

Capítulo 4

Modelado Matemático

4.1. Modelo Matemático

Para obtener el modelo matemático del sistema masa-resorte-amortiguador, se parte por estudiar un diagrama de bloques que incluya todos los elementos de interés del sistema real. El diagrama de bloques de la Figura 4.1 muestra la representación del sistema real.

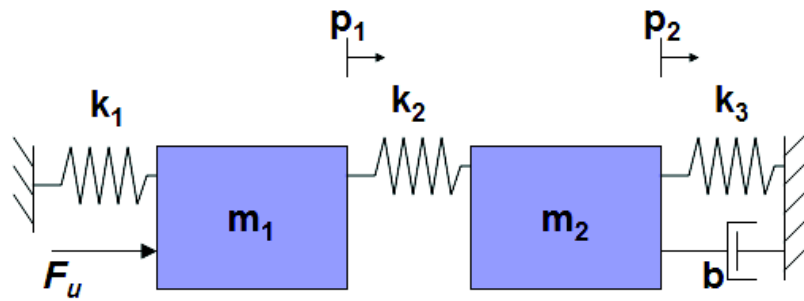


Figura 4.1: Diagrama de bloques del sistema masa-resorte-amortiguador

En el estudio de la dinámica de este sistema, p_1 y p_2 representan la posición de las masas 1 y 2, respectivamente. De manera análoga, la velocidad de ambas masas estará dada por las derivadas de sus posiciones (\dot{p}_1 y \dot{p}_2). Finalmente, la aceleración de las masas resulta de la derivación de sus velocidades (\ddot{p}_1 y \ddot{p}_2).

Los valores de las constantes de los resortes están dados por k_1 , k_2 y k_3 . El valor de la constante de amortiguamiento es representada por b . La fuerza que actúa sobre el sistema proveniente del actuador está dada por F_u .

Una forma de ayudar a comprender mejor las dinámicas y fuerzas que actúan sobre el sistema, es mediante un diagrama de cuerpo libre para ambas masas.

La Figura 4.2 corresponde al diagrama de cuerpo libre de la primera masa m_1 .

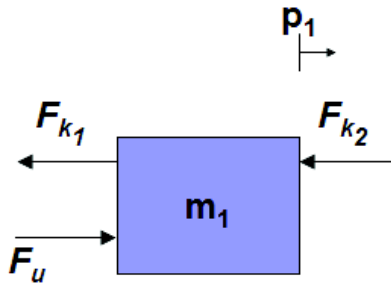


Figura 4.2: Diagrama de cuerpo libre de la masa 1

Siguiendo con el estudio de la dinámica de la primera masa, el sistema de ecuaciones (4.1) presenta las ecuaciones de elemento del diagrama de cuerpo libre de dicha masa.

$$\begin{aligned}
 F_{m_1} &= m_1 \ddot{p}_1 \\
 F_{k_1} &= k_1 p_1 \\
 F_{k_2} &= k_2 (p_1 - p_2) \\
 F_u &= F_u
 \end{aligned}
 \tag{4.1}$$

De manera similar, la Figura 4.3 corresponde al diagrama de cuerpo libre de la segunda masa m_2 .

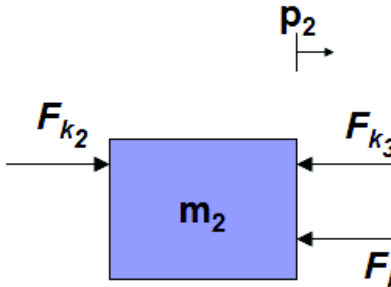


Figura 4.3: Diagrama de cuerpo libre de la masa 2

El sistema de ecuaciones (4.2) presenta las ecuaciones de elemento del diagrama de cuerpo libre de la segunda masa.

$$\begin{aligned}
 F_{m_2} &= m_2 \ddot{p}_2 \\
 F_{k_2} &= k_2 (p_2 - p_1) \\
 F_{k_3} &= k_3 p_2 \\
 F_b &= b \dot{p}_2
 \end{aligned}
 \tag{4.2}$$

Con el planteamiento de las ecuaciones de elemento descritas anteriormente, resulta muy simple obtener las ecuaciones de conjunto. Las ecuaciones de conjunto (4.3) y (4.4), relacionan

el equilibrio de fuerzas existente en cada masa.

$$F - F_{m_1} - F_{k_1} - F_{k_2} = 0 \quad (4.3)$$

$$F_{m_2} + F_{k_3} + F_b + F_{k_2} = 0 \quad (4.4)$$

Sustituyendo las ecuaciones de elemento (4.1) y (4.2) en las ecuaciones de conjunto (4.3) y (4.4), respectivamente, se llega al siguiente sistema de ecuaciones:

$$m_1 \ddot{p}_1 + (k_1 + k_2)p_1 - k_2 p_2 = F_u \quad (4.5)$$

$$m_2 \ddot{p}_2 + (k_2 + k_3)p_2 + b\dot{p}_2 - k_2 p_1 = 0 \quad (4.6)$$

4.1.1. Representación en Espacio de Estados

La teoría de control clásica está basada en el empleo de funciones de transferencia o *cajas negras*.¹

Por otro lado, la teoría de control moderna se basa en la descripción de las ecuaciones de un sistema en términos de n ecuaciones diferenciales de primer orden, las cuales se combinan en una ecuación diferencial matricial de primer orden. La notación matricial simplifica la representación matemática de los sistemas de ecuaciones [8].

De forma general, una representación en el espacio de estados está dada por el sistema de ecuaciones (4.7) y (4.8).

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (4.7)$$

$$y = Cx \quad (4.8)$$

en donde

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ y $C \in \mathbb{R}^{m \times n}$ son matrices de dimensiones correspondientes

$x \in \mathbb{R}^n$ es el vector de estados

$u \in \mathbb{R}^r$ es el vector de control

$y \in \mathbb{R}^m$ es el vector de salida

Para la representación en espacio de estados del sistema de interés, es necesario comenzar por proponer los estados del sistema. Comúnmente para sistemas mecánicos, los estados serán

¹Estas funciones relacionan únicamente los parámetros de entrada y salida, lo que impide conocer lo que sucede con los estados del sistema.

posiciones y velocidades. Para este caso en particular, se tienen dos masas independientes y por lo tanto, los estados para este sistema serán las posiciones y velocidades de ambas masas. El vector de estados para el estudio del sistema masa-amortiguador-resorte está dado por el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned}x_1 &= p_1 \\x_2 &= \dot{p}_1 \\x_3 &= p_2 \\x_4 &= \dot{p}_2\end{aligned}\tag{4.9}$$

y considerando como entrada

$$u = F_u\tag{4.10}$$

Las ecuaciones del modelo general (4.5) y (4.6), pueden ser transformadas a la forma descrita por el siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\frac{(k_1+k_2)}{m_1}x_1 + \frac{k_2}{m_1}x_3 + \frac{1}{m_1}u \\ \dot{x}_3 &= x_4 \\ \dot{x}_4 &= \frac{k_2}{m_2}x_1 - \frac{(k_2+k_3)}{m_2}x_3 - \frac{b}{m_2}x_4\end{aligned}\tag{4.11}$$

Las cuales corresponden a la representación en espacio de estados $\dot{x} = Ax + Bu$, donde

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{(k_1+k_2)}{m_1} & 0 & \frac{k_2}{m_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{k_2}{m_2} & 0 & -\frac{(k_2+k_3)}{m_2} & -\frac{b}{m_2} \end{bmatrix}\tag{4.12}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m_1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\tag{4.13}$$

Substituyendo los valores nominales de los parámetros de la planta (3.1) en el sistema (4.11) se tiene

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -488.28 & 0 & 136.72 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 166.67 & 0 & -595.24 & -14.28 \end{bmatrix}\tag{4.14}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.78 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.15)$$

El sistema solo permite obtener las mediciones de las posiciones x_1 y x_3 , por lo que la matriz C queda definida por

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.16)$$

4.1.2. Modelo Matemático Reducido

Para efectos prácticos en el desarrollo de este trabajo, se tiene como finalidad la controlabilidad de una planta con incertidumbres en sus parámetros y en presencia de perturbaciones. Para lograr dicho propósito, se implementará un modelo matemático dividido en dos secciones. La primera sección sólo considerará parámetros de la primera masa (actuador, resorte k_1 y m_1), mientras que la segunda sección ω_1 será considerada como perturbación de parámetros desconocidos², tal y como se muestra en la Figura 4.4.

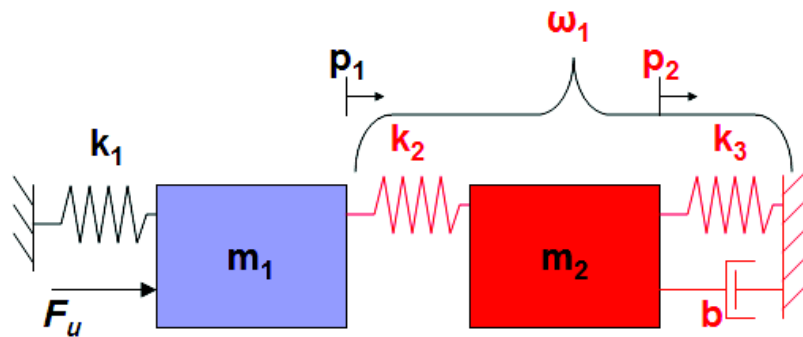


Figura 4.4: Diagrama de Bloques del Sistema dividido en dos secciones

De esta forma el sistema que será implementado corresponde a la Figura 4.5.

Reescribiendo el nuevo modelo considerando perturbaciones, se obtiene el siguiente sistema compuesto

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\frac{k_1}{m_1}x_1 + \frac{1}{m_1}u + \omega_1, \quad \omega_1 = \frac{k_2}{m_1}(x_3 - x_1) \end{aligned} \quad (4.17)$$

²Aunque anteriormente se definió el modelo completo del sistema, se intenta dar un enfoque a situaciones reales encontradas en la industria, en donde será complicado obtener modelos completos y los parámetros de la planta son referidos de hojas de datos. Ver [10].

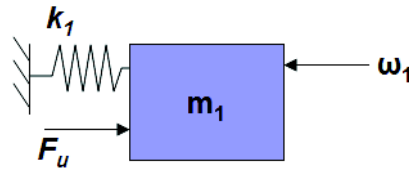


Figura 4.5: Diagrama de bloque reducido considerando perturbaciones

De esta forma, las nuevas matrices A y B que serán consideradas para el desarrollo de esta tesis son:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k_1}{m_1} & 0 \end{bmatrix} \quad (4.18)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m_1} \end{bmatrix} \quad (4.19)$$

Substituyendo los valores nominales de los parámetros de la planta (3.1) en el sistema (4.17), se obtiene

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -351.56 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.20)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.78 \end{bmatrix} \quad (4.21)$$

La matriz C queda como

$$C = [1 \ 0] \quad (4.22)$$