Capítulo 2

Control de Posición

Este capítulo va a describir la metodología a seguir para lograr controlar la posición de una masa en un sistema físico real. La metodología general está basada en una aplicación práctica[1] propuesta en el artículo *Input-Output Linearization and Integral Sliding Mode Disturbance Compensation for Electro-Hydraulic Drives* (Jan Komsta 2010) [10]. Sin embargo, este trabajo de tesis busca explorar otras opciones de **(SMC)**, ya que la estructura aplicada permite generalizar el modo deslizante, de tal forma que el algoritmo de **SMC** pueda ser un modo deslizante de primer orden de ganancia variable o un modo deslizante de segundo orden **(SOSM)** Super Twisting. El algoritmo que permite ajustar la ganancia de un **SMC** está basado en el artículo *New methodologies for adaptive sliding mode control* [14].

2.0.3. Introducción

Esta sección mostrará la adaptación del algoritmo publicado en el artículo *Input-Output Linearization and Integral Sliding Mode Disturbance Compensation for Electro-Hydraulic Drives* [10] al Modelo **210: Rectilinear Plant de Educational Control Products**, con la finalidad de poder controlar la posición del sistema.

El SMC es bien conocido por su robustez contra incertidumbres en el modelo, variaciones en los parámetros de la planta y perturbaciones externas. Esta propiedad permite la eliminación de las complicaciones en la identificación de un sistema, lo cual simplifica y reduce el proceso de sintonización en las ganancias del control.

Recurrir a un control "continuo" o "suave", generalmente es la solución más común al problema del *chattering*, aunque resulte en la pérdida parcial de robustez en el sistema y en la disminución del rendimiento en el seguimiento. Por esta razón, se recurre a la combinación del control de linealización por entrada-salida con un modo deslizante integral como estimador de la perturbación. Este enfoque permite que el control discontinuo tenga lugar solamente en el cómputo de un controlador interno y por lo tanto, no es alimentado en forma directa

[1]Metodología implementada en el Departamento de Ingeniería Avanzada de Bosch Rexroth AG, Alemania.

a la entrada de la planta. La señal continua utilizada para compensar la perturbación, es obtenida de la acción de un filtro paso-bajas a la señal de conmutación del SMC, la cual es generada en un proceso dinámico interno auxiliar. Este método puede mejorar la robustez general de la linealización por entrada-salida [1], sin el riesgo de la ocurrencia de chattering.

Esta metodología prestó gran atención a la introducción de un algoritmo preciso y robosto, que a su vez sea sencillo de usar.

Una ventaja importante del compensador de perturbación propuesto, es la sencillez de su estructura. Considerando que el control clásico basado en la linealización de entrada-salida y sus métodos de sintonización han sido aceptados por un gran grupo de ingenieros, solo se busca mejorar dicho algoritmo ya existente mediante la adición del compensador por modos deslizantes en lugar de introducir un algoritmo de control que sea completamente nuevo.

2.0.4. Modelado de la Planta

Considere el siguiente sistema de una entrada, una salida (Simple-Input Simple-Output, **SISO** por sus siglas en inglés) en representación de espacio de estados

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad y = Cx \tag{2.1}$$

en donde u es la entrada de la planta (salida del controlador) y y es la salida de la planta (posición[2] por ejemplo).

En la práctica, algunos de los términos contenidos en A y B del sistema (2.1) son inciertos o incluso desconocidos (por ejemplo: coeficientes de fuga, cargas de masa, fuerzas de fricción y carga, etc.). En muchos casos resulta imposible obtener una identificación precisa del sistema durante la puesta en marcha del mismo (debido a modificaciones en el sistema, procesos naturales de desgaste o algunos cambios no esperados en el ambiente de trabajo). Por lo tanto, en la práctica solo es posible obtener una estimación imprecisa de las dinámicas del sistema, por ejemplo

$$\hat{\dot{x}} = \hat{A}x + \hat{B}u, \quad y = Cx \tag{2.2}$$

en donde $\hat{A}$ y $\hat{B}$ denotan aproximaciones de los términos A y B en el sistema (2.1), respectivamente.

Para cuestiones estrictamente de implementación y sintonización de controladores en entornos industriales, la estimación de las dinámicas del sistema (2.2) deben ser basadas únicamente en los parámetros nominales de los datos técnicos (*data sheets*)y de algún conocimien-

[2]Tanto para ejemplifcar el contenido de este artículo [10], como para finalidades del sistema implementado en esta tesis, la salida medible de la planta es la posición.

to limitado de los expertos. Para el caso de esta tesis, un modelo[3] simple cuyos valores son obtenidos de las hojas técnicas del sistema, es

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k_1}{m_1} & 0 \end{bmatrix} \tag{2.3}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m_1} \end{bmatrix} \tag{2.4}$$

en donde m_1 denota la masa del carro y k_1 la constante del resorte.

2.0.5. Diseño del Controlador

La idea principal del control por linealización entrada-salida, es transformar primero las dinámicas no lineales de un sistema en dinámicas lineales y despúes aplicar una técnica simple de control lineal para conseguir el desempeño deseado en lazo cerrado. Desafortunadamente, este concepto de control es sensible a las inexactitudes del modelo y a las perturbaciones desconocidas, por lo que requiere de una parametrización muy precisa del sistema. Sin embargo, la combinación de esta técnica de control con **SMC** puede incrementar extremadamente la robustez general contra las perturbaciones del sistema.

A. Linealización entrada-salida

Para el desarrollo del controlador de linealización por retroalimentación, la salida del sistema $y = Cx$ debe ser derivada hasta obtener una relación directa con la entrada del sistema (grado relativo). Para el caso del sistema físico implementado en esta tesis, cuyo modelo matemático se detalla en el Capítulo 5, se tiene:

$$y = Cx = x_1 \tag{2.5}$$

$$\dot{y} = \dot{x_1} = x_2 \tag{2.6}$$

$$\ddot{y} = \dot{x_2} = -\frac{k_1}{m_1}x_1 + \frac{1}{m_1}u \tag{2.7}$$

La ecuación (2.7) representa una relación explícita entre la entrada del sistema u y la salida y, por lo que puede ser ajustada a la forma de la ley de control por linealización entrada-salida

$$u = \frac{v - \alpha(x)}{\beta(x)} \tag{2.8}$$

en donde $\ddot{y} = v$, $\alpha(x) = -\frac{k_1}{m_1}x_1$ y $\beta(x) = \frac{1}{m_1}$.

[3]En el capítulo 5 se muestra a detalle el modelado del sistema.

La nueva variable v, representa una ley de control proporcional derivativa **PD**, como se expone en [10] y [13]

$$v = \ddot{y}_d + K_d\dot{e} + K_p e, \quad e = y_d - y \tag{2.9}$$

en donde y_d denota la posición demandada de la masa m_1 y K_d, K_p son constantes extrictamente positivas.

Sustituyendo las ecuaciones (2.8) y (2.9) en la entrada del sistema u en (2.7), se obtienen las dinámicas ideales de un sistema de segundo orden

$$\ddot{y} = \alpha(x) + \beta(x)\left(\frac{v - \alpha(x)}{\beta(x)}\right) = v \tag{2.10}$$

sustituyendo (2.9) en (2.10)

$$\ddot{y} = \ddot{y}_d + K_d\dot{e} + K_p e \tag{2.11}$$

$$0 = \ddot{y}_d - \ddot{y} + K_d\dot{e} + K_p e \tag{2.12}$$

$$0 = \ddot{e} + K_d\dot{e} + K_p e \tag{2.13}$$

La ecuación (2.13) se identifica con la de un sistema de segundo orden, cuya frecuencia angular ω_n deseada en lazo cerrado y coeficiente de amortiguamiento ξ vienen dados por

$$K_p = {\omega_n}^2 \quad y \quad K_d = 2\xi\omega_n \tag{2.14}$$

A fin de validar que el algoritmo propuesto ofrece las dinámicas deseadas en lazo cerrado, la respuesta real del sistema será comparada con la respuesta ideal de un sistema de segundo orden $G(s)$, definido por la asignación de polos deseados

$$G(s) = \frac{K_p}{s^2 + K_d s + K_p} \tag{2.15}$$

Recordando que solo se cuenta con la estimación imprecisa de las dinámicas (2.2), la aproximación de la ley de control (2.8) queda como

$$\hat{u} = \frac{v - \hat{\alpha}(x)}{\hat{\beta}(x)} \tag{2.16}$$

Debido al modelo impreciso (2.2), existirá un error en los parámetros. La aproximación de este error es desconcida, sin embargo sus cotas pueden ser evaluadas como

$$|\hat{\alpha}(x) - \alpha(x)| \leq \Delta\alpha \tag{2.17}$$

y

$$0 < \beta_{min} \leq \beta(x) \leq \beta_{max}, \quad \Delta\beta^{-1} \leq \frac{\hat{\beta}(x)}{\beta(x)} \leq \Delta\beta, \quad \Delta\beta = \frac{\beta_{max}}{\beta_{min}} \tag{2.18}$$

Por razones del error estimado, no es posible llegar a completar una linealización exacta, por lo que una perturbación dinámica, desconocida pero acotada, $\Delta(x)$ aparace

$$\ddot{y} = \alpha(x) + \beta(x)\hat{u} \tag{2.19}$$

$$\ddot{y} = \alpha(x) + \beta(x)\left(\frac{v - \hat{\alpha}(x)}{\hat{\beta}(x)}\right) \tag{2.20}$$

$$\ddot{y} = \alpha(x) + v\frac{\beta(x)}{\hat{\beta}(x)} - \hat{\alpha}(x)\frac{\beta(x)}{\hat{\beta}(x)} \tag{2.21}$$

$$\ddot{y} = v - \hat{\alpha}(x)\frac{\beta(x)}{\hat{\beta}(x)} + \alpha(x) - v + v\frac{\beta(x)}{\hat{\beta}(x)} \tag{2.22}$$

$$\ddot{y} = v - \left(\hat{\alpha}(x)\frac{\beta(x)}{\hat{\beta}(x)} - \alpha(x) + v\left(1 - \frac{\beta(x)}{\hat{\beta}(x)}\right)\right) \tag{2.23}$$

$$\ddot{y} = v - \Delta(x), \quad |\Delta(x)| < \Delta_{max} \tag{2.24}$$

La ley de control PD, como se mostrará en los resultados más adelante, es suficiente para alcanzar la posición deseada al utilizar el compensador por modos deslizantes, lo cual supone la anulación de las perturbaciones. Sin embargo, para efectos de estudio de esta tesis y dar seguimiento al plan de estudios de la licenciatura, se probará una ley de control proporcional derivativa integral **PID** sin la compensación por modos deslizantes. El control nuevamente está dado por la variable v como en [13]:

$$v = \ddot{y}_d + K_d\dot{e} + K_p e + K_i \int e dt, \quad e = y_d - y \tag{2.25}$$

2.0.6. Compensador de Perturbaciones por Modos Deslizantes

La meta ahora es estimar el error desconocido, pero acotado, $\Delta(x)$ y generar una señal de compensación adecuada Δ_{comp}, la cual será definida más adelante

$$\ddot{y} = v - \Delta(x) + \Delta_{comp}, \quad \Delta_{comp} \to \Delta(x) \tag{2.26}$$

Para fines de la estimación de la desviación dinámica, se recurre a la creación de sistema auxiliar virtual $\dot{z}$

$$\dot{z} = v - \Delta_{SMC} + \Delta_{comp} \tag{2.27}$$

en donde

$$\Delta_{SMC} = Lsign(s), \quad L > 0, \quad \sigma = z - \dot{y} \tag{2.28}$$

La diferenciación de la función de conmutación s y la sustitución de (2.26) en (2.27) produce

$$\begin{aligned} &\dot{s} = \dot{z} - \ddot{y} = v - Lsign(s) + \Delta_{comp} - v + \Delta(x) - \Delta_{comp} \\ &\dot{s} = \Delta(x) - Lsign(s) \end{aligned} \tag{2.29}$$

Para garantizar la estabilidad de la superficie deslizante s, se debe recurrir a una función apropiada de Lyapunov

$$V(t) = \frac{1}{2}s^2 \tag{2.30}$$

Si la ganancia L se elige como

$$L \geq \Delta_{max} + \eta, \quad \eta > 0 \tag{2.31}$$

la diferenciación de (2.30) junto con la sustitución de (2.29) se llega a

$$\dot{V}(t) = s\dot{s} = s\Delta(x) - sLsign(s) < |s|\Delta_{max} - L|s| \leq -\eta|s| \tag{2.32}$$

asegurando de esta manera la ocurrencia del modo deslizante en tiempo finito.

Como la velocidad del sistema tiene que ser medida o estimada, la condición inicial de la integral del proceso auxiliar puede ser definida en el cálculo de la variable deslizante s como

$$z(t = 0) = \dot{y}(t = 0) \rightarrow s(t = 0) = 0 \tag{2.33}$$

eliminando de esta manera la fase de alcance, lo cual implica que el modo deslizante ocurra desde el primer instante de tiempo[4].

En el modo deslizante, la variable auxiliar z sigue la velocidad del sistema

[4]Esta condición es posible por los modos deslizantes integrales.

$$s = 0 \rightarrow z = \dot{y} \tag{2.34}$$

Analizando el sistema bajo el enfoque del método de *control equivalente*, se puede probar que la señal del control equivalente coincide con la perturbación $\Delta(x)$. Una vez que un modo deslizante estable ocurre, la trayectoria del sistema permanece sobre el plano deslizante $\sigma = 0$, para lo cual debe cumplirse la siguiente condición

$$\dot{s} = \dot{z} - \ddot{y} = 0 \tag{2.35}$$

De las ecuaciones (2.26), (2.27) y (2.35) se obtiene una expresión para un control equivalente continuo Δ_{eq}, el cual puede ser interpretado como una ley de control que podría mantener las condiciones (2.23) y (2.35) si las dinámicas del sistema fueran perfectamente conocidas.

$$v - \Delta_{eq} + \Delta_{comp} - v + \Delta(x) - \Delta_{comp} = 0 \Rightarrow \Delta_{eq} = \Delta(x) \tag{2.36}$$

La señal de control equivalente puede ser aproximada por el valor promedio del término Δ_{av}, el cual se obtiene por el paso del modo deslizante a través de un filtro paso-bajas

$$\Delta_{eq} \approx \Delta_{av} = \frac{1}{Ts+1}\Delta_{SMC} \tag{2.37}$$

en donde T[5] es la constante del filtro. Si el ancho de banda del filtro cubre las frecuencias de las perturbaciónes, utilizando (2.36) y (2.37) se obtiene

$$\ddot{y} = v - \Delta(x) + \Delta_{comp} \approx v \quad con \quad \Delta_{comp} = \Delta_{av} \tag{2.38}$$

2.1. Ganancia Variable

2.1.1. Introducción

Esta sección tomará elementos del artículo *New methodologies for adaptive sliding mode control* [14] con el fin de adaptar la ganacia L del término Δ_{SMC} en (2.28).

La meta es obtener una ley de control robusta, basada en un modo deslizante de ganancia adaptable, respecto a incertidumbres y perturbaciones sin el conocimiento de sus cotas (solo se sabe que cumplen con la propiedad de ser acotadas). Debido a la utilización de funciones

[5] La sugerencia para elegir el valor de T, es tomar como base el valor de la raíz cuadrada del tiempo de muestreo [16]

discontinuas y alta ganancia en el control, los modos deslizantes se caracterizan por su robustez en sistemas de lazo cerrado y por su convergencia en tiempo finito. Sin embargo, su diseño requiere del conocimiento de las cotas de las incertidumbres, lo cual comunmente en la práctica es una tarea complicada. Lo que sucede entonces, es que las cotas son sobrestimadas, lo que implica una ganancia excesiva. Luego, el gran inconveniente del **SMC**, el *chattering*, se vuelve un elemento de importancia y podría dañar a los actuadores y a los sistemas.

Al no requerir del conocimiento de las cotas de las incertidumbres, el camino a seguir entonces es por medio de un modo deslizante adaptable, con la finalidad de asegurar una adaptación dinámica de la ley de control para que ésta sea tan pequeña como sea posible, pero suficiente para contrarrestar las incertidumbres/perturbaciones.

2.1.2. Ley de Adaptación de Control por Modos Deslizantes

El controlador mostrado en esta sección no estima el límite de la perturbación ni de la incertidumbre. Sin embargo, esta nueva estrategia garantiza un verdadero modo deslizante.

Retomando el término Δ_{SMC} en (2.28), con la ganancia $L(t)$ definida ahora como

$$\dot{L} = \begin{cases} \bar{L} \cdot |s| \cdot sign(|s| - \epsilon) & si \quad L > \mu \\ \mu & si \quad L \leq \mu \end{cases} \tag{2.39}$$

con $L(0) > 0$, $\bar{L} > 0$, $\epsilon(t) = 4TL(t)$ y $\mu > 0$ muy pequeña. El parámetro μ es introducido para asegurar solamente valores positivos de L. Por conveniencia, se supone que $L(t) > \mu$ para todo $t > 0$.

Una vez que el modo deslizante es establecido con respecto a s, la ley propuesta de *ganancia adaptable* (2.39) permite que la ganancia L disminuya (mientras $|s| < \epsilon$). Es decir, la ganancia L será mantenida en el nivel más bajo que permita la estabilización de s con una precisión dada. Esta ley de adaptación permite obtener una ganancia adecuada con respecto a las magnitudes de las incertidumbres/perturbaciones.

2.2. Algoritmo Super Twisting

2.2.1. Introducción

En el Capítulo anterior se describieron las propiedades del control Super Twisting, resaltando su característica de contener una señal de control continua y suave. Por otro lado, la señal de compensación Δ_{comp} surge del paso del modo deslizante Δ_{SMC} a traveés de un filtro paso-bajas para obtener una señal suave y así reducir los efectos del chattering [3]. Por esta razón, se probará el algoritmo Super Twisting (1.30) con y sin el filtro paso-bajas.

2.2.2. Ley de Control

Modificando el término Δ_{SMC} con la ley de control del Super Twisting, se obtiene ahora

$$\Delta_{SMC} = c|\sigma|^{\frac{1}{2}} sign(\sigma) + b \int sign(\sigma)dt + \varrho\sigma \tag{2.40}$$

Finalmente, el término Δ_{comp} relacionado con la ecuación (2.40) se implementará con el filtro paso-bajas

$$\Delta_{comp} = \Delta_{eq} \approx \Delta_{av} = \frac{1}{Ts+1}\Delta_{SMC} \tag{2.41}$$

y sin el filtro paso-bajas

$$\Delta_{comp} = \Delta_{SMC} \tag{2.42}$$