



Universidad Nacional Autónoma de México

PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN INGENIERÍA

**Control de posición/fuerza-torque  
para manipuladores con  
compensación de fricción**

**T E S I S**

QUE PARA OBTENER AL GRADO DE  
DOCTOR EN INGENIERÍA

Área: Eléctrica, Campo: Control

**P R E S E N T A:**

**JUAN CARLO RIVERA DUEÑAS**

Director de tesis:

Dr. MARCO ANTONIO ARTEAGA PÉREZ



MÉXICO, D.F.

2012

**JURADO ASIGNADO:**

|                          |                                    |
|--------------------------|------------------------------------|
| Presidente:              | Dr. Fridman Leonid                 |
| Secretario:              | Dr. Alvarez Icaza Longoria Agustín |
| 1 <sup>er</sup> . Vocal: | Dr. Arteaga Pérez Marco            |
| 2 <sup>do</sup> . Vocal: | Dr. Espinosa Pérez Gerardo René    |
| 3 <sup>er</sup> . Vocal: | Dr. Tang Xu Yu                     |

Lugar donde se realizó la tesis:

Laboratorio de robótica del Edificio de Posgrado de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional Autónoma de Mexico (UNAM).

**TUTOR DE TESIS:**

Dr. Marco Antonio Artega Pérez

---

**FIRMA**

**CONTROL DE POSICIÓN/FUERZA-TORQUE PARA  
MANIPULADORES CON COMPENSACIÓN DE FRICCIÓN**

**Juan Carlo Rivera Dueñas**

**Dirigida por:  
Dr. Marco Antonio Arteaga Pérez**

**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO  
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN  
INGENIERÍA  
2012**

## Dedicatorias

A Dios.  
A mi Esposa.  
A mi Hija.

*Cada persona está obligada a preguntarse a sí misma, ¿Cuándo será que mis actos alcanzarán a los de mis maestros...*

*«Tana D'Bei Eliahu Raba 25»*



## Agradecimientos

- A Dios por haberme guiado y permitido la realización de uno de mis deseos; gracias por haberme bendecido grandemente con una familia.
- A mi Esposa: Por apoyarme en las buenas y en las malas, gracias por darme la motivación y el apoyo necesario en los momentos de flaqueza; gracias por ayudarme a ser mejor persona, mejor estudiante, mejor académico y mejor padre. Eres lo mejor que tengo en mi vida, te amo.
- A mi hija: Por haberme enseñado la complejidad y responsabilidad que es tener un hijo, pero sobre todo lo sublime y satisfactorio que es forjarte y observar tu desarrollo.
- A mis maestros: Dr. Leonid M. Fridman, Dr. Yu Tang Xu, Dr. Gerardo René Espinosa Pérez, Dr. Luis A. Álvarez Icaza Longoria y en especial al Dr. Marco Antonio Arteaga Pérez; por su enorme paciencia, ayuda, tiempo y consejos, mil gracias.
- A la Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM) por el orgullo de pertenecer a tan importante institución de nuestro país.
- A CONACyT por el apoyo económico durante mis estudios doctorales.
- A todos las personas que de una u otra forma han contribuido en mi formación académica, personal y espiritual.

gracias.

## Resumen

La tesis presenta un esquema controlador-observador de posición-fuerza que hace uso de un observador de fuerza de contacto basado en el modelo del manipulador y emplea cuaterniones unitarios para el control de la orientación. La teoría desarrollada fue probada en el robot A465 de *CRS Robotics* de seis grados de libertad, que se encuentra ubicado en el Laboratorio de Robótica Industrial del Posgrado de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional Autónoma de México UNAM, el cual cuenta con sensores de posición y fuerza. El robot realiza tareas de seguimiento de trayectorias en movimiento restringido tanto en posición como en fuerza, sobre dos tipos de superficies: plana y esférica. Cabe hacer notar que no se necesita conocimiento de la dinámica del robot ni el uso de la cinemática inversa para realizar el control, solo es necesaria la retroalimentación de posición articular, la descripción de la superficie y el modelo del manipulador para la estimación de la fuerza de contacto. El esquema de control propuesto es un enfoque PID de posición/fuerza explícito con un observador lineal, que considera una restricción holónomica para la ecuación que rige a la superficie. La estabilidad del sistema en lazo cerrado se prueba empleando la teoría de Lyapunov. Las pruebas matemáticas son de tipo local.



---

# Índice general

|   |           |
|---|-----------|
| <b>Índice de Figuras</b>                                      | <b>ix</b> |
| <b>1. Introducción</b>  | <b>1</b>  |
| 1.1. Motivación . . . . .                                     | 1         |
| 1.2. Control de fuerza de contacto . . . . .                  | 2         |
| 1.3. Contribuciones . . . . .                                 | 6         |
| 1.4. Organización de la tesis . . . . .                       | 6         |
| <b>2. Conceptos preliminares</b>                              | <b>7</b>  |
| 2.1. Efectos de la fuerza en las superficies . . . . .        | 7         |
| 2.1.1. Relación fuerza-torque en las articulaciones . . . . . | 7         |
| 2.1.2. Restricciones Naturales y Artificiales . . . . .       | 8         |
| 2.1.3. Principio de ortogonalización . . . . .                | 11        |
| 2.1.4. Cuaternión unitario . . . . .                          | 12        |
| <b>3. Leyes de control</b>                                    | <b>16</b> |
| 3.1. Modelo dinámico del robot . . . . .                      | 16        |
| 3.2. Diseño de un controlador-observador de fuerza . . . . .  | 23        |

---

|   |           |
|---|-----------|
| <b>4. Resultados experimentales y simulaciones</b>      | <b>30</b> |
| 4.1. Descripción de experimentos . . . . .              | 30        |
| 4.1.1. Ganancias de controlador . . . . .               | 32        |
| 4.1.2. Parámetros de trayectoria y superficie . . . . . | 34        |
| 4.2. Experimentos . . . . .                             | 35        |
| 4.2.1. Experimentos con superficie plana . . . . .      | 36        |
| 4.2.2. Experimentos con Superficie esférica . . . . .   | 37        |
| 4.2.3. Discusión . . . . .                              | 38        |
| <b>5. Conclusiones</b>                                  | <b>57</b> |
| 5.1. Problemas abiertos . . . . .                       | 58        |
| <b>A. DESCRIPCIÓN DE LOS SISTEMAS</b>                   | <b>59</b> |
| A.1. Robot industrial A465 . . . . .                    | 59        |
| A.2. Sensor de fuerza . . . . .                         | 60        |
| A.3. Sistema cRIO . . . . .                             | 61        |
| A.4. Tarjeta de acondicionamiento de señales . . . . .  | 62        |
| A.5. Computadora y lenguaje de programación . . . . .   | 63        |
| <b>B. Demostración del Teorema 3.2.1</b>                | <b>67</b> |
| B.1. Lemas y teoremas . . . . .                         | 67        |
| B.2. Demostración del Teorema 3.2.1 . . . . .           | 68        |
| <b>Bibliografía</b>                                     | <b>77</b> |



---

# Índice de figuras

|      |   |    |
|------|---|----|
| 2.1. | Efactor final de un robot en contacto con su entorno . . . . .  | 8  |
| 2.2. | Inserción de una barra en un hoyo . . . . .   | 10 |
| 2.3. | Descomposición geométrica en el punto de contacto . . . . .   | 12 |
| 3.1. | Plano tangente a la superficie en la posición actual ( $\mathbf{x}$ ) y en la posición deseada ( $\mathbf{x}_d$ ). a) Error grande, b) Error pequeño. . . | 20 |
| 4.1. | Gráficas de posición x-z de trayectoria deseada. (a) Superficie plana. (b) Superficie esférica. . . . .   | 31 |
| 4.2. | Gráfica de la trayectoria deseada (rojo) y la trayectoria real (verde). (a) Superficie plana. (b) Superficie esférica. . . . .                            | 35 |
| 4.3. | Experimento 1. Trayectoria rápida en superficie plana. Vector $\Delta\mathbf{x}$ de error de seguimiento ( $\mathbf{x} - \mathbf{x}_a$ ). . . . .         | 43 |
| 4.4. | Experimento 1. Trayectoria rápida en superficie plana. Vector $\mathbf{z}$ de error de observación ( $\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}$ ). . . . .           | 44 |

|       |   |    |
|-------|---|----|
| 4.5.  | Experimento 1. Trayectoria rápida en superficie plana. Fuerza deseada $\lambda_d$ (—) vs. fuerza JR3 $\lambda$ (- . -) Fuerza estimada $\hat{\lambda}$ (- -) y su correspondiente error de seguimiento JR3 $(\lambda - \lambda_d)$ $\Delta\lambda$ (- . -), error del estimador $(\lambda - \lambda_d)$ $\Delta\lambda$ (- -). . . . .    | 45 |
| 4.6.  | Experimento 2. Trayectoria lenta en superficie plana. Vector $\Delta\mathbf{x}$ de error de seguimiento $(\mathbf{x} - \mathbf{x}_a)$ . . . . .   | 46 |
| 4.7.  | Experimento 2. Trayectoria lenta en superficie plana. Vector $\mathbf{z}$ de error de observación $(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}})$ . . . . .   | 47 |
| 4.8.  | Experimento 2. Trayectoria lenta en superficie plana. Fuerza deseada $\lambda_d$ (—) vs. fuerza JR3 $\lambda$ (- . -) Fuerza estimada $\hat{\lambda}$ (- -) y su correspondiente error de seguimiento JR3 $(\lambda - \lambda_d)$ $\Delta\lambda$ (- . -), error del estimador $(\lambda - \lambda_d)$ $\Delta\lambda$ (- -). . . . .     | 48 |
| 4.9.  | Experimento 3. Trayectoria rápida en superficie esférica. Vector $\Delta\mathbf{x}$ de error de seguimiento $(\mathbf{x} - \mathbf{x}_a)$ . . . . .   | 49 |
| 4.10. | Experimento 3. Trayectoria rápida en superficie esférica. Vector $\mathbf{z}$ de error de observación $(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}})$ . . . . .   | 50 |
| 4.11. | Experimento 3. Trayectoria rápida en superficie esférica. Orientación deseada ${}^0\mathbf{R}_d$ (—) vs orientación real ${}^0\mathbf{R}_n$ (- -). . . . .  | 51 |
| 4.12. | Experimento 3. Trayectoria rápida en superficie esférica. Fuerza deseada $\lambda_d$ (—) vs. fuerza JR3 $\lambda$ (- . -) Fuerza estimada $\hat{\lambda}$ (- -) y su correspondiente error de seguimiento JR3 $(\lambda - \lambda_d)$ $\Delta\lambda$ (- . -), error del estimador $(\lambda - \lambda_d)$ $\Delta\lambda$ (- -). . . . . | 52 |
| 4.13. | Experimento 3. Trayectoria rápida en superficie esférica. Voltaje aplicado a las articulaciones. . . . .  | 53 |
| 4.14. | Experimento 4. Trayectoria lenta en superficie esférica. Vector $\Delta\mathbf{x}$ de error de seguimiento $(\mathbf{x} - \mathbf{x}_a)$ . . . . .  | 54 |
| 4.15. | Experimento 4. Trayectoria lenta en superficie esférica. Vector $\mathbf{z}$ de error de observación $(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}})$ . . . . .  | 55 |
| 4.16. | Experimento 4. Trayectoria lenta en superficie esférica. Fuerza deseada $\lambda_d$ (—) vs. fuerza JR3 $\lambda$ (- . -) Fuerza estimada $\hat{\lambda}$ (- -) y su correspondiente error de seguimiento JR3 $(\lambda - \lambda_d)$ $\Delta\lambda$ (- . -), error del estimador $(\lambda - \lambda_d)$ $\Delta\lambda$ (- -). . . . .  | 56 |
| A.1.  | Sistema experimental con componentes . . . . .  | 60 |
| A.2.  | Sensor de fuerza JR3 modelo 67M25A-U560. . . . .  | 61 |
| A.3.  | Sistema cRIO, (A)NI-9014, (B) NI-9004, (C)Ni-9401, (D)NI-9263. . . . .  | 63 |
| A.4.  | Tarjeta de acondicionamiento de señales. . . . .  | 64 |

---

|   |    |
|---|----|
| A.5. Bloque de programación de una articulación en el FPGA. . . . | 65 |
| A.6. Panel principal del programa CVI. . . . .                    | 66 |



---

# Índice de cuadros

|  |    |
|--|----|
| 4.1. Índices de desempeño general de fuerza, seguimiento, observación, orientación y torque. . . . .   | 40 |
| 4.2. Índices de desempeño de seguimiento, observación y torque por elemento de $\Delta \mathbf{x}$ , $\mathbf{z}$ y $\boldsymbol{\tau}$ respectivamente. . . . . | 41 |
| A.1. Características más importantes del Robot A465. . . . .   | 61 |



---

# Introducción

La robótica es un campo multidisciplinario y se puede dividir en cinco grandes áreas: control de movimiento, sensores y visión, planeación y coordinación, inteligencia artificial y toma de decisiones, e interfaces hombre-máquina (Lewis *et al.* 1993). El área de control de movimiento puede dividirse a su vez en movimiento libre (cuando el manipulador hace evoluciones sin interactuar con el ambiente que lo rodea) y movimiento restringido (cuando el robot tiene contacto con su entorno, es decir, pierde libertad de movimiento).

## 1.1. Motivación

En la actualidad existen muchos controladores diseñados para robots manipuladores, en los cuales la tendencia es su especialización; lo cual hace necesario un menor tiempo de muestro y mayor poder de computo; pero un problema que aun es necesario atender es la manera en que este interactua con la fricción, la aplicación de fuerza y el el desgaste de materiales en contacto; estos tres efectos se relacionan entre si.

Un problema comun en las plantas ensambladoras de automoviles, son los paros de lineas de producción, algunos de estos son causados por un mal

control de los factores antes mencionados; lo cual se resuelve regularmente con un controlador de posición en movimiento libre y el cambio regular de herramientas y sensores, lo que no es óptimo y dependiendo el tipo de aplicación eleva los costos de producción.

Por ejemplo efectos de fricción provocan errores de seguimiento debido a que los manipuladores industriales no tienen compensadores de fricción por la complejidad que esta representa y si se emplean herramientas rotatorias es aún más complejo. Además, si no hay una posición adecuada objeto (área de trabajo) este efecto puede causar daño en el producto fabricado.

Otro problema con el que tienen que lidiar los proveedores de manipuladores industriales es la precisión que pueden ofrecer, que regularmente se soluciona con sistemas de adquisición muy veloces y sensores de alta resolución y alto costo; esto les permite emplear controladores de tipo PID para cumplir los requerimientos.

El objetivo de esta tesis es el desarrollo de un algoritmo en coordenadas cartesianas que pueda controlar simultáneamente la posición, la orientación y la fuerza de contacto del manipulador; así como compensar la fricción de contacto. También se pretende que el controlador permita hacer distintas tareas sin la necesidad de resintonizar el algoritmo. Para el desarrollo del mismo solo se hará uso de la posición de las articulaciones.

## 1.2. Control de fuerza de contacto

De manera breve se explicarán las ideas fundamentales de los métodos más comunes para controlar la fuerza de contacto en movimiento restringido.

- **Control de rigidez pasivo.** También conocido como control *compliance* pasivo, es una solución simple para reducir las fuerzas de contacto entre el robot y su entorno. Básicamente, consiste en interponer entre la parte manipulada y el robot un dispositivo mecánico capaz de cambiar su configuración bajo los efectos de las fuerzas de contacto, agregando a la estructura un comportamiento elástico que compense los errores de posición (Drake y Simunovic 1977). Más recientemente Okada *et al.* (2001) realizó el diseño y programación de un hombro cibernético para hacer mejor la interacción de robots humanoides con los humanos basándose en la energía almacenada en las articulaciones.

- **Control de rigidez activo.** Este método controla activamente la rigidez aparente del efector final del robot y permite controlar la fuerza y posición simultáneamente. El usuario especifica la rigidez traslacional y rotacional deseadas del sistema de referencia de contacto. Una alta ganancia es asignada a las direcciones en que las posiciones deben ser controladas, mientras que ganancias bajas son asignadas a las direcciones de las fuerzas deseadas. La ventaja del método es que es relativamente simple y la matriz de rigidez necesaria para implementar el controlador puede ser cambiada en línea para adaptar el comportamiento del robot a tareas restringidas. Formica *et al.* (2005) presenta un enfoque de control que intenta hacer frente a exigencias derivadas de las diversas aplicaciones y escenarios que pueden ocurrir cuando máquinas robóticas son usadas para rehabilitación (interacción con el paciente) de extremidades superiores.
- **Control por impedancia.** La idea básica del comportamiento por impedancia es asignar un comportamiento dinámico preestablecido para el robot mientras su efector final está interactuando con el entorno. El desempeño deseado es especificado por una impedancia dinámica generalmente representando un sistema masa-resorte-amortiguador. Este método se puede implementar con o sin retroalimentación de fuerza (Khalil y Dombre 2002). Matinfar y Hashtrudi-Zaad (2005) presentan un control por impedancia adaptativa que emplea un punto de vista geométrico para entornos rígidos que trata de minimizar el error de posición mediante una fuerza generalizada empleando la naturaleza dinámica del manipulador y el ambiente empleando aproximaciones cuadráticas para ajustar en función de la rigidez y amortiguamiento.
- **Control híbrido de posición/fuerza.** Diseñado para tareas en donde la fuerza y la posición deben ser controladas simultáneamente, este esquema ha sido ampliamente estudiado y existe mucha bibliografía al respecto, por lo cual sólo se mencionarán algunos ejemplos. Raibert y Craig (1981) propusieron este esquema de control caracterizado por la distinción de las componentes de control de posicionamiento de las de control de fuerza en coordenadas cartesianas. McClamroch y Wang (1988) dieron una prueba de estabilidad local de un controlador en lazo cerrado usando retroalimentación lineal para un punto de operación cuando los objetivos de posición y fuerza de contacto son constantes

para el manipulador. Arimoto *et al.* (1993) renuevan el concepto para una clase de tareas donde el efector final toca una superficie suave, proponiendo el método por el principio de ortogonalización que distingue las señales de retroalimentación de posición de las de fuerza, al introducir una matriz de proyección en coordenadas articulares. En general, en este método las posiciones y las fuerzas son especificadas de acuerdo a la formulación de Mason: las direcciones que están restringidas en posición son controladas en fuerza, mientras que las direcciones que son restringidas en fuerza cero son controladas en velocidad o posición. Duffy (1990) ha demostrado que no es correcto considerar el subespacio de la velocidad y el subespacio de la fuerza como ortogonales como lo sugieren Raibert y Craig (1981). Mejor dicho, son las direcciones de posición o velocidad controladas y las direcciones de fuerza controladas las que tienen que ser ortogonales en el sistema de coordenadas de referencia de contacto. En el método de control híbrido paralelo, el robot es controlado por dos lazos de retroalimentación complementarios, uno para la posición y otro para la fuerza. Cada uno tiene su forma de monitoreo y ley de control. Las leyes de control de ambos lazos son sumadas antes de ser enviadas al actuador. Este método comprende el uso de una matriz de selección que permite que cada grado de libertad del manipulador sea controlado por el lazo de control de fuerza o de posición. Cheah y Arimoto (2002) se presenta un controlador de posición/fuerza en el cual se consideran incertidumbres dinámicas adaptable y en se hace uso de una función senoidal para variar el error de seguimiento.

- **Control de fuerza implícito.** El término implícito se refiere a los controladores sin retroalimentación de fuerza. Huang y Tzeng (1989), utilizan una transformación no lineal para cambiar el modelo dinámico de un robot manipulador calculado por la formulación Euler-Lagrange, con el fin de obtener una representación entrada-salida para facilitar el diseño de un observador de fuerza. Liu y Arimoto (1996) proponen un algoritmo basado en la estructura del controlador híbrido obtenido por el principio de ortogonalización demostrando que la fuerza real converge a la deseada exponencialmente. Son realmente pocos los trabajos experimentales que consideran la eliminación de sensores. Queiroz *et al.* (1996) proponen dos controladores de posición/fuerza para robots manipuladores con movimiento restringido considerando el conocimiento exacto del modelo dinámico; en este trabajo se mencionan dos trabajos

previos de Han-Pang Huang sobre controladores de posición/fuerza que no requieren de la medición de la fuerza de contacto ni de la velocidad de las articulaciones. Queiroz *et al.* (1997) presentan un controlador adaptable; donde se obtiene el modelo reducido de un manipulador de 2 grados de libertad, y con base en este modelo dividen el problema en componentes de fuerza y componentes de posición; también proponen un filtro para estimar la velocidad de las articulaciones. Más recientemente Martínez-Rosas y Arteaga-Pérez (2008) proponen un esquema de observación de velocidad y fuerza que no necesita la dinámica del manipulador, pero que trabaja conjuntamente con un controlador que hace uso de la dinámica del robot y de la dinámica de la restricción.

- **Control de fuerza usando observadores por perturbación.** Se basa en generar un observador de la fuerza mediante un modelo paralelo, ya sea mediante un modelo dinámico, un filtro generado a partir de velocidades y/o posición del manipulador; el cual será restado a la salida o entrada para encontrar otras componentes de fuerza y generar la estimación de fuerza de contacto. Algunos trabajos al respecto son los siguientes: Eom *et al.* (1998) presenta un estimador de fuerza basado en un observador por perturbación que se aplica a cada articulación del manipulador para obtener un modelo dinámico equivalente. Otro observador se diseña en donde los parámetros inciertos son ajustados por el método del gradiente. Entonces una fuerza externa se puede estimar por la diferencia entre estos dos observadores y un controlador puede ser usado. Katsura *et al.* (2007) presenta el modelado de sensación de fuerza de contacto y su validación mediante un observador por perturbación. En este se emplea un modelo masa-resorte-amortiguador para representar el mecanismo de contacto y se usa una función de transferencia de sexto orden para representar al sensor de fuerza. García *et al.* (2009) presenta un observador de fuerza basado en la fusión de sensores (acelerómetro 3D, sensor de fuerza y sensores de posición). El método propuesto pretende estimar la fuerza en función de un filtro y generar un método de auto-calibración que es fácilmente integrable en aplicaciones industriales. Kurihara *et al.* (2009) presenta un método por el cual puede estimarse la fuerza de corte efectiva en un proceso de maquinado, y solo requiere que un sensor de fuerza esté instalado en la mesa de trabajo, empleando observadores por disturbio paralelo.

## 1.3. Contribuciones

Existen muchas formas de atacar los problemas que se mencionaron al inicio de este capítulo. En esta tesis se explora y se propone un algoritmo que pueda solucionar factores de fricción, fuerza de contacto, desgaste en los materiales de contacto y minimice los paros en las líneas de producción provocados por estos factores; sin que sea necesario introducir nuevos sensores.

El algoritmo propuesto es robusto a errores de colocación de los objetos con los que va a interactuar; es decir es capaz de completar las tareas asignadas aun cuando existen perturbaciones constantes de posición. El controlador funciona empleando coordenadas cartesianas por lo que es necesario emplear un observador de velocidad y para estimar la fuerza de contacto se hace uso del modelo dinámico del manipulador.

Otra cualidad que hay que destacar del algoritmo de control propuesto es que puede estructurarse como un controlador PID, lo cual facilita su sintonización.

## 1.4. Organización de la tesis

Esta tesis se encuentra organizada en cinco capítulos; el primero de ellos corresponde a la introducción. El Capítulo 2 presenta un panorama de conceptos básicos, necesarios para comprender la teoría desarrollada. En el Capítulo 3 se encuentran las leyes de control propuestas. El Capítulo 4 describe los experimentos realizados, los resultados obtenidos para cada uno de ellos y una discusión acerca de los mismos. Finalmente, el Capítulo 5 menciona las conclusiones obtenidas, junto con algunas propuestas para trabajos futuros.

---

# Conceptos preliminares

En este capítulo se introducirán los conceptos matemáticos e ideas principales para el diseño del algoritmo de control para robots manipuladores rígidos presentado en el Capítulo 3 .

## 2.1. Efectos de la fuerza en las superficies

### 2.1.1. Relación fuerza-torque en las articulaciones

La interacción del manipulador con el entorno produce fuerzas y momentos en el efector final o la herramienta. Sea  $\mathbf{F} = (F_x, F_y, F_z, n_x, n_y, n_z)^T$  el vector de fuerzas y torques en el efector final, expresado en el sistema coordenado de la herramienta.  $F_x, F_y, F_z$  son las componentes de fuerza en el efector final y  $n_x, n_y, n_z$  del torque. Sea  $\boldsymbol{\tau}$  el vector de torques en las articulaciones y  $\delta\mathbf{x}$  el desplazamiento virtual del efector final causado por la fuerza  $\mathbf{F}$ . Finalmente, sea  $\delta\mathbf{q}$  el correspondiente desplazamiento virtual de las articulaciones. Estos desplazamientos están relacionados a través del Jacobiano

$\mathbf{J}(\mathbf{q})$  del manipulador de acuerdo con

$$\delta \mathbf{x} = \mathbf{J}(\mathbf{q}) \delta \mathbf{q} \quad (2.1)$$

El trabajo virtual  $\delta \mathbf{W}$  del sistema es

$$\delta \mathbf{W} = \mathbf{F}^T \delta \mathbf{x} - \boldsymbol{\tau}^T \delta \mathbf{q} \quad (2.2)$$

Sustituyendo (2.1) en (2.2) se obtiene

$$\delta \mathbf{W} = (\mathbf{F}^T \mathbf{J}(\mathbf{q}) - \boldsymbol{\tau}^T) \delta \mathbf{q} \quad (2.3)$$

Nótese que (2.3) es igual a cero si el manipulador está en equilibrio. Puesto que las coordenadas generalizadas  $\mathbf{q}$  son independientes se tiene la igualdad

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{J}(\mathbf{q})^T \mathbf{F} \quad (2.4)$$

En otras palabras las fuerzas del efector final se relacionan con los torques en las articulaciones por la transpuesta del Jacobiano del manipulador, de acuerdo con la ecuación anterior.

### 2.1.2. Restricciones Naturales y Artificiales

El control de tareas de fuerza puede tratarse en términos de restricciones impuestas por la interacción de un robot con su entorno. Un manipulador moviéndose en su espacio de trabajo tridimensional no tiene restricciones de movimiento y, por lo tanto, no existen fuerzas de reacción con su entorno. Un sensor de muñeca en tal caso podría registrar sólo fuerzas de inercia debido a aceleración del efector final.

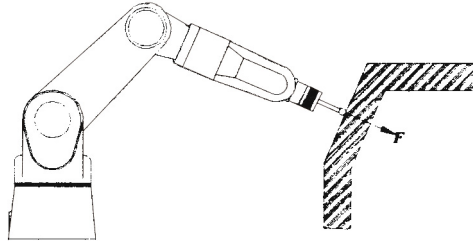


Figura 2.1: Efector final de un robot en contacto con su entorno



Cuando el manipulador tiene contacto con su entorno, como una superficie rígida (Figura 2.1), uno o más grados de libertad de movimiento pueden perderse, por lo que el manipulador no podrá moverse a través de la superficie; sin embargo al mismo tiempo puede ejercer fuerza normal sobre la superficie. Esto es, el movimiento es posible a lo largo de la dirección de los vectores tangentes a la superficie de restricción, mientras que las fuerzas pueden ser ejercidas a lo largo de la dirección de los vectores perpendiculares a ella. De este modo, el control de posición y el de fuerza se excluyen mutuamente y no se puede regular una fuerza y una posición a lo largo de la misma dirección simultáneamente.

Para describir la interacción robot/entorno, sea  $\boldsymbol{\xi} = [\mathbf{v}^T, \mathbf{w}^T]^T$  el vector de velocidades lineales y angulares instantánea del efector final y sea  $\mathbf{F} = [\mathbf{f}^T, \mathbf{n}^T]^T$  el vector de fuerzas y momentos instantáneos que actúan en el efector final. Los vectores  $\boldsymbol{\xi}, \mathbf{F} \in \mathbb{R}^6$  pertenecen a los espacios  $\mathcal{M}$  y  $\mathcal{F}$ , de movimiento y fuerza, respectivamente. A  $\boldsymbol{\xi}$  se le conoce como torsión (*Twist*) y a  $\mathbf{F}$  como tirón (*Wrenches*). En adelante se les llamará simplemente vectores de velocidad y fuerza por simplicidad.

**Definición 2.1.1** 1. Si  $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_6)$  son una base para el espacio vectorial  $\mathcal{M}$ , y  $(\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_6)$  son una base para  $\mathcal{F}$ , se dice que estas bases son *recíprocas* si

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_i^T \mathbf{f}_j &= 0 & \text{si } i \neq j \\ \mathbf{e}_j^T \mathbf{f}_i &= 1 & \text{si } i = j \end{aligned} \quad (2.5)$$

2. Un vector velocidad  $\boldsymbol{\xi} \in \mathcal{M}$  y un vector fuerza  $\mathbf{F} \in \mathcal{F}$  son recíprocos si

$$\boldsymbol{\xi}^T \mathbf{F} = \mathbf{v}^T \mathbf{f} + \mathbf{w}^T \mathbf{n} = 0 \quad (2.6)$$

△

La ventaja del uso de vectores base recíprocos es que el producto  $\boldsymbol{\xi}^T \mathbf{F}$  es invariante con respecto a una transformación lineal de la base de un sistema coordinado recíproco a otro. De esta manera, la *condición de reciprocidad* dada por la ecuación (2.6) es invariante con respecto a cómo se escojan las bases de  $\mathcal{M}$  y  $\mathcal{F}$ .

A continuación, se discutirán las **restricciones naturales** que son definidas usando la condición de reciprocidad de la ecuación (2.6). También se

discutirá la noción de **restricciones artificiales**, que son usadas para definir entradas de referencia para tareas de control de movimiento y fuerza.

Para describir las tareas de control de fuerza se acostumbra introducir un sistema de coordenadas de referencia  $O_c x_c y_c z_c$  (también llamado sistema de coordenadas de restricción), de modo que la tarea que será realizada sea descrita fácilmente. Por ejemplo, en una aplicación para lavar una ventana se puede definir un sistema de coordenadas de referencia en la herramienta con el eje  $z$  a lo largo de la dirección normal de la superficie. La especificación de la tarea entonces sería expresada en función de mantener una fuerza constante en la dirección  $z_c$ , mientras se sigue una trayectoria prescrita en el plano  $x_c - y_c$ . Más específicamente, un sistema de coordenadas de restricción es un sistema coordinado (variante en el tiempo), cuyos ejes coordenados descomponen la tarea en direcciones a lo largo de las cuales los comandos de posición pura o de fuerza pura pueden ser programados.

Con respecto al sistema de coordenadas de restricción coordinado se pueden asociar ciertos conjuntos de restricciones que definen la tarea. Por ejemplo, una restricción de la posición en la dirección de  $z_c$  que se presenta por la presencia de una superficie rígida es una *restricción natural*, mientras que la trayectoria  $x_c - y_c$  necesaria para lavar la ventana es una *restricción artificial*. Si no hay restricciones causadas por el entorno (cuerpos rígidos), una velocidad deseada en la dirección  $z_c$  podría entonces considerarse como una restricción artificial que puede ser mantenida por un sistema de control.

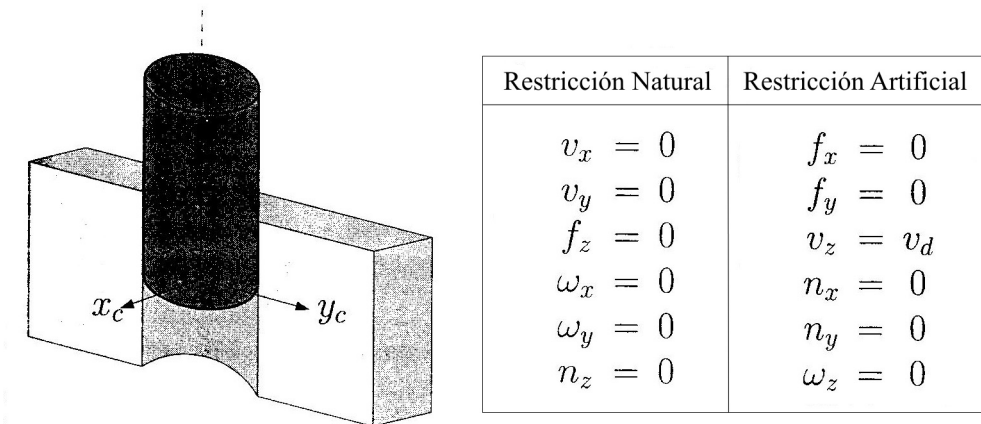


Figura 2.2: Inserción de una barra en un hoyo

La Figura 2.2 muestra una tarea típica con respecto a un sistema restrin-

gido  $O_{c_x c_y c_z}$  (como se muestra en el extremo de la barra), en el cual puede fijarse un sistema de base ortogonal en  $\mathbb{R}^6$  mediante  $\mathcal{M}$  y  $\mathcal{F}$ , en este caso

$$\boldsymbol{\xi}^T \mathbf{F} = \mathbf{v}_x \mathbf{f}_x + \mathbf{v}_y \mathbf{f}_y + \mathbf{v}_z \mathbf{f}_z + \mathbf{w}_x \mathbf{n}_x + \mathbf{w}_y \mathbf{n}_y + \mathbf{w}_z \mathbf{n}_z = \mathbf{0} \quad (2.7)$$

si se asume que la pared del hoyo y la barra son perfectamente rígidos y no hay fricción, se puede mostrar que

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_x = 0 & \quad \mathbf{v}_y = 0 & \quad \mathbf{f}_z = 0 \\ \mathbf{w}_x = 0 & \quad \mathbf{w}_y = 0 & \quad \mathbf{n}_z = 0 \end{aligned} \quad (2.8)$$

y entonces, la condición de reciprocidad  $\boldsymbol{\xi}^T \mathbf{F} = 0$  se satisface. La ecuación anterior es relacionada a la *restricción natural*. Examinando la ecuación (2.7) puede verse que las variables

$$\mathbf{f}_x, \mathbf{f}_y, \mathbf{v}_z, \mathbf{n}_x, \mathbf{n}_y, \mathbf{w}_z \quad (2.9)$$

son desconocidas en el ambiente. En otras palabras, dada la restricción natural de la ecuación (2.8), la condición de reciprocidad  $\boldsymbol{\xi}^T \mathbf{F} = 0$  se mantiene para todos los valores de las variables de la ecuación (2.9). De este modo se puede asignar un valor de referencia arbitrario (llamadas restricciones artificiales), de las variables que tienen que ser forzadas por el sistema de control para llevar a cabo la tarea. Por ejemplo en la tarea de poner la barra en el hoyo (*peg in hole*), podemos definir restricciones artificiales como

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_x = 0 & \quad \mathbf{f}_y = 0 & \quad \mathbf{v}_z = \mathbf{v}_d \\ \mathbf{n}_x = 0 & \quad \mathbf{n}_y = 0 & \quad \mathbf{w}_z = 0 \end{aligned} \quad (2.10)$$

donde  $\mathbf{v}_d$  es la velocidad deseada de inserción para la barra sobre la dirección de  $z$ .

### 2.1.3. Principio de ortogonalización

El principio de ortogonalización está basado en la propiedad física de que cuando se imprime fuerza sobre una superficie rígida (restricción), y al mismo tiempo existe un desplazamiento sobre ella, el vector de velocidad está contenido en el plano tangente al punto de contacto, mientras que la aplicación de la fuerza es perpendicular a él, (véase la Figura 2.3). Para preservar esta propiedad, la restricción es manipulada para obtener dos subespacios ortogonales. Estos subespacios dan origen a dos transformaciones

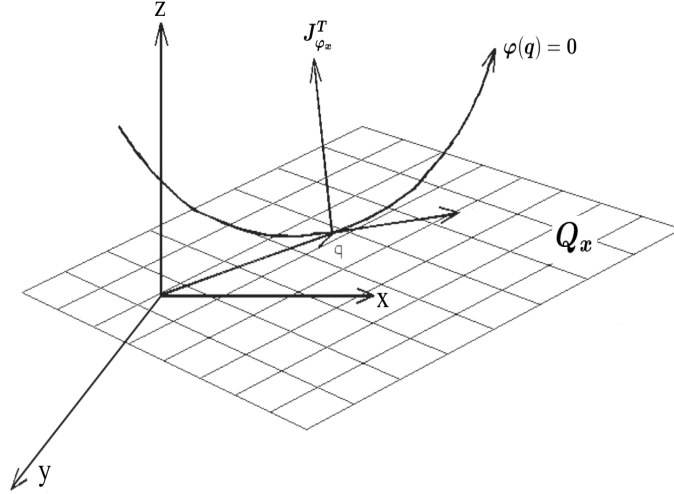


Figura 2.3: Descomposición geométrica en el punto de contacto

que son usadas para obtener una representación conveniente que permita eliminar términos cruzados en el análisis de estabilidad, de manera que puedan formularse controladores sencillos con pruebas de estabilidad simples, y con propiedades de convergencia de posición y fuerza. Estas transformaciones se utilizan para hacer la proyección ortogonal del vector  $\mathbf{x}$  sobre un espacio de dimensión  $(n - 1)$  (espacio tangente) ortogonal al vector Jacobiano  $\mathbf{J}_{\varphi\mathbf{x}}^T$ ; el plano tangente puede ser representado en forma matricial por

$$\mathbf{Q}_x = \mathbf{I} - \mathbf{J}_{\varphi\mathbf{x}}^T (\mathbf{J}_{\varphi\mathbf{x}} \mathbf{J}_{\varphi\mathbf{x}}^T)^{-1} \mathbf{J}_{\varphi\mathbf{x}} \quad (2.11)$$

donde  $\mathbf{I} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es una matriz identidad. Mientras el manipulador se mueva sobre la superficie se cumple  $\mathbf{Q}_x \dot{\mathbf{x}} = \dot{\mathbf{x}}$ .

#### 2.1.4. Cuaternión unitario

Los cuaterniones son un álgebra desarrollada por Sir William Rowan Hamilton en 1843. Originalmente, fue definida como la relación de velocidad angular (cociente) entre pares de vectores en  $\mathbb{R}^3$ . Algebraicamente, el cuaternión es una extensión de los números complejos. Su interpretación geométrica es equivalente a la parametrización de Euler en mecanismos.

Los cuaterniones han demostrado su utilidad para representar rotaciones.

En términos de los ejes de Euler  $\mathbf{k} = [k_x, k_y, k_z]^T$  y un ángulo  $\theta$  (Parametrización eje/ángulo) el cuaternión puede expresarse como

$$\eta = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \quad (2.12)$$

$$\epsilon_x = k_x \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \quad (2.13)$$

$$\epsilon_y = k_y \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \quad (2.14)$$

$$\epsilon_z = k_z \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \quad (2.15)$$

Formalmente, un cuaternión es un número de la forma

$$\boldsymbol{\nu} = \eta + \epsilon_x \mathbf{i} + \epsilon_y \mathbf{j} + \epsilon_z \mathbf{k} \quad (2.16)$$

donde  $\eta$  es la componente escalar de  $\boldsymbol{\nu}$  y  $\boldsymbol{\epsilon} = [\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z]$  es el vector de componentes. Una notación abreviada es  $\boldsymbol{\Gamma} = (\eta, \boldsymbol{\epsilon})$  con  $\eta \in \mathbb{R}$ ,  $\boldsymbol{\epsilon} \in \mathbb{R}^3$ . El conjunto de cuaterniones  $\boldsymbol{\Gamma}$  es un vector de cuarta dimensión, y la forma en que se representa una multiplicación entre cuaterniones es mediante la notación punto " $\cdot$ ". La multiplicación es distributiva y asociativa, pero no conmutativa. El conjugado del cuaternión  $\boldsymbol{\Gamma} = (\eta, \boldsymbol{\epsilon})$  de  $\mathbf{R}$  que representa a la matriz  $\mathbf{R}^{-1}$  está dado por

$$\boldsymbol{\Gamma}^{-1} = (\eta, -\boldsymbol{\epsilon}) \quad (2.17)$$

El producto entre dos cuaterniones tiene una forma simple en términos del producto cruz y el producto interno entre los vectores en  $\mathbb{R}^3$ . Si  $\boldsymbol{\Gamma}_1 = (\eta_1, \boldsymbol{\epsilon}_1)$  y  $\boldsymbol{\Gamma}_2 = (\eta_2, \boldsymbol{\epsilon}_2)$  son cuaterniones, donde  $\eta_1, \eta_2 \in \mathbb{R}$  son las partes escalares de  $\boldsymbol{\Gamma}_1$  y  $\boldsymbol{\Gamma}_2$ , y  $\boldsymbol{\epsilon}_1, \boldsymbol{\epsilon}_2 \in \mathbb{R}^3$  son las partes vectoriales, puede mostrarse algebraicamente que el producto de dos cuaterniones satisface

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Gamma}_1 \cdot \boldsymbol{\Gamma}_2 &= (\eta_1 \eta_2 - (\boldsymbol{\epsilon}_1) \cdot (\boldsymbol{\epsilon}_2), \quad \eta_1 \boldsymbol{\epsilon}_2 + \eta_2 \boldsymbol{\epsilon}_1 + \boldsymbol{\epsilon}_1 \times \boldsymbol{\epsilon}_2) \\ &= (\eta_1 \eta_2 - \boldsymbol{\epsilon}_1 \cdot \boldsymbol{\epsilon}_2, \quad \eta_1 \boldsymbol{\epsilon}_2 + \eta_2 \boldsymbol{\epsilon}_1 + \mathcal{S}(\boldsymbol{\epsilon}_1) \boldsymbol{\epsilon}_2) \end{aligned} \quad (2.18)$$

donde  $\mathcal{S}(\cdot)$  es el operador que desempeña la tarea del producto cruz entre dos vectores de  $3 \times 1$ . Dado  $\boldsymbol{\epsilon} = [\epsilon_x \quad \epsilon_y \quad \epsilon_z]^T$ ,  $\mathcal{S}(\boldsymbol{\epsilon})$  toma la forma

$$\mathcal{S}(\boldsymbol{\epsilon}) = \begin{bmatrix} 0 & -\epsilon_z & \epsilon_y \\ \epsilon_z & 0 & -\epsilon_x \\ -\epsilon_y & \epsilon_x & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.19)$$

La parametrización vía cuaternión obedece la siguiente restricción

$$\eta^2 + \epsilon_x^2 + \epsilon_y^2 + \epsilon_z^2 = 1 \quad (2.20)$$

o en forma simplificada

$$\eta^2 + \boldsymbol{\epsilon}^T \boldsymbol{\epsilon} = 1 \quad (2.21)$$

La restricción (2.21) da al cuaternión el nombre unitario. Al igual que en la parametrización eje/ángulo, existen dos expresiones que describen la misma orientación  $(\eta, \boldsymbol{\epsilon})$  y  $(-\eta, -\boldsymbol{\epsilon})$ . Pero si el ángulo de rotación es restringido a un rango  $\theta \in [-\pi, \pi]$ , entonces el escalar  $\eta$  nunca será negativo y la representación del cuaternión es única; con lo cual se resuelve el problema de no-unicidad. Así mismo el cuaternión está libre de singularidades (Siciliano y Villani 1999).

La matriz de rotación correspondiente a un cuaternión dado y puede obtenerse mediante

$$\mathbf{R}(\eta, \boldsymbol{\epsilon}) = (\eta^2 - \boldsymbol{\epsilon}^T \boldsymbol{\epsilon})\mathbf{I} + 2\boldsymbol{\epsilon}\boldsymbol{\epsilon}^T + 2\eta\mathbf{S}(\boldsymbol{\epsilon}). \quad (2.22)$$

Por otro lado, el cuaternión correspondiente a una matriz de rotación  $\mathbf{R}$  ortonormal donde sus componentes  $r_{ij}$  con  $i = 1, 2, 3$ . indica la columna y  $j = 1, 2, 3$ . indica el renglon, en conjunto se refiere a cada uno de los componentes que integran la matriz de rotación  $\mathbf{R}$ ; el cuaternión puede obtenerse mediante

$$\eta = \frac{1}{2}\sqrt{r_{11} + r_{22} + r_{33} + 1} \quad (2.23)$$

$$\boldsymbol{\epsilon} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \text{sgn}(r_{32} - r_{23})\sqrt{r_{11} - r_{22} - r_{33} + 1} \\ \text{sgn}(r_{13} - r_{31})\sqrt{r_{22} - r_{33} - r_{11} + 1} \\ \text{sgn}(r_{21} - r_{12})\sqrt{r_{33} - r_{11} - r_{22} + 1} \end{bmatrix} \quad (2.24)$$

Supóngase que el sistema  $\boldsymbol{\Sigma}_1$  rota instantáneamente con una velocidad angular  $\mathbf{w}$  sobre  $\boldsymbol{\Sigma}_0$ . Entonces, el cuaternión unitario  $\boldsymbol{\Sigma} = (\eta, \boldsymbol{\epsilon})$  que representa  $\boldsymbol{\Sigma}_1$  relativo a  $\boldsymbol{\Sigma}_0$  evoluciona en el tiempo conforme a la siguiente ecuación diferencial (Joseph y Yuan 1988)

$$\begin{bmatrix} \dot{\eta} \\ \dot{\boldsymbol{\epsilon}} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{w}^T \\ \mathbf{w} & \mathbf{S}(\mathbf{w}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta \\ \boldsymbol{\epsilon} \end{bmatrix}. \quad (2.25)$$

Es decir, la relación entre la derivada temporal del cuaternión y la velocidad angular de un cuerpo se establece mediante la llamada regla de propagación

$$\dot{\eta} = -\frac{1}{2}\boldsymbol{\epsilon}^T \boldsymbol{w} \quad (2.26)$$

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}} = \frac{1}{2}\boldsymbol{E}(\eta, \boldsymbol{\epsilon})\boldsymbol{w}, \quad (2.27)$$

donde

$$\boldsymbol{E}(\eta, \boldsymbol{\epsilon}) = \eta \boldsymbol{I} - \boldsymbol{S}(\boldsymbol{\epsilon}) \quad (2.28)$$

---

# Leyes de control

## 3.1. Modelo dinámico del robot

Considérese un robot rígido de  $n$ -grados de libertad (DOF), en contacto con su entorno, representado por una restricción de dimensión  $m$ . La dinámica del sistema está dada por (Parra-Vega *et al.* 2001):

$$\mathbf{H}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{D}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) = \boldsymbol{\tau} - \mathbf{J}_{\varphi}^{\text{T}}(\mathbf{q})\boldsymbol{\lambda}, \quad (3.1)$$

donde  $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$  es el vector de coordenadas articulares generalizadas,  $\mathbf{H}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es la matriz de inercia definida simétrica positiva,  $\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^n$  es el vector de Coriolis y centrífugas,  $\mathbf{g}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^n$  es el vector de fuerzas gravitacionales,  $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es la matriz diagonal semidefinida positiva de los coeficientes de fricción viscosa de las articulaciones,  $\boldsymbol{\tau} \in \mathbb{R}^n$  es el vector de torque que actúa sobre las articulaciones, y  $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^m$  es el vector de multiplicadores de Lagrange (representación de la fuerza aplicada sobre un punto de contacto).  $\mathbf{J}_{\varphi}(\mathbf{q}) = \nabla\varphi(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ <sup>1</sup> es asumida de rango completo en este trabajo.  $\nabla\varphi(\mathbf{q})$  denota el gradiente del vector de superficie  $\varphi \in \mathbb{R}^m$  que

---

<sup>1</sup>esto implica que siempre puede mapearse cada punto del espacio de aplicación de fuerza a un equivalente en coordenadas articulares



mapea un vector al plano normal del plano tangente que surge en el punto de contacto descrito por:

$$\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{q}) = \mathbf{0}. \quad (3.2)$$

Nótese que la ecuación (3.2) significa que las restricciones consideradas son homogéneas (Parra-Vega *et al.* 2001). El valor propio máximo (mínimo) de una matriz se denota por  $\lambda_{\text{máx}}(\cdot)$  ( $\lambda_{\text{mín}}(\cdot)$ ). La norma de un vector  $\mathbf{x}$  de dimensión  $n \times 1$  está definida por  $\|\mathbf{x}\| \triangleq \sqrt{\mathbf{x}^T \mathbf{x}}$ , mientras que la norma de una matriz  $\mathbf{A}$  de dimensión  $m \times n$  es la correspondiente norma inducida  $\|\mathbf{A}\| \triangleq \sqrt{\lambda_{\text{máx}}(\mathbf{A}^T \mathbf{A})}$ . Tomando en cuenta que se consideran articulaciones de revolución, las siguientes propiedades pueden ser establecidas (Gudiño Lau *et al.* 2004):

**Propiedad 3.1.1** *Se satisface  $\lambda_h \|\mathbf{x}\|^2 \leq \mathbf{x}^T \mathbf{H}(\mathbf{q}) \mathbf{x} \leq \lambda_H \|\mathbf{x}\|^2 \quad \forall \mathbf{q}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  y  $0 < \lambda_h \leq \lambda_H < \infty$ , con  $\lambda_h \triangleq \min_{\forall \mathbf{q} \in \mathbb{R}^n} \lambda_{\text{mín}}(\mathbf{H}(\mathbf{q}))$ ,  $\lambda_H \triangleq \max_{\forall \mathbf{q} \in \mathbb{R}^n} \lambda_{\text{máx}}(\mathbf{H}(\mathbf{q}))$ .*  $\triangle$

**Propiedad 3.1.2** *Mediante el uso de símbolos de Christoffel (de la primera clase) para calcular  $\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ ,  $\dot{\mathbf{H}}(\mathbf{q}) - 2\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  antisimétrica.*  $\triangle$

**Propiedad 3.1.3** *Se satisface que  $\|\mathbf{C}(\mathbf{q}, \mathbf{x})\| \leq k_c \|\mathbf{x}\|$  con  $0 < k_c < \infty$ ,  $\forall \mathbf{x}, \mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$ .*  $\triangle$

**Propiedad 3.1.4** *Con una definición apropiada de los parámetros del modelo del robot, se satisface que*

$$\begin{aligned} \mathbf{H}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{D}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) &= \boldsymbol{\tau} - \mathbf{J}_{\varphi}^T(\mathbf{q})\boldsymbol{\lambda} \\ &= \mathbf{Y}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}})\boldsymbol{\varphi} - \mathbf{J}_{\varphi}^T(\mathbf{q})\boldsymbol{\lambda}, \end{aligned} \quad (3.3)$$

donde  $\mathbf{Y}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}) \in \mathbb{R}^{n \times p}$  es el regresor y  $\boldsymbol{\varphi} \in \mathbb{R}^p$  es un vector de parámetros constante.  $\triangle$

Considérese a continuación la relación:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{a}} \\ \dot{\boldsymbol{\phi}} \end{bmatrix} = \mathbf{J}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}, \quad (3.4)$$

donde  $\mathbf{J}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es el Jacobiano analítico o geométrico,  $\boldsymbol{\phi} \in \mathbb{R}^\nu$  es una representación mínima de la orientación del efector final para el primer caso, ó  $\boldsymbol{\omega} = \dot{\boldsymbol{\phi}} \in \mathbb{R}^\nu$  es la velocidad angular del efector final para el segundo caso, mientras que  $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^{(n-\nu)}$  es la posición del efector final. En este caso  $n = 6$  y  $\nu = 3$ . Por simplicidad se definirá

$$\boldsymbol{\phi} \triangleq \int_0^t \boldsymbol{\omega} d\vartheta \quad (3.5)$$

al usar el Jacobiano geométrico con condición inicial cero. Es importante hacer notar que  ${}^0\boldsymbol{\phi}_n$  no tiene ningún significado físico, pero es útil en el empleo del cuaternión unitario. Además, se cumplen las siguientes relaciones, siempre y cuando el robot no se encuentre en una singularidad

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{J}^{-1}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{x}}, \quad (3.6)$$

$$\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{J}^{-1}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{x}} + \frac{d}{dt}(\mathbf{J}^{-1}(\mathbf{q}))\dot{\mathbf{x}}, \quad (3.7)$$

**Suposición 3.1.1** *El robot no se encuentra en una singularidad.* △

La meta es diseñar una ley de control en la que la trayectoria deseada pueda ser especificada directamente en las coordenadas del espacio de trabajo, es decir  $\mathbf{x} = [x \ y \ z \ \phi_x \ \phi_y \ \phi_z]^T$ ; por lo cual es necesario reescribir la restricción (3.2) en coordenadas cartesianas, *i. e.*

$$\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}, \quad (3.8)$$

se tiene

$$\mathbf{J}_{\boldsymbol{\varphi}\mathbf{x}} = \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}, \quad (3.9)$$

significa que

$$\mathbf{J}_\varphi(\mathbf{q}) = \frac{\partial \varphi(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{q}} = \mathbf{J}_{\varphi\mathbf{x}} \mathbf{J}(\mathbf{q}). \quad (3.10)$$

Si se pre-multiplica por  $\mathbf{J}^{-\text{T}} = (\mathbf{J}^{-1}(\mathbf{q}))^{\text{T}}$  y se emplea  $\mathbf{J}_\varphi^{\text{T}}(\mathbf{q}) = \mathbf{J}^{\text{T}}(\mathbf{q}) \mathbf{J}_{\varphi\mathbf{x}}^{\text{T}}$  se obtiene

$$\begin{aligned} \mathbf{J}^{-\text{T}}(\mathbf{q})\boldsymbol{\tau} - \mathbf{J}_{\varphi\mathbf{x}}^{\text{T}}\boldsymbol{\lambda} &= \mathbf{J}^{-\text{T}}(\mathbf{q})\mathbf{H}(\mathbf{q})\mathbf{J}^{-1}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{J}^{-\text{T}}(\mathbf{q})\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\mathbf{J}^{-1}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{x}} \\ &+ \mathbf{J}^{-\text{T}}(\mathbf{q})\mathbf{H}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{J}}^{-1}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{J}^{-\text{T}}(\mathbf{q})\mathbf{D}\mathbf{J}^{-1}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{J}^{-\text{T}}(\mathbf{q})\mathbf{g}(\mathbf{q}) \end{aligned} \quad (3.11)$$

donde  $\dot{\mathbf{J}}^{-1}(\mathbf{q}) = \frac{d}{dt}(\mathbf{J}^{-1}(\mathbf{q}))$ . Se puede reescribir (3.11) como

$$\mathbf{H}_c\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{C}_c\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{D}_c\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{g}_c = \mathbf{f} - \mathbf{J}_{\varphi\mathbf{x}}^{\text{T}}\boldsymbol{\lambda}, \quad (3.12)$$

con

$$\mathbf{H}_c = \mathbf{J}^{-\text{T}}(\mathbf{q})\mathbf{H}(\mathbf{q})\mathbf{J}^{-1}(\mathbf{q}) \quad (3.13)$$

$$\mathbf{C}_c = \mathbf{J}^{-\text{T}}(\mathbf{q}) \left[ \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\mathbf{J}^{-1}(\mathbf{q}) + \mathbf{H}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{J}}^{-1}(\mathbf{q}) \right] \quad (3.14)$$

$$\mathbf{D}_c = \mathbf{J}^{-\text{T}}(\mathbf{q})\mathbf{D}\mathbf{J}^{-1}(\mathbf{q}) \quad (3.15)$$

$$\mathbf{g}_c = \mathbf{J}^{-\text{T}}(\mathbf{q})\mathbf{g}(\mathbf{q}) \quad (3.16)$$

$$\mathbf{f} = \mathbf{J}^{-\text{T}}(\mathbf{q})\boldsymbol{\tau}, \quad (3.17)$$

**Propiedad 3.1.5** *El vector  $\dot{\mathbf{x}}$  puede ser escrito como:*

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Q}_x(\mathbf{x})\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{P}_x(\mathbf{x})\dot{\mathbf{x}}, \quad (3.18)$$

con  $\mathbf{Q}_x(\mathbf{x}) \triangleq (\mathbf{I}_{n \times n} - \mathbf{P}_x(\mathbf{x}))$ ,  $\mathbf{P}_x(\mathbf{x}) \triangleq \mathbf{J}_{\varphi\mathbf{x}}^+ \mathbf{J}_{\varphi\mathbf{x}}$  y  $\mathbf{J}_{\varphi\mathbf{x}}^+ \triangleq \mathbf{J}_{\varphi\mathbf{x}}^{\text{T}} (\mathbf{J}_{\varphi\mathbf{x}} \mathbf{J}_{\varphi\mathbf{x}}^{\text{T}})^{-1} \in \mathbb{R}^{n \times m}$  de la pseudoinversa de Penrose y  $\mathbf{Q}_x \in \mathbb{R}^{n \times n}$  satisface, que el rango  $(\mathbf{Q}_x) = n - m$ . Estas dos matrices son ortogonales, i. e.  $\mathbf{Q}_x \mathbf{P}_x = \mathbf{0}$  (y de hecho,  $\mathbf{Q}_x \mathbf{J}_{\varphi\mathbf{x}}^{\text{T}} = \mathbf{0}$  y  $\mathbf{J}_{\varphi\mathbf{x}} \mathbf{Q}_x = \mathbf{0}$ ) como se vio en la Sección (2.1.3). Alternativamente, (3.18) puede escribirse como:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Q}_x(\mathbf{x})\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{J}_{\varphi\mathbf{x}}^+ \dot{\mathbf{p}}_c, \quad (3.19)$$

Además, de la restricción (3.8) se puede observar que si está se cumple

$$\dot{\mathbf{p}}_c = \mathbf{J}_{\varphi\mathbf{x}} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{0}. \quad (3.20)$$

$$(3.21)$$

donde  $\dot{\mathbf{p}}_c = \mathbf{J}_{\varphi\mathbf{x}} \dot{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^m$  se conoce como la restricción de velocidad y  $\mathbf{p}_c = \varphi(\mathbf{x})$  es llamada restricción de posición.  $\triangle$

**Observación 3.1.1** *Suponga que una trayectoria acotada cumple con la restricción (3.8) para  $\mathbf{x}$  y  $\mathbf{x}_d$ . En este caso el error de seguimiento puede definirse como*

$$\begin{aligned}\Delta \mathbf{x} &= \mathbf{x} - \mathbf{x}_d \\ &= \mathbf{Q}_x(\mathbf{x})\mathbf{x} + \mathbf{P}_x(\mathbf{x})\dot{\mathbf{x}} - \mathbf{Q}_x(\mathbf{x}_d)\mathbf{x}_d - \mathbf{P}_x(\mathbf{x}_d)\dot{\mathbf{x}}_d.\end{aligned}\quad (3.22)$$

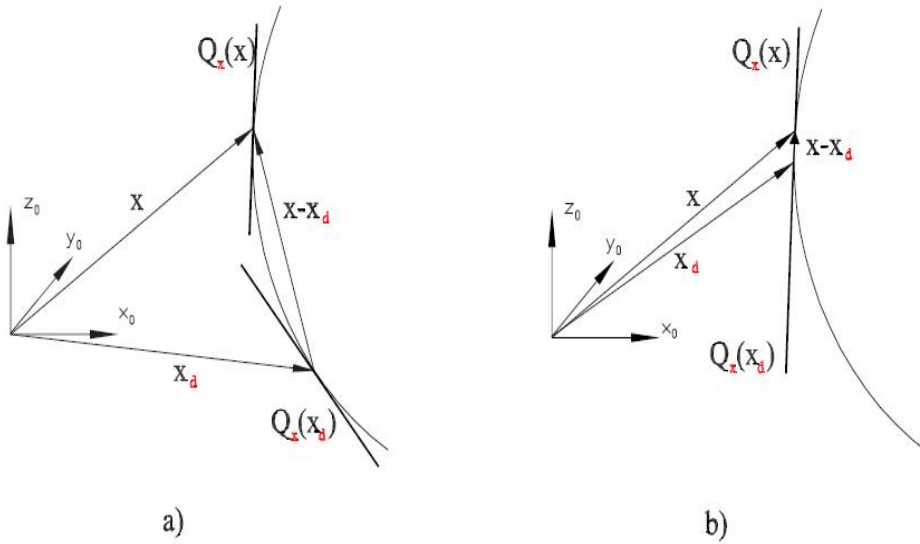


Figura 3.1: Plano tangente a la superficie en la posición actual ( $\mathbf{x}$ ) y en la posición deseada ( $\mathbf{x}_d$ ). a) Error grande, b) Error pequeño.

En la Figura 3.1 el inciso (a) muestra el caso en el que el error de seguimiento es grande y el inciso (b) en el que es pequeño. Para el segundo caso puede apreciarse que

$$\Delta \mathbf{x} \approx \mathbf{Q}_x(\mathbf{x})(\mathbf{x} - \mathbf{x}_d) = \mathbf{Q}_x(\mathbf{x})\Delta \mathbf{x}, \quad (3.23)$$

porque  $\Delta \mathbf{x}$  tiende a ser tangente a la superficie conforme el error disminuye. Notese que mientras más pequeño sea el error la relación (3.23) se mantiene en función de la suavidad de la superficie, y empleando la Propiedad 3.1.5, puede decirse

$$\dot{\mathbf{x}}_d \approx \mathbf{Q}_x(\mathbf{x})\dot{\mathbf{x}}_d \Rightarrow \Delta \dot{\mathbf{x}} \approx \mathbf{Q}_x(\mathbf{x})(\dot{\mathbf{x}} - \dot{\mathbf{x}}_d) = \mathbf{Q}_x(\mathbf{x})\Delta \dot{\mathbf{x}}. \quad (3.24)$$

Puede realizarse un análisis de estabilidad local para una región suficientemente pequeña alrededor de  $\Delta \mathbf{x} = \mathbf{0}$ .  $\triangle$

Mediante un ejemplo se mostrara que la condición "suficientemente pequeña" no necesariamente significa  $\Delta \mathbf{x} \approx \mathbf{0}$ .

**Ejemplo 3.1.1** Considere un robot manipulador en contacto con una superficie esférica

$$\varphi(\mathbf{x}) = \frac{(x-h)^2}{2r} + \frac{(y-k)^2}{2r} + \frac{(z-l)^2}{2r} - \frac{r}{2} = 0, \quad (3.25)$$

con ,  $h = 0,6m$ ,  $k = 0m$ ,  $l = 0,55m$  and  $r = 0,2m$ . suponga

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0,4677 \\ 0 \\ 0,7 \end{bmatrix} \text{ m}, \quad (3.26)$$

mientras

$$\mathbf{x}_d = \begin{bmatrix} 0,4624 \\ 0,007 \\ 0,695 \end{bmatrix} \text{ m}, \quad (3.27)$$

y ambos satisfacen (3.25). Entonces, se tiene que

$$\mathbf{Q}_x(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 0,5625 & 0 & 0,4961 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,4961 & 0 & 0,4375 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (3.28)$$

y

$$\mathbf{P}_x(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 0,4375 & 0 & -0,4961 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0,4961 & 0 & 0,5625 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.29)$$

el error se calcula como

$$\Delta \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 5,3 \\ -7,0 \\ 5,0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ mm}, \quad (3.30)$$

lo cual significa que  $\|\Delta \mathbf{x}\| = 10,0892 \text{ mm}$ . Sin embargo,

$$\mathbf{Q}_x(\mathbf{x})\Delta \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 5,4 \\ -7,0 \\ 4,8 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ mm}, \quad (3.31)$$

y

$$\mathbf{P}_x(\mathbf{x})\Delta \mathbf{x} = \begin{bmatrix} -0,1738 \\ 0 \\ 0,1970 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ mm}. \quad (3.32)$$

Si calculamos las normas respectivas  $\|\mathbf{Q}_x(\mathbf{x})\Delta \mathbf{x}\| = 10,0858 \text{ mm}$ , mientras  $\|\mathbf{P}_x(\mathbf{x})\Delta \mathbf{x}\| = 0,2627 \text{ mm}$ , i. e. el componente de  $\Delta \mathbf{x}$  que se encuentra en el espacio expandido por  $\mathbf{Q}_x(\mathbf{q})$  es aproximadamente 38,4 más grande que el componente del espacio expandido por  $\mathbf{P}_x(\mathbf{x})$ , lo cual justifica el Hecho 3.1.1.  $\triangle$

**Observación 3.1.2** La observación 3.1.1 sugiere el diseño de leyes de control con análisis de estabilidad estrictamente local alrededor del origen  $\|\Delta \mathbf{x}\| = \|\Delta \dot{\mathbf{x}}\| = \mathbf{0}$ . El tamaño de la región de análisis, depende de la superficie de contacto. Mientras mejor sea descrita la superficie, mayor será la región en la que se pueda trabajar.  $\triangle$

## 3.2. Diseño de un controlador-observador de fuerza

En esta sección, se aborda el problema de seguimiento de posición, estimación de velocidad y el diseño de un observador de fuerza. Cabe hacer notar que el análisis de estabilidad para este diseño es local y depende de una región para la cual se satisface la Hecho (3.1.1). El diseño del observador de velocidad se realiza en las coordenadas del espacio de trabajo. Un estimado de  $\mathbf{x}$  esta dado por  $\hat{\mathbf{x}}$ , y se puede definir el error de observación como

$$\mathbf{z} \triangleq \mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}. \quad (3.33)$$

También se define una variable de error auxiliar como

$$\bar{\mathbf{x}} \triangleq \hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}_d. \quad (3.34)$$

Similarmente al observador presentado en (Arteaga-Pérez *et al.* 2006) en esta tesis se propone el siguiente observador de velocidad

$$\hat{\mathbf{x}} = \int_0^t \dot{\hat{\mathbf{x}}} d\vartheta \quad (3.35)$$

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{Q}_x (\dot{\mathbf{x}}_d - \Lambda_x \bar{\mathbf{x}}) + \mathbf{K}_d \Lambda_z \int_0^t \mathbf{z}(\vartheta) d\vartheta + \Lambda_z \mathbf{z} + \mathbf{K}_d \mathbf{z}, \quad (3.36)$$

donde las ganancias  $\Lambda_z, \mathbf{K}_d \in \mathbb{R}^{n \times n}$  son matrices diagonales positivas definidas.

**Observación 3.2.1** *Las condiciones iniciales del observador (3.35)–(3.36) tienen que ser elegidas para satisfacer la Observación (3.1.1), donde la variable estimada puede considerarse de la misma forma en que se empleo la trayectoria deseada, es decir,*

$$\begin{aligned} \mathbf{z} &= \mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}} \\ &= \mathbf{Q}_x(\mathbf{x})\mathbf{x} + \mathbf{P}_x(\mathbf{x})\mathbf{x} - \mathbf{Q}_x(\hat{\mathbf{x}})\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{P}_x(\hat{\mathbf{x}})\hat{\mathbf{x}}. \end{aligned} \quad (3.37)$$

En este caso

$$\mathbf{z} \approx \mathbf{Q}_x \mathbf{z} \quad (3.38)$$

$$\dot{\mathbf{z}} \approx \mathbf{Q}_x \dot{\mathbf{z}} \quad (3.39)$$

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}} \approx \mathbf{Q}_x \dot{\hat{\mathbf{x}}}. \quad (3.40)$$

Nótese que matemáticamente siempre es posible iniciar  $\hat{\mathbf{x}}(0) = \mathbf{x}(0)$  y suponer que la velocidad inicial es cero de tal forma que sea posible satisfacer (3.38)-(3.40). Entonces, si la condición inicial del error  $\Delta \mathbf{x}$  en (3.37) es lo suficientemente pequeña, se tiene también que

$$\bar{\mathbf{x}} \approx \mathbf{Q}_x \bar{\mathbf{x}} \quad (3.41)$$

$$\frac{d}{dt} \bar{\mathbf{x}} \approx \mathbf{Q}_x \frac{d}{dt} \bar{\mathbf{x}}. \quad (3.42)$$

Por lo tanto, es necesario mostrar que la ley de control puede mantener (3.38)-(3.42) para todo tiempo.  $\triangle$

El error de fuerza puede definirse como

$$\Delta \boldsymbol{\lambda} \triangleq \boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\lambda}_d, \quad (3.43)$$

donde  $\boldsymbol{\lambda}_d \in \mathbb{R}^m$  es una fuerza deseada acotada con al menos la primera derivada acotada. Como la medición de fuerza no está disponible, un estimado  $\hat{\boldsymbol{\lambda}}$  tiene que usarse. El error de estimación de fuerza puede definirse como

$$\Delta \tilde{\boldsymbol{\lambda}} \triangleq \boldsymbol{\lambda} - \hat{\boldsymbol{\lambda}}. \quad (3.44)$$

En función de (3.43) y (3.44) se define

$$\Delta \bar{\boldsymbol{\lambda}} \triangleq \hat{\boldsymbol{\lambda}} - \boldsymbol{\lambda}_d \quad (3.45)$$

$$\Delta \bar{\boldsymbol{\rho}} = \int_0^t \Delta \bar{\boldsymbol{\lambda}} d\vartheta. \quad (3.46)$$

Una variable deslizante puede definirse en la forma

$$\mathbf{s} \triangleq \mathbf{Q}_x \left( \frac{d}{dt} \bar{\mathbf{x}} + \boldsymbol{\Lambda}_x \bar{\mathbf{x}} \right) + \mathbf{J}_{\varphi_x}^+ \boldsymbol{\xi}_1 \Delta \bar{\boldsymbol{\rho}} \triangleq \mathbf{s}_p + \mathbf{s}_f, \quad (3.47)$$



donde  $\Lambda_x \in \mathbb{R}^{n \times n}$  y  $\xi_1 \in \mathbb{R}^{m \times m}$  son matrices diagonales definidas positivas. Note que  $\mathbf{s}_p$  y  $\mathbf{s}_f$  son vectores ortogonales, los cuales tienen que ser cero si  $\mathbf{s}$  es cero. En este caso, si  $\mathbf{J}_{\varphi x}^T$  y  $\mathbf{J}_{\varphi x}^+$  se asumen de rango completo, se tiene

$$\mathbf{s} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{s}_f = \mathbf{0} \Rightarrow \Delta \bar{\rho} = \mathbf{0}, \quad (3.48)$$

porque  $\xi_1$  es una matriz definida positiva.

Por otro lado, suponiendo que  $\mathbf{Q}_x \Lambda_x = \Lambda_x \mathbf{Q}_x$  (esto puede ser fácilmente conseguido si se hace  $\Lambda_x = k_x \mathbf{I}$ , con  $k_x > 0$ ), entonces  $\mathbf{s}_p$  en (3.47) puede ser reescrita como

$$\mathbf{s}_p = \mathbf{Q}_x \left( \frac{d}{dt} \bar{\mathbf{x}} + \Lambda_x \bar{\mathbf{x}} \right) \approx \frac{d}{dt} \bar{\mathbf{x}} + \Lambda_x \bar{\mathbf{x}}, \quad (3.49)$$

siempre que se satisfaga el Observación 3.1.1. De (3.49) se puede concluir que  $\bar{\mathbf{x}}$  y  $\frac{d}{dt} \bar{\mathbf{x}}$  tienden a cero si  $\mathbf{s}_p \rightarrow 0$ , *i. e.* si  $\mathbf{s} \rightarrow 0$ . Considérense las siguientes definiciones auxiliares

$$\dot{\mathbf{x}}_r \triangleq \mathbf{Q}_x (\dot{\mathbf{x}}_d - \Lambda_x \bar{\mathbf{x}}) - \mathbf{J}_{\varphi x}^+ \xi_1 \Delta \bar{\rho} + \mathbf{s}_d - \mathbf{K}_\gamma \boldsymbol{\sigma}, \quad (3.50)$$

donde  $\mathbf{K}_\gamma \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es una matriz diagonal definida positiva  $\boldsymbol{\sigma} \in \mathbb{R}^n$ , con

$$\mathbf{s}_d = \mathbf{s}(0) e^{-k_1 t} \quad (3.51)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \int_0^t \{ \mathbf{K}_\beta \mathbf{s}_1(\vartheta) + \text{sign}(\mathbf{s}_1(\vartheta)) \} d\vartheta \quad (3.52)$$

$$\mathbf{s}_1 = \mathbf{s} - \mathbf{s}_d, \quad (3.53)$$

donde  $\boldsymbol{\sigma}(0) = \mathbf{0}$ ,  $\mathbf{K}_\beta \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es una matriz diagonal definida positiva,  $k_1$  es una constante positiva y  $\text{sign}(\mathbf{s}_1) \triangleq [\text{sign}(s_{11}) \ \cdots \ \text{sign}(s_{1n})]^T$ , con  $s_{1i}$  elementos de  $\mathbf{s}_1$ ,  $i = 1, \dots, n$ .  $\mathbf{s}_d \in \mathbb{R}^n$  puede ser fijada en cero sin afectar el análisis de estabilidad, porque se usa sólo para mejorar el desempeño transitorio. Para calcular la dinámica de lazo cerrado, puede definirse

$$\mathbf{s}_x \triangleq \dot{\mathbf{x}} - \dot{\mathbf{x}}_r = \mathbf{Q}_x (\Delta \dot{\mathbf{x}} + \Lambda_x \bar{\mathbf{x}}) + \mathbf{J}_{\varphi x}^+ \xi_1 \Delta \bar{\rho} - \mathbf{s}_d + \mathbf{K}_\gamma \boldsymbol{\sigma}. \quad (3.54)$$

Entonces se puede reescribir la dinámica del robot (3.12) como sigue

$$\mathbf{H}_c \dot{\mathbf{s}}_x + \mathbf{C}_c \mathbf{s}_x + \mathbf{D}_c \mathbf{s}_x = \mathbf{f} - \mathbf{J}_{\varphi x}^T \boldsymbol{\lambda} - \mathbf{y}_a, \quad (3.55)$$

donde

$$\mathbf{y}_a \triangleq \mathbf{H}_c \ddot{\mathbf{x}}_r + \mathbf{C}_c \dot{\mathbf{x}}_r + \mathbf{D}_c \dot{\mathbf{x}}_r + \mathbf{g}_c. \quad (3.56)$$

Se pueden definir otras variables auxiliares como

$$\dot{\mathbf{x}}_o \triangleq \dot{\mathbf{x}} - \Lambda_z \mathbf{z} \quad (3.57)$$

$$\mathbf{r} \triangleq \dot{\mathbf{x}} - \dot{\mathbf{x}}_o = \dot{\mathbf{z}} + \Lambda_z \mathbf{z} \quad (3.58)$$

$$\mathbf{s}_o \triangleq \dot{\mathbf{x}}_o - \dot{\mathbf{x}}_r. \quad (3.59)$$

La ley de control propuesta es

$$\mathbf{f} = -\mathbf{K}_p \mathbf{s}_o + \mathbf{J}_{\varphi_x}^T (\lambda_d - \xi_2 \Delta \bar{\rho} - \xi_3 \Delta \bar{\lambda}), \quad (3.60)$$

con  $\mathbf{K}_p \in \mathbb{R}^{n \times n}$  y  $\xi_2, \xi_3 \in \mathbb{R}^{m \times m}$  matrices diagonales positivas definidas que satisfacen  $\xi_2 > \mathbf{0}$  y  $\xi_3 \geq \mathbf{0}$ . Para implementar la ley de control se emplea

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{J}^T(\mathbf{q}) \mathbf{f}. \quad (3.61)$$

Puesto que  $\mathbf{s}_o = \mathbf{s}_x - \mathbf{r}$  si se sustituye (3.60) en (3.55), se obtiene

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_c \dot{\mathbf{s}}_x + \mathbf{C}_c \mathbf{s}_x + \mathbf{K}_{DP} \mathbf{s}_x \\ = \mathbf{K}_p \mathbf{r} - \mathbf{J}_{\varphi_x}^T (\Delta \lambda + \xi_2 \Delta \bar{\rho} + \xi_3 \Delta \bar{\lambda}) - \mathbf{y}_a, \end{aligned} \quad (3.62)$$

donde  $\mathbf{K}_{DP} \triangleq \mathbf{D}_c + \mathbf{K}_p$ . La ecuación (3.62) describe la dinámica del error de seguimiento de posición. Para describir la dinámica del error de observación de acuerdo con (3.33) y (3.36) se obtiene

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{z}} = \dot{\mathbf{x}} - \dot{\hat{\mathbf{x}}} &= \mathbf{Q}_x \dot{\mathbf{x}} - \mathbf{Q}_x (\dot{\mathbf{x}}_d - \Lambda_x \bar{\mathbf{x}}) \\ &\quad - \mathbf{K}_d \Lambda_z \int_0^t \mathbf{z}(\vartheta) d\vartheta - \Lambda_z \mathbf{z} - \mathbf{K}_d \mathbf{z}, \\ \dot{\mathbf{z}} &= \mathbf{Q}_x (\Delta \dot{\mathbf{x}} + \Lambda_x \bar{\mathbf{x}}) - \mathbf{K}_d \Lambda_z \int_0^t \mathbf{z}(\vartheta) d\vartheta - \Lambda_z \mathbf{z} - \mathbf{K}_d \mathbf{z}. \end{aligned} \quad (3.63)$$

Empleando (3.58) y calculando la derivada de (?). La dinámica del error de observación de velocidad está dada por

$$\dot{\mathbf{r}} + \mathbf{K}_d \mathbf{r} = \mathbf{Q}_x \left( \Delta \ddot{\mathbf{x}} + \Lambda_x \frac{d}{dt} \bar{\mathbf{x}} \right) + \dot{\mathbf{Q}}_x (\Delta \dot{\mathbf{x}} + \Lambda_x \bar{\mathbf{x}}). \quad (3.64)$$

Ahora bien, para diseñar un observador de fuerza se debe considerar que si  $\varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ , entonces

$$\ddot{\varphi}(\mathbf{x}) = \mathbf{J}_{\varphi\mathbf{x}}\ddot{\mathbf{x}} + \dot{\mathbf{J}}_{\varphi\mathbf{x}}\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{0}, \quad (3.65)$$

o por (3.12) se tiene

$$\mathbf{J}_{\varphi\mathbf{x}}\mathbf{H}_c^{-1}(\mathbf{f} - \mathbf{C}_c\dot{\mathbf{x}} - \mathbf{D}_c\dot{\mathbf{x}} - \mathbf{g}_c - \mathbf{J}_{\varphi\mathbf{x}}^T\boldsymbol{\lambda}) + \dot{\mathbf{J}}_{\varphi\mathbf{x}}\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{0}. \quad (3.66)$$

De (3.66) se obtiene

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\lambda} &= (\mathbf{J}_{\varphi\mathbf{x}}\mathbf{H}_c^{-1}\mathbf{J}_{\varphi\mathbf{x}}^T)^{-1} \cdot \\ &\quad \left( \mathbf{J}_{\varphi\mathbf{x}}\mathbf{H}_c^{-1}(\mathbf{f} - \mathbf{C}_c\dot{\mathbf{x}} - \mathbf{D}_c\dot{\mathbf{x}} - \mathbf{g}_c) + \dot{\mathbf{J}}_{\varphi\mathbf{x}}\dot{\mathbf{x}} \right). \end{aligned} \quad (3.67)$$

Un estimado de la fuerza es dado por

$$\begin{aligned} \hat{\boldsymbol{\lambda}} &= (\mathbf{J}_{\varphi\mathbf{x}}\mathbf{H}_c^{-1}\mathbf{J}_{\varphi\mathbf{x}}^T)^{-1} \cdot \\ &\quad \left( \mathbf{J}_{\varphi\mathbf{x}}\mathbf{H}_c^{-1}(\mathbf{f} - \hat{\mathbf{C}}_c\dot{\hat{\mathbf{x}}} - \mathbf{D}_c\dot{\hat{\mathbf{x}}} - \mathbf{g}_c) + \dot{\mathbf{J}}_{\varphi\mathbf{x}}\dot{\hat{\mathbf{x}}} \right), \end{aligned} \quad (3.68)$$

donde  $\hat{\mathbf{C}}_c = \mathbf{C}_c(\mathbf{x}, \dot{\hat{\mathbf{x}}})$  y  $\dot{\mathbf{J}}_{\varphi\mathbf{x}} = \dot{\mathbf{J}}_{\varphi\mathbf{x}}(\mathbf{x}, \dot{\hat{\mathbf{x}}})$ . Notese que  $\mathbf{C}_c$  depende de  $\dot{\hat{\mathbf{x}}}$ ,

$$\dot{\hat{\mathbf{q}}} = \mathbf{J}^{-1}(\mathbf{q})\dot{\hat{\mathbf{x}}}. \quad (3.69)$$

Sustituyendo (3.45) y (3.60) se obtiene

$$\hat{\boldsymbol{\lambda}} = \boldsymbol{\lambda}_d - \boldsymbol{\xi}_2\Delta\bar{\boldsymbol{\rho}} - \boldsymbol{\xi}_3(\hat{\boldsymbol{\lambda}} - \boldsymbol{\lambda}_d) - (\mathbf{J}_{\varphi\mathbf{x}}\mathbf{H}_c^{-1}\mathbf{J}_{\varphi\mathbf{x}}^T)^{-1}\mathbf{f}_x \quad (3.70)$$

$$\mathbf{f}_x \triangleq \mathbf{J}_{\varphi\mathbf{x}}\mathbf{H}_c^{-1}(\mathbf{K}_p\mathbf{s}_o + \hat{\mathbf{C}}_c\dot{\hat{\mathbf{x}}} + \mathbf{D}_c\dot{\hat{\mathbf{x}}} + \mathbf{g}_c) - \dot{\mathbf{J}}_{\varphi\mathbf{x}}\dot{\hat{\mathbf{x}}}, \quad (3.71)$$

el estimador de fuerza puede implementarse como:

$$\hat{\boldsymbol{\lambda}} = \boldsymbol{\lambda}_d - (\mathbf{I} + \boldsymbol{\xi}_3)^{-1} \left[ \boldsymbol{\xi}_2\Delta\bar{\boldsymbol{\rho}} + (\mathbf{J}_{\varphi\mathbf{x}}\mathbf{H}_c^{-1}\mathbf{J}_{\varphi\mathbf{x}}^T)^{-1}\mathbf{f}_x \right]. \quad (3.72)$$

Finalmente, el estimador de fuerza propuesto es

$$\hat{\boldsymbol{\lambda}} = \boldsymbol{\lambda}_d - (\mathbf{I} + \boldsymbol{\xi}_4)^{-1} \left[ \boldsymbol{\xi}_2\Delta\bar{\boldsymbol{\rho}} + (\mathbf{J}_{\varphi\mathbf{x}}\mathbf{H}_c^{-1}\mathbf{J}_{\varphi\mathbf{x}}^T)^{-1}\mathbf{f}_x \right]. \quad (3.73)$$

donde  $\xi_4 \in \mathbb{R}^{m \times m}$  es una matriz diagonal positiva definida. Considérese a continuación la siguiente definición de estados para la dinámica del sistema (3.46), (3.62) y (3.64)

$$\mathbf{y} \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{s}_x \\ \mathbf{r} \\ \Delta \bar{\rho} \end{bmatrix}. \quad (3.74)$$

**Teorema 3.2.1** *Considérese una trayectoria continua y acotada  $\mathbf{x}_d$ , que satisface la restricción (3.8), escogida lejos de cualquier singularidad con primera y segunda derivadas acotadas. Considérese también una fuerza deseada acotada  $\lambda_d$ , con al menos primera derivada acotada. Defínase una región suficientemente pequeña como*

$$\mathcal{D} \triangleq \{ \mathbf{y} \in \mathbb{R}^{(2n+m)} \mid \|\mathbf{y}\| \leq y_{\text{máx}} \}, \quad (3.75)$$

donde el Observación 3.1.1 se satisface con  $y_{\text{máx}} > 0$ . Entonces, para el observador de velocidad (3.35)–(3.36), la ley de control (3.60) y el estimador de fuerza (3.73) en lazo cerrado con el sistema (3.12) una combinación apropiada de ganancias  $k_1$ ,  $\mathbf{K}_d$ ,  $\Lambda_x$ ,  $\Lambda_z$ ,  $\mathbf{K}_\beta$ ,  $\mathbf{K}_\gamma$ ,  $\mathbf{K}_p$ ,  $\xi_1$ ,  $\xi_2$  y  $\xi_3$  puede ser encontrada dependiendo de la condición inicial (B.13), la trayectoria deseada y los parámetros del modelo del robot tal que  $\|\mathbf{y}\| \leq y_{\text{máx}} \forall t$ . Adicionalmente, cualquier variable en la dinámica del sistema dado por (3.46), (3.62) y (3.64) está acotada y los errores de seguimiento y observación ( $\Delta \mathbf{x}, \Delta \dot{\mathbf{x}}, \mathbf{z}, \dot{\mathbf{z}}, \Delta \lambda, \Delta \tilde{\lambda}, \Delta \bar{\lambda}$ ) tienden a cero.  $\triangle$

La demostración del Teorema 3.2.1 se presenta en el Apéndice B.

Cabe hacer notar que para poder realizar control de fuerza es deseable que la orientación sea perpendicular a la superficie de contacto. Si se emplea el Jacobiano analítico entonces puede emplearse

$$\mathbf{x}_d = \begin{bmatrix} {}^0 \mathbf{p}_d \\ {}^0 \phi_d \end{bmatrix}, \quad (3.76)$$

donde  ${}^0 \mathbf{p}_d$  es la posición deseada del efector final, y  ${}^0 \phi_d$  representa la orientación deseada correspondiente. Sin embargo, si el Jacobiano geométrico es

utilizado, entonces el cuaternión unitario es la mejor opción (Siciliano y Villani 1999); si este es el caso se puede definir

$$\dot{\mathbf{x}}_d = \begin{bmatrix} {}^0\dot{\mathbf{p}}_d \\ {}^0\boldsymbol{\omega}_d - k_\varepsilon {}^0\mathbf{R}_d {}^d\boldsymbol{\varepsilon}_n \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{x}_d = \int_0^t \dot{\mathbf{x}}_d d\vartheta, \quad (3.77)$$

donde  $k_\varepsilon$  es una ganancia escalar positiva,  ${}^0\boldsymbol{\omega}_d \in \mathbb{R}^3$  es la velocidad angular deseada, y  ${}^0\mathbf{R}_d \in \mathbb{R}^3$  es la matriz de rotación deseada (representación de la orientación deseada).  ${}^d\boldsymbol{\varepsilon}_n \in \mathbb{R}^3$  es la parte vectorial del cuaternión asociada a la matriz de rotación dada por  ${}^d\mathbf{R}_n = {}^0\mathbf{R}_d^T {}^0\mathbf{R}_n$ , donde  ${}^0\mathbf{R}_n \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  es la matriz de rotación entre el sistema de coordenadas del efector final y el sistema de coordenadas de la base. Nótese que la posición deseada  ${}^0\mathbf{p}_d$  tiene que ser escogida para satisfacer (3.8) y que la orientación deseada  ${}^0\mathbf{R}_d$  tiene que escogerse perpendicular a la restricción  $\boldsymbol{\varphi}({}^0\mathbf{x}_d) = \mathbf{0}$ . Entonces, si se satisfacen las condiciones del Teorema 3.2.1, se puede garantizar que  $\Delta\mathbf{x}, \Delta\dot{\mathbf{x}}$  tienden a cero. Claramente, el error de posición no requiere un análisis adicional, pero el análisis de estabilidad de la orientación puede llevarse a cabo como se muestra en Siciliano y Villani (1999) para concluir que  ${}^0\mathbf{R}_n \rightarrow {}^0\mathbf{R}_d$  y  $\Delta\boldsymbol{\omega}_n = {}^0\boldsymbol{\omega}_n - {}^0\boldsymbol{\omega}_d \rightarrow \mathbf{0}$ .

---

# Resultados experimentales y simulaciones

En este capítulo se presentan los resultados obtenidos al implementar el algoritmo de control propuesto en el Capítulo 3. Los experimentos se realizaron en el brazo manipulador A465 de la empresa *CRS Robotics*, que cuenta con 6 articulaciones. El robot cuenta con transductores de posición ópticos (encoders) en cada articulación, así como con un sensor de fuerza de la marca *JR3*, ubicado en el efector final, el cual será empleado exclusivamente para comparar los resultados del observador de fuerza. Todo el sistema está conectado a una computadora por medio de una interfaz basada en un sistema cRIO de la empresa *National Instruments*. En el Apéndice A se proporciona una breve descripción del equipo experimental. A continuación se presentan los resultados mediante las gráficas de los errores en coordenadas cartesianas, de observación, de orientación y de fuerza.

## 4.1. Descripción de experimentos

La realización de experimentos consiste de dos pasos principales; el primero es fijar parámetros de trayectorias y opciones de control y el segundo es la sintonización de ganancias del controlador. Se realizaron experimentos en

una superficie plana y en una esférica en donde la trayectoria especificada es una línea recta de un punto **A** a un punto **B**, como se muestra en la Figura 4.1.

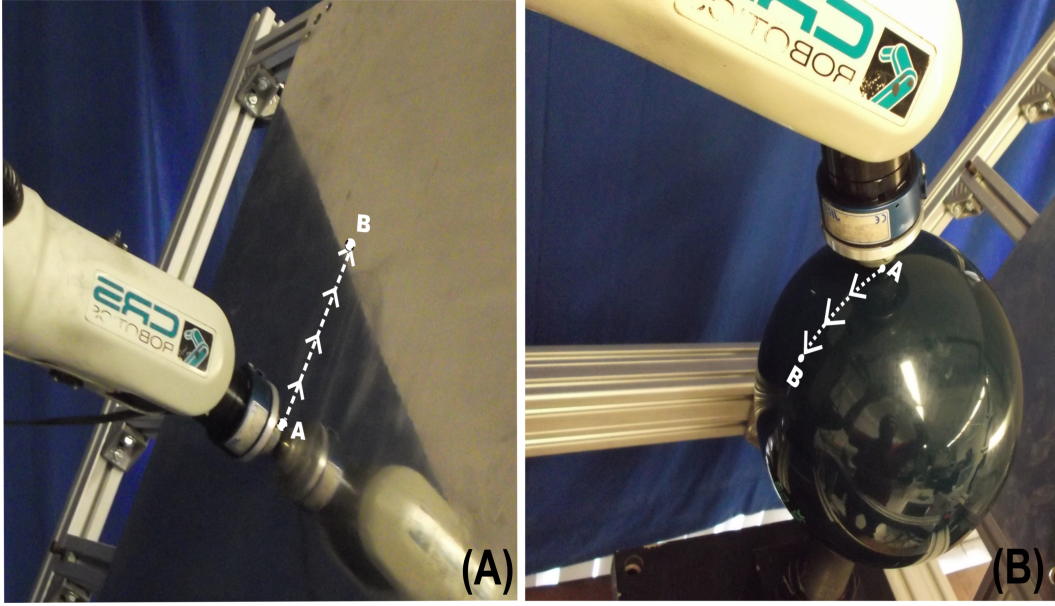


Figura 4.1: Gráficas de posición x-z de trayectoria deseada. (a) Superficie plana. (b) Superficie esférica.

Cada articulación es actuada por un motor de corriente directa (DC). Para implementar la ley de control, el observador de fuerza y el observador de velocidad, la dinámica de los motores debe tomarse en cuenta. Del modelo del robot (3.1) se tiene

$$\begin{aligned} (\mathbf{H}(\mathbf{q}) + \mathbf{D}_n^{-1} \mathbf{D}_j) \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}} + (\mathbf{D} + \mathbf{D}_n^{-1} \mathbf{D}_f) \dot{\mathbf{q}} \\ + \mathbf{g}(\mathbf{q}) = \mathbf{D}_n^{-1} \mathbf{D}_K \mathbf{v} - \mathbf{J}_\varphi^T \boldsymbol{\lambda}. \end{aligned} \quad (4.1)$$

$\mathbf{D}_n, \mathbf{D}_j, \mathbf{D}_f, \mathbf{D}_K \in \mathbb{R}^{n \times n}$  son matrices diagonales dadas por

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_n &= \text{diag} \left[ \frac{1}{r_1^2} \quad \cdots \quad \frac{1}{r_6^2} \right] \\ \mathbf{D}_j &= \text{diag} [J_{m1} \quad \cdots \quad J_{m6}] \\ \mathbf{D}_f &= \text{diag} \left[ f_{m1} + \frac{K_{a1} K_{b1}}{R_{a1}} \quad \cdots \quad f_{m6} + \frac{K_{a6} K_{b6}}{R_{a6}} \right] \\ \mathbf{D}_K &= \text{diag} \left[ \frac{K_{a1}}{R_{a1} r_1} \quad \cdots \quad \frac{K_{a6}}{R_{a6} r_6} \right]. \end{aligned}$$

Para  $i = 1, \dots, 6$ ,  $r_i$  es el radio del engranaje,  $J_{mi}$  es la inercia del rotor,  $f_{mi}$  es el coeficiente de fricción del rotor,  $K_{ai}$  es la constante de torque,  $R_{ai}$  es la resistencia de armadura y  $K_{bi}$  es la constante de fuerza electromotriz. Los parámetros del modelo pueden encontrarse en Martínez-Rosas (2002).  $\mathbf{v}$  es el vector de voltajes de entrada. Para implementar la ley de control (3.60) se programa

$$\begin{aligned} \mathbf{v} = & - \mathbf{J}^T(\mathbf{q})\mathbf{K}_p\mathbf{s}_o \\ & + \mathbf{D}_K^{-1}\mathbf{D}_n\mathbf{J}^T(\mathbf{q})\mathbf{J}_{\varphi_x}^T(\lambda_d - \xi_2\Delta\bar{\rho} - \xi_3\Delta\bar{\rho}), \end{aligned} \quad (4.2)$$

mientras que para el observador de fuerza (3.73), el término  $\mathbf{f}_x$  en (3.71) tiene que ser modificado por

$$\mathbf{f}_x = \mathbf{J}_{\varphi_x}\mathbf{H}_c^{-1}\left(\mathbf{J}^{-T}\mathbf{D}_n^{-1}\mathbf{D}_K\mathbf{J}^T\mathbf{K}_p\mathbf{s}_o + \widehat{\mathbf{C}}_c\dot{\hat{\mathbf{x}}} + \mathbf{D}_c\dot{\hat{\mathbf{x}}} + \mathbf{g}_c\right) - \dot{\hat{\mathbf{J}}}_{\varphi_x}\dot{\hat{\mathbf{x}}}.$$

**Observación 4.1.1** *Nótese que el primer término de la ecuación (4.2) debería ser multiplicado por  $\mathbf{D}_K^{-1}\mathbf{D}_n$  también. Se decidió no hacerlo debido a que la matriz  $\mathbf{D}_K^{-1}\mathbf{D}_n$  es constante y puede ser absorbida por la ganancia  $\mathbf{K}_p$ , además sirve para mostrar la robustez del esquema de control. En el caso particular de que se realicen movimientos no restringidos casi se recupera el esquema propuesto en Arteaga-Pérez et al. (2006), excepto por el hecho de que  $\mathbf{J}^T(\mathbf{q})$  se usa en lugar de  $\mathbf{J}^{-1}(\mathbf{q})$ . Nótese, que en movimiento restringido la implementación del estimador de fuerza es más compleja porque el término  $\mathbf{J}^{-T}(\mathbf{q})\mathbf{D}_n^{-1}\mathbf{D}_K\mathbf{J}^T(\mathbf{q})$  tiene que ser considerado, sin tomar en cuenta los otros parámetros de la dinámica de motores que pueden ser interpretados como dinámica desconocida del sistema.  $\triangle$*

#### 4.1.1. Ganancias de controlador

El primer paso para realizar los experimentos es definir las ganancias para el controlador-observador de movimiento restringido. Los valores utilizados fueron los mismos para todos los experimentos. La sintonización se tomando en cuenta algunas prioridades como

1. Debido a la semejanza con el esquema propuesto en Arteaga-Pérez et al. (2006), se utilizó como base el método propuesto en el artículo tomando en cuenta un esquema PID.



Primero considérese la ganancia  $\mathbf{K}_d$  del observador de velocidad, la cual puede ser escogida muy grande debido a (B.29). Para las demás variables se propone la siguiente aproximación. Puesto que el Teorema 3.2.1 se satisface, el error de observación tiende a cero. Para un determinado tiempo  $t \leq \infty$ , se puede considerar que  $\mathbf{z} = 0$  y  $\dot{\mathbf{z}} = 0$ , lo cual significa que  $\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{x}$  y  $\dot{\hat{\mathbf{x}}} = \dot{\mathbf{x}}$ . En este caso se puede reescribir la ley de control como:

$$\begin{aligned} \mathbf{f} = & -\mathbf{J}^T \mathbf{K}_p \left( \underbrace{Q_x \Lambda_x \Delta \mathbf{x}}_P + \underbrace{K_\gamma \sigma}_I + \underbrace{Q_x \Delta \dot{\mathbf{x}}}_D \right) \\ & + \mathbf{J}^T(\mathbf{q}) \mathbf{J}_{\varphi x}^T \lambda_d - \mathbf{J}^T(\mathbf{q}) \mathbf{J}_{\varphi x}^T (\xi_1 + \xi_2) \Delta \bar{\rho} - \mathbf{J}^T(\mathbf{q}) \mathbf{J}_{\varphi x}^T \xi_3 \Delta \bar{\rho} \end{aligned} \quad (4.3)$$

De (4.3) puede concluirse que las ganancias  $\mathbf{K}_p$  y  $\mathbf{K}_\gamma$  son pequeñas en comparación con  $\Lambda_x$  que puede ser escogida grande. De la ecuación (3.47) se puede decir que  $\xi_1$  debe ser pequeña ya que la variable  $\mathbf{s}$  juega un papel importante en la función *signo* de la ecuación (3.52), lo que puede causar vibraciones si llegase a tomar valores grandes.  $\xi_2$  es ajustada a prueba y error.

2. La ganancia  $k_e$  del cuaternión debe ser menor que 1 para generar una respuesta suave en la velocidad angular de referencia, pero lo suficientemente grande para llevarla a cero.
3.  $\mathbf{s}_d = \mathbf{s}(0)e^{-k_1 t}$  hace que  $\mathbf{s}_1(0) = \mathbf{s}(0) - \mathbf{s}_d = \mathbf{0}$  en  $t = 0$ , lo cual mejora la respuesta transitoria debido a que se tiene una señal suave en  $\mathbf{s}_1$ . Esta se define dependiendo la respuesta transitoria deseada.
4. Como un caso particular se puede elegir  $\Lambda_x = \Lambda_z$ , y después puede emplearse un método de prueba y error para mejorar el desempeño.

Con base en los puntos anteriores, los valores numéricos de ganancias elegidas para realizar todos los experimentos en este trabajo son las siguientes:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_p &= \text{diag} [20, 20, 20, 3, 3, 3] \\ \Lambda_x &= \text{diag} [42.5, 42.5, 42.5, 12.75, 12.75, 12.75] \\ \mathbf{K}_\gamma &= \text{diag} [0.125, 0.125, 0.125, 0.0225, 0.0225, 0.0225] \\ \mathbf{K}_\beta &= \text{diag} [0.75, 0.75, 0.75, 0.15, 0.15, 0.15] \\ \xi_1 &= 0.1, \quad \xi_2 = 10, \quad \xi_3 = 2.7, \quad \xi_4 = 108, \quad k_1 = 20.01, \quad k_e = 0.1, \end{aligned} \quad (4.4)$$

Las ganancias para el observador de velocidad son las siguientes:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_d &= \text{diag} [10, 10, 10, 0,315, 0,315, 0,315] \\ \boldsymbol{\lambda}_z &= \text{diag} [25, 25, 25, 0,54, 0,54, 0,54] \end{aligned} \quad (4.5)$$

Cabe hacer notar que el tiempo de muestreo fue de 5 milisegundos.

#### 4.1.2. Parámetros de trayectoria y superficie

En esta etapa del experimento se definen los parámetros de superficie, junto con la duración y características del experimento. El parámetro más complicado de definir para la superficie es el ángulo de inclinación, que es utilizado para orientar el efector final del robot de forma perpendicular a la superficie y para calcular la pendiente  $m$  utilizada en la generación de trayectorias de posición deseada. Debido a que la ley de control propuesta parte del hecho de conocer perfectamente la restricción física, es estrictamente necesario definir los parámetros de la restricción de la forma más precisa posible. Nótese que la orientación inicial tiene que ser perpendicular a la superficie y que la velocidad angular debe ser  ${}^0\boldsymbol{w}_d = \mathbf{0}$  debido a que la orientación deseada es constante.

A continuación se presenta un ejemplo comparativo entre las mediciones físicas tomadas para un experimento y los valores reales utilizados como parámetros de superficie para el controlador. Los parámetros medidos de superficie son los siguientes

$$Dz = 0.13[m], \quad Dx = 0.30[m], \quad Ix = 0.0[m], \quad Ang \simeq 60.5^\circ, \quad (4.6)$$

y los valores reales de la superficie son

$$Dz = 0.0115[m], \quad Dx = 0.27[m], \quad Ix = 0.0[m], \quad Ang = 59.0^\circ \quad (4.7)$$

El error es causado por desconocimiento de la superficie. En la Figura 4.2 se muestra la diferencia de posición resultante entre la superficie y los parámetros establecidos.

Se consideraron algunas opciones de trayectoria en fuerza, mientras que la trayectoria a seguir de posición fue la misma. En términos de fuerza se usaron las siguientes opciones:

- Fuerza *senoidal*

$$F_d = 30 + 10 \sin(0.5t - t_p)[N] \quad (4.8)$$

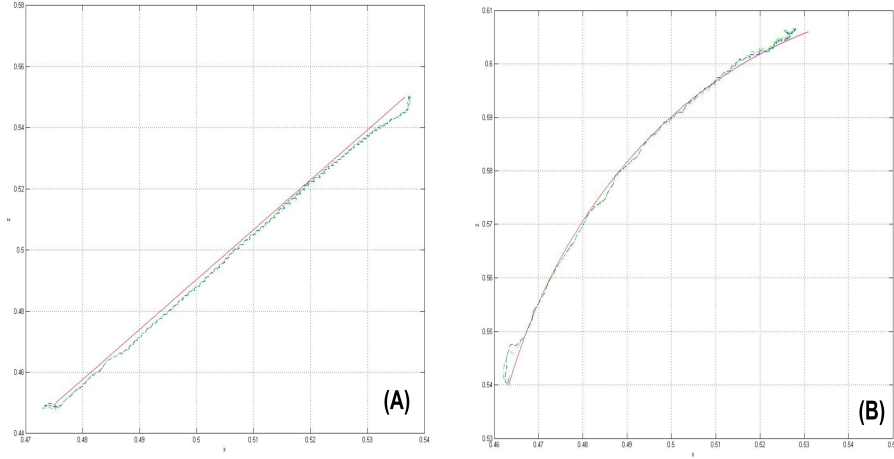


Figura 4.2: Gráfica de la trayectoria deseada (rojo) y la trayectoria real (verde). (a) Superficie plana. (b) Superficie esférica.

donde  $t_p$  es el tiempo que tarda el robot en realizar la parte de la trayectoria comprendida en el espacio x-z.

- Fuerza *Rampa-Constante-Senoidal (RCS)*

$$F_d = \begin{cases} 20 + 2t[N] & t < \frac{t_p}{3} \\ 40[N] & \frac{t_p}{3} \leq t \leq \frac{2t_p}{3} \\ 40 + 20 \sin(1.5708t - t_p)[N] & t > \frac{2t_p}{3} \end{cases} \quad (4.9)$$

## 4.2. Experimentos

Se realizaron experimentos en dos tipos de superficies, una esférica y otra plana, con diferentes velocidades como se describe a continuación

- *Superficie plana*
  - **Experimento 1.** Trayectoria rápida (5 segundos).
  - **Experimento 2.** Trayectoria lenta (30 segundos).
- *Superficie esférica*

- **Experimento 3.** Trayectoria rápida (5 segundos).
- **Experimento 4.** Trayectoria lenta (30 segundos).

La trayectoria rápida se considera de 5 segundos, sin embargo se grafica el comportamiento del sistema hasta los 10 segundos para que se pueda apreciar mejor el desempeño del controlador. La trayectoria lenta se realiza en 30 segundos, y también se grafican los 10 segundos posteriores.

Debido a que los resultados de seguimiento de la matriz de rotación son similares en todos los experimentos, solamente se mostrará el error de seguimiento de orientación en el tercer experimento ya que es la tarea más complicada de todas, es decir, el movimiento esférico en 5 segundos. También se presentan las gráficas de la señal de control (voltaje aplicado a las articulaciones).

#### 4.2.1. Experimentos con superficie plana

Los resultados del **Experimento 1**, realizados con una superficie plana con trayectoria rápida se muestran de la siguiente manera: en la Figura 4.3, se muestra el error de posición, en donde se aprecia que el error transitorio es grande pero converge rápidamente hasta llegar a un valor estable de menos de 1 mm. En la Figura 4.4 el error de observación de posición se presenta en el cual el error es mucho menor al de seguimiento. En la Figura 4.5 se muestra el error de estimación de fuerza, es interesante mostrar que el estimador de fuerza parte de un punto alejado de la superficie lo cual indica que  $\delta \mathbf{x} < \mathbf{0}$  como puede apreciarse en la Figura 4.3; notese como a partir de los 5.5 segundos el estimador de fuerza se vuelve más lento, esto es debido a que el error de observación de posición disminuye.

Los resultados del **Experimento 2**, realizados con una superficie plana con trayectoria lenta se muestran de la siguiente manera: en la Figura 4.6, el error de posición se muestra, el cual es menor que en el caso anterior debido a que es más lenta la trayectoria. En la Figura 4.7 el error de observación de la posición es presentado, cabe señalar que el tiempo que tarda el observador es semejante al del primer experimento, debido a que su diseño depende exclusivamente de la estimación de posición y de la trayectoria deseada. En la Figura 4.8, el error de estimación de fuerza se aprecia más homogéneo, pero con los mismos rasgos que en el caso anterior.

### 4.2.2. Experimentos con Superficie esférica

Los resultados del **Experimento 3**, realizados con una superficie esférica con trayectoria rápida se muestran de la siguiente manera: en la Figura 4.9, se muestra el error de posición en donde puede apreciarse la complejidad de la tarea y la robustez del controlador a una mala descripción de su ambiente de trabajo. En la Figura 4.10 se aprecia el error de observación de la posición, el cual sigue siendo pequeño y con aproximadamente el mismo tiempo de convergencia que en los experimentos anteriores. En la Figura 4.11 la matriz de rotación deseada y la matriz de rotación real son presentadas solo para mostrar que en la tarea más compleja presentada en esta tesis el desempeño de la parametrización basada en cuaternión unitario es muy eficiente. En la Figura 4.12, el error de estimación de fuerza es presentado, en donde puede apreciarse que mediante la sintonización de ganancias se dio prioridad al control de fuerza antes que al de posición que es precisamente lo que se buscaba en el algoritmo; y por último en la Figura 4.13 el vector de voltaje aplicado a los *drivers* de los motores (señal de control) con la finalidad de mostrar que durante la tarea más exigente de las pruebas presentadas el uso de la energía es poca.

Los resultados del **Experimento 4**, realizados con una superficie esférica con trayectoria lenta se muestran de la siguiente manera: en la Figura 4.14, el error de posición, en la Figura 4.15 el error de observación de la posición y en la Figura 4.16, el error de estimación de fuerza. cabe hacer notar que el lazo que controla la posición funciona mucho mejor a velocidades lentas, pero el lazo de control de fuerza es más eficiente cuando se emplean altas velocidades; lo que intenta mostrar el experimento 4 es que es posible llegar a un balance entre ambos, mantener la robustez a errores de caracterización de superficie de contacto y tener un mejor desempeño del controlador pensando en que no causara paros en la producción.

### 4.2.3. Discusión

En ambos experimentos de superficie plana se observó un seguimiento asintótico de las trayectorias con errores en estado estable inferiores a 2mm, como se puede ver en las Figuras 4.3 y 4.6. En el caso de los experimentos con la superficie esférica el error es inferior a 2mm en las coordenadas  $y$  y  $z$ , la única excepción es en la coordenada  $x$ , debido a que la esfera no fue caracterizada correctamente. Es necesario notar que este error no puede ser compensado por el controlador ya que se está usando el principio de ortogonalización. Cabe mencionar que la calibración de la superficie se realizó con herramientas cuya escala lineal mínima es de 1mm, y aproximadamente  $1^\circ$  en mediciones angulares.

En la Figura 4.2, puede apreciarse que el mejor desempeño del controlador se logra en la parte media de la trayectoria. Esto se debe a que en ese punto alcanza su mayor velocidad, y en los extremos la velocidad es cercana a cero debido a que la trayectoria es generada por un polinomio de sexto orden. Este mismo fenómeno se repite en los cuatro experimentos realizados. Es importante mencionar que esta tarea no puede realizarse utilizando un sensor de fuerza, ya que al inicio de los experimentos la ganancia aplicada a su retroalimentación alejaría al efector final de la superficie de contacto, y al regresar a ella la estructura mecánica del sensor ocasiona un impulso de respuesta transitorio que hace al sistema inestable. El observador (3.73) no presenta esta dinámica transitoria, esto permite realizar la tarea sin necesidad de modificar las ganancias del controlador.

Los Experimentos 1 y 3 (Figuras 4.3 y 4.9) que realizan trayectorias rápidas muestran que el tiempo de convergencia de los observadores de velocidad cartesiana y de fuerza afectan directamente la convergencia del controlador y en el caso particular de las trayectorias rápidas este tiempo es significativo. Las ganancias deben ajustarse para trabajar a velocidades más altas.

Los resultados del observador de velocidad cartesiana  $\mathbf{z}$  se muestran en las Figuras 4.4, 4.7, para la superficie plana y en las Figuras 4.10, 4.15, para la superficie esférica; como puede apreciarse los resultados son muy buenos, especialmente si se les compara con los obtenidos de las gráficas concernientes a  $\Delta\mathbf{x}$  que se discutieron anteriormente.

Las gráficas concernientes al seguimiento de orientación son muy parecidas y se presentan mediante los elementos de las matrices de rotación  ${}^0\mathbf{R}_d$  y  ${}^0\mathbf{R}_n$  en la Figura 4.11. La orientación en el plano se definió perpendicular a la superficie y puede interpretarse como una tarea de regulación de orientación

debido a que no se modifica durante los experimentos; en la superficie curva, en cambio, la orientación varía a lo largo de la trayectoria debido a que se calcula automáticamente para mantener el efector final perpendicular a la esfera. Los resultados de seguimiento de la orientación son muy buenos; en lugar de incluir gráficas de error para la matriz de rotación, se hará después una discusión basado en su índice de desempeño.

En lo que respecta a las gráficas de seguimiento y observación de fuerza, lo primero que hay que aclarar es que el observador de fuerza no fue diseñado para igualar la respuesta del sensor JR3, ya que, como se discutió anteriormente, la dinámica transitoria del sensor es justamente lo que impide que se realice el seguimiento de trayectoria. El objetivo de diseñar este observador fue el de aumentar la robustez del sistema ante fallas, desconocimiento de la superficie o falta de contacto del robot con su entorno. Por ejemplo, se puede observar un impulso de fuerza presente en todos los experimentos, que se genera en el momento en que la herramienta hace o deja de hacer contacto con la superficie. Al observar las Figuras 4.5, 4.8, 4.12, 4.16, puede verse que el error de fuerza oscila alrededor de 8 Newtons para todas las trayectorias de fuerza contempladas. Si bien esto puede considerarse normal, es necesario mencionar que el rango de variación de fuerza deseada es muy grande y que aún cuando el robot pierde contacto con la superficie no se vuelve inestable. Intuitivamente puede pensarse que debe funcionar mejor a bajas velocidades; sin embargo, el error de fuerza en las gráficas se mantiene la mayor parte del tiempo entre  $\pm 7$  N y en su principio y final se manifiestan los errores más grandes; por lo cual puede verse que el control de fuerza no es muy eficiente a bajas velocidades debido a que depende de la excitación de  $\hat{\mathbf{x}}$ .

En la Figura 4.13 puede apreciarse el voltaje que envía el sistema cRio a los PWM del controlador c500 para mover los motores del robot. Cabe hacer notar que los niveles son muy bajos por lo cual se logra la convergencia del sistema empleando poca energía, lo que aumenta la vida útil del equipo. Solo se incluye una gráfica debido a que se tomó como referencia la tarea que demanda más energía del controlador.

Se consideró el criterio de la raíz cuadrada de la media del error ( $CE_{RMS}$ ) para evaluar el desempeño del controlador. La siguiente es la relación empleada:

$$CE_{RMS} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T e^2 dt} \quad (4.10)$$

| Experimento                | PENDIENTE |        | ESFERA |        |
|----------------------------|-----------|--------|--------|--------|
|                            | 1         | 2      | 3      | 4      |
| $\Delta\lambda[N]$         | 6.4459    | 4.8349 | 7.6616 | 5.4510 |
| $\Delta\tilde{\lambda}[N]$ | 7.6554    | 6.8490 | 4.1535 | 2.9370 |
| $\Delta x_p$               | 0.0030    | 0.0016 | 0.0069 | 0.0027 |
| $\Delta x_\phi$            | 0.0046    | 0.0011 | 0.0265 | 0.0120 |
| $z_p$                      | 0.0004    | 0.0002 | 0.0004 | 0.0002 |
| $z_\phi$                   | 0.0005    | 0.0002 | 0.0247 | 0.0107 |
| Error de Rotación          | 0.0059    | 0.0044 | 0.0413 | 0.0182 |
| $\tau_p$ (Torque 1,2,3)    | 1.0256    | 0.9006 | 0.9686 | 0.9658 |
| $\tau_o$ (Torque 4,5,6)    | 0.8693    | 0.8119 | 1.1868 | 1.2391 |

Cuadro 4.1: Índices de desempeño general de fuerza, seguimiento, observación, orientación y torque.

En las Tablas 4.1 y 4.2 se muestran los índices de desempeño obtenidos para todos los experimentos, lo que representa una forma cuantitativa de ver cuales son las tareas que realiza con mayor eficiencia. En la Tabla 4.1 puede verse como el índice de desempeño para la posición y la fuerza en el caso de la esfera es mayor que en la pendiente, influenciado en su mayoría por errores de calibración de la superficie en donde se realizan movimientos en 3D.

Si se comparan los experimentos 2 y 4 que duran aproximadamente 5 veces mas que los experimentos 1 y 3, puede establecerse que el controlador funciona mejor cuando la trayectoria es larga; esto es debido a que el observador de fuerza funciona mejor cuando el robot está en movimiento (ver Tabla 4.1).

En la Tabla 4.2 se presenta el índice de desempeño por elemento para los vectores  $\Delta\mathbf{x}$  y  $\mathbf{z}$ . Se pueden detectar efectos físicos, tales como la fricción y la gravedad. Por ejemplo en  $\Delta\mathbf{x}_x$  y  $\Delta\mathbf{x}_z$  se presentan valores más grandes en la mayoría de los experimentos que podrían ser causados por efectos de gravedad, dado que en los experimentos realizados en la superficie esférica donde el movimiento se restringe al plano  $(x_o - z_o)$ , se presentan diferencias mayores en el desempeño de  $\Delta\mathbf{x}_x$  y  $\Delta\mathbf{x}_z$  comparado con el obtenido para  $\Delta\mathbf{x}_y$ . En lo que respecta al error de observación  $\mathbf{z}$  puede verse en la Tabla 4.2 que es uniforme con valores bajos. Durante los experimentos existieron



| Experimento         | PENDIENTE |        | ESFERA |        |
|---------------------|-----------|--------|--------|--------|
|                     | 1         | 2      | 3      | 4      |
| $\Delta x_x$        | 0.0013    | 0.0014 | 0.0061 | 0.0026 |
| $\Delta x_y$        | 0.0000    | 0.0000 | 0.0001 | 0.0001 |
| $\Delta x_z$        | 0.0027    | 0.0007 | 0.0032 | 0.0009 |
| $\Delta x_{\phi_x}$ | 0.0000    | 0.0000 | 0.0015 | 0.0038 |
| $\Delta x_{\phi_y}$ | 0.0046    | 0.0011 | 0.0262 | 0.0065 |
| $\Delta x_{\phi_z}$ | 0.0000    | 0.0000 | 0.0040 | 0.0094 |
| $z_x$               | 0.0002    | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| $z_y$               | 0.0000    | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| $z_z$               | 0.0003    | 0.0001 | 0.0000 | 0.0000 |
| $z_{\phi_x}$        | 0.0000    | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| $z_{\phi_y}$        | 0.0005    | 0.0001 | 0.0000 | 0.0000 |
| $z_{\phi_z}$        | 0.0000    | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| $\tau_1$            | 0.1256    | 0.0415 | 0.1659 | 0.1918 |
| $\tau_2$            | 0.6512    | 0.3898 | 0.8095 | 0.6459 |
| $\tau_3$            | 0.7824    | 0.8108 | 0.5053 | 0.6920 |
| $\tau_4$            | 0.2807    | 0.2514 | 0.5935 | 0.6151 |
| $\tau_5$            | 0.8077    | 0.7420 | 0.9503 | 0.9864 |
| $\tau_6$            | 0.1562    | 0.2129 | 0.3913 | 0.4290 |

Cuadro 4.2: Índices de desempeño de seguimiento, observación y torque por elemento de  $\Delta \mathbf{x}$ ,  $\mathbf{z}$  y  $\boldsymbol{\tau}$  respectivamente.

factores y dinámicas no modeladas que condicionaron la eficiencia del controlador. Así mismo, los efectos de fricción de contacto y deformaciones que sufren los materiales cuando se les aplica fuerza no son compensados y la bala<sup>1</sup> no cuenta con un balero rígido lo cual provoca desviaciones por histéresis y amortiguamiento no compensadas por el controlador. Tomando en cuenta todos estos factores, se considera que el esquema de control propuesto demuestra tener buenos resultados.

---

<sup>1</sup>Elemento metálico y esférico montado en el efector final que tiene contacto directo con la restricción

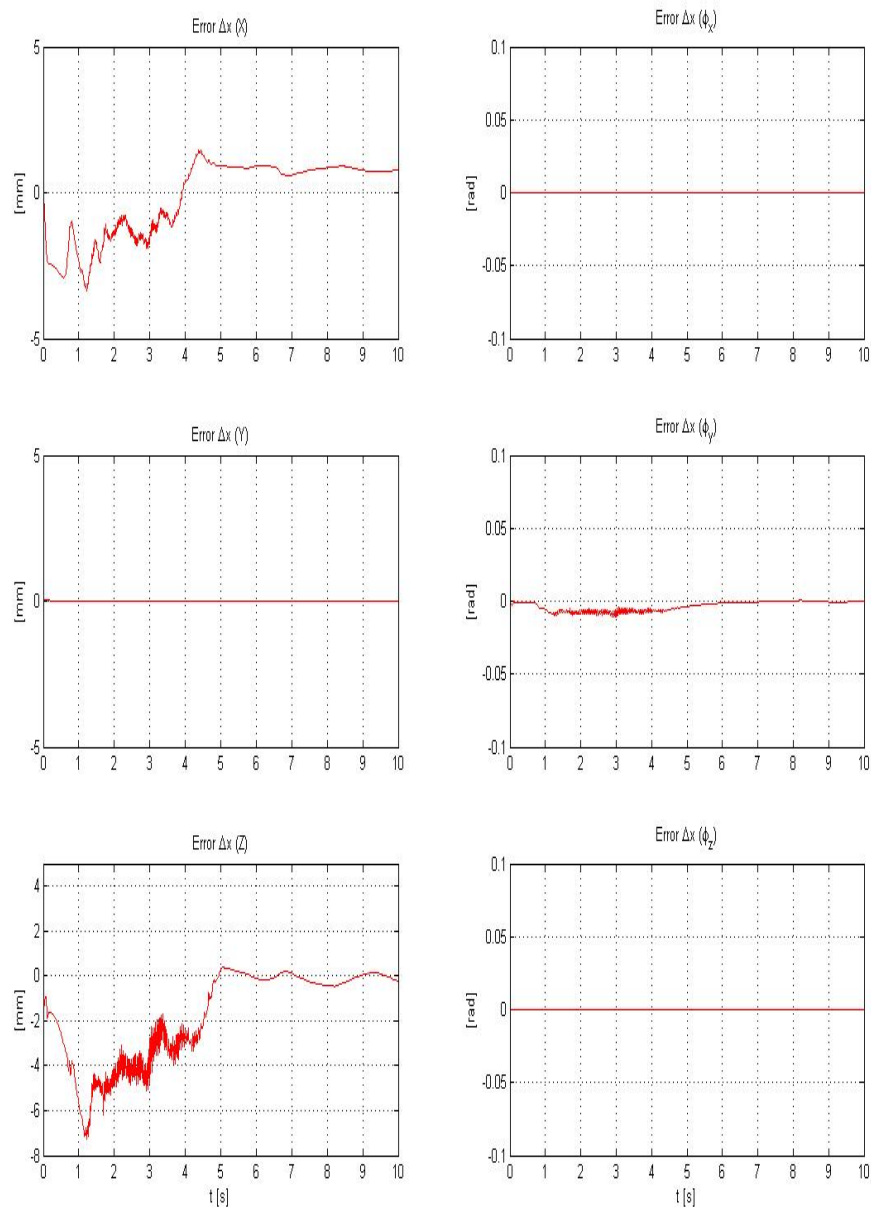


Figura 4.3: Experimento 1. Trayectoria rápida en superficie plana. Vector  $\Delta \mathbf{x}$  de error de seguimiento ( $\mathbf{x} - \mathbf{x}_a$ ).

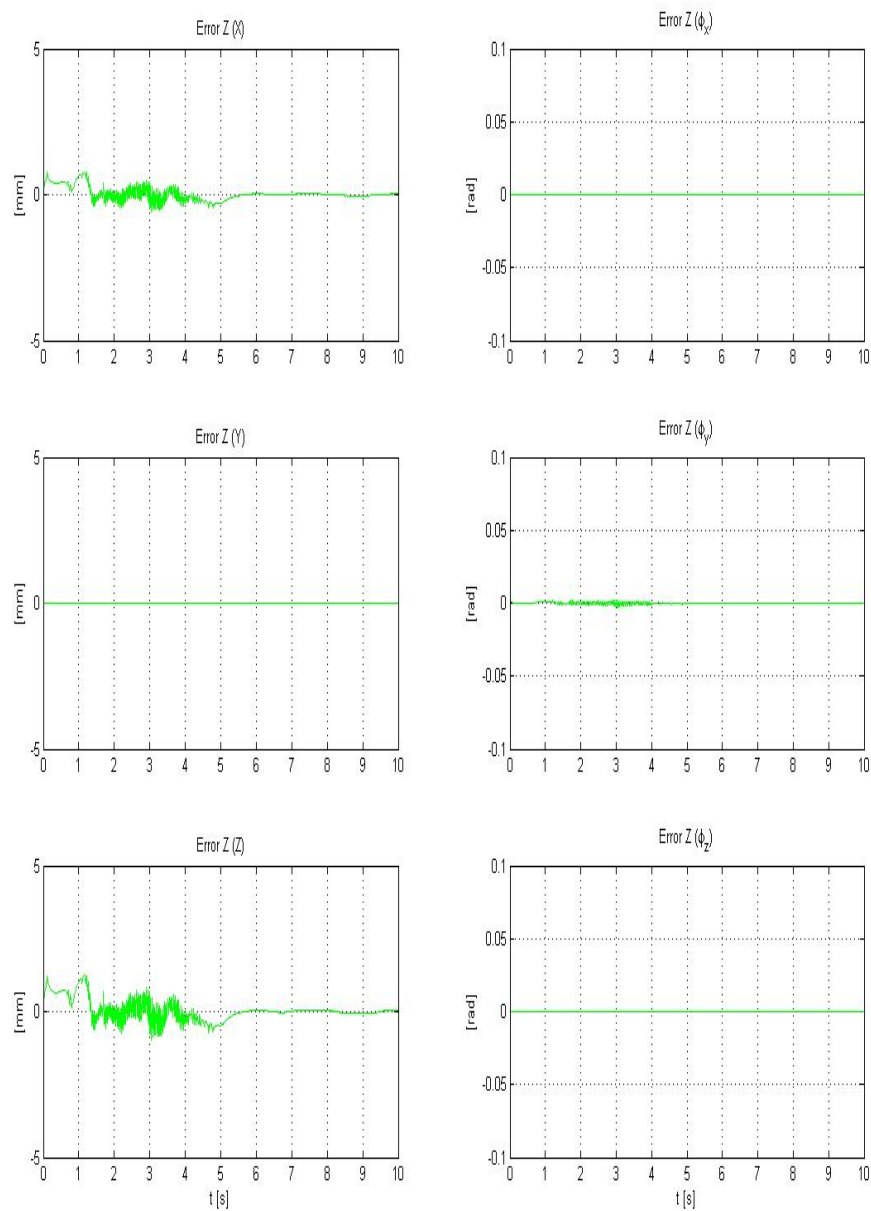


Figura 4.4: Experimento 1. Trayectoria rápida en superficie plana. Vector  $\mathbf{z}$  de error de observación ( $\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}$ ).

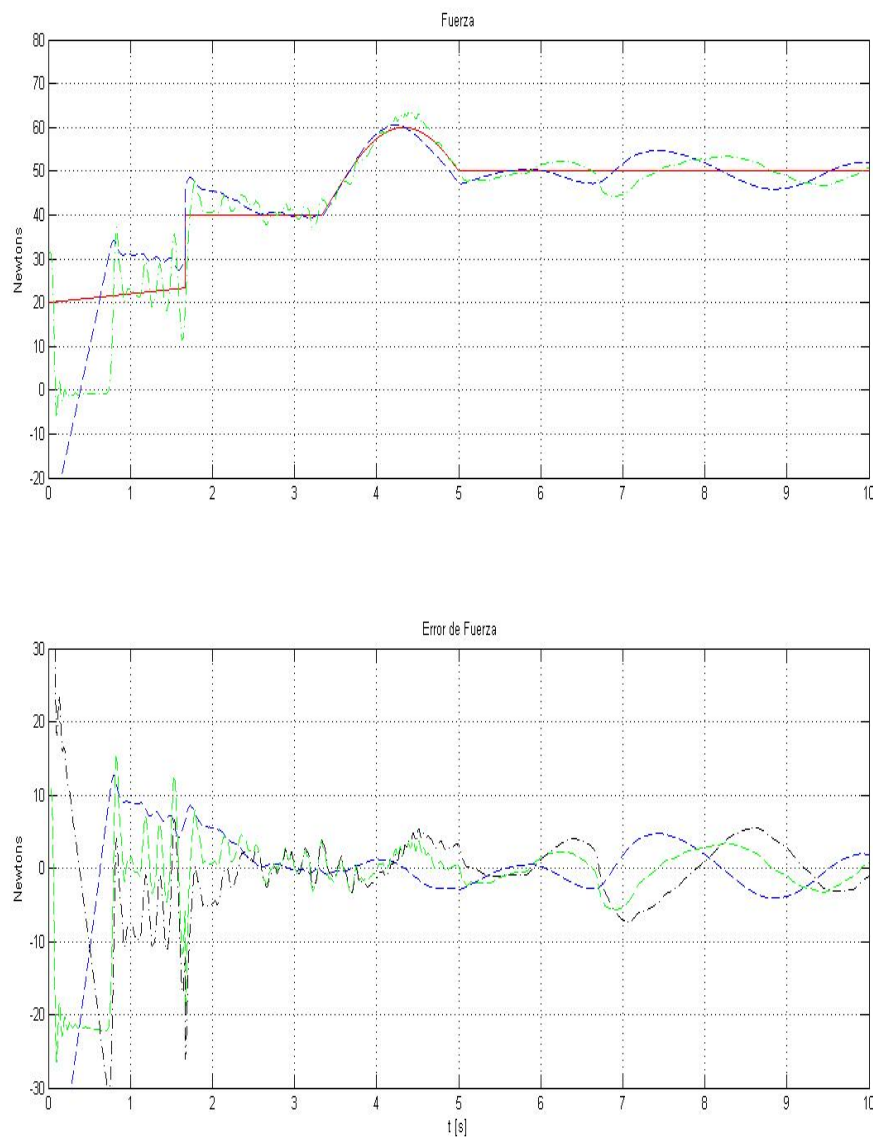


Figura 4.5: Experimento 1. Trayectoria rápida en superficie plana. Fuerza deseada  $\lambda_d$  (—) vs. fuerza JR3  $\lambda$  (- . -) Fuerza estimada  $\hat{\lambda}$  (- -) y su correspondiente error de seguimiento JR3  $(\lambda - \lambda_d)$   $\Delta\lambda$  (- . -), error del estimador  $(\lambda - \lambda_d)$   $\Delta\hat{\lambda}$  (- -).

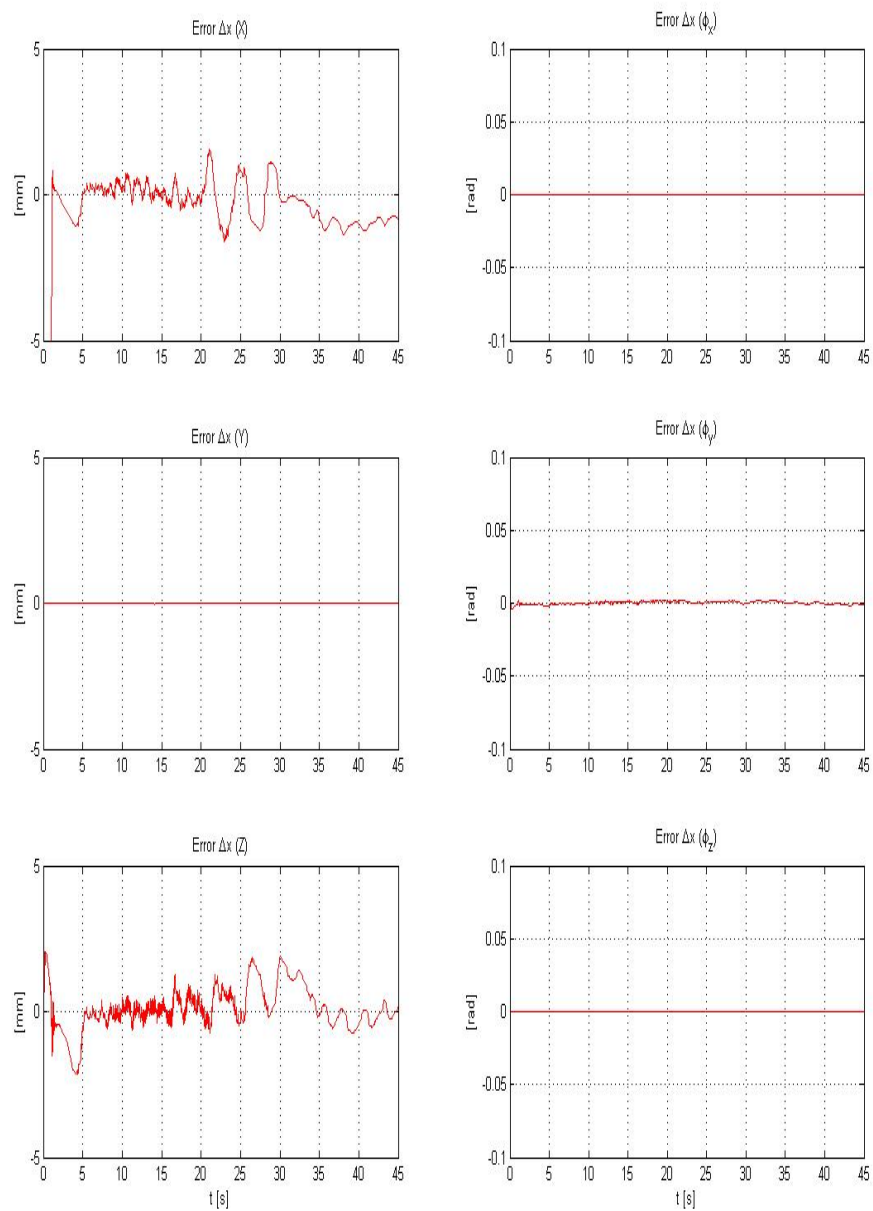


Figura 4.6: Experimento 2. Trayectoria lenta en superficie plana. Vector  $\Delta \mathbf{x}$  de error de seguimiento ( $\mathbf{x} - \mathbf{x}_a$ ).

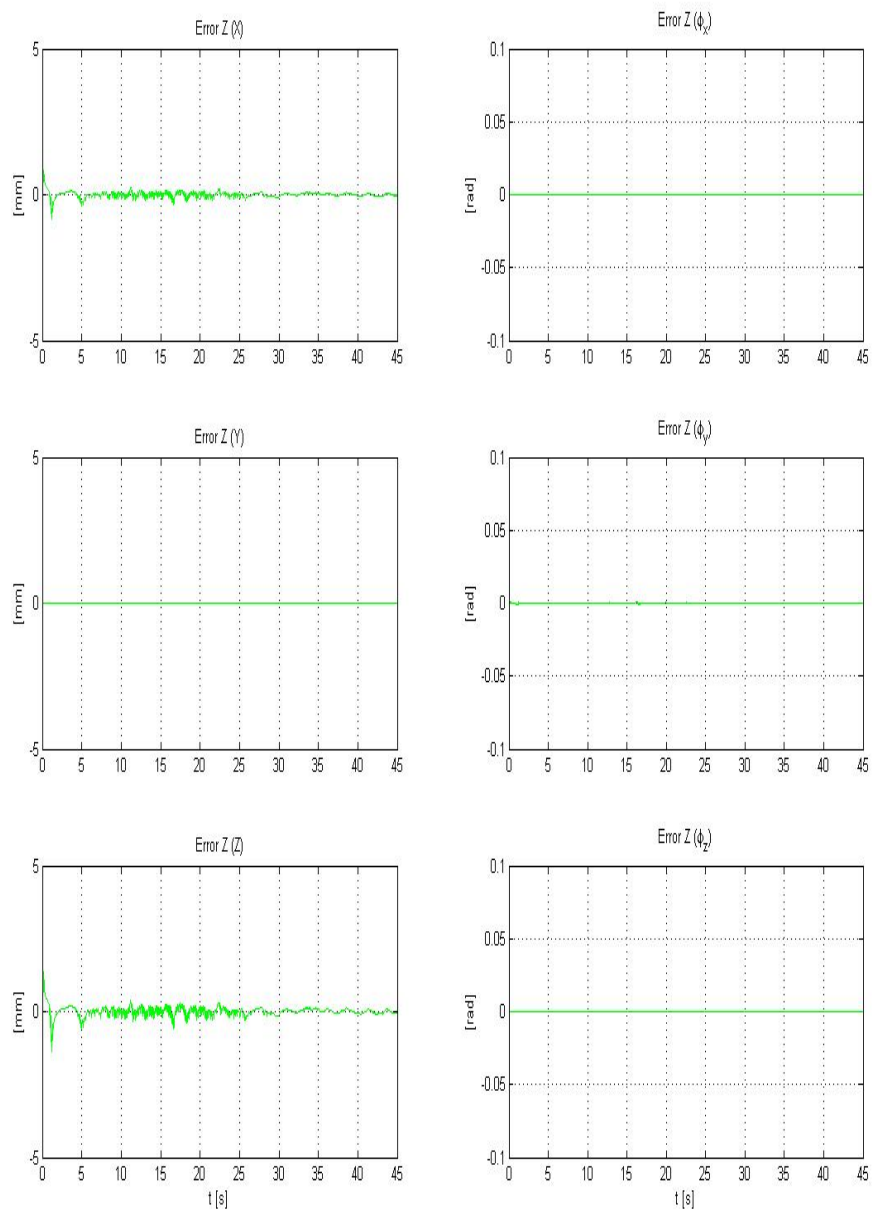


Figura 4.7: Experimento 2. Trayectoria lenta en superficie plana. Vector  $\mathbf{z}$  de error de observación ( $\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}$ ).

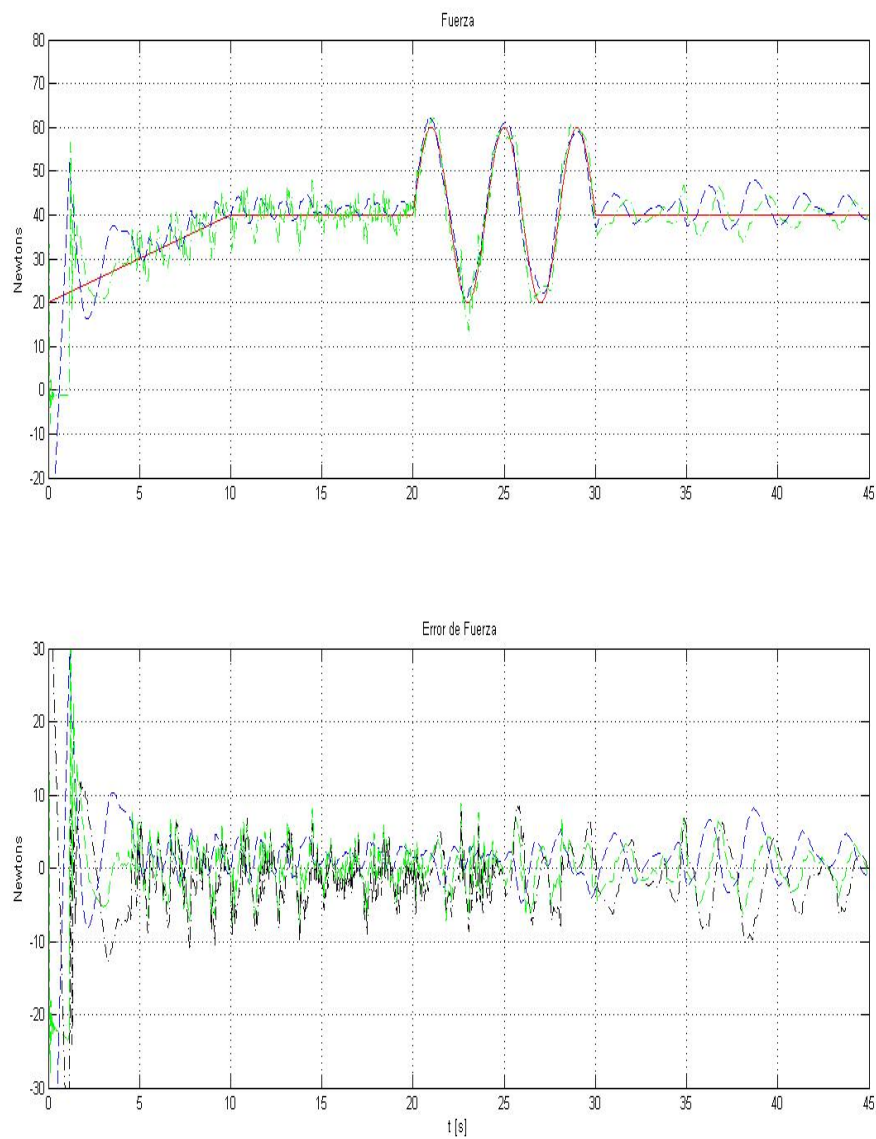


Figura 4.8: Experimento 2. Trayectoria lenta en superficie plana. Fuerza deseada  $\lambda_d$  (—) vs. fuerza JR3  $\lambda$  (- . -) Fuerza estimada  $\hat{\lambda}$  (- -) y su correspondiente error de seguimiento JR3  $(\lambda - \lambda_d)$   $\Delta\lambda$  (- . -), error del estimador  $(\lambda - \hat{\lambda})$   $\Delta\lambda$  (- -).



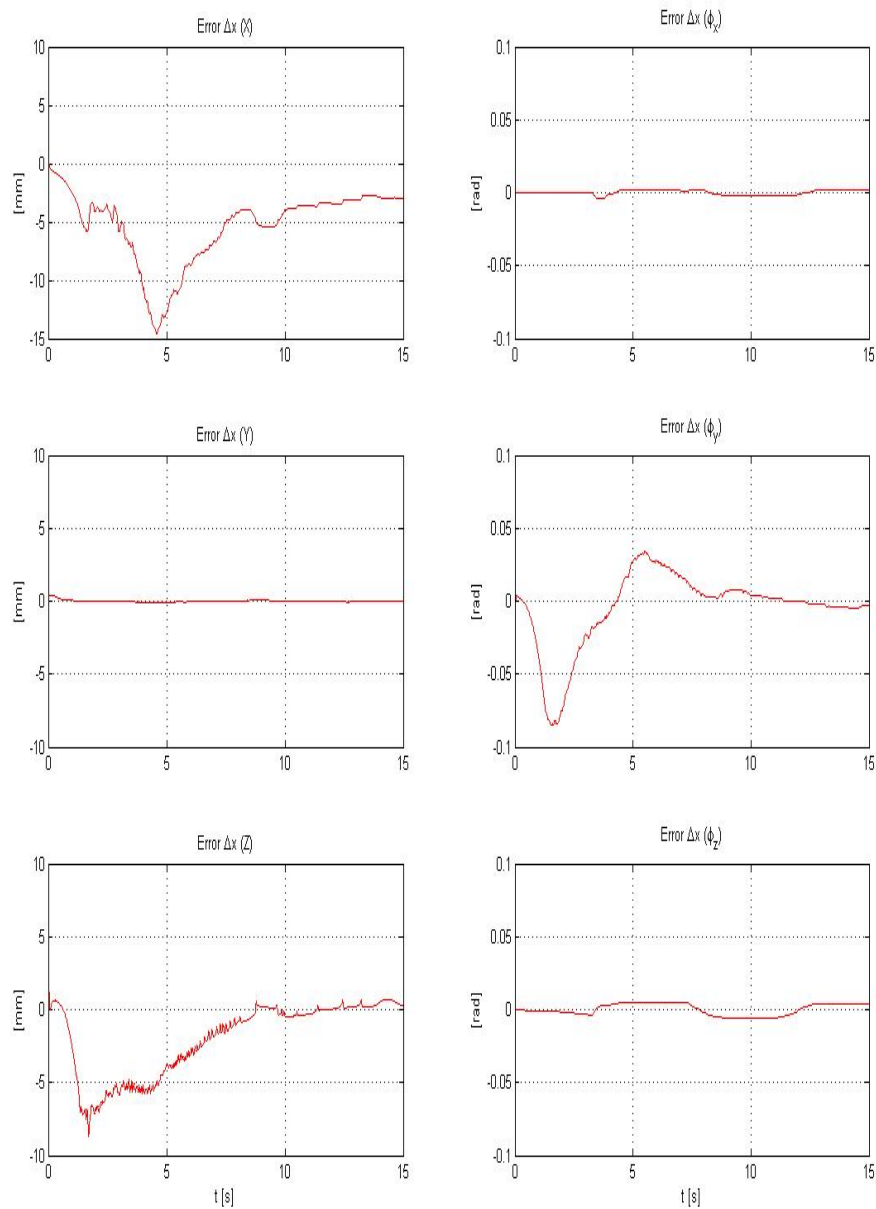


Figura 4.9: Experimento 3. Trayectoria rápida en superficie esférica. Vector  $\Delta \mathbf{x}$  de error de seguimiento ( $\mathbf{x} - \mathbf{x}_a$ ).

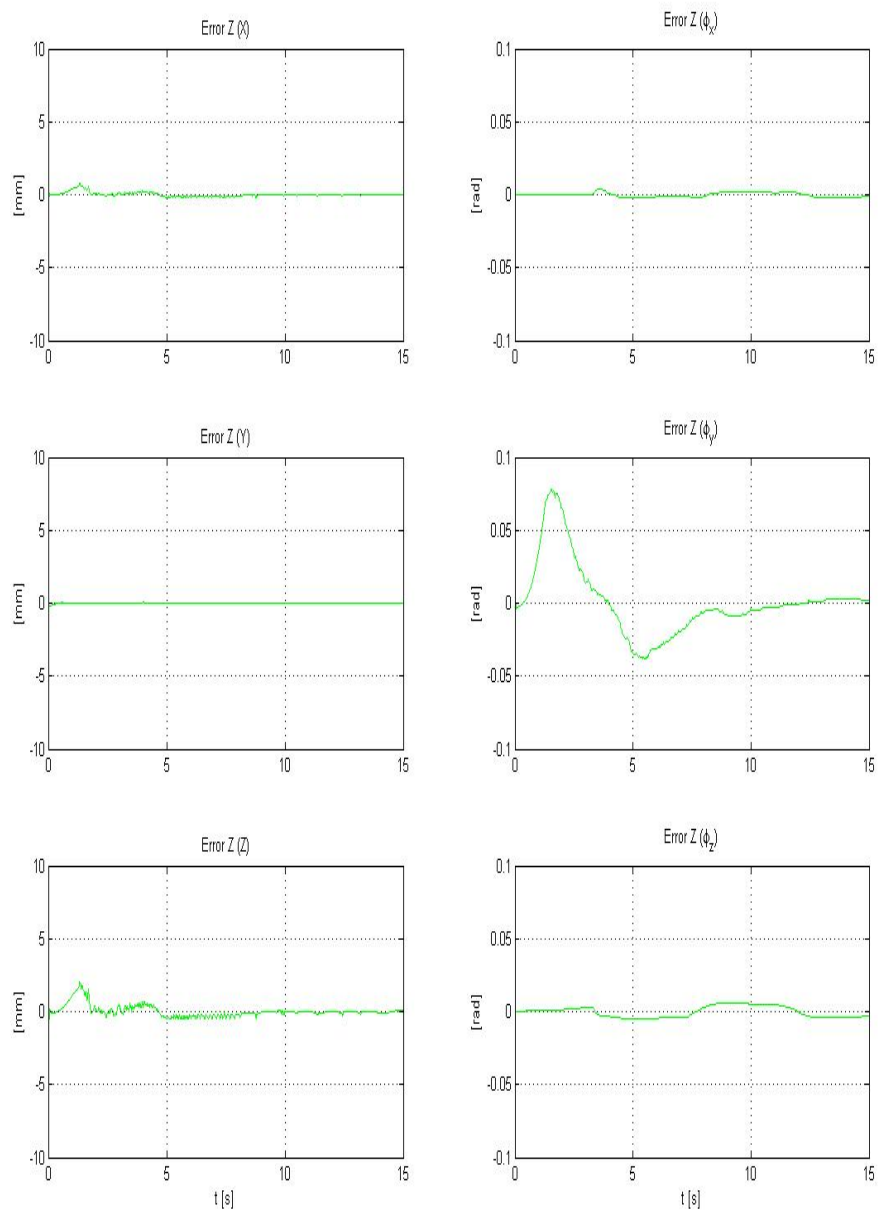


Figura 4.10: Experimento 3. Trayectoria rápida en superficie esférica. Vector  $\mathbf{z}$  de error de observación ( $\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}$ ).

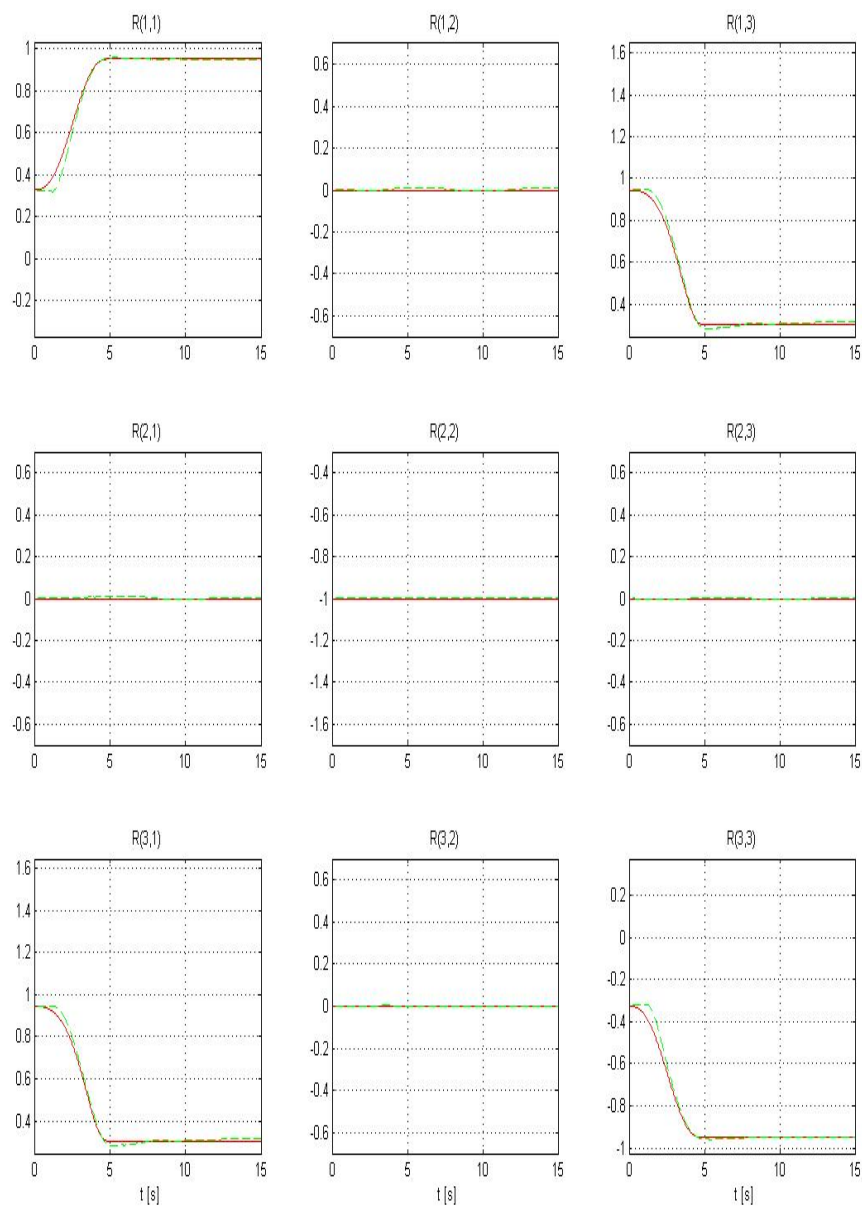


Figura 4.11: Experimento 3. Trayectoria rápida en superficie esférica. Orientación deseada  ${}^0\mathbf{R}_d$  (—) vs orientación real  ${}^0\mathbf{R}_n$  (- -).

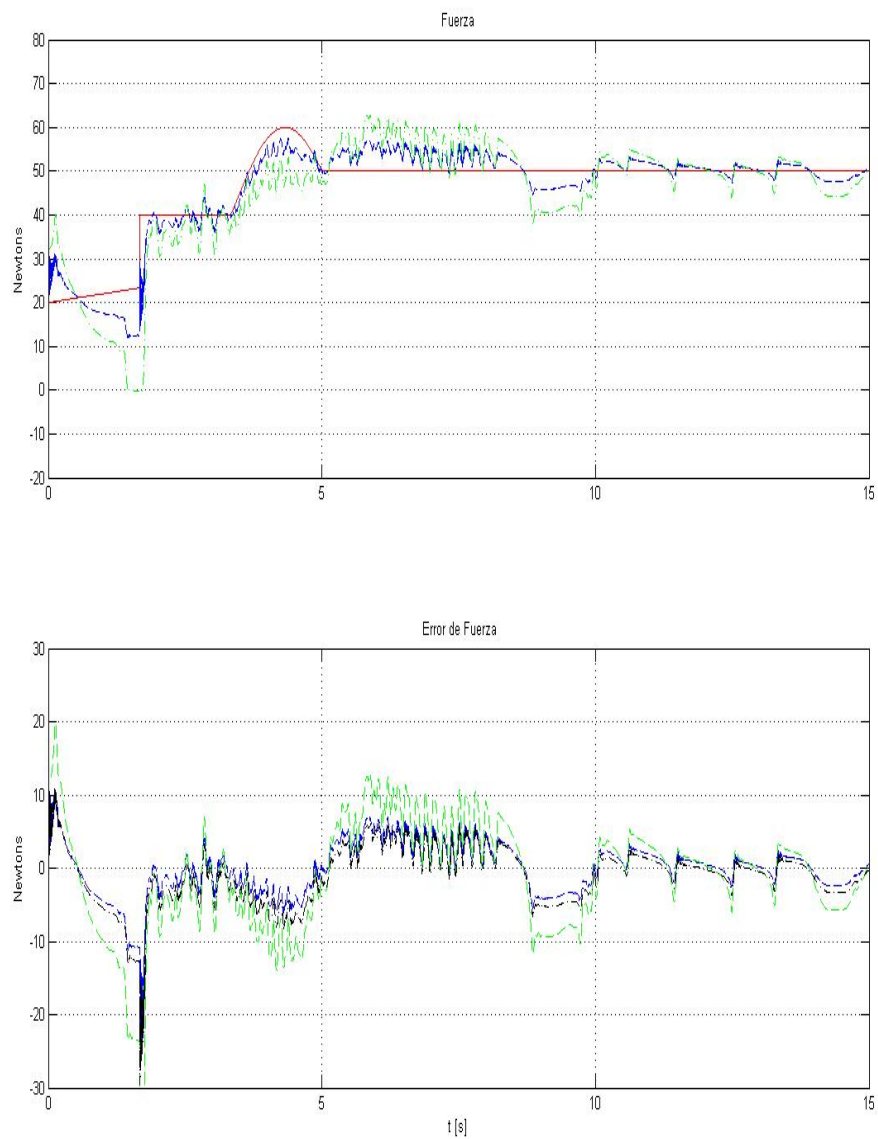


Figura 4.12: Experimento 3. Trayectoria rápida en superficie esférica. Fuerza deseada  $\lambda_d$  (—) vs. fuerza JR3  $\lambda$  (- . -) Fuerza estimada  $\hat{\lambda}$  (- -) y su correspondiente error de seguimiento JR3  $(\lambda - \lambda_d)$   $\Delta\lambda$  (- . -), error del estimador  $(\lambda - \hat{\lambda})$   $\Delta\hat{\lambda}$  (- -).

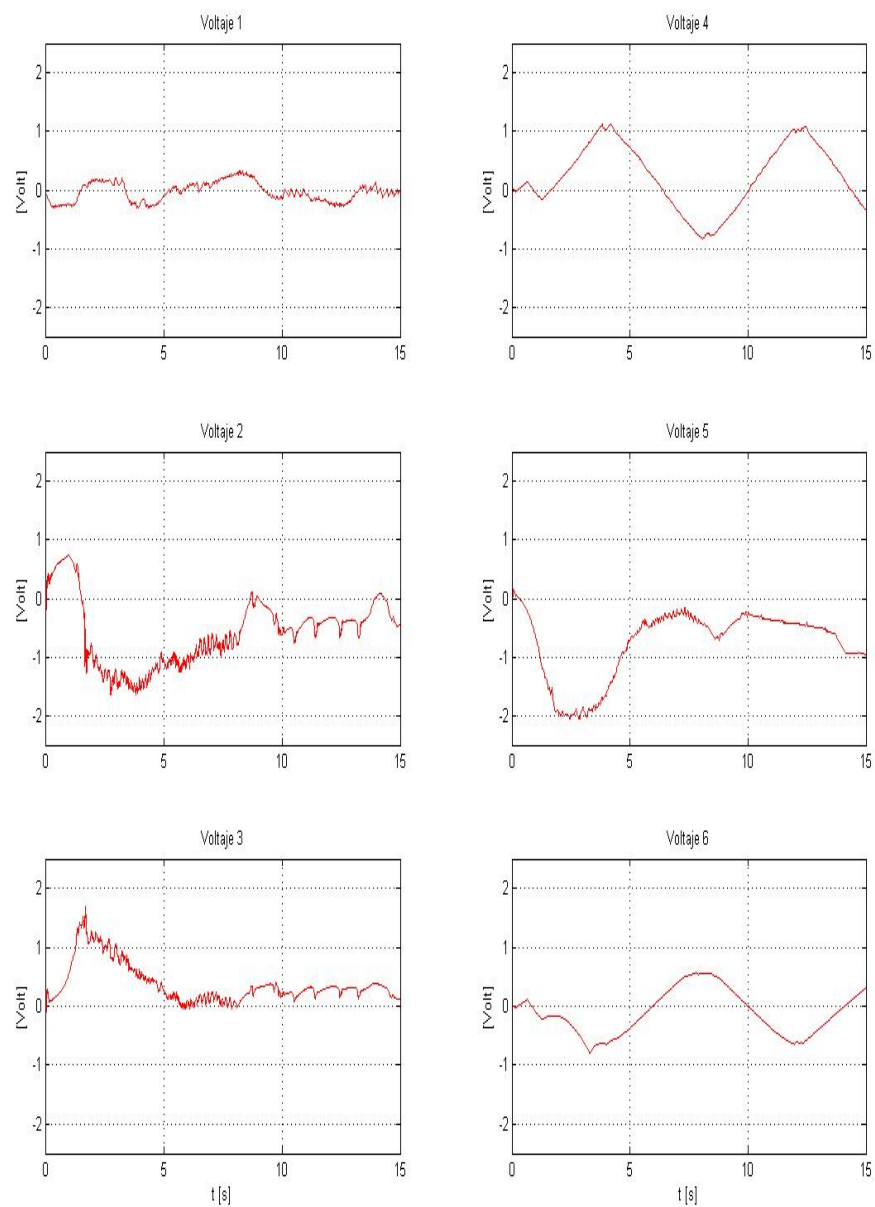


Figura 4.13: Experimento 3. Trayectoria rápida en superficie esférica. Voltaje aplicado a las articulaciones.

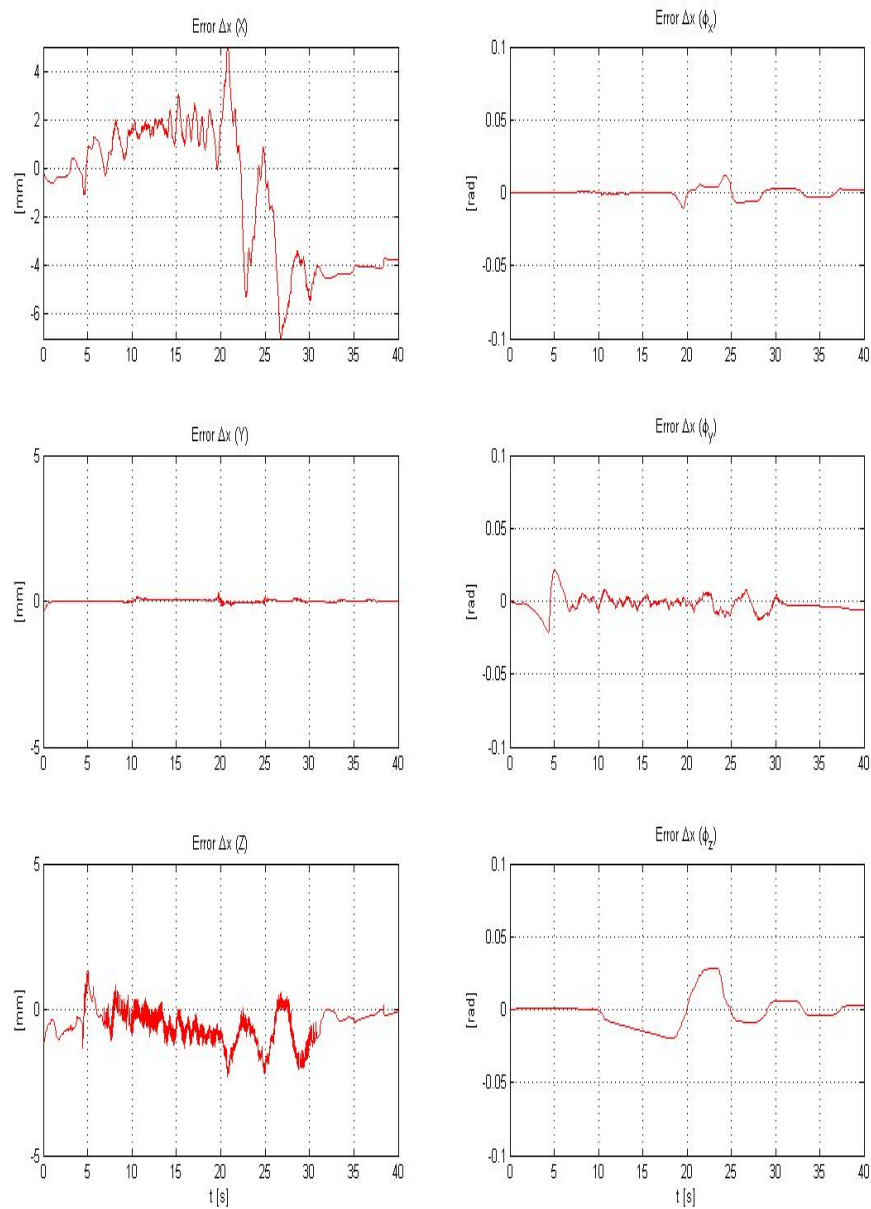


Figura 4.14: Experimento 4. Trayectoria lenta en superficie esférica. Vector  $\Delta \mathbf{x}$  de error de seguimiento ( $\mathbf{x} - \mathbf{x}_a$ ).

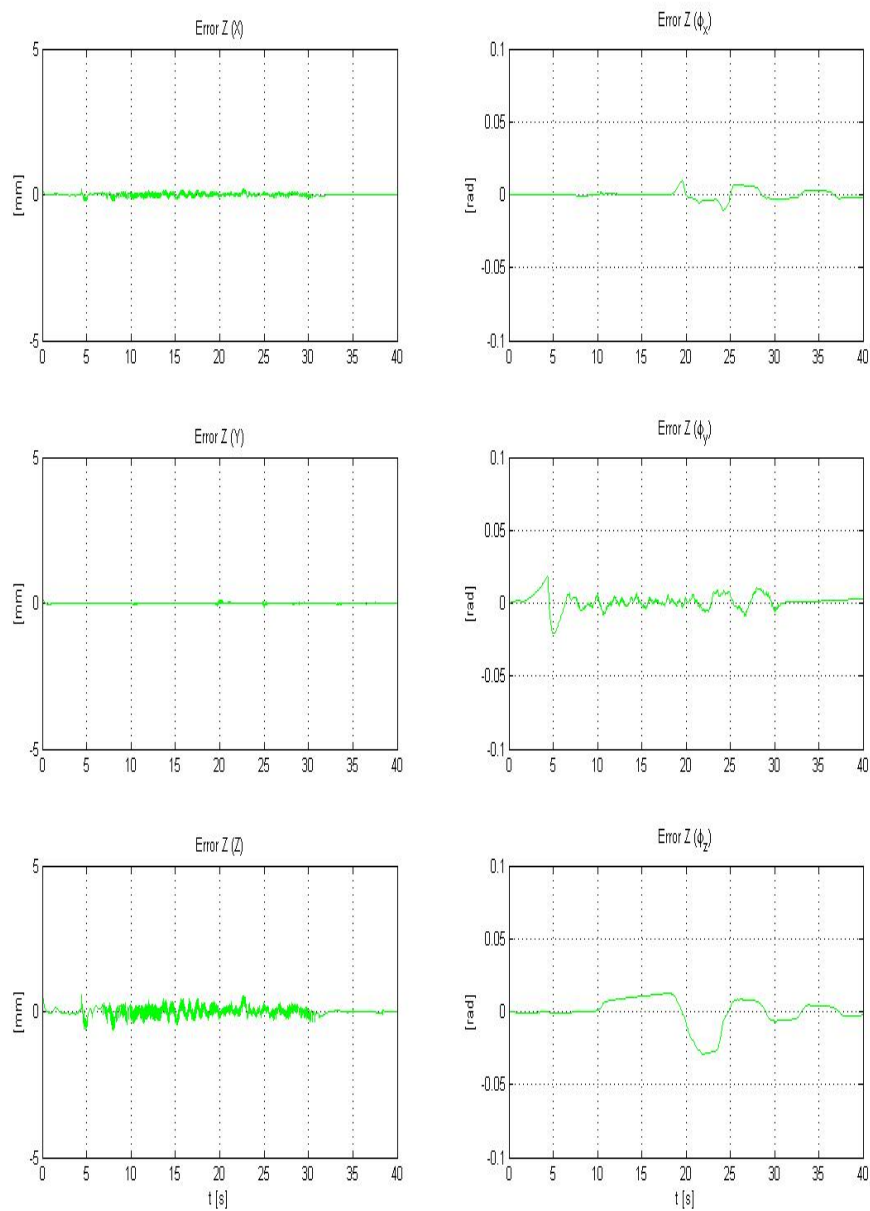


Figura 4.15: Experimento 4. Trayectoria lenta en superficie esférica. Vector  $\mathbf{z}$  de error de observación ( $\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}$ ).

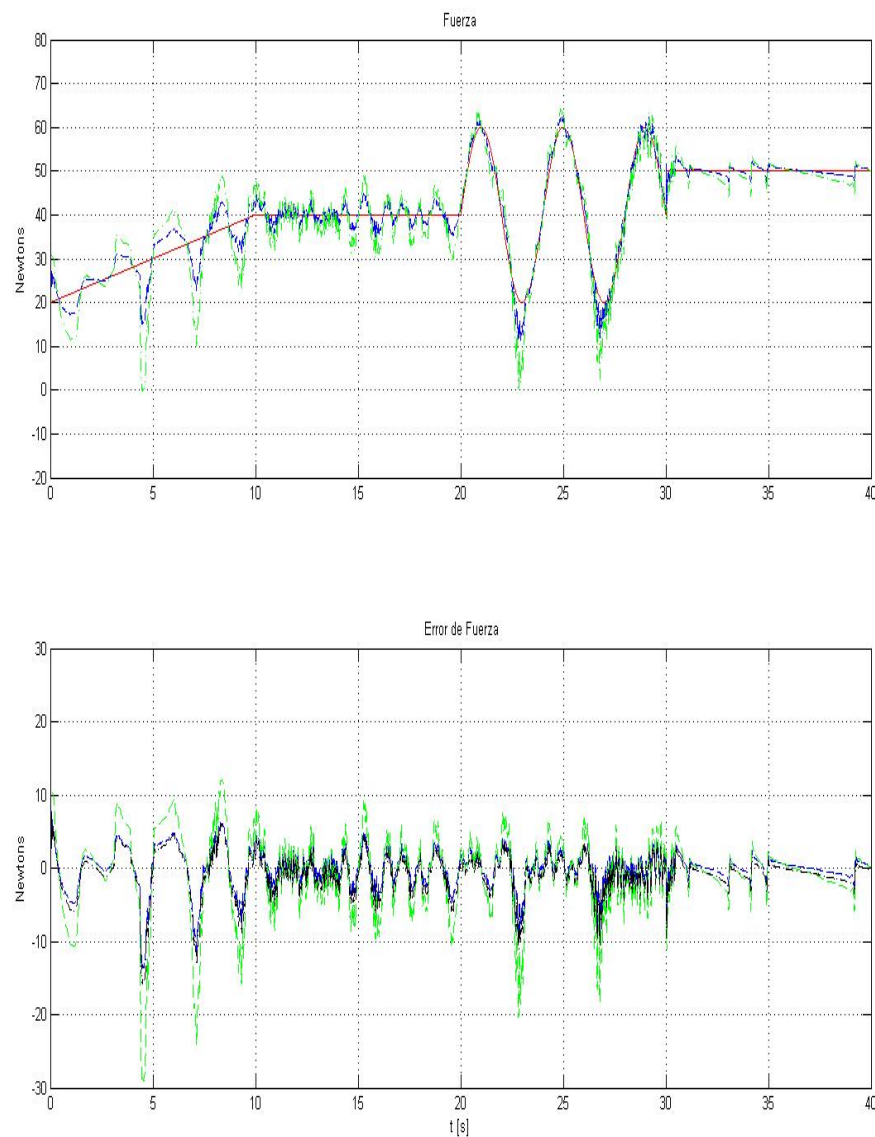


Figura 4.16: Experimento 4. Trayectoria lenta en superficie esférica. Fuerza deseada  $\lambda_d$  (—) vs. fuerza JR3  $\lambda$  (- . -) Fuerza estimada  $\hat{\lambda}$  (- -) y su correspondiente error de seguimiento JR3  $(\lambda - \lambda_d)$   $\Delta\lambda$  (- . -), error del estimador  $(\lambda - \hat{\lambda})$   $\Delta\lambda$  (- -).



---

# Conclusiones

En esta tesis se presentó un algoritmo de control de posición/fuerza para robots manipuladores en movimiento restringido. El algoritmo propuesto se compone de un controlador-observador diseñado en el espacio de trabajo del manipulador y necesita únicamente la posición articular; la velocidad es obtenida a través de un observador y la fuerza de contacto es estimada empleando el modelo dinámico del robot y las ecuaciones de restricción de la superficie.

El esquema propuesto provee seguimiento asintótico de las trayectorias prescritas tanto en posición-orientación como en fuerza. Se puede garantizar estabilidad asintótica local. Las condiciones necesarias para ello dependen de variables físicas de la interacción entre el robot y la superficie.

Se hace uso del principio de ortogonalización para diseñar el controlador y el observador de velocidad, con el fin de poder distinguir señales de retroalimentación de posición de señales retroalimentación de fuerza mediante el uso de matrices de proyección.

Se realizaron pruebas experimentales en tareas de contacto que permitieron tener un mejor conocimiento de los alcances del algoritmo de control propuesto. Contrariamente a lo previsto en la teoría se obtuvieron errores

de seguimiento de posición y de fuerza pequeños, pero no siempre nulos. En particular en lo que respecta al control de fuerza, los resultados son aceptables ya que el error de observación y seguimiento se encuentra en el orden del 20% pico, pero para valores de referencia pequeños (alrededor de 10N), es necesario ajustar las ganancias del estimador. Cabe hacer notar que el diseño del estimador propuesto es sensible a errores paramétricos del modelo dinámico del robot y sobre todo de la superficie de contacto.

El índice propuesto  $CE_{RMS}$  permitió tener una forma cuantitativa para evaluar el desempeño del algoritmo en diversas tareas. De una forma general, los resultados obtenidos son buenos, considerando que los experimentos fueron realizados en un manipulador industrial de seis grados de libertad del que no se emplea su modelo dinámico, ni su cinemática inversa y no se tiene un conocimiento exacto de las superficies en las que tiene que aplicar fuerza. Cabe hacer notar que los instrumentos utilizados para calibrar la superficie fueron un flexometro y para medir el ángulo se empleó un transportador de burbuja. El tiempo de muestreo fue de 5 milisegundos. Utilizando simulaciones, se muestran que la disminución del tiempo de muestreo mejora considerablemente el desempeño, permitiendo una mejor sintonización de las ganancias y por ende un seguimiento y convergencia de las variables consideradas.

## 5.1. Problemas abiertos

Como trabajo futuro podría utilizarse un esquema de compensación para la fricción articular y en mayor medida para compensar los efectos de fricción de contacto; también se pueden estudiar otros esquemas para mejorar los resultados del observador de fuerza introduciendo una estructura PID para las variables de fuerza, también se podría cambiar la superficie deslizante y la función asociada a  $\sigma$  para mejorar la respuesta de este esquema y reducir el tiempo de muestreo (aunque este sea un problema de hardware).

Un problema que debe estudiarse es la generación de trayectorias, ya que debido a que se emplean ecuaciones matemáticas para describir formas geométricas no se tiene ningún tipo de conocimiento de las imperfecciones de las superficies. En este sentido podrían emplearse observadores por disturbio para identificar estas variaciones o emplear sensores de deformación. De hecho mediante la ortogonalización podría emplearse la proyección  $P_x$  para identificar o general un compensador de estos factores.

---

# DESCRIPCIÓN DE LOS SISTEMAS

El sistema experimental consiste de un robot industrial A465 de la empresa *CRS Robotics* con arquitectura abierta, un sensor de fuerza *JR3* montado sobre la muñeca del manipulador, un balón con balero colocado sobre el sensor, una placa de acero inoxidable y una bola de boliche, que hacen la función de restricción geométrica. Una computadora se encarga del cálculo de la ley de control. Un sistema cRIO de la empresa *National Instruments* establece la comunicación necesaria para que se pueda controlar al robot A465, para lo cual una tarjeta de acondicionamiento de señal fue diseñada. En la Figura A.1 se muestra una fotografía de la plataforma experimental en la que se identifica la disposición de los componentes.

## A.1. Robot industrial A465

El manipulador considerado es un robot de seis grados de libertad con articulaciones de revolución de la empresa canadiense *CRS Robotics*. Los actuadores de las articulaciones son servomotores de CD con retroalimentación por codificador óptico (encoder) de cuadratura de tipo incremental. Las características más importantes son presentadas en la Tabla A.1. Para mayores

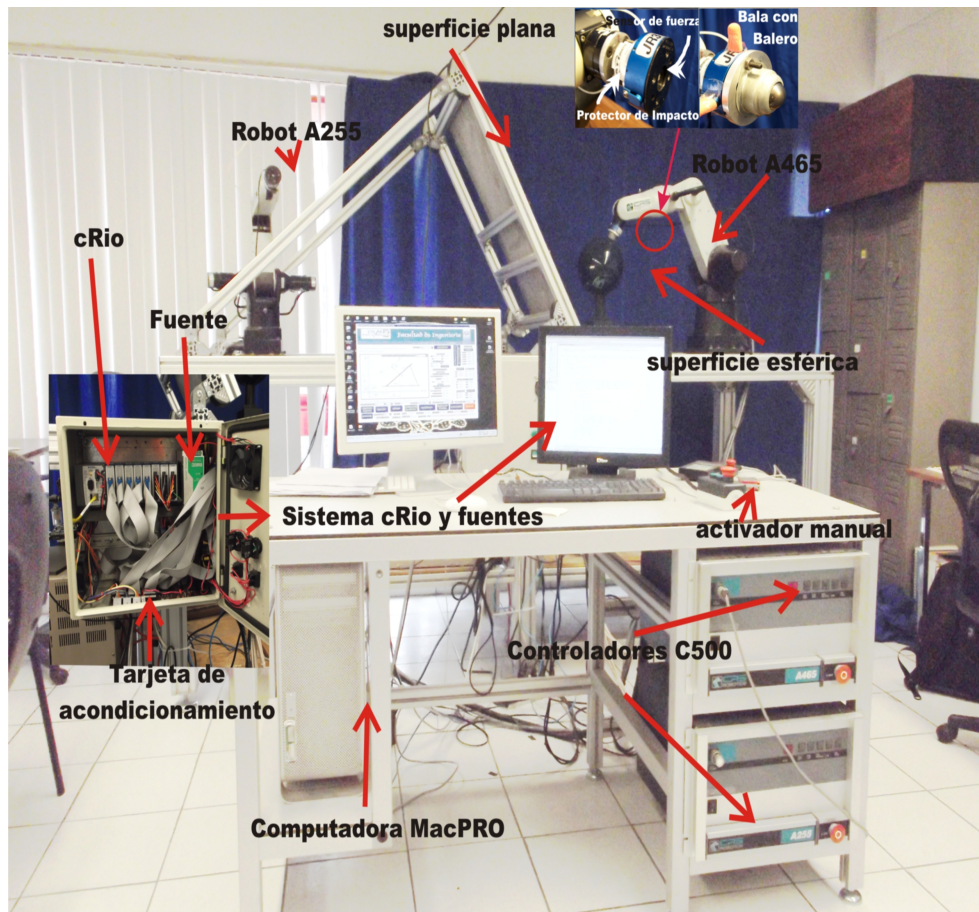


Figura A.1: Sistema experimental con componentes

detalles ver (CRS Robotics 2001).

## A.2. Sensor de fuerza

El sensor de fuerza empleado, es el sensor *JR3* modelo 67M25A 63N4 que se muestra en la Figura A.2, cuyas características de operación están indicadas en JR3 (2006). Es un dispositivo de aluminio monolítico, compuesto de galgas extensométricas que sensan las cargas impuestas al sensor, para producir señales que representan los momentos y fuerza sobre tres ejes ortogonales. El sensor JR3 se orienta de tal forma que los ejes  $x$  e  $y$  se encuentran

| Parámetro                | Descripción        |
|--------------------------|--------------------|
| Número de articulaciones | 6                  |
| Peso                     | 31 kg              |
| Carga de Trabajo         | 2 kg               |
| Repetibilidad            | $\pm 0.05$ mm      |
| Transmisión              | Drive armónico     |
| Actuadores               | Servomotores de CD |

Cuadro A.1: Características más importantes del Robot A465.

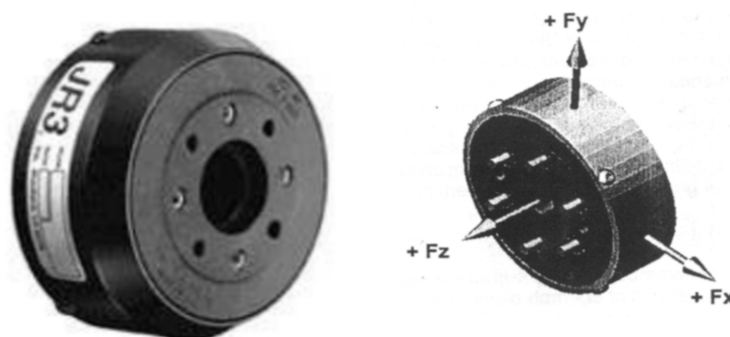


Figura A.2: Sensor de fuerza JR3 modelo 67M25A-U560.

sobre el cuerpo del mismo y el eje  $z$  es perpendicular al plano  $xy$ . El punto de referencia para todos los datos de la carga es el centro geométrico del sensor. Con el objeto de reducir al mínimo la fricción entre el manipulador y la restricción se utilizó un balón con balero colocado en la parte frontal. Se emplea la tarjeta JR3 PCI Dev-ID3114 para la adquisición de señales.

### A.3. Sistema cRIO

Una parte medular para el control del robot A465 es el hardware cRIO reconfigurable para aplicaciones industriales. Cuenta con los siguientes módulos:

- **Controlador.** Modulo Real-Time NI cRIO-9014 con 128 MB DRAM y 2GB de almacenamiento. Cuenta con un procesador de 400 MHz, un

puerto 10/100 base-T ethernet con Web embebida y servicio de archivos por interfaz remota. un puerto USB y un puerto RS232. El controlador se alimenta mediante una fuente de 24 volts.

- **Chasis.** El NI cRIO-9004 cuenta con un sistema operativo real-time con 8 zócalos para módulos DAQ-cRIO y un FPGA Virtex-II de 3000000 compuertas y puede operar de  $-40^{\circ}\text{C}$  a  $70^{\circ}\text{C}$ , resiste caídas de hasta 2000 mts.
- **Módulos Digitales.** El NI-9401 cuenta con cinco módulos digitales bidireccionales de alta velocidad (100 ns) de 8 canales de lógica TTL de estándar industrial con conector 25-pin D-Sub.
- **Módulos Analógicos.** El NI-9263 cuenta con tres módulos de cuatro salidas analógicas de 100000 muestras por segundo, de 16bits, en un rango de  $\pm 10$  Volts y tierra aislada.

El sistema cRIO tiene dos niveles de programación; el primero de ellos ubicado en el *Chasis* mediante un FPGA Virtex-II que puede alcanzar velocidades de pico segundos, mientras que el segundo nivel está dado por el controlador que mediante un microcontrolador que puede alcanzar velocidades de nanosegundos ejecuta las instrucciones descargadas en él. En la Figura A.3 pueden verse las partes que lo componen.

## A.4. Tarjeta de acondicionamiento de señales

La tarjeta de acondicionamiento de señales fue diseñada por la necesidad de limpiar las señales de los encoders de las articulaciones del robot A465, ya que debido a los motores y a otros componentes inductivos los datos digitales tenían mucho ruido. Este fue eliminado mediante el empleo de circuitos integrados comparadores de canales. Además, se diseñó una etapa de activación automática es decir, el robot A465 podría ser activado desde el software de la computadora, lo cual abre un panorama más amplio a los posibles experimentos que se pueden realizar con él. En la Figura A.4 se muestra una imagen de la tarjeta de acondicionamiento de señales diseñada.



Figura A.3: Sistema cRIO, (A)NI-9014, (B) NI-9004, (C)Ni-9401, (D)NI-9263.

## A.5. Computadora y lenguaje de programación

La computadora empleada es una Mac Pro Quad-Core Intel Xeon a 2.8 Ghz, con 3 GB de memoria RAM, disco duro de 1 TB serial-ATA y tarjeta gráfica ATI RAdeon HD 5770. Tiene el sistema operativo Leopard X, con una partición de Windows XP. Para realizar el control del robot se elaboraron dos programas; el primero se realizó en LabView 2009 (FPGA-cRIO), el cual cumple las funciones de interpretar los comandos de la computadora (Programa CVI) y convertirlas por medio del hardware cRIO en señales de voltaje que el controlador C500 de la empresa *CRS Robotics* puede interpretar a su vez, el sistema cRIO lleva las señales de los encoder al programa para convertirlas en una medición angular de la posición del robot para que el segundo programa desarrollado en CVI de la misma empresa basado en comandos de programación C pueda leerlos de su memoria. En la Figura A.5 puede apreciarse el código de bloques programado en el software LabView para procesar las señales de una articulación.

El programa CVI fue desarrollado para interactuar con el operador y poder programar leyes de control de una manera fácil y estructurada. Cabe

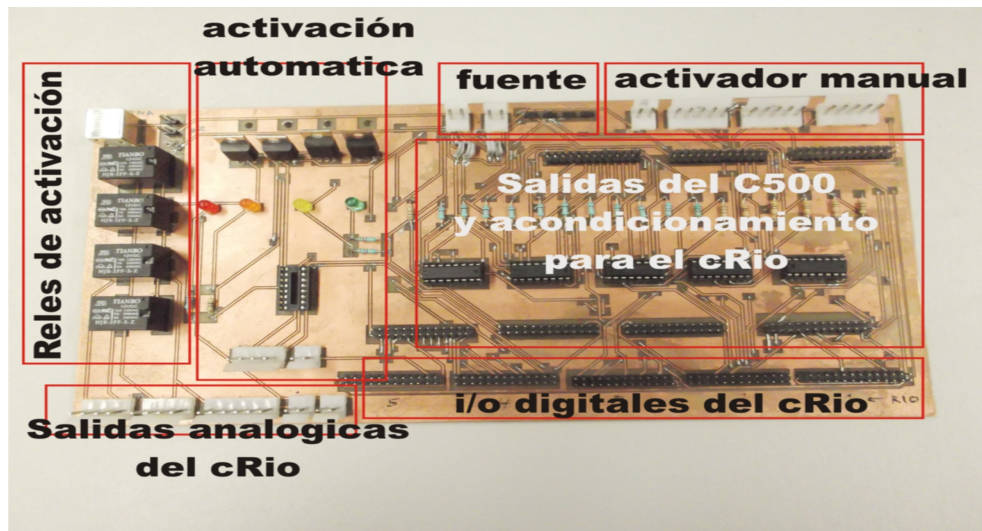


Figura A.4: Tarjeta de acondicionamiento de señales.

hacer notar que el controlador puede ser programado en el microcontrolador del cRIO pero debido a que es necesario grabar el microcontrolador cada vez que se desee hacer un experimento se prefirió que los algoritmos se ejecutaran en la computadora. Para mayor referencia vea Rivera Dueñas (2007). En la Figura A.6 se presenta el panel principal del programa CVI.





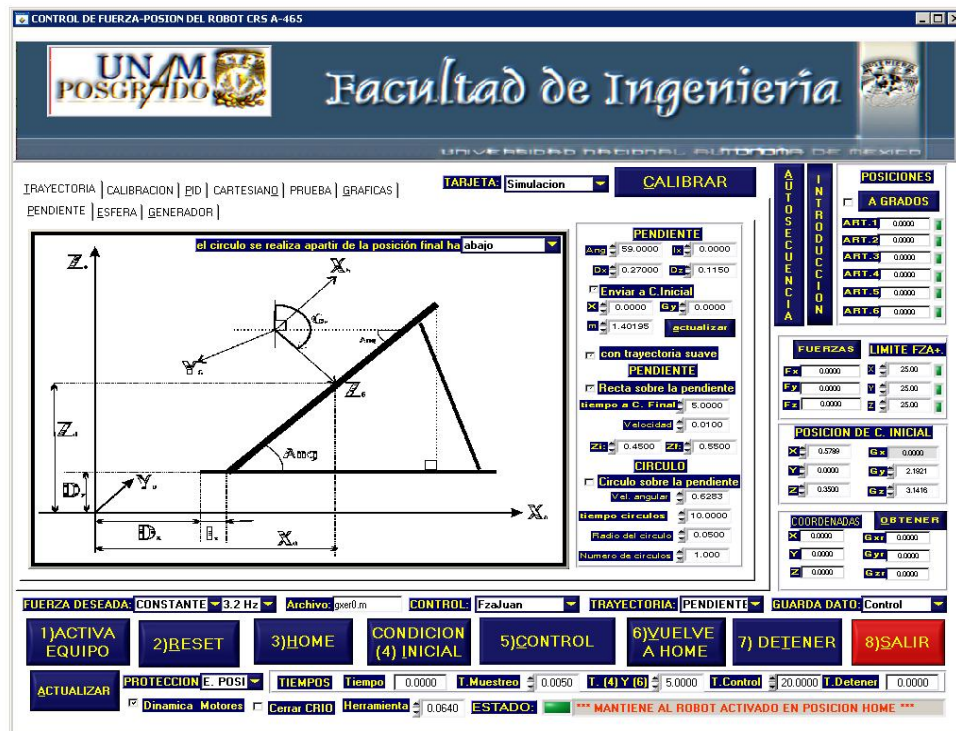


Figura A.6: Panel principal del programa CVI.

---

# Demostración del Teorema 3.2.1

## B.1. Lemas y teoremas

Para demostrar el Teorema 3.2.1, considérense primero los siguientes lemas y teoremas.

**Lema B.1.1** (Slotine y Li 1991) *Si una función diferenciable  $f(t)$  tiene un límite finito cuando  $t \rightarrow \infty$ , y si  $\dot{f}(t)$  es uniformemente continua, entonces  $\dot{f}(t) \rightarrow 0$  cuando  $t \rightarrow \infty$ .*  $\triangle$

**Lema B.1.2** (Arteaga-Pérez et al. 2006) *Considérese (3.52), y supongase que se tiene la relación*

$$\mathbf{s}_i = \mathbf{s}_1 + \mathbf{K}_\gamma \boldsymbol{\sigma}. \quad (\text{B.1})$$

*Si  $\|\mathbf{s}_i\| \leq \bar{s}_i < \infty \forall t$ , entonces  $\boldsymbol{\sigma}$  y  $\mathbf{s}_1$  permanecen acotadas  $\forall t$ . Además, una cota de  $\boldsymbol{\sigma}$  está dada por*

$$\sigma_{\text{máx}} = \frac{2(\lambda_{\text{máx}}(\mathbf{K}_\beta)\bar{s}_i + \sqrt{n})}{\lambda_{\text{mín}}(\mathbf{K}_\beta \mathbf{K}_\gamma)}. \quad (\text{B.2})$$

△

**Teorema B.1.1** (Khalil 2002) Sea  $\mathcal{D} \subset \mathfrak{R}^n$  un dominio que contiene al origen y  $V : [0, \infty) \times \mathcal{D} \rightarrow \mathfrak{R}$  una función continua diferenciable tal que

$$\alpha_1(\|\mathbf{y}\|) \leq V(t, \mathbf{y}) \leq \alpha_2(\|\mathbf{y}\|) \quad (\text{B.3})$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial \mathbf{y}} \mathbf{f}(t, \mathbf{y}) \leq -W_3(\mathbf{y}), \quad \forall \|\mathbf{y}\| \geq \mu > 0, \quad (\text{B.4})$$

$\forall t \geq 0$  y  $\forall \mathbf{y} \in \mathcal{D}$ , donde  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$  son funciones clase  $\mathcal{K}$ ,  $W_3(\mathbf{y})$  es una función continua definida positiva y  $\mathbf{f} : [0, \infty) \times \mathcal{D} \rightarrow \mathfrak{R}^n$  es continua por intervalos en  $t$  y localmente Lipschitz en  $\mathbf{y}$  sobre  $[0, \infty) \times \mathcal{D}$ . Sea  $r > 0$  tal que  $\mathcal{B}_r = \{\mathbf{y} \in \mathfrak{R}^n \mid \|\mathbf{y}\| \leq r\} \subset \mathcal{D}$  y supóngase que

$$\mu < \alpha_2^{-1}(\alpha_1(r)). \quad (\text{B.5})$$

Entonces, existe una función  $\beta$  de clase  $\mathcal{KL}$  tal que para cada estado inicial  $\mathbf{y}(t_0)$  que satisface

$$\|\mathbf{y}(t_0)\| \leq \alpha_2^{-1}(\alpha_1(r)), \quad (\text{B.6})$$

existe  $T \geq 0$  (dependiente de  $\mathbf{y}(t_0)$  y  $\mu$ ) donde la solución de  $\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{y})$  satisface

$$\|\mathbf{y}\| \leq \beta(\|\mathbf{y}(t_0)\|, t - t_0), \quad \forall t_0 \leq t \leq t_0 + T \quad (\text{B.7})$$

$$\|\mathbf{y}\| \leq \alpha_1^{-1}(\alpha_2(\mu)), \quad \forall t \geq t_0 + T. \quad (\text{B.8})$$

Además, si  $\mathcal{D} = \mathfrak{R}^n$  y  $\alpha_1$  pertenecen a la clase  $\mathcal{K}_\infty$ , entonces (B.7)–(B.8) se satisfacen para cualquier estado inicial  $\mathbf{y}(t_0)$ , sin restricción de magnitud para  $\mu$ . △

## B.2. Demostración del Teorema 3.2.1

Para emplear el Teorema B.1.1 se considera la siguiente función positiva definida para  $\mathbf{y}$  en (3.74)

$$V(\mathbf{y}) = \frac{1}{2} \mathbf{y}^T \mathbf{M} \mathbf{y}, \quad (\text{B.9})$$

con  $\mathbf{M} \triangleq \text{block diag} [\mathbf{H}(\mathbf{q}) \quad \mathbf{I} \quad \boldsymbol{\xi}_1 \boldsymbol{\xi}_3]$ .

$$\lambda_1 \|\mathbf{y}\|^2 \leq V(\mathbf{y}) \leq \lambda_2 \|\mathbf{y}\|^2, \quad (\text{B.10})$$

con

$$\lambda_1 \triangleq \frac{1}{2} \min_{\forall \mathbf{q} \in \mathfrak{R}^n} \lambda_{\min}(\mathbf{M}(\mathbf{q})) \quad (\text{B.11})$$

$$\lambda_2 \triangleq \frac{1}{2} \max_{\forall \mathbf{q} \in \mathfrak{R}^n} \lambda_{\max}(\mathbf{M}(\mathbf{q})). \quad (\text{B.12})$$

Basado en estas ecuaciones se define  $\alpha_1(\|\mathbf{y}\|) = \lambda_1 \|\mathbf{y}\|^2$  y  $\alpha_2(\|\mathbf{y}\|) = \lambda_2 \|\mathbf{y}\|^2$ . Para llevar a cabo un análisis local de estabilidad, la región  $\mathcal{D}$  en (3.75) es necesaria. Se debe mostrar que las condiciones (B.3) y (B.4) se cumplen en  $\mathcal{D}$ . Es importante hacer notar que en el Teorema B.1.1 se asume que  $\mathbf{y}(t_0)$  está en una subregión de  $\mathcal{D}$  de acuerdo con (B.6), dada por

$$\|\mathbf{y}(t_0)\| \leq \sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda_2}} r \leq \sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda_2}} y_{\text{máx}} \quad (\text{B.13})$$

con  $r \leq y_{\text{máx}}$ . Esta es la condición inicial mencionada del Teorema 3.2.1. Entonces, si (B.13) se mantiene y si (B.3) y (B.4) son satisfechas en  $\mathcal{D}$ , entonces  $\mathbf{y}$  nunca abandonará  $\mathcal{D}$  y por lo mismo se tendrá  $\|\mathbf{y}\| \leq y_{\text{máx}}$  para todo tiempo, siempre que sea posible encontrar algún  $\mu$  tal que

$$\mu < \alpha_2^{-1}(\alpha_1(r)) = \sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda_2}} r \leq \sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda_2}} y_{\text{máx}}. \quad (\text{B.14})$$

Tal como se hizo en Arteaga-Pérez *et al.* (2006), se demuestra el Teorema 3.2.1 en tres pasos.

- a) Antes que nada, se mostrará que si  $\|\mathbf{y}\|$  está acotada por  $0 < y_{\text{máx}} < \infty$ , entonces cualquier otra señal del sistema de control de lazo cerrado permanece acotada. Obviamente,  $\mathbf{s}_x$ ,  $\mathbf{r}$  y  $\Delta \bar{\boldsymbol{\rho}}$  están acotadas. De la Observación 3.2.1, y de las ecuaciones (3.33), (3.34) y (3.50), se tiene

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} - \dot{\mathbf{x}}_r - \mathbf{K}_\gamma \boldsymbol{\sigma} &= \dot{\mathbf{x}} - \dot{\hat{\mathbf{x}}} + \dot{\hat{\mathbf{x}}} - \mathbf{Q}_x (\dot{\mathbf{x}}_d - \Lambda_x \bar{\mathbf{x}}) \\ &\quad + \mathbf{J}_{\varphi_x}^+ \boldsymbol{\xi}_1 \Delta \bar{\boldsymbol{\rho}} - \mathbf{s}_d \\ &= \dot{\mathbf{z}} + \mathbf{Q}_x (\dot{\hat{\mathbf{x}}} - \dot{\mathbf{x}}_d + \Lambda_x \bar{\mathbf{x}}) + \mathbf{J}_{\varphi_x}^+ \boldsymbol{\xi}_1 \Delta \bar{\boldsymbol{\rho}} - \mathbf{s}_d. \end{aligned} \quad (\text{B.15})$$

Empleando (3.47), (3.53) y (3.54) la ecuación anterior puede reescribirse como

$$\mathbf{s}_i = \mathbf{s}_1 + \mathbf{K}_\gamma \boldsymbol{\sigma}, \quad (\text{B.16})$$

con

$$\mathbf{s}_i \stackrel{\Delta}{=} \mathbf{s}_x - \dot{\mathbf{z}}. \quad (\text{B.17})$$

Esta es una ecuación de la forma (B.1). Por otro lado, de (3.58) se tiene  $\dot{\mathbf{z}} = -\Lambda_z \mathbf{z} + \mathbf{r}$ , que es un filtro lineal estable con entrada acotada, por lo que  $\mathbf{z}$  y  $\dot{\mathbf{z}}$  están acotadas, lo cual implica que  $\mathbf{s}_i$  está acotada. Aplicando el Lema B.1.2, se puede concluir que  $\mathbf{s}_1$  y  $\boldsymbol{\sigma}$  están acotadas. Si  $\mathbf{s}_1$  está acotada, entonces de (3.53) se tiene que  $\mathbf{s}$  también está acotada. La ecuación (3.49), implica que  $\bar{\mathbf{x}}$  y  $\frac{d}{dt}\bar{\mathbf{x}}$  están acotadas. Entonces, si se toma en cuenta la observación 3.1.2 tal que  $\mathbf{Q}_x (\Delta \dot{\mathbf{x}} + \Lambda_x \Delta \mathbf{x}) \approx \Delta \dot{\mathbf{x}} + \Lambda_x \Delta \mathbf{x}$ , empleando las ecuaciones (??), (3.33) y (3.34) se puede reescribir (3.54) como

$$\Delta \dot{\mathbf{x}} + \Lambda_x \Delta \mathbf{x} = \mathbf{s}_x - \Lambda_x \mathbf{z} - \mathbf{J}_{\varphi_x}^+ \boldsymbol{\xi}_1 \Delta \bar{\boldsymbol{\rho}} + \mathbf{s}_d - \mathbf{K}_\gamma \boldsymbol{\sigma}, \quad (\text{B.18})$$

que representa un filtro lineal estable para  $\Delta \mathbf{x}$  y  $\Delta \dot{\mathbf{x}}$  con entrada acotada, por lo cual estas dos variables están acotadas. A su vez implica que  $\mathbf{x}$  y  $\dot{\mathbf{x}}$  están acotadas, porque  $\mathbf{x}_d$  y  $\dot{\mathbf{x}}_d$  están acotadas por definición. También de (3.33) es posible concluir que  $\hat{\mathbf{x}}$  y  $\dot{\hat{\mathbf{x}}}$  están acotadas. Por otro lado, dado que  $\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{J}(\mathbf{q})^{-1} \dot{\mathbf{x}}$ ,  $\dot{\mathbf{q}}$  permanece acotada también. Además, bajo la Suposición 3.1.1,  $\mathbf{q}$  tiene que estar acotada ya que el manipulador no se encuentra en ninguna singularidad.

En lo que respecta a las fuerzas relacionadas,  $\boldsymbol{\lambda}_d$  está acotada por definición y de (3.73) se puede mostrar que  $\hat{\boldsymbol{\lambda}}$  está acotada ya que depende sólo de variables acotadas, incluyendo  $\mathbf{s}_o \equiv \mathbf{s}_x - \mathbf{r}$ . Notese que de (3.45),  $\Delta \bar{\boldsymbol{\rho}}$  está acotada y que de (3.60),  $\mathbf{f}$  está acotada. El hecho de que la ley de control sea acotada hace que  $\boldsymbol{\lambda}$  en (3.67) esté acotada. También  $\ddot{\mathbf{x}}$  está acotada de (3.12) y la Suposición 3.1.1. Esto implica que  $\Delta \ddot{\mathbf{x}}$  es acotada porque  $\ddot{\mathbf{x}}_d$  lo está. Una consecuencia directa de (3.58) y (3.64) es que  $\dot{\mathbf{r}}$ ,  $\ddot{\mathbf{z}}$  y  $\ddot{\hat{\mathbf{x}}}$  están acotadas. También,  $\int_0^t \mathbf{z}(\vartheta) d\vartheta$  en (3.63) está acotada.

Finalmente,  $\dot{\mathbf{x}}_r$  está acotada en (3.50), mientras su derivada está dada por

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{x}}_r &= \mathbf{Q}_x \left( \ddot{\mathbf{x}}_d - \Lambda_x \frac{d}{dt} \bar{\mathbf{x}} \right) + \dot{\mathbf{Q}}_x (\dot{\mathbf{x}}_d - \Lambda_x \bar{\mathbf{x}}) \\ &- \mathbf{J}_{\varphi_x}^+ \boldsymbol{\xi}_1 \Delta \bar{\boldsymbol{\rho}} - \dot{\mathbf{J}}_{\varphi_x}^+ \boldsymbol{\xi}_1 \Delta \bar{\boldsymbol{\rho}} - k_1 \mathbf{s}_d - \mathbf{K}_\gamma \frac{d}{dt} \boldsymbol{\sigma}. \end{aligned} \quad (\text{B.19})$$

Nótese que de (3.52) se sabe que  $\frac{d}{dt} \boldsymbol{\sigma}$  está acotada. Esto implica que  $\ddot{\mathbf{x}}_r$  también lo está. De (3.56),  $\mathbf{y}_a$  está acotada, y  $\dot{\mathbf{s}}_x$  en (3.62) es acotada. Nótese que la derivada de  $\mathbf{s}_i$  en (B.17), *i. e.*  $\dot{\mathbf{s}}_i = \dot{\mathbf{s}}_x - \ddot{\mathbf{z}}$  tiene que estar acotada.

- b) El siguiente paso es mostrar que con una apropiada selección de ganancias, se puede lograr que  $\|\mathbf{y}\| \leq y_{\text{máx}}$ , siempre y cuando  $\mathbf{x}_d$  y  $\boldsymbol{\lambda}_d$  tengan primera y segunda derivadas acotadas. Para ello se utiliza el Teorema B.1.1. Cabe hacer notar que el teorema es empleado para probar que  $\mathbf{y}$  está uniforme finalmente acotada, lo que significa no sólo que permanece acotada para todo tiempo, sino que tiende a una región alrededor del origen donde permanece para siempre después de un tiempo finito T. La derivada de V en (B.9) a lo largo de (3.46), (3.62) y (3.64) puede ser calculada tomando en cuenta la Propiedad 3.1.2, como

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \frac{1}{2} \mathbf{s}_x^T \dot{\mathbf{H}}_c \mathbf{s}_x + \mathbf{s}_x^T \mathbf{H}_c \dot{\mathbf{s}}_x + \mathbf{r}^T \dot{\mathbf{r}} + \Delta \bar{\boldsymbol{\rho}}^T \boldsymbol{\xi}_1 \boldsymbol{\xi}_3 \Delta \bar{\boldsymbol{\rho}} \\ &= -\mathbf{s}_x^T \mathbf{K}_{\text{DP}} \mathbf{s}_x + \mathbf{s}_x^T \mathbf{K}_p \mathbf{r} - \mathbf{s}_x^T \mathbf{y}_a \\ &\quad - \mathbf{s}_x^T \mathbf{J}_{\varphi_x}^T \Delta \boldsymbol{\lambda} - \mathbf{s}_x^T \mathbf{J}_{\varphi_x}^T \boldsymbol{\xi}_2 \Delta \bar{\boldsymbol{\rho}} \\ &\quad - \mathbf{s}_x^T \mathbf{J}_{\varphi_x}^T \boldsymbol{\xi}_3 \Delta \bar{\boldsymbol{\rho}} \\ &\quad + \mathbf{r}^T \mathbf{Q}_x \left( \Delta \ddot{\mathbf{x}} + \Lambda_x \frac{d}{dt} \bar{\mathbf{x}} \right) + \mathbf{r}^T \dot{\mathbf{Q}}_x (\Delta \dot{\mathbf{x}} + \Lambda_x \bar{\mathbf{x}}) \\ &\quad - \mathbf{r}^T \mathbf{K}_d \mathbf{r} + \Delta \bar{\boldsymbol{\rho}}^T \boldsymbol{\xi}_1 \boldsymbol{\xi}_3 \Delta \bar{\boldsymbol{\rho}}. \end{aligned} \quad (\text{B.20})$$

De (3.54) se tiene

$$\mathbf{s}_x^T \mathbf{J}_{\varphi_x}^T = \Delta \bar{\boldsymbol{\rho}}^T \boldsymbol{\xi}_1 - (\mathbf{s}_d + \mathbf{K}_\gamma \boldsymbol{\sigma})^T \mathbf{J}_{\varphi_x}^T. \quad (\text{B.21})$$

Substituyendo (B.21) en (B.20)

$$\begin{aligned} \dot{V} = & -\mathbf{s}_x^T \mathbf{K}_{\text{DP}} \mathbf{s}_x + \mathbf{s}_x^T \mathbf{K}_p \mathbf{r} - \mathbf{s}_x^T \mathbf{y}_a - \mathbf{r}^T \mathbf{K}_d \mathbf{r} \quad (\text{B.22}) \\ & + \mathbf{r}^T \mathbf{Q}_x \left( \Delta \ddot{\mathbf{x}} + \Lambda_x \frac{d}{dt} \bar{\mathbf{x}} \right) + \mathbf{r}^T \dot{\mathbf{Q}}_x (\Delta \dot{\mathbf{x}} + \Lambda_x \bar{\mathbf{x}}) \\ & - \Delta \bar{\boldsymbol{\rho}}^T \boldsymbol{\xi}_1 \Delta \boldsymbol{\lambda} - \Delta \bar{\boldsymbol{\rho}}^T \boldsymbol{\xi}_1 \boldsymbol{\xi}_2 \Delta \bar{\boldsymbol{\rho}} - \Delta \bar{\boldsymbol{\rho}}^T \boldsymbol{\xi}_1 \boldsymbol{\xi}_3 \Delta \bar{\boldsymbol{\rho}} \\ & + (\mathbf{s}_d + \mathbf{K}_\gamma \boldsymbol{\sigma})^T \mathbf{J}_{\varphi_x}^T \Delta \boldsymbol{\lambda} + (\mathbf{s}_d + \mathbf{K}_\gamma \boldsymbol{\sigma})^T \mathbf{J}_{\varphi_x}^T \boldsymbol{\xi}_2 \Delta \bar{\boldsymbol{\rho}} \\ & + (\mathbf{s}_d + \mathbf{K}_\gamma \boldsymbol{\sigma})^T \mathbf{J}_{\varphi_x}^T \boldsymbol{\xi}_3 \Delta \bar{\boldsymbol{\rho}} + \Delta \bar{\boldsymbol{\rho}}^T \boldsymbol{\xi}_1 \boldsymbol{\xi}_3 \Delta \bar{\boldsymbol{\rho}}. \end{aligned}$$

Mientras que  $V$  es positiva definida para todo  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^{(2n+m)}$ ; para aplicar el Teorema B.1.1 se necesita emplear la región  $\mathcal{D}$  en (3.75) y mostrar que (B.4) se satisface. Pero, de acuerdo a lo discutido en el paso a), cualquier señal está acotada en  $\mathcal{D}$ , así que pueden encontrarse cotas para satisfacer

$$\bar{\alpha}_1 \triangleq \max_{\forall \mathbf{y} \in \mathbb{R}^{(2n+m)}} \|\mathbf{y}_a\| \quad (\text{B.23})$$

$$\bar{\alpha}_2 \triangleq \max_{\forall \mathbf{y} \in \mathbb{R}^{(2n+m)}} \left\| \mathbf{Q}_x \left( \Delta \ddot{\mathbf{x}} + \Lambda_x \frac{d}{dt} \bar{\mathbf{x}} \right) \right\| \quad (\text{B.24})$$

$$+ \max_{\forall \mathbf{y} \in \mathbb{R}^{(2n+m)}} \left\| \dot{\mathbf{Q}}_x (\Delta \dot{\mathbf{x}} + \Lambda_x \bar{\mathbf{x}}) \right\|$$

$$\bar{\alpha}_3 \triangleq \max_{\forall \mathbf{y} \in \mathbb{R}^{(2n+m)}} \| (\mathbf{s}_d + \mathbf{K}_\gamma \boldsymbol{\sigma})^T \mathbf{J}_{\varphi_x}^T \boldsymbol{\xi}_2 - \Delta \boldsymbol{\lambda}^T \boldsymbol{\xi}_1 \| \quad (\text{B.25})$$

$$\bar{\alpha}_4 \triangleq \max_{\forall \mathbf{y} \in \mathbb{R}^{(2n+m)}} \| (\mathbf{s}_d + \mathbf{K}_\gamma \boldsymbol{\sigma})^T \mathbf{J}_{\varphi_x}^T (\boldsymbol{\xi}_3 \Delta \bar{\boldsymbol{\rho}} + \Delta \boldsymbol{\lambda}) \|. \quad (\text{B.26})$$



De acuerdo a las definiciones (B.23)–(B.26), se obtiene de (B.22)

$$\begin{aligned}
\dot{V} &\leq -\lambda_{\min}(\mathbf{K}_P)\|\mathbf{s}_x\|^2 - \lambda_{\min}(\mathbf{K}_d)\|\mathbf{r}\|^2 & (B.27) \\
&\quad -\lambda_{\min}(\boldsymbol{\xi}_1\boldsymbol{\xi}_2)\|\Delta\bar{\boldsymbol{\rho}}\|^2 \\
&\quad +\bar{\alpha}_1\|\mathbf{s}_x\| + \bar{\alpha}_2\|\mathbf{r}\| + \bar{\alpha}_3\|\Delta\bar{\boldsymbol{\rho}}\| \\
&\quad +\bar{\alpha}_4 + \lambda_{\max}(\mathbf{K}_P)\|\mathbf{s}_x\|\|\mathbf{r}\| \\
&\leq -\lambda_{\min}(\mathbf{K}_P)\|\mathbf{s}_x\|^2 - \lambda_{\min}(\boldsymbol{\xi}_1\boldsymbol{\xi}_2)\|\Delta\bar{\boldsymbol{\rho}}\|^2 - \lambda_{\min}(\mathbf{K}_d)\|\mathbf{r}\|^2 \\
&\quad +\alpha\|\mathbf{y}\| + \bar{\alpha}_4 + \lambda_{\max}(\mathbf{K}_P)\|\mathbf{s}_x\|\|\mathbf{r}\|,
\end{aligned}$$

donde  $\alpha \triangleq \bar{\alpha}_1 + \bar{\alpha}_2 + \bar{\alpha}_3$ . Para lograr que (B.4) se satisfaga, las ganancias tienen que cumplir

$$\lambda_{\min}(\mathbf{K}_P) \geq 1 + \delta \quad (B.28)$$

$$\lambda_{\min}(\mathbf{K}_d) \geq \delta + \frac{1}{4}\lambda_{\max}^2(\mathbf{K}_P) \quad (B.29)$$

$$\lambda_{\min}(\boldsymbol{\xi}_1\boldsymbol{\xi}_2) = \delta, \quad (B.30)$$

con  $\delta > 0$ , para obtener

$$\dot{V} \leq -\delta\|\mathbf{s}_x\|^2 - \delta\|\mathbf{r}\|^2 - \delta\|\Delta\bar{\boldsymbol{\rho}}\|^2 \quad (B.31)$$

$$+\alpha\|\mathbf{y}\| + \bar{\alpha}_4$$

$$\leq -\frac{1}{2}\delta\|\mathbf{y}\|^2 - \left(\frac{1}{2}\delta\|\mathbf{y}\|^2 - \alpha\|\mathbf{y}\| - \bar{\alpha}_4\right).$$

Un valor conservador de  $\mu$  puede definirse como

$$\mu \triangleq \frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 + 2\delta\bar{\alpha}_4}}{\delta} > 0, \quad (B.32)$$

de tal forma que para  $\|\mathbf{y}\| \geq \mu$  se tiene

$$\dot{V} \leq -\frac{1}{2}\delta\|\mathbf{y}\|^2 \triangleq -W_3(\mathbf{y}). \quad (B.33)$$

Finalmente, para aplicar el Teorema B.1.1 es necesario mostrar que una combinación de ganancias existe tal que (B.14) se satisfaga. Dado que  $\mu$  es una función de los parámetros de control, esta meta puede alcanzarse siempre si se fija bastante pequeña. Nótese que solo se mostraron las condiciones suficientes, las cuales en general pueden ser relajadas en la práctica. Tomando en cuenta (B.14) se tiene

$$\mu = \frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 + 2\delta\bar{\alpha}_4}}{\delta} < \sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda_2}} y_{\text{máx}}. \quad (\text{B.34})$$

Obviamente es necesario que  $\delta$  sea lo suficientemente grande para hacer  $\mu$  arbitrariamente pequeña. Pero  $\delta$  es parte del numerador también. Entonces, se tiene que escoger  $\mathbf{K}_d$  y  $\mathbf{K}_P$  de acuerdo a (B.28)–(B.29). Hacer  $\delta$  lo suficientemente grande implica que  $\boldsymbol{\xi}_1$  y/o  $\boldsymbol{\xi}_2$  tengan que ser sintonizadas lo suficientemente grandes también, por lo que hay que vigilar esta relación. Primero nótese que  $\mathbf{K}_d$  y  $\mathbf{K}_P$  no están presentes en (B.23)–(B.26). Sin embargo, si se observa la definición  $\bar{\alpha}_3$ , es evidente que si se incrementa  $\boldsymbol{\xi}_1$  y  $\boldsymbol{\xi}_2$  se incrementara el valor de  $\alpha$  también. Además, de (3.56) el valor de  $\bar{\alpha}_1$  será elevado si  $\boldsymbol{\xi}_1$  se incrementa, porque  $\mathbf{y}_a$  contiene el término  $\dot{\mathbf{x}}_r = \mathbf{Q}_x(\dot{\mathbf{x}}_d - \Lambda_x \bar{\mathbf{x}}) - \mathbf{J}_{\varphi_x}^+ \boldsymbol{\xi}_1 \Delta \bar{\boldsymbol{\rho}} + \mathbf{s}_d - \mathbf{K}_\gamma \boldsymbol{\sigma}$  y su derivada.

Antes que nada, supóngase que  $k_1$ ,  $\Lambda_x$  y  $\Lambda_z$  están dadas. Las ganancias  $\mathbf{K}_\gamma$  y  $\mathbf{K}_\beta$  en (B.2) están relacionadas con un límite para  $\boldsymbol{\sigma}$  dado por  $\sigma_{\text{máx}}$ , donde  $\bar{s}_i$  es un límite para  $\mathbf{s}_i = \mathbf{s}_x - \dot{\mathbf{z}}$ , *i. e.*  $\|\mathbf{s}_i\| \leq \bar{s}_i \forall t$ . Nótese que se sabe que  $\bar{s}_i$  existe en  $\mathcal{D}$  y que es dependiente de  $y_{\text{máx}}$  y  $\Lambda_z$  (porque se tiene  $\dot{\mathbf{z}} = -\Lambda_z \mathbf{z} + \mathbf{r}$ ,  $\|\mathbf{r}\| \leq y_{\text{máx}}$ ). Entonces, para simplificar, considere  $\mathbf{K}_\gamma = \mathbf{I}k_\gamma$  y  $\mathbf{K}_\beta = \mathbf{I}k_\beta$ , con  $k_\gamma$  y  $k_\beta$  constantes positivas, de modo que la cota para  $\boldsymbol{\sigma}$  de acuerdo con B.2 se convierte en

$$\|\boldsymbol{\sigma}\| \leq \frac{2(k_\beta \bar{s}_i + \sqrt{n})}{k_\gamma k_\beta} = 2 \frac{\bar{s}_i}{k_\gamma} + 2 \frac{\sqrt{n}}{k_\gamma k_\beta}. \quad (\text{B.35})$$

Ahora bien, nótese que siempre que es empleada en el enfoque de control,  $\boldsymbol{\sigma}$  nunca aparece sola. Por el contrario, se tiene  $\mathbf{K}_\gamma \boldsymbol{\sigma}$  o  $k_\gamma \boldsymbol{\sigma}$  para este caso en particular. Esto es cierto incluso en el Lema B.1.2. Entonces, pueden escogerse  $k_\gamma$  y  $k_\beta$  suficientemente grandes para tener acotado  $k_\gamma \boldsymbol{\sigma}$  aproximadamente por  $2\bar{s}_i$ . El hecho de que  $k_\gamma$  pueda ser

arbitrariamente grande no es relevante por el momento, pero será el punto clave para probar que todas las variables de error tienden a cero en el paso c).

El siguiente paso consiste en reescribir  $\mu$  como

$$\mu = \frac{\bar{\alpha}_1 + \bar{\alpha}_2 + \bar{\alpha}_3}{\delta} + \sqrt{\frac{(\bar{\alpha}_1 + \bar{\alpha}_2 + \bar{\alpha}_3)^2}{\delta^2} + \frac{2\bar{\alpha}_4}{\delta}}.$$

El único posible inconveniente es que  $\bar{\alpha}_1$  y  $\bar{\alpha}_3$  incrementan su valor si  $\xi_1$  y  $\xi_2$  lo hacen, por lo que se necesita encontrar una combinación de ganancias para conseguir (B.14), asumiendo  $\xi_1 = \mathbf{I}\xi_1$  y  $\xi_2 = \mathbf{I}\xi_2$ , con  $\xi_1, \xi_2$  constantes positivas. Con esta simplificación es fácil mostrar que al aumentar  $\xi_1$  y  $\xi_2$ , disminuye  $\mu$ , *i. e.*

$$\mu \rightarrow 0. \quad (\text{B.36})$$

De hecho se tiene

$$\frac{\bar{\alpha}_1}{\delta} = \frac{\bar{\alpha}_1}{\xi_1 \xi_2} = \frac{1}{\xi_2} \max_{\forall \mathbf{y} \in \mathcal{D}} \left\| \frac{1}{\xi_1} \mathbf{y}_a \right\|, \quad (\text{B.37})$$

donde  $\xi_1$  aparece en  $\mathbf{y}_a$  a través de  $\dot{\mathbf{x}}_r = \mathbf{Q}_x (\dot{\mathbf{x}}_d - \Lambda_x \bar{\mathbf{x}}) - \mathbf{J}_{\varphi_x}^+ \xi_1 \Delta \bar{\rho} + \mathbf{s}_d - \mathbf{K}_\gamma \boldsymbol{\sigma}$ , se puede concluir que  $\bar{\alpha}_1$  no incrementa su valor si  $\xi_2$  aumenta, y que valores grandes de  $\xi_2$  hacen  $\bar{\alpha}_1/\delta$  arbitrariamente pequeña. Por otro lado se tiene

$$\begin{aligned} \frac{\bar{\alpha}_3}{\delta} &\leq \frac{\max_{\forall \mathbf{y} \in \mathcal{D}} \|(\mathbf{s}_d - \mathbf{K}_\gamma \boldsymbol{\sigma})^\top \mathbf{J}_{\varphi_x}^\top \xi_2\|}{\xi_1 \xi_2} + \frac{\max_{\forall \mathbf{y} \in \mathcal{D}} \|\Delta \boldsymbol{\lambda}^\top \xi_1\|}{\xi_1 \xi_2} \\ &= \frac{\max_{\forall \mathbf{y} \in \mathcal{D}} \|(\mathbf{s}_d - \mathbf{K}_\gamma \boldsymbol{\sigma})^\top \mathbf{J}_{\varphi_x}^\top\|}{\xi_1} + \frac{\max_{\forall \mathbf{y} \in \mathcal{D}} \|\Delta \boldsymbol{\lambda}\|}{\xi_2}. \end{aligned} \quad (\text{B.38})$$

Claramente, valores grandes de  $\xi_1$  y  $\xi_2$  disminuyen este término. En conclusión, para lograr que se satisfaga (B.14) se pueden fijar  $\xi_1$  y  $\xi_2$  suficientemente grandes. Después de mostrar que es posible satisfacer (B.14), se tiene para  $\|\mathbf{y}\| \geq \mu > 0$  que (B.33) se satisface, lo cual permite emplear el Teorema B.1.1. Nótese que la cota final (B.8) se convierte en

$$\|\mathbf{y}\| \leq \sqrt{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}} \mu. \quad (\text{B.39})$$

Algunas veces, esto se conoce como estabilidad práctica ya que todas las variables de error del sistema pueden hacerse arbitrariamente pequeñas.

- c) Hasta ahora se mostró que  $\mathbf{y}$  está acotada. Todavía se tiene que demostrar que los errores de seguimiento, de fuerza y de observación tienden a cero. De (3.52), (B.16)–(B.17) puede mostrarse que  $\mathbf{s}_1 = \mathbf{0}$  en un tiempo finito  $t_r$  (Arteaga-Pérez *et al.* 2006), siempre que  $k_\gamma$  sea suficientemente grande (lo cual se mostró que es posible en el paso b)).  $\mathbf{s}_1$  b y  $\mathbf{s}$  tienen que tender a cero porque  $\mathbf{s}_d = \mathbf{s}(0)e^{-k_\gamma t}$  lo hace. De (3.47) y (3.49), se puede concluir que  $\Delta\bar{\boldsymbol{\rho}}$ ,  $\bar{\mathbf{x}}$  y  $\dot{\bar{\mathbf{x}}}$  tienden a cero. Sin embargo, esto sólo garantiza que  $\hat{\mathbf{x}} \rightarrow \mathbf{x}_d$  y  $\dot{\hat{\mathbf{x}}} \rightarrow \dot{\mathbf{x}}_d$ . Notese que si  $\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{0}$  y  $\dot{\bar{\mathbf{x}}} = \mathbf{0}$ , entonces  $\Delta\mathbf{x} = \mathbf{z}$  y  $\Delta\dot{\mathbf{x}} = \dot{\mathbf{z}}$ . Por lo tanto, (3.63) se convierte en

$$\mathbf{r} + \mathbf{k}_d \int_0^t \mathbf{r}(\vartheta) d\vartheta = \mathbf{Q}_x (\dot{\mathbf{x}} - \dot{\mathbf{x}}_d) = \dot{\mathbf{x}} - \dot{\mathbf{x}}_d = \dot{\mathbf{x}} - \dot{\hat{\mathbf{x}}} = \dot{\mathbf{z}}. \quad (\text{B.40})$$

Después de derivar (B.40) y emplear (3.58) se obtiene

$$\ddot{\mathbf{z}} + \boldsymbol{\Lambda}_z \dot{\mathbf{z}} + \mathbf{k}_d (\dot{\mathbf{z}} + \boldsymbol{\Lambda}_z \mathbf{z}) = \ddot{\mathbf{z}}, \quad (\text{B.41})$$

o

$$(\boldsymbol{\Lambda}_z + \mathbf{k}_d \mathbf{I}) \dot{\mathbf{z}} + \mathbf{k}_d \boldsymbol{\Lambda}_z \mathbf{z} = \mathbf{0}. \quad (\text{B.42})$$

La ecuación (B.42) representa un filtro lineal estable para  $\mathbf{z}$ , así que  $\mathbf{z}$  y  $\dot{\mathbf{z}}$  tienden a cero, lo que significa que  $\Delta\mathbf{x}$  y  $\Delta\dot{\mathbf{x}}$  tienden a cero.

Para mostrar que  $\Delta\bar{\boldsymbol{\rho}} \rightarrow \mathbf{0}$ , se emplea el Lema B.1.1. Antes que nada, se sabe que  $\Delta\bar{\boldsymbol{\rho}}$  está acotada y que tiene un límite ( $\Delta\bar{\boldsymbol{\rho}} \rightarrow \mathbf{0}$ ) en  $t \rightarrow \infty$ . Entonces, para que  $\Delta\bar{\boldsymbol{\rho}}$  tienda a cero, solo hay que mostrar que es uniformemente continua o equivalentemente que  $\frac{d}{dt}\Delta\bar{\boldsymbol{\rho}}$  está acotada (Slotine y Li 1991). Pero, ya que  $\Delta\bar{\boldsymbol{\rho}} = \hat{\boldsymbol{\lambda}} - \boldsymbol{\lambda}_d$  y se sabe que  $\boldsymbol{\lambda}_d$  y sus derivadas están acotadas por definición, por lo que hay que mostrar que  $\frac{d}{dt}\hat{\boldsymbol{\lambda}}$  es acotada. De (3.45) se tiene

$$\frac{d}{dt}\Delta\bar{\boldsymbol{\rho}} \triangleq \frac{d}{dt}\hat{\boldsymbol{\lambda}} - \frac{d}{dt}\boldsymbol{\lambda}_d, \quad (\text{B.43})$$

y empleando (3.73)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \hat{\boldsymbol{\lambda}} &= \frac{d}{dt} \boldsymbol{\lambda}_d - (\mathbf{I} + \boldsymbol{\xi}_3)^{-1} [\boldsymbol{\xi}_2 \Delta \bar{\boldsymbol{\rho}} + \\ &\quad \left. \frac{d}{dt} (\mathbf{J}_{\varphi x} \mathbf{H}_c^{-1} \mathbf{J}_{\varphi x}^T)^{-1} \mathbf{f}_x + (\mathbf{J}_{\varphi x} \mathbf{H}_c^{-1} \mathbf{J}_{\varphi x}^T)^{-1} \frac{d}{dt} \mathbf{f}_x \right]. \end{aligned} \quad (\text{B.44})$$

De la discusión del paso a),  $\frac{d}{dt} (\mathbf{J}_{\varphi x} \mathbf{H}_c^{-1} \mathbf{J}_{\varphi x}^T)^{-1}$  tiene que estar acotada porque su derivada depende solo de señales acotadas. Calculando la derivada de  $\mathbf{f}_x$  en (3.71) se tiene

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathbf{f}_x &= \frac{d}{dt} (\mathbf{J}_{\varphi x} \mathbf{H}_c^{-1}) (\mathbf{K}_p \mathbf{s}_o + \hat{\mathbf{C}}_c \dot{\hat{\mathbf{x}}} + \mathbf{D}_c \dot{\hat{\mathbf{x}}} + \mathbf{g}_c) \\ &+ \mathbf{J}_{\varphi x} \mathbf{H}_c^{-1} \left( \mathbf{K}_p (\dot{\mathbf{s}}_x - \dot{\mathbf{r}}) + \hat{\mathbf{C}}_c(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \dot{\hat{\mathbf{x}}}, \ddot{\hat{\mathbf{x}}}) \dot{\hat{\mathbf{x}}} + \hat{\mathbf{C}}_c \ddot{\hat{\mathbf{x}}} + \right. \\ &\quad \left. \dot{\mathbf{D}}_c(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\hat{\mathbf{x}}} + \mathbf{D}_c \ddot{\hat{\mathbf{x}}} + \dot{\mathbf{g}}_c(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \right) \\ &- \ddot{\mathbf{J}}_{\varphi x}(\mathbf{x}, \dot{\hat{\mathbf{x}}}, \ddot{\hat{\mathbf{x}}}) \dot{\hat{\mathbf{x}}} - \dot{\mathbf{J}}_{\varphi x}(\mathbf{x}, \dot{\hat{\mathbf{x}}}) \ddot{\hat{\mathbf{x}}}. \end{aligned}$$

Nuevamente,  $\frac{d}{dt} \mathbf{f}_x$  está en función de señales acotadas, por lo que está acotada a su vez. Esto significa que  $\frac{d}{dt} \hat{\boldsymbol{\lambda}}$  y  $\frac{d}{dt} \Delta \bar{\boldsymbol{\rho}}$  están acotadas. Hasta el momento se demostró mediante el Lema B.1.1 que  $\Delta \bar{\boldsymbol{\rho}}$  tiende a cero, pero es necesario mostrar que el error de seguimiento y observación tienden a cero, *i. e.*  $\Delta \boldsymbol{\lambda}$  and  $\Delta \tilde{\boldsymbol{\lambda}}$ , respectivamente. De (3.44), (3.67) y (3.68) se tiene

$$\begin{aligned} \Delta \tilde{\boldsymbol{\lambda}} &= (\mathbf{J}_{\varphi x} \mathbf{H}_c^{-1} \mathbf{J}_{\varphi x}^T)^{-1} \cdot \\ &\cdot \left( \mathbf{J}_{\varphi x} \mathbf{H}_c^{-1} \left( \hat{\mathbf{C}}_c \dot{\hat{\mathbf{x}}} + \mathbf{D}_c \dot{\hat{\mathbf{x}}} - \mathbf{C}_c \dot{\mathbf{x}} - \mathbf{D}_c \dot{\mathbf{x}} \right) + \dot{\mathbf{J}}_{\varphi x} \dot{\mathbf{x}} - \dot{\mathbf{J}}_{\varphi x} \dot{\hat{\mathbf{x}}} \right). \end{aligned}$$

Ya que  $\dot{\hat{\mathbf{x}}} \rightarrow \dot{\mathbf{x}}$ , se tiene que  $\Delta \tilde{\boldsymbol{\lambda}} \rightarrow \mathbf{0}$ . Finalmente, de (3.43)–(3.45) es posible calcular

$$\Delta \boldsymbol{\lambda} = \Delta \tilde{\boldsymbol{\lambda}} + \Delta \bar{\boldsymbol{\rho}}, \quad (\text{B.45})$$

lo cual implica que  $\Delta \boldsymbol{\lambda} \rightarrow \mathbf{0}$ .



## Bibliografía

- Arimoto, S., Y. Liu y T. Naniwa.** 1993. Principle of orthogonalization for hibrid control of robot arms. *Proceedings of 12th IFAC Word Congress* 1. 507–512.
- Arteaga-Pérez, M. A., A. M. Castillo-Sánchez y V. Parra-Vega.** 2006. Cartesian control of robots without dynamic model and observer design. *Automatica* 42. 473–480.
- Cheah, C.C., K. S. y S. Arimoto.** 2002. Stability of hibrid position and force control for robotic manipulator with kinematics and dynamics uncertainties. *Automatica* (39). 847–855.
- CRS Robotics, C.** 2001. *A465 Robot System User Guide UMI-A465-400*. Burlington, Ontario L7L 6A6, Canada: [www.crsrobotics.com](http://www.crsrobotics.com).
- Drake, S. y S. Simunovic.** 1977. The use of compliance in a robot assembly systems. *IFAC Symposium on Information and control problems in Manuf. Tech. IFAC. Tokio*.

- Duffy, J.** 1990. The fallacy of modern hybrid control theory that is based on orthogonal complements of twisty and wrench spaces. *J. of Robotic Systems* 7 (No.2). 139–144.
- Eom, K., I. Suh, W. Chung y S. Oh.** 1998. Disturbance observer based force control of robot manipulator without force sensor. *Proceedings of the 1998 IEEE International Conference on Robotics and Automation*. Leuven, Belgium. 3012–3017.
- Formica, D., L. Zollo y E. Guglielmelli.** 2005. Torque-dependent compliance control in the joint space of an operational robotic machine for motor therapy. *Proceedings of the 2005 IEEE 9th International Conference on Rehabilitation Robotics*. Chicago, IL-USA.
- Garcia, J. G., A. Robertsson, J. G. Ortega y R. Johansson.** 2009. Self-calibrated robotic manipulator force observer [elektronisk resurs]. *Robotics and Computer-Integrated Manufacturing*.
- Gudiño Lau, J., M. A. Arteaga-Pérez, L. A. Muñoz y V. Parra-Vega.** 2004. On the control of cooperative robots without velocity measurements. *IEEE Transactions on Control Systems Technology* 12(4). 600–608.
- Huang, H. y W. Tzeng.** 1989. Robotic force control by using estimated contact force. *Proceedings of the 28th conference on decision y control. IEEE. Tampa, Florida*. 2158–2163.
- Joseph, S. y C. Yuan.** 1988. Closed-loop manipulator control using quaternion feedback. *IEEE Journal of Robotics and Automation* 4(4). 434–440.
- JR3** 2006. *JR3 Multi/axis Force/Torque Sensors connect directly to adept MV controllers*. Woodland: www.jr3.com.
- Katsura, S., Y. Matsumoto y O. Kouhei.** 2007. Modeling of force sensing and validation of disturbance observer for force control. *IEEE Transactions on Industrial Electronics* 54(1). 530–538.
- Khalil, H. K.** 2002. *Nonlinear Systems, 3rd ed.* Upper Saddle River, New Jersey. U.S.A.: Prentice–Hall.

- Khalil, W.** y **E. Dombre.** 2002. *Modeling, identification and control of robot.* : Hermes Sciences Europe.
- Kurihara, D., Y. Kakinuma** y **S. Katsura.** 2009. Sensor-less cutting force monitoring using parallel disturbance observer. *Int J. of Automation Technology* 3(4). 415–421.
- Lewis, F. L., C. T. Abdallah** y **D. M. Dawson.** 1993. *Control of robots Manipulators.* NY USA: New York.
- Liu, Y.** y **S. Arimoto.** 1996. Implicit and explicit force controllers for rheo-  
nominically cosntrained manipulators and their extensions to distributed  
cooperation control. *13th triennial World Congress. IFAC. San Francis-  
co, USA.*
- MaClamroch, N.** y **D. Wang.** 1988. Feedback stabilization and tracking  
of constrained manipulator. *IEEE Transactions on Automatic Control*  
(5). 419–426.
- Martínez-Rosas, J. C.** 2002. *Identificación paramétrica de un robot in-  
dustrial con diferentes esquemas de control adaptable.* México, D. F:  
UNAM.
- Martínez-Rosas, J. C.** y **M. A. Arteaga-Pérez.** 2008. Force and velocity  
observers for the control of cooperative robots. 26. 85–92.
- Matinfar, M.** y **K. Hashtrudi-Zaad.** 2005. Optimization-based robot  
compliance control: Geometric and linear quadratic approaches. *Journal  
International Journal of Robotics Research.* CA, USA.
- Okada, M., Y. Nakamura** y **S. Ban.** 2001. Design of programmable pas-  
sive compliance shoulder mechanism. *Robotics and Automation, 2001.  
Proceedings 2001 ICRA. IEEE International Conference on* 1. 348–353.
- Parra-Vega, V., A. Rodríguez – Ángeles, S. Arimoto** y **G. Hirzinger.** 2001. High precision constrained grasping with cooperative adapti-  
ve handcontrol. *Journal of Intelligent and Robotic Systems* 32. 235–254.
- Queiroz, M., D. Watson** y **T. Burg.** 1996. Position/force control of robots  
manipulators without velocity/force measurements. *Conference on Ro-  
botics and Automation. Minnesota, USA.* Minnesota, USA. 2561–2566.



- Queiroz, M., J. Hu y D. Watson.** 1997. Adaptive position/force control of robots manipulators without velocity/force measurements: Theory and experimentation. *IEEE transaction on Systems, Man, and Cybernetics* 27(5). 796–809.
- Raibert, M. y J. Craig.** 1981. Hybrid position/force control of manipulators. *Transactions ASME Journal of Dynamic System, Measurement and control* 102. 126–133.
- Rivera Dueñas, J. C.** 2007. *Control de posición/fuerza para manipuladores rígidos basado en cuaterniones unitarios*. México, D. F: UNAM.
- Siciliano, B. y L. Villani.** 1999. *Robot Force Control*. The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.
- Slotine, J. J. E. y W. Li.** 1991. *Applied Nonlinear Control*. Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice–Hall.