



UNIVERSIDAD NACIONAL  
AUTÓNOMA DE  
MÉXICO

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

---

---

PROGRAMA DE MAESTRIA Y DOCTORADO EN  
INGENIERIA

INTERACCIÓN SUELO-ESTRUCTURA  
UTILIZANDO EL MÉTODO DE ELEMENTOS  
FINITOS

T E S I S

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:

**MAESTRA EN INGENIERÍA**

INGENIERÍA CIVIL - GEOTECNIA

P R E S E N T A:

**JAZMÍN PÉREZ CUEVAS**

TUTOR:

**M. EN I. AGUSTÍN DEMÉNEGHI COLINA**

MÉXICO D.F. 2012



**JURADO ASIGNADO:**

Presidente: DR. MARÍN CÓRDOVA SALVADOR

Secretario: ING. LOPEZ RINCÓN GERMAN

Vocal: M. I. DEMÉNEGHI COLINA AGUSTÍN

1<sup>er</sup> Suplente: M. I. CASTILLO Y CAMACHO JORGE EFRAÍN

2<sup>do</sup>. Suplente: M. I. MAGAÑA DEL TORO ROBERTO

Lugar o lugares donde realizó la tesis:  
SECRETARÍA DE POSGRADO E INVESTIGACIÓN

**TUTOR DE TESIS:**

M. I. AGUSTÍN DEMÉNEGHI COLINA

**FIRMA**

---



---

## AGRADECIMIENTOS

### A DIOS

Por darme las fuerzas y la fe para salir adelante, por lo que soy y por todo lo que he recibido.

### A mis padres

*Narciso Pérez Sánchez y Josefina Cuevas García*

Porque son la guía para continuar mi camino, por sus enseñanzas y el apoyo incondicional que siempre me han brindado. Gracias por el esfuerzo que han dado para sacar a delante a cada uno de nosotros, sus hijos, y principalmente porque son el motor para que continuemos siempre adelante.

### A mis hermanas

*Leticia, Elsa María y Rocío*

Por el apoyo, por ser también mis compañeras y amigas y por ser parte de esta meta.

### A mis sobrinas

*Ximena, Valeria y Mariana*

Por ser parte de mi familia y el cariño recibido.

### A la Familia Pérez Almaguer

Por el interés y el entusiasmo que me han transmitido para llegar al final de este paso, que es concluir la maestría.

### A mi novio

*Leobardo De la Rosa Sánchez*

Por el apoyo incondicional que he recibido para concluir este trabajo, por tu tiempo, dedicación y comprensión. Gracias por tu amor y cariño.

### A mi tutor de Tesis

M.I Agustín Deméneghi Colina

Por la oportunidad que me dio, por sus enseñanzas y por el tiempo dedicado para sacar adelante este trabajo.

### A mis sinodales

Por ser parte de este trabajo y por sus enseñanzas transmitidas durante mi estancia en esta querida Universidad.

---



# Í N D I C E

## INTRODUCCIÓN

### 1. MÉTODO DEL ELEMENTO FINITO (MEF)

- 1.1 Definición
- 1.2 Elemento finito aplicado a un elemento triangular
  - 1.2.1 Solución teórica
- 1.3 Elemento finito aplicado a un elemento rectangular. Placas en flexión
- 1.4 Elemento finito aplicado a un tetraedro
- 1.5 Ecuación Constitutiva
  - 1.5.1 Modelos constitutivos
    - 1.5.1.1 Parámetros geotécnicos
    - 1.5.1.2 Compresibilidad de los suelos. Teoría de la consolidación
    - 1.5.1.3 Cálculo de asentamiento por consolidación
    - 1.5.1.4 Teoría de Terzaghi (consolidación primaria)
    - 1.5.1.5 Teoría de Zeevaert (consolidación secundaria)

### 2. ANÁLISIS ESTRUCTURAL

- 2.1 Método de rigideces.
  - 2.1.1 Obtención de la matriz de rigidez para un elemento cualquiera
  - 2.1.2 Planteamiento para un marco plano
  - 2.1.3 Planteamiento para una retícula plana

### 3. INTERACCIÓN SUELO ESTRUCTURA

- 3.1 Definición de interacción suelo-estructura
  - 3.2 Presiones ejercidas en el suelo por una cimentación
    - 3.2.1 Rigidez relativa suelo-estructura. Esfuerzos sobre elementos de cimentación
-



- 3.2.1.1 Concepto de rigidez relativa suelo-estructura
  - 3.3 Deformaciones del suelo de cimentación por la aplicación de cargas de la estructura
    - 3.3.1 Cálculo de deformaciones del suelo
  - 4. EJEMPLO DE APLICACIÓN PARA EL ANÁLISIS DE INTERACCIÓN SUELO-ESTRUCTURA
    - 4.1 Interacción suelo-losa de cimentación haciendo uso de software
      - 4.1.2 Determinación de parámetros del suelo,  $E_s$  (módulo de elasticidad del suelo) y  $\nu$  (relación de Poisson)
      - 4.1.3 Análisis estructural de una losa de cimentación
      - 4.1.4 Aplicación del método iterativo suelo-losa de cimentación
  - 5. CONCLUSIONES
  - 6. REFERENCIAS
-



## INTRODUCCIÓN

El Método de Elementos Finitos (MEF) es una técnica numérica que ha sido utilizada, con relativo éxito, desde hace más de tres décadas (Naylor, 1981), en la resolución de problemas de Ingeniería. Los programas elaborados para los equipos de cómputo, enfocados en el análisis geotécnico con el MEF han sido desarrollados específicamente para estudiar problemas que involucran: la interacción del suelo y la estructura, la construcción de obras geotécnicas y sus diferentes etapas, problemas de filtración y estudios sobre las acciones dinámicas en el terreno.

Bien es sabido, que los métodos tradicionales de análisis están basados habitualmente en hipótesis de cálculo que simplifican de manera gradual el problema a ser analizado. Adicionalmente, estos métodos no tienen la capacidad de tomar en cuenta todos los factores y variables que el ingeniero proyectista necesita emplear, pudiendo limitar severamente la exactitud de la solución a un problema particular. La alternativa a estas limitaciones es el MEF que, correctamente aplicado, es capaz de superar éstos impedimentos, ofreciendo numerosas ventajas sobre los métodos de cálculo convencionales.

Como se mencionó anteriormente, correctamente aplicado, el MEF es capaz de tomar en cuenta geometrías complejas, cualquier tipo y condiciones de aplicación de cargas, comportamiento no lineal de los materiales, distribución no homogénea de los geomateriales y el complejo problema de la interacción suelo-estructura.

Es importante destacar que, uno de los elementos fundamentales para realizar un análisis geotécnico acertado, empleando el MEF, es la elección de un modelo constitutivo apropiado al terreno en estudio. El mejor modelo constitutivo a elegir será aquel que reproduzca el comportamiento del terreno de la manera más real. No obstante, para valerse de un modelo geotécnico particular es imprescindible realizar ensayos de campo y de laboratorio, para determinar los parámetros necesarios que permitan caracterizar y reproducir el comportamiento del terreno.

En este trabajo se analiza, mediante la aplicación del MEF (Método de Elementos Finitos), un caso particular de interacción suelo estructura, haciendo uso del programa de análisis SAP2000.



En el primer capítulo de este trabajo se da una breve definición del MEF, que junto con el uso de la computadora electrónica digital se utiliza para resolver problemas complejos, incluso considerando materiales no-homogéneos, de comportamiento esfuerzo-deformación no-lineal y con condiciones de frontera complejas.

En este capítulo se presentan de manera general los pasos que se llevan a cabo para discretizar un cuerpo en elementos denominados “elementos finitos”, así como la definición del método a través de un medio continuo.

Esto con el fin de definir las ecuaciones del elemento finito donde se evaluarán el trabajo de las fuerzas externas y el trabajo interno de deformación acumulado (o energía interna de deformación). Obteniendo finalmente un sistema de ecuaciones en el que las incógnitas son los desplazamientos en los nudos de los elementos.

Seguidamente se da una definición de *ecuación constitutiva* así como una descripción breve de la obtención de parámetros necesarios para el análisis geotécnico, con base en estudios de laboratorio que se llevan a cabo en arcillas saturadas.

Como se podrá observar en esta sección, el comportamiento es muy diferente para cada tipo de suelo. Existen ya modelos constitutivos que nos permiten definir el comportamiento del material, donde se toma en cuenta la relación esfuerzo-deformación-tiempo. Estos modelos ayudan a reproducir las propiedades que gobiernan el comportamiento de un problema geotécnico particular.

Como parte del análisis entre el suelo y la estructura, es importante llevar a cabo el análisis de la estructura que se desplantará sobre el suelo de cimentación. De esto trata el segundo capítulo, en el que se obtiene la matriz de rigidez de la estructura y las formulas para obtener los elementos mecánicos que se generan por la acción de las cargas que actúan sobre dicha estructura.

En el capítulo tres se da una breve descripción sobre interacción suelo estructura tomando en cuenta sólo la parte estática, así como la influencia que tiene el tipo de estructura sobre los diagramas de presiones que se generan en el suelo.



Con respecto al capítulo cuatro, se ilustra un ejemplo de interacción suelo estructura con el programa SAP2000 aplicando el Método de Elementos Finitos.

Finalmente se emiten conclusiones y recomendaciones de los resultados obtenidos durante el desarrollo del presente trabajo.





## 1. MÉTODO DEL ELEMENTO FINITO (MEF)

### 1.1 Definición

El método del elemento finito es un procedimiento que sirve, entre otras cosas, para conocer el estado de esfuerzo y deformación (y por ende los desplazamientos) en un medio continuo que puede ser heterogéneo y anisótropo. Básicamente consiste en la descomposición de un elemento físico continuo (estructura) en un número discreto de partes o elementos que se hallan conectados entre sí por un número discreto de puntos denominados como nodos.

Los movimientos de estos nodos constituyen las incógnitas fundamentales del problema. Dentro de cada elemento, los movimientos de cualquier punto se obtienen a partir de los movimientos de los nodos del elemento y, a partir de éstos, se estudia el comportamiento de los elementos en forma individual, para después acoplarlos y conocer con ello las condiciones generales en el medio que se está estudiando.

La discretización referida anterior, es el proceso de modelación de un cuerpo que consiste en la división equivalente del mismo, en un sistema conformado por cuerpos más pequeños (elementos finitos) interconectados por medio de puntos comunes o nodos, los cuales forman superficies y se comportan como volúmenes de control independientes, los que a su vez son afectados por las condiciones de frontera que afecten al cuerpo estudiado como un todo.

### 1.2 Elemento finito aplicado a un elemento triangular

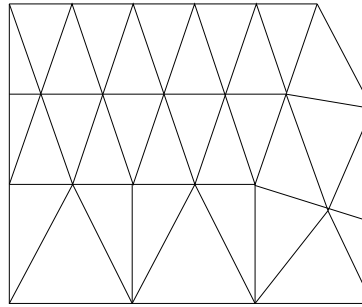
Para representar de una manera clara lo que acaba de definirse, se considerará un medio continuo el cual se dividirá en triángulos como se presenta en la figura 1.1.

Al aplicar un sistema de fuerzas externas en los vértices (o nodos) de los triángulos se provoca que el medio se deforme y se presenten desplazamientos en dichos vértices. Las ecuaciones del MEF se obtienen valuando el trabajo de las fuerzas externas y el trabajo acumulado debido a los esfuerzos internos (o energía interna de deformación). Para el caso elástico lineal ambos trabajos se igualan, dado que se desprecian las pérdidas de energía, lo que conduce a un sistema de ecuaciones lineales en



el que las fuerzas en los vértices de los triángulos quedan en función de los desplazamientos de los mismos.

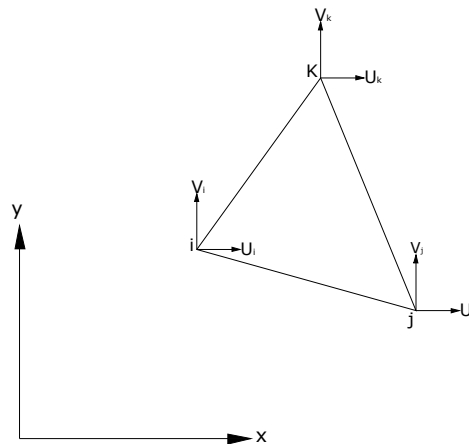
La resolución de este sistema permite conocer los desplazamientos en los nodos (o vértices de los triángulos), lo que permite a su vez determinar los esfuerzos dentro de los triángulos en los que se dividió el medio.



**Figura 1.1.** Medio continuo dividido en triángulos

### 1.2.1 Solución teórica

En primer lugar se obtienen las ecuaciones que rigen el comportamiento de un elemento triangular cualquiera dentro del medio. Suponiendo que se conocen los desplazamientos en los vértices después de la deformación, figura 1.2, se obtendrán los desplazamientos, las deformaciones unitarias y los esfuerzos dentro del triángulo en función de los desplazamientos en los nodos del mismo, ya que son relaciones que se necesitarán para valuar el trabajo interno de deformación.



**Figura 1.2.** Desplazamientos en nodos de un triángulo



Campo de desplazamientos: se definen los desplazamientos de un punto cualquiera del elemento en función de los desplazamientos de los nodos (i, j y k) del mismo, de manera única, a través de un conjunto de funciones polinómicas llamadas “funciones de forma”. Para esto se proseguirá de la siguiente manera:

Se encontrarán primeramente los desplazamientos  $u$  y  $v$  (ver figura 1.2) en cualquier punto dentro del triángulo en función de los desplazamientos en los nodos (Zienkiewicz 1977). Suponiendo que los desplazamientos  $u$  y  $v$  son funciones lineales de las coordenadas  $x$  y  $y$  es decir:

$$u(x, y) = \alpha_{11} + \alpha_{12}x + \alpha_{13}y \quad (1.1)$$

$$v(x, y) = \alpha_{21} + \alpha_{22}x + \alpha_{23}y \quad (1.2)$$

Donde  $u$  y  $v$  son los desplazamientos horizontal y vertical respectivamente.

Sustituyendo los valores de las coordenadas de los nudos de los triángulos en la ecuación (1.1)

$$\begin{aligned} u_i &= \alpha_{11} + \alpha_{12}x_i + \alpha_{13}y_i \\ u_j &= \alpha_{11} + \alpha_{12}x_j + \alpha_{13}y_j \\ u_k &= \alpha_{11} + \alpha_{12}x_k + \alpha_{13}y_k \end{aligned} \quad (1.3)$$

Se despejan los valores de las ecuaciones (1.3)  $\alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_{13}$

Utilizando la regla de Cramer:

$$\alpha_{11} = \frac{\begin{vmatrix} u_i & x_i & y_i \\ u_j & x_j & y_j \\ u_k & x_k & y_k \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_k & y_k \end{vmatrix}}$$

$$\alpha_{11} = \frac{1}{2A} [u_i(x_j y_k - x_k y_j) - x_i(u_j y_k - u_k y_j) + y_i(u_j x_k - u_k x_j)] \quad (1.4)$$



En donde:

$$2A = \begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_k & y_k \end{vmatrix} \quad (1.5)$$

y  $A$  = área del triángulo

De manera análoga

$$\alpha_{12} = \frac{1}{2A} [(u_j y_k - u_k y_j) - u_i (y_k - y_j) + y_i (u_k - u_j)] \quad (1.6)$$

$$\alpha_{13} = \frac{1}{2A} [(x_j u_k - x_k u_j) - x_i (u_k - u_j) + u_i (x_k - x_j)] \quad (1.7)$$

Al sustituir los valores de  $\alpha_{11}$ ,  $\alpha_{12}$  y  $\alpha_{13}$  en la ecuación 1.1

$$u = \frac{1}{2A} \{u_i [(x_j y_k - x_k y_j) + (y_j - y_k)x + (x_k - x_j)y] + u_j [(x_k y_i - x_i y_k) + (y_k - y_i)x + (x_i - x_k)y] + u_k [(x_i y_j - y_i x_j) + (y_i - y_k)x + (x_j - x_i)y]\} \quad (1.8)$$

Llamando

$$\begin{aligned} x_k - x_j &= x_{kj} & , & & x_i - x_k &= x_{ik} & , & & x_j - x_i &= x_{ji} \\ y_j - y_k &= y_{jk} & , & & y_k - y_i &= y_{ki} & , & & y_i - y_k &= y_{ik} \\ a_i &= x_j y_k - x_k y_j \\ a_j &= x_k y_i - x_i y_k \\ a_k &= x_i y_j - y_i x_j \end{aligned} \quad (1.9)$$

y sustituyendo en la ecuación (1.8)

$$u = \frac{1}{2A} [u_i (a_i + y_{jk}x + x_{kj}y) + u_j (a_j + y_{ki}x + x_{ik}y) + u_k (a_k + y_{ik}x + x_{ji}y)] \quad (1.10)$$

Al proceder de forma similar para el desplazamiento vertical  $v$ :

$$v = \frac{1}{2A} [v_i (a_i + y_{jk}x + x_{kj}y) + v_j (a_j + y_{ki}x + x_{ik}y) + v_k (a_k + y_{ik}x + x_{ji}y)] \quad (1.11)$$

Es decir

$$u = \frac{1}{2A} [u_i (a_i + y_{jk}x + x_{kj}y) + u_j (a_j + y_{ki}x + x_{ik}y) + u_k (a_k + y_{ik}x + x_{ji}y)] \quad (1.12)$$



$$v = \frac{1}{2A} \left[ v_i (a_i + y_{jk}x + x_{kj}y) + v_j (a_j + y_{ki}x + x_{ik}y) + v_k (a_k + y_{ik}x + x_{ji}y) \right] \quad (1.13)$$

Arreglando las ecuaciones (1.12) y (1.13) en forma matricial se tiene:

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} a_i + y_{jk}x + x_{kj}y & 0 & a_j + y_{ki}x + x_{ik}y & 0 & a_k + y_{ik}x + x_{ji}y & 0 \\ 0 & a_i + y_{jk}x + x_{kj}y & 0 & a_j + y_{ki}x + x_{ik}y & 0 & a_k + y_{ik}x + x_{ji}y \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \\ u_k \\ v_k \end{Bmatrix} \quad (1.14)$$

Si llamamos

$$\underline{U}_{xy} = \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} \quad (1.15)$$

$$\underline{u}^e = \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \\ u_k \\ v_k \end{Bmatrix} \quad (1.16)$$

$$\underline{N} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} a_i + y_{jk}x + x_{kj}y & 0 & a_j + y_{ki}x + x_{ik}y & 0 & a_k + y_{ik}x + x_{ji}y & 0 \\ 0 & a_i + y_{jk}x + x_{kj}y & 0 & a_j + y_{ki}x + x_{ik}y & 0 & a_k + y_{ik}x + x_{ji}y \end{bmatrix} \quad (1.17)$$

Queda

$$\underline{U}_{xy} = \underline{N}\underline{u}^e \quad (1.18)$$

De acuerdo a la ecuación (1.18), un elemento finito  $e$  viene definido por sus nodos  $(i, j, k)$  y por su contorno formado por las líneas que los unen. Los desplazamientos  $\underline{u}$  de cualquier punto del elemento se aproximan mediante un vector columna  $\underline{U}$ .

$\underline{N}$  representa a las funciones de posición dadas, denominada *matriz de forma*.



En cada elemento se pueden distinguir tres tipos de nodos, primarios secundarios e intermedios como se muestra en la figura 1.3

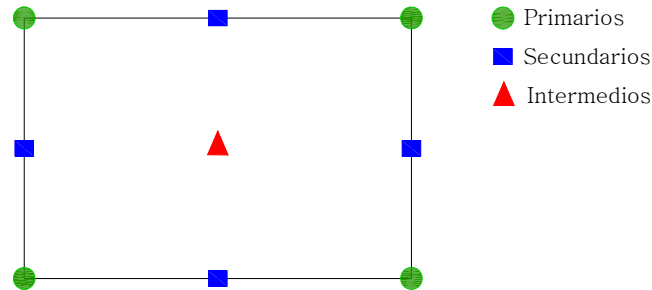


Figura 1.3. Ubicación de los nodos

Conocidos los desplazamientos en los nodos del elemento, se pueden determinar las deformaciones unitarias  $\varepsilon$  dentro del elemento en función de los desplazamientos en sus nodos.

De acuerdo con la teoría de la deformación sabemos que la deformación lineal unitaria  $\varepsilon_x$  vale

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}$$

La deformación lineal unitaria  $\varepsilon_y$  vale

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}$$

Y la deformación angular

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$

Empleando las ecuaciones 1.12 y 1.13

$$\varepsilon_x = \frac{1}{2A} (u_i y_{jk} + u_j y_{ki} + u_k y_{ij})$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{2A} (v_i x_{kj} + v_j x_{ik} + v_k x_{ji})$$

$$\gamma_{xy} = \frac{1}{2A} (u_i x_{kj} + u_j x_{ik} + u_k x_{ji} + v_i y_{jk} + v_j y_{ki} + v_k y_{ij})$$



En forma matricial

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} y_{jk} & 0 & y_{ki} & 0 & y_{ij} & 0 \\ 0 & x_{kj} & 0 & x_{ik} & 0 & x_{ji} \\ x_{kj} & y_{jk} & x_{ik} & y_{ki} & x_{ji} & y_{ij} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \\ u_k \\ v_k \end{Bmatrix} \quad (1.19)$$

Queda

$$\varepsilon = \underline{B}u^e \quad (1.20)$$

Donde B se obtiene de la siguiente matriz

$$\underline{B} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} y_{jk} & 0 & y_{ki} & 0 & y_{ij} & 0 \\ 0 & x_{kj} & 0 & x_{ik} & 0 & x_{ji} \\ x_{kj} & y_{jk} & x_{ik} & y_{ki} & x_{ji} & y_{ij} \end{bmatrix} \quad (1.21)$$

y

$$\underline{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (1.22)$$

Ahora se determinarán los esfuerzos dentro del triángulo en función de los desplazamientos de sus nudos. Antes se dará una breve definición sobre estado de esfuerzo y deformación plana.

### Definiciones

Se dice que un cuerpo se encuentra en estado de *esfuerzo plano* cuando se cumplen los dos requisitos siguientes:

1. El espesor del cuerpo es pequeño en comparación con las dimensiones restantes
2. Las cargas externas actúan sobre su plano medio, el cual es ortogonal al eje sobre el cual se mide el espesor.



Estas condiciones quedan satisfechas por cuerpos tales como vigas de gran peralte (comúnmente llamadas vigas pared, figura 1.4).



Figura 1.4. Viga de pared

Por otra parte, el estado de *deformación plana* corresponde a un caso en cierta medida opuesto al anterior, es decir, a aquel en el que el espesor es mucho mayor que las dimensiones restantes de la estructura, sin que varíe la forma seccional. Además, se debe cumplir, que las cargas se encuentren repartidas de manera uniforme sobre el eje paralelo al espesor, de suerte que el análisis de una sección de espesor unitario refleje adecuadamente el comportamiento de toda la estructura. Por tanto, el análisis de una sección de espesor unitario refleja fielmente el estado de esfuerzos y deformaciones de toda la estructura. Estas condiciones se dan por ejemplo en una presa de gravedad (figura 1.5).

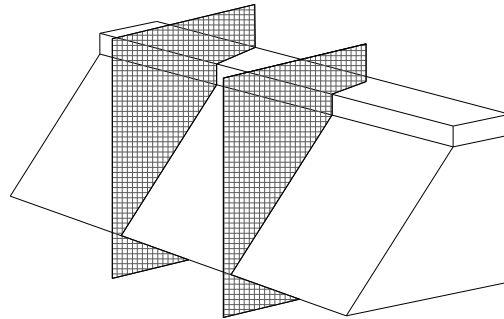


Figura 1.5. Una aproximación al estado de deformación plana

Si la dirección del eje paralelo al espesor del cuerpo es  $z$ , ambos estados pueden ser caracterizados por

$$\gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0 \quad (1.23)$$





debido a que sólo hay cargas en el plano  $(x, y)$ .

Por otra parte, en el caso de deformación plana la deformación  $\varepsilon_z$  se toma como nula, dado que se supone que en ambos extremos de la estructura sobre el eje  $z$  hay restricciones a la deformación. En el caso de esfuerzo plano, por contra, la suposición de que no hay cargas en las caras del cuerpo normales al eje  $z$  implica que  $\sigma_z = 0$ . En consecuencia, ambos estados se pueden caracterizar por el conjunto de deformaciones dado en la expresión (1.22)

Y el conjunto de esfuerzos

$$\underline{\sigma} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \quad (1.24)$$

De acuerdo con la ecuación (1.23) que define a ambos estados, las relaciones elásticas entre esfuerzos y deformaciones resultan ser las siguientes:

1. *Esfuerzo plano.* Como en este caso se tiene que  $\sigma_z = 0$ , las relaciones generales tridimensionales para el caso isotrópico se reducen a

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_y) \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu\sigma_x) \\ \gamma_{xy} &= \frac{2(1+\nu)}{E}\tau_{xy} \end{aligned} \quad (1.25)$$

Resolviendo el sistema anterior para  $\sigma_x, \sigma_y$  y  $\tau_{xy}$ , resulta la siguiente ecuación matricial

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (1.26)$$



$$D = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (1.27)$$

Con las expresiones (1.24) y (1.27), la expresión para calcular los esfuerzos queda

$$\underline{\sigma} = \underline{D} \underline{\varepsilon} \quad (1.28)$$

Que en términos simples, representa el comportamiento esfuerzo-deformación del suelo. Por lo general, adopta la forma de una relación entre deformaciones y esfuerzos y, por tanto, proporciona un vínculo entre equilibrio y compatibilidad.

La deformación en  $z$  se puede obtener a partir de

$$\varepsilon_z = -\frac{\nu}{E} [\sigma_x + \sigma_y] \quad (1.29)$$

Al sustituir la ecuación (1.20) en la ecuación (1.28):

$$\underline{\sigma} = \underline{D} \underline{B} \underline{u}^e \quad (1.30)$$

2. *Deformación plana.* En este caso  $\varepsilon_z = 0$  y por tanto

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} [\sigma_y + \nu(\sigma_x + \sigma_z)] \\ \varepsilon_z &= 0 = \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)] \\ \gamma_{xy} &= \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{xy} \end{aligned} \quad (1.31)$$



Por lo que ahora de la expresión (1.28), el valor de  $D$  es

$$D = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \nu/(1-\nu) & 0 \\ \nu/(1-\nu) & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-2\nu)/2(1-\nu) \end{bmatrix} \quad (1.32)$$

En las ecuaciones anteriores  $D$  es la matriz constitutiva de elasticidad bidimensional isotrópica y dependerá de la situación actual y pasada de la historia esfuerzo-deformación.

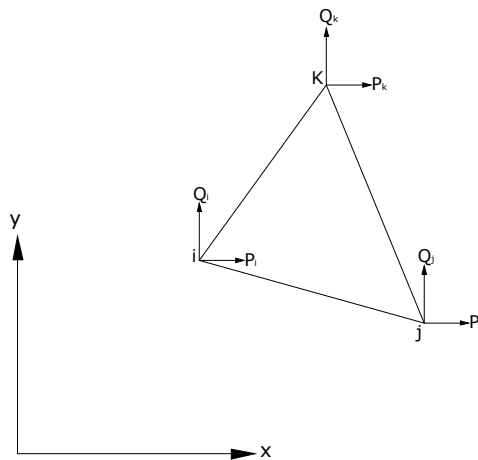
Con las expresiones anteriores se obtienen las ecuaciones fundamentales del elemento finito donde, como se ha referido anteriormente, se evaluarán el trabajo de las fuerzas externas y el trabajo interno de deformación acumulado, para después igualarlos.

Con base en las figuras 1.2 y 1.6, el trabajo de las fuerzas externas vale

$$W_e = \frac{1}{2} P_i u_i + \frac{1}{2} Q_i v_i + \frac{1}{2} P_j u_j + \frac{1}{2} Q_j v_j + \frac{1}{2} P_k u_k + \frac{1}{2} Q_k v_k$$

es decir

$$W_e = \frac{1}{2} (\underline{u}^e)^T \underline{P}^e \quad (1.33)$$



**Figura 1.6.** Cargas en los nudos de un triángulo



siendo

$$P^e = \begin{Bmatrix} P_i \\ Q_i \\ P_j \\ Q_j \\ P_k \\ Q_k \end{Bmatrix} \quad (1.34)$$

El trabajo interno acumulado dentro del triángulo, por unidad de volumen, es igual a:

$$W'_i = \frac{1}{2} \varepsilon_x \sigma_x + \frac{1}{2} \varepsilon_y \sigma_y + \frac{1}{2} \gamma_{xy} \tau_{xy} = \frac{1}{2} \underline{\varepsilon}^T \underline{\sigma} \quad (1.35)$$

El trabajo interno en todo el volumen del triángulo vale:

$$W_i = \int_{vol} W'_i dVol = \int_{vol} \frac{1}{2} \underline{\varepsilon}^T \underline{\sigma} dVol \quad (1.36)$$

Igualando ecuaciones (1.33) y (1.36)

$$W_e = W_i$$

$$\frac{1}{2} (\underline{u}^e)^T P^e = \int_{vol} \frac{1}{2} \underline{\varepsilon}^T \underline{\sigma} dVol$$

Pero, por las ecuaciones (1.18) y (1.20)

$$\underline{\varepsilon} = \underline{B} \underline{u}^e$$

$$\underline{u} = \underline{N} \underline{u}^e$$

Resolviendo se tiene que,

$$\underline{P}^e = \int_{vol} \underline{B}^T \underline{\sigma} dVol$$

Pero

$$\underline{\sigma} = \underline{D} \underline{B} \underline{u}^e$$

Por tanto

$$\underline{P}^e = \underline{B}^T \underline{D} \underline{B} \underline{u}^e \int_{vol} dVol$$



Si el espesor  $t$  del triángulo es constante:

$$\underline{P}^e = \underline{B}^T \underline{D} \underline{B} \underline{u}^e \quad A t = A t \underline{B}^T \underline{D} \underline{B} \underline{u}^e \quad (1.37)$$

Donde  $A$  es el área del triángulo.

Llamando

$$\underline{K}^e = A t \underline{B}^T \underline{D} \underline{B} \quad (1.38)$$

Donde  $\underline{K}^e$  es la matriz de rigidez del elemento, por lo que la ecuación (1.37) queda

$$\underline{P}^e = \underline{K}^e \underline{u}^e \quad (1.39)$$

$$\underline{K}^e \underline{u}^e = \underline{P}^e \quad (1.40)$$

La ecuación (1.40) es válida para un elemento dentro del medio. Se puede aplicar entonces para todos los elementos (triángulos) de la región en estudio. Si se llama  $\underline{K}$  a la suma de las matrices de rigidez de todos los triángulos,  $\underline{u}$  al vector de desplazamientos de todo el medio y  $\underline{P}$  al vector de cargas en todos los nudos del medio, entonces la ecuación (1.40), válida para un triángulo, se puede escribir de la siguiente forma para todo el medio:

$$\underline{K} \underline{u} = \underline{P} \quad (1.41)$$

Donde  $\underline{K}$  se denomina como la matriz de rigidez de todo el medio.

La ecuación (1.41) da lugar a un sistema de ecuaciones en el que las incógnitas son los desplazamientos en los nudos de los elementos. La resolución de este sistema permite determinar estos desplazamientos.

### 1.3 Elemento finito aplicado a un elemento rectangular. Placas en flexión

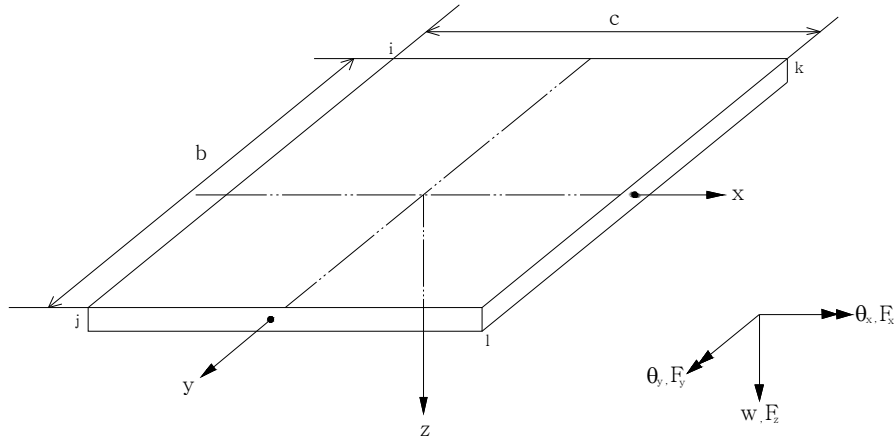
En el tema anterior se determinó la matriz de rigidez de un medio dividido en elementos triangulares, ahora se definirá la matriz de rigidez para un elemento rectangular aplicado a placas en flexión.

Para obtener la matriz de rigidez, se sigue el mismo procedimiento que se definió para un elemento triangular, esto es, definiendo las relaciones de



desplazamiento, deformación y esfuerzos (momentos para el caso de una placa a flexión), aplicado a los correspondientes grados de libertad en cada nodo y cuyo número depende de la geometría del elemento. Finalmente se define la matriz de rigidez del elemento estudiado, partiendo de la ley de Hooke.

El elemento rectangular mostrado en la figura (1.7) presenta en cada nodo tres grados de libertad (una desviación y dos rotaciones).



**Figura 1.7.** Elemento rectangular en flexión

Primeramente se definen los desplazamientos partiendo de la siguiente expresión:

$$\{f\} = w = A_1 + A_2x + A_3y + A_4x^2 + A_5xy + A_6y^2 + A_7x^3 + A_8x^2y + A_9xy^2 + A_{10}y^3 + A_{11}x^3y + A_{12}xy^3 \quad (1.42)$$

que toma la forma de

$$\{f\} = \{P\}\{A\}$$

$A$  es el vector de constantes indeterminadas, como los definidos para un triángulo ( $\alpha$ ),  $\{f\}$  es la función de desplazamientos y  $\{P\}$  es una función de  $x$  e  $y$  solamente.

Con base en la ecuación (1.42) se define al vector del parámetro de desplazamiento como

$$\{D^*\} = \{w_i, \theta_{xi}, \theta_{yi} | w_j, \theta_{xj}, \theta_{yj} | w_k, \theta_{xk}, \theta_{yk} | w_l, \theta_{xl}, \theta_{yl}\} \quad (1.43)$$



donde

$$\theta_x = \frac{\partial w}{\partial y} \quad \text{y} \quad \theta_y = \frac{\partial w}{\partial x}$$

Si se aplica repetidamente la ecuación (1.42) a los nodos del elemento uno después de otro, obtenemos un grupo de ecuaciones que relacionan los parámetros nodales  $\{D^*\}$  con las constantes  $\{A\}$  por medio de sus coordenadas nodales pertinentes, quedando finalmente como

$$w = \left[ [L]_i | [L]_j | [L]_k | [L]_l \right] \{D^*\} \quad (1.44)$$

Donde  $[L]_i | [L]_j | [L]_k | [L]_l$  son las funciones de forma asociadas a los parámetros de los nodos  $i, j, k, l$ , respectivamente.

Ahora se definirá la obtención de las curvaturas (deformaciones) del elemento placa en cualquier punto  $(x, y)$ .

Las curvaturas están dadas por

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ \frac{2\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} \quad (1.45)$$

Por diferenciación de la ecuación (1.44) se obtiene

$$\{\varepsilon\} = \left[ [B]_i | [B]_j | [B]_k | [B]_l \right] \{D^*\} \quad (1.46)$$

o

$$\{\varepsilon\} = \sum_{r=i,j,k,l} [B]_r \{D^*\}_r \quad (1.47)$$

en donde  $[B]$  es una matriz cuyos elementos dependen de las coordenadas cartesianas de los nudos del elemento (como en el caso del elemento triangular), y se define como:



$$[B]_r = \begin{bmatrix} -\frac{\partial^2}{\partial x^2} [L]_r \\ -\frac{\partial^2}{\partial y^2} [L]_r \\ 2\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} [L]_r \end{bmatrix} \quad (1.48)$$

y

$$\{D^*\}_r = \{w_r, \theta_{xr}, \theta_{yr}\} \quad (1.49)$$

Definiendo ahora los momentos (esfuerzos), se tiene que para una losa isotrópica, la relación de momento-curvatura se presenta de una manera modificada de la ecuación (1.28)

$$\sigma = D\varepsilon$$

donde (en este caso)

$$\{\sigma\} = \{M_x M_y M_{xy}\} \quad (1.50)$$

$$[d] = N \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (1.51)$$

$$N = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$$

En general, calculamos los esfuerzos (momentos) en las cuatro esquinas. Estos se pueden expresar en función de los desplazamientos nodales con la ecuación 1.30 (definida anteriormente para un elemento triangular)

$$\sigma = DBu^e$$

que, para un elemento isotrópico, toma la forma (para este caso)

$$\{\sigma\} = [d][B]\{D^*\}$$





Donde el producto  $[d][B]$  se conoce como matriz de esfuerzo

Habiendo deducido las matrices de deformación y esfuerzo, es posible formular la matriz de rigidez.

La matriz de rigidez correspondiente a las 12 coordenadas nodales (en el orden indicado en la ecuación (1.43) se puede calcular con

$$[S^*] = \int_{-b/2}^{b/2} \int_{-c/2}^{c/2} [B]^T [d][B] dx dy \quad (1.52)$$

Para un elemento isotrópico, esto da

$$[S^*] = \frac{N}{15cb} [T] [S^{**}] [T] \quad (1.53)$$

donde

$$[T] = \begin{bmatrix} [T_s] & \text{Las matrices secundarias} \\ & [T_s] \text{ que no se muestran} \\ & & [T_s] \text{ son cero} \\ & & & [T_s] \end{bmatrix}$$

$$[T_s] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

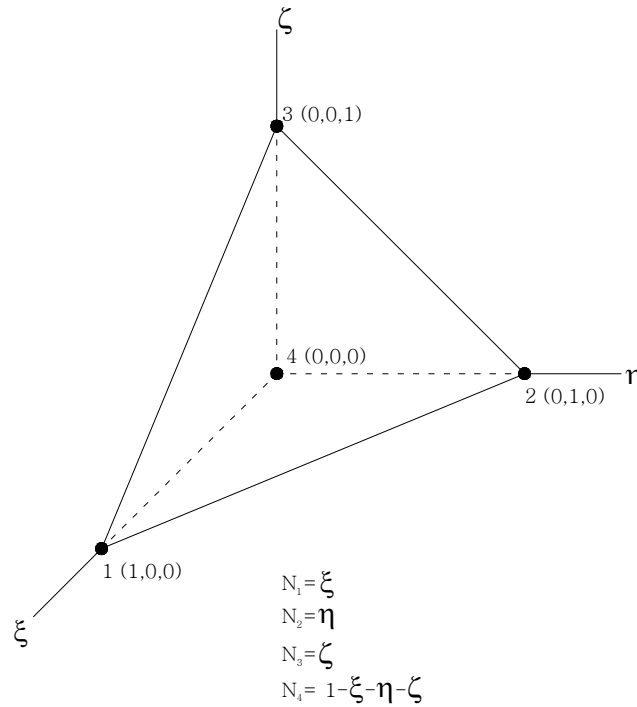
#### 1.4 Elemento finito aplicado a un tetraedro

Para el caso de la modelación de sólidos con elemento finito (que será aplicado para la modelación del suelo en el capítulo 6), se define a continuación la obtención de la matriz de rigidez, que parte de un tetraedro (elemento maestro), determinado para ello el vector de desplazamientos, deformaciones y esfuerzos.

Considerando el elemento maestro de la figura (1.8), se definen las funciones de forma (Chandrupatla y Belegundu, 1999)



$$\underline{N} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 & N_4 & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 & N_4 \end{bmatrix}$$



**Figura 1.8.** Elemento maestro (Tetraedro)

Donde

$$N_1 = \xi, \quad N_2 = \eta, \quad N_3 = \zeta, \quad N_4 = 1 - \xi - \eta - \zeta \quad (1.54)$$

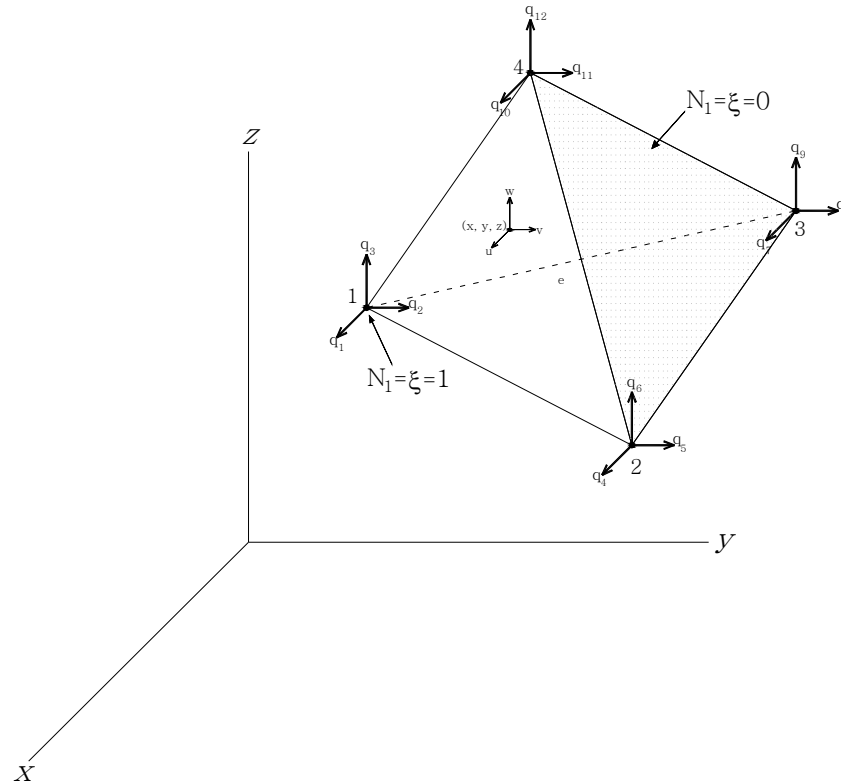
Quedando el vector desplazamiento como

$$\underline{u} = [u, v, w]^T \quad (1.55)$$

$$\underline{u} = \underline{N} \underline{a}^e \quad (1.56)$$

$$\underline{a}^e = [q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6, q_7, q_8, q_9, q_{10}, q_{11}, q_{12}]^T \quad (1.57)$$

donde  $q_i$  son los desplazamientos en los nodos del tetraedro en el espacio, indicados en la figura (1.9)



**Figura 1.9.** Tetraedro en el espacio

Las coordenadas se pueden valorar de la siguiente forma

$$\begin{aligned}
 x &= N_1 x_1 + N_2 x_2 + N_3 x_3 + N_4 x_4 \\
 y &= N_1 y_1 + N_2 y_2 + N_3 y_3 + N_4 y_4 \\
 z &= N_1 z_1 + N_2 z_2 + N_3 z_3 + N_4 z_4
 \end{aligned}
 \tag{1.58}$$

Utilizando los valores de  $N_i$  de la ecuación (1.54) y usando la notación  $x_{ij} = x_i - x_j$ , etcétera, obtenemos

$$\begin{aligned}
 x &= x_4 + x_{14}\xi + x_{24}\eta + x_{34}\zeta \\
 y &= y_4 + y_{14}\xi + y_{24}\eta + y_{34}\zeta \\
 z &= z_4 + z_{14}\xi + z_{24}\eta + z_{34}\zeta
 \end{aligned}
 \tag{1.59}$$

Analizando para un estado tridimensional, consideramos el tetraedro de la figura (1.9) y el elemento (tetraedro) maestro de la figura (1.8). Los desplazamientos en función de las coordenadas generales y locales, están dados por la regla de la cadena para derivadas parciales (Chandrupatla y Belegundu, 1999). Para el desplazamiento  $u$  se tiene



$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial \xi} \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} \\ \frac{\partial u}{\partial \zeta} \end{Bmatrix} = \underline{J} \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial z} \end{Bmatrix} \quad (1.60)$$

El jacobiano  $\underline{J}$  de la transformación está dado por

$$\underline{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{14} & y_{14} & z_{14} \\ x_{24} & y_{24} & z_{24} \\ x_{34} & y_{34} & z_{34} \end{bmatrix} \quad (1.61)$$

El determinante de  $\underline{J}$  es

$$\det \underline{J} = x_{14}(y_{24}z_{34} - y_{34}z_{24}) + y_{14}(z_{24}x_{34} - z_{34}x_{24}) + z_{14}(x_{24}y_{34} - x_{34}y_{24}) \quad (1.62)$$

El volumen del elemento vale

$$V^e = \left| \int_0^1 \int_0^{1-\xi} \int_0^{1-\xi-\eta} \det \underline{J} d\xi d\eta d\zeta \right| \quad (1.63)$$

$$V^e = |\det \underline{J}| \int_0^1 \int_0^{1-\xi} \int_0^{1-\xi-\eta} d\xi d\eta d\zeta \quad (1.64)$$

Usando la fórmula polinomial integral (Chandrupatla y Belengudu, 1999)

$$\int_0^1 \int_0^{1-\xi} \int_0^{1-\xi-\eta} \xi^m \eta^n \zeta^p d\xi d\eta d\zeta = \frac{m!n!p!}{(m+n+p+3)!}$$

Encontramos

$$V^e = \frac{1}{6} |\det \underline{J}|$$



La ecuación (1.60) se puede expresar como

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial z} \end{Bmatrix} = A \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial \xi} \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} \\ \frac{\partial u}{\partial \zeta} \end{Bmatrix} \quad (1.65)$$

Donde  $A = \underline{J}^{-1}$ , y

$$A = \frac{1}{\det \underline{J}} \begin{bmatrix} y_{24}z_{34} - y_{34}z_{24} & y_{34}z_{14} - y_{14}z_{34} & y_{14}z_{24} - y_{24}z_{14} \\ z_{24}x_{34} - z_{34}x_{24} & z_{34}x_{14} - z_{14}x_{34} & z_{14}x_{24} - z_{24}x_{14} \\ x_{24}y_{34} - x_{34}y_{24} & x_{34}y_{14} - x_{14}y_{34} & x_{14}y_{24} - x_{24}y_{14} \end{bmatrix} \quad (1.66)$$

Sabiendo que la deformación unitaria es

$$\underline{\varepsilon} = \underline{B} \underline{a}^e$$

Donde  $\underline{B}$  se encuentra con las ecuaciones 1.55, 1.56, 1.57, 1.65 y 1.66 y la matriz de forma  $\underline{N}$

$$\underline{B} = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 & 0 & A_{12} & 0 & 0 & A_{13} & 0 & 0 & -\bar{A}_1 & 0 & 0 \\ 0 & A_{21} & 0 & 0 & A_{22} & 0 & 0 & A_{23} & 0 & 0 & -\bar{A}_2 & 0 \\ 0 & 0 & A_{31} & 0 & 0 & A_{32} & 0 & 0 & A_{33} & 0 & 0 & -\bar{A}_3 \\ 0 & A_{31} & A_{21} & 0 & A_{32} & A_{22} & 0 & A_{33} & A_{23} & 0 & -\bar{A}_3 & -\bar{A}_2 \\ A_{31} & 0 & A_{11} & A_{32} & 0 & A_{12} & A_{33} & 0 & A_{13} & -\bar{A}_3 & 0 & -\bar{A}_1 \\ A_{21} & A_{11} & 0 & A_{22} & A_{12} & 0 & A_{23} & A_{13} & 0 & -\bar{A}_2 & -\bar{A}_1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{A}_1 = A_{11} + A_{12} + A_{13}$$

$$\bar{A}_2 = A_{21} + A_{22} + A_{23}$$

$$\bar{A}_3 = A_{31} + A_{32} + A_{33}$$

Los esfuerzos se obtienen como se determinó en la ecuación (1.30)

Siguiendo la misma analogía para determinar la ecuación (1.37), para este caso tenemos



$$\begin{aligned} \underline{P}^e &= \int_V \underline{B}^T \underline{DB} \underline{a}^e dV \\ \underline{P}^e &= \underline{B}^T \underline{DBV}^e \underline{a}^e \\ \underline{k}^e \underline{a}^e &= \underline{P}^e \end{aligned} \quad (1.67)$$

donde

$$\underline{k}^e = \underline{B}^T \underline{DB} \det \underline{J} \quad (1.68)$$

$\det \underline{J}$  viene dado por la ecuación (1.62)

Donde  $\underline{k}^e$  es la matriz de rigidez del elemento.

Si llamamos  $\underline{K} = \sum \underline{k}^e$  a la suma de las matrices de rigidez de todos los elementos,  $\underline{a}$  al vector de desplazamientos de todo el medio y  $\underline{P}$  al vector de cargas en todos y cada uno de los nodos, entonces la ecuación (1.67), válida para un elemento, se puede escribir para todo el medio.

## 1.5 Ecuación constitutiva

Se entiende por ecuación constitutiva a la relación que permite determinar los esfuerzos cuando las deformaciones son conocidas o, inversamente, determinar las deformaciones cuando los esfuerzos son conocidos, es decir, es una relación matemática que conecta esfuerzos y deformaciones de un material particular.

Además del esfuerzo y de la deformación, dentro de una ecuación constitutiva aparecen algunas cantidades adicionales denominadas las constantes del material (por ejemplo; el módulo elástico o de Young, E). Los valores de las constantes del material ajustan la ecuación constitutiva a un material particular.

Para predecir la deformación y/o la estabilidad de un cuerpo sometido a cargas es necesario conocer su ecuación constitutiva. Por ejemplo, es necesario conocer la ecuación constitutiva del suelo para predecir la estabilidad de un talud o de un corte, o para predecir las cargas ejercidas en la clave o en la solera de un túnel. También se requiere de esta ecuación para predecir las deformaciones alrededor de una excavación o el asentamiento de la superficie debido a la construcción de un túnel o a la extracción de petróleo del subsuelo.



El punto de vista adoptado en mecánica de los medios continuos en relación con las ecuaciones constitutivas es puramente fenomenológico; es decir, no interesa establecer un análisis a nivel atómico o microscópico de las causas que provocan los esfuerzos al producirse una deformación, sino tan sólo conocer la magnitud y orientación de los esfuerzos debidos a las diferentes deformaciones posibles, lo cual habitualmente se logra por ensayos experimentales de laboratorio que permiten ajustar los parámetros correspondientes a los diferentes tipos de ecuaciones constitutivas.

En este tema nos referimos a los parámetros físicos de los materiales, que constituyen en todo o en parte, los parámetros necesarios para capturar el comportamiento geotécnico de un terreno a un programa aplicando el Método de los Elementos Finitos. Estos parámetros reflejan las propiedades del subsuelo y tienen, para cada material particular, un valor constante.

Ejemplos de estos parámetros elásticos son: el coeficiente de Poisson  $\nu$ , módulo de deformación transversal  $G$ , que puede ser expresado en términos de  $E$  y  $\nu$  como  $G = E/2(1+\nu)$ . Otros parámetros importantes son: el ángulo de fricción interna,  $\phi$ , cohesión,  $c$ , dilatancia,  $\psi$ , la inclinación de la Línea de Consolidación Virgen (VCL),  $\lambda$  y las Líneas de Expansión,  $\kappa$ . Estos parámetros no deben ser modificados durante el cálculo y sus valores no deben depender del tipo de problema que se está resolviendo, ya que deben caracterizar al subsuelo, y por ende, son constantes de cualquier ecuación matemática.

Los parámetros de los materiales son de dos tipos principales; parámetros que caracterizan la deformabilidad (rigidez) del subsuelo y parámetros que caracterizan su resistencia. De los parámetros mencionados en el párrafo anterior,  $\lambda$  y  $\kappa$  pertenecen al primer grupo que también incluye, por ejemplo, parámetros que se obtienen de los ensayos de Consolidación Unidimensional  $C_c$  y  $C_s$  (parámetros que se definen en la sección 1.4.1). Al grupo de los parámetros que caracterizan la resistencia del suelo pertenecen, por ejemplo, el ángulo de fricción interna,  $\phi'$ , y la cohesión aparente,  $c$ .

### 1.5.1 Modelos constitutivos

#### 1.5.1.1 Parámetros geotécnicos

Existen ya modelos constitutivos que nos permiten definir el comportamiento del material.



En este trabajo se analiza el comportamiento de arcillas saturadas basado en el fenómeno de *consolidación*. Al definir el comportamiento del suelo es necesario obtener los parámetros geotécnicos para poder llevar a cabo un buen análisis geotécnico. En este trabajo se consideran los parámetros obtenidos de ensayos en arcilla saturada, esto es, aquellos que toman en cuenta la relación esfuerzo-deformación-tiempo.

### 1.5.1.2 Compresibilidad de los suelos. Teoría de la consolidación

En campo, cuando el esfuerzo sobre una capa de arcilla saturada se incrementa, por ejemplo, por la construcción de una cimentación, la presión de poro del agua se incrementará. Debido a que la permeabilidad hidráulica de las arcillas es muy pequeña, se requerirá algún tiempo para que el exceso de presión de poro del agua se disipe y el incremento de esfuerzo se transfiera gradualmente a la estructura del suelo.

Un cambio en el estado de esfuerzos de la masa de suelo produce un correspondiente cambio de volumen. Los cambios de volumen son importantes ya que producen asentamientos debidos a la compresión del suelo o a levantamientos debido a expansión del mismo.

Independientemente de la velocidad con la que se lleva a cabo la disipación de la presión de poro, se puede originar un cambio de volumen y, por tanto, el asentamiento correspondiente, ver figura 1.10.

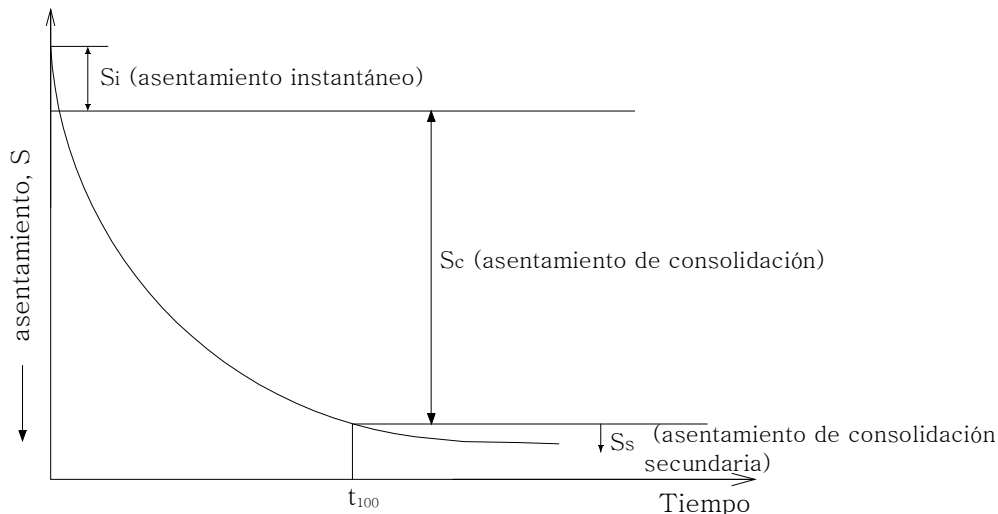


Figura 1.10. Historia del asentamiento de un punto de una cimentación





Las deformaciones que se producen en un estrato de arcilla al variar el estado de esfuerzos, se generan fundamentalmente en tres fases:

- Primera deformación: se percibe casi al instante de aplicación de la carga, sin expulsión de agua (aún no ha habido tiempo para que el agua escape); por lo tanto es *sin drenaje*. Esto implica que la deformación se produce a *volumen constante*. Las deformaciones se desarrollan en el interior de la masa y a esta primera parte se le llama asentamiento *instantáneo, inicial o elástico*.
- Segunda fase del proceso de asentamiento: varía el volumen, pues se expulsa el agua debido al incremento de presión de poro, y a que se ha desarrollado en más tiempo: se llama *asentamiento de consolidación*. Es diferida en el tiempo, y por consecuencia a veces llamada: *asentamiento diferido*.
- Tercera fase de la deformación, debida a los esfuerzos cortantes. Se diferencian dos tipos: uno con cambio de volumen, y otro a volumen constante, función del tiempo, con fenómenos de flujo plástico (deformación de tipo viscoso). Se llama *asentamiento de consolidación secundaria o deformación secundaria*.

En los suelos blandos, y sobre todo en los arcillosos, es donde se desarrolla e interesa el presente tema de investigación, el del *comportamiento de los suelos en relación al esfuerzo - deformación con drenaje*. Por tanto se requiere la modelación del fenómeno del cambio de volumen.

Para estudiar la compresibilidad de un estrato confinado de arcilla se considera una muestra de arcilla lo más inalterada posible, y normalmente consolidada y extraída de una profundidad conocida.

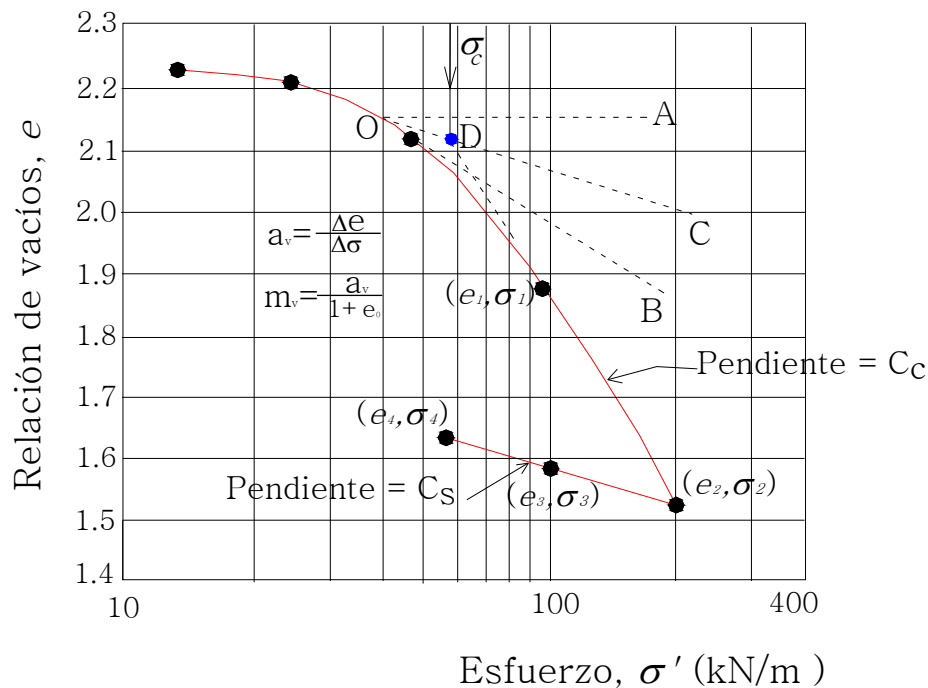
Pruebas de laboratorio sobre muestras de arcilla saturada inalteradas pueden efectuarse (designación de prueba D-2435 del ASTM) para determinar la deformación por consolidación causada por varios incrementos de carga. Las muestras de prueba son generalmente de 2.5 pulgadas (63.5 mm) de diámetro y 1 pulgada (25.4 mm) de altura. Los especímenes se colocan dentro de un anillo, con una piedra porosa en la parte superior y otra en la parte inferior. Se aplica la carga sobre la muestra de manera que el esfuerzo vertical total sea igual a  $\sigma$ . Las lecturas de deformación para el espécimen se toman por 24 horas. Después, la carga se duplica y se toman las lecturas respectivas. En todo momento durante la



prueba, el espécimen se mantiene bajo agua. Este procedimiento continúa hasta que se alcanza el límite de esfuerzo deseado.

Con base en pruebas de laboratorio se traza un gráfica que muestre la variación de la relación de vacíos al final de la consolidación contra el esfuerzo vertical correspondiente (gráfica semilogarítmica:  $e$  sobre la escala aritmética y  $\sigma'$  sobre la escala log).

La naturaleza de la variación de  $e$  contra  $\log$  de  $\sigma'$  para un tipo de arcilla se muestra en la figura 1.11. Después que la presión de consolidación deseada se alcanza, el espécimen puede descargarse gradualmente, lo que resultará en su expansión. La figura 1.11 muestra también la variación de la relación de vacíos durante el periodo de descarga.



**Figura 1.11.** Curva  $e$  vs  $\log \sigma'$  para una arcilla

De la curva  $e$  vs  $\log \sigma'$  mostrada en la figura 1.11, se determinan tres parámetros necesarios para calcular el asentamiento.

1. La *carga de preconsolidación*  $\sigma_c$  es la máxima sobrecarga efectiva a la que el suelo estuvo sometido en el pasado. Se determina usando un simple procedimiento gráfico propuesto por Casagrande (1936) e implica cinco pasos, con referencia a la figura 1.11, éstos son:



- a. Se determina el punto  $O$  sobre la curva  $e - \log \sigma'$  que tenga la curvatura más aguda (es decir, el menor radio de curvatura).
- b. Se dibuja una línea horizontal  $OA$ .
- c. Se traza una línea  $OB$  tangente a la curva  $e - \log \sigma'$  en  $O$ .
- d. Posteriormente se dibuja una línea  $OC$  bisectriz del ángulo  $AOB$ .
- e. Finalmente se traza la porción de línea recta de la curva  $e - \log \sigma'$  hacia atrás hasta cruzar  $OC$ . Éste es el punto  $D$ . La presión que corresponde al punto  $\sigma'$  es el esfuerzo de preconsolidación,  $\sigma_c$ .

Los depósitos naturales de suelo pueden estar *normalmente consolidados* o *preconsolidados* (o *sobreconsolidados*). Esto es, si el esfuerzo actual efectivo de sobrecarga  $\sigma = \sigma_0$  es igual al esfuerzo de preconsolidación  $\sigma_c$ , el suelo está normalmente consolidado. Sin embargo, si  $\sigma_0 < \sigma_c$ , se considera *preconsolidado*.

2. El *índice de compresibilidad*,  $C_c$ , es la pendiente de la porción recta de la curva (última parte de la curva de carga o tramo virgen), o

$$C_c = \frac{e_1 - e_2}{\log \sigma_2 - \log \sigma_1} = \frac{e_1 - e_2}{\log \left( \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \right)} \quad (1.69)$$

Donde  $e_1$  y  $e_2$  son las relaciones de vacíos al final de la consolidación bajo los esfuerzos  $\sigma_1$  y  $\sigma_2$ , respectivamente.

El índice de compresibilidad, determinado en la curva  $e - \log \sigma'$  en el laboratorio, será algo diferente de la encontrada en campo. La razón principal es que el suelo se remodela en alguna medida durante la exploración de campo. La naturaleza de la variación de la curva  $e - \log \sigma'$  en el campo para arcilla normalmente consolidada se muestra en la figura 1.12, a ésta se le conoce generalmente como *curva virgen de compresibilidad*. Ésta cruza aproximadamente la curva de laboratorio en una relación de vacíos de  $0.42e_0$  (Terzaghi y Peck, 1967). Nótese que  $e_0$  es la relación de vacíos de la arcilla en el campo. Conocidos los valores de  $e_0$  y  $\sigma_c$  puede construirse fácilmente la curva virgen y calcular el índice de compresibilidad de la curva usando la ecuación (1.69).



El valor de  $C_c$  varía ampliamente dependiendo de las características propias del suelo (figura 1.13).

Los valores típicos del índice de compresión, son:

$C_c \leq 0.05$  : para arcillas poco compresibles;

$0.05 < C_c < 0.25$  : para arcillas de compresibilidad media;

$C_c \geq 0.25$  : para arcillas de compresibilidad alta.

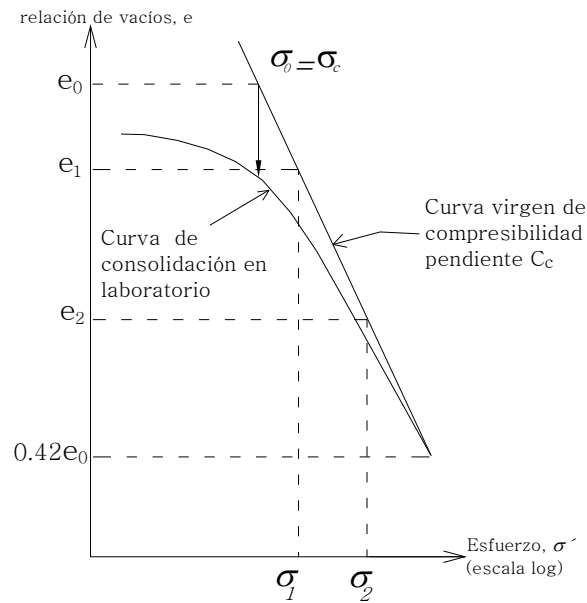


Figura 1.12. Construcción de una curva virgen de compresibilidad para arcilla normalmente consolidada

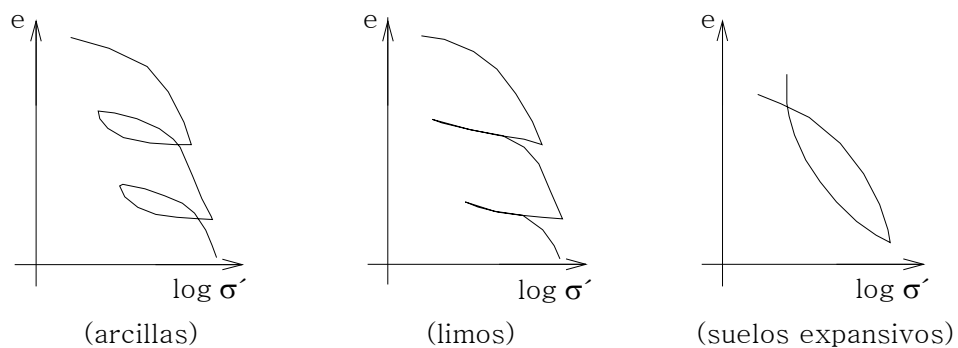


Figura 1.13. Curvas de compresibilidad para distintos tipos de suelo



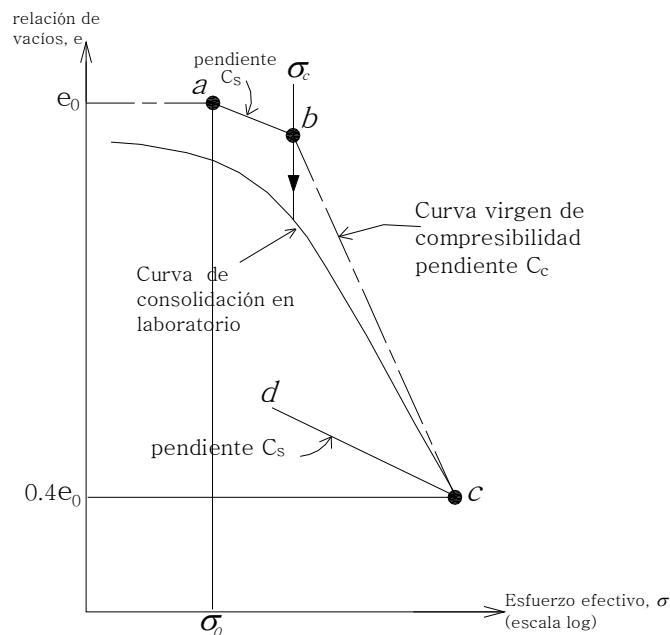
3. El *índice de expansibilidad*,  $C_s$ , es la pendiente de la porción de descarga de la curva  $e - \log \sigma'$ . Según la figura 1.11 puede definirse como

$$C_s = \frac{e_3 - e_4}{\log \left( \frac{\sigma_4}{\sigma_3} \right)} \quad (1.70)$$

El índice de expansibilidad se conoce también como *índice de recompresibilidad*.

La determinación del índice de expansibilidad es importante en la estimación del asentamiento por consolidación de las arcillas preconsolidadas. En el campo, dependiendo del incremento de presión, una arcilla preconsolidada seguirá una trayectoria  $abc$  en la curva  $e - \log \sigma'$ , como muestra la figura 1.14. Nótese que el punto  $a$ , con coordenadas  $\sigma_0$  y  $e_0$ , corresponde a las condiciones de campo antes de cualquier incremento de presión. El punto  $b$  corresponde al esfuerzo de preconsolidación ( $\sigma_c$ ) de la arcilla. La línea  $ab$  es aproximadamente paralela a la curva de descarga  $cd$  en laboratorio (Schmertmann, 1953).

Además, si se conoce  $e_0, \sigma_0, \sigma_c, C_c$  y  $C_s$ , se podrá construir fácilmente la curva de consolidación de campo.



**Figura 1.14.** Construcción de una curva de consolidación en campo para arcilla preconsolidada



## Módulo edométrico

El módulo edométrico,  $E'$  (o, mejor  $E_m$ ), es el módulo de deformación del suelo confinado, hallado en el ensayo edométrico (o consolidación). En el consolidrómetro la muestra de suelo se confina lateralmente, se coloca en un anillo metálico, por lo que el suelo se asienta menos que si se le somete al ensayo de compresión simple. Al estar confinado, el material parece menos compresible, o sea, más rígido. Puesto que cualquier módulo de deformación varía creciendo con la rigidez del material, se debe entender que  $E$ , elástico (deducible de los ensayos de compresión simple o no confinada), es menor que  $E_m$  (deducido de ensayos confinados, o de consolidación).

Si se determina para un suelo, asemejable al material elástico, un módulo edométrico  $E_m$  se tiene la relación

$$E = E_m \left( 1 - \frac{2\nu^2}{1-\nu} \right) \quad (1.71)$$

Donde:

$E$  = es el módulo elástico, en  $\text{kg/cm}^2$

$E_m$  = es el módulo edométrico, en  $\text{kg/cm}^2$

$\nu$  = es el coeficiente de Poisson (relación entre las deformaciones unitarias lateral y axial).

Un caso muy frecuente en gran parte de suelos es el de valor de  $\nu = 0.33$ , por lo que la correlación que se obtiene (sustituyendo en la anterior fórmula) es:  $\rightarrow E = 2/3E_m$

Los valores del módulo confinado,  $E_m$ , oscilan entre  $5000 \text{ kg/cm}^2$  ( $5 \times 10^5 \text{ kN/m}^2$ ), para arenas muy densas, hasta  $1 \text{ kg/cm}^2$  ( $100 \text{ kN/m}^2$ ), para limos y limos arcillosos muy blandos.



### Relación entre módulo edométrico y coeficiente de compresibilidad volumétrica

Si se considera que la deformación unitaria se limita al decremento de altura respecto a la altura inicial, se puede expresar el módulo edométrico en función de la relación de vacíos, como sigue.

$$E_m = \frac{\Delta\sigma'}{-\Delta V} = \frac{\Delta\sigma'}{\frac{\Delta h}{V_o}} = \frac{\Delta\sigma'}{h_0} = \frac{\Delta}{\left(\frac{V_h^i - V_h^f}{V_h^i + V_s^i}\right) \cdot \frac{1}{V_s^i}} = \frac{\Delta\sigma'}{(e_0 - e)(e_0 + 1)} = \frac{\Delta\sigma'(e_0 + 1)}{e_0 - e} = \frac{\Delta\sigma'(1 + e_0)}{\Delta e}$$

$$\Delta p' = \Delta\sigma'$$

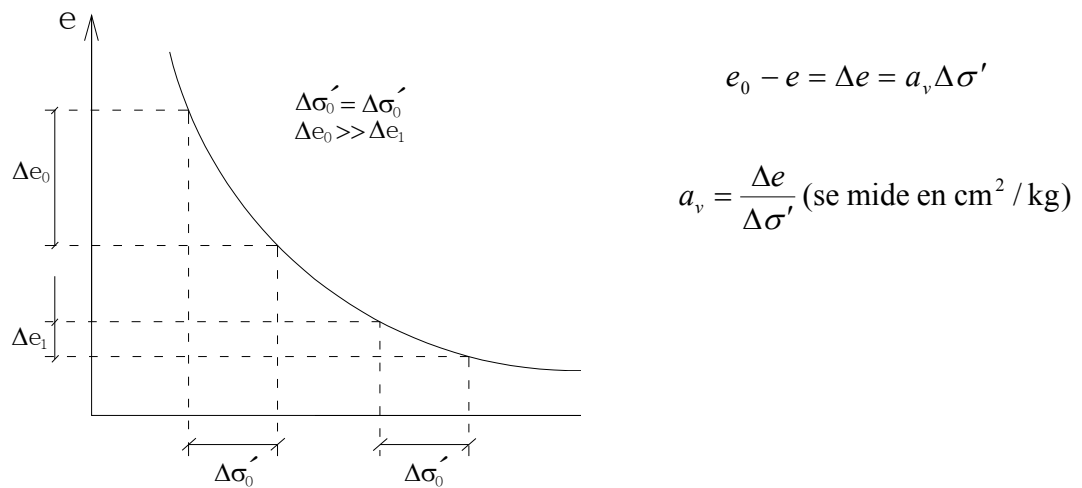


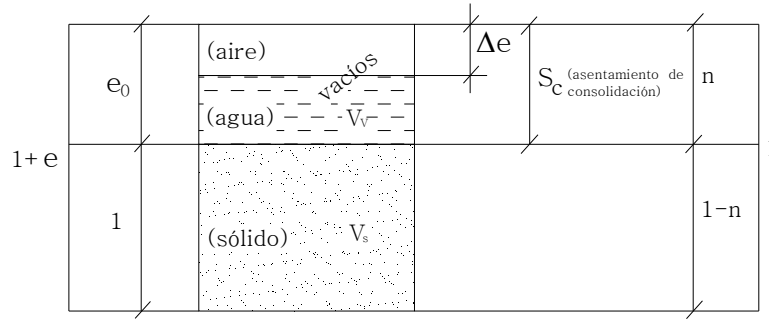
Figura 1.15. Interpretación para la obtención del módulo  $E_m$ .

donde:

$a_v$  = coeficiente de compresibilidad: relaciona la disminución de la relación de vacíos con el incremento de esfuerzo que lo hizo posible.  
 Pero  $a_v$  es variable, es sólo un valor casi constante para determinados escalones de carga de poco incremento; por ejemplo en el intervalo  $[\sigma'_0, \sigma'_0 + \Delta\sigma']$ , ver en la figura 1.15.

Recordando que las relaciones entre relación de vacíos y porosidad se pueden establecer viendo el esquema de la figura 1.16, se tiene:

$$n = \frac{e}{1 + e} \Rightarrow \Delta n = \frac{\Delta e}{1 + e_0}$$



**Figura 1.16.** Esquema que ilustra la determinación del coeficiente de compresibilidad volumétrica.

La disminución de la porosidad  $\Delta n$  por unidad de volumen original de suelo que corresponde a la disminución  $\Delta e$ , puede calcularse en función del coeficiente de compresibilidad volumétrica (paso previo:  $\Delta e = a_v \cdot \Delta \sigma'$ ):

$$\Delta n = \frac{a_v \cdot \Delta \sigma'}{1 + e_0} = m_v \cdot \Delta \sigma'$$

### Coefficiente de compresibilidad volumétrica, $m_v$

El coeficiente de compresibilidad volumétrica,  $m_v$ , representa la compresión de la arcilla por unidad de espesor original bajo la influencia de un aumento unitario de esfuerzo. Se demuestra que su valor es el inverso del módulo edométrico.

$$m_v = \frac{a_v}{1 + e_0}$$

#### 1.5.1.3 Cálculo de asentamiento por consolidación

El asentamiento unidimensional por consolidación (causado por una carga adicional) de una capa de arcilla (figura 1.17a) con espesor  $H_c$  puede calcularse como:

$$S = \frac{\Delta e}{1 + e_0} H_c \quad (1.72)$$

donde

$S$  = asentamiento



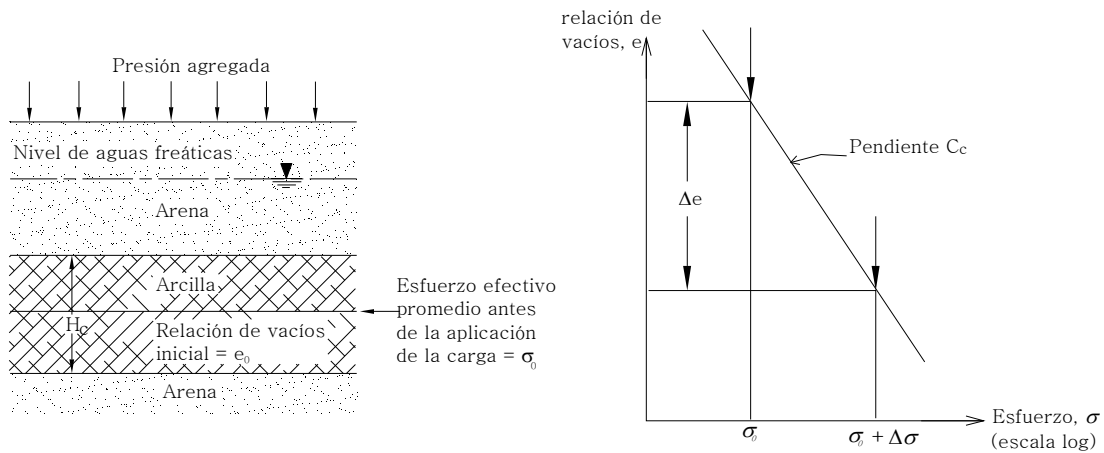


$\Delta e$  = cambio total de la relación de vacíos causada por la aplicación de carga adicional

$e_0$  = relación de vacíos de la arcilla antes de la aplicación de la carga

Nótese que la deformación vertical  $\varepsilon_v$ , se puede definir como:

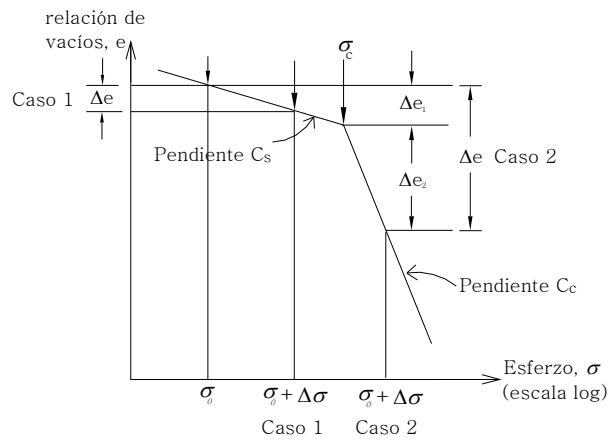
$$\frac{\Delta e}{1 + e_0} = \varepsilon_v$$



(a)

Arcilla normalmente consolidada

(b)



(c)

Figura 1.17. Cálculo de asentamiento unidimensional (b) es para la ecuación (1.74) (c) es para la ecuación (1.76) y (1.78)



Para arcilla normalmente consolidada, la curva  $e-\log \sigma'$  tendrá la forma mostrada en la figura 1.17b. Si  $\sigma_0$  = esfuerzo de sobrecarga efectivo promedio inicial sobre el estrato de arcilla y  $\Delta\sigma$  = incremento promedio de esfuerzo sobre el estrato de arcilla, causado por la carga agregada, el cambio de relación de vacíos provocada por el incremento de esfuerzo es:

$$\Delta e = C_c \log \frac{\sigma_0 + \Delta\sigma}{\sigma_0} \quad (1.73)$$

Ahora combinando las ecuaciones (1.72) y (1.73) se obtiene

$$S = \frac{C_c H_c}{1 + e_0} \log \frac{\sigma_0 + \Delta\sigma}{\sigma_0} \quad (1.74)$$

Para arcilla preconsolidada la curva de campo  $e-\log \sigma'$  se verá como la mostrada en la figura 1.17c. En este caso, dependiendo del valor  $\Delta\sigma$ , pueden presentarse dos condiciones.

Primera condición, si  $\sigma_0 + \Delta\sigma < \sigma_c$ ,

$$\Delta e = C_s \log \frac{\sigma_0 + \Delta\sigma}{\sigma_0} \quad (1.75)$$

Combinando las ecuaciones (1.72) y (1.75) resulta

$$S = \frac{C_s H_s}{1 + e_0} \log \frac{\sigma_0 + \Delta\sigma}{\sigma_0} \quad (1.76)$$

Segunda condición, si  $\sigma_0 < \sigma_c < \sigma_0 + \Delta\sigma$ ,

$$\Delta e = \Delta e_1 + \Delta e_2 = C_s \log \frac{\sigma_c}{\sigma_0} + C_c \log \frac{\sigma_0 + \Delta\sigma}{\sigma_c} \quad (1.77)$$

Ahora, combinando las ecuaciones (1.72) y (1.77) se obtiene

$$S = \frac{C_s H_c}{1 + e_0} \log \frac{\sigma_c}{\sigma_0} + \frac{C_c H_c}{1 + e_0} \log \frac{\sigma_0 + \Delta\sigma}{\sigma_c} \quad (1.78)$$



Finalmente los asentamientos debidos a la consolidación primaria (que se explicará en el siguiente tema) pueden expresarse de la siguiente forma:

$$S_p = \frac{H_c}{1+e_0} (C_s \log \frac{\sigma_c}{\sigma_0} + C_c \log \frac{\sigma_0 + \Delta\sigma}{\sigma_c}) \quad (1.79)$$

#### 1.5.1.4 Teoría de Terzaghi (consolidación primaria)

La teoría de la consolidación definida por Terzaghi (1925) que se expone a continuación, explica exclusivamente el fenómeno hidrodinámico que se verifica por la expulsión del agua gravitacional de un material en el cual no se observa el fenómeno de viscosidad intergranular.

La teoría de la consolidación tiene como propósito obtener una ecuación con la cual se pueda conocer el valor de la presión de poro,  $u$ , y la relación de vacíos,  $e$ , para cualquier punto y para cualquier tiempo,  $t$ , en un masa de suelo de espesor  $2H$  (estrato de suelo drenado por ambos lados), sometida al proceso de consolidación, durante el cual la masa se encuentre sometida a una carga sostenida. Un estrato en el campo se encuentra confinado lateralmente a deformación nula y por lo tanto podrá representarse por la prueba del edómetro o consolidómetro.

Por otro lado para llevar a cabo el desarrollo de este problema Terzaghi se basó en las hipótesis simplificadoras, y aún así, se obtuvieron soluciones para casos simples y bien definidos. Sin embargo, las soluciones a que se llegaron son útiles para tener, además de una herramienta de cálculo para estos problemas, un entendimiento claro del fenómeno que permita ajustar los resultados a la evaluación de las propiedades fenomenológicas del material, y la deducción de los parámetros necesarios obtenidos en el laboratorio para la resolución de los problemas de consolidación en campo.

Las hipótesis generales en el desarrollo de la teoría de la consolidación son las siguientes:

1. El suelo es completamente saturado y homogéneo.
2. Las partículas del agua y del suelo son incompresibles.
3. Se aplica la ley de Darcy.
4. El cambio de volumen es unidimensional en la dirección del esfuerzo aplicado.

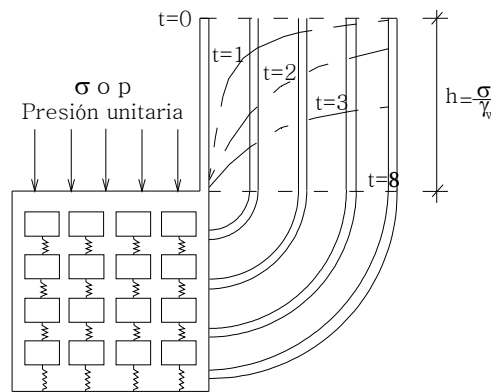


5. El coeficiente de permeabilidad en esta dirección del esfuerzo aplicado permanece constante.

Para explicar la teoría de consolidación, se usó un modelo reológico que cumple con las hipótesis antes enunciadas, (figura 1.18)

El efecto mecánico de la compresión de la capa elástica puede observarse con un dispositivo consistente en un recipiente cilíndrico provisto de pistones perforados, con resortes, lleno todo de agua (figura 1.18).

En un primer instante, la altura de los resortes permanece inalterada; no ha habido tiempo suficiente para que salga el agua. Los soportes no toman carga, de lo contrario bajarían; ello implica que toda la carga es soportada por el agua, existe una sobrepresión hidrostática  $\gamma_w h_w = p_w$ . En ese primer instante todos los tubos piezométricos tienen igual nivel  $h$ , la línea que une los niveles piezométricos en un instante dado se llama *isócrona*.



**Figura 1.18.** Modelo que explica la teoría de consolidación

Después del instante  $t_0$ , la presión hace que al agua salga con rapidez, por ende le es más fácil salir (en este caso por la zona superior, o sea, bajará primero el nivel del tubo situado más a la izquierda, y sucesivamente se tendrán las distintas *isócronas* para los  $t_1, t_2, \dots$ ).

La figura 1.19 muestra un estrato de arcilla de espesor  $H_c = 2H$  que tiene estratos de arena altamente permeables arriba y abajo, aquí el exceso de presión de poro en cualquier punto  $A$  en un tiempo  $t$  después de la aplicación de la carga es  $\Delta u = (\Delta h)\gamma_w$ . Para una condición de drenaje vertical (es decir, sólo en la dirección  $z$ ) del estrato de arcilla, Terzaghi obtuvo la siguiente ecuación diferencial, para determinar la presión de poro:



$$\frac{\partial u}{\partial t} = C_v \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \tag{1.80}$$

Donde  $C_v$  = coeficiente de consolidación

$$C_v = \frac{k}{m_v \gamma_w} = \frac{k}{\frac{\Delta e}{\Delta p(1 + e_{prom})} \gamma_w} \tag{1.81}$$

Donde  $k$  = permeabilidad hidráulica de la arcilla

$\Delta e$  = cambio total de la relación de vacíos causada por un incremento  $\Delta p$  del esfuerzo

$e_{prom}$  = relación de vacíos promedio durante la consolidación

$m_v$  = coeficiente volumétrico de compresibilidad =  $\Delta e / [\Delta p(1 + e_{prom})]$

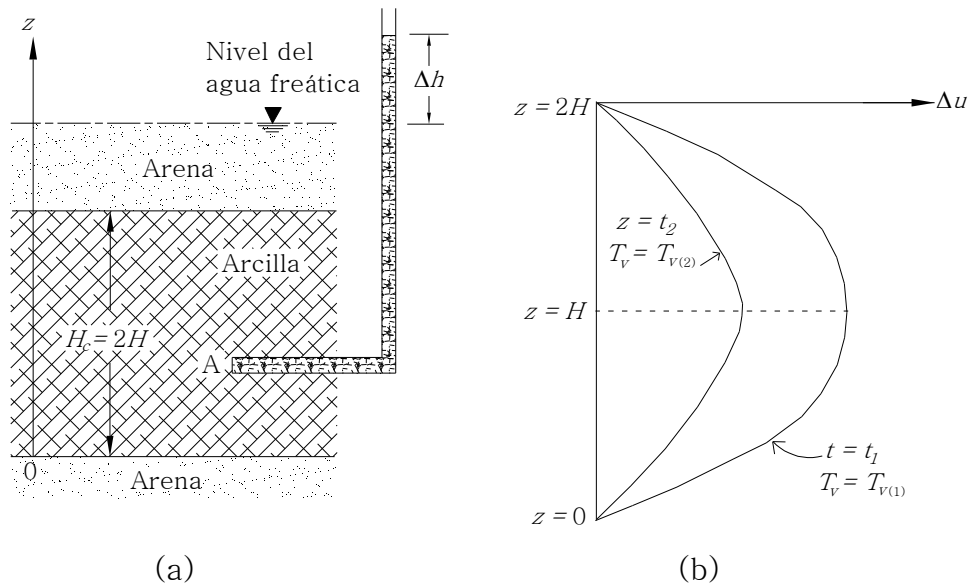


Figura 1.19. (a) obtención de la ecuación (1.81); (b) naturaleza de la variación de  $\Delta u$  con el tiempo



La ecuación (1.80) se resuelve para obtener la presión de poro,  $\Delta u$  como función del tiempo  $t$  con las siguientes condiciones de frontera.

1. Como se tienen estratos de arena altamente permeables con  $z = 0$  y  $z = H_c$ , el exceso de presión de poro desarrollada en la arcilla en esos puntos será inmediatamente disipada. Por consiguiente

$$\begin{aligned}\Delta u &= 0 & \text{en } z &= 0 \\ \Delta u &= 0 & \text{en } z &= H_c = 2H\end{aligned}$$

Donde  $H$  = longitud de la trayectoria máxima de drenaje (debido a una condición de drenaje doble, es decir, arriba y abajo de la arcilla)

2. En el tiempo  $t = 0$ ,

$\Delta u = \Delta u_0$  = exceso inicial de presión de poro del agua después de la aplicación de la carga.

Con las condiciones de frontera anteriores, la ecuación (1.80) da

$$\Delta u = \sum_{m=0}^{m=\infty} \left[ \frac{2(\Delta u_0)}{M} \operatorname{sen} \left( \frac{Mz}{H_0} \right) \right] e^{-M^2 T_v} \quad (1.82)$$

Donde  $M = [(2m+1)\pi]/2$

$m$  = un entero = 1, 2, ...

$T_v$  = factor de tiempo adimensional =  $(C_v t) / H^2$

Determinar el valor de campo de  $C_v$  es difícil. La figura 1.20 proporciona una determinación de primer orden de  $C_v$  usando el límite líquido (Departamento de Marina de Estados Unidos, 1971). El valor de  $\Delta u$  para varias profundidades (es decir,  $z = 0$  a  $z = 2H$ ) en cualquier tiempo  $t$  (por ello  $T_v$ ) puede calcularse con la ecuación (1.82). La naturaleza de esta variación de  $\Delta u$  lo muestra la figura 1.19b.

El *grado promedio de consolidación* del estrato de arcilla se define como

$$U = \frac{S_t}{S_{m\acute{a}x}} \quad (1.83)$$

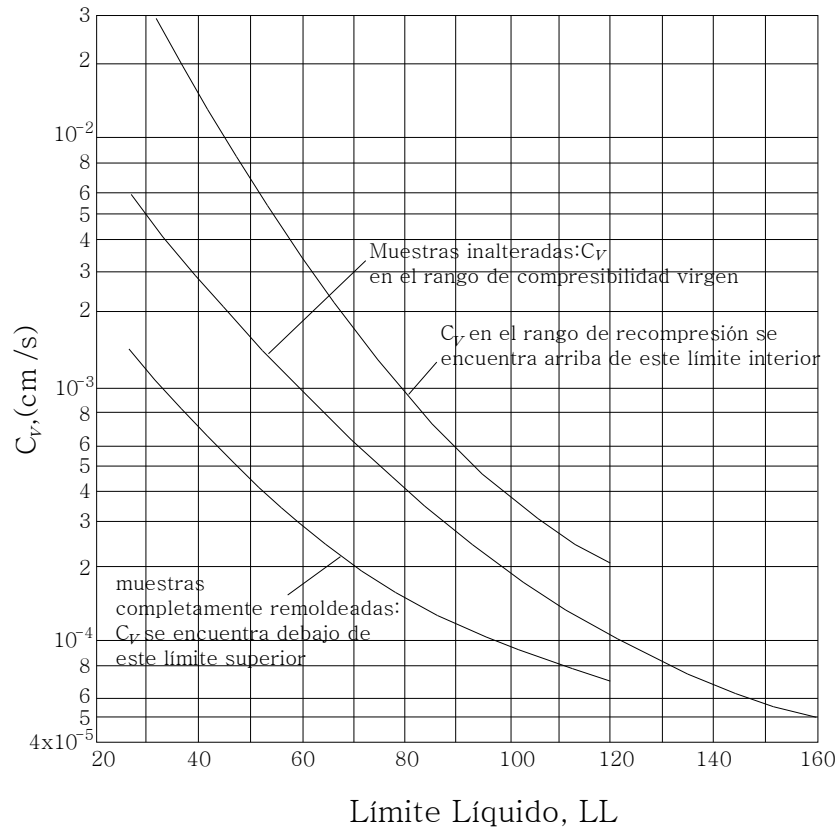


donde

$U$  = grado de consolidación promedio

$S_t$  = asentamiento del estrato de arcilla en el tiempo  $t$  después de la aplicación de la carga.

$S_{máx}$  = asentamiento máximo por consolidación que la arcilla experimentará bajo determinada carga



**Figura 1.20.** Rango de  $C_v$  (según Departamento de Marina de Estados Unidos, 1971)

Si la distribución de la presión de poro inicial ( $\Delta u_0$ ) es constante respecto a la profundidad, como exhibe la figura 1.21a, el grado promedio de consolidación puede también expresarse como

$$U = \frac{S_t}{S_{máx}} = \frac{\int_0^{2H} (\Delta u_0) dz - \int_0^{2H} (\Delta u) dz}{\int_0^{2H} (\Delta u_0) dz} \quad (1.84)$$

o



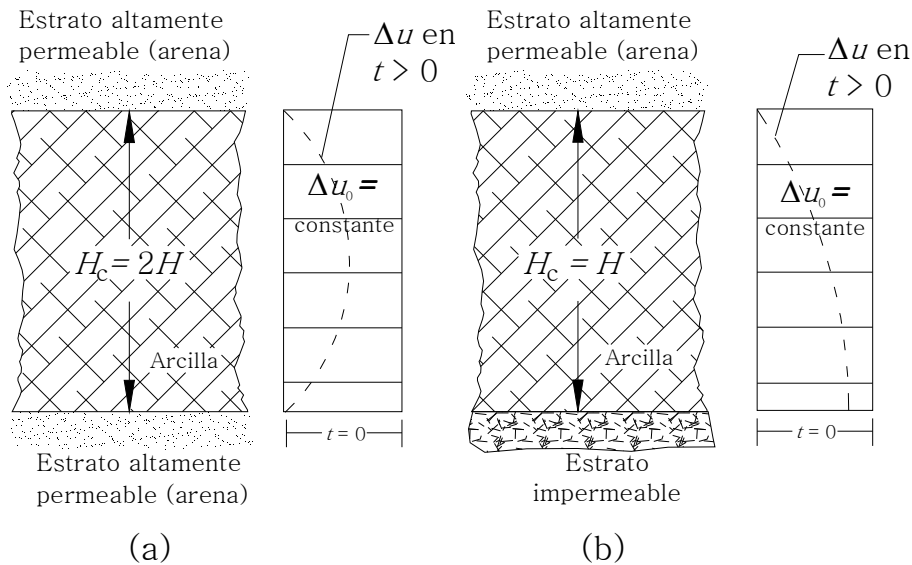
$$U = \frac{(\Delta u_0)2H - \int_0^{2H} (\Delta u)dz}{(\Delta u_0)2H} = 1 - \frac{\int_0^{2H} (\Delta u)dz}{2H(\Delta u_0)} \quad (1.85)$$

Ahora, combinando las ecuaciones (1.82) y (1.85), se obtiene

$$U = \frac{S_t}{S_{máx}} = 1 - \sum_{m=0}^{m=\infty} \left( \frac{2}{M^2} \right) e^{-M^2 T_v} \quad (1.86)$$

La variación de  $U$  con  $T_v$  puede calcularse con la ecuación (1.86)

En algunos casos, el exceso inicial de la presión de poro puede no ser constante con la profundidad como se muestra en la figura 1.21, por lo que se dan algunos casos y soluciones para el grado promedio de consolidación.



**Figura 1.21.** Condición de drenaje para la consolidación: (a) drenaje bidimensional; (b) drenaje unidimensional.





### 1.5.1.5 Teoría de Zeevaert (consolidación secundaria).

La teoría de consolidación de Terzaghi aparentemente proporciona resultados satisfactorios en el cálculo de compresiones en función del tiempo, en depósitos de arcilla, para una parte de la primera etapa de la consolidación, durante la cual se verifica el proceso hidrodinámico. Sin embargo, cuando la compresión ya está adelantada se observa que la curva real se desvía de la teórica.

El hecho es, que el comportamiento real del suelo aparece explícitamente para determinado tiempo después de haberse verificado la parte importante del proceso hidrodinámico, después de lo cual se observan principalmente los fenómenos viscosos-intergranulares del material. El efecto plasto-viscoso que se observa se debe principalmente al resbalamiento de los granos entre sí, buscando posiciones más estables, al verificarse el fenómeno viscoso intergranular. Por consiguiente, el comportamiento real de la estructura del suelo es elasto-plástico y plasto viscoso. Una fracción importante de la compresión elástica, plástica y parte del fenómeno de viscosidad intergranular, se verifica durante el proceso hidrodinámico de consolidación según la teoría de Terzaghi y a medida que la estructura del material soporta esfuerzos efectivos. Sin embargo, después de que la compresión primaria teórica ha alcanzado un grado avanzado de consolidación, puede observarse que la compresión y consecuentemente el cambio volumétrico del material continúa. Esta compresión se conoce en mecánica de suelos como “consolidación secundaria”.

El suelo se encuentra en la naturaleza con un determinado estado de esfuerzos efectivos y presión hidráulica. Al ser colocado en el edómetro para efectuar una prueba de compresibilidad, éste es aliviado del estado de esfuerzos y presiones hidráulicas a los que estaba sometido. Al ser cargado en el edómetro se obtiene la recompresión del suelo como indica la rama plana de la curva de compresibilidad (figura 1.22). Cuando se rebasa el “esfuerzo crítico” de compresión confinada  $\sigma_b$ , se observa un quiebre en la curva de compresibilidad, el cual se origina por falla interna de la estructura del suelo al alcanzarse su resistencia al esfuerzo cortante. Teóricamente, el quiebre puede valorarse por medio de la siguiente ecuación:

$$\sigma_b = \frac{1-\nu}{1-2\nu}(2c) \quad (1.87)$$



En donde  $\nu$  representa el valor de la relación de Poisson en el momento del quiebre y  $c$  es la resistencia al esfuerzo cortante del suelo. El valor de  $\nu$  en el quiebre de la curva tiende a ser del orden de 0.25, o bien  $\sigma_b / 2c1.5$ .

La rama inclinada de la curva de compresibilidad representa la compresión del suelo para una nueva condición estructural impuesta por el confinamiento que le proporciona el anillo del edómetro. Las deformaciones volumétricas unitarias en esta rama de la curva antes del esfuerzo crítico,  $\sigma_b$  (figura 1.22). En este tipo de suelos la rama inclinada no debe usarse para diseño si se quieren evitar fuertes desplazamientos verticales.

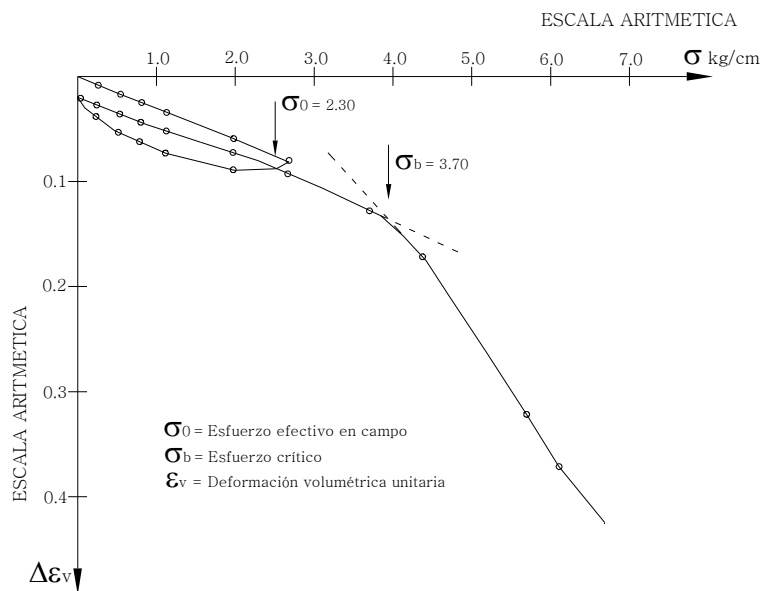
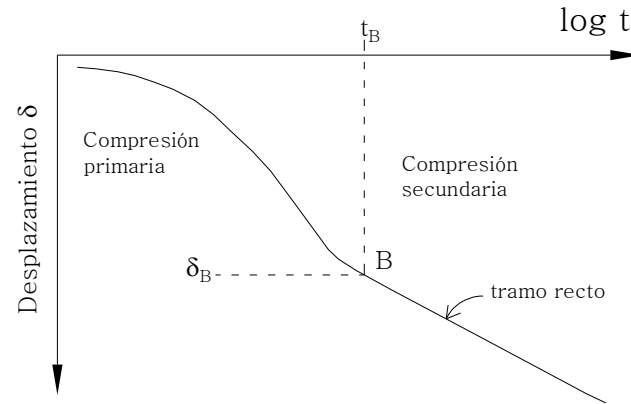


Figura 1.22. Curva de compresibilidad

En el rango de los esfuerzos de la recompresión las curvas de consolidación muestran la configuración que indica la figura 1.23 (tipo I). Dicha configuración depende del coeficiente de consolidación del suelo  $c_v$ , de la viscosidad intergranular de éste, del espesor del estrato y de las condiciones de drenado. La magnitud de la viscosidad intergranular es, sin embargo, una función importante del nivel de esfuerzos cortante que se generan durante la prueba del edómetro.



Curva tipo I

**Figura 1.23.** Curva de consolidación (Zeevaert, 1986)

En muchas de las ocasiones las obras de ingeniería son construidas en suelo de alta y muy alta compresibilidad. Estos suelos son sedimentos que pueden ser encontrados en lagunas marginales, áreas lacustres, y medio ambiente marino. El comportamiento mecánico de estos suelos muestra una alta viscosidad intergranular, comúnmente conocida como se mencionó anteriormente *consolidación secundaria*. Por otro lado, el subsuelo en estas áreas muestra usualmente condiciones altamente estratificadas por lo que podemos encontrar estratos de arena fina, los cuales permiten el rápido desarrollo de la compresión primaria, por lo que la consolidación secundaria llega a ser un fenómeno primario para la ingeniería de cimentaciones ya que el efecto de la viscosidad intergranular puede ocasionar hundimientos totales y diferenciales de la cimentación, pudiéndose dañar el proyecto en cuestión.

### Consideraciones teóricas

La teoría presentada es basada en dos modelos reológicos: el modelo de Terzaghi y el modelo desarrollado por Zeevaert llamado la Unidad  $z$  (figura 1.24), ambos de los cuales intentan representar el comportamiento de un suelo bajo condiciones confinadas. Las hipótesis de este trabajo son:

1. El suelo está constituido por dos estructuras básicas; la primera de las cuales está formada por granos microscópicos carentes de cohesión, y la segunda por flóculos de granos submicroscópicos que forman aglomeraciones de minerales de arcilla.



2. Ambas estructuras se encuentran saturadas con agua. La primera representa la compresión primaria, y la segunda un comportamiento altamente viscoso intergranular o compresión secundaria debido a las fuerzas cortantes que se originan en los contactos intergranulares.

Al someterse al suelo a un incremento de carga unitaria,  $\Delta p$ , se origina un cambio volumétrico de la estructura primaria,  $\Delta \epsilon_{v1}$ , y de la secundaria,  $\Delta \epsilon_{v2}$ .

Es evidente que el cambio total por el efecto de la compresión de las dos estructuras consideradas será:

$$\Delta \epsilon_v = \Delta \epsilon_{v1} + \Delta \epsilon_{v2} \tag{1.88}$$

Dichos cambios son retardados por el fenómeno hidrodinámico de la consolidación. Para analizar el fenómeno físico que se presenta se utilizaron dos modelos reológicos:

- a) La compresión primaria se analizó mediante el modelo de Kelvin el cual puede ser correlacionado con el reológico de Terzaghi, que implica que la compresión primaria tiende a ser infinita.
- b) La compresión secundaria se analizó con un modelo propuesto por Zeevaert, denominado Modelo Z, el cual representa el comportamiento viscoso intergranular del suelo.

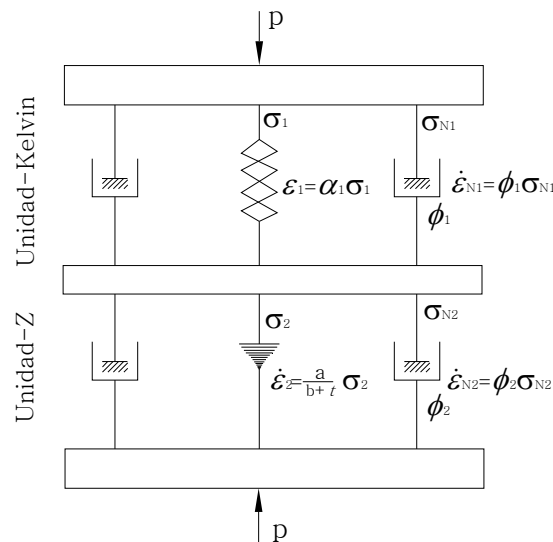


Figura 1.24. Modelo reológico



## La unidad Kelvin

Se representa mediante dos elementos en paralelo (figura 1.24), parte superior del modelo. Uno es resistente y capaz de tomar carga permanente al final del proceso primario; y el otro representa un amortiguador newtoniano de fluidez lineal  $\phi_1$ ; por consiguiente, se pueden establecer las siguientes condiciones:

$$\text{De equilibrio:} \quad \Delta p = \Delta \sigma_1 + \Delta \sigma_{N1} \quad (1.89)$$

$$\text{De deformaciones volumétricas unitarias:} \quad \Delta \varepsilon_{v1} = \Delta \varepsilon_1 = \Delta \varepsilon_{N1} \quad (1.90)$$

$$\text{De esfuerzo-deformación volumétrica unitaria:} \quad \Delta \varepsilon_1 = \alpha_1 \Delta \sigma_1 \quad (1.91)$$

Al llevar a cabo el análisis tomando en cuenta las hipótesis anteriores y las condiciones referidas anteriormente, queda establecido para la compresión confinada el uso de la función de Terzaghi,  $F(T_v)$ , expresada en la siguiente ecuación:

$$\Delta \varepsilon_{v1} = (m_v \Delta p) \cdot F(T_v) \quad (1.92)$$

En la cual  $F(T_v)$  es la función de retardamiento de tiempo de Terzaghi de la deformación por el proceso de consolidación.

## La unidad Z.

Está constituida por dos elementos en paralelo, uno newtoniano de fluidez no lineal que representa la fluidez lineal,  $\phi_2$ , el cual retarda la deformación volumétrica unitaria de la estructura secundaria (figura 1.24, parte inferior).

Se establecen para este modelo las siguientes ecuaciones:

$$\text{Para el equilibrio de los elementos:} \quad \Delta p = \Delta \sigma_2 + \Delta \sigma_{N2} \quad (1.93)$$

$$\text{Para deformaciones volumétricas unitarias:} \quad \Delta \varepsilon_{v2} = \Delta \varepsilon_2 = \Delta \varepsilon_{N2} \quad (1.94)$$

y las condiciones de esfuerzo-deformación de los líquidos newtonianos con fluidez no lineal y lineal respectivamente son:



$$\Delta \varepsilon_2 = \frac{a}{b+t} \Delta \sigma_2 \quad (1.95)$$

$$\Delta \varepsilon_{N2} = \phi_2 \Delta \sigma_{N2}$$

$a, b$  y  $\phi_2$  son parámetros constantes y  $t$  es el elemento de tiempo.

La ecuación constitutiva obtenida por Zeevaert basandose en las consideraciones antes mencionadas para la deformación volumétrica unitaria está dada por:

$$\Delta \varepsilon_v = m_v \cdot \Delta p \cdot \Omega \quad (1.96)$$

Donde

$$\Omega = F(T_v) + \beta \log(1 + \xi T_v) \quad (1.97)$$

El valor de  $\xi$  es un parámetro adimensional que se determina de las pruebas de laboratorio. Notese que  $C_v / H^2 = 1/\tau$  es el inverso de un periodo de tiempo, que representa el tiempo de relajamiento de la compresión secundaria, así pues

$$\xi = \frac{H^2}{\tau C_v} \quad (1.98)$$

Los parámetros  $m_v$ ,  $C_v$ ,  $\beta$  y  $\xi$  son funciones del nivel de esfuerzos sobre el cual se aplica un incremento  $\Delta p$  de carga unitaria que produce el fenómeno de consolidación y pueden ser determinados de la prueba del edómetro. Los parámetros que se citan tienen el siguiente significado

$m_v$ , Coeficiente de compresibilidad volumétrica unitario para la compresión primaria.

$C_v$ , Coeficiente de consolidación del fenómeno primario.

$\beta$ , Factor que mide la magnitud relativa del fenómeno viscoso intergranular.

$\xi$ , Factor adimensional que modifica el valor de  $T_v = C_v t / H^2$ , en el fenómeno viscoso intergranular.



### Curvas de consolidación.

El comportamiento estático de los sedimentos lacustres de la ciudad de México puede establecerse como sigue: cuando se somete a esfuerzos inferiores al esfuerzo crítico,  $\sigma_b$ , el esqueleto del suelo tiene un comportamiento de tipo elástico (Díaz-Rodríguez et al., 1992), cuando se supera dicho esfuerzo, las fuerzas entre partículas se rompen y el suelo muestra una excesiva deformación de cambios de volumen con predominante consolidación secundaria.

Después de exhaustos estudios de los suelos de la ciudad de México, y de haber desarrollado su teoría sobre consolidación secundaria o viscosidad intergranular para suelos altamente compresibles, Zeevaert (1986), propuso cuatro configuraciones típicas para las curvas de consolidación de la ciudad de México (figura 1.25). La curva tipo I corresponde a esfuerzos inferiores al esfuerzo crítico  $\sigma_b$ ; la tipo II corresponde a esfuerzos en la vecindad de  $\sigma_b$  pero inferiores a éste, la compresión secundaria empieza a hacerse evidente y presenta una configuración convexa después de terminada la consolidación secundaria; la tipo III corresponde al esfuerzo crítico, la curva no presenta ningún quiebre; en tanto que la tipo IV corresponde a esfuerzos mayores que  $\sigma_b$ , en la que se forma una nueva estructura provocada por el alto nivel de esfuerzos.

Finalmente con lo expuesto anteriormente, basándose en las teorías de consolidación, podemos definir con base en los resultados de las pruebas de laboratorio los parámetros del suelo que nos definirán las características de deformabilidad, y mediante pruebas triaxiales los parámetros de resistencia, los cuales se requieren para llevar a cabo un análisis geotécnico, y con ello capturar el comportamiento geotécnico del subsuelo a un programa aplicado al método de elementos finitos. En este trabajo se hace uso más adelante del programa SAP2000, en el cual se lleva a cabo el análisis donde se requieren precisamente de los parámetros obtenidos de las pruebas experimentales.

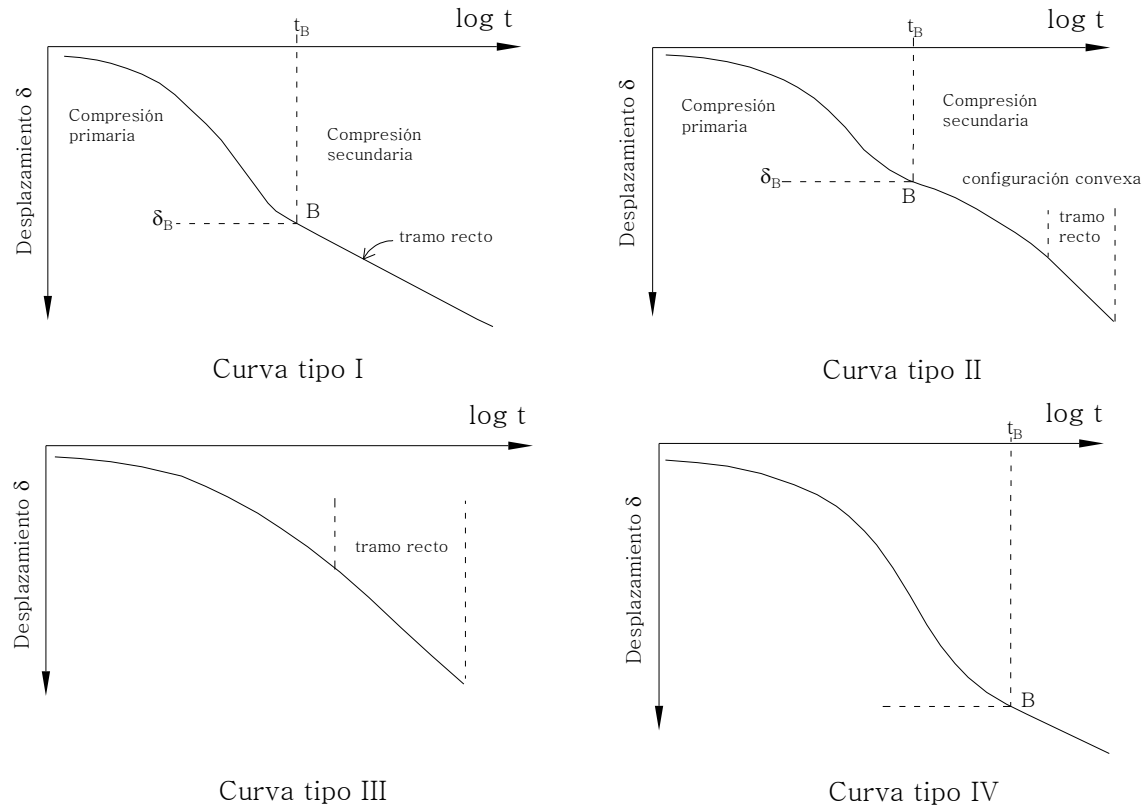


Figura 1.25. configuraciones típicas de consolidación de la ciudad de México (adoptado de Zeevaert, 1986)





## 2. ANÁLISIS ESTRUCTURAL

El análisis estructural que se desarrolla en el presente trabajo para llevar a cabo el análisis de interacción entre el suelo y la estructura, se lleva a cabo empleando el método de rigideces.

A continuación se describe el procedimiento del análisis de la estructura por el método de rigideces.

### 2.1 Método de rigideces

La finalidad del análisis estructural, es determinar las fuerzas externas (o componentes de reacción) y las fuerzas internas (o de resultantes de compatibilidad). En esencia estas fuerzas deben satisfacer las condiciones de equilibrio y producir deformaciones compatibles con la continuidad de la estructura y las condiciones de los apoyos. Para ello se emplea uno de los diversos métodos llamado de desplazamiento (deformaciones) o rigidez en el cual se introducen restricciones de movimiento en los nudos.

El método de rigideces consta de las siguientes etapas (Beaufait *et al* 1970):

- a) Se empotra la estructura y se determinan los elementos mecánicos bajo estas condiciones;
- b) Se liberan los nudos de la estructura y se hallan los elementos mecánicos debidos a desplazamientos lineales y angulares;
- c) Se establecen las condiciones de equilibrio en cada uno de los nudos donde haya desplazamientos diferentes de cero;
- d) Se resuelven las ecuaciones de equilibrio y se obtienen los desplazamientos de la estructura;
- e) Se obtienen los elementos mecánicos en los nudos de la estructura.

En este método la ecuación general de equilibrio de la estructura es

$$K \delta + P^e + P^c = 0 \quad (2.1)$$



donde

$K$  = matriz de rigideces de la estructura

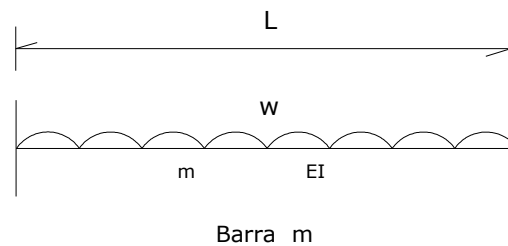
$\delta$  = vector de desplazamientos

$P^e$  = vector de cargas de empotramiento

$P^c$  = vector de cargas concentradas

La matriz de rigidez de la estructura se puede obtener mediante la suma de las matrices de rigidez de todas y cada una de las barras que forman la estructura. El vector de cargas de empotramiento de toda la estructura es igual a la suma de los vectores de carga de todas y cada una de las barras de la estructura.

A continuación se obtiene la matriz de rigidez y el vector de cargas de empotramiento de una barra, como ejemplo se toma una barra  $m$  sometida a una carga uniformemente repartida  $w$  (figura 2.1).



**Figura 2.1.** Barra empotrada con carga uniformemente repartida

### 2.1.1 Obtención de la matriz de rigidez para un elemento cualquiera

El método consiste en encontrar la matriz de rigideces de cada elemento, para ser ensambladas en una matriz de rigidez total de la estructura. La solución del problema se obtiene resolviendo la ecuación matricial (2.1)

$$K \delta + P^e + P^c = 0$$

En el elemento de la figura 2.1 se considerarán las siguientes variables:

$E$  = Módulo de elasticidad.

$I$  = Momento de inercia.

$A$  = Área transversal de la sección.



$L$  = Longitud del elemento.

Con base en la definición y obtención la matriz de rigidez, se aplican desplazamientos positivos unitarios en los extremos de los elementos de la figura (2.1) para conocer las submatrices de rigideces de cada uno de ellos.

A continuación se presentan todos los posibles análisis que se pueden desarrollar en una barra  $m$  de una estructura, considerando todos los grados de libertad. Para un análisis en particular no necesariamente se consideran todos los grados de libertad. Por otro lado se debe tener en consideración la convención de signos a emplear.

Aplicando primero un desplazamiento unitario positivo en la dirección del eje  $x$  en el extremo  $A$ ,  $\delta_{xA} = 1$ , como se muestra en la figura (2.2), se generan fuerzas en los extremos de valor  $EA/L$ .



Figura 2.2.  $\delta'_{xA} = 1$

Ahora aplicando un desplazamiento vertical unitario positivo en el extremo  $A$ ,  $\delta'_{yA} = 1$  y considerando el efecto de cortante, como se indica en la figura (2.3), se tiene que:

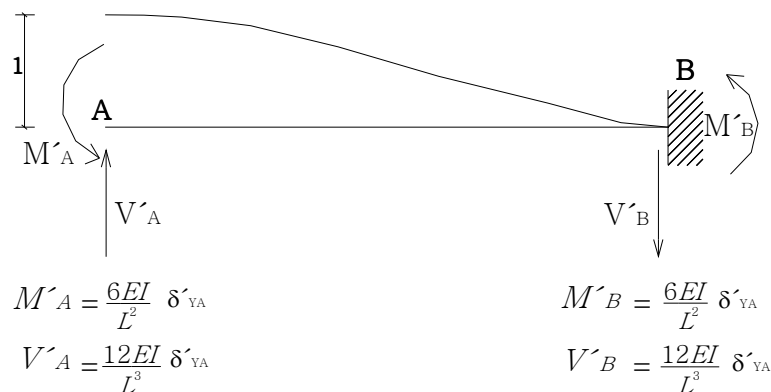


Figura 2.3  $\delta'_{yA} = 1$



Provocando ahora un desplazamiento angular unitario positivo en el extremo  $A$ ,  $\theta'_A = 1$ , figura (2.4), y considerando el efecto cortante, tenemos que:

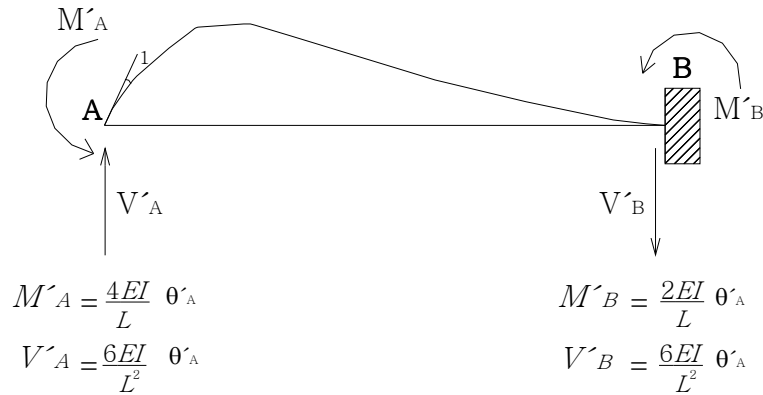


Figura 2.4  $\theta'_A = 1$

Por último los momentos producidos por un giro de torsión en el extremo  $A$   $\theta'_a = 1$ , figura (2.5), se tiene la siguiente configuración:



Figura 2.5  $\theta'_a = 1$

Ahora se estudia la barra de la figura (2.1) en su extremo B.

Provocando un desplazamiento unitario positivo en la dirección  $x$  de éste,  $\delta'_{XB} = 1$ , figura (2.6), se tiene:

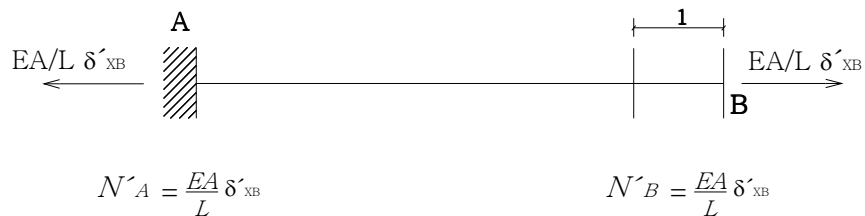


Figura 2.6.  $\delta'_{XB} = 1$



Provocando ahora un desplazamiento vertical unitario positivo en el extremo  $B$ ,  $\delta_{zB} = 1$ , figura (2.7) y considerando el efecto de cortante, se tiene la siguiente configuración:

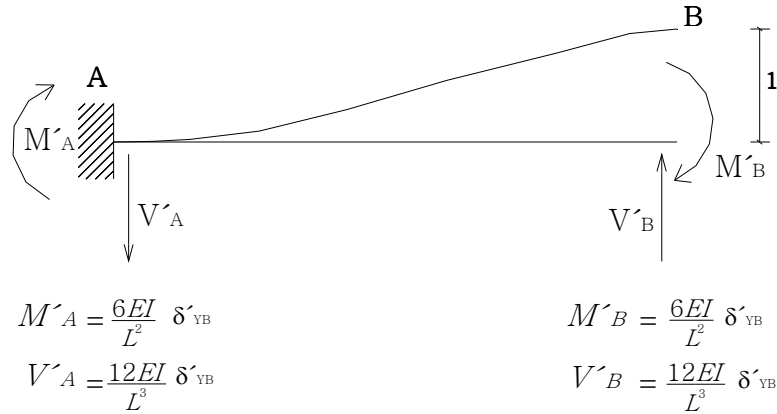


Figura 2.7.  $\delta_{yB} = 1$

Provocando ahora un desplazamiento angular unitario positivo en el extremo  $B$ ,  $\theta_B = 1$ , figura (2.8), y considerando el efecto de cortante, se tiene la siguiente configuración:

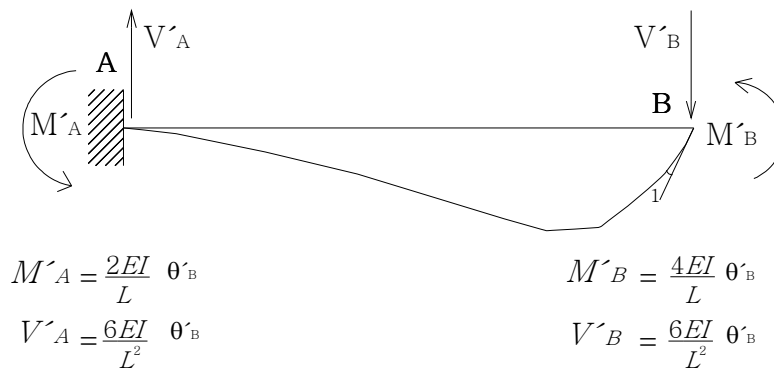


Figura 2.8.  $\theta_B = 1$

Finalmente aplicando un giro de torsión en el extremo  $B$ ,  $\theta_b = 1$ , figura (2.9), se tienen los siguientes momentos producidos:



Figura 2.9  $\theta_b = 1$

Los elementos mecánicos que aparecen en la barra  $m$  valen:

$$M'_A = WL^2 / 12 + 6EI / L^2 \delta'_{YA} + 4EI / L \theta'_A - 6EI / L^2 \delta'_{YB} + 2EI / L \theta'_B \quad (2.2)$$

$$M'_B = -WL^2 / 12 + 6EI / L^2 \delta'_{YA} + 2EI / L \theta'_A - 6EI / L^2 \delta'_{YB} + 4EI / L \theta'_B \quad (2.3)$$

$$V'_A = -WL / 2 + 12EI / L^3 \delta'_{YA} + 6EI / L^2 \theta'_A - 12EI / L^3 \delta'_{YB} + 6EI / L \theta'_B \quad (2.4)$$

$$V'_B = -WL / 2 - 12EI / L^3 \delta'_{YA} - 6EI / L^2 \theta'_A + 12EI / L^3 \delta'_{YB} - 6EI / L \theta'_B \quad (2.5)$$

$$N'_A = EA / L \delta'_{XA} - EA / L \delta'_{XB} \quad (2.6)$$

$$N'_B = -EA / L \delta'_{XA} + EA / L \delta'_{XB} \quad (2.7)$$

$$M'_a = GI_t / L \theta'_a - GI_t / L \theta'_b \quad (2.8)$$

$$M'_b = -GI_t / L \theta'_a + GI_t / L \theta'_b \quad (2.9)$$

Al ensamblar todos los análisis de la barra  $m$ , se genera la matriz de rigidez, y queda como:

$$\underline{K}'_m = \begin{bmatrix}
 EA / L & 0 & 0 & 0 & -EA / L & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 12EI / L^3 & 6EI / L^2 & 0 & 0 & -12EI / L^3 & 6EI / L^2 & 0 \\
 0 & 6EI / L^2 & 4EI / L & 0 & 0 & -6EI / L^2 & 2EI / L & 0 \\
 0 & 0 & 0 & GI_t / L & 0 & 0 & 0 & -GI_t / L \\
 -EA / L & 0 & 0 & 0 & EA / L & 0 & 0 & 0 \\
 0 & -12EI / L^3 & -6EI / L^2 & 0 & 0 & 12EI / L^3 & -6EI / L^2 & 0 \\
 0 & 6EI / L^2 & 2EI / L & 0 & 0 & -6EI / L^2 & 4EI / L & 0 \\
 0 & 0 & 0 & -GI_t / L & 0 & 0 & 0 & -GI_t / L
 \end{bmatrix}
 \begin{matrix}
 \delta'_{XA} \\
 \delta'_{YA} \\
 \theta'_A \\
 \theta'_a \\
 \delta'_{XB} \\
 \delta'_{YB} \\
 \theta'_B \\
 \theta'_b
 \end{matrix}
 \quad (2.10)$$

Los elementos mecánicos que transmite la barra al nudo están dados por:

$$\underline{P}'_m = \underline{K}'_m \underline{\delta}'_m + (\underline{P}^e_m)' \quad (2.11)$$



donde:

$$\underline{\delta}'_m = \begin{Bmatrix} \delta_{XA} \\ \delta_{YA} \\ \theta_A \\ \theta_a \\ \delta_{XB} \\ \delta_{YB} \\ \theta_B \\ \theta_b \end{Bmatrix} \quad (2.12)$$

y

$$(\underline{\mathbf{P}}^e)'_m = \begin{Bmatrix} 0 \\ -WL/2 \\ WL^2/12 \\ 0 \\ 0 \\ -WL/2 \\ -WL^2/12 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2.13)$$

En el que:

$\underline{\mathbf{K}}'_m$  = Matriz de rigidez de la barra  $m$

$\underline{\delta}'_m$  = Vector de desplazamientos de la barra  $m$

$(\underline{\mathbf{P}}^e)'_m$  = Vector de cargas de empotramiento de la barra  $m$

En una viga de sección rectangular de dimensiones  $b$  por  $h$ , el momento polar de inercia debido a torsión se puede valorar en forma aproximada (Beaufait *et al* 1970).

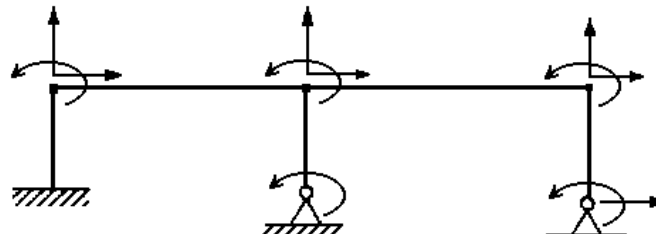
$$I_t \cong \frac{hb^3}{3} \left[ 1 - 0.63 \frac{b}{h} + 0.052 \left( \frac{b}{h} \right)^5 \right] \quad (2.14)$$



### 2.1.2 Planteamiento para marco plano

Bajo el planteamiento de marcos planos se puede decir que:

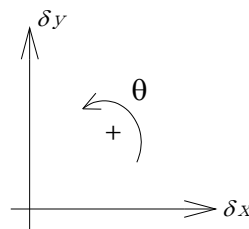
1. Los nudos presentan tres grados de libertad, ya que por sus restricciones sólo les es posible desplazarse en dos ejes cartesianos y rotar alrededor de un tercer eje perpendicular al plano definido por los dos primeros (figura 2.10).



**Figura 2.10.** Grados de libertad de un marco plano de acuerdo a las restricciones de sus nudos libres y apoyos

2. Los elementos, compuestos por elementos rectilíneos de sección variable o constante, son capaces de resistir fuerzas normales de compresión y tensión, además de fuerzas de corte perpendiculares a estas y de momento flexionante alrededor de un eje perpendicular a los dos anteriores.
3. Las acciones a que se ve sometida la estructura, actúan en el mismo plano definido por los ejes cartesianos en que los nudos tienen la libertad de movimiento.

En marcos planos se emplea comúnmente la convención mostrada en la figura 2.11.



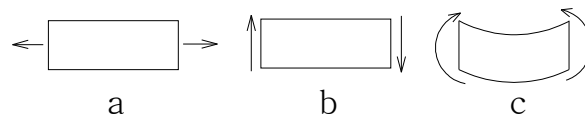
**Figura 2.11.** Convención de signos en marcos planos





Se consideran las fuerzas normales positivas cuando provocan alargamiento. En cuanto a las fuerzas cortantes se tomarán positivas si para un segmento de un elemento le provocan un giro en sentido horario. La flexión se considerará positiva cuando actúe de tal forma que al elemento le induzca compresión en la fibra o cara superior, mientras que en cara inferior se presenta tensión. En la figura 2.12 se muestra esta convención gráficamente.

Se denomina al extremo inicial de un elemento como  $A$  y al extremo final como  $B$

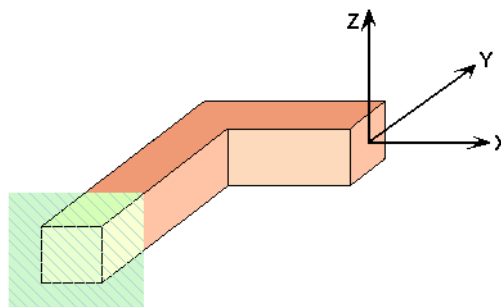


**Figura 2.12.** Convención de signos positivos de marcos planos.  
(a) Fuerza axial, (b) Fuerza cortante, (c) Momento flexionante.

### 2.1.3 Planteamiento para retícula plana

Bajo el planteamiento de retícula plana, la cual es un tipo de estructura que tiene la misma configuración de un marco plano, pero a diferencia de este último, las cargas se aplican en dirección perpendicular al plano que la contiene, se puede decir que:

1. Todos los ejes locales de las barras están contenidos dentro del sistema global de referencia  $XY$  (modelo plano).
2. Tienen como eje principal al eje  $Z$  (ver figura 2.13).



**Figura 2.13.** Sección transversal de un elemento en retícula plana, el eje principal es el eje  $Z$ .



3. Las fuerzas en los nudos se aplican en forma perpendicular a la estructura y se tienen momentos flexionantes alrededor del eje Y, y en su caso de torsión alrededor del eje X así como con una fuerza de cortante en el eje Z. Esto se representa en la ecuación siguiente:

$$\{F\} = \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ F_z \end{Bmatrix} \quad (2.15)$$

4. Los desplazamientos en los nudos de la estructura son de la forma:

$$d_i = \begin{Bmatrix} \varphi_{Xi} \\ \varphi_{Yi} \\ d_{Zi} \end{Bmatrix} \quad (2.16)$$

Donde  $\varphi_{Xi}$  y  $\varphi_{Yi}$  son los desplazamientos angulares y  $d_{Zi}$  es un desplazamiento lineal

5. Los elementos mecánicos son:

$$\begin{Bmatrix} M_{X'} \\ M_{Y'} \\ F_{Z'} \end{Bmatrix} \quad (2.17)$$

Este tipo de estructuras (retícula) se emplea en parrillas de cimentación, voladizos, losas voladas, etc.

Anteriormente se estudio el planteamiento general para la obtención de la matriz de rigidez de una barra m. Para el caso de retícula plana también se puede trabajar con submatrices de manera análoga, para obtener la matriz de rigidez de un elemento por medio de su ensamble, considerando únicamente los grados de libertad que le corresponden.

En la figura (2.14) se muestran los ejes locales ( $X', Y', Z'$ ) de un elemento de la retícula y las tres posibles fuerzas a las que puede estar sometido dicho elemento, las cuales están expresadas en la ecuación (2.15).

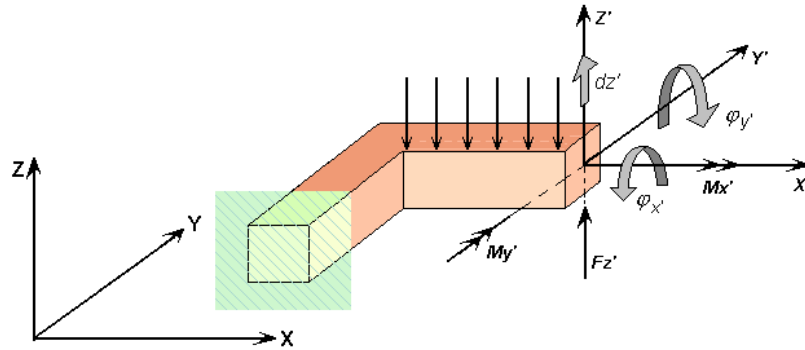


Figura 2.14. Ejes locales y fuerzas en los mismos en un elemento de retícula plana.

Esta convención establece el sentido horario para los giros o momentos, y surge de la representación vectorial de estos en los ejes  $X'$  y  $Y'$  de un elemento de retícula. En esta convención se define como momento torsionante positivo aquel que, en forma vectorial salga del elemento, o bien, mediante el uso de la regla de la mano derecha: cuando el pulgar apunta hacia afuera del elemento en dirección axial. Lo anterior se ejemplifica en la figura (2.15).

En la figura (2.15.a) se indican los sentidos positivos de los momentos y fuerza cortante en un elemento de retícula plana en el espacio. Mientras que en la figura (2.15.b) se representan los momentos en forma vectorial en el plano  $X'-Y'$ . Por último se muestra el mismo elemento con la representación vectorial de momentos y fuerza en el plano  $Z'-X'$ .

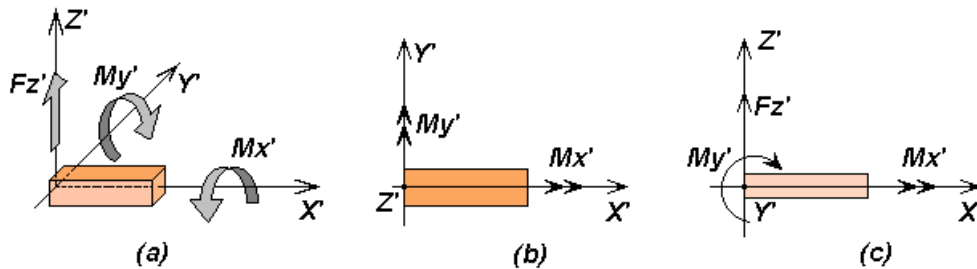
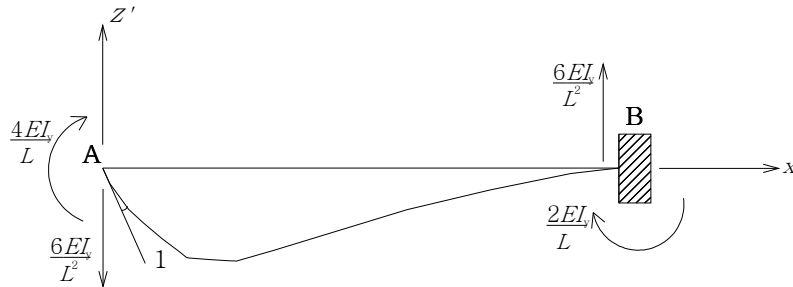


Figura 2.15. Convención de signos positivos en un elemento de retícula plana.

Si aplicamos desplazamientos unitarios en el extremo libre de un elemento de retícula, encontraremos las fuerzas del mismo, es decir, sus rigideces.

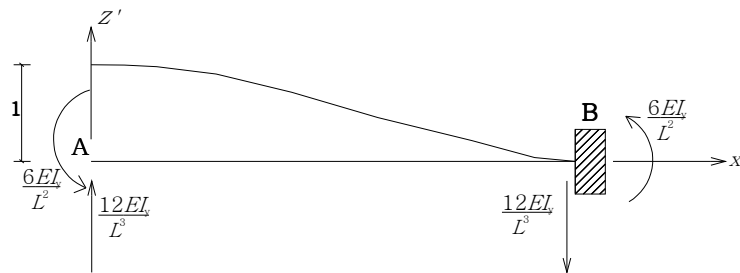


Haciendo  $\varphi_{YA} = 1$ , tenemos que la configuración deformada es la que se muestra en la figura (2.16), en la cual el eje  $Y'$  es normal al plano definido por  $X'$  y  $Z'$  (siguiendo la regla de la mano derecha).



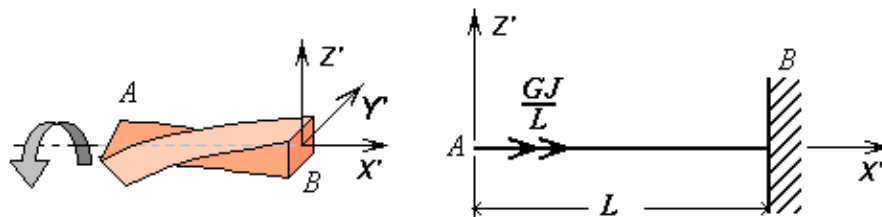
**Figura 2.16.** Elemento con giro unitario en el extremo libre alrededor del eje  $Y'$

Si hacemos  $d_{ZA} = 1$ , tendremos la configuración deformada mostrada en la figura (2.17).



**Figura 2.17.** Elemento con un extremo empotrado y el otro libre en el cual se aplica un desplazamiento unitario positivo en dirección  $Z'$ .

Por último estudiaremos el comportamiento de este elemento bajo la acción de un giro alrededor de su eje axial  $X'$ , esto se representa en la figura (2.18).



**Figura 2.18.** Elemento con giro unitario positivo alrededor de su eje axial.



Al igual que en marcos planos, podemos plantear una relación matricial entre los desplazamientos aplicados en un extremo del elemento y las fuerzas generadas en el mismo. Lo anterior se muestra en la ecuación (2.18). Lo mismo podemos hacer para obtener cada submatriz de rigideces.

$$[K_{AA}] = \begin{bmatrix} \varphi_{XA} & \varphi_{YA} & d_{ZA} \\ \frac{GJ}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4EI_y}{L} & \frac{-6EI_y}{L^2} \\ 0 & \frac{-6EI_y}{L^2} & \frac{12EI_y}{L^3} \end{bmatrix} \begin{matrix} M_{XA} \\ M_{YA} \\ F_{ZA} \end{matrix} \quad (2.18)$$

Es el caso de retícula plana, el que emplearemos en el estudio del ejemplo de aplicación; se han referido marcos planos y retícula plana para una mejor comprensión del tema, en donde se puede observar que ambos casos son modelos planos y que de acuerdo a la necesidad de análisis se determinan los grados de libertad a usar.

Para llevar a cabo el análisis de interacción entre el suelo y la estructura, primeramente se deberá realizar el análisis estructural empleando el método de rigideces antes descrito (dando solución como se mencionó anteriormente a la ecuación matricial de equilibrio de toda la estructura, ecuación 2.1), dicho método sirve como base incluso cuando se emplea software especializado como alternativa para realizar el análisis estructural.



### 3. INTERACCIÓN SUELO ESTRUCTURA

Para estudiar la interacción entre la estructura y el suelo se ha hecho, entre otras cosas, gran uso de herramientas de software por computadora capaz de llevar a cabo este tipo de análisis en una forma más ágil y precisa, tomando en cuenta que para desarrollar un buen análisis es necesario definir la ecuación constitutiva que trate de representar las condiciones reales del terreno en estudio. El propósito principal de la interacción-suelo estructura es llevar a cabo un análisis estructural tomando en cuenta el efecto de la rigidez del terreno de cimentación.

Antes de realizar un análisis de interacción suelo-estructura con un programa por computadora es importante tener clara la definición de *interacción suelo-estructura* y el procedimiento de cálculo que habrá de llevarse a cabo para su análisis.

#### 3.1 Definición de interacción suelo-estructura

La masa de suelo, al recibir cargas (esfuerzos) que son transmitidas por la cimentación, tiende a deformarse en una o en varias de sus capas (estratos), dependiendo de la compresión y las propiedades del mismo, las cuales pueden variar con el tiempo o con algunos factores como lo son: la variación del volumen de vacíos como consecuencia de la consolidación del suelo, el desplazamiento y la disminución de la distancia relativa entre las partículas y produciendo, de forma acumulada con los demás estratos, un asentamiento en la superficie de contacto entre la cimentación y la masa del suelo.

Los cimientos juegan un papel muy importante dentro de la edificación ya que, como se dijo anteriormente, éstos son los que distribuyen las cargas de la estructura hacia el suelo y los materiales que lo constituyen deben tener la capacidad suficiente para soportarlas sin sufrir deformaciones excesivas.

A partir de esto, se puede decir que la interacción suelo-estructura es aquella parte de la ingeniería que estudia las deformaciones del terreno de cimentación cuando éstas se ven afectadas por la presencia y rigidez de la propia estructura. La influencia de la estructura puede ser en condiciones estáticas, lo cual es tratado por la interacción estática suelo-estructura, o puede ser en condiciones dinámicas, lo cual cae en el campo de la interacción dinámica suelo-estructura. En este trabajo se aplicará el análisis estático.



En la interfaz de la estructura de cimentación y el suelo se originan desplazamientos debido a las cargas que transmite la cimentación dando lugar a desplazamientos totales y diferenciales. Los desplazamientos diferenciales de la estructura deberán ser iguales a los originados en la superficie de apoyo de la cimentación. Así pues, la estructura de la cimentación junto con las cargas que obran sobre ella y las reacciones que se provocan en el suelo se sujetará a una determinada configuración, igual a la que el suelo adoptará debido a las reacciones que éste aporta a la estructura de cimentación para su equilibrio. La configuración de esfuerzos y deformaciones en la superficie de contacto dependerá de la rigidez de la estructura de la cimentación, de la rigidez del subsuelo y de la distribución de cargas que se apliquen sobre la estructura de la cimentación.

La interacción entre la estructura de cimentación y el suelo consistirá en encontrar un sistema de reacciones que, aplicadas simultáneamente a la estructura de cimentación y a la masa del suelo, produzcan la misma configuración de desplazamientos diferenciales entre los dos elementos. Para lograr lo anterior, será necesario basarse por un lado en las leyes físicas que rigen el comportamiento de la masa del suelo y por el otro en los procedimientos nominales de cálculo estructural en la determinación de fuerzas y deformaciones, tomando en cuenta las propiedades mecánicas del material en el que será construida la estructura de cimentación.

Por otra parte, se conocen como métodos de interacción estática suelo-estructura aquellos procedimientos que para el cálculo de las deformaciones del suelo de cimentación toman en cuenta la rigidez de la estructura.

Todos estos métodos están basados en el principio de que en el contacto cimiento-masa de suelo los desplazamientos de la subestructura como los del suelo son iguales, es decir, existe compatibilidad de deformaciones entre estructura y suelo.

En términos generales, el procedimiento de cálculo para interacción suelo-estructura consiste en tres pasos:

- a) Se calculan los desplazamientos de la estructura. El cálculo de los desplazamientos provocado por la acción de cargas sobre la estructura se realiza utilizando el método de rigidez expuesto en el capítulo II.
- b) Se calculan los desplazamientos del suelo de cimentación. Estos se calculan en función de las cargas que actúan sobre él (por tercera ley de



Newton, a toda reacción corresponde una reacción igual en magnitud y de sentido contrario (Deméneghi y coautores, 2003)) y,

- c) Una vez generado el sistema de ecuaciones entre estructura y suelo se establece la compatibilidad de deformaciones entre ambos medios, resolviéndose así el problema al obtener las deformaciones del suelo y reacciones sobre la estructura.

Se pueden distinguir dos clases de situaciones en relación con la interacción:

- I) cuando los cimientos están suficientemente separados de tal forma que la carga sobre un apoyo no ejerce influencia sobre los desplazamientos de los apoyos vecinos (éste fenómeno se presenta generalmente en zapatas aisladas), y
- II) cuando se trata de un cimiento continuo donde el desplazamiento de un punto de dicho cimiento está afectado por la carga repartida en toda la subestructura (es el caso de zapatas corridas o losas de cimentación)

Como ejemplo del proceso de cálculo de análisis de interacción se tomará una losa de cimentación desplantada en un suelo estratificado (arcilla saturada), misma que se analizará con un programa por computadora.

### **3.2 Presiones ejercidas en el suelo por una cimentación**

La rigidez de la estructura de cimentación y la contribución que a ésta le pueda aportar la superestructura es importante. Lo cual implica tener que conocer de antemano la geometría y propiedades de los elementos que la forman. La incertidumbre que existe cuando las estructuras de cimentación se construyen de concreto armado, es conocer su módulo de deformación unitaria, el cual es bien sabido aumenta con el tiempo, (Zeevaert, 1973). Así pues, podría aseverarse que la interacción suelo-estructura de una estructura recién construida es diferente a medida que pasa el tiempo y no es sino hasta que ha transcurrido un tiempo suficiente para el cual ya no aumentan las deformaciones plasto-viscosas del concreto cuando la configuración alcanzará una posición estable. En lo que respecta al suelo y principalmente a suelos arcillosos y saturados donde se presentan propiedades dependientes del tiempo podrá decirse que los esfuerzos de





contacto también varían en función del tiempo haciendo cambiar los elementos de estabilidad de la estructura de cimentación.

Aun más, se puede decir que para la elección correcta y cálculo racional de una cimentación es también necesario considerar las condiciones y fuerzas ambientales. Así pues, es necesario conocer las condiciones generales de la región y en particular la estratigrafía de la zona en cuestión, las condiciones hidráulicas que rigen en el momento y los cambios probables que podrían suscitarse en el futuro. Conociendo la estratigrafía y las características de los sedimentos que la constituyen en varios lugares, se podrá conocer la variación probable de las propiedades mecánicas de los sedimentos en el área de la cimentación. El ingeniero de cimentaciones se ve en la necesidad de hacer hipótesis de trabajo simples y conservadoras que le permitan el cálculo de interacción suelo-estructura con las herramientas de que dispone. Para llevar a cabo este proceso de interacción, se deberán conocer como mínimo las propiedades esfuerzo-deformación-tiempo para cada uno de los estratos que forman el subsuelo y hasta una profundidad a la cual ya no le afecten en sus cálculos de interacción.

### **3.2.1 Rigidez relativa suelo-estructura. Esfuerzos sobre los elementos de cimentación**

La transmisión de las cargas del edificio a la masa de suelo, plantea un complejo problema de interacción entre los tres elementos implicados: estructura, cimentación y masa de suelo. Los principales factores a considerar en dicho proceso de interacción serán el tipo y características de la masa de suelo, la forma y dimensiones de la cimentación y la rigidez relativa suelo-estructura y suelo-cimentación.

Además de la rigidez de la cimentación, la propia rigidez de la estructura a cimentar inducirá también restricciones al movimiento y a la respuesta asociada de la masa de suelo. En el caso más general, cuando el suelo se tienda a asentar por efecto de la presión aplicada, la estructura, en función de su rigidez, redistribuirá sus esfuerzos, modificando a su vez las sollicitaciones sobre los cimientos y el suelo. La situación de equilibrio final dependerá por tanto de la rigidez relativa del conjunto suelo-cimiento-estructura.

En la actualidad no se dispone de métodos analíticos que permitan determinar con exactitud las cargas de la estructura y su redistribución en



función de la respuesta del suelo y los esfuerzos sobre los cimientos correspondientes al equilibrio final.

Salvo en los casos en que tanto la estructura como la cimentación se consideren rígidas, los esfuerzos en zapatas corridas, emparrillados y losas de cimentación se evaluarán teniendo en cuenta los fenómenos de interacción suelo-estructura.

### 3.2.1.1 Concepto de rigidez relativa suelo-estructura

Para ilustrar el fenómeno de la interacción, la figura 3.1a muestra el caso sencillo de un cimiento infinitamente flexible, apoyado directamente sobre la superficie de un terreno horizontal, sobre la que se aplica una presión uniforme.

Por efecto de esta presión, el terreno y el cimiento sufrirán un asentamiento, que resultará mayor en el centro que en los extremos y no se limitará al área cargada, sino que se extenderá a ambos lados de ella hasta una cierta distancia (influenciada por dichas acciones). Por ser infinitamente flexible, el cimiento no será capaz de soportar momentos flexionantes y, en consecuencia, la distribución de presiones con que el terreno reaccionará será idéntica a la distribución uniforme de presiones colocada sobre dicho cimiento.

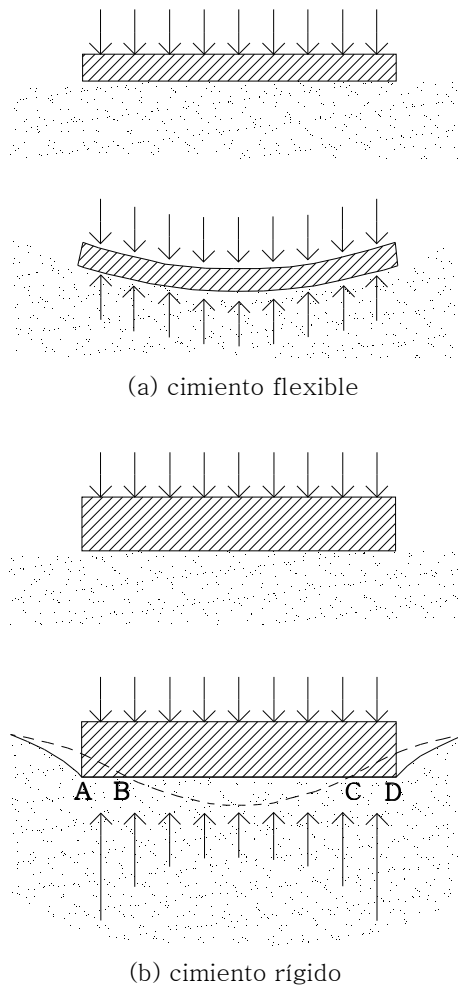
Si por el contrario, la zapata fuera infinitamente rígida (figura 3.1b), el asentamiento del cimiento sería uniforme. En casos intermedios de rigidez, el valor medio del asentamiento podrá ser similar al anterior, pero su distribución estará, evidentemente, condicionada por la rigidez del cimiento. Así, bajo los extremos del cimiento (zonas AB y CD), el asentamiento será mayor que el correspondiente a la zapata flexible; mientras que en el centro (zona BC), el asentamiento será menor. En consecuencia, las presiones de respuesta del terreno en los extremos del cimiento rígido serán superiores a las correspondientes a los del cimiento flexible y, por el contrario, en su centro serán menores. Resulta así una distribución no uniforme de presiones, caracterizada por unos valores máximos en los extremos y un valor mínimo en el centro.

Si el terreno se considerara elástico y de resistencia indefinida, la presión bajo los bordes A y D de la zapata rígida sería infinita. Dado que la resistencia del terreno es limitada, dichas presiones podrán ser elevadas, pero tendrán un valor finito. En el caso de arcillas (figura 3.2.a), la distribución de presiones será en general muy semejante a la teórica del

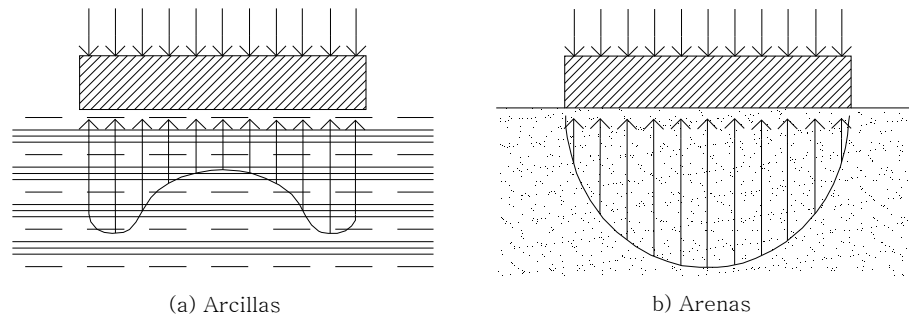


ejemplo anterior; sin embargo, la resistencia limitada del terreno producirá en los extremos unas zonas de plastificación que atenuarán las presiones de borde y las redistribuirá hacia el centro de la cimentación. En el caso de arenas, dado que la falta de confinamiento en el borde del cimiento, supuesta ésta en superficie, no permitiría el desarrollo de presiones elevadas, la distribución tomará en general la forma parabólica que se indica en la figura 3.2.b.

Con lo expuesto anteriormente se puede ver entonces, que los diagramas de asentamientos y de reacciones del terreno dependen de la clase de suelo y de la rigidez de la estructura de la cimentación. Un cimiento real puede quedar entre los dos casos de los extremos señalados, pues su rigidez no necesariamente es nula o infinita.



**Figura 3.1.** Distribución de presiones en cimentaciones (a) flexibles y (b) rígidas



**Figura 3.2.** Distribución de presiones en cimentaciones rígidas sobre (a) arcillas y (b) arenas

### 3.3 Deformaciones del suelo de cimentación por la aplicación de cargas de la estructura

Como se ha mencionado anteriormente, las cargas que transmite la estructura al suelo de cimentación se considera que son iguales en magnitud y de sentido contrario a las reacciones del suelo sobre la estructura, por la tercera ley de Newton (Deméneghi y coautores, 2003). Para determinar las deformaciones del suelo se hace uso del concepto de valores de influencia de Zeevaert (1980).

Para llevar a cabo el análisis de interacción suelo-estructura es necesario determinar la matriz de rigidez de la estructura que ya fue definida en el capítulo anterior, y determinar también la matriz de flexibilidades del suelo que quedaran ahora en función de las cargas que le transmite la estructura.

El cálculo de la matriz de flexibilidades no es aplicado en el ejemplo de interacción, ya que se lleva a cabo el análisis por el método de rigideces utilizando un programa por computadora (SAP2000). Sin embargo se explica en este tema para cuando se analice el estudio de las deformaciones del suelo analíticamente.

#### 3.3.1 Cálculo de deformaciones del suelo

Para llevar a cabo el cálculo de los asentamientos del suelo en función de las cargas que le trasmite la estructura; se considera una reacción  $r_k$  actuando en la superficie (figura 3.3); la presión vertical vale  $r_k d_k / a_k$ , donde  $d_k$  y  $a_k$  son la longitud y el área en las que actúa la carga, respectivamente.

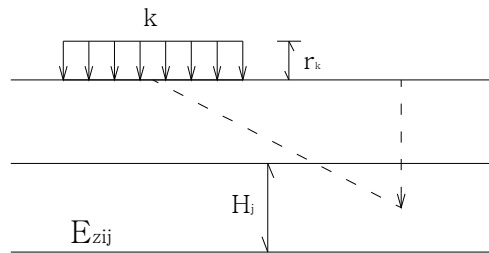
La deformación del estrato de espesor  $H_j$ , debida a la carga  $r_k$  vale



$$\delta_{ijk} = (1/E_{zij})H_j \sigma_{zijk}$$

pero

$$\sigma_{zijk} = I_{zijk} r_k d_k / a_k \quad (3.1)$$



**Figura 3.3** Cálculo de los hundimientos del subsuelo (Deméneghi, 1996)

Donde  $I_{zijk}$  es el valor de influencia vertical, el cual es igual al esfuerzo normal vertical en el punto  $ij$ , producido por una presión unitaria en el área  $a_k$  (Zeevaert, 1973).

$E_{zij}$  es el módulo lineal de deformación, el cual se define como el cociente del esfuerzo normal vertical entre la deformación unitaria vertical que se presenta, en el punto  $ij$ .

Sustituyendo

$$\delta_{ijk} = (1/E_{zij})H_j I_{zijk} r_k d_k / a_k,$$

La deformación del estrato  $j$ , debida a todas las cargas vale

$$\delta_{ijk} = (1/E_{zij})H_j \sum_{k=1}^{n_r} I_{zijk} r_k d_k / a_k,$$

Donde  $n_r$  = número total de cargas  $r_k$ .

Si se considera además una deformación previa  $\delta_{0i}$ , el asentamiento bajo el punto  $i$  vale



$$\delta_i = \delta_{0i} + \sum_{j=1}^{n_e} (1/E_{zij}) H_j \sum_{k=1}^{nr} I_{ijk} r_k d_k / a_k \quad (3.2)$$

Donde  $n_e$  = número total de estratos.

En la ecuación (3.2) los hundimientos del terreno quedan en función de las cargas  $r_k$ .

En efecto,

$$E_{zij} = \sigma_{zij} / \varepsilon_{zij} \quad (3.3)$$

Siendo  $\sigma_{zij}$  el esfuerzo normal vertical en el punto  $ij$  (a la mitad del estrato  $j$ ), y  $\varepsilon_{zij}$  la deformación lineal unitaria vertical del estrato  $j$ .  $\varepsilon_{zij}$  se puede calcular utilizando una teoría no lineal o una teoría lineal.

Los esfuerzos normales verticales y horizontales se obtienen aplicando la ecuación (3.1) para todas las cargas  $r_k$ , es decir

$$\sigma_{zij} = \sum_{k=1}^{nr} I_{zij} r_k d_k / a_k \quad (3.4)$$

$$\sigma_{xij} = \sum_{k=1}^{nr} I_{xij} r_k d_k / a_k \quad (3.5)$$

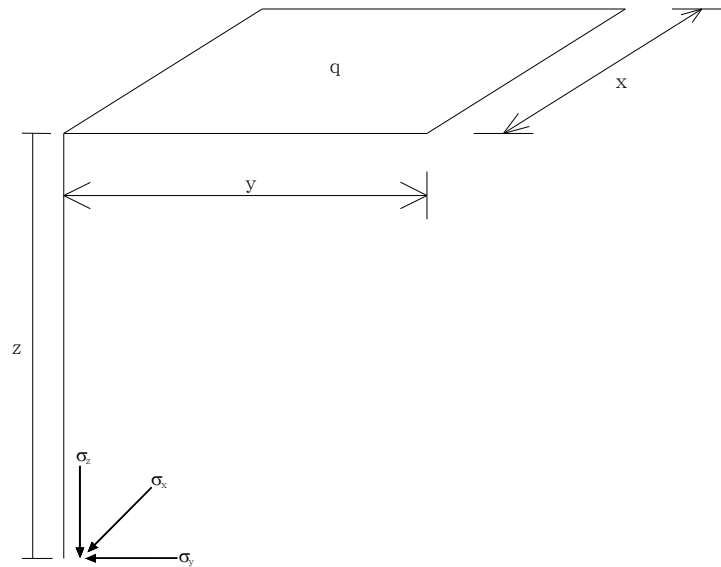
$$\sigma_{yij} = \sum_{k=1}^{nr} I_{yij} r_k d_k / a_k \quad (3.6)$$

Aplicando para un rectángulo cargado, los esfuerzos normales bajo la esquina valen:

$$\sigma_z = \frac{q}{2\pi} \left[ \left( \frac{1}{x^2 + z^2} + \frac{1}{y^2 + z^2} \right) \frac{xyz}{B} + \tan^{-1} \frac{xy}{zB} \right]$$

$$\sigma_x = \frac{q}{2\pi} \left[ \frac{\pi}{2} - \frac{xyz}{(y^2 + z^2)B} - \tan^{-1} \frac{zB}{xy} + (1 - 2\nu) \left( \tan^{-1} \frac{x}{y} - \tan^{-1} \frac{xB}{yz} \right) \right]$$

$$\sigma_y = \frac{q}{2\pi} \left[ \frac{\pi}{2} - \frac{xyz}{(x^2 + z^2)B} - \tan^{-1} \frac{zB}{xy} + (1 - 2\nu) \left( \tan^{-1} \frac{y}{x} - \tan^{-1} \frac{yB}{xz} \right) \right]$$



**Figura 3.4.** Incrementos de esfuerzo bajo la esquina de un rectángulo cargado

Con lo expuesto anteriormente y aplicando la ecuación (3.2), se obtiene la matriz de flexibilidades del suelo de cimentación que quedaran en función de las cargas de la estructura.

Con la obtención de la matriz de flexibilidades del suelo, que queda en función de las cargas aplicadas por la estructura (recordando que las cargas sobre el suelo no se conocen) para determinar las deformaciones del suelo, y la matriz obtenida para la determinación de las deformaciones de la estructura que quedan en función de las esfuerzos transmitidos por el suelo de cimentación (definido en el capítulo 2), se establecen finalmente la compatibilidad de deformaciones entre la estructura y el suelo de cimentación, lo que equivale a considerar que tanto los desplazamientos de la estructura como los de la masa de suelo son iguales, es decir que el suelo no se despega de la estructura (Deméneghi, 1996), llevando así el análisis de interacción suelo-estructura.



#### 4. EJEMPLO DE APLICACIÓN PARA EL ANÁLISIS DE INTERACCIÓN SUELO-ESTRUCTURA.

##### 4.1 Interacción suelo-losa de cimentación haciendo uso de software.

La interacción suelo estructura se puede resolver mediante un método iterativo. Este método iterativo tiene aplicación en la práctica cuando se dispone de un paquete o programa de computadora, en el cual, es posible modelar al terreno de cimentación mediante el uso de elementos “resortes”, mismos que poseerán las propiedades tales que representan la rigidez de dicho terreno. Dado que no se conoce a priori la “constante del resorte”, pues depende del diagrama de reacción del suelo, que es lo que justamente se está buscando, se tiene que recurrir a un procedimiento iterativo (Chamecki, 1956), que consiste en suponer valores iniciales de las “constantes de los resortes”, y con ellas obtener por una parte las deformaciones de la estructura, y por otra parte las deformaciones del suelo; se busca que los valores de deformaciones de la estructura y del suelo converjan, de tal forma que exista una compatibilidad entre ellas.

##### 4.1.2 Determinación de parámetros del suelo, $E_s$ (módulo de elasticidad del suelo) y $\nu$ (relación de Poisson).

Al llevar a cabo el análisis de interacción suelo-estructura, es importante conocer las propiedades del suelo y de la estructura.

Los parámetros que se definirán para este problema en particular, por tratarse de una arcilla saturada y los cuales se aplicarán en el programa, para resolverlo son; el módulo de elasticidad del suelo,  $E_s$ , y la relación de Poisson,  $\nu$ . En suelos plásticos saturados la deformabilidad dependerá tanto del nivel de esfuerzos como del tiempo, por lo tanto en los cálculos de interacción se debe tomar en cuenta en forma apropiada el cambio de las propiedades del suelo. Por lo anterior conviene hacer el análisis con parámetros del suelo calculados a largo plazo, refiriéndonos al módulo de elasticidad del suelo, denominada como  $E'$  (módulo de elasticidad a largo plazo).

##### Determinación del módulo de elasticidad del suelo, $E_s$ .

A pesar de que los materiales geológicos muestran un comportamiento complejo en su relación esfuerzo-deformación, podemos encontrarnos con una amplia variedad de materiales y para cada uno de estos materiales





existen varios modelos constitutivos disponibles capaces de definir su comportamiento.

El grado de deformación producido por un esfuerzo dependerá de la composición, relación de vacíos, historia de esfuerzos y forma en que se aplique el esfuerzo.

Para muchos problemas, el mejor método consiste en medir directamente las deformaciones producidas en una prueba de laboratorio bajo los esfuerzos que existirían en el terreno real.

En otros casos suele ser muy útil recurrir a conceptos y fórmulas de la teoría de la elasticidad. Esto significa que las curvas reales no lineales de esfuerzo-deformación en un suelo deben “linealizarse”, es decir sustituir por líneas rectas. Entonces se habla del módulo de elasticidad,  $E$ , y el coeficiente de Poisson,  $\nu$ , del suelo.

Las gráficas esfuerzo-deformación pueden ser obtenidas sometiendo probetas cilíndricas de suelo a ensayos triaxiales. El primero de los objetivos de los ensayos triaxiales es proporcionar las características elásticas de la relación esfuerzo-deformación. Estas características vienen representadas por el valor de los módulos elásticos que nos dan una idea de la rigidez del material, y que en la mecánica de los medios continuos, suelen ser dos parámetros, el módulo de Young  $E$  y el coeficiente de Poisson  $\nu$  mencionados anteriormente.

Evidentemente el módulo de elasticidad y el coeficiente de Poisson no son constantes de un suelo, sino más bien magnitudes que describen aproximadamente el comportamiento de un suelo para una combinación particular de esfuerzos.

Como ya hemos señalado debemos de tener en cuenta las situaciones a corto y largo plazo que darán lugar a distintos tipos de asentamientos en el suelo sobre el cual estará cimentada la estructura. Por lo que el asentamiento total será entonces la suma del asentamiento instantáneo y el de consolidación:

$$\delta = \delta_u + \delta' \quad (4.1)$$



donde

$\delta$  es el asentamiento total del suelo,

$\delta_u$  es el asentamiento instantáneo o inmediato

$\delta'$  es el asentamiento por consolidación o a largo plazo.

Un suelo saturado responde a corto plazo sin variar su volumen, y ello supone adoptar un coeficiente de Poisson de 0.5 trabajando en esfuerzos totales.

Cuando se realiza un ensaye de compresión simple sin drenaje, conforme se aumenta la presión la probeta se deforma pero no varía su volumen (figura 4.1). Si  $H$  es la altura inicial de la probeta, y si para una presión total axial aplicada  $\sigma_z$  la muestra sufre una disminución de altura  $\Delta H$ , la deformación unitaria axial será:

$$\varepsilon_z = \frac{\Delta H}{H} \quad (4.2)$$

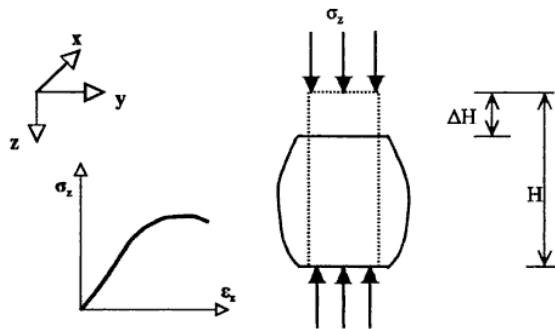


Figura 4.1. Ensaye de compresión simple

y puesto que en el ensaye de compresión simple no existe confinamiento lateral ( $\sigma_x, \sigma_y = 0$ ), la expresión 4.2 se reduce a:

$$\sigma_z = \varepsilon_z E \quad (4.3)$$

Por lo que la expresión 4.1 podrá expresarse como



$$\begin{aligned}\varepsilon &= \varepsilon_u + \varepsilon' \\ \frac{1}{E_s} \sigma_z &= \frac{1}{E_u} \sigma_z + \frac{1}{E'} \sigma_z\end{aligned}$$

Simplificando

$$\begin{aligned}\frac{1}{E_s} &= \frac{1}{E_u} + \frac{1}{E'} \\ E_s &= \frac{1}{\frac{1}{E_u} + \frac{1}{E'}}\end{aligned}\tag{4.4}$$

Donde  $E_s$ , es el modulo de elasticidad total del suelo

$E_u$ , es el modulo de elasticidad sin drenaje (a corto plazo)

$E'$ , es el modulo de elasticidad en términos de esfuerzos efectivos (a largo plazo)

#### Forma de determinar $E_u$

Para determinar  $E_u$  podemos recurrir a la curva esfuerzo-deformación de un ensaye triaxial sin drenaje (sin confinamiento), trazando la pendiente de la curva esfuerzo-deformación obtenida.

Por la teoría de la elasticidad si aplicamos un esfuerzo axial  $\sigma_z$  a un cilindro elástico (figura 4.1) se producirá una compresión vertical y una expansión lateral de forma tal que

$$\varepsilon_z = \frac{\sigma_z}{E}$$

$$\varepsilon_x = \varepsilon_y = -\nu \varepsilon_z$$

donde

$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$ , deformaciones en la dirección  $x, y, z$  respectivamente (positivas cuando son compresiones).

$E$ , Módulo de Young o de elasticidad.

$\nu$ , Coeficiente de Poisson



### Forma de determinar $E'$ (Módulo de elasticidad en esfuerzos efectivos o a largo plazo)

Para determinar el módulo de deformación y el coeficiente de Poisson en términos de esfuerzos efectivos, podemos utilizar los resultados de ensayos triaxiales (CD, con consolidación y drenaje).

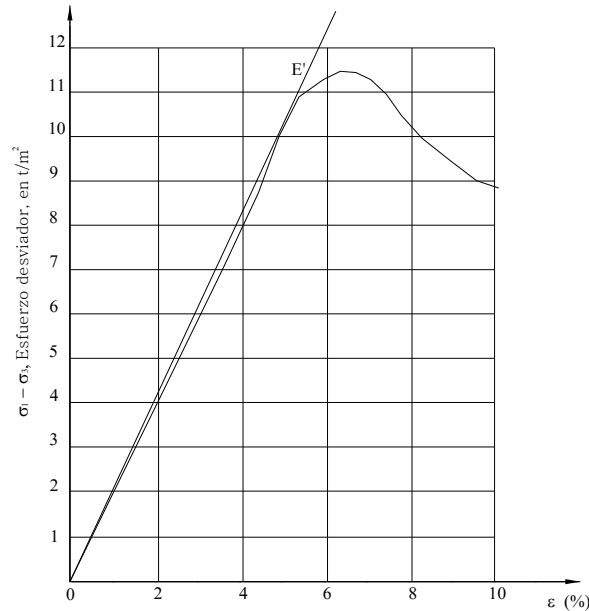


Figura 4.2. Curva esfuerzo-deformación mediante ensaye CD.

De la curva esfuerzo-deformación obtenida del ensaye triaxial consolidada drenada se traza el módulo secante que es la pendiente de una recta que une dos puntos diferentes de la curva, este módulo se obtiene en esfuerzos efectivos (figura 4.2).

Otras formas de obtener el módulo de deformación  $E'$ , es a partir de los resultados de ensayos odométricos (consolidación), este término se describe en el capítulo I de este trabajo y la expresión es

$$E = E_m \left( 1 - \frac{2\nu^2}{1-\nu} \right)$$

Para llevar a cabo el análisis de interacción suelo-estructura, éste se deberá realizar al término de la construcción y después de un determinado tiempo o al final de su vida útil. Los parámetros que habrán de considerarse



en el análisis para el uso del programa SAP2000 son; el módulo de Poisson y de elasticidad y se deberán obtener para corto ( $E_u, \nu=0.5$ ) y largo plazo ( $E', \nu=0$ ) mediante las pruebas mencionadas anteriormente. Se llevará entonces a cabo el análisis de interacción con las dos condiciones, determinando desplazamientos del suelo así como los elementos mecánicos de la estructura, mediante los análisis realizados se tomará la condición más desfavorable para llevar a cabo el diseño.

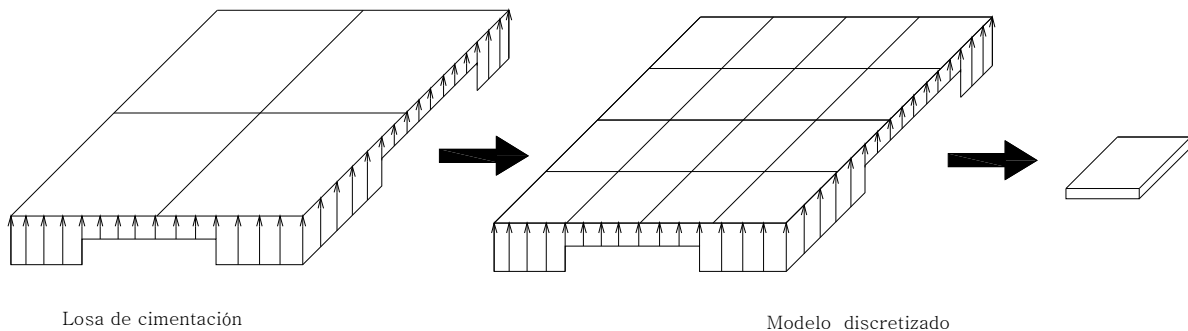
Para ilustrar la forma de llevar a cabo el análisis de interacción, se consideró la condición a largo plazo, tomando los parámetros del suelo,  $E'$  y  $\nu=0$ .

#### 4.1.3 Análisis estructural de una losa de cimentación.

El análisis de la estructura de cimentación se hará, en este caso, usando el programa SAP2000. Asimismo se hará el análisis aplicando el método del elemento finito, expuesto en el capítulo 1.

El método de análisis de SAP2000 se basa en la teoría de elemento finito, la cual básicamente es dividir el elemento en cuestión en partes pequeñas (ver figura 4.3) las cuales poseen las siguientes características:

1. Geometría: sistema de referencia.
2. Material: ley constitutiva.
3. Condiciones de frontera esenciales: apoyos.
4. Condiciones de frontera naturales: cargas.



**Figura 4.3.** Discretización en elementos cuadrados



#### 4.1.4 Aplicación del método iterativo suelo-losa de cimentación.

La forma de resolver la interacción entre el suelo y losa de cimentación es la siguiente:

Se emplean dos modelos diferentes, el primero de ellos representa la estructura de la losa de cimentación (modelo 1) y el segundo al terreno de apoyo de la misma (modelo 2).

En el primer modelo se analiza un sistema suelo-losa de cimentación (figura 4.4) donde el suelo estará representado por medio de resortes.

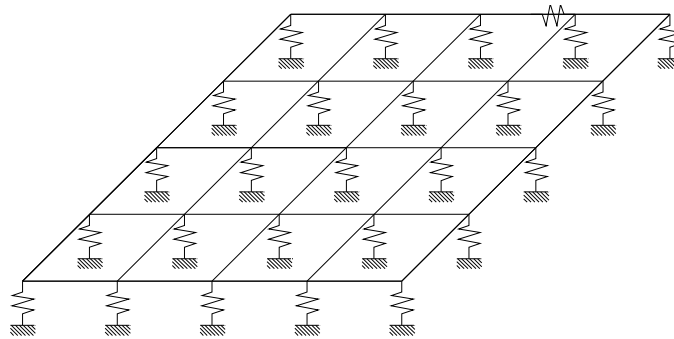


Figura 4.4. Modelo para el análisis suelo-losa de cimentación

En la figura 4.5 se presenta la geometría y sistemas de cargas que actúan sobre la cimentación en estudio y que se tomarán para el modelo estructural que se realizará en el programa (SAP2000).

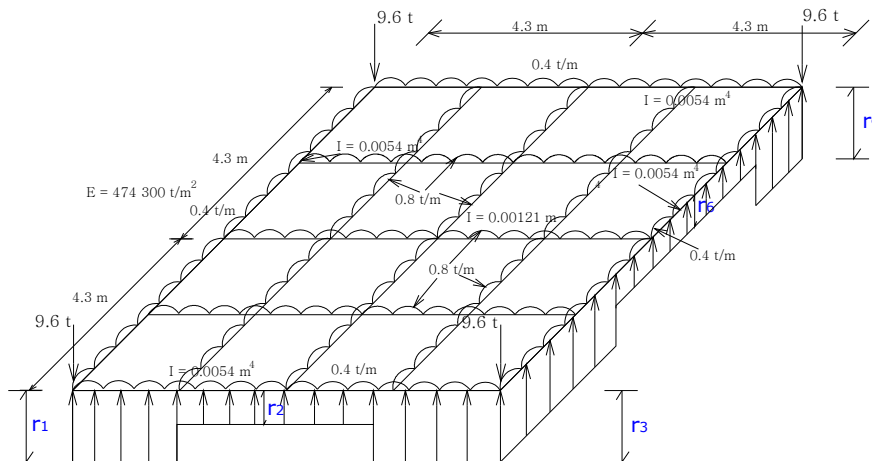
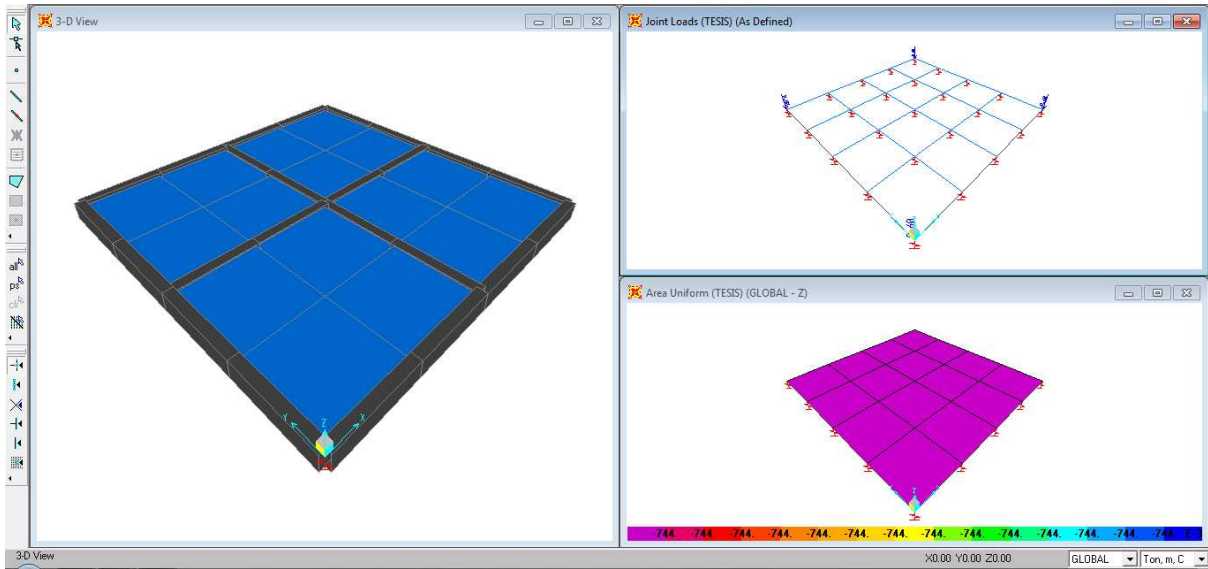


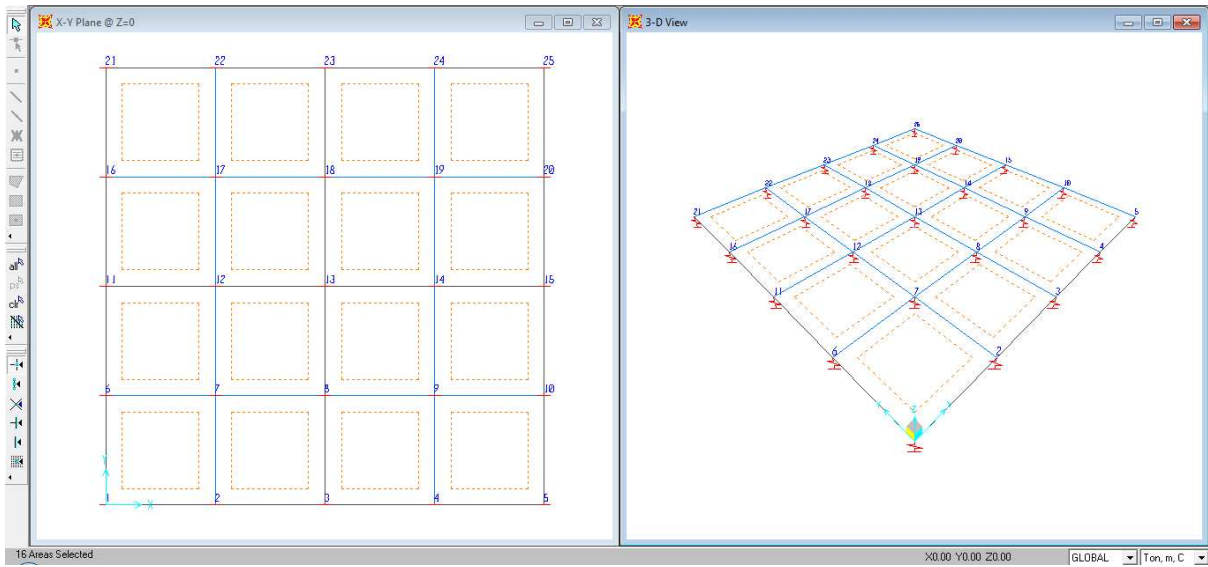
Figura 4.5. Geometría y sistema de cargas sobre la cimentación en estudio.



Para iniciar con el análisis de interacción, primero se modela la estructura definiendo su geometría, propiedades y cargas actuantes. El modelo estructural y la configuración de cargas consideradas en el mismo, se muestra en la figura 4.6; en donde las barras en color gris representan las contratrabes y los tableros en color azul representan la losa de cimentación.



(a)



(b)

Figura 4.6. Modelación de estructura definiendo geometría, propiedades y cargas (modelo 1).



Las cargas aplicadas son, puntuales en las cuatro esquinas con una magnitud de 9.6 t y una carga uniformemente distribuida en toda el área de la losa de cimentación, con una magnitud de  $0.744 \text{ t/m}^2$ , la cual equivale a la configuración de cargas mostradas en la figura 4.5.

Para fines de desarrollar un análisis más detallado, los tableros de la losa, aleatoriamente se dividirán en cuatro elementos.

La cimentación estará apoyada en el suelo, el cual como se mencionó anteriormente, estará representado por resortes. Se asignan entonces a los apoyos (figura 4.6b) un módulo de reacción  $k$  inicial (o “constantes de los resortes”), este valor representa la rigidez del suelo de cimentación.

Una vez definido el modelo de la estructura, se procede a realizar el segundo modelo, en el cual se representa al terreno de apoyo en el que estará desplantada la losa de cimentación (modelo 2).

El suelo sobre el cual estará desplantada la losa corresponde a una arcilla saturada, y está compuesto por dos estratos con las siguientes propiedades, mismos que se representan en la figura 4.7.

***Estrato 1:***

$$1/E_s = 0.0154 \text{ m}^2/\text{t}, \nu=0 \text{ z}= 2.4 \text{ m}$$

***Estrato 2:***

$$1/E_s = 0.0222 \text{ m}^2/\text{t}, \nu=0 \text{ z}= 2.0 \text{ m}$$

donde:

$E_s$ , es el módulo de elasticidad del suelo, en  $\text{t/m}^2$

$\nu$ , es la relación de Poisson

$z$ , es el espesor del estrato, en m



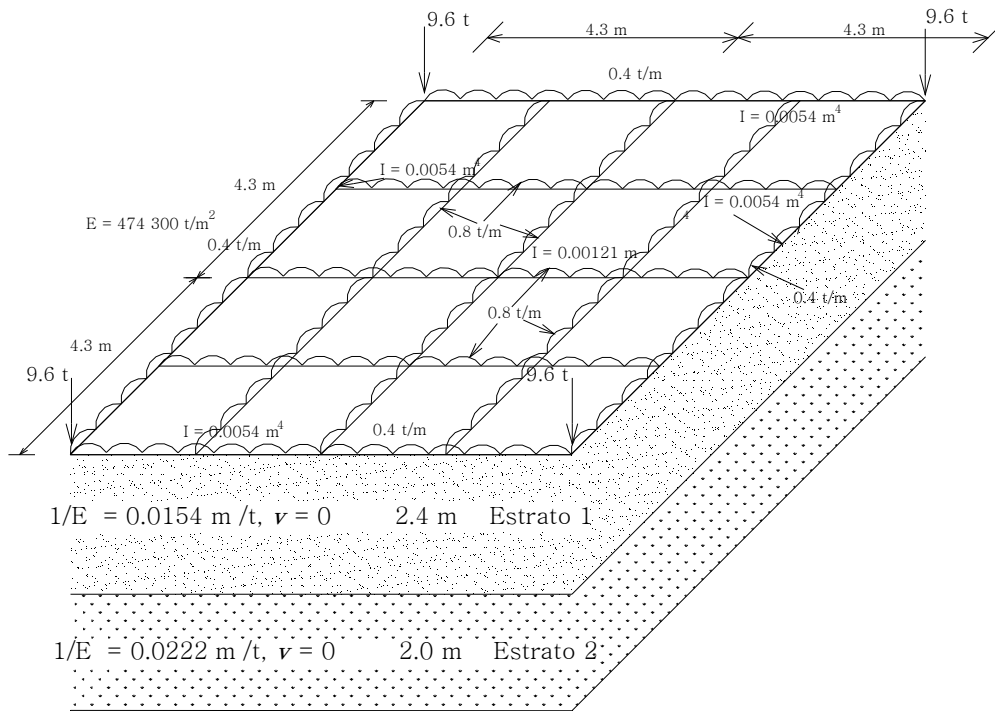
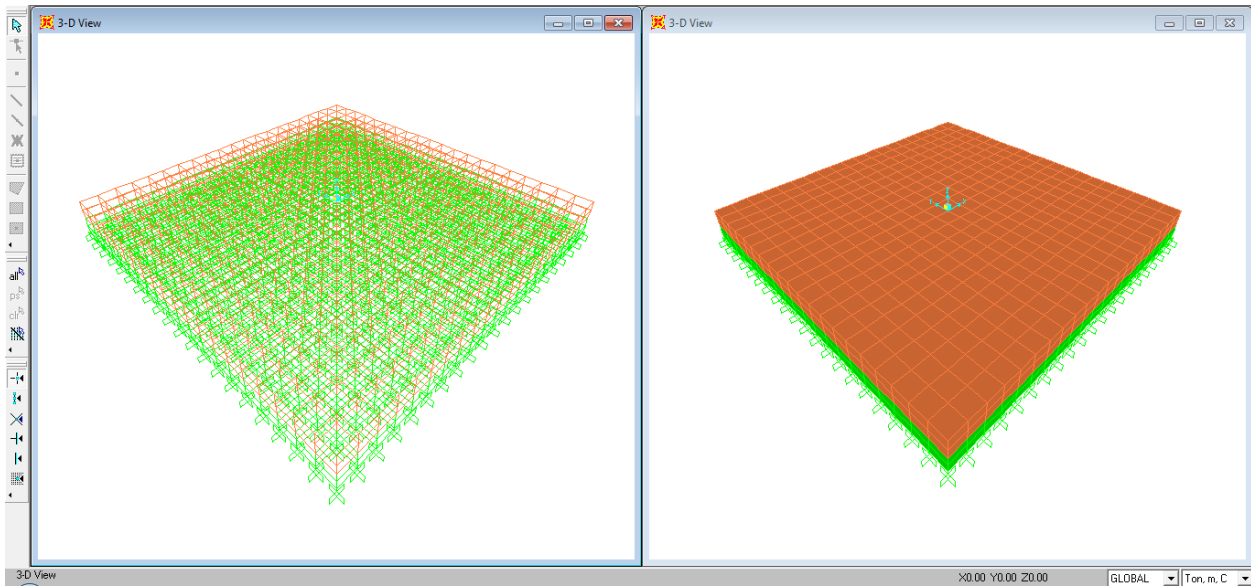


Figura 4.7. Estratigrafía del suelo.

Los estratos definidos en la figura 4.7 se modelan dentro del programa SAP2000 mediante elementos sólidos. A estos elementos se les asignan las propiedades antes mencionadas.

Para modelar al terreno de apoyo y considerar la influencia del suelo circundante a la zona en donde se apoyará la cimentación, se extienden los elementos sólidos que lo representan, de tal forma que se tenga un análisis más cercano a la realidad, considerando que alrededor de la zona en estudio el suelo posee las mismas propiedades geotécnicas (figura 4.8).

Antes de hacer más extensa el área, el suelo de cimentación queda dividido en secciones cuadradas compuesto por cuatro nodos, como se mostró en la figura 4.3.



**Figura 4.8.** Modelo del suelo sobre el cual estará desplantada la estructura empleando elementos sólidos (modelo 2).

Una vez modelado el suelo sobre el cual quedará desplantada la estructura, se asignan la totalidad de las cargas actuantes en el terreno de apoyo, mismas que se distribuyen de manera uniforme como punto de partida del proceso de interacción.

Considerando que en principio las reacciones son uniformes (ver figura 4.5) y por simetría, se tiene:

$$r_1 = r_3 = r_7 = r_9$$

$$r_2 = r_4 = r_6 = r_8$$

$$r_5$$

Por lo tanto, partiendo de una reacción uniforme y comenzando con los cálculos, se tiene que:

$$r_z = r_1 = r_2 = r_5 = 3.74t$$

En el modelo que representa al terreno de apoyo se aplican inicialmente las cargas  $r_z$ , como se muestra en la figura 4.9



Al aplicar las cargas a la cimentación, éstas son transmitidas al suelo generando desplazamientos cuya magnitud dependerá de la rigidez del suelo sobre el cual están actuando dichas cargas.

Una vez aplicadas las cargas, el programa obtendrá las deformaciones generadas en el suelo (figura 4.10).

El programa nos despliega una tabla en la que se generan los resultados del análisis, dentro del cual se obtiene la deformación que se presenta en cada nodo. Con las deformaciones obtenidas y las cargas aplicadas, se determinan los módulos de reacción (o “constantes de los resortes”) (modelo 2), mediante la siguiente expresión:

$$k_v = \frac{Q_z}{\delta} \quad (4.5)$$

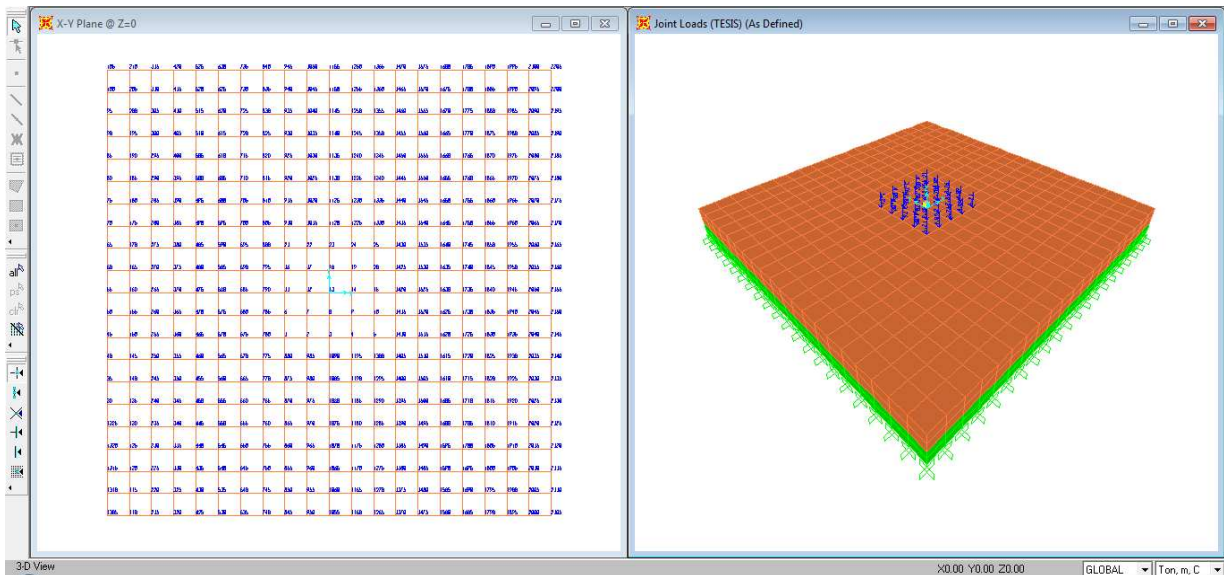


Figura 4.9. Modelación del suelo y aplicación de cargas.

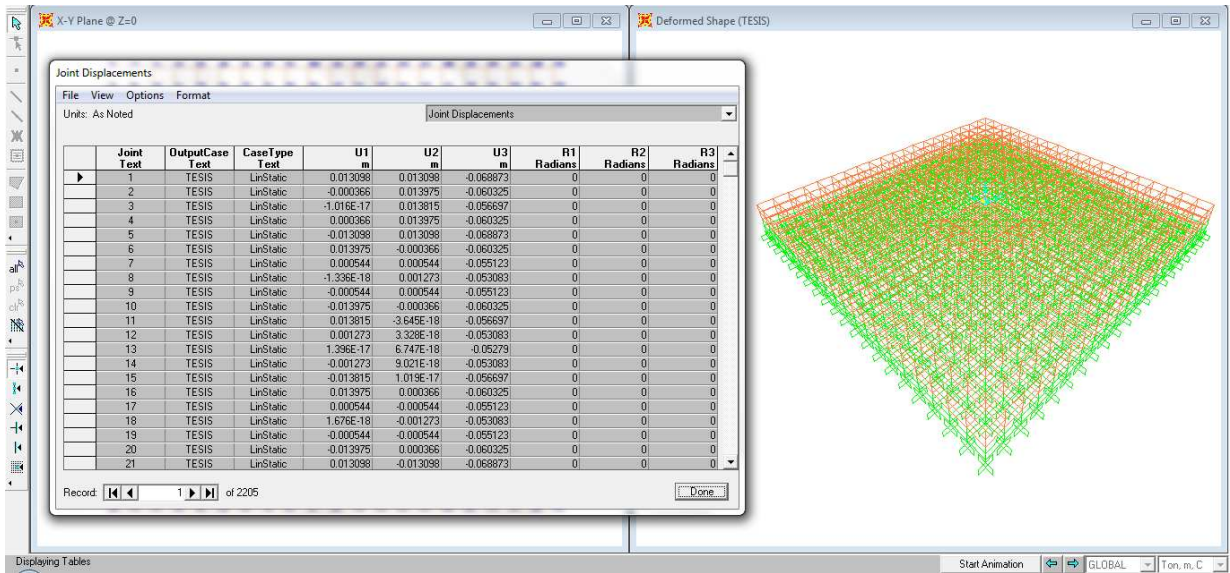


Figura 4.10. Cálculo de deformaciones generadas por la acción de cargas

Para llevar a cabo el proceso iterativo, se genera la siguiente tabla, en la que se define el nodo que se está analizando, la deformación, cargas y finalmente el modulo de reacción.

SUELO			
Nodo	$\delta$ (m)	$r_z$ (t)	$k$ (t/m)
1	0.052	3.74	71.92
2	0.057	3.74	65.61
3	0.058	3.74	64.48
7	0.066	3.74	56.67
8	0.068	3.74	55.00
13	0.069	3.74	54.20

La tabla generada esta simplificada por la simetría que presenta la estructura y que se esquematiza en la figura 4.11.

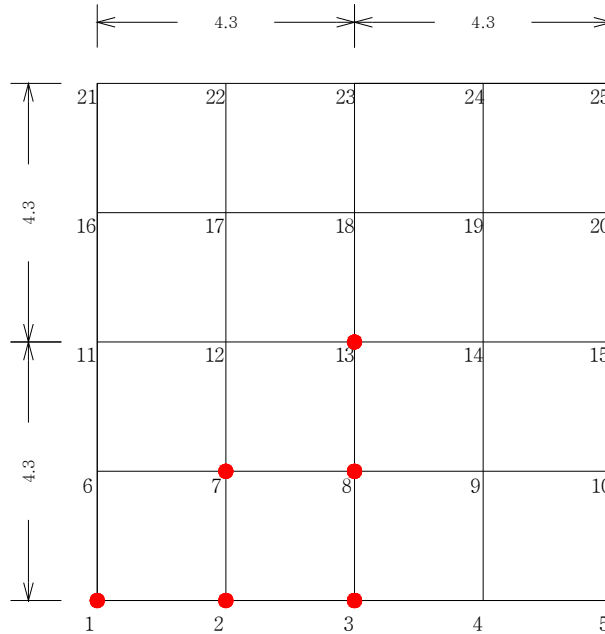


Figura 4.11. Localización de los nodos analizados

Una vez determinados los módulos de reacción (o constantes de los resortes)  $k_{vi}$ , se ingresan como dato en la estructura (modelo 1) y se determina el estado de cargas que debe tener la estructura como reacción del suelo. Las reacciones o cargas se obtienen como:

$$r_z = k_v \delta \tag{4.6}$$

Donde  $\delta$  de la ecuación 4.6, son las deformaciones generadas en la estructura al asignarle a los resortes el valor de la rigidez  $k_v$  del suelo, obtenida con la ecuación 4.5.

En la figura 4.12 se presenta la estructura deformada (modelo 1).



#### 4. EJEMPLO DE APLICACIÓN PARA EL ANÁLISIS DE INTERACCIÓN SUELO - ESTRUCTURA

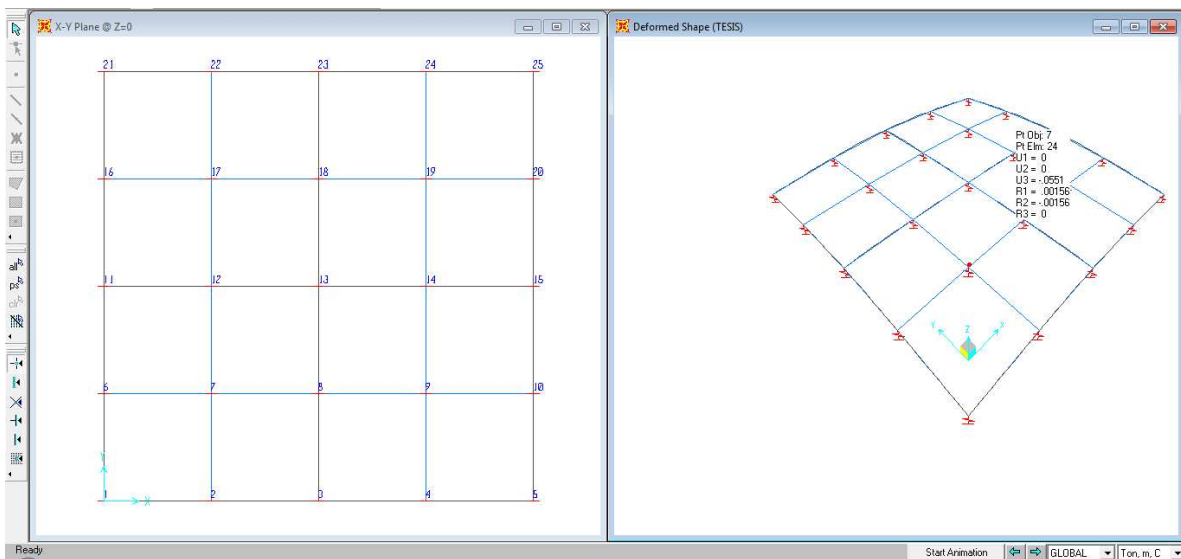
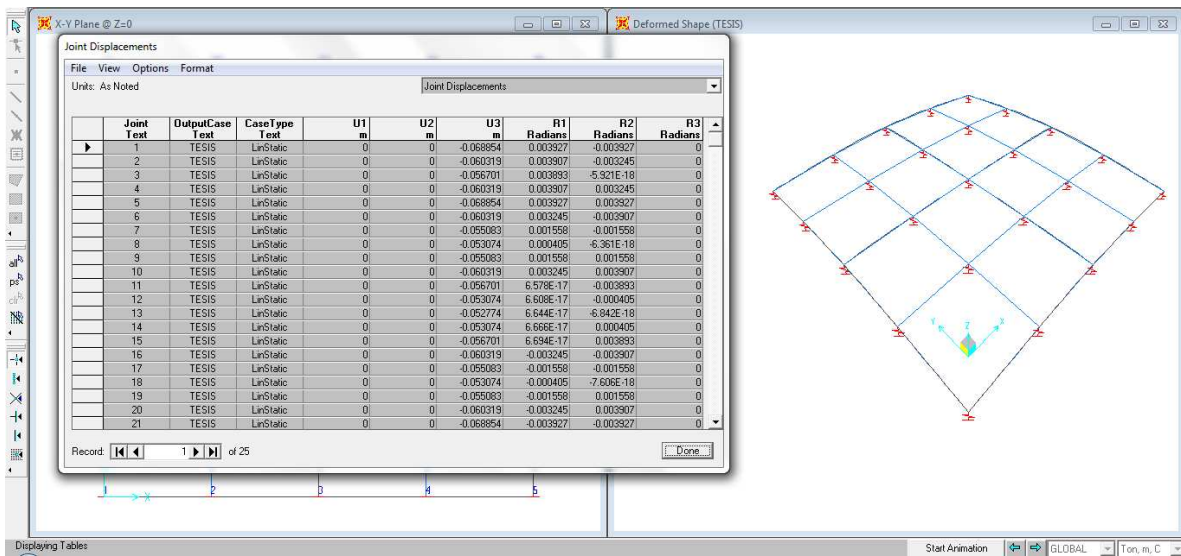


Figura 4.12. Deformaciones generadas en la estructura (modelo 1).

Los resultados obtenidos son los siguientes:

**ESTRUCTURA**

Nodo	k (t/m)	$\delta$ (m)	$r_z$ (t)
1	71.92	0.071	5.11
2	65.61	0.061	4.00
3	64.48	0.057	3.68
7	56.67	0.054	3.06
8	55.00	0.052	2.86
13	54.20	0.051	2.76

Los valores de las reacciones  $r_z$  obtenidos, se aplican al suelo y el proceso se repite iterativamente hasta que exista una convergencia entre las deformaciones de la estructura y las del suelo (modelo 1 y modelo 2).

Para este ejemplo de aplicación se requirió de 7 iteraciones para llegar a la compatibilidad de deformaciones.

Por lo que finalmente se obtienen las deformaciones que se generaran en el suelo, mismas que deberán ser compatibles con las deformaciones de la subestructura.

**1a iteración****SUELO**

Nodo	$\delta$ (m)	$r_z$ (t)	k (t/m)
1	0.052	3.74	71.92
2	0.057	3.74	65.61
3	0.058	3.74	64.48
7	0.066	3.74	56.67
8	0.068	3.74	55.00
13	0.069	3.74	54.20

**ESTRUCTURA**

Nodo	k (t/m)	$\delta$ (m)	$r_z$ (t)
1	71.92	0.071	5.11
2	65.61	0.061	4.00
3	64.48	0.057	3.68
7	56.67	0.054	3.06
8	55.00	0.052	2.86
13	54.20	0.051	2.76



## 2a iteración

SUELO			
Nodo	$\delta$ (m)	$r_z$ (t)	k (t/m)
1	0.068	5.11	75.10
2	0.059	4.00	67.84
3	0.056	3.68	65.63
7	0.058	3.06	52.76
8	0.055	2.86	52.00
13	0.055	2.76	50.26

ESTRUCTURA			
Nodo	k (t/m)	$\delta$ (m)	$r_z$ (t)
1	75.10	0.069	5.18
2	67.84	0.060	4.09
3	65.63	0.057	3.71
7	52.76	0.055	2.89
8	52.00	0.053	2.74
13	50.26	0.052	2.63

## 3a iteración

SUELO			
Nodo	$\delta$ (m)	$r_z$ (t)	k (t/m)
1	0.069	5.18	75.64
2	0.060	4.09	67.76
3	0.056	3.71	66.15
7	0.055	2.89	52.15
8	0.054	2.74	51.08
13	0.052	2.63	50.36

ESTRUCTURA			
Nodo	k (t/m)	$\delta$ (m)	$r_z$ (t)
1	75.64	0.069	5.20
2	67.76	0.060	4.09
3	66.15	0.057	3.74
7	52.15	0.055	2.87
8	51.08	0.053	2.71
13	50.36	0.053	2.65

## 4a iteración

SUELO			
Nodo	$\delta$ (m)	$r_z$ (t)	k (t/m)
1	0.069	5.20	75.69
2	0.060	4.09	67.72
3	0.056	3.74	66.28
7	0.055	2.87	51.88
8	0.053	2.71	50.86
13	0.052	2.65	50.67

ESTRUCTURA			
Nodo	k (t/m)	$\delta$ (m)	$r_z$ (t)
1	75.69	0.069	5.21
2	67.72	0.060	4.08
3	66.28	0.057	3.76
7	51.88	0.055	2.86
8	50.86	0.053	2.70
13	50.67	0.053	2.68





## 5a iteración

SUELO			
Nodo	$\delta$ (m)	$r_z$ (t)	k (t/m)
1	0.069	5.21	75.71
2	0.060	4.08	67.84
3	0.057	3.76	66.27
7	0.055	2.86	51.76
8	0.053	2.70	50.90
13	0.053	2.68	50.76

ESTRUCTURA			
Nodo	k (t/m)	$\delta$ (m)	$r_z$ (t)
1	75.71	0.069	5.21
2	67.84	0.060	4.09
3	66.27	0.057	3.76
7	51.76	0.055	2.85
8	50.90	0.053	2.70
13	50.76	0.053	2.67

## 6a iteración

SUELO			
Nodo	$\delta$ (m)	$r_z$ (t)	k (t/m)
1	0.069	5.21	75.63
2	0.060	4.09	67.82
3	0.057	3.76	66.27
7	0.055	2.85	51.66
8	0.053	2.70	50.83
13	0.053	2.67	50.91

ESTRUCTURA			
Nodo	k (t/m)	$\delta$ (m)	$r_z$ (t)
1	75.63	0.069	5.21
2	67.82	0.060	4.09
3	66.27	0.057	3.76
7	51.66	0.055	2.85
8	50.83	0.053	2.70
13	50.91	0.053	2.69

## 7a iteración

SUELO			
Nodo	$\delta$ (m)	$r_z$ (t)	k (t/m)
1	0.069	5.21	75.66
2	0.060	4.09	67.79
3	0.057	3.76	66.28
7	0.055	2.85	51.64
8	0.053	2.70	50.84
13	0.053	2.69	50.92

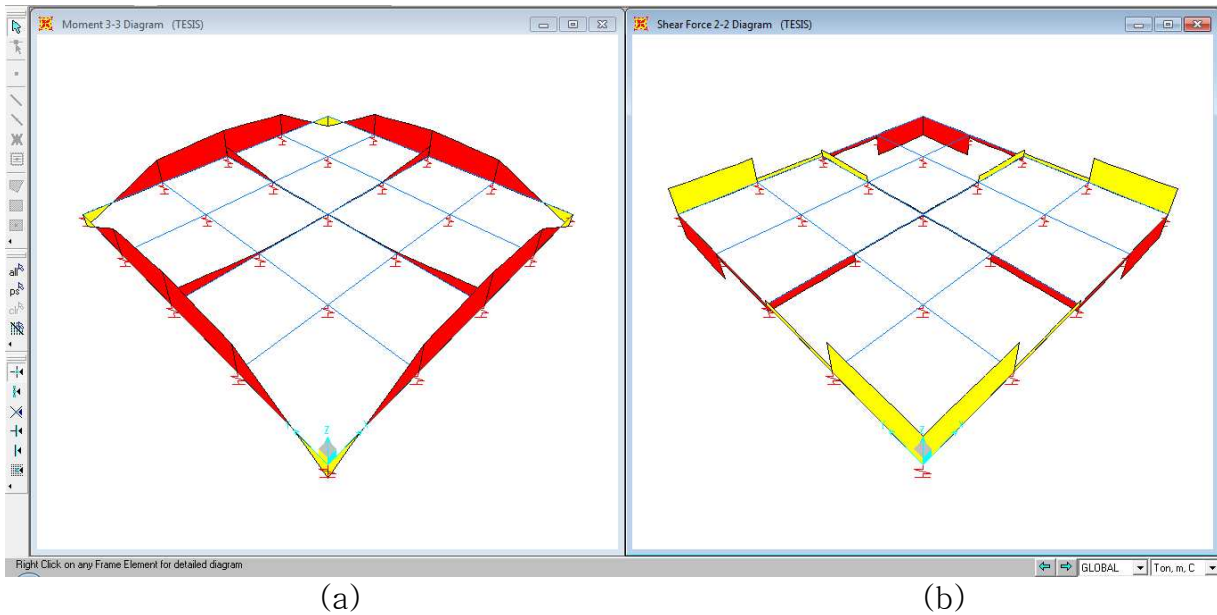
ESTRUCTURA			
Nodo	k (t/m)	$\delta$ (m)	$r_z$ (t)
1	75.66	0.069	5.21
2	67.79	0.060	4.09
3	66.28	0.057	3.76
7	51.64	0.055	2.85
8	50.84	0.053	2.70
13	50.92	0.053	2.69

En este capítulo se determinó la compatibilidad de deformaciones en la interacción suelo-estructura, haciendo uso de un método iterativo. Esta



información es útil para llevar a cabo un análisis estructural tomando en cuenta el efecto de la rigidez del terreno de cimentación. Con estas deformaciones y una vez determinadas las cargas que le llegarán a los elementos estructurales que conforman la cimentación, se podrán determinar los diagramas de fuerza cortante y de momento flexionante en dichos elementos, y con ello desarrollar el diseño estructural de la cimentación, tomando en cuenta la interacción entre el suelo y la estructura.

En la figura 4.13, se presentan los diagramas de elementos mecánicos de los elementos estructurales que forman parte de la cimentación del ejemplo de aplicación analizado, una vez realizada la interacción suelo-estructura.



**Figura 4.13.** Diagramas de Elementos Mecánicos, (a) Momento flexionante y (b) Fuerzas cortantes.



## 5. CONCLUSIONES

Con base en el tema de Interacción estática suelo-estructura desarrollado en este trabajo, aplicando la teoría del Método de Elemento finito a un programa SAP2000, se puede concluir lo siguiente:

- El MEF (Método de Elemento Finito) es un método que hoy en día es utilizado por los ingenieros para resolver problemas complejos, con materiales no-homogéneos, de comportamiento esfuerzo-deformación no lineal.
- El método de los elementos finitos como formulación matemática es relativamente nuevo; aunque su estructura básica es conocida desde hace bastante tiempo, en los últimos años ha sufrido un gran desarrollo debido a los avances informáticos.

Han sido precisamente estos avances informáticos los que han puesto a disposición de los usuarios gran cantidad de programas que permiten realizar cálculos con elementos finitos. El manejo correcto de este tipo de programas exige un conocimiento completo de los principios del MEF y de un profundo conocimiento del material con el que se trabaja.

- Como puede observarse en este trabajo, el cálculo del asentamiento del suelo de cimentación puede ser resuelto haciendo uso del método de elemento finito.
- Al llevar a cabo un análisis de interacción entre el suelo de apoyo y la estructura, en el que nos pueda reflejar las condiciones de suelo en campo y reducir un riesgo geotécnico, empleando el MEF (Método de Elementos Finitos), depende esencialmente de la capacidad del modelo constitutivo en representar el comportamiento real del terreno y las estructuras, la correcta determinación de los parámetros del modelo, y las condiciones de frontera. No obstante, para valerse de un modelo geotécnico particular hace falta realizar ensayos, de campo y de laboratorio, para determinar los parámetros necesarios que reproduzcan el comportamiento del terreno, esto a su vez complementado con un buen estudio geotécnico.



- Al llevar a cabo la interacción del suelo con la estructura, ésta puede analizarse haciendo uso de resortes, los cuales tendrán la propiedad de rigidez del suelo y por lo tanto es útil para el análisis de la estructura.
- Como análisis de interacción suelo-estructura aplicando el método de elemento finito, se presenta un ejemplo de aplicación. Es importante al llevar a cabo el análisis, determinar las propiedades de deformación a corto y largo plazo, dentro de los cuales se deberá de diseñar con la condición más desfavorable. Como ejemplo de aplicación presentado en este trabajo, se realizó únicamente considerando una condición a largo plazo.
- En este trabajo se analizó una cimentación (losa) desplantada sobre una arcilla saturada. Es importante llevar a cabo un análisis de interacción cuando se trate de cimentaciones que se encuentren desplantadas sobre suelos de mediana y alta compresibilidad, en los que el asentamiento originado por la acción de cargas tiene importancia en el comportamiento de las estructuras.
- La interacción entre el suelo y la estructura que se considera en este trabajo, se logra aplicando un método iterativo, el cual con la ayuda de un programa de computadora es posible determinar la compatibilidad de deformaciones entre la estructura y el suelo de cimentación.
- El análisis de la estructura de cimentación se hizo, en este caso, usando el programa SAP2000, en el cual se analizó la interacción entre el suelo y una losa de cimentación. Este programa se basa en la teoría de elemento finito, la cual básicamente es dividir el elemento en cuestión en partes pequeñas, y de esta forma obtener un análisis más definido.
- Con la aplicación de un método iterativo, es posible determinar el valor del módulo  $K$ , el cual depende de la reacción del suelo y de las deformaciones de la cimentación. Como es conocido por el ingeniero geotecnista, el suelo es muy variable en cuanto a sus propiedades y características, por lo que es importante conocer el valor de  $K$  que será



utilizado para representar la rigidez del suelo y que es tomado en cuenta para las deformaciones que son generadas en la estructura.

- Un buen análisis en el comportamiento mecánico de la estructura, se hace cuando se toma en cuenta la rigidez del suelo sobre el cual será cimentada. El resultado que se tiene al llevar a cabo un análisis de interacción suelo-estructura, es la obtención de los diagramas de hundimientos diferenciales y de reacción del suelo de cimentación, lo que a su vez permite determinar los diagramas de momento flexionante y fuerza cortante en la estructura de cimentación, considerando la influencia de la rigidez del suelo de cimentación, obteniendo finalmente un buen diseño de la subestructura.



---

**REFERENCIAS**

1. *Análisis estructural*, A. Ghali y A.M Neville, Primera Edición, Agosto 1983, Ed. Diana, México.
  2. *Apuntes de cimentaciones, Interacción Suelo-Estructura*. Agustín Demenéghi Colina, Margarita Puebla Cadena, Héctor Sanginés García, Profesores del Departamento de Geotecnia, División de Ingeniería Civil, Topográfica y Geodésica, Facultad de Ingeniería, UNAM.
  3. *Apuntes de Teoría General de las Estructuras*. M.I Octavio García Domínguez y Alfonso Islas Hernández, División de estudios de Posgrado, Facultad Ingeniería, UNAM, México D.F, 1999.
  4. *Apuntes de Mecánica de Suelos Teórica: El método de elementos finitos como herramienta de análisis*. Dr. Jorge Abraham Díaz Rodríguez. Facultad de Ingeniería UNAM, México D.F, 2008.
  5. *Apuntes de Propiedades de los suelos: Consolidación de los suelos*. Dr. Jorge Abraham Díaz Rodríguez. Facultad de Ingeniería UNAM, México D.F, 2008.
  6. *Artículo: Los suelos lacustres de la Ciudad de México*. Dr. Jorge Abraham Díaz Rodríguez. Facultad de Ingeniería UNAM, México D.F, 2006.
  7. *Computers Methods of Structural Analysis*, Beaufail, F W, Rowan, H W, Hoadley, P G y Hackett, R M. Prentice-Hall, 1970.
  8. *Casos prácticos de aplicación del método de los elementos finitos en la reducción del riesgo geotécnico*. Ignacio Zuloaga Fábrega, INGEOSOLUM, s.l., Madrid, España.
  9. *Compendio elemental de mecánica de Suelos*. Leonardo Zeevaert, W. CE, Profesor emérito, DEPMI, UNAM, México, D.F. 1998.
-



10. *Introducción al estudio del elemento finito en Ingeniería*, Chandrupatla, T R y Belegundu, A D, 2ª edición, Prentice-Hall, Pearson, Addison Wesley, México D.F. 1999.
  11. *Interacción Suelo-Estructura y diseño estructural de cimentaciones*. Reunión conjunta SMMS, SMIS, SMIE. Sociedad Mexicana de Mecánica de Suelos, A.C. México D.F. 1992.
  12. *Introducción Visual a SAP2000*. Dr. Luis E. Suárez y Drianfel Vázquez. México 2004.
  13. *Manual de Mecánica de Suelos y Cimentaciones: Caracterización de los suelos*. Ángel Muelas Rodríguez.
  14. *Mecánica del Medio Continuo en el Ingeniería*. Xavier Ayneto Gubert, edición de la Universidad Politécnica de Catalunya, S.L.
  15. *Método del elemento finito. Análisis lineal*. Agustín Deméneghi Colina. División de Ingeniería civil, Topográfica y Geodésica, Departamento de Geotécnia. México D.F, 2000.
  16. *Principios de Ingeniería de cimentaciones*. Braja M. Das, California State University, Sacramento, International Thomson Editores. Impreso México D.F 2001.
  17. *Tesis: Revisión de algunos aspectos relevantes del fenómeno de consolidación secundaria*. M.I Juan Luis Umaña Romero. Facultad de Ingeniería UNAM, México D.F 2008.
-