CURSO: "INGENIERIA DE SISTEMAS", que será impartido a personal profesional de la SARH, a través de la CPNH

FECHA: Del 5 al 28 de Junio

DURACION: 40 h

T E M A	PROFESOR	FECHA	HORARIO
Introducción a la Ingeniería de Sistemas Funciones de Producción, Trayectoria de Expansión, Análisis Efectividad-Costo y marginal	Dr. JESUS ACOSTA FLORES	Junio 5	17-21
Formulación de Problemas	ING. RICARDO BAHENA BRITO	Junio 7	17-19
Programación Lineal y Aplicaciones	DR. JAVIER MARQUEZ D	Junio 7	19-21
Programación Dinámica	DR. SERGIO FUENTES MAYA	Junio 9	17-19
PROGRAMACION NO LINEAL Y ENTERA	DR. MIGUEL COBIAN SELA	Junio 9	19-21
Probabilidad	M. en I. AUGUSTO VILLARREAL	Junio 12	17-19
Procesos Estocásticos	DR. OCTAVIO RASCON CHAVEZ	Junio 12	19-21
Simulación	ACT. CARLOS AYALA E IZAGUIRRE	Junio 14	17-19
Modelos Dinámicos de Forrester	ING. JOSE LUIS PATIÑO DONNADIEU	Junio 14	19-21
Simulación y Optimización en la Planeación de un Sistema Hidráulico,	ING. JUAN MANUEL HERRERA CASTRO	Junio 16	17-19
Aplicaciones de Simulación	DR. JESUS ACOSTA FLORES	Junio 16	19-21
Evaluación de Proyectos	M. en I. MARIANO CRUZ G.	Junio 19	17-19

T E M A	PROFESOR	FECHA	HORARIO
Análisis de Inversiones y Aplicaciones	DR. FELIPE OCHOA ROSSO	Junio 19	19-21
Modelos de Inversión a Nivel Nacional por Sectores e Inversión Extranjera	DR. LEONEL CORONA	Junio 21	17-19
Sistemas de Información	M. en I. SERGIO ZUÑIGA	Junio 21	19-21
Computación en la Ingeniería de Sistemas	M. en I. GUSTAVO ARGIL C.	Junio 23	17-19
Aplicaciones de la Ingeniería de Sist.	M. en I. CARLOS VELASCO P.	Junio 23	19-21
Teoría de Decisiones con multiobjetivos	DR. JESUS ACOSTA FLORES	Junio 26	17-19
Aplicaciones de la Ing. de Sistemas	ING. HUMBERTO VALDEZ RUY	Junio 26	19-21
Aplicaciones en la Planeación Hidro-agrícola	DR. SERGIO FUENTES MAYA	Junio 28	17-19
Aplicación de la Programación dinámica para la operación conjunta de una presa y un acuífero	ING. FERNANDO RUEDA LUJANO	Junio 28	19-21

'mrs

DIRECTORIO DE PROFESORES DEL CURSO INGENIERIA DE SISTEMAS

DR. JESUS ACOSTA FLORES
Asesor del C. Director de la
Dirección General de Ingeniería de Sistemas
SAHOP
Av. Universidad s/n frente a Mitla
México 12, D.F.
590=30=85

M. en I. GUSTAVO ARGIL CARRILES
Jede Depto. Sistemas de Computación
SAHOP
Av. Universidad s/n frente a Mitla
México 12, D.F.
590-30-63

ACT. CARLOS AYALA E IZAGUIRRE
Jefe Ofna. de Programas Especiales
Dpto. Modelos de Decisión
SAHOP
Av. Universidad s/n frente a Mitla
México 12, D.F.
590-64-82

ING. RICARDO BAHENA BRITO
Jefe Ofna. Investigación de Operaciones
Dir. Gral. Ingeniería de Sistemas
SAHOP
Av. Universidad s/n frente a Mitla
México 12, D.F.
590-21-22

DR. JOSE MIGUEL COBIAN SELA
Director Cobián y Asociados, S. A.
Campeche # 289-4° Piso
México 11, D.F.
574-51-48 y 59-51

DR. LEONEL CORONA TREVIÑO
Investigador
Departamento del Doctorado
Facultad de Economía
UNAM
México 20, D.F.
548-73-81

M. en I. MARIANO CRUZ G
Jefe del Centro de Computo Periferico de Naucalpan
Palacio Municipal
Municipio de Naucalpan
373-23-17

DR. SERGIO FUENTES MAYA
Jefe de Sección de Investigación de Operaciones
DESFI, UNAM
México 20, D.F.
548-58-77 550-52-15 ext. 4495

ING. JUAN MANUEL HERRERA CASTO
Analista de Sistemas
Dir. Gral. de Ingeniería de Sistemas
SAHOP
Av. Universidad s/n frente a Mitla
México 12, D.F.
590-21-22

DR. JAVIER MARQUEZ DIEZ CANEDO
Subgerente de Investigación y Desarrollo
Banco de México
Condesa # 5-4° Piso Ed. del Correo
518-05-00 ext. 215

DR. FELIPE OCHOA ROSSO
Director General
Ochoa Rosso y Asociados, S.C.
Av. Revolución # 1909-7° Piso
México 20, D.F.
548-92-11

ING. JOSE LUIS PATIÑO DONNADIEU
Jefe Ofna. Sistemas Integrales
Dir. Gral. Ingeniería de Sistemas
SAHOP
Av. Universidad s/n frente a Mitla
México 12, D.F.
590-31-30

DR. OCTAVIO RASCON CHAVEZ
Profesor Investigador
Facultad de Ingeniería, UNAM
550-18-24

ING. HUMBERTO VALDES RUY SANCHEZ
JEFE DEPTO. MODELOS DE DECISION
Dir. Gral. de Ingeniería de Sistemas
SAHOP
Av. Universidad s/n frente a Mitla
México 12, D. F.
590-31-96

M. en I. CARLOS VELASCO PICAZO
Jefe Depto. Sistemas
División Ciencias Básicas e Ingeniería
UAM
Av. Sn Pablo s/n
Atzcapotzalco
561-37-33 ext. 215

M. en I. AUGUSTO VILLARREAL
Srio. Académico
DESFI, UNAM
Ciudad Universitaria
México 20, D.F.
548-09-50

M.en I. SERGIO ZUÑIGA BARRERA
Director
Instituto Mexicano de Planeación y Operación de Sistemas
Insurgentes Sur # 586-402
México 12, D.F.
523-49-35 539-91-19

ING. FERNANDO RUEDA LUJANO
Jefe de Proyecto de la
Dirección Zona Centro
Comisión del Plan Nacional Hidráulico
Tépic # 40-1° Piso
Tel. 574-49-43

EVALUACION DE LA ENSEÑANZA

CURSO: INGENIERIA DE SISTEMAS FECHA: 5 al 26 de Junio PROFESOR Y/O TEMA	DOMINIO DEL TEMA	EFICIENCIA EN EL USO DE AYUDAS AUDIOVISUALES	MANT. DEL INTERES (AMENIDAD, FACILIDAD DE EXPRESION, COMUNICACION CON LOS ASISTENTES)	PUNTUALIDAD
DR. JESUS ACOSTA FLORES				
M. en I. GUSTAVO ARGIL CARRILES				
ACT. CARLOS AYALA E IZAGUIRRE				
ING. RICARDO BAHENA BRITO				
DR. JOSE MIGUEL COBIAN SELA				
DR. LEONEL CORONA TREVIÑO				
M. en I: MARIANO CRUZ G.				
DR. SERGIO FUENTES MAYA				
ING. JUAN MANUEL HERRERA CASTRO				
DR. JAVIER MARQUEZ DIEZ CANEDO				
ESCALA DE EVALUACION DEL 1 AL 10				

EVALUACION DE LA ENSEÑANZA

CURSO: INGENIERIA DE SISTEMAS

FECHA: 5 al 26 de Junio

PROFESOR Y/O TEMA	DOMINIO DEL TEMA	EFICIENCIA EN EL USO DE AYUDAS AUDIOVISUALES	MANT. DEL INTERES (AMENIDAD, FACILIDAD DE EXPRESION, COMUNICACION CON LOS ASISTENTES)	PUNTUALIDAD
DR. FELIPE OCHOA ROSSO				
ING. JOSE LUIS PATIÑO DONNADIEU				
DR. OCTAVIO RASCON CHAVEZ				
ING. FERNANDO RUEDA LUJANO				
ING. HUMBERTO VALDES RUY SANCHEZ				
M. en I. CARLOS VELASCO PICAZO				
M. en I. AUGUSTO VILLARREAL				
M. en I. SERGIO ZUÑIGA BARRERA				

ESCALA DE EVALUACION DEL 1 AL 10

EVALUACION DEL CURSO

	CONCEPTO	EVALUACION
1.	APLICACION INMEDIATA DE LOS CONCEPTOS EXPUESTOS	
2.	CLARIDAD CON QUE SE EXPUSIERON LOS TEMAS	
3.	GRADO DE ACTUALIZACION LOGRADO CON EL CURSO	
4.	CUMPLIMIEN TO DE LOS OBJETIVOS DEL CURSO	
5.	CONTINUIDAD EN LOS TEMAS DEL CURSO	
6.	CALIDAD DE LAS NOTAS DEL CURSO	
7.	GRADO DE MOTIVACION LOGRADO CON EL CURSO	

ESCALA DE EVALUACION DE 1 A 10

1. ¿Qué le pareció el ambiente del Centro de Educación Continua?

Muy agradable ☐ Agradable ☐ Desagradable ☐

2. Medio de comunicación por el que se enteró del curso:

Periódico Excélsior ☐ Periódico Novedades ☐ Folleto del Curso ☐

Cartel mensual ☐ Radio Universidad ☐ Comunicación carta, teléfono, verbal, etc. ☐

3. Medio de transporte utilizado para venir al Palacio de Minería:

Automóvil particular ☐ Metro ☐ Otro medio ☐

4. ¿Qué cambios haría usted en el programa para tratar de perfeccionar el curso? ____________________

____

____

5. ¿Recomendaría el curso a otras personas? Si ☐ No ☐

6. ¿Qué curso le gustaría que ofreciera el Centro de Educación Continua? ____________________

____

____

7. ¿Qué servicios desearía que tuviese el CEC para los asistentes a cursos? ____________________

____

____

8. Otras sugestiones: ____________________

____

____

centro de educación continua
división de estudios superiores
facultad de ingeniería, unam

INGENIERIA DE SISTEMAS

ABASTECIMIENTO DE AGUA POTABLE PARA LA CIUDAD DE NUEVA YORK

DR. JESUS ACOSTA FLORES

JUNIO, 1978

FORMULACION DEL PROBLEMA

Una agencia municipal desarrolló una propuesta que costaría alrededor de un billón de dólares.

Los encargados del presupuesto, sugirieron que el plan era extravagante y no se necesitaban adiciones al sistema. Que la población no iba a tener un 25% de aumento.

La agencia replicó que ese crecimiento era en 40 años.

Empezó la batalla y se llamó al grupo de sistemas del Instituto Tecnológico de Massachusetts.

La agencia municipal basaba la necesidad de nuevas instalaciones en:

1. La población crecería uniformemente en los 40 años siguientes.

2. Las instalaciones existentes requerirían una rehabilitación costosa.

Su responsabilidad era suplir el agua, no distribuirla.

El diseño preliminar de la agencia municipal consistía en 50 millas de tuneles con un diámetro aproximado de 28 pies. Se construiría en cinco etapas la primera de las cuales costaría 333 millones.

El diseño estaba basado en:

1. Solo una configuración geométrica se consideró extensivamente como localización posible.

2. El horizonte de diseño fué de 40 años; esto es las instalaciones iban a satisfacer las condiciones anticipadas del año 2010.

3. El agua pasaría por la red impulsada solamente por la gravedad.

Las autoridades del presupuesto podrían demorar la aprobación del proyecto de la agencia municipal. Pero ni los Ingenieros de Sistemas ni las autoridades del presupuesto podrían substituir un esquema diferente sin el consentimiento de la agencia municipal.

Enfoque de Sistemas

1. Definición de objetivos

2. Especificación de medidas de efectividad

3. Generación de alternativas

4. Evaluación de las alternativas

5. Selección

Definición de Objetivos.

1. Funcionamiento del sistema

2. Distribución del servicio en el área municipal

3. Confiabilidad del servicio

4. Costo total de construcción y operación.

Medidas de Efectividad.

Un funcionamiento total = $p_i \ q_i / \ q_i$ donde p_i es la presión en varios puntos clave de la red de abastecimiento; q_i agua demandada en cada uno de estos nudos.

La medida utilizada para la distribución del servicio - fué el funcionamiento en el extremo final de la red de abastecimiento donde éste sería más bajo.

La confiabilidad del servicio se midió por un índice que representaría si el funcionamiento degradaría catastrófica o gradualmente.

El costo total se expresó en valor presente de 1970 - utilizando una tasa de descuento del 5% anual.

Generación de Alternativas.

Se dedicó mucho tiempo a la determinación de las clases de alternativas para el diseño de adiciones al sistema de abastecimiento de agua. Se llegó a las tres clases siguientes:

1. Configuración física de las instalaciones (ruta de los tuneles, su longitud, ancho y tipo de construcción).

2. Desfasar en el tiempo la instalación de capacidad, explorando cual horizonte de diseño es el más económico.

3. Utilización de bombas en lugar de tuneles.

EVALUACION DE ALTERNATIVAS

El vehículo principal para la evaluación de las alternativas en función de los diversos objetivos fué un modelo de computadora. Se tuvo disponible el ICES (Sistema Integrado de Ingeniería Civil) desarrollado por el laboratorio de sistemas de Ingeniería Civil del M. I. T. para representar redes y calcular flujos y presiones en los puntos deseados. La evaluación se condujo en función de un análisis efectividad-costo.

IMPLANTACION

El diseño final para la primera etapa del tercer túnel de la Ciudad, que se implantó fué con las características siguientes:

1. Se localizó con el mismo plano y elevación que el diseño preliminar.
2. Se diseñó sin bombeo como fué el diseño original.
3. Su tamaño se redujo a tres quintas partes. Como un resultado de este cambio el costo de la primera etapa se redujo de 323 millones a 223 con un ahorro de alrededor de los 100 millones.

La reducción significante en el costo fué razón suficiente para justificar el estudio de Ingeniería de Sistemas el cual costó solamente 50 mil.

centro de educación continua
división de estudios superiores
facultad de ingeniería, unam

INGENIERIA DE SISTEMAS

FUNCIONES DE PRODUCCION, TRAYECTORIA DE EXPANSION, ANALISIS EFECTIVIDAD-COSTO Y MARGINAL

DR. JESUS ACOSTA FLORES

JUNIO, 1978

Palacio de Minería Calle de Tacuba 5, primer piso. México 1, D. F.

El diseño de un sistema representa una decisión sobre cómo transformar los recursos en productos. Por ejemplo cómo transformar la mano de obra, la tierra y los materiales en unidades habitacionales. Al considerar un diseño, el ingeniero de sistemas deberá considerar tres factores principales:

1. La mecánica del proceso de transformación
2. El valor de los recursos
3. El valor de los productos

En general, el diseñador puede asignar los recursos solo al través de la selección del proceso de transformación, ya que difícilmente podrá afectar el valor de los recursos o de los productos.

El problema de asignación de recursos puede describirse matemáticamente por tres funciones asociadas con cada uno de los factores de diseño, el proceso físico de producción, el costo de los recursos y el valor de los productos. La función de producción describe el producto máximo que puede obtenerse de cualquier conjunto de recursos. La función de costo de los recursos, usualmente está defenida por el mercado económico para estos recursos. La función de valuación del producto está determinada o por un mercado o por un proceso político.

FUNCION DE PRODUCCION.

La función de producción es la descripción matemática del producto máximo que puede obtenerse de cualquier conjunto dado de recursos $(X_1, \ldots X_n)$:

Función de producción : $Z = g(X_1, \ldots , X_n)$

El dinero y el valor no son parte del modelo: Z se expresa en unidades de producción y las X_j representan recursos físicos. (no monetarios).

CARACTERISTICAS DE LA FUNCION DE PRODUCCION.

Se examinarán sus características en detalle: primero, su tasa de cambio con respecto a cambios en la cantidad utilizada de un recurso; segundo, su tasa de cambio con respecto a cambios proporcionalmente iguales en todos los recursos; y finalmente si la función de producción tiene un solo óptimo. (región convexa)

Rendimientos marginales decrecientes. El carácter de la función de producción en un punto se describe por la tasa de cambio del producto cuando se suman o se restan unidades de los recursos individuales. Esta tasa de cambio se conoce como el producto marginal MP_j con respecto a cada insumo X_j.

$$MP_j = \partial Z/\partial X_j \qquad \text{o} \qquad MP_j = \Delta Z/\Delta X_j$$

La función de producción consiste en general de dos partes: una donde MP_j aumenta cuando X_j aumenta y la otra donde MP_j disminuye cuando X_j aumenta. En esta segunda parte los rendimientos marginales son decrecientes. Esta característica es importante porque garantiza que la función de producción acota una región convexa y por tanto tiene un solo óptimo.

Rendimientos a escala. Otra forma para describir una función de producción es al través de su tasa de cambio cuando se modifican todos los insumos proporcionalmente. Esta tasa de cambio se conoce como rendimiento de escala.

Rendimiento de escala : $Z = g((1 + \;)X_1,\ldots,(1 + \;)X_n) - g(X_1,\ldots, X_n)$

La forma general de la función de producción puede volverse a escribir. $\lambda^k Z = g(\lambda X_1,\lambda X_2,\ldots,\lambda X_n) = \lambda^k g(X_1,X_2,\ldots,X_n)$

Rendimientos de escala pueden ser crecientes, decrecientes o constantes dependiendo si la tasa de cambio en el producto es mayor, menor o i-- gual que la tasa de cambio de los insumos, esto es, si el factor K es mayor, menor o igual a 1.

Se han observado economías de escala en la construcción de túneles, gasoductos, plantas de tratamiento de agua, en la generación de energía eléctrica.

Regiones factibles convexas. Una región es convexa si al unir dos puntos cualesquiera de la región por una línea recta, ninguna porción de la recta está fuera de la región.

La función de producción acota una región convexa de combinaciones factibles de insumos y producto si se tienen rendimientos decrecientes y no existen rendimientos crecientes de escala.

ISOCUANTAS. Después de examinar las propiedades de la función de producción ahora se consideran sus implicaciones para el diseño. El punto más importante es que, en general, no existe un solo diseño óptimo sobre la base exclusivamente de razones técnicas o físicas. Un diseño óptimo puede determinarse solo al través de la consideración conjunta de muchas consideraciones técnicamente eficientes del sistema y de los valores relativos de los recursos y del producto. La intercesión de estos dos factores, mecánicos y económicos determina un diseño óptimo.

De la definición de función de producción se ve que un nivel de producción Z* puede obtenerse con diferentes combinaciones de los recursos. Cada una de estas combinaciones por pertenecer a la función de producción es técnicamente eficiente. Este concepto es básico en Ingeniería de Sistemas porque provee la motivación de buscar entre muchos diseños alternativos la mejor solución posible.

Una isocuanta es el lugar geométrico de todas las combinaciones tecnicamente eficientes de recursos para un nivel dado de producción.

A fin de determinar el diseño óptimo es necesario examinar la naturaleza de la isocuanta. Su tasa de cambio en cualquier punto se conoce como la tasa marginal de substitución (MRS). La tasa marginal de substitución puede determinarse formulando la expresión para el cambio incremental en producto en cualquier punto.

$$Z = \sum_j \frac{\partial Z}{\partial X_j} \partial X_j = \sum_j MP_j \partial X_j \qquad j = 1 \rightarrow n$$

Donde MP_j es el producto marginal para un solo recurso. Por definición $\partial Z = 0$ en la isocuanta y todas las $\partial X = 0$ excepto ∂X_i y ∂X_j. Por consiguiente

$$Z = MP_i \partial X_i + MP_j \partial X_j = 0$$

Luego la tasa marginal de substitución es

$$MRS = \frac{\partial X_i}{\partial X_j} = - \frac{MP_j}{MP_i}$$

OPTIMIZACION POR ANALISIS MARGINAL.

Hasta este punto se ha discutido exclusivamente el modelo del sistema físico. Para definir la asignación óptima es necesario considerar los modelos de valor de los recursos y del producto.

El proceso de transformación de recurso total puede representarse matemáticamente:

1. Para el proceso físico:

$X = (X_1, \ldots, X_n)$ = Cantidad de recursos.

Z = Cantidad del producto.

g = Función de producción, $Z = g\,(X)$

2. Para los modelos de valor:

$h\,(X)$ = Costo de los recursos.

$V\,(Z)$ = Valor del producto.

$= V\,(Z) - h\,(X)$ = Valor neto de transformar los recursos X en el producto Z.

El problema puede representarse como uno de optimización:

Maximizar: $= V(Z) - h\,(X)$.

Sujeto a la restricción: $Z \leq g\,(X)$.

Esta formulación puede resolverse explícitamente cuando el valor del producto y el costo de los recursos tienen las mismas unidades. - Si no es así entonces deben resolverse uno de los dos problemas siguientes:

Problema 1.

Minimizar el costo total produciendo una cantidad fija.

Problema 2.

Maximizar la producción sujeta a un presupuesto fijo o a recursos limitados.

Los proyectos pequeños usualmente son del primer caso. La inversión en gran escala se enfoca como problemas de la segunda.

Análisis Marginal. El análisis marginal es un proceso de optimización que busca iterativamente el óptimo mejorando la solución existente en la dirección de la mejora más grande.

La aplicación del análisis marginal puede verse como un proceso de dos etapas. El primer paso, optimizar para un nivel dado de producción no requiere ningún conocimiento del valor del producto. El segundo paso es seleccionar el nivel más deseable de producción.

Criterio de Optimalidad. El criterio de optimalidad es la relación matemática que prevalecerá entre la función de la producción y el costo de los recursos en el punto óptimo. El criterio es que el producto marginal por unidad de costo de cada recurso debe ser igual para todos los recursos.

Ruta de Expansión y Función Efectividad-Costo. La ruta de expansión, es el lugar geométrico de todos los puntos óptimos para el rango completo de niveles de producción. Cada uno de estos puntos tiene un nivel de producción y un costo. Cuando se grafican los puntos anteriores se conoce como Curva de Efectividad-Costo.

centro de educación continua
división de estudios superiores
facultad de ingeniería, unam

INGENIERIA DE SISTEMAS

INTRODUCCION A LA INGENIERIA DE SISTEMAS

DR. JESUS ACOSTA FLORES

JUNIO, 1978

INGENIERIA DE SISTEMAS.

1.- INTRODUCCION.

Comenzaremos recordando la anécdota de los cinco ciegos que no sabían cómo era un elefante, a quienes se les pidió que hiciesen una descripción de él y se les colocó para que por medio del tacto lo conocieran. Sin embargo, cada uno de ellos examinó partes diferentes, luego se enfrascaron en discusiones sobre cómo era un elefante. Un observador con una visión de conjunto, posiblemente tuvo una sonrisa al analizar estas discusiones acaloradas. Este es un símil que puede aplicarse en Sistemas. Muestra una de las características del enfoque de sistemas, la visión integral.

Churchman nos relata la historia de dos gerentes de una gran compañía quienes asistieron a un curso de Investigación de Operaciones.Durante el curso se les habló de una técnica matemática para estudiar problemas de transporte. El instructor le explicó a sus estudiantes que si tenían diversos productos en varias fábricas que deberían distribuirse a varios almacenes, entonces existía una técnica precisa y explícita que les diría cómo minimizar el costo del transporte. Esta técnica especifica exactamente cuánto deberá enviarse de cada fábrica a cada almacén. Para aplicar esta técnica , se requieren únicamente estimaciones de los costos de transporte de las fábricas a los almacenes.

Cuando los gerentes regresaron a su empresa , estaban tan incentivados por su curso que pidieron a uno de sus matemáticos que abordara el problema. La organización recolectó la información de costos necesaria y el matemático elaboró un modelo , utilizando una computadora para su solución. Se sintieron desanimados porque el ahorro que se logró con esta técnica matemática nueva fue muy reducido. Los gerentes esperaban un ahorro mucho mayor, porque, aunque los matemáticos cobran barato, las computadoras no, y el costo total de cómputo fue mayor que el ahorro obtenido.

Ya que las computadoras no pueden equivocarse debe haber sido el matemático quien estuvo mal. De esta manera los gerentes contrataron a unos consultores para que detectaran los errores de su matemático. Verificaron sus cálculos y reportaron esencialmente el mismo ahorro. Pero, mientras esperaban por sus resultados comenzaron a investigar la política de producción en cada una de las fábricas y los problemas para transportar los materiales a ellas. También hicieron preguntas sobre por qué un cierto almacén necesitaba ciertos productos. En otras palabras, comenzaron a ampliar su visión del sistema y a argüir que el sistema total consistía en materiales que iban a las fábricas, productos de las fábricas a los almacenes, de los almacenes a ciertos distribuidores y de ahí a los clientes. Cuando se analizó este sistema en conjunto fue evidente que las políticas actuales de inventarios eran irracionales en función de la operación total: ciertos almacenes no deberían recibir los artículos que les llegaban , mientras que otros sí.

Con estas nuevas recomendaciones fue posible generar un ahorro para el sistema total del orden de los cien millones de pesos aunque, algo curioso, el costo de transporte de las fábricas a los almacenes aumentó.

En este ejemplo se mostró además de la visión integral el hecho que la optimización de una parte no necesariamente en la solución óptima del todo.

Es conveniente ver primero qué entendemos por un sistema antes de discutir la Ingeniería de Sistemas.

2.- SISTEMA.

Puede decirse que un sistema es un conjunto de partes coordinadas para lograr una serie de metas. Cuando se piensa en un sistema se deben tener en mente las cinco consideraciones básicas siguientes:

i) Los objetivos del sistema y sus medidas de efectividad.

ii) El ámbito del sistema.

iii) Los recursos del sistema.

iv) Los componentes del sistema.

v) La administración.

Se muestran cada una de ellas en el contexto de un ejemplo. Considere el sistema que tiene a su cargo el capitán de un barco. El tiene la responsabilidad que el barco llegue a su destino dentro del tiempo prescrito que tiene programado. Este es su objetivo. La medida de efectividad el número de días que dure el viaje.

El ámbito está constituído por todo aquello que afecta al sistema pero donde éste no tiene ningún control. Para este ejemplo el ámbito es el conjunto de condiciones externas al barco: el clima, la dirección en que sopla el viento, las olas, etc y las características de funcionamiento de la maquinaria y del personal. (Estas características de funcionamiento se consideran porque en cualquier viaje están fijos).

Los recursos del barco son su tripulación y su maquinaria. (Aquí se debe pensar no solo en los recursos existentes sino también en la forma en que éstos pueden incrementarse , investigación y desarrollo en el caso de equipo, educación y entrenamiento para el personal, actividades políticas que puedan incrementar el presupuesto y la inversión potencial).

Los componentes son la misión de máquinas, la de mantenimiento, la de alimentación, etc.

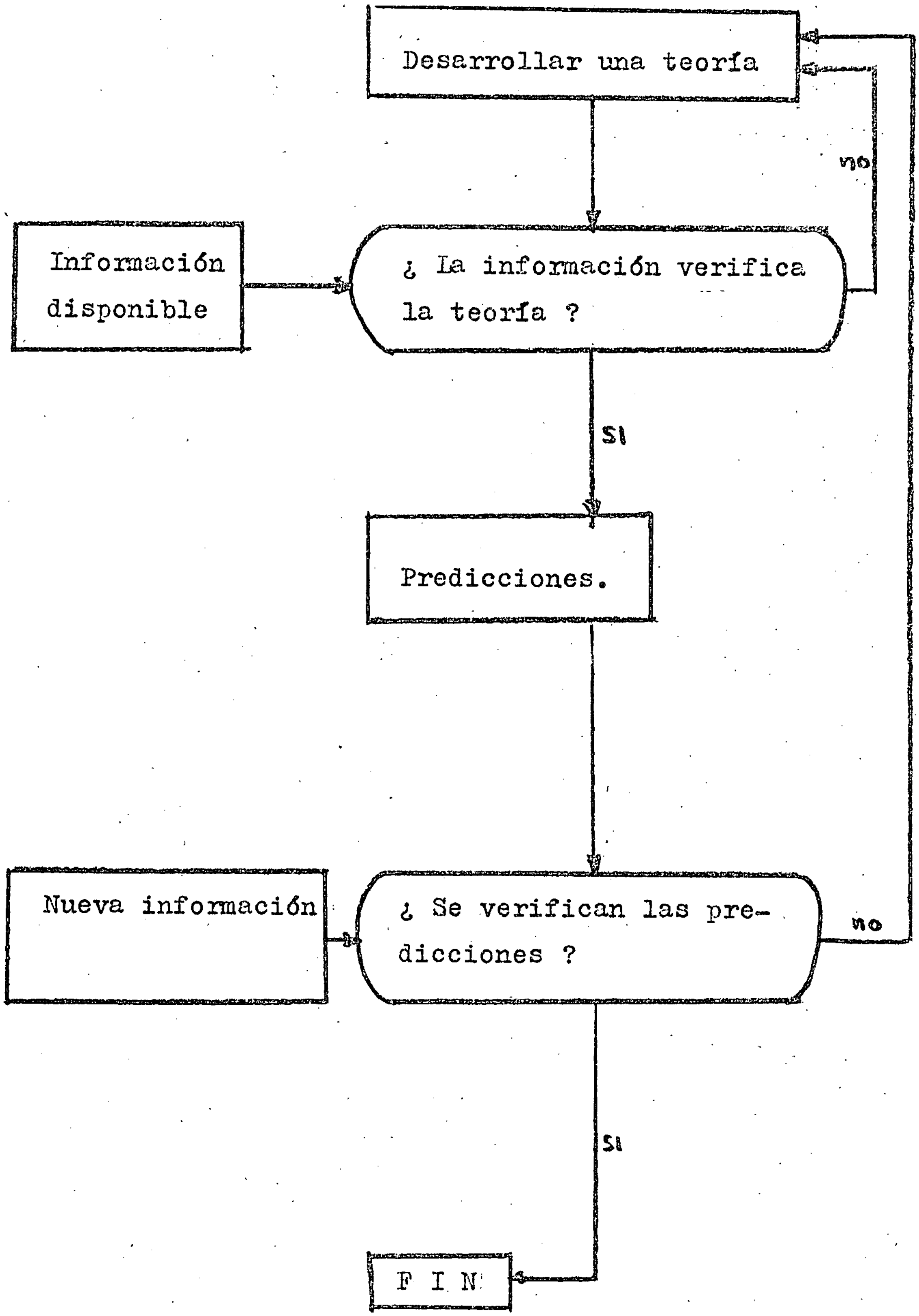
La administración tiene que considerar la generación de los planes para el sistema, es decir, tomar en cuenta todo lo que se ha discutido, los objetivos, el ámbito, la utilización de recursos, y los componentes. La administración establece las metas, localiza los recursos y controla el funcionamiento del sistema. No solo la administración genera los planes, sino que debe estar segura que estos se implanten según sus ideas originales. Si no es así, debe determinar el por qué. A esta actividad a menudo se le llama "control". Sin embargo, el control aquí no solo implica el examen de si los planes se están llevando correctamente ; también implica una evaluación de los planes y consecuentemente un cambio de ellos. Uno de los aspectos críticos de la administración de sistemas es la planeación para el cambio de planes, porque nadie puede pretender que ha establecido los objetivos, o definido el ámbito, los recursos y los componentes de una manera absolutamente correcta. Por consiguiente, la parte administrativa del sistema debe recibir información que le diga cuándo su concepto del sistema es erróneo e incluír pasos que provean su cambio.

El capitán del barco como administrador genera los planes para las operaciones del barco y debe estar seguro que se implanten estos planes. Instituye diversas clases de sistemas de información al través del barco que le indiquen dónde ha ocurrido alguna desviación del plan, siendo su trabajo determinar por qué ha acontecido esta desviación, evalúa el funcionamiento del navío y finalmente si es necesario cambia su plan si la información le indica que ésto es lo aconsejable.

3.- INGENIERIA DE SISTEMAS.

La Ingeniería de Sistemas consiste en la aplicación del método científico en la asignación de los recursos de un sistema para el logro de sus objetivos.

El método científico está descrito en el diagrama siguiente:


Desarrollar una teoría
Información disponible
¿ La información verifica la teoría ?
no
SI
Predicciones.
Nueva información
¿ Se verifican las pre- dicciones ?
no
SI
F I N

Ahora bien, la Ingeniería de Sistemas consiste en seis pasos fundamentales:

i) Determinación de los objetivos del sistema y sus medidas de efectividad.

ii) Identificación del sistema, su ámbito, sus recursos y sus componentes.

iii) En caso que ya exista el sistema bajo estudio se deberán determinar las causas de los síntomas de sus problemas. Si el sistema aún no ha sido implantado tendrá que posponerse este paso.

iv) Generación y evaluación de alternativas

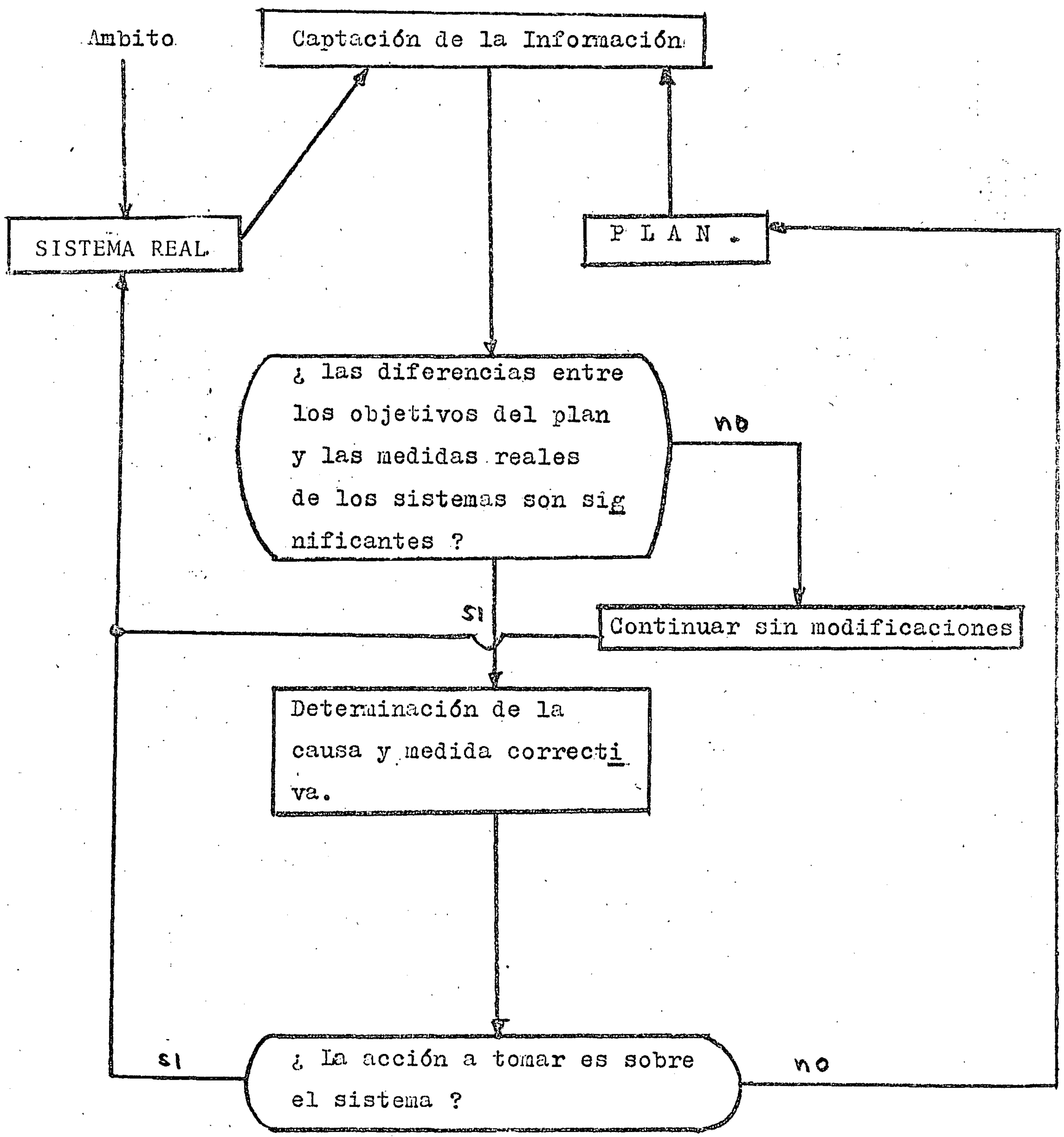
v) Selección

vi) Implantación y control.

Para cada uno de estos pasos, exceptuando el i), existe una serie de técnicas específicas, cuyos nombres se presentan en seguida :

PASO	TECNICAS.
ii)	Funciones de Producción, modelos econométricos,
iii)	Modelos de simulación
iv)	Técnicas de optimización como análisis marginal, programación lineal, no lineal, dinámica, entera, geométrica, etc.
v)	Teoría de decisiones
vi)	Sistemas de información, estadística, etc.

Para finalizar se exhibirá un diagrama de flujo de un mecanismo de control


Ambito
Captación de la Información
SISTEMA REAL
P L A N .
¿ las diferencias entre los objetivos del plan y las medidas reales de los sistemas son significantes ?
no
si
Continuar sin modificaciones
Determinación de la causa y medida correctiva.
si
¿ La acción a tomar es sobre el sistema ?
no

centro de educación continua
división de estudios superiores
facultad de ingeniería, unam

INGENIERIA DE SISTEMAS

EVALUACION DE PROYECTOS

M. en I. MARIANO CRUZ GONZALEZ

JUNIO, 1978

EVALUACION DE PROYECTOS.

1.- INTRODUCCION.

2.- COMPARACION DE BENEFICIOS Y COSTOS A TRAVES DEL TIEMPO.

   2.1.- FORMULAS DE DESCUENTO.

   2.2.- VALOR PRESENTE Y COSTOS ANUALES.

   2.3.- IMPLICACIONES DE TASAS DE DESCUENTO DIFERENTES Y VIDA DEL PROYECTO.

3.- SELECCION DE LA TASA DE DESCUENTO.

   3.1.- LIMITE INFERIOR: TASA DE INTERES LIBRE DE RIESGO.

   3.2.- TASA DE DESCUENTO SOCIAL.

   3.3.- TRATAMIENTO DEL RIESGO.

4.- CRITERIOS DE EVALUACION.

   4.1.- BENEFICIOS-COSTOS.

   4.2.- TASA INTERNA DE RETORNO.

   4.3.- VALOR PRESENTE NETO.

5.- CONCLUSIONES.

1.- INTRODUCCION.

LA EVALUACION DE PROYECTOS, ESTABLECE LOS METODOS NECESARIOS PARA EVALUAR Y COMPARAR PROYECTOS INDIVIDUALES. ESTE ANALISIS ES NECESARIO YA QUE LOS FLUJOS DE BENEFICIOS Y COSTOS QUE RESULTARAN EN TIEMPOS DIFERENTES DE CADA PROYECTO NO SON DIRECTAMENTE MEDIBLES, AUN CUANDO SEAN ELLOS MEDIDOS EN LAS MISMAS UNIDADES MONETARIAS. ES EVIDENTE QUE EL DINERO PAGADO O RECIBIDO AHORA VALE MAS QUE EL PAGADO O RECIBIDO MAS TARDE.

2.- COMPARACION DE BENEFICIOS Y COSTOS A TRAVES DEL TIEMPO.

EL COSTO DE OPORTUNIDAD DEL DINERO SOBRE EL TIEMPO ES EL COSTO, - AL MARGEN, DE NO TENER UNA CANTIDAD EXTRA DISPONIBLE.

LA TASA DE INTERES DEL DINERO, LA CUAL ES MUCHAS VECES IDEA DE -- COMO ES EL VALOR TEMPORAL REAL DEL DINERO, ES ACTUALMENTE UNA -- IDEA DISTINTA. ESTA ES LA TASA DE RETORNO QUE ES GENERALMENTE PAGADA EN LOS MERCADOS MONETARIOS.

ESTA PUEDE SER LA TASA QUE LOS BANCOS PAGAN A SUS DEPOSITARIOS O- CARGAN A SUS PRESTADORES, O QUE ES PAGADA A LOS TENEDORES DE - - ACCIONES. LA TASA DE INTERES PUEDE ALGUNAS VECES SER IGUAL AL -- COSTO DE OPORTUNIDAD PARA UN GRUPO DE DECISORES, PERO SI ESTE -- GRUPO SE ENFRENTA CON VARIAS ALTERNATIVAS, LA TASA DE INTERES NO- ES GENERALMENTE EL COSTO DE OPORTUNIDAD DEL CAPITAL.

LA TASA DE DESCUENTO ES EL VALOR TEMPORAL QUE ES ASIGNADO AL DINERO PARA PROPOSITOS DE COMPARACION.

PARA NUESTRO PROPOSITO LA TASA DE DESCUENTO DEBERA SER SIMPLEMENTE LA TASA QUE ENTRA EN LAS FORMULAS.

2.1.- FORMULAS DE DESCUENTO.

MEDIDAS DE COMPARACION DEL DINERO AL CORRER EL TIEMPO SON OBTENIDAS A TRAVES DE LA APLICACION DE UNA DE CUATRO FORMULAS BASICAS. CADA UNA DE ELLAS DESARROLLA UNA FORMA DIFERENTE DEL MISMO PROCEDIMIENTO PARA DESCONTAR EL VALOR DE INGRESOS FUTUROS (POSITIVOS - O NEGATIVOS) CON RESPECTO AL PRESENTE.

LAS FORMULAS APLICADAS PARA TODAS LAS TASAS DE COSTOS DE OPORTUNIDAD Y DE INTERES, PUEDEN SER APLICADAS PARA EVALUACION DE PROYECTOS Y CALCULO DE CARGOS POR FINANCIAMIENTO.

SE ASUME PARA LAS FORMULAS DE DESCUENTO QUE LA TASA DE DESCUENTO- ES CONSTANTE SOBRE EL PERIODO QUE HA SIDO CONSIDERADO. DEBIDO A - QUE LA DETERMINACION DEL COSTO DE OPORTUNIDAD APROPIADO DEL DINERO ES UNA MATERIA DE OPINIONES EN CADA CASO, SUPONER QUE EL VALOR TEMPORAL DEL DINERO ES VARIABLE ES UN REFINAMIENTO INJUSTIFICADO. DIFICULTADES EN LA APLICACION DE LAS FORMULAS PUEDEN SURGIR SIN - EMBARGO, CUANDO AL CORRER EL TIEMPO LOS INGRESOS Y GASTOS ESTAN - SUJETOS A IMPUESTOS O SUBSIDIOS.

NOTACION PARA LAS FORMULAS DE DESCUENTO.

r = TASA DE DESCUENTO (%) POR PERIODO SOBRE N PERIODOS GENERALMENTE AÑOS, LOS CUALES CONSTITUYEN LA VIDA DEL PROYECTO.

P = VALOR PRESENTE DE INGRESOS FUTUROS (POSITIVOS O NEGATIVOS), - Ó LA SUMA DE DINERO AHORA EN MANO.

S = VALOR FUTURO. SUMA DEL DINERO QUE SERA OBTENIDO AL INVERTIR - AL r % EN N PERIODOS.

N = NUMERO DE PERIODOS EN LA VIDA DEL PROYECTO.

EN FIGURA 1 PODEMOS VER Y COMPARAR SUMAS DE DINERO QUE EXISTEN EN DISTINTOS TIEMPOS.

$$S = P(1+r)^N \tag{1}$$

$F = (1+r)^N$ FACTOR DE INTERESES COMPUESTO F ES UNA EXTENSION -- DIRECTA DE LA DEFINICION DE r, COMO LA TASA A LA CUAL EL DINERO CRECE.

DE LA ECUACION (1) PODEMOS OBTENER EL VALOR PRESENTE P DE - UN COSTO FUTURO O BENEFICIO S :

$$P = S\left(\frac{1}{F}\right) \tag{2}$$

$\frac{1}{F} = (1+r)^{-N}$ FACTOR DE VALOR PRESENTE.

COMPARACIONES PARA SUMAS RECIBIDAS O GASTADAS IGUALMENTE SOBRE VARIOS PERIODOS PUEDEN SER OBTENIDAS COMO SIGUE:

EL VALOR ACUMULADO (S) AL FINAL DE (N) PERIODOS DE PAGOS IGUALES (R) RECIBIDOS AL FINAL DE CADA PERIODO ES :

$$S = \sum_j R(1+r)^j = R\left[\sum_j (1+r)^j\right]$$

APLICANDO LA LEY DE LA SUMA DE UNA PROGRESION GEOMETRICA

$$S = R\frac{(1+r)^N-1}{r} = R\frac{F-1}{r} = \frac{RF}{crf} \qquad (3)$$

$crf = \frac{rF}{F-1}$ FACTOR DE RECUPERACION DEL CAPITAL

DE LA ECUACION (3) PODEMOS INFERIR QUE EL VALOR PRESENTE DE UN FLUJO CONSTANTE DE PAGOS IGUALES SOBR E VARIOS PERIODOS ES:

$$P = \frac{S}{F} = \frac{R}{crf} \qquad (4)$$

SIENDO TAMBIEN ESCRITO

$$R = P\,(crf)$$

EL FACTOR DE RECUPERACION DEL CAPITAL REPRESENTA LA PROPORCION DE UNA INVERSION INICIAL QUE DEBE SER RECUPERADA COMO BENEFICIO EN CADA UNO DE LOS N PERIODOS, SI EL VALOR TEMPORAL DEL DINERO ES (r) DE TAL MANERA DE RECUPERAR LA MISMA CANTIDAD QUE FUE INVERTIDA.

EL CUADRO 1. REPRESENTA ESTAS FORMULAS.

2.2.- VALOR PRESENTE Y COSTO ANUAL.

EN LA PRACTICA, LA COMPARACION DE BENEFICIOS Y COSTOS AL CORRER EL TIEMPO ES EXPRESADA EN TERMINOS DE VALORES PRESENTE O COSTOS ANUALES EQUIVALENTES, EL METODO DE VALOR PRESENTE REFIERE TODOS LOS INGRESOS (POSITIVOS O NEGATIVOS) A UN TIEMPO COMUN, USUALMENTE EL PRESENTE. EL METODO DEL COSTO ANUAL EQUIVALENTE CALCULA LAS SERIES DE PAGOS ANUALES QUE, SOBRE LA VIDA DEL PROYECTO, TENDRIAN EL MISMO VALOR PRESENTE COMO SI LOS COSTOS Y BENEFICIOS AL CORRER EL TIEMPO OCURRIERAN ACTUALMENTE, SI EL PROYECTO FUE IMPLEMENTADO. PARA LA MISMA TASA DE DESCUENTO Y VIDA DEL PROYECTO, AMBOS METODOS SON NUMERICAMENTE EQUIVALENTES.

LA SELECCION ENTRE LOS METODOS DE VALOR PRESENTE Y COSTO ANUAL EQUIVALENTE DEPENDEN PRINCIPALMENTE DE CONVENIENCIAS.

PARA PROBLEMAS SIMPLES, DONDE UN FLUJO CONSTANTE DE DESEMBOLSOS Y INGRESOS PUEDEN EXISTIR, EL METODO DEL COSTO ANUAL EQUIVALENTE ES PREFERIBLE.

PARA EL ANALISIS DE UN SISTEMA COMPLEJO, SIN EMBARGO, EL METODO DEL VALOR PRESENTE ES PREFERIBLE, HAY VARIAS RAZONES Y ESTAS -- SON:

PRIMERA.-.EL FLUJO DE BENEFICIOS Y COSTOS EN UN PROYECTO DE --- GRAN ESCALA ES CASI SIEMPRE IRREGULAR. EL COSTO ANUAL PUEDE CON SECUENTEMENTE SOLO SER OBTENIDO DESPUES DE QUE EL VALOR PRESENTE HA SIDO CALCULADO.

SEGUNDA.- EN CUALQUIER EVENTO ES FRECEUNTEMENTE DIFICIL DEFINIR EL COSTO ANUAL SOBRE UNA BASE RAZONABLE, PUESTO QUE SISTEMAS -- COMPLICADOS INVOLUCRAN SUBSISTEMAS DE DURACION DIFERENTE.

TERCERA.- EL FLUJO DEL DINERO ES ALGUNAS VECES COMPLETAMENTE DI FERENTE DEL CALCULADO POR EL COSTO ANUAL EQUIVALENTE Y PUEDE -- SER NATURALMENTE ERRONEO.

CUARTO.- LA PRINCIPAL VENTAJA DEL METODO DE VALOR PRESENTE ES - QUE ENFOCA SU ATENCION SOBRE LA TASA DE DESCUENTO LA CUAL, LA - MAYOR PARTE DE LOS ECONOMISTAS GENERALMENTE CONSIENTEN Y ES LA- -QUE FUNDAMENTALMENTE DEBE SER MAXIMIZADA.

2.3.-IMPLICACIONES DE DIFERENTES TASAS DE DESCUENTO Y VIDA DEL PRO-- YECTO.

LAS FORMULAS PARA DESARROLLAR COMPARACIONES ENTRE DIFERENTES -- LAPSOS DE TIEMPO DE BENEFICIOS Y COSTOS SON FUNCION SOLAMENTE - DE LA TASA DE DESCUENTO r Y LA VIDA DEL PROYECTO N.

COMO LA ESTIMACION DE ESOS PARAMETROS ES UNA CONSECUENCIA DE DIS CERNIMIENTO, ES UTIL EXPLORAR LAS IMPLICACIONES DE LAS ALTERNATIVAS ELEGIDAS A ESAS CANTIDADES.

AL PRODUCIR ESAS COMPARACIONES CON PROYECTOS ESTOS SON ALTAMENTE SENSIBLES A ESOS PARAMETROS, Y UNA ATENCION PARTICULAR DEBERA DARSE A ESAS SELECCIONES.

EL VALOR PRESENTE DE FUTUROS BENEFICIOS O COSTOS SE DISPERSA RAPIDAMENTE PARA TASAS DE DESCUENTO Y RETORNOS MAS DISTANTES, COMO SE ILUSTRA EN LA FIGURA.- 3. COMO UNA REGLA PRACTICA, LA TASA PUEDE SER ESTIMADA POR LA LLAMADA "REGLA - 72" LA CUAL DICE QUE LA CANTIDAD $(1 + r)^N$ SE DUPLICA CADA N* AÑOS, EN DONDE N* = 72/r. EL VALOR PRESENTE ES DIVIDIDO EN DOS EN CERCA DE 15 AÑOS CUANDO LA TASA DE DESCUENTO ES 5% Y EN CERCA DE 7 AÑOS CUANDO ES DEL 10%.

BENEFICIOS QUE OCURREN MAS ALLA DE 20 AÑOS EN EL FUTURO TIENEN CON CRECES UNA PEQUEÑISIMA CONTRIBUCION AL VALOR PRESENTE DE UN PROYECTO. PARA TASAS DE DESCUENTO QUE SON IGUALES AL COSTO DE APORTUNIDAD DEL CAPITAL, ESTO ES, SOBRE EL ORDEN DEL 5 o 10%, ESTAS PUEDEN SER CASI DESPRECIABLES SI UN PROYECTO TIENE UNA VIDA DE 50 AÑOS. EN MEXICO POR EJEMPLO LA SECRETARIA DE ASENTAMIENTOS HUMANOS Y OBRAS PUBLICAS PROCEDE SOBRE LA CONSIDERACION DE QUE EL COSTO DE OPORTUNIDAD DEL CAPITAL ES DEL 12% POR AÑO PARA 1970 Y CONSECUENTEMENTE EVALUA CONSTRUCCIONES DE CARRETERAS SOBRE LA BASE DE 20 AÑOS COMO VIDA DEL PROYECTO.

LA CONVENIENCIA DE CUALQUIER PROYECTO ES ALTAMENTE SENSIBLE A LA ELECCION DE LA TASA DE DESCUENTO Y VIDA DEL PROYECTO PARA ILUSTRAR ESTO, LA SENSIBILIDAD DE LA RAZON DEL VALOR PRESENTE DE BENEFICIOS Y COSTOS CON r Y N SERAN EXAMINADOS.

ESTA RAZON BENEFICIO-COSTO ES UNO DE LOS DIFERENTES CRITERIOS DE EVALUACION POSIBLES.

HASTA LA RELATIVA DESEABILIDAD DE PROYECTOS ES SENSIBLE A LA ELECCION DE LA TASA DE DESCUENTO.

LA ELECCION DE LA TASA DE DESCUENTO Y LA VIDA DEL PROYECTO SON CLARAMENTE LOS MEJORES DETERMINANTES DE EL MERITO RELATIVO DEL PROYECTO. SON PARTICULARMENTE IMPORTANTES PARA SISTEMAS INGENIE-

RILES DE GRAN ESCALA DEBIDO A QUE GASTOS Y BENEFICIOS, TIPICAMENTE OCURREN EN TIEMPOS COMPLETAMENTE DIFERENTES.

GRANDES GASTOS INICIALES DE CONSTRUCCION SON GENERALMENTE SEGUIDOS POR UNA SERIE GRANDES BENEFICIOS. COMPARACIONES ENTRE ESAS CANTIDADES PUEDEN SER MARCADAMENTE AFECTADAS POR LA ELECCION DE r Y N. UNA ALTA TASA DE DESCUENTO REDUCE DRASTICAMENTE EL VALOR PRESENTE DE LOS BENEFICIOS, QUE HECHA POR TIERRA EL NUMERO DE PROYECTOS QUE PUEDEN SER JUSTIFICADOS, RESULTANDO CONSTRUCCIONES SIGNIFICATIVAMENTE MENORES QUE CON UNA TASA INFERIOR.

3.- SELECCION DE LA TASA DE DESCUENTO.

LA BASE TEORICAMENTE CORRECTA PARA QUE LA TASA DE DESCUENTO SEA APLICADA A EVALUACION DE PROYECTOS ES EL COSTO DE OPORTUNIDAD DEL CAPITAL. EL COSTO DE OPORTUNIDAD DEL DINERO ES LA RENTA PERDIDA AL DESVIAR FONDOS PARA PROYECTOS BAJO CONSIDERACION, NO ES UNA CANTIDAD FACIL DE DETERMINAR. A CAUSA DE LA NECESIDAD DEL CONCURSO EN EL DESARROLLO DE MUCHOS SISTEMAS PUBLICOS Y DEBIDO A DIFERENTES TASAS DE IMPUESTOS EN DIFERENTES CLASES DE ACTIVIDAD, LA TASA DE DESCUENTO NO ES LA MISMA PARA TODAS LAS SITUACIONES. ESTA DEPENDE DE EL TIEMPO EN EL QUE ESTA EL COSTO DE OPORTUNIDAD Y DE DONDE LLEGAN LOS RECURSOS PARA EL PROYECTO.

ESTA PARTE NO TRATARA POR LO TANTO DE DEFINIR QUE NUMERO SERA LA TASA DE DESCUENTO. MAS BIEN, EL PROPOSITO INICIAL ES INDICAR LAS GUIAS BASICAS DE COMO EL VALOR TEMPORAL DEL DINERO PUEDE SER DETERMINADO PARA UNA SITUACION PARTICULAR.

3.1.- LIMITE INFERIOR: TASAS DE INTERES LIBRES DE RIESGO.

LA PRIMERA GUIA PARA LA DETERMINACION LA TASA DE DESCUENTO APROPIADA PARA EVALUACION DE PROYECTOS ES SIMPLE. EL COSTO DE OPORTUNIDAD DEL CAPITAL PARA TODAS LAS INVERSIONES, PUBLICAS Y PRIVADAS, DEBERA SER AL MENOS TAN GRANDE COMO TASAS DE INTERES CONSTANTES CORRIENTEMENTE AL CAPITAL SIN RIESGO ESTO ES, EQUIVALENTE A NO EMPRENDER UNA INVERSION A MENOS QUE ESTA SEA JUSTAMENTE PRODUCTIVA COMO CUALQUIERA DE LAS INVERSIONES COMPARABLES LAS CUALES ESTA COMODAMENTE DISPONIBLES.

ESTA PROPOSICION PUEDE SER FACILMENTE DEMOSTRADA POR EJEMPLO. SUPONGAMOS QUE LA TASA DE INTERES CORRIENTE PARA LAS OBLIGACIONES DE GOBIERNO SEA i_g EL GOBIERNO DEBERA ENTONCES, SI ESTA ES UNA ACCION RACIONAL, INSISTIR QUE CUALQUIER PROYECTO SE EMPRENDA TE--

NIENDO UNA TASA DE RETORNO LA CUAL EXEDA i_{g}, SERIA MAS ECONOMICO-PAGAR SUS DEUDAS, OBTENIENDO DE ESE MODO BENEFICIOS A LA TASA DE-RETORNO DE i_g % POR AÑO, MEJOR QUE INVERTIR EN ALGUN PROYECTO EN-DONDE LA TASA ANUAL DE RETORNO SEA MENOR. EL CASO ES SIMILAR PARA COMPAÑIAS PRIVADAS LAS CUALES TIENEN QUE PAGAR IMPUESTOS POR SUS-GANANCIAS. A MENOS QUE INVIERTAN EN PROYECTOS QUE TENGAN UN RETORNO SUBSTANCIALMENTE MAYOR QUE i_g .

3.2.- TASA DE DESCUENTO SOCIAL.

LA TASA DE DESCUENTO SOCIAL ES LA TASA DE DESCUENTO QUE DEBERA --APLICARSE A PROYECTOS PUBLICOS. LA DETERMINACION DE ESTE VALOR ES DE GRAN INTERES DEBIDO A QUE MUCHOS SISTEMAS DE GRAN ESCALA SON -PROYECTOS PUBLICOS. PUESTO QUE LA TECNICA USADA ES TAMBIEN APLICABLE A OTRAS SITUACIONES, CONCENTRAREMOS LA ATENCION EN ESTA TASA. EL CAPITAL REQUERIDO PARA LAS INVERSIONES DE GOBIERNO ES OBTENIDO DE EL SECTOR PRIVADO, DONDE DE OTRA MANERA SERIA AGOTADO EN CONSUMIRLO O INVERTIDO EN EL MISMO SECTOR PRIVADO. PARA DETERMINAR EL-COSTO DE OPORTUNIDAD DE ESTE CAPITAL, SOLO NECESITAMOS, PRIMERO -EXAMINAR LAS TASAS DE RETORNO QUE SON APROPIADAS PARA ESOS USOS -ALTERNATIVOS, SEGUNDO, ES NECESARIO PESAR LA PROPORCION DE CAPI--TAL OBTENIDO DE AMBAS FUENTES PARA OBTENER UN COSTO DE OPORTUNI--DAD COMPUESTO.

EL COSTO DE OPORTUNIDAD DEL CAPITAL APARTADO DEL CONSUMO PUEDE, -PARA TODO PROPOSITO PRACTICO, SER TOMADO DIRECTAMENTE COMO LA --TASA DE INTERES SIN-RIESGO A LARGO-PLAZO, EN OTRAS PALABRAS LA --TASA CORRIENTE SOBRE BONOS GUBERNAMENTALES. CONSUMIDORES QUIENES-VOLUNTARIAMENTE DAN UN ALTO USO, EN ORDEN DE COMPRAR UN BONO ----ESTAN INDICANDO QUE LA TASA DE INTERES DE LOS BONOS COMPENSA Y ES PROBABLEMENTE MEJOR QUE LAS ALTERNATIVAS QUE ELLOS CEDEN. RECIPRO

CAMENTE, CONSUMIDORES QUIENES NO COMPRAN BONOS, SIENTEN QUE LA -- TASA DE INTERESES DEL BONO NO COMPENSA PARA DIFERIR SU CONSUMO, - QUE SU VALOR TEMPORAL DEL DINERO ES MAS GRANDE QUE LA TASA DE INTERES DEL BONO. EL COSTO DE OPORTUNIDAD DEL DINERO TOMADO DE LOS-CONSUMIDORES ENTONCES ES IGUAL O EXCEDE LA TASA DE INTERES DEL -- BONO.

EL COSTO DE OPORTUNIDAD TOMADO DE LA INVERSION PRIVADA ES MAS DIFICIL DE CALCULAR. LA FORMULA A USAR DEPENDE DIRECTAMENTE DE LA - TASA DE IMPUESTO t QUE ES APLICADA A INSTITUCIONES PRIVADAS ANTES QUE ELLAS PASEN SUS GANANCIAS A LOS CONSUMIDORES.

PARA QUE ALGUNOS NEGOCIOS INDIVIDUALES SEAN ATRACTIVOS, SU TASA - DE RETORNO DESPUES DE INCORPORAR IMPUESTOS DEBERA EXCEDER LA TASA DE INTERES, i_g, OBTENIBLE PARA BONOS DE GOBIERNO, LA CUAL SERIA - LA ALTERNATIVA DE INVERSION.

PUESTO QUE LA TASA DE RETORNO DESPUES DE IMPUESTOS ES IGUAL A LA-REAL, LA TASA DE RETORNO ANTES DE IMPUESTO ES 1-t. COSTO DE OPORTUNIDAD DE INVERSIONES PRIVADAS $\geq \frac{i_g}{1-t}$

UN METODO PRACTICO PARA ESTIMAR EL EFECTIVO COSTO DE OPORTUNIDAD-DEL DINERO EN EL GOBIERNO, LA TASA DE DESCUENTO SOCIAL ES:

TASA DE DESCUENTO SOCIAL = $A\,i_g + \frac{(1-A)}{1-t}\,i_g$

EN DONDE A ES LA PROPORCION DE INVERSION SIENDO OBTENIDA DE LOS - CONSUMIDORES Y i_g , t SON LA TASA DE INTERES DEL GOBIERNO Y LA -- TASA DE IMPUESTO.

3.3.- TRATAMIENTO DEL RIESGO.

EN EL MERCADO PRIVADO, PROYECTOS QUE SON MAS ARRIESGADOS QUE ---- OTROS SON FORZADOS A PAGAR TASAS DE INTERES ALTAS PARA ATRAER AL-CAPITAL.

ESTO ES PORQUE UNA TASA ALTA ES NECESARIA PARA COMPENSAR, EN UN -

SENTIDO EL VALOR ESPERADO, POR LA POSIBILIDAD DE PERDERLO.

LA ALTA TASA DE INTERES ASOCIADA CON PROYECTOS ARRIESGADOS ES CLARAMENTE UN COSTO LEGITIMO DEL INVERSIONISTA. LA CUESTION ES SI -- ESTE PREMIO AL RIESGO DEBE SER INCLUIDO EN LA TASA DE DESCUENTO - SOCIAL LA CUAL ES LA BASE PARA EVALUAR PROYECTOS PUBLICOS.

ALGUNOS ECONOMISTAS PROPONEN QUE NINGUN PREMIO AL RIESGO DEBE SER INCLUIDO EN LA TASA DE DESCUENTO PARA EVALUAR PROYECTOS DE GOBIERNO. EL ARGUMENTO ES ESENCIALMENTE QUE EL GOBIERNO PUEDE PROPORCIONAR EL EMPLEO DEL VALOR ESPERADO DE SUS DECISORES, PUESTO QUE EL- NUMERO DE SUS PROYECTOS ES TAN GRANDE QUE FALLAN, EN UN SENTIDO - ECONOMICO, Y NINGUNO SERA APENAS PERCEPTIBLE.

ESTRICTAMENTE HABLANDO, ESTE PUNTO DE VISTA AFIRMA QUE EL PUBLICO NO NECESITA TENER AVERSION AL RIESGO PUESTO QUE EL RIESGO ES COMPARTIDO.

EN EL SENTIDO MAS AMPLIO PUEDE ARGUMENTARSE QUE EL PREMIO AL RIESGO ES NECESARIO PARA COMPENSAR, EN UN SENTIDO EL VALOR ESPERADO,- POR FALLAS PROBABLES DEL PROYECTO. LOS BENEFICIOS PROYECTADOS DE- INVERSIONES PUBLICAS SON INVARIABLEMENTE OPTIMISTAS. SE ASUME QUE EL SISTEMA SERA DESARROLLADO Y PAGADO COMO FUE PLANEADO. EN REALIDAD, EL VALOR ESPERADO DEL PROYECTO PUEDE SER BAJO COMO SE HA ANTICIPADO.

TALES PROYECTOS RIESGOSOS DEBERAN SER REQUERIDOS A MOSTRAR UNA -- ALTA TASA DE RETORNO, UN PREMIO AL RIESGO, EN TAL FORMA DE HACER- SUS BENEFICIOS ESPERADOS IGUALES A SUS BENEFICIOS SOBRE INVERSIONES LIBRES DE RIESGO.

4.- CRITERIOS DE EVALUACION.

LO ESENCIAL A DECIDIR EN LA EVALUACION DE UN PROYECTO ES. ¿ CUAL PROYECTO ES MAS PRODUCTIVO? ¿CUAL OBTIENE MAS ALTAS GANANCIAS? - EXISTEN TRES CRITERIOS PARA RESOLVER ESTAS INTERROGANTES. EL PRIMERO ES LLAMADO "CRITERIO DE BENEFICIO-COSTO", EL SEGUNDO "CRITERIO DE LA TASA INTERNA DE RETORNO" Y UN TERCERO QUE COMPLEMENTA A LOS ANTERIORES Y ES "CRITERIO DEL VALOR NETO PRESENTE".

4.1.- CRITERIO BENEFICIO-COSTO.

EL CRITERIO BENEFICIO-COSTO CLASIFICA LOS PROYECTOS POR LA RAZON DE SUS BENEFICIOS Y COSTOS TOTALES, TOMANDO COMO BASE EL VALOR - PRESENTE.

$$\text{RAZON BENEFICIO COSTO} = \frac{\text{VALOR PRESENTE DE BENEFICIOS TOTALES.}}{\text{VALOR PRESENTE DE COSTOS TOTALES.}}$$

ESTE CRITERIO PROPORCIONA UNA UTIL MEDIDA PARA LA SELECCION DE - UN PROYECTO, AUNQUE ESTA SUJETO A UNA OBJECION TEORICA PARA EL - ANALISIS DE UN SISTEMA COMPLEJO. LA RAZON BENEFICIO-COSTO CONSIDERA LOS COSTOS Y LOS BENEFICIOS Y NO TOMA EN CUENTA SU DISTRIBUCION. SEGUN ESTE CRITERIO UN PROYECTO ES DESEABLE SEGUN QUE LOS-BENEFICIOS EXEDAN A LOS COSTOS.

LA RAZON BENEFICIO-COSTO ES UNA FUNCION DE OBJETIVO UNICO, - - - AUNQUE TAMBIEN PUEDE SER ADECUADO PARA LA EVALUACION DE GRANDES-PROYECTOS. COMO SE COMPRENDERA, SISTEMAS CON MUCHOS OBJETIVOS -- TENDRAN VARIAS MEDIDAS DE EFECTIVIDAD, POR LO TANTO LOS ANALISTAS NO DEBEN LIMITARSE A TOMAR EN CUENTA UN SOLO CRITERIO CUANDO EVALUAN PROYECTOS CON VARIOS OBJETIVOS.

SUPERFICIALMENTE, LA RAZON BENEFICIO-COSTO PROPORCIONA UN INDICADOR DE PRODUCTIVIDAD DE UNA INVERSION DE CAPITAL. ESTO ES CIERTO, SIN EMBARGO SOLAMENTE, CUANDO SE ESTA CONSIDERANDO UNA SOLA - --

INVERSION DE CAPITAL Y UN SOLO GRUPO DE BENEFICIOS. EN LA MAYORIA DE LOS CASOS, DONDE UN PROYECTO DEBE SOPORTAR LOS COSTOS DEL CAPITAL INICIAL Y TAMBIEN LOS COSTOS PERIODICOS DE OPERACION Y MANTENIMIENTO, EL CRITERIO BENEFICIO-COSTO NO LOGRA PROPORCIONAR -- UNA FIGURA CLARA DEL VALOR DEL PROYECTO.

LA RAZON BENEFICIO-COSTO USUALMENTE MENOSPRECIA LA PRODUCTIVIDAD DE UN PROYECTO CON COSTOS ANUALES ALTOS.

LA DISTORCION INTRODUCIDA POR EL CRITERIO BENEFICIO-COSTO PARA - PROYECTOS CON ALTO COSTO ANUAL ES PRESENTADA A CONTINUACION.

DEFINASE K COMO EL VALOR PRESENTE DEL CAPITAL INICIAL INVERTIDO, A COMO EL COSTO ANUAL, Y B COMO LOS BENEFICIOS ANUALES.

$$\text{RAZON BENEFICIO-COSTO} = \frac{B}{A+K} \qquad (5)$$

LA RAZON DE LA SUMA DE LOS BENEFICIOS NETOS ANUALES Y COSTOS TOTAL ES ENTONCES.

$$\text{RAZON BENEFICIO-COSTO NETO} = \frac{B-A}{K} \qquad (6)$$

PARA INDICAR EL ALCANCE DE LA DISTORCION INTRODUCIDA POR LA RAZON BENEFICIO-COSTO, TOMEMOS LAS RAZONES 5 Y 6 Y OBTENEMOS.

$$\frac{\text{RAZON BENEFICIO-COSTO TOTAL}}{\text{RAZON BENEFICIO-COSTO NETO}} = \frac{1}{\left(1+\frac{A}{K}\right)\left(1-\frac{A}{B}\right)}$$

ESTA FORMULA ES GRAFICADA EN LA FIG 5 . COMO FUE INSINUADO EN - ESTA DISCUSION LA RAZON BENEFICIO-COSTO COMUNMENTE NO PUEDE MEDIR LA PRODUCTIVIDAD REAL, POR LO TANTO SE REQUIERE UN CRITERIO DIFERENTE.

4.2.- CRITERIO DE LA TASA INTERNA DE RETORNO.

EL CONCEPTO DE "TASA INTERNA DE RETORNO" HA SIDO PROPUESTO COMO UN INDICE DE LA DESEABILIDAD DE UN PROYECTO. LA TASA MAS ALTA, - EL MEJOR PROYECTO. POR DEFINICION, ES LA TASA DE DESCUENTO A LA-

CUAL EL VALOR NETO PRESENTE DE LOS BENEFICIOS IGUALAN AL VALOR - NETO PRESENTE DE LOS COSTOS.

TASA INTERNA DE RETORNO = r^*

TAL QUE USANDO r^* COMO TASA DE DESCUENTO

VALOR PRESENTE DE TODOS LOS BENEFICIOS= VALOR PRESENTE DE TODOS LOS COSTOS

NATURALMENTE ESTA SUJETO A TODAS LAS DIFICULTADES ASOCIADAS CON LA OCURRENCIA DE COSTOS ANUALES, COMO SE INDICO EN EL CRITERIO - BENEFICIO-COSTO. NO HA SIDO PROPUESTO COMO MEDIDA DE PRODUCTIVIDAD DE UN PROYECTO.

LA ATRACCION INTUITIVA DE LA TASA INTERNA DE RETORNO COMO UN CRITERIO DE EVALUACION ES EL HECHO QUE SU USO PUEDE ELIMINAR LA NECESIDAD DIRECTA DE DETERMINAR LA TASA DE DESCUENTO APROPIADA. -- ESTA DETERMINACION COMO YA SE INDICO ES UNA TAREA DIFICIL. ESTE- CRITERIO ES USADO POR SOFISTICADAS AGENCIAS DE DISEÑO EN PAISES- COMO MEXICO Y FRANCIA. EL CONCEPTO TIENE TRES PUNTOS DEBILES: -- PUEDE PROPORCIONAR VALORES AMBIGUOS; PUEDE PROPORCIONAR UNA - -- INTERPRETACION DISTORCIONADA DE PRODUCTIVIDAD; PUEDE ALTERAR EL- RANGO DE LOS PROYECTOS DESDE EL INDICADO POR EL TECNICAMENTE MAS CORRECTO VALOR NETO PRESENTE.

VALORES AMBIGUOS PARA LA TASA INTERNA DE RETORNO PUEDEN SER OBTENIDOS CUANDO UN PROYECTO ES FORZADO A INCURRIR EN GRANDES COSTOS AL FINAL DE SU VIDA. ESTO PUEDE SUCEDER PARA UN SISTEMA QUE OPERA EFECTIVAMENTE Y PROPORCIONA GRANDES BENEFICIOS AL PRINCIPIO,- PERO MAS TARDE, TAL COMO MUCHOS SERVICIOS PUBLICOS, PROPORCIONAN SERVICIOS INFERIORES YA QUE INCURREN EN ALTOS COSTOS DE MANTENIMIENTO.

EL CALCULO DE LA TASA INTERNA DE RETORNO PUEDE MOSTRAR UN FALSO- SENTIDO DE PRODUCTIVIDAD CUANDO ELEMENTOS IMPORTANTES DE COSTO -

NO SON INCLUIDOS EN EL CALCULO. ESTO SUELE OCURRIR, SIN EMBARGO- COMO ES FRECUENTE EN EL DISEÑO DE SISTEMAS PUBLICOS, PROPIEDADES QUE PERTENECEN AL GOBIERNO, TAL COMO UN DEPOSITO EN UN LOTE O UN PARQUE, YA QUE LOS RECURSOS SE CONSIDERAN GRATUITOS. CUANDO ESOS RECURSOS PUEDEN ACTUALMENTE SER USADOS PARA OTROS VALIOSOS PRO-- POSITOS, TIENEN UN COSTO DE OPORTUNIDAD.

ES POSIBLE CONSTRUIR EJEMPLOS NUMERICOS RAZONABLES PARA LOS - -- CUALES EL RANGO DE LOS PROYECTOS BASADOS EN EL COSTO DE OPORTUNI DAD ACTUAL DEL CAPITAL ES DIFERENTE AL PRODUCIDO POR EL CRITERIO DE LA TASA INTERNA DE RETORNO.

SI LA TASA DE DESCUENTO SOBRE LA CUAL LA EVALUACION ES BASADA, - REFLEJA EN REALIDAD EL COSTO DE OPORTUNIDAD, ENTONCES EL CRITE-- RIO DE LA TASA INTERNA DE RETORNO PUEDE CONDUCIRNOS A UNA RES--- PUESTA ERRONEA. EL CRITERIO DE LA TASA INTERNA DE RETORNO ES UN- CRITERIO QUE PUEDE FALLAR EN LA EVALUACION DE PROYECTOS.

4.3.- CRITERIO DEL VALOR NETO PRESENTE.

ULTIMAMENTE, LOS DISEÑADORES ESTAN INTEREZADOS EN LA MAXIMIZA--- CION DEL VALOR DE UN SISTEMA, ESTE ES EL VALOR NETO PRESENTE.

$$\text{VALOR NETO PRESENTE} = \underline{\text{VALOR PRESENTE DE TODOS LOS BENEFICIOS}} - \text{VALOR PRESENTE DE TODOS LOS COSTOS}$$

ELLOS ESTAN FORZADOS A OPERAR CON UN PRESUPUESTO REDUCIDO, COMO- PUEDE SUPONERSE, ENTONCES LA MAXIMIZACION DEL VALOR NETO PRESENTE ES EQUIVALENTE A LA MAXIMIZACION DE LA RAZON BENEFICIO-COSTO O - DE LA TASA INTERNA DE RETORNO YA QUE EL COSTO ES FIJO. PARA EL - CASO EN QUE EL DISEÑADOR DEBA TRABAJAR BAJO UN PRESUPUESTO FIJO, EL CRITERIO DEL VALOR NETO PRESENTE ES EL MEJOR CRITERIO PARA LA EVALUACION DE PROYECTOS.

EL USO DE ESTE CRITERIO EVITA LAS DIFICULTADES DE LOS DOS CRITE-

RIOS ANTERIORES. PRIMERO, EVITA LAS COMPLICACIONES DEBIDAS A LA CUESTION DE LOS COSTOS ANUALES DE OPERACION, POR LA SIMPLE VENTAJA DE BASARSE EN LOS BENEFICIOS NETOS. SEGUNDO PORQUE LAS TASAS DE REINVERSION IMPLICADAS SON CONSISTENTES, ESTO NO PRODUCE RESULTADOS AMBIGUOS COMO PUEDE SUCEDER CON LA TASA INTERNA DE RETORNO. NO EVOCA FALSAS PERSPECTIVAS DE PRODUCTIVIDAD. FINALMENTE COSTEANDO AL CAPITAL CON SU COSTO DE OPORTUNIDAD REAL ES MEJOR QUE CON UNA TASA INTERNA DE RETORNO, PROVEE UN CALCULO MAS PRECISO DE LA CONTRIBUCION NETA A CUALQUIER PROYECTO.

EL CRITERIO DEL VALOR NETO PRESENTE ES PARTICULARMENTE UTIL EN SITUACIONES DONDE LOS RECURSOS DE CAPITAL SON LIMITADOS Y DEBEN SER ASIGNADOS A LOS PROYECTOS MAS PRODUCTIVOS.

LAS DIFERENCIAS ENTRE EL VALOR NETO PRESENTE, EL CRITERIO BENEFICIO-COSTO Y LA TASA INTERNA DE RETORNO PARA UN PROYECTO SON MOSTRADAS EN LAS FIGURAS - -

5.- CONCLUSIONES.

LA EVALUACION DE PROYECTOS DEFINE LOS METODOS NECESARIOS PARA COMPARAR PROYECTOS. COMO PRIMER PASO ESTABLECE LAS FORMULAS PARA LA COMPARACION DE LOS VALORES DE LAS DIFERENTES CORRIENTES DE BENEFICIOS Y COSTOS QUE SE PRESENTAN. ESAS COMPARACIONES PUEDEN SER HECHAS YA SEA SOBRE LA BASE DE VALOR PRESENTE, EL CUAL ES PREFERIBLE POR EL ANALISIS DE SISTEMAS, O EL COSTO ANUAL EQUIVALENTE.

ESTAS MEDIDAS SON COMPLETAMENTE SENSIBLES A LA TASA DE DESCUENTO USADA.

LA TASA DE DESCUENTO USADA EN EVALUACION DE PROYECTOS DEBERA SER UNA MEDIDA DEL COSTO DE OPORTUNIDAD DE LOS RECURSOS DE CAPITAL EN EL MOMENTO. PARA PROYECTOS PUBLICOS ESTA DEBERA SER AL MENOS-

IGUAL A LA TASA DE INTERES DARA BONOS DE GOBIERNO A LARGO PLAZO. MAS ALLA DE ESTE LIMITE INFERIOR, DEBERA REPRESENTAR ACTUALMENTE UN PROMEDIO PESADO DEL COSTO DE OPORTUNIDAD DEL CAPITAL APLICADO A CADA UNO DE LOS RECURSOS DE CAPITAL. LA PRACTICA CORRIENTE EN- EL MUNDO SUGIERE QUE UNA TASA DE DESCUENTO DE ALREDEDOR DEL 8 AL 10%.

CADA UNO DE LOS DOS MEJORES CRITERIOS DE EVALUACION DISPONIBLES- SUFREN DE SUBSTANCIALES DIFICULTADES TEORICAS. EL CRITERIO BENE- FICIO-COSTO NO TOMA EN CUENTA LOS IMPACTOS DE LA DISTRIBUCION Y- GENERALMENTE SOBRE ESTIMA EL EFECTO DE LOS COSTOS DE OPERACION.- EL CRITERIO DE LA TASA INTERNA DE RETORNO, EVITA LA CUESTION DE- ELEGIR LA TASA DE DESCUENTO, HACE AUMENTAR LA POSIBILIDAD DE QUE RESULTADOS AMBIGUOS PUEDAN OCURRIR Y EL RANGO DE LOS PROYECTOS - PUEDA SER DISTORCIONADO Y ESTAR LEJOS DE LA TASA DE DESCUENTO -- REAL QUE DEBIO USARSE.

EL CRITERIO DEL VALOR NETO PRESENTE POR LO TANTO ES EL RECOMEN-- DADO COMO EL MEJOR CRITERIO PARA LA EVALUACION DE PROYECTOS. - - SIEMPRE QUE LOS RECURSOS SEAN ESCASOS, COMO ES FRECUENTE EN EL - ANALISIS DE SISTEMAS, EL VALOR NETO PRESENTE ELUDE LAS DIFICULTA DES ASOCIADAS CON OTROS CRITERIOS Y PROPORCIONA UN AVALUO PRECI- SO DE LOS MERITOS ECONOMICOS DE UN PLAN.

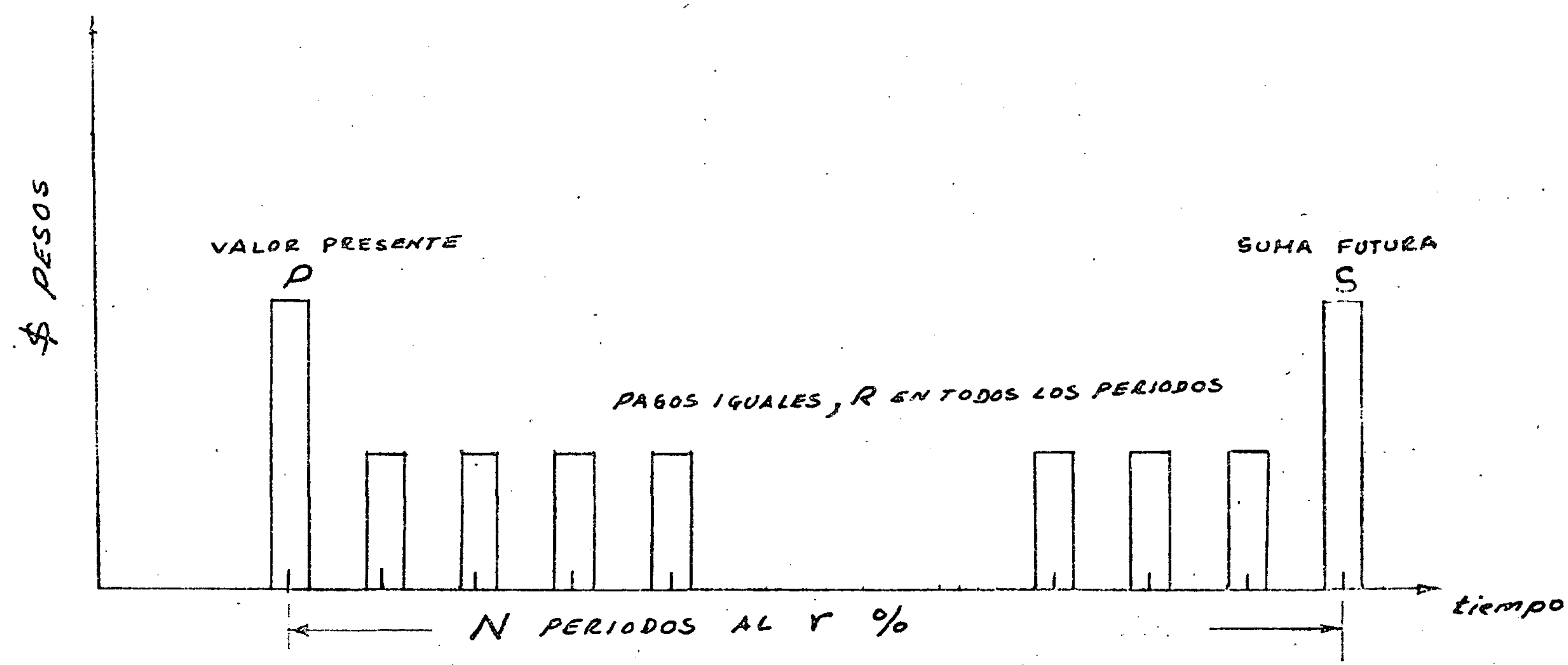

$ PESOS
VALOR PRESENTE
P
SUMA FUTURA
S
PAGOS IGUALES, R EN TODOS LOS PERIODOS
tiempo
N PERIODOS AL r %

FIG. 1

SITUACION	FORMULA	ECUACION N°	FACTOR
VALOR FUTURO S	$S = PF$	1	FACTOR DE INTERES COMPUESTO F
VALOR PRESENTE P	$P = S\left(\frac{1}{F}\right)$	2	FACTOR DE VALOR PRESENTE $\frac{1}{F}$
VALOR FUTURO ACUMULADO DE PAGOS PERIODICOS R	$S = \frac{RF}{crf}$	3	FACTOR DE LA SERIE DE VALOR PRESENTE $\frac{1}{crf}$
VALOR PRESENTE DE PAGOS PERIODICOS	$P = \frac{R}{crf}$	4	FACTOR DE RECUPERACION DEL CAPITAL crf

CUADRO 1

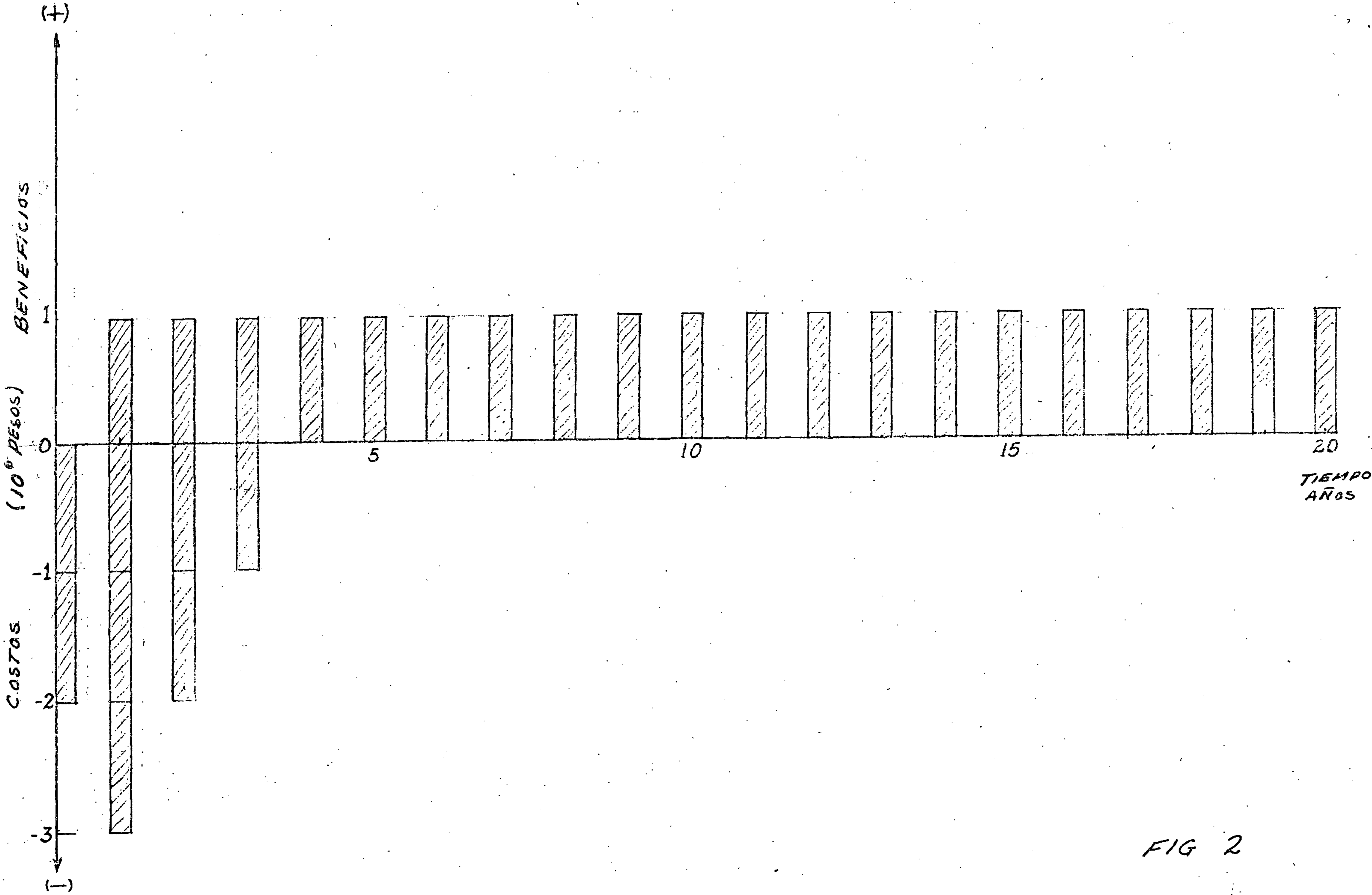


FIG 2

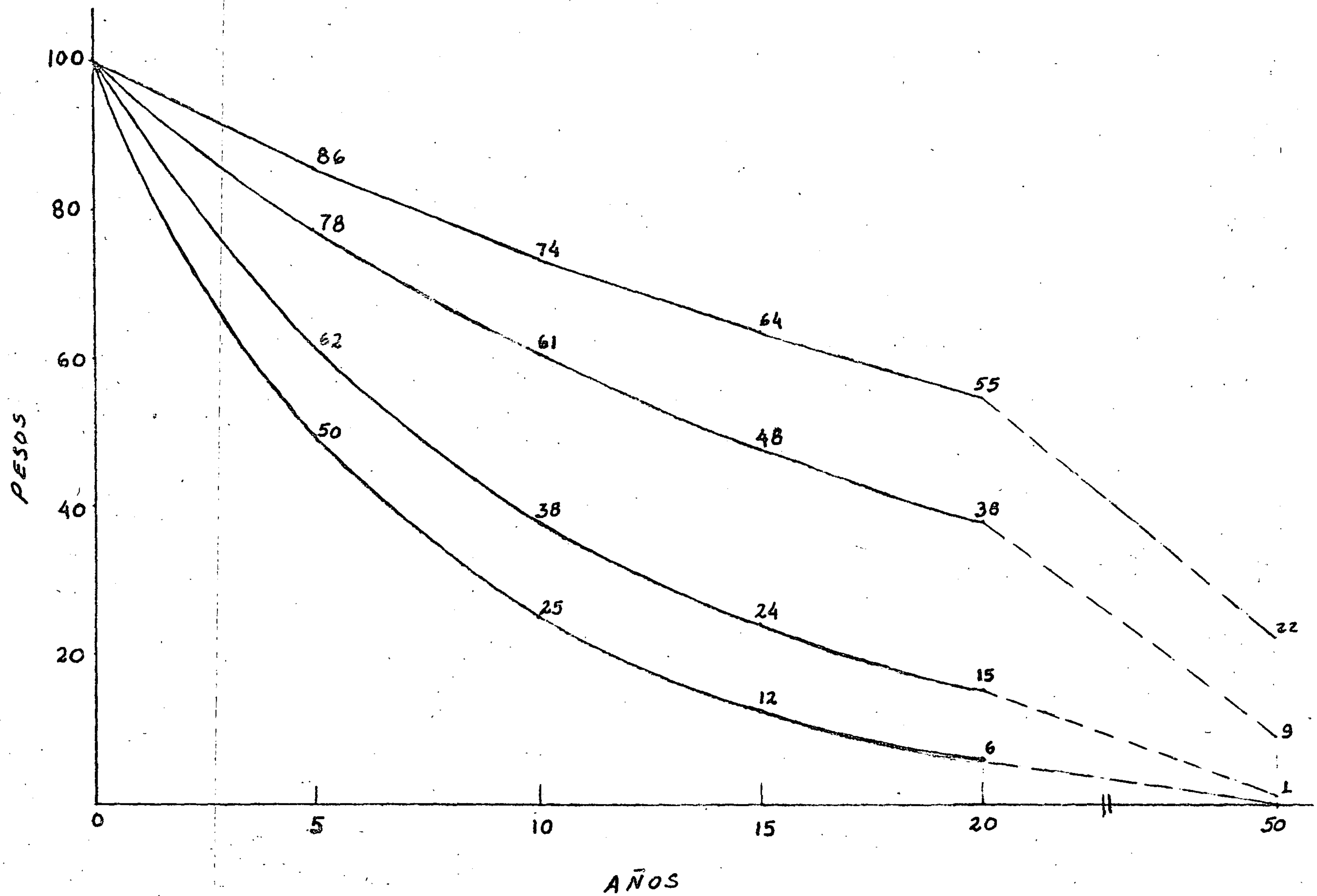

PESOS
100
80
60
40
20
0
5
10
15
20
50
AÑOS
86
74
64
55
22
78
61
48
38
9
62
38
24
15
1
50
25
12
6

FIG 3

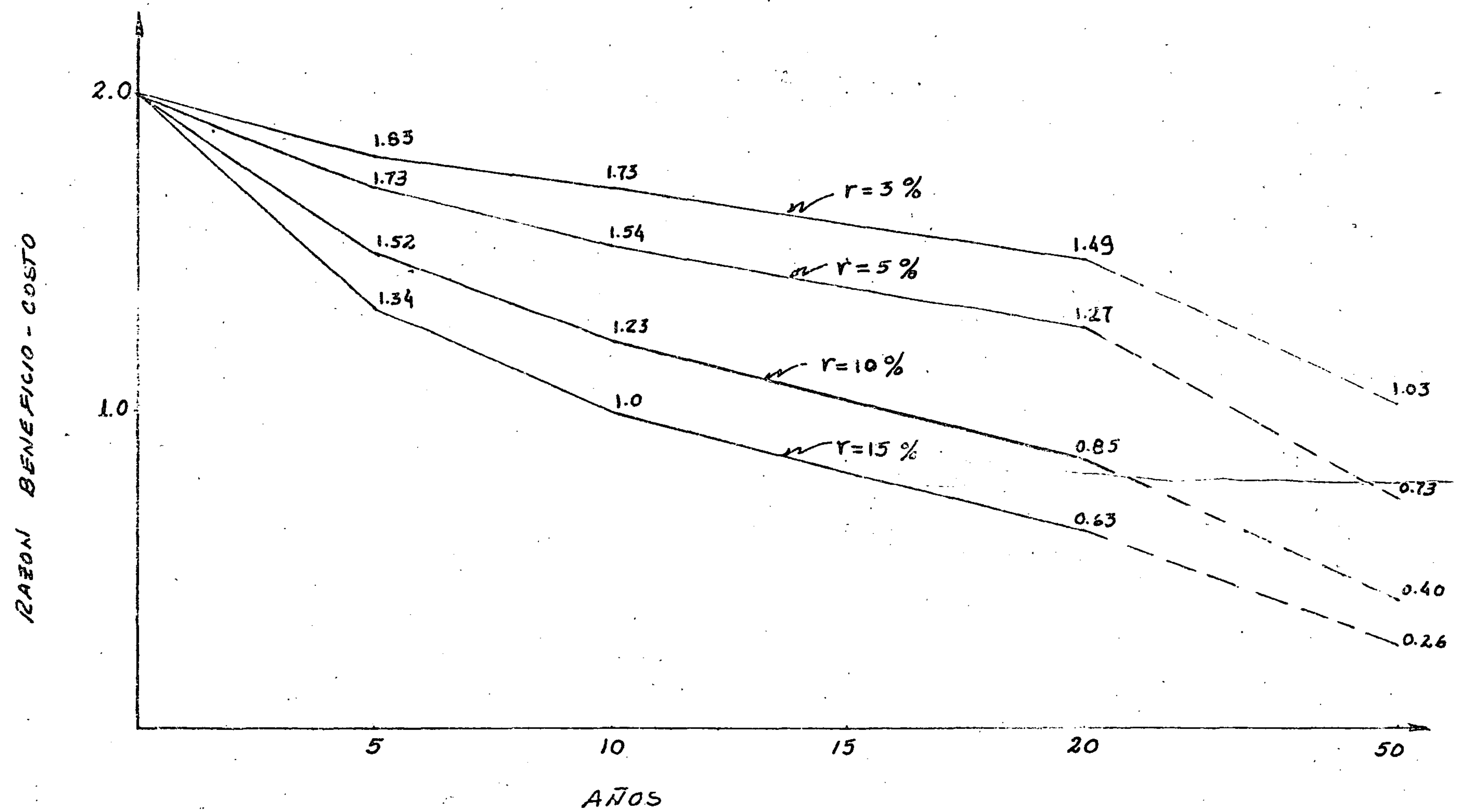

RAZON BENEFICIO - COSTO
2.0
1.0
1.83
1.73
1.73
1.54
1.52
1.34
1.23
1.0
1.49
1.27
0.85
0.63
1.03
0.73
0.40
0.26
r = 3 %
r = 5 %
r = 10 %
r = 15 %
5
10
15
20
50
AÑOS

FIG 4.

PROYECTO	RAZON BENEFICIO-COSTO	
	r = 3 %	r = 10 %
A	1.73	1.23
B	1.86	1.07

CUADR 4

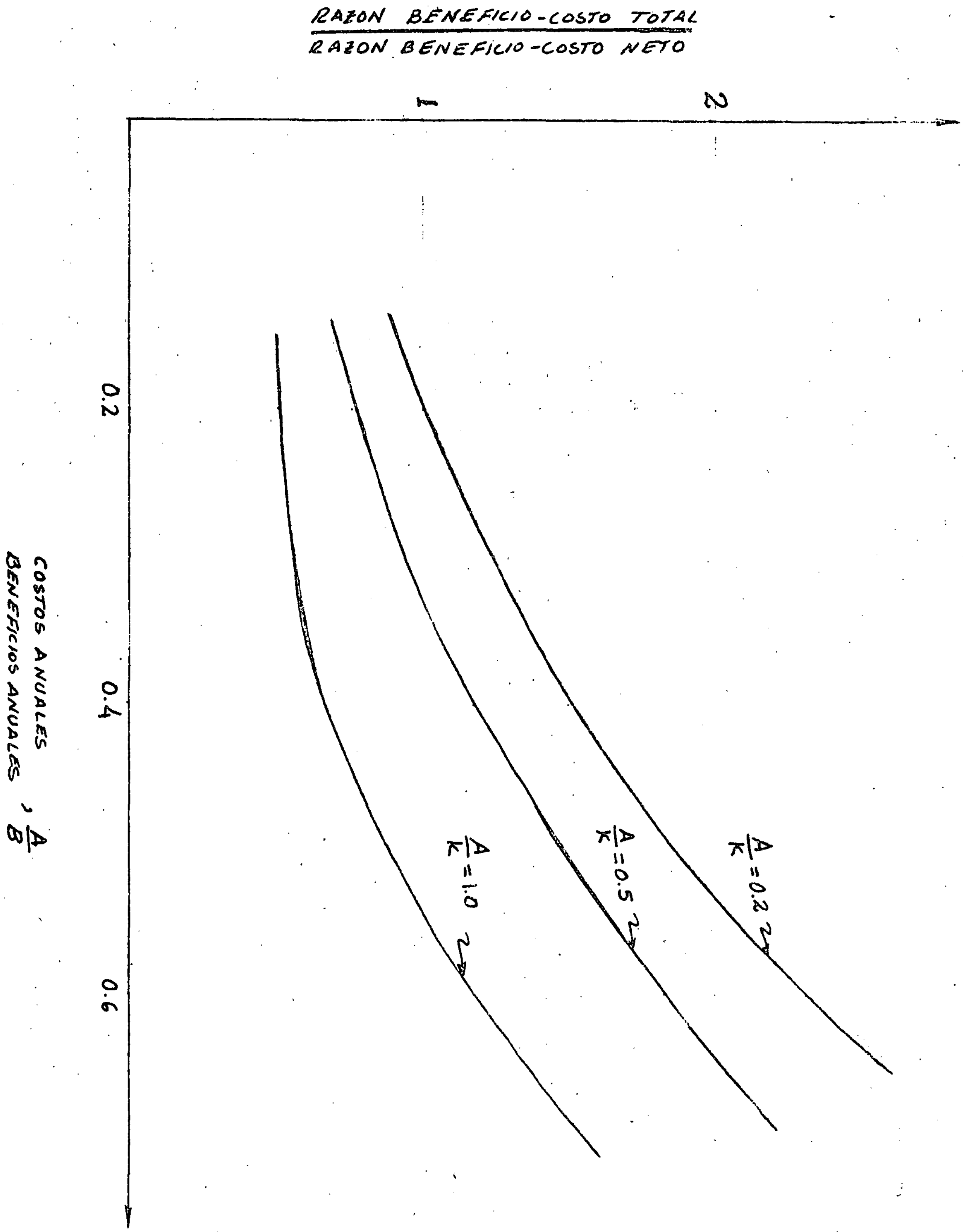
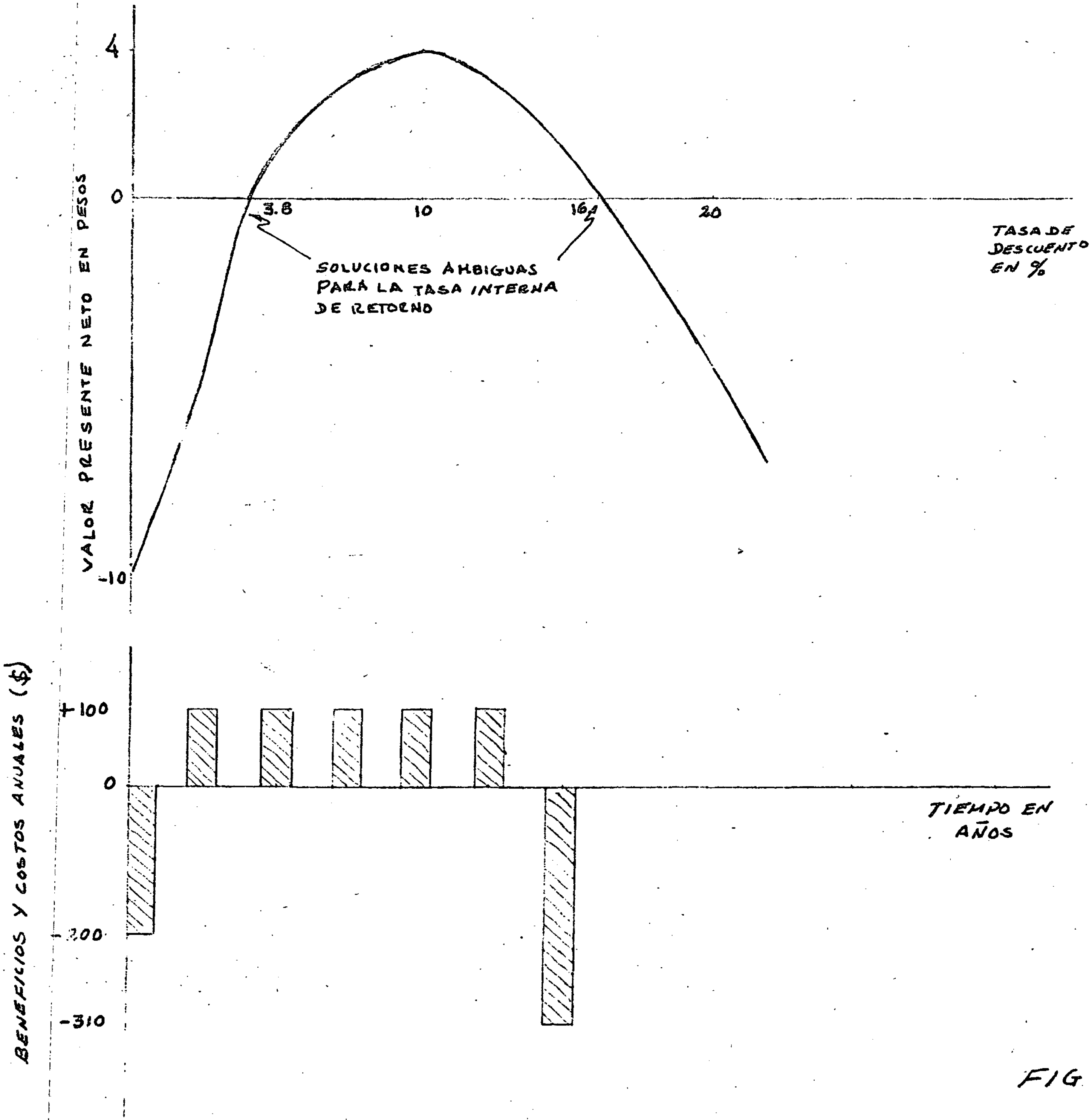

RAZON BENEFICIO-COSTO TOTAL
RAZON BENEFICIO-COSTO NETO
1
2
0.2
0.4
0.6
COSTOS ANUALES
BENEFICIOS ANUALES
, A/B
A/K = 0.2
A/K = 0.5
A/K = 1.0

FIG 5



4
0
-10
VALOR PRESENTE NETO EN PESOS
3.8
10
16
20
TASA DE DESCUENTO EN %
SOLUCIONES AMBIGUAS PARA LA TASA INTERNA DE RETORNO
+100
0
-200
-310
BENEFICIOS Y COSTOS ANUALES ($)
TIEMPO EN AÑOS

FIG 6

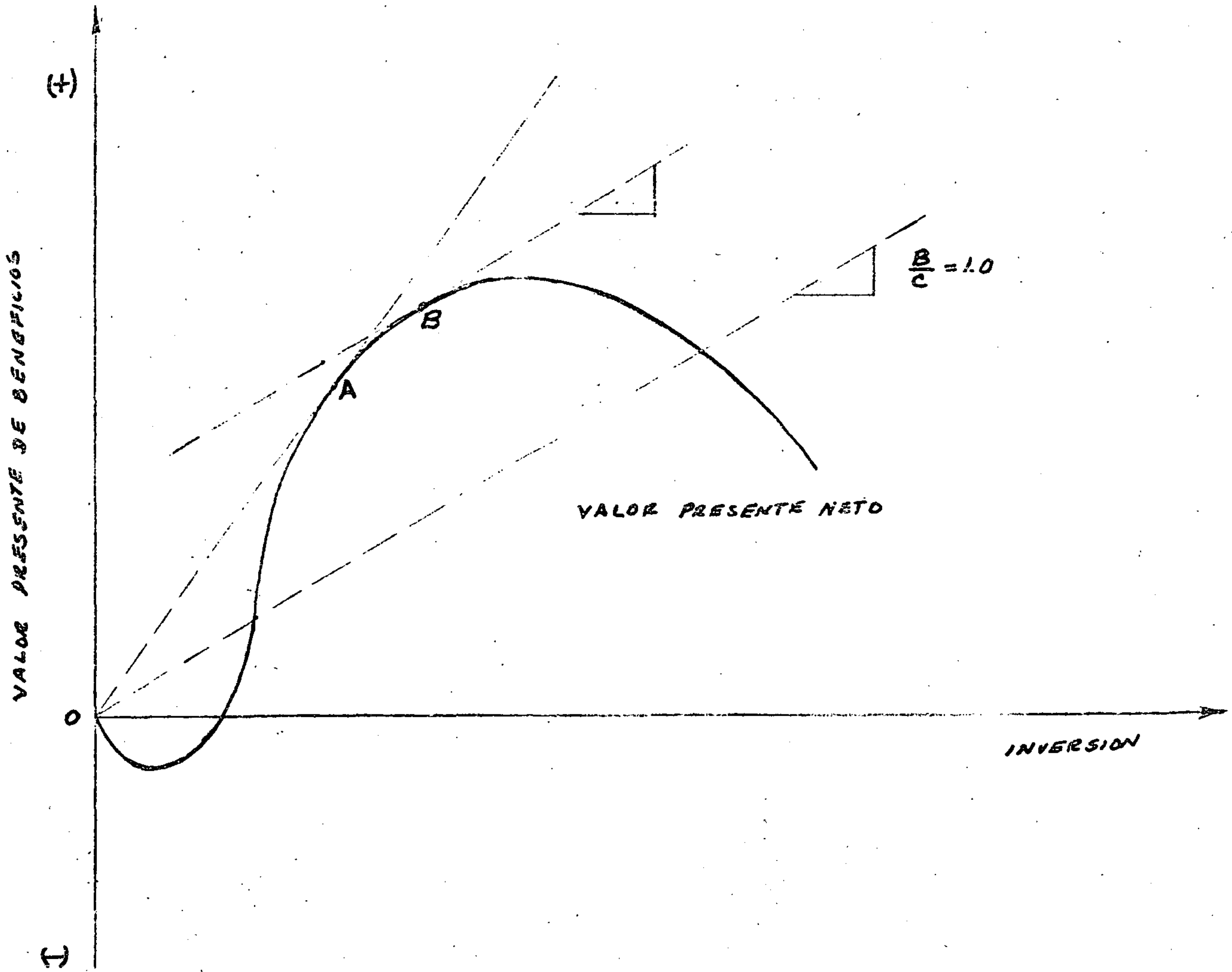

(+)
VALOR PRESENTE DE BENEFICIOS
0
(-)
A
B
$\frac{B}{C} = 1.0$
VALOR PRESENTE NETO
INVERSION

FIG 7

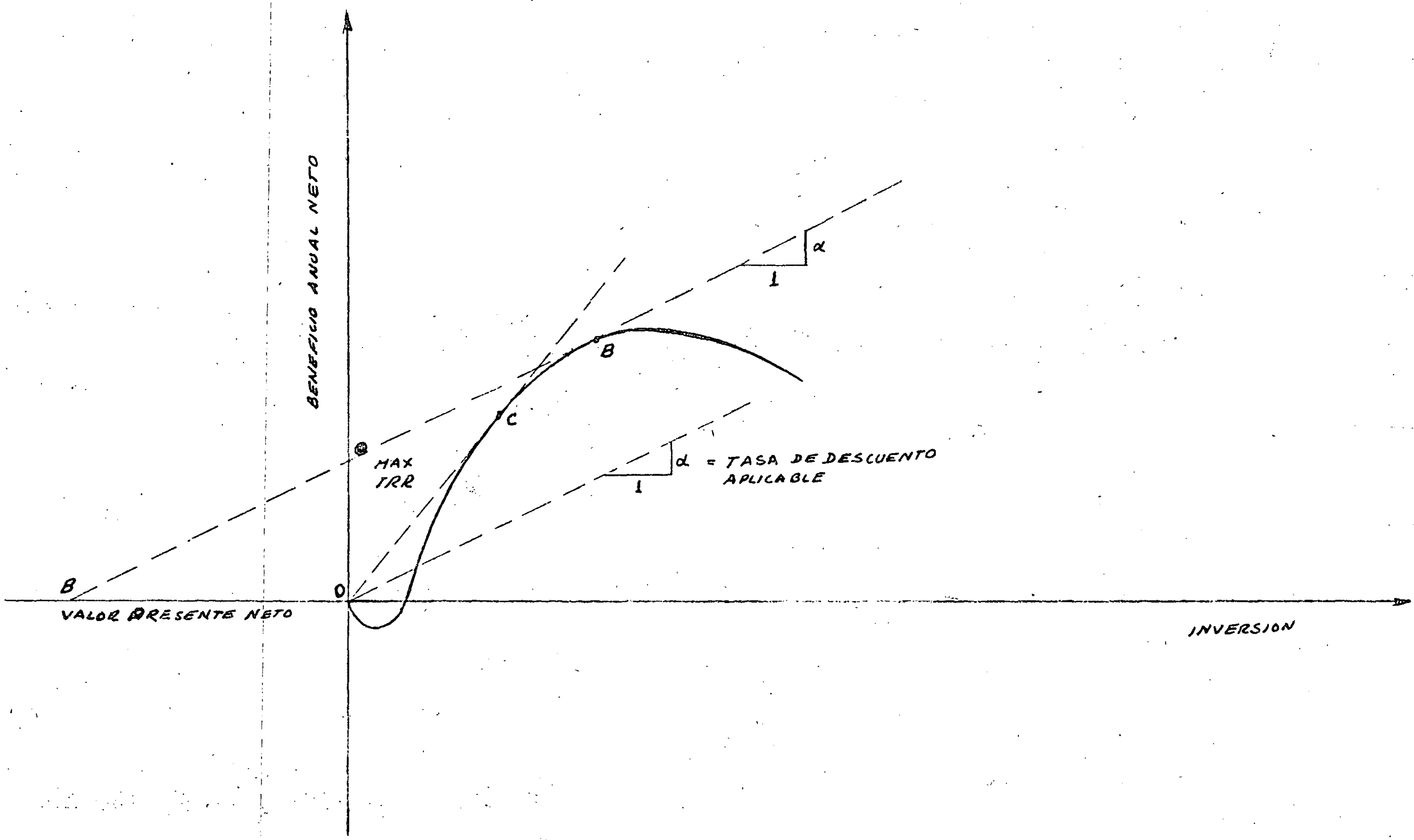

BENEFICIO ANUAL NETO
α
1
B
C
MAX
TRR
α = TASA DE DESCUENTO
APLICABLE
1
B
O
VALOR PRESENTE NETO
INVERSION

FIG 8

centro de educación continua
división de estudios superiores
facultad de ingeniería, unam

INGENIERIA DE SISTEMAS

USO COMBINADO DE MODELOS DE OPTIMIZACION Y SIMULACION EN LA PLANEACION DE UN SISTEMA HIDRAULICO

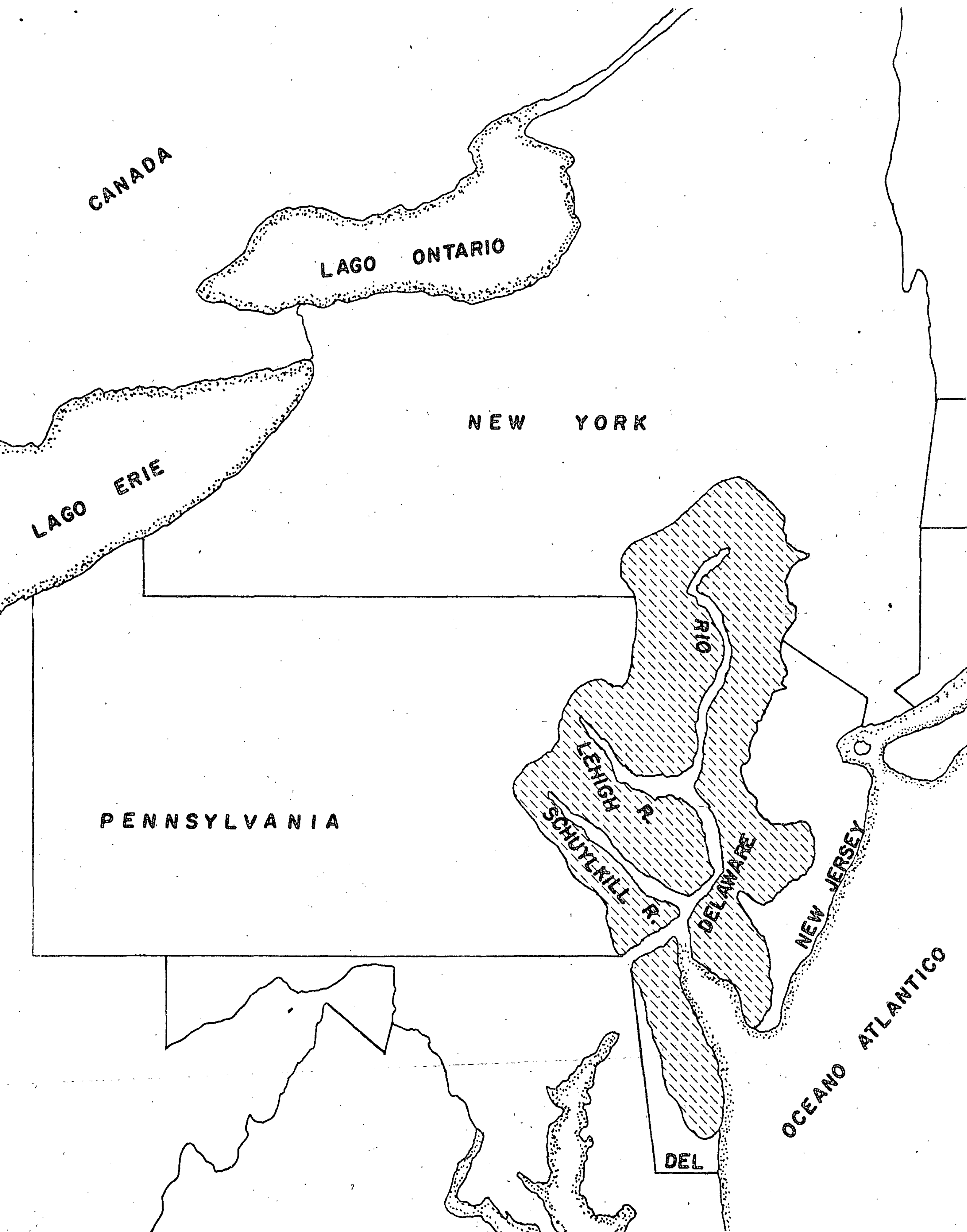
DR. JESUS ACOSTA FLORES

JUNIO, 1978

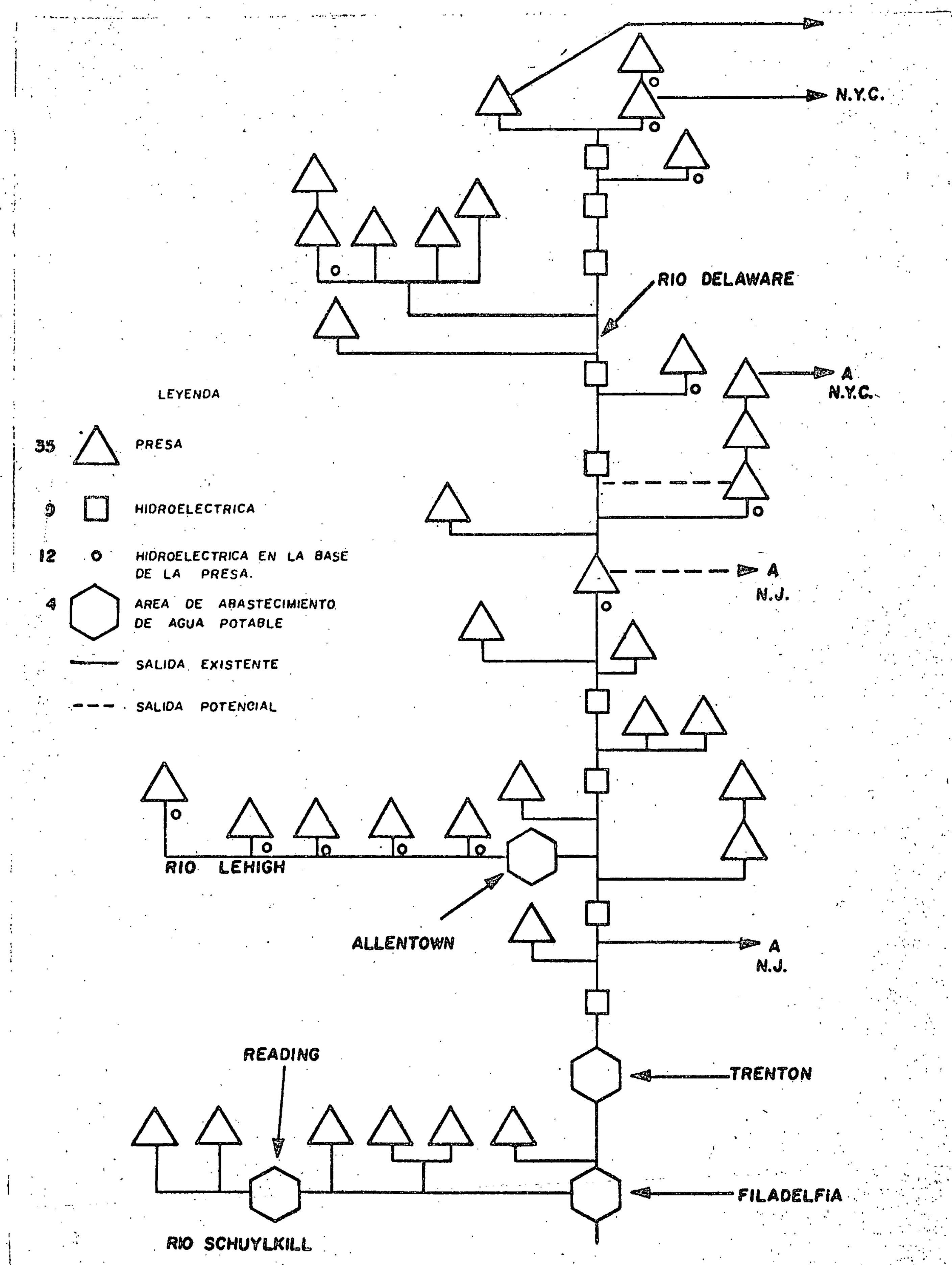
Palacio de Minería Calle de Tacuba 5, primer piso. México 1, D. F.

SE HA ANALIZADO UN SISTEMA HIDRAULICO UTILIZANDO TANTO OPTIMIZACION COMO SIMULACION NO COMO TECNICAS COMPETITIVAS SINO COMO SOCIOS QUE INTERACTUAN EN LA BUSQUEDA DE BUENAS POLITICAS ADMINISTRATIVAS.

SE CONSIDERA UN MODELO DE SIMULACION DE LA CUENCA DEL RIO DELAWARE QUE INCLUYO 35 PRESAS DE LAS QUE SOLO SEIS TIENEN CAPACIDAD FIJA.


CANADA
LAGO ONTARIO
NEW YORK
LAGO ERIE
PENNSYLVANIA
RIO
LEHIGH R.
SCHUYLKILL R.
DELAWARE
NEW JERSEY
OCEANO ATLANTICO
DEL.

DENTRO DE LA CUENCA DEL RIO DELAWARE HABITAN 22 MILLONES DE PERSONAS Y UNA GRAN PARTE DE LA INDUSTRIA EN LOS ESTADOS UNIDOS. PROPORCIONA - AGUA PARA NEW YORK Y NEW JERSEY BENEFICIANDO ASI 15 MILLONES MAS DE PERSONAS. ESTE ESTUDIO SE LI MITO AL DESARROLLO DE LAS AGUAS SUPERFICIALES. SE CONSIDERO RECREACION, CONTROL DE AVENIDAS, GE NERACION DE ENERGIA ELECTRICA Y ABASTECIMIENTO DE AGUA POTABLE.



N.Y.C.
RIO DELAWARE
A N.Y.C.
LEYENDA
35 PRESA
9 HIDROELECTRICA
12 HIDROELECTRICA EN LA BASE DE LA PRESA.
4 AREA DE ABASTECIMIENTO DE AGUA POTABLE
SALIDA EXISTENTE
SALIDA POTENCIAL
A N.J.
RIO LEHIGH
ALLENTOWN
A N.J.
READING
TRENTON
FILADELFIA
RIO SCHUYLKILL

SUPONIENDO QUE SOLO SE TUVIERAN DOS TAMAÑOS POSIBLES PARA CADA NUEVA PRESA, UNA EVALUACION COMPLETA DE LAS ALTERNATIVAS REQUERIRIA 2^{29} SIMULACIONES, APROXIMADAMENTE 500 MILLONES. SI SE UTILIZA EL JUICIO INGENIERIL Y SE ELIMINAN 99% DE ESTAS POSIBILIDADES COMO CLARAMENTE INFERIORES (ALGO IMPROBABLE) Y SI EL TIEMPO DE COMPUTO POR SIMULACION FUERA DE UN MINUTO (TAMBIEN IMPROBABLE) REQUERIRIA POCO MAS DE 10 AÑOS DE TIEMPO DE MAQUINA EVALUAR EL 1% RESTANTE DE LAS CONFIGURACIONES POSIBLES. SE HACE NECESARIO ENTONCES EL PROCESO DE CERNIDO.

SE SUPUSO QUE EL CRECIMIENTO EN LA DEMANDA PARA -
ENERGIA ELECTRICA EN EL AGUA EXCEDIA EL DESARROLLO POTENCIAL DE ESTA ENERGIA. SE SUPUSO TAMBIEN QUE EL DESARROLLO DE INSTALACIONES PARA RECREACION EN CUALQUIER SITIO DE LA CUENCA NO AFECTARIA LA DE -
MANDA DE RECREACION PARA RECURRIR EN OTROS SITIOS.

DENTRO DEL MODELO DE SIMULACION LOS FLUJOS DE AVENIDAS DE CORTA DURACION SE GENERARON ALEATORIAMENTE. EL MODELO DE CERNIDO NO INCORPORO EXPLICITAMENTE FLUJOS DE AVENIDAS.

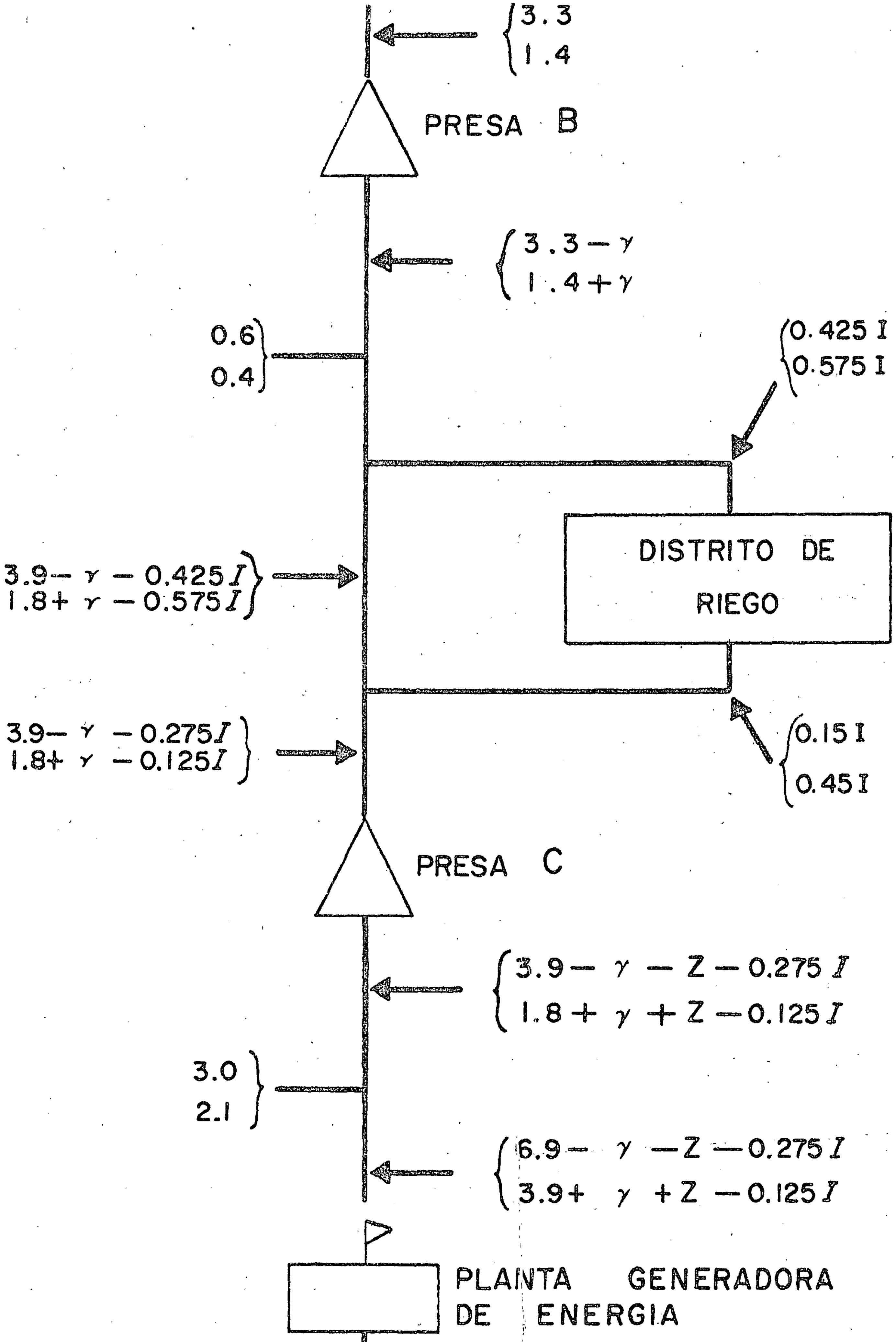
MODELO DE SIMULACION:

LOS DATOS DE ENTRADA PARA EL MODELO DE SIMULACION SE DIVIDIERON EN TRES COMPONENTES: DATOS PERMANENTES, DATOS DE DISEÑO, Y FLUJOS DE AGUA EN CADA UNA DE LAS 25 ESTACIONES DE AFORO. LOS DATOS PERMANENTES ESPECIFICAN LOS PARAMETROS QUE NO SON VARIABLES DE DECISION. ESTA INFORMACION INCLUYE LAS RELACIONES ECONOMICAS Y FISICAS ENTRE LOS DIVERSOS COMPONENTES DEL SISTEMA HIDRAULICO.

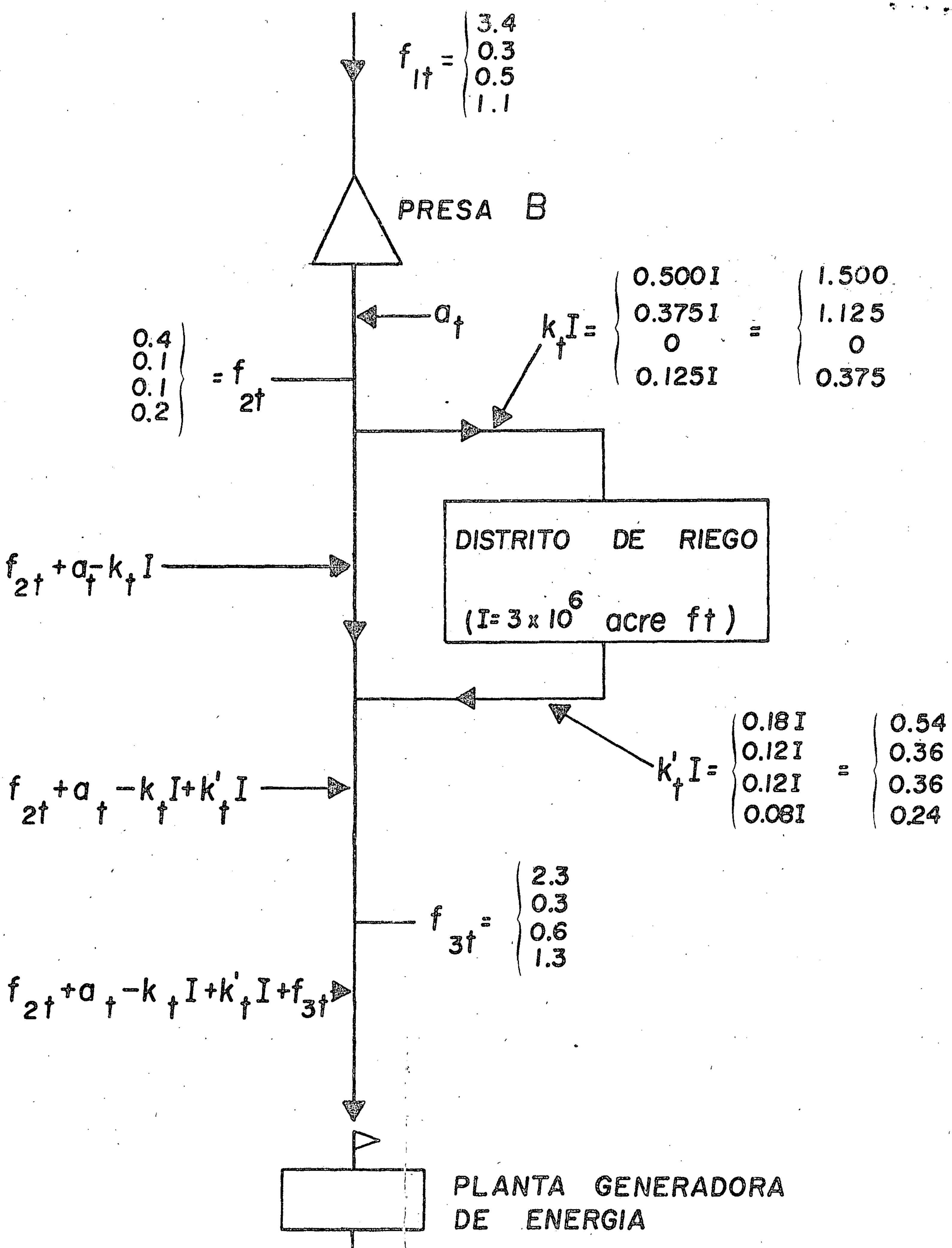
LOS DATOS DE DISEÑO ESPECIFICAN LOS VALORES DE LAS VARIABLES DE DECISION. INCLUYEN CAPACIDADES DE PRESAS Y PLANTAS GENERADORAS DE ENERGIA ELECTRICA, CANTIDADES DE AGUA PARA RECREACION, ABASTECIMIENTO DE AGUA POTABLE Y PRODUCCION DE ENERGIA HIDROELECTRICA, Y DEFINEN LAS REGLAS DE OPERACION.

LOS FLUJOS EN CADA UNA DE LAS 25 ESTACIONES DE AFORO CONSISTIERON EN UNA SECUENCIA MENSUAL A LO LARGO DE 50 AÑOS.

MODELO DE CERNIDO



3.3
1.4
PRESA B
3.3 − γ
1.4 + γ
0.6
0.4
0.425 I
0.575 I
DISTRITO DE RIEGO
3.9 − γ − 0.425 I
1.8 + γ − 0.575 I
3.9 − γ − 0.275 I
1.8 + γ − 0.125 I
0.15 I
0.45 I
PRESA C
3.9 − γ − Z − 0.275 I
1.8 + γ + Z − 0.125 I
3.0
2.1
6.9 − γ − Z − 0.275 I
3.9 + γ + Z − 0.125 I
PLANTA GENERADORA DE ENERGIA



$f_{1t} = \begin{cases} 3.4 \\ 0.3 \\ 0.5 \\ 1.1 \end{cases}$
PRESA B
a_t
$k_t I = \begin{cases} 0.500I \\ 0.375I \\ 0 \\ 0.125I \end{cases} = \begin{cases} 1.500 \\ 1.125 \\ 0 \\ 0.375 \end{cases}$
$\left.\begin{matrix} 0.4 \\ 0.1 \\ 0.1 \\ 0.2 \end{matrix}\right\} = f_{2t}$
DISTRITO DE RIEGO
($I = 3 \times 10^6$ acre ft)
$f_{2t} + a_t - k_t I$
$k'_t I = \begin{cases} 0.18I \\ 0.12I \\ 0.12I \\ 0.08I \end{cases} = \begin{cases} 0.54 \\ 0.36 \\ 0.36 \\ 0.24 \end{cases}$
$f_{2t} + a_t - k_t I + k'_t I$
$f_{3t} = \begin{cases} 2.3 \\ 0.3 \\ 0.6 \\ 1.3 \end{cases}$
$f_{2t} + a_t - k_t I + k'_t I + f_{3t}$
PLANTA GENERADORA
DE ENERGIA

R E F E R E N C I A S

1. H. G. Acres, Ltd., 1972. Water Quality Management Methodology and Its Application to the Saint John River, Niagara Falls Ontario.

2. Dorfman, R., 1965. Formal Models in the Design of Water Re - source Systems, Water Resources Research, Vol. 1, No. 3, pp. 329-336.

3. Fiering, M. B. 1964. A Multivariate Technique for Synthetic Hidrology, Journal of the Hidraulies Division, ASCE, Vol.90 No. HY5, pp. 43-60.

4. Fiering, M. B. 1967. Streamflow Synthesis, Cambridge. Mass: Harvard University Press.

5. GYSI, M., and LOUCKS, D. P., 1969. A Selected Bibliography in the Analysis of Water Resource Systems, Ithaca, N. Y.: Cornell University Water Resources and Marine Sciences - Center, Publication 25.

6. Hufschmidt, M. M., and Fiering, M. B. 1966. Simulation - Techniques for the Design of Water-Resource Systems. Cambridge, Mass.: Harvard University Press.

7. Kriss, C., and Loucks, D. P., 1971. A Selected Annotated Bibliography in the Analysis of Water Resource Systems, Ithaca, N. Y.: Cornell University Water Resources and Marine Sciences Center, Publication 35.

8. Loucks, D. P., et al., 1969. Stochastic Methods for Analyzing River Basin Systems, Ithaca, N. Y.: Cornell University Water Resources and Marine Sciences Center, Technical Report 16,Aug.

9. Maass, A., et al., 1962. Design of Water-Resource Systems, Cambridge, Mass.: Harvard University Press.

10. Morin, T.L., and Esogbue, A.M.O., 1971. Some Efficient Dynamic Programming Algorithms for the Optimal Sequencing and Scheduling of Water Supply Projects. Water Resources Research Vol. 7, No. 3 pp. 479-484.

11. Russell, C. S., d'Arge, G., and Kates, R.W.,1970, Drought and Water Supply, Baltimore: The Johns Hopkins Press.

centro de educación continua
división de estudios superiores
facultad de ingeniería, unam

INGENIERIA DE SISTEMAS

FORMULACION DE PROBLEMAS
DE
PROGRAMACION LINEAL

ING. RICARDO BAHENA BRITO

JUNIO, 1978

Palacio de Minería Calle de Tacuba 5, primer piso. México 1, D. F.

F O R M U L A C I O N   D E   P R O B L E M A S

Las condiciones, según Ackoff y Sasieni, para que exista el más simple de los problemas son:

1) Debe existir por lo menos un individuo que se encuentra dentro de un marco de referencia, al cual se le puede atribuir el problema del sistema.

2) El individuo debe tener, por lo menos, un par de alternativas para resolver su problema. En caso contrario no existe el problema.

3) Deben existir, por lo menos, un par de soluciones, una de las cuales debe tener mayor aceptación que la otra en el individuo. En caso contrario, no existe el problema. Esta preferencia está asociada a un cierto objetivo dentro del marco de referencia en donde se encuentra el individuo del sistema.

4) La selección de cualquiera de las soluciones, debe repercutir de manera diferente en los objetivos del sistema, es decir, existe una eficiencia y/o efectividad asociadas con cada solución. Estas eficiencias y/o efectividades deben ser diferentes, puesto que de lo contrario no

existe un problema.

5) Por último, el individuo que toma las decisiones ignora las soluciones y/o eficiencias y/o efectividades asociadas con las soluciones del problema.

Si estas cinco situaciones existen, entonces se tiene un problema. Esta situación puede complicarse en los siguientes casos:

1) El problema recae en un grupo, no en un individuo.

2) El marco de referencia donde se encuentra el grupo, cambia en forma dinámica.

3) El número de alternativas que el grupo puede escoger es bastante grande, pero finito.

4) El grupo dentro del sistema puede tener objetivos múltiples. Peor aún, no necesariamente estos objetivos son consistentes entre sí.

5) Las alternativas que selecciona el grupo son ejecutadas por otro grupo ajeno, al cual no se le puede considerar como elemento independiente del problema.

6) Los efectos de la decisión del grupo pueden sentirse por elementos que aún siendo ajenos al sistema considerado, influyen directa o indirectamente, favorable o desfavorablemente hacia él (políticos, consumidores, etcétera).

Formular un problema requiere:

1) Identificar las componentes controlables y no controla - bles de un sistema.

2) Identificar posibles rutas de acción, dadas por los com- ponentes controlables.

3) Definir el marco de referencia, dado por las componentes no controlables.

4) Definir los objetivos que se persiguen y clasificarlos por su orden de importancia.

5) Identificar las interrelaciones importantes entre las di ferentes componentes del sistema. Este paso equivale a encontrar las restricciones que existen, a la vez que - permite más adelante representar estas interrelaciones - en forma matemática.

T I P O S   D E   P R O B L E M A S

La Investigación de Operaciones se utiliza en tres tipos de problemas: determinísticos, con riesgo, bajo incertidumbre.

Los problemas determinísticos son aquellos en los que cada alternativa del problema (hay más de dos) tiene una y sólo una solución. Como hay varias alternativas, hay también varias soluciones, cada una con una diferente eficiencia y/o efectividad asociada a los objetivos del sistema. Por lo tanto, existe el problema de decisión.

Los problemas con riesgo son aquellos en los que cada alternativa del problema (hay más de dos), tiene varias soluciones. Cada solución puede ocurrir con una cierta probabilidad. La distribución de estas probabilidades se conoce o se puede estimar.

Los problemas bajo incertidumbre son aquellos en los que cada alternativa del problema (hay más de dos), tiene varias soluciones. Sin embargo, se ignora con qué probabilidad o distribución probabilística ocurrirán estas soluciones.

DERIVAR LAS SOLUCIONES DE UN MODELO

Resolver un modelo consiste en encontrar los valores de las variables dependientes, asociadas a las componentes controlables del sistema a fin de optimizar, si es posible, o en caso de no serlo, mejorar la eficiencia y/o efectividad del sistema, dentro del marco de referencia que fijan los objetivos establecidos por el grupo de toma de decisiones.

El análisis matemático clásico se utiliza para obtener las soluciones a un modelo de Investigación de Operaciones, en forma deductiva. Cuando éstas no son posibles de obtener en forma deductiva, se utiliza el análisis numérico, a fin de resolver el modelo en forma inductiva. Existen métodos de solución de tipo iterativo que son aquellas que se aproximan a la solución, o bien, dan la solución exacta, en base a una serie de repeticiones de la misma regla analítica sobre los resultados de una repetición anterior.

PROGRAMACION LINEAL

La programación lineal está relacionada con el problema de planear un conjunto complejo de actividades económicas interdependientes en forma tal de obtener un cierto resultado óptimo. Una característica de estos problemas es el estar sujetos a un conjunto de restricciones ocasionadas por las condiciones propias del problema y que son satisfechas por un gran número de soluciones posibles, de tal manera que la selección de la solución óptima está sujeta en cierto grado a los objetivos generales que se persiguen.

El término programación lineal se usa además para designar a las técnicas matemáticas que pueden utilizarse en la solución de tales problemas y será la orientación principal de este curso. Desde luego, a través de los métodos de la programación lineal, se tiene un conjunto de herramientas poderoso y flexible para investigaciones teóricas y empíricas que pueden adaptarse a una gran variedad de problemas prácticos tales como planeación de obras, distribución de mercancías, minimización de tiempos y costos de procesos industriales, asignación óptima de personal, etc.

Finalmente cabe decir que en este curso introductorio no se pretende estudiar exhaustivamente el dominio de la programación lineal ni presentar material nuevo sino que su propósito principal es ilustrar y explicar en la forma más simple posible los fundamentos de esta disciplina. Para aclarar ideas iniciaremos la exposición con algunos ejemplos:

Ejemplo.- Supongamos que un fabricante debe producir durante los siguientes tres meses r_1 r_2 y r_3 unidades de cierta mercancía y que su planta no es capaz de producir más de S unidades por mes. Los costos de producción en los tres meses son C_1, C_2 y C_3, respectivamente.

Los costos variables y la limitación de la capacidad podría hacer aconsejable el producir las mercancías antes de que se requieran, pero por otra parte debemos recordar los costos de almacenaje que suponemos de d pesos por unidad y por mes; (desde luego podrían suponerse diferentes cuotas para cada mes) y, con objeto de simplificar, no ~~cargremos~~ ningún costo de almacenaje de la mercancía durante el mes en el cual han sido producidas.

Sean: X_i $(i=1, 2, 3)$ el número de unidades producidas durante el i ésimo mes y S_i el número de unidades no vendidas en el principio del i ésimo mes, se tendrán las relaciones:

$$0 \leq x_1 \leq S \qquad 0 \leq x_2 \leq S \qquad 0 \leq x_3 \leq S$$

$$0 \leq s_2 \leq x_1 - r_1 \qquad 0 \leq s_3 \leq x_1 + x_2 - r_1 - r_2$$

$$0 \leq s_4 \leq x_1 + x_2 + x_3 - r_1 - r_2 - r_3$$

Podríamos hacer $S_4 = 0$ ya que es claramente perjudicial el producir las mercancías cuando ya no se necesitan. Se requiere minimizar el costo total del esquema, el cual es:

$$Z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3 + d(s_2 + s_3 + s_4)$$

tenemos un problema típico de programación lineal, y que podemos definir en la forma que sigue: Un programa lineal es generado por un fenómeno económico o de organización en donde intervienen un cierto número de variables que solo tienen significado cuando son positivas o nulas. Estas variables están ligadas entre si por relaciones lineales que forman un sistema de ecuaciones o desigualdades llamadas restricciones del fenómeno; finalmente debe existir una función lineal Z de esas variables que constituye la función económica o función objetivo que nos proponemos hacer máxima o mínima según el caso.

Ejemplo.- Para fabricar dos productos P_1 y P_2 se deben ejecutar ciertas operaciones sucesivas en 3 maquinas M_1, M_2 y M_3, aunque el orden de dichas operaciones es indiferente. Los tiempos unitarios de ejecución están dados en la tabla adjunta en la cual, por ejemplo, se puede ver que el tiempo unitario de ejecución de la pieza P_1, utilizando la máquina M_2, es de siete minutos. Supondremos además que no se presentan tiempos muertos al esperar que se termine de procesar un producto en la máquina que se va a utilizar.

	M_1	M_2	M_3
P_1	11	7	6
P_2	9	12	16

Las horas disponibles de cada máquina para sus actividades en un mes son respectivamente:

Máquina	M_1	165 horas	9900 min.
Máquina	M_2	140 horas	8400 min.
Máquina	M_3	160 horas	9600 min.

Los productos P_1 y P_2 representan una ganancia unitaria respectiva de 900 y 1 000 pesos. De esta manera ¿Cuántas unidades de los productos P_1 y P_2 deben fabricarse mensualmente a fin de tener una ganancia total máxima?

LLamemos X_1 al número de unidades del producto P_1 y X_2 a las del producto P_2; entonces la ganancia mensual, que es la función objetivo que queremos maximizar, estará dada por:

$$Z = 900x_1 + 1000x_2$$

y las restricciones serán:

$$\begin{aligned} 11x_1 + 9x_2 &\leq 9\,900 \quad \text{para } M_1 \\ 7x_1 + 12x_2 &\leq 8\,400 \quad \text{para } M_2 \\ 6x_1 + 16x_2 &\leq 9\,600 \quad \text{para } M_3 \end{aligned}$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Enunciado General del Problema de la Programación Lineal.- Los ejemplos anteriores nos han hecho ver que el problema de la programación lineal - consiste en encontrar un conjunto de valores X_i ($i = 1, 2, \ldots \ldots n$), que optimicen, esto es, maximicen o minimicen a una función objetivo de la forma:

$$Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

sujeta a las restricciones lineales:

$$x_j \geq 0 \qquad j = 1, 2, \ldots, n$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \quad i = 1, 2, \ldots, m$$

en donde las a_{ij}, b_i, c_j son constantes dadas, $b_i \geq 0$ y $m \leq n$

Ejemplo.

Para producir una cierta aleación de acero con propiedades específicas se requiere que por cada tonelada de materia prima se use por lo menos una libra de manganeso, 3 de silicón y no más de seis libras de cobre. La materia prima se obtiene de dos bancos de hierro cuyas composiciones de esos elementos por toneladas es: el material del Banco 1 contiene 1 libra de manganeso 2 de silicon y 3 de cobre; el material del Banco 2 - contiene una libra de manganeso, 4 de silicón y 7 de cobre. Si los costos de material (incluida la transportación) es de 4 y 5 unidades monetarias por tonelada respectivamente ¿Qué cantidad de material del Banco 1 y del Banco 2 debe transportarse por unidad de materia prima usada?

Función Objetivo:

$$\text{Min } Z = 4X_1 + 5X_2$$

Sujeto a:

$$X_1 + X_2 \geq 1$$

$$2X_1 + 4X_2 \geq 3$$

$$3X_1 + 7X_2 \leq 6$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

Ejemplo.

Una planta de concreto empleada en la construcción de una determinada presa usa una mezcla de 30% de arena y 70% de grava por peso. Existen depósitos naturales en 5 lugares cercanos a la presa, cada uno con composiciones y costos de explotación y transporte diferentes. Según se muestra en la siguiente tabla.

	Depósitos				
	1	2	3	4	5
Arena	40%	20%	50%	80%	70%
Grava	60%	80%	50%	20%	30%
Costo/Ton.	\$ 150	\$ 180	\$ 100	\$ 125	\$ 200

Por cada tonelada de concreto producida ¿Cuántas toneladas de cada uno de los depósitos se deben usar, de tal manera que se minimicen los costos?

$$\min \quad Z = 150X_1 + 180X_2 + 100X_3 + 125X_4 + 200X_5$$

Sujeto a:

$$0.4X_1 + 0.2X_2 + 0.5X_3 + 0.8X_4 + 0.7X_5 = 0.3$$
$$0.6X_1 + 0.8X_2 + 0.5X_3 + 0.2X_4 + 0.3X_5 = 0.7$$
$$X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 = 1$$

$$X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 \geq 0$$

Ejemplo.

Un consorcio de empresas constructoras tiene 5 bulldozer en Mexicali, 4 en Mérida y 8 en Monterrey. Para llevar a cabo obras en Tepic necesitan 6, para Minatitlán 2 y para Durango 9. ¿Desde donde deben enviarlos para que el costo de transportación sea mínimo?

Planteamiento del problema de programación lineal.

Sea:

C_{ij} = costo de transportar un bulldozer de la obra i a la obra j.

X_{ij} = número de buldozer transportados de la obra i a la obra j.

r_j = número de unidades requeridas en la ciudad j

d_i = número de unidades disponibles en la ciudad i

$$\min \quad Z = \sum_{i,j} c_{ij} x_{ij}$$

Sujeto a:

$$\sum_i x_{ij} = r_j \qquad j = 1, 2, \ldots n \qquad \text{(requerimientos)}$$

$$\sum_j x_{ij} = d_i \qquad i = 1, 2, \ldots n \qquad \text{(disponibilidad)}$$

$$x_{ij} \geq 0$$

Ejemplo.

Considere un problema de mezcla de productos dentro del contexto de una refinería de petróleo simplificada. Suponga que la refinería desea combinar cuatro componentes de petróleo en tres grados de gasolina: A, B y C. El problema consiste en determinar la mezcla de los cuatro componentes - que maximicen las utilidades.

La disponibilidad y costo de los cuatro componentes es:

Componente	Cantidad Max. disponible/día	Costo por Barril
1	3000	3
2	2000	6
3	4000	4
4	1000	5

Para mantener la calidad requerida de cada grado de gasolina es necesario especificar cierto porcentaje máximo o mínimo de los componentes en cada MEZCLA. Estos se dan enseguida con el precio de venta para cada grado.

Grado	Especificaciones	Precio de Venta/barril
A	No más del 30% de 1 No menos del 40% de 2 No más del 50% de 3	$ 5.50
B	No más del 50% de 1 No menos del 10% de 2	4.50
C	No más del 70% de 1	3.50

Suponga que los otros flujos de dinero son fijos de manera que la ganancia a maximizar es el total de las ventas menos el costo de los componentes.

Sea x_{ij} = La cantidad del componente j utilizada en la gasolina de grado i ($i = A, B, C$; $j = 1, 2, 3, 4$)

El beneficio total está dado por:

$$
\begin{aligned}
z = {} & 5.5(x_{A1} + x_{A2} + x_{A3} + x_{A4}) + 4.5(x_{B1} + x_{B2} + x_{B3} + x_{B4}) \\
& + 3.5(x_{C1} + x_{C2} + x_{C3} + x_{C4}) - 3(x_{A1} + x_{B1} - x_{C1}) \\
& - 6(x_{A2} + x_{B2} + x_{C2}) - 4(x_{A3} + x_{B3} + x_{C3}) - 5(x_{A4} + x_{B4} + x_{C4})
\end{aligned}
$$

Las restricciones de disponibilidad de los componentes:

$$
\begin{aligned}
x_{A1} + x_{B1} + x_{C1} &\leq 3000 \\
x_{A2} + x_{B2} + x_{C2} &\leq 2000 \\
x_{A3} + x_{B3} + x_{C3} &\leq 4000 \\
x_{A4} + x_{B4} + x_{C4} &\leq 1000
\end{aligned}
$$

Restricciones de mezcla para la gasolina grado A:

$x_{A1} \leq 0.3\, x_A$; $x_{A1} \leq 0.3(x_{A1} + x_{A2} + x_{A3} + x_{A4})$

$x_{A2} \geq 0.4\, x_A$; $x_{A2} \geq 0.4(x_{A1} + x_{A2} + x_{A3} + x_{A4})$

$x_{A3} \leq 0.5\, x_A$; $x_{A3} \leq 0.5(x_{A1} + x_{A2} + x_{A3} + x_{A4})$

Para la gasolina grado B:

$x_{B1} \leq 0.5\, x_B$; $x_{B1} \leq 0.5(x_{B1} + x_{B2} + x_{B3} + x_{B4})$

$x_{B2} \geq 0.1\, x_B$; $x_{B2} \geq 0.1(x_{B1} + x_{B2} + x_{B3} + x_{B4})$

Para la gasolina grado C:

$x_{C1} \leq 0.7\, x_C$; $x_{C1} \leq 0.7(x_{C1} + x_{C2} + x_{C3} + x_{C4})$

La presentación adecuada de estas ecuaciones, como un modelo de programación lineal, resulta:

$$\text{Max } Z = 2.5\,x_{A1} - 0.5\,x_{A2} + 1.5\,x_{A3} + 0.5\,x_{A4}$$
$$+ 1.5\,x_{B1} - 1.5\,x_{B2} + 0.5\,x_{B3} - 0.5\,x_{B4}$$
$$+ 0.5\,x_{C1} - 2.5\,x_{C2} - 0.5\,x_{C3} - 1.5\,x_{C4}$$

sujeto a:

Restricciones de disponibilidad de los componentes

$$x_{A1} + x_{B1} + x_{C1} \leq 3000$$
$$x_{A2} + x_{B2} + x_{C2} \leq 2000$$
$$x_{A3} + x_{B3} + x_{C3} \leq 4000$$
$$x_{A4} + x_{B4} + x_{C4} \leq 1000$$

Restricciones de especificaciones

$$\left.\begin{array}{l} 0.7\,x_{A1} - 0.3\,x_{A2} - 0.3\,x_{A3} - 0.3\,x_{A4} \leq 0 \\ -0.4\,x_{A1} + 0.6\,x_{A2} - 0.4\,x_{A3} - 0.4\,x_{A4} \geq 0 \\ -0.5\,x_{A1} - 0.5\,x_{A2} + 0.5\,x_{A3} - 0.5\,x_{A4} \leq 0 \end{array}\right\} \text{Gasolina A}$$

$$\left.\begin{array}{l} 0.5\,x_{B1} - 0.5\,x_{B2} - 0.5\,x_{B3} - 0.5\,x_{B4} \leq 0 \\ -0.1\,x_{B1} + 0.9\,x_{B2} - 0.1\,x_{B3} - 0.1\,x_{B4} \geq 0 \end{array}\right\} \text{Gasolina B}$$

$$0.3\,x_{C1} - 0.7\,x_{C2} - 0.7\,x_{C3} - 0.7\,x_{C4} \leq 0 \quad \} \text{ Gasolina C}$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad , i = A, B, C \; ; \; j = 1, 2, 3, 4$$

BIBLIOGRAFIA

Autor	Título y Editorial
Alejandro González Cueto José Luis Guerra Francisco J. Jauffred Mercado Alberto Moreno Bonett Sergio Zúñiga Barrera	Ingeniería de Sistemas Cámara Nacional de la Industria de la Construcción 1971
Francisco J. Jauffred M. Alberto Moreno Bonett y Jesús Acosta Flores	Métodos de Optimización Representaciones y Servicios de Ingeniería 1971
Juan Prawda W.	Métodos y Modelos de Investigación de Operaciones, Vol. I. Editorial Limusa, 1976
Ackoff, R.S. y Sasieni, M.W.	Fundamentals of Operations Research, John Wiley and Sons, 1968
Hillier, F.S. Lieberman, G.J.	Introduction to Operations Research Holden-Day, Inc. 9a. impresión Sept. 1972
Wagner, M.H.	Principles op Operations Research Prentice-Hall 1969

centro de educación continua
división de estudios superiores
facultad de ingeniería, unam

INGENIERIA DE SISTEMAS

PROGRAMACION DINAMICA

DR. SERGIO FUENTES MAYA

JUNIO, 1978

Palacio de Minería Calle de Tacuba 5, primer piso. México 1, D. F.

La programación dinámica es una técnica de optimización usada para resolver problemas con decisiones en serie e interrelacionadas. La filosofía de esta técnica queda resumida diciendo que parte por resolver una porción pequeña del problema hasta encontrar su solución óptima. A continuación, y en forma gradual, aumenta la complejidad del problema y determina la solución óptima usando la información de la parte del problema ya resuelto hasta que finalmente determina la solución óptima del problema completo.

A diferencia de otras técnicas de optimización conocidas, como la programación lineal, no lineal, entera, y otras, no existe un modelo matemático estandar que represente al problema de programación dinámica. Sin embargo debemos establecer que la técnica de programación dinámica es una estratagia general para resolver problemas de optimización.

1. El problema de trayectoria óptima en una red

Considere un conjunto de puntos $P_1, P_2, \ldots, P_N$ y una matriz de costos $C = [c_{ij}]$ donde c_{ij} es el costo de transporte del punto P_i al punto P_j y suponga que este costo es no negativo. Entonces se desea determinar el costo mínimo de ir del punto P_i al punto P_N usando todas las posibles interconexiones entre estos puntos. Asimismo se desea establecer la sucesión de movimientos para este óptimo.

Una manera de proceder a resolver este problema siguiendo la filosofía de la programación dinámica consiste en definir la variable de estado $f(i)$ $(i=1,\ldots,n)$ denominada el costo mínimo de ir al punto P_i al punto P_N. Debido al significado de esta variable se observa que se satisface

$$f(i) = \min_j \{c_{ij} + f(j)\}$$

denominada la ecuación de optimalidad ó recursión de Bellman.

La determinación del valor de las variables $f(i)$ $i=1,\ldots,n$, puede efectuarse usando el siguiente procedimiento:

Sea $f_n(i)$ el costo mínimo de ir del punto P_i al punto P_N en a lo más n pasos.

Entonces se observa que los valores de $f_1(i)$ $i=1,\ldots,N$ son fácilmente calculados de la matriz de costo C y que para $n \geq 2$, se tiene recursivamente que

$$f_n(i) = \max_j \{c_{ij} + f_{n-1}(j)\}$$

Finalmente se tiene que el valor de cada $f(i)$ es simplemente el mínimo de los valores $f_n(i)$, donde $n=1,2,\ldots$.

Un aspecto importante en la evaluación de las variables $f(i)$ $(i=1,\ldots,N)$ es que a lo más necesitaremos determinar unicamente los valores de $f_1(i)$, $f_2(i),\ldots,$ y $f_{N-1}(i)$. (Esto se puede demostrar rigurosamente usando las suposiciones del problema).

Ejemplo. Suponga que se tienen los puntos P_1, $P_2,\ldots,P_5$ con una matriz de costos dada por

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 20 & 5 & \infty & \infty \\ 20 & 0 & 10 & 8 & 20 \\ 5 & 10 & 0 & \infty & 40 \\ \infty & 8 & \infty & 0 & 6 \\ \infty & 20 & 40 & 6 & 0 \end{bmatrix}$$

Usando el método de programación dinámica descrito anteriormente se tiene que los valores de las variables $f_n(i)$, donde $n=1,2,3,4$; $i=1,2,3,$ y las correspondiente decisiones óptimas pueden resumirse como

$i \rightarrow$	1	2	3	4	5
$f_1(i)$	∞	20	40	6	0
Decisión	5	5	5	5	5
$f_2(i)$	40	14	30	6	0
Decisión	2	4	2	4,5	5
$f_3(i)$	34	14	24	6	0
Decisión	2	2,4	2	4,5	5
$f_4(i)$	29	14	24	6	0
Decisión	3	2,4	2,3	4,5	5
$f_5(i)$	29	14	24	6	0
Decisión	3	2,4	2,3	4,5	5

El cálculo de los valores $f_1(i)$ $i=1,\ldots,5$ es inmediato de la matriz C. Por otra parte el cálculo de $f_2(i)$ puede efectuarse sumando la hilera de valores $f_1(i)$ a cada hilera de la matriz c para obtener

$c_{ij} + f_{ij}$

		1	2	3	4	5	Min
	1	∞	40	45	∞	∞	40
	2	∞	20	50	14	20	14
i	3	∞	30	40	∞	40	30
	4	∞	28	∞	6	6	6
	5	∞	40	80	12	0	0

de donde para cada i es posible calcular el valor mínimo de c_{ij} + $f_1(j)$ para toda j=1,...,5. Procediendo de manera semejante es posible calcular $f_3(i)$, $f_4(i)$ y $f_5(i)$, i=1,2,...,5.

De la tabla se resume que los valores de las variables f(i) son iguales a

i	1	2	3	4	5
f(i)	3	4	2	5	5

y política óptima de movimiento de un punto i al punto N=5 esta resumida por

i	1	2	3	4	5
Decisión	2	3	4	5	5

2. Problema de inversiones bajo incertidumbre

Suponga que se disponen de 1000 pesos y se tienen dos oportunidades de inversión (A y B) al principio de cada uno de los siguientes tres años. En el caso de la inversión A se puede perder el monto de la inversión (con cierta probabilidad) o bien obtener 2000 pesos (una ganancia de 1000 pesos) al final del año. En el caso de la inversión B se pueden recuperar los 1000 pesos (con cierta probabilidad) ó bien se pueden obtener 2000 pesos al final del año. Las probabilidades de los eventos de inversión son

Inversion	Se obtienen	Probabilidad
A	0 2000	0.4 0.6
B	1000 2000	0.9 0.1

Por otra parte se supone que a lo más un solo tipo de inversión se puede tener en cada año y que la cantidad invertida tiene que ser de 1000 pesos. Otra cantidad disponible de dinero despues de invertir al principio del año se supone que permanece igual.

a. Use programación dinámica para determinar la política de inversión que maximiza la cantidad de dinero esperado que se tendrá al final de los tres año.

b Determine la política de inversión que maximiza la probabilidad de tener al menos 2000 pesos al final del año 3.

Solución. Considere primeramente los parámetros

X_n decisión de inversión en el año n, esto es, $x_n=0$ (no se invierte) ó $X_n=A,B$, (se invierte en A ó B).

S cantidad de dinero disponible al principio de cada año.

$f_n(S,X_n)$ máxima ganancia esperada que puede obtenerse al final del año 3 dado que al principio del año n se dispone de S pesos y se tomo la decisión x_n.

$f_n^*(S)$ máxima ganancia esperada que puede obtenerse al final del año 3 dado que se disponen de S pesos al principio del año n.

Entonces, usando la filosofia de la programación dinámica podemos establecer que

$$f_n^*(S) = \max \{f_n(S,X_n) \; ; \; X_n=0,A,B\}$$

Asimismo, para valores de $S \geq 1000$ se tiene que

$$f_n(S,X_n) = \begin{cases} f_{n+1}(S) & X_n=0 \\ 200 + 0.4f^*_{n+1}(S-1000)+0.6f^*_{n+1}(S+1000) & X_n=A \\ 100 + 0.9\, f^*_{n+1}(S) + 0.1f^*_{n+1}(S+1000) & X_n=B \end{cases}$$

Note que $f_n(S,X_n)=0$ si $S<1000$ y que $f_4^*(S)=4$ para toda S. Usando las formulas recursivas podemos establecer que para el principio del año 3 se tiene directamente que

S	$f^*_3(S)$	X^*_3
$0 \leq S < 1000$	0	0
$1000 \leq S \leq 3000$	200	A

De donde para el año 2 se tiene que

X_2 / S	$f_2(S, X_2)$			$f^*_2(S)$	X^*_2
	0	A	B		
$0 \leq S < 1000$	0	-	-	0	0
$1000 \leq S < 2000$	200	320	300	320	A
$2000 = S$	200	400	300	400	A

y consecuentemente para el año 1 se tiene

x_1 / S	$f_1(S, X_1)$			$f^*_1(S)$	X^*_1
	0	A	B		
1000	320	440	428	440	A

En resumen, la política óptima es invertir en A cada año y la máxima ganancia esperada es de 440, ó equivalentemente la máxima cantidad obtenida al final del año 3 puede ser 1440.

b. Sean x_n y s como el la parte a.

$f_n(s,x_n)$ máxima probabilidad de tener al menos 2000 pesos al final del año 3 dado que se tienen s pesos al principio del año n y que la decisión de inversión en ese año es x_n.

$f_n^*(s)$ máxima probabilidad de tener al menos 2000 pesos al final del año 3 dado que se disponen de s pesos al principio del año n.

De manera semejante a la parte a la programación dinámica establece que

$$f_n^*(s) = \max \{f_n(s,x_n) \ ; \ x_n=0,A,B\}$$

Asimismo, $f_n(s,x_n)=0$ si $0\leq s<1000$ y

$$f_n(s,x_n) = \begin{cases} f_{n+1}^*(s) & x_n=0 \\ 0.4\ f_{n+1}^*(s-1000) + 0.6f_{n+1}^*(s+1000) & x_n=A \\ 0.9\ f_{n+1}^*(s) + 0.1\ f_{n+1}^*\ (s+1000) & x_n=B \end{cases}$$

cuando $s\geq 1000$. Por otra parte observe que

$$f_4^*(s) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0\leq s<2000 \\ 1 & \text{si } 2000\leq s\leq 3000 \end{cases}$$

Usando las formulas anteriores podemos establecer que para el año 3 se tiene

x_3 / s	$f_3(s,x_3)$			$f_3^*(s)$	x_3^*
	0	A	B		
$0 \leq s < 1000$	0.0	-	-	0.	0
$1000 \leq s < 2000$	0.0	.6	.1	.6	A
$s = 2000$	1.0	.6	1.0	1.0	0,B

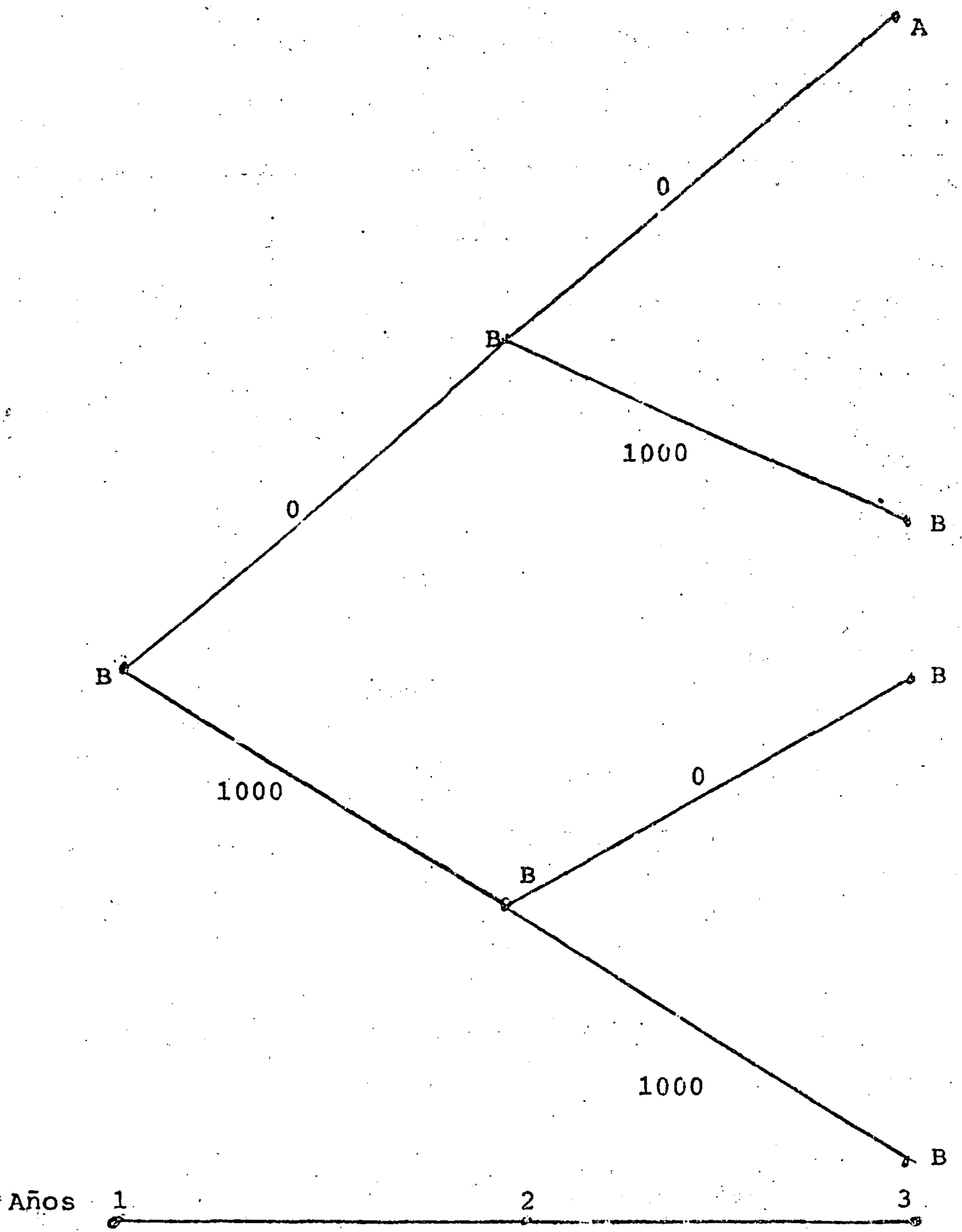
y semejantemente para el año 2 se tiene

x_3 / s	$f_2(s,x_2)$			$f_2^*(s)$	x_2^*
	0	A	B		
$0 < s < 1000$	0.0	-	-	0.0	0
$1000 < s < 2000$	0.6	0.6	0.64	0.64	B
$s = 2000$	1.0	0.84	1.0	1.0	0,B

Finalmente para el año 1 se tiene que

x_1 / s	$f_1(s\ x_1)$			$f_1^*(s)$	x_1^*
	0	A	B		
1000	0.6	0.6	0.676	0.676	B

En resumen, se tiene que la máxima probabilidad de tener al menos 2000 pesos al final del año 3 es igual a 0.676. Si la siguiente política de inversión se efectúa.



Los números en los arcos indican la ganancia en la inversión indicada en el nodo.

3. Problemas de producción e inventario

Considere una industria que debe satisfacer las siguientes demandas de toneladas de plástico en los próximos 12 meses.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
30	60	100	200	300	325	275	125	100	45	150	200

Para satisfacer esta demanda la industria puede producir en cada mes hasta 650 toneladas de plástico siguiendo la función de costos de producción

$$c(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x=0 \\ 650 + 150x & \text{si } x>0 \end{cases}$$

Por otra parte, se puede almacenar material de un periodo a otro a un costo unitario de 2 pesos. Finalmente, la industria desea determinar su política de producción e inventarios en cada mes que le proporcione costo mínimo.

El problema descrito es un caso especial del modelo de producción e inventario

$$\text{Min} \sum_{i=1}^{n} c_i(x_i) + h_i(y_i)$$

$$x_i + y_{i-1} - y_i \geq d_i \qquad i=1,\ldots,n$$

donde

$c_i(x_i)$	Costo de producir x_i unidades en el mes x_i.
$h_i(y_i)$	Costo de tener y_i unidades de inventario en el mes i.
d_i	demanda de productos en el mes i.

En relación a la formulación de este tipo de problemas es conveniente hacer notar que la solución a mano es difícil debido al número de cálculos que deben realizarse, sin embargo existen paquetes de computadora como el propuesto en:

Optimization Techniques with Fortran

de J. L. Kuster y J. H. Mize (Mc Graw- Hill, 1973). En particular, el problema descrito anteriormente se ha resuelto usando un programa de este libro y se han obtenido los siguientes resultados:

centro de educación continua
división de estudios superiores
facultad de ingeniería, unam

"INGENIERIA DE SISTEMAS"
Aplicado a la Planeación y a la Administración

MODELOS DINAMICOS DE FORRESTER

ING. JOSE LUIS PATIÑO DONNADIEU

Junio de 1978

Palacio de Minería Calle de Tacuba 5, primer piso. México 1, D. F.

INTRODUCCION.

El propósito de las presentes notas, es el de hacer una breve descripción de los diferentes aspectos conceptuales empleados en Modelos Dinámicos de Simulación elaborados por JAY W. FORRESTER; recurriendo primeramente a definiciones y conceptos de caracter básico en un entorno de caracter sistémico, para después puntualizar las aplicaciones y uso de la simulación, ilustrada mediante la exposición de un ejemplo.

ANTECEDENTES.

Para poder estudiar el comportamiento de un sistema, ya sea en el diseño o en el análisis, el primer paso que debemos dar es el de representarlo por medio de un modelo, (modelo= sustituto de algún equipo o sistema real) teniendo en cuenta que no existen modelos únicos para representar a un mismo sistema real, por depender no solo de la persona que lo elabore, si no de la simplicidad y apego a la realidad (calidad). Por lo tanto puede quedar establecido que los atributos de cualquier modelo son función de la imaginación y creatividad del diseñador.

Los modelos pueden ser clasificados de muy diversas maneras según se ilustra en la figura 1, sin embargo, el tratamiento que debe darseles en Ingeniería de Sistemas difiere grandemente al de otras disciplinas de la ciencia. Por ejemplo, en la Física el modelo es casi un fin en si mismo, ya que el objetivo que se persigue es que en él se consideren tantos hechos como sea posible.

Por otro lado, en Ingeniería de Sistemas, el objetivo es el de optimizar el comportamiento de un sistema y, por lo tanto, el modelo construido debe permitir que el número de soluciones alternas para un problema específico se multipliquen para su posterior selección. En el caso de sistemas complejos, sobre todo del tipo dinámico, la solución analítica para el modelo establecido no es sencilla, y en algunos casos ni siquiera posible, teniendose que recurrir al uso de computadoras electrónicas.

A este respecto el tema que nos ocupa es el de modelos dinámicos que son resueltos mediante la técnica numérica que se denomina Simulación Digital. En la cual no se trata de obtener soluciones analíticas de problemas sino de seguir el comportamiento numérico del conjunto de elementos representativos de un sistema a lo largo del tiempo estando previamente definidas sus interacciones. En general se puede decir que la simulación utiliza al modelo como un laboratorio en el cual se pueden probar diferentes soluciones y adoptar la más conveniente para diferentes objetivos.

CLASIFICACION DE MODELOS (FORRESTER).

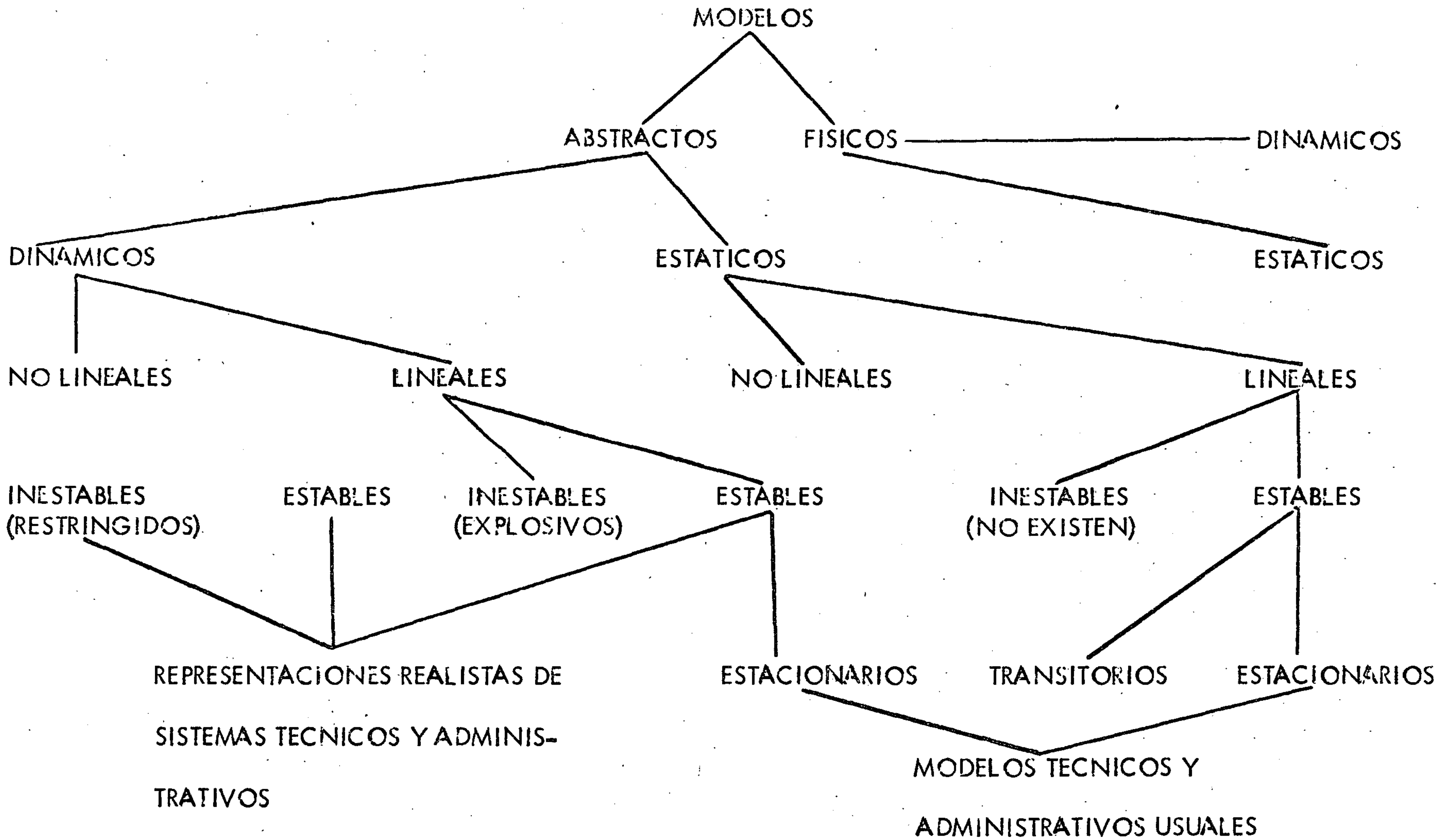


FIG. 1

SIMULACION DE MODELOS DINAMICOS DE SISTEMAS CONTINUOS

El uso de la técnica de simulación de Sistemas Contínuos (Sistemas Contínuos son aquellos en que los cambios son predominantemente "suaves" y su descripción está generalmente dada en forma de ecuaciones contínuas), existen eventos endógenos que son aquellos generados por el modelo en si y eventos exógenos que son los estímulos al modelo que provienen del mundo exterior. El límite entre este mundo exterior y el sistema depende del modelo utilizado y los fines del mismo, ya que en algunos casos los elementos pueden considerarse como externos y en otros como parte del sistema; es por ello que para la aplicación de la simulación a diferentes tipos de estudios, se hace necesario considerar las características que debe tener el modelo dinámico en cuestión.

CARACTERISTICAS DE UN MODELO DINAMICO DE SIMULACION

Las características de un modelo dinámico de Simulación deben ser tales que permitan el logro de varios objetivos y contar con:

- Capacidad para describir cualquier afirmación de relación causa-efecto que se quiera incluir.
- Simplicidad en su naturaleza matemática.
- Facultad de manejar las interacciones continuas, en el sentido de que cualquier discontinuidad artificial introducida en los intervalos de tiempo de solución no influya en los resultados.
- Capacidad de generar cambios discontínuos en las decisiones cuando sean requeridos.
- Elasticidad para extenderse a gran cantidad de variables sin sobrepasar los límites prácticos de la computadora.
- Tener similitud en las terminologías cuando intervengan varias disciplinas.

Sin embargo no basta saber cuales son las características que debe reunir un Modelo Dinámico de Simulación, ya que la pregunta inmediata es como satisfacer estos requisitos.

Todas las características anteriores pueden ser satisfechas con lo que se denomina Estructura de reservas o niveles interconectados por flujos controlados; estructura que en su mayor o menor simplicidad estará definida a partir de los elementos constitutivos del Sistema Dinámico por simular.

ELEMENTOS DE UN SISTEMA DINAMICO

Los elementos que debe comprender un sistema dinámico para quedar establecido son:

1.- Límites o Fronteras del Sistema

2.- Elementos estructurales básicos dentro de los límites del sistema.

3.- Niveles que alcanzarán las variables debido a las acumulaciones provocadas por circuitos de retroalimentación.

4.- Actividades dentro de los circuitos de retroalimentación, formuladas a partir de considerar:

- Las metas que se pretenden alcanzar.
- Las condiciones observadas.
- Las discrepancias que se presentan.
- Las acciones correctivas para las discrepancias.

1.- LIMITES O FRONTERAS DEL SISTEMA.- Los límites deben estar establecidos de tal forma, que las interacciones del sistema se desarrollen dentro de él con su comportamiento propio; así por ejemplo si se investiga un fenómeno en particular, el sistema descrito dentro de los límites debe ser capaz de generarlo, sin perder de vista que previamente deben ser excluidos todos aquellos que son de poco interés por generar o que deben quedar fuera de los límites del sistema.

2.- ELEMENTOS ESTRUCTURALES BASICOS DENTRO DE LOS LIMITES DEL SISTEMA.

El comportamiento dinámico de un sistema está determinado por los circuitos de retroalimentación; elemento básico para su funcionamiento y definidos por dos tipos de variables, las de decisión y las de acumulación de acción. Generándose así la estructura dentro de la cual las ecuaciones o función - de decisión controlan el flujo de acciones o decisiones correctivas para obtener el nivel del sistema. Uno de los aspectos - más importantes dentro de esta estructura, es la información que se tiene acerca del nivel ya que a partir de ésta el flujo de acción es controlado.

3.- NIVELES QUE ALCANZARAN LAS VARIABLES.

En un circuito de retroalimentación, las variables de nivel - son acumulaciones o integraciones de flujos.

4.- ACTIVIDADES DENTRO DE LOS CIRCUITOS DE RETROALIMENTACION

Cualquier parte através de la estructura de un sistema, se encuentra definida alternando variables de nivel y variables de tasa, - nunca dos variables del mismo tipo.

Las variables de decisión son la descripción de la política del sistema, y determinan cómo la información disponible se convierte en acción.

Dentro de cada variable de decisión hay en forma implícita o explícita las decisiones necesarias, para alcanzar los objetivos. Una ecuación de decisión determina la discrepancia entre los objetivos y las condiciones observadas y establece en consecuencia las que resultará de la discrepancia.

Antes de introducirnos a la aplicación de la simulación, hagamos una pausa para ver los aspectos que son sumamente deseables de ser representados gráficamente mediante un diagrama que exponga las interrelaciones entre variables.

Conforme a lo que se mencionó en el inciso 4, es necesario tener una dirección entendiéndose con ello el proceso de convertir la información en acción. Al proceso de conversión lo llamaremos toma de decisión. A su vez la toma de decisión está controlada por varias políticas explícitas e implícitas de comportamiento.

El término Política será convencionalmente utilizado como regla que establece como se realizan las operaciones atraves del tiempo.

Las decisiones son las acciones tomadas en cualquier momento determinado como resultado de la aplicación de reglas de Política a condiciones particulares que prevalecen en el momento.

Si la dirección es el proceso de convertir la información en acción, entonces está claro que el éxito de la dirección dependerá en primer término de la información que se elija y como ejecutar la conversión.

El considerar estos aspectos nos muestra de inmediato la importancia de las decisiones y el flujo de información.

Cualquier estructura dada de un modelo será una red compleja de canales de información interrelacionados, que parten de varios puntos - a fin de controlar los procesos.

Por otro lado cada punto de acción del sistema está respaldado por un punto de decisión local cuyas fuentes de información llegan a otras partes del sistema. Así la información es el ingreso en un punto de toma de decisión que controla las acciones proporcionando nuevos informes.

Pero no debemos olvidar que la información acerca de las acciones no - está disponible de inmediato ya que las decisiones no responden instantáneamente a la información disponible. Se requiere tiempo para ejecutar las acciones indicadas por una función de decisión.

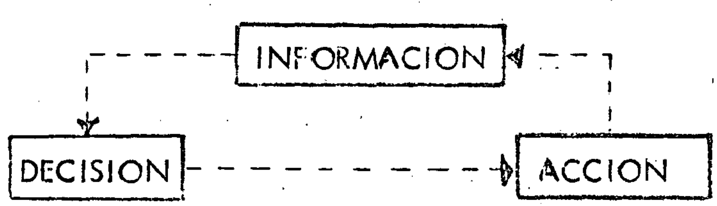


Fig. 2

De igual manera cada uno de los puntos de Acción contienen acumulaciones que se utilizan en todos sus sentidos positivos, negativos y no lineales. Es decir el egreso en un punto de acción puede ser mayor o - menor de lo que en apariencia indican los ingresos.

Cualquier Sistema no es por supuesto el simple circuito de retroalimentación de información como se ve en la figura 2.sino como se dijo en - párrafos anteriores, una estructura compleja compuesta por acumulaciones de acciones interconectados por flujos controlados a partir de decisiones, como se puede apreciar en la figura 3.

Como último punto a tratar, para pasar a las etapas de la Simulación hagamos un resumen de las ideas expuestas, enumerando la serie de - principios conceptuales que no deben dejarse pasar por alto en la integración de una estructura de Simulación.

Principio 1.- Las decisiones se encuentran siempre dentro de circuitos de retroalimentación.

Principio 2.- Los niveles son integraciones o acumulaciones de acciones.

Principio 3.- Los niveles se alteran unicamente por las tasas.

Principio 4.- Los niveles y las tasas no se distinguen por las unidades con que se miden.

Principio 5.- Las tasas no afectan a otras tasas directamente.

Principio 6.- Las tasas dependen solo de niveles y de constantes.

Principio 7.- Los niveles y las tasas deben estar alternadas.

Principio 8.- Los niveles describen completamente la condición del sistema.

Principio 9.- Solo la información conduce a una función de decisión o ecuación de tasa.

Principio 10.- Las funciones de decisión determinan las ecuaciones de tasa.

Principio 11.- La salida de información no afecta la variable de la cual se toma.

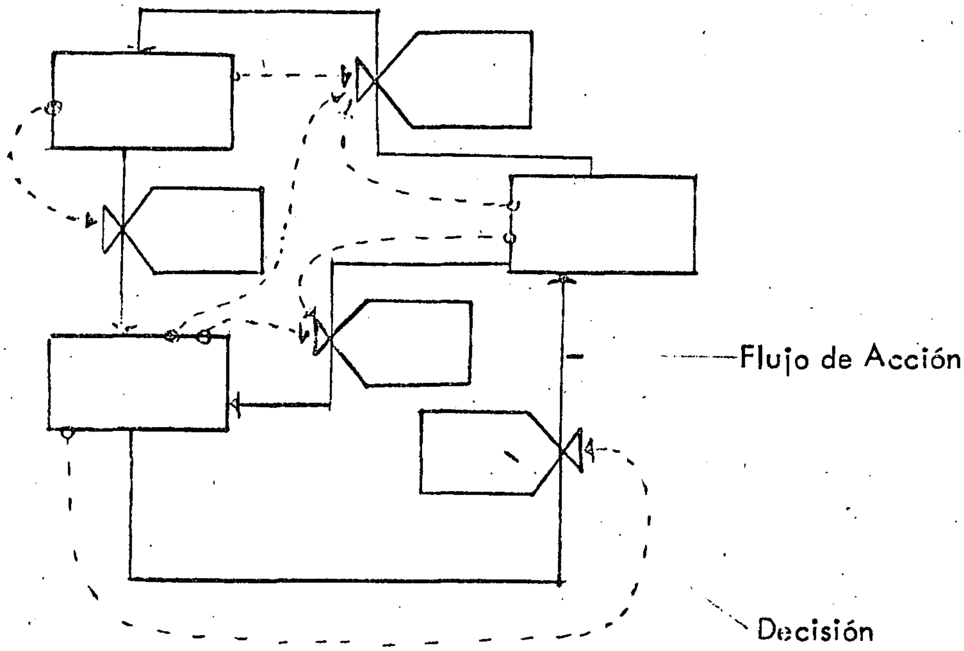
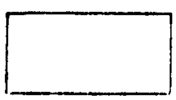
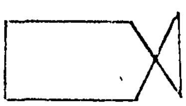


Fig.(3)

en donde:	Representa
	Nivel de acumulación de Acciones
	Tasa.- Función de Decisión
———————	Canal de Flujo
– – – – – –	Canal de Información

SECUENCIA DE ETAPAS A SEGUIR EN LA SOLUCION DE PROBLEMAS DE SIMULACION

A partir de las experiencias obtenidas en la solución de problemas de Simulación, se ha podido llegar a establecer, secuencias de etapas a seguir, que sin duda alguna son de gran ayuda.

Una de estas secuencias lógicas es la que se presenta a continuación.

1.- DEFINICION DEL PROBLEMA:

- Establecer claramente cual es el problema por solucionar
- Establecimiento de los objetivos del "Estudio"

2.- PLANEACION DEL ESTUDIO

- Amplitud del Estudio
- Limitación en tiempos y en extensión de los elementos del estudio

  (Recomendación: Evitar concentrarse en unos aspectos más que en otros).

  (Comentario: Una de las fallas más comunes en problemas de simulación, es perder el contacto con el problema real y se pretenda sacar durante el desarrollo del estudio más información de la que puede extraerse de los datos disponibles)

3.- OBTENCION DE INFORMACION Y REVISION.

Si se tiene
- . Con qué tipo de datos se cuenta
- . Confiabilidad de la Información

Si no se tiene
- . Recolección de Información
- . Proceso de la Información

4.- FORMULACION Y EVALUACION DE MODELO MATEMATICO

. Establecimiento del tipo de Modelo a ser usado

- Especificación de Componentes
- Facilidad de Programación y eficiencia de la solución con la computadora

. Revisión.

- Ver su potencialidad
- Asegurarse que representa al sistema real y puede usarse para los experimentos para los cuales fué diseñado.

5.- FORMULACION DEL PROGRAMA DE COMPUTADORA

. Elección del lenguaje de computadora que será utilizado.

. Elaboración del Programa:

Diagrama de flujo

Codificación

Pruebas de Programación (el programa debe representar al modelo propuesto)

6.- VALIDACION

- Estudio de que tanto se acercan los valores simulados de variables endógenas a los datos históricos reales.
- Observar que tan exactas son las predicciones del modelo respecto al sistema real. (valores lógicos, pruebas estadísticas).

7.- DISEÑO DE EXPERIMENTOS

- Establecimiento de experimentos con el fin de cumplir con los objetivos del estudio.
- Tomar en cuenta el costo del uso de la computadora. (Comentario: Es común que no se tiene un diseño previo de los experimentos a efectuar, se tendrá una gran cantidad de información sin saber que hacer con ella).

8.- EJECUCION DE LA SIMULACION Y ANALISIS DE RESULTADOS

- Utilización del modelo, programa de computadora y el diseño de experimentos.
- Obtener las respuestas:

  Tomar decisiones a partir de los resultados obtenidos.

- Presentación adecuada (tabularse o graficarse) de los resultados para su uso y aplicación.

SISTEMA DE ECUACIONES

Para describir cualquier estructura de simulación,se debe tener un adecuado sistema de ecuaciones compatible con las características de un modelo dinámico de simulación vistas con anterioridad.

Fundamentalmente,el sistema de ecuaciones consiste de dos tipos de ecuaciones que corresponden a los niveles y a las tasas,escritas a partir de convenciones que establecen como deben evaluarse .

Como estamos tratando con un sistema de ecuaciones que controla las interacciones cambiantes de variables como avances del tiempo,es necesario que las ecuaciones sean valuadas periódicamente conforme a una secuencia con el fin de conocer los estados sucesivos del sistema.Pero en cada momento puede haber una secuencia particular de computos condicionada por el sistema de ecuaciones.

La secuencia que utilizaremos es la que se muestra en la figura 4 , en donde el avance del tiempo se ha roto en dos intervalos iguales DT,que por definición debe ser lo bastante corto, de tal forma que puedan aceptarse a las tasas como constantes através del intervalo como una aproximación satisfactoria a las tasas continuamente variables del sistema real .

esta consideración implica que las decisiones tomadas al comienzo del intervalo no seran afectadas por ningún cambio que ocurra en el transcurso de dicho intervalo.

Al final del intervalo se calculan nuevos valores de los niveles, y de éstos se determinen nuevas decisiones (tasas) para el próximo intervalo .

Como se puede observar en la figura 4 a los sucesivos momentos se les ha dado la denominación J,K y L.El momento K se utiliza para determinar el presente.

El intervalo JK es utilizado para aquel que ha tenido lugar recientemente, y la información acerca de él y de tiempos anteriores se encuentra disponible .

Ninguna información de tiempo posterior a K,como pudiera ser el intervalo KL o el tiempo L,o más alla,podrá estar disponible para utilizarla en una ecuación suscrita al tiempo presente K.

Es importante aclarar que los pronósticos que se tengan hechos no son información para el futuro, sino conceptos presentes sobre el porvenir,fundados en la información que se encuentra al alcance en el presente y en el pasado .

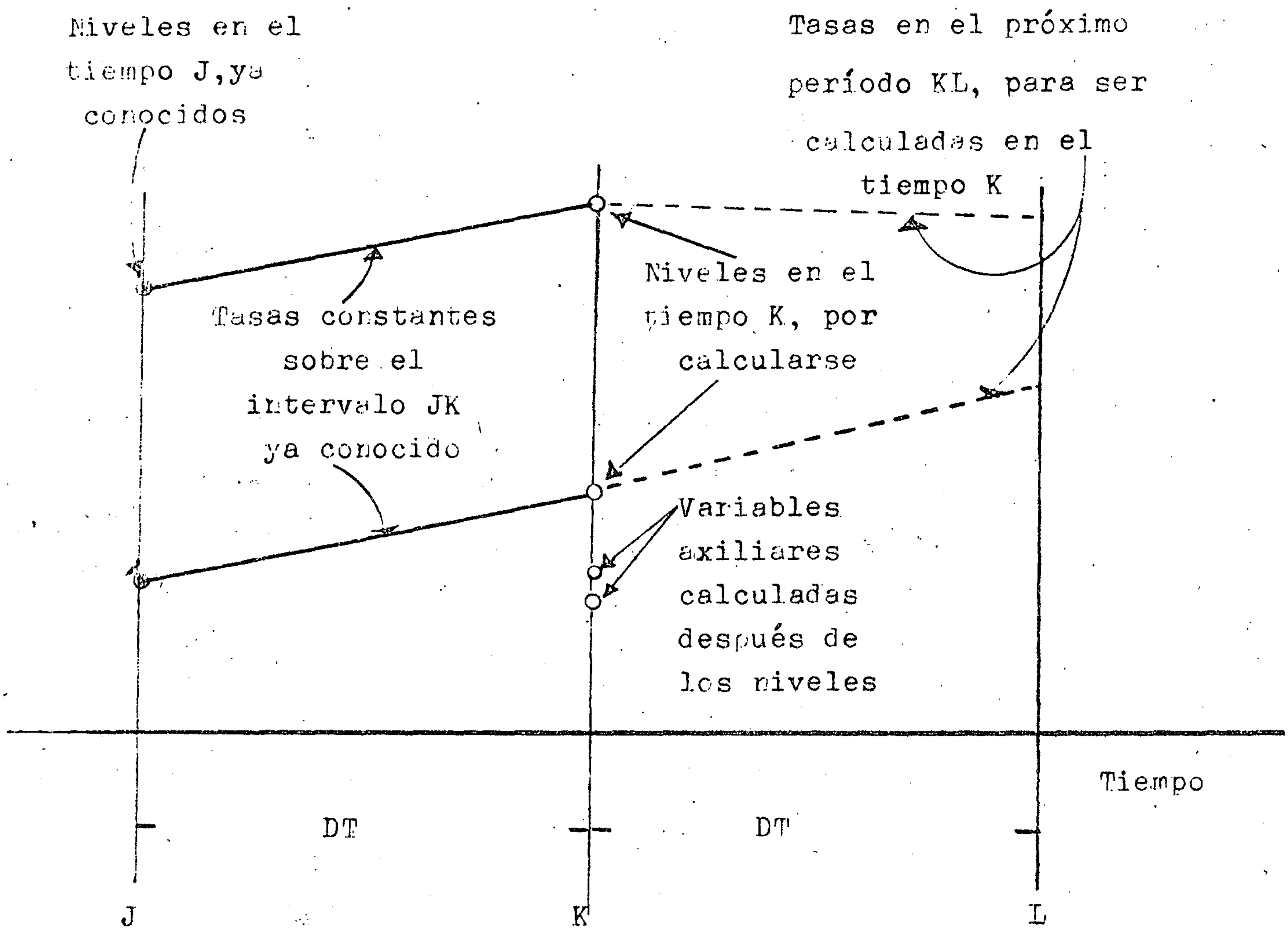


Figura 4

J= Momento pasado

K= Momento presente

L= Momento futuro

<u>SECUENCIA DE CALCULO PARA EL TIEMPO K</u>

Regresando a la figura 4 se puede establecer que :

- Las ecuaciones deben ser estimadas en los momentos que se encuentran separados por intervalos de solución DT.
- Las ecuaciones deben expresarse en función de las etapas de tiempo generalizadas, J,K y L, utilizando la convención de que K representa el momento presente en el cual se evaluan las ecuaciones .
- Las ecuaciones de nivel muestran cómo obtener niveles en el tiempo presente K basados en niveles de tiempo pasado J, y en tasas sobre el intervalo JK.
- En el tiempo K, cuando son evaluadas las ecuaciones de nivel, se encuentra disponible la totalidad de la información necesaria pues ha sido transportada hacia adelante, desde la etapa de tiempo precedente .
- Las ecuaciones de decisión (tasa) se estiman en el tiempo presente K después de que se han evaluado las ecuaciones de nivel. Por lo que las ecuaciones de tasa como ya se dijo antes , pueden tener disponibles como ingresos, a los valores presentes de los niveles en K.
- Los valores determinados por las ecuaciones de tasa (decisiones) indican las tasas representativas de las <u>acciones</u> que se tomaran en el intervalo próximo KL .

- Después de la evaluación de los niveles correspondientes al tiempo K y de las tasas para el intervalo KL, las posiciones J,K y L se muevan un intervalo de tiempo hacia la derecha provocando con esto que los niveles K recientemente calculados son suscritos como niveles J. Las tasas en KL se convierten las tasas JK.El tiempo K presente, avanza un intervalo de longitud DT.

- Después se puede repetir toda la secuencia de computación a fin de obtener un nuevo estado del sistema en otro momento que es un DT más tarde al estado previo .

SIMBOLOGIA PARA LAS ECUACIONES

Para representar las variables en las ecuaciones del modelo deben elegirse simbolos de tal forma que se tenga la mayor significación posible, con el fín de que se recuerde la terminologia habitualmente usada y concordar con la elección restringida de los carac teres disponibles sobre la impresora de entradas a la computadora .

SUSCRIPCION DEL TIEMPO EN LAS ECUACIONES

A causa de las limitaciones del equipo impresor de la computadora se tiene el problema de no poder utilizar subindices ni exponentes,elementos que son indispensables para precisar el tipo de ecuación ; sin embargo debe adoptarse una forma convencional para indicar la notación de tiempo y poder salvar este obstáculo. Para resolver esta dificultad son utilizadas una o dos letras mayúsculas siguiendo a una variable y separadas por un punto .

Así por ejemplo, el nivel de precio tradicional en el tiempo pasado J sería PLT.J,y en el tiempo presente K se escribiría PLT.K .

Obsérvese que la letra sola se utiliza como subfijo de tiempo porque los válores de los niveles se calculan en los instantes separados de tiempo J y K, respectivamente.Por lo tanto los niveles tendrán una sola letra para la notación del tiempo .

Por lo contrario, las tasas se indicaran con dos letras. Por ejemplo la tasa S de ventas del producto cosechado que hubo durante el intervalo de J a K se escribirá S. JK, y la tasa que exístira en los intervalos siguientes S.KL .

Las constantes carecen de notación de tiempo, ya que no cambian de un intervalo a otro . Así la demora GD (tiempo que tarda en crecer el cultivo o producto) se indicará GD

TIPOS DE ECUACIONES

Las ecuaciones de nivel y tasa han quedado establecidas al describir la naturaleza fundamental de la estructura de un modelo dinámico. Ahora se hara referencia a otros tipos de ecuaciones convenientes pero que no contribuyen con características dinámicas nuevas para el modelo .Siendo estos :

- Ecuaciones Auxiliares
- Ecuaciones Suplementarias
- Ecuaciones de Valor Inicial

ECUACIONES AUXILIARES

Por lo general, una ecuación de tasa se vuelve muy compleja si se expresa a partir de dos o más niveles con significado independiente, teniendo a menudo que descomponerse en ecuaciones auxiliares .

Las ecuaciones auxiliares son de gran ayuda para el mantenimiento de la formulación del modelo en estrecha correspondencia con el sistema real, ya que puede utilizarse con el objeto de definir en forma separada los factores que entran en la toma de decisiones (tasa) .

Como su nombre lo indica, las ecuaciones auxiliares colaboran en el proceso de simulación, pero son incidentales, ya que pueden sustituirse unas por otras, mediante el remplazo algebraico, a costa de incrementar la complejidad de las ecuaciones de tasa,y oscureciendo la naturaleza matemática del modelo .
Las ecuaciones auxiliares se evalúan en el tiempo presente K, pero después de las ecuaciones de nivel para el tiempo K,porque al igual que las tasas de las cuales forman parte, utilizan los valores presentes de los niveles, y deben evaluarse antes de las ecuaciones de tasa pues sus valores se obtienen para ser sustituidos en estas ultimas.
A diferencia de las ecuaciones de nivel y de tasa, las ecuaciones auxiliares no pueden evaluarse en orden arbitrario, ya que algunas ocasiones pueden ser componentes de otras que integran cadenas que impliquen un orden.

ECUACIONES SUPLEMENTARIAS

Se les utiliza con el objeto de definir las variables que realmente no forman parte de la estructura del modelo pero que surgen en la impresión y representación gráfica de los valores de interés acerca del comportamiento de éste .

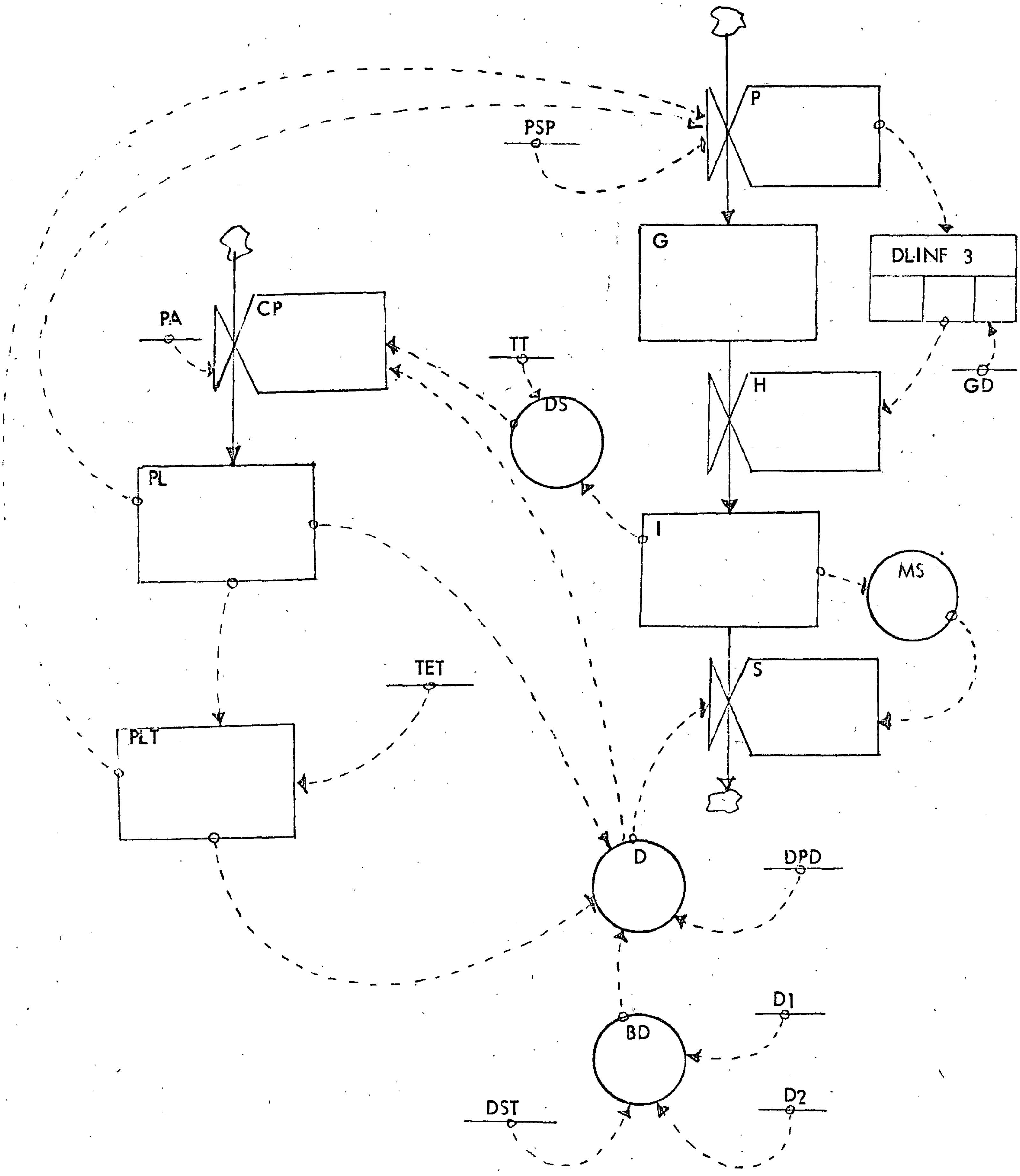
ECUACIONES DE VALOR INICIAL

Se utilizan para definir los valores iniciales de todos los niveles que deben darse antes de que pueda comenzar el primer ciclo de computación de ecuaciones del modelo. Se usan en principio con el fin de computar los valores de algunas constantes a partir de otras constantes.
Las ecuaciones de valor inicial se evalúan solamente una vez y antes de que empiece la simulación del

EJEMPLO DE APLICACION

En un pequeño estado agrícola, donde se tienen problemas de fluctuaciones en el mercado de productos agrícolas, se dispone de un modelo formulado, con características generales el cual contempla la estructura de varios productos y solo los parámetros son diferentes de un producto a otro. ¿Se desea conocer, la causa del por qué de estas fluctuaciones en algunas de las cosechas y gran estabilidad en otras?

DIAGRAMA CAUSAL



INDICE DE VARIABLES

SIGLAS	SIGNIFICADO	UNIDADES
PSP	Sensibilidad de la siembra al precio	(Kg/semana)/($/Kg)
P	Tasa de siembra	(Kg/semana)
G	Siembra cultivándose	(Kg)
GD	Tiempo que tarda en crecer el cultivo o producto (demora del cultivo)	(Semanas)
H	Tasa de siega	(Kg/semana)
I	Inventario de cosecha	(Kg)
S	Venta del producto cosechado	(Kg/semana)
MS	Máximo de ventas	(Kg/semana)
TT	Tiempo deseado para modificar el inventario de cosechas	(semanas)
DS	Ventas deseadas	(Kg/semana)
PA	Ajuste de precio	(Kg/semana)/($/Kg)
CP	Tasa de cambio de precio	($/Kg)/semana
PL	Nivel de precios	($/Kg)
PLT	Nivel de precio tradicional	($/Kg)
TET	Tiempo para modificar la tradición de precios	(semanas)
D	Demanda del producto	(Kg/semana)
DPD	Incremento de la demanda por disminución del precio	(Kg/semana)/($/semana)
BD	Demanda básica	(Kg/semana)

SIGLAS	SIGNIFICADO	UNIDADES
DST	Tiempo para que la demanda básica cambie de D_1 a D_2	(semanas)
D1	Demanda básica antes de DST	(Kg/semana)
D2	Demanda básica después de DST	(Kg/semana)
DT	Intervalo de tiempo	(semanas)

REFERENCIAS

1.- Jay W. Forrester "Principles of Systems", Wright - Allen Press (1969)

2.- Chorafas, N. D., Systems and Simulation, Academic Press, New York (1965)

3.- Gordon, G. "Systems Simulation", Prentice Hall (1969)

4.- Michael R. Goodman "System Dynamics", Wright - Allen Press (1974)

5.- "Bibliography on Simulation" IBM Corp. Forma No. 320-0924 (1966)

6.- Alexander L. Pugh III, "Dynamo II User's Manual", The M.I.T. Press, Cambrige, Mass. (1970).

7.- Jay W. Forrester "Industrial Dynamics", the M.I.T. Press, Cambrige, Mass. (1968)

8.- Jay W. Forrester "Urban Dynamics", The M.I.T. Press, Cambrige, Mass. (1969)

9.- Dennis L. Meadows and Donella H. Meadows, Eds., "Toward Global Equilibriam, Wright - Allen Press (1972)

centro de educación continua
división de estudios superiores
facultad de ingeniería, unam

INGENIERIA DE SISTEMAS

INTRODUCCION A PROCESOS ESTOCASTICOS

DR. OCTAVIO RASCON CHAVEZ

JUNIO, 1978

CAPITULO 3

INTRODUCCION A PROCESOS ESTOCASTICOS

por Octavio A. Rascón Ch.*

3.1 *Introducción*

A menudo los especialistas en Investigación de Operaciones, Econometría, Teoría de mantenimiento, etc., se enfrentan a problemas en los cuales se realizan observaciones de cierto fenómeno durante un lapso de tiempo. Cuando la entidad matemática (ya sea variable escalar o vectorial, función, etc.) que caracteriza a ese fenómeno se comporta en forma aleatoria, se dice que la entidad está sujeta (o sigue) a un *proceso estocástico*.

Como ejemplos de cantidades escalares que siguen procesos estocásticos se pueden citar los siguientes:

- El nivel de inventario de cierto producto en una empresa
- El número de vehículos que circulan durante el día por una avenida
- Las variaciones temporales en la calidad de un producto elaborado
- El flujo de agua en un río
- La demanda diaria de agua potable en una ciudad
- El comportamiento de partículas sujetas a impactos que ocurren al azar
- Las aceleraciones del terreno durante un sismo
- El número de personas que esperan servicio en una línea de espera, etc.

3.2 *Definición de un proceso estocástico*

Un proceso estocástico se define como un conjunto, $\{X(t), t \varepsilon T\}$, de variables aleatorias $X(t)$, donde el símbolo ε es el empleado en teoría de conjuntos para indicar *pertenencia* ($t \varepsilon T$ se lee "t está en T") y T es el conjunto de los valores que puede tomar el parámetro determinístico t. Este parámetro suele representar tiempo, distancia, área, volumen, etc.

Cada función $X(t)$ constituye una *realización* o una *función muestra* del proceso; el conjunto de todas las funciones muestra posibles constituye el proceso completo (figs 3.1a y 3.1b).

---

* Jefe de la División de Estudios Superiores de la Facultad de Ingeniería, UNAM.

Los procesos estocásticos se pueden clasificar según la naturaleza del conjunto T. Cuando T es un conjunto discontinuo o discreto, se dice que el proceso es de *parámetro discreto*, si T es un conjunto continuo, entonces el proceso es de *parámetro continuo*.

Un proceso de parámetro discreto sería, por ejemplo, la demanda semanal de llantas para automóvil en una fábrica; en tal caso la unidad de tiempo que se usa es de una semana, y el espacio T puede ser el conjunto de todas las semanas del año.

$$T = \{1,2,\ldots,i,\ldots, 52\}$$

en donde el 1 representa la semana número 1, el 2, la número 2, etc. Aquí la demanda en la semana i de cada año es una variable aleatoria; el registro de un año completo es una realización o función muestra del proceso; el grupo de los registros disponibles de años pasados es la muestra del proceso, y el conjunto de los registros de todos los años pasados y futuros constituye el proceso estocástico en cuestión.

Un ejemplo de proceso de parámetro continuo lo constituyen las aceleraciones instantáneas del terreno durante un sismo; cada acelerograma (gráfica aceleración vs tiempo) representa una muestra o realización del proceso. En este caso, la aceleración en el instante t_i es una variable aleatoria. Así, si los elementos de la fig 3.1a representan acelerogramas, se observa que en el tiempo t_i las aceleraciones $X_1(t_i)$, $X_2(t_i)$, $X_3(t_i)$, etc., varían de una muestra a otra, ocurriendo dicha variación al azar.

...

Otra forma de clasificar los procesos estocásticos se basa en la naturaleza del *espacio muestral* de las variables aleatorias que lo constituyen. Así, si dichas variables son continuas, el proceso se denomina *continuo*, y es *discreto* o *discontinuo* si las variables aleatorias son discretas. Por ejemplo, el caso del problema de la demanda de llantas que se mencionó constituye un proceso discreto porque $X(t)$ sólo puede tomar algunos de los valores discretos 0, 1, 2,.... El caso de las aceleraciones del terreno durante un sismo constituye un proceso continuo porque $X(t)$ puede tomar valores del conjunto continuo $\{-\infty, \infty\}$.

3.3 *Descripción de la ley de probabilidades de un proceso estocástico*

Puesto que las ordenadas en cada instante de un proceso estocástico son variables aleatorias, para describir la ley de probabilidades del proceso es necesario establecer todas las *funciones de distribución conjuntas de probabilidades.*

La función de distribución conjunta de probabilidades $F(z_1, z_2,\ldots,z_n)$, de n variables aleatorias escalares, Z_1, $Z_2,\ldots,$ Z_n, se define como la probabilidad, $P[Z_1\leq z_1, Z_2\leq z_2,\ldots,Z_n\leq z_n]$, de que simultáneamente Z_1 asuma un valor menor o igual que z_1, que Z_2 asuma un valor menor o igual que z_2, etc., es decir,

$$F(z_1, z_2,\ldots, z_n) = P[Z_1\leq z_1, Z_2\leq z_2,\ldots,Z_n\leq z_n]$$

en donde z_1, $z_2,\ldots,z_n$ son valores numéricos. Por lo tanto, la función de distribución conjunta de orden n del proceso estocástico $X(t)$ es la que corresponde a las n variables aleatorias $X(t_1)$, $X(t_2),\ldots,X(t_n)$, para todo t_1, $t_2,\ldots,t_n$, es decir,

$$F(x_1,x_2,\ldots,x_n;t_1,t_2,\ldots,t_n)=P[X(t_1)\leq x_1,\ X(t_2)\leq x_2,\ldots,X(t_n)\leq x_n]$$

(El miembro derecho de la ecuación anterior se lee "probabilidad de que simultáneamente $X(t_1)\leq x_1$, $X(t_2)\leq x_2,\ldots,$ $X(t_n)\leq x_n$".)

En consecuencia, para contar con la ley de probabilidades del proceso estocástico $X(t)$ es necesario obtener las

...

funciones de distribución conjuntas para todo entero n. Debido a que el conocer todas estas funciones suele ser muy complicado en las aplicaciones prácticas, a menudo el que analiza el proceso se conforma con tener esa función para $n = 2$ como máximo, es decir, con establecer las funciones de distribución de una y dos variables aleatorias.

$$F(x_1;t_1) = P[X(t_1) \leq x_1]$$

$$F(x_1, x_2; t_1, t_2) = P[X(t_1)<x_1, X(t_2)<x_2]$$

Conocidas estas funciones de distribución es posible conocer las densidades de probabilidades correspondientes, mediante las conocidas relaciones de la teoría de probabilidades

$$f(x_1,t_1) = \frac{dF(x_1, t_1)}{dx_1} \tag{3.1}$$

$$f(x_1; x_2; t_1, t_2) = \frac{\partial^2 F(x_1,x_2;t_1,t_2)}{\partial x_1 \ \partial x_2} \tag{3.2}$$

en donde ∂ es el símbolo de derivación parcial.

Cuando un proceso tiene densidades de probabilidades normales (gausianas), se dice que el proceso es *normal* a *gausiano*.

Ejemplo 3.1

Consideremos el proceso estocástico de parámetro continuo

$$X(t) = A \cos \omega t + B \operatorname{sen} \omega t$$

donde A y B son variables aleatorias independientes, ambas con distribución normal de media cero y variancia σ^2, y ω es una constante positiva. Este es un proceso continuo porque las variables aleatorias A y B son continuas. Calculemos, por ejemplo, la probabilidad de que la integral de 0 a L del cuadrado del proceso sea mayor que c, o sea,

$$P[\int_0^L X^2(t)\,dt>c] = ?$$

donde c es una constante, y $L = 2\pi/\omega$ es el periodo del proceso.

...

El valor de la integral es

$$\int_0^L X^2(t)\,dt = \int_0^L (A^2 \cos^2 \omega t + 2AB \cos \omega t \operatorname{sen} \omega t + B^2 \operatorname{sen}^2 \omega t)\,dt$$

$$= L(A^2+B^2)/2$$

Por lo tanto, la probabilidad de que el miembro izquierdo de la ecuación anterior exceda a c es igual a la probabilidad de que el miembro derecho sea mayor que c, es decir,

$$P\left[\int_0^L X^2(t)\,dt>c\right]=P[L(A^2+B^2)/2>c] = P[(A^2+B^2)>c\omega/\pi]$$

Se puede demostrar (ref 3.1) que como A y B son variables aleatorias independientes con distribución normal, entonces - $(A^2+B^2)/\sigma^2= Z$ tiene distribución ji-cuadrada (X^2) con dos grados de libertad. De aquí se deduce que si hacemos $A^2+B^2=Y$, entonces $Y=Z\sigma^2$, $dz=dy/\sigma^2$ y $P[A^2+B^2>c\omega/\pi]=\int_{c\omega/\pi}^{\infty} \frac{1}{2\sigma^2}\, e^{-y/2\sigma^2} dy = e^{-c\omega/2\pi\sigma^2}$

Puesto que

$$X(t) = A \cos \omega t + B \operatorname{sen} \omega t = D \cos (\omega t - \theta)$$

donde $D=\sqrt{A^2+B^2}$ y $\theta = \tan^{-1}(B/A)$, se concluye que lo que varía de una función muestra a otra del proceso, conservándose en cada caso la onda armónica de frecuencia ω, es la amplitud, D, y el ángulo de fase, θ, de la onda.

Ejemplo 3.2

Sea el proceso estocástico de parámetro continuo

$$X(t)=R + St$$

donde R y S son dos variables aleatorias independientes con densidades de probabilidades $f_R(r)$ y $f_S(s)$, respectivamente. Cada pareja de s y r (valores que asumen S y R, respectivamente)

...

conduce a una recta que constituye una realización del proceso, por lo que éste está constituído por una familia de líneas rectas con pendientes s, y de ordenadas al origen r, aleatorias.

Para obtener la función de distribución, $F(x;t)$, de primer orden del proceso $X(t)$, hagamos

$$X = R + S_1 \tag{3.3}$$

donde $S_1 = tS$. En tal caso,

$$F_X(x) = P[X \leq x] = P[R + S_1 \leq x] = \iint_{D_X} f_{RS_1}(r,s_1)\,dr\,ds_1 \tag{3.4}$$

donde $f_{RS_1}(r,s_1)$ es la densidad de probabilidades conjunta de las variables aleatorias R y S_1, y la región de integración D_X es tal que $r + s_1 \leq x$; esta región queda representada por la zona sombreada de la fig 3.2, como puede verificarse fácilmente. Por lo tanto, la ec 2.4 queda en la forma

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{x-r} f_{RS_1}(r,s_1)\,dr\,ds_1 \tag{3.5}$$

Derivando la ec 3.5 respecto a x obtenemos la densidad de probabilidades, $f_X(x)$, de primer orden de X (ec 3.1)

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{RS_1}(r, x-r)\,dr \tag{3.6}$$

Puesto que en este caso las variables aleatorias R y S_1 son independientes, se tiene que

$$f_{RS_1}(r, x-r) = f_R(r) f_{S_1}(x-r)$$

por lo que

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_R(r) f_{S_1}(x-r)\,dr \tag{3.7}$$

Para aplicar la ec 3.7 al problema que estamos resolviendo, es necesario obtener primero la densidad de probabilidades,

...

$f_{S_1}(s_1)$, de la variable aleatoria $S_1 = tS$. Para lograr esto, hagamos lo siguiente:

Si $t > 0$,

$$F_{S_1}(s_1) = P[S_1 \leq s_1] = P[S \leq s_1/t] = \int_{-\infty}^{S_1/t} f_S(s)\,ds$$

La densidad de probabilidades de S_1 se obtiene derivando la ecuación anterior respecto a s_1, es decir,

$$f_{S_1}(s_1) = \frac{d}{ds_1} F_{S_1}(s_1) = \frac{1}{t} f_S(s_1/t) \qquad (3.8)$$

Si $t < 0$, entonces $ts \leq s_1$ para $s > s_1/t$, por lo que

$$F_{S_1}(s_1) = P[S_1 \leq s_1] = P[S > s_1/t] = 1 - \int_{-\infty}^{s_1/t} f_S(s)\,ds$$

y

$$f_{S_1}(s_1) = \frac{d}{ds_1} F_{S_1}(s_1) = 0 - \frac{1}{t} f(s_1/t) = \frac{1}{|t|} f_S(s_1/t) \qquad (3.9)$$

Las ecs 3.8 y 3.9 se pueden combinar para obtener una fórmula válida para todo valor de t, dando como resultado

$$f_{S_1}(s_1) = \frac{1}{|t|} f_S(s_1/t) \qquad (3.10)$$

donde $|t|$ denota el valor absoluto de t.

Sustituyendo la ec 3.10 en la ec 3.7 se obtiene

$$f_X(x) = \frac{1}{|t|} \int_{-\infty}^{\infty} f_R(r) f_S\left(\frac{x - r}{t}\right) dr \qquad (3.11)$$

Consideremos el caso particular en que R y S tienen distribuciones exponenciales con parámetros α y β ($\alpha \neq \beta$), respectivamente, es decir,

$$f_R(r) = \alpha\, e^{-\alpha r} \quad ; r > 0$$

$$f_S(s) = \beta\, e^{-\beta s} \quad ; s > 0$$

En estas circunstancias, el límite inferior de la integral de la ec 3.11 es cero, ya que $f_R(r)$ es cero para valores negativos

...

de r, y el superior es tal que $(x - r)/t \geq 0$, lo cual ocurre para $t > 0$ cuando $r \leq x$, por lo que la ec 2.11 queda en la forma:

$$f_X(x) = \frac{1}{|t|} \int_0^x \alpha\, e^{-\alpha r}\, \beta\, e^{-\beta(x-r)/t} dr$$

$$= \frac{1}{|t|} \int_0^x \alpha\, \beta\, e^{-\beta x/t}\, e^{-(\beta/t-\alpha)r} dr$$

$$= \frac{\alpha\beta}{|t|\,(\beta/t-\alpha)}\, e^{-\beta x/t} \left[e^{(\beta/t\, -\alpha)r}\right]_0^x$$

$$= \frac{\alpha\beta}{\beta - \alpha t}\, e^{-\beta x/t}\, (e^{(\beta/t\, -\alpha)x} - 1)$$

$$= \frac{\alpha\beta}{\beta - \alpha t} (e^{-\alpha x} - e^{-\beta x/t}) \qquad (3.12)$$

El mismo resultado se obtiene para $t < 0$, ya que los límites de integración de la ecuación anterior se intercambian, apareciendo un signo menos fuera de la integral al colocarlos en la posición que tienen para $t > 0$.

3.4 *Media, autocorreación y autocovariancia de un proceso estocástico*

Es bien sabido que el conocer la media y la variancia de una variable aleatoria no es suficiente para determinar su comportamiento probabilístico, sino que es indispensable se sepa cuál es su densidad de probabilidades. Pero, aún cuando ésta no se conozca, los parámetros anteriores son de gran utilidad porque resumen ciertas características de tendencia central y de dispersión de los valores que asume la variable, e incluso permiten estimar, aunque sea burdamente, algunas probabilidades mediante la desigualdad de Chebyshev (ref 3.3).

...

Una utilidad semejante a la que tienen la media y la variancia de una variable aleatoria, la tienen las funciones de *valor medio* (*media*), *autocorrelación* y *autocovariancia* de un proceso estocástico.

La *media*, $E[X(t)] = \eta(t)$, de un proceso continuo $X(t)$ se define como la esperanza de la variable aleatoria $X(t)$ en el instante t, es decir,

$$E[X(t)] = \eta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x;t)\, dx \qquad (3.13)$$

donde $E[X(t)]$ se lee "esperanza de $X(t)$". Esta función representa el valor medio del proceso en el instante t. Si el proceso es discreto, la integral de la ec 3.13 se cambia por una suma que abarque todos los valores que puede asumir $X(t)$, es decir,

$$\eta(t) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} x_i f(x_i;t) \qquad (3.14)$$

Este comentario se aplica también a las definiciones que siguen.

Para plantear las definiciones de las funciones de autocorrelación y de autocovariancia de un proceso estocástico, es necesario indicar que la *correlación*, $R(Z,Y)$, de dos variables aleatorias, Z y Y, se define como la esperanza de su producto. Así, si Z y Y son continuas, se tiene que

$$R(Z,\ Y) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} z\ y\ f(z,y)\ dz\ dy \qquad (3.15)$$

en donde $f(z,y)$ es la densidad conjunta de probabilidades de Z y Y (ref 3.1). Por otra parte, la *covariancia*, $C(Z,\ Y)$, de Z y Y se define como la esperanza del producto $\{z-E[Z]\}\{y-E[Y]\}$, es decir,

...

$$C(Z,Y) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\{z-E[Z]\}\{y-E[Y]\}f(z,y)dz\ dy \qquad (3.16)$$

Volviendo al proceso estocástico $X(t)$, su *función de autocorrelación*, $R(t_1,t_2)$, se define como la esperanza del producto de las variables aleatorias $X(t_1)$ y $X(t_2)$ para todo t_1 y t_2 (es la correlación de $X(t_1)$ y $X(t_2)$) que, de acuerdo con la ec 3.15, resulta ser

$$R(t_1,t_2) = E[X(t_1)\ X(t_2)] = \int_{-\infty}^{\infty} x_1\ x_2\ f(x_1,x_2;t_1,t_2)dx_1\ dx_2 \qquad (3.17)$$

la cual, en general, es una función de t_1 y t_2. Si $t_1 = t_2 = t$, entonces $E[X^2(t)]$ es la función del *valor medio cuadrático del proceso*, o sea, del valor medio del proceso elevado al cuadrado.

La *función de autocovariancia*, $C(t_1\ t_2)$, del proceso $X(t)$ es la covariancia de las variables aleatorias $X(t_1)$ y $X(t_2)$ para todo t_1 y t_2, es decir (ec 3.16)

$$C(t_1,t_2) = E\{[X(t_1) - \eta(t_1)][X(t_2) - \eta(t_2)]\} \qquad (3.18)$$

La ec 3.18 se puede escribir como

$$C(t_1,t_2)=E[X(t_1)\ X(t_2)] - E[X(t_1)\eta(t_2)] - E[\eta(t_1)X(t_2)] + E[\eta(t_1)\eta(t_2)]$$

Considerando ahora que la esperanza de una constante es la propia constante, y que la del producto de una constante por una variable aleatoria es igual a la constante multiplicada por la esperanza de la variable, la ecuación anterior se puede reescribir como

$$C(t_1,t_2)=E[X(t_1)X(t_2)] - \eta(t_2)E[X(t_1)] - E[X(t_2)]\eta(t_1)+\eta(t_1)\eta(t_2)$$

$$= R(t_1,t_2) - \eta(t_2)\eta(t_1) - \eta(t_2)\eta(t_1) + \eta(t_1)\eta(t_2) \qquad (3.19)$$

Reagrupando términos se llega a

$$C(t_1,t_2) = R(t_1,t_2) - \eta(t_1)\eta(t_2) \qquad (3.20)$$

...

Ejemplo 3.3

Sea el proceso estocástico de parámetro continuo tratado en el ejemplo 3.2,

$$X(t) = R + St$$

La media de este proceso es

$$\eta(t) = E[X(t)] = E[R] + tE[S] \tag{3.21}$$

La autocorrelación es

$$R(t_1,t_2) = E[X(t_1)\ X(t_2)] = E[R + St_1)\ (R + St_2)]$$
$$= E[R^2] + t_2\ E[RS] + t_1\ E[SR] + t_1t_2E[S^2]$$

Puesto que $E[RS] = E[SR]$, la ecuación anterior queda

$$R(t_1,t_2) = E[R^2] + t_1t_2E[S^2] + E[SR](t_1+t_2) \tag{3.22}$$

Una vez conocidos $R(t_1,t_2)$ y $\eta(t)$ se puede calcular la autocorrelación de $X(t)$ aplicando la ec 3.20. El producto $\eta(t_1)\eta(t_2)$ se obtiene aplicando la ec 3.21

$$\eta(t_1)\eta(t_2) = (E[R]+ t_1E[S])\ (E[R] + t_2E[S])$$
$$=E^2[R]+E[S]E[R](t_1+t_2)+t_1t_2E^2[S] \tag{3.23}$$

Sustituuendo las ecs 3.13 y 3.23 en la ec 3.20, y agrupando términos se obtiene

$$C(t_1,t_2)=(E[R^2]-E^2[R]) +t_1t_2(E[S^2]-E^2[S])+(t_1+t_2)(E[RS]-E[S]E[R])= \sigma^2(R)+t_1t_2\sigma^2(S)+(t_1+t_2)\mathrm{Cov}(S,R)$$

en donde $\sigma^2(R) =E[R^2]-E^2[R]$ y $\sigma^2(S) =E[S^2] -E^2[S]$ son, respectivamente, las variancias de R y S, y $\mathrm{Cov}(S,R) = E[SR]- E[S]E[R]$ es la covariancia de S y R.

Puesto que R y S tienen distribuciones exponenciales con parámetros α y β, respectivamente, entonces $E[R]=1/\alpha$, $E[S]=1/\beta$,

$\sigma^2(R)=1/\alpha^2$, $\sigma^2(S)=1/\beta^2$, $E[R^2] = 2/\alpha^2$ y $E[S^2]=2/\beta^2$, como puede verse en la tabla 2.1. Además, considerando que S y R son variables aleatorias independientes, se tiene que $E[SR]=E[S]E[R]=1/(\alpha\beta)$, y $Cov(S,R)=0$. Sustituyendo estos valores en las ecs 3.21, 3.22 y 3.23 se obtiene finalmente

$$\eta(t) = 1/\alpha^2 + t_1 t_2 (1/\beta^2)$$
$$R(t_1,t_2) = 2/\alpha^2 + t_1 t_2 (2/\beta^2) + (t_1+t_2)[1/(\alpha\beta)]$$
$$C(t_1,t_2) = 1/\alpha^2 + t_1 t_2 (1/\beta^2)$$

Ejemplo 3.4. Paseo casual. El camino o paseo casual es un proceso estocástico discreto de parámetro discreto, en el cual los cambios en los valores del proceso ocurren cada T segundos. Dichos cambios obedecen a un mecanismo aleatorio, de tal manera que en cada instante el proceso se incrementa o decrece en una unidad (el proceso da un "paso" a la derecha o a la izquierda, motivo por el cual se denomina *paseo casual*).

Para deducir la distribución de probabilidades de este proceso, supongamos que el mecanismo aleatorio que marca los cambios de valores es el resultado del lanzamiento de una moneda, de manera que si cae cara el proceso da un paso de amplitud s a la derecha, y si cae sol lo da a la izquierda. Con base en esto, es evidente que cada función muestra del proceso dependerá de la secuencia de caras, C, y soles, S, que haya salido; en la figura 3.3 se muestra el principio de una de estas funciones, correspondiente a la secuencia *CCSSSCCS*... (se supone que en t=0 el proceso parte del origen). Obsérvese que las discontinuidades del proceso ocurren en los tiempos

...

$t_i = n_i T$, en donde n_i es el número del lanzamiento de la moneda; además, los valores que puede asumir el paseo casual son... -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3,..., es decir, todos los números enteros positivos y negativos.

Supongamos que en los primeros n lanzamientos ocurren k caras, con lo cual en el lapso $t=nT$ se dan k pasos a la derecha y $n - k$ pasos a la izquierda. Por consiguiente, si $X(0) = 0$ (parte del origen) el proceso se encuentra en la posición

$$X(nT) = ks - (n-k)s = (2k - n)s$$

donde s es el tamaño de cada paso.

Si hacemos $2k-n = r$, vemos que $X(nT)$ es una variable aleatoria que toma los valores rs, en donde $r=n, n-2, \ldots, -n$. Claramente $X(nT) = rs$ ocurre cuando aparecen k caras en n lanzamientos, cuya probabilidad queda dada por la distribución binomial. Puesto que

$$k = \frac{r + n}{2}$$

tendremos

$$P[X(nT) = rs] = P\left[k = \frac{r + n}{2}\right] = \binom{n}{\frac{r+n}{2}} p^k q^{n-k} = \frac{n!}{\left(\frac{r+n}{2}\right)!\left(n - \frac{r+n}{2}\right)!} p^k q^{n-k}$$

en donde p es la probabilidad de que la moneda caiga de cara, y $q=1-p$ es la de que caiga de sol. En lo que sigue desarrollaremos el caso en que la moneda es homogénea (no está cargada), es decir, $p=q=1/2$, con lo cual la ecuación anterior queda en la forma

...

$$P[X(nT) = rs] = \frac{n!}{(\frac{r+n}{2})!\,(n-\frac{r+n}{2})!}\,\frac{1}{2^n} \qquad (3.24)$$

Para obtener la esperanza de este proceso aplicamos la ec 3.14, es decir,

$$E[X(nT)] = \sum_{r=-n}^{n} rs\,\frac{n!}{(\frac{r+n}{2})!\,(n-\frac{r+n}{2})!}\,\frac{1}{2^n} \qquad (3.25)$$

lo cual se puede demostrar que vale cero. De igual manera, la función del valor medio cuadrático del proceso es

$$E[X^2(nT)] = \sum_{r=-n}^{n} (rs)^2\frac{n!}{(\frac{r+n}{2})!\,(n-\frac{r+n}{2})!}\,\frac{1}{2^n} \qquad (3.26)$$

lo cual da $E[X^2(nT)]=ns^2$. Estos resultados se pueden obtener también si usamos las variables aleatorias independientes X_i que puede tomar los valores s y $-s$ con probabilidades respectivas de 1/2. Evidentemente,

$$E[X_i] = 0 \qquad E[X_i^2] = s^2$$

Puesto que

$$X(nT) = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$$

la esperanza de $X(nT)$ es igual a la suma de las esperanzas de las X_i, lo cual da cero; además, puesto que las variables son independientes, la esperanza del cuadrado de $X(nT)$ es igual a la suma de las esperanzas de los cuadrados de las X_i, lo cual es:

$$E[X^2(nT)] = ns^2$$

Para obtener la densidad de probabilidades de segundo orden, $f(x_1,x_2;t_1,t_2)$, con $t_1<t_2$, usaremos la relación (ref 3.1)

...

$$f(x_1,x_2;t_1,t_2) = f(x_2;t_2|x_1;t_1)f(x_1;t_1)$$

en donde $f(x_2;t_2|x_1;t_1)$ es la densidad de probabilidades condicional de que $X_2=x_2$ en $t=t_2$ dado que en $t=t_1$ se tuvo $X_1=x_1$ (ésta nos permite obtener las probabilidades de que el proceso esté en la posición $x_2=r_2s$ en el tiempo $t_2=n_2T$, cuando se sabe que en el tiempo $t_1= n_1T$ estuvo en $x_1= r_1s$) y $f(x_1;t_1) = P[X(n_1T)=x_1]$.

Para pasar de $x_1 = r_1s$ a $x_2= r_2s$ es necesario dar por lo menos (r_2-r_1) pasos en (n_2-n_1) unidades T de tiempo. Por consiguiente, $f(x_2;t_2|x_1;t_1)=0$ si $(n_2-n_1)<(r_2-r_1)$. Para el caso $(n_2-n_1)\geq(r_2-r_1)$ la densidad condicional se deduce de manera similar a como se hizo para la densidad de primer orden, pero ahora partiendo de $x_1=r_1s$ en el tiempo $t_1=n_1T$, en vez de partir de $x_1=0$ en el tiempo cero. El resultado es la siguiente distribución binomial

$$f(x_2;t_2|x_1;t_1)=P[X(n_2T)=r_2s|X(n_1T)= r_1s|=\binom{n_2-n_1}{\frac{(r_2-r_1)+(n_2-n_1)}{2}}\frac{1}{2^{n_2-n_1}}$$

$$=\frac{(n_2-n_1)!}{\left(\frac{(r_2-r_1)+(n_2-n_1)}{2}\right)!\left[(n_2-n_1)-\frac{(r_2-r_1)+(n_2-n_1)}{2}\right]!}\frac{1}{2^{n_2-n_1}}$$

Tomando esto en cuenta, la distribución conjunta queda en la forma

$$f[X(n_1T),X(n_2T);\ n_1T,\ n_2T]=\binom{n_2-n_1}{\frac{(r_2-r_1)+(n_2-n_1)}{2}}\binom{n_1}{\frac{r_1+n_1}{2}}\frac{1}{2^{n_2}} \tag{3.27}$$

Existen algunas variantes del paseo casual, de las cuales las más comunes son:

...

i) La opción de avanzar a la izquierda se cambia por la de permanecer en el mismo sitio; es decir, en este paseo en cada unidad de tiempo o se avanza a la derecha o no se avanza.

ii) Se tienen las tres opciones: avanzar a la derecha con probabilidad p, a la izquierda con probabilidad q, o permanecer en el sitio con probabilidad $\nu=1-p-q$.

El estudio de los caminos casuales ha encontrado aplicación en muchos problemas de física, ingeniería, inventarios (ref 3.9), etc. Como ejemplo puede citarse la ref 3.10 en la cual se usó un paseo casual para deducir la densidad de probabilidades del número de repeticiones de carga que hay que aplicarle a un objeto para que se rompa (problema de confiabilidad de fatiga de materiales).

3.5 *Procesos estocásticos estacionarios*

Como puede observarse en las ecs 3.1 y 3.2, las densidades de probabilidades de un proceso estocástico son, en general, funciones del tiempo y, por lo tanto, también lo son la esperanza y la autocorrelación del mismo (ecs 3.13 y 3.17). Hay, sin embargo, una clase especial de procesos llamados *procesos estrictamente estacionarios*, tales que sus densidades de probabilidades de cualquier orden son invariantes si se traslada el origen de la escala del tiempo. En particular, la densidad de probabilidades de primer orden no resulta ser función del tiempo y, por consiguiente, la esperanza del proceso es una constante, es decir,

...

$$f(x_1;t) = f(x_1) \tag{3.28}$$

y

$$E[X(t)] = \eta \tag{3.29}$$

Además, en este caso la densidad de probabilidades de segundo orden y la función de autocorrelación no son funciones de los tiempos t_1 y t_2 por separado, sino sólo de su diferencia $\tau=t_2-t_1$, es decir,

$$f(x_1,x_2;t_1,t_2) = f(x_1,x_2;\tau) \tag{3.30}$$

y

$$R(t_1,t_2) = R(\tau) \tag{3.31}$$

De la ec 3.19 se deduce que la covariancia de un proceso estrictamente estacionario también depende sólo de τ, ya que en tal caso queda

$$C(t_1,t_2) = R(\tau)-\eta^2=C(\tau) \tag{3.32}$$

En la mayoría de los procesos estocásticos que se presentan en los problemas prácticos no se cuenta con todas las distribuciones de probabilidades, por lo cual resulta imposible verificar si tales procesos son estrictamente estacionarios. Por tal motivo, se ha convenido en definir un *proceso estacionario en el sentido amplio*, como aquel cuya esperanza es constante y cuya función de autocorrelación es función sólo de la diferencia de tiempos $\tau=t_2-t_1$, sin importar lo que suceda con las distribuciones de probabilidades de cualquier orden.

De las dos definiciones de estacionaridad que se han

...

presentado, se puede concluir que un proceso estrictamente estacionario también es estacionario en el sentido amplio, pero si lo es en el sentido amplio no necesariamente es estrictamente estacionario.

Por otra parte, si un proceso no es estacionario en el sentido amplio, tampoco es estrictamente estacionario, ya que la ec 3.28 no se cumpliría.

Ejemplo 3.5

¿Es el proceso $X(t)=R+St$ visto en el ejemplo 3.3

a) estacionario en el sentido amplio

b) estrictamente estacionario?

a) La respuesta a este problema es inmediata, ya que en la ec 3.21 se observa que la esperanza del proceso sí es función del tiempo y, en la ec 3.22, que la autocorrelación es función de t_1 *y* t_2, y no de $t_2 - t_1$. Por consiguiente, el proceso, *no* es estacionario en el sentido amplio.

b) Puesto que el proceso no es estacionario en el sentido amplio, tampoco es estrictamente estacionario. Esto se puede verificar al observar que la densidad de probabilidades dada en la ec 3.12 es función del tiempo, t.

Ejemplo 3.6

¿Es estacionario, en el sentido amplio, el camino casual estudiado en el ejemplo 3.4?

La respuesta es *no*, ya que aun cuando la esperanza vale cero (es constante), la función de valor medio cuadrático

...

es ns^2 (no es constante por depender de n) y la autocorrelación depende de n_2 y n_1 por separado y no de $n_2 - n_1$, puesto que la densidad de probabilidades de segundo orden depende de n_2 y n_1 (ec 3.27).

Demostraremos esto último para el caso del paseo casual en que con probabilidad p se avanza un paso y con probabilidad $1-p$ se permanece en el sitio en cada T segundos. La densidad de probabilidades de segundo orden correspondiente es (ref 6.13).

$$f[X(n_1T),\ X(n_2T); n_1T, n_2T] = \binom{n_2-n_1}{r_2-r_1}\binom{n_1}{r_1} p^{r_2}(1-p)^{n_2-r_2}$$

Por lo tanto

$$E[X(n_1T)X(n_2T)] = s^2 \sum_{r_1=0}^{n_1} \sum_{r_2=r_1}^{r_1+n_2-n_1} r_2 r_1 \binom{n_2-n_1}{r_2-r_1}\binom{n_1}{r_1} p^{r_2}(1-p)^{n_2-r_2}$$

Haciendo la transformación $m=r_2-r_1$, multiplicando y dividiendo por $(1-p)^{n_1}$, y reagrupando términos se obtiene:

$$E[X(n_1T)X(n_2T)] = s^2 \sum_{r_1=0}^{n_1} r_1 \binom{n_1}{r_1} p^{r_1}(1-p)^{n_1-r_1} \sum_{m=0}^{n_2-n_1} (m+r_1) \binom{n_2-n_1}{m} p^m (1-p)^{n_2-n_1-m}$$

Dividiendo la suma del lado derecho en dos partes se obtiene

$$\sum_{m=0}^{n_2-n_1} m \binom{n_2-n_1}{m} p^m (1-p)^{n_2-n_1-m} = (n_2-n_1)p$$

y

$$r_1 \sum_{m=0}^{n_2-n_1} \binom{n_2-n_1}{m} p^m (1-p)^{n_2-n_1-m} = r_1$$

ya que la suma se realiza con todos los términos de la distribución binomial. Por lo tanto

...   ...

$$E[X(n_1T)X(n_2T)] = s^2 \sum_{r_1=0}^{n_1} r_1[r_1+p(n_2-n_1)] \left|\binom{n_1}{r_1}p^{r_1}(1-p)^{n_1-r_1}\right.$$

$$= s^2\{n_1p[1-p(1-n_1)]+p(n_2-n_1)n_1p\} = s^2n_1p[1-p(1-n_2)]$$

que es una función de n_1 y n_2, y no de su diferencia n_2-n_1.

Ejemplo 3.7

Demostrar que el proceso del ejemplo 3.1, $X(t) = D$ cos $(\omega t - \phi)$, donde D y ω son constantes, y ϕ es una variable aleatoria con densidad de probabilidades uniforme entre $-\pi$ y π, es estacionario en el sentido amplio.

Para resolver este problema veamos primero si $E[X(t)]$ = constante.

$$E[X(t)] = E[D \cos (\omega t - \phi)]$$

$$= D\ E[\cos \omega t \cos \phi + \text{sen}\ \omega t\ \text{sen}\phi]$$

$$= D \cos \omega t\ E[\cos \phi] + D\ \text{sen}\ \omega t\ E[\text{sen}\ \phi]$$

Pero, considerando que la densidad de probabilidades de ϕ es uniforme entre $-\pi$ y π, es decir,

$$f(\phi) = \frac{1}{2\pi} \quad \text{si } -\pi \leq \phi \leq \pi$$

se obtiene

$$E[\cos \phi] = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2\pi} \cos \phi\ d\phi = \frac{1}{2\pi}\Big[\text{sen}\ \phi\Big]_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{2\pi}(0-0)=0$$

y

$$E[\text{sen}\ \phi] = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2\pi} \text{sen}\ \phi\ d\phi = \frac{-1}{2\pi}\Big[\cos\ \phi\Big]_{-\pi}^{\pi} = \frac{-1}{2\pi}[-1-(-1)] = 0$$

Por lo tanto, $E[X(t)]=0$, que es una constante.

Veamos ahora si la autocorrelación es función $\tau = t_2 - t_1$

...

$$R(t_1,t_2) = E[D \cos(\omega t_1 - \phi)\, D \cos(\omega t_2 - \phi)] =$$

$$= D^2 E[\cos(\omega t_1 - \phi) \cos(\omega t_2 - \phi)]$$

Desarrollando los cosenos de la ecuación anterior, efectuando las multiplicaciones y agrupando términos se obtiene

$$R(t_2,t_1) = D^2 \{\cos\omega t_1 \cos \omega t_2 E[\cos^2 \phi] + (\cos \omega t_1 \operatorname{sen} \omega t_2 +$$

$$+ \operatorname{sen} \omega t_1 \cos \omega t_2) E[\operatorname{sen}\phi\cos\phi] + \operatorname{sen} \omega t_1 \operatorname{sen} \omega t_2 E[\operatorname{sen}^2\phi] \quad (3.33)$$

Pero

$$E[\cos^2\phi] = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2\pi} \cos^2\phi \; d\phi = 1/2$$

$$E[\operatorname{sen}\phi\cos\phi] = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2\pi} \operatorname{sen}\phi \cos\phi \; d\phi = 0$$

$$E[\operatorname{sen}^2\phi] = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2\pi} \operatorname{sen}^2\phi \; d\phi = 1/2$$

por lo que la autocorrelación (ec 3.33) queda en la forma

$$R(t_1,t_2) = D^2 \frac{1}{2} (\cos \omega t_1 \cos \omega t_2 + \operatorname{sen} \omega t_1 \operatorname{sen} \omega t_2)$$

$$= \frac{D^2}{2} \cos(\omega t_2 - \omega t_1) = \frac{D^2}{2} \cos \omega(t_2 - t_1) = \frac{D^2}{2} \cos \omega\tau$$

que es una función de τ y, en consecuencia, el proceso estudiado sí es estacionario en el sentido amplio.

3.6 *Proceso simple de Poisson*

Uno de los procesos estocásticos que más se emplean para resolver problemas de Investigación de Operaciones, Ingeniería de Sistemas y de Física, es el denominado *proceso simple de Poisson*. Se ha empleado, por ejemplo, para describir la ocurrencia de tormentas, de inundaciones y de flujo de vehículos,

...

en la teoría de espera (colas), etc (refs 3.4 - 3.7).

El proceso simple de Poisson es un proceso estocástico en el que se cuenta el número de ocurrencias de algún evento específico (por ejemplo, el número de vehículos que pasan por cierto punto de una carretera); por este motivo en algunos textos se le denomina *proceso de conteo de Poisson*.

Para estudiar el proceso simple de Poisson, calculemos la densidad de probabilidades del número de ocurrencias de cierto evento en un lapso $t_2-t_1=t_a$, cuando el tiempo de ocurrencia de dicho evento tiene densidad de probabilidades uniforme en el intervalo de 0 a L (figs 3.4*a* y 3.4*b*). En este caso, la probabilidad, p, de que ocurra el evento una vez en el período de t_1 a t_2 es

$$p = \frac{t_2 - t_1}{L} = \frac{t_a}{L}$$

Por consiguiente, la probabilidad de que el evento ocurra k veces en el lapso t_a, si sabemos que de 0 a L ocurre n veces es (distribución binomial)

$$P[k \text{ en } t_a] = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

donde $q=1-p$

De la teoría de probabilidades sabemos (ref 3.2) que si $n/p\to\infty$, $n/L\to\lambda$ y p es pequeña, entonces la distribución binomial tiende a la de Poisson (ver tabla 2.1) con parámetro $\nu=np=nt_a/L=\lambda t_a$, es decir,

$$P[k \text{ en } t_a] = e^{-\lambda t_a} \frac{(\lambda t_a)^k}{k!} \tag{3.34}$$

. . .

De la definición de λ se concluye que ésta representa al número medio de ocurrencias por unidad de tiempo, motivo por el cual se le suele llamar *intensidad del proceso.*

Se puede demostrar (ref 3.2) que si t_a y t_b son dos intervalos de tiempo que no se traslapan, entonces los eventos $\{k_a$ ocurrencias en $t_a\}$ y $\{k_b$ ocurrencias en $t_b\}$ son independientes, es decir, el número de ocurrencias del evento en t_a es independiente del número en t_b.

Sea $X(t)$ un proceso estocástico con el cual contamos el número de ocurrencias de un evento. Si hacemos $t_1=0$ y en ese momento iniciamos el conteo, entonces $t_a=t_2-t_1=t_2=t$ y $X(0)=0$; en tal caso la ec 3.34 queda en la forma

$$P[X(t)=k] = P[k \text{ en } t] = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^k}{k!} \qquad (3.35)$$

y constituye la densidad de probabilidades del proceso de Poisson. Cada función muestra de este proceso tiene la forma de una escalera con escalones de altura unitaria localizados en los tiempos t_i en que ocurre cada vez el evento (fig 3.5).

Existen algunas variantes del proceso de Poisson que se estudian en las refs 3.8 y 3.12, de los cuales el más común es el que permite que el número de ocurrencias por unidad de tiempo, λ, no sea una constante, sino una función del tiempo, $\lambda(t)$. En este caso el proceso, $Y(t)$, se denomina *proceso generalizado de Poisson*, y se puede demostrar que su densidad de probabilidades es

$$P[Y(t)=k] = e^{-\mu}\frac{(\mu)^k}{k!} \qquad (3.36)$$

. . .

en donde

$$\mu = \int_0^t \lambda(t)\, dt$$

Obsérvese que el proceso simple es un caso particular de éste con $\lambda(\tau)=\lambda$, por lo cual $\mu=\lambda\tau$. Tomando en cuenta que la suma algebraica de dos variables aleatorias con distribuciones de Poisson con parámetros respectivos ν y Ω también tiene ese tipo de distribución con parámetro $\nu+\Omega$, se tiene que la diferencia, $X(t_b)-X(t_a)$, del mismo proceso en los tiempos t_b y t_a, con $t_b>t_a$, también es un proceso de Poisson con parámetro $\lambda(t_b-t_a)$, o sea

$$P[X(t_b) - X(t_a) = k] = e^{-\lambda(t_b-t_a)} \frac{[\lambda(t_b-t_a)]^k}{k!} \qquad (3.37)$$

Esta diferencia representa el incremento que tuvo el proceso al pasar del tiempo t_a al t_b.

Puesto que la ec 3.37 es una distribución de Poisson, la media o esperanza y la variancia son

$$E[X(t_b) - X(t_a)] = \sigma^2[X(t_b) - X(t_a)] = \lambda(t_b-t_a) \qquad (3.38)$$

Considerando que la variancia de una variable aleatoria, Z, es

$$\sigma^2(Z) = E[Z^2]-E^2[Z]$$

se tiene que la función del valor medio cuadrático de la diferencia del proceso en cuestión es

$$E\{[X(t_b)-X(t_a)]^2\} = \lambda^2(t_b-t_a)^2+\lambda(t_b-t_a) \qquad (3.39)$$

De las ecs 3.38 y 3.39 es evidente que si $t_a=0$ y $t_b= t$, entonces

$$\eta(t) = E[X(t)] = \lambda t \qquad (3.40)$$

$$E[X^2(t)] = \lambda^2 t^2 + \lambda t = \lambda t(1+\lambda) \qquad (3.41)$$

...

constituyen, respectivamente, la media y la función del valor medio cuadrático del proceso simple de Poisson, $X(t)$.

Para obtener la autocorrelación de $X(t)$, consideremos las diferencias del proceso correspondientes a los intervalos de tiempo que se traslapan, de t_a a t_b, y de t_c a t_d (ver fig 3.6). Para calcular la esperanza $E\{[X(t_b)-X(t_a)][X(t_d)-X(t_c)]\}$, dividamos cada intervalo en dos partes que no se traslapen, ya que de esta manera los incrementos del proceso en esos intervalos son independientes; así,

$$t_b-t_a=(t_c-t_a) + (t_b-t_c)$$

y

$$t_d-t_c = (t_b-t_c) + (t_d-t_b)$$

Por consiguiente,

$$X(t_b)-X(t_a) = [X(t_c)-X(t_a)] + [X(t_b)-X(t_c)]$$

y

$$X(t_d)-X(t_c) = [X(t_b)-X(t_c)] + [X(t_d)-X(t_b)]$$

Tomando en cuenta que la esperanza del producto de los miembros izquierdos de las dos últimas ecuaciones es igual a la esperanza de los productos de los miembros derechos, y que cada uno de los incrementos del proceso encerrados en paréntesis rectangulares es independiente de los demás, en cuyo caso la esperanza del producto es igual al producto de las esperanzas, se llega a que la autocorrelación del incremento del proceso en ambos intervalos es

$$R[X(t_b)-X(t_a), X(t_d)-X(t_c)] = E\{[X(t_b)-X(t_a)][X(t_d)-X(t_c)]\}$$
$$=\lambda^2 (t_d-t_c)(t_b-t_a)+\lambda(t_b-t_c) \quad (3.42)$$

...

A partir de esta ecuación, haciendo $t_a=t_c=0$, $t_d=t_2$ y $t_b=t_1$ se obtiene la función de autocorrelación del proceso simple de Poisson, $X(t)$, la cual vale

$$R(t_1,t_2)=\lambda^2 t_1 t_2+\lambda t_1, \text{ si } t_2>t_1 \tag{3.43}$$

De acuerdo con 3.40 y 3.43, la autocovariancia de $X(t)$ vale (ec 3.20)

$$C(t_1,t_2)=\lambda^2 t_1 t_2+\lambda t_1-(\lambda t_1)(\lambda t_2)=\lambda t_1 \tag{3.44}$$

3.7 *Proceso estocástico de renovación*

El proceso estocástico de renovación trata esencialmente el problema de reposición de objetos o componentes que fallan, tales como focos, máquinas de construcción o industriales, equipo para transporte, etc. Cuando un objeto falla se sustituye con otro; al fallar éste se repone de nuevo, y así sucesivamente. En lo que sigue calcularemos las medias y las variancias del número de reposiciones que se efectúan por unidad de tiempo.

Un *proceso de renovación* es una secuencia X_i de variables aleatorias X_i independientes e idénticamente distribuidas. Aquí X_i denota la duración del objeto introducido en el i-ésimo remplazo.

Si efectuamos la suma

$$S_n = X_1+X_2+\ldots+X_n$$

entonces S_n constituye el tiempo en el cual se efectúa el n-ésimo remplazo del objeto en cuestión.

...

Un problema que puede tratarse como un proceso de renovación, aunque no haya objetos físicos que renovar, es el de flujo de tráfico (ref 3.3): Sea una central telefónica o de correos, la cual recibe órdenes (llamadas) en los instantes aleatorios $\tau_1, \tau_2, \ldots,$ en donde $0<\tau_1<\tau_2<\ldots.$ Si es razonable suponer (como a menudo sucede) que los tiempos sucesivos de interarrivo de órdenes

$$X_1=\tau_1, \; X_2=\tau_2-\tau_1, \ldots, X_n=\tau_n-\tau_{n-1}$$

son variables aleatorias independientes y con igual densidad de probabilidades, entonces el proceso X_i es un proceso de renovación, ya que constituye los tiempos en que se "renueva" una orden o llamada. Para este caso se puede demostrar (ref 3.3) que si las X_i tienen distribución exponencial con parámetro ν, es decir, si

$$f(x_i) = \nu e^{-\nu x_i}$$

entonces el número de renovaciones hechas hasta el instante t es un proceso de Poisson simple, con media νt.

Consideraremos sólo el caso en que los tiempos a los cuales se asigna la reposición son discretos, por ejemplo, semanas, meses o años. Así, si las unidades de tiempo son semanas, las reposiciones que se hagan de lunes a domingo de la primer semana se anotan en la semana número 1, y así sucesivamente. Estudiaremos dos casos.

a) cuando los objetos que fallan se reponen con elementos nuevos

b) cuando se reemplazan con objetos usados.

3.7.1 *Reemplazo con elementos nuevos*

Consideraremos que la población original de objetos nuevos (en $t=0$) obtiene la primera renovación en $t=X_1$; los objetos ya renovados obtienen su segunda renovación en el tiempo $t=X_1+X_2$, etc. Sea p_n la probabilidad de que un objeto recién instalado falle después de n unidades de tiempo, y sea $p_0=0$. Supondremos que todos los objetos operan ininterrumpidamente, y una vez que alguno falla se repone de inmediato con otro nuevo, manteniendo el número total de objetos en uso.

Las reposiciones en cualquier instante son renovaciones ya sea de los objetivos originales o de otros que se repusieron previamente. Sea $g_{i+1}(n)$ el *número esperado* de repuestos de la $(i+1)$-ésima generación realizados en el tiempo n. La relación que éste guarda con el número de repuestos de la i-ésima generación, $g_i(.)$,

$$g_{i+1}(n)=\sum_{k=0}^{n} g_i(n-k)p_k \tag{3.45}$$

ya que la renovación de $(i+1)$-éxima generación en el tiempo t está constituida por los reemplazos que se hagan antes del tiempo n de elementos de la i-ésima generación pero que fallan en el tiempo n; además, el número esperado de reemplazos de la generación i realizados en el tiempo $n-k$ (para $0\leq k\leq n$) es $g_i(n-k)p_k$, por lo que la i-ésima generación se obtiene sumando para toda $k\leq n$, dando como resultado la ec 3.45.

Sea el número esperado total de renovaciones, U_n, la suma de los números esperados de cada generación, es decir,

...

$$u_n = \sum_{i=1}^{n} g_i(n) \tag{3.46}$$

Escribiendo la ec 3.45 explícitamente para $i=1,2,3,\ldots$ y sumando los resultados se obtiene

$$g_2(n) = \sum_{k=0}^{n} g_1(n-k)p_k$$

$$g_3(n) = \sum_{k=0}^{n} g_2(n-k)p_k$$

$$\vdots$$

$$\sum_{i=2}^{n} g_i(n) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=0}^{n} g_i(n-k)p_k$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \left[\sum_{i=1}^{n} g_i(n-k)p_k \right] \tag{3.47}$$

Considerando la ec 3.46, la ec 3.47 queda en la forma

$$u_n - g_1(n) = \sum_{k=0}^{n} u_{n-k}p_k \tag{3.48}$$

donde $g_1(n)$ es el número esperado de reposiciones en el tiempo n de la población original.

3.7.2. *Reemplazo con objetos usados*

Si la población original no está constituida totalmente por objetos nuevos, sino que C_k de ellos ya han operado k unidades de tiempo, entonces el total de objetos, N, es

$$N = \sum_{k=0}^{\infty} C_k \tag{3.49}$$

Las probabilidades p_k que se han empleado hasta ahora corresponden a objetos nuevos. Para los objetos usados que pudiera tener la población original, la probabilidad de falla en el tiempo n de un objeto que ya había durado k unidades de tiempo en operación, antes de ser instalado, queda condicionada por la probabilidad, r_k, de que la duración sea mayor de k unidades, la cual es,

$$r_k = p_{k+1} + p_{k+2} + \ldots = 1 - \sum_{n=0}^{k} p_k \tag{3.50}$$

Puesto que la probabilidad condicional de que el objeto falle en $n+k$ unidades de tiempo, dado que debe durar más de k unidades es $p_{n+k} = p_n r_k$, entonces la probabilidad, p_n, de falla de un objeto en el tiempo n será

$$p_n = p_{n+k} / r_k \tag{3.51}$$

y el número esperado de objetos que requerirán renovación en el tiempo n y que ya habían operado k horas es $C_k p_{n+k}/r_k$. Sumando sobre todos los valores posibles de k obtenemos el número esperado de renovaciones de la población original, es decir,

$$g_1(n) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k p_{n+k} / r_k \tag{3.52}$$

Sustituyendo la ec 3.48 obtenemos el número medio (esperado) total de renovaciones en el tiempo n, o sea,

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} u_{n-k} p_k + \sum_{k=0}^{\infty} C_k p_{n+k} / r_k \tag{3.53}$$

Ejemplo 3.5

Supongamos que en un proceso de renovación discreto la probabilidad de que un objeto dure una unidad de tiempo es $p=0.75$, y la probabilidad que dure k unidades está dada por la distribución bonomial, siendo la duración máxima de cinco unidades de tiempo, es decir,

...

$$p_k = \frac{5!}{(5-k)!} p^k q^{5-k}$$

en donde $q=1-p$. Supongamos también que la población original tiene 100 objetos, de los cuales 10 son nuevos, 15 ya habían operado durante una unidad de tiempo, y 75 durante tres unidades de tiempo. Calcular el número esperado total de renovaciones después de seis unidades de tiempo.

Aplicando la distribución binomial para $k=1,\ldots,5$, obtenemos $p_1=0.01$, $p_2=0.09$, $p_3=0.26$, $p_4=0.40$ y $p_5=0.24$; además $p_0=0$, como se había indicado, y $p_k=0$ para $k>5$. Usando estos valores en la ec 3.50 obtenemos

$$\begin{aligned}
r_0 &= 0.01 + 0.09 + 0.26 + 0.40 + 0.24 = 1.00\\
r_1 &= 0.09 + 0.26 + 0.40 + 0.24 = 0.99\\
r_2 &= 0.26 + 0.40 + 0.24 = 0.90\\
r_3 &= 0.40 + 0.24 = 0.64\\
r_4 &= 0.24 = 0.24\\
r_5 &= = 0.00
\end{aligned}$$

De la información que se nos dió acerca de la población original deducimos que $C_0=10$, puesto que diez objetos eran nuevos, $C_1=15$, puesto que 15 objetos tenían una unidad de uso y, análogamente, $C_2=0$, $C_3=75$ y $C_4=C_5=0$. Aplicando la ec 3.52 se llega a

$$g_1(1) = 10 \times 0.01 + 15 \times 0.09/0.99 + 75 \times 0.40/0.64 = 48.34$$

De manera similar se obtiene, $g_1(2)=32.97$, $g_1(3)=8.66$, $g_1(4)=7.63$; $g_1(5)=2.4$ y $g_1(n)=0$ para $n>5$. Por consiguiente, mediante la ec 3.53 obtenemos $U_0=0$

$$u_1 = u_{1-0}p_0+u_{1-1}p_1+48.34$$
$$= u_1 \times 0 + 0 \times 0.01 + 48.34 = 48.34$$

$$u_2 = u_{2-0}p_0+u_{2-1}p_1+u_{2-2}p_2+ 32.97$$
$$= 0 + 48.34 \times 0.01 + 0 + 32.97 = 33.45$$

$$u_3 = u_{3-0}p_0+u_{3-1}p_1+u_{3-2}p_2+u_{3-3}p_3+ 8.66$$
$$= 0 + 33.45 \times 0.01 + 48.34 \times 0.09 + 0 + 8.66 = 13.35$$

$$u_4 = u_{4-0}p_0+u_{4-1}p_1+u_{4-2}p_2+u_{4-3}p_3+u_{4-4}p_4+ 7.63$$
$$= 0+13.35 \times 0.01 + 33.46 \times 0.09 + 48.34 \times 0.26 + 7.63 = 23.34$$

$$u_5 = u_{5-0}p_0+u_{5-1}p_1+u_{5-2}p_2+u_{5-3}p_3+u_{5-4}p_4+u_{5-5}p_5+2.4$$
$$= 0+23.34 \times 0.01 + 13.35 \times 0.09 + 33.46 \times 0.26 + 48.34 \times 0.40$$
$$+ 2.4 = 31.87$$

$$u_6 = u_{6-0}p_0+u_{6-1}p_1+u_{6-2}p_2+u_{6-3}p_3+u_{6-4}p_4+u_{6-5}p_5+u_{6-6}p_6+ 0$$
$$= 0+31.87\times0.01+23.34\times0.09+13.35\times0.26+33.46\times0.40+48.34\times0.24$$
$$= 30.88$$

La suma de las renovaciones promedio después de seis unidades de tiempo es

$$\sum_{n=1}^{6} u_n = 181.24$$

Considerando que $\Sigma p_k = 1$, es posible demostrar (ref 3.7) que cuando n tiene a infinito u_n tiende a $N/(\sum_{k=0}^{\infty} kp_k)$, es decir, que conforme n crece el número esperado de reposiciones en el tiempo n tiende a ser igual al número de objetos en la población original dividido entre el promedio de la duración de cada objeto, lo cual, intuitivamente, es razonable.

...

El lector interesado en profundicar más en este proceso de renovación, puede acudir a las refs 3.3 y 3.7.

3.8 *Confiabilidad*

Uno de los atributos más importantes que debe poseer un sistema es una *confiabilidad* adecuada. Antes de establecer la confiabilidad de un sistema, es necesario analizar si los costos y tiempos de producción, las condiciones de operación y las políticas de mantenimiento que deben observarse durante un periodo de operación considerando, justifican el nivel de confiabilidad deseado. Lo anterior se debe a que, en general, un incremento en la confiabilidad lleva aparejado un crecimiento en los costos de producción y de operación de los sistemas.

La *confiabilidad* de un sistema se define como la *probabilidad* de que éste realice satisfactoriamente ciertas funciones específicas durante un lapso prescrito, bajo ciertas condiciones ambientales.

De la definición anterior se desprende que es necesario conocer:

a) El tiempo de operación (vida útil)

b) El medio ambiente de operación (temperatura, humedad, fuerzas que deberá soportar, etc).

c) ¿Qué es lo que constituye una operación satisfactoria o cuándo se considera que un sistema ha fallado? (por ejemplo, ¿qué nivel de daño se considera como "falla" en un edificio que se ve sujeto a un sismo: colapso total, agrietamiento de muros o agrietamiento de los recubrimientos?).

...

Para calcular la probabilidad de que un sistema no falle (su confiabilidad), es necesario conocer las densidades de probabilidades o la densidad de probabilidades conjunta de las variables aleatorias que se considere podrían influir en la sobrevivencia o falla del sistema. Así, para obtener la confiabilidad de un edificio que se vea sujeto a sismos, es necesario conocer las densidades de probabilidades de su resistencia y de las fuerzas dinámicas que provocarían los temblores que pudieran actuar sobre el edificio. En este ejemplo, la aleatoriedad de la resistencia se debe a variaciones al azar en las resistencias de los materiales de construcción, en las dimensiones de las vigas, losas y columnas, etc; la aleatoriedad de las fuerzas sísmicas se debe a la ocurrencia al azar de los temblores en sitios localizados a diferentes distancias del edificio y con diferentes magnitudes, a las características del subsuelo, etc.

Tanto en el ejemplo del sistema estructural que acabamos de describir, como en los sistemas electrónicos, industriales, etc., son varios los factores que pueden influir en las densidades de probabilidades de las variables aleatorias que intervengan en el problema. Estos factores se pueden dividir en tres grupos, a saber, *factores iniciales*, *factores pre-operacionales y factores de operación*, como puede verse en la fig 3.7.

Si $X(t)$ es un proceso estocástico que define el comportamiento o respuesta del sistema, entonces la densidad de probabilidades de primer orden, obtenida con base en la información, Y, disponible al respecto (ya sea experimental o subje-

...

tiva), será $f|x(t)|y|$. Si se divide el eje del tiempo en unidades discretas (como se hizo en el camino casual), el proceso $X(t)$ será de parámetro discreto; en caso contrario será de parámetro continuo.

Por simplicidad, para el caso discreto escribiremos

$$f[x(t_n)|y] = f[x(t_n)]$$

En caso de que el criterio de falla del sistema sea "ocurre la falla si la respuesta del sistema excede al valor A", entonces la probabilidad de que esto ocurra en el tiempo t_n, si lo único que sabemos es que hasta el tiempo inmediato anterior, t_{n-1}, no ha fallado, será

$$P[X(t_n)>A|X(t_{n-1})<A] = \int_A^{\infty} f[x(t_n)]\,dx \qquad (3.54)$$

si el proceso es de parámetro discreto. En caso de que el proceso sea estacionario, su densidad de probabilidades de primer orden no dependerá de t, en cuyo caso se usará en la ecuación anterior $f(x)$ en vez de $f[x(t_n)]$.

Un métodomás usual para determinar la confiabilidad de un sistema consiste en obtener, experimental o subjetivamente, la densidad de probabilidades del *tiempo de falla* del sistema. En forma experimental esto se puede lograr observando varios sistemas idénticos, expuestos a las mismas condiciones ambientales, y anotar los tiempos en que falla cada uno; luego, mediante procedimientos estadísticos, se les ajusta alguna densidad de probabilidades a los tiempos de falla. En forma subjetiva, la densidad se puede asignar con base en el conocimiento de otros sistemas similares, con base en algún modelo matemático

...

(como en la ref 3.10), etc.

En muchas ocasiones, como se verá más adelante, la densidad de probabilidades del tiempo de falla del sistema se deduce de las densidades de sus respectivos componentes que, en general, son más fáciles de determinar.

3.8.1 *Fuerza de mortandad*

En estudios realizados sobre la confiabilidad de los componentes de un sistema se ha encontrado que está caracterizada por tres etapas. La primera es un lapso inicial de *alta mortandad o alta intensidad de falla* (el número medio de fallas por unidad de tiempo es grande), la cual se debe principalmente a un control de calidad deficiente durante la elaboración del componente. Este periodo inicial está limitado por el tiempo T_c indicado en la fig 3.8. Lo que es costumbre hacer en sistemas muy importantes (como los de defensa militar de un país), para eliminar los componentes defectuosos, es usarlos durante un tiempo T_c en algún dispositivo ajeno al sistema, y luego instalar en dicho sistema los que no hayan fallado. La segunda etapa es un periodo de *intensidad de falla constante*, en la que las fallas ocurren al azar y con menor frecuencia que en las etapas 1 y 3; el límite superior de esta parte está indicado con T_D en la fig 3.8. En T_D se inicia la tercera etapa que es de *alta mortandad o alta intensidad de falla*, lo cual equivale a fallas muy frecuentes debidas al deterioro de los componentes. Cuando en un sistema son indeseables este tipo de fallas, estas se pueden reducir siguiendo políticas de mantenimiento preventivo. Estas políticas incluyen pruebas periódicas e inspección de ciertas componentes, y su reemplazo cuando las pruebas indiquen que éstos están próximas a fallar.

La región de intensidad de falla constante corresponde al lapso de operación normal del componente respectivo, en él cual las fallas ocurren al azar y son *independientes*, por lo cual puede considerarse razonablemente que éstas pueden representarse mediante un proceso de Poisson con intensidad λ (el valor de λ varía de un tipo de componente a otro, y se determina experimentalmente). Con esto en mente, la probabilidad de que no ocurra ninguna falla en el periodo de 0 a t se obtiene mediante la ec 3.35, sustituyendo en ella a $k=0$. El resultado es

$$P[X(t)=0] = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^0}{0!} = e^{-\lambda t} = P[T \geq t] \qquad (3.55)$$

en donde T es la variable aleatoria *tiempo de falla*.

Si analizamos la densidad de probabilidades *exponencial*

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t}; 0 \leq t < \infty \qquad (3.56)$$

vemos que su función de distribución (o distribución de probabilidades acumuladas) es

$$P[T \leq t] = F(t) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda t} dt = 1 - e^{-\lambda t}$$

por lo cual la probabilidad de que la variable T sea mayor que t es

$$P[T > t] = 1 - F(t) = e^{-\lambda t} \qquad (3.57)$$

Comparando las ecs 3.55 y 3.57 vemos que éstas tienen como factor común a $e^{-\lambda t}$, por lo que deducimos que la variable aleatoria, T, "tiempo de falla", tiene densidad de probabilidades

...

exponencial, y que la probabilidad de que no falle el componente queda dada por la ec 3.57. Es interesante mencionar que experimentalmente se ha confirmado que este tipo de distribución se ha ajustado razonablemente bien a los tiempos de falla de diversos componentes de circuitos electrónicos, tales como transistores, bulbos, etc.

La *fuerza de mortandad o intensidad de falla*, $\beta(\tau)$, de un sistema se define como sigue: $\beta(\tau)d(\tau)$ es la probabilidad de que un sistema falle en el intervalo de τ a $\tau+d\tau$, suponiendo que no ha fallado hasta el tiempo τ.

Supongamos que un sistema ha operado durante un tiempo τ sin ninguna falla. Si la variable aleatoria T es el tiempo de falla del sistema, y $f(t)$ y $F(t)$ son la densidad de probabilidades y la función de distribución de T, respectivamente, entonces la función de distribución de T será

$$F(t|t>\tau) = \frac{P[T<t,\ T>\tau]}{P[T>\tau]};\quad t\geq\tau \tag{3.58}$$

en donde el miembro izquierdo representa la probabilidad de que el sistema sobreviva hasta t dado que sobrebibió hasta τ, y el numerador del miembro derecho es la probabilidad de que simultáneamente ocurran los eventos $\{T<t\}$ y $\{T>\tau\}$, la cual es igual a $F(t)-F(\tau)$. Además, es evidente que el denominador de la ec 3.58 es $P[T>\tau]=1-F(\tau)$. Por consiguiente, la ec 3.58 queda en la forma

$$F(t|t>\tau) = \frac{F(t)-F(\tau)}{1-F(\tau)};\quad t\geq\tau \tag{3.59}$$

La densidad de probabilidades correspondiente se obtiene

...

derivando la ec 3.59 con respecto a t; el resultado es

$$f(t|t>\tau) = \frac{f(t)}{1-F(\tau)} \quad \text{si} \quad t \geq \tau \qquad (3.60)$$

$$\qquad\qquad 0 \quad \text{si} \quad t<\tau$$

De la definición de fuerza de mortandad vemos que

$$\beta(\tau)d\tau = f(\tau|t>\tau)d\tau$$

por lo que

$$\beta(\tau) = \frac{f(\tau)}{1-F(\tau)} = \frac{\frac{dF(\tau)}{d\tau}}{1-F(\tau)} \qquad (3.61)$$

Mediante la ec 3.61 se puede obtener la fuerza de mortandad cuando se conoce la densidad de probabilidades de falla del sistema. Por el contrario, si lo que se conoce es $\beta(\tau)$, la densidad de probabilidades se puede obtener resolviendo la ecuación diferencial de la ec 3.61. Integrando ambos miembros de dicha ecuación se obtiene:

$$\int_0^\tau \beta(t)dt = -\ell n[1-F(\tau)]$$

(la constante de integración es cero porque $F(0)=0$, debido a que el sistema empezó a operar en $\tau=0$). En la ecuación anterior ℓn denota logaritmo natural (con base e). El antilogaritmo de la ecuación anterior resulta ser

$$F(t) = 1- e^{-\int_0^\tau \beta(t)dt} \qquad (3.62)$$

o, derivado respecto a τ,

$$f(\tau) = \beta(\tau)e^{-\int_0^\tau \beta(t)dt} \qquad (3.63)$$

...

Ejemplo

Sea un sistema en el que la fuerza de mortandad del sistema es la constante λ. Aplicando la ec 3.63, la densidad de probabilidades correspondiente resulta ser

$$f(\tau) = \lambda e^{-\int_0^\tau \lambda dt} = \lambda e^{-\lambda\tau}; \tau \geq 0$$

que es la distribución exponencial. En conclusión, si la densidad de probabilidades de falla de un sistema es exponencial, entonces su fuerza de mortandad es constante e igual al parámetro λ de la misma.

Ejemplo

Si un sistema tiene una densidad de probabilidades gama, es decir, si

$$f(t) = \begin{cases} c^2 t e^{-ct} & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases}$$

donde c es una constante (el parámetro de la distribución) entonces

$$F(t) = 1 - cte^{-ct} - e^{-ct} \qquad \text{si } t > 0$$

La fuerza de mortandad respectiva se obtiene mediante la ec 3.61, lo cual resulta en

$$\beta(\tau) = \frac{c^2 \tau e^{-c\tau}}{c\tau e^{-c\tau} + e^{-c\tau}} = \frac{c^2\tau}{1+c\tau}$$

Ejemplo

Otra función de intensidad de falla que se ha empleado en algunos estudios de confiabilidad (ref 3.11) tiene como ecuación a

$$\beta(\tau) = \alpha\delta e^{\delta-1}$$

donde α y δ son constantes positivas. Obsérvese que si $\delta>1$ entonces $\beta(\tau)$ crece con τ; si $\delta<1$, decrece, y si $\delta=1$, entonces $\beta(\tau)=\lambda$; este último coincide con el ya estudiado de la distribución de Poisson. Usando esta expresión para $\beta(\tau)$ en la ec 3.63 se obtiene

$$f(\tau) = \alpha\delta\tau^{\lambda-1}e^{-\alpha\tau^{\delta}}$$

que es la distribución de Weibull.

3.8.2. *Pruebas de duración*

Para determinar la densidad de probabilidades de la duración de un componente de un sistema, es necesario extraer una muestra aleatoria de n componentes idénticas, probarlas poniéndolas a funcionar en las condiciones ambientales con que lo harán en el sistema y anotando los tiempos de duración de cada componente. En muchas ocasiones la duración de los componentes es larga, por lo que es necesario diseñar pruebas aceleradas, de tal manera que las condiciones ambientales sean más severas que las normales y se ocasionen las fallas más rápidamente. Este tipo de pruebas se pueden usar también para comparar dos tipos diferentes de componentes, para que rápidamente se pueda inferir cuál es más confiable. Es evidente que los resultados de las pruebas aceleradas deben estar correlacionadas con los de las pruebas normales para poder inferir las duraciones en operación normal a partir de las correspondientes a las pruebas aceleradas (estas correlaciones deben determinarse durante la etapa del diseño de la prueba acelerada).

Si existe evidencia experimental o subjetiva suficiente que favorezca a la *distribución exponencial* con parámetro λ, como densidad de probabilidades de los tiempos de falla de los componentes, entonces

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t} \; ; \; t>0, \; \lambda>0$$

y el tiempo medio de falla será

$$E|T| = \mu = 1/\lambda \tag{3.64}$$

Supongamos que se ponen a prueba n componentes y que la prueba se da por terminada cuando hayan fallado r de ellos ($r \leq n$), y que los tiempos de falla son $t_1 \leq t_2 \leq \ldots \leq t_r$. Nuestro interés radica en la estimación estadística, $\hat{\mu}$, del tiempo medio de falla, μ.

Usando la teoría desarrollada en la ref 3.11, se puede demostrar que el estimador insesgado del tiempo medio de vida de los componentes es

$$\hat{\mu} = T_r / r \tag{3.65}$$

donde T_r es la duración acumulada de los componentes hasta el tiempo t_r, es decir

$$T_r = \sum_{i=1}^{r} t_i + (n-r) t_r \tag{3.66}$$

para el caso en que los elementos que han fallado *no se reemplazan* por uno nuevo, o

$$T_r = n t_r \tag{3.67}$$

si se han reemplazado. Observe que si r-n la prueba es sin reemplazo, de las ecs 3.65 y 3.66, se obtiene que $\hat{\mu}$ es el promedio de los tiempos observados de falla.

..-

Para hacer inferencias acerca de μ, usamos el hecho de que $2T_r/\mu$ es una variable que tiene distribución ji-cuadrada con $2r$ grados de libertad (ref 3.11), independientementede que la prueba haya sido con o sin reemplazo. Por consiguiente, el intervalo de confianza para μ correspondiente a un nivel de significancia, α(el nivel de confianza es $1-\alpha$) es

$$\frac{2T_r}{\chi^2_{1-\alpha/2}} \leq \mu \leq \frac{2T_r}{\chi^2_{\alpha/2}} \tag{3.68}$$

en donde $\chi^2_{\alpha/2}$ y $\chi^2_{1-\alpha/2}$ son las abscisas de la distribución ji-cuadrada con $2r$ grados de libertad, para los cuales queda un área bajo la curva igual a $\alpha/2$ a su derecha o a su izquierda, respectivamente (fig 3.9).

Para probar hipótesis acerca de μ usamos la misma distribución χ^2 con $2r$ grados de libertad. Si la hipótesis nula (por probar) es que $\mu=\mu_0$(μ_0 es un valor específico), y la hipótesis alternativa es $\mu>\mu_0$, aceptaremos la hipótesis nula con un nivel de confianza $1-\alpha$ si

$$\frac{2T_r}{\mu_0} < \chi^2_{\alpha} \tag{3.69}$$

y en caso contrario la rechazaremos. Si las hipótesis alternativas son $\mu<\mu_0$ o $\mu\neq\mu_0$, aceptaremos la hipótesis nula si

$$\frac{2T_r}{\mu_0} > \chi^2_{1-\alpha/2} \tag{3.70}$$

o si

$$\chi^2_{1-\alpha/2} \leq \frac{2T_r}{\mu_0} \leq \chi^2_{\alpha/2} \tag{3.71}$$

respectivamente.

Otra opción que se puede tener al realizar la prueba de duración es la de interrumpir la prueba al concluir un tiempo acumulado de fallas fijo, T, predeterminado, y considerar los k componentes que han fallado hasta ese instante como el valor observado de una variable aleatoria. Ya sea que la prueba se realice con o sin reemplazo, un intervalo de confianza aproximado para el tiempo medio de vida de los componentes es

$$\frac{2T}{\chi^2_{1-\alpha/2}} \leq \mu \leq \frac{2T}{\chi^2_{\alpha/2}} \qquad (3.72)$$

donde $\chi^2_{1-\alpha/2}$ es la abscisa de la distribución ji-cuadrada con $2k + 2$ grados de libertad, para la cual queda un área bajo la curva igual a $\alpha/2$ a su derecha, y $\chi^2_{\alpha/2}$ es la abscisa de la distribución ji-cuadrada con $2k$ grados de libertad, para la cual queda un área bajo la curva igual a $\alpha/2$ a su izquierda. Las pruebas de hipótesis son semejantes a las del caso anterior, pero ahora usando una distribución ji-cuadrada con $2k$ grados de libertad.

Ejemplo

Supongamos que se han puesto a prueba de duración 50 componentes de un sistema, y que ésta se termina al fallar 10 elementos. Si los tiempos de falla resultan ser 65,110,380,420, 505,580,650,840,910 y 950 horas, entonces n=50, r=10 yde la ec 3.66,

$$T_{10} = (65 + 110 +...+ 950) + (50 - 10)\ 950 = 43,\ 410 \text{ hrs}$$

La estimación del tiempo medio de sobrevivencia de los componentes es (ec 3.65)

...

$$\hat{\mu} = \frac{43,410}{10} = 4,341 \text{ hs}$$

Por consiguiente, de la ec 3.64 se concluye que la intensidad de falla o mortandad de estos componentes es

$$\lambda = 1/\hat{\mu} = 0.00023 \text{ fallas/hr}$$

o 23 fallas cada cien mil horas. El intervalo de confianza del 90% ($\alpha = 1 - 0.9 = 0.10$) para μ es

$$\frac{2x43,410}{\chi^2_{0.95}} \leq \mu \leq \frac{2x43,410}{\chi^2_{0.05}}$$

en donde la densidad ji-cuadrada tiene 2 x 10= 20 grados de libertad. De las tablas de esta distribución (en la ref 3.11, por ejemplo) se obtienen $\chi^2_{0.95}=31,410$ y $\chi^2_{0.05}=10,851$, por lo cual resulta

$$2,764 \leq \mu \leq 8,001$$

Esto significa que con un 90% de probabilidad, el verdadero valor de μ cae entre 2,764 y 8,001 hs.

Supongamos ahora que deseamos probar la hipótesis nula de que $\lambda=0.00040$, o sea $\mu_0=2,500$ hs, contra la hipótesis alternativa de que $\mu>2,500$ hrs, con un nivel de confianza del 95% ($\alpha=1-0.95=0.05$). En este caso $\chi^2_{0.95}=31,410$ y $2T_r/\mu_0=2x43,410/2,500=34.728$, que resulta ser mayor que 31.410, por lo cual rechazamos la hipótesis nula con un nivel de significancia de 5%; esto equivale a decir que el tiempo medio de vida excede de 2,500 hs con un 95% de nivel de confianza.

Para estimar experimentalmente la duración media y la variancia de la duración de componentes que no tienen intensidad

...

de falla constante, como la que corresponde a la distribución de Weibull ya descrita, el lector puede acudir a la ref 3.11, pág 376.

Ejemplo

Supongamos que la duración de un componente de un sistema tiene distribución exponencial con parámetro λ, es decir,

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$$

Si al fallar un componente se reemplaza de inmediato por otro nuevo, calculemos la densidad de probabilidades de la duración total.

Sean T_1 y T_2 las variables aleatorias que representan a los tiempos de falla del primero y el segundo componente, respectivamente. Puesto que ambos componentes son idénticos, tienen la misma distribución exponencial. Nos interesa la densidad de probabilidades de $T = T_1+T_2$ la cual puede obtenerse mediante la ec 3.7, ya que T_1 y T_2 son independientes (se supone que el funcionamiento del sistema es el mismo con ambos componentes). En estas circunstancias

$$\begin{aligned} f_T(t) &= \int_0^\infty f_{T_1}(t_1) f_{T_2}(t-t_1)\,dt_1 \\ &= \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t_1} \lambda e^{-\lambda(t-t_1)}\,dt_1 = \lambda^2 e^{-\lambda t} \int_0^t dt_1 \\ &= \lambda^2 t e^{-\lambda t} \end{aligned}$$

Aplicando repetidamente este procedimiento podemos calcular la densidad de probabilidades de la duración de n componentes que se usan sucesivamente, reemplazando cada una a la que ha fallado previamente.

...

3.9 *Sistemas en serie y en paralelo*

Puesto que la confiabilidad se ha definido como una probabilidad, ésta se podrá calcular, para un sistema cualquiera, si se conocen las densidades de probabilidades de falla de cada uno de sus componentes. Estas densidades se pueden obtener mediante experimentos diseñados exprofeso o mediante consideraciones de carácter subjetivo basadas en experiencias previas con componentes semejantes, o en la experiencia del que estudia la confiabilidad del sistema.

Muchos sistemas pueden considerarse con los componentes *en serie o en paralelo*. Se dice que un sistema es *en serie* si sus componentes están conectados entre sí de tal manera que al fallar uno de ellos falla el sistema; en la fig 3.10 se muestra la representación clásica de un sistema de este tipo. Un sistema es en *paralelo* si para que falle éste se necesita que fallen todos sus componentes; en la fig 3.11 se encuentra la representación gráfica de un sistema de este tipo.

Para estimar la confiabilidad de un sistema en serie consideraremos que los componentes del mismo son *independientes*, es decir, que el hecho de que uno falle no influye en la probabilidad de que cualquier otro falle. En otras palabras, la confiabilidad del componente se mantiene inalterada cuando cualquier otro falla.

Puesto que para que un sistema en serie no falle se requiere que ninguno de sus componentes falle, su confiabilidad será igual al producto de las confiabilidades de cada uno de sus componentes (esto se debe a que el evento "no falla el sistema"

...

es la intersección de los eventos "no falla el componente i" en donde i=1,2,...,n, y n es el total de componentes). En símbolos, la probabilidad de que no falle el sistema antes del tiempo t es

$$P|T \geq t| = R(t) = R_1(t) x R_2(t) x \ldots x R_n(t) = \prod_{i=1}^{n} R_i(t) \qquad (3.73)$$

en donde T es la variable aleatoria "tiempo de falla del sistema", t es un valor que puede asumir T, $R(t)$ es la probabilidad de que no falle el sistema hasta el tiempo t (su confiabilidad hasta t), y $R_i(t)$ es la probabilidad de que la componente i no falle antes de t. De la ec 3.73 se concluye que la confiabilidad de un sistema en serie decrece conforme aumenta el número de sus componentes, ya que se están multiplicando entre sí números menores de uno. Por ejemplo, si n=4 y $R_i(t)$=0.9 para toda i (los componentes son idénticos), entonces $R(t)$=0.9 x 0.9 x 0.9 x 0.9 = 0.6561; si n=5, $R(t)$=0.9 x 0.9 x 0.9 x 0.9x0.9 = 0.59049

Para que un sistema en paralelo falle es necesario que fallen *todos* sus componentes. Si dichos componentes son independientes, la probabilidad de falla del sistema en algún instante previo a t será

$$P|T \leq t| = F(t) = 1 - R(t) = \prod_{i=1}^{n} |1 - R_i(t)| \qquad (3.74)$$

por lo que la confiabilidad del sistema será 1-$P|T \leq t|$, es decir

$$R(t) = 1 - \prod_{i=1}^{n} |1 - R_i(t)| \qquad (3.75)$$

Puesto que todas las probabilidades de falla que aparecen en el miembro derecho de la ec 3.74 son menores que uno, el resultado de aplicarla decrecerá conforme aumenta el número n de componentes, es decir, la probabilidad de supervivencia

...

de un sistema en paralelo aumenta conforme crece el número de sus componentes y, por consiguiente, su confiabilidad (ec 3.75) aumenta.

Por ejemplo, si un sistema en paralelo tiene cuatro componentes (n=4) y si $R_i(t)$=0.9, entonces su probabilidad de falla antes del tiempo t es (ec 3.74)

$$P|T\leq t| = F(t) = 0.1 \times 0.1 \times 0.1 \times 0.1 = 0.0001$$

por lo que su confiabilidad (probabilidad de sobrevivencia) es

$$R(t) = 1 - 0.0001 = 0.9999$$

El hecho de que la confiabilidad de un sistema en paralelo es mayor que la de uno en serie, en igualdad del número de componentes y de sus confiabilidades, hace concluir que una manera de aumentar la confiabilidad de un sistema en serie consiste en ponerle algunos componentes en paralelo a aquellos que tengan baja confiabilidad, con lo cual se forma un sistema *mixto*, como el de la fig 3.12. A los componentes que se agregan con este objeto se les llama *redundantes*, porque no son indispensables para que funcione el sistema. Sin embargo, al añadirle componentes redundantes a un sistema se incrementan su costo, volumen, complejidad, etc., lo que en ocasiones desalienta la utilización de este recurso.

Para calcular la confiabilidad de un sistema mixto primero hay que obtener las confiabilidades de los grupos de componentes que están en paralelo, y luego considerar a dicho grupo como si fuese un elemento conectado en serie con una confiabilidad igual a la del grupo en paralelo. Así, en el caso presentado

...

en la fig 3.12, en que la confiabilidad de cada componente hasta el instante t está anotada abajo de él, el primer grupo de elementos en paralelo tiene una confiabilidad igual a $R_1(t) = 1 - 0.3 \times 0.3 \times 0.3 = 0.973$; la del segundo grupo es $R_2(t) = 1 - 0.2 \times 0.2 = 0.96$ (ver fig 3.13). La confiabilidad del sistema es, entonces,

$$R(t) = 0.99 \times 0.95 \times 0.973 \times 0.96 \times 0.90 = 0.7815$$

Si no hubiese habido componentes redundantes, la confiabilidad hubiera sido

$$R(t) = 0.99 \times 0.95 \times 0.70 \times 0.80 \times 0.90 = 0.4740$$

que es bastante menor que la del sistema que sí los tiene.

3.10 *El modelo exponencial en la confiabilidad de un sistema*

En esta sección emplearemos los resultados obtenidos para calcular las confiabilidades de sistemas en serie y en paralelo, suponiendo que las densidades de probabilidades, $f(t)$, de los tiempos de falla de los componentes son exponenciales, es decir,

$$f_i(t) = \lambda_i e^{-\lambda_i t}$$

en donde λ_i es la intensidad de fallas (número medio de fallas por unidad de tiempo) del i-ésimo componente.

Tomando en cuenta que

$$R(t) = 1 - F(t) = 1 - \int_0^t f(t)\,dt$$

obtenemos

$$R_i(t) = 1 - \int_0^t \lambda_i e^{-\lambda_i t} dt = e^{-\lambda_i t} \qquad (3.76)$$

...

Si el sistema es en serie, su confiabilidad, de acuerdo con la ec 3.73, será

$$R(t) = \prod_{i=1}^{n} e^{-\lambda_i t} = e^{-(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i)t} = e^{-\theta t} \tag{3.77}$$

en donde

$$\theta = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \tag{3.78}$$

Puesto que el miembro derecho de la ec 3.77 tiene la misma forma que el de la ec 3.76, deducimos que la densidad de probabilidades del sistema en serie también es exponencial con parámetro θ, es decir, el número medio de fallas del sistema por unidad de tiempo queda dado por la ec 3.78. Además, puesto que el tiempo medio de falla de cada componente es (sec 3.8.2)

$$E_i(t) = \mu_i = 1/\lambda_i$$

tenemos que el tiempo medio falla del sistema, cuando cada componente que falla se reemplaza de inmediato con otro idéntico, es

$$E|T| = \mu = \frac{1}{\theta} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i} = \frac{1}{\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n} = \frac{1}{\frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2} + \ldots + \frac{1}{\mu_n}} \tag{3.79}$$

Para el caso de un sistema en paralelo, si las densidades de probabilidades de falla de las componentes son exponenciales, la confiabilidad es

$$R(t) = 1 - \prod_{i=1}^{n} (1 - e^{\lambda_i t}) \tag{3.80}$$

Esta probabilidad no se puede factorizar en tal forma que tenga la apariencia de la ec 3.76, como sucedió con el

...

sistema en serie y, por consiguiente, la distribución de la confiabilidad de un sistema en paralelo no es exponencial. En estas condiciones, la intensidad de falla (fuerza de mortandad) del sistema se tendrá que obtener mediante la ec 3.61, y no resultará ser una constante.

El tiempo medio de falla también es difícil de obtener para el caso general en que las λ_i son diferentes. Si todas las λ_i son iguales a λ, entonces la ec 3.80 resulta en

$$R(t) = 1 - (1 - e^{-\lambda t})^n \tag{3.81}$$

El desarrollo del bonimio del miembro derecho de la ec 3.81 conduce a

$$R(t) = \binom{n}{1} e^{-\lambda t} - \binom{n}{2} e^{-2\lambda t} + \ldots + (-1)^{n-1} e^{-n\lambda t} \tag{3.82}$$

en donde $\binom{n}{i}$ denota al número de combinaciones que se pueden formar con n objetos tomando de i en i. Puesto que la densidad de probabilidades es

$$f(t) = \frac{dF(t)}{dt} = \frac{d}{dt} \left| 1 - R(t) \right| = -\frac{dR(t)}{dt}$$

obtenemos que la densidad de probabilidades del tiempo de falla del sistema en paralelo es

$$f(t) = \lambda \binom{n}{1} e^{-\lambda t} - 2\lambda \binom{n}{2} e^{-2\lambda t} + \ldots + (-1)^{n-1} n\lambda e^{-n\lambda t} \tag{3.83}$$

La media del tiempo de falla es, entonces

$$E(t) = \mu = \int_0^\infty t f(t)\, dt = \lambda \binom{n}{1} \int_0^\infty t e^{-\lambda t} dt - 2\lambda \binom{n}{2} t e^{-2\lambda t} dt + \ldots$$

$$+ (-1)^{n-1}\, n\lambda \int^\infty t e^{-n\lambda t} dt$$

$$= \frac{1}{\lambda} \binom{n}{1} - \frac{1}{2\lambda} \binom{n}{2} + \ldots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n\lambda}$$

...

Por inducción matemática se puede demostrar que esta ecuación es equivalente a

$$\mu = \frac{1}{\lambda}\left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}\right) \tag{3.84}$$

por lo que la fuerza de mortandad resulta ser

$$\theta = \frac{1}{\mu} = \frac{\lambda}{1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}}$$

TABLA 2.1

ALGUNAS DISTRIBUCIONES DE PROBABILIDADES

	Distribución	*Densidad de probabilidades*, $f_X(x)$	*Esperanza*	*Variancia*
DISCRETAS	Binomial ($n=1,2,\ldots;0\leq p\leq 1$; $q=1-p$)	$\binom{n}{x}p^x q^{n-x}$; $x = 0,1,\ldots,n$ 0 ; $x < 0$	np	npq
	Poisson ($\lambda > 0$)	$\frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}$; $x = 0,1,\ldots$ 0 ; $x < 0$	λ	λ
	Geométrica ($0\leq p\leq 1$: $q=1-p$)	pq^{x-1} ; $x = 0,1,\ldots$ 0 ; $x < 0$	$1/p$	q/p^2
	Binomial negativa ($r=1,2,\ldots;0\leq p\leq 1$; $q=1-p$)	$\binom{r+x-1}{x}p^r q^x$; $x = 0,1,\ldots$ 0 ; $x < 0$	rq/p	rq/p^2
CONTINUAS	Normal ($-\infty<\eta<\infty$; $0\leq\sigma^2<\infty$)	$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-(x-\eta)^2/2\sigma^2}$; $-\infty<x<\infty$	η	σ^2
	Exponencial ($\lambda>0$)	$\lambda e^{-\lambda x}$; $x \geq 0$ 0 ; $x < 0$	$1/\lambda$	$1/\lambda^2$
	Uniforme en el intervalo de a a b	$\frac{1}{(b-a)}$; $a\leq x\leq b$ 0 ; $a>x$ o $b<x$	$(a+b)/2$	$(b-a)^2/12$
	Ji-cuadrada (χ^2) con n grados de libertad	$\frac{1}{2^{n/2}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}x^{(n/2-1)}e^{-x/2}$	n	$2n$

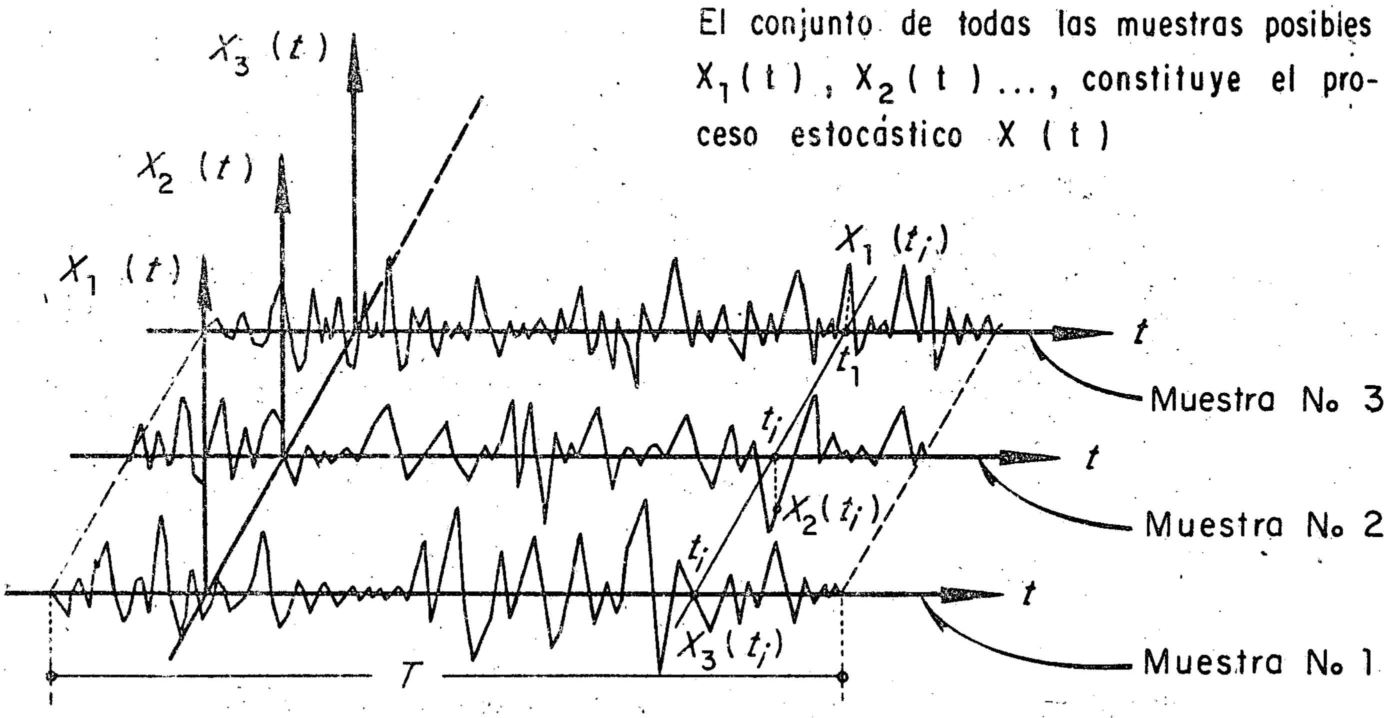


Fig 3.1.a Proceso estocástico de parámetro continuo

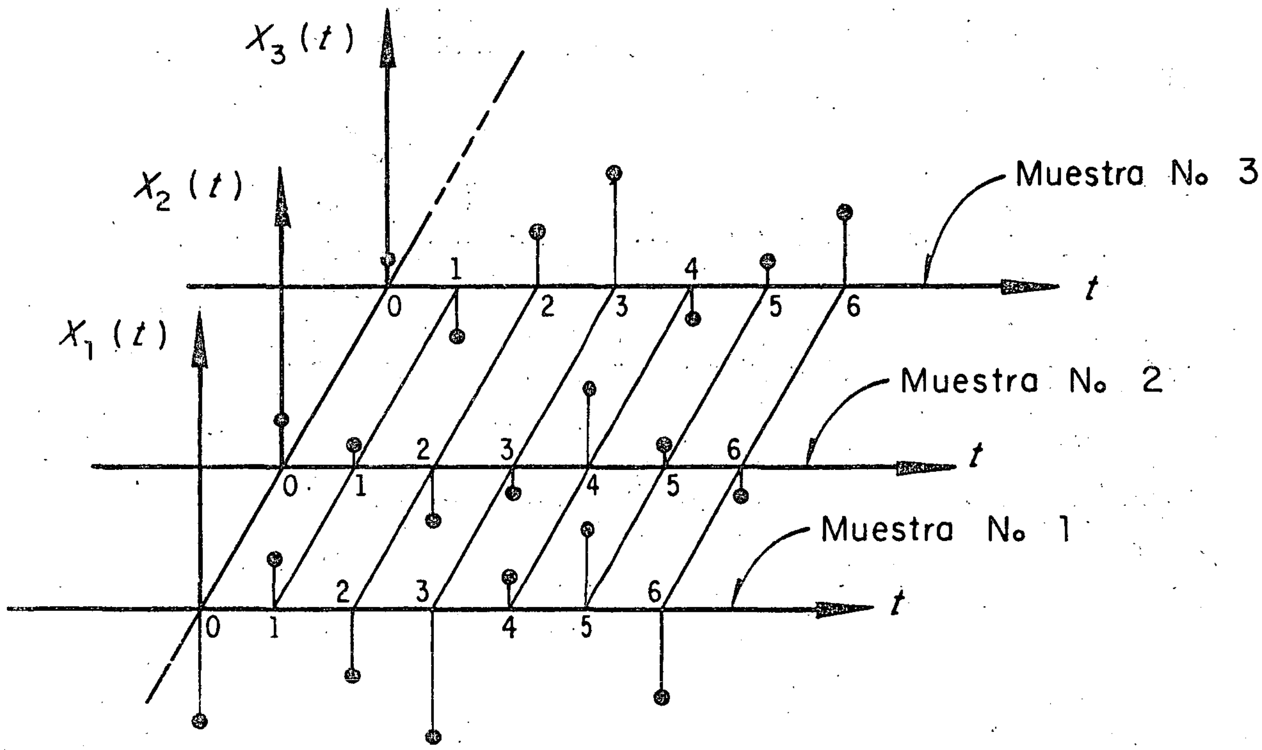


Fig 3.1.b Proceso estocástico de parámetro discreto

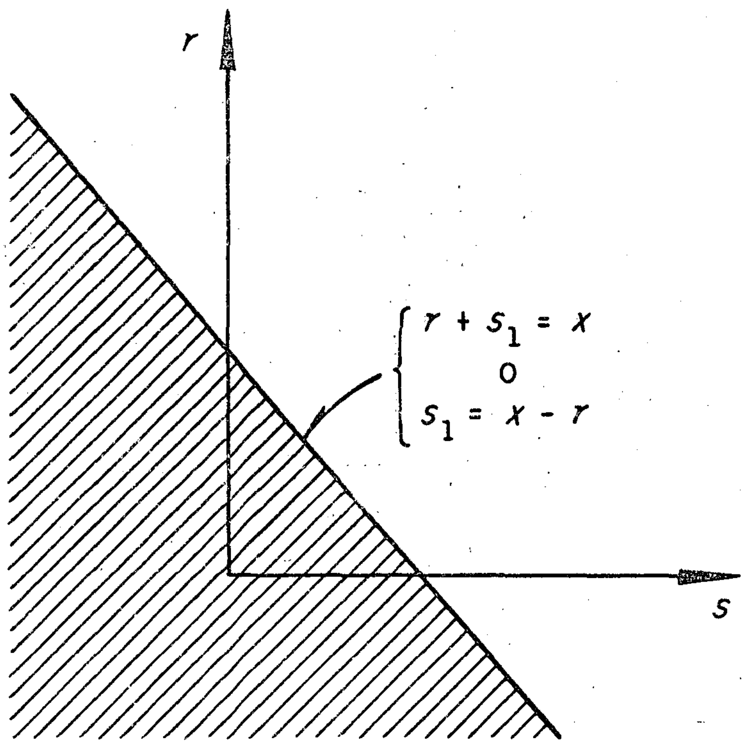


Fig 3.2 Región de integración donde $r+s_1 \leq x$

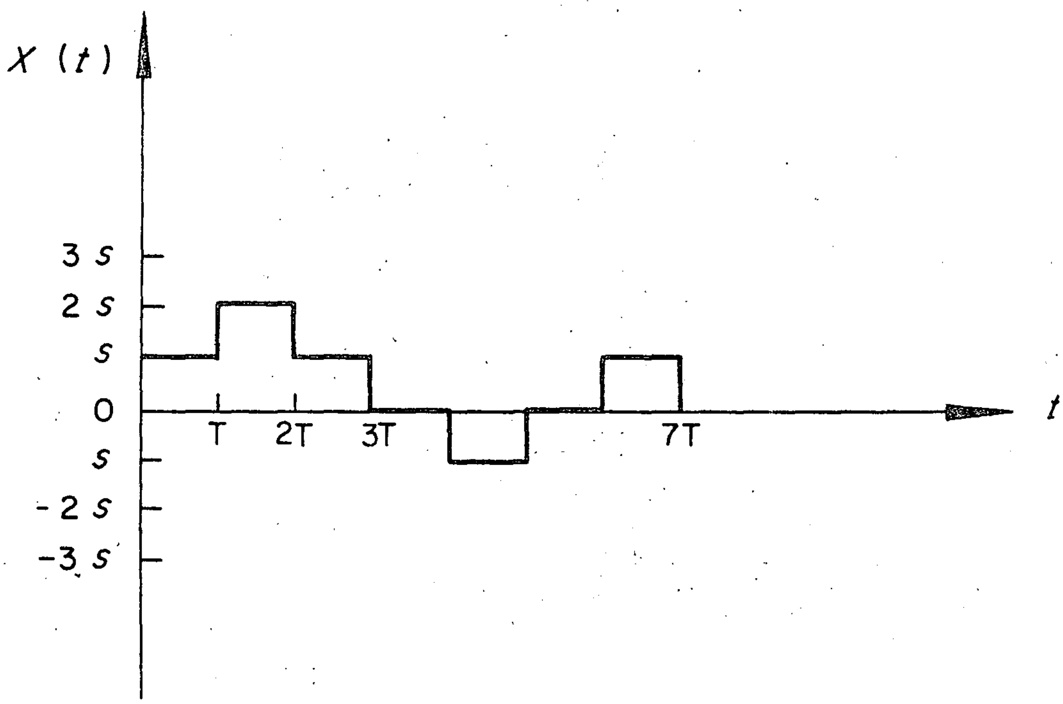


Fig 3.3 Función muestra de un paseo casual

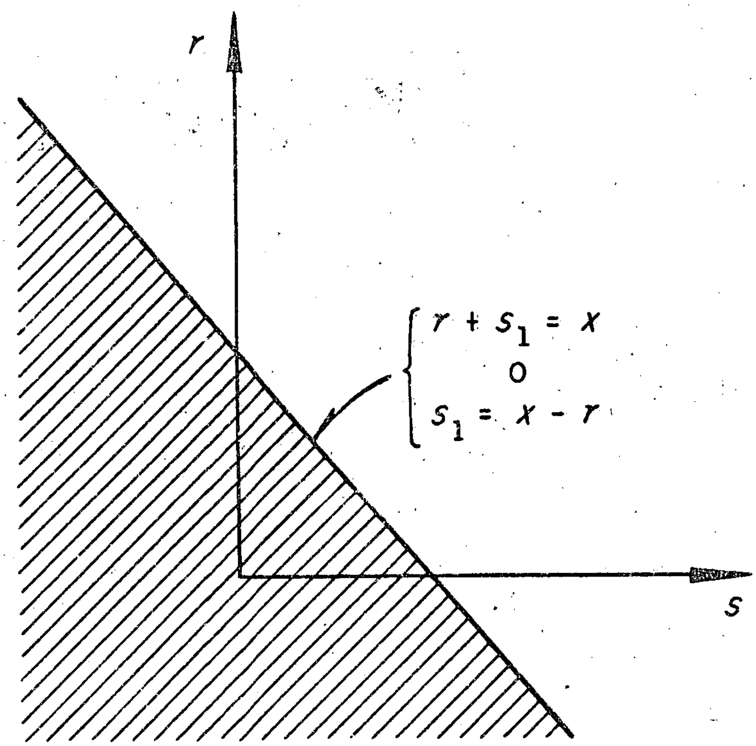


Fig 3.2 Región de integración donde $r+s_1 \leq x$

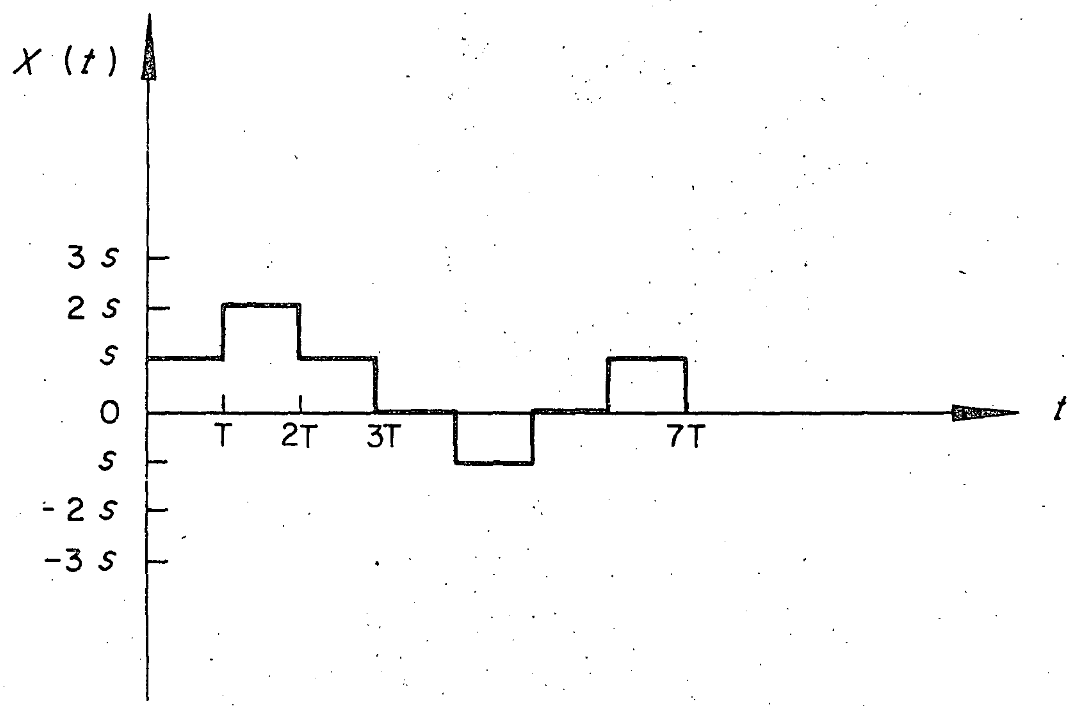


Fig 3.3 Función muestra de un paseo casual

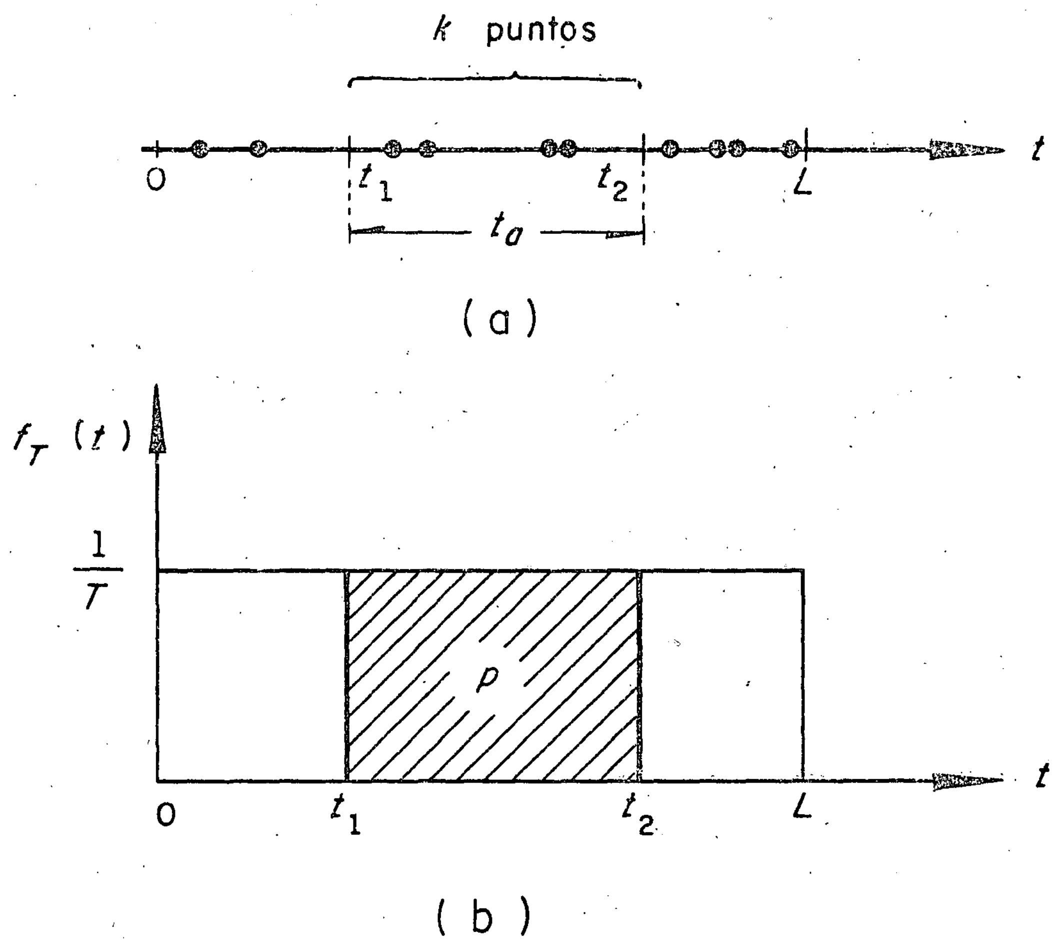


Fig 3.4 Ocurrencia aleatoria de eventos en un lapso de duración L

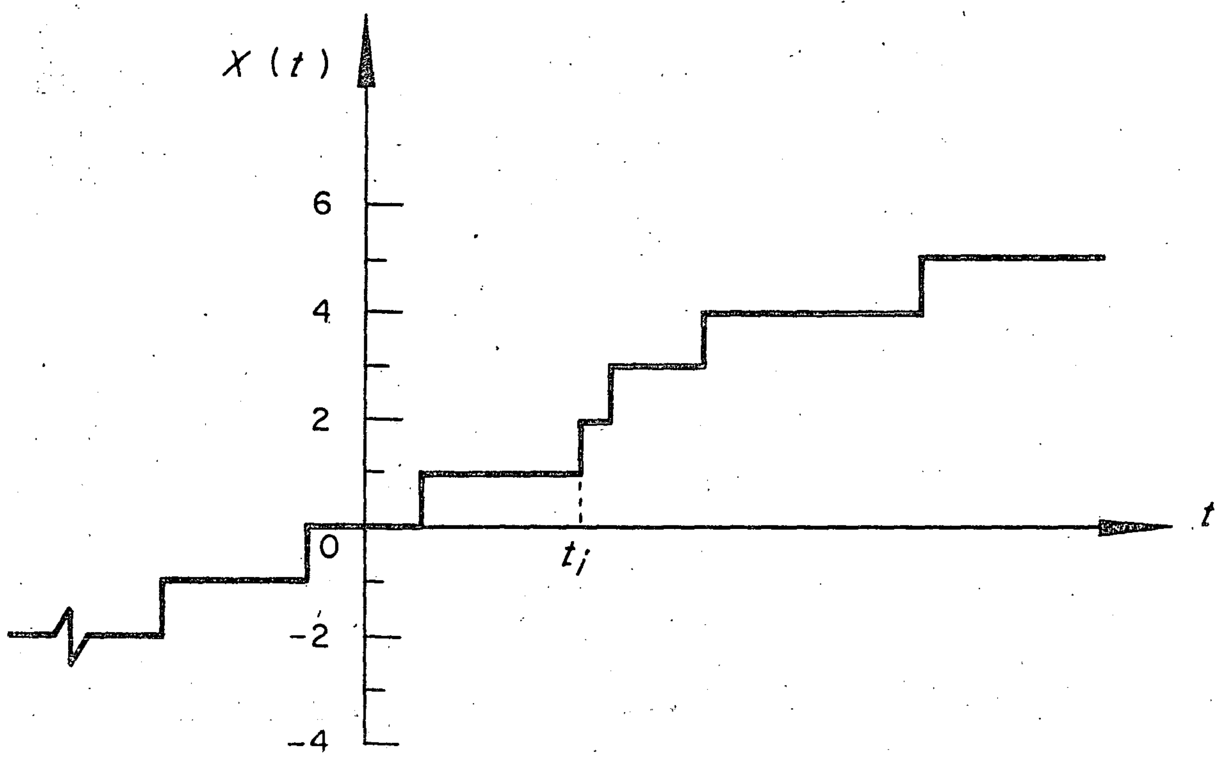


Fig 3.5 Función muestra de un proceso simple de Poisson

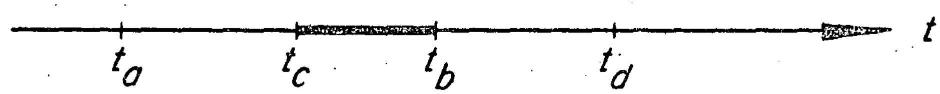


Fig 3.6 Zona de traslape de los intervalos de t_a a t_b , y de t_c a t_d

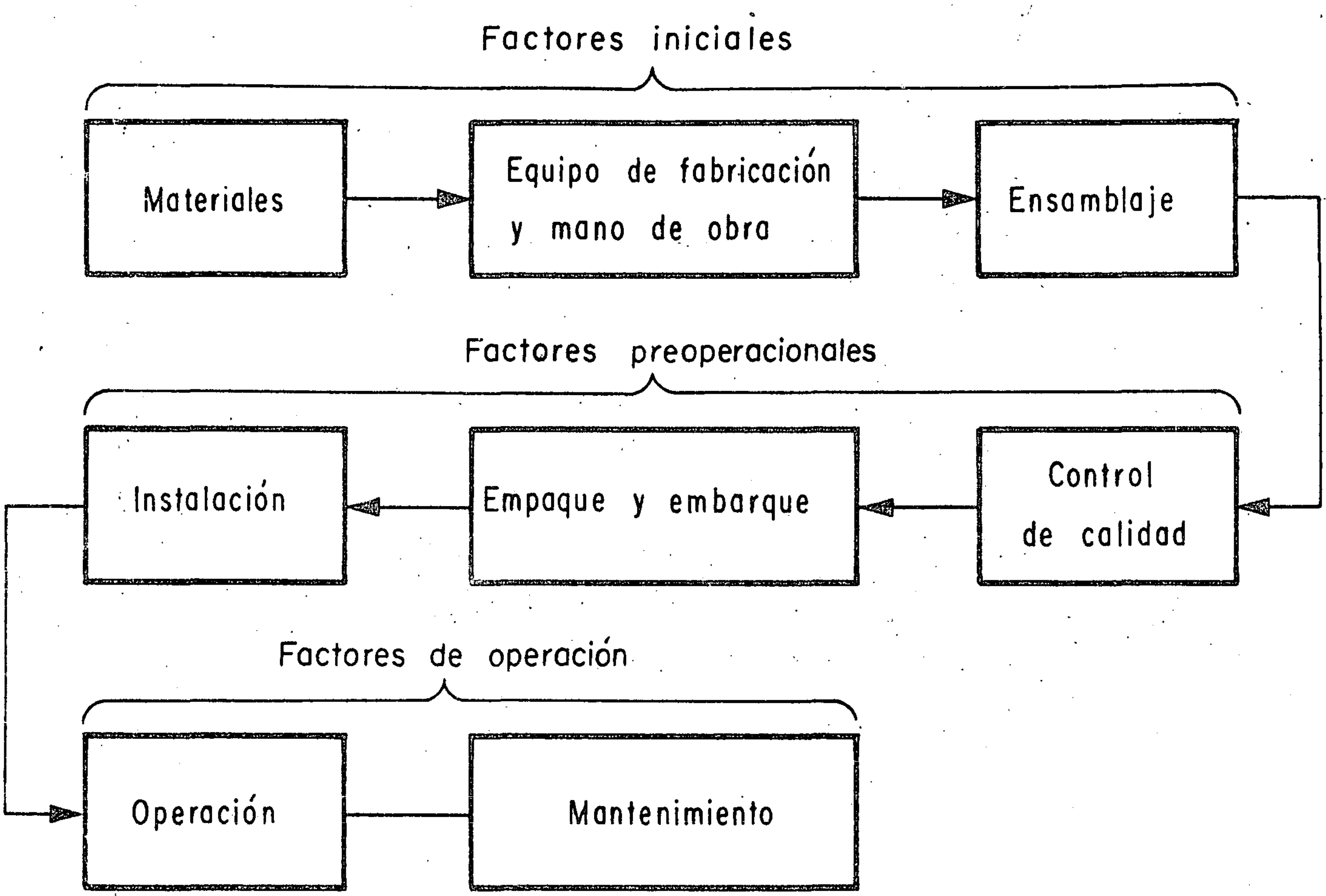


Fig 3.7 Factores que influyen en el comportamiento de un sistema

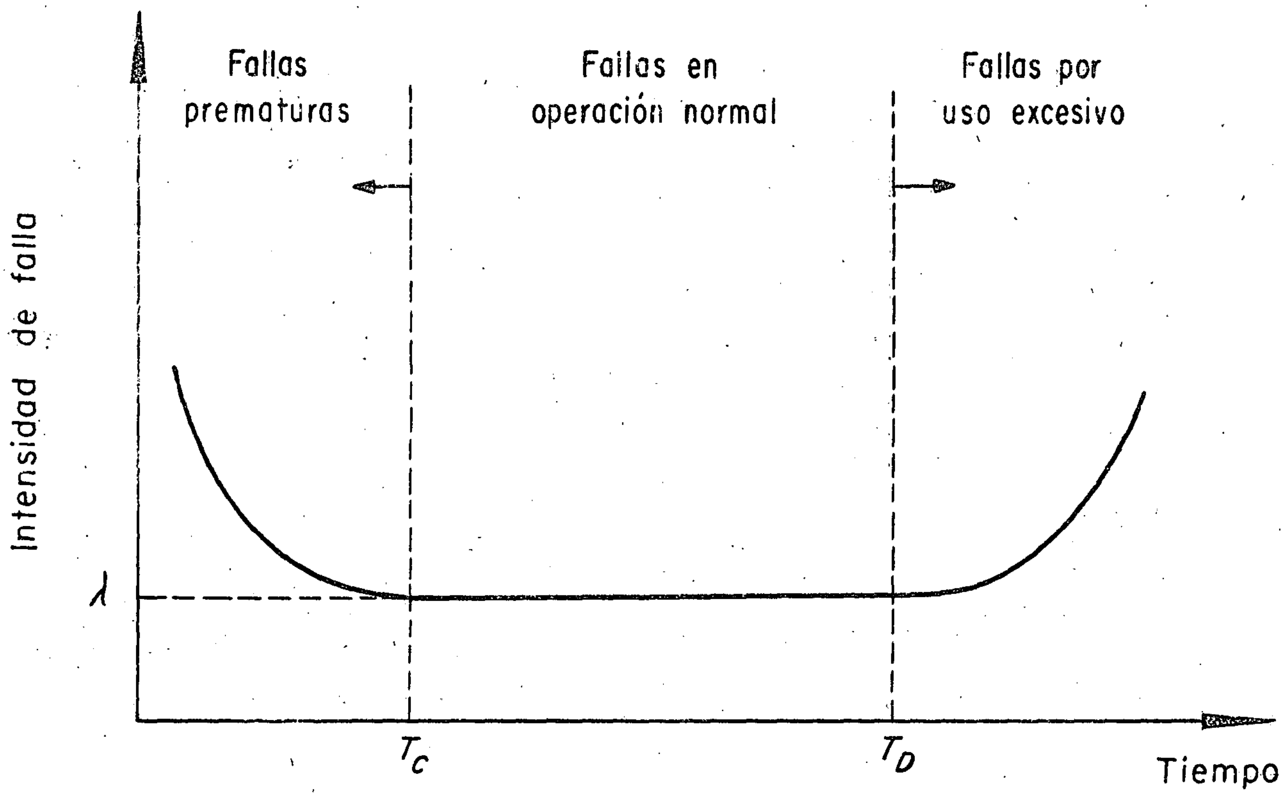


Fig 3.8 Intensidad de falla en función del tiempo de operación

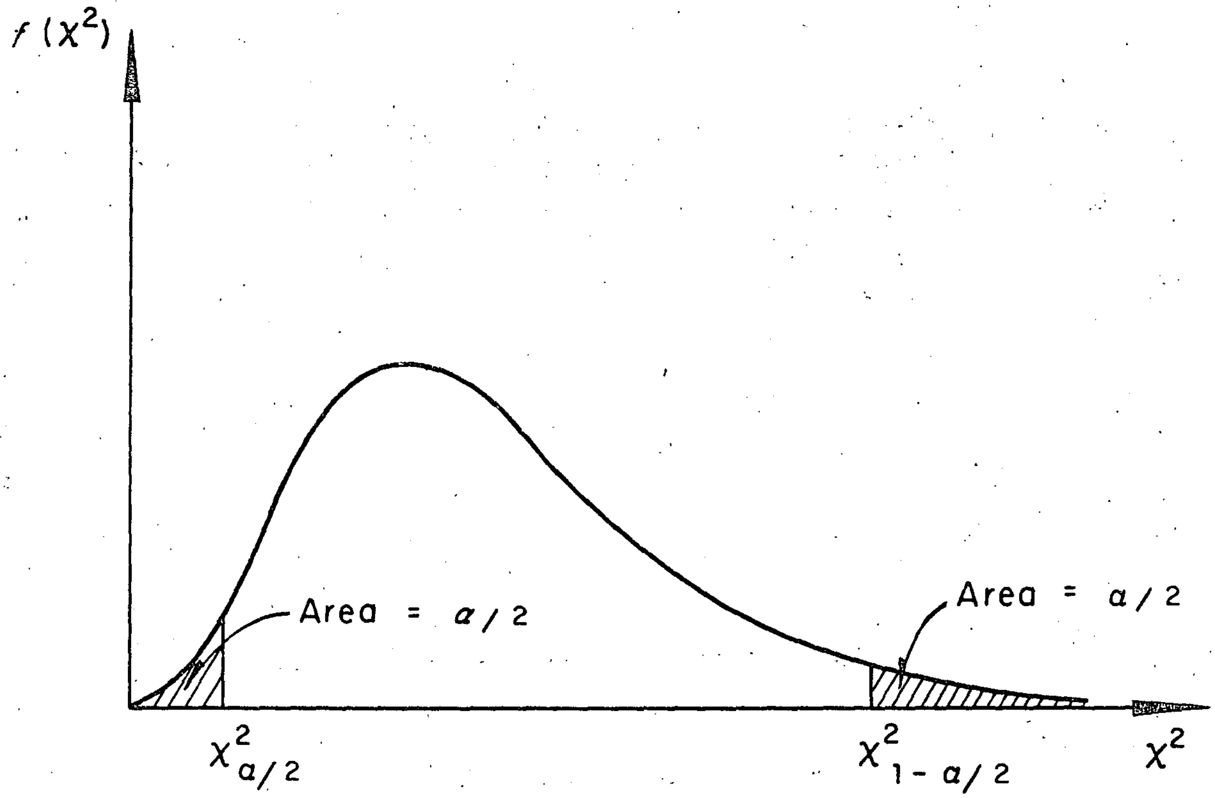


Fig 3.9 Distribución ji - cuadrada

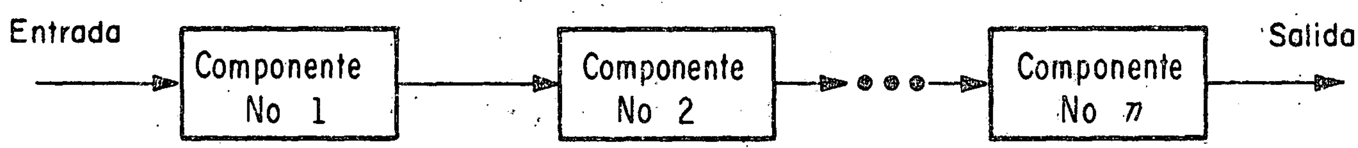


Fig 3.10 Sistema en serie

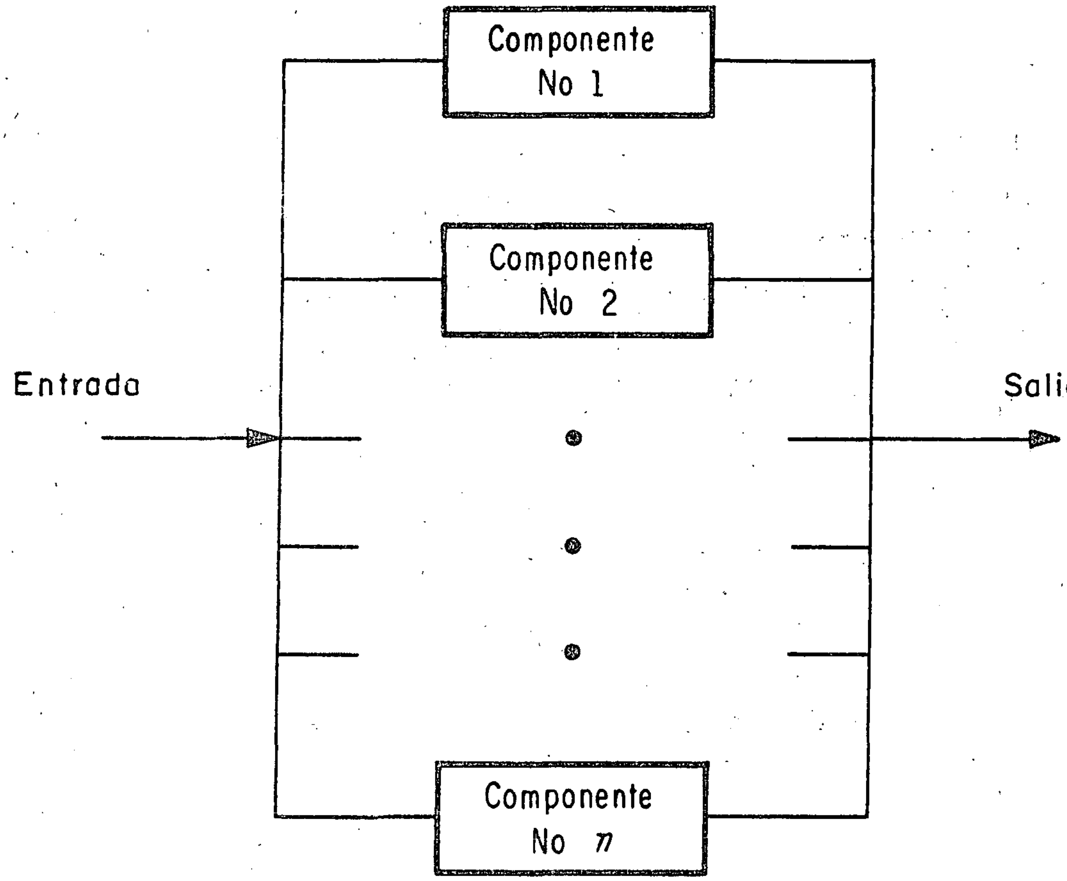


Fig 3.11 Sistema en paralelo

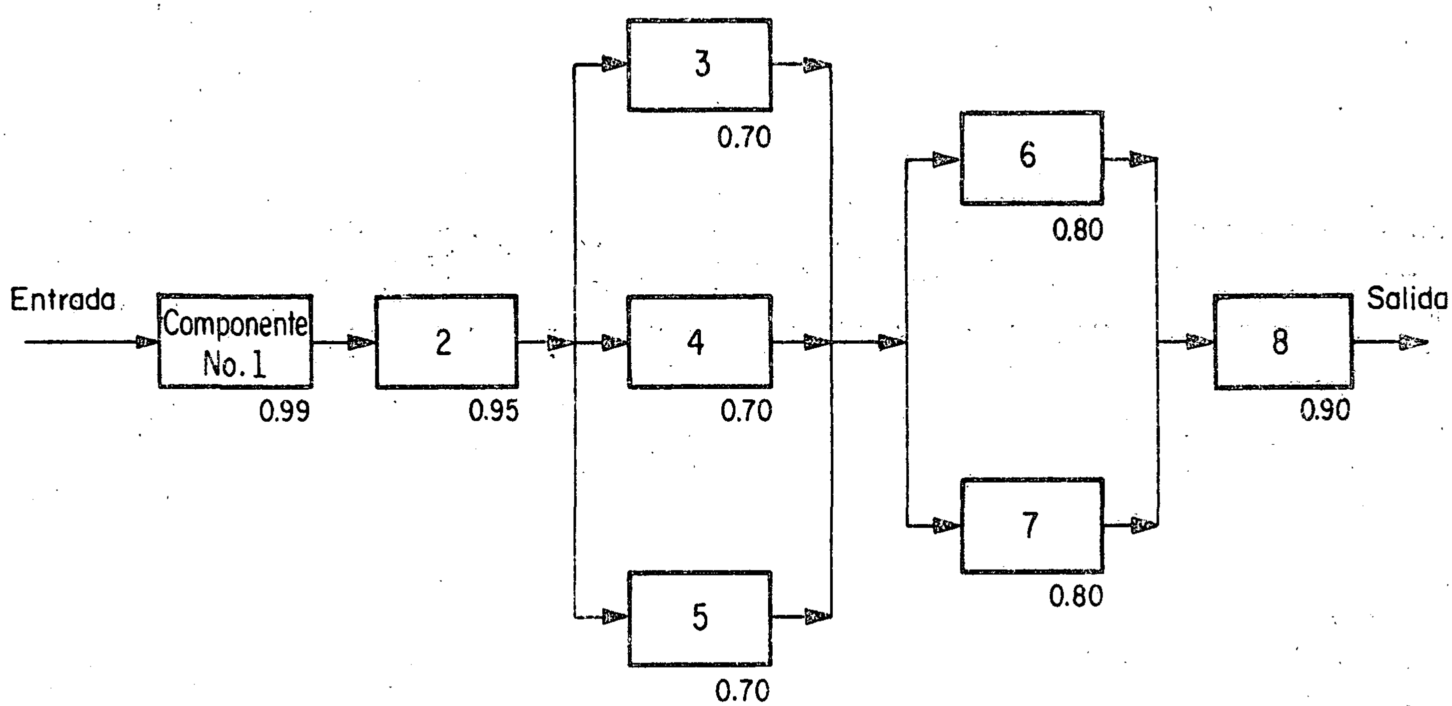


Fig 3.12 Sistema mixto

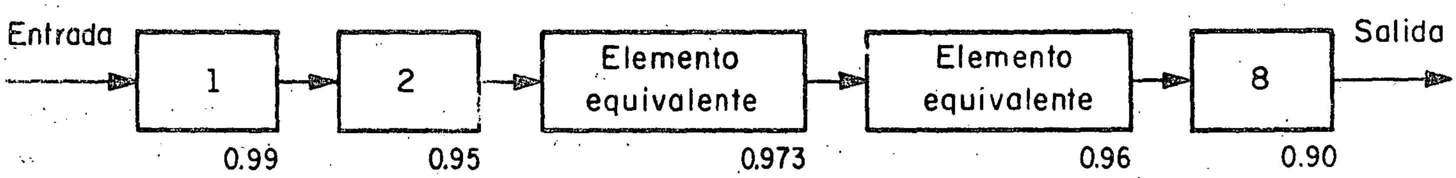


Fig 3.13 Sistema en serie equivalente al de la fig 3.12

centro de educación continua
división de estudios superiores
facultad de ingeniería, unam

INGENIERIA DE SISTEMAS*
Aplicado a la Planeación y a la Administración

CADENAS DE MARKOV

DR. OCTAVIO RASCON CHAVEZ

Junio de 1978

Palacio de Minería Calle de Tacuba 5, primer piso. México 1, D. F.

4. CADENAS DE MARKOV

4.1 *Introducción*

Los procesos de Markov constituyen un tipo especial de procesos estocásticos que se han desarrollado en la solución de problemas físicos en los que se analiza la forma en que ha cambiado una variable, con el objeto de predecir su comportamiento futuro. Se ha usado, por ejemplo, en problemas de mercadotecnia para examinar y predecir el comportamiento de los clientes desde el punto de vista de su preferencia por cierta marca de un producto y sus cambios hacia otras marcas (ref 4.1). En Ingeniería Civil se han aplicado los procesos de Markov para realizar estudios de confiabilidad de edificios (ref 4.2), en inventarios de equipo de transporte (ref 4.3), etc.

Se dice que un proceso estocástico es un *proceso de Markov*, si la probabilidad de que el proceso asuma cualquier valor en el instante t_2 depende solamente del valor que asumió en el instante inmediato anterior t_1, y no de los valores que asumió en cualquier tiempo previo a t_1. Un tipo especial de proceso de Markov es la *cadena de Markov*, la cual se distingue por ser un proceso estocástico discreto (asume sólo valores discretos); a los valores que asume se les denomina *estados* de la cadena: una vez que la cadena llega a un estado, el paso a otro sólo depende del estado en que se encuentra y no de cómo llegó a él.

Una cadena de Markov puede ser de *parámetro discreto* o de *parámetro continuo*, dependiendo de que los instantes en que pasa de un estado a otro correspondan, respectivamente, a una escala de tiempos discreta o continua. En este texto nos limitaremos a estudiar las cadenas de parámetro discreto.

4.2 *Definición formal*

Un proceso estocástico de parámetro discreto $\{X(t_i)\}$ es una cadena de Markov, si para cualquier conjunto de tiempos $t_1 < t_2 < \ldots < t_n$, la distribución condicional de $X(t_n)$ sólo depende de $X(t_{n-1})$ y no de $X(t_1)\ X(t_2), \ldots, X(t_{n-2})$, es decir, si

$$P\left[X(t_n) = x_n \middle| X(t_1) = x_1, X(t_2) = x_2, \ldots, X(t_{n-1}) = x_{n-1}\right] =$$

$$= P\left[X(t_n) = x_n \middle| X(t_{n-1}) = x_{n-1}\right] \qquad (4.1)$$

en donde $x_1, x_2, \ldots, x_n$ son los estados a que ha llegado la cadena en los tiempos $t_1, t_2, \ldots, t_n$. En palabras, la ec 4.1 se interpreta como que el "futuro", $X(t_n)$, de la cadena sólo depende del "presente", $X(t_{n-1})$, y no del pasado,

$X(t_{n-2}), X(t_{n-3}), \ldots, X(t_1)$.

Al conjunto de todos los estados posibles que puede asumir una cadena se le denomina *espacio de los estados*.

Ejemplo 1. <u>Línea de espera</u>

Consideremos el número de personas en una cola (línea de espera) esperando a que se les dé servicio en una sola ventanilla, a la cual los clientes llegan según un proceso simple de Poisson con intensidad λ (número de personas que llegan por unidad de tiempo). Supongamos que las duraciones de servicio a cada cliente son independientes e idénticamente distribuidas. Para $n > 1$, sea X_n el número de clientes que hay en la cola en el momento en que se termina de dar servicio a la n-ésima persona en un determinado día. Veamos si $\{X_n\}$ es una cadena de Markov.

Sea U_n el número de clientes que llegan a la ventanilla en el lapso en que se atiende a la n-ésima persona. En tal caso,

$$X_{n+1} = X_n - \delta(X_n) + U_{n+1} \tag{4.2}$$

en donde $\delta(X_n) = 1$ si $X_n \neq 0$ o $\delta(X_n) = 0$ si $X_n = 0$. Así, si $X_n = 0$, entonces

$$X_{n+1} = U_{n+1} \tag{4.3}$$

y, si $X_n \geq 1$,

$$X_{n+1} = X_n + U_{n+1} - 1 \tag{4.4}$$

Puesto que U_{n+1} es independiente de $X_1, X_2, \ldots, X_n$, de las ecs 4.3 y 4.4 se concluye que no se requiere conocer los valores de $X_1, X_2, \ldots, X_{n-1}$ para determinar la probabilidad condicional de X_{n+1} y, por lo tanto, $\{X_n\}$ es una cadena de Markov.

Ejemplo 2. La ruina de un apostador

Supongamos que dos apostadores, A y B, apuestan uno contra el otro en un juego en el que se realiza una secuencia de jugadas independientes, de tal manera que en cada jugada se apuesta un peso. Sea p la probabilidad de que A gane en una jugada dada, q la que gane B, y $r = 1-q-p$ la de que se empate. Consideremos, además, que la suma del capital de ambos es N pesos, de los cuales k pesos son de A. Nos interesa la evolución del capital de A.

Sea $X_n = j$ la cantidad de pesos que tiene A después de n jugadas (en tal caso $X_0 = k$). Es evidente que en la jugada $n + 1$ el capital X_{n+1} de A será j, $j + 1$ o $j - 1$, el cual sólo depende de j, el estado que se asumió en la jugada inmediata anterior por lo cual se concluye que $\{X_n\}$ es una cadena de Markov.

4.3 *Probabilidades de transición*

Las probabilidades condicionales de la ec 4.1 son las probabilidades de que del instante t_{n-1} al t_n (en una unidad de tiempo) se pase del estado x_{n-1} al x_n, por lo cual se les denomina *probabilidades de transición de un paso*. Por brevedad de notación escribiremos

$$P_{k,j}(n-1,n) = P\left[X_n = j \mid X_{n-1} = k\right] \tag{4.5}$$

que es la probabilidad de pasar del estado k al j, del tiempo $n-1$ al n.

A la probabilidad condicional $p_{k,j}(r,m)$, de asumir el es tado j en el instante m, dado que en el instante r estuvo en el estado k (de hacerlo en $m - r = n$ pasos), se le llama *probabilidad de transición de* n *pasos*.

Para conocer la ley de probabilidades completa de una cadena de Markov es necesario conocer la *densidad de probabilidades de transición de* n *pasos* [el conjunto de todas las $p_{k,j}(r,m)$], y la *densidad de probabilidades absolutas (incondicionales) de* n *pasos*

$$p_j(n) = P\left[X_n = j\right], n = 0,1,2,\ldots \tag{4.6}$$

que son las probabilidades de llegar al estado j en el instante n independientemente de cuáles fueron los estados en que estuvo antes la cadena. La afirmación anterior se comprueba fácilmente, ya que la probabilidad condicional se define como

$$P[X_m = j | X_r = k] = \frac{P[X_m = j, X_r = k]}{P[X_r = k]}$$

en donde $P[X_m = j, X_r = k]$ es la densidad de probabilidades conjunta (de segundo orden) de X_m y X_r, la cual se puede despejar dando como resultado

$$P[X_m = j, X_r = k] = P[X_m = j | X_r = k] P[X_r = k] = p_{k,j}(r,m) p_k(r) \tag{4.7}$$

La densidad de probabilidades de tercer orden se obtiene en forma semejante, ya que de

$$P[X_s = \ell | X_m = j, X_r = k] = \frac{P[X_r = k, X_m = j, X_s = \ell]}{P[X_m = j, X_r = k]}$$

se obtiene

$$P[X_r=k, X_m=j, X_s=\ell]=P[X_m=j, X_r=k]P[X_s=\ell | X_m=j, X_r=k] \qquad 4.8)$$

pero, por tratarse de una cadena de Markov, se tiene que

$$P[X_s=\ell | X_m=j, X_r=k]=P[X_s=\ell | X_m=j]=p_{j,\ell}(m,s)$$

Tomando esto en cuenta y sustituyendo la ec 4.7 en la ec 4.8 se obtiene

$$P[X_r=k, X_m=j, X_s=\ell]=p_k(r)p_{k,j}(r,m)p_{j,\ell}(m,s) \qquad (4.9)$$

Procediendo sucesivamente en esta forma se pueden obtener las densidades conjuntas de cualquier orden, con lo cual quedaría completamente especificada la ley de probabilidades de la cadena de Markov.

Las probabilidades de transición de una cadena de Markov discreta cuyos estados se han numerado de tal manera que el espacio de estados sea { 0,1,2,... }, se pueden agrupar en una matriz llamada *matriz de probabilidades de transición* la cual denotaremos con $\underline{P}(m, r)$, es decir,

$$\underline{P}(m,n) = \begin{bmatrix} p_{0,0}(m,n) & p_{0,1}(m,n) & p_{0,2}(m,n) & \ldots & p_{0,k}(m,n) & \ldots \\ p_{1,0}(m,n) & p_{1,1}(m,n) & p_{1,2}(m,n) & \ldots & p_{1,k}(m,n) & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \ldots \\ p_{j,0}(m,n) & p_{j,1}(m,n) & p_{j,2}(m,n) & \ldots & p_{j,k}(m,n) & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \ldots \end{bmatrix} \qquad (4.10)$$

en donde, por ejemplo $p_{0,0}(m,n)$ es la probabilidad de regresar al estado cero en el instante n cuando se salió de él en el instante m; $p_{0,1}(m,n)$ es la probabilidad de llegar al estado 1 en el instante n, dado que se partió del estado 0 en el instante m, etc.

Puesto que las $p_{i,j}(m,n)$ son probabilidades, éstas deben ser mayores o iguales a cero; además,

$$\sum_{k=0}^{\infty} p_{j,k}(m,n) = 1 \text{ para toda } j \qquad (4.11)$$

(la suma de los renglones de la matriz de probabilidades de transición es uno), ya que el conjunto de las $p_{j,k}(m,n)$ para toda k constituye una densidad de probabilidades (la suma de las probabilidades de pasar de un estado dado a cualquier otro, más la de regresar a él, del tiempo m al n, vale uno).

4.4 *Cadenas de Markov homogéneas*

Se dice que una cadena de Markov es *homogénea* o que tiene *probabilidades de transición estacionarias*, cuando todas las probabilidades de transición de n pasos, $p_{k,j}(r,m)$, donde $n=m-r$, dependen sólo de n y no de los tiempos de partida, r, y de llegada m, por separado, es decir, si

$$p_{k,j}(m,r) = p_{k,j}(n) \tag{4.12}$$

En este caso, la densidad de probabilidades de tercer orden (ec 4.9) sería

$$P[X_r=k, X_m=j, X_s=\ell] = p_k(r)\, p_{k,j}(m-r)\, p_{j,\ell}(s-m)$$

En el caso particular en que $m-r = 1$ y $s-m = 1$, la ecuación anterior queda en la forma

$$P[X_r=k, X_m=j, X_s=\ell] = p_k(r)\, p_{k,j}(1)\, p_{j,\ell}(1) = p_k(r)\, p_{k,j}\, p_{j,\ell}$$

en donde, por simplicidad, hemos omitido el (1) en las probabilidades de transición homogéneas de un paso, es decir, la matriz de éstas es

$$\underline{P} = \begin{bmatrix} p_{0,0} & p_{0,1} & p_{0,2} & \cdots & p_{0,k} & \cdots \\ p_{1,0} & p_{1,1} & p_{1,2} & \cdots & p_{1,k} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots \\ p_{j,0} & p_{j,1} & p_{j,2} & \cdots & p_{j,k} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots \end{bmatrix} \tag{4.13}$$

Con objeto de poder usar más adelante notación matricial en las cadenas de Markov, definiremos al *vector de las probabilidades absolutas*, $p_j(n)$ como

$$\underline{p}(n) = [p_0(n), p_1(n), p_2(n) \ldots] \tag{4.14}$$

En particular, para $n = 0$ tendremos que las probabilidades de que la cadena empiece en el estado i son $p_i(0)$, que denotaremos simplemente por p_i, las cuales se denominan *probabilidades iniciales*, y cuyo vector es

$$\underline{p} = [p_0, p_1, p_2, \ldots] \tag{4.15}$$

Ejemplo 3. Línea de espera

Sea la cadena de Markov definida en el ejemplo 1 de este capítulo, en la cual X_n es el número de clientes que hay en la cola en el momento en que se termina de dar servico al n-ésimo cliente en determinado día. Si a_k es la probabilidad de que lleguen k clientes durante el lapso en que se atiende a un cliente, entonces de la ec 4.4 se obtiene $U_{n+1}=X_n+1-X_{n+1}$, si $X_n=j\neq 0$, por lo que si $j\neq 0$

$$p_{j,k}(n,n+1)=P[U_{n+1}=k-j+1]=a_{k-j+1}$$

ya que en este caso $X_{n+1} = k$. Análogamente, si $X_n=j=0$, de la ec 4.3 se obtiene que $U_{n+1}=X_{n+1}=k$

por lo que

$$p_{0,k}(n,n+1)=P[U_{n+1}=k]=a_k$$

En consecuencia, la matriz de probabilidades de transición de un paso es

$$\underline{P}=\begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots \\ a_0 & a_1 & a_2 & \cdots \\ 0 & a_0 & a_1 & \cdots \\ 0 & 0 & a_0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots \end{bmatrix}$$

Vemos que esta cadena de Markov es homogénea, ya que las probabilidades de transición no dependen de n.

Ejemplo 4. <u>Ruina de un apostador</u>

Con referencia al ejemplo 2 de este capítulo, recordemos que X_n es la cantidad de pesos que tiene el jugador A después de n jugadas, dado que empezó a jugar cuando tenía k pesos. Además, la probabilidad de ganar un peso en una jugada es p, de perderlo es q, y de empatar es r. Por lo tanto, las probabilidades de transición de un paso para $0 \leq j \leq N$ son

$$P[X_n=j \mid X_{n-1}=j-1]=p_{j-1,j}=p$$

$$P[X_n=j\,|\,X_{n-1}=j+1]=p_{j+1,j}=q$$

$$P[X_n=j\,|\,X_{n-1}=j]=p_{j,j}=r$$

y para $j = 0$ y $j=N$, $p_{0,0}=p_{N,N} = 1$, ya que el estado 0 es la ruina total de A y el N es la ruina total de B, puesto que en este caso A tendrá la totalidad del dinero en juego. En consecuencia, la matriz de probabilidades de transición de un paso es la matriz de $N+1$ renglones y $N+1$ columnas,

$$\underline{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ q & r & p & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & q & r & p & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & r & p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Las probabilidades iniciales son

$$p_k = P[X_0=k] = 1$$

$$p_i = P[X_0=i] = 0 \text{ para } i \neq k$$

por lo que el vector de probabilidades iniciales es

$$\underline{p} = [0, 0, \ldots, 1, \ldots 0]$$

en donde el 1 ocupa la k-ésima posición en el vector.

Obsérvese que las probabilidades de transición no dependen de n, por lo cual la cadena es homogénea.

Ejemplo 5. Proceso de producción

En un cierto proceso de producción cada producto pasa tres etapas del proceso de manufactura; al final de cada una el producto se inspecciona y dependiendo de su calidad se desecha, se repite la etapa, o se pasa a la siguiente, con probabilidades respectivas p, q y $r = 1-q-p$. Este proceso tiene los siguientes estados:

0: se desecha el producto
1: se termina el producto
2: el producto está en la primera etapa
3: el producto está en la tercera etapa
4: el producto está en la quinta etapa

Supongamos que el proceso se puede representar mediante una cadena de Markov, $\{X_n\}$, en donde X_n es el estado del producto después de la n-ésima inspección. Así $X_3 = 4$ significa que el producto está en la quinta etapa (el estado 4) después de la inspección número 3. Evidentemente una vez que un producto se encuentra en el estado de desecho o terminación no puede pasar a ningún otro estado sino que permanece en él, es decir, $p_{0,0} = p_{1,1} = 1$. Por lo tanto, la matriz de probabilidades de transición es

$$\underline{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ p & 0 & q & r & 0 \\ p & 0 & 0 & q & r \\ p & r & 0 & 0 & q \end{bmatrix}$$

y, por supuesto, se trata de una cadena homogénea. Las probabilidades iniciales son $p_2=1$ y $p_0=p_1=p_3=p_4=0$, por lo que el vector respectivo es

$$\underline{p} = [0,0,1,0,0]$$

De los ejemplos anteriores observamos que las cadenas de Markov involucradas difieren en la cantidad de estados; así, en el ejemplo 3 el número de estados es *infinito*, mientras que en las 4 y 5 es *finito*. Las cadenas que tienen un número finito de estados se llaman *cadenas de markov finitas*; en caso contrario se denominan *cadenas de Markov infinitas*.

Otra característica interesante que conviene observar, es que hay algunos estados i para los cuales $p_{i,i}=1$ y $p_{i,j}=0$ si $i\neq j$, es decir, una vez que la cadena asume ese estado permanece en él forzosamente,; a estos se les llama *estados absorventes*. De este tipo son los estados 0 y 1 del ejemplo 5, y los estados 0 y $N+1$ del ejemplo 4.

4.5 *Cálculo de las probabilidades de transición de n etapas*

Para lograr entender cómo se obtienen las probabilidades de transición de n etapas, empezaremos por obtener la de 2 é tapas de una cadena finita.

En la fig 1 se observa que para pasar del estado i al j en dos pasos hay la posibilidad de pasar primero por cualquiera de los demás estados en el primer paso, y en el segundo pasar de éste al j. Otra forma será la de llegar directamente a j en el primer paso y permanecer en él en el segundo. La última posibilidad es que en la primera etapa permanezca en i y en la se gunda pase directamente de i a j.

Considerando que todas estas posibilidades constituyen eventos mutuamente exclusivos, la probabilidad de la unión de todos e- llos es la suma de las probabilidades de cada uno; además, la probabilidad de cada posibilidad es el producto de que en el pri mer paso se llegue a un estado dado, k, y en el segundo se pa- se de éste al j, ya que ambos pasos son independientes. Por ejemplo, la probabilidad de llegar de i a j en dos pasos, pa - sando por k en el primer paso es

$$P[X_m=j\,|\,X_{m-2}=i]=P[X_{m-1}=k\,|\,X_{m-2}=i]\,P[X_m=j\,|\,X_{m-1}=k]$$

Por consiguiente, como ya se indicó, la probabilidad de pasar de j a i en dos pasos usando cualquier estado como etapa interme - dia es

$$p_{i,j}(m,m-2)=\sum_{k=0}^{N} p_{i,k}(m,m-1)\,p_{k,j}(m-1,m-2) \tag{4.16}$$

en donde el espacio de estados es $\{0,1,\ldots,N\}$.

Siguiendo un razonamiento semejante se pueden obtener las probabilidades de transición de n pasos. El resultado con $m-r=n$ es

$$p_{i,j}(m,r)=\sum_{k=0}^{N} p_{i,k}(m,u)\,p_{k,j}(u,r) \tag{4.17}$$

en donde u es un instante cualquiera intermedio entre m y r. La interpretación de esta ecuación es que para pasar de i a j en $m-r=n$ pasos hay que ir en $u-m$ pasos de i a k, y en los restantes $r-u$ pasar de k a i, teniendo como posibilidades de k a todos los estados de la cadena. A la ec 4.17 se le conoce como *ecuación de Chapman-Kolmogorov*.

Si la cadena es homogénea, la ec 4.17 se escribe como

$$p_{i,j}(n)=\sum_{k=0}^{N} p_{i,k}(u-m)\,p_{k,j}(r-u) \tag{4.18}$$

Recordemos que el producto A x B de dos matrices A y B cuyos elementos son $a_{i,j}$ y $b_{i,j}$, respectivamente, es la matriz C cuyos elementos, $c_{i,j}$, son

$$c_{i,j}=\sum_{k=0}^{N} a_{i,k}b_{k,j} \tag{4.19}$$

Comparando esta ecuación con la ec 4.17 vemos que tienen idéntica forma, por lo que las $p_{i,j}(n)$ son los elementos de la ma -

triz resultante de multiplicar las matrices $\underline{P}(m,u)$ y $\underline{P}(u,n)$, es decir

$$\underline{P}(m,n)=\underline{P}(m,u)\underline{P}(u,n) \tag{4.20}$$

(Recuerde que el elemento $c_{i,j}$ de la ec 4.19 es el elemento que se localiza en el cruce del renglón i y la columna j, y se obtiene al sumar los productos de los elementos del renglón i de la matriz A por los elementos de la columna j de B.)

La ec 4.20 se puede escribir como el producto de las matrices de transición de un paso, lo cual se demuestra como sigue:

De la ec 4.20 se obtiene

$$P(m,n)=P(m,n-1)P(n-1,n)$$

pero, en virtud de la misma ecuación,

$$P(m,n-1)=P(m,n-2)P(n-2,n-1)$$

por lo que

$$P(m,n)=P(m,n-2)P(n-2,n-1)P(n-1,n)$$

Procediendo sucesivamente de esta manera se llega a

$$P(m,n)=P(m,m+1)P(m+1,m+2)\ldots P(n-2,n-1)P(n-1,n) \tag{4,21}$$

Para una cadena homogénea la ec 4.21 resulta en

$$\underline{P}(n) = \underbrace{\underline{P} \times \underline{P} \times \ldots \times \underline{P}}_{n \text{ productos}} = \underline{P}^n \qquad (4.22)$$

o sea, la matriz de n pasos es igual a la matriz de un paso elevado a la n-ésima potencia.

Recordemos que $p_i(n)$ es la probabilidad absoluta (incondicional) de que la cadena llegue al estado i en n pasos independientemente de la trayectoria que haya seguido. Si la cadena es homogénea, estos se calculan en términos de las probabilidades iniciales y de las probabilidades de transición de un paso mediante la fórmula (ref 4.4):

$$\underline{P}(n) = \underline{p}(0)\ \underline{P}^n$$

Cadenas de Markov

R e f e r e n c i a s

4.1 Bass, F. M., Buzzell, R. D., y otros, "Mathematical models and methods in marketing", R. D. Irwin (1961).

4.2 Vanmarke, E., "Reliability in the design of structures", University of Delaware (junio, 1967).

4.3 Machal, R. E., "System engineering handbook" Cap. 28, Mc Graw-Hill (1965).

4.4 Parzen, E., "Stochastic processes", Cap. 6, Holden-Day (1962)

centro de educación continua
división de estudios superiores
facultad de ingeniería, unam

INGENIERIA DE SISTEMAS

PROBABILIDAD

ING. AUGUSTO VILLARREAL

JUNIO, 1978

Palacio de Minería Calle de Tacuba 5, primer piso. México 1, D. F.

2. PROBABILIDAD

2.1 Introducción

Casi todos los problemas relacionados con la ingeniería, economía, psicología, etc., involucran fenómenos que presentan dispersiones del tipo mostrado en el capítulo anterior. Para tomar en cuenta dicha variabilidad, el analista utiliza una rama de las matemáticas aplicadas conocida como *teoría de probabilidades.*

Una etapa fundamental en la solución de un problema consiste en formular o aplicar uno o varios modelos matemáticos que describan de una manera apropiada para cálculos relativamente sencillos, el fenómeno bajo estudio. En ingeniería civil por lo general se desprecia la fricción, se suponen cuerpos rígidos, se adoptan fluidos ideales, etc., para llegar a formulaciones simples del problema (modelos matemáticos) fáciles de analizar. A menudo, estos modelos son determinísticos, es decir, se asigna un valor a cada variable independiente y una fórmula (un modelo) predice el de la variable dependiente.

Cuando se toma en cuenta la incertidumbre en los valores de las variables, los modelos son probabilísticos y se sujetan a las reglas de análisis de la teoría de probabilidades.

2.2 Espacio de eventos. Eventos

El conjunto de todos los diferentes resultados posibles de obtener al realizar un experimento se denomina *espacio de eventos.*

Cada uno de los elementos de un espacio de eventos corresponde a un, y solo a un resultado posible de un experimento. Por tratarse de un conjunto, este espacio cumple con las reglas impuestas por la teoría de conjuntos. Conviene señalar que al hacer referencia de un conjunto, sus elementos irán siempre entre llaves.

Un *evento, A*, es un subconjunto del espacio de eventos asociado a un experimento. Un *evento simple* es aquel que contiene un solo elemento; un *evento compuesto* es el que contiene dos o más elementos. Por ejemplo, al probar un lote de vigas para estimar la carga última y leer los valores de las cargas de ruptura aproximándolas a la decena de kilos más cercana, el espacio de eventos, E, de este experimento consiste en un número infinito de elementos: $E = \{0, 10, 20, 30, \ldots\}$. Un grupo de eventos podría ser $A_0, A_1, A_2, \ldots$, definidos en tal forma que A_0 contiene los elementos de 0 a 490 kg, A_1 los de 500 a 990 kg, etc., o sea $A_0 = \{0, 10, 20, \ldots, 490\}$, $A_1 = \{500, 510, 520, \ldots, 990\}$, etc.

Un espacio de eventos cuyos elementos asumen valores no continuos (discretos) se llama *espacio de eventos discreto* o *discontinuo*, y tiene como característica que sus elementos se pueden contar o enumerar, así, al lanzar un dado al aire y observar cuál número queda hacia arriba, los únicos resultados posibles del experimento son los enteros del 1 al 6. En tal caso, el espacio de eventos es el conjunto de seis elementos, $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Si lo único que importara fuera que el número observado resultara par o impar, el espacio de eventos sería $E = \{\text{par o impar}\}$.

Si los resultados posibles de un experimento varían en forma continua, es decir, si los elementos del espacio de eventos no se pueden enumerar o contar, este se llama continuo. En el caso de un automóvil, al acelerarlo la velocidad crece en forma progresiva y en un momento dado su valor se puede medir aproximándolo a cualquier fracción de km/h, conforme a la exactitud del instrumento de medición que se use. Por lo tanto, el espacio de eventos de esta velocidad es continuo, y sus elementos son todos los números reales no negativos. Un grupo de eventos de interés en un espacio continuo podría ser, por ejemplo,

$$C_1 = \{\text{la velocidad es mayor de 200 km/h}\}$$

$$C_2 = \{\text{la velocidad es menor o igual que 200 km/h}\}$$

Si dos o más eventos no contienen algún elemento en común o no pueden ocurrir simultáneamente, se dice que son *mutuamente exclusivos* o *excluyentes.* En el caso del lanzamiento de un dado, si $A_0 = \{1, 2, 3\}$ y $A_1 = \{4, 5, 6\}$, entonces A_0 y A_1 son mutuamente exclusivos, en cambio $A_0' = \{1, 2, 3, 4\}$ y $A_1' = \{3, 4, 5, 6\}$ no lo son, puesto que contienen dos elementos en común (los números 3 y 4).

Si un par de eventos, A_0 y A_1, no son mutuamente exclusivos, el conjunto de elementos que tienen en común se llama *intersección,* y se denota como $A_0 \cap A_1$. En el ejemplo numérico anterior resulta $A_0' \cap A_1' = \{3, 4\}$.

Si todos los elementos de un evento, A, también lo son de otro evento, B, se dice que A *está contenido* en B, lo cual se denota como $A \subset B$. Además, si $A \subset B$, entonces $A \cap B = A$, es decir, si $A_2 = \{1, 2\}$ y $A_3 = \{1, 2, 3, 4\}$, entonces $A_2 \cap A_3 = \{1, 2\} = A_2$ y, por lo tanto, $A_2 \subset A_3$.

La *unión* de los eventos A_0 y A_1 es el evento que contiene todos los elementos del espacio de eventos que pertenecen a A_0, A_1 o a ambos, y se denota como $A_0 \cup A_1$, o sea si $A_0 = \{1, 2\}$ y $A_1 =$ 2, 3, 4, 6 , la unión será $A_0 \cup A_1 =$ 1, 2, 3, 4, 6 .

Los conceptos de intersección y unión se pueden interpretar gráficamente con el empleo de los llamados *diagramas de Venn* que se presentan en la fig 7.

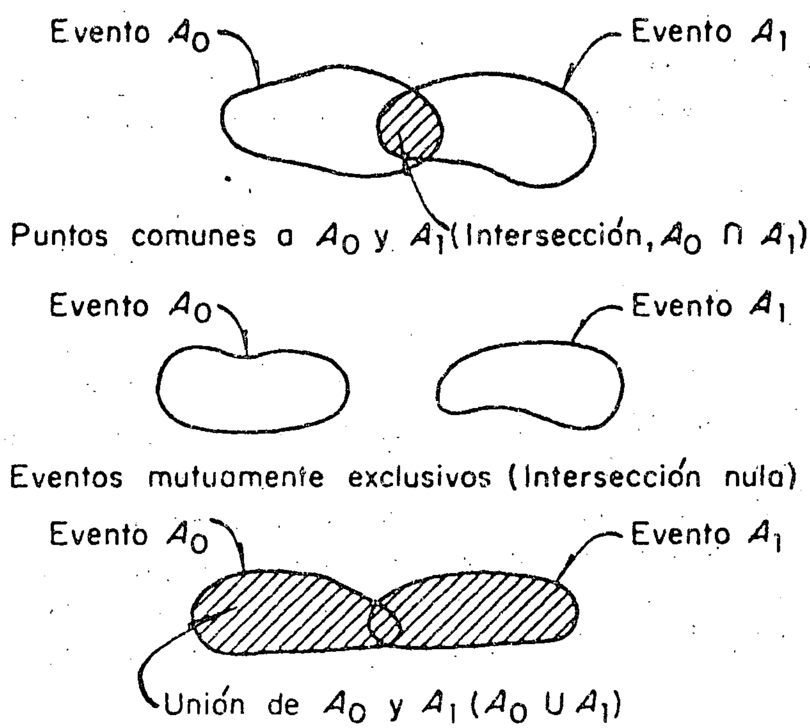


Fig 7. Diagramas de Venn (unión e intersección de eventos)

2.3 Medida de probabilidad

A cada elemento de un espacio de eventos de un experimento se le asocia un número llamado *probabilidad.* Por ejemplo, la probabilidad asociada a cada lado de una moneda homogénea al ser lanzada al aire es 0.5. La probabilidad se puede interpretar, de una manera intuitiva, como la frecuencia relativa de un resultado en un experimento cuando este se repite muchas veces; así, al lanzar una moneda homogénea un gran número de veces, aproximadamente el 50 por ciento de las ocasiones caerá "cara" y el otro 50 por ciento "cruz".

La teoría axiomática de probabilidades se basa en tres axiomas:

1. La probabilidad de ocurrencia de un evento A es un número, $P[A]$, que se le asigna a dicho evento, cuyo valor es mayor o igual que uno, o sea

$$0 \leqslant P[A] \leqslant 1$$

2. Si E es el espacio de eventos asociado a un experimento, entonces

$$P[E] = 1$$

3. La probabilidad, $P[C]$, de la unión, C, de dos eventos mutuamente exclusivos, A y B, es igual a la suma de las probabilidades de estos, es decir

$$P\{A \cup B\} = P\{C\} = P\{A\} + P\{B\}$$

Ejemplo

Sean los eventos $A = \{2, 3\}$ y $B = \{5, 6\}$, correspondientes al espacio de eventos asociado al experimento de lanzar un dado y anotar el número que queda hacia arriba. Si el dado es homogéneo, por la simetría del mismo se puede suponer que las probabilidades asociadas a cada número son iguales a 1/6. Como la probabilidad de ocurrencia del evento A depende de las probabilidades de los eventos simples $\{2\}$ y $\{3\}$, que son mutuamente exclusivos, entonces en virtud del axioma 3 ,

$$P[A] = P\{2\} + P\{3\} = 1/6 + 1/6 = 1/3$$

En forma análoga,

$$P[B] = P\{5\} + P\{6\} = 1/6 + 1/6 = 1/3$$

Si se desea conocer la probabilidad de que ocurra el evento A o el B (uno u otro), es posible hacer uso del hecho de que A y B son mutuamente exclusivos, obteniendo por el axioma 3

$$P[A \cup B] = P[A] + P[B] = 1/3 + 1/3 = 2/3$$

2.4 Probabilidad de un evento

Debido a que los eventos simples contenidos en un evento son mutuamente exclusivos, la probabilidad de ocurrencia de un evento es la suma de las probabilidades asociadas con cada elemento contenido en él (axioma 3). Existen por lo menos tres maneras de asignarle una probabilidad a un evento:

a) En términos de los resultados de un experimento

b) Aplicando la definición clásica de probabilidades

c) Con base en un modelo probabilístico del fenómeno que se trate.

El primer criterio indica que si un experimento se repite n veces, de las cuales $n(A)$ veces se observa el evento A, entonces la probabilidad de A es el límite de la frecuencia relativa, $n(A)/n$, de ocurrencia de A, es decir,

$$P[A] = \lim_{n \to \infty} \frac{n(A)}{n} \tag{2.1}$$

Puesto que en la práctica el experimento no se puede repetir un número infinito de veces, se acostumbra utilizar la frecuencia relativa del evento A como aproximación (estimación) de $P[A]$.

La definición clásica de probabilidades indica que si $n(A)$ es el número de maneras *igualmente probables* en el que puede ocurrir el evento A, y n es el total de elementos del espacio de eventos correspondiente, entonces la probabilidad de A es

$$P[A] = \frac{n(A)}{n} \tag{2.2}$$

Por ejemplo, si se tienen en una urna cinco bolas rojas y quince blancas, y se va a seleccionar al azar una de ellas, la probabilidad de que sea blanca (evento A) es

$$P[A] = \frac{5}{20} = \frac{1}{4}$$

ya que A puede ocurrir de cinco $[n(A) = 5]$ maneras distintas e igualmente probables, puesto que la extracción se realiza al azar; además, el total de posibilidades es $n = 20$.

Los modelos para calcular probabilidades de eventos se formulan tomando en cuenta las condiciones bajo las cuales se rige el fenómeno aleatorio que se desea estudiar. Un caso se encuentra en la ref 2, en la que se plantea un modelo para calcular las probabilidades de eventos asociados al número de repeticiones de carga que hay que aplicar a algún material para producir su falla por fatiga.

Se puede demostrar, en términos de los axiomas enunciados, que si A y B son dos eventos cualesquiera, entonces la probabilidad de su unión se calcula con la fórmula

$$P[A \cup B] = P[A] + P[B] - P[A \cap B] \tag{2.3}$$

Nótese que si A y B son mutuamente exclusivos, entonces $P[A \cap B] = 0$ y la ec 2.3 se reduce al axioma 3.

Un concepto de gran importancia práctica es el de *probabilidad condicional,* $P[A|B]$, del evento A, dado que el B ha ocurrido. Si $P[B]$ es diferente de cero, esta queda dada por

$$P[A \mid B] = \frac{P[A \cap B]}{P[B]} \tag{2.4}$$

Si dos eventos son independientes, no se alterará la probabilidad asociada a un evento, debido a que el otro ha ocurrido. Esta noción intuitiva conduce a la definición de *independencia estadística:*

Dos eventos son independientes si, y solo si,

$$P[A \mid B] = P[A] \tag{2.5}$$

Lo cual implica que

$$P[A \cap B] = P[A]\,P[B] \tag{2.6}$$

En general, los eventos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ son independientes si, y solo si,

$$P[A_{k_1} \cap \ldots \cap A_{k_r}] = P[A_{k_1}] \ldots P[A_{k_r}] \tag{2.7}$$

para cualquier conjunto de enteros $k_1, k_2, \ldots, k_r$, con $k_r \leqslant n$. Así, si $n = 3$, A_1, A_2 y A_3 son independientes si, y solo si,

$$P[A_1 \cap A_2] = P[A_1]\;P[A_2]$$

$$P[A_1 \cap A_3] = P[A_1]\;P[A_3]$$

$$P[A_2 \cap A_3] = P[A_2]\;P[A_3]$$

$$P[A_1 \cap A_2 \cap A_3] = P[A_1]\;P[A_2]\;P[A_3]$$

Si se tienen cuatro eventos ($n = 4$), para que sean independientes se requiere que se cumpla

$$P[A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4] = P[A_1]P[A_2]P[A_3]P[A_4]$$

y que además sean independientes por pares y por tercias.

Sea una urna en la cual se colocan diez bolas negras y diez blancas. La probabilidad de extraer una negra o una blanca es de 0.5 (10/20 = 0.5). ¿Cuál es la probabilidad de sacar una blanca y una negra (en cualquier orden), dado que a) hay remplazo de la primera bola extraída, b) no hay remplazo?

a) Si se consideran los eventos

$$A = \{\text{sale una bola blanca}\}$$
$$B = \{\text{sale una bola negra}\}$$

Con $P[A] = 10/20 = 1/2$ y $P[B] = 10/20$, entonces, de la ec 2.4, resulta $P[A \cap B] = P[B]\,P[A \mid B]$; sin embargo, $P[A \mid B] = P[A] = 1/2$ puesto que A y B son independientes debido a que hay remplazo, de ahí que $P[A \cap B] = (1/2)(1/2) = 1/4$.

Partiendo del hecho de que hay dos maneras de sacar una bola blanca y una negra (primero la blanca y luego la negra, o viceversa), entonces, en virtud del axioma 3

$$P[(B \cap A) \cup (A \cap B)] = P[B \cap A] + P[A \cap B] = 1/4 + 1/4 = 1/2$$

ya que $P[A \cap B] = P[B \cap A]$.

b) Si no hay remplazo de la primera bola extraída, entonces A y B no son independientes, por lo que

$$P(A) = 1/2$$

$$P(B) = 1/2$$

$$P[A \mid B] = 10/19 = P[B \mid A]$$

$$P[B \cap A] + P[A \cap B] = 2(1/2)(10/19) = 10/19$$

2.4.1 Teorema de Bayes

Se dice que un grupo de eventos es *colectivamente exhaustivo* si la unión de todos ellos es el espacio de eventos correspondiente.

De la ec 2.4, que define las probabilidades condicionales, se puede obtener un resultado importante: En un grupo de eventos colectivamente exhaustivos y mutuamente exclusivos, $B_1, B_2, \ldots, B_n$, si A es un evento cualquiera definido en el mismo espacio (fig 8), entonces, aplicando el axioma 3, resulta

$$P[A] = P[A \cap B_1] + P[A \cap B_2] + \ldots + P[A \cap B_n] = \sum_{i=1}^{i=n} P[A \cap B_i]$$

ya que los eventos $A \cap B_i$ son mutuamente exclusivos.

Tomando en cuenta que $P[A \cap B_i] = P[B_i]\, P[A \mid B_i]$, se obtiene finalmente la ecuación

$$P[A] = \sum_{i=1}^{i=n} P[B_i]\, P[A \mid B_i] \qquad (2.8)$$

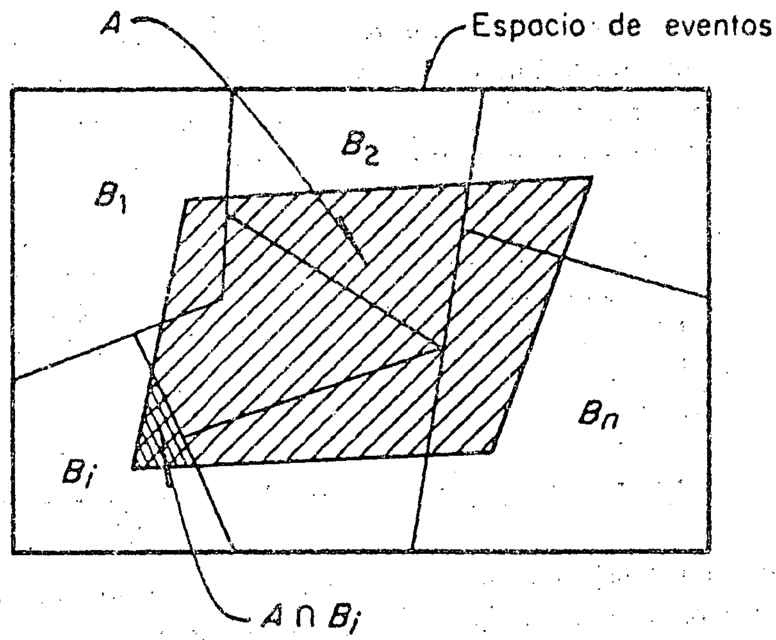


Fig 8. Eventos colectivamente exhaustivos

con la cual se define el llamado *teorema de la probabilidad total.*

Considerando que $P[B_j \cap A] = P[A \cap B_j]$, se tiene que

$$P[B_j \mid A] = \frac{P[B_j \cap A]}{P[A]} = \frac{P[A \cap B_j]}{P[A]}$$

de donde

$$P[B_j \mid A] = \frac{P[B_j]\, P[A \mid B_j]}{\sum_{i=1}^{i=n} P[B_i]\, P[A \mid B_i]} \tag{2.9}$$

Este resultado se conoce como *teorema de Bayes.* A las probabilidades $P[B_j]$ que se asignan a los eventos B_j, antes de observar el evento A, se les denomina a priori o previas; a las probabilidades $P[B_j|A]$ que se obtienen después de observar el evento A, se les llama a posteriori o posteriores.

Ejemplo

Existe un edificio de concreto reforzado para el cual se investiga su capacidad de carga de diseño. Un ingeniero, con base en su experiencia personal, decide que la resistencia nominal, f'_c, del concreto pudo ser de 150 kg/cm², 200 kg/cm² o 250 kg/cm², con las siguientes probabilidades previas:

Resistencia nominal, en kg/cm²	Probabilidad
150	0.3
200	0.6
250	0.1

Para predecir la resistencia nominal real, es necesario realizar un experimento que consiste en extraer corazones (muestras) del concreto de la estructura y probarlos a compresión simple. El ingeniero decide que la resistencia, S, de un solo corazón dará una predicción confiable, y define resistencias intermedias de 175 y 225 kg/cm² para tomar en cuenta que las obtenidas de los corazones serían mayores que las que se hubieran logrado en una prueba a los 28 días de edad del concreto. De acuerdo con esto, el ingeniero asigna las siguientes probabilidades condicionales a cada resistencia nominal dado el resultado, Z_i, del experimento:

Resistencia del corazón, S, en kg/cm²	$P(f'_c \mid Z_1)$		
	$(f'_c)_1 = 150$	$(f'_c)_2 = 200$	$(f'_c)_3 = 250$
Evento Z_1: $\{S < 175\}$	0.7	0.2	0
Evento Z_2: $\{175 \leqslant S \leqslant 225\}$	0.3	0.6	0.3
Evento Z_3: $\{S \geqslant 225\}$	0	0.2	0.7

Supóngase que se saca un corazón y que su resistencia resulta ser de 164 kg/cm², es decir, que ocurre el evento Z_1. Las probabilidades a posteriori de las resistencias nominales son, entonces,

$$P[150 \mid Z_1] = \frac{(0.7)\,(0.3)}{(0.7)\,(0.3) + (0.2)\,(0.6) + (0)\,(0.1)} = \frac{0.21}{0.33} = 0.635$$

$$P[200 \mid Z_1] = \frac{(0.2)\ (0.6)}{0.33} = 0.365$$

$$P[250 \mid Z_1] = \frac{(0)\ (0.1)}{0.33} = 0$$

Es decir, este resultado elimina la posibilidad de que f'_c = 250 kg/cm².

Supóngase ahora que en vez de un solo corazón, el ingeniero hubiese decidido obtener dos, situados en diferentes niveles de la estructura, y que al probarlos en uno ocurrió Z_1 y en el otro Z_2. La probabilidad de que ocurran ambos eventos, (Z_1, Z_2) si f'_c es realmente 150, 200 o 250 kg/cm²., será el producto de dos probabilidades condicionales, puesto que Z_1 y Z_2 son independientes.

$$P[(Z_1, Z_2) \mid 150] = P[Z_1 \mid 150]\ P[Z_2 \mid 150] = (0.7)\ (0.3) = 0.21$$

$$P[(Z_1, Z_2) \mid 200] = P[Z_1 \mid 200]\ P[Z_2 \mid 200] = (0.2)\ (0.6) = 0.12$$

$$P[(Z_1, Z_2) \mid 250] = P[Z_1 \mid 250]\ P[Z_2 \mid 250] = (0.0)\ (0.2) = 0.0$$

Las probabilidades a posteriori son, entonces,

$$P[150 \mid (Z_1, Z_2)] = \frac{(0.21)\ (0.3)}{(0.21)\ (0.3) + (0.12)\ (0.6) + (0.0)\ (0.1)} =$$

$$= \frac{0.063}{0.063 + 0.072 + 0.0} = \frac{0.063}{0.135} = 0.47$$

$$P[200 \mid (Z_1, Z_2)] = \frac{(0.12)\ (0.6)}{0.135} = \frac{0.072}{0.135} = 0.53$$

$$P[250 \mid (Z_1, Z_2)] = \frac{(0.0)\ (0.1)}{0.135} = 0$$

Los mismos resultados se habrían obtenido si el ingeniero, después de extraer el primer corazón y de calcular las probabilidades posteriores correspondientes, hubiera decidido sacar el segundo y recalcular dichas probabilidades con base en las obtenidas para el primero;

es decir, las probabilidades previas en el segundo cálculo serían 0.635, 0.365 y 0 para 150, 200 y 250 kg/cm², respectivamente. En tal caso, las probabilidades posteriores, dado que ocurrió Z_2, son

$$P[150 \mid Z_2] = \frac{(0.635)\ (0.3)}{(0.3)\ (0.635) + (0.365)\ (0.6) + (0.1)\ (0)} =$$

$$= \frac{0.19}{0.14 + 0.22 + 0.0} = \frac{0.19}{0.41} = 0.47$$

$$P[200 \mid Z_2] = \frac{0.22}{0.41} = 0.53$$

$$P[250 \mid Z_2] = \frac{0}{0.41} = 0$$

que son iguales a las anteriores.

De aquí se concluye que las probabilidades se pueden actualizar conforme se va obteniendo nueva información experimental.

2.5 Variables aleatorias

Una *variable aleatoria* es una variable tal que no puede predecirse con certidumbre el valor que asumirá antes de realizar un experimento. Por ejemplo, los valores de la tercera columna de la tabla 2 corresponden a resultados experimentales asociados a la resistencia última de las vigas; en este caso, la variable aleatoria es precisamente la resistencia última, ya que antes de romper una viga no se puede precisar cuál será su resistencia. A fin de evitar confusión, se empleará una letra mayúscula para denotar una variable aleatoria, y la minúscula correspondiente para los valores que puede asumir.

Cuando el número de valores que una variable aleatoria puede tomar está restringido a un número finito o infinito, pero numerable, dicha variable se llama *discreta* o *discontinua*. En caso contrario se llama *variable continua*.

El comportamiento de una variable aleatoria se describe mediante su *ley de probabilidades*, la cual a su vez puede definirse de diferentes formas. La manera más común de hacerlo es mediante su *distribución* o *densidad de probabilidades*.

Si la variable aleatoria X es discreta y puede asumir los valores x_i, su densidad de probabilidades será el conjunto de las probabilidades

$$P_X(x_i) = P[X = x_i] \tag{2.10}$$

la cual se lee "probabilidad de que $X = x_i$".

La *distribución de probabilidades acumuladas* o *función de distribución*, que es otra forma de especificar la ley de probabilidades de una variable aleatoria, es el conjunto de las sumas parciales de $P_X[x_i]$ para todos los valores de X menores que x_i. Esta distribución permite conocer la probabilidad de que la variable aleatoria tome valores menores o iguales que un número dado x_m, es decir

$$F_X(x_m) = P[X \leqslant x_m] = \sum_{i=1}^{i=m} P_X[x_i] \tag{2.11}$$

Sea X la variable aleatoria discreta "número total de carros que se detienen en una esquina debido a la luz roja de un semáforo". Si las probabilidades asociadas a cada evento son

$$P_X(x) = \begin{cases} 0.1 & \text{si} \quad x = 0 \\ 0.2 & \text{si} \quad x = 1 \\ 0.3 & \text{si} \quad x = 2 \\ 0.2 & \text{si} \quad x = 3 \\ 0.1 & \text{si} \quad x = 4 \\ 0.1 & \text{si} \quad x = 5 \\ 0 & \text{si} \quad x \geqslant 6 \end{cases}$$

la distribución de probabilidades acumuladas correspondiente será

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 0.1 & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 0.1 + 0.2 = 0.3 & \text{si } 1 \leqslant x \leqslant 2 \\ 0.3 + 0.3 = 0.6 & \text{si } 2 \leqslant x \leqslant 3 \\ 0.6 + 0.2 = 0.8 & \text{si } 3 \leqslant x \leqslant 4 \\ 0.8 + 0.1 = 0.9 & \text{si } 4 \leqslant x \leqslant 5 \\ 0.9 + 0.1 = 1.0 & \text{si } 5 \leqslant x \end{cases}$$

Las gráficas de estas distribuciones se presentan en la fig 9.

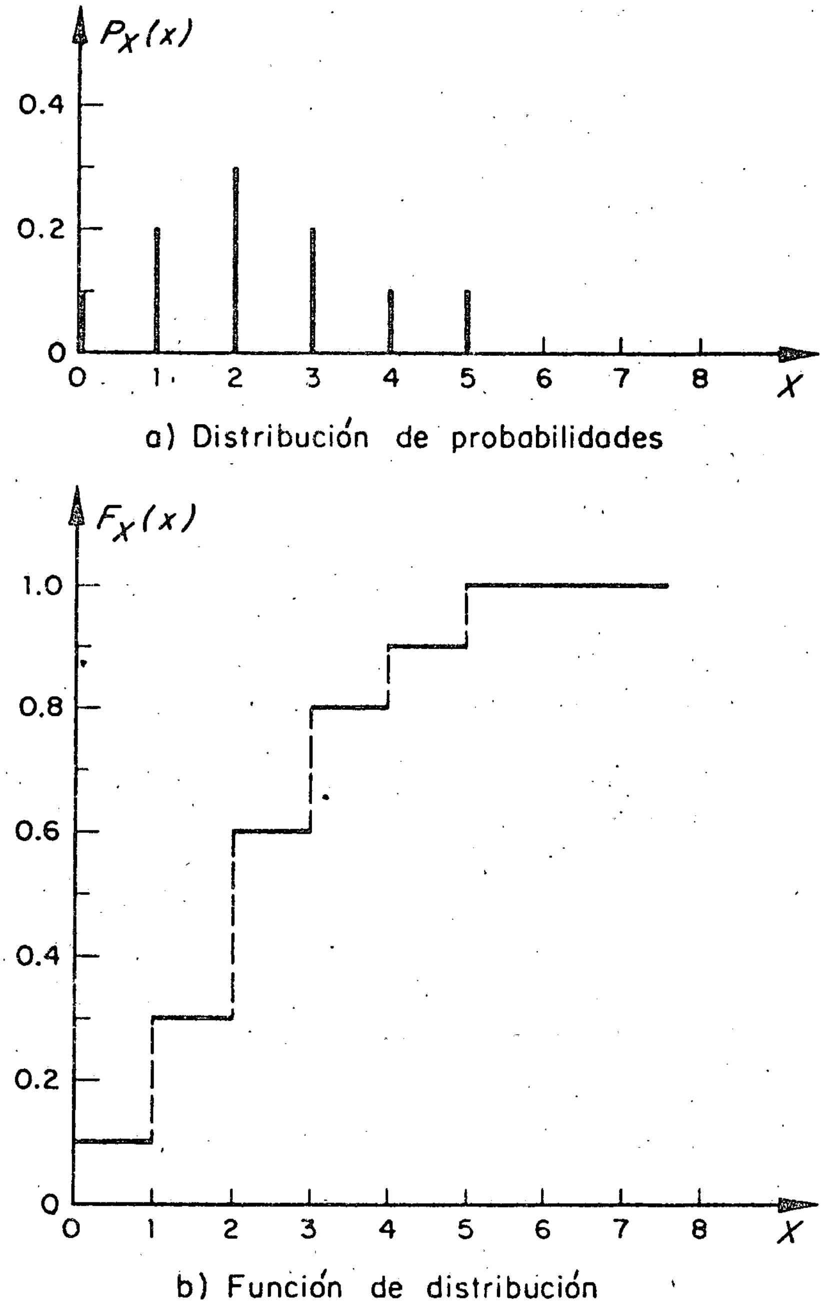


Fig 9 Ley de probabilidades del ejemplo del tráfico

Para que una densidad de probabilidades satisfaga los tres axiomas de la teoría de probabilidades, se deben cumplir los siguientes requisitos

$$\left.\begin{array}{ll} \text{a)} & 0 \leqslant P_X(x) \leqslant 1 \text{ para toda } x_i \\ \text{b)} & \sum_{i=1}^{n} P_X(x_i) = 1, \text{ donde } n \text{ es el número total de valores que puede asumir } X \\ \text{c)} & P[x_m \leqslant X \leqslant x_r] = \sum_{i=m}^{i=r} P_X(x_i) \end{array}\right\} \quad (2.12)$$

En el caso de una variable aleatoria continua, X, la probabilidad de que esta tome un valor comprendido entre x y $x + dx$ está dada por $f_X(x)\,dx$, donde $f_X(x)$ es la densidad de probabilidades de X. Por lo tanto, la probabilidad de que X asuma valores comprendidos en el intervalo $x_1 \leqslant X \leqslant x_2$ es

$$P[x_1 \leqslant X \leqslant x_2] = \int_{x_1}^{x_2} f_X(x)\,dx \quad (2.13)$$

Gráficamente, esta probabilidad es igual al área bajo la curva de $f_X(x)$ comprendida entre x_1 y x_2 como se muestra en la fig 10a para la variable Y.

Puesto que $F_X(x) = P(X \leqslant x) = P(-\infty \leqslant X \leqslant x)$, y en virtud de la ec 2.13, se tiene que

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(u)\,du \quad (2.14)$$

donde u es solo una variable muda de integración. El valor de esta integral es igual al área bajo la curva de $f_X(x)$ a la izquierda de x. De la ec 2.14 se concluye que

$$\frac{dF_X(x)}{dx} = \frac{d}{dx}\left[\int_{-\infty}^{x} f_X(u)\,du\right] = f_X(x) \quad (2.15)$$

Las propiedades generales de $F_X(x)$ son las siguientes:

$$
\begin{aligned}
&0 \leqslant F_X(x) \leqslant 1\\
&F_X(-\infty) = 0\\
&F_X(\infty) = 1\\
&F_X(x+\epsilon) \geqslant F_X(x), \text{ si } \epsilon \geqslant 0\\
&F_X(x_2) - F_X(x_1) = P[x_1 \leqslant X \leqslant x_2]
\end{aligned}
\tag{2.16}
$$

Para satisfacer los axiomas de la teoría de probabilidades se necesita que

$$
\begin{aligned}
&f_X(x) \geqslant 0 \text{ para toda } x\\
&\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,dx = 1
\end{aligned}
\tag{2.17}
$$

Por ejemplo, si la densidad de probabilidades de una variable aleatoria continua es de forma triangular (fig 10a) y está dada por

$$
f_Y(y) = \begin{cases} (y-35)/60 & \text{si } 35 \leqslant y \leqslant 41\\ (55-y)/140 & \text{si } 41 \leqslant y \leqslant 55\\ 0 & \text{si } y < 35 \text{ o } y > 55 \end{cases}
$$

entonces el cálculo de la distribución de probabilidades acumuladas se efectúa aplicando la ec 2.14 a los diversos intervalos de Y en donde cambia la ecuación de $f_Y(y)$, de la manera siguiente

Si $y < 35$:

$$F_Y(y) = 0$$

ya que $f_Y(y) = 0$ si $y < 35$.

Si $35 \leqslant y \leqslant 41$:

$$F_Y(y) = P[Y \leqslant y] = \int_{-\infty}^{y} f_Y(u)\,du = \frac{1}{60}\int_{35}^{y}(u-35)\,du = (y-35)^2/120$$

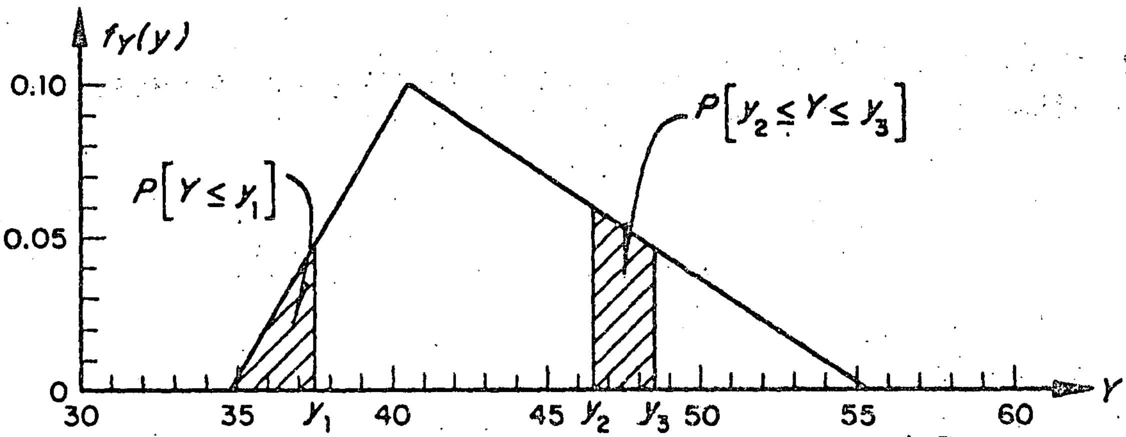
Si $41 \leqslant y \leqslant 55$:

$$F_Y(y) = (41-35)^2/120 + \frac{1}{140}\int_{41}^{y}(55-u)\,du = 3/10 + [55\,(y-41) - \frac{1}{2}(y^2 - 41^2)]/140$$

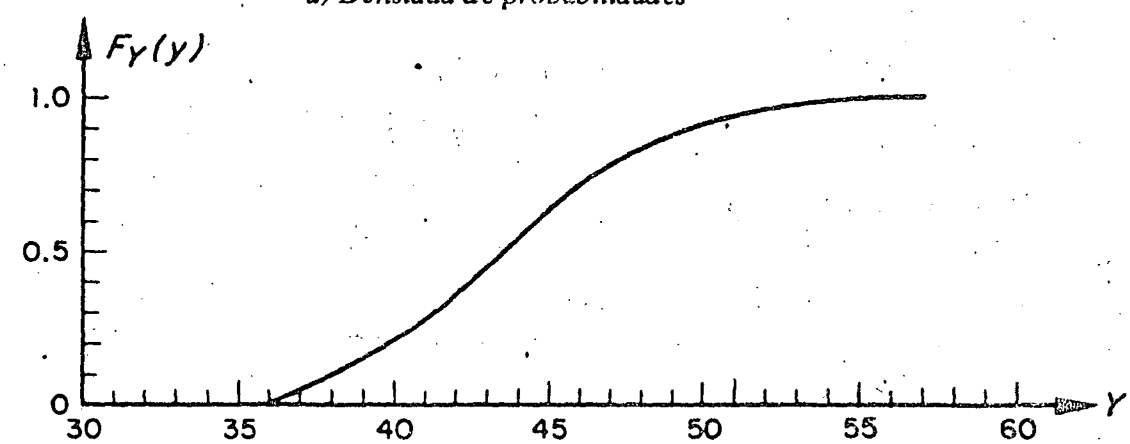
Si $y > 55$:

$$F_Y(y) = 1$$

La fig 10b representa la gráfica de esta función de distribución.



a) Densidad de probabilidades



b) Función de distribución

Fig 10. Ley de probabilidades de una variable aleatoria continua

Si se quiere calcular la probabilidad de obtener un valor de la variable comprendido en el intervalo de y_2 a y_3, donde $y_2 \geqslant 41$ y $y_3 \leqslant 55$, entonces

$$P[y_2 \leqslant Y \leqslant y_3] = \frac{1}{140}\int_{y_2}^{y_3}(55-y)\,dy = \frac{55\,(y_3 - y_2) - \tfrac{1}{2}(y_3^2 - y_2^2)}{140}$$

Ejemplo

Un ingeniero está interesado en diseñar una torre que resista las cargas debidas al viento. De una serie de observaciones de la máxima velocidad anual del viento cerca del sitio de interés, se encuentra que el histograma puede ajustarse, desde un punto de vista estadístico, mediante una distribución de probabilidades exponencial de la forma

$$F_X (x) = Ke^{-\lambda x} \ ; \ x \geqslant 0$$

donde X es la máxima velocidad del viento, λ es una constante y K es otra constante tal que obliga a que $f_X (x)$ satisfaga la ec 2.17. Por lo tanto,

$$\int_0^\infty Ke^{-\lambda x}\, dx = \frac{-K}{\lambda} \left[e^{-\lambda x}\right]_0^\infty = \frac{K}{\lambda} = 1$$

de donde

$$K = \lambda$$

por lo tanto,

$$f_X (x) = \lambda e^{-\lambda x} \ ; \ x \geqslant 0$$

La función de distribución será

$$F_X(x) = \int_0^x f_X (u)\, du = \int_0^x \lambda e^{-\lambda u}\, du = \left[-e^{-\lambda u}\right]_0^x = 1 - e^{-\lambda x} \ ; \ x \geqslant 0$$

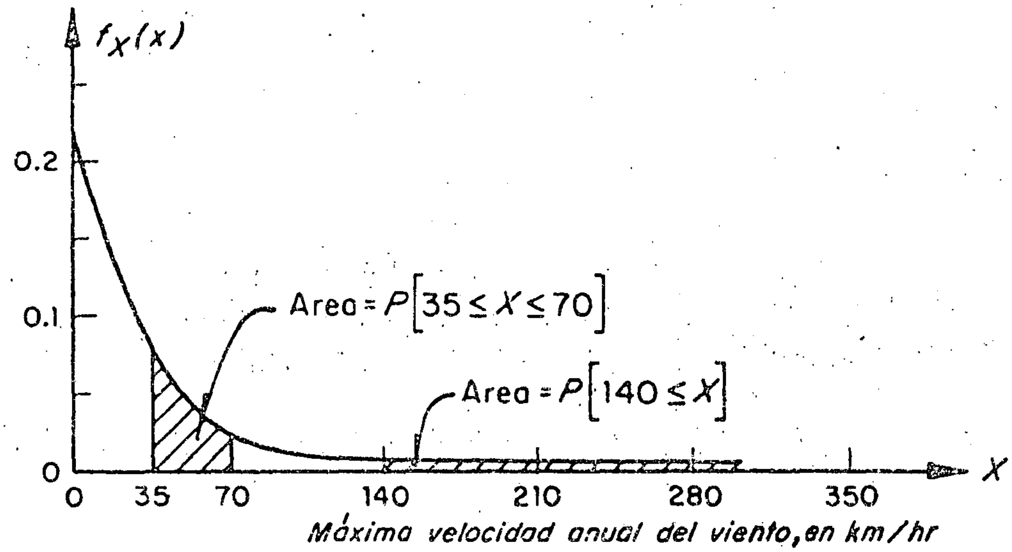
El valor de λ se puede tomar, por ejemplo, de manera que $F_X (x)$ se ajuste para que coincida con un valor empírico. Así, si la frecuencia relativa del evento $A = \left\{X \leqslant 70 \text{ km/h}\right\}$ es 0.9, entonces

$$P\,[0 \leqslant X \leqslant 70] = 0.9$$

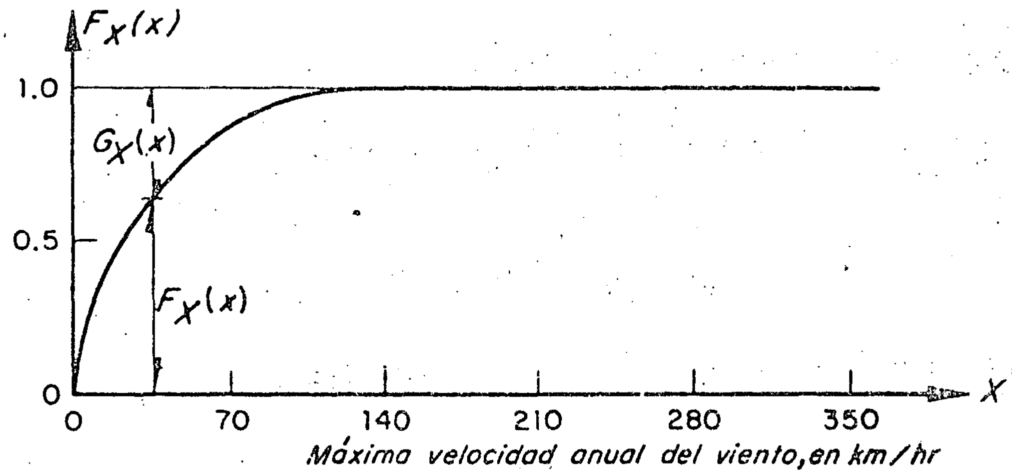
de donde

$$0.9 = 1 - e^{-70\lambda}$$

por lo cual $\lambda = 0.033$. En la fig 11 se presentan las gráficas de $f_X(x)$ y $F_X(x)$.



a) Densidad de probabilidades de X



b) Función de distribución de X

Fig 11. Ley de probabilidades correspondiente al ejemplo de la máxima velocidad anual del viento

El complemento de $F_X(x)$ se utiliza cuando las decisiones se toman con base en probabilidades de que se exceda un valor dado de la variable.

La función de distribución complementaria se define como

$$G_X(x) = P[X > x] = 1 - F_X(x) \qquad (2.18)$$

Así, para el ejemplo anterior, se tiene

$$G_X\ (x) = e^{-0.033x}$$

2.6 Esperanzas

En el capítulo anterior se indicó cómo calcular el promedio aritmético y la variancia de una muestra. Estos parámetros constituyen, respectivamente, la media y la variancia de una variable aleatoria, los cuales se definen a continuación.

La media, m_X, o *esperanza*, $E\ [X]$, de una variable aleatoria discreta X, es

$$m_X = E\ [X] = \sum_{i=1}^{i=N} x_i\ P_X\ (x_i) \tag{2.19}$$

donde N es el total de valores que X puede asumir.

Para el caso de una variable aleatoria continua, X, la media es

$$m_X = \mathrm{E}\ [X] = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f_X\,(x)\, dx \tag{2.20}$$

Recuérdese que el promedio aritmético de una muestra está dado por

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{i=n} x_i$$

Si al realizar un experimento se encuentran n_j valores de x_j, la ecuación anterior puede escribirse

$$\bar{x} = \sum_{j=1}^{j=N} \frac{n_j}{n}\, x_j = \sum_{j=1}^{j=N} f_j\ x_j \tag{2.21}$$

donde f_j es la frecuencia relativa de x_j observada en la muestra, y N es el número de valores x_j distintos. Es evidente el gran parecido en la forma de las ecs 2.19 y 2.21; la diferencia estriba en que f_j se valúa a partir de una muestra de la variable aleatoria X, y $P_X(x)$ es la distribución de probabilidades que la define. Cuando el total de observaciones es grande, $\bar{x}$ tendrá un valor cercano a m_X, ya que se puede demostrar que conforme n aumenta, f_j tiende a la probabilidad de que ocurra el valor x_j. En general, $\bar{x}$ se toma como una estimación de m_X.

Ejemplo

Si la densidad de probabilidades de la variable aleatoria X correspondiente a los errores en una nivelación es la de la segunda columna de la siguiente tabla, la media de dicha variable resulta ser 4 167 micras. Los cálculos correspondientes se localizan en la tercera columna.

x_i, en micras	$P_X(x_i)$	$x_i\ P_X(x_i)$, en micras
0	6/60	0
1 000	2/60	2 000/60
2 000	4/60	8 000/60
3 000	8/60	2 400/60
4 000	13/60	52 000/60
5 000	12/60	60 000/60
6 000	7/60	42 000/60
7 000	4/60	28 000/60
8 000	2/60	16 000/60
9 000	2/60	18 000/60
		TOTAL: $m_X = 250\ 000/60 = 4\ 167$ micras

Una medida muy común de la dispersión de los valores que puede asumir una variable aleatoria es la *variancia*, la cual se denota como S_X^2 o Var $[X]$, definiéndose para una variable aleatoria discreta, como

$$S_X^2 = \text{Var}\,[X] = \sum_{i=1}^{i=N} (x_i - m_X)^2\ P_X\ (x) \qquad (2.22)$$

y para una continua,

$$S_X^2 = \text{Var}\,[X] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_X)^2\ f_X\ (x)\, dx \qquad (2.23)$$

Se puede realizar un razonamiento parecido al del caso de la esperanza de X para mostrar la semejanza de las ecs 2.22 y 2.23.

Por definición, la *desviación estándar*, S_X, de la variable aleatoria X, es igual a la raíz cuadrada de la variancia, y el *coeficiente de variación* es

$$\nu_X = S_X/m_X \tag{2.24}$$

En la siguiente tabla se calcula la variancia de la variable aleatoria, cuya densidad de probabilidades se presentó en el ejemplo anterior

$x_i - m_X$, en micras	$P_X(x_i)$	$(x_i - m_X)^2 P_X(x_i)$, en micras²
–4 167	6/60	1 740 000
–3 167	2/60	333 000
–2 167	4/60	313 000
–1 167	8/60	181 000
– 167	13/60	6 000
– 833	12/60	139 000
–1 833	7/60	390 000
–2 833	4/60	531 000
–3 833	2/60	487 000
–4 833	2/60	687 000
	TOTAL:	4 798 000 micras² = S_X^2

La desviación estándar y el coeficiente de variación son, respectivamente,

$$S_X = \sqrt{4\,798\,000} = 2\,200 \text{ micras, y } \nu_X = S_X/m_X = \frac{2\,200}{4\,167} = 0.528.$$

La *esperanza* de una función $g(X)$, de la variable aleatoria continua, X, es, por definición,

$$E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X(x)\, dx \tag{2.25}$$

o para una variable aleatoria discreta,

$$E[g(X)] = \sum_{i=1}^{i=N} g(x_i) P_X(x_i) \tag{2.26}$$

En particular, si $g(X) = X$, se tiene,

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f_X(x)\, dx$$

que es la esperanza o media de X.

Si $g(X) = (X - m_X)^2$, entonces

$$E[(X - m_X)^2] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_X)^2 f_X(x)\, dx$$

que es la variancia de X.

La esperanza de $g(X) = x^2$ es

$$E[X^2] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x)\, dx \tag{2.27}$$

y se denomina *valor medio cuadrático.*

Se puede demostrar que la esperanza, la variancia y el valor medio cuadrático no son independientes, y que conociendo dos de ellos es factible calcular el tercero. La relación entre estos parámetros es

$$S_X^2 = E[X^2] - (E[X])^2 \tag{2.28}$$

La media y la variancia juegan el mismo papel para las distribuciones de probabilidades que el centroide y el momento de inercia para las distribuciones de masa. Al respecto, considérese una barra de *masa unitaria,* con densidad de masa variable (masa por unidad de longitud) $\rho(x)$, idéntica a una densidad de probabilidades $f_X(x)$. La distancia, x_c, del origen al centroide de la barra se calcula mediante una ecuación similar a la 2.20. El momento de inercia respecto al centroide, se obtiene usando una ecuación semejante a la 2.28 para el cálculo de la variancia de X.

Entre las propiedades de la esperanza de $g(X)$ se cuentan las siguientes

1. Si $g(X) = \text{constante} = c$

$$E[c] = c \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\, dx = c$$

$$\text{Var}[c] = 0$$

2. Si $g(X) = cx$

$$E\,[cx] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X\,(x)\,dx = c\,E\,[X]$$

$$\text{Var}\,[cX] = c^2\,\text{Var}\,[X]$$

3. Si $g\,(X) = a + bx$

$$E\,[a + bx] = a \int_{-\infty}^{\infty} f_X\,(x)\,dx + b \int_{-\infty}^{\infty} x f_X\,(x)\,dx = a + bE\,[X]$$

$$\text{Var}\,[a + bx] = b^2\,\text{Var}\,[X]$$

4. Si $g\,(X) = g_1(X) + g_2(X)$

$$E\,[g_1(X) + g_2(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g_1(x) f_X\,(x)\,dx + \int_{-\infty}^{\infty} g_2(x) f_X(x)\,dx$$

$$= E\,[g_1(X)] + E\,[g_2(X)]$$

5. $E\,[X + Y] = E\,[X] + E\,[Y]$

$\text{Var}\,[X + Y] = \text{Var}\,[X] + \text{Var}\,[Y]$, si X y Y son estadísticamente independientes.

2.7 Distribuciones particulares

2.7.1 Distribución binomial o de Bernoulli

La distribución binomial es una de las más útiles para variables aleatorias discretas, y corresponde a un experimento en el que solo hay dos resultados posibles.

Sea p la probabilidad de ocurrencia (éxito) de un evento, y $q = 1 - p$ la de que este no ocurra (fracaso) en una realización de un experimento. Si X es una variable aleatoria que corresponde al número de éxitos en n intentos independientes, se puede demostrar que X tiene *distribución binomial*, es decir, que su densidad de probabilidades es

$$f_X\,(x) = \binom{n}{x} p^x\,q^{n-x};\;\; x = 0, 1, 2, \ldots, n \qquad (2.29)$$

donde $\binom{n}{x}$ denota el número de combinaciones de n elementos tomados de x en x, y se calcula con la expresión

$$\binom{n}{x} = \frac{n!}{x!\ (n-x)!} \qquad (2.30)$$

Se puede demostrar que la esperanza y la variancia para esta distribución son

$$E[X] = np$$
$$Var[X] = npq \qquad (2.31)$$

Ejemplo

Si se lanza al aire seis veces una moneda homogénea,

a) ¿Cuál es la probabilidad de obtener dos "caras"?

b) ¿Cuál es la probabilidad de obtener por lo menos cuatro "caras" ($X \geq 4$)?

a) Puesto que la moneda es homogénea se tiene $p = 1/2$ y $q = 1 - 1/2 = 1/2$, donde p es la probabilidad de observar "cara" en un lanzamiento. Por lo tanto,

$$P[X=2] = f_X(2) = \binom{6}{2}(1/2)^2\ (1/2)^{6-2} = \frac{6!}{4!\ 2!}(1/2)^6 = \frac{15}{64}$$

$$E[X] = np = 6\ (1/2) = 3$$

$$\text{Var}[X] = npq = 6\ (1/2)\ (1/2) = 3/2$$

b) Para que se cumpla $X \geq 4$ en seis lanzamientos, se necesita que se observen 4, 5 o 6 caras. Puesto que estos tres eventos son mutuamente exclusivos, se tiene

$$P[X \geq 4] = f_X(4) + f_X(5) + f_X(6)$$

Calculando los tres sumandos como en la pregunta anterior, resulta

$$P[X \geq 4] = \frac{6!}{4!\ 2!}(1/2)^4\ (1/2)^{6-4} + \frac{6!}{5!\ 1!}(1/2)^5\ (1/2)^{6-5} + \frac{6!}{6!\ 0!}(1/2)^6\ (1/2)^{6-6} = \frac{15}{64} +$$

$$+ \frac{6}{64} + \frac{1}{64} = \frac{11}{32}$$

2.7.2 Distribución de Poisson

Una distribución de probabilidades para una variable aleatoria discreta, X, de la forma

$$f_X(x) = \frac{\lambda^x \; e^{-\lambda}}{x!} \; ; \; x = 0, 1, 2, \ldots \qquad (2.32)$$

se llama *distribución de Poisson*; en la ec 2.32, λ es una constante. Se puede demostrar que la media y la variancia para esta distribución quedan dadas por

$$\begin{aligned} P[X] &= \lambda \\ \text{Var}[X] &= \lambda \end{aligned} \qquad (2.33)$$

Ejemplo

Si la probabilidad de que falle una varilla de acero al aplicarle una fuerza de tensión es de 0.001, ¿cuál es la probabilidad de que de 2 000 varillas probadas fallen a) tres, b) más de dos, si se supone que la resistencia de las varillas tiene una distribución de Poisson con $\lambda = 2$?

a) $$P[X = 3] = \frac{\lambda^3 \; e^{-\lambda}}{3!}$$

$$P[X = 3] = \frac{2^3 \; e^{-2}}{3!} = 0.18$$

b) $$P[X > 2] = 1 - P[X \leqslant 2] = 1 - F_X(2) = 1 - \Big\{P[X = 0] +$$

$$+ P[X = 1] + P[X = 2]\Big\} = 1 - \frac{2^0 \; e^{-2}}{0!} - \frac{2^1 \; e^{-2}}{1!} - \frac{2^2 \; e^{-2}}{2!} =$$

$$= 1 - \frac{1}{e^2} - \frac{2}{e^2} - \frac{2}{e^2} = 1 - \frac{5}{e^2} = 0.323$$

Es posible demostrar que la distribución de Poisson puede emplearse como una aproximación de la de Bernoulli cuando n es grande y p pequeña, pero de tal manera que $npq >> 1$, tomando $\lambda = np$. Al respecto, si $n = 20$ y $p = 0.05$, entonces npq vale 0.95, y aun cuando no cumple con la última condición, el error que se tiene al usar dicha aproximación es menor de 3 por ciento para valores de X menores de 3, aun cuando npq es casi uno; para $X = 4$ y $X = 5$ los errores respectivos son 15 y 41 por ciento.

2.7.3 Distribución uniforme

Se dice que una variable aleatoria continua, X, tiene *distribución uniforme* entre $X = a$ y $X = b$ $(b > a)$ si,

$$f_X(x) = \text{constante} = \frac{1}{b - a} \tag{2.34}$$

lo que significa que la probabilidad de obtener un valor entre x y $x + dx$ es la misma para cualquier x comprendida entre a y b. La gráfica de dicha distribución se presenta en la fig 12.

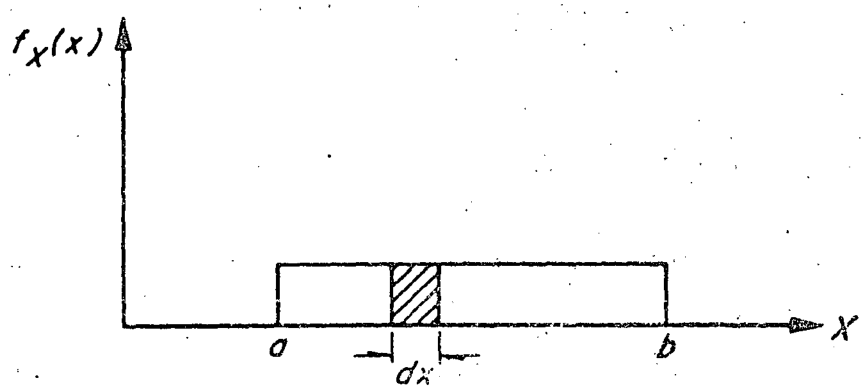


Fig 12. Distribución uniforme de una variable aleatoria continua

La esperanza y la variancia de la distribución uniforme se calculan de la siguiente manera

$$E[X] = \int_a^b x \frac{1}{b-a} dx = \left[\frac{x^2}{2(b-a)} \right]_a^b = \frac{b^2 - a^2}{2(b-a)} = (b + a)/2 \tag{2.35}$$

$$\mathrm{Var}[X] = \int_a^b (x - E[X])^2 \frac{1}{b-a}\, dx =$$

$$= \int_a^b \frac{x^2}{b-a}\, dx + \int_a^b \frac{(E[X])^2}{b-a}\, dx - \int_a^b \frac{2\ x\ E[X]\ dx}{b-a} =$$

$$= \left[\frac{x^3}{3\ (b-a)}\right]_a^b + \left[\frac{(E[X])^2}{b-a}\ x\right]_a^b - \left[\frac{2\ E[X]}{b-a}\ \frac{x^2}{2}\right]_a^b =$$

$$= \frac{b^3 - a^3}{3\ (b-a)} + (E[X])^2 - E[X]\ (b+a) = \frac{(b-a)^2}{12} \tag{2.36}$$

2.7.4 Distribución normal

Una de las distribuciones de variables aleatorias continuas más útil es la *distribución normal* o de *Gauss*, definida por la ecuación

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma_X \sqrt{2\pi}}\ e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2} \tag{2.37}$$

donde $\mu = E[X]$ y $\sigma_x = \sqrt{\mathrm{Var}[X]}$

Si se hace la transformación

$$Z = (X - \mu)/\sigma_x \tag{2.38}$$

entonces la ec 2.37 se reduce a la llamada *forma estándar*, cuya ecuación es

$$f_Z(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\ e^{-z^2/2} \tag{2.39}$$

En este caso, Z tiene distribución normal con media igual a cero y variancia igual a 1.

Existen tablas para calcular las probabilidades de una variable asociada a una distribución normal estándar, semejantes a la tabla 5. En la fig 13 se muestra la forma de campana de esta distribución, observándose la simetría respecto a $Z = E[Z] = 0$.

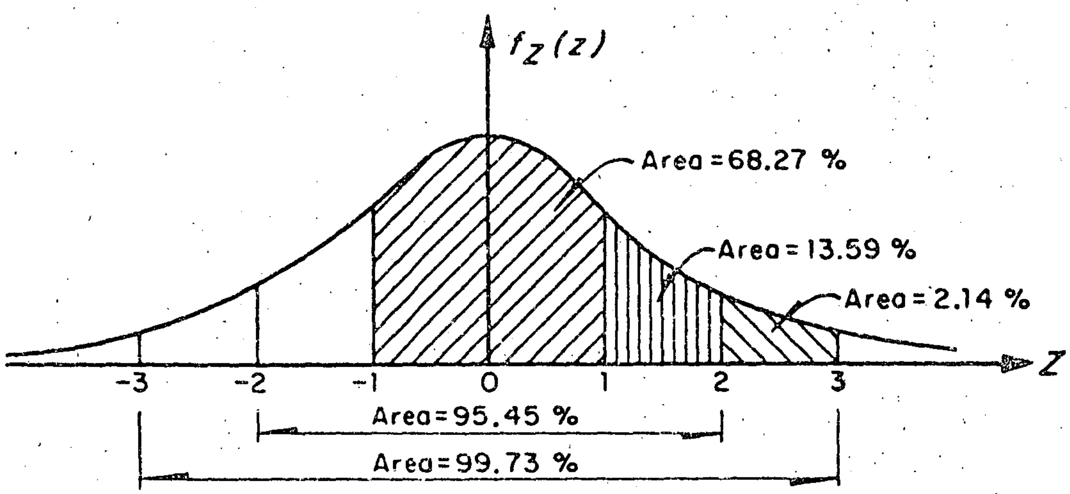


Fig 13. Distribución normal de una variable aleatoria continua

Ejemplo

Al probarse a compresión simple treinta cilindros de concreto, se obtuvieron resultados con un promedio aritmético de 240 kg/cm² y una desviación estándar de 30 kg/cm².

a) ¿Cuál es la probabilidad de que otro cilindro tomado al azar resista menos de 240 kg/cm²?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que resista más de 330 kg/cm²?

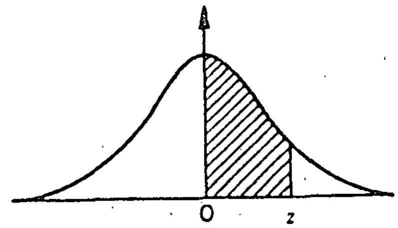
c) ¿Cuál es la probabilidad de que su resistencia esté en el intervalo de 210 a 240 kg/cm²?

Supóngase que la distribución de probabilidades es normal.

a) Para emplear las tablas de distribución normal es necesario estandarizar la variable X mediante la transformación

$$z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma_X}$$

TABLA 5. AREAS BAJO LA CURVA NORMAL
ESTANDAR ENTRE 0 Y z



z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	.0000	.0040	.0080	.0120	.0160	.0199	.0239	.0279	.0319	.0359
0.1	.0398	.0438	.0478	.0517	.0557	0.596	.0636	.0675	.0714	.0754
0.2	.0793	.0832	.0871	.0910	.0948	.0987	.1026	.1064	.1103	.1141
0.3	.1179	.1217	.1255	.1293	.1331	.1368	.1406	.1443	.1480	.1517
0.4	.1554	.1591	.1628	.1664	.1700	.1736	.1772	.1808	.1844	.1879
0.5	.1915	.1950	.1985	.2019	.2054	.2088	.2123	.2157	.2190	.2224
0.6	.2258	.2291	.2324	.2357	.2389	.2422	.2454	.2486	.2518	.2549
0.7	.2580	.2612	.2642	.2673	.2704	.2734	.2764	.2794	.2823	.2852
0.8	.2881	.2910	.2939	.2967	.2996	.3023	.3051	.3078	.3106	.3133
0.9	.3159	.3189	.3212	.3238	.3264	.3289	.3315	.3340	.3365	.3389
1.0	.3413	.3438	.3461	.3485	.3508	.3531	.3554	.3577	.3599	.3621
1.1	.3643	.3665	.3686	.3708	.3729	.3749	.3770	.3790	.3810	.3830
1.2	.3849	.3869	.3888	.3907	.3925	.3944	.3962	.3980	.3997	.4015
1.3	.4032	.4049	.4066	.4082	.4099	.4115	.4131	.4147	.4162	.4177
1.4	.4192	.4207	.4222	.4236	.4251	.4265	.4279	.4292	.4306	.4319
1.5	.4332	.4345	.4357	.4370	.4382	.4394	.4406	.4418	.4429	.4441
1.6	.4452	.4463	.4474	.4484	.4495	.4505	.4515	.4525	.4535	.4545
1.7	.4554	.4564	.4573	.4582	.4591	.4599	.4608	.4616	.4625	46.33
1.8	.4641	.4649	.4656	.4664	.4671	.4678	.4686	.4693	.4699	.4706
1.9	.4713	.4719	.4726	.4732	.4738	.4744	.4750	.4756	.4761	.4767
2.0	.4772	.4778	.4783	.4788	.4793	.4798	.4803	.4808	.4812	.4817
2.1	.4821	.4826	.4830	.4834	.4838	.4842	.4846	.4850	.4854	.4857
2.2	.4861	.4864	.4868	.4871	.4875	.4878	.4881	.4884	.4887	.4890
2.3	.4893	.4896	.4898	.4901	.4904	.4906	.4909	.4911	.4913	.4916
2.4	.4918	.4920	.4922	.4925	.4927	.4929	.4931	.4932	.4934	.4936
2.5	.4938	.4940	.4941	.4943	.4945	.4946	.4948	.4949	.4951	.4952
2.6	.4953	.4955	.4956	.4957	.4959	.4960	.4961	.4962	.4963	.4964
2.7	.4965	.4966	.4967	.4968	.4969	.4970	.4971	.4972	.4973	.4974
2.8	.4974	.4975	.4976	.4977	.4977	.4978	.4979	.4979	.4980	.4981
2.9	.4981	.4982	.4982	.4983	.4984	.4984	.4985	.4985	.4986	.4986
3.0	.4987	.4987	.4987	.4988	.4988	.4989	.4989	.4989	.4990	.4990
3.1	.4990	.4991	.4991	.4991	.4992	.4992	.4992	.4992	.4993	.4993
3.2	.4993	.4993	.4994	.4994	.4994	.4994	.4994	.4995	.4995	.4995
3.3	.4995	.4995	.4995	.4996	.4996	.4996	.4996	.4996	.4996	.4997
3.4	.4997	.4997	.4997	.4997	.4997	.4997	.4997	.4997	.4997	.4998
3.5	.4998	.4998	.4998	.4998	.4998	.4998	.4998	.4998	.4998	.4998
3.6	.4998	.4998	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999
3.7	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999
3.8	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999
3.9	.5000	.5000	.5000	.5000	.5000	.5000	.5000	.5000	.5000	.5000

Si el promedio aritmético se toma como estimación de μ, y la desviación estándar como estimación de σ_X, se tiene

$$z = \frac{240 - 240}{30} = 0$$

Recurriendo a la tabla 4 se obtiene

$$P[X \leqslant 240] = P[Z \leqslant 0] = 0.5$$

o sea la probabilidad que corresponde al área sombreada de la fig 14

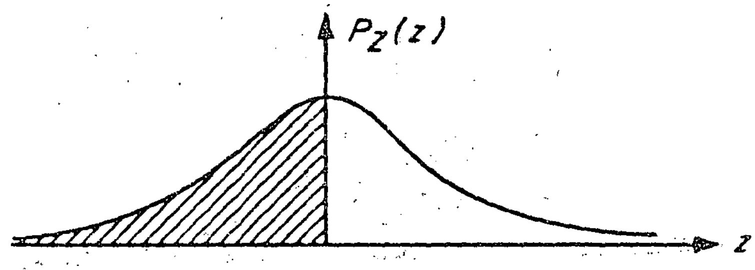


Fig 14. Distribución normal correspondiente al inciso a del ejemplo

b) El valor estandarizado de la variable es

$$z = \frac{330 - 240}{30} = 3$$

por lo que

$$P[X \geqslant 330] = P[Z \geqslant 3] = 1-0.9987 = 0.0013$$

que es el área sombreada de la fig 15.

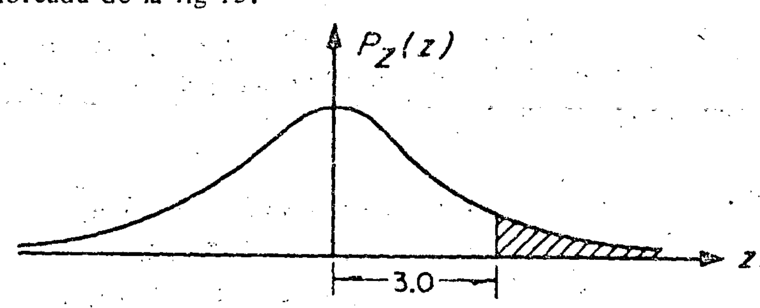


Fig 15. Distribución normal correspondiente al inciso b del ejemplo

c) Los valores estandarizados de la variable son (fig 16)

$$z_1 = \frac{210 - 240}{30} = -1$$

$$z_2 = \frac{240 - 240}{30} = 0$$

por lo que

$$P[210 \leqslant X \leqslant 240] = P[-1 \leqslant Z \leqslant 0] = 0.3413$$

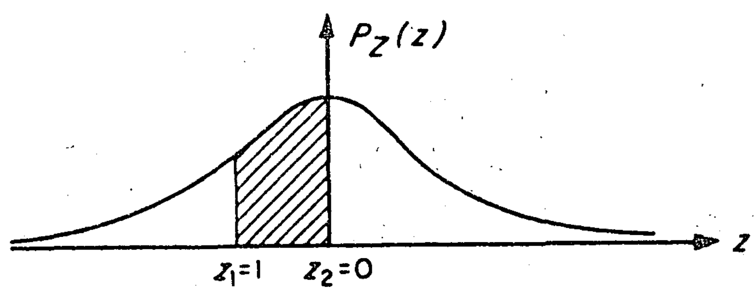


Fig 16. Distribución normal correspondiente al inciso c del ejemplo

Sean $X_1, X_2, \ldots, X_k$, variables aleatorias con densidades de probabilidades arbitrarias cuya suma se denotará como W, es decir,

$$W = X_1 + X_2 + \ldots + X_k$$

Es posible demostrar el teorema denominado *teorema del límite central,* cuyo enunciado indica que conforme aumenta el número de variables involucradas en la suma anterior (al aumentar K), la densidad de probabilidades de W tiende a ser la distribución normal. Además se puede demostrar que si $X_1, X_2, \ldots, X_k$ tienen distribución normal, entonces, rigurosamente, W también la tiene, independientemente del número de variables que aparezcan en la suma.

A partir del teorema del límite central se demuestra que la distribución de Bernoulli se puede aproximar mediante la normal cuando el número de repeticiones del experimento es grande (30 o más), con lo cual se logra un ahorro considerable de labor numérica en la solución de algunos problemas. Para mejorar esta aproximación, conviene efectuar una corrección por continuidad, la cual se justifica por usar una distribución continua en vez de una discreta, sumando o restando, según sea el caso, 0.5 al valor de X que se use. Por ejemplo, si se desea cuantificar la probabilidad de que de 2 000 ensayes se logren de 3 a 6 éxitos, los límites reales que se deben usar al aplicar la distribución continua son 2.5 y 6.5.

Ejemplo

Si la probabilidad de que falle una varilla de acero al aplicarle cierta carga es de 0.001, determinar la probabilidad de que en 2 000 varillas probadas fallen más de dos.

Usando la distribución de Bernoulli se obtiene

$$P[X > 2] = 1 - P[X \leqslant 2] = 1 - \left\{P[X = 0] + P[X = 1] + P[X = 2]\right\} =$$

$$= 1 - \left\{\frac{2\,000!}{2\,000!\ 0!}(0.001)^0(0.999)^{2000} + \frac{2\,000!}{1\,999!\ 1!}(0.001)^1(0.999)^{1999} + \right.$$

$$\left. + \frac{2\,000!}{1\,998!\ 2!}(0.001)^2(0.999)^{1998}\right\} = 0.3255$$

Los cálculos necesarios para obtener la solución son bastante más tediosos que los que deben efectuarse aprovechando que el número de repeticiones del experimento es grande, a fin de utilizar la distribución normal. En estas circunstancias, la probabilidad de que $X \leqslant 2$ en el caso discreto, equivale a la de que $X \leqslant 2.5$ en el continuo; así

$$\mu = np = 2\,000 \times 0.001 = 2$$

$$\sigma_X = \sqrt{npq} = \sqrt{2\,000 \times 0.001 \times 0.999} = 1.41$$

$$P[X \leqslant 2.5] = P\left[Z \leqslant \frac{2.5 - 2}{1.41}\right] = P[Z \leqslant 0.355] = 0.6387$$

de donde

$$P[X > 2] = 1 - P[X \leqslant 2.5] = 1 - 0.6387 = 0.3613$$

centro de educación continua
división de estudios superiores
facultad de ingeniería, unam

INGENIERIA DE SISTEMAS

MODELOS DE INVERSION Y ACUMULACION DE CAPITAL

DR. LEONEL CORONA
DEPTO. DEL DOCTORADO
FACULTAD DE ECONOMIA

Junio de 1978

Presentación

Esta ponencia tiene por objetivo presenta un conjunto de ensayos sobre modelos aplicados al análisis de las inversiones en México. Por tanto no representa una reseña exahustiva de los modelos de inversión y acumulación aunque si intenta bosquejar sus bases teóricas principales y mostrar su aplicación al caso de México. Los modelos incluídos son:

1) modelos sectoriales de la acumulación de capital en México.

2) modelo predictivo de las inversiones públicas, y

3) modelos de las inversiones extranjeras en México.

1.- Introducción.

Los modelos econométricos aplicados para el estudio del comportamiento y predicción de las inversiones se han desarro- principalmente, con base en la teoría neoclásica. El método neoclásico consiste en proponer un comportamiento "optimizador" del valor presente de la empresa. A partir de este comportamiento se deduce a nivel agregado un valor "deseado" de los acervos de capital. Si se denota con K el nivel de capital y con K* el nivel deseado, se realiza un ajuste entre ambos de acuerdo con, (1)

$$K_t - K_{t-1} = (1-\lambda)\left(K_t^* - K_{t-1}\right) \qquad (1.1)$$

donde

$$0 \leq \lambda < 1$$

Por otra parte los determinantes del capital deseado son, 1) la capacidad utilizada, que puede estar representada por la relación de producción a capacidad, cambios en la producción,

, ventas respecto

al máximo nivel previo alcanzado, etc; 2) comportamiento financiero interno, indicado por el flujo financiero, los activos liquidos, capacidad de endeudamiento y 3) condiciones financieras externas, dadas por las tasas de interés, cotización de las acciones, etc.

---

(1) En forma alternativa al capital puede representarse como un promedio ponderado de los pasados niveles de capital deseado,

$$K_t = (1-\lambda)\sum_{r=0}^{\infty} \lambda^r K_{t-r}^*$$

Los estudios econométricos señalan que la "capacidad utilizada o la producción es la única variable significativa del capital deseado para el conjunto de modelos revisados", mientras que "variables asociados con las finanzas internas no son significativas en los modelos que incluyen la producción en forma significativa"*
Considerando lo anterior el modelo más simple es el de relacionar el nivel de capital deseado, K*, con la producción Y (principio del acelerador de la inversión),

$$K_t^* = \alpha Y_{t-r} \tag{1.2}$$

donde se considera un retardo, r .
Si se sustituye esta ecuación, con r=o, en (1.1) se tiene

$$K_t - K_{t-1} = (1-\lambda)(\alpha Y_t - K_{t-1})$$

o bien

$$\dot{K}_t = (1-\lambda)(\alpha Y_t/K_{t-1} - 1) \tag{1.3}$$

donde Y_t/K_{t-1}, puede representar la capacidad utilizada
Alternativamente Koyck** propone una relación de distribución geométrica con los niveles de producción pasados.

$$K_t = \alpha(\lambda^0 Y_t + \lambda^1 Y_{t-1} + \lambda^2 Y_{t-2} + \cdots) \tag{1.4}$$

---

* Jorgenson D. Econometric Studies of Investment Behavior: A Survey, The Jowral of Economic Literature, Dic. 1971, p. 1130, 1133.

**Koyck, L.M. Distributed Lags and Investment Analysis, North-Holland Amsterdam, 1954.

que puede ser transformada en

$$K_t - K_{t-1} = \alpha Y_t - (1-\lambda) K_{t-1} \tag{1.5}$$

y para la inversión bruta, IB_t,

$$IB_t = \alpha Y_t - (1-\lambda-\delta) K_{t-1} \tag{1.6}$$

donde, δ, es el coeficiente de depreciación

Partiendo de este tipo de análisis se formulan y validan modelos para una desagregación a 15 sectores de la economía mexicana (cap. 2)

En el cap. 3 se presenta un modelo descriptivo de la inversión pública con objeto de detectar sus ciclos, así como un modelo en función del Producto Interno Bruto.

En el cap.4 se modela la inversión norteamericana extranjera en México. El análisis aquí aplicado es al mismo tiempo una crítica implicita a la teoría neoclásica. Se parte del análisis global de la acumulación de capital cuyo desarrollo en la etapa actual se caracteriza en la internacionalización del capital. Se plantean tres variables explicativas de la acumulación internacional: 1) la tasa de ganancia, 2) la capacidad ociosa y 3) el tamaño del mercado.

2.- ACUMULACION DE CAPITAL POR SECTORES ECONOMICOS

Los sectores de medios de producción que atienden los requerimientos la expansión de las actividades económicas de acuerdo con niveles tecnológicos alternativos son: 1) maquinaria y construcción, 2) inventarios de productos en proceso y terminados y 3) importaciones* principalmente de maquinaria. Esta información la proporciona la matriz de capital (2.1), o sea, el origen y el destino de los medios de producción.

En una economía de mercado los medios de producción son, además, bienes de capital. Es decir, la acumulación capitalista contiene un aspecto cuantitativo, o sea, el crecimiento del capital a través de reinvertir las ganancias, y un aspecto cualitativo que se refiere a la forma concreta de la acumulación o sea, los medios de producción propiamente dichos. En vista de que, se abordan las inversiones en una economía de mercado, se empleará el término bienes de capital para referirse a los medios de producción.

Las decisiones de inversión responden a un proceso de acumulación de capital en el que las espectativas de ganancia son el motor principal, por lo que se requiere estimar las ganancias sectoriales (2.2), para a su vez predecir las inversiones sectoriales (2.3) Asímismo, los bienes de capital instalados se consumen o deprecian

---

* "Los volúmenes de importación de...bienes de capital... representaron el año próximo pasado (1975) más de la cuarta parte del total de compras de México en el exterior." México, Presidencia de la República, 1976.

durante el proceso productivo. Los niveles de reposición de capital por sectores se estiman en el subcap. 2.5. Por último, se especifica un modelo financiero de la inversión (2.5)

2.1 Matrices de Capital

A fin de determinar los cambios en la participación de los sectores productores de bienes de capital en la formación de capital de las actividades económicas, se necesita conocer los niveles y cambios tecnológicos que se expresan en los coeficientes de capital. Estos coeficientes representan los requerimientos de maquinaria, instalaciones (construcción) e inventarios (tanto de productos en proceso y terminados), para obtener una unidad de producción en un sector económico dado. Es decir, el capital de acuerdo con su origen material puede ser tipificado en:

1.- Construcción

2.- Maquinaria

Nacional

Importada

3.- Inventarios

De las empresas (materias primas y productos en proceso y terminados).*

En proceso de comercialización (productos terminados)

* Corresponden a la diagonal de la matriz de capital

El coeficiente de capital, b_{ij}, puede ser medido en acervo o en flujo*. En acervo, representa el total de capital, K, en operación originado en el sector, i, por unidad de produtco, X, del sector j.

$$b_{ij}^{t} = K_{ij}^{t-r} / X_{j}^{t}$$

Donde, r, es el período de maduración del capital invertido.

En flujo el coeficiente de capital corresponde a la inversión necesaria para incrementar en una unidad la producción:

$$\beta_{ij}^{t} = I_{ij}^{t-r} / \Delta X_{j}^{t}$$

donde I es la inversión neta de capital del tipo i en el sector j.

Si se supone que los requerimientos de acervo, K_{ij}, son una función lineal del nivel de producción X_j, entonces $b_{ij} = \beta_{ij}$. En general, $b_{ij} \neq \beta_{ij}$ (figura 2.1), por ejemplo los requerimientos de maquinaria de las nuevas inversiones, con la tendencia actual**, son mayores que los de las inversiones en operación (acervo).

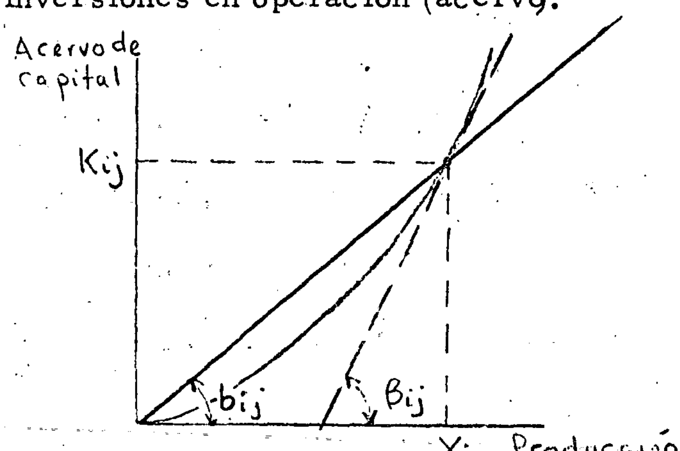


Fig. 2.1 Coeficientes de capital en acervo b_{ij}, y en flujo β_{ij}

* En el apéndice estadístico se muestran las matrices correspondientes: en el cuadro 6 el flujo bruto de capital, en el 7 el acervo de capital y en el 8 los coeficientes de capital.

**Sin embargo la tendencia mundial esta orientada a ahorrar capital (Revolución científica técnica, Corona 1976 d), pero aún no es dominante en México.

Se puede considerar, en general, un año para madurar las inversiones, por lo que el nivel de acervo del año anterior (o flujo) entra en operación en el año siguiente. Sin embargo, las actividades económicas tienen distintos períodos de maduración o gestación, de acuerdo con el tipo de bien.

2.2 Tasas de Ganancia Sectoriales

Las tasas de ganancia sectoriales corresponden a la relación del superávit de operación obtenido por las empresas entre el capital total avanzado del sector. El superávit de operación, G , incluye el valor apropiado por el capital, y por tanto, los costos financieros; asimismo se calcula antes de impuestos es decir, lo integran las utilidades repartidas y no repartidas sin deducir el impuesto al ingreso global de las empresas. El capital total avanzado, KA, por la empresa es la suma de los activos fijos, de los inventarios y del capital circulante (materias primas y sueldos y salarios) más los costos de reposición del capital depreciado. Si se supone que el acervo de capital total, K_j^{t-1}, al finalizar el período anterior contiene la reposición de los inventarios y activos fijos consumidos, entonces el capital total avanzado se estima, sólo, por la suma del acervo de capital total y los sueldos y salarios. Por tanto,

$$KA_j^t = K_j^{t-1} + YS_j^t$$

y la ganancia se expresa como

$$G_j^t = G_j + r_j \cdot KA_j^t$$

donde, G_j, representa el nivel autónomo de ganancia; r_j, la tasa de ganancia y, YS , los sueldos y salarios pagados por las empresas del sector j.

Las tasas de ganancia (a precios constantes) para los distintos sectores se estimaron con los datos observados de 1960 a 1968 (Banco de México, 1969).

Las estimaciones se muestran en el cuadro siguiente:

CUADRO 2.1 TASAS DE GANANCIA POR SECTORES DEL CAPITAL TOTAL AVANZADO*

Sector	GANANCIA AUTÓNOMA G_j (millones de pesos de 1960)	TASA DE GANANCIA r_j	Orden	COEF. DE CORRELACIÓN CC
1. Agropecuario	-2 553	0.268	7	0.99
2. Minería	2 726	-0.236	9	0.24**
3. Petróleo	-2 646	0.303	6	0.98
4. Alimentos	2 873	0.146	12	0.96
5. Textiles	-16 011	1.119	2	0.92
6. Madera	-2 960	0.438	4	0.94
7. Química	-564	0.240	8	0.93
8. No metálicas	-10	0.245	8	0.89
9. Metálicas básicas	-765	0.142	12	0.94
10 Maquinaria	-4 594	0.383	5	0.97
11 Construcción	-5 911	1.091	3	0.94
12 Electricidad	-1 312	0.161	10	0.94
13 Comercio	2 957	1.411	1	0.99
14 Trans y Com.	-4 555	0.073	13	0.98
15 Servicios	-5 564	0.141	11	0.99

* El capital total avanzado se estima con el acervo de capital total del periodo anterior más los sueldos y salarios pagados en el periodo.

** El modelo se rechaza

Se obtienen tasas de ganancia muy diferentes entre las activi-dades económicas: lo anterior sugiere fuertes transferencias de valor* entre las ramas. Los sectores comercio (141%), textiles (111%) y construcción** (109%) tienen tasas de ganancia que sobrepasan el 100 por ciento; los sectores de madera y maquinaria alcanzan 43 y 38% respectivamente; con tasas entre 20 y 30% se encuentran petróleo, agricultura, industrias no metálicas, química y minería (aunque no es confiable la estimación); electricidad tiene una tasa de 16% y metálicas básicas y servicios, 14%; por último transportes solo alcanza el 7 por ciento.

2.3 Modelo de Inversión Sectorial

Los sectores origen de bienes de capital producen de acuerdo con sus propias expectativas de ganancia, y de realización de las inversiones de acuerdo con lasdemandas sectoriales. A continuación se detalla este proceso:

2.3.1 Oferta de bienes de inversión (apriori)

La oferta de los bienes de inversión (inventarios de materias primas construcciones y maquinaria) se corresponde con las expectativas y/o con los planes de expansión de los sectores en el siguiente período, $\bar{X}_j^{t+1}$. Los niveles de expansión de los sectores pueden ser modelados en función de los niveles de producción observados; por ejemplo:

---

* Corona L. 1976 e.

** La tasa de 109% de la construcción incluye los costos de financiamiento que participan, seguramente, de manera importante.

CUADRO 2.2 ESTIMACIONES DE LOS COEFICIENTES DEL MODELO PARA PREDECIR LAS DEMANDAS DE PRODUCCIONES SECTORIALES, $\bar{X}_j$

	X^{t-1}	X^{t-2}	$\bar{X}$.	Coef. de correlación
1	.8190 (2.88)	.2294 (.7607)	393	.99
2	.5051 (1.97)	.3995 (1.55)	506	.89
3	.9389 (3.15)	.1034 (.3292)	288	.99
4	.8457 (3.03)	.2566 (.8468)	-847	.99
5	.8562 (3.09)	.3027 (.9596)	-1115	.97
6	.2935 (2.62)	.8572 (5.28)	-147	.97
7	.8352 (2.99)	.2835 (.9272)	91	.99
8	.7591 (2.79)	.3729 (1.24)	-44	.98
9	.6945 (2.37)	.4561 (1.43)	71	.99
10	.9802 (3.58)	.2384 (.7562)	-783	.98
11	.8478 (3.02)	.2919 (.97)	-608	.96
12	1.3071 (4.46)	-.2134 (-.64)	-2.6	.99
13	.8049 (3.08)	.3052 (1.09)	-1632	.99
14	1.2351 (4.36)	-.1831 (-.62)	-74	.99
15	1.1072 (84.05)	.00008 (.44)	-1656	.99

FUENTE: Correlaciones del modelo de producción, , con los datos de las Cuentas Nacionales, Banco de México, 1969.

$$\bar{X}_j^{t+1} = X_j + p_1 X_j^t + p_2 X_j^{t-1} + u_t \qquad 10.$$

Donde X_j, es un parámetro que representa el nivel autónomo de producción y, p_1 y p_2, son propensiones marginales (cuadro 2.2) a cambiar los niveles de producción corriente y del período anterior, X_j^t y X_j^{t-1}

A partir de esta expansión esperada de la producción los planes de inversión se desglozan por tipo de bien i, mediante los coeficientes de capital, b_{ij}^{t+1} de acuerdo con la tecnología del período correspondiente. Por tanto, los niveles de inversión corresponden a la diferencia entre el acervo requerido en t+1 y el de operación en el periódo t

$$\bar{\bar{I}}_{ij}^{t} = b_{ij}^{t+1} \bar{X}_{j}^{t+1} - b_{ij}^{t} X_{j}^{t}$$

Los niveles de producción se ajustan con los inventarios, SI, que reflejan los problemas de realización por bajos niveles de acumulación en los de más sectores.

$$I_{ij}^{t} = Max\left(\bar{\bar{I}}_{ij}^{t} - SI_{ij}^{t-1} ; 0\right)$$

En las ecuaciones anteriores se ha tomado, para fines ilustrativos, un año de retardo en la maduración de las inversiones.

Por otra parte, la oferta de bienes de inversión no va a corresponder necesariamenta a las inversiones <u>aposteriori</u> o realizados en los sectores económicos. A continuación se trata este punto.

5.3.2 Demanda de bienes de inversión (<u>aposteriori</u>)

Las demandas sectoriales de bienes de inversión resultan de la dinámica global de acumulación según 1) las expectativas de ganancia del capital en función de márgenes de utilidad sobre ventas esperadas propias a cada uno de los sectores 2) retardos por requerimientos de maduración y/o disponibilidad de medios de producción y 3) restricciones financieras.

Si se consideran dos períodos de retardo en la realización de las inversiones se tiene

$$I_j^t = (1-\lambda_{1j})(\bar{K}_j^t - K_j^{t-1}) + (1-\lambda_{2j})(\bar{K}_j^{t-1} - K_j^{t-2})$$

donde, λ_{1j} y λ_{2j}, recogen los retardos para alcanzar los niveles deseados de acervos, $\bar{K}_j^t$ y $\bar{K}_j^{t-1}$, respectivamente. La ec. anterior no considera las decisiones para acelerar la inversión al término del primer período, ya que se ha dejado de invertir, $\lambda_{2j}(\bar{K}_j^{t-1} - K_j^{t-2})$, añadiendo este término se tiene,

$$I_j^t = (1-\lambda_{1j})[(\bar{K}_j^t - K_j^{t-1}) + \lambda_{2j}(\bar{K}_j^{t-1} - K_j^{t-2})] + (1-\lambda_{2j})(\bar{K}_j^{t-1} - K_j^{t-2})$$

que puede reescribirse como

$$I_j^t = (1-\lambda_{1j})(\bar{K}_j^t - K_j^{t-1}) + [1-\lambda_{2j} + \lambda_{2j}(1-\lambda_{1j})](\bar{K}_j^{t-1} - K_j^{t-2})$$

Con una planeación adaptiva, esto es, proponer nuevas metas de acervo cada vez que se obtiene información de las inversiones realizadas, el modelo anterior se formula de la siguiente manera

Si se consideran dos períodos de maduración de las inversiones, en el primer período se tiene:

$$I_j^{t-1} = (1-\lambda_{2j})(\bar{K}_j^{t-1} - K_j^{t-2})$$

estimándose, asimismo, un acervo, $\bar{\bar{K}}_j^t$, para el siguiente período. Sin embargo, pasado el primer período se conoce la inversión realizada, I_j^{t-1} y por tanto se puede planear la inversión, o sea, $\bar{K}_j^t$. El modelo adaptivo resulta entonces,

$$I_j^t = (1-\lambda_{1j})(\bar{K}_j^t - K_j^{t-1}) + \rho_j I_j^{t-1}$$

donde ρ_j, es un coeficiente de ajuste, según el nivel de inversión realizado en el período anterior.

Por otra parte, el acervo de capital deseado, $\bar{K}_j^t$ resulta para un sistema de mercado, de los expectativos de ganancia, $\bar{G}_j^t$, que se especifican de acuerdo con tasas unitarias , r_j^t . En efecto,

$$\bar{G}_j^t = r_j \cdot \bar{K}_j^t \qquad r_j > 0$$

A su vez, el superávit o ganancia experada, G_j^t , depende de las ventas, $\bar{X}_j^t$ y de la tasa de utilidad, μ_j,

$$\bar{G}_j^t = \mu_j \cdot \bar{X}_j^t \qquad \mu_j > 0$$

Para estimar las ventas se propone una función de las ventas pasadas. Considerando tres períodos de retardo se tiene.

$$\bar{X}_j^t = X_j + p_{1j} X_j^{t-1} + p_{2j} X_j^{t-2} + p_{3j} X_j^{t-3} + U_j^t$$

donde, U_j^t, es una variable aleatoria de media y convarianza nulas

Si se sustituyen, sucesivamente, las ecs. anteriores en el modelo de inversión adaptiva se obtiene:

$$\begin{aligned} I_j^t = {} & \left[\rho_j (1-\lambda_{1j}) + (1-\lambda_{2j}) \right] \frac{\mu_j}{r_j} \cdot X_j \; + \\ & \rho_j (1-\lambda_{1j}) \frac{\mu_j}{r_j} \cdot p_{1j} \cdot X_j^{t-1} + \left[\rho_j (1-\lambda_{1j}) p_{2j} + (1-\lambda_{2j}) p_{1j} \right] \frac{\mu_j}{r_j} \cdot X_j^{t-2} \\ & + (1-\lambda_{2j}) \frac{\mu_j}{r_j} \cdot p_{2j} \cdot X_j^{t-3} - \rho_j (1-\lambda_{1j}) K_j^{t-1} - (1-\lambda_{2j}) K_j^{t-2} \\ & + \left[\rho_j (1-\lambda_{1j}) + (1-\lambda_{2j}) \right] U_j \end{aligned}$$

que puede plantearse como

$$\bar{I}_j^t = I_j + \alpha_{1j} X_j^{t-1} + \alpha_{2j} X_j^{t-2} + \alpha_{3j} X_j^{t-3} - \beta_{1j} K_j^{t-1} - \beta_{2j} K_j^{t-2} + V_j$$

donde se señala con un guión que la inversión $\bar{I}_j^t$ que se desea realizar.

Los parámetros I_j, α_j, β_j pueden ser estimados por regresión. La regresión permite identificar los parámetros λ_{1j} y λ_{2j}. En efecto:

$$\lambda_{1j} = 1 - \beta_{1j} / \rho_j$$

$$\lambda_{2j} = 1 - \beta_{2j}$$

Aplicando el modelo de la ec. 3 se obtuvieron las estimaciones que se muestran en el cuadro 2.3

2.3.3. Realización de las inversiones.

Los bienes de inversión, como toda mercancía, estan sujetos a un mercado. Por tanto, las inversiones se realizan de acuerdo con la demanda y la disponibilidad u oferta, es decir,

$$I_j^t = (\bar{I}_j^t , \sum_i \bar{\bar{I}}_{ij}^t)$$

y por tanto los inventarios para el período de producción siguiente disminuyen en I_j^t,

$$SI_j^{t+1} = SI_j^t - I_j^t$$

Para el caso de la importación de bienes de capital, M_I^t, principalmente de maquinaria, se supone que no existen limitaciones en cuanto a la disponibilidad, y por tanto.

$$M_I^t = \sum_j (b_{mj}^{t+1} \bar{X}_j^{t+1} - b_{mj}^t X_j^t)$$

CUADRO 2.3 ESTIMACION DE LOS PARAMETROS ESTRUCTURALES DEL MODELO DE INVERSION NETA SECTORIAL

COEFICIENTES DE REGRESION DE LAS VARIABLES

SECTOR	P R O D U C C I O N			PIB	C A P I T A L					** Variable Auxiliar	Inversión Autonóma	Coef. de correlación
	X^{t-1}	X^{t-2}	X^{t-3}		K^{t-1}	K^{t-2}	K^{t-3}	K^{t-4}	I^{t-1}			
1	-.2760 (-.94)	-.4237 (-1.27)		.0479 (1.53)		.2374 (.9602)					447	.6559
2	.1651 (1.43)				-1.0690 (-3.70)						4553	.7327
3		1.0042 (1.90)	1.3343 (2.46)			-1.2622 (-4.11)					934	.8484
4*	1.3440 (2.44)				-0.8125 (-2.01)						-19024	.90
5*	0.1536 (3.53)										-1380	.85
6*	0.6297 (3.13)				-0.3893 (-2.17)						426	0.92
7*	-0.5693 (-0.59)	1.3490 (1.40)			-0.2893 (-0.62)						-1949	.83
8*	0.9450 (2.16)				-0.5831 (-1.68)						335	0.81
9	.3724 (1.11)		1.1920 (2.66)		-.7664 (-2.77)		-1.1740 (-3.26)	1.3771 (4.42)			-1226	.8659
10*	0.1423 (3.61)										-413	.85
11	.0150 (1.38)				-.3318 (-1.22)	.3318 (-1.22)				124.4527 (1.69)	94	.5726
12	1.555 (2.61)				-0.3463 (-2.23)				.8030 (3.21)		553	.887
13	.0619 (4.77)										-1658	.7977
14*	0.9836 (4.35)										-4680	.89
15*	0.6145 (1.46)				-0.1224 (-0.74)						-346	0.99

* Estimados con observaciones de 1960 a 1967. Los sectores restantes, se alimentaron con datos de 1950-67 (Banco de México, 1969).

** Variable auxiliar que simula la inestabilidad de la construcción por los cambios presidenciales. Es igual a 1 en el último y -1 en el primer año de un periodo presidencial y cero en los restante.

donde bmj^{t} es el coeficiente de importaciones de bienes de capital (renglón 16 de la matriz de capital).

El modelo de inversión anterior esta sujeto a desajustes cíclicos determinados por sobreproducción o subproducción de bienes de inversión.

Por último, el acervo de capital total, K_j^t, se contabiliza de acuerdo con las inversiones netas realizadas:

$$K_j^t = K_j^{t-1} + I_j^t$$

5.4 Depreciación y reposición de capital

La depreciación es el desgaste que sufren los activos o acervos fijos en el proceso productivo y su valor es transferido al producto. La tasa de depreciación (Anual) varía con el sector de actividad económica j, y con el origen del activo, i, (maquinaria o construcción).

Si se supone que las empresas reponen los activos en la medida de su depreciación, el nivel de reposición en un sector, j, es

$$R_j^t = R_j + \theta_j K_j^{t-1}$$

donde Rj, representa el nivel de reposición autónomo (añadido debido al supuesto lineal de la ecuación), θ_j, es la tasa de depreciación y Kj es el acervo de capital (para fines del modelo se puede tomar el capital total).

La depreciación por tipo de origen de acervo puede expresarse, similarmente

$$R_i^t = R_i + \theta_i K_i^{t-1}$$

CUADRO 2.4 ESTIMACION DEL MODELO LINEAL DE REPOSICION DE CAPITAL POR SECTORES

SECTOR	Reposición autónoma R_j millones de pesos de 60	Tasa de reposición θ_j	Coeficiente de correlación
1. Agropecuaria	-233	0.0134	0.99
2. Minería	512	-0.0778	0.63
3. Petróleo	167	0.0581	0.94
4. Alimentos	146	0.0270	0.98
5. Textiles	184	0.0272	0.94
6. Madera	82	0.0317	0.98
7. Química	-7	0.0353	0.97
8. No metálicas	35	0.0442	0.96
9. Metálicas Básicas	14	0.0419	0.98
10 Maquinaria	304	0.0154	0.99
11 Construcción	21	0.0093	0.94
12 Electricidad	-60	0.0208	0.98
13 Comercio	27	0.0068	0.97
14 Trans y Com.	39	0.0051	0.93
15 Servicios	390	0.0069	0.93

FUENTE: Correlaciones con los datos de los cuadros 9 y 10 del apéndice estadístico.

donde, θ_i^t, corresponde específicamente, a las tasas de depreciación de los acervos fijos nacionales en maquinaria y construcción (sectores 10 y 11). Con las observaciones anuales de 1950 a 1967 (Cuentas Nacionales, Bco. de Mex. 1969, se obtienen las siguientes estimaciones:

$$R_{10}^{t} = -473 + 0.035\ K_{10}^{t-1} \qquad (CC = 0.999)$$

$$R_{11}^{t} = -11 + 0.015\ K_{11}^{t-1} \qquad (CC \sim 1.00^{*})$$

Por otra parte, las reposiciones de capital por sectores de 1960-67, se obtienen las estimaciones que se muestran en el cuadro 2.4

Considerando que el modelo maneja las inversiones por origen, es más adecuado aplicar las tasas de reposición por tipo de bienes (3.5% para maquinaria, y 1.5% en instalaciones, anualmente).

2.5. Financiación de la inversión.

La inversión se financia con recursos captados en el país, ahorro interno, y ahorro externo, vía las inversiones extranjeras directas y los préstamos del exterior (menos remesas de utilidades y compras de empresas extranjeras). El ahorro externo en la situación dependiente se transforma en el medio para convertir el ahorro interno en inversión efectiva, al facilitar la importación de bienes de capital (Corona L. 1976c.)

El ahorro interno proviene del ahorro personal y el ahorro de las empresas.

---

* El coeficiente de correlación, CC, de cerca de 100%, sugiere que los datos publicados en las Cuentas Nacionales (Banco de México, op. cit.) estan calculados

El ahorro de las empresas, S_j^t, se considera igual a las ganancias no distribuidas, es decir, no se consideran las utiliddes en reserva que luego se repar ten. Este supuesto, permite simplificar las transacciones financieras, con el objeto de estimar el total de ahorro captado en el país.

Para estimar las ganancias distribuidas se consideran dos métodos. El primero se basa en los ingresos de capital percibidos, principalmente, por el estrato alto, y el segundo estima una tendencia media de las ganancias no invertidas por las empresas. En este caso la inversión bruta se financia con recursos propios, o ahorro de la empresa, Sj^t, y ajenos.

Si suponemos que el ahorro de la empresa es un porcentaje, aj, de la inversión total se tiene:

$$S_j^t = a_j \left(I_j^t + D_j^t \right) \qquad 0 < a_j \leq 1$$

donde I_j^t, es la inversión neta y D_j^t es la reposición del sector j en el periodo t.

Por tanto, las ganancias distribuidas, U_j^t, se calculan por diferencia entre la ganancia y el ahorro de la empresa

$$U_j^t = G_j^t - S_j^t$$

y sustituyendo S_j, de la ecuación anterior,

$$U_j^t = G_j^t - a_j \left(I_j^t + D_j^t \right)$$

Como no se conoce aj* se siguió el siguiente método: se supone aj=1 con el fin de hacer una primera estimación de los parámetros por regresión. En esta hipótesis se determinan utilidades distribuibles de equilibrio**, $\bar{U}j$.

Estas utilidades de equilibrio se explican en función de las ventas, de los acervos y la inversión neta; de la siguiente manera

$$\bar{U}_j^t = U_j + \mu_{1j} X_j^t + \mu_{2j} K_j^{t-1} + \mu_{3j} K_j^{t-2} + \mu_{4j} I_j^t + V_j$$

donde μ_{1j}, representa una propensión marginal a distribuir sobre ventas X_j^t, μ_{2j} sobre el acervo de capital del período anterior, μ_{3j}, sobre el acervo con dos periodos de retraso; y, por último, μ_{4j}, la propensión a distribuir sobre el incremento del acervo (ya que $I_j^t = K_j^{t-1} - K_j^{t-2}$); vj representa una variable aleatoria de media y covarianza nulas. Los estimadores con las observaciones de 1960 a 67 se muestra en el cuadro 2.5

Las utilidades distribuibles se expresan en función de las de equilibrio,

$$U_j^t = (1-a_j)\, G_j + a_j \bar{U}_j$$

Donde, aj, es el coeficiente de financiamiento con recursos propios a nivel nacional, Si, a j=1, entonces $U j^t = \bar{U} j^t$

Con las ganancias distribuidas se determina el ahorro de la empresa mediante la diferencia

$$S_j^t = G_j^t - U_j^t$$

* En general, se puede considerar que las empresas tienden a incrementar pasivos pero hasta un 50% del capital, por lo que

**La conotación de equilibrio se refiere a un estadio en el que se hubiesen pagado los pasivos.

C U A D R O 2.5.

ESTIMADORES DE LAS UTILIDADES DISTRIBUIBLES DE EQUILIBRIO: $\bar{U}_j^t$

SECTOR	UT. DISP. AUTONO-MAS	PROP. MARG. A DISTRIB. SOBRE VENTAS X^t	PROP. MARG. A DISTRIB. SOBRE K_j^{t-1}	PROP. MARG. A DISTRIB. SOBRE K_j^{t-2}	PROP. MARG. A DISTRIB. SOBRE I.IV.t-1 $(K_j^{t-1}-K_j^{t-2})$	
1	-1911	0.4831 (7.659)				0.9547
2	-16736	-0.54460 (-3.550)	2.29585 (4.122)	1.86097 (2.728)		0.93049
3	-4765	-1.14610 (-3.611)	0.95825 (4.201)			0.89543
4	11185	-0.63158 (-1.662)	0.52680 (1.481)			0.66218
5	-1595	0.23286 (7.793)				0.95398
6	-2563	0.64668 (4.289)	-0.08057 (2.841)		-1.10599 (-2.151)	0.95892
7	1844	-0.09340 (-0.215)	-0.01859 (-0.041)		0.31981 (0.540)	0.32469*
8	-1299	-0.35164 (-1.064)	0.62714 (1.295)		-0.74619 (-0.834)	0.74322
9	-4330	-1.24623 (-2.539)		1.10826 (2.851)		0.84464
10	-211	0.09181 (4.215)				0.86458
11	-2421	0.30359 (22.837)				0.99430
12	-5528	-2.19698 (-0.521)	0.58212 (0.477)	0.2452 (0.804)		0.82497
13	630	0.66701 (51.272)				0.99886
14	-2077	-0.84423 (-0.647)	0.12228 (0.627)		-0.89031 (-1.513)	0.78065
15	1510	0.10689 (4.156)				0.86149

* La correlación se rechaza.

Conviene señalar que el ahorro del Gobierno esta incluído dentro del sector servicios. Un desgloce de este permitirá estimar el ahorro del Gobierno por la diferencia entre los ingresos corrientes (tributarios y no tributarios) y los gastos corrientes (por administración, intereses, gastos de la deuda y transferencias).

El ahorro interno corresponde a la suma del ahorro de las empresas (que incluyen el de Gobierno) y el personal, S_H, por estratos de ingreso, H:

$$S^t = \sum_j S_j^t + \sum_H S_H^t$$

Asimismo, y con objeto de corroborar las estimaciones anteriores se considera el ahorro en función del nivel alcanzado en el periodo anterior y una propensión marginal, λ, a ahorrar el incremento del producto,

$$S^t = S + P \cdot S^{t-1} + \lambda (y^t - y^{t-1})$$

donde S es un nivel de ahorro autónomo. Con observaciones anuales de 1950 a 1967, se alcanza un coeficiente de correlación de 0.96 y los siguientes estimadores (Corona, 1976)

S = 804 millones de pesos

P = 0.850

s = 0.533

El modelo esta abierto respecto al ahorro externo, Z^t, es decir que este se calcula para satisfacer los requerimientos financieros de la inversión bruta no cubierta por el ahorro interno

Sin embargo en el cap. 4 se desarrolla, en particular, el análisis de la inversión extranjera directa.

3. INVERSION PUBLICA

La capitalización correspondiente al Gobierno Federal, Estados y Municipios se muestra en la tabla 1, donde aparece repartida por conceptos. Las inversiones mayores corresponden a obras de irrigación, carreteras y servicios públicos urbanos y rurales, los que ascendieron en 1967 a 66 por ciento del total; esto indica que la inversión del sector gobierno está en gran parte dirigida hacia obras de infraestructura, que son casi en su totalidad obras de construcción civil.

Considerando que las inversiones del sector gobierno son las más representativas de las obras de infraestructura, y que estas son multiplicadoras de las inversiones en general, se adelanta la hipótesis de tomar únicamente las inversiones gubernamentales como variable fundamental en la explicación de la demanda de construcción. De esta manera se tendrá también una variable instrumental en el modelo controlable a nivel gubernamental. A manera de comparación, se presentan la inversión pública, privada y total en la tabla 3.

En lo sucesivo, a la inversión gubernamental (sin tomar en cuenta las inversiones de las empresas descentralizadas) se le denominará, simplemente, inversión pública.

3.1 Explicación de la inversión pública

La inversión pública en el período 1950-67 muestra fluctuaciones cíclicas condicionadas: es decir, si en un período presidencial, o en años anteriores se han realizado inversiones fuertes, en los períodos siguientes disminuyen en cierta proporción a las anteriores. Esta situación se debe a que si las inversiones crecen a un ritmo más rápido que la capacidad de pago del país, entonces disminuyen las inversiones con objeto de normalizar la relación de la deuda pública y el ingreso nacional. Este fenómeno se acentúa en los años de cambio presidencial. Así, si en el último año de un período presidencial la inversión pública es fuerte respecto al ritmo de crecimiento a largo plazo de la misma, en el primer año del siguiente período se observa un descenso proporcional al incremento de la inversión anterior.

Para establecer un modelo econométrico del comportamiento de la inversión pública, se analizaron las siguientes modalidades:

a) Modelo de explicación de la inversión pública en función de la misma con retardo.

b) Modelo de explicación de la inversión pública en función del producto interno bruto.

3.2 Modelo de explicación de la inversión pública en función de la misma con retardo.

En la especificación de este modelo, se considera que la inversión realizada en un período es función lineal de las inversiones de los años anteriores.

Considerando distintas alternativas, se selecciona el modelo.

$$X_t = \alpha + \beta X_{t-1} + \gamma X_{t-3} + u_t$$

cuya correlación resulta satisfactoria, excepto para los años de cambio presidencial. Tomando en cuenta esto, se propuso la siguiente variable auxiliar:

$$Z_{it} = \begin{cases} 1 & \text{si } t \text{ es el último año presidencial} \\ -1 & \text{si } t \text{ es el primer año presidencial} \\ 0 & \text{en los años intermedios} \end{cases}$$

que interviene como aceleradora de inversión en el último año del período presidencial, y desaceleradora en el primero. El efecto de la variable auxiliar no se consideró para el cambio presidencial 1958-59 (A. Ruiz Cortines A. López Mateos) en el cual no se observa un cambio notable en los niveles de inversión, lo que puede ser resultado de una política gubernamental conservadora que coincide con la devaluación del peso en el año de 1954

El modelo resultante es el siguiente:

$$\hat{X}_t = -90 + 0.742\, X_{t-1} + 0.411\, X_{t-3} + 2162\, Z_{1t}$$

con un coeficiente de correlación de 0.956

Resolviendo el modelo en diferencias finitas para t, y excluyendo el término Z_{1t} se tiene

$$\hat{X}_t = 594 + 1739\,(1.088)^t + 1164\,(0.854)^t \cos(1.77t + 1.3)$$

donde se determinaron las constantes con los valores siguientes, dados en millones de pesos de 1960:

X (1960) = 4070.67

X (1961) = 4465.67

X (1062) = 5265.33

los cuales fueron calculados con promedios móviles de tres años (por ejemplo, para 1965, se promediaron los valores de 1959, 60 y 61)

De esta manera, se determina el crecimiento de la inversión pública en 8.13 por ciento anual con fluctuaciones amortiguadas*.

Las predicciones se efectuaron dando los valores de +1 y -1 a la variable auxiliar en el último y primer año de los períodos presidenciales, y cero en los años intermedios. Para la inversión pública, se tomaron los valores iniciales en los años 1960, 61 y 62, arriba presentados,

---

* La tasa anual de crecimiento (λ) es el cociente del incremento en un año (Y_t Y_{t-1}) y el valor de la función en el período (Y_t). Así en la ec. 8 se tiene.

$$Y_t = (1+\delta)^t Y_0 \;;\quad \lambda = \frac{\Delta Y_t}{Y_t} = \frac{\delta}{1+\delta}$$ y siendo $\delta = 0.0885$

se obtiene λ = - 8.13 por ciento

La correlación y las predicciones medias con sus intervalos al 95 por ciento de confiabilidad se muestran gráficamente en la fig. 3.1

3.2 Modelo de inversión pública en función del producto interno bruto

La inversión pública se puede considerar en función de variables tales como PIB, deuda pública, crédito exterior, etc. Considerando que el modelo tiene por objeto realizar predicciones, es conveniente considerar variables explicativas, que a su vez sea posible predecir. Tal es el caso del PIB, cuyo modelo descriptivo (en función exponencial del tiempo) ha sido determinado, mientras que variables como la deuda pública

no se tomaron en cuenta por la dificultad de especificar sus modelos de predicción.

La correlación de la inversión pública en función lineal del producto interno bruto y del incremento del mismo es la siguiente:

$$\hat{X}_t = -391 + 0.026\ PIB_t + 0.130\ \Delta PIB_t + 1616\ Z_{2t}$$

con un coeficiente de correlación de 0.957.

La variable auxiliar Z_{2t} toma los valores de +1 en el último año de los períodos presidenciales, excepto, como se había mencionado, para el año de 1958, en que se observa un nivel de inversión estable respecto a los años anteriores: para los demás su valor es cero.

Las predicciones con el modelo se realizaron alimentando las estimaciones medias del PIB dadas por el modelo descriptivo en función exponencial del tiempo, y tomando la variable auxiliar los valores de + 1 en el último año del período presidencial y cero en - los restantes. Los resultados se muestran gráficamente en la Fig. 3.2

TABLA 3.1 DISTRIBUCION DE LA INVERSION PUBLICA, EN MILLONES DE PESOS DE 1960, SIN CONSIDERAR LAS EMPRESAS DESCENTRALIZADAS*

CONCEPTO	AÑOS								
	1950	1951	1952	1953	1954	1955	1956	1957	1958
Gran irrigación	927	1 042	965	796	869	752	701	646	558
Pequeña irrigación	50	76	132	112	114	98	70	119	180
Otras inversiones agrícolas	24	25	18	7	5	2	76	32	48
Obras relacionadas con la ganadería	352	147	–	–	–	–	1	2	6
Obras relacionadas con la silvicultura	–	–	–	–	–	–	–	–	2
Obras relacionadas con la pesca	–	–	–	–	–	–	–	–	–
Carreteras	926	1 152	1 205	975	976	834	728	923	945
Ductos	–	–	–	113	22	11	205	195	327
Obras marítimas	220	98	157	136	224	212	196	195	201
Comunicaciones aéreas	63	43	–	–	–	15	15	32	28
Servicios públicos, urbanos y rurales	297	267	585	206	375	616	607	734	495
Hospitales y centros asistenciales	210	200	106	18	10	29	141	179	222
Educación e investigación	76	228	249	195	221	105	171	154	178
Defensa, edificios públicos y otras inversiones	66	45	64	247	501	57	35	148	168
Gobiernos de los Estados, Terrirorios y Municipios	409	425	441	316	333	356	472	379	374
TOTAL	3 620	3 748	3 922	3 151	3 650	3 087	3 418	3 738	3 732

* Formación neta de capital fijo por tipo de actividad económica, "Cuentas Nacionales", Banco de México, S. A. (1969)

CONCEPTO	AÑOS								
	1959	1960	1961	1962	1963	1964	1965	1966	1967
Gran irrigación	729	462	856	703	1 101	1 700	785	1 106	1 436
Pequeña irrigación	66	54	94	74	82	113	133	163	225
Otras inversiones agrícolas	10	5	–	–	–	51	–	2	41
Obras relacionadas con la ganadería	2	2	2	1	2	2	3	3	3
Obras relacionadas con la silvicultura	1	1	8	4	5	5	3	3	4
Obras relacionadas con la pesca	–	–	–		–	–	9	4	40
Carreteras	1 118	716	855	1 078	1 071	1 313	1 388	1 797	1 752
Ductos	422	504	323	437	232	112	–	–	–
Obras marítimas	162	159	132	182	110	115	67	110	151
Comunicaciones aéreas	25	21	79	34	79	71	335	230	321
Servicios públicos, urbanos y rurales	520	633	902	1 028	1 381	1 682	1 044	1 559	2 356
Hospitales y centros asistenciales	174	496	396	453	833	2 268	426	688	502
Educación e investigación	118	180	284	178	381	530	744	730	950
Defensa, edificios públicos y otras inversiones	96	157	249	368	329	424	263	260	357
Gobiernos de los Estados, Territorios y Municipios	388	376	435	476	459	476	568	564	609
TOTAL	3 831	3 766	4 615	5 016	6 065	8 862	5 768	7 219	8 747

TABLA 3.2 INVERSION PUBLICA, PRIVADA Y TOTAL*, EN MILLONES DE PESOS

AÑOS	INVERSION PRIVADA	INVERSION PUBLICA TOTAL **	INVERSION TOTAL
1950	3 294	2 672	5 966
1951	3 855	2 836	6 691
1952	4 732	3 280	8 012
1953	4 600	3 076	7 676
1954	5 400	4 183	9 583
1955	7 600	4 408	12 008
1956	9 060	4 571	13 631
1957	10 124	5 628	15 752
1958	10 770	6 190	16 960
1959	10 944	6 532	17 476
1960	12 435	8 376	20 811
1961	12 324	10 372	22 696
1962	12 704	10 823	23 527
1963	13 873	13 821	27 694
1964	17 905	17 436	35 341
1965	22 936	16 301	39 237
1966	24 234	21 319	45 553
1967	28 786	24 155	52 941

Informes Anuales de Nacional Financiera, S. A.

** Comprende la inversión del sector gobierno, empresas descentralizadas y organismos de participación estatal

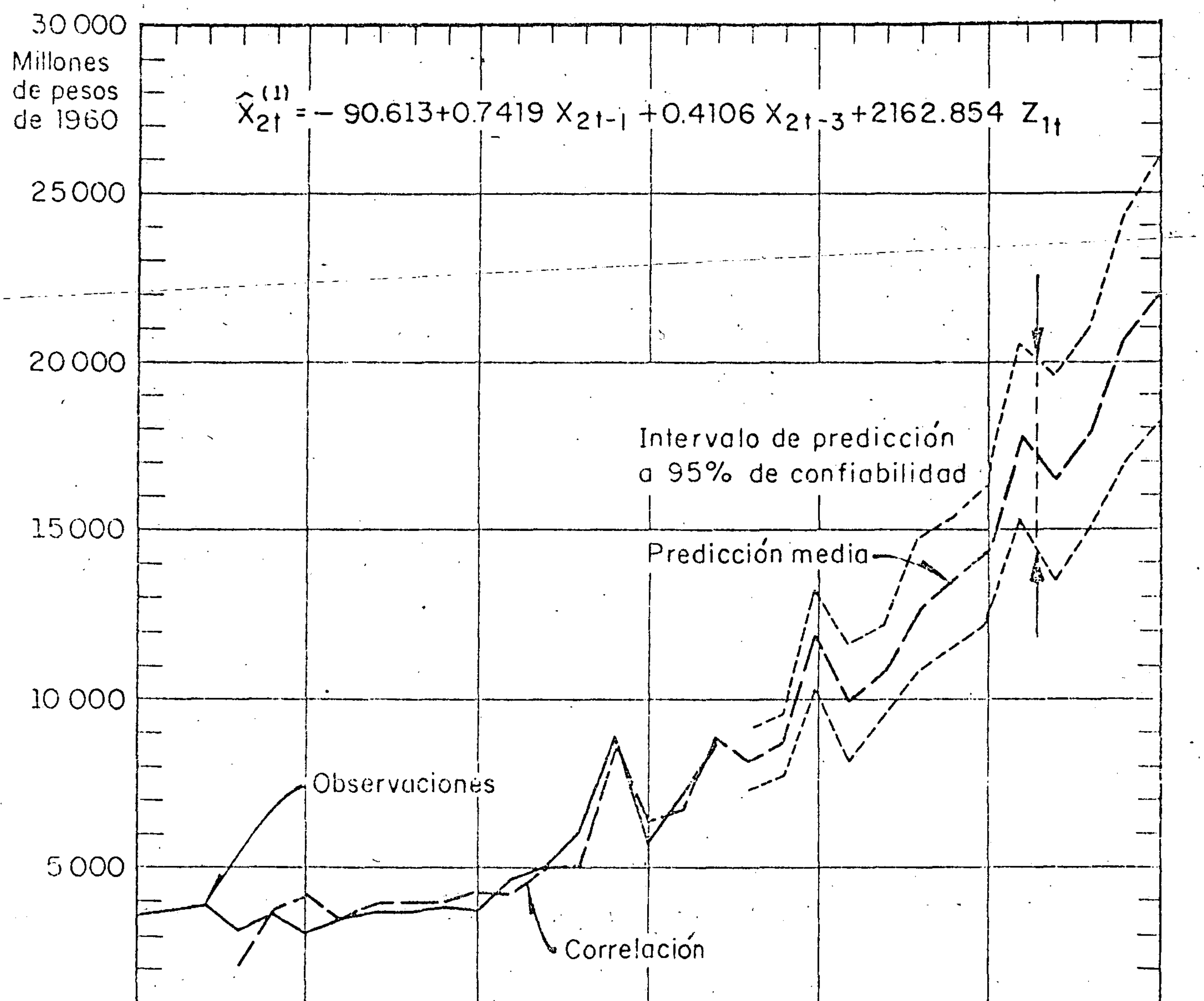


Fig 3.1 Correlación y predicción de la inversión pública en función de la misma con retardo

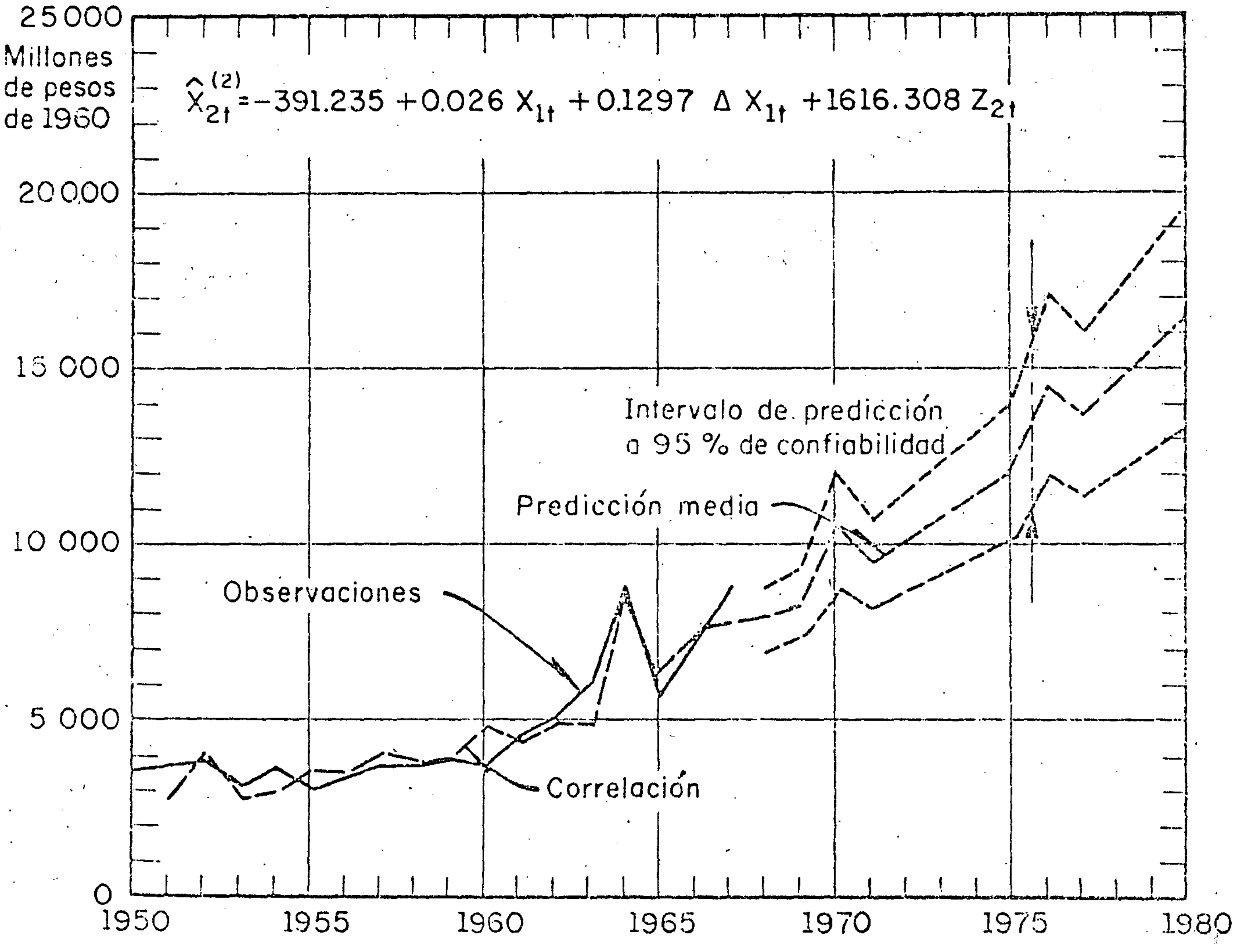


Fig 3.2 Correlación y predicción de la inversión pública en función del producto interno bruto

TABLA 3.3 PREDICCIONES DEL PRODUCTO INTERNO BRUTO Y DE LA INVERSION PUBLICA (SECTOR GOBIERNO), EN MILLONES DE PESOS DE 1960, PARA EL PERIODO 1968-80

AÑO	PRODUCTO INTERNO BRUTO			INVERSION PUBLICA		
	PREDICCION MEDIA	LIMITES DE PREDICCION*		PREDICCION MEDIA	LIMITES DE PREDICCION**	
		SUPERIOR	INFERIOR		SUPERIOR	INFERIOR
1968	247 687	255 974	239 665	8 034	8 235	7 833
1969	263 216	273 316	253 489	8 513	8 683	8 344
1970	279 730	292 282	267 716	11 151	11 798	10 503
1971	297 279	312 319	282 963	9 673	9 382	9 463
1972	315 928	333 571	299 218	10 441	10 806	10 076
1973	335 747	356 170	316 495	11 749	12 771	10 727
1974	356 808	380 237	334 823	12 430	13 443	11 419
1975	379 191	405 893	354 245	13 236	14 320	12 151
1976	402 978	433 260	374 812	16 244	17 941	14 547
1977	428 256	462 460	396 582	15 168	16 577	13 758
1978	455 121	493 625	419 620	16 363	18 089	14 638
1979	483 670	526 890	443 996	18 135	20 697	15 572
1980	514 011	562 399	469 786	19 318	22 072	16 564

* A un nivel de confiabilidad del 95 por ciento

** Estos límites están dados de la manera siguiente: el superior por la predicción media del modelo en función de variables con retardo y el inferior por el modelo en función del producto interno bruto

4. MODELOS DE INVERSION EXTRANJERA DIRECTA EN MEXICO

Los estudios realizados sobre la inversión extranjera (IE) en México han abordado distintos aspectos descriptivos del fenómeno. Entre otras, se pueden señalar: a) aspectos generales de las IE, como su importancia, país de origen, rentabilidad, comportamiento empresarial, formas de entrada al país huesped destino por ramas industriales y estructura financiera 1/ b) Efectos de las IE en el país huésped, principalmente sobre la industrialización 2/, la ocupación 3/ y el comercio exterior 4/ la balanza de capitales 5/ y en la transferencia y dependencia tecnológica 6/. Y c) las políticas estatales sobre las IE 7/

1/ Sepúlveda B y Chumacero A La inversión extranjera en México, FCE, 1973; Comite Bilateral de Hombres de Negocios México-Estados Unidos. Sección Mexicana, Inversiones Extranjeras Privadas Directas en México, 1971.

Sepúlveda B. Pellicero, Meyer L. Las empresas trasnacionales en México en Sepúlveda B. Chumacero A. op. cit.
Newtarmer R. y Mueller W. Multinational Corporations in Brazil and Mexico Structural Sources of Economic and non-Economic Power.US. Goverment Printing, Office 1975.
Connor J. y Muller W. Market Power and Profitability of Multinational Corporations in Brazil and Mexico, S. Goverment Prinling office, 77.

2/ Fajnzylber F. y Martínez T. Las empresas transnacionales. Expansión a nivel mundial y proyección en la industria mexicana. FCE. 1976.

3/ Trejo S. Industrialización y empleo en México FCE.

4/ Villareal R. El desequilibrio externo en la industrialización de México (1929-1975), FCE. 1976.

5/ Gil, M y Ibarra R. Influencia de la inversión extranjera en el financiamiento de la inversión y la balanza de la inversión y en la balanza de pagos en Inversiones Extranjeras Privada en México, 1971.

6/ Yañez, A. El aporte tecnológico de la inversión extranjera directa en inversiones Extranjeras Privadas en México 1971

Estos diversos estudios no abordan en sí el fenómeno de la acumulación de capital a escala mundial y por tanto el proceso de internacionalización del capital dentro del cual se condiciona la acumulación en los países dependientes 8/. Como resultado de esto, la validez específica de dichas investigaciones no alcanza a comprender el fenómeno en su nivel explicativo global y/o interpretativo, 9/ a fin de captar, no sólo sus tendencias, sino principalmente, su movimiento como desarrollo dialéctico y por tanto contradictorio, de la acumulación interna y externa del capital.

Wionczek M., Bueno G y Navarrete E. La transferencia internacional de tecnología. El caso de México, FCE, 1979.

7/ Vázquez, H. La política mexicana sobre inversiones extranjeras, en Inversiones Extranjeras Privadas en México, 1971.

Ramos, O. La legislación mexicana sobre inversión extranjera a inversiones Extranjeras Privadas en México , 1971.

Wionczek M. El nacionalismo mexicano y la inversión extranjera, Siglo XXI, 1967.

Aguilar A. El nacionalismo y estado burgueses y la ley de inversiones extranjeras en política mexicana sobre inversiones extranjeras, UNAM, 1977.

8/ Ver por ejemplo Samir Amin La acumulación a escala mundial. Crítica de la teoría del subdesarrollo, Siglo XXI, 1974.
Dos Santos, T. Imperialismo y Dependencia Ed. ERA, 1978.

9/ En este sentido es necesario señalar el trabajo Fajnzylber F. y Martínez T. Las empresas Trasnacionales. Expansión a nivel mundial y proyección en la industria mexicana. FCE. 1976.

4.1 Modelo de difusión aplicado a la acumulación internacional de capital.

El fenómeno de la difusión es ampliamente conocido y modelado en las ciencias físicas* y ha sido algunas veces aplicado en las ciencias sociales** El modelo de difusión describe el flujo o tasa de adopción, f, de una propiedad, considerando que 1) la propiedad alcanza la saturación F, en el cual el flujo cesa, 2) el flujo es proporcional a la diferencia entre el nivel acumulado, F, y el de saturación $\bar{F}$ y 3) esta proporcionalidad, g, es en general variable, por ejemplo, función del tiempo, o bien, función lineal del nivel acumulado.

El modelo o ecuación de difusión se expresa de la siguiente manera:

$$f = g\ (\bar{F} - F)$$

donde g y F son funciones del tiempo. Si, además se supone que, g, es una función lineal del nivel acumulado F, se tiene:

$$f \quad (a + bF)\ (\bar{F} - F)$$

Este modelo se aplica para describir la acumulación de capital norteamericano en México. La propiedad que se difunde es la interna - - - - -

* Por ejemplo la ecuación de viscosidad en la transferencia del momento, la ecuación de Fourier para la conducción del calor y la ecuación de Fick en la transferencia de masa.

** En especial sobre el análisis de la difusión de tecnologías, Sahal; D. The Multidimensional Difusion of Technology, Technological forecasting and Social Change Nov. 1977.
Corona, L. Difusión de Tecnologías en México, Mimeo, UNAM. 1976.
Mahajan V. y Schoeman M. Generalized Model for the Time Pattern of the Diffusion Process, IEEE Transaction on Engeneering Management, Feb, 1977

cionalización del capital como desarrollo histórico del capitalismo e inherente al mismo. Entonces, f, es la inversión extranjera norteamericana y F es la inversión acumulada. La inversión se describe como un resultado contradictorio de dos efectos: uno, la tendencia a la acumulación (primer factor: a + bF) y otro que la niega, en la medida que las condiciones de la acumulación, desarrolladas con el primer factor, tienden a saturarse (segundo factor: $\bar{F} - F$). Es decir, al inicio de la inversión la acumulación es relativamente pequeña aunque el espacio de condiciones para su realización es muy amplio ($\bar{F} - F$, es grande); y, al moverse hacia la saturación, el flujo disminuye no por la tendencia acumulativa, que es permanente, sino por la reducción del espacio o saturación de las condiciones para la acumulación. Entre estos extremos la inversión pasa por un máximo que que corresponde a un punto de inflexión en la acumulación, como se observa en la figura 4.1

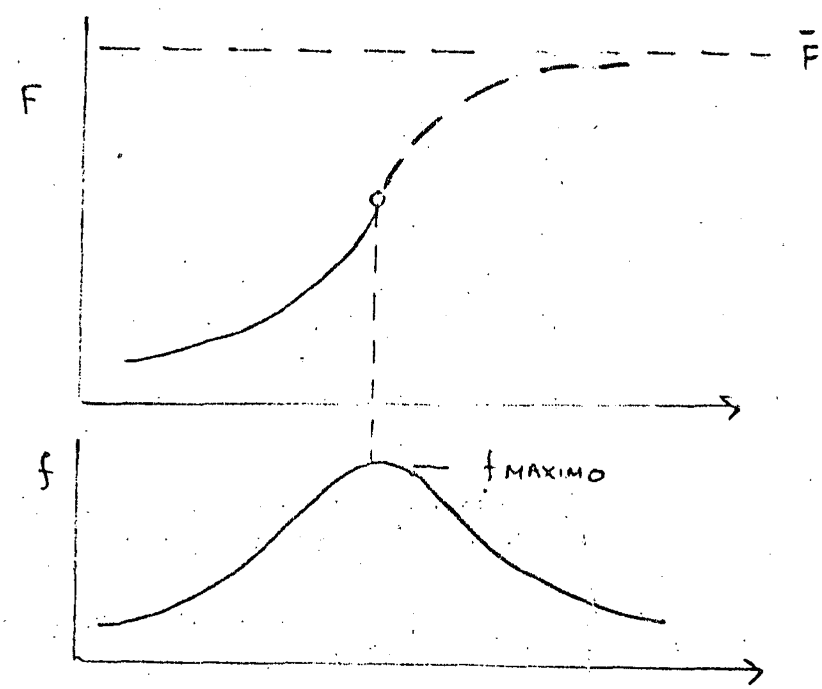


Fig. 4.1. MODELO DE DIFUSION EN SU FORMA ACUMULADA F Y EN SU FORMA DE FLUJO f.

A fin de estimar con ~~métodos~~ econométricos los parámetros del modelo de difusión (ec 1); este puede transformarse en*

$$F_{t+1} = a + (b\bar{F} - a + 1) F_t - bF^2_t \qquad (2)$$

Los resultados de las correlaciones utilizando las series de inversión norteamericana en México (cuadro 1) son los siguientes:

1) Con datos de 1950 a 1976

$$F_{t+1} = -250.7 + 1.482 \; F_t - 0.00012 \; F^2_t; \; R^2 = 0.979 \; DW = 1.26$$

(100%) (98.5% **)

2) Con datos de 1950 a 1976

$$F_{t+1} = -153.3 + 1.364 \; F_t - 0.00009 \; F^2_t; \; R^2 = 0.982 \; DW = 1.26$$

(100%) (98.5%**)

3) Con datos en precios constantes de 1950 a 1976

$$F_{t+1} = 21.891 + 1.087 \; F_t \; -0.00002 F_t; \; R^2 = 0.99 \qquad DW = 1.09$$

(100%) (50%**)

*Esta ecuación se deduce, mediante los siguientes pasos:

$$f = \frac{dF}{dt} = (a + bF) \; (\bar{F} - F)$$

o bien, agrupando términos

$$f = a\bar{F} + (b\bar{F} - a) \; F - bF^2$$

y puesto que $f = F_{t+1} - F_t$ entonces

$$F_{t+1} = a\bar{F} + (b\bar{F} - a + 1) \; F_t - bF^2_t$$

** Estos niveles de confiabilidad corresponden a la T de Student sin restricción de signo. Como en realidad este coeficiente debe ser negativo entonces los niveles son 99.25% y 75% en lugar de 98% y 50% respectivamente.

CUADRO 4.1.
ACUMULACION DE CAPITAL NORTEAMERICANO
EN MEXICO
MILLONES DE DOLARES

	Corrientes 1/	Constantes 2/
1950	415	268
1951	471	384
1952	490	420
1953	514	462
1954	524	477
1955	607	587
1956	690	685
1957	739	739
1958	745	745
1959	758	758
1960	795	795
1961	826	826
1962	867	867
1963	907	904
1964	1034	1020
1965	1182	1151
1966	1248	1207
1967	1343	1284
1968	1466	1384
1969	1640	1520
1970	1786	1629
1971	1838	1667
1972	2025	1792

1973	2379	2041
1974	2825	2266
1975	3200	2401
1976	2984	2332

(1) Fuente: The American Chamber of Commerce of Mexico. The impact of foreing private investment on the mexican economy. Tabla 1: de 1974 a 76 Survey of Current Business.

(2) Se deflacta la inversión con los indices de precios de la inversión fija bruta, y posteriormente se acumula.

Con estos estimadores se pueden calcular los parámetros originales.

CUADRO 4.2 PARAMETROS DEL MODELO DE DIFUSION DE LA ACUMULACION INTERNACIONAL EN MEXICO.

No.	Serie	Nivel de Saturación Millones de dólares $\bar{F}$	Parámetros de Acumulación a	b	Flujo Máximo	Acumulación en el Flujo máximo millones de dólares
1	1954-76	3407	-0.736	0.00012	234	2010
2	1950-76	3576	-0.0429	0.00009	216	2026
3	1950-76(const)	4107	0.0533	0.00002	186	2187

De donde se deduce que el flujo máximo ocurre en el año de 1972 (o 1974 en el caso de precios constantes). Esto permite afirmar que el capital norteamericano esta pasando a la fase 2 (ver fig. 1) en que las condiciones actuales de la acumulación no le son tan favorables como antes de dicho año.

De continuarse bajo las mismas condiciones, se esperaría una tasa de acumulación decreciente. Con objeto de poder observar estos resultados se aplica el modelo para predecir la acumulación a partir del nivel alcanzado en 1976.

En resumen, los análisis empíricos anteriores dan elementos para sostener la hipótesis de que sería posible continuar los mismos ritmos de acumulación del capital norteamericano en México, con las mismas condiciones del patrón actual pues estas empiezan a dejar de favorecer el funcionamiento para continuar el proceso de acumulación.

4.3 Modelo explicativo de la inversión extranjera norteamericana en México.

El proceso de internacionalización es el paso natural e inmediato de la monopolización del capital. La monopolización incluye el desarrollo de la concentración, conglomeración y centralización del gran capital, expuesto en la empresa multinacional*. La internacionalización del capital conlleva, la necesidad de apoyarse cada vez más en los Estados origen y destinatarios de la inversión, o sea, desarrolla el capitalismo monopolista de Estado (CME)**, aunque al mismo tiempo tienda a negar la existencia de las fronteras nacionales.

El modelo se basa en explicar la tasa de acumulación*** , $\dot{F}$, del capital extranjero en función de 1) la tasa de ganancia, 2) la capacidad ociosa y 3) el tamaño del mercado. La forma como estas variables inciden en la tasa de acumulación del capital norteamericano en México, se detalla a continuación:

Tasa de ganancia del capital norteamericano en México

La tasa de ganancia es el factor más importante en la

* Ver Dos Santos T. Imperialismo y dependencia, Ediciones ERA, 1977, p. 16.

** Ver, por ejemplo Boccara, P. Etudes sur le capitalisme monopoliste d'Etat sa crise et son issue. Edition sociales, 1973.

*** La tasa de acumulación representa el crecimiento porcentual del capital. Es decir, se refiere al flujo de inversiones, f, relativa al capital acumulado $\dot{F} = \frac{F_t - F_{t-1}}{F_{t-1}} = \frac{f_t}{F_{t-1}}$

o bien en términos de acumulación continua, $\dot{F} = \frac{dF/dt}{F}$

explicación de las inversiones extranjeras.

En palabras de Marx, "La tasa de ganancia es el resorte propulsor de la producción capitalista" y "cuando se envía capital extranjero, no es porque este capital no encuentre en términos absolutos ocupación dentro del país. Es por que en el extranjero puede invertirse con una cuota más alta de ganancia" *.

Sin embargo una reseña sobre las investigaciones econométricas para explicar la inversión concluye que el nivel de producción es la variable más adecuada y que en general la tasa de ganancia no resulta significativa**. Esto presenta una aparente contradicción que en esencia requiere distinguir dos aspectos:

1) La tendencia decreciente de la tasa de ganancia se refiere a que la tasa de acumulación (o más bien la acumulación) afecta negativamente sobre la tasa de ganancia, es decir, se refiere a la relación causal $\dot{F} \rightarrow (-r)$ 2) las contratendencias al decrecimiento de la tasa de ganancia actuan para estimular la acumulación. La relación causal es $\Delta r \rightarrow \dot{F}$, el incremento de la tasa de ganancia favorece la acumulación. Ambos aspectos tienen como resultado una tendencia a la conservación del nivel de la tasa de ganancia. Los resultados empíricos nos muestran que efectivamente, la tasa de ganancia esta negativamente correlacionada con la tasa de acumulación (modelo 1 y 2 del cuadro 6), aunque la relación causal se invierte sólo para fines de ilustrar este

* Marx, C. El Capital, III, FCE, p. 256 y p. 253

**Jorgenson D. Econometric Studies of Investment Behavior: A Survey, Journal of Economic Literature, Dic. 1971 efecto negativo. Por tanto, los modelos correctos desde este punto de vista son los del 3 al 7 (cuadro 4.5) en los cuales es el incremento de la tasa de ganancia la variable explicativa. Los resultados significativos para esta variable (mayores al 80%) que de hecho corresponden a un nivel del 90% de confianza debido a que se espera un signo positivo, indican que incrementos de 1% en la tasa de ganancia causan aumentos del orden del 1% en la tasa de acumulación (las estimaciones son 1.19, o.98, 1.02, 0.95, 1.17, y 0.97; cuadro 4.5

En dichos análisis empíricos se ha propuesto un año de retardo, lo que significa que el incremento en la tasa de ganancia observado el año anterior incide sobre la tasa de acumulación presente. Esta ganancia se toma como el indicador de las expectativas de la tasa de ganancia.

Como se ha mencionado el proceso internacional de valorización del capital se desarrolla con la intensificación de la intervención de los Estados en que la inversión extranjera se realiza. En general, este creciente intervencionismo, toma la forma de una competencia internacional entre los Estados para ofrecer las mejores condiciones al capital trasnacional en ciertas ramas, aunque siempre es- son tan/dinámicas*. Sin pretender abordar este problema, y sólo con el objeto de señalarlo para investigaciones posteriores se supone una cierta homogeneidad de condiciones para valorizar el capital internacional en América Latina. Asimismo, Brasil, México, Argentina,

* Ver Briones, A.

Venezuela y Panamá muestan ser los países con mayores inversiones norteamericanas. Sin embargo, Panamá es de hecho sólo un punto intermedio para aprovechar sus condiciones de "paraíso de impuestos" y Venezuela tiene concentrados sus inversiones principalmente en el petróleo. Considerando esto se propone la hipótesis de que la diferencia en las tasas de ganancia entre México con Brasil y Argentina son una variable explicativa de los cambios en acumulación del capital norteamericano en México, por razones de competencia del CME entre dichos países. En un primer análisis esto parece probarse con los datos del cuadro 4, donde se observan, en general, movimientos compensados entre las tasas de ganancia de México, por un lado, y Brasil y Argentina, por otro, que arrojan un valor esperado de la serie de 1954 a 76, igual a cero. Sin embargo, en el análisis econométrico, sólo resulta ser variable significativamente explicativa en 2 de los 11 modelos considerados (cuadro 6). Por tanto, se recomienda continuar el análisis del diferencial de tasas de ganancia a fin poder esplicar su aparente igualdad en la región (México, Brasil y Argentina).

Capacidad Ociosa

La capacidad ociosa es un resultado de la sobreproducción*. El capital disminuye su flujo en el proceso de valorización al no encontrar condiciones para su continuarlo en escala ampliada. Es

* Se hicieron dos estimaciones para México, una respecto al PIB y otra ponderando los niveles de capacidad ociosa de aquellas ramas con mayor inversión norteamericana. Ver anexo 1. para una explicación más detallada.

decir, que la capacidad ociosa es una forma de resolver las contradicciones inherentes al proceso capitalista de producción. Por tanto la capacidad ociosa es en esencia un resultado de la acumulación. Sin embargo, en la apariencia el problema puede invertirse, ya que la capacidad ociosa actúa disminuyendo la tasa de acumulación. Lo que es cierto coyunturalmente, y por tanto es válido considerarla como variable explicativa. Adicionalmente se añade la capacidad ociosa en EEUU. con el objeto de relativizar los niveles no utilizados en México mediante la diferencia entre ambos capitales. Exceptuando los dos primeros modelos (cuadro 4.5) la capacidad ociosa disminuye los niveles de acumulación, con una confiabilidad de mas del 99%. Considerando los índices de capacidad ociosa (variable Um, calculada con base en el PIB)*, el aumento de 1% en dicho índice provoca una disminución que varia entre 1 y 1.25% sobre la tasa de acumulación. Con respecto a las estimaciones de la capacidad ociosa absoluta (variable Umr) se estima que afecta en -0,5% la tasa de acumulación (modelo 3B cuadro 4.5 Por otro lado, los diferenciales de capacidad ociosa México -EEUU no resultan significativamente aceptables (modelos 5 y 6. Cuadro 4.5

Tamaño del mercado

El producto interno bruto, Ym, es la variable seleccionada para representar el tamaño del mercado y la dinámica general interna de la economía. Al igual que la tasa de ganancia se propone un año de retardo para esta variable. Los resultados indican que la tasa de crecimiento del producto, Y_m, incrementa la tasa de acumulación entre 0.29 y 1.5% (modelos 1 y 7 del cuadro 6). La variación es amplia debido a su relación, como es de suponerse, con las otras variables explicativas.

Estimación del Modelo explicativo de las Inversiones norteamericanas en México.

Las estimaciones estadísticas se muestran en el cuadro4.5 De estos se seleccionan los modelos siguientes:

No. 8)

$$\dot{F}_t = 6.62 + \underset{(99.1)}{1.17}\,(r_{t-1} - r_{t-2}) - \underset{(99.9)}{1.08}\,U_t + \underset{(81.9)}{0.49}\,Y_{t-1} + e_t$$

$$R^2 = 0.72 \qquad DW = 1.72$$

No. 9)

$$\dot{F}_t = 6.72 + \underset{(74.3)}{0.16}\,\dot{F}_{t-1} + \underset{(99.3)}{1.05}\,(r_{t-1} - r_{t-2}) - \underset{(100)}{1.06}\,U_t + \underset{(60)}{0.28}\,Y_{t-1} + e_t$$

$$R^2 = 0.74 \qquad DW = 1.81$$

donde,

$\dot{F}$, Es la tasa de acumulación

$r_{t-1} - r_{t-2}$ Es el incremento de la tasa de ganancia del capital extranjero

U_t índice de la capacidad ociosa en México

Y_{t-1} tasa de crecimiento del producto interno bruto, en el período anterior

e_t errores de ajuste

Los números entre paréntesis corresponden a los niveles de confiabilidad, en por ciento, de los estimadores.

Millones de dólares, 1960

	Capital acumulado(1) F	Inversión neta f	Tasa de acumulación $F = f/F_{t-1}$ %	Ganancias(2) %	Tasa de ganancia México (3) r_m %	r_{BA} %	Arg. Bra (4) $r_m - r_{BA}$ %
1954	477	15	3.2	49	10.3	8.4	1.9
19555	587	110		71	12.1	6.7	5.4
1956	685	98	16.7	86	12.6	5.9	6.7
1957	739	54	7.9	58	7.8	8.6	-0.8
1958	745	6	0.8	57	7.7	4.6	3.1
1959	758	13	1.7	55	7.3	6.5	0.8
1960	795	37	4.9	62	7.8	8.8	-1.0
1961	826	31	3.9	55	6.7	10.3	-3.6
1962	867	41	5.0	66	7.6	8.2	-0.6
1963	904	37	4.3	62	6.9	6.0	0.9
1964	1020	116	12.8	95	9.3	7.9	1.4
1965	1151	130	12.7	101	8.8	11.1	-2.3
1966	1207	56	4.9	104	8.6	10.7	-2.1
1967	1284	78	6.5	113	8.8	7.4	1.4
1968	1384	100	7.8	120	8.7	9.7	-1.0
1969	1520	136	9.8	127	8.4	9.5	-1.1
1970	1629	109	7.2	122	7.5	8.6	-1.1
1971	1667	37	2.3	98	5.9	7.4	-1.5
1972	1792	126	7.6	159	8.9	8.6	3.0
1973	2041	249	13.9	189	9.3	9.0	0.3
1974	2266	224	11.0	234	10.3	7.3	3.0
1975	2401	136	6.0	247	10.3	8.6	1.7
1976	2332	-69	-2.9	33	14.2	9.5	4.7

(1) Survey of Current Business.
(2) "Adjusted Earnings". Survey of Current Business
(3) Las tasas de ganancias se calculan dividiendo las ganancias entre el capital acumulado
(4) Las tasas de ganancia se calculan dividiendo las ganancias de Brasil y Argentina entre el capital acumulado de ambos. Survey of Current Business.

CUADRO 4.4 CAPACIDAD INDUSTRIAL NO UTILIZADA EN MEXICO Y EEUU Y TASA DEL P I B EN MEXICO.

	México Indice de la capacidad 1/ no utilizada %	México capacidad en ramas 1/ con capital extranjero %	EE UU capacidad no utilizada 2/ %	México tasa de crecimiento del P I B 3/ %
1954	4.7	15	17.1	10.0
1955	9.4	13	8.6	8.5
1956	2.8	15	9.2	6.8
1957	2.1	19	12.0	7.6
1958	4.0	19	22.5	5.3
1959	5.7	16	16.0	3.0
1960	3.9	22	17.9	8.1
1961	6.1	13	20.9	4.9
1962	6.2	16	17.5	4.7
1963	4.2	12	16.0	8.0
1964	0.0	10	13.2	11.7
1965	1.4	14	7.6	6.5
1966	1.3	18	3.4	6.9
1967	1.8	17	6.5	6.3
1968	0.0	14	5.0	8.1
1969	0.0	14	4.7	6.3
1970	0.0	14	12.1	6.9
1971	3.2	17	13.6	3.4
1972	1.8	16	8.2	7.3
1973	0.0	14	2.9	7.6
1974	0.1	14	7.0	5.9
1975	4.1	18	19.6	4.1
1976	8.3	22	12.6	2.1

1) Fuente: anexo 1

2) Economic Report of the President, Table B-40. Wharton Series, Enero, 1977

3) Banco de México. Estadísticas de la oficina de cuentas de producción.

CUADRO 4.5. PARAMETROS DEL MODELO EXPLICATIVO DE LA TASA DE ACUMULACION NORTEAMERICANA EN MEXICO

No.	Datos	Constante (Tasa de acumulación autónoma)	TASAS DE GANANCIA: México $r_{m_{t-1}}$	Incremento $\Delta r_{m\ t-1}$	Dif. con Brasil y Argentina $(r_m - r_{BA})_{t-1}$	CAPACIDAD NO UTILIZADA: Indice en México U_m^t	México. ramas Seleccionadas U_{mr}^t	EEUU U_u^t	Dif. Mex-EEUU. $U_{mr}^t - U_u^t$	Tasa PIB México Y_m^{t-1}	Tasa de Acumulación con retardo $\dot{r}_{t-1}$	Estadístico R^2	D.W
1	22	10.824	-1.1062 (73.1)		0.9873 (89.8)	0.3287 s (56.8) c		-0.4783 s (97.0)		1.545 (99.5)		0.591	1.74
2	22	12.797	-1.4034 (60.0)		1.0410 (88.2)	0.4225 s (52.0) c		-0.5012 s (95.0)		1.525 (99.1)	0.0886 (18.0) c	0.592	1.77
3	21	5.8304		1.1950 (89.1)	0.0803 (19.2) c	-1.2475 (99.39)		0.1110 (47.92) c		0.4779 (75.3)		0.733	1.90
3A	21	7.9086		0.9786 (94.5)	-0.0413* s (13.1) c	-1.1834 (99.99)				0.275 (62.1) c		0.84	1.78
3B	21	9.9158		0.9763 (70)	0.0783* (25) c		-0.4837 (90)			0.7089 (90) c		0.54	2.19
4	21	5.5518		1.0201 (82.5)	0.1295* (30.3) c	-1.2216 (99.3)		0.1191 (51.06) c		0.3041 (51.2) c	0.1562 (70.67)	0.753	2.08
4A	21	5.9827		0.7960 (77.1)	0.1797* c (42.67)	-1.0255 (99.8)				0.3751 (62.8) c	0.1517 (70.1)	0.744	1.93
5	21	0.048		0.7481 (76)	0.3847* (76)				0.0194 (82)	1.049 (96.5)		0.50	2.31
6	21	1.2519		0.3884 c (32.9)	0.4371* c (68.4)				0.1041 (49.47) c	0.9627 (91.2)	0.1728 (60.8) c	0.53	2.06
7	21	6.811		0.9517 (95)	0.2492 (76) c	-1.1069 (99.99)				0.4448 c (75)		0.73	1.87
8	21	6.6218		1.1705 (99.1)		-1.0770 (99.9)				0.4868 (81.9)		0.72	1.72
9	21	6.717		1.0498 (98)		-1.0596 (100.0)				0.2842 (60)	0.1436 (70)	0.74	1.63

* La estimación corresponde al incremento anual. Es decir, $(r_m - r_{BA})_{t-1} - (r_m - r_{BA})_{t-2}$

ANEXO 1

Estimación de la capacidad productiva industrial no-utilizada con información de las Cuentas Nacionales de México (1950-1967)

Se define el coeficiente de capital de la manera siguiente:

$$k_t = K_{t-1} / Y_t \qquad (1)$$

donde,

K_{t-1} acervo de capital fijo en el año t-1. El acervo de capital fijo se toma con retraso de un año suponiendo con ello su período de maduración

Y_t, Producto Interno Bruto en el año t

k_t, Fracción de capital requerida por unidad de Producto en año t (coeficiente de capital en año t)

La capacidad instalada no utilizada se define como:

$$U = \frac{Y^* - Y}{Y^*} \qquad (2)$$

donde;

Y^*, Producción Interna Bruta con plena utilización de la capacidad instalada

Y, Producción Interna Bruta

De (1) se obtiene

$$Y_t = \frac{K_{t-1}}{k_t} \qquad Y_t^* = \frac{K_{t-1}}{k_t^*}$$

que sustituído en (2) resulta

$$U = 1 - \frac{k^*}{k} \qquad (3)$$

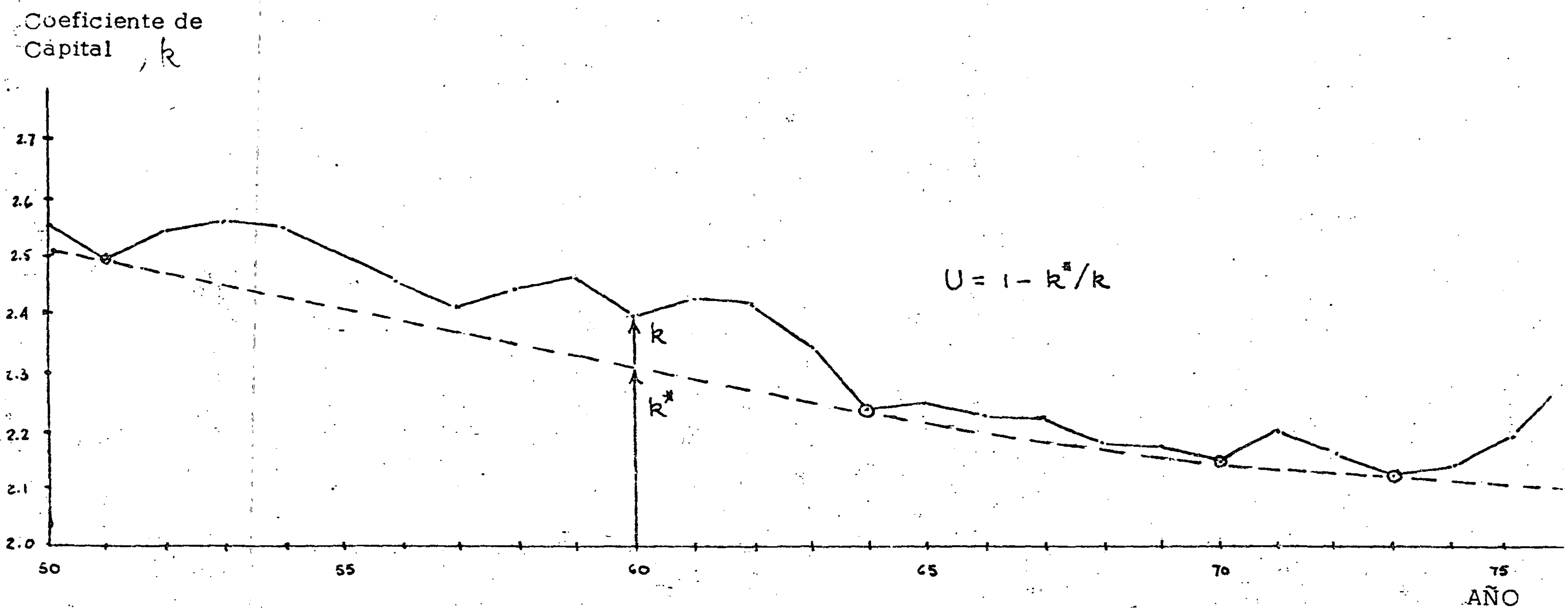


FIG. 2 CAPACIDAD INDUSTRIAL OCIOSA EN MEXICO ESTIMADA CON EL PRODUCTO INTERNO BRUTO

Se grafican los coeficientes de capital, k, contra el tiempo. Para determinar los k*, de saturación se propone: 1) los coeficientes k* tienen un comportamiento descendente debido a los cambios tecnológicos que aumentan la productivadad (del capital) y 2) los puntos más bajos de k coinciden en la alternativa más conservadora con los coeficientes de plena utilización k*.

Se aplica este método utilizando el producto interno bruto y se obtienen las curvas indicadas en la Fig. 2. Los resultados de aplicar la ecuación 3 con los coeficientes de capital ahí implícitos, se muestran en el cuadro 4.4

Este método se aplica también para estimar la capacidad ociosa de algunas ramas seleccionadas. El promedio ponderado de estos calculos se muestran también en el cuadro 4.4

centro de educación continua
división de estudios superiores
facultad de ingeniería, unam

INGENIERIA DE SISTEMAS*
Aplicado a la Planeación y a la Administración

INFORMATICA EN ADMINISTRACION Y PROGRAMACION

M. en I. GUSTAVO ARGIL CARRILES

Junio de 1978

1 INTRODUCCION

2 INFORMATICA
Concepto

Caracterísiticas importantes.

Diferentes tipos de información

Su importancia en la toma de decisiones.

3 SISTEMAS
Definición.

Conceptos importantes.

Ciclo de vida

Algunos tipos de sistemas.

4 SISTEMAS DE INFORMACION
Definición

Generalidades

Funciones

Tipos de Sistemas de Información.

5 LOS SISTEMAS DE INFORMACION EN LA ADMINISTRACION Y EL CONTROL.
Introducción

Objetivos

Ventajas

6 SISTEMAS DE COMPUTO ELECTRONICO
Generalidades

Proceso centralizado

Proceso distribuido.

INTRODUCCION.

Antecedentes.-

La República Mexicana, con una extensión de 1,972,547 Km^2, tiene un índice de crecimiento de la población, superior al 3%, país de economía agrícola, con reservas mineras importantes y que se halla en plena fase de expansión industrial.

A partir de 1950 ha mantenido un alto crecimiento, que la sitúa por encima de la mayoría de los Países Latinoamericanos.

Para lograr conservar y más aún, aumentar este crecimiento de la economía, es cada vez más importante al decidir si un proyecto ha de llevarse a cabo o no, el tener la certeza de que los escasos recursos disponibles se están empleando óptimamente, para lo que es necesario no sólo contar con grupos de alternativas de proyectos aislados, sino tratar de ir mas allá o sea considerar toda la economía como un gran sistema, en el que todas sus partes están interrelacionadas y; que al hacerle alguna modificación esto va a traer efectos grandes o pequeños, previsibles o tal vez imprevisibles en todos sus sectores.

Planeación Regional.-

La Planeación de toda la economía nacional, es una carga muy pesada para que un solo organismo pueda hacerla en la totalidad de sus partes, por lo que es necesario distribuir este gran volumen de trabajo en forma piramidal, esto es la Planeación Nacional debe esta basada en cuanto sea po sible en planeación regional, esta a su vez en planeación estatal, la que a su vez debe basarse en planeación a nivel municipal, para que las necesidades y en algunos casos soluciones partan del propio lugar de origen.

Es mi punto de vista que los gobiernos de los estados, deberían impulsar en gran escala, estudios de planeación a nivel estatal, ya que con ello podrían optimizar sus inversiones que en general son escasas, ayudando además con toda esa información al Gobierno Federal en la planeación nacional.

Planeación Nacional.-

El Gobierno Federal que es quien tiene a su cargo la Planeación Nacional en base a una multitud de proyectos provenientes ya sea de sus propias Dependencias, de los Gobiernos de los Estados, de los particulares o cualquiera otra fuente, procede a clasificar, seleccionar, agrupar, etc., dichos proyectos hasta que formula un programa de inversiones a realizar.

Para llegar a este programa de Inversiones, es necesario primeramente elegir de entre los proyectos similares el mejor, descartando los demás, luego en un segundo paso catalogar los proyectos según un orden de preferencia, el cual puede estar basado en multitud de criterios existentes y por último decidir cuales de esos proyectos han de llevarse a cabo.

Pero ¿será óptimo el programa de Inversiones al considerarse los proyec tos independientes uno del otro, basándose exclusivamente en un indicador por ejemplo?, seguramente no, tal vez si se formulan pequeños programas de inversión que abarquen un proyecto principal y uno o varios pequeños proyectos, que serían de gran valor si el proyecto principal se llevará a cabo, ésto es que son viables debido a la "oportunidad" de hacerlo simultáneamente y que no lo serían si los consideraramos aislados; evaluar cada uno de esos subsistemas o conjuntos de proyectos altamente interrrelacionados, como una unidad y hacer el programa definitivo en base a elegir o descartar esos conjuntos de proyectos, seguramente este procedimiento sería mejor que el anterior y así se pueden sofisticar más y más los procedimientos a usar, aunque en contrapartida los costos, tiempos, etc, se incrementarían seguramente por lo que habrá que balancear hasta llegar a un procedimiento óptimo, en base a las limitaciones reales, aunque lo que es muy palpable es que cada vez es más importante el tomar mejores decisiones, lo que implica afinar y mejorar los procedimientos usados.

De entre las muchas necesidades originadas por la tendencia antes mencionada se ve cada vez mas, la importancia de contar con información abundante y confiable que permita tomar esas decisiones con mayor rapidéz y menor incertidumbre.

2. INFORMATICA

2.1 Informática. Según la Academia Francesa (1966) es "La Ciencia que trata el procesamiento sistemático y racional, particularmente por medio de computadoras electrónicas, de la información considerada como la base del conocimiento humano para la comunicación en los campos técnico, económico y social".

2.2. Definición de Información. "Información es el conocimiento derivado del análisis de los datos".

Dato: Término derivado del verbo latín dare; que significa dar. Se refiere a hechos sin estructurar, sin forma; elementos susceptibles de observación directa. Desde el punto de vista informática, componentes elementales indivisibles de la información.

Información: Término derivado del verbo latín informare; que significa dar forma a. Este término se aplica convenientemente para referirse al conjunto de todos los datos que han sido orientados al usuario a través de una forma organizada.

Básicamente, la diferencia entre dato e información consiste en que los datos no son útiles o significativos como tales, sino hasta que son procesados y convertidos a una forma útil llamada información. Es por esto que se dice que la información es el conocimiento derivado del análisis de los datos.

2.3. Características Importantes. La información deberá tener ciertas características que harán posible su utilización; éstas son: traducción, interpretación, factor aglutinante, almacenamiento y recuperación.

Traducción.

La información que se vaya a utilizar deberá tener la facilidad de traducirse a un código que permita el manejo de esa información, ya sea por máquinas o por personas.

Interpretación.

Es el inverso de la traducción. Indica la facilidad que debe tener la información codificada de hacer posible la percepción de su concepto, ya sea por el hombre o por alguna máquina.

Factor Aglutinante.

La información deberá tener diversos factores que la aglutinen o relacionen según los diferentes usos a que esté destinada esa información.

Almacenamiento.

La información no sólo tiene capacidad de contar con uno o varios elementos que la asocien, sino que además debe tener la propiedad de agruparse fisicamente aunque no necesariamente bajo el mismo patrón físico.

Recuperación.

La información, una vez interpretada y almacenada, y contando además con ciertos factores que la liguen y relacionen, se podrá transformar, mediante algún proceso, para ser utilizada en decisiones y acciones que necesiten de ella en sus partes o conceptos. De aquí se observa que aunque la acción y la decición son únicas, la información no lo es, ya que se puede utilizar para varias acciones y decisiones mediante un proceso que recupere la información de datos aglutinados.

2.4. Clasificación de la Información.

Se puede clasificar la información de la sisguiente forma:

Información Activa.

Es aquella información que al recibirse requiere iniciar una acción. Esta información debe ser precisa y oportuna.

Información Inactiva.

Es aquella información que al recibirse no requiere iniciar una acción. En un buen sistema esta información debe ser eliminada.

Información Recurrente.

Es aquella información que se genera a intervalos regulares.

Información no Recurrente.

Es aquella información que se formula ocasionalmente, siendo por entre varias que se presenten. Y el fin de la toma de decisiones está definido por la acción que surge al aplicar la alternativa seleccionada, teniendo presente que para efectuar una acción es necesaria una decisión que la anteceda. Así pues, el administrador requiere un método para escoger el mejor camino a seguir. Este método, frecuentemente llamado modelo de decisión, da la representación conceptual y permite al tomador de decisiones medir los efectos de las diferentes alternativas posibles. Este modelo debe incluir las especificaciones de una función objetivo.

El proceso que se sigue para tomar una decisión es el siguiente:

a) Objetivos. Elementos que nos indican hacia donde queremos ir. Estos deben ser claros, concretos y orientados a poder ser evaluados.

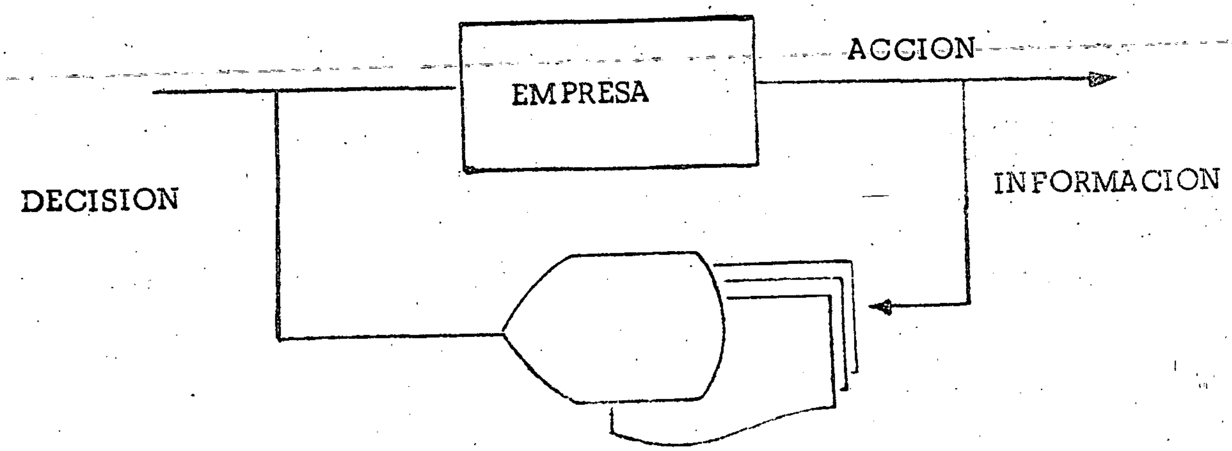
b) Información. Elementos que nos permiten conocer la situación actual y estimar la futura. Aquí se efectúan las diferentes etapas de la transformación de la información: percepción, recolección, clasificación, almacenamiento, proceso y recuperación.

c) Predicción. Procedimientos que nos permiten pronosticar o definir las diferentes alternativas.

d) Evaluación. Visualización de los resultados al aplicar cada una de las alternativas, y así seleccionar la más conveniente.

e) Ejecución. Aplicación de la alternativa seleccionada.

Podemos concluir que la decisión surge siempre que se tiene información acerca del estado del sistema, la cual como mecanismo de control del sistema, va regulando las decisiones en función de las desviaciones en las acciones ejecutadas; de donde podemos observar que el sistema de información actua como mecanismo retroalimentador del "Sistema Empresa".



SISTEMA DE INFORMACION

Se observa, además, que debido a la incertidumbre, la decisión tomada puede ser de tipo determinista, en donde la selección de la alternativa está determinada por causas precisas. La decisión también puede ser de tipo probabilista, con lo cual se percibe que la decisión puede ser cierta o falsa.

Existen algunas consideraciones que intervienen en un problema de decisiones como lo son el tiempo al cual se proyecta la deci sión el número de variables que intervienen en el problema, y el grado de incertidumbre respecto a los datos. Mientras mayor sea cada una de estas consideraciones la decisión será más difícil de obtenerse.

3 SISTEMAS

3.1 Definición de Sistemas.

Existe una gran variedad de definiciones sobre lo que constituye un sistema. La definición de sistema que en este trabajo se estima conveniente aceptar en la siguiente:

"Sistema es un conjunto de partes coordinadas cuyo objetivo común es lograr metas definidas".

3.2 Algunas Consideraciones sobre Sistemas.

Siempre que hablemos de sistemas deberemos tomar en cuenta ciertas consideraciones, las cuales se exponen a continuación:

1. Los objetivos del sistema considerado como un todo.
2. El medio ambiente del sistema, constituido por las restricciones fijas.
3. Los recursos del sistema.
4. Los componentes del sistema, sus actividades, metas y medidas de actuación.
5. La administración del sistema.

Estas cinco consideraciones ameritan que profundicemos un poco acerca de ellas.

Objetivos.

Se entiende aquí por objetivos las metas hacia las cuales tiende el sistema.

Resulta conveniente definir en primer termino a los objetivos del sistema como un todo; la ventaja de hacerlo se refleja en el hecho de evitar posteriores consideraciones erróneas acerca del sistema.

Por su importancia se debe tener cuidado al usar el término objetivo. Se hace aquí una distinción entre los objetivos reales y los objetivos establecidos de un sistema; esto es a consecuencia de que comunmente se señalan los objetivos de un sistema y la actuación de éste es totalmente independiente de dichos objetivos. Surge entonces la pregunta ¿Cómo saber si lo que se ha señalado como objetivo del sistema es un verdadero objetivo? - Para diferenciar entre los dos tipos de objetivos mencionados se puede proponer la siguiente prueba, la cual puede llamarse "Principio de primacía": ¿Sacrificará el sistema, con pleno conocimiento otras metas para lograr el objetivo señalado? Si esto sucede entonces el objetivo señalado es un objetivo verdadero.

Podemos observar así que no resulta fácil determinar los verdaderos objetivos del sistema. Con el fin de librar esta dificultad se puede pensar en cambiar la intención de dar una declaración de objetivos por otra que consista en buscar una medida de actuación del sistema. Esta medida de actuación satisfacerá así mismo la necesidad de conocer el grado de funcionamiento del sistema, es decir, el grado en que han sido alcanzados los objetivos.

El Medio Ambiente del Sistema.

El medio ambiente lo constituye todo lo que esta afuera del sistema.

A este respecto podemos decir que el medio ambiente incluye todo lo que está fuera de control del sistema. El sistema no puede hacer nada o relativamente poco sobre el comportamiento del medio.

Según esto, el medio ambiente está integrado por aquello que es constante, fijo o dado.

El medio ambiente también incluye lo que determina la forma de operar del sistema; es decir, lo que influye sobre el comportamiento de éste. En el concepto de medio ambiente están implicadas las nociones de interrelación, interdependencia, interacción, y se acentúa la importancia de las entradas y salidas, pues el medio actúa en el sistema y éste se adapta o reacciona con el medio.

Para determinar si "algo" pertenece al medio ambiente se propone hacer las siguientes preguntas:
¿Podrá hacerse "algo" acerca de ello? ¿Influye en mis objetivos? Si las respuestas son no y sí, entonces se concluye que efectivamente está en el medio ambiente.

Los recursos.

Estos son los medios disponibles al sistema para la ejecución de las actividades necesarias para el logro de los objetivos.

Los recursos, al contrario del medio ambiente, son las cosas que el sistema puede cambiar y utilizar para su provecho; decidiendo para esto la forma adecuada de su utilización.

Al respecto diremos que no sólo se debe prestar atención a los recursos existentes, sino también a la forma en que pueden ser aumentados; es decir, debemos preveer situaciones futuras, incluso se asegura que un componente que se refiera al incremento de los recursos puede ser el mejor de los recursos.

Las Componentes del Sistema.

Se entiende por componentes las misiones, tareas o actitudes que el sistema debe realizar para lograr sus objetivos; es decir, por componentes del sistema nos referimos a funciones más que a grupos estructurales.

Surge la inquietud de saber por qué hablamos de funciones o misiones y no de departamentos o estructura administrativa. Esto se explica debido a que analizando misiones podemos determinar el valor de una actividad para el sistema total, mientras que intentarlo a través de la actuación de un departamento no resulta posible.

La Administración.

Por administración nos referimos a la generación de los planes para el sistema, o sea la conjugación de los otros aspectos ya considerados; objetivos, medio ambiente, recursos y componentes. De esta manera la administración establece las metas de los componentes, asigna los recursos y controla la actuación del sistema.

Al hablar de administración incluímos dos funciones básicas; planeación y control.

La planeación involucra todos los aspectos de fijación de metas, asignación de recursos, es decir lo visto anteriormente.

Control involucra tanto el ver que se ejecuten los planes; como hacer planes para los cambios; esto último debido a que en muchos sistemas los cambios son inevitables y debemos prepararnos para ellos.

Pensando en esto los planes deben ser objeto de revisiones periódicas y reevaluaciones. Es escencial pues, la planeación de los cambios ya que podría ser que los objetivos generales no se estipulasen correctamente, o que el medio no se definiese correctamente o que no se definiesende una manera precisa los recursos o los componentes.

Asociado con la planeación y el control está el concepto de retroalimentación, ya que sin ella las funciones de planeación y con trol resultarían totalmente inadecuadas.

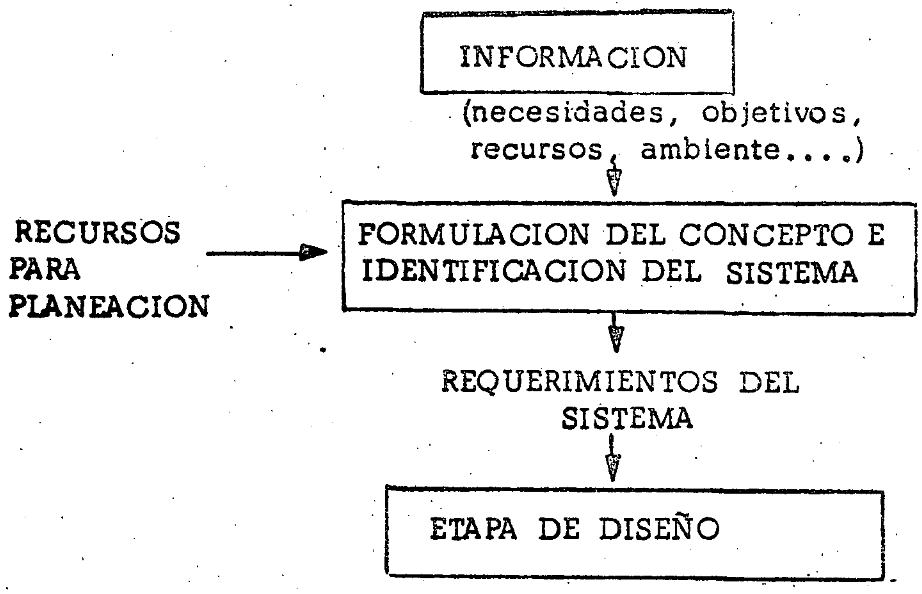
3.3 Ciclo de Vida de un Sistema.

El ciclo básico de un sistema comienza con la identificación de una necesidad y termina cuando el sistema se hace obsoleto.

Cualquier sistema real tiene un ciclo de vida: así por ejemplo algunos planificadores de sistemas urbanos indican que una ciudad tiene en general un ciclo de vida de setenta y cinco años y que necesita renovarse durante ese período para que no se vuelva obsoleta.

Por lo que debe incluirse en el diseño de cualquier sistema la suficiente flexibilidad para permitir su máximo desarrollo y uso.

El ciclo de vida se puede considerar como una serie de actividades de interés tanto para el usuario del sistema como para su creador. El usuario identifica y desarrolla la necesidad, los componentes del sistema y los conceptos requeridos para su operación y mantenimiento. De esta manera, el usuario provee la información para que el analista diseñe; el analista traduce esta información y elabora las etapas de diseño, producción e instalación de un sistema que satisfaga la necesidad identificada por el usuario y que puede ser operado y mantenido eficazmente, como se observa en la siguiente figura:



Planeación.

Planeación es el período inicial del ciclo de un sistema. Durante esta etapa se identifica la necesidad del sistema, se formulan los objetivos, las restricciones, etc. y se determina si estos son factibles.

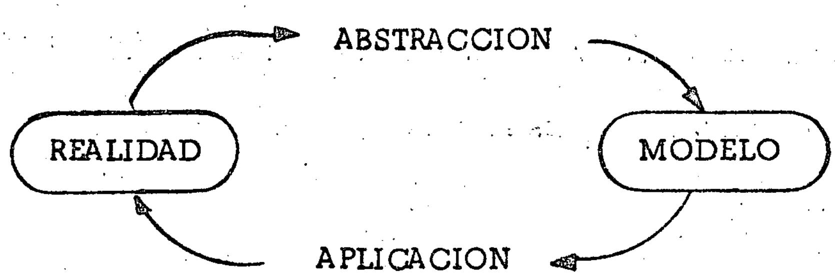
El resultado es la formulación del sistema y una serie de requerimientos para su implementación.

Este período es principalmente responsabilidad del usuario, él es el mejor informado de los recursos disponibles y de las necesidades que se deben satisfacer. El analista sin embargo, debe trabajar en conjunto con el usuario y traducir a un lenguaje cuantitativo el sistema.

El período de planeación inicialmente emplea información sobre la necesidad que se quiere satisfacer con el sistema, los recursos disponibles, el medio ambiente y las restricciones. Esta información inicial, como veremos más adelante, define las fronteras del sistema.

Adquisición.

El periodo de adquisición consta de todas aquellas etapas que incluyan el diseño, evaluación, producción e instalación del sistema. Este periodo es principalmente responsabilidad del analista. Debe transformar los requerimientos definidos durante el período de planeación en un modelo del sistema, el cual se utilizará después para construir e instalar el sistema.



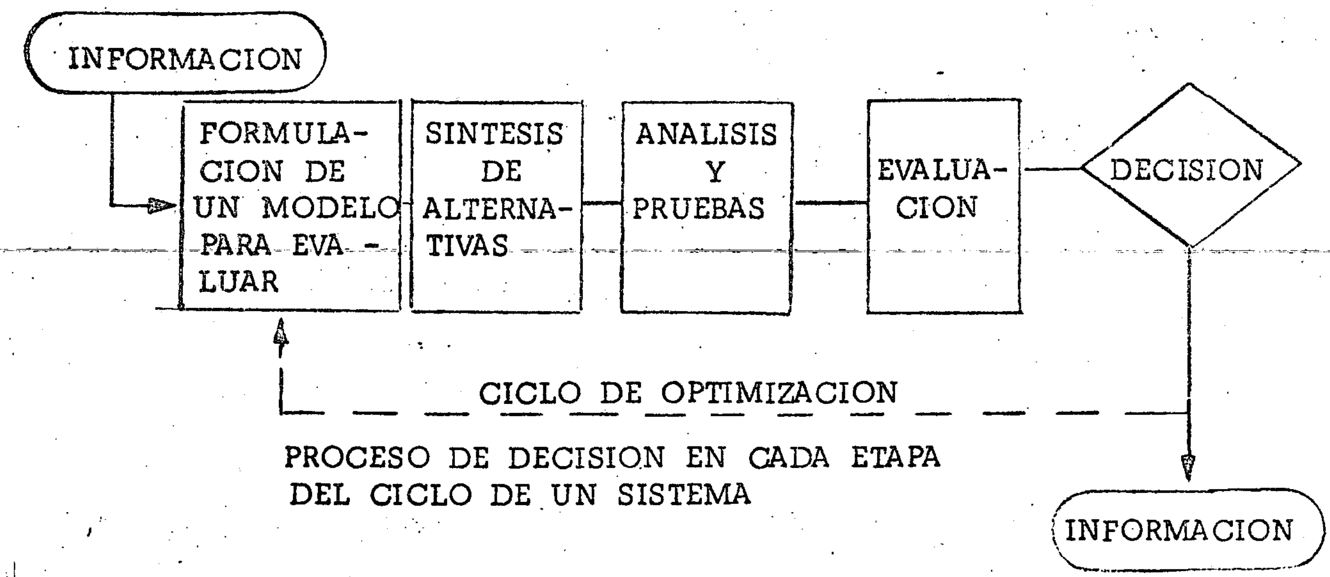
Uso.

El periodo de uso consiste en todas las actividades necesarias para operar y mantener el sistema, incluyendo modificaciones y mejoras periódicas para extender su vida, para satisfacer las necesidades cambiantes con el tiempo y finalmente para retirarlo.

De esta manera se completa el ciclo de vida de un sistema, lo cual implica la generación de nuevos requerimientos y entonces comienza de nuevo el ciclo.

Proceso Básico de Decisión.

Por otra parte, cada etapa del ciclo completo de un sistema se implementa utilizando el "proceso básico de decisión".



PROCESO DE DECISION EN CADA ETAPA DEL CICLO DE UN SISTEMA

La entrada a este proceso es la información necesaria para identificar y definir el modelo. Esta información se obtiene de investigaciones y decisiones hecha en etapas anteriores y experiencia previa del personal.

El producto o salida de este proceso incluye información más detallada, organizada y exacta de los requerimientos del sistema óptimo para la etapa. La implementación de este "proceso básico de decisión" genera un diseño. Durante los períodos de planeación y adquisición este diseño consiste en la identificación, descripción, producción e instalación del sistema óptimo; durante el período de uso, el diseño incluye la identificación de las mejores tácticas para la operación y desarrollo del sistema.

3.4 Clasificación de Sistemas.

Clasificación de los Sistemas en Función del Tiempo.

Los sistemas pueden clasificarse en base a la variable tiempo como:

a) Sistemas estáticos.

b) Sistemas Dinámicos.

Los sistemas estáticos son aquellos en que las decisiones pasadas no afectan a las decisiones futuras.

Los sistemas dinámicos son aquellos en que las decisiones pasadas influyen en las decisiones futuras. Estos sistemas a su vez se dividen en discretos y contínuos.

Los sistemas dinámicos discretos son aquellos donde las decisiones se toman a intervalos discretos de la variable tiempo.

Los sistemas dinámicos contínuos son aquellos donde las decisiones se toman contínuamente.

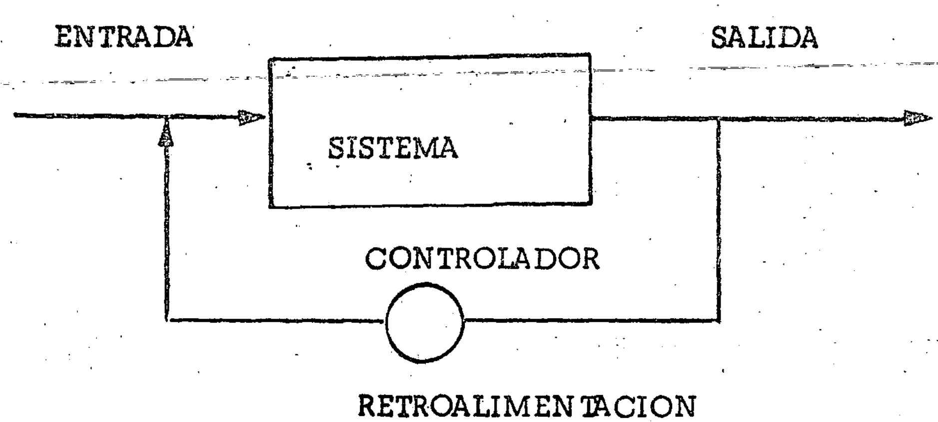
Clasificación de los Sistemas por el Tipo de Control.

En base al tipo de control, los sistemas pueden clasificarse en:

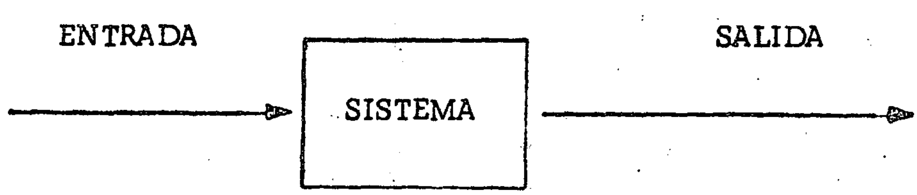
a) Sistema de Control de Malla Abierta.

b) Sistemas de Control de Malla Cerrada.

Sistemas de control de malla cerrada son aquellos sistemas en los cuales la salida tiene un efecto directo sobre la acción de control. Se les conoce como sistemas retroalimentados. Este tipo de control reduce el error del sistema. El control es realizado modificando la entrada en función de la salida.



Sistemas de control de malla abierta. Son aquellos sistemas en los cuales la salida no tiene efecto sobre la acción de control. El control se efectua precalculando las entradas del sistema de modo que la salida presenta las características deseadas.



4. SISTEMA DE INFORMACION.

4.1. Definición.

Se puede definir un sistema de información como un conjunto de elementos íntimamente ligados que tienen por objeto manejar datos y elaborar reportes que permitan tomar decisiones adecuadas para lograr los objetivos previamente fijados.

4.2 Generalidades.

Los sistemas de información se encargan de los flujos de información en una empresa.

Los sistemas deben ser diseñados en forma elástica, de tal manera que puedan modificarse según las necesidades de la organización.

Se debe tener cuidado al diseñar un sistema de información pues de lo contrario se corre el riesgo de diseñar un sistema poco práctico u obsoleto.

Problemas que deben ser superados para desarrollar un buen sistema de información:

1). Mal diseño de los reportes.

2). Repetición innecesaria de la información.

3). Inadecuados canales de comunicación.

4). Circulación de datos innecesarios.

5). Inadecuados métodos de proceso.

6). Inexistencia de una cadena de información desde la base a los niveles más altos.

PROCESO DE DATOS.

Toda información en un sistema es pasada a través de una entrada, un proceso y una salida.

ENTRADA: transmisión de los datos recolectados para ser procesados.

PROCESO: manejo lógico y matemático que debe realizarse sobre los datos.

Hay que tomar en cuenta las propiedades de cantidad, calidad y costo de proceso, partiendo de los datos que inician el flujo de un sistema.

SALIDA: distribución de la información resultante a los usuarios. Hay que tomar en cuenta el tiempo de respuesta requerido.

4.3 Funciones de un Sistema de Información.

La importancia de la información hace necesario, que los datos sufran transformaciones que acentúen su utilidad para que estos datos proporcionen mayor información. Además cierta información, así obtenida, se convierte en dato o en datos cuando es necesario transformarla de nuevo, con el objeto de darle mayor utilidad a esa información o generar otro tipo de información. Esta transfor mación de la información consta de varias etapas, y son precisamente estas etapas las funciones básicas de un sistema de información. Estas funciones son: recolección, conversión, clasificación, transmisión, almacenamiento, proceso y recuperación. Antes de ver con mayor detalle cada una de estas etapas debe aclararse que la información no siempre pasará por todas ellas, ni tampoco en el orden indicado.

4.3.1 Recolección.

Forma en que son captados los datos fuente.

En esta etapa primero se diseña la forma de captación de la información, en función del fenómeno que se desea interpretar, de los objetivos que se buscan con esa captación, la capacidad de percepción, etc. A continuación la información es detectada por medio de sensores, pudiendo ser estos sensores, el ser humano, un sistema mecánico o electromecánico, o cualquier otro método que tenga capacidad de detectar o percibir esa información.

4.3.2 Codificación.

Cambio del código en que están escritos los datos a un código acorde con el sistema. Esto es, desarrollar un medio de conversión para facilitar el manejo de los datos con parámetros uniformes con el objeto de efectuar mediciones o lecturas.

4.3.3 Clasificación.

Una vez efectuada la recolección y/o la conversión de datos hay ocasiones en que es necesario clasificarlos, así como hacer una selección o depuración; pues es posible que la recolección no haya sido óptima, como también es posible que aprovechando los medios de comunicación, el tiempo, las formas de los recursos en general, se efectúen simultáneamente recolecciones de datos con utilidad diversa.

Es importante aclarar que la clasificación no necesariamente se debe efectuar posteriormente a la recolección y/o conversión, sino que es posible que durante éstas se vaya efectuando la clasificación.

4.3.4 Transmisión.

Proceso de mover los datos desde una localización a otra, fisicamente.

Para que los datos tengan utilidad y sirvan como información deben estar disponibles para quien los necesite. Con esto se desea resaltar la función de esta etapa de la transformación, que es la de transportar la información, por medio de las vías de comunicación, en el momento y al lugar donde sea requerida.

De su utilización se deriva el evitar la duplicidad de trabajo en la elaboración de la información y además el poder contar con to da la información disponible. Por otro lado, de su abuso pueden surgir complicaciones como la de saturar de información sin importancia a quienes deben tomar decisiones.

4.3.5. Almacenamiento.

Es la etapa donde la información es almacenada utilizando su característica de aglutinamiento o debido al proceso de agrupar la información que sea necesaria. Este proceso puede ser de dos formas: temporal o histórico.

El almacenamiento temporal es el proceso en donde la información requerida pierde utilización al transcurrir el tiempo debido al cambio de circunstancias y por ello no es necesario que la información esté almacenada indefinidamente.

El almacenamiento histórico de información es provocado por la necesidad de contar, con la información necesaria de los fenómenos ocurridos sin importar el tiempo que deba estar almacenada.

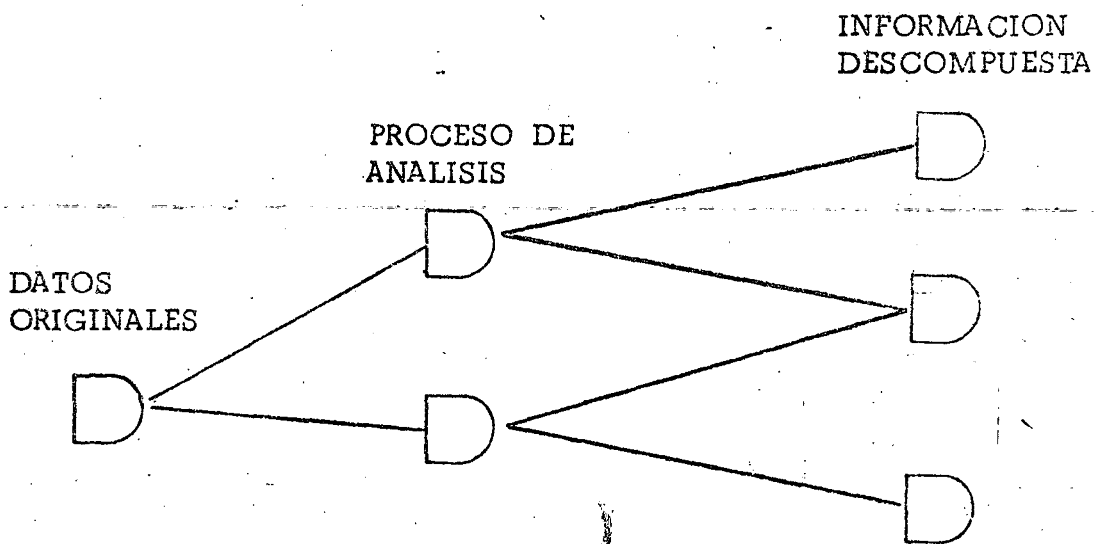
4.3.6 Proceso.

Es la etapa en la cual los datos o la información son utilizados para generar más información utilizando un procedimiento o una rutina previamente establecida. El procedimiento se divide en cuatro grandes grupos que son:

Análisis, Síntesis, Cálculo y Procesos Rutinarios.

4.3.6.1 Análisis.

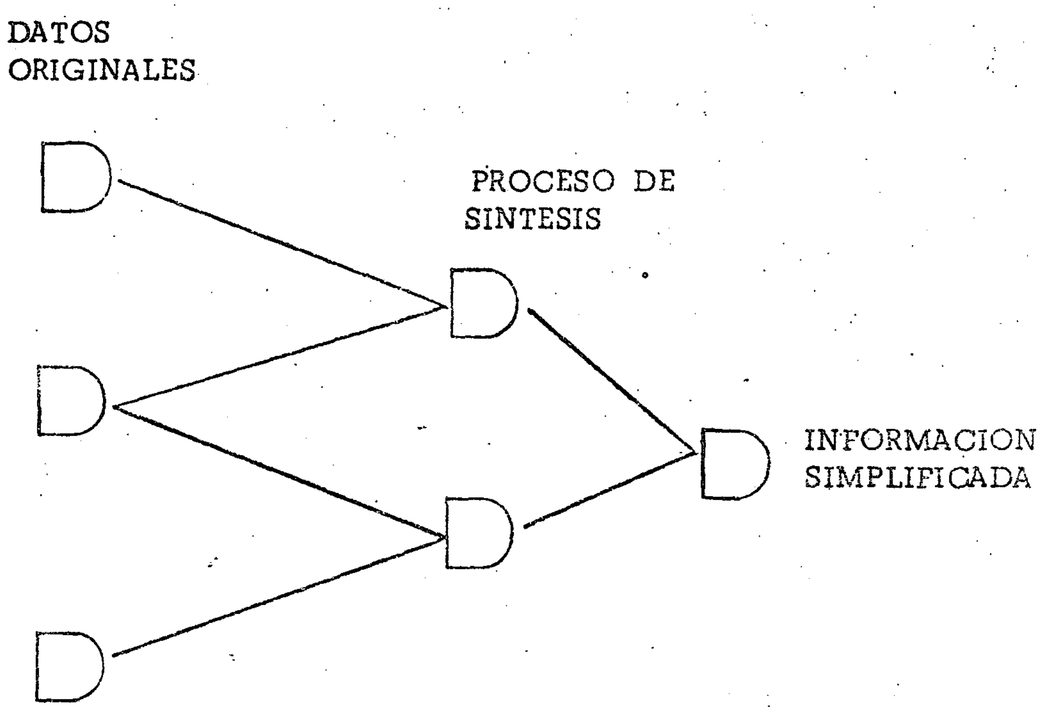
Es el proceso mediante el cual los datos se descomponen al detalle en todas y cada una de sus partes. En este proceso la información dada en poco volumen, un dato, un informe, una decisión, etc. se descompone en una gran cantidad de datos o en un gran volumen de información.



PROCESO DE ANALISIS DE LA INFORMACION.

4.3.6.2 Síntesis

Es un proceso cuyo resultado es la simplificación de la información, proporcionando menos datos y a veces sin aclarar detalles de cómo se llegó a la simplificación. En este proceso un gran volumen de datos se reduce a un número menor, un resumen, un informe, que por ser mayor utilidad, proporciona mayor información que el volumen de datos antes de reducirse o sintetizarse.



PROCESO DE SINTESIS DE LA INFORMACION

Los datos sintetizados proporcionan mucha información, que puede ser utilizada en la toma de decisiones, a niveles jerárquicos superiores dentro de una empresa.

4.3.6.3 Cálculo.

Es la etapa en donde la transformación de la información requiere un conjunto de variables, constantes, tablas, o fórmulas para efectuar operaciones lógicas y matemáticas que produzcan los resultados requeridos por el sistema. Este proceso implica la utilización de los procesos de análisis y/o síntesis en su desarrollo, aplicado principalmente en problemas técnicos.

4.3.6.4 Procesos rutinarios.

Este proceso de información es una particularidad del proceso de cálculo, pero que además se generaliza para varias aplicaciones sin que el cálculo desarrollado tenga modificaciones escenciales. La importancia de este proceso radica en el sentido de que si por alguna decisión determinada se han establecido las etapas que comprende el proceso de toma de decisiones y es de carácter repetitivo, entonces la totalidad del proceso de decisión se puede mecanizar.

4.3.7 Recuperación.

Etapa de la transformación de la información donde ésta es recobrada utilizando algún proceso. Esto es importante ya que al efectuar la interpretación de la información que tiene un conjunto de datos se observa que ese conjunto de datos tiene dos tipos de información: primaria y secundaria.

La información primaria es la que posee un dato o conjunto de datos tratados como unidad o registro, y la información secundaria es la que se obtiene utilizando los nexos de la información almacenada y es por esto precisamente que la recuperación es una función sumamente importante.

4.4 Tipos de Sistemas de Información.

Existen básicamente cuatro tipos de sistemas de información: manual, mecánico, electromecánico y electrónico.

Los sistemas de información manual generalmente implican archiveros con folders, reportes escritos, cartas, etc., es decir, todas aquellas funciones básicas que son ejecutadas a mano. Los sistemas mecánicos de información emplean instrumentos mecánicos tales como las máquinas contadoras para ejecutar una o más funciones básicas de un sistema de información, aunque algunas funciones continúen ejecutándose en forma manual. Los sistemas electromecánicos de información hacen uso de máquinas que contienen una parte mecánica y otra eléctrica tales como las perforadoras de tarjetas y perforadoras de cintas de papel. Los sistemas electrónicos de información permiten el registro, el almacenamiento y el procesamiento de datos por computadoras electrónicas.

Los sistemas electrónicos son los más sofisticados y automáticos entre los tipos comunes de sistemas de información. Los sistemas manuales son los más simples y fáciles de manejar.

Cuando el volumen de información que va a manejarse se incrementa y los requerimientos de exactitud son mayores, se hace más urgente la necesidad de obtener métodos de información mas completos y sofisticados. Es por esto por lo que la conversión de las técnicas de procesamiento manual a las de procesamiento mecánico, electromecánico o electrónico se hace necesaria.

Debe tomarse en cuenta que raramente existe en la práctica un sistema de un solo tipo exclusivamente. Un sistema electrónico puede usar dispositivos mecánicos o electromecánicos, y algunas funciones pueden ser ejecutadas manual o mecánicamente en un sistema electromecánico. La tabla 4.1. muestra algunas técnicas representativas usadas para ejecutar las funciones de los cuatro tipos de sistemas antes mencionados.

4.4.1 Sistemas de Información Manuales.

En los más simples sistemas manuales de información los datos son recolectados manualmente usando lápices o plumas y marcando en documentos de papel para representar caracteres alfabéticos y numéricos. Estos documentos son generalmente transferidos de un lugar a otro manualmente.

La información plasmada en papel puede ser almacenada en cajas, escritorios o mesas. Un almacenaje mas permanente se puede lograr por medio de gabinetes, con archivos que contengan folders, divisiones alfabéticas, etc.

Cuando se necesita un documento específico es necesario pasar a través de muchos otros documentos para llegar al que se busca.

F I G U R A IV. 1.

TIPO DE SISTEMA	RECOLECCION DE DATOS	CONVERSION DE DATOS	TRANSMISION DE DATOS	ALMACENAMIENTO DATOS	PROCESAMIENTO DATOS	RECUPERACION DE INFORMACION Y REPORTES
Manual	Documentos escritos en forma manual	No hay generalmente	Mensajeros, teléfono, correo, memorandum, etc.	Documentos de papel, gabinetes de archivo	manualmente con uso de utensilios, reglas de cálculo, ábacos, etc.	Información manual, lápiz, pluma, marcadores, etc.
Mecánico	Relojes checadores, máquinas de escribir, cajas registradoras.	Limitada No hay generalmente.	Manual, tubos neumáticos,	Documentos de papel, gabinetes de archivo	En forma manual usando calculadoras manuales, sumadoras, máq. de registro.	Información manual con máq. de escribir, má de escritura sobre tarjetas registradoras.
Electromecánico	Manual, Máquinas de escribir cajas registradoras, *Tarjetas con marcas *Perforadas	Tarjetas perforadas, Cintas de papel perforadas	Teletipo Teléfono	Tarjetas perforadas, Cintas de papel perforadas	Por medio de verificadoras clasificadoras, intérpretes, intercaladoras, reproductores, tabuladoras, calculadoras.	Información mecanizada con el uso de tabuladoras sobre formas impresas, películas, proyectores.
Electrónico	Manual, Tarjetas perforadas, cintas perforadas, registradoras ópticas de datos, lectores de caracteres magnéti-	Tarjetas perforadas, Cintas de papel perforadas, discos, cintas magnéticas	Teletipo Teléfono, Transmisión Centros automáticos de switcheo	Discos magnéticos, tarjetas magnéticas, cintas magnéticas tambores magnéticos, nucleos magné- [illegible]	Programas almacenados en el CPU	Impresos de alta velocidad, pantallas de rayos catódicos, consolas terminales, máq. de escr[illegible]r para acceso directo.

Los datos pueden ser clasificados, acomodados y editados manualmente. Algunas veces los datos deben ser reordenados en diferentes documentos, estós cambios son hechos manualmente por dependientes. Si es necesario hacer cálculos de los datos se hacen manualmente, y posteriormente son enviados a registros o folders.

Los reportes escritos pueden ser preparados después de que la manipulación y los cálculos de los datos han sido ejecutados. Estos reportes consisten normalmente en registros y folders archivo, los cuales han sido arreglados para reflejar las condiciones ocurrentes.

Las presentaciones con gis y pizarrón u otros medios visuales suelen ejecutarse cuando la información está hecha para presentarse a grupos grandes.

Los métodos manuales son lentos e ineficientes y además, cuando solamente son usados métodos manuales durante el procesamiento de datos suelen ocurrir errores. Sin embargo, los requerimientos de información suelen ser simples en muchas organizaciones y por lo tanto el sistema de información manual resulta ser el más económico y viable en estos casos.

Cuando el volumen de datos aumenta y los requerimientos de procesamiento llegan a ser más extensos, se hace necesario el uso de sistemas de procesamiento más sofisticados.

4.4.2 Sistemas Mecánicos de Información.

Los sistemas mecánicos de información emplean instrumentos mecánicos para el procesamiento de datos. Sin embargo, en estos sistemas algunas funciones aún son ejecutadas en forma manual. Las técnicas mecánicas son normalmente usadas para hacer el procesamiento más rápido o más legible de lo que es posible con las técnicas manuales. También es posible implementar la adecuación de codificación, cálculos, etc. por el uso de técnicas mecánicas.

Las máquinas de escribir pueden ser usadas para registrar cuentas de datos en los sistemas mecánicos, cajas registradoras, impresoras de tarjetas de crédito, checadores y otros instrumentos mecánicos pueden también ser utilizados para recolectar datos. Para la comunicación de datos de un lugar a otro en distancias cortas son utilizados normalmente tubos neumáticos. Métodos manuales de comunicación de datos tales como el correo o servicio de mensajeros pueden ser usados si es necesario.

El papel común es generalmente usado tanto en el almacenaje temporal como en el permanente. Los datos contenidos en hojas de papel generalmente estarán en forma de impresos ó escritas a máquinas y no en forma manual. Las operaciones de manipulación de datos deben todavía ser ejecutadas en forma manual la mayoría de los casos, una posible excepción es donde los datos son alamcenados en tarjetas perforadas. Estas tarjetas pueden ser clasificadas mecánicamente usando las señales necesarias.

Las máquinas de contabilidad, las cuales combinan las funciones de las máquinas de escribir y las máquinas sumadoras pueden ser usadas para llevar a cabo operaciones de procesamiento de datos. Estas máquinas son capaces de sumar, restar, imprimir y pueden checar la adecuación de resultados de operaciones previas. Los cálculos de datos también pueden ser hechos en máquinas sumadores y calculadoras.

Las máquinas de escribir son usadas para reportar salida de información. Las máquinas de contabilidad también pueden ser usadas para preparar salida de información. Las presentaciones en grupos pueden ser hechas con proyectores o retroproyectores.

El uso de instrumentos mecánicos puede incrementar la rapidez y adecuación de operaciones en gran medida. Sin embargo, el procesamiento de datos no es contínuo, y por lo tanto el operador debe tomar los resultados de una máquina y transferirlos a otra. Se estará más cerca del procesamiento contínuo y automático de datos cuando se use equipo electrónico o electromecánico.

4.4.3 Sistemas Electromecánicos de Información.

Los métodos de procesamiento mecánico y manual, permiten que los datos sean expresados en forma de caracteres alfabéticos o numéricos, escritos o impresos en documentos de papel. Antes de que los datos puedan ser aceptados por sistemas electromecánicos deben ser convertidos en documentos perforados, los cuales pueden ser leídos por máquinas electromecánicas. Estos documentos pueden ser tarjetas perforadas o cintas perforadas.

En la mayoría de los casos los datos contenidos en los documentos fuente deben ser convertidos a una forma de lectura apropiada para la máquina. Sin embargo, es posible utilizar un equipo capaz de producir tarjetas perforadas como un producto de codificación de un documento fuente. Este procedimiento permite al usuario tener datos en ambas formas de lectura; humano y de máquina y además con un mínimo de costo extra e inconvenientes.

Cuando las tarjetas son perforadas los datos contenidos en ellas pueden ser impresos automáticamente en la parte alta de la tarjeta por la máquina perforadora. Si un operador humano necesita acceso a cierta información que se encuentra en alguna de las tarjetas solamente necesita leer lo que está impreso en la parte superior de la tarjeta.

Una vez que los datos han sido perforados en tarjetas o en cinta de papel pueden ser archivados para procesarlos, mas adelante o inmediatamente.

Un archivo completo puede ser almacenado en uno o maspaquetes de tarjetas, y estas pueden ser almacenadas permamentemente en gabinetes especiales. La cintas de papel son también fáciles de almacenar, pero tienen la desventaja de almacenar datos solamente en forma de lectura de máquina y orden serial. - Estas características hacen dificil localizar un registro dado e impráctico para los humanos leer el registro directamente de las cintas en la mayoría de los casos.

Los clasificadores de tarjetas perforadas son utilizados para clasificar nuevas tarjetas, en el mismo orden en el cual están arregladas en archivos las tarjetas ya existentes.

Las posibilidades de manipulación de datos con cintas de papel perforadas son limitadas, requiriendo repreforación de las cintas en la mayoría de los casos.

Un archivo de tarjetas combinado puede ser pasado a través de la máquina contadora (tabulador) para ejecutar cálculo de datos y operaciones de procesamiento de archivo. La máquina contadora no sólo ejecuta cálculos requeridos para poner al día los registros, sino que puede imprimir también reportes sumarios, reportes de excepción y detallados listados de tarjetas. Cuando se usa en conjunción con una perforador la máquina contadora puede crear nuevos registros en tarjetas perforadas. Tableros alambrados de control intercambiables dan a la máquina considerable flexibilidad en la ejecución de cálculos y reportes operacionales.

Los sistemas electromecánicos perforadores de tarjetas tienen enorme ventaja en rapidez y exactitud sobre los sistemas manuales y mecánicos. Sin embargo para llevar a cabo todos los procesamientos necesarios en un sistema de perforador de tarjetas aún es necesario que un operador esté llevando las tarjetas de una máquina a otra. El equipo perforador de tarjetas también está limitado a la rapidez con la cual lee y perfora las tarjetas. Para un más sofisticado, rápido y automático procesamiento de información, es necesario ir a la electrónica.

4.4.4 Sistemas Electronicos.

Los sistemas electrónicos de información requieren que los datos sean transladados hacia impulsos magnéticos y electricos, aceptables para los instrumentos electrónicos. Los datos pueden ser recolectados inicialmente en una grán variedad de formas. Esto incluye instrumentos electrónicos analógicos y digitales como medidores de datos, lectores caracteres ópticos o magnéticos y teclados de acceso directo, etc. Ninguno de estos instrumentos requiere más adelante conversión de datos. Sin embargo, si los datos son recolectados originalmente en tarjetas perforadas o en cinta de papel perforado es conveniente sean convertidos a una forma en la cual una computadora los pueda aceptar eficientemente.

Los archivos de información son almacenados en carretes de cintas magnéticas, tarjetones de cintas magnéticas, discos magnéticos o tam bores magnéticos. Las cintas magnéticas proveen un gran (y económico) volumen de almacenaje permanente de datos, aunque el acceso a información almacenada en cintas magnéticas es posible sólo en un orden serial y además los datos no están en forma de lectura humana. Los tarjetones de cintas, el disco y el tambor generalmente, son mas caros para operar que las unidades de cintas magnéticas y generalmente tienen menos capacidad de almacenaje, sin embargo permiten el acceso a datos almacenados en forma aleatoria. Los núcleos magnéticos son usados para un almacenaje temporal.

La unidad de proceso central de una computadora ejecuta cálculos de datos y manipulaciones de datos bajo el control de un programa almacenado.

El concepto de programa almacenado permite a la computadora seleccionar uno de varios cursos de acción, basado en entrada de datos o procesamiento de resultados, también como para repetir el mismo conjunto de instrucciones para diferentes modelos de datos. El mismo programa puede ser usado muchas veces para ejecutar operaciones dadas sin necesidad de volver a escribir el programa.

La salida de información de los sistemas electrónicos es típicamente en forma de reportes impresos, ya sea en impresoras de alta velocidad o en displays visuales en tubos de rayos catódicos. En algunos casos las salidas pueden ser en forma de tarjetas perforadas o en cintas de papel perforadas, si el almacenamiento es temporal o usado como entrada para otro proceso de operaciones.

Los sistemas electrónicos de información están diseñados para aplicaciones en las cuales grandes cantidades de datos deben ser colectados y analizados y donde los resultados significativos deben ser mostrados y recuperados. Tales sistemas son también indicados para aquellos casos en los cuales el procesamiento de resultados debe ser comparado, para predeterminar reglas de de decisión como una base para decisiones más simples.

La rapidés de operación y la gran capacidad de almacenaje de estos sistemas, les permite manejar grandes volúmenes de datos y trabajos de complejo procesamiento en forma económica y eficiente.

5. LOS SISTEMAS DE INFORMACION EN LA ADMINISTRACION Y EL CONTROL.

5.1 Introducción.

Se ha resaltado la importancia de la información en la actualidad, así como la influencia de los sistemas de información en todo tipo de empresas, negocios, etc. por ejemplo la industria de la construcción no es una excepción en cuanto a la influencia que en ella tiene la información, sino que además es una de las industrias que más requiere de los sistemas de información para el adecuado control de sus obras y proyectos.

Un sistema de información es indispensable para llevar adecuadamente cualquier proyecto, tanto en la planeación como en el control en puntos básicos, tales como análisis y configuración del proyecto, costos, supervisión y control de las actividades.

Es necesario aclarar que se pueden crear una gran cantidad de sistemas de información en esta rama, en función de los requerimientos particulares de cada empresa o de cada proyecto. Sin embargo la mayoría de dichos sistemas están enfocados hacia la planeación y el control de las actividades tanto en tiempos como en costos.

5.2. Objetivos.

Se puede señalar, como objetivo principal de los sistemas de información en esta rama, el proporcionar la información necesaria para el adecuado control del desarrollo de las obras.

Respecto a este objetivo cabe hacer las siguientes consideraciones:

Es comun denominar como "Sistemas de Control de Obras" a los sistemas que cumplan el objetivo antes mencionado.

Los sistemas de control de obras permiten, como su nombre lo indica, el control de tiempos y costos en las obras, tomando en cuenta para ello todos aquellos factores que de alguna manera influyen en la duración y el costo de éstas como las restricciones y los recursos disponibles.

Estos sistemas, al proporcionar la información necesaria para el control de las obras, trabajan como un auxiliar muy importante de los directores o responsables de éstas, en sus funciones de dirección y supervisión.

5.3. Ventajas.

Las ventajas de los sistemas computarizados de control de obras son múltiples. A continuación se mencionan las mas importantes:

Obtener información en el instante deseado del desarrollo, situación y características de las diferentes obras que se están manejando.

LLevar un control automático del desarrollo de las obras.

Facilitar la toma de decisiones de los encargados, sobre las obras que se manejen.

Reducir al mínimo el error en la transcripción de la información, haciéndola más confiable.

Conservar un histórico general de las obras que pueda servir de ayuda en futuras planeaciones.

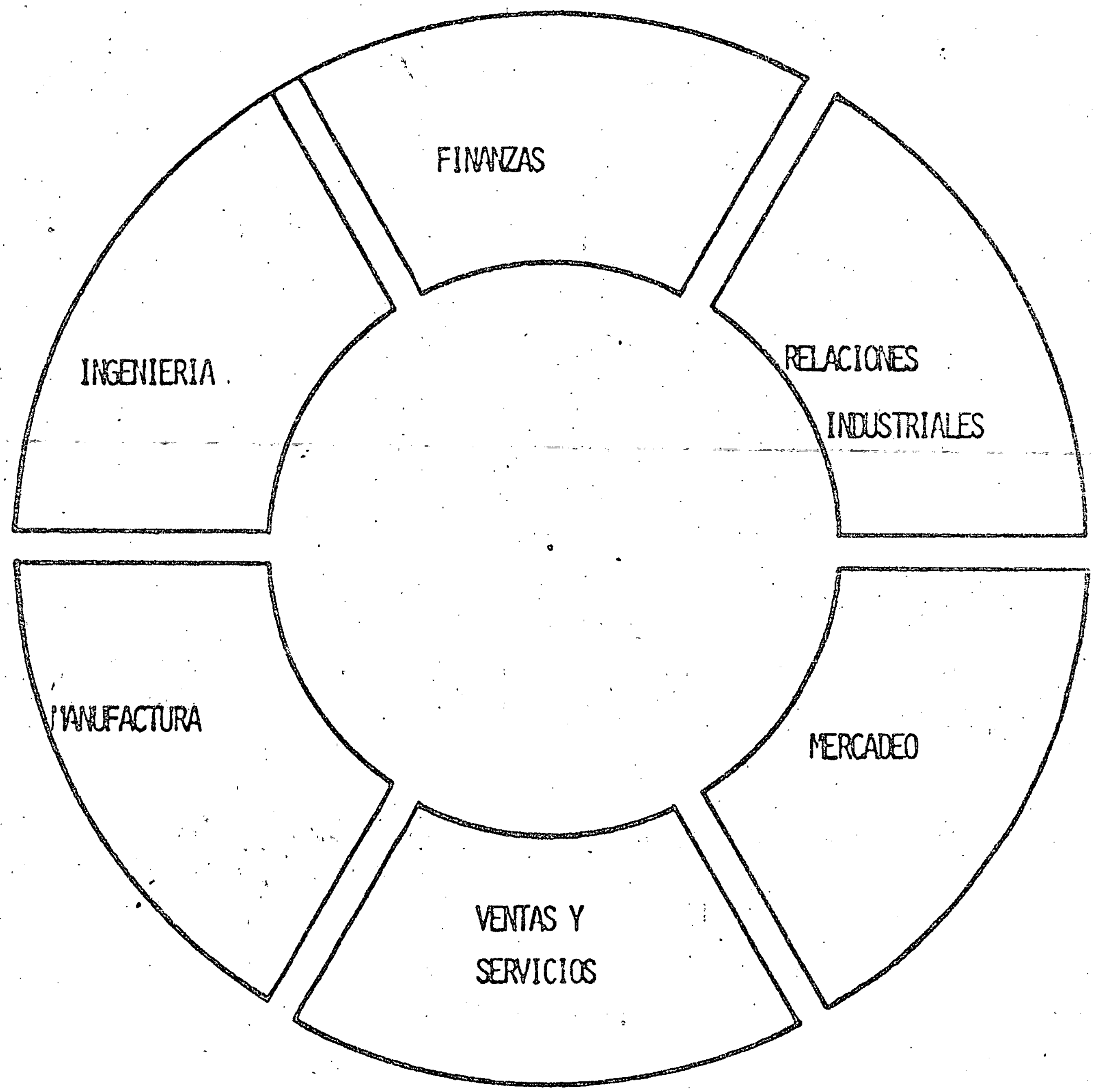
En la actualidad estos sistemas están alcanzando un gran auge en la Ingeniería Civil, agregandose a los notables avances en relación a la tecnología disponible para la realización de una obra, como son los aplicados en el diseño y construcción. Gracias a los sistemas de información los notables avances se han logrado ahora en la planeación y control de las obras.

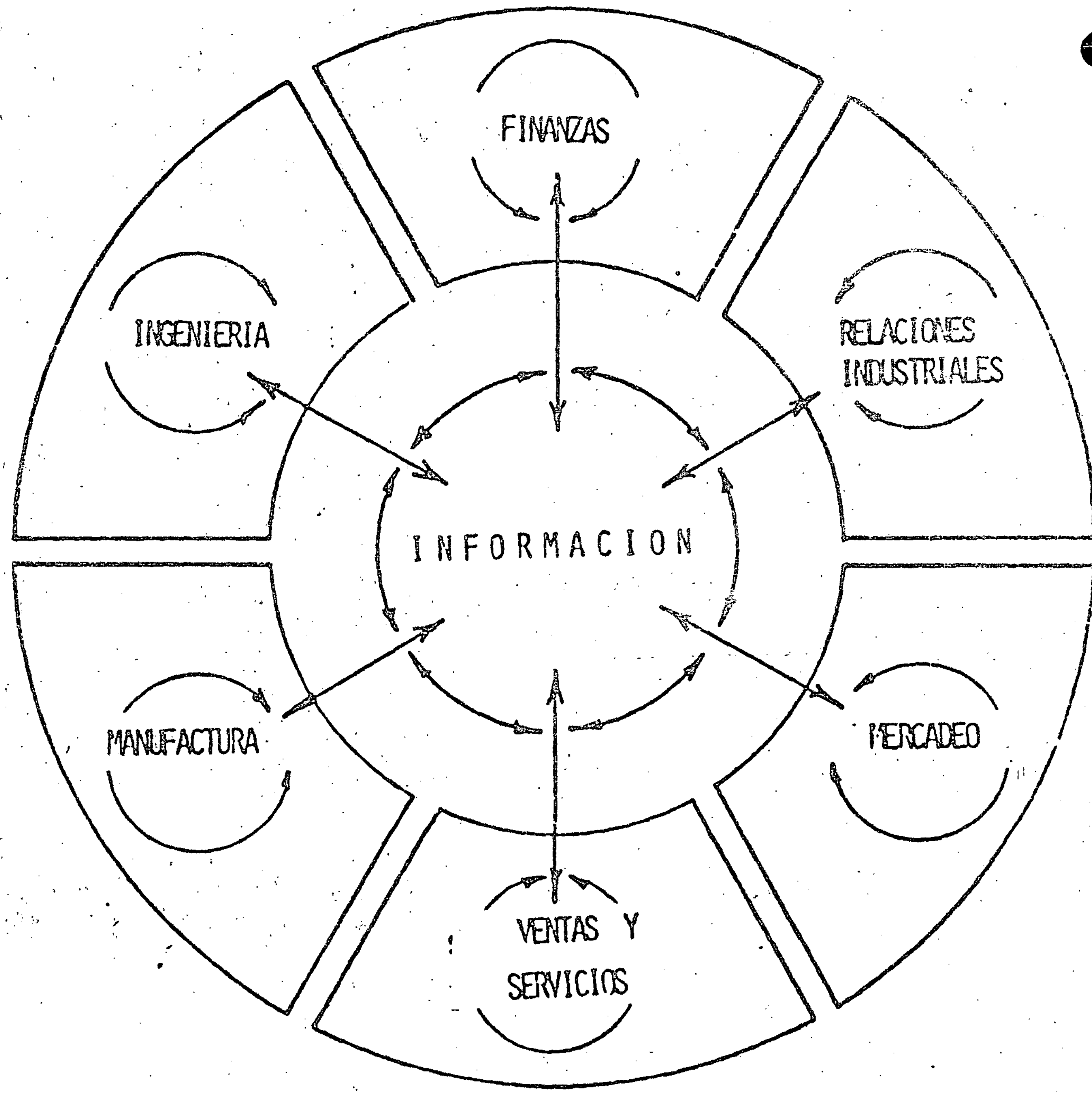
6. SISTEMAS ELECTRONICOS DE COMPUTO.

Generalidades

Los sistemas de cómputo electrónico, han sido a lo largo de su relativamente reciente invención, mejorados en forma por demás sorprendente, esto es si tomamos en consideración que hace solo algunos años los equipos funcionaban en base a bulbos electrónicos, con fuertes limitaciones en velocidad, capacidad, confiabilidad, etc. y que en solo unos cuantos años es posible contar con computadoras extraordinariamente mas baratas, eficientes, potentes y confiables, lo que ha permitido que el usuario de cómputo electrónico en casi todos los niveles, tenga acceso a ellas en forma facil y sencilla por tanto mas eficiente desde el punto de vista programación, así como que en la mayoría de las ocasiones cuente con terminales remotas que le evitan el tener que transladarse a correr sus trabajos hasta el local donde se encuentra la computadora.

Por otra parte en cuanto a los usuarios de información, que de una u otra manera está mecanizada electrónicamente, cuentan con multitud de formas para disponer de la información, al disponer en muchos casos de terminales remotas y no solamente con listados, lo que fue la forma tradicional de recuperar información.

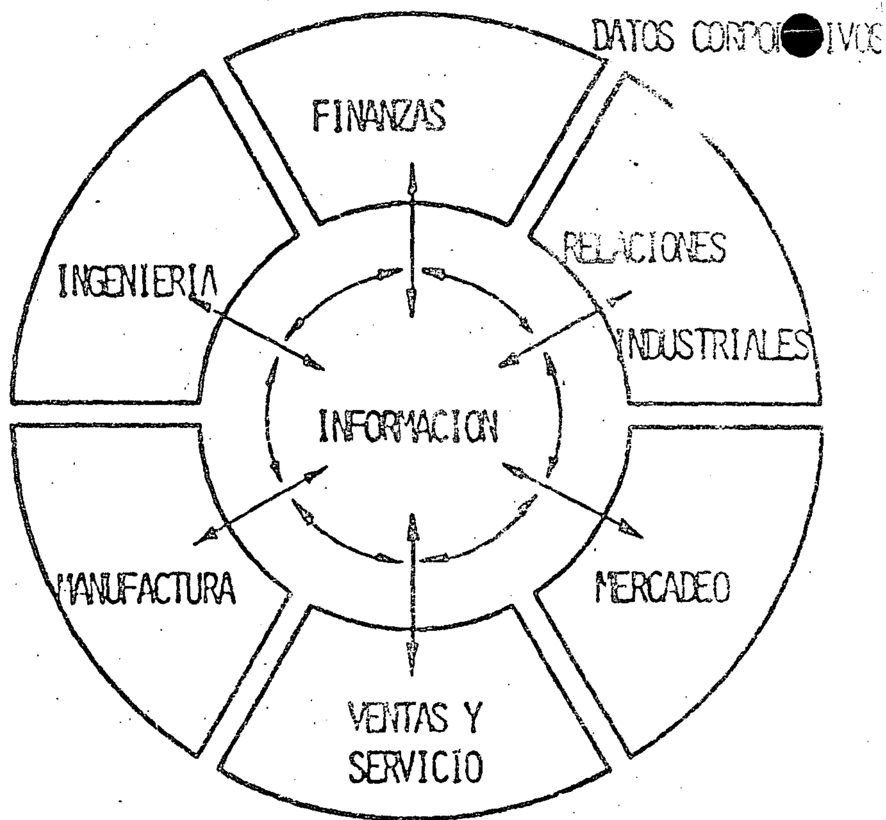

FINANZAS
RELACIONES INDUSTRIALES
MERCADEO
VENTAS Y SERVICIOS
MANUFACTURA
INGENIERIA

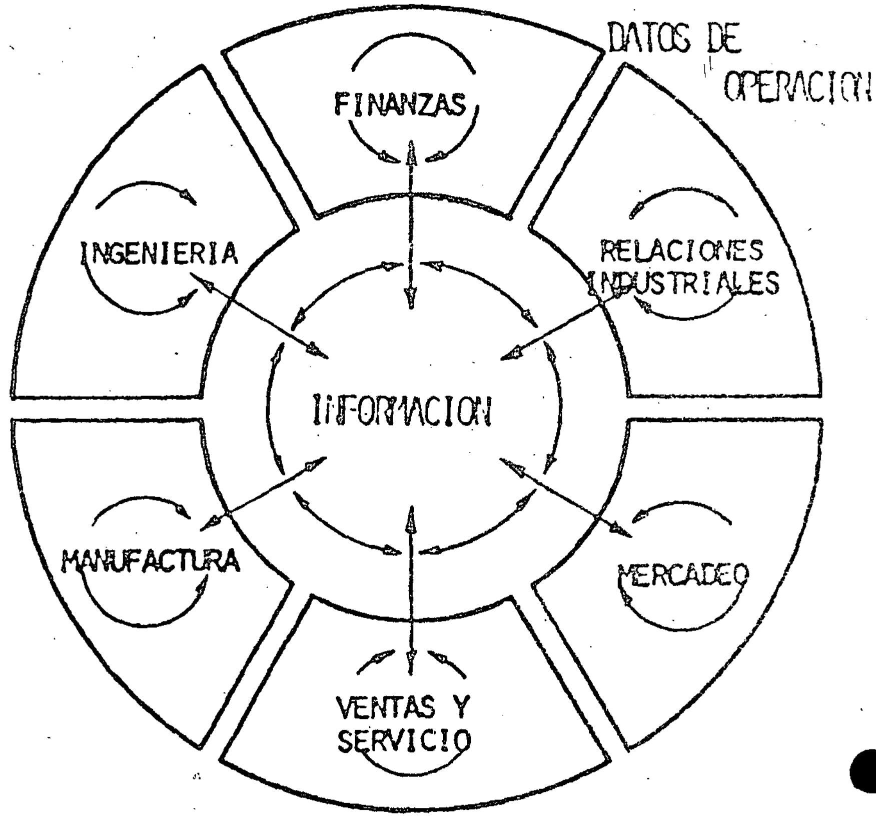

FINANZAS
RELACIONES INDUSTRIALES
MERCADEO
VENTAS Y SERVICIOS
MANUFACTURA
INGENIERIA
INFORMACION

TAREAS DE TRABAJO	PERSONAL
° DIRECCION ESTRATEGIA TACTICA ° CONTROL COMPAÑIA DEPARTAMENTO GRUPO	GERENCIA
° OPERACION	NO - GERENCIAL

TAREAS DE TRABAJO

REQUERIMIENTOS DE DATOS





✳ DIRECCION

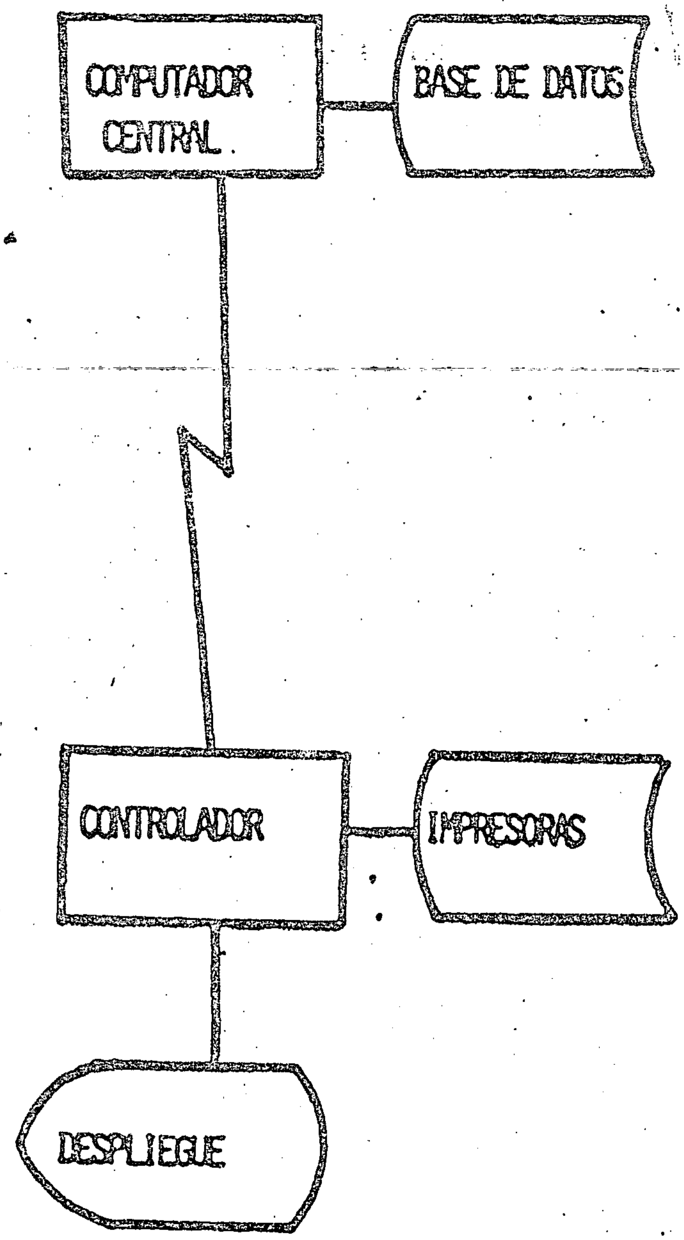
- ESTRATEGIA
- TACTICA

✳ CONTROL

- EMPRESA
- DEPARTAMENTO
- .. GRUPO

✳ OPERACION

1. SOLUCION EN LINEA

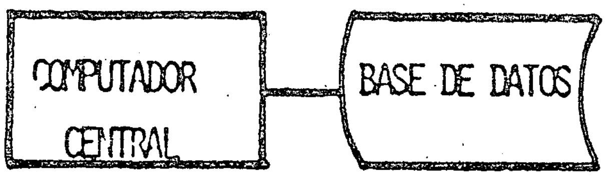


CONSIDERACIONES

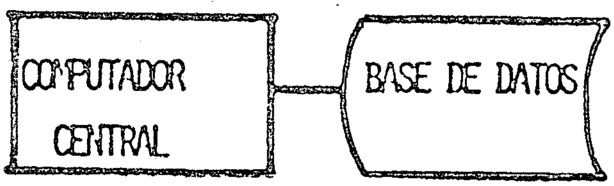
- RECURSOS DEL COMPUTADOR CENTRAL
- COSTO DE LINEAS
- CONFIABILIDAD
- TIEMPO DE RESPUESTA

2. SOLUCION DESCENTRALIZADA

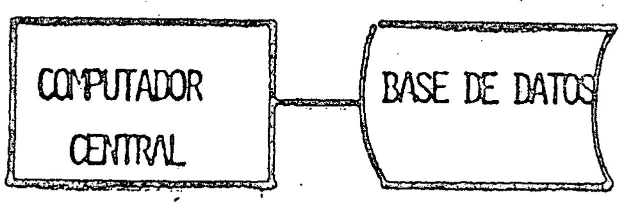
CONSIDERACIONES



- SIN BASE DE DATOS CORPORATIVA



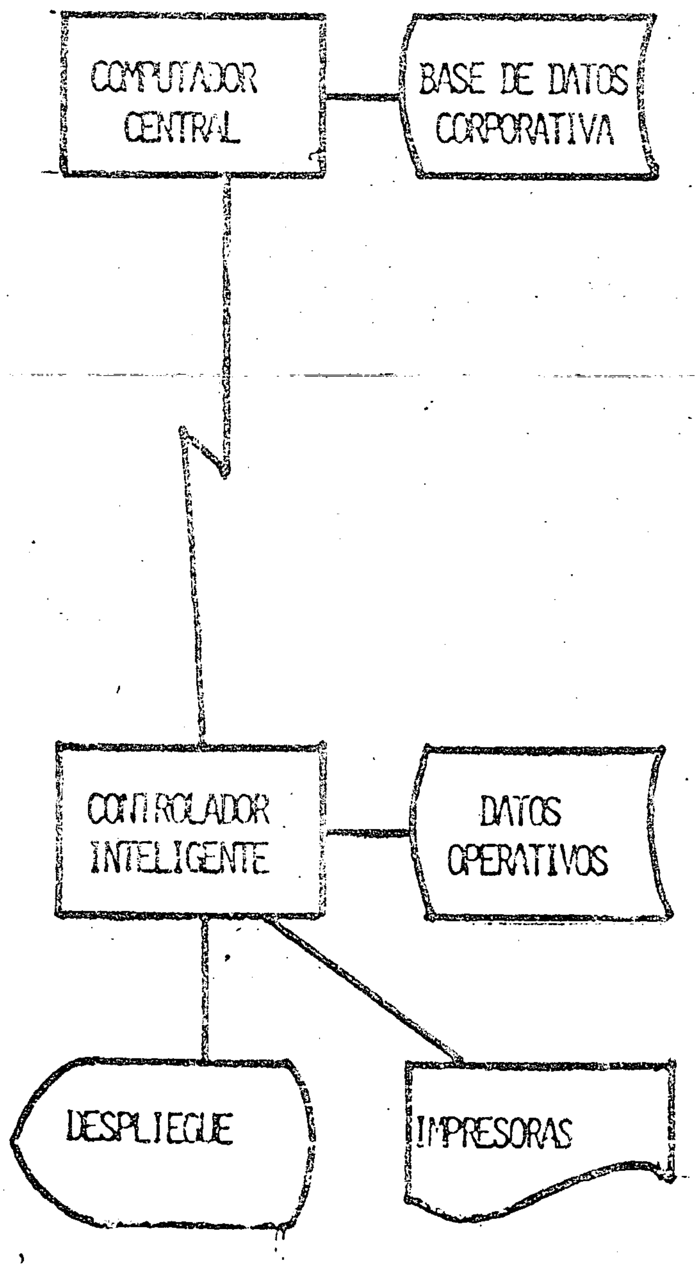
- SIN CONTROL DE LA INFORMACION:
  - DATOS
  - PROCESO
  - APLICACIONES



- RECURSOS DUPLICADOS:
  - DATOS
  - EQUIPO
  - PERSONAL

3. SOLUCION CON PROCESO DISTRIBUIDO

CONSIDERACIONES



- RECURSOS DEL COMPUTADOR CE
- BASE DE DATOS CORPORATIVA
- CONTROL DE LA INFORMACION:
  - DATOS
  - PROCESO
  - APLICACIONES
- COSTO DE LINEAS
- DISPONIBILIDAD
- TIEMPO DE RESPUESTA
- ELIMINA DUPLICIDAD DE RE
  - DATOS
  - EQUIPO
  - PERSONAL

EL PROCESO DISTRIBUIDO SATISFACE LOS:

REQUERIMIENTOS DE PROCESO DE DATOS PARA USUARIOS

- CONTROL PROPIO DE LA OPERACION DE PROCESO
- OPERACION SIMPLE DEL SISTEMA
- HABILIDAD PARA CORRER MUCHAS APLICACIONES CONCURRENTEMENTE
- HABILIDAD PARA AGREGAR FACILMENTE NUEVAS APLICACIONES
- HABILIDAD PARA MANIPULAR DATOS
    - INTRODUCIR
    - EDITAR
    - CALCULAR
    - ACTUALIZAR
    - BORRAR
    - DESPLEGAR
    - IMPRIMIR
- BUEN TIEMPO DE RESPUESTA DEL SISTEMA
- SEGURIDAD DE LA INFORMACION
- EQUIPO Y PROGRAMACION CONFIABLE

DESARROLLO DE LAS COMUNICACIONES EN EL PASADO

- VARIEDAD DE TECNOLOGIAS
- UN ENFOQUE DE DISEÑO NO ESTANDAR
- VARIEDAD EN LA DISCIPLINA DE LINEA
- APLICACIONES DEPENDIENTES DE LAS TERMINALES
- UN MEDIO AMBIENTE CONFUSO

PROBLEMAS RESULTANTES

- VARIEDAD EN LAS DISCIPLINAS DE LINEA
- DIRECCIONAMIENTO DE TERMINALES MEZCLADO
- CONTROLES DE ENLACE MULTIPLES
- APLICACIONES DEPENDIENTES DEL DISPOSITIVO
- REDES DEDICADAS
- DISPONIBILIDAD DE LA TERMINAL
- APLICACIONES NUEVAS
- MANTENIMIENTO DEL PROGRAMA

SUMARIO - LIMITACIONES

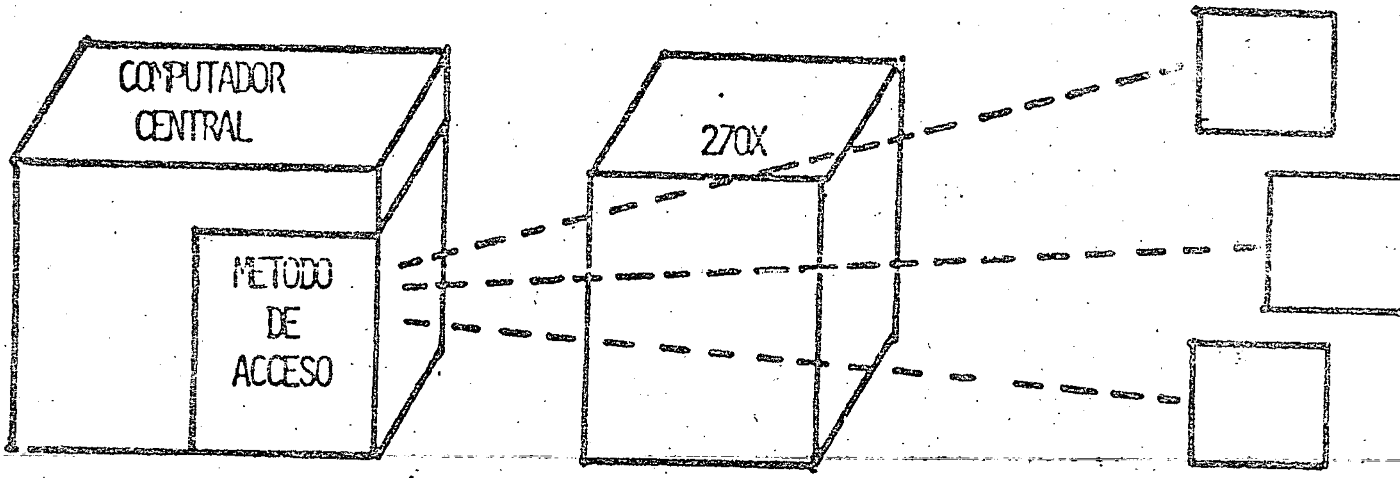
- VARIEDAD DE DISPOSITIVOS
- PROGRAMACION COMPLEJA DEL CONTROL DE COMUNICACIONES
- INFLEXIBILIDAD DEL CRECIMIENTO EQUIPO / PROGRAMACION

CRECIMIENTO PREVISTO

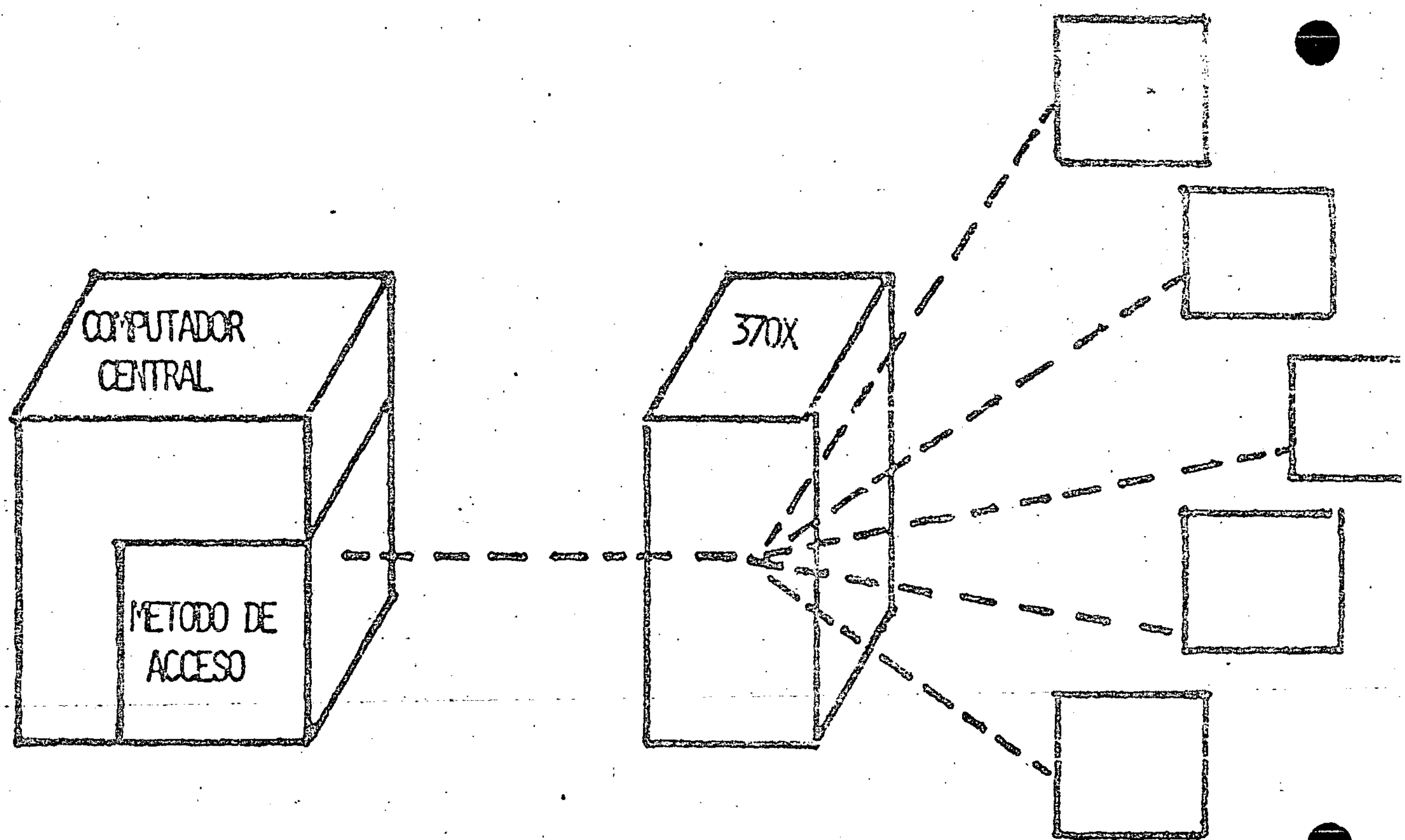
- UN INCREMENTO DEL 35% EN TERMINALES POR AÑO
- CERCA DE 10 VECES MAS TERMINALES EN 1980 QUE EN 1973
- UN NUMERO MUCHO MAYOR DE TERMINALES REMOTAS

  (70% - 80%) QUE LAS LOCALES

PERSPECTIVA DE LAS UNIDADES DE CONTROL DE TRANSMISION PREVIOS



PERSPECTIVA CON CONTROLADORES DE COMUNICACIONES PROGRAMABLES



B I B L I O G R A F I A

1.) Arnold - Hill - Nichols : "Sistema Moderno de Procesamiento de Datos" Edit. Limusa, México, D.F., 1975.

2.) Cárdenas Miguel A. : "La Ingeniería de Sistemas", Edit. Limusa, México, D.F., 1974.

3.) Catalytic Construction Company : "Método del Camino Crítico", Edit. Diana, México, D.F., 1970 .

4.) Corzo Miguel A. : "Introducción a la Ingeniería de Proyectos", Edit. Limusa, México, D.F., 1975.

5.) Dippel - House : "Information Systems", Edit. Scott, Forseman and Company, Illinois, 1969.

6.) Eadie Donald : "Modern Data Processors and Systems", Edit. Prentice - Hall Inc., New Jersey, U.S.A., 1971.

7.) Gerez Victor - Grijalva Manuel : "El Enfoque de Sistema", Edit. Limusa, México, D.F., 1976.

8.) Loft Richard W. : "Basic Data Processing", Prentice - Hall, Inc., New Jersey, U.S.A., 1972.

9.) Martino R. L. : "Administración y Control de Proyectos", 3 tomos, Edit. Técnica, S.A., México, 1965.

10.) Mayoral, N.A., "Análisis de los Factores que Determinan la Necesidad de Utilizar un Centro de Informática en una Empresa", México, D.F., 1974.

11.) Mc. Millan - González : "Systems Analysis", Richard D. Irwin, Inc., Illinois, U.S.A., 1974.

12.) Miller Robert W. : "Aplicación del Método PERT al Control de Programación, Costos y Beneficio", Mc Graw - Hill Inc., N.Y. 1963.

13.) Mora - Molino : "Introducción a la Informática", Edit. Trillas, México, D.F., 1975.

14.) Ontiveros J.J. : "Control de Proyectos Utilizando el Sistema ICES - PROJECT", México, D.F., 1975.

15.) Presser, Cárdenas, Marín : "Ciencias de la Computación", Edit. Limusa, México, D.F., 1972.

16.) Shoderbek P.P. : "Management Systems", John Wiley and Sons, Inc., U.S.A., 1971.

17.) Sisson - Canning : "Información por Computadoras", Edit. Limusa, México, D.F., 1972.

18.) C.O.S.P.I. : "Control Sistematizado de Proyectos y sus Inversiones", CINC, S.A., México, D.F., 1972.

19.) SIDAO : "Sistema de Información Directiva de Administración de Obras", I.M.S.S., México, D.F., 1974.

20.) "Control de Costos de Obra en Cómputo Electrónico", Proyectos y Sistemas de Información, México, D.F., 1974.

21.) "Sistemas de Información en la Construcción" tesis profesional Ing. Arnulfo Castro Jiménez (1977).

centro de educación continua
división de estudios superiores
facultad de ingeniería, unam

INGENIERIA DE SISTEMAS

SIMULACION MANUAL

DR. JESUS ACOSTA FLORES

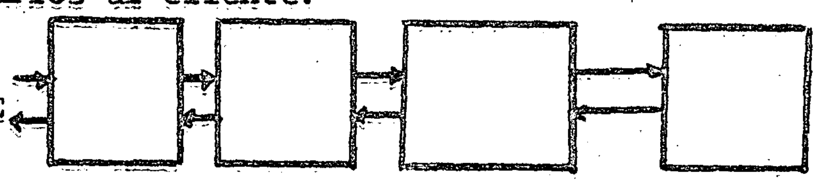
JUNIO, 1978

SIMULACION MANUAL DE JAY W. FORRESTER

DISTRIBUCION DEL SISTEMA

Un problema normal que encaran los empresarios es el de control de inventarios. El mantenimiento de un inventario estable se complica a menudo por inventarios múltiples involucrando fábricas, distribuidores, mayoreo y menudeo y por demora en la transmisión de bienes y pedidos. Los pedidos proceden del cliente al través de todos los sectores serialmente a la fábrica y los bienes fluyen de la fábrica serialmente al través de todos los inventarios al cliente.

CLIENTE



PRODUCCION DE LAS FABRICAS

MENUDEO MAYOREO DISTRIBUIDOR FABRICA

Para examinar los problemas inherentes en este sistema de producción-distribución se simulará manualmente y posteriormente puede hacerse en una computadora. Primero se desarrolló un modelo de simulación humano para reproducir la estructura del sistema. Cada persona en esta simulación representará el papel de un decisor de sector. Su trabajo será satisfacer pedidos del sector a su izquierda y colocar órdenes solicitando bienes del sector a su derecha.

Las decisiones para ordenar artículos se hacen una vez a la semana. Todos los sectores en el sistema son idénticos excepto - por el tiempo que se requiere para recibir artículos del siguiente sector después que se ha hecho un pedido. Menudeo, mayoreo, y el distribuidor reciben sus bienes dos semanas después de colocar sus pedidos, a menos, por supuesto, que el siguiente sector no tenga suficiente inventario para satisfacer la cantidad de artículos que está demandando. El almacén de la fábrica debe esperar tres semanas para que se elaboren los artículos cuya producci-ón ordena (la fábrica tiene un abastecimiento infinito de materias primas). Las órdenes del cliente están predeterminadas. Las órdenes que se reciben en los otros sectores son - las que se colocaron un período antes por el sector a la izquierda.

Cada persona en la simulación puede usar cualquier esquema para ordenar que considere necesario para evitar las situaciones sin artículos almacenados. Sin embargo, no tiene otra alternativa, más que satisfacer todos los pedidos siempre que exista un inventario adecuado. Para duplicar las condiciones del mundo - real se supone que todos los pedidos se demoran una semana en - el correo y todos los bienes tienen también una demora de una - semana en el transporte.

Para ilustrar la operación del sistema y las reglas de competencia considere las acciones del distribuidor. El distribuidor - recibe pedidos del mayorista después de una demora de una semana en el correo y envía las unidades que se le requirieron inmediatamente, siempre y cuando tenga la cantidad suficiente de bie

nes. El material se recibe un período de tiempo después por el mayorista. Cuando no existen suficientes unidades disponibles la parte del pedido que no satisface va a englosar el concepto de pedidos no satisfechos y se enviarán cuando se tengan unidades adicionales del almacén de la fábrica. El distribuidor hace sus pedidos al almacén de la fábrica una vez a la semana para mantener su propio inventario. Existen dos costos asociados con cada inventario, los de tener artículos y los de no tenerlos. Siempre que se tiene una unidad en inventario uno deja de ganar intereses sobre el dinero invertido; estos costos se tomarán como un peso por unidad por período de tiempo. Siempre que la demanda no pueda satisfacerse inmediatamente existen costos asociados con la insatisfacción de quien hizo el pedido (cliente, menudeo, mayoreo o distribuidor). Para propósito de competencia se tomaron estos costos como dos pesos por unidad por período de tiempo. Para minimizar los costos totales cada sector en el sistema de distribución intenta mantener su inventario en el nivel más bajo que sea suficiente para satisfacer cambios inesperados en la demanda. Si el inventario comienza a estar abajo de este nivel deseado se ordenarán unidades extra. Cuando el inventario empieza a acumular debido a una escasez momentánea en la demanda, los pedidos disminuirán. La acumulación de costos es una forma conveniente de medir el éxito o fracaso de los esquemas del control de inventarios por lo que se calcularán para ver cuál equipo de los cuatro decisores fué capaz de satisfacer la demanda del cliente con el costo total más bajo.

1.- Durante la simulación se transmitirán los pedidos en hojas de papel. No comunique sus pedidos a ningún otro sector en ninguna otra forma.

2.- Los pedidos del cliente se revelarán al sector de menudeo una vez por semana.

3.- Cada sector comienza con un inventario de doce artículos.

4.- Durante cada período de tiempo de la simulación se seguirán los pasos siguientes. Una persona, el supervisor de simulación describirá cada paso totalmente en las primeras iteraciones. Después será suficiente con mencionar únicamente la letra correspondiente a cada operación.

A) Satisfaga del inventario cualquier orden que tenga colocando el número requerido de unidades para transportarse al sector que está a su izquierda. Si no se van a transportar unidades coloque un papel con una notación de cero. Si la orden pudo cumplirse totalmente destrúyala, si no, réstele las unidades enviadas de las unidades requeridas, y déjela.

B) Registre su inventario y unidades no surtidas.

C) Llegan las unidades por el transportista.

D) Decida cuántas unidades desea ordenar y coloque su pedido en el correo.

E) Registre el número de unidades que pidió.

F) Llega el correo, la simulación de las actividades de una semana ha~~n~~ terminado y la secuencia comienza de nuevo.

centro de educación continua
división de estudios superiores
facultad de ingeniería, unam

INGENIERIA DE SISTEMAS

OPERACION CONJUNTA DE UNA PRESA Y UN ACUIFERO

ING. FERNANDO RUEDA LUJANO

JUNIO, 1978

OPERACION CONJUNTA DE UNA PRESA Y UN ACUIFERO.

Traducción de un artículo publicado - por: ASCE Journal of the Hydraulics- Division "Conjuntive Operation of - Dams and Aquifers" by Nathan Buras, Noviembre de 1963.

Ing. Fernando Rueda Lujano.

APLICACION DE LA PROGRAMACION DINAMICA PARA LA OPERACION CONJUNTA DE UNA PRESA Y UN ACUIFERO.

Introducción.

La calidad y disponibilidad del agua son frecuentemente factores que limitan los esquemas de desarrollo hidráulico regional. La utilización optima de este recurso natural es esencial para el establecimiento de estructuras económicas y sociales adecuadas. El término "optimo" hace pensar en diferentes problemas. Por ejemplo: Optimo (o mejor) para quien ? - ¿Optimo (o más favorable) para qué ? . ¿Bajo qué condiciones ? . Estas preguntas deben ser contestadas en su contexto económico y social.

Las técnicas de análisis usadas en ingeniería sólo pueden proporcionar una serie de diseños, planes y formas de operación , así como sus respectivas consecuencias en términos de beneficios (bienes y servicios) e inversiones. Después de este proceso ingenieril, usualmente se lleva a cabo un juicio de valores acerca de cual elemento de la serie debiera ser adoptado para su realización, tomando en cuenta aquellos aspectos del problema que no pueden ser cuantificados o no se prestan para un análisis más formal.

El uso de los vasos de almacenamiento es una práctica bien establecida para abastecimiento de agua y control de avenidas. La inclusión de acuíferos en la planeación del desarrollo hidráulico es muy importante. Los acuíferos pueden considerarse como estructuras de almacenamiento capaces de ejecutar dos funciones en muchos casos: Control de avenidas y abastecimiento de agua para diferentes usos. La primera función no siempre es obvia y frecuentemente se ha despreciado. Las cuencas subterráneas cuando se operan en coordinación con vasos de almacenamiento superficial pueden proporcionar capacidad para almacenar las aguas superficiales en exceso de las temporadas de lluvia y ser extraidas durante el estiaje.

Planteamiento del Problema.

El problema que se plantea aquí considera un sistema que incluye dos elementos principales Una presa de almacenamiento y un acuífero. El almacenamiento superficial recibe una aportación variable y_i durante el intervalo de tiempo i. La capacidad de la presa Q almacena una cantidad de agua q_i $(0 \leq q_i \leq Q)$ al principio del mismo período. La cantidad almacenada correspondiente en el acuífero es g_i. Suponiendo que la capacidad de almacenamiento del acuífero sea G, entonces $0 \leq g_i \leq G$. Las cantidades y_i, Q, q_i, G y g_i tienen dimensiones de L^3. Dentro del problema se incluye un elemento adicional que se refiere a la existencia de una estructura, con capacidad R, y cuyas dimensiones también están dadas en L^3, que sirve para recargar el acuífero.

El almacenamiento superficial abastece por gravedad la demanda de la zona de riego A_s y el acuífero la de la zona de riego A_g por medio de bombeo. Se hace la hipótesis de que ninguna de las dos áreas de riego podrá ser abastecida por fuentes diferentes a las asignadas.

El agua descargada por la presa en el i-esimo período tiene dos componentes: X_i [L^3] para el riego de la superficie A_s y r_i [L^3] para recarga del acuífero. Este último volumen es adicional a C_j [L^3] que recarga el acuífero en forma natural, tanto de escurrimientos superficial como de flujo subterráneo. El volumen que se bombea del acuífero para el riego de la superficie A_g corresponde a π [L^3]. El sistema y su operación aparece esquemáticamente en la Fig. 1.

Nótese que la capacidad del acuífero, G, se halla limitada en su parte inferior por la máxima profundidad económica de bombeo, H, y en su parte superior por los problemas de drenaje que pueden ser creados cuando el nivel freático se halla muy cercano a la superficie (Fig. 2).

El problema consiste en establecer un criterio de diseño y un conjunto de reglas operativas para el sistema. Específicamente, se requiere determinar el tamaño, Q, de la presa de almacenamiento (i.e. la altura de la presa) y las características de la estructura de recarga que corresponden a la capacidad R. Asimismo, se tratan de establecer las reglas de almacenamiento y de descarga tanto de la presa como del acuífero. El criterio para el desarrollo de los recursos hidráulicos en esta situación hipotética es la optimización del sistema al maximizar los beneficios que resultan del abastecimiento de agua para riego y de la prevención y atenuación de las avenidas que de otra manera podrían dañar propiedades locali -

zadas aguas abajo de las dos estructuras.

Análisis.

La solución completa del problema requiere que los siguientes objetivos se cumplan:

1. La determinación del tamaño óptimo de la presa y las estructuras de recarga, i.e., las dimensiones físicas óptimas del sistema (criterio de diseño).
2. La optimización de la escala de desarrollo, i.e., de los objetivos deseados que determinan, a su vez, la extensión de las áreas A_s y A_g (estos objetivos pueden considerarse como el criterio de planeación); y
3. La determinación de un procedimiento óptimo de operación; es decir, de un programa de descargas de la presa ($X_i + r_i$) y de bombeo π_i del acuífero.

Esto significa que el beneficio B es una función de tres conjuntos de variables:

X_1 - las dimensiones físicas del sistema que deberán estar de acuerdo con las condiciones hidrológicas, tanto superficiales como subterráneas.

X_2 - la escala de desarrollo, o la extensión de las áreas que se sirven del sistema; y

X_3 - el procedimiento de operación, i.e., la política.

Entonces,

$$B = f(X_1 , X_2 , X_3) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

Por lo tanto B es la superficie de respuesta en un espacio de cuatro dimensiones y se deberá buscar su máximo en el rango de valores admisibles de X_1 , X_2 y X_3 . El problema se puede tratar considerando la operación del sistema durante un número finito de etapas y ejecutando un análisis secuencial. Las cantidades X_1 y X_2 serán tratadas como parámetros mientras se busca un procedimiento óptimo de operación X_3.

Se supone que el sistema tiene que ser operado durante N años, de tal manera que tendrá que progresar a través de N etapas sucesivas. Si N es grande, es razonable considerar una secuencia de N etapas como una aproximación aceptable de un proceso que continúa indefinidamente. Es necesario señalar, sin embargo, que un proceso ilimitado es ficticio en la realidad física, biológica, ingenieril y económica. Matemáticamente, tal proceso podría tener sus ventajas, sobre todo cuando las últimas etapas (demasiado lejos en el futuro) tienen efectos inapreciables sobre la política de operación en el presente.

Al principio de cada etapa i ($i = 1,2,\ldots, N$), el sistema es un estado que se describe por un vector compuesto de tres elementos (variables de estado); q_i - la cantidad de agua disponible en la presa ; g_i - la cantidad de agua disponible en el acuífero; y ρ_i - la cantidad de agua en la estructura de recarga, i.e, en tránsito hacia el acuífero.

Las variables de estado admiten valores no negativos limitados ya sea por las propiedades físicas del sistema o por el tamaño de las instalaciones. De esta manera, g_i, se halla limitada por las características del acuífero que determinan G, mientras que q_i y ρ_i no pueden exceder la capacidad de la presa y la de la estructura de recarga, respectivamente.

Con respecto a este último elemento, se puede hacer una simplificación importante: se considera que el agua que llega a la estructura de recarga en cualquier período, se encontrará disponible para el siguiente. Asimismo, nótese que:

$$\rho_i = r_{i-1} + c_{i-1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Esto significa que el agua que se descarga de la presa y el escurrimiento natural contribuyen a la recarga del acuífero.

La del estado $S_i = (q_i, g_i, \rho_i)$ al estado $S_{i+1} = (q_{i+1}, g_{i+1}, \rho_{i+1})$ se debe a la transformación $T_i = (x_i, r_i, \pi_i; y_i, c_i)$ que sucede en el sistema. El vector de transformación T_i se compone de dos clases de elementos (x_i, r_i, π_i) que se encuentran bajo control y los elementos y_i and c_i que son estocásticos. Para cada valor de cada elemento del vector T_i, dentro del rango de valores posibles para los elementos estocásticos y dentro del rango de valores admisibles para los elementos no estocásticos, se obtiene una transformación diferente. El hecho de que se tenga la alternativa de seleccionar valores de x_i, r_i y π_i significa que cada vez que se asigne un -

conjunto de valores se está tomando una decisión. La secuencia de decisiones que se toman mientras se opera un sistema define una política. En este caso, una política consistirá de una secuencia de decisiones con respecto a tres variables (de decisión): x_i - la cantidad de agua para riego que se toma de la presa; r_i - la cantidad de agua que se toma de la presa para la recarga del acuífero; y , π_i la cantidad de agua bombeada desde el acuífero.

Como se supone que los beneficios obtenidos de la superficie A_s son independientes de los que se obtienen de A_g , parecería que π_i debiera seleccionarse de x_i en forma independiente, con el criterio de que ambos fuesen seleccionados de tal manera que se obtengan los máximos beneficios de las áreas de riego. Sin embargo, si π_i excede el rendimiento específico del acuífero bajo condiciones naturales (sin recarga artificial) y si el agua subterránea se considera como un recurso renovable (i.e. que no llegue a minarse exhaustivamente en un intervalo de tiempo finito), entonces la cantidad bombeada dependerá en gran medida de la magnitud de las tomas a la presa para la recarga del acuífero.

Es obvio que π_i no puede exceder la capacidad del acuífero más la cantidad de agua en tránsito, entonces:

$$\pi_i \leq G + \rho_i \quad \text{.........................(3)}$$

Sin embargo, la capacidad de almacenamiento de la mayoría de los acuíferos excede considerablemente la capacidad disponible de almacenamiento superficial en la misma cuenca. No se puede concebir, por lo tanto, el tener una descarga regulada de un almacenamiento superficial suficientemente grande como para recargar un acuífero vacío en una sola temporada. Además, las cuencas de recarga necesarias para la infiltración de un volumen de esa magnitud tendrían que cubrir una superficie tan extensa que resultaría antieconómica. Por lo tanto, el límite superior de π_i deberá ser menor que el expresado por la desigualdad (3), de tal manera que el bombeo no exceda la cantidad almacenada en el acuífero:

$$\pi_i \leq g_i \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

El límite inferior de π_i es, por supuesto, cero.

De igual manera, las descargas del almacenamiento superficial están limitadas por la cantidad de agua almacenada en la presa durante cualquier período de tiempo más las aportaciones que llegan al vaso durante el mismo período:

$$x_i + r_i \leq q_i + y_i \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

Sin embargo, como y_i es una variable estocástica que toma valores $y_{i1}, y_{i2}, \ldots, y_{ij}, \ldots y_{im}$ con probabilidades $p_1, p_2, \ldots, p_j, \ldots p_m$, las descargas de la presa estarán limitadas por la cantidad almacenada y la aportación esperada, es decir:

$$x_i + r_i \leq q_i + \sum_{j=1}^{m} p_j \, y_{ij} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$

La función de ingresos f_N (q, g, ρ) se define como el ingreso esperado de un proceso de N etapas al utilizar una política óptima que se inicia con un volumen q almacenado en la presa, un volumen g en el acuífero y un volumen ρ en la estructura de recarga (en tránsito hacia el acuífero). Los ingresos derivados de la operación del sistema durante un sólo año puede escribirse como Φ.

$$\Phi = \Phi \, (x \, , \, \pi) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (7)$$

Entonces, si la operación del sistema se realiza durante una sola temporada, la siguiente relación optimiza el procedimiento de operación con respecto a los beneficios:

$$f_1 \, (q, g, \rho) = \text{máx} \left[\, \Phi \, (x, \pi) \, \right] \ldots\ldots\ldots\ldots (8)$$

$$0 \leq \pi \leq g$$

$$0 \leq x \leq q$$

La ecuación (8) relaciona funcionalmente la política de operación (la descarga x de la presa y el bombeo π) con el estado actual del sistema descrito por el vector (q, g, ρ). Esto significa que para cada combinación de q, g and ρ, en el rango admisible de sus valores, habrá una determinada política de descargas de la presa y bombeos del acuífero tal que maximiza la función f_1. Nótese que, debido a que el sistema será operado para un solo año, el rango de los valores admisibles de x y π están entre cero y q, y entre cero y g, respecti vamente.

Durante este período de operación se presentan varios cambios. La presa de almacenamiento recibe una aportación y_j con probabilidad p_j. Asimismo descarga las cantidades x y r para riego y recarga del acuífero. A su vez, el acuífero recibe un volumen ρ, que se hallaba en tránsito la temporada inmediata anterior, pero pierde un volumen π por bombeo. La cantidad en tránsito es ahora $r+c$. Debido a que la influencia del área de aportación a la estructura de recarga del acuífero se considera pequeña, ya que la mayor parte del flujo se almacena en la presa, el valor de c está dado como un promedio de los flujos naturales y, por lo tanto, es una cantidad fija. El nuevo vector de estado es, entonces, $(q + y_j - x - r,\ g + \rho - \pi,\ r + c)$. Luego, el ingreso esperado del proceso para dos estados, usando una política óptima y siendo los volúmenes iniciales: q en la presa; g en el acuífero; y ρ en la estructura de recarga, será:

$$f_2(q,g,\rho) = \text{Máx}\ \left[\Phi(x,\pi) + \sum_{j=1}^{M} p_j\, f_1(q+y_j-x-r, g+\rho-\pi, r+c)\right] \quad \ldots\ldots(9)$$

$$0 \leq \pi \leq g$$

$$0 \leq x \leq q$$

La ecuación (9) indica que los ingresos esperados de un proceso de dos etapas es la suma del ingreso obtenido por la operación del sistema durante el primer año (Φ) y el ingreso esperado del segundo año (f_1). Nuevamente, esta ecuación relaciona, en forma funcional, la política de operación con el sistema al inicio del proceso de dos etapas. La función f_2 es óptima porque, por el principio de optimalidad, la política definida - por el vector (x, r, π) es óptima. Obsérvese que siguiendo las decisiones x y π indicados por Φ en el primer año, necesariamente f_1 tomará un curso óptimo en la etapa restante, de acuerdo como se define la ecuación (8).

La decisión r, refiriéndose a la recarga del acuífero, aparece sólo en un proceso de dos etapas pero no sucede así cuando se trata de la operación de una sola etapa. La razón es obvia: En el proceso de una etapa no sería necesario recargar el acuífero ya que ese volumen no sería utilizado en ésta sino en la siguiente etapa. Además, la variable de decisión - r no se incluye en la función Φ para el proceso de dos etapas porque - no existe un método para la evaluación de los beneficios directos derivados del volumen que fluye hacia el acuífero. Estos beneficios se presentarían - hasta el siguiente año (o años), cuando el agua se encuentre disponible para bombeo.

Probablemente una evaluación razonable del ingreso esperado para el segundo año sería traer el valor de f_1 a valor presente. Entonces, si la tasa de interés aceptada es $(0 \leq u \leq 1)$, se tendrá:

$$f_2(q, g, \rho) = \text{máx}\ \{\ \Phi\ (x, \pi)$$

$$+ \frac{1}{1+u} \sum_{j=1}^{M} p_j\ f_1\ (q + y_j - X - r, g + \rho - \pi, r+c)\} \quad \ldots\ldots(10)$$

La ecuación para un proceso de tres etapas sería:

$$f_3\ (q, g, \rho) = \text{máx}\ \{\ \Phi\ (x,\ \pi\ )$$

$$+ \frac{1}{1+u} \sum_{j=1}^{M} p_j\ f_2(q + y_j - x - r,\ g + \rho - \pi\ ,\ r + c)\ \} \ldots\ldots\ldots\ldots (11)$$

En la cual f_2 se halla definida por la ecuación (10).

Obsérvese que en la ec. (11) f_2 se halla descontada a valor presente y esta función, a su vez, incluye el valor descontado de f_1. De esta manera, la contribución del último (tercer) año en una operación de tres años se encuentra afectada por un factor $1/(1+u)^2$. Como consecuencia, mientras más se alarga la duración del proceso, las etapas que se hallan más lejanas en el futuro tienen menor efecto sobre la política óptima en cualquier estado.

Por inducción matemática se puede concluir que el ingreso esperado de un proceso de N etapas es :

$$f_N\ (q, g, \rho\ ) = \text{máx}\ \{\ \Phi\ (x,\ \pi\ )$$

$$+ \frac{1}{1+u} \sum_{j=1}^{M} p_j\ f_{N-1}\ (q + y_j - x - r,\ g + \rho - \pi\ ,\ r + c)\ \} \ldots\ldots\ldots (12)$$

Los rangos de valores admisibles de las variables utilizadas están dadas por las siguientes restricciones:

1. Los volúmenes de descarga de la presa:

$$0 \leq x + r \leq q \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (13)$$

2. El volumen almacenado en la presa al final de cada etapa:

$$0 \leq q + y_j - x - r \leq Q \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (14)$$

3. El volumen bombeado del acuífero:

$$0 \leq \pi \leq g \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (15)$$

4. El volumen almacenado en el acuífero al final de cada etapa:

$$0 \leq g + r + c - \pi \leq G \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (16)$$

5. El volumen en tránsito:

$$0 \leq \rho \leq R \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (17)$$

6. El volumen de agua disponible para recarga:

$$0 \leq r + c \leq R \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (18)$$

Si C_Q es la inversión de capital requerida para construir una presa de capacidad Q y C_R es la inversión de capital para construir la estructura de recarga de capacidad R por año, entonces los beneficios netos esperados se pueden expresar como:

$$f_N(q, g, \rho) = \text{máx}\ \{ \Phi(x, \pi) + \frac{1}{1+u} \sum_{j=1}^{M} p_j\, f_{N-1}(\ldots) - C_Q - C_R \} \quad \ldots\ldots (19)$$

Entonces, para las capacidades preestablecidas Q y R de las estructuras de almacenamiento, C_Q y C_R puede considerarse como constantes que no afectan la maximización indicada por la ecuación (19).

Considérense las relaciones de recurrencia descritas por la ecuación (12), omitiendo el factor de descuento:

$$f_N (q, g\ \rho) = \text{máx} \{ \Phi\ (x, \pi\ )$$

$$+ \sum_{j=1}^{M} p_j f_{N-1} (q + y_j - x - r, g + \rho - \pi\ , r + c) \} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (20)$$

Se puede cuestionar si este conjunto de ecuaciones proporcionan máximos "rendimientos promedio" cuando el proceso se extiende por un período largo de tiempo. Es obvio que para valores pequeños de N, f_N estará fuertemente influenciada por las etapas finales de operación. En este caso la ecuación (20) describe un proceso del tipo de control "terminal". - Sin embargo, también es razonable suponer que conforme N tiende a infinito, la función f_N tendrá un comportamiento asintótico. El estudio del comportamiento de estabilización de estas relaciones de recurrencia demuestra, con ayuda de la teoría de las cadenas de Markov, que la política que proporciona el óptimo, cuando la influencia de las etapas finales es despreciable, es también la política que maximiza los rendimientos promedio.

El modelo matemático presentado tiene, por lo tanto, la propiedad de aproximarse en forma asintótica a un estado estable en el cual -

la influencia de etapas lejanas en el futuro es cada vez menor. La maximización de los rendimientos (o ingresos) medios anuales representa un seguro contra un proceso del tipo de control "terminal", mientras que el uso de un factor de descuento puede considerarse como otra protección adicional.

Estas ecuaciones, sin embargo, requieren de mayor experimentación. Si se resuelven en la forma presentada proporcionarán una política de operación optima, además de los rendimientos (o ingresos) que se derivan de la misma. Debido a que x y Π representan volúmenes "totales" de agua dispuestos para el riego de las áreas A_s y A_g, la extensión de estas áreas puede variarse hasta llegar al límite de las tierras aptas para irrigación, de tal manera que puedan obtenerse diferentes conjuntos de valores de descarga y bombeo. De esta manera, se pueden probar diferentes escalas de desarrollo y diferentes patrones de cultivo.

Otra ventaja adicional es que pueden investigarse diversos tamaños de presas y estructuras de recarga con respecto a los beneficios y costos resultantes. El modelo no se halla limitado a este sistema puesto que se pueden incorporar otras funciones adicionales. Por ejemplo, si las descargas de la presa exceden un determinado volumen y r no puede manejarse mediante las estructuras de recarga, se pueden llegar a tener problemas de inundaciones en las propiedades localizadas aguas abajo de las estructuras. El costo adicional que resulta al elevar la altura de la cortina puede compararse contra los beneficios que resultarían por controlar las inundaciones.

Finalmente, el modelo puede ser útil en estudios de simula ción. Substituyéndo una serie de eventos hidrológicos igualmente probables y que sean una muestra representativa de la población de los hidrogramas - posibles en una cuenca, se podrían determinar los ingresos esperados así como su variancia.

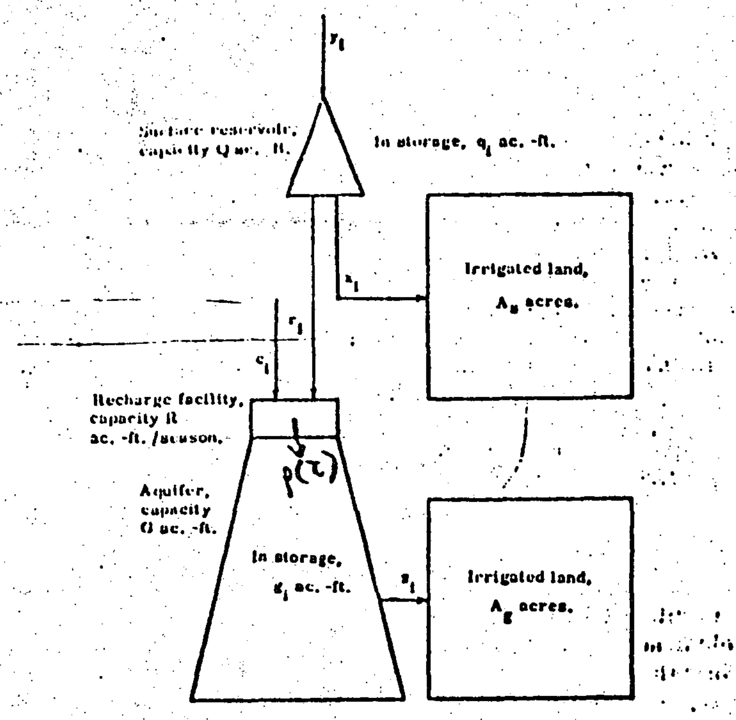


FIG.1.—SCHEMATIC REPRESENTATION OF THE SYSTEM

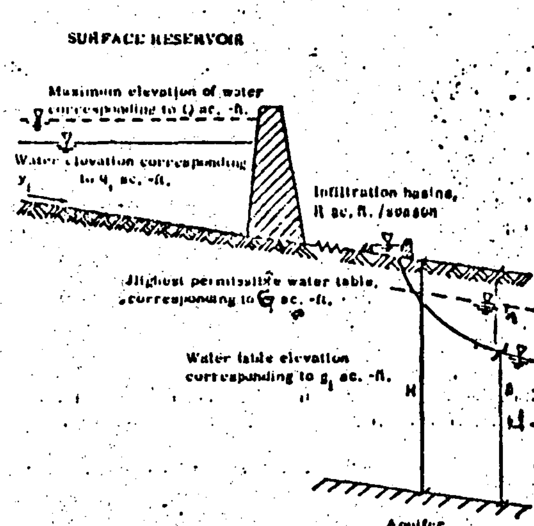


FIG. 2.—DIAGRAMMATIC VERTICAL CROSS SECTION THROUGH THE SYSTEM

centro de educación continua
división de estudios superiores
facultad de ingeniería, unam

INGENIERIA DE SISTEMAS

INTRODUCCION A LA PROGRAMACION MATEMATICA Y SUS APLICACIONES

DR. JOSE MIGUEL COBIAN SELA

JUNIO, 1978

INTRODUCCION A LA PROGRAMACION MATEMATICA Y SUS APLICACIONES

DR. JOSE MIGUEL COBIAN SELA
División de Estudios Superiores
Facultad de Ingeniería
Universidad Nacional Autónoma de México
México, D.F.

1. INTRODUCCION

Desde un punto de vista puramente matemático, el problema de programación matemática consiste de los siguientes elementos básicos:

- parámetros o constantes
- variables (de decisión y de estado)
- funciones:
  - de restricción
  - de utilidad o costo

En sus aplicaciones a la solución de problemas reales, estos elementos generalmente adquieren la siguiente interpretación económica:

- recursos disponibles o requerimientos de los mismos
- actividades económicas o descripción de la situación de un sistema
  - interrelaciones entre las actividades y su correspondiente consumo o producción de recursos
  - objetivo económico a satisfacer

En este trabajo se tratará únicamente el caso de la programación matemática discreta, según la clasificación del CUADRO I. Para este caso se tienen en general los siguientes elementos:

(a) Un conjunto finito de actividades bajo consideración: $x_1, x_2, \ldots, x_n$; $x \in R^n$

(b) Un conjunto finito de relaciones funcionales que representan las interacciones entre las actividades en cuestión y el consumo o producción de los bienes o recursos económicos correspondientes:

$$f_i(x) \geqq b_i \qquad i = 1, \ldots, \alpha$$

$$g_j(x) = b_j \qquad j = \alpha+1, \ldots, \beta$$

$$h_k(x) \leqq b_k \qquad k = \beta+1, \ldots, m$$

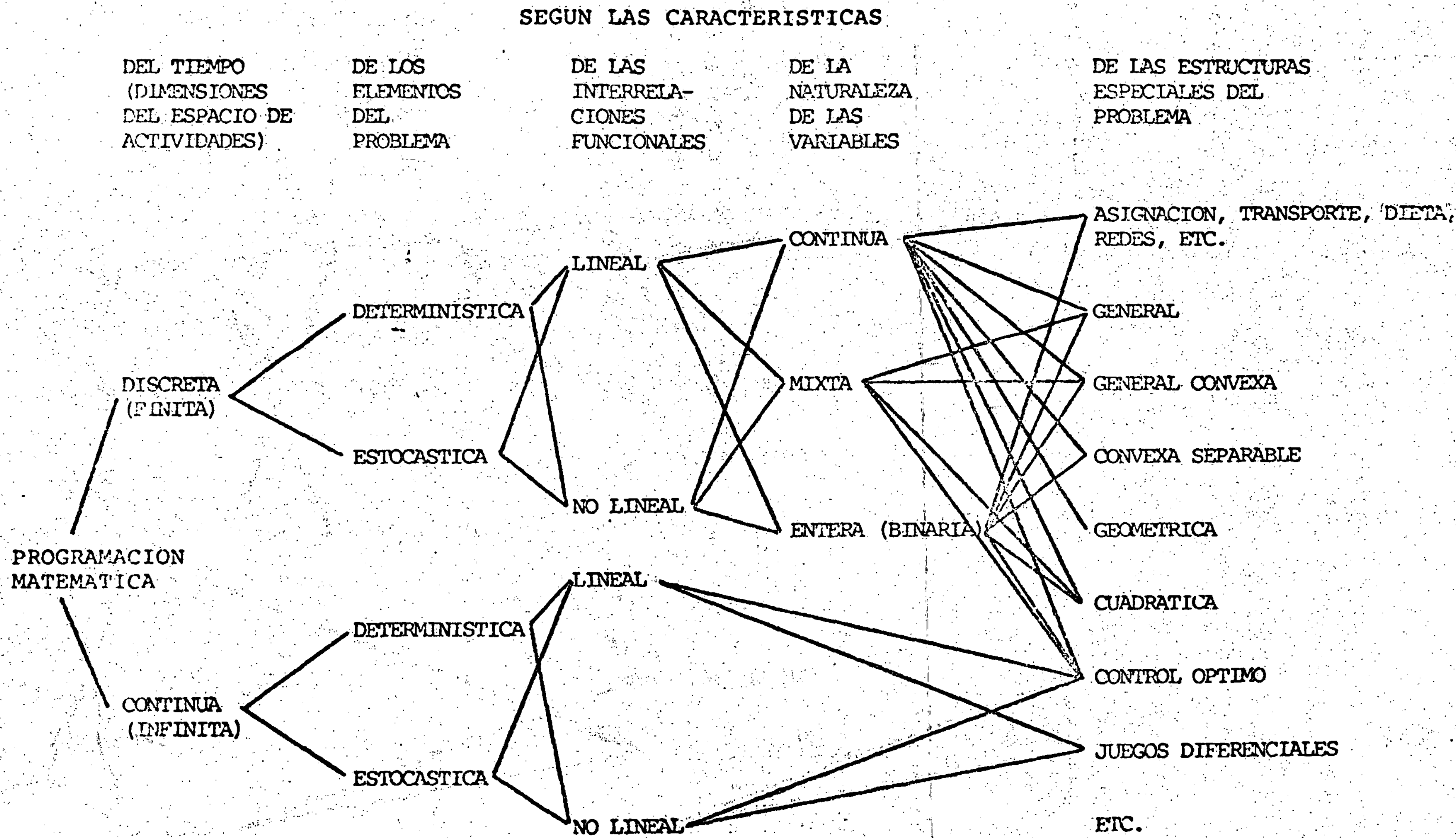
(c) Por último, una medida del costo o utilidad económica de cada conjunto particular de actividades x:

$$f_o(x) = z \; , \; z \in R^1 \; ; \; f_o(\cdot) : R^n \to R^1$$

El problema de programación matemática queda entonces en forma condensada como sigue:

$$\min \text{ (o max) } \quad z = f_o(x)$$

sujeta a $\qquad f_i(x) \geqq b_i \qquad i = 1, \ldots, \alpha$



CUADRO I

CLASIFICACIONES DE LA PROGRAMACION MATEMATICA

$$g_j(x) = b_j \quad j = \alpha+1,\ldots,\beta \quad (1.1)$$

$$h_k(x) \leqq b_k \quad k = \beta+1,\ldots,m$$

Este problema se puede representar en forma aún más abs-- tracta como:

$$\min \quad z = f_o(x)$$

sujeta a $\qquad f(x) = 0 \qquad (1.2)$

con $x \in \Omega$ en R^n y $f_o(\cdot) : R^n \to R^1$; $f(\cdot) : R^n \to R^{\beta-\alpha}$ y donde las funciones $f_o(\cdot)$ y $f(\cdot)$ se suponen ser contí-- nuamente diferenciables y el conjunto Ω es un subconjunto de R^n definido por las restricciones de desigualdad del - problema anterior. (Las operaciones de minimización y ma- ximización son matemáticamente equivalentes, ya que

$$\min \; f_o(x) = -\max.\{- f_o(x)\}). \quad (2)$$

2. PROGRAMACION LINEAL Y SUS APLICACIONES

Como un caso particular del problema definido anteriormen te se encuentra el problema de programación lineal:

$$\min \quad z = cx$$

sujeta a $\qquad \alpha_i x \geqq d_i \qquad i \in M_1 \qquad (2.1)$

$$\alpha_i x = d_i \qquad i \in M - M_1$$

$$x_j \geqq 0 \qquad j \in N$$

donde $M = \{1,\ldots,m\}$ y $N = \{1,\ldots,n\}$ son respectivamente los conjuntos de índices de las restricciones y de las variables del problema y α_i es el renglón i-ésimo de la matríz $A = (a_{ij})$ $i \in M$; $j \in N$. El problema de programación lineal se representa usualmente en la siguiente forma condensada, equivalente matemáticamente a la forma anterior (añadiendo las variables de holgura x_i^s necesarias para transformar las desigualdades del problema en igualdades:

$$\alpha_i x \geq d_i \rightarrow \alpha_i x - x_i^s = d_i \;)$$

$$\min \quad z = cx$$

$$\text{sujeta a} \qquad Ax = d \tag{2.2}$$

$$x \geq 0$$

El problema de programación lineal formulado arriba es un modelo matemático que requiere, para una adecuada aplicación a la solución de problemas prácticos, que se cumplan en cada caso particular, las siguientes suposiciones implícitas a su estructura matemática:

(a) Costos o precios marginales constantes para todos los rangos de las actividades consideradas.

(b) Mercados idealmente competitivos (la utilidad de cualquier actividad económica es directamente proporcional a su nivel de intensidad). Se excluyen por lo tanto los ca sos monopolísticos y oligopolísticos de -- competencia imperfecta.

(c) Cantidades limitadas de actividades posi-- bles y de recursos disponibles.

(d) Programación a corto plazo (las facilida-- des de producción y las tecnologías dispo- nibles se consideran fijas).

(e) Aditividad y proporcionalidad a escala de- las actividades en su producción o utiliza ción de los recursos requeridos o disponi- bles.

Un ejemplo de aplicación de la programación lineal a la - evaluación de alternativas de producción o compra de un - conjunto de n productos se describe a continuación. Se su pone que una matríz $T = (t_{ij})$ indica los tiempos de fabri cación internos del producto j $(j = 1,\ldots,n)$ en la máqui- na i $(i = 1,\ldots,m)$ propiedad de la empresa que realiza la evaluación. Esta empresa tiene disponibles únicamente b_i unidades de tiempo para cada máquina en el período de pla neación considerado y requiere entregar una cantidad k_j de cada producto en ese mismo período debido a compromi-- sos contraídos. Se dispone además de información sobre -- los precios de compra p_j de los productos en el mercado - externo y sus respectivos costos internos de fabricación c_j.

Para este problema se tienen las siguientes variables de-

decisión:

x_j : producción interna del producto j

x_{n+j} : compra externa del producto j

$$(j = 1,\ldots,n)$$

Se tienen por lo tanto 2n variables de decisión o posibles actividades para este problema.

Se tienen además las siguientes restricciones:

Restricciones en los tiempos de producción de cada máquina:

máquina

$$\sum_j t_{ij}x_j \leq b_i \qquad (i = 1,\ldots,m)$$

Restricciones de satisfacción de las demandas:

producción compra externa producto

$$x_j + x_{n+j} = k_j \qquad (j = 1,\ldots,n)$$

Restricciones de nonegatividad de las actividades:

$$x_j \geq 0 \qquad (j = 1,\ldots,2n)$$

El objetivo económico es en este caso el de minimizar el costo total de satisfacer los compromisos contraídos:

$$\min \; z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j + \sum_{j=n+1}^{2n} p_j x_j$$

En forma condensada, el problema anterior queda:

$$\min \quad z = cx + py$$

sujeta a

$$Tx \leq b$$

$$Ix + Iy = k \qquad (2.3)$$

$$x,y \geq 0 \qquad x,y \in R^n$$

Un ejemplo de aplicación macroeconómica de la programación lineal puede verse en el siguiente modelo nacional de insumo-producto, el cual, con algunos ajustes para hacerlo dinámico, se podría utilizar en la formulación de políticas económicas nacionales a mediano plazo. En el ejemplo aquí descrito se desea programar, para un solo período de tiempo, las actividades económicas de tres sectores interrelacionados, los cuales podrían ser, por ejemplo, los sectores agropecuario, industrial y de servicios de un país, respectivamente.

La información económica necesaria para la formulación de este problema puede verse en el CUADRO II (los datos son ficticios) y la explicación de la matríz simplificada de insumo-producto que allí aparece es como sigue: El sector económico 1, por cada unidad monetaria que produce, requiere adquirir de los sectores 2 y 3, 0.1 y 0.2 unidades monetarias de insumos respectivamente, más 0.3 unidades monetarias de importaciones y 0.3 unidades monetarias de fuerza de trabajo. Además, el sector 1 requiere una utili

SECTOR QUE VENDE	SECTOR QUE COMPRA			DEMANDA FINAL		PRODUCCION SECTORIAL
	1	2	3	CONSUMO INTERNO	EXPORTACIONES	
1	—	0.2	0.1	$100 + y_1$	x_1	z_1
2	0.1	—	0.3	$125 + y_2$	x_2	z_2
3	0.2	0.2	—	$30 + y_3$	x_3	z_3
IMPORTACIONES	0.3	0.1	0.2	DISPONIBILIDAD MAX.		
FUERZA DE TRABAJO	0.3	0.4	0.1	250		
UTILIDAD	0.1	0.1	0.3			
TOTAL	1.0	1.0	1.0			
CAPITAL REQUERIDO	0.8	0.5	2.0	700		

CUADRO II

INFORMACION ECONOMICA SECTORIAL

dad unitaria de 0.1 unidades monetarias y una inversión de capital de 0.8 unidades.

Las relaciones insumo-producto entre los sectores son, para el período en cuestión:

$$
\begin{aligned}
0.2\, z_2 + 0.1\, z_3 + 100 + y_1 + x_1 &= z_1 \\
0.1\, z_1 \qquad\quad + 0.3\, z_3 + 125 + y_2 + x_2 &= z_2 \\
0.2\, z_1 + 0.2\, z_2 \qquad\quad + 30 + y_3 + x_3 &= z_3
\end{aligned}
$$

Se requiere además que las importaciones no excedan a las exportaciones (balanza comercial favorable o al menos equilibrada):

$$0.3\, z_1 + 0.1\, z_2 + 0.2\, z_3 \leqq x_1 + x_2 + x_3$$

Las restricciones de fuerza de trabajo y de capital disponible serían respectivamente:

$$0.3\, z_1 + 0.4\, z_2 + 0.1\, z_3 \leqq 250$$

$$0.8\, z_1 + 0.5\, z_2 + 2.0\, z_3 \leqq 700$$

Un posible objetivo económico podría ser por ejemplo, la maximización del consumo interno de la población:

$$\max \quad u = y_1 + y_2 + y_3$$

Si se deseara maximizar el empleo nacional, por ejemplo,- se tendría que eliminar la restricción de utilización de- fuerza de trabajo y utilizarla ahora como nueva función - objetivo:

$$\max \quad u' = 0.3\, z_1 + 0.4\, z_2 + 0.1\, z_3$$

Otras aplicaciones del problema de programación lineal a- la solución de importantes problemas prácticos se mencionan en (7) y entre ellas se pueden anotar las siguientes- áreas genéricas de aplicación:

(a) Aplicaciones militares

(b) Aplicaciones a las matemáticas puras y aplicadas como teoría de gráficas, análisis combinatorio, inversión y cálculo del rango de matrices, etc.

(c) Aplicaciones económicas en sectores como:
- industria petroquímica
- industria alimenticia
- metalurgia
- producción y distribución de energía eléctrica
- minería
- industria del papel
- transportes
- agricultura
- finanzas
- etc.

También en (7) se encuentran referencias de un gran número de contribuciones y aplicaciones de la programación lineal en las áreas arriba mencionadas, así como las principales técnicas de solución de este problema y su teoría correspondiente.

3. PROGRAMACION NO LINEAL Y SUS APLICACIONES

La formulación general del problema de programación no lineal es, de (1.1) o (1.2):

$$\min \text{ (o max) } \quad z = f(x)$$

sujeta a $\qquad g(x) \geqq 0 \qquad (3.1)$

con $\qquad x \in R^n$

donde $f(\cdot) : R^n \to R^1 \;;\; g(\cdot) : R^n \to R^m$

Como casos particulares de importancia de este problema se encuentran los siguientes:

(a) Problema de programación lineal:

En este caso: $\qquad f(x) = cx$

$$g(x) = Ax - d \qquad (3.2)$$

$$x \geqq 0$$

(b) Problema de programación cuadrática:

En este caso: $f(x) = cx + xDx$

$$g(x) = Ax - d \qquad (3.3)$$

$$x \geqq 0$$

y la matríz D debe ser positiva (negativa) semidefinida - para garantizar la convexidad (concavidad) de f(x) en el caso de minimización (maximización).

Una interesante aplicación de la programación cuadrática se encuentra en el modelo de Markowitz de selección de la cartera óptima de inversiones bajo condiciones de incertidumbre (6). En este modelo se tienen n posibilidades de - inversión con rentabilidades aleatorias, de las cuales se conocen sus valores esperados μ_i y su matríz $Q = (q_{ij})$ de covariancias, donde:

$$q_{ij} = E((i - \mu_i)(j - \mu_j)) = E(ij) - \mu_i\mu_j$$

(si la variable aleatoria i es independiente de la variable j: $E(ij) = \mu_i\mu_j$ y $q_{ij} = 0$)

y $q_{ii} = \sigma_i^2$, la variancia de la rentabilidad unitaria de la inversión i-ésima $(i = 1,\ldots,n)$.

La variancia de una cartera cualquiera x de inversión está dada por xQx y una posible formulación de este problema sería la de minimizar la variabilidad total de la inversión sujeta a diversas restricciones de disponibilidad de capital, categorías de inversión, etc. y una restricción-de utilidad esperada mínima c como base. La formulación matemática de este problema quedaría entonces (6), (8):

$$\min \quad z = xQx$$

$$\text{sujeta a} \qquad Ax = d \tag{3.4}$$

$$\text{y} \qquad \sum_i \mu_i x_i \geqq c \; ; \qquad x \geqq 0$$

(c) Problema de programación convexa separable:

En este caso:

$$f(x) = \sum_j f_j(x_j)$$

$$g(x) = \sum_j g_j(x_j) - d \tag{3.5}$$

$$x_j \geqq 0 \qquad (j = 1,\ldots,n)$$

(Todas las funciones del problema son funciones convexas de una sola variable).

Una aplicación práctica de este problema se daría en el caso de selección de proveedores para un artículo determinado. Si se tienen n posibles proveedores para este artículo, cada uno con una función de costo para diferentes cantidades del producto $f_j(x_j)$ $(j = 1,\ldots,n)$ (estas funciones representan los distintos precios y políticas de descuento de cada proveedor) y x_j denota la cantidad del producto que se adquiere del proveedor j-ésimo, la formulación matemática de este problema quedaría:

$$\min \quad z = \sum_j f_j(x_j)$$

sujeta a $$\sum_j x_j = d \qquad (3.6)$$

y con $$0 \leq x_j \leq u_j \qquad (j = 1,\dots,n)$$

donde d es la cantidad de producto que se debe adquirir y las u_j $(j = 1,\dots,n)$ representan limitaciones en las cantidades que cada proveedor puede surtir.

(d) Problema de programación geométrica:

El problema de programación geométrica en forma general es (3), (8):

$$\min \quad z = \ln f_o(x)$$

sujeta a $$\ln f(x) \leq 0 \qquad (3.7)$$

$$x - Ay = d$$

y $$h_j(x) = \sum_{i=n_j}^{m_j} e^{x_i} \qquad (j = 0,1,\dots,p)$$

donde $f(\cdot) : R^{m_p} \to R^p$, los vectores $x \in R^{m_p}$ y $y \in R^n$ son variables y el vector $d \in R^{m_p}$ y la matríz A $(m_p x n)$ son constantes. En este problema $n_o = 1$, $n_1 = m_o + 1$, ..., $n_p = m_{p-1} + 1$.

El orígen de la denominación programación geométrica a esta forma particular del problema general de programación no lineal y a sus correspondientes técnicas de solución se debe principalmente a sus aplicaciones prácticas a problemas de diseño óptimo en la ingeniería y sus ciencias rela cionadas. Como un ejemplo de aplicación de la programación geométrica al diseño de contenedores, se tiene el siguiente problema:

Se desea diseñar un contenedor de forma rectangular y dimensiones óptimas, que sirva para transportar periódicamente un cierto volumen v de un producto. Los lados y el fondo del contenedor se fabrican de material de desecho, sin costo, pero con una disponibilidad máxima de d unidades de área durante el período considerado. El material para los extremos del contenedor cuesta c unidades monetarias por unidad de área y el material para la tapa cuesta p unidades monetarias por unidad de área. Los cargos de transporte por cada contenedor son de k unidades monetarias, sin importar sus dimensiones específicas.

El objetivo económico en este caso sería el de minimizar los costos totales de materiales y de embarque para los contenedores durante el período considerado:

$$\min \ z = 2c\, w_2 w_3 \frac{v}{w_1 w_2 w_3} + p\, w_1 w_2 \frac{v}{w_1 w_2 w_3} + k \frac{v}{w_1 w_2 w_3} \, .$$

(donde w_1, w_2 y w_3 son las dimensiones de los contenedores), sujetos a la restricción de disponibilidad del material de desecho:

$$\frac{v}{w_1 w_2 w_3} (2 w_1 w_3 + w_1 w_2) \leq d$$

y a la positividad estricta de las dimensiones:

$$w_1 > 0, \quad w_2 > 0, \quad w_3 > 0$$

En forma general este problema se puede formular como:

$$\min \quad z = f_o(w)$$

$$\text{sujeta a} \qquad f_j(w) \leq 1 \qquad (j = 1,\ldots,p) \qquad (3.8)$$

$$w > 0$$

donde las funciones $f_j(w)$ $(j = 0,1,\ldots,p)$ son de la forma:

$$f_j(w) = \sum_{i=1}^{k_j} c_{ij} \left\{ \prod_{k=1}^{n_{ij}} w_k^{a_{ijk}} \right\}$$

Estas funciones se denominan "posinomios" (o polinomios positivos) en la terminología particular de la programación geométrica. Finalmente, se puede demostrar, mediante un cambio de variable $w = e^x > 0$, que las dos formas generales (3.7) y (3.8) del problema de programación geométrica son equivalentes (8).

(e) Problema de control óptimo:

En el problema de control óptimo en tiempo discreto se tienen un vector $u^i = (u_1^i,\ldots,u_m^i)$ de variables de control y un vector $x^i = (x_1^i,\ldots,x_n^i)$ de variables de estado, las cuales describen completamente al sistema que se quiere controlar en el tiempo i $(i = 1,\ldots,T)$. La función vectorial $g^i(x^i,u^i)$, $g^i(\cdot,\cdot) : R^n \times R^m \to R^n$, describe el cambio de estado del sistema en cuestión del tiempo i al tiempo i+1, dados un estado inicial x^i y una decisión u^i en el tiempo i:

$$x^{i+1} = x^i + g^i(x^i,u^i)$$

Asimismo, la función $f^i(x^i,u^i)$, $f^i(\cdot,\cdot) : R^n \times R^m \rightarrow R^1$, indica el beneficio (o costo) asociado con estar en el estado x^i en el tiempo i ($i = 1,\ldots,T$) y efectuar una decisión (control) u^i en ese mismo tiempo. Para completar la formulación del problema se debe especificar el estado inicial del sistema, x^1, y en alguna forma, ya sea explícita o implícita, el estado final, x^{T+1}.

El problema de control óptimo se formula entonces como:

$$\min \text{ (o max) } \quad z = \sum_i f^i(x^i,u^i)$$

sujeta a $\quad x^{i+1} = x^i + g^i(x^i,u^i) \quad (i = 1,\ldots,T) \quad (3.9)$

y $\quad q(x^{T+1}) = 0, \quad x^1$ especificado

donde $q(\cdot) : R^n \rightarrow R^k$, $0 \leq k \leq n$, es una función de restricción del estado final. Finalmente, se pueden especificar, para $i = 1,\ldots,T$, subconjuntos X_i en R^n, U_i en R^m, D en R^s y una función de restricción conjunta $h(\cdot,\cdot)$: $R^{n(T+1)} \times R^{mT} \rightarrow R^s$, que imponen condiciones adicionales sobre los estados y controles del sistema (2).

El caso estocástico es mucho más difícil de formular y de resolver. Uno de los problemas de control óptimo estocástico en tiempo discreto de estructura más simple y que ha sido bastante estudiado en la literatura (1), (5), es el del control óptimo de un proceso estocástico Markoviano - discreto en el tiempo y en el espacio (cadena de Markov). Un ejemplo de un sistema cuya secuencia de estados en el tiempo $\{x^i\}$ constituye un proceso de Markov es el siguiente sistema lineal:

$$x^{i+1} = Ax^i + Bu^i + \xi^i \qquad (3.10)$$

donde A y B son matrices constantes, $\{\xi^i\}$ es una secuencia de variables aleatorias independientes y los controles u^i dependen únicamente de los estados x^i (5).

Como ejemplos de aplicación del problema de control óptimo, se pueden mencionar el control dinámico de inventarios en el tiempo para las situaciones en que las demandas se conocen perfectamente durante todo el período de control (caso determinístico) y para aquellas situaciones en que únicamente se conocen sus funciones de distribución de probabilidad en el tiempo (caso estocástico).

El problema del control de inventarios determinístico dinámico se podría formular como:

$$\min \quad z = \sum_j f_j(x_j, u_j) \tag{3.11}$$

sujeta a las ecuaciones de balance de inventarios:

$$x_{j+1} = x_j + u_j - d_j \qquad (j = 1,\ldots,n)$$

con el inventario inicial x_1 especificado; $x_j \geq 0$ es la posición de inventario del sistema al principio del período j, $u_j \geq 0$ es la cantidad pedida al principio del período j (se supone aquí que los pedidos llegan dentro del mismo período en que se colocan) y $d_j \geq 0$ es la demanda por el producto considerado durante el período j. Las funciones f_j proporcionan el costo asociado con el período j cuando u_j es la cantidad pedida y x_j es la posición de inventario antes de colocarse el pedido.

En el caso en que las demandas d_j sean variables aleatorias discretas e independientes con funciones de distribución de probabilidad $p_j(d_j)$ conocidas, el objetivo económico del problema (3.11) se transforma en el de minimizar el valor esperado del costo total para los n períodos considerados:

$$\min \quad z = \sum_{d_j \geq 0} \{ \prod_j p_j(d_j) \} \{ \sum_j f_j(x_j,u_j) \} \qquad (3.12)$$

(El objetivo anterior no es el único posible bajo situaciones de incertidumbre. En general y según la teoría de utilidad o los modelos de comportamiento racional que en ella se estudian, el objetivo será el de maximizar el valor esperado de una cierta función de utilidad, la cual dependerá de la organización o persona que toma la decisión).

4. PROGRAMACION ENTERA Y SUS APLICACIONES

El problema general de programación entera se formula como el problema general no lineal (3.1), más las restricciones adicionales de integralidad en las variables x_j ($j = 1,\ldots,n$):

$$\min\ (\text{o}; \max) \quad z = f(x)$$

$$\text{sujeta a} \qquad g(x) \geq 0 \qquad (4.1)$$

$$x \in R^n, \text{ entera}$$

y con $f(\cdot) : R^n \to R^1$; $g(\cdot) : R^n \to R^m$

Si únicamente las variables correspondientes a un subconjunto propio de las n variables originales x_j del problema se restringen a ser enteras, el problema se convierte en un problema de programación entera mixta. Obsérvese que el problema de programación entera es un caso particular del problema de programación entera mixta y no al revés, como pudiera parecer. Si las variables enteras se restrin gen únicamente a los valores 0,1, el problema se denomina de programación binaria (mixta). Cualquier problema de pro gramación entera (mixta) con variables enteras acotadas se puede representar como un problema de programación binaria (mixta) equivalente, ya que cualquier variable entera aco tada $x_j \leq u_j$ se puede remplazar por una suma de variables binarias:

$$x_j = \sum_{k_j} t_{k_j} \quad \text{donde las } t_{k_j} \text{ son binarias:}$$

$$t_{k_j} = 0,1 \quad (k_j = 1,\ldots,u_j)$$

El problema de programación entera se aplica en aquellos casos en que los niveles de las actividades económicas son naturalmente enteros (ej.: en la programación de la fabri cación de determinados tipos de productos donde no tendría sentido hablar de cantidades fraccionarias, etc.). Sin em bargo, posiblemente la aplicación de la programación ente ra más importante se encuentra bajo su forma de programa- ción binaria, donde las variables binarias se utilizan pa ra formular situaciones de decisión o no decisión, o de relaciones lógicas de dependencia; situaciones muy frecuen tes en la formulación de problemas prácticos del tipo, por ejemplo, de localización de plantas, de selección y progra mación de proyectos de inversión, de asignación de hombres o equipos a tareas, etc.

Algunas restricciones lógicas típicas con variables bina- rias serían, por ejemplo, las siguientes:

(Las variables binarias x_i y x_j representan la selección o el rechazo de los proyectos i y j respectivamente)

$x_i + x_j \geqq 1$: se debe emprender al menos uno de los proyectos

$x_i + x_j = 1$: uno de los proyectos se debe emprender necesariamente, el otro se descarta (exclusividad mutua)

$x_i + x_j \leqq 1$: se selecciona a lo más uno de los proyectos

$x_j - x_i \leqq 0$: el proyecto j está subordinado al proyecto i ($x_j \leqq x_i$)

Entre las aplicaciones más importantes de la programación binaria se encuentra el modelo de Lorie-Savage de presupuesteo de capital, al cual también se le denomina en la literatura como "knapsack" (mochila) extendido o multidimensional:

$$\max \quad z = \sum_j c_j x_j$$

$$\text{sujeta a} \qquad \sum_j a_{tj} x_j \leqq d_t \qquad (t = 1,\ldots,T) \qquad (4.2)$$

$$\text{con} \qquad x_j = 0,1 \qquad (j = 1,\ldots,n)$$

En este caso el problema consiste en seleccionar óptimamente, de entre n posibles proyectos de inversión independientes, aquella combinación de ellos que maximice la utilidad total, donde las c_j ($j = 1,\ldots,n$) denotan las utili dades individuales de cada proyecto, las a_{tj} indican el costo durante el período t de emprender el proyecto j y las d_t indican las disponibilidades de capital durante los períodos t $(t = 1,\ldots,T)$. Las variables binarias x_j $(j = 1,\ldots,n)$ indican si se emprende o no cada proyecto j.

Otra aplicación interesante de la programación binaria se encuentra en el siguiente modelo de localización de plantas o industrias, el cual ilustra también el manejo de cargos fijos mediante la utilización de variables binarias.- En este problema se tienen m posibles localidades y un solo producto con n clientes o mercados dispersos geográficamente. Si la planta o industria se localiza en la localidad i $(i = 1,\ldots,m)$, se puede construir hasta una capacidad máxima de producción M_i (dependiente de i) y se incurre en un costo fijo, único, de instalación f_i. En cada uno de los mercados j $(j = 1,\ldots,n)$ se tiene una demanda conocida d_j por el producto, que debe ser satisfecha. Los embarques z_{ij} de la localidad i al mercado j tienen un costo unitario c_{ij} y se desea minimizar el costo total de instalación de las plantas y de embarques del producto:

$$\min \ z = \sum_i f_i x_i + \sum_i \sum_j c_{ij} z_{ij}$$

sujeta a restricciones de satisfacción de las demandas:

$$\sum_i z_{ij} = d_j \qquad (j = 1,\ldots,n)$$

restricciones de capacidad de producción:

$$\sum_j z_{ij} \leq M_i x_i \qquad (i = 1,\ldots,m) \qquad (4.3)$$

restricciones de nonegatividad de los embarques:

$$z_{ij} \geq 0 \qquad \text{(toda i,j)}$$

y restricciones lógicas de existencia o no existencia de plantas en cada localidad:

$$x_i = 0,1 \qquad (i = 1,\ldots,m)$$

Por último, otro problema importante de programación binaria es el problema de "cobertura de conjuntos" (set covering):

$$\min \quad z = cx$$

sujeta a
$$Ex \geq e \tag{4.4}$$

$$x_j = 0,1 \qquad (j = 1,\ldots,n)$$

donde $E = (e_{ij})$ es una matríz mxn de ceros o unos y e es un vector mx1 de unos. Si en el problema (4.4) las restricciones son $Ex = e$, el problema se denomina de "particionamiento de conjuntos" (set partitioning).

Entre las aplicaciones de este problema, se encuentran problemas combinatorios en redes, como los de apareamiento (matching), programación de tripulaciones a vuelos en líneas aéreas, asignación de vehículos o aviones a rutas, diseño de distritos administrativos o políticos, recuperación de información en computadoras, etc.

5. REFERENCIAS

(1) Bellman, R.E. y Dreyfus, S.E., Applied Dynamic Programming, Princeton, 1962.

(2) Canon, M.D., Cullum, C.D. y Polak, E., Theory of Optimal Control and Mathematical Programming, McGraw-Hill, 1970.

(3) Duffin, R., Peterson, E. y Zener, C., Geometric Programming, Wiley, 1967.

(4) Garfinkel, R. y Nemhauser, G., Integer Programming, Wiley, 1972.

(5) Kushner, H., Introduction to Stochastic Control, Holt, Rinehart and Winston, 1971.

(6) Markowitz, H.M., Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investments, Wiley, 1962.

(7) Simonnard, M., Linear Programming, Prentice-Hall, 1966.

(8) Zangwill, W.I., Nonlinear Programming: A Unified Approach, Prentice-Hall, 1969.

centro de educación continua
división de estudios superiores
facultad de ingeniería, unam

INGENIERIA DE SISTEMAS

A P L I C A C I O N

SISTEMA ADAPTIVO PARA LA PROGRAMACION INTEGRAL DE LA SOP.

ING. HUMBERTO VALDES RUY SANCHEZ

JUNIO DE 1978.

SISTEMA ADAPTIVO PARA LA PROGRAMACION INTEGRAL DE LA SOP

- . PROGRAMACION COMO UN TODO . -

Por. Humberto Valdés Ruy Sánchez

INTRODUCCION

Con el fin de ubicar la parte a que se refiere esta exposición, dentro del marco general del SAPRIN-SOP, se reproduce en la Figura 1 el esquema que corresponde a la conceptualización del Sistema, destacándose en el mismo, la etapa de "Programación como un Todo".

S A P R I N - S O P

SISTEMA ADAPTIVO PARA LA PROGRAMACION INTEGRAL DE LA SOP

(Conceptualización)

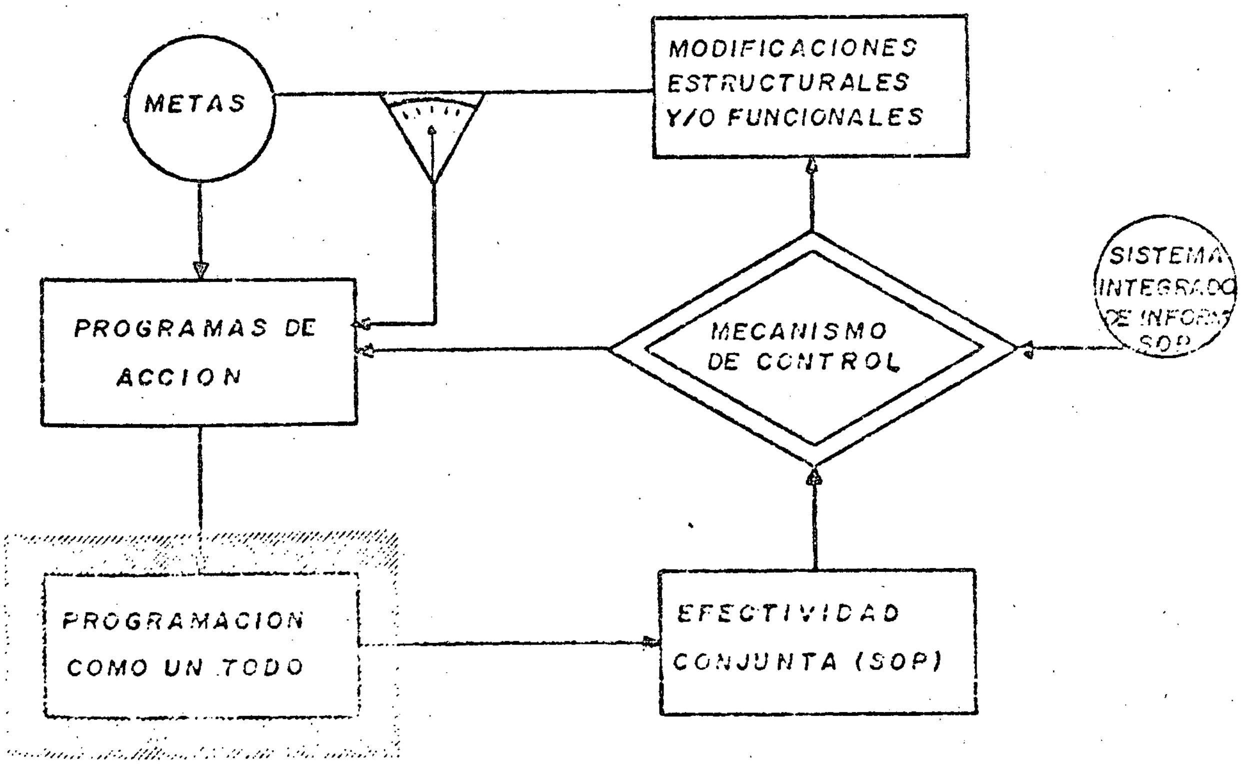


FIGURA 1

Los insumos de esta etapa lo constituyeron las metas establecidas al inicio de la presente Administración, mismas que originaron la necesidad de que la SOP trabajase con base en los 11 Programas anteriormente mencionados. Como producto se obtuvo la programación de los Programas propiamente dicha, habiéndose tenido que dar solución para alcanzarla a las siguientes preguntas:

- ¿Qué inversión se debería manejar cada año con el fin de lograr la consecución de las metas y cómo y de dónde se deberían obtener los recursos financieros que se hiciesen necesarios para ello?

- ¿Qué inversión anual se debería destinar a cada uno de los Programas a cargo de la SOP de manera de cumplir las metas y obtener el mejor efecto en cuanto a los objetivos planteados?

- ¿Qué porcentaje de la meta total fijada para cada Programa debería cubrirse cada año y qué recursos (humanos, maquinaria y materiales), propios y ajenos, se necesitarían para la constitución de las metas anuales resultantes?

- ¿Cuándo y con qué recursos se deberían ejecutar las obras cuya realización permitiría alcanzar las metas?

- ¿Cómo, cuándo y con qué recursos se deberían llevar a cabo las diferentes actividades que constituyen cada una de las obras realizadas?

En la Figura 2 se muestra por medio de una caja negra lo antes mencionado, observándose que para responder a las interrogantes antes comentadas, fué necesario, dada la complejidad y magnitud del problema, dividir el sistema en 5 subsistemas en serie, uno por cada una de las preguntas planteadas.

En los capítulos siguientes se comentará brevemente cada uno de los subsistemas mencionados.

SUBSISTEMA DE PROGRAMACION FINANCIERA

Es obvio que para alcanzar las metas que le fueron fijadas a la Secretaría de Obras Públicas, se hizo necesario que esta dependencia se enfrentase a la tarea de allegarse los fondos necesarios para financiar sus Programas. La finalidad de este subsistema fué definir la inversión anual que se debía realizar durante cada uno de los años que consti

SAPRIN - SOP

PROGRAMACION COMO UN TODO

DIAGRAMA GENERAL DEL SISTEMA

INSUMO

METAS FIJADAS A LA SECRETARIA DE OBRAS PUBLICAS AL INICIO DE LA PRESENTE ADMINISTRACION EN CUANTO A LOS SIGUIENTES PROGRAMAS:

1.- CAMINOS DE MANO DE OBRA
2.- CARRETERAS
3.- CARRETERAS URBANAS
4.- AEROPUERTOS
5.- VIAS FERREAS
6.- CIUDADES INDUSTRIALES
7.- INSTALACIONES DEPORTIVAS
8.- EDIFICIOS
9.- CENTROS CULTURALES
10.- OBRAS EN PARQUES NATURALES
11.- OBRAS PARA CABECERAS MUNICIPALES

- SUBSISTEMAS -

→ 1 → 2 → 3 → 4 → 5 →

1.- PROGRAMACION FINANCIERA
2.- PROGRAMACION DE INVERSIONES
3.- ASIGNACION DE RECURSOS
4.- ASIGNACION DE PROYECTOS
5.- PROGRAMACION DE OBRAS

PRODUCTO

PROGRAMACION DE LAS ACTIVIDADES DE LA SECRETARIA COMO UN TODO

Figura 2

tuían el horizonte de planeación analizado, a fin de alcanzar las metas establecidas, determinándose, así mismo, las cantidades que en cada período deberían ser solicitadas de cada una de las fuentes de financiamiento (tanto nacionales como extranjeras) consideradas, así como las condiciones sobre las que se debería tratar de negociar dichas solicitudes. En la Figura 3 se muestra el diagrama correspondiente a este subsistema.

Para poder resolver el problema descrito y dado el carácter combinatorio del mismo, ya que se manejaron diversas fuentes de financiamiento con muy diferentes condiciones (períodos de pago y tasas de interés), todo ello en el tiempo, se consideró como técnica más adecuada la programación lineal, complementada por un muy amplio análisis de sensibilidad.

Los resultados específicos del modelo determinaron:

- La parte de la inversión total, requerida para cumplir las metas, que debía ejercerse en cada uno de los años.

- La cantidad anual de recursos monetarios que se debía procurar obtenerse de cada fuente de financiamiento, así como las condiciones a lograr.

- La forma de pago que convenía negociar

Dado que la implementación de los resultados del modelo no dependía en forma exclusiva del organismo que hace el análisis, sino que estaba sujeta a la reacción de Instituciones ajenas al mismo, que podían o no estar de acuerdo con lo que se les solicitará, fué necesario estar preparado para conocer hacia donde se debían hacer tender las negociaciones, de manera de asegurar siempre los intereses del país. Los comentarios anteriores hicieron patente la necesidad de realizar un exhaustivo análisis de sensibilidad para los siguientes factores:

- Inversión total necesaria para cumplir las metas
- Tasa de rendimiento de la inversión
- Limitaciones en cuanto a las formas de pago de los créditos
- Condiciones de los créditos (tasas de interés, períodos de gracia y de pago, etc.)

En las Figuras 4, 5, 6 y 7 se muestra en forma esquemática el tipo de resultados a que condujo el análisis de sensibilidad sobre cada uno de los parámetros mencionados en los guiones anteriores. Las tres primeras Figuras se juzga que por sí solas son explicativas; con respecto a la Figura 7 cabe mencionar que permite reaccionar de inmediato a cambios en cuanto a las condiciones de los créditos, ampliando -

INVERSION TOTAL REQUERIDA PARA CUMPLIR LAS METAS

(Para una tasa de rendimiento "r" determinada)

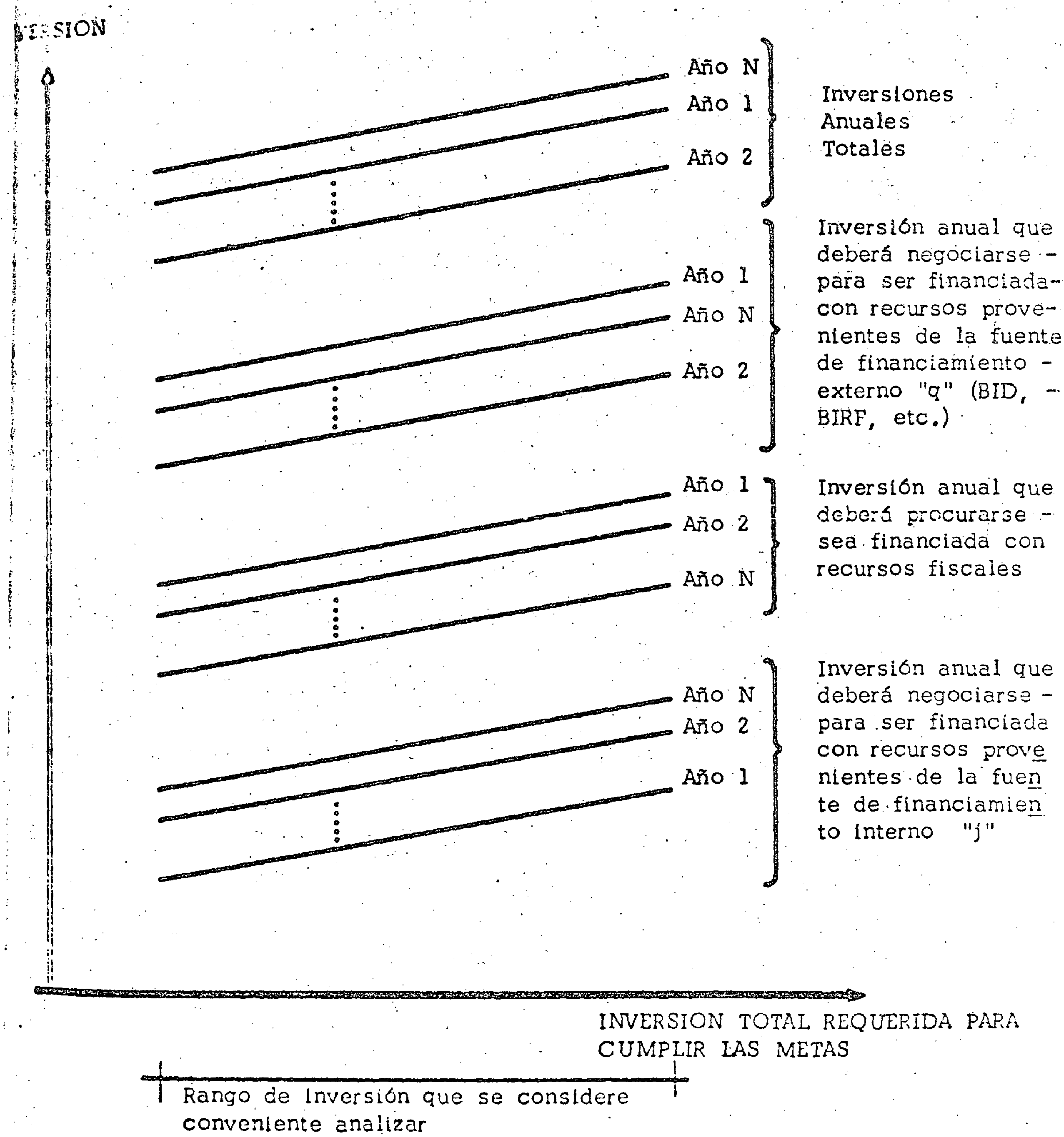


FIGURA 4

FORMACION DE "CAPITAL" EN FUNCION DE LA TASA DE RENDIMIENTO

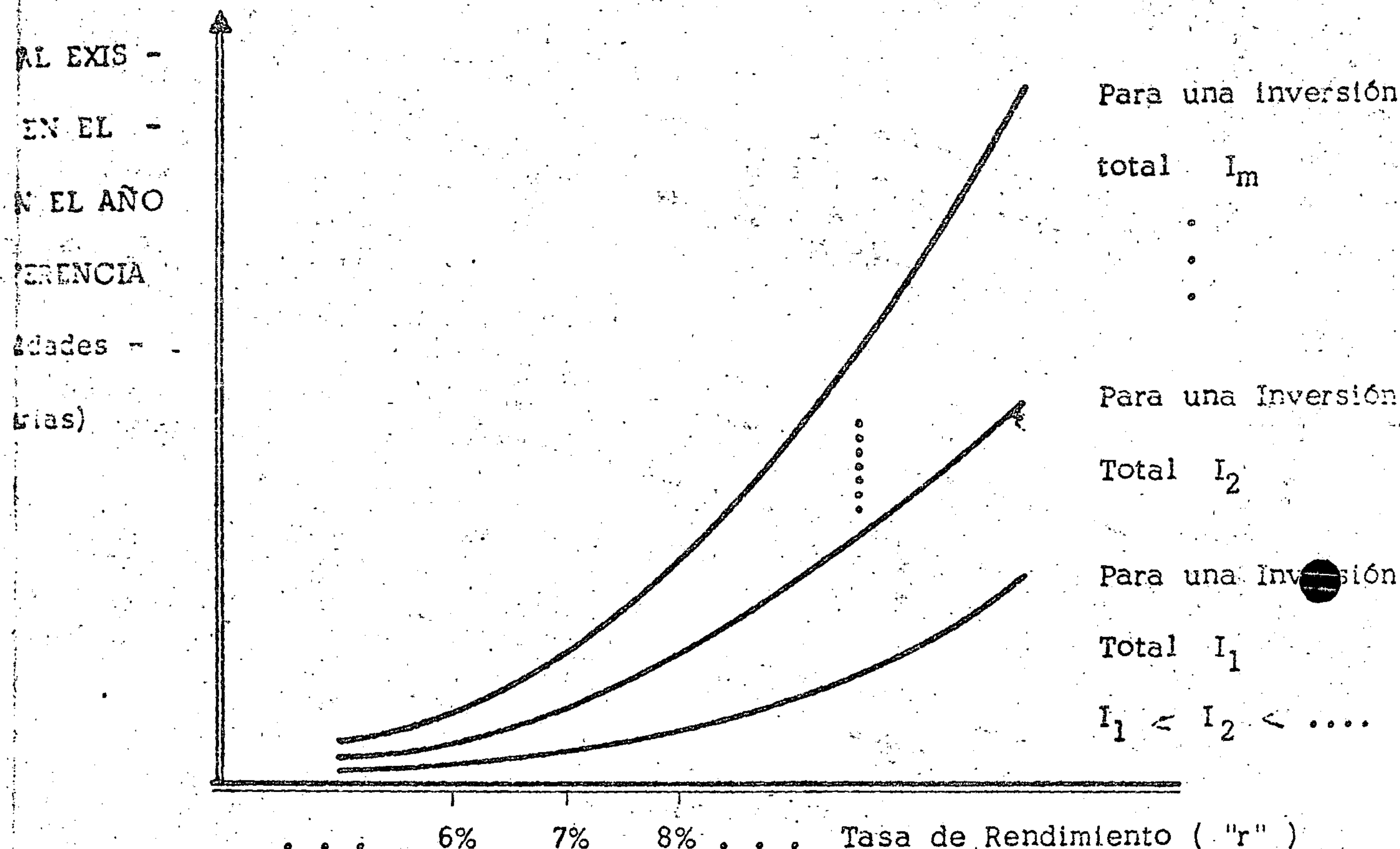


FIGURA 5

EFECTO COMPARATIVO DE LA FORMA DE PAGO EN LA FORMACION

DE "CAPITAL"

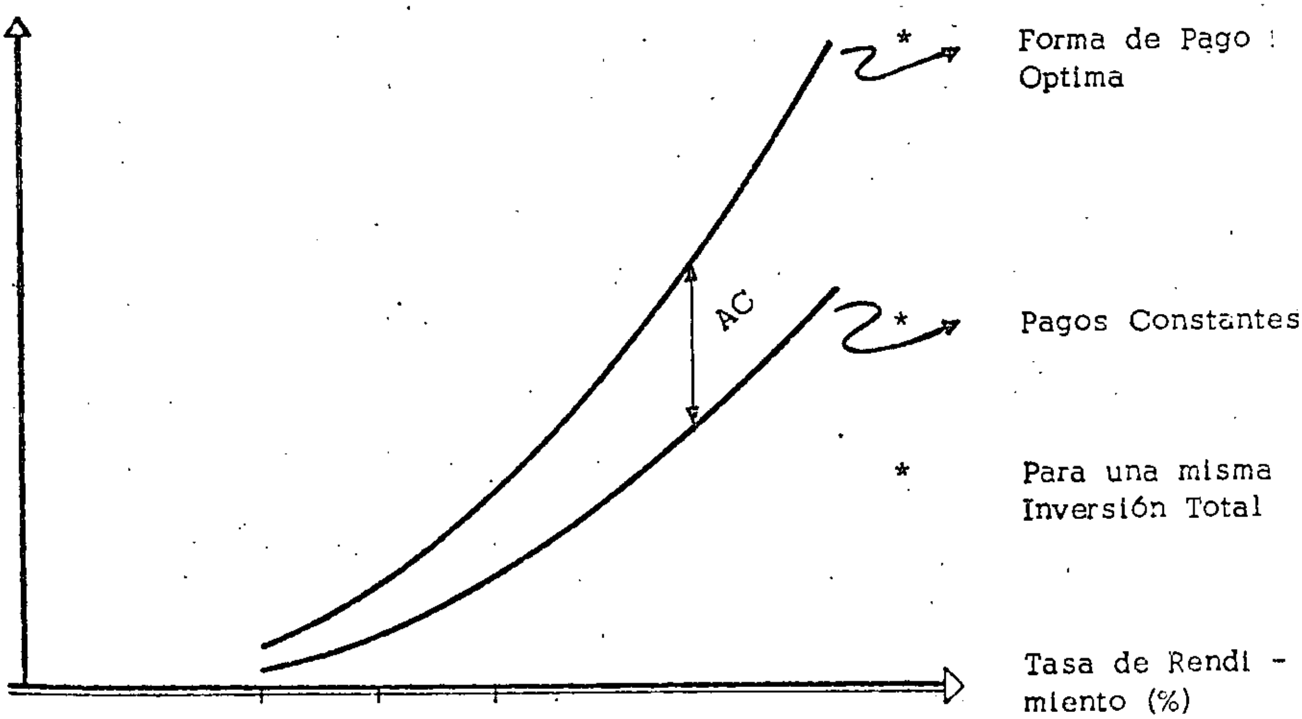


FIGURA 6

en forma significativa la capacidad de negociación que se tenga, ya que se cuenta con un panorama específico sobre si conviene aceptar una mayor tasa de interés mientras se consiga un plazo mayor de pago etc. Con el fin de facilitar el uso de las curvas que se consignan en la Figura que nos ocupa, cabe citar que sobre una misma curva aparecen todos los planes de financiamiento (definidos por sus dos parámetros: tasa de interés y plazo durante el período de pago) que unitariamente generan el mismo efecto.

SUBSISTEMA DE PROGRAMACION DE INVERSIONES

El subsistema de programación de inversiones, es aquel que define el monto de las inversiones en los programas, de tal forma que se cumplan, de la mejor manera, los objetivos establecidos. El problema planteado se caracterizó por la presencia de las siguientes situaciones:

- Se deseaba satisfacer varios aspectos (objetivos múltiples)
- El grado en que cada alternativa de inversión alcanzaba los objetivos no podía ser especificada en forma precisa; en otras palabras existía, incertidumbre en cuanto a la efectividad que lograría cada alternativa de inversión

- El valor que se asignó a los efectos asociados a una determinada alternativa de inversión variaba con el tiempo, al considerarse el factor oportunidad de los mismos.

- Dado que existían objetivos múltiples, fué necesario enfrentarse a la tarea de decidir a que cantidad de cada objetivo debería renunciarse a fin de alcanzar ciertos límites específicos en los restantes.

Para la solución de un problema como el descrito, fué necesario recurrir al auxilio del "Análisis de Decisiones", técnica específicamente diseñada para este tipo de situaciones, es decir, aquellas a las que le es inherente la incertidumbre, las alternativas son múltiples e inclusive algunas se contraponen y además se manejan aspectos sociales, económicos, políticos y técnicos. El análisis de decisiones auxilia al responsable de su toma por medio de un exámen racional y cuantitativo de las alternativas factibles, en función de un estudio de sus implicaciones.

La asignación y programación de inversiones en la Secretaría de Obras Públicas, se realizó en concordancia con los siguientes objetivos:

Integrar la mayor cantidad de territorio

Beneficiar al mayor número de personas

Generar el mayor número de empleos

Incrementar el turismo

Acelerar el desarrollo industrial

Incrementar la tranquilidad social

Promover el desarrollo agrícola

Buscar el mejor impacto institucional

Proporcionar eficientes servicios públicos

Con el fin de medir el impacto de las inversiones en los programas - sobre cada uno de los objetivos, se definieron 9 medidas de efectividad, una por cada uno de éstos; en la Figura 8 se presenta, con base en un diagrama, el funcionamiento de este subsistema, mostrándose en forma conceptual la estructura del problema de decisión.

Los pasos seguidos para la consecución de lo anterior, se pueden resumir en los siguientes:

- INVERSION QUE SE DEBERA REALIZAR CADA AÑO (PROVIENE DEL SUBSISTEMA 1)

- PROGRAMAS A CONSIDERAR

. CAMINOS DE MANO DE OBRA

. CARRETERAS

. CARRETERAS URBANAS

. AEROPUERTOS

. VIAS FERREAS

. CIUDADES INDUSTRIALES

. INSTALACIONES DEPORTIVAS

. EDIFICIOS

. CENTROS CULTURALES

. OBRAS EN PARQUES NATURALES

. OBRAS PARA CABECERAS MUNICIPALES

MODELO 2

OBJETIVO:

DEFINIR QUE INVERSION DEBERA DESTINARSE A CADA PROGRAMA CADA AÑO DE MANERA QUE:

- SE GENEREN EL MAYOR NUMERO DE EMPLEOS.
- SE BENEFICIE AL MAYOR NUMERO DE PERSONAS
- SE INTEGRE LA MAYOR CANTIDAD DE TERRITORIO
- SE DISMINUYA LA INTRANQUILIDAD SOCIAL
- SE INCREMENTEN LOS SERVICIOS PUBLICOS
- SE BUSQUE EL MEJOR IMPACTO INSTITUCIONAL
- SE ALIENTE EL DESARROLLO INDUSTRIAL
- SE INCREMENTE EL DESARROLLO AGRICOLA
- SE PROPICIE EL TURISMO

UTILIDAD

ESPERADA

MAXIMA

CUANTO SE DEBERA INVERTIR EN CADA PROGRAMA DE LOS ANTES CITADOS EN CADA AÑO

FIGURA 8

1.- Se cuantificó el efecto de diferentes alternativas de inversión, - en términos de los objetivos, por conducto de las medidas de - efectividad consideradas. Para ello, se definieron distribucio - nes de probabilidad dada la incertidumbre que existía al respecto. En la Figura 9 se muestra esquemáticamente lo anterior.

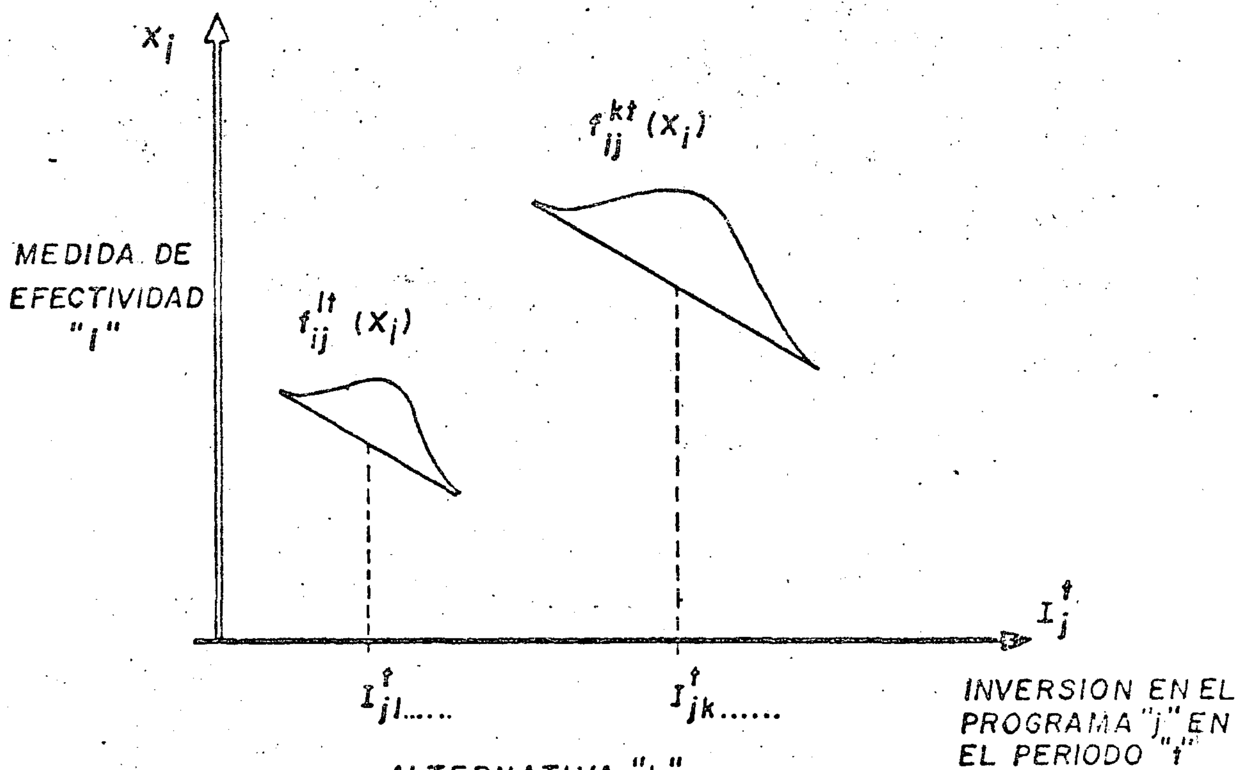


FIGURA 9

Densidades de probabilidad que cuantifican las consecuencias de diferentes alternativas de inversión en cada programa, en cada período, - en términos de las medidas de efectividad consideradas.

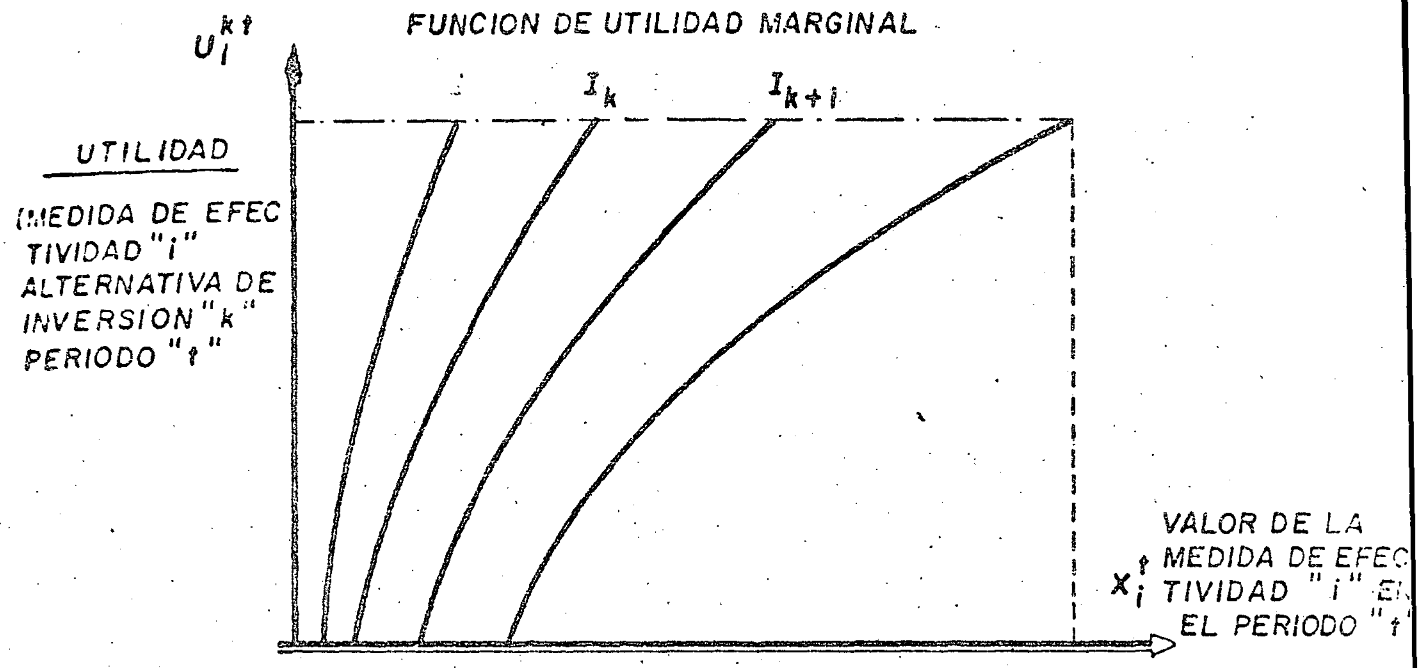
2.- Se procedió a detectar las preferencias que en forma individual y conjunta se tenían sobre los diferentes impactos que era factible obtener en cuanto a las medidas de efectividad consideradas. Para ello, se hizo uso del "Análisis de la Utilidad" - definiéndose funciones de utilidad marginales y multiobjetivas.

En la Figura 10 se muestran en forma esquemática tanto las - funciones de utilidad marginal como la función de utilidad multiobjetiva (para el caso de 2 medidas de efectividad).

3.- Una vez determinadas las distribuciones de probabilidad (inciso 1,) sobre las diferentes medidas de efectividad que cuantifica los - posibles impactos de cada alternativa de inversión sobre las - mismas y definidas las funciones de utilidad marginales y multiobjetiva, que reflejan las preferencias que sobre dichos impactos se tienen, fué posible proceder a la selección de la mejor - estrategia de inversión. Para esto fué necesaria la consecución de las tres etapas que a continuación se enuncian:

a) Calcular, para cada alternativa de inversión en cada programa - y para cada período, utilidades conjuntas esperadas.

FUNCION DE UTILIDAD MARGINAL



FUNCION DE UTILIDAD CONJUNTA O MULTIOBJETIVA

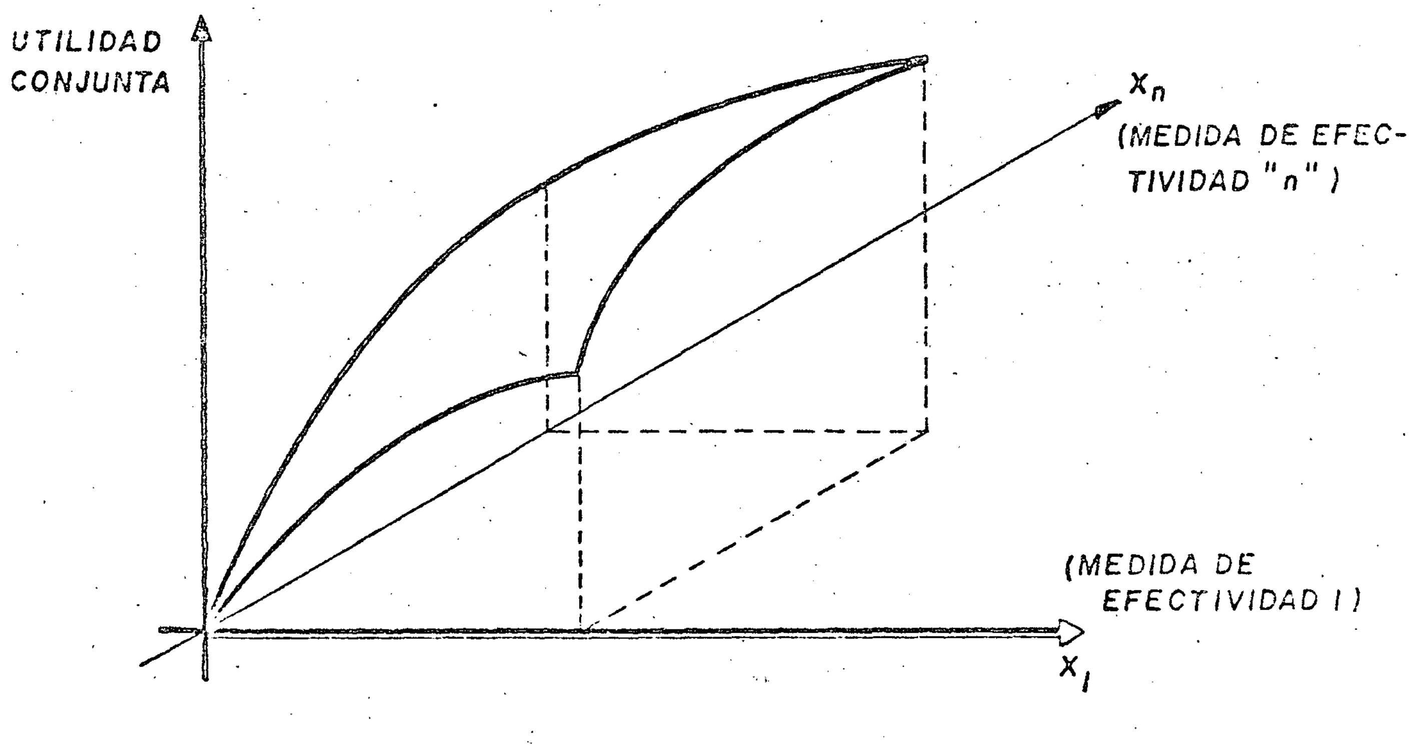


Figura 10

b) Determinar para cada programa y para cada período curvas "Utilidad Esperada-Inversión".

c) Plantear y resolver un modelo de programación matemática que consideraba el aspecto combinatorio del problema.

4.- Como última etapa se llevó a cabo un análisis de sensibilidad, cuyo objetivo fué el de detectar el efecto en los resultados obtenidos de variaciones en los factores que intervinieron. El análisis que nos ocupa permitió identificar los parámetros que mediante cambios podrían afectar la estabilidad de la solución. Así por ejemplo, se manejaron diferentes alternativas en cuanto a inversión global de manera de tener una herramienta que rápidamente permitiese redistribuir la inversión en los programas en caso de ser necesario.

SUBSISTEMA DE ASIGNACION DE RECURSOS

En este subsistema se consideraron los volúmenes de inversión asignados a cada programa, así como las metas que para cada uno de éstos se tenían, definiéndose la estrategia que permitiese alcanzar las metas haciendo el mejor uso de los recursos disponibles de todo tipo (monetarios, maquinaria, materiales, etc.) considerándose para ello niveles de eficiencia actual y tomando en cuenta niveles de aspiración factibles.

Específicamente la estrategia seleccionada fué aquella que permitía de la mejor manera cumplir las metas trazadas, es decir, la que lograba-minimizar los costos de realización de todos los programas tomando en cuenta en lo que a recursos se refiere los costos de adquisición, utilización, baja y tiempo ocioso de los mismos. En la Figura 11 se muestra por medio de una caja negra la conceptualización de este subsistema, pudiendo notarse en el mencionado esquema que como resultados se obtiene por una parte la cantidad de programa (meta) que se debería cumplir en cada período y por la otra un panorama en cuanto a la utilización de los recursos, señalándose inclusive los que era necesario adquirir en cada período y los que inevitablemente, por algunos lapsos, tenían que permanecer ociosos.

Dada la naturaleza del problema, fué necesario para su solución plantearse con base en un modelo dinámico, utilizándose como herramienta la programación matemática, lo anterior se juzgó conveniente, tomando en cuenta el carácter combinatorio de dicho problema, además de que se tuvo que manejar explícitamente el tiempo y la interrelación que en cuanto a recursos y continuidad en las metas se hacía necesaria, de manera de alcanzar las cifras totales definidas.

INSUMOS PROVENIENTES DE OTROS MODELOS:

INSUMOS PROPIOS DEL MODELO

- RECURSOS ACTUALES DISPONIBLES RENOVABLES, PREVIA CLASIFICACION DE LOS MISMOS

- CANTIDAD DE RECURSO NECESARIO PARA TENER UNA UNIDAD DE CADA PROGRAMA POR PERIODO

- COSTOS UNITARIOS DE UTILIZACION DE CADA RECURSO POR UNIDAD DE TIEMPO, POR ADQUISICION, POR OPERACION, POR BAJAS Y POR TENER RECURSOS OCIOSOS

PRODUCTOS

- INVERSION POR PERIODO PARA CADA PROGRAMA

- METAS A CUMPLIR POR PROGRAMA EN LOS CUATRO PERIODOS

OBJETIVO:

MINIMIZAR LOS COSTOS DE REALIZACION DE TODOS LOS PROGRAMAS, TOMANDO EN CUENTA EN LO QUE A RECURSOS SE REFIERE LOS COSTOS DE: ADQUISICION, UTILIZACION, VENTA Y TIEMPO OCIOSO; PARA PODER CUMPLIR LAS METAS TRAZADAS POR LA PRESENTE ADMINISTRACION CON LA MINIMA INVERSION

- CANTIDAD DE RECURSO QUE SE DEBERAN ADQU RIR, UTILIZAR, ELIMINA O TENER OCIOSOS EN LOS DIFERENTES PERIODOS

- CANTIDADES DE PROGR MA QUE SE DEBERAN C PLIR EN CADA PERIODO

FIGURA 11

SUBSISTEMA DE ASIGNACION DE PROYECTOS

El objetivo de este subsistema fué el de ubicar en el tiempo, la realización de las obras que constituían cada programa como resultado de armonizar la prioridad y urgencia de las mismas con los recursos que se estimaba podría disponer la Institución para llevarlas a cabo. Bajo este orden de ideas, este subsistema recibía como insumos los resultados del subsistema anterior, de manera que respetando la asignación de recursos que se había fijado para cada programa y las aspiraciones que en cuanto a las metas para cada período se habían determinado, permitió situar, en bloque, las obras que constituían el programa a lo largo del tiempo, señalando además los recursos necesarios de que se podía disponer para la ejecución de cada obra.

En la Figura 12 se muestra con base en una caja negra el funcionamiento de este subsistema, pudiéndose observar que la ubicación de las obras a lo largo del tiempo se llevó a cabo procurando minimizar el tiempo de ejecución de cada uno de los programas. La técnica utilizada para este caso fué la programación matemática entera, específicamente la binaria.

En la Figura 13 se explica en forma gráfica el resultado de este subsistema.

- RECURSOS NECESARIOS PARA EJECUTAR CADA UNA DE LAS OBRAS DE CADA PROGRAMA
- DURACIONES DE CADA UNA DE LAS OBRAS DE CADA PROGRAMA
- DEPENDENCIAS EJECUTORAS DE LOS PROGRAMAS
- POSIBLE SECUENCIACION OBLIGATORIA
- FECHAS OBLIGATORIAS DE INICIO Y TERMINACION DE LOS PROYECTOS SI LAS HAY

INSUMOS PROVENIENTES DE OTROS MODELOS:

CANTIDADES DE RECURSOS DE CADA TIPO "k" DISPONIBLES PARA EMPLEARSE EN CADA PROGRAMA "i" DURANTE CADA PERIODO (AÑO) "t"

MODELO 4

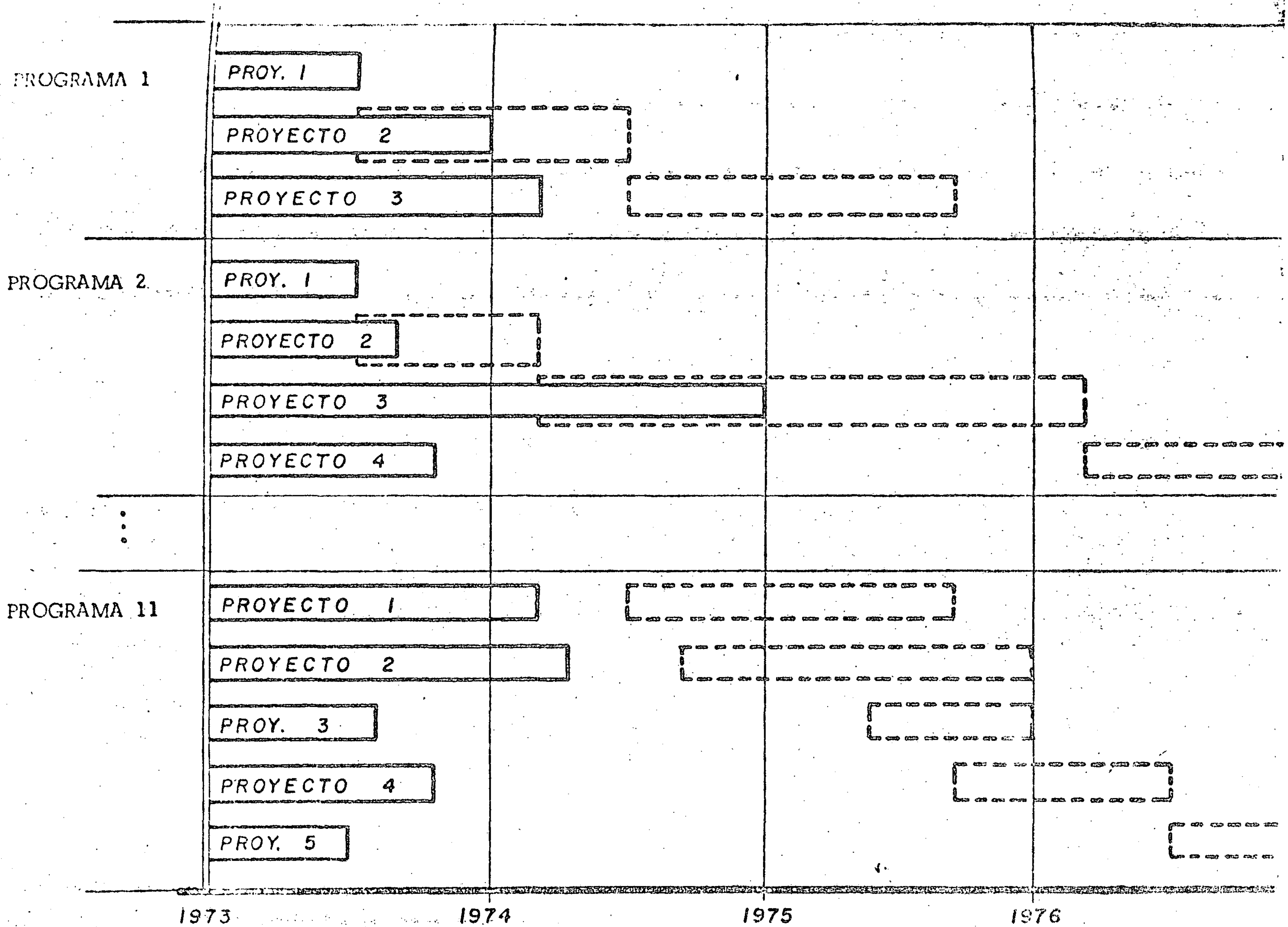
OBJETIVO:

MINIMIZAR EL TIEMPO DE EJECUCION DE CADA UNO DE LOS PROGRAMAS

PRODUCTOS DEL MODELO 4

- PROGRAMACION DE LAS OBRAS (PERIODOS EN QUE DEBEN EJECUTARSE) DE CADA UNO DE LOS PROGRAMAS
- RECURSOS NECESARIOS POR PERIODO (MENSUAL) PARA CADA OBRA, PARA CADA PROGRAMA Y PARA CADA DEPENDENCIA

FIGURA 12


PROGRAMA 1
PROY. 1
PROYECTO 2
PROYECTO 3
PROGRAMA 2
PROY. 1
PROYECTO 2
PROYECTO 3
PROYECTO 4
PROGRAMA 11
PROYECTO 1
PROYECTO 2
PROY. 3
PROYECTO 4
PROY. 5
1973
1974
1975
1976

SUBSISTEMA DE PROGRAMACION DE OBRAS

Este subsistema es el último de los 5 que se han venido comentando, y consecuentemente es el que maneja el mayor grado de detalle. El objetivo del mismo, es el de minimizar la realización de cada una de las obras, respetando, para ello, la asignación de los recursos y la ubicación en el intervalo definido en el subsistema anterior. En la Figura 14 se muestra en forma esquemática el diagrama correspondiente a este subsistema.

Puede observarse que como resultado se obtuvo la programación detallada en forma de una ruta crítica (Figura 15) de las actividades de cada una de las obras a cargo de la SOP, señalándose los recursos con que se contaba para su realización.

Cabe mencionar que para la solución de este problema se utilizó también un modelo de programación matemática de tipo binaria, adecuando el planteamiento realizado por Pritsker, Watters y Wolfe.

Además, dado que a este nivel de detalle la posibilidad de cambios era muy alta, se dotó a los Centros SOP Secretaría de Obras Públicas de un programa que pudiéndose manejar en las computadoras foráneas permitiese a los propios residentes de obra en forma inmediata reprogramar las obras si fuese necesario.

INSUMOS PROPIOS DEL MODELO

- DIAGRAMA DE ACTIVIDADES PARA CADA OBRA INCLUYENDO DURACIONES
- RECURSOS NECESARIOS PARA REALIZAR CADA ACTIVIDAD

INSUMOS PROVENIENTES DE LOS OTROS MODELOS:

FECHAS DE INICIO Y TERMINACION DE CADA OBRA

RECURSOS DISPONIBLES PARA CADA OBRA

MODELO 5

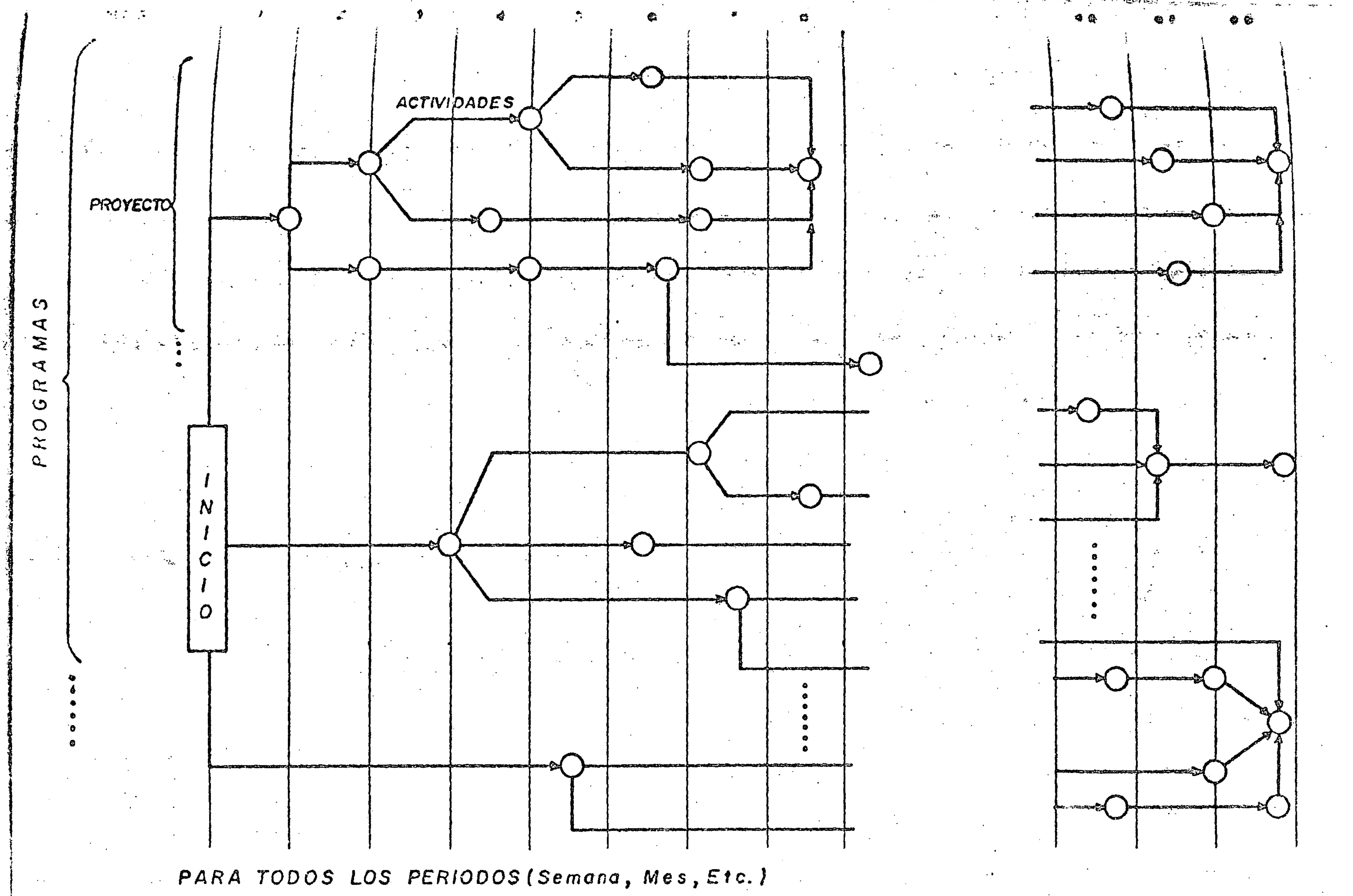
OBJETIVO:

MINIMIZAR LA DURACION TOTAL DE EJECUCION DE CADA OBRA, RESPETANDO LAS RESTRICCIONES DE RECURSOS, SECUENCIA Y FECHAS LIMITE DE TERMINACION DE CADA ACTIVIDAD

PRODUCTOS

CANTIDAD DE RECURSOS Y TIPOS DE RECURSOS UTILIZADOS SEMANALMENTE; POR ACTIVIDAD, POR OBRA, POR PROGRAMA, POR DIRECCION Y TOTAL DE LA SECRETARIA

FIGURA 14



(LOS REQUERIMIENTOS DE RECURSOS QUE UTILIZAN LAS ACTIVIDADES PARA LLEVAR A CABO LOS PROYECTOS DE CADA PROGRAMA NO DEBERA EXCEDER A LA DISPONIBILIDAD QUE SE TENGA DE DICHOS RECURSOS).

FIGURA 15

UN MODELO DE PROGRAMACION FINANCIERA ORIENTADO AL SECTOR PUBLICO

I.- INTRODUCCION.

Un país en proceso de desarrollo, requiere, para la aceleración del mismo, de un adecuado proceso de planeación, que se traduzca, en función de los objetivos que dicho país persiga, en metas específicas a cumplir. El Gobierno, como uno de los elementos claves en el desarrollo de una nación, es en gran medida responsable de que las metas fijadas se alcancen, ya que tiene, entre otras, obligaciones tan importantes como pudieran ser: el crear la infraestructura para el transporte por medio de la construcción de caminos, aeropuertos, vías férreas, etc.; el promover el crecimiento del sector agropecuario construyendo presas y canales, etc.

Para alcanzar las metas que la propia planeación del desarrollo ha señalado como convenientes, es indispensable que el Gobierno lleve a cabo cuantiosas inversiones, teniendo para esto que enfrentarse a la tarea de allegarse los fondos necesarios para hacerlo.- Es claro que para la obtención de dichos fondos se le presentan -

al organismos gubernamental encargado de tal labor, múltiples alternativas, debiendo seleccionar, de entre todas ellas, la que más convenga a los intereses de la nación.

La finalidad del modelo que se describe en forma general en el presente artículo, de acuerdo con lo planteado en los párrafos anteriores, es poder determinar, para una situación dada, la cantidad de recursos monetarios que deberán tratarse de obtener de cada una de las posibles fuentes de financiamiento que se tengan, así como las condiciones a las que se debe procurar llegar en las negociaciones (en el caso de créditos). Como un subproducto del modelo, y considerando para esto las restricciones al respecto, los resultados del mismo señalan el ritmo de inversión más conveniente, es decir, la cantidad que del total que se requiere para cumplir las metas, deberá corresponder a cada uno de los años que configuran el horizonte de planeación que se analice.

El definir que cantidad deberá solicitarse en cada período de cada fuente de financiamiento, bajo que plazo y tasa de interés deberá negociarse, así como la forma de pago, atendiendo a los intereses nacionales, constituye lo que se denominará en este artículo "Politica Financiera Optima" misma que determinará, a su vez, el Programa Financiero a seguir. En el diagrama mostrado en la Figura 1 se ilustra en forma objetiva lo antes descrito.

2.- FUENTES DE FINANCIAMIENTO Y SUS CARACTERISTICAS

En lo que se refiere a fuentes de financiamiento posibles, deberán hacerse invertir en el análisis tanto las de índole nacional como internacional existentes. Dentro de las primeras deberán considerarse, por ejemplo, los créditos internos que se pueden negociar con las diferentes Instituciones del País, así como, lo que puede corresponder, según el tipo de inversiones en cuestión, como asignación proveniente de los recursos fiscales que constituyen el presupuesto total del Gobierno.

Como posibles fuentes de financiamiento externo deberán considerarse organismos como el Banco Interamericano de Desarrollo (BID) y el Banco Internacional de Reconstrucción y Fomento (BIRF), que son las dos Instituciones Crediticias con que el Gobierno Federal acostumbra realizar este tipo de operaciones.

DIAGRAMA DEL SISTEMA

I N S U M O

- INVERSION TOTAL QUE ES NECESARIO REALIZAR A LO LARGO DEL HORIZONTE DE PLANEACION, PARA LA CONSECUCION DE LAS METAS ESTABLECIDAS

- FUENTES POSIBLES DE FINANCIAMIENTO Y SUS CARACTERISTICAS (RECURSOS FISCALES, BID, BIRF, ETC.)

MODELO MATEMATICO

OBJETIVO:

DEFINIR LA CANTIDAD DE RECURSOS QUE SE DEBERAN OBTENER DE CADA UNA DE LAS POSIBLES FUENTES DE FINANCIAMIENTO DE MANERA QUE LA FORMACION INTERNA (EN EL PAIS) DE "CAPITAL" QUE CON BASE EN LA INVERSION DE DICHOS RECURSOS SE LOGRE, SEA MAXIMA.

P R O D U C T O

- INVERSION ANUAL
- CANTIDAD ANUAL DE RECURSOS MONETARIOS QUE SE DEBERA PROCURAR OBTENER DE CADA FUENTE DE FINANCIAMIENTO.
- CONDICIONES SOBRE LAS QUE SE DEBERA PROCURAR NEGOCIAR LOS CREDITOS
- POLITICA OPTIMA DE PAGO DE LOS CREDITOS A SOLICITAR.

FIGURA 1

Para cada una de las fuentes de financiamiento consideradas como posibles y cuyo funcionamiento sea a base de créditos, deberán definirse todos los planes que se consideren factibles de negociar, especificándose, para cada uno de ellos, la tasa de interés y el plazo, tanto durante el período de gracia (en caso de existir) como durante el período de pago.

3.- MODELO MATEMATICO

Como había sido mencionado anteriormente, el objetivo fundamental del análisis es el de definir la inversión anual que deberá ser realizada durante los años que constituyen el horizonte de planeación seleccionado, a fin de poder alcanzar las metas establecidas, determinándose, así mismo, las cantidades que en cada período deberán ser solicitadas de cada una de las fuentes de financiamiento (tanto nacionales como extranjeras) consideradas, así como las condiciones sobre las que se deberán tratar de negociar dichas solicitudes.

En el modelo matemático que se propone, se hace uso de la siguiente nomenclatura:

N = Número de años de que consta el horizonte de Planeación seleccionado

t = El período (año) que se esté considerando ($\leq N$)

j = Indica un crédito que corresponde a una fuente de financiamiento nacional

q = Indica un crédito que corresponde a una fuente de financiamiento extranjera (BID, BIRF, ...)

f = Indica un financiamiento con recursos fiscales

r = La tasa de rendimiento de la inversión

a = La tasa de actualización del capital

i_j = La tasa de interés de un crédito interno tipo "j"

i_q = La tasa de interés de un crédito externo tipo "q"

n_j = El plazo de pago (años) para el crédito interno "j"

n_q = El plazo de pago (años) para el crédito externo "q"

p_q = El período de gracia del crédito externo "q"

i_{pq} = La tasa de interés durante el período de gracia del crédito externo "q"

k = Número de años posteriores al período "t"

I_{jt} = Variable que corresponde al monto del crédito que deberá solicitarse con el tipo de financiamiento - interno "j" en el período "t"

I_{qt} = Variable que corresponde al monto del crédito que deberá solicitarse con el tipo de financiamiento externo "q" en el período "t"

I_{ft} = Inversión que deberá tratarse de financiar con recursos fiscales, en el período "t"

$X_{j(t+k)}$ = la cantidad que hay que pagar en el año "t + k" debido al crédito solicitado con el tipo de financiamiento interno "j" en el período "t"

$X_{q(t+k)}$ = La cantidad que hay que pagar en el año "t + k" debido al crédito solicitado con el tipo de financiamiento externo "q" en el período "t"

m = El máximo plazo de pago de todos los tipos de créditos analizados, tanto externos como internos

D_{t+k} = La capacidad de endeudamiento del país para el año "t + k"

P = El presupuesto necesario (en unidades del año cero) para alcanzar las metas fijadas

α_{1t} = La proporción máxima que puede guardar el financiamiento a solicitar mediante crédito interno en el año "t" con - respecto al total de recursos financieros a manejar en dicho año (si existe una política al respecto).

α_{2t} = La proporción máxima que puede guardar el financiamiento a solicitar mediante crédito externo en el año "t" con- respecto al total de recursos financieros a manejar en - dicho año (si existe una política al respecto).

α_{3t} = La proporción máxima que puede aceptarse entre el financiamiento anual a solicitar mediante créditos (tanto internos como externos) con respecto a los recursos fiscales- que se manejen en ese año (si existe una política al - respecto).

C_t = Límite máximo de crédito que pueden otorgar las fuentes- de financiamiento interno en el período "t"

E_t = Límite máximo de crédito que pueden otorgar las fuentes- de financiamiento externo en el período "t"

Ahora bien, el modelo de programación matemática que se propone es de tipo lineal y está compuesto primeramente de la función que representa el objetivo que se desea obtener y posteriormente de - algunas de las restricciones que se deberán considerar.

En la Función Objetivo se busca maximizar la formación de "capital" en el país propiciada por la re-inversión a través del tiempo de los recursos financieros que se obtengan de las diferentes fuentes de financiamiento en cada uno de los "N" años del horizonte de Planeación analizado, considerando para ello que la tasa de - rendimiento de la inversión es "r".

La representación matemática de dicha función objetivo es la que se indica a continuación:

$$\text{Max } Z = \sum_{t} I_{ft} \cdot (1+r)^{m+N-t} + \sum_{q} \sum_{t} I_{qt} \cdot (1+r)^{m+N-t}$$

$$- \sum_{q} \sum_{t} \sum_{k=1}^{n_q} X_{q(t+k)} \cdot (1+r)^{m+N-t-k} + \sum_{j} \sum_{t} I_{jt} \cdot (1+r)^{m+N-t}$$

$$- \sum_j \sum_t X_{j(m+N-1)} \cdot (1+r) \cdot (B.C) - \sum_j \sum_t X_{j(m+n)}$$

$$+ \sum_j \sum_t \sum_k^{m+N-2-t} X_{j(t+k)} \left\{ (1+r)^{m+N-t-k} + A \right\} \left\{ (1-B.C)\ (1+r)^{m+N-t-k} \right\}$$

donde:

$$A = \sum_{h=1}^{m+N-1-t-k} \left\{ \sum_{s=0}^{h-1} \frac{(h-1)\,!}{(h-s-1)\,!\ s\,!} \cdot B^{s+1} \right\} (1+r)^{m+N-t-k-h}$$

$$B = \frac{i_j\ (1+i_j)^{n_j}}{(1+i_j)^{n_j} - 1}$$

$$C = \frac{(1+r)^{n_j} - 1}{r\ (1+r)^{n_j}}$$

El valor final que se obtenga con la anterior función matemática - representa el "capital" que existirá en el País en el año (m+N), para lo cual fueron transportados a unidades de ese año todas las inversiones, réditos, reinversiones y pagos realizados a través - del tiempo. El año de referencia utilizado fué el año "m+N". Sin embargo, en caso de que se requiera utilizar otro año cual - quiera como referencia, el resultado obtenido en cuanto a las variables manejadas sería exactamente el mismo, a pesar de que habría necesidad de modificar las formulas financieras.

Como puede verse, la función objetivo consta de siete términos, - mismos que serán explicados a continuación:

a) El primer término cuantifica el "capital" que existirá en el país en el año "m+N" debido a las inversiones que con recursos fiscales se realicen a lo largo de los "N" años que constituyen el horizonte de planeación considerado.

b) En el segundo término se involucra el "capital" que existirá en el país en el año "m+ N" como consecuencia de las inversiones efectuadas a lo largo del horizonte de Planeación con recursos obtenidos por medio de créditos externos.

c) En el tercer término se considera el "capital" que sale fuera del país como pago por los créditos internacionales obtenidos, llevado a unidades del año de referencia "m+N" considerando la tasa de rendimiento "r" (costo del dinero).

d) El cuarto término representa "al capital" que existirá en el - país en el año "m+N" como consecuencia de las inversiones- realizadas con financiamiento a base de créditos internos.

e) Los tres últimos términos involucran el efecto multiplicador - del capital, originado por el proceso de reinversión de los - créditos nacionales, partiendo de la base que al efectuar un pago por concepto de un crédito interno concedido, el monto de dicho pago será reinvertido nuevamente en el país por me dio de un nuevo préstamo otorgado bajo las mismas condicio nes iniciales.

Existen algunas limitaciones que condicionan los resultados, las - cuales se han hecho intervenir en el modelo plasmándolas en las- siguientes restricciones:

$$\sum_{j} X_{j\,t+k} + \sum_{q} X_{q\,t+k} \leq D_{t+k} \quad ; \quad 1 \leq t + k \leq m + N$$

En esta primera restricción se considera una "capacidad anual de endeudamiento", la cual representa la cantidad máxima que puede destinar el País al pago de deudas por concepto de créditos.

$$\sum_{k=1}^{n_j} X_{j\,t+k} \cdot (1 + i_j)^{n_j - k} = I_{jt} \cdot (1 + i_j)^{n_j} \quad ; \quad \forall_j \quad y \quad 0 \leq t \leq N$$

Como resultado del modelo se obtendrá la mejor forma para el pago de los créditos internos que el mismo modelo determine como necesarios. Para ello se deberán considerar las condiciones a que fué sujeto el crédito, es decir, deberá respetarse el hecho de que la fuente de financiamiento que otorga el crédito pueda tener, al final del período de pago, una cantidad igual al monto del mismo, trabajado, durante ese lapso, a la tasa de interés del crédito en cuestión.

$$\sum_{k=1}^{p_q} X_{q\,t+k} \cdot (1+i_{pq})^{p_q - k} = I_{qt} \left[(1+i_{pq})^{p_q} - 1 \right] \quad ; \quad \forall_q \quad y \quad 0 \leq t \leq N$$

$$\sum_{k=p_q+1}^{p_q+n_q} X_{q\,t+k} \cdot (1+i_q)^{p_q+n_q-k} = I_{qt} \cdot (1+i_q)^{n_q}; \quad \forall_q \quad y \quad 0 \leq t \leq N$$

Las dos restricciones previas tienen el mismo sentido que su inmediata anterior en lo que se refiere a crédito externo, reflejando la primera, la situación que se tiene durante el período de gracia, mientras que la segunda, contempla el período de pago propiamente dicho. Cabe hacer mención que esto se hace necesario, en función de que, por regla general, las tasas de interés para ambos períodos son diferentes.

$$\sum_{j} \sum_{t=0} \frac{I_{jt}}{(1 + a)^t} + \sum_{q} \sum_{t=0} \frac{I_{qt}}{(1 + a)^t} + \sum_{f} \sum_{t=0} \frac{I_{ft}}{(1 + a)^t} = P.$$

Los recursos financieros que se obtengan de las diferentes fuentes de financiamiento durante los "N" años que constituyen el horizonte de Planeación, deberán ser igual al presupuesto necesario en valor presente, para alcanzar las metas fijadas.

$$\sum_{j} I_{jt} \leq \alpha_{1t} \left\{ \sum_{j} I_{jt} + \sum_{q} I_{qt} + \sum_{f} I_{ft} \right\} ; \forall_t$$

En esta restricción se refleja el hecho de que la cantidad de recursos financieros obtenida por medio de créditos internos, no deberá exceder de un determinado porcentaje del total de la inversión que se realice en cada año. Esta restricción existirá siempre y cuando se tenga una política al respecto.

$$\sum_{q} I_{qt} \leq \alpha_{2t} \left\{ \sum_{j} I_{jt} + \sum_{q} I_{qt} + \sum_{f} I_{ft} \right\} ; \forall_t$$

Esta restricción es similar a la inmediata anterior en lo que se refiere a los créditos externos.

$$\sum_{j} I_{jt} + \sum_{q} I_{qt} \leq \alpha_{3t} \sum_{f} I_{ft} ; \forall_t$$

Para el caso en que exista un límite máximo de proporcionalidad entre el monto de los créditos a solicitar y los recursos fiscales a manejar en el año.

$$\sum_{j} I_{jt} \leq C_t ; \forall_t$$

$$\sum_{q} I_{qt} \leq E_t ; \forall_t$$

las restricciones anteriores, preveen la posibilidad de que se tenga un límite de crédito por parte de las fuentes de financiamiento consideradas como factibles. La primera restricción se refiere a fuentes internas y la segunda a fuentes externas.

Se deberán incluir, además, aquellas otras restricciones que sean necesarias en función de la situación del país de que se trate, como podrían ser, por ejemplo: que las inversiones totales sean crecientes de año a año; o bien que solo el financiamiento con base en recursos fiscales sea creciente de año a año; o bien que ambas situaciones se cumplan simultáneamente; etc.

4.- RESULTADOS DEL MODELO

En este capítulo se plantean algunas de las preguntas a las que se puede responder con la aplicación del modelo antes descrito y que pueden resumirse en las siguientes:

a. ¿Qué parte de la inversión total que se requiere para cumplir las metas que la planeación del desarrollo ha determinado de mo conveniente, deberá ejercerse en cada uno de los años-que constituyen el horizonte bajo estudio?

b) ¿Qué cantidad anual de recursos monetarios se deberá procurar obtener de cada una de las fuentes de financiamiento (organismos nacionales de crédito, BID, BIRF, etc.)?

c) ¿Bajo que condiciones se debe procurar obtener los créditos, atendiendo a la Institución a que se presenta la solicitud - (período de gracia, período de pago, tasa de interés, etc.)?

d) ¿Que forma de pago se debe tratar de negociar, de acuerdo - con los intereses del país?.

e) ¿Cuál sería el efecto en cuanto a formación interna de "capital" en el País, en caso de que los resultados en las negociaciones condujeran a la aceptación, por parte de los organismos involucrados, de las recomendaciones sugeridas?.

5.- ANALISIS DE SENSIBILIDAD

Dado que la implementación de los resultados del modelo no depen den exclusivamente del organismo que haga el análisis, sino que está sujeta a la reacción de Instituciones ajenas al mismo, que - pueden o no estar de acuerdo con lo que se les propone, es necesario estar preparado para conocer hacia donde se deben hacer tender las negociaciones, de manera de asegurar siempre los intereses del país. Por otra parte, los parámetros manejados en el - modelo (metas establecidas, Inversión requerida para cumplirlas, - tasa de rendimiento, etc.) también están sujetos a cambios, que - pueden ser originados por variaciones en las políticas y/o en las condiciones existentes.

Los comentarios anteriores, hacen patente la necesidad de realizar un exhaustivo Análisis de Sensibilidad para los siguientes factores:

- Inversión total necesaria para cumplir las metas
- Tasa de rendimiento de la Inversión
- Limitaciones en cuanto a las formas de pago de los créditos
- Condiciones de los créditos (Tasas de interés, períodos de - gracia y de pago, etc.).

De acuerdo con lo expuesto, el primer paso que se recomienda -

llevar a cabo es un Análisis de Sensibilidad sobre el Modelo de Programación Lineal planteado, de conformidad con las técnicas tradicionales existentes para tal efecto (Ref. 2). Los resultados de este primer Análisis, proporcionarían un primer rango de acción al organismo encargado de las negociaciones, al permitírsele conocer, por ejemplo, condiciones de créditos alternas ante una misma Institución o entre varias Instituciones, que conduzcan a la obtención de lo que podría ser una solución "significativamente igual" a la originalmente planteada.

Sin embargo, las condiciones prevalecientes pueden variar de tal forma, que se salgan de los límites a que se refiere el párrafo anterior, haciéndose indispensable una mayor cantidad de información, si se quiere que se tengan los elementos suficientes para que las negociaciones se dirijan a la mejor solución para la nueva situación en vigor. Esto conduce a la necesidad de un nuevo Análisis de Sensibilidad, que contemple, en primer término, cada uno de los factores antes mencionados en forma individual, para posteriormente, hacerlos variar en forma combinada. Un Análisis como el citado permitirá obtener resultados y hacer comentarios como los que a continuación se señalan:

5.1.- Si lo que se varía es la inversión total que se requiere - para cumplir las metas fijadas, previendo un posible cambio en las mismas, y se mantiene el resto de los elementos en sus valores originales, con los resultados obtenidos podría elaborarse una gráfica como la que con carácter ilustrativo se muestra en la Figura 2, misma que permitiría conocer de inmediato la acción a seguir al presentarse una variación en ese sentido.

5.2.- Si ademas de variar la Inversión total a que se refiere el inciso anterior, se analizan diferentes valores para la tasa de rendimiento, para cada una de éstas últimas se lograría definir una gráfica como la mostrada en la Figura 2 a que se hizo referencia anteriormente, ampliándose así el radio de acción para las negociaciones.

5.3.- El variar la tasa de rendimiento de la Inversión, repercute considerablemente en el valor de la función objetivo, pudiéndose reflejar dicha repercusión por medio de curvas - como las mostradas esquemáticamente en la Figura 3. Es-

INVERSION TOTAL REQUERIDA PARA CUMPLIR LAS METAS

(Para una tasa de rendimiento "r" determinada)

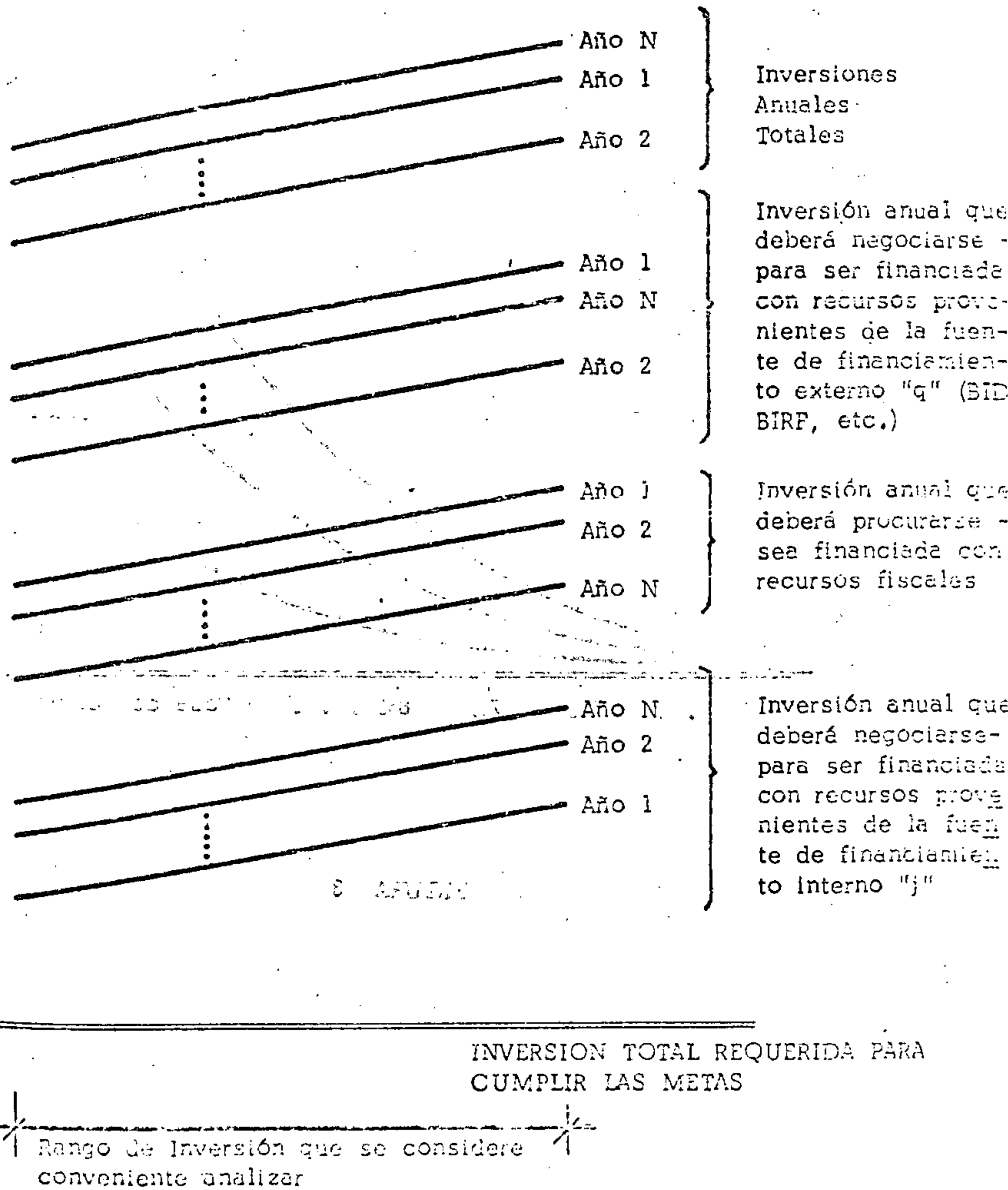


FIGURA 2

FORMACION DE "CAPITAL" EN FUNCION DE LA TASA DE RENDIMIENTO

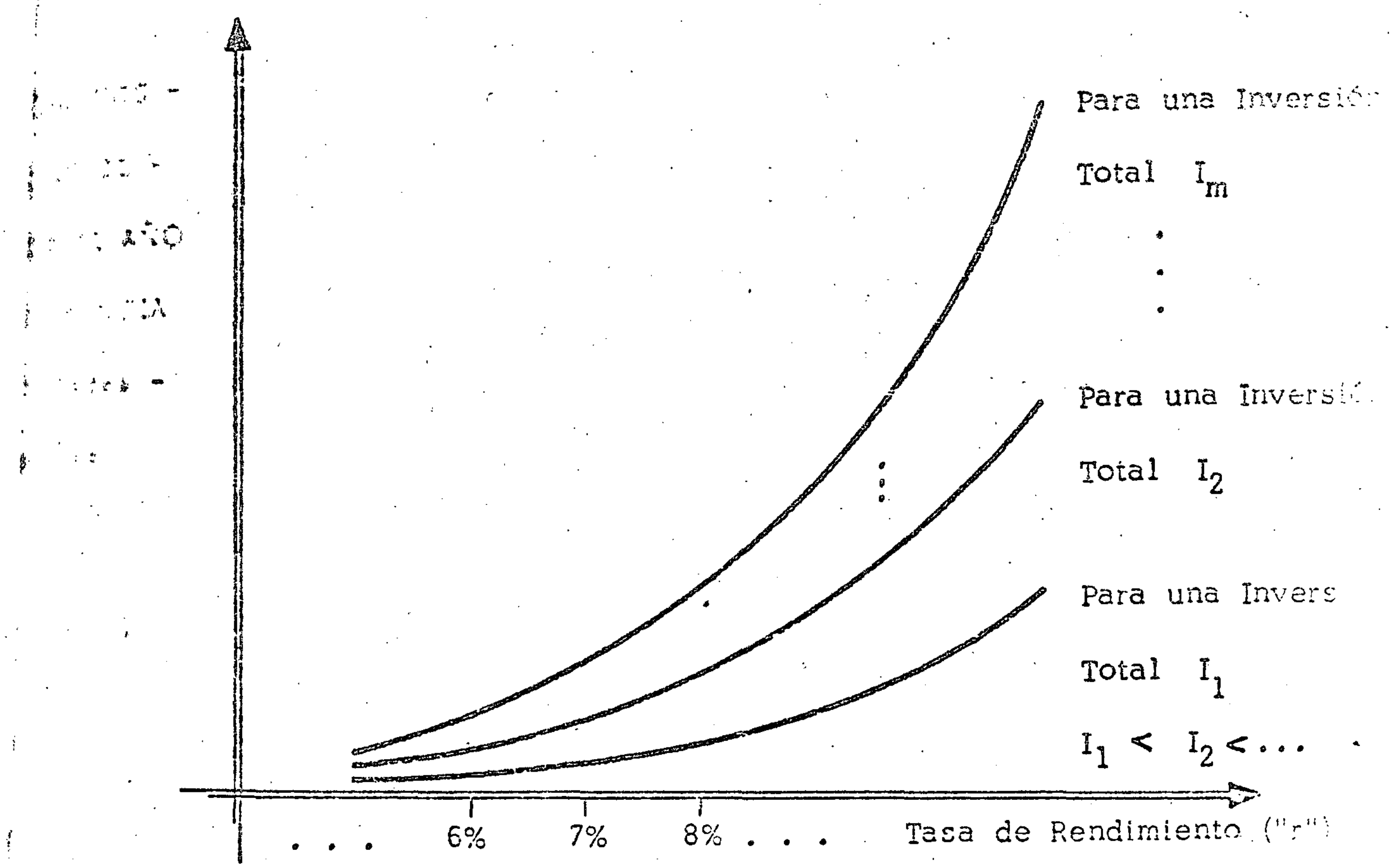


FIGURA 3

claro que si la tasa de rendimiento es menor que la tasa de interés de los créditos se produce un proceso de "descapitalización", de tal manera que con el transcurso del tiempo, el "capital" existente en el país sería menor que el invertido.

5.4.- La forma de pago de los créditos también incide directamente sobre el proceso de formación de "capital", con base en las inversiones que se realicen. Así por ejemplo, si la "política de pago óptima", que el modelo determina, pudiese ser implementada y se comparase su efecto en cuanto a formación de capital se refiere, con respecto a la política tradicional de pagos constantes en el tiempo, y se variase la tasa de rendimiento o la inversión total, el resultado sería como el mostrado con fines ilustrativos en las figuras 4 y 5 respectivamente. La simple variación en la política de pago, partiendo de la base de que no se lesionan los intereses del que otorga el crédito tal y como se trató de establecer en el modelo, incrementa la formación de "capital" debido al factor "oportunidad". Este incremento (ΔC) puede

EFECTO COMPARATIVO DE LA FORMA DE PAGO EN LA FORMACION

DE "CAPITAL"

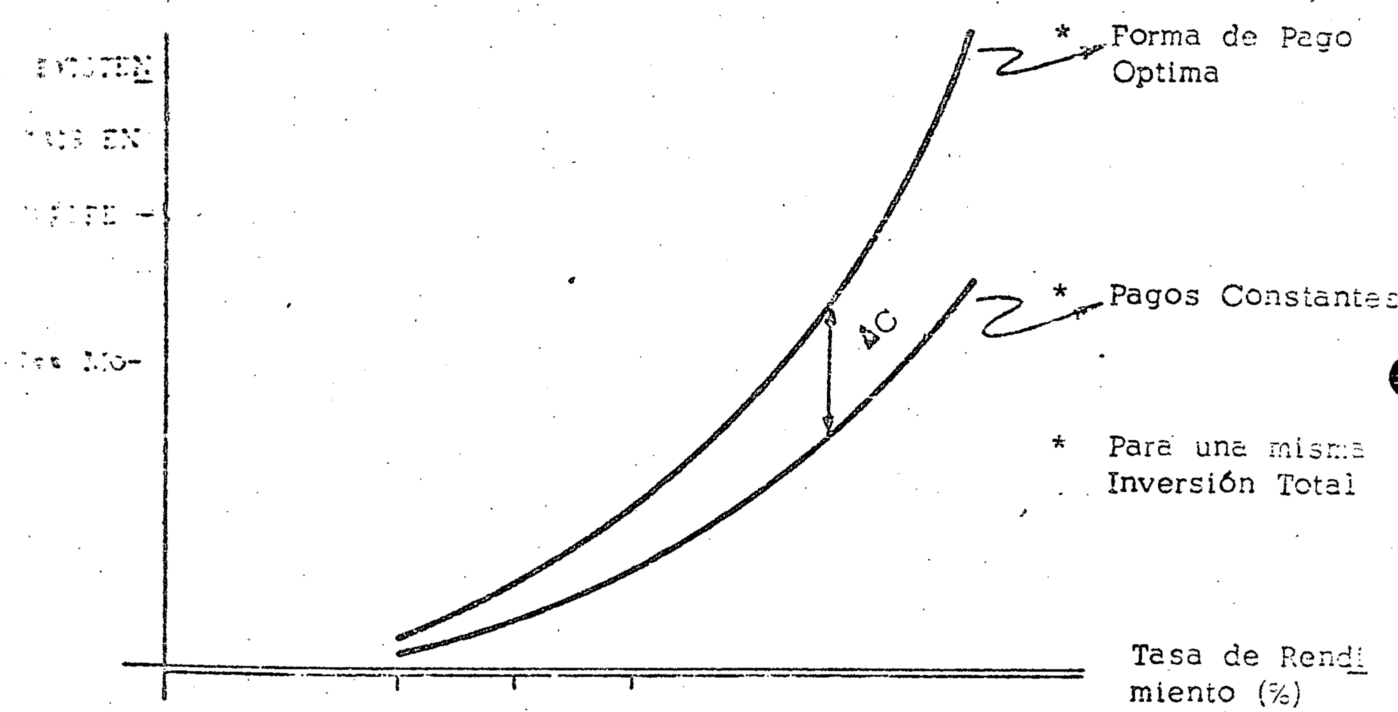


FIGURA 4

EFECTO COMPARATIVO DE LA FORMA DE PAGO

EN LA FORMACION DE "CAPITAL"

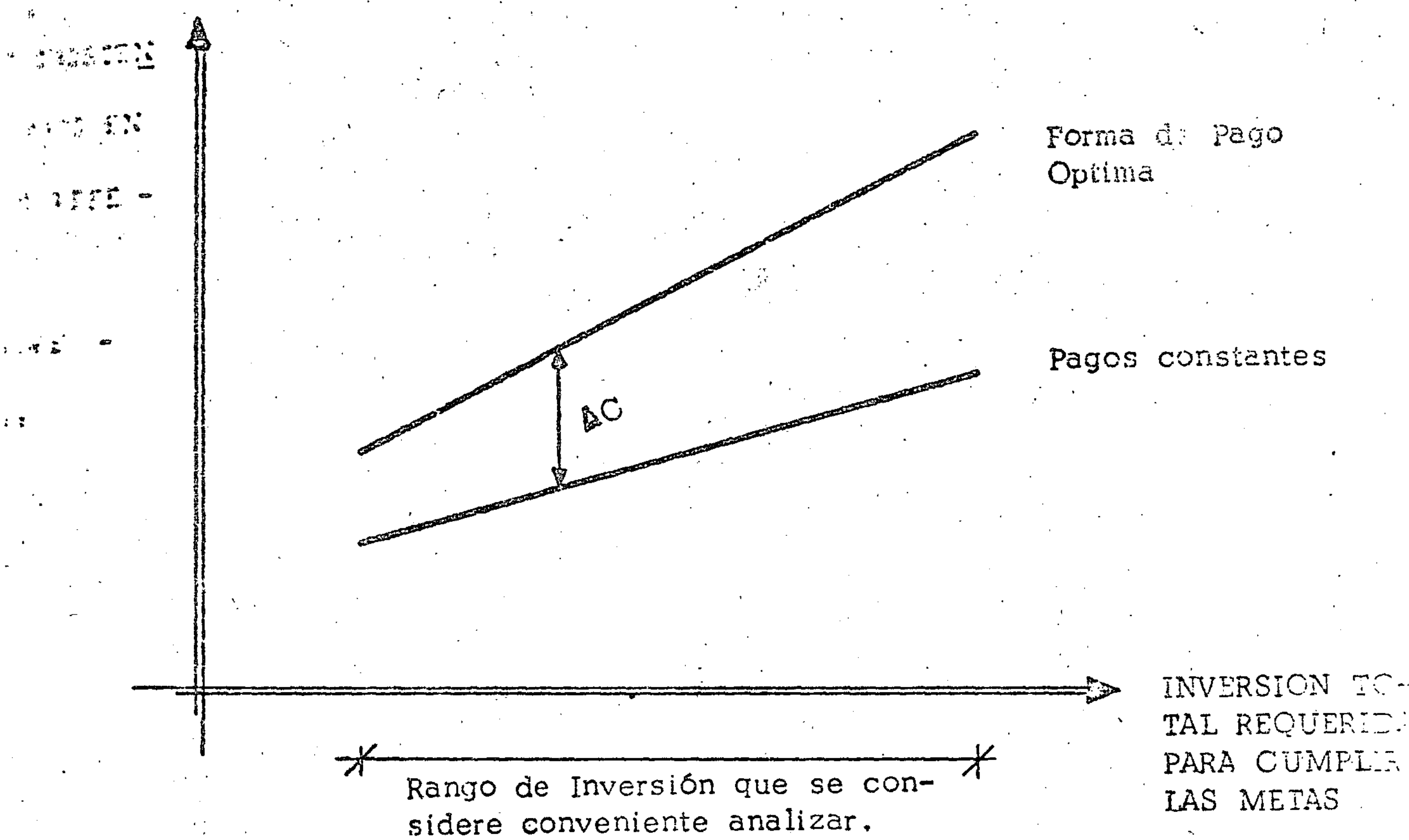


FIGURA 5

ser evaluado y servir como argumento al funcionario responsable de llevar a cabo las negociaciones.

5.5.- Las características principales que definen las condiciones de un crédito, son el plazo de pago y la tasa de interés. Dado que no se sabe la reacción de las fuentes de financiamiento, en cuanto a las condiciones que se les soliciten, se debe estar preparado para "negociar", en caso de que no se acepten las iniciales. Para esto, es conveniente, como parte del Análisis de Sensibilidad, definir curvas de "Iso-formación de Capital", definiendo, para ello, una gran cantidad de posibles combinaciones en cuanto a la tasa de interés y al período de pago se refiere. Para los créditos externos, esto último deberá llevarse a cabo para diferentes condiciones, en lo que al período de gracia corresponde.

Para todas y cada una de las combinaciones que se generen, se deberá estimar el efecto que en cuanto a formación de "capital" se logra al invertir una unidad monetaria obtenida por ese medio. Con los valores obtenidos se podrán elaborar una serie de curvas como las que en forma esquemática se muestra en la Figura 6. Sobre una misma curva, aparecen todos los planes de financiamiento (definidos por sus dos parámetros: tasa de interés y plazo durante el período de pago) que unitariamente generan el mismo efecto (formación de "capital").

Como puede observarse en la Figura 6, algunas veces conviene al País negociar un crédito con mayor tasa de interés mientras se consiga un plazo mayor de pago. Con los elementos que proporciona la gráfica de referencia, el responsable de las negociaciones podrá, en forma inmediata, conocer lo que más le conviene en función de la forma como se desarrollen dichas negociaciones, pudiéndose llegar, inclusive, a situaciones que simultáneamente convengan al País solicitante y a la fuente de financiamiento a que se recurre, lo cual no podría ser detectado si no se tuviesen disponibles este tipo de elementos técnicos previamente estudiados.

5.6.- En los incisos anteriores se comentaron algunos aspectos -

"CURVAS DE ISO-FORMACION DE CAPITAL"

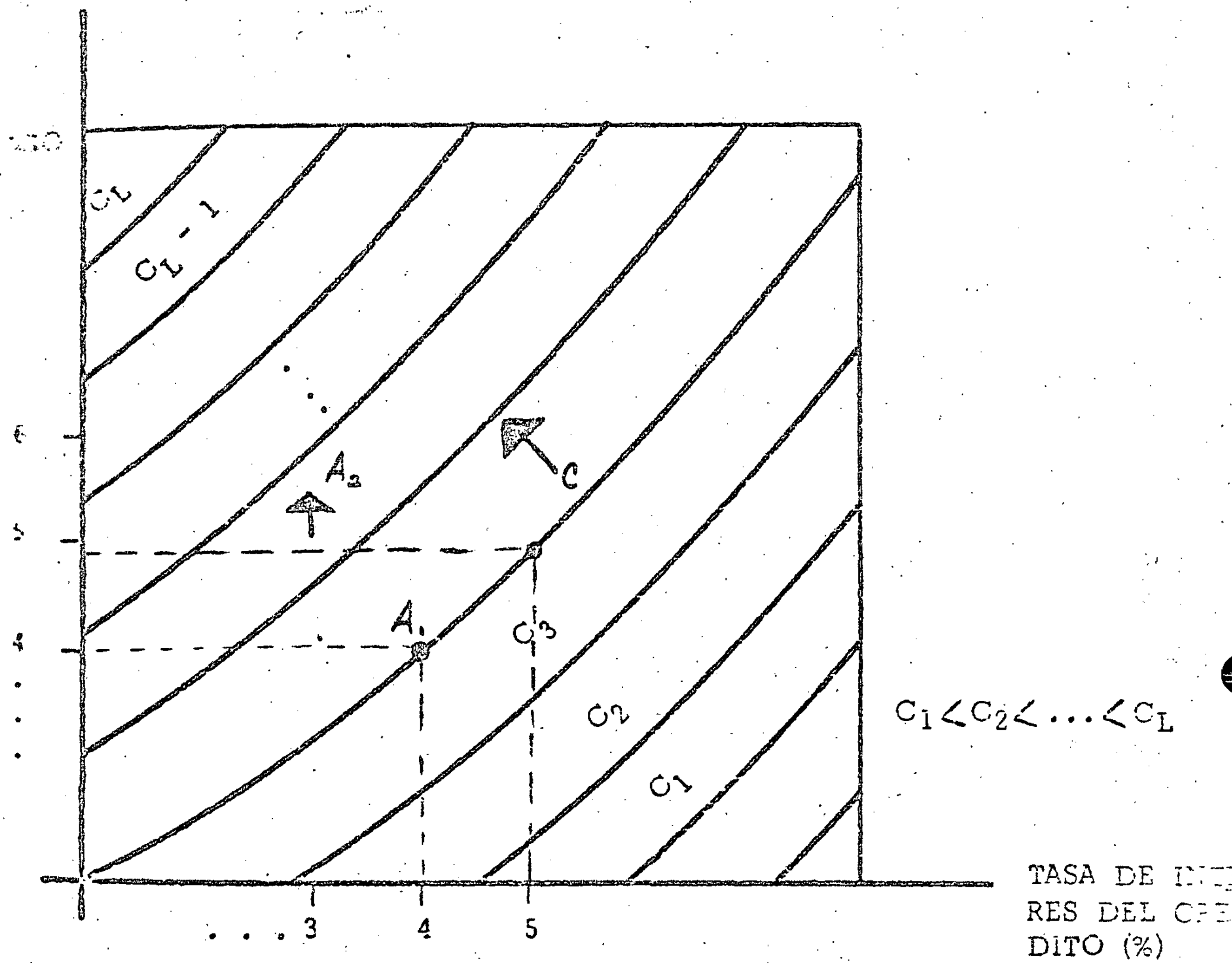


FIGURA 6

$A_2 > A_1$

que deberían ser cubiertos dentro del Análisis de Sensibi - lidad. Sin embargo cabe mencionar que también deberán - ser incluídos algunos otros, que aunque no se comentarán en detalle en este artículo, también son importantes para - aumentar los elementos de juicio y por lo tanto la capacidad de negociación. Entre estos últimos se podrían men - cionar, por ejemplo: el punto de referencia (año) que se utilizó para el calculo del "Capital" que existirá en el país con motivo de las inversiones realizadas; los límites máximos de financiamiento de cada fuente; etc.

6.- OBSERVACIONES Y CONCLUSIONES

6.1.- La trascendencia de las operaciones crediticias, puesto - que comprometen los recursos futuros de la nación al adquirirse deudas por cantidades importantes, hacen necesario que, en forma previa a la formalización de tales compromisos, se lleven a cabo estudios técnicos cuyos resultados proporcionen, a las personas encargadas de este tipo de - operaciones, elementos de juicio suficientes para que las-negociaciones que se realicen por su conducto sean las más adecuadas, atendiendo a los intereses del País.

6.2.- En la negociación de préstamos las condiciones finales, sobre las que se obtengan los mismos, dependerán en gran medida de las Instituciones Crediticias a que se recurra.- Lo anterior implica que se debe estar preparado para definir, en forma inmediata, la orientación que se debe dar a las negociaciones, en función de la actitud o posición que las fuentes de financiamiento adopten.

6.3.- Como se pudo observar a lo largo de la exposición de este artículo, pueden existir condiciones que simultáneamente sean más benéficas para ambos partes, ya que sus objetivos por lo general no son coincidentes. Este tipo de situaciones las debe de poder visualizar el responsable de la negociación por parte del gobierno de que se trate, dada, como se mencionó al principio de este capítulo, la trascendencia de los compromisos que se adquieren.

6.4.- Cabe citar, que muchas veces a pesar de que existen ciertos créditos externos "blandos" en mejores condiciones que la mayoría de los créditos internos que se pudiesen conseguir, le resulta más conveniente al País realizar la inversión financiada con créditos internos que con los externos aparentemente mejores. Lo anterior es debido a que el proceso multiplicativo en la formación de "capital" es más acelerado con los créditos internos, puesto que los pagos se reinvierten en el país, mientas que en los créditos externos, el dinero al pagarse lo abandona.

6.5.- Por regla general en los países en proceso de desarrollo, por su misma situación, las tasas de rendimiento de las inversiones (si estas se seleccionan adecuadamente) son elevadas. Lo anterior conduce a que la política de pago más conveniente, en lo que se refiere a los créditos externos, sea retardar los mismos, aún a costa de un relativo incremento en la tasa de interés de dichos créditos. Por otra parte, en lo que a créditos internos corresponde, la política de pago es precisamente la inversa. Con lo anterior, se busca una mayor estadía y circulación del capital en el país, más sin perder de-vista el peligro de la inflación y de exceder los límites de endeudamiento externo convenientes.

6.6.- A pesar de que la metodología propuesta se sale de los métodos tradicionales que se utilizan dentro del Sector-Público, y de que aparentemente su implementación resulta compleja, dada la trascendencia del problema que se ataca, en función de las múltiples razones expuestas, el intento aquí realizado ampliamente se justifica.

7.- REFERENCIAS

1.- Jauffred M.F.J., Programación de la Secretaría de Obras Públicas como un Todo. Boletín No. 20 (Nov.-Dic. 1973). IMPOS. México.

2.- Jaufred M. F.J., Moreno Bonett A., Acosta F. J. J., Métodos de Optimización - Programación Lineal - Gráficas - (capítulo 5. Análisis Posóptimos). Representaciones y Servicios de Ingeniería, S.A. México (1971).

* Humberto Valdés Ruy Sánchez

** Nicolás Zarzar Charur

* Jefe del Departamento de Modelos de Decisión de la Dirección General de Ingeniería de Sistemas de la Secretaría de Obras Públicas de México; Profesor de Ingeniería de Sistemas y Probabilidad y Estadística en la Facultad de Ingeniería de la U.N.A.M.

** Maestro en Ciencias, especialidad en Investigación de Operaciones; Representante de la Dirección General de Ingeniería de Sistemas en el Centro SOP. Secretaría de Obras Públicas en el Estado de Nuevo León, México.

centro de educación continua
división de estudios superiores
facultad de ingeniería, unam

INGENIERIA DE SISTEMAS *
Aplicado a la Planeación y a la Administración

SISTEMAS DE INFORMACION

M. en I. SERGIO ZUÑIGA BARRERA

Junio de 1978

SISTEMAS DE INFORMACION

FUNDAMENTOS DEL ANALISIS Y DISENO DE SISTEMAS DE INFORMACION

P O R

SERGIO ZUNIGA BARRERA

NO SE PUEDE PENSAR EN UN SISTEMA DE INFORMACION, SI ESTE NO ESTA ASOCIADO AL FUNCIONAMIENTO DE UN ORGANO ADMINISTRATIVO, POR SIMPLE QUE ESTE SEA.

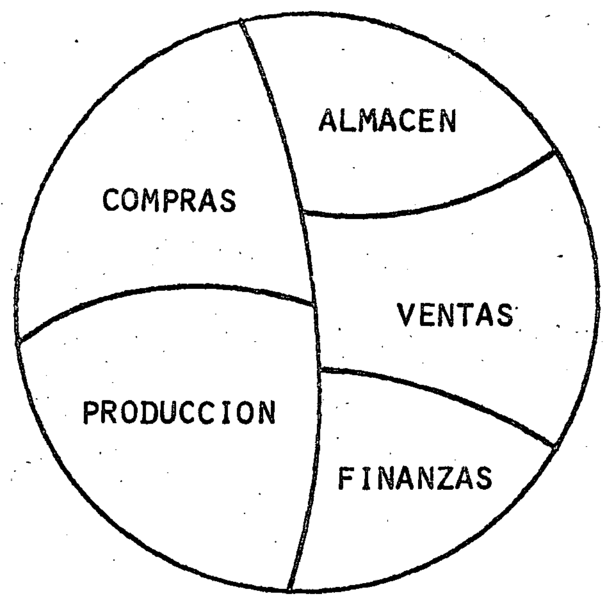
TODO ORGANO ADMINISTRATIVO CONSTITUYE EN SI UN SISTEMA.

CARACTERISTICAS QUE DEFINEN UN SISTEMA

- ES POSIBLE DIVIDIRLO EN PARTES
- CADA UNA DE LAS PARTES TIENEN OBJETIVOS ESPECIFICOS QUE CUMPLIR
- LOS OBJETIVOS ESPECIFICOS DE LAS PARTES COADYUVAN A ALCANZAR EL OBJETIVO DEL SISTEMA
- LAS PARTES INTERACTUAN ENTRE SI

E J E M P L O

SUPONGASE UNA EMPRESA (SISTEMA), LA QUE ES FACTIBLE DIVIDIRLA EN DEPARTAMENTOS (PARTES DEL SISTEMA) TAL Y COMO SE -- MUESTRA EN LA FIGURA 1.



EMPRESA O ORGANO ADMINISTRATIVO (SISTEMA)

FIGURA 1 .

CADA UNA DE LAS PARTES DE LA EMPRESA TIENEN OBJETIVOS - ESPECIFICOS QUE CUMPLIR, QUE COADYUVAN A ALCANZAR EL OBJETIVO - DE LA EMPRESA.

LA ACCION DE CADA UNO DE ESTOS DEPARTAMENTOS (PARTES - DEL SISTEMA) PROPICIA UNA INTERACCION CON LOS OTROS DEPARTAMENTOS DE LA EMPRESA (SISTEMA).

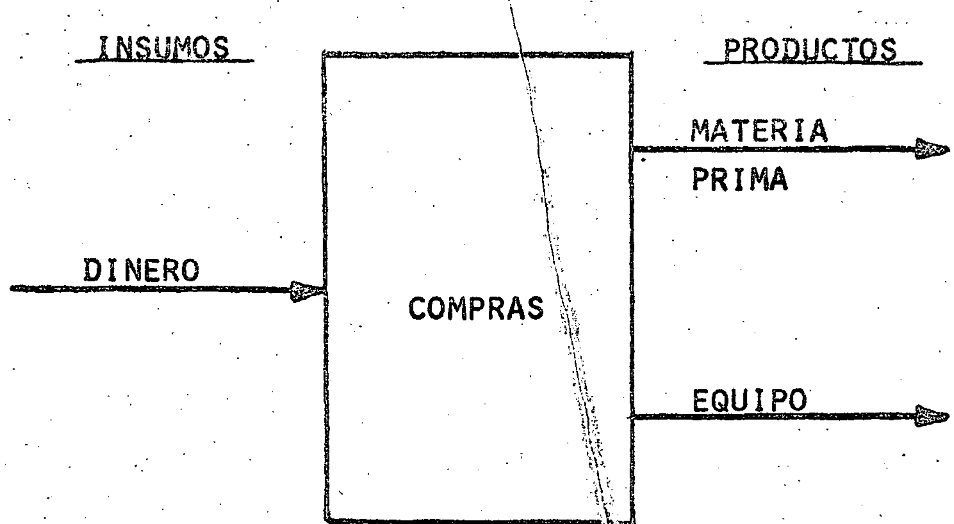
UNA DE LAS CARACTERISTICAS MAS IMPORTANTES DEL ESTUDIO DE SISTEMAS, ES EL ANALISIS DE LA INTERACCION DE LAS PARTES.

LA PLANEACION DEL DESARROLLO DE CADA UNA DE LAS PARTES, DE TAL FORMA QUE ALCANCEN SUS OBJETIVOS, NO SE PUEDE REALIZAR - EN FORMA INDEPENDIENTE, PUES AUNQUE FUERA OPTIMA, NO SE ESTA PLANEANDO EL DESARROLLO DE LA EMPRESA COMO UN TODO (ENFOQUE SISTEMICO).

"SE ESTAN OLVIDANDO LAS INTERACCIONES"

SE DICE QUE UN SISTEMA DE CONCEPTUALIZA, CUANDO SE HAN IDENTIFICADO LAS PARTES EN QUE SE DIVIDE Y SE SEÑALAN LAS INTERACCIONES ENTRE ELLAS, ESTO A TRAVES DE INSUMOS - PRODUCTOS.

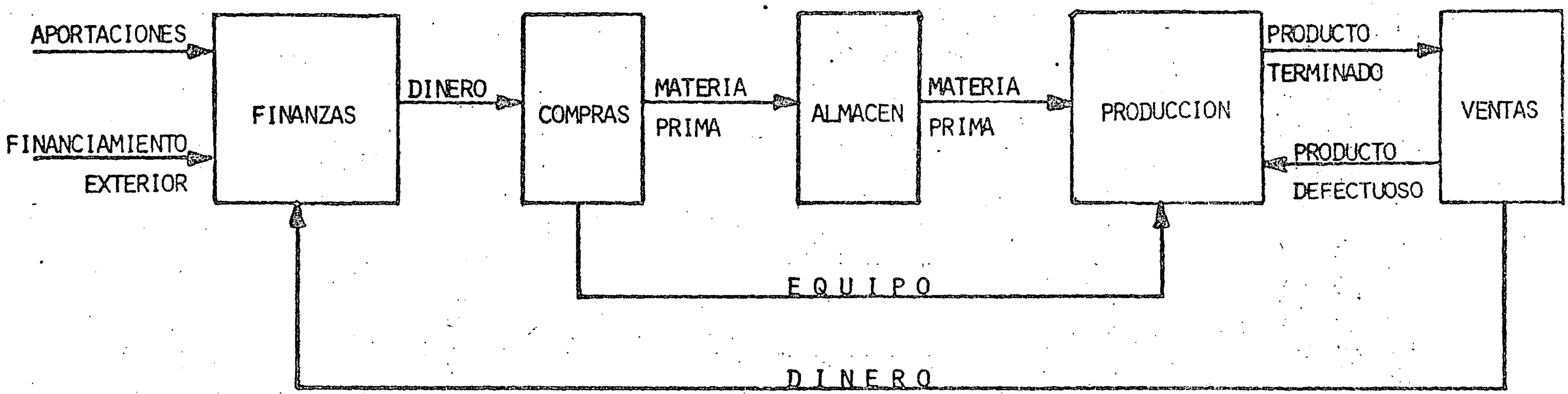
SE ACOSTUMBRA REPRESENTAR LAS PARTES DEL SISTEMA A TRAVES DE LO QUE SE CONOCE COMO CAJA NEGRA.



CAJA NEGRA DEL SUBSISTEMA COMPRAS

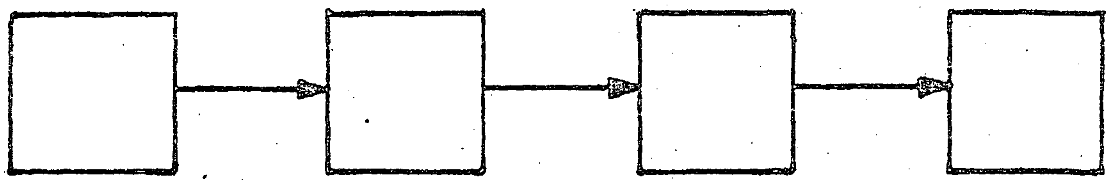
FIGURA 2.

LA INTERACCION ARMONICA DE ESTAS CAJAS NEGRAS CONFORMA EL SISTEMA, PARA SU ANALISIS

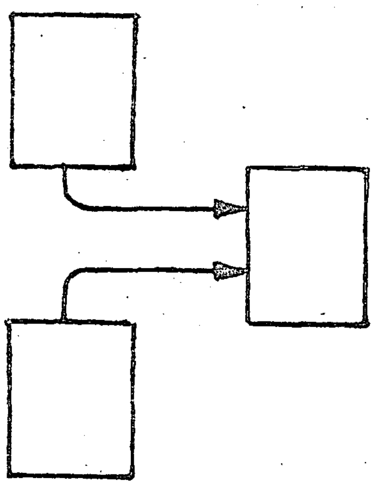


F I G U R A 3.

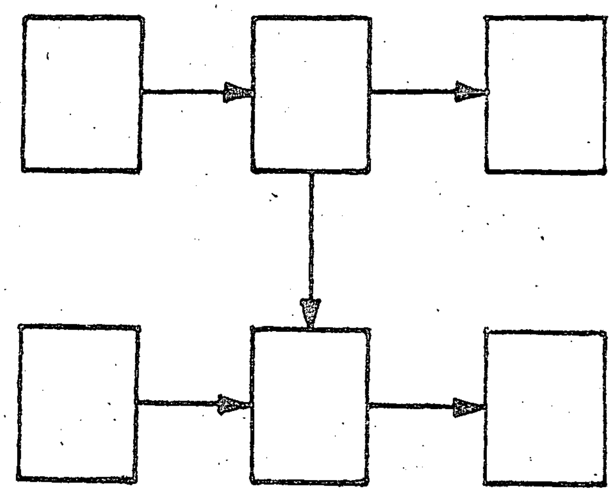
LA INTERACCION DE LOS SUBSISTEMAS PUEDE SER EN LINEA, PARALELO, O MIXTAS.



EN LINEA



EN PARALELO



M I X T O

F I G U R A 4.

LAS INTERACCIONES ENTRE LOS SUBSISTEMAS DEFINEN UN PROBLEMA DE INFORMACION Y DESDE LUEGO QUE AFECTAN LA ESTRUCTURA - DEL ORGANO ADMINISTRATIVO.

VEAMOS PRIMERO LOS CASOS DE ESTRUCTURAS ORGANIZATIVAS.

OTRAS PARTES DE LA EMPRESA NO CONSIDERADAS EN EL EJEMPLO ANTERIOR, SON POR EJEMPLO LAS ADMINISTRATIVAS, DE ENTRE - LAS QUE SE PUEDE MENCIONAR EL DEPARTAMENTO DE PERSONAL, EL QUE TIENE INTERACCION CON TODOS LOS DEMAS DEPARTAMENTOS.

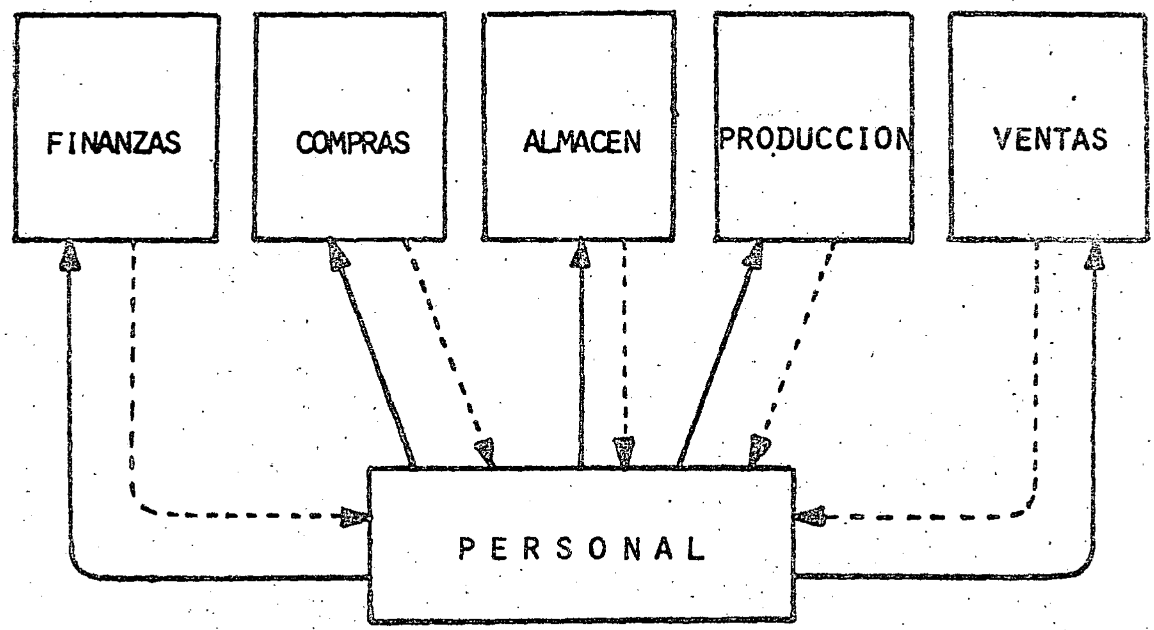


FIGURA 5.

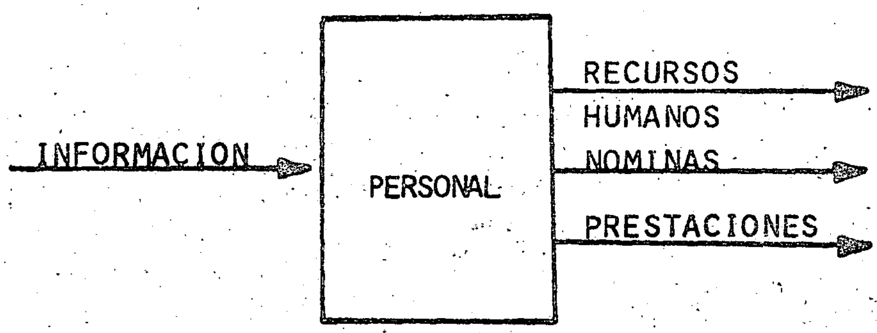


FIGURA 6.

AL PLANEAR LA ESTRUCTURA ADMINISTRATIVA QUE SE PRETENDE DAR A UN ORGANISMO, ES FRECUENTE PREGUNTAR

¿LA FUNCION ADMINISTRATIVA DEBE ESTAR CONCENTRADA O DESCONCENTRADA?

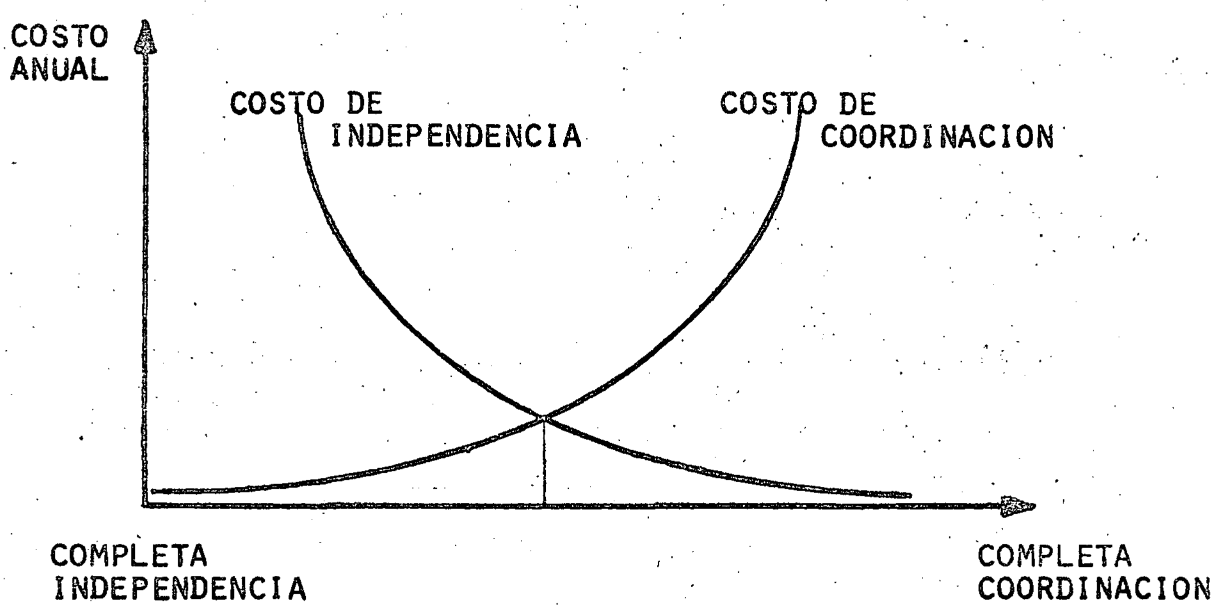
POR EJEMPLO, EN EL CASO DEL DEPARTAMENTO DE PERSONAL

¿DEBE EXISTIR UN DEPARTAMENTO DE PERSONAL QUE DE SERVICIO A TODOS LOS DEMAS?

¿O CADA DEPARTAMENTO (FINANZAS, COMPRAS, ALMACEN, PRODUCCION Y VENTAS) DEBE SER AUTOSUFICIENTE EN CONSEGUIR SUS PROPIOS RECURSOS HUMANOS, PROCESAR Y PAGAR SUS NOMINAS?

PREGUNTAS DIFICILES DE CONTESTAR, SI NO SE HA HECHO UN ANALISIS PROFUNDO DEL TIPO DE ORGANO ADMINISTRATIVO QUE SE DESEA DISENAR. SIN EMBARGO SE PUEDE DECIR EN TERMINOS GENERALES QUE:

ENTRE MAS SE CONCENTRE UNA ACTIVIDAD QUE TIENE FUERTES INTERACCIONES CON OTRAS, MAS SE REQUERIRA DE UNA BUENA COORDINACION Y ESTO SOLO SE LOGRA A TRAVES DE EXCELENTES CANALES DE INFORMACION.



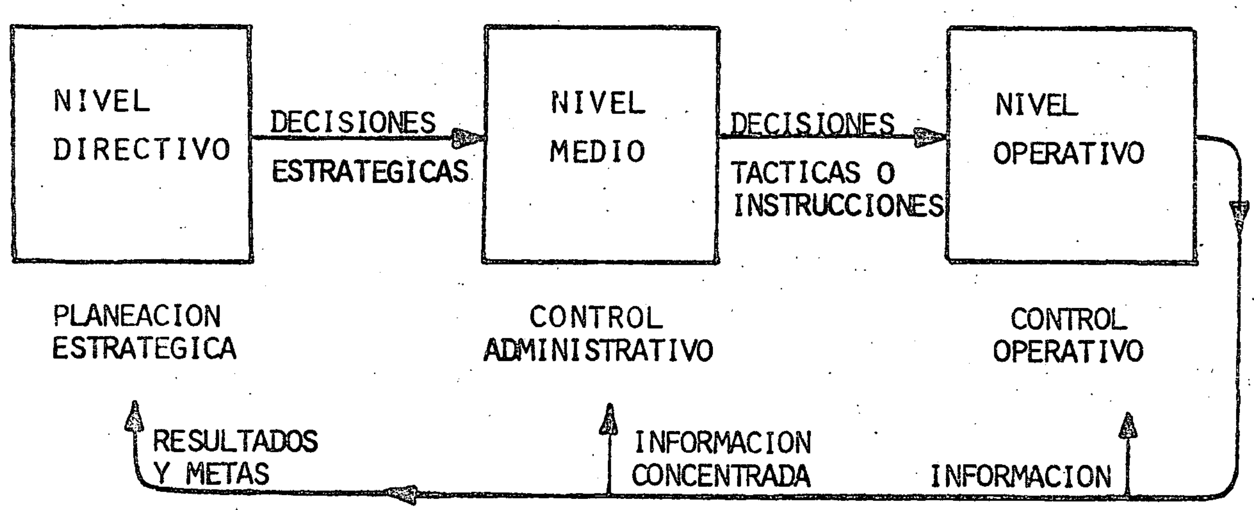
COSTO DE COORDINACION E INDEPENDENCIA

FIGURA 7.

SE PUEDE AFIRMAR QUE UN SISTEMA DE INFORMACION ES EL MECANISMO QUE PERMITE QUE LAS ESTRUCTURAS ADMINISTRATIVAS SE PUEDAN DESCONCENTRAR O NO.

EL SISTEMA DE INFORMACION DENTRO DE UN ORGANISMO DESEMPENA UNA FUNCION ANALOGA A LA DE UN SISTEMA NERVIOSO, PUESTO QUE DEBE DESARROLLAR ACCIONES TALES COMO: CAPTAR, CLASIFICAR, TRANSMITIR, ALMACENAR, RECUPERAR Y PRESENTAR INFORMACION.

SU OBJETIVO FUNDAMENTAL DEBE CONSISTIR EN PROPORCIONAR INFORMACION OPORTUNA Y RELEVANTE PARA LA TOMA DE DECISIONES.



F I G U R A 8.

LOS SISTEMAS DE INFORMACION PARA SU ESTUDIO SE PUEDEN CLASIFICAR DE DIVERSAS MANERAS

A) POR EL NIVEL AL QUE SIRVE

EL SISTEMA DE INFORMACION PUEDE SER

i) PARA PLANEACION ESTRATEGICA
ii) PARA CONTROL ADMINISTRATIVO
iii) PARA CONTROL OPERATIVO
iv) INTEGRAL

B) POR SUS CANALES DE COMUNICACION

LOGICO ES QUE SI UN SISTEMA DE INFORMACION SIRVE A UN ORGANO ADMINISTRATIVO, DEBE ESTAR INTIMAMENTE LIGADO A LA ESTRUCTURA ORGANIZATIVA DE DICHO ORGANO Y DE ENTRE SUS CANALES SE DEBEN CONTAR LOS JERARQUICOS DE ESAS ESTRUCTURAS.

POR EL TIPO DE CANAL, LOS SISTEMAS DE INFORMACION SE DIVIDEN EN:

i) FORMALES
ii) INFORMALES

C) POR LA FORMA EN QUE SE RECUPERA LA INFORMACION

i) SISTEMAS DE SALIDAS PROGRAMADAS

ii) SISTEMAS DE SALIDAS NO PROGRAMADAS

LA OPERACION DE TODO SISTEMA DE INFORMACION SE DIVIDE BASICAMENTE EN TRES PARTES, MISMAS QUE HAY QUE TENER EN CONSIDERACION EN EL DISENO.

- CAPTURA DE INFORMACION
- ALMACEN DE INFORMACION
- RECUPERACION DE INFORMACION

INGENIERIA DE SISTEMAS

BIBLIOGRAFIA DE INGENIERIA DE SISTEMAS

DR. JESUS ACOSTA FLORES

JUNIO, 1978

ibliography

oramowitz, M. and I. Stegun, Editors, *Handbook of Mathematical Tables*, Table 26.11, ige 991, The National Bureau of Standards, Applied Math Series 55, Second Printing, ovember, 1964, Superintendent of Documents, U.S. Government Printing Office, ashington, D.C. 20402.

guilar, R. J., *Systems Analysis and Design in Engineering, Architecture, Construction, d Planning*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1973.

hiezer, N. I., *The Calculus of Variations*, Blaisdell, New York, 1962.

len, R. G. N., *Mathematical Economics*, MacMillan, New York, 1957.

exander, J. E. and J. M. Bailey, *Systems Engineering Mathematics*, Prentice-Hall, glewood Cliffs, New Jersey, 1963.

ger, J. R. M. and C. V. Hays, *Creative Synthesis in Design*, Prentice-Hall, Englewood ffs, New Jersey, 1964.

do, A., and Others, *Essays on the Structure of Social Science Models*, The MIT Press, nbridge, Massachusetts, 1963.

onymous, *A Guide to Systems Engineering*, Department of the Army, TM 38-760 aft), 1969.

onymous, *Apollo Configuration Management Manual*, NASA NPC 500-1, 1964, rint, 1967.

onymous, *Military Standard-Systems Engineering Management*, MIL-STD-499 AF), July, 1969.

nymous, *Systems Management-Configuration Management During Definition and uisition Phases*, AFSCM 375-1, 1964.

nymous, *Systems Engineering Management Procedures*, AFSCM 375-5, 1966.

b, M. A., "Automata Theory and Control Theory—A Rapproachement," *Automa.*, Vol. 3, pp. 161–189, 1966.

b, M. A. (Editor), *Algebraic Theory of Machines, Languages and Semigroups*, lemic Press, New York, 1968.

b, M. A., "Decomposition Theory for Automata and Biological Systems," in *m Structure*, edited by A. S. Morse, IEEE, New York, 1971.

w, K. J., S. Karlin, and P. Suppes, Editors, *Mathematical Methods in the Social ces, 1959*, Stanford University Press, Stanford, California, 1960.

y, W. R., *Design for a Brain*, Wiley, New York, 1952.

y, W. R., *An Introduction to Cybernetics*, Chapman and Hall, London, 1958.

[illegible] "[illegible] Analysis of Many-Dimensional Relations," *General Systems* [illegible]

20. Ashby, W. R., "Information Flows Within Co-ordinated Systems," in *Progress in Cybernetics*, Vol. 1, edited by J. Rose, Gordan and Breach, New York, 1970.
21. Asimow, M., *Introduction to Design*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1962.
22. Atkinson, R. C., G. H. Bower, and E. J. Crothers, *An Introduction to Mathematical Learning Theory*, Wiley, New York, 1965.
23. Balakrishnan, A. V., "On the State Space Theory of Linear Systems," *J. Math. Analysis and Applications*, Vol. 14, No. 3, pp. 371–391, 1966.
24. Balakrishnan, A. V., "Foundations of the State Space Theory of Linear Systems," *J. Computer and Systems Science*, Vol. 1, March, 1967.
25. Balakrishnan, A. V., "State Space Theory of Linear Time-Varying Systems," in *System Theory*, edited by L. A. Zadeh and E. Polak, McGraw-Hill, New York, 1969.
26. Batchelder, W. H., R. A. Bjork, and J. I. Yellot, *Problems in Mathematical Learning Theory, with Solutions*, Wiley, New York, 1966.
27. Bedworth, D. D., *Industrial Systems, Planning, Analysis Control*, Ronald Press, New York, 1973.
28. Bellman, R. E., *Dynamic Programming*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1957.
29. Bellman, R., *Adaptive Control Processes: A Guided Tour*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1961.
30. Berger, J. and others, *Types of Formalization in Small-Group Research*, Houghton Mifflin, Boston, 1962.
31. Bernd, J. L., Editor, *Mathematical Applications to Political Science II*, Southern Methodist University Press, Dallas, Texas, 1966.
32. Bertalanffy, L. von, *General System Theory*, Braziller, New York, 1969.
33. Beshers, J. M., Editor, *Computer Methods in the Analysis of Large-Scale Social Systems*, The Joint Center for Urban Studies of MIT and Harvard University, Cambridge, Massachusetts, 1965.
34. Blair, R. N. and C. W. Whitston, *Elements of Industrial Systems Engineering*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1971.
35. Bliss, G. A., *Lectures on the Calculus of Variations*, University of Chicago Press, Chicago, 1946.
36. Blood, B. D. Jr., "Toward an Optimum Programming Language for Communications Computers," Master's Thesis, The University of Arizona, Tucson, Arizona, 1973.
37. Booth, T. L., *Sequential Machines and Automata Theory*, Wiley, New York, 1967.
38. Bremermann, H. M., "Optimization Through Evolution and Recombination," in *Self-Organizing Systems*, edited by M. C. Yovits, Spartan Books, Washington, D.C., 1962.
39. Brockett, R. W., *Finite Dimensional Linear Systems*, Wiley, New York, 1970.
40. Brooks, C. N., "Training System Evaluation Using Mathematical Models," *Educational Technology*, Vol. 9, No. 6, pp. 54–61, June, 1969.
41. Brown, C. W., Editor, *Contributions to Scientific Research in Management*, The University of California Press, Los Angeles, California, 1959.
42. Brown, J. H. U., J. E. Jacobs, and L. Stark, *Biomedical Engineering*, F. A. Davis, Philadelphia, 1971.
43. Brown, R. G. and J. W. Nilsson, *Introduction to Linear Systems Analysis*, Wiley, New York, 1962.
44. Cartwright, D. and A. Zander, Editors, *Group Dynamics, Research and Theory*, Peterson, Evanston, Illinois, 1960.

45. Casti, J. and R. Kalaba, *Imbedding Methods in Applied Mathematics*, Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1973.

46. Chang, S. S. L., *Synthesis of Optimum Control Systems*, McGraw-Hill, New York, 1961.

47. Chapanis, A., *Man/Machine Engineering*, Wadsworth Publishing Company, Belmont, California, 1966.

48. Chase, W. P., *Management Guide to Systems Engineering*, Tinnon-Brown, Los Angeles, California, 1969.

49. Chestnut, H., *Systems Engineering Tools*, Wiley, New York, 1965.

50. Chestnut, H., *Systems Engineering Methods*, Wiley, New York, 1968.

51. Churchman, C. W., R. C. Ackoff, and E. L. Arnoff, *Introduction to Operations Research*, Wiley, New York, 1957.

52. Clark, K., *Civilization, A Personal View*, Harper and Row, New York, 1969.

53. Cleland, D. I. and W. R. King, *Systems Analysis and Project Management*, McGraw-Hill, New York, 1968.

54. Clifton, H. D., *Data Processing Systems Design*, Auerbach, Princeton, 1971.

55. Coleman, J. S., *Information to Mathematical Sociology*, The Free Press of Glencoe, Collier-MacMillan Limited, London, 1964.

56. Conant, R. C., "Detecting Subsystems of a Complex System," *IEEE Trans. Systems, Man, and Cybernetics*, Vol. SMC-2, No. 4, pp. 550–553, September, 1972.

57. Cooper, W. W., J. J. Leavitt, N. W. Shelly, Editors, *New Perspectives in Organization Research*, Wiley, New York, 1964.

58. Criswell, J. H., Editor, *Mathematical Methods in Small Group Processes*, Stanford University Press, Stanford, California, 1962.

59. Dalkey, N., "An Experimental Study of Group Opinion: The Delphi Method," *Futures*, Vol. 1, No. 5, September, 1969, p. 421.

60. Dantzig, G. B., *Linear Programming and Extensions*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1963.

61. Debreu, Gerald, *Theory of Value: An Axiomatic Analysis of Economic Equilibrium*, Cowles Commission Monograph 17, Wiley, New York, 1959.

62. DeGreene, K. B., Editor, *Systems Psychology*, McGraw-Hill, New York, 1970.

63. de Neufville, R. and J. H. Stafford, *Systems Analysis for Engineers and Managers*, McGraw-Hill, New York, 1971.

64. Dertouzos, M. L., M. Athons, R. N. Spann, and S. J. Mason, *Systems, Networks, and Computation: Basic Concepts*, McGraw-Hill, New York, 1972.

65. Director, S. W. and R. A. Rohrer, *Introduction to Systems Theory*, McGraw-Hill, New York, 1972.

66. Dror, Y., *Design for Policy Sciences*, American Elsevier, New York, 1971.

67. Eckman, D. P., Editor, *Systems: Research and Design*, Wiley, New York, 1961.

68. Eder, W. E. and W. Gosling, *Mechanical System Design*, Pergamon, New York, 1965.

69. The Editors of Fortune, *Our Ailing Medical System*, Harper and Row, New York, 1969.

70. Ellis, D. O. and F. J. Ludwig, *Systems Philosophy*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1962.

71. Emshoff, J. R. and R. L. Sisson, *Design and Use of Computer Simulation Models*, MacMillan, New York, 1970.

72. [illegible], J., *Cost-Effectiveness: The Economic Evaluation of Engineering Systems*, Wiley, New York, 1968.

73. Feller, W., *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*, Wiley, New York, 1950.

74. Fertig, J. A., J. M. Schnorr, G. D. Williams, and others, *A System Theoretic Approach to the Problem of Juvenile Delinquency in Tucson Schools*, The Department of Systems and Industrial Engineering, The University of Arizona, Tucson, Arizona, 1974.

75. Fishburn, P. C., *Decision and Value Theory*, Wiley, New York, 1964.

76. Freitag, J., *The Design of Systems for Planning and Control*, MAPS Company, Palos Verdes, California, 1970.

77. Friedenberg, R. M., *Unexplored Model Systems in Modern Biology*, Hofner, New York, 1968.

78. Frosch, R. A., "A New Look at Systems Engineering," *IEEE Spectrum*, September, 1969, pp. 24–28.

79. Fulop-Miller, J., *Dehumanization in Modern Society, Its Roots and Dangers*, Navajivan Publishing House, Ahmeckebad, 1958.

80. Gelfand, I. M., and S. V. Fomin, *Calculus of Variations*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1963.

81. Gelfand, I. M., Editor, *Models of the Structural-Functional Organization of Certain Biological Systems*, The MIT Press, Cambridge, Massachusetts, 1971.

82. Goode, H. H. and R. E. Machol, *Systems Engineering*, McGraw-Hill, New York, 1957.

83. Gore, W. J., *Administrative Decision-Making; A Heuristic Model*, Wiley, New York, 1964.

84. Gosling, W., *The Design of Engineering Systems*, Ley, New York, 1962.

85. Grabbe, E. M., S. Ramo, and D. E. Wooldridge, *Handbook of Automation, Computation, and Control*, Volume 3, "Systems and Components," Wiley, New York, 1961.

86. Green, D. M. and J. A. Swets, *Signal Detection Theory and Psychophysics*, Wiley, New York, 1966.

87. Gupta, S. C., *Transform and State Variable Methods in Linear Systems*, Wiley, New York, 1966.

88. Guetzkow, H., P. Kotler, and R. L. Schultz, *Simulation in Social and Administrative Science, Overviews and Case Examples*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1972.

89. Haberman, C. M., *Engineering Systems Analysis*, Merrill, Columbus, Ohio, 1965.

90. Haire, M., Editor, *Modern Organization Theory: A Sysposium of the Foundation for Research on Human Behavior*, Wiley, New York, 1959.

91. Hall, A. D., *A Methodology for Systems Engineering*, Van Nostrand, Princeton, New Jersey, 1962.

62. Hall, H. S. and S. R. Knight, *Higher Algebra*, Macmillan, London, 1948, 4th edition.

93. Hammer, P. C., Editor, *Advances in Mathematical System Theory*, The Pennsylvania State University Press, University Park, Pennsylvania, 1969.

94. Hare, A. P., *Handbook of Small Group Research*, The Free Press of Glencoe, New York, 1963.

95. Hare, A., Editor, *Small Groups: Studies in Social Interaction*, Knopf, New York, 1965.

96. Hare, V. C., *Systems Analysis: A Diagnostic Approach*, Harcourt, Brace, and World, New York, 1967.

97. Harrah, David, *Communications: A Logical Model*, The MIT Press, Cambridge, Massachusetts, 1963.

98. Hartmanis, J. and R. E. Stearns, *Algebraic Structure Theory of Sequential Machines*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1966.

99. Heider, F., *The Psychology of Interpersonal Relations*, Wiley, New York, 1958.

100. Hill, P. H., *The Science of Engineering Design*, Holt, Rinehart, and Winston, New York, 1970.

101. Hogan, J. H. and L. Duckstein, "A Transportation Scheduling Model," *J. Systems Engineering*, Vol. 1, No. 3, pp. 325–354, July, 1969.

102. Hunt, B. R., "The ABM Debate: Some Implications for Systems Engineers and Analysts," *J. Systems Engineering*, Vol. 1, No. 3, pp. 355–398, July, 1969.

103. Hunt, B. R., "Analysis and Synthesis of Networks of Finite State Machines," *J. Systems Engineering*, Vol. 1, No. 1, pp. 1–56, January, 1969.

104. Iberall, A. S., *Toward a General Science of Viable Systems*, McGraw-Hill, New York, 1972.

105. Ickler, R. C., "Systems Engineering Methodology Applied to the Problem of Creating a Management Organization," Master's Thesis, The University of Arizona, Tucson, Arizona, 1973.

106. Irving, G. W., "Adaptive and Optimizing Models of the Human Operator in Manual Control Systems: A Review and Unification," *J. Systems Engineering*, Vol. 1, No. 2, pp. 1551–1598, April, 1969.

107. Jerger, J. J., *Systems Preliminary Design*, Van Nostrand, Princeton, New Jersey, 1960.

108. Johnson, R. A., E. K. Fremont, and J. E. Rosenzweig, *The Theory and Management of Systems*, McGraw-Hill, New York, 1967.

109. Kalman, R. E., "Algebraic Aspects of the Theory of Dynamical Systems," in *Differential Equations and Dynamical Systems*, edited by J. K. Hale and J. P. LaSalle, Academic Press, New York, 1967.

110. Kalman, R. E., "New Developments in Systems Theory Relevant to Biology," in *Systems Theory and Biology*, edited by M. D. Mesarovic, Springer-Verlag, [illegible] 222, 1968.

111. Kalman, R. E., D. L. Falb, and M. A. Arbib, *Topics in Mathematical System Theory*, McGraw-Hill, New York, 1969.

112. Kelly, J. F., *Computerized Management Information Systems*, Macmillan, New York, 1970.

113. Keyes, C. L., *A Management Guide to Systems and Procedures*, Continuing Education Institute, Phoenix, Arizona, 1967.

114. Klir, G. J., "The General System as a Methodological Tool," *General Systems Yearbook*, Vol. 10, pp. 29–42, 1965.

115. Klir, G. J. and M. Valach, *Cybernetic Modelling*, ILIFFE, London, 1967.

116. Klir, G. J., *An Approach to General Systems Theory*, Van Nostrand, Reinhold, New York, 1969.

117. Koenig, H. E., "Mathematical Models of Socioeconomic Systems: An Example," *IEEE Trans. System Science and Cybernetics*, Vol. SSC-1, No. 1, pp. 41–45, November, 1965.

118. Korn, G. A. and T. M. Korn, *Electronic Analog and Hybrid Computers*, McGraw-Hill, New York, 1964.

119. Krohn, K., and J. Rhodes, "Algebraic Theory of Machines I: Prime Decomposition Theorem for Finite Semigroups and Machines," *Transactions of the American Mathematical Society*, Vol. 116, No. 4, pp. 450–464, April, 1965.

120. Langill, A. W., Jr., *Automatic Control Systems Engineering, Volume II, Advanced Control Systems Engineering*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1965.

121. LaPatra, J. W., "Applying Systems Theory in the Social Sciences," *Engineering Education*, Vol. 60, No. 8, pp. 829–831, April, 1970.

122. Lasdon, L. S., *Optimization Theory for Large Systems*, Macmillan, New York, 1970.

123. Lazarsfeld, P. F. and N. W. Henry, Editors, *Reading in Mathematical Social Science*, Science Research Associates, Chicago, 1966.

124. Leach, N. W. and G. C. Beakley, *Engineering, the Profession and Elementary Problem Analysis*, 2nd edition, Macmillan, New York, 1960.

125. Lee, C. F., "Linear System Control and Optimization, A Rigorous Approach by Means of The Tricotyledon Theory of System Design," Master's Thesis, The University of Arizona, Tucson, Arizona, 1974.

126. Leech, D. J., *Management of Engineering Design*, Wiley, New York, 1972.

127. Lesourne, J., *Le Calcul Economique*, Dunod, Paris, 1964.

128. Lesourne, J., *Economic Analysis and Industrial Management*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1960.

129. Li, D. H., *Design and Management of Information Systems*, Science Research Associates, Chicago, 1972.

130. Luce, R. D., Editor, *Developments in Mathematical Psychology*, The Free Press, Glencoe, Illinois, 1960.

131. Luce, R. D., R. R. Bush, and E. Galanter, Editors, *Readings in Mathematical Psychology*, Vols. I and II, Wiley, New York, 1963, 1965.

132. Luce, R. D., R. R. Bush, and E. Galanter, Editors, *Handbook of Mathematical Psychology*, Volumes I, II, and III, Wiley, New York, 1963, 1963, 1965.

133. Lynch, W. A. and J. G. Truxal, *Signals and Systems in Electrical Engineering*, McGraw-Hill, New York, [illegible]

134. Machol, R. E., Editor, *Systems Engineering Handbook*, McGraw-Hill, New York, 1965.

135. Mao, J. C. T., *Quantitative Analysis of Financial Decisions*, Macmillan, London, 1969.

136. Matousek, R., *Engineering Design, A Systematic Approach*, Blackie, London, 1963.

137. Matthews, D. Q., *The Design of the Management Information System*, Auerbach, Princeton, 1971.

138. McKean, R. M., *Efficiency in Government Through Systems Analysis*, Wiley, New York, 1958.

139. McKinsey, J. C. C., *Introduction to the Theory of Games*, McGraw-Hill, New York, 1952.

140. McRuer, D. T., and E. S. Krendel, *Dynamic Response of Human Operators*, WADC Technical Report 56/524, October, 1957.

141. Melsa, J. C. and D. G. Schultz, *Linear Control Systems*, McGraw-Hill, New York, 1969.

142. Meredith, D. D., K. W. Wong, R. W. Woodhead, and R. H. Wortman, *Design and Planning of Engineering Systems*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1973.

143. Mesarovic, M. D., Editor, *Systems Theory and Biology*, Proceedings of the III Systems Symposium at Case Institute of Technology, Springer-Verlag, New York, 1968.

144. Mesarovic, M. D., D. Macko, and Y. Takahara, *Theory of Hierarchical, Multilevel Systems*, Academic Press, New York, 1970.

145. Miles, R. F., Jr., Editor, *Systems Concepts*, Wiley, New York, 1973.

146. Miller, G. A., *Mathematics and Psychology*, Wiley, New York, 1964.

147. Miller, R. W., J. V. Overdorff and others, *A System Theoretic Approach to the*

Information and Referral Problem, Department of Systems and Industrial Engineering, The University of Arizona, Tucson, Arizona, 1973.

148. Mullens, L. J., "The Design and Implementation of a Machine-Independent General System Theoretic Language," Ph.D. Dissertation, The University of Arizona, Tucson, Arizona, 1973.

149. Naddor, E., *Inventory Systems*, Wiley, New York, 1966.

150. Nadler, G., *Work Systems Design: The IDEAL Concept*, Richard D. Irwin, Homewood, Illinois, 1967.

151. Naylor, T. H., J. L. Balintfy, D. S. Burdick, and K. Chu, *Computer Simulation Techniques*, Wiley, New York, 1966.

152. Nemhauser, G. L., *Introduction to Dynamic Programming*, Wiley, New York, 1966.

153. Neumann, J. von, and O. Morganstern, *Theory of Games and Economic Behavior*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 3rd. Ed., 1953.

154. Oren, T., "GEST: General System Theory Implementor, A Combined Simulation Language," Ph.D. Dissertation, The University of Arizona, Tucson, Arizona, 1970.

155. Pennacchi, R., "Principles of Abstract Theory of Systems," *International Journal of Systems Science*, Vol. 3, No. 1, pp. 1–11, 1972.

156. Perry, J. W., "An Introduction to the Design of Standardized Languages: I: Fundamental Concepts, General Procedures, and Practical Considerations," *J. Systems Engineering*, Vol. 1, No. 2, pp. 197–276, April, 1969.

157. Pitts, P. M. and M. I. Posner, *Human Performance*, Brooks/Cole Publishing Company, Belmont, California, 1967.

158. Pollin, J. M. and J. L. Sanders, "Theoretical Foundations for Teleological Systems," *J. Systems Engineering*, Vol. 1, No. 1, pp. 57–89, January, 1969.

159. Pontryagain, L. S., *The Mathematical Theory of Optimal Processes*, Interscience, New York, 1962.

160. Pool, I. S., "Simulating Social Systems," *International Science and Technology*, March, 1964, pp. 62–70.

161. Porter, W. A., *Modern Foundations of Systems Engineering*, MacMillan, New York, 1966.

162. Porter, W. A., "On the Range of Multivariate Time-varying Linear Systems," *J. Systems Engineering*, Vol. 1, No. 2, pp. 277–290, April, 1969.

163. Raiffa, H., *Decision Analysis*, Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1970.

164. Rashevsky, N., *Mathematical Biology of Social Behavior*, The University of Chicago Press, Chicago, 1959.

165. Rashevsky, N., *Mathematical Biophysics*, Dover, New York, 1960.

166. Rau, J. G., *Optimization and Probability in Systems Engineering*, Van Nostrand-Reinhold, New York, 1970.

167. Roberts, H. H., *Mathematical Methods in Reliability Engineering*, McGraw-Hill, New York, 1964.

168. Robichaud, L. P. A., M. Boiszert, and J. Robert, *Signal Flow Graphs and Applications*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1962.

169. Rogers J. J., "Design of a System for Predicting Effects of Vegetation Manipulation on Water Yield in the Salt-Verde Basin," Ph.D. Dissertation, The University of Arizona, Tucson, Arizona, 1973.

170. Rosen, R., *Dynamical System Theory in Biology*, Wiley-Interscience, New York, 1970.

171. Rothman, S. and C. Mosman, *Computers and Society*, Science Research Associates, Chicago, 1972.

172. Rutstein, D. D. and M. Eden, *Engineering and Living Systems: Interfaces and Opportunities*, The MIT Press, Cambridge, Massachusetts, 1970.

173. Saaty, T. L., *Elements of Queueing Theory with Applications*, McGraw-Hill, 1961.

174. Sage, A. P., *Optimum Systems Control*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1968.

175. Savage, L. J., *The Foundations of Statistics*, Wiley, New York, 1950.

176. Schein, E. H., *Organization Psychology*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1965.

177. Schultz, D. G. and J. L. Melsa, *State Functions and Linear Control Systems*, McGraw-Hill, New York, 1967.

178. Scott, A. M., et al, *Simulation and National Development*, Wiley, New York, 1966.

179. Seely, S., *An Introduction to Engineering Systems*, Pergamon Press, New York, 1972.

180. Seiler, K., III, *Introduction to Systems Cost-Effectiveness*, Publications in Operations Research, No. 17, Wiley-Interscience, New York, 1969.

181. Shannon, C. E. and W. Weaver, *The Mathematical Theory of Communication*, The University of Illinois Press, Urbana, Illinois, 1969.

182. Shemer, J. E. and S. C. Gupta, "Optimization Considerations of an Adaptive Scheduling Discipline for Time-Shared Computers," *J. Systems Engineering*, Vol. 1, No. 1, pp. 90–116, January, 1969.

183. Sheridan, T. B. and W. R. Ferrell, *Models of Man-Machine Systems, Information, Control and Decision*, MIT Press, Cambridge, Massachusetts, 1974.

184. Siegel, A. I. and J. J. Wolf, *Man-Machine Simulation Models*, Wiley, New York, 1969.

185. Shinners, S. M., *Techniques of Systems Engineering*, McGraw-Hill, New York, 1966.

186. Simon, H. A., *Models of Man*, Wiley, New York, 1957.

187. Skinner, B. F., *Beyond Freedom and Dignity*, Alfred A. Knopf, New York, 1971

188. Stark, R. M. and R. L. Nicholls, *Mathematical Foundations for Design: Civil Engineering Systems*, McGraw-Hill, New York, 1972.

189. Sternberg, S. and others, *Mathematics and Social Sciences*, Mouton, Paris, 1965.

190. Suppes, P. and R. C. Atkinson, *Markov Learning Models for Multi-person Interactions*, Stanford University Press, Stanford, California, 1960.

191. Suppes, P., "Stimulus/Response Theory of Finite Automata," *J. Mathematical Psychology*, Vol. 6, pp. 327–355, 1969.

192. Takacs, L., *Introduction to the Theory of Queues*, Oxford University Press, Oxford, 1962.

193. Tal, A. W., "The Abstract Synthesis of Sequential Machines from Answers to Questions of the First Kind in the Questionnaire Language," *Automation and Remote Control*, Vol. 26, No. 4, 1965.

194. Tagg, J., "The System for Systems Design," *Data Processing*, January-February, 1969, pp. 2–8.

195. Talavage, J. H., "Design of Adaptive Pattern Recognition Systems on the Basis of General System Theory," *J. Systems Engineering*, Vol. 1, No. 3, pp. 397–424, July, 1969.

196. Tessmer, R. J., "Criteria for Systems Tradeoffs," Vol. I, Summary, Sylvania Electronic Systems, E. Needham, Massachusetts, May, 1967, pp. 7–11.

197. Thome, P. G., and R. G. Wi[illegible], "The Systems Approach—A Unified Concept of

Planning," *Aerospace Management*, General Electric Co., Missile & Space Division, Fall Winter, 1966, Vol. I, No. 3, p. 25.

198. Thompson, J. R., *Systems Engineering in the U.S.A.*, Northeast London Polytechnic, 1972.

199. Thompson, J. D., *Approaches to Organizational Design*, University of Pittsburgh Press, Pittsburgh, 1966.

200. Truxal, J. G., *Introductory Systems Engineering*, McGraw-Hill, New York, 1972.

201. Turoff, M., "The Delphi Conference," *The Futurist*, Vol. 2, No. 2, pp. 55–57, April, 1971.

202. Vajda, S., *Mathematical Programming*, Addison-Wesley, Reading Massachusetts, 1961.

203. Vanderveen, B., *Introduction to the Theory of Operational Research*, Phillips Technical Library, Springer-Verlag, New York, 1967.

204. Vidale, R. F., "Systems Engineering as an Academic Discipline," *Engineering Education*, Vol. 60, No. 8, pp. 832–835, April, 1970.

205. Wagner, H. M., *Principles of Operations Research*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1969.

206. Ware, W. H., *Digital Computer Technology and Design*, Volumes I and II, Wiley, New York, 1963.

207. Weiss, P. A., *Hierarchically Organized Systems in Theory and Practice*, Hafner, New York, 1971.

208. Weldon, R. J., "The Concept of a System," *J. Systems Engineering*, Vol. 1, No. 1, pp. 130–149, January, 1969.

209. Weldon, R. J., and A. B. Humphrey, *ANOVA 45, A Flexible Computer Program for the Analysis of Variance*, The University of Arizona Press, Tucson, Arizona, 1972.

210. Whitehouse, G. E., *Systems Analysis and Design Using Network Techniques*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1973.

211. Weiner, N., *Cybernetics*, The MIT Press, Cambridge, Massachusetts, 1961.

212. Wilde, D. J., and C. S. Beightler, *Foundations of Optimization*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1967.

213. Wilson, I. G. and M. E. Wilson, *Information, Computers and Systems Design*, Wiley, New York, 1965.

214. Wilson, W. E., *Concepts of Engineering System Design*, McGraw-Hill, New York, 1965.

215. Windeknecht, T. G., "Mathematical Systems Theory: Causality," *Mathematical Systems Theory*, Vol. 1, No. 4, pp. 279–288, 1967.

216. Windeknecht, T. G., *General Dynamical Processes*, Academic Press, New York, 1971.

217. Wismer, D. A., Editor, *Optimization Methods for Large-Scale Systems with Applications*, McGraw-Hill, New York, 1971.

218. Wortham, A. W. and R. L. Baker, "The Simulation of Transportation Networks," *J. Systems Engineering*, Vol. 1, No. 1, pp. 116–129, January, 1969.

219. Wymore, A. W., *A Mathematical Theory of Systems Engineering: The Elements*, Wiley, New York, 1967.

220. Wymore, A. W., "Discrete Systems and Continuous Systems," in *Advances in Mathematical Systems Theory*, edited by P. C. Hammer, The Pennsylvania State University Press, University Park, Pennsylvania, 1969.

Wymore, A. W., "A Model Curriculum in Systems Engineering," *J. Systems Engineering*, Vol. 1, No. 2, pp. 291–324, April, 1969.

222. Wymore, A. W., "Gelac Function Analysis Study Group, 1969," Unpublished Notes, The Lockheed-Georgia Company, 1969.

223. Wymore, A. W., "A Wattled Theory of Systems," in *Trends in General System Theory*, edited by G. J. Klir, Wiley, New York, 1972.

224. Wymore, A. W., "The Tricotyledon Theory of System Design," in *Proceedings of the First International Symposium: Category Theory Applied to Computation and Control*, published by the Mathematics Department and the Department of Computer and Information Science, University of Massachusetts at Amherst, 1974, pp. 258–265.

225. Yakowitz, S. J., *Mathematics of Adaptive Control Processes*, American Elsevier, New York, 1969.

226. Zadeh, L. A., "From Circuit Theory to System Theory," *Proc. IRE*, Vol. 50, No. 5, pp. 856–865, 1962.

227. Zadeh, L. A. and C. A. Desoer, *Linear System Theory: The State Space Approach*, McGraw-Hill, New York, 1963.

228. Zadeh, L. A. and E. Polak, Editors, *System Theory*, McGraw-Hill, New York, 1969.

229. Zapata, R. N., A. W. Wymore, and B. K. Cross, "A Systems Engineering Formulation of the Open Pit Mine Problem," in *Proceedings of the Eleventh International Symposium on Computer Applications in the Mineral Industry*, Tucson, Arizona, 1973.

230. Zapata, R. N. and A. W. Wymore, "A Systems Engineering Formulation of the Information and Referral Problem," *Proceedings of the 1973 IEEE Conference on Man, Systems, and Cybernetics*, Boston, Massachusetts, November 5–7, 1973.

centro de educación continua
división de estudios superiores
facultad de ingeniería, unam

INGENIERIA DE SISTEMAS

TEORIA DE DECISIONES

DR. JESUS ACOSTA FLORES

JUNIO, 1978

si les Grecs dans leur affrontement avec les Perses aux Thermopyles, si Lindbergh dans le premier vol transatlantique, si Barnard à la première transplantation d'un coeur humain ont obéi à une maximisation implicite de l'espérance morale, ou s'ils ont été des joueurs téméraires qui ont eu la chance de leur côté?

Qui connait la réponse?

Ce n'est d'ailleurs pas la réponse qui importe. Le mérite est déjà immense si nous arrivons à cerner le processus de décision dans ses aspects les plus importants et à nous poser quelques questions essentielles.

Car ce ne sont pas les questions les plus complexes qui sont les plus difficiles, mais les plus simples parce que ce sont les plus fondamentales.

Norbert Rischette*

---

* Institut Grand-Ducal de Luxembourg. Section des Sciences naturelles, physiques et mathématiques.

PROGRAMACION DE INVERSIONES BAJO INCERTIDUMBRE

INTRODUCCION

En la Programación de Inversiones como en todo problema donde se tienen que tomar decisiones importantes, lo primero que deberá considerarse es la formulación de éste, los diferentes cursos posibles de acción y las consecuencias asociadas a cada uno de ellos. Posteriormente, se determinarán las posibilidades de ocurrencia de dichas consecuencias y las preferencias asociadas a ellas. (Inversiones y rendimientos).

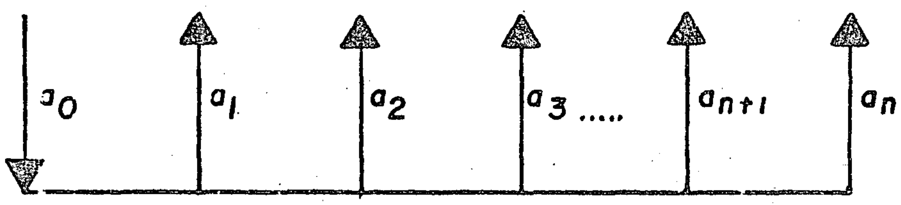
Normalmente es conveniente iniciar el estudio en forma determinista, para después de un análisis de sensibilidad considerar si quien va a decidir se siente satisfecho con los resultados obtenidos ó bien continuar el análisis considerando aquellas variables que sean las más sensibles, como aleatorias.

Naturalmente la programación de inversiones no deberá ser rígida, sino tener la flexibilidad suficiente para poder variar las decisiones en cuanto se tenga mayor información al transcurrir el tiempo, o sea una programación con retroalimentación, dinámica flexible. Se consigue lo anterior si en los puntos en que se puede cambiar una estrategia de inversiones se repite el estudio con la nueva información disponible.

A continuación se presentan casos particulares sobre programación de inversiones bajo incertidumbre con el objeto de ilustrar la metodología.

1. **Rendimientos con distribución normal.**

Se tiene el siguiente proyecto:



donde cada rendimiento a_i es una variable aleatoria normal con media μ_{ai} y desviación estándar σ_{ai}^2

Considerando la variable aleatoria VPN como

$$VPN = a_0 + \frac{a_1}{(1+k)^1} + \frac{a_2}{(1+k)^2} + \ldots + \frac{a_n}{(1+k)^n}$$

entonces, VPN tiene función densidad de probabilidad normal con media

$$\mu = \mu_{a0} + \frac{\mu_{a1}}{1+k} + \frac{\mu_{a2}}{(1+k)^2} + \ldots + \frac{\mu_{an}}{(1+k)^n}$$

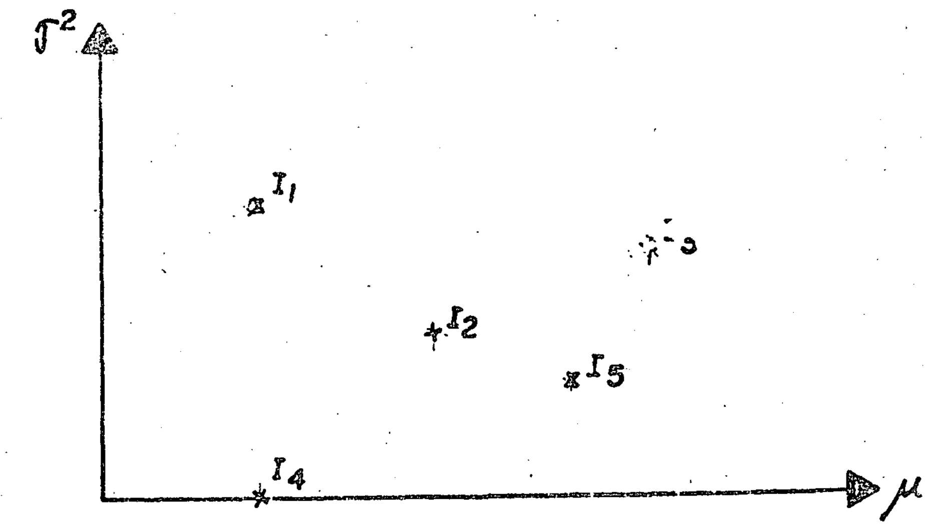
y desviación estándar

$$\sigma = \sqrt{\sigma_{a0}^2 + \frac{\sigma_{a1}^2}{(1+k)^2} + \frac{\sigma_{a2}^2}{(1+k)^4} + \ldots + \frac{\sigma_{an}^2}{(1+k)^{2n}}}$$

De esta manera, para diferentes estrategias de inversión se puede calcular su media y su variancia. Sean éstas:

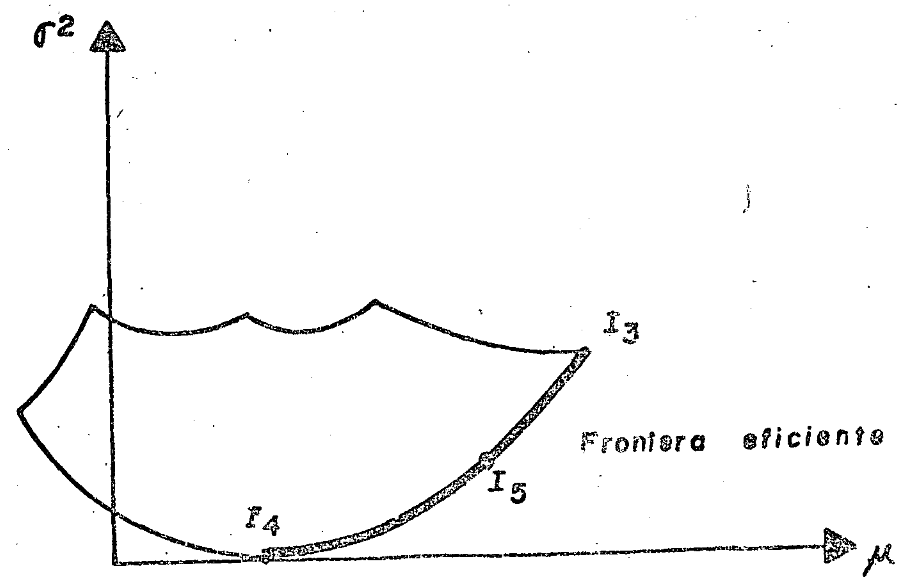
I_1	μ_1	σ_1^2
I_2	μ_2	σ_2^2
.	.	.
.	.	.
.	.	.
I_m	μ_m	σ_m^2

Pudiéndose graficar en un espacio $\mu - \sigma^2$



Si se compara la inversión I_1 con la I_2 es evidente que es preferible esta última, sin ningún análisis adicional, puesto que tiene mayor valor esperado y menor variancia.

Prosiguiendo en esta forma se puede llegar a encontrar una frontera, llámesele eficiente, en la cual ya no es obvio cual estrategia de inversión es la mejor.



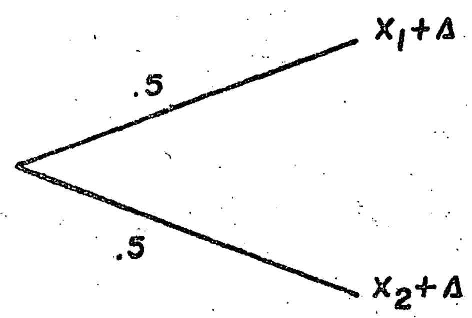
En este punto, quien toma las decisiones no puede hacerlo exclusivamente con la distribución y parámetros de las inversiones, sino que es necesaria una forma sistemática que tome en cuenta su aversión al riesgo y le permita decidir en forma racional.

2. Utilidad exponencial. (Aversión constante al riesgo)

Si quien toma las decisiones piensa que debe comportarse transitivamente en cuanto a sus preferencias (si $A \geqslant B$ y $B \geqslant C$ entonces $A \geqslant C$) y es indiferente ante las opciones 1 y 2,

Opción 1 — Opción 2

$\Delta + \chi_3$ con certeza



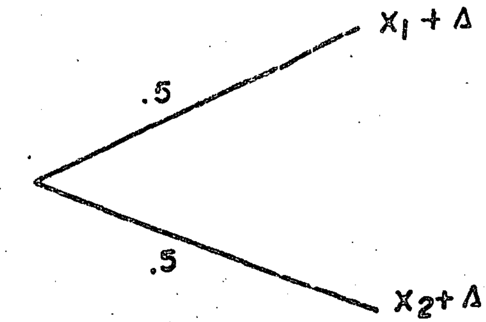
para cualquier valor de Δ, siendo χ_1, χ_2, y χ_3 cantidades fijas, entonces se puede concluir que él tiene una función utilidad exponencial o lineal.

Si χ_3 es diferente de $\frac{\chi_1 + \chi_2}{2}$ entonces la función es exponencial $\left(u(\chi) = -e^{-\frac{x}{c}}\right)$, en caso contrario es lineal $(u(\chi) = \chi)$.

Supóngase que $\chi_3 \neq \frac{\chi_1 + \chi_2}{2}$, para tener completamente determinada la función utilidad hace falta determinar el valor de la constante c.

Puesto que

$\Delta + \chi_3 \sim$



para toda Δ, entonces haciendo $\Delta = 0$

$$u(\chi_3) = 0.5\, u(\chi_1) + 0.5\, u(\chi_2)$$

$$-e^{-\frac{\chi_3}{c}} = -0.5\, e^{-\frac{\chi_1}{c}} - 0.5\, e^{-\frac{\chi_2}{c}}$$

la cual es una ecuación con una sola incógnita, c.

La utilidad de cada estrategia de inversión es la utilidad esperada del VPN correspondiente.

$$u(I_i) = \int_{VPN_i=-\infty}^{\infty} u(VPN_i)\, f_{VPN_i}(VPN_i)\, d\,VPN_i$$

$$= \int_{VPN_i=-\infty}^{\infty} -e^{-\frac{VPN_i}{c}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_i}\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{VPN_i-\mu_i}{\sigma_i}\right)}\, d\,VPN_i$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_i}\int_{VPN_i=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{c}VPN_i}\; e^{-(VPN_i-\mu_i)^2/2\sigma_i^2}\, d\,VPN_i$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_i}\int_{VPN_i=-\infty}^{\infty} e^{-A(VPN_i)}\, d\,VPN_i$$

$$A(VPN_1) = \frac{1}{c} VPN_1 + \frac{(VPN_1)^2}{2\sigma_1^2} + \frac{\mu_1^2}{2\sigma_1^2} - \frac{2\mu_1 VPN_1}{2\sigma_1^2}$$

$$= \frac{1}{2\sigma_1^2} \left\{ \left[VPN_1 + \left(\frac{1}{c}\sigma_1^2 - m_1 \right) \right]^2 - \frac{1}{c^2}\sigma_1^4 + \frac{2\mu_1}{c}\sigma_1^2 \right\}$$

$\therefore$

$$u(I_1) = - e^{\frac{\sigma_1^2}{2c^2} - \frac{\mu_1}{c}} \int_{VPN_1=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_1} e^{-(VPN_1 + \frac{\sigma_1^2}{c} - \mu_1)^2/2\sigma_1^2} \, d\,VPN$$

Se nota que la integral es el área total bajo una función densidad de probabilidad de Gauss cuya media es $\mu_1 - \frac{\sigma_1^2}{c}$.

Ya que el área total bajo cualquier función densidad de probabilidad debe ser la unidad, se ha encontrado que:

$$u(I_1) = -e^{\frac{\sigma_1^2}{2c^2} - \frac{\mu_1}{c}}$$

El equivalente bajo certeza de cualquier estrategia de inversión, $EC(I_1)$, es aquella cantidad cuya utilidad es igual a la utilidad esperada de la estrategia, o sea:

$$u[EC(I_1)] = u(I_1)$$

Como $u(\chi) = -e^{-\frac{x}{c}}$, entonces

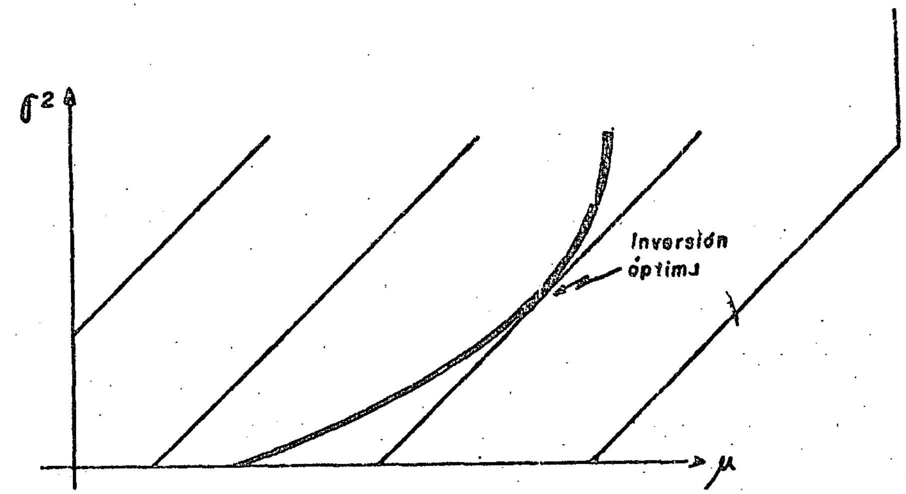
$$-e^{-\frac{EC(I_1)}{c}} = -e^{\frac{\sigma_1^2}{2c^2} - \frac{\mu_1}{c}}$$

Tomando logaritmos naturales

$$EC(I_1) = \mu_1 - \frac{1}{2c}\sigma_1^2 \qquad \ldots (a)$$

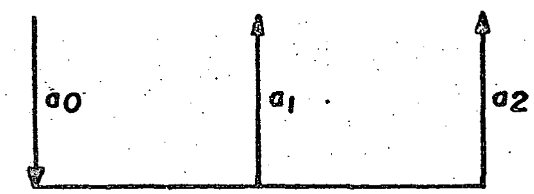
Con lo cual el problema de incertidumbre se ha reducido a uno bajo certeza, determinista. Luego la inversión óptima será aquella que tenga el máximo equivalente de certeza.

(a) es una línea recta en el plano (μ_1, σ_1^2)

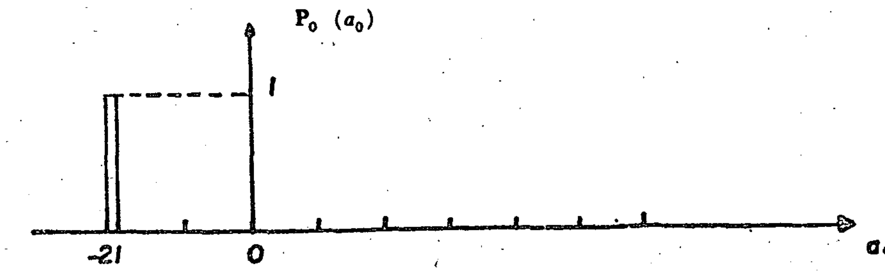


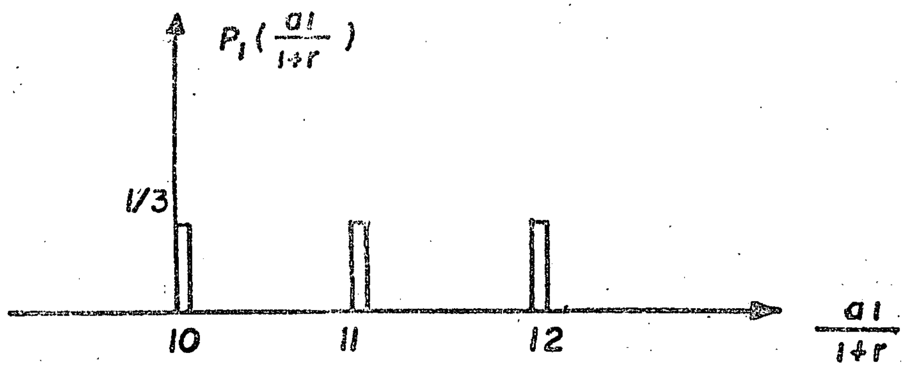
3. **Los rendimientos en cada período de tiempo tienen funciones masa de probabilidad diferentes e independientes.**

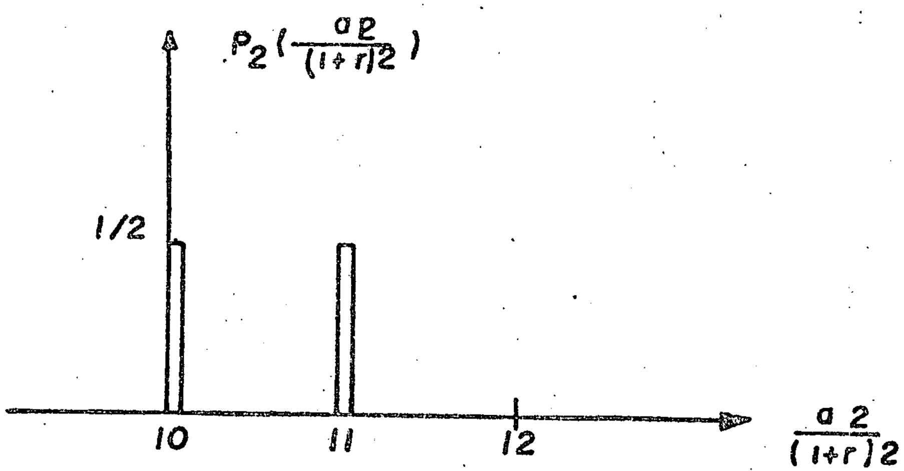
Cada caso en particular será diferente, se ejemplificará usando la siguiente inversión:



siendo sus funciones masa de probabilidad:







$$VPN = a_0 + \frac{a_1}{1+r} + \frac{a_2}{(1+r)^2}$$

$$\text{Sea} \quad \omega = \frac{a_1}{1+r} + \frac{a_2}{(1+r)^2}$$

puesto que a_1 y a_2 son independientes, entonces la transformada geométrica de ω es igual al producto de las transformadas de $p_1(.)$ y p_2 $(.)$

Es decir:

$$p_\omega^T(z) = p_1^T(z) \, . \, p_2^T(z)$$

$$p_1^T(z) = \frac{1}{3}\,(z^{10} + z^{11} + z^{12})$$

$$P_2^T(z) = \frac{1}{2}\,(z^{10} + z^{11})$$

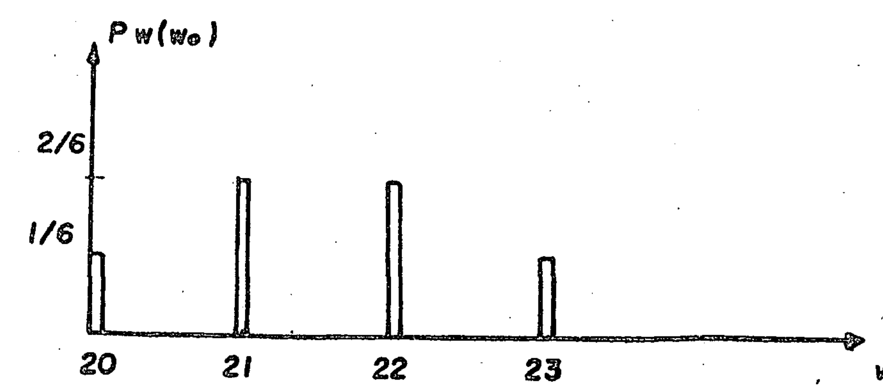
$$\therefore \quad p_\omega^T(z) = \frac{1}{6}\,(z^{20} + 2z^{21} + 2z^{22} + z^{23})$$

Ya que $p_\omega^T(z) = \sum_{\omega_0=0}^{\infty} p_\omega(\omega_0)\, z^{\omega_0}$, se puede notar que los coeficientes de z^{ω_0} en la transformada son los valores de $p_\omega(\omega_0)$.

Por lo cual,

Δ $p_\omega(\omega_0)$

$$p_\omega(\omega_0) = \begin{cases} \frac{1}{6} & \omega_0 = 20,\ 23 \\ \frac{2}{6} & \omega_0 = 21,\ 22 \\ 0 & \text{c. o. c.} \end{cases}$$



$$
y \quad p(VPN) = \begin{cases} \dfrac{1}{6} & VPN = +2, -1 \\[2ex] \dfrac{2}{6} & VPN = +1, 0 \\[2ex] 0 & \text{cualquier otro caso} \end{cases}
$$

$$
\mu = +0.5 \qquad \sigma^2 = \frac{11}{12}
$$

Como en el caso anterior, la obtención de una distribución de probabilidad es una condición necesaria más en la mayoría de los casos no basta para poder tomar una buena decisión.

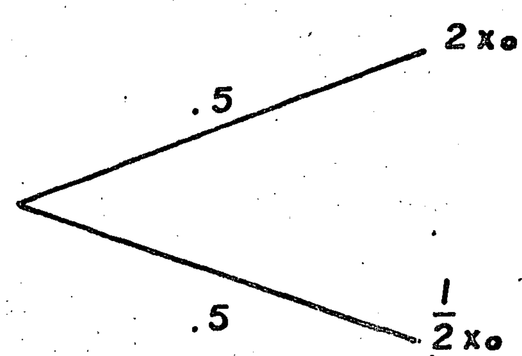
4. Utilidad Logarítmica. (Aversión proporcional al riesgo).

En la aversión proporcional al riesgo, el plan óptimo de inversión no depende del capital. Unicamente cuatro funciones utilidad gozan de esta propiedad, siendo una de ellas la logarítmica.

Si quien debe decidir permanece indiferente entre la opción 1 y la 2,

Opción 1 **Opción 2**

χ_0 bajo certeza



entonces se puede concluir que $u(\chi) = \log \chi$

Para el ejemplo se supondrá que esa es la situación:

Considérese además un capital de 100, inicialmente en la empresa

$$
u(I) = \frac{1}{6} u(-1+100) + \frac{2}{6} u(0+100) + \frac{2}{6} u(1+100) + \frac{1}{6} u(2+100)
$$

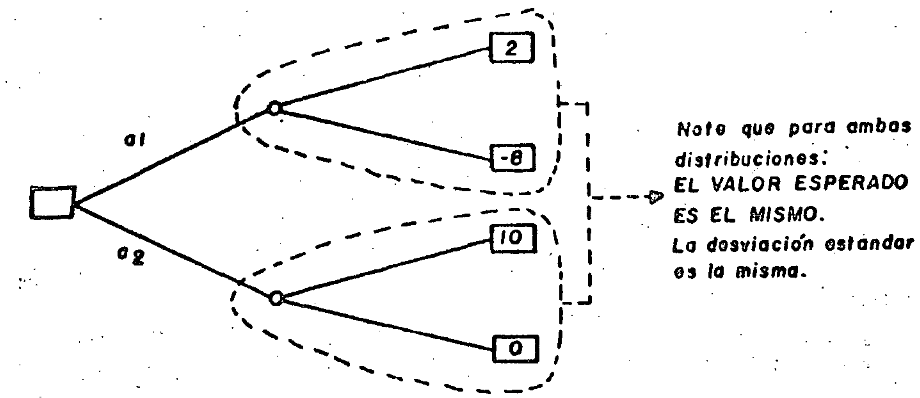
$$
u(I) = \frac{1}{6} \log (99) + \frac{2}{6} \log (100) + \frac{2}{6} \log (101) + \frac{1}{6} \log (102)
$$

$$
u(I) = 2.0044
$$

Equivalente de certeza $= 101 >$ Capital inicial $= 100$

5. Criterio de selección basado exclusivamente en la media y la desviación estándar.

Considérese el siguiente problema:



¿Pero seríamos indiferentes entre estas dos loterías?

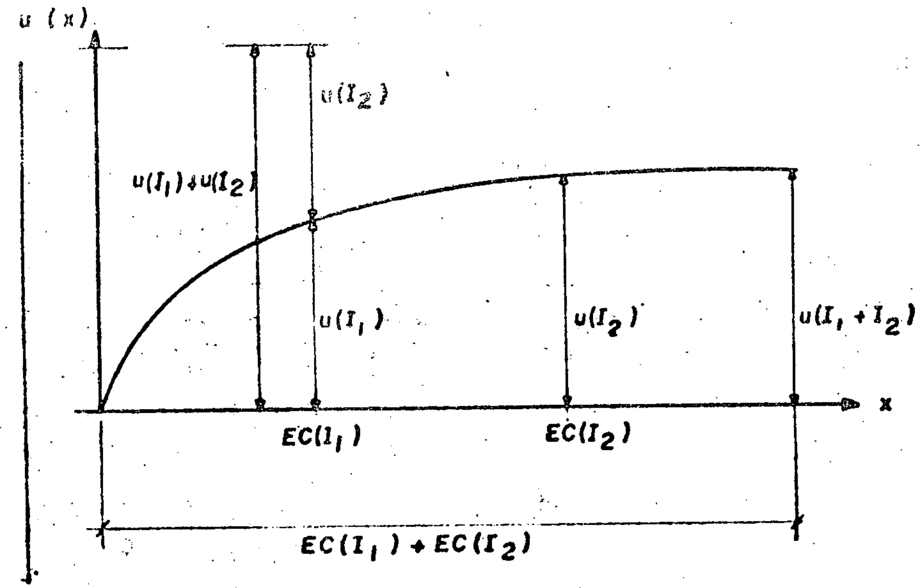
La solución entonces es considerar una función utilidad para tomar en cuenta el riesgo.

6. Maximizar la suma de utilidades.

Se podría pensar que para obtener la selección óptima de inversiones bastaría con

$$
\begin{aligned} \text{Max } z &= \sum_{i=1}^{n} u(I_i) \\ \text{s. a.} & \\ &\text{restricciones.} \end{aligned}
$$

pero al hacer ésto se está suponiendo implícitamente que $u(I_1 + I_2) = u(I_1) + u(I_2)$ lo cual en general es completamente falso. (Se cumple solamente si $u(\chi) = \chi$).



Entonces, lo que se deberá hacer es maximizar la suma de los equivalentes de certeza:

$$\text{Max } z = \sum_{i=1}^{n} EC(I_i)$$

s. a.

restricciones.

6. **Cálculo de equivalentes de certeza con utilidad exponencial y diferentes distribuciones de probabilidad.**

Distribución de Laplace

$$f_{VPN_1}(VPN_1) = \frac{a}{2} e^{-a|VPN_1 - b|} \qquad -\infty < VPN_1 < \infty$$

$$a > 0 \qquad -\infty < b < \infty$$

$$E(VPN_1) = b \qquad \sigma_1^2 = 2a^{-2}$$

$$u(I_1) = \int_{VPN_1=-\infty}^{\infty} - e^{-\frac{VPN_1}{c}} f_{VPN_1}(VPN_1)\, dVPN_1$$

$$u(I_1) = -\frac{a^2 e^{-\frac{b}{c}}}{a^2 - \frac{1}{c^2}}$$

$$u(EC(I_1)) = u(I_1)$$

$$\therefore \quad e^{-\frac{EC(I_1)}{c}} = \frac{a^2 e^{-\frac{b}{c}}}{a^2 - \frac{1}{c^2}}$$

haciendo operaciones

$$\underline{EC(I_1) = E(VPN_1) + CL\left(1 - \frac{\sigma_x^2}{2c^2}\right)}$$

Distribución Gamma.

$$f_{VPN_1}(VPN_1) = \begin{cases} \dfrac{(VPN_1)^a \; e^{-VPN_1/b}}{a! \quad b^{a+1}} & VPN_1 > 0 \\ 0 & \text{cualquier otro caso} \end{cases}$$

$$a > -1 \qquad b > 0$$

$$E(VPN_1) = \frac{(a+1)b^2}{b} = (a+1)b$$

$$\sigma^2 = (a+1)b^2$$

Se calculó el equivalente de certeza de manera análoga a los anteriores obteniendo:

$$EC(I_1) = c\left(\frac{E(VPN_1)}{\sigma_a}\right)^2 \quad L\left(1 + \frac{\sigma_a^2}{(c)\,(E(VPN_1))}\right)$$

Distribución uniforme.

$$f_{VPN_1}(VPN_1) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & a < VPN_1 < b \\ 0 & \text{c. o. c.} \end{cases}$$

$$-\infty < a < b < \infty$$

$$E(VPN_1) = \frac{a+b}{2} \qquad \sigma_a^2 = \frac{(b-a)^2}{12}$$

$$EC(I_1) = c\left[L\frac{b-a}{c} - L\left(e^{-\frac{a}{c}} - e^{-\frac{b}{c}}\right)\right]$$

7. Conclusión.

En este artículo se ha mostrado una metodología para utilizar teoría de decisiones en la programación de inversiones. Naturalmente se tendrá que seguir considerando si las inversiones son con o sin restricciones presupuestales, puras, mixtas, un solo período de inversión o varios, estáticas o dinámicas. Después de clasificado el problema, se resuelve en forma determinista, haciendo un análisis de sensibilidad para determinar cuales variables deberán considerarse como aleatorias (por supuesto, las más sensibles).

Aquí en este punto se ve la conveniencia de hacer intervenir, en forma sistemática, el criterio de quien toma las decisiones, representando su estructura de preferencias mediante una función utilidad. Las distribuciones de probabilidad se determinarán objetiva o subjetivamente según la información que se tenga disponible. Contando con lo anterior, es relativamente simple una buena programación de inversiones utilizando los equivalentes bajo certeza.

José Jesús Acosta Flores *

centro de educación continua
división de estudios superiores
facultad de ingeniería, unam

INGENIERIA DE SISTEMAS

DETERMINACION DEL PRESUPUESTO OPTIMO DE INVERSION EN CONJUNTOS DE PROYECTOS

DR. FELIPE OCHOA ROSSO

JUNIO, 1978

DETERMINACION DEL PRESUPUESTO OPTIMO DE INVERSION EN CONJUNTOS DE PROYECTOS

por el
DR. FELIPE OCHOA*

1. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Dentro del tipo genérico de problemas de selección de inversiones se presenta con frecuencia el problema siguiente:

Sea un sistema existente en expansión que requiere de nuevos proyectos de capital para satisfacer una demanda esperada o para atender problemas no resueltos con anterioridad.

El conjunto de proyectos identificados deben evaluarse en forma individual con el objeto de justificar su inversión per se, es decir, que la corriente de ingresos esperada resulte superior a la correspondiente corriente de egresos. Ahora bien, dado el conjunto de proyectos aceptables desde el punto de vista individual, se presenta el dilema siguiente: Se deberá solicitar la inversión total, esto es, deberán recomendarse todos los proyectos, o bien, puesto que en general los recursos son limitados y no pueden realizarse todos, deberá escogerse solo un subconjunto de ellos y cuál debería ser éste?

En caso de que los recursos sean limitados, la disponibilidad presupuestal se fija por lo general en forma exógena por parte de la autoridad hacendaria, si se trata de una inversión pública, o del responsable de finanzas, si es una empresa privada, en función de las disponibilidades de capital y capacidad de endeudamiento que permita la estrategia financiera del país o la empresa.

De acuerdo con lo anterior, surge la necesidad de seleccionar un subconjunto de proyectos que, sin exceder el presupuesto de inversión disponible, proporcione

* Director General de FOA, S.C. Consultores

en conjunto, el beneficio total máximo posible.

Este problema genérico ha sido atacado en el pasado por medio del planteamiento de modelos simbólicos, matemáticos, del tipo denominado de programación lineal en variables que pueden tomar solo valores enteros.

Supongamos ahora que el grupo o comité responsable de identificar proyectos y evaluarlos, y a su vez recomendar un conjunto óptimo para inversión, desconoce el monto del presupuesto y solo tiene información sobre el rango que tendrá. Entonces uno de los problemas que debe resolver es el de establecer las combinaciones óptimas de proyectos para diferentes valores del presupuesto. En principio el problema podría resolverse con los métodos usuales, para varios valores de P, reiterando y resolviendo tantos problemas como valores de P.

Una manera muy eficiente implicaría que un solo proceso de solución permitiera obtener todas las soluciones óptimas para el rango de P. Un método con estas características paramétricas es por ejemplo el desarrollado en[1].

Dado que tenemos beneficios totales de subconjuntos de proyectos óptimos para cada rango de P, planteamos aqui la tésis que debe existir un presupuesto óptimo P* generado en forma endógena, que representa el P o total de inversión que genera la máxima efectividad de la inversión, medida por el beneficio total del conjunto de proyectos, por unidad de capital invertido.

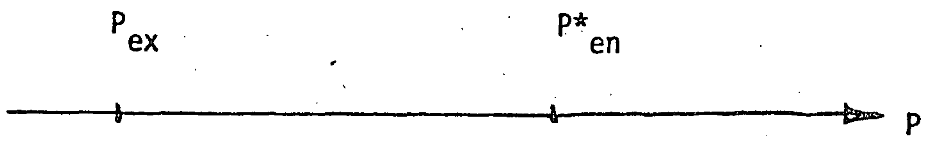
La tésis que sostenemos es que al contrario de como se hace actualmente: Presupuesto se fija exógenamente y sin discusión y de ahí se deriva el conjunto óptimo de proyectos. En realidad, debe procederse de la siguiente forma:

Paso 1.- Comité de selección determina el conjunto óptimo de proyectos que optimiza no solo la suma de beneficios, sino también la efectividad Σ Benef/ Inversión total. Conocido el presupuesto óptimo, este es el que deberá recomendarse al organismo financiero. Si este tiene razones válidas para insistir en el presupuesto exógeno, entonces deberá negociarse, indicando a

---

1 Ochoa, F., *Applications of Discrete Optimization Techniques to Capital Investment Problems*, Research Report R68-43, Instituto Tecnológico de Massachusetts, Departamento de Ingeniería Civil, Enero 1968.

finanzas el costo de oportunidad de que el presupuesto exógeno sea menor que el endógeno o viceversa.



$$\left.\frac{\Sigma b_i}{\Sigma c_i}\right|_{i \in I} \qquad\qquad \left.\frac{\Sigma b_i}{\Sigma c_i}\right|_{i \in \hat{I}}$$

I., conjunto óptimo de proyectos aceptados con el presupuesto fijado exógenamente
$\hat{I}$, conjunto óptimo de proyectos aceptados con el presupuesto fijado endógenamente
b_i, c_i, beneficio y costo respectivamente del proyecto i-ésimo.

$$\text{Costo de Oportunidad} = \left.\frac{\Sigma b_i}{\Sigma c_i}\right|_{i\in \hat{I}} - \left.\frac{\Sigma b_i}{\Sigma c_i}\right|_{i\in I}$$

El problema entonces es un doble problema de optimización que busca definir:

1. El subconjunto óptimo de proyectos a seleccionar que garantice el máximo beneficio total.

2. Y que corresponda al presupuesto o inversión que permita lograr la efectividad óptima (beneficio/costo total invertido de la totalidad de los proyectos aceptados).

II. FORMULACION DEL MODELO

El modelo propuesto se presenta en la Tabla 1. En este, la función objetivo (1) a maximizar es el beneficio total de los proyectos aceptados entre el monto de inversión total de los mismos y las únicas restricciones existentes se refieren a la naturaleza binaria de las variables de decisión (2).

El modelo asi desarrollado es de programación entera no-lineal con n variables, correspondientes al conjunto de proyectos potenciales para inversión.

A: Determinar los valores óptimos Z° y X° que permitan:

$$\text{Maximizar} \quad Z = \sum_{i=1}^{n} b_i x_i \Big/ \sum_{i=1}^{n} c_i x_i \qquad (1)$$

Sujeto a las restricciones:

$$x_i = 0, 1 \quad ; \quad \forall i \qquad (2)$$

Donde:

b_i, beneficio que genera el proyecto i-ésimo

c_i, monto de la inversión asociada con el proyecto i-ésimo

x_i, variable de decisión asociada con el proyecto i-ésimo. Si $x_i = 0$ el proyecto se rechaza, si $x_i = 1$ el proyecto se acepta.

TABLA 1

III. METODO DE SOLUCION

Para resolver el problema propuesto podría recurrirse a un algoritmo de ramificación del tipo de Land y Doig[1], que implica resolver en cada nodo del árbol de soluciones un problema no lineal sin restricciones; o bien, aplicar el mecanismo de descomposición del problema, como se indica a continuación.

En lugar de resolver A, se propone la solución primero de un problema de selección óptima de inversiones con restricción presupuestal paramétrica y una vez obtenida ésta, la solución de un problema no lineal en una sola variable, el cual puede hacerse por simple inspección. O sea:

a) B: Obtener los valores óptimos $Z^{\circ}(P)$, $\underline{X}^{\circ}$ para $0 \leqslant P \leqslant \sum_{i=1}^{n} c_i$,

tal que se logre:

$$\text{Max} \quad Z(P) = \sum_{i=1}^{n} b_i \, x_i \tag{3}$$

Sujeta a las restricciones

$$\sum_{i=1}^{n} c_i \, x_i \leqslant P \tag{4}$$

$$x_i = 0, 1 \qquad \forall i \tag{5}$$

b) Generar la función $\hat{Z} = \dfrac{Z^{\circ}(P)}{P} \quad ; \quad 0 \leqslant P \leqslant \sum_{i=1}^{n} c_i$ (6)

O alternativamente generar la función $\tilde{Z} = \dfrac{Z^{\circ}(P)}{\sum_{i=1}^{n} c_i \, x_i^{\circ}(P)}$; $0 \leqslant P \leqslant \sum_{i=1}^{n} c_i$ (6')

c) Obtener P* óptimo que permita:

Maximizar $\hat{Z} = \dfrac{Z^{\circ}(P)}{P}$

$$0 \leqslant P \leqslant \sum_{i=1}^{n} c_i$$

---

1 Land, A.H., y A. Doig, *An Automatic Method of Solving Discrete Programming Problems*, Econometrica, Vol. 28, 1960, págs. 497-520.

IV. ALGORITMO DE SOLUCION

El algoritmo propuesto para los pasos indicados anteriormente es como sigue:

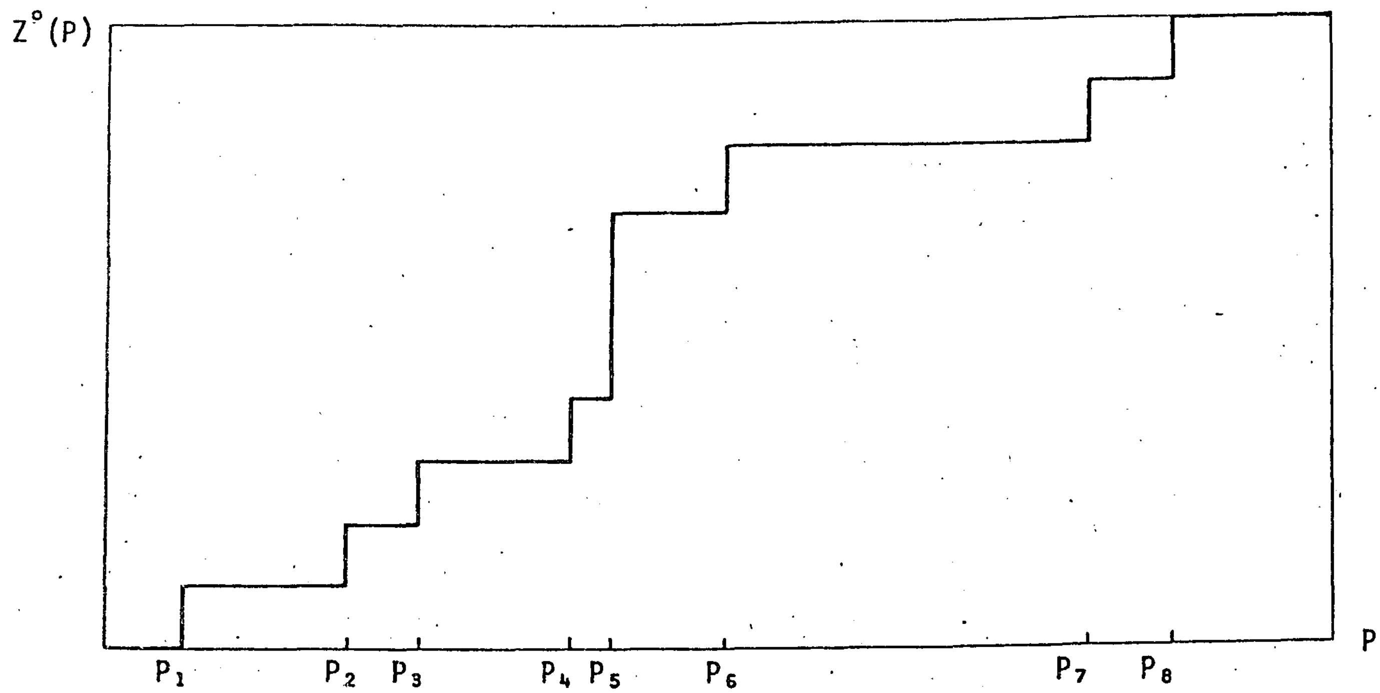
Paso 1.- Resolver el problema B con el algoritmo paramétrico de ramificación y acotamiento [ ], obteniendo $Z°(P)$ y $\underline{X}°$.

Paso 2.- $Z°(P)$ es una función discontinua creciente. Sean $P_1, P_2, \ldots, P_r$ los valores de P en los puntos de discontinuidad; obtener $Z°(P_j) / P_j$; $j = 1, \ldots, r$, valores de la función $\frac{Z°(P)}{P}$ en los puntos de discontinuidad. Formar una tabla con dichos valores.

Paso 3.- Hacer una búsqueda en la tabla anterior y seleccionar el punto de discontinuidad que genere el valor máximo; sea este P_5 . El valor P_5 es por tanto el P^* óptimo buscado.

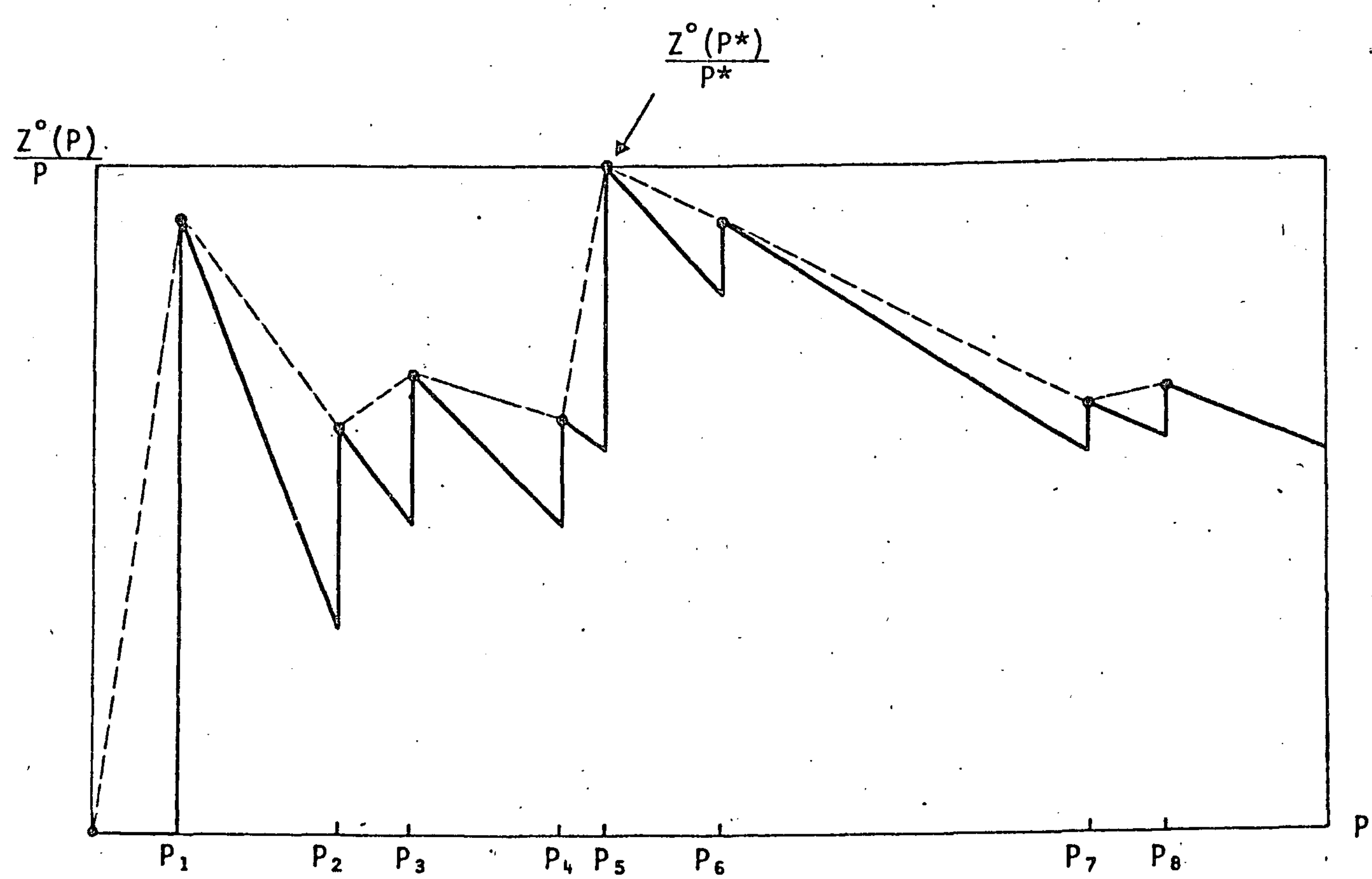
En forma gráfica, la solución del problema B proporciona una función $Z°(P)$ como se indica en la Fig. 1. A su vez, la función $\frac{Z°(P)}{P}$ tiene la forma indicada en la Fig. 2.

De acuerdo con la Fig. 2, el valor $P_5 = P^*$ es el valor óptimo y por lo tanto este debe ser el presupuesto endógeno que habrá de recomendarse para inversión, si se desea la mayor efectividad del conjunto de proyectos aceptados.



$Z^{\circ}(P)$
P
P_1
P_2
P_3
P_4
P_5
P_6
P_7
P_8

FIG. 1



$\frac{Z^{\circ}(P^*)}{P^*}$
$\frac{Z^{\circ}(P)}{P}$
P
P_1
P_2
P_3
P_4
P_5
P_6
P_7
P_8

FIG. 2

centro de educación continua
división de estudios superiores
facultad de ingeniería, unam

INGENIERIA DE SISTEMAS

ESTRUCTURA DEL PROBLEMA DE SELECCION OPTIMA DE INVERSIONES

DR. FELIPE OCHOA ROSSO

JUNIO, 1978

ESTRUCTURA DEL PROBLEMA DE SELECCION OPTIMA DE INVERSIONES

por el

Dr. Felipe Ochoa*

I. INTRODUCCION

Las diversas empresas que conforman los sectores agropecuario, industrial y de servicios de una economía requieren, para la producción de bienes o servicios, de insumos diversos así como de recursos humanos y de capital. Los recursos de capital, proporcionados por diversas fuentes financieras se utilizan para la operación de la empresa y se registran contablemente en las llamadas *cuentas de activo,* con una determinada composición. Esta composición, en términos generales, está integrada por los siguientes conceptos:

- Efectivo
- Cartera de Valores
- Cuentas por Cobrar
- Inventarios
- Activo Fijo
- Otros

Cada uno de estos conceptos obedece a un fin específico. Por ejemplo, el renglón de efectivo permite liquidez a la empresa para cubrir sus obligaciones inmediatas; la cartera de valores ayuda igualmente a mantener un grado un tanto menor de liquidez, permitiendo un rendimiento adicional sobre el excedente del efectivo ocioso.

El activo fijo lo constituyen las inversiones de recursos, realizadas para adquirir bienes necesarios en la operación de la empresa, por un lapso mayor de un año. Los servicios proporcionados por una pieza de maquinaria se tendrán durante varios períodos, y de acuerdo con principios de contabilidad

* Director General de FOA, S.C. Consultores.

generalmente aceptados, el costo del activo se carga en forma diferida a dichos períodos.

De la Tabla 1 es evidente la importancia que tiene en las empresas la administración efectiva de estas inversiones, pues, a excepción hecha del comercio, en todos los demás sectores, el activo fijo representa más del 50 porciento de los recursos totales. En el caso de las instituciones de crédito mexicanas, esta cifra fluctua alrededor del 2 % de los recursos totales e incluye la agrupación de cuentas registradas como: mobiliario y equipo, e inmuebles y acciones de sociedades inmobiliarias.

En la Fig. 1 se muestra la evolución de la inversión anual total en el país (Formación bruta interna de capital fijo), constituida por los bienes que emplea la actividad económica en los procesos de producción de otros bienes y servicios.

Al final de un año dado, el país posee un acervo de capital fijo derivado de las inversiones anteriores del Estado, las empresas y los particulares. Durante un ciclo anual el acervo se ve afectado porque parte de él se elimina mediante la depreciación, obsolescencia o destrucción, en tanto que las nuevas inversiones proporcionan un flujo continuo de nuevos activos fijos para reemplazar aquellos que se consumen y para incrementar el tamaño del acervo.

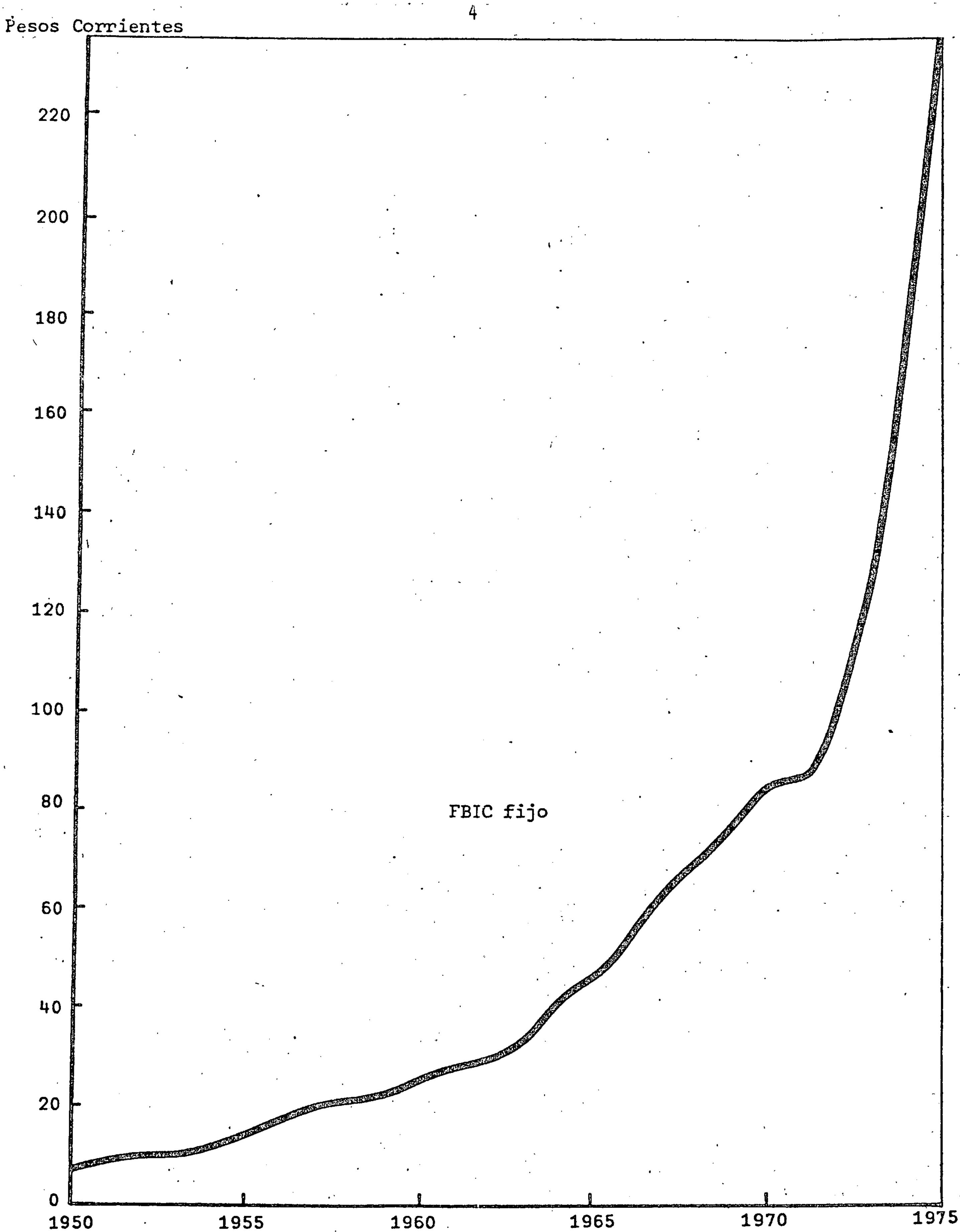
La formación bruta interna de capital fijo (FBIC) queda integrada por las obras de construcción, maquinaria y equipo, cultivos permanentes, animales de trabajo, de pié de cría y esquila.

Las cifras anteriores son indicativas de la necesidad de tomar las decisiones relacionadas con inversiones en activo fijo, (las cuales por lo general se

EMPRESAS DEL SECTOR	EFECTIVO Y VALORES	CUENTAS POR COBRAR	INVENTARIOS	ACTIVO FIJO Y OTROS
AGROPECUARIO	10 %	10 %	15 %	65 %
INDUSTRIAL	12 %	18 %	20 %	50 %
COMERCIO	10 %	30 %	30 %	25 %
SERVICIOS PUBLICOS	12 %	10 %	8 %	70 %

Fuente: U.S. Treasury Dept. IRS., Statistics of Income, 1961-62.

TABLA 1. COMPOSICION DE ACTIVOS POR GRUPOS DE EMPRESAS



Fuente: Banco de México: Cuentas Nacionales y Acervos de Capital. Apéndice III. Oficinas de Cuentas de Producción e Informes Anuales.

FIG. 1. NIVEL DE INVERSION MEXICANA EN ACTIVOS FIJOS

presentan ante un marco de incertidumbre), con la mayor información posible, que permita evaluar y seleccionar los proyectos de inversión, a modo de optimizar las consecuencias estimadas de dicha selección, tanto en el contexto empresarial como en el contexto socioeconómico del sector público.

II. EL PROCESO DE INVERSION

Los objetivos y metas de desarrollo de una empresa implicarán periódicamente la necesidad de tomar decisiones respecto a la conveniencia de aumentar o reemplazar activos fijos. El proceso de decisión puede estructurarse en una serie de pasos a seguir, a saber:

a. Identificación de la necesidad de una decisión o de una oportunidad de inversión.

b. Formulación de cursos alternativos de acción para satisfacer dicha necesidad o de aprovechar dicha oportunidad.

c. Evaluación de las alternativas de inversión, en términos de su contribución a la consecución de metas.

d. Selección de una o varias alternativas de inversión, o proyectos, para implantación.

Para resolver los dos primeros pasos se requiere de intuición y juicio, aunados a la experiencia del ejecutivo a cargo del problema. Para la evaluación de alternativas existe toda una teoría formal de evaluación de beneficios y costos de los proyectos de inversión, basada en el *valor del dinero a través del tiempo*. Esta evaluación toma en cuenta que las erogaciones asociadas a un proyecto de inversión, y sobre todo, la recuperación económica del mismo, implican un horizonte de tiempo mayor de un período anual.

Los criterios derivados de dicha *teoría de evaluación de proyectos*, que permiten juzgar sobre la bondad de un proyecto individual para una determinada empresa, son muy variados. Los más utilizados en la práctica son: el valor presente neto (VPN), la tasa interna de recuperación, el período de pago y las relaciones beneficio-costo.

Tocante a la selección de proyectos de inversión que pasarán a formar parte del activo fijo de la empresa, esta es necesaria, ya que por lo general los recursos financieros o de otra índole, con que se cuenta en cada ejercicio fiscal, no son suficientes para invertir en todos aquellos proyectos cuya bondad ha sido probada en la fase de evaluación.

El problema de selección de inversiones se define por tanto como: *el problema decisional de determinar el subconjunto de proyectos que, satisfaciendo las restricciones propias de la empresa, maximiza el beneficio esperado de la misma.*

En consecuencia, el problema de selección de inversiones es un problema de optimización. Lo anterior ha permitido la utilización de las herramientas metodológicas de la Investigación de Operaciones en la solución de esta clase de problemas. En particular la Teoría de Optimización ha contribuido al planteamiento analítico de modelos de selección de inversiones, asi como al desarrollo de algoritmos de solución ad hoc para dichos modelos.

III. CLASIFICACION DE LOS PROBLEMAS DE SELECCION DE INVERSIONES

Para efectos de estructurar formalmente el estudio de selección de proyectos de inversión mediante la metodología de la Teoría de Optimización, se presenta a continuación una clasificación sistemática de los problemas de inversiones (Ver Fig. 2).

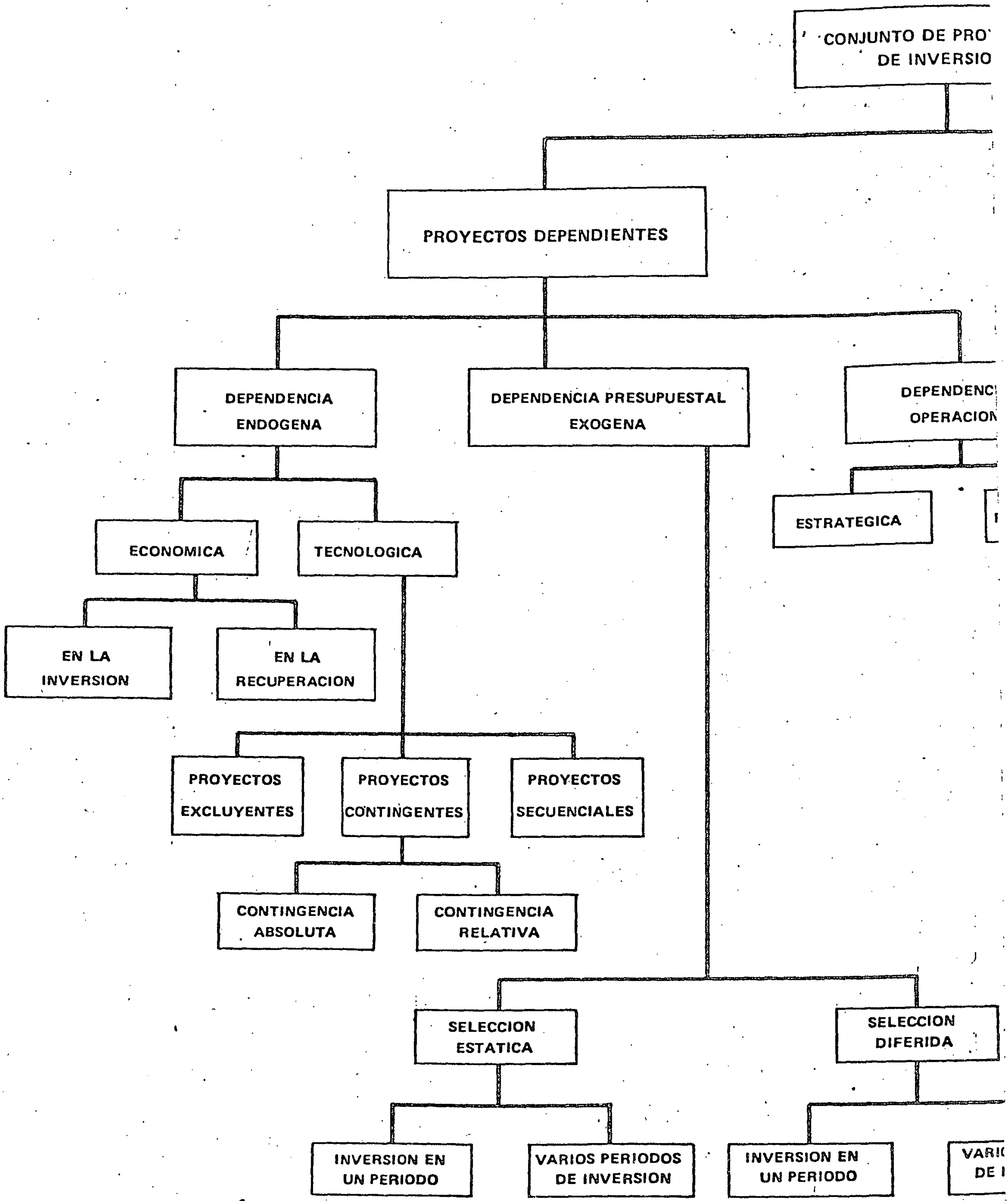
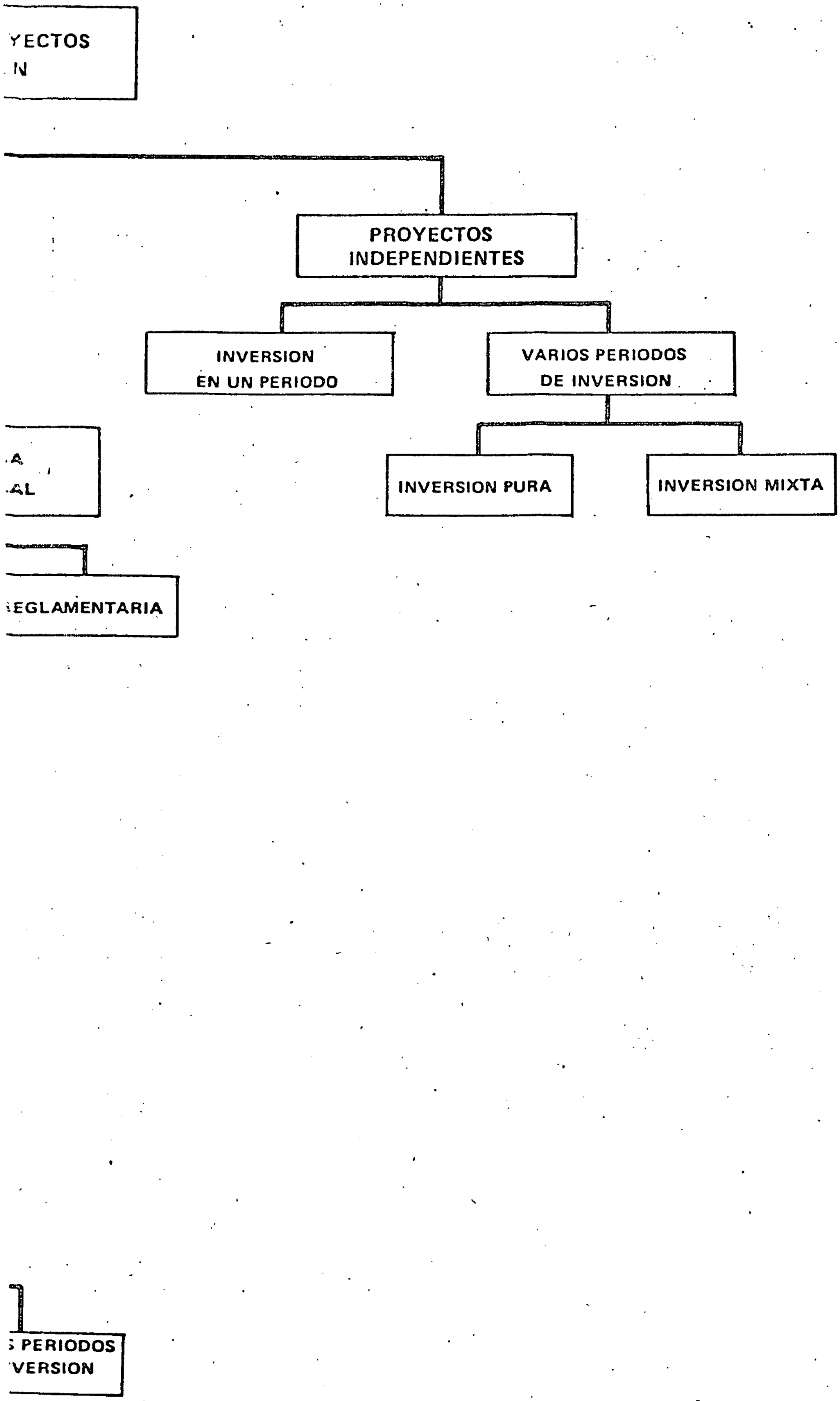


FIG. 2. CLASIFICACION DE PROBLEMAS DE SEL



CCION DE INVERSIONES

La estructura arbolada que se emplea para la clasificación, no pretende ser exhaustiva y puede ampliarse tanto horizontal como verticalmente. La metodología de selección de inversiones requiere la distinción de proyectos en dependientes e independientes. A continuación se describen con detalle los tipos de dependencia.

3.1 DEPENDENCIA ENDOGENA

Esta forma de dependencia se presenta debido a la naturaleza propia de los proyectos o por condiciones internas de diversa índole. Se considerarán los siguientes tipos de dependencia endógena:

1. *Dependencia Económica*

Este tipo de dependencia puede presentarse en lo tocante al monto de las inversiones o con respecto a la recuperación total de la inversión.

a. Dependencia en la Inversión.

Dado un conjunto de n proyectos de inversión, el monto total de la erogación podrá depender en ciertos casos del subconjunto o combinación de proyectos seleccionados. Esto implica la presencia de economías de escala para ciertas combinaciones de proyectos del conjunto.

b. Dependencia en la Recuperación.

El beneficio o recuperación total de la inversión puede depender de la combinación de proyectos seleccionados y por tanto el rendimiento total de los proyectos aceptados no será igual, necesariamente, a la suma de los rendimientos individuales de cada proyecto.

Finalmente, para los diversos tipos de dependencia económica, el problema de selección óptima de inversiones puede plantearse dentro de un marco determinístico, considerando fijos los valores de los parámetros del problema, o bien, en forma quizá más realista, considerando la naturaleza estocástica del problema. En este último caso, desde luego que los modelos de optimización asociados al problema de selección, serán más complejos que en el caso determinista.

2. *Dependencia Tecnológica.*

Este tipo de dependencia se deriva de las características intrínsecas de los proyectos o de los recursos (no económicos) necesarios para realizarlos. Se distinguen, entre otros, los siguientes tipos de dependencia tecnológica:

a. Proyectos Mutuamente Excluyentes.
   Dentro del conjunto de proyectos podrá haber dos o más, de tal naturaleza que, para efectos de decisión, se deberá aceptar uno solo y rechazar los demás.

b. Proyectos Contingentes.
   En este tipo de dependencia, la decisión de aceptar un proyecto determinado es contingente con la aceptación o rechazo de otro proyecto.

   b.1 Contingencia Relativa
   Si el primer proyecto se rechaza, el proyecto contingente debe rechazarse; pero si el primero se acepta, el proyecto contingente es atractivo para inversión y, por tanto, se podrá o no aceptar.

   b.2 Contingencia absoluta
   Si el proyecto se rechaza, su contingente debe rechazarse, y si el primero se acepta el segundo debe aceptarse automáticamente. Este caso podría manejarse analíticamente como un solo proyecto que englobe a los dos considerados anteriormente. Este caso se puede ejemplificar mediante el proyecto de construcción de un tramo de carretera, cuyo

proyecto contingente será la construcción de obras de arte como alcantarillas y puentes. Si la carretera se construye, el puente está obligado; por tanto se puede considerar un solo proyecto equivalente: carretera-puente.

c. Proyectos Obligados
Esta dependencia se refiere a un conjunto de proyectos para los cuales existe la especificación de que cuando menos uno de los del conjunto debe realizarse.

d. Proyectos Secuenciales
Esta dependencia se refiere al orden de prelación en el tiempo que deben guardar ciertos proyectos. Si se trata de una decisión de inversiones sobre un horizonte de tiempo de varios períodos, dos proyectos pueden ser dependientes en el sentido de que si uno se acepta en un determinado período, el contingente secuencial será atractivo para inversión, en el mismo período o en períodos subsecuentes al período de aceptación del primero. En este caso puede hablarse de dependencia secuencial absoluta y relativa, en los mismos términos expuestos en el tipo de dependencia de proyectos contingentes.

3.2 DEPENDENCIA EXOGENA O PRESUPUESTAL

Característicamente, este tipo se refiere a la dependencia que se genera entre un conjunto de proyectos cuando el monto total de la inversión no debe exceder un determinado presupuesto, generalment fijado exógenamente al que toma decisiones.

En el caso de inversiones en el sector público, las diferentes dependencias del ejecutivo deberán seleccionar inversiones sujetas a un presupuesto fijado exógenamente por el organismo hacendario y de programación presupuestal, A un nivel macroeconómico, el Gobierno Federal opera de acuerdo con un Presupuesto Federal de Egresos, que engloba a todas las dependencias y que incluye tanto el Gasto Corriente (de operación), como la Inversión de Capital. Este presupuesto se fija de acuerdo con el ingreso estimado para un ejercicio fiscal, congruente con la política impositiva vigente; con el monto estimado de crédito interno, derivado del ahorro del país; y con el monto prefijado de crédito externo, consecuencia de una determinada política de endeudamiento.

En el caso de la empresa privada, las restricciones presupuestales quedan fijas por las direcciones de finanzas, en función de los objetivos, metas y estrategias para el período considerado, y de la capacidad limitada de las diferentes fuentes de financiamiento, considerando la situación de mercados de capital imperfectos.

En todo caso, para este tipo de problemas, se acepta la capacidad de financiamiento como recurso escaso y se genera así el problema de selección de inversiones con racionamiento de capital. Los diferentes casos que se presentan bajo este tipo de dependencia se tratan a continuación.

1. *Selección Estática.*

En este tipo de problemas, la decisión de invertir en determinados proyectos se toma en un solo período (para el cual se conoce la restricción presupuestal), y los proyectos seleccionados se inician o implantan simultáneamente en dicho período.

Los tipos de modelos matemáticos desarrollados para hacer la selección óptima de inversiones requieren las siguientes distinciones:

a. Proyectos con un solo período de inversión.
En este caso todos los proyectos considerados se pueden realizar o adquirir en el período considerado, esto es, desde el punto de vista de erogaciones, afectan financieramente solo al primer período.

b. Proyectos con varios períodos de inversión.
Los proyectos asociados a este caso requieren para su implantación, inversión en dos o más períodos. Por tanto, su aceptación en el primer período afecta a la disponibilidad de fondos de inversión de períodos subsecuentes. En este caso es necesario disponer de una estimación de presupuestos disponibles para todos los períodos de inversión.

Las componentes esenciales o parámetros propios de estos problemas de inversión son las siguientes:

- i. El conjunto de proyectos, i = 1, 2, ..., n, sugeridos para inversión.
- ii. La erogación total asociada con cada proyecto, y su distribución en el tiempo.
- iii. El beneficio total correspondiente de cada proyecto.
- iv. El horizonte de planeación y el número de períodos considerados para la inversión.
- v. El valor de los presupuestos disponibles para cada período.

De acuerdo con lo anterior, los modelos matemáticos desarrollados para el caso de selección estática podrán plantearse dentro de un marco determinístico o estocástico. En el primero, tanto la erogación, beneficio y presupuestos se considerarán conocidos con certeza. En el marco estocástico existe incertidumbre sobre los valores de dichos parámetros, por lo cual habrá que considerarlos como variables aleatorias. Los modelos de optimización tendrán que determinar no solo la solución óptima, sino también una medida del riesgo asociado.

Finalmente, por lo que toca al tipo de proyectos, será necesario distinguir si, por su naturaleza, son o no divisibles. Esto es, si cada proyecto se debe aceptar o rechazar en su totalidad (proyecto indivisible con erogación de tipo discreto); o bien si el proyecto puede aceptarse parcialmente con una erogación que varíe en forma continua. Como ejemplos del primer tipo se tienen las inversiones en piezas de maquinaria, construcción de presas, etc., las cuales deben aceptarse o rechazarse en su totalidad; las inversiones en investigación y desarrollo, o en publicidad, pueden considerarse como proyectos continuos, pudiendo aceptarse parcialmente su inversión.

2. *Selección Diferida*

Para este tipo de problemas de selección es posible diferir la inversión a períodos posteriores, dentro del horizonte de planeación. La solución del problema implica la determinación de: en qué proyectos invertir y cuándo invertir.

Los tipos de modelos de optimización desarrollados para la solución de estos problemas de inversión hacen la distinción entre proyectos que requieren para su realización uno o varios períodos de inversión. Asimismo, el problema podrá plantearse en un marco determinístico o bien como problema probabilístico.

Al igual que en la selección estática, es necesario distinguir si los proyectos son divisibles o indivisibles. En algunos problemas se podrán tener proyectos mixtos; algunos de inversión contínua y otros de inversión discreta.

3.3 DEPENDENCIA OPERACIONAL

Adicionalmente a los tipos de dependencia endógena y presupuestal, puede presentarse una dependencia caracterizada por aspectos meramente de tipo operacional de la empresa.

1. *Dependencia Estratégica.*

De la política de operación de la empresa se pueden derivar estrategias que generen la dependencia de proyectos, lo cual sin duda generará restricciones adicionales en el proceso de selección. Este sería el caso de la empresa que, por política empresarial, fijara la restricción de que cuando menos un número fijo de proyectos se aceptaran, de los propuestos por una determinada división operativa de la empresa, independientemente de que hubieran sido aceptados en un caso de total independencia. O bien, la estrategia que fijara un mínimo de capital a invertir en proyectos de investigación y desarrollo.

2. *Dependencia Legal.*

Este tipo de dependencia se presenta en empresas que por su naturaleza están sujetas a reglamentos operativos de carácter legal, como es el caso de las instituciones de crédito que están sujetas a la Ley Bancaria, asi como a las disposiciones que sobre Depósito Legal, emite el Banco de México.

Por ejemplo, en el caso de banca de depósito, las inversiones de activo fijo en proyectos de inmuebles están sujetas a una cota superior, determinada en función de su renglón de capital y reservas.

Otro caso se presenta en los problemas de selección de proyectos de cartera de crédito. En este caso, si los "proyectos" de inversión se identifican con los "cajones" de crédito, las restricciones regulatorias del Depósito Legal imponen restricciones a la selección de cartera, de tal suerte que, cuando menos una determinada cantidad de las disponibilidades, sea invertida en cajones previamente especificados.

3.4 OTROS TIPOS DE DEPENDENCIA

La estructuración propuesta de los problemas de selección de inversiones tiene un propósito de tipo académico, con el objeto de sistematizar su estudio y el análisis de los modelos de optimización correspondientes. En los casos prácticos, por lo general se presentarán problemas de selección de inversiones que involucren una combinación de tipos de dependencia, tanto endógena, presupuestal como operacional.

Este tipo de problemas podrán modelarse adecuadamente mediante la conjunción de las características de los modelos que presentan por separado cada tipo de dependencia. Desde luego los modelos de optimización serán más complejos y requerirán en la mayoría de los casos, de métodos de solución muchos más sofisticados.

3.5 PROYECTOS INDEPENDIENTES

Pueden presentarse problemas de selección de inversiones cuando los proyectos elegibles no presentan *ningún* tipo de dependencia. Un conjunto de proyectos será independiente presupuestalmente, si aceptamos que la empresa opera dentro de un mercado de capital perfecto; esto es, si la firma puede obtener o prestar *cualquier* cantidad de dinero con una determinada tasa de interés.

Por otra parte, un conjunto de proyectos se considerará independiente económicamente si la *erogación* y *recuperación* total de proyectos individuales no se ve afectada por la aceptación de otros proyectos. Por tanto, el beneficio total (costo total), de un conjunto de proyectos independientes, es igual a la suma de los beneficios (costos), de cada proyecto del conjunto, como si se llevara a cabo solo.

El problema de selección de proyectos independientes se resuelve entonces aceptando o rechazando cada uno de ellos individualmente, en función de su propio mérito.

El criterio de selección se limita a determinar el valor presente neto del flujo de ingresos y egresos y aceptarlo si este es mayor que cero o rechazarlo en caso contrario. En ocasiones se utiliza el criterio de la tasa interna de rendimiento del proyecto, comparándola con la tasa de interés que representa el costo del dinero para la empresa. Cuando este criterio es el que se emplea, es necesario distinguir entre proyectos de "inversión pura" y de "inversión mixta".

En los primeros, el valor futuro del proyecto en los años subsecuentes a la inversión es tal, que la empresa mantiene su posición de acreedora del proyecto. En los proyectos de inversión mixta, para ciertos períodos futuros el proyecto ya habrá generado un valor futuro positivo para la empresa.

IV. MODELO GENERAL DE SELECCION OPTIMA DE INVERSIONES.

La clasificación propuesta en la Fig. 2 permite el tratamiento de cada uno de los tipos de problemas de selección con modelos apropiados a la naturaleza de cada clase. En esta sección se propone un modelo general que ilustra la complejidad del proceso analítico de selección de inversiones en su caso más amplio, el cual se simplifica significativamente cuando se refiere a una clase de problemas en particular.

El modelo de optimización se presenta en la Tabla 1. En esta, el vector $\underline{x}$ representa a las variables técnicas del conjunto de proyectos y el vector $\underline{y}$ a las variables de decisión binarias, asociadas con la aceptación o rechazo de cada uno de los proyectos.

La función objetivo (1) pide la maximización del beneficio global, esto es, la suma de los beneficios de los proyectos aceptados. Los beneficios de cada proyecto están representados por la función $f_i\ (\underset{\sim}{x})$ que depende del valor que tomen las variables técnicas.

El conjunto de restricciones (2) - (5) representan los diferentes tipos de dependencia que pueden presentar los proyectos, las cuales pueden depender también de los valores que toman las variables técnicas.

En las restricciones (5), los parámetros a_{ij} representan la inversión de capital requerida por el proyecto i en el periodo j, y el parámetro P_j, el monto de inversión disponible en cada periodo.

Las variables técnicas por lo general quedan restringidas a tomar valores no-negativos y las variables de decisión podrán tomar el valor cero si el proyecto se rechaza o uno, si el proyecto se acepta.

Determinar	$\underline{x}^*$, $\underline{y}^*$ para:		
MAXIMIZAR	$Z = \sum_{1=1}^{n} f_i \, (x_1^i, x_2^i, \ldots, x_m^i) \; y_i$		(2)
SUJETO A LAS RESTRICCIONES:			
TECNOLOGICAS	$g_k \, (x_1, x_2, \ldots, x_m^i) \leqslant \underline{b}_1$	$; \; k = 1, \ldots, r_1 - 1$	(2)
ECONOMICAS	$g_k \, (x_1, x_2, \ldots, x_m^i) \leqslant \underline{b}_2$	$; \; k = r, \ldots, r_2 - 1$	(3)
OPERACIONALES	$g_k \, (x_1, x_2, \ldots, x_m^i) \leqslant b_3$	$; \; k = r_2, \ldots, r_3 - 1$	(4)
PRESUPUESTALES	$\sum_{1=1}^{n} a_{ij} \; y_i \leqslant P_j$	$; \; \forall_j$	(5)
	$\underline{x}^i \geqslant 0 \; ; \; y_i = 0, 1$	$; \; \forall_i$	(6)

TABLA 1. MODELO GENERAL DE SELECCION OPTIMA DE INVERSIONES

centro de educación continua
división de estudios superiores
facultad de ingeniería, unam

INGENIERIA DE SISTEMAS*
Aplicado a la Planeación y a la Administración

LA PROGRAMACION LINEAL: UNA EXPLICACION INTUITIVA SOBRE LA TECNICA Y SU IMPORTANCIA

DR. JAVIER MARQUEZ DIEZ C.
Junio de 1978

P r e f a c i o

Esta nota se preparó con motivo de mi participación en el curso "INGENIERIA DE SISTEMAS", impartido en el Centro de Educación Continua de la División de Estudios Superiores en la Facultad de Ingeniería de la U.N.A.M. durante el mes de junio de 1978.

En ella he tratado de plasmar las ideas principales de programación lineal, a nivel intuitivo, utilizando un ejemplo pedagógico y argumentos de tipo geométrico. Además he intentado dar una visión panorámica de la aplicabilidad de la técnica y de como ésta se utiliza para atacar problemas reales, compensando situaciones que no se ajustan a la teoría estricta de programación lineal, pero que ocurren con frecuencia en la práctica.

Respecto a esto último, hago notar que muchas de las apreciaciones son subjetivas, basadas en mi experiencia y el limitado conocimiento de las aplicaciones de que tengo noticia a través de contactos personales y la literatura técnica que recibo. Por lo tanto, sólo yo soy responsable de algún error de juicio en este aspecto. Sin embargo, quiero agradecer a los miembros de la oficina de Matemática Aplicada por haber leído el manuscrito y aportar valiosas sugerencias con las que se mejoró substancialmente el original. También la sección de dibujo ha contribuído a darle una buena presentación a esta nota.

Javier Márquez
BANCO DE MEXICO, S.A.
Junio de 1978.

I. INTRODUCCION

I.1. Antecedentes Históricos

Hay infinidad de situaciones en la vida real que idealmente requieren optimizar "algo". Por ejemplo, un padre de familia puede desear utilizar su sueldo de la mejor forma posible para que él, su esposa y sus hijos reciban la mejor educación, alimentación, vestimenta, etc., que permita el presupuesto familiar. Obviamente, hay muchos casos en los que decidir el mejor camino para lograr un objetivo no es un problema difícil. Sin embargo, hay otros en los que el problema es tremendamente complicado, simplemente por la cantidad de factores que hay que tomar en cuenta para llegar a una decisión racional, ya no digamos óptima.

Tradicionalmente la economía ha sido una ciencia que se preocupa por el problema de dar el mejor uso a los recursos escasos. Por lo tanto, no es raro el hecho de que los primeros planteamientos formales de problemas de optimización aparecieran en relación al problema económico. Los militares durante la segunda guerra mundial, también se interesaron en problemas de optimización relacionados con el abastecimiento y movilización de tropas.

Cronológicamente, el primer trabajo importante, alusivo al tema es el de Kantorovich [ ], que data de 1939. El trabajo original está en ruso y no se conoció en occidente hasta finales de los años cincuenta; apareciendo una traducción al inglés en 1960.

El trabajo se intitula "Métodos Matemáticos para Organizar y Planear la Producción" y su importancia según Koopmans [ ], estriba en "la presencia simultánea de varias ideas o elementos, algunos de los cuales estaban presentes en escritos anteriores en distintas ramas de la economía o las matemáticas". A saber:

"1) Un modelo de producción en términos de un número finito de procesos de producción, cada uno caracterizado por relaciones constantes entre sus insumos y sus productos."

"2) La percepción de una amplia gama de aplicaciones prácticas del modelo, a industrias que son a su vez fuentes de información para estas aplicaciones."

"3) La prueba de que, asociado a una solución óptima del problema, es posible asociar lo que se conoce como "precios sombra"; uno a cada recurso, producto intermedio o producto final."

Este último punto recibió un impulso formidable con el trabajo de Von Neumann y Morgenstern, sobre "dualidad" [ ].

Sin embargo, el despegue definitivo del empleo de métodos matemáticos aplicados a problemas de optimización, ocurrió en 1947 cuando Goerge Dantzig descubrió el "método simplex" para resolver problemas de optimización que sólo involucraban relaciones "lineales". Estos problemas se han llamado "Programas Lineales" y, a partir del descubrimiento de Dantzig, además de haberse sucedido un impresionante número de contribuciones teóricas, la proliferación de aplicaciones es aún más importante.

Sin duda alguna, el éxito de la programación lineal se debe en gran parte al desarrollo acelerado del computador digital. Este avance tecnológico permite la solución de programas lineales capaces de modelar con cierta exactitud, miles de interrelaciones que aparecen en sistemas complejos reales. De ahí la utilidad de la programación lineal, al grado de que Kantorovich y Koopmans recibieron el premio Nobel de 1975 y Dantzig el de la Academia Nacional de Ciencias, por su trabajo pionero sobre programación lineal.

En la actualidad, casi no se concibe una empresa grande que no utilice esta técnica en cuando menos un aspecto de su proceso productivo, operativo o financiero. También las dependencias gubernamentales de los países con cierto nivel de desarrollo, la utilizan para algunos problemas operativos, pero su uso más importante en el gobierno es para planeación.

I.2. Algunas Aplicaciones Clásicas

El Problema de la Dieta

Este problema, propuesto por Stigler [ ], se relaciona con proporcionar alimentación adecuada a un grupo numeroso de gentes, de forma que el costo sea mínimo; por ejemplo, los pacientes de un hospital o los miembros de un ejército. A grandes rasgos, el problema supone que el "dietista" dispone de un cierto número de alimentos (leche, carne, huevos, lechuga, tomate, etc.) y que una dieta adecuada debe cumplir ciertos requisitos mínimos de contenido nutricional (proteínas, hierro, vitaminas, etc.) El dietista conoce el contenido nutritivo de cada alimento así como su precio en el mercado. Entonces, lo que pretende es encontrar la combinación de alimentos o dieta, que cumpla los requisitos nutricionales a costo mínimo.

El Problema de Transportes

Este problema lo trataron simultáneamente varios investigadores pero quizás el planteamiento más usual es el de Hitchcock [ ], que es como sigue:

Un cierto bien, digamos acero, se va a producir en cada una de varias fábricas y tiene que venderse en ciertos mercados. Suponiendo que se conoce lo que produce cada fábrica, la demanda de acero en cada mercado, y el costo de transporte entre las fábricas y los mercados ¿cuánto debe enviar cada fábrica a cada mercado de tal forma que la demanda quede satisfecha y el costo total de transporte sea el mínimo?

Producción Agrícola

Un agricultor posee cierto número de hectáreas en una región del país en que puede escoger entre varios cultivos para sembrar. El agricultor tiene la siguiente información:

a) El rendimiento por hectárea de cada cultivo.

b) La cantidad y tipo de fertilizantes que requiere cada cultivo.

c) La cantidad de mano de obra que requiere cada cultivo.

d) El costo por hectárea de sembrar un cultivo particular.

e) El valor en el mercado del producto de cada cultivo.

f) Requerimientos de otros recursos como agua, pesticidas, etc.

El agricultor debe decidir cuánto sembrar de cada cultivo para maximizar su ganancia.

El Problema de Selección de Portafolio

Un inversionista quiere decidir como invertir su dinero en el mercado de valores. Debido a compromisos contraidos con anterioridad sabe que en ciertos momentos en el futuro necesitará recursos líquidos para efectuar algunos pagos. Entonces, dados los rendimientos esperados de los instrumentos del mercado, debe decidir en cuáles debe invertir, a qué plazo y qué cantidad en cada uno, de tal forma que maximice el rendimiento de su inversión, y satisfaga sus necesidades futuras de liquidez.

I.3. Conclusión, Organización del Trabajo y Objetivos de la Exposición

Como se podrá observar por la lista de problemas anterior, la gama de aplicaciones es muy variada. Aunque algunos de los enunciados anteriores son simplificaciones de planteamientos reales, ilustran el tipo de problemas que se han atacado o pueden atacarse con esta técnica, y en muchos casos con bastante éxito.

En la sección siguiente se analiza un problema sencillo de producción, con fines eminentemente pedagógicos. Además de proporcionar un ejemplo adicional del tipo de problemas que se pueden atacar con esta técnica, nos servirá de "caballo de batalla" para introducir los conceptos principales que se manejan en la programación lineal.

En la sección III se hace una abstracción de los conceptos utilizados para resolver el problema del productor de cajas y se proporciona una idea del funcionamiento del método simplex usando argumentos de tipo geométrico. La exposición busca sencillez y un desarrollo intuitivo, con lo cual se sacrifica rigor matemático. Sin embargo, esto último es tanto inevitable como indispensable si hemos de cumplir los objetivos de divulgación general y de proporcionar una visión amplia de lo que implica la técnica.

Finalmente, en la sección IV se habla de algunos aspectos prácticos que pensamos deben conocerse, así como de las limitaciones de la técnica. Terminamos la exposición con una guía sobre temas que a nuestro juicio es necesario conocer para lograr un panorama completo del tema y que ha sido imposible cubrir por limitaciones de tiempo y espacio.

II. UN EJEMPLO INTRODUCTORIO

Un fabricante de cajas para empaques produce cajas "grandes" y cajas "chicas", con un sólo tipo de cartón. Las cajas pequeñas requieren $0.50m^2$, las grandes requieren $1m^2$ del material, y no consigue más de $100m^2$ por semana del material, por tratarse de cartón muy especial.

La fábrica trabaja 35 horas por semana y puede producir una caja pequeña cada 12 minutos o una caja grande cada 14 minutos. Además, debido a la naturaleza de la demanda sabe que, por cada caja grande en una orden le piden cuando menos 2 pequeñas, y puede vender todas las cajas que produzca.

La utilidad que representa vender una caja grande es de 12 pesos, y 8 pesos por cada caja chica. ¿Cuántas cajas de cada tamaño debe producir por semana para que su ganancia sea máxima?

Supuestos:

1) El material tiene una forma tal, que se minimiza el desperdicio.

2) El tiempo para adecuar el proceso de producción al tipo de caja es despreciable.

II.1 Representación Matemática del Problema

Las Variables de Decisión

El problema del fabricante es decidir cuántas cajas pequeñas y cuántas grandes debe producir. Es decir, las variables que el controla en este ejemplo son el número de cajas de ambos tamaños que puede producir. Entonces, sean

x = Número de cajas pequeñas que debe producir,

y = Número de cajas grandes que debe producir,

las variables de decisión del problema.

Las Relaciones Estructurales de la Producción

El planteamiento del problema indica que el proceso de producción impone ciertas reglas a las combinaciones de cajas que se pueden producir. Estas relaciones se refieren a dos aspectos importantes para nuestro ejemplo:

- Utilización de la materia prima: cartón.
- Utilización del tiempo de producción.

Respecto al factor material, es obvio que, si se producen "x" cajas pequeñas que requieren $0.50m^2$/caja y "y" cajas grandes que requieren 1.00m^2/caja, se habrán utilizado

$$\frac{1}{2}x + 1y \quad m^2 \text{ de cartón.}$$

Respecto al tiempo, fabricar "x" cajas pequeñas y "y" grandes requieren utilizar

$$\frac{12}{60}x + \frac{14}{60}y \quad \text{horas de trabajo de la fábrica.}$$

Las Restricciones y el Espacio Decisional o Región Factible

Nótese que no se pueden producir cantidades ilimitadas de cajas ya que los recursos de que se dispone son escasos:

- El cartón utilizado no puede exceder 100m^2
- El tiempo utilizado no puede exceder 35hs.

Además, no cualquier combinación de cajas chicas y grandes es válida, ya que la demanda exige que:

El número de cajas chicas sea cuando menos el doble del número de cajas grandes.

Estas imposiciones limitan por un lado, las cantidades que se pueden utilizar de cada recurso, y por el otro, las combinaciones que son válidas ya que:

(1) La cantidad de cartón utilizado = $\frac{1}{2}$ x + y $\leq$ 100m^2

(2) La cantidad de tiempo utilizado = $\frac{12}{60}$x + $\frac{14}{60}$y $\leq$ 35 hs.

(3) El número de cajas chicas x $\geq$ 2 y = dos veces el número de cajas grandes

Las expresiones (1) (2) y (3) son las <u>restricciones</u> que debe respetar el fabricante al tomar su decisión. Como se puede observar, estas restricciones tienen una representación matemática explícita, en términos de una serie de <u>desigualdades lineales</u>.

La mayoría de los problemas prácticos requieren además las siguientes restricciones para efectos de consistencia:

$$x \geq 0 \; ; \quad y \geq 0$$

Estas restricciones sólo dicen que es imposible producir menos de cero cajas de cualquier tipo. Aunque esto parece obvio, debemos recordar que un modelo matemático no "piensa", y por lo tanto debemos darle todos los elementos necesarios, si no se quiere correr el riesgo de que el modelo proporcione respuestas absurdas. Por ejemplo, sin las restricciones de consistencia, el modelo podría indicar que se produjeran -23 cajas chicas (?!).

El conjunto de restricciones delimitan lo que se conoce como "la región factible" o "el espacio decisional". Es decir, las restricciones definen todas las combinaciones de valores de las variables decisionales entre las cuales se puede tomar la decisión. En nuestro caso, la región factible es el conjunto de todas las posibles parejas de números de cajas chicas y grandes (x,y) que respetan las restricciones.

El Criterio de Decisión: la Función Objetivo

Una vez definido el espacio decisional, será necesario contar con un criterio para seleccionar una combinación entre todas las posibles. En nuestro ejemplo, se ha dicho que el fabricante quiere producir de tal forma que maximice sus utilidades. Es decir, el criterio que debe seguir es el de seleccionar la combinación de cajas chicas y grandes, dentro del espacio decisional que haga máximas sus utilidades.

Ahora bien, el planteamiento especifica que en cada caja grande el comerciante se gana 12 pesos y 8 en cada caja chica. Entonces, si produce "x" chicas y "y" grandes, su utilidad será:

$$\text{Utilidad} = 8x + 12y$$

Esta expresión constituye su criterio de decisión.

También se conoce como <u>función objetivo</u> ya que lo que persigue el fabricante es encontrar aquella pareja (x,y) de números de cajas grandes y chicas dentro de la región factible, que hagan máximo el valor de 8x + 12y.

El Modelo y el Formato Estandard

Todas las expresiones anteriores se conjugan para constituirse en el modelo del problema decisional del fabricante de cajas, que se resume matemáticamente de la siguiente manera:

maximizar $8x + 12y$
sobre x, y

Sujeto a:

$$\frac{1}{2}x + y \leq 100 \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

$$\frac{12}{60}x + \frac{14}{60}y \leq 35 \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

$$x \geq 2y \quad \ldots\ldots \quad (3)$$

$$x \geq 0$$

$$y \geq 0$$

Nótese que el modelo anterior tiene desigualdades que van en ambos sentidos. También se observa que la tercera restric ción tiene variables en ambos lados de las restricciones. El tratamiento matemático del problema requiere cierta consistencia en su planteo general, por lo que se ha adoptado la convención de que en el lado derecho de las desigualdades sólo aparezcan cantidades constantes, y todos los signos de desigualdad tengan el mismo sentido, excepto las dos últimas de no-negatividad, que siempre se dejan como se observa en el modelo descrito.

Además, por razones de estabilidad numérica los coeficientes fraccionarios no son muy convenientes. Entonces, cuando es factible de hacerse, cada restricción se multiplica por una constante para que los errores de truncamiento y redondeo no causen dificultades en las rutinas de cómputo que se utilizan para resolver el problema.

Por todo lo anterior, al modelo se le hará lo siguiente:

i) multiplicar la restricción (1) por dos

ii) multiplicar la restricción (2) por treinta

iii) multiplicar la restricción (3) por menos uno, y pasar "-2y" sumando al lado izquierdo de la desigualdad.

Con esto se logra poner al problema en formato estandard

para iniciar el cómputo en el proceso de solución del problema.
Así, el modelo queda representado por el problema matemático siguiente:

$$\left.\begin{array}{lrl} \max & 8x + 12y & \\ \text{S.a.} & x + 2y \leq 200 & \ldots\ldots\ (1) \\ & 6x + 7y \leq 1050 & \ldots\ldots\ (2) \\ & -x + 2y \leq 0 & \ldots\ldots\ (3) \\ & x, y \geq 0 & \ldots\ldots\ (4) \end{array}\right\} \begin{array}{c}\text{Modelo del problema} \\ \text{del} \\ \text{Productor de Cajas}\end{array}$$

II.2. La Geometría del Problema y su Solución Gráfica

Para visualizar mejor el problema, vamos a representarlo sobre un sistema de ejes cartesianos. Lo que vamos a hacer es identificar sobre el plano, todos los puntos (parejas (x,y)) que satisfacen las restricciones (desigualdades) planteadas.

Para facilitar nuestra exposición, introducimos la siguiente notación matemática:

$$C_1 = \{(x,y) \mid x + 2y \leq 200\}$$

Las llaves "{}" indican que estamos definiendo un conjunto. La raya vertical " | " entre los dos miembros contenidos dentro de las llaves se lee "tal que". Entonces, la expresión anterior tiene la interpretación siguiente:

"C_1 es el conjunto de puntos (x,y) tal que $x + 2y$ es menor o igual a cien".

Análogamente,

$$C_2 = \{(x,y) \mid 6x + 7y \leq 1050\}$$

es "el conjunto de puntos (x,y) tal que $6x + 7y \leq 1050$ etc.

Así, la parte sombreada de la figura uno y la línea $x + 2y = 200$ representan al conjunto C_1. Es decir, representan al conjunto de puntos sobre el plano, que satisfacen la desigualdad (1).

Análogamente, la figura 2 representa los puntos que satisfacen las desigualdades (2), (3) y (4).

Ahora bien, el espacio de decisión está formado por los puntos que satisfacen todas las desigualdades a la vez. Es decir, el punto seleccionado debe satisfacer todas las restricciones simultáneamente y por lo tanto, los puntos que nos interesan son los que están en la intersección de los conjuntos C_1, C_2, C_3 y C_4.

Para facilidad denotamos por "F" al espacio decisional. Tradicionalmente, el símbolo "$\cap$" se usa para denotar la intersección de conjuntos. Entonces, el espacio decisional será:

FIGURA 1

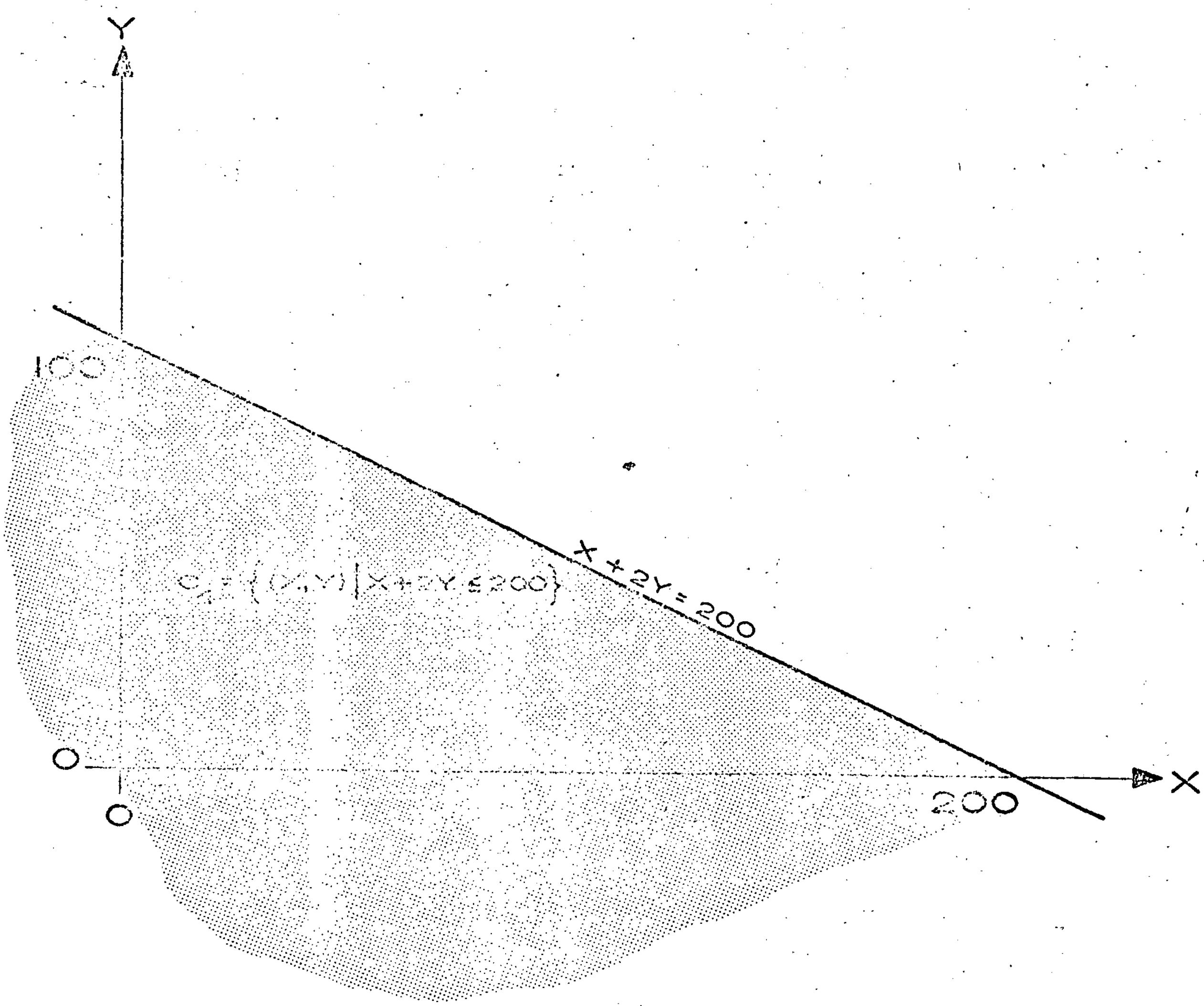
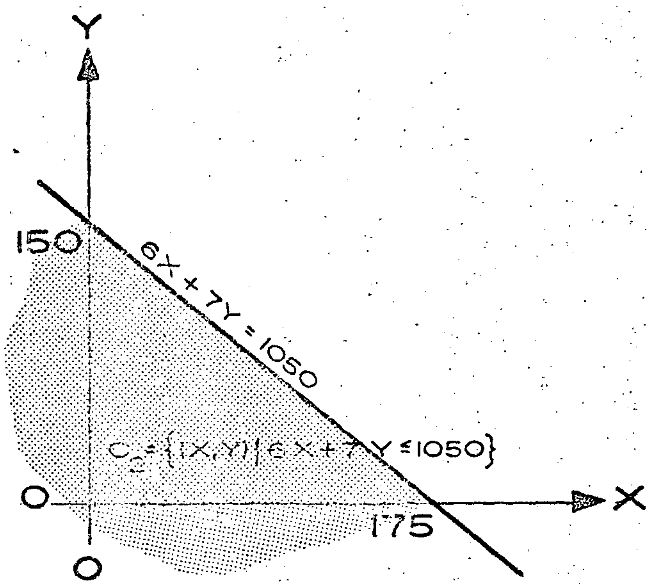
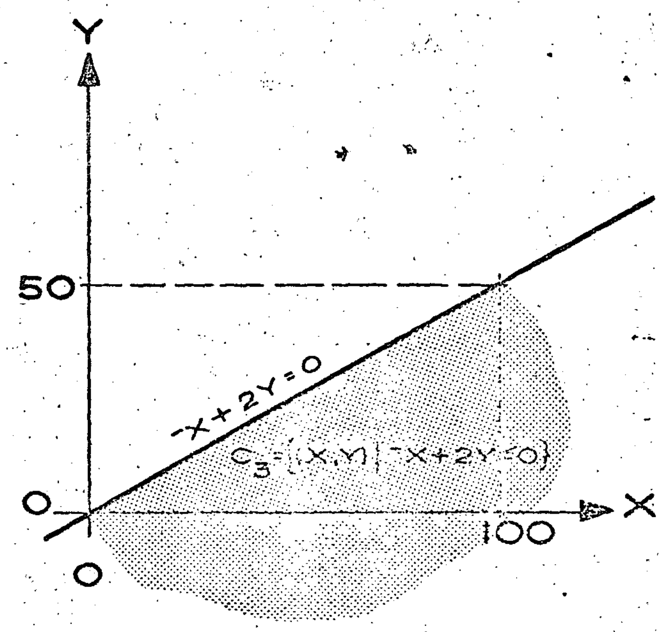


FIGURA 2



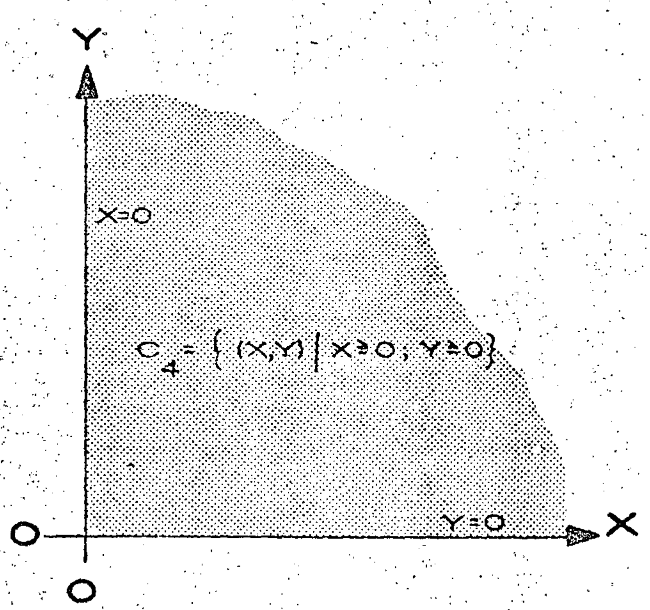
Y
150
6X + 7Y = 1050
$C_2=\{(X,Y)\mid 6X+7Y\leq 1050\}$
O
175
X
O

(A)



Y
50
-X + 2Y = 0
$C_3=\{(X,Y)\mid -X+2Y\leq 0\}$
O
100
X
O

(B)



Y
X=O
$C_4=\{(X,Y)\mid X\geq 0,\ Y\geq 0\}$
Y=O
O
X
O

$$F = C_1 \cap C_2 \cap C_3 \cap C_4 = \bigcap_{i=1}^{4} C_i$$

y se representa en la figura 3.

En la figura 4 se sobreponen a la región factible una serie de líneas de nivel, cada una de las cuales representa las combinaciones de cajas chicas y grandes (x,y) que al venderse producirían el mismo nivel de utilidades. Se observa que el nivel de utilidad crece a medida que la recta que representa la utilidad (función objetivo) se desplaza en el sentido indicado en la figura, en forma paralela a sí misma.

Nótese que no existe ningún punto dentro de la región factible F, que proporcione un nivel de utilidad superior a 1480 pesos. Dicho de otra manera, es imposible desplazar la función de utilidad más allá del nivel de 1480 pesos, de tal forma que la recta que representa la utilidad ($8x + 12y$ = Utilidad) intersecte al espacio decisional. Entonces, gráficamente se observa que el máximo nivel de utilidad que permite la estructura del problema es precisamente 1480 pesos. Además, el nivel máximo de utilidad se alcanza solamente en un punto de la región factible que es un vértice de dicha región, y corresponde a:

x = 140 cajas chicas

y = 30 cajas grandes

FIGURA 3

EL ESPACIO DECISIONAL

O

REGION FACTIBLE

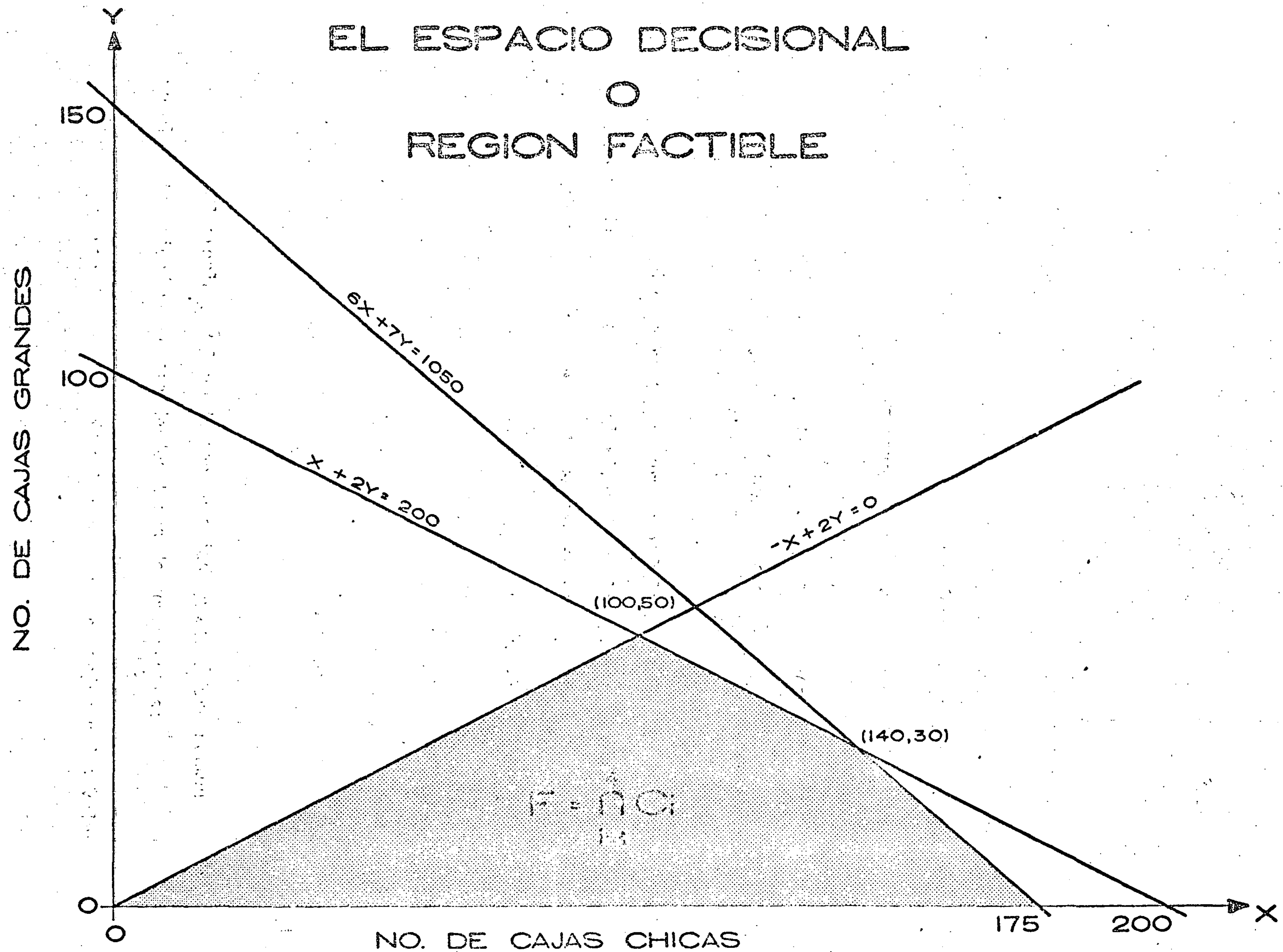
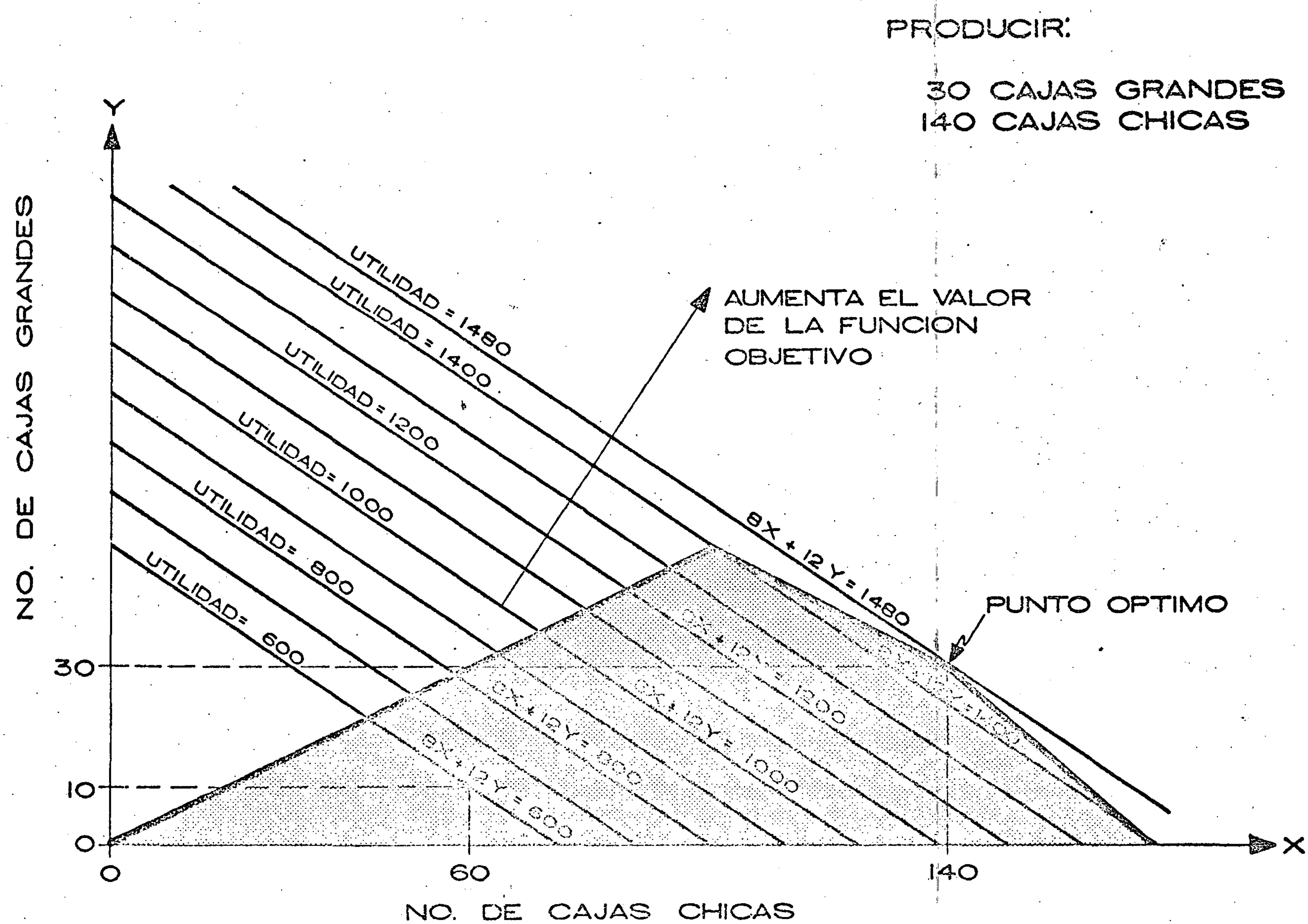


FIGURA 4

SOLUCION AL PROBLEMA DE PRODUCCION DE CAJAS



Resumen del Método Gráfico de Solución

La solución del problema del fabricante se ha obtenido gráficamente de la manera siguiente:

a) Se definió la región factible F obteniéndose la figura 3.

b) Se sobrepuso a la región una línea "U", con la pendiente de la función objetivo y que pasara por cualquier punto dentro de la región factible. Por ejemplo, el punto (60, 10) que proporciona un nivel de utilidad de 600 pesos en este problema.

c) Se desplazó esta recta en forma paralela a sí misma, en el sentido en que aumenta el nivel de utilidad, hasta que la recta se hace tangente a la región factible.

d) El punto de tangencia proporciona la solución al problema, ya que ningún punto dentro del espacio decisional permite desplazamiento de la función objetivo hacia niveles de mayor utilidad.

II.3. Sumario y Conclusiones

El problema del productor de cajas se atacó creando un modelo matemático que consta de dos tipos de componentes:

a) Un conjunto de desigualdades lineales que restringen los valo res que puedan tomar las variables que controla el productor de cajas, y que hemos llamado las variables de decisión.

b) Una función lineal que se quiere maximizar, dentro de los valores de las variables decisionales que satisfacen las restricciones que impone el problema.

El modelo matemático creado produce un problema típico de programación lineal. Es de programación porque se busca determinar el mejor programa semanal de producción de cajas. Es lineal porque todas las relaciones matemáticas que integran el modelo son lineales.

El problema matemático de programación lineal que se obtuvo del proceso de modelación, se representó gráficamente. Se observó que el espacio decisional que definen las restricciones del problema se puede representar por una región en el plano, que indica cuáles son los puntos entre los que el fabricante puede y debe decidir el programa de producción. Esta representación permitió resolver el problema gráficamente, desplazando la recta que representa la función objetivo en el sentido en que aumenta la utilidad, hasta hacerla tangente a la región factible; siendo el punto de tangencia la solución al problema.

En este momento conviene hacer notar que el hecho de que la solución del problema resulte ser un punto que es un vértice de la región factible no es una casualidad. Es una propiedad de los programas lineales, el hecho de que siempre se encuentra una solución al problema en un punto extremo o vértice de la región, aunque hay casos en que la solución no es única.

Finalmente, diremos que el método gráfico aunque muy práctico en el ejemplo estudiado, no se puede aplicar en general. La razón es simple y estriba en el hecho de que la mayoría de los problemas prácticos tienen más de dos variables. Esto haría necesario representar las relaciones en espacios de más de dos dimensiones. Sin embargo, el procedimiento ha permitido obtener una visión geométrica de lo que sucede aun en espacios de mayor dimensión, lo cual resulta muy valioso para desarrollar algo de intuición respecto al problema general de programación lineal.

Por la razón anterior, es obvio que debe haber alguna alternativa. En efecto, existen métodos numéricos para resolver el problema y generalmente giran alrededor del algoritmo simplex que descubrió George Dantzig en 1947, y del cual hablaremos en la siguiente sección.

III. EL PROBLEMA GENERAL DE PROGRAMACION LINEAL

En esta sección se tratará al problema de programación lineal en su forma genérica, es decir, desligado de ejemplos particulares. Empezaremos por el planteamiento económico clásico, haciendo una abstracción de los elementos que se han manejado en el ejemplo de la sección anterior. También se explicará un poco la terminología comúnmente usada.

Una vez hecho esto, se dará una visión más bien intuitiva del método simplex, que es el método numérico más usado para resolver problemas de programación lineal. Esto se hará a través de argumentos de tipo geométrico.

Finalmente se hablará de algunas aberraciones que pueden ocurrir cuando hay inconsistencias en la formulación de un modelo, y que se deben conocer para poderse detectar y corregir si se han de realizar aplicaciones útiles de esta técnica.

III.1. El Planteamiento Económico Clásico

Supóngase que una entidad dispone de m recursos y puede desempeñar n actividades para realizar su cometido. El nivel de intensidad con el que desempeña cualquier actividad es variable y está bajo el control de la entidad. Entonces, la entidad se enfrenta al problema de decidir el nivel de intensidad al que va a desempeñar cada una de sus actividades para cumplir con su cometido de la mejor forma posible.

Ahora bien, el desempeñar una actividad a un cierto nivel de intensidad, consume recursos. Supóngase que el nivel de intensidad con que se realizan las actividades se puede medir sobre una escala cardinal.

Sean

x_j = la variable que representa el nivel de intensidad al que se desempeña la actividad j; $j = 1,2,\ldots,n$ Estas son las llamadas variables decisionales bajo el control de la entidad.

a_{ij} = El consumo del recurso i por unidad de intensidad de desempeño de la actividad j, $i = 1,2,\ldots,m$; $j = 1,2,\ldots,n$. Estos coeficientes llamados tecnológicos se suponen conocidos para un problema dado.

Entonces, el párrafo anterior se resume diciendo que, el desempeñar la actividad j al nivel x_j, consumirá $a_{ij}\, x_j$ unidades del recurso i.

El Marco Restriccional

Es difícil imaginarse cantidades ilimitadas de un cierto recurso. Entonces, si

b_i = cantidad disponible del recurso i, $i = 1,2,\ldots,m$

es obvio que la entidad no podrá desempeñar sus actividades a niveles que excedan la disponibilidad de sus recursos. Es decir, la entidad está restringida en cuanto a los niveles a los que puede desempeñar las actividades por los recursos disponibles, y estas restricciones se pueden representar por medio de desigualdades lineales de la forma siguiente:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j = a_{i1}\, x_1 + a_{i2}\, x_2 + \cdots + a_{in}\, x_n \leq b_i \qquad i = 1,2,\ldots,m$$

El Criterio de Decisión o Función Objetivo

Ahora bien, se ha dicho que la entidad quiere cumplir su cometido "de la mejor forma posible". Para poder hacer esto la entidad debe poder decir qué entiende por "mejor". Es decir, debe tener un criterio que le permita distinguir cuándo una cierta combinación de niveles de intensidad de sus actividades le representa un mayor beneficio que otra.

Sea c_j = El beneficio que representa a la entidad el desempeño de una unidad de intensidad de la actividad j,

$j = 1,2,\ldots,n$

Aunque el beneficio se mide generalmente en términos monetarios, esto no es necesariamente una regla. Por ejemplo, si el crecimiento de la entidad es un beneficio, los coeficientes de beneficio pueden representar unidades de crecimiento (cualquiera que esta sea) por unidad de desempeño de la actividad correspondiente.

Entonces, el desempeñar la actividad j al nivel x_j le reporta un beneficio a la entidad de $c_j\, x_j$. Por lo tanto, el beneficio total de desempeñar sus actividades a los niveles x_1, x_2, ..., x_n es:

$$z(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{j=1}^{n} c_j\, x_j = c_1\, x_1 + c_2\, x_2 + \ldots + c_n\, x_n$$

El objetivo de la entidad es maximizar su beneficio.

El Problema de Programación Lineal

De lo anterior, podemos dar un planteamiento formal al problema de la entidad como:

"Encontrar los niveles de intensidad de las actividades que puede desempeñar la entidad, de tal forma que se maximice su beneficio y que no consuma mayor número de recursos que los disponibles".

Matemáticamente, esto se escribe de la manera siguiente:

$$
(PL)\ldots \begin{cases} \max\ z(x_1,\ldots x_n) = \sum\limits_{j=1}^{n} c_j\, x_j & \\ \text{s.a.} \quad \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j \le b_i & i = 1,2,\ldots,m \\ \qquad\qquad x_j \ge 0 & j = 1,2,\ldots,n \end{cases}
$$

Nótese que, aunque hay excepciones en las que el desempeño de una actividad en niveles inferiores a cero tiene una interpretación válida, se ha impuesto una restricción de no-negatividad a todas las variables de decisión x_j, por ser este el caso más normal. Además, los principales libros de texto tratan el problema con este planteamiento general.

III.2. El Método Simplex: Una descripción geométrica

Poliedros Convexos

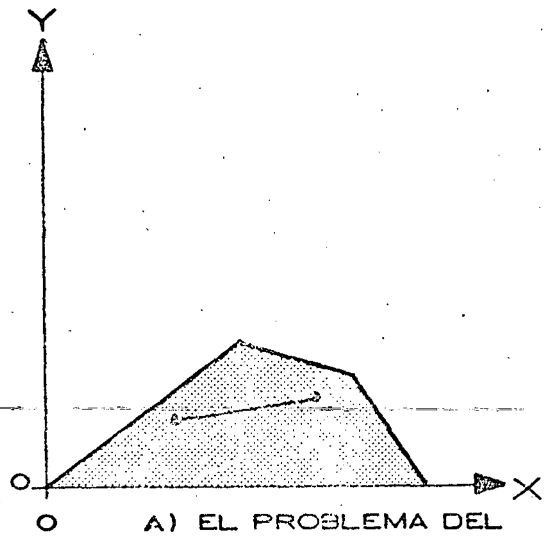
En el ejemplo del productor de cajas, se observó que la región factible del problema estaba definida por un área en el pla no encerrada dentro de un polígono irregular. Este concepto se generaliza a "n" dimensiones y geométricamente, el conjunto de desigualdades lineales que representan las restricciones de un problema de programación lineal bien planteado, definen un poliedro en ese espacio de "n" dimensiones. Por ejemplo, un cubo es un poliedro regular de seis caras en espacio Euclideano de tres dimensiones. Obviamente, los poliedros definidos en espacios de más de tres dimensiones no tienen una representación gráfica tan cómoda como la del problema del fabricante de cajas en dos dimensiones o el cubo en tres; lo importante es que el concepto geométrico es el mismo independientemente de la dimensión del espacio.

Otra propiedad del espacio decisional del problema del productor de cajas es que si tomamos dos puntos cualesquiera dentro del poliedro que lo define, y los unimos por medio de una recta, todos los puntos sobre este segmento también quedan dentro del poliedro. Cualquier conjunto que posea esta propiedad es un conjunto convexo. Si el conjunto es un poliedro, entonces es un poliedro convexo. La figura 5 proporciona varios ejemplos de conjuntos convexos y otros de conjuntos no-convexos.

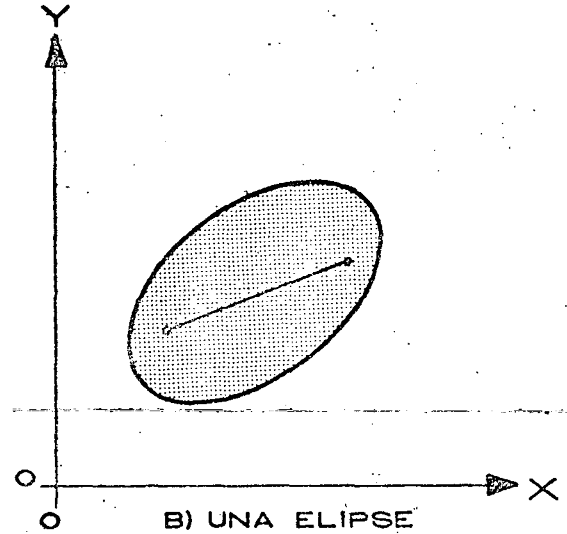
Puntos Extremos

En el ejemplo del productor de cajas, vimos como la solución del problema resultaba ser un vértice del poliedro convexo

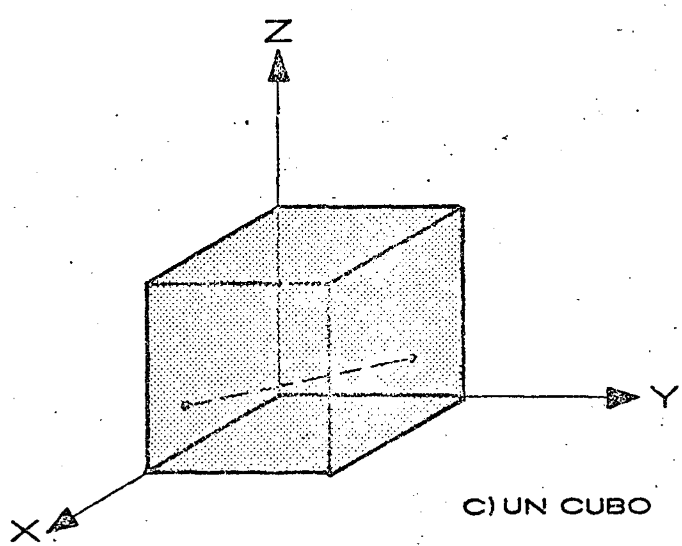
FIGURA 5
CONJUNTOS CONVEXOS



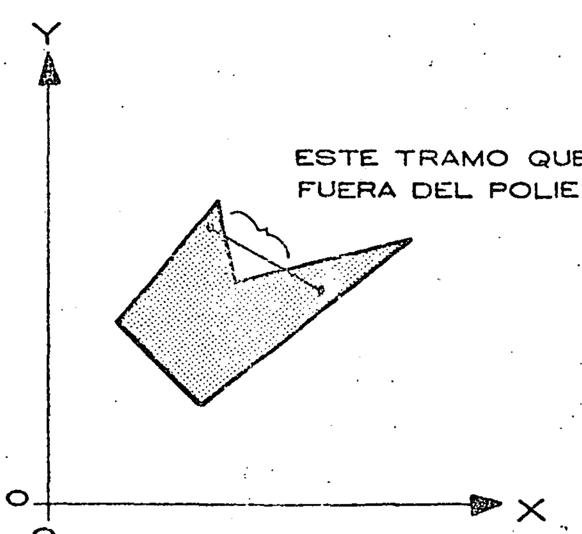
A) EL PROBLEMA DEL PRODUCTOR DE CAJAS



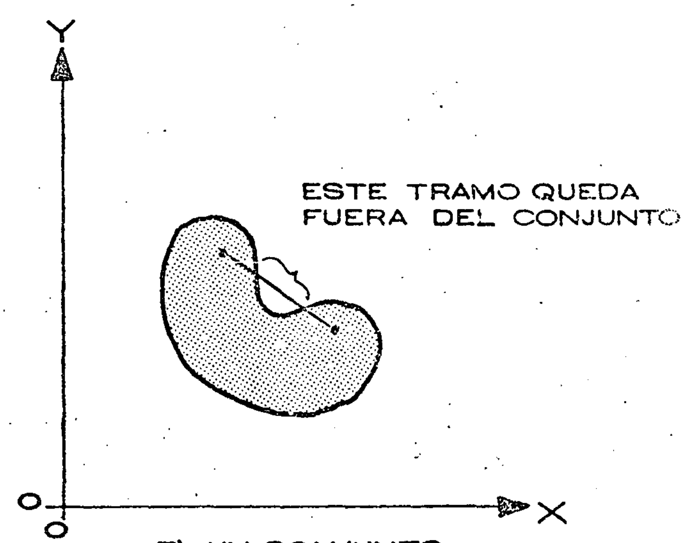
B) UNA ELIPSE



C) UN CUBO



D) UN POLIEDRO NO CONVEXO



E) UN CONJUNTO NO CONVEXO

que define la región factible. Nótese que cualquier vértice de un poliedro convexo tiene la propiedad siguiente:

a) El punto forma parte del poliedro.

b) Es imposible encontrar dos puntos que pertenezcan al poliedro, tales que el vértice esté entre los dos y sobre la recta que los une.

Cualquier punto de un conjunto C que satisfaga estas condiciones, se conoce como un punto extremo del conjunto. Si el conjunto es un poliedro convexo, sólo sus vértices son puntos extremos. Sin embargo, no solamente los vértices de un conjunto califican como puntos extremos. Por ejemplo, del conjunto de puntos contenidos en un círculo, cualquier punto sobre su periferia califica como un punto extremo. Esta situación se ilustra en la figura 6.

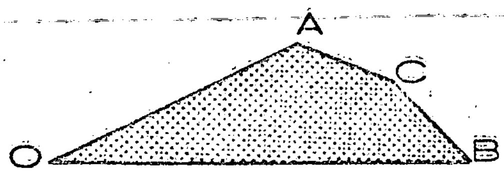
Optimalidad

Finalmente, recordamos que la solución del problema del productor de cajas se dá precisamente en un vértice o punto extremo del poliedro convexo que define al espacio decisional del problema. Es posible demostrar matemáticamente que este siempre va a ser el caso, cuando el problema se plantea de acuerdo al formato general (PL) de la sección anterior.

Dentro de la teoría de programación lineal se de-

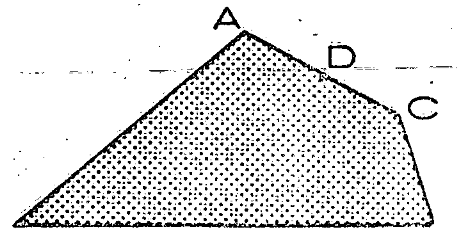
FIGURA 6

PUNTOS EXTREMOS



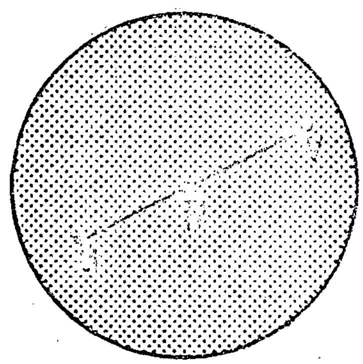
(a)

O,A,B Y C SON PUNTOS EXTREMOS



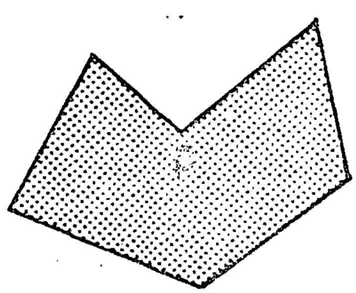
(b)

'D' NO ES UN PUNTO EXTREMO.
ESTA SOBRE EL SEGMENTO AC.



(c)

(i) TODO PUNTO SOBRE LA PERIFERIA ES UN PUNTO EXTREMO.
(ii) 'p' NO ES UN PUNTO EXTREMO.



'p' NO ES UN PUNTO EXTREMO

(d)

muestra un teorema que dice que, si el problema de programación lineal tiene solución, existe un punto extremo que es una solución al problema.

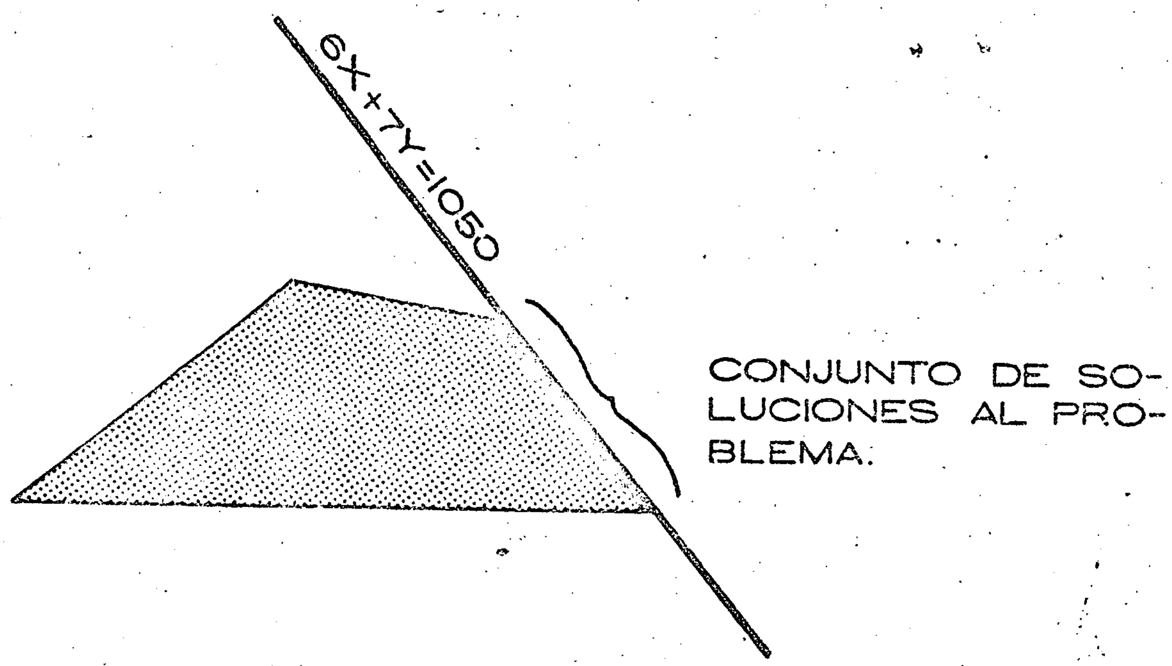
Nótese que lo anterior no significa que solamente los puntos extremos pueden ser soluciones al problema. En efecto, cuando la función objetivo es paralela a alguna faceta o arista del poliedro convexo que define al espacio decisional, cualquier punto sobre la faceta o arista, califica como una solución al problema. Esta situación se ilustra en la figura 7. Por la misma razón, la faceta contendrá varios puntos extremos que también calificarán como soluciones, verificando la conclusión del teorema citado.

El Método Simplex

En esencia, el algoritmo simplex es un método numérico que proporciona una forma organizada de buscar entre los puntos extremos del poliedro, hasta encontrar una solución al problema. Es decir, ya que sabemos que algún vértice de la región factible debe calificar como una solución, no es necesario explorar mas que puntos extremos.

FIGURA 7

UN PROBLEMA
CON MULTIPLES SOLUCIONES



EL PROBLEMA MAX. $6X + 7Y$

S.A.
$$X + 2Y \leq 200$$
$$6X + 7Y \leq 1050$$
$$-X + 2Y \leq 0$$
$$X, Y \geq 0$$

TIENE SOLUCIONES MULTIPLES

Una Descripción Geométrica

El método empieza por "localizar" un punto extremo de la región factible. Entonces, habiendo identificado un vértice del poliedro se entra en un proceso iterativo que a grandes rasgos es el siguiente:

a) Determina si este punto extremo califica como una solución del problema. De ser así, se termina el proceso.

De lo contrario se procede a efectuar el paso (b).

b) Si el vértice actual no califica como solución, explora las aristas del poliedro que inciden sobre el, y determina cuál de estas proporciona la mejor "dirección de movimiento". Es decir, cuál de las aristas aumenta más rápidamente el valor de la función objetivo, por unidad de movimiento en la dirección que define.

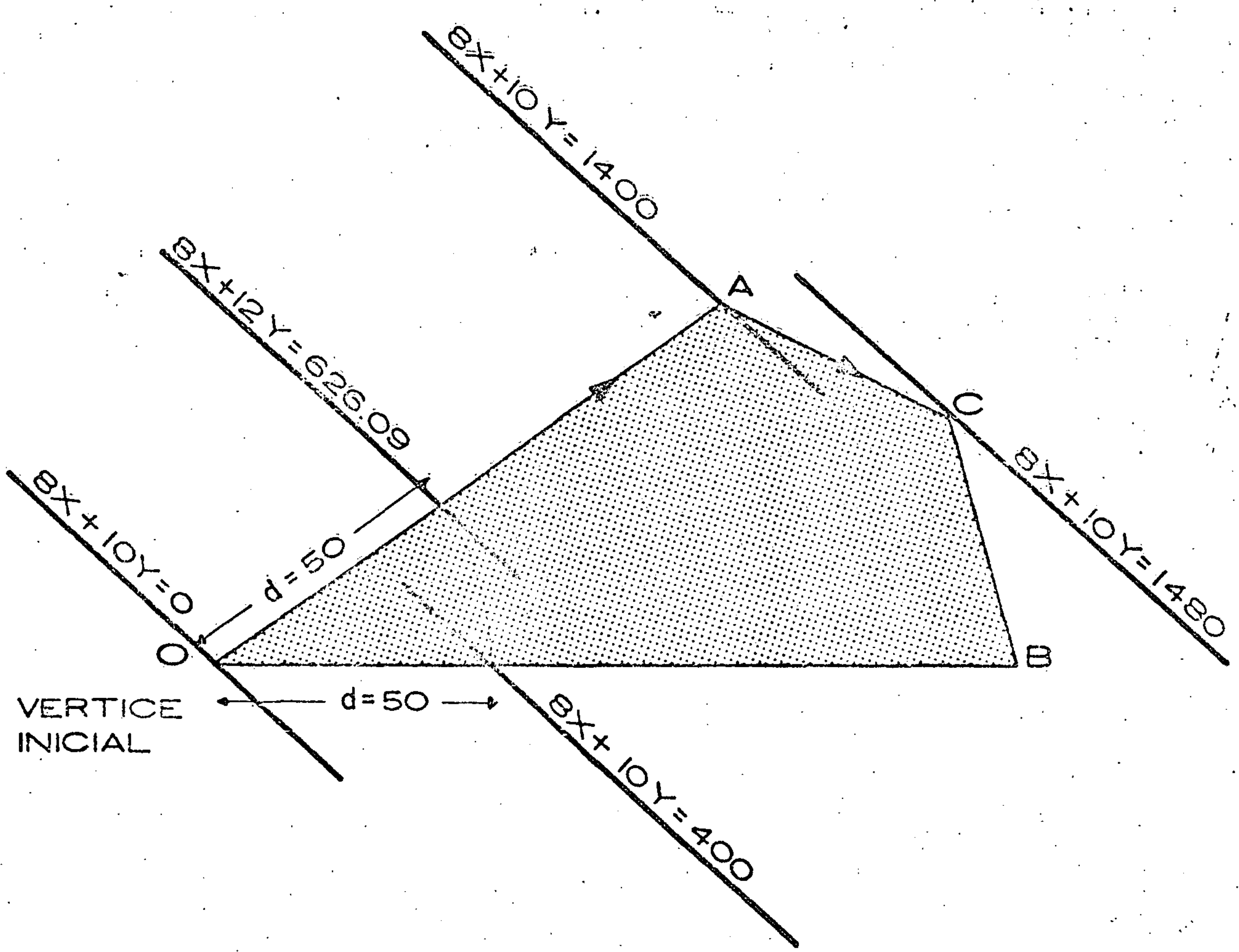
c) Procede a "moverse" sobre la arista seleccionada en el paso (b) hasta encontrar un nuevo vértice del poliedro.

d) A partir del nuevo vértice, se efectúa otra iteración del proceso, empezando en el paso (a).

En la figura 8 se representa una iteración del método para el problema del productor de cajas, partiendo del origen,

FIGURA 8

EL METODO SIMPLEX APLICADO AL PROBLEMA DEL PRODUCTOR DE CAJAS



que evidentemente es un punto extremo. Sobre este vértice inciden dos aristas del poliedro respectivo, que son las líneas $\overline{OA}$ y $\overline{OB}$ de la figura.

El moverse una distancia de 50 unidades sobre la arista $\overline{OA}$ proporciona un incremento de 626.09 al valor de la función objetivo. En cambio, moverse 50 unidades en la dirección de la arista $\overline{OB}$ proporciona un incremento de 400 al valor de la función objetivo. Por lo tanto, la mejor dirección de movimiento la proporciona la arista $\overline{OA}$.

Entonces, el procedimiento indicaría que debe moverse sobre la arista $\overline{OA}$ hasta el vértice A, que será el nuevo vértice a partir del cual se repetirá el procedimiento iterativo. El valor de la función objetivo en este punto es de 1400.

En la siguiente iteración, se notará que de las dos aristas que inciden sobre el vértice "A", solamente la $\overline{AC}$ proporciona una dirección de movimiento que aumenta el valor de la función objetivo. Un movimiento en el sentido $\overline{AO}$ por fuerza lo disminuirá, por ser la dirección opuesta a la usada en la iteración anterior. Moverse en el sentido $\overline{AC}$ a partir de "A", conducirá al punto "C", que es la solución al problema.

Al llegar al vértice "C", se notaría que un movimien to en la dirección de cualquier arista que incide sobre él, produciría valores de la función objetivo inferiores al que se obtiene en el vértice "C". Así se verifica que el vértice "C" es efectivamente una solución del problema del productor de cajas.

III.3. Algunos Casos Aberrantes

Hasta este momento se ha estado suponiendo que los problemas tratados están "bien" planteados y son consistentes con alguna situación real. Sin embargo, es posible idear problemas que son inconsistentes y no tienen solución. Específicamente, hay tres situaciones que generan o pueden generar dificultades al quererlos resolver y que son los siguientes:

a) Inexistencia de soluciones.

b) Soluciones no-acotadas

c) Ciclaje.

El primer caso ocurre cuando las restricciones no pueden ser satisfechas por ningún punto en el espacio n-dimensional en el que se haya definido al problema. Matemáticamente, diríamos que lo que ha sucedido es que las restricciones son inconsistentes o contradictorias ya que definen el conjunto vacío. Un ejemplo ilustrativo se proporciona en la figura 9(a), donde se ve que cualquier punto que satisfaga una de las restricciones violará la otra

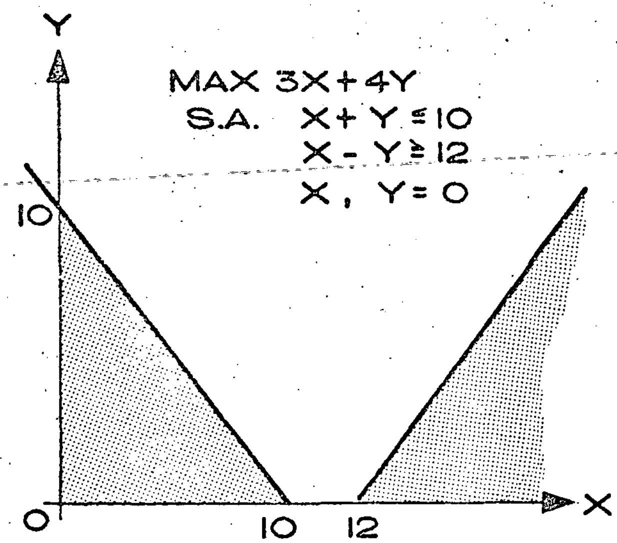
El segundo caso ocurre cuando la región factible no está acotada por algún lado y es posible desplazar la función objetivo indefinidamente de tal forma que siempre aumenta su valor. Es decir, es posible encontrar puntos dentro de la región factible que hacen que la función objetivo tome valores tan grandes como se quiera. El ejemplo de esto se ilustra en la figura 9(b).

Finalmente, notamos en el ejemplo del fabricante de cajas que los vértices de la región factible quedan definidos por la intersección de dos rectas. Estas rectas son los conjuntos de puntos que satisfacen las restricciones respectivas con estricta igualdad. En general en espacio n-dimensional bastan n planos para definir un punto extremo. Cuando se tienen más de n planos que se intersectan en el mismo vértice se dice que es un vértice degenerado. Se han construído ejemplos matemáticos con vértices degenerados, que hacen que el método simplex al llegar ahí entre en un círculo vicioso y nunca salga de ese vértice, de tal forma que se seguiría iterando "ad infinitum", y jamás se encontraría la solución al problema. Este es el problema de "ciclaje".

En la práctica, aunque se dan casos de degeneración con cierta frecuencia, sólo conocemos un caso de ciclaje, pero

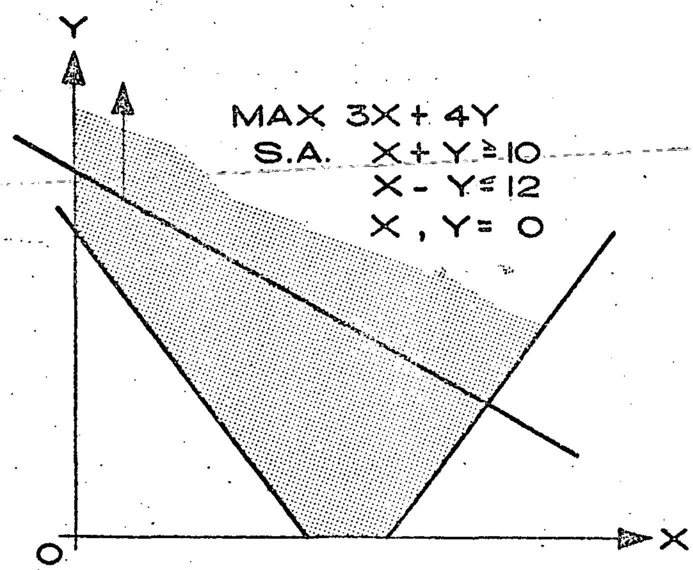
FIGURA 9

CASOS ABERRANTES



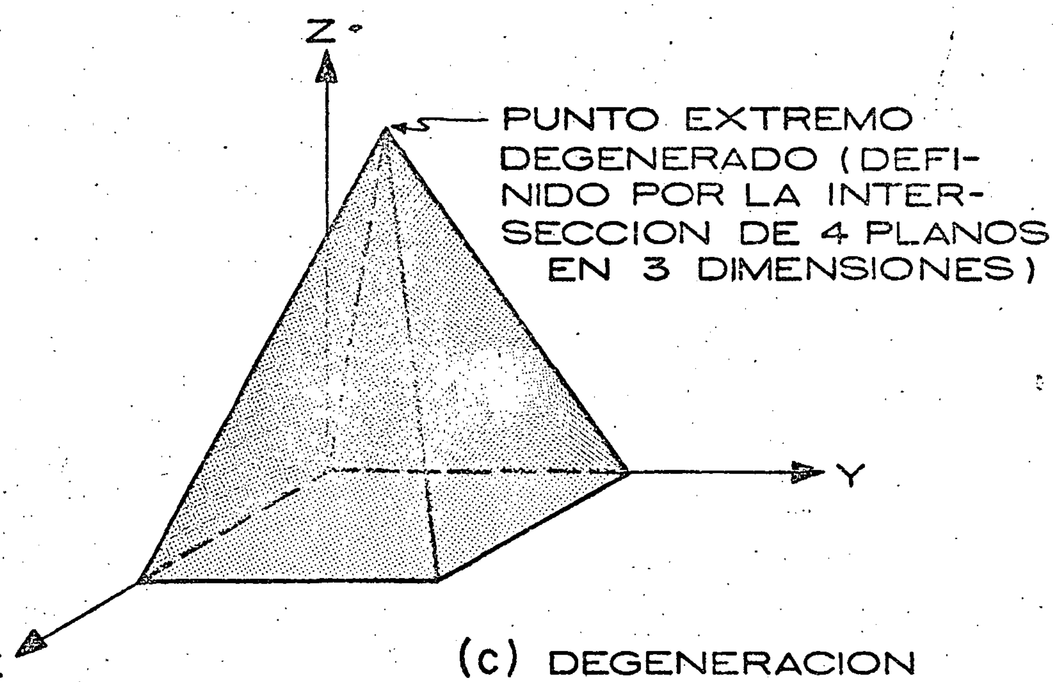
(a)

INEXISTENCIA DE UNA SOLUCION



(b)

VALORES INFINITOS DE LA FUNCION OBJETIVO



(c) DEGENERACION

es posible que ocurra con más frecuencia [ ]. Se han diseñado métodos para evitar el problema, aun en vértices muy degenerados. Por lo tanto, no se considera un problema serio.

Cuando se presenta alguno de los otros casos en la práctica, generalmente se trata de un error en la formulación. Todos los programas comerciales de computador sobre el método simplex tienen formas de detectar estas situaciones, lo cual permite normalmente corregir la formulación para que los problemas que resulten no presenten las aberraciones mencionadas.

III.4. Comentarios

Terminamos esta sección con una llamada de atención. Aunque el mensaje general es que

i) La programación lineal es útil para modelar un gran número de problemas reales y por lo tanto proporcionar información muy valiosa pra el proceso decisional;

y ii) Existen métodos numéricos con respaldo teórico sólido, para resolver problemas reales de programación lineal en forma muy eficiente,

el éxito de la aplicación depende de la habilidad del modelista para captar la esencia de la situación que pretende modelar. Dis tintas personas darán más relevancia a ciertos aspectos que otros. Además, puede haber más de una manera de modelar la misma situación y no cabe duda que algunas formas de modelar una situación son mejores que otras.

En resumen, aunque la técnica se haya desarrollado con un respaldo científico totalmente riguroso, su aplicación a problemas reales es un arte. Por lo tanto, el ingenio y la habilidad del modelista son los principales factores que deciden sobre la utilidad y valor de los resultados que arroja un modelo particular. En la próxima sección hablaremos más sobre algunos aspectos importantes de la utilización de la técnica en la práctica.

IV. LA PROGRAMACION LINEAL EN LA PRACTICA

Terminaremos nuestra exposición mencionando algunas limitaciones de la técnica de programación lineal en la práctica, y algunas de las formas en que se utilizan los modelos para atacar problemas reales. También se hará mención de algunos sistemas de cómputo que existen en el mercado para resolver programas lineales, y se señalarán otros temas que son de gran importancia pero que, por limitaciones de espacio, no se han podido tratar.

IV.1. Incertidumbre, Linealidad y Valores Discretos

Incertidumbre

Es muy usual encontrar en la literatura de investigación de operaciones, sobre todo en libros de caracter introductorio, que el tema de programación lineal se trata dentro de una sección que lleva un título como: "Métodos Determinísticos", o algo por el estilo. Esto obedece al hecho de que el planteamiento clásico considera que todos los parámetros de un programa lineal están perfectamente "determinados". Es decir, que los coeficientes tecnológicos, de beneficio y de disponibilidad de recursos se conocen con certeza. Esto ha motivado una de las primeras críticas al empleo de la técnica en la solución de problemas reales ya que rara vez se cumple lo anterior.

En efecto, aparte de los problemas inherentes en la información misma, que puede ser difícil de obtener y en general viene con algunos o muchos errores, está el problema de pronósticos que está muy lejos de quedar resuelto en la práctica. Además es posible que algunos o todos los coeficientes de algún problema sean claramente variables aleatorias en las que cualquier intento de predicción es inútil. Un ejemplo típico de lo anterior ocurre cuando los precios de algún bien o recurso deben quedar incluídos en la función objetivo; y estos precios fluctúan de acuerdo a las "condiciones" del mercado. Esto ocurriría por ejemplo en un problema de portafolio como el descrito en la primera sección, en que los rendimientos de los instrumentos de inversión sufren fluctuaciones casuales impredecibles.

Otro ejemplo serían los coeficientes de rendimiento de la tierra por cultivo considerado, en un problema de tipo agrícola como el que se citó en la sección primera. Obviamente estos rendimientos dependerán de un sinnúmero de factores casuales como: precipitación pluvial, humedad del ambiente, días de sol, etc., que es imposible controlar en general.

Técnicas Formales para Tratar Incertidumbre

Sin embargo, estas consideraciones no han desanimado a los practicantes de la técnica, que han recurrido al desarrollo de herramientas complementarias, algunas con fundamentos teóricos importantes y otras, basadas en la experiencia y la intuición.

Entre las herramientas formales podemos mencionar básicamente las siguientes:

a) Programación Paramétrica y Análisis de Sensibilidad.

b) Programación Estocástica.

c) Simulación de Montecarlo.

La primera herramienta permite evaluar la importancia de la aleatoriedad o de una equivocación en los datos del modelo. Lo que se hace es medir el impacto que tendría una mala estimación de algún parámetro, sobre la solución del programa lineal utilizado. Entonces, si la solución cambia "poco" ante un cambio "significativo" en el valor de los parámetros del modelo, se tiene una solución robusta. Es decir, la solución sigue siendo "buena" aunque la estimación del o los datos considerados sea relativamente "mala". Obviamente, en este caso la aleatoriedad o los errores en la información son despreciables.

Por la misma razón, si la solución es sensible a los cambios, la aleatoriedad deberá tomarse en cuenta de alguna forma, si es que el modelo ha de proporcionar soluciones que se pue dan aplicar al problema real que se quiere atacar. Es decir, una solución particular del modelo para un valor específico del ó los parámetros sensibles, es por lo general insuficiente para proporcionar una respuesta adecuada al problema real. Además, será francamente poco honesto y/o incompetente el usar una solución particular del modelo, y de paso altamente peligroso.

En general, cuando esto sucede y se persigue rigor científico, se utiliza alguna de las otras herramientas.

El utilizar programación estocástica implica el conocimiento del comportamiento probabilístico de los parámetros respectivos, a través de una expresión matemática explícita*. Con esto, se transforman las restricciones y/o la función objetivo para representar criterios de tipo probabilístico. Las dificultades de este enfoque estriban en que las matemáticas, aparte de ser complicadas, por lo general dan lugar a una serie de no-linealidades que generan muchos problemas, tanto teóricos como prácticos. Por principio de cuentas, se invalida el simplex como método de solución del problema matemático resultante. Por estar razones, las aplicaciones prácticas de programación estocástica no se ven con mucha frecuencia.

---

* i.e. Su función de densidad o de distribución.

Un camino alternativo que se utiliza con más frecuencia cuando los parámetros aleatorios son "pocos" y se conoce su ley probabilística, es un esquema de simulación de Montecarlo. A través de este esquema se generan soluciones del programa lineal a partir de valores de los parámetros "muestreados" de las leyes probabilísticas respectivas. El objeto del procedimiento es obtener una ley probabilística empírica del comportamiento de la solución del problema, y con base en esta información obtener una buena solución práctica al problema en cuestión.

Las limitaciones de la simulación de Montecarlo son básicamente de tipo práctico por las características de la tecnología actual en materia de computación electrónica. Como se indicó, el grado de dificultad estriba básicamente en que el número de programas lineales que habrá que resolver (es decir, el tamaño de la muestra), crece considerablemente con el número de parámetros aleatorios del modelo, incrementando también los recursos de cómputo requeridos para aplicar la metodología.

Además, esta técnica al igual que la de programación estocástica, se han cuestionado desde su base filosófica en el sentido de que, por lo general, las leyes probabilísticas que se utilizan en ambas metodologías tienen los defectos siguientes:

i) son a su vez modelos aproximados de la realidad.

ii) se estiman en base a datos históricos y la historia no siempre refleja la situación actual y mucho menos la futura.

A pesar de lo anterior, la investigación teórica en estos ramos, así como los intentos de aplicación prosiguen, algunos con éxito y otros quedándose cortos en cuanto a las expectativas. La realidad parece ser que los enfoques tiene validez científica pero deben escogerse con cuidado los problemas reales a los que se quieren aplicar. Aparte de las dificultades técnicas que hemos mencionado sería difícil discernir la aplicabilidad de estos procedimientos a un problema real, antes de haber realizado algunas pruebas empíricas sobre los resultados proporcionados.

Finalmente, conviene decir que la importancia y el tiempo disponible para resolver el problema deben influenciar la decisión de aplicar una metodología compleja. Por razones de tiempo, la práctica no siempre admite o justifica una técnica de este tipo ya que, la mejor solución tiene cierta vigencia después de la cual será obsoleta. Tampoco se debe invertir un esfuerzo técnico exagerado y costoso en un problema que no lo amerita; los procedimientos anteriores son costosos en tiempo, dinero y requerimientos de recursos técnicos.

Técnicas Heurísticas

En general, cuando el problema real requiere algo de "futurología" y/o no existen datos adecuados para obtener leyes probabilísticas para los parámetros relevantes, se recurre a algún método heurístico para obtener resultados del modelo, que sean aplicables a la situación real que se está estudiando. Este también es el caso, cuando se considera impráctico aplicar una técnica formal del tipo de las que se mencionaron en la sección anterior.

Las técnicas heurísticas tratan la incertidumbre, plantenado alternativas viables para los valores de los parámetros desconocidos, en base a la intuición, opinión o experiencia de alguna persona o grupo de personas que están involucradas en la situación real que se quiere analizar.

Aunque a alguien le pueda parecer raro, se han obtenido magníficos resultados con este enfoque y en la práctica, casi ha desplazado cualquier otra metodología. En primer término esto se debe a que el procedimiento es más ágil en general. En segundo lugar es fácil adaptar el modelo a los cambios necesarios en las condiciones ambientales. Además, se capta la experiencia de la gente que conoce a fondo la situación real; las opiniones de los expertos conjugan una serie de apreciaciones no cuantificables que hubiera sido imposible captar de otra manera.

Típicamente lo que se hace es que el experto señala "escenarios" o alternativas factibles de darse en la realidad, con alguna apreciación (aunque sea totalmente subjetiva) de sus probabilidades de ocurrencia. Estos escenarios tienen por lo general distintas conotaciones de "optimismo". Se resuelven los problemas bajo las condiciones que marca cada escenario y los resultados se plasman en un "cuadro decisional" donde se mide el impacto de optar por la solución en cierto escenario, dado que ocurre cualquier escenario alternativo. Es decir, lo que se pretende es plasmar el costo y el riesgo de escoger una alternativa que posiblemente no ocurra; facilitando así la decisión de la solución que se debe escoger.

Las dificultades aquí son obvias: lograr formar un grupo de personas que realmente sean expertos en la situación bajo estudio y que quieran cooperar con los analistas que están construyendo y obteniendo los resultados del modelo. Casi podemos asegurar que el éxito de cualquier aplicación depende de la asesoría y cooperación de algún experto en la situación bajo estudio, independientemente del grado de formalidad de la metodología. Solamente con un conocimiento bueno de la situación será posible crear un modelo adecuado y utilizarlo inteligentemente.

En resumen, la incertidumbre no es pretexto para descartar la técnica ya que existen formas razonables de tratarla, si la versión determinística del problema en cuestión modelada a través de un programa lineal es aceptable. Es decir, si estamos convencidos de que, si se conocieran los parámetros del modelo con exactitud la solución sería aceptable, entonces, es posible utilizar el modelo para responder algunas preguntas relevantes, dentro de las limitaciones de cada caso particular.

Linealidad

La siguiente crítica es sobre los supuestos de linealidad inherentes en la técnica. Hay infinidad de casos en que una situación real genera no-linealidades aun en versiones determinísticas de un problema de optimización. En versiones probabilísticas de un modelo, son casi inevitables al menos que se usen criterios muy simples como valores esperados de los parámetros aleatorios.

Es ampliamente conocido que cualquier función continua puede aproximarse por una función lineal segmentada, al grado de exactitud que se quiera. Hay varias maneras de hacer estas aproximaciones lineales. El precio que se paga es que el problema matemático crece considerablemente en tamaño y sólo se aplica en general, cuando hay pocas no-linealidades en la formulación del modelo original.

En el caso de que el problema sea "altamente" no lineal, entonces habrá que utilizar otra técnica de programación matemática que sea capaz de manejar las no-linealidades que presenta el problema.

Sin embargo, es muy significativo el hecho de que se inviertan esfuerzos considerables en buscar equivalencias lineales de expresiones no-lineales. En la literatura técnica existen muchas publicaciones cuyo mérito principal estriba en mostrar "trucos ingeniosos" de "linealización" de funciones no-lineales. La razón de estos esfuerzos en sencilla: resolver un problema lineal es mucho más fácil que un problema no lineal de tamaño comparable. Cualquier no-linealidad en un modelo, complica los métodos numéricos de optimización considerablemente, si no en concepto seguramente en tiempo de solución. Típicamente, cuando aparece una no-linealidad en un problema de la vida real, lo primero que se busca es una linealización, y solamente en caso de no encontrar una adecuada se recurre a técnicas más sofisticadas.

Valores Discretos

En el ejemplo del fabricante de cajas, se obtiene una solución muy satisfactoria ya que el programa de producción viene dado por números enteros de cajas que se deben producir en el tiempo fijado. Sin embargo, esto rara vez ocurre en la realidad, excepto con problemas de estructuras muy especiales. Entonces, surge la pregunta de ¿qué se debe hacer cuando en la realidad una solución no-integral no tiene sentido?

Por ejemplo: ¿qué escogeríamos como programa de producción de cajas si el modelo cediera un programa que indicara: producir 47.372 cajas grandes y 136.187 cajas chicas?

Lo primero que se nos ocurre es redondear las cifras, y es posible que en el caso de la producción de cajas el redondeo sea aceptable. Sin embargo, hay un sinnúmero de casos en los que se puede demostrar que la solución redondeada es una pésima aproximación de la mejor solución integral del problema; ya sea porque proporciona un valor mucho peor de la función objetivo, o porque proporciona lineamientos de política totalmente distintos a los que indica la solución entera.

En general, el redondeo de la solución de la versión continua es aceptable cuando las variables toman valores compara tivamente altos, de cientos o miles de unidades. El problema se agudiza a medida que los valores de las variables son comparativamente más pequeños, en donde una unidad de diferencia en el valor de la variable afecta el valor de la función objetivo en forma significativa.

Cuando el número de variables restringidas a valores discretos o enteros es pequeño (una o dos), y no pueden tomar más que un número limitado de valores, podrá pensarse en atacarlo a base de "fuerza bruta". Es decir, resolver tantos programas lineales como posibles valores puedan tomar las variables, y escoger la mejor solución.

Entonces, cuando el redondeo es inaceptable y las posibles combinaciones de valores de las variables restringidas a integralidad son demasiadas, la programación lineal no es aplicable. Será necesario entonces recurrir a alguna técnica de <u>programación en enteros</u> con el consiguiente costo en tiempo de cómputo.

IV.2. <u>Paquetes de Cómputo de Programación Lineal</u>

En la actualidad, cada fabricante de equipo de computación electrónica puede proveer al usuario de algún paquete de programación lineal. Quizás el más conocido, y sin duda uno de los más poderosos, es MPSX de IBM. Análogamente, UNIVAC provee FMPS; CDC tiene OPHELIE, etc.

También hay compañías dedicadas a la producción de programas especializados que venden o rentan paquetes de programación lineal. La más conocida es quizás SCICON (Scientific Control Systems Ltd.) en Inglaterra, que renta un paquete llamado SCICONIC.

En la mayoría de estos paquetes se utilizan técnicas avanzadas de computación que permiten la solución de problemas de varios miles de variables y restricciones. Además, casi todos tienen rutinas de programación de enteros y tratamientos de ciertas no-linealidades que se dan en la práctica y que se pueden resolver haciendo algunas modificaciones al método simplex.

Estos paquetes llevan ya varios años en desarrollo y son adecuados para resolver una gran cantidad de problemas prácticos de forma bastante eficiente. En la actualidad, un buen paquete de programación lineal incorpora otra serie de programas que hacen fácil el acceso a los distintos algoritmos. Por ejemplo: SCICONIC tiene un generador de matrices que proporciona gran flexibilidad en la fase de modelación, permitiendo probar modelos alternativos, ajustes, etc., con mucha agilidad.

IV.3. Conclusión y Temas Complementarios

La programación lineal es una técnica útil para resolver problemas reales de optimización. Debido a la eficiencia de los actuales programas de cómputo, es posible crear modelos que se aproximan bien a la realidad, y tal que los programas lineales asociados se pueden resolver en forma muy eficiente.

Las limitaciones de la técnica pueden ser superadas en muchas ocasiones de modo que los resultados del modelo proporcionen información y orientaciones valiosas, si bien no demasiado precisas en cuanto a líneas de acción aplicables a un problema real. Por ejemplo, señalar escalas de preferencia, tendencias generales que deben buscarse, etc.

El éxito de la aplicación depende en gran medida de la habilidad del practicante para modelar adecuadamente una situación real. Se considera fundamental lograr una cooperación estrecha de parte de los usuarios interesados que, en última instancia, serán los que utilizarán el modelo, y que por lo general son los que mejor conocen la situación real y saben cuáles son sus necesidades.

A su vez, la capacidad de desarrollar la habilidad necesaria para realizar aplicaciones reales útiles, requiere de una preparación sólida en los conceptos teóricos relevantes.

Los conceptos aquí expuestos no son ni remotamente suficientes para capacitar a algún practicante potencial en la utilización aceptable de la técnica.

Como una orientación para los lectores interesados, se proporciona una bibliografía al final. En esta bibliografía se señalan sólo algunos de los libros y textos relevantes ya que, debido a la cantidad de publicaciones existentes, no es práctico proporcionar una bibliografía más extensa. La bibliografía incluye libros sobre temas complementarios importantes.

Aun como documento de divulgación, el presente tiene ciertas carencias. A juicio de este autor, sería necesario tratar dos temas adicionales para redondear lo expuesto:

a) Dualidad

b) Programación Paramétrica y
Análisis de Sensibilidad

Con esto se obtendría una visión mejor del poder de la herramienta en cuanto a la cantidad de información que es posible obtener de un modelo de programación lineal y a ciertas implicaciones teóricas importantes. Además, sería deseable algún complemento sobre la teoría de optimización y programación matemática en general.

Esperamos, sin embargo, haber cumplido la misión de divulgar la utilidad de esta técnica y haber "despertado el apetito" de algún futuro usuario, especialista o practicante de la programación lineal.

B I B L I O G R A F I A

B.1. Libros de Texto a nivel introductorio

Casi cualquier libro introductorio de Investigación de Operaciones incluye un buen capítulo de Programación Lineal. La lista que incluimos es una pequeña muestra de esta literatura sobre el tema.

B.1.1. BAUMOL, W.J.: "Economic Theory and Operations Analysis", Ed. Prentice Hall, 1965.

B.1.2. BUDNICK, MOJENA, VOLLMAN: "Principles of Operations Research for Management", Ed. Richard D. Irwin Inc., 1977.

B.1.3. GUE, THOMAS: "Mathematical Methods in Operations Research" Ed. Macmillan Co., 1968.

B.1.4. HILLIER, LIEBERMAN: "Operations Research" (2a.ed.) Ed. Holden-Day Inc., 1974.

B.1.5. KEMENY, SCHLEIFER, SNELL y THOMPSON: "Finite Mathematics with Business Applications" (2a.ed.) Ed. Prentice Hall Inc., 1972.

B.1.6. MODER Y ELMAGHRABY: "Handbook of Operations Research; Foundations and Fundamentals", Ed. Van Nostrand Reinhold Co., 1978.

B.1.7. SASIENI, YASPAN y FRIEDMAN: "Investigación de Operaciones" (trad. en Español). Ed. Limusa Wiley, 1977.

B.1.8. PRAWDA, JUAN: "Métodos y Modelos de la Investigación de Operaciones", Vol.I Modelos Determinísticos. Ed. Limusa, S.A., 1976.

B.3. Algunos Libros Especializados en Otros Temas Complementarios: Programación No-Lineal, Programación de Enteros y Programación Estocástica.

B.3.1. AVRIEL, M.: "Non Linear Programming: Analysis and Methods" Ed. Prentice-Hall Inc., 1976.

B.3.2. HU, T.C.: "Integer Programming and Network Flows". Ed. Addison-Wesley, 1970.

B.3.3. NEMHAUSER, G.; GARFINKEL: "Integer Programming", Ed. John Wiley and Sons, 1972.

B.3.4. VAJDA, S.: "Probabilistic Programming", Ed. Academic Press 1972.

B.3.5. VON NEUMAN, MORGENSTERN: "Theory of Games and Economic Behaviour", Princeton University Press, 1944, 1947 y 1953.

B.3.6. ZANGWILL, W.: "Nonlinear Programming: A Unified Approach". Ed. Prentice-Hall Inc., 1970.

B.4. Artículos Citados

B.4.1. Mathematical Programming: Vol. 11(1976) No.3 - Dic. 1976.

a) KANTOROVICH, L.V.: "Mathematics in Economics: Achievements, Difficulties, Perspectives" (Nobel Memorial Lecture - Dic. 11, 1975).

b) KOOPMANS, T.J.: "Concepts of Optimality and their Uses" (Nobel Memorial Lecture - Dic. 11, 1975).

B.2. Libros de Texto Especializados

La mayoría de los textos que se citan, además de ser los más importantes, requieren de bases matemáticas fuertes; sobre todo en Algebra Lineal y algo de Análisis Matemático. Varios de estos libros abordan otros temas complementarios de Programación Matemática.

B.2.1. DANTZIG, G.B.: "Linear Programming and Extensions", Princeton University Press, 1963 (este es un libro clásico)

B.2.2. GALE, D.: "The Theory of Linear Economic Models", Ed McGraw-Hill, 1960.

B.2.3. GASS, S.I.: "Linear Programming: Methods and Applications" (3a.ed.) Ed. McGraw-Hill, 1969.

B.2.4. HADLEY, G.: "Linear Programming" Ed. Addison-Wesley, 1962.

B.2.5. LUENBERGER, D.G.: "Introduction to Linear and Non-Linear Programming" Ed. Addison-Wesley, 1973.

B.2.6. SALKIN, SAHA (Eds.): "Studies in Linear Programming", Ed. North-Holland American Elsevier, 1975

B.2.7. SIMMONARD, M.: "Linear Programming" (trad.del Francés) Ed. Prentice-Hall, 1966.

B.4.2. KANTOROVICH, L.V.: "Mathematical Methods in Organization and Planning of Production" Management Science, 6,4, pp. 366-422 (trad. al Inglés del orig. de 1939).

B.4.3. KOTIAH, STEINBERB: "On the Possibility of Cycling with the Simplex Method". Operations Research, Marzo-Abril, 1978.

Centro de Educación Continua
División de Estudios Superiores
Facultad de Ingeniería, U.N.A.M.

CURSO: INGENIERIA DE SISTEMAS. Aplicación a la planeación y a la administración.

5 - 28 junio 1978.

NOTAS SOBRE EL TEMA:

"APLICACIONES DE LA INGENIERIA DE SISTEMAS"

-Su Adecuación a Nuestra Realidad:

PROFESOR: Ing. Carlos Velasco Picazo
Jefe del Depto. de Sistemas
U. A. M. - Azcapotzalco.

México, D. F.
23 de junio de 1978.

RESUMEN

EN ESTAS NOTAS SE PRESENTA UN EJEMPLO DE APLICACIÓN DE INGENIERÍA DE SISTEMAS EN LA UNIDAD AZCAPOTZALCO DE LA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA. APLICACIÓN EN DOS NIVELES DIFERENTES, COMO SON LA PLANEACIÓN DE UNA UNIDAD Y LA OPERACIÓN DE UN DEPARTAMENTO ACADÉMICO DENTRO DE ESA UNIDAD. EL TEXTO DE LAS NOTAS SE REFIERE A ESTOS DOS NIVELES COMO "PRIMER PROBLEMA" Y "SEGUNDO PROBLEMA", RESPECTIVAMENTE. LOS INTENTOS POR RESOLVER ESOS PROBLEMAS, SON LO QUE AQUÍ SE MENCIONA COMO APLICACIONES DE INGENIERÍA DE SISTEMAS. SE DESCRIBEN BREVEMENTE ESAS APLICACIONES, Y SE CONCLUYE CON UNOS COMENTARIOS SOBRE LAS LIMITACIONES EN LA APLICACIÓN DE CIERTAS TÉCNICAS "REFINADAS" EN NUESTRO MEDIO AMBIENTE.

PRIMER PROBLEMA (Enero de 1975). Actividades de la Comisión de Planeación en la incipiente Unidad Azcapotzalco de la recién creada Universidad Autónoma Metropolitana.

(Tanto este problema como el segundo, están planteados desde el punto de vista de quien esto escribe y no de una manera totalmente objetiva; estimando que se cumplen los objetivos de las notas).

Con muy poca información inicial, se tenían que realizar estimaciones sobre el desarrollo cuantitativo de la institución para el corto, mediano y largo plazos. Estas estimaciones deberían indicar cómo crecería la institución, desde su población estudiantil, pasando por su personal académico y administrativo y en planta física, hasta llegar a sus requerimientos presupuestales.

Se generó un modelo que, alimentado con una serie de parámetros (datos), proporcionan las estimaciones buscadas.

Este modelo consta básicamente de lo indicado en las figuras 1 y 2.

Se programó para ser resuelto en la computadora, pudiendo de esta forma analizar distintos casos, según variaran las entradas al sistema.

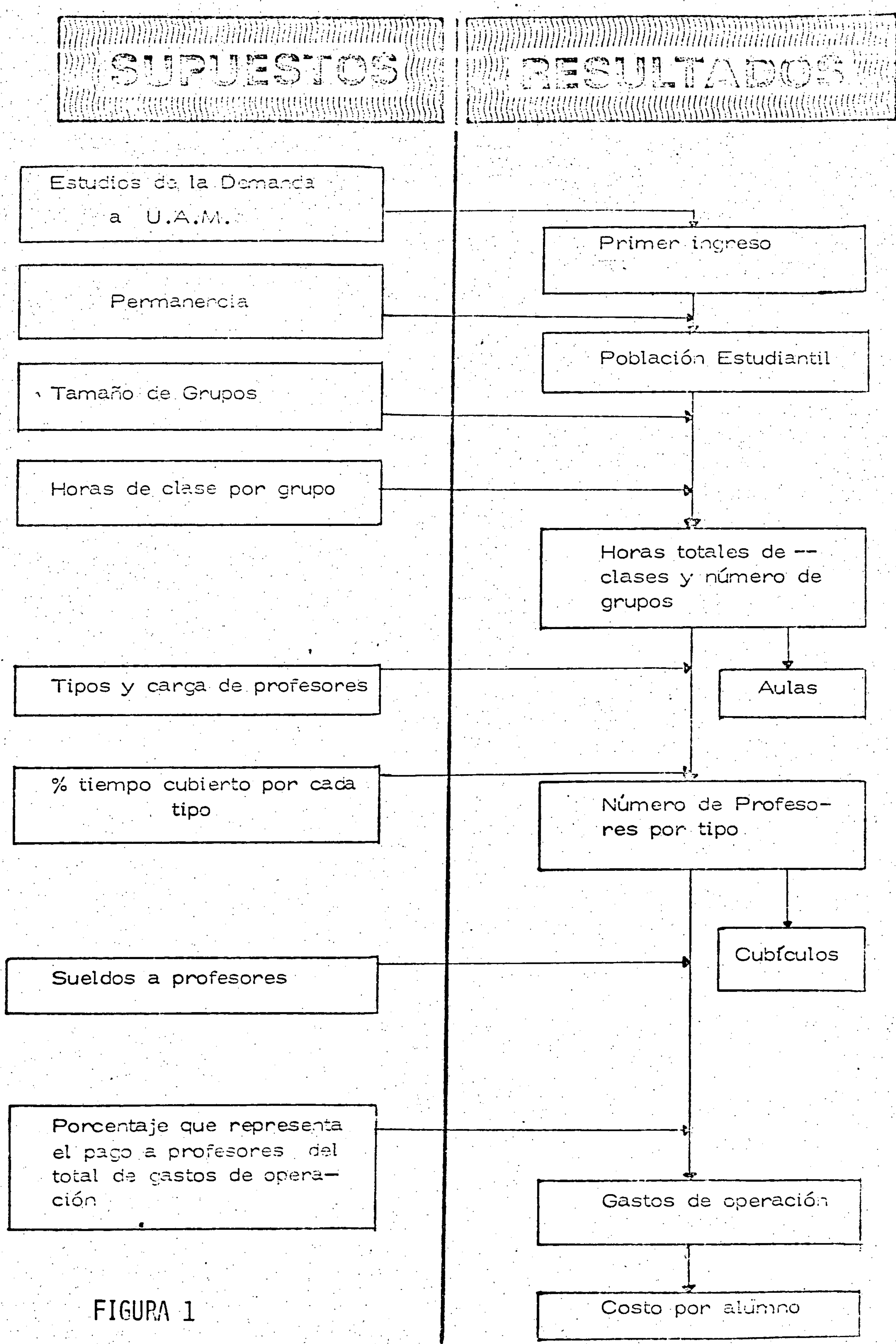

SUPUESTOS
RESULTADOS
Estudios de la Demanda a U.A.M.
Primer ingreso
Permanencia
Población Estudiantil
Tamaño de Grupos
Horas de clase por grupo
Horas totales de clases y número de grupos
Tipos y carga de profesores
Aulas
% tiempo cubierto por cada tipo
Número de Profesores por tipo
Cubículos
Sueldos a profesores
Porcentaje que representa el pago a profesores del total de gastos de operación
Gastos de operación
Costo por alumno

FIGURA 1

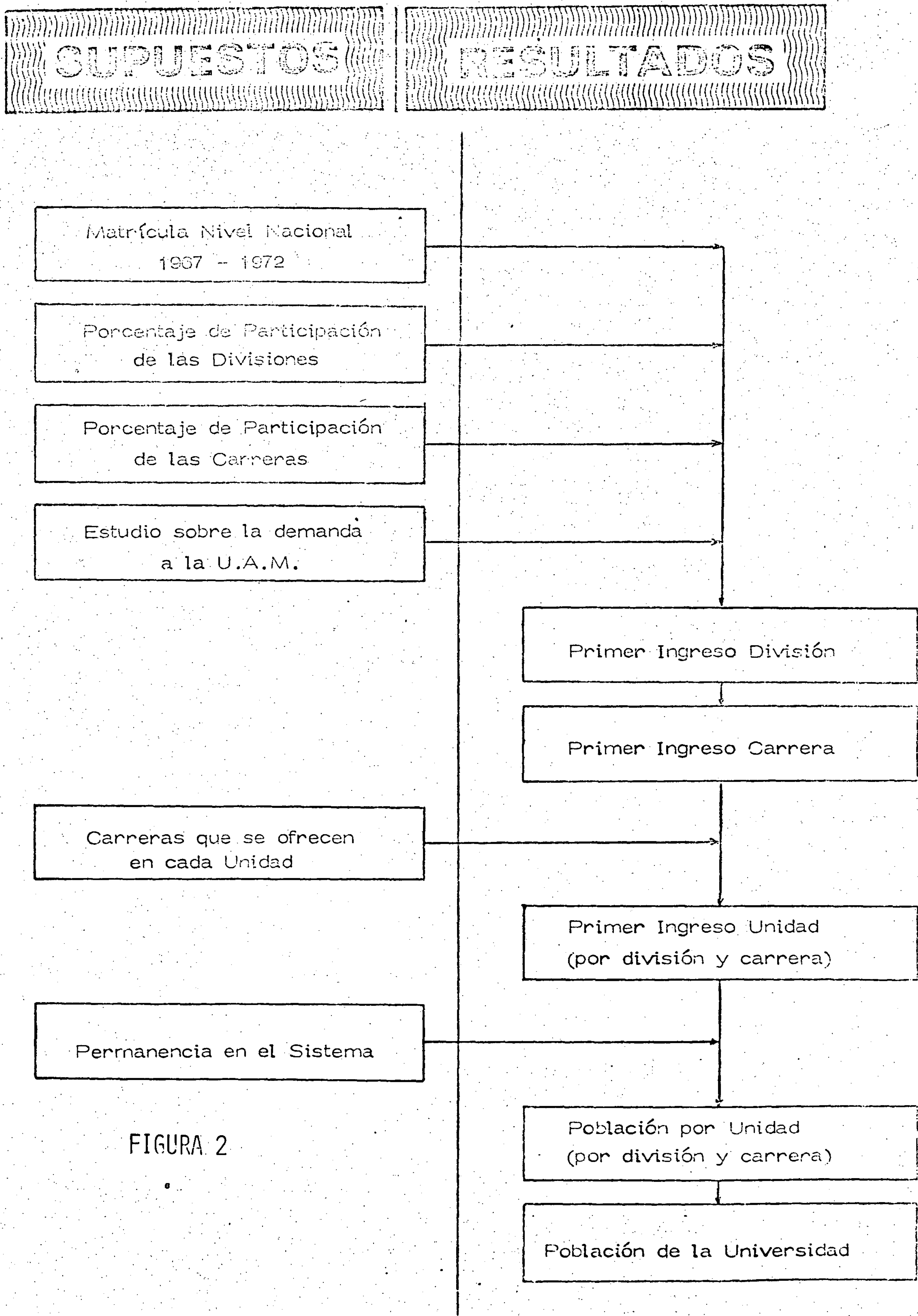

SUPUESTOS
RESULTADOS
Matrícula Nivel Nacional 1967 - 1972
Porcentaje de Participación de las Divisiones
Porcentaje de Participación de las Carreras
Estudio sobre la demanda a la U.A.M.
Primer Ingreso División
Primer Ingreso Carrera
Carreras que se ofrecen en cada Unidad
Primer Ingreso Unidad (por división y carrera)
Permanencia en el Sistema
Población por Unidad (por división y carrera)
Población de la Universidad

FIGURA 2

EL MODELO REQUIRIÓ 5 MESES ANTES DE PODER COMENZAR A OBTE-- NER RESULTADOS. RESULTADOS QUE SE ANALIZARON A DISTINTOS NIVELES DE AGREGACIÓN - TODA LA UNIVERSIDAD, POR UNIDADES, POR DIVISIONES EN UNA UNIDAD; A CORTO Y A LARGO PLAZOS. -

POR EJEMPLO, EN EL CORTO PLAZO, DURANTE JUNIO Y JULIO DE 1975 SE ANALIZARON DIFERENTES ALTERNATIVAS DE PRIMEROS IN GRESOS ESPERADOS Y LAS DIFERENTES MANERAS EN QUE INCIDI - RÍAN EN DEMANDAS DE PROFESORES, CARGAS DOCENTES, REQUERI- MIENTOS DE AULAS, LABORATORIOS, ETC. (FIGURA 3).

PARA EL LARGO PLAZO SE PUDO ANALIZAR, ENTRE OTRAS COSAS, EL IMPACTO QUE PRODUCE LA INTRODUCCIÓN DE UNA CARRERA CON ALTA DEMANDA EN UNA UNIDAD, EN CUANTO A LOGRAR UN CRECI - MIENTO MÁS ARMÓNICO ENTRE UNIDADES.

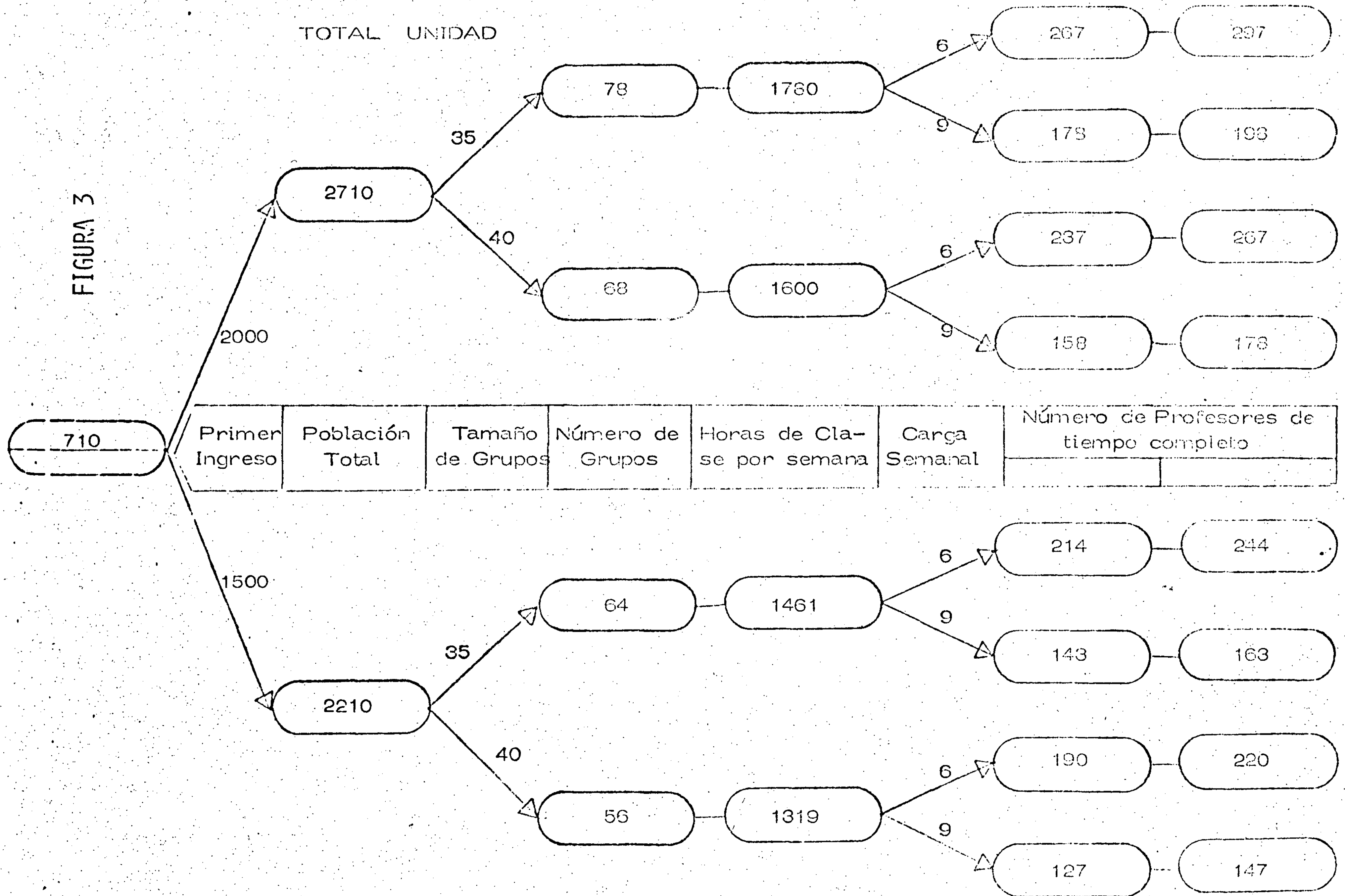
COMO YA SE MENCIONÓ, SE PREPARÓ UN PROGRAMA DE "SIMULACIÓN" EN COMPUTADORA, CON LA ESPERANZA DE QUE SU UTILIZACIÓN - PROPORCIONARA UN VALIOSO AUXILIO EN LA TOMA DE DECISIONES.

SEGUNDO PROBLEMA (A PARTIR DE MARZO DE 1976). EN UN DEPAR TAMENTO ACADÉMICO EN FORMACIÓN Y ACÉFALO HASTA ESA FECHA, INSTITUCIONALIZAR LA PROFESIÓN ACADÉMICA, PROPONIENDO PRO- YECTOS DE INVESTIGACIÓN QUE COMIENCEN SIENDO ÚTILES A LA INSTITUCIÓN A LA CUAL PERTENECE EL DEPARTAMENTO.

SITUACIONES ALTERNATIVAS PARA SEPTIEMBRE 1975.

TOTAL UNIDAD

FIGURA 3



POR LA EXPERIENCIA ANTERIOR, QUE DESPERTÓ POR LO MENOS EN FORMA INDIVIDUAL, UNA INQUIETUD EN EL SENTIDO DE QUE SÍ - PUEDEN SER ÚTILES ALGUNAS HERRAMIENTAS DE LA INGENIERÍA - DE SISTEMAS PARA EL DESARROLLO INSTITUCIONAL, SE CONSIDE- RÓ CONVENIENTE GENERAR ALGUNOS PROYECTOS CON ESTA ORIENTA CIÓN, SIN POR ESO RECHAZAR INQUIETUDES PERSONALES EN OTROS CAMPOS.

A CONTINUACIÓN SE DESCRIBEN BREVEMENTE ALGUNOS DE LOS PRO- YECTOS INICIADOS EN EL DEPARTAMENTO, TRATANDO DE IR DE LO GENERAL A LO PARTICULAR.

1.- LA APLICACIÓN DEL MARCO CONCEPTUAL AL DESARROLLO INS- TITUCIONAL DE LA (U.A.M.) - UNIDAD AZCAPOTZALCO.

ESTE PROYECTO, A NIVEL PROPOSITIVO, TRATA DE APLICAR UNA METODOLOGÍA DE LA INGENIERÍA DE SISTEMAS, QUE EN FORMA RE- SUMIDA CONSISTE EN LO SIGUIENTE:

A) SE PARTE DEL RECONOCIMIENTO DE UN PROBLEMA O UN CONJUNTO DE PROBLEMAS QUE NO PERMITEN EL CUMPLI - MIENTO ADECUADO DE LAS FUNCIONES DE UN SISTEMA.

B) SE DETERMINAN LAS FRONTERAS DEL SISTEMA Y SU ME - DIO AMBIENTE, LLEVANDO A CABO UN ANÁLISIS PRELIMI NAR DE ESTE AMBIENTE EXTERNO, PARA ENCONTRAR LOS FACTORES EXTERNOS QUE INFLUYEN SOBRE EL SISTEMA EN

FORMA TANTO POSITIVA COMO NEGATIVA.

c) SE DEFINEN O EXPLICITAN LOS OBJETIVOS O ALCANCES DEL SISTEMA Y SUS RECURSOS ACTUALES.

d) SE DETERMINA EL TIPO DE PROBLEMÁTICA EXISTENTE. EN EL CASO DE UNA ORGANIZACIÓN, PUEDE SER DE ESTRUCTURA, DE FUNCIONAMIENTO O DE AMBIENTE DE DECISIÓN.

e) SE INTEGRA UN GRUPO INTERDISCIPLINARIO CON GENTES QUE FORMAN PARTE DEL SISTEMA, QUE SE ENCUENTRA A DISTINTOS NIVELES DECISIONALES; GRUPO EN DONDE LA COLABORACIÓN DE CADA QUIEN EN SU ÁREA DE CONOCIMIENTO Y ACTIVIDAD, CONTRIBUYE A DEFINIR MÁS AMPLIAMENTE EL PROBLEMA.

f) SE DEFINEN PROYECTOS ESPECÍFICOS QUE PERMITIRÁN IR IMPLANTANDO CAMBIOS EN EL SISTEMA.

EN LA FIGURA 3 SE PRESENTA EL SISTEMA A ESTUDIAR Y SU MEDIO AMBIENTE.

ESTA PROPUESTA SE HA QUEDADO HASTA AHORA EN ESE NIVEL, DE PROPUESTA. EN LA PARTE FINAL SE HACE REFERENCIA A ESTE ASPECTO .

UN MODELO QUE SIMULA EL FLUJO DE UNA GENERACIÓN DE ESTUDIANTES.

ACTUALMENTE EL PROGRAMA FUNCIONA Y PROPORCIONA RESULTADOS CON UNAS HIPÓTESIS INICIALES DE PROBABILIDAD DE APROBACIÓN, REPROBACIÓN, DESERCIÓN, ELECCIÓN DE MATERIAS EN EL TRIMESTRE SIGUIENTE, ETC.

SE ESTÁN COMPARANDO ESTOS RESULTADOS CON LA HISTORIA DE LAS GENERACIONES ACTUALMENTE INSCRITAS Y SE ESPERA QUE OPERE PARA ESTIMAR DEMANDAS DE DOCENCIA A PARTIR DEL PRIMER TRIMESTRE DE 1979.

SIENDO LA SIMULACIÓN UNA HERRAMIENTA MUY PODEROSA, EL MODELO PODRÁ TAMBIÉN FACILITAR EL ESTABLECIMIENTO DE POLÍTICAS DE OFRECIMIENTO DE MATERIAS EN CUANTO A LA PERIODICIDAD CON QUE SE OFREZCAN, ANALIZAR EL EFECTO DE DEJAR DE OFRECER MATERIAS CIERTOS TRIMESTRES, ETC.

3.- ANÁLISIS DE COSTO COMPARATIVO DE LAS CARRERAS.

CONSIDERANDO LAS CARACTERÍSTICAS DE LAS MATERIAS MENCIONADAS ANTERIORMENTE, UNA CARRERA ES "MÁS BARATA" MIENTRAS TENGA MÁS MATERIAS COMUNES A TODAS LAS OTRAS MATERIAS, Y MENOS MATERIAS OPTATIVAS. LA "MÁS CARA" SERÁ AQUÉLLA QUE TENGA SÓLO MATERIAS EXCLUSIVAS DE ELLA Y MUCHAS OPTATIVAS.

Este estudio se llevó a cabo en el fin de facilitar la integración de materias semejantes en una sola. Esto es, los comités de carrera a través de sus coordinadores solicitan a los departamentos que impartan materias a través de programas condensados de las mismas y los departamentos se encargan de elaborar los programas detallados, y de impartirlas. Si hay dos o más materias semejantes, conviene unificarlas para juntar en un mismo grupo a los alumnos de las distintas carreras que la solicitan, elaborar un solo programa detallado, etc. Por otra parte modificar una materia en un 30% significa en realidad modificar la carrera en un 0.6% (hay en promedio 48 materias por carrera). ¿Está un programa a un nivel de perfección tal que no permita cambios de esta magnitud?

Por supuesto, este breve análisis no toma en cuenta la justificación social de una carrera, por lo que no debería considerarse como elemento que justifique la creación o cancelación de carreras.

4.- Sistema Automatizado de Información.

¿Cuál planeación, qué desarrollo institucional y qué control pueden llevarse a cabo sin un sistema de información adecuado?

DIRECTORIO DE ASISTENTES AL CURSO: INGENIERIA DE SISTEMAS (DEL 5 AL 28 DE JUNIO DE 1978)

	NOMBRE Y DIRECCION	EMPRESA Y DIRECCION
1.	JESUS MIGUEL CERVANTES R. Real de los Reyes No. 87 D-303 Coyoacán México 21, D.F. Tel: 544 90 96	COM. DEL PLAN NAL. HIDRAULICO Tepic No. 40 Col. Roma México 7, D F
2.	JUAN ALBERTO CURIEL TORRES Carnicerito # 11-301 Lomas de Sotelo México 10, D.F. Tel: 395 07 68	TELEFONOS DE MEXICO Parque Vía # 198 Col. Cuahutémoc México 5, D.F Tel: 566-73-99
3.	FELIPE DE JESUS CHIU MARTINEZ Antillas # 308-18 Col. Portales México 13, D.F. Tel: 672-33 28 584 72 54	COM. DEL PLAN NAL. HIDRAULICO Tepic # 40-3er piso Roma Sur México 7, D.F. Tel: 574-10 73
4.	BERTHA MA.GPE. LILIANA FLORES RODRIGUEZ Av. Martí # 82 Col. Escandón México 18, D.F. Tel: 515 08 61	COM. FED. DE ELECTRICIDAD Ródano 14-9o. piso Col. Cuauhtémoc México 9, D.F. Tel: 553 71 33 Ext. 2180
5.	ERNESTO GONZALEZ OCAÑA 1a. Cda. Av. 599 No. 4 Col. Aragón México 14, D.F. Tel: 760-06-79	S.A.R.H. Paseo de la Reforma 69-15o. México 1, D.F.
6.	FRANCISCO ARTURO GONZALEZ SOLIS Facundo 7 Col. San Jerónimo México 20, D.F. Tel: 595-16-25	BANCO MEXICANO, S.A. Gante 15-4o. piso México 1, D.F. Tel: 585-09 62
7.	ROBERTO HERNANDEZ GONZALEZ Carracci 43-401 Col. Mixcoac México 19, D.F. Tel: 563 03 47	COM. DEL PLAN NAL. HIDRAULICO Tepic # 40 Col. Roma México 7, D.F. Tel: 584-72 01

DIRECTORIO DE ASISTENTES AL CURSO: INGENIERIA DE SISTEMAS
(DEL 5 AL 28 DE JUNIO DE 1978)

NOMBRE Y DIRECCION		EMPRESA Y DIRECCION
8.	FRANCISCO JAVIER LIRA HERNANDEZ Londres 344-A Col. Coyoacán México 21, D.F. Tel: 554-90-74	BANCO MEXICANO, S.A. Gante 15-4o. piso México 1, D.F. Tel: 585-09-62
9.	VICTOR LOPEZ GUTIERREZ Emma # 113 Col. Nativitas México 13, D.F. Tel: 579-60-82	CIA.MEX. DE CONSULTORES EN INGENIERIA, S.A. Insurgentes Sur 1824-402 Col. Florida México 20, D.F. Tel: 534-45 48 y 49
10.	EDUARDO MORENO CASILLAS, ING. Corona 42-A Col. Industrial México 14, D.F. Tel: 537 94-53	INST. MEX. DEL PETROLEO Av. 100 Metros # 152 Col. Ind. Vallejo México 14, D.F. Tel: 567-66-00 Ext. 2573
11.	IGNACIO OLIVA GONZALEZ Hda. de Sta. Ma. Tenango # 28 Bosque de Echegaray Edo. de México Tel: 560-02-72	COM. FED. DE ELECTRICIDAD Ródano # 14 Col. Cuauhtémoc México 5, D.F. Tel: 553 71 33 Ext. 2180
12.	FRANCISCO PONCE MALDONADO Playa Guitarrón 282 Col. Ref. Ixtaccihuatl México 13, D.F. Tel: 579-21-51	COM. FED. DE ELECTRICIDAD Ródano # 14-9o. piso Col. Cuauhtémoc México 5, D.F. Tel: 553-71 33 Ext. 2491
13.	ERASMO RAMIREZ BERNABE, ING. Valle Allende 52 Col. Valle Aragón México, D.F.	S.A.R.H. Aquiles Serdán # 28-4o. piso México 1, D.F. Tel: 512-78-56
14.	JOSE ARTURO SAAVEDRA SOLA Tórtolas # 35 Col. Las Arboledas Atizapán, Edo. de México Tel: 379-25-68 559 15-01	ING. Y PROCESAMIENTO ELECTRONICO, S.A. San Lorenzo 153-5o. piso Col. Del Valle México 12, D.F. Tel: 575 40 77 559-15-01
15.	FCO. SANTIAGO SAENZ DE CAMARA AGUIRRE Asturias # 31 Col. Alamos México 13, D.F. Tel: 519-29-94	S.A.R.H. P. de la Reforma # 20-103 Col. Juárez México 1, D.F. Tel: 546-95-45

DIRECTORIO DE ASISTENTES AL CURSO: INGENIERIA DE SISTEMAS
(DEL 5 AL 28 DE JUNIO DE 1978)

NOMBRE Y DIRECCION	EMPRESA Y DIRECCION
16. ROBERTO VITAL PINEDA	COM. PLAN NAL. HIDRAULICO Tepic # 40-3er. piso Col. Roma Sur México 7, D.F. Tel: 576-55-15 574-10-73