



UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTÓNOMA DE
MÉXICO

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN INGENIERÍA

INSTITUTO DE INGENIERÍA

**Aplicación del método de discontinuidades interiores a problemas
estructurales dominados por flexión**

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:

MAESTRO EN INGENIERÍA

INGENIERÍA CIVIL – ESTRUCTURAS

P R E S E N T A:

Ma. Del Carmen Hernández Flores

TUTOR:

DR. A. GUSTAVO AYALA MILIÁN

CIUDAD UNIVERSITARIA
México 201



**INSTITUTO
DE INGENIERÍA
UNAM**

JURADO ASIGNADO:

Presidente: Dr. Pérez Gavilán Escalante Juan José

Secretario: Dr. López Bátiz Oscar

Vocal: Dr. Ayala Milián Amado Gustavo

1er. Suplente: Dr. Juárez Luna Gelacio

2do. Suplente: M.I. García Domínguez Octavio

Lugar donde se realizòla tesis: Instituto de Ingeniería, UNAM

Tutor de Tesis:

Dr. A. Gustavo Ayala Milián

Agradecimientos

Agradezco primeramente a Dios

Agradezco al Dr. A. Gustavo Ayala Milián, por todo el apoyo que me ha dado en el desarrollo de este trabajo de tesis

Agradezco al Dr. Oscar López Batís, M.I Octavio García Domínguez, Dr. Juan José Pérez Gavilán Escalante, Dr. Gelacio Juárez Luna, por el tiempo dedicado a revisar este trabajo, y por sus valiosos comentarios.

Especialmente agradezco al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología, por el apoyo económico recibido durante el periodo de mis estudios de maestría.

Igualmente agradezco a la DGPA, por su apoyo económico otorgado para la culminación de este trabajo.

Abstract

At present the literature in the theory of finite element offers to analysts to various proposals to simulate numerically the linear and nonlinear behavior structure, using sophisticated mathematical models such as: the model of the crack distributed, the crack discrete and the internal discontinuities etc. However Knowing the characteristics of the external action and behavior of materials, and therefore a better approximation. In the present work to investigation to examine the applicability of a mathematical model with a clear formulation for the analyst and low computational cost called distributed model of the crack. This mathematical model was validated by elaboration two numerical examples and compared their response with corresponding experimental studies.

Resumen

En la actualidad la literatura especializada en la teoría de los elementos finitos ofrece a los analistas diversas propuestas para simular numéricamente el comportamiento lineal y no lineal de estructuras, mediante modelos matemáticos muy sofisticados como son: el modelo de la grieta distribuida, el de la grieta discreta y el de discontinuidades interiores etc. Sin embargo conocer las características de la acción externa y del comportamiento de los materiales llevara al analista a elaborar un mejor modelo matemático y por consecuencia una mejor aproximación. En el presente trabajo de investigación se evaluó la aplicabilidad de un modelo matemático con una formulación clara para el analista y de bajo costo computacional llamado modelo de la grieta distribuida. Este modelo matemático se validó mediante la elaboración de dos ejemplos numéricos y se comparó su respuesta con sus correspondientes estudios experimentales.

Tabla de contenido

Aplicación del método de discontinuidades interiores a problemas estructurales dominados por flexión.....	1
Tabla de contenido.....	v
CAPÍTULO I.....	7
INTRODUCCIÓN.....	7
1.1 Definición del problema.....	7
1.2 Antecedentes.....	8
1.3 Objetivos.....	9
1.4 Contenido.....	9
CAPÍTULO 2.....	12
TEORIAS DE FALLA.....	12
2.1 Introducción a la mecánica de la fractura.....	12
2.2 Modelo de la grieta discreta.....	16
2.4 Modelo de Discontinuidades Interiores.....	18
CAPÍTULO 3.....	21
MODELOS DE DAÑO.....	21
3.1 Modelos Constitutivos de daño.....	21
3.1.1 Modelo de daño isotrópico.....	21
3.1.2 Ecuación constitutiva.....	23
3.1.3 Criterio de daño.....	24
3.1.4 Regla de endurecimiento.....	26
3.1.5 Condiciones de carga y descarga.....	28
3.1.6 Módulo tangente.....	29
3.2 Análisis de la falla en materiales.....	31
3.2.1 Fases de la curva esfuerzo deformación.....	31
3.2.2 Tiempo de bifurcación.....	33
3.2.3 Bifurcación continua.....	35
3.2.4 Bifurcación discontinua.....	35
CAPÍTULO 4.....	37
FORMULACIÓN VARIACIONAL.....	37
4.1 Antecedentes.....	37
4.2 Definición de la Formulación variacional del problema.....	37
4.3 Formulación canónica de Fraeijs de Veubeke.....	39
4.3.1 Principio variacional de Fraeijs de Veubeke.....	41

4.4 Aproximación de elementos finitos	42
4.5 Extremización del funcional de energía de Fraeijs de Veubeke.	43
4.10 Formulación variacional de desplazamientos	45
CAPÍTULO 5.....	46
MODELO DE AGRIETAMIENTO DISTRIBUIDO	46
5.1 Introducción.....	46
5.2 Características de los modelo de la grieta distribuida.....	46
5.2.1 Comienzo del agrietamiento	48
5.2.2 Orientación y generación del agrietamiento	48
5.2.3 Ecuación constitutiva.....	50
5.3 Modelado de discontinuidades mediante el concepto de la grieta distribuida.....	52
5.3.1 Energía de fractura.....	54
5.3.2 Longitud Característica.....	55
CAPÍTULO 6.....	56
Ejemplos de aplicación	56
6.1 Introducción.....	56
6.2 Análisis de resultados	57
6.3 Ejemplo 1	57
6.3.1 Curva fuerza-desplazamiento.....	58
6.3.2 distribución de esfuerzos.....	59
6.3.3 distribución de desplazamientos	60
6.3.4 distribución de deformaciones	60
6.4 Ejemplo 2.....	61
6.4.1 Curva fuerza-desplazamiento.....	62
6.4.2 distribución de deformaciones	62
6.4.3 distribución de desplazamientos	63
6.4.4 distribución de esfuerzos.....	64
CAPÍTULO 7.....	65
7.0 Conclusiones y recomendaciones para trabajos futuros	65
7.1 Conclusiones.....	65
7.2 Recomendaciones para trabajos futuros.....	66
CAPÍTULO 8.....	67
REFERENCIAS.....	67

CAPÍTULO I

INTRODUCCIÓN

1.1 Definición del problema

En la actualidad existen varios modelos matemáticos que simulan el comportamiento de un elemento ante una fuerza externa, sin embargo algunos de estos modelos presentan una formulación matemática compleja y poco clara para los analistas además de tener un costo computacional elevado; en el presente trabajo de investigación se evaluó la aplicabilidad de un modelo matemático con una formulación clara para el analista y de bajo costo computacional, modelo de la grieta distribuida. Este modelo matemático se validó mediante la elaboración de dos ejemplos numéricos y se comparó su respuesta con sus correspondientes estudios experimentales.

Para conocer el comportamiento de una estructura es fundamental conocer las características de la acción externa y del comportamiento de los materiales, los cuales generalmente tienen un comportamiento inicial elástico y una zona de ablandamiento por deformación después de que se alcanza la resistencia máxima del material. En Ingeniería civil es común utilizar materiales cuasifrágiles como el concreto. Las razones por las cuales es importante conocer el comportamiento estructural son: calcular de forma más precisa los factores de seguridad, conocer el mecanismo etc.

El tipo de falla de un elemento está en función del tipo de material, la falla aparece físicamente como fisuras en el concreto, fracturas en las rocas, líneas de deslizamiento en los suelos etc. Por la manera de fallar de los materiales, se dice que tienen un comportamiento dúctil o frágil, los materiales dúctiles presentan grandes deformaciones antes de la falla y los materiales frágiles presentan fallas

súbitas, las deformaciones después de la fluencia son pequeñas tomando como referencia el comportamiento de materiales dúctiles.

1.2 Antecedentes

En la actualidad la literatura especializada en la teoría de los elementos finitos presenta diversas propuestas para simular numéricamente el comportamiento de estructuras, los modelos más empleados para simular el proceso de falla, mediante el método de los elementos finitos son el de la grieta distribuida, el de la grieta discreta y el de discontinuidades interiores, éste último se clasifica en aproximación continua y aproximación discreta.

Ayala y Juárez (2008) propusieron una formulación variacional mixta no lineal para la simulación del proceso de falla en sólidos mediante la aproximación de elementos finitos, donde el comportamiento del material se determina utilizando un modelo de daño isotrópico. Las formulaciones variacionales estudiadas en esta investigación son el funcional de Hellinger-Reissner (HR) y el funcional de Reissner (SDR), deformación-desplazamiento.

En este trabajo se discute acerca de la ventaja de la formulación de SDR sobre HR para simular el proceso de falla en el material con modelos de daño como concentración de deformaciones. Ayala y Fernández (2004) presentaron el modelo matemático de discontinuidades usando la aproximación discreta y la aproximación continua con discontinuidades interiores, en este trabajo desarrollaron dos modelos constitutivos basados en la teoría de la mecánica del daño continuo. El primero es un modelo de daño isotrópico, el segundo es un modelo de daño anisotrópico, también propusieron un análisis de energía para establecer las ecuaciones que relacionan los parámetros de ambos modelos constitutivos; el cumplimiento de las ecuaciones involucradas garantiza que ambos modelos son energéticamente equivalentes.

Otros trabajos relacionados con el presente trabajo de investigación son: Dvorkin y Assanelli (1991), Lofti y Shing (1995), Klisinski et al. (1991), Simo (1993), Oliver

(1996) y Jirasek (2000), en este último se presenta un estudio comparativo de varios trabajos orientados a las discontinuidades interiores. Jirasek (2000) en su trabajo señaló que existen algunas aproximaciones, a las cuales él llamó: formulación no simétrica, estática y cinemática óptima, que cumplen mejor con el objetivo de simular el comportamiento de un elemento o estructura ante una demanda externa.

1.3 Objetivos

El objetivo del presente trabajo de investigación es analizar el comportamiento de los materiales y elementos utilizados en la ingeniería civil, sometidos a una acción externa; conocer los tipos de falla que se pueden presentar en los elementos antes mencionados y el objetivo principal de este trabajo de tesis es evaluar la eficiencia del modelo de grieta distribuida en elementos de concreto mediante la obtención de resultados numéricos, tomando como referencia los resultados experimentales.

1.4 Contenido

Capítulo 1

En este capítulo se discute la importancia de conocer el comportamiento "real" y teórico de los materiales utilizados en la ingeniería civil y los procesos de falla de estos materiales, para así poder simular de forma más precisa el comportamiento de un elemento o una estructura sometida a una acción externa, mediante modelos matemáticos. Se mencionan algunas investigaciones que están relacionadas y sirven como referencia en el presente trabajo de investigación y por último se describe el problema que se aborda en la presente tesis.

Capítulo 2

En este capítulo se hace una breve introducción de la mecánica de la fractura, se discuten los diferentes modos de falla de los materiales, que admite la mecánica de la fractura elástica lineal; se discute la clasificación de los materiales más utilizados en la Ingeniería Civil (dúctiles, frágiles y cuasifrágiles) y se describen algunas

características de la curva esfuerzo-deformación de los materiales antes mencionados, así como sus procesos de falla. Finalmente se describen algunos de los modelos de daño más representativos de la mecánica del daño, (modelo de la grieta discreta, modelo de la grieta distribuida y modelo de discontinuidades interiores).

Capítulo 3

En este capítulo se discuten algunas de las características de los modelos de daño constitutivo, sus ecuaciones constitutivas y los criterios de daño que definen el comportamiento de un material isotrópico, poniendo énfasis en el intervalo no lineal de la curva esfuerzo-deformación; se discuten las reglas de ablandamiento y endurecimiento del material (lineal y exponencial), finalmente en este capítulo se describe la teoría general de los modelos de daño para detallar el comportamiento mecánico de los materiales, se hacen comentarios sobre las características que tiene el salto de las deformaciones, se hace una descripción del grupo de modelos de daño comúnmente usados, se expone la forma natural en la que desarrolla un modelo de tipo discreto relación tracción-salto a partir de la cinemática de deformaciones de discontinuidades fuertes de un modelo continuo relación esfuerzo-deformación.

Capítulo 4

En este capítulo se discute la formulación variacional de mecánica de sólidos, las ventajas que puede representar para el analista utilizarla para la solución de problemas complejos de la mecánica estructural, y su aproximación mediante el método de los elementos finitos.

Capítulo 5

En el capítulo 5 se discute y se describe el modelo de grieta distribuida, sus alcances, sus limitaciones y algunos de sus antecedentes más representativos, así

como la forma en que este modelo incorpora la discontinuidad. Se describen algunas hipótesis que se toman en cuenta para el desarrollo de este modelo, como el cambio de las propiedades físicas del material dentro de la banda, donde se distribuye la grieta etc.

Capítulo 6

En este capítulo se presentan los resultados de dos ejemplos de aplicación para simular el comportamiento hasta el colapso de estructuras sujetas a una carga monotonica evolutiva basada en desplazamientos. Las estructuras se discretizarán mediante elementos finitos con agrietamiento distribuido, utilizando un modelo de daño continuo. Los resultados numéricos obtenidos se compararon con sus correspondientes resultados de pruebas experimentales.

Capítulo 7

En este capítulo se presentan las conclusiones y recomendaciones para trabajos futuros obtenidas del estudio y discusión de los modelos de daño mas representativos de la mecánica del daño y de los ejemplos de aplicación utilizando el modelo de la grieta distribuida, tomando como referencia los estudios experimentales.

Capítulo 8

En este capítulo se presentan las referencias que fueron utilizadas para desarrollar el presente trabajo de tesis y que complementan la investigación.

CAPÍTULO 2

TEORIAS DE FALLA

2.1 Introducción a la mecánica de la fractura

Algunas de las investigaciones recientes de la mecánica de la fractura se han enfocado a estudiar la degradación de rigidez de los materiales y su influencia en el comportamiento de estructuras, la resistencia máxima de los materiales, y el comportamiento de material en la zona de ablandamiento por deformación. De acuerdo con la mecánica de la fractura y sus teorías de falla, una fractura se define como una discontinuidad física que se presenta en un sólido, ésta se pueden presentar como un conjunto de grietas, las cuales pueden ser microgrietas o macrogrietas. Algunas de las aplicaciones de la mecánica de la fractura son:

- Estudio de los factores que intervienen en la fractura: Esfuerzos, dureza del material, tamaño de las imperfecciones etc.
- Cálculo de los esfuerzos residuales en función de la magnitud de la grieta.
- Cálculo de la magnitud de la grieta permisible estructuralmente, de acuerdo a las condiciones de carga.

Inglis, (1913), Griffith, (1921) e Irwin, (1957), establecieron las bases para la mecánica de la fractura elástica, la cual dio origen a la mecánica de la fractura elasto-plástica y la mecánica de la fractura no lineal. Inglis, (1913) obtuvo la solución elástica para el estado de esfuerzos en un sólido infinito con una cavidad elíptica (fig. 2.1), estableció que cuando uno de los ejes de la elipse tiende a cero las deformaciones en el vértice tienden a infinito, posteriormente Griffith (1921 y 1924) demostró que el valor de los esfuerzos en la vecindad del vértice no puede ser empleados como un criterio de falla, y propuso un criterio de falla basado en la energía de deformación disponible y la energía requerida para propagar la grieta.

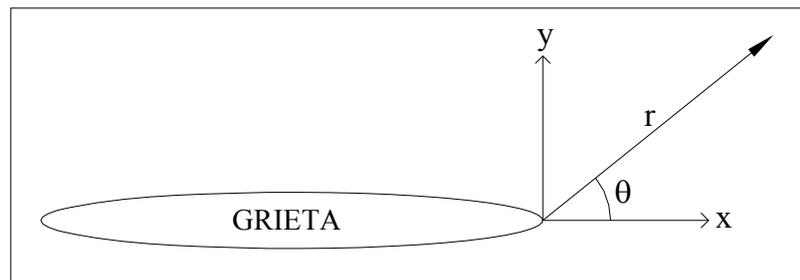


Fig. 2.1: Cavidad elíptica

Irwin (1957) Resolvió problemas de agrietamiento en placas mediante soluciones de la elasticidad, en su trabajo probó que el estado de esfuerzos (ec. 2.1) en las cercanías de la punta de la grieta son siempre de la misma forma.

$$\sigma(r, \theta) = \frac{k}{\sqrt{2\pi r}} f^* \quad 2.1$$

donde:

(r, θ) : Tensor de esfuerzos de segundo orden en coordenadas polares con origen en la punta de la grieta.

K : Es el factor de intensidad de esfuerzos constante que depende de la geometría de la pieza, forma de la grieta inicial y forma en que se aplica la carga.

$f^*(\theta)$: Tensor de segundo orden en el cual sus términos contienen funciones trigonométricas.

De acuerdo con la ecuación 2.1 si el factor de intensidad de esfuerzos es mayor o igual al factor de intensidad de esfuerzos crítico (K) la grieta crece, donde K es una propiedad del material. La mecánica de la fractura elástica lineal (MFEL) admite tres modos de falla (I, II y III), cada uno se caracteriza por el movimiento relativo en la superficie de la grieta como se muestra en la fig. 2.2.

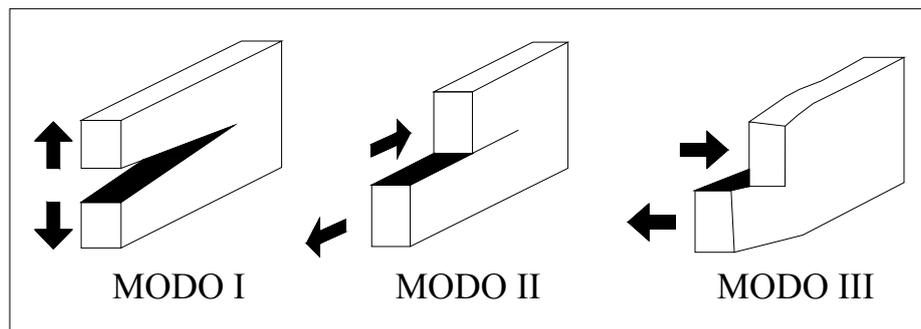


Fig.2.2I

fig. 2.2II

fig. 2.2III

I) Modo de abertura

II) Modo de deslizamiento o cortante en el plano

III) Modo de deslizamiento o cortante fuera del plano

Para la clasificación del modo de fractura es fundamental conocer el comportamiento del material y las características de la fuerza externa, los materiales se clasifican en tres grupos, cuasifrágiles, frágiles y dúctiles. Los materiales cuasifragiles son materiales donde los esfuerzos disminuyen gradualmente cuando el material alcanza su esfuerzo máximo (fig. 2.3a); los materiales frágiles no presentan zona ablandamiento por deformación en su curva de comportamiento, la fractura ocurre de forma súbita y los esfuerzos tienden a cero cuando ocurre la fractura (fig 2.3b) y los materiales dúctiles presentan grandes deformaciones antes de que se alcance la falla, tomando como referencia el comportamiento de un material fragil (fig. 2.3c).

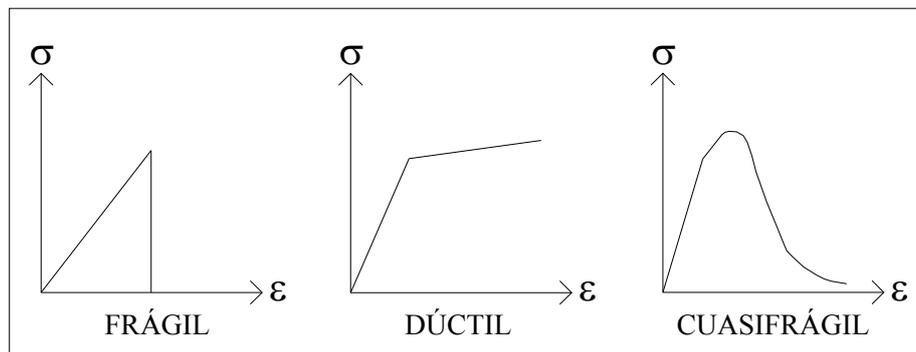


Fig. 2.3a

Fig. 2.3b

Fig. 2.3c

Figura 2.3 comportamiento constitutivo del material: a) cuasifrágil, b) frágil c) dúctil.

La mecánica de la fractura elástica lineal admite que los esfuerzos en la punta de la grieta se aproximan al infinito, lo cual no es "real". En el contorno de la punta de la grieta se forma una zona inelástica la cual se divide tres zonas, de acuerdo al tipo del material y al estado de esfuerzos en el contorno de la grieta; zona de proceso de fractura, zona plástica y zona elástica.

Zona de proceso de fractura: en esta zona se genera la grieta y se presenta un ablandamiento que se desarrolla progresivamente, los esfuerzos disminuyen al aumentar las deformaciones. La zona plástica rodea a la zona de proceso de fractura y se genera un endurecimiento por deformación, en esta zona con el aumento de las deformaciones los esfuerzos tienden a aumentar o mantenerse constantes. La zona elástica se considera como área del elemento que está fuera de la zona del proceso de fractura y la zona plástica. Los tipos de fractura de acuerdo al tipo zona son: elástica lineal, elasto-plástico y no lineal, como se muestra en la figura 2.4.

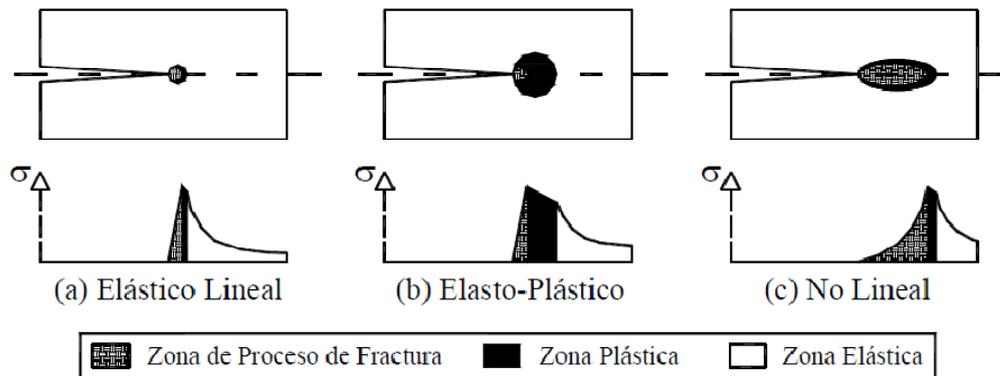


Fig. 2.4. Tipos de fracturamiento

La mecánica de la fractura elástica lineal estudia problemas donde la zona plástica y la zona de proceso de fractura son muy chicas, tomando como referencia las dimensiones del elemento, la zona de fractura ocupa un punto, que es la punta de la grieta. Ésta aproximación es aplicable a materiales frágiles como el cristal, algunos metales y los cerámicos frágiles.

En los tipos de fractura elasto-plástico (fig. 2.4b) y no lineal (fig 2.4c), no es aplicable la MFEL, para aplicarse se debe emplear una aproximación lineal equivalente, y se debe asumir que no son muy grandes las zonas de proceso de fractura plástica. Cuando la zona plástica es grande ya no es aplicable la MFEL, y se recurre a la mecánica de la fractura elasto-plástica.

2.2 Modelo de la grieta discreta

En el modelo de la grieta discreta simula numéricamente el agrietamiento como una discontinuidad geométrica, acepta que existe transferencia de esfuerzos en los bordes de la grieta mientras se propaga. La manera en que se comporta el material en las interfaces se define por medio de una ecuación constitutiva discreta.

Esta formulación estudia la degradación del material apoyándose en los criterios de la mecánica de la fractura y de la mecánica del medio continuo, aunque en esta formulación se utilizan las relaciones constitutivas (tensión - desplazamiento) en la

zona de la discontinuidad y en el resto del continuo se emplean relaciones constitutivas esfuerzo-deformación sin importar si es lineal o no lineal. Para utilizar este modelo es necesario hacer un constante remallado en la región de estudio, generándose un costo computacional adicional necesario por el análisis numérico.

Hillerborg et al (1976). Establece que en cualquier punto de un sólido se puede presentar una grieta cohesiva¹, incluso en ausencia de una macrogrieta. A esta extensión del modelo de la grieta cohesiva se denominó modelo de grieta ficticia. En su trabajo Hillerborg (1976) describe una prueba a tensión en concreto (fig. 2.5a), donde antes de alcanzar el valor de esfuerzo último a tensión (σ_u) las deformaciones se mantienen uniformemente distribuidas a lo largo de todo el espécimen, al aumentar la carga. La transmisión de esfuerzos a través de la grieta cohesiva depende de la abertura de la grieta, $\sigma=f(w)$. donde $f(w)$ es una característica del material que se puede determinar experimentalmente.

La curva de ablandamiento (fig. 2.5b) satisface la característica de que al alcanzar el valor de esfuerzo a tensión ultimo (σ_u) se genera una abertura de grieta igual a cero ($w=0$). El componente principal del modelo de la grieta cohesiva es la curva de ablandamiento, la cual es diferente para cada material y se define experimentalmente.

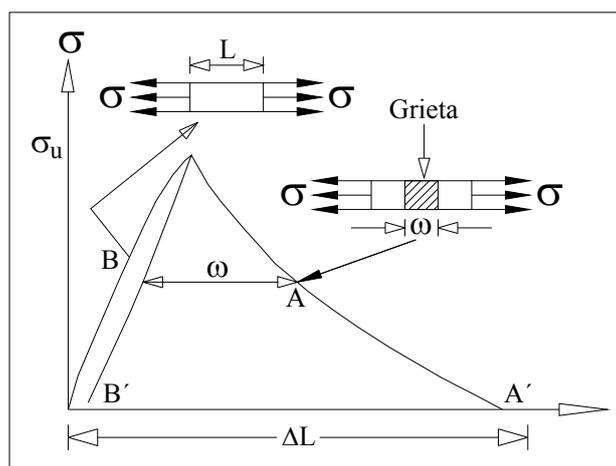


Fig. 2.5: representación de la prueba a tensión

¹Una grieta cohesiva aparece cuando se alcanza el valor del esfuerzo a tensión último, se presenta normal al eje de la barra en alguna parte del elemento

2.4 Modelo de Discontinuidades Interiores

Este método acepta la introducción de discontinuidades en los elementos finitos durante el análisis y no es necesario establecer zonas con grandes posibilidades de falla, ya que las discontinuidades se pueden incluir en cualquier instante del análisis, considerando esencialmente la cinemática de las deformaciones, desplazamientos y el equilibrio en la discontinuidad. El equilibrio interno en este modelo se debe satisfacer entre las tracciones que están en el interior de la discontinuidad y las que se hallan en el material inmediato a la discontinuidad.

El modelo de discontinuidades interiores, para el seguimiento de las discontinuidades, recurre a un criterio de falla y así definir el instante en que se deja ver una discontinuidad. Para definir su ubicación geométrica en el sólido durante el análisis recurre a un criterio de propagación.

Fernández (2002) establece que el modelo de discontinuidades interiores se puede clasificar de acuerdo al tipo de discontinuidad y a las relaciones constitutivas, considerando una barra sujeta a tensión (fig. 2.8), hasta que alcanza su resistencia máxima; el proceso de falla se realiza introduciendo una discontinuidad en el campo de desplazamientos y con la relación constitutiva, se tienen las siguientes aproximaciones.

Aproximación Continua: en esta aproximación se estima que el sólido es continuo en todos sus puntos y se emplean relaciones constitutivas estándares (esfuerzo – deformación) en todo el dominio. Al fallar el elemento crea una zona de localización de deformaciones y se ocasiona una concentración de deformaciones debido al deterioro.

Discontinuidades Débiles: En estos modelos el campo de desplazamientos se mantiene continuo, no obstante el campo de deformaciones es discontinuo en el interior del dominio, esto es debido a que se presenta un salto en el campo de

deformaciones a través de los bordes de la zona de localización, Belytschko *et al.* (1988) y Berrendts y Sluys (1998).

Discontinuidades Fuertes: En esta aproximación el campo de desplazamientos es discontinuo y el campo de deformaciones es infinito, es decir no acotado en la discontinuidad. Esto es posible haciendo que la zona de localización tienda a cero; Regueiro y Borja (1999); Simo *et al* (1993) y Oliver (1996a).

Aproximación Discreta: En esta aproximación se asume que el cuerpo deja de ser continuo, empleando relaciones constitutivas tracción-salto en la discontinuidad, mientras que en el resto del dominio se emplean relaciones constitutivas estándares; Lofti y Shing (1995); Klisinski *et al.* (1991) y Dvorkin y Assaneli (1991).

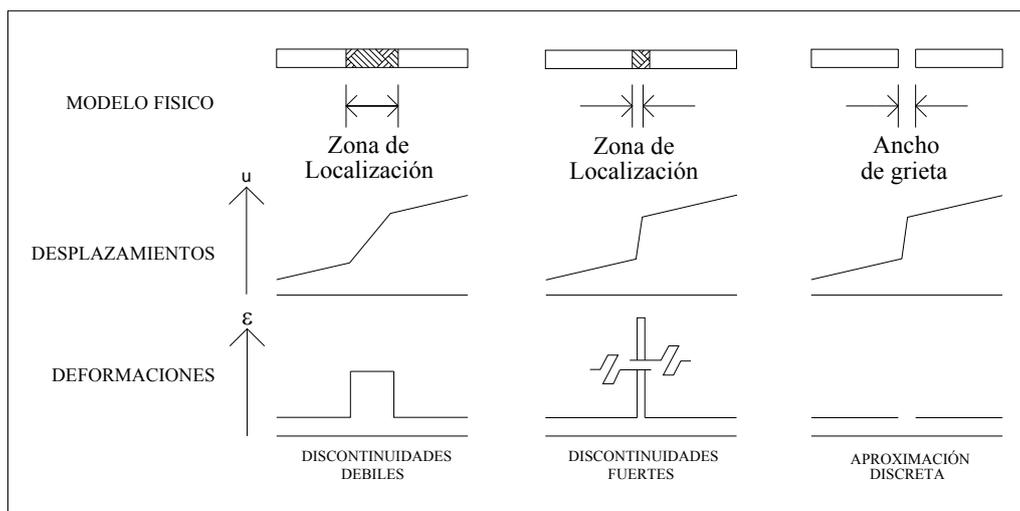


Fig: 2.8 Tipos de aproximaciones para discontinuidades interiores

En los elementos finitos con discontinuidades interiores se tienen dos tipos de enriquecimiento, el local y nodal. El enriquecimiento nodal, se apoya en el criterio de la partición de la unidad, Melenk y Babuska (1996), se representa el salto a través de la suma de grados de libertad en los nodos existentes y el enriquecimiento local utiliza un nodo interno que captura los saltos de la discontinuidad.

Ortiz *et al.* (1987) propusieron un método para mejorar el desempeño de los elementos isoparamétricos con problemas de fallas localizadas, Valoraron que los elementos que se encuentran en el borde de una banda de cortante, o banda de localización de deformaciones deben contener una línea de discontinuidad de deformaciones, la cual se determina a través de un análisis de bifurcación.

Larsson *et al.* (1993) propusieron una aproximación que regulariza las discontinuidades de los desplazamientos a lo largo de la frontera entre elementos, empleando modelos constitutivos elasto-plásticos. En esta aproximación se necesita que el borde de los elementos esté alineado con la discontinuidad.

Simo *et al.* (1993), introdujeron la aproximación de discontinuidades fuertes, en la cual se definieron los elementos y conceptos básicos de esta aproximación, los cuales son: la introducción de una función delta de Dirac δ para las deformaciones localizadas, la reinterpretación del módulo de ablandamiento, la definición del campo de desplazamientos discontinuo y construcción de sus correspondientes funciones de forma. El marco teórico de esta aproximación fue detallado por Oliver y Simo (1994), ellos dedujeron las formas locales de las ecuaciones de equilibrio, partiendo de la forma débil (principio de los trabajos virtuales aplicado a todo el dominio) y emplearon el método de las deformaciones para esta aproximación, la cual fue mejorada por Simo y Rafai (1990).

CAPÍTULO 3

MODELOS DE DAÑO

3.1 Modelos Constitutivos de daño

Mecánica del daño es la rama de la mecánica aplicada que estudia la degradación del material causado por la aplicación de fuerzas externas, previo a la aparición de macrogrietas. Kachanov (1958) definió la variable de daño como un escalar el cual puede variar entre 0 y 1 (daño isotrópico), que de acuerdo al nivel de microescala es la acumulación de microtensiones en la vecindad de defectos y rotural de ligaduras, dañando ambos el material. El daño comienza con un microagrietamiento en una zona y posteriormente las microgrietas se van uniendo hasta formar una macrogrieta, pueden estudiarse por medio de variables de daño de la mecánica de medios continuos. En la mecánica del daño continuo se utilizan variables continuas vinculadas con la densidad de los defectos para detallar el deterioro del material antes del comienzo de macrofisuras.

Un modelo constitutivo es una formulación matemática que simula el comportamiento físico macroscópico de un sólido ideal y representa bajo ciertas hipótesis una realidad condicionada del sólido.

3.1.1 Modelo de daño isotrópico

Los modelos de daño isotrópicos se utilizan para simular el comportamiento del material en un intervalo no lineal, debido a la aparición de pequeñas grietas que ocasionan una degradación de sus propiedades mecánicas. Este proceso se puede simular utilizando la teoría de medios continuos, si se incluye una variable interna de daño representada por un escalar, vector o tensor; donde la variable de daño representa el nivel de deterioro del material y relaciona el esfuerzo (σ) con el esfuerzo efectivo, $\bar{\sigma}$ (ecu. 3.1 y 3.2) Como se muestra en la figura 3.1.

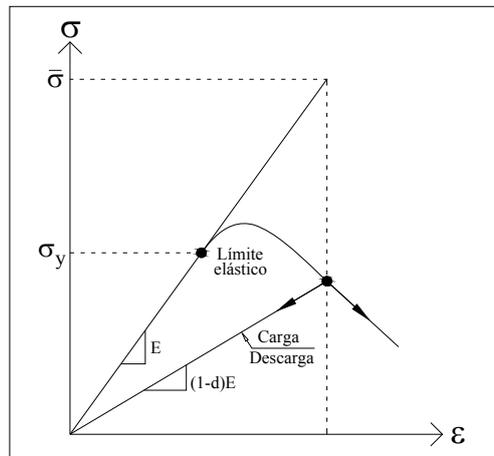


Fig. 3.1: Curva esfuerzo deformación

$$\sigma = (1-d) \bar{\sigma} \tag{3.1}$$

$$\bar{\sigma} = E\varepsilon \tag{3.2}$$

donde:

d: Es un parámetro de daño que puede variar en un intervalo de cero a uno; 1 representa un estado del material completamente degradado y define la rotura local completa; cero representa un material no dañado.

E: Es el módulo elástico del material.

Sustituyendo la ecuación (3.2) en (3.1).

$$\sigma = (1-d)E\varepsilon \tag{3.3}$$

Definiendo el problema tridimensional como una generalización de un caso unidimensional, sustituyendo los valores escalares por tensores. El esfuerzo en función del esfuerzo efectivo ($\bar{\sigma}$) se define con la ecuación 3.4.

$$\sigma = (1-d)\bar{\sigma} = (1-d)C : \varepsilon = C^d : \varepsilon \tag{3.4}$$

donde:

C: Es el tensor constitutivo elástico

C^d : Es el tensor constitutivo elástico degradado

El tensor C puede representarse por medio de las constantes de Lamé (ecu. 3.6), las cuales se definen en función del módulo de elasticidad (E) y de la relación de Poisson (ν) mediante ecuación 3.5.

$$C = 2\mu I + \lambda (1 \otimes 1) \quad (3.5)$$

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad ; \quad \lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad (3.6)$$

donde:

1: Es un tensor unitario de segundo orden

I: Es un tensor unitario de cuarto orden, el cual pertenece a

$$I_{ijkl} = \frac{1}{2}(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk})$$

3.1.2 Ecuación constitutiva

En un modelo de daño isotrópico, la energía libre de Helmholtz por unidad de volumen se expresa con la ecuación 3.6.

$$\Psi = \Psi(d, \varepsilon) = (1 - d)\Psi_0(\varepsilon) \quad (3.6)$$

donde:

$\Psi_0(\varepsilon)$: Es la energía libre de Helmholtz elástica inicial del material no dañado, la cual está en función del campo de las deformaciones (ε).

Para problemas térmicamente estables es válida la siguiente forma de desigualdad de Clausius – Plank (ecu. 3.7).

$$\Xi = \left(\sigma - \frac{\partial \Psi}{\partial \varepsilon} \right) ; \quad \dot{\varepsilon} - \frac{\partial \Psi}{\partial d} \dot{d} \geq 0 \quad (3.7)$$

La ecuación 3.7 se conoce como potencia disipativa, y permite hacer las siguientes consideraciones:

- a. La desigualdad de la ecuación 3.7 debe cumplirse para cualquier variación temporal de las deformaciones (ε), y $\dot{\varepsilon}$ debe ser nulo. Esta condición proporciona la ley constitutiva para el problema de daño escalar.

$$\sigma = \frac{\partial \Psi}{\partial \varepsilon}, \frac{\partial \Psi}{\partial d} = -\Psi_0 \leq 0 \Rightarrow -\Psi_0 \text{ conjugada de } d \quad (3.8)$$

- b. Considerando la ley constitutiva, el valor de la disipación del modelo de degradación resulta (ecu. 3.9).

$$\Xi = \Psi_0 \dot{d} \geq 0 \quad (3.9)$$

De la ecuación 3.9 se obtiene la siguiente forma de la ecuación constitutiva (ecu. 3.10).

$$\sigma = \frac{\partial \Psi}{\partial \varepsilon} = (1-d) \frac{\partial \Psi_0}{\partial \varepsilon} = (1-d) C : \varepsilon = (1-d) \bar{\sigma} \quad (3.10)$$

3.1.3 Criterio de daño

El criterio de daño se define entre un estado de comportamiento elástico de un material. Delimitado por una función de daño, y otro estado en el cual se verifica el proceso de degradación de las propiedades del material. Este criterio depende del tipo de material. Para definir la función de daño se requiere una norma en el espacio de los esfuerzos (ecu. 3.11) o de deformaciones (ecu. 3.12)

$$\tau_\sigma = \|\sigma\|_{C^{e-1}} = \sqrt{\sigma : C^{e-1} : \sigma} \quad (3.11)$$

$$\tau_\varepsilon = \|\varepsilon\|_C = \sqrt{\varepsilon : C : \varepsilon} = \sqrt{2\Psi_0} \quad (3.12)$$

Relacionando las ecuaciones 3.11 y 3.12 se obtiene la ecuación 3.13 y se puede especificar una zona elástica de esfuerzos (ecu. 3.14) y una zona elástica de deformaciones (ecu. 3.15).

$$\tau_\sigma = (1-d)\tau_\varepsilon \quad (3.13)$$

$$\mathbb{E}_\sigma = \{\varepsilon | f(\tau_\sigma, q) < 0\} \tag{3.14}$$

$$\mathbb{E}_{\varepsilon} = \{\varepsilon | f(\tau_\varepsilon, r) < 0\} \tag{3.15}$$

donde:

q: Es una función que determina el ablandamiento y/o endurecimiento.

r: Es la variable interna, su valor determina el límite elástico.

Las siguientes funciones de daño, en el espacio de esfuerzos (fig. 3.2a) y deformaciones (fig. 3.2b) definen el límite elástico del comportamiento del material y se definen mediante las ecuaciones 3.16 y 3.17 respectivamente.

$$f(\tau_\sigma, q) = \tau_\sigma - q \tag{3.16}$$

$$f(\tau_\varepsilon, r) = \tau_\varepsilon - r \tag{3.17}$$

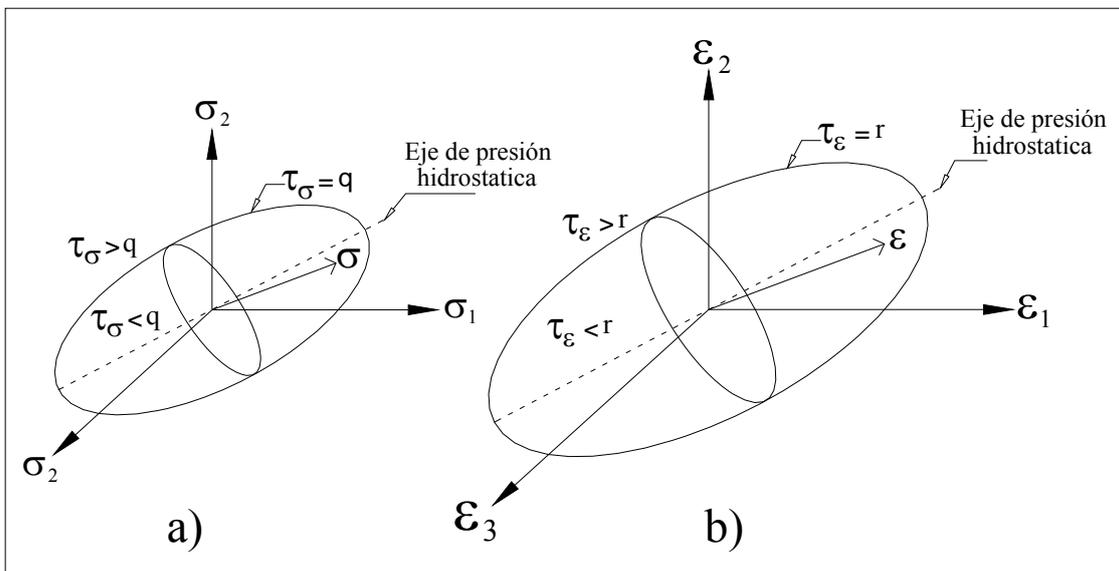


Fig. 3.2: Normas: a) espacio de esfuerzos y b) espacio de deformaciones

El valor de r_0 se define a partir de la ecuación 3.12, para el caso unidimensional.

$$\tau_\varepsilon = \sqrt{\varepsilon: \bar{C}: \varepsilon} \Rightarrow r_0 = \frac{\sigma_y}{\sqrt{E}} \quad (3.18)$$

donde:

r_0 : Es el valor umbral inicial

σ_y : Es el valor de la resistencia elástica

La variable de ablandamiento y/o endurecimiento (q) depende de la variable interna (r) y se define mediante la ecuación (3.19).

$$q(r) = (1 - d) r \quad (3.19)$$

De las ecuaciones (3.19) y (3.10) se define la ecuación 3.2.

$$\sigma = \frac{q(r)}{r} \bar{\sigma} \quad (3.20)$$

3.1.4 Regla de endurecimiento

La regla de endurecimiento se define mediante la ecuación 3.21 y se muestra en la fig. 3.2.

$$\dot{d} = H^d(r) \dot{r}; \quad H^d(r) = q'(r) \quad q \in [0, \sigma_y] q_0 = r_0 \quad (3.21)$$

donde:

H^d : Es el módulo de endurecimiento y/o ablandamiento continuo.

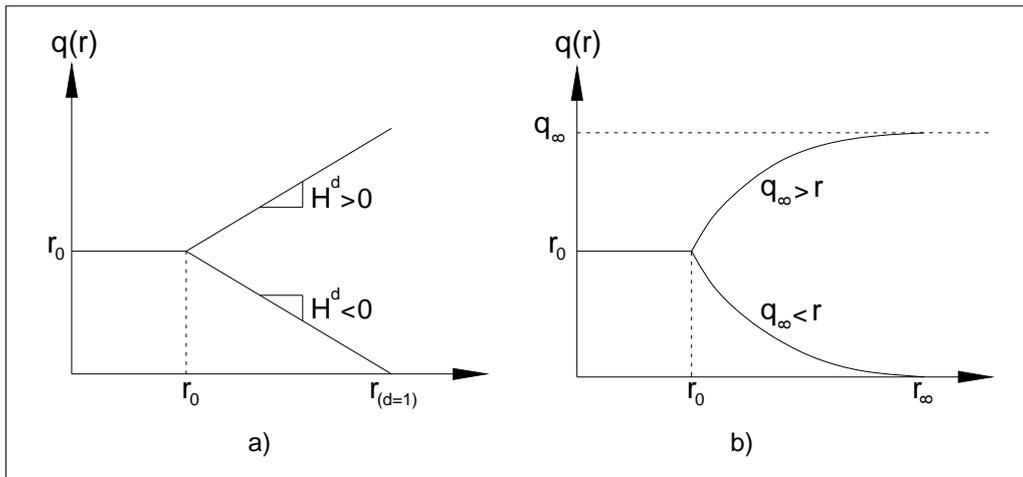


Fig. 3.2: regla de ablandamiento/endurecimiento: a) lineal y b) exponencial

La regla de endurecimiento lineal se define mediante la ecuación 3.22

$$q = \begin{cases} r_0 & r \leq r_0 \\ r_0 + H^d(r - r_0) & r > r_0 \end{cases} \quad (3.22)$$

donde la variable de daño(d) para el caso lineal se define mediante la ecuación 3.23.

$$d = \begin{cases} 0 & r \leq r_0 \\ 1 - \frac{r_0}{r} - H^d \left(1 - \frac{r_0}{r}\right) & r > r_0 \end{cases} \quad (3.23)$$

La variable de daño (q) para una regla exponencial se define mediante la ecuación 3.24.

$$q = \begin{cases} r_0 & r \leq r_0 \\ r_0 \exp\left(-H^d \left(1 - \frac{r_0}{r}\right)\right) & r > r_0 \end{cases} \quad (3.24)$$

La variable de daño (d) para el caso exponencial se define mediante la ecuación 3.25.

$$d = \begin{cases} 0 & r \leq r_0 \\ 1 - \frac{r_0}{r} \exp\left(-H^d \left(1 - \frac{r_0}{r}\right)\right) & r > r_0 \end{cases} \quad (3.25)$$

La ecuación 3.26 representa la ley de evolución de la variable interna y de la variable de daño:

$$\dot{r} = \gamma \quad (3.26)$$

$$\dot{d} = \gamma \frac{\partial f(\tau_\sigma, q)}{\partial r}$$

donde:

γ : Es un escalar llamado parámetro de consistencia de daño.

De acuerdo a lo anterior el rango de la variable interna es $[0, \infty]$ y los límites de la variable de daño son $d = [0, 1]$.

Sí la variable de daño es cero, la variable interna (r) toma el valor de r_0 , y cuando el daño es igual a uno $r = r_\infty$.

3.1.5 Condiciones de carga y descarga

La condición de carga y descarga, la condición de consistencia plástica de Prager, se satisfacen simultáneamente mediante las tres condiciones de Kuhn-Tucker, que es otra forma de presentar el axioma de la máxima disipación plástica y se define mediante la ecuación 3.27.

$$\gamma \geq 0; \quad f(\tau_\sigma, q) \leq 0; \quad \gamma f(\tau_\sigma, q) = 0 \quad (3.27)$$

Para la condición de continuidad se utiliza la ecuación 3.28.

$$\gamma \dot{f}(\tau_\sigma, q) = 0 \quad (3.28)$$

De las ecuaciones 3.27 y 3.28 se establecen las condiciones de carga y descarga (ecu. 3.29)

$$f < 0 \Rightarrow \gamma = 0 \dot{d} = 0 \text{ (No hay una evolución de daño)} \quad (3.29)$$

$$f = 0 \begin{cases} \dot{f} < 0 \Rightarrow \gamma = 0 \quad \dot{d} = 0 & \text{(descarga)} \\ \dot{f} = 0 \text{ y } \gamma = 0 \quad \dot{d} = 0 & \text{(carga neutra)} \\ \dot{f} = 0 \text{ y } \gamma > 0 \quad \dot{d} > 0 & \text{(carga)} \end{cases}$$

El criterio de daño no se satisface sí $f(\tau_\sigma, q) < 0$.

Para que se cumplan las condiciones de Kuhn-Tucker es indispensable que $\gamma = 0$ y para que el material no presente daño, la variación temporal de daño debe ser nula ($\dot{d} = 0$).

3.1.6 Módulo tangente

La ecuación constitutiva en términos de la razón de esfuerzos y deformaciones se define mediante la ecuación 3.30.

$$\dot{\sigma} = C^d : \dot{\varepsilon} \quad (3.30)$$

donde:

C^d = Es el módulo constitutivo tangente

El módulo constitutivo tangente se define partiendo de la ecuación 3.31.

$$\sigma = (1 - d)C : \varepsilon \quad (3.31)$$

Derivando la ecuación 3.31 con respecto al tiempo se obtiene la siguiente 3.32.

$$\dot{\sigma} = (1 - d)C : \dot{\varepsilon} - \dot{d}C : \varepsilon \quad (3.32)$$

Considerando que el material no presenta incrementos de carga, por lo tanto $\dot{d} = 0$. y se obtiene la ecuación 3.33

$$\dot{\sigma} = (1 - d)C : \dot{\varepsilon} \Rightarrow C^d = (1 - d)C \quad (3.33)$$

Derivando la ecuación 3.12 con respecto del tiempo y considerando la ecuación 3.17, se obtiene la ecuación 3.34.

$$\tau_\varepsilon = \sqrt{\varepsilon : \mathbf{C} : \varepsilon} \Rightarrow \dot{\tau}_\varepsilon = \dot{r} = \frac{1}{\tau_\varepsilon} \bar{\sigma} : \varepsilon \quad (3.34)$$

Derivando con respecto al tiempo la variable de daño (ecu. 3.35)

$$\dot{d} = \left(\frac{q(r) - q'(r)r}{r^3} \right) \dot{r} \quad (3.35)$$

Sustituyendo la ecuación 3.35 en la ecuación 3.32 se obtiene el tensor constitutivo tangente (3.36)

$$\mathbf{C}^d = (\mathbf{1} - d)\mathbf{C} : - \left(\frac{q(r) - q'(r)r}{r^3} \right) (\mathbf{C} : \varepsilon \otimes \varepsilon : \mathbf{C}) \quad (3.36)$$

De acuerdo a las ecuaciones descritas en este capítulo el modelo de daño isotrópico se resume mediante las siguientes ecuaciones.

- (a) $\Psi(\varepsilon, r) = (1 - d(r))\Psi_0$ *Energía libre de Helmholtz*
- (b) $d(r) = 1 - \frac{q}{r}$; $q \in [r_0, 0]$ $d \in [0, 1]$ *Variable de daño*
- (c) $\sigma = \frac{\partial \Psi}{\partial \varepsilon} = (1 - d)\mathbf{C} : \varepsilon$ *Ecuación constitutiva*
- (d) $\dot{r} = \gamma \begin{cases} r \in [r_0, \infty] \\ r_0 = r|_{t=0} = \frac{\sigma_y}{\sqrt{E}} \end{cases}$ *Ley de evolución de daño*
- (e) $f(\tau_\sigma, q) = \tau_\sigma - q = \sqrt{\sigma : \mathbf{C} e^{-1} : \sigma} - q$; $\begin{cases} q \in [0, r_0] \\ q|_{t=0} = r_0 \end{cases}$ *Criterio de daño*
- (f) $\dot{q} = H^d(r)\dot{r}$; $H^d(r) = q''(r) \leq 0$ *Regla de endurecimiento*

$$(g) f < 0; \gamma \geq 0; \gamma \dot{f} = 0$$

Condiciones de carga y descarga

$$(h) \gamma \dot{f} = 0 \text{ sí } f = 0$$

Condición de consistencia

3.2 Análisis de la falla en materiales

La falla de un cuerpo continuo se divide en un proceso de fases, que inicia a nivel material; continuando con un deterioro progresivo del material hasta que el sólido llega a la falla. Se discuten los principios para el comienzo del proceso de falla desde el enfoque constitutivo de los materiales, partiendo del análisis de localización de deformaciones.

3.2.1 Fases de la curva esfuerzo deformación

En la figura 3.3 se muestra las etapas de curva esfuerzo-deformación de un elemento sujeto a compresión.

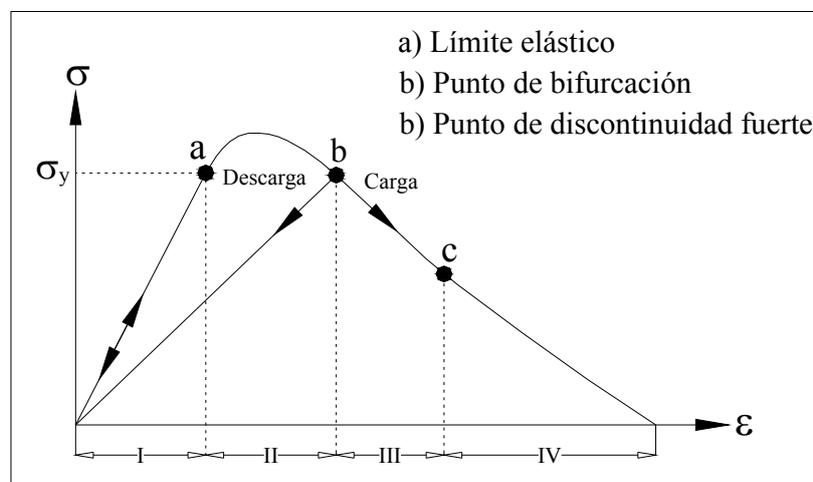


Fig. 3.3: Puntos característicos en el proceso de carga.

- 1) Fase elástica (I): en esta etapa el material tiene un comportamiento elástico lineal y cumple con la ley de Hooke. El punto de fluencia (a) es el límite de la zona elástica.

- 2) Fase inelástica (II): en esta etapa comienza el intervalo inelástico de la curva, el material comienza a disipar energía y comienza el proceso de falla difusa presentándose una concentración de deformaciones específicamente suaves.
- 3) Fase inelástica (III): Esta fase (discontinuidad débil) inicia cuando se satisface la condición de bifurcación $\det[Q(N)] = 0$. En esta fase el campo de deformaciones es discontinuo y el campo de desplazamientos se mantiene continuo.

$$\begin{aligned} [[\dot{u}]] &= \dot{u}^+ - \dot{u}^- = 0 \\ \varepsilon &= [[\nabla\dot{u}]] = \nabla\dot{u}^+ - \nabla\dot{u}^- \neq 0 \end{aligned} \quad (3.38)$$

- 4) Fase inelástica (IV): Esta fase comienza después de que se cumplen las condiciones de discontinuidad fuerte. La característica de esta fase es el salto en el campo de los desplazamientos y la manifestación de deformaciones no acotadas.

$$\begin{aligned} [[\dot{u}]] &= \dot{u}^+ - \dot{u}^- \neq 0 \\ \varepsilon &= [[\nabla\dot{u}]] = \nabla\dot{u}^+ - \nabla\dot{u}^- \neq 0 \end{aligned} \quad (3.39)$$

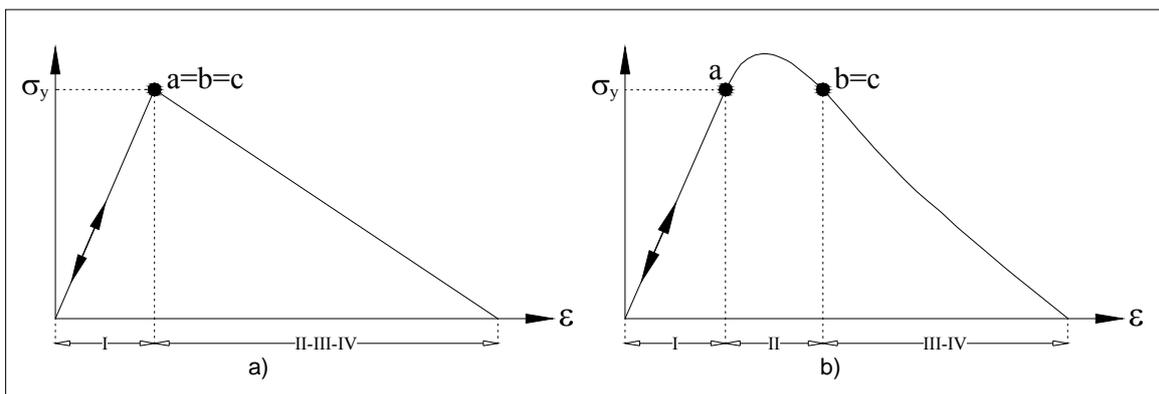


Fig. 3.4: Coincidencia de puntos característicos

Los intervalos de las etapas de la curva esfuerzo-deformación están en función del modelo constitutivo del estado de esfuerzos y en algunas casos los puntos de los intervalos pueden coincidir en una misma coordenada de la curva, como se muestra en la figura 3.4a 3.4b. La formación de una discontinuidad fuerte se puede considerar como una discontinuidad débil que puede evolucionar a una fuerte, en el proceso de deformación.

El campo de deformaciones bifurca, en un tiempo de la bifurcación (t_b) y como consecuencia aparece una banda de localización con espesor pequeño k , la cual se caracteriza por el comienzo de una discontinuidad débil. El espesor de la banda tiende a cero en momentos subsecuentes del análisis; se le llama tiempo de discontinuidad fuerte al momento t_{DFU} y el comienzo de una discontinuidad fuerte en el sólido, es lo que lo caracteriza.

3.2.2 Tiempo de bifurcación

Al instante en que no hay una solución única del problema de valor en la frontera (PVF) se le llama tiempo de bifurcación (t_b), es decir, cuando comienzan la formación de deformaciones, definida como una inestabilidad constitutiva macroscópica de la deformación inelástica del material, como se indica en la figura 3.5 (continuo con puntos materiales en la franja de localización, s)

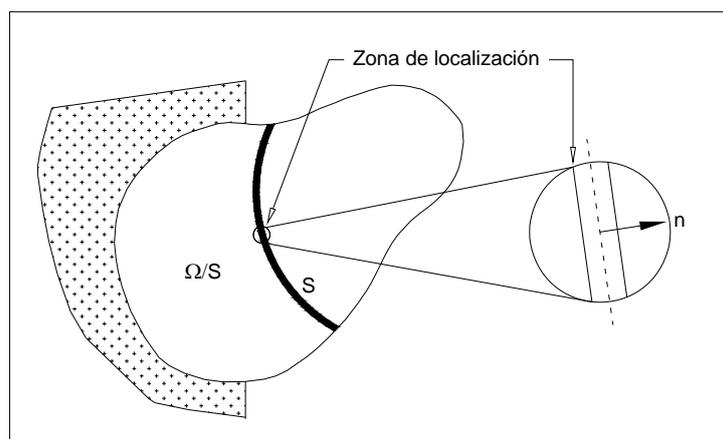


Fig. 3.5: Zona de localización "S"

En la zona de localización S , se estima un punto material P , con un estado de esfuerzos en el punto de bifurcación b , de acuerdo a la fig. (3.3), en ese momento se considera el estado de esfuerzos dentro y fuera de la zona de localización (ecu. 3.4)

$$\begin{cases} \dot{\sigma}_{\Omega \setminus S} = C_{\Omega \setminus S} : \dot{\varepsilon}_{\Omega \setminus S} & \text{en } \Omega \setminus S \\ \dot{\sigma}_S = C_S & : \quad \text{en } S \end{cases} \quad (3.40)$$

donde:

σ_S y $\sigma_{\Omega \setminus S}$: Son los esfuerzos dentro y fuera de la zona de localización.

$C_{\Omega \setminus S}$ y C_S : Son tensores constitutivos.

La definición del campo de deformaciones se define con la ecuación 3.41

$$\begin{cases} \dot{\varepsilon}_{\Omega \setminus S} = \bar{\varepsilon} & \text{en } \Omega \setminus S \\ \dot{\varepsilon}_S = \bar{\varepsilon} + (M \otimes n)^S & \text{en } S \end{cases} \quad (3.41)$$

donde:

M : Es una función dependiente del ancho de la banda de localización, la cual determina la dirección de la velocidad del salto.

La continuidad interna de tracciones se define con la ecuación 3.42.

$$\begin{aligned} T_{\Omega \setminus S} &= T \\ \dot{\sigma}_{\Omega \setminus S} \cdot n &= \dot{\sigma}_S \cdot n \end{aligned} \quad (3.42)$$

Sustituyendo las ecuaciones 3.40 y 3.41 en la ecuación 3.42.

$$\frac{(n \cdot C_S \cdot n) \cdot M}{Q(n)} = [(C_{\Omega \setminus S} - C_S) : \dot{\varepsilon}_S] \quad (3.43)$$

donde:

$Q(n)$ = es el tensor de localización

3.2.3 Bifurcación continua

La bifurcación continua se define que dentro y fuera de la zona de localización el tensor constitutivo, $C_{\Omega \setminus S} = C_S$, es decir el material dentro y fuera de la zona de localización se mantiene en estado de carga, y la ecuación 3.43 se modifica, quedando la ecuación 3.44.

$$(n \cdot C_S \cdot n) \cdot M = 0 \quad (3.44)$$

En el momento en que la solución de la ecuación 3.44 difiere de la solución trivial $M = 0$, la condición de bifurcación se cumple, y se tiene la siguiente condición (ecu. 3.45).

$$\det[Q(n)] = 0 \quad (3.45)$$

3.2.4 Bifurcación discontinua

Estudios experimentales muestran que la respuesta del tensor constitutivo es discontinua, sin embargo el material fuera de la zona de localización no carga, y se descarga elásticamente, a este fenómeno se le conoce como bifurcación discontinua, $C_{\Omega \setminus S} \neq C_S$, la ecuación 3.43 se modifica y se obtiene la ecu. 3.46

$$(n \cdot C_S \cdot n) \cdot M_D = [(C_{\Omega \setminus S} - C_S) : \dot{\varepsilon}_S] \cdot n \quad (3.46)$$

De la ecuación anterior 3.46 despejamos M_D .

$$M_D = (n \cdot C_S \cdot n)^{-1} \cdot [(C_{\Omega \setminus S} - C_S) : \dot{\varepsilon}_S] \cdot n \quad (3.47)$$

La ecuación 3.47 pertenece a la condición de carga plástica en la zona de localización, el resto del continuo se descarga en forma elástica, Rice y Rudnicky (1980).

En la ecuación (3.45) está dada para que se presente la localización de deformaciones, teniendo en cuenta bifurcación continua o discontinua. Esta ecuación puede considerar un análisis más elaborado y precisar:

- El instante en que comienza el daño en el material.
- El sentido de propagación de la discontinuidad.

Estos aspectos son componentes indispensables para simular el proceso de falla en materiales a través del modelo de discontinuidades interiores.

CAPÍTULO 4

FORMULACIÓN VARIACIONAL

4.1 Antecedentes

Partiendo de la hipótesis que establece que un sólido es un continuo con un número infinito de grados de libertad, que se puede resolver mediante modelos matemáticos, para casos "simples", sin embargo para estructuras complejas se suele acudir a los métodos numéricos que idealizan un problema continuo como un problema discreto, formula su solución mediante polinomios algebraicos y no de ecuaciones diferenciales parciales.

4.2 Definición de la Formulación variacional del problema

Cuando el planteamiento y solución de las ecuaciones de equilibrio de sólidos se obtienen resultados no "convincientes" se acude a otras metodologías como los métodos variacionales, los cuales, en algunos casos no presentan complicaciones para la solución de problemas complejos de la mecánica estructural. La formulación variacional no requiere dividir los sólidos en elementos finitos, tampoco el planteamiento de ecuaciones de equilibrio, ésta puede ser apropiada para la obtención de las ecuaciones que gobiernan el comportamiento de estructuras complejas, como las que se discretizan mediante algún procedimiento numérico, como el método de los elementos finitos.

La formulación variacional asociada a un fenómeno físico conduce a las ecuaciones que gobiernan el problema y se obtienen por medio de las condiciones estacionarias del funcional. En algunos problemas de la mecánica estructural la formulación variacional conduce a un procedimiento de solución simple, tomando como referencia una formulación de forma fuerte. En los problemas variacionales con condiciones de frontera se realiza la transformación por medio del método de los operadores de Lagrange y a partir de éste se obtiene una familia de principios

variacionales, los cuales son semejantes entre sí, logrando obtener diferentes funcionales de acuerdo a los campos independientes que se quiera variar. En algunos casos los problemas no se pueden resolver en su forma exacta y la formulación variacional proporciona una posibilidad de aproximar el problema.

Una vez que se ha formulado el funcional se pueden obtener las ecuaciones que gobiernan el problema expresado en otro sistema coordenado, escribiendo la parte invariante del funcional en un nuevo sistema coordenado para posteriormente emplear métodos de cálculo de variaciones. La formulación variacional tiene a las ecuaciones de Euler – Lagrange, como condiciones de estacionaridad.

Los funcionales son magnitudes variables y su valor se define a través de la selección de una o varias funciones. El estudio de los métodos variacionales, lo hace el cálculo variacional, los cuales permiten encontrar los valores estacionarios de los funcionales. Debido a que un funcional representa el modelo matemático de un problema físico,

Algunos campos en los que tiene gran importancia la aplicación de los métodos variacionales son: la física teórica, mecánica cuántica, mecánica Lagrangiana, en ingeniería, etc. Los métodos variacionales proporcionan los fundamentos matemáticos del método de los elementos finitos y es una poderosa herramienta numérica muy útil para resolver los problemas de valores en la frontera

En la mecánica de medios continuos se tienen varios funcionales para la solución de los problemas elásticos lineales; los funcionales de energía, Hellinger-Reissner (Reissner, 1950), con dos campos independientes (desplazamientos y esfuerzos); Hu (1955) y Washizu (1955) con tres campos independientes (desplazamientos, deformaciones y esfuerzos) y Fraeijs de Veubeke (1951) con cuatro campos independientes (desplazamiento, deformaciones, esfuerzos y tracciones); los funcionales de energía complementaria con un campo independiente (esfuerzos); Pian (1964), Herrmann (1966) y Atluri (1975), con funcionales híbridos, estos

últimos toman en cuenta campos independientes de diferente dimensión, por ejemplo esfuerzo en el continuo y tracciones en una superficie.

Los funcionales de energía se pueden generar a partir del funcional general, Fraeijs de Veubeke (1951) encontrando la función que lo extremize, asimismo se encuentran las soluciones a las ecuaciones que definen el problema. Para problemas sencillos (barras, vigas, etc.) se puede encontrar la función que extremize el funcional de forma analítica, sin embargo para problemas complejos (elementos asimétricos) las soluciones analíticas ya no son viables

4.3 Formulación canónica de Fraeijs de Veubeke

Formulación propuesta por Fraeijs de Veubeke (1951) establece que la primera variación del funcional de energía del medio continuo igualada a cero da lugar a las ecuaciones de Euler-Lagrange, pertenecientes a todos los campos de ecuaciones de la teoría de la elasticidad, incluyendo las condiciones esenciales y naturales de frontera desplazamientos y tracciones. Admite la variación independiente de los campos de desplazamientos, deformaciones, esfuerzos y tracciones.

Fraeijs de Veubeke (1951) parte de un medio continuo con dominio (Ω), frontera (Γ) y puntos materiales, el sólido se encuentra restringido en un intervalo de la frontera (Γ), ahí se encuentran los desplazamientos prescritos u^* , los cuales forman parte de las condiciones de frontera al igual que la fuerza distribuida por unidad de área t^* denominada tracción.

En el sólido hay fuerzas de cuerpo actuando, sobre el volumen. La frontera del sólido se divide en dos superficies, Γ_u y Γ_σ donde $\Gamma_u \cup \Gamma_\sigma = \Gamma$ y $\Gamma_u \cap \Gamma_\sigma = \emptyset$, como se muestra en la fig. 4.1.

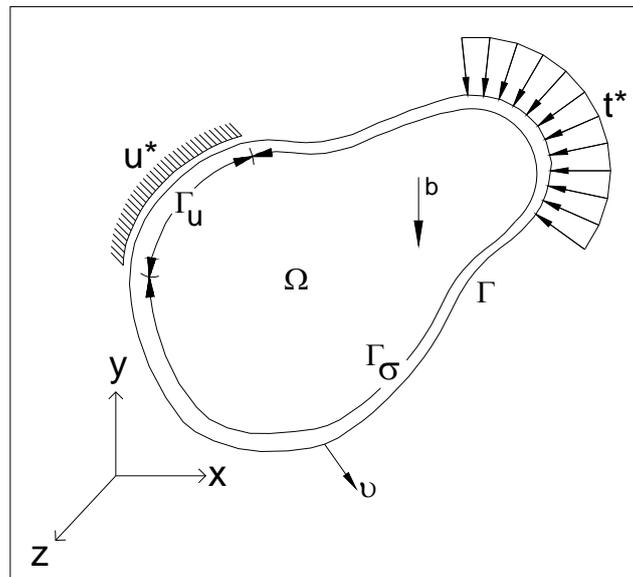


Fig. 4.1 Medio Continuo con dominio Ω y condiciones de frontera Γ

El medio continuo mostrado en la figura 4.1 tiene un modelo matemático del problema de valor en la frontera que se define a través de un sistema de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales en el tiempo, los valores de la solución se especifica en el siguiente grupo de condiciones de frontera (ecu. 4.1)

$\nabla \cdot \sigma(x, t) + b(x, t) = 0$ en Ω	Equilibrio interno	
$\sigma^{\varepsilon^u}(x, t) - \sigma(x, t) = 0$ en Ω	Compatibilidad constitutiva	
$\varepsilon^u(x, t) - \varepsilon(x, t) = 0$ en Ω	Compatibilidad cinemática	(4.1)
$u^*(x, t) - u(x, t) = 0$ en Γ_u	Condiciones esenciales de frontera	
$\sigma(x, t) \cdot n - t^*(x, t) = 0$ en Γ_σ	Condición natural de frontera	
$\sigma(x, t) \cdot \nu - t(x, t) = 0$ en Γ_u	Equilibrio externo	

donde:

∇ : Operador gradiente

n : Vector normal

ε : Tensor de deformaciones

σ : Tensor de esfuerzos

4.3.1 Principio variacional de Fraeijs de Veubeke

Para el medio continuo elástico planteado con anterioridad se tiene el siguiente funcional de energía (ecu. 4.2), el cual tiene cuatro campos independientes; desplazamientos, deformaciones, esfuerzos y tracciones.

$$\Pi_{FV}(u, \sigma, \varepsilon, t) = \int_{\Omega} \sigma : (\varepsilon^u - \varepsilon) d\Omega + \int_{\Omega} W(\varepsilon) d\Omega - \int_{\Omega} b u d\Omega - \int_{\Gamma_t} t^* u d\Gamma - \int_{\Gamma_u} t(u - u^*) d\Gamma \quad (4.2)$$

Las variables que definen las ecuaciones de frontera utilizadas en el funcional 4.2 se obtienen mediante las ecuaciones, 4.3 a 4.7

$$\varepsilon^u = \nabla^S u = \frac{1}{2} (u \otimes \nabla + \nabla \otimes u) \quad (4.3)$$

$$\sigma^\varepsilon = \frac{\partial W(\varepsilon)}{\partial \varepsilon} = C^T : \varepsilon \quad (4.4)$$

$$\varepsilon^\sigma = \frac{\partial \phi(\sigma)}{\partial \sigma} = D^T : \sigma \quad (4.5)$$

$$\phi(\sigma) = \sigma : \varepsilon - W(\varepsilon) \quad (4.6)$$

$$W(\varepsilon) = \frac{1}{2} \varepsilon : C : \varepsilon = \frac{1}{2} \sigma^\varepsilon : \varepsilon \quad (4.7)$$

donde:

ε^u : Tensor correspondiente a las deformaciones dependientes de los desplazamientos.

σ^ε : Campo de esfuerzos dependientes del campo de deformaciones.

C^T : Tensor constitutivo tangente.

$\phi(\sigma)$: Densidad de la energía de deformación complementaria.

D^T : Tensor constitutivo complementario tangente de cuarto orden.

$W(\varepsilon)$: Densidad de la energía de deformación.

4.4 Aproximación de elementos finitos

De acuerdo con el funcional de Fraeijs de Veubeke (ecu. 4.2) la aproximación de elementos finitos, de los campos independientes se define mediante las ecuaciones, 4.8 a 4.15.

$$u = N_d d \quad (4.8)$$

$$\sigma = N_\sigma \gamma \quad (4.9)$$

$$t = N_t \tau \quad (4.10)$$

$$\varepsilon^e = N_\varepsilon e \quad (4.11)$$

donde:

N_d : Vector que contiene la forma de la función del vector de desplazamientos nodales d .

N_σ : Vector que contiene la forma de la función del vector de los esfuerzos nodales γ .

N_t : Vector que contiene la forma de la función del vector de tracciones nodales τ .

N_ε : Vector que contiene la forma de la función del vector de las deformaciones nodales (e).

En la formulación de Fraeijs de Veubeke los campos dependientes se definen mediante las ecuaciones 4.12.

$$\partial(N_d) = B d \quad (4.12)$$

$$\varepsilon^d = \nabla u = B d$$

donde:

B : Matriz de interpolación de deformación estándar que contiene las derivadas de las funciones.

$$\sigma^\varepsilon = \sigma^\varepsilon(\varepsilon) = \sigma^\varepsilon(N_\varepsilon e) \quad (4.13)$$

El campo de deformaciones se define mediante la ecuación 4.14.

$$\varepsilon^\gamma = D:\gamma \quad (4.14)$$

El campo de esfuerzos dependientes de los desplazamientos se define mediante la ecuación 4.15.

$$\sigma^{\varepsilon^u} = \sigma^{\varepsilon^u}(\varepsilon^u) = \sigma^d(Bd) \quad (4.15)$$

4.5 Extremización del funcional de energía de Fraeijis de Veubeke

En el funcional de Fraeijis de Veubeke de la ecuación 4.2, se sustituyen las ecuaciones 4.8 y 4.13 obteniendo el funcional 4.13.

$$\begin{aligned} \Pi_{FV}(d, \gamma, e, \tau) = & \int_{\Omega} \gamma^T N_\sigma^T (Bd - N_\varepsilon e) d\Omega + \frac{1}{2} \int_{\Omega} e^T N_\varepsilon^T C N_\varepsilon e d\Omega - \int_{\Omega} d^T N_d^T b d\Omega - \int_{\Gamma_\sigma} d^T N_d^T t^* d\Gamma - \\ & - \int_{\Gamma_u} \tau^T N_t^T \cdot (N_d d - d^*) d\Gamma \end{aligned} \quad (4.16)$$

Del funcional 4.16 se obtiene un valor estacionario al derivar con respecto a cada variable independiente e igualando a cero, obteniendo las funciones 4.17.

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} N_\varepsilon^T [\sigma^\varepsilon(N_\varepsilon e) - \sigma(\gamma)] d\Omega &= 0 \\ \int_{\Omega} N_\sigma^T [\varepsilon^d(\nabla d) - \varepsilon^\varepsilon(N_\varepsilon e)] d\Omega &= 0 \\ \int_{\Omega} B^T \sigma(\gamma) d\Omega - \int_{\Gamma_u} N_d^T t(N_t \tau) d\Gamma - F_{ext} &= 0 \end{aligned} \quad (4.17)$$

$$\int_{\Gamma_u} N_\varepsilon e (d^* - N_d d) d\Omega = 0$$

Haciendo una linealización del funcional mediante las series de Taylor y debido a que la ecuación constitutiva $\sigma^e N_\varepsilon e$, en el funcional de Fraeijs de Veubeke (ecu. 4.17) es no lineal se obtiene la ecu. (4.18):

$$\begin{bmatrix} \int_{\Omega} N_\varepsilon^T C_\varepsilon^T N_\varepsilon d\Omega & -\int_{\Omega} N_\varepsilon^T N_\sigma d\Omega & 0 & 0 \\ -\int_{\Omega} N_\sigma^T N_\varepsilon d\Omega & 0 & \int_{\Omega} N_\sigma^T B d\Omega & 0 \\ 0 & \int_{\Omega} B^T N_\sigma d\Omega & 0 & -\int_{\Gamma_u} N_d^T N_t d\Gamma \\ 0 & -\int_{\Omega} N_\sigma^T D \Gamma_\sigma d\Omega & -\int_{\Gamma_u} N_t^T N_d d\Gamma & 0 \end{bmatrix}^{(n,0)} \begin{Bmatrix} \Delta e \\ \Delta \gamma \\ \Delta d \\ \Delta \tau \end{Bmatrix}^{(n,1)} = \begin{Bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \end{Bmatrix}^{(n,0)} \quad (4.18)$$

Al hacer la linealización se obtienen una serie de errores, que indican la diferencia entre las fuerzas internas y externas, donde:

e_1 : Representa la compatibilidad constitutiva entre los esfuerzos dependientes (σ^e) y los independientes (σ^γ).

e_2 : Es la compatibilidad cinemática que hay entre las deformaciones dependientes (ε^d) y las independientes (ε^e).

e_3 : Se define como el equilibrio entre las fuerzas externas e internas, y la tracción en la frontera (Γ_u).

e_4 : Es la compatibilidad entre los desplazamientos impuestos (d^*) y los desplazamientos (d).

Los errores, e_1 a e_4 descritos en el párrafo anterior se expresan mediante las funciones (4.19).

$$\begin{aligned} e_1 &= \int_{\Omega} N_\varepsilon^T \left[\sigma^\gamma^{(n,0)} (N_\sigma \gamma) - \sigma^e^{(n,0)} (N_\varepsilon e) \right] d\Omega \\ e_2 &= \int_{\Omega} N_\sigma^T \left[\varepsilon^e^{(n,0)} (N_\varepsilon e) - \varepsilon^d^{(n,0)} (\nabla d) \right] d\Omega \\ e_3 &= F_{ext} - \int_{\Omega} B^T \sigma^\gamma^{(n,0)} (\gamma) d\Omega + \int_{\Gamma_u} N_d^T t^{(n,0)} d\Gamma \end{aligned} \quad (4.19)$$

$$e_4 = \int_{\Gamma_u} N_t^T [N_d d^{(n,0)} - \bar{d}^{(n,0)}] d\Gamma$$

4.10 Formulación variacional de desplazamientos

La primera variación del funcional es igual a cero ($\delta\pi = 0$), de acuerdo con el cálculo de variaciones, lo cual es necesario para que un funcional π tenga un valor estacionario. El funcional con un solo campo independiente, desplazamientos se define mediante la ecuación 4.35.

$$\Pi_D(u) = \int_{\Omega} W(\varepsilon^u) d\Omega - \int_{\Omega} b \cdot u d\Omega - \int_{\Gamma_{\sigma}} t^* \cdot u d\Gamma \quad (4.35)$$

Haciendo la extremización del funcional de energía, y sustituyendo las ecuaciones 4.8 y 4.31 en la ecuación 4.35 se obtiene (4.36).

$$\Pi_D(d) \equiv \int_{\Omega} e^T N_{\varepsilon}^T : C B d d\Omega - \frac{1}{2} \int_{\Omega} e^T N_{\varepsilon}^T C N_{\varepsilon} e d\Omega - \int_{\Omega} d^T N^T b d\Omega - \int_{\Gamma_{\sigma}} d^T N_d^T t^* d\Gamma \quad (4.36)$$

Derivando la ecuación 4.35 con respecto a la variable independiente (d), se obtiene un valor estacionario (ecu. 4.37).

$$\int_{\Omega} B^T \sigma^d (Bd) d\Omega - F_{ext} = 0 \quad (4.37)$$

Haciendo la linealización de la formulación de desplazamientos con las series de Taylor se obtiene la ecuación 4.38.

$$\left[\int_{\Omega} B^T C_d^T B d\Omega \right]^{(n,0)} \{\Delta d\}^{(n,1)} = \{e_{11}\}^{(n,0)} \quad (4.38)$$

donde:

e_{11} : Es el equilibrio entre fuerzas internas y externas, se define mediante la ecu (4.39).

$$e_{11} = F_{ext} - \int_{\Omega} B^T \sigma^{d^{(n,0)}} (Bd) d\Omega \quad (4.39)$$

CAPÍTULO 5

MODELO DE AGRIETAMIENTO DISTRIBUIDO

5.1 Introducción

Una fractura se define como una pérdida de continuidad entre las partículas del sólido, su comportamiento puede variar de un material a otro; en acero (material dúctil y homogéneo) se considera que la fractura se presenta debido a alteraciones de las partículas; en materiales heterogéneos como el concreto, que se compone de una base de mortero de cemento y materiales pétreos de diferentes tamaños, las grietas se relacionan con la pérdida de contacto entre estas componentes, en este último material el comportamiento de la grieta es más macroscópico.

5.2 Características de los modelo de la grieta distribuida

Modelo propuesto por Rashid (1968), consiste en analizar el agrietamiento como un conjunto de pequeñas grietas paralelas y uniformemente distribuidas sobre un elemento finito, se considera que el cuerpo agrietado es un medio continuo por lo que modifica las propiedades físicas al incorporar la presencia de la grieta. En éste modelo no se requiere una modificación de la malla en el transcurso de la evolución de la fractura, por lo tanto, es más económico computacionalmente, tomando como referencia el modelo de grieta discreta y el modelo de discontinuidades interiores.

Una grieta es una discontinuidad en el sólido, por lo que las ecuaciones que gobiernan el problema dejan de ser válidas y para poder simularlas se deben considerar los campos de desplazamientos continuos, donde la grieta está distribuida en una banda de elementos, sin embargo no se puede ver la ubicación de ésta, de forma clara, dentro de la banda. Los análisis no simulan el comportamiento exacto de la grieta dentro de la banda y esto afecta el estado esfuerzo-deformación en la parte del sólido que sigue continuo, para que la

simulación de los efectos de la grieta sobre su exterior sea correcto, la malla debe ser lo suficientemente fina en el ancho de la banda (fig. 5.1).

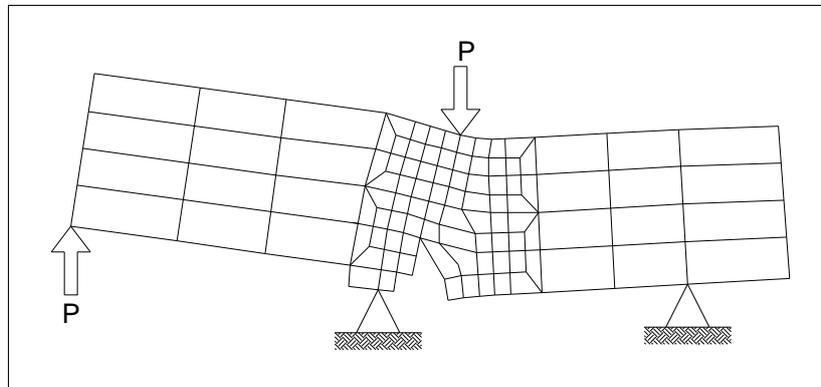


Fig. 5.1: modelado de la grieta distribuida

Los modelos de grieta distribuida son considerados versátiles y aplicables a problemas de análisis estructural sin embargo no están exentos de problemas computacionales importantes y conceptualmente son menos complejos que la grieta discreta.

Para el modelo de la grieta distribuida actualmente se tienen varias aproximaciones numéricas; los modelos de daño, Oliver *et al* (1990); de plasticidad, Feenstra (1993); no locales de daño, Bazant y Planas (1998); de medio continuo de Cosserat y de Grado- n , Borst *et al* (1993); entre otros. De acuerdo con los modelos tradicionales de grieta distribuida de Rots (1988), se tienen tres aproximaciones para simular el agrietamiento:

- Grieta fija: Es la formación de una sola grieta y su orientación se conserva siempre fija a lo largo de todo el análisis computacional, manteniendo en la memoria la orientación del daño.
- Grieta fija multidireccional: Se considera que se pueden formar múltiples grietas, manteniéndose fija su orientación individual a través de todo el

análisis computacional. Esta aproximación se considera como un caso intermedio entre la grieta fija y la grieta giratoria.

- Grieta giratoria: En este caso se forma una grieta y su orientación es variable, manteniéndose perpendicular al eje de la deformación principal. Lo cual implica que no se preserve en la memoria la orientación del daño.

5.2.1 Comienzo del agrietamiento

Para definir el inicio de la grieta se establece un criterio que depende del valor de los esfuerzos principales. El agrietamiento comienza en un punto del elemento, en el momento en que uno o ambos esfuerzos principales superan la resistencia a tracción uniaxial del concreto (f_t). En el espacio de los esfuerzos principales se establece un dominio elástico, una frontera donde el material comienza a comportarse como agrietado (fig. 5.2).

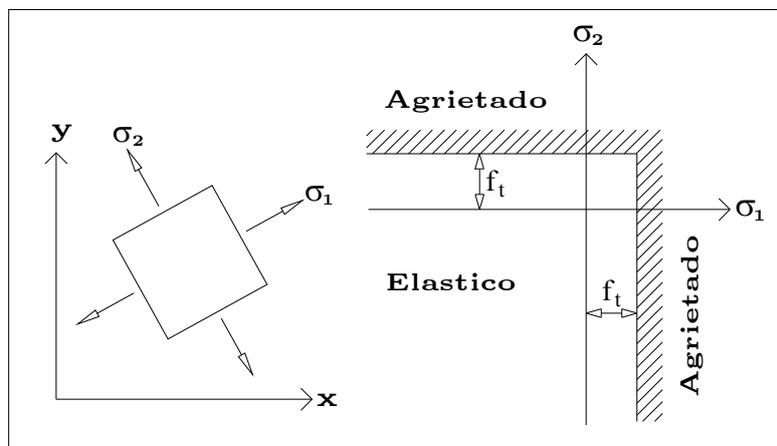


Fig. 5.2 Criterio del comienzo del agrietamiento.

5.2.2 Orientación y generación del agrietamiento

En la fig. 5.3 se muestra esquemáticamente la evolución del estado de esfuerzos y del agrietamiento en un punto durante un proceso de carga. En un principio el comportamiento del material es elástico y sus esfuerzos principales (σ_I y σ_{II}) son menores que la resistencia a tracción uniaxial (f_t). En este estado, la ecuación

constitutiva es la correspondiente a un material elástico lineal, y se puede formular de acuerdo a la ley de Hooke, para un esfuerzo o una deformación plana (ecu. 5.1 a 5.4).

$$\sigma = D^e \cdot \varepsilon \quad (5.1)$$

dónde:

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} \varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \quad (5.2)$$

σ : Vector de esfuerzos

ε : Vector de deformaciones

D^e : Matriz de constantes elásticas definida por:

Para los esfuerzos planos se utiliza ecu. (5.3).

$$D^e = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (5.3)$$

Para deformación plana:

$$D^e = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 \\ \frac{\nu}{1-\nu} & 1 & \nu \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \end{bmatrix} \quad (5.4)$$

La primera grieta aparece orientada perpendicularmente a su correspondiente esfuerzo principal, iniciándose un comportamiento inelástico en el material. La ecuación 5.1 deja de ser válida y la orientación de los esfuerzos principales cambian su ángulo de inclinación (θ_1), el cual se puede conocer mediante los procedimientos comunes de la elasticidad. Es posible que en momento posterior del análisis el esfuerzo principal mayor alcance el umbral de agrietamiento y se inicie una segunda grieta en el mismo punto (fig. 5.3). Teóricamente este proceso podría seguir permitiendo la formación de una tercera y cuarta grieta, sin embargo en

problemas que tienen un mal condicionamiento numérico se establecen las siguientes limitaciones:

- Se aceptúan máximo dos grietas en un mismo punto.
- El ángulo mínimo que debe existir entre las dos grietas es de 60° .

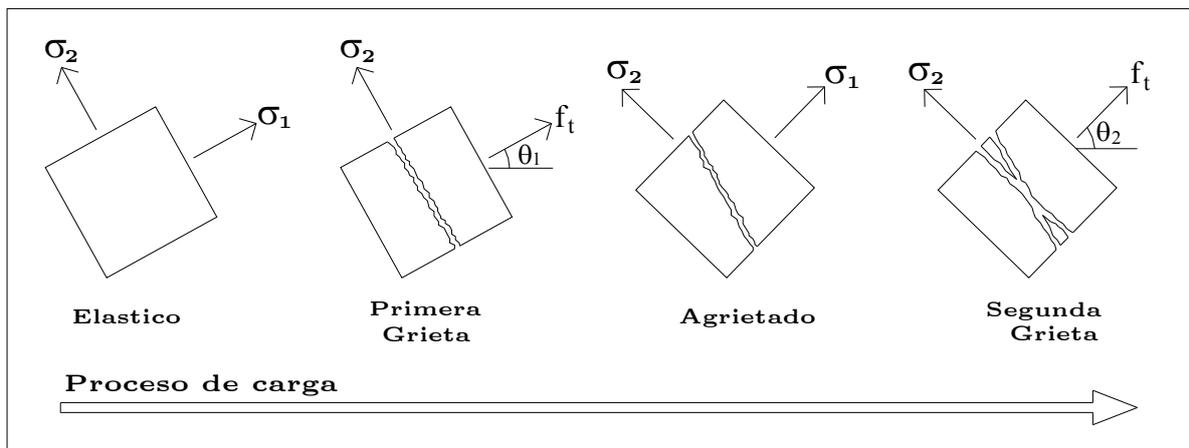


Fig. 5.3 propagación del agrietamiento

5.2.3 Ecuación constitutiva

La particularidad esencial de este modelo es la descomposición adicional de las deformaciones, propuesto por Litton (1974). En este modelo las deformaciones totales (ϵ) se descomponen en deformaciones de la parte continua o elástica (ϵ^e) y las deformaciones de agrietamiento (ϵ^f) como se indica en la ecuación 5.5.

$$\epsilon = \epsilon^e + \epsilon^f \tag{5.5}$$

El sólido se comporta de acuerdo a las propiedades constitutivas del material agrietado y del material no agrietado. El comportamiento constitutivo se define mediante las ecuaciones 5.6 y 5.7.

$$\Delta\sigma = D^e \Delta\epsilon^e \tag{5.6}$$

$$\Delta T = D^f \Delta e^f \quad (5.7)$$

donde:

D^e = matriz de constantes elástica de las ecuaciones 5.3 y 5.4

Algunos problemas que puede presentar en el modelo de grieta distribuida son:

- Objetividad de la malla: El tamaño y la orientación de los elementos afectan los resultados, lo cual se puede disminuir al usar mallas más finas.
- Modos cinemáticos falsos: Se originan debido a la falta de convergencia en el análisis.
- Atoramiento en los esfuerzos: Esto se debe a la consecuencia de la compatibilidad de desplazamientos entre los elementos, y a la falta de alineación de la grieta con un borde del elemento finito. El elemento dentro de la banda de ablandamiento impone deformaciones a los elementos adyacentes y estos elementos limitan las deformaciones en el interior de la banda, ocasionando un atoramiento de los esfuerzos y por este motivo no se descarga la banda por el ablandamiento. En la fig. 5.4 se muestra un modelo de grieta distribuida.

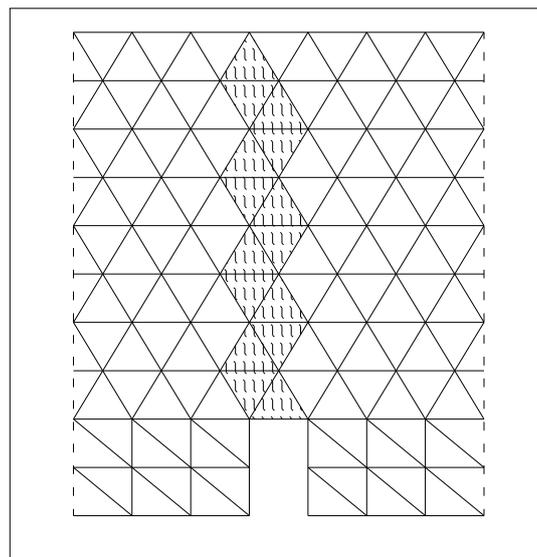


Fig. 5.4: modelo de grieta distribuida

5.3 Modelado de discontinuidades mediante el concepto de la grieta distribuida

Cuando se origina un agrietamiento los esfuerzos que actúan en los bordes de la grieta disminuyen hasta cero, y en uno y otro lado del borde de la grieta se produce la discontinuidad del campo de desplazamientos. Cuando se acepta que una banda de elementos finitos representa la grieta el borde exterior representa los límites de la zona del sólido que permanece continua. Los mecanismos de la ecuación constitutiva que se integran en la banda de agrietamiento deben satisfacer las siguientes condiciones:

- Debe llevar a un estado de esfuerzo nulo en el interior de la banda de agrietamiento.
- Se debe producir una localización de deformaciones dentro de la banda de agrietamiento.

Las deformaciones son simuladas por los elementos de la banda de agrietamiento mediante la producción de gradientes muy altos de los desplazamientos en la dirección normal a la grieta. La diferencia de desplazamientos en ambos lados de la banda representa la discontinuidad en los desplazamientos de los bordes de la grieta (fig. 5.5).

En la fig. 5.5a se observa una barra homogénea en voladizo dividida en tres zonas (Zona A, derecha e izquierda y zona B, en el centro), La zona B tiene una reducción de la sección transversal. En un principio la barra tiene un comportamiento elástico lineal hasta que uno de los esfuerzos principales supera el esfuerzo de agrietamiento (f_t), después de ese momento se modifica la ecuación constitutiva y el diagrama esfuerzo deformación baja hasta el punto 2 (ablandamiento por deformación), donde los esfuerzos en el material tienden a cero.

En la figura 5.5 se observa el comportamiento de la barra (fig. 5.5a) sometida a una fuerza de tensión; en el diagrama esfuerzo-deformación se observa como las partículas ubicadas en la zona A permanecen en el rango elástico lineal, sin

embargo las partículas ubicadas en la zona B si ingresan en el intervalo no lineal, disminuyendo la magnitud del esfuerzo hasta llegar acero; en diagrama de deformaciones y desplazamientos se observa que las partículas ubicadas en la zona A permanece constante, sin embargo cuando la deformación en la zona B es muy grande o el elemento falla las deformaciones tienden a cero en la zona A

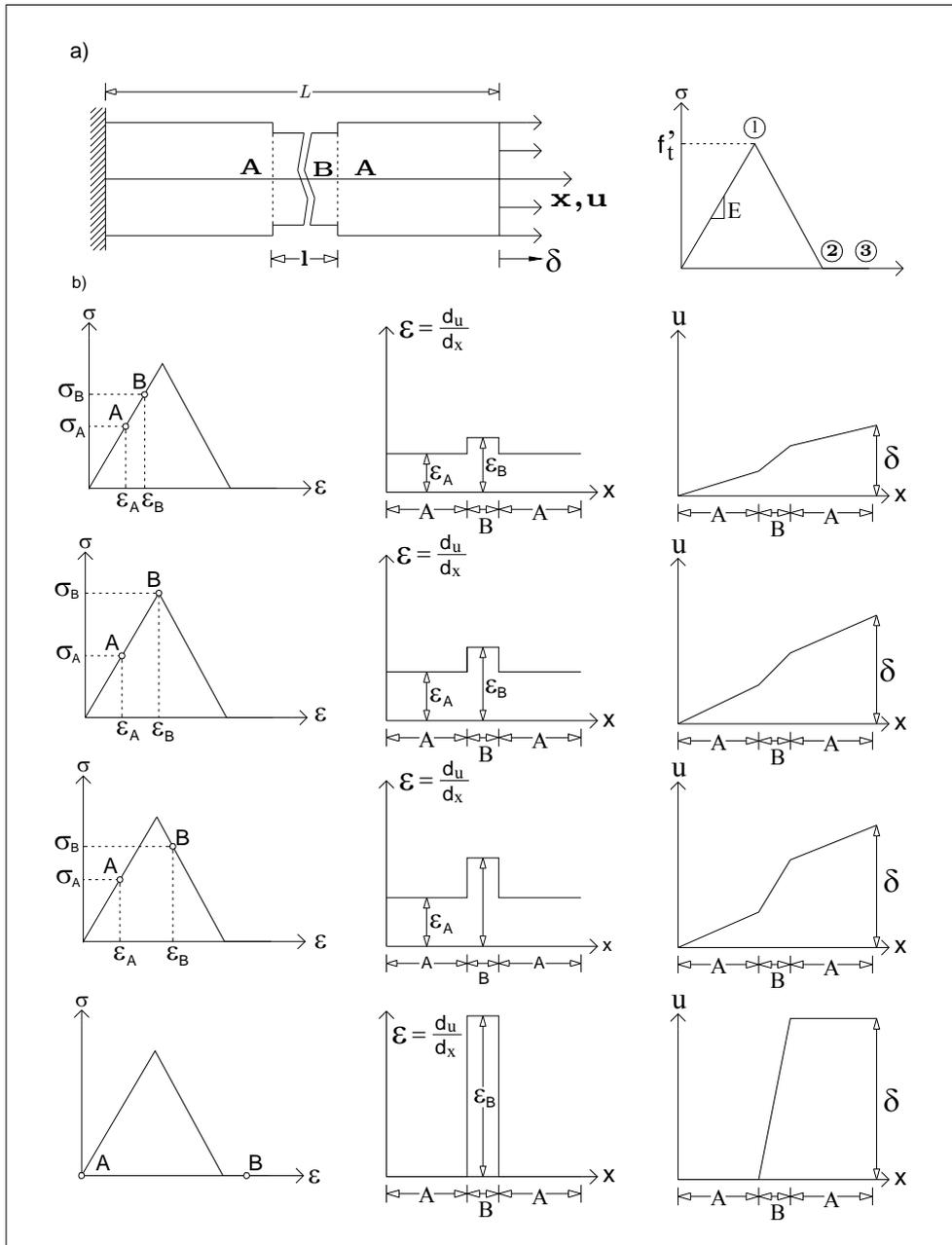


Fig. 5.5: Modelo de localización de deformaciones

5.3.1 Energía de fractura

El agrietamiento es un proceso irreversible y disipativo de energía. De acuerdo con los trabajos experimentales realizados la energía de fractura (G_f) se ha definido como la energía necesaria para que se produzca una grieta de área unitaria, la cual es una propiedad del material.

De la figura 5.6a se tiene que el trabajo que se desarrolla por unidad de sección transversal durante el proceso de agrietamiento, debido las fuerzas cohesivas que actúan en los bordes de la grieta será (ecu. 5.28)

$$G_f = \int_0^{\omega_u} \sigma d\omega \quad (5.28)$$

Considerando las ecuaciones 2.2 y 5.28, el área bajo la curva de $\sigma - \varepsilon_f$ y $\sigma - \varepsilon$ (fig. 5.6b) se define la energía específica de fractura, g_f (ecu. 5.29).

$$g_f = \int_0^{\varepsilon_u} \sigma d\varepsilon = \frac{G_f}{l} \quad (5.29)$$

Si la rama descendente del diagrama esfuerzo - deformación es lineal se define mediante la ecuación 5.29 pero esta tiene una restricción en los parámetros que precisan la ley de ablandamiento por deformación donde el ablandamiento se toma como bilineal o parabólico.

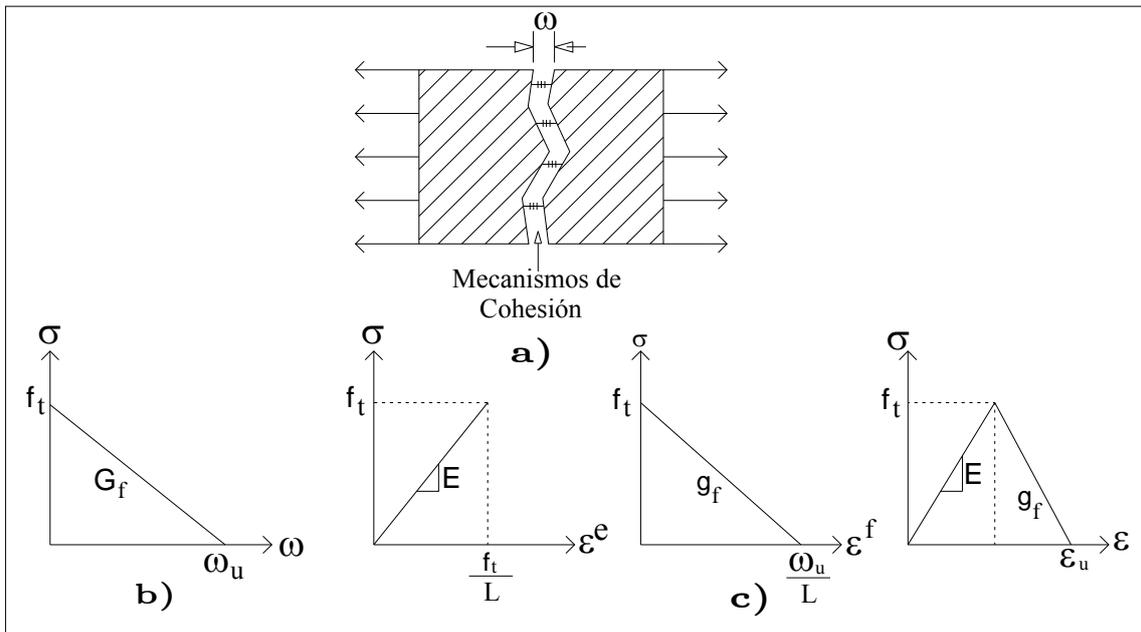


Fig. 5.6 representación del ablandamiento por deformación.

5.3.2 Longitud Característica

Es importante tener una buena aproximación del ancho de banda o longitud característica l , para los casos de modelos unidimensionales no se presentan problemas con respecto a la interpretación de la longitud característica del agrietamiento en la dirección normal de la grieta, sin embargo en problemas donde se busca conocer los desplazamientos relativos, además de la apertura de la grieta (bidimensionales o tridimensionales) no es tan simple y se debe hacer mediante procedimientos energéticos.

CAPÍTULO 6

Ejemplos de aplicación

6.1 Introducción

Con la finalidad de mostrar la eficiencia de la formulación evaluada en el presente trabajo de tesis, en este capítulo se presentan los resultados de dos ejemplos de aplicación para simular el comportamiento hasta el colapso de estructuras sujetas a una carga monotonica evolutiva basada en desplazamientos. Las estructuras se discretizarón mediante elementos finitos con agrietamiento distribuido, utilizando un modelo de daño continuo. Los resultados numéricos obtenidos se compararon con sus correspondientes resultados de pruebas experimentales.

El primer ejemplo, una viga simplemente apoyada gobernada por la flexión, el segundo una viga en voladizo de sección variable gobernada por la tensión. Ambas estructuras se modelaron mediante elementos finitos triangulares y un modelo de daño continuo con campos de desplazamientos. La grieta se modelo mediante una banda de elementos finitos considerando que la grieta ésta distribuida en toda la banda.

Se demuestra que la energía que se le induce a la estructura mediante una acción externa se libera o transforma en la energía que desarrolla el daño, representado físicamente por una grieta una articulación o una dislocación. El daño comienza cuando uno de los esfuerzos alcanza la magnitud del esfuerzo último del material. En los ejemplos numéricos se utilizó un modelo de daño con una regla de ablandamiento exponencial.

6.2 Análisis de resultados

De los análisis numéricos se obtuvo la curva carga-deformación, la distribución de esfuerzos, deformaciones y desplazamientos, para ambas estructuras. Para mostrar el potencial de la formulación estudiada en este trabajo de tesis la curva carga-deformación del ejemplo 1 (viga simplemente apoyada) se comparó con los resultados experimentales de la misma estructura, hechos por Kormeling y Reinhardt (1983). Para el resto de los resultados numéricos obtenidos se establece un comentario y descripción de su comportamiento.

6.3 Ejemplo 1

En este ejemplo se utilizó una viga de concreto simplemente apoyada en ambos extremos, con una ranura en la parte inferior del centro de línea (fig. 6.1), la viga tiene una longitud (L) de 450mm y un peralte (h) de 100mm, las propiedades mecánicas de la viga se muestran en la tabla 6.1 . La estructura se sometió a una carga externa incremental basada en desplazamientos en el centro de línea, fibra superior (dirección perpendicular al eje longitudinal de la viga).

Tabla 6.1 Propiedades mecánicas de la viga con ranura

Material Concreto	Módulo de elasticidad Mpa	Módulo de Poisson	Esfuerzo último de tensión (σ_u) Mpa	Energía defractura(G_f) j/m ²
	20000	0.20	2.40	0.3

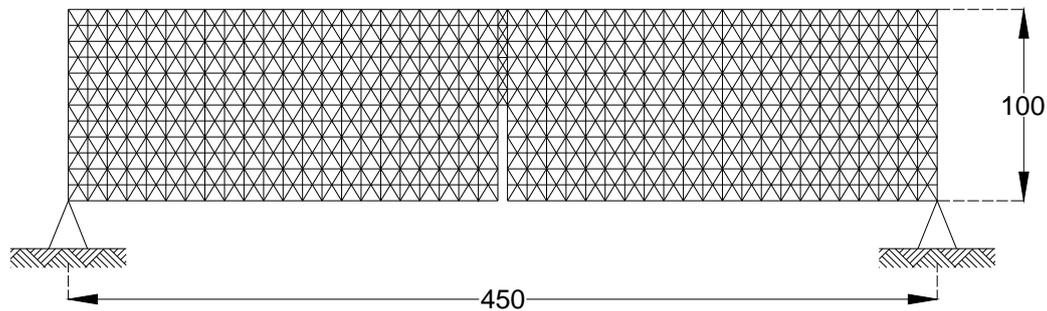


Fig. 6.1 Viga con ranura

6.3.1 Curva fuerza-desplazamiento

La carga externa provoca flexión en el elemento, tensión en la vecindad de la ranura y compresión en las fibras superiores. En la fig. 6.2 se muestra la evolución del comportamiento de la viga, hasta el colapso. La curva se mantiene elástica lineal hasta aproximadamente un 70% de la fuerza máxima aplicada, a partir de ahí el material comienza a sufrir un daño, asociado a una degradación de rigidez, y la curva deja de ser elástica lineal, sin embargo la pendiente permanece positiva hasta que uno de los esfuerzos principales alcanza el esfuerzo último del material, en ese instante, comienzan a concentrarse las deformaciones en una zona bien definida y se inicia la zona de ablandamiento por deformación, exponencial en este caso.

En la figura 6.2 se muestra una comparativa de las curvas carga-desplazamiento obtenida de un análisis analítico y pruebas experimentales, se observa que en el intervalo elástico lineal en ambas curvas tienen un comportamiento aproximadamente similar, lo cual indica que la formulación analítica usada en este ejemplo simula de forma adecuada el comportamiento en la zona elástica. En el intervalo no lineal se muestra que la curva de ablandamiento analítica sigue la misma trayectoria que la obtenida de los resultados experimentales, sin embargo se observa que los resultados analíticos son menos conservadores, particularmente en la zona de fuerza máxima, esto debido a que el modelo matemático analítico disipa una mayor cantidad de energía.

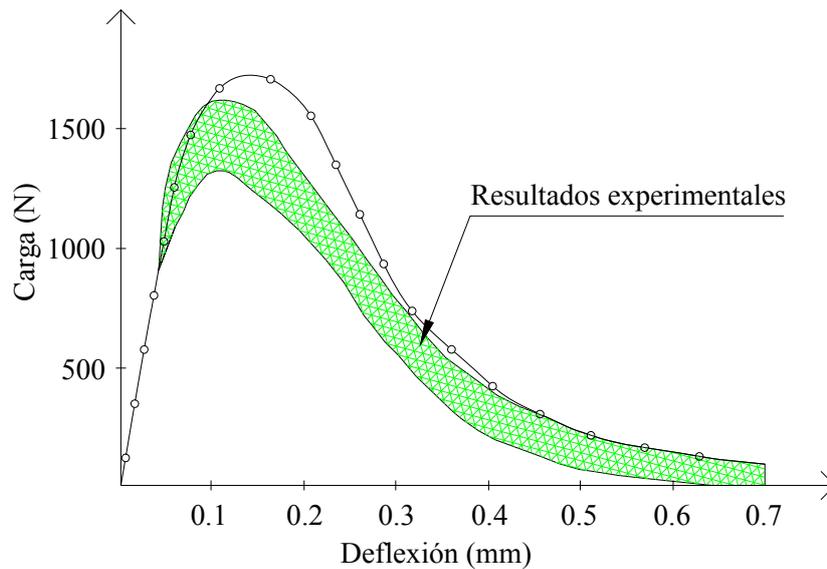


Fig. 6.2: Curva fuerza-desplazamiento de la viga con ranura

6.3.2 distribución de esfuerzos

En la figura 6.3 se observa que la distribución de esfuerzos en la viga es simétrica, en toda la sección. Se presenta una concentración de esfuerzos en la banda de elementos finitos donde se considera que se distribuye la grieta, de acuerdo a modelo de daño empleado, sin embargo cuando la magnitud de uno de los esfuerzos principales alcanza el esfuerzo último del material y se inicia una degradación de rigidez, definida mediante un agrietamiento, los esfuerzos en la banda se relajan, pudiendo llegar a cero cuando el área de daño es grande, tomando como referencia la sección transversal de la sección.

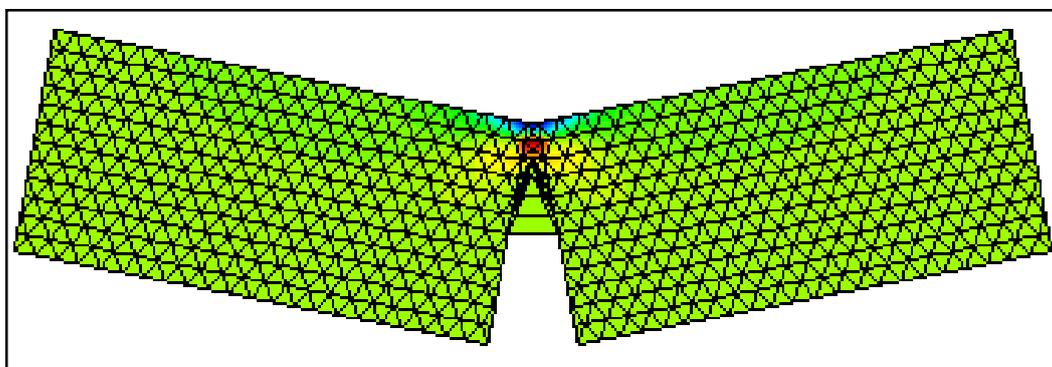


Fig. 6.3 Propagación de esfuerzos en viga con ranura

6.3.3 distribución de desplazamientos

En la figura 6. 4 se observa que la distribución de desplazamientos es simétrica y se presenta una concentración de desplazamientos en la banda donde se distribuye la grieta, además se observa que los desplazamientos que definen la magnitud del daño no son los desplazamientos perpendiculares al eje longitudinal de la viga (deflexión), si no la abertura de la grieta o de la ranura, la cual se incrementa cuando los esfuerzos principales alcanzan el esfuerzo último del material, y se inicia el agrietamiento.

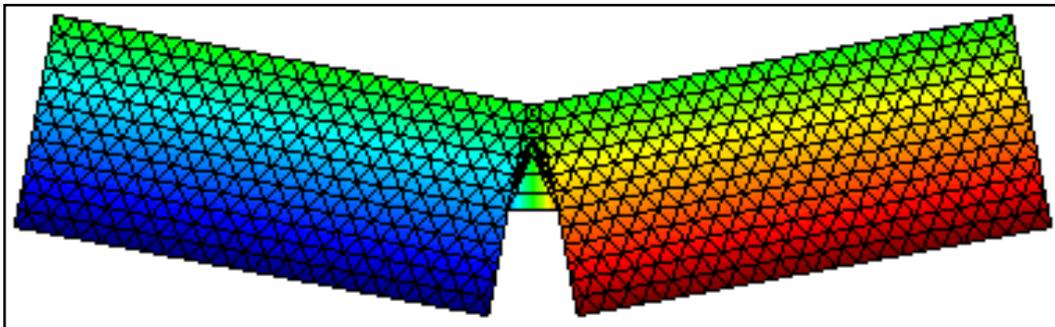


Fig. 6.4: Propagación de desplazamientos en viga con ranura

6.3.4 distribución de deformaciones

En la figura 6. 5 se observa que la distribución de deformaciones en la viga es simétrica, en toda la sección. Se presenta una concentración de deformaciones en la vecindad de la banda de elementos finitos donde se distribuye la grieta, lo cual le indica al analista, en que zona se presentará la discontinuidad y su magnitud, además se observa que las deformaciones fuera de la banda permanecen elásticas, lo cual indica que la banda de elementos finitos se comportó de acuerdo a lo establecido por el modelo de daño utilizado.

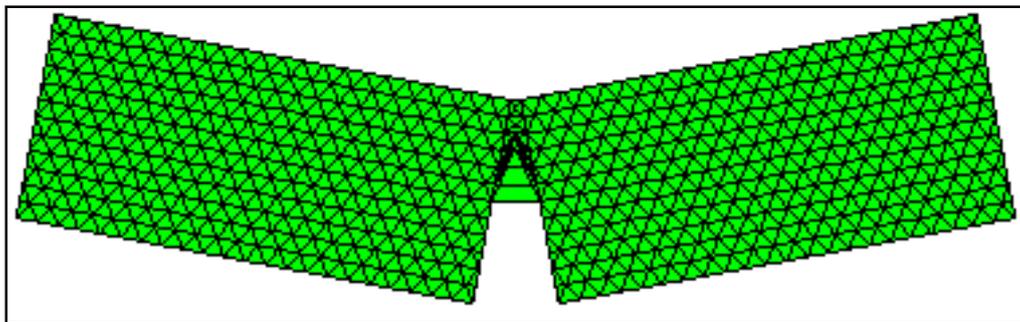


Fig. 6.5 Propagación de deformaciones en viga con ranura

6.4 Ejemplo 2

En este ejemplo se utilizó una viga de concreto simple, en voladizo con una degradación de rigidez en el centro del elemento (doble muesca) como se indica en la fig. 6.6, la viga tiene una longitud (L) de 200 mm y un peralte (h) que varía de 100 a 200 mm y Las propiedades mecánicas de la viga se muestran en la tabla 6.2. La estructura se sometió a una carga externa incremental de tensión basada en desplazamientos en extremo libre, dirección longitudinal al eje de la viga.

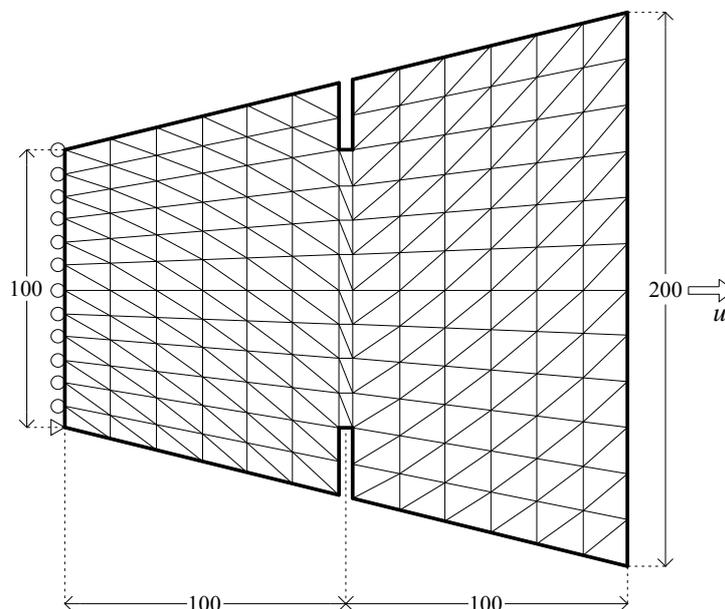


Tabla 6.6 Propiedades mecánicas de la viga con ranura

Tabla 6.2 Propiedades mecánicas de la viga en voladizo

Material	Módulo de elasticidad Mpa	Módulo de Poisson	Esfuerzo ultimo (σ_u) Mpa	Energía de fractura (G_f) j/m ²
	16900	0.20	2.40	0.3

6.4.1 Curva fuerza-desplazamiento

La carga externa provoca esfuerzos de tensión en todo el sólido. En la fig. 6.7 se muestra la evolución de la curva de comportamiento de la viga, hasta el colapso. La curva se mantiene elástica lineal hasta que uno de los esfuerzos principales alcanza el esfuerzo ultimo del material, a partir de ahí el material comienza a sufrir un daño, asociado a una degradación de rigidez, en ese instante, comienzan a concentrarse las deformaciones en la banda donde se distribuye el agrietamiento y se inicia la zona de ablandamiento exponencial por deformación.

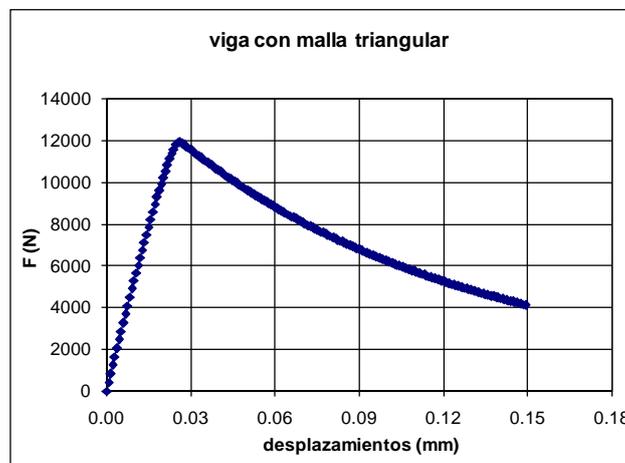


Fig. 6.7 Curva fuerza-desplazamiento de la viga de sección variable.

6.4.2 distribución de deformaciones

En la figura 6. 8 se observa que la distribución de deformaciones en la viga es asimétrica. Se presenta una concentración de deformaciones en la banda de elementos finitos, donde se distribuye la grieta, lo cual indica que en esta zona se presentó la discontinuidad. Las deformaciones en la zona del empotramiento

permanecen elásticas, lo cual indica que la banda de elementos finitos se comportó de acuerdo a lo establecido por el modelo de daño utilizado.

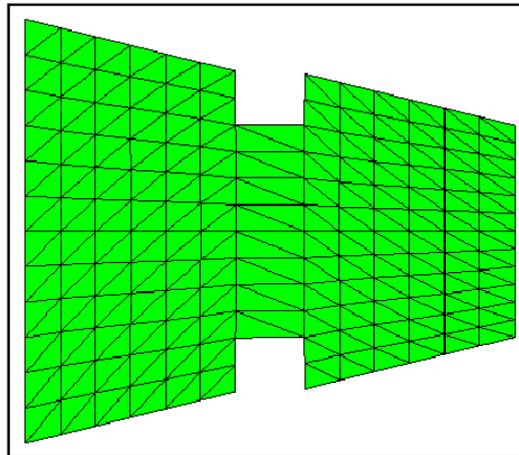


Fig. 6.8 Propagación de deformaciones en viga de sección variable

6.4.3 distribución de desplazamientos

En la figura 6.9 se observa que la distribución de desplazamientos no es simétrica en la sección, los desplazamientos pueden variar de acuerdo a la ubicación del elemento finito en la viga, debido a que no todos los apoyos presentan las mismas restricciones y a que se tiene una banda donde se distribuye la grieta. Los desplazamientos en la parte izquierda de la viga (extremo empotrado) permanecen en el rango elástico, debido a que la banda no permite que se incrementen los esfuerzos en esta zona. En la banda donde se distribuye la grieta se presenta una concentración de desplazamientos y finalmente en la zona del extremo libre los desplazamientos dependen directamente del comportamiento de la banda agrietamiento.

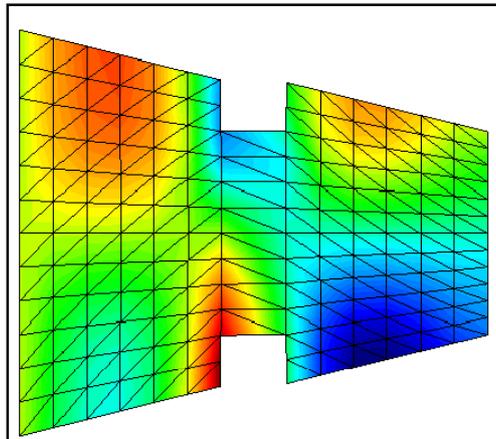


Fig. 6.9 Propagación de desplazamientos en viga de sección variable

6.4.4 distribución de esfuerzos

En la figura 6. 10 se observa que la distribución de esfuerzos en la viga no es simétrica, en toda la sección. Se presenta una concentración de esfuerzos en la banda de agrietamiento, sin embargo cuando la magnitud de uno de los esfuerzos principales alcanza el esfuerzo último del material y se inicia una degradación de rigidez, definida mediante un agrietamiento, los esfuerzos en la banda se relajan, pudiendo llegar a cero cuando el área de daño es grande, tomando como referencia la sección transversal de la sección.

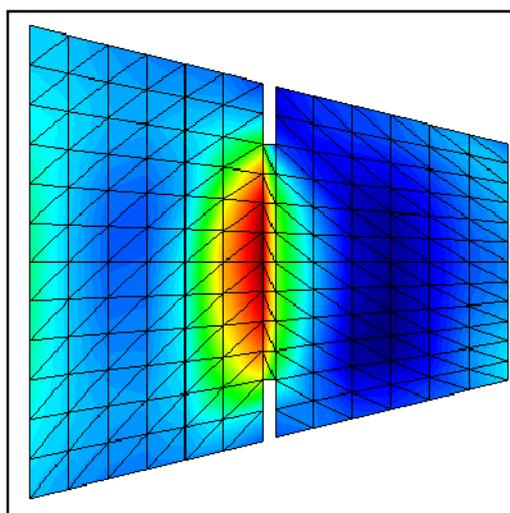


Fig 6.10 Propagación de esfuerzos en viga con doble muesca

CAPÍTULO 7

7.0 Conclusiones y recomendaciones para trabajos futuros

7.1 Conclusiones

En el presente trabajo de tesis se hizo evaluación de la formulación variacional del modelo de la grieta distribuida, utilizando un modelo de daño continuo, para el problema de localización de daño en sólidos. Se mostro que esta formulación variacional incluye todas las ecuaciones que gobiernan el problema y presenta un tratamiento matemático poderoso en cuestión de existencia estabilidad y convergencia de soluciones numéricas.

Se mostro que actualmente el método de los elementos finitos sigue siendo uno de los métodos numéricos mas poderosos para el análisis de estructuras complejas, sin embargo esta limitado a problemas elásticos, por lo cual se recurre a uso de las formulaciones que incluyen el daño.

En la presente investigación se analizaron dos estructuras, la primera gobernada por la flexión y la segunda por la tensión, mediante el método de los elementos finitos utilizando un modelo de la grieta distribuida con un modelo de daño continuo. Se demostró que este modelo simula adecuadamente el comportamiento, hasta la falla de una estructura sometida a una acción externa.

Se demostró que el modelo de la grieta distribuida no requiere un remallado durante el procedimiento de análisis, como algunos otros modelos (grieta discreta), lo cual significa un ahorro computacional para los analistas, sin embargo este modelo presenta una limitante importante, el analista debe tener una idea o saber la ubicación donde se presentara el agrietamiento y

posteriormente la falla, para así poder ubicar la banda donde se distribuye el agrietamiento y esto puede ser complicado para analistas con poca experiencia en estructuras irregulares en carga o geometría.

Se demostró que los modelos de daño que utilizan una regla de ablandamiento exponencial simulan el comportamiento no lineal de la estructura con mejor aproximado a los resultados experimentales que los modelos que utilizan una regla de ablandamiento lineal.

Se demostró que la banda donde se distribuye el agrietamiento se presenta una concentración de esfuerzos deformaciones y desplazamientos, los cuales conducen a la falla y fuera de la banda de agrietamiento el material tiende a permanecer elástico.

7.2 Recomendaciones para trabajos futuros

De acuerdo a los resultados analíticos obtenidos en esta investigación y a la comparativa entre las respuestas analíticas y estudios experimentales se hacen las siguientes recomendaciones para futuras investigaciones.

- Evaluar un mayor número de ejemplos utilizando estructuras irregularidad en geometría y carga.
- Evaluar el potencial del modelo de la grieta distribuida en estructuras hechas con materiales no homogéneos como, el concreto reforzado, madera o en secciones compuestas.
- Evaluar el potencial de este modelo en estructuras que estén gobernadas por varios elementos mecánicos en un mismo tiempo como; carga axial y flexión; cortante y torsión, etc.

CAPÍTULO 8

REFERENCIAS

1. Atluri, S. N. (1975). On "hybrid" finite-element models in solid mechanics. In: *Advances in Computer Methods for Partial Differential Equations*. R. Vichnevetsky (Eds.), AICA, Rutgers University, pp. 346-356.
2. Bazant, Z. P. y Planas, J. (1998) "Fracture and Size Effect in concrete and other quasibrittle materials", CRC Press, EUA.
3. Belytschko, T., Fish, J. y Engelmann, B.E. (1988). A finite element with embedded localization zones. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 70(1), pp. 59-89.
4. Dvorkin, E. N. y Assanelli, A. P. (1991). 2D finite elements with displacement interpolated embedded localization lines: The analysis of fracture in frictional materials. *Computer Methods in applied mechanics and engineering*, pp. 829-844.
5. Feenstra. P.H. (1993) " Computational aspects of biaxial stress in plain and reinforced concrete". Tesis doctoral, Universidad Tecnológica de Delft. Holanda.
6. Fraeijs de Veubeke, B.M; (1951). Diffusion des inconnues hyperstatiques dans les voilures á longeron couples, *Bull. Serv. Technique de L' Aéronautique* No. 24, Imprimerie Marcel Hayez, Bruselas, 56 pp.
7. Fernández L., (2002) "Modelado numérico de la fractura en el concreto". Tesis presentado en la División de Estudios de Posgrado de la Facultad de

Ingeniería de la UNAM para obtener el grado de Doctor en Ingeniería (estructuras).

8. Fernández, L. y Ayala (2004). Constitutive modelling of discontinuities by means of discrete and continuum approximations and damage models. *International Journal of Solids and Structures*, pp. 1453-1471.
9. Griffith, A. A. (1921) "The phenomena of rupture and flow in solids", *Philos. T. Roy. Soc. A.*, pp. 163-197.
10. Griffith, A. A. (1924) "The Theory of rupture", *Proceedings of the first International Conference of Applied Mechanics*, pp. 55-63.
11. Herrmann, L. R. (1966). A bending analysis for plates. In *Proceedings of 1st Conference on Matrix Methods in Structural Mechanics*, AFFDL- TR-66-80, Air Force Institute of Technology, Dayton, Ohio, pp. 577-604.
12. Hillerborg, A., Modeer, M. y Petersson, P.E. (1976). Analysis of crack formation and crack growth in concrete by means of fracture mechanics and finite elements. *Cement and Concrete Research*, pp. 773-782.
13. Hu, H. (1955). On some variational methods on the theory of elasticity and the theory of plasticity. *Scientia Sinica*, pp. 33-54.
14. Inglis, C.E. (1913). Stress in a plate due to the presence of crack and sharp corners. *Transactions of the Institute of Naval Architects, series A*, pp. 163-198.
15. Irwin, G.R. (1957). Analysis of stress and strains near the end of a crack traversing a plate. *Transactions ASME, Journal of Applied Mechanics*, pp. 361-364.

16. Jirásek, M. (2000). Comparative study on finite elements with embedded discontinuities. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, pp. 307-330.
17. Kachanov, L. M. (1958). Time of rupture process under creep conditions. *Inzvestia Akademii Nauk. Otd Tech Nauk.* pp. 26-31.
18. Klisinski, M., Runesson, K. y Sture, S. (1991) "Finite element with inner softening band", *Journal of Engineering Mechanics, ASCE*, pp. 575-587.
19. Melenk J. M. y Babuska, I. (1996). The partition of unity finite element method: Basic theory and applications. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, pp. 289-314.
20. Larsson, R., Runesson, K. y Ottosen, N. S. (1993) "Discontinuous displacement approximation for capturing plastic localization", *Inter. J. Numer. Methods Engrg*, pp. 2087-2105.
21. Litton R.W. (1974), "A contribution to the analysis of concrete structures under cyclic loading," *Dissertation, Univ. of California, Berkeley*
22. Lofti, H.R. y Shing, P.B. (1995). Embedded representation of fracture in concrete with mixed finite elements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, pp. 1307-1325.
23. Oliver, J; Cervera, M; Oller, S. y Lubliner, J. (1990) "Isotropic damage models and smeared crack analysis of concrete", Bicanic et al (eds.). *Computer aided analysis and design of concrete structures*. Pineridge. Swansea. Inglaterra. PP. 945-957.

-
24. Oliver, J. (1996a). modeling strong discontinuities in solid mechanics via strain softening constitutive equations. Part 1: Fundamentals. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, pp. 3575-3600.
 25. Ortiz, M., Leroy, Y. y Needleman, A. (1987). A finite element method for localized failure analysis. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, pp. 189-214.
 26. Pian, T. H. H. (1964). Derivation of element Stiffness matrices by assumed stress distributions. *AIAA J*, pp. 1333-1336.
 27. Rashid, Y. R. (1968). Analysis of prestressed concrete pressure vessels. *Nuclear Engineering and Design*, pp. 334-344.
 28. Regueiro, R. A. y Borja, R. I. (1999) "A finite element model of localized deformation in frictional materials taking strong discontinuity approach", *Finite Elements in Analysis and Design*, pp. 283-315.
 29. Reissner, E. (1950). On a variational theorem in elasticity, *J. Math. Phys*, pp. 90-95.
 30. Rice, J.R. y Rudnicki, J.W. (1980). A note on some feature of the theory of localization of deformation, *International Journal of Solids and Structures*, pp. 597-605.
 31. Rots, J. G. (1988). Computational modeling of concrete fracture. Tesis de Doctorado, Universidad de Tecnología de Delft, Holanda.
 32. Simo, J. C., Oliver, J. y Armero, F. (1993). An analysis of strong discontinuities induced by strain-softening in rate-independent inelastic solids. *Computational Mechanics*, pp. 277-296.

-
- 33.Simo, J. C. y Oliver, J. (1994) "A new approach to the analysis and simulation of strain softening in solids", proceedings of the US-Europe Workshop on fracture and Damage in Quasibrittle Structures, Bazant, Bittnar y Jirasek (eds.), Praga, República checa, pp. 25-39.
- 34.Simo, J. y Rifai, S. (1990). A class of mixed assumed strain method of incompatible modes. International Journal for Numerical Methods in Engineering, pp 1595-1638
- 35.Sluys, L. J. y Berrends, A. H. (1998) "Discontinuous Failure Analysis for Mode I and Mode II Localization Problems", Int. J. Solids and Structures, no. 31-32, pp. 4257-4274.
- 36.Washizu, K. (1955) On the variational principles of elasticity and plasticity, Aeroelastic and Structures Research Laboratory, Technical Report 25-18, MIT, Cambridge, MA.