



UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTÓNOMA DE
MÉXICO

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN
INGENIERÍA

**Función de Lyapunov para el Diferenciador por Modos
Deslizantes de Tercer Orden**

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:

MAESTRA EN INGENIERÍA

INGENIERIA ELECTRICA - CAMPO CONTROL

P R E S E N T A

Andrea Aparicio Martínez

TUTOR:

Jaime Alberto Moreno Pérez

2012

JURADO ASIGNADO

Presidente: Dr. Marco Antonio Arteaga Pérez

Secretario: Dr. Alejandro Vargas Casillas

Vocal: Dr. Jaime Alberto Moreno Pérez

1er. Suplente: Leonid Fridman

2o. Suplente: Alexander Schaum

Lugar donde se realizó la tesis: INSTITUTO DE INGENIERÍA

TUTOR DE TESIS:

JAIME ALBERTO MORENO PÉREZ

FIRMA

A mis padres.

Agradecimientos.

A mis padres, Carmen y Javier, por su amor y apoyo incondicional, ejemplo y consejo.

A mi hermano Julio, por la comprensión, amor y confianza.

A mis amigos, por querer ∞ .

Al Dr. Jaime Moreno por su disposición y dirección.

Al Dr. Leonid Fridman por el apoyo brindado.

A mis compañeros del grupo de modos deslizantes, siempre dispuestos a escuchar, comentar y aportar ideas para el trabajo.

A mis profesores por la guía académica y motivación.

Al Conacyt, al Posgrado en Ingeniería Eléctrica y al Instituto de Ingeniería por el apoyo brindado en cuanto a beca, uso de instalaciones y facilidades para completar esta tesis.

A todas las personas que me apoyaron y motivaron para completar este trabajo.

Contenido

Dedicatoria	III
Contenido	V
1. Introducción	1
1.1. Introducción al tema	1
1.2. Estado del arte	5
1.3. Objetivos	6
1.4. Organización de la tesis	7
2. Preliminares	9
2.1. Herramientas matemáticas	9
2.1.1. Desigualdad aritmética	9
2.1.2. Homogeneidad	10
2.2. Antecedentes	11
2.3. Caso lineal	13
3. Candidata a función de Lyapunov	21
3.1. Diferenciador por modos deslizantes de tercer orden	21
3.2. Cambio de notación	22
3.3. Candidata a función de Lyapunov	24
3.4. Condiciones para la positividad definida de $V(x)$	25
3.5. Condiciones para la negatividad definida de $\dot{V}(x)$	27
3.6. Resumen del capítulo	30
4. Validación de la candidata como función de Lyapunov	35
4.1. Prueba de existencia de la solución	36
4.2. Solución con cuatro restricciones	41
4.2.1. Interpretación Gráfica	43
4.2.2. Verificación gráfica	44
4.2.3. Ejemplo	46
4.3. Aumento del valor de las ganancias	48
5. Extensiones al diseño del diferenciador	51
5.1. Soluciones algorítmicas	52
5.1.1. Solución con una restricción	52

5.1.2. Solución sin restricciones	53
5.2. Caso perturbado	55
5.2.1. Diferenciador por modos deslizantes de tercer orden perturbado . . .	55
5.2.2. Condiciones para la validación de la candidata a función de Lyapunov para el diferenciador perturbado	56
5.2.3. Acotamiento de las desigualdades	56
6. Conclusiones	59
A. Condiciones para la positividad definida de (2.8) para el caso lineal	63
B. Condiciones para la positividad definida de (3.4)	67
C. Simplificación de las condiciones para la positividad definida de (3.4)	71
D. Deducción de λ_m	75
E. Condiciones para la negatividad definida de (3.5)	77
F. Cálculo de las desigualdades con 4 restricciones	83
G. Condiciones para la negatividad definida de (5.4)	93
Referencias	97

Capítulo 1

Introducción

1.1. Introducción al tema

La diferenciación de señales es un problema que ha aparecido desde tiempos remotos en el campo de las ciencias aplicadas. En áreas como las telecomunicaciones, la electrónica y la computación, es frecuentemente necesario obtener derivadas de ciertas señales.

En el área del control, en específico, es especialmente necesario ya que incluso técnicas tan básicas como los controladores PID (Proporcional-Integral-Derivativo), o su variante PD (Proporcional-Derivativo) necesitan una parte de diferenciación, como su nombre indica, para funcionar.

Otro ejemplo es el control por retroalimentación de estados de un sistema en su forma canónica de controlador. En este caso, cada estado del sistema, menos el último, no es más que la derivada del estado anterior. El último estado es una combinación de todos los anteriores. Para poder implementar un control por retroalimentación de estados se debe conocer el valor de todos ellos. Teniendo una técnica adecuada de diferenciación, sólo bastaría medir el primero de ellos, y entonces calcular los demás. Ya que la medición de estados es, en algunos casos, difícil y costosa; y en otros imposible, la importancia de poder diferenciar se vuelve evidente. En este caso, el problema de diferenciación es equivalente

al de observación. Es decir, si uno es capaz de obtener las derivadas de los estados de un sistema, lo estará observando.

Por otro lado, para aplicar ciertos controladores modernos, como los de modos deslizantes de alto orden, es necesario diferenciar varias veces una señal, de manera exacta y en tiempo real.

Pero la diferenciación de señales no es un problema trivial, ya que si bien matemáticamente puede obtenerse una derivada mediante un cálculo relativamente sencillo, en la práctica puede presentar muchas dificultades. Una de ellas, y quizá la más importante, es que el operador derivada no es un operador acotado.

Definición 1 *Un operador lineal $B : X \rightarrow Y$ es acotado si y sólo si existe $K > 0$ tal que para cualquier vector $v \in X$ se tiene que*

$$\frac{\|B(v)\|}{\|v\|} \leq K.$$



Esto quiere decir que la derivada de una señal con ruido puede estar arbitrariamente alejada de la derivada de la señal original. Como es difícil evitar el ruido en muchos sistemas, la dificultad para obtener derivadas de sus señales incrementa. Normalmente hay que hacer un compromiso entre la exactitud y la robustez con que se puede diferenciar.

Ya que la diferenciación es un problema importante, de solución complicada, ha sido extensamente estudiado a lo largo de la historia.

Una aproximación a la solución son los métodos de diferenciación lineales, como por ejemplo, el observador de Luenberger. El problema es que éstos funcionan para sólo una clase muy reducida de señales.

En ausencia de ruido, para obtener la derivada exacta de una señal cuando no se conoce nada de ella, salvo alguna desigualdad diferencial, pueden usarse los modos deslizantes. Otra alternativa son los observadores deslizantes o de alta ganancia. El problema es que estos métodos dejan de funcionar satisfactoriamente cuando aparece ruido.

En 1998, A. Levant propuso un diferenciador por modos deslizantes de primer orden, robusto y exacto en la diferenciación de señales de las cuales se tenga una cota superior de la constante de Lipschitz de la derivada [Levant98].

Más tarde, en 2001, el mismo A. Levant propuso la extensión a orden arbitrario del diferenciador por modos deslizantes [Levant01]. Dentro de esta publicación se incluyeron las ganancias que hacen a este diferenciador converger exactamente y en tiempo finito hasta para orden cinco, es decir, para obtener hasta la cuarta derivada. Cabe destacar que se trata de un juego de ganancias fijo, con un método para ajustarlas a la señal que se desea diferenciar, pero que no permite su libre diseño.

Las propiedades antes mencionadas hacen del diferenciador de Levant una muy buena opción cuando se necesita obtener derivadas de una señal, sobre todo en presencia de ruido.

Sin embargo, la demostración de dichas propiedades es complicada. Para lograrlo se han usado, hasta ahora, métodos geométricos o de homogeneidad, que son complicados y que no permiten el diseño de las ganancias.

Por otro lado, las funciones de Lyapunov son una herramienta básica que se ha usado ampliamente en el control [Khalil02]. Sus ventajas para probar estabilidad ya han sido estudiadas desde finales del siglo XIX, pero también proveen una manera de diseñar ganancias y calcular tiempos de convergencia para algoritmos como el diferenciador de Levant (1.1):.

Sea f una función definida en $[0, \infty)$, un diferenciador de orden k tiene como salidas x_i , donde $i = 0, \dots, k$, y es definido como sigue.

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_0 &= v_0 = -\lambda_k L^{\frac{1}{k+1}} |x_0 - f|^{\frac{k}{k+1}} \text{sign}(x_0 - f) + x_1 \\
 \dot{x}_1 &= v_1 = -\lambda_{k-1} L^{\frac{1}{k}} |x_1 - v_0|^{\frac{k-1}{k}} \text{sign}(x_1 - v_0) + x_2 \\
 &\vdots \\
 \dot{x}_{k-1} &= v_{k-1} = -\lambda_1 L^{\frac{1}{2}} |x_{k-1} - v_{k-2}|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(x_{k-1} - v_{k-2}) + x_k \\
 \dot{x}_k &= -\lambda_0 L \text{sign}(x_k - v_{k-1})
 \end{aligned} \tag{1.1}$$

Un algoritmo de modos deslizantes de segundo orden fue propuesto por J. Moreno en 2011 [Moreno11], que puede escribirse en forma de diferenciador. Este diferenciador se puede deducir del algoritmo de orden arbitrario antes mencionado. Una característica importante de éste trabajo, es que se plantea una función de Lyapunov para el algoritmo que propone, por lo que su demostración y diseño se facilitan enormemente. A partir de este algoritmo puede construirse otro de orden n que tendría la siguiente forma.

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= -k_1 x_1^{\frac{n-1}{n}} + x_2 + \rho_1(t, x) \\
 &\vdots \\
 \dot{x}_{n-1} &= -k_{n-1} x_1^{\frac{1}{n}} + x_n + \rho_{n-1}(t, x) \\
 \dot{x}_n &= -k_n x_1^0 + \rho_n(t, x)
 \end{aligned} \tag{1.2}$$

De allí puede construirse el siguiente algoritmo de orden tres.

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= -k_1 |x_1|^{\frac{2}{3}} \text{sign}(x_1) + x_2 \\
 \dot{x}_2 &= -k_2 |x_1|^{\frac{1}{3}} \text{sign}(x_1) + x_3 \\
 \dot{x}_3 &= -k_3 \text{sign}(x_1)
 \end{aligned} \tag{1.3}$$

El sistema (1.3) es un diferenciador de segundo orden por modos deslizantes que provee una estimación exacta, en tiempo finito y robusta de la primera y segunda derivadas temporales de la señal, cuando esta última es acotada.

Por medio de una función de Lyapunov válida para el diferenciador de orden arbitrario podría demostrarse que el diferenciador funciona y además diseñar sus ganancias para ponerlo en práctica. La única limitante sería que se conociese una cota superior del valor absoluto de la última derivada, y que esta cota fuese finita. Así, además de calcular las derivadas, podría conocerse de antemano el tiempo de convergencia y las ganancias del diferenciador podrían ser diseñadas.

Como ya existe una función de Lyapunov válida para el algoritmo de segundo orden [Moreno11], el paso siguiente para generalizar la propuesta es encontrar una función de Lyapunov para el algoritmo de tercer orden.

Es precisamente en esta función de Lyapunov para el algoritmo diferenciador por modos deslizantes de tercer orden que este trabajo de tesis se enfoca. Hasta el momento en que se terminó este trabajo, no existía ninguna que hubiese sido satisfactoriamente validada, que fuera del conocimiento de la autora.

1.2. Estado del arte

Las propiedades del diferenciador (1.3) han sido probadas por métodos geométricos [Davila05] o de homogeneidad [Bacciotti05].

Estos métodos, aunque funcionan bien para probar la convergencia, son complicados y laboriosos de implementar. Por otro lado, no permiten el cálculo del tiempo de convergencia del diferenciador ni el diseño de las ganancias.

Como se mencionó en la sección 1.1, A. Levant propuso en [Levant01] un juego de ganancias para el diferenciador (1.1) que fueron encontradas por métodos computacionales, aunque no provee más detalles.

Hasta el momento en que se terminó el trabajo de tesis, y hasta donde abarca

el conocimiento de la autora, no existía un método para encontrar o diseñar familias de ganancias que mantuvieran las propiedades de convergencia del diferenciador, tampoco una función de Lyapunov para el diferenciador por modos deslizantes de tercer orden, y mucho menos para el de orden arbitrario.

1.3. Objetivos

El objetivo principal de este trabajo de tesis proponer una metodología para construir una función de Lyapunov para el algoritmo por modos deslizantes de tercer orden empleado para construir un diferenciador de segundo orden.

Esta metodología debe incluir dos puntos principales:

- Proponer una candidata a función de Lyapunov para el algoritmo por modos deslizantes de tercer orden empleado para construir un diferenciador de segundo orden que cumpla con ciertas propiedades deseables, como la homogeneidad.
- Proponer una metodología para probar que la candidata es una función de Lyapunov.

Dicha función permitiría probar más fácilmente que como se ha hecho hasta ahora, la estabilidad del diferenciador (1.3). Por otro lado, permitiría diseñar un número infinito de familias de ganancias para el diferenciador, en lugar de estar restringido a una sola familia de las mismas como sucede actualmente, además de que el diseño sería claro y directo. También, posteriormente, se podría calcular el tiempo de convergencia del diferenciador además de conocer familias de perturbaciones respecto a las cuales es robusto.

Cabe destacar que el encontrar una función de Lyapunov válida para el diferenciador (1.3) es un paso importante para, posteriormente, proponer y validar una función de Lyapunov para el algoritmo de orden arbitrario. Esto representaría una importante contribución a la teoría del control moderno, ya que haría posible calcular derivadas de orden arbitrario de cualquier señal de la que sólo se conociera una desigualdad diferencial; esto de

manera exacta, robusta y en tiempo finito. No solamente eso, sino que sería posible diseñar las ganancias del algoritmo diferenciador y calcular el tiempo de convergencia del mismo.

1.4. Organización de la tesis

Dentro del Capítulo 1, se introdujo el problema de diferenciación, y las posibles soluciones que se han planteado para él a lo largo de la historia. Entre ellas, se mencionó el algoritmo diferenciador por modos deslizantes de tercer orden, que proviene de uno de orden arbitrario. Por otro lado, se planteó la conveniencia de encontrar una función de Lyapunov para este diferenciador por modos deslizantes de tercer orden, y se situó ese trabajo en la perspectiva de encontrar una función para el algoritmo de orden n . También se introdujo el trabajo previo que se ha desarrollado en la materia, así como el estado del arte. Finalmente, se expusieron los objetivos de la tesis.

En el Capítulo 2, se introducen varias definiciones útiles para seguir el desarrollo de la tesis, así como detalles sobre algunas herramientas matemáticas que se usarán durante el mismo. Se presentan también, detalladamente, los antecedentes a este trabajo. Al final de este capítulo se expone un caso lineal, y la metodología que debería seguirse para resolverlo.

En el Capítulo 3 se explica a detalle la manera de deducir el algoritmo diferenciador por modos deslizantes de tercer orden del diferenciador de orden arbitrario de A. Levant, que se mencionó en la Sección 1.1. Después, se introduce un cambio de notación que facilitará la visualización de los cálculos. A partir del Capítulo 3, y a lo largo del resto de este documento se usará dicha notación, por lo que, para evitar confusiones futuras, se debe poner especial atención en esta sección. A continuación se presenta la candidata a función de Lyapunov que se propone en esta tesis, así como condiciones suficientes que hacen que pueda ser validada.

En el Capítulo 4 se presentan los resultados obtenidos, y la manera de obtenerlos,

para cumplir las condiciones antes mencionadas, es decir, que validan la candidata como función de Lyapunov.

En el Capítulo 5 se plantean algunas extensiones al trabajo realizado en esta tesis, y que representan caminos que podrían ser tomados al continuar la tarea de buscar funciones de Lyapunov para diferenciadores de órdenes superiores.

Finalmente, en el Capítulo 6 se presentan las conclusiones que pueden obtenerse de los resultados obtenidos dentro de este trabajo de tesis.

Capítulo 2

Preliminares

Dentro de este capítulo se introducen varias definiciones y herramientas matemáticas que es conveniente repasar, ya que serán usadas en el resto de este documento.

Por otro lado, se enlistan los antecedentes a este trabajo de tesis que sirven como base para el desarrollo que aquí se presenta.

También se presenta el caso de un algoritmo lineal, muy parecido al diferenciador (1.3) y se propone una candidata a función de Lyapunov para él. Esta candidata es fácil de encontrar, ya que el sistema es lineal. A continuación se realiza el desarrollo necesario para probar que la candidata es una función de Lyapunov válida. Este desarrollo sirve como introducción al trabajo que debe realizarse para el caso no lineal, es decir, del diferenciador (1.3).

2.1. Herramientas matemáticas

2.1.1. Desigualdad aritmética

Una desigualdad aritmética clásica [Hardy51] establece que para números reales $a > 0, b > 0, p > 1, q > 1$ con $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ siempre se satisface que:

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \quad (2.1)$$

Esta desigualdad se conoce como la desigualdad de Young.

De ahí sigue que para cualquier $c > 0$

$$ab = (ca) \left(\frac{b}{c} \right) \leq \frac{(ca)^p}{p} + \frac{\left(\frac{b}{c} \right)^q}{q} = c^p \frac{a^p}{p} + c^{-q} \frac{b^q}{q}$$

Entonces

$$ab \leq c^p \frac{a^p}{p} + c^{-q} \frac{b^q}{q} \quad (2.2)$$



Esta desigualdad se usa al momento de deducir las condiciones para validar una candidata a función de Lyapunov.

2.1.2. Homogeneidad

Esta propiedad se usa en el Capítulo 4 para demostrar que la candidata que se propone es una función de Lyapunov.

Definición 2 [Bacciotti05] *Elíjase un conjunto de coordenadas (x_1, \dots, x_n) en \mathbb{R}^n . Sea $r = (r_1, \dots, r_n)$ una n -tupla de números reales positivos.*

- La familia de dilataciones de un parámetro $(\delta_\varepsilon^r)_{\varepsilon > 0}$ (asociada a r) es definida por

$$\delta_\varepsilon^r(x) := (\varepsilon^{r_1} x_1, \dots, \varepsilon^{r_n} x_n), \quad \forall x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \quad \forall \varepsilon > 0$$

Los números r_i son los pesos de las coordenadas.

- Se dice que una función $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es δ^r -homogénea de grado m ($m \in \mathbb{R}$) si

$$V(\delta_\varepsilon^r(x)) = \varepsilon^m V(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \quad \forall \varepsilon > 0$$

- Se dice que un campo vectorial $f = \sum_{i=1}^n f_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ es δ^r -homogéneo, de grado k si la componente f_i es δ^r -homogénea, de grado $k + r_i$ para cada i ; esto es

$$f_i(\varepsilon^{r_1} x_1, \dots, \varepsilon^{r_n} x_n) = \varepsilon^{k+r_i} f_i(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \quad \forall \varepsilon > 0, \quad \forall i \in [[1, n]]$$



2.2. Antecedentes

Como se mencionó en el Capítulo 1, los modos deslizantes son una buena opción cuando se requiere hacer diferenciación exacta y robusta de señales, en tiempo real. Varios algoritmos han sido propuestos, y uno de ellos, que ofrece resultados muy satisfactorios es el algoritmo *Super Twisting* (STA, por sus siglas en inglés). Éste es capaz de compensar perturbaciones que cumplen con la condición de Lipschitz [Poznyak08], exactamente, y asegurar convergencia en tiempo finito. También ha sido usado para diseñar diferenciadores exactos y robustos, proveyendo convergencia en tiempo finito en presencia de entradas desconocidas.

La convergencia en tiempo finito y robusta del STA había sido probada, hasta fechas recientes, por métodos geométricos o por propiedades de homogeneidad, lo cual hacía el análisis complicado y sin posibilidades de diseño de las ganancias en el caso de la homogeneidad.

En [Moreno11], J. Moreno propuso un algoritmo diferenciador por modos deslizantes de segundo orden generalizado, del cual puede recuperarse el algoritmo super twisting:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -k_1 |(x_1)|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(x_1) + x_2 \\ \dot{x}_2 &= -k_2 \text{sign}(x_1) \end{aligned} \tag{2.3}$$

Este algoritmo, al igual que el sistema 1.3, puede ser deducido del diferenciador de orden arbitrario de Lyapunov.

Dentro de la misma publicación, se propuso una función de Lyapunov para el algoritmo generalizado, que es la siguiente.

$$V_{o2}(x) = \zeta^T P \zeta \quad (2.4)$$

donde

$$\zeta^T = [|x_1|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(x_1), x_2]$$

y $P = P^T > 0$ es la solución única, simétrica y positiva definida a la ecuación algebraica de Lyapunov

$$A^T P + P A = -Q \quad , \quad A = \begin{bmatrix} -k_1 & 1 \\ -k_2 & 0 \end{bmatrix}$$

A es Hurwitz. Entonces una $Q = Q^T > 0$ positiva definida, simétrica y arbitraria provee familias de funciones de Lyapunov para el algoritmo diferenciador por modos deslizantes de segundo orden generalizado. Puede consultarse [Moreno11] para los detalles de la función y las demostraciones.

El uso de esta función de Lyapunov ofrece grandes ventajas sobre los métodos de prueba que eran usados con anterioridad, como los geométricos o de homogeneidad, ya que permite calcular el tiempo de convergencia del diferenciador, y diseñar las ganancias del mismo. Puesto que el diferenciador puede extenderse a orden n , sería conveniente tener una función de Lyapunov que se pudiera construir para cualquier orden. De esta manera podrían obtenerse n derivadas de cualquier señal de la cual se conociera sólo una cota superior y finita de la n ésima derivada .

Para poder plantear una posible función de Lyapunov para el algoritmo de orden n , el primer paso es intentar extender la función para el tercer orden. Es precisamente en esta función que este trabajo de tesis se enfoca.

2.3. Caso lineal

Considérese el sistema lineal de tercer orden.

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -k_1x_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 &= -k_2x_1 + x_3 \quad \rightarrow \quad \dot{x} = Ax \\ \dot{x}_3 &= -k_3x_1 \end{aligned} \tag{2.5}$$

donde, claramente

$$A = \begin{bmatrix} -k_1 & 1 & 0 \\ -k_2 & 0 & 1 \\ -k_3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Puede verse que tiene la misma forma que el diferenciador (1.3), pero en este caso los términos de inyección son lineales.

A continuación se presentará la manera de construir una candidata función de Lyapunov para (1.3), y la metodología para probar su positividad definida y la negatividad definida de su derivada. Es importante notar que siendo un caso lineal, existen varios métodos para construir la función de Lyapunov candidata y probar su validez, cosa que no se tiene para el caso no lineal. El método que se presenta aquí se retomará en el Capítulo 3 para probar las propiedades de la candidata a función de Lyapunov y de su derivada para el algoritmo no lineal de nuestro interés.

Se sabe que para construir una función de Lyapunov para un sistema lineal, puede usarse una forma cuadrática, por lo que se propone la siguiente función:

$$\begin{aligned} V_l(x) &= x^T P x \\ &= \gamma_1|x_1|^2 - \gamma_{12}x_1x_2 + \gamma_2|x_2|^2 - \gamma_{13}x_1x_3 - \gamma_{23}x_2x_3 + \gamma_3|x_3|^2 \end{aligned} \tag{2.6}$$

donde

$$P = \begin{bmatrix} \gamma_1 & -\frac{1}{2}\gamma_{12} & \frac{1}{2}\gamma_{13} \\ -\frac{1}{2}\gamma_{12} & \gamma_2 & -\frac{1}{2}\gamma_{23} \\ -\frac{1}{2}\gamma_{13} & -\frac{1}{2}\gamma_{23} & \gamma_3 \end{bmatrix}$$

La derivada de $V_l(x)$ es:

$$\begin{aligned} \dot{V}_l(x) &= x^T (A^T P + P A) x \\ &= a|x_1|^2 + b|x_2|^2 + c|x_3|^2 + dx_1x_2 + ex_1x_3 + gx_2x_3 \end{aligned} \quad (2.7)$$

$$a, b, c, d, e, g = f(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_{12}, \gamma_{13}, \gamma_{23}, k_1, k_2, k_3)$$

Esta candidata debe cumplir que $V > 0$ y que $\dot{V} < 0$ para ser, efectivamente, una función de Lyapunov para el sistema (2.5).

La función (2.6) es positiva definida si la matriz P es positiva definida. Esto puede probarse fácilmente mediante el criterio de Sylvester que establece que:

Teorema 1 (Criterio de Sylvester) *Una matriz simétrica $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es positiva definida si y sólo si todos sus menores principales líderes son estrictamente positivos.*



Es decir, que deben cumplirse las siguientes tres desigualdades:

$$\begin{aligned} \gamma_1 &> 0 \\ \gamma_1\gamma_2 - \frac{1}{4}\gamma_{12}^2 &> 0 \\ \gamma_1\gamma_2\gamma_3 + \frac{1}{4}\gamma_2\gamma_{13}^2 - \frac{1}{4}\gamma_3\gamma_{12}^2 - \frac{1}{4}\gamma_1\gamma_{23}^2 &> 0 \end{aligned}$$

En este caso lineal, la positividad definida de la candidata a función de Lyapunov depende sólo de los parámetros de la matriz P , pero todavía falta probar que $A^T P + P A$ es negativa definida. Siguiendo la misma metodología se llegaría a otro conjunto de desigualdades que además involucra a los parámetros del sistema contenidos en la matriz A . Estas desigualdades deben ser satisfechas simultáneamente con las anteriores para que probar que

la candidata es una verdadera función de Lyapunov. Con esto, la función (2.6) quedaría validada como función de Lyapunov para el sistema (2.5).

Esta es una de las varias formas, bien conocidas, que se tienen para probar positividad definida de formas cuadráticas, y por ende, la validez de una función de Lyapunov para un sistema lineal. Estos métodos no son más que una simplificación y sistematización de cálculos largos y complicados que tenían que hacerse en la antigüedad. Para casos donde no puede proponerse una forma cuadrática, este tipo de criterios, como el Teorema 1, no pueden usarse, así que los cálculos completos para probar positividad y negatividad definida tienen que realizarse, de la misma manera que habría que hacerlos para el caso lineal de no poder ser simplificados por medio de las herramientas antes mencionadas.

A continuación se desarrollarán los cálculos que habría que hacer para demostrar que la función (2.6) es positiva definida sin hacer uso del Teorema 1, ni ningún otro método sistematizado, tal y como habrá que hacerse para el caso no lineal, más adelante.

Una manera de probar la positividad definida de (2.6), y la negatividad definida de su derivada, es encontrando una cota inferior positiva para $V(x)$ y una superior negativa para $\dot{V}(x)$. De los términos cruzados de (2.6) se puede decir que:

$$\begin{aligned} x_1x_2 &\leq |x_1||x_2| \\ x_1x_3 &\leq |x_1||x_3| \\ x_2x_3 &\leq |x_2||x_3| \end{aligned}$$

Usando la desigualdad de Young extendida (2.1) con $p = q = 2$, estos últimos términos pueden ser acotados por arriba y separados, para números reales positivos α_{12} , α_{13} , α_{23} cualesquiera, como:

$$\begin{aligned} |x_1||x_2| &\leq \frac{1}{2}\alpha_{12}^2|x_1|^2 + \frac{1}{2}\alpha_{12}^{-2}|x_2|^2 \\ |x_1||x_3| &\leq \frac{1}{2}\alpha_{13}^2|x_1|^2 + \frac{1}{2}\alpha_{13}^{-2}|x_3|^2 \\ |x_2||x_3| &\leq \frac{1}{2}\alpha_{23}^2|x_2|^2 + \frac{1}{2}\alpha_{23}^{-2}|x_3|^2 \end{aligned}$$

Así, con los términos cruzados separados, $V_i(x)$ puede acotarse por debajo como:

$$\begin{aligned}
V_i(x) &\geq \gamma_1|x_1|^2 - |\gamma_{12}||x_1||x_2| + \gamma_2|x_2|^2 - |\gamma_{13}||x_1||x_3| - |\gamma_{23}||x_2||x_3|^2 + \gamma_3|x_3|^2 \\
&\geq \gamma_1|x_1|^2 - |\gamma_{12}| \left(\frac{\alpha_{12}^2}{2}|x_1|^2 + \frac{\alpha_{12}^{-2}}{2}|x_2|^2 \right) + \gamma_2|x_2|^2 - |\gamma_{13}| \left(\frac{\alpha_{13}^2}{2}|x_1|^2 + \frac{\alpha_{13}^{-4}}{4}|x_3|^4 \right) \\
&\quad - |\gamma_{23}| \left(\frac{\alpha_{23}^2}{2}|x_2|^2 + \frac{\alpha_{23}^{-2}}{2}|x_3|^2 \right) + \gamma_3|x_3|^2 \\
&= \left(\gamma_1 - |\gamma_{12}|\frac{\alpha_{12}^2}{2} - |\gamma_{13}|\frac{\alpha_{13}^2}{2} \right) |x_1|^2 + \left(\gamma_2 - |\gamma_{12}|\frac{\alpha_{12}^{-2}}{2} - |\gamma_{23}|\frac{\alpha_{23}^2}{2} \right) |x_2|^2 + \\
&\quad \left(\gamma_3 - |\gamma_{13}|\frac{\alpha_{13}^{-2}}{2} - |\gamma_{23}|\frac{\alpha_{23}^{-2}}{2} \right) |x_3|^2
\end{aligned} \tag{2.8}$$

Es entonces evidente que para que $V_i(x) > 0$, los términos dentro de paréntesis deben ser positivos. Como ellos dependen de las variables $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_{12}, \gamma_{13}, \gamma_{23}$ y $\alpha_{12}, \alpha_{13}, \alpha_{23}$, para asegurar la positividad se deben encontrar los valores que hagan que las siguientes tres desigualdades se satisfagan simultáneamente.

$$\left(\gamma_1 - |\gamma_{12}|\frac{\alpha_{12}^2}{2} - |\gamma_{13}|\frac{\alpha_{13}^2}{2} \right) > 0 \tag{2.9}$$

$$\left(\gamma_2 - |\gamma_{12}|\frac{\alpha_{12}^{-2}}{2} - |\gamma_{23}|\frac{\alpha_{23}^2}{2} \right) > 0 \tag{2.10}$$

$$\left(\gamma_3 - |\gamma_{13}|\frac{\alpha_{13}^{-2}}{2} - |\gamma_{23}|\frac{\alpha_{23}^{-2}}{2} \right) > 0 \tag{2.11}$$

Las variables α_{12}, α_{12} y α_{23} fueron introducidas cuando se aplicó la desigualdad aritmética, pero pueden ser eliminadas, para reducir el número de valores a encontrar, mediante manipulaciones algebraicas sencillas, aunque extensas. A continuación se detalla cómo podría eliminarse una de estas variables. El resto del procedimiento, que para el resto de las variables es muy similar al de la primera, puede encontrarse en el Apéndice A.

1. Eliminación de α_{12}

Las desigualdades (2.9) y (2.10) pueden escribirse como

$$\begin{aligned}
\frac{2}{|\gamma_{12}|} \left(\gamma_1 - \frac{|\gamma_{13}|}{2} \alpha_{13}^2 \right) &> \alpha_{12}^2, \quad |\gamma_{12}| > 0 \\
\alpha_{12}^2 &> \frac{|\gamma_{12}|}{2(\gamma_2 - \frac{|\gamma_{23}|}{2} \alpha_{23}^2)}, \quad \gamma_2 - \frac{|\gamma_{23}|^2}{\alpha_{23}^2} > 0
\end{aligned}$$

Entonces puede eliminarse α_{12} y las desigualdades que restan son:

$$\begin{aligned}
\frac{2}{|\gamma_{12}|} (\gamma_1 - |\gamma_{13}| \alpha_{13}^2) &> \frac{|\gamma_{12}|}{2(\gamma_2 - \frac{|\gamma_{23}|}{2} \alpha_{23}^2)} \\
|\gamma_{12}| &> 0 \\
\gamma_2 - \frac{|\gamma_{23}|}{2} \alpha_{23}^2 &> 0 \\
\left(\gamma_3 - |\gamma_{13}| \frac{\alpha_{13}^{-4}}{4} - |\gamma_{23}| \frac{\alpha_{23}^{-2}}{2} \right) &> 0
\end{aligned} \tag{2.12}$$

De esta misma manera se pueden eliminar α_{13} y α_{23} y entonces las variables de las que dependen las desigualdades serían seis: $\gamma_{1,2,3,12,13,23}$. El probar que la candidata es positiva definida equivaldría a encontrar algún juego de valores para $\gamma_{1,2,3,12,13,23}$ que haga que todas las desigualdades que resultasen se cumplieran.

El procedimiento para deducir las desigualdades que deben ser cumplidas para que $V_l(x) > 0$ pueden encontrarse en el Apéndice A. Las desigualdades que deberían ser satisfechas, para que $V(x)_l > 0$ son las que aparecen en la Tabla 2.1.

De no existir herramientas para probar negatividad y positividad definida de una función cuadrática, sería necesario resolver las desigualdades de la Tabla 2.1, es decir, encontrar los valores para las variables $\gamma_{1,2,3,12,13,23}$ que hicieran que todas ellas se satisficieran simultáneamente. Además, habría que resolver también las desigualdades que resultaran para que $\dot{V}(x) < 0$. Ese es justo el escenario que se tiene para el caso no lineal, para el que no existen aún métodos sencillos y probados. Es por esto último que una parte importante de este trabajo de tesis es encontrar un método para encontrar tales valores.

El que éstas desigualdades se satisfagan es equivalente a que el Teorema 1 se cumpla. Con manipulación adecuada, se podrían llevar a exactamente la misma forma, es decir, llegar a las mismas condiciones por medio del Teorema 1 que con la desigualdad de Young extendida 2.1, como se mostrará a continuación para orden dos. Este es un procedimiento complicado para el sistema de tercer orden, sin embargo, es interesante comprobar que ambos métodos son equivalentes. Para ilustrar lo anterior, sin someter al lector a cálculos muy extensos, se presenta a continuación el procedimiento para el algoritmo lineal de segundo orden.

Tabla 2.1: Condiciones para la validación de la candidata como función de Lyapunov para el caso lineal

$$\begin{aligned}
 & \overline{\overline{\gamma_2 > 0, \gamma_3 > 0, |\gamma_{12}| > 0, |\gamma_{23}| > 0, |\gamma_{13}| > 0}} \\
 & \left(\gamma_2 \gamma_3 - \left(\frac{|\gamma_{23}|}{2} \right)^2 \right) > 0 \\
 & \left(\frac{\gamma_1}{|\gamma_{13}|} - z \right) > 0 \\
 & z - \left(\frac{\gamma_2 |\gamma_{13}|}{\left(\gamma_2 \gamma_3 - \left(\frac{|\gamma_{23}|}{2} \right)^2 \right)} \right) > 0 \\
 & z - \left(\frac{|\gamma_{13}|}{2 \gamma_3} \right) > 0 \\
 & a_2 z^2 + a_1 z + a_0 > 0 \\
 & \text{Donde} \\
 & z = \alpha_{13}^2 > 0 \\
 & a_2 = (-\gamma_2 |\gamma_{13}|^2 - \gamma_2 |\gamma_{13}| \gamma_3) \\
 & a_1 = \left(\gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 - \left(\frac{|\gamma_{12}|}{2} \right)^2 \gamma_3 - \gamma_1 \left(\frac{|\gamma_{23}|}{2} \right)^2 \right) \\
 & a_0 = \left(\left(\frac{|\gamma_{12}|}{2} \right)^2 \frac{|\gamma_{13}|}{2} - |\gamma_{12}| \gamma_2 \frac{|\gamma_{13}|}{2} \right)
 \end{aligned}$$

Caso lineal de segundo orden

Considérese el sistema lineal de segundo orden

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= -k_1 x_1 + x_2 \\
 \dot{x}_2 &= -k_2 x_1
 \end{aligned}
 \quad \rightarrow \quad \dot{x} = Ax \tag{2.13}$$

y la candidata a función de Lyapunov cuadrática

$$\begin{aligned}
 V_{l_2}(x) &= x^T P x \\
 &= \gamma_1 |x_1|^2 - 2\gamma_{12} x_1 x_2 + \gamma_2 |x_2|^2
 \end{aligned} \tag{2.14}$$

Según el Teorema 1, para que $V(x) > 0$, debe cumplirse que

$$\begin{aligned}\gamma_1 &> 0 \\ (\gamma_1\gamma_2 - \gamma_{12}^2) &> 0\end{aligned}\tag{2.15}$$

Por otro lado, es evidente que

$$x_1x_2 \leq |x_1||x_2|$$

Y usando la desigualdad de Young extendida (2.1), éstos términos pueden ser acotados por arriba y separados como:

$$|x_1||x_2| \leq \frac{\alpha^2}{2}|x_1|^2 + \frac{\alpha^{-2}}{2}|x_2|^2$$

Para un $\alpha > 0$ real, cualquiera.

Entonces $V_2(x)$ puede acotarse por abajo como

$$\begin{aligned}V_2(x) &\geq \gamma_1|x_1|^2 - 2|\gamma_{12}||x_1||x_2| + 2\gamma_2|x_2|^2 \\ &\geq \gamma_1|x_1|^2 - 2|\gamma_{12}|\left(\frac{\alpha^2}{2}|x_1|^2 + \frac{\alpha^{-2}}{2}|x_2|^2\right) + \gamma_2|x_2|^2 \\ &= (\gamma_1 - |\gamma_{12}|\alpha^2)|x_1|^2 + (\gamma_2 - |\gamma_{12}|\alpha^{-2})|x_2|^2\end{aligned}\tag{2.16}$$

Es entonces evidente que para que $V_2(x)$, los términos dentro de paréntesis deben ser positivos, es decir que

$$\begin{aligned}\gamma_1 > |\gamma_{12}|\alpha^2, \quad \gamma_2 > |\gamma_{12}|\alpha^{-2} &\rightarrow \gamma_1 > |\gamma_{12}|\alpha^2, \quad \gamma_2\alpha^2 > |\gamma_{12}| \rightarrow \\ \frac{|\gamma_{12}|}{\gamma_2} < \alpha^2 < \frac{\gamma_1}{|\gamma_{12}|} &\rightarrow \frac{|\gamma_{12}|}{\gamma_2} < \frac{\gamma_1}{|\gamma_{12}|} \rightarrow \\ \gamma_1\gamma_2 > |\gamma_{12}^2| &\end{aligned}\tag{2.17}$$

Puede verse que es (2.17) exactamente igual a (2.15).

Con esto queda ilustrado cómo es equivalente aplicar el Teorema 1 que la Desigualdad (2.1).

Capítulo 3

Candidata a función de Lyapunov para el diferenciador por modos deslizantes de tercer orden

3.1. Diferenciador por modos deslizantes de tercer orden

El diferenciador (1.3) puede ser deducido, como se mencionó en el Capítulo 1, del diferenciador de orden arbitrario que A. Levant propone en [Levant01], de la siguiente manera.

Recordando (1.1) el diferenciador de orden arbitrario es:

$$\begin{aligned}\dot{x}_0 &= v_0 = -\lambda_k L^{\frac{1}{k+1}} |x_0 - f|^{\frac{k}{k+1}} \text{sign}(x_0 - f) + x_1 \\ \dot{x}_1 &= v_1 = -\lambda_{k-1} L^{\frac{1}{k}} |x_1 - v_0|^{\frac{k-1}{k}} \text{sign}(x_1 - v_0) + x_2 \\ &\vdots \\ \dot{x}_{k-1} &= v_{k-1} = -\lambda_1 L^{\frac{1}{2}} |x_{k-1} - v_{k-2}|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(x_{k-1} - v_{k-2}) + x_k \\ \dot{x}_k &= -\lambda_0 L \text{sign}(x_k - v_{k-1})\end{aligned}$$

donde f es una función definida en $[0, \infty)$, y x_i con $i = 0, \dots, k$ son las salidas un diferenciador de orden k .

Para $k = 3$ es:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= v_1 = -\lambda_2 L^{\frac{1}{3}} |x_1|^{\frac{2}{3}} \text{sign}(x_1) + x_2 \\ \dot{x}_2 &= v_2 = -\lambda_1 L^{\frac{1}{2}} |x_2 - v_1|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(x_2 - v_1) + x_3 \\ \dot{x}_3 &= -\lambda_0 L \text{sign}(x_3 - v_2)\end{aligned}\tag{3.1}$$

donde x_i con $i = 1, 2, 3$ representa ahora un error de diferenciación.

Entonces, escribiendo

$$\begin{aligned}\dot{x}_2 &= v_2 = -\lambda_1 L^{\frac{1}{2}} \left| x_2 - \left(-\lambda_2 L^{\frac{1}{3}} |x_1|^{\frac{2}{3}} \text{sign}(x_1) + x_2 \right) \right|^{\frac{1}{2}} \text{sign} \left(x_2 - \left(-\lambda_2 L^{\frac{1}{3}} |x_1|^{\frac{2}{3}} \text{sign}(x_1) + x_2 \right) \right) + x_3 \\ &= -\lambda_1 L^{\frac{1}{2}} \left| \lambda_2 L^{\frac{1}{3}} |x_1|^{\frac{2}{3}} \text{sign}(x_1) \right|^{\frac{1}{2}} \text{sign} \left(\lambda_2 L^{\frac{1}{3}} |x_1|^{\frac{2}{3}} \text{sign}(x_1) \right) + x_3 \\ &= -\lambda_1 L^{\frac{1}{2}} \left(\lambda_2 L^{\frac{1}{3}} \right)^{\frac{1}{2}} \left| |x_1|^{\frac{2}{3}} \right|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(x_1) + x_3 \\ &= -\lambda_1 \lambda_2^{\frac{1}{2}} L^{\frac{1}{2}} L^{\frac{1}{6}} |x_1|^{\frac{2}{6}} \text{sign}(x_1) + x_3 \\ &= -\lambda_1 \lambda_2^{\frac{1}{2}} L^{\frac{1}{2} + \frac{1}{6}} |x_1|^{\frac{1}{3}} \text{sign}(x_1) + x_3 \\ \\ \dot{x}_3 &= -\lambda_0 L \text{sign} \left(x_3 - \left(-\lambda_1 \lambda_2^{\frac{1}{2}} L^{\frac{1}{2} + \frac{1}{6}} |x_1|^{\frac{1}{3}} \text{sign}(x_1) + x_3 \right) \right) \\ &= -\lambda_0 L \text{sign} \left(-\lambda_1 \lambda_2^{\frac{1}{2}} L^{\frac{1}{2} + \frac{1}{6}} |x_1|^{\frac{1}{3}} \text{sign}(x_1) \right) \\ &= -\lambda_0 L \text{sign}(x_1)\end{aligned}$$

Se llega a

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -\kappa_1 |x_1|^{\frac{2}{3}} \text{sign}(x_1) + x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\kappa_2 |x_1|^{\frac{1}{3}} \text{sign}(x_1) + x_3 \\ \dot{x}_3 &= -\kappa_3 \text{sign}(x_1)\end{aligned}\tag{3.2}$$

con $\kappa_1 = \lambda_2 L^{\frac{1}{3}}$, $\kappa_2 = \lambda_1 \lambda_2^{\frac{1}{2}} L^{\frac{1}{2} + \frac{1}{6}}$ y $\kappa_3 = \lambda_0 L$ que es exactamente (1.3).

3.2. Cambio de notación

En adelante se usará, por simplicidad, una notación especial. Ésta permitirá escribir las ecuaciones necesarias de manera más corta, y así poder visualizarlas más fácil-

mente.

Esta notación implica un cambio en cómo se expresa el signo de una variable, y es como sigue. Cuando una variable real $z \in \mathbb{R}$ sea elevada a una potencia real $p \in \mathbb{R}$, se escribirá z^p , que dentro de este trabajo, de manera diferente a como usualmente se entiende, significará que el valor absoluto de la variable z está elevado a la potencia p y multiplicado por el signo de la variable z , es decir:

Definición 3

$$z^p = |z|^p \text{sign}(z)$$



En el caso de las potencias impares, el cambio de notación no afectaría al significado del enunciado, pero en el caso de una potencia par, como por ejemplo cuando $p = 2$, el escribir z^2 es equivalente a haber escrito $|z|^2 \text{sign}(z)$. Se debe tener especial cuidado en estos casos.

La Tabla 3.1 ilustra un poco más ampliamente el cambio de notación.

Tabla 3.1: Notación especial

Nueva notación	Notación usual
z^0	$\text{sign}(z)$
$z^p z^q$	$ z ^p \text{sign}(z) z ^q \text{sign}(z) = z ^{p+q}$
$z^0 z^p$	$ z ^p$
$z^0 z ^p$	z^p
$ z ^p$	$ z ^p$

Es decir que en la nueva notación z^p se refiere a una función monotónica creciente, mientras que $|z|^p$ se refiere a una función positiva definida siempre. Esto se vuelve especialmente importante al momento de derivar una función escrita en la nueva notación

Entonces el diferenciador (1.3) se escribiría como

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -k_1 x_1^{\frac{2}{3}} + x_2 \\ \dot{x}_2 &= -k_2 x_1^{\frac{1}{3}} + x_3 \\ \dot{x}_3 &= -k_3 x_1^0\end{aligned}\tag{3.3}$$

A la forma (3.3) es a la que se hará referencia, en lo sucesivo, cuando se hable del diferenciador por modos deslizantes de tercer orden.

A partir de este momento, y a lo largo del resto de esta tesis se usará la notación descrita en esta Sección.

3.3. Candidata a función de Lyapunov

Una candidata a función de Lyapunov es:

$$V(x) = \gamma_1 |x_1|^{\frac{4}{3}} - \gamma_{12} x_1^{\frac{2}{3}} x_2 + \gamma_2 |x_2|^2 - \gamma_{13} x_1 x_3 - \gamma_{23} x_2 x_3^2 + \gamma_3 |x_3|^4\tag{3.4}$$

Esta candidata puede escribirse como un caso particular de la función de Lyapunov (2.4) propuesta por J. Moreno en [Moreno11] como:

$$\begin{aligned}V(x) &= V_{o2} - \gamma_{13} x_1 x_3 - \gamma_{23} x_2 x_3^2 + \gamma_3 |x_3|^4 \\ &= \gamma_1 \left(|x_1|^{\frac{2}{3}} \right)^2 - \gamma_{12} \left(x_1^{\frac{2}{3}} \right) x_2 + \gamma_2 |x_2|^2 - \gamma_{13} x_1 x_3 - \gamma_{23} x_2 x_3^2 + \gamma_3 |x_3|^4\end{aligned}$$

La derivada de (3.4) sobre las trayectorias del sistema (3.3) es:

$$\begin{aligned}\dot{V}(x) &= \frac{4}{3} \gamma_1 x_1^{\frac{1}{3}} (-k_1 x_1^{\frac{2}{3}} + x_2) - \frac{2}{3} \gamma_{12} |x_1|^{-\frac{1}{3}} x_2 (-k_1 x_1^{\frac{2}{3}} + x_2) - \gamma_{12} x_1^{\frac{2}{3}} (-k_2 x_1^{\frac{1}{3}} + x_3) + \\ &+ 2\gamma_2 x_2 (-k_2 x_1^{\frac{1}{3}} + x_3) - \gamma_{13} x_3 (-k_1 x_1^{\frac{2}{3}} + x_2) - \gamma_{13} x_1 (-k_3 x_1^0) + \\ &- \gamma_{23} x_3^2 (-k_2 x_1^{\frac{1}{3}} + x_3) - 2\gamma_{23} x_2 |x_3| (-k_3 x_1^0) + 4\gamma_3 x_3^3 (-k_3 x_1^0)\end{aligned}$$

Desarrollando los términos

$$\begin{aligned}\dot{V}(x) &= \frac{4}{3} \gamma_1 k_1 |x_1| + \gamma_{12} k_2 |x_1| + \gamma_{13} k_3 |x_1| + \frac{4}{3} \gamma_1 x_1^{\frac{1}{3}} x_2 - 2\gamma_2 k_2 x_1^{\frac{1}{3}} x_2 + \frac{2}{3} \gamma_{12} k_1 x_1^{\frac{1}{3}} x_2 + \\ &- \frac{2}{3} \gamma_{12} |x_1|^{-\frac{1}{3}} |x_2|^2 - \gamma_{12} x_1^{\frac{2}{3}} x_3 + \gamma_{13} k_1 x_1^{\frac{2}{3}} x_3 + \gamma_{23} k_2 x_1^{\frac{1}{3}} x_3^2 + 2\gamma_2 x_2 x_3 + \\ &- \gamma_{13} x_2 x_3 + 2\gamma_{23} k_3 x_1^0 x_2 |x_3| - \gamma_{23} |x_3|^3 - 4\gamma_3 k_3 x_1^0 x_3^3\end{aligned}$$

Agrupándolos

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) = & -\frac{1}{|x_1|^{\frac{1}{3}}} \left\{ \left(\frac{4}{3}\gamma_1 k_1 - \gamma_{12} k_2 - \gamma_{13} k_3 \right) |x_1|^{\frac{4}{3}} + \right. \\ & \left. - 2 \left(\frac{2}{3}\gamma_1 - \gamma_2 k_2 + \frac{1}{3}\gamma_{12} k_1 \right) x_1^{\frac{2}{3}} x_2 + \frac{2}{3}\gamma_{12} |x_2|^2 \right\} + \\ & + (\gamma_{13} k_1 - \gamma_{12}) x_1^{\frac{2}{3}} x_3 + \gamma_{23} k_2 x_1^{\frac{1}{3}} x_3^2 + (2\gamma_2 - \gamma_{13} + 2\gamma_{23} k_3 x_1^0 x_3^0) x_2 x_3 + \\ & - (\gamma_{23} + 4\gamma_3 k_3 x_1^0 x_3^0) |x_3|^3 \end{aligned} \quad (3.5)$$

Como se había visto en el Capítulo 2, para que una función candidata $V(x)$ sea validada como función de Lyapunov, debe cumplirse que $V(x) > 0$ y $\dot{V}(x) < 0$.

3.4. Condiciones para la positividad definida de $V(x)$

Para probar que la función candidata es positiva definida hay que demostrar que los términos positivos dominarán a los negativos en todo momento. Esto se lograría encontrando una cota inferior, positiva, para la candidata. Para hacerlo se siguieron los siguientes pasos, que resultarán familiares, ya que son exactamente los mismos que se siguieron en la sección 2.3 para el caso lineal. Es claro que

$$\begin{aligned} x_1^{\frac{2}{3}} x_2 & \leq |x_1|^{\frac{2}{3}} |x_2| \\ x_1 x_3 & \leq |x_1| |x_3| \\ x_2 x_3^2 & \leq |x_2| |x_3|^2 \end{aligned}$$

Usando la desigualdad aritmética que se presentó en el Capítulo 2, estos últimos términos pueden ser acotados por arriba y separados.

$$\begin{aligned} |x_1|^{\frac{2}{3}} |x_2| & \leq \frac{1}{2} \alpha_{12}^2 |x_1|^{\frac{4}{3}} + \frac{1}{2} \alpha_{12}^{-2} |x_2|^2 \\ |x_1| |x_3| & \leq \frac{3}{4} \alpha_{13}^{\frac{4}{3}} |x_1|^{\frac{4}{3}} + \frac{1}{4} \alpha_{13}^{-4} |x_3|^4 \\ |x_2| |x_3|^2 & \leq \frac{1}{2} \alpha_{23}^2 |x_2|^2 + \frac{1}{2} \alpha_{23}^{-2} |x_3|^4 \end{aligned}$$

Lo anterior se cumple para cualquier número real $\alpha_{12} > 0$, $\alpha_{13} > 0$, $\alpha_{23} > 0$. De esta manera, los términos cruzados quedan separados, y así (3.4) puede acotarse por abajo como sigue, suponiendo que $\gamma_1 > 0$, $\gamma_2 > 0$, $\gamma_3 > 0$, $|\gamma_{12}| > 0$, $\gamma_{23} > 0$, $|\gamma_{13}| > 0$.

$$\begin{aligned}
V(x) &= \gamma_1 |x_1|^{\frac{4}{3}} - \gamma_{12} x_1^{\frac{2}{3}} x_2 + \gamma_2 x_2^2 - \gamma_{13} x_1 x_3 - \gamma_{23} x_2 x_3^2 + \gamma_3 |x_3|^4 \\
&\geq \gamma_1 |x_1|^{\frac{4}{3}} - |\gamma_{12}| |x_1|^{\frac{2}{3}} |x_2| + \gamma_2 |x_2|^2 - |\gamma_{13}| |x_1| |x_3| - |\gamma_{23}| |x_2| |x_3|^2 + \gamma_3 |x_3|^4 \\
&\geq \gamma_1 |x_1|^{\frac{4}{3}} - |\gamma_{12}| \left(\frac{\alpha_{12}^2}{2} |x_1|^{\frac{4}{3}} + \frac{\alpha_{12}^{-2}}{2} |x_2|^2 \right) + \gamma_2 |x_2|^2 - |\gamma_{13}| \left(\frac{3\alpha_{13}^{\frac{4}{3}}}{4} |x_1|^{\frac{4}{3}} + \frac{\alpha_{13}^{-4}}{4} |x_3|^4 \right) \\
&\quad - |\gamma_{23}| \left(\frac{\alpha_{23}^2}{2} |x_2|^2 + \frac{\alpha_{23}^{-2}}{2} |x_3|^4 \right) + \gamma_3 |x_3|^4 \\
&= \left(\gamma_1 - |\gamma_{12}| \frac{\alpha_{12}^2}{2} - |\gamma_{13}| \frac{3\alpha_{13}^{\frac{4}{3}}}{4} \right) |x_1|^{\frac{4}{3}} + \left(\gamma_2 - |\gamma_{12}| \frac{\alpha_{12}^{-2}}{2} - |\gamma_{23}| \frac{\alpha_{23}^2}{2} \right) |x_2|^2 + \\
&\quad \left(\gamma_3 - |\gamma_{13}| \frac{\alpha_{13}^{-4}}{4} - |\gamma_{23}| \frac{\alpha_{23}^{-2}}{2} \right) |x_3|^4
\end{aligned} \tag{3.6}$$

Es entonces evidente que para que $V(x) > 0$ se deben satisfacer las siguientes tres desigualdades, que corresponden a los términos que dependen de los coeficientes de la función y de las nuevas variables α_{12} , α_{13} , α_{23} de (3.6).

$$\left(\gamma_1 - |\gamma_{12}| \frac{\alpha_{12}^2}{2} - |\gamma_{13}| \frac{3\alpha_{13}^{\frac{4}{3}}}{4} \right) > 0 \tag{3.7}$$

$$\left(\gamma_2 - |\gamma_{12}| \frac{\alpha_{12}^{-2}}{2} - |\gamma_{23}| \frac{\alpha_{23}^2}{2} \right) > 0 \tag{3.8}$$

$$\left(\gamma_3 - |\gamma_{13}| \frac{\alpha_{13}^{-4}}{4} - |\gamma_{23}| \frac{\alpha_{23}^{-2}}{2} \right) > 0 \tag{3.9}$$

En este momento se tienen como variables a ser encontradas, γ_1 , γ_2 , γ_3 , γ_{12} , γ_{13} , γ_{23} , α_{12} , α_{13} y α_{23} , es decir, 9 en total. Es importante hacer notar que ya no basta con que α_{12} , α_{13} , α_{23} sean tres números reales positivos cualesquiera, sino que se deben encontrar los valores numéricos que hagan que las desigualdades se cumplan. Lo mismo pasa para γ_1 , γ_2 , γ_3 , γ_{12} , γ_{13} y γ_{23} .

Las variables α_{12} , α_{13} , α_{23} introducidas en (3.6) pueden ser eliminadas mediante manipulación aritmética. En esta sección, para ilustrar el método, se muestra cómo se elimina una de ellas. La eliminación completa, así como la totalidad de las desigualdades que resultan, puede ser encontrada en el Apéndice B. De nuevo, este procedimiento resultará familiar, ya que es exactamente el mismo que se usó en la Sección 2.3.

Eliminación de α_{12} :

Las desigualdades (3.7) y (3.8) pueden escribirse como

$$\begin{aligned} \frac{2}{|\gamma_{12}|} \left(\gamma_1 - |\gamma_{13}| \frac{3}{4} \alpha_{13}^{\frac{4}{3}} \right) &> \alpha_{12}^2, \quad |\gamma_{12}| > 0 \\ \alpha_{12}^2 &> \frac{|\gamma_{12}|}{2 \left(\gamma_2 - \frac{|\gamma_{23}|}{2} \alpha_{23}^2 \right)}, \quad \gamma_2 - \frac{|\gamma_{23}|^2}{\alpha_{23}^2} > 0 \end{aligned}$$

Entonces puede eliminarse α_{12} y las desigualdades que restan son:

$$\begin{aligned} \frac{2}{|\gamma_{12}|} \left(\gamma_1 - |\gamma_{13}| \frac{3}{4} \alpha_{13}^{\frac{4}{3}} \right) &> \frac{|\gamma_{12}|}{2 \left(\gamma_2 - \frac{|\gamma_{23}|}{2} \alpha_{23}^2 \right)} \\ |\gamma_{12}| &> 0 \\ \gamma_2 - \frac{|\gamma_{23}|}{2} \alpha_{23}^2 &> 0 \\ \left(\gamma_3 - |\gamma_{13}| \frac{\alpha_{13}^{-2}}{2} - |\gamma_{23}| \frac{\alpha_{23}^{-2}}{2} \right) &> 0 \end{aligned} \tag{3.10}$$

De la misma manera pueden ser eliminadas α_{13} y α_{23} . Así, las variables que quedan por encontrar serán solamente seis: $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_{12}, \gamma_{13}, \gamma_{23}$, es decir, aquellas que provienen de (3.4). Después de haber deducido las desigualdades que deben ser satisfechas para que $V(x) > 0$, como se muestra en el Apéndice B, éstas pueden ser analizadas y reducidas mediante algunas simplificaciones. Estas simplificaciones se presentan, de manera completa, en el Apéndice C. En resumen, las desigualdades que deben ser satisfechas para que la función propuesta sea positiva definida son las que se muestran en la Tabla 3.2

Examinando las desigualdades de la Tabla 3.2, puede notarse que son iguales en forma a aquellas que aparecieron en la Tabla 2.1 para el caso lineal, pero con diferentes potencias. Esto tiene sentido, ya que el sistema (3.3) es igual al sistema lineal (2.5) excepto por las potencias no lineales primero.

3.5. Condiciones para la negatividad definida de $\dot{V}(x)$

La derivada de la candidata a la función de Lyapunov puede dividirse en dos partes, una cuadrática y una no cuadrática.

Tabla 3.2: Condiciones para la positividad definida de $V(x)$

$$\gamma_1 > 0, \gamma_2 > 0, \gamma_3 > 0, |\gamma_{12}| > 0, |\gamma_{23}| > 0$$

$$\gamma_2\gamma_3 - \left(\frac{|\gamma_{23}|}{2}\right)^2 > \frac{3^3 |\gamma_{13}|^4 \gamma_2}{4^4 \gamma_1^3}$$

$$\left(\frac{4\gamma_1}{3|\gamma_{13}|}\right) > z > \left(\frac{\gamma_2|\gamma_{13}|}{4\left(\gamma_2\gamma_3 - \left(\frac{|\gamma_{23}|}{2}\right)^2\right)}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$a_4 z^4 + a_3 z^3 + a_1 z + a_0 > 0$$

Donde

$$a_4 := -\frac{3}{4}|\gamma_{13}| \left(\gamma_2\gamma_3 - \left(\frac{|\gamma_{23}|}{2}\right)^2\right) \quad a_3 := \left(\gamma_3 \left(\gamma_1\gamma_2 - \left(\frac{|\gamma_{12}|}{2}\right)^2\right) - \gamma_1 \left(\frac{|\gamma_{23}|}{2}\right)^2\right)$$

$$a_1 := 3\gamma_2 \left(\frac{|\gamma_{13}|}{4}\right)^2 \quad a_0 := -\left(\gamma_1\gamma_2 - \left(\frac{|\gamma_{12}|}{2}\right)^2\right) \frac{|\gamma_{13}|}{4}$$

$$z > 0$$

Recordando (3.5)

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) = & -\frac{1}{|x_1|^{\frac{1}{3}}} \left\{ \left(\frac{4}{3}\gamma_1 k_1 - \gamma_{12} k_2 - \gamma_{13} k_3\right) |x_1|^{\frac{4}{3}} + \right. \\ & \left. - 2 \left(\frac{2}{3}\gamma_1 - \gamma_2 k_2 + \frac{1}{3}\gamma_{12} k_1\right) x_1^{\frac{2}{3}} x_2 + \frac{2}{3}\gamma_{12} |x_2|^2 \right\} + \\ & + (\gamma_{13} k_1 - \gamma_{12}) x_1^{\frac{2}{3}} x_3 + \gamma_{23} k_2 x_1^{\frac{1}{3}} x_3^2 + (2\gamma_2 - \gamma_{13} + 2\gamma_{23} k_3 x_1^0 x_3^0) x_2 x_3 + \\ & - (\gamma_{23} + 4\gamma_3 k_3 x_1^0 x_3^0) |x_3|^3 \end{aligned}$$

Es claro que para que $\dot{V} < 0$ es necesario, por un lado, que

$$\left\{ \left(\frac{4}{3}\gamma_1 k_1 - \gamma_{12} k_2 - \gamma_{13} k_3\right) |x_1|^{\frac{4}{3}} - 2 \left(\frac{2}{3}\gamma_1 - \gamma_2 k_2 + \frac{1}{3}\gamma_{12} k_1\right) x_1^{\frac{2}{3}} x_2 + \frac{2}{3}\gamma_{12} |x_2|^2 \right\} > 0$$

Que escrito como una forma cuadrática queda como:

$$U(\xi) = \begin{bmatrix} x_1^{\frac{2}{3}} \\ x_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \left(\frac{4}{3}\gamma_1 k_1 - \gamma_{12} k_2 - \gamma_{13} k_3\right) & -\left(\frac{2}{3}\gamma_1 - \gamma_2 k_2 + \frac{1}{3}\gamma_{12} k_1\right) \\ -\left(\frac{2}{3}\gamma_1 - \gamma_2 k_2 + \frac{1}{3}\gamma_{12} k_1\right) & \frac{2}{3}\gamma_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^{\frac{2}{3}} \\ x_2 \end{bmatrix} = \xi^T P \xi$$

Donde $P = P^T$.

Es evidente, entonces, que para que $U(\xi) > 0$, P debe ser positiva definida.

Por el Teorema 1 se sabe que para probar que una matriz cuadrada es positiva definida, se debe mostrar que todos sus menores principales líderes son positivos. Para el caso de P esto es equivalente a decir que las siguientes desigualdades se cumplan.

$$\left(\frac{4}{3}\gamma_1 k_1 - \gamma_{12} k_2 - \gamma_{13} k_3\right) > 0 \quad (3.11)$$

$$\frac{2}{3}\gamma_{12} \left(\frac{4}{3}\gamma_1 k_1 - \gamma_{12} k_2 - \gamma_{13} k_3\right) > \left(\frac{2}{3}\gamma_1 - \gamma_2 k_2 + \frac{1}{3}\gamma_{12} k_1\right)^2 \quad (3.12)$$

Por otro lado, $U(\xi) > 0$ se puede acotar de la siguiente manera:

$$\lambda_m \|\xi\|_2^2 \leq \xi^T P \xi = U(\xi) \leq \lambda_M \|\xi\|_2^2$$

Donde $\|\xi\|_2^2 = |x_1|^{\frac{4}{3}} + |x_2|^2$ y λ_m y λ_M son el valor propio más pequeño y más grande, respectivamente, de P .

Así se puede ver que $\lambda_m > 0$ implica que $P > 0$. El cálculo de λ_m puede encontrarse en el Apéndice D. Ahora, para asegurar la negatividad definida de toda la función, se puede escribir

$$|x_1|^{\frac{4}{3}} \leq \|\xi\|_2^2 \leq \frac{1}{\lambda_m} U(\xi) \Rightarrow -|x_1|^{-\frac{1}{3}} \leq -\lambda_m^{\frac{1}{4}} U^{-\frac{1}{4}}(\xi)$$

De ahí sigue que

$$-\frac{1}{|x_1|^{\frac{1}{3}}} \xi^T P \xi = -\frac{1}{|x_1|^{\frac{1}{3}}} U(\xi) \leq \lambda_m^{\frac{1}{4}} U^{\frac{3}{4}}(\xi) \leq -\lambda_m^{\frac{1}{4}} (\lambda_m \|\xi\|_2^2)^{\frac{3}{4}} = -\lambda_m \left(|x_1|^{\frac{4}{3}} + |x_2|^2\right)^{\frac{3}{4}}$$

La desigualdad fundamental generalizada [Hardy51] dice que

$$(\alpha|x_1|^s + (1-\alpha)|x_2|^s)^{\frac{1}{s}} \leq (\alpha|x_1|^r + (1-\alpha)|x_2|^r)^{\frac{1}{r}}, \quad 0 < \alpha < 1, \quad \forall x \in \mathbb{R}^2, \quad s < r \quad (3.13)$$

Usando (3.13) se tiene que

$$\left(\frac{1}{2}|x_1|^{\frac{4}{3}} + \frac{1}{2}|x_2|^2\right)^{\frac{3}{4}} = \left(\frac{1}{2}|x_1|^{\frac{4}{3}} + \frac{1}{2}\left(|x_2|^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{4}{3}}\right)^{\frac{3}{4}} \geq \left(\frac{1}{2}|x_1| + \frac{1}{2}|x_2|^{\frac{3}{2}}\right)$$

de tal manera que

$$-\frac{1}{|x_1|^{\frac{1}{3}}}\xi^T P \xi \leq -2^{\frac{3}{4}}\lambda_m \left(\frac{1}{2}|x_1|^{\frac{4}{3}} + \frac{1}{2}|x_2|^2\right)^{\frac{3}{4}} \leq -2^{-\frac{1}{4}}\lambda_m \left(\frac{1}{2}|x_1| + \frac{1}{2}|x_2|^{\frac{3}{2}}\right)$$

Así que (3.5) se puede acotar por arriba de la siguiente manera.

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) \leq & -2^{-\frac{1}{4}}\lambda_m \left(\frac{1}{2}|x_1| + \frac{1}{2}|x_2|^{\frac{3}{2}}\right) + (\gamma_{13}k_1 - \gamma_{12})|x_1|^{\frac{2}{3}}|x_3| + \gamma_{23}k_2|x_1|^{\frac{1}{3}}|x_3|^2 + \\ & (|2\gamma_2 - \gamma_{13}| + 2\gamma_{23}k_3)|x_2||x_3| - (\gamma_{23} - 4\gamma_3k_3)|x_3|^3 \end{aligned} \quad (3.14)$$

Si se prueba que la cota superior de (3.14) es negativa, se habrá probado que $\dot{V}(x) < 0$.

Esta cota superior puede tratarse de manera similar a como se hizo en la Sección 3.4 para la candidata a función de Lyapunov, es decir, separar los términos y hacer que su negatividad definida dependa de los coeficientes de la función de Lyapunov y, en este caso, de las ganancias del diferenciador (3.3). De la misma manera que sucedió en el Sección 3.4, otras nuevas variables serían introducidas que pueden, de igual manera, ser eliminadas mediante manipulación aritmética. La deducción completa de las desigualdades puede ser encontrada en el Apéndice E. En resumen, las desigualdades que deben ser satisfechas para que $\dot{V}(x) < 0$ son las que se muestran en la Tabla 3.3.

3.6. Resumen del capítulo

En este capítulo se presentó una candidata a función de Lyapunov:

$$V(x) = \gamma_1|x_1|^{\frac{4}{3}} - \gamma_{12}x_1^{\frac{2}{3}}x_2 + \gamma_2|x_2|^2 - \gamma_{13}x_1x_3 - \gamma_{23}x_2x_3^2 + \gamma_3|x_3|^4$$

Cuya derivada sobre las trayectorias del sistema (3.3) es (3.5). Para validar esta candidata como función de Lyapunov se debe verificar que sea positiva definida y que su

Tabla 3.3: Condiciones para la negatividad definida de $\dot{V}(x)$

$$\frac{2}{3}\gamma_{12} \left(\frac{4}{3}\gamma_1 k_1 - \gamma_{12} k_2 - \gamma_{13} k_3 \right) > \left(\frac{2}{3}\gamma_1 - \gamma_2 k_2 + \frac{1}{3}\gamma_{12} k_1 \right)^2$$

$$(\gamma_{23} - 4\gamma_3 k_3) > \frac{2^{\frac{9}{2}} (\gamma_{23} k_2)^{\frac{3}{2}}}{3^{\frac{3}{2}} \lambda_m^{\frac{1}{2}}}$$

$$\frac{2}{3} \frac{\gamma_{23} k_2}{(\gamma_{23} - 4\gamma_3 k_3)} < y < \left(2^{-\frac{1}{4}} 3 \frac{\lambda_m}{\gamma_{23} k_2} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$b_2^2 (b_3 y - 2b_2) \left(y^2 - 2^{-\frac{1}{4}} 3 \frac{\lambda_m}{\gamma_{23} k_2} \right)^2 > b_0 y$$

$$(\gamma_{23} - 4\gamma_3 k_3) > \frac{2^2 (|2\gamma_2 - \gamma_{13}| + 2\gamma_{23} k_3)^3}{3^3 (2^{-\frac{1}{4}} \lambda_m)^2}$$

Donde

$$y > 0 \quad b_0 := \frac{2^2}{3^3} |(\gamma_{13} k_1 - \gamma_{12})|^3$$

$$b_1 := 2^{-\frac{1}{4}} 3 \frac{\lambda_m}{\gamma_{23} k_2} \quad b_2 := \frac{1}{3} \gamma_{23} k_2$$

$$b_3 := \left((\gamma_{23} - 4\gamma_3 k_3) - \frac{2^2 (|2\gamma_2 - \gamma_{13}| + 2\gamma_{23} k_3)^3}{3^3 (2^{-\frac{1}{4}})^2} \right)$$

$$\lambda_m = \frac{\frac{1}{2} \left(\left(\frac{4}{3}\gamma_1 k_1 - \gamma_{12} k_2 - \gamma_{13} k_3 \right) + \frac{2}{3}\gamma_{12} \right) - \frac{1}{2} \sqrt{\left(\left(\frac{4}{3}\gamma_1 k_1 - \gamma_{12} \left(k_2 + \frac{2}{3} \right) - \gamma_{13} k_3 \right)^2 + 4 \left(\frac{2}{3}\gamma_1 - \gamma_2 k_2 + \frac{1}{3}\gamma_{12} k_1 \right)^2 \right)}}{1}$$

derivada sea negativa definida. Esto es equivalente a encontrar una cota inferior para $V(x)$ que sea positiva, y una superior para $\dot{V}(x)$ que sea negativa.

La candidata a función de Lyapunov se acotó de la siguiente manera:

$$V(x) \geq \left(\gamma_1 - \gamma_{12} \frac{\alpha_{12}^2}{2} - |\gamma_{13}| \frac{3\alpha_{13}^{\frac{4}{3}}}{4} \right) |x_1|^{\frac{4}{3}} + \left(\gamma_2 - \gamma_{12} \frac{\alpha_{12}^{-2}}{2} - \gamma_{23} \frac{\alpha_{23}^2}{2} \right) |x_2|^2 + \left(\gamma_3 - |\gamma_{13}| \frac{\alpha_{13}^{-4}}{4} - \gamma_{23} \frac{\alpha_{23}^{-2}}{2} \right) |x_3|^4$$

Mientras que su derivada se acotó como:

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) \leq & -2^{-\frac{1}{4}}\lambda_m \left(\frac{1}{2}|x_1| + \frac{1}{2}|x_2|^{\frac{3}{2}} \right) + (\gamma_{13}k_1 - \gamma_{12})|x_1|^{\frac{2}{3}}|x_3| + \gamma_{23}k_2|x_1|^{\frac{1}{3}}|x_3|^2 \\ & + (|2\gamma_2 - \gamma_{13}| + 2\gamma_{23}k_3)|x_2||x_3| - (\gamma_{23} - 4\gamma_3k_3)|x_3|^3 \end{aligned}$$

Después de algunos cálculos se dedujo un conjunto de desigualdades que dependen solamente de las variables $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_{12}, \gamma_{13}, \gamma_{23}, k_1, k_2$ y k_3 , y que se muestran en la Tabla 3.4.

Es importante hacer notar que las desigualdades de la primera parte de la Tabla 3.4, son iguales en forma a aquellas que aparecieron en la Tabla 2.1 para el caso lineal, pero con diferentes potencias.

Este conjunto de desigualdades constituyen condiciones suficientes para validar la candidata (3.4) como función de Lyapunov. Dicho en otras palabras, si se cumplen todas estas desigualdades simultáneamente, se habrá probado que la función candidata es positiva definida y su derivada es negativa definida, es decir que se habrá demostrado que la candidata (3.4) es, efectivamente, una función de Lyapunov para el diferenciador (3.3). Falta entonces demostrar que existen valores para $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_{12}, \gamma_{13}, \gamma_{23}, k_1, k_2$ y k_3 que hacen que las desigualdades se satisfagan. Esto se mostrará en el Capítulo 4

Tabla 3.4: Condiciones para la validación de la candidata como función de Lyapunov

$$\gamma_1 > 0, \gamma_2 > 0, \gamma_3 > 0, \gamma_{12} > 0, \gamma_{23} > 0$$

$$\gamma_2 \gamma_3 - \left(\frac{\gamma_{23}}{2}\right)^2 > \frac{3^3 |\gamma_{13}|^4 \gamma_2}{4^4 \gamma_1^3}$$

$$\left(\frac{4\gamma_1}{3|\gamma_{13}|}\right) > z > \left(\frac{\gamma_2 |\gamma_{13}|}{4(\gamma_2 \gamma_3 - (\frac{\gamma_{23}}{2})^2)}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$a_4 z^4 + a_3 z^3 + a_1 z + a_0 > 0$$

$$\frac{2}{3} \gamma_{12} \left(\frac{4}{3} \gamma_1 k_1 - \gamma_{12} k_2 - \gamma_{13} k_3\right) > \left(\frac{2}{3} \gamma_1 - \gamma_2 k_2 + \frac{1}{3} \gamma_{12} k_1\right)^2$$

$$(\gamma_{23} - 4\gamma_3 k_3) > \frac{2^{\frac{9}{2}} (\gamma_{23} k_2)^{\frac{3}{2}}}{3^{\frac{3}{2}} \lambda_m^{\frac{1}{2}}}$$

$$\frac{2}{3} \frac{\gamma_{23} k_2}{(\gamma_{23} - 4\gamma_3 k_3)} < y < \left(2^{-\frac{1}{4}} 3 \frac{\lambda_m}{\gamma_{23} k_2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$b_2^2 (b_3 y - 2b_2) \left(y^2 - 2^{-\frac{1}{4}} 3 \frac{\lambda_m}{\gamma_{23} k_2}\right)^2 > b_0 y$$

$$(\gamma_{23} - 4\gamma_3 k_3) > \frac{2^2 (|2\gamma_2 - \gamma_{13}| + 2\gamma_{23} k_3)^3}{3^3 (2^{-\frac{1}{4}} \lambda_m)^2}$$

Donde

$$a_4 := -\frac{3}{4} |\gamma_{13}| \left(\gamma_2 \gamma_3 - \left(\frac{\gamma_{23}}{2}\right)^2\right) \quad a_3 := \left(\gamma_3 \left(\gamma_1 \gamma_2 - \left(\frac{\gamma_{12}}{2}\right)^2\right) - \gamma_1 \left(\frac{\gamma_{23}}{2}\right)^2\right)$$

$$a_1 := 3\gamma_2 \left(\frac{|\gamma_{13}|}{4}\right)^2 \quad a_0 := -\left(\gamma_1 \gamma_2 - \left(\frac{\gamma_{12}}{2}\right)^2\right) \frac{|\gamma_{13}|}{4}$$

$$z > 0$$

$$y > 0$$

$$b_0 := \frac{2^2}{3^3} |(\gamma_{13} k_1 - \gamma_{12})|^3$$

$$b_2 := \frac{1}{3} \gamma_{23} k_2$$

$$b_3 := \left((\gamma_{23} - 4\gamma_3 k_3) - \frac{2^2 (|2\gamma_2 - \gamma_{13}| + 2\gamma_{23} k_3)^3}{3^3 (2^{-\frac{1}{4}})^2} \right)$$

$$\lambda_m = \frac{1}{2} \left(\left(\frac{4}{3} \gamma_1 k_1 - \gamma_{12} k_2 - \gamma_{13} k_3 \right) + \frac{2}{3} \gamma_{12} \right) - \frac{1}{2} \sqrt{\left(\left(\frac{4}{3} \gamma_1 k_1 - \gamma_{12} \left(k_2 + \frac{2}{3} \right) - \gamma_{13} k_3 \right)^2 + 4 \left(\frac{2}{3} \gamma_1 - \gamma_2 k_2 + \frac{1}{3} \gamma_{12} k_1 \right)^2 \right)}$$

Capítulo 4

Validación de la candidata como función de Lyapunov

Como se mencionó en el Capítulo 3, para probar la positividad definida de (3.4) y la negatividad definida de (3.5) se deben encontrar juegos de valores, tanto de los coeficientes de la función candidata $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_{12}, \gamma_{13}, \gamma_{23}$, como de las ganancias del diferenciador k_1, k_2 y k_3 que satisfagan todas las desigualdades de la Tabla 3.4. Encontrar dichos valores equivale a resolver trece desigualdades con nueve variables. No existe una metodología, que la autora tenga conocimiento, para resolver este tipo de problemas. Dentro de este trabajo de tesis se propusieron algunos. En este capítulo se muestran los resultados para los puntos uno y dos de la siguiente lista, los puntos tres y cuatro son métodos cuyos pasos fueron propuestos, pero hasta ahora no han sido probados completamente. Para éstos dos últimos sólo se presenta, en esta sección, una introducción; la descripción completa puede encontrarse en el Capítulo 5.

1. Prueba de la existencia de la solución a las desigualdades de la Tabla 3.4.

Se demostró, encontrando un juego de valores para las constantes $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_{12}, \gamma_{13}, \gamma_{23}$ y k_1, k_2, k_3 que satisfacen las desigualdades de la Tabla 3.4, que existe al menos una solución a ellas y, por lo tanto, que (3.4) es una función de Lyapunov para el diferenciador (3.3)

2. Solución con cuatro restricciones.

Se impusieron cuatro restricciones sobre los coeficientes de la función de Lyapunov: γ_1 , γ_2 , γ_3 , γ_{12} , γ_{13} y γ_{23} , para así poder simplificar las desigualdades y reducir el número de ellas. El resultado de estas manipulaciones fue hacer que las desigualdades sólo dependieran de las ganancias k_1 , k_2 , k_3 , cosa que coincide con las condiciones a las que se llegan en el caso lineal. De esta manera, como las variables a encontrar que quedaron son sólo tres, se pudo obtener una interpretación gráfica en 3 dimensiones, del espacio de soluciones a las desigualdades, es decir, de las ganancias posibles para el diferenciador (3.3).

3. **Solución algorítmica con una sola restricción.** Se mantuvo una sola de las restricciones anteriormente mencionadas, y se propuso una secuencia de pasos a seguir para encontrar, gráficamente, conjuntos de soluciones.

4. **Solución algorítmica sin restricciones.** Usando parte de los pasos propuestos en la solución anterior, se propuso un algoritmo para encontrar soluciones sin ninguna restricción sobre los coeficientes de la candidata a función de Lyapunov ni las ganancias del diferenciador.

4.1. Prueba de existencia de la solución

Una primera aproximación que se abordó para determinar si la candidata propuesta (3.4) es, efectivamente, una función de Lyapunov para (3.3), fue tratar de encontrar un conjunto de valores que satisficiera las desigualdades de la Tabla 3.4. Como son nueve las variables que hay que determinar, podría interpretarse como que los valores correctos darían las coordenadas de un punto en un espacio de nueve dimensiones. Si este punto existe, se probaría que existe al menos una solución al conjunto de desigualdades, cuya satisfacción es una condición suficiente para que la candidata (3.4) sea una función de Lyapunov.

Cabe destacar que existe un número infinito de posibles combinaciones de valores que probar, y que no hay ningún método, del que se tenga conocimiento, que pudiera sugerir

en qué parte del espacio de nueve dimensiones podrían ser buscadas las soluciones, o incluso si existen.

El paquete computacional *Matlab* incluye algunos algoritmos de optimización que, a modo de restricciones, pueden incluir desigualdades no lineales con cualquier número de variables. Se hizo uso de esta herramienta para aproximarse a una solución a las desigualdades.

El método de solución *fmincon* encuentra el mínimo de un problema especificado por

$$\text{mín } f(x) \text{ tal que } = \begin{cases} c(x) & \leq 0 \\ c_{eq}(x) & = 0 \\ Ax & \leq b \\ A_{eq} & = b_{eq} \\ l_b \leq x & \leq u_b, \end{cases}$$

donde x , b , b_{eq} y u_b son vectores; A y A_{eq} son matrices; $c(x)$ y $c_{eq}(x)$ son funciones que regresan vectores; y $f(x)$ es una función que regresa un escalar. $f(x)$, $c(x)$ y $c_{eq}(x)$ pueden ser funciones no lineales.

Como en este caso sólo interesa encontrar una solución a las desigualdades, y no hay una función a minimizar, $f(x) = 1$. Las restricciones usadas son las desigualdades de la Tabla 3.4. Una solución encontrada por el algoritmo de optimización, con ajuste fino manual fue la siguiente.

$$\begin{aligned}
\gamma_1 &= 0.5 & \gamma_3 &= 0.5 \\
\gamma_{13} &= 0.5 & \gamma_{23} &= 0.5 \\
\gamma_{12} &= 0.35 & \gamma_2 &= 0.4150 \\
k_1 &= 0.7 & k_2 &= 1 \\
k_3 &= 0.01 & & \\
z &= 1 & y &= 1
\end{aligned} \tag{4.1}$$

Con estos valores todas las desigualdades de la Tabla 3.4 son satisfechas simultáneamente. Con esto se prueba que, al menos en un punto del espacio de nueve dimensiones, la candidata (3.4) es una función de Lyapunov. Con esto queda probada la Proposición 1

Proposición 1 *Existen $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_{12}, \gamma_{13}, \gamma_{23}, k_1, k_2$ y k_3 reales tales que todas desigualdades de la Tabla 3.4 se cumplen simultáneamente.*



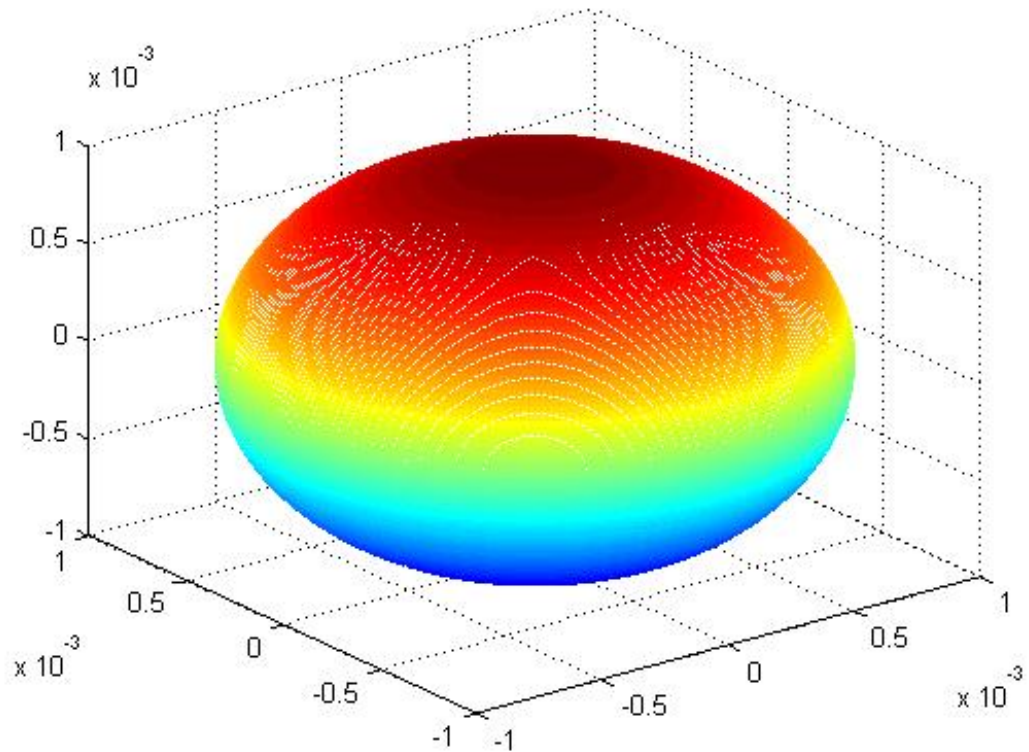
Verificación gráfica

Otra manera de comprobar que la candidata (3.4) es una función de Lyapunov, es evaluándola en un dominio de $[x_1, x_2, x_3]$ y verificando que (3.4) sea siempre mayor que cero, y su derivada (3.5) sea siempre menor que cero.

Proposición 2 *La candidata (3.4) y su derivada (3.5) son funciones homogéneas.*



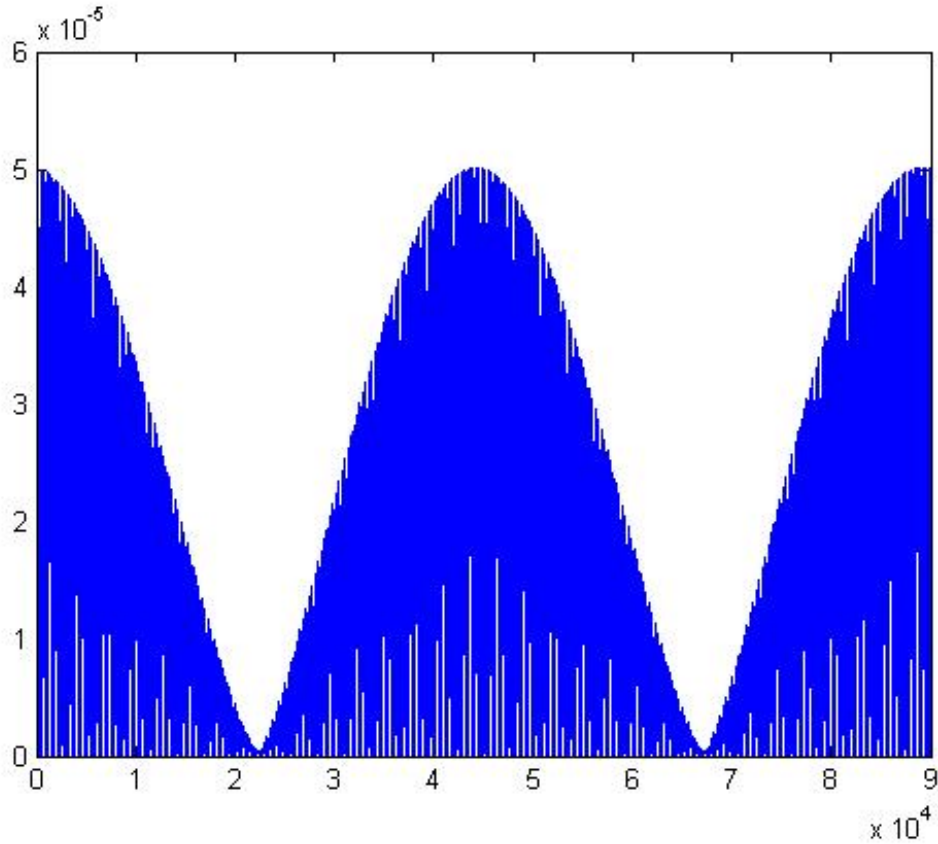
De la Proposición 2 y la Definición 2 del Capítulo 2 se tiene que si $V(x) > 0$ en una superficie de radio R , entonces $V(x) > 0 \forall x$. De la misma manera, si $\dot{V}(x) < 0$ en una superficie de radio R , entonces $\dot{V}(x) < 0 \forall x$. Usando esto, la candidata (3.4) y su derivada (3.5) se evaluaron sobre la superficie de una esfera de radio = 0.001. Los siguientes resultados fueron obtenidos:

Figura 4.1: Esfera de radio $r = 0.001$ 

Una esfera como la que se muestra en la Figura 4.1 puede ser construida mediante un comando en *Matlab*. Este comando proporciona una matriz con una serie de coordenadas que representan puntos sobre la superficie de la esfera con los que después se hace un *mesh*. Estas coordenadas proveen los puntos x_1, x_2, x_3 sobre los cuales se puede evaluar la candidata y su derivada.

La Figura 4.2 muestra el resultado de evaluar la candidata (3.4) sobre cada uno de los puntos de la superficie de la esfera de la Figura 4.1. Cada uno de los puntos de la horizontal representa una iteración en la evaluación, mientras que el valor de la vertical muestra el escalar que resultó de la misma. Puede observarse que cada una de las iteraciones arrojó un resultado positivo.

Figura 4.2: Función de Lyapunov evaluada sobre la superficie de la Figura 4.1

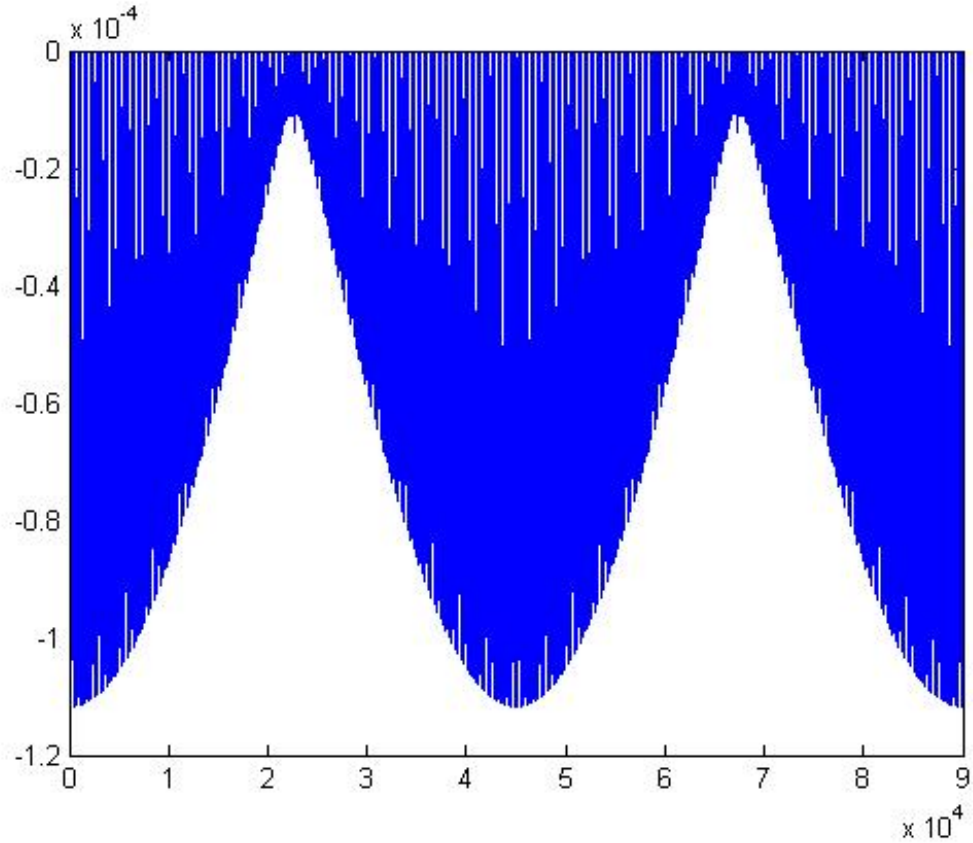


La Figura 4.3 muestra exactamente lo mismo, pero para la evaluación de la derivada a la candidata a función de Lyapunov sobre la superficie de la esfera de la Figura 4.1. Puede observarse que cada una de las iteraciones dio un resultado negativo.

Proposición 3 *La candidata (3.4) es una función de Lyapunov.*

Por la Proposición 2 y la Definición 2 se puede saber que la candidata a función de Lyapunov evaluada en cualquier punto del espacio arrojará valores positivos y su derivada arrojará valores negativos. Estos resultados prueban la Proposición 3. En adelante dejará de llamársele “candidata” a la función (3.4), cuando se hable de “la función de Lyapunov para (3.3)” se estará haciendo referencia a (3.4).

Figura 4.3: Derivada de la función de Lyapunov evaluada sobre la superficie de la Figura 4.1



4.2. Solución con cuatro restricciones

El número de desigualdades, así como sus formas, complican mucho su manipulación y análisis. Con la idea de reducir su número y simplificarlas, se propuso imponer cuatro restricciones sobre las variables de las desigualdades. Con ellas se logró dejar todas las desigualdades en términos de las ganancias k_1 , k_2 y k_3 , es decir, en términos de sólo tres variables. Esto permite que el conjunto de posibles ganancias para el diferenciador sea de tres dimensiones y entonces pueda ser graficado para tener una interpretación fácil de leer.

Las restricciones impuestas sobre los coeficientes de la función de Lyapunov son:

$$\gamma_1 = \gamma_3 = \gamma_{13} = \gamma_{23} = \gamma \quad (4.2)$$

$$\gamma_{12} = \gamma_{13}k_1 \quad (4.3)$$

$$\gamma_2 = \gamma_1 \frac{k_1^2 + 2}{3k_2} \quad (4.4)$$

$$z = 1 \quad (4.5)$$

- La restricción (4.2) se mantuvo de los resultados obtenidos en la sección (4.1).
- La restricción (4.3) se propuso con la finalidad de condensar varias de las desigualdades que se dedujeron en la sección (3.5). Es decir, aquellas que sirven para probar que $\dot{V}(x) \leq 0$.
- La restricción (4.4) se fijó para simplificar λ_m , ya que varias de las desigualdades de la sección (3.5) dependen de este valor.
- La restricción (4.5) se obtuvo de los resultados obtenidos en la sección (4.1).

Cada una de estas restricciones deben aplicarse a todas las desigualdades de la Tabla 3.4. Los cálculos completos de la sustitución de las restricciones en las desigualdades de dicha tabla pueden encontrarse en el Apéndice F.

Después de hacer todos los cálculos necesarios, se encontró que todas las desigualdades de la Tabla 3.4 pueden reducirse a solamente tres, que dependen de las ganancias del diferenciador (3.3), es decir de k_1 , k_2 y k_3 . Deben, entonces, ser encontrados valores de k_1 , k_2 y k_3 que hagan que las tres desigualdades se satisfagan de manera simultánea. Esto sería equivalente a que todas las desigualdades de la Tabla 3.4 fueran satisfechas y que, por consiguiente, (3.4) sea positiva definida y su derivada (3.5) sea negativa definida. Las tres desigualdades que resultan de la sustitución de las restricciones (4.2)-(4.5) en las desigualdades de la Tabla 3.4 son las que aparecen en la Tabla 4.1.

Es particularmente interesante poder llegar a simplificar las desigualdades de esta manera, es decir, que dependan solamente de las ganancias del diferenciador, porque es precisamente sólo de estas variables de las que dependen las desigualdades obtenidas por medio del Teorema 1, en la Sección 2.3, para el caso lineal.

Tabla 4.1: Desigualdades resultantes de aplicar las restricciones (4.2)-(4.5)

$$\begin{array}{c} \hline \hline \left(\frac{4}{3}k_1 - k_1k_2 - k_3\right) > 0 \\ \hline \frac{3}{2^{\frac{7}{2}}}\left(k_1^2 - 4k_1^2k_3 - \frac{2^{\frac{5}{8}}}{3}(k_1k_2)^{\frac{3}{2}}\right) > \left(\left|\frac{k_1^2+2}{3k_2} - \frac{1}{2}\right| + k_3\right)^3 \\ \hline k_2 < \frac{k_1^2+2}{3k_1+1} \\ \hline \end{array}$$

4.2.1. Interpretación Gráfica

Cada una de las tres desigualdades de la Tabla 4.1, que dependen de tres variables, podría tener un conjunto de soluciones, es decir, un conjunto de tercias de valores (k_1, k_2, k_3) que hicieran que dicha desigualdad se satisficiera. Como son tres las variables, estos conjuntos pueden visualizarse en un espacio de tres dimensiones. Si puede encontrarse una intersección de los tres conjuntos, se habría encontrado el conjunto de juegos de valores para (k_1, k_2, k_3) que hacen que las tres desigualdades de la Tabla 4.1 sean satisfechas simultáneamente. Como esto es equivalente a que todas las desigualdades de la Tabla 3.4 se satisfagan, se habrá encontrado un conjunto de tercias de valores para (k_1, k_2, k_3) que hacen a la función de Lyapunov positiva definida, y a su derivada, negativa definida, independientemente de los coeficientes $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_{12}, \gamma_{13}$ y γ_{23} .

Proposición 4 *El conjunto $K \subset \mathbb{R}^3$, $K = \{(k_1, k_2, k_3) \in \mathbb{R}^3 \text{ tales que todas las desigualdades de la Tabla 4.1 se cumplen simultáneamente}\}$, no es vacío.*



Manipulando las desigualdades de la Tabla 4.1, pueden dejarse todas expresadas como mayores o menores a cero, como se muestra en la Tabla 4.2. Como las tres expresiones

dependen de solamente tres variables, es posible graficarlas en un espacio de tres dimensiones. Cada una de las desigualdades puede graficarse cambiando el signo de desigualdad por uno de igualdad, y entonces la figura resultante de la graficación de cada una de ellas, mostrará una superficie que separe el espacio en dos: el conjunto donde la desigualdad a la que corresponde se cumple, y el conjunto donde no. La idea principal de este método de solución es graficar de esta manera las tres igualdades y buscar la intersección de los tres conjuntos convenientes, es decir, donde las tres desigualdades se cumplan al mismo tiempo.

Tabla 4.2: Desigualdades de la Tabla 4.1 reordenadas.

$$\begin{aligned} & \left(\frac{4}{3}k_1 - k_1k_2 - k_3\right) > 0 \\ & \frac{3}{2^{\frac{7}{2}}}\left(k_1^2 - 4k_1^2k_3 - \frac{2^{\frac{5}{3}}}{3}(k_1k_2)^{\frac{3}{2}}\right) - \left(\left|\frac{k_1^2+2}{3k_2} - \frac{1}{2}\right| + k_3\right)^3 > 0 \\ & \frac{k_1^2+2}{3k_1^2+1} - k_2 > 0 \end{aligned}$$

El resultado de graficar las tres desigualdades de la Tabla 4.2 de la manera antes descrita se muestra en la Figura 4.2.1. En ella aparecen tres superficies distintas, cada una correspondiendo a una de las desigualdades de la Tabla 4.2. Puede observarse que estas tres superficies se intersectan, cortando el espacio en varios conjuntos distintos. Uno de estos conjuntos, circulado en negro en la Figura 4.2.1, representa aquel donde las tres desigualdades de la Tabla 4.1 son satisfechas, es decir, el conjunto K de la Proposición 4.

Estos resultados prueban la Proposición 4.

4.2.2. Verificación gráfica

De igual manera que en la Sección 4.1, puede usarse la propiedad de homogeneidad de la función de Lyapunov (3.4) para mostrar que es positiva definida, y su derivada (3.5) negativa definida.

A continuación se muestra el resultado de evaluar ambas funciones sobre la superficie de una esfera de radio $r = 0.001$ como la de la figura 4.1 con las constantes encontradas por éste método, de la misma manera que se hizo en la Sección 4.1.

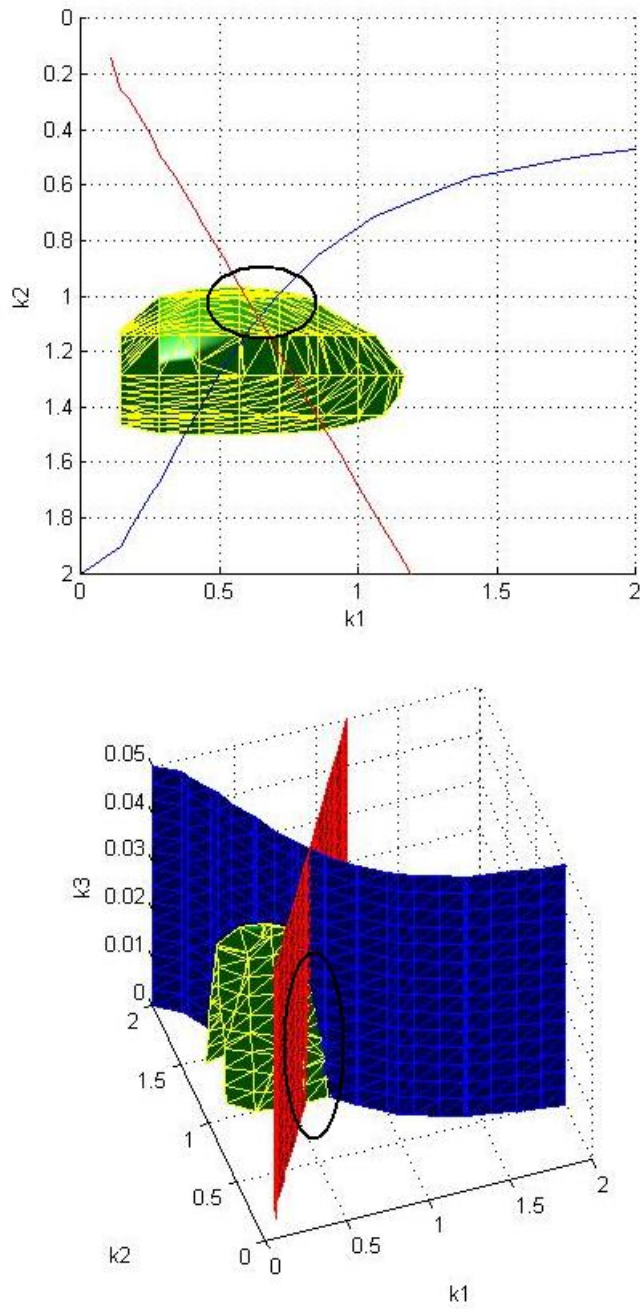


Figura 4.4: Intersección de los conjuntos donde se cumplen las tres desigualdades

Para esta comprobación se eligió un punto al azar, dentro del conjunto de solu-

ciones encontrado.

$$\begin{aligned}
 \gamma_1 &= 0.5 & \gamma_3 &= 0.5 \\
 \gamma_{13} &= 0.5 & \gamma_{23} &= 0.5 \\
 \gamma_{12} &= 0.35 & \gamma_2 &= 0.4150 \\
 k_1 &= 1.05 & k_2 &= 0.6 \\
 k_3 &= 0.01 \\
 z &= 1 & y &= 1
 \end{aligned} \tag{4.6}$$

La Figura 4.5 muestra el resultado de evaluar la candidata (3.4) sobre cada uno de los puntos de la superficie de la esfera de la Figura 4.1. Cada uno de los puntos de la abscisa representa una iteración en la evaluación, mientras que el valor de la ordenada muestra el escalar que resultó de la misma. Puede observarse que cada una de las iteraciones arrojó un resultado positivo. La Figura 4.6 muestra exactamente lo mismo, pero para la evaluación de la derivada a la candidata a función de Lyapunov sobre la superficie de la esfera de la Figura 4.1. Puede observarse que cada una de las iteraciones arrojó un resultado negativo.

Aquí se presenta el resultado de un sólo punto elegido al azar, pero la prueba de hizo con numerosos puntos, obteniendo siempre los mismos resultados.

Proposición 5 $\forall(k_1, k_2, k_3)$ en K , $V(x) > 0$ y $\dot{V}(x) < 0$

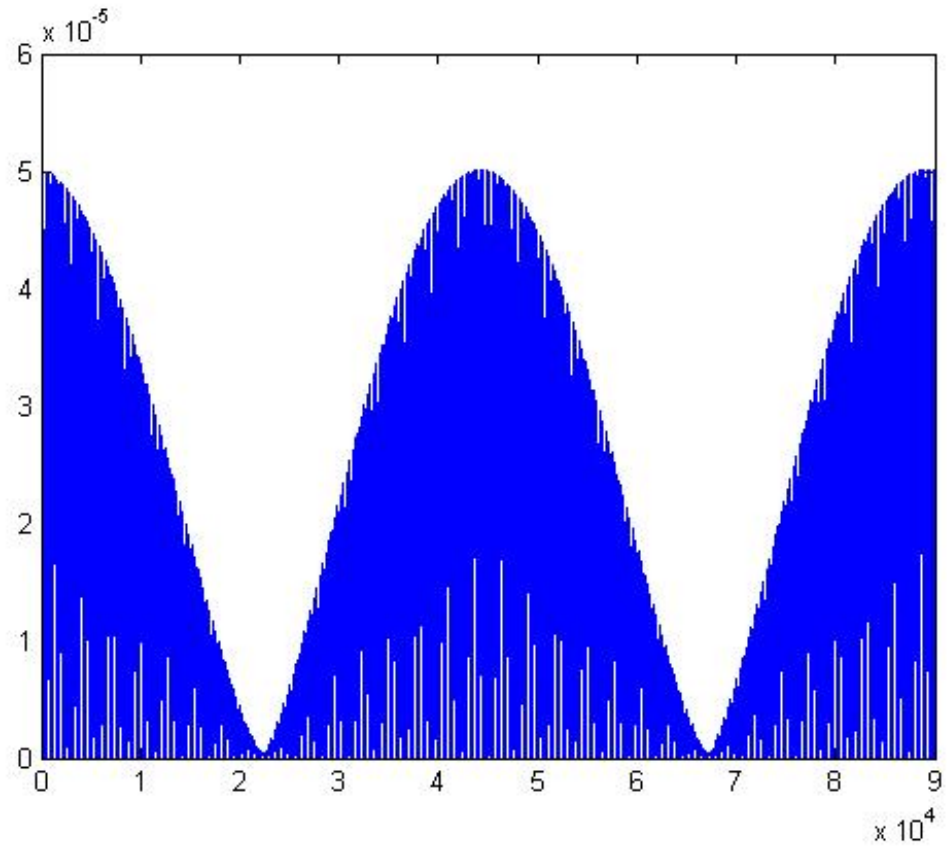


Como la función de Lyapunov es una función homogénea, y el conjunto K de la Proposición 4 no es vacío, la Proposición 5 queda probada.

4.2.3. Ejemplo

Usando el mismo juego de valores (4.6) que para la verificación gráfica, se puede probar por simulación, que (3.3) es capaz de estimar las derivadas de una señal en tiempo

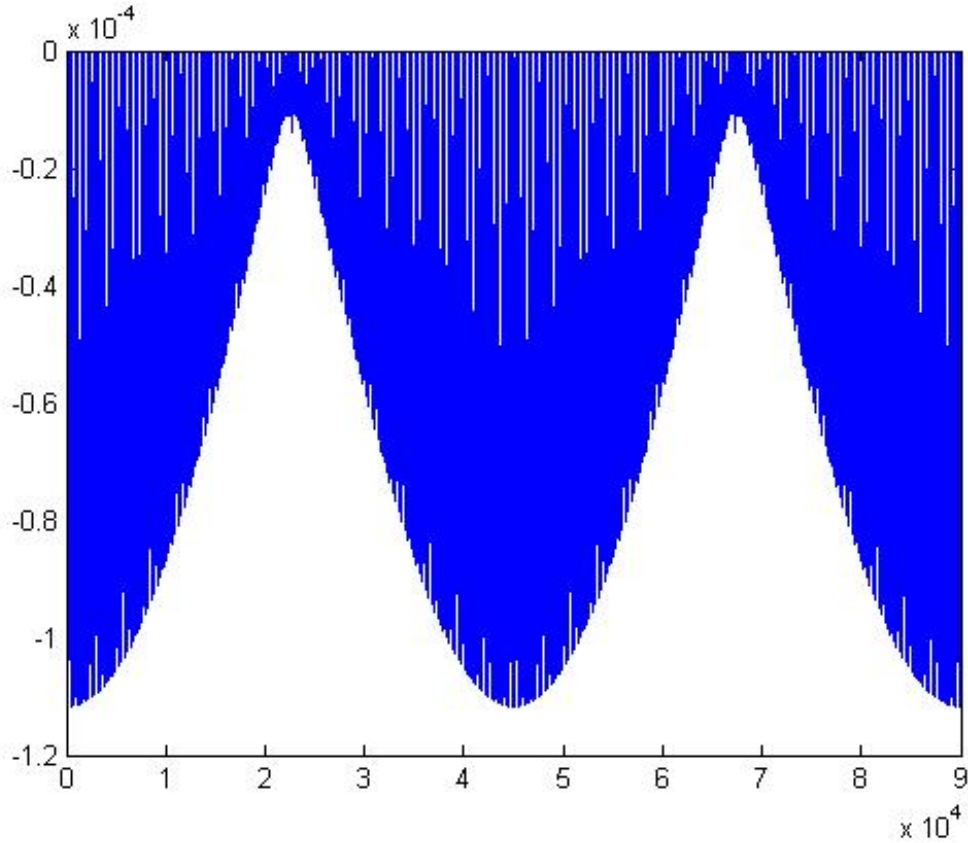
Figura 4.5: Función de Lyapunov evaluada sobre la superficie de la Figura 4.1



real, como se muestra a continuación.

La señal que se desea estimar está dada por $f(t) = .0007 \sin(t) + .0006 \cos(t)$, y se muestra en la Figura 4.2.3. (3.3) es capaz de estimar hasta su segunda derivada, como se muestra en la Figura 4.2.3 en línea continua. De esta manera se puede observar que el diferenciador funciona, como es esperado, con las ganancias obtenidas por medio del método de solución propuesto en esta sección.

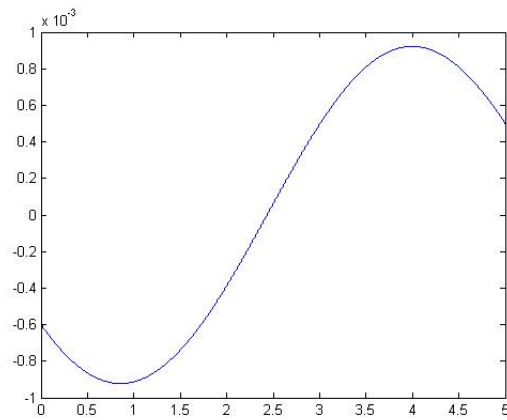
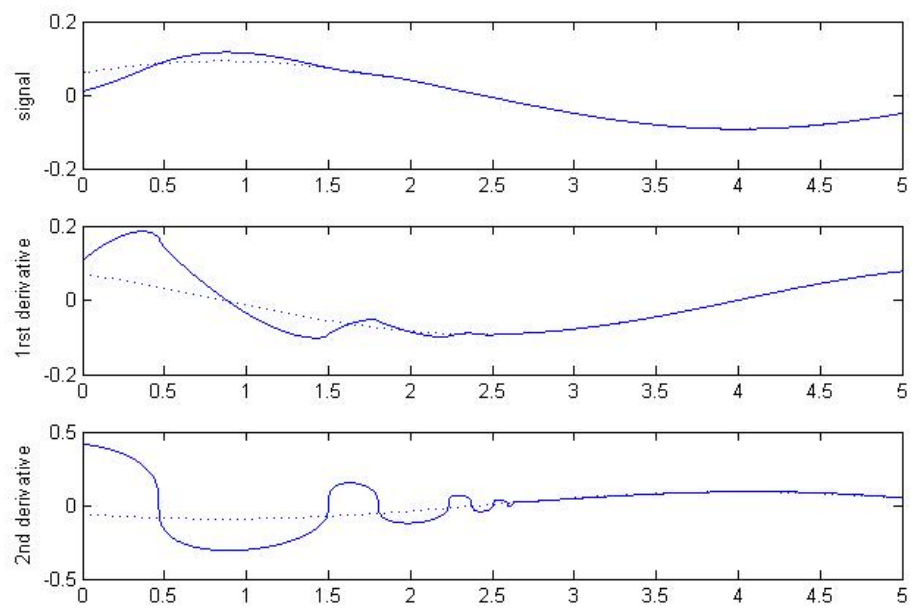
Figura 4.6: Derivada de la función de Lyapunov evaluada sobre la superficie de la Figura 4.1



4.3. Aumento del valor de las ganancias

Se ha probado que el conjunto de valores para k_1 , k_2 y k_3 encontrado en la Figura 4.2.1 satisface todas las desigualdades de la Tabla 3.4, por lo tanto validan la función de Lyapunov que se había propuesto.

También se mostró que tales ganancias son adecuadas para que el diferenciador (3.3) pueda estimar una señal y sus derivadas, hasta la segunda, siempre y cuando se cumpla que $|\ddot{f}(t)| \leq k_3$ [Levant01]. Esto podría representar un problema, ya que los posibles valores para k_3 que muestra la Figura 4.2.1 son muy pequeños, lo que haría que la gama de señales que pueden ser estimadas fuera muy limitada.

Figura 4.7: $f(t) = .0007\sin(t) + .0006\cos(t)$ Figura 4.8: Estimación de la señal $f(t) = .0007\sin(t) + .0006\cos(t)$ y sus derivadas

Esta dificultad puede sobrepasarse si se encuentra una manera de aumentar el valor las ganancias, en específico de k_3 , y que éstas sigan siendo adecuadas para que el diferenciador (3.3) siga funcionando correctamente. A continuación se muestra una manera de aumentar tales ganancias.

Haciendo un cambio de variables como:

$$\begin{aligned}
 z_1 &= Lx_1 \\
 z &= Lx \rightarrow z_2 = Lx_2 \\
 z_3 &= Lx_3 \\
 \dot{z}_1 &= L\dot{x}_1 = -L^{\frac{1}{3}}k_1z_1^{\frac{2}{3}} + z_2 \\
 \dot{z}_2 &= L\dot{x}_2 = -L^{\frac{2}{3}}k_2z_2^{\frac{1}{3}} + z_3 \\
 \dot{z}_3 &= L\dot{x}_3 = -Lk_3z_1^0
 \end{aligned} \tag{4.7}$$

Se puede observar que una nueva variable L , que debe ser positiva, ha aparecido. Ésta L , como se observa en (4.7), multiplica a k_1 , k_2 y k_3 . La elección del valor de ésta nueva variable es libre para el que diseña en diferenciador, y debe ser elegida convenientemente, es decir, de tal manera que $|\ddot{f}(t)| \leq Lk_3$.

Así podría estimarse una señal con segunda derivada arbitrariamente grande, mientras ésta permanezca acotada.

Capítulo 5

Extensiones al diseño del diferenciador

Dentro de este capítulo se trazan varias líneas que podrían seguirse en un futuro para ampliar el trabajo reportado en esta tesis.

En primer lugar, se detallan los últimos dos métodos para encontrar los valores de las variables de la Tabla 3.4, que se mencionaron al principio del capítulo 4. El primero es una propuesta de solución algorítmica donde hay menos restricciones a las desigualdades que las impuestas en la Sección 4.2. El segundo se trata de la generalización del método antes mencionado, es decir, sin ninguna restricción. A continuación, se presenta una introducción al caso en el que el diferenciador tiene una perturbación en el tercer canal, se modifica la candidata a función de Lyapunov propuesta en la Sección 3.3 para contemplar la perturbación, y se establecen condiciones suficientes que para que ésta sea validada.

El trabajo que puede realizarse para ampliar el reportado dentro de esta tesis es muy variado; sin embargo, el camino propuesto en éste capítulo parece ser adecuado, ya que se trata de la continuación de un trabajo para el que ya existen resultados satisfactorios.

5.1. Soluciones algorítmicas

5.1.1. Solución con una restricción

Con el fin de ampliar el conjunto de soluciones, y hacerlo más general, se levantaron algunas de las restricciones usadas en la Sección 4.2, quedando solamente una.

La única restricción que se utilizó para este método de solución fue la restricción (4.3), es decir:

$$\gamma_{12} = \gamma_{13}k_1$$

Con ella, las desigualdades (E.13), (E.14) y (E.15) se reducen a una sola desigualdad:

$$\frac{3^3}{2^{\frac{5}{2}}}\lambda_m^2 \left((\gamma_{23} - 4\gamma_3k_3) - \frac{2^{\frac{9}{8}}}{3^{\frac{3}{2}}}\frac{(\gamma_{23}k_2)^{\frac{3}{2}}}{\lambda_m^{\frac{1}{2}}} \right) > (|2\gamma_2 - \gamma_{13}| + 2\gamma_{23}k_3)^3 \quad (5.1)$$

El método que a continuación se describirá consiste en una serie de pasos para ir determinando, uno a uno, los valores de las variables k_1 , k_2 , k_3 , γ_1 , γ_2 , γ_3 , γ_{12} , γ_{13} y γ_{23} . Como no se tiene ninguna pista de cómo podrían ser los valores, se parte de la elección arbitraria de uno de ellos.

Recordando la desigualdad (C.2)

$$\gamma_2\gamma_3 - \left(\frac{\gamma_{23}}{2}\right)^2 > \frac{3^3}{4^4}\frac{|\gamma_{13}|^4\gamma_2}{\gamma_1^3}$$

y definiendo $\varphi \triangleq \frac{\gamma_{23}^2}{\gamma_2}$, queda:

$$\gamma_3 > \frac{\varphi}{4} + \left(\frac{\gamma_{13}}{4}\right)^4 \left(\frac{3}{\gamma_1}\right)^3$$

Entonces se pueden seguir los pasos que se detallan a continuación para encontrar posibles valores para todas las k_1 , k_2 , k_3 , γ_1 , γ_2 , γ_3 , γ_{12} , γ_{13} y γ_{23} .

1. Escoger φ arbitrariamente

2. Graficar $\gamma_3 = \frac{\varphi}{4} + \left(\frac{\gamma_{13}}{4}\right)^4 \left(\frac{3}{\gamma_1}\right)^3$ con γ_3 y γ_{13} como variables.
3. Escoger, de la gráfica $\gamma_1, \gamma_{13}, \gamma_3$
4. Escoger γ_{23} arbitrariamente
5. Calcular, con los valores antes elegidos, $\gamma_2 = \frac{\gamma_{23}^2}{\varphi}$
6. Escoger z que haga que se cumpla

$$\frac{4\gamma_1}{3|\gamma_{13}|} > z > \left(\frac{\gamma_2|\gamma_{13}|}{4\left(\gamma_2\gamma_3 - \left(\frac{\gamma_{23}}{2}\right)^2\right)} \right)^{\frac{1}{3}}$$

7. Resolver para γ_{12} para satisfacer $a_4z^4 + a_3z^3 + a_1z + a_0 > 0$.

Específicamente

$$\gamma_{12} < \sqrt{\left(\frac{4}{\frac{\gamma_{13}}{4} - \gamma_3 z^3}\right) \left(\left(\gamma_1 \left(\frac{\gamma_{23}}{2}\right)^2 - \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3\right) z^3 + \gamma_1 \gamma_2 \frac{\gamma_{13}}{4} - a_4 z^4 - a_1 z\right)}$$

8. Calcular, con los valores antes elegidos

$$k_1 = \frac{\gamma_{12}}{\gamma_{13}}$$

9. Graficar (3.12), (5.1) y $\lambda_m > 0$ y escoger k_2, k_3 de la intersección de los conjuntos

Este algoritmo puede ser programado para buscar, iterativamente, conjuntos de soluciones para las desigualdades. Hasta el momento, manualmente, no han sido encontrados dichos conjuntos, pero los resultados anteriores sugieren que es razonable pensar que existen.

5.1.2. Solución sin restricciones

Bucando hacer la solución aun más general, se levantó la última restricción que se había impuesto, en la Sección 5.1.1, sobre las desigualdades.

El método de solución es muy similar a como se presentó en la sección 5.1.1, con algunos cambios en algunos de los pasos:

1. Escoger φ arbitrariamente
2. Graficar $\gamma_3 = \frac{\varphi}{4} + \left(\frac{\gamma_{13}}{4}\right)^4 \left(\frac{3}{\gamma_1}\right)^3$
3. Escoger, de la gráfica $\gamma_1, \gamma_{13}, \gamma_3$
4. Escoger γ_{23} arbitrariamente
5. Calcular, con los valores antes elegidos $\gamma_2 = \frac{\gamma_{23}^2}{\varphi}$
6. Escoger z que haga que se cumpla

$$\frac{4\gamma_1}{3|\gamma_{13}|} > z > \left(\frac{\gamma_2|\gamma_{13}|}{4\left(\gamma_2\gamma_3 - \left(\frac{\gamma_{23}}{2}\right)^2\right)} \right)^{\frac{1}{3}}$$

7. Resolver para γ_{12} para satisfacer $a_4z^4 + a_3z^3 + a_1z + a_0 > 0$.

Específicamente

$$\gamma_{12} < \sqrt{\left(\frac{4}{\frac{\gamma_{13}}{4} - \gamma_3 z^3}\right) \left(\left(\gamma_1 \left(\frac{\gamma_{23}}{2}\right)^2 - \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3\right) z^3 + \gamma_1 \gamma_2 \frac{\gamma_{13}}{4} - a_4 z^4 - a_1 z \right)}$$

8. Graficar el lado izquierdo de (E.13)

$$y - \frac{2}{3} \frac{\gamma_{23} k_2}{(\gamma_{23} - 4\gamma_3 k_3)} > 0$$

para encontrar los posibles valores de y

9. Graficar (3.12), (E.13), (E.14), (E.15) y $\lambda_m > 0$ y escoger k_1, k_2, k_3

Este algoritmo también puede ser programado, al igual que el anterior, para buscar iterativamente, conjuntos de soluciones para las desigualdades. Hasta el momento, manualmente, no han sido encontrados dichos conjuntos, pero los resultados anteriores sugieren que es razonable pensar que existen.

5.2. Caso perturbado

5.2.1. Diferenciador por modos deslizantes de tercer orden perturbado

Hasta ahora, dentro de esta tesis, se ha considerado el caso ideal del diferenciador, es decir, sin ninguna perturbación. En esta sección se considerará el caso en que una perturbación desconocida aparece en el tercer canal del sistema. La restricción que hay sobre esta perturbación es que sea globalmente acotada, y su cota superior sea conocida.

El diferenciador puede reescribirse entonces como:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -k_1 x_1^{\frac{2}{3}} + x_2 + \rho_1(t, x) \\ \dot{x}_2 &= -k_2 x_1^{\frac{1}{3}} + x_3 + \rho_2(t, x) \\ \dot{x}_3 &= -k_3 + \rho_3(t, x)\end{aligned}\tag{5.2}$$

Donde

$$\begin{aligned}\rho_1(t, x) &= \rho_2(t, x) = 0 \\ |\rho_3(t, x)| &\leq M\end{aligned}\tag{5.3}$$

Recordando la función de Lyapunov propuesta en la Sección 3.3

$$V(x) = \gamma_1 |x_1|^{\frac{4}{3}} - \gamma_{12} x_1^{\frac{2}{3}} x_2 + \gamma_2 x_2^2 - \gamma_{13} x_1 x_3 - \gamma_{23} x_2 x_3^2 + \gamma_3 |x_3|^4$$

Su derivada sobre las trayectorias del sistema (5.2) es:

$$\begin{aligned}\dot{V}_p(x) &= -\frac{1}{|x_1|^{\frac{1}{3}}} \left(\left(\frac{4}{3} \gamma_1 k_1 - \gamma_{12} k_2 - \gamma_{13} (k_3 + \rho_3(t, x)) \right) |x_1|^{\frac{4}{3}} - 2 \left(\frac{2}{3} \gamma_1 - \gamma_2 k_2 + \frac{1}{3} \gamma_{12} k_1 \right) x_1^{\frac{2}{3}} x_2 + \frac{2}{3} \gamma_{12} |x_2| \right) \\ &\quad + (\gamma_{13} k_1 - \gamma_{12}) x_1^{\frac{2}{3}} x_3 + \gamma_{23} k_2 x_1^{\frac{1}{3}} x_2^2 + (2\gamma_2 - \gamma_{13} + 2\gamma_{23} (k_3 + \rho_3(t, x))) x_2 x_3 \\ &\quad - (\gamma_{23} + 4\gamma_3 (k_3 + \rho_3(t, x))) |x_3|^3\end{aligned}\tag{5.4}$$

Puede observarse que en (5.4) aparece el término $\rho_3(t, x)$, que corresponde a la perturbación globalmente acotada de la que se habla arriba.

Por lo anterior, los coeficientes de la función de Lyapunov y las ganancias del diferenciador deben ser encontrados de nuevo, y así garantizar que tanto $V(x) > 0$ como $\dot{V}_p(x) < 0$.

5.2.2. Condiciones para la validación de la candidata a función de Lyapunov para el diferenciador perturbado

Por medio de un método análogo al que se usó en las Secciones 3.4 y 3.5, se deducen las condiciones que deben satisfacerse para que $\dot{V}_p(x) < 0$. Cabe destacar que las condiciones para que $V(x) > 0$ permanecen iguales, ya que no hubo ningún cambio en la Función de Lyapunov (3.4). Para que $\dot{V}(x) < 0$ se deben satisfacer las siguientes desigualdades

$$\frac{2}{3}\gamma_{12} \left(\frac{4}{3}\gamma_1 k_1 - \gamma_{12} k_2 - \gamma_{13} (k_3 + \rho_3(t, x)) \right) > \left(\frac{2}{3}\gamma_1 - \gamma_2 k_2 + \frac{1}{3}\gamma_{12} k_1 \right)^2 \quad (5.5)$$

$$\lambda_{m_p} = \frac{\frac{1}{2} \left(\left(\frac{4}{3}\gamma_1 k_1 - \gamma_{12} k_2 - \gamma_{13} (k_3 + \rho_3(t, x)) \right) + \frac{2}{3}\gamma_{12} \right)}{-\frac{1}{2}\sqrt{\left(\left(\frac{4}{3}\gamma_1 k_1 - \gamma_{12} (k_2 + \frac{2}{3}) - \gamma_{13} (k_3 + \rho_3(t, x)) \right)^2 + 4 \left(\frac{2}{3}\gamma_1 - \gamma_2 k_2 + \frac{1}{3}\gamma_{12} k_1 \right)^2 \right)} > 0 \quad (5.6)$$

$$(\gamma_{23} - 4\gamma_3 (k_3 + \rho_3(t, x))) > \frac{\frac{2}{3} (\gamma_{23} k_2)^{\frac{3}{2}}}{3^{\frac{3}{2}} \lambda_{m_p}^{\frac{1}{2}}} \quad (5.7)$$

$$\frac{2}{3} \frac{\gamma_{23} k_2}{(\gamma_{23} - 4\gamma_3 (k_3 + \rho_3(t, x)))} < y < \left(2^{-\frac{1}{4}} 3 \frac{\lambda_{m_p}}{\gamma_{23} k_2} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (5.8)$$

$$(\gamma_{23} - 4\gamma_3 (k_3 + \rho_3(t, x))) > \frac{2^2 (|2\gamma_2 - \gamma_{13}| + 2\gamma_{23} k_3)^3}{3^3 \left(2^{-\frac{1}{4}} \lambda_{m_p} \right)^2} \quad (5.9)$$

$$b_{2_p}^2 (b_{3_p} y - 2b_{2_p}) \left(y^2 - 2^{-\frac{1}{4}} 3 \frac{\lambda_{m_p}}{\gamma_{23} k_2} \right)^2 > b_{0_p} y \quad (5.10)$$

Donde

$$b_{3_p} = \left((\gamma_{23} - 4\gamma_3 (k_3 + \rho_3(t, x))) - \frac{2^2 (|2\gamma_2 - \gamma_{13}| + 2\gamma_{23} (k_3 + \rho_3(t, x)))^3}{3^3 \left(2^{-\frac{1}{4}} \lambda_{m_p} \right)^2} \right) > 0 \quad (5.11)$$

$$b_{2_p} = \frac{1}{3} \gamma_{23} k_2$$

$$b_{0_p} = \frac{2^2}{3^3} |(\gamma_{13} k_1 - \gamma_{12})|^3$$

5.2.3. Acotamiento de las desigualdades

La manipulación de las desigualdades y la búsqueda de soluciones a las mismas se ha hecho aún más complicada que en las secciones anteriores, ya que se ha introducido una función desconocida en ellas, de la que solamente se conoce una cota superior. Para compensar esta dificultad, cada lado de las desigualdades puede ser acotada por arriba o por abajo, según convenga, con un término constante. Este término será, precisamente, la

cota M de la perturbación que aparece en (5.3). Así se representaría el peor caso posible de la perturbación. De esta manera se garantizaría que, con los valores que se encontrasen para las constantes, se satisfacerían las desigualdades incluso con la peor perturbación posible.

Entonces, como de (5.3), se sabe que

$$(k_3 - M) \leq (k_3 - \rho_3(t, x)) \leq (k_3 + M) \quad (5.12)$$

Las desigualdades (5.5) - (5.9) pueden acotarse como se muestra en la Tabla 5.1.

El cálculo completo para llegar a las desigualdades de la tabla 5.1 puede encontrarse en el Apéndice G.

Tabla 5.1: Condiciones para la negatividad definida de $\dot{V}(x)$

$$\begin{aligned} & \frac{2}{3}\gamma_{12} \left(\frac{4}{3}\gamma_1 k_1 - \gamma_{12} k_2 - \gamma_{13} (k_3 + M) \right) > \left(\frac{2}{3}\gamma_1 - \gamma_2 k_2 + \frac{1}{3}\gamma_{12} k_1 \right)^2 \\ & \lambda_{m_{pM}} = \frac{1}{2} \left(\left(\frac{4}{3}\gamma_1 k_1 - \gamma_{12} k_2 - \gamma_{13} (k_3 + M) \right) + \frac{2}{3}\gamma_{12} \right) \\ & -\frac{1}{2} \sqrt{\left(\left(\frac{4}{3}\gamma_1 k_1 - \gamma_{12} \left(k_2 + \frac{2}{3} \right) - \gamma_{13} (k_3 - M) \right)^2 + 4 \left(\frac{2}{3}\gamma_1 - \gamma_2 k_2 + \frac{1}{3}\gamma_{12} k_1 \right)^2 \right)} > 0 \\ & (\gamma_{23} - 4\gamma_3 (k_3 + M)) > \frac{2^{\frac{9}{2}} (\gamma_{23} k_2)^{\frac{3}{2}}}{3^{\frac{2}{3}} \lambda_{m_{pM}}^{\frac{1}{2}}} \\ & \frac{2}{3} \frac{\gamma_{23} k_2}{(\gamma_{23} - 4\gamma_3 (k_3 + M))} < y < \left(2^{-\frac{1}{4}} 3^{\frac{\lambda_{m_{pM}}}{\gamma_{23} k_2}} \right)^{\frac{1}{2}} \\ & (\gamma_{23} - 4\gamma_3 (k_3 + M)) > \frac{2^2 (|2\gamma_2 - \gamma_{13}| + 2\gamma_{23} (k_3 + M))^3}{3^{\frac{2}{3}} \left(2^{-\frac{1}{4}} \lambda_{m_{pM}} \right)^2} \\ & b_{2_p}^2 (b_{3_{pM}} y - 2b_{2_p}) \left(y^2 - 2^{-\frac{1}{4}} 3^{\frac{\lambda_{m_{pM}}}{\gamma_{23} k_2}} \right)^2 > b_{0_p} y \end{aligned}$$

$$\text{Donde } b_{3_{pM}} = \left((\gamma_{23} - 4\gamma_3 (k_3 + M)) - \frac{2^2 (|2\gamma_2 - \gamma_{13}| + 2\gamma_{23} (k_3 + M))^3}{3^{\frac{2}{3}} \left(2^{-\frac{1}{4}} \lambda_{m_{pM}} \right)^2} \right) > 0$$

Para encontrar un conjunto de valores para las constantes k_1 , k_2 , k_3 , γ_1 , γ_2 , γ_3 , γ_{12} , γ_{13} y γ_{23} que satisfagan las desigualdades de la Tabla 5.1, debe conocerse la constante

M y después aplicar alguno de los métodos detallados en el Capítulo 4, o algún otro que pueda ser propuesto. Esto permitiría encontrar juegos de ganancias para el diferenciador por modos deslizantes de tercer orden que lo hagan converger en tiempo finito a las derivadas de una señal con una perturbación $|\rho_3(t, x)| \leq M$.

Capítulo 6

Conclusiones

El objetivo principal de este trabajo de tesis, como se mencionó en la Sección 1.3, era proponer una metodología para construir una función de Lyapunov para el algoritmo por modos deslizantes de tercer orden empleado para construir un diferenciador de segundo orden que incluyera dos puntos principales:

- Proponer una candidata a función de Lyapunov para el algoritmo por modos deslizantes de tercer orden empleado para construir un diferenciador de segundo orden que cumpla con ciertas propiedades deseables, como la homogeneidad.
- Proponer una metodología para probar que la candidata es una función de Lyapunov.

Este objetivo se cumplió, y los resultados están detallados en la Sección 4.

A grandes rasgos, el trabajo realizado, y los resultados obtenidos fueron los siguientes:

En primer lugar se propuso una candidata a función de Lyapunov, partiendo de aquella propuesta por J. Moreno en [Moreno11] para el diferenciador por modos deslizantes de segundo orden.

Después se dedujeron condiciones suficientes para probar que la candidata a función de Lyapunov es positiva definida, y su derivada, negativa definida. Estas condiciones están en la forma de un conjunto de desigualdades no lineales que tiene como variables, las

ganancias k_1 , k_2 y k_3 , y los parámetros de la candidata a función de Lyapunov γ_1 , γ_2 , γ_3 , γ_{12} , γ_{13} y γ_{23} . Todas esas desigualdades deberían satisfacerse simultáneamente para probar que la función candidata es una Función de Lyapunov válida.

A partir del conjunto de desigualdades antes mencionado, se logró encontrar un conjunto de valores numéricos para las ganancias y los parámetros de la candidata que la hacen positiva definida, así como negativa definida a su derivada. En este momento del trabajo se probó que la candidata es una función de Lyapunov válida. Para obtener estos primeros resultados se usaron algoritmos de optimización que permitieran encontrar soluciones a desigualdades no lineales con cualquier número de variables. Para asegurar que este es un resultado válido, se realizaron varias pruebas:

- **Prueba de existencia** Se sustituyeron los valores encontrados, en el conjunto de desigualdades, para comprobar que todas se satisficieran.
- **Prueba computacional** Se utilizó una prueba gráfica, utilizando el principio de homogeneidad: una propiedad de una función homogénea, que se cumpla sobre la superficie de una esfera, se cumplirá en el resto del espacio. Para aplicarla a este caso, se evaluó la función homogénea de Lyapunov y su derivada, con las ganancias encontradas, sobre la superficie de una esfera. Los resultados que arrojaron fueron siempre positivos definidos y negativos definidos, respectivamente.

Mediante complicadas manipulaciones aritméticas se logró reducir el conjunto de desigualdades considerablemente, pero lo que resultó más interesante; se pudo hacer que dependieran solamente de las ganancias del diferenciador k_1 , k_2 y k_3 . Es decir que las condiciones suficientes para que la función candidata sea una función válida, dependen solamente de tres variables, y no de nueve, como se planteó al principio.

Este último resultado, brindó otra gran ventaja. Las desigualdades ahora viven en un espacio de tres dimensiones, que coinciden con las tres variables (k_1, k_2, k_3) , lo cual permite analizarlas gráficamente. Así fue como se logró encontrar un conjunto, en ese espacio de tres dimensiones, dentro del cual las coordenadas de cada uno de sus puntos representan un juego de valores para k_1 , k_2 y k_3 que hacen que la función de Lyapunov sea positiva

definida, y su derivada, negativa definida.

Estos resultados se comprobaron por medio de los mismos dos métodos antes descritos (sustituir los valores en las desigualdades, y verificación gráfica). Además de eso se verificaron los resultados teóricos mediante pruebas de simulación en las cuales el diferenciador logró obtener las derivadas de una señal correctamente.

Posteriormente se propusieron algunos otros métodos que podrían ser usados para encontrar dichas ganancias, que dentro de este trabajo de tesis, no fueron probados.

Finalmente, se establecieron las condiciones que deben ser cumplidas para que la función de Lyapunov que se propuso al principio funcione cuando el tercer canal del sistema diferenciador está sujeto a una perturbación de la cual sólo se conozca una cota superior.

El primer, y quizá más importante punto que se puede concluir de este trabajo de tesis, es que existe al menos una función de Lyapunov para el diferenciador por modos deslizantes de tercer orden, que puede ser probada como válida. Un aspecto sumamente interesante es que dicha función puede ser propuesta a partir de la función que ya se probó como válida para el sistema de segundo orden en [Moreno11]. Este resultado es importante porque quiere decir que tiene sentido continuar el trabajo para buscar funciones de Lyapunov para órdenes superiores, además de que, como esta función es construida a partir de la función para el segundo orden, da una idea de qué forma podrían tener las de órdenes superiores o incluso, arbitrario.

Otro logro importante de este trabajo fue el de encontrar condiciones suficientes para probar que la candidata es una función de Lyapunov válida, y no sólo eso, sino que poder hacer que estas dependan solamente de las ganancias del diferenciador. Que la positividad definida de $V(x)$, y la negatividad definida de $\dot{V}(x)$ sólo de los valores de las ganancias del diferenciador, y no de los coeficientes de la función de Lyapunov, es un escenario que se parece muchísimo al caso de un sistema de tercer orden lineal.

Por otro lado, no solamente se encontró un juego de ganancias que la función de Lyapounov válida, sino que se encontró un conjunto éstos, cosa que resulta muy útil en la práctica.

Este trabajo es sólo un paso en el camino de encontrar una función de Lyapunov para el algoritmo de orden arbitrario, y podría ser retomado de diversas maneras. Un aspecto donde más trabajo es necesario, es en el de ampliar el conjunto de juegos de valores que hacen la función de Lyapunov positiva definida, y su derivada, neagativa definida. Idealmente, encontrar un conjunto que pueda crecer arbitrariamente en k_3 , ya que es esta ganancia la que establece la cota superior que pueden tener las señales a derivar, en su tercera derivada. Dos métodos que podrían llevar a encontrar tales conjuntos fueron propuestos.

Por otro lado, es necesario encontrar ganancias y parámetros que validen la función de Lyapunov para el caso perturbado, es decir, que satisfagan las condiciones que quedaron establecidas en el Capítulo 5.2.

Una vez realizadas las dos tareas antes mencionadas, es necesario calcular el tiempo de convergencia para el diferenciador, con la función de Lyapunov propuesta.

Cuando el trabajo esté completo para el tercer orden, es razonable empezarlo para el cuarto orden, para después seguir el largo camino hacia encontrar una función de Lyapunov para el orden arbitrario.

En resumen, el objetivo de la tesis fue cumplido, y se presenta, con este trabajo, una contribución a la enorme tarea de encontrar una función de Lyapunov para el diferenciador de orden arbitrario.

Apéndice A

Condiciones para la positividad definida de (2.8) para el caso lineal

1. Eliminación de α_{12}

Las desigualdades (2.9) y (2.10) pueden escribirse como

$$\begin{aligned} \frac{2}{\gamma_{12}} \left(\gamma_1 - \frac{|\gamma_{13}|}{2} \alpha_{13}^2 \right) &> \alpha_{12}^2, \quad \gamma_{12} > 0 \\ \alpha_{12}^2 &> \frac{\gamma_{12}}{2(\gamma_2 - \frac{\gamma_{23}}{2} \alpha_{23}^2)}, \quad \gamma_2 - \frac{\gamma_{23}}{2} \alpha_{23}^2 > 0 \end{aligned}$$

Entonces puede eliminarse α_{12} y las desigualdades que restan son:

$$\begin{aligned} \frac{2}{\gamma_{12}} \left(\gamma_1 - |\gamma_{13}| \alpha_{13}^2 \right) &> \frac{\gamma_{12}}{2(\gamma_2 - \frac{\gamma_{23}}{2} \alpha_{23}^2)} \\ \gamma_{12} &> 0 \\ \gamma_2 - \frac{\gamma_{23}}{2} \alpha_{23}^2 &> 0 \\ \left(\gamma_3 - |\gamma_{13}| \frac{\alpha_{13}^{-4}}{4} - \gamma_{23} \frac{\alpha_{23}^{-2}}{2} \right) &> 0 \end{aligned} \tag{A.1}$$

2. Eliminación de α_{23}

Las desigualdades (A.1) pueden escribirse como:

$$\begin{aligned} \gamma_{12} > 0, \quad \gamma_{23} > 0 \quad & \frac{2}{\gamma_{23}} \gamma_2 > \alpha_{23}^2 \\ \left(\gamma_1 - |\gamma_{13}| \alpha_{13}^2 \right) > 0 \quad & \frac{2}{\gamma_{23}} \left(\gamma_2 - \frac{(\frac{\gamma_{12}}{2})^2}{(\gamma_1 - |\gamma_{13}| \alpha_{13}^2)} \right) > \alpha_{23}^2 \\ \left(\gamma_3 - |\gamma_{13}| \frac{\alpha_{13}^{-2}}{2} \right) > 0 \quad & \alpha_{23}^2 > \frac{\gamma_{23}}{2(\gamma_3 - |\gamma_{13}| \frac{\alpha_{13}^{-2}}{2})} \end{aligned}$$

Para eliminar α_{23}

$$\frac{\gamma_{23}}{2\left(\gamma_3 - |\gamma_{13}| \frac{\alpha_{13}^{-2}}{2}\right)} < \alpha_{23}^2 < \min \left\{ \frac{2}{\gamma_{23}} \gamma_2, \frac{2}{\gamma_{23}} \left(\gamma_2 - \frac{\left(\frac{\gamma_{12}}{2}\right)^2}{\left(\gamma_1 - |\gamma_{13}| \alpha_{13}^2\right)} \right) \right\} \Rightarrow$$

$$\frac{\gamma_{23}}{2\left(\gamma_3 - |\gamma_{13}| \frac{\alpha_{13}^{-2}}{2}\right)} < \min \left\{ \frac{2}{\gamma_{23}} \gamma_2, \frac{2}{\gamma_{23}} \left(\gamma_2 - \frac{\left(\frac{\gamma_{12}}{2}\right)^2}{\left(\gamma_1 - |\gamma_{13}| \alpha_{13}^2\right)} \right) \right\}$$

ó, equivalentemente

$$\frac{\gamma_{23}}{2\left(\gamma_3 - |\gamma_{13}| \frac{\alpha_{13}^{-2}}{2}\right)} < \frac{2}{\gamma_{23}} \gamma_2$$

$$\frac{\gamma_{23}}{2\left(\gamma_3 - |\gamma_{13}| \frac{\alpha_{13}^{-2}}{2}\right)} > \frac{2}{\gamma_{23}} \left(\gamma_2 - \frac{\left(\frac{\gamma_{12}}{2}\right)^2}{\left(\gamma_1 - |\gamma_{13}| \alpha_{13}^2\right)} \right)$$

Así queda eliminada α_{23} y las desigualdades que restan son:

$$\begin{aligned} \gamma_{12} > 0, \gamma_{23} > 0 & \quad (\gamma_1 - |\gamma_{13}| \alpha_{13}^2) > 0 \\ \left(\frac{\gamma_{23}}{2}\right)^2 < \gamma_2 \left(\gamma_3 - |\gamma_{13}| \frac{\alpha_{13}^{-2}}{2}\right) & \quad \left(\gamma_3 - |\gamma_{13}| \frac{\alpha_{13}^{-2}}{2}\right) > 0 \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

$$\left(\frac{\gamma_{23}}{2}\right)^2 < \left(\gamma_2 - \frac{\left(\frac{\gamma_{12}}{2}\right)^2}{\left(\gamma_1 - |\gamma_{13}| \alpha_{13}^2\right)} \right) \left(\gamma_3 - |\gamma_{13}| \frac{\alpha_{13}^{-2}}{2} \right)$$

3. Eliminación de α_{13}

Las desigualdades (A.2) pueden escribirse como:

$$\begin{aligned} \gamma_{12} > 0, \gamma_3 > 0 & \quad \gamma_2 > 0, \gamma_{23} > 0 \\ \left(\gamma_3 - \frac{1}{\gamma_2} \left(\frac{\gamma_{23}}{2}\right)^2\right) > 0 & \quad \frac{2}{|\gamma_{13}|} \gamma_1 > \alpha_{13}^2 \\ \frac{|\gamma_{13}|}{2\left(\gamma_3 - \frac{1}{\gamma_2} \left(\frac{\gamma_{23}}{2}\right)^2\right)} < \alpha_{13}^2 & \quad \alpha_{13}^2 > \frac{|\gamma_{13}|}{2\gamma_3} \end{aligned}$$

$$\left(\frac{\gamma_{23}}{2}\right)^2 < \left(\gamma_2 - \frac{\left(\frac{\gamma_{12}}{2}\right)^2}{\left(\gamma_1 - |\gamma_{13}| \alpha_{13}^2\right)} \right) \left(\gamma_3 - |\gamma_{13}| \frac{\alpha_{13}^{-2}}{2} \right)$$

De la última desigualdad:

$$\left(\frac{\gamma_{23}}{2}\right)^2 < \left(\gamma_2 - \frac{\left(\frac{\gamma_{12}}{2}\right)^2}{\left(\gamma_1 - |\gamma_{13}| \alpha_{13}^2\right)}\right) \left(\gamma_3 - |\gamma_{13}| \frac{\alpha_{13}^{-2}}{2}\right) \Rightarrow$$

$$\left(\gamma_1 \left(\frac{\gamma_{23}}{2}\right)^2 - |\gamma_{13}| \left(\frac{\gamma_{23}}{2}\right)^2 \alpha_{13}^2\right) < \left(\gamma_1 \gamma_2 - \left(\frac{\gamma_{12}}{2}\right)^2 - |\gamma_{13}| \gamma_2 \alpha_{13}^2\right) \left(\gamma_3 - |\gamma_{13}| \frac{\alpha_{13}^{-2}}{2}\right) \Rightarrow$$

$$0 < \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 - \gamma_2 |\gamma_{13}| \gamma_3 \alpha_{13}^2 - \left(\frac{\gamma_{12}}{2}\right)^2 \gamma_3 - \gamma_1 \gamma_2 |\gamma_{13}| \frac{\alpha_{13}^{-2}}{2} + \\ \gamma_2 |\gamma_{13}|^2 \alpha_{13}^2 + \left(\frac{\gamma_{12}}{2}\right)^2 \frac{|\gamma_{13}|}{2} \alpha_{13}^{-2} - \gamma_1 \left(\frac{\gamma_{23}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{23}}{2}\right)^2 |\gamma_{13}| \alpha_{13}^2 \Rightarrow$$

Multiplicando todo por α_{13}^4

$$0 < \left(\left(\frac{\gamma_{12}}{2}\right)^2 |\gamma_{13}| - \gamma_{12} \gamma_2 \frac{\gamma_{13}}{2}\right) + \alpha_{13}^2 \left(\gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 - \left(\frac{\gamma_{12}}{2}\right)^2 \gamma_3 - \gamma_1 \left(\frac{\gamma_{23}}{2}\right)^2\right) \\ \alpha_{13}^4 \left(-\gamma_2 |\gamma_{13}|^2 - \gamma_2 |\gamma_{13}| \gamma_3\right)$$

Así, las desigualdades que resultan son

$$\gamma_2 > 0, \gamma_3 > 0, \gamma_{12} > 0, \gamma_{23} > 0, |\gamma_{13}| > 0 \quad (\text{A.3})$$

$$\left(\gamma_2 \gamma_3 - \left(\frac{\gamma_{23}}{2}\right)^2\right) > 0 \quad (\text{A.4})$$

$$\left(\frac{\gamma_1}{|\gamma_{13}|} - z\right) > 0 \quad (\text{A.5})$$

$$z - \left(\frac{\gamma_2 |\gamma_{13}|}{\left(\gamma_2 \gamma_3 - \left(\frac{\gamma_{23}}{2}\right)^2\right)}\right) > 0 \quad (\text{A.6})$$

$$z - \left(\frac{|\gamma_{13}|}{2\gamma_3}\right) > 0 \quad (\text{A.7})$$

$$a_2 z^2 + a_1 z + a_0 > 0 \quad (\text{A.8})$$

donde

$$z = \alpha_{13}^2 > 0$$

$$a_2 = (-\gamma_2|\gamma_{13}|^2 - \gamma_2|\gamma_{13}|\gamma_3) \tag{A.9}$$

$$a_1 = \left(\gamma_1\gamma_2\gamma_3 - \left(\frac{\gamma_{12}}{2}\right)^2 \gamma_3 - \gamma_1 \left(\frac{\gamma_{23}}{2}\right)^2 \right)$$

$$a_0 = \left(\left(\frac{\gamma_{12}}{2}\right)^2 \frac{|\gamma_{13}|}{2} - \gamma_{12}\gamma_2 \frac{\gamma_{13}|}{2} \right)$$

Apéndice B

Condiciones para la positividad definida de (3.4)

1. Eliminación de α_{12}

Las desigualdades (3.7) (3.8) pueden escribirse como

$$\begin{aligned} \frac{2}{\gamma_{12}} \left(\gamma_1 - |\gamma_{13}| \frac{3}{4} \alpha_{13}^{\frac{4}{3}} \right) &> \alpha_{12}^2, \quad \gamma_{12} > 0 \\ \alpha_{12}^2 &> \frac{\gamma_{12}}{2(\gamma_2 - \frac{\gamma_{23}}{2} \alpha_{23}^2)}, \quad \gamma_2 - \frac{\gamma_{23}^2}{\alpha_{23}} > 0 \end{aligned}$$

Entonces puede eliminarse α_{12} y las desigualdades que restan son:

$$\begin{aligned} \frac{2}{\gamma_{12}} \left(\gamma_1 - |\gamma_{13}| \frac{3}{4} \alpha_{13}^{\frac{4}{3}} \right) &> \frac{\gamma_{12}}{2(\gamma_2 - \frac{\gamma_{23}}{2} \alpha_{23}^2)} \quad \gamma_{12} > 0 \\ \gamma_2 - \frac{\gamma_{23}}{2} \alpha_{23}^2 &> 0 \quad \left(\gamma_3 - |\gamma_{13}| \frac{\alpha_{13}^{-4}}{4} - \gamma_{23} \frac{\alpha_{23}^{-2}}{2} \right) > 0 \end{aligned} \quad (\text{B.1})$$

2. Eliminación de α_{23}

Las desigualdades (B.1) pueden escribirse como:

$$\begin{aligned} \gamma_{12} > 0, \quad \gamma_{23} > 0 \quad & \frac{2}{\gamma_{23}} \gamma_2 > \alpha_{23}^2 \\ \left(\gamma_1 - |\gamma_{13}| \frac{3}{4} \alpha_{13}^{\frac{4}{3}} \right) > 0 \quad & \frac{2}{\gamma_{23}} \left(\gamma_2 - \frac{(\frac{\gamma_{12}}{2})^2}{\left(\gamma_1 - |\gamma_{13}| \frac{3}{4} \alpha_{13}^{\frac{4}{3}} \right)} \right) > \alpha_{23}^2 \\ \left(\gamma_3 - |\gamma_{13}| \frac{\alpha_{13}^{-4}}{4} \right) > 0 \quad & \alpha_{23}^2 > \frac{\gamma_{23}}{2 \left(\gamma_3 - |\gamma_{13}| \frac{\alpha_{13}^{-4}}{4} \right)} \end{aligned}$$

Para eliminar α_{23}

$$\frac{\gamma_{23}}{2(\gamma_3 - |\gamma_{13}| \frac{\alpha_{13}^{-4}}{4})} < \alpha_{23}^2 < \min \left\{ \frac{2}{\gamma_{23}} \gamma_2, \frac{2}{\gamma_{23}} \left(\gamma_2 - \frac{(\frac{\gamma_{12}}{2})^2}{(\gamma_1 - |\gamma_{13}| \frac{3}{4} \alpha_{13}^{\frac{4}{3}})} \right) \right\} \Rightarrow$$

$$\frac{\gamma_{23}}{2(\gamma_3 - |\gamma_{13}| \frac{\alpha_{13}^{-4}}{4})} < \min \left\{ \frac{2}{\gamma_{23}} \gamma_2, \frac{2}{\gamma_{23}} \left(\gamma_2 - \frac{(\frac{\gamma_{12}}{2})^2}{(\gamma_1 - |\gamma_{13}| \frac{3}{4} \alpha_{13}^{\frac{4}{3}})} \right) \right\} \Rightarrow$$

ó, equivalentemente

$$\frac{\gamma_{23}}{2(\gamma_3 - |\gamma_{13}| \frac{\alpha_{13}^{-4}}{4})} < \frac{2}{\gamma_{23}} \gamma_2$$

$$\frac{\gamma_{23}}{2(\gamma_3 - |\gamma_{13}| \frac{\alpha_{13}^{-4}}{4})} > \frac{2}{\gamma_{23}} \left(\gamma_2 - \frac{(\frac{\gamma_{12}}{2})^2}{(\gamma_1 - |\gamma_{13}| \frac{3}{4} \alpha_{13}^{\frac{4}{3}})} \right)$$

Así queda eliminada α_{23} y las desigualdades que restan son:

$$\begin{aligned} \gamma_{12} > 0, \gamma_{23} > 0 \quad & \left(\gamma_1 - |\gamma_{13}| \frac{3}{4} \alpha_{13}^{\frac{4}{3}} \right) > 0 \\ \left(\frac{\gamma_{23}}{2} \right)^2 < \gamma_2 \left(\gamma_3 - |\gamma_{13}| \frac{\alpha_{13}^{-4}}{4} \right) \quad & \left(\gamma_3 - |\gamma_{13}| \frac{\alpha_{13}^{-4}}{4} \right) > 0 \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

$$\left(\frac{\gamma_{23}}{2} \right)^2 < \left(\gamma_2 - \frac{(\frac{\gamma_{12}}{2})^2}{(\gamma_1 - |\gamma_{13}| \frac{3}{4} \alpha_{13}^{\frac{4}{3}})} \right) \left(\gamma_3 - |\gamma_{13}| \frac{\alpha_{13}^{-4}}{4} \right)$$

3. Eliminación de α_{13}

Las desigualdades (B.2) pueden escribirse como:

$$\begin{aligned} \gamma_{12} > 0, \gamma_3 > 0 \quad & \gamma_2 > 0, \gamma_{23} > 0 \\ \left(\gamma_3 - \frac{1}{\gamma_2} \left(\frac{\gamma_{23}}{2} \right)^2 \right) > 0 \quad & \frac{4}{3|\gamma_{13}|} \gamma_1 > \alpha_{13}^{\frac{4}{3}} \\ \frac{|\gamma_{13}|}{4(\gamma_3 - \frac{1}{\gamma_2} (\frac{\gamma_{23}}{2})^2)} < \alpha_{13}^4 \quad & \alpha_{13}^4 > \frac{|\gamma_{13}|}{4\gamma_3} \end{aligned}$$

$$\left(\frac{\gamma_{23}}{2} \right)^2 < \left(\gamma_2 - \frac{(\frac{\gamma_{12}}{2})^2}{(\gamma_1 - |\gamma_{13}| \frac{3}{4} \alpha_{13}^{\frac{4}{3}})} \right) \left(\gamma_3 - |\gamma_{13}| \frac{\alpha_{13}^{-4}}{4} \right)$$

De la última desigualdad:

$$\left(\frac{\gamma_{23}}{2}\right)^2 < \left(\gamma_2 - \frac{\left(\frac{\gamma_{12}}{2}\right)^2}{\left(\gamma_1 - |\gamma_{13}| \frac{3}{4} \alpha_{13}^{\frac{4}{3}}\right)}\right) \left(\gamma_3 - |\gamma_{13}| \frac{\alpha_{13}^{-4}}{4}\right) \Rightarrow$$

$$\left(\gamma_1 \left(\frac{\gamma_{23}}{2}\right)^2 - |\gamma_{13}| \frac{3}{4} \left(\frac{\gamma_{23}}{2}\right)^2 \alpha_{13}^{\frac{4}{3}}\right) < \left(\gamma_1 \gamma_2 - \left(\frac{\gamma_{12}}{2}\right)^2 - |\gamma_{13}| \frac{3}{4} \gamma_2 \alpha_{13}^{\frac{4}{3}}\right) \left(\gamma_3 - |\gamma_{13}| \frac{\alpha_{13}^{-4}}{4}\right) \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} 0 < \gamma_3 \left(\gamma_1 \gamma_2 - \left(\frac{\gamma_{12}}{2}\right)^2\right) - \gamma_1 \left(\frac{\gamma_{23}}{2}\right)^2 + |\gamma_{13}| \frac{3}{4} \left(-\left(\frac{\gamma_{12}}{2}\right)^2 - \gamma_2 \gamma_3\right) \alpha_{13}^{\frac{4}{3}} \\ - \left(\gamma_1 \gamma_2 - \left(\frac{\gamma_{12}}{2}\right)^2\right) \frac{|\gamma_{13}|}{4} \alpha_{13}^{-4} + 3 \left(\frac{|\gamma_{13}|}{4}\right)^2 \gamma_2 \alpha_{13}^{\frac{4}{3}} \alpha_{13}^{-4} \end{aligned} \Rightarrow$$

Multiplicando todo por α_{13}^4

$$\begin{aligned} 0 < |\gamma_{13}| \frac{3}{4} \left(-\left(\frac{\gamma_{12}}{2}\right)^2 - \gamma_2 \gamma_3\right) \left(\alpha_{13}^{\frac{4}{3}}\right)^4 + \left(\gamma_3 \left(\gamma_1 \gamma_2 - \left(\frac{\gamma_{12}}{2}\right)^2\right) - \gamma_1 \left(\frac{\gamma_{23}}{2}\right)^2\right) \left(\alpha_{13}^{\frac{4}{3}}\right)^3 \\ + 3 \left(\frac{|\gamma_{13}|}{4}\right)^2 \gamma_2 \alpha_{13}^{\frac{4}{3}} - \left(\gamma_1 \gamma_2 - \left(\frac{\gamma_{12}}{2}\right)^2\right) \frac{|\gamma_{13}|}{4} \end{aligned}$$

Así, las desigualdades que resultan son

$$\gamma_2 > 0, \gamma_3 > 0, \gamma_{12} > 0, \gamma_{23} > 0, |\gamma_{13}| > 0 \quad (\text{B.3})$$

$$\left(\gamma_2 \gamma_3 - \left(\frac{\gamma_{23}}{2}\right)^2\right) > 0 \quad (\text{B.4})$$

$$\left(\frac{4\gamma_1}{3|\gamma_{13}|} - z\right) > 0 \quad (\text{B.5})$$

$$\left(z - \left(\frac{\gamma_2 |\gamma_{13}|}{4 \left(\gamma_2 \gamma_3 - \left(\frac{\gamma_{23}}{2}\right)^2\right)}\right)^{\frac{1}{3}}\right) > 0 \quad (\text{B.6})$$

$$\left(z - \left(\frac{|\gamma_{13}|}{4\gamma_3}\right)^{\frac{1}{3}}\right) > 0 \quad (\text{B.7})$$

$$a_4 z^4 + a_3 z^3 + a_1 z + a_0 > 0 \quad (\text{B.8})$$

donde

$$a_4 = -\frac{3}{4}|\gamma_{13}| \left(\gamma_2\gamma_3 - \left(\frac{\gamma_{23}}{2} \right)^2 \right) < 0 \quad (\text{B.9})$$

$$a_3 = \left(\gamma_3 \left(\gamma_1\gamma_2 - \left(\frac{\gamma_{12}}{2} \right)^2 \right) - \gamma_1 \left(\frac{\gamma_{23}}{2} \right)^2 \right)$$

$$a_1 = 3\gamma_2 \left(\frac{|\gamma_{13}|}{4} \right)^2$$

$$a_0 = - \left(\gamma_1\gamma_2 - \left(\frac{\gamma_{12}}{2} \right)^2 \right) \frac{|\gamma_{13}|}{4}$$

$$z = \alpha_{13}^{\frac{4}{3}} > 0.$$

Las desigualdades que dependen de z requieren que en el intervalo

$$\max \left\{ \left(\frac{|\gamma_{13}|}{4\gamma_3} \right)^{\frac{1}{3}}, \left(\frac{\gamma_2|\gamma_{13}|}{4 \left(\gamma_2\gamma_3 - \left(\frac{\gamma_{23}}{2} \right)^2 \right)} \right)^{\frac{1}{3}} \right\} < z < \frac{4\gamma_1}{3|\gamma_{13}|}$$

El polinomio $p(z)$ tenga valores positivos. Lo anterior hace necesario que

$$\frac{|\gamma_{13}|}{4\gamma_3} < \left(\frac{4\gamma_1}{3|\gamma_{13}|} \right)^3, \quad \left(\frac{\gamma_2|\gamma_{13}|}{4 \left(\gamma_2\gamma_3 - \left(\frac{\gamma_{23}}{2} \right)^2 \right)} \right)^{\frac{1}{3}} < \left(\frac{4\gamma_1}{3|\gamma_{13}|} \right)^3$$

ó

$$4 \left(\frac{4}{3} \right)^3 \gamma_1^3 \gamma_3 - |\gamma_{13}|^4 > 0 \quad \gamma_2|\gamma_{13}|^4 < 4 \left(\frac{4}{3} \right)^3 \gamma_1^3 \left(\gamma_2\gamma_3 - \left(\frac{\gamma_{23}}{2} \right)^2 \right)$$

$$4 \left(\frac{4}{3} \right)^3 \gamma_1^3 \left(\frac{\gamma_{23}}{2} \right)^2 < \gamma_2 \left(4 \left(\frac{4}{3} \right)^3 \gamma_1^3 \gamma_3 - |\gamma_{13}|^4 \right)$$

Apéndice C

Simplificación de las condiciones para la positividad definida de (3.4)

Algunas simplificaciones son posibles para reducir el número de desigualdades que hay que satisfacer para que $V(x) > 0$. A continuación se presentan.

De (B.6) y (B.7) se tiene que:

$$z > \max \left\{ \left(\frac{\gamma_2 |\gamma_{13}|}{4 \left(\gamma_2 \gamma_3 - \left(\frac{\gamma_{23}}{2} \right)^2 \right)} \right)^{\frac{1}{3}}, \left(\frac{|\gamma_{13}|}{4 \gamma_3} \right)^{\frac{1}{3}} \right\}$$

Para elegir el correcto se debe encontrar

$$\max \left\{ \left(\frac{\gamma_2}{\left(\gamma_2 \gamma_3 - \left(\frac{\gamma_{23}}{2} \right)^2 \right)} \right), \left(\frac{1}{\gamma_3} \right) \right\}$$

Si ambos terminos fueran iguales

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\gamma_3} &= \frac{\gamma_2}{(\gamma_2\gamma_3 - (\frac{\gamma_{23}}{2})^2)} \Rightarrow \\
\frac{\gamma_2\gamma_3}{\gamma_2} - \frac{1}{\gamma_2} \left(\frac{\gamma_{23}}{2}\right)^2 &= \gamma_3 \Rightarrow \\
\gamma_3 - \frac{1}{\gamma_2} \left(\frac{\gamma_{23}}{2}\right)^2 &= \gamma_3 \Rightarrow \\
-\frac{1}{\gamma_2} \left(\frac{\gamma_{23}}{2}\right)^2 &= 0
\end{aligned}$$

Esto sólo sería posible si $\gamma_{23} = 0$, lo cuál se contradice con (B.3). Por la misma (B.3) sólo puede ser cierto que

$$\begin{aligned}
\left(-\frac{1}{\gamma_2} \left(\frac{\gamma_{23}}{2}\right)^2\right) &< 0 \Rightarrow \\
\left(\gamma_3 - \frac{1}{\gamma_2} \left(\frac{\gamma_{23}}{2}\right)^2\right) &< \gamma_3 \Rightarrow \\
\left(\frac{\gamma_2\gamma_3}{\gamma_2} - \frac{1}{\gamma_2} \left(\frac{\gamma_{23}}{2}\right)^2\right) &< \gamma_3 \Rightarrow \\
\left(\frac{1}{\gamma_3}\right) &< \left(\frac{\gamma_2}{(\gamma_2\gamma_3 - (\frac{\gamma_{23}}{2})^2)}\right) \Rightarrow \\
\left(\frac{\gamma_2|\gamma_{13}|}{4(\gamma_2\gamma_3 - (\frac{\gamma_{23}}{2})^2)}\right)^{\frac{1}{3}} &> \left(\frac{|\gamma_{13}|}{4\gamma_3}\right)^{\frac{1}{3}}
\end{aligned}$$

Esto muestra que basta con que se cumpla (B.6) para que (B.7) sea también satisfecha. Con (B.5) puede escribirse

$$\begin{aligned}
\left(\frac{4\gamma_1}{3|\gamma_{13}|}\right) &> z > \left(\frac{\gamma_2|\gamma_{13}|}{4(\gamma_2\gamma_3 - (\frac{\gamma_{23}}{2})^2)}\right)^{\frac{1}{3}} \Rightarrow \\
\left(\frac{4\gamma_1}{3|\gamma_{13}|}\right) &> \left(\frac{\gamma_2|\gamma_{13}|}{4(\gamma_2\gamma_3 - (\frac{\gamma_{23}}{2})^2)}\right)^{\frac{1}{3}} \Rightarrow \\
\frac{4^4}{3^3} \frac{\gamma_1^3}{|\gamma_{13}|^4} &> \frac{\gamma_2}{\gamma_2\gamma_3 - (\frac{\gamma_{23}}{2})^2}
\end{aligned} \tag{C.1}$$

De aquí sigue que

$$\begin{aligned}
\frac{\gamma_2\gamma_3 - (\frac{\gamma_{23}}{2})^2}{\gamma_2} &> \frac{3^3}{4^4} \frac{|\gamma_{13}|^4}{\gamma_1^3} \Rightarrow \\
\gamma_2\gamma_3 - \left(\frac{\gamma_{23}}{2}\right)^2 &> \frac{3^3}{4^4} \frac{|\gamma_{13}|^4 \gamma_2}{\gamma_1^3}
\end{aligned} \tag{C.2}$$

Como

$$\frac{3^3}{4^4} \frac{|\gamma_{13}|^4 \gamma_2}{\gamma_1^3} > 0$$

Se muestra que si se cumple (C.2), también (B.4) y (B.9) son satisfechas.

En resumen, para que $V(x) > 0$ basta que (C.2) y (B.8) se satisfagan .

Apéndice D

Deducción de λ_m

De la parte cuadrática de la derivada de la candidata a función de Lyapunov (3.4):

$$U(\xi) = \begin{bmatrix} x_1^{\frac{2}{3}} \\ x_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \left(\frac{4}{3}\gamma_1 k_1 - \gamma_{12} k_2 - \gamma_{13} k_3\right) & -\left(\frac{2}{3}\gamma_1 - \gamma_2 k_2 + \frac{1}{3}\gamma_{12} k_1\right) \\ -\left(\frac{2}{3}\gamma_1 - \gamma_2 k_2 + \frac{1}{3}\gamma_{12} k_1\right) & \frac{2}{3}\gamma_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^{\frac{2}{3}} \\ x_2 \end{bmatrix} = \xi^T P \xi$$

Se debe calcular el valor propio más pequeño de P , es decir λ_m .

$$p(s) = \det \begin{bmatrix} s - p_1 & -p_3 \\ -p_3 & s - p_2 \end{bmatrix} = s^2 - (p_1 + p_2)s + p_1 p_2 - p_3^2$$

donde

$$p_1 = \left(\frac{4}{3}\gamma_1 k_1 - \gamma_{12} k_2 - \gamma_{13} k_3\right)$$

$$p_2 = \frac{2}{3}\gamma_{12}$$

$$p_3 = \left(\frac{2}{3}\gamma_1 - \gamma_2 k_2 + \frac{1}{3}\gamma_{12} k_1\right)$$

con raíces

$$s = \frac{1}{2}(p_1 + p_2) \pm \frac{1}{2}\sqrt{(p_1 + p_2)^2 - 4(p_1 p_2 - p_3^2)} = \frac{1}{2}(p_1 + p_2) \pm \frac{1}{2}\sqrt{(p_1 + p_2)^2 - 4p_3^2}$$

entonces es necesario que

$$p_1 > 0, \quad (p_1 p_2 - p_3^2) > 0$$

y

$$\lambda_m = \frac{1}{2}(p_1 + p_2) \pm \frac{1}{2}\sqrt{(p_1 + p_2)^2 - 4p_3^2}$$

Apéndice E

Condiciones para la negatividad definida de (3.5)

Usando la desigualdad aritmética que se presentó en el Capítulo 2, los términos con valor absoluto de (3.14) pueden acotarse como

$$|x_1|^{\frac{2}{3}}|x_3| \leq \frac{2\beta_{13}^{\frac{3}{2}}}{3}|x_1| + \frac{\beta_{13}^{-3}}{3}|x_3|^3 \quad (\text{E.1})$$

$$|x_1|^{\frac{1}{3}}|x_3|^2 \leq \frac{\eta_{13}^3}{3}|x_1| + \frac{2\eta_{13}^{-\frac{3}{2}}}{3}|x_3|^3 \quad (\text{E.2})$$

$$|x_2||x_3| \leq \frac{2\beta_{23}^{\frac{3}{2}}}{3}|x_2|^{\frac{3}{2}} + \frac{\beta_{23}^{-3}}{3}|x_3|^3 \quad (\text{E.3})$$

Y con esto, (3.14) puede escribirse como

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &\leq -2^{-\frac{1}{4}}\lambda_m \left(\frac{1}{2}|x_1| + \frac{1}{2}|x_2|^{\frac{3}{2}} \right) + |(\gamma_{13}k_1 - \gamma_{12})| \left(\frac{2\beta_{13}^{\frac{3}{2}}}{3}|x_1| + \frac{\beta_{13}^{-3}}{3}|x_3|^3 \right) + \gamma_{23}k_2 \left(\frac{\eta_{13}^3}{3}|x_1| + \frac{2\eta_{13}^{-\frac{3}{2}}}{3}|x_3|^3 \right) \\ &+ |(2\gamma_2 - \gamma_{13} + 2\gamma_{23}k_3x_1^0x_3^0)| \left(\frac{2\beta_{23}^{\frac{3}{2}}}{3}|x_2|^{\frac{3}{2}} + \frac{\beta_{23}^{-3}}{3}|x_3|^3 \right) - (\gamma_{23} - 4\gamma_3k_3)|x_3|^3 \\ &= - \left(2^{-\frac{1}{4}}\lambda_m - \frac{2\beta_{13}^{\frac{3}{2}}}{3}|(\gamma_{13}k_1 - \gamma_{12})| - \frac{\eta_{13}^3}{3}\gamma_{23}k_2 \right) |x_1| - \left(2^{-\frac{1}{4}}\lambda_m \frac{2\beta_{23}^{\frac{3}{2}}}{3} (|2\gamma_2 - \gamma_{13}| + 2\gamma_{23}k_3) \right) |x_2|^{\frac{3}{2}} \\ &- \left((\gamma_{23} - 4\gamma_3k_3) - \frac{\beta_{23}^{-3}}{3} (|2\gamma_2 - \gamma_{13}| + 2\gamma_{23}k_3) - \frac{2\eta_{13}^{-\frac{3}{2}}}{3}\gamma_{23}k_2 - \frac{\beta_{13}^{-3}}{3}|(\gamma_{13}k_1 - \gamma_{12})| \right) |x_3|^3 \end{aligned} \quad (\text{E.4})$$

Se puede ver, entonces que $\dot{V} < 0$ si

$$\left(2^{-\frac{1}{4}} \lambda_m - \frac{2\beta_{13}^{\frac{3}{2}}}{3} |(\gamma_{13}k_1 - \gamma_{12})| - \frac{\eta_{13}^3}{3} \gamma_{23}k_2 \right) > 0 \quad (\text{E.5})$$

$$\left(2^{-\frac{1}{4}} \lambda_m \frac{2\beta_{23}^{\frac{3}{2}}}{3} (|2\gamma_2 - \gamma_{13}| + 2\gamma_{23}k_3) \right) \quad (\text{E.6})$$

$$\left((\gamma_{23} - 4\gamma_3k_3) - \frac{\beta_{23}^{-3}}{3} (|2\gamma_2 - \gamma_{13}| + 2\gamma_{23}k_3) - \frac{2\eta_{13}^{-\frac{3}{2}}}{3} \gamma_{23}k_2 - \frac{\beta_{13}^{-3}}{3} |(\gamma_{13}k_1 - \gamma_{12})| \right) \quad (\text{E.7})$$

Las variables β_{13} , β_{23} , η_{13} deben ser eliminadas, para esto se siguen los siguientes pasos

1. Eliminación de β_{13}

Las desigualdades (E.5) pueden escribirse como

$$\begin{aligned} \frac{3}{2|(\gamma_{13}k_1 - \gamma_{12})|} \left(2^{-\frac{1}{4}} \lambda_m - \frac{\eta_{13}^3}{3} \gamma_{23}k_2 \right) &> \beta_{13}^{\frac{3}{2}}, \quad |(\gamma_{13}k_1 - \gamma_{12})| > 0 \\ \beta_{13}^3 &> \frac{1}{3} \frac{|(\gamma_{13}k_1 - \gamma_{12})|}{\left((\gamma_{23} - 4\gamma_3k_3) - \frac{\beta_{23}^{-3}}{3} (|2\gamma_2 - \gamma_{13}| + 2\gamma_{23}k_3) - \frac{2\eta_{13}^{-\frac{3}{2}}}{3} \gamma_{23}k_2 \right)}, \\ \left((\gamma_{23} - 4\gamma_3k_3) - \frac{\beta_{23}^{-3}}{3} (|2\gamma_2 - \gamma_{13}| + 2\gamma_{23}k_3) - \frac{2\eta_{13}^{-\frac{3}{2}}}{3} \gamma_{23}k_2 \right) &> 0 \end{aligned}$$

Al eliminar β_{13} queda

$$\begin{aligned} |(\gamma_{13}k_1 - \gamma_{12})| &> 0 \\ |(\gamma_{13}k_1 - \gamma_{12})|^3 &> \left(2^{-\frac{1}{4}} \lambda_m - \frac{\eta_{13}^3}{3} \gamma_{23}k_2 \right)^2 \\ \left((\gamma_{23} - 4\gamma_3k_3) - \frac{\beta_{23}^{-3}}{3} (|2\gamma_2 - \gamma_{13}| + 2\gamma_{23}k_3) - \frac{2\eta_{13}^{-\frac{3}{2}}}{3} \gamma_{23}k_2 \right) & \quad (\text{E.8}) \\ \left((\gamma_{23} - 4\gamma_3k_3) - \frac{\beta_{23}^{-3}}{3} (|2\gamma_2 - \gamma_{13}| + 2\gamma_{23}k_3) - \frac{2\eta_{13}^{-\frac{3}{2}}}{3} \gamma_{23}k_2 \right) &> 0 \end{aligned}$$

$$\left(2^{-\frac{1}{4}} \lambda_m - \frac{2\beta_{23}^{\frac{3}{2}}}{3} (|2\gamma_2 - \gamma_{13}| + 2\gamma_{23}k_3) \right) > 0$$

2. Eliminación de β_{23}

Las desigualdades (E.8) pueden escribirse como

$$\begin{aligned}
& |(\gamma_{13}k_1 - \gamma_{12})| > 0 \\
\beta_{23}^3 & > \frac{1}{3} \frac{(|2\gamma_2 - \gamma_{13}| + 2\gamma_{23}k_3)}{\left[(\gamma_{23} - 4\gamma_3k_3) - \frac{2\eta_{13}^{-\frac{3}{2}}}{3}\gamma_{23}k_2 - \frac{2^2}{3^3} \frac{|(\gamma_{13}k_1 - \gamma_{12})|^3}{\left(2^{-\frac{1}{4}}\lambda_m - \frac{\eta_{13}^3}{3}\gamma_{23}k_2\right)^2} \right]} \\
\beta_{23}^3 & > \frac{1}{3} \frac{(|2\gamma_2 - \gamma_{13}| + 2\gamma_{23}k_3)}{\left[(\gamma_{23} - 4\gamma_3k_3) - \frac{2\eta_{13}^{-\frac{3}{2}}}{3}\gamma_{23}k_2 \right]} \\
\left(2^{-\frac{1}{4}} \frac{3}{2} \frac{\lambda_m}{(|2\gamma_2 - \gamma_{13}| + 2\gamma_{23}k_3)} \right)^2 & > \beta_{23}^3 \\
\left(2^{-\frac{1}{4}}\lambda_m - \frac{\eta_{13}^3}{3}\gamma_{23}k_2 \right) & > 0 \\
\left[(\gamma_{23} - 4\gamma_3k_3) - \frac{2\eta_{13}^{-\frac{3}{2}}}{3}\gamma_{23}k_2 - \frac{2^2}{3^3} \frac{|(\gamma_{13}k_1 - \gamma_{12})|^3}{\left(2^{-\frac{1}{4}}\lambda_m - \frac{\eta_{13}^3}{3}\gamma_{23}k_2\right)^2} \right] & > 0 \\
\left((\gamma_{23} - 4\gamma_3k_3) - \frac{2\eta_{13}^{-\frac{3}{2}}}{3}\gamma_{23}k_2 \right) & > 0 \\
(|2\gamma_2 - \gamma_{13}| + 2\gamma_{23}k_3) & > 0
\end{aligned}$$

De ahí se puede ver que

$$\begin{aligned}
& \max \left\{ \frac{1}{3} \frac{(|2\gamma_2 - \gamma_{13}| + 2\gamma_{23}k_3)}{\left((\gamma_{23} - 4\gamma_3k_3) - \frac{2\eta_{13}^{-\frac{3}{2}}}{3}\gamma_{23}k_2 \right)}, \frac{1}{3} \frac{(|2\gamma_2 - \gamma_{13}| + 2\gamma_{23}k_3)}{\left[(\gamma_{23} - 4\gamma_3k_3) - \frac{2\eta_{13}^{-\frac{3}{2}}}{3}\gamma_{23}k_2 - \frac{2^2}{3^3} \frac{|(\gamma_{13}k_1 - \gamma_{12})|^3}{\left(2^{-\frac{1}{4}}\lambda_m - \frac{\eta_{13}^3}{3}\gamma_{23}k_2\right)^2} \right]} \right\} < \beta_{23}^3, \\
\beta_{23}^3 & < \left(2^{-\frac{1}{4}} \frac{3}{2} \frac{\lambda_m}{(|2\gamma_2 - \gamma_{13}| + 2\gamma_{23}k_3)} \right)^2 \rightarrow \\
\frac{1}{3} \frac{(|2\gamma_2 - \gamma_{13}| + 2\gamma_{23}k_3)}{\left[(\gamma_{23} - 4\gamma_3k_3) - \frac{2\eta_{13}^{-\frac{3}{2}}}{3}\gamma_{23}k_2 - \frac{2^2}{3^3} \frac{|(\gamma_{13}k_1 - \gamma_{12})|^3}{\left(2^{-\frac{1}{4}}\lambda_m - \frac{\eta_{13}^3}{3}\gamma_{23}k_2\right)^2} \right]} & < \left(2^{-\frac{1}{4}} \frac{3}{2} \frac{\lambda_m}{(|2\gamma_2 - \gamma_{13}| + 2\gamma_{23}k_3)} \right)^2
\end{aligned}$$

Así β_{23} queda eliminada y las desigualdades quedan como

$$\begin{aligned}
& |(\gamma_{13}k_1 - \gamma_{12})| > 0 \\
& \frac{1}{3} \left[\frac{(|2\gamma_2 - \gamma_{13}| + 2\gamma_{23}k_3)}{(\gamma_{23} - 4\gamma_3k_3) - \frac{2\eta_{13}^{-\frac{3}{2}}}{3}\gamma_{23}k_2 - \frac{2^2}{3^3} \frac{|(\gamma_{13}k_1 - \gamma_{12})|^3}{\left(2^{-\frac{1}{4}}\lambda_m - \frac{\eta_{13}^3}{3}\gamma_{23}k_2\right)^2}} \right] < \left(2^{-\frac{1}{4}}\frac{3}{2} \frac{\lambda_m}{(|2\gamma_2 - \gamma_{13}| + 2\gamma_{23}k_3)}\right)^2 \\
& \left(2^{-\frac{1}{4}}\lambda_m - \frac{\eta_{13}^3}{3}\gamma_{23}k_2\right) > 0 \\
& \left[(\gamma_{23} - 4\gamma_3k_3) - \frac{2\eta_{13}^{-\frac{3}{2}}}{3}\gamma_{23}k_2 - \frac{2^2}{3^3} \frac{|(\gamma_{13}k_1 - \gamma_{12})|^3}{\left(2^{-\frac{1}{4}}\lambda_m - \frac{\eta_{13}^3}{3}\gamma_{23}k_2\right)^2} \right] > 0 \\
& \left((\gamma_{23} - 4\gamma_3k_3) - \frac{2\eta_{13}^{-\frac{3}{2}}}{3}\gamma_{23}k_2 \right) > 0 \\
& (|2\gamma_2 - \gamma_{13}| + 2\gamma_{23}k_3) > 0
\end{aligned} \tag{E.9}$$

3. Eliminación de η_{13}^3

Las desigualdades (E.9) pueden escribirse como

$$|(\gamma_{13}k_1 - \gamma_{12})| > 0$$

$$(|2\gamma_2 - \gamma_{13}| + 2\gamma_{23}k_3) > 0$$

$$(\gamma_{23} - 4\gamma_3k_3) > 0$$

$$2^{-\frac{1}{4}}3\frac{\lambda_m}{\gamma_{23}k_2} > \eta_{13}^3$$

$$\eta_{13}^{\frac{3}{2}} > \frac{2\gamma_{23}k_3}{3(\gamma_{23} - 4\gamma_3k_3)}$$

$$\left[-\frac{1}{3} \frac{(|2\gamma_2 - \gamma_{13}| + 2\gamma_{23}k_3)}{\left(2^{-\frac{1}{4}}\frac{3}{2} \frac{\lambda_m}{(|2\gamma_2 - \gamma_{13}| + 2\gamma_{23}k_3)}\right)} + (\gamma_{23} - 4\gamma_3k_3) \right] \left(2^{-\frac{1}{4}} - \frac{\eta_{13}^3}{3}\gamma_{23}k_2\right)^2 \eta^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}\gamma_{23}k_2 \left(2^{-\frac{1}{4}} - \frac{\eta_{13}^3}{3}\gamma_{23}k_2\right)^2 > \frac{2^2}{3^3} |(\gamma_{13}k_1 - \gamma_{12})|^3 \eta_{13}^{\frac{3}{2}}$$

$$(\gamma_{23} - 4\gamma_3k_3) \left(2^{-\frac{1}{4}} - \frac{\eta_{13}^3}{3}\gamma_{23}k_2\right)^2 \eta_{13}^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}\gamma_{23}k_2 \left(2^{-\frac{1}{4}} - \frac{\eta_{13}^3}{3}\gamma_{23}k_2\right)^2 > \frac{2^2}{3^3} |(\gamma_{13}k_1 - \gamma_{12})|^3 \eta_{13}^{\frac{3}{2}}$$

Donde las últimas dos desigualdades pueden reducirse a la siguiente única desigualdad.

$$\left[\left((\gamma_{23} - 4\gamma_3k_3) - \frac{1}{3} \frac{(|2\gamma_2 - \gamma_{13}| + 2\gamma_{23}k_3)}{\left(2^{-\frac{1}{4}}\frac{3}{2} \frac{\lambda_m}{(|2\gamma_2 - \gamma_{13}| + 2\gamma_{23}k_3)}\right)} \right) y - \frac{2}{3}\gamma_{23}k_2 \right] \left(2^{-\frac{1}{4}}\lambda_m - \frac{1}{3}\gamma_{23}k_2y^2\right)^2 > \frac{2^2}{3^3} |(\gamma_{13}k_1 - \gamma_{12})|^3 y$$

Y entonces el conjunto de desigualdades se transforma en

$$\gamma_{23} > 0 \tag{E.10}$$

$$|(\gamma_{13}k_1 - \gamma_{12})| \geq 0 \tag{E.11}$$

$$(|2\gamma_2 - \gamma_{13}| + 2\gamma_{23}k_3) > 0 \tag{E.12}$$

$$\frac{2}{3} \frac{\gamma_{23} k_2}{(\gamma_{23} - 4\gamma_3 k_3)} < y < \left(2^{-\frac{1}{4}} 3 \frac{\lambda_m}{\gamma_{23} k_2} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (\text{E.13})$$

$$b_2^2 (b_3 y - 2b_2) \left(y^2 - 2^{-\frac{1}{4}} 3 \frac{\lambda_m}{\gamma_{23} k_2} \right)^2 > b_0 y \quad (\text{E.14})$$

donde

$$y = \eta_{13}^{\frac{3}{2}}$$

$$b_3 = \left((\gamma_{23} - 4\gamma_3 k_3) - \frac{2^2 (|2\gamma_2 - \gamma_{13}| + 2\gamma_{23} k_3)^3}{(2^{-\frac{1}{4}})^2} \right)$$

$$b_2 = \frac{1}{3} \gamma_{23} k_2 > 0$$

$$b_1 = 2^{-\frac{1}{4}} 3 \frac{\lambda_m}{\gamma_{23} k_2}$$

$$b_0 = \frac{2^2}{3^3} |(\gamma_{13} k_1 - \gamma_{12})|^3 \geq 0$$

Esto implica que

$$b_3 y > \frac{b_0}{b_2^2} \frac{y}{(b_1 - y^2)^2} + 2b_2$$

$$b_3 = (\gamma_{23} - 4\gamma_3 k_3) - \frac{2^2 (|2\gamma_2 - \gamma_{13}| + 2\gamma_{23} k_3)^3}{(2^{-\frac{1}{4}})^2} > 0 \Rightarrow$$

$$(\gamma_{23} - 4\gamma_3 k_3) > \frac{2^2 (|2\gamma_2 - \gamma_{13}| + 2\gamma_{23} k_3)^3}{(2^{-\frac{1}{4}})^2}$$

Además de que

$$(\gamma_{23} - 4\gamma_3 k_3) > \frac{2^{\frac{9}{8}} (\gamma_{23} k_2)^{\frac{3}{2}}}{3^{\frac{3}{2}} \lambda_m^{\frac{1}{2}}} \quad (\text{E.15})$$

Apéndice F

Cálculo de las desigualdades con 4 restricciones

En esta sección se muestran los cálculos necesarios para sustituir las cuatro restricciones que se propusieron en la Sección 4.2 en las desigualdades de la Tabla 3.4. Las restricciones propuestas son:

$$\gamma_1 = \gamma_3 = \gamma_{13} = \gamma_{23} = \gamma \tag{4.2}$$

$$\gamma_{12} = \gamma_{13}k_1 \tag{4.3}$$

$$\gamma_2 = \gamma_1 \frac{k_1^2 + 2}{3k_2} \tag{4.4}$$

$$z = 1$$

Las desigualdades que se dedujeron en la Sección 3.5 los Apéndices B y E, y que se encuentran condensadas en la Tabla 3.4 son:

$$\left(\gamma_2\gamma_3 - \left(\frac{\gamma_{23}}{2}\right)^2\right) > 0 \quad (\text{B.4})$$

$$\left(\frac{4\gamma_1}{3|\gamma_{13}|} - z\right) > 0 \quad (\text{B.5})$$

$$\left(z - \left(\frac{\gamma_2|\gamma_{13}|}{4\left(\gamma_2\gamma_3 - \left(\frac{\gamma_{23}}{2}\right)^2\right)}\right)^{\frac{1}{3}}\right) > 0 \quad (\text{B.6})$$

$$\left(z - \left(\frac{|\gamma_{13}|}{4\gamma_3}\right)^{\frac{1}{3}}\right) > 0 \quad (\text{B.7})$$

$$a_4z^4 + a_3z^3 + a_1z + a_0 > 0 \quad (\text{B.8})$$

donde

$$a_4 = -\frac{3}{4}|\gamma_{13}|\left(\gamma_2\gamma_3 - \left(\frac{\gamma_{23}}{2}\right)^2\right) < 0 \quad (\text{B.9})$$

$$a_3 = \left(\gamma_3\left(\gamma_1\gamma_2 - \left(\frac{\gamma_{12}}{2}\right)^2\right) - \gamma_1\left(\frac{\gamma_{23}}{2}\right)^2\right)$$

$$a_1 = 3\gamma_2\left(\frac{|\gamma_{13}|}{4}\right)^2$$

$$a_0 = -\left(\gamma_1\gamma_2 - \left(\frac{\gamma_{12}}{2}\right)^2\right)\frac{|\gamma_{13}|}{4}$$

$$z > 0$$

$$\frac{2}{3}\gamma_{12}\left(\frac{4}{3}\gamma_1k_1 - \gamma_{12}k_2 - \gamma_{13}k_3\right) > \left(\frac{2}{3}\gamma_1 - \gamma_2k_2 + \frac{1}{3}\gamma_{12}k_1\right)^2$$

(3.12)

$$\frac{2}{3} \frac{\gamma_{23} k_2}{(\gamma_{23} - 4\gamma_3 k_3)} < y < \left(2^{-\frac{1}{4}} 3 \frac{\lambda_m}{\gamma_{23} k_2} \right)^{\frac{1}{2}}$$

(E.13)

$$b_2^2 (b_3 y - 2b_2) \left(y^2 - 2^{-\frac{1}{4}} 3 \frac{\lambda_m}{\gamma_{23} k_2} \right)^2 > b_0 y$$

(E.14)

$$(\gamma_{23} - 4\gamma_3 k_3) > \frac{2^{\frac{9}{8}} (\gamma_{23} k_2)^{\frac{3}{2}}}{3^{\frac{3}{2}} \lambda_m^{\frac{1}{2}}}$$

(E.15)

$$y = \eta_{13}^{\frac{3}{2}}$$

$$b_3 = \left((\gamma_{23} - 4\gamma_3 k_3) - \frac{2^2 (|2\gamma_2 - \gamma_{13}| + 2\gamma_{23} k_3)^3}{3^3 (2^{-\frac{1}{4}})^2} \right)$$

$$b_2 = \frac{1}{3} \gamma_{23} k_2 > 0$$

$$b_1 = 2^{-\frac{1}{4}} 3 \frac{\lambda_m}{\gamma_{23} k_2}$$

$$b_0 = \frac{2^2}{3^3} |(\gamma_{13} k_1 - \gamma_{12})|^3 \geq 0$$

Ahora se mostrará en detalle, para cada una de las desigualdades anteriores, la sustitución de las restricciones (4.2)-(4.4). De (B.4)

$$\gamma_2 \gamma_3 - \left(\frac{\gamma_{23}}{2} \right)^2 > 0 \Rightarrow \gamma \left(\frac{k_1^2 + 2}{3k_2} \right) \gamma - \left(\frac{\gamma}{2} \right)^2 > 0 \Rightarrow \left(\frac{k_1^2 + 2}{3k_2} \right) \gamma^2 > \left(\frac{\gamma}{2} \right)^2$$

(F.1)

$$\left(\frac{k_1^2 + 2}{3k_2} \right) > \frac{1}{4}$$

De (B.5)

$$z > \frac{4\gamma_1}{3|\gamma_{13}|} \Rightarrow 1 > \frac{4\gamma}{3|\gamma|} \Rightarrow 1 > \frac{4}{3} \quad (\text{F.2})$$

Que siempre se cumple.

De (B.6)

$$\begin{aligned} \left(\frac{\gamma_2 |\gamma_{13}|}{4(\gamma_2 \gamma_3 - (\frac{\gamma_2 \gamma_3}{2})^2)} \right)^{\frac{1}{3}} < z &\Rightarrow \left(\frac{\gamma \left(\frac{k_1^2+2}{3k_2} \right) |\gamma|}{4 \left(\gamma \left(\frac{k_1^2+2}{3k_2} \right) \gamma - (\frac{\gamma}{2})^2 \right)} \right)^{\frac{1}{3}} < 1 \Rightarrow \\ \frac{\gamma^2 \left(\frac{k_1^2+2}{3k_2} \right)}{4 \left(\gamma^2 \left(\frac{k_1^2+2}{3k_2} \right) - \frac{\gamma^2}{4} \right)} < 1^3 &\Rightarrow \frac{\left(\frac{k_1^2+2}{3k_2} \right)}{4 \left(\frac{k_1^2+2}{3k_2} - \frac{1}{4} \right)} < 1 \Rightarrow \quad (\text{F.3}) \\ \left(\frac{k_1^2+2}{3k_2} \right) < 4 \left(\frac{k_1^2+2}{3k_2} - \frac{1}{4} \right) &\Rightarrow 1 < 3 \left(\frac{k_1^2+2}{3k_2} \right) \Rightarrow \\ \frac{1}{3} < \left(\frac{k_1^2+2}{3k_2} \right) \end{aligned}$$

Se puede ver que (F.1) está incluida en (F.3).

De (B.7)

$$\left(\frac{|\gamma_{13}|}{4\gamma_3} \right)^{\frac{1}{3}} < z \Rightarrow \frac{|\gamma|}{4\gamma} < 1^3 \Rightarrow \frac{1}{4} < 1 \quad (\text{F.4})$$

Que siempre se cumple.

De (B.8)

$$a_4 z^4 + a_3 z^3 + a_1 z + a_0 > 0 \Rightarrow a_4 + a_3 + a_1 + a_0 > 0 \quad (\text{F.5})$$

donde

$$\begin{aligned}
a_4 &= -\frac{3}{4}|\gamma_{13}| \left(\gamma_2 \gamma_3 - \left(\frac{\gamma_{23}}{2} \right)^2 \right) < 0 \Rightarrow -\frac{3}{4}|\gamma| \left(\gamma \left(\frac{k_1^2+2}{3k_2} \right) \gamma - \left(\frac{\gamma}{2} \right)^2 \right) < 0 \Rightarrow \\
& - \left(\frac{3}{4} \gamma^3 \left(\frac{k_1^2+2}{3k_2} \right) - \frac{3}{4} \frac{\gamma^3}{4} \right) < 0 \Rightarrow \frac{3}{4} \gamma^3 \left(\frac{k_1^2+2}{3k_2} \right) > \frac{3}{4} \frac{\gamma^3}{4} \Rightarrow \\
& \left(\frac{k_1^2+2}{3k_2} \right) > \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

Que es equivalente a (F.1). También puede escribirse, para sustituir en (F.5), como:

$$a_4 = -\gamma^3 \left(\frac{3}{4} \left(\frac{k_1^2+2}{3k_2} \right) - \frac{3}{16} \right)$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}
a_3 &= \left(\gamma_3 \left(\gamma_1 \gamma_2 - \left(\frac{\gamma_{12}}{2} \right)^2 \right) - \gamma_1 \left(\frac{\gamma_{23}}{2} \right)^2 \right) \Rightarrow \left(\gamma \left(\gamma \gamma \left(\frac{k_1^2+2}{3k_2} \right) - \left(\frac{\gamma k_1}{2} \right)^2 \right) - \gamma \left(\frac{\gamma}{2} \right)^2 \right) \Rightarrow \\
& \left(\gamma^3 \left(\frac{k_1^2+2}{3k_2} \right) - \frac{\gamma^3 k_1^2}{4} \right) - \frac{\gamma^3}{4} \Rightarrow \gamma^3 \left(\frac{k_1^2+2}{3k_2} - \frac{k_1^2}{4} - \frac{1}{4} \right) \\
a_1 &= 3\gamma_2 \left(\frac{|\gamma_{13}|}{4} \right)^2 \Rightarrow 3\gamma \left(\frac{k_1^2+2}{3k_2} \right) \left(\frac{|\gamma|}{4} \right)^2 \Rightarrow \\
& \frac{3}{16} \gamma^3 \left(\frac{k_1^2+2}{3k_2} \right) \\
a_0 &= - \left(\gamma_1 \gamma_2 - \left(\frac{\gamma_{12}}{2} \right)^2 \right) \frac{|\gamma_{13}|}{4} \Rightarrow - \left(\gamma \gamma \left(\frac{k_1^2+2}{3k_2} \right) - \left(\frac{\gamma k_1}{2} \right)^2 \right) \frac{|\gamma|}{4} \Rightarrow \\
& - \frac{\gamma^3}{4} \left(\left(\frac{k_1^2+2}{3k_2} \right) - \left(\frac{k_1}{2} \right)^2 \right)
\end{aligned}$$

Entonces (F.5) queda como:

$$-\gamma^3 \left(\frac{3}{4} \left(\frac{k_1^2+2}{3k_2} \right) - \frac{3}{16} \right) + \gamma^3 \left(\frac{k_1^2+2}{3k_2} - \frac{k_1^2}{4} - \frac{1}{4} \right) + \frac{3}{16} \gamma^3 \left(\frac{k_1^2+2}{3k_2} \right) - \frac{\gamma^3}{4} \left(\left(\frac{k_1^2+2}{3k_2} \right) - \left(\frac{k_1}{2} \right)^2 \right) > 0 \Rightarrow$$

$$\gamma^3 \left[- \left(\frac{3}{4} \left(\frac{k_1^2+2}{3k_2} \right) - \frac{3}{16} \right) + \left(\frac{k_1^2+2}{3k_2} - \frac{k_1^2}{4} - \frac{1}{4} \right) + \frac{3}{16} \left(\frac{k_1^2+2}{3k_2} \right) - \frac{1}{4} \left(\left(\frac{k_1^2+2}{3k_2} \right) - \left(\frac{k_1}{2} \right)^2 \right) \right] > 0 \Rightarrow$$

$$\gamma^3 \left[\left(\frac{k_1^2+2}{3k_2} \right) \left(-\frac{3}{4} + 1 + \frac{3}{16} - \frac{1}{4} \right) + k_1^2 \left(\frac{1}{16} - \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{3}{16} - \frac{1}{4} \right) \right] > 0 \Rightarrow$$

$$\gamma^3 \left[\frac{3}{16} \left(\frac{k_1^2+2}{3k_2} \right) - \frac{3}{16} k_1^2 - \frac{1}{16} \right] > 0 \Rightarrow$$

$$\gamma^3 \left[\frac{3}{16} \left(\frac{k_1^2+2}{3k_2} \right) - \frac{3}{16} k_1^2 \right] > \frac{\gamma^3}{16} \Rightarrow$$

$$\left[\left(\frac{k_1^2+2}{3k_2} \right) - k_1^2 \right] > \frac{1}{3}$$

De (3.12):

$$\frac{2}{3} \gamma_{12} \left(\frac{4}{3} \gamma_1 k_1 - \gamma_{12} k_2 - \gamma_{13} k_3 \right) > \left(\frac{2}{3} \gamma_1 - \gamma_2 k_2 + \frac{1}{3} \gamma_{12} k_1 \right)^2 \Rightarrow$$

$$\frac{2}{3} \gamma k_1 \left(\frac{4}{3} \gamma k_1 - \gamma k_1 k_2 - \gamma k_3 \right) > \left(\frac{2}{3} \gamma - \gamma \left(\frac{k_1^2+2}{3k_2} \right) k_2 + \frac{1}{3} \gamma k_1 k_1 \right)^2 \Rightarrow$$

$$\frac{2}{3} \gamma^2 k_1 \left(\frac{4}{3} k_1 - k_1 k_2 - k_3 \right) > \gamma^2 \left(\frac{2}{3} - \left(\frac{k_1^2+2}{3k_2} \right) k_2 + \frac{1}{3} k_1 k_1 \right)^2 \Rightarrow$$

(F.6)

$$\frac{2}{3} k_1 \left(\frac{4}{3} k_1 - k_1 k_2 - k_3 \right) > \left(\frac{2}{3} - \frac{k_1^2+2}{3} + \frac{k_1^2}{3} \right)^2 \Rightarrow$$

$$\frac{2}{3} k_1 \left(\frac{4}{3} k_1 - k_1 k_2 - k_3 \right) > 0 \Rightarrow$$

$$\left(\frac{4}{3} k_1 - k_1 k_2 - k_3 \right) > 0$$

La intersección de los conjuntos donde se cumplen (F.5) y (F.6), incluye el conjunto donde se cumple (F.3), así que esta última puede eliminarse.

De λ_m :

$$\begin{aligned}
\lambda_m &= \frac{1}{2} \left(\left(\frac{4}{3} \gamma_1 k_1 - \gamma_{12} k_2 - \gamma_{13} k_3 \right) + \frac{2}{3} \gamma_{12} \right) \\
&\quad - \frac{1}{2} \sqrt{\left(\left(\frac{4}{3} \gamma_1 k_1 - \gamma_{12} \left(k_2 + \frac{2}{3} \right) - \gamma_{13} k_3 \right)^2 + 4 \left(\frac{2}{3} \gamma_1 - \gamma_2 k_2 + \frac{1}{3} \gamma_{12} k_1 \right)^2 \right)} > 0 \\
\Rightarrow &\quad \frac{1}{2} \left(\left(\frac{4}{3} \gamma k_1 - \gamma k_1 k_2 - \gamma k_3 \right) + \frac{2}{3} \gamma k_1 \right) \\
&\quad - \frac{1}{2} \sqrt{\left(\left(\frac{4}{3} \gamma k_1 - \gamma k_1 \left(k_2 + \frac{2}{3} \right) - \gamma k_3 \right)^2 + 4 \left(\frac{2}{3} \gamma - \gamma \left(\frac{k_1^2 + 2}{3 k_2} \right) k_2 + \frac{1}{3} \gamma k_1 k_1 \right)^2 \right)} > 0 \\
\Rightarrow &\quad \frac{1}{2} \gamma \left(\frac{4}{3} k_1 - k_1 k_2 - k_3 + \frac{2}{3} k_1 \right) - \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{4}{3} \gamma k_1 - \gamma k_1 \left(k_2 + \frac{2}{3} \right) - \gamma k_3 \right)^2} > 0 \\
\Rightarrow &\quad \frac{1}{2} \gamma \left(\frac{4}{3} k_1 - k_1 k_2 - k_3 + \frac{2}{3} k_1 \right) - \frac{1}{2} \gamma \left(\frac{4}{3} k_1 - k_1 k_2 - k_3 - \frac{2}{3} k_1 \right) > 0 \\
\Rightarrow &\quad \frac{1}{2} \gamma \frac{4}{3} k_1 > 0 \\
\Rightarrow &\quad \frac{2}{3} \gamma k_1 > 0
\end{aligned} \tag{F.7}$$

Que siempre se cumple. Con esto se simplifican de manera considerable las desigualdades que siguen.

De (E.14)

$$b_2^2 (b_3 y - 2b_2) \left(y^2 - 2^{-\frac{1}{4}} 3 \frac{\lambda_m}{\gamma_{23} k_2} \right)^2 > b_0 y \tag{F.8}$$

donde

$$b_3 = \left((\gamma_{23} - 4\gamma_3 k_3) - \frac{2^2 (|2\gamma_2 - \gamma_{13}| + 2\gamma_{23} k_3)^3}{\left(2^{-\frac{1}{4}} \lambda_m \right)^2} \right) > 0$$

$$b_2 = \frac{1}{3} \gamma_{23} k_2$$

$$b_0 = \frac{2^2}{3^3} |(\gamma_{13}k_1 - \gamma_{12})|^3 \Rightarrow \frac{2^2}{3^3} |(\gamma k_1 - \gamma k_1)|^3 \Rightarrow b_0 = 0$$

Entonces (F.8) queda como

$$b_3 y - 2b_2 > 0$$

Es decir

$$y > \frac{\frac{2}{3}\gamma_{23}k_2}{(\gamma_{23} - 4\gamma_3k_3) - \frac{2^2}{3^3} \frac{(2|\gamma_2 - \gamma_{13}| + 2\gamma_{23}k_3)^3}{2^{\frac{1}{4}}\lambda_m}}$$

Como la parte derecha de la ecuación anterior es mayor que la parte izquierda de (E.13), esta última puede escribirse como:

$$\frac{\frac{2}{3}\gamma_{23}k_2}{(\gamma_{23} - 4\gamma_3k_3) - \frac{2^2}{3^3} \frac{(2|\gamma_2 - \gamma_{13}| + 2\gamma_{23}k_3)^3}{2^{\frac{1}{4}}\lambda_m}} < y < \left(2^{-\frac{1}{4}} 3 \frac{\lambda_m}{\gamma_{23}k_2}\right)^2$$

Reacomodando queda:

$$\frac{2^2}{3^3} \frac{(2|\gamma_2 - \gamma_{13}| + 2\gamma_{23}k_3)^3}{2^{\frac{1}{4}}\lambda_m} > (\gamma_{23} - 4\gamma_3k_3) - \frac{2^{\frac{9}{8}}(\gamma_{23}k_2)^{\frac{3}{2}}}{3^{\frac{3}{2}}\lambda_m^{\frac{1}{2}}}$$

Incorporando (E.15), quedaría como:

$$\frac{2^2}{3^3} \frac{(2|\gamma_2 - \gamma_{13}| + 2\gamma_{23}k_3)^3}{2^{\frac{1}{4}}\lambda_m} > (\gamma_{23} - 4\gamma_3k_3) - \frac{2^{\frac{9}{8}}(\gamma_{23}k_2)^{\frac{3}{2}}}{3^{\frac{3}{2}}\lambda_m^{\frac{1}{2}}} > 0$$

De ahí:

$$\frac{3^3}{2^{\frac{5}{2}}}\lambda_m^2 \left((\gamma_{23} - 4\gamma_3k_3) - \frac{2^{\frac{9}{8}}(\gamma_{23}k_2)^{\frac{3}{2}}}{3^{\frac{3}{2}}\lambda_m^{\frac{1}{2}}} \right) > (2|\gamma_2 - \gamma_{13}| + 2\gamma_{23}k_3)^3$$

Sustituyendo las restricciones (4.2)-(4.4) queda como:

$$\frac{3}{2^{\frac{7}{2}}} \left(k_1^2 - 4k_1^2k_3 - \frac{2^{\frac{5}{8}}}{3} (k_1k_2)^{\frac{3}{2}} \right) - \left(\left| \frac{k_1^2 + 2}{3k_2} - \frac{1}{2} \right| + k_3 \right)^3 > 0$$

Finalmente, las desigualdades que quedan son las de la Tabla F.1

Tabla F.1: Desigualdades resultantes de aplicar las restricciones (4.2)-(4.5)

$$\begin{aligned} & \overline{\overline{\left(\frac{4}{3}k_1 - k_1k_2 - k_3\right) > 0}} \\ & \frac{3}{2^{\frac{7}{2}}} \left(k_1^2 - 4k_1^2k_3 - \frac{2^{\frac{5}{8}}}{3} (k_1k_2)^{\frac{3}{2}} \right) - \left(\left| \frac{k_1^2+2}{3k_2} - \frac{1}{2} \right| + k_3 \right)^3 > 0 \\ & \underline{\underline{\frac{k_1^2+2}{3k_1^2+1} - k_2 > 0}} \end{aligned}$$

Apéndice G

Condiciones para la negatividad definida de (5.4)

De (5.5)

$$\frac{2}{3}\gamma_{12} \left(\frac{4}{3}\gamma_1 k_1 - \gamma_{12} k_2 - \gamma_{13} (k_3 + \rho_3(t, x)) \right) > \left(\frac{2}{3}\gamma_1 - \gamma_2 k_2 + \frac{1}{3}\gamma_{12} k_1 \right)^2$$

$$\frac{2}{3}\gamma_{12} \left(\frac{4}{3}\gamma_1 k_1 - \gamma_{12} k_2 - \gamma_{13} (k_3 + \rho_3(t, x)) \right) > \frac{2}{3}\gamma_{12} \left(\frac{4}{3}\gamma_1 k_1 - \gamma_{12} k_2 - \gamma_{13} (k_3 + M) \right) \Rightarrow$$

$$\frac{2}{3}\gamma_{12} \left(\frac{4}{3}\gamma_1 k_1 - \gamma_{12} k_2 - \gamma_{13} (k_3 + M) \right) > \left(\frac{2}{3}\gamma_1 - \gamma_2 k_2 + \frac{1}{3}\gamma_{12} k_1 \right)^2 \quad (\text{G.1})$$

De (5.6)

$$\lambda_{m_p} = \frac{1}{2} \left(\left(\frac{4}{3}\gamma_1 k_1 - \gamma_{12} k_2 - \gamma_{13} (k_3 + \rho_3(t, x)) \right) + \frac{2}{3}\gamma_{12} \right) - \frac{1}{2} \sqrt{\left(\left(\frac{4}{3}\gamma_1 k_1 - \gamma_{12} \left(k_2 + \frac{2}{3} \right) - \gamma_{13} (k_3 + \rho_3(t, x)) \right)^2 + 4 \left(\frac{2}{3}\gamma_1 - \gamma_2 k_2 + \frac{1}{3}\gamma_{12} k_1 \right)^2 \right)} > 0$$

$$\left(\frac{4}{3}\gamma_1 k_1 - \gamma_{12} k_2 - \gamma_{13} (k_3 + \rho_3(t, x)) \right) > \left(\frac{4}{3}\gamma_1 k_1 - \gamma_{12} k_2 - \gamma_{13} (k_3 + M) \right) \quad y$$

$$\left(\frac{4}{3}\gamma_1 k_1 - \gamma_{12} \left(k_2 + \frac{2}{3} \right) - \gamma_{13} (k_3 + \rho_3(t, x)) \right) < \left(\frac{4}{3}\gamma_1 k_1 - \gamma_{12} \left(k_2 + \frac{2}{3} \right) - \gamma_{13} (k_3 - M) \right) \Rightarrow$$

$$\lambda_{m_p} > \lambda_{m_{p_M}} > 0$$

donde

$$\lambda_{m_{pM}} = \frac{1}{2} \left(\left(\frac{4}{3} \gamma_1 k_1 - \gamma_{12} k_2 - \gamma_{13} (k_3 + M) \right) + \frac{2}{3} \gamma_{12} \right) - \frac{1}{2} \sqrt{\left(\left(\frac{4}{3} \gamma_1 k_1 - \gamma_{12} \left(k_2 + \frac{2}{3} \right) - \gamma_{13} (k_3 - M) \right)^2 + 4 \left(\frac{2}{3} \gamma_1 - \gamma_2 k_2 + \frac{1}{3} \gamma_{12} k_1 \right)^2 \right)} > 0 \quad (\text{G.2})$$

De (5.7)

$$(\gamma_{23} - 4\gamma_3 (k_3 + \rho_3(t, x))) > \frac{2^{\frac{9}{8}} (\gamma_{23} k_2)^{\frac{3}{2}}}{3^{\frac{3}{2}} \lambda_{m_p}^{\frac{1}{2}}}$$

$$(\gamma_{23} - 4\gamma_3 (k_3 + \rho_3(t, x))) > (\gamma_{23} - 4\gamma_3 (k_3 + M)) \quad y$$

$$\frac{2^{\frac{9}{8}} (\gamma_{23} k_2)^{\frac{3}{2}}}{3^{\frac{3}{2}} \lambda_{m_p}^{\frac{1}{2}}} < \frac{2^{\frac{9}{8}} (\gamma_{23} k_2)^{\frac{3}{2}}}{3^{\frac{3}{2}} \lambda_{m_{pM}}^{\frac{1}{2}}} \quad \Rightarrow \quad (\text{G.3})$$

$$(\gamma_{23} - 4\gamma_3 (k_3 + M)) > \frac{2^{\frac{9}{8}} (\gamma_{23} k_2)^{\frac{3}{2}}}{3^{\frac{3}{2}} \lambda_{m_{pM}}^{\frac{1}{2}}}$$

De (5.8)

$$\frac{2}{3} \frac{\gamma_{23} k_2}{(\gamma_{23} - 4\gamma_3 (k_3 + \rho_3(t, x)))} < y < \left(2^{-\frac{1}{4}} 3 \frac{\lambda_{m_p}}{\gamma_{23} k_2} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$(\gamma_{23} - 4\gamma_3 (k_3 + \rho_3(t, x))) > (\gamma_{23} - 4\gamma_3 (k_3 + M)) \quad y$$

$$\left(2^{-\frac{1}{4}} 3 \frac{\lambda_{m_p}}{\gamma_{23} k_2} \right)^{\frac{1}{2}} > \left(2^{-\frac{1}{4}} 3 \frac{\lambda_{m_{pM}}}{\gamma_{23} k_2} \right)^{\frac{1}{2}} \quad \Rightarrow \quad (\text{G.4})$$

$$\frac{2}{3} \frac{\gamma_{23} k_2}{(\gamma_{23} - 4\gamma_3 (k_3 + M))} < y < \left(2^{-\frac{1}{4}} 3 \frac{\lambda_{m_{pM}}}{\gamma_{23} k_2} \right)^{\frac{1}{2}}$$

De (5.11)

$$b_{3p} = \left((\gamma_{23} - 4\gamma_3 (k_3 + \rho_3(t, x))) - \frac{2^2 (|2\gamma_2 - \gamma_{13}| + 2\gamma_{23} (k_3 + \rho_3(t, x)))^3}{3^3 \left(2^{-\frac{1}{4}} \lambda_{m_p} \right)^2} \right) > 0$$

$$(4\gamma_3 (k_3 + \rho_3(t, x))) < (4\gamma_3 (k_3 + M)) \quad y$$

$$\frac{(|2\gamma_2 - \gamma_{13}| + 2\gamma_{23}(k_3 + \rho_3(t, x)))^3}{\left(2^{-\frac{1}{4}} \lambda_{m_p}\right)^2} < \frac{(|2\gamma_2 - \gamma_{13}| + 2\gamma_{23}(k_3 + M))^3}{\left(2^{-\frac{1}{4}} \lambda_{m_{pM}}\right)^2} \Rightarrow$$

$$b_{3_p} > b_{3_{pM}} > 0$$

donde

$$b_{3_{pM}} = \left((\gamma_{23} - 4\gamma_3 (k_3 + M)) - \frac{2^2 (|2\gamma_2 - \gamma_{13}| + 2\gamma_{23} (k_3 + M))^3}{3^3 \left(2^{-\frac{1}{4}} \lambda_{m_{pM}}\right)^2} \right) > 0 \quad (\text{G.5})$$

De (5.10)

$$b_{2_p}^2 (b_{3_p} y - 2b_{2_p}) \left(y^2 - 2^{-\frac{1}{4}} 3 \frac{\lambda_{m_p}}{\gamma_{23} k_2} \right)^2 > b_{0_p} y$$

$$(b_{3_p} y - 2b_{2_p}) > (b_{3_{pM}} y - 2b_{2_p}) \quad y$$

(G.6)

$$\left(y^2 - 2^{-\frac{1}{4}} 3 \frac{\lambda_{m_p}}{\gamma_{23} k_2} \right)^2 < \left(y^2 - 2^{-\frac{1}{4}} 3 \frac{\lambda_{m_{pM}}}{\gamma_{23} k_2} \right)^2 \quad ? \Rightarrow$$

$$b_{2_p}^2 (b_{3_{pM}} y - 2b_{2_p}) \left(y^2 - 2^{-\frac{1}{4}} 3 \frac{\lambda_{m_{pM}}}{\gamma_{23} k_2} \right)^2 > b_{0_p} y$$

De (5.9)

$$(\gamma_{23} - 4\gamma_3 (k_3 + \rho_3(t, x))) > \frac{2^2 (|2\gamma_2 - \gamma_{13}| + 2\gamma_{23} k_3)^3}{3^3 \left(2^{-\frac{1}{4}} \lambda_{m_p}\right)^2}$$

$$(\gamma_{23} - 4\gamma_3 (k_3 + \rho_3(t, x))) > (\gamma_{23} - 4\gamma_3 (k_3 + M)) \quad y$$

$$\frac{2^2 (|2\gamma_2 - \gamma_{13}| + 2\gamma_{23}(k_3 + \rho_3(t, x)))^3}{3^3 \left(2^{-\frac{1}{4}} \lambda_{m_p}\right)^2} < \frac{2^2 (|2\gamma_2 - \gamma_{13}| + 2\gamma_{23}(k_3 + M))^3}{3^3 \left(2^{-\frac{1}{4}} \lambda_{m_{pM}}\right)^2} \Rightarrow \quad (\text{G.7})$$

$$(\gamma_{23} - 4\gamma_3 (k_3 + M)) > \frac{2^2 (|2\gamma_2 - \gamma_{13}| + 2\gamma_{23}(k_3 + M))^3}{3^3 \left(2^{-\frac{1}{4}} \lambda_{m_{pM}}\right)^2}$$

Referencias

- [Bacciotti05] Bacciotti, L., A; Rosier. *Liapunov Functions and Stability in Control Theory*. Springer-Verlag, 2005.
- [Davila05] Davila, L., Jorge; Fridman y Levant, A. Second-Order Sliding- Modes Observer for Mechanical Systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 50(11):1785–1789, 2005.
- [Hardy51] Hardy, J. P., G.H.; Littlewood. *G. Inequalities*. University Press, 1951.
- [Khalil02] Khalil, H. *Nonlinear Systems*. Prentice Hall, 2002.
- [Levant98] Levant, A. Robust exact differentiation via sliding mode technique. *Automatica*, 34(3):379–384, 1998.
- [Levant01] Levant, A. Higher order sliding modes and arbitrary-order exact robust differentiation. *Proceedings of the European Control Conference*, 2001.
- [Moreno11] Moreno, J. A. *Sliding Modes after the first decade of the 21st Century*, cap. Lyapunov Approach for Analysis and Design of Second Order Sliding Mode. preprint Springer-Verlag, 2011.
- [Poznyak08] Poznyak, A. S. *Advanced Mathematical Tools for Automatic Control Engineers*. Elsevier, 2008.