phi_3) \times \text{Cos}(\phi_3) \dots \dots \dots 26$$

donde:

$\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3 =$  deformaciones principales.

$\epsilon_x, \epsilon_y =$  deformaciones en los planos X y Y.

$\gamma_{xy} =$  deformación cor tan te plano XY.

Las deformaciones  $\epsilon_1$ ,  $\epsilon_2$  y  $\epsilon_3$  representan las deformaciones normales orientadas a 45° en el punto de análisis y estas corresponden a las deformaciones principales.

Así que al obtener los valores de las deformaciones  $\epsilon_x$ ,  $\epsilon_y$  y  $\gamma_{xy}$  se resuelve el sistema de ecuaciones simultáneas para cada extensómetro y así se obtienen los valores buscados. Posteriormente se utilizan las ecuaciones siguientes para encontrar el esfuerzo cortante debido a las deformaciones y para calcular el esfuerzo cortante se utilizan el valor promedio entre  $\sigma_1$  y  $\sigma_2$  que representan los esfuerzos principales 1 y 2 que se presentan en el punto instrumentado.

El esfuerzo promedio se calcula en base al valor absoluto de los esfuerzos principales que se presentan en el punto de estudio.

$$\sigma_{prom} = \frac{|\sigma_1| + |\sigma_2|}{2} \dots \dots \dots 27$$

La deformación normal  $\epsilon$  y la deformación a cortante se calculan de la siguiente forma:

$$\epsilon = \frac{\gamma}{2} \dots \dots \dots 28$$

$$\gamma = 2\epsilon \dots \dots \dots 29$$

Y el esfuerzo cortante se calcula como el producto de la deformación a cortante por el modulo de rigidez.

$$\tau = \gamma G \dots \dots \dots 30$$



Ahora introduciendo el modulo de poisson para el cálculo de las deformaciones principales, se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E} [\sigma_1 - \nu(\sigma_2)] \dots\dots\dots 31$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{E} [\sigma_2 - \nu(\sigma_1)] \dots\dots\dots 32$$

Despejando el esfuerzo principal  $\sigma_1$  de la ecuación 31 se obtiene;

$$\sigma_1 = \varepsilon_1 E + \nu \sigma_2 \dots\dots\dots 33$$

Sustituyendo la ecuación 33 en 2 y simplificando, se obtiene que el esfuerzo principal  $\sigma_2$  es:

$$\begin{aligned} \varepsilon_2 E &= \sigma_2 - (\nu \varepsilon_1 E - \nu^2 \sigma_2) \\ \varepsilon_2 E + \nu \varepsilon_1 E &= \sigma_2 - \nu^2 \sigma_2 \\ E(\varepsilon_2 + \nu \varepsilon_1) &= \sigma_2 (1 - \nu^2) \\ \sigma_2 &= \frac{E(\varepsilon_2 + \nu \varepsilon_1)}{1 - \nu^2} \dots\dots\dots 34 \end{aligned}$$

Por lo que si se sustituye la ecuación 34 en 33, se obtiene finalmente el esfuerzo principal 1.

$$\sigma_1 = \varepsilon_1 E + \nu \left[ \frac{E(\varepsilon_2 + \nu \varepsilon_1)}{1 - \nu^2} \right] \dots\dots\dots 35$$

Ahora bien, para el cálculo del esfuerzo cortante experimental debido a las lecturas de deformaciones, simplemente se utilizan los valores absolutos de esfuerzos principales debidos al efecto de torsión y se encontró que el esfuerzo cortante experimental en el material compuesto "La-Al-La", viga en I "La" y viga en I "Al", por medio de la siguiente ecuación:

$$\tau_{\text{exp}} = \frac{|\sigma_1| + |\sigma_2|}{2} \dots\dots\dots 36$$

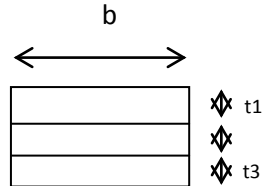
Ó en su defecto el esfuerzo cortante experimental se puede calcular como lo indica la siguiente ecuación:

$$\tau_{\text{exp}} = \gamma G \dots\dots\dots 37$$

### 3.5 Metodología para calcular el esfuerzo cortante máximo en MCLI.

En esta sección se describirá la metodología propuesta para calcular el esfuerzo cortante máximo en un MCLI.

- I) Se parte del material compuesto formado por láminas con dimensiones conocidas, el cual tendrá una geometría rectangular.



- II) Se obtiene un modelo virtual a partir de la transformación virtual de la sección 3.2 y utilizando la ecuación 21 que relaciona los módulos de cortante de las capas componentes del MCLI. Posteriormente utilizar el **modelo virtual** que cumple con las restricciones mencionadas en el capítulo II de la sección 2.2.
- III) Conocido el torque aplicado y las nuevas dimensiones en el modelo virtual (sección transformada), se obtiene el valor del *esfuerzo cortante máximo virtual* utilizando la ecuación analítica 22, para resolver un viga isotrópica.
- IV) Con los valores de esfuerzos virtuales de las vigas transformadas, obtener posteriormente los valores de los esfuerzos que corresponden al MCLI real, considerando la razón modular n.

## Capítulo IV. Prueba experimental.

En este capítulo se describen las pruebas experimentales que se llevaron a cabo para:

- Evaluar cual ecuación analítica es más eficiente en la solución de problemas de torsión de vigas simétricas.
- Evaluar la eficiencia del método propuesto, obteniendo el valor de esfuerzo cortante máximo, tanto analíticamente como experimentalmente instrumentando una viga laminada compuesta simétrica con extensómetros eléctricos.

### 4.1 Fabricación de probetas.

Partiendo de la viga rectangular de un material compuesto laminado isotrópico, compuesta de “La-Al-La” con las siguientes dimensiones:

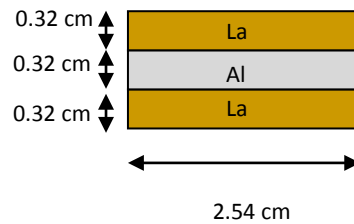


Fig.4.1 Dimensiones de la viga de MCL “La-Al-La”.

Y considerando que los materiales utilizados cuentan con las siguientes propiedades mecánicas:

Propiedades del Latón		
Propiedades	Valor experimental*	Valor de Tablas
$E_{(eff)}=$	101 Gpa	105 Gpa
$\nu_{(eff)}=$	0.2939	0.34
$G_{(eff)}=$	38.8 Gpa	39 Gpa
Propiedades del Aluminio		
Propiedades	Valor experimental*	Valor de Tablas
$E_{(eff)}=$	67.5 Gpa	70 Gpa
$\nu_{(eff)}=$	0.3287	0.33
$G_{(eff)}=$	25.38 GPa	26 GPa

Tabla.4.1 Propiedades del latón y aluminio.

Los valores experimentales fueron determinados en pruebas de laboratorio, ver apéndice A <sup>“Obtención experimental de las propiedades elásticas de los materiales La y Al”</sup>.

Por lo que si se utiliza una analogía al método de la sección transformada y se calcula la razón modular **n**, pero con la peculiaridad de utilizar el modulo de rigidez “G” de los materiales en lugar del modulo de elasticidad “E”, se obtiene:

Calculo de la razón modular n			
Material	n	E	G
La – Al	$n = \frac{G_{La}}{G_{Al}}$	1.4898	1.5298
Al -La	$n = \frac{G_{La}}{G_{Al}}$	0.6712	0.6537

Tabla.4.2 Cálculo de la razón modular.

La razón modular basada en el modulo de rigidez, varia con respecto al modulo de elasticidad en base a la relación de Poisson del material tal y como se muestra en la siguiente ecuación:

$$\frac{E}{2G} = 1 + \nu \dots\dots\dots 38$$

Por lo que se transforma la geometría original rectangular del material compuesto “La-Al-La” para obtener dos secciones diferentes, una compuesta por Latón y la otra por Aluminio.

1. **“Viga de Latón”**. Si se cambia la lámina de aluminio utilizando la razón modular “n” se obtienen los siguientes cambios geométricos;

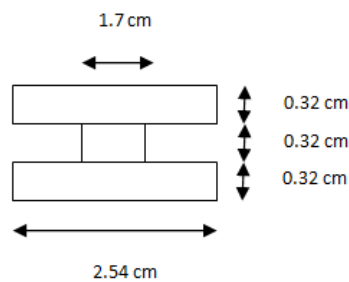
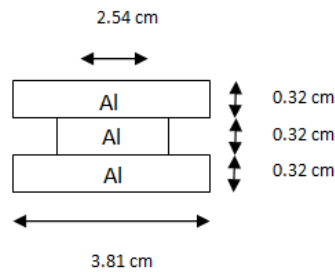


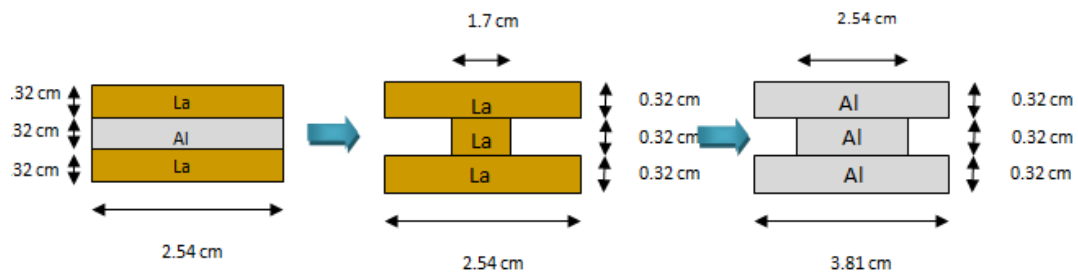
Fig. 4.2 Dimensiones de la sección transformada del material compuesto, Viga en I “La”.

2. **“Viga de Aluminio”**. Y por el contrario, si se sustituye la lámina de latón por una de aluminio con la correspondiente razón modular **“n”** se obtiene una sección geométrica constituida en su totalidad de aluminio pero de geometría diferente.



**Fig. 4.3** Dimensiones de la sección transformada del material compuesto, Viga en I “Al”.

Así, que al utilizar el método de la sección transformada partiendo de una sección rectangular compuesta por dos materiales de la forma La – Al – La, se obtienen los siguientes cambios geométricos:



**Fig. 4.4** Determinación de las vigas en I por medio del método de la sección transformada.

Los cambios realizados con ayuda del método de la sección transformada, ayudará a determinar si ocurren los mismos esfuerzos cortantes máximos en las vigas de aluminio y latón para posteriormente compararlos con el valor correspondiente al mismo esfuerzo en la viga del material compuesto.

La construcción de las probetas parte de las medidas de la sección rectangular formada por Latón-Aluminio-Latón (2.54cm X 0.32cm X 25cm) y de las secciones correspondientes de latón y aluminio obtenidas por medio de la sección transformada. La forma de construirlas fue básicamente cortarlas y pegarlas con una resina epóxica apropiada para este tipo de metales; esto se realizó uniendo soleras dependiendo de las medidas obtenidas de las secciones transformadas de aluminio y latón.

Las probetas que se utilizaron son:

1. Probeta de material compuesto “La-Al-La”.
2. Sección transformada del material compuesto; viga en I de Latón.

3. Sección transformada del material compuesto; viga en I de Aluminio.

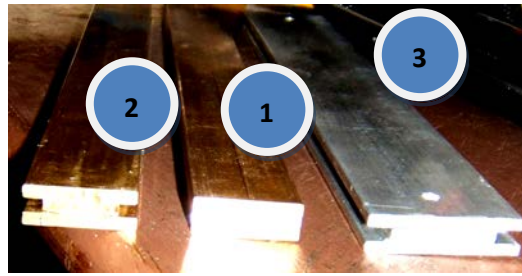


Foto 4.1 Probetas utilizadas para la prueba de torsión.



Foto 4.2 Perfil de las probetas, de izquierda a derecha se muestra la probeta de material compuesto, seguida por la sección transformada de Al y finalmente se muestra la sección transformada de La.

#### 4.2 Pruebas experimentales.

Para realizar el análisis experimental se optó por la técnica de extensometría eléctrica, la cual con la ayuda de extensómetros se podrá determinar las deformaciones que sufre el material compuesto laminado en cualquier punto donde se coloquen; las deformaciones encontradas ayudarán a determinar el esfuerzo cortante correspondiente.

#### 4.3 Instrumentación de probetas.

Para el estudio del material compuesto laminado se han obtenido tres modelos de estudio, uno formado por el material compuesto de La-Al-La y los otros dos por la sección transformada correspondiente al latón y aluminio respectivamente.

Como ya se mencionó anteriormente, es necesario utilizar la técnica de extensometría eléctrica para determinar los esfuerzos cortantes máximos en estos modelos; por lo anterior se requiere instrumentar (posicionar extensómetros) en los modelos de estudio de forma adecuada. La etapa de instrumentación es una tarea fundamental y de suma importancia para esta investigación porque de ello depende la exactitud del valor del esfuerzo cortante que se requiere determinar.

## 4.4 Selección del extensómetro

### 4.4.1 Tipo

Para la instrumentación se utilizaron extensómetros del tipo roseta y longitudinales; los primeros se utilizarán en las vigas del material compuesto y en las vigas transformadas y los segundos en la placa rectangular de latón.

### 4.4.2 Tamaño

El tamaño del extensómetro está en función del área disponible donde se pretende instrumentar y por ende, analizar esfuerzos.

### 4.4.3 Ubicación

La ubicación y orientación del extensómetro es sin duda la etapa más importante en la extensometría eléctrica, ya que de ello depende un valor correcto de la deformación en ese punto de análisis; sin embargo, antes de ubicar el extensómetro se requiere de un análisis conceptual (físico y mecánico) a fondo de lo que se está analizando y lo que se quiere determinar.

Por lo tanto, después de realizar un análisis conceptual de lo que pasa en los modelos establecidos cuando se les aplica una carga de torsión, se concluyó que la ubicación de los extensómetros en el modelo del material compuesto se realizó como se muestra a continuación.

	Extensómetro 1	Extensómetro 2	Extensómetro 3	Extensómetro 4
<b>Tipo</b>	Roseta 45°	Roseta 45°	Roseta 45°	Roseta 45°
<b>Orientación</b>	Cara superior o inferior	Cara superior o inferior	Cara superior o inferior	Cara superior o inferior
<b>Ubicación</b>	En el centro de la viga, eje longitudinal (Y).	En el eje longitudinal (Y) desplazado del centro de la viga.	Desplazado del eje longitudinal (Y).	Desplazado del eje longitudinal (Y) antes del extremo de la viga.

**Tabla 4.3** Selección de extensómetros en la probeta "La-Al-La"

## 4.5 Evaluación experimental de la distribución de esfuerzos a lo largo de toda la superficie de la viga.

Para evaluar experimentalmente en la prueba de torsión la distribución de esfuerzos a lo largo de toda la superficie de la viga, se ubicaron los extensómetros sobre las probetas de estudio y durante las pruebas, ver foto 4.3, se obtuvieron deformaciones que al utilizar las ecuaciones constitutivas se calcularon los esfuerzos cortantes.

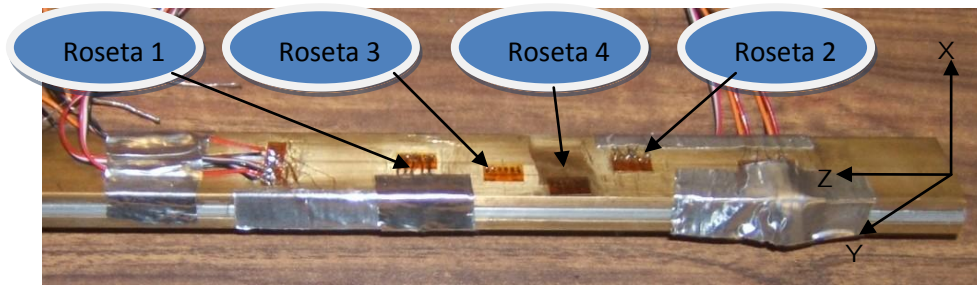
Se evaluó, instrumentando con extensómetros localizados en diversos puntos de la superficie de la viga de material compuesto, ya que está sometida en el eje longitudinal a torsión

pura; misma que se puede verificar con el hecho de que el extensómetro central no marcó prácticamente ninguna deformación, mientras que los extensómetros de los extremos están marcando deformaciones prácticamente iguales pero de signos contrarios; lo cual se explica debido a que en una prueba de torsión que se realiza en el centro de la viga, de una mitad se presentan esfuerzos de tensión mientras que en la otra mitad se producen esfuerzos de compresión.

#### 4.5.1 Viga de MCL “La-AI-La”

La viga de MCL “La-AI-La”, está formado por tres laminas, dos de latón que envuelven a una de aluminio para formar con ayuda de resina epóxica un material compuesto formado por laminas. La forma rectangular de las láminas determina la forma geométrica final del material compuesto. Con la finalidad de evaluar la distribución de esfuerzos en la superficie del material compuesto se colocaron cuatro extensómetros ubicados como se muestra en la figura siguiente.

Se colocaron cuatro rosetas para medir la deformación debido a la torsión que sufre la probeta del material compuesto. Se colocó la roseta 1 en el centro de la viga para medir el esfuerzo cortante máximo como se indica analíticamente; la roseta dos se colocó en el eje longitudinal de la viga de la misma forma que la roseta 1 pero desplazada algunos centímetros del centro, con la idea de verificar la continuidad del esfuerzo cortante en el eje longitudinal; como ya se tienen una roseta en el centro y para visualizar la función del esfuerzo en el plano XY se colocaron otras dos rosetas de forma arbitraria pero alejados del centro de la viga hasta el borde exterior donde se sabe que el esfuerzo cortante es cero en ese punto.



**Foto 4.3** Ubicación de las rosetas de deformación en la probeta del material compuesto “La-AI-La”, localizada en el centro del eje longitudinal de la superficie.



A continuación se presentan las propiedades mecánicas del material compuesto que se determinaron de forma analítica relacionando las propiedades mecánicas del latón y aluminio ( $G$ ,  $E$  y  $\nu$ ) y asumiendo capas simétricas e isotrópicas:

Propiedades elásticas (material compuesto) "La-Al-La"	
S.I.	
$E_{(eff)} =$	93.8 GPa
$\nu_{(eff)} =$	0.3386
$G_{(eff)} =$	34.67 GPa

**Tabla 4.4** Propiedades elásticas obtenidas de forma analítica del material compuesto "La-Al-La".

#### 4.5.2 Viga en I Latón

La viga en I de latón, está formado por tres láminas, pero a diferencia del MCL, las tres láminas son de latón y las dimensiones de las láminas, dependen de los cambios geométricos producto de cambiar el material de aluminio a latón por medio de la razón modular "n". La forma final de las tres láminas es en forma de I y con la finalidad de evaluar la distribución de esfuerzos en la superficie de esta figura geométrica, se colocó un solo extensómetro en forma de roseta en el centro de la superficie de la viga; ver figura siguiente.



**Foto 4.4** Roseta pegada en la probeta de la sección transformada, viga en I de Latón.



**Foto 4.4** Sujeción de un espécimen de probeta previo a la prueba de torsión.

### 4.5.3 Viga en I Aluminio

La viga en I de aluminio, está formado por tres láminas, pero a diferencia del MCL, las tres láminas son de aluminio y las dimensiones de las láminas, dependen de los cambios geométricos producto de cambiar el material de latón a aluminio por medio de la razón modular “n”. La forma final de las tres láminas es en forma de I y con la finalidad de evaluar la distribución de esfuerzos en la superficie de esta probeta, se colocó un solo extensómetro en forma de roseta en el centro de la superficie de la viga; ver figura siguiente.



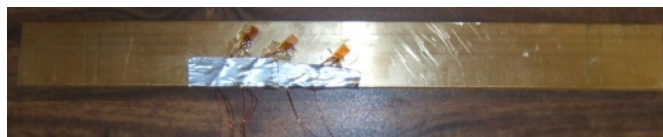
**Foto 4.5** Ubicación de la roseta de deformación en la viga en I de Aluminio, localizada en el centro del eje longitudinal de la superficie.

### 4.6 Validación del modelo analítico.

Adicionalmente a estas tres probetas, para verificar lo expuesto de forma analítica acerca de la ubicación del esfuerzo cortante máximo y para validar el modelo analítico, se utilizó una probeta rectangular de latón y una probeta formada por un MCL pero con la configuración de laminas contraria a nuestro modelo I, es decir, dos laminas de aluminio y una de latón para obtener así una probeta rectangular de “Al-La-Al”.

#### 4.6.1 Probeta rectangular de latón.

Para la probeta rectangular de latón se colocaron extensómetros longitudinales a la misma distancia que los extensómetros de roseta en el material compuesto, esto se realizó con la finalidad de validar analíticamente los esfuerzos en una probeta rectangular. Las dimensiones de la probeta rectangular son de 2.54x0.32x25 cm de un solo material (Latón) para comparar con lo marcado por la bibliografía <sup>Arthur P. Boresi & Richard J. Schmidt; E.J.Hearn</sup>, referente a donde se localiza el esfuerzo cortante máximo en un rectángulo.



**Foto 4.6** Placa rectangular de latón usada para verificar la ubicación del esfuerzo cortante máximo

El esfuerzo cortante en una figura rectangular se calcula de la siguiente manera:

$$\tau_{\max} = \frac{T}{\alpha ab^2} \dots\dots\dots 39$$

Donde :

$T = \text{Torque}$

$a = \text{Ancho}$

$b = \text{Alto}$

$\alpha = \text{Factor numérico } a/b$

El esfuerzo cortante máximo experimental que se evaluó para cada uno de los extensómetros fue el siguiente:

<b>Extensómetro longitudinal</b>	<b>Esfuerzo cortante máximo experimental</b>  $\tau_{\max}$ (Pa)
I	3.36 E+07
II	3.32 E+07
III	3.31 E+07

**Tabla.4.5** Esfuerzo cortante máximo experimental en la viga rectangular de latón.

Lo que valida el hecho de que el esfuerzo cortante a través del eje transversal es constante, y máximo en el eje longitudinal, sin embargo la mínima variación que se aprecia en los valores obtenidos experimentalmente corresponde a errores experimentales.

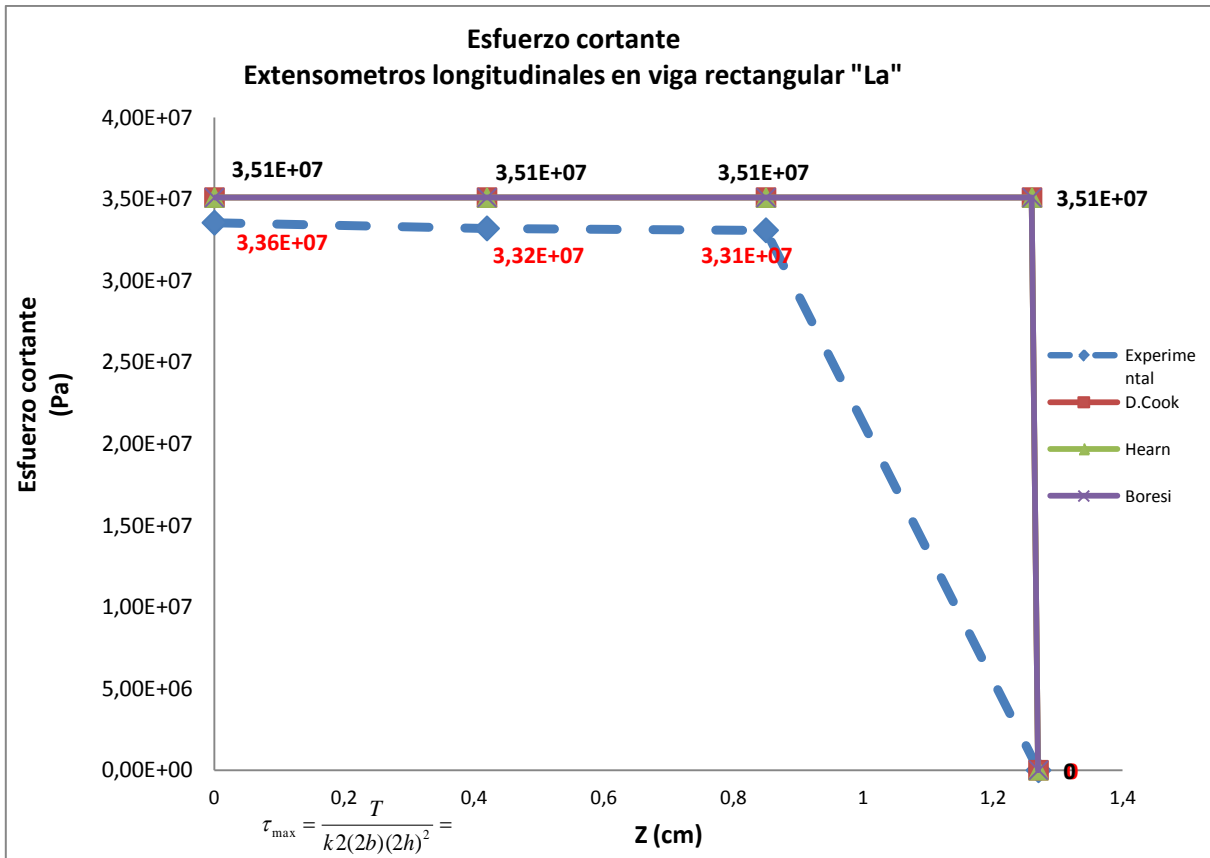


Fig. 4.5 Localización de los esfuerzos cortantes en la viga rectangular de latón.

#### 4.6.2 Probeta MCL "Al-La-Al"

Y para la probeta del MCL "Al-La-Al", se colocó un extensómetro en forma de roseta en el eje longitudinal de la probeta, esta probeta se construyó para ayudar a validar el modelo analítico y con la finalidad de verificar las otras posibilidades geométricas al momento de transformar el MCL a un material de latón o aluminio.

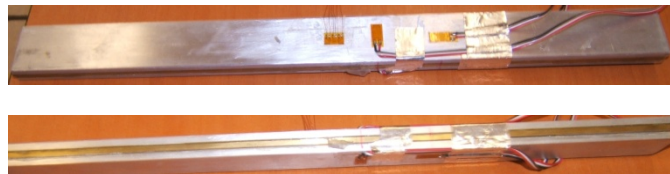
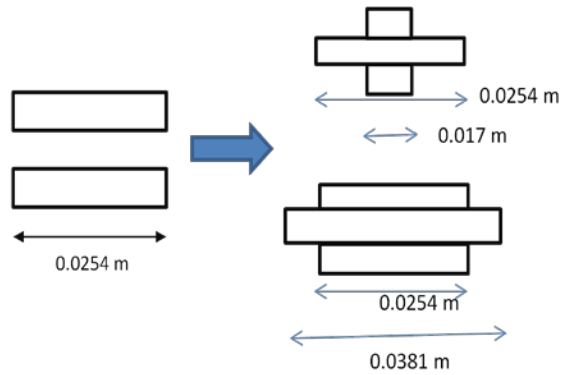


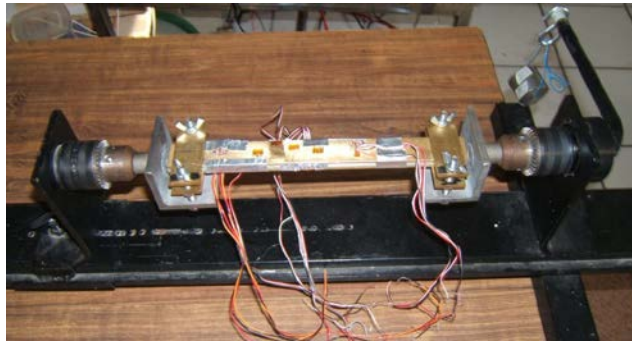
Foto 4.7 Viga del MCL "Al-La-Al".



**Fig.4.6** Dimensiones de las vigas transformadas del MCL "Al-La-Al".

#### 4.6.3 Banco de pruebas de torsión.

Se utilizó el banco de pruebas para torsión del taller de mecánica experimental del edificio de estudios de posgrado de la facultad de Ingeniería de la UNAM.



**Foto 4.8** Banco de pruebas de torsión.

#### 4.7 Descripción de pruebas.

Las pruebas experimentales se llevaron a cabo en el taller de mecánica experimental del posgrado de Ingeniería de la UNAM. En éste taller fueron objeto de estudio una probeta del material compuesto "La-Al-La" y dos probetas de la sección transformada del material compuesto en "La" y "Al" respectivamente; así mismo se estudio una probeta rectangular compuesta únicamente por latón con el objetivo de verificar la ubicación del esfuerzo cortante máximo en geometrías rectangular, como lo indican Arthur P. Boresi & Richard J. Schmidt; E.J.Hearn y S. Timoshenko.

Las probetas mencionadas con antelación fueron sometidas a pruebas de torsión; se realizó una sola prueba de torsión con diferentes pesos, pero se verificó la repetibilidad de las deformaciones sufridas por las probetas, mismas que son reflejadas en las lecturas de cada extensómetro.

Cabe mencionar que antes de realizar cualquier análisis experimental, es necesario verificar algunos aspectos, ya que de no ser así pueden ser la causa de errores experimentales. A continuación se mencionan algunos parámetros evaluados, deriva, linealidad y repetibilidad. Ver apéndice C.

#### **4.7.1 Pruebas de torsión**

Las pruebas de torsión sobre las probetas se realizaron siguiendo una secuencia de pasos, que se mencionan a continuación:

1. Centrado de probeta sobre mordazas.
2. Colocación de la probeta en el banco de torsión.
3. Nivelación y apriete del cabezal del lado trasero de la probeta.
4. Nivelación del brazo de palanca.
5. Calibración del instrumento indicador de deformaciones.
6. Conexión de la roseta de deformación y medición de uno a uno de sus tres extensómetros hasta terminar con todas las rosetas de deformación.
7. Colocación de pesos en secuencia de uno por uno desde 129.2gr hasta 1323.15 gr y toma de lecturas.
8. Recolección de lecturas por medio del indicador de deformaciones.
9. Análisis de lecturas.
10. Cálculo experimental de torsión.
11. Cálculo analítico de torsión.
12. Comparación de los esfuerzos cortantes máximos.
13. Graficación de datos.
14. Análisis de resultados.

#### 4.8 Ecuaciones analíticas para el cálculo del esfuerzo cortante en vigas de sección delgada.

Para utilizar el método de la sección transformada primeramente se analizaron las ecuaciones establecidas por diversos autores para el cálculo del esfuerzo cortante máximo en una viga con sección transversal en forma de I. Los resultados, producto de las diversas ecuaciones, varían entre sí debido a que en el cálculo del esfuerzo cortante se utilizan diferentes restricciones, por ejemplo se utiliza la relación de aspecto a/b de forma diversa o en su defecto se utilizan constantes que intervienen directamente en la ecuación y en algunos casos solo se contempla la geometría rectangular de las vigas. A continuación se presenta una tabla que resume la forma en que se calcula el esfuerzo cortante en una viga de sección transversal en forma de I:

Autor	Esfuerzo cortante máximo $\tau$ "Pa"	
	Viga en I "La"	Viga en I "Al"
<b>D.Cook</b> $\tau_{\max} = \frac{Tt}{K}$ $K = \frac{\alpha}{3} \sum_{i=1}^n b_i t_i^3$	7.62 E+06	7.54 E+06
<b>Hearn</b> $\tau_{\max} = \frac{T}{\sum kldb^2} =$	1.08 E+07	9.98 E+06
<b>Boresi</b> $\tau_{\max} = \frac{2Th_{\max}}{J} =$ $J = C * \frac{1}{3} \sum_{i=1}^n 2b_i 2h_i^3 =$	1.09 E+07	1.00 E+07
<b>Ugural &amp; Fenster</b> $\tau_{\max} = \frac{3Tt_i}{b_1 t_1^3 + 2b_2 t_2^3} =$	<b>9.91 E+06</b>	<b>9.80 E+06</b>
<b>Timoshenko</b> $\tau_{\max} = \frac{3M_t c_2}{b_1 c_1^3 + 2b_2 c_2^3} =$	9.91 E+06	9.80 E+05

**Tabla 4.6** Ecuaciones analíticas para el cálculo del esfuerzo cortante en una viga en I transformada del MCL "La-Al-La".

Con los resultados mostrados en la tabla anterior y realizando una comparación con los valores obtenidos experimentalmente, se obtienen las siguientes representaciones graficas de los esfuerzos cortantes en las vigas de sección transversal en forma de I de latón y aluminio.

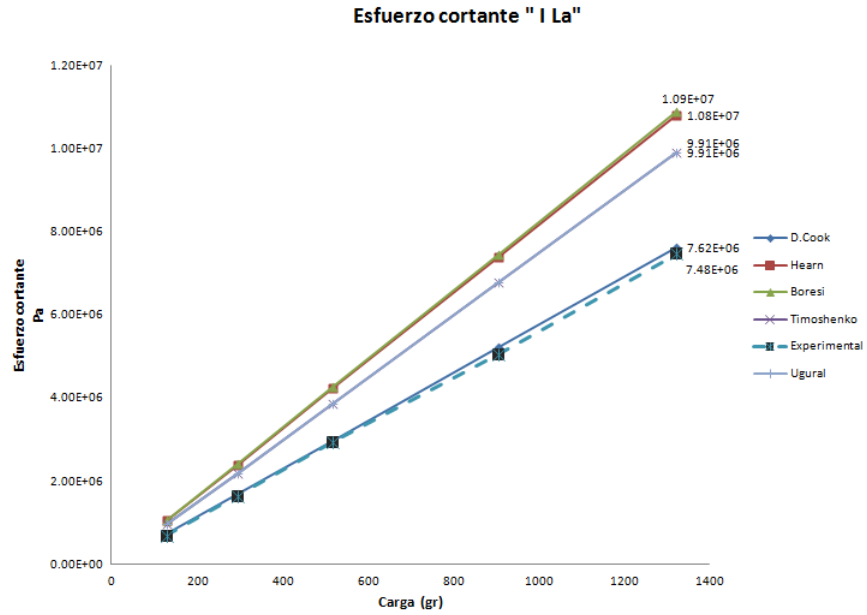


Fig. 4.7 Cálculo del esfuerzo cortante en la viga en forma de I compuesta por Latón.

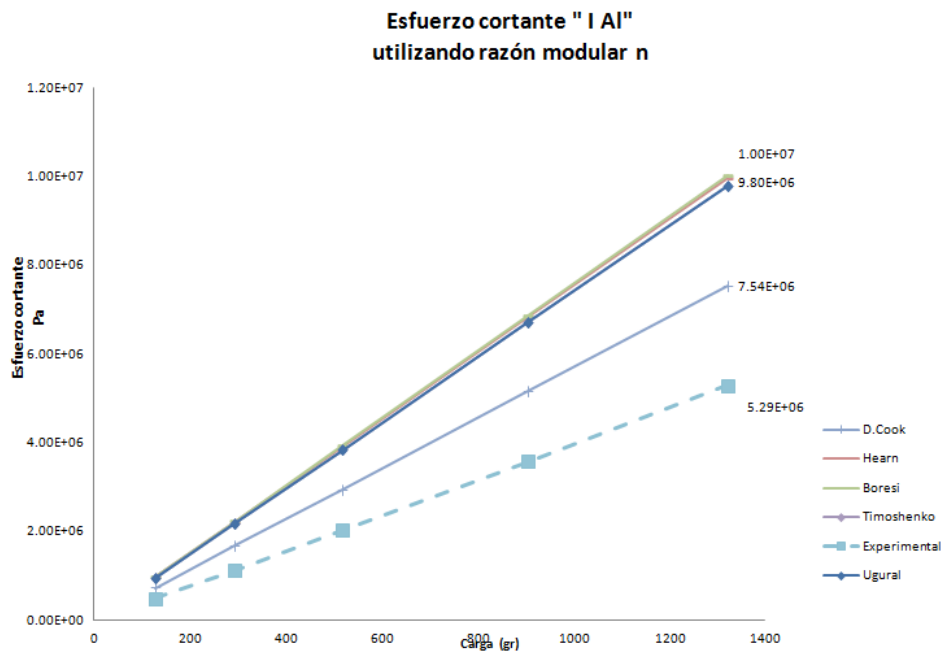


Fig. 4.8 Cálculo del esfuerzo cortante en la viga de Aluminio en forma de I, utilizando la razón modular "n"



La ecuación analítica más eficiente para resolver un problema de torsión de vigas simétricas con sección transversal en forma de I, corresponde a la ecuación planteada por Ugural & Fenster, ya que esta ecuación relaciona geoméricamente el valor del esfuerzo cortante y no utiliza constantes numéricas.

$$\tau_{\max} = \frac{3Ti}{b_1 t_1^3 + 2b_2 t_2^3} \dots\dots\dots 40$$

## CAPÍTULO V. Resultados y análisis experimentales.

### 5.1 Lecturas, deformaciones y esfuerzos de la roseta en la Viga del MCL “Al-La-Al”.

En la tablas del 5.1 al 5.4, se muestran los valores de las deformaciones  $\epsilon_A$ ,  $\epsilon_B$ , y  $\epsilon_C$ , que se obtuvieron en la prueba experimental de torsión en el MCL “La-Al-La”, así como los valores de las deformaciones y esfuerzos principales, para finalmente obtener el esfuerzo cortante debido a esas deformaciones. Los valores del esfuerzo cortante máximo experimental que se utilizaron fueron los obtenidos a mayor carga.

PESO g	Roseta 1			$\epsilon_x$ $\mu$	$\epsilon_y$ $\mu$	$\gamma_{xy}$ $\mu$	$\epsilon_1$ $\mu$	$\epsilon_2$ $\mu$	$\gamma_{max}$ $\mu$	$\sigma_1$ (Pa)	$\sigma_2$ (Pa)	$\tau_{max}$ experimental (Pa)
	$\epsilon_A$ $\mu$	$\epsilon_B$ $\mu$	$\epsilon_C$ $\mu$									
129.2	13	0	-13.5	-0.5	0	26.5	13.00	-13.50	26.50	993721.84	-1064884.92	1029303.38
294.45	32	0	-31	1	0	63	32.00	-31.00	63.01	2518058.96	-2375732.80	2446895.88
518.85	57	0	-56.5	0.5	0	113.5	57.00	-56.50	113.50	4443365.62	-4372202.54	4407784.08
906.65	99	0	-99.5	-0.5	0	198.5	99.00	-99.50	198.50	7673135.86	-7744298.94	7708717.40
<b>1323.15</b>	<b>147</b>	<b>1</b>	<b>-146</b>	<b>0</b>	<b>1</b>	<b>293</b>	<b>147.00</b>	<b>-146.00</b>	<b>293.00</b>	<b>11449803.83</b>	<b>-11307477.67</b>	<b>11378640.75</b>

**Tabla 5.1** Lecturas de deformaciones y cálculo de esfuerzos de la roseta #1 del material compuesto laminado “La-Al-La”

PESO g	Roseta 2			$\epsilon_x$ $\mu$	$\epsilon_y$ $\mu$	$\gamma_{xy}$ $\mu$	$\epsilon_1$ $\mu$	$\epsilon_2$ $\mu$	$\gamma_{max}$ $\mu$	$\sigma_1$ (Pa)	$\sigma_2$ (Pa)	$\tau_{max}$ experimental (Pa)
	$\epsilon_A$ $\mu$	$\epsilon_B$ $\mu$	$\epsilon_C$ $\mu$									
129.2	14	-0.5	-13	1.5	-0.5	27	14.04	-13.04	27.07	1122573.37	-980247.21	1051410.29
294.45	31.5	-0.5	-32	0	-0.5	63.5	31.50	-32.00	63.50	2430499.95	-2501663.03	2466081.49
518.85	56	-0.5	-58	-1.5	-0.5	114	56.00	-58.00	114.00	4285002.83	-4569655.15	4427328.99
906.65	101.5	-1	-102	0.5	-1	203.5	101.50	-102.00	203.50	7867308.89	-7938471.97	7902890.43
<b>1323.15</b>	<b>148.5</b>	<b>-2</b>	<b>-149</b>	<b>1.5</b>	<b>-2</b>	<b>297.5</b>	<b>148.51</b>	<b>-149.01</b>	<b>297.51</b>	<b>11518157.12</b>	<b>-11589320.20</b>	<b>11553738.66</b>

**Tabla 5.2** Lecturas de deformaciones y cálculo de esfuerzos de la roseta #2 del material compuesto laminado “La-Al-La”

PESO g	Roseta 3			$\epsilon_x$ $\mu$	$\epsilon_y$ $\mu$	$\gamma_{xy}$ $\mu$	$\epsilon_1$ $\mu$	$\epsilon_2$ $\mu$	$\gamma_{max}$ $\mu$	$\sigma_1$ (Pa)	$\sigma_2$ (Pa)	$\tau_{max}$ experimental (Pa)
	$\epsilon_A$ $\mu$	$\epsilon_B$ $\mu$	$\epsilon_C$ $\mu$									
129.2	13	0	-13	0	0	26	13.00	-13.00	26.00	1009702.85	-1009702.85	1009702.85
294.45	30	0	-33	-3	0	63	30.04	-33.04	63.07	2235870.78	-2662849.26	2449360.02
518.85	56	1.5	-60	-5.5	1.5	116	56.11	-60.11	116.21	4228370.51	-4797675.15	4513022.83
906.65	97.5	2	-103	-7.5	2	200.5	97.61	-103.11	200.72	7403700.79	-8186494.67	7795097.73
<b>1323.15</b>	<b>145.5</b>	<b>3</b>	<b>-150</b>	<b>-7.5</b>	<b>3</b>	<b>295.5</b>	<b>145.59</b>	<b>-150.09</b>	<b>295.69</b>	<b>11162669.69</b>	<b>-11803137.41</b>	<b>11482903.55</b>

**Tabla 5.3** Lecturas de deformaciones y cálculo de esfuerzos de la roseta #3 del material compuesto laminado "La-Al-La"

PESO g	Roseta 4			$\epsilon_x$ $\mu$	$\epsilon_y$ $\mu$	$\gamma_{xy}$ $\mu$	$\epsilon_1$ $\mu$	$\epsilon_2$ $\mu$	$\gamma_{max}$ $\mu$	$\sigma_1$ (Pa)	$\sigma_2$ (Pa)	$\tau_{max}$ experimental (Pa)
	$\epsilon_A$ $\mu$	$\epsilon_B$ $\mu$	$\epsilon_C$ $\mu$									
129.2	12	-0.5	-14	-2.4056	0.4056	25.8669	12.01	-14.01	26.02	868122.76	-1152775.08	1010448.92
294.45	28	-1	-32	-5.0902	1.0902	59.7143	28.02	-32.02	60.03	2046723.69	-2616028.34	2331376.01
518.85	51.5	-3	-57	-6.2849	0.7848	108.271	51.50	-57.00	108.50	3822224.49	-4605032.60	4213628.55
906.65	92	-6.5	-100	-8.2027	0.2027	191.881	92.03	-100.03	192.07	6889487.32	-8028096.61	7458791.96
<b>1323.15</b>	<b>136</b>	<b>-9.5</b>	<b>-146.5</b>	<b>-10.863</b>	<b>0.3634</b>	<b>282.405</b>	<b>136.06</b>	<b>-146.56</b>	<b>282.63</b>	<b>10228564.06</b>	<b>-11723002.98</b>	<b>10975783.52</b>

**Tabla 5.4** Lecturas de deformaciones y cálculo de esfuerzos de la roseta #4 del material compuesto laminado "La-Al-La"

**Nota:** Por un error en el proceso del pegado, la roseta número *cuatro* se orientó 2° en dirección de las manecillas del reloj desviada del eje longitudinal de la viga; sin embargo, esto no afecta los esfuerzos cortantes ya que *se corrigieron* al momento de calcular los esfuerzos cortantes experimentales.

## 5.2 Lecturas, deformaciones y esfuerzos de la roseta en la Viga I “La”.

En la tabla siguiente, se muestran los valores de las deformaciones  $\epsilon_A$ ,  $\epsilon_B$ , y  $\epsilon_C$ , que se obtuvieron en la prueba experimental de torsión en la viga transformada del MCL “La-Al-La” a latón, así como los valores de las deformaciones y esfuerzos principales, para finalmente obtener el esfuerzo cortante debido a esas deformaciones. Los valores del esfuerzo cortante máximo experimental que se utilizaron fueron los obtenidos a mayor carga.

PESO g	Roseta Latón			$\epsilon_x$ μ	$\epsilon_y$ μ	$\gamma_{xy}$ μ	$\epsilon_1$ μ	$\epsilon_2$ μ	$\gamma_{max}$ μ	$\sigma_1$ (Pa)	$\sigma_2$ (Pa)	$\tau_{max}$ experimental (Pa)
	$\epsilon_A$ μ	$\epsilon_B$ μ	$\epsilon_C$ μ									
129.2	9	-0.5	-9	0.5	-0.5	18	9.01	-9.01	18.03	700102.96	-700102.96	700102.96
294.45	22	-0.5	-20.5	2	-0.5	42.5	22.04	-20.54	42.57	1760073.47	-1546584.23	1653328.85
518.85	38	-1	-38	1	-1	76	38.01	-38.01	76.03	2952460.90	-2952460.90	2952460.90
906.65	65.5	-2	-65	2.5	-2	130.5	65.54	-65.04	130.58	5106525.32	-5035362.24	5070943.78
<b>1323.15</b>	<b>96</b>	<b>-3</b>	<b>-96.5</b>	<b>2.5</b>	<b>-3</b>	<b>192.5</b>	<b>96.03</b>	<b>-96.53</b>	<b>192.55</b>	<b>7442145.38</b>	<b>-7513308.46</b>	<b>7477726.92</b>

Tabla 5.5 Lecturas de deformaciones y cálculo de esfuerzos de la roseta colocada en la viga en forma de I “La”

## 5.3 Lecturas, deformaciones y esfuerzos de la roseta en la Viga I “Al”.

PESO g	Roseta Aluminio			$\epsilon_x$ μ	$\epsilon_y$ μ	$\gamma_{xy}$ μ	$\epsilon_1$ μ	$\epsilon_2$ μ	$\gamma_{max}$ μ	$\sigma_1$ (Pa)	$\sigma_2$ (Pa)	$\tau_{max}$ experimental (Pa)
	$\epsilon_A$ μ	$\epsilon_B$ μ	$\epsilon_C$ μ									
129.2	7	0	-6	1	0	13	7.02	-6.02	13.04	381221.76	-280733.67	330977.71
294.45	15.5	-0.5	-14	2	-0.5	29.5	15.55	-14.05	29.61	826902.86	-676170.73	751536.80
518.85	27.5	-0.5	-26	2	-0.5	53.5	27.53	-26.03	53.56	1434936.51	-1284204.38	1359570.45
906.65	47.5	-0.5	-46.5	1.5	-0.5	94	47.51	-46.51	94.02	2436958.27	-2336470.18	2386714.23
<b>1323.15</b>	<b>70</b>	<b>-1</b>	<b>-69</b>	<b>2</b>	<b>-1</b>	<b>139</b>	<b>70.02</b>	<b>-69.02</b>	<b>139.03</b>	<b>3579557.37</b>	<b>-3479069.28</b>	<b>3529313.33</b>

Tabla 5.6 Lecturas de deformaciones y cálculo de esfuerzos de la roseta colocada en la viga en forma de I “Al”

#### 5.4 Lecturas, deformaciones y esfuerzos de la roseta rectangular de latón.

Las tablas 5.7 al 5.9 muestran los valores de las deformaciones  $\epsilon_A$ ,  $\epsilon_B$ , y  $\epsilon_C$ , que se obtuvieron en la prueba experimental de torsión en la viga rectangular de latón, así como los valores de las deformaciones y esfuerzos principales, para finalmente obtener el esfuerzo cortante debido a esas deformaciones. Los valores del esfuerzo cortante máximo experimental que se utilizaron fueron los obtenidos a mayor carga.

PESO g	Extensómetro longitudinal I			$\epsilon_x$ $\mu$	$\epsilon_y$ $\mu$	$\gamma_{xy}$ $\mu$	$\epsilon_1$ $\mu$	$\epsilon_2$ $\mu$	$V_{max}$ $\mu$	$\sigma_1$ (Pa)	$\sigma_2$ (Pa)	$\tau_{max}$ experimental (Pa)
	$\epsilon_A$ $\mu$	$\epsilon_B$ $\mu$	$\epsilon_C$ $\mu$									
129.2	37	0	-37	0	0	74	37	-37	74	2873769.66	-2873769.66	2.87E+06
294.45	90	0	-90	0	0	180	90	-90	180	6990250.53	-6990250.53	6.99E+06
518.85	165	0	-165	0	0	330	165	-165	330	12815459.31	-12815459.31	1.28E+07
906.65	290	0	-290	0	0	580	290	-290	580	22524140.60	-22524140.60	2.25E+07
1323.15	432	0	-432	0	0	864	432	-432	864	33553202.55	-33553202.55	3.36E+07

**Tabla 5.7** Lecturas de deformaciones y cálculo de esfuerzos del extensómetro longitudinal #1 de la viga rectangular de latón

PESO g	Extensómetro longitudinal II			$\epsilon_x$ $\mu$	$\epsilon_y$ $\mu$	$\gamma_{xy}$ $\mu$	$\epsilon_1$ $\mu$	$\epsilon_2$ $\mu$	$V_{max}$ $\mu$	$\sigma_1$ (Pa)	$\sigma_2$ (Pa)	$\tau_{max}$ experimental (Pa)
	$\epsilon_A$ $\mu$	$\epsilon_B$ $\mu$	$\epsilon_C$ $\mu$									
129.2	38	0	-38	0	0	76	38	-38	76	2951439.11	-2951439.11	2.95E+06
294.45	95	0	-95	0	0	190	95	-95	190	7378597.78	-7378597.78	7.38E+06
518.85	168	0	-168	0	0	336	168	-168	336	13048467.66	-13048467.66	1.30E+07
906.65	295	0	-295	0	0	590	295	-295	590	22912487.85	-22912487.85	2.29E+07
1323.15	427.5	0	-427.5	0	0	855	427.5	-427.5	855	33203690.03	-33203690.03	3.32E+07

**Tabla 5.8** Lecturas de deformaciones y cálculo de esfuerzos del extensómetro longitudinal #2 de la viga rectangular de latón

PESO g	Extensómetro longitudinal III			$\epsilon_x$ $\mu$	$\epsilon_y$ $\mu$	$\gamma_{xy}$ $\mu$	$\epsilon_1$ $\mu$	$\epsilon_2$ $\mu$	$\gamma_{max}$ $\mu$	$\sigma_1$ (Pa)	$\sigma_2$ (Pa)	$\tau_{max}$ experimental (Pa)
	$\epsilon_A$ $\mu$	$\epsilon_B$ $\mu$	$\epsilon_C$ $\mu$									
129.2	36	0	-36	0	0	72	36	-36	72	2796100.21	-2796100.21	2.80E+06
294.45	91.5	0	-91.5	0	0	183	91.5	-91.5	183	7106754.71	-7106754.71	7.11E+06
518.85	166	0	-166	0	0	332	166	-166	332	12893128.76	-12893128.76	1.29E+07
906.65	293	0	-293	0	0	586	293	-293	586	22757148.95	-22757148.95	2.28E+07
<b>1323.15</b>	<b>426</b>	<b>0</b>	<b>-426</b>	<b>0</b>	<b>0</b>	<b>852</b>	<b>426</b>	<b>-426</b>	<b>852</b>	<b>33087185.85</b>	<b>-33087185.85</b>	<b>3.31E+07</b>

**Tabla 5.9** Lecturas de deformaciones y cálculo de esfuerzos del extensómetro longitudinal #3 de la viga rectangular de latón

### 5.5 Lecturas, deformaciones y esfuerzos de la roseta en la viga del MCL "Al-La-Al".

En la tabla siguiente, se muestran los valores de las deformaciones  $\epsilon_A$ ,  $\epsilon_B$ , y  $\epsilon_C$ , que se obtuvieron en la prueba experimental de torsión en el MCL "Al-La-A", así como los valores de las deformaciones y esfuerzos principales, para finalmente obtener el esfuerzo cortante debido a esas deformaciones. Los valores del esfuerzo cortante máximo experimental que se utilizaron fueron los obtenidos a mayor carga.

PESO g	Roseta 1 MCL "Al-La-Al"			$\epsilon_x$ $\mu$	$\epsilon_y$ $\mu$	$\gamma_{xy}$ $\mu$	$\epsilon_1$ $\mu$	$\epsilon_2$ $\mu$	$\gamma_{max}$ $\mu$	$\sigma_1$ (Pa)	$\sigma_2$ (Pa)	$\tau_{max}$ experimental (Pa)
	$\epsilon_A$ $\mu$	$\epsilon_B$ $\mu$	$\epsilon_C$ $\mu$									
129.2	20	-2	-15	3	2	35	20.01	-15.01	35.01	1140051.89	-637611.46	888831.68
294.45	35	-2	-34	-1	2	69	35.00	-34.00	69.01	1801981.37	-1701493.29	1751737.33
518.85	62	-2	-65	-5	2	127	62.10	-65.10	127.19	3078034.86	-3379499.12	3228766.99
906.65	115	-1	-113	3	-1	228	115.02	-113.02	228.04	5889120.35	-5688144.18	5788632.26
<b>1323.15</b>	<b>168</b>	<b>0</b>	<b>-163</b>	<b>5</b>	<b>0</b>	<b>331</b>	<b>168.02</b>	<b>-163.02</b>	<b>331.04</b>	<b>8654558.11</b>	<b>-8152117.68</b>	<b>8403337.89</b>

**Tabla 5.10** Lecturas de deformaciones y cálculo de esfuerzos de la roseta colocada en la viga rectangular del MCL "Al-La-Al"

## 5.6 Análisis del esfuerzo cortante máximo experimental.

Para el cálculo de los esfuerzos cortantes se utilizaron las ecuaciones mostradas en la sección 3.4; para este cálculo se toman como base las lecturas de deformaciones que sufrieron los diferentes extensómetros de las diversas probetas; por lo que los esfuerzos cortantes máximos **experimentales** con un peso de 1323.15 gr y un torque  $T= 2.33$  Nm en la viga del material compuesto "La-Al-La" y las vigas de sección transversal en forma de I del material latón y aluminio son los siguientes:

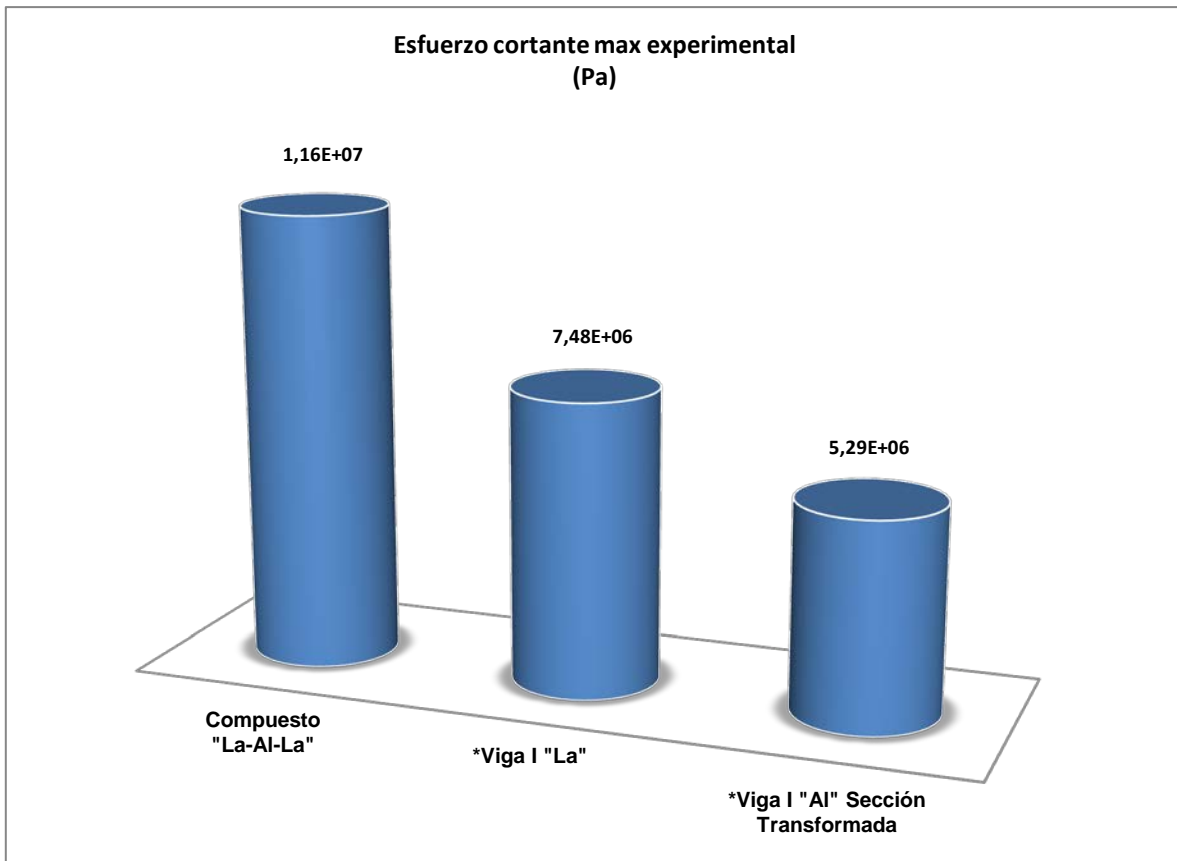


Fig. 5.1 Lecturas, deformaciones y esfuerzos de la roseta #1 del material compuesto laminado "La-Al-La"

\*Los valores del esfuerzo cortante de la viga con sección transversal en forma de I de latón y aluminio contienen un error experimental.

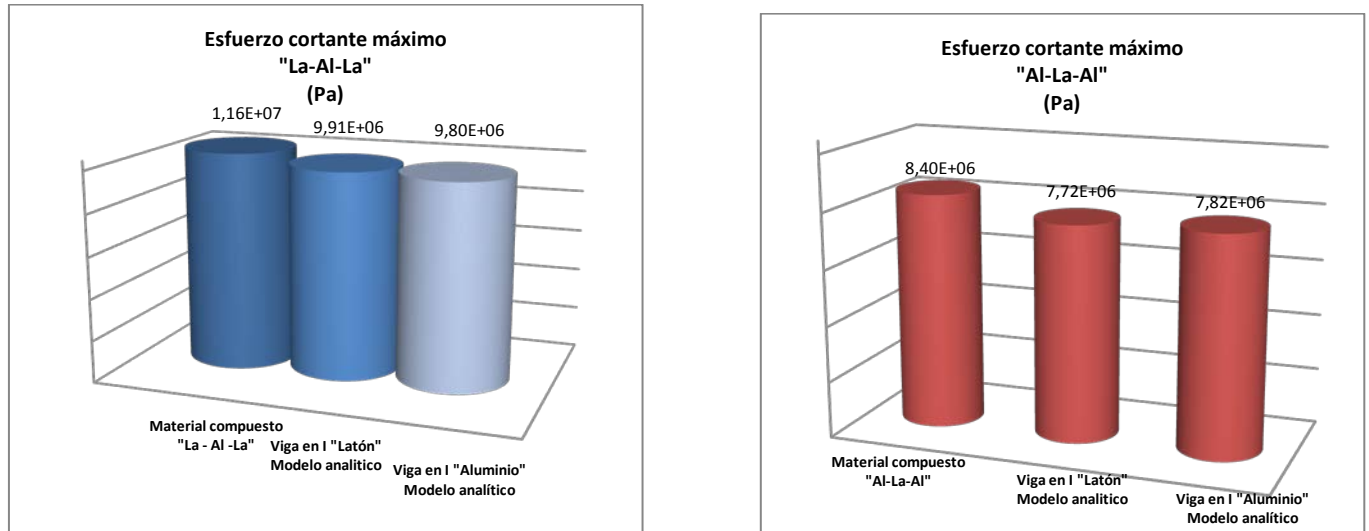
### 5.7 Esfuerzo cortante máximo analítico.

El esfuerzo cortante máximo en una viga con sección transformada proveniente del MCL "La-Al-La", se calcula en base al modelo analítico (virtual) planteado en esta investigación y se muestra en la tabla siguiente:

Esfuerzo cortante máximo analítico			
I Latón (n=.66)		I Aluminio (n=1.5)	
Modelo analítico	Utilizando razón modular	Modelo analítico	Utilizando razón modular
$\tau_{\max} = \frac{3Tb_1}{t_1b_1^3 + 2b_2t_2^3}$	"n"	$\tau_{\max} = \frac{3Tb_1}{t_1b_1^3 + 2b_2t_2^3}$	"n"
$\tau_{\max} = 9.91 \text{ MPa}$	-----	$\tau_{\max} = 6.53 \text{ MPa}$	$\tau_{\max} = 9.80 \text{ MPa}$
<b>variables (m)</b> b <sub>2</sub> = 0.0254 t <sub>2</sub> = 0.00323 b <sub>1</sub> = 0.017018 t <sub>1</sub> = 0.00323 t <sub>i</sub> = 0.00323		<b>variables (m)</b> b <sub>2</sub> = 0.0381 t <sub>2</sub> = 0.00325 b <sub>1</sub> = 0.0254 t <sub>1</sub> = 0.00325 t <sub>i</sub> = 0.00325	

**Tabla 5.11** Cálculo del esfuerzo cortante máximo en las vigas con sección transversal en forma de I de Latón y Aluminio mediante el modelo analítico

y comparando los valores experimentales con los valores analíticos de las probetas de material compuesto obtenemos los siguientes resultados.



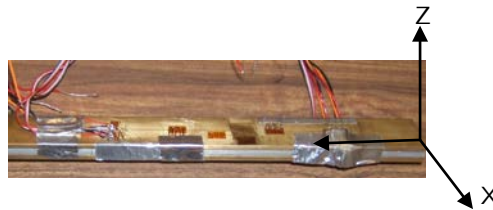
**Fig. 5.2** Cálculo del esfuerzo cortante máximo en las vigas con sección transversal en forma de I de Latón y Aluminio mediante el modelo analítico.



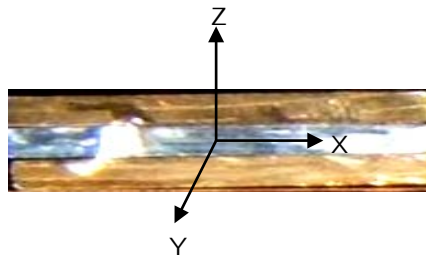
## 5.8 Análisis las funciones de la probeta del MCL “La-AI-La”.

Para la viga rectangular de MCL “La-AI-La” se colocaron selectivamente los extensómetros en forma de roseta para obtener las deformaciones y calcular los valores representativos del esfuerzo cortante que sirven para mostrar el comportamiento del esfuerzo cortante en los tres ejes de la viga.

Para el análisis de las funciones se establece el siguiente sistema coordenado:



**Foto 5.1** Orientación de ejes coordenados en la probeta de estudio “La-AI-La”.



**Foto 5.2** Orientación de ejes coordenados en la probeta de estudio “La-AI-La” vista frontal.

### 5.8.1 Función en el eje longitudinal (Y)

La función en el eje longitudinal (Y) se determinó con la ayuda de dos extensómetros que se colocaron a lo largo del eje longitudinal de la barra; la función se grafica en toda la longitud de la barra 25.4 cm, cabe aclarar que los valores del esfuerzo cortante en los bordes de la barra del eje longitudinal son cero, pero con fines ilustrativos se considerarán con el mismo valor del esfuerzo.

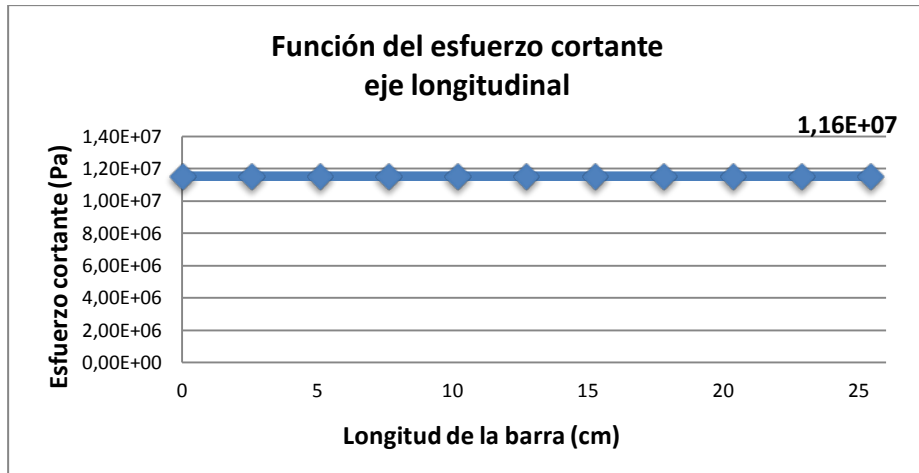
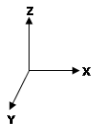


Fig. 5.3 Función del esfuerzo cortante en el eje longitudinal del MCL "La-Al-La".

### 5.8.2 Función en el eje transversal (X)

La función en el eje transversal (X) se determinó con la ayuda de tres extensómetros ubicados a lo largo de la mitad del eje transversal de la barra; la función se grafica en todo el ancho de la barra 2.54 cm.

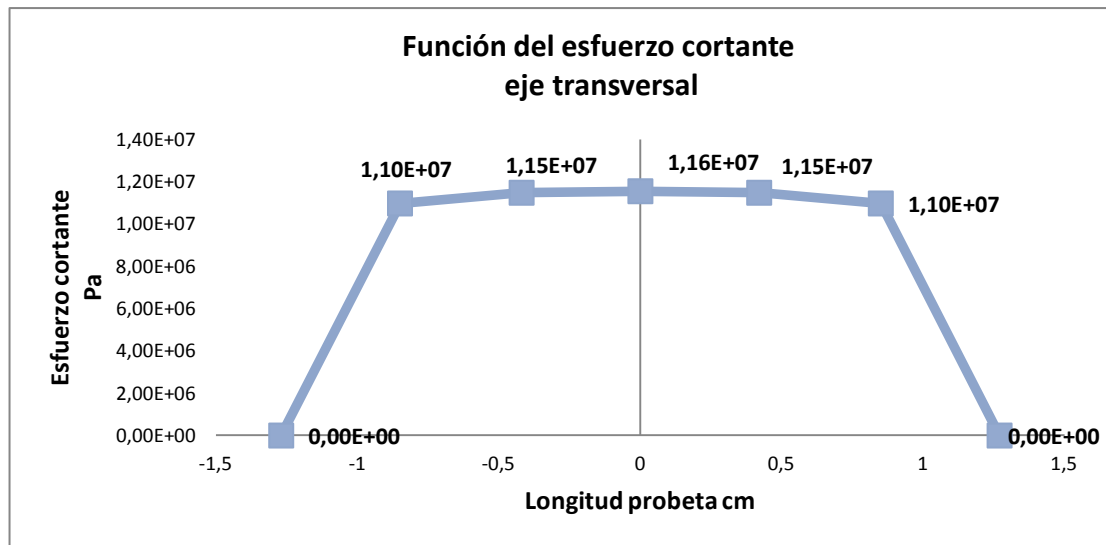
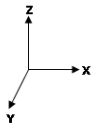


Fig. 5.4 Función del esfuerzo cortante en el eje transversal del MCL "La-Al-La".

### 5.8.3 Función en el eje lateral (Z).

La función en el eje lateral (Z) no se determinó de forma experimental debido al espesor de las probetas y la falta de espacio para colocar los extensómetros, sin embargo a continuación se presenta la función en el eje lateral establecida por Ugural & S.K. Fenster.

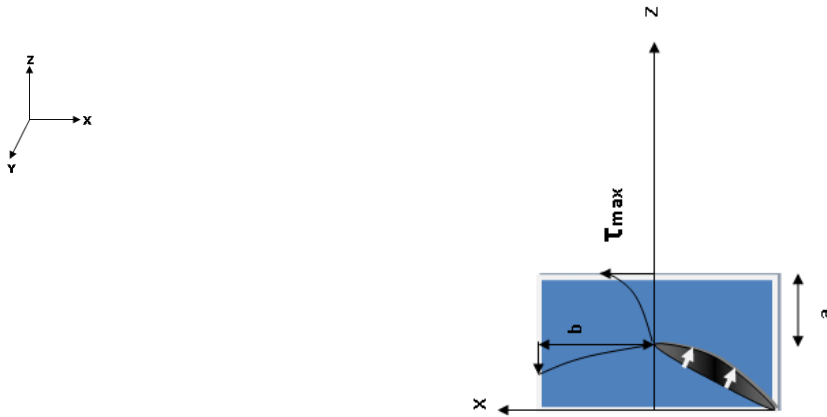


Fig. 5.5 Función del esfuerzo cortante en el eje lateral del MCL "La-Al-La".

## 5.9 Análisis de resultados.

En la tabla 5.12 se muestran los valores del esfuerzo cortante máximo obtenidos de las pruebas experimentales a los materiales compuestos “La-Al-La” y “Al-La-Al”, además de mostrar los valores analíticos de los esfuerzos cortantes en las vigas transformadas; así que como resultado de las pruebas experimentales de torsión aplicadas a un MCL se establecen los siguientes resultados:

ESFUERZO CORTANTE MÁXIMO				
Material	Experimental (Pa)	Modelo analítico (Pa)	Razón modular "n" (Pa)	Error “MCL vs Modelo analítico” (Pa)
<b>Compuesto “La-Al-La”</b>	<b>1.16 E+07</b>	-----	-----	-----
Viga Transformada "La"	<u>7.48 E+06*</u>	9.91 E+06	-----	<b>14.6</b>
Viga transformada "Al"	<u>5.29 E+06*</u>	6.53 E+6	9.80 E+06	<b>15.6</b>
<b>Compuesto “Al-La-Al”</b>	<b>8.40 E+06</b>	-----	-----	-----
Viga Transformada "La"	-----	1.17 E+07	7.72 E+06	<b>8.1</b>
Viga transformada "Al"	-----	7.82 E+06	-----	<b>7</b>

**Tabla 5.12** Resumen del esfuerzo cortante experimental y analítico de los MCL y sus respectivas transformaciones geométricas.

\*Existe un error experimental al calcular el valor del esfuerzo cortante en la viga de sección transversal en forma de I.

El valor experimental del esfuerzo cortante máximo en el MCL “La-Al-La” es igual a  $\tau_{\max} = 1.16 \times 10^{07}$  Pa y para el MCL “Al-La-Al” es igual  $\tau_{\max} = 8.40 \times 10^{06}$  Pa; mismo que se aproxima al valor calculado mediante el modelo analítico en las vigas con sección transversal en forma de I de Latón ó Aluminio.

El valor experimental del MCL “La-Al-La” varía con el modelo analítico entre un catorce y dieciséis por ciento mientras en el MCL “Al-La-Al” la variación en porcentaje es del siete al ocho por ciento. A pesar de que se utilizaron probetas similares y se utilizaron las mismas consideraciones experimentales en el pegado, colocación, sujeción y aplicación de cargas entre los dos MCL, sus resultados varían en porcentaje debido a errores experimentales no controlados.

## Capítulo VI. Conclusiones y recomendaciones.

En este capítulo se describen las conclusiones debidas a las hipótesis, objetivos, pruebas experimentales y resultados planteados y obtenidos en esta investigación; así como también se proporcionan recomendaciones al utilizar la metodología para la determinación del esfuerzo cortante en un MCL sometido a torsión en futuras investigaciones.

### 6.1 Conclusiones.

Del análisis experimental que se llevó a cabo y considerando las pruebas realizadas a dos diferentes MCL (capas isotrópicas), se obtienen las siguientes conclusiones:

- Con el método y modelo propuesto, en este trabajo se logró determinar los esfuerzos cortantes máximos en un MCL sometido a torsión. El valor del esfuerzo cortante calculado de forma analítica se acerca al valor obtenido experimentalmente, las diferencias máximas entre uno y otro son de 7 a un 15 por ciento de error según los valores experimentales del esfuerzo cortante experimental de los MCL de “La-Al-La” y “Al-La-Al”.
- Debido a que el estado del arte muestra que no se trabaja con soluciones simples para el análisis de torsión en MCL, la aportación que se hace en esta investigación es relevante, ya que con la metodología y el modelo virtual propuestos es posible calcular el esfuerzo cortante en un MCL que es sometido a torsión.
- Los objetivos particulares han sido completados, ya que para realizar el análisis de esfuerzos en un MCL fue necesario familiarizarse con la solución de problemas de torsión, así mismo para haber establecido el método para calcular el modelo analítico fue necesario utilizar una analogía al método de la sección transformada, misma que por errores experimentales no se logró obtener los valores esperados en las vigas transformadas.
- Al resolver un modelo virtual y considerarlo ideal, no se introducen variables ni defectos reales, lo cual hace que los resultados al aplicarlos sean eficientes. Lo anterior se observó en las pruebas experimentales realizadas sobre las vigas “I” de aluminio y latón, ver secciones 5.2, 5.2 y 5.6, los cuales dieron errores de hasta 55 por ciento con respecto a los valores esperados.
- La hipótesis tres fue acertada debido a que se determinaron con extensómetros las funciones en los tres ejes del MCL, siendo las funciones en el eje Y constante a lo largo de toda la viga y lineal con respecto a los ejes X y Z.
- Se logró evaluar de forma experimental la distribución de esfuerzos en un MCL; la función del esfuerzo cortante en el eje longitudinal (Y) se considera constante al igual que la función en el eje transversal (X) ver fig. 5.3 y 5.4, cabe mencionar que los valores del esfuerzo no son iguales pero se consideran así, ya que se presenta una variación en las

deformaciones registradas a lo largo de estos ejes y por ser una prueba experimental existen errores que varían en un 4 %.

- La función en el eje lateral (Z) no se logró determinar de forma experimental debido al espesor de las probetas utilizadas y a la falta de espacio para colocar los extensómetros en la zona lateral de la probeta pero se utilizó lo encontrado y analizado en (<sup>Advanced Mechanics of Materials, Arthur P. Boresi & Richard J. Schmidt</sup>); Sin embargo, se asume sea lineal. Ver fig. 5.5.
- La hipótesis número 4 fue acertada y se logró evaluar el método y modelo propuesto al realizar pruebas experimentales de torsión en un MCL, ver fotografías 4.3 y 4.7, utilizando la técnica de extensometría eléctrica.
- Se colocaron tres extensómetros longitudinales en una probeta rectangular de latón para analizar y validar el comportamiento del esfuerzo cortante máximo con lo establecido de forma analítica en cuanto a la distribución y localización del esfuerzo en una figura rectangular; los resultados que arrojaron las mediciones con la extensometría eléctrica indican que los valores en la probeta rectangular de latón son prácticamente los mismos desde el centro hasta los otros dos puntos por lo que se valida lo establecido de forma analítica.

## 6.2 Recomendaciones.

- Se recomienda realizar más pruebas experimentales en un MCL pero con más de tres capas, y si es posible obtener un modelo general que describa éste comportamiento.
- Se sugiere realizar nuevas pruebas de torsión en las vigas de sección transformada en forma de I para determinar las causas experimentales que están provocando errores en los esfuerzos de éstas vigas y por ende en el modelo experimental.
- Se recomienda construir más probetas para probar la repetibilidad de los valores obtenidos y así aumentar la fiabilidad de los resultados.

## Apéndice A. Obtención experimental de las propiedades elásticas de los materiales “La” y “Al”

La caracterización de un material que es sujeto de estudio, es de suma importancia para obtener sus propiedades únicas, ya que éstas varían incluso de un mismo material a otro; esto depende de la calidad y tiempo de los procesos de manufactura que se usan para producirlo.

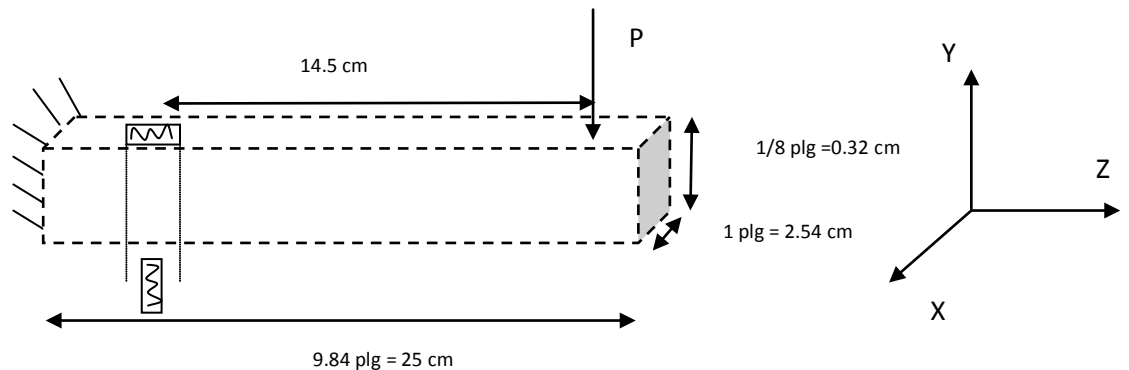
### Objetivo:

1. Determinar:  $\varepsilon_x, \varepsilon_z, \nu, E$ .

### Datos analíticos:

Barra de aluminio.  $E=70$  GPa,  $G=26$  GPa,  $\nu = 0.33$ .

Barra de latón (amarillo).  $E=105$  GPa,  $G=39$  GPa,  $\nu = 0.34$   
G.F.= 2.1



### Introducción.

La prueba de flexión nos ayuda a determinar las deformaciones que sufren una barra en sus ejes longitudinal y transversal. Para ésta prueba se utilizan dos extensómetros en una misma barra pero ubicados de forma diferente en lugares distintos (transversal y longitudinal).

Antes de comenzar la práctica se estableció la forma en la que se utilizaría el equipo P-3500 indicador de deformaciones y se determinó que se conectaría con los cables provenientes de la barra para formar  $\frac{1}{4}$  de puente.



Fig. A1 Equipo P-3500  
Indicador de deformaciones.

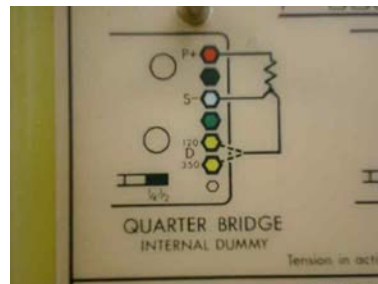


Fig. A2 Diagrama de un cuarto de puente.

Desarrollo de la prueba:

La prueba se desarrollo en una secuencia de pasos que se establecen a continuación:

1. Colocación de extensómetros en la probeta.

- Previo a la prueba de flexión, se utilizó la técnica para pegar los extensómetros en materiales metálicos. Una vez ubicados y pegados los extensómetros, se soldaron las terminales con los cables y se verificó continuidad y la resistencia del circuito.

2. Calibración del indicador de deformaciones.

- Primero se conectan los cables de la probeta con el equipo de medición para posteriormente calibrar el instrumento utilizando las perillas antes de cargarlo; así llevamos a cero cualquier deformación que registre, además se introduce el factor del extensómetro mismo que será utilizado por el equipo para proporcionar las deformaciones correspondientes.

3. Ubicación y carga de la probeta.

- Como la prueba que se realiza es de flexión se necesita ubicar la probeta de tal forma que pueda ser cargada en uno de sus extremos y así provocar flexión en la probeta como se indica en las siguientes figuras.



Fig. A3 Ubicación de la carga para la Prueba de tensión.



Fig. A4 Diferentes cargas en la prueba de tensión.

4. Recolección de lecturas A1.

- Los datos de deformación que se obtuvieron debido a diferentes cargas se muestra a continuación:

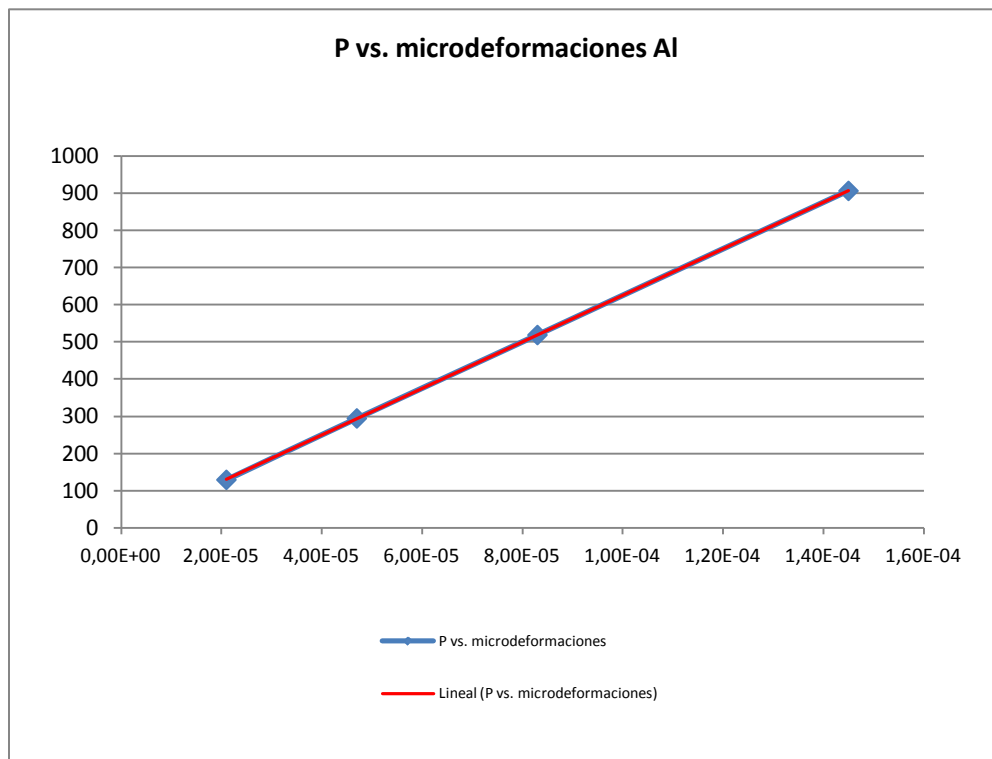
Peso (g)	Peso acumulado (g)	Peso (N)	Micro deformaciones
129.2	129.2	1.2674	21
165.25	294.45	2.8885	47
224.4	518.85	5.0899	83
<b>387.8</b>	<b>906.65</b>	<b>8.8942</b>	145

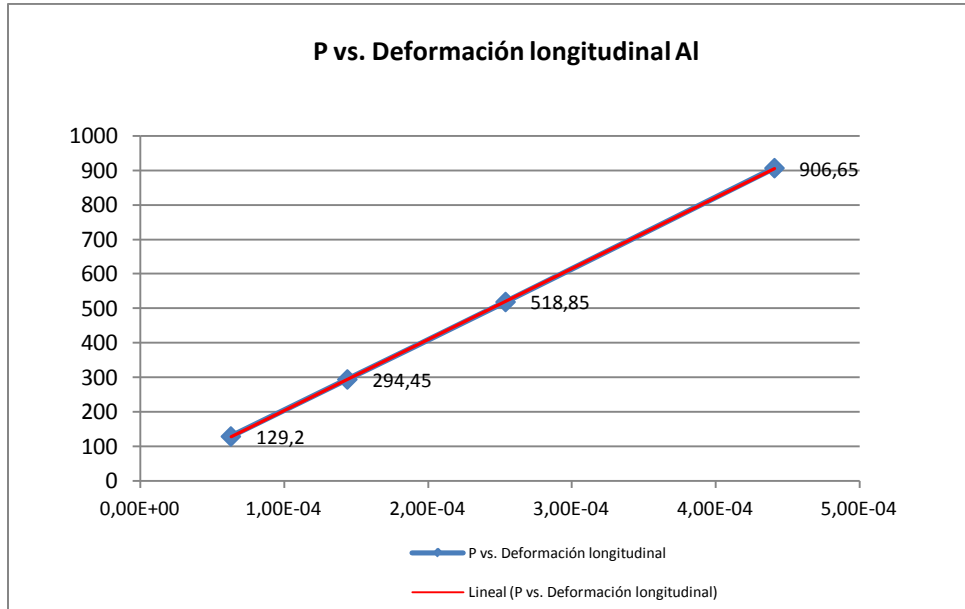
Tabla A1. Lectura de micro deformación para el extensómetro transversal.



<b>Peso (g)</b>	<b>Peso acumulado (g)</b>	<b>Peso (N)</b>	<b>Micro deformaciones</b>
129.2	129.2	1.2674	63
165.25	294.45	2.8885	144
224.4	518.85	5.0899	254
<b>387.8</b>	<b>906.65</b>	<b>8.8942</b>	<b>441</b>

Tabla A2. Lectura de micro deformación para el extensómetro longitudinal.





5. Cálculos Al.

- Deformación lateral  $\varepsilon_x = 145 * 10^{-6} m$
- Deformación longitudinal  $\varepsilon_z = 441 * 10^{-6} m$
- Módulo de Poisson "ν"

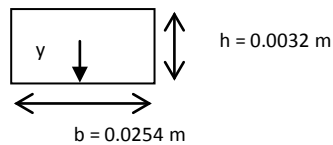
$$\nu = -\frac{\varepsilon_x}{\varepsilon_z} = \frac{def.lateral}{def.long} = \frac{145}{441} = 0.3287$$

- Módulo de elasticidad.

$$\sigma_z = \frac{M_x y}{I}$$

$$y = 1.6 \times 10^{-3} m$$

Sección transversal



$$I = \frac{1}{12} b h^3 = 6.93589 \times 10^{-11} m^4$$

$$M_x = P * L = 8.8942 * 0.145 = 1.2896 Nm$$

$$\sigma_z = \frac{(1.2896 * 1.6 \times 10^{-3})}{6.93589 \times 10^{-11}} = 29.749 MPa$$

$$\sigma_z = \varepsilon_z E$$

$$E = \frac{\sigma_z}{\varepsilon_z} = \frac{29.749 \times 10^6}{441 \times 10^{-6}} = 67.46 GPa$$

**Recolección de lecturas La.**

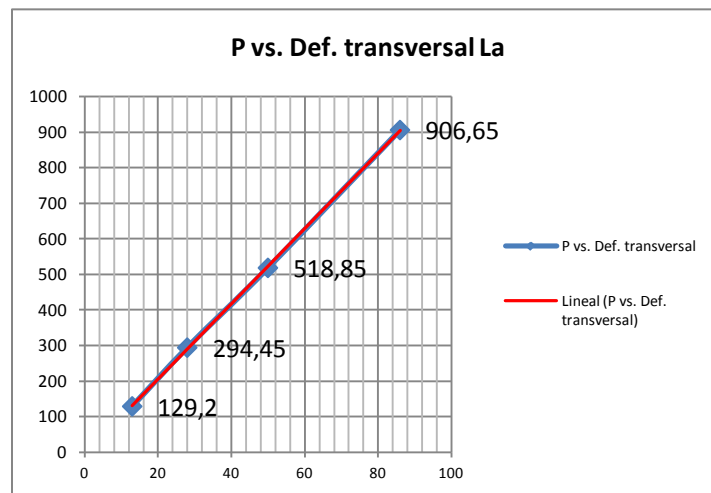
- Los datos de deformación que se obtuvieron debido a diferentes cargas se muestra a continuación:

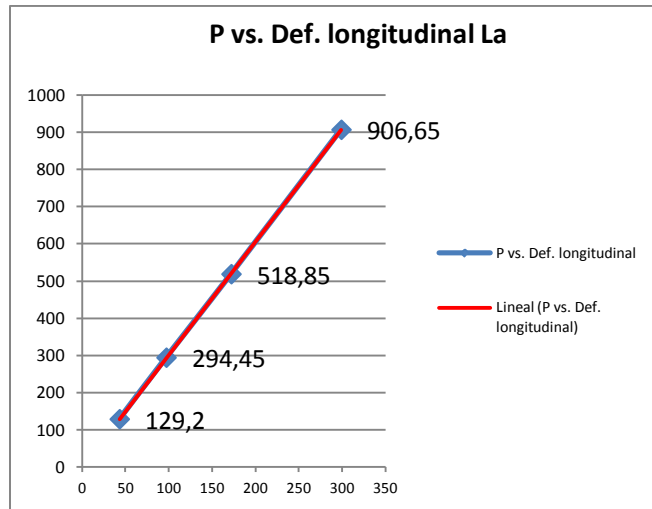
Peso (g)	Peso acumulado (g)	Peso (N)	Micro deformaciones
129.2	129.2	1.2674	13,12
165.25	294.45	2.8885	28,28
224.4	518.85	5.0899	50,50
<b>387.8</b>	<b>906.65</b>	<b>8.8942</b>	<b>86,87</b>

Tabla A3. Lectura de micro deformación para el extensómetro transversal.

Peso (g)	Peso acumulado (g)	Peso (N)	Micro deformaciones
129.2	129.2	1.2674	43,-38
165.25	294.45	2.8885	97,-94
224.4	518.85	5.0899	172,-169
<b>387.8</b>	<b>906.65</b>	<b>8.8942</b>	<b>299,-296</b>

Tabla A4. Lectura de micro deformación para el extensómetro longitudinal.





De graficas

$$\Delta x_1 = 299 - 172 = 127$$

$$\Delta y_1 = 906.65 - 518.85 =$$

$$387.8$$

$$\nu = -\frac{\varepsilon_x}{\varepsilon_z} = \frac{\text{def.lateral}}{\text{def.long}} = \frac{36}{127} = 0.2834$$

$$\Delta x_1 = 86 - 50 = 36$$

$$\Delta y_1 = 906.65 - 518.85 =$$

$$387.8$$

#### 6. Cálculos La.

- Deformación lateral  $\varepsilon_x = 86 * 10^{-6} m$
- Deformación longitudinal  $\varepsilon_z = 299 * 10^{-6} m$
- Módulo de Poisson " $\nu$ "

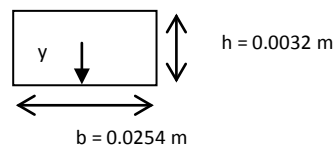
$$\nu = -\frac{\varepsilon_x}{\varepsilon_z} = \frac{\text{def.lateral}}{\text{def.long}} = \frac{87}{296} = 0.2939$$

- Módulo de elasticidad.

$$\sigma_z = \frac{M_x y}{I}$$

$$y = 1.6 \times 10^{-3} m$$

Sección transversal



$$I = \frac{1}{12}bh^3 = 6.93589 \times 10^{-11} m^4$$

$$M_x = P * L = 8.8942 * 0.145 = 1.2896 Nm$$

$$\sigma_z = \frac{(1.2896 * 1.6 \times 10^{-3})}{6.93589 \times 10^{-11}} = 29.749 MPa$$

$$\sigma_z = \varepsilon_z E$$

$$E = \frac{\sigma_z}{\varepsilon_z} = \frac{29.749 \times 10^6}{299 \times 10^{-6}} = 100.5 GPa$$

#### Conclusiones Al.

1. Se obtuvo la deformación longitudinal y lateral que sufre la probeta con un valor determinado de carga; dichas deformaciones son muy importantes ya que con ellas nos permiten calcular esfuerzos, constantes elásticas y relaciones del material. El módulo de poisson obtenido fue de 0.3287 y el de tablas es de 0.33 por lo que el porcentaje de error es de 0.39%. El módulo de elasticidad obtenido fue de 67.46 GPa y el de tablas es de 69 GPa por lo que el porcentaje de error es del 2.23%.

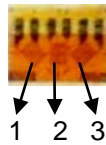
#### Conclusiones La.

2. Se obtuvo la deformación longitudinal y lateral que sufre la probeta con un valor determinado de carga; dichas deformaciones son muy importantes ya que con ellas nos permiten calcular esfuerzos, constantes elásticas y relaciones del material. El módulo de poisson obtenido fue de 0.2939 y el de tablas es de 0.34 por lo que el porcentaje de error es de 13.5%. El módulo de elasticidad obtenido fue de 100.5 GPa y el de tablas es de 105 GPa por lo que el porcentaje de error es del 4.28%.

## Apéndice B. Consideraciones en una prueba experimental.

### Deriva.]

La prueba de deriva consistió en probar cada extensómetro por un periodo de media hora y se verificó que el valor de la deformación no se modifique con un peso determinado, es decir que los valores no cambien drásticamente al paso del tiempo.



**Fig. B1** Roseta de deformación a 45° utilizada en las pruebas de torsión y deriva.

Esta prueba ayuda a identificar si existe algún problema con el extensómetro usado, como por ejemplo: problemas debido a la fabricación, al manejo y pegado del extensómetro.

Prueba de deriva.

Se cargo la probeta del material compuesto “La-Al-La” con una carga de 1323.15 Kg por lo que las rosetas 1, 2, 3 y 4 marcaron las siguientes deformaciones.

<b>Roseta 1 peso = 1323.15 Kg</b>			
	<b>A</b>	<b>B</b>	<b>C</b>
<b>Tiempo</b>	<b>micro deformaciones</b>	<b>micro deformaciones</b>	<b>micro deformaciones</b>
0	150	0	-146
10	155	1	-146
20	157	2	-146.5
30	160	2	-145

<b>Roseta 2 peso = 1323.15 Kg</b>			
	<b>A</b>	<b>B</b>	<b>C</b>
<b>Tiempo</b>	<b>micro deformaciones</b>	<b>micro deformaciones</b>	<b>micro deformaciones</b>
0	148	0	-154
10	154	1	-155
20	158	1	-154
30	160	1	-154

<b>Roseta 3</b> <b>peso = 1323.15 Kg</b>			
	<b>A</b>	<b>B</b>	<b>C</b>
<b>Tiempo</b>	<b>micro</b>	<b>micro</b>	<b>micro</b>
	<b>deformaciones</b>	<b>deformaciones</b>	<b>deformaciones</b>
0	144	0	-150
10	145	1	-151
20	144	1	-142
30	145	1	-142

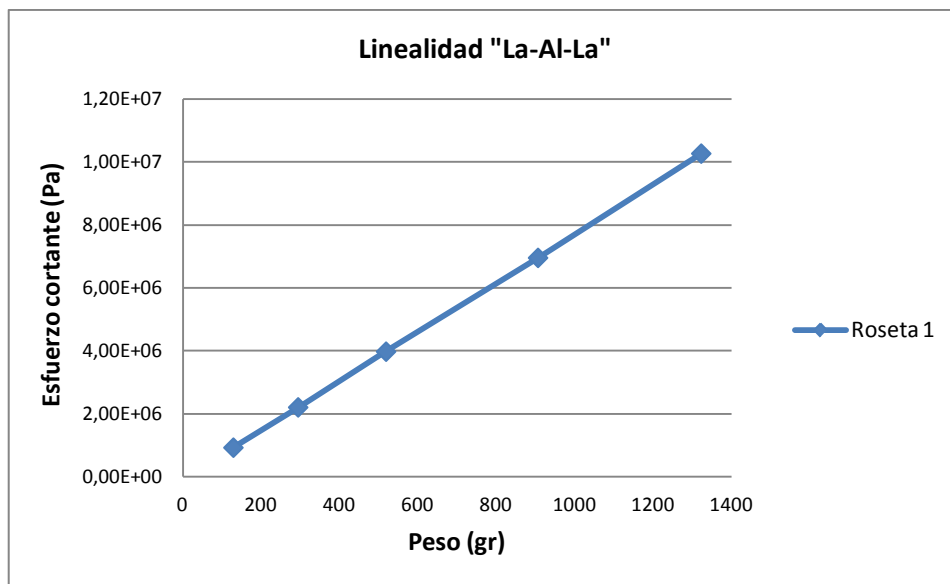
<b>Roseta 4</b> <b>peso = 1323.15 Kg</b>			
	<b>A</b>	<b>B</b>	<b>C</b>
<b>Tiempo</b>	<b>micro</b>	<b>micro</b>	<b>micro</b>
	<b>deformaciones</b>	<b>deformaciones</b>	<b>deformaciones</b>
0	135	0	-149
10	137	1	-150
20	137.5	1	-150
30	138	2	-150.5

**Tabla B1** Lecturas obtenidas en las cuatro rosetas para la prueba de deriva en la probeta del material compuesto "La-Al-La".

Las lecturas de deformaciones en las cuatro rosetas no muestran alguna tendencia de deriva, es decir que con el paso del tiempo las lecturas de deformación no cambian abruptamente y se consideran confiables.

### **Linealidad.**

La linealidad muestra la forma en que se comporta el esfuerzo cortante a diferentes cargas. Esta prueba se verificó graficando los valores en las diferentes pruebas realizadas en probetas. La linealidad de las pruebas se puede verificar en las gráficas para este fin y ésta se cumple en todas las pruebas.



**Fig. B2** Linealidad en la probeta de material compuesto “La-Al-La” medida por una roseta de deformación colocado en el centro de la probeta.

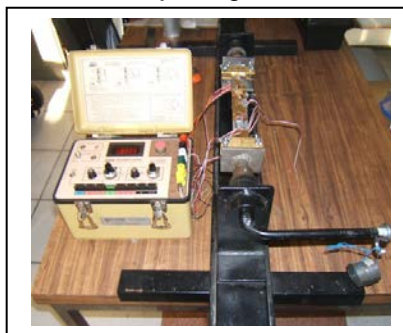
### Repetibilidad.

Para esta prueba se debe de verificar que el valor de las deformaciones sea el mismo, y que conserva las mismas condiciones de frontera y carga realizada en diferentes intervalos de tiempo; por lo que se realizó la prueba de repetibilidad colocando un peso determinado para calcular el efecto de torsión, el cual indicó un valor de deformación para posteriormente colocar la misma carga en otra prueba realizada en un intervalo de tiempo diferente y así verificar si el valor de deformación es el mismo, esto es la repetibilidad.

El valor de la repetibilidad es un dato aproximado debido a que para simular las cargas en las mismas condiciones en que se realizó la primera medición se requiere de instrumentos y equipo de precisión.

### Alineación de probetas.

Las probetas a analizar se marcaron con sus ejes longitudinales con la finalidad de que estuvieran centradas, y que coincidieran con el eje longitudinal de las mordazas para así obtener un torque uniforme.



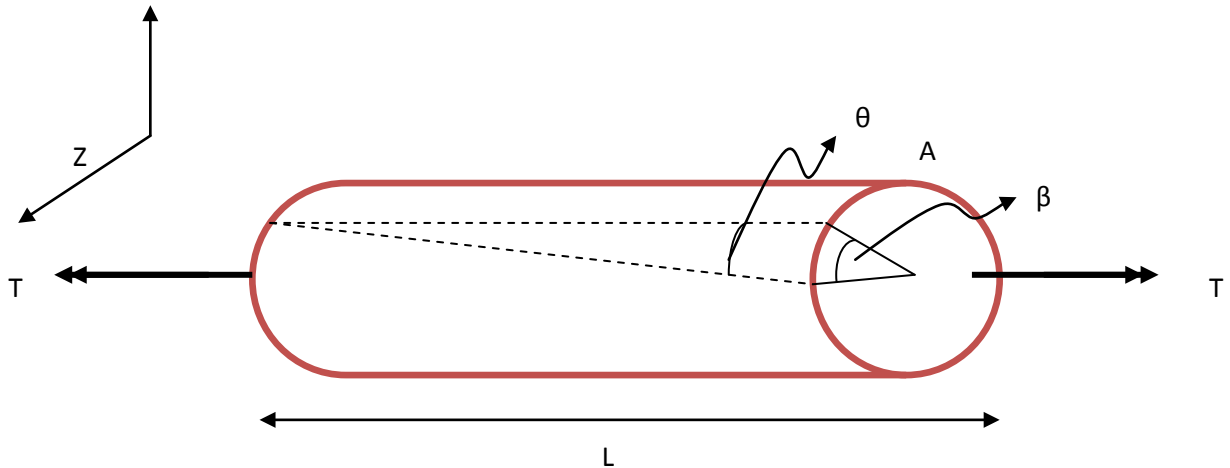
**Fig. B3** Alineación y centrado del material compuesto “La-Al-La”.



Para evitar un error debido a la colocación de las cargas, se realizó una pequeña perforación en el brazo de la palanca del banco de pruebas, para obtener la misma distancia del punto de aplicación de la carga entre prueba y prueba; sin embargo también se requirió de nivelar el brazo de palanca antes de realizar cada prueba, por lo que se utilizó una herramienta tipo nivel para lograr este objetivo. Al realizar estas consideraciones antes de cada prueba, se obtienen lecturas más exactas con la carga puntual actuando en el punto de aplicación, se reduce de esta manera al mínimo los errores. Para cada prueba, se niveló el brazo de palanca (horizontalmente) para utilizar la carga máxima a una distancia de 18 cm. Cabe mencionar que para la obtención de lecturas se utilizó el equipo conocido como indicador de deformaciones.

### Apéndice C. Torsión en elementos circulares.

Para poder determinar la torsión que sucede en elementos circulares, se utiliza una barra circular que se somete a torsión con una sección transversal "A" y longitud "L"; dicha barra está hecha de un material isotrópico y también se considera linealmente elástico.



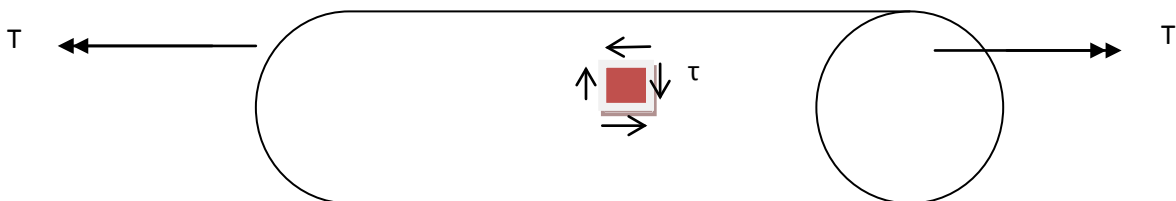
El torque al que está sometido causa que la sección transversal rote como un cuerpo rígido alrededor del eje \$z\$; este eje es llamado el eje de giro. Si medimos el ángulo de rotación \$\beta\$ de cada sección relativa al plano \$z=0\$, la rotación de \$\beta\$ de una sección dada dependerá de su distancia desde el plano \$z=0\$. Para deformaciones pequeñas y siguiendo el principio de Saint-Venant, asumimos que la cantidad de rotación de una sección dada depende linealmente de su distancia \$z\$ desde el plano \$z=0\$, por lo tanto:

$$\beta = \theta x$$

\$\beta\$ = Ángulo de rotación.

\$\theta\$ = Ángulo de torsión por unidad de longitud.

Y si nos imaginamos un pequeño elemento que se encuentra en la sección transversal de la barra, podemos ver que este elemento se encuentra sometido a esfuerzos.



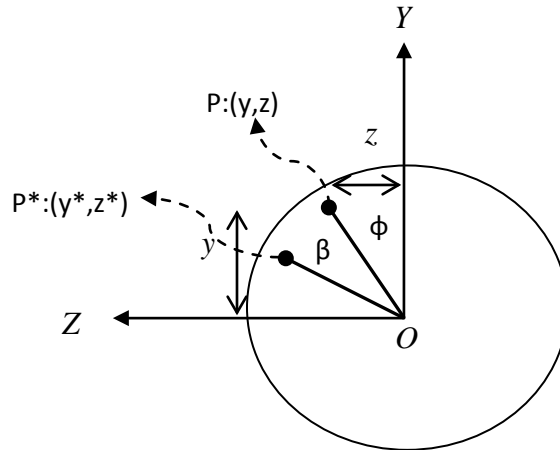
Estos esfuerzos se determinarán a continuación, y considerando la hipótesis siguiente:

**Hipótesis:** Caras planas antes de la deformación, permanecen planas después de la misma.

Por la hipótesis anterior, el desplazamiento en el eje x “u” es igual a cero.

$$u(y, z) = 0$$

Y los desplazamientos en el eje y “v” y z “w” están determinados por:



$$v(y, z) = Y^* - Y = \overline{OP} [\cos(\beta + \phi) - \cos \phi]$$

$$w(y, z) = Z^* - Z = \overline{OP} [\sin(\beta + \phi) - \sin \phi]$$

Por identidades:

$$\cos(\beta + \phi) = \cos \beta \cos \phi + \sin \beta \sin \phi$$

$$\sin(\beta + \phi) = \sin \beta \cos \phi + \cos \beta \sin \phi$$

Y sabiendo que los desplazamientos son muy pequeños, obtenemos que el  $\sin \beta = \beta$ ;  $\cos \beta = 1$  con la restricción de que  $x=0$ .

Por lo que:

$$v(y, z) = Y^* - Y = \overline{OP} [\cos \phi - \beta \sin \phi - \cos \phi] = \overline{OP} (-\beta \sin \phi)$$

$$w(y, z) = Z^* - Z = \overline{OP} [\beta \cos \phi + \sin \phi - \sin \phi] = \overline{OP} (\beta \cos \phi)$$

Y de la figura anterior notamos que:

$$\cos \phi = \frac{z}{\overline{OP}}$$

$$\sin \phi = \frac{y}{\overline{OP}}$$

Posteriormente obtenemos:

$$\begin{aligned} v(y, z) &= \beta z; -\theta x z \\ w(y, z) &= \beta y; y \theta x \end{aligned} \quad \text{En desplazamientos.}$$

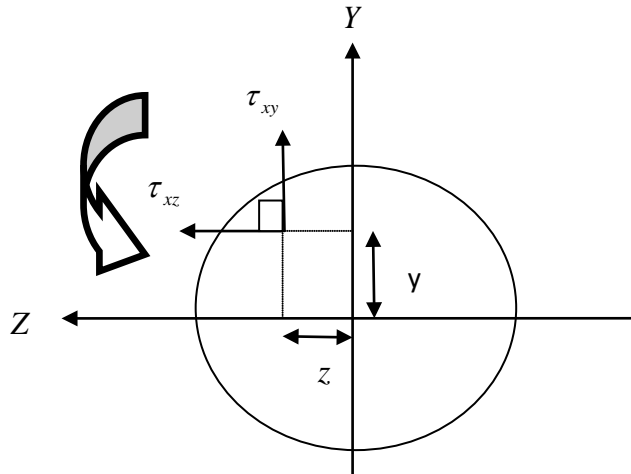
De las ecuaciones  $\epsilon_{ij} - U_i$ , que se obtienen del análisis del problema plano.

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} = 0; \epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = 0; \epsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = 0; \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = -z\theta; \gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = y\theta; \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = 0; \end{aligned}$$

De las ecuaciones constitutivas.

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \sigma_y = \sigma_z = 0 \\ \tau_{xy} &= \gamma_{xy} G = -z\theta G \\ \tau_{xz} &= \gamma_{xz} G = y\theta G \\ \tau_{yz} &= \gamma_{yz} G = 0 \end{aligned}$$

Representándolo en un punto.



$$\begin{aligned} -\int \Sigma M_x &= T \\ -\int \tau_{xy} z dA + \int y \tau_{xz} dA &= T \\ G\theta \int z^2 dA + G\theta \int y^2 dA &= T \\ G\theta \int (z^2 + y^2) dA &= T \\ (z^2 + y^2) &= J \text{ (Momento Polar de inercia)} \\ T &= G\theta J; \theta = \frac{T}{GJ} \end{aligned}$$

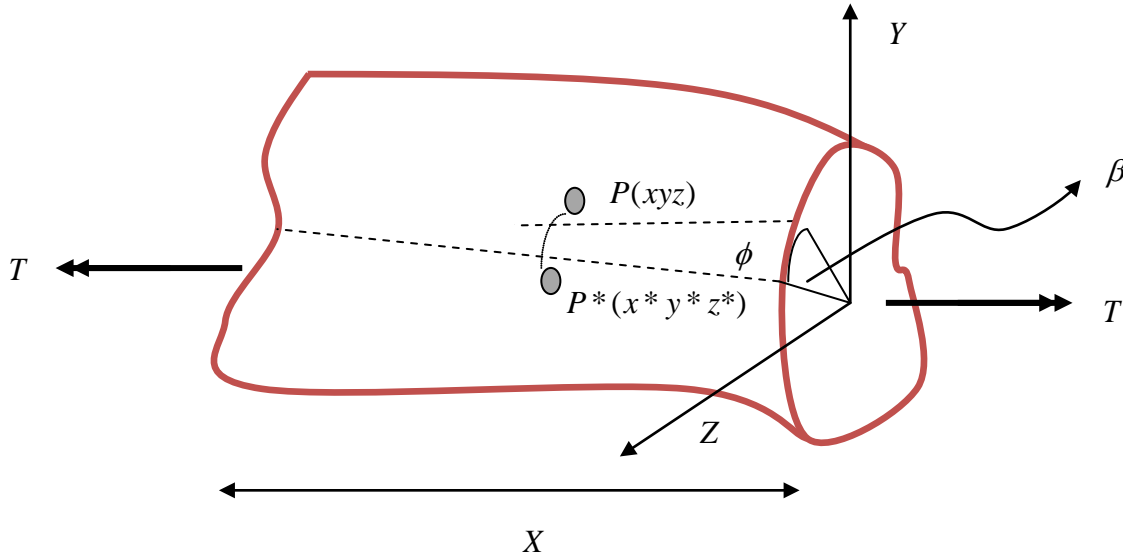
Sustituyendo en los desplazamientos y en las deformaciones.

$$\tau_{\max} = \sqrt{(\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2)} = \theta G \sqrt{(z^2 + y^2)} = \theta G r \Rightarrow \frac{T G r_p}{G J} = \frac{T r_p}{J}$$

Con esta ecuación se observa que el cortante máximo depende del torque y del radio de la sección circular.

### Apéndice D. Solución general al problema de Torsión.

Ahora se considera el problema de torsión pero para una sección transversal no circular, donde los desplazamientos en x "u" son diferentes de cero.



$$u(y, z) \neq 0$$

$$v(y, z) = Y^* - Y = \overline{OP} [\text{Cos}(\beta + \phi) - \text{Cos}\phi]$$

$$w(y, z) = Z^* - Z = \overline{OP} [\text{Sen}(\beta + \phi) - \text{Sen}\phi]$$

Por identidades trigonométricas.

$$u(y, z) \neq 0$$

$$v(y, z) = \overline{OP} [\text{Cos}\beta\text{Cos}\phi - \text{Sen}\beta\text{Sen}\phi - \text{Cos}\phi]$$

$$w(y, z) = \overline{OP} [\text{Sen}\beta\text{Cos}\phi + \text{Sen}\phi\text{Cos}\beta - \text{Sen}\phi]$$

Y de igual forma que en el problema de torsión en barras circulares, los desplazamientos son muy pequeños por lo tanto podemos considerar al  $\text{Cos}\beta = 1$ ,  $\text{Sen}\beta = \beta$ .

$$u(y, z) \neq 0$$

$$v(y, z) = \overline{OP} [\text{Cos}\phi - \beta\text{Sen}\phi - \text{Cos}\phi]$$

$$w(y, z) = \overline{OP} [\beta\text{Cos}\phi + \text{Sen}\phi - \text{Sen}\phi]$$

Tenemos que  $\overline{OP} = \overline{OP}^*$

$$u \neq 0$$

$$v = \beta z = -\theta x z$$

$$w = y\beta = y\theta x$$

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = 0; \epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = 0; \epsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = 0;$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} - z\theta;$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial z} + y\theta;$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = -\theta x + \theta x = 0;$$

Con las ecuaciones constitutivas, las deformaciones normales son:

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = 0$$

$$\tau_{xy} = \gamma_{xy} G = G \left[ \frac{\partial u}{\partial y} - \theta z \right] \dots\dots\dots 1$$

$$\tau_{xz} = \gamma_{xz} G = G \left[ \frac{\partial u}{\partial z} + \theta y \right] \dots\dots\dots 2$$

$$\tau_{yz} = \gamma_{yz} G = 0$$

Por las ecuaciones de equilibrio podemos observar que las ecuaciones se cumplen en la frontera y en todos los puntos de estudio; posteriormente si se desprecian las fuerzas de campo y como los esfuerzos son cero obtenemos la siguiente ecuación:

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0$$

Derivando la ecuación 1 con respecto de z y la ecuación 2 con respecto de y.

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial z} = G \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} - \theta \right]$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial y} = G \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} - \theta \right]$$

Para posteriormente restar la ecuación 2 a 1 obtenemos:

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial y} = G \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} - \theta - \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} - \theta \right]$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial y} = -2\theta G \dots\dots\dots 3$$

La ecuación a la que se llega es la ecuación de compatibilidad en términos de esfuerzo para el problema general de torsión para analizar cualquier punto del miembro sometido a torsión.

Para miembros de torsión hechos de material isotrópico, las relaciones de esfuerzo-deformación para cualquier condición elástica o inelástica indican que

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \tau_{yz} = 0$$

Las componentes de esfuerzo  $\tau_{xz}$  y  $\tau_{xy}$  son diferentes de cero. Si consideramos las fuerzas de cuerpo y aceleraciones como términos despreciables,

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial z} + B_x = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial z} + B_y = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + B_z = 0$$

Estas componentes de esfuerzo pueden ser substituidas dentro de las ecuaciones de equilibrio para obtener las ecuaciones de equilibrio para el miembro de torsión en estudio y obtenemos.

$$\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} = 0$$

Las ecuaciones anteriores indican que  $\tau_{xy} = \tau_{yx}$  y  $\tau_{zx} = \tau_{xz}$  son independientes de x. por lo que las componentes de esfuerzo deben satisfacer las ecuaciones anteriores con lo cual se expresa una condición necesaria y suficiente para la existencia de una función de esfuerzo  $\Phi(x,y)$  "Prandtl" tal que:

$$\tau_{xy} = \frac{\partial \phi}{\partial z} = G\gamma_{xy}$$

$$\tau_{zx} = -\frac{\partial \phi}{\partial y} = G\gamma_{zy} \dots\dots\dots 4$$



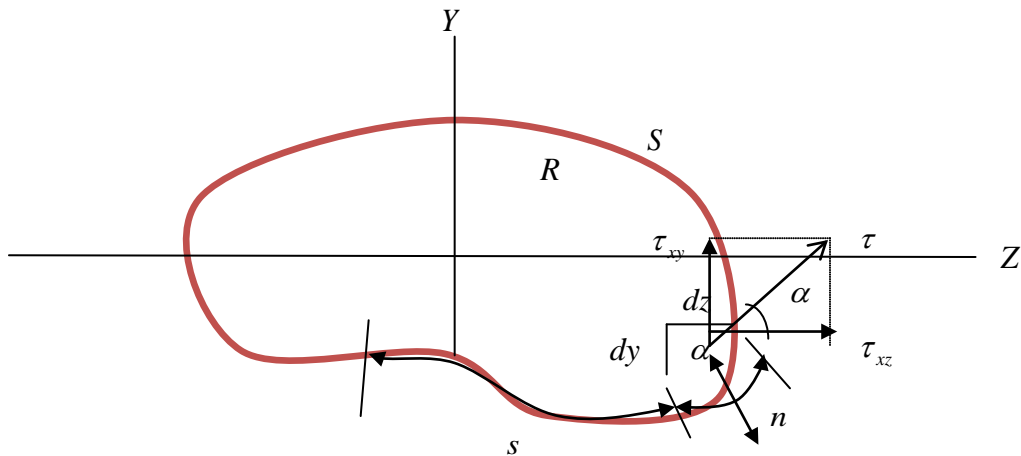
Por lo que, el problema de torsión se ha transformado en la determinación de una función de esfuerzo  $\Phi$ .

Y la ecuación 3 se puede representar de la siguiente forma:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = -2\theta G;$$

Esta ecuación sirve para determinar únicamente la función de Prandtl  $\Phi(z,y)$  esto siempre y cuando el ángulo de giro  $\theta$  sea especificado para un miembro sometido a torsión y  $\Phi$  satisfaga las condiciones de frontera.

**Condiciones de frontera:**



La superficie lateral de un miembro de torsión se considera como libre de esfuerzo aplicado, la resultante de esfuerzo cortante en la sección transversal del miembro de torsión, sobre la superficie S de la sección transversal, debe ser tangente a la superficie. Las dos componentes del esfuerzo cortante  $\tau_{xy}$  y  $\tau_{zx}$  que actúan en la sección transversal del elemento con lados  $(dy, dz$  y  $ds)$ , se pueden escribir en términos del cortante en la forma:

$$\tau_{xy} = \tau \cos \alpha$$

$$\tau_{zx} = \tau \text{sen} \alpha$$

Y en la figura anterior se muestra que:

$$\cos \alpha = \frac{dy}{ds}$$

$$\text{sen} \alpha = \frac{dz}{ds}$$

Se puede apreciar que la componente del cortante en la dirección de la normal “n” a la superficie S es cero, las proyecciones de  $\tau_{xz}$  y  $\tau_{xy}$  en la dirección normal con las ecuaciones anteriores tienden a:

$$\tau_{xz} \cos \alpha - \tau_{xy} \operatorname{sen} \alpha = 0$$

$$\tau_{xz} \frac{dy}{ds} - \tau_{xy} \frac{dz}{ds} = 0 \dots \dots \dots 5$$

Sustituyendo la ecuación 4 en 5 encontramos:

$$\frac{d\phi}{dz} \frac{dz}{ds} + \frac{d\phi}{dy} \frac{dy}{ds} = \frac{d\phi}{ds} = 0 = \tau_{xy} \frac{dz}{ds} + \tau_{xz} \frac{dy}{ds}$$

ó

$\phi =$  constante sobre la frontera S.

Y debido a que los esfuerzos están dados por derivadas parciales de  $\phi$ , podemos tomar esta constante como cero; por lo tanto.

$\phi = 0$  sobre la frontera S.

El argumento precedente puede ser usado para mostrar que el esfuerzo cortante en cualquier punto de la sección transversal se encuentra en dirección al contorno de  $\phi =$  constante a través del punto.

$$\tau = \sqrt{\tau_{xz}^2 + \tau_{xy}^2}$$

La distribución de los esfuerzos  $\tau_{xz}$  y  $\tau_{xy}$  sobre una sección transversal dada deben satisfacer las siguientes ecuaciones:

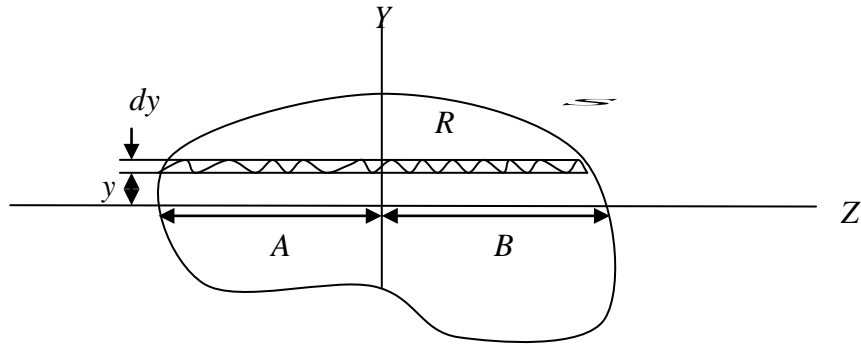
$$\Sigma F_x = 0 = \int \tau_{xz} dz dy = \int \frac{\partial \phi}{\partial y} dz dy$$

$$\Sigma F_y = 0 = \int \tau_{xy} dz dy = - \int \frac{\partial \phi}{\partial z} dz dy$$

$$\Sigma M_x = T = \int (z \tau_{xy} - y \tau_{xz}) dz dy$$

$$= \int \left( z \frac{\partial \phi}{\partial z} + y \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) dz dy$$

Para poder satisfacer las condiciones de equilibrio de las ecuaciones anteriores, consideraremos una tira muy delgada a través de la sección transversal, de un espesor “dy” como se indica en la siguiente figura:



Debido a que la función de esfuerzo no varía en la dirección y para la tira delgada, las derivadas parciales pueden ser reemplazadas por derivadas totales y obtenemos de la sumatoria de fuerzas en “y” lo siguiente:

$$\begin{aligned}\Sigma F_y = 0 &= -\int \frac{\partial \phi}{\partial z} dz dy = dy \int \frac{\partial \phi}{\partial z} dz = dy \int_{\phi(A)}^{\phi(B)} d\phi \\ &= dy[\phi(B) - \phi(A)] = 0\end{aligned}$$

La ecuación anterior se obtiene, debido a que  $\phi$  es cero en la frontera de la superficie y podemos decir que lo mismo es cierto para la línea pequeña por lo que las sumatorias de fuerzas en “X” y “Y”, se satisfacen.

Ahora consideremos el primer término del momento:

$$-\int z \frac{\partial \phi}{\partial z} dz dy$$

Que se convierte para la tira en:

$$-dy \int z \frac{\partial \phi}{\partial z} dz = -dy \int_{\phi(A)}^{\phi(B)} z d\phi$$

Evaluando la integral por partes y notando que  $\phi(B) = \phi(A) = 0$ , obtenemos;

$$-dy \int_{\phi(A)}^{\phi(B)} z d\phi = -dy(z\phi_A^B - \int_{z_A}^{z_B} \phi dz) = dy \int_{z_A}^{z_B} \phi dz$$

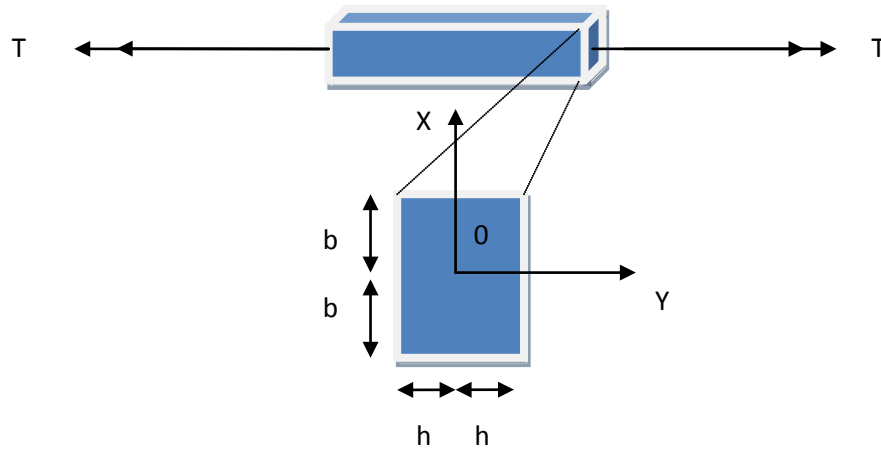
Y si ahora le sumamos la otra parte del momento pero consideramos una tira de espesor igual a “dz” obtenemos la siguiente ecuación:

$$T = 2 \iint \phi dz dy$$

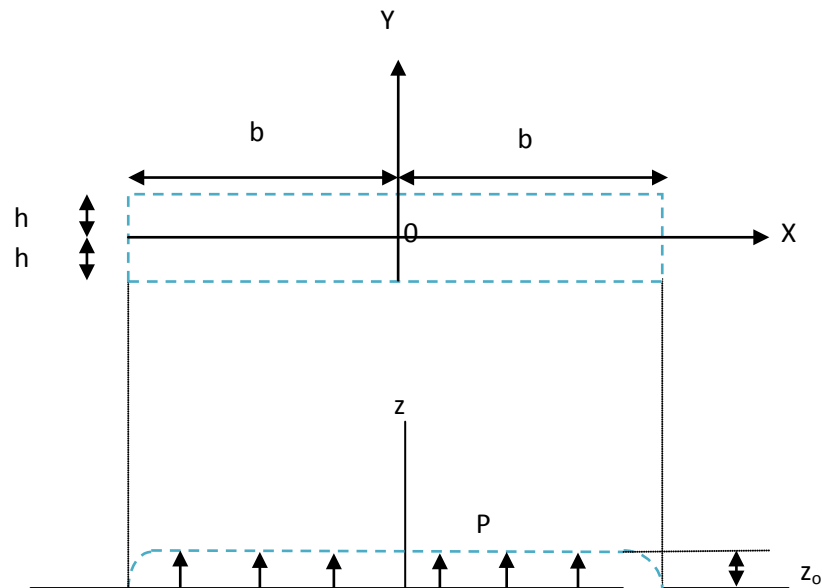
La función de esfuerzo  $\Phi$  puede ser considerada para representar una superficie sobre la sección transversal del miembro sometido a torsión. Esta superficie está en contacto con la frontera de la sección transversal. La ecuación anterior indica que el torque es igual a dos veces el volumen entre la función de esfuerzo  $\Phi$  y el plano de la sección transversal.

### Apéndice E. Torsión en secciones rectangulares estrechas.

Considere una barra sujeta a torsión, cuya sección transversal de la barra debe ser un rectángulo sólido con un ancho  $2h$  y un largo  $2b$ , donde  $b \gg h$ .



La membrana de Prandtl que se le asocia es:



Excepto para la región cerca de  $x = \pm b$ , la deflexión de la membrana es aproximadamente independiente de  $x$ . Por lo que si asumimos que la deflexión de la membrana es independiente de  $x$  y parabólica con respecto de  $y$ , la ecuación del desplazamiento de la membrana es:

$$z = z_0 \left[ 1 - \left( \frac{y}{h} \right)^2 \right]$$

Donde  $z_0$  es la máxima deflexión de la membrana. La ecuación anterior satisface la condición de que  $z=0$  en las fronteras donde  $y=\pm h$ . Por lo que podemos utilizar la analogía de la membrana de Prandtl para obtener una solución.

$$\frac{d^2 z}{dx^2} + \frac{d^2 z}{dy^2} = -\frac{P}{S}$$

$$z = c\phi, \frac{P}{S} = c2G\theta$$

$$\frac{z}{P} = \frac{\phi}{2G\theta};$$

$$\frac{z}{S} = \frac{2G\theta S}{P} z$$

Por lo que si derivamos dos veces la ecuación del desplazamiento de la membrana con respecto al término  $\frac{d^2 z}{dy^2}$  obtenemos,

$$z = z_0 \left[ 1 - \left( \frac{y}{h} \right)^2 \right]$$

$$z = z_0 - z_0 \left( \frac{y}{h} \right)^2$$

$$\frac{d^2 z}{dy^2} = \frac{d^2}{dy^2} \left( -z_0 \left( \frac{y}{h} \right)^2 \right) = \frac{-z_0 y^2}{h^2} = \frac{-2z_0}{h^2} y = \frac{-2z_0}{h^2}$$

Por lo anterior la ecuación de la membrana de Prandtl para éste caso en particular queda como:

$$\frac{d^2 z}{dx^2} + \frac{d^2 z}{dy^2} = -\frac{2z_0}{h^2} \text{ Donde:}$$

$$-\frac{2z_0}{h^2} = -2cG\theta = -\frac{P}{S}$$

$$\phi = \frac{2zSG\theta}{P} = \frac{2zG\theta h^2}{2z_0} = \frac{zG\theta h^2}{z_0} = \frac{G\theta h^2}{z_0} \left[ z_0 \left( 1 - \left( \frac{y}{h} \right)^2 \right) \right] = G\theta h^2 \left[ 1 - \left( \frac{y}{h} \right)^2 \right]$$

De las ecuaciones esfuerzo-deformación encontramos que:

$$\sigma_{zx} = \frac{\partial \phi}{\partial y}; \sigma_{zy} = -\frac{\partial \phi}{\partial x} = 0 \text{ por lo que si derivamos la función de prandtl } \Phi, \text{ obtenemos:}$$

$$\sigma_{zx} = \frac{\partial}{\partial y} \left( G\theta h^2 \left[ 1 - \left( \frac{y}{h} \right)^2 \right] \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left( G\theta h^2 \left[ 1 - \frac{y^2}{h^2} \right] \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left( G\theta h^2 - \frac{G\theta h^2 y^2}{h^2} \right) = \frac{\partial}{\partial y} (G\theta h^2 - G\theta y^2 = -2G\theta y)$$

vemos que el valor máximo se obtiene cuando  $y=h$  por lo que :

$$\tau_{\max} = 2G\theta h \quad \text{y si el torque es:}$$

$T = 2 \iint \phi dx dy$  e integrando en el ancho  $(-h, h)$  y largo  $(-b, b)$  de la sección transversal obtenemos:

$$T = 2 \int_{-b}^b \int_{-h}^h \phi dx dy$$

$$T = 2 \int_{-b}^b \int_{-h}^h (G\theta h^2 - G\theta y^2) dx dy = \frac{1}{3} G\theta (2b)(2h)^3 = GJ\theta$$

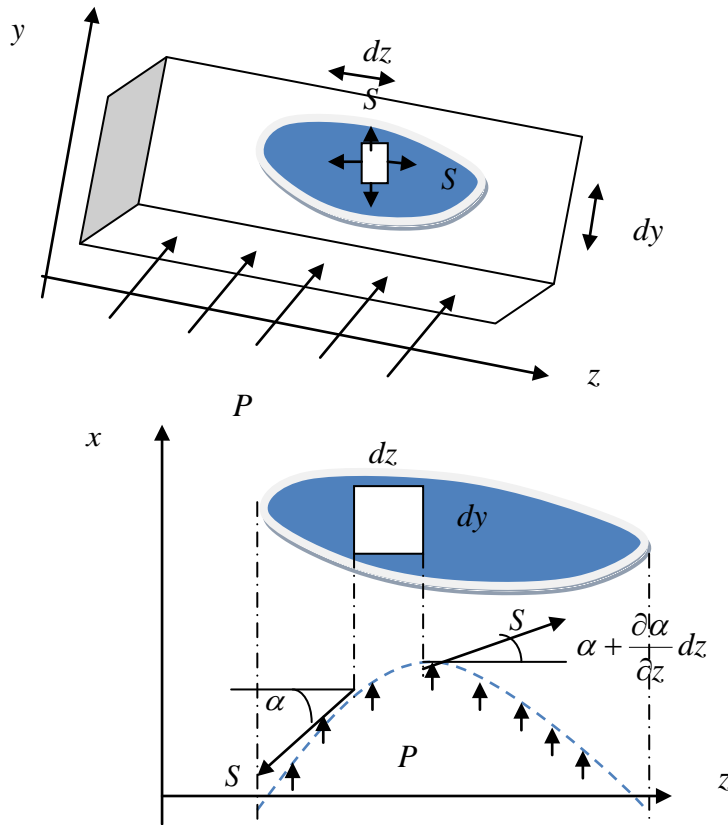
$$J = \frac{1}{3} (2b)(2h)^3; \frac{T}{J} = G\theta$$

$$\tau_{\max} = 2G\theta h = \frac{2Th}{J} = \frac{6Th}{2b2h^3} = \frac{6Th}{2b2h2h2h} = \frac{3T}{2b2h^2}$$

## Apéndice F. Analogía de la membrana de Prandtl

El método de la analogía de la membrana de Prandtl soluciona el problema de torsión propuesta por Prandtl (1903). El método está basado en la similitud de las ecuaciones de equilibrio para una membrana sujeta a presión lateral y la ecuación de torsión (función de esfuerzo  $\Phi$ ).

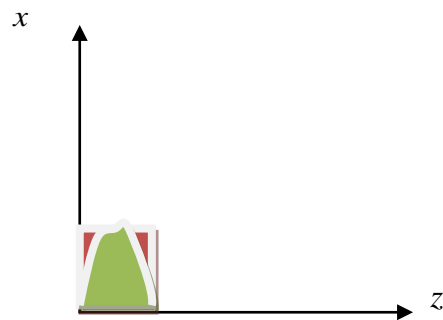
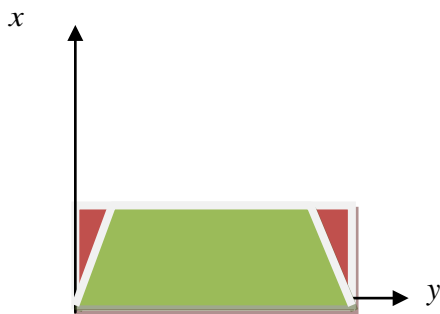
Se considera un plano abierto  $(z,y)$  que tiene la misma forma que la sección transversal de la barra que se está investigando. Si cubrimos la abertura con una membrana elástica y homogénea y posteriormente aplicamos presión a una de sus lado, la presión causará que la membrana sobresalga del plano  $(z,y)$  formando una superficie curva. Si la presión es pequeña, el ángulo de la membrana también lo será. Entonces el desplazamiento lateral  $x(z,y)$  de la membrana y la función de esfuerzo  $\Phi(z,y)$  satisfacen la misma ecuación en  $(z,y)$ . por lo tanto, el desplazamiento de la membrana en la dirección  $x(z,y)$  es matemáticamente equivalente a la función de esfuerzo  $\Phi(z,y)$ , proporcionando que  $x(z,y)$  y  $\Phi(z,y)$  satisfacen las mismas condiciones de frontera. Esta condición requiere que la forma de la frontera de la membrana sea idéntica a la forma de la frontera de la sección transversal de la pieza en torsión.



$$\frac{d^2\phi}{dz^2} + \frac{d^2\phi}{dy^2} = -2G\theta$$

$$\frac{d^2x}{dz^2} + \frac{d^2x}{dy^2} = -\frac{P}{S}$$

Membrana	Torsión General
x	$\Phi$
P	$2\theta$
$S^{-1}$	G
2 veces el volumen de la membrana	T
$-\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$	$\tau_{zy}, \tau_{zx}$



Supongamos que se desprecia  $\frac{dx}{dy}$  de la ecuación de la membrana por lo que tenemos:

$$\frac{d^2x}{dz^2} = -\frac{P}{S}$$



Integrando.

$$\int \frac{d^2x}{dz^2} = -\frac{Pz}{S} + C1 = \frac{dx}{dz}$$

Analizando para encontrar el valor de la constante C1, para z=0.

$$\frac{dx}{dz} = 0, \text{ por lo tanto } C1=0.$$

$$x = -\frac{Pz^2}{2S} + C2$$

En z=+, - t/2, x=0.

P=0, por lo tanto C2=0.

$$x = -\frac{Pz^2}{2S} \longrightarrow \phi = -2\theta$$

$$\phi = -\theta z^2 G$$

Y los esfuerzos máximos son:

$$\tau_{xy} = -\frac{Pz}{2S}$$

$$\tau_{xz} = 0$$

## Apéndice G. Método de la sección transformada.

El método de la sección transformada es un procedimiento alternativo para analizar los esfuerzos de flexión en una viga compuesta. Éste método es válido solo para materiales elástico lineales aunque el método no reduce la cantidad de trabajo, muchos ingenieros los consideran una manera conveniente de visualizar y organizar los cálculos.

El método consiste en transformar la sección transversal de una viga compuesta en una sección transversal equivalente de una viga imaginaria compuesta de un solo material. Esta nueva sección transversal se llama **sección transformada**. La viga imaginaria con la sección transformada se analiza entonces de la manera usual para vigas de un solo material. Como paso final, los esfuerzos en la viga transformada se convierten en los de la viga original.

### Eje neutro y sección transformada.

Para que la viga transformada sea equivalente a la viga original, su eje neutro debe localizarse en el mismo lugar y su capacidad de momento resistente también debe ser la misma. Para mostrar cómo se satisfacen esos dos requisitos, consideremos de nuevo una viga compuesta de dos materiales. El **eje neutro** de la sección transversal se obtiene de la ecuación siguiente:

$$E_1 \int_1 y dA + E_2 \int_2 y dA = 0$$

G1

En esta ecuación, las integrales representan los momentos estáticos de ambas partes de la sección transversal con respecto al eje neutro.

Introduzcamos ahora la notación

$$n = \frac{E_2}{E_1}$$

G2

Donde  $n$  es la **razón modular**. Con esta notación podemos escribir la ecuación:

$$\int_1 y dA + \int_2 yn dA = 0$$

G3

La ecuación anterior muestra que el eje neutro no cambia si cada elemento de área  $dA$  en el material 2 se multiplica por el factor  $n$ , siempre que la coordenada  $y$  de cada uno de tales elementos de área no cambie.

Por tanto, podemos crear una nueva sección transversal que consista en dos partes: 1) el área 1 con sus dimensiones sin cambio, y 2) el área 2 con su ancho (es decir, la dimensión paralela al eje neutro) multiplicado por  $n$ .

Su eje neutro está en la misma posición que el eje neutro de la viga original (nótese que todas las dimensiones perpendiculares al eje neutro permanecen iguales).

Como el esfuerzo en el material (para una deformación unitaria dada) es proporcional al módulo de elasticidad ( $\sigma = E\epsilon$ ), vemos que multiplicar el ancho del material 2 por  $n = E_2/E_1$  equivale a transformarlo en el material 1. Por ejemplo, supongamos que  $n = 10$ , entonces el área de la parte 2 de la sección transversal es ahora 10 veces más ancha que antes. Si imaginamos que esa parte de la viga es ahora del material 1, vemos que tomará la misma fuerza anterior porque su módulo se ha reducido un factor de 10 (de  $E_2$  a  $E_1$ ), al mismo tiempo que su área se ha incrementado un factor de 10. La nueva sección (la sección transformada) consiste ahora sólo de material 1.

### Esfuerzos Normales

Como la viga transformada sólo es de un material, los esfuerzos normales (o esfuerzos de flexión) pueden encontrarse a partir de la fórmula de la flexión. Así, los esfuerzos normales en la viga transformada en material 1 son:

$$\sigma_{x1} = -\frac{M_y}{I_T}$$

G4

Donde  $I_t$  es el momento de inercia de la sección transformada con respecto al eje neutro. Sustituimos en esta ecuación y podemos calcular los esfuerzos en cualquier punto de la viga transformada. (Como se explica más adelante, los esfuerzos de la viga transformada concuerdan con los de la viga original hecha del material 1; sin embargo, en la parte de la viga original hecha del material 2, los esfuerzos son diferentes a los de la viga transformada).

El momento de inercia de la sección transformada se vincula con el momento de inercia de la sección original por la relación siguiente:

$$I_T = I_1 + nI_2 = I_1 + \frac{E_2}{E_1} I_2$$

G5

Al sustituir esta expresión por  $I_t$  en la ecuación (G4) resulta:

$$\sigma_{x1} = -\frac{M_y E_1}{E_1 I_1 + E_2 I_2}$$

G6

Lo que demuestra que los esfuerzos en el material 1 en la viga original son los mismo esfuerzos que en la parte correspondiente de la viga transformada.

Como ya se mencionó, los esfuerzos en el material 2 en la viga original no son los mismos que los esfuerzos en la parte correspondiente de la viga transformada. Los esfuerzos en la viga transformada deben multiplicarse por la razón modular  $n$  para obtener los esfuerzos en el material 2 de la viga original:

$$\sigma_{x2} = -\frac{M_y}{I_T} n$$

G7

Podemos revisar esta fórmula notando que cuando la ecuación (G6) para  $I_t$  se sustituye en la ecuación (G7), obtenemos

$$\sigma_{x2} = -\frac{M_y n E_1}{E_1 I_1 + E_2 I_2} = -\frac{M_y E_2}{E_1 I_1 + E_2 I_2}$$

## Fuentes consultadas.

1. Advanced strength and applied Elasticity, A.C. Ugural & S.K. Fenster , 1995.
2. A.C.Eringen, Mechanics of Continua (New York: John Wiley & Sons, Inc., 1967).
3. Advanced Mechanics of Materials, Arthur P. Boresi & Richard J. Schmidt, John Wiley & Sons, 6ta edition 2003.
4. Elasticity in engineering mechanics. Arthur P. Boresi – Ken P. Chong, Elsevier, 1987.
5. Elasticity in engineering mechanics. Arthur P. Boresi – Paul P. Lynn, Prentice Hall, 1974.
6. Ingeniería Mecánica, Estática, Arthur P. Boresi- Richard J. Schmidt, Thomson learning 2001.
7. Experimental and theoretical analysis of thin walled opened cross section beams, Chandra & Chopra 19991.
8. Experimental and theoretical analysis of composite i-beams with elastic couplings. Chandra, Ramesh, Chopra, Inderjit, 1991.
9. Experimental characterization of advanced composite materials, Donald F. Adams- Leif A. Carlsson- R. Byron Pipes, 3<sup>rd</sup> edition , CRC PRESS, 2003.
10. Mechanics of Materials, E.J.Hearn, 3ra edición. B/H.
11. Variation method giving the solution to the torsion problem of prismatic bars of composite material. Ecsedi, I. 1977.
12. Mecánica de Materiales, Ferdinand P. Beer - E.Russell Johnston, jr – John T. DeWolf. 4ta edición, Mc Graw hill 2006.
13. Torsion and flexure of a prismatic isotropic beam using the boundary element method. Friedman, Z., Kosmatka, J.B. 2000
14. Engineering mechanics of composite materials, second edition. Isaac M. Daniel 2006, Oxford University Press.
15. Mecánica de materiales. James M. Gere. Quinta edición. Thomson learning 2002.
16. Composite materials “Mechanical Behavior and Structural Analysis, Jean-Marie Berthelot, Springer, 1999.
17. Diseño y desarrollo de productos, Karl T. Ulrich-Sтивен D. Eppinger, 4ta edición Mc Graw Hill, 2009.
18. On the application of the variational - Difference method for the solution of the torsion problem of a beam of composite form. Litvin, O.N., Rvachev, V.L., Semenova, A.E. 1974.
19. Torsional response of inhomogeneous and multilayered composite beams, Marco Savoia & Nerio Tullini, 1993.
20. Tesis Doctoral “Análisis experimental de esfuerzos en materiales compuestos”, Mario Acosta Flores, 2010.
21. Flexural-torsional buckling of fiber-reinforced plastic composite cantilever I-beams. Qiao, P., Zou, G., Davalos, J.F. 2003.
22. Mecánica para ingenieros, Estática, R.C.Hibbeler, 6ta edición, CECSA 1994.
23. Mechanics of Composite Materials, Richard M. Christensen, Dover Publications, 1 edition, 2005.
24. Laminated composite open profile sections: non –uniform torsion of I – Sections. S. Maddur, Shive K. Chaturvedi, 2000.
25. Resistencia de materiales, S. Timoshenko, ESPASA-CALPE, 1952.
26. Generalized warping torsion formulation. Schulz M, & Filippou F.C. 1998.
27. Torsion of laminated rectangular rods, Sephen R. Swanson, 1998.
28. Flexural-torsional buckling of fiber-reinforced plastic composite open channel beams. Shan, L., Qiao, P. 2005.

29. Torsion and flexure of a prismatic isotropic beam using the boundary element method, Z. Fiedman, J.B. Kosmtka, 1998.
30. Design and optimization of laminated composite materials, Zafer Gürdal-Raphael T. Haftka-Prabhat Hajela. Wiley & Sons,1999.
31. Stress-strain and failure analyses of composite pipe under torsion. , Zhao, Y., Pang, S.S., 1995.