



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN
INGENIERÍA

INSTITUTO DE INGENIERÍA

CONSTRUCCIÓN DE FUNCIONES DE LYAPUNOV
PARA ALGORITMOS POR MODOS DESLIZANTES
DE ORDEN SUPERIOR

T E S I S

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:

MAESTRO EN INGENIERÍA

INGENIERÍA ELÉCTRICA - CONTROL

P R E S E N T A :

TONÁMETL SÁNCHEZ RAMÍREZ

TUTOR:

DR. JAIME ALBERTO MORENO PÉREZ

2012

Jurado Asignado

Presidente: **Dr. Gerardo René Espinosa Pérez**
Secretario: **Dr. Paul Rolando Maya Ortiz**
Vocal: **Dr. Jaime Alberto Moreno Pérez**
1er. Suplente: **Dr. Luis Agustín Álvarez Icaza Longoria**
2do. Suplente: **Dr. Leonid Fridman**

Lugar donde se realizó la tesis:
INSTITUTO DE INGENIERÍA, UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO.
CIUDAD UNIVERSITARIA, MÉXICO, D.F.

TUTOR DE TESIS:

Dr. Jaime Alberto Moreno Pérez

*A mis padres Laura Ramírez y Mario
Sánchez porque los amo y les debo TODO.*

*A mis hermanas por su comprensión.
A Lulú que me ha apoyado hasta en los
momentos más difíciles y es la luz de mi
camino.*

Agradecimientos

Agradezco a mi asesor el Dr. Jaime Moreno por su enseñanza y por haberme confiado este trabajo; al Dr. Leonid Fridman por su entusiasta apoyo; a todos mis profesores de la Maestría por contribuir a mi formación; a mis compañeros de generación y al grupo de Modos Deslizantes por su ayuda.

Agradezco al CONACYT por la beca otorgada; al Instituto de Ingeniería y a la UNAM en general por las facilidades provistas para realizar la presente Tesis.

También doy un especial agradecimiento a los Ingenieros Jorge Álvarez y Ernesto Ramírez por su sincero apoyo.

Resumen

En este trabajo se presenta un método de diseño de Funciones de Lyapunov para algoritmos por Modos Deslizantes de Orden Superior (MDOS). Los algoritmos por MDOS utilizados son homogéneos con una estructura afín por tramos en el caso no perturbado. El método es ejemplificado con algoritmos tanto de segundo como de tercer orden. El procedimiento permite construir Funciones de Lyapunov con un grado de homogeneidad deseado. Con las funciones obtenidas es posible estimar el tiempo de convergencia al origen y establecer condiciones sobre las ganancias de los algoritmos para que estos converjan en tiempo finito al origen en presencia de perturbaciones acopladas y acotadas. El proceso de diseño consiste, básicamente, en la integración de una función positiva definida de las soluciones del sistema tal y como es hecho en las pruebas de los Teoremas Conversos de Lyapunov.

Abstract

In this work a Lyapunov Functions design method for a class of High Order Sliding Modes algorithms is presented. The algorithms treated here are homogeneous and they are affine systems in the nominal case. Second and third order algorithms are used to exemplify the method. The Lyapunov Functions obtained are homogeneous and they allow to estimate the convergence time to the origin. These Lyapunov Functions also let find restrictions over the algorithm gains in order to ensure finite time convergence in presence of matched and bounded disturbances. The design procedure is based on the proofs of the Converse Lyapunov Theorems. So the method consists in integrating a positive definite function of the solutions of the system.

Contenido

1	Introducción	3
1.1	Motivación	4
1.2	Estado del Arte	4
1.3	Contribución	4
2	Un método de diseño de Funciones de Lyapunov	5
2.1	Inclusiones diferenciales y Homogeneidad ponderada	5
2.2	Una clase de Algoritmos por Modos Deslizantes de Orden Superior	6
2.3	Descripción del método de diseño de Funciones de Lyapunov	8
3	Funciones de Lyapunov para el Algoritmo Twisting	11
3.1	Análisis del algoritmo Twisting	11
3.2	Función de Lyapunov de grado homogéneo 1	13
3.3	Función de Lyapunov de grado homogéneo 3	20
4	Funciones de Lyapunov para el Algoritmo Terminal	25
4.1	Análisis del algoritmo	25
4.2	Función de Lyapunov de grado homogéneo 1	27
4.2.1	Caso: $\beta^2 > 2\alpha$	28
4.2.2	Caso: $\beta^2 < 2\alpha$	32
4.2.3	Caso: $\beta^2 = 2\alpha$	33
4.3	Función de Lyapunov de grado homogéneo 3	34
4.3.1	Caso: $\beta^2 > 2\alpha$	34
4.3.2	Caso: $\beta^2 < 2\alpha$	35
4.3.3	Caso: $\beta^2 = 2\alpha$	37
5	Función de Lyapunov para un Algoritmo de Tercer Orden	39
5.1	Análisis del algoritmo	39
5.2	Función de Lyapunov de grado homogéneo 1	44
6	Conclusiones	51
A	Algoritmo Twisting	53
B	Algoritmo Terminal	61
	Bibliografía	85

Capítulo 1

Introducción

Un modelo matemático nunca contienen toda la información necesaria para representar con exactitud un sistema dinámico real, porque es prácticamente imposible tomar en cuenta todas las interacciones del sistema con el medio ambiente, además que en Ingeniería se requieren modelos con una cierta simplicidad para que sea factible su tratamiento.

Cuando se necesita realizar control sobre el sistema, se puede hacer uso de su modelo, sin embargo este estará sujeto a incertidumbres que no siempre se pueden despreciar. Por tal motivo la técnica de control a utilizar debería ser capaz de lograr los objetivos de seguimiento o regulación a pesar de las interacciones no modeladas.

El Control por Modos Deslizantes es adecuado para tratar el problema de control en presencia de perturbaciones o incertidumbres como se ha demostrado con los Modos Deslizantes Clásicos (véanse por ejemplo [18] y [4]). La desventaja de los Modos Deslizantes Clásicos es que su aplicación está restringida a sistemas con grado relativo uno. Otra desventaja es que presentan el indeseado fenómeno de “Chattering”.

Con el surgimiento de los algoritmos de control por Modos Deslizantes de Orden Superior, MDOS, (véase por ejemplo [6] y [10]), se evitó la restricción de grado relativo uno, además de disminuir e incluso eliminar el fenómeno de “Chattering”, todo esto conservando las características de robustez de los Modos Deslizantes Clásicos. Los MDOS adicionalmente tienen la cualidad de convergencia en tiempo finito al origen del sistema. De manera que los MDOS proporcionan muy buenas características para el control de sistemas dinámicos.

En un principio la estabilidad de los algoritmos por MDOS se determinaba con base en argumentos geométricos. El inconveniente con este tipo de pruebas es que no es claro como hacerlas en ordenes mayores a dos y tampoco proporcionan una estimación del tiempo de convergencia de los algoritmos.

Por otra parte, el simple pero poderoso Teorema de Estabilidad de Lyapunov¹ se ha convertido en pieza clave dentro de la disciplina del Control Automático. Este famoso teorema es la base de diversas herramientas tanto de análisis como de diseño de sistemas de control. Dentro de las aplicaciones de este teorema se pueden mencionar las siguientes:

- Determinación de las propiedades de estabilidad de los puntos de equilibrio de un sistema
- Diseño de controladores robustos
- Estimación de tiempo de convergencia (Cuando existe convergencia en tiempo finito).

¹Este teorema puede ser consultado en el Capítulo IV de [8].

1.1 Motivación

Debido a las buenas características de los MDOS y a la utilidad del método de Lyapunov, parece natural el querer utilizar estas dos técnicas conjuntamente, es decir, realizar análisis y diseño de sistemas controlados con algoritmos MDOS basándose en el método de Lyapunov. Para tal fin es necesario contar con las, así conocidas, Funciones de Lyapunov (FL²).

Como consecuencia de la naturaleza discontinua de los algoritmos MDOS surge la pregunta ¿Existen FL para estos sistemas?, afortunadamente ya se ha dado una respuesta afirmativa en [16]. Pero aún queda otra pregunta, ¿Cómo encontrar tales funciones?

1.2 Estado del Arte

Una forma de encontrar una Función de Lyapunov es con el procedimiento de Prueba y Error que consiste en proponer una función y verificar que esta sea de Lyapunov para el sistema. Con esta práctica no se tiene ningún indicio de la forma de la función además que se corre el riesgo de nunca obtener un resultado positivo. Otra manera es utilizar el método de Zubov [19] con el cuál se necesita resolver una ecuación diferencial en derivadas parciales, tarea que nuevamente no resulta sencilla.

En la literatura ya se han propuesto algunas Funciones de Lyapunov para sistemas controlados con MDOS, por ejemplo: En [14] se propone, para el algoritmo “Twisting”, una FL cuya derivada temporal solo es negativa semidefinida, además no se proporciona algún método para construir la función. En [15] se presenta, nuevamente para el algoritmo “Twisting”, una FL construida con una generalización del método de Zubov que como ya se dijo no es sencillo de aplicar. Por último en [17] se da una FL para el algoritmo “Twisting” con términos lineales, cabe aclarar que no se presenta un método de diseño de la FL.

1.3 Contribución

Por lo ya expuesto resulta necesario tener FL para hacer análisis y diseño de sistemas de control con MDOS además sería mayor ventaja contar con un método sencillo para la construcción de FL para algoritmos MDOS.

En el presente trabajo, la principal contribución es dar un método sistemático para el diseño de FL para una clase de algoritmos MDOS que presentan una estructura afín por tramos en su forma nominal. Como consecuencia directa, de la contribución principal, se dan las siguientes aportaciones:

- Dos FL para el algoritmo “Twisting”
- Tres FL para el algoritmo “Terminal” en distintos casos
- Una FL para un algoritmo de Tercer Orden

Cabe mencionar que tanto para el algoritmo “Terminal” como para el algoritmo de tercer orden (aquí tratado) no existían FL anteriormente. Otro punto importante es que con estas funciones se resuelve el problema de la estimación del tiempo de convergencia del algoritmo.

²En adelante, entiendase Función o Funciones de Lyapunov, según el contexto, con FL.

Capítulo 2

Un método de diseño de Funciones de Lyapunov

En este capítulo se describe el método de diseño de FL que será usado en esta tesis. Se inicia por dar la definición de Homogeneidad ponderada y se establece una clase de sistemas sobre los cuales puede ser aplicado el método aquí descrito.

2.1 Inclusiones diferenciales y Homogeneidad ponderada

En la presente sección se da una rápida descripción de las inclusiones diferenciales y se hace una breve recopilación de definiciones asociadas a la homogeneidad ponderada.

Cuando se tiene un sistema dinámico de la forma

$$\dot{x} = h(t, x), \quad x \in \mathbb{R}^n \quad (2.1)$$

donde h es una función continua a tramos y M es el conjunto (de medida cero) de discontinuidades de h , entonces (2.1) se reemplaza por la inclusión diferencial equivalente

$$\dot{x} \in H(t, x), \quad (2.2)$$

donde H coincide con h sobre los puntos donde existe continuidad. Si H es no vacío, cerrado, convexo, localmente acotado y semicontinuo por arriba [5] entonces (2.2) es conocida como inclusión diferencial de Filippov.

La solución $x(t)$ de (2.1) es llamada solución de la inclusión diferencial (2.2). La función $x(t)$ es absolutamente continua y satisface (2.2) casi en todos lados [5]. A lo largo del presente trabajo las soluciones de los sistemas de la forma (2.1) son entendidas en el sentido de Filippov.

En el sentido clásico una transformación homogénea $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ satisface que $T(kx) = k^m T(x)$ para cualquier $k \in \mathbb{R}^+$. Obsérvese que las características de la transformación en un punto del dominio se mantienen para cualquier otro punto. Por ejemplo si T es continua en el punto x_0 también lo será en el punto $x = kx_0$ ya que $T(x) = k^m T(x_0)$. A continuación se dan las nociones de una forma de homogeneidad más general conocida como *Homogeneidad ponderada*.

Definición 2.1 (Dilatación [2]). *Fíjese el conjunto de coordenadas $x = (x_1, \dots, x_n)$ en \mathbb{R}^n . Sea $r = (r_1, \dots, r_n)$ un conjunto de exponentes reales positivos. La familia de dilataciones $(\delta_\epsilon^r)_{\epsilon > 0}$ (para el parámetro ϵ asociado a r) está definida por*

$$\delta_\epsilon^r(x) := (\epsilon^{r_1} x_1, \dots, \epsilon^{r_n} x_n), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \quad \forall \epsilon > 0.$$

Los números r_i son las ponderaciones de las coordenadas.

Definición 2.2 (Homogeneidad ponderada extendida [11]). Sean x , r y ϵ como en la definición anterior, entonces

a) Se dice que una función $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es homogénea de grado $m \in \mathbb{R}$ si

$$V(\delta_\epsilon^r(x)) = \epsilon^m V(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \quad \forall \epsilon > 0.$$

b) Se dice que un campo vectorial $h^T = [h_1(x), \dots, h_n(x)]$ es homogéneo de grado $p \in \mathbb{R}$ si el componente h_i es homogéneo de grado $p + r_i$ para cada i ; esto es

$$h_i(\delta_\epsilon^r(x)) = \epsilon^{p+r_i} h_i(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \quad \forall \epsilon > 0, \quad \forall i \in [1, n] \subset \mathbb{N}.$$

c) Se dice que un campo vectorial de conjuntos $H(x) \subset \mathbb{R}^n$ es homogéneo de grado $p \in \mathbb{R}$ si

$$H(\delta_\epsilon^r(x)) = \epsilon^p \delta_\epsilon^r H(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \quad \forall \epsilon > 0.$$

d) Los incisos a y b son equivalentes a decir que la ecuación diferencial $\dot{x} = h(x)$ (inclusión diferencial $\dot{x} \in H(x)$) es invariante ante la transformación $(t, x) \mapsto (\epsilon^{-p}t, \delta_\epsilon^r x)$

Definición 2.3 (Norma homogénea [2]). Sean x y r como antes entonces una norma homogénea, es un mapa $x \mapsto \|x\|_{r,q}$, donde para cada $q \geq 1$

$$\|x\|_{r,q} := \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^{\frac{q}{r_i}} \right)^{\frac{1}{q}}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

La homogeneidad ponderada se puede interpretar como una propiedad que permite determinar características globales a partir de las locales. Esto se ha aprovechado en la teoría de sistemas dinámicos no lineales. Por ejemplo en [7] a grandes rasgos se hace ver que en un sistema homogéneo, la estabilidad local equivale a la estabilidad global. También, se ha demostrado (en [2] para sistemas con lado derecho continuo y en [11] para inclusiones de Fillipov) que si una sistema homogéneo tiene un punto de equilibrio localmente asintóticamente estable entonces:

- Si el grado de homogeneidad $p > 0$ la estabilidad será asintótica
- Si $p = 0$ la estabilidad será exponencial
- Si $p < 0$ habrá estabilidad en tiempo finito.

2.2 Una clase de Algoritmos por Modos Deslizantes de Orden Superior

Existen en la literatura varios algoritmos por MDOS que debido a las propiedades geométricas de la homogeneidad, han sido diseñados para ser homogéneos. A su vez, resulta que muchos de estos algoritmos son sistemas que presentan una estructura afín por tramos (en el caso nominal). Como se verá más adelante, es precisamente esta última propiedad la que hace factible el método de diseño de FL propuesto en este trabajo. A continuación se dan algunos ejemplos de este tipo de algoritmos.

Considérese el sistema dinámico de segundo orden

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = u(x) \tag{2.3}$$

con $x = [x_1, x_2]^T \in \mathbb{R}^2$ y el controlador homogéneo generalizado de segundo orden, propuesto en [12], dado por

$$u(x) = -k_1 \operatorname{sign} \left(r_1 x_2 + r_2 \sqrt{|x_1|} \operatorname{sign}(x_1) \right) - k_2 \operatorname{sign} \left(r_3 x_2 + r_4 \sqrt{|x_1|} \operatorname{sign}(x_1) \right) \quad (2.4)$$

donde $k_1, k_2, r_1, r_2, r_3, r_4 \in \mathbb{R}$ son constantes que elegidas apropiadamente hacen que las soluciones de (2.3) converjan al origen en tiempo finito. Este algoritmo contiene como casos especiales algunos de los controladores por Modos Deslizantes de Segundo Orden (MDSO) básicos. Por ejemplo, si se selecciona $r_1 = r_4 = 0$, (2.4) se reduce al bien conocido controlador Twisting [9]

$$u(x) = -k_1 \operatorname{sign}(x_1) - k_2 \operatorname{sign}(x_2). \quad (2.5)$$

Nótese que el controlador Twisting es constante por partes, esto es

$$u(x) = \begin{cases} u_1 = -k_1 - k_2, & x_1 > 0, x_2 > 0 \\ u_2 = -k_1 + k_2, & x_1 > 0, x_2 < 0 \\ u_3 = k_1 + k_2, & x_1 < 0, x_2 < 0 \\ u_4 = k_1 - k_2, & x_1 < 0, x_2 > 0 \end{cases}$$

de manera que el sistema en lazo cerrado (2.3, 2.5) se puede ver como un conjunto de sistemas afines, uno en cada una de las cuatro regiones en las que el control tiene el mismo valor. Estas cuatro regiones están determinadas por dos superficies de conmutación del control, esto es, las rectas $\mathcal{R}_1 = \{x_2 = 0\}$ y $\mathcal{R}_2 = \{x_1 = 0\}$. Es importante mencionar que las trayectorias del sistema solo cruzan las rectas \mathcal{R}_1 y \mathcal{R}_2 y nunca permanecen sobre ellas.

Ahora, eligiendo $r_1 = r_3$ y $r_2 = r_4$ en (2.4) se obtiene, el así conocido, algoritmo Terminal [13]

$$u = -\alpha \operatorname{sign}(\sigma), \quad \sigma = x_2 + \beta \sqrt{|x_1|} \operatorname{sign}(x_1) \quad (2.6)$$

donde $\alpha = k_1 + k_2$ y $\beta = r_2/r_1$. Nuevamente, este controlador es constante a tramos de la siguiente manera

$$u(x) = \begin{cases} u_1 = -\alpha, & \sigma > 0 \\ u_2 = \alpha, & \sigma < 0 \end{cases}.$$

Así que el sistema en lazo cerrado (2.3, 2.6) puede considerarse como un sistema afín en las dos regiones (determinadas por la superficie de conmutación $\sigma = 0$) en que el controlador toma un valor constante. Con este algoritmo la curva $\sigma = 0$ puede actuar como una superficie de conmutación o como una superficie de deslizamiento como se verá posteriormente.

Hasta aquí solo se han mencionado algoritmos de segundo orden pero existen algoritmos de ordenes mayores como se verá a continuación.

Sea el sistema dinámico de tercer orden

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = x_3, \quad \dot{x}_3 = u(x) \quad (2.7)$$

donde $x = [x_1, x_2, x_3]^T \in \mathbb{R}^3$ y la entrada de control $u(x)$ puede estar dada por el siguiente algoritmo [3]

- Paso 1. Seleccionar $u(x) = -k_2 \operatorname{sign}(x_2) - k_3 \operatorname{sign}(x_3)$
hasta que $x_2 = 0$ & $x_3 = 0$
- Paso 2. Seleccionar $u(x) = -k_1 \operatorname{sign}(x_1)$
hasta que $x_1 = 0$
- Paso 3. Ir al Paso 1

con $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{R}$. Este algoritmo también mantiene al control constante en diferentes regiones, así, cuando $u(x) = -k_2 \text{sign}(x_2) - k_3 \text{sign}(x_3)$ se tiene que

$$u = \begin{cases} u_1 = -k_2 - k_3, & x_2 > 0, x_3 > 0 \\ u_2 = -k_2 + k_3, & x_2 > 0, x_3 < 0 \\ u_3 = k_2 + k_3, & x_2 < 0, x_3 < 0 \\ u_4 = k_2 - k_3, & x_2 < 0, x_3 > 0 \end{cases}$$

y cuando $u(x) = -k_1 \text{sign}(x_1)$ se obtiene

$$u = \begin{cases} u_5 = -k_1, & x_1 > 0 \\ u_6 = k_1, & x_1 < 0 \end{cases}$$

por lo tanto (2.7) en lazo cerrado se puede representar como un conjunto de seis sistemas afines. Un sistema distinto para cada uno de los valores constantes que toma el control. Esto es

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = x_3, \quad \dot{x}_i = u_i, \quad i = 1, 2, \dots, 6.$$

Los ejemplos anteriores pertenecen a una clase de algoritmos por MDOS los cuales mantienen el control constante por tramos y que pueden ser aplicados a sistemas de orden n como el siguiente:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_3 \\ &\vdots \\ \dot{x}_{n-1} &= x_n \\ \dot{x}_n &= f(t, x) + u \end{aligned} \tag{2.8}$$

donde $x \in \mathbb{R}^n$ es el estado, $f(t, x) \in \mathbb{R}$ es una función incierta tal que $|f(t, x)| \leq F, \forall (t, x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n$ para alguna constante conocida $F \in \mathbb{R}$, y $u \in \mathbb{R}$ es la entrada de control.

Si se supone que $f(t, x) = 0$ entonces (2.8) puede ser reescrito como un conjunto de m sistemas afines dados por

$$\dot{x} = Ax + Bu_i, \quad \forall x \in \mathcal{S}_i$$

donde

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & 0 \\ 0 & & & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

y $u_i, i \in \{1, 2, \dots, m\}$, es cada uno de los m diferentes valores constantes que adopta $u(x)$ sobre cada conjunto \mathcal{S}_i . Las fronteras de los conjuntos \mathcal{S}_i corresponden a las superficies de conmutación de $u(x)$.

2.3 Descripción del método de diseño de Funciones de Lypaunov

En la sección anterior, fue presentada la clase de sistemas que será tratada en este trabajo, a decir, los algoritmos pro Modos Deslizantes de Orden Superior que puedan ser escritos como un conjunto de m sistemas afines, esto es

$$\dot{x} = Ax + Bu_i, \quad \forall x \in \mathcal{S}_i, \quad i \in \{1, 2, \dots, m\}. \tag{2.9}$$

Ahora, dentro de \mathcal{S}_i , denótese con $\phi_i(t; 0, x)$ la trayectoria (solución) de (2.9) con condición inicial en x en el tiempo $t = 0$, esto significa que $\phi_i(0; 0, x) = x$.

Obsérvese que, debido a la estructura afín de (2.9), siempre es posible calcular explícitamente $\phi_i(t; 0, x)$ de la manera siguiente

$$\phi_i(t; 0, x) = e^{At}x + \int_0^t e^{A(t-\tau)} B u_i d\tau$$

donde

$$e^{At} = \begin{bmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2!} & \cdots & \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \\ 0 & 1 & t & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & \frac{t^2}{2!} \\ 0 & & & 1 & t \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \int_0^t e^{A(t-\tau)} B d\tau = \begin{bmatrix} \frac{t^n}{n!} \\ \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \\ \vdots \\ \frac{t^2}{2!} \\ t \end{bmatrix}.$$

Así, cada una de las ϕ_i siempre es una solución polinomial en t . En los casos en que no existen superficies de deslizamiento, la trayectoria completa del sistema $\phi(t; 0, x)$ está conformada por una sucesión de trayectorias parciales ϕ_i . Cuando existen superficies de deslizamiento, la trayectoria del sistema deberá ser calculada particularmente sobre la superficie.

Por otro lado, los Teoremas Conversos de Lyapunov¹ tratan sobre la existencia de las FL para sistemas no lineales. Las pruebas de estos teoremas son constructivas, es decir, la FL es la integral de una función positiva definida de las soluciones del sistema, por ejemplo, una norma de las trayectorias.

El método de diseño de FL que aquí se ilustrará está fuertemente basado en la ya mencionada prueba constructiva de los Teoremas Conversos de Lyapunov ya que las FL son resultado de la integración de una función que depende de las trayectorias del sistema.

En seguida se establece el método de construcción de FL para la clase de algoritmos por MDOS ya mencionada:

Selecciónese $W(x)$ tal que sea una función positiva definida y sea $\phi(\tau; 0, x)$ el vector de soluciones de (2.9).

La función $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ cuya regla de correspondencia está dada por

$$V(x) = \int_0^t W(\phi(\tau; 0, x)) d\tau \quad (2.10)$$

puede ser una FL para (2.9) siempre que la integral del lado derecho de (2.10) converja cuando $t \rightarrow \infty$.

A continuación se mencionan algunas características importantes tanto del método como de las funciones que se obtienen a través de él.

1. Un algoritmo por MDOS convergente que es de grado homogéneo negativo converge en tiempo finito [11]. Por lo tanto para este caso, (2.10) converge para cualquier $W(x)$ positiva definida.
2. Si $W(x)$ es una función continua y las trayectorias del sistema dependen continuamente de las condiciones iniciales entonces $V(x)$ será una función continua para toda $x \in \mathbb{R}^n$. También será diferenciable excepto, tal vez, sobre las superficies de conmutación o deslizamiento.

¹Estos Teoremas pueden ser consultados por ejemplo en el Capítulo 4 de [8].

3. Si el algoritmo por MDOS es de grado homogéneo $-p \in \mathbb{N}$ y se selecciona una $W(x)$ de grado homogéneo $q \in \mathbb{N}$, la función $V(x)$ resultará de grado homogéneo $r \in \mathbb{N}$ de tal forma que $r = -p + q$. Por lo tanto, mientras más grande sea q , mayor será r , hecho que también contribuirá con la suavidad de $V(x)$.
4. $V(x)$ está construida como la integral de una función positiva definida. Entonces es claro que $V(x)$ es positiva definida. Además, por el Primer Teorema Fundamental del Cálculo, la derivada temporal de V está dada por

$$\dot{V} = -W(x)$$

de donde es claro que \dot{V} es negativa definida.

5. Si el algoritmo por MDOS puede converger en tiempo finito, con este método de construcción se pueden encontrar las condiciones necesarias y suficientes para este tipo de convergencia, siempre que la integral converja.

Como se puede ver, el método de construcción de la FL solo contempla el caso nominal (sin perturbaciones). A pesar de ello se puede intentar lidiar con el caso perturbado verificando la robustez de la FL. Para esto se toma la derivada de la FL a lo largo de las trayectorias del sistema perturbado y se comprueba que esta sea negativa definida. En los capítulos siguientes el método es ejemplificado sobre distintos algoritmos por MDOS.

Capítulo 3

Funciones de Lyapunov para el Algoritmo Twisting

Este capítulo inicia con el análisis del comportamiento de las trayectorias del algoritmo Twisting, posteriormente se aplica el método de diseño de FL, ya descrito, para obtener dos funciones de distinto grado homogéneo para el algoritmo Twisting.

3.1 Análisis del algoritmo Twisting

Considerese el sistema dinámico

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = u(x) + f(t, x) \quad (3.1)$$

donde el estado $x = [x_1, x_2]^T \in \mathbb{R}^2$, $f(t, x) \in \mathbb{R}$ es una función incierta tal que $|f(t, x)| \leq F$, $\forall (t, x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n$ para alguna constante conocida $F \in \mathbb{R}$, y $u(x) \in \mathbb{R}$ es la entrada de control dada por

$$u(x) = -k_1 \text{sign}(x_1) - k_2 \text{sign}(x_2), \quad k_1, k_2 > 0. \quad (3.2)$$

Primero se verificará que el algoritmo Twisting es homogéneo de grado $p = -1$. Sean los pesos de homogeneidad $s = (s_1, s_2) = (2, 1)$ y $\epsilon > 0$. Reemplazando el sistema (3.1) con la inclusión diferencial

$$\dot{x} \in g(x) \quad \text{con} \quad g(x) = \begin{bmatrix} x_2 \\ u + [-F, F] \end{bmatrix}$$

se tiene que de acuerdo a la Definición 2.2

$$\begin{aligned} g(\delta_\epsilon^s x) &= g(\epsilon^2 x_1, \epsilon x_2) \\ &= \begin{bmatrix} \epsilon x_2 \\ -k_1 \text{sign}(\epsilon^2 x_1) - k_2 \text{sign}(\epsilon x_2) + [-F, F] \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \epsilon x_2 \\ -k_1 \text{sign}(x_1) - k_2 \text{sign}(x_2) + [-F, F] \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \epsilon^{2-1} x_2 \\ \epsilon^{1-1} (-k_1 \text{sign}(x_1) - k_2 \text{sign}(x_2) + [-F, F]) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \epsilon^{s_1-1} x_2 \\ \epsilon^{s_2-1} (u + [-F, F]) \end{bmatrix} \\ &= \epsilon^{-1} \delta_\epsilon^s g(x). \end{aligned}$$

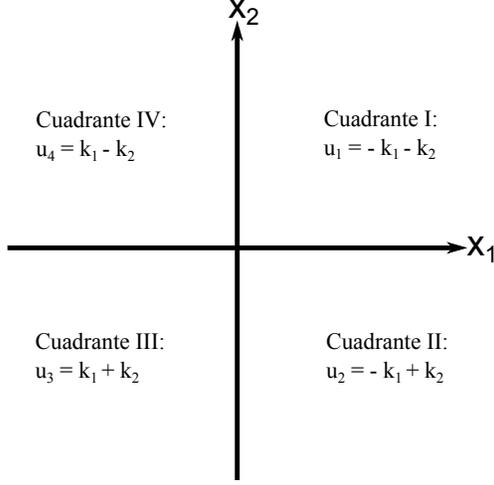


Fig. 3.1: Plano fase para el algoritmo Twisting

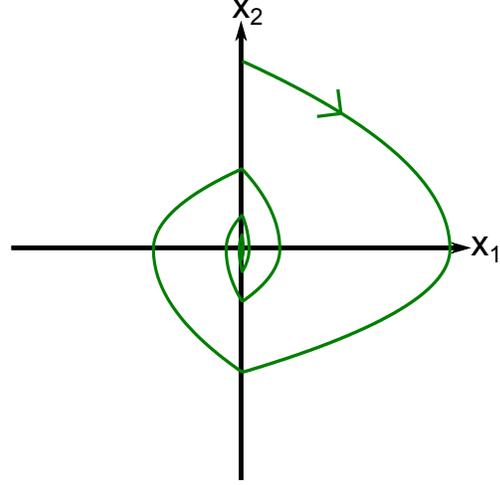


Fig. 3.2: Trayectoria del algoritmo Twisting nominal

Es importante señalar que en cada cuadrante del plano fase del sistema (3.1), $u(x)$ es un valor constante, como se muestra en la Figura 3.1, a decir

$$u(x) = \begin{cases} u_1 = -k_1 - k_2, & x_1 > 0, x_2 > 0 \\ u_2 = -k_1 + k_2, & x_1 > 0, x_2 < 0 \\ u_3 = k_1 + k_2, & x_1 < 0, x_2 < 0 \\ u_4 = k_1 - k_2, & x_1 < 0, x_2 > 0 \end{cases}.$$

Si se supone $f(t, x) = 0, \forall t \geq 0$, entonces se puede reescribir (3.1) en la forma afín (2.9), esto es como sigue

$$\dot{x} = Ax + Bu_i, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

y por lo tanto se pueden calcular las soluciones del sistema nominal que quedan de la siguiente manera

$$\phi_i = \begin{bmatrix} \frac{u_i}{2} t^2 + x_2 t + x_1 \\ u_i t + x_2 \end{bmatrix}, \quad i = 1, 2, 3, 4. \quad (3.4)$$

En la Figura 3.2 se muestra un ejemplo de una trayectoria del sistema (3.3). La regla para elegir las ganancias del algoritmo k_1 y k_2 será mostrada más adelante. Nótese que las rectas $\mathcal{R}_1 = \{x_2 = 0\}$ y $\mathcal{R}_2 = \{x_1 = 0\}$ son las superficies de conmutación del control $u(x)$ y que las trayectorias del sistema solo cruzan dichas rectas mas nunca permanecen sobre ellas.

Si el sistema (3.3) inicia en el punto $x = (x_1, x_2)$ en el tiempo $t = 0$, su solución describirá una trayectoria durante un tiempo de tránsito t_1 hasta llegar a una superficie de conmutación en el punto $x(t_1)$. A partir de ese punto la trayectoria tardará un tiempo t_2 en intersectar a la siguiente superficie de conmutación en el punto $x(t_2)$ y así sucesivamente. Por ejemplo, supóngase que en el tiempo $t = 0$ las condiciones iniciales $x = (x_1, x_2)$ de (3.3) se encuentran en el cuadrante $\{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1, x_2 > 0\}$ entonces, la traza de las soluciones del sistema intersectará a la recta \mathcal{R}_1 en un tiempo t_1 en la coordenada $(x_1(t_1), x_2(t_1)) = (x_{11}, x_{21})$, posteriormente, de la recta \mathcal{R}_1 a la recta \mathcal{R}_2 pasará un tiempo t_2 y la trayectoria llegará a las coordenadas $(x_1(t_2), x_2(t_2)) = (x_{12}, x_{22})$. Los

tiempos de tránsito y los puntos de intersección con las superficies de conmutación se dan en la siguiente proposición

Proposición 3.1. *Considerese (3.3) con las condiciones iniciales $x = (x_1, x_2)$ en el cuadrante $\{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1, x_2 > 0\}$ y defínase $r = \sqrt{\frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2}}$. Entonces para toda $j \in \mathbb{N}$ los tiempos de tránsito t_j y las coordenadas $(x_{1,j}, x_{2,j})$ en los cruces por las rectas \mathcal{R}_1 y \mathcal{R}_2 están dados por los siguientes valores*

$$\begin{aligned}
t_1 &= \frac{x_2}{k_1 + k_2} \\
t_{2j} &= r^{j-2} \frac{[x_2^2 + 2(k_1 + k_2)x_1]^{1/2}}{k_1 + k_2} \\
t_{2j+1} &= r^j \frac{[x_2^2 + 2(k_1 + k_2)x_1]^{1/2}}{k_1 + k_2} \\
x_{1,2j-1} &= (-r^2)^{j-1} \frac{x_2^2 + 2(k_1 + k_2)x_1}{2(k_1 + k_2)} \\
x_{2,2j} &= (-r)^j [x_2^2 + 2(k_1 + k_2)x_1]^{1/2} \\
x_{1,2j} &= x_{2,2j-1} = 0.
\end{aligned}$$

Proposiciones similares a la anterior son formuladas para el resto de las regiones de \mathbb{R}^2 en el Apéndice A, ahí mismo se puede ver la prueba de la Proposición 3.1.

3.2 Función de Lyapunov de grado homogéneo 1

En esta sección se presenta la aplicación del método descrito con anterioridad para encontrar una Función de Lyapunov $V(x)$ para el sistema (3.3). Se desea que la derivada temporal de dicha función sea $\dot{V} = -1$, por tal motivo se integrará la función $W(x) = 1$. Para facilitar la notación en los cálculos defínase

$$T_k = \sum_{j=1}^k t_j, \quad j, k \in \mathbb{N}$$

así, la FL se calcula como sigue:

$$\begin{aligned}
V(x) &= \int_0^\infty d\tau \\
&= \int_0^{t_1} d\tau + \int_{t_1}^{t_1+t_2} d\tau + \cdots + \int_{T_{n-2}}^{T_{n-1}} d\tau + \int_{T_{n-1}}^{T_n} d\tau + \cdots \\
&= T_\infty,
\end{aligned}$$

de manera que

$$V(x) = \sum_{j=1}^{\infty} t_j. \quad (3.5)$$

Nótese que el valor de t_j depende del cuadrante en el que se encuentre el par (x_1, x_2) , así que la función $V(x)$ tendrá la siguiente forma

$$V(x) = \begin{cases} V_1, & x_1 > 0, x_2 > 0 \\ V_2, & x_1 \geq 0, x_2 \leq 0 \\ V_3, & x_1 < 0, x_2 < 0 \\ V_4, & x_1 \leq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Para hacer el cálculo de V_1 , los valores de t_j pueden ser obtenidos de la Proposición 3.1, por lo tanto a partir de (3.5) se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} V_1(x) &= \sum_{j=1}^{\infty} t_j, = t_1 + \sum_{j=1}^{\infty} t_{2j} + \sum_{j=1}^{\infty} t_{2j+1} \\ &= \frac{x_2}{k_1 + k_2} + \sum_{j=1}^{\infty} r^{j-2} \frac{[x_2^2 + 2(k_1 + k_2)x_1]^{1/2}}{k_1 + k_2} + \sum_{j=1}^{\infty} r^j \frac{[x_2^2 + 2(k_1 + k_2)x_1]^{1/2}}{k_1 + k_2} \\ &= \frac{x_2}{k_1 + k_2} + \frac{[x_2^2 + 2(k_1 + k_2)x_1]^{1/2}}{k_1 + k_2} \left(\sum_{j=1}^{\infty} r^{j-2} + \sum_{j=1}^{\infty} r^j \right) \\ &= \frac{x_2}{k_1 + k_2} + \frac{[x_2^2 + 2(k_1 + k_2)x_1]^{1/2}}{k_1 + k_2} \left(r^{-1} - 1 + 2 \sum_{j=0}^{\infty} r^j \right). \end{aligned}$$

La suma $\sum_{i=0}^{\infty} r^i$ es una serie geométrica convergente si y solo si $0 < r < 1$ lo que es equivalente a que $k_1 > k_2 > 0$. Entonces, tomando la restricción $0 < r < 1$ se obtiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} V_1(x) &= \frac{x_2}{k_1 + k_2} + \frac{[x_2^2 + 2(k_1 + k_2)x_1]^{1/2}}{k_1 + k_2} \left(r^{-1} - 1 + 2 \sum_{j=0}^{\infty} r^j \right) \\ &= \frac{x_2}{k_1 + k_2} + \frac{[x_2^2 + 2(k_1 + k_2)x_1]^{1/2}}{k_1 + k_2} \left(r^{-1} - 1 + 2 \frac{1}{1-r} \right) \\ &= \frac{x_2}{k_1 + k_2} + \frac{[x_2^2 + 2(k_1 + k_2)x_1]^{1/2}}{k_1 + k_2} \left(\frac{r^2 + 1}{r - r^2} \right). \end{aligned}$$

Para el cálculo de $V_2(x)$ se usan los valores de t_j tomados de la Proposición A.1. A partir de la

ecuación (3.5) se tiene que

$$\begin{aligned}
V_2(x_1, x_2) &= \sum_{i=1}^n t_i = t_1 + \sum_{i=1}^{n_1} t_{2i} + \sum_{i=1}^{n_2} t_{2i+1} \\
&= -\frac{x_2}{k_1 - k_2} + \sum_{i=1}^{n_1} r^{i+1} \frac{[x_2^2 - 2(k_1 - k_2)x_1]^{1/2}}{k_1 - k_2} + \sum_{i=1}^{n_2} r^i \frac{[x_2^2 - 2(k_1 - k_2)x_1]^{1/2}}{k_1 - k_2} \\
&= -\frac{x_2}{k_1 - k_2} + \frac{[x_2^2 - 2(k_1 - k_2)x_1]^{1/2}}{k_1 - k_2} \left(\sum_{i=1}^{n_1} r^{i+1} + \sum_{i=1}^{n_2} r^i \right) \\
&= -\frac{x_2}{k_1 - k_2} + \frac{[x_2^2 - 2(k_1 - k_2)x_1]^{1/2}}{k_1 - k_2} \left(-1 - r + \sum_{i=0}^{n_1} r^i - 1 + \sum_{i=0}^{n_2} r^i \right) \\
&= -\frac{x_2}{k_1 - k_2} + \frac{[x_2^2 - 2(k_1 - k_2)x_1]^{1/2}}{k_1 - k_2} \left(-2 - r + 2 \sum_{i=0}^{n_1} r^i \right) \\
&= -\frac{x_2}{k_1 - k_2} + \frac{[x_2^2 - 2(k_1 - k_2)x_1]^{1/2}}{k_1 - k_2} \left(-2 - r + \frac{2}{1-r} \right) \\
&= -\frac{x_2}{k_1 - k_2} + \frac{[x_2^2 - 2(k_1 - k_2)x_1]^{1/2}}{k_1 - k_2} \left(\frac{r+r^2}{1-r} \right).
\end{aligned}$$

Es importante hacer notar que la restricción $k_1 > k_2 > 0$ es una condición necesaria y suficiente para que el algoritmo Twisting, en su forma nominal, converja.

En el Apéndice A se exponen las propiedades simétricas del algoritmo y es por estas que la tarea de calcular V_3 y V_4 puede ahorrarse, esto es aprovechando los cálculos ya hechos para V_1 y V_2 por lo tanto se tiene que

$$\begin{aligned}
V_3(x) &= -\frac{x_2}{k_1 + k_2} + \frac{[x_2^2 - 2(k_1 + k_2)x_1]^{1/2}}{k_1 + k_2} \left(\frac{r^2 + 1}{r - r^2} \right), \\
V_4(x) &= \frac{x_2}{k_1 - k_2} + \frac{[x_2^2 + 2(k_1 - k_2)x_1]^{1/2}}{k_1 - k_2} \left(\frac{r + r^2}{1 - r} \right),
\end{aligned}$$

de manera que la FL $V(x)$ sobre todo \mathbb{R}^2 queda como sigue:

$$V(x) = \begin{cases} \frac{x_2}{k_1 + k_2} + \frac{[x_2^2 + 2(k_1 + k_2)x_1]^{1/2}}{k_1 + k_2} \left(\frac{r^2 + 1}{r - r^2} \right), & x_1 > 0, x_2 > 0 \\ -\frac{x_2}{k_1 - k_2} + \frac{[x_2^2 - 2(k_1 - k_2)x_1]^{1/2}}{k_1 - k_2} \left(\frac{r + r^2}{1 - r} \right), & x_1 \geq 0, x_2 \leq 0 \\ -\frac{x_2}{k_1 + k_2} + \frac{[x_2^2 - 2(k_1 + k_2)x_1]^{1/2}}{k_1 + k_2} \left(\frac{r^2 + 1}{r - r^2} \right), & x_1 < 0, x_2 < 0 \\ \frac{x_2}{k_1 - k_2} + \frac{[x_2^2 + 2(k_1 - k_2)x_1]^{1/2}}{k_1 - k_2} \left(\frac{r + r^2}{1 - r} \right), & x_1 \leq 0, x_2 \geq 0, \end{cases}$$

si nuevamente se toma en cuenta la simetría respecto al origen, esta función puede reescribirse de una forma más compacta como sigue:

$$V(x) = \begin{cases} \lambda_1 |x_2| + \lambda_2 \sqrt{x_2^2 + 2(k_1 + k_2)|x_1|}, & x_1 x_2 > 0 \\ \lambda_3 |x_2| + \lambda_4 \sqrt{x_2^2 + 2(k_1 - k_2)|x_1|}, & x_1 x_2 \leq 0 \end{cases} \quad (3.6)$$

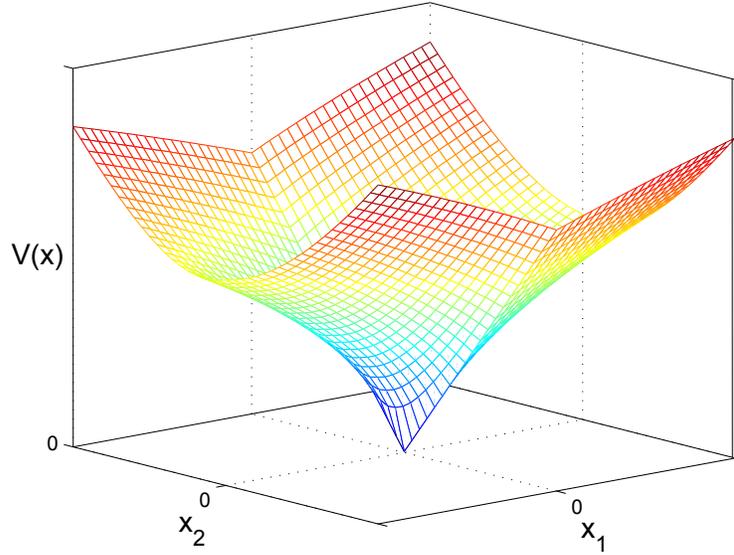


Fig. 3.3: Gráfica de la función $V(x)$

donde

$$\lambda_1 = \frac{1}{k_1 + k_2}, \quad \lambda_2 = \frac{2k_1\lambda_1(\sqrt{k_1 - k_2})^{-1}}{\sqrt{k_1 + k_2} - \sqrt{k_1 - k_2}}, \quad \lambda_3 = -\frac{1}{k_1 - k_2} \quad \text{y} \quad \lambda_4 = \frac{2k_1(-\lambda_3)(\sqrt{k_1 + k_2})^{-1}}{\sqrt{k_1 + k_2} - \sqrt{k_1 - k_2}}.$$

En la Figura 3.3 se muestra una gráfica de la función $V(x)$ para los valores de $k_1 = 2$ y $k_2 = 1.5$. La función (3.6) es continua en todo el dominio pero no es suave sobre las rectas \mathcal{R}_1 y \mathcal{R}_2 , por lo tanto no es diferenciable respecto al tiempo en tales conjuntos pero sí lo es fuera de ellos. La falta de diferenciability mencionada no da dificultades ya que las trayectorias del sistema nunca permanecen sobre dichas rectas.

Para verificar que (3.6) es homogénea basta hacerlo para la primera parte de la función esto es sobre el conjunto donde $x_1x_2 > 0$. Como se vió en la Sección 3.1, el vector de pesos de homogeneidad para el estado x es $s = (s_1, s_2) = (2, 1)$, de forma que

$$\begin{aligned} V(\delta_\epsilon^s x) &= \lambda_1|\epsilon x_2| + \lambda_2\sqrt{(\epsilon x_2)^2 + 2(k_1 + k_2)|\epsilon^2 x_1|} \\ &= \epsilon\lambda_1|x_2| + \epsilon\lambda_2\sqrt{x_2^2 + 2(k_1 + k_2)|x_1|} \\ &= \epsilon^1 V(x), \end{aligned}$$

por lo que se puede decir que (3.6) es una función homogénea de grado 1.

De acuerdo al método se tiene que $\dot{V} = -1$, hecho que se confirmará a continuación calculando la derivada de (3.6) a lo largo de las trayectorias de (3.3). Antes de calcular la derivada se establecerán algunos hechos que facilitarán los cálculos. Sobre la región donde $x_1x_2 > 0$ se tiene lo siguiente:

- $\text{sign}(x_2)u = -(k_1 + k_2)$, debido a que cuando $x_2 > 0$, el control es $u_1 = -k_1 - k_2$ y si $x_2 < 0$, el control es $u_3 = k_1 + k_2$
- $\text{sign}(x_1)x_2 = |x_2|$, lo que es claro debido a que $x_1x_2 > 0$
- $\lambda_1(k_1 + k_2) = -1$

y por lo tanto sobre el conjunto $\{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 x_2 > 0\}$

$$\begin{aligned}
\dot{V} &= \frac{\lambda_2 2(k_1 + k_2) \operatorname{sign}(x_1)}{\sqrt{x_2^2 + 2(k_1 + k_2)|x_1|}} \dot{x}_1 + \lambda_1 \operatorname{sign}(x_2) \dot{x}_2 + \frac{\lambda_2 2x_2 \dot{x}_2}{\sqrt{x_2^2 + 2(k_1 + k_2)|x_1|}} \dot{x}_2 \\
&= \frac{\lambda_2 2(k_1 + k_2) \operatorname{sign}(x_1) x_2}{\sqrt{x_2^2 + 2(k_1 + k_2)|x_1|}} + \lambda_1 \operatorname{sign}(x_2) u + \frac{\lambda_2 2x_2 u}{\sqrt{x_2^2 + 2(k_1 + k_2)|x_1|}} \\
&= \frac{\lambda_2 2(k_1 + k_2) |x_2|}{\sqrt{x_2^2 + 2(k_1 + k_2)|x_1|}} - \lambda_1 (k_1 + k_2) + \frac{-\lambda_2 2(k_1 + k_2) |x_2|}{\sqrt{x_2^2 + 2(k_1 + k_2)|x_1|}} \\
&= -1.
\end{aligned}$$

Ahora, sobre la región donde $x_1 x_2 < 0$ se tiene que

- $\operatorname{sign}(x_2) u = k_1 - k_2$, debido a que cuando $x_2 < 0$, el control es $u_2 = -k_1 + k_2$ y si $x_2 > 0$, el control es $u_4 = k_1 - k_2$
- $\operatorname{sign}(x_1) x_2 = -|x_2|$, lo que es claro debido a que $x_1 x_2 < 0$
- $\lambda_3 (k_1 - k_2) = -1$

y por lo tanto sobre el conjunto $\{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 x_2 < 0\}$

$$\begin{aligned}
\dot{V} &= \frac{\lambda_4 2(k_1 - k_2) \operatorname{sign}(x_1)}{\sqrt{x_2^2 + 2(k_1 - k_2)|x_1|}} \dot{x}_1 + \lambda_3 \operatorname{sign}(x_2) \dot{x}_2 + \frac{\lambda_4 2x_2 \dot{x}_2}{\sqrt{x_2^2 + 2(k_1 - k_2)|x_1|}} \dot{x}_2 \\
&= \frac{\lambda_4 2(k_1 - k_2) \operatorname{sign}(x_1) x_2}{\sqrt{x_2^2 + 2(k_1 - k_2)|x_1|}} + \lambda_3 \operatorname{sign}(x_2) u + \frac{\lambda_4 2x_2 u}{\sqrt{x_2^2 + 2(k_1 - k_2)|x_1|}} \\
&= \frac{-\lambda_4 2(k_1 - k_2) |x_2|}{\sqrt{x_2^2 + 2(k_1 - k_2)|x_1|}} + \lambda_3 (k_1 - k_2) + \frac{\lambda_4 2(k_1 - k_2) |x_2|}{\sqrt{x_2^2 + 2(k_1 - k_2)|x_1|}} \\
&= -1.
\end{aligned}$$

Para conocer el tiempo de convergencia al origen se integra, respecto al tiempo, cada lado de la ecuación $\dot{V} = -1$ desde $t = 0$ hasta $t = T > 0$ por lo tanto

$$\int_0^T \frac{d}{dt} V(x(t)) dt = - \int_0^T dt$$

de donde es claro que

$$V(x(T)) - V(x(0)) = -(T - 0), \tag{3.7}$$

nótese que $V(x(0)) < \infty$ y si se considera que T es el tiempo de convergencia al origen, entonces $V(x(T)) = 0$ y entonces a partir de (3.7) se tiene que

$$V(x(0)) = T < \infty,$$

lo que pone en claro que el tiempo de convergencia a $x = 0$ es finito y además puede ser calculado exactamente evaluando las condiciones iniciales del sistema en la FL, esto es $T = V(x(0))$.

Caso perturbado

Hasta el momento, la construcción de la FL ha estado limitada al caso nominal y no se ha tratado el caso perturbado. Con la finalidad de conseguir una FL para el sistema en presencia de perturbaciones se puede aplicar el procedimiento mencionado al final del Capítulo 2. Dicho procedimiento consiste en verificar la robustez de la FL encontrada en el caso nominal. Esto es tomar la derivada de la función a lo largo de las trayectorias del sistema perturbado y buscar las condiciones para que esta sea negativa definida. Así se puede seguir asegurando la estabilidad en tiempo finito del origen del sistema en presencia de perturbaciones. Recuérdese que en (3.1) la perturbación satisface $|f(t, x)| < F, \forall t > 0$.

Tomando la derivada de (3.6) a lo largo de las trayectorias del sistema (3.1) sobre el conjunto $\{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 x_2 > 0\}$ se tiene que

$$\begin{aligned}\dot{V} &= -1 + \lambda_1 \text{sign}(x_2) f(t, x) + \frac{\lambda_2 x_2 f(t, x)}{\sqrt{x_2^2 + 2(k_1 + k_2)|x_1|}} \\ &\leq -1 + \lambda_1 F + \frac{\lambda_2 |x_2| F}{\sqrt{x_2^2 + 2(k_1 + k_2)|x_1|}} \\ &\leq -1 + (\lambda_1 + \lambda_2) F\end{aligned}$$

la última desigualdad se debe a que $\frac{|x_2|}{\sqrt{x_2^2 + 2(k_1 + k_2)|x_1|}} \leq 1$. Nótese que sobre $\{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 x_2 > 0\}$, $\dot{V} < 0$ solo si

$$\frac{1}{\lambda_1 + \lambda_2} = (k_1 + k_2) \frac{\sqrt{k_1 + k_2} - \sqrt{k_1 - k_2}}{\sqrt{k_1 + k_2} + \sqrt{k_1 - k_2}} \sqrt{\frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2}} > F. \quad (3.8)$$

Ahora, sobre el conjunto $\{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 x_2 < 0\}$ la derivada de (3.6) a lo largo de las trayectorias de (3.1) da lo siguiente:

$$\begin{aligned}\dot{V} &= -1 + \lambda_3 \text{sign}(x_2) f(t, x) + \frac{\lambda_4 x_2 f(t, x)}{\sqrt{x_2^2 + 2(k_1 - k_2)|x_1|}} \\ &\leq -1 - \lambda_3 F + \frac{\lambda_4 |x_2| F}{\sqrt{x_2^2 + 2(k_1 - k_2)|x_1|}} \\ &\leq -1 + (-\lambda_3 + \lambda_4) F\end{aligned}$$

la última desigualdad se debe a que $\frac{|x_2|}{\sqrt{x_2^2 + 2(k_1 - k_2)|x_1|}} \leq 1$. Nótese que, para este caso, $\dot{V} < 0$ solo cuando

$$\frac{1}{-\lambda_3 + \lambda_4} = \frac{(k_1 - k_2) \sqrt{k_1 + k_2} (\sqrt{k_1 + k_2} - \sqrt{k_1 - k_2})}{2k_1 + \sqrt{k_1 + k_2} (\sqrt{k_1 + k_2} - \sqrt{k_1 - k_2})} > F. \quad (3.9)$$

Es fácil comprobar que $\frac{1}{-\lambda_3 + \lambda_4} < \frac{1}{\lambda_1 + \lambda_2}$, de manera que (3.8) se satisface siempre que se cumpla (3.9). Así, \dot{V} es negativa definida y por tanto (3.6) es una FL para (3.1) siempre que se elijan k_1 y k_2 de tal forma que $k_1 > k_2 > 0$ y se satisfaga (3.9).

Esta forma de elegir k_1 y k_2 puede resultar conservadora ya que dada una F , la desigualdad (3.9) requiere valores de k_1 y k_2 más grandes que los requeridos por las restricciones [9]

$$k_2 > F \quad \text{y} \quad k_1 - k_2 > F \quad (3.10)$$

proporcionadas en [9]. La razón de lo anterior es simple, mientras las condiciones (3.10) son necesarias y suficientes, la restricción (3.9) tan solo es suficiente.

A continuación se hará la estimación del tiempo de convergencia al origen del sistema perturbado. Sea la ecuación diferencial $\dot{z} = a$, $a = \text{constante}$, a partir de la cual se tiene lo siguiente

$$\int_0^T \frac{d}{dt} z(t) dt = \int_0^T a dt \quad \text{de donde} \quad z(T) - z(0) = aT,$$

ahora, se sabe que $\dot{V} \leq -1 + (-\eta_3 + \eta_4) F$ entonces, por el Lema de Comparación¹, se tiene que

$$V(x(T)) - V(x(0)) \leq [-1 + (-\eta_3 + \eta_4) F] T,$$

si T es el tiempo de convergencia al origen entonces $V(x(T)) = 0$ y por lo tanto

$$T \leq \frac{V(x(0))}{1 - (-\eta_3 + \eta_4) F}.$$

Con lo hecho hasta el momento se ha probado el siguiente teorema que agrupa todos los resultados anteriores.

Teorema 3.1. *Sea el sistema (3.1) con $u(x)$ dada por el controlador Twisting (3.2). Entonces la función $V : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^+$ con regla de correspondencia*

$$V(x) = \begin{cases} \lambda_1 |x_2| + \lambda_2 \sqrt{x_2^2 + 2(k_1 + k_2)|x_1|}, & x_1 x_2 > 0 \\ \lambda_3 |x_2| + \lambda_4 \sqrt{x_2^2 + 2(k_1 - k_2)|x_1|}, & x_1 x_2 \leq 0 \end{cases}$$

donde

$$\lambda_1 = \frac{1}{k_1 + k_2}, \quad \lambda_2 = \frac{2k_1 \lambda_1 (\sqrt{k_1 - k_2})^{-1}}{\sqrt{k_1 + k_2} - \sqrt{k_1 - k_2}}, \quad \lambda_3 = \frac{-1}{k_1 - k_2} \quad y \quad \lambda_4 = \frac{-2k_1 \lambda_3 (\sqrt{k_1 + k_2})^{-1}}{\sqrt{k_1 + k_2} - \sqrt{k_1 - k_2}},$$

es una FL para (3.1). Además:

- a) Si $f(t, x) = 0, \forall t > 0$ las trayectorias del sistema convergen en tiempo finito al origen $x = 0$ si y solo si las ganancias del controlador se eligen tal que $k_1 > k_2 > 0$. La derivada de V a lo largo de las trayectorias del sistema está dada por

$$\dot{V} = -1$$

y el tiempo de convergencia al origen T puede ser calculado exactamente como

$$T = V(x(0));$$

- b) Si $f(t, x) \neq 0$ las trayectorias del sistema convergen en tiempo finito al origen $x = 0$ siempre que $k_1 > k_2 > 0$ y se cumpla la desigualdad

$$\frac{1}{-\lambda_3 + \lambda_4} = \frac{(k_1 - k_2)\sqrt{k_1 + k_2} (\sqrt{k_1 + k_2} - \sqrt{k_1 - k_2})}{2k_1 + \sqrt{k_1 + k_2} (\sqrt{k_1 + k_2} - \sqrt{k_1 - k_2})} > F. \quad (3.11)$$

En este caso la derivada temporal de V es

$$\dot{V} \leq -1 + (-\lambda_3 + \lambda_4) F$$

y se puede estimar el tiempo de convergencia T de la siguiente manera:

$$T \leq \frac{V(x(0))}{1 - (-\eta_3 + \eta_4) F}. \quad (3.12)$$

¹Véase el capítulo 3 de [8].

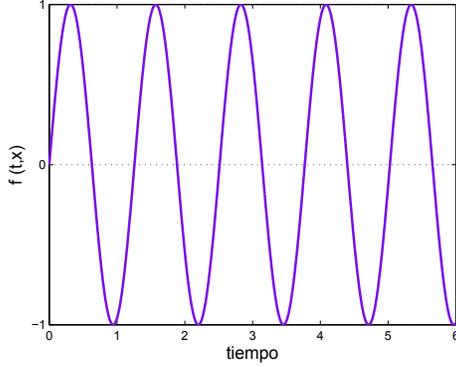


Fig. 3.4: Perturbación usada en la simulación

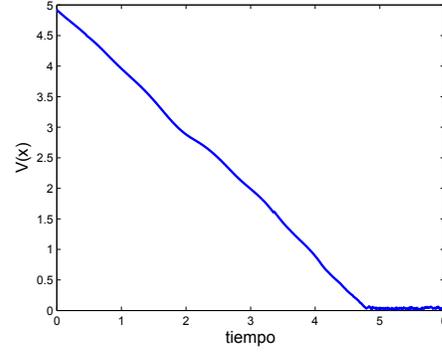


Fig. 3.5: FL evaluada sobre las trayectorias del sistema

Ejemplo 3.1. *Se requiere que las trayectorias del sistema mecánico:*

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = u(x) + f(t, x), \quad (3.13)$$

sean llevadas al origen en tiempo finito en presencia de la perturbación desconocida $f(t, x)$ donde $|f(t, x)| \leq 1$.

Para tal fin se utiliza la ley de control $u(x)$ dada por el algoritmo Twisting (3.2). El diseño de las ganancias k_1 y k_2 de este controlador se hace conforme lo indicado en el Teorema 3.1. Por lo tanto se debe satisfacer la desigualdad (3.11) lo cual se cumple eligiendo $k_1 = 9$ y $k_2 = 5$ ya que

$$\frac{(k_1 - k_2)\sqrt{k_1 + k_2}(\sqrt{k_1 + k_2} - \sqrt{k_1 - k_2})}{2k_1 + \sqrt{k_1 + k_2}(\sqrt{k_1 + k_2} - \sqrt{k_1 - k_2})} = 1.06 > F = 1.$$

Para la simulación se utiliza la señal $f(t, x) = \sin(5t)$ (Figura 3.4) y las condiciones iniciales $x(0) = (4, 6)$. En la Figura 3.5 se puede ver como cambia la FL a lo largo de las trayectorias de (3.13). Los estados del sistema se anulan en tiempo finito como se muestra en las Figuras 3.6 y 3.7. De acuerdo a la desigualdad (3.12) del Teorema 3.1 el tiempo de convergencia al origen es menor que

$$\frac{V(x(0))}{1 - (-\eta_3 + \eta_4)F} = 82$$

donde $V(x(0))$ es la FL (3.11) con $x(0) = (4, 6)$, $k_1 = 9$, $k_2 = 5$ y $F = 1$. Obsérvese que la estimación del tiempo de convergencia resultó muy conservadora.

3.3 Función de Lyapunov de grado homogéneo 3

Ya descrito y ejemplificado el método para generar las FL, se procedede a calcular una segunda FL para (3.1) en lazo cerrado con el algoritmo Twisting. El objetivo es que la nueva FL sea de grado homogéneo mayor a la anterior y poder comparar ciertas diferencias que se tienen entre funciones de distinto grado homogéneo.

Como ya se mencionó en la Sección 2.3, la FL será de grado homogéneo más alto mientras mayor sea el grado homogéneo de la función a integrar $W(x)$. Se puede hacer uso de las normas homogéneas para proponer una función W positiva definida.

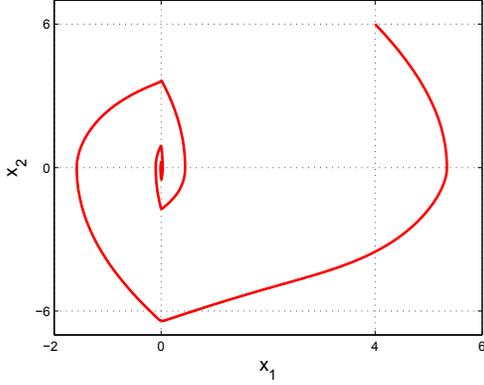


Fig. 3.6: Trayectoria en el plano fase

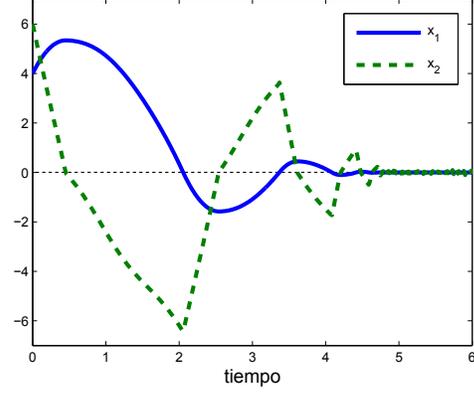


Fig. 3.7: Estados en el tiempo

Sean $q = 2$ y $s = (2, 1)$, entonces de la Definición 2.3 se obtiene la norma homogénea

$$\|x\|_{s,q} = \left(|x_1|^{\frac{2}{2}} + |x_2|^{\frac{2}{1}} \right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{|x_1| + x_2^2}.$$

Es posible entonces usar $W(x) = \|x\|_{s,q}$ para construir la FL aunque seguramente esta elección ocasionaría dificultades en el cálculo de la integral debido al radical. Por otro lado si se utiliza

$$W(x) = \|x\|_{s,q}^2 = |x_1| + x_2^2 \quad (3.14)$$

se tiene una función más simple de integrar. Ahora se determinará el grado de esta $W(x)$. Téngase en cuenta que el algoritmo Twisting es homogéneo de grado $p = -1$ con los pesos de homogeneidad $s = (2, 1)$, así:

$$W(\delta_\epsilon^s x) = |\epsilon^2 x_1| + (\epsilon x_2)^2 = \epsilon^2 |x_1| + \epsilon^2 (x_2)^2 = \epsilon^2 W(x)$$

con lo que se concluye de acuerdo a la Definición 2.2 que el grado homogéneo de (3.14) es $q = 2$. Aplicando el método de diseño se obtiene una FL homogénea de grado $r = -p + q = 3$. Tal función es presentada en el siguiente teorema.

Teorema 3.2. *Sea el sistema (3.1) con $u(x)$ dada por el controlador Twisting (3.2). Entonces la función $V : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^+$ con regla de correspondencia*

$$V(x) = \begin{cases} \eta_1 |x_2|^3 + \eta_2 x_1 x_2 + \eta_3 [x_2^2 + 2(k_1 + k_2)|x_1|]^{\frac{3}{2}}, & x_1 x_2 > 0 \\ \eta_4 |x_2|^3 + \eta_5 x_1 x_2 + \eta_6 [x_2^2 + 2(k_1 - k_2)|x_1|]^{\frac{3}{2}}, & x_1 x_2 \leq 0 \end{cases} \quad (3.15)$$

donde

$$\eta_1 = \frac{k_1 + k_2 + 1}{3(k_1 + k_2)^2}, \quad \eta_2 = \frac{1}{k_1 + k_2}, \quad \eta_3 = \frac{2\eta_2^2 [k_1^2(k_1 + 1) - k_2^2(k_1 - 1)]}{3\sqrt{k_1 - k_2} [(k_1 + k_2)^{\frac{3}{2}} - (k_1 - k_2)^{\frac{3}{2}}]},$$

$$\eta_4 = -\frac{k_1 - k_2 + 1}{3(k_1 - k_2)^2}, \quad \eta_5 = \frac{1}{k_1 - k_2} \quad y \quad \eta_6 = \frac{2\eta_5^2 [k_1^2(k_1 + 1) - k_2^2(k_1 - 1)]}{3\sqrt{k_1 + k_2} [(k_1 + k_2)^{\frac{3}{2}} - (k_1 - k_2)^{\frac{3}{2}}]}.$$

es una FL para (3.1). Además:

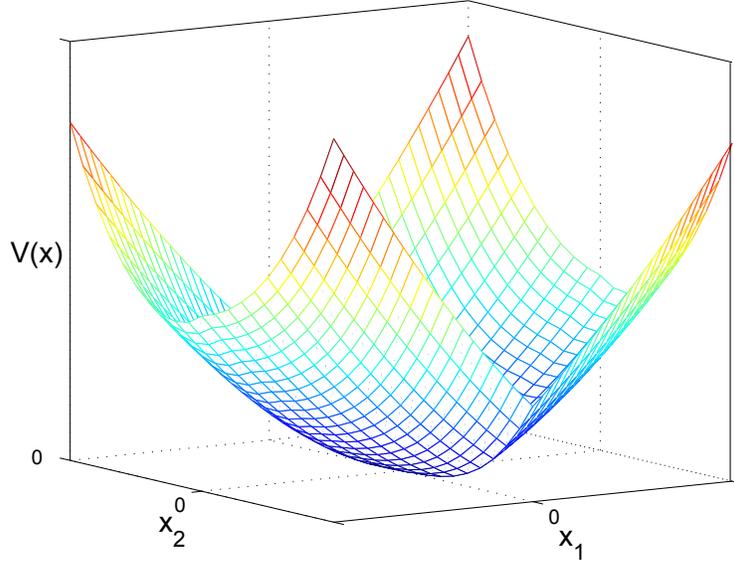


Fig. 3.8: Gráfica de la función $V(x)$ de grado homogéneo 3

- a) Si $f(t, x) = 0, \forall t > 0$ las trayectorias del sistema convergen en tiempo finito al origen $x = 0$ si y solo si las ganancias del controlador se eligen tal que $k_1 > k_2 > 0$. La derivada de V a lo largo de las trayectorias del sistema está dada por

$$\dot{V} = -|x_1| - x_2^2.$$

- b) Si $f(t, x) \neq 0$ las trayectorias del sistema convergen en tiempo finito al origen $x = 0$ siempre que $k_1 > k_2 > 0$ y se cumpla lo siguiente:

$$\min \left\{ \frac{1}{3(\eta_6 - \eta_4)}, \frac{1}{3(k_1 - k_2)\eta_6 - \eta_5} \right\} > F. \quad (3.16)$$

Demostración. Véase el Apéndice A. □

En la Figura 3.8 se muestra la gráfica de la función $V(x)$ para valores de $k_1 = 2$ y $k_2 = 1.5$.

La finalidad de buscar una FL de grado homogéneo mayor era obtener una función más suave. Ahora se compararán las dos funciones diseñadas anteriormente, recuérdese que (3.11) es de grado homogéneo uno y (3.15) es de grado homogéneo tres. Aunque se puede hacer un análisis más formal, aquí se presentará una comparación gráfica para mostrar la mejora en la suavidad de la FL al incrementar su grado homogéneo.

Tanto (3.11) como (3.15) son diferenciables fuera de las rectas $\mathcal{R}_1 = \{x_2 = 0\}$ y $\mathcal{R}_2 = \{x_1 = 0\}$ pero sobre ellas no. A continuación se muestra que ocurre sobre dichas rectas respecto a la derivada espacial de las funciones.

En la parte de arriba de la Figura 3.9 se puede observar que haciendo $x_1 = 0$ los límites por la derecha y por la izquierda de la derivada espacial de (3.11) no convergen a un mismo valor. Si se hace $x_2 = 0$ los límites por la derecha y por la izquierda de la derivada espacial de (3.11) divergen como se puede apreciar en la parte de abajo de la Figura 3.9.

En cuanto a la función (3.15) haciendo $x_1 = 0$ los límites por la derecha y por la izquierda de la derivada espacial de (3.11) convergen a un mismo valor como es mostrado en la parte superior de la

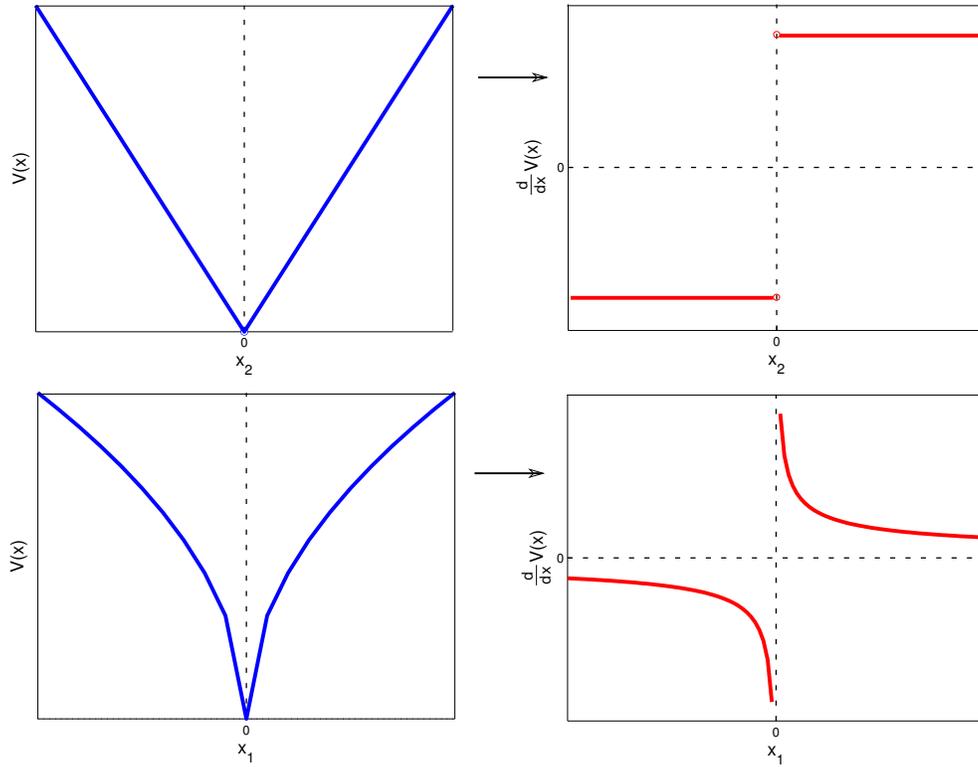


Fig. 3.9: Derivada espacial de (3.11) haciendo $x_1 = 0$ (arriba) y $x_2 = 0$ (abajo)

Figura 3.10. También si se hace $x_2 = 0$ los límites por la derecha y por la izquierda de la derivada espacial de (3.15) convergen como se ve en la parte de inferior de la Figura 3.10.

El análisis gráfico anterior ilustra el mejoramiento de la suavidad de la FL de grado homogéneo mayor. Este hecho de mejorar la suavidad será relevante para un caso del algoritmo Terminal que se verá en el siguiente capítulo.

Cabe mencionar que si bien se a mejorado la suavidad de la función, también se ha hecho más complicado el proceso de selección de las ganancias del controlador (ver desigualdades (3.11) y (3.16)), incluso estas podrían resultar más re restrictivas que las encontradas con la función de grado homogéneo menor.

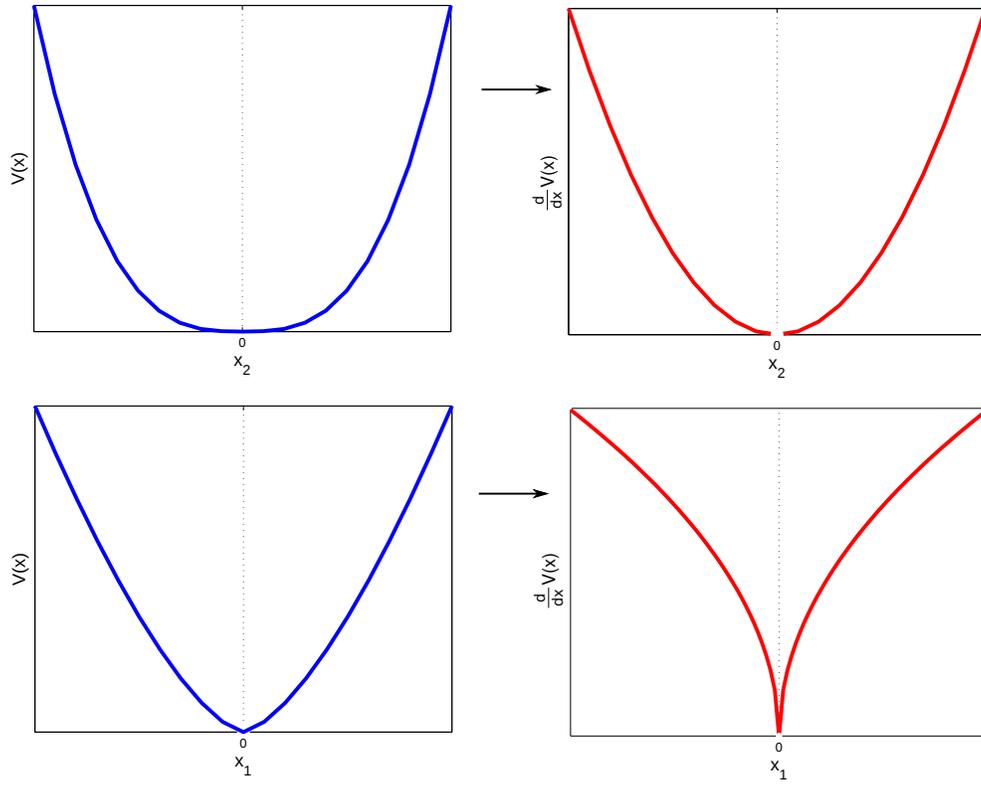


Fig. 3.10: Derivada espacial de (3.15) haciendo $x_1 = 0$ (arriba) y $x_2 = 0$ (abajo)

Capítulo 4

Funciones de Lyapunov para el Algoritmo Terminal

En este capítulo se aplica el método de diseño de FL al algoritmo de Segundo Orden conocido como Terminal aunque se comenzará por estudiar los distintos comportamientos de dicho algoritmo ya que el cálculo de las FL es distinto en cada caso.

4.1 Análisis del algoritmo

Considerese el sistema dinámico de segundo orden

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = u(x) + f(t, x) \quad (4.1)$$

donde el estado $x = [x_1, x_2]^T \in \mathbb{R}^2$, $f(t, x) \in \mathbb{R}$ es una función incierta tal que $|f(t, x)| \leq F$, $\forall (t, x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n$ para alguna constante conocida $F \in \mathbb{R}$, y $u(x) \in \mathbb{R}$ es la entrada de control dada por el, así conocido, algoritmo Terminal

$$u(x) = -\alpha \operatorname{sign}(\sigma), \quad \sigma = x_2 + \beta \sqrt{|x_1|} \operatorname{sign}(x_1), \quad (4.2)$$

es fácil ver que la superficie $\sigma = 0$ es una superficie de conmutación del control, así, este controlador es constante por tramos de la siguiente manera

$$u(x) = \begin{cases} u_1 = -\alpha, & \sigma > 0 \\ u_2 = \alpha, & \sigma < 0 \end{cases} .$$

Si se supone $f(t, x) = 0$, $\forall t \geq 0$, entonces se puede reescribir (4.1) en la forma afín (2.9), esto es como sigue

$$\dot{x} = Ax + Bu_i, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

y por lo tanto se pueden calcular las soluciones del sistema nominal que quedan de la siguiente manera

$$\phi_i = \begin{bmatrix} \frac{u_i}{2} t^2 + x_2 t + x_1 \\ u_i t + x_2 \end{bmatrix}, \quad i = 1, 2. \quad (4.4)$$

Resulta que dependiendo de la relación entre las ganancias α y β , las trayectorias del sistema pueden presentar tres comportamientos distintos como se indica a continuación:

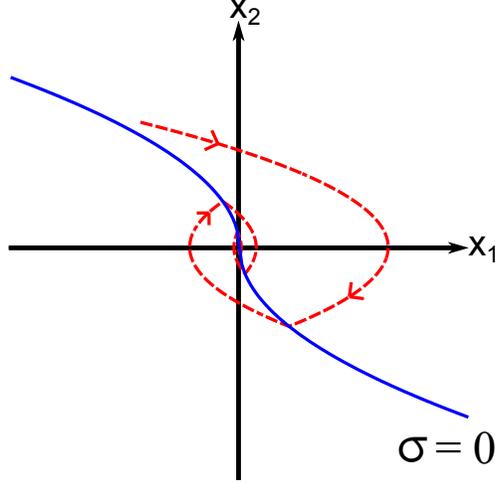


Fig. 4.1: Trayectoria del algoritmo Terminal para $\beta^2 > 2\alpha$

- a) Si $\beta^2 > 2\alpha$, las trayectorias del sistema son llevadas a la superficie $\sigma = 0$ pero no permanecen sobre ella. Cuando las condiciones iniciales están en la regi3n $\sigma > 0$, las trayectorias intersectan la curva $\sigma = 0$ en la parte en la que $x_1 > 0$ y cuando las condiciones iniciales están en la regi3n $\sigma < 0$, las trayectorias intersectan la curva $\sigma = 0$ en la parte en la que $x_1 < 0$, vese la Figura 4.1
- b) Si $\beta^2 = 2\alpha$ las trayectorias del sistema son llevadas a la superficie $\sigma = 0$, de la misma forma que en el caso anterior, y permanecen sobre ella debido a que dicha superficie coincide con la trayectoria del sistema, vese la Figura 4.2
- c) Para $\beta^2 < 2\alpha$ defínase

$$s = x_2 + \sqrt{2\alpha|x_1|} \text{sign}(x_1) \quad (4.5)$$

si las condiciones iniciales se encuentran en la regi3n $\sigma s < 0$ las trayectorias del sistema son llevadas a la superficie $\sigma = 0$ sin que x_1 cambie de signo y cuando las condiciones iniciales se encuentran en la regi3n $\sigma s > 0$ las trayectorias del sistema son llevadas a la superficie $\sigma = 0$ tal que x_1 cambie de signo. En este caso $\sigma = 0$ es una superficie de deslizamiento, es decir, las trayectorias del sistema permanecen sobre ella y son llevadas al origen, vese la Figura 4.3

Debe aclararse que el cálculo de la FL es distinto en cada uno de los casos mencionados, así, para el caso donde $\beta^2 > 2\alpha$ se procede como se hizo con el algoritmo Twisting, mientras que en los casos restantes se debe calcular el comportamiento particular de las trayectorias sobre la superficie de deslizamiento $\sigma = 0$.

Lo que sigue es verificar que (4.1) es homogéneo de grado -1 . Sean los pesos de homogeneidad $p = (p_1, p_2) = (2, 1)$ y $\epsilon > 0$. El sistema (4.1) puede ser reemplazado por su inclusi3n diferencial equivalente:

$$\dot{x} \in g(x), \quad g(x) = \begin{bmatrix} x_2 \\ u + [-F, F] \end{bmatrix}.$$

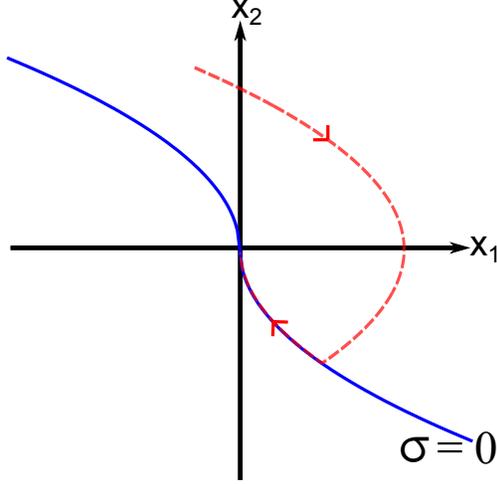


Fig. 4.2: Trayectoria del algoritmo Terminal para $\beta^2 = 2\alpha$

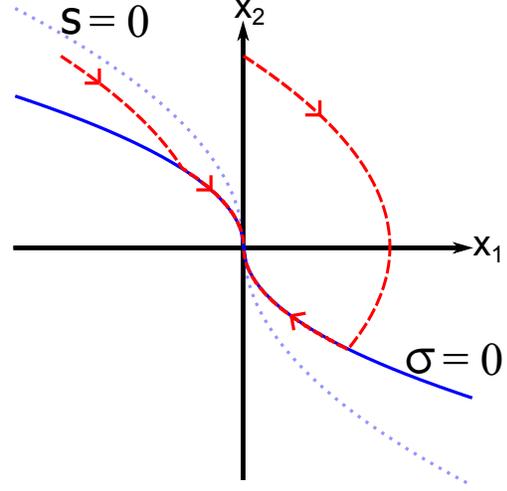


Fig. 4.3: Trayectorias del algoritmo Terminal para $\beta^2 < 2\alpha$

Entonces de acuerdo a la Definición 2.2 se tiene que:

$$\begin{aligned}
 g(\delta_\epsilon^s x) &= g(\epsilon^2 x_1, \epsilon x_2) \\
 &= \begin{bmatrix} \epsilon x_2 \\ -\alpha \operatorname{sign}(\epsilon x_2 + \beta \sqrt{|\epsilon^2 x_1|} \operatorname{sign}(\epsilon^2 x_1)) + [-F, F] \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \epsilon x_2 \\ -\alpha \operatorname{sign}(\epsilon [x_2 + \beta \sqrt{|x_1|} \operatorname{sign}(x_1)]) + [-F, F] \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \epsilon x_2 \\ -\alpha \operatorname{sign}(x_2 + \beta \sqrt{|x_1|} \operatorname{sign}(x_1)) + [-F, F] \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \epsilon^{2-1} x_2 \\ \epsilon^{1-1} (u + [-F, F]) \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \epsilon^{p_1-1} x_2 \\ \epsilon^{p_2-1} (u + [-F, F]) \end{bmatrix} \\
 &= \epsilon^{-1} \delta_\epsilon^p g(x).
 \end{aligned}$$

En las secciones siguientes se construyen FL para el algoritmo Terminal en sus distintos casos. Los valores de los tiempos de transito y los puntos de intersección de las trayectorias del sistema con $\sigma = 0$ pueden ser consultados en el Apéndice B.

4.2 Función de Lyapunov de grado homogéneo 1

Como ya se ha visto, el sistema (4.3) en lazo cerrado presenta distintos comportamientos de acuerdo a la selección de las ganancias α y β . Entonces la construcción de la FL se debe hacer para cada uno de los diferentes casos como se verá más adelante.

Ya es sabido que para diseñar la FL de grado homogéneo uno se debe elegir $W(x) = 1$ por lo tanto esta será la función que se usará a lo largo de la presente sección.

4.2.1 Caso: $\beta^2 > 2\alpha$

Considerando el sistema (4.3) con $\beta^2 > 2\alpha$ y aplicando el método de diseño de FL se obtiene que

$$\begin{aligned} V(x) &= \int_0^\infty d\tau \\ &= \int_0^{t_1} d\tau + \int_{t_1}^{t_1+t_2} d\tau + \cdots + \int_{T_{n-2}}^{T_{n-1}} d\tau + \int_{T_{n-1}}^{T_n} d\tau \\ &= T_\infty \end{aligned}$$

donde $T_n = \sum_{j=1}^n t_j$ y t_j es el j -ésimo tiempo de tránsito de la trayectoria del sistema en cada una de las regiones generadas por la superficie de conmutación $\sigma = 0$.

Haciendo uso de la Proposición B.1, donde se define $C = \sqrt{\frac{\beta^2 - 2\alpha}{\beta^2 + 2\alpha}}$, se tiene que la FL sobre la región donde $\sigma > 0$ es

$$\begin{aligned} V(x) &= \sum_{j=1}^{\infty} t_j = t_1 + t_2 + \sum_{j=3}^{\infty} t_j = t_1 + t_2 + \sum_{j=3}^{\infty} t_{j-1} C \\ &= t_1 + t_2 + t_2 \sum_{j=1}^{\infty} C^j = t_1 + t_2 \left[1 + C \sum_{j=0}^{\infty} C^j \right], \end{aligned}$$

debido a la condición $\beta^2 > 2\alpha$, es claro que $C < 1$ y por lo tanto la serie $\sum_{j=0}^{\infty} C^j$ es geométrica y converge a $\frac{1}{1-C}$, entonces

$$V(x) = t_1 + t_2 \frac{1}{1-C},$$

sustituyendo de la Proposición B.1 los valores de t_1 , t_2 y C se tiene que, en la región definida por $\sigma > 0$,

$$V(x) = \frac{x_2}{\alpha} + \frac{2\beta [x_2^2 + 2\alpha x_1]^{1/2}}{\alpha (\beta^2 + 2\alpha)^{1/2} - \alpha (\beta^2 - 2\alpha)^{1/2}}.$$

Ahora, sobre la región donde $\sigma < 0$ y haciendo uso de la Proposición B.2, se tiene lo siguiente

$$\begin{aligned} V(x) &= \sum_{j=1}^{\infty} t_j = t_1 + t_2 + \sum_{j=3}^{\infty} t_j = t_1 + t_2 + \sum_{j=3}^{\infty} t_{j-1} C \\ &= t_1 + t_2 + t_2 \sum_{j=1}^{\infty} C^j = t_1 + t_2 \left[1 + C \sum_{j=0}^{\infty} C^j \right], \end{aligned}$$

nuevamente la serie $\sum_{j=0}^{\infty} C^j$ es geométrica y converge a $\frac{1}{1-C}$. Entonces, sustituyendo los valores de t_1 , t_2 y C de la Proposición B.2 se tiene que, en la región definida por $\sigma < 0$,

$$V(x) = -\frac{x_2}{\alpha} + \frac{2\beta [x_2^2 - 2\alpha x_1]^{1/2}}{\alpha (\beta^2 + 2\alpha)^{1/2} - \alpha (\beta^2 - 2\alpha)^{1/2}}$$

y por tanto se puede escribir la FL $V(x)$ como sigue

$$V(x) = \begin{cases} \mu_1 x_2 + \mu_2 \sqrt{x_2^2 + 2\alpha x_1}, & \sigma \geq 0 \\ -\mu_1 x_2 + \mu_2 \sqrt{x_2^2 - 2\alpha x_1}, & \sigma < 0 \end{cases} \quad (4.6)$$

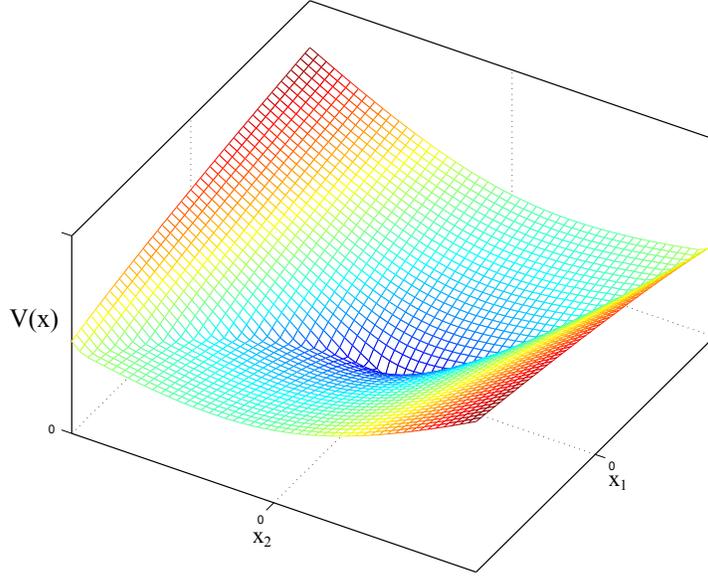


Fig. 4.4: FL de grado homogéneo 1 para el algoritmo Terminal en el caso $\beta^2 > 2\alpha$

donde

$$\mu_1 = \frac{1}{\alpha}, \quad y \quad \mu_2 = \frac{2\beta}{\alpha \left(\sqrt{\beta^2 + 2\alpha} - \sqrt{\beta^2 - 2\alpha} \right)}.$$

En la Figura 4.4 se puede ver la gráfica de (4.6) con $\alpha = 2$ y $\beta = 3$. Recuerdese que el método de diseño garantiza que (4.6) es positiva definida, continua en todo \mathbb{R}^2 y diferenciable al menos fuera de la superficie de conmutación. En este caso sobre la superficie $\sigma = 0$ la función (4.6) no es diferenciable lo cual no afecta ya que las trayectorias del sistema solo cruzan la superficie $\sigma = 0$ pero nunca permanecen sobre ella.

Del método se sabe también que $\dot{V} = -1$ pero a continuación se obtiene la derivada temporal de (4.6) para corroborar este hecho.

Sobre el conjunto $\sigma > 0$ se tiene el control $u(x) = -\alpha$, entonces la derivada de (4.6) a lo largo de las trayectorias de (4.1) es

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \frac{\partial V}{\partial x} \dot{x} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{2\alpha\mu_2}{2\sqrt{x_2^2 + 2\alpha x_1}} & \mu_1 + \frac{2\mu_2 x_2}{2\sqrt{x_2^2 + 2\alpha x_1}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ -\alpha \end{bmatrix} \\ &= \frac{\alpha\mu_2 x_2}{\sqrt{x_2^2 + 2\alpha x_1}} - 1 + \frac{-\alpha\mu_2 x_2}{\sqrt{x_2^2 + 2\alpha x_1}} \\ &= -1. \end{aligned}$$

Ahora, sobre el conjunto $\sigma < 0$ se tiene el control $u(x) = -\alpha$, entonces la derivada de (4.6) a lo

largo de las trayectorias de (4.1) es

$$\begin{aligned}
\dot{V} &= \frac{\partial V}{\partial x} \dot{x} \\
&= \left[\frac{-2\alpha\mu_2}{2\sqrt{x_2^2 - 2\alpha x_1}} \quad -\mu_1 + \frac{2\mu_2 x_2}{2\sqrt{x_2^2 - 2\alpha x_1}} \right] \begin{bmatrix} x_2 \\ \alpha \end{bmatrix} \\
&= \frac{-\alpha\mu_2 x_2}{\sqrt{x_2^2 - 2\alpha x_1}} - 1 + \frac{\alpha\mu_2 x_2}{\sqrt{x_2^2 - 2\alpha x_1}} \\
&= -1.
\end{aligned}$$

Caso $\beta^2 > 2\alpha$ perturbado

Ahora se verificará si (4.6) es también una FL para el sistema perturbado (4.1). Tomando la derivada de (4.6) a lo largo de las trayectorias de (4.1) sobre el conjunto delimitado por $\sigma > 0$ (recuerdese que $|f(t, x)| \leq F, \forall t > 0$) se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\dot{V} &= \frac{\partial V}{\partial x} \dot{x} = \left[\frac{-2\alpha\mu_2}{2\sqrt{x_2^2 + 2\alpha x_1}} \quad -\mu_1 + \frac{2\mu_2 x_2}{2\sqrt{x_2^2 + 2\alpha x_1}} \right] \begin{bmatrix} x_2 \\ f(t, x) - \alpha \end{bmatrix} \\
&= -1 + \left[-\mu_1 + \frac{\mu_2 x_2}{\sqrt{x_2^2 + 2\alpha x_1}} \right] f(t, x) \leq -1 + \left[\mu_1 + \frac{\mu_2 |x_2|}{\sqrt{x_2^2 + 2\alpha x_1}} \right] F,
\end{aligned}$$

pero $\sigma > 0$ implica que $x_2 > -\beta\sqrt{|x_1|}\text{sign}(x_1)$ y de aquí se obtiene $x_1 > -\frac{x_2^2}{\beta^2}$ de manera que

$$\frac{|x_2|}{\sqrt{x_2^2 + 2\alpha x_1}} < \frac{|x_2|}{\sqrt{x_2^2 - 2\alpha \frac{x_2^2}{\beta^2}}} = \frac{\beta}{\sqrt{\beta^2 - 2\alpha}},$$

por lo tanto

$$\dot{V} \leq -1 + \left[\mu_1 + \frac{\beta\mu_2}{\sqrt{\beta^2 - 2\alpha}} \right] F. \tag{4.7}$$

Para asegurar la negatividad definida de \dot{V} , cuando $\sigma > 0$ y $\beta^2 > 2\alpha$, basta elegir α y β de tal forma que se satisfaga la desigualdad:

$$\frac{\alpha\sqrt{\beta^2 - 2\alpha}}{\sqrt{\beta^2 - 2\alpha} + \mu_2\beta} > F. \tag{4.8}$$

La misma desigualdad resulta al hacer un análisis análogo sobre el conjunto $\sigma < 0$. Por lo tanto, (4.6) es una FL para el sistema perturbado (4.1) siempre que se elijan α y β de tal forma que $\beta^2 > 2\alpha$ y se cumpla (4.8).

Esta forma de elegir α y β puede resultar conservadora ya que fijada una F , la desigualdad (4.8) requiere valores de α y β más grandes que los requeridos por la restricción dada por Levant en [12]. Tal restricción es la siguiente:

$$\beta^2 + 2F \geq 2\alpha > 2F. \tag{4.9}$$

La razón de lo anterior es simple, mientras la condición (4.9) es necesaria y suficiente, la restricción (4.8) tan solo es suficiente, esto a su vez debido a que la FL no se diseñó teniendo en cuenta la información de la perturbación.

Para estimar el tiempo de convergencia T al origen, considerese la ecuación diferencial $\dot{z} = a$ con $a = \text{constante}$, a partir de la cual se tiene lo siguiente

$$\int_0^T \frac{d}{dt} z(t) dt = \int_0^T a dt \quad \text{de donde} \quad z(T) - z(0) = aT,$$

ahora, a partir de (4.7) y usando el Lema de Comparación, se puede concluir que

$$V(x(T)) - V(x(0)) \leq \left[-1 + \left(\mu_1 + \frac{\beta\mu_2}{\sqrt{\beta^2 - 2\alpha}} \right) F \right] T,$$

si T es el tiempo de convergencia al origen entonces $V(x(T)) = 0$ y por lo tanto

$$T \leq \frac{V(x(0))}{\gamma}, \quad \gamma = -1 + \left(\mu_1 + \frac{\beta\mu_2}{\sqrt{\beta^2 - 2\alpha}} \right) F.$$

Con la finalidad de agrupar los resultados anteriores sobre el caso en que $\beta^2 > 2\alpha$ se enuncia el siguiente teorema.

Teorema 4.1. *Sea el sistema (4.1) en lazo cerrado con el controlador Terminal (4.2) cuyas ganancias α y β satisfacen que $\beta^2 > 2\alpha$. Entonces la función $V : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ con regla de correspondencia:*

$$V(x) = \begin{cases} \mu_1 x_2 + \mu_2 \sqrt{x_2^2 + 2\alpha x_1}, & \sigma \geq 0 \\ -\mu_1 x_2 + \mu_2 \sqrt{x_2^2 - 2\alpha x_1}, & \sigma < 0 \end{cases} \quad (4.10)$$

donde

$$\mu_1 = \frac{1}{\alpha}, \quad y \quad \mu_2 = \frac{2\beta}{\alpha \left(\sqrt{\beta^2 + 2\alpha} - \sqrt{\beta^2 - 2\alpha} \right)},$$

es una FL para (4.1). Además

- a) Si $f(t, x) = 0, \forall t > 0$ las trayectorias del sistema convergen en tiempo finito al origen $x = 0$ si y solo si las ganancias del controlador se eligen tal que $\beta^2 > 2\alpha > 0$. La derivada de V a lo largo de las trayectorias del sistema está dada por

$$\dot{V} = -1$$

y el tiempo de convergencia al origen T puede ser calculado exactamente como

$$T = V(x(0));$$

- b) Si $f(t, x) \neq 0$ las trayectorias del sistema convergen en tiempo finito al origen $x = 0$ siempre que $\beta^2 > 2\alpha > 0$ y se satisfaga la desigualdad

$$\frac{\alpha \sqrt{\beta^2 - 2\alpha}}{\sqrt{\beta^2 - 2\alpha} + \mu_2 \beta} > F. \quad (4.11)$$

En este caso la derivada temporal de V es

$$\dot{V} \leq -1 + \left[\mu_1 + \frac{\beta\mu_2}{\sqrt{\beta^2 - 2\alpha}} \right] F.$$

y se puede estimar el tiempo de convergencia T de la siguiente manera:

$$T \leq \frac{V(x(0))}{\gamma}, \quad \gamma = -1 + \left(\mu_1 + \frac{\beta\mu_2}{\sqrt{\beta^2 - 2\alpha}} \right) F.$$

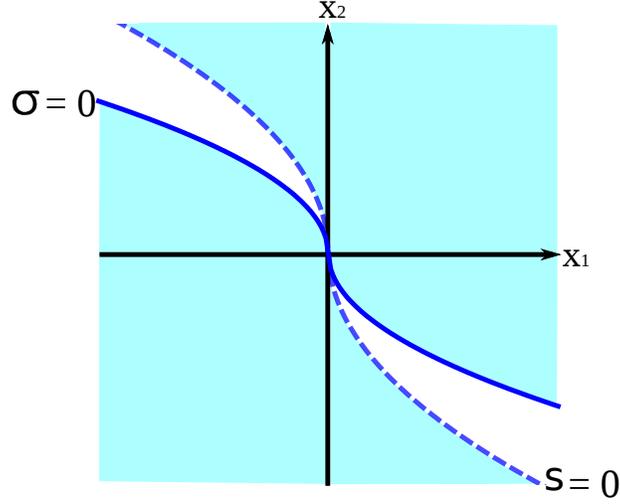


Fig. 4.5: Regiones del plano fase para el cálculo de la FL de grado homogéneo 1 para el algoritmo Terminal en el caso $\beta^2 < 2\alpha$

4.2.2 Caso: $\beta^2 < 2\alpha$

Para este caso el cálculo de la FL es más sencillo debido a que esta vez $\sigma = 0$ actúa como una superficie de deslizamiento. Por lo tanto solo se calcula el tiempo de tránsito hacia la superficie deslizante $\sigma = 0$ y el tiempo de deslizamiento sobre ella. Entonces, sea el sistema (4.3) con $\beta^2 < 2\alpha$ y aplicando el método de diseño de FL se obtiene que

$$V(x) = \int_0^\infty d\tau = \int_0^{t_1} d\tau + \int_{t_1}^{t_1+t_2} = t_1 + t_2$$

donde t_1 es el tiempo que tarda la trayectoria del sistema en ir de la posición inicial $x = (x_1, x_2)$ a la intersección con la curva $\sigma = 0$ y t_2 el tiempo que pasa la trayectoria sobre $\sigma = 0$ hasta llegar al origen.

Ya se ha mostrado que en el caso $\beta^2 < 2\alpha$ existen diferentes tipos de trayectorias (ver Figura 4.3), de manera que La FL deberá calcularse sobre tres regiones diferentes dadas por los conjuntos $\{x \in \mathbb{R}^2 \mid s\sigma \geq 0\}$, $\{x \in \mathbb{R}^2 \mid s\sigma < 0 \text{ y } s > 0\}$ y $\{x \in \mathbb{R}^2 \mid s\sigma < 0 \text{ y } s < 0\}$ donde s está dada por (4.5) (véase Figura 4.5). Los valores de los tiempos de tránsito son obtenidos de las Proposiciones B.1 y B.4.

Sobre el conjunto $\{x \in \mathbb{R}^2 \mid s\sigma \geq 0\}$

$$\begin{aligned} V(x) &= t_1 + t_2 \\ &= \frac{1}{\alpha} \left[|x_2| - \beta \sqrt{\frac{-x_2^2 + 2\alpha|x_1|}{2\alpha - \beta^2}} \right] + \frac{2}{\beta} \sqrt{\frac{-x_2^2 + 2\alpha|x_1|}{2\alpha - \beta^2}} \\ &= \frac{1}{\alpha} |x_2| + \frac{\sqrt{2\alpha - \beta^2}}{\alpha\beta} \sqrt{-x_2^2 + 2\alpha|x_1|}. \end{aligned}$$

Sobre el conjunto $\{x \in \mathbb{R}^2 \mid s\sigma < 0 \text{ y } s > 0\}$

$$\begin{aligned} V(x) &= t_1 + t_2 \\ &= \frac{1}{\alpha} \left[x_2 + \beta \sqrt{\frac{x_2^2 + 2\alpha x_1}{2\alpha + \beta^2}} \right] + \frac{2}{\beta} \sqrt{\frac{x_2^2 + 2\alpha x_1}{2\alpha + \beta^2}} \\ &= \frac{1}{\alpha} x_2 + \frac{\sqrt{\beta^2 + 2\alpha}}{\alpha\beta} \sqrt{x_2^2 + 2\alpha x_1}. \end{aligned}$$

Sobre el conjunto $\{x \in \mathbb{R}^2 \mid s\sigma < 0 \text{ y } s < 0\}$

$$\begin{aligned} V(x) &= t_1 + t_2 \\ &= \frac{1}{\alpha} \left[-x_2 + \beta \sqrt{\frac{x_2^2 - 2\alpha x_1}{2\alpha + \beta^2}} \right] + \frac{2}{\beta} \sqrt{\frac{x_2^2 - 2\alpha x_1}{2\alpha + \beta^2}} \\ &= -\frac{1}{\alpha} x_2 + \frac{\sqrt{\beta^2 + 2\alpha}}{\alpha\beta} \sqrt{x_2^2 - 2\alpha x_1}. \end{aligned}$$

Por lo tanto la FL puede escribirse como sigue:

$$V(x) = \begin{cases} \theta_1 |x_2| + \theta_2 \sqrt{-x_2^2 + 2\alpha |x_1|}, & s\sigma \geq 0 \\ \theta_1 x_2 + \theta_3 \sqrt{x_2^2 + 2\alpha x_1}, & s\sigma < 0 \text{ y } s > 0 \\ -\theta_1 x_2 + \theta_3 \sqrt{x_2^2 - 2\alpha x_1}, & s\sigma < 0 \text{ y } s < 0 \end{cases} \quad (4.12)$$

donde

$$\theta_1 = \frac{1}{\alpha}, \quad \theta_2 = \frac{\sqrt{2\alpha - \beta^2}}{\alpha\beta}, \quad \text{y} \quad \theta_3 = \frac{\sqrt{\beta^2 + 2\alpha}}{\alpha\beta}.$$

Según el método la derivada de (4.12) a lo largo de las trayectorias de (4.3) es $\dot{V} = -1$. Pero (4.12) no es diferenciable sobre la superficie de deslizamiento $\sigma = 0$ razón por la cuál no es posible usar la regla de la cadena para calcular \dot{V} . Para resolver el problema se sustituyen las soluciones (4.4) del sistema (4.3) en la función (4.12). Al hacer esto se obtiene una función $V(t)$ que puede ser derivada directamente respecto a t con lo que se recupera el resultado $\dot{V} = -1$. Por lo tanto (4.12) es una FL para el sistema (4.3). Además es claro que el tiempo de convergencia T al origen puede ser calculado exactamente como $T = V(x(0))$.

La falta de diferenciable de (4.12) no causó mayor problema para el caso nominal ya que se conocen las soluciones del sistema pero en el caso perturbado no se cuenta con estas. Por lo tanto no se puede tomar la derivada de la función sobre la superficie deslizante. Así que en el caso perturbado no se puede concluir que (4.12) sea una FL. La problemática de la diferenciable se puede remover diseñando una FL de grado homogéneo mayor con el fin de que esta sea diferenciable sobre $\sigma = 0$, esto se hará más adelante.

4.2.3 Caso: $\beta^2 = 2\alpha$

Como ya se ha visto, cuando $\beta^2 = 2\alpha$, las trayectorias de (4.3) son llevadas a la superficie de conmutación $\sigma = 0$ y permanecen sobre ella pero no porque esta sea una superficie de deslizamiento sino debido a que dicha superficie coincide con las trayectorias del sistema.

Es importante ver que el comportamiento de las trayectorias cuando $\beta^2 = 2\alpha$ puede considerarse como un caso límite entre $\beta^2 > 2\alpha$ y $\beta^2 < 2\alpha$. Entonces no es necesario calcular nuevamente una

FL, tan solo basta considerar que $\beta^2 = 2\alpha$ en cualquiera de las funciones (4.6) ó (4.12) de donde se obtiene lo siguiente:

$$V(x) = \begin{cases} \omega_1 x_2 + \omega_2 \sqrt{x_2^2 + 2\alpha x_1}, & \sigma \geq 0 \\ -\omega_1 x_2 + \omega_2 \sqrt{x_2^2 - 2\alpha x_1}, & \sigma < 0 \end{cases} \quad (4.13)$$

donde

$$\omega_1 = \frac{1}{\alpha}, \quad y \quad \omega_2 = \frac{\sqrt{2}}{\alpha}.$$

Desafortunadamente (4.13) no es diferenciable sobre la curva $\sigma = 0$ que contiene trayectorias del sistema. Tal dificultad se resuelve como se hizo para la función (4.12). Esto es sustituyendo las soluciones del sistema en la FL para poder derivar directamente respecto al tiempo. Así se tiene que la derivada temporal de (4.13) está dada por $\dot{V} = -1$ y el tiempo de convergencia al origen está dado por $T = V(x(0))$.

4.3 Función de Lyapunov de grado homogéneo 3

Ya se vió en el capítulo anterior que al construir una FL de grado homogéneo mayor se consigue mejorar la suavidad de la función. Para lograr esto, en el proceso de diseño se utilizó la siguiente función de grado homogéneo 2:

$$W(x) = |x_1| + x_2^2,$$

con la que se consigue que la FL resultante sea de grado homogéneo 3 debido a que el grado del sistema es -1 . A continuación se presentan FL homogéneas de grado 3 para el sistema (4.1). Los tres distintos casos para las ganancias α y β son tratados.

4.3.1 Caso: $\beta^2 > 2\alpha$

En el siguiente teorema se da una FL de grado homogéneo 3 para el sistema (4.1) en el caso $\beta^2 > 2\alpha$. Para tal fin se divide el plano euclidean en los conjuntos:

$$\mathcal{A}_1 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \sigma x_1 \leq 0\}, \quad \mathcal{A}_2 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \sigma x_1 > 0\}.$$

Estos conjuntos se ilustran en la Figura 4.6.

Teorema 4.2. *Sea el sistema (4.1) en lazo cerrado con el controlador Terminal (4.2) cuyas ganancias α y β satisfacen que $\beta^2 > 2\alpha$. Entonces la función $V : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ con regla de correspondencia:*

$$V(x) = \begin{cases} \kappa_1 |x_2|^3 - \kappa_2 x_1 x_2 + \kappa_3 [x_2^2 - 2\alpha |x_1|]^{\frac{3}{2}}, & x \in \mathcal{A}_1 \\ \kappa_4 x_2^3 \text{sign}(x_1) + \kappa_2 x_1 x_2 + \kappa_5 [x_2^2 + 2\alpha |x_1|]^{\frac{3}{2}}, & x \in \mathcal{A}_2 \end{cases} \quad (4.14)$$

donde

$$\kappa_1 = \frac{\alpha - 1}{3\alpha^2}, \quad \kappa_2 = \frac{1}{\alpha}, \quad \kappa_3 = \frac{2 [(\beta^2 + 2\alpha)^{3/2} + 3\alpha\beta + \alpha\beta^3]}{3\alpha^2 [(\beta^2 + 2\alpha)^{3/2} - (\beta^2 - 2\alpha)^{3/2}]},$$

$$\kappa_4 = \frac{\alpha + 1}{3\alpha^2}, \quad y \quad \kappa_5 = \frac{2 [(\beta^2 - 2\alpha)^{3/2} + 3\alpha\beta + \alpha\beta^3]}{3\alpha^2 [(\beta^2 + 2\alpha)^{3/2} - (\beta^2 - 2\alpha)^{3/2}]}.$$

es una FL para (4.1). Además

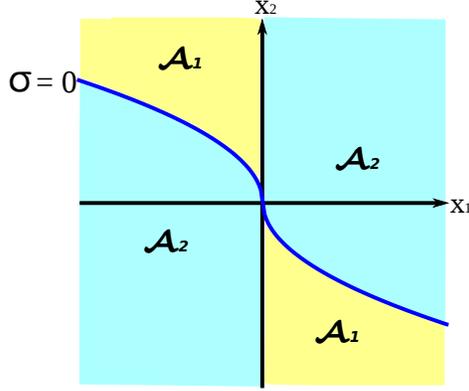


Fig. 4.6: Conjuntos \mathcal{A}_1 y \mathcal{A}_2 en el plano fase para el algoritmo Terminal

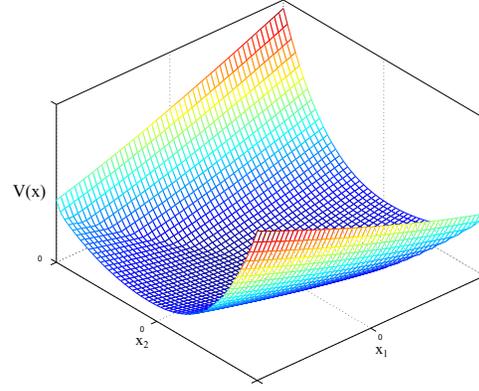


Fig. 4.7: FL de grado homogéneo 3 para el algoritmo Terminal en el caso $\beta^2 > 2\alpha$

- a) Si $f(t, x) = 0, \forall t > 0$ las trayectorias del sistema convergen en tiempo finito al origen $x = 0$ si y solo si las ganancias del controlador se eligen tal que $\beta^2 > 2\alpha$. La derivada de V a lo largo de las trayectorias del sistema está dada por

$$\dot{V} = -|x_1| - x_2^2.$$

- b) Si $f(t, x) \neq 0$ las trayectorias del sistema convergen en tiempo finito al origen $x = 0$ siempre que $\beta^2 > 2\alpha$ y se satisfaga la desigualdad

$$\frac{1}{3(|\kappa_1| + \kappa_3)} > F.$$

Demostración. Véase el Apéndice B. □

En la Figura 4.7 se puede ver la gráfica de (4.14) con $\alpha = 2$ y $\beta = 3$. La suavidad de la función mejora aunque no se logra la diferenciabilidad sobre la curva $\sigma = 0$. Afortunadamente las trayectorias del sistema solo cruzan dicha superficie por lo que la falta de diferenciabilidad no afecta el análisis.

4.3.2 Caso: $\beta^2 < 2\alpha$

La función (4.12) resultó no ser diferenciable sobre la superficie de deslizamiento $\sigma = 0$. Por esta razón no se pudo tratar el caso perturbado. Ya se dijo que la situación se resolvería si se generara una función de grado homogéneo mayor que sea diferenciable sobre la superficie $\sigma = 0$.

Para el siguiente resultado se requiere dividir al plano fase (x_1, x_2) como se muestra en la Figura 4.8, la segmentación está dada por los conjuntos:

$$\mathcal{B}_1 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \sigma s \leq 0\}, \quad \mathcal{B}_2 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid s x_1 \leq 0\}, \quad \text{y} \quad \mathcal{B}_3 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \sigma x_1 > 0\}.$$

En el próximo teorema se presenta una FL para el sistema perturbado (4.1). La función es diferenciable sobre la curva $\sigma = 0$ y fué construida utilizando la función homogénea de grado dos $W(x) = |x_1| + x_2^2$.

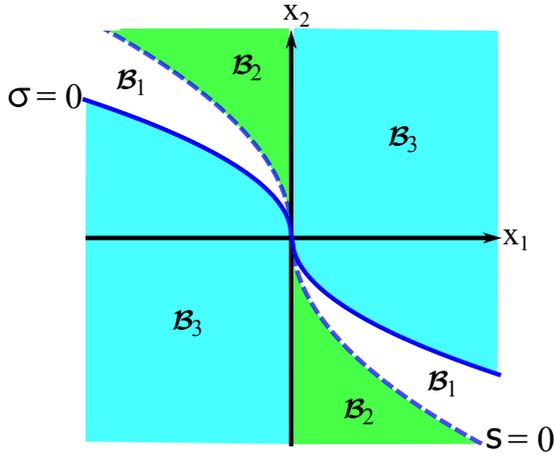


Fig. 4.8: Plano fase para el algoritmo Terminal cuando $\beta^2 < 2\alpha$

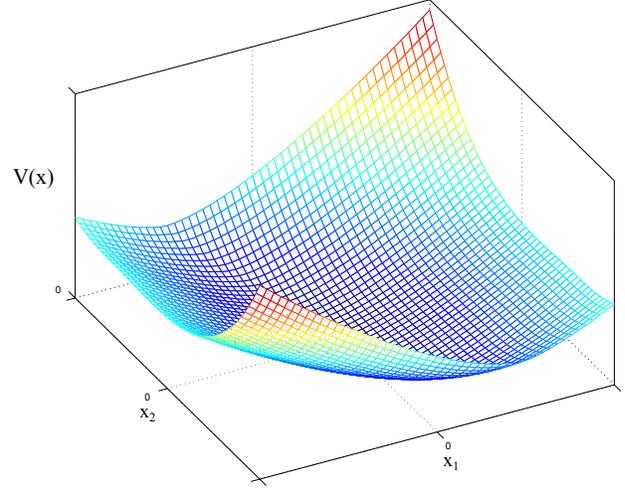


Fig. 4.9: FL de grado homogéneo 3 para el algoritmo Terminal en el caso $\beta^2 < 2\alpha$

Teorema 4.3. *Sea el sistema (4.1) en lazo cerrado con el controlador Terminal (4.2) cuyas ganancias α y β satisfacen que $\beta^2 < 2\alpha$. Entonces la función $V : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ con regla de correspondencia:*

$$V(x) = \begin{cases} \nu_1|x_2|^3 - \nu_2x_1x_2 + \nu_3[-x_2^2 + 2\alpha|x_1|]^{3/2}, & x \in \mathcal{B}_1 \\ \nu_1|x_2|^3 - \nu_2x_1x_2 + \nu_4[x_2^2 - 2\alpha|x_1|]^{3/2}, & x \in \mathcal{B}_2 \\ \nu_5x_2^3 \text{sign}(x_1) + \nu_2x_1x_2 + \nu_6[x_2^2 + 2\alpha|x_1|]^{3/2}, & x \in \mathcal{B}_3 \end{cases} \quad (4.15)$$

donde

$$\nu_1 = \frac{\alpha - 1}{3\alpha^2}, \quad \nu_2 = \frac{1}{\alpha}, \quad \nu_3 = \frac{\beta^2(2\alpha - 3)(2\alpha - \beta^2) - \beta^4 + 4\alpha^2}{6\alpha^2\beta(2\alpha - \beta^2)^{3/2}}$$

$$\nu_4 = \frac{2\beta(\beta^2 + 2\alpha)^{1/2} + \alpha\beta^2 + \alpha + \beta^2}{3\alpha^2\beta(\beta^2 + 2\alpha)^{1/2}}, \quad \nu_5 = \frac{\alpha + 1}{3\alpha^2} \quad \text{y} \quad \nu_6 = \frac{\alpha\beta^2 + \alpha + \beta^2}{3\alpha^2\beta(\beta^2 + 2\alpha)^{1/2}}$$

es una FL para (4.1). Además

- a) Si $f(t, x) = 0, \forall t > 0$ las trayectorias del sistema convergen en tiempo finito al origen $x = 0$ si y solo si las ganancias del controlador se eligen tal que $\beta^2 < 2\alpha$. La derivada de V a lo largo de las trayectorias del sistema está dada por

$$\dot{V} = -|x_1| - x_2^2.$$

- b) Si $f(t, x) \neq 0$ las trayectorias del sistema convergen en tiempo finito al origen $x = 0$ siempre que se elijan α y β de tal forma que $\beta^2 < 2\alpha$ y se cumpla lo siguiente:

$$\min \{c_1, c_2, c_3, c_4\} > F,$$

donde

$$c_1 = \frac{\beta^2 + 1}{3\beta^2|\nu_1| + \nu_2 + 3|\nu_3|\sqrt{2\alpha(2\alpha - \beta^2)}}, \quad c_2 = \frac{1}{3|\nu_1| + 3\nu_4},$$

$$c_3 = \frac{1}{3(\nu_5 + \nu_6)} \quad y \quad c_4 = \frac{1}{\nu_2 + 3\alpha\nu_6}.$$

Demostración. Véase el Apéndice B. □

En la Figura 4.9 se puede observar una gráfica de (4.15) con $\alpha = 8$ y $\beta = 2$. Con esta FL se muestra la importancia de incrementar el grado homogéneo de la función calculada ya que al incrementar la suavidad se permitió la diferenciabilidad sobre la superficie de deslizamiento. Un hecho desventajoso que se puede notar es que la elección de las ganancias del controlador se dificulta al haber incrementado el grado de la función.

4.3.3 Caso: $\beta^2 = 2\alpha$

En la sección anterior se hizo notar que el caso $\beta^2 = 2\alpha$ puede ser visto como un caso límite entre $\beta^2 > 2\alpha$ y $\beta^2 < 2\alpha$ lo que evita que se calcule una nueva función. Por ejemplo, si $\beta^2 < 2\alpha$, el plano fase de (4.1) queda dividido en distintas regiones por las curvas

$$s = x_2 + \sqrt{2\alpha|x_1|} \text{sign}(x_1) = 0 \quad y \quad \sigma = x_2 + \beta\sqrt{|x_1|} \text{sign}(x_1) = 0,$$

como se ve en la Figura 4.8 pero si se tiene $\beta^2 = 2\alpha$ entonces $s = \sigma$ y esto a su vez implica que

$$\mathcal{B}_1 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid s\sigma < 0\} = \emptyset.$$

Por lo tanto el plano fase queda segmentado en los conjuntos \mathcal{B}_2 y \mathcal{B}_3 . Por la razón anterior se puede reescribir (4.15) considerando la restricción $\beta^2 = 2\alpha$ de donde se obtiene que

$$V(x) = \begin{cases} \pi_1|x_2|^3 - \pi_2x_1x_2 + \pi_3 [x_2^2 - 2\alpha|x_1|]^{3/2}, & x \in \mathcal{B}_2 \\ \pi_4x_2^3 \text{sign}(x_1) + \pi_2x_1x_2 + \pi_5 [x_2^2 + 2\alpha|x_1|]^{3/2}, & x \in \mathcal{B}_3 \end{cases} \quad (4.16)$$

donde

$$\pi_1 = \frac{\alpha - 1}{3\alpha^2}, \quad \pi_2 = \frac{1}{\alpha}, \quad \pi_3 = \frac{2\alpha + 3 + 4\sqrt{2}}{6\sqrt{2}\alpha^2}, \quad \pi_4 = \frac{\alpha + 1}{3\alpha^2} \quad y \quad \pi_5 = \frac{2\alpha + 3}{6\sqrt{2}\alpha^2}.$$

La función (4.16) es de inmediato una función candidata de Lyapunov para (4.1) en el caso $\beta^2 = 2\alpha$ pero tiene el inconveniente de no ser diferenciable sobre la curva $\sigma = 0$. Nuevamente el problema se resuelve para el caso no perturbado sustituyendo las soluciones del sistema en la función. Lo anterior permite derivar la función respecto al tiempo directamente. Por lo tanto, de acuerdo al método de diseño, la derivada de (4.16) a lo largo de las trayectorias de el sistema no perturbado (4.3) está dada por:

$$\dot{V} = -|x_1| - x_2^2.$$

Capítulo 5

Función de Lyapunov para un Algoritmo de Tercer Orden

Con el fin de mostrar que el método de diseño de FL, explicado en la Sección 2.3, es útil para algoritmos de orden mayor a dos, en este capítulo se aplicará tal método a la construcción de una FL para un algoritmo de Tercer Orden. Es preciso mencionar que no existían FL para este algoritmo anteriores a este trabajo.

5.1 Análisis del algoritmo

Considerese el sistema dinámico de tercer orden

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_3 \\ \dot{x}_3 &= f(t, x) + u(x)\end{aligned}\tag{5.1}$$

donde el estado $x^T = [x_1, x_2, x_3] \in \mathbb{R}^3$, $f(t, x) \in \mathbb{R}$ es una función desconocida pero que satisface $|f(t, x)| \leq F$, $\forall (t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n$, para alguna constante conocida $F \in \mathbb{R}$. La función $u(x) \in \mathbb{R}$ es la entrada de control.

El control por MDOS que será usado en este capítulo fué propuesto en [3] y está dado por el siguiente algoritmo:

- Paso 1. Seleccionar $u(x) = u_T = -k_2 \text{sign}(x_2) - k_3 \text{sign}(x_3)$
hasta que $x_2 = 0$ & $x_3 = 0$
- Paso 2. Seleccionar $u(x) = u_A = -k_1 \text{sign}(x_1)$
hasta que $x_1 = 0$
- Paso 3. Ir al Paso 1.

La forma de seleccionar las ganancias k_1 , k_2 y k_3 para que el algoritmo converja será mostrada más adelante cuando se construya la FL.

El control $u_A = -k_1 \text{sign}(x_1)$ es referido en [3] como *Inestable de Anosov* [1] (AU) ya que al ser aplicado a (5.1), el sistema en lazo cerrado resulta inestable. Al igual se refiere al control $u_T = -k_2 \text{sign}(x_2) - k_3 \text{sign}(x_3)$ como *Twisting Modificado* (MTW) debido a que, para las variables de estado (x_2, x_3) , este es un controlador Twisting. Es por esto que, en el presente trabajo, el algoritmo de Tercer Orden descrito anteriormente será llamado AU-MTW.

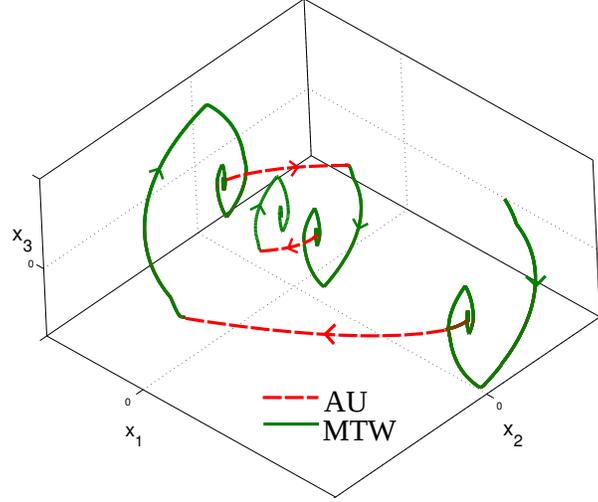


Fig. 5.1: Trayectoria del algoritmo AU-MTW

Según la estructura del controlador se puede ver que las superficies descritas por $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ y $x_2 = x_3 = 0$ son superficies donde el valor del control cambia. También es claro que con el algoritmo AU-MTW la variable de control $u(x)$ es constante a tramos, es decir:

- Cuando $u(x) = u_T = -k_2 \text{sign}(x_2) - k_3 \text{sign}(x_3)$

$$u(x) = \begin{cases} u_1 = -k_2 - k_3, & x_2 > 0, x_3 > 0 \\ u_2 = -k_2 + k_3, & x_2 > 0, x_3 < 0 \\ u_3 = k_2 + k_3, & x_2 < 0, x_3 < 0 \\ u_4 = k_2 - k_3, & x_2 < 0, x_3 > 0 \end{cases}$$

- Cuando $u(x) = u_A = -k_1 \text{sign}(x_1)$

$$u(x) = \begin{cases} u_5 = -k_1, & x_1 > 0 \\ u_6 = k_1, & x_1 < 0 \end{cases}$$

Si además se considera (5.1) en su forma nominal, es decir, $f(t, x) = 0$, $\forall t > 0$ este puede ser reescrito en forma afín (2.9), esto es como sigue.

$$\dot{x} = Ax + Bu_i, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad i = 1, 2, \dots, 6. \quad (5.2)$$

Si para cada i se denota con $\phi_i(t; 0, x)$ la trayectoria (solución) de (5.2) cuya condición inicial se encuentra en $x = (x_1, x_2, x_3)$ en el tiempo $t = 0$ (esto significa que $\phi_i(0; 0, x) = x$) entonces se tiene que

$$\phi_i = \begin{bmatrix} \frac{u_i}{6} t^3 + \frac{x_3}{2} t^2 + x_2 t + x_1 \\ \frac{u_i}{2} t^2 + x_3 t + x_2 \\ u_i t + x_3 \end{bmatrix}. \quad (5.3)$$

En la Figura 5.1 se muestra un ejemplo de las trayectorias del sistema (5.2). Nótese que mientras se tiene el control u_T el comportamiento de los flujos es como el del algoritmo Twisting hasta que se

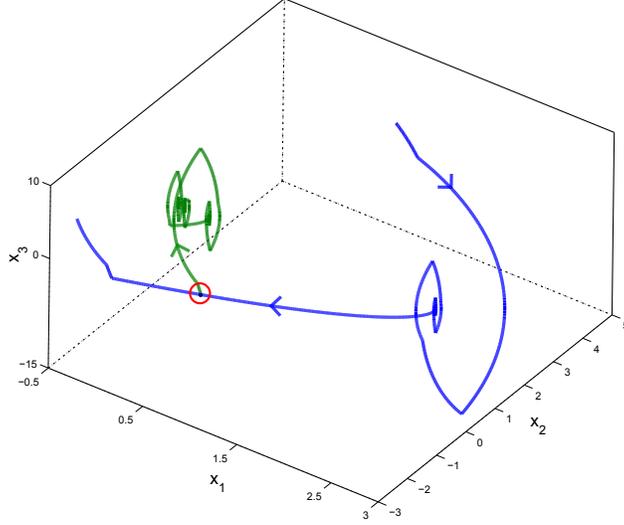


Fig. 5.2: Intersección de dos trayectorias del algoritmo AU-MTW

anulan las variables de estado x_2 y x_3 . Posteriormente el control es cambiado a u_A y la trayectoria se dirige hacia el plano $x_1 = 0$. Este proceso se repite sucesivamente hasta que se converge al origen. Téngase en cuenta que las trayectorias del sistema solo cruzan las superficies de conmutación mas nunca permanecen sobre ellas.

El sistema (5.1) en lazo cerrado con el algoritmo AU-MTW resulta ser un tipo de sistema conmutado. Esto es debido a que el sistema tiene un estado continuo x más un estado discreto λ . El estado discreto es introducido por la conmutación del algoritmo AU-MTW entre dos diferentes controles.

Entonces se puede reescribir (5.1) en lazo cerrado con el algoritmo AU-MTW como sigue:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_3 \\ \dot{x}_3 &= f(t, x) + u_\lambda \end{aligned} \tag{5.4}$$

donde el estado discreto $\lambda : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathcal{P}$, $\mathcal{P} = \{A, T\}$ tiene la regla de correspondencia siguiente:

$$\lambda(x) = \begin{cases} T, & \text{hasta que } x_2 = x_3 = 0 \\ A, & \text{hasta que } x_1 = 0 \end{cases}$$

Note que $\lambda(x(0)) = T, \forall x(0) \in \mathbb{R}^3$. Con el hecho de introducir la variable discreta se puede aseverar que el control siempre está unívocamente determinado y por lo tanto existe unicidad en las soluciones. Lo anterior es muy importante ya que como se puede apreciar en la Figura 5.2 existen puntos donde se pueden intersectar las trayectorias del sistema debido a la conmutación entre controladores.

Ahora se hará un análisis para determinar los conjuntos del espacio euclideo donde evolucionan las trayectorias del sistema correspondientes al control u_A (en adelante se dirá trayectoria de Anosov). Esto debido a la relevancia que tendrá al calcularse la FL.

De acuerdo al algoritmo AU-MTW, la condición para que empiece a actuar el control u_A es que los estados x_2 y x_3 se hayan anulado. Por lo tanto la condición inicial de cualquier trayectoria Anosov del sistema (5.2) es $x(0) = (x_1(0), x_2(0), x_3(0)) = (x_1(0), 0, 0)$. Ahora, a partir de (5.3) se

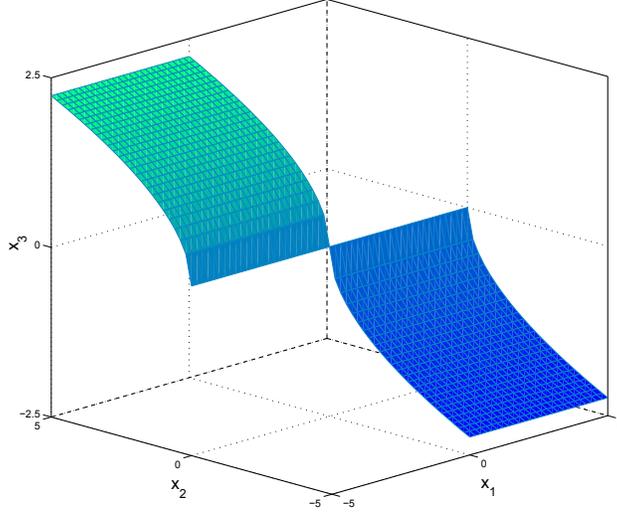


Fig. 5.3: Superficie \mathcal{S}_A que contiene las trayectorias Anosov

tienen las ecuaciones

$$\begin{aligned} x_2 &= \frac{u_A}{2}t^2 + x_3(0)t + x_2(0) = \frac{u_A}{2}t^2 \quad y \\ x_3 &= u_A t + x_3(0) = u_A t, \end{aligned}$$

de donde despejando t^2 e igualando se obtiene la ecuación no temporal

$$2u_A x_2 = x_3^2. \quad (5.5)$$

Igualmente de las soluciones del sistema (5.2) se sabe que

$$x_1 = \frac{u_A}{6}t^3 + \frac{x_3(0)}{2}t^2 + x_2(0)t + x_1(0) = \frac{u_A}{6}t^3$$

de donde es claro que si $x_1(0) > 0$, las trayectorias del sistema evolucionarán en el octante donde $x_1 > 0$, $x_2 < 0$ y $x_3 < 0$ hasta conseguir $x_1 = 0$ mientras que si $x_1(0) < 0$, las trayectorias se desarrollarán en el octante donde $x_1 < 0$, $x_2 > 0$ y $x_3 > 0$. Por lo anterior y a partir de (5.5) se puede afirmar que las trayectorias Anosov solo se mueven sobre la superficie

$$\mathcal{S}_A = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid (x_1 \leq 0, x_2, x_3 \geq 0, x_3^2 = 2k_1 x_2) \text{ ó } (x_1 \geq 0, x_2, x_3 \leq 0, x_3^2 = -2k_1 x_2)\}.$$

En la Figura 5.3 se muestra un ejemplo de esta superficie para $k_1 = 1/2$.

Análisis de las trayectorias cuando las condiciones iniciales se encuentran en el conjunto $\{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_2 > 0, x_3 > 0\}$

A continuación, se obtendrán los tiempos de tránsito t_j de las trayectorias del sistema (5.2) en cada una de las distintas regiones producidas por las superficies de conmutación del control.

Si las condiciones iniciales de (5.2) se encuentran en el conjunto $\{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_2 > 0, x_3 > 0\}$, el algoritmo AU-MTW dicta que $u(x) = u_T$ y entonces el comportamiento de las trayectorias del sistema, solo considerando las variables de estado x_2 y x_3 , está dado por el siguiente subsistema de (5.2)

$$\begin{aligned} \dot{x}_2 &= x_3 \\ \dot{x}_3 &= -k_2 \text{sign}(x_2) - k_3 \text{sign}(x_3). \end{aligned} \quad (5.6)$$

Es claro que (5.6) es un sistema de segundo orden controlado con el algoritmo Twisting, así, en tiempo finito, las trayectorias del sistema llegarán al punto $x = (x_1, 0, 0)$. Los tiempos de transito t_{T_i} de las trayectorias de (5.6) y los puntos de cruce por las superficies de conmutación, pueden ser obtenidos del análisis hecho para el algoritmo Twisting considerando las variables correspondientes.

Por otro lado, los valores que toma x_1 mientras actúa el control u_T se pueden conocer a partir de (5.3). Así, cada que las trayectorias de (5.6) cruzan por las superficies de conmutación, se tiene lo siguiente:

$$x_1(t_{T_i}) = \frac{u_T}{6}(t_{T_i})^3 + \frac{x_3(t_{T_{i-1}})}{2}(t_{T_i})^2 + x_2(t_{T_{i-1}})(t_{T_i}) + x_1(t_{T_{i-1}}).$$

Transcurrido el tiempo necesario para que las variables de estado x_2 y x_3 se anulen, x_1 tomará un valor final x_{1f_1} . En seguida, el control conmutará a $u(x) = u_A$ y las soluciones del sistema describirán una trayectoria desde el punto $x = (x_{1f_1}, 0, 0)$ hasta la coordenada $x = (0, x_{2A_1}, x_{3A_1})$. En ese momento se cambia el control a $u(x) = u_T$ repitiéndose el proceso y así sucesivamente hasta alcanzar la convergencia al origen $x = (0, 0, 0)$ (véase nuevamente la Figura 5.1). Los tiempos de transito y las coordenadas de los puntos de intersección con las superficies de conmutación se dan en la siguiente proposición.

Proposición 5.1. *Sean $x = (x_1, x_2, x_3) \in \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_2 > 0, x_3 > 0\}$ y $t = 0$ las condiciones iniciales de (5.2). Entonces se tiene que:*

- a) *Al anularse los estados x_2 y x_3 después del primer Twisting se llega al punto $x = (x_{1f_1}, 0, 0)$ donde*

$$x_{1f_1} = x_1 + \frac{x_3^3}{3(k_2 + k_3)^2} + \frac{x_2 x_3}{k_2 + k_3} + \frac{R}{3(k_2 + k_3)^2} [x_3^2 + 2(k_2 + k_3)x_2]^{3/2},$$

con

$$r = \sqrt{\frac{k_2 - k_3}{k_2 + k_3}} \quad y \quad R = \frac{1 - r^3 - r^4 + r^7}{r - r^7}.$$

- b) *El tiempo de tránsito de la trayectoria Anosov del punto $x = (x_{1f_1}, 0, 0)$ al punto $x = (0, x_{2A_1}, x_{3A_1})$ está dado por*

$$t_{A_1} = \left(\frac{6}{k_1} |x_{1f_1}| \right)^{\frac{1}{3}},$$

mientras que

$$x_{2A_1} = \frac{u_A}{2} t_{A_1}^2 \quad y \quad x_{3A_1} = u_A t_{A_1}.$$

Para los ciclos subsecuentes se tiene que:

- c) *Los valores que toma x_1 al finalizar el k -ésimo Twisting son*

$$x_{1f_k} = (-C)^{k-1} x_{1f_1}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

- d) *Los tiempos de transito durante el control u_A están dados por*

$$t_{A_j} = C^{\frac{j-1}{3}} \left(\frac{6}{k_1} |x_{1f_j}| \right)^{\frac{1}{3}}, \quad j \in \mathbb{N}$$

donde

$$C = \frac{2R [k_1^2 + k_1(k_2 + k_3)]^{3/2} + 2k_1^3 + 3k_1^2(k_2 + k_3)}{k_1(k_2 + k_3)^2}$$

e) Valores de x_2 y x_3 al transcurrir cada t_{A_j} están dados por

$$x_{2A_j} = -(-1)^j \frac{k_1}{2} t_{A_j}^2 \quad y \quad x_{3A_j} = -(-1)^j k_1 t_{A_j}.$$

5.2 Función de Lyapunov de grado homogéneo 1

En esta sección se construye una FL para (5.2) aplicando el método anteriormente utilizado. Recuerdese que el método consiste en integrar una función positiva definida de las trayectorias del sistema, así, $V(x) = \int_0^\infty W(x) d\tau$. Aquí elegiremos $W(x) = 1$.

Para simplificar la notación, defínase $T_n = \sum_{j=1}^n t_j$, con $j, n \in \mathbb{N}$ donde t_j es el j -ésimo tiempo de transito de la trayectoria del sistema a través de cada octante del espacio fase. Entonces la FL se calcula como sigue:

$$\begin{aligned} V(x) &= \int_0^\infty d\tau \\ &= \int_0^{t_1} d\tau + \int_{t_1}^{t_1+t_2} d\tau + \cdots + \int_{T_{n-2}}^{T_{n-1}} d\tau + \int_{T_{n-1}}^{T_n} d\tau + \cdots \\ &= T_\infty = \sum_{j=1}^\infty t_j. \end{aligned} \tag{5.7}$$

Si las condiciones iniciales de (5.2) se encuentran en el conjunto $\{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_2 > 0, x_3 > 0\}$, entonces los tiempos de transito t_j de la trayectoria están dados en la Proposición 5.1, nótese que los tiempos de transito t_j pueden ser separados en los correspondientes a cada uno de los controles u_T y u_A de manera que

$$V(x) = \sum_{p=1}^\infty t_{T_p} + \sum_{q=1}^\infty t_{A_q}, \tag{5.8}$$

donde t_{T_p} son los tiempos de tránsito correspondientes al control u_T y t_{A_q} son los tiempos de tránsito correspondientes al control u_A .

A partir del cálculo que se hizo de la FL de grado homogéneo uno para el algoritmo Twisting, es fácil ver que la estructura que resultará de la primera suma del lado derecho de (5.8) es una suma de funciones de la forma (3.6) esto es

$$\begin{aligned} \sum_{p=1}^\infty t_{T_p} &= \rho_1 |x_3| + \rho_2 \sqrt{x_3^2 + 2(k_2 + k_3)|x_2|} + \rho_1 \sum_{j=1}^\infty |x_{3A_j}| \\ &\quad + \rho_2 \sum_{j=1}^\infty \sqrt{x_{3A_j}^2 + 2(k_2 + k_3)|x_{2A_j}|} \\ &= \rho_1 |x_3| + \rho_2 \sqrt{x_3^2 + 2(k_2 + k_3)|x_2|} + \rho_1 k_1 \left(\frac{6}{k_1} |x_{1f_1}| \right)^{\frac{1}{3}} \sum_{j=1}^\infty C^{\frac{j-1}{3}} \\ &\quad + \rho_2 \sqrt{k_1^2 + k_1(k_2 + k_3)} \left(\frac{6}{k_1} |x_{1f_1}| \right)^{\frac{1}{3}} \sum_{j=1}^\infty C^{\frac{j-1}{3}} \end{aligned} \tag{5.9}$$

donde C es como se definió en la Proposición 5.1 y los coeficientes ρ_1, ρ_2 están dados por

$$\rho_1 = \frac{1}{k_2 + k_3}, \quad y \quad \rho_2 = \frac{2k_2\rho_1(k_2 - k_3)^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{k_2 + k_3} - \sqrt{k_2 - k_3}}.$$

A su vez, de la Proposición 5.1) es claro que la segunda suma del lado derecho de (5.8) está dada por

$$\sum_{q=1}^{\infty} t_{A_q} = \left(\frac{6}{k_1} |x_{1f_1}| \right)^{\frac{1}{3}} \sum_{q=1}^{\infty} C^{\frac{q-1}{3}}. \quad (5.10)$$

Es importante observar que una suma $\sum_{q=1}^{\infty} C^{\frac{q-1}{3}}$ es geométrica y por tanto converge a $1/(1-C^3)$ si y solo si la constante C es menor que uno. Entonces para que las sumas (5.9) y (5.10) converjan es necesario y suficiente que $C < 1$. Suponiendo que se cumple dicha condición se sustituyen (5.9) y (5.10) en (5.8) con lo que se obtiene lo siguiente:

$$V(x) = \rho_1 x_3 + \rho_2 \sqrt{x_3^2 + 2(k_2 + k_3)x_2} + \rho_3 |\Sigma_1|^{\frac{1}{3}} \quad (5.11)$$

donde $\Sigma_1 = x_{1f_1}$ y

$$\rho_3 = \frac{1 + \rho_1 k_1 + \rho_2 \sqrt{k_1^2 + k_1(k_2 + k_3)}}{(k_1/6)^{\frac{1}{3}} (1 - C^{\frac{1}{3}})}.$$

Recuérdese que (5.11) solo es válida sobre el conjunto $\{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_2 > 0, x_3 > 0\}$. Haciendo los análisis y cálculos similares para el resto del espacio tridimensional se obtienen las partes adicionales de la FL correspondientes al control u_T . Así, sobre el conjunto $\{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_2 \leq 0, x_3 \leq 0\}$

$$V(x) = \rho_1 |x_3| + \rho_2 \sqrt{x_3^2 + 2(k_2 + k_3)|x_2|} + \rho_3 |\Sigma_2|^{\frac{1}{3}}, \quad (5.12)$$

donde

$$\Sigma_2 = x_1 - \frac{x_3^3}{3(k_2 + k_3)^2} + \frac{x_2 x_3}{k_2 + k_3} - \frac{R}{3(k_2 + k_3)^2} [x_3^2 - 2(k_2 + k_3)x_2]^{3/2};$$

Para el conjunto $\{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_2 < 0, x_3 > 0\}$ se tiene

$$V(x) = -\rho_4 |x_3| + \rho_5 \sqrt{x_3^2 + 2(k_2 - k_3)|x_2|} + \rho_3 |\Sigma_3|^{1/3}, \quad (5.13)$$

donde

$$\rho_4 = \frac{1}{k_2 - k_3}, \quad \rho_5 = \frac{2k_2\rho_4(k_2 + k_3)^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{k_2 + k_3} - \sqrt{k_2 - k_3}} \quad y$$

$$\Sigma_3 = x_1 - \frac{x_3^3}{3(k_2 - k_3)^2} + \frac{x_2 x_3}{k_2 - k_3} - \frac{rR}{3(k_2 - k_3)^2} [x_3^2 - 2(k_2 - k_3)x_2]^{3/2};$$

Finalmente para el conjunto $\{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_2 > 0, x_3 < 0\}$ se tiene

$$V(x) = -\rho_4 |x_3| + \rho_5 \sqrt{x_3^2 + 2(k_2 - k_3)|x_2|} + \rho_3 |\Sigma_4|^{1/3}, \quad (5.14)$$

donde

$$\Sigma_4 = x_1 + \frac{x_3^3}{3(k_2 - k_3)^2} + \frac{x_2 x_3}{k_2 - k_3} + \frac{rR}{3(k_2 - k_3)^2} [x_3^2 + 2(k_2 - k_3)x_2]^{3/2}.$$

Falta hacer el cálculo de la FL correspondiente al control u_A . Debido a que las trayectorias Anosov solo evolucionan sobre la superficie \mathcal{S}_A esta será el dominio de la parte de la FL que se calcula a continuación.

La FL está dada por (5.7) que puede reescribirse de la manera siguiente:

$$V(x) = t_1 + \sum_{j=2}^{\infty} t_j \quad (5.15)$$

donde t_1 es el tiempo que tardan las trayectorias en ir desde cualquier punto $(x_1, x_2, x_3) \in \mathcal{S}_A$ hasta el plano $\{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 = 0\}$. De (5.3) se tiene que

$$x_1 = \frac{u_A}{6}t^3 + \frac{x_3}{2}t^2 + x_2t + x_1$$

haciendo $x_1 = 0$ y multiplicando por $\frac{6}{u_A}$ se obtiene la ecuación de tercer grado

$$t^3 + \frac{3x_3}{u_A}t^2 + \frac{6x_2}{u_A}t + \frac{6x_1}{u_A} = 0$$

que resolviendo para t considerando la restricción $2u_A x_2 = x_3^2$ da

$$t_1 = -\frac{|x_3|}{k_1} + \left(\frac{|x_3|^3}{k_1^3} + \frac{6|x_1|}{k_1} \right)^{\frac{1}{3}},$$

además, en t_1 , las variables x_2 y x_3 toman los valores

$$|x_2(t_1)| = \frac{1}{2k_1}x_3^2(t_1) \quad y \quad |x_3(t_1)| = (|x_3|^3 + 6k_1^2|x_1|)^{\frac{1}{3}}.$$

El valor de la suma $\sum_{j=2}^{\infty} t_j$ es equivalente al resultado de evaluar el punto $(0, x_2(t_1), x_3(t_1))$ en la parte de la FL correspondiente al control u_T , es decir

$$\sum_{j=2}^{\infty} t_j = V(0, x_2(t_1), x_3(t_1))$$

donde $V(\cdot)$ está dada por (5.11) si $x_2(t_1), x_3(t_1) > 0$ o por (5.12) cuando $x_2(t_1), x_3(t_1) < 0$ entonces

$$\sum_{j=2}^{\infty} t_j = \left(\rho_1 + \rho_2 \sqrt{\frac{k_1 + k_2 + k_3}{k_1}} + \frac{\rho_3 C}{(6k_1^2)^{\frac{1}{3}}} \right) (|x_3|^3 + 6k_1^2|x_1|)^{\frac{1}{3}},$$

por lo tanto la porción de la FL cuando $u(x) = u_A$ y cuyo dominio es el conjunto \mathcal{S}_A está dada por

$$V(x) = \rho_6 (6k_1^2|x_1| + |x_3|^3)^{\frac{1}{3}} - \frac{1}{k_1}|x_3|$$

donde

$$\rho_6 = \frac{1}{k_1} + \rho_1 + \rho_2 \sqrt{\frac{k_1 + k_2 + k_3}{k_1}} + \frac{\rho_3 C}{(6k_1^2)^{\frac{1}{3}}}.$$

Según los resultados anteriores la FL para el control u_T toma en todo \mathbb{R}^2 segmentado en los dominios

$$\begin{aligned}\mathcal{S}_1 &= \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_2 \geq 0, x_3 \geq 0\}, & \mathcal{S}_2 &= \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_2 \leq 0, x_3 \leq 0\}, \\ \mathcal{S}_3 &= \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_2 < 0, x_3 > 0\}, & \mathcal{S}_4 &= \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_2 > 0, x_3 < 0\}.\end{aligned}$$

Mientras que la parte de la FL para el control u_A queda definida sobre el conjunto \mathcal{S}_A definido anteriormente. A manera de resumen se enuncia el siguiente teorema.

Teorema 5.1. *Considérese el sistema (5.2) en lazo cerrado con el algoritmo AU-MTW. Defínanse*

$$r = \sqrt{\frac{k_2 - k_3}{k_2 + k_3}} \quad y \quad R = \frac{1 - r^3 - r^4 + r^7}{r - r^7}.$$

Entonces las trayectorias de (5.2) convergen en tiempo finito al origen si y solo si

$$C = \frac{2R\sqrt{k_1(k_1 + k_2 + k_3)^3} + k_1(2k_1 + 3(k_2 + k_3))}{(k_2 + k_3)^2} < 1.$$

Además la siguiente es una FL para el sistema (5.2)

$$V(x) = \begin{cases} \rho_1|x_3| + \rho_2\Theta_1 + \rho_3|\Sigma_1|^{1/3}, & x \in \mathcal{S}_1 \\ \rho_1|x_3| + \rho_2\Theta_1 + \rho_3|\Sigma_2|^{1/3}, & x \in \mathcal{S}_2 \\ -\rho_4|x_3| + \rho_5\Theta_2 + \rho_3|\Sigma_3|^{1/3}, & x \in \mathcal{S}_3 \\ -\rho_4|x_3| + \rho_5\Theta_2 + \rho_3|\Sigma_4|^{1/3}, & x \in \mathcal{S}_4 \\ \rho_6(6k_1^2|x_1| + |x_3|^3)^{\frac{1}{3}} - \frac{1}{k_1}|x_3|, & x \in \mathcal{S}_A \end{cases} \quad (5.16)$$

donde

$$\begin{aligned}\Sigma_1 &= x_1 + \rho_1 x_2 x_3 + (\rho_1^2/3)x_3^3 + (R\rho_1^2/3)\Theta_1^3, \\ \Sigma_2 &= x_1 - \rho_1 x_2 x_3 + (\rho_1^2/3)x_3^3 - (R\rho_1^2/3)\Theta_1^3, \\ \Sigma_3 &= x_1 - \rho_4 x_2 x_3 + (\rho_4^2/3)x_3^3 - (rR\rho_4^2/3)\Theta_2^3, \\ \Sigma_4 &= x_1 + \rho_4 x_2 x_3 + (\rho_4^2/3)x_3^3 + (rR\rho_4^2/3)\Theta_2^3,\end{aligned}$$

$$\Theta_1 = \sqrt{x_3^2 + 2(k_2 + k_3)|x_2|}, \quad \Theta_2 = \sqrt{x_3^2 + 2(k_2 - k_3)|x_2|},$$

$$\rho_1 = \frac{1}{k_2 + k_3}, \quad \rho_2 = \frac{2k_2\rho_1(k_2 - k_3)^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{k_2 + k_3} - \sqrt{k_2 - k_3}}, \quad \rho_3 = \frac{1 + \rho_1 k_1 + \rho_2 \sqrt{k_1^2 + k_1(k_2 + k_3)}}{(k_1/6)^{\frac{1}{3}}(1 - C^{\frac{1}{3}})},$$

$$\rho_4 = \frac{1}{k_2 - k_3}, \quad \rho_5 = \frac{2k_2\rho_4(k_2 + k_3)^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{k_2 + k_3} - \sqrt{k_2 - k_3}}, \quad y \quad \rho_6 = \frac{1}{k_1} + \rho_1 + \rho_2 \sqrt{\frac{k_1 + k_2 + k_3}{k_1}} + \frac{\rho_3 C}{(6k_1^2)^{\frac{1}{3}}}.$$

La derivada temporal de (5.16) está dada por

$$\dot{V} = -1,$$

y el tiempo de convergencia T al origen se calcula exactamente como

$$T = V(x(0)).$$

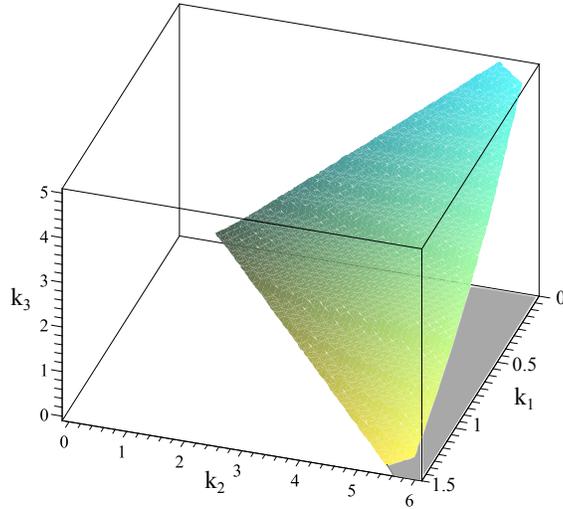


Fig. 5.4: Superficie $C = C(k_1, k_2, k_3) = 1$

La condición $C < 1$ puede resultar un tanto complicada de evaluar, sin embargo, se puede graficar la superficie implícita dada por $C = C(k_1, k_2, k_3) = 1$ como se muestra en la Figura 5.4. Así, los valores de las ganancias k_1 , k_2 , y k_3 se pueden seleccionar como cualquier tripleta de componentes positivos por debajo de la superficie $C = 1$.

Por ejemplo, de la Figura 5.4 es claro que $k_1 = 0.1$, $k_2 = 6$, y $k_3 = 1$ satisfacen la condición $C < 1$. En la Figura 5.5 se presenta una simulación del sistema (5.1) con $f(t, x) = 0$, $\forall t > 0$ y con las condiciones iniciales $x(0) = (2, 2, 2)$.

Caso perturbado

A lo largo del presente trabajo las FL han sido diseñadas para el caso nominal. Para tratar el caso con perturbaciones se ha verificado la robustez de la FL, es decir, se ha tomado la derivada de la FL a lo largo de las trayectorias del sistema perturbado y se comprueba que esta siga siendo negativa definida. Hasta el momento dicho procedimiento había resultado exitoso pero con la FL para el algoritmo AU-MTW construida anteriormente no funciona. A continuación se expone el porque de este hecho.

Sea $V_1 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ la parte de la función (5.16) que toma valores del conjunto \mathcal{S}_1 entonces

$$V_1(x) = \rho_1 |x_3| + \rho_2 \Theta_1 + \rho_3 |\Sigma_1|^{1/3}, \quad x \in \mathcal{S}_1,$$

donde Θ_1 y Σ_1 son como el Teorema 5.1. Tomando la derivada de V_1 a lo largo de las trayectorias de (5.1) se obtiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 &= \frac{\partial V_1(x)}{\partial x} \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \\ u(x) + f(t, x) \end{bmatrix} \\ &= \frac{\partial V_1(x)}{\partial x} \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \\ u(x) \end{bmatrix} + \frac{\partial V_1(x)}{\partial x} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ f(t, x) \end{bmatrix} \\ &= -1 + \frac{\partial V_1(x)}{\partial x_3} f(t, x). \end{aligned}$$

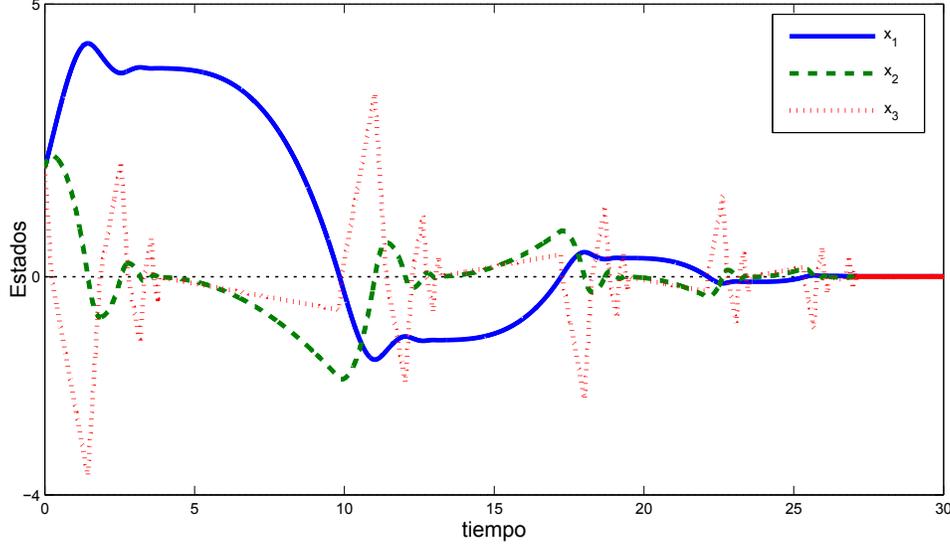


Fig. 5.5: Simulación del algoritmo AU-MTW con las ganancias $k_1 = 0.1$, $k_2 = 6$, y $k_3 = 1$

Ahora se calculará el término $\frac{\partial V_1(x)}{\partial x_3} f(t, x)$ como sigue:

$$\frac{\partial V_1(x)}{\partial x_3} f(t, x) = \left[\rho_1 + \frac{\rho_2 |x_3|}{\Theta_1} + \frac{\rho_3 \rho_1 (x_2 + \rho_1 x_3^2 + R \rho_1 x_3 \Theta_1)}{3 |\Sigma_1|^{2/3}} \right] f(t, x).$$

Como $|f(t, x)| \leq F$ y el término $\frac{|x_3|}{\Theta_1}$ cumple con

$$\frac{|x_3|}{\Theta_1} = \frac{|x_3|}{\sqrt{x_3^2 + 2(k_2 + k_3)|x_2|}} \leq 1$$

entonces se tiene que

$$\frac{\partial V_1(x)}{\partial x_3} f(t, x) \leq \left[\rho_1 + \rho_2 + \frac{\rho_3 \rho_1 (x_2 + \rho_1 x_3^2 + R \rho_1 x_3 \Theta_1)}{3 |\Sigma_1|^{2/3}} \right] F.$$

Nótese que el término

$$\frac{x_2 + \rho_1 x_3^2 + R \rho_1 x_3 \Theta_1}{3 |\Sigma_1|^{2/3}} = \frac{x_2 + \rho_1 x_3^2 + R \rho_1 x_3 \sqrt{x_3^2 + 2(k_2 + k_3)x_2}}{3 |x_1 + \rho_1 x_2 x_3 + (\rho_1^2/3)x_3^3 + (R \rho_1^2/3)(x_3^2 + 2(k_2 + k_3)x_2)^{3/2}|^{2/3}}$$

no es acotado ya que puede haber valores de (x_1, x_2, x_3) para los cuales Σ_1 se anula mientras que el numerador no.

Lo anterior implica que \dot{V} no está acotada por arriba y por lo tanto (5.16) no es una FL para el sistema perturbado (5.1). Este problema es originado por dos causas: La función se diseñó sin haber tomado en cuenta la información de la perturbación y la falta de suavidad de la función debida a su grado homogéneo bajo (grado uno). Por lo tanto para intentar corregir esta situación se podría calcular una FL de grado homogéneo mayor.

Capítulo 6

Conclusiones

Resumen general

En esta Tesis se propuso un método de diseño de Funciones de Lyapunov (FL) para una extensa clase de algoritmos por Modos Deslizantes de Orden Superior (MDOS). Los algoritmos tratables son homogéneos y tienen estructura afín a tramos cuando se considera el caso nominal. Esta última característica permitió calcular explícitamente las soluciones del sistema.

El método de diseño consiste en integrar una función positiva definida W de las soluciones ϕ del sistema nominal, es decir

$$V(x) = \int_0^t W(\phi(\tau)) d\tau.$$

Para atacar el caso perturbado se verificó la robustez de las FL ante las perturbaciones.

Se construyeron dos FL de grado homogéneo uno y tres para el algoritmo Twisting. Con estas funciones se encontraron condiciones necesarias y suficientes para la convergencia en tiempo finito del algoritmo en el caso nominal y se pudo calcular exactamente el tiempo de convergencia al origen. Para el caso perturbado solo se encontraron condiciones suficientes y la estimación del tiempo de convergencia.

Para el algoritmo Terminal se encontraron FL de grados uno y tres para sus distintos comportamientos. Con ellas se pudo calcular exactamente el tiempo de convergencia al origen en el caso nominal. Para el caso perturbado fueron halladas condiciones sobre las ganancias α y β para la convergencia en tiempo finito.

Se estudió el algoritmo por MDOS de tercer orden AU-MTW y se construyó una FL para el caso nominal. Con esta función se calculó el tiempo de convergencia y se encontró la condición necesaria y suficiente para la convergencia en tiempo finito. La función no resultó robusta ante las perturbaciones aquí tratadas.

Conclusiones

En este trabajo se dió un método de diseño de FL para una clase de algoritmos de control por MDOS. El método sistemático está basado en las pruebas de los Teoremas Conversos de Lyapunov y teóricamente podría ser aplicado a cualquier sistema dinámico, sin embargo se exige que las soluciones del sistema sean conocidas. Esta restricción queda resuelta para los algoritmos por MDOS homogéneos aquí tratados ya que se aprovecha su estructura afín por tramos para obtener sus soluciones explícitas.

Se ha probado que el método no está restringido por el orden del sistema. A pesar de ello la complejidad de los cálculos aumenta conforme se incrementa dicho orden.

Las FL obtenidas a través del método pueden ser homogéneas y su grado ser elegido durante el proceso de construcción. Al igual, se garantiza que las funciones resultan continuas en todo el dominio. También son diferenciables excepto tal vez sobre las superficies de conmutación del control. La falta de diferenciabilidad sobre superficies que contienen trayectorias del sistema puede resolverse si se construye una función de grado homogéneo mayor para incrementar su suavidad.

A pesar que las funciones son construidas para el sistema en su forma nominal, estas pueden ser útiles en el caso perturbado, tan solo basta verificar su robustez. Una desventaja de las funciones diseñadas es que, para el caso perturbado, pueden imponer condiciones conservadoras sobre las ganancias del controlador. Sin embargo en el caso nominal el método proporciona las condiciones necesarias y suficientes para lograr la convergencia al origen en tiempo finito.

Las FL obtenidas para el algoritmo Twisting permiten estimar el tiempo de convergencia al origen del sistema e incluso calcularlo exactamente a diferencia de las pruebas basadas en argumentos geométricos. El método de diseño, permitió que por primera vez se presentaran FL para el algoritmo Terminal y un algoritmo de Tercer Orden, además con estas funciones se pudo calcular el tiempo de convergencia del algoritmo.

Trabajo futuro

El trabajo mostrado en esta Tesis puede extenderse en las siguientes direcciones:

- Continuar con el diseño de FL para otros algoritmos por MDOS
- Generar familias de FL a partir de las encontradas a través del método
- Investigar sobre como incluir la información de la perturbación durante el proceso de construcción de la FL. Esto con el fin de obtener ganancias del controlador menos restrictivas o bien que las condiciones para la convergencia sean necesarias y suficientes en el caso perturbado.

Apéndice A

Algoritmo Twisting

Simetría del algoritmo

Las soluciones en el tiempo del sistema (3.3) están dadas por

$$x_1 = \frac{1}{2}ut^2 + x_{20}t + x_{10} \quad (\text{A.1})$$

$$x_2 = ut + x_{20}. \quad (\text{A.2})$$

Se ha utilizado la notación $z_m(t_n) = z_{mn}$. Si se combinan las ecuaciones (A.1) y (A.2) se obtiene

$$x_1 - x_{10} = \frac{1}{2u}(x_2^2 - x_{20}^2) \quad (\text{A.3})$$

que es una ecuación no temporal que describe las trayectorias del sistema (3.1).

Para el cuadrante I $u = -(k_1 + k_2)$, por lo que podemos reescribir las ecuaciones (A.1) y (A.2) de la forma

$$x_1 = -\frac{1}{2}(k_1 + k_2)t^2 + x_{20}t + x_{10} \quad (\text{A.4})$$

$$x_2 = -(k_1 + k_2)t + x_{20}. \quad (\text{A.5})$$

Para el cuadrante III $u = (k_1 + k_2)$, por lo que podemos reescribir las ecuaciones (A.1) y (A.2) de la forma

$$x_1 = \frac{1}{2}(k_1 + k_2)t^2 + x_{20}t + x_{10} \quad (\text{A.6})$$

$$x_2 = (k_1 + k_2)t + x_{20}. \quad (\text{A.7})$$

Ahora, si sustituimos x_1 por $-x_1$, x_2 por $-x_2$, x_{10} por $-x_{10}$ y x_{20} por $-x_{20}$ en (A.4) y (A.5), obtenemos exactamente las ecuaciones (A.6) y (A.7). Similarmente ocurre para los cuadrantes II y IV, por lo que podemos decir que la traza de (x_1, x_2) en el plano fase es simétrica con respecto al origen (Figura A.1), hecho que nos ayudará para simplificar el análisis, ya que los resultados para los cuadrantes I y II son simétricamente equivalentes para los cuadrantes III y IV respectivamente.

Tiempos de tránsito y coordenadas de cruce por \mathcal{R}_1 y \mathcal{R}_2

Prueba de la Proposición 3.1

La Proposición 3.1 da los tiempos de tránsito y las coordenadas de cruce por las superficies de conmutación de las trayectorias del sistema cuando las condiciones iniciales se encuentran en el cuadrante 1 ($\{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 > 0, x_2 > 0\}$). A continuación se prueba dicha proposición.

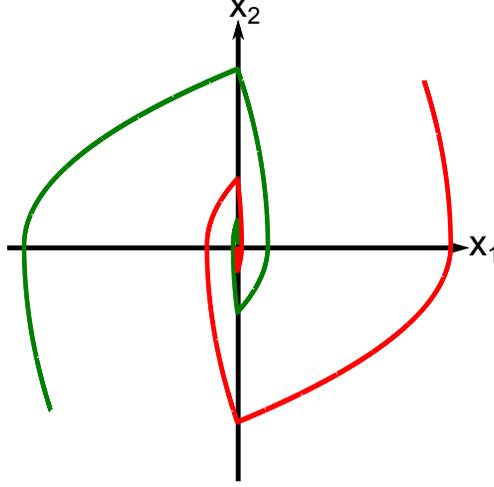


Fig. A.1: Simetría de las trayectorias del algoritmo Twisting

Demostración. Para realizar la prueba, se reescriben las ecuaciones de la Proposición 3.1 de la manera siguiente

$$\begin{aligned}
 t_i &= \begin{cases} \frac{x_{20}}{k_1+k_2}, & i = 1 \\ r^{\frac{i-4}{2}} \frac{[x_{20}^2+2(k_1+k_2)x_{10}]^{1/2}}{k_1+k_2}, & i \text{ par} \\ r^{\frac{i-1}{2}} \frac{[x_{20}^2+2(k_1+k_2)x_{10}]^{1/2}}{k_1+k_2}, & i \neq 1 \text{ impar} \end{cases} \\
 x_{1,i} &= \begin{cases} (-r^2)^{\frac{i-1}{2}} \frac{x_{20}^2+2(k_1+k_2)x_{10}}{2(k_1+k_2)}, & i \text{ impar} \\ 0, & i \text{ par} \end{cases} \\
 x_{2,i} &= \begin{cases} (-r)^{\frac{i}{2}} [x_{20}^2+2(k_1+k_2)x_{10}]^{1/2}, & i \text{ par} \\ 0, & i \text{ impar} \end{cases}
 \end{aligned}$$

así, la demostración se hará por inducción sobre i

- Para $i = 1$, es inmediato ver que al cruce por la recta $x_2 = 0$ se tienen que

$$x_{2,1} = 0$$

que sustituyendo en la ecuación (A.2) permite conocer el tiempo de transito $t_1 = -\frac{x_{20}}{u}$. En el cuadrante I $u = -(k_1 + k_2)$ por lo tanto

$$t_1 = \frac{x_{20}}{k_1 + k_2}.$$

Por otro lado, de la ecuación (A.3) se tiene que $x_{11} - x_{10} = \frac{1}{2u} (x_{21}^2 - x_{20}^2)$ y de aquí se obtiene

$$x_{11} = \frac{x_{20}^2 + 2(k_1 + k_2)x_{10}}{2(k_1 + k_2)}.$$

- Suponiendo que la proposición se cumple para $i = k$ se tiene que

$$\begin{aligned}
t_k &= \begin{cases} r^{\frac{k-4}{2}} \frac{[x_{20}^2 + 2(k_1 + k_2)x_{10}]^{1/2}}{k_1 + k_2}, & k \text{ par} \\ r^{\frac{k-1}{2}} \frac{[x_{20}^2 + 2(k_1 + k_2)x_{10}]^{1/2}}{k_1 + k_2}, & k \text{ impar} \end{cases} \\
x_{1,k} &= \begin{cases} (-r^2)^{\frac{k-1}{2}} \frac{x_{20}^2 + 2(k_1 + k_2)x_{10}}{2(k_1 + k_2)}, & k \text{ impar} \\ 0, & k \text{ par} \end{cases} \\
x_{2,k} &= \begin{cases} (-r)^{\frac{k}{2}} [x_{20}^2 + 2(k_1 + k_2)x_{10}]^{1/2}, & k \text{ par} \\ 0, & k \text{ impar} \end{cases}
\end{aligned}$$

- Para completar la prueba existen los casos siguientes:

- a) k impar y $x_{1k} > 0$ - b) k impar y $x_{1k} < 0$
- c) k par y $x_{2k} > 0$ - d) k par y $x_{2k} < 0$

Se hará la prueba con el primero, los otros tres son análogos. Se sabe que para k impar $x_{2k} = 0$ y a partir de aquí las trayectorias del sistema viajan a través de del cuadrante IV, lo que implica que $u = -(k_1 - k_2)$, y llegarán a la recta $x_1 = 0$ en un tiempo t_{k+1} , por lo tanto

$$x_{1,k+1} = 0.$$

Ahora, de la ecuación (A.3) se tiene que $x_{1,k+1} - x_{1,k} = \frac{1}{2u} (x_{2,k+1}^2 - x_{2,k}^2)$ de donde se tiene que

$$\begin{aligned}
x_{2,k+1} &= - \left[2(k_1 - k_2) (-r^2)^{\frac{k-1}{2}} \frac{x_{20}^2 + 2(k_1 + k_2)x_{10}}{2(k_1 + k_2)} \right]^{1/2} \\
&= - \left[r^2 (-r^2)^{\frac{k-1}{2}} (x_{20}^2 + 2(k_1 + k_2)x_{10}) \right]^{1/2} \\
&= (-r)^{\frac{k+1}{2}} [x_{20}^2 + 2(k_1 + k_2)x_{10}]^{1/2}
\end{aligned}$$

en el cálculo anterior se utilizó el hecho de que $\frac{k+1}{2}$ es impar para este caso.

De la ecuación (A.2) se obtiene $x_{2,k+1} = ut_{k+1} + x_{2k}$ por lo tanto

$$\begin{aligned}
t_{k+1} &= -\frac{1}{k_1 - k_2} (x_{2,k+1} - 0) \\
&= \frac{(-r)^{\frac{k+1}{2}}}{k_1 - k_2} [x_{20}^2 + 2(k_1 + k_2)x_{10}]^{1/2} \\
&= \frac{r^2 (-r)^{\frac{k+1}{2} - 2}}{k_1 - k_2} [x_{20}^2 + 2(k_1 + k_2)x_{10}]^{1/2} \\
&= (-r)^{\frac{(k+1)-4}{2}} \frac{[x_{20}^2 + 2(k_1 + k_2)x_{10}]^{1/2}}{k_1 + k_2}.
\end{aligned}$$

□

Supóngase que las condiciones iniciales x_{10} y x_{20} se localizan en el cuadrante 2. A partir del tiempo inicial t_0 , la traza de (x_1, x_2) intersectará a la recta $x_1 = 0$ en un tiempo t_1 en la coordenada $(x_1, x_2) = (x_{11}, x_{21})$, posteriormente, de la recta $x_1 = 0$ a la recta $x_2 = 0$ pasará un tiempo t_2 y se llegará a las coordenadas $(x_1, x_2) = (x_{12}, x_{22})$ y así sucesivamente. Para conocer estos valores se da la siguiente proposición.

Proposición A.1. *Considerese el sistema (3.1) con las condiciones iniciales $(x_{11}, x_{21}) \in \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 \geq 0, x_2 \leq 0\}$. Entonces para toda $i \in \mathbb{N}$, los tiempos de transito t_i y las coordenadas $(x_{1,i}, x_{2,i})$ en los cruces por las rectas $x_1 = 0$ y $x_2 = 0$ están dados por*

$$\begin{aligned}
t_1 &= -\frac{x_{20}}{k_1 - k_2} + \frac{[x_{20}^2 - 2(k_1 - k_2)x_{10}]^{1/2}}{k_1 - k_2}, \\
t_{2i} &= r^{i+1} \frac{[x_{20}^2 - 2(k_1 - k_2)x_{10}]^{1/2}}{k_1 - k_2}, \\
t_{2i+1} &= r^i \frac{[x_{20}^2 - 2(k_1 - k_2)x_{10}]^{1/2}}{k_1 - k_2}, \\
x_{1,2i} &= -(-r^2)^i \frac{x_{20}^2 - 2(k_1 - k_2)x_{10}}{2(k_1 - k_2)}, \\
x_{2,2i-1} &= (-r)^{i-1} [x_{20}^2 - 2(k_1 - k_2)x_{10}]^{1/2}, \\
x_{1,2i-1} &= 0 \quad \text{y} \\
x_{2,2i} &= 0.
\end{aligned}$$

Demostración. Para realizar la prueba, se reescriben las ecuaciones de la proposición anterior de la manera siguiente

$$\begin{aligned}
t_i &= \begin{cases} -\frac{x_{20}}{k_1 - k_2} + \frac{[x_{20}^2 - 2(k_1 - k_2)x_{10}]^{1/2}}{k_1 - k_2}, & i = 1 \\ r^{\frac{i+2}{2}} \frac{[x_{20}^2 - 2(k_1 - k_2)x_{10}]^{1/2}}{k_1 - k_2}, & i \text{ par} \\ r^{\frac{i-1}{2}} \frac{[x_{20}^2 - 2(k_1 - k_2)x_{10}]^{1/2}}{k_1 - k_2}, & i \neq 1 \text{ impar} \end{cases} \\
x_{1,i} &= \begin{cases} -(-r^2)^{\frac{i}{2}} \frac{x_{20}^2 - 2(k_1 - k_2)x_{10}}{2(k_1 - k_2)}, & i \text{ par} \\ 0, & i \text{ impar} \end{cases} \\
x_{2,i} &= \begin{cases} (-r)^{\frac{i-1}{2}} [x_{20}^2 - 2(k_1 - k_2)x_{10}]^{1/2}, & i \text{ impar} \\ 0, & i \text{ par} \end{cases}
\end{aligned}$$

así, la demostración se hará por inducción sobre i

- Para $i = 1$, es inmediato ver que al cruce por la recta $x_1 = 0$ se tienen que

$$x_{1,1} = 0$$

que sustituyendo en la ecuación (A.3) se tiene que $x_{11} - x_{10} = \frac{1}{2u} (x_{21}^2 - x_{20}^2)$ de donde

$$x_{21} = [x_{20}^2 - 2(k_1 - k_2)x_{10}]^{1/2}$$

ya que en el cuadrante II se tiene que $u = k_1 - k_2$.

Por otro lado, usando la ecuación (A.2) se obtiene $x_{21} = ut_1 + x_{20}$ y de aquí que el tiempo de tránsito es

$$t_1 = \frac{x_{21} - x_{20}}{u} = \frac{-x_{20} + [x_{20}^2 - 2(k_1 - k_2)x_{10}]^{1/2}}{k_1 - k_2}.$$

- Suponiendo que la proposición se cumple para $i = k$ se tiene que

$$\begin{aligned} t_k &= \begin{cases} r^{\frac{k+2}{2}} \frac{[x_{20}^2 - 2(k_1 - k_2)x_{10}]^{1/2}}{k_1 - k_2}, & k \text{ par} \\ r^{\frac{k-1}{2}} \frac{[x_{20}^2 - 2(k_1 - k_2)x_{10}]^{1/2}}{k_1 - k_2}, & k \text{ impar} \end{cases} \\ x_{1,k} &= \begin{cases} (-r^2)^{\frac{k-2}{2}} \frac{x_{20}^2 - 2(k_1 - k_2)x_{10}}{2(k_1 - k_2)}, & k \text{ par} \\ 0, & k \text{ impar} \end{cases} \\ x_{2,k} &= \begin{cases} (-r)^{\frac{k-1}{2}} [x_{20}^2 - 2(k_1 - k_2)x_{10}]^{1/2}, & k \text{ impar} \\ 0, & k \text{ par} \end{cases} \end{aligned}$$

- Para completar la prueba existen los casos siguientes:

- a) k impar y $x_{2k} > 0$
- b) k impar y $x_{2k} < 0$
- c) k par y $x_{1k} > 0$
- d) k par y $x_{1k} < 0$

Se hará la prueba con el primero, los otros tres son análogos. Se sabe que para k impar $x_{1k} = 0$ y a partir de aquí las trayectorias del sistema viajan a través de del cuadrante I, lo que implica que $u = -(k_1 + k_2)$, y llegarán a la recta $x_2 = 0$ en un tiempo t_{k+1} , por lo tanto

$$x_{2,k+1} = 0.$$

De la ecuación (A.2) se obtiene $x_{2,k+1} = ut_{k+1} + x_{2k}$ por lo tanto

$$\begin{aligned} t_{k+1} &= -\frac{x_{2,k}}{u} \\ &= \frac{(-r)^{\frac{k-1}{2}}}{k_1 + k_2} [x_{20}^2 - 2(k_1 - k_2)x_{10}]^{1/2} \\ &= \frac{r^{-2}(-r)^{\frac{k-1}{2}+2}}{k_1 + k_2} [x_{20}^2 - 2(k_1 - k_2)x_{10}]^{1/2} \\ &= (-r)^{\frac{(k+1)+2}{2}} \frac{[x_{20}^2 - 2(k_1 - k_2)x_{10}]^{1/2}}{k_1 - k_2}. \end{aligned}$$

Ahora, de la ecuación (A.3) se tiene $x_{1,k+1} - x_{1,k} = \frac{1}{2u} (x_{2,k+1}^2 - x_{2,k}^2)$ donde al sustituir los valores conocidos resulta en

$$\begin{aligned} x_{1,k+1} &= \frac{x_{2,k}^2}{k_1 + k_2} \\ &= \frac{(-r)^{k-1} (x_{20}^2 - 2(k_1 - k_2)x_{10})}{k_1 + k_2} \\ &= \frac{(r^2)^{\frac{k-1}{2}} (x_{20}^2 - 2(k_1 - k_2)x_{10})}{k_1 + k_2} \\ &= \frac{(-r^2)^{\frac{(k+1)-2}{2}} (x_{20}^2 - 2(k_1 - k_2)x_{10})}{k_1 + k_2} \end{aligned}$$

en el último paso del cálculo anterior se utilizó el hecho de que $k - 1$ es siempre par en este caso. □

Demostración del Teorema 3.2

Aplicando el método de diseño de FL al sistema (3.3) con $W(x) = |x_1| + x_2^2$ se obtiene la FL para (3.3):

$$V(x) = \begin{cases} \eta_1 x_2^3 + \eta_2 x_1 x_2 + \eta_3 [x_2^2 + 2(k_1 + k_2)x_1]^{\frac{3}{2}}, & x_1 > 0, x_2 > 0 \\ -\eta_4 x_2^3 + \eta_5 x_1 x_2 + \eta_6 [x_2^2 + 2(k_1 - k_2)x_1]^{\frac{3}{2}}, & x_1 \geq 0, x_2 \leq 0 \\ -\eta_1 x_2^3 + \eta_2 x_1 x_2 + \eta_3 [x_2^2 - 2(k_1 + k_2)x_1]^{\frac{3}{2}}, & x_1 < 0, x_2 < 0 \\ \eta_4 x_2^3 + \eta_5 x_1 x_2 + \eta_6 [x_2^2 - 2(k_1 - k_2)x_1]^{\frac{3}{2}}, & x_1 \leq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

que debido a la simetría respecto al origen del algoritmo se puede reescribir como sigue:

$$V(x) = \begin{cases} \eta_1 |x_2|^3 + \eta_2 x_1 x_2 + \eta_3 [x_2^2 + 2(k_1 + k_2)|x_1|]^{\frac{3}{2}}, & x_1 x_2 > 0 \\ \eta_4 |x_2|^3 + \eta_5 x_1 x_2 + \eta_6 [x_2^2 + 2(k_1 - k_2)|x_1|]^{\frac{3}{2}}, & x_1 x_2 \leq 0 \end{cases} \quad (\text{A.8})$$

donde

$$\eta_1 = \frac{k_1 + k_2 + 1}{3(k_1 + k_2)^2}, \quad \eta_2 = \frac{1}{k_1 + k_2}, \quad \eta_3 = \frac{2\eta_2^2 [k_1^2(k_1 + 1) - k_2^2(k_1 - 1)]}{3\sqrt{k_1 - k_2} [(k_1 + k_2)^{\frac{3}{2}} - (k_1 - k_2)^{\frac{3}{2}}]},$$

$$\eta_4 = -\frac{k_1 - k_2 + 1}{3(k_1 - k_2)^2}, \quad \eta_5 = \frac{1}{k_1 - k_2} \quad \text{y} \quad \eta_6 = \frac{2\eta_5^2 [k_1^2(k_1 + 1) - k_2^2(k_1 - 1)]}{3\sqrt{k_1 + k_2} [(k_1 + k_2)^{\frac{3}{2}} - (k_1 - k_2)^{\frac{3}{2}}]}.$$

Como indica el método, la derivada de $V(x)$ a lo largo de las trayectorias de (3.3) es

$$\dot{V} = -|x_1| - x_2^2.$$

Caso perturbado

Ahora se procede a verificar si (A.8) sirve como FL para el sistema perturbado (3.1) y si es así, que condiciones deben ser satisfechas.

Tomando la derivada de (A.8) a lo largo de las trayectorias del sistema (3.1) sobre el conjunto $\{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 x_2 > 0\}$ se tiene que

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \frac{\partial}{\partial x} V(x) \cdot \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \eta_2 |x_2| \text{sign}(x_1) + \frac{3\eta_3}{2} \sqrt{x_2^2 + 2(k_1 + k_2)|x_1|} 2(k_1 + k_2) \text{sign}(x_1) \\ 3\eta_1 x_2^2 \text{sign}(x_2) + \eta_2 |x_1| \text{sign}(x_2) + \frac{3\eta_3}{2} \sqrt{x_2^2 + 2(k_1 + k_2)|x_1|} 2x_2 \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} x_2 \\ f(t, x) + u \end{bmatrix} \\ &= -|x_1| - x_2^2 + \begin{bmatrix} 3\eta_1 x_2^2 \text{sign}(x_2) + \eta_2 |x_1| \text{sign}(x_2) + \frac{3\eta_3}{2} \sqrt{x_2^2 + 2(k_1 + k_2)|x_1|} 2x_2 \end{bmatrix} f(t, x) \\ &\leq -|x_1| - x_2^2 + \begin{bmatrix} 3\eta_1 x_2^2 + \eta_2 |x_1| + 3\eta_3 |x_2| \sqrt{x_2^2 + 2(k_1 + k_2)|x_1|} \end{bmatrix} F \\ &\leq (\eta_2 F - 1)|x_1| + (3\eta_1 F - 1)x_2^2 + 3\eta_3 F |x_2| \sqrt{x_2^2 + 2(k_1 + k_2)|x_1|} \end{aligned}$$

Ahora, supongamos que se eligen k_1 y k_2 de tal forma que se cumple lo siguiente

$$\frac{1}{3(\eta_1 + \eta_3)} > F \quad \text{y} \quad \frac{(k_1 + k_2)\eta_2}{\eta_2 + 3(k_1 + k_2)\eta_3} > F,$$

de aquí que

$$-3\eta_1 F + 1 > 3\eta_3 F \quad \text{y} \quad -\eta_2 F + (k_1 + k_2)\eta_2 > 3(k_1 + k_2)\eta_3 F,$$

además, debido a la elección de k_1 y k_2 , resulta que $3\eta_1 F - 1 < 0$ y que $\eta_2 F - (k_1 + k_2)\eta_2 < 0$, entonces es válido lo siguiente

$$(3\eta_1 F - 1)^2 > 9\eta_3^2 F^2 \quad \text{y} \quad 2(3\eta_1 F - 1)(\eta_2 F - (k_1 + k_2)\eta_2) > 18(k_1 + k_2)\eta_3^2 F^2,$$

de modo que si se define $A = 3\eta_1 F - 1$ y $B = \eta_2 F - (k_1 + k_2)\eta_2$ se tiene lo siguiente

$$A^2 x_2^4 + 2AB|x_1|x_2^2 > 9\eta_3^2 F^2 x_2^4 + 18(k_1 + k_2)\eta_3^2 F^2 |x_1|x_2^2,$$

de aquí es claro que

$$A^2 x_2^4 + 2AB|x_1|x_2^2 + B^2 x_1^2 > 9\eta_3^2 F^2 x_2^2 (x_2^2 + 2(k_1 + k_2)|x_1|),$$

lo que es equivalente a

$$(-Ax_2^2 - B|x_1|)^2 > \left(3\eta_3 F|x_2| (x_2^2 + 2(k_1 + k_2)|x_1|)^{1/2}\right)^2,$$

tomando la raíz cuadrada en ambos lados de la desigualdad anterior se tiene que

$$-Ax_2^2 - B|x_1| > 3\eta_3 F|x_2| (x_2^2 + 2(k_1 + k_2)|x_1|)^{1/2},$$

y por lo tanto

$$Ax_2^2 + B|x_1| + 3\eta_3 F|x_2| (x_2^2 + 2(k_1 + k_2)|x_1|)^{1/2} < 0,$$

con lo que se ha demostrado que $\dot{V} < 0$ sobre el conjunto $\{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 x_2 > 0\}$ siempre que se elijan k_1 y k_2 de tal forma que

$$F < \min \left\{ \frac{1}{3(\eta_1 + \eta_3)}, \frac{(k_1 + k_2)\eta_2}{\eta_2 + 3(k_1 + k_2)\eta_3} \right\}.$$

Haciendo un análisis similar sobre el conjunto $\{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 x_2 \leq 0\}$, se tiene que $\dot{V} < 0$ siempre que se elijan k_1 y k_2 de tal forma que

$$F < \min \left\{ \frac{1}{3(\eta_6 - \eta_4)}, \frac{1}{3(k_1 - k_2)\eta_6 - \eta_5} \right\}.$$

Se puede probar que

$$\frac{1}{3(\eta_6 - \eta_4)} < \frac{1}{3(\eta_1 + \eta_3)} \quad \text{y} \quad \frac{1}{3(k_1 - k_2)\eta_6 - \eta_5} < \frac{(k_1 + k_2)\eta_2}{\eta_2 + 3(k_1 + k_2)\eta_3},$$

así, por transitividad se puede asegurar que $\dot{V} < 0$ siempre que se elijan k_1 y k_2 de tal forma que

$$\min \left\{ \frac{1}{3(\eta_6 - \eta_4)}, \frac{1}{3(k_1 - k_2)\eta_6 - \eta_5} \right\} > F,$$

lo que demuestra que la función (A.8) es una Función de Lyapunov para el sistema (3.1).

Apéndice B

Algoritmo Terminal

Sea el sistema (4.3) reescrito de la siguiente manera:

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad (\text{B.1})$$

$$\dot{x}_2 = u \quad (\text{B.2})$$

donde u está dada por el algoritmo Terminal (4.2).

Las soluciones del sistema (4.3) con las condiciones iniciales $x(0) = (x_{10}, x_{20})$ están dadas por

$$x_1 = \frac{1}{2}ut^2 + x_{20}t + x_{10} \quad (\text{B.3})$$

$$x_2 = ut + x_{20}. \quad (\text{B.4})$$

Tomando el cociente de las ecuaciones (B.1) y (B.2) se tiene que $\frac{\dot{x}_1}{\dot{x}_2} = \frac{x_2}{u}$, multiplicando ambos lados de la igualdad anterior por \dot{x}_2 queda

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{x_2}{u} \frac{dx_2}{dt}, \quad (\text{B.5})$$

considerando la igualdad $x_2 \frac{dx_2}{dt} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (x_2^2)$ se integran ambos lados de (B.5) con respecto al tiempo para obtener

$$\int_{t_0}^t \frac{dx_1}{dt} = \frac{1}{2u} \int_{t_0}^t \frac{d}{dt} (x_2^2)$$

que por el Teorema Fundamental del Cálculo resulta en

$$x_1 - x_{10} = \frac{1}{2u} (x_2^2 - x_{20}^2)$$

de donde se consiguen las ecuaciones no temporales (que definen las trayectorias del sistema) siguientes:

$$x_1 = \frac{1}{2u} (x_2^2 - x_{20}^2) + x_{10} \quad (\text{B.6})$$

$$x_2^2 = 2u(x_1 - x_{10}) + x_{20}^2. \quad (\text{B.7})$$

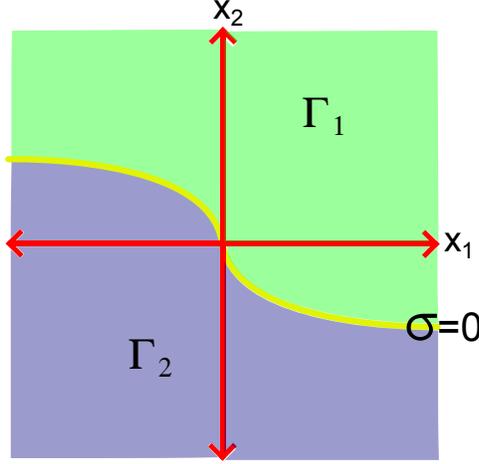


Fig. B.1: Plano fase para el algoritmo Terminal

Tiempos de tránsito y coordenadas de cruce por la superficie de conmutación. Caso: $\beta^2 > 2\alpha$

Nótese que la gráfica de $\sigma = 0$ es decir $x_2 = -\beta|x_1|^{1/2} \text{sign}(x_1)$ divide al plano fase (x_1, x_2) en dos secciones a las que se nombrará como Γ_1 y Γ_2 (Figura B.1), es decir $\Gamma_1 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid \sigma > 0\}$ y $\Gamma_2 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid \sigma < 0\}$.

Ahora, se investigará el valor que toma el par ordenado $(x_1, x_2) = (x_{11}, x_{21})$ cuando las trayectorias del sistema (B.1,B.2) intersectan a $\sigma = 0$, para esto, se analizarán los siguientes casos:

- Si $(x_{10}, x_{20}) \in \Gamma_1$ las trayectorias del sistema intersectarán a $\sigma = 0$ donde $x_1 < 0$ y $x_2 > 0$ por lo tanto podemos reescribir la ecuación $x_2 = -\beta|x_1|^{1/2} \text{sign}(x_1)$ como

$$x_2^2 = \beta^2 x_1. \quad (\text{B.8})$$

Para encontrar x_{11} se sustituye (B.7) en (B.8), así se tiene que $2u(x_{11} - x_{10}) + x_{20}^2 = \beta^2 x_{11}$, despejando x_{11} y tomando en cuenta que en Γ_1 , $u = -\alpha$

$$x_{11} = \frac{x_{20}^2 + 2\alpha x_{10}}{\beta^2 + 2\alpha}. \quad (\text{B.9})$$

Para encontrar x_{21} se sustituye (B.6) en (B.8), así se tiene que $x_{21}^2 = \beta^2 \left[\frac{1}{2u} (x_{21}^2 - x_{20}^2) + x_{10} \right]$, despejando x_{21} y tomando en cuenta que en Γ_1 , $u = -\alpha$

$$x_{21} = -\beta \left(\frac{x_{20}^2 + 2\alpha x_{10}}{\beta^2 + 2\alpha} \right)^{1/2}. \quad (\text{B.10})$$

- Si $(x_{10}, x_{20}) \in \Gamma_2$ las trayectorias del sistema intersectarán a $\sigma = 0$ donde $x_1 < 0$ y $x_2 > 0$ por lo tanto podemos reescribir la ecuación $x_2 = -\beta|x_1|^{1/2} \text{sign}(x_1)$ como

$$x_2^2 = -\beta^2 x_1. \quad (\text{B.11})$$

Para encontrar x_{11} se sustituye (B.7) en (B.11), así se tiene que $2u(x_{11} - x_{10}) + x_{20}^2 = -\beta^2 x_{11}$, despejando x_{11} y tomando en cuenta que en Γ_2 , $u = \alpha$

$$x_{11} = -\frac{x_{20}^2 - 2\alpha x_{10}}{\beta^2 + 2\alpha}. \quad (\text{B.12})$$

Para encontrar x_{21} se sustituye (B.6) en (B.11), así se tiene que $x_{21}^2 = -\beta^2 \left[\frac{1}{2u} (x_{21}^2 - x_{20}^2) + x_{10} \right]$, despejando x_{21} y tomando en cuenta que en Γ_2 , $u = \alpha$

$$x_{21} = \beta \left(\frac{x_{20}^2 - 2\alpha x_{10}}{\beta^2 + 2\alpha} \right)^{1/2}. \quad (\text{B.13})$$

Para calcular el tiempo de transito t_1 de Γ_1 a $\sigma = 0$, se tiene de (B.4) que $x_{21} = -\alpha t_1 + x_{20}$, combinando con (B.10) y despejando t_1

$$t_1 = \frac{1}{\alpha} \left[x_{20} + \beta \left(\frac{x_{20}^2 + 2\alpha x_{10}}{\beta^2 + 2\alpha} \right)^{1/2} \right]. \quad (\text{B.14})$$

De manera análoga, el tiempo de tránsito de Γ_2 a $\sigma = 0$ es

$$t_1 = \frac{1}{\alpha} \left[-x_{20} + \beta \left(\frac{x_{20}^2 - 2\alpha x_{10}}{\beta^2 + 2\alpha} \right)^{1/2} \right]. \quad (\text{B.15})$$

Los valores de las intersecciones sucesivas se dan en las siguientes proposiciones.

Condiciones iniciales sobre Γ_1

Proposición B.1. *Sea (B.1,B.2) con la condición inicial $x(0) = (x_{10}, x_{20}) \in \Gamma_1$ y defínase $C = \sqrt{\frac{\beta^2 - 2\alpha}{\beta^2 + 2\alpha}}$. Entonces se cumple lo siguiente:*

a) $\forall i \in \mathbb{N}$, los valores de x_1 y x_2 en cada cruce por $\sigma = 0$ están dados por

$$x_{1,i} = (-C)^{i-1} \left(\frac{x_{20}^2 + 2\alpha x_{10}}{\beta^2 + 2\alpha} \right), \quad x_{2,i} = (-1)^i (C)^{i-1} \beta \left(\frac{x_{20}^2 + 2\alpha x_{10}}{\beta^2 + 2\alpha} \right)^{1/2}.$$

b) Los tiempos de transito a $\sigma = 0$ están dados por

$$t_1 = \frac{1}{\alpha} \left[x_2 + \beta \left(\frac{x_2^2 + 2\alpha x_1}{\beta^2 + 2\alpha} \right)^{1/2} \right], \quad t_2 = \frac{\beta}{\alpha} (1 + C) \left(\frac{x_2^2 + 2\alpha x_1}{\beta^2 + 2\alpha} \right)^{1/2}$$

$$t_i = t_{i-1}C, \quad \forall i \in \{3, 4, \dots, n\}.$$

Demostración. La prueba se hará por inducción, empezando por el inciso a). Sea \mathcal{S} el conjunto de los enteros positivos pares i para los cuales

$$\begin{aligned} x_{1,i} &= (-C)^{i-1} \left(\frac{x_{20}^2 + 2\alpha x_{10}}{\beta^2 + 2\alpha} \right) \\ x_{2,i} &= (-1)^i (C)^{i-1} \beta \left(\frac{x_{20}^2 + 2\alpha x_{10}}{\beta^2 + 2\alpha} \right)^{1/2} \end{aligned}$$

1. $1 \in \mathcal{S}$ ya que esto se deduce de las ecuaciones (B.9) y (B.10).

2. Si $m \in \mathcal{S}$ (y considerando que m es par ya que se puede hacer el mismo análisis para m impar) es decir

$$\begin{aligned}x_{1,m} &= (-C)^{m-1} \left(\frac{x_{20}^2 + 2\alpha x_{10}}{\beta^2 + 2\alpha} \right) \\x_{2,m} &= (-1)^m (C)^{m-1} \beta \left(\frac{x_{20}^2 + 2\alpha x_{10}}{\beta^2 + 2\alpha} \right)^{1/2}\end{aligned}$$

entonces de (B.9) y (B.10) se tiene que

$$\begin{aligned}x_{1,m+1} &= \frac{x_{2,m}^2 + 2\alpha x_{1,m}}{\beta^2 + 2\alpha} = CC^{m-1} \left(\frac{x_{20}^2 + 2\alpha x_{10}}{\beta^2 + 2\alpha} \right) = (-C)^{(m-1)+1} \left(\frac{x_{20}^2 + 2\alpha x_{10}}{\beta^2 + 2\alpha} \right) \\x_{2,m} &= -\beta \left(\frac{x_{2,m}^2 + 2\alpha x_{1,m}}{\beta^2 + 2\alpha} \right)^{1/2} = -\beta CC^{m-1} \left(\frac{x_{20}^2 + 2\alpha x_{10}}{\beta^2 + 2\alpha} \right)^{1/2} \\&= (-1)^{m+1} \beta (C)^{(m-1)+1} \left(\frac{x_{20}^2 + 2\alpha x_{10}}{\beta^2 + 2\alpha} \right)^{1/2}\end{aligned}$$

que es lo que se quería demostrar pues $m \in \mathcal{S}$ implica que $m+1 \in \mathcal{S}$.

Se procede a demostrar el inciso b). Los valores de t_1 y t_2 se obtienen directamente de (B.14), (B.9) y (B.10). Sea $\mathcal{S} = \{3, 4, \dots\}$ el conjunto de todos los números i para los que se cumple que $t_i = t_{i-1}C$, entonces

1. $3 \in \mathcal{S}$ ya que de (B.14)

$$\begin{aligned}t_3 &= \frac{1}{\alpha} \left[x_{22} + \beta \left(\frac{x_{22}^2 + 2\alpha x_{12}}{\beta^2 + 2\alpha} \right)^{1/2} \right] \\&= \frac{1}{\alpha} \left[C\beta \left(\frac{x_{20}^2 + 2\alpha x_{10}}{\beta^2 + 2\alpha} \right)^{1/2} + \beta C \left(\frac{x_{20}^2 + 2\alpha x_{10}}{\beta^2 + 2\alpha} \right)^{1/2} \right] \\&= \frac{\beta}{\alpha} (1+C) C \left(\frac{x_{20}^2 + 2\alpha x_{10}}{\beta^2 + 2\alpha} \right)^{1/2} = t_2 C\end{aligned}$$

2. Si $m \in \mathcal{S}$, es decir $t_m = t_{m-1}C$ entonces

$$\begin{aligned}t_{m+1} &= \frac{1}{\alpha} \left[x_{2m} + \beta \left(\frac{x_{2m}^2 + 2\alpha x_{1m}}{\beta^2 + 2\alpha} \right)^{1/2} \right] \\&= \frac{\beta}{\alpha} \left[C^{m-1} \left(\frac{x_{20}^2 + 2\alpha x_{10}}{\beta^2 + 2\alpha} \right)^{1/2} + C^{m-1} C \left(\frac{x_{20}^2 + 2\alpha x_{10}}{\beta^2 + 2\alpha} \right)^{1/2} \right] \\&= \frac{\beta}{\alpha} (1+C) \left(\frac{x_{20}^2 + 2\alpha x_{10}}{\beta^2 + 2\alpha} \right)^{1/2} C^{m-1} \\&= t_2 C^{m-1} = t_m C = t_{(m-1)+1} C.\end{aligned}$$

□

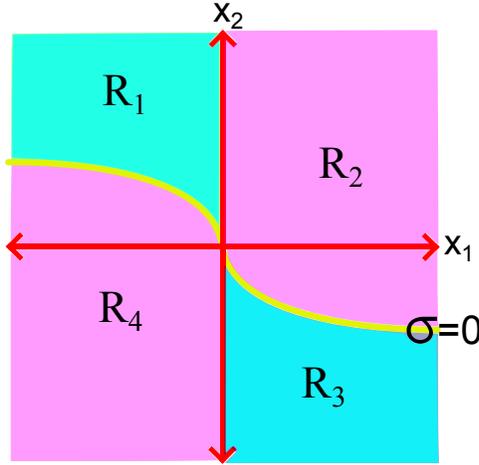


Fig. B.2: Plano fase para el algoritmo Terminal

Condiciones iniciales sobre Γ_2

Proposición B.2. Sea (B.1,B.2) con la condición inicial $x(0) = (x_{10}, x_{20}) \in \Gamma_2$ y defínase $C = \sqrt{\frac{\beta^2 - 2\alpha}{\beta^2 + 2\alpha}}$, entonces se cumple lo siguiente:

a) $\forall i \in \mathbb{N}$, los valores de ϕ_1 y ϕ_2 en cada cruce por $\sigma = 0$ están dados por

$$x_{1,i} = (-1)^i C^{i-1} \left(\frac{x_{20}^2 - 2\alpha x_{10}}{\beta^2 + 2\alpha} \right), \quad x_{2,i} = (-C)^{i-1} \beta \left(\frac{x_{20}^2 - 2\alpha x_{10}}{\beta^2 + 2\alpha} \right)^{1/2}.$$

b) Los tiempos de transito a $\sigma = 0$ están dados por

$$t_1 = \frac{1}{\alpha} \left[-x_2 + \beta \left(\frac{x_2^2 - 2\alpha x_1}{\beta^2 + 2\alpha} \right)^{1/2} \right], \quad t_2 = \frac{\beta}{\alpha} (1 + C) \left(\frac{x_2^2 - 2\alpha x_1}{\beta^2 + 2\alpha} \right)^{1/2}$$

$$t_i = \tau_{i-1} C, \quad \forall i \in \{3, 4, \dots, n\}.$$

La prueba es análoga a la de la Proposición B.1.

Un análisis más

Ahora se analizará el caso en el que se requiere conocer el tiempo y las coordenadas de la trayectoria cuando x_1 cambia de signo, por tal motivo se divide el plano fase del sistema en las siguientes regiones (Figura B.2)

$$R_1 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \sigma > 0 \text{ y } x_1 < 0\}, \quad R_2 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \sigma > 0 \text{ y } x_1 > 0\}, \\ R_3 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \sigma < 0 \text{ y } x_1 > 0\}, \quad R_4 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \sigma < 0 \text{ y } x_1 < 0\}.$$

Si por ejemplo, las condiciones iniciales (x_{11}, x_{21}) se encuentran en R_2 , en el tiempo t_1 la trayectoria del sistema intersectará la curva $\sigma = 0$ en las coordenadas $(x_1, x_2) = (x_{11}, x_{21})$, posteriormente la trayectoria del sistema viajará de $\sigma = 0$ a la recta $x_1 = 0$ en un tiempo t_2 en las coordenadas $(x_1, x_2) = (x_{12}, x_{22})$ y así sucesivamente, para conocer explícitamente dichos valores se tiene la siguiente proposición.

Proposición B.3. Sea $r = \left(\frac{\beta^2-2\alpha}{\beta^2+2\alpha}\right)^{1/2}$, entonces para toda $i \in \mathbb{N}$, los tiempos de tránsito y las coordenadas en los cruces por $\sigma = 0$ y por $x_1 = 0$ de las trayectorias del sistema están dadas como sigue:

a) Cuando $(x_{10}, x_{20}) \in R_1$

$$\begin{aligned} t_1 &= \frac{1}{\alpha} \left[x_{20} - (x_{20}^2 + 2\alpha x_{10})^{1/2} \right], & t_{2i} &= r^{i-1} \frac{\beta + (\beta^2 + 2\alpha)^{1/2}}{\alpha(\beta^2 + 2\alpha)^{1/2}} \left[x_{20}^2 + 2\alpha x_{10} \right]^{1/2}, \\ t_{2i+1} &= r^{i-1} \frac{\beta - (\beta^2 - 2\alpha)^{1/2}}{\alpha(\beta^2 + 2\alpha)^{1/2}} \left[x_{20}^2 + 2\alpha x_{10} \right]^{1/2}, & x_{1,2i-1} &= 0, \\ x_{1,2i} &= (-r^2)^{i-1} \frac{1}{\beta^2 + 2\alpha} \left[x_{20}^2 + 2\alpha x_{10} \right], & x_{2,2i-1} &= (-r)^{i-1} \left[x_{20}^2 + 2\alpha x_{10} \right]^{1/2} \quad y \\ x_{2,2i} &= -(-r)^{i-1} \frac{\beta}{(\beta^2 + 2\alpha)^{1/2}} \left[x_{20}^2 + 2\alpha x_{10} \right]^{1/2}, \end{aligned}$$

b) Cuando $(x_{10}, x_{20}) \in R_2$

$$\begin{aligned} t_1 &= \frac{1}{\alpha} \left[x_{20} + \frac{\beta}{(\beta^2 + 2\alpha)^{1/2}} (x_{20}^2 + 2\alpha x_{10})^{1/2} \right], & t_{2i} &= r^{i-1} \frac{\beta - (\beta^2 - 2\alpha)^{1/2}}{\alpha(\beta^2 + 2\alpha)^{1/2}} \left[x_{20}^2 + 2\alpha x_{10} \right]^{1/2}, \\ t_{2i+1} &= r^i \frac{\beta + (\beta^2 + 2\alpha)^{1/2}}{\alpha(\beta^2 + 2\alpha)^{1/2}} \left[x_{20}^2 + 2\alpha x_{10} \right]^{1/2}, & x_{1,2i-1} &= (-r^2)^{i-1} \frac{1}{\beta^2 + 2\alpha} \left[x_{20}^2 + 2\alpha x_{10} \right], \\ x_{1,2i} &= 0, & x_{2,2i-1} &= -(-r)^{i-1} \frac{\beta}{(\beta^2 + 2\alpha)^{1/2}} \left[x_{20}^2 + 2\alpha x_{10} \right]^{1/2} \quad y \\ x_{2,2i} &= (-r)^i \left[x_{20}^2 + 2\alpha x_{10} \right]^{1/2}, \end{aligned}$$

c) Cuando $(x_{10}, x_{20}) \in R_3$

$$\begin{aligned} t_1 &= \frac{1}{\alpha} \left[-x_{20} - (x_{20}^2 - 2\alpha x_{10})^{1/2} \right], & t_{2i} &= r^{i-1} \frac{\beta + (\beta^2 + 2\alpha)^{1/2}}{\alpha(\beta^2 + 2\alpha)^{1/2}} \left[x_{20}^2 - 2\alpha x_{10} \right]^{1/2}, \\ t_{2i+1} &= r^{i-1} \frac{\beta - (\beta^2 - 2\alpha)^{1/2}}{\alpha(\beta^2 + 2\alpha)^{1/2}} \left[x_{20}^2 - 2\alpha x_{10} \right]^{1/2}, & x_{1,2i-1} &= 0, \\ x_{1,2i} &= -(-r^2)^{i-1} \frac{1}{\beta^2 + 2\alpha} \left[x_{20}^2 - 2\alpha x_{10} \right], & x_{2,2i-1} &= -(-r)^{i-1} \left[x_{20}^2 - 2\alpha x_{10} \right]^{1/2} \quad y \\ x_{2,2i} &= (-r)^{i-1} \frac{\beta}{(\beta^2 + 2\alpha)^{1/2}} \left[x_{20}^2 - 2\alpha x_{10} \right]^{1/2}, \end{aligned}$$

d) Cuando $(x_{10}, x_{20}) \in R_4$

$$\begin{aligned} t_1 &= \frac{1}{\alpha} \left[-x_{20} + \frac{\beta}{(\beta^2 + 2\alpha)^{1/2}} (x_{20}^2 - 2\alpha x_{10})^{1/2} \right], & t_{2i} &= r^{i-1} \frac{\beta - (\beta^2 - 2\alpha)^{1/2}}{\alpha(\beta^2 + 2\alpha)^{1/2}} \left[x_{20}^2 - 2\alpha x_{10} \right]^{1/2}, \\ t_{2i+1} &= r^i \frac{\beta + (\beta^2 + 2\alpha)^{1/2}}{\alpha(\beta^2 + 2\alpha)^{1/2}} \left[x_{20}^2 - 2\alpha x_{10} \right]^{1/2}, & x_{1,2i-1} &= -(-r^2)^{i-1} \frac{1}{\beta^2 + 2\alpha} \left[x_{20}^2 - 2\alpha x_{10} \right], \\ x_{1,2i} &= 0, & x_{2,2i-1} &= (-r)^{i-1} \frac{\beta}{(\beta^2 + 2\alpha)^{1/2}} \left[x_{20}^2 - 2\alpha x_{10} \right]^{1/2} \quad y \\ x_{2,2i} &= -(-r)^i \left[x_{20}^2 - 2\alpha x_{10} \right]^{1/2}, \end{aligned}$$

Demostración. Sólo se demostrará el inciso a) ya que las pruebas de los otros incisos son análogas.

Es fácil ver que las ecuaciones del inciso *a*) pueden ser reescritas de la forma siguiente:

$$\begin{aligned}
t_i &= \begin{cases} \frac{1}{\alpha} [x_{20} - (x_{20}^2 + 2\alpha x_{10})^{1/2}], & i = 1 \\ r^{\frac{i-2}{2}} \frac{\beta + (\beta^2 + 2\alpha)^{1/2}}{\alpha(\beta^2 + 2\alpha)^{1/2}} [x_{20}^2 + 2\alpha x_{10}]^{1/2}, & i \text{ par} \\ r^{\frac{i-3}{2}} \frac{\beta - (\beta^2 - 2\alpha)^{1/2}}{\alpha(\beta^2 + 2\alpha)^{1/2}} [x_{20}^2 + 2\alpha x_{10}]^{1/2}, & i \neq 1 \text{ impar} \end{cases} \\
x_{1,i} &= \begin{cases} 0, & i \text{ impar} \\ (-r^2)^{\frac{i-2}{2}} \frac{1}{\beta^2 + 2\alpha} [x_{20}^2 + 2\alpha x_{10}], & i \text{ par} \end{cases} \\
x_{2,i} &= \begin{cases} (-r)^{\frac{i-1}{2}} [x_{20}^2 + 2\alpha x_{10}]^{1/2}, & i \text{ impar} \\ -(-r)^{\frac{i-2}{2}} \frac{\beta}{(\beta^2 + 2\alpha)^{1/2}} [x_{20}^2 + 2\alpha x_{10}]^{1/2}, & i \text{ par} \end{cases}
\end{aligned}$$

Por lo tanto es posible hacer la prueba por inducción sobre *i* entonces

- Para $i = 1$. Debido a que las condiciones iniciales se encuentran en la región R_1 (lo que implica que $u = -\alpha$), las trayectorias del sistema llegarán a la recta $x_1 = 0$ en un tiempo t_1 , en este punto se tiene que

$$x_{11} = 0,$$

que al substituir en la ecuación (B.7) resulta en $x_{21}^2 = 2u(0 - x_{10}) + x_{20}^2$, resolviendo para x_{21} , se obtiene

$$x_{21} = [x_{20}^2 + 2\alpha x_{10}]^{1/2},$$

así, a partir de la ecuación (B.4) se tiene que $x_{21} = ut_1 + x_{20}$, despejando t_1 queda

$$t_1 = \frac{1}{\alpha} [x_{20} - x_{21}] = \frac{1}{\alpha} [x_{20} - (x_{20}^2 + 2\alpha x_{10})^{1/2}].$$

- Suponiendo que la proposición se cumple para $i = k$ se tiene que

$$\begin{aligned}
t_k &= \begin{cases} \frac{1}{\alpha} [x_{20} - (x_{20}^2 + 2\alpha x_{10})^{1/2}], & k = 1 \\ r^{\frac{k-2}{2}} \frac{\beta + (\beta^2 + 2\alpha)^{1/2}}{\alpha(\beta^2 + 2\alpha)^{1/2}} [x_{20}^2 + 2\alpha x_{10}]^{1/2}, & k \text{ par} \\ r^{\frac{k-3}{2}} \frac{\beta - (\beta^2 - 2\alpha)^{1/2}}{\alpha(\beta^2 + 2\alpha)^{1/2}} [x_{20}^2 + 2\alpha x_{10}]^{1/2}, & k \neq 1 \text{ impar} \end{cases} \\
x_{1,k} &= \begin{cases} 0, & k \text{ impar} \\ (-r^2)^{\frac{k-2}{2}} \frac{1}{\beta^2 + 2\alpha} [x_{20}^2 + 2\alpha x_{10}], & k \text{ par} \end{cases} \\
x_{2,k} &= \begin{cases} (-r)^{\frac{k-1}{2}} [x_{20}^2 + 2\alpha x_{10}]^{1/2}, & k \text{ impar} \\ -(-r)^{\frac{k-2}{2}} \frac{\beta}{(\beta^2 + 2\alpha)^{1/2}} [x_{20}^2 + 2\alpha x_{10}]^{1/2}, & k \text{ par} \end{cases}
\end{aligned}$$

- Para probar que la proposición se cumple para $k + 1$ se tiene que verificar cada uno de los casos siguientes: a) k impar, $x_{2k} > 0$; b) k impar, $x_{2k} < 0$; c) k par, $x_{1k} > 0$ y d) k par, $x_{1k} < 0$.

Se hará la prueba con el primero de los cuatro, los otros tres son análogos.

Como k es impar, en t_k la trayectoria del sistema está sobre la recta $x_1 = 0$ por lo que $x_{2k} = 0$. A partir de este punto la trayectoria viajará a través de la región R_2 hasta llegar en

un tiempo t_{k+1} al punto $(x_{1,k+1}, x_{2,k+1})$ que estará sobre $\sigma = 0$. De manera que haciendo uso de la Proposición B.1 se calcula

$$\begin{aligned}
t_{k+1} &= \frac{1}{\alpha} \left[x_{2k} + \frac{\beta}{(\beta^2 + 2\alpha)^{1/2}} (x_{2k}^2 + 2\alpha x_{1k})^{1/2} \right] \\
&= \frac{1}{\alpha} \left[(-r)^{\frac{k-1}{2}} [x_{20}^2 + 2\alpha x_{10}]^{1/2} + \frac{\beta}{(\beta^2 + 2\alpha)^{1/2}} \left((-r)^{\frac{k-1}{2}} [x_{20}^2 + 2\alpha x_{10}]^{1/2} \right) \right] \\
&= (-r)^{\frac{k-1}{2}} \frac{\beta + (\beta^2 + 2\alpha)^{1/2}}{\alpha (\beta^2 + 2\alpha)^{1/2}} [x_{20}^2 + 2\alpha x_{10}]^{1/2} \\
&= (-r)^{\frac{(k+1)-2}{2}} \frac{\beta + (\beta^2 + 2\alpha)^{1/2}}{\alpha (\beta^2 + 2\alpha)^{1/2}} [x_{20}^2 + 2\alpha x_{10}]^{1/2}.
\end{aligned}$$

Ahora, también haciendo uso de la Proposición B.1, se hacen los cálculos para $x_{1,k+1}$ como sigue

$$\begin{aligned}
x_{1,k+1} &= \frac{1}{\beta^2 + 2\alpha} [x_{2k}^2 + 2\alpha x_{1k}] \\
&= \frac{1}{\beta^2 + 2\alpha} \left[(-r)^{\frac{k-1}{2}} (x_{20}^2 + 2\alpha x_{10})^{1/2} \right]^2 \\
&= (-r)^{k-1} \frac{1}{\beta^2 + 2\alpha} [x_{20}^2 + 2\alpha x_{10}] \\
&= (r^2)^{\frac{k-1}{2}} \frac{1}{\beta^2 + 2\alpha} [x_{20}^2 + 2\alpha x_{10}] \\
&= (-r^2)^{\frac{(k+1)-2}{2}} \frac{1}{\beta^2 + 2\alpha} [x_{20}^2 + 2\alpha x_{10}].
\end{aligned}$$

Nótese que el último paso, es decir reemplazar r^2 por $-r^2$, es válido ya que para este caso $\frac{k-1}{2}$ es par. Hace falta solamente hacer el cálculo de $x_{2,k+1}$, que nuevamente haciendo uso de la Proposición B.1, resulta en

$$\begin{aligned}
x_{2,k+1} &= -\frac{\beta}{(\beta^2 + 2\alpha)^{1/2}} [x_{2k}^2 + 2\alpha x_{1k}]^{1/2} \\
&= -\frac{\beta}{(\beta^2 + 2\alpha)^{1/2}} x_{2k} \\
&= -\frac{\beta}{(\beta^2 + 2\alpha)^{1/2}} (-r)^{\frac{k-1}{2}} [x_{20}^2 + 2\alpha x_{10}]^{1/2} \\
&= -(-r)^{\frac{(k+1)-2}{2}} \frac{\beta}{(\beta^2 + 2\alpha)^{1/2}} [x_{20}^2 + 2\alpha x_{10}]^{1/2}.
\end{aligned}$$

□

Prueba del Teorema 4.2

El primer paso de la demostración es construir la FL homogénea de grado 3 para (4.3) cuando $\beta^2 > 2\alpha$. De manera que

$$V(x) = \int_0^T (|\phi_1| + \phi_2^2) \, d\tau. \quad (\text{B.16})$$

Es claro que el integrando del lado derecho de la ecuación anterior, es diferente cada que x_1 cambia de signo así como a cada cruce por $\sigma = 0$, por lo tanto, para resolver esta integral, es necesario hacerlo por tramos, es decir, se integrarán las trayectorias del sistema en cada una de las regiones descritas en la Proposición B.3, de manera que la función V , estará seccionada como sigue

$$V(x_1, x_2) = \begin{cases} V_1, & \forall (x_1, x_2) \in R_1 \\ V_2, & \forall (x_1, x_2) \in R_2 \\ V_3, & \forall (x_1, x_2) \in R_3 \\ V_4, & \forall (x_1, x_2) \in R_4. \end{cases}$$

La trayectoria $\phi(t; 0, x)$ iniciará en las coordenadas $(\phi_{10}, \phi_{20}) = (x_1, x_2)$ y en un tiempo t_1 llegará a las coordenadas (ϕ_{11}, ϕ_{21}) . A partir de aquí, se puede considerar una nueva trayectoria cuyas condiciones iniciales están dadas por $x = (\phi_{11}, \phi_{21})$, esto se puede seguir haciendo para cada tramo de la trayectoria por lo que los límites de integración en el i -ésimo tramo serán de 0 a t_i .

A continuación se realizará el cálculo de V sobre la región R_1 , el cálculo sobre el resto de las regiones es análogo. Con el fin de tener más claridad en el cálculo del lado derecho de (B.16), primero se tomará la integral $\int_t^{t+T} |\phi_1| d\tau$ y posteriormente $\int_t^{t+T} \phi_2^2 d\tau$.

$$\begin{aligned} \int_t^{t+T} |\phi_1| d\tau &= \int_t^{t+T} \left| \frac{u}{2} \tau^2 + x_2 \tau + x_1 \right| d\tau \\ &= \int_0^{\tau_1} \left| \frac{u}{2} \tau^2 + x_2 \tau + x_1 \right| d\tau + \int_0^{\tau_2} \left| \frac{u}{2} \tau^2 + \phi_{21} \tau + \phi_{11} \right| d\tau \\ &\quad + \int_0^{\tau_3} \left| \frac{u}{2} \tau^2 + \phi_{22} \tau + \phi_{12} \right| d\tau + \int_0^{\tau_4} \left| \frac{u}{2} \tau^2 + \phi_{23} \tau + \phi_{13} \right| d\tau \\ &\quad + \int_0^{\tau_5} \left| \frac{u}{2} \tau^2 + \phi_{24} \tau + \phi_{14} \right| d\tau + \cdots + \int_0^{\tau_n} \left| \frac{u}{2} \tau^2 + \phi_{2,n-1} \tau + \phi_{1,n-1} \right| d\tau. \end{aligned}$$

Tomando en cuenta el signo de ϕ_1 y el valor de u en cada una de las cuatro regiones del plano, además que $\phi_{1,i} = 0$ para i impar, se tiene que

$$\begin{aligned} \int_t^{t+T} |\phi_1| d\tau &= \int_0^{\tau_1} \left(\frac{\alpha}{2} \tau^2 - x_2 \tau - x_1 \right) d\tau + \int_0^{\tau_2} \left(-\frac{\alpha}{2} \tau^2 + \phi_{21} \tau \right) d\tau \\ &\quad + \int_0^{\tau_3} \left(\frac{\alpha}{2} \tau^2 + \phi_{22} \tau + \phi_{12} \right) d\tau + \int_0^{\tau_4} \left(-\frac{\alpha}{2} \tau^2 - \phi_{23} \tau \right) d\tau \\ &\quad + \int_0^{\tau_5} \left(\frac{\alpha}{2} \tau^2 - \phi_{24} \tau - \phi_{14} \right) d\tau + \cdots \end{aligned}$$

que, considerando el signo de $\phi_{2,i}$ y $\phi_{1,2i}$ en cada una de las regiones, se puede reescribir de la manera siguiente

$$\begin{aligned} \int_t^{t+T} |\phi_1| d\tau &= \int_0^{\tau_1} \left(\frac{\alpha}{2} \tau^2 - x_2 \tau - x_1 \right) d\tau + \int_0^{\tau_2} \left(-\frac{\alpha}{2} \tau^2 + |\phi_{21}| \tau \right) d\tau \\ &\quad + \int_0^{\tau_3} \left(\frac{\alpha}{2} \tau^2 - |\phi_{22}| \tau + |\phi_{12}| \right) d\tau + \int_0^{\tau_4} \left(-\frac{\alpha}{2} \tau^2 + |\phi_{23}| \tau \right) d\tau \\ &\quad + \int_0^{\tau_5} \left(\frac{\alpha}{2} \tau^2 - |\phi_{24}| \tau + |\phi_{14}| \right) d\tau + \cdots \end{aligned}$$

Después de integrar se obtiene lo siguiente

$$\begin{aligned} \int_t^{t+T} |\phi_1| d\tau &= \left(\frac{\alpha}{6} \tau_1^3 - \frac{x_2}{2} \tau_1^2 - x_1 \tau_1 \right) + \left(-\frac{\alpha}{6} \tau_2^3 + \frac{|\phi_{21}|}{2} \tau_2^2 \right) \\ &+ \left(\frac{\alpha}{6} \tau_3^3 - \frac{|\phi_{22}|}{2} \tau_3^2 + |\phi_{12}| \tau_3 \right) + \left(-\frac{\alpha}{6} \tau_4^3 + \frac{|\phi_{23}|}{2} \tau_4^2 \right) \\ &+ \left(\frac{\alpha}{6} \tau_5^3 - \frac{|\phi_{24}|}{2} \tau_5^2 + |\phi_{14}| \tau_5 \right) + \dots \end{aligned}$$

que al agrupar términos semejantes resulta en

$$\begin{aligned} \int_t^{t+T} |\phi_1| d\tau &= \left(\frac{\alpha}{6} \tau_1^3 - \frac{x_2}{2} \tau_1^2 - x_1 \tau_1 \right) - \frac{\alpha}{6} (\tau_2^3 + \tau_4^3 + \dots) \\ &+ \frac{\alpha}{6} (\tau_3^3 + \tau_5^3 + \dots) + \frac{1}{2} (|\phi_{21}| \tau_2^2 + |\phi_{23}| \tau_4^2 + \dots) \\ &- \frac{1}{2} (|\phi_{22}| \tau_3^2 + |\phi_{24}| \tau_5^2 + \dots) + (|\phi_{12}| \tau_3 + |\phi_{14}| \tau_5 + \dots) \end{aligned}$$

otra forma de escribir la ecuación anterior de manera compacta es

$$\begin{aligned} \int_t^{t+T} |\phi_1| d\tau &= \left(\frac{\alpha}{6} \tau_1^3 - \frac{x_2}{2} \tau_1^2 - x_1 \tau_1 \right) - \frac{\alpha}{6} \sum_{i=1}^n \tau_{2i}^3 + \frac{\alpha}{6} \sum_{i=1}^n \tau_{2i+1}^3 \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n |\phi_{2,2i-1}| \tau_{2i}^2 - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n |\phi_{2,2i}| \tau_{2i+1}^2 + \sum_{i=1}^n |\phi_{1,2i}| \tau_{2i+1}^2 \end{aligned} \quad (\text{B.17})$$

Se procede a continuación a calcular término a término el lado derecho de la ecuación anterior, para esto los valores de τ_1 , t_{2i} , τ_{2i+1} , $\phi_{1,2i-1}$, $\phi_{1,2i}$, $\phi_{2,2i-1}$ y $\phi_{2,2i}$ son los proporcionados por la Proposición B.3 con la notación adecuada.

$$\begin{aligned} \left(\frac{\alpha}{6} \tau_1^3 - \frac{x_2}{2} \tau_1^2 - x_1 \tau_1 \right) &= \frac{\alpha}{6} \frac{1}{\alpha^3} \left[x_2 - (x_2^2 + 2\alpha x_1)^{1/2} \right]^3 \\ &- \frac{x_2}{2} \frac{1}{\alpha^2} \left[x_2 - (x_2^2 + 2\alpha x_1)^{1/2} \right]^2 \\ &- x_1 \frac{1}{\alpha} \left[x_2 - (x_2^2 + 2\alpha x_1)^{1/2} \right] \\ &= -\frac{1}{3\alpha^2} x_2^2 - \frac{1}{\alpha} x_1 x_2 + \frac{1}{3\alpha^2} [x_2^2 + 2\alpha x_1]^{3/2}. \end{aligned}$$

A partir de aquí tomaremos en cuenta que si en la ecuación (B.16), $T \rightarrow \infty$ entonces $n \rightarrow \infty$,

además que bajo la restricción $\beta^2 > 2\alpha$ se tiene que $r = \left(\frac{\beta^2 - 2\alpha}{\beta^2 + 2\alpha}\right)^{1/2} < 1$.

$$\begin{aligned}
-\frac{\alpha}{6} \sum_{i=1}^n \tau_{2i}^3 &= -\frac{\alpha}{6} \sum_{i=1}^n r^{3(i-1)} \left(\frac{\beta + (\beta^2 + 2\alpha)^{1/2}}{\alpha (\beta^2 + 2\alpha)^{1/2}} \right)^3 [x_2^2 + 2\alpha x_1]^{3/2} \\
&= -\frac{(\beta + (\beta^2 + 2\alpha)^{1/2})^3}{6\alpha^2 (\beta^2 + 2\alpha)^{3/2}} [x_2^2 + 2\alpha x_1]^{3/2} \sum_{i=1}^n r^{3(i-1)} \\
&= -\frac{(\beta + (\beta^2 + 2\alpha)^{1/2})^3}{6\alpha^2 (\beta^2 + 2\alpha)^{3/2}} [x_2^2 + 2\alpha x_1]^{3/2} \sum_{i=0}^n (r^3)^i \\
&\rightarrow -\frac{(\beta + (\beta^2 + 2\alpha)^{1/2})^3}{6\alpha^2 (\beta^2 + 2\alpha)^{3/2}} \frac{[x_2^2 + 2\alpha x_1]^{3/2}}{1 - r^3}, \quad \text{si } n \rightarrow \infty. \tag{B.18}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\alpha}{6} \sum_{i=1}^n \tau_{2i+1}^3 &= \frac{\alpha}{6} \sum_{i=1}^n r^{3(i-1)} \left(\frac{\beta - (\beta^2 - 2\alpha)^{1/2}}{\alpha (\beta^2 + 2\alpha)^{1/2}} \right)^3 [x_2^2 + 2\alpha x_1]^{3/2} \\
&= \frac{(\beta - (\beta^2 - 2\alpha)^{1/2})^3}{6\alpha^2 (\beta^2 + 2\alpha)^{3/2}} [x_2^2 + 2\alpha x_1]^{3/2} \sum_{i=1}^n r^{3(i-1)} \\
&= \frac{(\beta - (\beta^2 - 2\alpha)^{1/2})^3}{6\alpha^2 (\beta^2 + 2\alpha)^{3/2}} [x_2^2 + 2\alpha x_1]^{3/2} \sum_{i=0}^n (r^3)^i \\
&\rightarrow \frac{(\beta - (\beta^2 - 2\alpha)^{1/2})^3}{6\alpha^2 (\beta^2 + 2\alpha)^{3/2}} \frac{[x_2^2 + 2\alpha x_1]^{3/2}}{1 - r^3}, \quad \text{si } n \rightarrow \infty. \tag{B.19}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n |\phi_{2,2i-1}| \tau_{2i}^2 &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left| (-r)^{i-1} [x_2^2 + 2\alpha x_1]^{1/2} \right| r^{2(i-1)} \left(\frac{\beta + (\beta^2 + 2\alpha)^{1/2}}{\alpha (\beta^2 + 2\alpha)^{1/2}} \right)^2 [x_2^2 + 2\alpha x_1] \\
&= \frac{(\beta + (\beta^2 + 2\alpha)^{1/2})^2}{2\alpha^2 (\beta^2 + 2\alpha)} [x_2^2 + 2\alpha x_1]^{3/2} \sum_{i=0}^n (r)^{i-1} r^{2(i-1)} \\
&= \frac{(\beta + (\beta^2 + 2\alpha)^{1/2})^2}{2\alpha^2 (\beta^2 + 2\alpha)} [x_2^2 + 2\alpha x_1]^{3/2} \sum_{i=0}^n (r^3)^{i-1} \\
&\rightarrow \frac{(\beta + (\beta^2 + 2\alpha)^{1/2})^2}{2\alpha^2 (\beta^2 + 2\alpha)} \frac{[x_2^2 + 2\alpha x_1]^{3/2}}{1 - r^3}, \quad \text{si } n \rightarrow \infty. \tag{B.20}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n |\phi_{2,2i}| \tau_{2i+1}^2 &= -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left| \frac{-\beta(-r)^{i-1} [x_{20}^2 + 2\alpha x_{10}]^{1/2}}{(\beta^2 + 2\alpha)^{1/2}} \right| r^{2(i-1)} \cdot \\
&\quad \cdot \left(\frac{\beta - (\beta^2 - 2\alpha)^{1/2}}{\alpha (\beta^2 + 2\alpha)^{1/2}} \right)^2 [x_{20}^2 + 2\alpha x_{10}] \\
&= -\beta \frac{(\beta - (\beta^2 - 2\alpha)^{1/2})^2}{2\alpha^2 (\beta^2 + 2\alpha)^{3/2}} [x_2^2 + 2\alpha x_1]^{3/2} \sum_{i=0}^n (r)^{i-1} r^{2(i-1)} \\
&= -\beta \frac{(\beta - (\beta^2 - 2\alpha)^{1/2})^2}{2\alpha^2 (\beta^2 + 2\alpha)^{3/2}} [x_2^2 + 2\alpha x_1]^{3/2} \sum_{i=0}^n (r^3)^{i-1} \\
&\rightarrow -\beta \frac{(\beta - (\beta^2 - 2\alpha)^{1/2})^2}{2\alpha^2 (\beta^2 + 2\alpha)^{3/2}} \frac{[x_2^2 + 2\alpha x_1]^{3/2}}{1 - r^3}, \quad \text{si } n \rightarrow \infty. \quad (\text{B.21})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n |\phi_{1,2i}| \tau_{2i+1} &= \sum_{i=1}^n \left| (-r^2)^{i-1} \frac{1}{\beta^2 + 2\alpha} [x_{20}^2 + 2\alpha x_{10}] \right| r^{i-1} \frac{\beta - (\beta^2 - 2\alpha)^{1/2}}{\alpha (\beta^2 + 2\alpha)^{1/2}} [x_{20}^2 + 2\alpha x_{10}]^{1/2} \\
&= \frac{\beta - (\beta^2 - 2\alpha)^{1/2}}{\alpha (\beta^2 + 2\alpha)^{3/2}} [x_2^2 + 2\alpha x_1]^{3/2} \sum_{i=0}^n (r)^{i-1} r^{2(i-1)} \\
&= \frac{\beta - (\beta^2 - 2\alpha)^{1/2}}{\alpha (\beta^2 + 2\alpha)^{3/2}} [x_2^2 + 2\alpha x_1]^{3/2} \sum_{i=0}^n (r^3)^{i-1} \\
&\rightarrow \frac{\beta - (\beta^2 - 2\alpha)^{1/2}}{\alpha \left(\beta \int_t^{t+T} \phi_2^2 d\tau^2 + 2\alpha \right)^{3/2}} \frac{[x_2^2 + 2\alpha x_1]^{3/2}}{1 - r^3}, \quad \text{si } n \rightarrow \infty. \quad (\text{B.22})
\end{aligned}$$

Ahora se hará el cálculo de la suma de el lado derecho de las ecuaciones desde (B.18) hasta (B.19), así se tiene que

$$\begin{aligned}
&-\frac{\alpha}{6} \sum_{i=1}^n \tau_{2i}^3 + \frac{\alpha}{6} \sum_{i=1}^n \tau_{2i+1}^3 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n |\phi_{2,2i-1}| \tau_{2i}^2 - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n |\phi_{2,2i}| \tau_{2i+1}^2 + \sum_{i=1}^n |\phi_{1,2i}| \tau_{2i+1}^2 \\
&= -\frac{[x_2^2 + 2\alpha x_1]^{3/2}}{6\alpha^2 (\beta^2 + 2\alpha)^{3/2} (1 - r^3)} \left[-\left(\beta + (\beta^2 + 2\alpha)^{1/2} \right)^3 + \left(\beta - (\beta^2 - 2\alpha)^{1/2} \right)^3 \right. \\
&\quad \left. + 3(\beta^2 + 2\alpha)^{1/2} \left(\beta + (\beta^2 + 2\alpha)^{1/2} \right)^2 - 3\beta \left(\beta - (\beta^2 - 2\alpha)^{1/2} \right)^2 + 6\alpha \left(\beta - (\beta^2 - 2\alpha)^{1/2} \right) \right] \\
&= \frac{(\beta^2 + 2\alpha)^{3/2} + (\beta^2 - 2\alpha)^{3/2} + 6\alpha\beta}{3\alpha^2 \left((\beta^2 + 2\alpha)^{3/2} - (\beta^2 - 2\alpha)^{3/2} \right)} [x_2^2 + 2\alpha x_1]^{3/2}
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}
\int_t^{t+T} |\phi_1| d\tau &= -\frac{1}{3\alpha^2}x_2^2 - \frac{1}{\alpha}x_1x_2 + \frac{1}{3\alpha^2}[x_2^2 + 2\alpha x_1]^{3/2} \\
&\quad + \frac{(\beta^2 + 2\alpha)^{3/2} + (\beta^2 - 2\alpha)^{3/2} + 6\alpha\beta}{3\alpha^2\left((\beta^2 + 2\alpha)^{3/2} - (\beta^2 - 2\alpha)^{3/2}\right)} [x_2^2 + 2\alpha x_1]^{3/2} \\
&= -\frac{1}{3\alpha^2}x_2^2 - \frac{1}{\alpha}x_1x_2 + \frac{2(\beta^2 + 2\alpha)^{3/2} + 6\alpha\beta}{3\alpha^2\left((\beta^2 + 2\alpha)^{3/2} - (\beta^2 - 2\alpha)^{3/2}\right)} [x_2^2 + 2\alpha x_1]^{3/2} \tag{B.23}
\end{aligned}$$

Ahora se calculará la integral $\int_t^{t+T} \phi_2^2 d\tau$, para este cálculo es necesario conocer los tiempos y coordenadas de los cruces de las trayectorias del sistema por la curva $\sigma = 0$ que se obtendrán de la Proposición B.1. Así, se tiene que

$$\begin{aligned}
\int_t^{t+T} \phi_2^2 d\tau &= \int_t^{t+T} (u\tau + x_2)^2 d\tau \tag{B.24} \\
&= \int_t^{t+T} (u^2\tau^2 + 2ux_2\tau + x_2^2) d\tau \\
&= \left[\frac{u^2}{3}\tau^3 + ux_2\tau^2 + x_2^2\tau \right]_t^{t+T}.
\end{aligned}$$

Para este caso sólo interesan los cruces por la curva $\sigma = 0$ por lo tanto sólo se consideran las regiones Γ_1 y Γ_2 . Recuerdese que en Γ_1 el control en $u = -\alpha$ y en Γ_2 , $u = \alpha$ por tanto, haciendo $t = 0$ se tiene que

$$\begin{aligned}
\int_t^{t+T} \phi_2^2 d\tau &= \left[\frac{u^2}{3}\tau^3 + ux_2\tau^2 + x_2^2\tau \right]_t^{t+T} \\
&= \left[\frac{\alpha^2}{3}\tau_1^3 - \alpha x_2\tau_1^2 + x_2^2\tau_1 \right] + \left[\frac{\alpha^2}{3}\tau_2^3 + \alpha\phi_{21}\tau_2^2 + \phi_{21}^2\tau_2 \right] \\
&\quad + \left[\frac{\alpha^2}{3}\tau_3^3 - \alpha\phi_{22}\tau_3^2 + \phi_{23}^2\tau_3 \right] + \dots
\end{aligned}$$

Nótese que para i impar $\phi_{2,i}$ es negativa y para i par $\phi_{2,i}$ es positiva, de manera que

$$\begin{aligned}
\int_t^{t+T} \phi_2^2 d\tau &= \left(\frac{\alpha^2}{3}\tau_1^3 - \alpha x_2\tau_1^2 + x_2^2\tau_1 \right) + \left(\frac{\alpha^2}{3}\tau_2^3 - \alpha|\phi_{21}|\tau_2^2 + \phi_{21}^2\tau_2 \right) \\
&\quad + \left(\frac{\alpha^2}{3}\tau_3^3 - \alpha|\phi_{22}|\tau_3^2 + \phi_{23}^2\tau_3 \right) + \dots \\
&= \left(\frac{\alpha^2}{3}\tau_1^3 - \alpha x_2\tau_1^2 + x_2^2\tau_1 \right) + \frac{\alpha^2}{3}(\tau_2^3 + \tau_3^3 + \dots) \\
&\quad - \alpha(|\phi_{21}|\tau_2^2 + |\phi_{22}|\tau_3^2 + \dots) + (\phi_{21}^2\tau_2 + \phi_{23}^2\tau_3 + \dots) \\
&= \left(\frac{\alpha^2}{3}\tau_1^3 - \alpha x_2\tau_1^2 + x_2^2\tau_1 \right) + \frac{\alpha^2}{3}\sum_{i=2}^n \tau_i^3 - \alpha\sum_{i=1}^n |\phi_{2,i}|\tau_{i+1}^2 + \sum_{i=1}^n \phi_{2,i}^2\tau_{i+1}
\end{aligned}$$

Ahora se realizarán los cálculos de cada término de la ecuación anterior, haciendo la consideración de que si $T \rightarrow \infty$ entonces $n \rightarrow \infty$, además que bajo la restricción $\beta^2 > 2\alpha$ se tiene que $r =$

$$\left(\frac{\beta^2-2\alpha}{\beta^2+2\alpha}\right)^{1/2} < 1.$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\alpha^2}{3}\tau_1^3 - \alpha x_2 \tau_1^2 + x_2^2 \tau_1\right) &= \frac{\alpha^2}{3} \left(\frac{1}{\alpha} \left[x_2 + \beta \left(\frac{x_2^2 + 2\alpha x_1}{\beta^2 + 2\alpha}\right)^{1/2}\right]\right)^3 \\ &\quad - \alpha x_2 \left(\frac{1}{\alpha} \left[x_2 + \beta \left(\frac{x_2^2 + 2\alpha x_1}{\beta^2 + 2\alpha}\right)^{1/2}\right]\right)^2 \\ &\quad + x_2^2 \left(\frac{1}{\alpha} \left[x_2 + \beta \left(\frac{x_2^2 + 2\alpha x_1}{\beta^2 + 2\alpha}\right)^{1/2}\right]\right) \\ &= \frac{1}{3\alpha} x_2^3 + \frac{\beta^3}{3\alpha(\beta^2 + 2\alpha)^{3/2}} [x_2^2 + 2\alpha x_1]^{3/2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\alpha^2}{3} \sum_{i=2}^n \tau_i^3 &= \frac{\alpha^2}{3} \sum_{i=2}^n \frac{\beta^3}{\alpha^3} \left(\frac{1+r}{(\beta^2 + 2\alpha)^{1/2}}\right)^3 [x_2^2 + 2\alpha x_1]^{3/2} r^{3(i-2)} \\ &= \frac{\beta^3(1+r)^3}{3\alpha(\beta^2 + 2\alpha)^{3/2}} [x_2^2 + 2\alpha x_1]^{3/2} \sum_{i=0}^n r^{3i} \\ &\rightarrow \frac{\beta^3(1+r)^3}{3\alpha(\beta^2 + 2\alpha)^{3/2}} \frac{[x_2^2 + 2\alpha x_1]^{3/2}}{1-r^3}, \quad \text{si } n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -\alpha \sum_{i=1}^n |\phi_{2,i}| \tau_{i+1}^2 &= -\alpha \sum_{i=1}^n \left\{ (r)^{i-1} \beta \left(\frac{x_2^2 + 2\alpha x_1}{\beta^2 + 2\alpha}\right)^{1/2} \frac{\beta^2}{\alpha^2} \right. \\ &\quad \left. \left(\frac{1+r}{(\beta^2 + 2\alpha)^{1/2}}\right)^2 [x_2^2 + 2\alpha x_1] r^{2(i-1)} \right\} \\ &= -\frac{\beta^3(1+r)^2}{\alpha(\beta^2 + 2\alpha)^{3/2}} [x_2^2 + 2\alpha x_1]^{3/2} \sum_{i=1}^n (r)^{i-1} r^{2(i-1)} \\ &= -\frac{\beta^3(1+r)^2}{\alpha(\beta^2 + 2\alpha)^{3/2}} [x_2^2 + 2\alpha x_1]^{3/2} \sum_{i=0}^n (r)^{3i} \\ &\rightarrow -\frac{\beta^3(1+r)^2}{\alpha(\beta^2 + 2\alpha)^{3/2}} \frac{[x_2^2 + 2\alpha x_1]^{3/2}}{1-r^3}, \quad \text{si } n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n \phi_{2,i}^2 \tau_{i+1} &= \sum_{i=1}^n \left\{ (r)^{2(i-1)} \beta^2 \left(\frac{x_2^2 + 2\alpha x_1}{\beta^2 + 2\alpha} \right) \frac{\beta}{\alpha} \right. \\
&\quad \left. \frac{1+r}{(\beta^2 + 2\alpha)^{1/2}} [x_2^2 + 2\alpha x_1]^{1/2} r^{i-1} \right\} \\
&= \frac{\beta^3(1+r)}{\alpha(\beta^2 + 2\alpha)^{3/2}} [x_2^2 + 2\alpha x_1]^{3/2} \sum_{i=1}^n r^{2(i-1)} (r)^{i-1} \\
&= \frac{\beta^3(1+r)}{\alpha(\beta^2 + 2\alpha)^{3/2}} [x_2^2 + 2\alpha x_1]^{3/2} \sum_{i=0}^n r^{3i} \\
&\rightarrow \frac{\beta^3(1+r)}{\alpha(\beta^2 + 2\alpha)^{3/2}} \frac{[x_2^2 + 2\alpha x_1]^{3/2}}{1-r^3}, \quad \text{si } n \rightarrow \infty.
\end{aligned}$$

De lo anterior que

$$\begin{aligned}
&\frac{\alpha^2}{3} \sum_{i=2}^n \tau_i^3 - \alpha \sum_{i=1}^n |\phi_{2,i}| \tau_{i+1}^2 + \sum_{i=1}^n \phi_{2,i}^2 \tau_{i+1} \\
&= \frac{\beta^3(1+r)^3}{3\alpha(\beta^2 + 2\alpha)^{3/2}} \frac{[x_2^2 + 2\alpha x_1]^{3/2}}{1-r^3} - \frac{\beta^3(1+r)^2}{\alpha(\beta^2 + 2\alpha)^{3/2}} \frac{[x_2^2 + 2\alpha x_1]^{3/2}}{1-r^3} \\
&\quad + \frac{\beta^3(1+r)}{\alpha(\beta^2 + 2\alpha)^{3/2}} \frac{[x_2^2 + 2\alpha x_1]^{3/2}}{1-r^3} \\
&= \frac{\beta^3 [x_2^2 + 2\alpha x_1]^{3/2}}{3\alpha(\beta^2 + 2\alpha)^{3/2} (1-r^3)} [(1+r)^3 - 3(1+r)^2 + 3(1+r)] \\
&= \frac{\beta^3 [(\beta^2 + 2\alpha)^{3/2} + (\beta^2 + 2\alpha)^{3/2}]}{3\alpha [(\beta^2 + 2\alpha)^{3/2} - (\beta^2 - 2\alpha)^{3/2}] (\beta^2 + 2\alpha)^{3/2}} [x_2^2 + 2\alpha x_1]^{3/2}.
\end{aligned}$$

por lo tanto

$$\begin{aligned}
\int_t^{t+T} \phi_2^2 d\tau &= \frac{1}{3\alpha} x_2^3 + \frac{\beta^3}{3\alpha(\beta^2 + 2\alpha)^{3/2}} [x_2^2 + 2\alpha x_1]^{3/2} \\
&\quad + \frac{\beta^3 [(\beta^2 + 2\alpha)^{3/2} + (\beta^2 + 2\alpha)^{3/2}]}{3\alpha [(\beta^2 + 2\alpha)^{3/2} - (\beta^2 - 2\alpha)^{3/2}] (\beta^2 + 2\alpha)^{3/2}} [x_2^2 + 2\alpha x_1]^{3/2} \\
&= \frac{1}{3\alpha} x_2^3 + \frac{2\beta^3}{3\alpha ((\beta^2 + 2\alpha)^{3/2} - (\beta^2 - 2\alpha)^{3/2})} [x_2^2 + 2\alpha x_1]^{3/2}. \tag{B.25}
\end{aligned}$$

Así, de (B.23) y (B.25) se tiene que

$$\begin{aligned}
V_1(x_1, x_2) &= -\frac{1}{3\alpha^2} x_2^2 - \frac{1}{\alpha} x_1 x_2 + \frac{2(\beta^2 + 2\alpha)^{3/2} + 6\alpha\beta}{3\alpha^2 ((\beta^2 + 2\alpha)^{3/2} - (\beta^2 - 2\alpha)^{3/2})} [x_2^2 + 2\alpha x_1]^{3/2} \\
&\quad + \frac{1}{3\alpha} x_2^3 + \frac{2\beta^3}{3\alpha ((\beta^2 + 2\alpha)^{3/2} - (\beta^2 - 2\alpha)^{3/2})} [x_2^2 + 2\alpha x_1]^{3/2} \\
&= \kappa_1 x_2^3 - \kappa_2 x_1 x_2 + \kappa_3 [x_2^2 + 2\alpha x_1]^{3/2}
\end{aligned}$$

donde

$$\kappa_1 = \frac{\alpha - 1}{3\alpha^2}, \quad \kappa_2 = \frac{1}{\alpha} \quad \text{y} \quad \kappa_3 = \frac{2 [(\beta^2 + 2\alpha)^{3/2} + 3\alpha\beta + \alpha\beta^3]}{3\alpha^2 [(\beta^2 + 2\alpha)^{3/2} - (\beta^2 - 2\alpha)^{3/2}]}.$$

El cálculo de V_2 , V_3 y V_4 es análogo. De acuerdo al método se tiene que $\dot{V} = -|x_1| - x_2^2$ con lo que el teorema queda demostrado para el caso nominal.

Caso perturbado

Tomando la derivada de (4.14) a lo largo de las trayectorias del sistema perturbado (4.1) con $\beta^2 > 2\alpha$, sobre el conjunto \mathcal{A}_1 , se tiene que

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \frac{\partial V}{\partial x} \dot{x} \\ &= \begin{bmatrix} -\kappa_2 x_2 + \frac{3}{2} \kappa_3 (x_2^2 - 2\alpha|x_1|)^{1/2} (-2\alpha \operatorname{sign}(x_1)) \\ 3\kappa_1 x_2^2 \operatorname{sign}(x_2) - \kappa_2 x_1 + \frac{3}{2} \kappa_3 (x_2^2 - 2\alpha|x_1|)^{1/2} (2x_2) \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} x_2 \\ w(t, x) + u \end{bmatrix} \\ &= -\kappa_2 x_2^2 + 3\alpha\kappa_3 |x_2| (x_2^2 - 2\alpha|x_1|)^{1/2} + 3\kappa_1 x_2^2 \operatorname{sign}(x_2) (w(t, x) + u) \\ &\quad - \kappa_2 x_1 (w(t, x) + u) + 3\kappa_3 x_2 (w(t, x) + u) (x_2^2 - 2\alpha|x_1|)^{1/2} \\ &= [-1 + 3\kappa_1 w(t, x) \operatorname{sign}(x_2)] x_2^2 + [-\kappa_2 w(t, x) \operatorname{sign}(x_1) - \kappa_2 \alpha] |x_1| \\ &\quad + 3\kappa_3 w(t, x) x_2 (x_2^2 - 2\alpha|x_1|)^{1/2} \\ &\leq [-1 + 3|\kappa_1|a] x_2^2 + [\kappa_2 a - \kappa_2 \alpha] |x_1| + 3\kappa_3 a |x_2| (x_2^2 - 2\alpha|x_1|)^{1/2}, \end{aligned}$$

lo anterior debido a que $-\kappa_2 - 3\kappa_1\alpha = -1$ y $|w(t, x)| \leq a$.

Ahora, supongamos que se eligen α y β de tal forma que se cumple lo siguiente

$$\frac{1}{3(|\kappa_1| + \kappa_3)} > a,$$

de aquí se sigue que

$$-3|\kappa_1|a + 1 > 3\kappa_3 a,$$

además, debido a la elección de α y β , resulta que $3|\kappa_1|a - 1 < 0$ y que $\kappa_2 a - \alpha\kappa_2 < 0$, entonces es válido lo siguiente

$$(3|\kappa_1|a - 1)^2 > 9\kappa_3^2 a^2 \quad \text{y} \quad (3\kappa_1 a - 1)(\kappa_2 a - \alpha\kappa_2) > 0,$$

de modo que si se define $A = 3|\kappa_1|a - 1$ y $B = \kappa_2 a - \alpha\kappa_2$ se tiene lo siguiente

$$A^2 x_2^4 + 2AB|x_1|x_2^2 > 9\kappa_3^2 a^2 x_2^4 - 18\alpha\kappa_3^2 a^2 |x_1|x_2^2,$$

de aquí es claro que

$$A^2 x_2^4 + 2AB|x_1|x_2^2 + B^2 x_1^2 > 9\kappa_3^2 a^2 x_2^2 (x_2^2 - 2\alpha|x_1|),$$

lo que es equivalente a

$$(-Ax_2^2 - B|x_1|)^2 > \left(3\kappa_3 a |x_2| (x_2^2 - 2\alpha|x_1|)^{1/2}\right)^2,$$

tomando la raíz cuadrada en ambos lados de la desigualdad anterior se tiene que

$$-Ax_2^2 - B|x_1| > 3\kappa_3 a|x_2| (x_2^2 - 2\alpha|x_1|)^{1/2},$$

y por lo tanto

$$Ax_2^2 + B|x_1| + 3\kappa_3 a|x_2| (x_2^2 - 2\alpha|x_1|)^{1/2} < 0,$$

con lo que se ha demostrado que $\dot{V}_1 < 0$ siempre que se elijan α y β de tal forma que

$$a < \frac{1}{3(|\kappa_1| + \kappa_3)}.$$

Haciendo un análisis similar para V_2 , se tiene que $\dot{V}_2 < 0$ siempre que se elijan α y β de tal forma que se cumpla la desigualdad

$$a < \frac{1}{3(\kappa_4 + \kappa_6)}.$$

Se puede probar que

$$\frac{1}{3(\kappa_6 + \kappa_4)} \geq \frac{1}{3(|\kappa_1| + \kappa_3)},$$

así, se puede asegurar que $\dot{V} < 0$ siempre que se elijan α y β de tal forma que

$$a < \frac{1}{3(|\kappa_1| + \kappa_3)},$$

lo que demuestra que la función (4.14) es una Función de Lyapunov para el sistema (4.1).

Tiempos de tránsito y coordenadas de cruce por la superficie de conmutación. Caso: $\beta^2 < 2\alpha$

Sea $s = x_2 + \sqrt{2\alpha|x_1|} \text{sign}(x_1)$ entonces $s = 0$ queda definida por la expresión $x_2 = -\sqrt{2\alpha|x_1|} \text{sign}(x_1)$. Como puede verse en la Figura 4.8, las superficies $s = 0$ y $\sigma = 0$ dividen el espacio fase en los siguientes conjuntos

$$\mathcal{B}_1 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \sigma s \leq 0\}, \quad \mathcal{B}_2 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid sx_1 \leq 0\}, \quad \mathcal{B}_3 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \sigma x_1 > 0\},$$

El tiempo de tránsito necesario para que las trayectorias del sistema intersecten a $\sigma = 0$ dependerá de la región en la que estas inicien ya que su comportamiento varía. A continuación se calcula tanto el tiempo de tránsito a la superficie de deslizamiento así como el tiempo que tarda la trayectoria del sistema en converger al origen sobre la superficie deslizante.

Condiciones iniciales sobre \mathcal{B}_1

Cuando las condiciones iniciales $(x_1, x_2) = (x_{10}, x_{20})$, se encuentran en la región \mathcal{B}_1 y $x_1 < 0$, las trayectorias del sistema alcanzan, en un tiempo t_1 , la superficie $\sigma = 0$ en las coordenadas $(x_1, x_2) = (x_{11}, x_{21})$, con $x_{11} < 0$ y $x_{21} > 0$. A partir de ahí, las trayectorias del sistema evolucionan sobre la superficie de deslizamiento $\sigma = 0$ y les tomará un tiempo t_2 para llegar al origen $(x_1, x_2) = (0, 0)$. Los valores de estos tiempos y coordenadas se dan en la siguiente proposición.

Proposición B.4. Si $x_{10} < 0$ y $(x_{10}, x_{20}) \in \mathcal{B}_1$, entonces

$$t_1 = \frac{1}{\alpha} \left[x_{20} - \frac{\beta}{(2\alpha - \beta^2)^{1/2}} (-x_{20}^2 - 2\alpha x_{10})^{1/2} \right], \quad t_2 = \frac{2}{\beta} \left(-\frac{x_{20}^2 + 2\alpha x_{10}}{2\alpha - \beta^2} \right)^{1/2}.$$

$$x_{11} = \frac{x_{20}^2 + 2\alpha x_{10}}{2\alpha - \beta^2}, \quad y \quad x_{21} = \beta \left(-\frac{x_{20}^2 + 2\alpha x_{10}}{2\alpha - \beta^2} \right)^{1/2}.$$

Demostración. Debido a que $x_{11} < 0$, se tiene de $\sigma = 0$ que $x_{21} = \beta(x_{11})^{1/2}$ lo que implica que $x_{21}^2 = -\beta^2 x_{11}$. Ahora, a partir de la ecuación (B.6) se obtiene $x_{11} = -\frac{1}{2\alpha} (x_{21}^2 - x_{20}^2) + x_{10}$, que al substituir x_{21}^2 y despejando x_{11} resulta en

$$x_{11} = \frac{x_{20}^2 + 2\alpha x_{10}}{2\alpha - \beta^2},$$

que substituyendo en $x_{21}^2 = -\beta^2 x_{11}$ y despejando x_{21} queda

$$x_{21} = \beta \left(-\frac{x_{20}^2 + 2\alpha x_{10}}{2\alpha - \beta^2} \right)^{1/2}.$$

Para calcular t_1 , a partir de la solución temporal del sistema (ecuación B.4) se tiene que $t_1 = -\frac{1}{\alpha}(x_{21} - x_{20})$ por tanto

$$t_1 = \frac{1}{\alpha} \left[x_{20} - \frac{\beta}{(2\alpha - \beta^2)^{1/2}} (-x_{20}^2 - 2\alpha x_{10})^{1/2} \right].$$

Ya estando sobre la superficie de deslizamiento $\sigma = 0$ se tiene un sistema reducido descrito por la ecuación diferencial $\dot{x}_1 = -\beta|x_1|^{1/2} \text{sign}(x_1)$ con condición inicial $x_1(0) = x_{11}$, que cuando $x_1 < 0$ puede expresarse de la forma

$$\dot{x}_1 = \beta(-x_1)^{1/2} \quad \Leftrightarrow \quad (-x_1)^{-1/2} \frac{dx_1}{dt} = \beta, \quad (\text{B.26})$$

tomando en cuenta la igualdad $(-x_1)^{-1/2} \frac{dx_1}{dt} = -2 \frac{d}{dt} [(-x_1)^{1/2}]$ se reescribe (B.26) como

$$-2 \frac{d}{dt} [(-x_1)^{1/2}] = \beta$$

tomando la integral sobre el tiempo de la ecuación anterior queda

$$-2 \int_0^t \frac{d}{dt} [(-x_1)^{1/2}] dt = \int_0^t \beta dt \quad \Rightarrow \quad -2 [(-x_1(t))^{1/2} - (-x_1(0))^{1/2}] = \beta t,$$

por lo tanto las trayectorias del sistema sobre la superficie de deslizamiento están descritas por

$$x_1(t) = - \left[-\frac{\beta t}{2} + (-x_{11})^{1/2} \right]^2. \quad (\text{B.27})$$

Haciendo $x_1 = 0$ en la ecuación anterior, permite calcular el tiempo t_2 en que las trayectorias del sistema viajan sobre la superficie $\sigma = 0$ hasta llegar al origen $(x_1, x_2) = (0, 0)$, así

$$0 = - \left[-\frac{\beta t_2}{2} + (-x_{11})^{1/2} \right]^2 \quad \Leftrightarrow \quad t_2 = \frac{2}{\beta} (-x_{11})^{1/2}$$

por lo tanto

$$t_2 = \frac{2}{\beta} \left(-\frac{x_{20}^2 + 2\alpha x_{10}}{2\alpha - \beta^2} \right)^{1/2}.$$

□

Condiciones iniciales sobre \mathcal{B}_2

Cuando las condiciones iniciales $(x_1, x_2) = (x_{10}, x_{20})$, se encuentran en la región \mathcal{B}_2 y $s > 0$, las trayectorias del sistema alcanzan, en un tiempo t_1 , la recta $x_1 = 0$ en las coordenadas $(x_1, x_2) = (x_{11}, x_{21})$, con $x_{21} > 0$, posteriormente en un lapso t_2 llegarán a la superficie $\sigma = 0$ en las coordenadas $(x_1, x_2) = (x_{12}, x_{22})$, en la sección donde $x_{12} > 0$ y $x_{22} < 0$. A partir de ahí, las trayectorias del sistema evolucionan sobre la superficie de deslizamiento $\sigma = 0$ y les tomará un tiempo t_3 para llegar al origen $(x_1, x_2) = (0, 0)$. Los valores de estos tiempos y coordenadas se dan en la siguiente proposición.

Proposición B.5. *Si $x_{10} < 0$ y $(x_{10}, x_{20}) \in \mathcal{B}_2$, entonces*

$$\begin{aligned} t_1 &= \frac{1}{\alpha} \left[x_{20} - (x_{20}^2 + 2\alpha x_{10})^{1/2} \right] \\ x_{11} &= 0, \quad x_{21} = (x_{20}^2 + 2\alpha x_{10})^{1/2} \\ t_2 &= \frac{\beta + (\beta^2 + 2\alpha)^{1/2}}{\alpha(\beta^2 + 2\alpha)^{1/2}} (x_{20}^2 + 2\alpha x_{10})^{1/2} \\ x_{12} &= \frac{x_{20}^2 + 2\alpha x_{10}}{\beta^2 + 2\alpha}, \quad x_{22} = -\beta \left(\frac{x_{20}^2 + 2\alpha x_{10}}{\beta^2 + 2\alpha} \right)^{1/2} \\ t_3 &= \frac{2}{\beta} \left(\frac{x_{20}^2 + 2\alpha x_{10}}{\beta^2 + 2\alpha} \right)^{1/2} \end{aligned}$$

Demostración. Es claro que $x_{11} = 0$, entonces a partir de la ecuación (B.6) se obtiene $x_{11} = 0 = -\frac{1}{2\alpha} (x_{21}^2 - x_{20}^2) + x_{10}$ de donde, al despejar x_{21} , se obtiene

$$x_{21} = (x_{20}^2 + 2\alpha x_{10})^{1/2}$$

Ahora, a partir de la ecuación (B.4) se tiene que $x_{21} = -\alpha t_1 + x_{20}$ por lo tanto

$$t_1 = \frac{1}{\alpha} (x_{20} - x_{21}) = \frac{1}{\alpha} \left[x_{20} - (x_{20}^2 + 2\alpha x_{10})^{1/2} \right].$$

En $\sigma = 0$, $x_2 = -\beta|x_1|^{1/2} \text{sign}(x_1)$ y como se llegará a la sección donde $x_2 < 0$ y $x_1 > 0$, entonces $x_2^2 = \beta^2 x_1$, al sustituir esta ecuación en (B.7) se tiene que $x_{12} = -\frac{1}{2\alpha} (\beta^2 x_{12} - x_{21}^2)$ de donde se obtiene

$$x_{12} = \frac{x_{20}^2 + 2\alpha x_{10}}{\beta^2 + 2\alpha}$$

que al sustituir en $x_{22}^2 = \beta^2 x_{12}$ y despejando x_{22} queda

$$x_{22} = -\beta \left(\frac{x_{20}^2 + 2\alpha x_{10}}{\beta^2 + 2\alpha} \right)^{1/2}.$$

Nuevamente de (B.4) se obtiene $t_2 = \frac{1}{\alpha} (x_{21} - x_{22})$ por lo tanto

$$t_2 = \frac{\beta + (\beta^2 + 2\alpha)^{1/2}}{\alpha(\beta^2 + 2\alpha)^{1/2}} (x_{20}^2 + 2\alpha x_{10})^{1/2}.$$

Ya estando sobre la superficie de deslizamiento $\sigma = 0$ se tiene un sistema reducido descrito por la ecuación diferencial $\dot{x}_1 = -\beta|x_1|^{1/2} \text{sign}(x_1)$ con condición inicial $x_1(0) = x_{12}$, que cuando $x_1 > 0$ toma la forma

$$\dot{x}_1 = -\beta x_1^{1/2} \quad \Leftrightarrow \quad x_1^{-1/2} \frac{dx_1}{dt} = -\beta, \quad (\text{B.28})$$

tomando en cuenta la igualdad $x_1^{-1/2} \frac{dx_1}{dt} = 2 \frac{d}{dt} (x_1^{1/2})$ se reescribe (B.28) como

$$2 \frac{d}{dt} (x_1^{1/2}) = -\beta,$$

tomando la integral sobre el tiempo de la ecuación anterior queda

$$2 \int_0^t \frac{d}{dt} (x_1^{1/2}) dt = - \int_0^t \beta dt \quad \Rightarrow \quad 2 [(x_1(t))^{1/2} - (x_1(0))^{1/2}] = -\beta t,$$

por lo tanto las trayectorias del sistema sobre la superficie de deslizamiento están descritas por

$$x_1(t) = \left[-\frac{\beta t}{2} + x_{11}^{1/2} \right]^2. \quad (\text{B.29})$$

Haciendo $x_1 = 0$ en la ecuación anterior, se puede calcular el tiempo t_2 en que las trayectorias del sistema viajan sobre la superficie $\sigma = 0$ hasta llegar al origen $(x_1, x_2) = (0, 0)$, así

$$0 = \left[-\frac{\beta t_3}{2} + x_{12}^{1/2} \right]^2 \quad \Leftrightarrow \quad t_3 = \frac{2}{\beta} x_{11}^{1/2}$$

por lo tanto

$$t_3 = \frac{2}{\beta} \left(\frac{x_{20}^2 + 2\alpha x_{10}}{\beta^2 + 2\alpha} \right)^{1/2}.$$

□

Prueba del Teorema 4.3

El cálculo de la FL de grado homogéneo 3 para el caso $\beta^2 < 2\alpha$ se realiza de la siguiente manera

$$V(x) = \int_0^\infty (|\phi_1(\tau)| + \phi_2^2(\tau)) d\tau.$$

Esta integral será calculada por secciones, es decir que habrá una expresión para cada una de las regiones \mathcal{B}_i , para cada $i \in \{1, 2, 3\}$ (Véase la Figura 4.8).

Cálculo de V sobre \mathcal{B}_1 cuando $x_1 < 0$

Sean $T = \tau_1 + \tau_2$ y el tiempo inicial $t = 0$ entonces V_1 está definida por

$$\begin{aligned} V_1 &= \int_0^T (|\phi_1| + \phi_2^2) d\tau \\ &= \int_0^{\tau_1} \left[\left| \frac{u}{2}\tau^2 + x_2\tau + x_1 \right| + (u\tau + x_2)^2 \right] d\tau \\ &\quad + \int_0^{\tau_2} \left[\left(-\frac{\beta}{2}\tau + (-\phi_{11})^{1/2} \right)^2 + \beta^2 \left(-\frac{\beta}{2}\tau + (-\phi_{11})^{1/2} \right)^2 \right] d\tau. \end{aligned}$$

Tomando en cuenta que en \mathcal{B}_1 cuando $x_1 < 0$, $u = -\alpha$ y que $\phi_1 < 0$ entonces

$$\begin{aligned}
V_1 &= \int_0^{\tau_1} \left[\frac{\alpha}{2} \tau^2 - x_2 \tau - x_1 + \alpha^2 \tau^2 - 2\alpha x_2 \tau + x_2^2 \right] d\tau \\
&\quad + \int_0^{\tau_2} \left[\frac{\beta^2}{4} \tau^2 - \beta(-\phi_{11})^{1/2} \tau - \phi_{11} + \beta^2 \left(\frac{\beta^2}{4} \tau^2 - \beta(-\phi_{11})^{1/2} \tau - \phi_{11} \right) \right] d\tau. \\
&= \int_0^{\tau_1} \left[\left(\frac{\alpha}{2} + \alpha^2 \right) \tau^2 - (2\alpha + 1)x_2 \tau - x_1 + x_2^2 \right] d\tau \\
&\quad + \int_0^{\tau_2} \left[\frac{(\beta^2 + \beta^4)}{4} \tau^2 - (\beta + \beta^3)(-\phi_{11})^{1/2} \tau - (\beta^2 + 1)\phi_{11} \right] d\tau \\
&= \frac{1}{3} \left(\frac{\alpha}{2} + \alpha^2 \right) \tau_1^3 - \frac{1}{2} (2\alpha + 1)x_2 \tau_1^2 + (x_2^2 - x_1)\tau_1 \\
&\quad + \frac{(\beta^2 + \beta^4)}{12} \tau_2^3 - \frac{1}{2} (\beta + \beta^3)(-\phi_{11})^{1/2} \tau_2^2 - (\beta^2 + 1)\phi_{11} \tau_2.
\end{aligned}$$

Utilizando la Proposición B.4 se tiene que

$$V_1 = \frac{\alpha - 1}{3\alpha^2} x_2^3 - \frac{1}{\alpha} x_1 x_2 + \frac{\beta^2(2\alpha - 3)(2\alpha - \beta^2) - \beta^4 + 4\alpha^2}{6\alpha^2\beta(2\alpha - \beta^2)^{3/2}} [-x_2^2 - 2\alpha x_1]^{3/2}.$$

El cálculo en el resto de las regiones es análogo.

En la Figura 4.3 puede apreciarse que en el caso en que $\beta^2 < 2\alpha$, las trayectorias de (4.1) tienen distinto comportamiento dependiendo de la región en la que inicien, tales regiones son expuestas en la Figura 4.8. Así, al aplicar el método de diseño a (4.1), en el caso nominal, esto es $f(t.x) = 0$, la expresión de la FL calculada se dividirá en seis partes que, debido a las propiedades simétricas del algoritmo, puede escribirse en solo tres como sigue:

$$V(x) = \begin{cases} \nu_1 |x_2|^3 - \nu_2 x_1 x_2 + \nu_3 [-x_2^2 + 2\alpha |x_1|]^{3/2}, & x \in \mathcal{B}_1 \\ \nu_1 |x_2|^3 - \nu_2 x_1 x_2 + \nu_4 [x_2^2 - 2\alpha |x_1|]^{3/2}, & x \in \mathcal{B}_2 \\ \nu_5 x_2^3 \text{sign}(x_1) + \nu_2 x_1 x_2 + \nu_6 [x_2^2 + 2\alpha |x_1|]^{3/2}, & x \in \mathcal{B}_3 \end{cases}$$

La diferenciabilidad de (4.15) en una vecindad de la curva $\sigma = 0$ se puede comprobar fácilmente ya que es suficiente que sus derivadas parciales sean continuas en cada punto del conjunto $\{\sigma = 0\}$, así debemos comprobar que

$$\frac{\partial V_1}{\partial x}(\sigma_0) = \frac{\partial V_2}{\partial x}(\sigma_0)$$

donde V_m corresponde a (4.15) sobre el conjunto \mathcal{B}_m , con $m = 1, 3$ y $\sigma_0 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \sigma = 0\}$. Recuerdese que $\sigma = 0$ implica que $x_2 = -\beta\sqrt{|x_1|}\text{sign}(x_1)$ de donde $|x_1| = \frac{x_2^2}{\beta^2}$. Ahora, se tiene que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial V_1}{\partial x_1}(\sigma_0) &= \left[-\nu_2 x_2 + 3\alpha\nu_3 \text{sign}(x_1) [-x_2^2 + 2\alpha |x_1|]^{1/2} \right]_{\sigma_0} \\
&= -\nu_2 x_2 + 3\alpha\nu_3 \text{sign}(x_1) \left[-x_2^2 + 2\alpha \frac{x_2^2}{\beta^2} \right]^{1/2} \\
&= -\nu_2 x_2 + 3\alpha\nu_3 \text{sign}(x_1) |x_2| \left(\frac{2\alpha - \beta^2}{\beta^2} \right)^{1/2} \\
&= |x_2| \text{sign}(x_1) \left[\nu_2 + 3\alpha\nu_3 \left(\frac{\beta^2 + 2\alpha}{\beta^2} \right)^{1/2} \right] \\
&= |x_2| \text{sign}(x_1) \frac{\beta^2 + 1}{\beta^2},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial V_1}{\partial x_2}(\sigma_0) &= \left[3\nu_1 x_2^2 \text{sign}(x_2) - \nu_2 x_1 - 3x_2 \nu_3 [-x_2^2 + 2\alpha|x_1|]^{1/2} \right]_{\sigma_0} \\
&= 3\nu_1 x_2^2 \text{sign}(x_2) - \nu_2 \frac{x_2^2}{\beta^2} \text{sign}(x_1) - 3\nu_3 |x_2| \text{sign}(x_2) \left[-x_2^2 + 2\alpha \frac{x_2^2}{\beta^2} \right]^{1/2} \\
&= x_2^2 \text{sign}(x_2) \left[3\nu_1 + \frac{\nu_2}{\beta^2} + 3\nu_3 \left(\frac{2\alpha - \beta^2}{\beta^2} \right)^{1/2} \right] \\
&= x_2^2 \text{sign}(x_2) \frac{-(2\alpha - \beta^2)(\beta^2 + 2\alpha) + 4\alpha^2 - \beta^4}{2\alpha^2 \beta^2 (2\alpha - \beta^2)} \\
&= 0,
\end{aligned}$$

entonces se tiene que

$$\frac{\partial V_1}{\partial x}(\sigma_0) = \left(\frac{\partial V_1}{\partial x_1}(\sigma_0), \frac{\partial V_1}{\partial x_2}(\sigma_0) \right) = \left(|x_2| \text{sign}(x_1) \frac{\beta^2 + 1}{\beta^2}, 0 \right). \quad (\text{B.30})$$

Por otro lado se tiene que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial V_3}{\partial x_1}(\sigma_0) &= \left[\nu_2 x_2 + 3\alpha \nu_6 \text{sign}(x_1) [x_2^2 + 2\alpha|x_1|]^{1/2} \right]_{\sigma_0} \\
&= \nu_2 |x_2| \text{sign}(x_2) + 3\alpha \nu_6 \text{sign}(x_1) \left[x_2^2 + 2\alpha \frac{x_2^2}{\beta^2} \right]^{1/2} \\
&= |x_2| \text{sign}(x_1) \left[-\nu_2 + 3\alpha \nu_6 \left(\frac{\beta^2 + 2\alpha}{\beta^2} \right)^{1/2} \right] \\
&= |x_2| \text{sign}(x_1) \frac{\beta^2 + 1}{\beta^2},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial V_3}{\partial x_2}(\sigma_0) &= \left[3\nu_5 x_2^2 \text{sign}(x_1) + \nu_2 x_1 + 3x_2 \nu_6 [x_2^2 + 2\alpha|x_1|]^{1/2} \right]_{\sigma_0} \\
&= 3\nu_5 x_2^2 \text{sign}(x_1) + \nu_2 \frac{x_2^2}{\beta^2} \text{sign}(x_1) + 3|x_2| \nu_6 \text{sign}(x_2) \left[x_2^2 + 2\alpha \frac{x_2^2}{\beta^2} \right]^{1/2} \\
&= x_2^2 \text{sign}(x_1) \left[3\nu_5 + \frac{\nu_2}{\beta^2} - 3\nu_6 \left(\frac{\beta^2 + 2\alpha}{\beta^2} \right)^{1/2} \right] \\
&= x_2^2 \text{sign}(x_1) \frac{\alpha\beta^2 - \alpha\beta^2 + \alpha - \alpha + \beta^2 - \beta^2}{\alpha^2 \beta^2} \\
&= 0,
\end{aligned}$$

entonces se tiene que

$$\frac{\partial V_3}{\partial x}(\sigma_0) = \left(\frac{\partial V_3}{\partial x_1}(\sigma_0), \frac{\partial V_3}{\partial x_2}(\sigma_0) \right) = \left(|x_2| \text{sign}(x_1) \frac{\beta^2 + 1}{\beta^2}, 0 \right). \quad (\text{B.31})$$

Por lo tanto, de (B.30) y de (B.31), es claro que $\frac{\partial V_1}{\partial x}(\sigma_0) = \frac{\partial V_2}{\partial x}(\sigma_0)$, lo que demuestra que (4.15) es diferenciable en una vecindad de la curva $\sigma = 0$. Así, en el caso nominal y cuando $\beta^2 < 2\alpha$, se tiene que (4.15) es una FL para (4.1), cuya derivada temporal está dada por

$$\dot{V} = -|x_1| - x_2^2.$$

Caso perturbado

Tomando la derivada de (4.15) a lo largo de las trayectorias del sistema (4.1) sobre el conjunto \mathcal{B}_1 se obtiene

$$\begin{aligned}
\dot{V} &= \frac{\partial V}{\partial x} \cdot \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -\nu_2 x_2 + \frac{3}{2} \nu_3 (-x_2^2 + 2\alpha |x_1|)^{1/2} (2\alpha \operatorname{sign}(x_1)) \\ 3\nu_1 x_2^2 \operatorname{sign}(x_2) - \nu_2 x_1 + \frac{3}{2} \nu_3 (-x_2^2 + 2\alpha |x_1|)^{1/2} (-2x_2) \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} x_2 \\ f(t, x) + u \end{bmatrix} \\
&= -|x_1| - x_2^2 + \left[3\nu_1 x_2^2 \operatorname{sign}(x_2) - \nu_2 x_1 + 3\nu_3 x_2 (-x_2^2 + 2\alpha |x_1|)^{1/2} \right] f(t, x) \\
&\leq -|x_1| - x_2^2 + \left[3|\nu_1| x_2^2 + \nu_2 |x_1| + 3|\nu_3| |x_2| (-x_2^2 + 2\alpha |x_1|)^{1/2} \right] F \\
&\leq (-1 + \nu_2 F) |x_1| + (-1 + 3|\nu_1| F) x_2^2 + 3|\nu_3| F |x_2| (-x_2^2 + 2\alpha |x_1|)^{1/2} \\
&\leq (-1 + \nu_2 F) |x_1| + (-1 + 3|\nu_1| F) \beta^2 |x_1| + 3|\nu_3| F \sqrt{2\alpha |x_1|} (-\beta^2 |x_1| + 2\alpha |x_1|)^{1/2} \\
&\leq \left[(-1 + \nu_2 F) + \beta^2 (-1 + 3|\nu_1| F) + 3|\nu_3| F \sqrt{2\alpha(2\alpha - \beta^2)} \right] |x_1|,
\end{aligned}$$

nótese que sobre \mathcal{B}_1 el estado x_1 solo se anula en el origen de manera que $\dot{V} \leq 0$ siempre que

$$(-1 + \nu_2 F) + \beta^2 (-1 + 3|\nu_1| F) + 3|\nu_3| F \sqrt{2\alpha(2\alpha - \beta^2)} < 0$$

lo cual se cumple eligiendo α y β con $\beta^2 < 2\alpha$ y la siguiente restricción

$$c_1 = \frac{\beta^2 + 1}{3\beta^2 |\nu_1| + \nu_2 + 3|\nu_3| \sqrt{2\alpha(2\alpha - \beta^2)}} > F.$$

Haciendo un análisis similar en el resto del dominio se encuentra que para conseguir la negatividad de la derivada temporal de (4.15) se debe cumplir, sobre el conjunto \mathcal{B}_2 , que

$$c_2 = \frac{1}{3|\nu_1| + 3\nu_4} > F,$$

mientras que sobre el conjunto \mathcal{B}_3 han de satisfacerse las desigualdades

$$c_3 = \frac{1}{3(\nu_5 + \nu_6)} > F \quad \text{y} \quad c_4 = \frac{1}{\nu_2 + 3\alpha\nu_6} > F.$$

Con lo que puede concluirse que (4.15) es una FL para el sistema perturbado (4.1) siempre que se elijan α y β de tal forma que $\beta^2 < 2\alpha$ y se cumpla lo siguiente:

$$\min \{c_1, c_2, c_3, c_4\} > F.$$

Bibliografía

- [1] D. V. Anosov. On stability of equilibrium points of relay systems. *Automatica i telemekhanica (Autom. Remote Control)*, 2:135–149, 1959.
- [2] A. Bacciotti and L. Rosier. *Liapunov functions and stability in control theory*, volume 267 of *Lecture notes in control and information science*. Springer London, 2001.
- [3] G. Bartolini, A. Pisano, and E. Usai. On the finite-time stabilization of uncertain nonlinear systems with relative degree three. *IEEE Trans. Autom. Control*, 52(11):2134–2141, november 2007.
- [4] C. Edwards and S. Spurgeon. *Sliding Mode Control: Theory and Applications*. Taylor and Francis, London, 1998.
- [5] A. F. Filippov. *Differential equations with discontinuous right-hand side*. Kluwer. Dordrecht, The Netherlands, 1988.
- [6] L. Fridman and A. Levant. *Sliding Mode Control in Engineering*, chapter 3. Marcel Dekker Ink., NY, 2002.
- [7] H. Hermes. *Homogeneous coordinates and continuous asymptotically stabilizing feedback controls, in, Differential Equations, Stability and Control (S. Elaydi, ed.)*, volume 127 of *Lecture Notes in Pure and Applied Math.*, pages 249–260. Marcel Dekker, Inc., NY, 1991.
- [8] Hassan k. Khalil. *Nonlinear Systems*. Prentice Hall, 3 edition, 2002.
- [9] A. Levant. Sliding order and sliding accuracy in sliding mode control. *International Journal of Control*, 58(6):1247–1263, 1993.
- [10] A. Levant. Higher-order sliding modes, differentiation and output-feedback control. *International Journal of Control*, 76(6):924–941, 2003.
- [11] A. Levant. Homogeneity approach to high-order sliding mode design. *Automatica*, 41:823–830, 2005.
- [12] A. Levant. Principles of 2-sliding mode design. *Automatica*, 43(4):576–586, April 2007.
- [13] Z. Man, A. P. Paplinski, and H. R. Wu. A robust MIMO terminal sliding mode control for rigid robotic manipulators. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 39(12):2464–2468, 1994.
- [14] Y. Orlov. Finite time stability and robust control synthesis of uncertain switched systems. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 43(4):1253–1271, 2005.

- [15] A. Polyakov and A. Poznyak. Lyapunov function design for finite-time convergence analysis: “twisting” controller for second-order sliding mode realization. *Automatica*, 45(2):444–448, February 2009.
- [16] L. Rosier. Inverse of lyapunov’s second theorem for measurable functions. *Proceedings of IFAC-NOLCOS*, pages 655–660, 1992.
- [17] R. Santiesteban, J. A. Moreno, and L. M. Fridman. Finite-time convergence analysis for “twisting” controller via a strict lyapunov function. *11th International Workshop on Variable Structure Systems–VSS 2010. Mexico City, Mexico*, pages 26–28, June 2010.
- [18] V. Utkin, Guldner J., and J. Shi. *Sliding Mode Control in Electromechanical Systems*. Taylor & Francis, 1999.
- [19] V. I. Zubov. *Methods of A. M. Lyapunov and their applications*. Groningen: P. Noordho: Limited, 1964.