A LOS ASISTENTES A LOS CURSOS DEL CENTRO DE EDUCACION CONTINUA

Las autoridades de la Facultad de Ingeniería, por conducto del Jefe del Centro de Educación Continua, otorgan una constancia de asistencia a quienes cumplan con los requisitos establecidos para cada curso. Las personas que deseen que aparezca su título profesional precediendo a su nombre en la constancia, deberán entregar copia del mismo o de su cédula a más tardar el SEGUNDO DIA de clases, en las oficinas del Centro con la señorita encargada de inscripciones.

El control de asistencia se llevará a cabo a través de la persona encargada de entregar las notas del curso. Las inasistencias serán computadas por las autoridades del Centro, con el fin de entregarle constancia solamente a los alumnos que tengan un mínimo del 80% de asistencia.

Se recomienda a los asistentes participar activamente con sus ideas y experiencias, pues los cursos que ofrece el Centro están planeados para que los profesores expongan una tesis, pero sobre todo, para que coordinen las opiniones de todos los interesados constituyendo verdaderos seminarios.

Es muy importante que todos los asistentes llenen y entregen su hoja de inscripción al inicio del curso. Las personas comisionadas por alguna institución deberán pasar a inscribirse en las oficinas del Centro en la misma forma que los demás asistentes, entregando el oficio respectivo.

Con objeto de mejorar los servicios que el Centro de Educación Continua ofrece, al final del curso se hará una evaluación a tráves de un cuestionario diseñado para emitir juicios anónimos por parte de los asistentes.

centro de educación continua
división de estudios superiores
facultad de ingeniería, unam

CUESTIONARIO PARA EL DIRECTORIO GENERAL	PARA USO EXCLUSIVO DEL C E C ALTA [SI] MODIFICACION [SI]

1.– INSTRUCCIONES GENERALES.

A.– Escriba con letra de molde.

B.– Escriba un solo caracter por cuadro ó semicuadro.

C.– Para contestar las preguntas en las líneas ó en los semicuadros escriba, letras y en los cuadros pondrá números según sea la respuesta que se pide.

NOTA : No se haga ninguna anotación en los cuadros sombreados.

NOMBRE DEL CURSO : ______________________ FOLIO : [| | | |] 1 5

1.– NOMBRE :

[| | | | |*] 8 TITULO 13

14 NOMBRE (S) , APELLIDO PATERNO APELLIDO MATERNO. 41

NOTA : Separe mediante una coma (,) el (los) nombre (s) de los apellidos.

2.– REGISTRO FEDERAL DE CAUS. : 42 AÑO MES DIA 51

3.– CEDULA PROFESIONAL: 52 NUMERO 53

4.– TELEFONO PARTICULAR: 59 NUMERO 65

5.– TELEFONO OFICINA: 66 NUMERO 72 73 EXT. 76

6.– ASISTENTE AL CURSO O PROFESOR: ______________ 77 A 1 80 B 5 80

7.– DIRECCION PARTICULAR :

8 CALLE , NUMERO Y NUMERO INTERIOR. 41

COLONIA Y/O CIUDAD. 71

ZONA POSTAL 72 73

______________ ESTADO 74 75

8– ______________ TITULO PROFESIONAL 76 77

______________ ESPECIALIDAD 78 79

A 2 80 M 5 80

DFCEC-01/A

10.– DIRECCION DE OFICINA:

8 CALLE, NUMERO Y NUMERO INTERIOR 41

42 COLONIA Y/O CIUDAD. 71

ZONA POSTAL: 72 73

ESTADO 74 75

A 3 80

M 7 80

11.– ASOCIACIONES A LAS QUE PERTENECE :

PRINCIPAL : 6 7

OTRAS : 8 9

10 11

12 13

14 15

A 4 80

M 8 80

__________ A ____ DE __________ DE 19 ______ FECHA DE ELABORACION	FIRMA

PARA USO EXCLUSIVO DEL CENTRO DE EDUCACION CONTINUA

CODIFICO :	REVISO :	OBSERVACIONES :

DFCEC-01/B

METODO CIENTIFICO: ESQUEMAS PARA SU PRACTICA
(del 26 de marzo al 6 de abril)
1979

FECHA	HORARIO	TEMA	PROFESORES
26 de marzo	17 a 17:30	INTRODUCCION	Dr. Javier Salazar Resines
26 de marzo	17:30 a 21	1. ALGUNOS CONCEPTOS DE LA LOGICA SIMBOLICA	Arq. María Dolores González Martíne:
27 de marzo	17 a 21 h	ALGUNOS CONCEPTOS DE LA LOGICA SIMBOLICA	Arq. María Dolores González Martíne:
28 de marzo	17 a 19 h	ALGUNOS CONCEPTOS DE LA LOGICA SIMBOLICA	Arq. María Dolores González Martíne:
28 de marzo	19 a 21 h	2. INTRODUCCION Y APLICACIONES DE LA TEORIA DE GRAFICAS	Maestra Donna Jackson Oliver
29 de marzo	17 a 21 h	INTRODUCCION Y APLICACIONES DE LA TEORIA DE GRAFICAS	Maestra Donna Jackson Oliver
30 de marzo	17 a 21 h	INTRODUCCION Y APLICACIONES DE LA TEORIA DE GRAFICAS	Maestra Donna Jackson Oliver
2 de abril	17 a 19 h	APLICACION DE LOS TEMAS 1 y 2	Dr. Eleuterio Zamanillo Noriega
2 de abril	19 a 21 h	APLICACION DE LOS TEMAS 1 y 2	Dr. Javier Salazar Resines
3 de abril	17 a 21 h	3. FORMULACION O ENUNCIADO DE PROBLEMAS	Dr. Eleuterio Zamanillo Noriega
4 de abril	17 a 19 h	FORMULACION O ENUNCIADOS DE PROBLEMAS	Dr. Eleuterio Zamanillo Noriega
4 de abril	19 a 21 h	FORMULACION O ENUNCIADO DE PROBLEMAS	Dr. Javier Salazar Resines

FECHA	HORARIO	TEMA	PROFESOR
5 de abril	17 a 21 h	4. RESOLUCION DE PROBLEMAS	Dr. Javier Salazar Resines y Dr. Eleuterio Zamanillo Noriega
6 de abril	17 a 21 h	4. RESOLUCION DE PROBLEMAS	Dr. Javier Zalazar Resines y Dr. Eleuterio Zamanillo Noriega

C L A U S U R A

'pmc.

DIRECTORIO DE PROFESORES DEL CURSO METODO CIENTIFICO: ESQUEMAS PARA SU PRACTICA

1. ARQ. MARIA DOLORES GONZALEZ MARTINEZ
   INVESTIGADORA
   A.N.U.I.E.S
   Antiguo local de Radio Universidad P.A.
   UNAM
   México 20, D.F.
   Tel. 548.81.98

2. MAESTRA DONNA JACKSON OLIVER
   INVESTIGADORA
   A.N.U.I.E.S.
   Antiguo local de Radio Universidad P.A.
   UNAM
   México 20, D.F.
   Tel. 548.81.98

3. DR. JAVIER SALAZAR RESINES (Coordinador)
   DIRECTOR DE INVESTIGACION Y SISTEMAS
   PARA LA PLANEACION
   A.N.U.I.E.S.
   UNAM
   México 20, D.F.
   Tel. 548.81.98

4. DR. ELEUTERIO ZAMANILLO NORIEGA
   AUXILIAR DE LA SECRETARIA ACADEMICA
   A.N.U.I.E.S.
   Insurgentes Sur 2133-3°
   México 20, D.F.
   Tel. 550.27.55

centro de educación continua
división de estudios superiores
facultad de ingeniería, unam

METODO CIENTIFICO: ESQUEMAS PARA SU PRACTICA

Modelos Esquemáticos para la Elaboración de Planes en la Educación Superior

Dr. Javier Salazar Resines

Marzo, 1979.

P R O L O G O

De acuerdo con las convicciones del autor, el proceso de la planeación de la educación superior, aunque ha sido ampliamente abordado en diversos libros, publicaciones y conferencias debidos a expertos en la materia, no lo suelen conducir como un conjunto ordenado de acciones sistemáticas, no obstante que en algunas de sus afirmaciones y principios mencionan, repetidamente, temas, conceptos e incluso términos de la teoría de sistemas. Otro tanto ocurre con la "metodología de la ciencia" o el "método científico".

Al proponernos llenar este vacío, adquirimos alguna conciencia de la magnitud de los compromisos implícitos y consecuentes de ese propósito. Al emprender más adelante la empresa, nos animó la creencia de poder proponer un arreglo preliminar de ideas y conceptos que encaminaran el proceso a una visión sistemática. Esto, sin la pretensión de "quien posee la verdad última", sino sólo de sugerir algún camino o un agregado de alternativas y enfoques posibles que pudieran hacer más objetiva, menos dogmática, verbalista y "coyuntural" la acción planificadora.

Lo tentativo o preliminar se advertirá en el texto, a través del cual se tratan de evadir las afirmaciones categóricas o definitivas.

Para mejor interpretar las intenciones de este trabajo, es recomendable saber algo de "teoría de gráficas" (o de "grafos"), cuando menos los conceptos más elementales que puedan estudiarse en un lapso muy breve (por ejemplo, en algunas de las referencias: 84, 64 ú 11, que se consignan en la bibliografía).

En cuanto a su formato, el trabajo se divide en tres partes: el texto, el cuestionario y los anexos.

El prpósito central es el de presentar los conceptos de una manera "esquemática", principalmente a través de diagramas y figuras que pudieran fijar las ideas en una disposición accesible. El texto, entonces, sólo pretende introducir los anexos (que durante la lectura se habrán de desplegar y tener presentes continuamente). Además, se remite al lector repetidamente a referencias que puedan ayudar a ampliar más apropiadamente los conceptos correspondientes. No es nuestra pretensión hacer un alarde de erudición, sino mostrar, a través de otros enfoques, las amplias posibilidades que representa la sistematización del proceso de planificación.

El cuestionario está planteado como una ayuda para ubicar más rápidamente algún aspecto, a través de múltiples opciones de preguntas (que no son necesariamente equivalentes o sinónimas). Para mejor afirmar esta intención, se redactaron las preguntas muy sucintamente (lo cual, en diversas ocasiones, conduce a una escasa correspondencia entre el texto, el cuestionario y los anexos).

No nos interesa describir con toda minuciosidad los propósitos de cada una de las partes del texto. El lector los irá descubriendo a medida que avance y los trate de aplicar o contrastar con sus propios puntos de vista. Sin embargo, dada la inquietud que en pasadas experiencias (cursillos, conferencias y reuniones) ha causado la Introducción, quisiéramos señalar lo siguiente.

A primera vista, la Introducción resulta algo "pesada", con una abundancia de términos y conceptos. Esto no debe preocupar mucho al lector, porque se pretende sólo dar una visión panorámica de asuntos que más pausadamente se describen en los capítulos posteriores o en la propia bibliografía. Esto último también sugiere que el trabajo no pretende, y tampoco puede, ser exhaustivo respecto a los propósitos antes enunciados.

Es el mejor deseo del autor que la persona que pacientemente estudie este trabajo, encuentre en él nueva orientación en cuanto a los enfoques pretendidos, y se disculpa de antemano por la brevedad y desigualdad del texto y las aparentes complicaciones del formato.

Deseamos expresar nuestro reconocimiento a las autoridades de la Universidad Autónoma Metropolitana, unidad Azcapotzalco, por la oportunidad que nos brindaron para iniciar este trabajo.

Dirigimos nuestro más profundo agradecimiento a la ANUIES, que ha patrocinado decidida y abiertamente el desarrollo del trabajo en las fases de elaboración del manuscrito y presentación del mismo en cursos y conferencias, que permitieron discutir algunas de las ideas aquí contenidas con muy distinguidos investigadores de esta Asociación y con profesores de instituciones de educación superior.

Agradecemos también las colaboraciones diversas de quienes participaron más directamente en la elaboración del trabajo, en particular de la Lic. Eugenia Lizalde que llevó a cabo una revisión crítica y exhaustiva del manuscrito, de los señores Jorge Duarte, Angel Rueda y Fernando Díez, quienes realizaron los dibujos de los anexos y a la Sra. Lucrecia Tello de Cañizares que realizó concienzudamente el manuscrito.

ANUIES, 1978. JAVIER SALAZAR R.

C O N T E N I D O

1. INTRODUCCION

1. Introducción

Según los enfoques recientes de la planeación[1], y particularmente de la planeación educativa[2], la elaboración de un plan contempla:

1. necesidades sociales, culturales y económicas que estén en el ámbito de las instituciones de la educación superior,
2. la interpretación reflexiva y científica de las mismas,
3. los fines y objetivos explícitos y coherentes de las instituciones que las atenderán,
4. la configuración sistemática de medios y procedimientos que consideren interacciones funcionales, y
5. la programación que incluya plazos para la realización operativa de los objetivos planteados.

Resultará obvio para los especialistas de la planeación que en lo anterior puedan estar esbozados algunos aspectos básicos de su actividad, pero sostendrán válidamente que existen asuntos de mayor o menor relevancia que también podrían incluirse, por ejemplo, metodología, organización o financiamiento[3]. Otros cuestionarán los significados y alcances de los conceptos consignados o las tendencias, o incluso las ideologías[4] que subyacen en estos considerandos.

Sin embargo, aceptando estas digresiones y posibles críticas, cabe "razonablemente" aceptar que los cinco puntos anteriores están, de alguna manera, combinados con la temática de la "planeación educativa" y en muchos casos con lo que tradicionalmente se ha denominado como "método científico"[5,6,7] y que recientemente, r e s p e c t o a lo operativo o instrumental, tienen relación [illegible]trecha con las llamadas "teorías o enfoques de sistemas"[8,9,10,11].

Aún más, los autores de textos sobre planeación y asuntos conexos suelen emplear términos como "enfoque de sistemas"[2], "integración", "estructura", etc., y no obstante la ausencia del planteamiento formal, propio de la teoría de sistemas, algunos polemizan contra estas formulaciones, atribuyéndoles alguna supuesta tendencia ideológica sutilmente introducida, en cuanto que no se comprometen explícitamente con algún punto de vista dogmático particular.

En este trabajo se sugieren algunas ideas y conceptos relevantes para la formulación de un plan educativo. Se pretende que los tópicos sean incorporados en el plan respondiendo a un conjunto de preguntas que se consignan en el cuestionario anexo. Examinándolo resulta obvio que no es factible responderlo totalmente para cada plan específico. Es deseable, sin embargo, esforzarse en responder el mayor número de preguntas consignadas y otras que el especialista adecúe del propio cuestionario o considere conveniente anexar para la formulación de un determinado plan.

Las preguntas están clasificadas de acuerdo con las siguientes categorías (niveles de abstracción):

Diagnósticos.- A. Situaciones, circunstancias y justificaciones.
B. Perfiles previos, institucionales e individuales.

Descripción Clasificación:

- I. Percepción externa y descripción.
- II_a Descripción de propiedades.
- II_b Formación de clases y contextos.
- II_c Ajuste de contextos y clases.
- II_d Clases híbridas.

Relaciones { III_a Relaciones directas (empíricas) y simbología. III_b Concatenaciones. }

IV Formulaciones/enunciados.

Se incluyen además, cuestiones sobre procesos de información y comunicación, teorización, validación y retroalimentación.

Para destacar los criterios básicos del cuestionario, se anexan representaciones esquemáticas:

ANEXO 1.- Consta de un conjunto de círculos concéntricos y sectores con representaciones iconográficas que pretende poner de manifiesto aspectos relativos(3) a diagnósticos, percepción, descripción, clasificación, explicación (relaciones directas y concatenaciones), formulación y enunciados. Con esto se intenta introducir algún orden lógico[12] de ubicación de los oficios y niveles de abstracción de los tópicos de la planeación.

ANEXO 2.- Se encamina a prescribir relaciones[13] entre los temas de los diversos niveles (gráfica) y las clases[14] que se derivan de conjunciones alternativas de los temas mencionados.

Estas representaciones implican conceptos fundamentales de interrelación de acuerdo con la Teoría de Sistemas, que no son usual y explícitamente planteados en los procesos de la planeación educativa. Es importante dejar claro que no son necesariamente importantes las relaciones indicadas en este trabajo. Podrían haber sido otras las relaciones u otros los asuntos relacionados. Lo que resulta importante es el hecho de manifestar explícitamente las relaciones implicadas por un plan, porque ellas conducen a una concepción "estructurada" y posiblemente "integral" de dicho plan. De otra manera, los temas de un plan pueden tener relaciones no definidas o bien puede haber asuntos sólo particularmente conectados al plan, e incluso algunos de ellos pueden estar francamente aislados del resto.

En el ANEXO 3 se representa una tentativa de arreglo secuencial, incluyendo en él una descripción sucinta de los elementos conceptuales asociados a cada vértice. La estructura, sin embargo, es la misma del anexo 2.

No obstante el análisis minucioso de factores, en muchos casos la mera formulación del plan -su enunciado-, no es suficiente para precisar fines u objetivos coherentes, o para definir una configuración sistemática de medios y procedimientos o para establecer la realización operativa de los objetivos. En esos casos se puede considerar que la formulación es sólo una propuesta -el enunciado de un problema-, de donde habrá que tomar decisiones, delinear posibles soluciones dentro de un marco teórico o conceptual que incluya procedimientos y operaciones conducentes de una situación dada (estado inicial), a una situación deseada o requerida (estado final[15]).

Para abordar estas etapas de la planeación, de una manera sistemática, se incluyen los esquemas de los ANEXOS 4 y 5.

A estas etapas de búsqueda se les ha denominado "Resolución de Problemas". Se configuran en la gráfica del anexo 4 y se detallan en el anexo 5.

El enunciado o formulación de las etapas del cuestionario y los anexos 1 y 2, se considera aquí como "estado inicial" o "enunciado original".

Asimismo, en el anexo 5, se presentan otros "estados" o etapas de este proceso:

- Partición (análisis) separación del enunciado original en sus partes relevantes y significativas

- Control interno-criterios, utilizados en la asociación con teorías, conceptos, etc., de cada una de las partes del enunciado

- Enunciados intermedios o alternativos, que pretenden expresar reformulaciones del plan a la vista del control interno y posibles soluciones

- Enunciados finales, que suponen una subsecuente formulación, la más apropiada, elegida entre las alternativas anteriores

- Sustituciones-simplificaciones-soluciones, que implican la reducción y optimización del planteamiento, de los procesos, operaciones y resultados o "soluciones" previstas

- Control externo, que se refiere a la mediación de factores exógenos en la formulación y adecuación del plan.

Tal como se presenta la estructuración de las etapas en la gráfica del anexo 4, o en el esquema secuencial del anexo 5, el propósito aparente de estos procesos es el de obtener una o varias "soluciones" y no necesariamente una reformulación. De pretenderse esta última opción, podría conseguirse alterando ligeramente la gráfica, adaptándola para que el estado de "enunciados finales" sea el terminal. Sin embargo, dado que en el estado de "Sustituciones-simplificaciones-soluciones" se incluyen "procesos" y -

"operaciones", habrá que insertarlo en el análisis alternativo.

En el esquema de "clases", del anexo 4, se representan las trayectorias posibles de la gráfica, o sea, como antes, las conjunciones alternativas de los estados considerados en la gráfica.

La fundamentación y análisis de estas representaciones esquemáticas corresponden a los dominios de la matemática, la cibernética y la teoría de los sistemas[16,17].

2. DESCRIPCION DE LOS ESQUEMAS PARA LA FORMULACION O ENUNCIADO DE UN PLAN X. (ANEXOS 1 AL 3)

2. Descripción de los esquemas para la formulación o enunciado de un plan X. (Anexos 1 al 3).

2.1 Diagnósticos, trayectorias y comunicación.

Como se indicó en la introducción, los esquemas se proponen para representar y abordar, junto con el cuestionario correspondiente, diversos niveles de abstracción en la formulación de un plan.

I Percepción externa y descripción
$II_{a,b,c,d}$ Clasificación

que corresponden, como se sugiere con los títulos, a la percepción, descripción y clasificación de los "objetos" de un plan

$III_{a,b}$ Relaciones directas y concatenaciones
IV Formulaciones/enunciados

que se asocian a elementos, procesos y conceptos de carácter explicativo, requeridos en el plan.

Se pretendió hacer un cuestionario suficientemente extenso para proporcionar una gama amplia de posibilidades del mismo, que facilite la apreciación continuada de los múltiples factores que concurren en el proceso de elaboración de un plan. Con ello y la consideración previa de los "diagnósticos"(situaciones o circunstancias) que originan el ejercicio de la planeación y con la estimación previa de las capacidades, intereses y actitudes de los individuos que inciden en el plan, es factible mantener en el proceso una deseable visión de la efectividad de los recursos disponibles para la planeación, incluyendo al propio planificador; detectando a tiempo posibles carencias y señalando con alguna objetividad dónde, en qué campos, áreas o niveles del conocimiento, del procesamiento o de la realización se ubican esas deficiencias.

En la medida en que sean mejor estimadas las situaciones previas (necesidades, indicadores, objetivos, prioridades, etc.), y los perfiles previos de la institución e individuos comprometidos en el plan (capacidades, experiencias, intereses, etc.) resultará más fácil la tarea de formular un plan coherente, justificado y operativo.

Los asuntos consignados en las secciones A y B de "diagnósticos" del cuestionario y el anexo 1, no son independientes de los temas más específicos del proceso de planeación (I al IV). Los temas y objetivos de esta actividad refuerzan o modifican en el proceso las consideraciones y estimaciones previstas en los "diagnósticos". De aquí la importancia de interpretar y "usar" correctamente las sugerencias propuestas a través de las trayectorias de teorización (T_t), validación (T_v) y retroalimentación (T_r). Estas dos últimas pretenden cumplir con funciones de sustentación y ajuste de toda la acción planificadora, incluyendo la del diagnóstico. Así, esta actividad previa, no es algo meramente especulativo o un marco de referencia rígido y global. En un proceso racional y dinámico deben revisarse periódicamente los supuestos: las situaciones "reales" y "concretas", los intereses institucionales e individuales a la vista de nuevas evidencias, enfoques, reflexiones, etc., de acciones participativas, informativas, y por tanto de comunicación en concepciones y niveles adecuados. Por esto último se quiere expresar que el proceso participativo no es, o no debe ser, algo abiertamente espontáneo y arbitrario. Deben preverse la necesidad y función de la información recíproca que conduzca al planteo fundamental y operativo. Habrá que interpretar y medir la importancia de la información, las fuentes de información, los datos, los indicadores, los medios y canales de comunicación, los problemas de la emisión, la recepción, los acervos documentales o físicos, etc.

Deben existir criterios no sólo para detectar la cantidad de información, sino también la calidad en diversas etapas y fases de un plan[18,19,20]. Es primordial determinar la pertinencia de la información en cada fase (generalidad, especificidad, significación, etc.). Esto implica una discriminación jerárquica como se sugiere en el anexo 1 y en el cuestionario.

2.2 Niveles de abstracción

Como se puede apreciar de lo anterior, los círculos del anexo 1 pretenden manifestar diversos niveles de abstracción.

En esta representación esquemática cabe hacer cuando menos tres aclaraciones previas.

1) Teniendo ya considerados los diagnósticos del caso, se avanza conceptualmente de lo más específico a lo más abstracto. Esto es, de los "objetos" más concretos y observables que inciden en el plan, hasta las consideraciones enunciatorias o formulacionales más "abstractas".

Esto no tiene, entonces, la apariencia de conducir a la elaboración de un plan específico. Más bien parecería un esquema aplicable a la elaboración teórica del mismo.

No necesariamente es así, aunque ésta puede ser una de sus posibles aplicaciones. Lo que se pretende, y esto puede quedar claro con el cuestionario, es inducir la consideración de aspectos convenientes a distintos niveles. El hecho de incluir en un plan determinado diversos aspectos teóricos (modelación, matemáticas, estadística, etc.), no implica que el enunciado último tenga necesariamente esta índole, o que por esto deba ser obligadamente formal y abstracto.

2) Los círculos son inclusivos y en cierta forma sugieren la extensión relativa de cada nivel. Así, los círculos más grandes incluyen a los más reducidos, y por consiguiente, los aspectos de los niveles superiores quedan implícitos en los contextos de los niveles más bajos.- Este artificio connota que los aspectos más teóricos de un plan estén fundamentados o sustanciados por asuntos más tangibles, más pragmáticos, o "reales". También pretende sugerir que la extensión de lo específico, de lo concreto, es más amplio que lo más abstracto.

En la gráfica del anexo 2, están indicados los "niveles de abstracción" y las flechas relacionales y_1, ... y_{11}, están orientadas con una intención implicativa,

y_7: "P_p implica a D" ó "D está implicada por P_p"

Se trata, por lo tanto, de la <u>descripción</u> de un <u>objeto</u> previamente <u>percibido</u> u <u>observado</u>.

La misma gráfica muestra líneas orientadas fuertes y otras finas. Las primeras establecen un criterio selectivo de determinaciones: P_p determina (o implica) a D; D a C_c, ...; C_c a F. En cambio, las líneas finas representan determinaciones implicadas por las líneas fuertes, por transitividad. Por ejemplo: "Si P_p implica a D (relación y_7), y D implica a C_1 (relación y_8), entonces, por transitividad P_p implica a C_1. Eventualmente, esto puede también interpretarse suponiendo que las relaciones transitivas son más débiles que las otras.

3) Para avanzar de los asuntos consignados en los sectores más externos a los más internos (anexo 1), no necesariamente deben recorrerse todos y cada uno de los segmentos del sector más externo. Así, para pasar del nivel I al II_a, puede no necesitarse atender los segmentos de "ubicación espacial" (No. 6), por ejemplo, en el estudio secuencial de una asignatura de matemáticas; o al de "representación" (No. 7), por ejemplo, en el diseño de las políticas generales de una institución; o para ir de II_a a II_b, puede no requerirse en un plan específico, el "reconocimiento de patrones" (No. 3), por ejemplo, en procesamientos rutinarios de cifras en el campo administrativo; etc.

Algunas cuestiones de los distintos niveles pueden, por otro lado, resultar irrelevantes en un plan dado. En otros casos, como ya se mencionó, habrán de incluirse factores no contemplados en el cuestionario o en los anexos. Los esquemas no pretenden ser exhaustivos, sino sólo sugerentes.

Respecto a la posible irrelevancia de algunas cuestiones, debe tenerse precaución. Por ejemplo, fácilmente pueden objetarse cuestiones sobre los "aspectos externos" de los objetos del plan, o sobre los "nombres usuales", etc. Sin embargo, en muchos casos estas cuestiones pueden ser indicadores del conocimiento directo de los individuos sobre los objetos del plan, respecto a la experiencia "real" en dichos asuntos. Frecuentemente resultan cruciales para definir o evaluar los fines y la solidez del enunciado.

Debe observarse también que las palabras alternativas de cada cuestionamiento no son sinónimas. Forman un glosario "ideoconstructivo" que .... "consiste en multiplicar ... la riqueza de los conceptos ... que forman una progresión encadenada de nuevos conceptos"[21].

Algunas cuestiones se repiten, aparentemente, en diversas partes del cuestionario, aún dentro de los esquemas mismos del anexo 1. Algunos temas parecen variar sólo en aspectos no muy relevantes. Más que defender el hecho de que éste no sea el caso, interesa poner en claro su intención. Considérense, por ejemplo, las "descripciones temporales o espaciales" del primero y segundo niveles. En los casos correspondientes al primer nivel, se pretenden establecer solamente estimaciones de carácter global o de una manera burda: ya sea porque no se disponga de la información requerida, porque se trate sólo de una etapa preliminar para la formulación, o porque no se requiera especificar la magnitud de los factores espacio-temporales. La intención de estos dos niveles se enfoca hacia el grado de justificación y coherencia que puede tener alguno de estos factores más adelante, por ejemplo, al tener en cuenta en el nivel III, la "precisión" con la que podrá establecerse la ocurrencia secuencial de eventos, o en el nivel IV, respecto a las operaciones (o procesos) que se estipulen en el tiempo. En tal sentido, puede ocurrir que se solicite información o apoyo inmediato y, en cambio, el programa pueda requerirlos sólo a largo plazo. También puede presentarse la situación opuesta. En ambos casos habrá incongruencias indeseables en el proceso.

Otro asunto que suele causar confusión se refiere a los sectores 3 "nomenclatura", del primer nivel, y el 4 "códigos, símbolos y terminología", del tercer nivel. Con frecuencia se confunde el mero "nombre" asignado arbitrariamente o por costumbre a las cosas, y la terminología que implica una regulación del lenguaje en un contexto científico[22,23]. Los niveles conceptuales son, obviamente, muy distintos. Aprovechando esta breve aclaración, conviene hacer referencia a algunos términos utilizados en el cuestionario, y en particular a la palabra "objeto", que se abordará en la sección 2.3.1.

2.3 Puntualización de algunas representaciones.

Entre las preguntas del cuestionario y las representaciones esquemáticas del anexo 1 se presume que muchas cuestiones no requieren, cuando menos en su intención, de mayores aclaraciones. Otras, sin embargo, aún con los diversos esquemas de los anexos, requieren de una mejor puntualización para su correcta interpretación y apreciación, aparte de las que el lector pueda convenientemente asociarles(*).

A continuación se señalan y hacen aclaraciones sobre algunos sectores.

2.3.1 Nivel I Percepción externa y descripción.

En la sección (nivel) I de Percepción externa y descripción, se anota que "en adelante, cuando se hable de los objetos entiéndase: cosas, asuntos, entes, individuos, hechos, ideas, elementos, etc.". El solo término "objeto" y la aclaración anterior son, en estas condiciones, muy vulnerables a la crítica y sobre todo a posibles malas interpretaciones. No se intenta, por otro lado, definir al término, ya que esto no

(*) Cuidándose de respetar los criterios de ubicación en niveles de abstracción, la pertinencia conceptual e intención de los sectores.

mejoraría sustancialmente la situación. Se pretende, en su lugar, caracterizar el oficio de término-variable[24] que se le asigna en este trabajo. El término adquirirá un sentido definido, denominará algo específico cuando sea sustituído adecuadamente por el nombre, descripción, etc., de algo específico. Es dentro de estas sustituciones que el cuestionario y los esquemas adquieren sentido en cuanto a su aplicación. Por ejemplo, en el nivel I de percepción, el término "objeto" de la cuestión número 5 podría sustituirse, según el caso que se analice, por nombres o descripciones como las siguientes:

- en la planeación de instalaciones para la investigación experimental,

  laboratorios/objetos

  ("laboratorios" en lugar de "objetos")
  podría conducir a una interpretación del siguiente tipo:

  5. De una manera global, los laboratorios para la investigación experimental, ¿son de tamaño

     reducido
     regular
     extenso ?
     intermedio
     menos extenso que...
     etc.

  Es evidente que se ha hecho otra sustitución:

  investigación experimental/plan X

  en donde la investigación experimental es a su vez el "objeto" central del plan X.

- en la planeación de aulas, bibliotecas y otras áreas de servicio, se harían las sustituciones correspondientes,

  aulas, bibliotecas, .../objetos.

Lo mismo es aplicable a otros asuntos, como lo son los puntos 6 y 7 del mismo nivel, u otros de distintos niveles.

En otros casos, la interpretación a través de la sustitución de términos, podrá o deberá referirse a cuestiones de carácter más bien conceptual. Por ejemplo, en el proyecto de un seminario sobre el medio rural, y haciendo referencia específicamente a la "vivienda", se podría interpretar la pregunta 4.2 del nivel II_a del cuestionario, de la siguiente manera:

4.2 ¿Qué tipo de $\begin{cases}\text{propiedades}\\ \text{características}\\ \text{modalidades}\\ \text{etc.,}\end{cases}$

definen o se asocian a viviendas particulares en el seminario sobre el medio rural?

en la cual se han hecho las sustituciones:

viviendas/objetos
particulares/aislados
seminario sobre el medio rural/plan X,
etc.

De esta manera, el cuestionario y los esquemas se van adecuando, por sustitución de TERMINOS, a planteos específicos. Como se indicó antes, tales términos estarán definidos dentro de un "marco teórico" o como se indica en el cuestionario y los anexos, dentro de una "clase" o un "contexto" definidos.

Los contextos y clases definidos para un plan, son también asuntos consignados en el cuestionario. En consecuencia, cada asunto relevante, en donde la "relevancia" es algo que el planificador tendrá que establecer, podrá examinarse, en principio al menos, de una manera cabal en cuanto se someta a los cuestionamientos pertinentes sugeridos en los diversos esquemas de este trabajo.

2.3.2 Nivel II_a: Descripción de propiedades.

El tema del sector 3, "reconocimiento y descripción de patrones", se aborda en relación a "situaciones integrales, totalizantes o bien de aspectos globales, patrones, esquemas, configuraciones, etc.". Como se verá enseguida, estos términos y la representación esquemática, son insuficientes para dar cuenta cabal de su intención.

El concepto que se desea expresar se origina en el de "Gestalt"[18] en el campo de la percepción y reconocimiento (o reconstrucción) de patrones o formas. Es un término empleado en la teoría de la información que pretende la identificación de algo universal en un mensaje, en contraste con lo meramente intuitivo, atómico o inarticulado. Presupone el suministro de datos suficientes para la construcción de una forma, de un patrón, de una imagen que subsiste ante la variación de aspectos circundantes. "Percibir una forma es diferenciar lo esencial de lo accesorio, ..., es captar su estructura"[18].

En este sentido, puede considerarse, para los propósitos del trabajo, que es factible partir de estructuras conceptuales mínimas, captadas en su totalidad, que en instancias ulteriores, por ejemplo en el cuadro 2. del nivel III_b de "concatenaciones estructurales", son consideradas como conceptos elementales para la formulación estructurada de un enunciado más complejo. En este sentido, este trabajo rechaza la tesis del llamado "atomismo", que pretende explicar el funcionamiento de un agregado en términos de sus unidades singulares o elementales[1], y que representa una extrapolación exagerada, quizá tendenciosa, de las concepciones mecanicistas. En esta posición debe interpretarse la necesidad de formular conceptos estructurados, en el sentido de que permita sostener que "el todo es mayor que la suma de sus partes"[18]. Porque abandonada la concepción de un "ensamblaje incoherente de partes", ese algo integrado tiene no sólo la connotación que sus partes aisladas le puedan aportar, sino nuevas significaciones por las relaciones estructurales, de interacción y de síntesis. Cada "parte", como en un automóvil o en un grupo social, realiza funciones que afectan al "todo" .

Es bajo esta perspectiva que deberán ser considerados otros sectores, por ejemplo el 4 del nivel II_a, el 1 del nivel III_a, etc.

Respecto al tema de "descripciones frecuenciales", sector 5, suelen asumirse dos posiciones externas, ambas racionalmente inaceptables.

Una, de quienes gustan de formulaciones matemáticas o modelos teóricos "elegantes" y eluden la validación de ellos respecto a los hechos. Quienes asumen esta posición rechazan abiertamente los modelos probabilísticos, los análisis estadísticos y frecuentemente las limitaciones que la realidad impone a sus modelos y enfoques.

Otros, usualmente por falta de conocimientos, se refugian en los llamados "modelos o métodos estadísticos (o probabilísticos)" y con ellos asumen una postura "científica" con lo cual pretenden sustituir el proceso de explicación con la mera descripción proporcionada mediante estos instrumentos.

En estos sentidos, sin el esfuerzo de establecer un estrecho vínculo entre los hechos observados y los modelos explicativos, no es posible, racionalmente, establecer los criterios señalados en el No. 5.2 del cuestionario, sobre: aceptabilidad, plausibilidad, confiabilidad, etc., y tampoco se tendrá una sustentación sólida -teórica y observacional- que conduzca a un enunciado que trascienda a las formulaciones globales, vagas y verbalistas que pretendan algo más académicamente auténtico.

2.3.3 Nivel II_b : Formulación de clases y contextos.

1, 2 y 3. Formación de clases y conceptos. Contexto y complemento. Identificación.

Estos tres sectores están fuertemente vinculados entre sí y constituyen una etapa fundamental no sólo en los procesos de planificación, sino de cualquier actividad racional, científica o de elaboración conceptual.

En el campo científico, por ejemplo, "la relación recíproca de las ciencias determina la arquitectónica general de todo el conocimiento científico. Por eso el problema de la clasificación de las ciencias es uno de los problemas más importantes y generales de la ciencia contemporánea"[25].

El concepto de clasificación es ampliamente tratado en diversos campos y disciplinas del conocimiento: la Lógica, la Filosofía, la Sociología, etc. Una descripción sucinta de este proceso viene dado en los siguientes términos[1]: "Acto de distribuir elementos o tipos - de una serie en sus relaciones recíprocas dentro de una disposición ordenada. Normalmente, el procedimiento exige una descripción sistemática* de los elementos de las series con arreglo a pautas uniformes y con terminología también uniforme, en la medida en que las semejanzas lo permiten. Otra cualidad de la clasificación consiste en la identificación de las diferencias. Una clasificación correcta debe basarse siempre en algún principio lógico y reconocido de semejanzas y diferencias".

Es importante notar aquí que la idea de clasificación connota conceptos y procedimientos más amplios de los que le suele asociar la matemática a la formación de "conjuntos". En primer lugar, el "conjunto" es en la matemática un término primitivo, indefinido, al cual más bien se le asocian características de especificación: los elementos distinguibles del conjunto, por ejemplo, y operaciones: unión, intersección, etc.[26]. La "clase", por otro lado, implica "atributos", "propiedades", etc.[27], que en las ciencias fácticas, corresponden a conceptos asociados a los "elementos" que la constituyen. Pero además, en el aspecto operativo de "formar clases", de "clasificar", van implícitos otros

(*) Esta descripción está consignada en los incisos anteriores de cuestionario y en los sectores previos del anexo 1.

asuntos como el de "establecer relaciones recíprocas" entre los elementos de la clase, el de la "descripción sistemática", el de la "uniformidad", etc., que son fundamentales para definir un plan, un proceso, un cuerpo de teoría, que den cuenta de cuestiones bien definidas de su estructuración interna.

A este respecto, la definición anterior de la clasificación coadyuva a la comprensión e intención de puntos como el número 1 del nivel III_a ("relaciones directas"), el número 3 del mismo nivel ("relaciones analógicas"), los números 1 y 2 del nivel III_b y otros. Las propiedades con las que se identifica una clase no son, generalmente, atributos elementales sino más bien agregados de atributos tomados simultánea o disyuntivamente. Por ejemplo, el vocablo "inteligencia", suponiendo que se desea constituir una clase de "seres inteligentes", implica un amplio número de connotaciones de conceptos y combinaciones de ellos. Entre otras cosas, es usual que previamente se requiera de la definición de un contexto (social, cultural, escolar, psicológico, etc.) para inducir tal o cual significación, que además, suele asociarse a una concepción filosófica e incluso a una ideológica. En este problema surge, como se señala, la necesidad del contexto mencionado en el sector 2.

Dentro de un contexto "funcionalista" de la psicología[28], algunos atributos de la inteligencia pueden ser:

- la capacidad de los organismos para adaptarse a nuevas situaciones
- la capacidad de aprendizaje o de conocimiento
- la capacidad de reflexión o raciocinio
- la capacidad de abstracción
- la capacidad de creación, etc.

La "inteligencia" ahora, suponiendo que se hubieran definido apropiadamente los vocablos anteriores, podría manifestarse con la presencia simultánea (conjunción) de dos o más de los conceptos anteriores, o alternativamente con unos u otros, etc.

Para caracterizar a los elementos de una clase, en un contexto determinado, por ejemplo la de los "seres inteligentes", suele emplearse también el complemento - de la clase: ¡lo que no son! Por ejemplo, dentro del mismo contexto se podrían ubicar procesos o funciones de "memorización", de demostración de "habilidades" e incluso de "operaciones rutinarias" que no se asocian necesariamente con el concepto de inteligencia.

Otro asunto básico y escabroso, es el de la identificación, o la identidad de clases. En primera instancia y para no complicar demasiado las intenciones de este punto, se asocia el concepto de identificación a un aspecto operativo de la Lógica: el paso de las clases constituídas <u>extensionalmente</u> (a través de sus elementos) al de las clases formadas <u>intensionalmente</u> (a través de sus propiedades). Se suele decir, por ejemplo, que la clase de números enteros 0, 1, 2, ..., 9, es idéntica a la de los "dígitos". Lo cual en el fondo no es sino una simple definición. Esto, sin embargo, tendrá un papel importante al introducir los símbolos y los términos (la terminología) de una área del conocimiento dada (Nivel III_a, número 4).

La intención de este punto se orienta hacia la caracterización de dos clases (conceptos, áreas de conocimiento, etc.) que finalmente se "identifican", esto es, son sustituibles entre sí[27]. En lo operativo, por ejemplo, la tipificación de un delito, la "identificación" o reconocimiento de un sujeto u objeto (que ha sido previamente descrito o caracterizado)[1].

En algunos casos la identificación es una consecuencia del "ser" respecto al "no ser". De una clase, en un contexto dado, respecto a un complemento[1] (punto 2 "contexto y complemento").

El concepto de identificación se asocia también a procesos de modelación matemática en sociología, economía y sistemas en general. Consiste en determinar la posibilidad de especificar los parámetros de un modelo, en relación con un conjunto de variables exógenas definidas e independientes. Esto probará, en alguna medida, la posibilidad de simulación del comportamiento dinámico de un sistema o al menos de sus tendencias e interacciones[29,30].

2.3.4 Nivel II_c : Ajuste de contexto y clases.

Los puntos 1 y 2 de este nivel están, para los propósitos de este trabajo, suficientemente descritos a través de las preguntas del cuestionario anexo.

El punto 3 requiere de algunas aclaraciones adicionales.

En la parte inferior del sector correspondiente, se esquematiza la "unión" de las clases A y B. No se muestra, intencionalmente, la intersección de estas clases. Esto pretende tener dos propósitos:

- Uno respecto a la consideración alternativa de campos o áreas de conocimiento o de conceptos y proposiciones que han de considerarse en la elaboración de un plan. Trata de introducir un examen de posibles "disyuntivas" entre aspectos que afecten la elaboración de un plan. Sin embargo, considerando las implicaciones que se deben contemplar en una resolución determinada, el sentido más apropiado a este tema es el del <u>dilema</u>[31]. Se refiere a las situaciones en donde un individuo debe elegir entre dos alternativas, usualmente ambas no del todo satisfactorias. Por ejemplo, la situación que se presenta ante actitudes de agitación política de grupos de presión y los lineamientos tendenciosos o arbitrarios de grupos de poder

- Otro propósito se refiere a la discriminación entre clases, conceptos y opiniones ajenos entre sí y que deben reunirse, si no conciliarse, para proseguir con la elaboración de un plan. Esto suele ocurrir en la planeación curricular de campos o áreas <u>tradicionalmente</u> ajenos entre sí: la arquitectura y el derecho, la enseñanza de lenguas extranjeras y la física, etc. Obviamente que esta situación tiende a desaparecer dentro del seno de las ciencias, pero no suele ocurrir entre las personas que participan en una acción de elaboración curricular o planeación en general. Es un problema básicamente de <u>actitudes</u> que debe ser considerado desde el nivel de "diagnóstico: B de perfiles individuales".

En la parte superior del sector 3 <u>de este nivel, y el punto 3.3 del cuestionario, se hace referencia a un tópico surgido</u> de la lógica matemática y que se suele denominar, según el enfoque, "principio de abstracción"[24] o "partición de un conjunto"[32]. La intención de este tópico es fundamental en la definición y ubicación de los factores y aspectos que afectan la planeación. Se trata de definir conceptos <u>independientes</u> entre sí cuya reunión conforme íntegramente un campo. Por ejemplo, si se pretende caracterizar a una población o grupo humano, se suelen emplear en sociología, los "indicadores sociales". Suponiendo que estos sean, por decir algo, su "nivel jerárquico", "su prestigio", "su área ocupacional", etc., es claro que no serán indicadores independientes. Esto acarreará una serie de consecuencias de indefinición que hará muy cuestionable la pretendida caracterización.

Situaciones muy similares ocurren con los denominados "objetivos de la educación"[22]. Los objetivos sobre los procesos de "análisis" respecto a los de "síntesis" y éstos respecto a los de "generalización", u otros, no son independientes. Esto da lugar, en la evaluación y en los mismos procesos de enseñanza-aprendizaje, a una visión de informaciones superpuestas ("borrosas o traslapadas") que no permiten una apreciación nítida del grado de satisfacción de cada objetivo.

Desde luego que se acepta la dificultad intrínseca en la elección y definición de parámetros o criterios independientes que cubran totalmente un campo, un proceso, etc. Pero esto no debe de impedir el intento sistemático y permanente de lograrlos.

Debe tenerse cuidado de distinguir estos traslapes de la definición de áreas comunes en la concepción interdisciplinaria. Estas áreas, abordadas en el nivel II_d, deben ser planteadas intencionalmente. En cambio, las confusiones creadas por falta de definición son circunstanciales y en ocasiones inconscientes.

En el punto 4 se pretende esquematizar la mayor o menor generalidad, o especificidad, de los conceptos u objetos que se han clasificado. Para ello se utiliza como esquema básico el conocido "diagrama de oposiciones" de la lógica aristotélica[31]. No se intenta con ello introducir ningún sesgo escolástico, ni siquiera un esquema fundamental de razonamiento. Se supone que para propósitos de revisión de las clases constituídas, esto puede tener alguna utilidad (como ha ocurrido en el análisis lógico de la evaluación de objetivos, originalmente planteado en un instituto de investigaciones pedagógicas de Londres[33]).

El orden de las representaciones esquemáticas es el siguiente,

- esquina superior izquierda: proposiciones universales afirmativas (A)
- esquina superior derecha: proposiciones universales negativas (E)
- esquina inferior izquierda: proposiciones particulares o "existenciales" afirmativas (I)
- esquina inferior derecha: proposiciones particulares o "existenciales" negativas (O).

Una posible aplicación directa de este esquema, podría ejemplificarse con la revisión de un programa por objetivos de alguna asignatura. Supóngase que se han determinado y ordenado los contenidos de la asignatura a objetivos previamente consignados.

Si todos los contenidos obedecen a objetivos establecidos (proposición A), entonces la afirmación contraria, "ningún contenido está contemplado en los objetivos" es falsa. La selección de algún (o algunos) contenido(s), debe corresponder a los objetivos (proposición E).

Y por último, no debe haber algún contenido particular que no esté sancionado por los objetivos. En caso contrario, la existencia de algún contenido que no esté "controlado" por los objetivos (proposición O), haría que la afirmación original (proposición A) fuera falsa. Las diversas implicaciones del cuadro de oposiciones[31] hacen de éste un dispositivo útil en el análisis sucinto de aseveraciones que pueden llevarse a cabo con las clases constituídas. Desde luego que con un análisis deductivo más profundo y exhaustivo, el esquema resultaría inadecuado y tendría que recurrirse a instrumentos más eficaces[12,13,14,16,23 y 24].

2.3.5 Nivel II_d : Clases híbridas.

En los párrafos anteriores se mencionó la formación intencional de clases interdisciplinarias o híbridas, como se denominan en el cuestionario y los anexos.

No será la intención de este trabajo abordar el arduo tema de la interdisciplinariedad. Pero sí es pertinente señalar algunos aspectos que le conciernen, que son de interés primordial en el enunciado de planes y que, por otro lado, no han sido explícitamente tratados en documentos relativos[34].

Cuando se constituyen una o varias clases híbridas, por la "conjunción" o intersección de campos bien definidos, habrá que considerar varios sectores (tómese, por ejemplo, el caso de tres clases):

1) el contexto en el que se definen los campos
2) las clases o campos originales (A, B y C)
3) las subclases formadas por las intersecciones ($AB\bar{C}$, $A\bar{B}C$,..., ABC y $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$).

Es usual definir sólo el área común (p.ej. ABC) y soslayar las demás subclases. Esto traducido al terreno conceptual u operativo de un plan es sumamente indeseable. Por ejemplo, suelen programarse asignaturas o cursos de física, matemáticas e ingeniería, de manera aislada. De acuerdo con alguna concepción "asociacionista", muy justificatoria de la falta de conocimientos y de planificación curricular, los estudiantes de estos cursos de alguna manera deberán "integrar" los conceptos pertinentes de los tres campos señalados (a largo plazo, suele ocurrir que tales alumnos no integran estos campos, sino más bien los confunden y suelen refugiarse en "recetas" o conocimientos fragmentarios de cada uno de ellos).

En otros casos, por ejemplo en la elaboración de los planes de estudio de alguna carrera técnica, los especialistas de esta carrera suelen sostener de una manera inmutable que en una concepción interdisciplinaria para ingeniería, el papel de la física y las matemáticas es exlusivamente instrumental, y esto parece querer significar que al "ingeniero" sólo le deberán interesar un conjunto de "recetas" de los campos de la física y las matemáticas. Esto simplemente no es interdisciplina.

La formación de clases híbridas por medio de su intersección, genera campos nuevos, a veces casi irreconocibles respecto a los originales (por ejemplo, la Físicomatemática, Fisicoquímica, etc.). Pero en los procesos de construcción de estas clases deben manifestarse explícitamente otras áreas (subclases) que representan no sólo lo propio, lo esencial (por ejemplo, lo que sólo es matemáticas, o lo que únicamente es física, etc.), sino también lo que no son, (por ejemplo, lo que es fisicomatemática, que no es ingeniería), etc.

En el ejemplo de análisis curricular, con estas subclases deben definirse opciones que configuren una formación racional de los estudiantes, con posibilidades de integrar y recrear nuevos enfoques del conocimiento adquirido y, quizá, de forjar nuevos conocimientos.

En relación con el párrafo anterior, se delínea una técnica útil para definir de una manera sistemática subproyectos, subprogramas, subclases, etc., que se originan de áreas, funciones, conceptos o clases primitivas. Este tema guarda estrecha vinculación con algunos procesos de análisis en el sector 2, nivel III_b, de concatenaciones.

Esta técnica se empleó en este mismo trabajo, anexos 2 y 4, intitulados como "clases", para definir todas las posibles combinaciones de relaciones dirigidas que se asocian a las representaciones gráficas correspondientes. Los esquemas mencionados se obtienen por extensión de los diagramas de Venn[14], originalmente empleados para ilustrar el silogismo de la lógica tradicional[35].

Es común detectar conjuntos de subprogramas derivados de un conjunto genérico de programas. Lo que no es usual es realizar esta tarea de una manera sistemática. Con frecuencia los subprogramas se especifican recurriendo a la memoria, las experiencias, los objetivos, etc., pero no a una visión estructural o integral de los temas o programas básicos. Suele así suceder que muchos subprogramas se pasen por alto y algunos de ellos pueden representar casos relevantes cuya omisión conduzca a análisis o planteamientos incompletos o parcialmente incoherentes. Por ejemplo, supóngase que se formulan los planes de una carrera de ingeniería y se ha llegado a una lista de "asignaturas": Matemáticas, Física, Química, Economía, Sociología, Materiales, Computación, Diseños (diversos, según las carreras), etc. Es usual enunciar sus contenidos, y al margen de ellos establecer la correspondencia entre asignaturas: por ejemplo, a través de los requisitos de unas respecto a otras, y en los primeros ciclos vincularlas, con el mismo criterio, con asignaturas previas al nivel profesional. Sin embargo, suele suceder que no se hayan establecido relaciones claras y explícitas entre las Matemáticas y la Física, o entre la Física y la Química, que son, por decirlo abiertamente, las asignaturas o temas clásicos de las "áreas técnicas". Menos aún, se establecen vínculos entre más de dos temas: Matemáticas - Física - Química, lo cual implica para el alumno el desconocimiento, o cuando menos la duda, de los aspectos comunes y en contraste de lo que es propio de un solo campo; por ejemplo de las Matemáticas, que suele ser la asignatura problemática, entre otras cosas a causa de esta indefinición.

Las asignaturas de Economía, Sociología y otras del área de las Ciencias Sociales, se suelen planear como materias de "relleno", sin una concepción clara de sus múltiples relaciones con diversos temas de las actividades propias del ingeniero. Pero aún más, ni siquiera suele hacerse una presentación parcial o total de ellos, utilizando los instrumentos matemáticos o metodológicos que se imparten al estudiante de estas carreras, lo cual, además de parecer inaudito favorece el desinterés y tedio del alumnado. Cabe observar que los modelos matemáticos tampoco son de mucho interés en las áreas profesionales de las Ciencias Sociales, por lo cual estos métodos o los que unos y otros prefieren tildar de "tendenciosos", acaban por no ser abordados ni en las licenciaturas de las "áreas técnicas" ni en las de ciencias sociales.

La situación no acaba ahí, habría que abundar mucho para cubrir la descripción de todas las carencias estructurales de las carreras de licenciatura. Pero se puede mencionar una más, por resultar francamente absurda. La desvinculación, a niveles razonables, de la computación con las demás áreas de conocimiento o asignaturas de una carrera. Debido a causas más bien extrauniversitarios, la computación suele abordarse como muchas otras materias de aplicaciones, como algo "autónomo", desvinculado de cualquier contenido y contexto de las aplicaciones técnicas. Sus programas y quizá también sus objetivos parecen tener visos de promoción comercial.

2.3.6 Nivel III_a : Relaciones directas (empíricas) y simbología.

En la interpretación esquemática del anexo I, se destacan dos instancias fundamentales:

- la constituida por los niveles I, II_a, II_b, II_c y II_d,
- la constituida por los niveles III_a, III_b y IV.

La primera se refiere a los procesos de percepción, detección, descripción y clasificación antes mencionados, tales que, llevado un plan hasta esta etapa, se pueda haber logrado la conformación de un estado de las cosas a un grado tal que no es posible aún explicar el conjunto de eventos abordados en el plan. Se atenderá ahora a la segunda instancia, sin la cual no sería factible conocer las causas de cada evento, su posible estructura, y difícilmente se podrá instrumentar la predicción[27,28].

Evidentemente no es el propósito sustancial de este trabajo abordar la difícil y no muy clara tarea de definir o dejar establecida alguna tendencia sobre la naturaleza de la explicación[36]. Se señalan algunos rasgos relevantes para lo operativo, y se emplea la noción de "relación", no necesariamente de causa-efecto, para modelar o esquematizar la estructuración conceptual y funcional que subyace, y justificar teórica y racionalmente el enunciado final y concreto de un plan.

A semejanza de lo indicado en el inciso 2.1 sobre "Diagnósticos...", se aborda el problema considerando las relaciones más directas, observables y factibles entre los objetos individuales, sector 1 de este nivel. De esta manera se pretenden introducir elementos tangibles o concretos que den paso más adelante a leyes, teorías y líneas de razonamiento (concatenaciones), tratando de evitar con ello que la explicación se reduzca sólo a una mención de leyes o hechos con los cuales se soslaye su estructura conceptual. Sin embargo, se reconoce que parte del proceso pueda consistir en la sola ubicación, adecuación e identificación de la materia explicativa "... en un contexto o red de leyes y teorías más amplias"[37].

En los sectores 1 y 2 de este mismo nivel se esquematizan otros casos de relaciones entre objetos individuales y clases, entre clases o entre los objetos de diversas clases.

Por ejemplo, en un programa de investigaciones puede interesar saber qué asuntos u objetos de la investigación son opuestos o contradictorios. En la búsqueda de las causas de una enfermedad, por ejemplo, puede cuestionarse cuáles de los factores concomitantes son determinantes de la patología, cuáles son irrelevantes y cuáles otros opuestos. O averiguar cómo un síntoma particular está asociado a alguna clase o "tipo" de enfermedades (lo cual, también implica especificar la relación).

En un proceso de enseñanza-aprendizaje puede interesar qué actividades o motivaciones del alumnado se oponen o favorecen al proceso y cuáles son sus razones o causas.

En los ejemplos anteriores debe subrayarse la inmediatez de las relaciones entre eventos. Dos eventos se observan o detectan y se establece su conexión directa sin que medie en ello un proceso de considerandos "concatenados" o elaborados. Es usual en los estudios de carácter empírico correlacionar elementos de información de dos o más contextos (por ejemplo, en los análisis de "regresión estadística" - o en el "ajuste de curvas"[38]). Estos análisis son fundamentales para la justificación de teorías y para el establecimiento del posible alcance de un planteamiento en lo conceptual y lo operativo, los cuales suelen ser soslayados en las reflexiones especulativas de muchos filósofos y metodólogos contemporáneos de las ciencias, incluídos los que profesan cualquier dogma. Sin embargo, estas correlaciones no sólo constituyen distintos grados de evidencia del vínculo o el antagonismo entre estados, fenómenos, elementos, etc., de una o más áreas del conocimiento, sino que pueden indicar un "comportamiento" fenomenológico, y de allí surgir, mediante apreciaciones e interpretaciones significantes, genuinas ideas simples que conduzcan a una actualización del conocimiento. Estas correlaciones simples o directas, a menudo ponen en jaque a los científicos y tecnólogos cuando se toman la molestia de tratar de interpretarlas y no simplemente de considerarlas como "hechos absolutos" o "leyes" que pueden ser muy debatibles y conducentes de ulteriores instancias también debatibles, erróneas, tendenciosas o simplemente absurdas e inútiles. Algunos filósofos[37,39] han sostenido la imposibilidad de generar conceptos o conocimientos relevantes si no existe esta experiencia previa o algún proceso ulterior o simultáneo de validación (e incluso de verificación).

Se desea insistir, puesto que esto ya se ha señalado antes, que la tarea sistemática de la planificación y de la labor científica en general, se fundamenta en dos acciones básicas y complementarias: la observación y recabación de información empírica (correspondiente a las acciones de los niveles previos) y la interpretación y estructuración conceptual que proporciona un marco racional y teórico para la explicación y la previsión.

El siguiente sector de este nivel representa las "relaciones analógicas", tema central en la formulación de modelos teóricos[40], de la interpretación lógica[24] y de la unificación sistemática de las ciencias[41].

La concepción más operativa incluída en este trabajo respecto a la analogía, consiste en hacer corresponder los elementos significativos, las relaciones, leyes o expresiones de un campo de conocimiento a un subcampo de otro. Con lo cual si las leyes del primero han sido ya establecidas científicamente, es posible obtener "modelos" para el segundo. Esto, desde luego, presupone la existencia de esas correspondencias o al menos de similitudes que hagan útil la modelación.

Este tipo de interpretación corre el riesgo inminente de ser tachado de "mecanicismo" sin más, lo cual implica dentro de la concepción tradicional, la adopción de un marco teórico explicativo obsoleto[27]. Sin embargo, ésta no es la intención del método analógico propuesto. El procedimiento ha permitido la elaboración de modelos de aplicación múltiple en las ciencias físicas y las ciencias sociales, en una concepción estructurada y dinámica[42,43].

En las ciencias, la analogía suele ser un valioso instrumento para la explicación y la descripción. Por ejemplo, muchos conceptos surgidos del área de la Hidráulica (como lo son el flujo, el gasto, la energía potencial, etc.) sirven para describir y modelar el funcionamiento de los circuitos eléctricos ("flujo de corriente", "la caída de potencial", etc.). Como si eso fuera poco, se logran por analogía reducciones del planteamiento de problemas de diversos campos a uno solo (por ejemplo: circuitos electroacústicos, circuitos electromecánicos, etc.[44]).

En una aplicación sucinta de la analogía, con las reservas del caso, se pueden tratar de explicar algunas tendencias en procesos como el de "enseñanza-aprendizaje" mediante circuitos eléctricos[13]. Por ejemplo, interpretando a la corriente que fluye a lo largo de un circuito eléctrico como un "flujo de información relevante", puede ser simulada la reacción a la asimilación de una determinada cantidad de información, originada por diversas causas (una resistencia natural, una reacción debida a experiencias previas acumuladas en la memoria y otra proporcional a la rapidez de cambio).

En todo lo anterior, fundamental para la teoría de la simulación, no necesariamente se requiere una cuantificación, que ha sido una de las críticas sustanciales al "mecanicismo"[27]. Suelen crearse modelos de simulación cualitativos para medir tendencias o aspectos de carácter global que, sin embargo, no se reducen a la concepción estrecha del llamado "conductismo", junto con su modelo de la misteriosa y poco científica "caja negra". Muy por el contrario, el "enfoque de los sistemas" pretende no sólo describir por asociación los eventos de salida o respuesta correspondientes a entradas o perturbaciones determinadas. Se propone, además, explicar, o cuando menos explorar, la relación interna entre causas y efectos[45].

El uso sistemático de los conceptos analógicos conduce a los llamados "diagramas de bloques" que se abordan en el sector 6, del nivel III_b. No obstante, la modelación analógica se basa sustancialmente en las relaciones directas, empíricas o teóricas entre los elementos de una clase o campo y las correspondencias con otras clases.

A continuación, en el cuestionario y en los anexos 1 y 3, se dan elementos para el análisis de la terminología, simbología y los códigos. El asunto crucial en este apartado es el del empleo del término-concepto. Esto es, como ya se ha mencionado antes, la asociación de algún vocablo o símbolo que se ordene a algún objeto esencial o proceso cognoscible[27]. Está íntimamente vinculado con el proceso de comunicación y en el manejo de información con la codificación, que atiende a un conjunto de reglas de composición de signos elementales y que implica el uso de lenguajes "económicos" en la transmisión, interpretación y uso de mensajes[18].

2.3.7 Nivel III_b Concatenaciones.

Para significar diversos tipos de relaciones temporales, espaciales, valoracionales e inferenciales, se emplea en este nivel la palabra "concatenación", no necesariamente en el sentido gramatical restringido de vínculo oracional a través de vocablos repetidos en un discurso, sino más bien en los sentidos amplios de "enlace" y "flujo".

El primero y segundo sectores, "concatenaciones alternativas" y "concatenaciones estructurales", no son, desde un punto de vista lógico o formal, independientes. Ambos, considerados como esquemas básicos, son parte de la "lógica de las relaciones"[13,24] o de las llamadas "estructuras algebraicas"[32]. Sin embargo, sus posibilidades en el terreno de las aplicaciones son suficientemente amplias y diversas como para que se justifique tratarlas por separado.

Las aplicaciones del primer sector son características de los problemas de búsqueda, de opciones alternativas, del análisis combinatorio, de los problemas de asignaciones, etc.

En el análisis combinatorio, estos esquemas usualmente denominados "árboles lógicos", se emplean para estudiar las posibles combinaciones de dos o más objetos. De los eventos que resultan, pueden hacerse estimaciones probabilísticas respecto a la presencia de un resultado determinado[38].

En los problemas de tipo opcional, a cada opción o rama del árbol, se le puede asignar una determinada probabilidad de tal manera que un estudio secuencial de opciones y estados resultantes asociados, pueda servir de base para estimar la probabilidad de ocurrencia de un estado final, después de varias etapas del proceso[46] (lo cual suele denominarse como cadenas de Markov).

En problemas de distribución suele buscarse la optimización de una red, a través de distintos trayectos, para el suministro o transmisión de alguna sustancia, información, etc.[47].

En los problemas de búsqueda, suele partirse de un estado o situación actual de cosas y se pretende alcanzar un estado final. En cada etapa de un proceso determinado pueden realizarse alteraciones que a lo largo del proceso conduzcan al estado deseado. En algunos de estos problemas se pueden establecer "funciones de evaluación" que permitan conducir el proceso por una trayectoria óptima, en cuanto al número de operaciones requeridas para transformar el estado inicial en el deseado[47].

Como extensión de los problemas de búsqueda, se han logrado aplicaciones interesantes en la generación de algoritmos en la lógica[47], en la detección de estrategias en la teoría de juegos[48] y en un amplio número de problemas de simulación mediante computadoras[49] (juegos de ajedrez, simulación heurística en la demostración de teoremas, programación de actividades u operaciones, etc.). Dentro de estos enfoques están ubicados procesos determinísticos y probabilísticos para la simulación de eventos alternativos básicos en la toma de decisiones.

En cuanto a su relación con el siguiente sector, de "concatenaciones estructurales", el árbol lógico juega un papel crucial, cuando menos en la aplicación que se ha hecho de la teoría de gráficas en el campo educacional[13].

En efecto, al estudiar y establecer las relaciones conceptuales, funcionales o de cualquier otro tipo, entre los temas, estados o <u>gestalts</u> de un plan o campo del conocimiento, es muy recomendable, y en ocasiones indispensable, tener alguna estructura relacional, abierta, de tipo fundamental que vincule todos los "vértices" (estados, temas, etc.) y que constituya, por decirlo de alguna manera, la <u>columna vertebral o estructura central</u> de estos vértices. Respecto a él podrán determinarse áreas de síntesis, relaciones inferidas, interacciones, diversas modalidades de agrupamiento temático, contextos, etc.

La determinación explícita de esta organicidad acarrea consecuencias trascendentales en una actividad planificadora que aspire a un nivel sólido de racionalidad, de autocrítica, de responsabilidad y de difusión.

La metodología de las gráficas, como instrumento (y con esto se desean sugerir sus limitaciones) de modelación, está influenciada por los criterios y puntos de vista subjetivos de quienes participan en esta tarea. Pero las instan cias significativas del proceso conducen a una actitud crecientemente objetiva, en cuanto que las relaciones o estados más arbitrariamente prescritos dan lugar, más tarde o más pronto, a insalvables contradicciones o a estados de síntesis indefinibles o abiertamente incoherentes.

Este procedimiento se ha empleado en los anexos 2 y 3. En el anexo 2 para analizar una manera de estructurar los diversos niveles del anexo 1.

2.3.7.1 Anexo 2. (Ejemplo y aplicación del sector de concatenaciones estructurales).

La gráfica del anexo 2 consta esencialmente de dos partes: una que se refiere al esquema que conecta mediante segmentos rectos y dirigidos a los "vértices" P_p, D, C_1, R_d, C_c y F. Y otra que vincula a los vértices F y P_p mediante un segmento curvilíneo, interrumpido por un círculo con las leyendas: "Procesos de validación - Ajustes - Procesos de retroalimentación". Esta segunda parte se supone que es "externa" a la primera, esto es, que no está en el mismo contexto conceptual.

Analizando la primera parte, es fácil detectar una trayectoria gruesa que une a todos los vértices, en el orden: P_p, D, C_1, R_d, C_c y F. Esta gráfica dirigida se considera que es, conceptualmente hablando, la estructura central; es el árbol de la gráfica en cuestión. El árbol es una estructura conexa y abierta. Es decir, recorriéndola toca, a través de sus ramas, a todos los vértices; pero no forma circuitos (o no toca un mismo vértice más de una vez).

Existen otros segmentos dirigidos dibujados con línea delgada: P_p - C_1 (y_1), P_p - R_d (y_2), D - R_d (y_3), C_1 - C_c (y_4), C_1, F (y_5) y R_d - F (y_6). Estos segmentos, que suelen denominarse "cuerdas" forman con algunas ramas del árbol "circuitos" o "áreas de síntesis" que se identifican con las letras C_1, ..., C_6. Cada uno de estos circuitos está cerrado por una sola cuerda, por ejemplo C_1 (P_p - D - C_1) está cerrado por y_1, C_2 (P_p - D - C_1 - R_d) está cerrado por y_2, y así sucesivamente.

Existen otras líneas que cortan a la gráfica: K_7 - K_7 corta a la rama y_7 (P_p - D) y a las cuerdas y_1 (P_p - C_1) y y_2 (P_p - R_d). O sea, que el "corte" K_7 - K_7 separa al vértice P_p del resto de la gráfica. El corte K_8 - K_8 separa a P_p - D del resto de la gráfica, al eliminar la rama y_8 y las cuerdas y_1, y_2 y y_3.

Además de los elementos mencionados, los vértices de la gráfica, según puede apreciarse al lado izquierdo de la misma, están ordenados verticalmente por "niveles de abstracción" en correspondencia con lo establecido en el anexo 1.

Las relaciones o nexos[27] del árbol se han pretendido establecer con un criterio operativo, tratando de simular un orden "ideal" de procedimiento en el quehacer científico (Percepción ⟶ Descripción ⟶ Clasificación ⟶ Relaciones empíricas ⟶ Concatenaciones ⟶ Formulación). No representa algo absoluto ni terminal, sino simplemente una concepción de partida, intuitivamente aceptable.

Como ya se había adelantado en el inciso 2) de la sección 2.2 Niveles de abstracción, la flecha tiene la connotación genérica de implicación : y_7 quiere decir que "P_p implica a D". El indicar con distintos símbolos cada implicación, por ejemplo,

$$\begin{aligned} \text{con } y_7 &: P_p \longrightarrow D \\ y_8 &: D \longrightarrow C_1 \\ y_9 &: C_1 \longrightarrow R_d \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

sugiere la posibilidad de diversas modalidades de implicación. Es decir, que en un plan determinado, el modo en que los "objetos percibidos (P_p)" implican (y_7) a su "descripción (D)", no es necesariamente el mismo con el que la "descripción (D)" implica (y_8) a la "clasificación (C_1)".

Por ejemplo, percibiendo (P_p) el comportamiento de diversos tipos de conducta de los alumnos en procesos de enseñanza-aprendizaje (atención, motivación, participación, etc.), pueden elaborarse (y_7) descripciones (D) y crearse indicadores que permitan (y_8) la formación de clases (C_1) o grupos que pudieran ser atendidos con una mayor pertinencia a las características de esos grupos o clases ("alumnos de aprendizaje lento o rápido", "alumnos socialmente inquietos o socialmente inmaduros", "alumnos con mayor o menor disposición para la resolución de problemas", etc.).

Por otro lado, las cuerdas o relaciones de implicación, pueden r e p r e s e n t a r criterios de comprobación o validación, o bien vínculos inmediatos. Por ejemplo la formación de clases puede darse o verificarse a través de la observación directa : y_1 o sea, de P_p a C_1, sin que medie entre ellas algún proceso de descripción D.

La misma relación inferencial, y_1, puede tener una connotación diversa a y_7 y y_8, pero en alguna forma debe incluir conceptos básicos de las relaciones y_7 y y_8. O sea, que mientras y_7 toma en cuenta aspectos observables para la descripción (atención, participación, etc., del grupo de alumnos antes tratado) y la relación y_8 criterios para la clasificación (rapidez de aprendizaje, madurez, etc.), la relación inmediata y_1 deberá contener elementos combinados de las relaciones anteriores (atención - rapidez de aprendizaje - madurez; participación - aprendizaje; etc.). Lo cual resultará, en general, más difícil de lograr que considerando la instancia mediadora de la descripción.

Otra relación inferencial de trascendencia en los procesos de planificación es la de P_p - R_d. El obtener relaciones empíricas y directas a través de la simple observación, es una tarea ardua que pueden lograr individuos experimentados en el campo de su competencia. Una posibilidad para adquirir esa capacidad puede consistir en recorrer las etapas previas ya sugeridas: pasar por la descripción, y quizá la definición de lo percibido u observado, clasificar y ordenar entre las clases o los elementos de las clases relaciones empíricas, directamente o por analogía.

De esta manera se seguirían analizando y estableciendo las relaciones básicas e inferidas entre los vértices correspondientes a distintos niveles de abstracción.

En cuanto a las áreas de síntesis o circuitos, es posible encontrar también interpretaciones funcional o conceptualmente significativas.

El hecho de lograr inferir una cuerda debe, en principio, conducir a una posible síntesis de los estados relacionados o estructurados. Por ejemplo, el circuito C_1 debe interpretarse en términos de los estados (vértices) P_p, D, C_1 y de los criterios establecidos para las relaciones inferenciales y_7, y_8 y y_1 . Usualmente es útil y conveniente definir cada síntesis como un problema. Por ejemplo, para C_1 :

- dados algunos elementos observados (P_p) y los criterios necesarios para hacer descripciones relevantes (D),
- encontrar o definir los criterios de clasificación óptimos, funcionales y significativos que efectivamente incorporen los asuntos percibidos y además, como una proyección hacia fases ulteriores, sirvan de base para determinar relaciones directas, concatenaciones y el propio enunciado o formulación de

un plan. Esta proyección permitirá y forzará la eliminación de datos o informaciones, en general, superfluas, laterales o accesorias que puedan entorpecer el proceso de planificación, o den lugar a descripciones confusas e incoherentes. El proceso de optimización de la formulación de un plan favorece sustancialmente su futura implantación y, obviamente, los procesos de evaluación y adecuación operativa.

La separación de la gráfica en partes a través de cortes, permite estudiar la interacción y coherencia de una parte de la gráfica con el resto. Es esencialmente un instrumento de análisis en cuanto que no consta sólo de la separación de un todo en sus partes, sino de la interacción o interrelación de unas partes con otras.

Así el corte K_7 - K_7 separa la instancia de percepción del resto de la gráfica a través de los vértices o estados a los que está directamente conectada, o sea, de D, R_d y C_1. Esto implica que los "objetos" de observación o percepción deben determinarse en función de las instancias de descripción, clasificación y de las relaciones directas o empíricas. Así, en el ejemplo del grupo de alumnos, deben observarse conductas o actitudes relevantes para elaborar las descripciones y clasificaciones ya mencionadas y para algún tipo de relaciones empíricas y analogías pertinentes en la formulación de algún plan de enseñanza. Puede, por ejemplo, interesar conocer los niveles de retención y la extinción de una determinada cantidad de información para diagnosticar la extensión de información contenida en un conjunto de asignaturas. Puede resultar fundamental conocer el número de veces que cada alumno pregunta o aporta información ante diversas experiencias de enseñanza-aprendizaje, para diseñar programas de participación del alumno o de dinámica de grupos, etc. En el diseño curricular actual, muchas de estas relaciones empíricas suelen ser improvisadas o simplemente copiadas de modelos ajenos al medio en donde se a p l i c a n . En este sentido, en relación con este campo, hacen falta un gran número de investigaciones experimentales para poder derivar de ellas informaciones válidas y modelos realmente aplicables a medios específicos (por ejemplo de poblaciones rurales, urbanas, de regiones del norte o regiones del sur del país, etc.).

En la gráfica del anexo 2, los vértices o estados P_p y F tienen, además, un significado adicional importante. Las actividades asociadas al vértice P_p, o sea, la observación, percepción, etc., de un plan, son básicas, constituyen estados de arranque. Puede v e r s e que todos los segmentos vinculados a P_p parten de él, es decir, P_p es una <u>fuente</u>. En cambio, los asuntos consignados en F son terminales, constituyen la instancia conclusiva de la formulación del plan. Hacia él concurren todos los segmentos que lo vinculan con el resto de la gráfica. Se dice que F es un <u>sumidero</u>.

El vértice F y el P_p están vinculados, como se ha señalado antes, a controles externos de validación, por ejemplo, a través del proceso de resolución de problemas (anexos 4 y 5), o a algún otro control de validación - ajuste - retroalimentación, que permita delimitar o definir más claramente los asuntos u objetos de un plan. De esta manera, habrán de revisarse en etapas de ajuste y adaptación los "objetos" observados, relevantes a un plan específico, supuestamente mejor concebidos y ubicados dentro de un contexto más apropiado de la realidad, de las restricciones humanas y materiales y de nuevas posibilidades, algunas no contempladas en la primera aproximación de planificación.

Con anterioridad, al exponer el tema de las clases híbridas (Nivel II_d), se apuntó un procedimiento expedito para determinar diversos tipos de "trayectorias" o conjunción de estados[14] presentes en la gráfica. En el anexo 2, este procedimiento aplicado a la gráfica, se presenta bajo el título de clases . Se introduce como un instrumento básico para el examen sistemático de la estructura que la gráfica representa.

Por ejemplo, puede interesar el análisis de las "trayectorias" posibles que van de un vértice a otro. Conceptualmente, cada trayectoria implicará la consideración conjunta de instancias intermedias o mediadoras entre dos estados que impliquen enfoques o énfasis diversos en la relación de dos estados.

Así, entre P_p y F se definen las siguientes trayectorias*:

24. P_pR_dF
41. P_pDR_dF
51. $P_pDC_1R_dF$
43. $P_pC_1R_dF$
44. $P_pR_dC_cF$
53. $P_pDR_dC_cF$
56. $P_pDC_1R_dC_cF$ (árbol)
52. $P_pC_1R_dC_cF$
25. P_pC_cF
54. $P_pDC_1C_cF$
39. $P_pC_1C_cF$
38. P_pDC_1F
22. P_pC_1F

O sea, un total de 13 trayectorias distintas para pasar del nivel de observación o percepción (P_p) al de formulación (F) de un plan.

(*) La detección de trayectorias podría efectuarse directamente de la gráfica, pero esto fácilmente conduciría a omisiones de casos que se evitan con el diagrama propuesto.

No interesa aquí subrayar lo ingenioso de un algoritmo ó lo espectacular que puede resultar el determinar un alto número de enfoques o subcasos asociados a una estructuración particular*.

En el diagrama de clases se observa que no están clasificados los casos P_pDC_cF, P_pF y P_pDF. Reflexionando un poco, se pueden encontrar justificaciones "razonables" para evitarlos. Por ejemplo, el paso directo de la observación perceptual (P_p) a la formulación (F) suele darse en la realidad, en relación a la formulación de planes, improvisado y sin más justificación que la observación o la presencia de algunos hechos. Este tipo de actividades es violatorio de algunos principios enunciados en la introducción ("interpretación reflexiva y científica", "configuración sistemática de medios y procedimientos", etc.) y que, por ende, son exprofeso eliminados del enfoque de planificación de este trabajo.

Cada uno de los subcasos puede ser motivo de una reflexión en algunas ocasiones quizá resulte ser un caso irrelevante. Por ejemplo la opción P_pR_dF hace énfasis en el establecimiento de las "relaciones empíricas" como instancia mediadora entre la observación y la formulación de un plan. En cambio $P_pR_dC_cF$ incluye, además, los procesos de "concatenación". Algunas de estas trayectorias pueden ser relevantes para determinar la solidez u operatividad del plan; deberán, por tanto, analizarse y seleccionarse las más significativas, para definir los alcances de un planteamiento específico, o para introducir modificaciones que lo optimicen en cuanto a su estructura y coherencia internas.

2.3.7.2 Continuación del análisis de sectores del nivel III_b.

En la planeación es deseable que se manejen diversos niveles jerárquicos para m e j o r ubicar los objetos

(*) Por ejemplo, el hacer ver que el número de subcasos que resultan de una gráfica dirigida de "n" vértices es 2^n, o sea, que para un plan con 10 vértices se tienen $2^{10} = 1024$ subcasos o enfoques distintos, debe reconocerse que 10 vértices no es nada desusual.

de un plan. Por ejemplo, las prioridades o las preferencias de diversos programas, los distintos grados de conveniencia o utilidad de distintas acciones, etc. Todos los valores o jerarquías correspondientes suelen emplearse de una manera relativa: esto es más relevante que aquello y aquello más que aquello otro, etc. Sin embargo, no es usual establecer "relaciones jerárquicas", es decir, que el mero arreglo de niveles no es suficiente para definir la mayor o menor importancia o preferencia de una cosa sobre otra. En muchas ocasiones habrá de preguntarse en qué relación un asunto es más importante que otro[50]. Esta "relación" puede parecer un poco extraña, pero bastará analizar algunos casos para darse cuenta de su importancia práctica.

Por ejemplo, los puestos jerárquicos de una organización no son estancos de valor y ubicación absolutos. La posición, como se dijo antes es relativa, y una determinada clase de jerarquías, en algún contexto de autoridad o funcionalidad, implica una estructura dentro de un contexto dado. Modificando el contexto, operativo o conceptual, pueden variar las posiciones relativas y la organicidad. Examinando el esquema 3, "concatenación jerárquica", se puede ver cómo la existencia de algunos niveles superiores puede depender de los niveles inferiores. Por ejemplo, la existencia de una élite de destacados intelectuales, científicos, políticos, etc., depende usualmente de la presencia de trabajadores que a través de arduas faenas apoyan y determinan la eficacia y desempeño de los primeros.

En otros terrenos como el de las matemáticas superiores o avanzadas *, el abordamiento o la aplicación correctos de algunos conceptos depende usualmente de cuestiones elementales de la aritmética o el álgebra (por ejemplo en el cálculo operacional aplicado a sistemas de ecuaciones diferenciales[51]).

(*) Designaciones usuales de algunos cursos de matemáticas en las escuelas técnicas.

Por otro lado, si una organización opera de una manera racional, seguramente que no tiene un único y absoluto organigrama, el cual describe usualmente estructuras monolíticas de poder, pero no necesariamente del sano funcionamiento de grupos para la toma de decisiones. Evidentemente que en una organización si no democrática, cuando menos racional, los agrupamientos de personas y su estructuración jerárquica responde más bien al propósito, programa o asunto que reúne y vincula a grupos coherentes de individuos capaces para analizar o acordar racionalmente las decisiones.- En ellos, según la circunstancia y para bien de la propia organización, no estará, y en ocasiones no deberá estar presente, la "máxima autoridad", o el "procer", "líder", etc., que pudiera obstruir o al menos inhibir una decisión u opinión pertinentes.

Respecto al sector 4., "Concatenaciones inferenciales", se pretenden hacer resaltar los dos esquemas tradicionales de inferencia: deducción e inducción.

Los esquemas de gráficas descritos antes, emplean, como ya se ha expuesto, una de las reglas lógicas más importantes: el principio de transitividad. Además se han empleado diversas cuestiones de la lógica de relaciones [13,24] en la construcción de los esquemas mencionados y en relación con el álgebra de Boole, a través de los diagramas de Venn[14,35] se han hecho representaciones útiles para definir los subcasos o subprogramas correspondientes a una gráfica dada.

Todos los asuntos anteriores pertenecen, en lo esencial, a la lógica deductiva. El empleo de este instrumento en diversos apartados del trabajo no pretende indicar que se ha realizado un empleo exhaustivo, ni siquiera extenso, de la lógica. Indirectamente, a través de la "simulación y modelación matemática" que se aborda en el sector 6, de este nivel, y que se mencionó en relación con la "identificación", nivel II_b, la lógica deductiva es empleada a través de tales modelos[9,29,30,52].

Aún con estas aplicaciones indirectas y algúna mención esporádica de la lógica en textos relacionados con la planificación (la administración, la economía, etc.)[53,54,55] no puede afirmarse que la lógica haya sido exhaustivamente empleada en este terreno.

Pareciera como si algunas de las controversias entre facciones del pasado, por ejemplo, las originadas por John Stuart Mill[28,56], hubiesen inhibido el empleo profuso y sistemático de la lógica en la formulación de marcos teóricos y procedimientos de la planificación.

Existe abundante investigación y resultados de la lógica que inexplicablemente no han sido incorporados a los procesos conocidos para la elaboración de planes:

- la lógica de la preferencia vinculada con los conceptos axiológicos del sector anterior[24,57,58] (valores, prioridades, importancia, etc.),
- la lógica heurística en la toma de decisiones,
- la lógica de la acción[58] planteada como instrumento para la prevención y predicción,
- la lógica normativa[58,59,60] (deóntica), ya incorporada en las escuelas modernas de derecho, requerida como marco y contexto de la acción regulada,
- la lógica modal, la lógica imperativa y muchos otros enfoques de este orden, creados para dar un mayor énfasis al razonamiento ordenado, sistemático y, sobre todo, cuestionable.

Cabe hacer resaltar el esquema de inferencias "inductivas" (que es también aplicable al razonamiento deductivo) propuesto por Toulmin[61,62], según él basados en una simulación del proceso jurídico como la mejor, más aceptable o más lúcida y operativa interpretación del razonamiento lógico.

El esquema de Toulmin se plantea como una concepción del funcionamiento del argumento en la lógica deductiva extendible, mediante algunos agregados, al razonamiento inductivo. Se destacan en él diversas instancias del razonamiento: la hipótesis o premisa (H_1), esquema inferior del sector 4, la ley (L) que establece la pauta para pasar de las hipótesis a las conclusiones (C) y de otros conceptos que se adicionan para extender el esquema al proceso inductivo: los apoyos (A_1, A_2,....) que sustentan la legalidad de la conclusión, la cualidad (Q) de la conclusión (factibilidad, probabilidad, etc.) y las posibles refutaciones (R_1, R_2, ...) a las cualidades o a las conclusiones. A este esquema se le ha agregado un lazo que vincula a las hipótesis de las ciencias fácticas, con la realidad, a través de la observación.

Esta extensión de los modelos deductivos a los inductivos, no es esencialmente novedosa; por ejemplo, es parcialmente abordada en el método reduccionista[7], pero la claridad e intención que le asigna Toulmin es muy apropiada para los propósitos de la planificación.

Los sectores 5 y 6, de "concatenaciones secuenciales y operacionales", tienen que ver, básicamente, con las acciones, o flujos, que se deben ensayar para la implantación de un plan. La esquematización corresponde a la usualmente empleada en la teoría de sistemas dinámicos[45], en el campo denominado redes de flujo, o en las redes lógicas o teoría de interruptores, que ha sido una aplicación extensa de los conceptos lógicos del álgebra de Boole a diversas disciplinas, muy especialmente a la teoría de circuitos[11,16,17].

Como se indica en el cuestionario, los temas del sector 5 se refieren básicamente a la oportunidad o etapa en la que ocurren determinados eventos

- la concatenación en cascada (serie), da cuenta de aquellos eventos que tienen exclusivamente un ordenamiento lineal (unos seguidos de otros). Se refiere a aquellas acciones similares a las descritas en las recetas de cocina. En la ejecución de planes este esquema es demasiado simplista y deja a un lado muchos factores que pueden ocurrir paralela o concomitantemente y que, en ocasiones, llegan a alterar la ocurrencia secuencial. Sin embargo, suele ser un esquema básico y global de operaciones respecto al cual se plantean otras acciones laterales, o bien, al cual se pueden reducir esquemas más elaborados. Por ejemplo, respecto al plan de estudios de una carrera, un alumno puede programar la secuencia de sus asignaturas; determinará aquellas que son requisitos de otras, y las asignaturas que son seriadas. Todo esto lo deberá poder secuenciar no obstante las interrelaciones, múltiples en algunos casos, que existan entre asignaturas.

- la concatenación en paralelo, debe también considerarse para la realización de un plan. Por ejemplo, qué actividades de planeación curricular pueden llevarse a cabo en una institución, mientras se realizan otras actividades de investigación, administración, docencia, extensión, etc. O bien, qué asignaturas puede un alumno cursar simultáneamente; o en un proceso de investigación, qué actividades de búsqueda, de experimentación, de procesamiento de información, etc., pueden llevarse a cabo al mismo tiempo, etc., etc.

La combinación de estos esquemas en las fases de operación o de aplicación, suele conducir a otros, como los denominados diagramas de flujo [63] para la programación de computadoras, o bien, en la programación óptima de operaciones, en cuanto a los lapsos, que se aborda mediante el método de la ruta crítica[63,64] u otras técnicas similares.

Se incluye, además, un esquema de concatenaciones concurrentes que se propone dar cuenta de factores o acciones diversas que inciden en una situación o que en su conjunto determinan un estado de cosas.

Respecto a las concatenaciones operacionales, sector 6, se consideran dos tipos de diagramas:

. uno, de operaciones lógicas, ya mencionado y parcialmente empleado en la determinación de trayectorias mediante diagramas de Venn, en el nivel II_d (clases híbridas) y en los esquemas del anexo 2. Obviamente que este procedimiento no se agota con las aplicaciones mencionadas. Existe un amplio número de algoritmos para abordar problemas de trayectorias (caminos, conjunciones alternativas de estados, etc.). De entre ellas y como una opción relevante para el análisis, la síntesis y la verificación de algunas redes o gráficas, destacan los métodos de las "funciones de interrupción" (switching functions) que permiten determinar de una manera sistemática las trayectorias entre dos vértices de una gráfica[17] e incluso, bajo algunas restricciones, permiten reconstruir una red interna que corresponda a un determinado conjunto de impulsos-respuestas del sistema (determinación de la "caja negra")[65],

. el otro esquema, es una representación usual de los sistemas dinámicos, como se ha mencionado, y se aborda ampliamente en la Teoría del Control[66]. El análisis mediante estas redes, usualmente conocidas como diagramas de bloques, ha tenido una muy extensa aplicación en diversos campos: en la modelación sociológica[29,43,54,67], - -

en la modelación del funcionamiento de organizaciones[68], en el análisis de procesos económicos[9,69], en problemas de planeación y simulación urbana[9], en procesamientos químicos y de energéticos[9] y en muchos otros campos que, desde luego, incluyen el campo de la ingeniería.

En cuanto a los procesos dinámicos, a los que frecuentemente se alude en la planificación, debe procurarse entender que éstos sólo pueden incorporarse razonablemente si se incluye de manera explícita la variable TIEMPO.

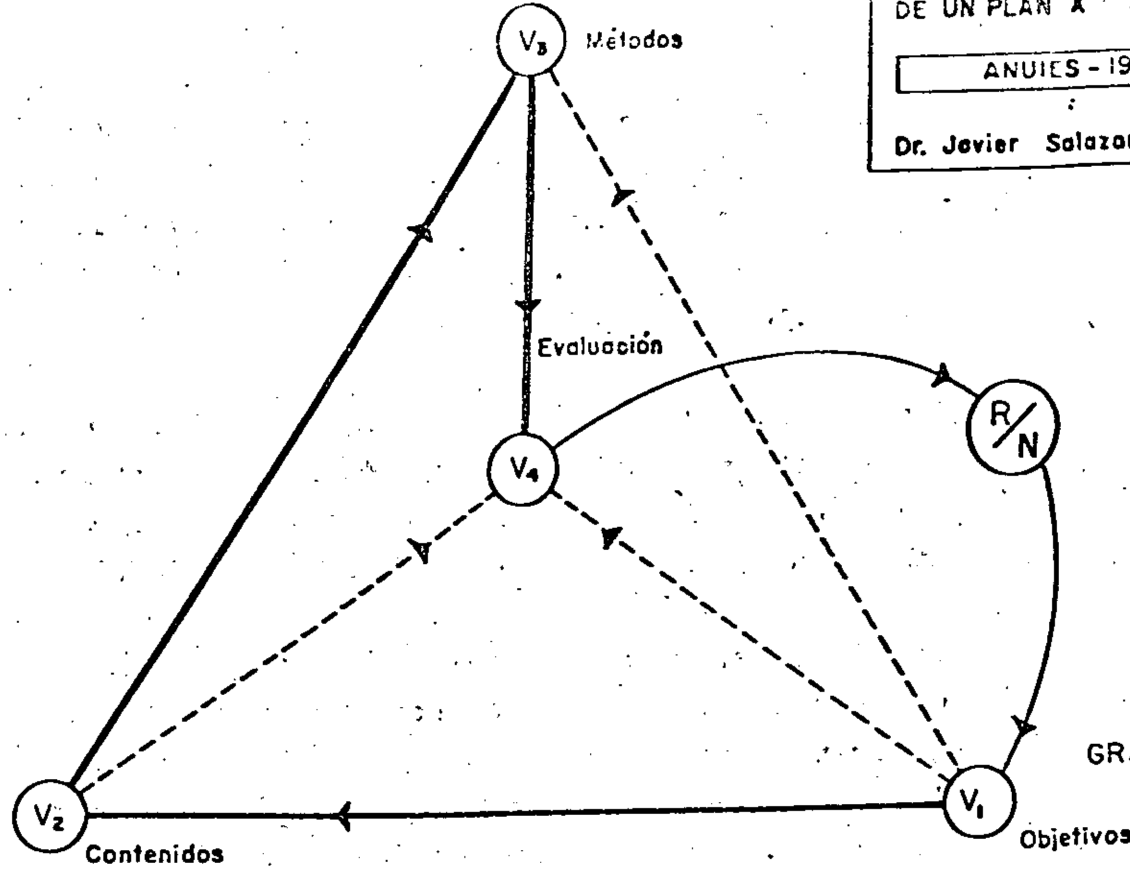
La simple extrapolación estadística al futuro, respecto a un estado actual de referencia, no da cuenta de los procesos de transformación que pueden incluir los bloques de una red de flujo. La modelación dinámica debe preveer el cambio, o cuando menos debe operar considerándolo, explicándolo en una red dinámica de eventos. Los procesos de amplificación, reducción, susceptibilidad, inhibición, retroalimentación y estabilidad de un sistema, por ejemplo, no se explican, y en ocasiones ni siquiera se pueden describir con la información puramente estadística, aún cuando puedan resultar muy espectaculares las cifras o los datos obtenidos de observaciones, experimentos o encuestas.

Aprovechando la teoría de gráficas[13], puede llegarse a un diagrama de bloques como el que se muestra en la figura 1. La gráfica expresa un enfoque del proceso didáctico en el cual las relaciones implicadas por los segmentos dirigidos $V_1 \longrightarrow V_2$; $V_2 \longrightarrow V_3$; etc., expresan determinación. Esto es, los objetivos (V_1) determinan a los contenidos (V_2), incluyendo la posible estructuración de los mismos, los contenidos (V_2) determinan a los métodos (V_3) y éstos a la evaluación (V_4). Quedan, por transitividad, determinadas algunas relaciones, por ejemplo: $V_1 \longrightarrow V_2 \longrightarrow V_3 \longrightarrow V_4$ implica $V_1 \longrightarrow V_4$, etc. Externamente a lo que puede considerarse

FORMULACION / ENUNCIADO DE UN PLAN X (fig. 1)

ANUIES - 1978

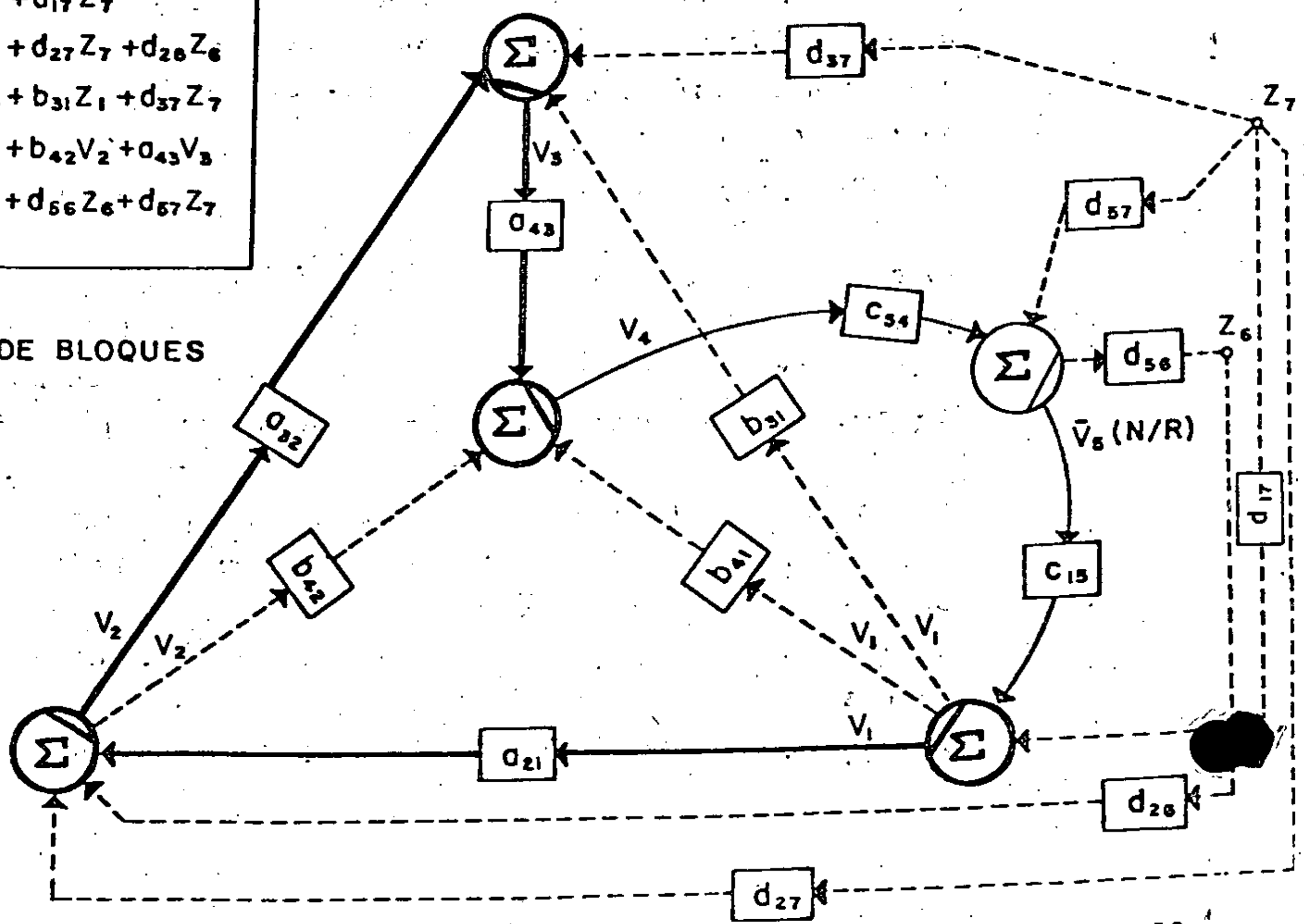
Dr. Javier Salazar Re



GRAFICA

REPRESENTACION MATEMATICA
$V_1 = c_{15}\bar{V}_5 + d_{17}Z_7$
$V_2 = a_{21}V_1 + d_{27}Z_7 + d_{26}Z_6$
$V_3 = a_{32}V_2 + b_{31}Z_1 + d_{37}Z_7$
$V_4 = b_{41}V_1 + b_{42}V_2 + a_{43}V_3$
$V_5 = c_{54}V_4 + d_{56}Z_6 + d_{57}Z_7$

DIAGRAMA DE BLOQUES



el plano didáctico, o sea, el plano en donde se ubica la gráfica V_1, V_2, V_3 y V_4, se define otra instancia: R/N que toma en cuenta los recursos y las necesidades didácticas. Esta instancia es alimentada por la evaluación didáctica (sumidero) de la gráfica (vértice V_4) e incide o alimenta al vértice V_1 de objetivos (fuente). La instancia externa R/N constituye en un enfoque dinámico, algún proceso de retroalimentación o regulación del proceso didáctico.

Hasta aquí la gráfica, sujeto de variadas interpretaciones (para los circuitos, cortes y trayectorias), muestra una estructura básica y estática. Para indicar los procesos dinámicos posibles en la actividad didáctica se construye el diagrama de bloques inferior. Los conceptos se asocian ahora a un flujo que va de nodo a nodo (entre los sumadores Σ). De esta manera los objetivos se transforman en contenidos a través de la operación a_{21}:

$$V_2 = a_{21}V_1$$

O bien los objetivos motivo de una evaluación, se expresan:

$$V_4 = b_{41}V_1$$

y así sucesivamente.

Dado que en cada sumador concurren uno o más flujos, el flujo resultante es la superposición de los flujos que en él inciden. Así, el flujo V_2, o sea los contenidos, es la combinación lineal de los objetivos, variable propia del plano didáctico o variable endógena[29], y de posibles variables exógenas[29], externas al plano didáctico, que son Z_6 : las necesidades socioeconómicas y Z_7: los perfiles individuales (por ejemplo, de profesores y alumnos). La expresión total para los "contenidos" es de la forma

$$V_2 = a_{21}V_1 + d_{27}Z_7 + d_{26}Z_6$$

en la cual a_{21}, d_{27} y d_{26} son "parámetros del sistema"; esto es, los factores que determinan en qué proporción y de qué manera se transforman en una lista o estructura de contenidos, los objetivos, los perfiles individuales y las necesidades socioeconómicas de un medio determinado.

El conjunto de todos los flujos del diagrama están representados matemáticamente en la figura 1. Con este modelo, podrían, por ejemplo, estudiarse algunas tendencias del comportamiento didáctico de un grupo en cuanto a diversas necesidades y perfiles.

Para hacerlo más expedito en su relación temporal, podrían incluirse las variaciones de los "parámetros del sistema" en el tiempo, o bien suponer, según fuera el caso, la dependencia de una variable en un tiempo "t", de otra en un tiempo "t + h" (posterior o anterior "h" unidades de tiempo). Así podría, por ejemplo, suponerse que en un proceso didáctico dinámico, los contenidos en un tiempo "t" dependen de los objetivos establecidos en un lapso "h" anterior, o sea, de "t - h", de los perfiles Z_7 en "t" y de las necesidades socioeconómicas Z_7 en un lapso "2h" posterior, o sea "t + 2h". Se tendría entonces, un modelo dinámico de parámetros constantes:

$$V_2(t) = a_{21}V_1(t - h) + d_{27}Z_7(t) + d_{26}Z_6(t + 2h)$$

Si los incrementos "h" de la variable tiempo "t" son finitos se obtendría un sistema dinámico planteado en "diferencias finitas"[70]. Es factible, sin embargo, plantear modelos dinámicos de simulación continua. Es decir, que a tra vés de ecuaciones diferenciales, derivando respecto al tiempo, pueden encontrarse expresiones que tomen en cuenta procesos dinámicos de variación continua[29,43,45].

.3.8 Nivel IV: Formulaciones o enunciados.

En un orden simplista de las cosas parecería que este nivel representa la "etapa final" del ejercicio de la planeación. Una vez que se han tomado en cuenta los diagnósticos, que se han efectuado observaciones o se han consignado, medido y clasificado informaciones, después de establecer relaciones empíricas y definir un marco teórico, una estructura conceptual y un conjunto de procesos, bastaría poner esta información en una caja, o en varias, y de allí formular o enunciar un plan. Pero esta acción, la formulativa o enunciativa, no es tan sencilla ni mucho menos es terminal.

Los modelos dinámicos, con todo el amplio desarrollo que han logrado a través del enfoque de sistemas y de la teoría de control, no alcanzan a expresar sino sólo una parte de las acciones y situaciones que concurren en la planeación. Lo cual no implica que deban evitarse en aras de posiciones tendenciosas y estrechas que, cómodamente, se reducen a la improvisación.

Un modelo o cualquier instrumento explicativo, al estructurar sus elementos, suele deformar parcialmente el fenómeno que explica. Por ello es deseable que los procesos de adecuación y reajuste incidan, concomitantemente, con las acciones mismas de la implantación. Por ejemplo, un diseño de actividades didácticas que impliquen la participación comprometida y crítica del estudiantado, tiene una multiplicidad tal de variables, que muchas de ellas no es posible contemplarlas en un primer acercamiento. Si estas estuvieran bien sustentadas, podrían, en acciones sistemáticas, corregirse y adaptarse a nuevas circunstancias. Si sólo se reducen a las consabidas improvisaciones o dictados autoritarios infundados, habría que recomenzar el proceso y quizá ni la experiencia pasada tenga utilidad significativa para una nueva acción planificadora.

Todas estas consideraciones y muchas más que pudieran hacerse sobre la complejidad de la planificación, que impliquen algo más que cubrir las apariencias para justificar apresuradamente un presupuesto, conducen a un resultado común: la acción planificadora debe ser permanente. Sus resultados sólidos no son inmediatos, o al menos no son visibles a corto plazo, (aunque muchas acciones puedan y deban ser inmediatamente puestas en marcha).

El esquema del anexo 3 es un arreglo secuencial del proceso enunciativo, que sugiere la necesidad de la continuidad planificadora, en cuanto que las formulaciones y enunciados del nivel IV deben ser validados y retroalimentados al proceso, para adaptarlo a nuevas informaciones extraídas de situaciones reales. La inferencia de los factores externos se aborda de nuevo en el siguiente capítulo.

La función del anexo 3, no es más que la señalada en el párrafo anterior, se resumen en él algunos de los puntos esenciales del cuestionario y respeta la estructura (o conectividad) de la gráfica del anexo 2.

Con las salvedades anteriores, el enunciado de un plan debe:

. satisfacer los requerimientos contemplados al principio de este trabajo (necesidades sociales, culturales, económicas; interpretación reflexiva; fines y objetivos explícitos, etc.).

. contemplar la "...probabilidad de alterar su dinámica interna"[2], a través de la consideración de los factores externos, haciendo énfasis en los recursos financieros, humanos y materiales, que en esta etapa deberán estar mejor definidos, no sólo para la implementación sino también para el ajuste o adecuación de todo el proceso.

- preveer una gama suficiente de opciones que se presentarán en su implantación y cuyo diseño se enfoca en este trabajo como "resolución de problemas", en los anexos 4 y 5.

El enunciado de un plan debe darse en un contexto institucional claramente definido en sus propósitos, metas, áreas y funciones, d e b i e n d o estar significativamente sustentado por proposiciones lógicas y juicios de valor que lo hagan similar a una "formulación matemática"[27,28]. Esto es, debe contener definiciones claras, postulados y principios, que dentro de un marco teórico permitan la inferencia completa, exenta de contradicciones o de apartados oscuros. De esta manera resultará clara su viabilidad, su verificabilidad, su adaptabilidad y su análisis crítico.

El enunciado puede también enfocarse linguísticamente[71] como un segmento de una larga cadena de unidades linguísticas sucesivas, que no están colocadas azarosa o arbitrariamente una detrás de otra. El enunciado deberá mostrar una intención operativa en la transmisión y organización de datos de la experiencia, conteniendo, cuando sea necesario, el análisis de éstos y su correspondencia con signos o combinaciones de ellos para lograr una comunicación linguística. En el enunciado debe haber criterios o instrumentos para estimar la cantidad y calidad de la información que contiene y es conducente a la implantación. Entre otras cosas, de acuerdo con los enfoques actuales de la linguística[71] y la comunicación[18], deberá analizarse la estructura toda del enunciado y la de los mensajes o contenidos implícitos.

3. RESOLUCION DE PROBLEMAS: INSTANCIAS DE IMPLANTACION DE UN PLAN. (ANEXOS 4 Y 5)

3. Resolución de problemas: instancias de implantación de un plan (anexos 4 y 5).

Una vez enunciado o formulado un plan, descritos y justificados sus objetivos, metas, parámetros y variables, etc., pueden iniciarse actividades conducentes a su implantación. Aquí, sin embargo, lo que interesa es adelantarse a esas posibles acciones para mejor definir "la programación que incluya plazos para la realización operativa de los objetivos planteados", que se habían mencionado al principio del trabajo. En este sentido, las actividades o diseños para la implementación (ver cuadro "S" del anexo 5) constituyen un proceso complementario al de planeación, en la medida en que aquél, el diseño, implica ... "el determinar la extensión o intensidad del esfuerzo y la orientación o caracterización que habrá de asignársele a cada etapa de la planeación"[72]. El proceso total de planeación, observación, formulación o enunciado y diseño, en un contexto social, podría esbozarse en las siguientes instancias, dentro de las cuales se destacan las de resolución de problemas o de diseños:

1) de un contexto social, medio o ambiente real, determinar un conjunto específico de necesidades,

1-2) (instancia de transición): mediante los procesos de investigación señalados previamente en la "formulación de planes", establecer y/o definir los datos relevantes para la modelación y el enunciado del problema, los recursos y su factibilidad,

2) crear un modelo o modelos asociados a un problema y los enunciados o formulaciones correspondientes, señalando:
- los datos técnicos específicos,
- los objetivos, las metas, parámetros y variables conducentes a la implantación,
- las partes o componentes del plan y de sus programas,
- la estructura justificada del plan, las interacciones entre partes, las leyes, teorías e hipótesis implícitas, etc.,

2-3) (transición) establecer procesos para:

- la determinación de soluciones o diseños factibles (totales o parciales: alternativos, tentativos, subsidiarios, aproximados o simplemente estimativos),
- la adecuación de soluciones o diseños: procedimientos y requerimientos económicos, sociales y políticos,
- la estimación de lapsos (duraciones), etapas y especificaciones,

3) establecer un plan óptimo o planes alternativos, dentro de un conjunto de restricciones, interacciones, alteraciones, de valores, prioridades y acciones,

3-1/3-2) (transición) detectar controles externos de adecuación y ejecución. La definición específica de proyectos, costos, financiamiento y administración. La detección de nuevas fuentes de información, de nuevos criterios para la toma de decisiones que conduzcan a más adecuados enfoques y observaciones más directas y selectivas, para un nuevo proceso de formulación o enunciado de planes, programas, etc.

De acuerdo con estos criterios, lo que propiamente se implementa no es un plan, sino las soluciones que se den a los problemas en él implícitos. Dentro de ellos estarán contemplados: la toma de decisiones, las opciones alternativas o laterales, las medidas prioritarias y las provisionales, los mecanismos de implantación, regulación, modificación, alteración, etc.

Con el objeto de evitar el desperdicio o el desgaste económico, intelectual y social, es conveniente que las acciones inmediatas o las acciones de emergencia se encuadren a la brevedad posible dentro de un plan más amplio y fundamentado, como el que se ha sugerido hasta ahora. En este sentido, estas últimas accio nes podrán ser realmente de transición si se someten a la ardua prueba de la justificación, fundamentación y crítica ubicadas en un contexto de planificación institucional. Se evitará que las decisiones de emergencia, usualmente poco fundadas, se conviertan en dictados perennes, inamovibles y frecuentemente arbitrarios.

Para el diseño del plan básico y óptimo, habrá de tomarse seriamente en cuenta el funcionamiento de la institución, en cuanto: a sus funciones sustantivas (docencia, investigación y extensión) y a sus funciones de apoyo (la propia planeación, la administración, el financiamiento, etc.). Esto deberá concebirse a través de un sistema dinámico de funcionamiento y de interacciones "académico-administrativas"[73].

Los esquemas de los anexos 4 y 5 pretenden establecer una forma sistemática de tratar algunos puntos de la instancia 2), de la transición 2-3) y de la instancia 3).

3.1 Descripción de los estados E_o, P y C, y de las relaciones X_8, X_9 y X_1 (anexos 4 y 5).

Supóngase que del enunciado original (E_o) de un plan, se detectan uno o varios problemas, de los cuales se desean obtener soluciones o diseños que habrán de implantarse. En cada problema habrán de detectarse dos conjuntos de proposiciones y cuestionamientos que correspondan respectivamente a aspectos que en el proceso descrito antes, se denominaron como apoyos, datos, contexto, antecedentes, etc. del problema, y que constituyen "lo dado"[15]; y los otros: preguntas, necesidades, propósitos, metas, objetivos, etc. que expresan "lo requerido"[16].

El contexto social, económico, académico y político dentro del cual se ubica al enunciado o formulación, debe caracterizar u orientar las soluciones, diseños y mecanismos de implantación. Así se logrará que el enunciado de un problema y sus posibles soluciones, se distingan de un mero ejercicio teórico o técnico como el de los problemas que aparecen en libros de texto o en artículos de revistas.

Por ejemplo, algún procedimiento didáctico particular diseñado para un medio académico ajeno a una institución, no puede constituir por sí mismo una solución a un proceso de enseñanza-aprendizaje. Antes de incurrir en su implantación arbitraria, habrá que formular un problema en el cual lo dado es un método o una técnica de enseñanza y un conjunto de informaciones coherentes sobre el estudiantado y los profesores, las funciones específicas de una institución, etc. Lo requerido en este caso, sería el señalar uno o varios métodos de enseñanza, adaptados a una población estudiantil y de profesores, que operen con propósitos claros, dentro de las restricciones explícitas del sistema[73] y de los propios métodos, de los cuales habría que fijar sus alcances, sus ventajas y desventajas (de unos respecto a otros) y su ubicación dentro de un currículum o una asignatura.

Para fijar un poco más las ideas, se podría precisar más esta situación, suponiendo que durante un arduo estudio de planeación se ha llegado a vislumbrar la conveniencia de implantar cursos a través de la técnica de la "instrucción programada lineal"[74].

Habría que partir de un plan más amplio en donde se ubicara esta técnica. El contexto podría ser muy amplio, pero, para los efectos correspondientes al ejemplo, se admitirá que sólo es de caracter didáctico, en el cual se pretende sólo examinar distintos métodos y técnicas de enseñanza: la exposición magisterial tradicional, la dinámica de grupos, el uso de medios audiovisuales, la participación en proyectos y otros, incluyendo el de la instrucción programada.

De acuerdo con el anexo 5, habría que analizar las partes de la propuesta del plan, en su enunciado (E_0). En el ejemplo, podría referirse a detectar qué cursos o partes de ellos son de tipo rutinario como para ser tratados con instrucción programada (en esto se parte de la premisa de que esta técnica fue diseñada específicamente para la instrucción y el desarrollo de habilidades, en el manejo mecánico de conceptos, en los procesos de "memorización" de términos, en las aplicaciones directas, etc.[75], con lo cual se puede aliviar sustancialmente la labor de clase de algunas asignaturas, y puede orientarse ésta a actividades más participativas y creativas del estudiante.

Examinando la aplicabilidad de la instrucción programada aisladamente de los demás métodos, de sus alcances o de su conveniencia didáctica, habrá que considerar el aspecto económico, que tiene singular relevancia para tomar decisiones respecto a emprender "cursos" con esta técnica. El costo inicial de un texto de instrucción programada es muy elevado y debe justificarse ampliamente su realización. Suponiendo que se desee llevar a cabo un texto lineal, en serie, por ejemplo para cubrir unas 30 horas de un curso, se necesitarían emplear: de uno a tres autores, un coordinador, un psicólogo, un revisor de contenido, un revisor de estilo, dos o tres mecanógrafas, un auxiliar de oficina, tres o más grupos de alumnos para la prueba de formatos, contenidos, aprendizaje, diagnóstico, etc. Todo esto durante un período mínimo de un año. Por lo anterior, esta labor resulta costosa, y puede advertirse que un elevado número de textos clasificados dentro de esta tecnología, han evadido diversas etapas del proceso requerido.

La instrucción programada tiene diversos procedimientos y criterios (una especie de "leyes") que deben satisfacerse para lograr su cometido[76]:

- debe eliminarse cualquier párrafo o texto superfluo, (esto es, breve y conciso),

- debe organizarse la instrucción en una secuencia eficaz (esto es característico de la programación lineal, la cual no suele verificar si en estas condiciones es factible integrar el conocimiento),

- debe presentar, en su desarrollo, sólo una idea o asunto a la vez (no se indica si es una gestalt o se trata de un conocimiento atomizado . Esto parece dejarse al criterio del autor. En el segundo caso suele conducirse sólo a un proceso de memorización),

- debe implicar activamente al estudioso en el proceso, con base en el uso de diversos mecanismos para obtener una respuesta,

- debe dar a conocer al estudiante el resultado correcto inmediatamente después de su respuesta (concepto conductista del reforzamiento, que no necesariamente implica la creación de una mejor atención crítica por parte del alumno, ni mucho menos un mayor interés por la materia de conocimiento),

- debe asegurar que el alumno avance a su propio paso. Lo cual pareciera implicar una acción individual o autónoma de los alumnos. En este punto, incluso se ha llegado a asegurar que no debe fijarse el tiempo de aprendizaje, sino la calidad del mismo. Bajo las restricciones de un proceso de aprendizaje prefijado como es este, estas aseveraciones son muy debatibles.

Con estos principios y otras cuestiones que suelen asociarse a esta técnica: la extensión de cada párrafo, la utilización de figuras y esquemas, los procesos de inducción de la respuesta o de la ejercitación de conceptos, etc., se delinean suficientes condiciones como para hacer corresponder diversas partes de una o varias asignaturas, con los dominios, requerimientos y alcances de la técnica, así como la necesidad de actividades o experiencias complementarias para la adquisición y manejo de conceptos y conocimientos en general.

Desde luego que estas técnicas, empleadas en un dominio conceptual, implican la introducción de definiciones y de hipótesis, cuando menos en dos campos: el didáctico y el disciplinario, es decir, el de los métodos y técnicas correspondientes o determinados por los contenidos estructurados (como se indicó en la figura 1). La situación no debe enfocarse en el otro sentido, como suele hacerse, es decir que la técnica o la metodología determinen a los contenidos.

Habrá que analizar, después de establecer estas correspondencias, que los métodos y técnicas didácticas, entre los que estará la instrucción programada, asociados a diversos temas o partes de una área de conocimiento, guarden alguna coherencia entre sí, sin menoscabo de las áreas conceptuales. Por ejemplo, no sería aceptable un diseño de métodos y técnicas diversos, para una misma asignatura, que sólo tuvieran como justificación la "variedad" de procedimientos para mantener la atención de los estudiantes. Debe haber un diseño de los vínculos y transiciones entre los diversos métodos. Por ejemplo, suponiendo un desarrollo secuencial, podrían plantearse dos opciones:

1) instrucción programada - discusión grupal,
2) explicación en clase - instrucción programada - elaboración de un proyecto - descripción grupal, etc.

En la primera no se diseñan las transiciones de una experiencia a la otra, y esto causa desorden y confusión entre los estudiantes.

A cada técnica correspondería un tema de la asignatura o un enfoque del mismo (su dominio, relación X_9). Tampoco es aceptable que el método o la técnica de enseñanza altere el "orden lógico"[77] de una determinada asignatura. Como ya se dijo, la metodología debe adecuarse y supeditarse al área de conocimiento en cuestión.

De acuerdo con lo anterior, se tendrán ahora elementos para crear un control interno y los criterios necesarios para diseñar o resolver la cuestión relativa al empleo de la instrucción programada (asunto central para el diseño o solución, según se muestra con el vértice C, en los anexos 4 y 5).

En los "cuadros" del anexo 5 se sugieren términos para facilitar el establecimiento de controles y criterios. Se incluyen acciones tales como las de "precisar" el enunciado E_o, o sus partes, examinando detenidamente su redacción, los términos significativos que contiene, los parámetros y constantes de algún modelo planteado o sugerido; y desde luego, la información relevante, como el análisis anteriormente descrito en el ejemplo. Para ello, se sugiere la posibilidad de detectar: lo superabundante, lo irrelevante, o sea, mediante un proceso de filtrado, como se acostumbra decir en la terminología de sistemas, dejar lo conducente y descubrir lo faltante.

Se considera una instancia central la determinación de controles y criterios para juzgar la solidez del proceso: la validez y pertinencia de los registros de la observación, la factibilidad de los programas, y posteriormente de los proyectos, los criterios justificativos, la validación o la fundamentación de hipótesis, la comparación o uso de casos concretos y los refinamientos o alteraciones para la mejor ubicación y clasificación de las "partes" en campos o áreas (por ejemplo de los métodos o técnicas respecto a conceptos, conocimientos concretos, etc.). Se hace énfasis en que este proceso permite sólo iniciar la búsqueda de criterios y controles, porque el proceso total el que determinará, finalmente, los más pertinentes y significativos.

Lo mismo sucederá con los demás controles y criterios sugeridos, aunque no todos surgirán de la etapa de partición o análisis. Por ejemplo, los criterios de valoración y detección de hipótesis implícitas, adicionales y tentativas o las relaciones tácticas, los indicadores, la funcionalidad y otros más aparecerán en el proceso de construcción de enunciados alternativos o intermedios (E_i) y de los enunciados óptimos que sustituyan al inicial (E_f).

La relación "X_1" es inferida o comprobatoria en cuanto al enunciado original "E_o" y la instancia central de controles y criterios "C". Estos últimos deben compararse directamente con el enunciado original, para definir y establecer claramente los contextos, partes, dominios y, sobre todo, las correspondencias (en el ejemplo entre la didáctica y la temática conceptual) y la coherencia requerida de un planteo sólido entre las partes del enunciado y entre las "áreas", leyes o principios correspondientes (en el ejemplo, entre los temas del área o asignatura y entre los métodos o técnicas que se les asociaron).

3.2 Descripción de los estados C, E_i y E_f, y de las relaciones X_{10}, X_{11}, X_5, X_2, X_3 y X_4 (anexos 4 y 5)

Es claro que los análisis de correspondencia y coherencia de las partes de un enunciado y de áreas, leyes y principios de campos instrumentales que se asocien a dichas partes, conducen a controles y criterios tales que, eventualmente, alteran la visión de los problemas de un plan. Esto lleva frecuentemente a enunciados alternativos o reformulaciones[78] (estado "E_i") que implican variaciones en: los datos, enfoque de las necesidades, propósitos, leyes, teorías, modelos, analogías, etc., que se adecúen mejor a esa visión más conducente a una solución o diseño.

En esta reformulación de alternativas habrá que establecer nuevos criterios, agrupamientos de conceptos y datos, modelos, estructuras de los problemas, secuencias lógicas de acción, etc. En estas nuevas opciones deberán identificarse los posibles obstáculos para implementar un diseño, analizar las restricciones, las metas laterales y subsidiarias pertinentes y conducentes a una implantación o realización práctica, sin perder los marcos o contextos teóricos y sociales que le dan sentido a los proyectos y realizaciones. Los nuevos enunciados deberán, como antes se hiciera para E_o, analizarse como un conjunto de proposiciones lógicas, definiendo sus partes y sus relaciones que mejor clarifiquen las interacciones que lo definan como sistema[79]. Deberán también establecerse controles y criterios, tanto para el análisis de soluciones alternativas, como para la toma de decisiones en la selección de los enunciados o formulaciones más convenientes.

En los anexos 4 y 5 se indica a E_i, junto con C, como vértices centrales de la gráfica (se ha buscado que la definición técnica del "centro de una gráfica"[13], coincida con la mayor relevancia conceptual de estos vértices). Se desea enfatizar con ello la importancia de estas reformulaciones que están, por decirlo de alguna manera, "a la mitad del camino", entre el enunciado original "E_o" y las soluciones o diseños "S". El asunto es crucial, porque enfocado ya al problema, respecto a situaciones concretas, hay que decidir o al menos estudiar alternativas que conduzcan a diseños específicos, dentro de las cuales se incluye la opción, ver cuadro "S" del anexo 5, de no diseño. En el ejemplo, la instrucción programada podría adoptarse para alguna asignatura, área o [illegible] po de conocimiento, o bien objetarla por inadecuada, costosa o po[r] no contar con los recursos humanos requeridos (en cualquiera de estos casos, no debería caber el rechazo por desconocimien to de la técnica en cuestión). En teoría, como se ha sugerido arriba, los enunciados intermedios, están ya más cerca de la solución o diseño que el enunciado original. Están más próximos al asunto que habrá de implantarse, o al menos de se[r] evaluado y validado en un contexto real y operativo. En esta instancia se deberán contemplar:

- las similitudes, equivalencias y diferencias parciales o totales, con respecto al enunciado original, manteniendo la coherencia y las correspondencias pertinentes (X_2, X_3 y X_4)

- los d o m i n i o s y contextos de los enunciados alternativos, anotando los cambios y las degradacion[es] (si los hay) respecto al enunciado original, de acuerdo con los controles y criterios establecidos (X_{10})

- la posibilidad de elección (decisión) de una o varias soluciones óptimas "E_f" (X_{11}), en relación a una posible solución o diseño "S" (X_{12}), vislumbrando ya las posibilidades de un diagnóstico y una evaluación sobre esa solución.

Estas acciones y previsiones obligan a la creación de nuevos controles y criterios: la estimación de la complejidad del problema, las posibles sobresimplificaciones, la funcionalidad de una solución, las limitaciones de los individuos que concurren en el proceso de planificación, etc. Pero también conducen o van definiendo las condiciones de aplicación de los modelos y de las mismas teorías y principios, en el diseño o soluciones asociados a un problema o a un conjunto de prob[lemas]

Esto hace que dichos modelos, por ejemplo el modelo didáctico de la figura 1, sean más útiles, aporten más información y estén de alguna manera más apegados a una concepción dinámica[80] de la realidad. En todo caso, habrá que delimitar el ámbito y el alcance de los modelos. Uno muy cuestionable y "a la mano", es el propio modelo para la solución de problemas que aquí se propone. En primer lugar, no pretende establecer un conjunto de reglas o "recetas" para obtener una solución, lo cual no es factible prescribir a priori, salvo en problemas de tipo rutinario[81] o en los ejercicios mencionados antes. Lo más que puede lograrse, aparentemente, es un arreglo de instancias o estados asociados al proceso, como se ha indicado antes y como se muestra en los anexos 4 y 5.

El proceso de solución de un problema real, tiene un carácter general inductivo[82], aunque pueda utilizarse en diversas instancias o etapas la deducción o los esquemas deductivos para operar algunos tipos de inducción[7,61,62].

Como se mencionó en el nivel III_b, sector 1, muchos problemas tienen una estructura abierta de opciones, sin que esté predeterminada una única solución. Se trata de los llamados "problemas de búsqueda". La estructura o esquema asociado tampoco es determinable a priori. Lo mismo sucederá con los esquemas de opciones para tomar decisiones.

Se descartan, desde luego, los problemas de "divertimento" tipo crucigrama, o los problemas "truculentos" que representan juegos irrelevantes en cuanto a su utilidad relativa a una realidad concreta.

El modelo aquí propuesto pretende entonces marcar un mínimo de estados relevantes del proceso y de su interacción. Que sean los estados consignados u otros para atender a un problema particular, es algo que debe decidir el planificador enmendando o alterando, e incluso rechazando el propuesto, para dar cuenta del mejor acomodo de los estados relevantes al problema en cuestión. En otras palabras, es la práctica o el ejercicio racional de diseño o resolución de casos lo que determinará, en última instancia, el alcance o la utilidad del esquema propuesto.

En cuanto al <u>enunciado final</u> E_f, se tienen aparentemente dos opciones:

- una que se refiere a la elección de la mejor alternativa, la óptima[83] (y en ocasiones quizá "la menos mala") de las consignadas antes,

- otra que se refiere a la de elegir la alternativa más conducente a una solución.

Ambas corresponden a una sola acción: definir un enunciado final óptimo. Pero varían los enfoques. En el primer caso se avanza a partir del enunciado original y el marco teórico, y en el otro se pretende adecuar algo a un diseño o solución, o sea, teniendo presente la siguiente fase.

Habrá que decidir entre ambas circunstancias teniendo en cuenta sus ventajas y desventajas. Por ejemplo, en casos extremos, la primera puede acusar una fuerte tendencia teorizante que fuerce una solución esencialmente teórica. La segunda puede dejar sentir el impulso de quien no atiende al marco reflexivo y pretende sólo instrumentar algún diseño o solución subjetivamente preconcebida.

Suponiendo que se presente esa dualidad de enfoques, habrá que detectar y establecer previamente otros controles y criterios con la mayor objetividad posible (X_5), tomando en cuenta las "actitudes" de quienes deciden el enunciado (sus creencias, conocimientos, costumbres, e incluso sus intereses personales

Muchas de las cuestiones que aquí surjan, deberían haber sido consignadas en los "perfiles individuales", o en un examen estricto y objetivo de las "situaciones y circunstancias" del anexo 1 y el cuestionario. Pero es muy posible que muchas cuestiones no se hayan previsto cabalmente y surjan ahora. Esto y otras cuestiones de orden teórico irán configurando los elementos para el diagnóstico y la evaluación del anexo 5, que conducirán a nuevas adecuaciones del plan original o a las actividades de retroalimentación del anexo 1.

3.3 Descripción de los estados C, E_f y S, y de las relaciones X_{12}, X_6 y X_7 (anexos 4 y 5)

Del enunciado óptimo o final E_f, habrá que dirigirse a una solución o diseño S. Para ello, considerando lo descrito en el apartado anterior, se hará énfasis en la información procesable y conducente a una solución. Aquí, sin embargo, habrá que tomar una posición crítica que convenga a la simplificación de la información útil para la solución. Se trata de llevar a cabo un proceso minucioso de depuración de todas las etapas relevantes anteriores (justificativas, enunciativas, conducentes, etc.). Se propone un esfuerzo adicional para eliminar lo lateral o accesorio que no aporte, directa o indirectamente, sustentación o información pertinente para definir o establecer un orden en lo operativo que permita mantener un contacto continuo con los aspectos esenciales del plan y faciliten la necesaria evaluación que se ha descrito con anterioridad.

Es de esperarse que la necesidad de los procesos de simplificación, sea tomada en cuenta sin mayor contrariedad por parte de los planificadores. Existe otra acción recomendable que quizá ya no sea tan usual, se refiere al proceso de sustitución. Cabe hacer notar que este asunto se trató someramente en el apartado del nivel I (anexo 1), respecto al concepto de término variable, y se relaciona con la modelación analógica del nivel III_a, sector 3. En este estado "S", se trata de enfatizar la conveniencia de asegurar la mayor pertinencia, orden o adecuación concreta, para lograr una solución o diseño que claramente corresponda a E_f. Por ejemplo, en relación con el método de instrucción programada introducido antes, puede haberse señalado respecto a un tema específico "T_n" de una asignatura, que una técnica adecuada de instrucción debería ser del tipo

" ... de autoinstrucción ... "

Para mejor especificar la técnica esto podría <u>sustituirse</u> más convenientemente por lo siguiente

" ... de instrucción programada lineal ... "

especificando el tipo de control que habrá de administrarse para su evaluación. Quizá aún así no haya criterios totalmente especificados y se necesiten anotar, dentro del propio enunciado o por separado, algunas otras características concernientes (extensión, repeticiones, transiciones, etc.).

En otros casos será conveniente <u>sustituir</u> términos o conceptos por otros similares o equivalentes que mejor aclaren el enfoque de E_f, por ejemplo, como se pretende hacer con respecto a las preguntas alternativas del cuestionario de este trabajo.

Todo esto redundará en una mayor precisión de lo enunciado en E_f y de las soluciones S asociadas. Es este el sentido que pretende dársele a las relaciones X_{12} y X_6 (implicando esta última relación la necesidad de haber especificado nuevos controles y criterios: aproximaciones, secuenciaciones, concurrencia, simultaneidad, etc.).

Habrá que analizar también los <u>procesos</u> y <u>operaciones</u> que llevarán de E_f a S: las acciones de tipos inferencial o analítico (inducción, deducción, simulación, analogía, etc.), o las operaciones de tipo rutinario (directas, de aproximaciones sucesivas, recurrentes, de ensayo y error, etc.) que se requieran para definir, enunciar o configurar una o varias soluciones o diseños.

La solución o diseño es una instancia terminal de una aproximación orientada a la ejecución de un proyecto definido o a la toma de un conjunto de decisiones.

Pero, como se ha mencionado en diversos apartados, el proceso es cíclico. En la implantación se recabarán nuevas informaciones a través de experiencias diseñadas. Esto implica que la realización de un proyecto también debe contener elementos de regulación, de "control" como se suelen denominar en la teoría de sistemas[84]. Deben diseñarse dispositivos adecuados de registro y evaluación permanentes y tratar de visualizar e instrumentar a los proyectos dentro del marco de los "sistemas adaptivos", esto es, dentro de concepciones o modelos que tengan la posibilidad de mantener su estructura o función particulares ante alteraciones originadas en el medio circundante. La modelación de este tipo requiere de controles que tomen en cuenta diversos factores de adaptación[85]: los requeridos para considerar alteraciones externas al sistema, los que deben considerar perturbaciones internas y los que se originan de la interacción mutua (medio-sistema).

Las soluciones o diseños quizá pueden clasificarse de muy diversas maneras, pero atendiendo al criterio de una solución como satisfactor de las necesidades del enunciado original E_o, o de algún enunciado alternativo u optimizado, puede resultar adecuado decir que las soluciones pueden ser: totales o parciales, incluyendo en ellas la no solución o diseño. Para mejor ubicar uno o varios resultados, pueden a su vez subdividirse en:

soluciones alternativas,
" tentativas,
" subsidiarias,
" aproximadas y
" estimativas.

En todo caso, lo que se propone es discernir sobre el tipo de solución o diseño que se obtiene con una "visión integral del proceso de planeación como un proceso social"[85], en el que están comprometidos los planificadores. La ubicación correcta tiene algunas implicaciones, por ejemplo, una se podría referir al mejor diseño de los mecanismos de diagnóstico y evaluación, y otra a los del control externo y adecuación. El control externo debe concebirse en un contexto de proyectos bien definidos y de su administración. Deberá mantenerse, dentro de las condiciones ambientales prevalentes, en un equilibrio racional y tolerable, esto es, que no implique una imposición de proyectos o acciones, que inhiba la participación y el análisis crítico, pero que tampoco conduzca a situaciones en donde imperen las acciones y decisiones inestables, tumultuosas o de un activismo político que incida en contra de una genuina actividad académica, socialmente ubicada y responsable.

Lo anterior requiere de un marco normativo y legal claramente definido, operativo y comprensivo, que delimite los fines de la planeación educativa, pero también que, en su esencia, la sustente, la oriente a la renovación y a la adaptación. Este marco normativo deberá ubicar, regular u orientar los fines, por ejemplo, atendiendo

a la planeación de la institución,
a las políticas de la planeación,
a los principios académicos,
a la planeación participativa,
a las consecuencias laterales de la planificación, etc.

Las consideraciones anteriores crean restricciones para la definición última de una solución o diseño. De acuerdo con las condiciones económicas, sociales, normativas y operativas pueden haberse derivado del cuadro E_i, a través de X_7, propuestas o incluso proyectos que correspondan a diversas opciones. Sin embargo, las soluciones alternativas no necesariamente se asocian a enunciados alternativos. En problemas "no cerrados" (que no tengan una solución bien definida) a un enunciado, pueden corresponder diversas opciones de donde se elige la óptima. Aquí también suele asociarse el término óptimo con lo económico exclusivamente. Pero, según lo señalado hasta ahora, no es de esperarse que en el presente trabajo se le pueda identificar con este enfoque parcial.

En primer lugar, la solución óptima tiene mucho que ver con las restricciones y con el medio en donde se ubica. Puede, por tanto, entenderse "lo óptimo" como "lo factible" dentro de condiciones dadas: sociales, políticas, académicas, individuales y muchas otras. Lo óptimo puede ser lo inmediato, lo urgente o lo meramente indispensable para un primer avance, incluso para la sola consolidación de lo existente. Lo óptimo puede ser, y suele ser, sólo algo tentativo, de ensayo, e incluso "lo menos malo" para un medio altamente condicionado económicamente. O puede ser un diseño para atender una situación contingente y por tanto provisional, lo cual obliga a una evaluación y ubicación del diseño en ese sentido, con la mejor estimación posible de su duración, de su terminación, para evitar, como ha sido mencionado, que se transforme en algo permanente, "congelado" pudiera decirse, que pueda acarrear la inmovilidad académica y su consecuente obsolescencia e inoperatividad.

Las soluciones óptimas pueden ser también sólo subsidiarias de otras soluciones o diseños. En este sentido deberían encuadrarse muchos proyectos o acciones de emergencia Ubicados estos en un contexto más amplio y racional deben coadyuvar a la investigación o realización de proyectos más amplios o mejores fundamentados.

O bien, las soluciones subsidiarias deben implicar proyectos o acciones que abran brecha esto es, que representan intencionalmente acciones o etapas previas para la realización de planes completos. Representan, por decirlo de algún modo, el andamiaje o la estructura de apoyo de una realización más integral y participativa. Por ejemplo, puede utilizarse a la "instrucción programada" como una excelente práctica para formar profesores que aprendan a ordenar y secuenciar conocimientos, a comunicarse con sus alumnos, a preparar y evaluar material didáctico, etc. Y esta labor, la instrucción programada, no sería el fin último, sino sólo el medio eficaz para lo otro, más relevante y urgente.

Como se indicó, las soluciones o diseños pueden ser también sólo aproximados o estimativos, lo cual no implica necesariamente una transitoriedad, porque siendo sólo estimativos, pueden llegar a ser definitivos (en largos períodos). Esto no es desusual si se toma en cuenta la alta complejidad de muchos problemas o sistemas académicos o de su incidencia en el medio circundante. En muchos casos la elevada cantidad de variables, factores e interacciones que ocurren en la planeación, dan lugar a situaciones irresolubles en toda su amplitud. Se requiere destacar lo urgente o lo prioritario y de allí realizar un diseño estimativo, pero reconociendo y señalando la complejidad para evitar las "sobresimplificaciones"[85] que pueden implicar un serio deterioro de la visión institucional o de las posibilidades del medio, incluyendo en ellas las de la capacidad racional individual. En un contexto de concepciones sobresimplificadas, quizá deban ubicarse los enfoques de planeación que pretenden evaluar a las actividades académicas con los criterios de "costo/beneficio"[85], aún cuando en ellos se pretenda oscuramente incluir el llamado "beneficio social".

3.4 Circuitos (síntesis), cortes (interacciones) y trayectorias (anexo 4)

Como en el proceso de la formulación o enunciado de un plan, se indican, en el anexo 4

- los circuitos ($C_1, \ldots, C_7$) que se derivan de un árbol en la gráfica,

- los cortes ($K_8, \ldots, K_{12}$) también asociados a un árbol, y

- las trayectorias dirigidas (o conjunciones alternativas de estados) que se muestran en el diagrama de clases.

Las síntesis asociadas a los circuitos están de alguna manera implícitas en la descripción que se ha venido haciendo en este apartado 3, de Resolución de Problemas. Para evitar más repeticiones no se insiste en ellas, aunque es un ejercicio recomendable el tratar de interpretarlas directamente de la gráfica, sobre todo en una aplicación particular. Lo mismo puede decirse de los cortes o interacciones, que convendría interpretar en función de los conceptos o estados de este esquema (E_o, P, ..., S) y de los ejemplos que se dieron en relación al anexo 2.

Es quizá conveniente detenerse un poco a examinar las opciones que representan las trayectorias que unen a cada pareja de vértices y que, como se dijo, expresan las alternativas de conjunciones de estados consignados en la gráfica.

Como en el caso anterior, se trata de establecer la importancia que pueda tener la inclusión de estados o conceptos intermedios entre dos estados determinados. Mediante estos análisis alternativos se pretende establecer la coherencia conceptual u operacional de un proceso de solución o diseño específico.

Por ejemplo, puede interesar conocer las opciones incluidas entre E_o y E_i. Buscando en el diagrama de "clases" los casos de conjunciones que contengan a E_o y a E_i se obtienen

E_oE_i

E_oPE_i

E_oPCE_i

E_oCE_i

que representan cuatro casos de análisis para E_i, a partir de E_o.

Para el ejemplo de instrucción programada, que se ha utilizado en este apartado como ilustración, se podrían identificar las siguientes situaciones:

E_oE_i el contraste de la propuesta original, al emplear la instrucción programada en los procesos de instrucción de una o varias asignaturas (enunciado E_o), contra diversas opciones con la instrucción programada lineal (extensiones diversas de la técnica, intercalación de otros métodos o técnicas: participación o dinámica grupal, segmentos o secciones de repaso, secciones de autoexamen, etc.).

E_oPE_i una comparación entre las alternativas mencionadas arriba, pero asociándoles las "partes conceptuales" de las asignaturas, o las etapas del proceso de enseñanza en donde se aplicaría cada modalidad de la instrucción programada.

E_oPCE_i una justificación del párrafo anterior, en función de criterios y principios de la instrucción programada (eliminación de párrafos innecesarios, organi zación de información en secuencias eficaces, presentación de una sola idea en cada párrafo, etc.) y de los contenidos parciales de cada asignatura.

E_oCE_i un control interno de los enunciados alternativos derivados de los criterios del párrafo anterior (por ejemplo, la adecuación en la redacción, la comprensión, la factibilidad, etc.).

En relación con el mismo ejemplo, un análisis que podría resultar valioso sería el de diseñar las partes técnicas o metodológicas con los contenidos, o sea, una revisión de casos entre los estados P y S

PS (anulado)
PE_fS (anulado)
PE_iE_fS
PE_iS
PCE_iE_fS
PCE_iS
PCS
PCE_fS

Algunas opciones se han descartado o anulado por razones como las siguientes:

- la relación entre las partes y la solución o diseño (PS), no tendría más relevancia que el de hacer una verificación, sin que en ella medien los enunciados o los criterios y controles, por lo cual no es significativa.

- la relación entre las partes y la solución o diseño con el enunciado final (PE_fS), puede también resultar un tanto inconsistente porque se está dejando fuera uno de los dos aspectos centrales que conducen al enunciado final o a la solución (o sea, a E_i o a

En todos los casos de conjunción aceptables, para relacionar P con S, aparecen E_i y/o C; es decir, los estados centrales de la estructura.

Los demás casos, PE_iE_fS,..., PCE_fS, se podrían analizar como se hizo para E_oE_i y verificar si los diseños o soluciones descritos o procesados incluyen los casos más relevantes y significativos.

3.5 Control externo: diagnóstico/evaluación y adecuación (anexos 4 y 5)

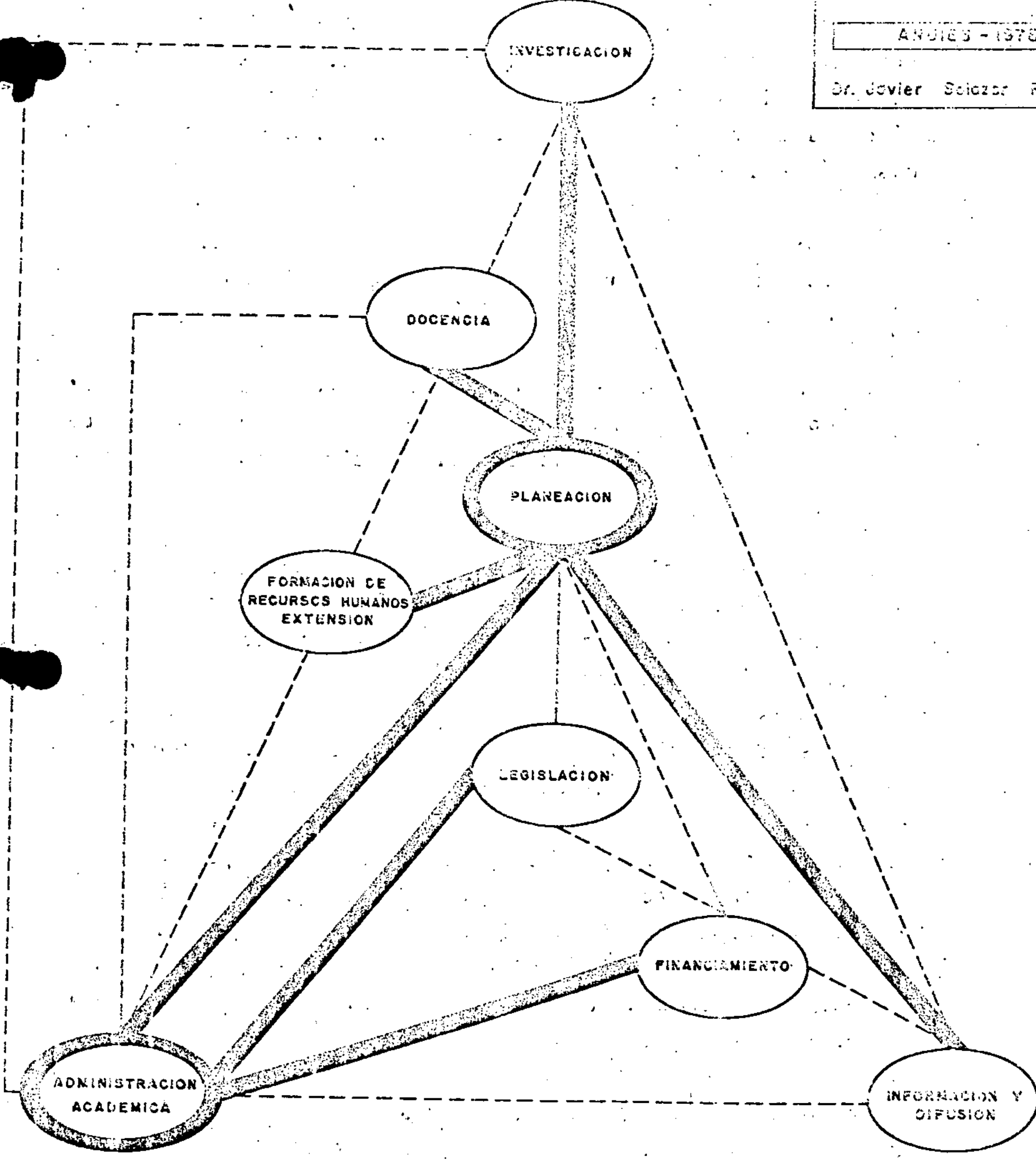
Como en el caso de formulación o enunciado de un plan, los procesos de solución o diseño deben también juzgarse y ajustarse fuera del contexto asignado a la mera resolución. Estos controles deberán también detectarse y diseñarse, como se ha indicado antes, en los procesos de implementación, definición de proyectos específicos, programación temporal, etc. Cabe advertir que no se analizan explícitamente en este trabajo los mecanismos de implantación. Están, sin embargo, sugeridos e implícitos en diversos apartados y corresponden, en general, a las instancias de administración académica el programarlos, apoyarlos y llevarlos a cabo. Implican alguna concepción orgánica y funcional de la institución[73] y en particular, los controles administrativos deben ser también concebidos con la participación de la unidad o centro de planeación de la institución. En la figura 2 se esquematiza una posible estructura del funcionamiento de una institución. Independientemente de la validez que pueda tener esta propuesta, se desea advertir la necesaria interacción entre los centros o unidades de planeación y administración entre sí y con otras unidades de apoyo o relativas a las acciones sustantivas.

RESOLUCION DE PROBLEMAS

(Fig. [illegible])

ANUIES - 1978

Dr. Javier Salazar Resines



De este modo, concebida la institución como un todo orgánico, con interacciones múltiples (internas y externas) es como deben estipularse las resoluciones, los proyectos, los diagnósticos, las evaluaciones y la adecuación, en procesos dinámicos que revisen y atiendan

- los grados de satisfacción de las necesidades académico-administrativas de la institución y las necesidades del medio

- las discrepancias de los planes enunciados o formulados con las soluciones, proyectos y sobre todo con una realidad evaluada o estimada cualitativa y cuantitativamente

- las características y actitudes del personal académico, administrativo y de planeación, en relación con el medio socioeconómico y con los fines y propósitos de la educación superior

- las fuentes de información y los medios de comunicación (incluída la difusión)

- los marcos conceptuales y teóricos en los que se fundamenta la planeación y la acción toda de la institución, en concepciones ideológicas y sociales renovadoras que definan, sin ambigüedades, los derroteros y los compromisos de la educación superior dentro del ámbito que la sustenta, etc.

Es, dentro de una acción crítica, pero también racional y sistemática como se puede plantear un cambio social y académico con lo cual se pretende sugerir que las instituciones de educación superior deben iniciar ellas mismas, desde dentro, ¡el cambio que pregonan! Que implementen la adecuación y la adaptación ya mencionadas.

Para llevar a cabo lo anterior no pueden, no deben dejarse imperando las "soluciones", situaciones o estados de cosas tradicionalmente impuestos y manipulados. Los planes, los proyectos específicos y los diseños correspondientes deben cuestionarse permanentemente, a la luz de nuevas inquietudes, adelantándose a nuevas y más profundas contradicciones y deterioros. Habrá que formular total o parcialmente los planes de una institución una y otra vez hasta lograr un ajuste adecuado de la vida académica a la del país, cerrando con ello la enorme brecha que existe entre las actividades y productos de las instituciones de educación superior y las apremiantes necesidades sociales del medio que las entraña.

Las instituciones de educación superior deberán, eventualmente, ser entidades "bien informadas". Los procesos de planeación en general, la planeación curricular, las funciones administrativas, la investigación y muchas otras funciones prioritarias, deben contar con información actual, confiable y sobre todo útil. De esta manera resultará factible realizar la mencionada adaptación de planes, programas y proyectos. Será en esas condiciones factible la verificación y, quizá la validación en contextos reales, cuando el proceso de información y los medios de comunicación lleguen a ser eficaces aún dentro de la propia institución. Con esto último se desea hacer resaltar una situación casi inverosimil dentro de las instituciones de educación superior: la muy escasa y en ocasiones irrelevante, información interna y la falta casi absoluta de comunicación : No puede suponerse que funcionen los procesos de adecuación o adaptación, como tarea académica, administrativa y planificadora, si lo que sucede dentro de la propia institución, en ocasiones, en relación con cuestiones altamente trascendentes para toda la comunidad, se suelen conocer sólo a través de los medios masivos y comerciales de información (radio, televisión y periódicos).

En cuanto a los datos más refinados y sutiles que se requieren para las labores de planificación, investigación, etc., relacionados con la prueba e identificación de modelos, del análi de nuevos criterios y de muchos otros asuntos, es incuestionable que los niveles apropiados de información y comunicación de las instituciones no operan o, como ya se indicó, no existen. Deben planearse y diseñarse como se planea y diseña un proceso de investigación, o el plan curricular de una carrera.

Con sistemas apropiados de información (incluyendo en ellos, obviamente el procesamiento de la misma) se podrá en alguna medida, con modelos y sistemas racionales de planificación, tomar en cuenta el objeto de la enseñanza: los estudiantes. Es posible que puedan considerarse, aún dentro de la educación masiva, algunas cuestiones respecto a las diferencias individuales, introducir marcos motivacionales, crear hábitos de estudio y sobre todo impulsar la conciencia social y crítica de los elementos humanos de la institución.

Mediante actividades de simulación o de análisis de casos en grupos, es factible crear una atmósfera conveniente de participación racional, muy opuesta al asambleismo oportunista y manipulado, para derivar de ella la práctica responsable y comprometida en la toma de decisiones que afecta las funciones primordiales de una institución de educación superior, que como comunidad debe ser, en última instancia, el paradigma de la vida institucional.

REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

1. Pratt F., H. (EL). "Diccionario de Sociología". Fondo de Cultura Económica, México, 1975.

2. Romero L., S. y Ferrer M., S. "El planeamiento de la educación". Cuadernos del Instituto Latinoamericano de Planificación Económica y Social. Serie II, Núm. 7, Santiago de Chile, 1968.

3. Coombs, P. H. y Ruscoe, G. C. "El planeamiento educacional". Ed. Paidós, Buenos Aires, 1970.

4. Gili, G. A. "Come si fa ricerca (guida alla ricerca sociale per non specialisti)", Mondadori, Milano, 1975.

5. Bunge, M. "La ciencia, su método y su filosofía". Ed. Siglo XX, Buenos Aires, 1971.

6. Hempel, C. G. "Philosophy of Natural Science". Foundation of Philosophy Series, Prentice-Hall, 1966. (Existe traducción al español de Alianza Editorial).

7. Bochenski, I. M. "Los métodos actuales del pensamiento". Ed. Rialp, 5a. ed., Madrid, 1968.

8. Bertalanffy, L. Von. "Teoría general de los sistemas". Fondo de Cultura Económica, México, 1976.

9. Sage, A. P. (Ed.). "Systems Engineering: Methodology and Aplications". IEEE Press, Nueva York, 1977.

10. Ackoff, R. L. "Toward a system of systems concepts". Management Science, Vol. 17, No. 11, July, 1971, EE.UU.

11. Korshunov, Y. M. "Fundamentos matemáticos de la Cibernética". Ed. Mir, Moscú.

12. Harré, R. "Introducción a la lógica de las ciencias". Ed. Labor, México, 1973.

13. Salazar R., J. "Teoría de gráficas". Ed. Limusa, México. (En impresión).

14. Berkeley, E.C. "Symbolic logic and intelligent machines". Reinhold, Nueva York, 1959.

15. Ernst, G. W. y Newell, A. "GPS: A case study in generality and problem solving". Academic Press, Nueva York, 1969.

16. Mayeda, W. "Graph Theory". Wiley, Nueva York, 1972.

17. Flegg, H. G. "Boolean Algebra and its application". Blackie, Londres, 1965.

18. Moles, A. (Ed.). "La comunicación". Ediciones Mensajero, Bilbao, 1975.

19. Blake, R. H. y Haroldsen, E. O. "Una taxonomía de conceptos de la comunicación". Ed. Nuevomar, México, 1975.

20. Eco, U. "Trattato di Semiotica Generale". Bompiani, Milano, 1975. (Traducción al español: Umberto Eco. "Tratado de Semiótica General". Ed. Nueva Imagen-Lumen, México, 1978.).

21. Alonso, M. "Ciencia del lenguaje y arte del estilo". Aguilar, Madrid, 1960.

22. Bloom, S. B. "Taxonomía de los objetivos de la educación". Ed. El Ateneo, Buenos Aires, 1977.

23. Seiffert, H. "Introducción a la teoría de la ciencia". Herder, Barcelona, 1977.

24. Suppes, P. "Introduction to Logic". D. Van Nostrand, New Jersey, 1967.

25. Kedrov, B. M. "Clasificación de las ciencias". Vols. 1 y 2, Ed. Progreso, Moscú, 1974.

26. Halmos, P. R. "Teoría intuitiva de los conjuntos". CECSA, México, 1965.

27. Abbagnano, N. "Diccionario de filosofía". Fondo de Cultura Económica, México, 1966.

28. Ferrater M., J. "Diccionario de filosofía". Tomo I, Ed. Sudamericana, Buenos Aires, 1975.

29. Blalock, H. M. "Theory construction". Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1969.

30. Wynn, R. F. y Holden, K. "An introduction to applied econometric analysis". Macmillan, Londres, 1974.

31. Copi, I. M. "Introduction to logic". 4a. ed., Macmillan, Nueva York, 1972. (Existe una traducción editada por EUDEBA, Buenos Aires).

32. Pinzón, A. "Conjuntos y estructuras". Harper, México, 1973.

33. Salazar R., J. "Ensayo esquemático sobre las relaciones lógicas en la taxonomía de Bloom". CADA (UAM), 1975.

34. Apostel, L., Berger, G., Briggs, A. y Michaud, G. "Interdis ciplinariedad (problemas de la enseñanza y la investigación en las universidades)". ANUIES, 1975.

35. Salazar R., J. "Introducción a la lógica deductiva y teoría de los conjuntos". Vols. 1 y 2. Col. Textos Programados, 2a. y 3a. ediciones, UNAM, México 1977 y 1978.

36. Craik, K. "The nature of explanation". Cambridge, Univ. Press, 1967.

37. Hospers, J. "An introduction to philosophical analysis". Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1967.

38. Hoel, P. G. "Introduction to mathematical statistics" 4a. ed., Wiley, Nueva York, 1971.

39. Black, M. "Critical Thinking". Englewood, Prentice-Hall, 1962.

40. Hesse, M. B. "Models and analogies in sciences". Notre Dame, Indiana, 1966.

41. Cannon, R. H. "Dynamics of physical systems". McGraw Hill, Nueva York, 1967.

42. Tustin, A. "The mechanism of economic systems". 2a. ed., Heinemann, Melbourne, 1957.

43. Cortés, F., Przeworski, A. and Sprague, J. "Systems analysis for Social Scientists". Wiley, Nueva York, 1971.

44. Olson, H. F. "Solutions of engineering problems by dynamical analogies". 2a. ed., Van Nostrand, Toronto, 1966.

45. Gabel, R. A. y Roberts, R. A. "Signals and linear systems". Wiley, Nueva York, 1973.

46. Mizrahi, A. y Sullivan, M. "Matemáticas finitas: aplicaciones en Ciencias Sociales y Administración". Limusa, México, 1978.

47. Nilsson, N. J. "Problem-Solving. Methods in artificial intelligence". McGraw-Hill, Nueva York, 1971.

48. Pospielov, D.A. "Teoría de juegos y autómatas". Ed. Siglo XXI, México, 1969.

49. Feigenbaum, E. A. and Feldman, J. "Computers and thought". McGraw Hill, Nueva York, 1963.

50. Warfield, J. N. "Arreglo de elementos de una jerarquía en forma gráfica". Adaptación realizada por J. Salazar R. y Eleuterio Zamanillo, de un artículo del IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Vol. SMC-3, No. 2, March, 1973.

51. Kaplan, W. "Ordinary differential equations". Addison Wesley, Reading, 1962.

52. Johnston, J. "Econometric models". 2a. ed., McGraw-Hill, Tokio, 1972.

53. Ackoff, R. "Scientific Method". Nueva York, Wiley, 1962.

54. Stinchombe, A. "La construcción de teorías sociales". Buenos Aires, Nueva Visión, 1970.

55. Allen, L. E. "Toward more clarity in business communications by modern logical methods". Yale University, 1957.

56. Borisov, E. F., Zhamin, V. A. y Makárova, M. F. "Diccionario de economía política". Ediciones Pueblos Unidos, Montevideo, 1966.

57. Wright, G. H. von. "La lógica de la preferencia" (Tr. de R. J. Vernengo), EUDEBA, Buenos Aires, 1967.

58. Rescher, N. (Ed.). "The logic of decision and action". Univ. of Pittsburgh Press, 1966.

59. Searles, H. L. "Logic and Scientific method". 3a. ed., Ronald Press, Nueva York, 1968.

60. Copi, I. M. and Gould, J. A. "Contemporary readings in logical theory". McMillan, Nueva York, 1963.

61. Toulmin, S. "The uses of argument". Cambridge Univ. Press, -- 1974.

62. Hegenberg, L. "Introducción a la filosofía de la ciencia". Herder, Barcelona, 1969.

63. Mize, J. H., White, Ch. R. and Brooks, G. H. "Planificación y control de operaciones". Prentice-Hall, Madrid, 1973.

64. Turner, J. C. "Matemática moderna aplicada". Alianza Editorial, Madrid, 1974.

65. Deo, N. "Graph Theory, with applications to engineering and computer science". Englewood Cliffs, Prentice-Hall, 1974.

66. DiStefano, J.J., ~~Stubberud~~, A.R. and Williams, I.J. "Feedback and control systems". Schaum's outline series, Nueva York, McGraw-Hill, 1967.

67. Buckley, W. "La sociología y la teoría moderna de los sistemas". Buenos Aires, Amorrortu, 1970.

68. McMillan, C. y González, R.F. "Análisis de sistemas". México, Trillas, 1977.

69. Lange, O. "Introducción a la economía cibernética". México, Siglo XXI, 1969.

70. Goldberg, S. "Difference equations". Nueva York, Wiley, 1965.

71. Martinet, A. "La lingüística". Barcelona, Ed. Anagrama, 1975.

72. Meredith, D.D., Wong, K.W., Woodhead, R.W. and Wortman, R.H. "Design and planning of engineering systems". Englewood Cliffs Prentice-Hall, 1973.

73. Cruz V., A. "El sistema de planeación y el diagnóstico de la educación superior". México, ANUIES, 1978.

74. Meyer M., S. "Good frames and bad". 2a. ed., Nueva York, - - Wiley, 1969.

75. Taber, J.I., Glaser, R. y Schaefer, H.H. "Aprendizaje e instrucción programada". México, Ed. Trillas, 1974.

76. Jacobs, P.I., Maier, M.H. and Stolorow, L.M. "A guide to evaluating self-instructional programs". Nueva York, Holt, Rinehart and Winston, 1966.

77. Kneller, G.F. "Logic and language of education". Nueva York, Wiley, 1966.

78. Klein, G.A. "General description of human problem solving". AFHRL-TR-76-44. National Technical Information Service, Springfield, 1976.

79. Paulus, W.K. "Methodological aspects of problem formulation". IEEE Transactions on systems science and cybernetics, Vol. SSC-2 No. 1, 1966.

80. Greniewski, H. "El concepto de información y la planeación", del libro "El concepto de información en la ciencia contemporánea". 4a. ed., Siglo XXI, México, 1977.

81. Dreyfus, H.L. "Crítica de la razón artificial", del libro "Inteligencia humana e inteligencia artificial", compilado por Crosson, F.J., México, F.C.E., 1975.

82. Polya, G. "Cómo plantear y resolver problemas". México, Trillas, 1972.

83. Rubinstein, M.F. "Patterns of problem solving". Englewood Cliffs, Prentice-Hall, 1975.

84. Gerez G., V. y Czistrón de Gerez, V. "Análisis de sistemas e investigación de operaciones". México, Representaciones y Servicios de Ingeniería, S.A., 1978.

85. Geigch, J.P. van. "Applied general systems theory". 2a. ed., Nueva York, Harper and Row, 1978.

A N E X O S

- CUESTIONARIO PARA LA FORMULACION (ENUNCIADO) DE UN PLAN X: (PROYECTO DE INVESTIGACION, PROGRAMA ACADEMICO, ETC.). (17 páginas).

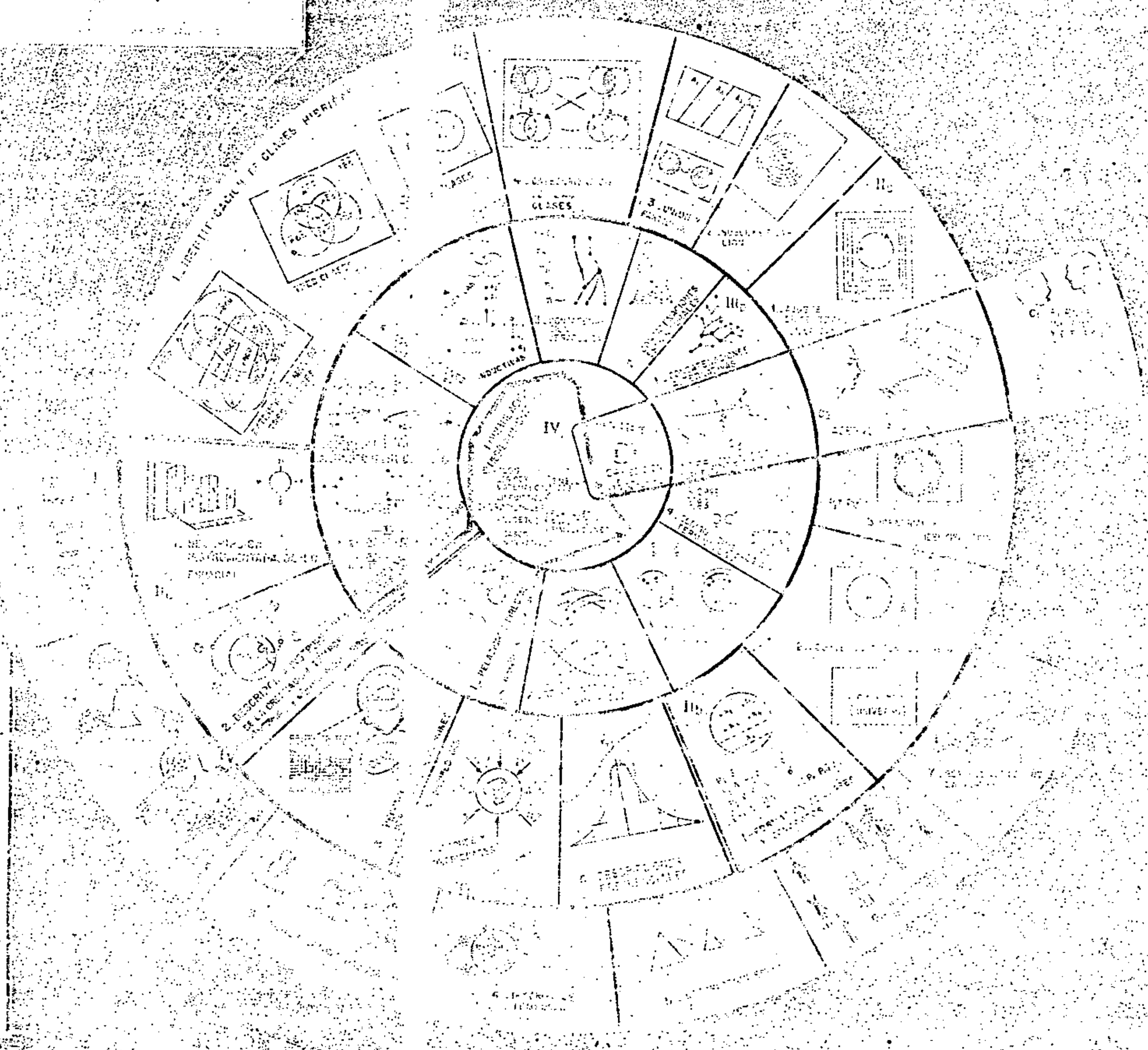
- FORMULACION/ENUNCIADO DE UN PLAN X. (ANEXO 1)

- FORMULACION/ENUNCIADO DE UN PLAN X. (ANEXO 2)

- FORMULACION/ENUNCIADO DE UN PLAN X/SECUENCIAL. (ANEXO 3)

- RESOLUCION DE PROBLEMAS. (ANEXO 4)

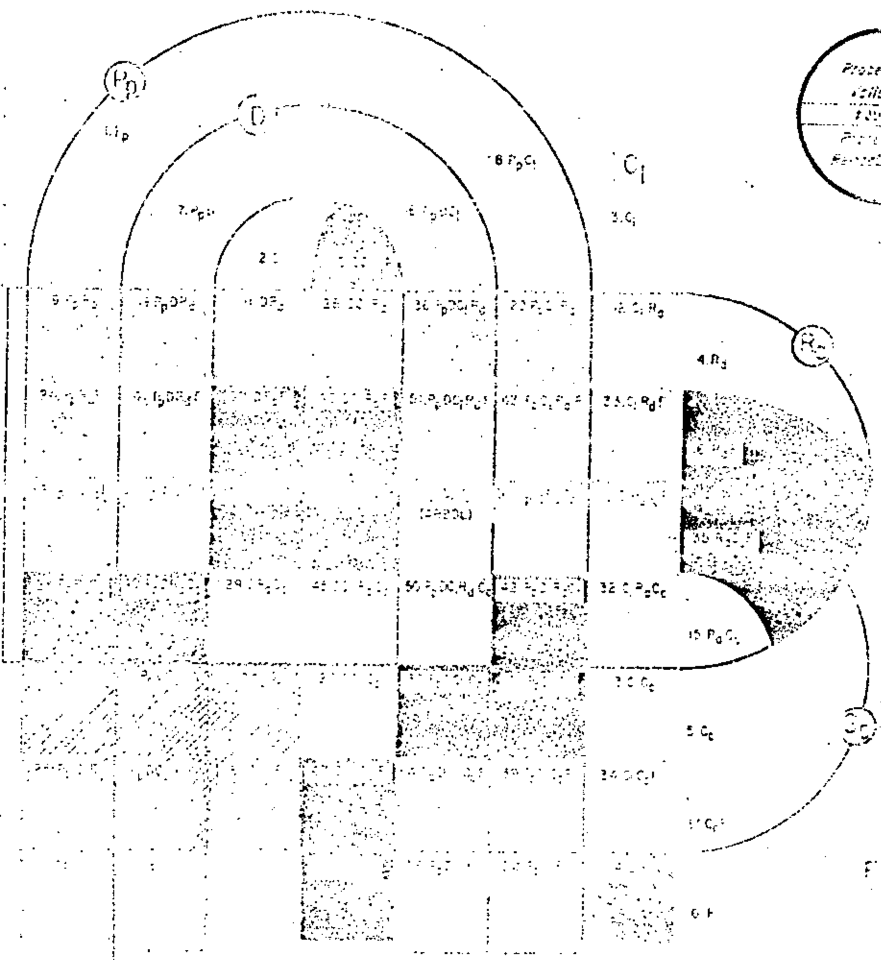
- RESOLUCION DE PROBLEMAS/SECUENCIAL. (ANEXO 5)

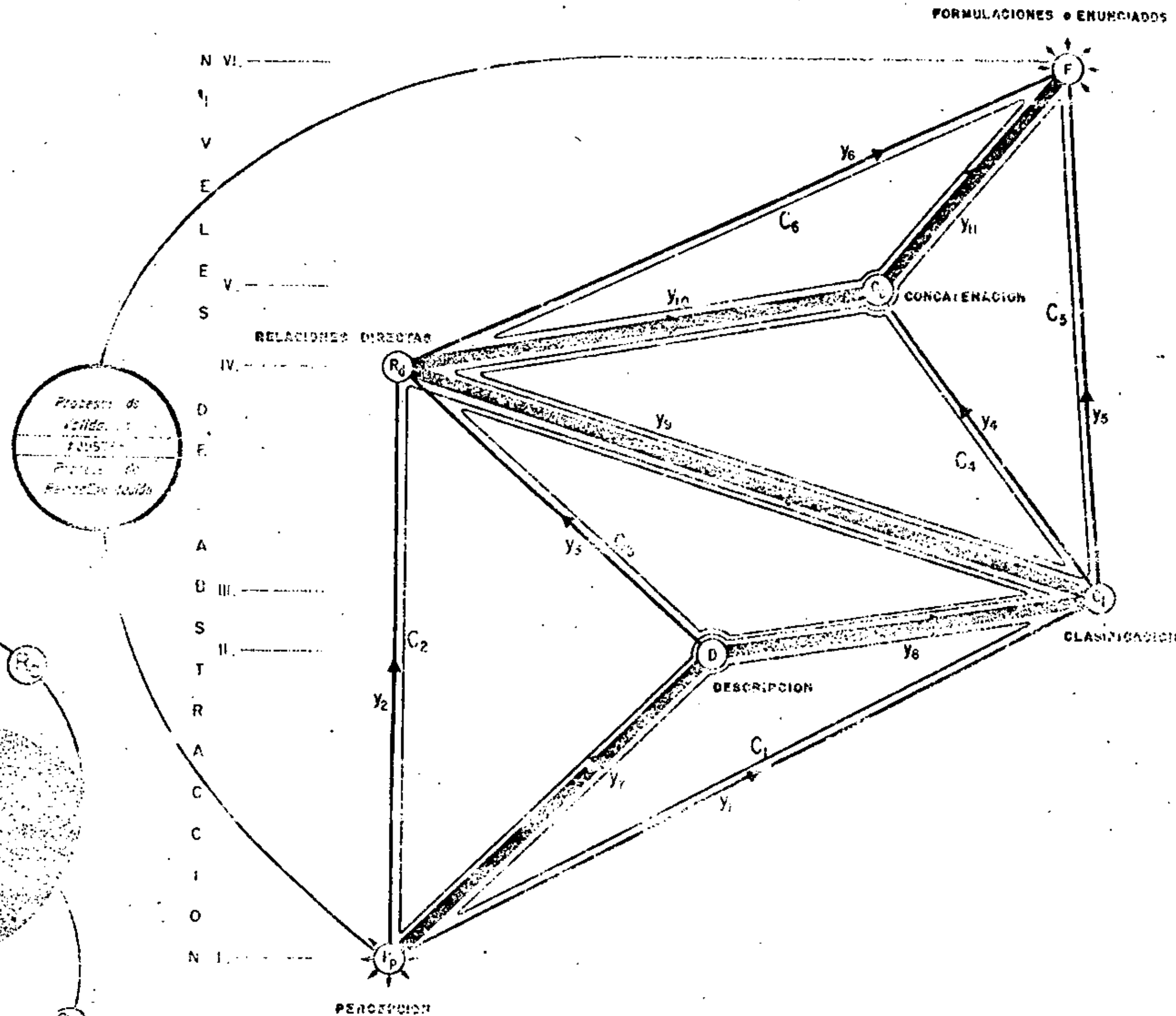


IV
CLASES

FORMULACION/ENUNCIADO DE UN PLAN X

C L A S E S





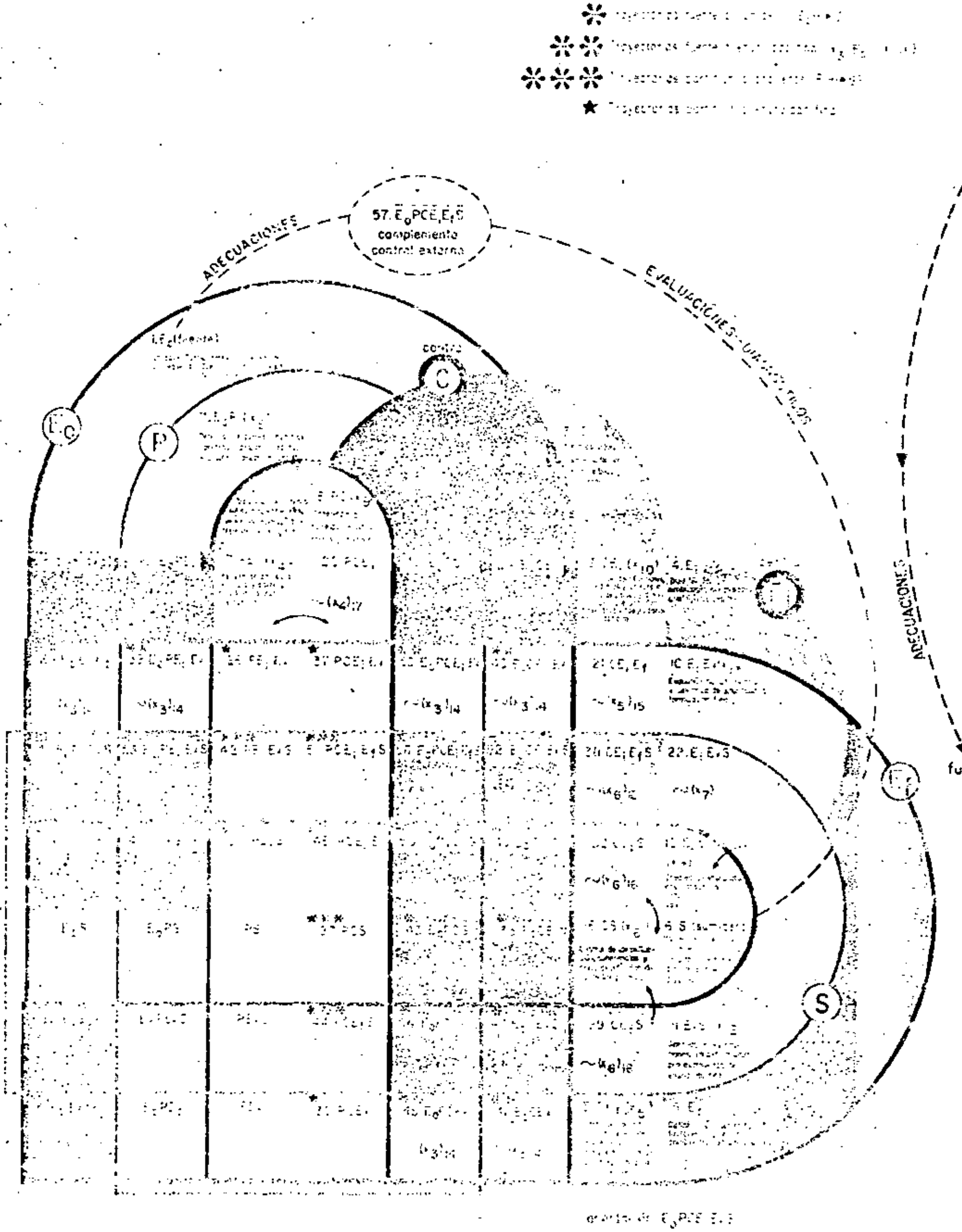
G R A F I C A

FORMULACION / ENUNCIADO DE UN PLAN X (ANEXO 2)

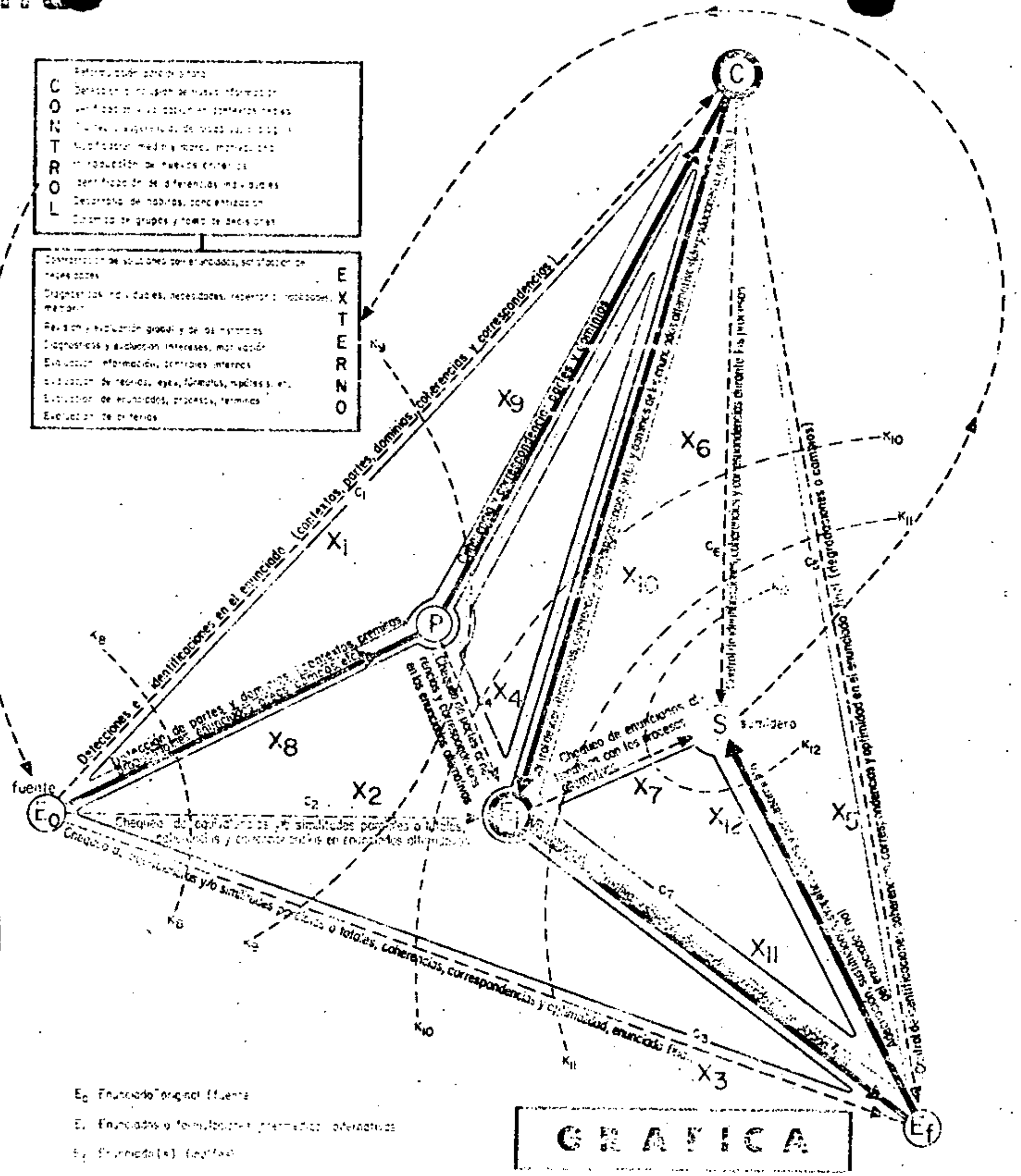
ANDES 1978

Dr. JAVIER SALAZAR RESINES

RESOLUCION DE PROBLEMAS



CLASES

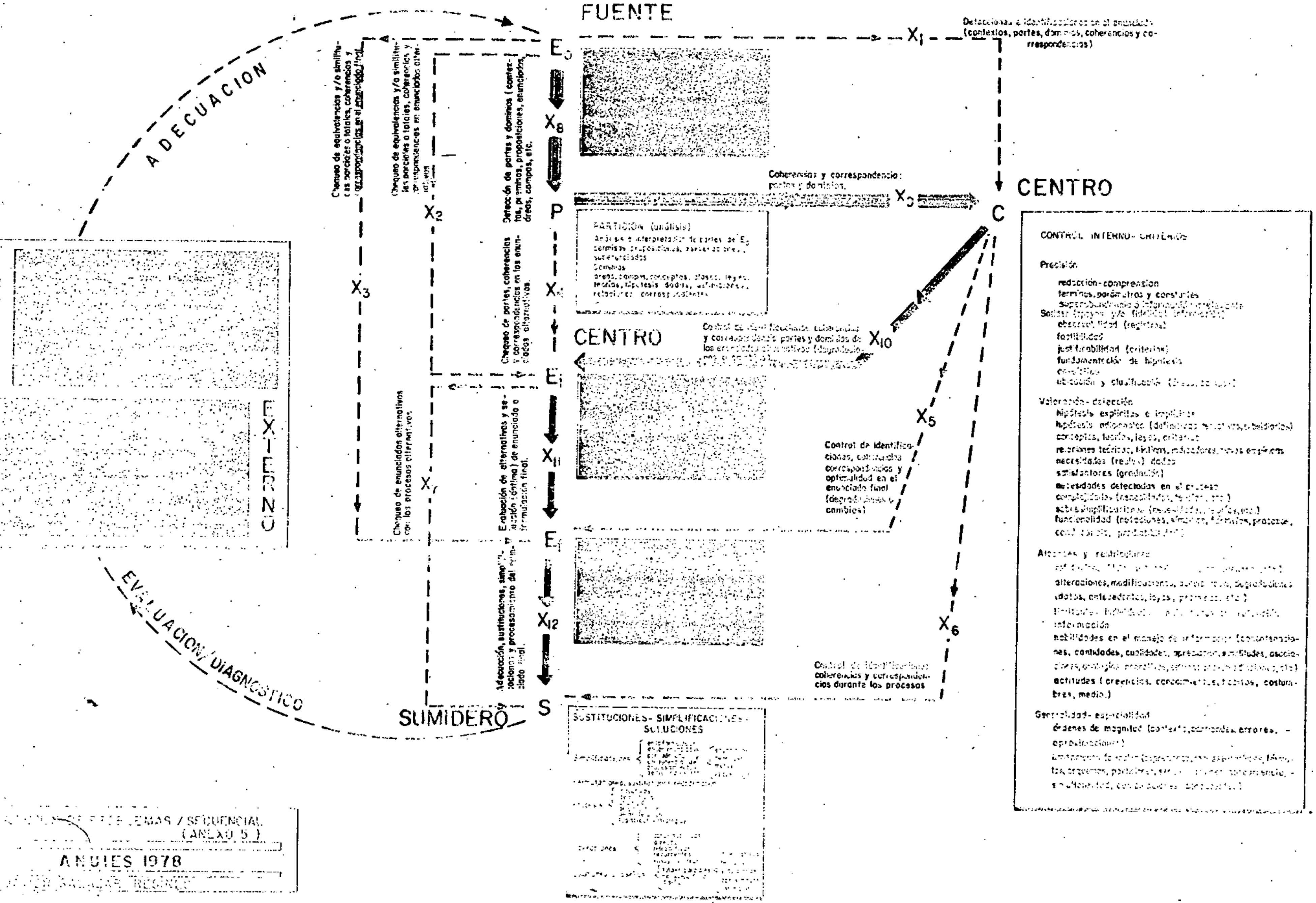


GRAFICA

RESOLUCION DE PROBLEMAS (ANEXO 4)

ANUIES 1978

Dr. JAVIER SALAZAR RESINES



PROBLEMAS / SECUENCIAL
(ANEXO 5)
ANUIES 1978

CUESTIONARIO PARA LA FORMULACION (ENUNCIADO) DE UN PLAN X
(PROYECTO DE INVESTIGACION, PROGRAMA ACADEMICO, ETC.)

A. DIAGNOSTICOS: SITUACIONES, CIRCUNSTANCIAS Y JUSTIFICACIONES PREVIAS.

A.1 ¿Qué antecedentes...

- indicativos (indicadores)
- definitorios previos
- históricos (antecedentes y evolución)
- legales, políticos
- sociales, culturales, tradiciones
- económicos, demográficos
- operativos

se asocian al plan X?

A.2 ¿Qué tipo de

- demandas
- necesidades
- carencias
- deterioros
- conflictos
- incongruencias

habrá de

- enfrentar
- afrontar
- resolver
- tratar
- estudiar
- abordar
- cuestionar ?

A.3 ¿A qué

- fines
- objetivos
- propósitos
- metas
- previsiones o pronósticos
- satisfacciones.

obedece, y qué estimaciones previas se pueden hacer?

A.4 ¿Qué grado de

- urgencia
- prioridad
- anticipación

se estima para su realización?

A.5 ¿Qué recursos o medios

- humanos
  - de organización académica y administrativa
  - de planificación
  - académicos (investigación y/o docencia)
- materiales
  - instalaciones
  - espacios
  - equipos
  - documentales
  - de financiamiento
  - subsidio

requiere ?

A.6 ¿Qué

- restricciones
- viabilidad

pueden preverse para el plan?

B. DIAGNOSTICO: PERFILES PREVIOS INSTITUCIONALES, INDIVIDUALES (PLANIFICADORES, ADMINISTRADORES, PROFESORES, AYUDANTES, ESTUDIANTES, ETC.).

Las instituciones, a través de los individuos que concurren en el plan X.

B.1 ¿Qué grado de

- vivencia, información, indicadores
- conocimientos
- conciencia
- objetividad
- especialidad

(perfil cognoscitivo) previo tienen en relación con el plan X?

B.2 ¿Qué antecedentes en cuanto a

- planes
- experiencias
- realizaciones
- operaciones
- casos
- prácticas
- políticas

(perfil de habilidades) previos tienen respecto al plan?

6.3	¿Qué grado de	. interés (de servicio, aprendizaje, aplicación, etc.) . deseo, motivación, gusto . necesidad . preferencia . acción o esfuerzo conjunto	(perfil afectivo) prevén respecto al plan X?

I. PERCEPCION EXTERNA Y DESCRIPCION

1	¿Qué tipo de	. objetos, cosas, entes, individuos, casos . realidades, hechos, testimonios, eventos, sucesos . ideas, elementos . obras, referentes	habrán de considerarse en el plan X?
2.1	¿Qué descripción se puede hacer de los	. aspectos . apariencias . formas . contornos	externos de los objetos* que intervienen en el plan X?
2.2	¿A qué tipo de	. sugerencia . reconocimiento . identificación . asociación . concepción . creencia . evocación	pueden vincularse los objetos del plan X?

3. ¿Qué nombres o denominaciones suelen asociárseles a los objetos del plan X,

---

* En adelante, cuando se hable de los objetos, entiéndase: cosas, asuntos, entes, individuos, hechos, ideas, elementos, etc.

4. De una manera global, los eventos que conciernen al plan X, ¿se plantean

. estáticamente (estado de cosas)
. dinámicamente
. antes que...
. después de...
. simultáneamente con... ?

5. De una manera global, los objetos del plan X ¿son de tamaño

. reducido
. regular
. extenso
. intermedio
. menos extensos que...
. más extensos que...
. comparables con... ?

6. De una manera global, los objetos observables del plan X, ¿están

. cerca de...
. lejos de...
. alrededor de...
. junto a...
. en el sitio...
. en la región, zona, lugar...
. adelante de...
. más allá de...
. antes de... ?

7. Atendiendo a aspectos externos, ¿cómo se pueden [illegible]

. representar
. dibujar, esquematizar
. bosquejar, esbozar
. ilustrar, apuntar

los objetos del plan X?

II$_a$ DESCRIPCION DE PROPIEDADES

1. ¿Qué factores espaciales

. magnitud
. distancia
. espacio
. lapsos (espacio-tiempo)
. intervalos
. ubicación (centros)
. distribución geográfica
. region[illegible] extensión

deben considerarse en el plan X?

2.1	Los diversos objetos, ¿en qué	. momento . tiempo . instante . fecha	deben ser considerados?
2.2	Cada uno de los eventos del plan X, ¿durante qué	. época . lapso . intervalo . duración . transcurso . periodo	deben observarse o pueden ocurrir?
3.	¿Qué tipo de situaciones	. integrales . globales . panorámicas . esquemáticas, configurativas . totalizantes . significativas elementales	se requerirá que afronten los participantes del plan X?
4.1	¿Qué tipos de	. observación . escudriñamiento . reconocimiento . asociación . cuestionamiento	implican los objetos del plan X?
4.2	¿Qué tipo de	. propiedades . características . modalidades . atributos, predicados . particularidades . aspectos diversos . enfoques . puntos de vista . detalles . peculiaridades	definen o se asocian a objetos aislados del plan X? (1).

(1) En este punto se pretende cuestionar la caracterización de aspectos de cada objeto que lo requiera, del plan X. Más adelante los objetos se agruparán en clases (ver inciso 1 de II_b).

4.3 ¿Qué opciones de
. expresión
. exposición
. persuasión
. declaración
. interpretación
. discernimiento
. discusión
. debate
tienen los objetos del plan X?

4.4 ¿Qué instrumentos o medios se utilizarán o requerirán para los
. escudriñamientos
. observaciones
. enfoques
. mediciones
. estimaciones
. detecciones ?

5.1 Las cuestiones esenciales del plan X, ¿con qué
. frecuencia
. probabilidad
. regularidad
. uniformidad
. normalidad
ocurren en la
. realidad
. práctica
. aplicación

5.2 Los aspectos esenciales ¿qué grado de
. aceptabilidad
. admisibilidad
. tolerancia
. plausibilidad
. incertidumbre
. confiabilidad
. rechazo
. refutación
tienen ?

II$_b$ FORMACION DE CLASES Y CONTEXTOS

1. Los objetos del plan X, ¿en qué
. campos
. áreas conceptuales definidas
. clases
. temáticas
. supuestos (conjuntos)
. conjunto de propiedades
. conjeturas (conjunto)
se pueden ubicar?

2.1 ¿Cuáles son los

- contextos
- medios (conceptuales), ambiente
- extensiones de: áreas, campos,...
- contenidos base
- corrientes
- tendencias.

que comprenden a las clase del plan X?

2.2 Dentro de los contextos, medios, etc. bien definidos para el plan X, ¿qué objetos trascendentes, fundamentales resultan ser

- complementarios
- no simultáneos
- suplementarios
- subsidiarios, laterales
- adyacentes, dicotómicos

con los objetos centrales?

3. ¿Qué objetos dentro del plan X, o del plan X con los de otro

- programa
- plan
- actividad
- campo
- área
- proyecto

ya existen, son:

- iguales
- idénticos
- equivalente
- isomórficos
- sustituibles
- reconocibles ?

II$_c$ AJUSTE DE CONTEXTOS Y DE CLASES. PARTICION Y CATEGORIAS

1. A través de los objetos que conforman el plan X, ¿cuál es el contexto, medio, universo, etc.

- más preciso
- mínimo
- idóneo
- más funcional, operativo
- básico
- esencial
- necesario, indispensable
- inherente, peculiar, propio, privativo
- más sucinto
- más relevante
- óptimo

para mejor ubicar las clases definidas?

** Donde se indique las clases, se entenderá alternativamente, disciplinas, áreas, campos, partes, etc., o las subclases, subáreas, etc.

2. Los objetos del plan X, ¿en qué
. subáreas
. subclases
. subcampos
. subdivisiones
. subpartes, subtemas
. subdisciplinas

sucesivas se pueden mejor
. ubicar
. clasificar
. describir
. caracterizar
. especificar
. enunciar
. definir ?

3.1 ¿Qué clases alternativas pueden comprender los diversos objetos del plan X:
. la clase A, o la B, o..., (unas u otras)
. la clase A y la B y ... etc., (unas y otras)
. ni A, ni B, ..., (ni unas ni otras) ?

3.2 ¿Qué clases del plan X
. son ajenas
. no tienen algo en común
. son independientes
. son extrañas entre si
. son diferentes ?

3.3 ¿Qué tipos de clasificación, dentro de un contexto dado, se logran por
. partición
. relaciones de equivalencia o identidad entre objetos
. algún principio genérico de abstracción
- subdivisión conceptual
- formación de clases ajenas entre sí que constituyen el contexto ?

4.1 Comparando entre sí las clases del plan X, o con las de algún otro plan, actividad, etc., ¿qué grado de
. generalidad
. extensión
. alcance
. especificidad
. particularidad
. individualidad

tienen unas respecto a las otras?

4.2 Comparando entre sí las clases del plan X, con las de algún otro plan, actividad, etc., ¿qué aspectos las configuran como
. contrarias, opuestas
. subordinadas, subalternas, derivables
. contradictorias
. redundantes, repetitivas ?

II_d CLASES HIBRIDAS (CONJUNCION Y COMPLEMENTARIEDAD INTERDISCIPLINARIA)

1.1 ¿Qué tipo de clases (o sub) se forman o constituyen	. combinando . superponiendo . estructurando . vinculando . descubriendo	los aspectos comunes de las disciplinas, áreas, etc., del plan X?
1.2 En la conjunción de clases, ¿qué aspectos de una clase son	. complementarios . propios . esenciales . independientes de la conjunción, etc.	respecto a las demás clases?

III_a RELACIONES DIRECTAS (EMPIRICAS Y SIMBOLOGIA)

1.1 En un orden general, ¿qué tipo de relaciones	. causales . conceptuales . empíricas . teóricas, prácticas . cualitativas . de orden . de dependencia . de interacción	se prevén entre los objetos implícitos en el plan X?
1.2 En un orden general, ¿qué tipo de relaciones de	. pertenencia . dependencia . supeditación . predominancia . oposición	habrá entre los objetos y las clases del plan X?

1.3 Genéricamente, ¿qué relaciones habrá entre las clases del plan X, o con respecto a las de algún otro plan, actividad, etc.?

2. ¿Qué tipo de relaciones existirán entre los objetos de cada clase identificable y distinguible con las de otras clases del plan X, o respecto a las clases de algún otro plan, actividad, etc.? Por ejemplo, relaciones

- de dependencia
- significativas empíricas
- de procesos, o de funcionamiento
- legales o normativas (leyes y reglas)
- causales
- de conducta o comportamiento
- regulares, estables, fluctuantes, etc.

3. ¿Qué uso se hará del <u>análisis de casos y analogías</u> en el plan X?

- a través de leyes de similitud
- a través de modelos experimentales
- a través de modelos de simulación (modelos descriptivos vs modelos explicativos)
- a través de la teoría de los juegos
- a través de modelos de interpretación semánticos
- a través de modelos estadísticos o probabilísticos
- a través de paradigmas.

4. ¿Qué tipos de

- notación (literales, índices, siglas, etc.)
- terminología
- símbolos (o expresiones simbólicas)
- códigos
- connotaciones, denotaciones, significaciones, etc.
- notación iconográfica

serán usuales (y unificados) en el plan X?

III$_b$ CONCATENACIONES: ESTRUCTURACION, LINEAS DE RAZONAMIENTO, SIMULACION Y OPERACION

1. En cuanto a los procesos del plan X, ¿qué
   - relaciones ramificadas, estructuras vertebrales
   - opciones (abiertas), diversificaciones
   - posibilidades, caminos
   - trayectorias, selecciones, etc.
   - decisiones
   - asignaciones, distribuciones, etc.
   - estrategias, búsquedas, juegos, etc.

   alternativas podrán asumirse?

2. En cuanto a la estructuración del plan X

2.1 ¿Cuáles son los
   - estados (conocimientos, habilidades, etc.)
   - unidades (de conocimiento)
   - temas, asignaturas, materias, etc.
   - elementos (de conocimiento, de acción, etc.)

   básicos que entran en juego en la estructuración del plan X?

2.2 ¿Qué relaciones entre estados, unidades, etc., son
   - simétricas: interactuantes, unidireccionales, etc.
   - reflexivas: autorrelacionadas, autodependientes, etc.
   - transitivas: por transferencia, inferencia a través de estados intermediarios, etc.

2.3 ¿Qué niveles relacionales (ramas) o conceptuales (vértices) se prevén en la estructura del plan X?
   - ideal vs real
   - teórico vs práctico
   - explicativo vs descriptivo
   - analítico vs sintético
   - cualitativo vs cuantitativo

- definido vs vago (impreciso)
- determinado vs probable
- todo vs parte
- interno vs externo
- global vs local, regional
- informativo vs formativo
- causa vs consecuencia
- calidad vs cantidad, etc.

2.4 Los niveles relacionales del plan X, ¿qué grado de

- uniformidad, regularidad, coordinación
- congruencia, consistencia
- factibilidad, aceptabilidad
- evidencia

tienen dentro de la estructura?

2.5 ¿Cuáles relaciones, que formen una estructura abierta que conecte todos los objetos son

- fundamentales, básicas
- las más importantes
- las más trascendentes
- centrales
- las de partida, iniciales, dadas, etc.
- prioritarias
- primordiales ?

2.6 Partiendo de los estados y relaciones fundamentales, ¿cuáles otras relaciones se podrán

- inferir { inducir / deducir
- suponer, intuir
- construir, conducir
- sugerir ?

2.7 Partiendo de todos los estados y relaciones de la estructura del plan X, ¿qué tipo de

- síntesis
- análisis (interacción)
- problemas, proyectos
- estados, unidades, ... (nuevos)
- trayectorias, caminos, etc.

se pueden

- abordar
- integrar
- inferir
- atacar
- evaluar
- diagnosticar

3. ¿Qué orden jerárquico tienen los objetos, clases, acciones, etc., que conforman al plan X?

- escala de valores y calidad
- escala de importancia
- escala de eficacia
- escala de preferencias
- escala de utilidades
- escala de satisfacciones
- escala de conveniencias

4. ¿De qué manera se lograrán las

- formulaciones y pruebas de hipótesis
- líneas de razonamiento
- inferencias deductivas
- pruebas
- demostraciones
- justificaciones
- argumentaciones
- reducciones
- apoyos, refutaciones, rechazos
- cualificaciones
- legalizaciones

de los conceptos sintéticos, analíticos, de operación, etc., del plan X?

5.1 ¿Qué tipo de

- acciones
- decisiones
- factores
- eventos
- teorías, leyes, conceptos, ...

van a
- concurrir
- influir
- confluir
- converger
- coincidir
- coordinarse

en los diversos aspectos del plan X?

5.2 ¿Qué ordenamiento secuencial se les puede asignar a los objetos del plan X?

- qué orden temporal y/o espacial es conveniente
- cuándo será o fue esto ("inmediato", "corto plazo", "mediano plazo", "largo plazo")
- qué le sigue
- qué es antes
- qué va después
- por qué es esto ahora
- a dónde llega o va
- de dónde proviene o viene
- qué es paralelo o simultáneo, concomitante, sincrónico

6. ¿Qué tipo de

. mecanismos
. operaciones
. funciones
. transformaciones
. transferencias
. retroalimentaciones
. controles
. adaptaciones
. variaciones
. simulaciones

caracterizarán el desarrollo del plan X?

IV. FORMULACIONES/ENUNCIADOS

IV_a ¿Qué tipo de

. formulaciones explícitas
. planteamientos
. planes y programas
. presupuestos
. enunciados
. descripciones
. explicaciones
. modelaciones (estructuras)
. aproximaciones, enfoques,
. políticas
. hechos
. proyectos

se proponen y justifican teórica y operacionalmente, para el plan X?

IV_b ¿Qué tipo de

. programas
. procesos cronológicos
. procedimientos
. estrategias
. logística
. métodos
. pasos
. caminos aproximados

serán requeridos en el plan X para la obtención de
. respuestas
. previsiones fundamentales
. enunciados procesados
. resultados
. soluciones - parciales
  - totales
  - tentativas
  - subsidiarias
. conductas terminales ?

IV_c ¿Qué características, de ser posible cuantificadas, tendrán los

. resultados
. metas
. propósitos

inherentes al plan X:
. único, múltiple
. aproximado, exacto
. útil, conveniente
. básico, trascendente
. visible, observable, verificable
. central, particular, global
. recomendable ?

PROCESO (TRAYECTORIAS) DE FORMULACION/AJUSTE DEL PLAN X

T_t: ¿De qué manera se llevarán a cabo los procesos de

. abstracción
. formulación
. enunciamiento
. sistematización

del plan X (trayectorias de teorización que lleven de los niveles más específicos a los más abstractos ($I-II_{a-b}-III_{a-b}-IV$)) ?

T_v: ¿Cómo se implantarán criterios o pruebas de

. validación
. verificación
. prueba
. realización
. evaluación
. confirmación
. credibilidad
. delimitación
. contrastación
. coherencia

(trayectorias de validación entre los niveles más específicos $IV_{abc}-III_{ab}-II_{ab}-I$) ?

T_r: ¿Qué procesos de

. revisión
. ajuste
. conciliación
. retroalimentación

se implantarán en el plan X, e[n] cuanto a
. supuestos, hipótesis, cuerpo teórico, criterios
. observación, registro
. clasificación
. investigaciones futuras, laten[illegible]
. alcances, diagnósticos
. leyes, principios
. sistematización, ordenamiento
. concurrencia de factores, participación, etc. ?

C MEDIOS Y FORMAS DE COMUNICACION

C_1 Fuentes de información y difusión

C_{11} ¿Qué tipo de

. fuentes
. información
. comunicación
. datos
. indicadores
. inventarios

proporcionará y/o requerirá el plan X?

C_{12} ¿A través de que

. medios
. canales
. sistemas
. aparatos
. vivencias

se realizará la comunicación de la información?

C_{13} ¿Qué dificultades de

. información
. comunicación

se prevén para el plan X, en cuanto a

. emisión
. recepción
. transmisión
. información escasa
. información confusa
. información o lenguajes redundantes
. algún tipo de "ruido" ?

C_{14} ¿Cómo se

. difundirá
. dará a conocer
. circulará
. anunciará
. propagará
. extenderá
. publicará

lo concerniente a

. todo
. aspectos d
. resultados d

el plan X ?

C_2 ACERVOS

C_{21} ¿Qué

. lugares
. sitios
. sistemas
. personas

disponibles o accesibles se preveen para

. consultar
. encontrar
. informar
. documentar
. constatar
. copiar
. oir, ver

asuntos del plan X ?

C_{22} ¿Qué

. lugares
. sitios
. sistemas
. personas

estarán disponibles para

. clasificar
. catalogar
. archivar
. registrar
. guardar
. procesar

la información concerniente al plan X ?

C_3 ¿Con qué

. personas
. instituciones
. centros
. sistemas

se podrá

. dialogar
. interactuar
. conversar
. comentar
. aclarar
. discutir

la información

. codificada
. procesada o en proceso
. analizada, sintetizada
. evaluada, verificada, etc.

C_4 ¿Cómo se prevé

. medir
. detectar
. evaluar

el grado de

. información
. comunicación
. diálogo

concerniente al plan X ?

PROCESO CRITICO

. Realizar una evaluación sumaria y crítica del plan X.

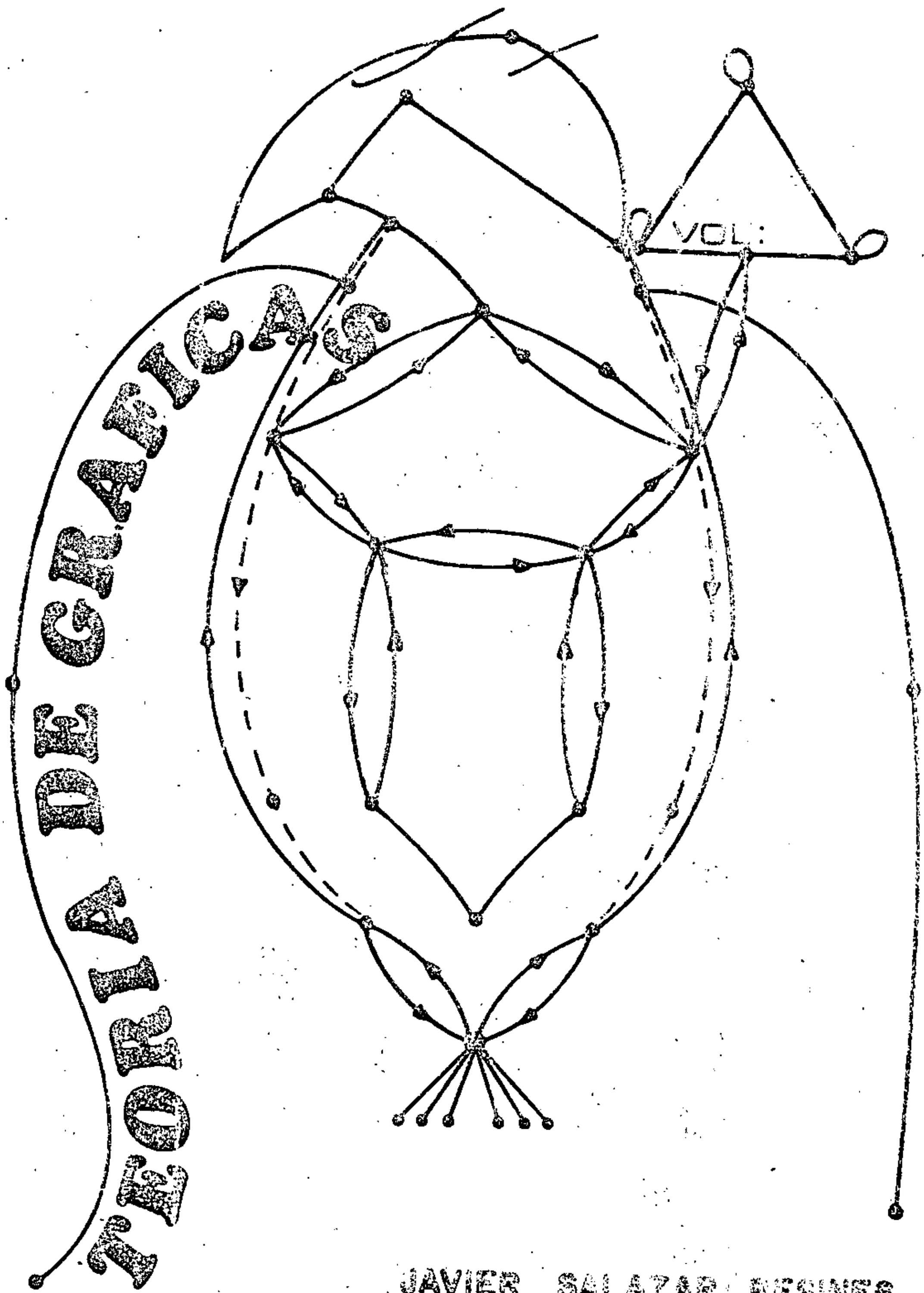
centro de educación continua
división de estudios superiores
facultad de ingeniería, unam

METODO CIENTIFICO: ESQUEMAS PARA SU PRACTICA

TEORIAS DE GRAFICAS

DR. JAVIER SALAZAR RESINES

MARZO, 1979.



JAVIER SALAZAR RESINES

C. A. D. A. /76.

T E O R I A

D E

G R A F I C A S

I N D I C E .

Teoría de Gráficas aplicada: enfoque cualitativo.

BIBLIOGRAFIA

Alsetine, J. A. " Les Méthodes de Transformation dans l'analyse des systéms linéaires ". Ed. Dunod. 1964.

Avondo-Bodino, G. " Economic Applications of the Theory of Graphs ". Breach; Science Publishers, Inc. 1962.

Bellman, R., K.L. Cooke and J. A. Lockett. " Algoritms, Graphs and Computers ". Academic Press. 1970.

Berge, C. " The Theory of Graphs and Its Applications" Wiley. 1962.

Busacker, R.G. and T. L. Saaty. " Finite Graphs and Networks: An Introduction with Applications ". McGraw-Hill 1965.

Chen, W. " Applied Graph Theory ". North - Holland. 1971.

Chen, W.K. " On Vector Spaces Associated With a Graph ". SIAM. J. Appl. Math., Vol. 20, No. 3, May 1971, 526-529.

Cohen, J.E. " Information Theory and Music ". Harvard Univ.

Cortes, F. ; A. Przeworski y J. Sprague. " Systems Analysis for Social Scientists ". Wiley. 1974.

Deo, N. " An Extensive English Language Bibliography on Graph Theory and Its Applications ". NASA. Technical Report 32-1413, October 1969; Supplement 1, April 1971.

Deo, N. " Graph Theory: With Applications to Engineering and Computer Science ". Prentice - Hall. 1974.

Desoer, Ch. A. and E. S. Kuh.	" Basic Circuit Theory ". McGraw-Hill. 1969.
Flament, C.	" Teoría de Grafos y Estructuras de Grupo" Estructura y Función. Ed. Tecnos. 1972.
Frank, H. and I. T. Frisch.	" Communications, Transmission, and Transportation Networks." Addison - Wesley. 1971.
Gordon, Ch. K.	" Introduction to Mathematical Structures". Dickenson - Publishing, Co. 1967.
Harary, F.	" Graph Theory ". Addison-Wesley. 1969.
Harary, F. (ed.)	" Graph Theory and Theoretical Physics ". Academic Press. 1967.
Harary, F., R.Z. - Norman, and D. Cart wright.	" Structural Models : An Introduction to the Theory of Direct Graphs ". Wiley 1965.
Harris, B. (ed).	" Graph Theory and Its Applications ". Academic Press. 1970.
Harris, Z.	" Mathematical Structure of Language ". - Wiley. 1968.
Kleinmuntz, B. (ed).	" Formal Representation of Human Judgement ". Wiley. 1968.
Klir, G.J. (ed).	" Approach to General Systems Theory ". Van Nostrand. Reinhold. 1969.
Koeing, H. E., Y. Tokad, and H.K. Kesavan.	" Analysis of Discrete Physical Systems ". McGraw-Hill. 1967.
Lorens, C.S.	" Flowgraphs : For the Modeling and Analysis of Linear Systems". McGraw-Hill 1964.
Luce, Bushand Galanter (ed).	" Handbook of Mathematical Psychology ". Wiley. 1964.

Marshall, C.W. " Applied Graph Theory ". Wiley. 1971.

Morgensten, O. " Economic Activity Analysis ". Wiley 1954.

Nilssen, N. J. " Problem-Solving Methods in Artificial Intelligence ". McGraw-Hill. 1971.

Ore, O. " Graphs and Their Uses ". Random. 1963.

Preparata, F.P. y Raymond, T.Y. " Introduction to Discrete Structures (for Computer Science and Engineering)". Addison-Wesley. 1973.

Steiglitz, K. " An Introduction to Discrete Systems". Wiley. 1974.

Truxal, J.G. " Introductory System Engineering ". McGraw-Hill. 1972.

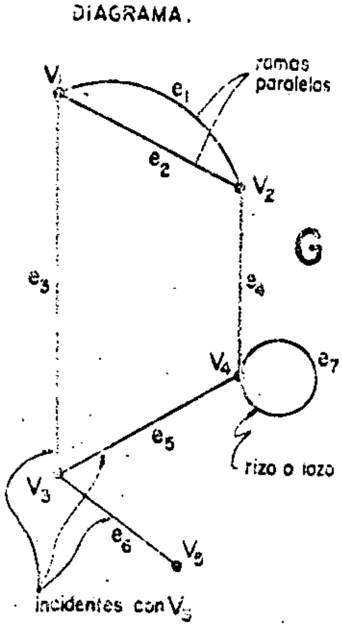
Von Wright, G.H. " La Lógica de la Preferencia ". Colección Ensayos. EUDEBA. 1967.

Wang, H. " Games, Logic and Computers ", Sci. Am., Vol. 213, No. 5, Nov. 1965, 98-106.

Whitehouse, G.E. " Systems Analysis and Design using Network Techniques. Prentice-Hall. 1973.

TEORIA DE GRAFICAS

1. DEFINICIONES



1.1. Una GRAFICA GENERAL está constituída por un conjunto de vértices y un conjunto de ramas (geométricamente se representan con puntos y líneas).

Simbolización $G = (V, E)$

$V = \{v_1, v_2, v_3 - - -\}$ vértices, nodos, nudos puntos o juntas

$E = \{e_1, e_2, e_3 - - -\}$ ramas, aristas segmentos o áreas

1.1.1. Simplificación. De una gráfica general, por eliminación de rizos y ramas paralelas se obtiene una GRAFICA SIMPLE (En el diagrama, eliminado e_1 y e_7).

1.2. Ramas. Una rama cualquiera e_k se identifica con una pareja (v_i, v_j) no necesariamente ordenada en la cual v_i y v_j son los extremos de la rama e_k; e_k representa una relación entre vértices: $V_i R_k V_j$

1.3. Grado de un vértice. Es el número de ramas que en él concurren.

Grado = # ramas en cada vértice

Grado del vértice iésimo: $g(v_i)$

1.3.1. Propiedades: i) La suma de grados de los vértices de toda la gráfica es igual a 2 veces el número de ramas.

$$\sum_{i=1}^{n} g(v_i) = 2 \text{ \#ramas de la gráfica}$$

ii) El número de nudos de grado impar es siempre par.

1.4. DIGRAFICA o gráfica dirigida es la que tiene un número finito de vértices y las ramas que los unen establecen una relación. (pareja ordenada de vértices).

$D = (V, E) \ni V = \{v_1, v_2 - - - v_n\}$ (n es finito).

y E es una relación binaria en V $\quad v_i\ E\ v_j \quad v_i \neq v_j$

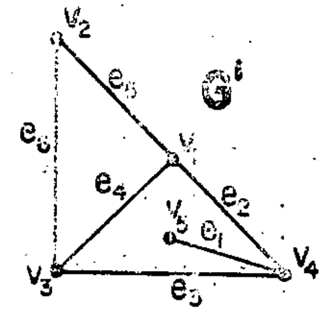
1.4.1. Propiedades. Si E es una relación:

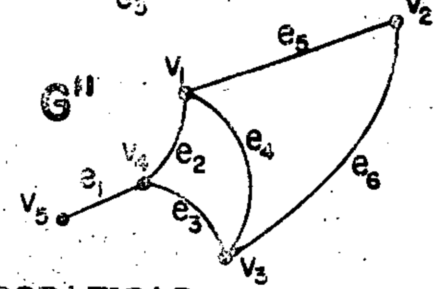
i) Cada pareja de V define un segmento dirigido: Discg.

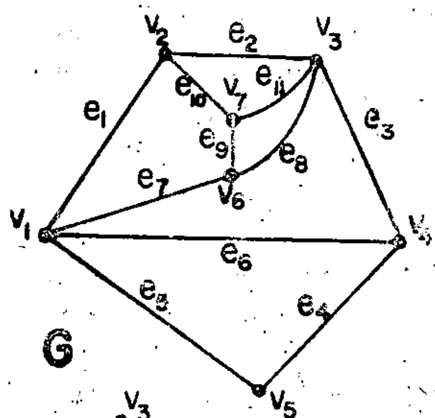
ii) $E \subset V \times V$

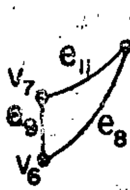
1.5. GRAFICAS ISOMORFICAS

Dos gráficas son isomórficas cuando existe correspondencia una a una entre ramas, vértices y grados de cada vértice. (comparar G' y G")









$g \subset G$

1.6. SUBGRAFICAS.

Dada una gráfica G, cualquier otra gráfica g cuyos vértices y ramas esten contenidos en G, es una subgráfica de G.

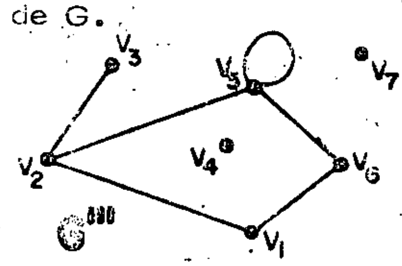
a) Un solo vértice es una subgráfica.

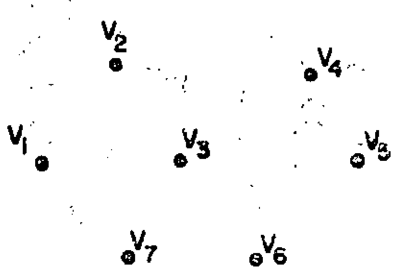
b) Una rama con sus vértices es una subgráfica.

c) Cada gráfica es su propia subgráfica.

d) Una subgráfica de una subgráfica de G, es una subgráfica de G.

1.7. VERTICE AISLADO (V_4 y V_7) Y VERTICE EXTREMO O SUSPENSO (V_3)





1.8. GRAFICA NULA

Es la gráfica que no tiene ramas, solamente vértices aislados.

$E = \emptyset$

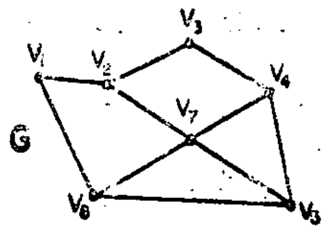
$V \neq \emptyset$

Si $E = V = \emptyset$, no se define una gráfica.

1.9. CLASIFICACION DE GRAFICAS CONEXAS.

Una gráfica es conexa cuando partiendo de un vértice v_i se puede ir a otro vértice cualquiera v_j a través de las ramas de la gráfica.

1.9.1. PASEO, TREN o CADENA.



Es una secuencia de ramas sin re-trazo.

Ejemplo: en G, un paseo es: v_1, v_2, v_7, v_4.

Un paseo puede ser:

1.9.1.1. PASEO CERRADO.

Es el que se inicia y termina en el mismo vértice. Cuando no tiene intersecciones nodales intermedias, recibe el nombre de CIRCUITO.

Ejemplo: en G, un circuito es: v_1, v_2, v_7, v_6, v_1. o también v_2, v_3, v_4, v_5, v_7, v_2, etc.

1.9.1.2. PASEO ABIERTO.

Es el que se inicia y termina en distinto vértice. Cuando no tiene intersecciones nodales intermedias, se le llama TRAYECTORIA O RUTA.

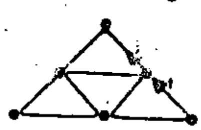
Ejemplo: en G, una trayectoria es: v_4, v_5, v_7, v_6.

Otra clasificación para la gráfica depende de los paseos en los que no se repiten ramas o vértices:

1.9.1.3. GRAFICAS DE EULER.

Son paseos en los que se recorren todas las ramas de la gráfica, una sola vez cada una. Tienen la propiedad de contener todos los circuitos de la gráfica.

Si es un paseo cerrado, es un CIRCUITO O LINEA DE EULER. (Note que todos los vértices tienen grado par).



Si es un paseo abierto, recibe el nombre de LINEA UNICURSORIA O ABIERTA DE EULER.

1.9.1.4. GRAFICAS DE HAMILTON.

Son paseos en los que se recorren todos los vértices de la gráfica solo una vez.

Si es un paseo cerrado, se tiene un CIRCUITO DE HAMILTON

Si es paseo abierto, se trata de una TRAYECTORIA HAMILTONIANA, que puede ser un circuito de Hamilton al que se le ha suprimido una rama.

2. Operaciones con Gráficas

En vista de que $G = (V, E)$ está definida en términos de los conjuntos V y E es posible definir algunas operaciones sobre G empleando las propiedades de los conjuntos.

2.1. Unión de dos gráficas

La unión

$$G_3 = G_1 \cup G_2$$

de dos gráficas

$$G_1 = (V_1, E_1)$$

y

$$G_2 = (V_2, E_2)$$

es otra gráfica

$$G_3 = (V_3, E_3)$$

en la cuál

$$V_3 = V_1 \cup V_2$$

y

$$E_3 = E_1 \cup E_2$$

Ejemplo: Supóngase que se desea establecer una gráfica que muestre la estructuración de un curso de Cinemática(G_2), con uno de Cálculo Diferencial(G_1).

La relación R entre los temas establece "el vínculo conceptual" requerido para integrar los diversos conceptos. En las dos gráficas se asume el mismo criterio de relación.

Los temas se indicarán a través de los vértices:

a) Conceptos matemáticos

- v_1: Concepto de derivada,

v_2: Concepto de límite,

v_3: Cociente de incrementos $\Delta f/\Delta x$,

v_4: Concepto de función $y=f(x)$,

v_5: Concepto de incremento (de una variable independiente y de la función asociada),

v_6: Concepto de pendiente,

v_7: Concepto de derivada a través de la pendiente de $y=f(x)$.

b) Conceptos físicos

v'_1: Concepto de velocidad,

v'_2: Cantidades físicas definidas al límite,

v'_3: Cociente de incremento del espacio entre incremento del tiempo $\Delta e/\Delta t$,

v'_7: Concepto de velocidad en términos de la pendiente a la curva e – t,

v'_8: Conceptos de espacio y tiempo.

Los diagramas correspondientes a las dos gráficas podrían ser de la siguiente forma: (ver siguiente hoja).

Para poder hacer la unión, antes deben definirse los vértices comunes de la misma manera.

$\bar{v}_1 = v_1 \wedge v'_1$: Concepto de derivada y velocidad,

$\bar{v}_2 = v_2 \wedge v'_2$: Límite y cantidades físicas definidas al límite, Sean

v_1: el gerente general,

v_2: el primer gerente,

v_3: el segundo gerente,

v_4: la secretaria del gerente general,

v_5: una misma secretaria para el primero y segundo gerentes,

v_6: un primer empleado del gerente primero,

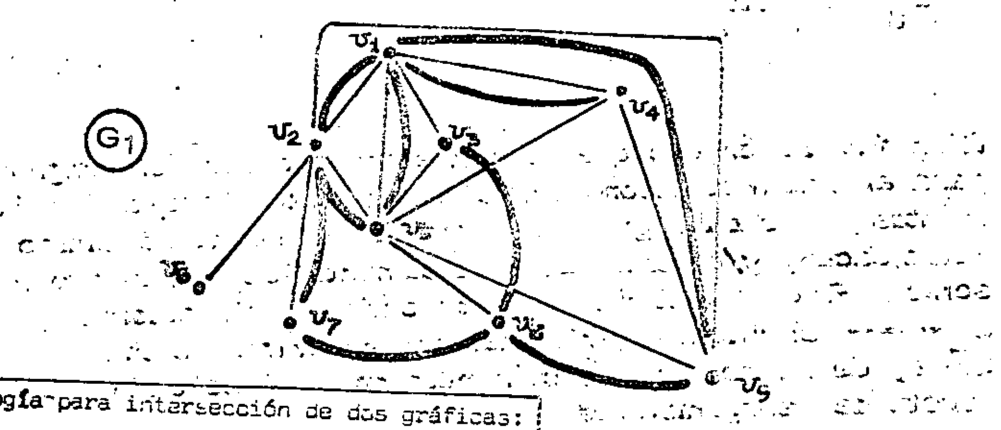
v_7: un segundo empleado del gerente primero,

v_8: un empleado del segundo gerente,

v_9: un auxiliar de oficina.

(Este ejemplo, aunque muy limitado en cuanto a personal y a relaciones, ilustra una organización con un optimismo inusitado, porque las "empresas" no suelen especificar, ni vagamente, otras relaciones, entre sus miembros, que no sean las jerárquicas).

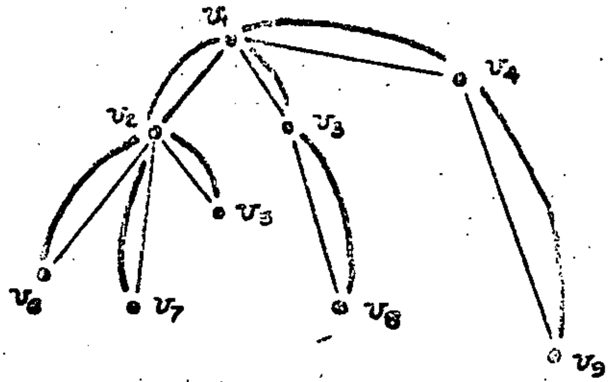
Criterio 1 (estado actual)



Simbología para intersección de dos gráficas:
"Flujo de órdenes o instrucciones".
"Flujo de información".

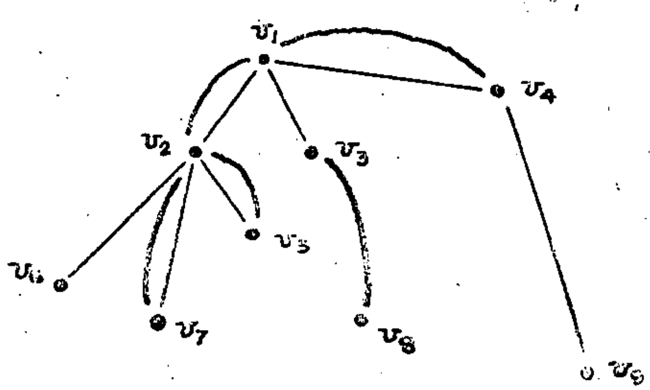
Criterio 2 (Organización propuesta):

(G_2)



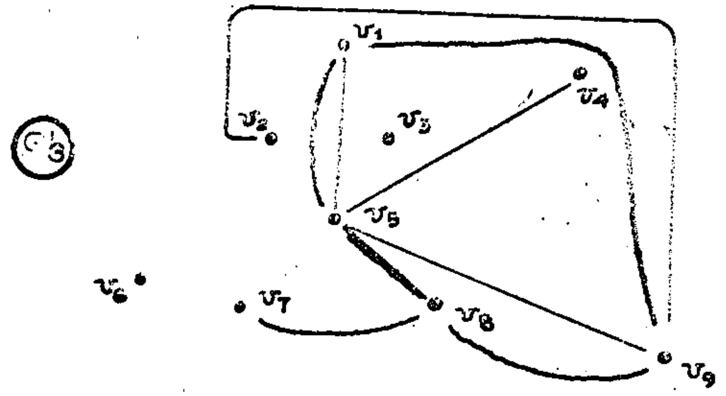
A través de la intersección de las dos gráficas podríamos establecer, por ejemplo, qué "flujos" del estado actual podrían permanecer de acuerdo con el criterio propuesto.

$G_3 = G_1 \cap G_2$



Además, se puede obtener una gráfica "diferencia" $G_1 - G_2$ (osea $G_1 \cap \bar{G}_2$) con la cuál se podría establecer qué "flujos" del estado actual no están de acuerdo con el criterio propuesto.

$$G_3' = G_1 \cap \bar{G}_2$$



2.3. Suma-anillo de dos gráficas.

Esta operación corresponde a la disyunción no-inclusiva del cálculo proposicional (en cuanto a las relaciones o ramas).

La suma-anillo

$$G_3 = G_1 \oplus G_2$$

de dos gráficas

$$G_1 = (V_1, E_1)$$

y

$$G_2 = (V_2, E_2)$$

es una gráfica

$$G_3 = (V_3, E_3)$$

en la cuál

$$V_3 = V_1 \cup V_2$$

y si $e_1 \in E_3$, entonces

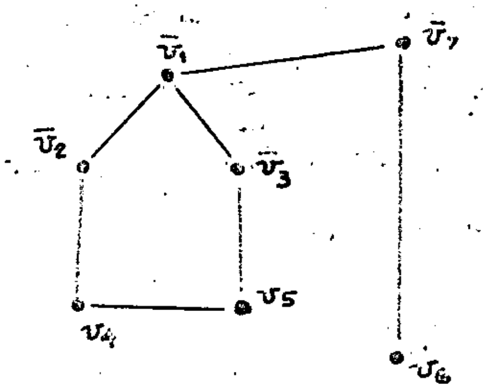
$$e_1 \in (E_1 \cup E_2)$$

y $\quad e_1 \notin (E_1 \cap E_2)$

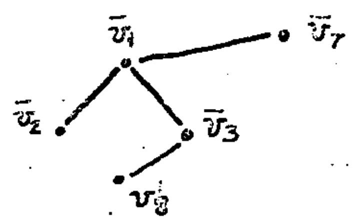
Ejemplo 1 Utilizando nuevamente la integración de un curso de Cinemática con uno de Cálculo diferencial, se pregunta ¿Qué temas deben interrelacionarse para que no haya posibilidades de traslapes (repeticiones innecesarias)? Esto podría sugerir que los temas interrelacionados por ambas materias se tratarán en uno solo de los dos campos.

Una vez establecidas $\bar{v}_1$, $\bar{v}_2$, $\bar{v}_3$ y $\bar{v}_7$ en cada una de las gráficas se obtendrían:

Matemáticas: G_1

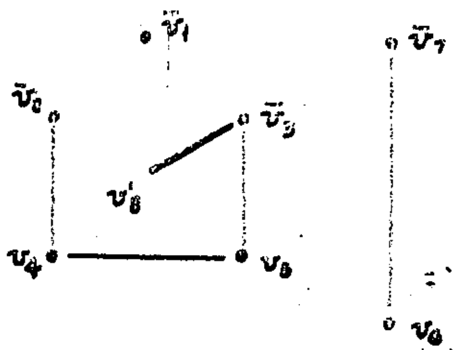


Física: G_2



Efectuando la suma - anillo se tendría:

$G_3 = G_1 \oplus G_2$



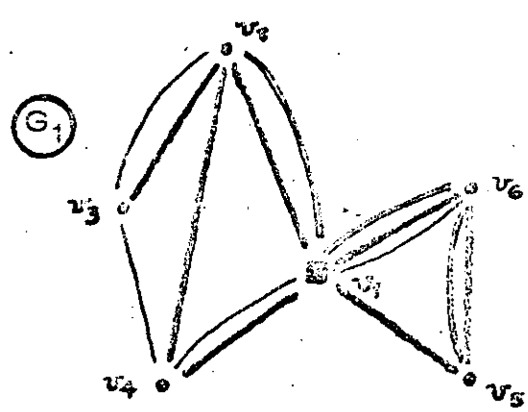
Las "vinculaciones conceptuales" indicadas por las ramas $(\bar{v}_2, v_4)$, (v_4, v_5), $(\bar{v}_3, v_5)$ y $(v_6, \bar{v}_7)$, claramente deben ser tratadas por las matemáticas. La relación definida por $\{(v'_3, \bar{v}_3)\}$ debe abordarla la física. Las que no están indicadas, y que aparecían en la gráfica de unión, pueden abordarse, de acuerdo con el diagrama, por uno ú otro campo indistintamente.

Ejemplo 2

Supóngase que seis poblados de un determinado estado de la República están intercomunicados, por medio de:

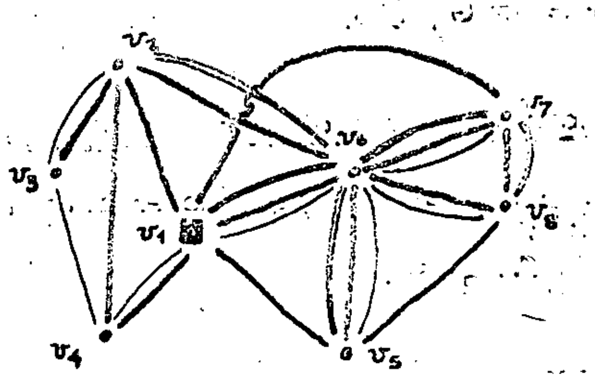
- Teléfono, radio y/o telégrafo ━━━,
- Carretera pavimentada ━━━━, y
- Camino de terracería y/o ferrocarril ────,

como se muestra en G_1:



La siguiente gráfica G_2 indica una red de las diversas comunicaciones necesarias para desarrollar dos nuevos poblados v_7 y v_8 que tendrán relevancia en el desarrollo de la comunidad.

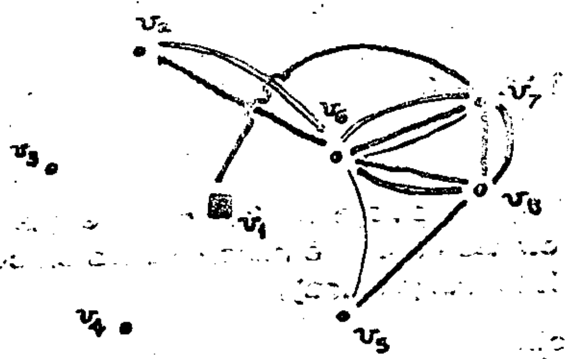
G_2



Se desea saber cuáles son las líneas de comunicación nuevas propuestas en este diseño, respecto al estado actual de comunicaciones.

Efectuando la suma - anillo de G_1 y G_2

G_3

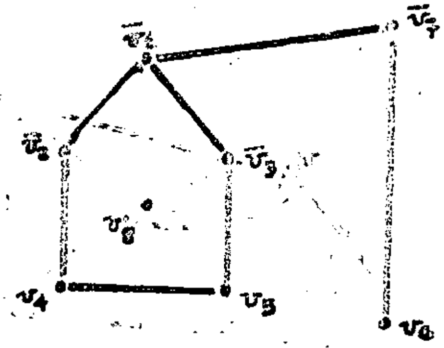


2.4. Propiedades de las operaciones anteriores

2.4.1. Conmutatividad

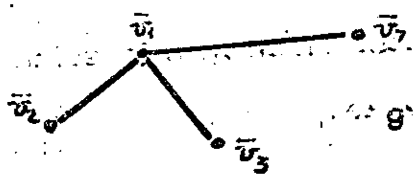
A partir de las propiedades de los conjuntos es fácil establecer

Ejemplo Considérese nuevamente el ejemplo de Cinemá tica - Cálculo



G

Si de esta gráfica suprimimos la subgráfica "g" que establece vínculos entre los vértices $\bar{v}_1$, $\bar{v}_2$, $\bar{v}_3$ y $\bar{v}_7$ (simultáneamente a través de las matemáticas y la física), es decir si se suprime



se obtendrá entonces:

$$G' = G \ominus g = G - g$$

o sea aquellos vínculos que no son comunes a las matemáticas y a la física.

2.4.6. Descomposición de gráficas

Sean dos subgráficas de G: g_1 y g_2

$$g_1 \leq G$$

y

$$g_2 \leq G$$

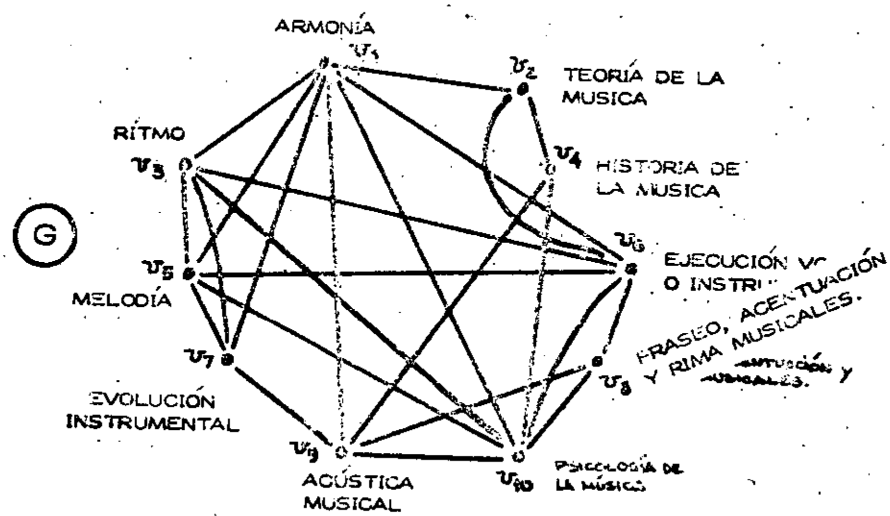
entonces se dice que G se ha descompuesto en las dos subgráficas g_1 y g_2 si

$$g_1 \cup g_2 = G$$

$$g_1 \cap g_2 = \text{gráfica nula}$$

lo cual indica claramente que las ramas de G están en g_1 o en g_2 pero no en ambas.

Ejemplo Supóngase la siguiente gráfica



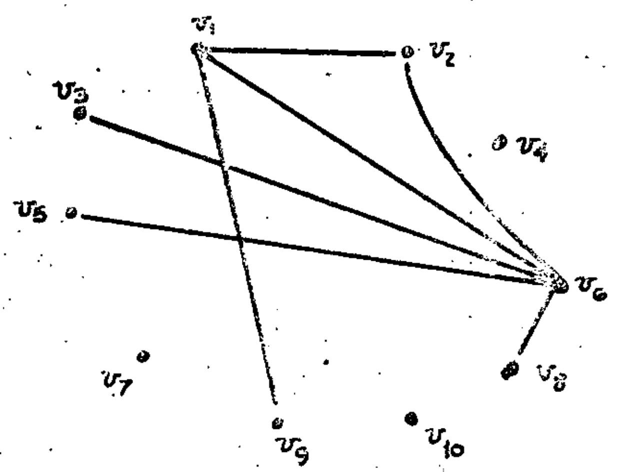
Nota: la descomposición de gráficas, igual que la unión, intersección y suma anillo, se pueden extender a más de dos gráficas.

Cada una de las ramas indica alguna relación relevante del tipo: vinculación auditiva, o integración de habilidades o técnicas, etc.

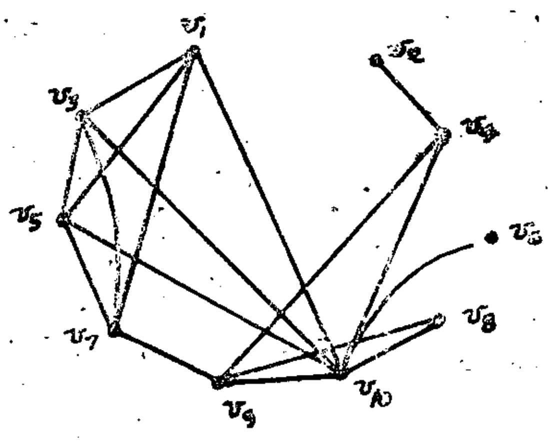
Se puede efectuar una descomposición atendiendo, por ejemplo, a dos criterios:

> g_1: Aspectos técnicos, teóricos o metodológicos,
>
> g_2: Temas sobre apreciación estética y de evaluación.

g_1



g_2



Es fácil comprobar que

$$G = g_1 \cup g_2$$

y

$$g_1 \cap g_2 \quad \text{es una gráfica nula}$$

2.4.7. Supresión (deletion).

2.4.7.1. Si en una gráfica G se suprime el vértice v_i, y consecuentemente todas las ramas que en él inciden, se obtiene

$$G - v_i$$

que es una subgráfica de G

2.4.7.2. Si en una gráfica G se suprime una de sus ramas e_j, lo cual no implica la supresión de los vértices correspondientes se obtiene

$$G - e_j$$

que es una subgráfica de G.

Es fácil ver que

$$G - e_j = G \oplus e_j.$$

2.4.8. Fusión

Un par de vértices v_i, v_j se fusionan si

$$v_i \text{ y } v_j$$

se sustituyen por un único vértice

$$v_{i,j}$$

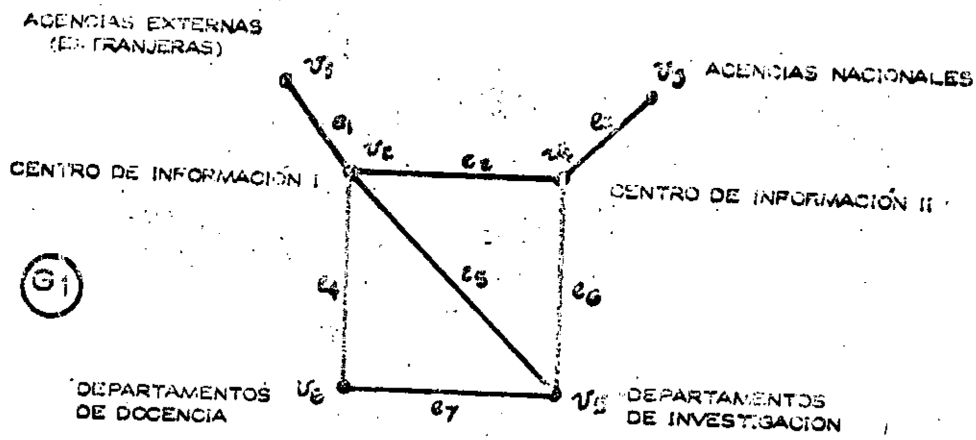
tal que todas las ramas que incidían en v_i o en v_j inciden ahora en $v_{i,j}$.

Nota: el número de vértices de G disminuye en uno.

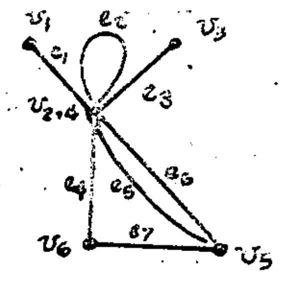
Ejemplo

Supóngase que en una institución educativa existen dos centros de información (recepción - procesamiento y distribución). Uno encargado de la información nacional y el otro de la información extranjera. Además hay dos departamentos de la institución: uno que agrupa todas las áreas de docencia y otro las de investigación.

La interacción (relaciones de comunicación, recepción, distribución, aplicación, difusión, etc.) entre los centros y los departamentos (internos) y las agencias externas se bosqueja en el diagrama siguiente:



Después de analizar algunos problemas de comunicación y servicio la institución decide fusionar los dos centros de información v_2, v_4 en uno solo $v_{2,4}$ quedando



Nota: el rizo corresponde a la permanencia de la relación e_2 ahora dentro de dos áreas del mismo centro.

con lo cual es posible que hayan "mejorado" su operación.

2.5. Distancia en gráficas.

*Definición: En una gráfica conexa G la

Distancia

$$d_{i,j}$$

entre dos de sus vértices

$$v_i \text{ y } v_j$$

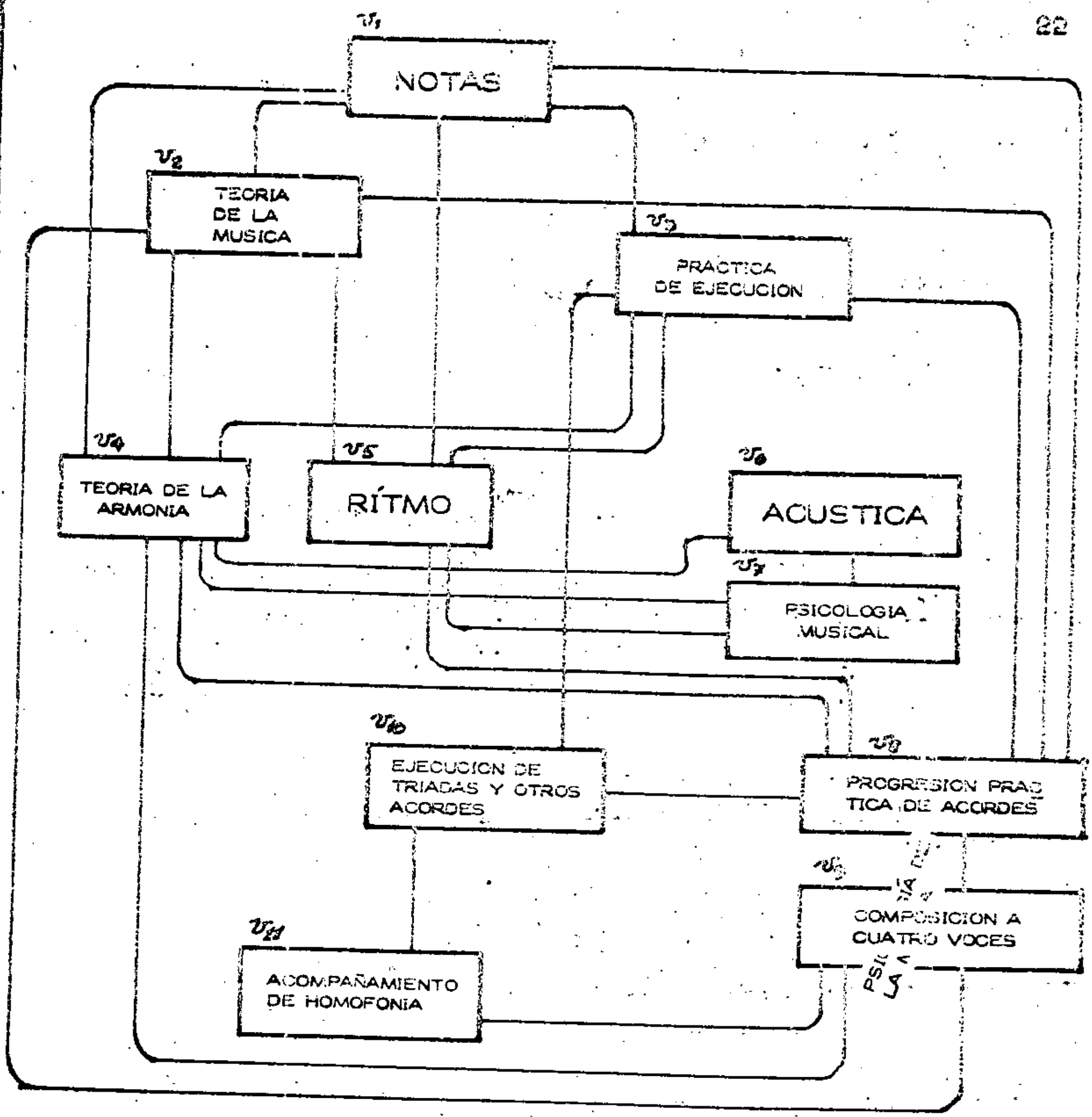
es la trayectoria más corta definida por el menor número de ramas que los unen

Ejemplo: Supóngase que alguien que tiene solo rudimentos musicales desea adquirir un mínimo de habilidades para lograr acompañar con algún instrumento melodías simples.

De acuerdo con el programa de alguna escuela de música las materias están interrelacionadas de acuerdo con el siguiente esquema:

---

* En este concepto no se discrimina entre las cualidades que cada rama pueda implicar, por ejemplo: en una red eléctrica o hidráulica, la resistencia al flujo depende de la longitud de cada tramo; en una gráfica que representara relaciones de "afecto" o de "interés" entre personas, habría que tomarlas en cuenta para fijar la "distancia" entre vértices.



Suponiendo que la "flexibilidad" de los planes de las asignaturas lo permitiesen, el aspirante podría seguir algunas trayectorias para alcanzar v_{11}:

$$(v_1, v_2, v_9, v_{11}),\ (v_1, v_5, v_8, v_{10}, v_{11}),$$

$$(v_1, v_8, v_{10}, v_{11}),\ \text{etc.}$$

Quizá la más aceptable sería la distancia de V_1 a V_{11}, dada por $d_{1,11} = 4$ a través de la trayectoria (V_1, V_3, V_{10}, V_{11}).

Notas:

a) En el caso de una gráfica cualquiera puede haber más de una - trayectoria con la misma distancia; por ejemplo las trayectorias v_1 a v_{11}

$$(v_1, v_8, v_{10}, v_{11}),\ (v_1, v_3, v_{10}, v_{11}),\ \text{etc.,}$$

tienen la misma distancia $d_{1,11} = 4$

b) Para fundamentar el concepto de distancia entre dos vértices - suelen establecerse primero los axiomas de la métrica: la - distancia $d(x,y)$ entre dos puntos x,y, debe satisfacer:

i) la no negatividad: $d(x,y) \geq 0 \wedge d(x,y) = 0 \leftrightarrow x = y$

ii) la simetría: $d(x,y) = d(y,x)$

iii) la desigualdad triangular: $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y),\ \forall\ z$

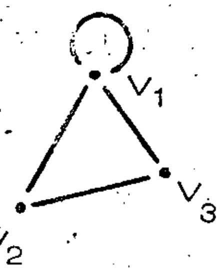
El concepto de distancia establece una métrica en las gráficas - porque:

a) el número de ramas es un número no negativo, el cuál - siempre es el mínimo:

$$d(V_1, V_3) = 1 \ *$$

en un rizo se cumple que

$$d(V_1, V_1) = 0$$



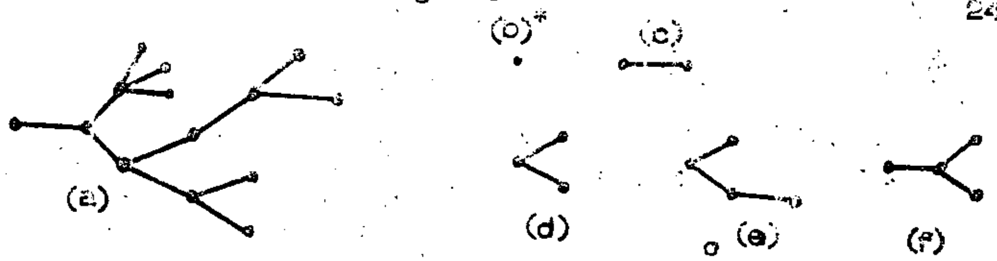
b) en una misma trayectoria el número de ramas en un sentido o en el otro es el mismo.

c) entre dos trayectorias que unan V_i y V_j la que incluya un vértice particular V_z no puede ser menor que la que lo excluya. $d(V_2, V_1, V_3) \geq d(V_2, V_3)$

---

* En lugar de escribir $d_{i,j}$ para denotar la distancia entre V_i y V_j, suele también expresarse $d(V_i, V_j)$.

3. Árboles. Considérense las figuras



i) en ninguno de los casos indicados existe algún circuito,

ii) en todos los casos se trata de gráficas conexas,

iii) se incluyen casos de gráficas con uno, dos, tres o mas vértices,

iv) no se incluye el caso de gráfica con más de un vértice que sea nula (sin ramas) o de gráficas con un número infinito de vértices: se tratan sólo gráficas finitas.

Las gráficas anteriores se denominan árboles.

v) debido a las propiedades anteriores un árbol no tiene

ni rizos o lazos.
ni ramas paralelas

vi) se pueden encontrar dos aplicaciones inmediatas de árboles en:

- los "árboles genealógicos"

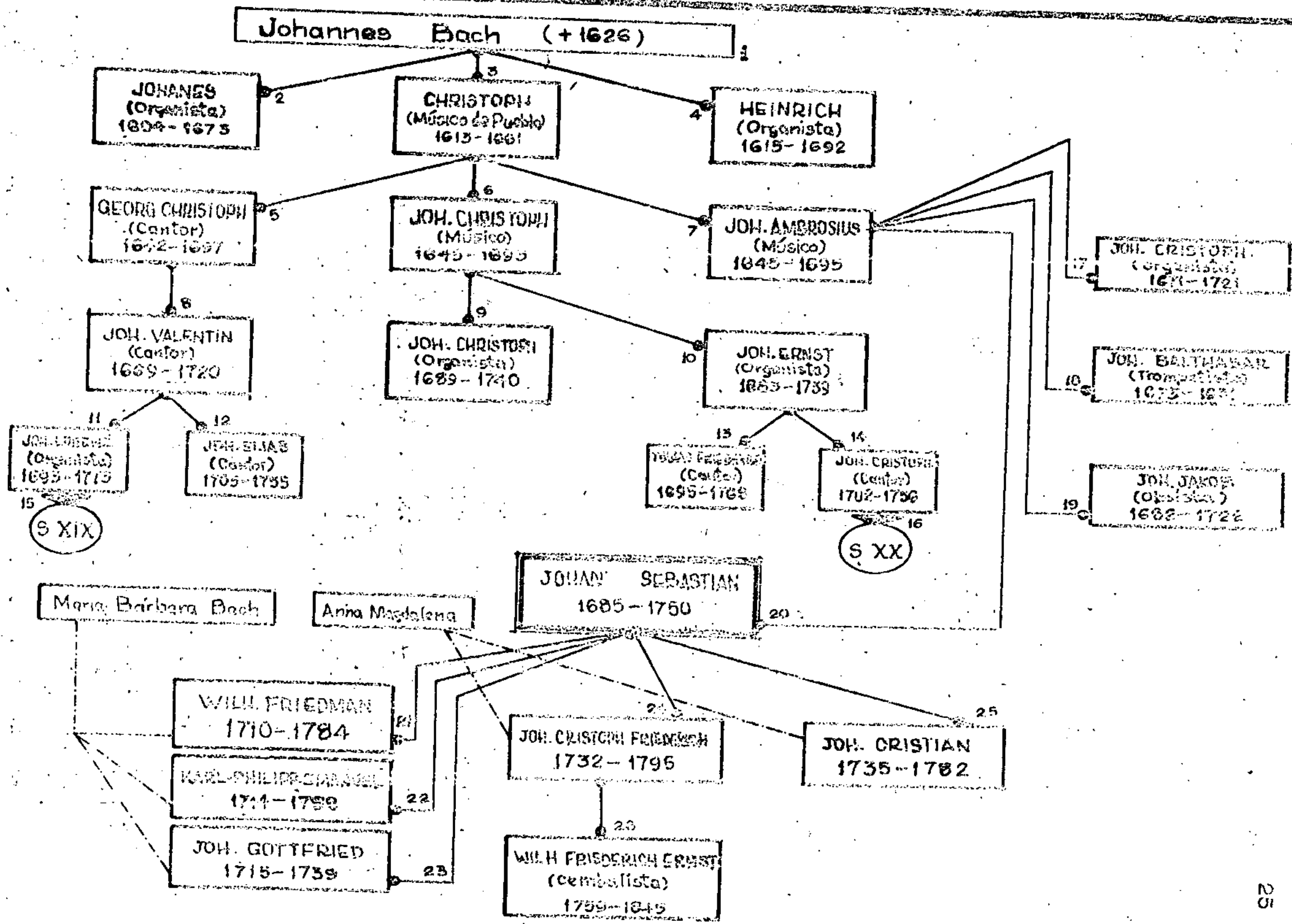
- los "árboles de decisiones".

vii) en Lógica Simbólica suelen utilizarse árboles para el análisis de las combinaciones posibles de valores de verdad de un conjunto de variables, de acuerdo con dos posibles valores de verdad (V,F o 0,1) para cada variable.

Ejemplo:

En la siguiente gráfica se muestran los personajes más importantes del árbol genealógico del más grande músico de todos los tiempos: Juan Sebastian Bach. Con líneas llenas se representan las relaciones de paternidad.

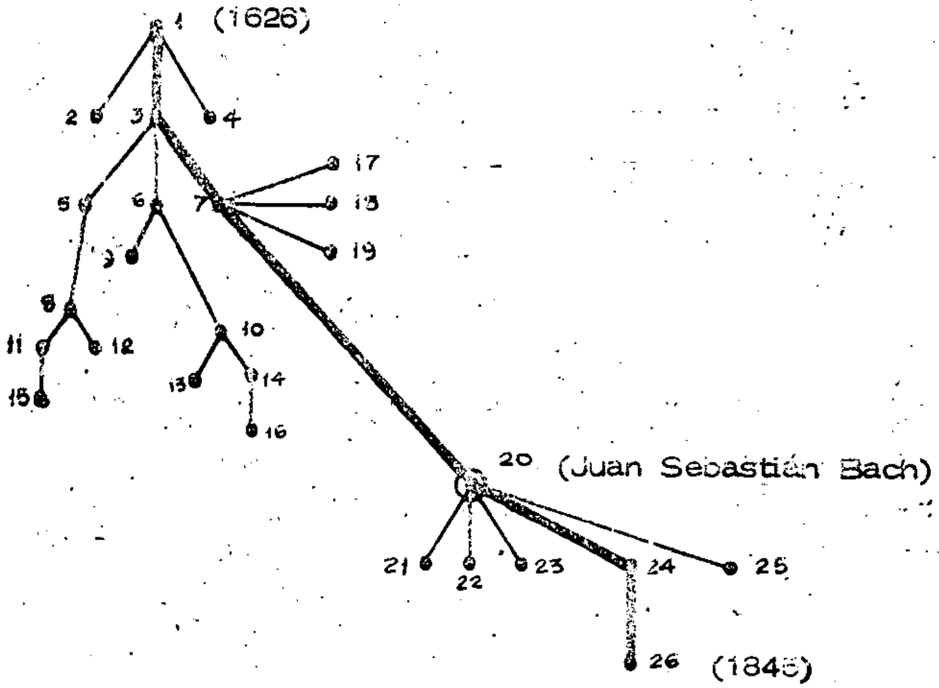
*Una gráfica con un sólo vértice y que no tiene ramas es una gráfica degenerada. También un caso particular de árbol que se usará nada mas como referencia.



Johannes Bach (+1626)
1
JOHANES (Organista) 1604-1673
2
3
CHRISTOPH (Músico de Pueblo) 1613-1661
4
HEINRICH (Organista) 1615-1692
GEORG CHRISTOPH (Cantor) 1642-1697
5
6
JOH. CHRISTOPH (Músico) 1645-1695
7
JOH. AMBROSIUS (Músico) 1645-1695
8
JOH. VALENTIN (Cantor) 1669-1720
9
JOH. CHRISTOPH (Organista) 1689-1740
10
JOH. ERNST (Organista) 1683-1739
11
(Organista) 1695-1775
12
JOH. ELIAS (Cantor) 1705-1755
13
(Cantor) 1695-1766
14
JOH. CRISTOPH (Cantor) 1702-1756
15
S XIX
16
S XX
17
JOH. CRISTOPH
18
JOH. BALTHASAR
19
JOH. JAKOB
JOHAN SEBASTIAN 1685-1750
20
Maria Bárbara Bach
Anna Magdalena
WILH. FRIEDMAN 1710-1784
21
KARL-PHILIPP-EMANUEL 1714-1788
22
JOH. GOTTFRIED 1715-1739
23
JOH. CRISTOPH FRIEDRICH 1732-1795
24
JOH. CRISTIAN 1735-1782
25
WILH. FRIEDERICH ERNST (cembalista) 1759-1845

C.A.D.A. 1976

Omitiendo los detalles de la gráfica se podría representar



Es fácil advertir:

i) que la gráfica cumple con las condiciones de un árbol,

ii) que la trayectoria más larga que pasa por el punto 20 es la marcada ▬▬▬ (y que abarca un lapso de más de dos siglos),

iii) que dentro de los datos resumidos en la gráfica anterior hay una marcada tendencia a la música (dirección, composición, ejecución, etc.)

iv) que según hace destacar G. Révész ("The Psychology of Music") de los 700 descendientes de Johannes Bach, no consignados todos en la gráfica, once de ellos fueron eminentes músicos de los siglos XVII a XIX. Con lo cual, a través de un estudio genealógico, pretende establecer la no-correlación de las "facultades" musicales de los individuos con las de sus ancestros y/o sus descendientes.

3.1. Propiedades de los árboles.

3.1.1. Propiedad

Puede observarse que entre cualquier pareja de vértices de un árbol existe una y sólo una trayectoria,

e inversamente

Si en una gráfica existe una y sólo una trayectoria entre cualquier pareja de vértices, entonces la gráfica es un árbol.

3.1.2. Propiedad

El árbol anterior tiene

26 vértices

y sólo

25 ramas.

En general, cualquier árbol que tenga

n vértices

tendrá sólo

n-1 ramas

y recíprocamente

cualquier gráfica conexa que tenga n vértices y n-1 ramas es un árbol.

3.1.3. Definición y propiedad

Definición: una gráfica conexa es mínimamente conexa si la eliminación de una cualquiera de sus ramas la hace desconexa.

Propiedad: una gráfica es un árbol si y sólo si está mínimamente conectada.

3.1.4. Propiedad

Una gráfica con

n vértices

y con

n-1 ramas

y sin circuitos

es conexa

(en vista de que es un árbol)

3.1.5. Definición y Propiedad

Definición: un vértice es suspenso (pendant) si tiene grado uno.

Propiedad: un árbol (de dos o más vértices) cualquiera, tiene, cuando menos, dos vértices suspensos (o sea que el caso mínimo de árbol es una rama con sus respectivos vértices en los extremos).

Todos los arboles finitos tendrán vértices suspensos.

Ejemplo.

En el estudio de la entonación (o acentuación) de las frases de un lenguaje musical o hablado, frecuentemente interesa conocer las variaciones de altura (o de intensidad) dentro de cada frase. Se plantean para ello esquemas que indican graficamente estas variantes y constituyen un entrenamiento mnemotécnico valioso en el análisis linguístico de la entonación (o de la acentuación).

Supóngase las siguientes variantes de variación tonal, (o de intensidad):

1) "+1" cuando se asciende de un tono grave a uno agudo (ó cuando se pasa de una menor a una mayor intensidad)

+1 /

2) "0" cuando no se varía la entonación (o la intensidad),

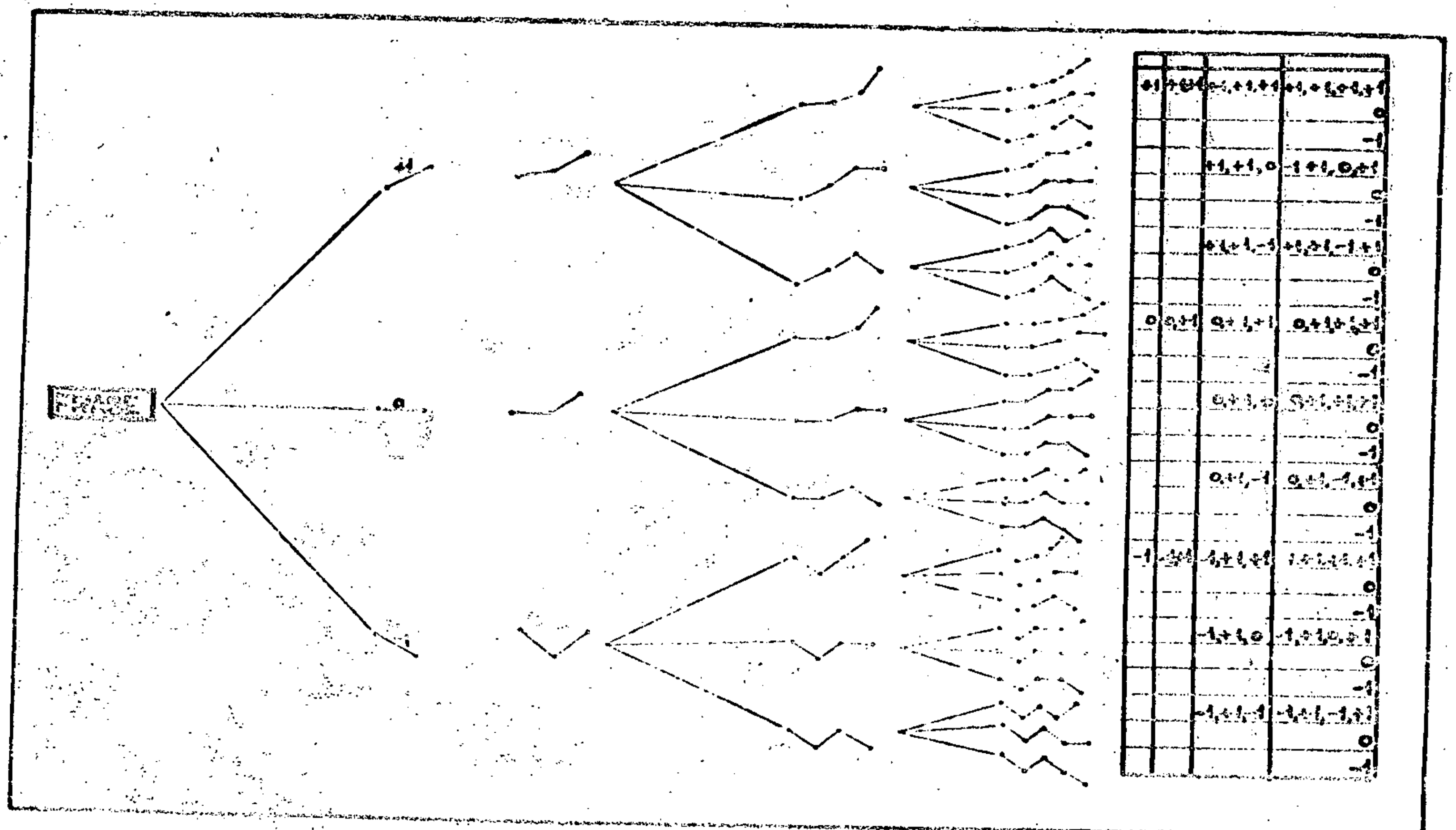
0

3) "−1" cuando se desciende de un tono agudo a uno grave (o cuando se disminuye la intensidad).

\ −1

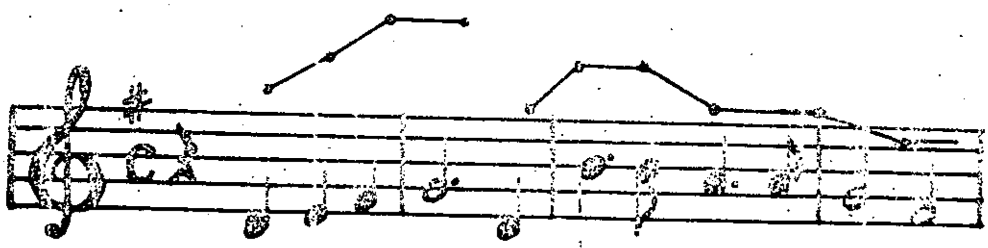
Es claro que en una sola frase pueden ocurrir uno cualquiera de estos esquemas o diversas combinaciones de ellos. Suponiendo que nos limitamos a una combinación de cuatro cualesquiera ¿ Cuantos esquemas podríamos obtener?

En el diagrama del árbol y en la tabla siguiente se indican algunos de los casos posibles para 1, 2, 3 ó 4 tramos.



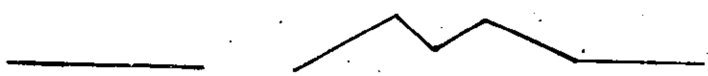
Nota.- Al analizar la segunda alternativa solamente se consideró una de las tres posibilidades (+1/), por lo que el número de ramas del árbol completo sería $3^4 = 81$

Aplicación (tonal)



yo ya me voy al puer-to don-de se ha-lla

Aplicación (énfasis)



Margarita, está linda la mar

3.1.7. Aplicaciones varias de árboles:

3.1.7.1. Los vértices suspendidos, se pueden usar, por ejemplo, para representar propiedades matemáticas como: la distributividad.

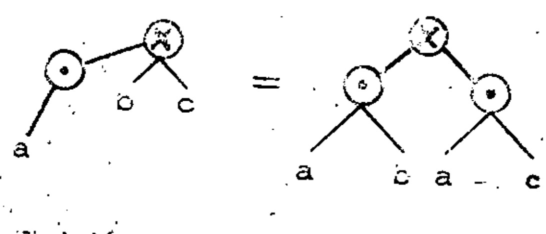
Sean los operadores $\odot$, $\otimes$

y los elementos a, b, c

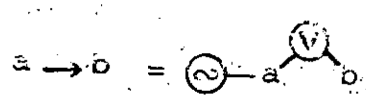
entonces $\odot$ es distributivo respecto a $\otimes$ si

$a \odot (b \otimes c) = (a \odot b) \otimes (a \odot c)$

que se podría indicar



o la definición del condicional en términos de la disyunción



3.1.7.2. Aplicación de árboles a la solución de problemas.

Algunos problemas se caracterizan porque

i) puede establecerse cada etapa (o estado) de su resolución de manera bien definida,

ii) los estados final e inicial están dados,

iii) de un estado a otro en el proceso, la diferencia está dada por uno (o unos cuantos) de los elementos del estado,

iv) el paso de un estado a otro implica un conjunto finito de alternativas (de hecho, en muchos casos, éstas son simples de detectar).

Este tipo de problemas representa con frecuencia la simulación de las actividades de búsqueda en situaciones configuradas con un número finito de elementos y con alternativas reconocibles en el proceso de solución.

A continuación se presenta un problema, aparentemente trivial, de este tipo. Para su solución

a) se parte de un estado inicial (vértice inicial del árbol),

b) se determinan las alternativas posibles (ramas) para intentar una configuración o estado que tienda al estado final dado,

c) de cada alternativa se buscan nuevas -

alternativas (ramas), de manera que ninguna represente una regresión a un estado previo, ya establecido. Todos los estados que, mediante una inspección o un análisis detenido conduzcan a esta situación antes de haber alcanzado el estado final o meta se suspenderán cuando todas sus alternativas sean regresivas,

d) el estado final o meta se establecerá como aquel, o aquellos que se alcanza(n) con el menor número de movimientos o alteraciones requeridos desde el estado inicial.

Problema: Supóngase que se tiene un conjunto de asignaturas (o materias) o actividades, y se desean arreglar de tal manera que obedezcan a una doble clasificación (a una doble propiedad, predicado o atributo):

- Las más técnicas (hacia arriba).
- Las más humanísticas (hacia la izquierda)

m: música,
h: historia,
c: ciencias,
f: filosofía,
e: espectáculos,
l: laboratorio,
a: asambleas,
d: deportes.

Se parte del siguiente arreglo

$H^+ \leftarrow$

$T^+ \uparrow$

m	h	c
f	e	l
a	■	d

que bajo un somero examen se podría ver que "no es muy adecuado",

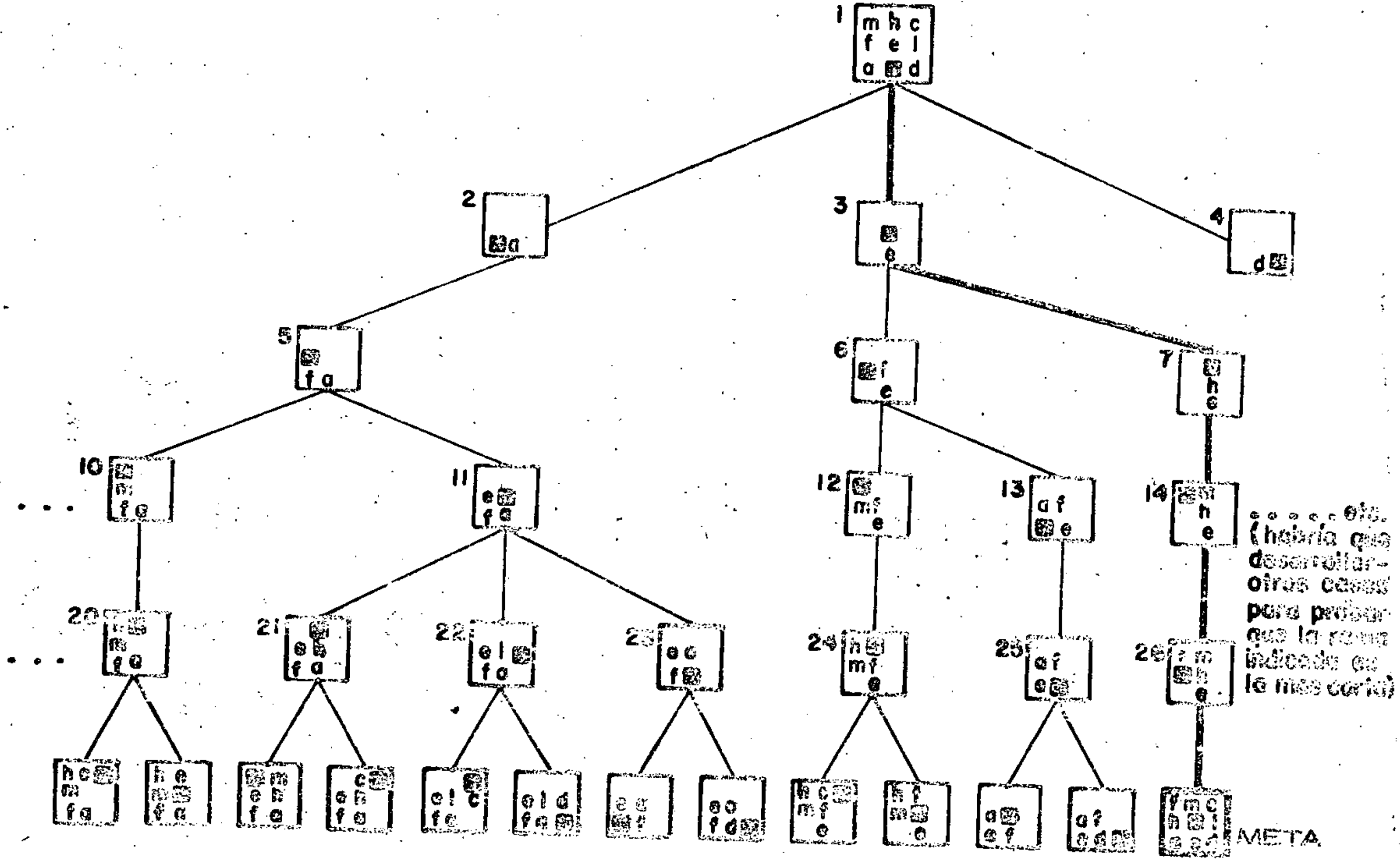
se supone que el siguiente arreglo es mejor

$H^+ \leftarrow$

$T^+ \uparrow$

f	m	c
h	■	l
a	e	d

Siguiendo las etapas del algorítmo, construir un árbol de alternativas que nos lleve de un arreglo a otro, suponiendo que los desplazamientos se efectúan sin "saltos" y utilizando el espacio marcado con negro. (Se indicarán sólo el cuadro inicial y las modificaciones de cada caso).


..... etc.
(habría que desarrollar otros casos para probar que la rama indicada es la más corta)
META

C.A.D.A. 1976

Análisis de la construcción del árbol.

Siguiendo el proceso establecido en la introducción previa al problema:

Se parte del arreglo inicial, el cual se toma como vértice número uno del árbol.

A continuación se establecen las posibles alternativas (vértices 2, 3 y 4) que nos lleven hacia el estado final. Desarrollando cada una de ellas, observamos que algunas configuraciones se repiten o ya están dadas, por lo que detenemos esas ramas y seguimos por aquellas en que esté mas cerca la meta.

3.1.7.3. Heurística en la solución de problemas mediante árboles.

Abordaremos el mismo problema anterior, pero ahora aplicado a una situación supuesta, en una Institución Educativa:

Supongamos la siguiente clasificación de una muestra de personas:

8. Rector.
7. Jefe de Area.
6. Jefe de División.
5. Administrador.
4. Bibliotecaria.
3. Investigador Científico.

2. Profesor (docente)
1. Investigador de la docencia.

Por "alguna razón" (obviamente extra universitaria) y de acuerdo con los criterios de mayor calidad docente y de investigación, estos personajes han quedado "colocados" como se indica :

+ docencia

+ investigación

2	8	3
1	6	4
7		5

Se considera según "algún criterio", que la disposición correcta sería

+ docencia

+ investigación

1	2	3
8		4
7	6	5

Se podría, desde luego, proceder como antes pero, si se tomara una organización mayor se vería la ineficacia de tal procedimiento exhaustivo.

En todo sistema de resolución de problemas que se precie de tener algo más que "las adivinanzas" o los "tanteos", o toda esa clase de jerigonza muy usual entre gente ociosa e inútil que gusta de los "trucos", los "crucigramas" y otros pasatiempos inútiles se deben enfocar siempre problemas que reporten a la comunidad, por pequeña que esta sea, algún beneficio, por ejemplo un camino a seguir o la heurística o sugerencias ó la inducción de nuevas ideas o la de nuevos métodos, etc. En todo caso, deberá poder utilizar información disponible, analizar los términos en que se plantea el problema e ir "al grano", tratando de optimizar el camino a seguir.

Supóngase, en nuestro caso, que el rearreglo de la primera disposición a la segunda debe proceder haciéndose un solo cambio a la vez, para lo cuál deben hacerse movimientos que utilicen la posición vacía del cuadro negro.

Debemos traducir la información disponible, en este caso, en alguna métrica de cada posición con la final : ¿ Qué tan lejos estamos de la meta ? ¿ Cuál es el camino óptimo ?

Digamos que esta información heurística la denominamos: función de evaluación.

Para no alejarnos demasiado de la meta en cada etapa supondremos que

f_{ev} = distancia (longitud) del vértice inicial + número de errores de posición entre la etapa n y la meta

designaremos esta expresión con

$$f(n) = d_i(n) + e_m(n)$$

a) Analizando el cuadro inicial (ver figura) :

$d_i(1) = o$

Por otro lado:

. en el cuadro inicial respecto a la meta están mal colocados

el 2,

el 8,

el 6,

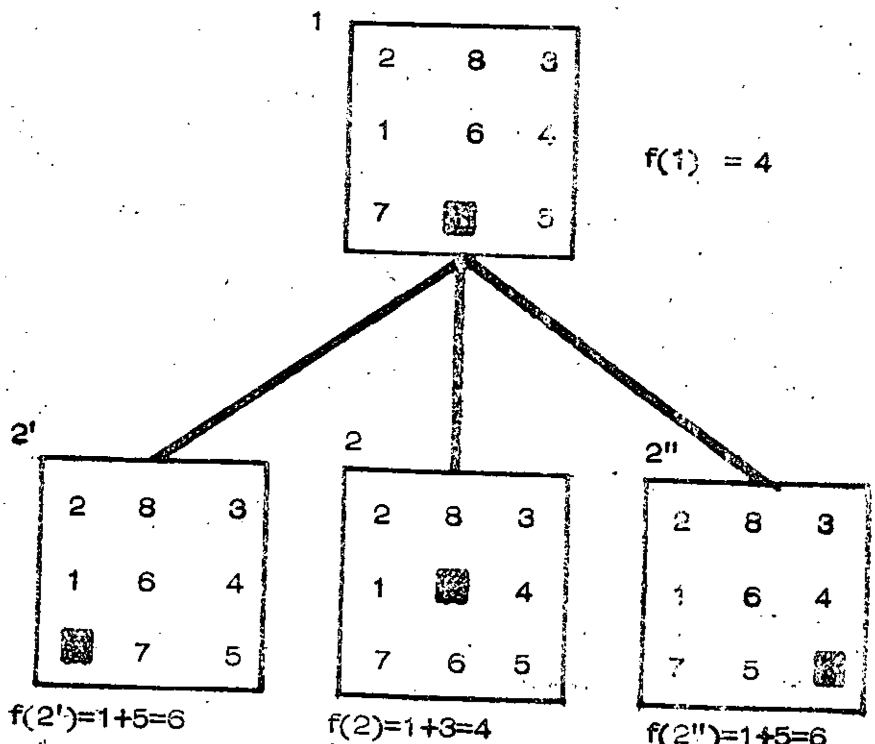
y el 1.

total e_m (1) = 4

Es decir,

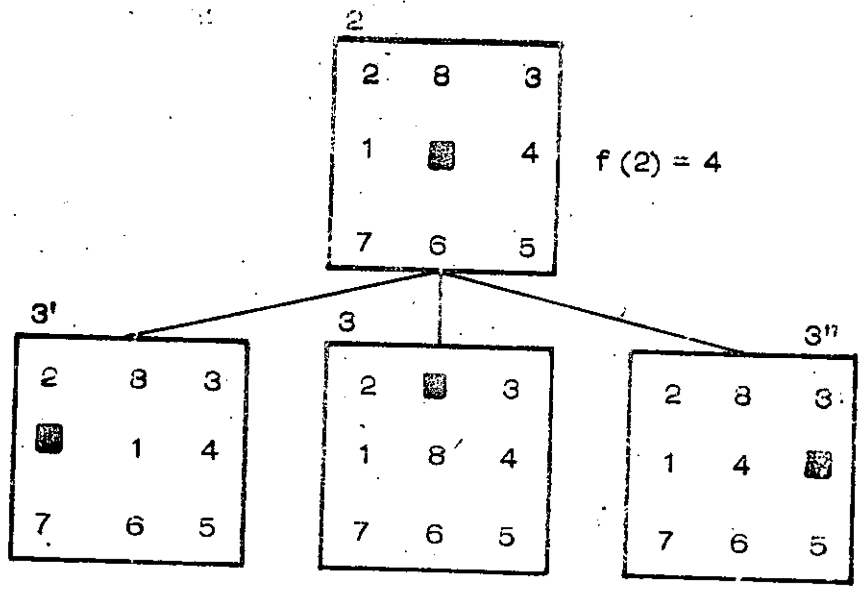
$$f(1) = 0 + 4 = 4$$

Consideremos el vértice (1) y sus tres posibles alternativas



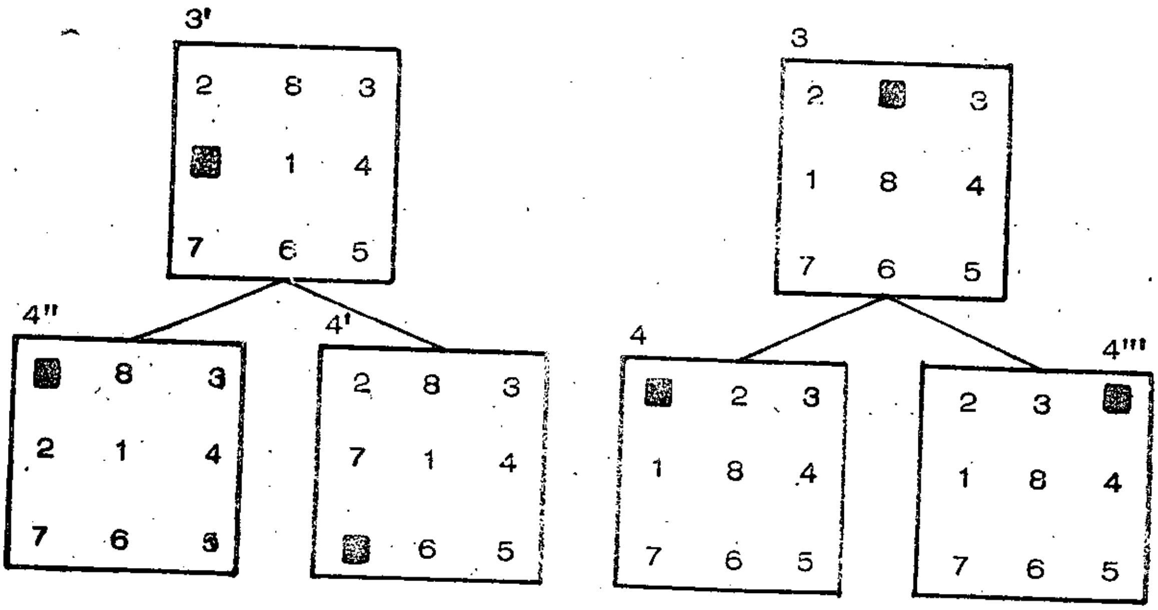
Nota: no se cuentan doble las posiciones ni el cuadro negro.

Obviamente no tenemos por qué considerar ni 2", ni 2'.



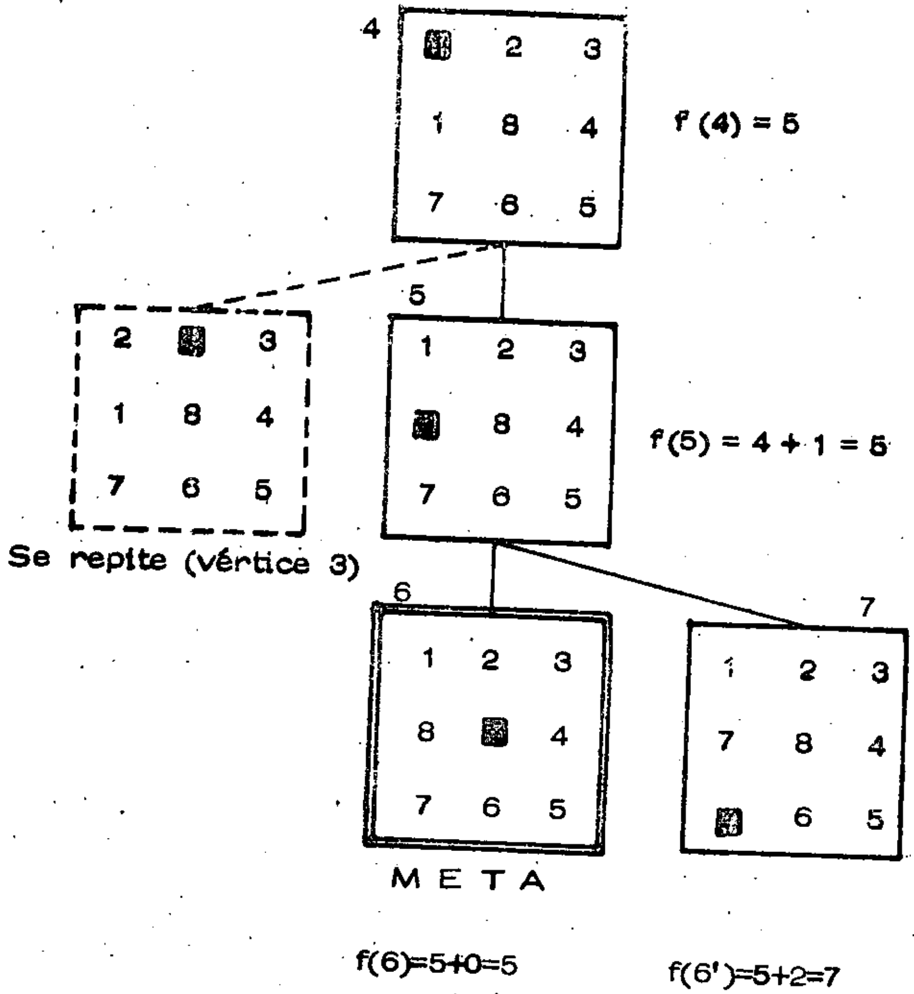
f(3')=2+3=5 f(3)=2+3=5 f(3")=2+4=6

Tenemos ahora dos alternativas 3 y 3':



f(4")=3+3=6 f(4')=3+4=7 f(4)=3+2=5 f(4''')=3+4=7

Debemos elegir el vértice 4.



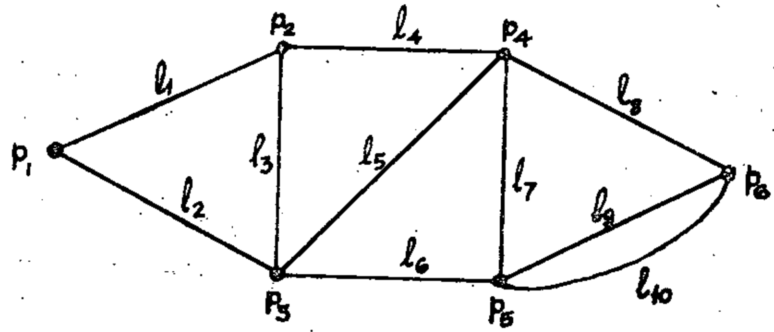
Contando el número de etapas vemos que, como antes, fueron cinco, **pero** ahora el número de vértices disminuyó sustancialmente.

.1.7.4.Aplicaciones del concepto de distancia.

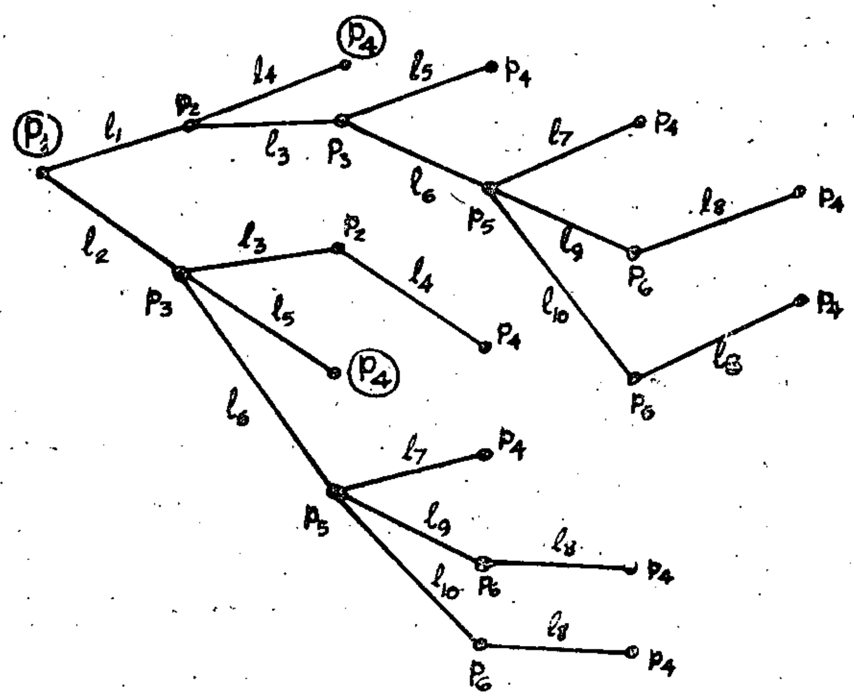
a). Ya habíamos señalado que el concepto de "distancia", descrito en términos del número de ramas exclusivamente, excluye las cualidades de esas relaciones.

Si se trata de una red de comunicaciones, por ejemplo, y se estudia la posibilidad de comunicar a dos poblaciones P_1 , P_4 utilizando el menor número de líneas de transmisión (sin consi_ derar sus cualidades) el concepto anterior es directamente aplicable.

Supongase la red.



Las trayectorias posibles (sin retrazo) de p_1 a p_4 se pueden analizar mediante un <u>árbol</u> (esta gráfica es de <u>alternativas</u> y no es isomórfica con la anterior).



Bajo las consideraciones especificadas las dos trayectorias

$$(l_1 , l_4) \text{ y } (l_2 , l_5)$$

determinan la distancia entre p_1 y p_4

$$d (p_1 , p_4) = d_{14} = 2$$

b). Nos interesa ahora señalar un problema de aplicación en el "área académica", en el cual la definición anterior de distancia deja de ser aplicable.

Supóngase que en alguna institución educativa se establece un conjunto de asignaturas y, dentro de ellas, se fija, en una reunión de "expertos", la relación que guardan unas asignaturas respecto a otras. No se establece aún un orden jerárquico, (o de"prerrequisitos") lo cual suele hacerse también de manera un tanto arbitraria.

Un alumno de reciente ingreso desea llegar lo "más pronto posible" a la asignatura de electrónica, suponiendo que se está iniciando en álgebra.

De acuerdo con el criterio anterior ¿qué trayectoria debe seguir? o bien ¿cuál es la distancia entre estas dos asignaturas?.

A continuación se hace la representación matricial de la gráfica en donde los renglones y columnas representan las asignaturas y en la intersección correspondiente se indica con "1" si hay relación y con "0" si no la hay.

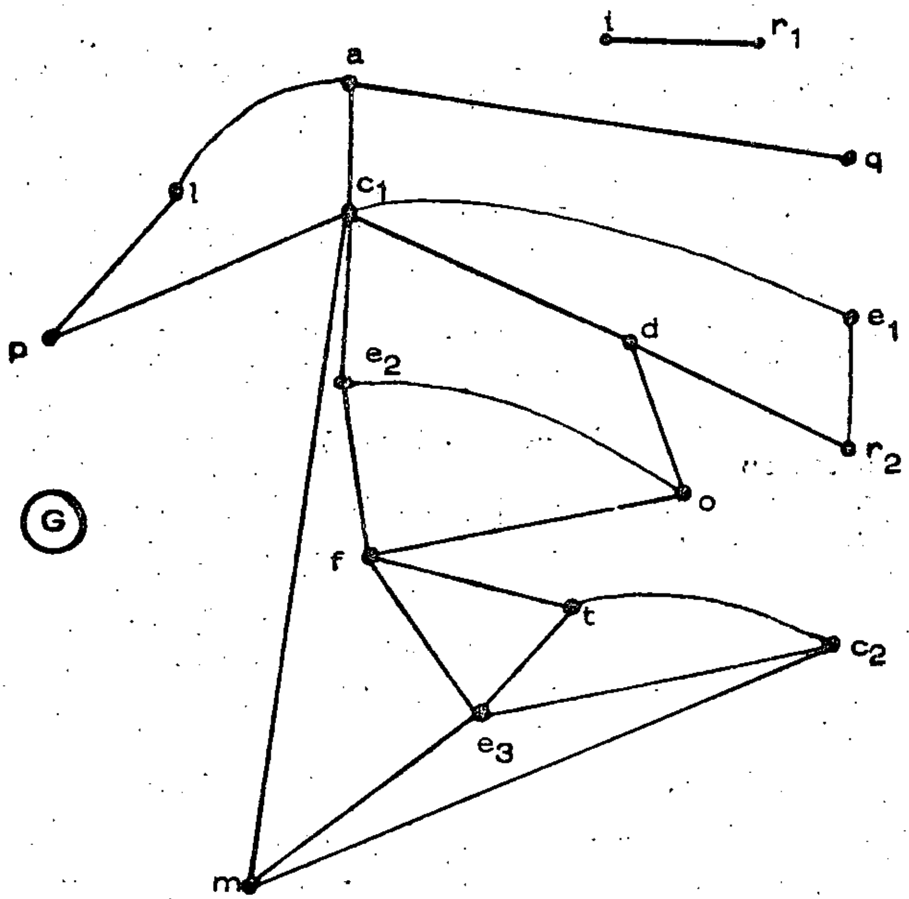
	r_1	d	e_1	r_2	o	a	c_1	e_2	l	p	q	f	t	i	m	c_2	e_3
r_1	x	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
d	0	x	0	1	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e_1	0	0	x	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
r_2	0	1	1	x	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
o	0	1	0	0	x	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0
a	0	0	0	0	0	x	1	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0
c_1	0	1	1	0	0	1	x	1	0	1	0	0	0	0	1	0	0
e_2	0	0	0	0	1	0	1	x	0	0	0	1	0	0	0	0	0
l	0	0	0	0	0	1	0	0	x	1	0	0	0	0	0	0	0
p	0	0	0	0	0	0	1	0	1	x	0	0	0	0	0	0	0
q	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	x	0	0	0	0	0	0
f	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	x	1	0	0	0	1
t	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	x	0	0	1	1
i	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	x	0	0	0
m	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	x	1	1
c_2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	x	1
e_3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	1	1	x

r_1: redacción.
d : dinámica.
e_1: estática.
r_2: resistencia de materiales.
o : propagación de ondas.
a : álgebra.
c_1: cálculo diferencial e integral.
e_2: ecuaciones diferenciales.
l : lógica.

p : programación de computadoras.
q : química.
f : series de fourier.
t : transformadas.
i : ingeniería y sociedad.
m : electromagnetismo.
c_2 : circuitos eléctricos.
e_3 : electrónica.

De la tabla (parecida a los listados usuales de asignaturas), difícilmente podrá hacerse un análisis de trayectorias.

Haciendo un diagrama de la gráfica.



La distancia en esta gráfica, desconexa (ver $i-r_1$), entre a y e_3 sería, de acuerdo con el criterio anterior : 3, correspondiente a la trayectoria

$$(a, c_1, m, e_3)$$

con lo cual, si al alumno se le permitiese cursar las asignaturas correspondientes a esta trayectoria mínima, seguramente no aprendería electrónica.

Se puede de inmediato arguir: que en la gráfica no están contempladas todas las relaciones; lo cual es absolutamente cierto.

Pero es usual que al alumno se le obligue a cursar todas las materias de diversos paquetes, uno de los cuales, hasta la asignatura de la electrónica, puede ser el que se mostró en la figura y entonces:

a). El alumno no conozca en forma sistemática y racional los posibles caminos que lo pueden guiar al área de sus intereses.

b). No conozca cuales son las materias relevantes para su "vocación".

c). No vea, como tampoco lo vieron los "expertos", la relación o el valor relativo, o las estructuras de conocimientos que deben buscarse a través de la interrelación de asignaturas.

d). Que el alumno no vea la necesidad de asignaturas tales como "i" y "r_1" que, de acuerdo con esta gráfica, están desconectadas del resto.

e). Que el alumno no llegue a integrar un conocimiento sólido en virtud de que el esquema académico tampoco lo está, etc., etc.

Resulta obvio de este esquema que:

i). Faltan relaciones.

ii). Que deben especificarse valores a cada conexión, y a cada asignatura.

iii). Que deben distinguirse trayectorias que conduzcan a diversas estructuraciones.

iv). Que el puro planteamiento de objetivos, resolución de problemas y evaluación no resuelve el problema etc., etc.

3.2. Árboles de expansión

En problemas de búsqueda (solución de problemas, formulación y verificación de hipótesis o conjeturas, prueba de sistemas, etc.) suele ser de valiosa ayuda el estudio de las subgráficas de una gráfica G. En particular, enfocamos ahora el estudio de subgráficas T que constituyen árboles y de éstos específicamente los de expansión.

3.2.1. Definición: Árboles de expansión

Un árbol T es un árbol de expansión en una gráfica conexa G

si T es

una subgráfica de G

tal que

contiene a todos los vértices de G.

(es una especie de esqueleto de la gráfica G).

Notas:

a) De todos los árboles $T_i \subset G$ los de expansión son los que tienen el mayor número de ramas y se denominan:
subgráficas máximas de tipo árbol de la gráfica G.

b) Los árboles de expansión sólo se definen para gráficas conexas, (debido a la conectividad de los árboles).

c) Cada componente de una gráfica no conexa tiene árboles de expansión.

d) Para determinar los árboles de expansión de una gráfica, basta con eliminar ramas que den lugar a circuitos.

e) Si e_{ij} es una arista de T y

$T \subset G$

o sea

$e_{ij} \in T$

se dice que e_{ij} es una rama de T.

f) Si e_{kr} es una arista de

G

tal que

$$e_{kr} \notin T$$

entonces se dice que e_{kr} es una cuerda de T. A e_{kr} suele también denominársele vínculo (Link).

g) Puede suceder que una cuerda de G para un árbol T, sea una rama para otro árbol $T' \subset G$. O bien que una rama de T sea una cuerda en G para T'.

h) Si T es un árbol de expansión de G y

$$T \subset G$$

entonces

$\bar{T}$

es un conjunto de cuerdas

tal que

$$T \cup \bar{T} = G$$

i) De acuerdo con las definiciones anteriores es fácil inferir que si

$\boxed{\text{G tiene "n" vértices y "e" ramas}}$

entonces un árbol de expansión de G, tiene

$\boxed{\text{n-1 ramas } (T)}$

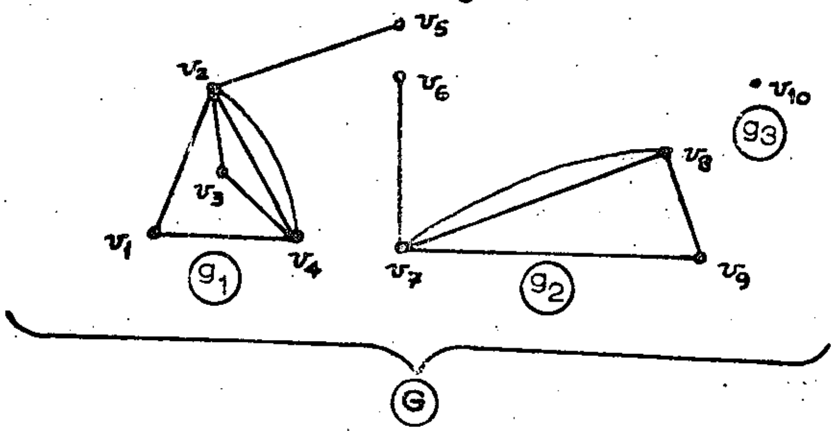
y hay

$\boxed{\text{e-(n-1) cuerdas } (\bar{T})}$

j) De lo anterior, para obtener un árbol de expansión en G, hay que eliminar e-(n-1) cuerdas

(lo cual elimina los circuitos de G.)

k) i) Supóngase la siguiente gráfica



evidentemente consta de tres componentes

g_1: $(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5)$

g_2: (v_6, v_7, v_8, v_9) y g_3: v_{10}

ii) La

componente g_1 tiene

5 vértices y 7 ramas

componente g_2 tiene

4 vértices y 5 ramas

componente g_3 es un vértice aislado y tiene

1 vértice y o ramas

iii) Si representamos con

k

el número de componentes entonces, en este caso, k=3

iv) El número total de ramas de G es

e = 12 ramas

v) En cada componente el número total de ramas, nunca es menor que el número total de vértices menos uno:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{para } g_1: & \boxed{e \geq n-1} \\ & 7 \geq 5-1 \\ \text{para } g_2: & 5 \geq 4-1 \\ \text{para } g_3: & 0 \geq 1-1 \end{array}\right\} k=3$$

Para la gráfica completa G:

$$12 \geq 10-3$$

o sea

$$\boxed{e \geq n-k}$$

(k porque hay que restar un 1 por cada componente).

vi) Se utiliza la siguiente terminología para los conceptos anteriores:

I) Rango de G: número de ramas en los árboles de expansión de G:

o sea

rango $\boxed{r=n-k}$

II) Nulidad de G: número de cuerdas de G, o sea

nulidad $\boxed{\mu=e-n+k}$

vii) En la gráfica G:

rango $r=10-3=7$

nulidad $\mu=12-10+3=5$

viii) De las definiciones de rango y nulidad se obtiene directamente

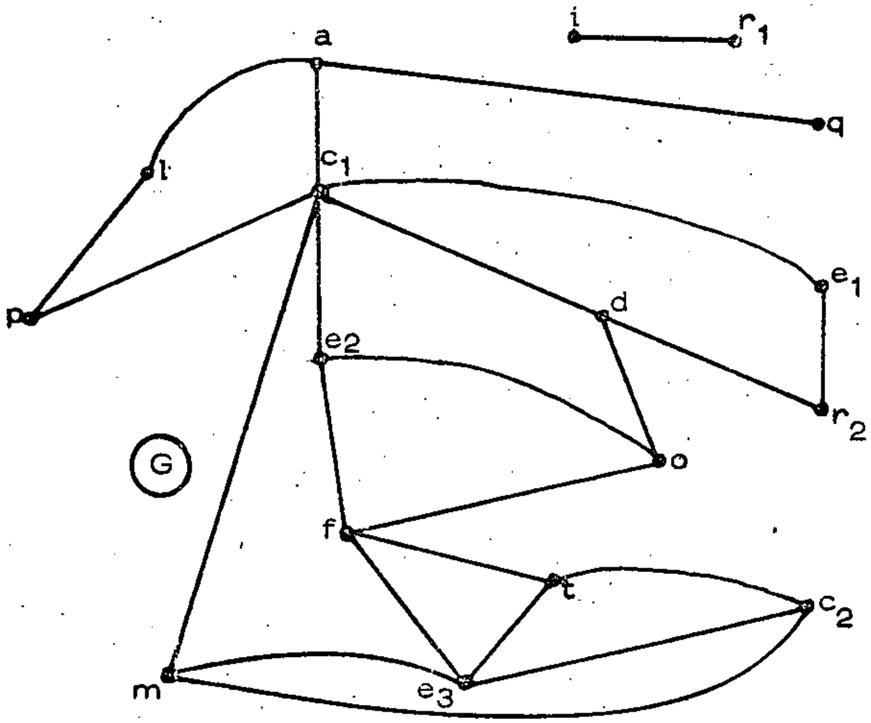
$$\boxed{\text{rango + nulidad = número de ramas de G}}$$

o sea

$$\boxed{r+\mu=e}$$

3.2.2. Ejemplo

Considérese la gráfica del ejemplo b) del apartado 3.1.7.4.



Para determinar el número de ramas de G, aparte de contarlas directamente en el esquema, se puede llevar a cabo un proceso más sistemático a partir de la propia gráfica o de la matriz: 1) determinar el grado de cada vértice:

$g(r_1)=1$	$g(e_2)=3$	$g(m)=3$
$g(d)=3$	$g(l)=2$	$g(c_2)=3$
$g(e_1)=2$	$g(p)=2$	$g(e_3)=4$
$g(r_2)=2$	$g(q)=1$	
$g(o)=3$	$g(f)=4$	
$g(a)=3$	$g(t)=3$	
$g(c_1)=6$	$g(i)=1$	

La suma de grados de la gráfica es

$$\underline{\sum g(v_i) = 46}$$

Previamente se había establecido que

$$\sum g(v_i) = 2\,e$$

por lo tanto

$$\underline{e = 23}$$

Se puede también verificar que la suma de los vértices con grado impar es un número par

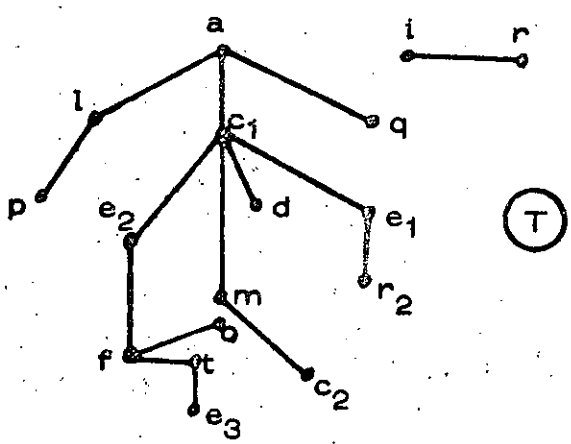
$$r_1,\ d,\ o,\ a,\ e_2,\ q,\ t,\ i,\ m,\ c_2$$

o sea <u>10 vértices.</u>

Debe observarse que en la gráfica anterior

$\underline{k=2}$ (tiene dos partes).

Construyamos el siguiente <u>árbol de expansión</u> (uno para cada componente pues es una gráfica desconexa).



La gráfica G y el árbol T tienen

$$\underline{n = 17 \text{ nudos}}$$

Por lo tanto

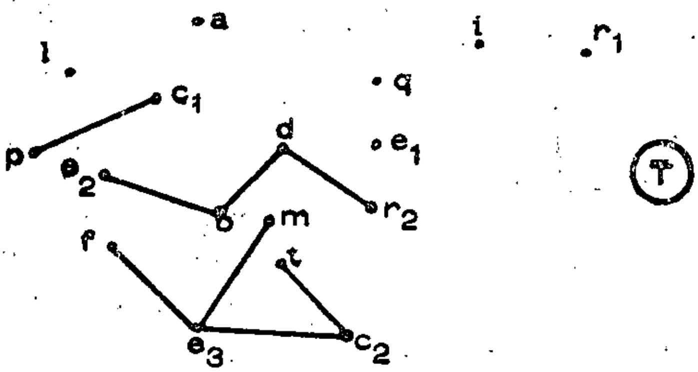
$$r \text{ (rango)} = n - k = 17 - 2 = 15$$

$$\mu \text{ (nulidad)} = e - r = 23 - 15 = 8$$

o sea que debe haber 8 cuerdas entre T y G:

$$\left.\begin{array}{ll} (p, c_1) & (m, e_3) \\ (d, o) & (f, e_3) \\ (d, r_2) & (t, c_2) \\ (e_2, o) & (e_3, c_2) \end{array}\right\} \text{Conjunto de cuerdas}$$

Representando el <u>conjunto de cuerdas:</u>



Resulta sencillo, en este caso verificar

$$\underline{T \cup \mathcal{T} = G}$$

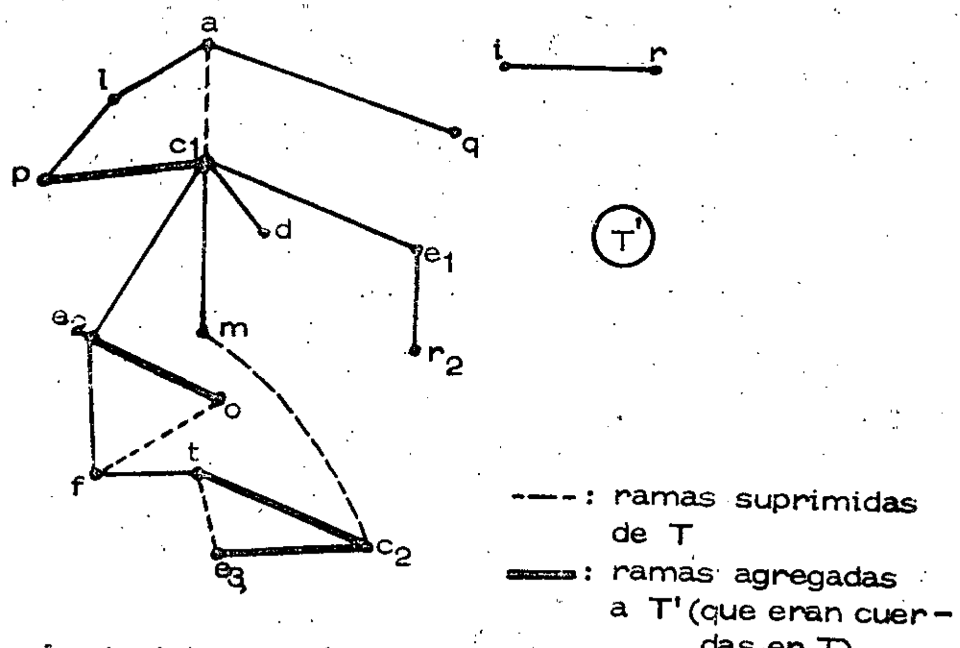
De la gráfica T (árbol) se podrían hacer algunos comentarios, por ejemplo, si al alumno al que se hizo referencia en el apartado 3.1.7.4 le interesa tener un "cierto" dominio de la asignatura e_3 (electrónica), se le podría recomendar que diera una especial atención a las materias de la trayectoria

$$(a, c_1, e_2, f, t, e_3)$$

dentro de las restricciones que ya tenía la gráfica original G.

Sin embargo, habría que revisar, dentro del conjunto de cuerdas, qué vínculos podrían tener relevancia en el propósito de llegar a e_3. Por ejemplo: (t,c_2) (c_2, e_3) u otras que permitan la integración de un conocimiento básico previo por ejemplo (p,c_1), (o,e_2), etc., aunque algunas de ellas no estén indicadas.

Analizando otro árbol de expansión T':



Este árbol, como el anterior, tendrá la misma nulidad

$$\mu = e - r = 8$$

pero no contendrá las mismas cuerdas.

De hecho T' se obtiene del anterior T, <u>suprimiendo</u> las ramas

(a,c_1)

(m,c_2)

(t,e_3)

(f,o)

Y agregándole a T:

(t, c_2)

(c_2, e_3)

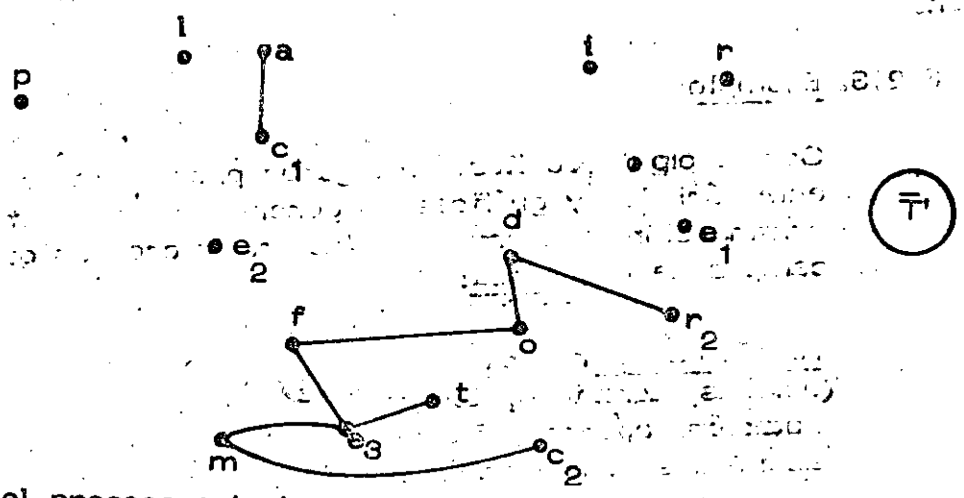
(p, c_1)

(e_2, o)

De esta manera tomando como base T, formamos T', cuyo conjunto de cuerdas es ahora

$\cancel{(p, e_1)}$	(m, e_3)	(a, c_1)
(d, o)	(f, e_3)	(f, o)
(d, r_2)	$\cancel{(t, e_2)}$	(m, c_2)
$\cancel{(e_2, o)}$	$\cancel{(e_3, e_2)}$	(t, e_3)

Representando el conjunto de cuerdas:



Siguiendo el proceso anterior: partiendo de un árbol del cual se eliminan ramas y agregan cuerdas, pueden generarse todos los árboles de expansión de una gráfica. En algunas aplicaciones, como la que se está presentando, esto permite analizar diversas relaciones o estructuras T, T', etc. en cada árbol de expansión, y las consecuencias de intercambiar ramas por cuerdas a través de los conjuntos de cuerdas T̄, T̄', etc.

TABLA 1

	T	S	E	R	M	A	H	D	A_c	P	A_t	I	C	O	M_c
T	x	2	2	2	2	3	1	2	0	1	3	2	3	2	2
S		x	2	2	3	2	1	2	1	2	2	2	2	2	2
E			x	2	2	2	1	2	1	1	1	3	2	2	1
R				x	2	2	2	2	1	2	3	2	3	2	2
M					x	3	2	2	0	2	3	2	3	2	2
A						x	2	2	2	2	3	2	3	3	1
H							x	2	0	0	2	1	2	1	3
D								x	0	2	3	2	2	2	1
A_c									x	2	0	0	1	2	2
P										x	1	1	2	1	2
A_t											x	1	3	2	2
I												x	2	2	1
C													x	2	2
O														x	2
M_c															x

Para las relaciones de la tabla 1 anterior se han supuesto los siguientes "pesos":

0: relación muy débil o nula
1: relación débil
2: relación fuerte
3: relación directa indispensable

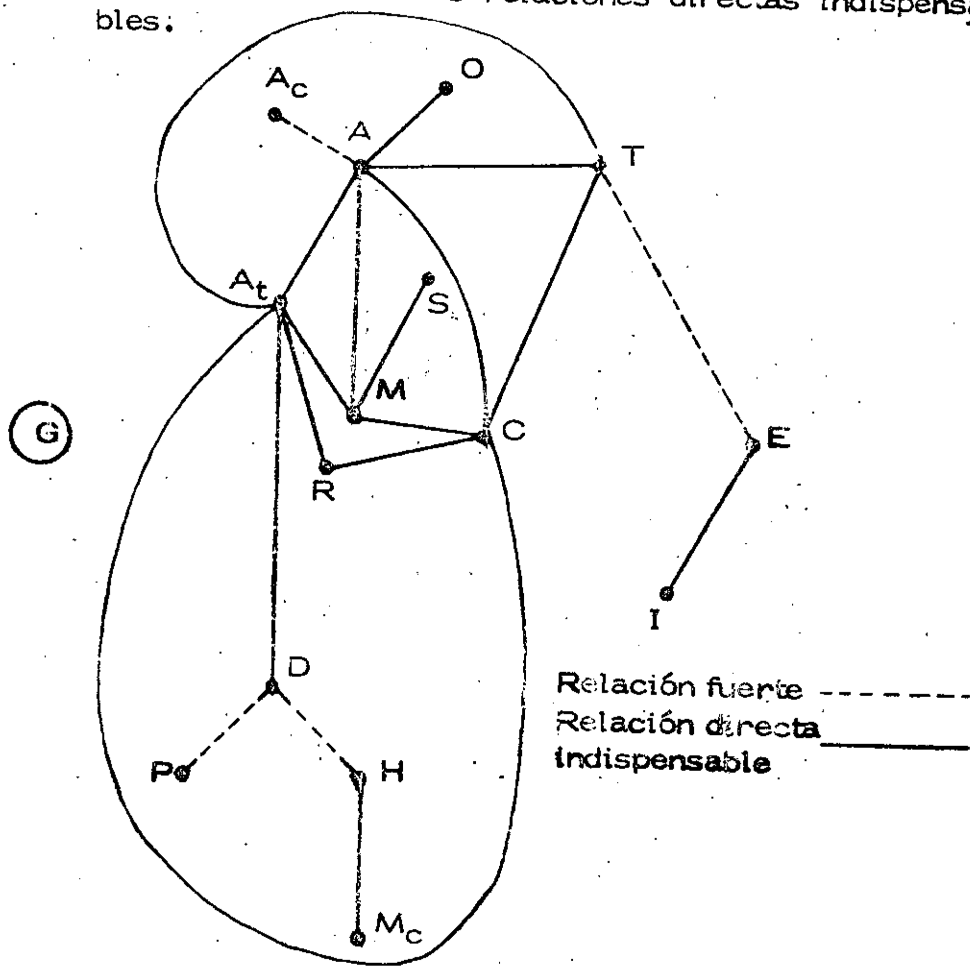
Para evitar ramas innecesarias, se especifican las si - guientes reglas :

i) Si (a, b), (b, c), (c, d) tienen una relación fuerte o directa indispensable y (a, d) es fuerte, entonces eli minamos (a, d)

ii) Las mismas relaciones pero (a, b), (b, c) y (c, d) son fuertes o directas indispensables y (a, d) es débil, entonces eliminamos a esta última,

iii) Suponiendo que en (a, b), (b, c) y (c, d) alguna es dé bil y (a, d) es fuerte, entonces incluimos a (a, d).

iv) Siempre incluimos lás relaciones directas indispensa bles.



De la gráfica se puede observar que

i) es conexa

ii) quedan cuatro relaciones fuertes después de establecer las relaciones directas indispensables.

iii) no aparece explícita ninguna relación débil.

iv) el grado de cada vértice de acuerdo con el esquema es:

$g(T)=4$	$g(A)=6$	$g(A_t)=6$
$g(S)=1$	$g(H)=2$	$g(I)=1$
$g(E)=2$	$g(D)=3$	$g(C)=5$
$g(R)=2$	$g(A_c)=1$	$g(O)=1$
$g(M)=4$	$g(P)=1$	$g(M_c)=1$

La gráfica tendría asociada la Tabla 2 en la que sólo se consignan los valores de las ramas de Ⓖ.

El número de ramas de Ⓖ se puede obtener contando en la gráfica, o de

$$\sum_i g(v_i)=2e$$

$$40=2e$$

$$\therefore \underline{e=20}$$

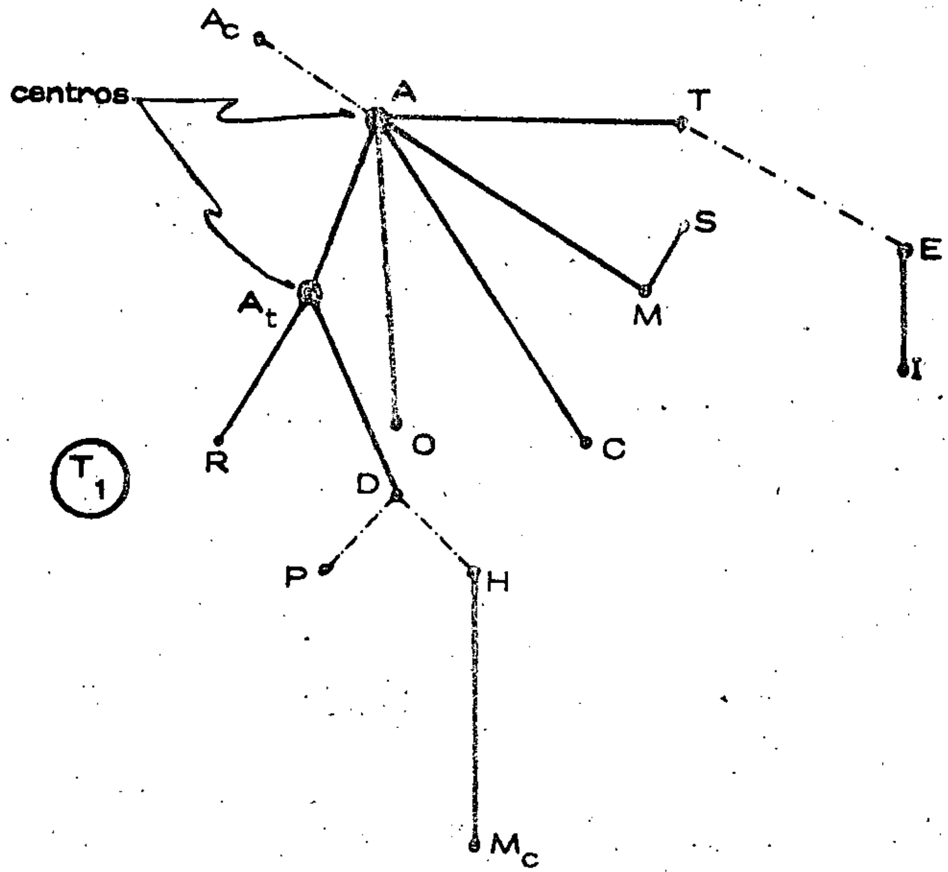
TABLA 2

	T	S	E	R	M	A	H	D	A_c	P	A_t	I	C	O	M_c
T	x	–	2	–	–	3	–	–	–	–	3	–	3	–	–
S		x	–	–	3	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–
E			x	–	–	–	–	–	–	–	–	3	–	–	–
R				x	–	–	–	–	–	–	3	–	3	–	–
M					x	3	–	–	–	–	3	–	3	–	–
A						x	–	–	2	–	3	–	3	3	–
H							x	2	–	–	–	–	–	–	3
D								x	–	2	3	–	–	–	–
A_c									x	–	–	–	–	–	–
P										x	–	–	–	–	–
A_t											x	–	3	–	–
I												x	–	–	–
C													x	–	–
O														x	–
M_c															x

Para obtener un árbol de expansión podremos suprimir las siguientes ramas en los circuitos de G:

$$(A_t, T),\quad (A_t, M),\quad (A_t, C),\quad (R, C),\quad (C, M) \text{ y } (C, T)$$

(las cuales constituyen el conjunto de cuerdas $\bar{\bar{T}}_1$).



Notas

i) Obsérvese que no puede suprimirse ninguna relación fuerta sin dejar desconexa la gráfica original

ii) El rango de la gráfica es

$$r = n - k$$

$$k = 1, \; n = 15 \quad \therefore \boxed{r = 14}$$

Se puede verificar cómo el rango de G y el número de ramas del árbol T_1 coinciden.

iii) la nulidad de G es

$$\mu = e - n + k$$

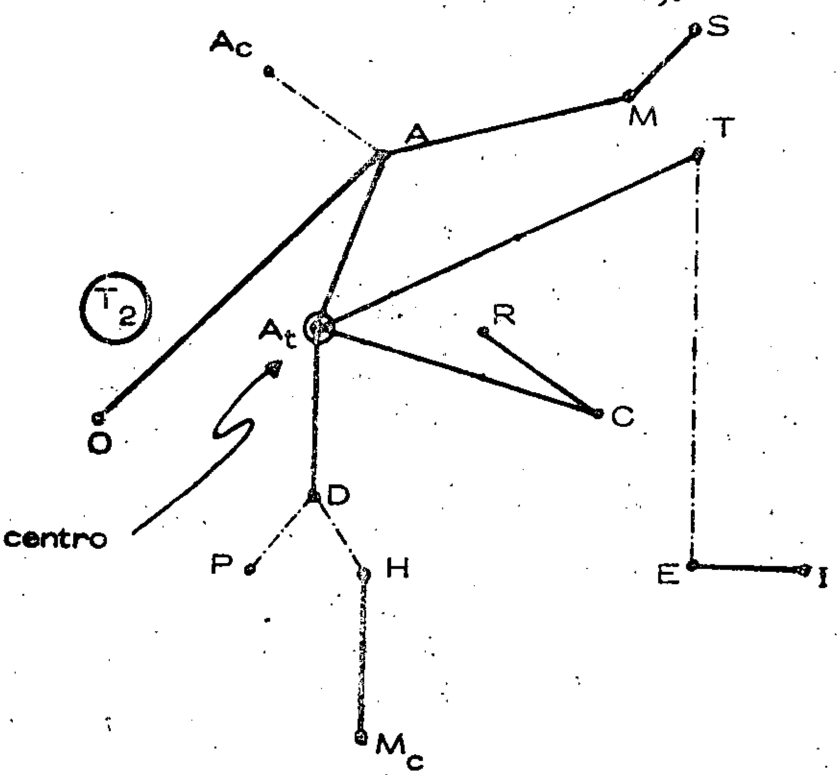
$$\mu = 20 - 15 + 1 = 6$$

que coincide con el número de cuerdas en $\bar{T}_1$.

iv) Como antes, a partir de T_1 se pueden generar otros árboles por intercambio de ramas con cuerdas .

v) Generando otro árbol T_2 es posible revisar, por comparación, la posibilidad de relaciones "más adecuadas" en un programa educacional, o en un estudio de integración temática, o en la investigación de un campo. Los árboles de expansión pueden representar diversas formas de ver la interrelación de elementos de G.

Con los intercambios mostrados más abajo (cuerda G/rama T_1 el numerador sustituye al denominador).



Sustituciones

$(R,C)/_{(A,C)}$; $(At,C)/_{(A_t,R)}$;$(At,T)/_{(A,T)}$

Notas y conceptos complementarios.

a) En este caso, podría estarse investigando la importancia del análisis teórico (A_t) en la composición (C), en lugar de utilizar ciertas reglas o recetas (por ejemplo progresiones armónicas). En el árbol T_2 se supeditaría la composición al análisis teórico de obras trascendentales.

b) Otro aspecto que podría estarse analizando es el de la influencia del ritmo (R) en la composición sin necesidad de vincularlo a la armonía (A), lo cuál es lo tradicional, pero quizá, no lo natural, etc.

c) En virtud de que se eliminaron las cuerdas, las cuales representaron relaciones directas indispensables, y antes se habían eliminado otras relaciones de la Tabla 1, puede resultar interesante estudiar

la excentricidad y centro de los árboles:

La excentricidad

E (v)

de un vértice (v) en una gráfica G es la distancia de v, en número de ramas, al vértice más alejado de v.

El vértice con la menor excentricidad se denomina centro de la gráfica. En particular, los arboles tienen, uno o dos centros.

Examinemos, por ejemplo, el árbol T_1:

A_c:	A, M, S	: 3	A: A_c	: 1
	A, T, E, I	: 4	T, E, I	: 3
	A, C.	: 2	M, S	: 2
	A, O	: 2	C	: 1
	A, A_t, R	: 3	A_t, R	: 2
	A, A_t, D, P	: 4	A_t, D, P	: 3
Exc. Ac	$\boxed{A, A_t, D, H, Mc \quad : 5}$		$\boxed{A_t, D, H, M_c \quad : 4}$	Exc. A

Para no examinar todos los casos si buscamos el centro, deben buscarse trayectorias que den excentricidades menores que "Exc.A". Por ejemplo T, A, A_t, D, H, M_c daría Exc. T = 5, de donde habría que descartar a T.

Solo A y A_t tienen una excentricidad igual a 4:

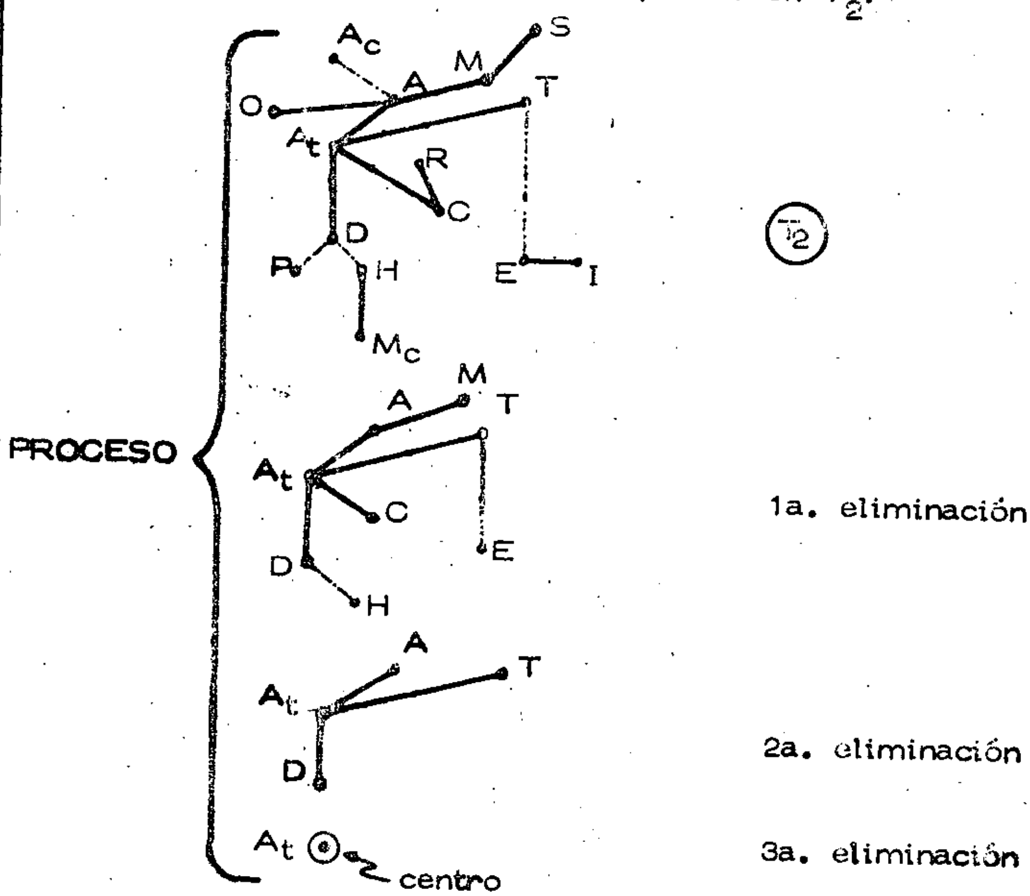
A_t:A, T, E, I

Por lo tanto, en T_1: A y A_t son centros de la gráfica.

d) El árbol T_2 sólo tiene un centro: A_t con excentricidad 3.

e) Un proceso simple para determinar el centro, consta de eliminar todos los vértices suspensos del árbol, y después los del árbol que quede, y así sucesivamente hasta llegar al (o a los) centro (s) del árbol.

Eliminando los vértices suspensos en T_2:



f) El concepto de centro tiene importancia en redes de distribución o transporte. En gráficas como la que analizamos, previa jerarquización, puede representar un tema central (de equilibrio), por ejemplo, en cuanto a valores, o a grado de dificultad, etc.

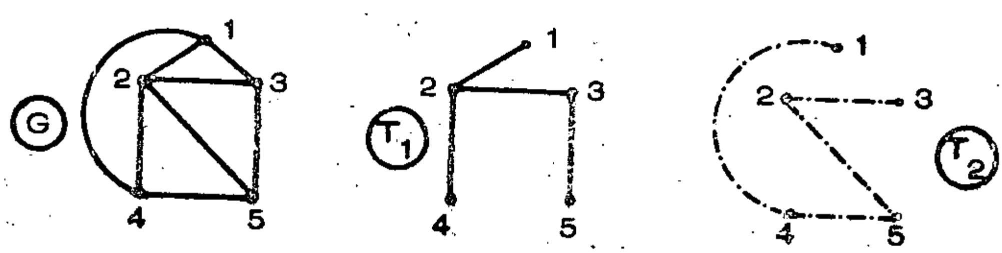
g) Otro concepto que suele resultar de importancia en las aplicaciones es el de <u>distancia entre árboles de expansión.</u>

Este concepto se refiere al número de:

i) ramas de G presentes en un árbol T_1 pero no en otro T_2,

ii) para analizar esta situación utilizamos la suma anillo $T_1 \oplus T_2$ que es una subgráfica de G que contiene todas las aristas de G que están en T_1 o en T_2 pero no en ambos.

iii) sea la gráfica G y sean T_1 y T_2 dos árboles de expansión de G:

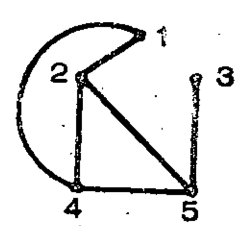


T_1 tiene tres ramas de G que no están en T_2, y T_2 tiene también tres ramas de G que no están en T_1

por lo tanto:

$$T_1 \oplus T_2 \neq G$$

pero la distancia de T_1 a T_2 es tres.



En general se establece que:

$$d\,(T_n, T_p) = \frac{1}{2}\;\underbrace{\text{Número de ramas en}}_{n}\;(T_n \oplus T_p)$$

o bien

$$\boxed{d\,(T_n, T_p) = \frac{1}{2}\;n\,(T_n \oplus T_p)}$$

Se puede demostrar que la distancia entre gráficas satisface los axiomas de la métrica.

iv) en el ejemplo que hemos estado analizando, las ramas

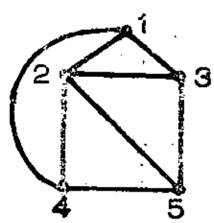
(A_t, R), (A, T), (A, C), (A_t, T), (R, C) y (A_t, C)

son aristas de G que están en T_1 o en T_2, pero no en ambos, por lo tanto constituyen la gráfica $T_1 \oplus T_2$ o sea que:

$$d\,(T_1, T_2) = \frac{1}{2} \times 6 = 3$$

h) La distancia entre dos árboles de expansión, véanse las sustituciones entre dos árboles, representa el mínimo de intercambios (cuerda T/rama T) (G) para pasar de un árbol a otro.

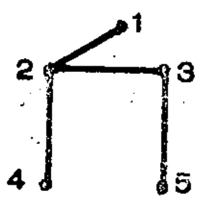
Se habían encontrado para la gráfica

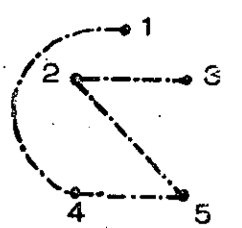


G

los árboles de expansión

T_1





T_2

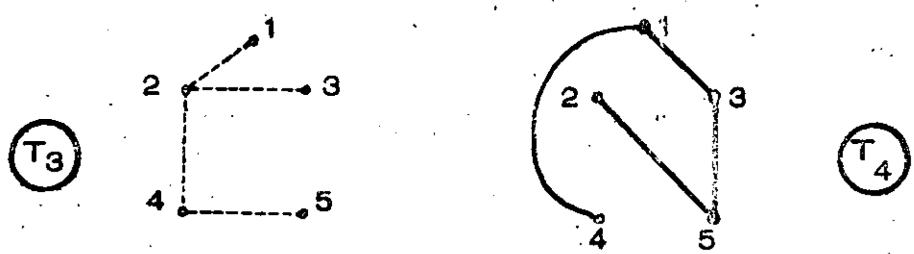
en las cuales

$$d\,(T_1, T_2) = 3$$

El rango de la gráfica conexa (G) es:

$$r = n - 1 = 4$$

Consideremos otros dos árboles:



Es fácil advertir que entre estos dos árboles no hay una sola rama en común, por lo tanto

$$d\,(T_3, T_4) = \frac{8}{2} = 4$$

Comparando las distancias entre árboles de expansión y el rango r de G se tiene que

$$\boxed{\text{máx } d\,(T_r, T_p) \leq r}$$

Por otro lado, se tenía que

$$\text{nulidad } \mu = e - n + k$$

siendo e el número de aristas de G,

$$e = 8,\ k = 1,\ n = 5$$

por lo tanto

$$\mu = 8 - 5 + 1 = 4$$

De esta manera, como μ es el número de cuerdas en G respecto a un árbol cualquiera

$$\boxed{\text{máx } d\,(T_r, T_p) \leq \mu}$$

O sea, como se ve entre T_3 y T_4 nunca se requerirán más de μ cuerdas para pasar de un árbol a otro. De hecho entre T_1 y T_2 sólo se necesitan tres, en vista de que (2, 3) es común

En resumen:

$$\boxed{\text{máx } d\,(T_r, T_p) \leq \text{mín}\begin{cases}\mu\\ r\end{cases}}$$

i) En el caso de los árboles de expansión del problema sobre música se tiene

$$d\,(T_1, T_2) \leq \text{mín}\begin{cases}\mu\\ r\end{cases}$$

en efecto

$$d\,(T_1, T_2) = 3$$

$$r = 14,\ \mu = 6$$

o sea

$$d\,(T_1, T_2) \leq 6$$

j) Para cada árbol de expansión T habrá otro T_j tal que la distancia sea un máximo.

Por ejemplo, sean

$$T_1, T_2, \ldots, T_j, \ldots, T_k, \ldots$$

y supóngase que respecto a

T_1 : el árbol T_j es el que da

$$\text{máx } d\,(T_1, T_j) = \alpha$$

T_2 : el árbol T_k es el que da

$$\text{máx } d\,(T_2, T_k) = \beta$$

y así sucesivamente para cada árbol T habrá otro T_p cuya distancia dé lugar a un valor máximo γ.

Ahora bien, habrá cuando menos un árbol

$$T_c$$

para el cual

$$\text{máx } d\,(T_c, T_i) \quad \text{es menor o igual que}$$

cualquiera de los máximos $\alpha, \beta, \gamma \ldots$

es decir

$$\boxed{\text{máx } d\,(T_c, T_i) \leq \text{máx } d\,(T, T_j)} \quad \forall\, T \in G$$

entonces

$$T_c$$

se denomina <u>árbol central de G.</u>

k) Reflexionando un poco sobre la labor que implica encontrar un <u>árbol central</u>, muy pronto nos encontraremos ante la necesidad de recurrir:

   i) o al uso de una computadora para detectar todos los casos posibles de <u>árboles de expansión</u>

   ii) o a la simplificación de la gráfica redefiniendo los conceptos implícitos o las relaciones.

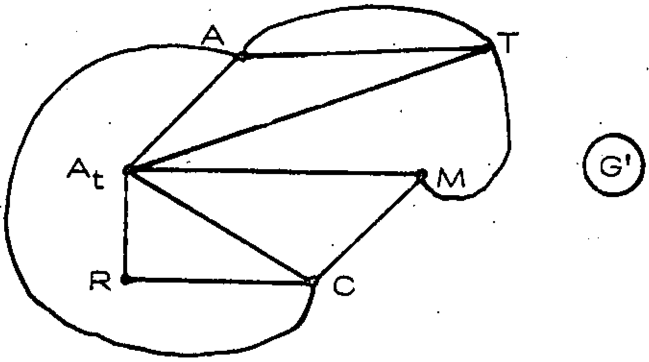
l) Para estimar la labor implícita en la determinación de los árboles de expansión, basta considerar que de la subgráfica que contenga los circuitos de una gráfica G, que tenga n vértices, una sola rama que conecte a cada par de vértices, se generan*

$$\boxed{n^{n-2}}$$

árboles de expansión.

* Desoer, Ch.A y E.S.Kuh. "Basic Circuit Theory". McGraw-Hill. 1969.

En el caso que se está analizando, la subgráfica que contiene a los circuitos de G es



de la cuàl, junto con las trayectorias abiertas se generarían del orden de

$$6^4 = 1296 \text{ árboles}$$

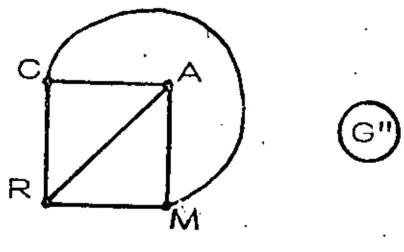
m) En realidad son menos casos, porque falta una rama: (T,C). De cualquier manera es muy elevado el número de casos.

Podríamos redefinir los conceptos implícitos, argumentando que

i) en la estructuración de A,M,C y R ya está implícita la teoría T,

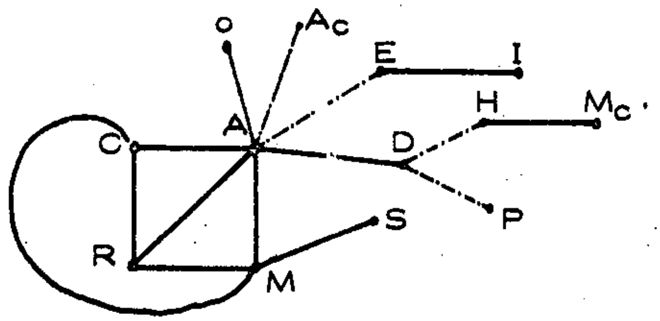
ii) la armonía (A), la melodía (M), la composición (C) se programarían desde un punto de vista teórico-analítico,

de acuerdo con estos dos criterios podríamos reducir la subgráfica anterior a la siguiente (eliminando T y A_t)



En este caso el vértice A es donde se va a centrar el análisis.

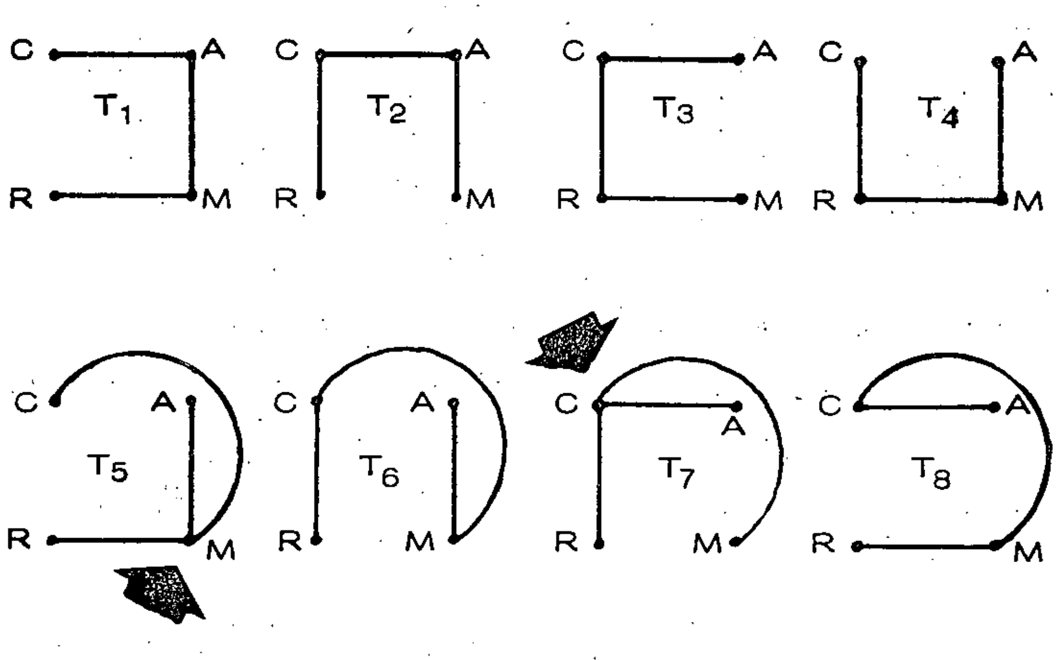
Conectándola con las otras trayectorias abiertas se tendría

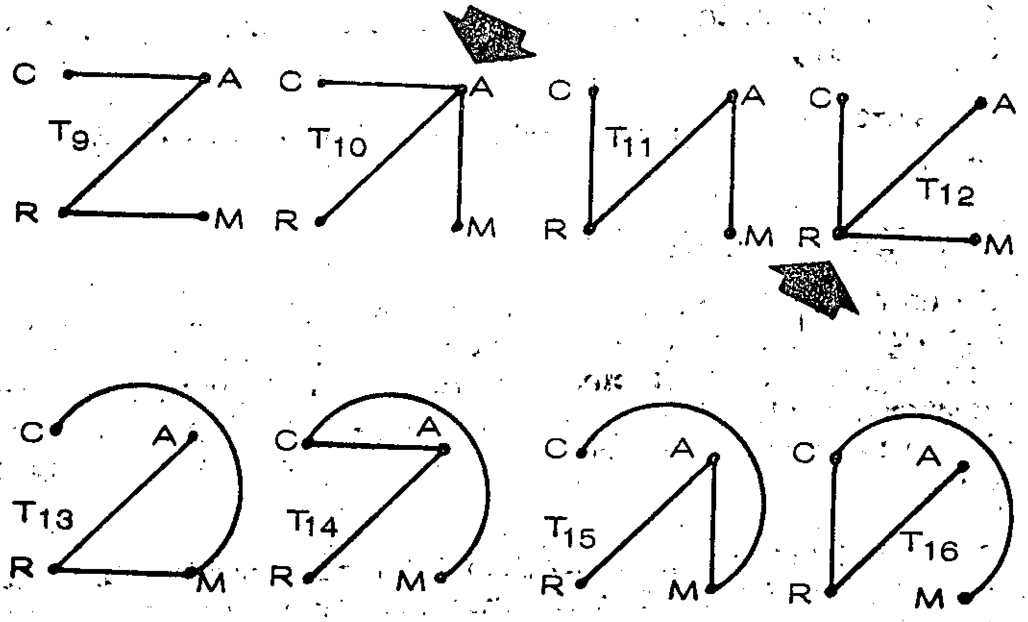


n) Puede considerarse que ha habido una fusión de A, A_t y T en el vértice A. En este caso, atendiendo a G", se generarán

4^2 = 16 árboles

los cuales se ilustran a continuación:





en las cuales

$$\max d(T_1, T_{16}) = 3 = \max d(T_2, T_{13}) = \max d(T_3, T_{15})$$

$$= \max d(T_8, T_{11}) = \max d(T_4, T_{14}) = \max d(T_6, T_9)$$

por otro lado

$$\max_i d(T_5, T_i) = \max_i d(T_7, T_i) = \max_i d(T_{10}, T_i) =$$

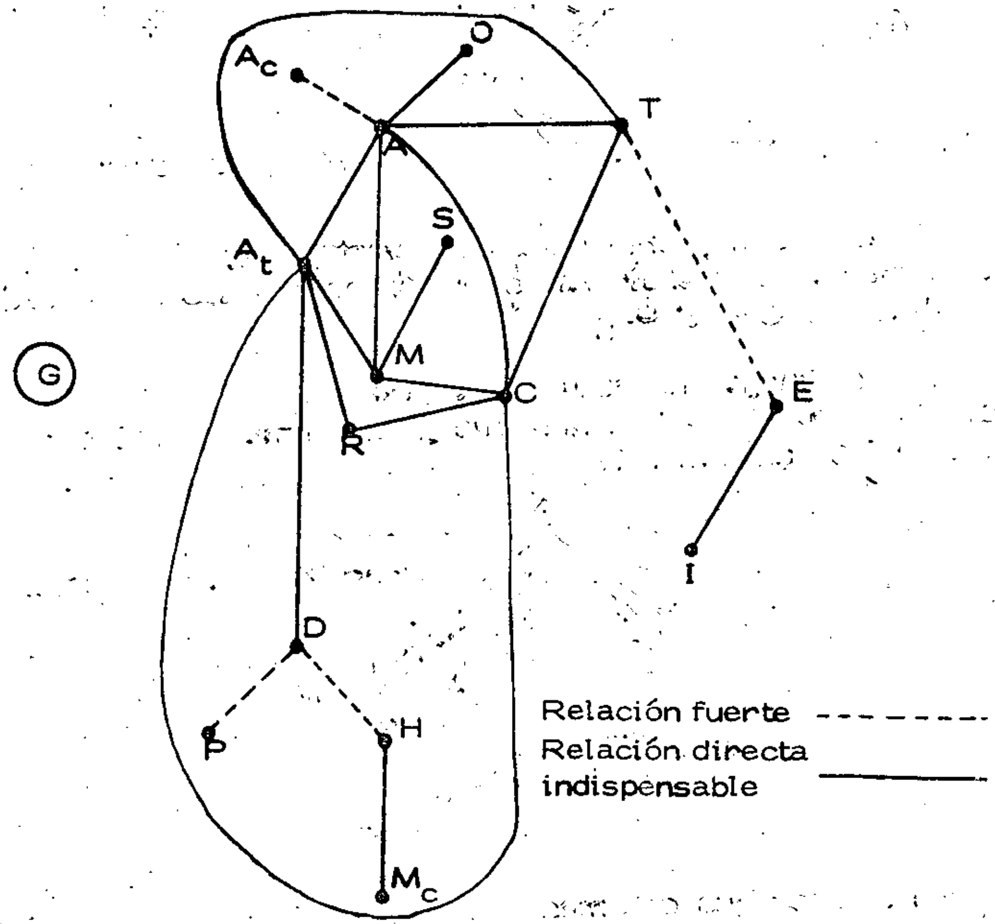
$$\max_i d(T_{12}, T_i) = 2 .$$

o) Los árboles T_5, T_7, T_{10} y T_{12} son centrales y se podrían quizá "explicar" de la siguiente manera:

T_5: se "centra" en la <u>melodía</u>, es decir, la armonía, el ritmo y la composición se estructuran en términos de la melodía (esto podría resultar un enfoque adecuado para un cantante, un flautista, etc.),

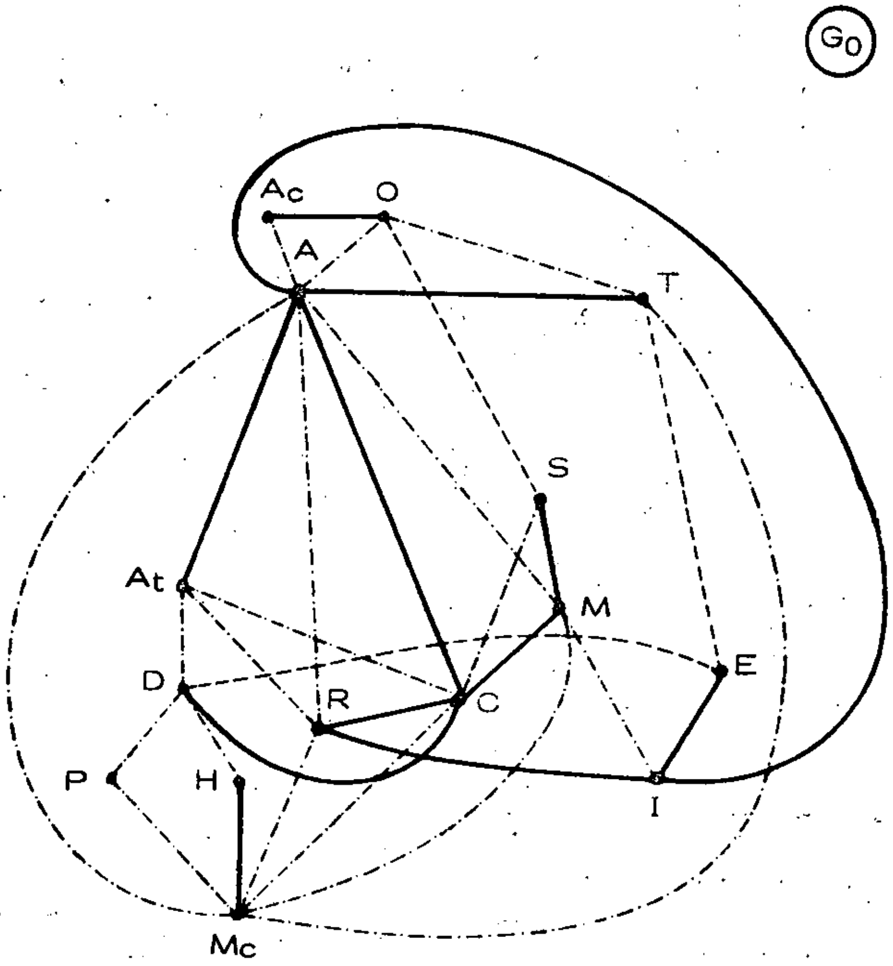
3.2.5. Peso en las ramas.

Considérese la gráfica G que se había propuesto al principio de este ejemplo:



Como ya se había indicado, es relativamente simple interconectar, de acuerdo con algún criterio y/o conocimiento de las áreas implícitas, los vértices con ramas que tengan asociado algún "peso" (dado por un número). Lo que ya no resulta tan sencillo es justificar las relaciones significativas implícitas en la gráfica, o la estructuración "pesada" de la misma.

Supongamos que decidimos modificar la gráfica, cambiando el peso de algunas ramas y añadiendo otras, que ya no responden a los criterios de elección que habíamos asumido para generar a G .



Relación indispensable ————————

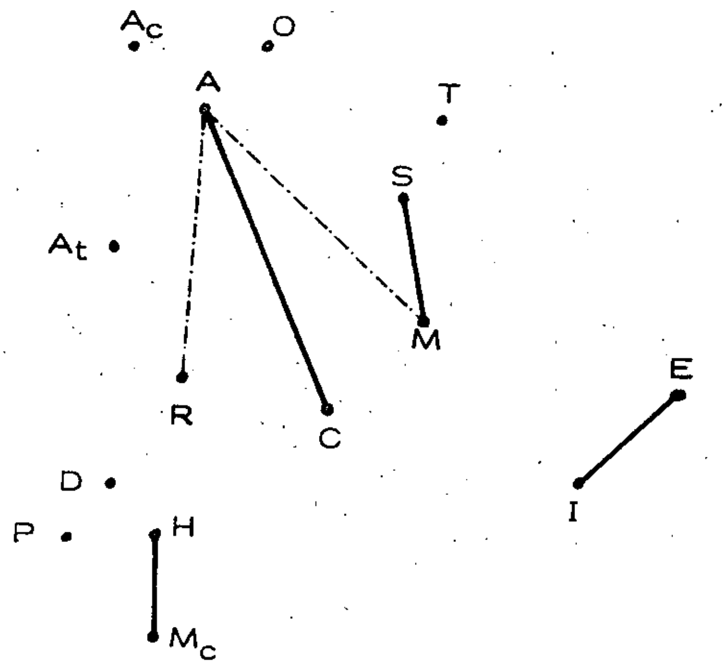
Relación fuerte — - — - — - —

Relación débil - - - - - - - -

De las gráficas G y G_o podemos comprobar ciertos cambios y desde luego la mayor complejidad de G_o. Por ejemplo, se han añadido ramas de relación débil, tales como (S, 0) y (D, E), de relación fuerte, tales como (M, I), (P, M_c), etc. Se han modificado los valores de las ramas (A, M), (T, E), etc.

En estudios de redes de comunicación y transporte, es usual estudiar todos los árboles de expansión hasta encontrar aquellos que den el peso mínimo; suelen denominarse estos árboles de expansión, de distancia más corta o mínimos.

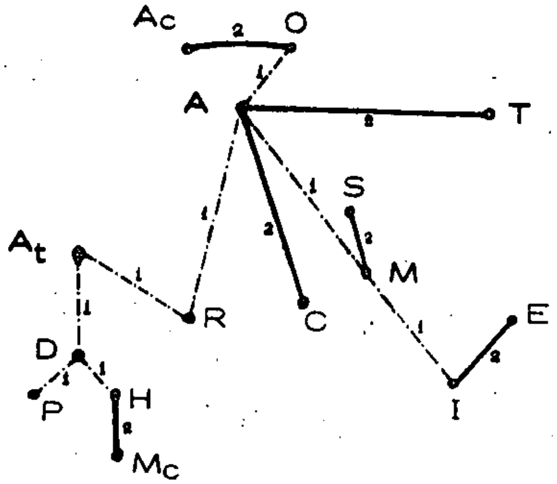
En problemas como el que analizamos, con frecuencia, no se tiene esta libertad total. Es usual, buscar árboles que tomen en cuenta un conjunto de relaciones preestablecidas de acuerdo con algún criterio, por ejemplo las indicadas en la figura siguiente:



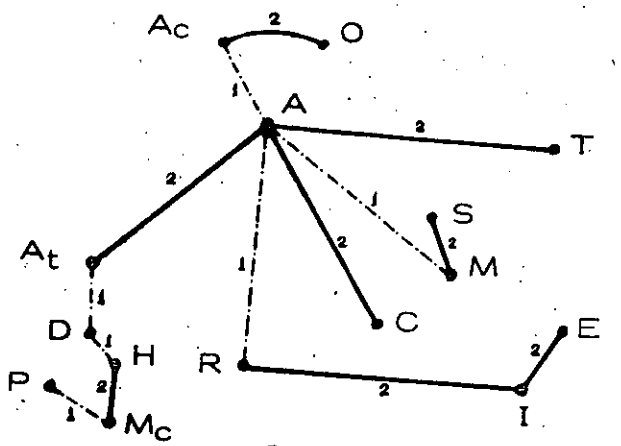
En el ejemplo presente nos puede interesar la condición contraria a la descrita:

Encontrar aquellos árboles de expansión que tengan el mayor peso o árboles máximos.

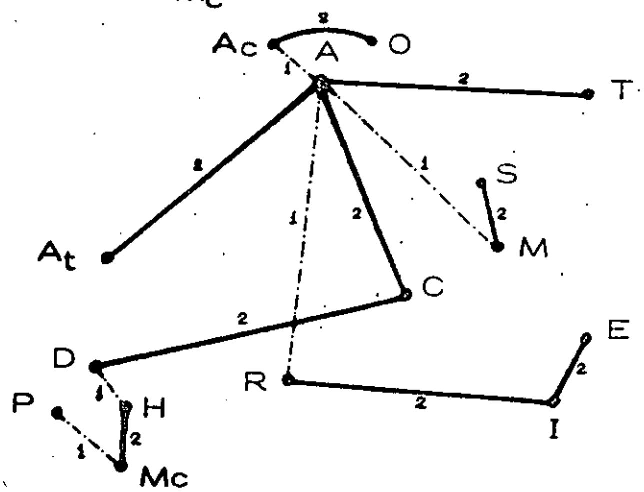
En las siguientes figuras examinamos algunos árboles de expansión, suponiendo que los valores asignados a las ramas son: "o" para la relación débil — — — — — — que no se considera en el siguiente análisis, "1" para la relación fuerte —·—·—·— y "2" para la relación indispensable ————



W = 20



W = 22



W = 23

De esta manera podríamos proseguir analizando árboles de expansión y como puede haber varios con el peso máximo W=23, tratar de estructurar el programa de investigación tomando alguno de ellos como criterio central de relaciones (esto debía compararse con el concepto de distancia en una gráfica central y tomar una decisión).

Para sistematizar el proceso se pueden seguir los siguientes pasos:

i) Consignar en una lista las ramas preestablecidas (l_1),

ii) Hacer una lista del resto de las ramas (l_2),

iii) Elegir* (si se trata de maximizar) una rama con el mayor peso (e'_2) de l_2 de tal manera que no forme un circuito con las de l_1.

iv) Continuar el proceso siempre eligiendo las ramas más pesadas.

Otro procedimiento que proponemos, modificando el de Prim** consiste en formar una tabla (matriz) de los vértices anotando los pesos y alguna indicación para las ramas ya establecidas (encerrados en un círculo).

Notas: 1) Para facilitar el proceso, obsérvese que cada vértice tiene tantas conexiones como su propio grado.

2) En el proceso se van anotando las conexiones de los vértices descartando las que ya se establecieron previamente.

3) Obsérvese que el vértice A puede convertirse en un "cuello de botella" o "estrangulamiento" de la estructuración, si ésta se prevé dentro de un programa posterior de actividades (en ese proceso quizá convenga subdividir los temas o actividades implícitas en A para evitar una concentración o importancia excesiva de un solo tema o área de conocimiento)

*en el caso del camino más corto o del árbol de menor peso, la elección sería de las ramas menos pesadas.

**Prim, R.C. "Shortest Connection Networks and Some Generalizations", Bell System Tech. J. Vol. 36. 1957.

	A_c	A	O	T	A_t	S	D	R	C	M	P	H	E	M_c	I	grado	gr/pesado
A_c	x	1	2	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	2	3
A	1	x	1	2	2	-	-	1	2	1	-	-	-	1	2	9	13
O	2	1	x	1	-	0	-	-	-	-	-	-	-	-	-	4	4
T	-	2	1	x	-	-	-	-	-	-	-	-	0	1	-	4	4
A_t	-	2	-	-	x	-	1	1	1	-	-	-	-	-	-	4	5
S	-	-	0	-	-	x	-	-	1	2	-	-	-	-	-	3	3
D	-	-	-	-	1	-	x	-	2	-	1	1	0	-	-	5	5
R	-	1	-	-	1	-	-	x	2	-	-	-	-	1	2	5	7
C	-	2	-	-	1	1	2	2	x	2	-	-	-	1	-	7	11
M	-	1	-	-	-	2	-	-	2	x	-	-	-	1	1	5	7
P	-	-	-	-	-	-	1	-	-	-	x	-	-	1	-	2	2
H	-	-	-	-	-	-	1	-	-	-	-	x	-	2	-	2	3
E	-	-	-	0	-	-	0	-	-	-	-	-	x	-	2	3	2
M_c	-	1	-	1	-	-	-	1	1	1	1	2	-	x	-	7	8
I	-	2	-	-	-	-	-	2	-	1	-	-	2	-	x	4	7

4) Aparentemente las ramas marcadas con "0" - - - - - no tienen trascendencia y podrían eliminarse. Si se incluyeran, se supone que están justificadas por algún criterio o estimación previa. En el análisis más minucioso de los árboles de expansión óptimos, su relevancia puede variar y puede llegar a convenir alterar su peso.

Proceso

i) empezamos por considerar los puntos ya interconectados.

renglones

$$\left.\begin{array}{c} A \\ R \\ C \\ M \\ S \\ H \\ E \\ Mc \\ I \end{array}\right\} \text{6 ramas}$$

ii) teniendo n=15 nudos habrá todavía 8 ramas qué determinar para obtener el total posible

$$n - 1 = 14$$

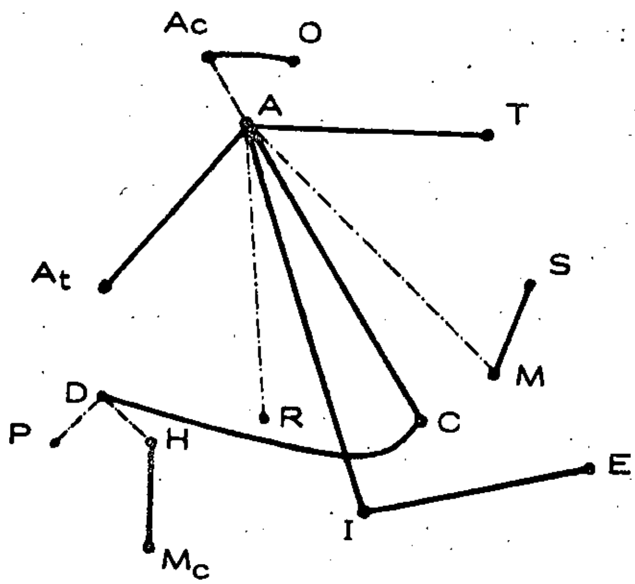
iii) comparando los renglones anteriores (los que ya tienen círculos) buscamos valores máximos, distintos a los de los círculos, que además no formen circuitos.

Por ejemplo en A: podemos escoger: T, A_t e I. Escogiendo los tres, no se forman circuitos.

iv) examinando el renglón R, no podemos elegir ninguna rama de valor 2 porque se formarían circuitos.

v) en el renglón C podemos escoger a D.

vi) de los subsecuentes renglones no podemos elegir a ninguna rama de valor 2 sin formar circuitos.



Obsérvese la tabla de la página 81, a partir de la cual se obtuvo este árbol.

vii) de los pasos iii) y v) podríamos buscar conexiones con T, A_t, I y D.

Del renglón T: no hay ya ninguna rama con valor 2

Del renglón A_t: no hay ya ninguna rama con valor 2

Del renglón I: no hay ya ninguna rama con valor 2

Del renglón D: no hay ya ninguna rama con valor 2

viii) empezamos nuevamente en A: elegimos A_c.

ix) una vez conectado A_c, buscamos el valor máximo en el renglón A_c: O (del cual no podemos trazar ninguna rama de peso 2).

x) ya se han analizado todos los demás, por lo que regresando a D trazamos DH y DP y queda completo el árbol con un peso máximo

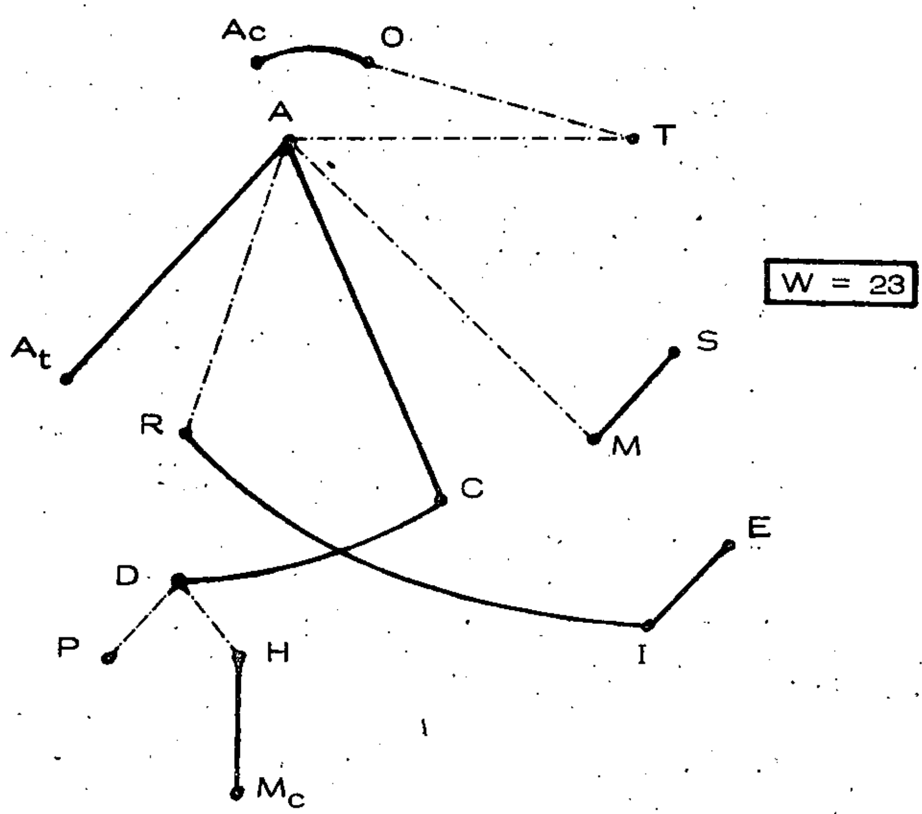
$$\boxed{W = 23}$$

que concuerda con un peso ya obtenido con otro árbol.

Otra restricción que puede imponerse es la de que a un vértice no concurran más que determinado número de ramas (evitando así los "estrangulamientos" o los "vértices de concentración"). (esto se verá con mayor detalle en la conectividad de vértices).

Por ejemplo, podemos convenir en que el grado de A no sea mayor de 5, lo cuál se denomina optimización con restricción de grado.

Por ejemplo:



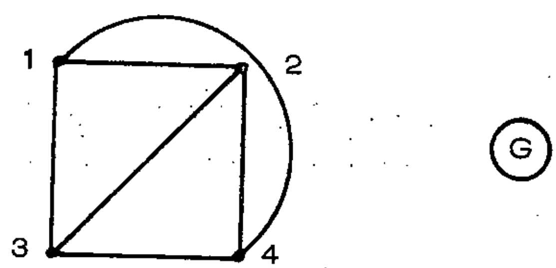
Nota: Es conveniente, en muchos problemas, tratar de buscar que los árboles más pesados coincidan con los árboles centrales.

3.2.6. Proceso de obtención de los árboles de expansión de una gráfica conexa.

De manera similar a la que se obtuvieron las trayectorias mínimas en el problema 3.1.7.4. (Aplicaciones del concepto de distancia) utilizando los árboles como instrumento para detectar combinaciones posibles de árboles, resulta factible establecer un método para obtener los árboles de expansión de una gráfica conexa.

Ilustraremos el método con el siguiente ejemplo:

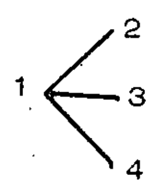
Supóngase la gráfica



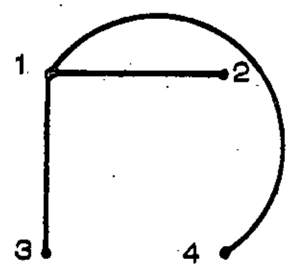
Se puede observar que como cada vértice está conectado con los demás, el grado de cada vértice es el mismo.

$$g(1) = g(2) = g(3) = g(4) = 3$$

Iniciando un árbol con cada vértice se tienen tres alternativas:

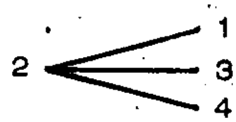


Pero, estas mismas tres alternativas, tal como se indica en el esquema, constituyen un árbol de expansión:

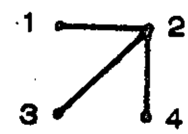


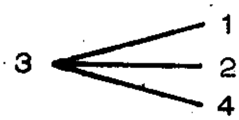
1er. caso

Lo mismo sucederá con los otros vértices:

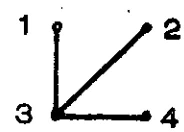


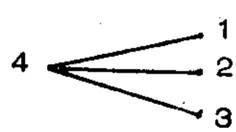
2o. caso



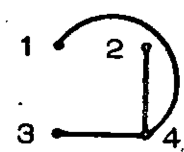


3er. caso

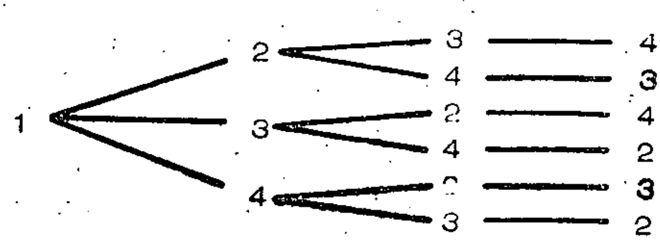




4o. caso

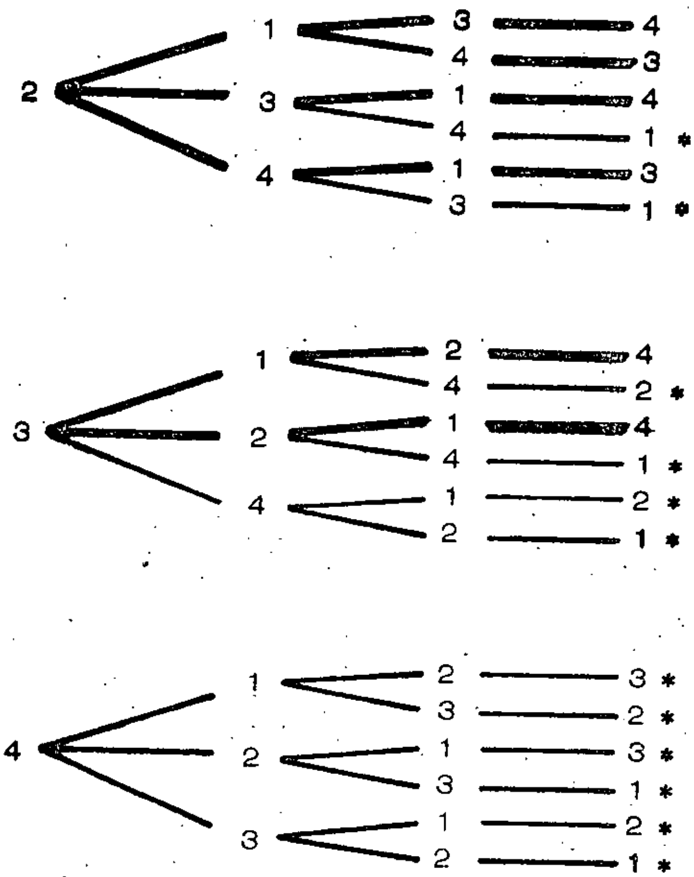


Prosiguiendo con las tres alternativas para el vértice 1 podemos construir un árbol que proporciona seis alternativas más:



con lo que ahora se tienen diez casos.

Como la gráfica G no está orientada, las diferentes alternativas se pueden tomar en cualquier sentido, por lo que a partir de las alternativas para los vértices 2, 3 y 4, se tomarán en cuenta solamente las que no estén ya indicadas en alguno de los casos anteriores.



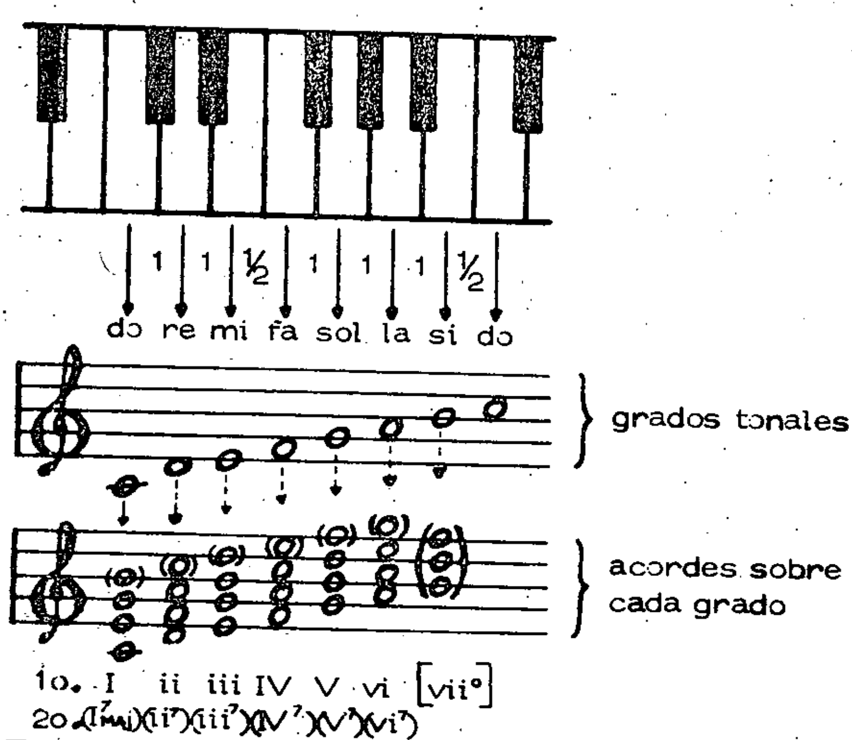
Total: 16 alternativas.

*Ya está incluída en alguna de las alternativas anteriores.

Apéndice 3.A. Aplicación de gráficas en procesos secuenciales. Progresión de acordes.

1er. Caso: Armonización de escalas.

En el análisis, la composición y la improvisación musicales es usual, dentro de la teoría de la armonía, indicar las posibles progresiones (o sucesiones) de acordes (tres o más notas que deben ejecutarse simultaneamente) en consonancia con la melodía y compatible con un determinado esquema rítmico. Los acordes más simples están formados por tres notas y se denominan triádas. Los intervalos entre las notas de una triada son de tercera y quinta. En particular, en la siguiente figura se ilustra cada uno de los grados de la escala de Do (refiriéndolos a una octava de "blancas" del piano).



En la parte inferior se indican las triadas, tres notas, construidas sobre cada grado tonal:

I, ii, iii, IV, V, vi y vii°

En esta exposición nos limitaremos a los acordes formados entre I y vi, es decir, eliminaremos el acorde de vii° en nuestro análisis.

En los espacios entre los nombres de las notas se indican los siguientes números

do	1	re	1	mi	½	fa	
	1	sol	1	la	1	si	½ do.

Estos números se refieren al intervalo de un grado tonal al siguiente, por ejemplo:

de do a re existe un intervalo de 1,
de re a mi existe un intervalo de 1,

pero

de mi a fa existe un intervalo de ½ o semi - intervalo.

Es fácil ver que en los dos semi - intervalos: mi-fa y si-do, no existe entre cada uno de ellos una tecla negra en el teclado del piano. Cualquier escala con este tipo de intervalos se llama escala diatónica.
En los acordes (triadas) se tienen, entre las notas mas bajas, los siguientes intervalos:

de I do a mi el intervalo es 2,
ii re a fa el intervalo es 1½
iii mi a sol el intervalo es 1½
IV fa a la el intervalo es 2
V sol a si el intervalo es 2
vi la a do el intervalo es 1½

(no nos ocupamos del siguiente)

Los intervalos de 2 se denominan de tercera mayor.

Los intervalos de 1½ se denominan de tercera menor.

Regresando al pentagrama que indica los acordes, se han marcado con mayúsculas los acordes que tienen terceras mayores, y se denominan acordes mayores: I, IV y V.

Los que tienen intervalos de tercera menor se denominan acordes menores y se han indicado con minúsculas: ii, iii y vi.

En el pentagrama de acordes se indica también una nota adicional (entre paréntesis) que forma un intervalo de séptima con la nota más baja (raíz). Estos acordes son muy usuales en la música moderna, su denominación es la misma que antes agregándole el número 7 al acorde correspondiente. Si no se agrega más información a esta alteración de la triada quiere decir que entre la nota superior de la triada (que forma un intervalo de quinta con la raíz) y la séptima el intervalo es de 1½ tonos, o sea de tercera menor, por ejemplo: ii^7, iii^7, $V7$ y vi^7.

Si además se agrega la abreviatura "maj" (mayor), ésto significa que el intervalo entre la quinta y la septima es de 2 tonos, intervalo de tercera mayor, por ejemplo: I^7maj, IV^7maj.

Podría pensarse que para armonizar (asociar acordes a una melodía) una escala, deberían utilizarse cada uno de los acordes construidos sobre el grado correspondiente de la escala. Pero ésto, es fácil comprobarlo, se "oye" muy pobre desde el punto de vista de nuestro condicionamiento musical.

La teoría de la armonía propone una progresión (o sucesión) de acordes como el mostrado en la tabla 1. Por ejemplo, leyendo por renglones, del acorde I puede seguir el ii o ii^7, siendo esta progresión de calidad "pobre" (1), o bien el iii o iii^7, con la misma calidad (1) o el IV, ó V con calidad óptima (3) o bien el vi con calidad "regular".

En la gráfica Gpa de progresión de acordes se representa la conectividad y la dirección de los acordes. Aunque la gráfica (dirigida) es un tanto compleja, resulta útil para verificar algunas progresiones del árbol que más adelante se construye.

En la parte intermedia de la tabla I se indican los grados (o tonos) contenidos en cada acorde. Entre paréntesis se indica el tono de séptima.

En la parte inferior de la tabla se indican los grados de una escala diatónica y, en cada renglón se marcan: con "*" los acordes en los que está presente el

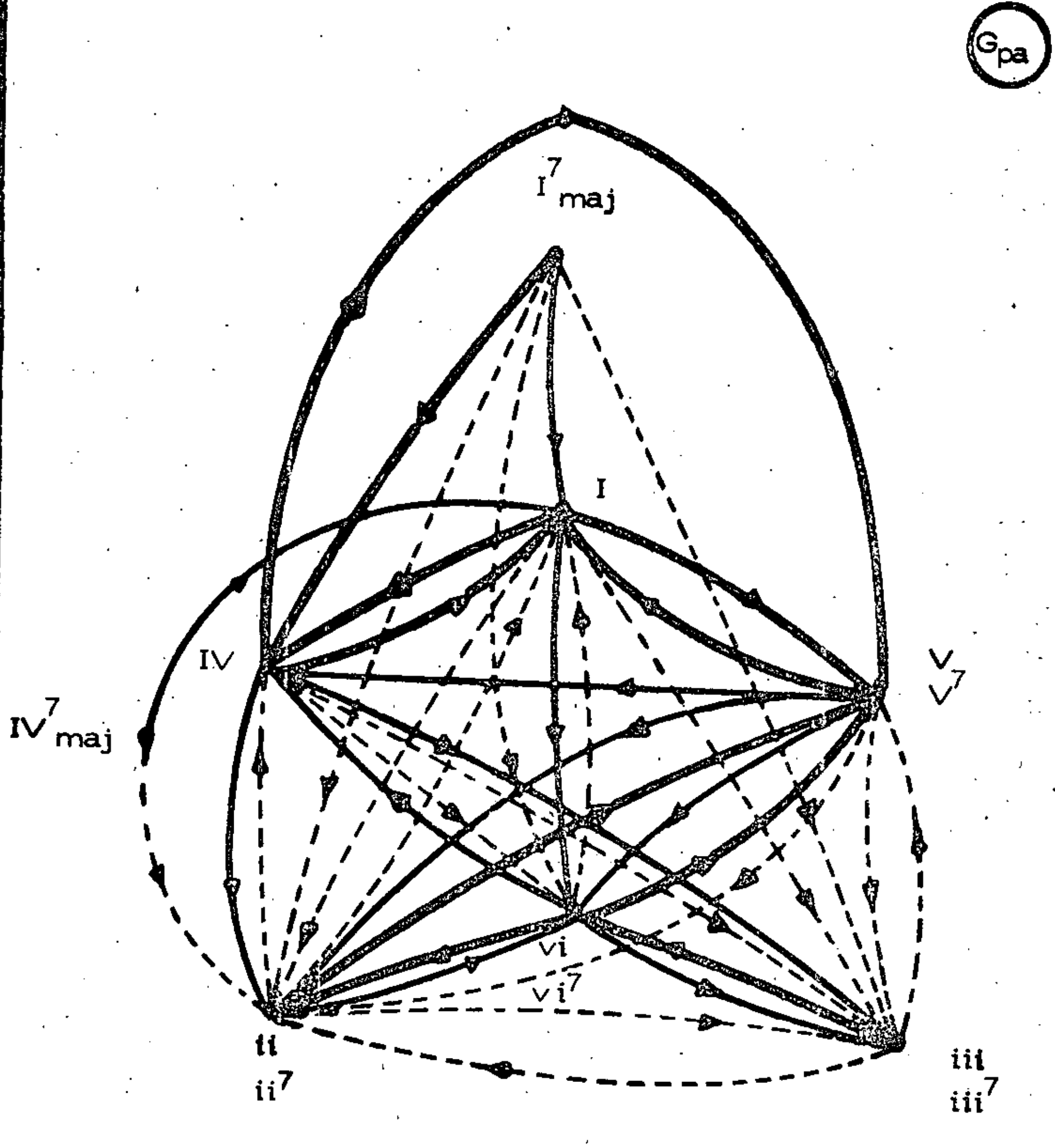
TABLA I

	I	I^7_{maj}	ii ii^7	iii iii^7	IV	IV^7_{maj}	V V^7	vi vi^7
I	×		1	1	3		3	2
I^7_{maj}	2	×	1	1	3		2	3
ii-ii^7	1		×	1	1		3	2
iii-iii^7			1	×	2		1	3
IV	3		2	1	×		3	1
IV^7_{maj}	2		3			×		
V-V^7	3		1	1	2		×	2
vi-vi^7	1		3	2	2		3	×
Composición tonal de los acordes	1 3 5	1 3 5 (7)	2 4 6 (8)	3 5 7 (2)	4 6 1	4 6 1 (3)	5 7 2 (4)	6 1 3 (5)
grados en la escala	Presencia de grados/acordes							
1	*	*	(*)		*	*		*
2			*	(*)			*	
3	*	*		*		(*)		*
4			*		*	*	(*)	
5	*	*		*			*	(*)
6			*		*	*		*
7		(*)		*			*	

(*): presencia debida a la séptima.

C.A.D.A. 1976

Gráfica de progresión de acordes



Peso 3 (fuerte)
Peso 2 (débil)
Peso 1 (más débil)

grado del renglón correspondiente y con "(*)" la presencia del grado en séptimo tono.

Suponiendo que el primer grado se armoniza con el acorde I, buscamos en la tabla, qué acordes pueden seguir a I que contengan al 2o. grado comparando el renglón 2 de la tabla de grados, con el renglón "I" y se observa que:

- un "*" coincide con el "1" correspondiente a los acordes ii ó ii^7,

- un "(*)" coincide con el "1" correspondiente a los acordes iii ó iii^7,

- un "*" coincide con el "3" correspondiente a los acordes V ó V^7.

En la figura del "árbol de progresiones" se muestran las tres alternativas de acorde, para el 2o. grado, que pueden seguir al I. El más adecuado de acuerdo con la teoría de la armonía es el de V ó V^7.

Prosiguiendo de la misma manera, continuamos ahora con el 3er. grado, de la parte inferior de la tabla I, y vemos qué acordes de los renglones

$ii-ii^7$, $iii-iii^7$ y $V-V^7$

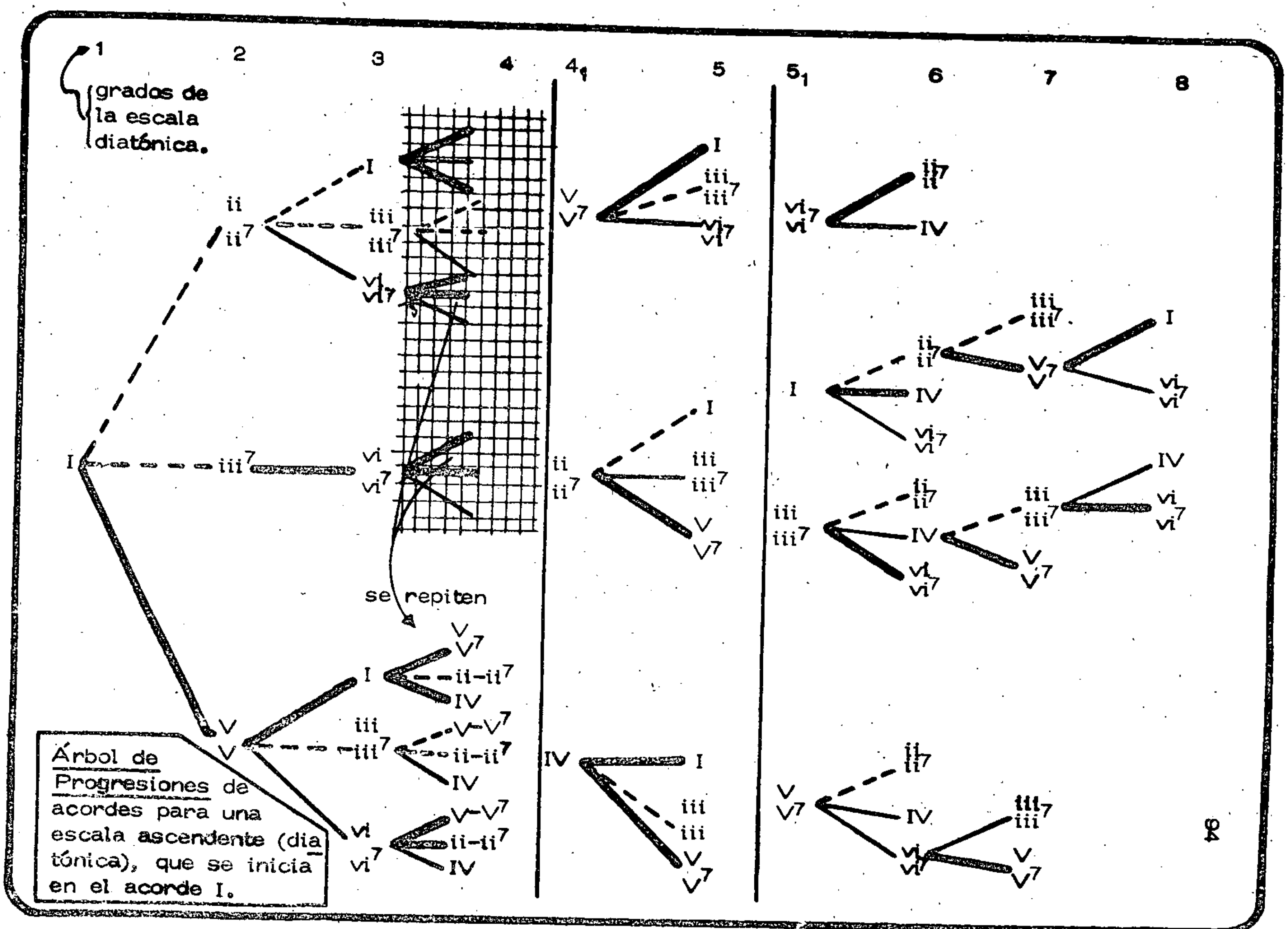
coinciden con las marcas del renglón "3" de los grados.

De acuerdo con el diagrama para el grado 3, sólo hay tres alternativas posibles:

I, $iii-iii^7$ y $vi-vi^7$

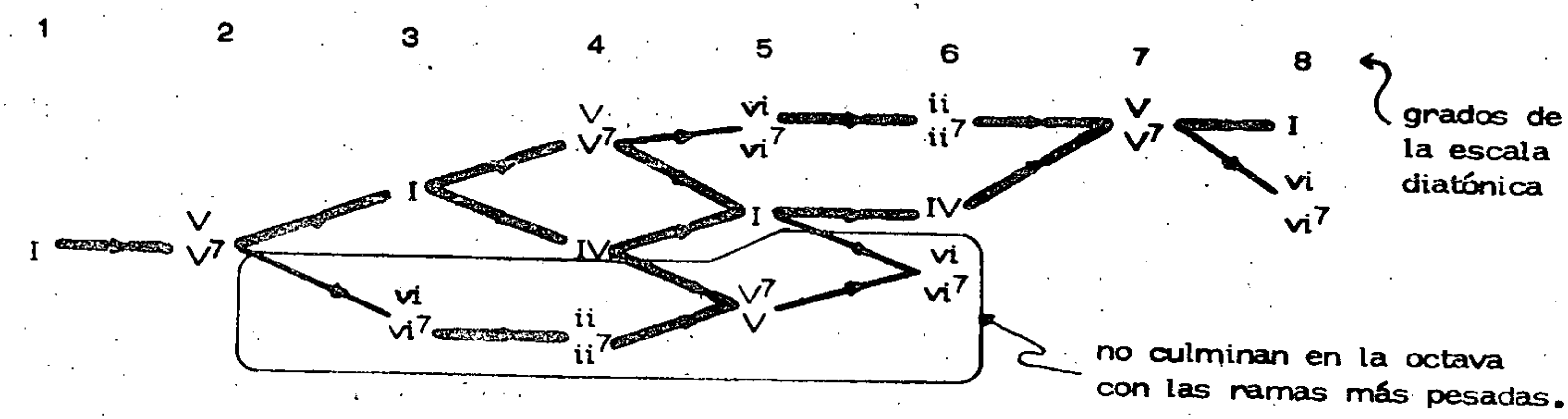
que deben analizarse para obtener por el método descrito los acordes convenientes para el 4o. grado, que resultan ser

V^7, $ii-ii^7$ y IV

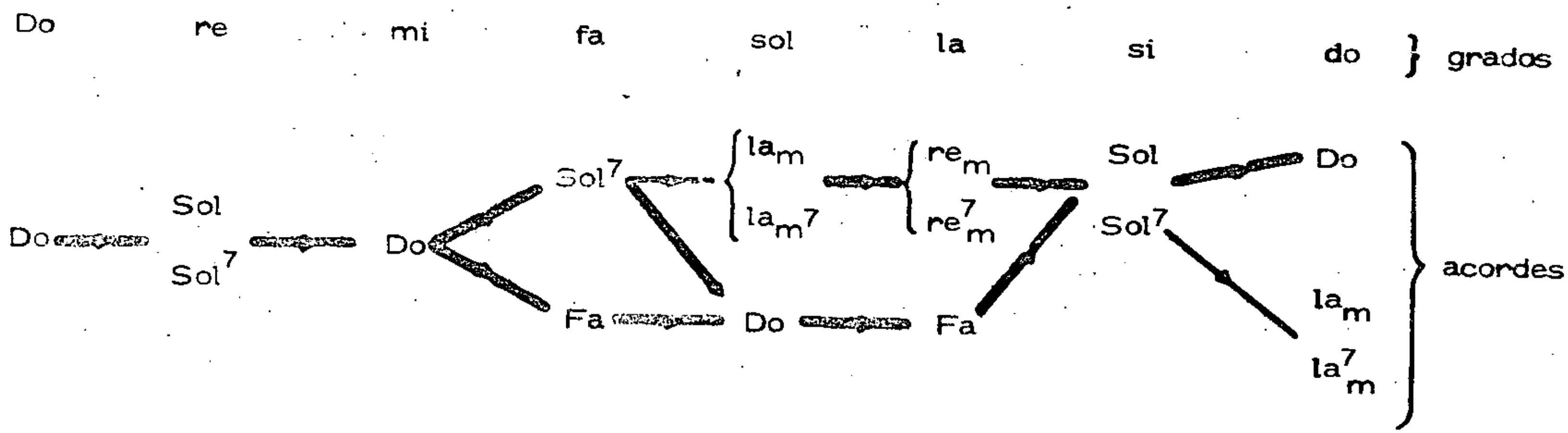


Árbol de Progresiones de acordes para una escala ascendente (diatónica), que se inicia en el acorde I.

Trayectorias máximas de acordes con las ramas de mayor peso, en una escala diatónica ascendente.



Ejemplio: escala de Do (C)



los cuales se aislan para no tener que repetirlos en cada vértice en el grado 4.

De igual manera, y considerando sólo los acordes distintos, llegamos hasta la octava, en forma ascendente (del grado 1 al grado 8).

Puede observarse que el número de combinaciones de progresiones para armonizar la escala diatónica, ascendente, es muy amplio.

En particular, tomando sólo las trayectorias con las ramas más pesadas se obtienen las combinaciones del diagrama de Trayectorias máximas de acordes. Se observa que algunas alternativas que se iniciaron con estos valores no culminan, con las ramas más pesadas, hasta la octava.

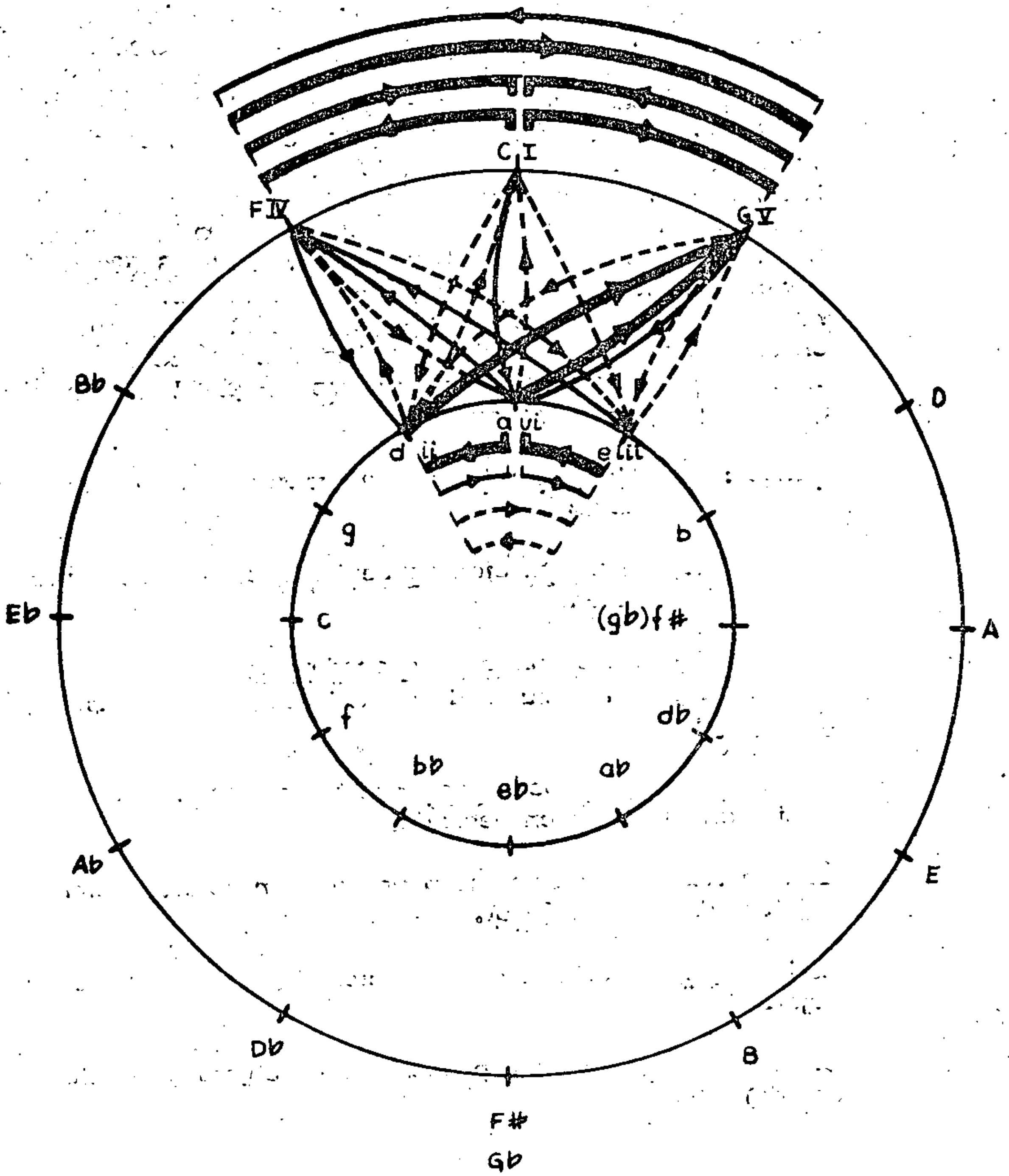
En la parte inferior se ejemplifican estos casos particulares de progresiones aplicadas a la escala de do mayor.

Gráfica giratoria para el estudio de las progresiones armónicas.

Si del ejemplo de progresiones armónicas eliminamos, por simplicidad, los acordes I7maj y IV7maj la gráfica se simplifica y podemos arreglarla de tal manera que, dibujada sobre una planilla transparente, se puedan hacer coincidir los acordes I, IV y V con los grados consignados en el círculo de quintas mayores y los acordes ii, vi y iii con el círculo de quintas menores.

Centrando el I de la gráfica superpuesta con la nota (tónica) que determina la tonalidad de una escala o melodía. De esta manera obtendremos de inmediato las progresiones de acordes que con distinto grado de aceptabilidad (según los colores) propone la armonía tradicional.

GRAFICA GIRATORIA PARA EL ESTUDIO DE LAS PROGRESIONES ARMONICAS.



Peso 3 (fuerte).

Peso 2 (débil).

Peso 1 (más débil).

C.A.D.A. 1976

cisión los operadores que aproximen el objeto inicial al final (o de disminuir las diferencias).

En una matriz especial suélen indicar los operadores que efectúan ciertas transformaciones del objeto en cada etapa. Sin embargo, estas tablas no son, a nuestro parecer, suficientemente precisas como para mostrar las "diferencias" entre los objetos y determinar, por lo tanto el operador, o los operadores alternativos que han de aplicarse. Para ilustrár mejor ésto, introducimos el siguiente proceso de demostración de argumentos en la lógica de predicados.

Ejemplo :

Supóngase que se desea establecer un procedimiento heurístico (de búsqueda) para la demostración de argumentos en la lógica de predicados. Los argumentos se pueden especificar como: el conjunto de premisas

$$\boxed{\begin{array}{c} P_1 \\ P_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ P_n \end{array}}$$

que constituirán en el problema el objeto (o conjunto de objetos) inicial

y la conclusión:

$$\boxed{C}$$

que se infiere, en un argumento válido, del conjunto de premisas. Esta conclusión representa el objeto final del proceso de demostración.

Los operadores serían las reglas de inferencia, indicadas a continuación

R. 1	mpp	$p \supset q, p \vdash q$	(modus ponendo ponens).
R. 2	mtt	$p \supset q \sim q \vdash \sim p$	(modus tollendo tollens).

R.3	mtp	$p \vee q, \sim p \vdash q$	(modus tollendo - ponens).
R.4	ad	$p \vdash p \vee q$	(adición).
R.5	conj.	$p, q \vdash p \wedge q$	(conjunción).
R.6	simpl.	$p \wedge q \vdash p, q$	(simplificación).
R.7	trans.	$p \supset q, q \supset r \vdash p \supset r$	(transitividad).
R.8	distrib.	$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$	(distributividad).
R.9.	DeM.	$\sim (p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$ $\sim (p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$	(De Morgan)
R. 10	exp.	$(p \wedge q) \supset r \equiv p \supset (q \supset r)$	(exportación).
R. 11	contr.	$p \supset q \equiv \sim q \supset \sim p$	(contraposición).
R. 12	idem.	$p \vee p \equiv p$ $p \wedge p \equiv p$	(idempotencia).
R. 13	def. cond.	$p \supset q \equiv \sim p \vee q$	(definición del - condicional).
R. 14	D.N	$\sim \sim p = p$	(doble negación)

Se supone que la conmutatividad en $p \vee q \equiv q \vee p$ y - $p \wedge q = q \wedge p$ se puede aplicar sin necesidad de señalar lo explícitamente.

En lugar de plantear la tabla de operadores a que se hizo referencia se propone la función de evaluación

$$\boxed{f_i = d_i\,(0) + \Delta_i}$$

en donde

$d_i(0)$ indica, en número de etapas o pasos, la distancia de la etapa iésima respecto al objeto original (conjunto de premisas).

$$\boxed{\Delta_i = \Delta_{vi} + \Delta_{ci} + \Delta_{ai} + \Delta_{si}}$$

Δ_i es la suma de las diferencias:

Δ_{vi} en cuanto al número de variables distintas entre el objeto iésimo y el objeto final,

Δ_{ci} en cuanto al número de conectivos distintos entre el objeto iésimo y el objeto final,

Δ_{ai} del número de símbolos de agrupación (pareja de paréntesis) del objeto iésimo con respecto al objeto final,

Δ_{si} del número de fórmulas bien formadas (síntaxis lógica) del objeto iésimo con respecto al objeto final.

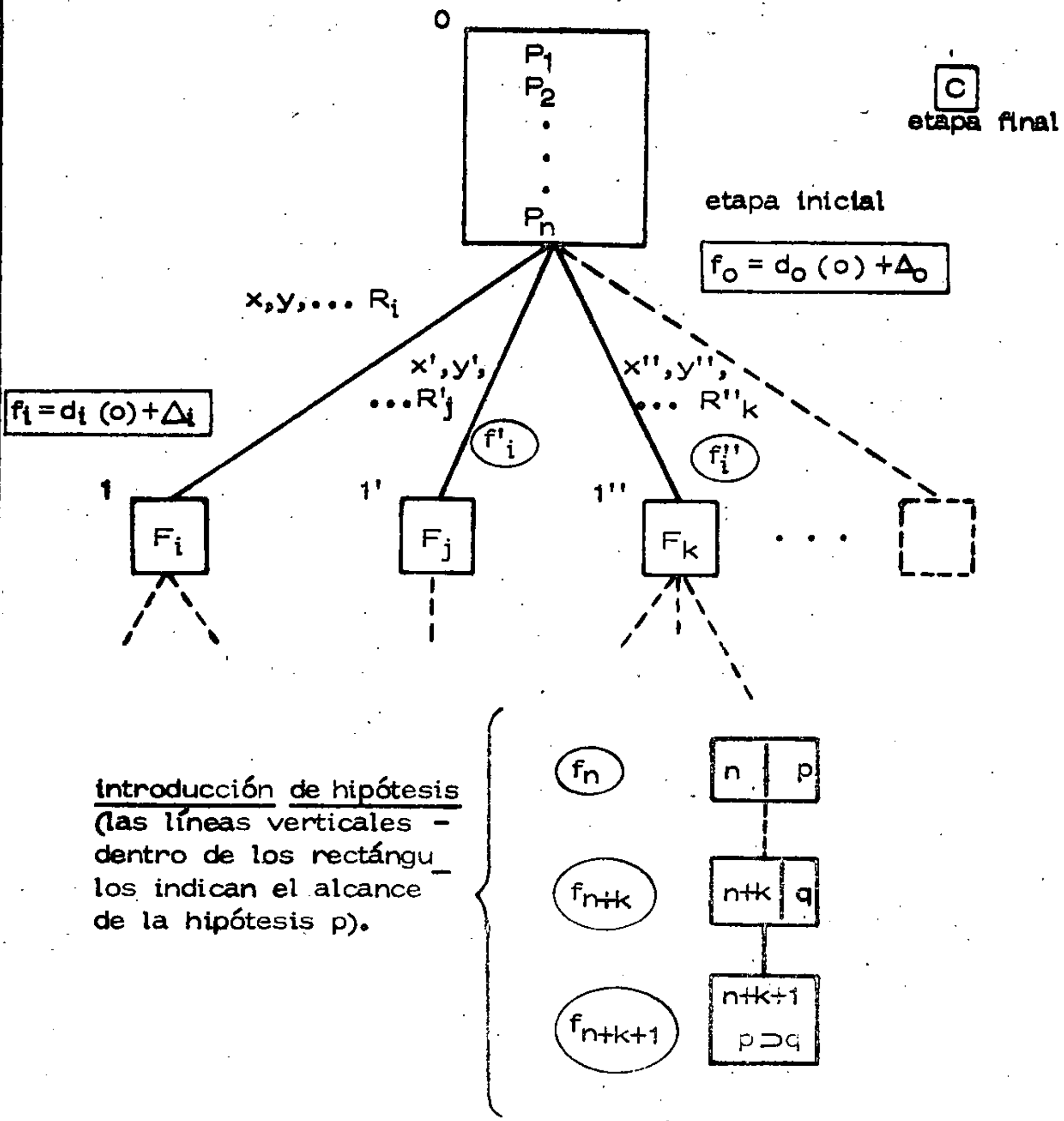
Se admitirá, también, un procedimiento no considerado por los autores del GPS. En cualquier etapa del proceso de demostración se puede introducir una hipótesis "p", y dentro del "alcance" de esta hipótesis, considerar los objetos deducidos en etapas previas y las premisas y operar sobre ellos hasta obtener un objeto " q ." La etapa siguiente se puede indicar fuera del alcance de la hipótesis mediante la implicación "p ⊃ q". Esquemáticamente

	p	hipótesis
alcance de p →	.	
	.	
	.	
	q	

p ⊃ q

A este esquema lo denominaremos prueba condicional (P.C.)

Se construye un árbol de alternativas y/o ensayos de demostración, evaluando en cada etapa f_i,



introducción de hipótesis (las líneas verticales dentro de los rectángulos indican el alcance de la hipótesis p).

A través de las funciones de evaluación podrá determinarse la trayectoria más conveniente para llevar a cabo la demostración, en cada caso de acuerdo con la Δ_i se fijará, mediante una inspección simple, el operador o los operadores que han de emplearse para pasar a la siguiente etapa.

Supongamos el siguiente argumento

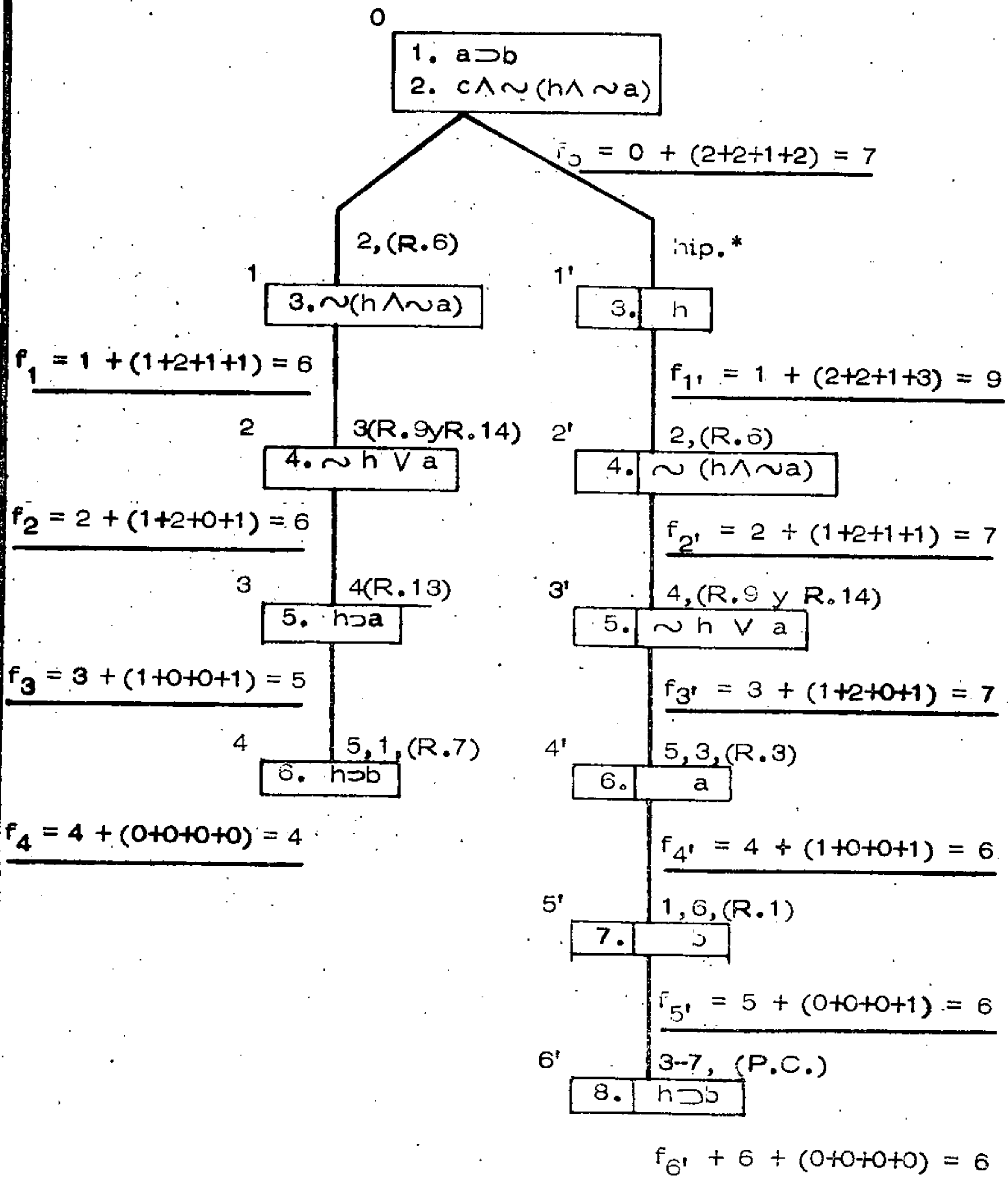
1. $a \supset b$

2. $c \wedge \sim(h \wedge \sim a) \vdash h \supset b$

) Arreglado de acuerdo con el árbol anterior (ver hoja siguiente):

$f_i = d_i(o) + (\Delta v_i + \Delta c_i + \Delta a_i + \Delta s_i)$

Etapa final $\boxed{h \supset b}$



*Se considera la hipótesis como una premisa adicional y el estado 1' incluye al inicial 0 pues no se ha efectuado ninguna operación sobre éste (no se le ha aplicado ninguna regla).

Del árbol vemos que $f'_i > f_i$ y que la demostración de la rama derecha contiene dos etapas más.

En la expresión anterior se observa que

- si se ha transformado una fórmula en otra, el número de fórmulas no ha disminuído (por ejemplo, ver f_1 y f_2),

- si se introduce una fórmula como hipótesis, por ejemplo en 1' (3 | h) entonces se incrementa el número de fórmulas y este incremento subsiste a lo largo de todo el alcance de la hipótesis (hasta 4').

- los números en las ramas se refieren a los que están dentro de los cuadros de cada vértice (no confundir con la numeración de las etapas).

- debe observarse la disminución monotónica del operador Δ_i

$$\Delta_1 = 5; \quad \Delta_2 = 4; \quad \Delta_3 = 2; \quad \boxed{\Delta_4 = 0}$$

$$\Delta'_1 = 8; \quad \Delta'_2 = 5; \quad \Delta'_3 = 4; \quad \Delta'_4 = 2; \quad \Delta'_5 = 1 \quad \boxed{\Delta_6 = 0}$$

4. Aplicaciones y definiciones de conjuntos de corte, planaridad y gráficas dirigidas.

4.1. Ejemplo: Análisis Lógico de la Taxonomía de Bloom.

En la planeación sistemática de procesos de enseñanza-aprendizaje se suelen especificar los objetivos de cada tema, unidad o área de conocimiento de acuerdo con algún o algunos criterios. Un criterio que ha sido empleado repetidamente por educadores y psicólogos es el desarrollado por Bloom(1), particularmente el concerniente al "área cognoscitiva". Siguiendo este criterio, denominado "Taxonomía de Bloom", se establecen las metas que, en diversos aspectos, debe alcanzar un estudiante de acuerdo con un determinado plan y/o programa de estudios.

Además de plantear estos objetivos diversos, Bloom los clasifica de acuerdo con los diversos grados de dificultad o "categorías" implícitas. Esta jerarquización, en términos de un campo específico de conocimientos, no ha resultado clara, en virtud de lo cual, ha habido propuestas alternativas o modificaciones que implican cambios de mayor o menor envergadura.

Una de estas versiones es la propuesta por el Instituto de Investigaciones Educativas de la Universidad de Londres (2). En ella los niveles de objetivos se arreglan de acuerdo con un cuadro simplificado del propuesto por Bloom. El autor de ese ensayo agrega, además, una interpretación mediante expresiones de la lógica simbólica, como se indica en la tabla de la figura 4.1.

En dicha tabla, las expresiones lógicas se utilizarán como esquemas para cuestionar la categoría descrita en una área particular de conocimiento.

La notación es la empleada en la Lógica proposicional y en la de predicados:

a: representa una variable individual.

P, H: predicados, atributos, conjunto de propiedades, etc.

---

(1) Bloom, S. Benjamín y Col. Taxonomía de los Objetivos de la Educación. Ed. El Ateneo Buenos Aires, Argentina.

(2) "Gropings for a design of objetive tests of the effectiveness of Teaching Methods".

Figura 4.1. TABLA DE CATEGORIAS TAXONOMICAS DE BLOOM.

1. Conocimiento

1.1. Conocimiento de terminología - - - - - - - $P(a(G))$

1.2. Conocimiento de hechos específicos - - - $Pa(G)$

1.3. Conocimiento de generalizaciones y principios- $(Pa \supset Ha)(G)$

2. Comprensión - $s(G) \wedge t(G) \supset y(U)$

3. Aplicación - Dado $(Pa \supset Ha)(G)$ encontrar $(Pb_1 \supset Hb_1)(U)$

4. Análisis (cuadro de oposiciones de la lógica tradicional) - - - - - - - - - - - - - - - - - -

$(a)(Pa \supset Ha)$		$(a)(Pa \supset \sim Ha)$
	U	
$\sim (a)(Pa \supset \sim Ha)$		$\sim (a)(Pa \supset Ha)$

5. Síntesis - Determinar

i) $(p(G) \wedge q(G)) \supset u(U)$

ii) $(s(G) \wedge t(G)) \supset r(U)$

iii) $(u(U) \wedge r(U)) \supset v(U)$

6. Evaluación - El alumno plantea $(w \supset x)(U)$ y deduce w_1 de: $(w \supset x)(U) \wedge (p(G) \wedge q(G)) \supset w_1(U)$ de donde obtiene $x_1(U)$.

Pa: expresa una proposición predicativa del tipo

(a) Pa

y ocasionalmente, si "a" es un individuo particular, Pa representa una proposición particular.

p, q, s, t: son expresiones para proposiciones (predicativas o sentenciales en general),

$a_1, a_2, \ldots a_n$ representan individuos particulares en un contexto o universo.

Los símbolos anteriores se definen en un contexto G, que supuestamente ha sido expuesto al estudiante (términos, hechos, principios, etc.).

Se define además un contexto U distinto a G, el cual no ha sido presentado explícitamente al alumno. Este contexto se podrá emplear para cuestionar del nivel de compresión en adelante.

En el contexto U se definen:

Proposiciones como: u, r, v, w, x, y; y términos individuales constantes como: b_1, w_1, etc.

Las expresiones lógicas permiten formular proposiciones asociadas a connotaciones más precisas y restringidas que las descritas por Bloom.

Así, una expresión como

P(a(G))

indica el cuestionamiento de la construcción de un hecho Pa en el contexto G a partir de la terminología $a_1, a_2, \ldots, a_n$, dada en G.

La fórmula:

Pa(G)

indica el establecimiento directo de hechos Pa en G.

La expresión:

$(Pa \supset Ha)\ (G)$

sugiere el cuestionamiento de hechos Ha en G a partir de otros Pa, también en G. Se pretende aquí examinar el conocimiento de principios a través de la inferencia de hechos en el mismo contexto.

La comprensión se analiza mediante la inferencia de una proposición "y" en un contexto U, no explícito en lo expuesto al estudiante, a través de proposiciones s y t presentadas en G.

La aplicación se examina a través de una inferencia particular en U

$$P_{b1} \supset H_{b1}$$

suponiendo que el estudiante fue expuesto a inferencias similares

$$Pa \supset Ha$$

en el contexto G.

El esquema propuesto para cuestionar el análisis, puede parecer muy limitado en tanto que no rebasa las restricciones que se han atribuído al cuadro de oposiciones de la lógica tradicional. Sin embargo, no parece ser así si éste se limita al cuestionamiento de las posibilidades de identificación de la inferencia $Pa \supset Ha$ en un contexto no explícito.

La evaluación, o autoevaluación, constituye la etapa de mayor jerarquía y en campos específicos del conocimiento suele ser un cuestionamiento o planteo difícil de estructurar, de acuerdo con el esquema propuesto.

Se pretende, en esta etapa, lograr que el alumno ensaye un principio o generalización en forma inferencial

$$w \supset x$$

en el contexto no explícito U. Después debe verificarlo a través de la inferencia de un caso w_1 en ^{1}, obtenido de su principio y enunciados propuestos en G.

Examinando la tabla es fácil reconocer que los esquemas no son, de hecho no pueden ser, independientes. Después de analizar el proceso de aprendizaje en una área determinada de conocimiento, es fácil vislumbrar, cuando menos en apariencia, que un estudiante no puede comprender si no ha intentado analizar el tema o área, aunque sea de manera superficial. Tampoco podrá realizar una evaluación significativa si no ha intentado hacer aplicaciones o si no ha comprendido el tema, etc., etc.

En la figura 4.2, gráfica (B), se pretenden esquematizar las categorías de Bloom, indicando los contextos G y U y agregando algunas ramas que interconectan temas o categorías que no habían sido señaladas hasta ahora.

4.1.1. Notas y propiedades

De un análisis de la gráfica (B) se pueden sugerir algunas propiedades, por ejemplo:

a) Examinando el vértice 4: $Pa \supset Ha$ se observa que inciden en él diez ramas, (que podrían ser aún más si se contaran los vértices 5, 6, 7 y 8 por separado). Ningún otro vértice tiene un grado tan elevado. El vértice corresponde a la categoría de conocimiento de principios y generalizaciones en el contexto G. El esquema, como ya se ha señalado, es de tipo inferencial:

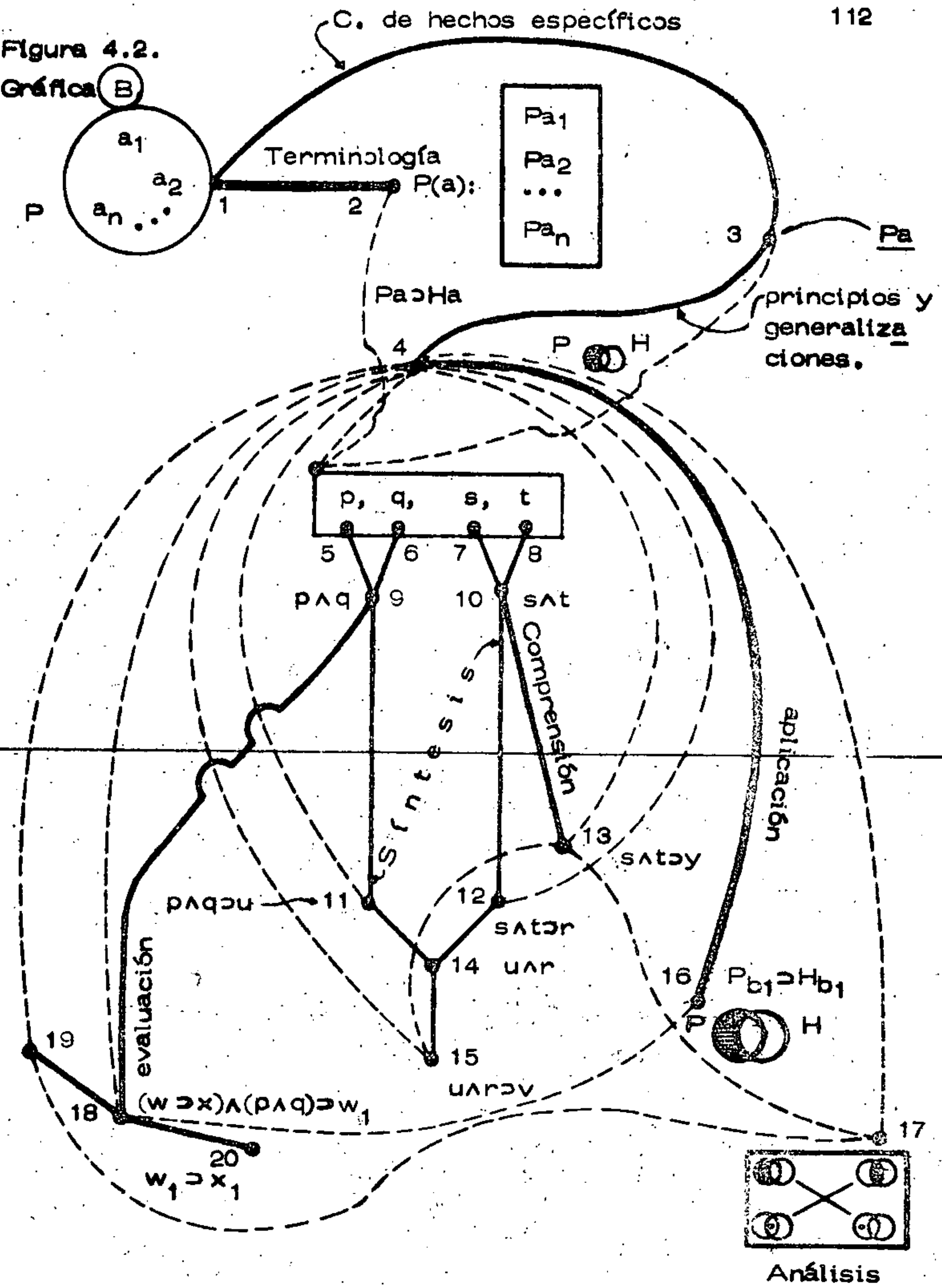
$$Pa \supset Ha$$

de hecho podría escribirse

$$(a)\ (Pa \supset Ha)$$

En términos de la gráfica (B), el conocimiento de este tipo de esquema va a ser fundamental en los cuestionamientos o planteos sobre:

Figura 4.2.
Gráfica B



Nota: Se indican con línea gruesa las relaciones directas establecidas en forma explícita por el autor del ensayo, y con línea punteada, relaciones no dadas explícitamente por el autor.

aplicaciones,

comprensión,

análisis

y evaluación.

Debe reconocerse que en la enseñanza actual existen, en este aspecto, fuertes deficiencias: los estudiantes no reciben una preparación adecuada en Lógica y tampoco son introducidos a esta práctica directa o indirectamente. Consecuentemente, no se ven inducidos a hacer este tipo de razonamientos ni sus consecuentes (aplicaciones, comprensión, análisis, evaluación, etc.).

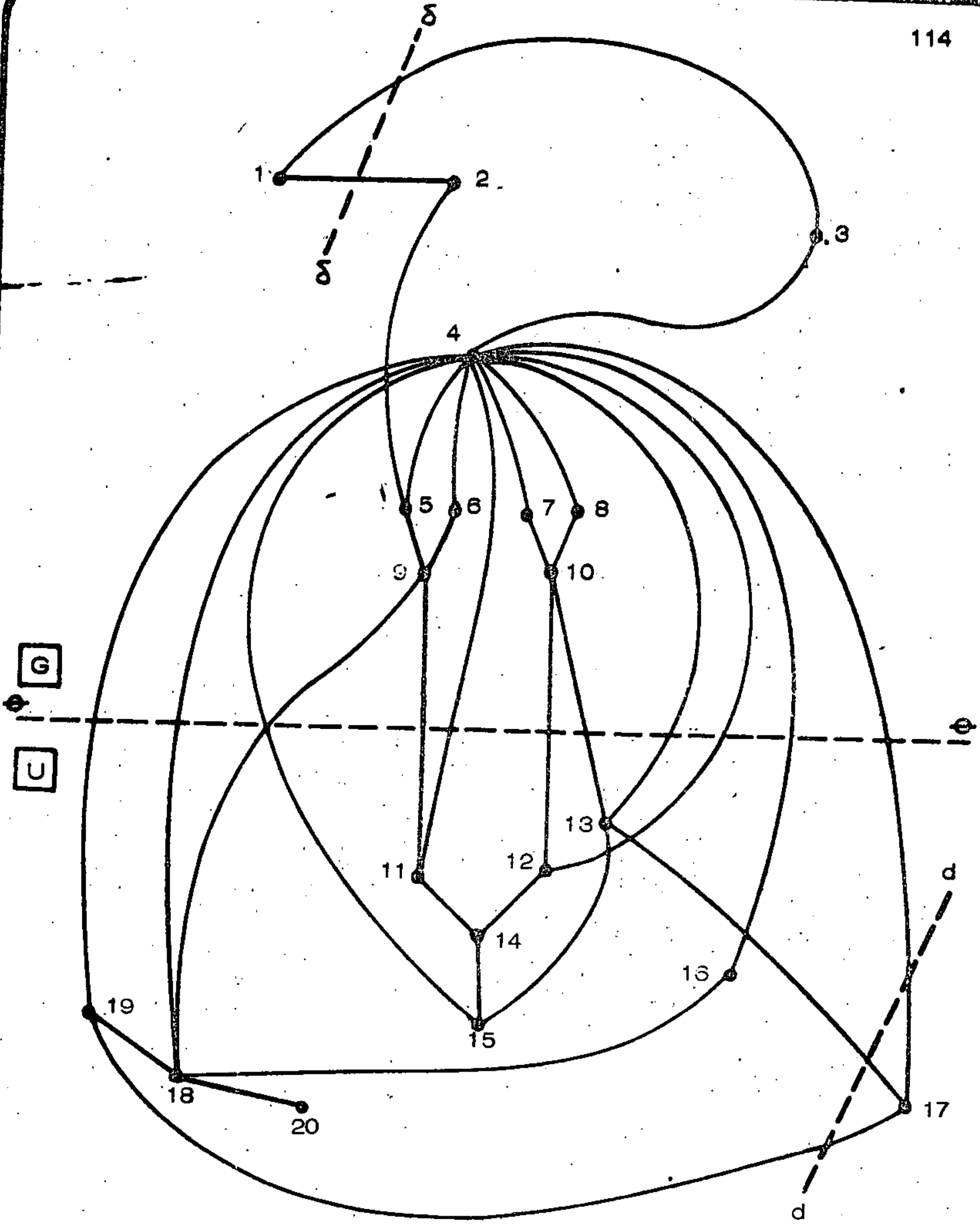
b) La introducción de la terminología, según se indica en la gráfica con los vértices 1 y 2, sugiere un método inductivo-constructivo: los objetos nombrados por $a_1, a_2, \ldots, a_n$ tienen en común la propiedad P.

En la práctica suele eludirse parcial o totalmente este proceso. Esto está asociado al corte δ-δ mostrado en la figura 4.3, gráfica B'.

Definición: el conjunto mínimo de ramas que desconectan a la gráfica B', en este caso el vértice 1, del resto, se denomina Conjunto de corte. En el ejemplo $S_1 = \{1\text{-}2,\ 1\text{-}3\}$.

c) En la mayor parte de los casos los profesores e instructores suelen no ocuparse en preparar al alumno para las aplicaciones, análisis, síntesis, etc. en un contexto U que no sea, precisamente, el que se utilizó para introducir la terminología y/o hechos (conceptos, teorías, casos, etc.).

De manera que es usual la separación conceptual implicada por el corte ⊖-⊖ de la gráfica B', que define el conjunto de corte S_2:



gráfica B'

Figura 4.3.

C.A.D.A. 1976

$S_2 = \{$ 4-19, 4-18, 9-18, 4-15, 9-11, 4-11, 10-12, 10-13, 4-13, 4-12, 4-16, 4-17$\}$.

Este corte separa los vértices 1 al 10, de los vértices 11 a 20. Por simple inspección es fácil inferir las consecuencias (sobre todo las deficiencias del proceso de aprendizaje).

d) Nota: Si elegimos un árbol, el T_1 de la figura 4.4: 1-3-4-17-19-18-20, que podría constituir una estrategia particular de enseñanza

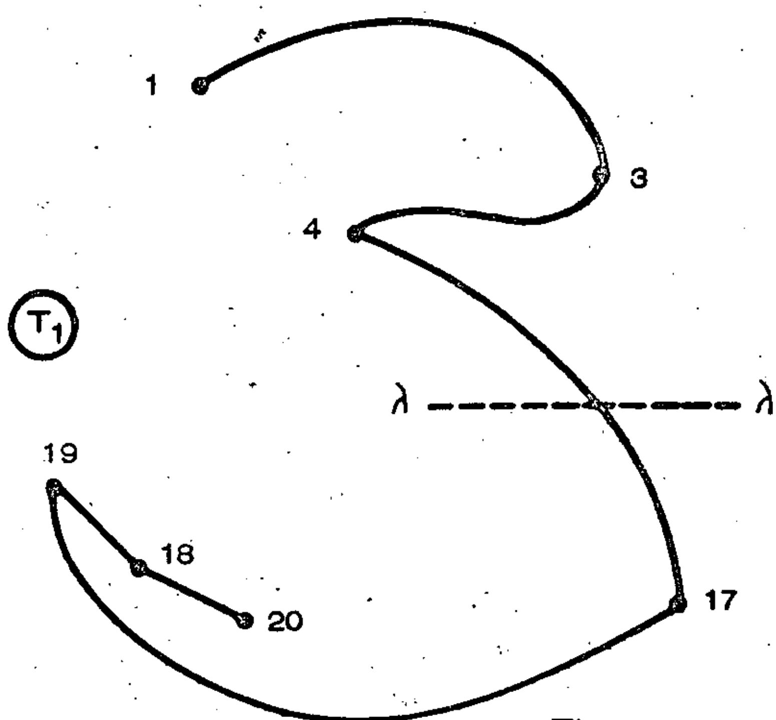


Figura 4.4.

y cortamos cualquier rama, desconectamos la gráfica. Entonces

$S_3 = \{4\text{-}17\}$ es un conjunto de corte.

Por lo tanto, <u>en un árbol, cualquier rama es un conjunto de corte.</u>

e) Considérese el árbol de expansión T2 de la figura 4.5.

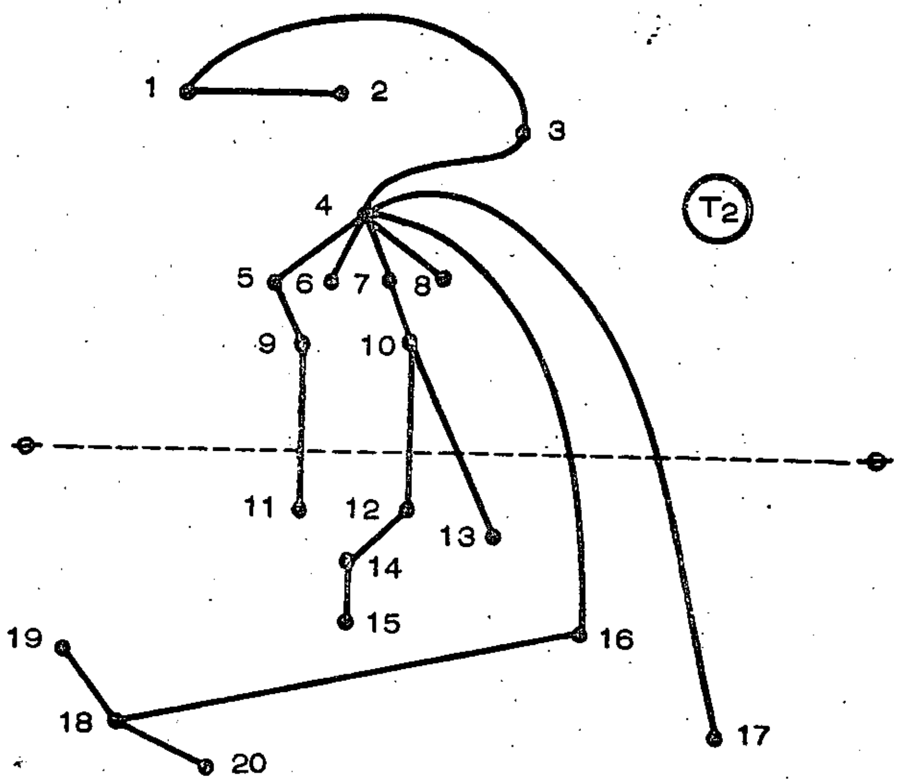


Figura 4.5.

Comparando T2 con B' es fácil ver que el corte que define al conjunto de corte S_2 tiene en en común con T2 las ramas: 9-11, 10-12, 10-13, 4-16 y 4-17.

De hecho cualquier conjunto de corte

S

de una gráfica conexa G (que consecuentemente la separa en dos partes) contiene cuando menos una rama de cada árbol de expansión de G.

Ya hemos señalado la importancia de los árboles de expansión en el análisis de gráficas. En el ejemplo presente, se han destacado, mediante conjuntos de corte, situaciones de trascendencia en un esquema metodológico de enseñanza.

La relación que hemos descrito entre árboles y conjuntos de corte nos sugiere que éstos últimos, son, junto con los árboles de expansión, auxiliares sobresalientes en el análisis de gráficas.

Por ejemplo, a través de los árboles de expansión, examinando la gráfica B' detectaríamos que no se han establecido trayectorias directas entre el vértice 17, de análisis, y los vértices 11, 12 y 15 de la síntesis. A través del conjunto de corte, definido por la línea d-d, veríamos que la categoría correspondiente al análisis está conectada sólo a tres vértices: 4, 13 y 19.

Estas dos situaciones muestran deficiencias de la gráfica tentativa B' :

i) el análisis y la síntesis suelen ser actividades interrelacionadas en cualquier proceso científico,

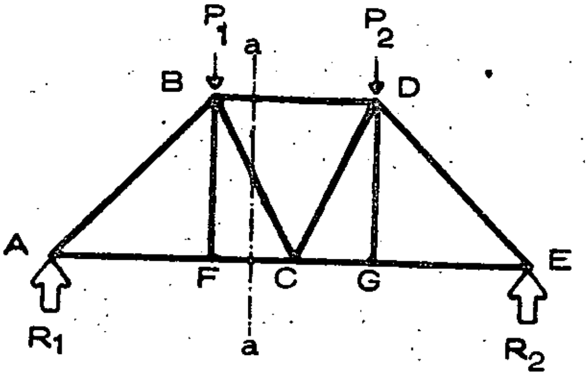
ii) Dado el criterio inferencial de la interpretación lógica de la Taxonomía de Bloom, es de esperarse que el vértice 17, del análisis, no sea un vértice tan débil, con tan pocas conexiones. Aparte de los vínculos con 11, 12 y 15, deberían seguramente establecerse ramas con 18, 16 y quizá, remodelando 1 y 2, también con esta parte del proceso (sobre todo en la construcción de analogías entre diversos campos del conocimiento).

iii) En un árbol de expansión, como el T_2, seguramente tendría más trascendencia conectar 17 con 19 que 16 con 18, etc.

f) El concepto de corte, por otro lado, no es del todo nuevo. En Mecánica, por ejemplo, desde hace bastante tiempo se estudia el equilibrio de cuerpos mediante "diagramas de cuerpo libre".

Por ejemplo el equilibrio de la armadura de la siguiente figura :

Figura 4.6.



se puede estudiar, en parte, a través del corte a-a , aislando la parte izquierda:

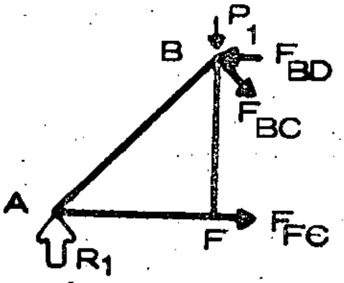


Figura 4.7.

$$+\bar{F}_{BD}+\bar{F}_{BC}+\bar{P}_1+\bar{F}_{FC}+\bar{R}_1=\bar{o}$$

(Suma vectorial)

a la misma expresión de equilibrio en el corte se llegaría si se consideraran también las "fuerzas internas" en los miembros de la parte aislada.

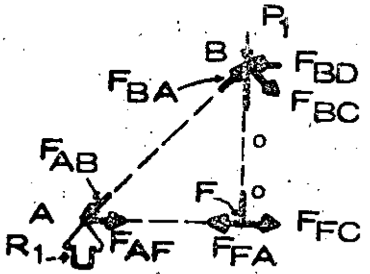


Figura 4.8.

En el diagrama se indica el autoequilibrio de las fuerzas internas F_{AB} con F_{BA}, F_{AF} con F_{FA}, quedando en última instancia el mismo sistema de fuerzas del corte a-a.

g) Esta misma idea se ha empleado en el análisis de circuitos eléctricos a través de las leyes de Kirchhoff, en particular, la de equilibrio nodal de corrientes: "la suma de corrientes que inciden a un nodo es cero"

Supóngase en el circuito de la figura 4.9. el corte a-a y analicemos el equilibrio de los nodos de la parte derecha:

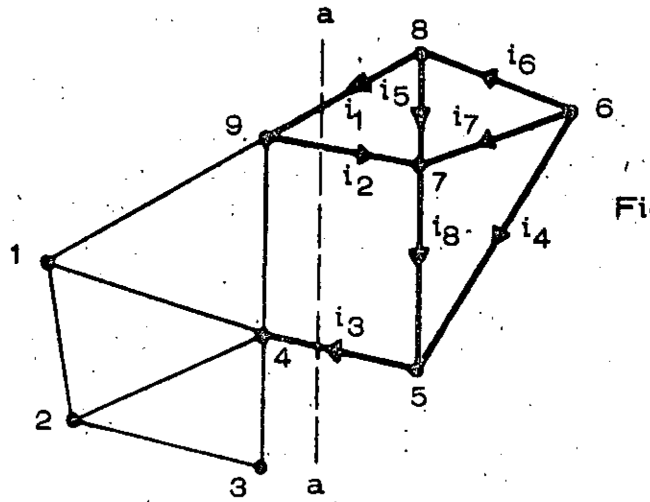


Figura 4.9.

nodos:

$$⑧\quad i_1 + i_5 - i_6 = 0$$

$$⑦\quad -i_2 - i_5 - i_7 + i_8 = 0$$

$$⑤\quad +i_3 - i_4 - i_8 = 0$$

$$⑥\quad +i_4 + i_6 + i_7 = 0$$

Sumando las ecuaciones se obtiene la ecuación

$$i_1 - i_2 + i_3 = 0$$

De la cuál se infiere que la suma de corrientes de las ramas del circuito que constituyen un corte es cero.

h) Estos resultados de la Física nos sugieren la posibilidad de una estrategia en los procesos de aprendizaje. Suponiendo que las ramas de la gráfica B', intersectadas por el corte e-e representan un "flujo" de técnicas, métodos o estrategias para entrenar a un alumno a manejar los conceptos de un contexto dado G a otro U y que podríamos interpretar como transferencia del conocimiento, sería factible prever que para lograr esta transferencia debe establecerse una "interacción" suficiente de casos en donde se muestre a los alumnos no sólo la aplicación, síntesis, etc. de conocimientos de G a U, sino también en sentido opuesto, es decir, de U a G. Esto, llevado a cabo desde los cursos más elementales, permitirá al alumno, en cursos "más avanzados", lograr transferencias a diversos contextos e incluso le permitirán participar en proyectos de investigación o realizar trabajos de carácter interdisciplinario.

En el diagrama T_2/B' (figura 4.10), es fácil advertir diversos conjuntos de corte:

a-a, b-b, c-c,...,l-l

Cada uno de los cuales

corta sólo una rama de T_2

a estos conjuntos de corte, uno por cada rama (no se indican todos) del árbol T_2, se les denomina:

cortes fundamentales de B' respecto a T_2.

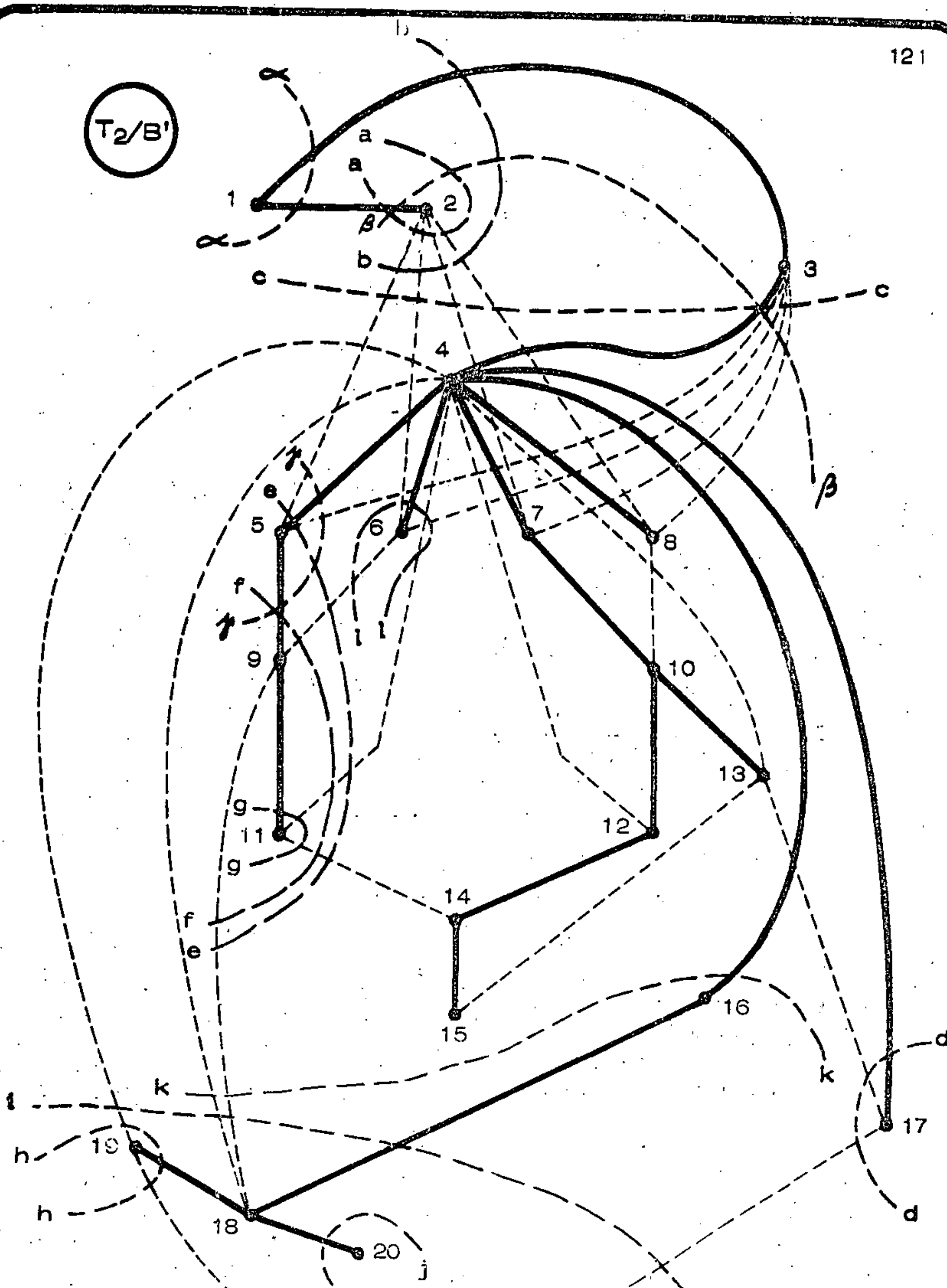


Figura 4.10

C.A.D.A. 1976

i) Mediante la suma-anillo de los cortes fundamentales pueden generarse todos los cortes posibles de una gráfica en relación con un árbol.

Por ejemplo en T_2/B' (figura 4.10)

$$a-a = \{1-2,\ 2-8,\ 2-7,\ 2-6,\ 2-5\}$$

$$b-b = \{1-3,\ 2-8,\ 2-7,\ 2-6,\ 2-5\}$$

$$\alpha-\alpha = a-a \oplus b-b = \{1-2,\ 1-3\}$$ que es un conjunto de corte aunque ya no fundamental.

Análogamente

$$c-c = \{2-5,\ 2-6,\ 2-7,\ 2-8,\ 3-5,\ 3-6,\ 3-7,\ 3-8,\ 3-4\}$$

$$\beta-\beta = a-a \oplus c-c = \{1-2,\ 3-5,\ 3-6,\ 3-7,\ 3-8,\ 3-4\}$$

también es un conjunto de corte.

O bien:

$$e-e = \{2-5,\ 4-5,\ 3-5,\ 6-9,\ 4-11,\ 11-14,\ 9-18\}$$

$$f-f = \{5-9,\ 6-9,\ 4-11,\ 11-14,\ 9-18\}$$

$$\gamma-\gamma = e-e \oplus f-f = \{2-5,\ 4-5,\ 3-5,\ 5-9\}$$

que también es un conjunto de corte no fundamental. A través de esta operación, pueden obtenerse nuevos conjuntos de corte o la unión de conjuntos de corte ajenos.

Por ejemplo:

$$\underbrace{(a-a \oplus b-b)}_{\alpha-\alpha} \oplus \underbrace{(e-e \oplus f-f)}_{\gamma-\gamma} = \alpha-\alpha \cup \gamma-\gamma$$

$$= \alpha-\alpha \cup \gamma-\gamma$$

La suma-anillo de conjuntos de corte ajenos es la unión de los mismos.

De esta manera vemos cómo, a través de los conjuntos de corte fundamentales, podemos ir generando los demás cortes de B' respecto a T_2.

j) Cada corte nos permite el análisis, como ya se ha señalado, de dos partes particulares de la gráfica. Así, por ejemplo, el corte a-a nos permite analizar, en un contexto dado, como la construcción de hechos a través de una terminología dada P(a) se puede relacionar con declaraciones proposicionales p, q, s y t del contexto G.

La suma-anillo de a-a y b-b puede servirnos para comparar y/o diferenciar la construcción de una terminología adecuada P(a) con la declaración directa de hechos Pa, en G .

k) Considérese en T_2/B' (figura 4.10) el circuito fundamental, Γ que se refiere al proceso de síntesis de las proposiciones elementales del contexto G al contexto U,

$$\Gamma = \{\underbrace{11-9}_{\bullet}, 9-5, 5-4, 4-7, 7-10, 10-12, 12-14, \underbrace{14-11}_{\bullet}\}$$

en el circuito Γ, todas las ramas son elementos de T_2 exceptuando 14-11, que es una cuerda. Tómese en cuenta ahora el corte g-g, asociado con la primer rama del circuito : 11-9

$$S = \{\underbrace{11-9}_{\bullet}, 11-4, \underbrace{11-14}_{\bullet}\}$$

En cualquier conjunto de corte, que coincida con una parte de un circuito, las ramas comunes del circuito Γ y el corte S deben aparecer por parejas, como en el caso presente:

$\boxed{\begin{array}{l}11-9 \text{ y} \\ 14-11\end{array}}$

están en

S y Γ simultáneamente.

Cada conjunto de corte fundamental que formemos con las ramas del circuito Γ , asociadas al mismo arbol de expansión T_2, contendrán a

$\boxed{14-11}$

como cuerda (del árbol T_2).

Por ejemplo, el conjunto de corte fundamental f-f contiene la rama 9-5, del árbol T_2 y la cuerda:

$\boxed{14-11}$

Lo mismo sucederá con el conjunto de corte fundamental definido por e-e, es decir, volverá a aparecer 11-14 como cuerda. De hecho, ocurrirá lo mismo con todos los cortes que intersecten una rama del circuito Γ del árbol T_2: 11-14 será una cuerda que aparecerá en todos los cortes fundamentales asociados a las ramas del árbol T_2 y el circuito Γ.

1) El circuito particular que hemos elegido puede interpretarse, de una manera interesante, partiendo de una analogía con los circuitos eléctricos:

En un circuito eléctrico, dentro de una "malla", como suele denominarse en electricidad, la suma de voltajes (caídas de potencial eléctrico) es cero (Ley de los voltajes de Kirchhoff). El conjunto de ramas del circuito está en equilibrio, es decir se establece una interacción entre las ramas de manera que cualquiera que faltara alteraría esas condiciones.

En el circuito Γ podemos analizar como las ramas establecen una interacción simultánea, es decir todas ellas son relevantes en el proceso de síntesis; ésto se observa abriendo el circuito lo cual se logra eliminando la rama 14-11 y analizando las demás ramas:

- El paso inferencial de 4 a 9 para establecer hechos o aseveraciones p y q.

- La formulación de enunciados conjuntivos en 9 y 10 y las inferencias derivadas de ellos en 11 y 12, en el contexto U.

- La conjunción de los resultados inferenciales de 11 y 12 para inferir, más adelante una nueva proposición en 15.

Entre todos estos conceptos hay algún tipo de interacción o relación. En un proceso de enseñanza, deben mostrarse estas interacciones, de manera sistemática. Debe evitarse el énfasis aislado e incompleto en los temas o asuntos de una área del conocimiento y debe señalarse el proceso de integración para inducir la comprensión, e incluso su posible aceptación o refutación.

En cualquier estructura como el árbol T_2, por limitado que éste pueda parecer, un circuito fundamental suele tener connotaciones importantes para la estructura general.

m) Debe enfatizarse que cualquier corte fundamental que se asocie a un circuito contiene a una cuerda en común, además, la cuerda de un circuito fundamental no está asociada a ningún otro corte fundamental, que no contenga ramas de Γ, todo en relación con el mismo árbol de expansión.

El resultado anterior puede abordarse de otra manera:

- Sea $T \subseteq G$ un árbol de expansión,

- Sea Γ un circuito fundamental del árbol T tal que:

$$\Gamma = \left\{ c_j, b_1, b_2, \ldots, b_i, b_i+_1, \ldots, b_r \right\}$$

en donde:

c_j es la cuerda del circuito (la cual es también un elemento de G),

- Consideremos un corte fundamental S_1, el cuál solo deberá contener una rama del árbol T.

No podrá contener a otra rama de T, pero como es un corte, contendrá necesariamente a la cuerda c_j (no hay otra posibilidad); los demás elementos del conjunto de corte serán cuerdas de T;

- supongamos que S_i corta a la rama b_i

$$S_i = \left\{ b_i, c_1, c_2, \ldots, c_j, \ldots c_k \right\}$$

- entonces

$$S_i \cap \Gamma = \left\{ b_i, c_j \right\}$$

- supongamos cualquier otro corte <u>fundamental</u> S_{i+1} sobre alguna rama de Γ, digamos b_{i+1}, como no puede contener otra rama de T necesariamente contiene, como antes, a c_j:

$$S_{i+1} = \left\{ b_{i+1}, c'_1, c'_2, \ldots, c_j, \ldots, c'_k \right\}$$

tal que:

$$\boxed{S_{i+1} \cap \Gamma = \left\{ b_{i+1}, c_j \right\}}$$

Todos los cortes fundamentales S_i asociados a las ramas del circuito fundamental Γ

contienen a una rama de Γ y a la cuerda c_j.

Es relativamente sencillo establecer un resultado complementario a este teorema:

En la siguiente figura, el corte $\rho-\rho$ es un corte fundamental del árbol (T).

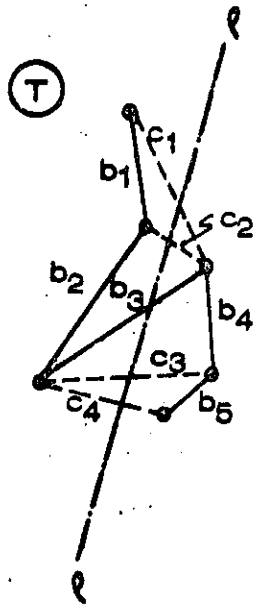


Figura 4.11.

$\boxed{S_3=\{b_3, c_1, c_2, c_3, c_4\}}$

el cual se identifica mediante la rama b_3 del árbol (T).

No obstante que están definidos diversos circuitos

$\Gamma_1 = \{b_1, b_2, b_3, c_1\}$

$\Gamma_2 = \{b_2, b_3, c_2\}$

$\Gamma_3 = \{b_3, b_4, c_3\}$

$\Gamma_4 = \{b_3, b_4, b_5, c_4\}$

$\Gamma_5 = \{b_1, c_1, c_2\}$

$\Gamma_6 = \{b_5, c_3, c_4\}$, etc.

solo Γ_1, Γ_2, Γ_3 y Γ_4 son fundamentales (contienen una sola cuerda).

En todos los circuitos fundamentales que se originan de las cuerdas en S_3, aparece la rama b_3 del corte S_3.

Analogamente al caso anterior

$\boxed{\Gamma_i \cap S_3 = \{b_3, c_i\}}$

O sea que, respecto a T,

la rama b_3 del corte fundamental S_3 aparece en todos los circuitos fundamentales que contienen a las cuerdas consignadas en S_3.

n) Desde el punto de vista conceptual, a estos dos resultados de circuitos y conjuntos de corte fundamentales, del árbol T, de una gráfica, se les pueden dar interpretaciones, no sólo de tipo físico, -(circuitos eléctricos y/o problemas de transporte), que aporten información relevante en función de la estructuración de los diversos aspectos de una área de conocimiento, o de los estados de un sistema.

Por ejemplo, aislando la siguiente subgráfica T'_2 de T_2.

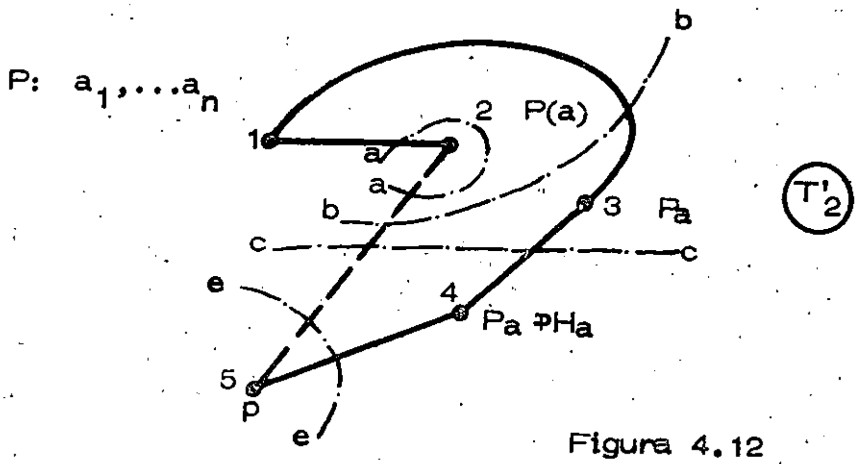


Figura 4.12

En esta gráfica,

2-5 es una cuerda,

$\Gamma = \{2-1-3-4-5-2\}$ es un circuito fundamental,

a-a, b-b, c-c, y e-e, son cortes fundamentales asociados a la cuerda 2-5.

El circuito "prescribe" una interacción o relación entre el conjunto de nodos del circuito.

Esto nos permite hacer consideraciones como las siguientes:

- Racionalmente, no puede establecerse un conjunto de nombres individuales aislados ,($a_1, \ldots, a_n$) vinculados con una propiedad P, sin hacer un intento de integrar o construir uno o varios hechos P(a).

- No puede haber, en un contexto lógico, una separación o desvinculación de las proposiciones del tipo sujeto-predicado P(a) y las proposiciones del tipo p, q, ...etc.

- Las declaraciones Pa pueden inferirse ocasionalmente de la etapa descriptiva $\{a_1, \ldots, a_n\} : P$, sin que necesariamente haya una construcción inductiva P(a).

- No puede haber inferencias $Pa \supset Ha$ sin haber establecido con algún "grado de claridad" las proposiciones Pa y Ha.

- Las inferencias $Pa \supset Ha$ son básicas en muchos casos, para la formulación de proposiciones "p", "q", etc.

  Todo esto muestra una interacción conceptual, pero, en particular, los cortes fundamentales muestran la necesidad de un análisis para relacionar cada rama del circuito Γ (síntesis), con la cuerda 2-5.

- Por ejemplo, el corte a-a establece la necesidad de analizar las relaciones entre P(a), y las proposiciones p, q, ...

- El corte e-e sugiere que entre P(a) y las proposiciones p, q, ..., debe haber un proceso inferencial del tipo $Pa \supset Ha$, etc.

Cada una de las ramas de T_2' se relaciona, a través de los cortes fundamentales, con las cuerdas de todos los circuitos.

o) Supóngase la gráfica T''_2 en donde se muestra el corte fundamental ⊖--⊖ :

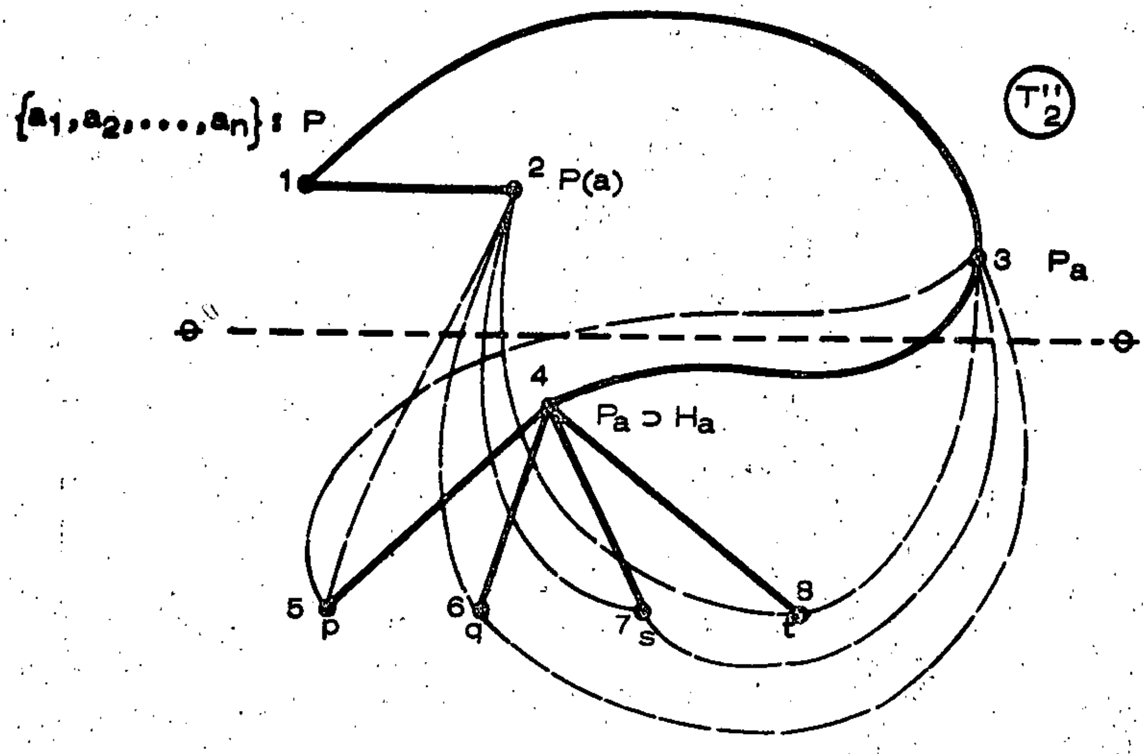


Figura 4.13

$S = \{2\text{-}5, 2\text{-}6, 2\text{-}7, 2\text{-}8, \underline{3\text{-}4}, 3\text{-}5, 3\text{-}6, 3\text{-}7, 3\text{-}8\}$

en el cual sólo 3-4 es una rama del árbol T''_2

- Los <u>circuitos fundamentales</u> son

$\Gamma_1 = \{2\text{-}1;\ 1\text{-}3;\ \underline{3\text{-}4};\ 4\text{-}5;\ 5\text{-}2\}$

$\Gamma_2 = \{2\text{-}1;\ 1\text{-}3;\ \underline{3\text{-}4};\ 4\text{-}6;\ 6\text{-}2\}$

$\Gamma_3 = \{2\text{-}1;\ 1\text{-}3;\ \underline{3\text{-}4};\ 4\text{-}7;\ 7\text{-}2\}$

$\Gamma_4 = \{2\text{-}1;\ 1\text{-}3;\ \underline{3\text{-}4};\ 4\text{-}8;\ 8\text{-}2\}$

$\Gamma_5 = \{\underline{3\text{-}4};\ 4\text{-}8;\ 8\text{-}3\}$

$\Gamma_6 = \{\underline{3\text{-}4};\ 4\text{-}7;\ 7;3\}$

$\Gamma_7 = \{\underline{3\text{-}4};\ 4\text{-}6;\ 6\text{-}3\}$

$\Gamma_8 = \{3\text{-}4;\ 4\text{-}5;\ 5\text{-}3\}$

siendo <u>4-3</u> (ó 3-4) una <u>rama común</u> para todos ellos y conteniendo cada uno, solo una de las cuerdas de S.

El corte fundamental S podría indicar la interacción que debe existir entre la construcción de hechos P (a)

y los hechos específicos Pa

a través de la inferencia $Pa \supset Ha$

y cada una de las proposiciones <u>p,q,s y t.</u>

A través de los circuitos se podría, en el contexto G, estudiar la interacción (o interrelación) de todos los vínculos entre sí, en particular con el paso de Pa a Pa⊃Ha, o sea, en particular, con la rama 3-4 (o 4-3).

Observaciones:

i) Desde luego, con los cortes y circuitos anteriores no se pretende, por ahora, establecer un isomorfismo bien definido con las redes eléctricas y/o de transportes y comunicaciones. Pero, si las ramas establecen relaciones significativas en un contexto dado de los procesos educacionales, es de esperarse alguna analogía de tipo interactivo, puesto que las ramas de la gráfica original, de incluirse, deben tener alguna razón que lo justifique.

ii) En un modelo como el anterior, la relevancia de cada corte o circuito puede afectarse sustancialmente por el árbol que se elija: una rama o una cuerda en un árbol T_i pueden carecer de importancia en comparación con otro T_k.

iii) Si en un análisis de gráficas, en todos los árboles alguna rama de la gráfica original carece de importancia, debe, obviamente, suprimirse. O bien, si la interrelación entre cada pareja de nodos conectados por una rama no puede o no debe definirse con la misma relevancia, deberán asignárse pesos distintos a la ramas, como podría ocurrir con una red eléctrica resistiva con distintas resistencias en cada rama (incluyendo casos de resistencia nula o resistencia infinita).

iv) A menos que sea posible definir numéricamente cada relación (por ejemplo mediante taxonomías numéricas) y quizá su sentido y el estado de cada vértice, probablemente este tipo de gráficas, aplicadas a problemas como el de este ejemplo, sean difíciles de manejar mediante computadoras.

En el caso de estar en esta situación pueden utilizarse los métodos del capítulo 5.

En casos como el presente, no conviene manejar demasiados vértices ni un elevado número de relaciones (ramas), porque el análisis de cortes y circuitos en cada árbol puede resultar un trabajo abrumador. Deberá elegirse la información más relevante y/o representativa.

v) Las condiciones de "interacción o relación" sugeridas en este problema, como una posibilidad análoga a la de redes de flujo (eléctricas, de transportes, etc.), pueden procurarse en cada contexto. Por ejemplo, se podrían establecer condiciones de interacción "óptima", de interacción "factible", "deseable" o "pertinente", etc., asegurándose, en cada gráfica, de que cada tipo de relación esté claramente definida dentro del contexto de la gráfica. Usualmente ocurrirá que el propio análisis indicará las contradicciones o falacias derivadas de una definición inconsistente, ambigua o irrelevante.

4.2. Ejemplo: Elaboración de un curso integral y elemental de música.

4.2.1. Ideas previas

El ejemplo que se da a continuación, se eligió suponiendo que este tema es de una amplia aceptación y no se compromete en sus contenidos con algún campo específico de los que son usualmente abordados en las instituciones de "educación superior".

Se trata de un curso elemental de características distintas a las tradicionales en la enseñanza de la música. Las diferencias sustanciales se refieren fundamentalmente a

- la consideración distinta de los valores musicales con respecto a la técnica,
- la intención de integrar los diversos aspectos musicales con la ejecución y comprensión de una obra dada,
- el desarrollo aural-musical en términos del desarrollo de la ejecución, arreglo, composición e improvisación.

Se presenta el programa tentativo y las interrelaciones - analizadas con teoría de gráficas. Las referencias, el material, la justificación de las relaciones y algunos otros asuntos, se detallan en los apéndices.

4.2.2. Descripción temática

1. Introducción a notación elemental e ideas generales

Referencias: I, XVIII. (Apéndice 4.A.1.)

Representación tonal:

1.1. Aspectos generales (N_g)

Llaves
Teclado
Armaduras
Accidentes
Escalas

1.2. Análisis de piezas particulares (N)

Melodías
Letra (escritura)
Intervalos y acordes
Esquemas rítmicos (aislados)
Fraseo y aspiración
Adornos
Acentos y dinámica

2. Memorización y análisis melódico

Referencias: II, III, IV y XI. (Apéndice 4.A. 1.)

2.1. Análisis del esquema melódico (E ø)

- Audición, pieza vocal particular, grabación de ejecuciones profesionales. Discusión de expresión, fraseo, división - silábica vs compás y ritmo, anotaciones de fraseo, aspiraciones y acentuación

2.2. Memorización parcial y global (M)

- Memorización de letra y melodía
- Memorización de esquemas melódicos

- Dibujo de envolventes mnemotécnicas y otras anotaciones

2.3. Ejecución del esquema melódico (E_m)

- Ejecución (vocal), sin partitura, de la melodía particular

- Confirmación con partitura

- Ejecución y/o canto "a Tempo"

- Comparación crítica (análisis y síntesis) mediante grabación profesional y canto. (Fraseo, tono y tempo)

3. Análisis científico y social

Referencias: VI, VII, VIII, IX, X, XVI, XIX y XX (Apéndice 4.A.1.)

3.1. Aspectos científicos generales (A_g)

- Frecuencia vs altura

- Vibración, resonancia

- Amplitud-Intensidad

- Ruido, cubrimiento y distorsión

- Eco y reverberación

- Armónicos

- Cualidades-Subjetividad

- Filtrado

- Disonancia y consonancia

- Estudio acústico de escalas

- Vibrato, trémolo y doppler

3.2. Reconocimiento socio-ambiental (R_c). Epoca y situación socio-económica, autor, valores estéticos y sociales: análisis de letra, identificación, discriminación, lirismo, dramatismo, - comparación con otras composiciones musicales de la época, instrumentación original, experimentación y análisis crítico

4. Bloques de acordes, armonía y ritmo

Referencias: I, XI, XII, XIII, XVII y XVIII. (Apéndice 4.A.1.)

4.1. Estructuración de teoría elemental (T)

- Notación y nociones sobre bloques de acordes

- Progresiones, acordes y melodías

- Análisis de bloques de acordes y bajo correspondiente para - una melodía. Nociones de bajo cifrado

- Bajo alternado (nociones) y ritmo

4.2. Bloques de acordes ($B_\emptyset$)

- Ejecución de acordes "a Tempo"

- Ejecución de acordes y lectura "a Tempo"

- Ejecución de acordes y canto de melodía

- Ejecución de acordes y canto "a Tempo"

- Comparación de ejecución de bloques de acordes con grabaciones profesionales

- Comparación de ejecución de bloques de acordes y canto - con grabaciones profesionales

4.3. Esquemas rítmicos y acordes

4.3.1. Esquemas rítmicos (R)

- Escritura de esquemas rítmicos vs compás, pieza particular
- Ejecución de esquemas rítmicos y letra (silabación)

4.3.2. - Bajos y acordes (rítmicos) con canto (B)
- Ejecución de acordes "a Tempo"
- Ejecución de bajo y acordes (rítmicos) "a Tempo"
- Comparación de bajo y acordes (rítmicos) con canto de melodía y grabaciones profesionales

4.4. Ejecución de bajo alternado (opcional) (E_{ba})

Esquemas rítmicos con bajo alternado (opcional)

Ejecución de bajo alternado (opcional)

Comparación de bajo alternado con grabación (opcional)

Bajo alternado y canto de melodía (opcional)

Comparación de bajo alternado y canto de melodía con grabaciones profesionales (opcional)

5. <u>Ejecución completa y canto</u>

Referencias: I, IV, XI, y XIII. (Apéndice 4.A.1.)

5.1. Acompañamientos; acordes y melodía (A_c)

- Ejecución de bloques de acordes y melodía
  Comparación con original

- Ejecución de acompañamiento original, simplificación y/o adaptación. Lectura de partitura original o adaptación
- Comparación con grabaciones profesionales

5.2. Ejecución completa y comparación (E)

- Ejecución completa y canto. Lectura de partitura
- Comparación con grabación del original

6. Arreglos (A)

Referencias: I, II, III, IV, VI, X, XI, XIII y XVIII. (Apéndice 4.A.1.).

- Modificación de ritmo y/o acordes y/o melodía de pieza dada

- Simplificación y/o modificación de progresión de acordes de pieza dada

- Escritura separada y ejecución de patrones rítmicos

- Lectura de partituras con letra (arias de opera), con acordes Análisis armónico de progresiones de acordes

- Selección de piezas con acordes, ejecución de acordes "a Tempo"

- Canto de melodías con acompañamiento de acordes (opcional)

- Comparación con grabaciones profesionales (opcional)

- Arreglos armónicos y de acompañamientos (opcional)

- Comparación con grabaciones profesionales (opcional)

7. Elementos de composición e improvisación (C)

Referencias: I, II, III, IV, VIII, XI, XIII, XIV, XV y XVIII. (Apéndice 4.A.1.).

- Análisis de ideas melódicas originales

- Análisis de arreglos de composiciones a 2, 3 ó mas voces

- Arreglo de pieza original a dos voces

- Inversión de acordes y acordes "modernos" (progresionas)

- Variaciones alternativas de los acordes de una pieza

- Variaciones rítmicas, pieza alternativa

- Variaciones melódicas sobre alguno de los ritmos alternativos

- Variación melódica sobre los nuevos rítmos y acordes

- Variaciones similares de otras piezas. Verificación con "reglas" de la composición (opcional)

- Variaciones de las letras (opcional)

- Composición sobre poemas o textos dados (opcional)

Improvisación:

- Variaciones sobre la ejecución (evaluación a través de grabaciones y escritura de las partituras)

Nota: En el apéndice 4.A.2. se da una lista tentativa del material que podría proponerse para realizar las actividades de este "curso".

4.2.3. Análisis con gráficas.

Supóngase que existen las relaciones dadas en la siguiente tabla y cuya conectividad se pretende justificar subjetivamente en el apéndice 4.A.3. "Relaciones entre temas del Programa de Música", atendiendo a algunos aspectos implícitos en el programa dado anteriormente o dentro de los conceptos del propio temario.

TABLA DE CONECTIVIDAD							
	1 N	2 M	3 Rc	4 B	5 E	6 A	7 C
1 N	X	0	1	1	0	1	1
2 M		X	1	1	1	1	1
3 Rc			X	1	0	1	1
4 B				X	1	1	1
5 E					X	1	0
6 A						X	1
7 C							X

Figura 4.14

N: Notación, piezas particulares

M: Memorización parcial y global.

Rc: Reconocimiento socio-ambiental.

B: Bajos y acordes (rítmicos) con canto.

E: Ejecución completa y comparación.

A: Arreglos.

C: Elementos de composición e improvisación.

Las cruces no necesariamente indican que no hay conectividad de cada tema consigo mismo. Suele existir una estructura interna para cada tema pero no analizaremos este asunto porque -

se considera un refinamiento que puede y debe hacerse sólo después de haber puesto en práctica las relaciones más globales de la tabla anterior.

La representación esquemática de la gráfica asociada sería la dada por (G), figura 4.15.

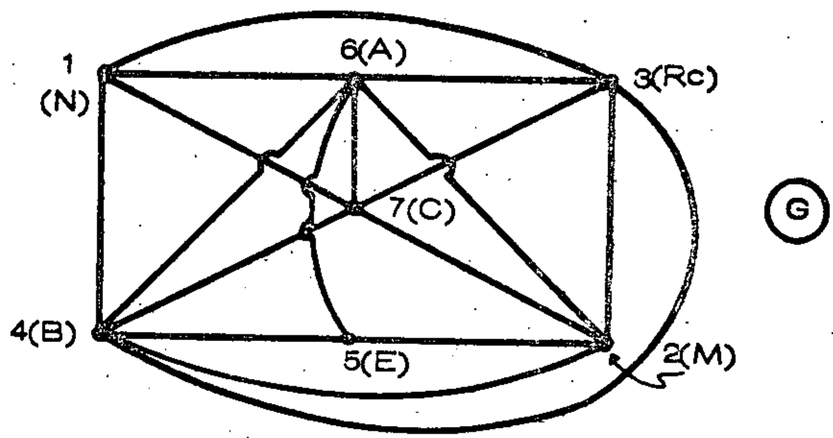


Figura 4.15

Presentaremos, provisionalmente, la gráfica de otra manera, para realizar algunos análisis, figura 4.16.

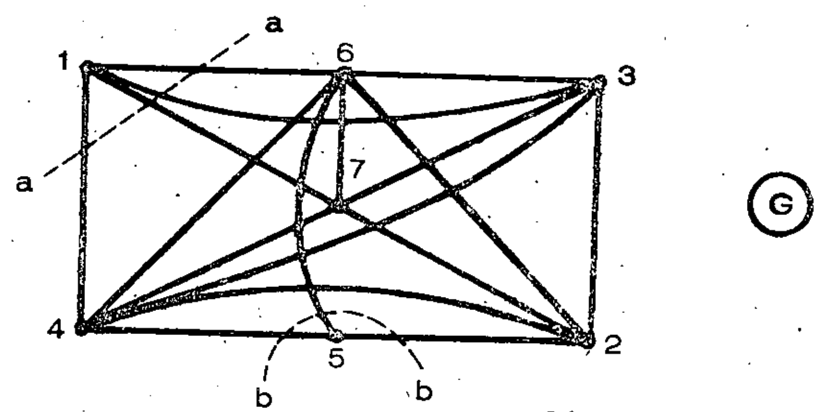


Figura 4.16

Consideremos dos cortes a-a y b-b. Observamos que ambos, pero sobre todo el b-b, requieren de la elimi nación del menor número de ramas para aislar los vértices 1 y 6, y separar o "desconectar" la gráfica.

Definición: Se denomina conectividad de ramas de una gráfica, al menor número de ramas que hay que cortar para desconectar la gráfica. En este caso, la desconexión de Ⓖ, cortando el menor número de ramas, se obtiene mediante el corte b-b. Es decir, la conectividad de ramas de Ⓖ es tres. En nuestro contexto, ésto puede significar que el vértice correspondiente a la ejecución, (6), "debilita" la interrelación de los tres temas asociados a la gráfica, o bien que es el vértice menos interrelacionado con los demás, lo cual es consecuencia de los criterios prescritos. La gráfica no es sino una síntesis de los criterios (objetivos o subjetivos) previos. Si no hubiera concordancia, entonces los criterios o el proceso de obtención de la gráfica, (no la gráfica) estarían mal.

Examinando el corte a-a vemos que tiene sólo cuatro ramas y separa al vértice 1 (Notación) del resto. También esta situación es una consecuencia de lo previsto en los criterios y propósitos del plan.

4.2.3.1. Propiedades y definiciones.

Del examen de algunas gráficas, como la anterior, se advirtió que resulta confuso e inconveniente para el análisis de cortes, circuitos, árboles, etc.; el hecho de que las ramas de una gráfica se intersecten entre sí fuera de los vértices. Los esquemas geométricos de las gráficas en estas condiciones son molestos pero en ocasiones inevitables. En el caso de una red de comunicaciones terrestres, el no poder evitar estas intersecciones puede representar cruceros peligrosos en el tránsito de vehículos o puede requerir la construcción de puentes en los cruces. En este último caso podemos inferir que al elevar una rama de la red, ésta última ya no es plana. En la fabricación de tablillas para la construcción de circuitos eléctricos "impresos" no pueden dejarse estas intersecciones sin alterar el funcionamiento del circuito. Deben también saltarse estos cruces mediante un "alambrado" especial que evite las intersecciones, o la superposición de tablillas independientes que se interconectan solo en los vértices y contenga cada uno aquellas ramas que hubieran tenido que intersectarse de haberse realizado en un solo plano.

i) Definición: una gráfica finita es plana, o satisface la planaridad, si puede trazarse de manera que sus ramas no se intersecten más que en sus vértices.

ii) Definición: una región "R" de una gráfica plana Ⓖ es una zona del plano de la gráfica rodeada por ramas, de tal manera que al elegir dos puntos cualesquiera dentro de la zona, puedan vincularse por una rama que no intersecte ninguna otra rama.

iiia) Definición: las ramas que conforman el exterior o el perímetro de una región que contiene un ciclo simple se denomina el contorno de la región.

iiib) Definición: dos regiones son adyacentes si los contornos de las dos regiones tienen cuando menos una rama en común.

Examinando la gráfica Ⓖ que teníamos para el "curso de música", podemos apreciar la adyacencia de R_1 y R_3, de R_1 y R_4, de R_5 y R_6, pero no de R_3 y R_4, figura 4.17.
Desde el punto de vista del ejemplo, la adyacencia entre dos regiones

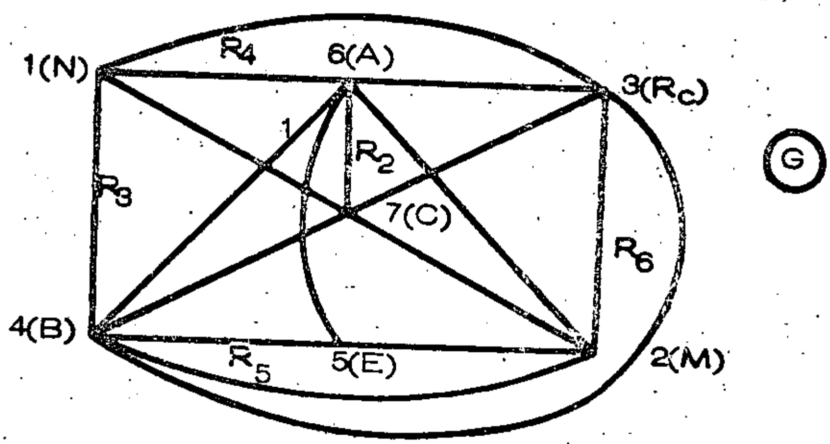


Figura 4.17.

puede implicar relaciones de algún tipo: operacionales, conceptuales, programáticas, etc. Por ejemplo, entre las regiones R_5 (ejecución melódico-armónica) y R_6 (reconocimiento melódico-armónico), se infiere la necesidad de la interrelación entre el reconocimiento y la ejecución, vínculo que debe estar explícita o implícitamente en los planes de estudio correspondientes.
No parece factible hacer este tipo de inferencias en una gráfica no plana lo cual nos llevará a analizar las posibilidades de planaridad de esta gráfica, a través de criterios, que entre otras cosas, toman en cuenta el número de regiones de la gráfica.

Aunque en la aplicación de la teoría de gráficas que estamos presentando no existe un inconveniente tan determinante en relación con las intersecciones, como en los casos antes mencionados, no deja de haberlo en términos de la mayor o menor dificultad implícita para analizar la gráfica o buscar un trazo con el menor número de intersecciones posibles. Desafortunadamente, los enunciados que existen al respecto establecen condiciones necesarias y no suficientes para el estudio de la planaridad. Los casos de condiciones suficientes, por ejemplo los teoremas de Kuratowski no prestan, en la práctica, una ayuda sustancial porque se refieren a la comparación de una gráfica con otras que se emplean como modelo para detectar la no planaridad. Esto implica una reformulación de la gráfica en cuestión y de la comparación de todas las subgráficas posibles isomorfas con las de Kuratowski.

El hecho de que no se cumpla la condición necesaria de planaridad, dada adelante, sugiere la no planaridad de la gráfica. Sin embargo, si se cumple la condición (necesaria), la gráfica puede o no ser plana.

Para el estudio de la no planaridad en este caso, no requeriremos de todas las regiones y bastarán las que se marcan en la figura 4.18.

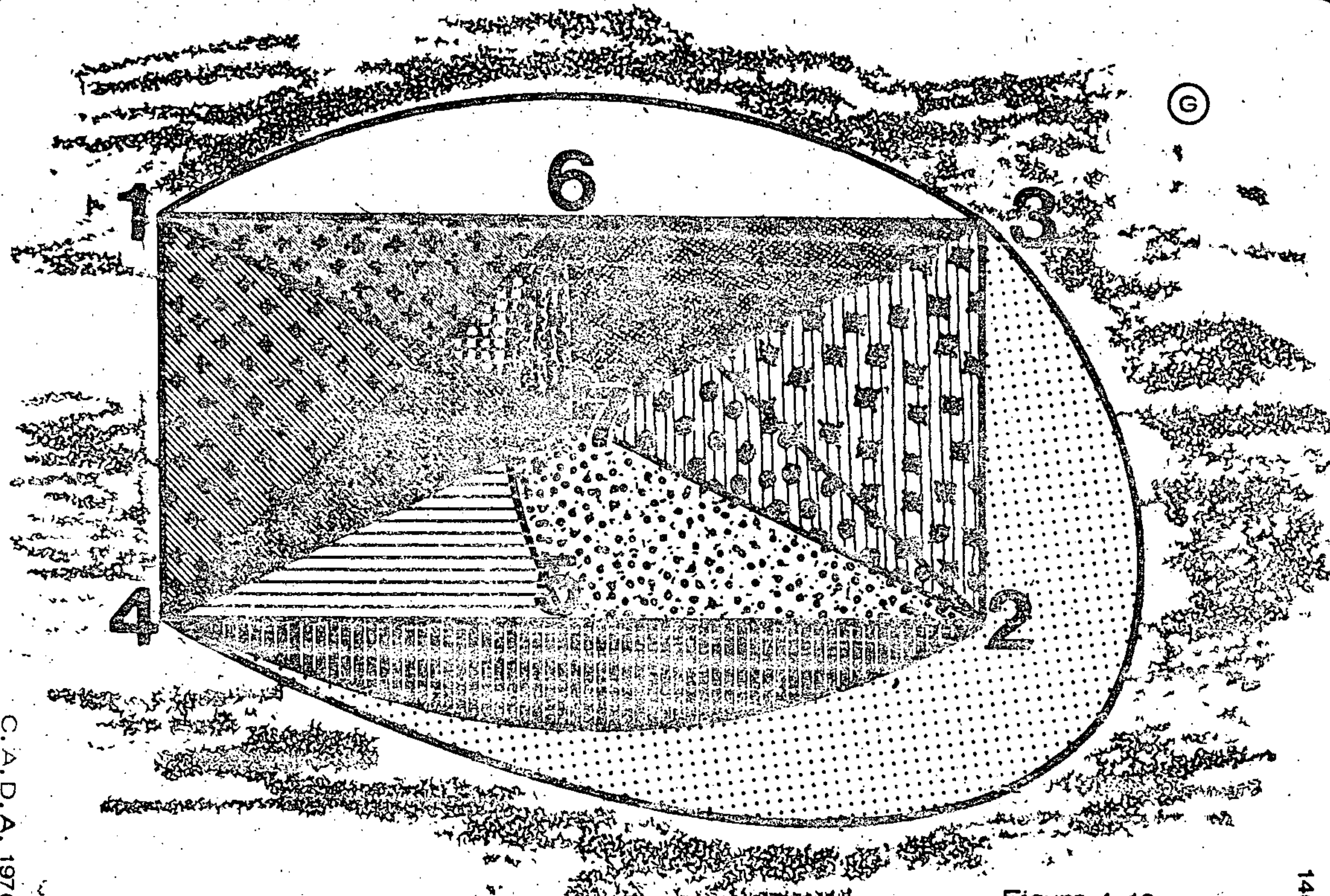
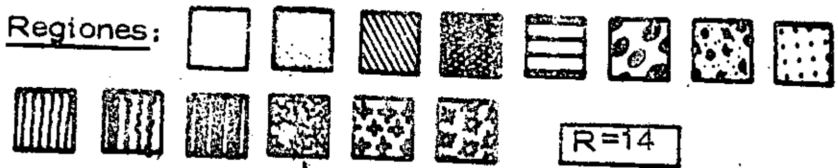


Figura 4.18.

Nudos: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 $\boxed{n=7}$

Regiones:



$\boxed{R=14}$

(región externa)

Ramas: 1-3, 1-4, 1-6, 1-7, 2-3, 2-4, 2-5, 2-6, 2-7, 3-4, 3-6, 3-7, 4-5, 4-6, 4-7, 5-6, 6-7

$\boxed{e=17}$

Una condición necesaria para que una gráfica sea plana es que

$$\boxed{n + R = e + 2}$$

en nuestro caso

$$7+14 \neq 17+2$$

por lo tanto no necesariamente es plana (si fuera, habría forma de trazarla en un plano, sin intersección de ramas).

Espacialmente, elevando el vértice 7, se puede representar a (G) como se indica en la figura 4.19.

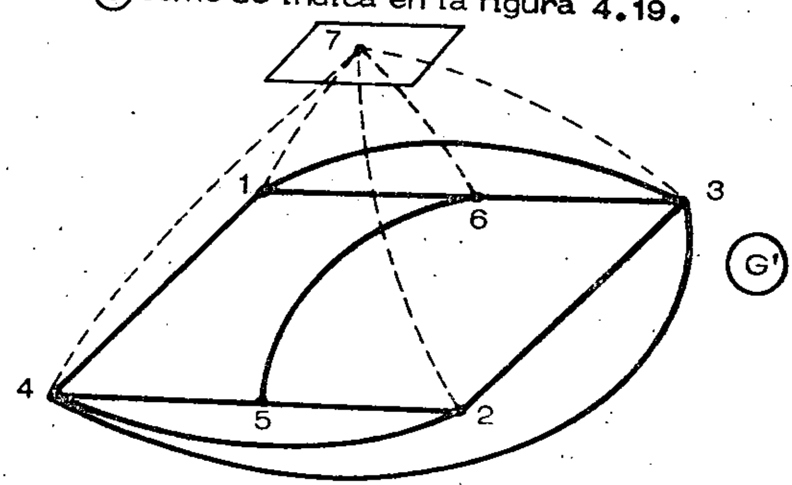


Figura 4.19.

El criterio anterior nos permitió preveer la posible no planaridad de C. También se puede establecer el siguiente criterio alternativo: si G fuera una gráfica planar conexa, simple, sin rizos, con

n vértices
$e \geq 2$ ramas
y R regiones

entonces el número de ramas e debería satisfacer la desigualdad

$$\boxed{\frac{3}{2}R \leq e \leq 3n-6}$$

En el caso de G

$\frac{3}{2} \times 14 \nleq 17 \nleq (3 \times 7) - 6$, lo cual nos permite sospechar que la gráfica no es plana.

Antes de decidir la planaridad de gráficas que tengan un cierto grado de complejidad conviene hacer algunas simplificaciones de la gráfica original que no afecten la planaridad:

I. En una gráfica desconexa se analiza la planaridad de cada parte: si alguna no es plana, no lo será la gráfica completa.

II. Eliminar los rizos (lo cuál no altera la planaridad),

III. Como las ramas paralelas no modifican la planaridad, elimínense todas menos una.

IV. Elimínense las dos ramas y el vértice en todos los vértices de grado dos al cual concurren, (estos no determinan la no planaridad).

Los temas de la gráfica anterior son demasiado amplios como para poder inferir de ella algunos aspectos metodológicos.

Se tomarán en cuenta los temas da la Taxonomía de Bloom para construir las gráficas asociadas al programa y de ellas ir modelando una metodología que si bien incluye conceptos tomados de la Taxonomía, no requiere de ella para la estructuración del programa, es decir, basta con la Teoría de Gráficas y el análisis de contenidos.

Como un primer intento de estructuración del programa se ha construido la gráfica M_x (Fig. 4.20.). En ella se pueden reconocer los temas tratados antes y otros que están en el programa.

En la gráfica M_x deben aclararse algunos asuntos, por ejemplo:

- Algunas relaciones directas tales como N-B, N-C, M-E, M-A, M-C, R_c-C, B-E, B-A, B-C, etc., no se dan explícitamente, pero analizando la gráfica y sus contenidos es fácil ver que estas relaciones están implícitas.
- El diagrama de la gráfica M_x contiene información directa y operacional. Pretende poner de manifiesto, en forma concisa, las relaciones entre los aspectos más significativos para estructurar un curso integral de música.
- Se han introducido algunos términos adicionales a los consignados explícitamente en el plan original, por ejemplo

V_m:	variaciones melódicas tema incluído en el punto 7 de composición (C).
V_{ac}:	variaciones de acompañamiento tema incluído en bloques de acordes (B) y esquemas rítmicos y acordes (R)
I:	Ideas melódicas originales Tema señalado en 7 (C).

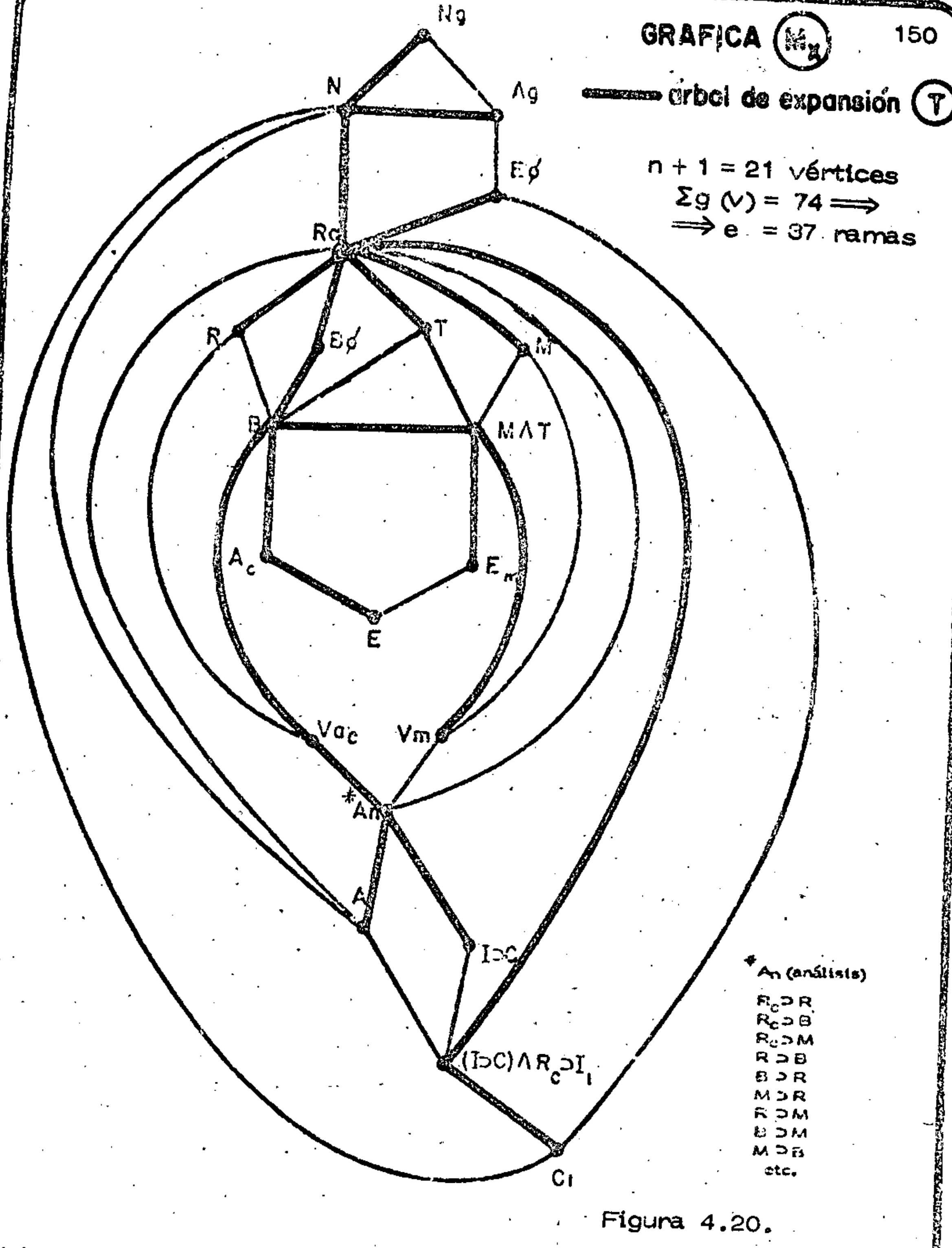


Figura 4.20.

Nota: En el árbol de expansión (contexto dado) están implícitas, directa o transitivamente, las conexiones que se estipularon, tentativamente, como las más relevantes en G.

- Se ha tratado de evitar subdividir exageradamente el plan, sobre todo en aquellos temas en donde un conocimiento o habilidad, concierne abiertamente a más de un tema.

- No todos los temas (vértices, relaciones y circuitos), se han planteado con los criterios de la taxonomía de Bloom. Por ejemplo, en relación al proceso de análisis se ha sustituído el "cuadro de oposiciones" por un conjunto de inferencias, y de interpretación de cortes y trayectorias (que se presentan en el siguiente capítulo). Se supone tácitamente que el 'cuadro de oposiciones, o cualquier otro método lógico válido (y no arbitrario como suele hacerse en la enseñanza tradicional) podrá emplearse para establecer la validez de las inferencias (y otras que se podrán inferir de la propia práctica o de la teoría de la composición).

- A diferencia de los criterios de la taxonomía de Bloom, en el caso de M_x todos los circuitos implican síntesis, por ejemplo:

  - hay diversos circuitos que pueden inducir el proceso de ejecución completa

  - circuitos de los que se pueden inducir procesos de arreglo musical

  - circuitos para inducir procesos de composición y evaluación,

  etc.

- Contrastando enfáticamente con las creencias y posiciones tradicionalistas de algunos sistemas de enseñanza, de la gráfica M_x se podrán suponer o inferir cuestiones como las siguientes:

  - la ejecución completa (E) dentro de un contexto no explícito. Se supone que mediante la integración aural, de armonías, de la vocalización de melodías, de la propia apreciación consciente de valores estéticos y aspectos sociales, etc. se puede inducir esta habilidad.

  - algo similar resulta de suponer que el arreglo musical o la composición están en un contexto no explícitamente dado. Se admite que estos conocimientos son inducidos a partir -

de conocimientos y experiencias previas. No transige lo propuesto con los supuestos basados en la "inspiración" o con motivaciones ajenas al quehacer directamente musical.

- Hemos señalado anteriormente que la notación (N), es una consecuencia de la integración de diversos aspectos musicales en un simbolismo (quizá ya no muy adecuado hoy en día).

De manera que si suprimiéramos en M_x las ramas que salen de N hacia la parte inferior del diagrama; y si además supusiéramos, que la influencia de EØ se induce a través de R_c a R, BØ ,... etc. podríamos lícitamente eliminar las conexiones:

$$\boxed{N - C_1,\ N - A \text{ y } EØ - C_1}$$

En cuyo caso el vértice R_c, como sucedió con el vértice 4 en la gráfica previa sobre la Taxonomía de Bloom, vuelve a adquirir una preponderancia singular.

Definición: La conectividad de vértices de una gráfica G es el menor número de vértices con sus ramas, que deben eliminarse para lograr que la gráfica se separe en dos o más partes. Si para separar una gráfica en dos partes, basta eliminar un vértice, se dice que la gráfica es separable.

La conectividad de vértices aumenta en cuanto haya que eliminar más vértices para la separación.

Bajo las condiciones y la definición señaladas antes, la gráfica M_x es separable. El vértice R_c es crítico; es un vértice de corte o articulación.

El vértice R_c en nuestro caso, es un "cuello de botella", pues de él va a depender la posibilidad de extender el conocimiento y habilidad de un estudiante (transferencia de conocimiento).

Hemos visto que la interrelación de "grandes bloques", gráfica G, sólo puede servirnos como punto de partida para establecer una gráfica más completa que incluya aspectos menores y que sin embargo, juegan un papel importante en la estructuración completa del curso.

Debido a ésto, la gráfica M_x establece relaciones que no necesariamente resultaban obvias en el plan (lo cuál es usual en los planes y programas de estudios), por ejemplo, el carácter inferencial de R_c, o los circuitos que sintetizan a E, A y C_1.

- Otro aspecto relevante de las gráficas, y de sus posibles representaciones esquemáticas, está relacionado con el proceso inverso: las modificaciones estructurales que pueden llevarse a cabo en el plan para no complicar innecesariamente su realización.

4.2.5. Análisis de gráficas por regiones. Gráfica dual.

4.2.5.1. Análisis por regiones (mallas o circuitos).

Gráficas como M_x, se supone, pretenden precisar o aclarar al menos las interrelaciones que se enuncian en un plan. Entre otros conceptos, hemos establecido la conveniencia del análisis de circuitos y cortes fundamentales asociados a una estructura fundamental: un árbol de expansión que, definido de acuerdo con algún criterio (conceptual, funcional, etc.) consideramos central. Este árbol, entre otras cosas tendrá una función similar a la del contexto dado o explícito G (por ejemplo el indicado con T en la figura 4.20.).

Analizando todos los circuitos (o mallas, como suele denominárseles en "la teoría de los circuitos électricos"), surge en una gráfica propuesta el compromiso de asignar a esas regiones algún significado o asociarles algún estado (que debe asumir también alguna condición de interacción entre las ramas que lo componen, así como debe esperarse una interacción entre las ramas que emergen de cada vértice).

Para poder realizar estos análisis conceptuales en el caso que nos ocupa, definiremos en M_x regiones a las que asociaremos "subjetivamente", pero tomando en cuenta los vértices y ramas, los conceptos que supuestamente sintetizan.

Definiremos de esta manera las siguientes regiones de síntesis* que se indican en M_x', figura 4.21.

---

*Aparentemente existe una contradicción entre la denominación "regiones de síntesis" y los nombres de A_B, A_{CC}... como "análisis...". Esto es solo cuestión de un nominalismo tradicional mal empleado porque en cualquiera de estos "análisis" lo que importa esencialmente no es la "descomposición en sus partes" (ramas y/o vértices) sino la relación que entre los vértices (conceptos, habilidades, etc.) puede establecerse para lograr una concepción integral, por ejemplo de la armonía y el ritmo (A_B), de una composición (A_{cc}), etc.

Regiones de síntesis de la gráfica M'_x

A_B: Análisis armónico-rítmico,

A_{cc}: Análisis crítico de una composición,

A_M: Análisis crítico melódico,

A_N: Ajuste notacional de un arreglo,

A_t: Análisis teórico musical,

B_R: Integración de acordes rítmicos (armonía),

C_i: Composición musical inducida,

$\mathcal{E}B$: Ensayo armónico-rítmico,

$\mathcal{E}M$: Ensayo melódico,

N_a: Notación y percepción aural,

N_c: Notación para la composición,

P_{cr}: Análisis crítico-perceptual de una composición,

P_g: Aspectos generales y elementales de la percepción sonora,

S_E: Síntesis para la ejecución musical,

T_B: Teoría elemental de los acordes (armonía),

T_{BM}: Teoría elemental de los acordes de melodías,

T_M: Teoría (reglas) para las melodías.

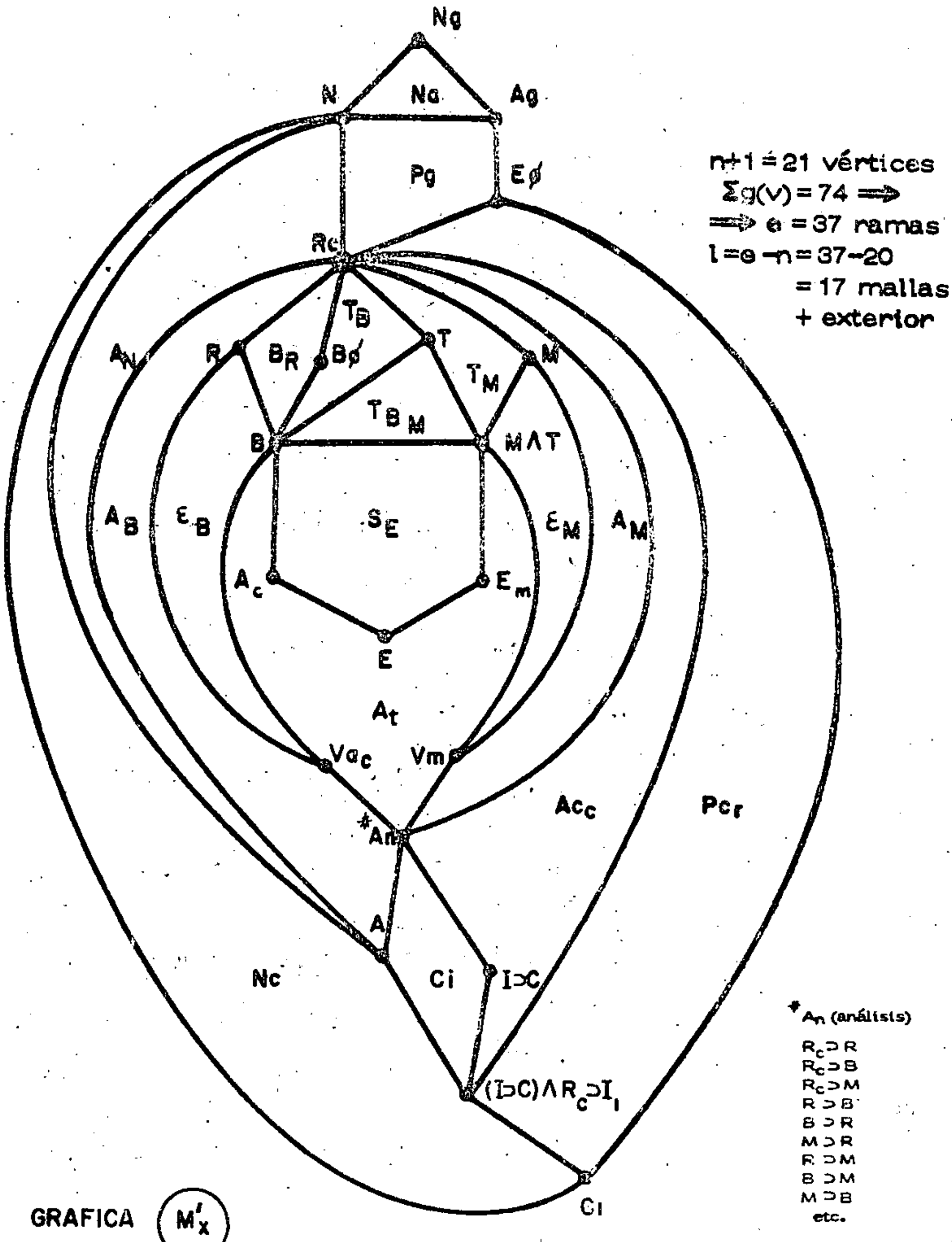


Figura 4.21.

C.A.D.A. 1976

4.2.5.2. Cráfica dual

En términos de los conceptos anteriores asociados a las regiones de la gráfica M'_x construiremos la gráfica dual $\hat{M}_x$ (figura 4.22.), partiendo de los siguientes principios:

i) existe una correspondencia entre las mallas de M'_x y los vértices de $\hat{M}_x$ y recíprocamente,

ii) si en una gráfica hay una rama en común entre dos mallas, en la otra, los vértices asociados a las mallas están vinculados entre sí por la rama correspondiente

iii) si M'_x tiene: $\hat{M}_x$ tendrá:

M'_x tiene:	$\hat{M}_x$ tendrá:
n+1 vértices	n mallas*
e ramas	e ramas
1 = e − n mallas	1 + 1 vértices

iv) Una gráfica es la dual de la otra.

v) Se supone que la gráfica es plana y no separable (o no articulada en un vértice).

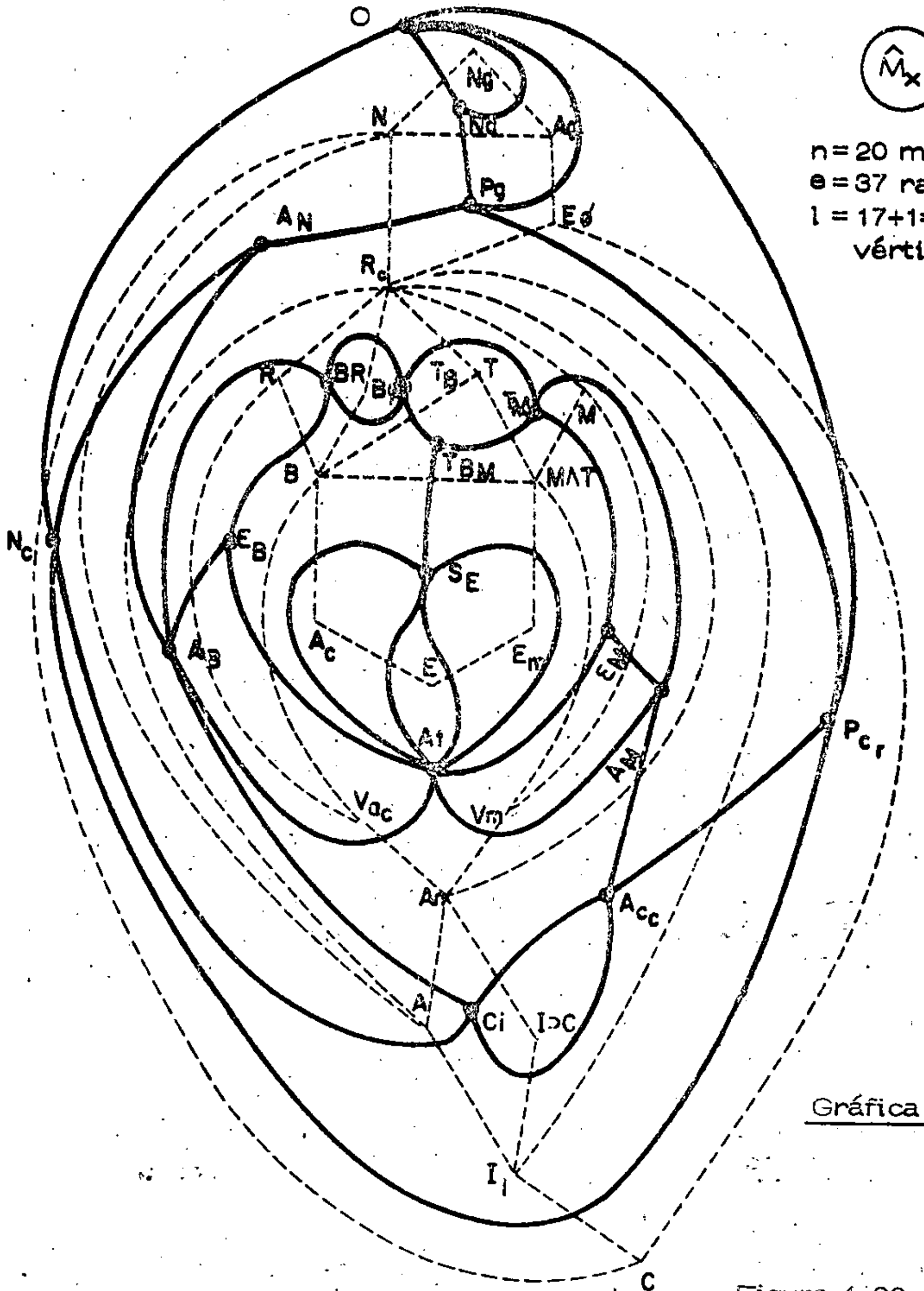
La gráfica $\hat{M}'_x$ establece vínculos con los estados sintetizados dentro de cada circuito. Es importante, y ésto no suele indicarse en los textos de sistemas, el destacar la existencia de una gráfica como ésta. Desde luego en ella proceden los análisis que se han ilustrado previamente: cortes y arboles de expansión, estudio de adyacencia de regiones, etc.

Algoritmo para la construcción de la gráfica dual $\hat{M}_x$

1) A cada región de la gráfica M'_x, incluyendo la región externa ("o" percepción racional conciente), le asociamos un vértice de la dual $\hat{M}_x$.

2) A cada rama e_{ij}, común a las regiones i y j de la gráfica M'_x, le asociamos una rama $\hat{e}_{ij}$ entre los nodos $\hat{\imath}$ y $\hat{\jmath}$ de la dual $\hat{M}_x$

*Mas la malla externa que incluye a la gráfica.



$\hat{M}_x$

n = 20 mallas*
e = 37 ramas
l = 17+1=18 vértices.

Gráfica dual

Figura 4.22.

---

* agregándole la exterior a $\hat{M}_x$ se tendrían 21 mallas (equivalente a los 21 vértices de M'_x).

C.A.D.A. 1976

4.3. Programas y Gráficas dirigidas

De las gráficas M'_x y M_x podemos proponer un primer programa para el curso, desglosando las actividades descritas en los vértices de M'_x, secuenciándolas, e indicando los estados (o síntesis) a que se va llegando después de completar las actividades consignadas.

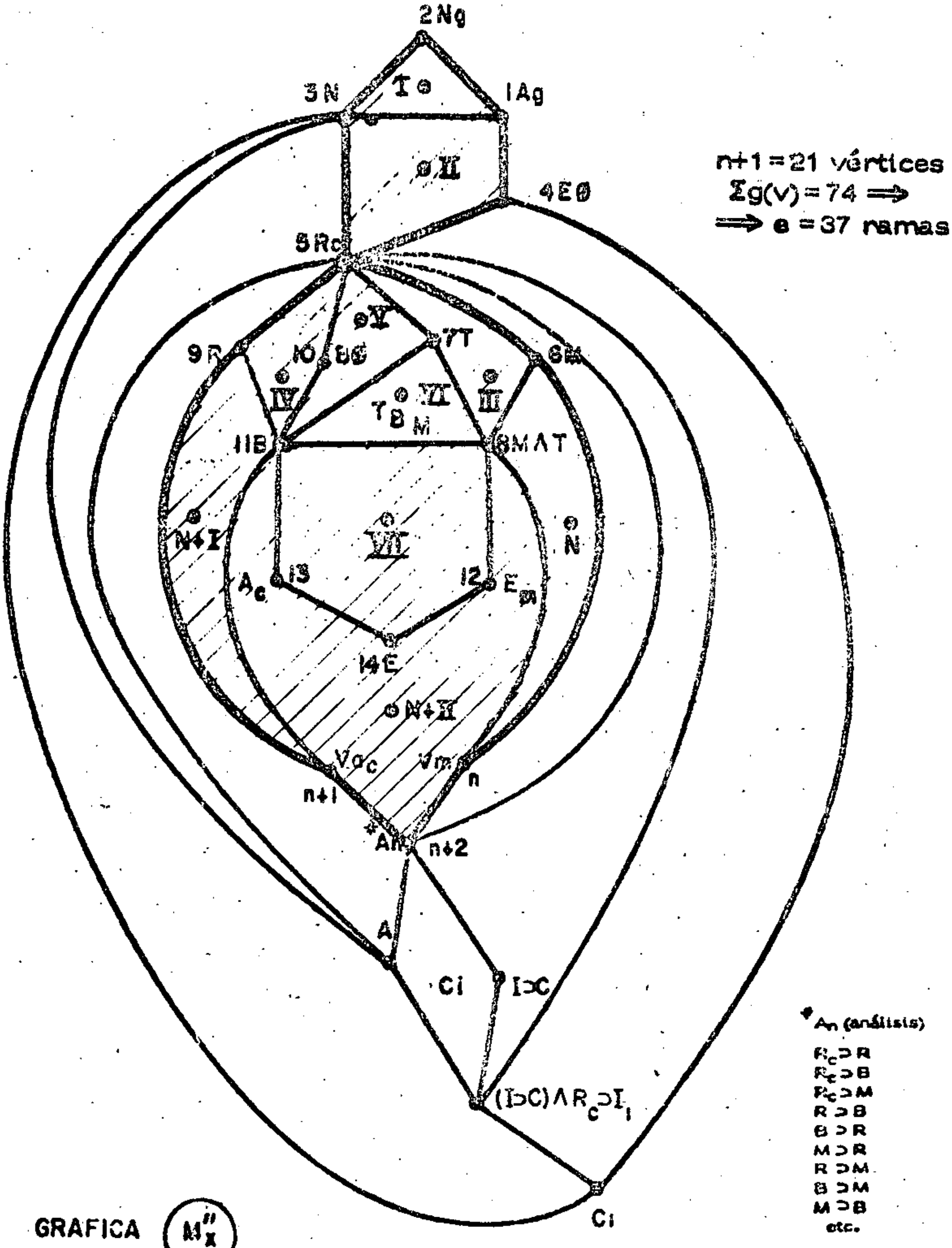
El programa se reduce en una primera etapa, a la gráfica M''_x (figura 4.23.) que culmina en el vértice A_n, ésto es, que comprende a la gráfica cuyo circuito envolvente (o externo) es:

$$A_g - N_g - N - R_c - R - V_{ac} - A_n - V_m - M - R_c - E_\emptyset - A_g$$

Tal gráfica tiene una articulación (o sea que es separable) lo cual, según lo que se había establecido antes, viola las condiciones descritas para establecer la gráfica dual. Esta situación se subsana mas adelante vinculando $E_\emptyset$ con M.

En la figura 4.24, se presenta la tabla del programa correspondiente a esta primera etapa. En la parte superior aparece un conjunto de anotaciones denominadas REQUERIMIENTOS. Algunos de estos tópicos ya están incluidos en el plan y el objeto de repetirlos obedece a la conveniencia de indicar el momento en que deben ser considerados en el desarrollo del programa. En la parte inferior se encuentran las ACTIVIDADES que se refieren a los vértices correspondientes de la gráfica M''_x ordenados en la forma que se podrían ir tomando en cuenta para lograr establecer las áreas de síntesis, los cuales corresponden a vértices de la gráfica dual.

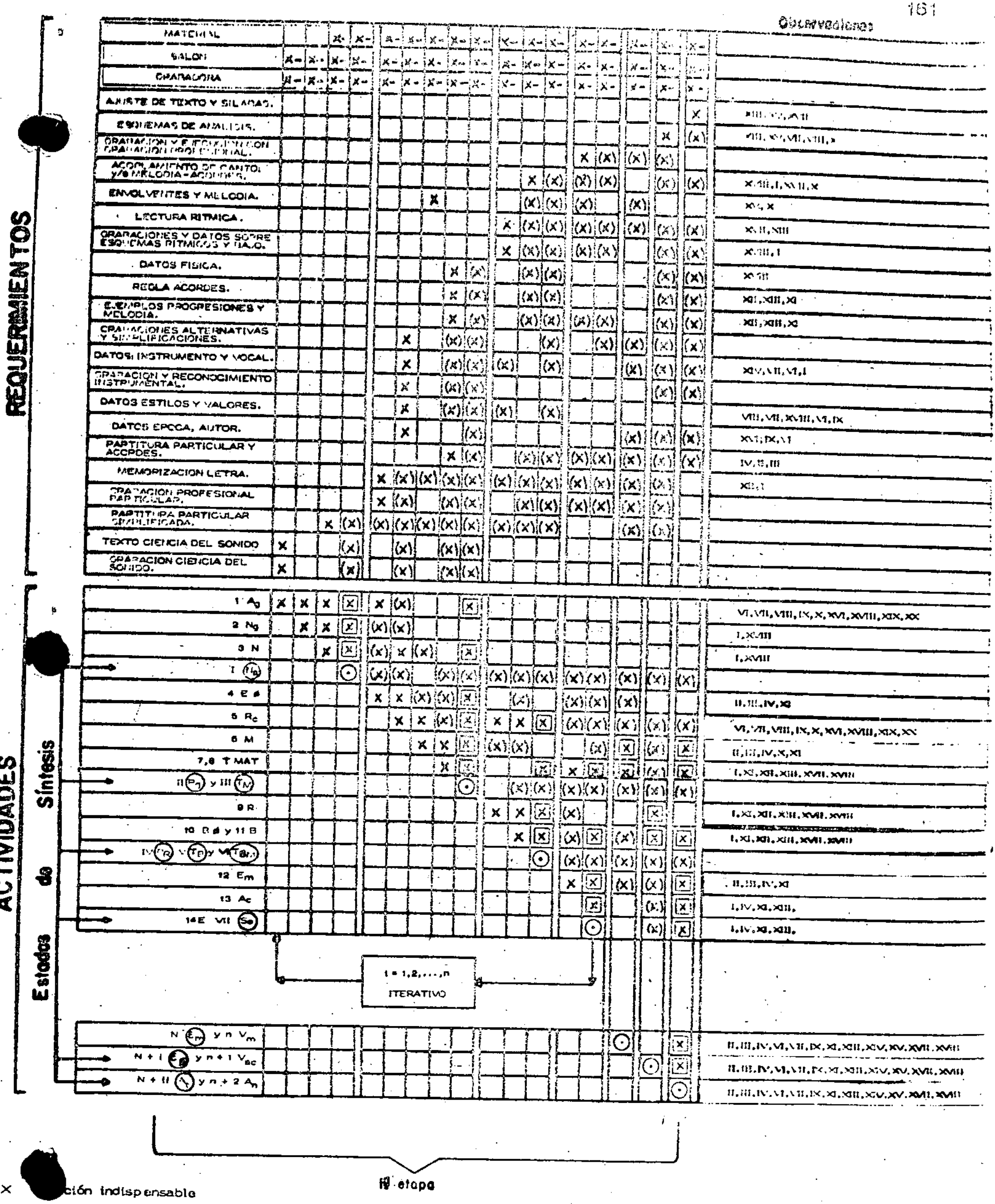
Los estados (o síntesis) descritos, se toman en el programa como puntos de evaluación integral (o sea que incluyen los tópicos y estados previos).



GRAFICA M''_x

Figura 4.23.

C.A.D.A. 1976



× ción indispensable

(×) Relación recordatoria y/o conveniente

☒ Temas (vértices) para la síntesis

⊙ Relaciones para la integración (o síntesis)

Figura 4.24.

C.A.D.A. 1978

Deben hacerse las siguientes observaciones a la tabla:

1) El programa de actividades es gradualmente creciente hacia abajo. Se puede trazar una diagonal que vaya de A_g a E que incluya a todas las cruces en su parte superior. Si apareciera alguna por debajo, ésto implicaría el abordamiento de algún tema que no fue relacionado previamente con los temas del plan.

2) Se repiten muchas cruces entre paréntesis, lo cuál no implica que deban explícitamente ser consideradas en cada paso o etapa de las actividades o de la síntesis. Sin embargo, implícitamente sí deben estar contenidas de acuerdo con el proceso constructivo que se utilizó para integrar el curso. Esto se indica para que en alguna situación de duda, confusión o de impedimento para la prosecución normal del curso, se pueda llevar a cabo un análisis o diagnóstico de las posibles causas de tal situación y solventarla más expeditamente.

3) La tabla de actividades está dividida en dos partes:

- la primera consigna las actividades de A_g a E, y
- la segunda consigna a V_m, V_{ac} y A_n, junto con los estados asociados.

Esto se considera conveniente en razón de que no se supone factible que en un primer intento se llegue a dominar suficientemente la integración de todas las etapas de A_g a E como para poder apreciar o proponer racionalmente variaciones de melodía (V_m), de acompañamientos (V_{ac}) y/o de llevar a cabo un análisis (A_n) de una o varias composiciones al nivel de detectar visual y/o auditivamente los elementos que la integran: tonalidad, armonía, época, ambiente psico social, etc. Solo después de "n" intentos (o iteraciones) se propone precisamente el paso A_n, en el momento en que se ha logrado un "cierto" dominio de los estados previos y sus diversas combinaciones prescritas en las gráficas dadas o en las que resultan de modificarlas racionalmente, de acuerdo con la información objetiva que el propio curso aporte.

Cualquier cambio debe estar plenamente justificado y antes de aceptarlo, hay que analizar minuciosamente las consecuencias que la reestructuración o los cambios puedan implicar en las metas.

4.3.1. Orientación

La secuenciación de los vértices de M''_x en la tabla, genera la gráfica dirigida o digráfica D_x dada en la figura 4.25. Se indica en ella uno de los árboles de expansión, T_D, que pueden asociarse a D_x, este árbol se diferencia de los discutidos antes, en que todas sus ramas tienen asociado un sentido, es un árbol dirigido.

Para evitar la posible debilidad implícita en la conectividad dada por el vértice $5(R_c)$, a la gráfica se le agrega la rama 4-6 (Eø-M), que, dado el carácter empírico del proceso, hasta el vértice 6 (M) está justificado. Esto crea la región $\boxed{II'Pm}$ que denominaremos de percepción melódica. En la figura 4.26. se muestra la gráfica dual $\hat{D}_x$ de la digráfica D_x.

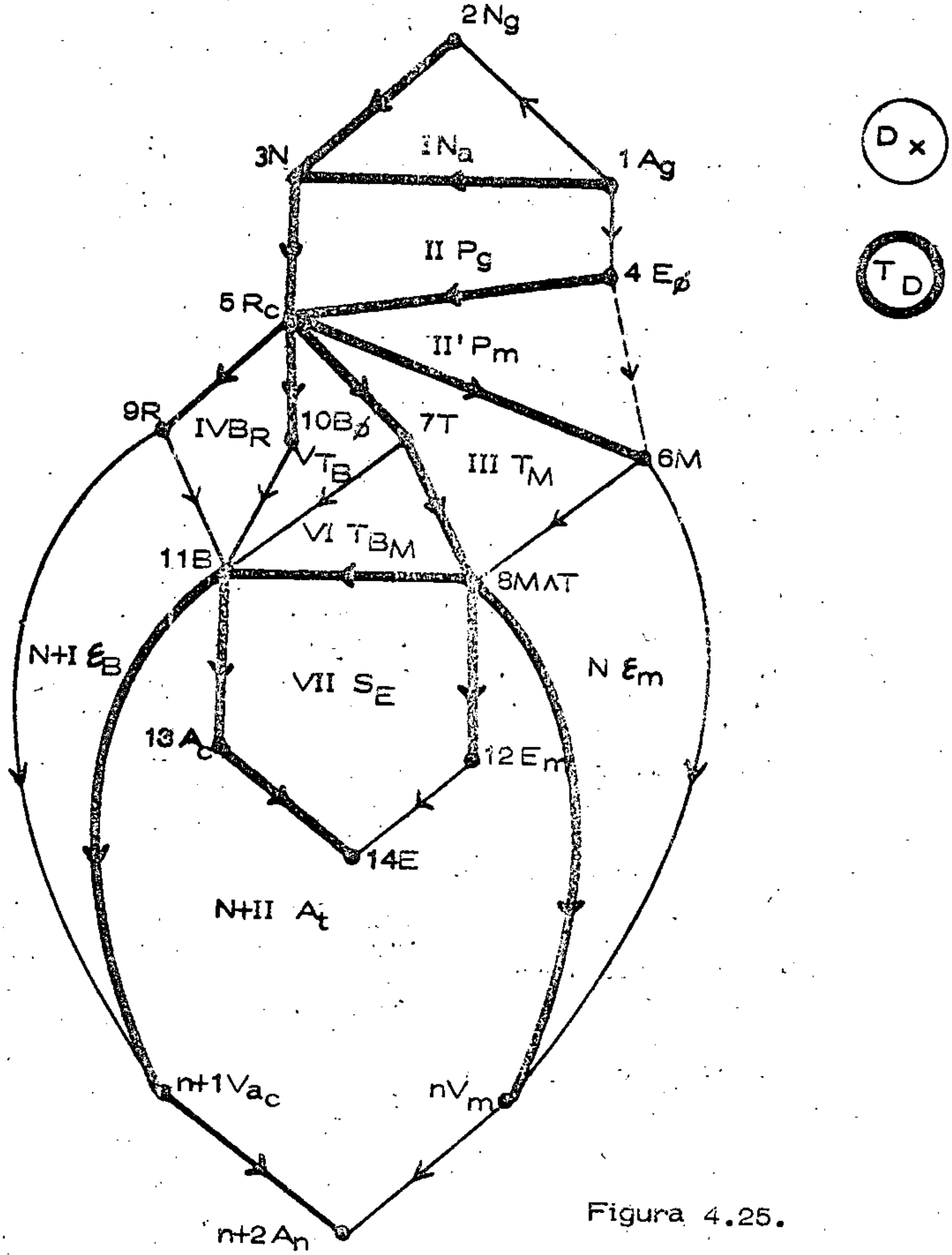

2 Ng
3N
I Na
1 Ag
II Pg
4 E∅
5 Rc
II' Pm
9R
IVBR
10B∅
7T
6M
VTB
III TM
VI TBM
11B
8M∧T
N+I εB
VII SE
N εm
13 Ac
12 Em
14E
N+II At
n+1Vac
nVm
n+2 An
Dx
TD

Figura 4.25.

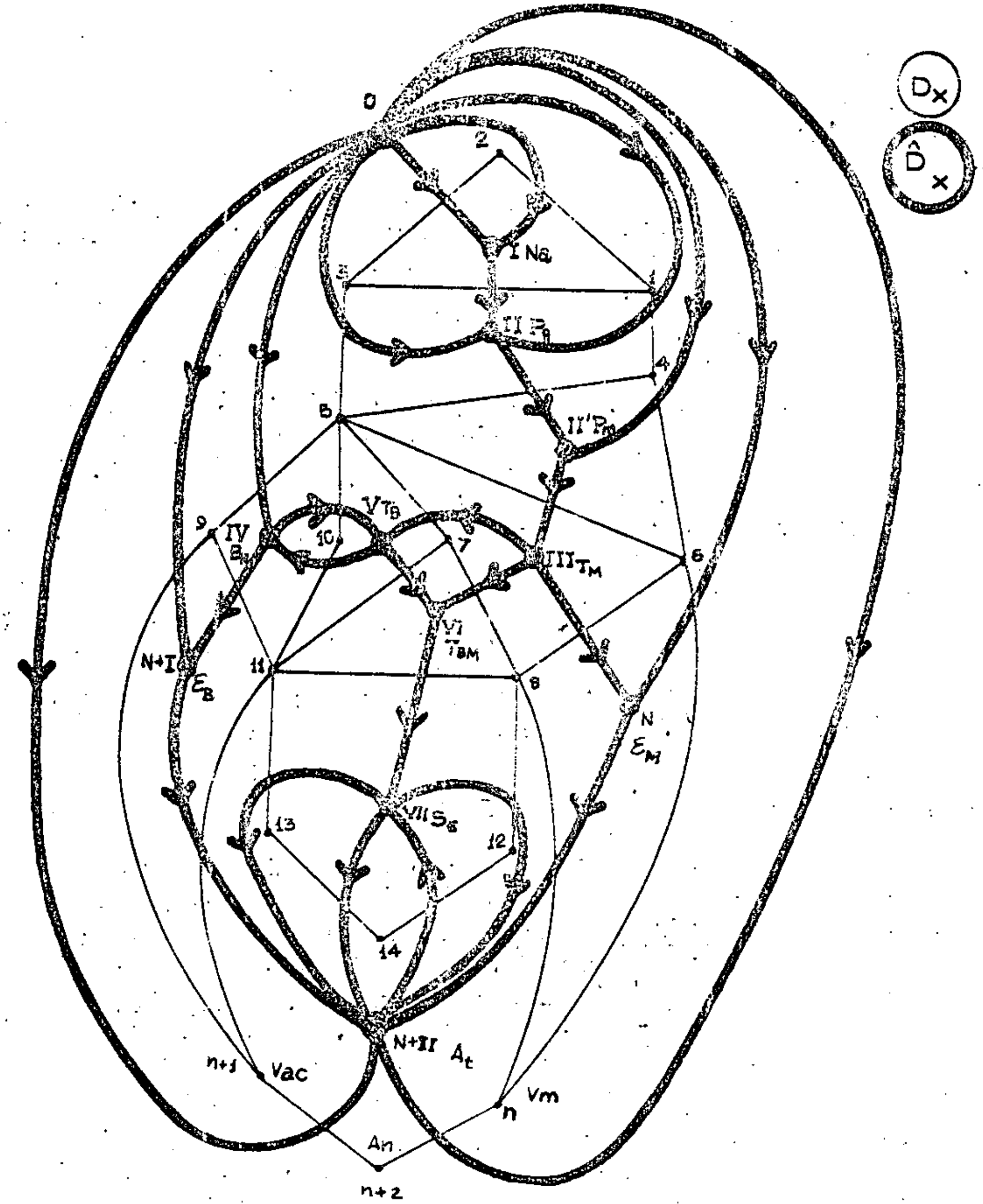


Figura 4.26.

C.A.D.A. 1976

4.3.1.1. Contextos (conjeturas)

En términos burdos pueden reconocerse o asociarse algunos conceptos relativos a los puntos "O" de $\hat{D}_x$ y A_n de D_x en la figura 4.26.

El punto "O" de $\hat{D}_x$ define la región externa de D_x, esto es, el contexto sobre el cuál se definen las relaciones de esta gráfica. Examinando las ramas que inciden en "O", de $\hat{D}_x$, vemos que van hacia las regiones

$$Na, \ Pg, \ Pm, \ \varepsilon_M, \ At, \ B_R \text{ y } \varepsilon_B$$

Por otro lado no están relacionadas con "o" directamente:

$$T_M, \ T_B, \ T_{BM} \text{ y } S_E$$

Podríamos decir que el contexto de D_x está determinado básicamente por los estados perceptuales y no por los contextos teóricos o de ejecución (estos últimos de acuerdo con las gráficas, se desarrollan o estructuran dentro de los primeros).

En cambio el exterior de $\hat{D}_x$ está definido por A_n, que a su vez se relaciona con V_m y V_{ac}. De ésto podría quizá establecerse que el contexto de la dual $\hat{D}_x$ es el análisis musical, vinculado con las variaciones melódicas y de acompañamiento (ritmo y armonía).

Estas dos últimas conjeturas inferidas del programa y la construcción de las gráficas distan mucho de ser definitivas. Quizá otras gráficas u otra disposición de las ramas o regiones pudieran debilitarias. Un análisis más minucioso, la reformulación del plan original o la misma retroalimentación de la información pertinente del programa, podría apoyarias u obligaría a un nuevo planteamiento.

4.3.1.2. Propiedades

i) Muchos términos y definiciones empleados en las gráficas no orientadas siguen siendo válidos en las digráficas, por lo cuál sólo nos ocuparemos de examinar aquéllos que no fueron destacados en la gráfica M'_x.

ii) En primer lugar, debe señalarse que es usual que en las gráficas dirigidas o digráficas, más que en las no orientadas, se obligue el empleo de las relaciones

$$xRy$$

entre los vértices, supuestamente dadas por las ramas orientadas. Evidentemente habrá que incluir las propiedades de las relaciones que se definan.
Esto podrá requerir algunas alteraciones para evitar contradicciones o excluír propiedades que puedan resultar significativas para el desarrollo del curso. De otra manera, tal como está esquematizada D_x, solo se indican relaciones de precedencia (obligadas por el programa).

Por ejemplo: (en la figura 4.25.),

- en el punto inicial A_g inciden externamente (o van hacia afuera del nodo) tres ramas, ésto es el grado externo (g+) o de incidencia externa es

$$g+(A_g)=3$$

- en cambio en el nodo o vértice N_g hay una rama de incidencia externa (o hacia afuera del nodo) y una de incidencia interna (o hacia el nodo) es decir

$$g+(N_g)=1$$

$$g-(N_g)=1$$

de igual manera podemos analizar la incidencia y grados de incidencia externa o interna de cada nodo.

iii) La precedencia de A_g respecto a N_g y de N_g respecto a N parece resultar aceptable desde los puntos de vista conceptuales y de desarrollo aural. De hecho se cumple, como se indica en D_x la transitividad

$$A_gRN_g \wedge N_gRN \rightarrow A_gRN$$

sin embargo, en A_g debe incluirse la propiedad de reflexividad porque algunos de los subtemas de A_g preceden o deben preceder a otros, por ejemplo: el de "vibraciones" al de "frecuencias", o el de "armónicos" al de "filtrado", etc. Por lo tanto, debe incluirse un lazo en A_g

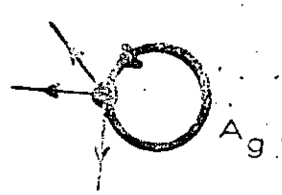


Figura 4.27.

Por otro lado, no parece muy aceptable la <u>simetría</u> entre ninguno de los vértices de la región $N_a(I)$.

En los vértices N_g y N, examinando el temario, también sería aceptable incluir lazos para indicar la interacción entre los subtemas de estos vértices, (figura 4.28.). Entonces la relación R de precedencia (conceptual y perceptual) entre los vértices de la región N_a es

transitiva asimétrica, y reflexiva

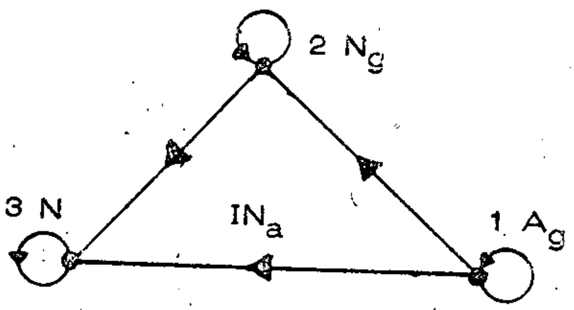


Figura 4.28.

propiedades que habrán de ser consideradas en la <u>evaluación de N_a</u>.

iv) Las relaciones aisladas entre A_g y $E\phi$, y entre N y R_c ya no resultan tan obvias como en el caso anterior. Sin embargo, sí podría resultar claro que N_a (la síntesis) va a ser relevante en el estudio y desarrollo de R_c y E_ϕ. En la figura 4.29. se propone una fusión de A_g, N_g y N en N_a.

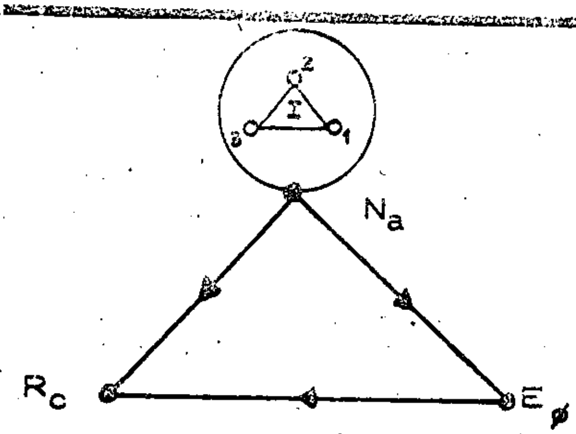


Figura 4.29.

A esta operación se le denomina condensación de la región. En la figura 4.30, se representa la región N_a condensada en un solo vértice.

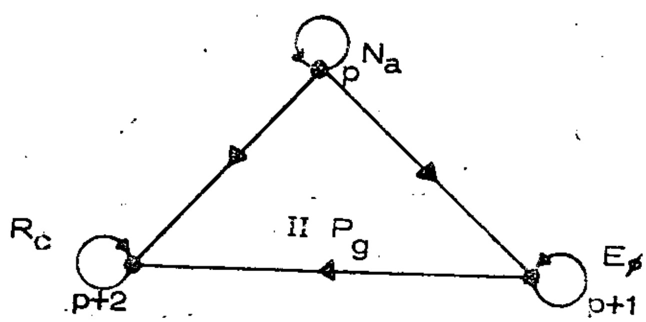


Figura 4.30.

Esta operación solo es admisible en gráficas, que, como la sintetizada por N_a, es fuertemente conexa: entre dos cualesquiera de los vértices hay cuando menos una trayectoria dirigida que los conecta.

En la figura 4.30, se indica con p,p+1 y p+2 la secuenciación original de los vértices (precedencia).

Bajo esta condensación resulta ahora aceptable la precedencia de N_a para E_ϕ y de E_ϕ para R_c (nuevamente esta' relación dentro del contexto perceptual y también analítico). La rama p-p+2 muestra una posible transitividad, que de acuerdo con el temario es aceptable

$$(N_a \rightarrow E_\phi) \wedge (E_\phi \rightarrow R_c) \rightarrow (N_a \rightarrow R_c)$$

Como en el caso anterior, en E_ϕ y en R_c los subtemas se relacionan, ésto se indica con los lazos correspondientes que muestran la reflexividad de la relación R establecida para los vértices de P_g.

En cuanto a la simetría podría ser aceptable en algunos aspectos entre R_c y E_ϕ, pero muy escasa o nula entre los otros vértices. Tampoco serían aceptables ni la asimetría ni la antisimetría.

Por lo tanto, entre los vértices de P_g la relación R es

transitiva
reflexiva
no-simétrica

v) Después de examinar de manera análoga cada una de las regiones y los vértices de la gráfica, se propone la digráfica D'_x ilustrada en la figura 4.31.

D'x

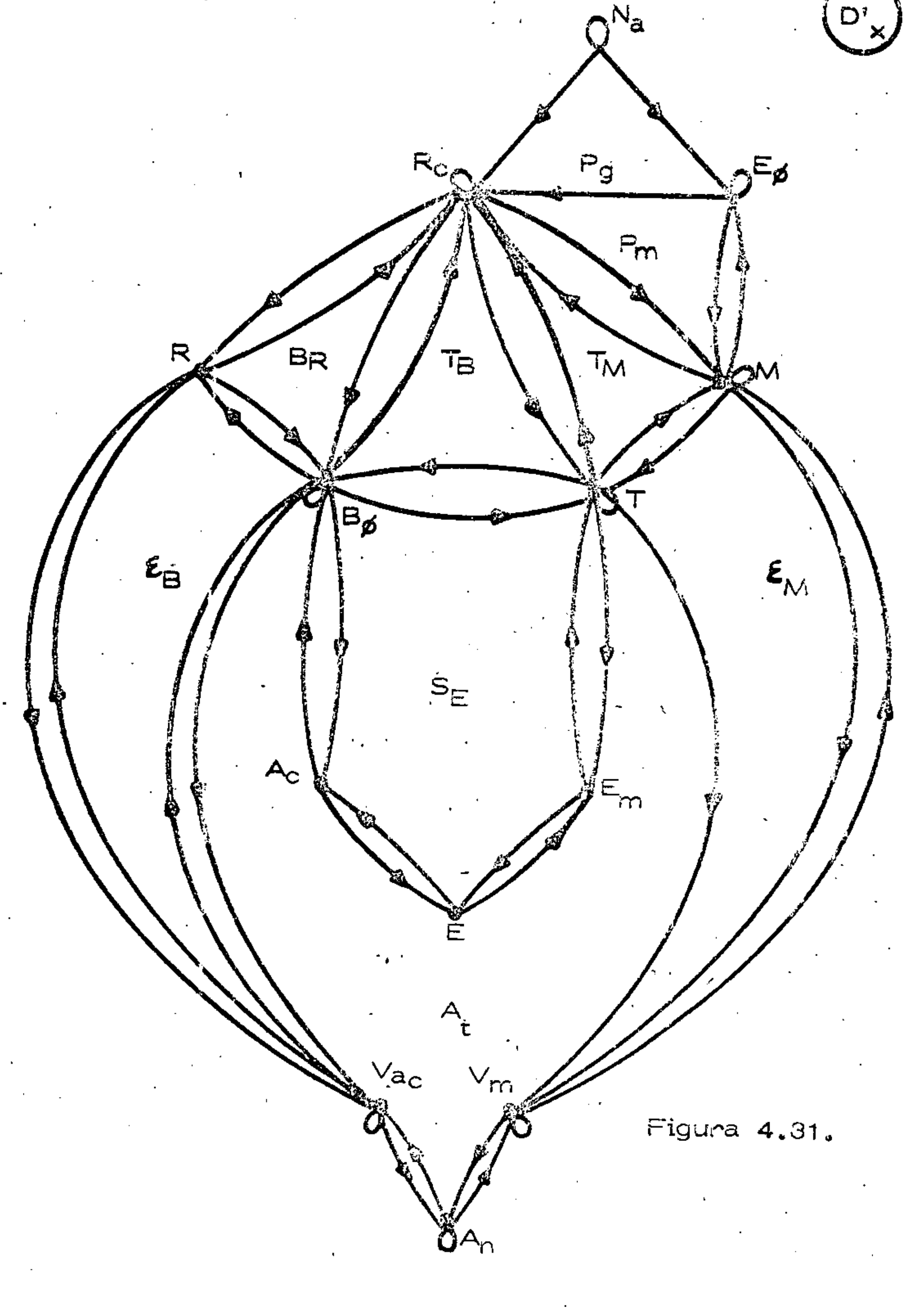


Figura 4.31.

C.A.D.A. 1976

vi) De la gráfica anterior (D'$_x$), podría proponerse un árbol de expansión como (T'$_D$), figura 4.32, a partir del cual pueden establecerse cortes y circuitos fundamentales, analizando los estados (síntesis), interacciones, etc.

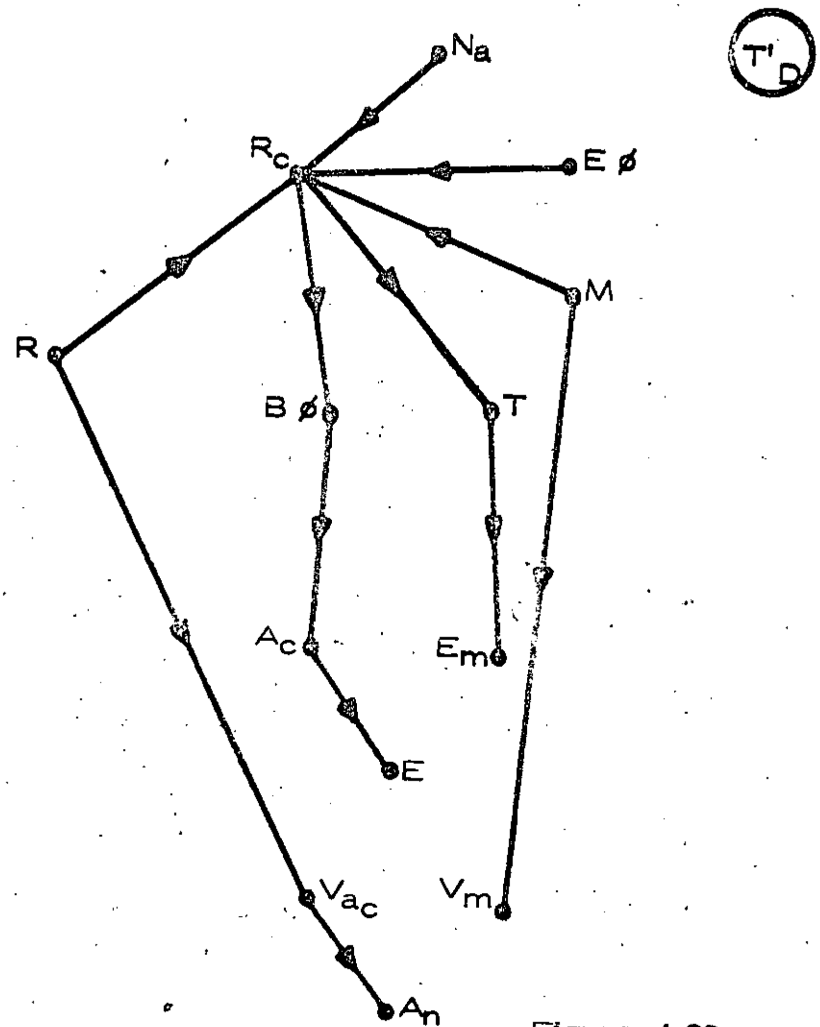


Figura 4.32.

vii) En toda gráfica dirigida, son aplicables los siguientes conceptos:

- En cualquier rama orientada, se distinguen los vértices iniciales de los terminales. Por ejemplo en $E_\phi - R_c$: E_ϕ se denomina vértice inicial y R_c vértice terminal.

- Los vértices aislados (que en este caso no aparecen) son tales que sus grados de incidencia, externa e interna son cero $g^{+}(v_i) = g^{-}(v_i) = 0$.

- Para que dos digráficas sean isomórficas no solo deben establecerse los mismos vínculos entre vértices sino que los disegmentos deben tener la misma orientación.

viii) En la gráfica D'_x hay regiones como:

$$T_M \text{ y } T_B$$

que definen relaciones de equivalencia en vista de que entre sus vértices se verifican:

- la reflexividad
- la transitividad, y
- la simetría

Los contextos de cada vértice y las relaciones entre ellos pueden establecerse de manera que verifiquen condiciones de integración (síntesis) e independencia. Por ejemplo para T_M

Síntesis: $R_c \cup T \cup M = T_M$

Independencia: $R_c \cap T \cap M = \emptyset$

lo cual debería cumplirse cuando menos para los conceptos fundamentales implícitos en cada vértice.

Lo mismo habría de verificarse para otras áreas de síntesis.

Esta última propiedad es útil para evitar las duplicaciones tradicionales de temas en las materias de los currícula o las deficiencias de programas que no incluyen la síntesis de conocimientos o habilidades completos.

ix) Como se previó, en la gráfica D'_x se observa que se han considerado temas esenciales de la "Taxonomía de Bloom". Esto es el resultado de la manera en que se ha aplicado la Teoría de Gráficas, por ejemplo:

- La construcción de terminología P(a (G)), se llevó a cabo en la integración o síntesis dada para cada circuito. En particular, en la "construcción" de la notación musical, destaca la síntesis y fusión que se realizó para N_a, a través de los temas A_g, N_g y N

- el conocimiento de hechos específicos Pa (G) está explícitamente planteado en $E_\emptyset$, pero a través del proceso está también implícito en R_c (junto con principios y generalizaciones) y en estados y/o etapas del programa tales como P_m, B_R y A_t

- el conocimiento de generalizaciones y principios, en el contexto G , está dado principalmente por las síntesis - T_M, T_B, B_R y muy especialmente por A_t

- la comprensión está, desde el punto de vista del programa de música, implícita en todos los circuitos y cortes y más particularmente en $\mathcal{E}_B$, $\mathcal{E}_M$ y A_n

- las aplicaciones están dadas o planteadas a través de todas las partes, (subgráficas) y de manera más explícita y directa en E_m, A_c, V_{ac} y V_m a través de la evaluación que se menciona adelante

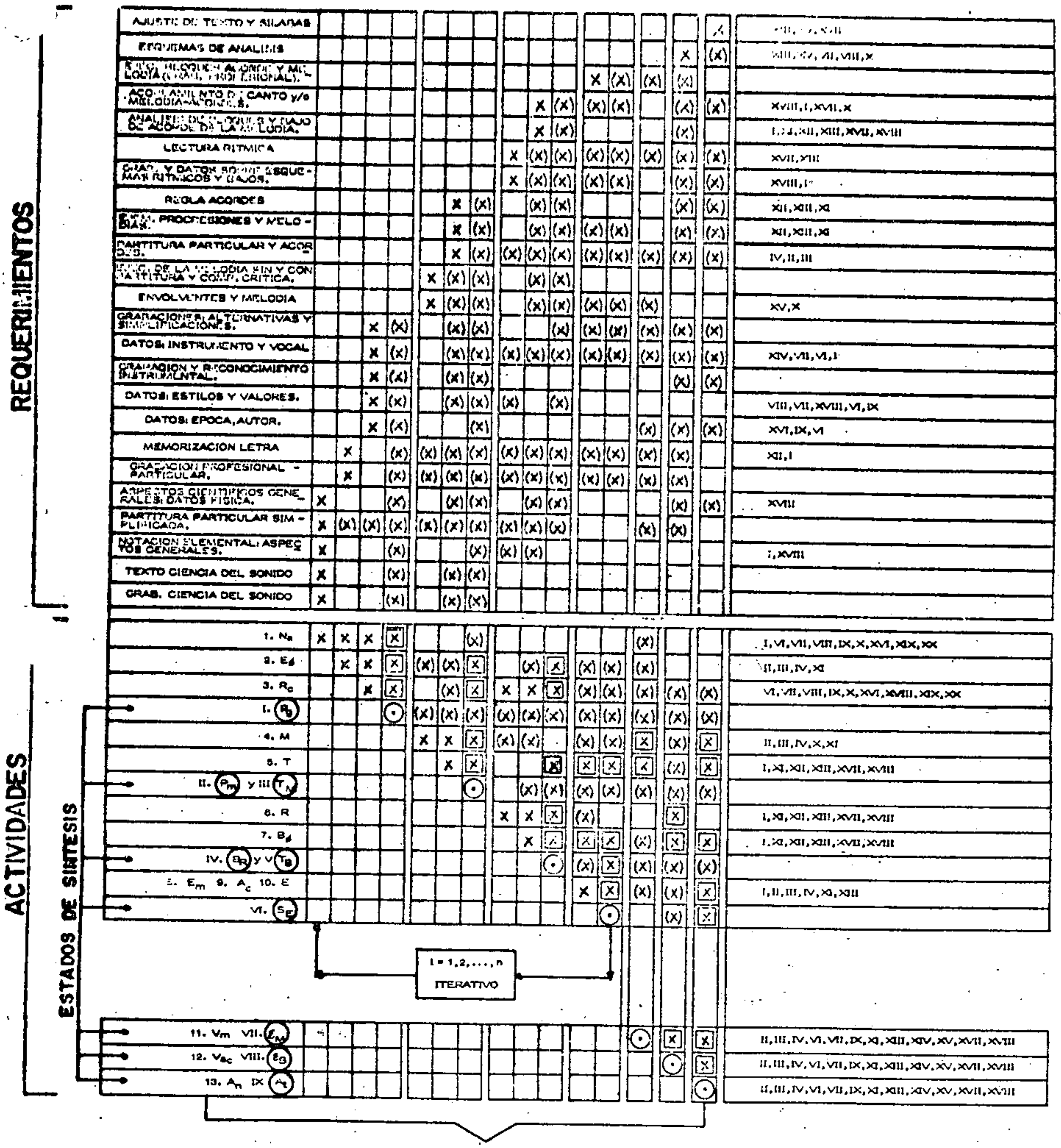
- el análisis está particularmente dado por el vértice A_n para toda la región A_t, que en la práctica y de acuerdo con las tablas de programación, requiere del examen de elementos tales como $B_\emptyset$, T, A_c, E_m, etc.

  Pero de acuerdo con la Teoría de Gráficas aquí aplicada, el análisis estará dado también a través de las interacciones que se detecten de los cortes especialmente de los fundamentales

- la síntesis está implícita en cada una de las regiones, - quizá la más obvia sea la comprendida en la región S_E

- la evaluación, a pesar de haber eliminado en la primera etapa el arreglo y la composición, está fundamentalmente comprendida en E respecto a habilidades en A_n (no aisladas, sino estructuradas con el conocimiento), como culminación del programa integral de música. Este aspecto fundamental, que comprende en la gráfica todas las fases y particularmente el circuito externo, no ha sido debidamente contemplado por Bloom o sus "interpretes" Pueden incluirse, además muy diversos tipos de evaluación y verificación a través de cortes, trayectorias, etc, como se ilustrará en el siguiente capítulo.

La estructuración de temas, estados, regiones, la elaboración del programa-guía, etc. puede ir mucho más lejos que las recetas que suelen derivarse directamente de la propia Taxonomía de Bloom. Es importante insistir que en el proceso, se han introducido los conceptos de dicha Taxonomía. La categorización, sin embargo, de acuerdo con los esquemas previos, resulta muy debatible y en su aplicación a los sistemas "tradicionales" o "modernos" de enseñanza, francamente arbitraria. Algunas consideraciones de condensación, síntesis, etc. tienen repercusión en el programa modificándolo en cuanto al número de etapas, evaluaciones, requerimientos y otros que se incluyen en la tabla de la figura 4.33.



✕ Relación indispensable

(✕) Relación recordatoria y/o conveniente

Temas (vértices) para la síntesis

Relaciones para la integración (o síntesis)

NOTA :

LOS RENGLONES REFERENTES A MATERIAL, SALON Y GRABADORA DEBEN SER CONSIDERADOS EN TODOS LOS PASOS DEL PROGRAMA, CONFORME LA TABLA DEL PROGRAMA

Figura 4.33. Tabla del programa modificado. C.A.D.A. 1976

x) En la gráfica (D'_x), a un punto como el N_a suele denominarse una fuente, en vista de que de él emanan ramas y no concurren a él otras (salvo el propio lazo); lo mismo ocurriría con el vértice R en (T'_D). En otro caso, si solo concurren "disegs" a un vértice, éste suele denominarse sumidero (en las gráficas anteriores no se dá este caso).

xi) En las gráficas que nos ocupan no se considera el caso de ramas paralelas, que pueden ocurrir en una vía de comunicación (por ejemplo, dos caminos con la misma orientación que unen dos poblaciones), figura, 4.34.

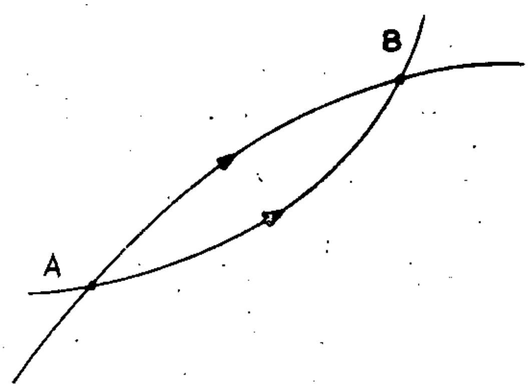


Figura.4.34 .

- Una gráfica sin lazos ni ramas paralelas se denomina gráfica simple. Obviamente, cualquier árbol, como el (T'_D), es una gráfica simple.

- Las gráficas que analizamos no son en general balanceadas. En una gráfica balanceada se debe cumplir que para cada uno de los vértices los grados de incidencia, externa e interna, sean iguales.

$$g^{+}(v_i) = g^{-}(v_i)$$

En D'_x se cumple esta condición en vér tices tales como R

$$g+(R) = g-(R) = 3$$

o en E, V_{ac}, A_n, etc. Pero no se cumple en R_c, ni en V_m, etc.

xii) En el árbol T'_D y lo mismo será apli cable a las gráficas dirigidas en general, la trayectoria

$$N_a-R_c-B_\emptyset-A_c-E$$

es una trayectoria dirigida (todos los - "disegs" están dispuestos en una secuencia de avance en el mismo sentido). En cam bio

$$N_a-R_c-R-V_{ac}-A_n$$

no es una trayectoria dirigida, debido a la reversión del avance dada por $R \rightarrow R_c$. A esta poligonal se le suele denominar semitrayectoria.

Evidentemente los estados vincu- lados por una trayectoria dirigi- da facilitan en muchos casos la secuen ciación de las etapas para llegar a una meta dada.

En una gráfica, si de un vértice a a uno b hay una trayectoria dirigida, se dice que b es un vértice accesible.

xiii) En la detección de fallas de estructuración en los conceptos asociados a una gráfica di- rigida suele ser útil recorrer trayectorias alternativas. Supóngase que en D'_x re- corremos la trayectoria dirigida:

$$M-T-B_\emptyset-T-E_m-E-A_c-B_\emptyset-R$$

en este camino hemos pasado dos veces por T y por B∅ (sin recorrer, desde luego las mismas ramas). Esto puede sugerirnos la posibilidad de un reforzamiento en la enseñanza. Pero también una duplicación posiblemente innecesaria. Por otro lado, partiendo de cualquier vértice de la gráfica (distinto del propio N_a) no hay camino ni trayectoria dirigidos que nos lleven a N_a. Este vértice resulta innaccesible, y un arreglo secuencial podría mostrar una clara deficiencia de la gráfica. (El vértice N_a podría tener un carácter dogmático)

xiv) En los circuitos de D'_x se observa como se cumple la transitividad: por ejemplo

$$(M \to T) \wedge (T \to V_m) \Rightarrow (M \to V_m)$$

en donde la relación entre estos vértices se ha designado con "→". Esta subgráfica, figura 4.35., se denomina un semi-circuito.

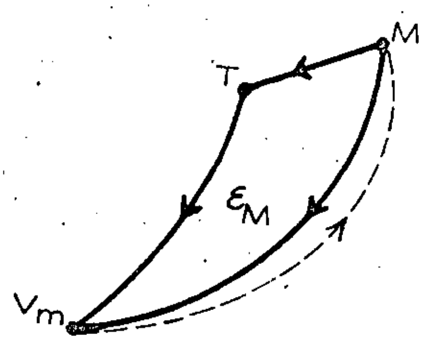


Figura 4.35.

El circuito dirigido, de acuerdo con la definición de la Teoría de las Gráficas, estaría formado por $M \to T$, $T \to V_m$ y la rama, indicada con línea discontinua, $V_m \to M$.

Según el propósito, de un análisis particular, que debe asentarse explícitamente, ambos circuitos, en el programa que analizamos, por ejemplo, juegan algún papel:

- el primer caso $M \cdot T \wedge T \vee_m \rightarrow M \vee_m$ establecen, por ejemplo la posibilidad de una relación entre M y V_m inferida en el proceso,

- la rama $V_m M$ puede, dentro del mismo circuito, tener otra función, por ejemplo, como elemento de evaluación; o bien puede referirse al "flujo" conceptual, como en un circuito eléctrico, para el análisis de la interacción de aspectos o conceptos relativos a la región ε_M

  Se hace hincapie en que la interpretación no debe ser arbitraria; la presencia de ambos circuitos establece dos análisis alternativos, pero distintos, cuyos propósitos deben ser definidos en un contexto específico: la inferencia, puede ser el criterio para el primer enfoque y, la retrospección para el segundo. Ambos son asuntos esencialmente distintos.

xv) Como en las gráficas no orientadas, también en las digráficas se define la conexidad o conectividad.

- Si en una gráfica sucede que entre dos vértices cualesquiera existe siempre una trayectoria dirigida que los una, se dice que la gráfica es fuertemente conexa. Este sería el caso de D'_x a no ser por la inaccesibilidad de N_a.

- Una gráfica dirigida que solo es conexa en cuanto a su correspondiente gráfica no orientada se dice que es débilmente conexa.

Se ha establecido que R_c es una actividad fundamental en el programa de música y de hecho, de acuerdo con T''_D, R_c sería el centro de la gráfica. En una etapa avanzada de la aplicación del programa - es muy factible que de R_c emanen conceptos, ideas, sugerencias, etc, hacia los vértices que con él se relacionan. En tal caso, habiendo uno y solo un vértice de grado cero y siendo éste además negativo, o sea $g^- = 0$, se dice que la gráfica es una arborescencia.

En este caso, el vértice R_c se denomina la raíz de la arborescencia T''_D.

iii) Si en una rama de T''_D, o de cualquier - arborescencia, invertimos su orientación, la gráfica deja de ser una arborescencia, es decir, que una arborescencia solo tiene una raíz. Podemos por lo tanto, sugerir que una arborescencia es una gráfica de difusión.

En forma análoga a los árboles de expansión, pueden definirse arborescencias de expansión de una gráfica.

iv) En una arborescencia,

- cualquier vértice es accesible a partir de la raíz (R_c)

- la raíz (R_c) es inaccesible desde cualquier vértice.

En el programa que utilizamos de ejemplo puede convenir, en una etapa dada, forzar esta situación de inaccesibilidad de (R_c) para lograr el dominio aural de los distintos estados representados por los vértices: todo debe explicarse, comunicarse, realizarse, etc. en términos de los elementos del vértice central, la raiz R_C. Esto, desde luego puede utilizarse en procesos de evaluación y consecuentemente para detectar regiones, relaciones o vértices asimilados o realizados debilmente. Incluso pueden detectarse trayectorias o estados de especial dificultad, que nos permitan reforzar o alterar el programa en determinadas regiones o trayectos.

v) De la misma manera que en un árbol de expansión de una gráfica la inclusión de una cuerda del árbol genera un circuito fundamental, la anexión de una cuerda a un árbol (dirigido), de una digráfica, genera un circuito fundamental que puede ser: un circuito fundamental dirigido o un semicircuito fundamental.

Por ejemplo, si a T''_D le agregamos la cuerda $T \to B_\emptyset$ obtendremos el semicircuito fundamental asociado a la región T_B (figura 4.37).

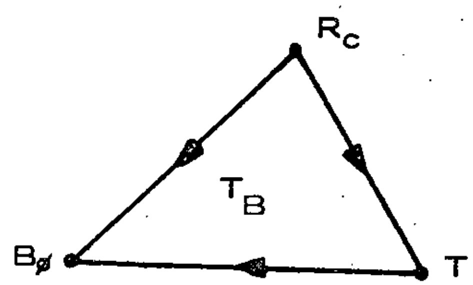


Figura 4.37

Si le hubiesemos agregado la cuerda $T \to M$ hubiesemos obtenido el semicircuito dirigido fundamental, asociado a la región T_M (figura 4.38).

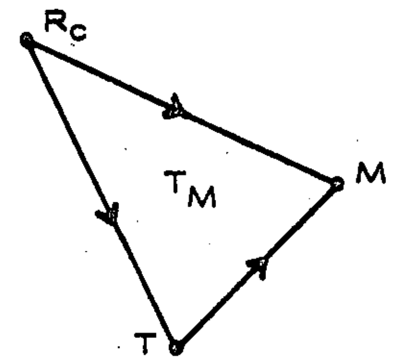


Figura 4.38

vi) Los circuitos (o semicircuitos) fundamentales y los cortes fundamentales se establecen en las digráficas como en las gráficas no orientadas. Al efectuar un corte, las ramas de una región pueden todas "salir" de ella o todas entrar a ella o unas entrar y otras salir.

vii) Consideremos el árbol T'''_D, al que se le ha cambiado el sentido de algunas ramas y se le han agregado las cuerdas que se indican en la figura 4.39. Aquí se puede observar lo siguiente:

<u>rango r</u> (#ramas del árbol) = 12
<u>nulidad μ</u> (#cuerdas) = 9
<u>circuitos dirigidos fundamentales:</u>
T_M, B_R

<u>semicircuitos fundamentales:</u> P_g, P_M, T_B, T_B-S_E, $B_R-\mathcal{E}_{AC}-A_t-\mathcal{E}_m-T_M$, $T_m-\mathcal{E}_m$, $B_R-\mathcal{E}_{AC}$

<u>cortes fundamentales</u>, por ejemplo, 1-1, 2-2, ..., 6-6.

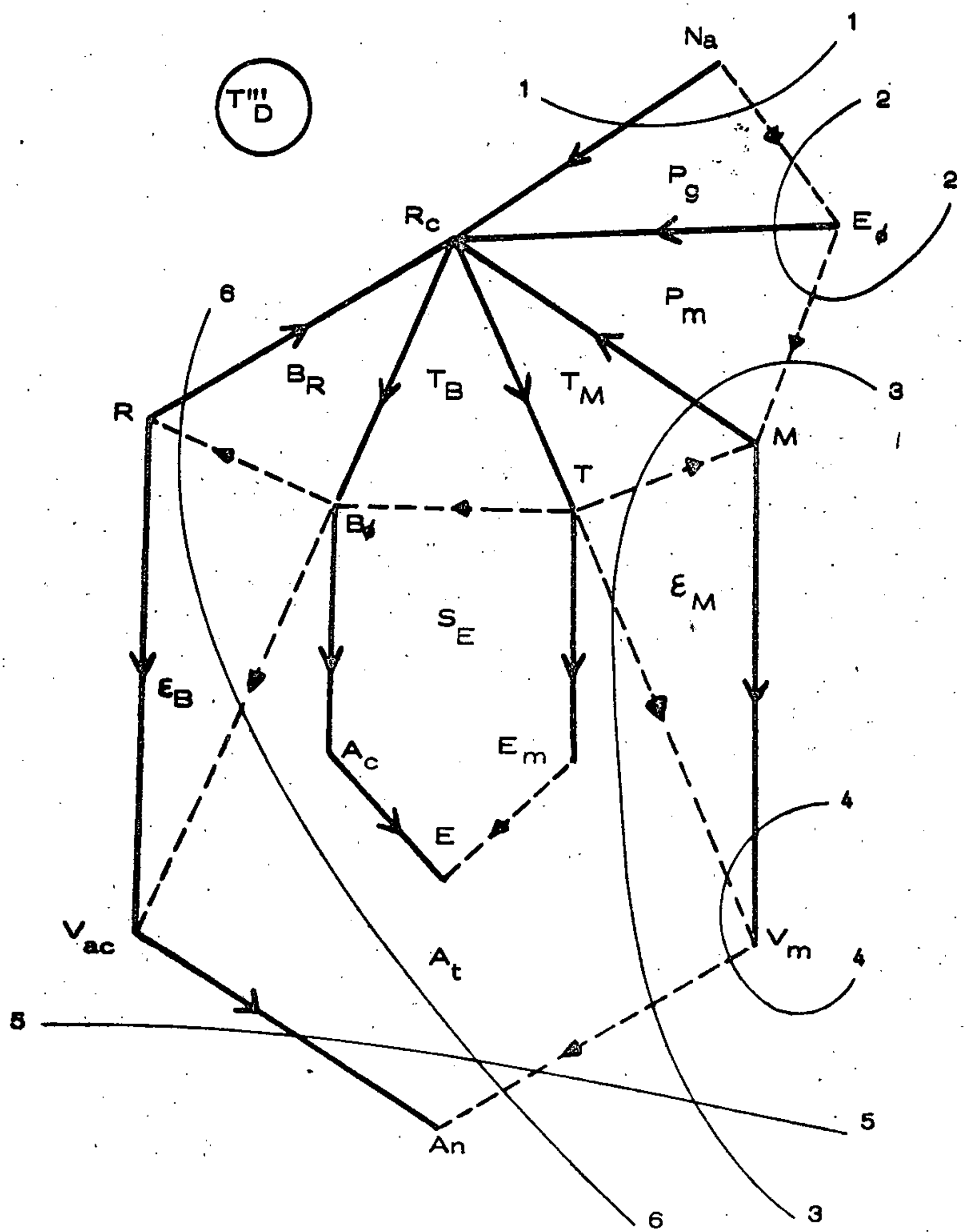


Figura 4. 39

C.A.D.A. 1976

viii) De igual forma se definen operaciones cómo la unión, intersección y suma-anillo.

Notas finales.

1) En el Apéndice 4.A.4. se presenta una Guía (tentativa), para la realización del programa de música, derivada del programa tabulado antes, (figura 4.33 pag. 177)

2) Mas adelante, se sistematizan las operaciones, representaciones y propiedades de las gráficas no orientadas y digráficas en términos del enfoque de los Espacios Vectoriales (matrices, vectores, etc.). Se tomará como ejemplo de aplicación, la formulación de un programa sobre sistemas dinámicos.

3) En el desarrollo del programa de Sistemas Dinámicos se hará un extenso uso de los conceptos, operaciones y representaciones que se han introducido hasta ahora de manera intuitiva. En el apéndice 4.B. sobre Analogías de la digráfica con una red eléctrica se introducen algunas ideas que se tratarán mas detenidamente en el siguiente capítulo y que son usuales en la Teoría de Sistemas.

Apéndice 4.A.

4.A.1. Referencias:

I. "Fundamentals of Music" 3rd. Ed. Raymond Elliot. Prentice-Hall Inc. 1971.

II. "Song Dex Treasures of Music", Vols. 1 y 2. George Goodwin 1955.

III. "Song Dex Treasury of Opera, George Goodwin 1957.

IV. Piezas sueltas (partituras de canciones o melodías con acordes).

V. "The Science of Sound", Folkways Records No. FX6007

VI.a. "Experimental Research in Music", Madsen. Prentice-Hall 1970.

VI.b. "Music and the Culture of Man", Scholl, White. Holt 1970.

VII. "Sound and Symbol", "Man the Musician", Suckerkandl. Princeton University Press. 1973.

VIII. "Aesthetics" (Dimensions for music Education), Natural Music Publishing Company. 1937.

X. "On The Moods of a Music-Logic", Seeger .

XI. "Class Piano", Margaret Starr McLain. Indiana University Press. 1974.

XII. "Teoría de Gráficas", Javier Salazar Resines.

XIII. "Creative Harmony and Musicianship" Murphy and Stringham.

XIV. "Compose Music", King Palmer. St. Paul's House Warwick Lane London. 1972. Dover

XV. "Improvisation in Music", Gertrude Price Wollner. Boston Bruce Humphries Publisers. 1963.

XVI. "Sinfonía Inconclusa", Madeleine Goss. Espasa Calpe. Austral No. 587. 1963.

XVII. "Sing With Chords", Forrest J. Baird, Brown. 1969.

XVIII. "The Craft of Musical Composition" Vol. I, Hindemith Paul New York Associated Publishers. 1942.

XIX. "La Música", Jaime Vida-Alcover. Ed. Bruguera. Colección SI-NO. 1972.

XX. "Philosophies of Music History" (A Study of General Histories of Music 1600-1960), Warren Dwight Allen. Ed. Dover. 1962.

4.A.2. Material:

Cuaderno pautado.

Lápiz HB.

Goma tinta-lápiz.

Instrumento: (Melódica, autoharp, ukuele, acordeón, guitarra, piano, órgano, etc.).

- Texto "Fundamentals of music". Ref. I, "Sing With Chords" Ref. XVII.
- Grabadora Cassettes.
- Libro sobre historia de la música* (ver alternativas requeridas).

Opcional:

Silbato o diapasón.

Metrónomo (muy recomendable).

*Alternativas :

- Salazar, A. "Historia de la Música". Revista de Occidente.
- Percival, A. "History of Music". Teach yourself Books.
- Einstein, A. "A short history of music". Everybody's favorite. Series No. 131.
- Einstein, A. "Historia de la Música".

  Ed. Claridad.

4.A.3. Relaciones entre temas del programa de música.

Supóngase que existen las relaciones dadas en la siguiente tabla. La conectividad se justifica en cada caso, aunque de una manera tentativa (y subjetiva) atendiendo a algunos aspectos implícitos en el programa dado anteriormente o dentro de los conceptos del propio temario.

N-M (notación-memorización): No se considera trascendente esta relación, aunque usualmente se le ha dado mucha importancia en los métodos tradicionales de los conservatorios, escuelas de música y en la enseñanza de los "maestros" obsoletos de música (aproximadamente el 100% de ellos). La memorización, de melodías sobre todo, es independiente de la notación. Esta, en el mejor de los casos, es solo una referencia para "recordar" o dejar asentadas "algunas" ideas musicales.

N-Rc (notación-sociología). Hay una relación en cuanto a conceptos o aspectos sociales, científicos y/o históricos que pretenden "descubrirse", que existen en una obra dada (descrita con alguna notación).

N-B (notación-bloques de acordes). La notación de tonos (notas) de los acordes y de los acordes juega un papel importante por la enorme cantidad de variantes tonales que pueden constituir un acorde. Sin embargo, como en el primer caso esto no tiene, en última instancia, mas importancia que la de una simple referencia.

N-E (Notación-ejecución). Según la tradición didactico-musical es "indispensable" "leer" con fluidez las partituras para lograr una "buena ejecución". Existe una fuerte contradicción entre estas aseveraciones y las recomendaciones que los mismos individuos hacen en relación con la ejecución vocal o instrumental:

"... traten de oír lo que ejecutan...". ¿Cómo traten de oír? no parece haber ninguna duda, desde un punto de vista racional, que la actividad musical es esencialmente auditiva-emocional y no visual-emocional. La notación musical no contiene mucha belleza intrínseca, como no la tiene la escritura occidental en relación con las ideas, conceptos o emociones que pueda expresar.

Para evitar este prejuicio enorme, que contradicen muchos ejecutantes "de oído" de música popular excelente, no se relacionan directamente estos dos conceptos.

N-A (Notación-arreglo). En el fondo, tampoco esta relación es indispensable, pero debido a la elevada cantidad de elementos musicales que puedan estarse manejando en una etapa avanzada del aprendizaje (dinámica, acordes, etc.) se aceptó la vinculación.

N-C (Notación-composición). El criterio es el mismo que el anterior pero además, se considera conveniente dejar constancia de las composiciones (por su valor, para reconocer o evaluar estados de avance, etc.).

M-Rc (Melodía-sociología). Se pretende establecer la relación que puede existir entre una melodía dada y el ambiente social de una época, sus efectos psicológicos, sus valores estéticos, etc.

M-E (Melodía-ejecución). Una vez aprendida una melodía, se pretende analizar su ejecución "de oído", con acompañamientos, etc.

M-A (Melodía-arreglo). Partiendo de una melodía dada o de una melodía con acompañamiento de acordes o en contrapunto, se pretenden hacer modificaciones, simplificaciones, etc., en el ritmo, acordes, etc.

$\boxed{\text{M-C}}$ (Melodía-composición). De los arreglos anteriores, se puede proseguir y variar el tampo, el fraseo o la melodía misma de un conjunto de piezas hasta llegar a la composición auténtica. El dominio de esta etapa y la anterior, puede conducir a la improvisación durante la ejecución.

$\boxed{\text{Rc-B}}$ (Sociología-bloques de acordes). Se pretenden establecer los orígenes de los bloques de acordes, sus progresiones, combinaciones rítmicas y melódicas de diversas épocas y medios. Se pretende también apreciar su influencia en la época actual, su evolución y su vinculación con la ciencia acústica y la psicología.

$\boxed{\text{Rc-E}}$ (Sociología-ejecución). Obviamente debe haber muchas relaciones entre estos conceptos, sin embargo, las que se describen en los tratados de música no son claras y muchas de ellas francamente inaceptables. Por ejemplo, se dan explicaciones místicas, nacionalistas, etc., sobre la forma en que debe ejecutarse cada obra. Hay seguramente otras relaciones de tipo psicológico que algunos autores han tratado de manera más o menos seria, pero esto presupone un dominio de la ejecución que está fuera de los propósitos de este curso.

$\boxed{\text{Rc-A y Rc-C}}$ (Sociología-arreglo y Sociología-composición). Para que un arreglo o composición tengan "algún sentido" deben expresar, como se ha indicado, algunas condiciones o situaciones del medio o del autor dentro del medio en alguna época, deben tener algún "carácter" propio, etc. Estéticamente deben tener algún valor (emotivo, social, individual, comunicativo, etc.); esto no significa que la obra o pieza sea "bonita", o "caiga bien", o le "guste a todo el mundo", o sea "comercial", etc; los valores deben estar implícitos en la obra y en ocasiones no son fácilmente reconocibles, pero sí deben poderse analizar con "cierto" grado de objetividad. No deben utilizarse recursos fáciles, usualmente los puramente sensoriales o sentimentalismos cursis o superfluos, ni por otro lado ser una obra exclusiva para intelectuales estúpidos, o élites de "exquisitos".

B-E (Bloques-ejecución). La ejecución de instrumentos tales como los de teclado, la guitarra, el acordeón, etc., permite la expresión total de la música: acompañamiento armónico, ritmo y melodía. Es usual, en nuestro medio, no adiestrar convenientemente a los estudiantes en estos instrumentos: no conocen los acordes, no los combinan con el ritmo, o con la melodía, etc. Pero lo más grave del asunto es que no hay un desarrollo aural respecto a la armonía de acordes o las combinaciones señaladas. Esta es la situación en las escuelas y conservatorios, pero no es el caso de los músicos que se forman de "oído", que aún teniendo mucho menos recursos, sobre todo verbales, suelen tener mucha mayor musicalidad y aprecio por su profesión o afición.

B-A y B-C (Bloques-arreglo y Bloques-composición). Por lo expresado anteriormente, el arreglo y la composición deben comprender el estudio (con el consiguiente desarrollo aural) de los acordes. Muchos arreglistas y/o compositores sólo conocen las reglas derivadas de la armonía y las aplican "a sordas" (por no poder decir "a ciegas"). Los cursos de armonía tradicionales casi no tienen nada que ver con la ejecución o la adecuación de ciertos acordes o progresiones con los esquemas melódicos o rítmicos de una pieza dada. Las relaciones desde el punto de vista del desarrollo perceptual, son casi nulas. Hay un apego a las reglas armónicas o las formas clásicas tal, que la "sordera armónica" nos ata irremisiblemente al pasado, pero además en un sentido estrecho porque ningún libro o tratado de armonía logra consignar todas las variantes que ha habido en las composiciones del pasado.

E-A y E-C (Ejecución-arreglo y Ejecución-composición). En la realidad estas relaciones son "débiles", ésto es, no tienen mucha importancia siempre y cuando se haya logrado un alto grado de desarrollo aural. En un curso elemental es posible que esto no se logre y por ello la ejecución instrumental puede servir de apoyo temporal al arreglo y a la composición. En cuanto a la improvisación deben haberse desarrollado, previamente, las habilidades de ejecución, memorización, percepción aural, etc. De otra manera "la improvisación" se reducirá al intercalamiento de patrones (melodías), armónicos y/o rítmicos, sin que haya una creatividad genuina durante la producción sonora. Dadas estas circunstancias se elimina, en un primer intento, E-C.

A-C (Arreglo-composición). Examinando el temario, resulta clara la necesidad de proceder a la composición por el arreglo. No sólo porque el último es más simple que el primero, sino porque el arreglo requiere del análisis, si es de buena calidad, armónico, rítmico, etc., de las obras motivo de esta actividad. Esta etapa facilita y hace más comprensible la de composición, que consideramos la más trascendental.

Apéndice 4.A.4.

Guía - Programa de Música.

Las gráficas referentes al Programa Integral de Música fueron desarrolladas a partir de la gráfica B -Taxonomía de Bloom- (figura 4.2, pag. 112) hasta la gráfica D'_x (figura 4.31, pag. 172). Este desarrollo sugirió los cambios que se pueden ver en la segunda tabla-programa (figura 4.33, pag. 177).

Analizando el programa propuesto en función de las modificaciones antes referidas se pueden proponer las siguientes recomendaciones para la guía-programa:

1) Los puntos (vértices) N_a, R_c, $E_\emptyset$, M, R, T, $B_\emptyset$, A_c, E_m, E, V_m y V_{ac}, serán mencionados detalladamente en las páginas posteriores y se supone que serán los temas desarrollados en el curso.

2) Para que estos temas sean desarrollados en forma consistente, sistemática y puedan ir formando las bases para las inferencias, análisis, aplicaciones, evaluaciones y auto-evaluaciones, los puntos se van interconectando y formando los estados de síntesis. Es importante tener en cuenta que los primeros estados de síntesis se formulan en el contexto dado, por ejemplo, a través del árbol de expansión, y los circuitos fundamentales. Un punto o tema de especial importancia está dado por el vértice R_c que presupone inferencias, principios y generalizaciones. Como se puede ver en la gráfica D'_x este tema, está relacionado a diversos estados de síntesis (circuitos), por ejemplo, P_g, P_m, T_M, T_B, B_R.

   Es recomendable, como la misma tabla-programa sugiere, que se hagan inferencias, análisis, aplicaciones y síntesis en el contexto que se va definiendo de un árbol de expansión y los circuitos.

3) En los últimos temas y estados de síntesis del programa es necesario hacer inferencias en contextos no dados*. De él pueden formar parte los estados de síntesis S_E, $\mathcal{E}_M$, $\mathcal{E}_B$ y A_t.

---

* Estos circuitos, cuerdas, etc. que presuponen inferencias se analizan detalladamente en el siguiente capítulo. Hasta aquí, se ha preferido abordar estos temas de manera más intuitiva que sistemática. En el siguiente capítulo se introducen técnicas que permitirán ir mas lejos en la sistematización del proceso.

3.1 En el estado de síntesis S_E es necesario hacer un análisis, síntesis y evaluación de todo el conocimiento adquirido en los demás para verificar las posibles fallas en alguno o algunos de los temas anteriores y poder aplicarlos a través de la ejecución.

3.2 Convendremos en llamar a los estados : P_g, P_m, T_m, T_B, B_R y S_E "primera etapa del programa" culminando esta etapa en S_E.

3.3. En la tabla del programa (figura 4.33, pag. 177) se sugiere que estos estados deben ser repetidos tantas veces como sea necesario, por ser ellos la base de la segunda etapa del programa. Forman parte de ella, los estados de síntesis: $\mathcal{E}_M$, $\mathcal{E}_B$ y A_t del contexto no dado explícitamente.

Esta última etapa exigirá el dominio de los conocimientos básicos, estructurados a través de los respectivos estados de síntesis (principalmente S_E), para que se puedan hacer inferencias, tales como, modificaciones, arreglos, simplificaciones etc., en las piezas originales.

4) Es importante observar una vez más que los circuitos: P_g, P_m, B_r, ..., y el circuito externo abarcan en la gráfica todas las etapas del programa. Es fundamental tener este especto en cuenta, es decir, estos circuitos están indicando que los estados se van integrando e interactuando entre sí, a tal grado que cuando se haya llegado al final del programa se tienen los elementos de análisis, síntesis y principalmente de evaluación. El participante que haya llevado el " curso en serio " sabrá medir cuales son sus deficiencias en relación al programa propuesto y podrá analizar objetivamente cuáles son los temas o etapas que le cuesta más trabajo dominar, cuáles en las que tiene mayor facilidad, etc.

5) La gráfica D'_x (figura 4.31, pag. 172), sugiere algunas trayectorias para cubrir la totalidad del programa, es decir del 1°al 6°estado (1a. etapa) y del 7°al 9°(2a. etapa).

1a. etapa :

- N_a, R_c, $B_\emptyset$, A_c, E
- N_a, R_c, T, E_m, E
- N_a, $E_\emptyset$, R_c, T, E_m, E
- N_a, $E_\emptyset$, R_c, $B_\emptyset$, A_c, E. . .etc.

2a. etapa :

- N_a, R_c, R, Va_c, A_n
- N_a, R_c, M, V_m, A_n
- N_a, R_c, T, V_m, A_n
- N_a, R_c, $B_\emptyset$, Va_c, A_n . . . etc.

Estas trayectorias no son casuales. La primera etapa siempre empieza y termina en N_a y E respectivamente. Precisamente en el vértice E se encuentra la evaluación de la primera etapa respecto a habilidades (no aisladas sino estructuradas con el conocimiento). Si el participante está interesado en instrumentos de acompañamiento como batería, por ejemplo, probablemente estará más preocupado en hacer inferencias y aplicaciones de los temas como : N_a, R_c, $B_\emptyset$, A_c, E ó N_a, $E_\emptyset$, R_c, $B_\emptyset$, A_c, E. Si pretende dedicarse a un instrumento como violín o flauta, podrá predominar temas como : N_a, R_c, T, E_m, E ó N_a, $E_\emptyset$, R_c, T, E_m, E.

Lo mismo se puede decir en relación a la segunda etapa que siempre comienza y termina en N_a y A_n respectivamente. Como ya se mencionó en el transcurso de este trabajo, en el vértice A_n esta la evaluación como culminación del Programa Integral de Música. De acuerdo con el tipo de actividad a que el participante pretenda dedicarse, su tipo de trayectoria será principalmente :

- $\underline{N_a}$, R_c, R, V_{ac}, $\underline{A_n}$ ó N_a, R_c, $B\emptyset$, V_{ac}, $\underline{A_n}$ (<u>acompañamiento</u>).

ó

- $\underline{N_a}$, R_c, M, V_m, $\underline{A_n}$ ó N_a, R_c, T, V_m, $\underline{A_n}$ (<u>melodía</u>).

Un participante interesado en órgano o piano, por ejemplo, debería dar igual énfasis a todas las trayectorias.

Estas trayectorias nos llevan a detectar que el programa propone temas con sus respectivos estados de síntesis que sistemáticamente se van ampliando hasta formar el circuito máximo (exterior). Por esto es recomendable cubrir la totalidad del programa independientemente de la posible preferencia por un determinado instrumento. Además, como nos referimos anteriormente, estas trayectorias tienen la ventaja de detectar precisamente, cuál es el punto o los puntos del programa en que el participante presenta mayor o menor dificultad.

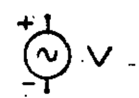
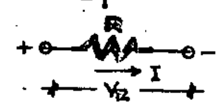
Apéndice 4.B.

Analogías de la digráfica de música con los circuitos eléctricos.

4.B.1. Circuito eléctrico elemental.

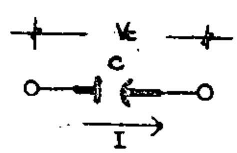
La gráfica D'_x podría también examinarse de acuerdo con algún criterio más mecanicista, como se ha sugerido previamente a través, por ejemplo, de conceptos mas vinculados con la teoría de los circuitos eléctricos y/o mecánicos. El planteamiento genérico sería el de una red de flujo, enfoque de análisis aplicado, fuertemente asociado a las digráficas.

Los elementos esenciales de un circuito eléctrico, por ejemplo, son

- Ⓥ una fuente de voltaje 
- un elemento resistivo 

que implica una caída de potencial (V_R o voltaje) dado por la ley de Ohm $V_R = RI$ (en donde I es la corriente que circula por la resistencia),

- un elemento capacitivo



en el cuál el flujo de corriente ocurre de una placa a otra de un dieléctrico (que puede estar originalmente "cargado electrostáticamente") proporcionalmente al cambio de la corriente en el tiempo

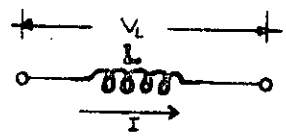
$$I = C\frac{dV_c}{dt} \qquad \text{--- (A)}$$

Para plantear esta expresión en forma análoga a la anterior se suele integrar y escribir

$$V_c = \frac{1}{C}\int_{t_o}^{t} I\,dt \qquad \text{--- (B)}$$

La caída de potencial es proporcional a la suma, en el tiempo, de las corrientes que circulan a través del capacitor C. Si el voltaje no varía con el tiempo, expresión (A), no circula corriente (el condensador o capacitor queda "cargado electrostáticamente" o "descargado").

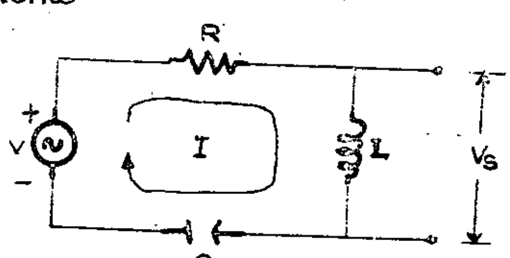
- un elemento <u>inductivo</u>



en el cuál al circular la corriente I, produce un campo electromagnético cuyas líneas de fuerza se oponen al flujo I, en función a los cambios de la corriente con el tiempo

$$V_L = L\frac{dI}{dt}$$

Un <u>circuito eléctrico</u> en donde se hagan intervenir estos elementos podría ser el siguiente



El planteamiento usual estriba en determinar: la corriente I que circula en la malla y/o la caída de potencial de la salida V_s. En virtud de que hay una sola malla se requiere de una sola condición de equilibrio para determinar I. A partir de I y de la expresión para la inductancia, en el caso particular que analizamos, se puede calcular V_s.

La condición de equilibrio en la malla se establece en términos de la ley de voltajes de Kirchhoff.

$$\sum_{\text{MALLA}} V_i = 0$$

en nuestro caso

$$V_R + V_L + V_C = V$$

(el signo opuesto de V se debe a que, de acuerdo con el sentido adoptado por la figura la corriente I circula en sentido opuesto al establecido por los signos).

En términos de las definiciones de cada uno de los elementos de un circuito, podrían asignarse interpretaciones, dentro del contexto educacional, que permitieran establecer un "modelo cuantitativo" de una gráfica como la analizada en este apénd...

Algunos de estos conceptos se podrán tratar mejor dentro del área de "Sistemas Dinámicos", por ejemplo las caídas de potencial a través de las inductancias y/o los capacitores.

4.B.2. Red resistiva y analogía

Por lo pronto, para no complicar dema

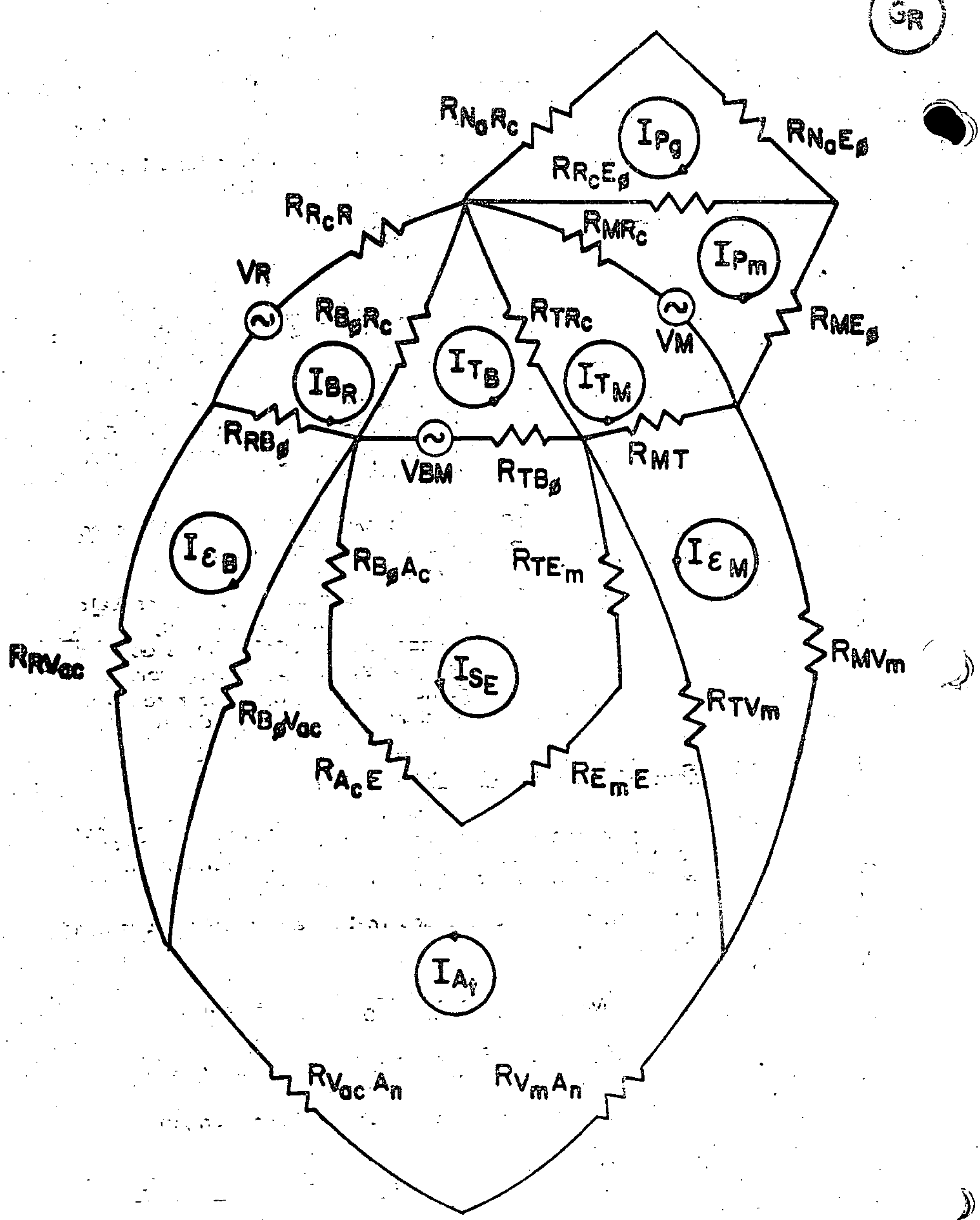
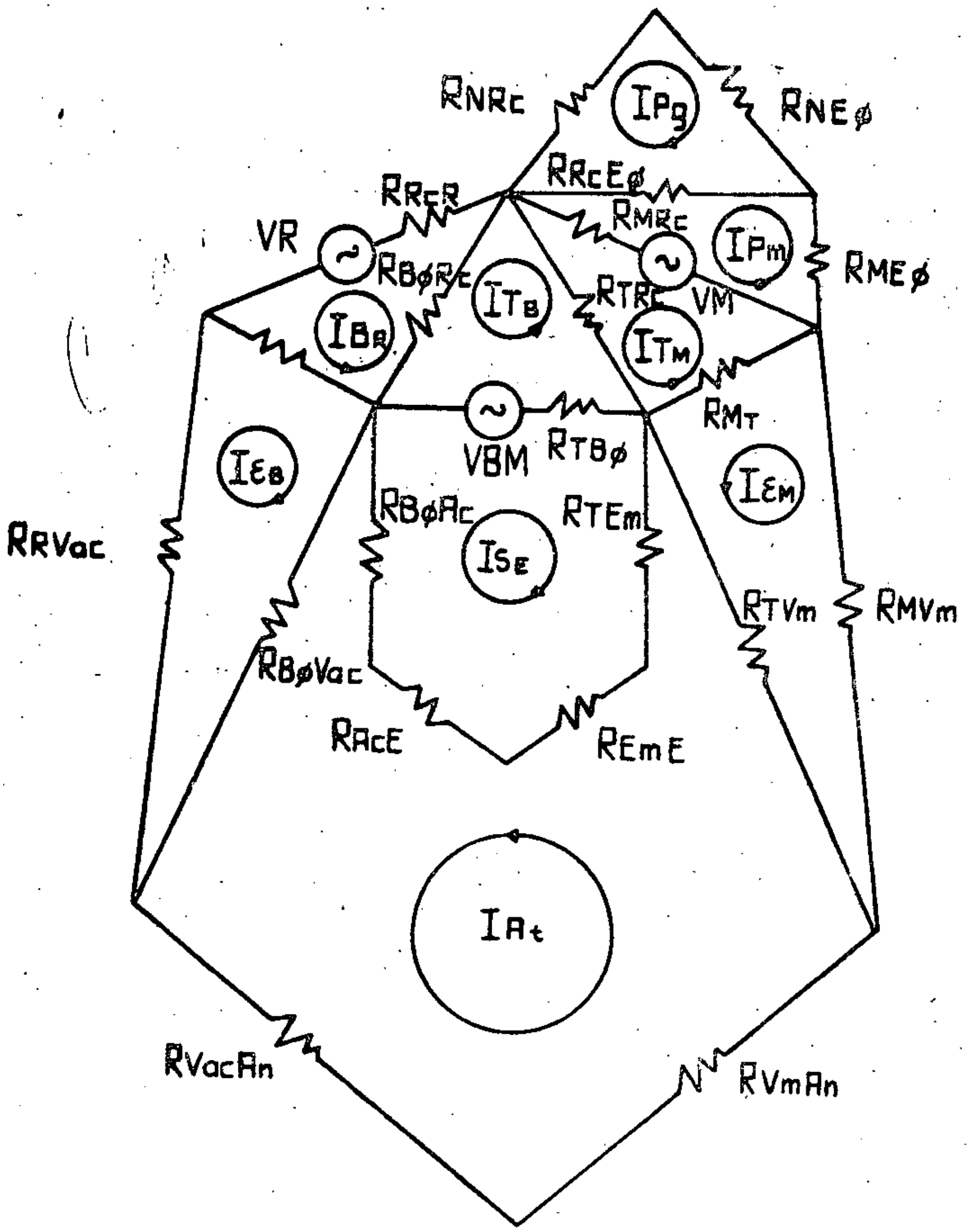


FIG. 4.B.I

C.A.D.A. 1976

GR


RNRc
IPg
RNEø
RRcEø
RRcR
RMRc
VR
IPm
RBøRc
ITB
RTRc
VM
RMEø
IBR
ITM
VBM
RTBø
RMT
IEB
IEM
RRVac
RBøAc
ISE
RTEm
RBøVac
RTVm
RMVm
RAcE
REmE
IAt
RVacAn
RVmAn

5.1. Introducción.

5.1.1. Aspectos generales.

En el manejo de un número elevado de datos, a través de la Teoría de Gráficas, resulta relativamente fácil llegar a situaciones que requieren una labor rutinaria considerable. Además, la nueva información, o al menos los distintos aspectos de ella, que se genera en el proceso descrito, implica un acervo adicional muy sustancioso de información que no solo requiere la labor ardua ya mencionada, sino que en algún momento acaba por gravitar en contra de cualquier posible análisis o labor sistemática.

Debido a las apreciaciones anteriores, se cree conveniente proporcionar métodos adecuados para no perder la posibilidad de sistematización en los procesos que se han venido desarrollando. Los métodos matriciales que se han implantado para este propósito son, cuando menos desde dos puntos de vista, idóneos para el desarrollo de estas tareas. Por un lado, permiten asociar en operaciones y representaciones compactas y bien definidas la mayoría de las descritas y aplicadas en capítulos anteriores.

Además, si el proceso resulta inabordable para llevarse a cabo en forma manual, directa, el planteo matricial de las gráficas establece un paso relevante para el empleo de las computadoras. Existen de hecho muchos programas y algoritmos ya elaborados para este fin.

En este capítulo, se presentan las ideas básicas de los métodos matriciales, mediante su aplicación al establecimiento de un programa para el estudio de Sistemas Dinámicos. El tema es de actualidad y además de representar un avance enorme en las ciencias, sobre todo en mecánica, electricidad, teoría del control y cibernética, es medular en cualquier enfoque serio de la Teoría de Sistemas. Muchos aspectos de los Sistemas Dinámicos son relevantes pero, en el ejemplo, no se abordan los detalles sino solo seis subtemas esenciales:

1. modelos de sistemas elementales,

2. análisis de sistemas mediante redes de flujo,

3. modelos de sistemas generales (sistemas de orden "n"),

4. análisis de sistemas en el campo complejo,

5. análisis mediante diagramas de bloques y

6. análisis de señales.

Caben dentro de estos subtemas muchos aspectos que seguramente influirán de manera tal, que en un estudio mas detallado no puedan mantenerse en su totalidad las ordenaciones, relaciones, etc. que se desarrollan en el capítulo. Sin embargo, aparte de ser este un primer ensayo* para interrelacionar estos temas, se pretende no abrumar al lector, particularmente al que no esté familiarizado con este campo, con aspectos que puedan desviar su atención del propósito central. Por otro lado, se manipula un número adecuado de datos como para no requerir el empleo de una computadora o tener que efectuar demasiadas operaciones de rutina.

Para la mejor comprensión de los temas que se relacionan en el capítulo, se bosqueja en el apéndice 5.A. una subdivisión usual de los mismos, proporcionando al mismo tiempo algunas definiciones, ejemplos o descripciones breves e indicando alguna bibliografía, en donde podrá el lector ahondar mas en el tema o concepto que mas le interese o desee aclarar o puntualizar.

En seguida se presenta la clasificación mencionada y a continuación una tabulación denominada Matriz de Conectividad o Adyacencia que interrelaciona los temas fundamentales que denominaremos "vértices". Asociada a esta matriz presentaremos un esquema que muestra a través de una gráfica las relaciones entre los vértices.

5.1.2. Clasificación de los temas para un programa sobre Sistemas Dinámicos.

A la izquierda de cada tema principal se indican las letras v_1, $v_2, \ldots, v_6$ que son los vértices interrelacionados en la matriz.

*Dentro de la muy abundante literatura que existe sobre estos temas el autor de este trabajo no ha encontrado sino interrelaciones parciales que no se integran como se pretende en este capítulo.

v_1: Modelos de sistemas elementales

(casos, elementos y analogías)

- sistemas elementales
  - modelos algebraicos de sistemas con parámetros y flujos invariantes con el tiempo.
  - sistemas con flujos dependientes del tiempo (parámetros constantes)
    - con variación discreta
    - con variación continua
      - de primer orden
      - de segundo orden

v_2: Redes de flujo

- Redes
  - de sistemas elementales
    - invariantes
    - con variación en el tiempo
  - de sistemas generales (de orden "n")
    - con variación discreta
    - con variación continua

v_3: modelos de sistemas generales

(sistemas de orden "n", espacios de estado)

- sistemas generales (orden "n")
  - modelos algebraicos
  - sistemas con flujos dependientes del tiempo (parámetros constantes)
    - variación discreta
      - modelos
      - aproximación de modelos con variación continua
    - variación continua
      - de orden "n"
      - con "n" ecuaciones de 1er. orden

V_4: Análisis complejo

análisis complejo

- aplicación de la transformada de Laplace (y/o transformada Z)
  - en sistemas de orden "n"
  - en sistemas de ecuaciones de 1o. y 2o. orden
- análisis de polos y ceros
- análisis de polos, ceros y residuos
- análisis de lugares geométricos, frecuencias
- análisis de estabilidad
- análisis y diseño de Bode
- análisis complejo de Fourier

V_5: Análisis con diagramas de bloques

bloques

- bloques, operadores y redes
- simulación analógica
- bloques y sistemas elementales, representación parcial
- algebra de bloques, formas canónicas
- reducciones y equivalencias

V_6: Análisis de señales

señales

- perturbaciones, representaciones de Fourier
- ondas y pulsos, ruido blanco, análisis espectral
- elementos de teoría de información

5.2. Matriz de conectividad o adyacencia.

En la tabla de la figura 5.1, se indica con "1" donde se considera que existe "alguna relación" entre dos vértices y con "0" donde la relación es nula. Se evita establecer peso en las relaciones (débil, fuerte, indispensable, etc.) para no complicar demasiado la gráfica. Es conveniente aclarar que pueden existir varias formas de relacionar dos vértices, pues según el contenido de cada uno, algunos temas de un vértice pueden estar fuertemente relacionados con algunos temas de otro vértice, mientras que otros solo estarán relacionados débilmente, o no existir relación. Es por ésto, que debe haber alguna justificación para el conjunto de relaciones que se adopten.

Antes de analizar cualquier consecuencia de estas relaciones es conveniente establecer:

1. el contexto o los contextos en los que se están definiendo estas relaciones,

2. los propósitos u objetivos de las relaciones y/o el programa (parcial y globalmente),

3. los criterios que se emplean para establecer la conectividad.

5.2.1. Contexto.

Como ya se ha indicado, la teoría de sistemas tiene en la actualidad un vasto campo de aplicaciones, pero también de enfoques y concepciones. De esta manera no resulta muy claro que se trate de un enfoque del todo coherente, o de un solo enfoque. Por estas razones y por los antecedentes académicos del autor, el enfoque de sistemas será el que ha dado en llamarse de Sistemas Dinámicos, que abiertamente corresponde a una concepción y modelación de problemas de diversas áreas de conocimiento, como extensiones de los modelos matemáticos que se plantearon originalmente en la Mecánica y en la Electricidad. Más adelante, se extendieron, dentro de la ciencia y la tecnología, a otras áreas: acústica, hidráulica, termodinámica (conducción de calor), etc. Esta extensión ha sido posible por la aplicación pragmático-operacional del concepto (o metodología) surgido de la analogía.

MATRIZ DE CONECTIVIDAD O DE ADYACENCIA

		(Sists. El)	(Redes)	(Esp. Edo)	(An. Compl)	(Diagr. Bl.)	(An. Señal)	grados
		V_1	V_2	V_3	V_4	V_5	V_6	
(Sists. El.)	V_1	X	1	1	1	1	1	5
(Redes)	V_2		X	1	1	1	0	4
(Esp. Edo)	V_3			X	1	1	1	5
(An. Compl.)	V_4				X	0	0	3
(Diagr. Bl.)	V_5					X	1	4
(An. Señal.)	V_6						X	3

$\sum g = 24$

ramos $e = 12$

rango $r = n - 1 = 5$

nulidad $\mu = e - (n-1) = 7$

C.A.D.A. 1976

FIG.5.1.

Por analogía del comportamiento de las componentes de sistemas físicos, pudieron plantearse con los mismos modelos matemáticos diversos problemas de "equilibrio dinámico" de sistemas elementales. La estructuración o agregado de éstos ha llevado a la simulación o modelación de sistemas de elevada complejidad.

A partir de estas ideas y del "éxito" que tuvieron en la concepción mas amplia de los sistemas físicos y en las combinaciones supuestamente "híbridas" de unos con otros, por ejemplo sistemas electromecánicos, electroacústicos, hidromecánicos, etc. se iniciaron aplicaciones y adaptaciones, incluso de terminología, en áreas distintas a la física. Esto ha creado actitudes irracionales por parte de "diletantes" de áreas de las ciencias sociales, la psicología, etc. Unas, en relación con la supuesta pretensión "tecnocrática" de tratar de reducir toda la explicación o concepción del hombre y su conducta aislada o social a un modelo "estrecho" y "enajenante". Otras, no independientes de la anterior, relativas al rechazo de los instrumentos "capitalistas" para someter al individuo a un estado de represión en el cuál tenga un rol de "robot" supeditado a los sistemas automatizados y limitadores de la reflexión, crítica, etc. Estos críticos parecen obedecer, aparte del peligro de crear una conciencia mas amplia y menos propicia al proselitismo, a una actitud de resuelto tradicionalismo y otra, la mas clara y definitiva, a la ignorancia y el consecuente temor e impotencia de enfrentarse a nuevas y poderosas herramientas y concepciones que habiendo surgido en los campos de la física y la tecnología se enriquecen cotidianamente con las aportaciones de los resultados de la investigación en el "área humanística".

5.2.2. Objetivos

Con esta pretensión pragmático-operacional el programa se orienta a establecer los conceptos fundamentales para que el lector pueda:

1. comprender los modelos matemáticos existentes dentro del área particular del lector,

2. proponer modelos cuantitativos o cualitativos, relativamente sencillos (no elementales), dentro del área mencionada;

3. caracterizar algunos sistemas cualitativa y cuantitativamente (simulación) a través de las relaciones entrada-salida (funciones de sistemas y/o de transferencia) ,

4. entender, y en casos simples aplicar las aportaciones recientes de esta metodología.

5.2.3. Criterios

El criterio esencial del programa estriba en tomar a los sistemas elementales como punto de partida para introducir diversos métodos de análisis en el campo complejo, a través de redes de señales, diagramas de bloque, etc. En cada caso, extender posteriormente estos métodos a sistemas con mayor complejidad.

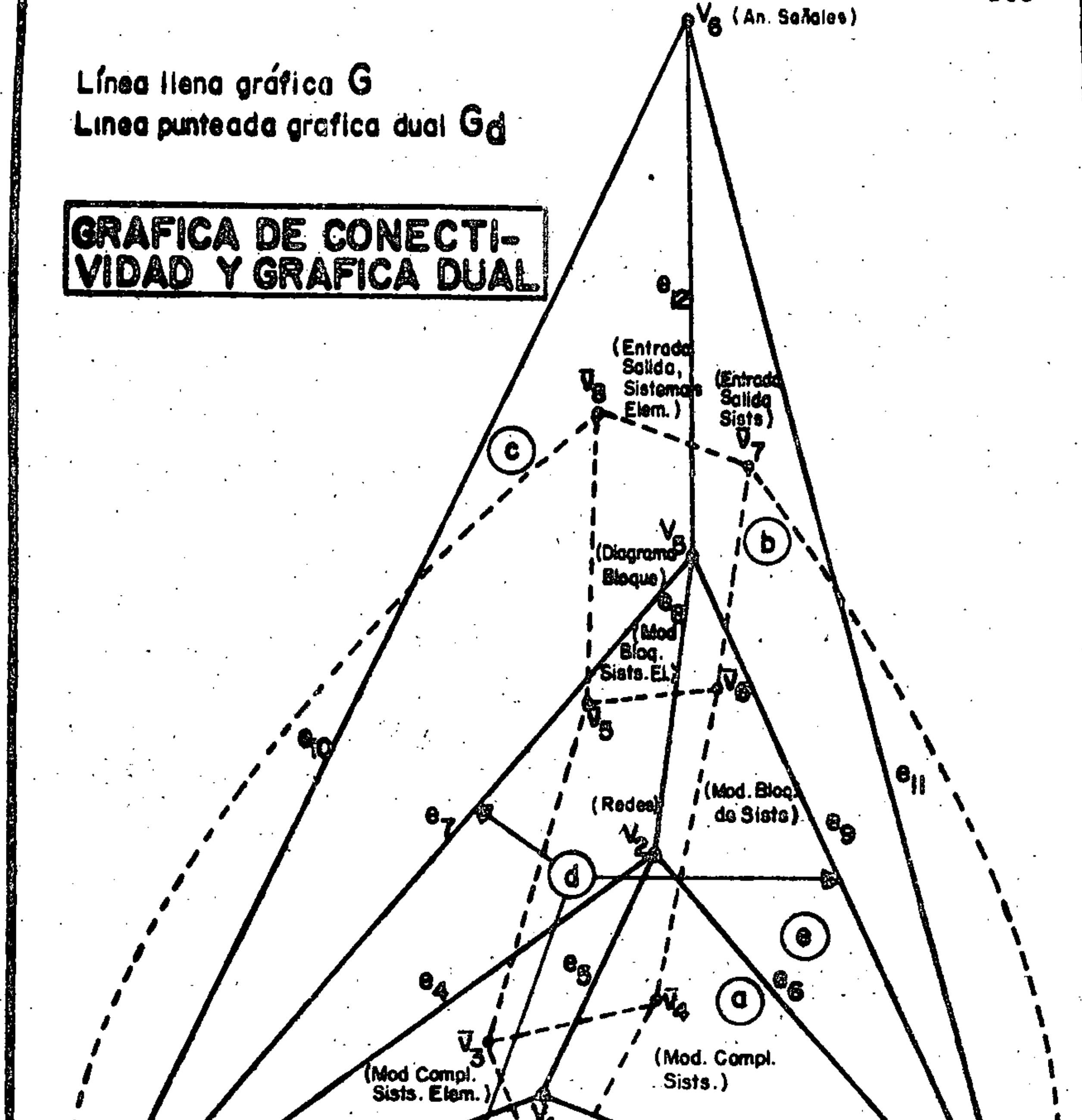
Se propone que la generalización se realice de modo inferencial. Esto es, que una vez que se establezcan las posibilidades de análisis de los sistemas elementales y las relaciones necesarias para extrapolar o inducir resultados o métodos a los sistemas generales, éstos se planteen como problemas, ejercicios o proyectos guiados.

Se sugerirán las etapas o "momentos" y los procedimientos para llevar a cabo evaluaciones significativas para detectar el avance del aprendizaje y los alcances, limitaciones, dificultades y errores del programa.

5.3. Representación esquemática de la conectividad. Gráfica Dual.

En la figura 5.2 se esquematizan la gráfica

G: de conectividad o adyacencia correspondiente a la tabla (o matriz) previa. En ella se indican las ramas e_1 a e_{12} y los vértices v_1 a v_6.



C.A.D.A. 1976

FIG. 5.2.

G_d: que conecta las regiones determinadas por G con los vértices indicados con $\bar{v}_1$ a $\bar{v}_8$ y que "conceptualmente" se describen como sigue:

$\bar{v}_1$: (contexto general de G), efecto de señales en sistemas (relaciones entrada-salida en sistemas no necesariamente elementales),

$\bar{v}_2$: análisis en el campo complejo de sistemas elementales o generales,

$\bar{v}_3$ y $\bar{v}_4$: modelación en el campo complejo de sistemas elementales y complejos (*), respectivamente.

$\bar{v}_5$ y $\bar{v}_6$: Modelación con redes de flujo de señales y diagramas de bloque de sistemas elementales y complejos, respectivamente.

$\bar{v}_8$ y $\bar{v}_7$: Relaciones entrada-salida en sistemas elementales y complejos, respectivamente.

La matriz de adyacencia de la gráfica dual (Fig. No. 5.3) nos permite realizar algunas verificaciones tales como: $e_d = e$, $\mu_d = r$ y $r_d = \mu$

Los vértices de la gráfica dual descritos antes, supuestamente representan síntesis conceptuales de los temas dados en la gráfica original, y las ramas de la gráfica dual definen las adyacencias entre esas áreas de síntesis. (distintas a las adyacencias entre vértices que define la matriz de adyacencias).

Si se trata de analizar areas de síntesis fundamentales, se elabora la gráfica dual del árbol de expansión, cuyas ramas, que cruzan a las del árbol original, definen las adyacencias fuertes entre esas áreas.

5.4. Arbol de expansión

De acuerdo con el criterio fundamental expresado en 5.2.3. se construyó el árbol T dado en la siguiente figura 5.4. que constituirá el conjunto de estados (vértices) y relaciones explícitamente dadas (correspondiente al contexto G de la Taxonomía de Bloom).

(*)Indistintamente denominaremos a los sistemas con mas de un grado de libertad: sistemas generales o sistemas complejos.

MATRIZ DE LA GRÁFICA DUAL.

		$\bar{V}_1$	$\bar{V}_2$	$\bar{V}_3$	$\bar{V}_4$	$\bar{V}_5$	$\bar{V}_6$	$\bar{V}_7$	$\bar{V}_8$	grado
Efecto de señales en sistemas.	$\bar{V}_1$	X	1	0	0	0	0	1	1	3
Análisis complejo de sistemas.	$\bar{V}_2$		X	1	1	0	0	0	0	3
Modelo complejo de sistemas elementales.	$\bar{V}_3$			X	1	1	0	0	0	3
Modelo complejo de sistemas.	$\bar{V}_4$				X	0	1	0	0	3
Modelos bloques de sistemas elementales.	$\bar{V}_5$					X	1	0	1	3
Modelos bloques de sistemas.	$\bar{V}_6$						X	1	0	3
Entrada-salida de sistemas elementales.	$\bar{V}_7$							X	1	3
Entrada-salida de sistemas.	$\bar{V}_8$								X	3

$\sum g_d = 24$

ramas $e_d = 12$

rango $r_d = n-1 = 7$

nulidad $\mu_d = e_d - r_d = 5$

FIG. 5.3.

ARBOL DE EXPANSION (ramas,- cuerdas y circuitos).

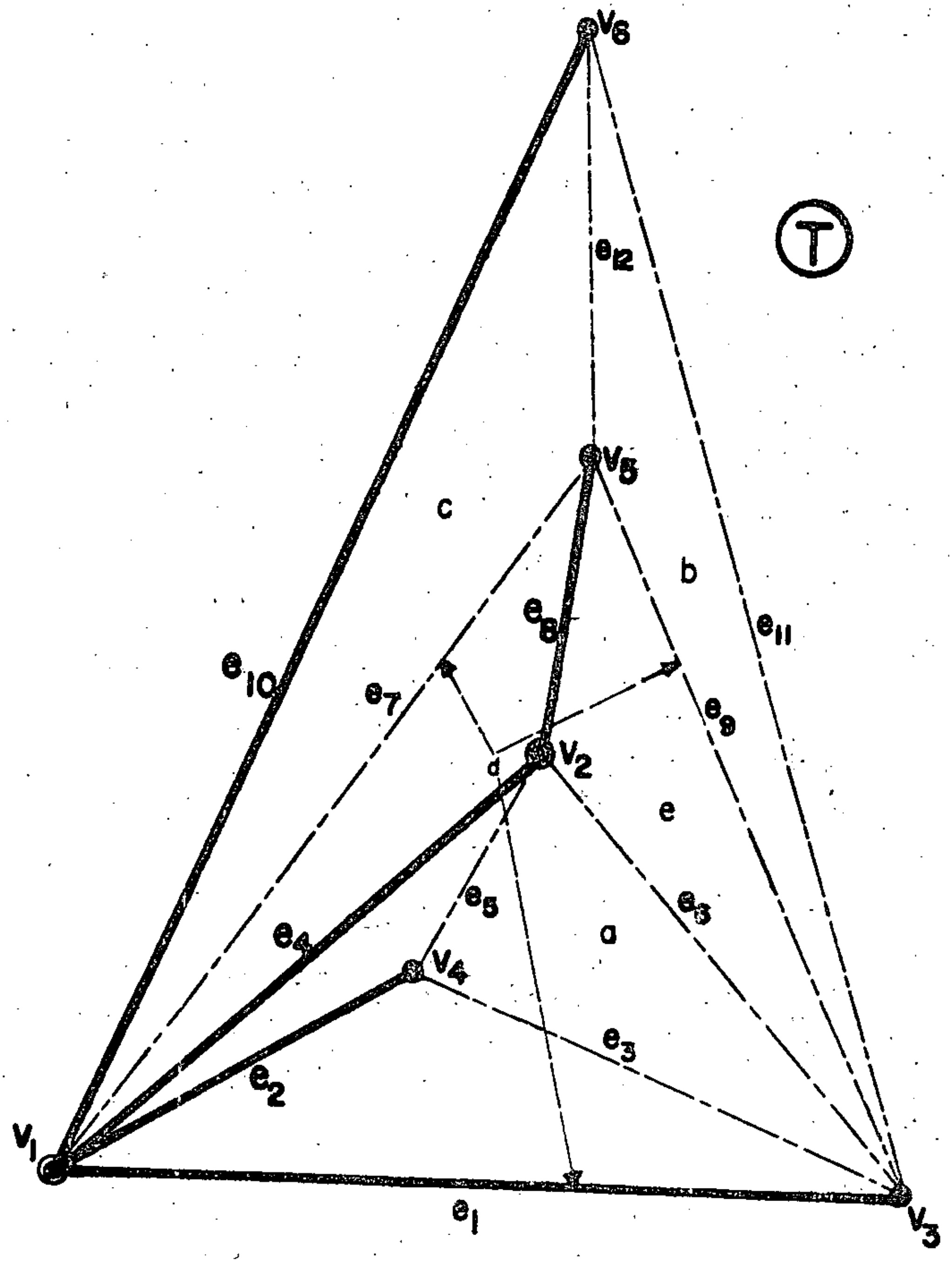


FIG. 5.4.

Tal como se presenta el árbol, es fácil obtener los dos centros v_1 y v_2 que conceptualmente tienen una interpretación significativa: v_1, de acuerdo con el criterio, establece el punto de partida en la estructuración conceptual (los sistemas elementales).

v_2, es un centro desde el punto de vista metodológico. Esto se justifica en relación al desarrollo que han tenido los métodos de análisis y síntesis de sistemas dinámicos, según puede advertirse en la descripción de estos en el apéndice, y sobre todo en los textos consignados en la bibliografía.

Hubiese sido aceptable, aunque didácticamente quizá no conveniente, fusionar los vértices v_2 y v_5, como suelen hacerlo algunos autores. En ese caso todas las ramas hubiesen partido del vértice v_1 (sistemas elementales) lo cuál hubiese estado de acuerdo con el criterio antes mencionado que de algun modo establece una forma didáctica de partir de lo elemental a lo general, conceptual y metodológicamente. Esto a su vez implica, dada la menor dificultad de simular o modelar la "realidad" de objetos elementales, una forma de inferir, o de forzar la inferencia, de representaciones, modelos y métodos de sistemas complejos, partiendo de una realidad mas o menos simple y por ende mas fácil de verificar, cuestionar y/o refutar.

Cualquier otro árbol de expansión que se eligiera no cumpliría con el criterio fundamental aunque estuviese mas "centrado". Por ejemplo el árbol

$$T^* = \{e_2, e_3, e_5, e_8, e_{12}\}$$

no vincularía conceptualmente, en forma directa, a v_1 con v_3 (sistemas elementales y sistemas complejos), y en cambio relacionaría a v_4 (análisis complejo) con v_2 (redes de flujo de señales) y a v_5 (diagramas de bloque) con v_6 (señales), relaciones que pueden ser relevantes en la fundamentación matemática de los sistemas, pero no en la didáctica de los propios sistemas.

Por otro lado, al plantear el árbol T no deben concebirse a las cuerdas, o sea $\{e_3, e_5, e_6, e_9, e_7, e_{11}, e_{12}\}$ como interrelaciones triviales o de importancia necesariamente inferior a las ramas del árbol. Esto se ubica lejos de un planteamiento racional y relevante de la estructura de un área de conocimiento y puede dar lugar a equívocos graves en la integración de conceptos o en el dominio del área o de la comprensión parcial o total de un programa. Existen varias razones que pueden esgrimirse a través del árbol propuesto:

a) a cada circuito corresponde una cuerda que lo cierra. En el contexto dado ésto representa una interrelación que debe realizarse para lograr la síntesis de un concepto particular, por ejemplo

- la cuerda e_3 interrelaciona el análisis complejo con los sistemas generales, partiendo de las relaciones e_1 y e_2 dadas. Esta interrelación puede <u>inferirla</u> el estudiante, si el programa incluye todos los elementos conceptuales necesarios y además una capacidad de manejarlos de manera que pueda realizar esta acción. Debe poder asegurarse "a priori" que los elementos están dados y que el alumno tiene habilidades (lógica, método científico, etc.) suficientes para <u>hacer inferencias</u>* (cuando menos en el campo o área en cuestión),

- La cuerda e_3 cierra el circuito v_1, v_4, v_3, v_1, que en la dual corresponde al vértice $\overline{v}_2$ (síntesis) relativo al análisis complejo de sistemas elementales y sistemas complejos. De hecho puede suponerse a primera vista, que esta posibilidad es un tanto redundante, puesto que una vez entendido el sistema complejo, sobre todo después de concebirlo a través de los sistemas elementales, es trivial el paso de los sistemas mas generales a los más particulares. Esta posible afirmación categórica, hecha en forma general, puede dar lugar a reducciones absurdas o sin sentido. Pueden señalarse ejemplos que ilustren esta situación de irreversibilidad: basándonos en las leyes del comportamiento de sistemas elementales podemos construir sistemas complejos cuyo comportamiento no depende del comportamiento de los sistemas elementales aislados sino que funcionen o respondan en términos de la manera en que fueron acoplados los elementales que lo constituyen. El desacoplamiento puede conducirnos a una parte del sistema que no represente en forma alguna al sistema complejo. Por ejemplo, las frecuencias naturales de vibración de sistemas elementales masa-resorte-amortiguador tienen, en

---

* De hecho el profesor mismo debe evaluarse en cuanto a sus propias posibilidades para hacer esta labor y ¡comunicarla!

general, poco que ver con las frecuencias de un sistema general constituído por una interconexión en serie de los sistemas elementales. Si además se imponen restricciones, fronteras, etc. en el sistema general, el comportamiento de éste tiende a ser cada vez menos determinado por los sistemas elementales implícitos,

b) el conjunto de cuerdas e_3, e_5, e_6 constituye un circuito "constructivamente inferido", ésto es, inferido de otras áreas de síntesis (por ejemplo, de los circuitos e_1, e_4, e_6; e_2, e_4, e_5; e_1, e_2, e_3), y de las interrelaciones implícitas. Este circuito constituye una inferencia de relevancia muy significativa en el área de sistemas: la modelación en el campo complejo (transformada de Laplace y de Fourier) de sistemas generales y, en teoría, se trata de un tema que ¡habrá de inferir un estudiante! Esto nos conduce a un compromiso de trascendencia particular en el papel del profesor en cuanto a su intervención en el proceso enseñanza-aprendizaje: los estudiantes deben poder inferir, si el proceso está racionalmente diseñado, aspectos relevantes del área en cuestión. El papel pasivo o irresponsable que suele asignárseles, depende no solo de su "capacidad" o de su "actitud", sino de la previsión de posibilidades, de alternativas y de la instrumentación conceptual y de habilidades que se les ofrezcan.

5.5. Vectores de la gráfica G.

Si convenimos en utilizar a los símbolos 0,1, para establecer la conectividad de una gráfica G:

0 si no hay rama que conecte a dos vértices,
1 si hay rama que conecte a dos vértices, o sea si los elementos del conjunto

$$B = \{0,\ 1\}$$

se emplean para determinar la conectividad, entonces el vector

$$X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

en donde "n" es el número de ramas de la gráfica, en nuestro caso n=12, es tal que las variables x_1, x_2, ..., x_{12} pueden tomar los valores 0 y 1 para cada subgráfica de G, según que no haya o haya la rama correspondiente;

si no está considerada e_1 entonces $x_1 = 0$,

si está implícita e_2, entonces $x_2 = 1$,

etc.

Así por ejemplo, la subgráfica constituída por las ramas que concurren a $_1$ estará dada por el vector

$$X_1 = (1,1,0,1,0,0,1,0,0,1,0,0).$$

5.5.1. Vectores de circuitos y cortes

Las subgráficas de todos los circuitos en G, constituyen el espacio vectorial de circuitos* que denominaremos C_G. En particular los circuitos asociados al árbol de expansión T, cerrados por una sola cuerda (la cuál se utilizará para designarlos) son los circuitos fundamentales asociados a T. Estos no constituyen, ni con mucho, al conjunto C_G pero si lo pueden generar por medio de combinaciones lineales de los fundamentales, como se verá mas adelante.

Los circuitos fundamentales, subgráficas de G, son: (se subraya el elemento "1" correspondiente a la cuerda)

$$c_3 = (1,1,\underline{1},0,0,0,0,0,0,0,0,0)$$

$$c_5 = (0,1,0,1,\underline{1},0,0,0,0,0,0,0)$$

$$c_6 = (1,0,0,1,0,\underline{1},0,0,0,0,0,0)$$

$$c_7 = (0,0,0,1,0,0,\underline{1},1,0,0,0,0)$$

$$c_9 = (1,0,0,1,0,0,0,1,\underline{1},0,0,0)$$

$$c_{11} = (1,0,0,0,0,0,0,0,0,1,\underline{1},0)$$

$$c_{12} = (0,0,0,1,0,0,0,1,0,1,0,\underline{1})$$

*el concepto de espacio vectorial, en términos mas amplios se introduce en el apéndice 5.B.

La subgráfica de las cuerdas (nulidad = 7 cuerdas) está dada por el vector

$$M = (0,0,1,0,1,1,1,0,1,0,1,1)$$

y el árbol T está representado por (rango $r=n-1=5$ramas)

$$T = (1,1,0,1,0,0,0,1,0,1,0,0)$$

Las subgráficas correspondientes a todos los cortes posibles en G, constituyen el espacio vectorial de cortes K_G. Los cortes asociados a cada uno de las cuerdas del árbol se denominan cortes fundamentales (se identifican con los índices asociados a las ramas del árbol que cortan, una en cada caso, n-1 ramas = 5 ramas = 5 cortes fundamentales)

$$_1 = (1,0,1,0,0,1,0,0,1,0,1,0)$$

$$k_2 = (0,1,1,0,1,0,0,0,0,0,0,0)$$

$$k_4 = (0,0,0,1,1,1,1,0,1,0,0,1)$$

$$k_8 = (0,0,0,0,0,0,1,1,1,0,0,1)$$

$$k_{10} = (0,0,0,0,0,0,0,0,0,1,1,1)$$

En la figura 5.5 se ilustran los circuitos y cortes fundamentales

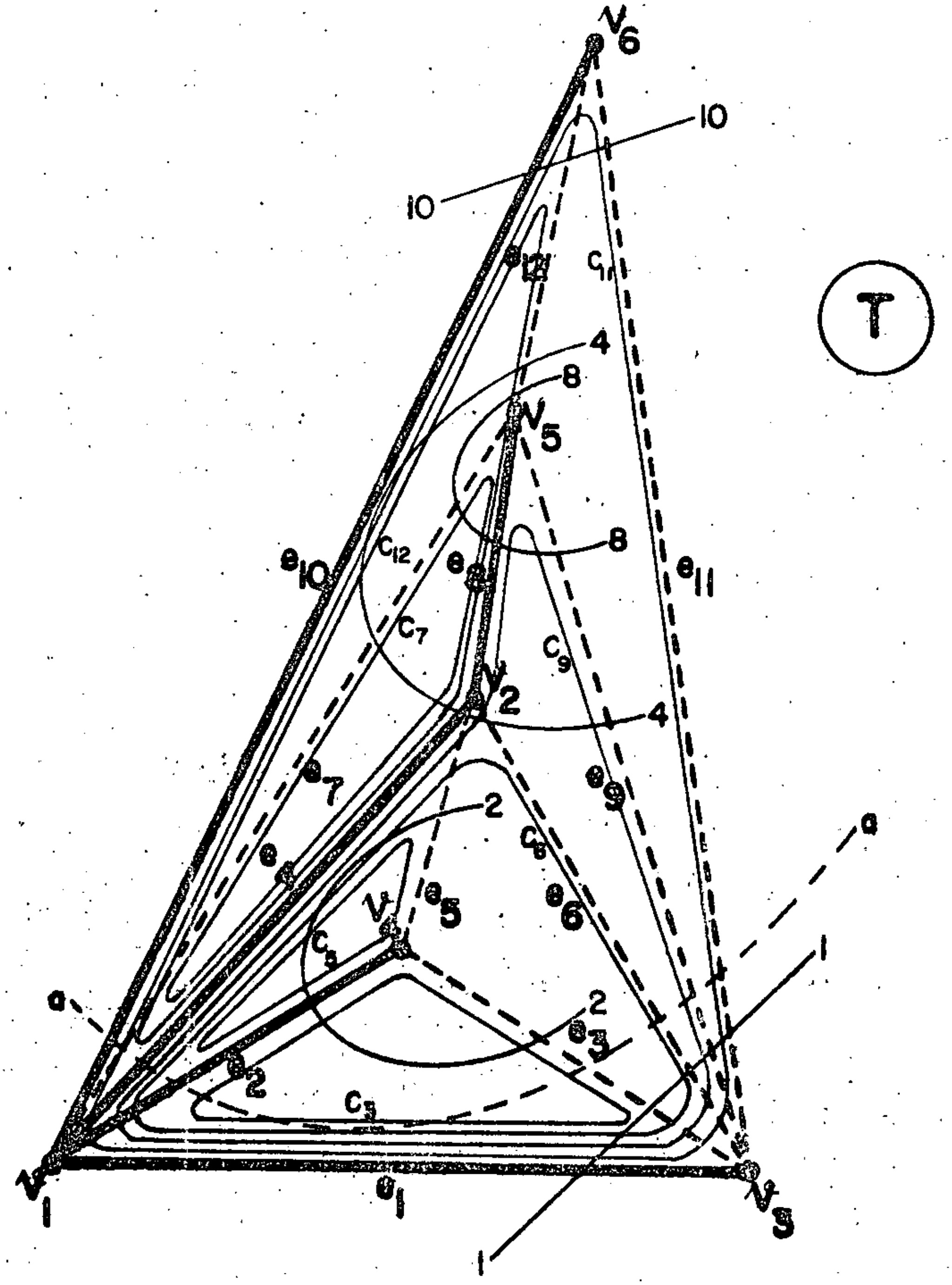
5.5.2. Bases de los espacios vectoriales de circuitos y cortes. Expansión.

Tanto el espacio vectorial de circuitos C_G como el de cortes K_G son subespacios del espacio vectorial E_G que define a toda la gráfica G:

$$C_G \subset E_G$$

$$K_G \subset E_G$$

El número de circuitos y cortes posibles de una gráfica, incluso de gráficas de poca extensión como la actual, suele ser muy elevado. Sin embar


T
V_6
10
10
e_{12}
c_{11}
4
8
V_5
8
e_{10}
c_{12}
e_8
e_{11}
c_7
c_9
V_2
4
e_7
e_9
2
e_4
c_8
a
V_4
e_5
e_6
1
c_3
2
a
e_3
e_2
c_5
V_1
e_1
V_3
1

go, en vista de que los circuitos y cortes fundamentales forman bases * para C_G y K_G respectivamente, "cualquier circuito o cualquier corte de C_G y K_G puede obtenerse mediante las combinaciones lineales respectivas de circuitos y cortes fundamentales". Esto es, cualquier circuito c_x o corte k_x se puede expresar

$$c_x = a_3 c_3 \oplus a_5 c_5 \oplus a_6 c_6 \oplus a_7 c_7 \oplus a_9 c_9 \oplus a_{11} c_{11} \oplus a_{12} c_{12}$$

$$k_x = a_1 k_1 \oplus a_2 k_2 \oplus a_4 k_4 \oplus a_8 k_8 \oplus a_{10} k_{10},$$ en la cual

$a_1, a_2, \ldots, a_{12}$ son elementos del conjunto $B = \{0,1\}$

y la operación $\oplus$ es la suma-anillo**

$\oplus$	1	0
1	0	1
0	1	0

Algunos circuitos, no fundamentales, que se consideran relevantes en el programa, son (Fig. No. 5.6)

a) el circuito c_a que se infiere de los conceptos implícitos en c_3, c_5 y c_6:

$$c_a = c_3 \oplus c_5 \oplus c_6$$

que es una forma simplificada de la combinación lineal dada antes y que, en este caso, tendría la forma

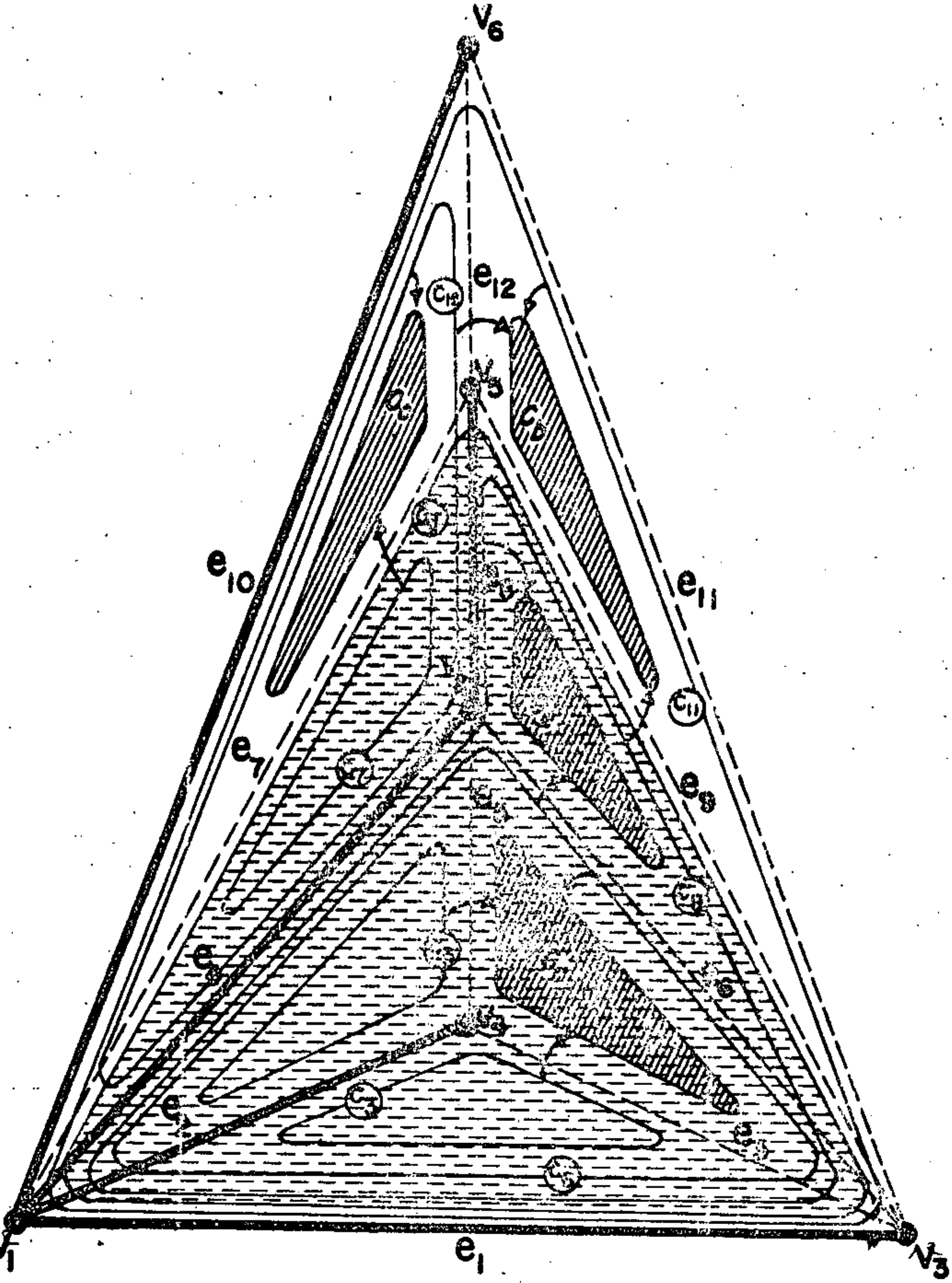
$$c_a = 1 \cdot c_3 \oplus 1 \cdot c_5 \oplus 1 \cdot c_6 \oplus 0 \cdot c_7 \oplus 0 \cdot c_9 \oplus 0 \cdot c_{11} \oplus 0 \cdot c_{12}$$

---

* Ver apéndice 5.B. para el concepto de base en los espacios vectoriales.

** Ver el concepto de campo de Galois y suma-anillo en el apéndice 5.B.

ESQUEMA PREVIO PARA UN PROGRAMA



C.A.D.A. 1976

FIG. 5.6.

El circuito $_a$ se puede asociar a un concepto definido:

C_a: Modelos de sistemas dinámicos generales a través de redes de flujo de señales en el campo complejo. *

b) El circuito $_b$ se genera de la siguiente combinación lineal:

$$_b = C_9 \oplus C_{11} \oplus C_{12}$$

C_b: Relaciones entrada-salida de sistemas generales.

c) El circuito C_c

$$C_c = C_7 \oplus C_{12}$$

C_c: Análisis del comportamiento (relaciones entrada-salida) de sistemas elementales.

d) El circuito C_d

$$C_d = C_7 \oplus C_9$$

C_d: Modelación de sistemas elementales o generales a través de diagramas de bloques.

---

* En el apéndice 5.A. podrá corroborar algunas de estas síntesis (a través del texto o de la bibliografía sugerida).

En cuanto a cortes, no fundamentales, no se indica "a priori" ninguno que tenga mayor relevancia que los fundamentales. Quizá pueda señalarse uno, de carácter global, que es posible plantear para la revisión o verificación del programa: el corte a-a, figura 5.5

$$K_a = K_2 + K_4 + K_{10}$$

$$= (0,1,1,1,0,1,1,0,1,1,1,0)$$

En el proceso de desarrollo detectado del programa, (a través de los propios cursos, de la elaboración de un texto) seguramente habrá información suficiente para definir otros cortes, sin necesidad de forzar su obtención.

5.5.3. Esquema previo para un programa

Con los resultados anteriores podemos ya esquematizar algún contexto y una representación diagramática que nos permita, mas adelante, desarrollar un programa. En este esquema debemos procurar se destaquen algunas de las situaciones previstas en los criterios y a través de otras consideraciones señaladas. Por ejemplo,

a) Debe asegurarse la acción de cierre de circuitos fundamentales,

b) debe destacarse la actividad de síntesis implícita en los circuitos fundamentales,

c) habrá que asegurar la inferencia de síntesis de áreas del conocimiento particularmente relevantes (C_a, C_b, ..., C_e),

d) deberá instrumentarse y/o preveerse la verificación del conocimiento en algunos casos del párrafo anterior (síntesis por inferencia verificada),

e) deberá quedar clara la posibilidad de que se obtengan muchas otras interrelaciones, de tal manera que la retroalimentación (evaluaciones e información en general) al programa permita su evolución sistemáti ca y adaptiva (de este punto nos encargaremos a continuación del esquema mencionado).

Tomaremos como base cada rama del árbol T para delinear las etapas en donde habrá que hacer intervenir las consideraciones a), b), c) y d) anteriores.

e_1 : En términos de la relación entre sistemas elementales y sistemas generales, construir o inferir:

e_1.1) la relación entre los sistemas generales y el análisis complejo
- cuerda e_3
- circuito fundamental C_3

e_1.2) la relación entre sistemas generales y la teoría de redes de flujo
- cuerda e_6
- circuito fundamental C_6
- circuito inf. C_a

e_1.3) la relación entre sistemas generales y los diagramas de bloques
- cuerda e_9
- circuito fundamental C_9
- circuito inferido C_d
- circuito inferido C_e

e_1.4) la relación entre sistemas generales y su respuesta a las señales de entrada
- cuerda e_{11}
- Circ.fund. C_{11}
- Circ.Inf. C_b

e_2 : En términos de la relación entre sistemas elementales y el análisis complejo construir o inferir

e_2.1) la relación e_1.1) anterior
- cuerda e_3
- circ. fund. C_3

e_2.2) la relación entre el análisis complejo y la teoría de redes
- cuerda e_5
- circ. fund. C_5

(e_4) : En términos de la relación entre sistemas elementales y la teoría de redes de flujo construir o inferir

e_4.1) la relación e_2.2)
- cuerda e_5
- circ. fund. C_5

e_4.2) la relación e_1.2)
- cuerda e_6
- circ. fund. C_6
- circ. inf. C_a

e_4.3) la relación entre sistemas elementales y diagramas de bloques
- cuerda e_7
- circ. fund. C_7

e_4.4) la relación e_1.3)
- cuerda e_9
- circ. fund. C_9
- circ. inf. C_d
- circ. inf. C_e

e_4.5) la relación entre diagramas de bloques y señales
- cuerda e_{12}
- circ. fund. C_{12}
- circ. inf. C_b
- circ. inf. C_c

(e_8) : En términos de la relación entre diagramas de bloques y teoría de redes, inferir o construír

e_8.1) la relación e_1.3)
- cuerda e_9
- circ. fund. C_9
- circ. inf. C_d
- circ. inf. C_e

e_8.2) la relación e_4.3)
- cuerda e_7
- circ. fund. C_7

e_8.3) la relación e_4.5)
- cuerda e_{12}
- circ. fund. C_{12}
- circ. inf. C_b
- Circ. inf. C_c

e_{10} : En términos de la relación entre sistemas elementales y análisis de señales, inferir o construír

$e_{10}.1)$ la relación $e_4.5)$
- cuerda e_{12}
- circ. fund. C_{12}
- circ. inf. C_b
- circ. inf. C_c

$e_{10}.2)$ la relación $e_1.4)$
- cuerda e_{11}
- circ. fund. C_{11}
- circ. inf. C_b

Los vínculos dados en esta ennumeración se representan esquemáticamente en la fig. No. 5.6.

Como se ha señalado, los circuitos o cortes fundamentales y los que adicionalmente se sugirieron para el programa, no son todos los que puedan estar contenidos en la gráfica original G.

A partir de la gráfica de la fig. No. 5.7 y del árbol de alternativas, mostrado en la misma figura, podemos obtener una expresión para estimar el posible número de circuitos de una gráfica, empezando con una subgráfica como (e_1, e_2, e_3), e incluyendo la gráfica trivial (0,0,0). Constructivamente le agregamos una nueva rama y después un vértice. Observamos que, como se explica adelante, hay una duplicación del número de circuitos en cada etapa.

De la primera etapa constructiva, partiendo de (e_1, e_2 y e_3) vemos que si le agregamos un nuevo circuito (e_2, e_4) (con una sola rama)

1) Permanecerán los circuitos de antes.

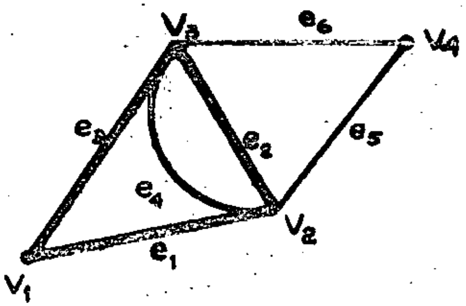
2) Se agregará el nuevo circuito a los interiores.

3) Por cada circuito no trivial, se formará otro (e_1, e_3, e_4)

ESTIMACION DEL POSIBLE NUMERO DE CIRCUITOS DE UNA GRAFICA CON UN ARBOL DE ALTERNATIVAS

SEA UNA SUBGRAFICA INICIAL (e_1, e_2, e_3)

$$\begin{cases} \Sigma g = 6 \\ \text{RAMAS } e_0 = 3 \\ \text{RANGO } r_0 = n-1 = 2 \\ \text{NULIDAD } \mu_0 = e - (n-1) = 1 \end{cases}$$



QUE TIENE LOS CIRCUITOS: $(0,0,0)$ (TRIVIAL)

AGREGANDO UNA RAMA

- (e_2, e_4) *
  - (e_4, e_5, e_6)
  - (e_2, e_4)
- $(0,0,0)$
  - (e_2, e_5, e_6) *
  - $(0,0,0,0)$

AGREGANDO 2 RAMAS Y 1 VERTICE

y

(e_1, e_2, e_3)

- (e_1, e_3, e_4)
  - $\{(e_2, e_5, e_6)\} \cup \{(e_1, e_3, e_4)\}$
  - (e_1, e_3, e_4)
- (e_1, e_2, e_3)
  - (e_1, e_3, e_5, e_6)
  - (e_1, e_2, e_3)

\# CIRCUITOS $2 = 2^1$

$e_1 = 4$
$r_1 = 2$
$\mu_1 = 2$
\# CIRCUITOS $4 = 2^2$

$e_2 = 6$
$r_2 = 3$
$\mu_2 = 3$
\# CIRCUITOS $8 = 2^3$

FIG. 5.7.

* CIRCUITOS AGREGADOS.

Obsérvese que la nulidad ha aumentado en uno y el número de circuitos se ha duplicado.

Si agregamos otro circuito (e_2, e_5, e_6) con dos ramas y un vértice:

1) Permanecen los circuitos de la etapa anterior,

2) se agrega el nuevo circuito a los de la etapa anterior,

3) por cada circuito, no trivial, se formará otro.

Se admite como circuito la unión de circuitos ajenos

$$C_k = C_i \cup C_j$$

tales que

$$C_i \cap C_j = \emptyset$$

Bajo estas consideraciones al agregar un circuito se incrementa en uno la nulidad y el número de circuitos se duplica. Si $N(C_g)$ es el número de circuitos,

$$N(C_G) = 2^{\mu}$$

Nota: Obsérvese que los circuitos nuevos se obtienen fácilmente por suma anillo del agregado con los anteriores.

De manera análoga se puede encontrar que el número de cortes posibles $N(K_G)$ en el espacio K_G está dado, (incluyendo al corte trivial (0,0,...0) por:

$$2^r$$

y el número de subgráficas de G está dado por

$$2^e$$

Haciendo algunos cálculos sencillos se puede afirmar que los circuitos y/o cortes analizados no representan sino un número de los que pueden estar contenidos en

C_G y K_G respectivamente

Circuitos $2^{\mu} = 2^7 = 128$ circuitos (contra 12 que se han tomado en cuenta). Sin embargo, no necesariamente todos son conceptualmente significativos y todos pueden obtenerse, como ya se dijo, a través de combinaciones lineales (suma-anillo) de los fundamentales (base del espacio de circuitos)

Cortes $2^r = 2^{n-1} = 2^5 = 32$ cortes (contra 6 que se han incluído). Los restantes se pueden también obtener de los cortes fundamentales (base del espacio de cortes).

5.5.4. Dimensionalidad y expansión de subgráficas

A partir de lo anterior cabe plantear otra cuestión relevante. Dada la importancia que se le ha asignado a los circuitos y cortes fundamentales como bases para la expansión de subgráficas de G, ¿son ellos suficientes para expander, o generar, todas las posibles subgráficas de G? Si así fuese, el programa y las posibles evaluaciones (incluso la retroalimentación y definición o revisión del contexto) podrían ceñirse a las posibilidades implícitas en C_G y K_G exclusivamente. O bien planteado de otra manera, considerando ambas bases (C_G ó K_G) ¿es posible generar todas las subgráficas del espacio vectorial E_G, asociado a la gráfica G?

Si para generar una subgráfica de G, o un subespacio vectorial de E_G, tomamos indistintamente vectores de las bases de C_G o de K_G, podemos convenir en que hemos construído con ambas bases la del espacio

$$C_G \cup K_G$$

Esto puede estudiarse a través de la dimensionalidad* de los espacios vectoriales implícitos.

*Ver este concepto en el apéndice 5.B. de espacios vectoriales.

Es fácil ver, y se comprobará mas adelante, que los vectores de la base de C_G (circuitos fundamentales) son linealmente independientes, ésto es que en la combinación lineal $a_3 C_3 \oplus a_5 C_5 \oplus a_6 C_6 \oplus$

$a_7 C_7 \oplus a_9 C_9 \oplus a_{11} C_{11} \oplus a_{12} C_{12}$, no existe un conjunto de coeficientes $a_3, \ldots, a_{12}$, no todos nulos, que haga cero a la combinación lineal.

Y lo mismo ocurre respecto a los vectores de la base de K_G (cortes fundamentales)

$$a_1K_1 \oplus a_2K_2 \oplus a_4K_4 \oplus a_8K_8 \oplus a_{10}K_{10}$$

(todos los coeficientes son tales que $a_i \in \{0,1\}$).

por lo tanto

$$\dim C_G = r = n-1 = 5$$

$$\dim K_G = \mu = e-(n-1) = 7$$

Si consideramos unos y otros vectores en una sola matriz, fig. No. 5.8, aparentemente la dimensionalidad de $C_G \cup K_G$ es $r+\mu = 12$ que coincidiría con la de E_G: $\dim E_G = e = 12$.

En la figura, se pueden comprobar dos hechos

1) que los vectores asociados a los circuitos fundamentales son linealmente independientes, y que lo mismo sucede entre los vectores asociados a los cortes fundamentales,

2) que los vectores de los circuitos respecto a los de los cortes son ortogonales*, ésto es, que para toda i y toda j,

$$K_i \cdot C_j = 0$$

*Ver apéndice 5.B. de espacios vectoriales para el concepto de ortogonalidad.

MATRIZ DE BASES

		ramas: 1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	
circuitos	c_3	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
	c_5	0	1	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	2
	c_6	1	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	3
	c_7	0	0	0	1	0	0	1	1	0	0	0	0	4
	c_9	1	0	0	1	0	0	0	1	1	0	0	0	5
	c_{11}	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	6
	c_{12}	0	0	0	1	0	0	0	1	0	1	0	1	7
cortes	K_1	1	0	1	0	0	1	0	0	1	0	1	0	8
	K_2	0	1	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	9
	K_4	0	0	0	1	1	1	1	0	1	0	0	1	10
	K_8	0	0	0	0	0	0	1	1	1	0	0	1	11
	K_{10}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	12

C.A.D.A. 1976

FIG. 5.8.

El producto anterior es cero en dos sentidos posibles:

a) de que en la expansión solo aparezcan términos $1 \cdot 0$ y $0 \cdot 0$ (cortes y circuitos ajenos),

b) de que en la expansión aparezcan los términos anteriores y $1 \cdot 1 \oplus 1 \cdot 1$ correspondientes a la rama del árbol (asociada a un circuito) y la cuerda (del circuito), ambos intersectados por un mismo corte.

Debe observarse, por otro lado, que el conjunto de vectores de la <u>base de circuitos</u> contiene a todas las ramas de G (ramas del árbol T + cuerdas) y la base de cortes también contiene a todas esas ramas (ramas del árbol T + cuerdas). Por esto, podría suponerse que la unión de C_G y K_G pueda generar a E_G. Pero este hecho no garantiza que los <u>vectores</u> mismos de E_G estén <u>todos</u> contenidos en $C_G \cup K_G$. Lo anterior suele expresarse

$$\dim (C_G \cup K_G) \quad \dim C_G + \dim K_G$$

o bien

$$\dim (C_G \cup K_G) \quad \dim E_G = e$$

ni la independencia lineal de los vectores fundamentales de circuitos o de cortes, de C_G y K_G respectivamente, ni la ortogonalidad de $k_i \cdot c_j = 0$, garantizan que los vectores del espacio de la unión $C_G \cup K_G$ generen a <u>todos</u> los vectores (subgráficas) de E_G.

Una forma, no muy sistemática, de probar esta situación estriba en examinar si es posible o no generar algún vector de la matriz de circuitos y cortes, en términos de los demás. O, equivalentemente, analizar la posibilidad de que estos no sean <u>linealmente independientes</u> en su conjunto, ésto es, el conjunto de vectores: circuitos fundamentales más el conjunto de vectores: cortes fundamentales. Si bajo alguna combinación lineal (a través de la suma-anillo) es posible generar el vector $\tilde{0}$ (un renglón de ceros), entonces el conjunto es linealmente dependiente y no constituirá una base para el espacio E_G. En la figura 5.9 se efectúan algunas combinaciones y se obtiene, en el último renglón un vector (subgráfica) asociado a dos ramas (e_2, e_7).

El primer renglón de la matriz, se obtiene -- por suma-anillo de todos los renglones. Contiene este vector (subgráfica) 8 ramas. En el siguiente renglón se hace la suma-anillo con el primer renglón, lo cuál implica eliminar de la primer suma-anillo al vector del primer renglón porque la suma-anillo de un vector consigo mismo es la subgráfica nula. El vector de este renglón tiene ahora solo 5 ramas. Después se suprimen los vectores 6, 3, y 2. En cada supresión se va reduciendo, monotónicamente, el número de ramas hasta llegar a un mínimo de dos ramas. Si se suprime cualquier otro vector aumentará el número de ramas. Esto podría indicar que no hay forma de obtener el vector cero: (0,0,...,0). O bien que no habría forma de obtener un vector como una combinación lineal de los demás: Son linealmente independientes y podrían construír una base para E_G.

Un método usual en algebra lineal, para poder aseverar la independencia lineal consiste en transformar la matriz original en una "triangular", o sea una que tuviese "unos" en la diagonal principal y "ceros" abajo de ella. Como proceso tentativo puede recomendarse en el estudio de gráficas pero no es totalmente aplicable en virtud de que los vectores linealmente independientes pueden implicar uno o más renglones con más de un "uno".

En síntesis, si la matriz de circuitos y cortes fundamentales no constituye un conjunto de vectores linealmente independientes, el análisis a través de circuitos y cortes exclusivamente no es exhaustivo. De esto que una vez definido el programa resulte especialmente relevante la retroalimentación de la información obtenida de éste para revisarlo en sus diversas interrelaciones (ramas de la gráfica, árbol, circuitos, cortes, etc.).

Dimensionalidad de los espacios de circuitos y cortes

$$
\begin{array}{rcl}
 & \begin{array}{cccc} 1\,2\,3 & 4\,5\,6 & 7\,8\,9 & 10\,11\,12 \end{array} & \\
\begin{array}{r} 8\text{ ramas} \\ 5\text{ ramas} \\ 4\text{ ramas} \\ 3\text{ ramas} \\ 2\text{ ramas} \end{array} &
\left[\begin{array}{cccc}
1\,1\,1 & 0\,1\,1 & 1\,0\,0 & 1\,1\,0 \\
0\,0\,0 & 0\,1\,1 & 1\,0\,0 & 1\,1\,0 \\
1\,0\,0 & 0\,1\,1 & 1\,0\,0 & 0\,0\,0 \\
0\,0\,0 & 1\,1\,0 & 1\,0\,0 & 0\,0\,0 \\
0\,1\,0 & 0\,0\,0 & 1\,0\,0 & 0\,0\,0
\end{array}\right] &
\begin{array}{l} 1\oplus 2\oplus \ldots \oplus 12 \\ \oplus 1 \\ \oplus 6 \\ \oplus 3 \\ \oplus 2 \end{array}
\end{array}
$$

$$
\text{Verificación} \quad (0\,1\,0 \quad 0\,0\,0 \quad 1\,0\,0 \quad 0\,0\,0) \quad 4\oplus 5\oplus 7\oplus 8\oplus 9\oplus 10\oplus 11\oplus 12
$$

FIG. 5.9.

5.6. Matriz de incidencia.

En diversos campos de la ciencia es usual hacer representa ciones matriciales a través de la llamada matriz de incidencia en lugar de usar la matriz de conectividad o adyacencia vista antes (Fig. No. 5.10).

Como se ha señalado, en la matriz de adyacencia se establece la "conectividad", mediante "0" ó "1", entre los vértices de la gráfica.

En la matriz de incidencia se prescriben para cada vértice las ramas que en el inciden. Los renglones corresponden en tonces a los vectores asociados a cada vértice en los que se indica con "1" la presencia de una rama y con "0" la ausen cia de una rama. En la gráfica G que estamos examinando se tienen

$n = 6$ (vértices o renglones)

$e = 12$ (ramas o columnas)

o sea que la matriz de incidencia I_g es una matriz de $n \times e$ (6x12)

$$I_g = \left[a_{ij}\right]_{nxe}$$

en donde

$a_{ij} = 1$ si en el renglón (vértice) iésimo está presente la rama e_j

$a_{ij} = 0$ si en el renglón (vértice) iésimo está ausente la rama e_j.

Notas:

1) el grado, el rango y la nulidad se obtienen como antes,

2) los elementos de la matriz de incidencia se toman del conjunto $B = \{0, 1\}$,

3) cada columna tiene dos "unos" asociados a la rama que

MATRIZ DE INCIDENCIA DE LA GRAFICA G

$I_g =$

	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8	e_9	e_{10}	e_{11}	e_{12}	g
V_1	1	1	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	5
V_2	0	0	0	1	1	1	0	1	0	0	0	0	4
V_3	1	0	1	0	0	1	0	0	1	0	1	0	5
V_4	0	1	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	3
V_5	0	0	0	0	0	0	1	1	1	0	0	1	4
V_6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	3

$\boxed{6 \times 12}$

$$\Sigma g = 24$$
$$e = 12$$
$$r = n - 1 = 5$$
$$\mu = e - (n-1) = 7$$

C.A.D.A. 1976

FIG.5.10.

vincula a dos vértices (de aquí su correspondencia con la matriz de adyacencia),

4) la matriz de incidencia de una gráfica conexa siempre debe tener "unos" en todos los renglones,

5) si en un renglón dado sólo hay un "1", es obvio que solo incide una rama y no hay ninguna posibilidad de que esta pertenezca a un circuito,

6) dos gráficas <u>isomórficas</u> tienen matrices de incidencia idénticas o que solo difieren en el ordenamiento de renglones,

7) si en la matriz de incidencia suprimieramos las ramas e_7, e_8, e_9, e_{10} y e_{11} tendríamos una matriz de incidencia de la forma

$$I_{g'} = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix}$$

y según puede verificarse por simple inspección se trataría de una gráfica desconexa (recuerdese que cada columna de A_{11} y A_{22} debe tener dos "1"). Las submatrices "O" de $I_{g'}$ indican el "<u>desacoplamiento</u>" de las subgráficas A_{11} y A_{22}.

8) si sumamos (suma-anillo) los primeros cinco renglones de la <u>matriz de incidencia</u> obtenemos el sexto renglón

$$V_1 \oplus V_2 \oplus V_3 \oplus V_4 \oplus V_5 = (0,0,0,0,0,0,0,0,0,1,1,1)$$
$$= V_6$$

o sea que los vectores de I no son linealmente independientes. Eliminando otro renglón podemos ver que no existe ya este tipo de dependencia. Por lo tanto la gráfica conexa G tiene solo n-1 = 6-1 = 5 renglones linealmente independientes: es <u>de rango r = n-1</u>,

9) en la matriz de incidencia del árbol T, mostrada en forma tabular en la figura 5.11 y en la notación usual de matrices en la figura No. 5.12, se observa la misma peculiaridad

$$V_1 \oplus V_2 \oplus V_3 \oplus V_4 \oplus V_5 = V_6$$

MATRIZ DE INCIDENCIA DEL ARBOL T

	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8	e_9	e_{10}	e_{11}	e_{12}	g
v_1	1	1	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	4
v_2	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	2
v_3	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
v_4	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
v_5	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1
v_6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1

cuerdas

$\sum g = 10$
$\theta = 5$
$r = n - 1 = 5$

C.A.D.A. 1976

FIG.5.11.

MATRIZ DE INCIDENCIA DEL ARBOL T
(CON NOTACION DE MATRICES)

$$[T] = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccccccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & e_7 & e_8 & e_9 & e_{10} & e_{11} & e_{12} \end{array} \\ \begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

$\boxed{\text{6 vértices x 12 ramas} \quad (6 \times 12).}$

C.A.D.A. 1976

FIG. 5.12.

por lo tanto un árbol de expansión de una gráfica conexa G tiene un rango r = n-1 (que coincide con el número de ramas del árbol).

10) como se indicó antes, en relación con la matriz de circuitos y cortes fundamentales, es posible obtener mediante combinaciones lineales, a través de la suma-anillo, una matriz con una submatriz triangular superior (con elementos "1" en la diagonal principal y "0" abajo de ella). Para lograr esta expresión usualmente es necesario permutar la colocación de algunas columnas (Fig. No. 5.13).

11) a partir de la "triangularización" de una matriz, es factible, sin modificar el rango, obtener una submatriz identidad* (con "unos" en la diagonal principal y ceros a ambos lados de ella), como se indica en la figura 5.14. Puede observarse que solo quedan "1" en las columnas correspondientes a las ramas del árbol T, con lo cual verifica el rango r(T) = n-1 del árbol de expansión (y de la gráfica G),

12) si a la matriz de incidencia se le elimina un vector renglón V_k de los n vectores, se obtiene un arreglo matricial de (n-1) renglones que constituyen una matriz tal que no es posible generar alguno de los n-1 vectores en términos de los demás (son linealmente independientes). A este arreglo se le denomina matriz de incidencia reducida (I_f). Lo anterior también puede expresarse: cualquier submatriz cuadrada de (n-1)x(n-1) es no singular si y solo si sus n-1 columnas constituyen un árbol de expansión de G,

13) el árbol de expansión que se ha adoptado para este programa obedece, aparentemente, al criterio mencionado anteriormente . Este, sin embargo, no representa ni con mucho el único árbol de expansión de G, asunto que ya se había tratado en capitulos anteriores. No es fácil detectar por inspección la cantidad de árboles de expansión asociados a una gráfica. Para estimarlos puede emplearse la siguiente expresión

$$N(T) = \left| I_f \cdot I_f^t \right|$$

*Ver apéndice 5.B.

REDUCCION DE LA MATRIZ DEL ARBOL T MEDIANTE OPERACIONES ENTRE RENGLONES (TRIANGULARIZACION)

$$
\begin{array}{l}
\begin{array}{cccccccccccc}
e_3 & e_5 & e_6 & e_7 & e_9 & e_{11} & e_{12} & e_1 & e_2 & e_4 & e_8 & e_{10}
\end{array} \\
\left[\begin{array}{ccccccc:ccccc}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right]
\begin{array}{l}
v_1 \\
v_2 \oplus v_4 \\
v_3 \oplus (v_2 \oplus v_4) \oplus v_1 \oplus v_2 \\
v_4 \oplus (v_2 \oplus v_4) \\
v_5 \\
v_6
\end{array}
\end{array}
$$

REORDENANDO LOS RENGLONES:

$$
\left[\begin{array}{c:ccccc}
 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\
 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\
 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
\hdashline
 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right]
\begin{array}{l}
v_1 \\
v_4' \\
v_2' \\
v_5 \\
v_6 \\
v_3'
\end{array}
$$

C.A.D.A. 1976

FIG. 5.13

MATRIZ IDENTIDAD DEL ARBOL

$$
\begin{array}{c|ccccccc:ccccc|l}
 & e_3 & e_5 & e_6 & e_7 & e_9 & e_{11} & e_{12} & e_1 & e_2 & e_4 & e_8 & e_{10} & \\
V_1' & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & V_1 \oplus V_4' \oplus V_5' \oplus V_6' \\
V_2' & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & V_4' \oplus V_2 \\
V_3' & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & V_2' \oplus V_5' \\
V_4' & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & V_5 \\
V_5' & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & V_6 \\
\hdashline
V_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & V_3' \\
\end{array}
$$

$$r(T)=n-1=5$$

FIG.5.14

En la fig. No. 5.15 se expresa el determinante de este producto y se obtiene que el número de árboles de expansión posibles, asociados a G, es

$$N(T) = 776$$

No obstante esta cifra abrumadora no tiene un significado muy relevante porque de todos los árboles de expansión posibles (matemáticamente) sólo a algunos podrá asociárseles un sentido relacionado con un proceso de enseñanza, estructura de conocimiento, etc.

5.7. Matriz de Circuitos Fundamentales y Matriz de Circuitos.

5.7.1. Definición y generación de circuitos

Se habían determinado los circuitos fundamentales, asociados al árbol T, de la gráfica G: C_3, C_5, C_6, C_7, C_9, C_{11} y C_{12}. Con ellos podemos formar la matriz de circuitos fundamentales (Figura No. 5.16).

Ya se había indicado que a través de la combinación lineal (suma-anillo) de los renglones de C_f pueden generarse todos los circuitos de G (los vectores de C_f son una base del espacio C_G). La matriz formada por todos los circuitos es la matriz de circuitos C. Esta matriz no contiene de hecho mas información básica que C_f pero si puede contener arreglos (circuitos) que en condiciones de conflicto respecto a la definición de las áreas de síntesis o el cuestionamiento de un determinado árbol pueden servir de criterio para decidir sobre estas situaciones: modificando el árbol, fusionando vértices, agregando vértices o ramas, suprimiendo ramas, modificando la vinculación de las ramas o su significado, alterando el contexto, etc.

Desde luego ya habíamos determinado algunos circuitos adicionales (construídos o inferidos de los fundamentales)

$$C_a = C_3 \oplus C_5 \oplus C_6$$

$$C_b = C_9 \oplus C_{11} \oplus C_{12}$$

NUMERO DE ARBOLES DE EXPANSION POSIBLES

$$N(T) = \left| I_f \cdot I_f^t \right|$$

$$N(T) = \left| \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{5 \times 12} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{12 \times 5} \right| = \left| \underbrace{\begin{bmatrix} 5 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 5 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}}_{5 \times 5} \right|$$

$N(T) =$ 776

NOTA.- Las operaciones se realizan de acuerdo a la aritmética.

FIG. 5.15.

MATRIZ DE CIRCUITOS FUNDAMENTALES

$$
C_f = \begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccccccc} (e_1) & (e_2) & (e_3) & (e_4) & (e_5) & (e_6) & (e_7) & (e_8) & (e_9) & (e_{10}) & (e_{11}) & (e_{12}) \end{array} \\
\left[\begin{array}{cccccccccccc}
1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1
\end{array}\right]
\end{array}
\begin{array}{c} \\ (c_3) \\ (c_5) \\ (c_6) \\ (c_7) \\ (c_9) \\ (c_{11}) \\ (c_{12}) \end{array}
$$

C.A.D.A. 1976

FIG. 5.16.

$$c_c = c_7 \oplus c_{12}$$

$$c_d = c_7 \oplus c_9$$

$$c_e = c_6 \oplus c_9$$

La obtención de todos los circuitos de G puede resultar una tarea bastante ardua como para ser llevada "por inspección directa de la gráfica". Aún en gráficas de tamaño relativamente pequeño la labor puede ser excesiva. Se sugiere a continuación un procedimiento, utilizando los árboles (herramienta básica de los análisis combinatorios) para la realización de estas combinaciones (Fig. No.5.17). Se eliminarán de las combinaciones realizadas aquellos vectores que representen la unión de circuitos ya detectados.

Se tomará en cuenta que la combinación lineal de dos o más circuitos da lugar a otro circuito o a la unión de circuitos disjuntos.

Muchos de los circuitos que se obtienen no tienen una relevancia especial, por ejemplo:

$$c_7 \oplus c_9 \oplus c_{11} = (0,0,0,0,0,0,1,0,1,1,1,0)$$

el cual implicaría el estudio de la relación entrada-salida en sistemas elementales y sistemas complejos, lo cual conceptual u operacionalmente no tiene mucho valor en virtud de que este tipo de síntesis ya está muy claramente establecido en el proceso descrito anteriormente (figura 5.18).

Es conveniente indicar que la integración de conceptos (áreas de síntesis fundamentales), se está realizando sobre la gráfica plana, pero en la realidad, esta integración es factible en varios niveles, según el grado de conocimiento que se pretenda en distintas etapas del aprendizaje. Por ejemplo, de la gráfica de la figura 5.5 se puede analizar el circuito c_3 que es la integración de sistemas elementales, análisis en el camplo complejo y sistemas generales; se podrían considerar los niveles de integración dados en la figura 5.19.

DETERMINACION DE TODOS LOS CIRCUITOS

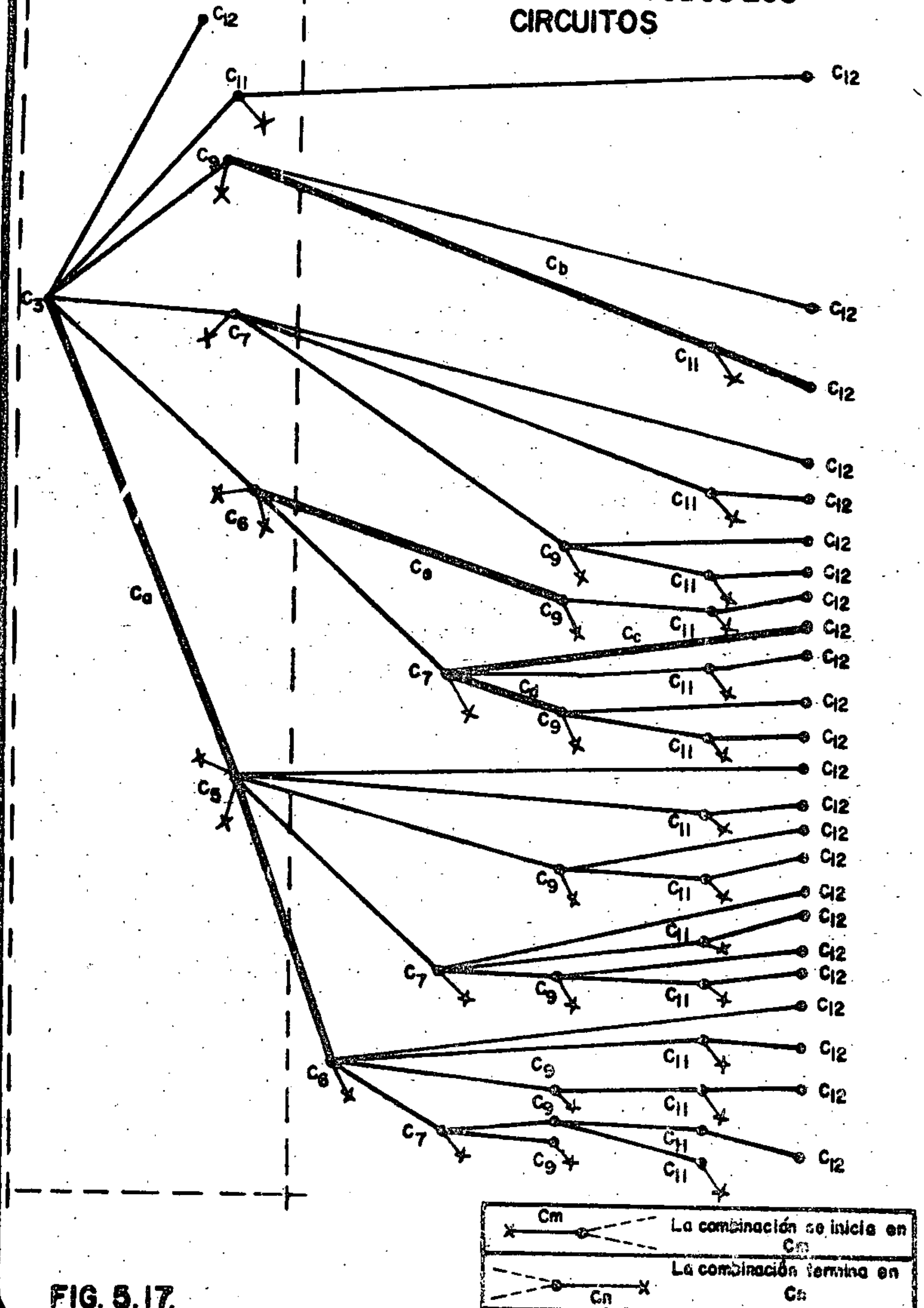
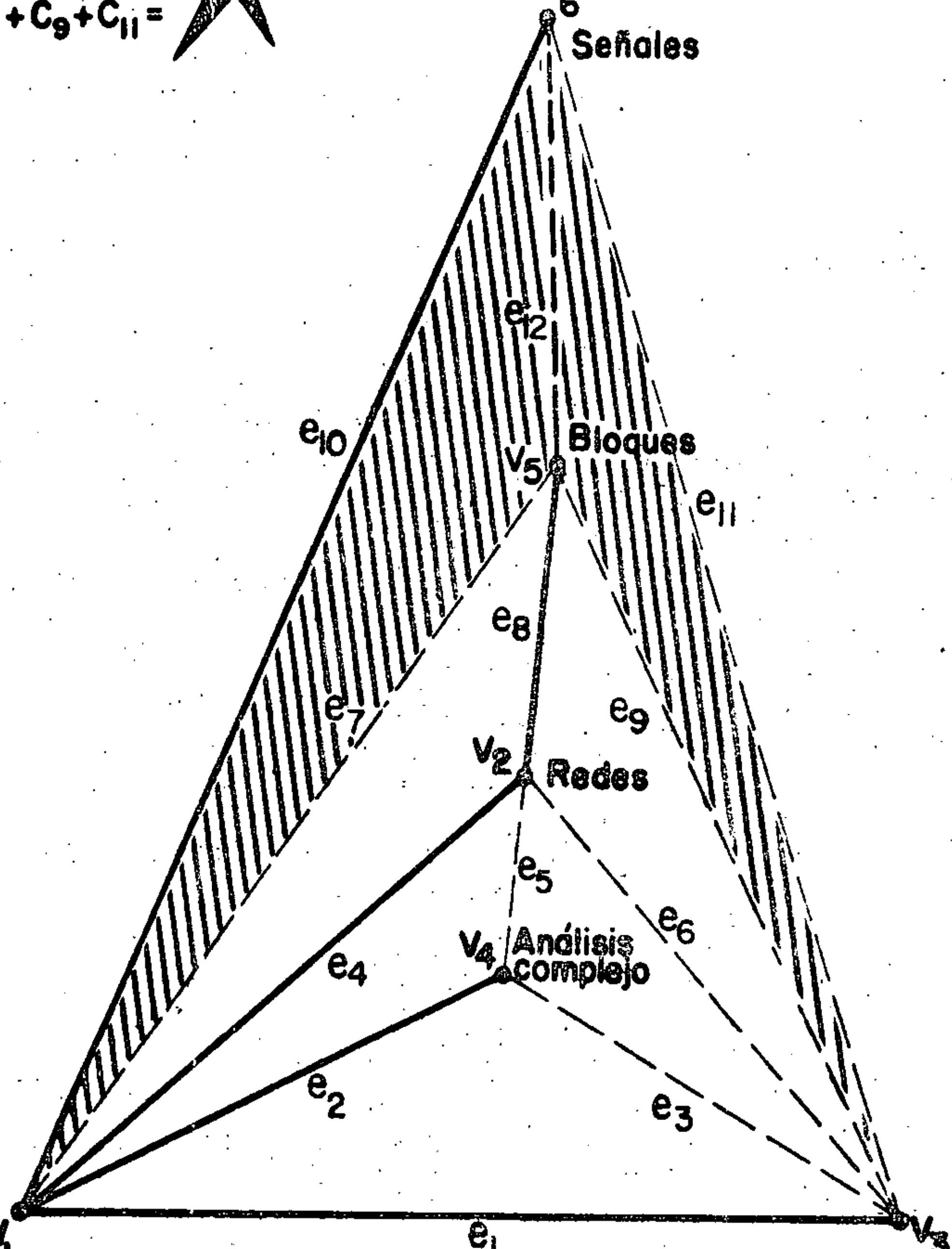


FIG. 5.17.

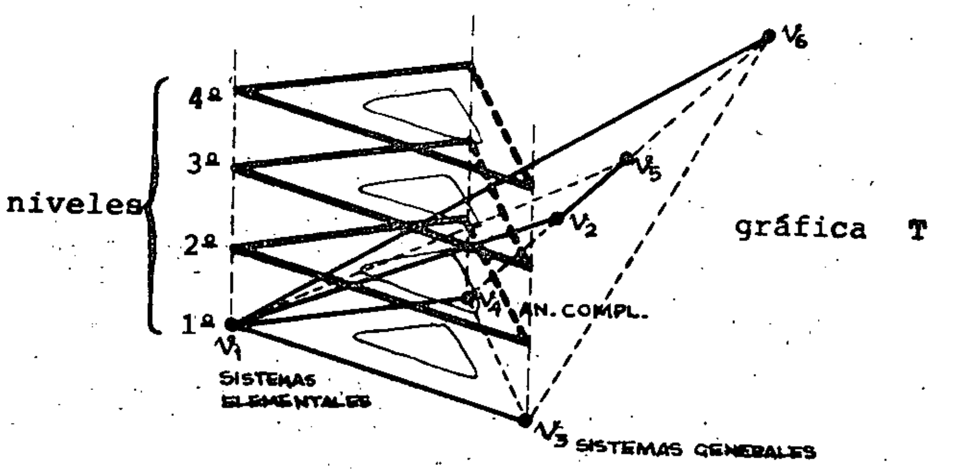
EJEMPLO DE OBTENCION DE UNOS CIRCUITOS POR SUMA ANILLO.

$C_7 + C_9 + C_{11} =$ 



C.A.D.A. 1976

FIG. 5.18.



Nivel	Sist.elementales	An.Complejo	Sist.generales
1o.	modelos discretos de 1er. orden (aprendizaje, economía, etc.)	Regiones de estabilidad	Entradas generales, impulso y convolución
2o.	Sistemas de 1er. orden(discretos)	Transformada análisis de polos y ceros	Análisis de sistemas 1er. orden, convolución para entradas generales
3o.	Sistemas de 2o. orden (discretos)	Funciones de transferencia (normalización)	Relaciones entrada-salida, transitorios, estabilidad, etc.
4o.	Sistemas lineales 1er. orden (continuos)	Transformada de Laplace, Funciones de transferencia	Comportamiento general, entrada-salida, estabilidad, transitorios, etc.
etc.			

FIG. 5.19

5.7.2. Representación alternativa de C_f.

Para operar con C_f, como se verá adelante, es conveniente escribir a la matriz de circuitos fundamentales en la forma

$$C_f = \left[I_\mu \mid R_t \right]$$

en donde I_μ es una submatriz identidad de orden $\mu = e-n+1$ y R_t es la submatriz de las ramas del árbol de expansión, de orden $\mu x(n-1)$.

Se observará, mas adelante, que la submatriz I tiene "unos" en las columnas correspondientes a las cuerdas (asociadas al árbol T).

5.7.3. Ortogonalidad de la matriz de circuitos con la de incidencia.

Es de esperarse que las matrices de incidencia y de circuitos no sean independientes: las ramas que constituyen cualquier circuito están consignadas en la matriz de incidencia. Cualquier circuito que contenga a un vértice tendrá dos ramas (incidentes al vértice) que serán comunes con las correspondientes ramas (o "unos") del vector correspondiente al vértice, en la matriz de incidencia (Fig. No. 5.20).

O sea, cualquier circuito c_j que incluya al vértice k-ésimo, dado por su vector v_k, será tal que

$$c_j \cdot v_k = 0$$

por ejemplo, para v_3

$$v_3 = (1,0,1,0,0,1,0,0,1,0,1,0)$$

y el circuito

$$c_6 = (1,0,0,1,0,1,0,0,0,0,0,0).$$

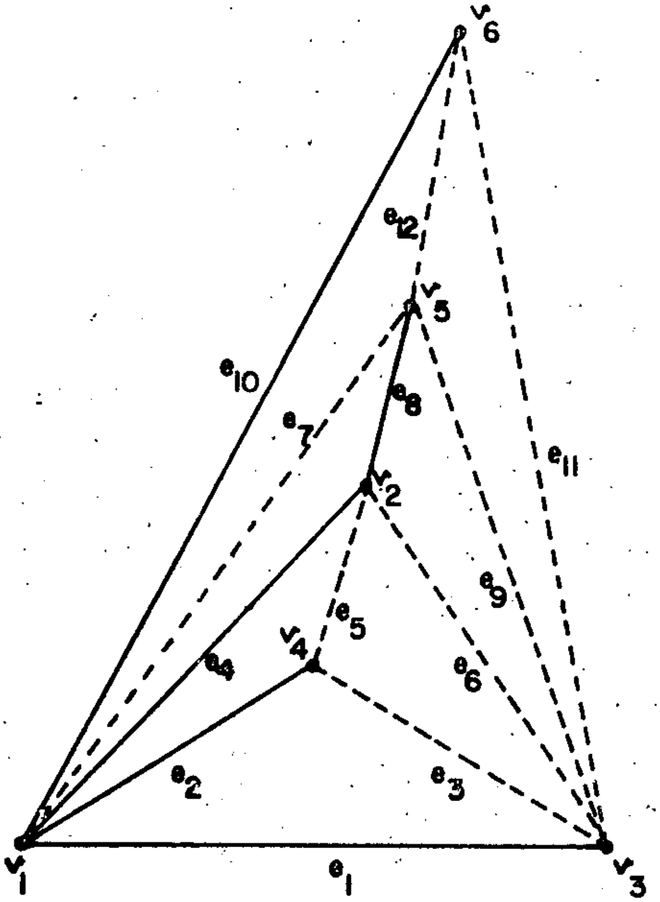
se tiene que solo las ramas e_1 y e_6 son comunes, por lo tanto

$$c_6 \cdot v_3 = 1 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 0 \oplus$$

$$0 + 0 \oplus 0 = 1 \oplus 1 = 0$$

Por lo tanto, la matriz de circuitos fundamentales y la - matriz de incidencia de la gráfica G, son ortogonales en cuanto a las siguientes propiedades:

a) O bien porque hay un par de ramas incidentes a un vértice que a su vez está comprendido en un circuito y que por lo tanto esas ramas son comunes con dos ramas del circuito.



$$\begin{array}{cccccccccccccc} & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & e_7 & e_8 & e_9 & e_{10} & e_{11} & e_{12} & \\ v_3 = (& 1, & 0, & 1, & 0, & 0, & 1, & 0, & 0, & 1, & 0, & 1, & 0 &) \end{array}$$

$$c_6 = (1, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$$

$$c_6 \cdot v_3 = 0$$

SEPARACION DEL VERTICE v_3 PARA ESTUDIAR LA ORTOGONALIDAD

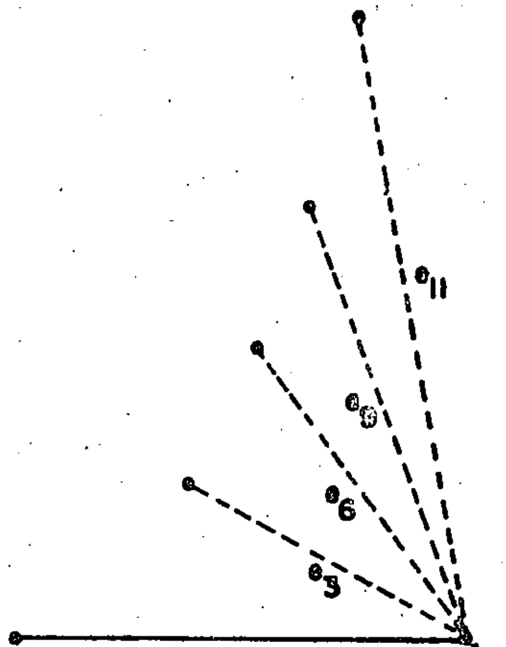


FIG. 5.20.

b) o bien porque el vector asociado a un vértice y el vector de un circuito, no tienen ramas en - común.

5.8. Matriz de cortes fundamentales

Los cortes fundamentales $k_1, \ldots, k_{10}$ los podamos arreglar en una matriz de (n-1)xe que denominaremos matriz de cortes fundamentales K_f (Fig. No. 5.21) (a - partir de la cuál se puede crear un algoritmo para generar la matriz de todos los cortes en forma similar - al caso de la matriz de circuitos).

La matriz K_f se puede rearreglar, mediante el intercambio de columnas, a la forma mostrada en la Fig. No. 5.22 , en donde se distinguen dos submatrices K_c de - las cuerdas y I_{n-1} de las ramas del árbol de expansión intersectadas por cada conjunto de cortes

$$K_f = \left[K_c \;\vdots\; I_{n-1} \right]$$

Es importante comprobar si el mismo rearreglo de - columnas coincide con la representación de la matriz - de circuitos fundamentales (Fig. No. 5.23)

$$C_f = \left[I\mu \;\vdots\; R_t \right]$$

que es efectivamente de la forma indicada arriba. Con el objeto de establecer relaciones entre K_f, C_f y la - matriz de incidencia reducida I_f, ordenaremos la columna

MATRIZ DE CORTES FUNDAMENTALES

$$
K_f = \begin{array}{c} \\ K_1 \\ K_2 \\ K_4 \\ K_8 \\ K_{10} \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & e_7 & e_8 & e_9 & e_{10} & e_{11} & e_{12} \end{array} \\
\left[\begin{array}{cccccccccccc}
1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1
\end{array}\right]
\end{array}
$$

FIG. 5.21.

MATRIZ DE CORTES FUNDAMENTALES

(con las columnas reordenadas)

$$
K_f = \begin{array}{c} \\ K_1 \\ K_2 \\ K_4 \\ K_8 \\ K_{10} \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccc|ccccc} e_3 & e_5 & e_6 & e_7 & e_9 & e_{11} & e_{12} & e_1 & e_2 & e_4 & e_8 & e_{10} \end{array} \\
\left[\begin{array}{ccccccc|ccccc}
1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right]
\end{array}
$$

Submatriz de las cuerdas

Submatriz de las ramas del árbol de expansión

$$K_f = \left[K_c : I_{n-1} \right]$$

C.A.D.A. 1976

FIG. 5.22.

MATRIZ DE CIRCUITOS FUNDAMENTALES
(con las columnas reordenadas).

$$
C_f = \begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccccccccccc} e_3 & e_5 & e_6 & e_7 & e_9 & e_{11} & e_{12} & e_1 & e_2 & e_4 & e_8 & e_{10} \end{array} \\
\begin{array}{c} c_3 \\ c_5 \\ c_6 \\ c_7 \\ c_9 \\ c_{11} \\ c_{12} \end{array} &
\left[\begin{array}{ccccccc|ccccc}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1
\end{array}\right]
\end{array}
$$

Submatriz de cuerdas

Submatriz de las ramas del árbol de expansión

$$C_f = \left[I_\mu \,\vdots\, R_t \right]$$

FIG.5.23.

de ésta de la misma manera, obteniendo

$$I_f = \left[A_c \vdots A_t \right]$$

siendo A_c la submatriz correspondiente a las $\mu = e-n+1$ cuerdas, y A_t el de las n-1 ramas del árbol de expansión. (Fig. No. 5.2).

Las tres representaciones, figuras 5.2 , 5.2 y 5.2 , nos permiten una visualización mas expedita de los elementos de la gráfica G, que entran en juego en cada caso: ramas, cuerdas, circuitos, cortes, etc. Esto resulta de singular importancia en el análisis sistemático de gráficas que impliquen una amplia cantidad de datos.

5.3. Relaciones entre matrices fundamentales.

Las matrices K_f, C_f e I_f no son independientes entre sí, debido a las propiedades de ortogonalidad que deben satisfacer (considerando una Gráfica conexa y un árbol de expansión T).

$$I_f \cdot C_f' = \left[A_c \vdots A_t \right] \cdot \begin{bmatrix} I\mu \\ \cdots \\ R^T \end{bmatrix}$$

$$= A_c I\mu + A_t R^T = A_c + A_t R^T = 0$$

por lo tanto

$$\boxed{R^T = A_t^{-1} \cdot A_c}$$

De manera análoga de

$$K_f \cdot C_f^T = 0$$

se obtiene

$$\boxed{K_c = R^T = A_t^{-1} \cdot A_c}$$

lo cuál puede fácilmente verificarse de las matrices antes definidas.

Vamos a comparar los renglones y las columnas de K_f y C_f (figuras 5.21 y 5.22), teniendo a la figura 5.5 como auxiliar.

MATRIZ DE INCIDENCIA REDUCIDA DE LA GRAFICA G (a la matriz de incidencia de la gráfica G se le eliminó el último renglón).

$$
I_f = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccc|ccccc} e_3 & e_5 & e_6 & e_7 & e_9 & e_{11} & e_{12} & e_1 & e_2 & e_4 & e_8 & e_{10} \end{array} \\
\left[\begin{array}{ccccccc|ccccc}
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0
\end{array}\right]
\end{array}
$$

Submatriz de cuerdas

Submatriz de ramas del árbol de expansión

$$I_f = \left[A_c \vdots A_t \right]$$

264

FIG. 5.24

a) La columna "e_3" de K_G, que corresponde a una <u>cuerda</u> (e_3,) respecto a T, contiene "unos" en los cortes K_1 y K_2. Los cortes K_1 y K_2 fueron designados así de acuerdo con las ramas e_1 y e_2 que cortaban del árbol T.

b) Como a la cuerda "e_3", en R, le fue hecho corresponder el circuito C_3 y las ramas del circuito (aparte de la cuerda e_3) son las ramas e_1 correspondiente al corte K_1 y
e_2 correspondiente al corte K_2

entonces

Si a la columna e_3 de K_C la denominamos

C_3

y a los cortes:

K_1

lo denominamos $\underline{e_1}$, y a

K_2

lo denominamos $\underline{e_2}$,

habremos generado de la <u>columna "e_3"</u> de K_f, <u>el renglón C_3</u> de R.

Procediendo de manera análoga, digamos con la columna e_6 de K_C:

C_6 en lugar de e_6

e_1 en lugar de K_1, y

e_4 en lugar de K_4,

obtendremos el renglón C_6 de R.

Prosiguiendo con las demás columnas de K_C y/o renglones de R, vemos que justifica claramente que

$K_C = R^T$

5.10. Trayectorias

5.10.1. Trayectorias explícitas

Además de los análisis previos (circuitos, cortes, árboles, etc.) resulta de utilidad en algunos casos de evaluación, verificación o establecimiento de estrategias, analizar trayectorias entre diversos vértices en la resolución de problemas, etc, que permitan obtener datos sobre las posibilidades de vinculación secuencial de conceptos.

El procedimiento de trayectorias puede resultar particularmente útil en el diagnóstico de situaciones de conflictos respecto a las causas al ocurrir deficiencias en la comprensión o síntesis de conceptos. Por ejemplo, puede resultar alguna deficiencia en la integración conceptual dada por C_a y pueden resultar útiles las especulaciones o diagnósticos que se hicieran a través de las trayectorias (e_2, e_5, e_6) y (e_3, e_4, e_5) (Ver Fig. No. 5.24.).

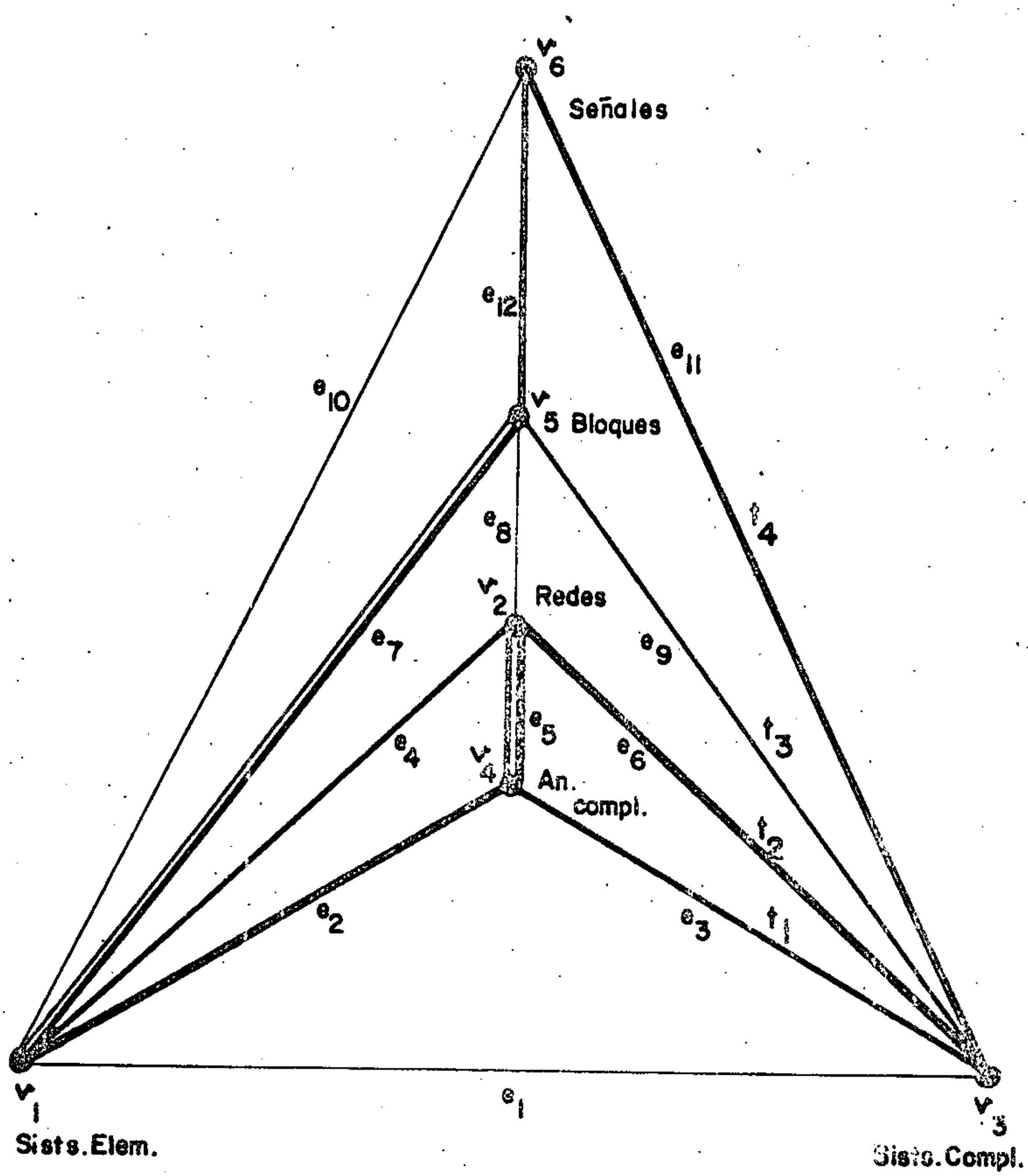
Sabemos, según se ha indicado, que es trascendente para el programa trazado que sean comparados a través de diversas posibilidades significativas, los vínculos posibles entre los sistemas elementales: V_1 y los sistemas generales V_3.

En la gráfica se proponen las siguientes trayectorias entre estos vértices de manera que siempre contengan cuando menos una cuerda (lo cuál es deseable en diagnósticos de problemas en inferencias directas y en los procesos de síntesis asociados) (Fig. 5.24).

La matriz formada con estas trayectorias se denomina Matriz de Trayectorias: Y_{1-3} (Fig. No. 5.25).

- Si alguna columna tuviera "unos" en todos los renglones, implicaría que esa rama está contenida en todas las trayectorias. Las ramas, columnas con mayor número de "unos" pueden resultar las más relevantes en el diagnóstico o la evaluación.

TRAYECTORIAS



C.A.D.A. 1976

FIG. 5.25.

$$Y_{1\text{-}3} = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccccccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & e_7 & e_8 & e_9 & e_{10} & e_{11} & e_{12} \end{array} \\ \begin{array}{c} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \\ t_4 \end{array} & \left[\begin{array}{cccccccccccc} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right] \end{array}$$

Todos los renglones tienen 1's.

Ninguna de estas ramas está en las trayectorias.

Matriz de Trayectorias

t_i : Trayectorias entre los vértices V_1 y V_3

FIG.5.26

Verificación: la multiplicación de la matriz de incidencia de la gráfica G por la matriz de trayectorias nos produce una matriz Q con "unos" en los vértices terminales. (Fig. No. 5.26).

5.10.2. Trayectorias calculadas.

Otra posibilidad de obtener trayectorias relevantes para el análisis de procesos y programas, se obtiene a través de las potencias de la matriz de adyacencia (o conectividad). Se tenía la matriz de adyacencia A_y (Fig. No. 5.27).

Cada 1 indica una trayectoria de 1 rama entre los vertices correspondientes.

Multiplicando la matriz A_y por si misma (en el sentido usual del producto escalar de cada vector renglón por cada vector columna), como se esquematiza en la figura 5.28 ,

se obtiene la matriz A_y^2 mostrada en la figura 5.29.

En la matriz A_y^2

1) Los números de la diagonal principal indican el grado de cada vértice.

2) las demás cifras indican el número de trayectorias de dos ramas entre los vértices correspondientes, por ejemplo.

entre V_1 y V_3 hay 4 trayectorias de 2 ramas:

(e_2,e_3), (e_4,e_6), (e_7,e_9) y (e_{10},e_{11})

- - - - - etc.

Determinando A_y^3, A_y^4, etc. obtendríamos información sobre el número de trayectorias de 3,4, etc. ramas.

Esto podemos emplearlo para detectar y seleccionar,

VERIFICACION

$$Q = I_g \cdot Y^t_{1\text{-}3} = \begin{array}{c c} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \\ V_5 \\ V_6 \end{array} \\ \begin{array}{cccc} t_1 & t_2 & t_3 & t_4 \end{array} & \end{array}$$

C.A.D.A. 1976

FIG. 5.27.

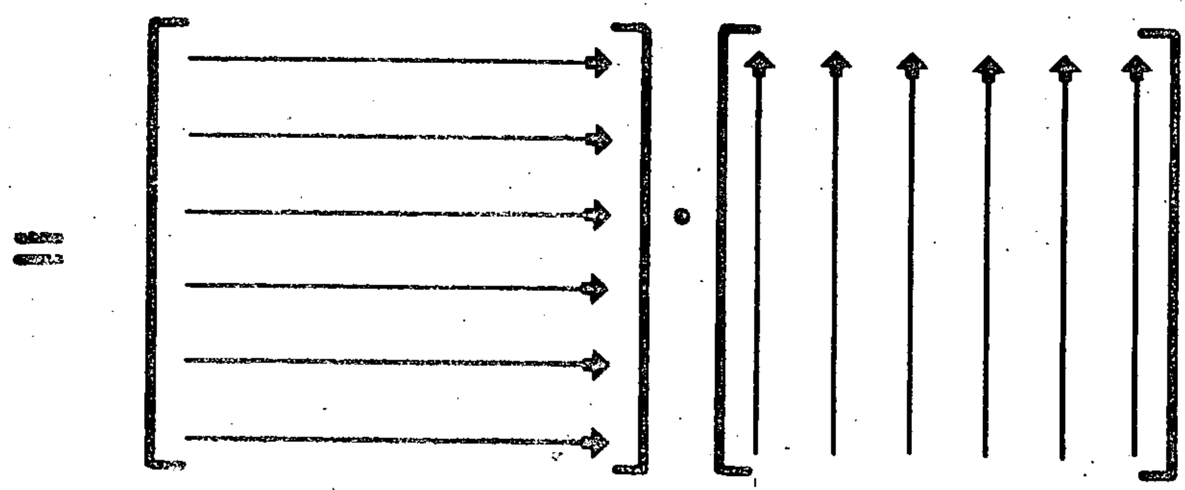
Matriz de Adyacencia o Conectividad.

$$A_y = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 & v_6 \end{array} \\ \begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \quad \text{(matriz simétrica)}$$

C.A.D.A. 1976

FIG. 5.28

$$Ay \cdot A^{T}y =$$



PRODUCTO DE UNA MATRIZ POR SI MISMA

C.A.D.A. 1976

FIG. 5.28.

POTENCIA 2 DE LA MATRIZ A_y

$$A_y \cdot A_y^t = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccc} V_1 & V_2 & V_3 & V_4 & V_5 & V_6 \end{array} \\ \begin{array}{c} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \\ V_5 \\ V_6 \end{array} & \left[\begin{array}{cccccc} 5 & 3 & 4 & 2 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 3 & 2 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 5 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 3 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 3 & 3 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 2 & 2 & 3 \end{array}\right] \end{array}$$

FIG. 5.29.

a) las trayectorias mas largas, conteniendo más conceptos y/o estados y dentro de ellas las mas relevantes para definir diversas secuencias relevantes de conceptos,

b) las mas cortas para interrelacionar dos estados, por ejemplo el número de ramas para interrelacionar V_4 y V_6 en dos:

$$(e_2, e_{10}) \text{ y/o } (e_3, e_{11})$$

etc.

Para dosificar a las trayectorias alternativas pueden plantearse criterios diversos dentro de contextos específicos, por ejemplo:

la trayectoria más relevante,

la trayectoria más operacional,

la trayectoria más adecuada para experimentar maneras posibles de integrar conocimientos,

etc.

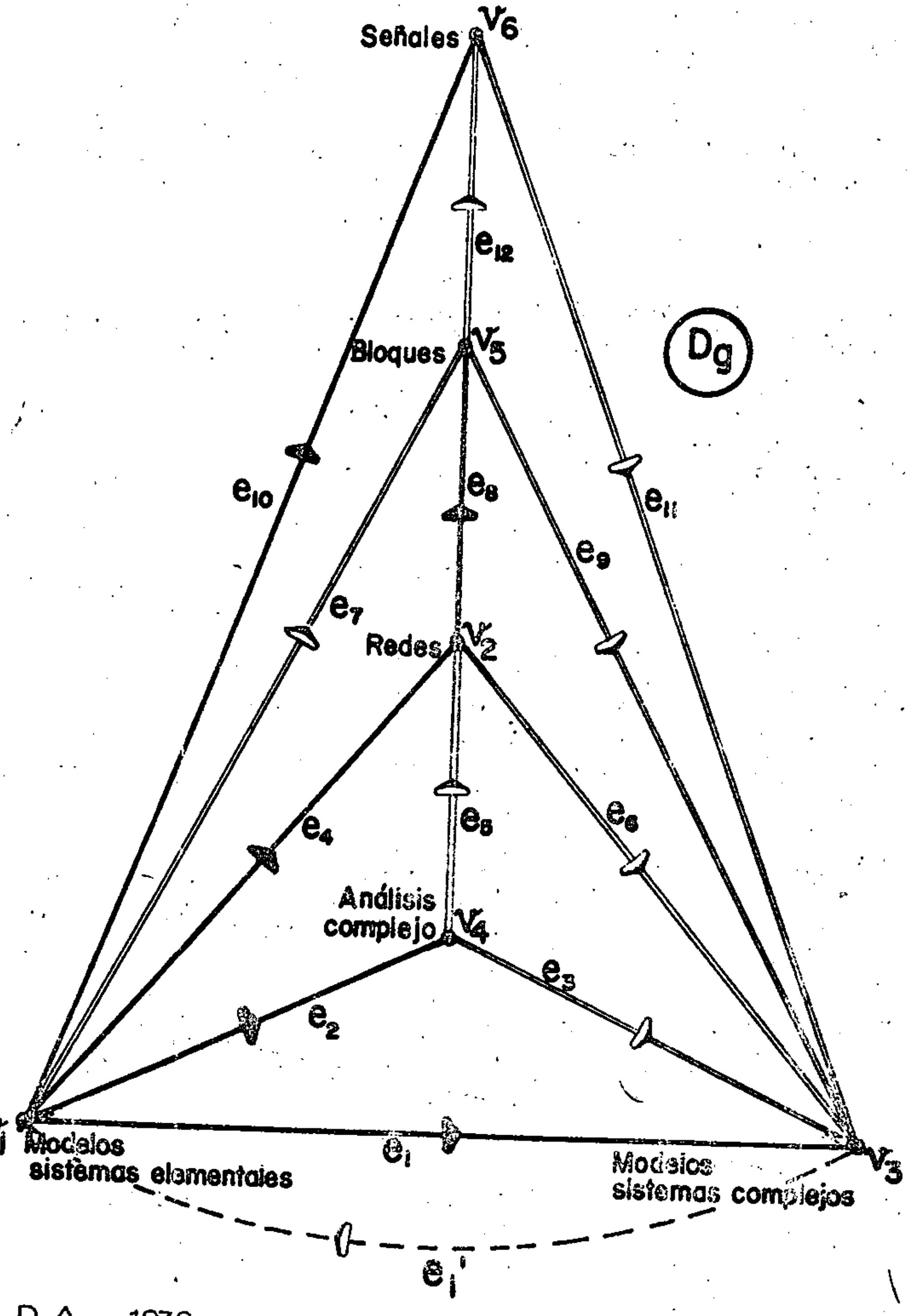
5.11. Orientación: En términos de la secuencia interna (sin romper la estructura) suponemos que las ramas de la gráfica se pueden "orientar" de acuerdo con algún criterio de ordenación interna. A la gráfica G orientada se le denominará digráfica D_g (Fig. No. 5.30).

El criterio de orientación de D_g, corresponde al prescrito antes: Los sistemas generales y la metodología (redes, análisis complejo, etc.) dependen de los conceptos introducidos en el vértice V_1 (Sistemas elementales).

La matriz de incidencia I_d asociada a D_g se define como se indica en la figura 5.31.

en la cuál se sigue la siguiente convención

DIGRAFICA



C.A.D.A. 1976

FIG.5.30.

$\xrightarrow{-}o \quad v_i = -1$

$\xleftarrow{+}o \quad v_i = +1$

$o \quad v_i = 0$ (no hay rama)

Se ha introducido intencionalmente la rama e'_1 con el objeto de forzar la conexión directa (conceptual) entre los sistemas elementales y los sistemas complejos (generales). Esta relación implica algunos de los circuitos que pueden detectarse en la gráfica.

Obsérvense

1. que la suma (usual) de elementos de cada columna es igual a cero,

2. que al dirigir la gráfica, no cambia el rango, a pesar de que hay elementos positivos y negativos el rango es n-1 (efectuando las operaciones requeridas de acuerdo con la aritmética usual).

De Id podemos detectar la submatriz no singular (Fig. No. 8.32).

$$|B'| = -1 \neq 0 \qquad \text{rango } r{:}I_d = S = n-1$$

Lo cuál establece la factibilidad de formular árboles de expansión (con n-1 ramas). Se verá cuantos árboles de expansión pueden definirse en este caso. Uno de ellos es el mostrado en D_g.

Es interesante hacer notar que en el caso de la matriz de incidencia los determinantes de las submatrices solo podían ser 1 ó 0 (lo cuál era consecuencia de la suma $\oplus$).

Puede suponerse que operando dentro de la aritmética usual no suceda lo mismo. Sin embargo, es fácil demostrar que el determinante de cualquier submatriz de I_d solo puede tomar los valores 1, -1 ó 0 (se denominan matrices unimodulares).

El número de arboles de expansión de la gráfica dirigida se obtiene en forma similar al de la gráfica no orientada. Si Id_f es la matriz de incidencia reducida de la gráfica dirigida, conexa, entonces

MATRIZ DE INCIDENCIA PARA D_g

$$
I_d = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccccccccc} e_1 & e'_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & e_7 & e_8 & e_9 & e_{10} & e_{11} & e_{12} \end{array} \\
\left[\begin{array}{ccccccccccccc}
1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\
0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1
\end{array}\right]
\end{array}
$$

NOTA.- En gráficas dirigidas se utiliza la suma usual.

FIG. 5.31.

SUBMATRIZ DE I_d , NO SINGULAR

$$
\mathbb{B} = \begin{array}{c}
\begin{array}{ccccc} e_3 & e_6 & e_{10} & e_{11} & e_{12} \end{array} \\
\begin{bmatrix}
0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{bmatrix}
\end{array}
\sim
\begin{bmatrix}
0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{bmatrix}
$$

$$
\sim \begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{bmatrix} = \mathbb{B}'
$$

C.A.D.A. 1976

FIG. 5.32.

$$\left| I_{df} \cdot I_{df}^{T} \right| = N\,(T_d)$$

en donde

$N(T_d)$ es el número de árboles dirigidos. Eventualmente puede ocurrir que algún árbol de expansión de D_g (T_d) tenga una relevancia tal que nos obligue a modificar los árboles y gráficas no orientadas.

5.12. Matriz de Circuitos, cortes y matriz de adyacencia en gráficas orientadas (dirigidas).

Como en el caso de la gráfica no orientada se puede ahora expresar la matriz de circuitos fundamentales, respecto a un árbol T_d,

$$C_{df} = \left[I\mu \,\middle|\, R \right]$$

en donde $I\mu$ es una matriz identidad de orden $\mu \times \mu$ y R es la matriz del árbol de expansión T_d.

Para expresar, en cada renglón, las ramas de un circuito fundamental se preescribe dentro de cada circuito un sentido de "flujo", por ejemplo, en el sentido de las manecillas del reloj, en este caso, los circuitos llevan el sentido obligado por la cuerda que cierra cada circuito. De esta manera se tendrá que para

$$c_{df} = c_{ij}$$

los elementos c_{ij} toman los valores

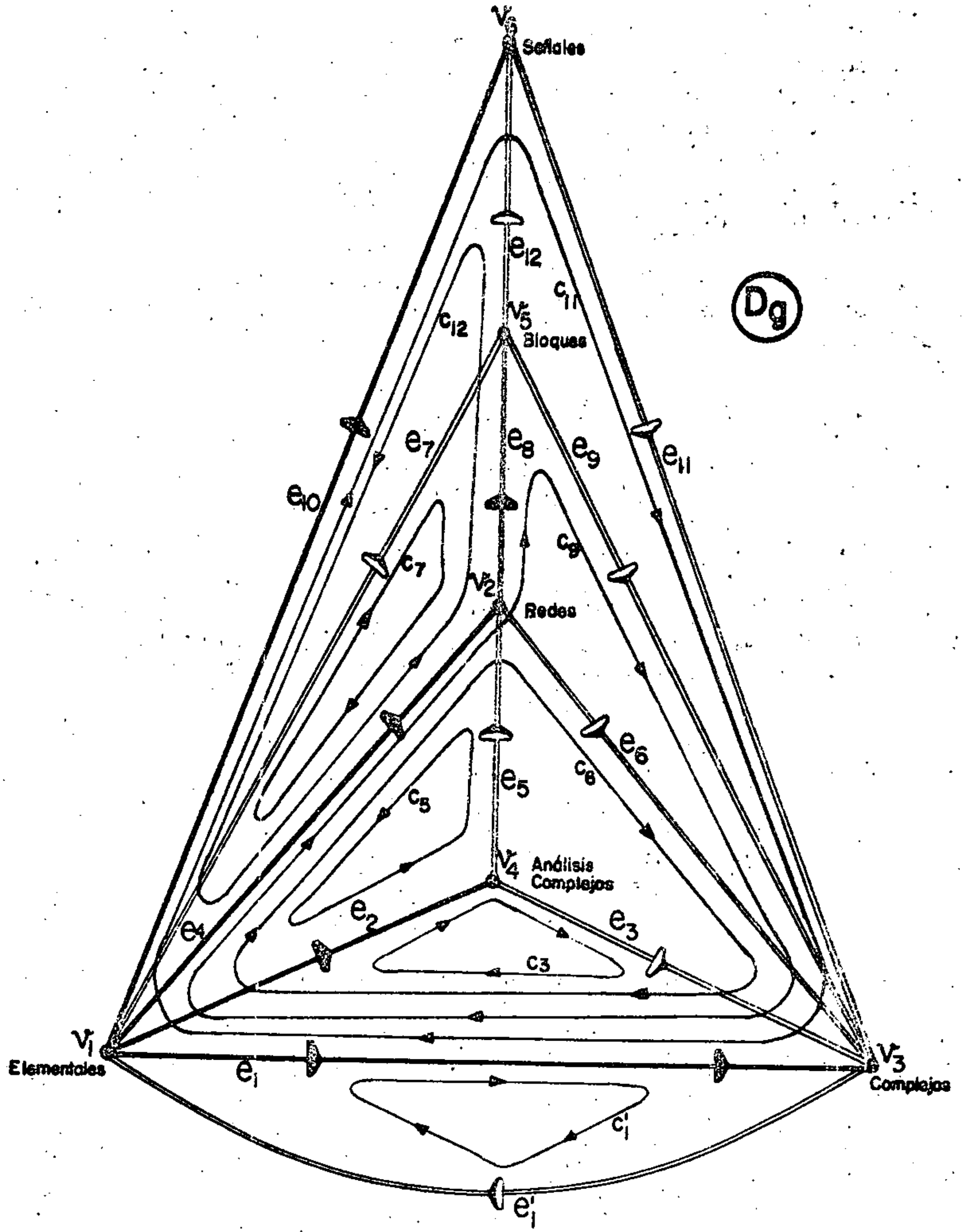
$c_{ij} = 1$ si el sentido de la rama j-ésima coincide con el sentido original al circuito iésimo,

$c_{ij} = 0$ si no hay rama e_j en el circuito c_i

$c_{ij} = 1$ si los sentidos de e_j y c_i son opuestos

Asignando los sentidos de "flujo" indicados en la figura 5.33, se tendrán los valores de la matriz C_{df} indicada en la figura 5.34

CIRCUITOS FUNDAMENTALES EN LA DIGRAFICA.



C.A.D.A. 1976

FIG. 5.33.

MATRIZ DE CIRCUITOS FUNDAMENTALES

$$
C_{df} = \begin{array}{c} \\ c_1 \\ c_3 \\ c_5 \\ c_6 \\ c_7 \\ c_9 \\ c_{11} \\ c_{12} \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccc:ccccc} e'_1 & e_3 & e_5 & e_6 & e_7 & e_9 & e_{11} & e_{12} & e_1 & e_2 & e_4 & e_8 & e_{10} \end{array} \\
\left[\begin{array}{cccccccc:ccccc}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1
\end{array} \right]
\end{array}
$$

Los circuitos y flujos mostrados en D_9 pueden interpretarse y usarse, en el proceso de planeación instruccional, de diversas maneras. Atendiendo, por ejemplo, al concepto de redes de flujo puede interpretarse que el flujo a través de una rama (la interrelación conceptual) se compone de todos los flujos de los circuitos asociados.

Por ejemplo:

- la interrelación entre V_1 y V_3 se compone de las establecidas a través:
  - de C_1' (entre V_3 y V_1)
  - de C_3 (incluyendo el análisis complejo)
  - de C_6 (incluyendo el análisis de redes)
  - de C_9 (incluyendo el análisis con bloques)

En otro enfoque podría incluirse, además de las correlaciones anteriores, la interrelación directa $V_1 - V_3$ (e_1).

Con esta misma acepción de interrelación como si fuera flujo, el propio sentido puede tener relevancia en un proceso enseñanza-aprendizaje:

- para distintos individuos el sentido directo puede resultar mas adecuado para la comprensión e integración conceptual,
- la oposición de sentidos, contrastación, entre circuitos adyacentes puede constituír estrategias alternativas en el aprendizaje y la comprensión:

  Por ejemplo en relación con e_4 la oposición de C_6 con C_5 y C_7, etc.

- la coincidencia de sentidos entre circuitos alterativos para reforzar una misma interrelación, por ejemplo en relación con e_4 la coincidencia de C_6, C_9 y C_{12}, etc.
- la integración secuencial de conceptos dada por la inclusión de unos circuitos dentro de otros.

$$((C_3 \subset C_6 \wedge C_5 \subset C_6) \subset C_9) \wedge (C_7 \subset C_{12})) \subset C_{12}$$

Los dispositivos anteriores pueden emplearse no solo en la planeación curricular sino también

- en el establecimiento de objetivos, metas y/o propósitos,
- en la evaluación en general o en el diseño de procedimientos específicos de evaluación,
- en la revisión de planes y programas,

  etc.

- en la inferencia de nuevos circuitos, ya establecida antes, pueden revisarse también los sentidos, la integración secuencial, etc.

Análogamente pueden plantearse matrices para conjuntos de corte (fundamentales) pero éstas parecen no arrojar mas información relevante de la ya establecida en las gráficas no orientadas.

La matriz de adyacencia A_d de D_g se define de manera que cualquier elemento de ella

$$A_d = \left[g_{ij}\right]$$

$$g_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si hay una rama de } V_i \text{ a } V_j \\ 0 & \text{si no hay.} \end{cases}$$

Esta matriz, que difiere muy esencialmente de la matriz A_y de una gráfica no orientada, suele también denominarse: de conectividad, de precedencia o de preferencia.

En el caso de D_g se tendría la matriz de la figura 5.35.

Notas

- A_d es una matriz cuadrada
- En la diagonal principal solo hay ceros (no hay rizos).
- Para no alterar la representatividad de intercambiar renglones deben intercambiarse las columnas correspondientes.
- A_d^T es la matriz de adyacencia (dirigida) con los sentidos invertidos.

MATRIZ DE ADYACENCIA DE D_g.(CONECTIVIDAD, PRECEDENCIA O PREFERENCIA)

$\bullet \longrightarrow$ Salientes

$$A_d = \begin{array}{c|cccccc|c}
 & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 & v_6 & g \\
\hline
v_1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 5 \\
v_2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\
v_3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
v_4 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\
v_5 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\
v_6 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
\hline
\end{array}$$

FIG. 5.35.

- A_d está asociada a una digráfica D_g conexa si no es posible encontrar

$$A_d = \left[\begin{array}{c|c} A_1 & 0 \\ \hline 0 & A_2 \end{array}\right]$$

- A_d es debilmente conexa si

$$A_d = \left[\begin{array}{c|c} A_1 & 0 \\ \hline A_{21} & A_2 \end{array}\right]$$

O bien

$$A_d = \left[\begin{array}{c|c} A_1 & A_{12} \\ \hline 0 & A_2 \end{array}\right]$$

Por ejemplo, vease la matriz de la figura 5.36.

No hay conexión dirigida

de V_2, V_5 y V_6 a V_1 y V_t: Importante en la revisión de programas.

Pregunta: ¿Cuantas trayectorias dirigidas de p ramas hay entre los vértices i y j?

Como antes se puede contestar esto a través de las potencias de A_d. Cada elemento a_{ij} de A_d^p nos dará la información anterior (las operaciones se efectúan con la aritmética usual). Por ejemplo: $A_d \cdot A_d = A_d^2$ (Fig. No. 5.37).

De A_d^2 podemos detectar que hay 4 trayectorias dirigidas de V_1 a V_3 con dos ramas:

$$(e_2, e_3),\ (e_4, e_6),\ (e_7, e_9) \text{ y } (e_{10}, e_{11})$$

Esto es una comprobación del criterio descrito antes: la inferencia (o construcción) de aspectos de los sistemas generales a través de:

- el análisis complejo
- la teoría de redes
- los diagramas de bloques
- la teoría de señales.

CONECTIVIDAD DEBIL EN A_d

$$
A_d = \begin{array}{c c}
 & \begin{array}{cccccc} \check{v}_1 & \overset{\check{v}_4}{\cancel{\check{v}_2}} & \check{v}_3 & \overset{\check{v}_2}{\cancel{\check{v}_4}} & \check{v}_5 & \check{v}_6 \end{array} \\
\begin{array}{c} \check{v}_1 \\ \check{v}_4\ \cancel{\check{v}_2} \\ \check{v}_3 \\ \check{v}_2\ \cancel{\check{v}_4} \\ \check{v}_5 \\ \check{v}_6 \end{array} &
\left[\begin{array}{cc|cccc}
0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right]
\end{array}
$$

No hay conexión dirigida

de $\check{v}_2, \check{v}_5$ y $\check{v}_6$ a $\check{v}_1$ y $\check{v}_4$: *Importante en - la revisión de programas.*

POTENCIA 2 DE LA MATRIZ A_d

$$
A_d^2 = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 & v_6 \end{array} \\
\begin{bmatrix}
1 & 1 & 4 & 0 & 1 & 1 \\
1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

FIG. 5.37.

Para detectar trayectorias dirigidas de mas de dos ramas habrá que calcular A_d^3, A_d^4, etc.

En los procesos de evaluación y revisión de programas los resultados de estos cálculos pueden aportar información valiosa.

5.13. Deciclación.

Durante el análisis de circuitos se sugiere la conveniencia de reforzar la vinculación o interrelación conceptual a través de "flujos" de información, incluso por contrastación entre flujos de sentido opuesto.

Un proceso contrario a estas sugerencias, vinculado a los procesos de inferencia y transitividad en las relaciones de orden (estructuras lógicas) suele resultar muy conveniente para establecer procesos o vínculos secuenciales.

Por ejemplo entre los vértices V_1 y V_3 podríamos sugerir segmentos e_2, e_3 vinculan a V_1 con V_3 según lo muestra el segmento e_1. Sin embargo, si se incluye e'_1, el proceso resulta "circular, ambiguo": no se define que es construido a partir de que otro.

En la gráfica D_g se pueden analizar las vinculaciones o interrelaciones lógicas conceptuales, con el solo hecho de eliminar a'_1: no se forman circuitos orientados (con un solo sentido).

Se pueden, mediante esta deciclación (la eliminación anterior de e'_1), analizar inferencias, tales como:

$$e_4 \wedge e_6 \Rightarrow e_1$$

$$e_7 \wedge e_9 \Rightarrow e_1$$

- - -

o bien

$$e_5 \wedge e_6 \Rightarrow e_3$$

$$e_2 \wedge e_5 \Rightarrow e_4$$ - - - etc.

En la mayoría de las gráficas el proceso no es tan simple. Un método usual consiste en forzar lo mas posible A_d a una matriz triangular superior (Fig. No. 5.38).

5.14. Análisis de jerarquías.

De acuerdo con algún o algunos criterios pueden establecerse niveles jerárquicos de los conceptos implícitos (o constitutivos) de algún area de conocimiento.

Suponiendo que esos criterios y las propias áreas estén claramente definidas de acuerdo con algún propósito, enfoque, corriente, etc. puede sugerirse alguna metodología de ordenación jerárquica, como la dada a continuación, siempre y cuando pueda definirse de una manera única una "relación de subordinación" (por ejemplo, de valores: estéticos, morales, cognoscitivos, etc.).

Esta técnica no se compromete a la definición precisa, verdad, trascendencia, etc. del o los contenidos; simplemente aborda la parte rutinaria de la subordinación de los temas o asuntos que habrán de someterse a esta clasificación.

Existe una limitante o propiedad fundamental: la transitividad: $aRb \wedge bRc \Rightarrow aRc$

Se puede formar una matriz de subordinación y de ella por simplificación obtener los niveles jerárquicos. En una primera aproximación los elementos de la matriz son $\{0,1\}$:

0: en el lugar (i,j) si el concepto, estado, etc., del renglón i-ésimo no está subordinado al concepto, estado, etc., de la columna j-ésima

1: en el lugar (i,j) si el concepto del renglón i-ésimo está subordinado al concepto consignado en la columna j-ésima.

Debe observarse que el número "0" en (i,j) tiene dos acepciones

a) que no haya subordinación de "i" respecto a "j", pero que si haya subordinación de "j" respecto a "i",

DECICLACION EN A_d

$$A_d = \begin{bmatrix} X & X & X & X & X \\ 0 & X & X & X & X \\ X & 0 & X & X & X \\ 0 & 0 & X & X & X \\ 0 & X & 0 & 0 & X \end{bmatrix}$$

b) que no haya subordinación en ninguno de los dos sentidos: no hay relación de subordinación en lo absoluto. En este caso, en ambos lugares (i,j) y (j,i) se escribirán ceros.

Teniendo en cuenta la propiedad anterior, se observará que:

1) ningún vértice (concepto, estado, área, etc.) estará subordinado a sí mismo; por lo tanto, los elementos de la diagonal principal de una matriz de <u>subordinación</u> (subordinación de los vértices respecto a ellos mismos) serán ceros,

2) si v_b está subordinado a v_a, que indicaremos $\frac{v_a}{v_b}$, entonces no es cierto $\frac{v_b}{v_a}$, o simbólicamente $\frac{v_a}{v_b} \rightarrow \sim \frac{v_b}{v_a}$,

3) si se tienen $\frac{v_a}{v_b} \wedge \frac{v_b}{v_c} \wedge \frac{v_c}{v_d}$, entonces por transitividad:

$\frac{v_a}{v_d}$, lo cual puede expresarse como las operaciones de quebrados

$$\frac{v_a}{\cancel{v_b}} \cdot \frac{\cancel{v_b}}{\cancel{v_c}} \cdot \frac{\cancel{v_c}}{v_d} = \frac{v_a}{v_d};$$

si en lugar de $\frac{v_a}{v_d}$ estuviera indicado en la matriz $\frac{v_d}{v_a}$, <u>habría un error de subordinación por transitividad</u>,

4) deberán eliminarse errores de autosubordinación que se detecten directamente o por transitividad (revisando de paso los criterios que permitieron ese error), por ejemplo

$$\frac{v_a}{v_a} \quad \text{ó} \quad \frac{v_a}{v_b} \wedge \frac{v_b}{v_c} \wedge \frac{v_c}{v_a} \rightarrow \frac{v_a}{v_a},$$

5) siempre hay en una gráfica conexa <u>cuando menos</u> un vértice de máxima jerarquía (renglón de ceros).

Ejemplo: supóngase la matriz de la figura 5.39; en ella se indican errores en la subordinación. Corrigiendo lo anterior se tiene la matriz de la figura 5.40.

Una vez eliminados los errores directos procedemos a:

1) detectar las contradicciones de subordinación que resultan de la transitividad (deciclación),.

2) suprimir las subordinaciones directas una vez eliminadas las contradicciones obtenidas por transitividad,

A continuación se construye la gráfica dirigida, en donde el segmento dirigido $a \longrightarrow b$ o la relación $a > b$ indican: "b" está subordinada a "a" o "a" subordina a "b".

La subordinación (orientación) en la gráfica, Fig. No. 5.41, se ha determinado examinando cada columna de la matriz - (Fig. 5.40). El concepto de la columna j-ésima subordina al concepto del renglón i-ésimo marcado con "1".

En estas gráficas dirigidas, se distinguirá con un círculo -

a los disegmentos que indiquen subordinación por transitividad, los cuales, posteriormente, se podrían eliminar para - simplificar la gráfica.

Entre los vértices 8 y 7 se detecta una contradicción:

$$7 > 4 \wedge 4 > 8 \Longrightarrow 7 > 8$$

o bien

$$7 > 4 \wedge 4 > 2 \wedge 2 > 8 \Longrightarrow 7 > 8$$

y cualquier otra trayectoria dirigida entre 7 y 8

pero

$$7 \not> 8$$

ERRORES DE SUBORDINACION POR TRANSITIVIDAD

$$
M'_S = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{array} \\
\left[\begin{array}{cccccccc}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right]
\end{array}
$$

máxima jerarquía

Criterio: Todo se subordina a 1.

C.A.D.A. 1976

FIG. 5.39.

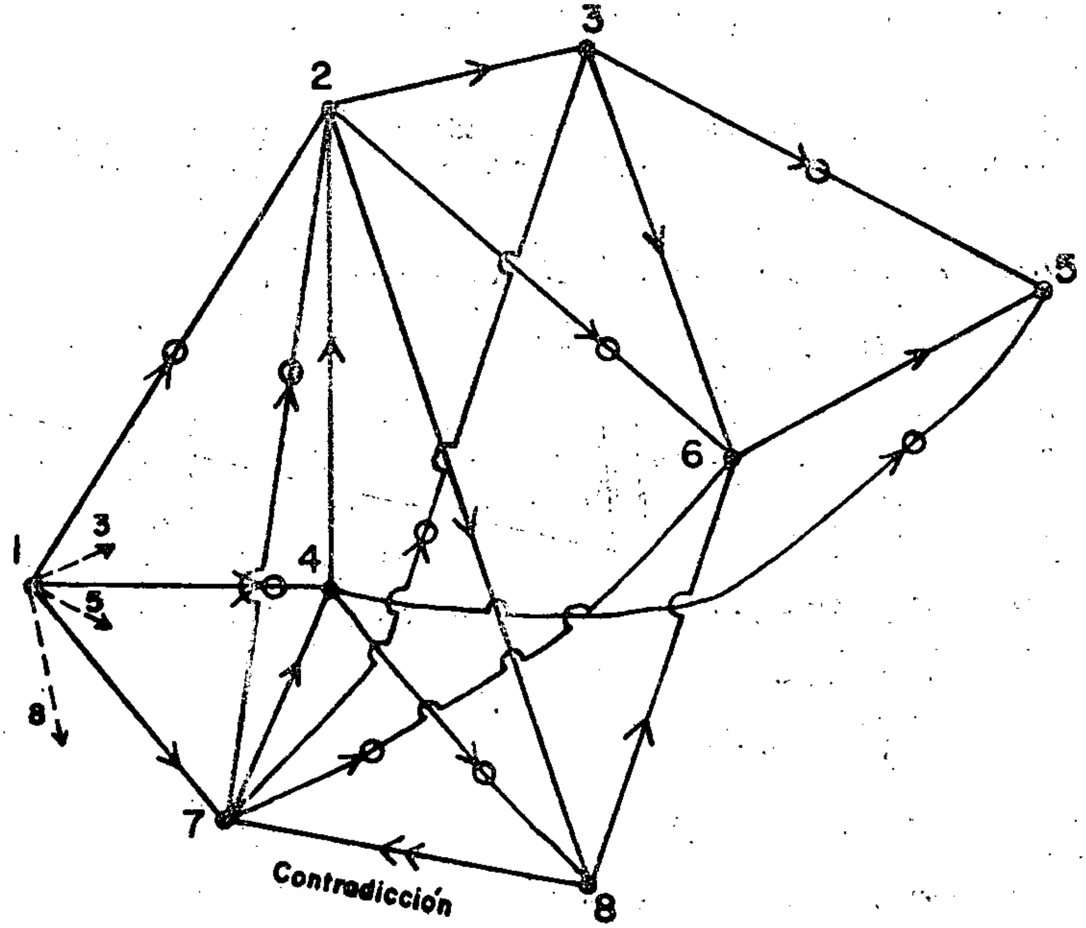
MATRIZ CORREGIDA (TRANSITIVIDAD)

$$
M_S = \begin{array}{c c}
 & \begin{array}{cccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{array} \\
\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{array} &
\left[\begin{array}{cccccccc}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right]
\end{array}
$$

C.A.D.A. 1976

FIG. 5.40.

GRAFICA DIRIGIDA DE SUBORDINACION



NOTA.- En jerarquías no se aceptan circuitos propios pues indican una contradicción.

Este resultado no nos permite, en general, concluír que

$7 < 8$

Habrá que revisar todas las trayectorias dirigidas que van de 7 a 8.

En particular, si 7 subordina a 8 ($7 > 8$) la orientación sería opuesta a la del diagrama y se podría sustituír por un disegmento marcado con un círculo, pues hay transitividad.

El arreglo jerárquico final está dado en la figura No. 5.42 - al cual corresponde la matriz reducida de la figura 5.43.

Aplicaremos ahora estas ideas al programa de Sistemas Dinámicos para el cual se renumeran vértices y circuitos en - la figura 5.44.

Con el objeto de lograr la integración conceptual de los diversos aspectos del programa de sistemas dinámicos propondremos una organización jerárquica entre los vértices y circuitos fundamentales:

V_i: Modelos de sistemas elementales (V_1)

V_{ii}: Modelos de sistemas generales (V_3)

V_{iii} Análisis complejo (V_4)

V_{iv}: Redes de flujo (V_2)

V_v: Diagramas de bloques (V_5)

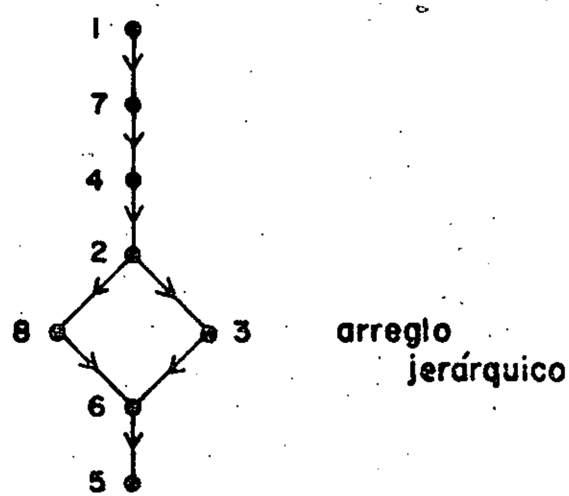
V_{vi}: Análisis de señales (V_6)

V_{vii}: Análisis complejo de sistemas (C_3)

V_{viii}: Análisis complejo con redes de sistemales elementales(C_5)

V_{ix}: Análisis con redes de sistemas (C_6)

ELIMINACION DE LOS DISEGMENTOS



C.A.D.A. 1976

FIG. 5.42.

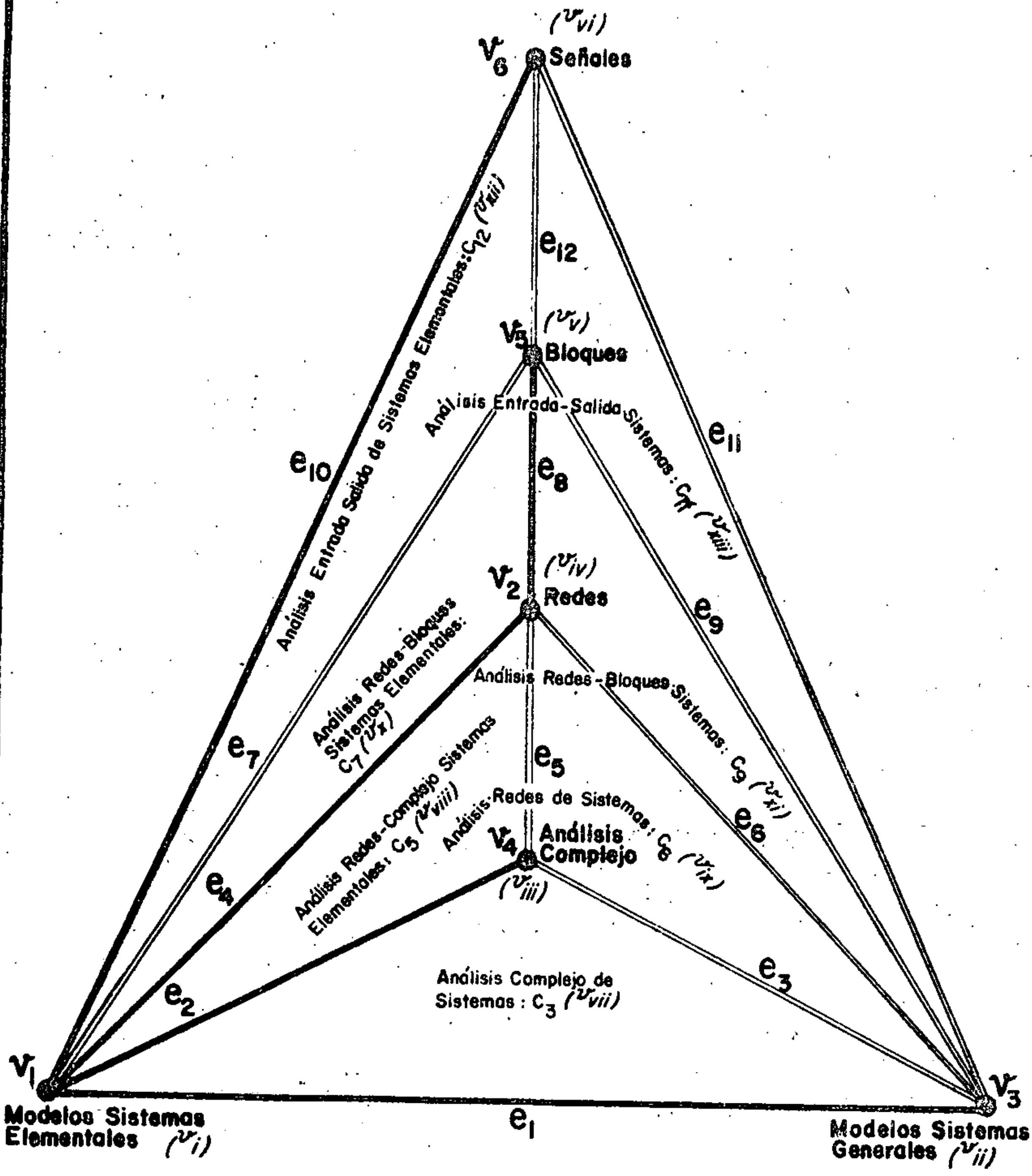
MATRIZ REDUCIDA DE JERARQUIAS

$$M_j = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

C.A.D.A. 1976

FIG. 5.43.

ORGANIZACION JERARQUICA DE CONCEPTOS



C.A.D.A. 1976

FIG. 5.44.

V_{x}: Análisis con redes y bloques de sistemas elementales (C_7)

V_{xi}: Análisis con redes-bloques de sistemas (C_9)

V_{xii}: Análisis entrada-salida de sistemas elementales (C_{12})

V_{xiii}: Análisis entrada-salida de sistemas (C_{11})

Criterio: Todos los modelos y metodologías se supeditan a la concepción
- de los modelos de sistemas elementales

y - a su estructuración y/o representación mediante redes de flujo

Por lo tanto, los vértices V_i y V_{iv} son los de máxima jerarquía.

Estableceremos de acuerdo con el criterio anterior y la ley de transitividad la matriz de la figura 5.45.

Después de eliminar las subordinaciones directas se obtiene la gráfica dirigida de la figura 5.46.

Nota: El ordenamiento jerárquico corresponde al ordenamiento estrictamente simple de la lógica de relaciones.

La gráfica anterior muy posiblemente requiera un análisis crítico en cuanto a la ordenación, de izquierda a derecha, de la importancia de los conceptos implícitos en el programa. No representa la secuenciación idónea para la impartición de un curso sino, se insiste en ello, la importancia conceptual relativa de los diversos temas. Pueden hacerse, antes de un análisis crítico, algunas observaciones:

a) El haber introducido "unos" en V_{ii} da lugar a que todos los vértices de la gráfica precedan (sean "más importantes") que V_{ii}. Esto implica que los sistemas elementales no solo son, de acuerdo con este criterio mas relevantes que los sistemas generales, si no que estos últimos requieren, para su comprensión y manejo, de los temas, métodos y modelos (instrumento) dados por los demás vértices.

b) Hay una aparente omisión al no indicar una subordinación

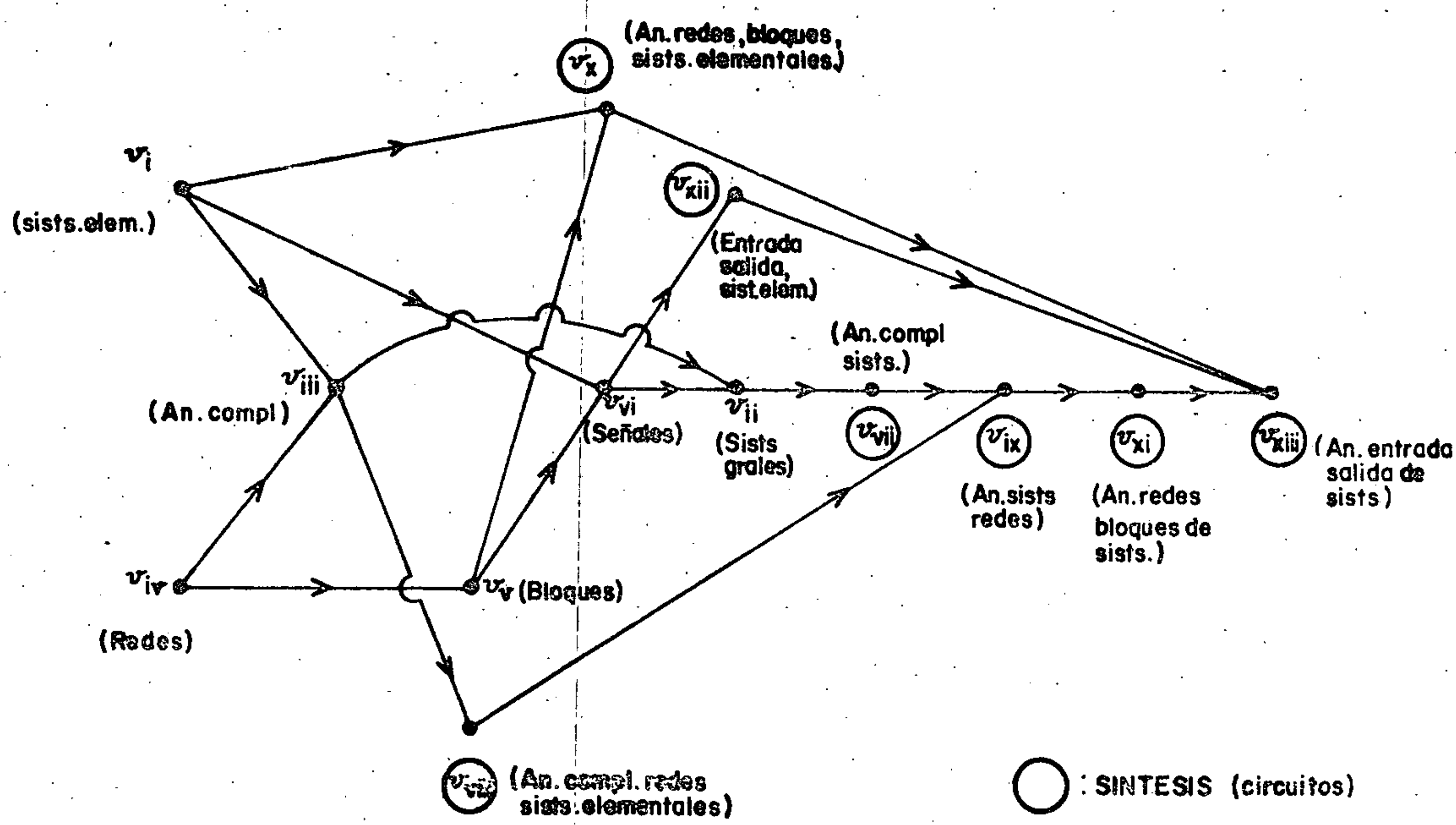
MATRIZ DE ORGANIZACION JERARQUICA

$$
M_S = \begin{array}{c|ccccccccccccc|}
 & v_{i} & v_{ii} & v_{iii} & v_{iv} & v_{v} & v_{vi} & v_{vii} & v_{viii} & v_{ix} & v_{x} & v_{xi} & v_{xii} & v_{xiii} \\
\hline
v_{i} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
v_{ii} & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
v_{iii} & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
v_{iv} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
v_{v} & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
v_{vi} & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
v_{vii} & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
v_{viii} & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
v_{ix} & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
v_{x} & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
v_{xi} & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
v_{xii} & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
v_{xiii} & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0
\end{array}
$$

C.A.D.A. 1976

FIG. 5.45.

GRAFICA DE SUBORDINACION



C.A.D.A. 1976

FIG. 5.46.

de V_{xi} con V_x. Sin embargo, no se ha concebido el planteamiento conceptual de esta manera porque, solo en el análisis de las relaciones entrada-salida, los diagramas de bloques son de interés directo en sistemas no elementales (lo cuál se observa ya desde la gráfica en el circuito C_9).

c) A lo largo de la linea central (de V_{vi} a la derecha) están ubicados los circuitos que implican el concepto de sistemas generales (o simplemente sistemas). En cambio, los circuitos correspondientes a los sistemas elementales están colocados fuera de esta linea (V_x, V_{viii} y V_{xii}). Además, jerarquicamente, estan dispuestos antes de los correspondientes a los sistemas generales. De hecho, el circuito mas simple, y no el mas trascendente, es el V_{vii} que se refiere al "análisis complejo de sistemas (elementales o generales)".

De manera similar podría continuarse el análisis de la gráfica de jerarquías buscando en todos los casos su aceptación o rechazo, parcial o total, a la luz de inconsistencias conceptuales o de la retroalimentación de información que proporcione:

- la elaboración detallada del material didáctico mas idóneo a través de los contenidos correspondientes mas específicos,
- la importación de cursos en cuanto a la mayor o menor dificultad que el ordenamiento jerárquico establecido represente en la práctica docente.

5.15. Presentación secuencial del programa.

A partir del esquema presentado en la sección 5.5.3 "Esquema previo para un programa", y de consideraciones posteriores se elaboró un programa: primero a través de una lista de enunciados de actividades a realizar en forma secuencial, y mas adelante se hizo una representación diagramática secuencial, en la que se incluyen las interrelaciones requeridas para la integración (estructuración) del plan original.

Algunos de los aspectos conceptuales, de procedimiento y/o estructura inclufdos en el programa son:

a) en virtud de que los circuitos o areas de síntesis implican

i) una cuerda de cierre que deberá inferirse,

ii) un circuito inferido a partir de la cuerda anterior y de las ramas del circuito,

iii) circuitos inferidos de otros circuitos, será factible definir el proceso a través de conocimientos (vértices) dados explícitamente, algunas inferencias también presentadas explicitamente, inferencias "autónomas" realizadas por los propios estudiantes y verificación de conocimientos.

En la figura 5.47 se muestran estas diversas alternativas incluyendo las combinaciones que para cada caso se consideran pertinentes.

b) en virtud de que hay una interdependencia conceptual entre cortes (análisis o interacción) y circuitos (síntesis), en vista de que el proceso de evaluación se considera parte esencial del proceso enseñanza aprendizaje, a los cortes, cuando menos los fundamentales, se les programa en las etapas mas adecuadas, de acuerdo con las ramas implícitas en cada conjunto de corte.

c) De acuerdo con lo indicado en la lista de actividades se asigna, al estudiante diversos tipos de inferencias (para las cuales el instructor debe estar debidamente capacitado):

- las inferencias exclusivamente conceptuales prescritas por las relaciones entre conceptos, por ejemplo la rama e_3 a partir de e_1 y e_2 (según la gráfica con el apoyo y sugerencias del instructor),
- las inferencias de síntesis, por ejemplo la C_3, supuestamente realizada autonomamente por el estudiante,
- la construcción de verificaciones, como e_6, un apoyo del instructor,
- las inferencias de síntesis y verificación como C_a, a partir de C_5 y C_6.

En todos los casos de síntesis se propone que ésta se realice a través del planteamiento y resolución de problemas que deberán diseñarse exprofesamente en el campo de las aplicaciones,

d) las evaluaciones que habrán de diseñarse se subdividen tentativamente en:

i) las correspondientes a los estados que definen los vértices de la gráfica original (figura 5.2): v_1, v_2, v_3, etc.,

ii) las correspondientes a los problemas antes enunciados, en las síntesis (figura 5.47) 3b, 5b, 6b, 7b, 9b, 10b, 11b, 12b, 14b, 14c, 15b y 15c,

iii) las asociadas a las verificaciones en 7a, 7b, 11a, 11b, 12a, 12b, 14c y 15c,

iv) las asociadas a los cortes (y como auxiliar de otros diagnósticos ya descritos), por ejemplo

el k_2 después de la etapa 7b (circuito c_a),

el k_8 después de la etapa 11b y 12b (circuitos c_e y c_d),

el k_4 después de la etapa 14c (circuitos c_a, c_c, c_d y c_e),

y como evaluación (o diagnóstico) global

el k_{10} y el k_1 después de la etapa 15c (circuitos c_a, c_b, c_c, c_d y c_e).

Nota final: algunos otros diagnósticos y/o evaluaciones pueden deducirse o construirse mediante combinaciones lineales de circuitos y/o cortes fundamentales.

Enlistado de temas del programa

0. Establecer casos y analogías de sistemas elementales v_1.

1. Establecer los conceptos de los sistemas generales a partir de los sistemas elementales $v_1e_1v_3=E_1$*.

2. Establecer el análisis complejo de sistemas elementales $v_4e_2v_1=E_2$.

3a. Inferir el análisis complejo de sistemas generales a partir de los estados E_1 Y E_2 : $v_4e_3v_3 = E_3$.

3b. Sintetizar el análisis complejo de sistemas generales, c_3 (Problemas).

4. Establecer modelos de redes para sistemas elementales $v_2e_4v_1 = E_4$.

5a. Inferir el análisis complejo de sistemas elementales a través de redes $v_2e_5v_4 = E_5$ basado en los modelos de redes para sistemas elementales E_4 y en el análisis complejo para sistemas elementales E_2.

5b. Sintetizar el análisis complejo de sistemas elementales a través de redes, c_5 (Problemas).

6a. Inferir el análisis de sistemas generales a través de redes $v_3e_6v_2 = E_6$ basándose en los estados E_1 y E_4.

6b. Sintetizar el análisis de sistemas elementales y/o generales a través de redes, c_6 (Problemas).

7a. Verificar el análisis de sistemas generales a través de redes E_6 a partir de los estados E_3 y E_5

7b. Inferir, sintetizar y verificar el estudio de sistemas generales a través del análisis complejo y redes, c_a basándose en c_3,c_5,c_6, (Problemas).

8. Establecer el concepto de diagramas de bloques partiendo de la teoría de redes, $v_5e_8v_2 = E_8$.

*Nota: Las ramas $v_ie_jv_k$ establecen relaciones en los dos sentidos, entre v_i y v_k. Por ejemplo, en 1 se sugiere establecer los conceptos de los sistemas generales a partir de los sistemas elementales pero en etapas más avanzadas puede representar la reducción de los sistemas generales a sistemas elementales.

C.A.D.A. 1976

9a. Inferir la representación y/o análisis de sistemas elementales mediante diagramas de bloques $E_7 = v_1e_7v_5$, (sistemas analógicos y bloques operacionales) a partir de los estados E_4 y E_8.

9b. Sintetizar la representación y/o análisis de sistemas elementales mediante diagramas de bloques, c_7 (Problemas).

10a. Inferir el análisis de sistemas generales mediante diagramas de bloques $E_9 = v_3e_9v_5$, a partir de los estados E_8, E_4 y E_1.

10b. Sintetizar el análisis de sistemas generales mediante diagramas de bloques, c_9 (Problemas).

11a. Verificar el análisis de sistemas generales mediante diagramas de bloques, E_9 a partir de E_8 y E_6.

11b. Inferir, sintetizar y verificar el análisis de sistemas generales mediante diagramas de bloques, c_e basándose en c_6 y c_9 (Problemas).

12a. Verificar el análisis de sistemas generales mediante diagramas de bloques, E_9 a partir de E_1 y E_7.

12b. Inferir, sintetizar y verificar el análisis de sistemas generales mediante diagramas de bloques c_d basándose en c_7 y c_9 (Problemas).

13. Establecer los conceptos de representación y análisis de señales (Fourier) e información (entrada-salida) vinculándolo con sistemas elementales $v_1e_{10}v_6 = E_{10}$.

14a. Inferir la relación entrada-salida de señales a través de diagramas de bloques (cajas negras), $E_{12} = v_6e_{12}v_5$ basándose en los estados $E_4E_8E_{10}$.

14b. Sintetizar el análisis de las relaciones entrada-salida de sistemas elementales c_{12} (Problemas).

14c. Inferir, sintetizar y verificar las relaciones entrada-salida de sistemas elementales c_c a partir de c_7 y c_{12} (Problemas).

15a. Inferir el concepto de análisis de relaciones entrada-salida de sistemas $E_{11} = v_6 e_{11} v_3$ a partir de E_1 y E_{10}.

15b. Sintetizar el análisis de relaciones entrada-salida en sistemas, c_{11} (Problemas).

15c. Inferir, sintetizar y verificar las relaciones entrada-salida de sistemas generales con diagramas de bloques, c_b a partir de c_9, c_{11} y c_{12} (Problemas).

NOTA: El diagrama secuencial del programa, de la figura 5.47, muestra los estados logrados a partir de inferencias, los estados de síntesis y las verificaciones; o sea la estructuración del programa, la cual se integra: con temas antecedentes y consecuentes; con actividades de enseñanza aprendizaje y evaluación, y con tiempos para el desarrollo del curso. Todo esto se muestra en la figura 5.48 en una versión más completa de las tablas de programa vistas en la sección 4.3.

CARTA-PROGRAMA DE AUTOEVALUACION

TEMAS

DESARROLLO

OBSERVACIONES

BIBLIOGRAFIA

3,5
11, 13, 14
5, 16
5, 11, 13, 14, 15
5, 11, 13, 14, 15
3, 17, 20
3, 5, 15, 17, 20
3, 5, 15, 17, 20
3, 17, 20
3, 5, 15, 17, 20
3, 17, 20
5, 11, 13, 14, 15, 17, 20
3, 17, 20
3, 5, 20
3, 5, 20
3, 5, 11, 13, 14, 20
3, 5, 11, 13, 14, 20
3, 5, 11, 13, 14, 20
3, 5, 11, 13, 14, 15, 17, 20
3, 5, 11, 13, 14
3, 5, 11, 13, 14, 15, 17, 20
5, 34, 36, 40
3, 17, 20, 34, 36, 40
3, 17, 20, 34, 36, 40
3, 17, 20, 34, 36, 40
3, 5, 11, 13, 14, 34, 36, 40
3, 5, 11, 13, 14, 34, 36, 40
3, 5, 11, 13, 14, 17, 20, 34, 36, 40

* Las indicaciones a este respecto, las deberá hacer el profesor de acuerdo a los programas de las asignaturas consecuentes.

Ejemplos de aplicaciones

Análisis y diseño de sistemas: mecánicos, eléctricos, ...

Análisis de estabilidad y controlabilidad de sistemas.

Modelación y confiabilidad de sistemas.

ACTIVIDADES

Exposición – demostración en clase por el profesor

Exposición – demostración en clase por el alumno

Exposición – demostración en laboratorio

Resolución de problemas

Búsqueda ...

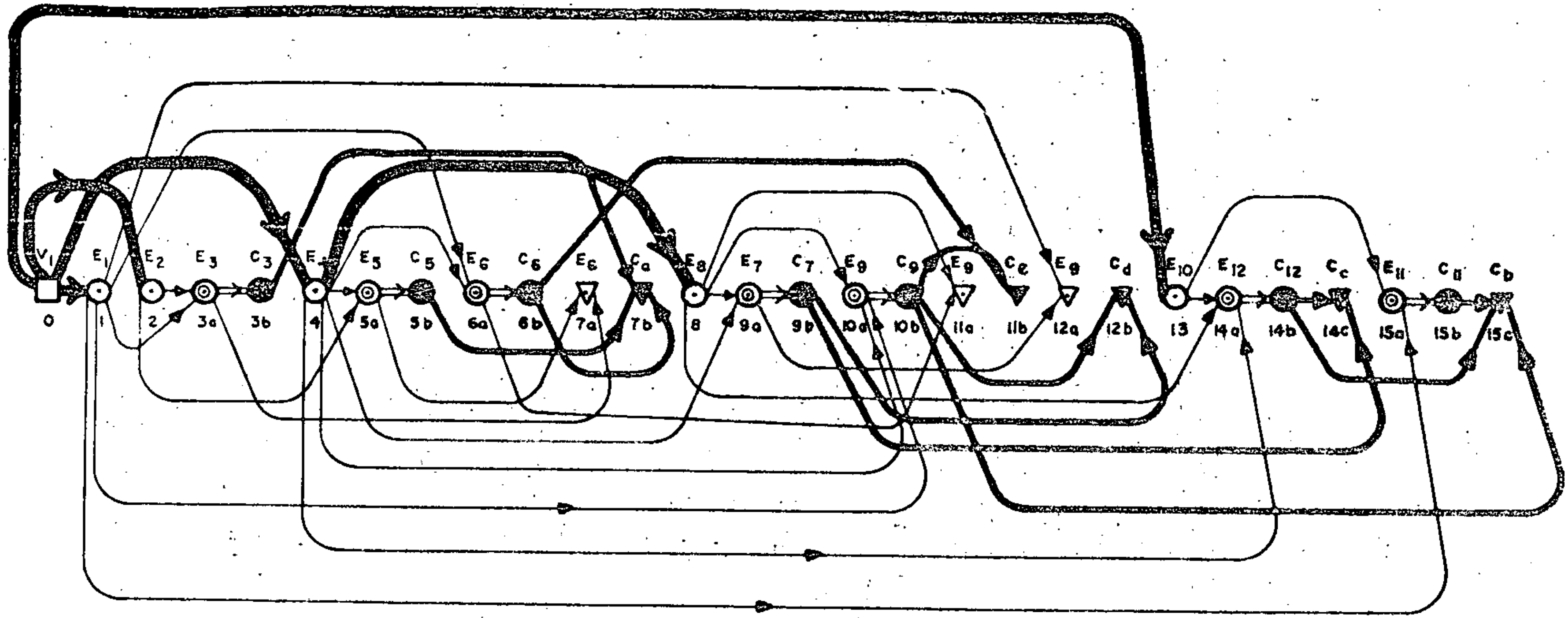
Asesoría

SIMBOLOGIA

TIEMPO

JSR/MDGM/AHC/MGMA/C.A.D.A./1976 FIG. 5.48

DIAGRAMA SECUENCIAL DEL PROGRAMA



SIMBOLOGIA

- Inferencia dada. — ramas
- Inferencia con participación.
- Inferencia de síntesis fundamental. — cuerdas
- Inferencia de otras síntesis.

- Edo. inicial.
- Edo. logrado a partir de inferencias dadas.
- Edo. inferido con participación
- Edo. de síntesis fundamental.
- Verificación de estados.
- Edo. de síntesis y verificación de edos. de síntesis.

C.A.D.A. 1976

FIG. 5.47.

5.A. Apéndice: Descripciones, definiciones y ejemplos de sistemas dinámicos.

5.A.1. Sistemas Elementales

Para determinar la situación de un objeto, en un momento dado, requerimos de cierta información relevante. En los sistemas físicos, por ejemplo, ésta puede referirse a un estado determinado en un instante dado (Fig. No. 5.A.1.).

- el estado de movimiento de un oscilador definido por el desplazamiento (x) respecto a un punto fijo de referencia. Podemos además, requerir la velocidad, la aceleración, las fuerzas internas (de inercia, viscosas o debidas a la deformación), las fuerzas externas, la energía de deformación del resorte (energía potencial EP), la energía de disipación (en el amortiguador ED) y la energía debida a la inercia de la masa (energía cinética EC). A partir de las leyes de la mecánica podemos establecer modelos matemáticos para describir el estado de movimiento. Por ejemplo a partir de las condiciones de equilibrio dinámico (segunda ley de Newton o ecuaciones de D'Alambert),

$$F(t) = F_m + F_d + F_k$$

o bien

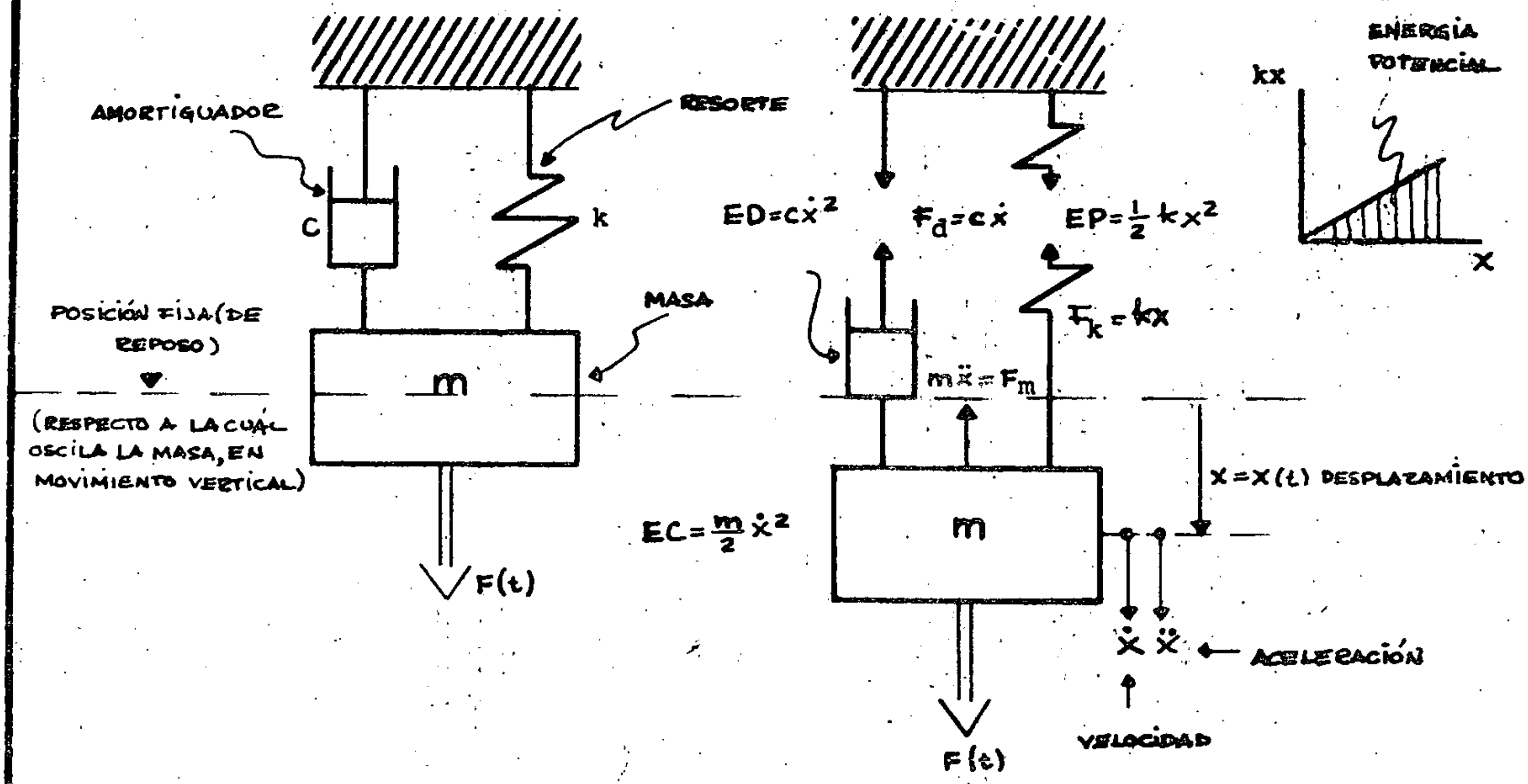
$$\boxed{F(t) = m\ddot{x} + c\dot{x} + kx}$$

en la cuál el punto, o puntos, sobre la x indican la operación de derivación respecto al tiempo

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt}; \quad \ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2}$$

Aparentemente hay tres variables (x, $\dot{x}$ y $\ddot{x}$), pero en realidad se trata de una sola: x y sus derivadas de primero y segundo órdenes. A la misma ecuación se podría llegar partiendo de la ecuación de equilibrio energético

ESQUEMA DE UN OSCILADOR MECANICO



C.A.D.A. 1976

FIG. 5. A. 1

EC + ED + EP = Trabajo externo (producido por F (t) sobre $\bar{x}$)

Pero, por ahora lo importante es hacer notar que para definir el estado de un movimiento (configuración de desplazamientos en un tiempo dado) basta con determinar una sola cantidad: x. Se dice que este es un sistema elemental, con un grado de libertad (si se restringiera x no habría movimiento).

La ecuación que gobierna al fenómeno mecánico es de segundo orden (en vista de que la derivada de mayor orden de x es precisamente dos).

Por otro lado, si la fuerza se aplicara muy lentamente al sistema elemental y después no variara con el tiempo, se tendría que la fuerza en el resorte equilibraría totalmente a F:

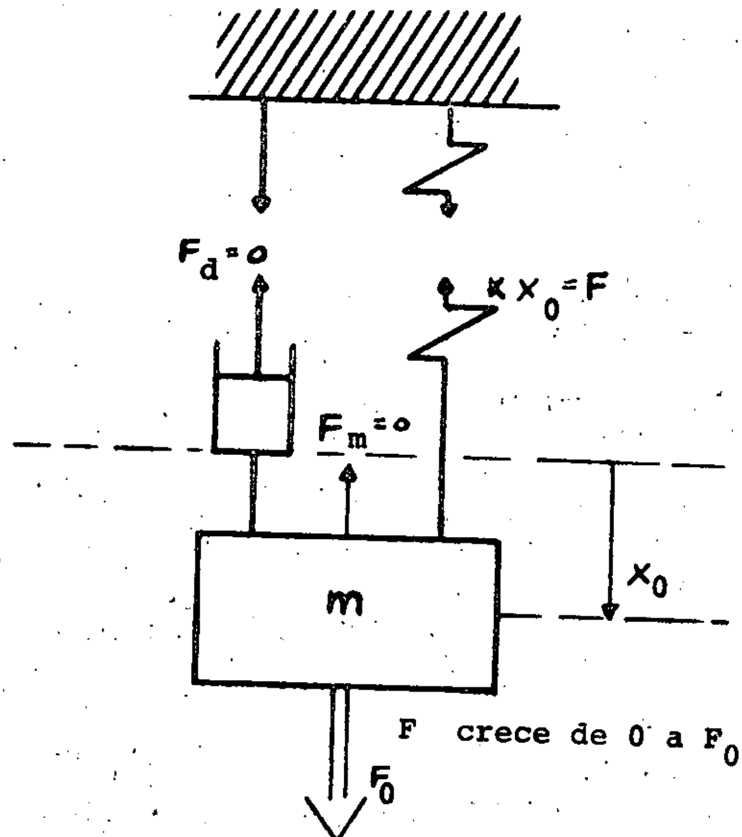
$$F_o = kx_o$$

siendo

$$F_d = F_m = o.$$

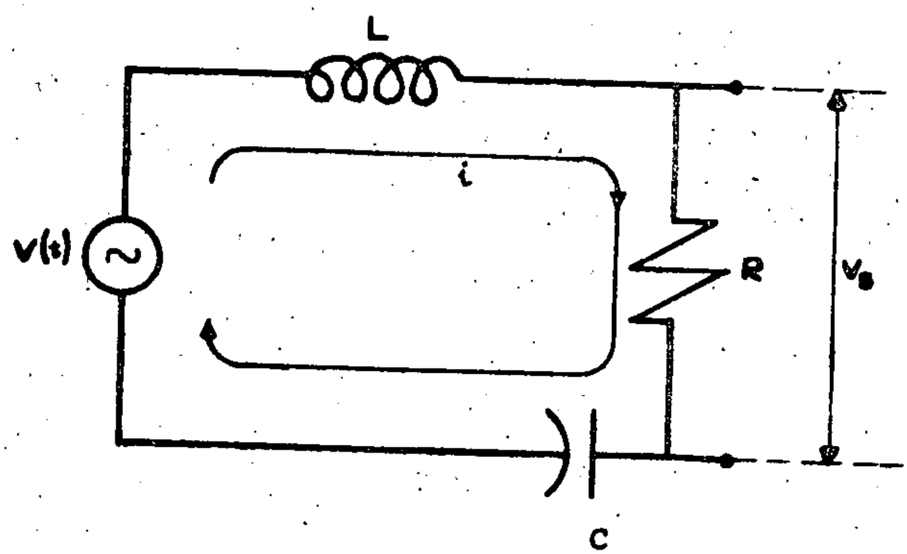
El planteamiento del problema, determinación del estado de desplazamiento, es exclusivamente algebraico (Fig. No. 5.A.2.).

APLICACIÓN DE UNA FUERZA MUY LENTAMENTE



F crece de 0 a F_0 (lentamente)

FIG. 5.A.2



CIRCUITO ELÉCTRICO

FIG. 5.A.3

Es posible hacer un planteamiento muy similar en el caso de un circuito eléctrico de una sola malla.

En la figura 5.A.3

V(t): (~) representa, simbólicamente, una fuente de voltaje que impulsa la circulación de

i: una corriente eléctrica, a través de
L: una "inductancia" (una bobina),
R: una resistencia (un "mal" conductor),
C: una "capacitancia" o condensador (un dieléctrico, o sean dos placas metálicas separadas una cierta distancia y que se cargan eléctricamente, una con carga positiva y la otra negativa).

De las leyes de la electrodinámica se tiene que para hacer pasar una corriente "i" a través de una resistencia (Ley de Ohm) se requiere un voltaje proporcional a la corriente y a la resistencia del conductor

$$\boxed{V_r = Ri}$$

Al circular una corriente variable con el tiempo, a través de una bobina se induce (inductancia) un campo electromagnético (líneas de fuerza magnéticas similares a las de un imán o
rrestre) cuya acción se opone al flujo de la corriente

$$V_l = L \frac{di}{dt}$$

Al circular una corriente, variable con el tiempo a través del circuito, el condensador se carga eléctricamente, como se ha mencionado. Como la corriente varía con el tiempo la carga en un tiempo dado representa la suma de cargas a que ha dado lugar el flujo mencionado y esta misma carga acumulativa se opone al flujo de "i"

$$V_C = \frac{1}{C}\int^{t} i\,dt$$

en donde el símbolo $\int$ expresa la suma o integral de las cargas diferenciales "idt".

También en este caso hay una ley que nos permite expresar el fenómeno completo de flujo en el circuito: Ley de voltajes de Kirchhoff. La suma total de voltajes en un circuito es cero. O sea

$$V_l + V_r + V_c = V(t)$$

o bien

$$\boxed{L\frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C}\int^{t} i\,dt = V(t)}$$

Como antes, para definir totalmente el problema se requiere una sola variable: i. Se trata, entonces de un sistema elemental con un solo grado de libertad.

La ecuación puede reducirse a una que solo tenga operadores de derivación respecto al tiempo (derivando la ecuación término a término). De esta forma la ecuación anterior puede concebirse como un modelo matemático de segundo orden.

Si el voltaje no variara con el tiempo y suprimiéramos el condensador, la oposición al paso de corriente estaría dada por la ley de Ohm

$$V = Ri$$

que es nuevamente una expresión exclusivamente algebraica.

Como antes, podría obtenerse la ecuación anterior a partir del equilibrio energético del circuito

$$E_L + E_R + E_C = \text{Trabajo producido por la fuerza electromotriz}$$

en donde

$EL = \frac{1}{2} Li^2$ es la energía electromagnética de la inductancia,

$ER = \int_0^t Ri^2 dt$ es la energía disipada por la resistencia en el intervalo (o, t),

$EC = \frac{1}{2C} q^2$ es la energía almacenada en el capacitor, en donde $i = \frac{dq}{dt}$ o bien $q = \int idt$,

siendo q la carga eléctrica a que hicimos referencia antes.

Si en los sistemas elementales anteriores suprimimos alguna componente, que no tenga relevancia en el comportamiento del sistema o bien que para un análisis determinado no tenga interés, la modelación suele implicar una reducción importante en la determinación del estado.

Por ejemplo, es frecuente la formulación de problemas en los que solo aparecen elementos disipativos y la acción inercial no tiene relevancia*: en el estudio de sistemas neumáticos de amortiguamiento, en problemas de difusión de soluciones, de temperaturas, de presiones hidraúlicas en suelos, etc. (figura 5.A.4).

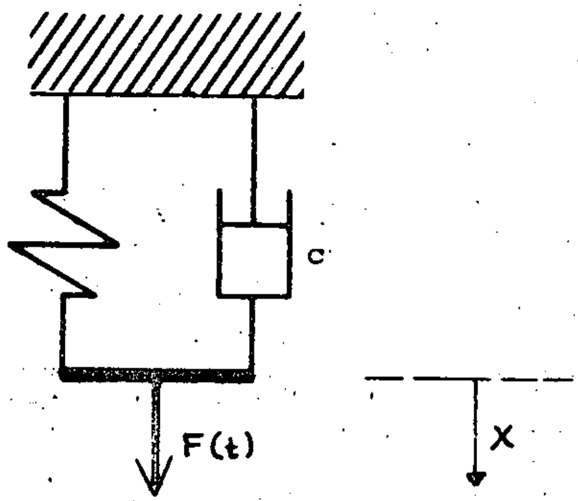
Al no aparecer la masa, la ecuación (reduciendo el término correspondiente) resulta

$$\boxed{c\dot{x} + kx = F(t)}$$

que es la ecuación que gobierna el comportamiento de un sistema elemental, con un solo grado de libertad, de primer orden.

Nos puede interesar, por otro lado, el estado de movimiento (no necesariamente oscilante) de un cuerpo contra la fricción, por ejemplo la caída de sólidos dentro de un líquido (sin turbulencias), o bien la caída libre de un paracaídas, etc.

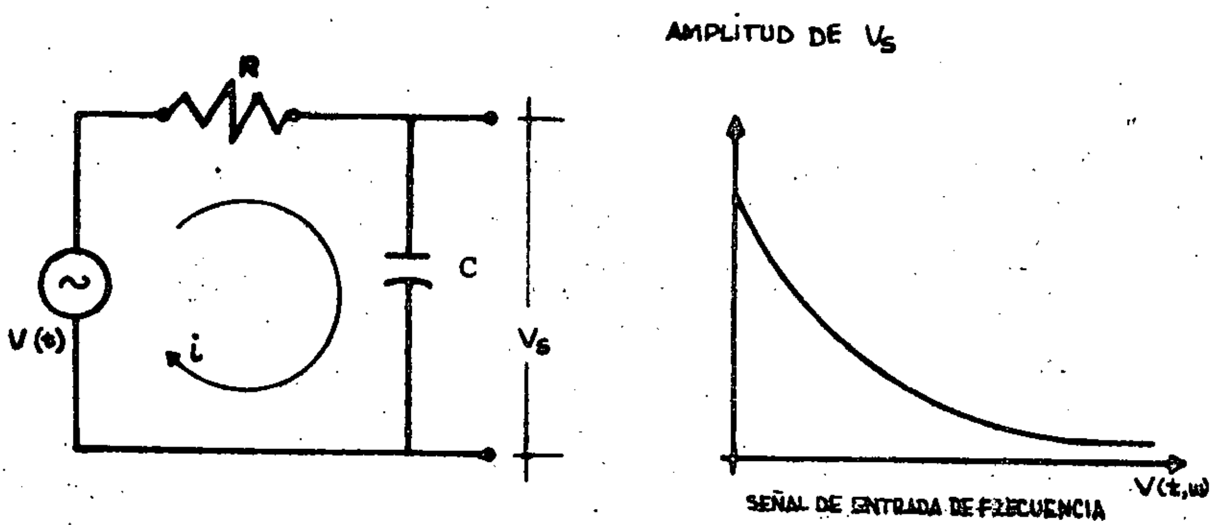
*Muchos de estos sistemas elementales son a su vez componentes de sistemas mas complejos en donde pueden existir subsistemas con otros componentes, los inerciales por ejemplo.



$cx + kx = F(t).$

SISTEMA MECÁNICO ELEMENTAL SIN MASA.
(FILTRO MECANICO PASABAJOS)

FIG. 5.A.4



CIRCUITO ELÉCTRICO SIN INDUCTANCIA (PASABAJOS).

FIG. 5.A.5

Estableciendo como variable la velocidad, $\dot{x} = v$, tendríamos ahora

$$m\,\dot{v} + c\,v = F(t).$$

que representa la ecuación de un sistema elemental, con un grado de libertad, de primer orden.

Suele establecerse, empíricamente, que la variación de población de una comunidad, que represente crecimiento o decremento de la misma, es proporcional al tamaño de la población, o sea

$\dot{x} = a\,x$ (a, constante de proporcionalidad, x tamaño de la población).

que representa un modelo de primer orden.

Un caso que se plantea en los modelos matemáticos de la psicología, similar al anterior, se refiere a la rapidez con la cuál un individuo puede incrementar su rapidez para asimilar conceptos con un nivel de dificultad dado

$$\dot{D} = -\,apD$$

en donde

D es el grado o nivel de dificultad,

a es una constante del individuo que establece su capacidad de aprendizaje,

p es la intensidad de práctica (atención, actividad, etc.) que tiene lugar en el período que se estudia.

El modelo está expresado por una ecuación de primer orden.

En el caso de los circuitos eléctricos suelen plantearse también modelos con menos componentes que en el circuito LRC, por ejemplo, suprimiendo la inductancia (figura 5.A.5) podríamos obtener para una señal de entrada con frecuencia ω,

$$Ri + \frac{1}{C}\int^{t} i\,dt = V(t,\omega)$$

que por derivación da lugar a un sistema elemental de primer orden. Este circuito, calculando el voltaje de salida V_s resulta ser un filtro de "pasa-bajos": se amortigua la señal de salida para frecuencias altas de $V(t,\omega)$.

Análogamente pueden plantearse otros circuitos eléctricos de primer orden (por ejemplo para filtros "pasa-altos" - intercambiando la resistencia y la capacitancia, etc.).

En otros casos, muy frecuentes en las ciencias del comportamiento, interesa plantear modelos de problemas en los que solo tiene sentido determinar el valor de una función en lapsos preestablecidos. Por ejemplo, la determinación del incremento de población en términos de los datos censales obtenidos cada diez años. La expresión es muy simple

$$\Delta\, y(t) = y(t+10) - y(t)$$

en donde Δ se interpreta como incremento de... . En este caso y (t) representa la población en el tiempo t. Esta es una ecuación de diferencias de primer orden (en la cuál se ha "discretizado" el tiempo en intervalos de 10 años. Por ejemplo $t_1 = 0$, $t_2 = 10$, $t_3 = 20$, etc.).

En las ciencias económicas se han planteado modelos "discretos" similares a los anteriores. Por ejemplo, en el estudio del crecimiento del ingreso nacional, en una economía en expansión, suele prescribirse que el ingreso nacional (Y_t) está constituido, en un momento dado (t), por gastos de consumo (C_t) y la inversión (I_t)

$$Y_t = C_t + I_t \qquad t = 0,1,2,\ldots$$

(el tiempo se discretiza en intervalos iguales*)

*el que los intervalos sean iguales no es condición "sine qua non" para la modelación descrita. Se introduce así para simplificar los ejemplos.

A su vez los gastos de consumo se supone dependen linealmente del egreso nacional

$$C_t = c + m Y_t$$

en donde c son los gastos de consumo en el caso que $Y_t = 0$ y m es un parámetro que indica las tendencias marginales de consumo.

Se supondrá, además, que el incremento en el ingreso nacional es proporcional a la inversión

$$Y_{t+1} - Y_t = r I_t$$

Mediante las expresiones y condiciones anteriores se pretende obtener predicciones sobre el ingreso nacional Y y sobre los gastos de inversión I, en el tiempo t + 1 a partir de los datos en t.

A través de sustituciones entre las expresiones anteriores se obtienen

$$\begin{aligned} Y_{t+1} &= \left[1 + r(1-m)\right] Y_t - rc \\ I_{t+1} &= \left[1 + r(1-m)\right] I_t \end{aligned} \qquad t = 0, 1, 2, \ldots$$

Ambas ecuaciones de diferencias son de primer orden.

Como en el caso de modelos con variación continua en el tiempo podemos plantear ecuaciones de diferencias de sistemas elementales, de segundo orden.

Supóngase que en un proceso de inventarios el total de ingresos Y_t producidos en el lapso (0–t) está dado por

$$Y_t = u_t + r_t + v_0$$

en donde

u_t: es el número de unidades de consumo producidas expresamente para su venta,

r_t: es el número de unidades de consumo producidas como reserva,

v_o: es una inversión (valorizada en términos de unidades de consumo) permanente.

Suponiendo que la planeación de producción de unidades de consumo u_t se realiza en términos de las ventas realizadas en el periodo anterior t - 1,

$$u_t = b\, Y_{t-1}$$

en donde la constante de proporcionalidad b suele denominarse "tendencia marginal de consumo".

Por otro lado se supone que las reservas r_t se plantean en términos del incremento de ventas entre los dos periodos anteriores (t-1) y (t-2), suponiendo que la tendencia marginal de consumo se mantiene constante,

$$r_t = b\, Y_{t-1} - bY_{t-2}$$

Sustituyendo u_t y r_t en la primera expresión se obtiene

$$Y_t = bY_{t-1} + bY_{t-1} - bY_{t-2} + v_o$$

Sustituyendo ahora t + 2 en lugar de t (corrimiento del tiempo en los intervalos)

$$Y_{t+2} = 2bY_{t+1} - bY_t + v_o$$

o bien

$$Y_{t+2} - 2bY_{t+1} + bY_t = v_o$$

que es una ecuación de diferencias, de un sistema elemental, de segundo orden.

De manera similar se podrían plantear muchos otros modelos para sistemas elementales de primero o segundo orden. En la bibliografía dada a continuación pueden estudiarse otras aplicaciones a: sistemas mecánicos, eléctricos, fluídicos, térmicos, acústicos, económicos, de aprendizaje, etc.

Bibliografía:

1. Olson, Harry F. "Solutions of Engineering Problems by Dynamical Analogies". Van Nostrand. 1966.

2. Cannon, R.H. "Dynamics of Physical Systems". McGraw-Hill. 1967

3. Shearer, J.L., A.T., Murphy, y H.H. Richardson "Introduction to System Dynamics". Addison-Wesley. 1971.

4. McGray J.A. y T.A. Cahill, "Electronic Circuit Analysis for Scientists". Wiley. 1973.

5. Cadzow, J.A. "Discrete-Time Systems". Prentice-Hall. 1973.

6. Hilgard, E.R. "Teorías del Aprendizaje", Fondo de Cultura Económica. 1966.

7. Kaplan, W. "Ordinary Differential Equations". Addison-Wesley. 1967.

8. Doeblin, E.O. "System Dynamics: Modeling and Response". Ch. E. Merril. 1972.

5.A.2. Sistemas generales (orden n)

Los sistemas con mas de un grado de libertad, o sea aquellos que requieren la prescripción de mas de una cantidad para determinar su estado o configuración, no son sino un agregado de sistemas elementales. Por esta razón se establece como criterio general el planteamiento de modelos y métodos a partir de los sistemas elementales, los cuales definen el fenómeno esencial, y además generalizando éstos para el análisis de los sistemas generales.*

La modelación de un sistema oscilatorio mecánico utiliza los mismos conceptos que se emplean en uno elemental pero incluyendo en este caso la interacción entre los sistemas elementales.

Supongase un sistema mecánico con tres grados de libertad x_1, x_2 y x_3; (Fig. No.5.A.6) Las ecuaciones de movimiento (una por cada grado de libertad) se pueden obtener aplicando a cada masa aislada la segunda ley de Newton (D'Alambert); Fig. No. 5.A.7, en forma matricial las ecuaciones anteriores pueden escribirse como se muestra en la figura 5.A.8.

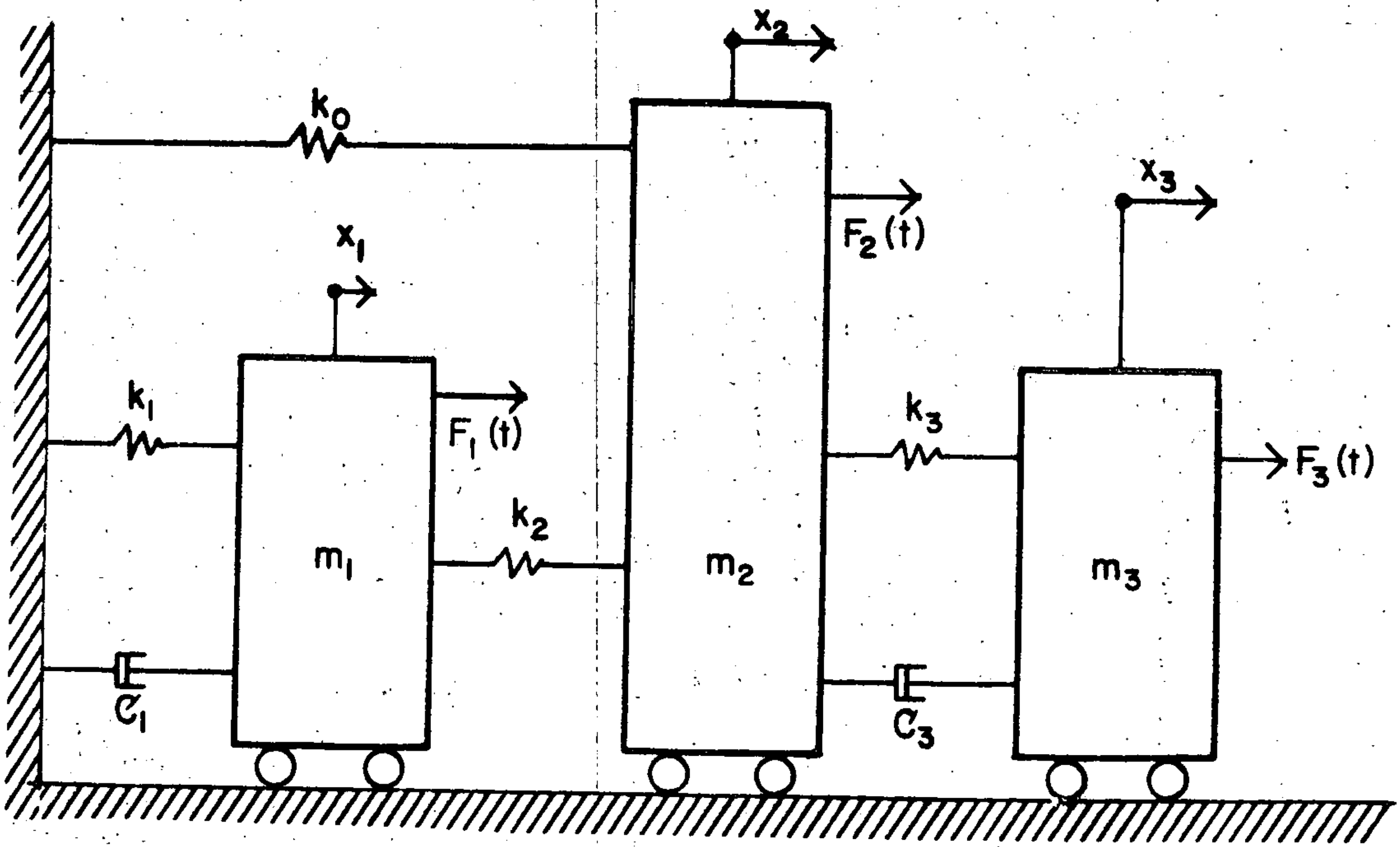
Con la notación anterior se obtiene la ecuación vectorial (o matricial) de movimiento del sistema

$$M\ddot{\overline{x}} + C\dot{\overline{x}} + K\overline{x} = \overline{F}$$

La ecuación es muy similar a la del sistema con un solo grado de libertad; sin embargo es la ecuación de un sistema general y los métodos de solución son mas complejos (aunque en muchos aspectos similares a los del sistema elemental).

Para una red eléctrica de "n" mallas (o grados de libertad) Fig. No. 5.A.9.

*El término "sistemas generales" no es muy apropiado porque solo se trata de sistemas con parámetros concentrados y n grados de libertad. Se utiliza solo para hacer énfasis en el criterio central de que estos son o representan una mera generalización de los sistemas elementales.



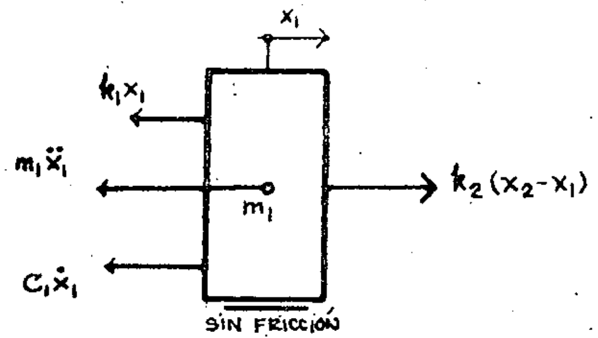
SISTEMA MECÁNICO CON 3 GRADOS DE LIBERTAD.

324

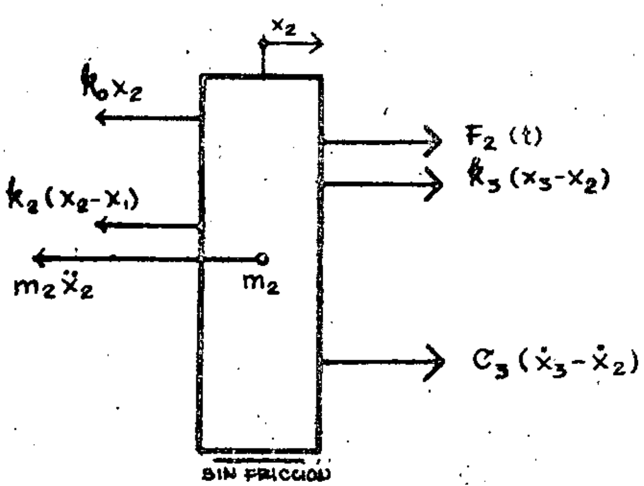
C.A.D.A. 1976

FIG. 5.A.6

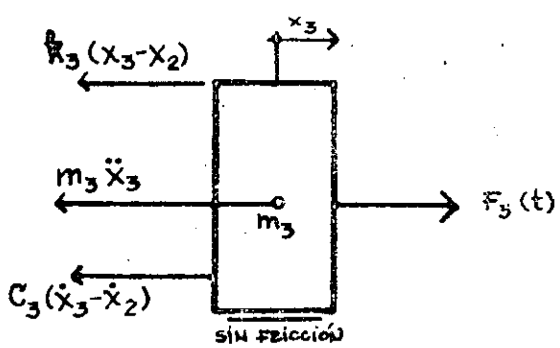
ANALIZANDO LAS 3 MASAS AISLADAS:



$$m_1\ddot{x}_1 + C_1\dot{x}_1 + (k_1+k_2)x_1 - k_2x_2 = 0$$



$$m_2\ddot{x}_2 + C_3\dot{x}_2 - C_3\dot{x}_3 - k_2x_1 + (k_2+k_3+k_0)x_2 - k_3x_3 = F_2(t)$$



$$m_3\ddot{x}_3 - C_3\dot{x}_2 + C_3\dot{x}_3 + k_3x_3 - k_3x_2 = F_3(t)$$

FIG. 5.A.7

$$\underbrace{\begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix}}_{M} \underbrace{\begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \end{bmatrix}}_{\ddot{X}} + \underbrace{\begin{bmatrix} c_1 & 0 & 0 \\ 0 & c_3 & -c_3 \\ 0 & -c_3 & c_3 \end{bmatrix}}_{C} \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix}}_{\dot{X}} + \underbrace{\begin{bmatrix} k_1+k_2 & -k_2 & 0 \\ -k_2 & k_2+k_3+k_0 & -k_3 \\ 0 & -k_3 & k_3 \end{bmatrix}}_{K} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}}_{\bar{X}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix}}_{\bar{F}}$$

ECUACIONES EN FORMA MATRICIAL

C.A.D.A. 1976

FIG. 5.A.8

RED ELECTRICA CON "n" MALLAS.

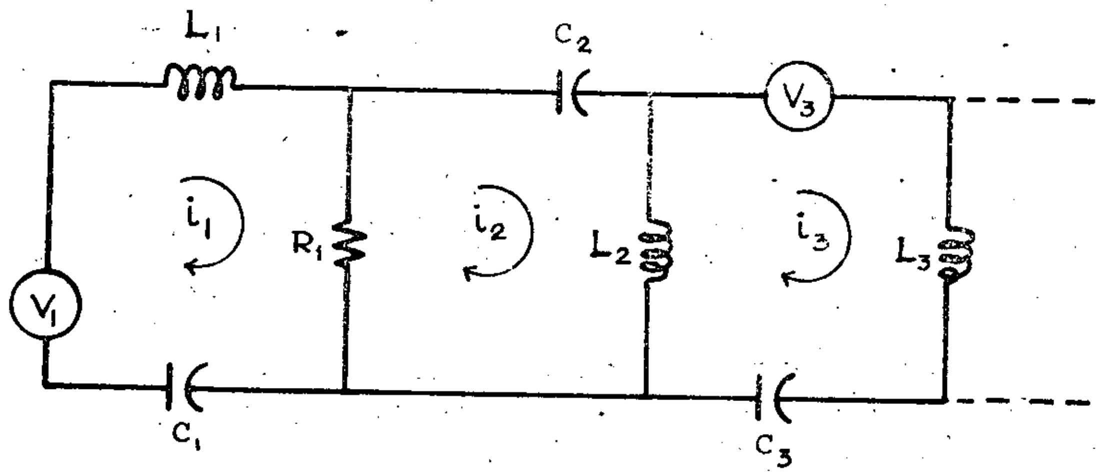
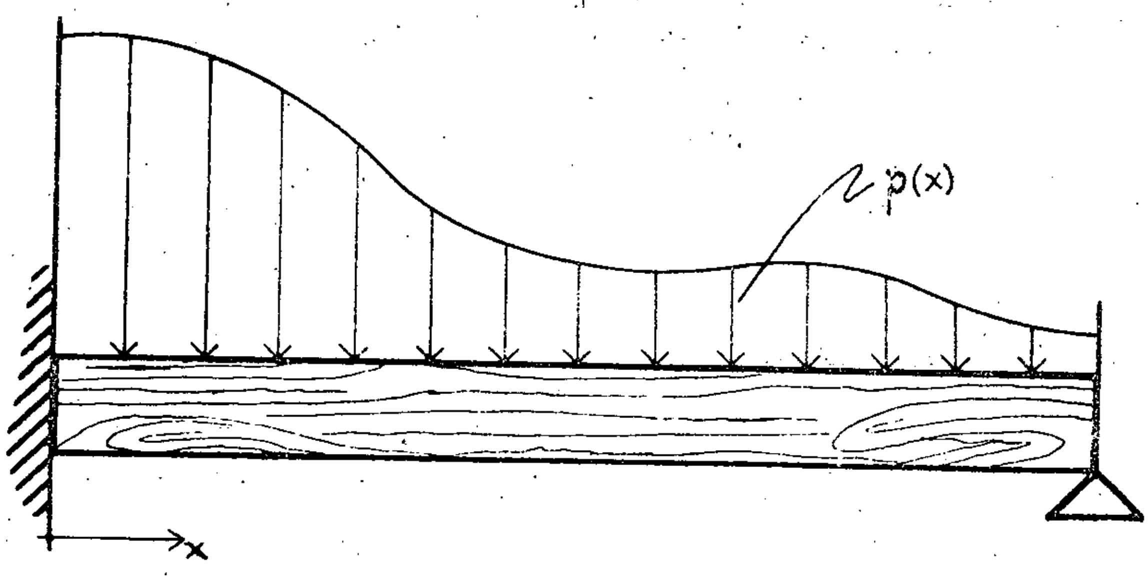


FIG. 5.A.9

ESQUEMA DE UNA VIGA.



C.A.D.A. 1976

FIG 5.A.10

Se obtiene una ecuación matricial (o vectorial) de la forma

$$\boxed{L\dot{\bar{i}} + R\bar{i} + S\int^{t}\bar{i}\,dt = \bar{V}}$$

en donde

L es una matriz de inductancias,
R es una matriz de resistencias,
S es una matriz que contiene a los inversos de las capacitancias ("elastancias"),
$\bar{V}$ es el vector de los voltajes V_1, V_2, ...

Las ecuaciones matriciales anteriores representan de hecho sistemas de n ecuaciones diferenciales de segundo orden.

Puede verse que las ecuaciones de un sistema, por ejemplo, las del problema mecánico están acopladas. Es decir, en cada ecuación aparecen variables asociadas con el estado de otras masas u otras mallas. Lo cual implica que para determinar al conjunto de variables x_1, x_2, ..., x_n de un sistema como estos, en donde hay interacción, deben establecerse métodos que resuelvan simultáneamente a todas las ecuaciones.

De manera similar a la anterior podemos plantear los modelos matemáticos de sistemas de orden n:

a) A través de ecuaciones de orden n,

b) a través de n ecuaciones de primer orden.

Un caso de modelo de orden "n" es por ejemplo el de una viga (Fig. No. 5.A.10), cuya ecuación diferencial es de cuarto orden

$$EI\,\frac{d^4y}{dx^4} = p(x)$$

en donde E es una constante que depende del material (módulo de elasticidad), I es un parámetro que depende de la geometría de la sección tranversal, $p(x)$ es la carga distribuida a lo largo de la viga, y por último "y" es el desplazamiento vertical en un punto **x** de la viga.

En la teoría del control se han desarrollado valiosos métodos para el análisis de sistemas planteados a través de ecuaciones diferenciales de primer orden. Dentro de los modelos que interesan al programa, las ecuaciones diferenciales, o los sistemas de ecuaciones de orden superior al primero pueden facilmente reducirse a sistemas de primer orden. Supóngase, por ejemplo, que se desea formular el problema mecánico, de tres grados de libertad,,de la figura 5.A.7, mediante ecuaciones diferenciales de primer orden, haciendo las siguientes sustituciones:

$$x_1 = y_1;\ x_2 = y_3;\ x_3 = y_5$$

es fácil verificar que las siguientes ecuaciones implican el mismo planteamiento que se había dado mediante ecuaciones de segundo orden:

$$\dot{y}_1 = y_2$$

$$\dot{y}_2 = \frac{1}{m_1}\left[-(k_1 + k_2)\,y_1 - c_1 y_2 + k_2 y_3\right]$$

$$\dot{y}_3 = y_4$$

$$\dot{y}_4 = \frac{1}{m_2}\left[k_2 y_1 - (k_o + k_2 + k_3) y_3 - c_3 (y_4 - y_6)\right] + \frac{1}{m_2} F_2(t)$$

$$\dot{y}_5 = y_6$$

$$\dot{y}_6 = \frac{1}{m_3}\left[k_3 y_3 + c_3 y_4 + k_3 y_5 - c_3 y_6\right] + \frac{1}{m_3} F_3(t)$$

La cual puede expresarse matricialmente (figura 5.A.11), o bien de manera simbólica

$$\dot{\bar{y}} = A\,\bar{y} + \bar{F}$$

en dónde A es la matriz de parámetros del sistema. Esta ecuación matricial (vectorial)

ECUACION MATRICIAL DEL SISTEMA

$$
\begin{bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \\ \dot{y}_3 \\ \dot{y}_4 \\ \dot{y}_5 \\ \dot{y}_6 \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-\frac{k_1+k_2}{m_1} & -\frac{c_1}{m_1} & \frac{k_2}{m_1} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
\frac{k_2}{m_2} & 0 & -\frac{k_0+k_2+k_3}{m_2} & -\frac{c_3}{m_2} & \frac{k_3}{m_2} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & \frac{k_3}{m_3} & \frac{c_3}{m_3} & -\frac{k_3}{m_3} & -\frac{c_3}{m_3}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \\ y_6 \end{bmatrix}
+
\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{F_2}{m_2} \\ 0 \\ \frac{F_3}{m_3} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}
$$

FIGURA 5.A.11

es muy usual en los sistemas dinámicos lineales, con parámetros constantes (la matriz A es invariante en el tiempo). El vector $\bar{F}$ expresa el conjunto de perturbaciones que actúan sobre el sistema. La solución de este sistema requiere de la introducción de algunos conceptos del Cálculo Matricial*.

En forma muy semejante se plantean ecuaciones matriciales para sistemas discretos en el tiempo.

Bibliografía

Referencias 1,2 y 7 de la sección 5.A.1.

9. Denis-Papin, M. y A. Kaufmann "Curso de Cálculo Matricial Aplicado". URMO, S. A. 1975

10. Cooper, G.R. y C.D. McGillem "Methods of Signal and System Analysis". Holt, Rinehart and Winston. 1967.

11. Truxal, J.G. "Introductory System Engineering". McGraw-Hill. 1972.

12. D'Azzo, J.J. y C.H. Haupis, "Linear Control System Analysis and Design". McGraw-Hill. 1975.

13. Ogata, K. "Modern Control Engineering". Prentice-Hall. 1970.

14. Cortés, F., A. Przeworski y J. Sprague, "Systems Analysis for Social Scientists". Wiley. 1974.

15. Lathi, B.P. "Signals, Systems, and Controls". Intext. 1974.

16. Pipes, L.A. "Matrix Methods for Engineering". Prentice-Hall. 1963.

*No confundir el cálculo con el álgebra matricial.

5.A.3. Redes de flujo y diagramas de bloque

Una de las mas poderosas herramientas en la mod lación de sistemas es la teoría de redes de flujo la cuál constituye una extensión de la Teoría de Gráficas para el tratamiento de Sistemas Dinámicos. En lugar de que a las ramas de una gráfica se les asigne únicamente el papel de "relacionar" o "vincular" a los "vértices", se incluye la idea de "flujo" a través de dichas ramas. En un circuito eléctrico el "flujo" es de corriente eléctrica, en una red de transportes el "flujo" es de vehículos (automóviles, camiones de carga, ferrocarriles, etc.), en una red de comunicaciones (radio, teléfono, telégrafo, etc.) el "flujo" es de señales eléctricas que dentro de algún código representan información, en una red hidráulica el "flujo" es agua, en una red nerviosa el "flujo" puede ser de estímulos (en forma de impulsos electroquímicos) y muchos otros que pueden estudiarse en la extensa bibliografía actual sobre este tema.

Algunos de los aspectos sobresalientes de estas redes estriban en las posibilidades siguientes.

a) **Establecer analogías entre sistemas o subsistemas a partir de las redes de flujo de sistemas diferentes. En estos planteos y representaciones es factible estudiar bajo el mismo marco teórico muy diversos campos, por ejemplo a través de las analogías entre elementos, en donde x es similar a q, presentadas en la figura 5.A.12.**

Podemos plantear ecuaciones que se refieran a dos o más fenómenos distintos expresando con una nueva variable - las similares y los parámetros similares por otro, representativos de los casos particulares.

$x \sim q$ se expresarían con ξ (desplazamiento, carga eléctrica)

$F_i \sim V_i$ con ϕ_i (fuerza, fuerza electromotriz)

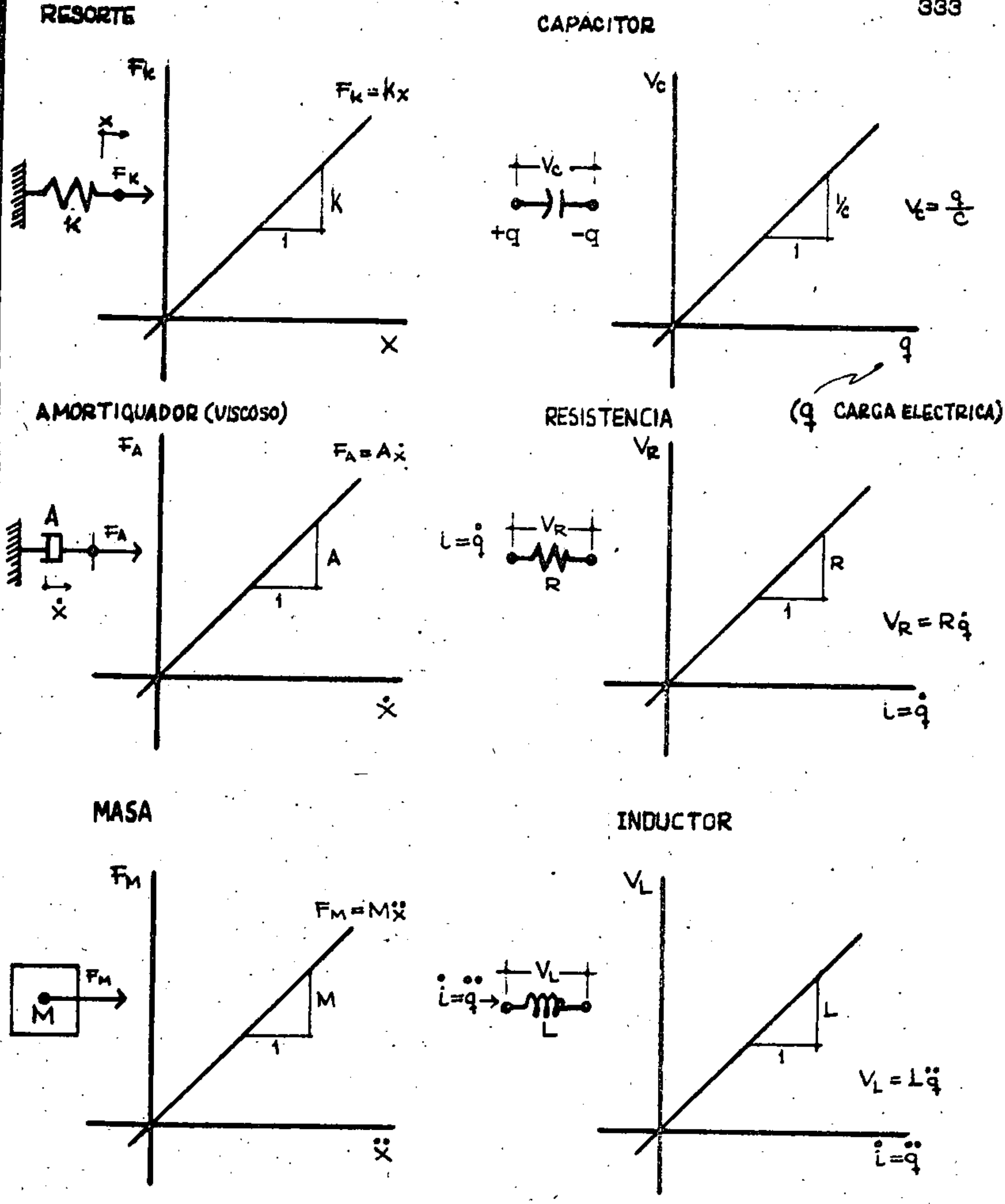
$k \sim \frac{1}{C}$ con ε (rigidez elástica, elastancia)

$A \sim R$ con δ (amortiguamientos, resistencia: disipación)

$M \sim L$ con μ (masa, "masa" electromagnética)

Se tendría para circuitos eléctricos o mecánicos elementales una sola ecuación que gobierna a ambos

$$\mu\ddot{\xi} + \delta\dot{\xi} + \varepsilon\xi = \phi$$



ANALOGIAS ENTRE ELEMENTOS

C.A.D.A. 1976

FIG. 5.A. 12

En la figura 5.A.13 se tiene la analogía entre un circuito eléctrico y un circuito mecánico, para los cuales se ha despreciado el elemento disipador o resistivo ($A=R=\delta=0$).

La derivación de las expresiones particulares (sistema eléctrico y sistema mecánico) guardan también un paralelismo de procedimientos a partir de uno o varios principios:

Principio	Principio
Ley de Kirchoff: $\Sigma V = 0$	Ley de Newton: $\Sigma F = 0$
$V_L + V_C = V$	$F_M + F_k = 0$
$V_L = L\dfrac{di}{dt} = L\dfrac{d^2q}{dt^2} = L\ddot{q}$	$F_M = M\ddot{x}_M$
$V_C = \dfrac{q}{C}$	$F_k = kx$
	si $x = x_M - \Delta$
	$M(\ddot{x} + \ddot{\Delta}) + kx = 0$
$\boxed{L\ddot{q} + \dfrac{q}{C} = V}$	$\boxed{M\ddot{x} + k\dot{x} = -M\ddot{\Delta}}$

Las redes de flujo correspondientes están en la figura 5.A.14, en donde la línea discontinua establece una vinculación con la referencia fija con la cual, sin embargo, no hay transmisión de acción (flujo de fuerzas).

b) En el estudio directo y analógico de sistemas generales (de n grados de libertad) las redes de flujo permiten un planteamiento más sistemático de los problemas y, a través de las analogías, una mejor explicación mutua entre los sistemas representados. Por ejemplo, a partir de la red de flujo pueden establecerse las ecuaciones de los tres sistemas mostrados, además de poder hacer las analogías correspondientes (figura 5.A.15).

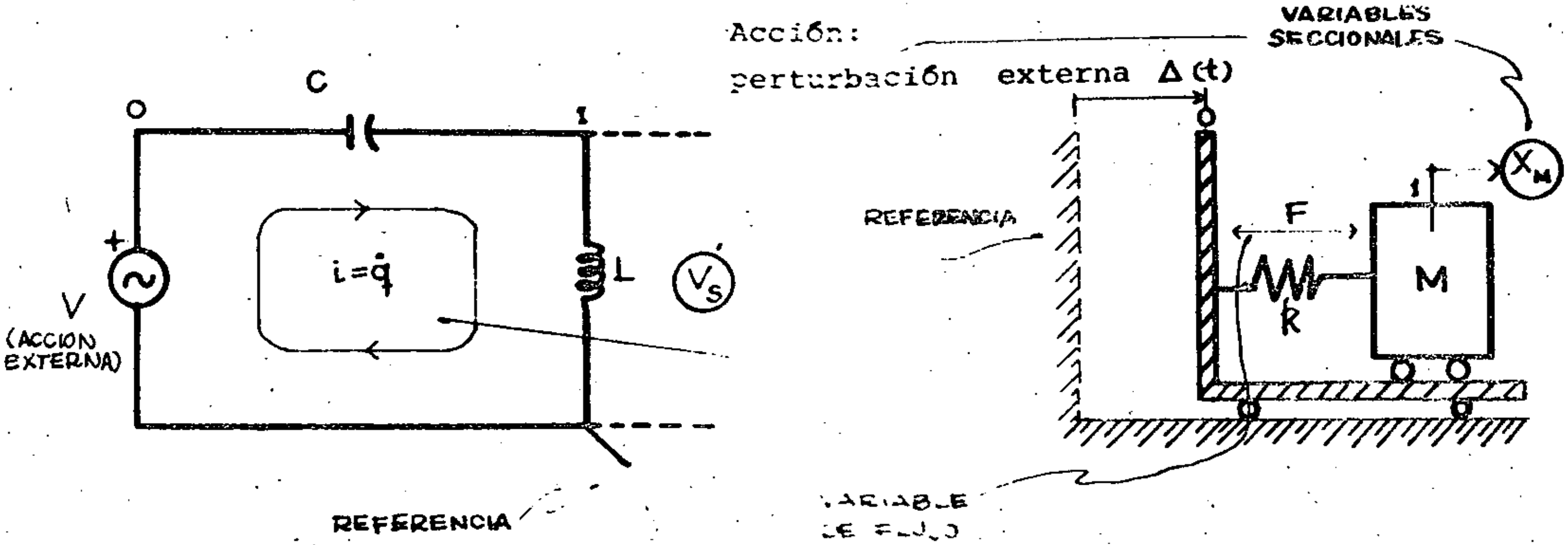
c) En ocasiones resulta conveniente establecer la "red de flujo" requerida para resolver el modelo matemático indicando en él, además de las variables las operaciones que habrán de realizarse.* Esto es particularmente útil en los análisis mediante simulación analógica de sistemas. Suele introducirse en la simulación una notación simbólica especial, sin embargo, daremos por ahora la representación mediante "redes".

---

* Para distinguir estas redes de flujo de las anteriores suele denominárseles redes de flujo de señales (RFS).

CIRCUITO ELECTRICO

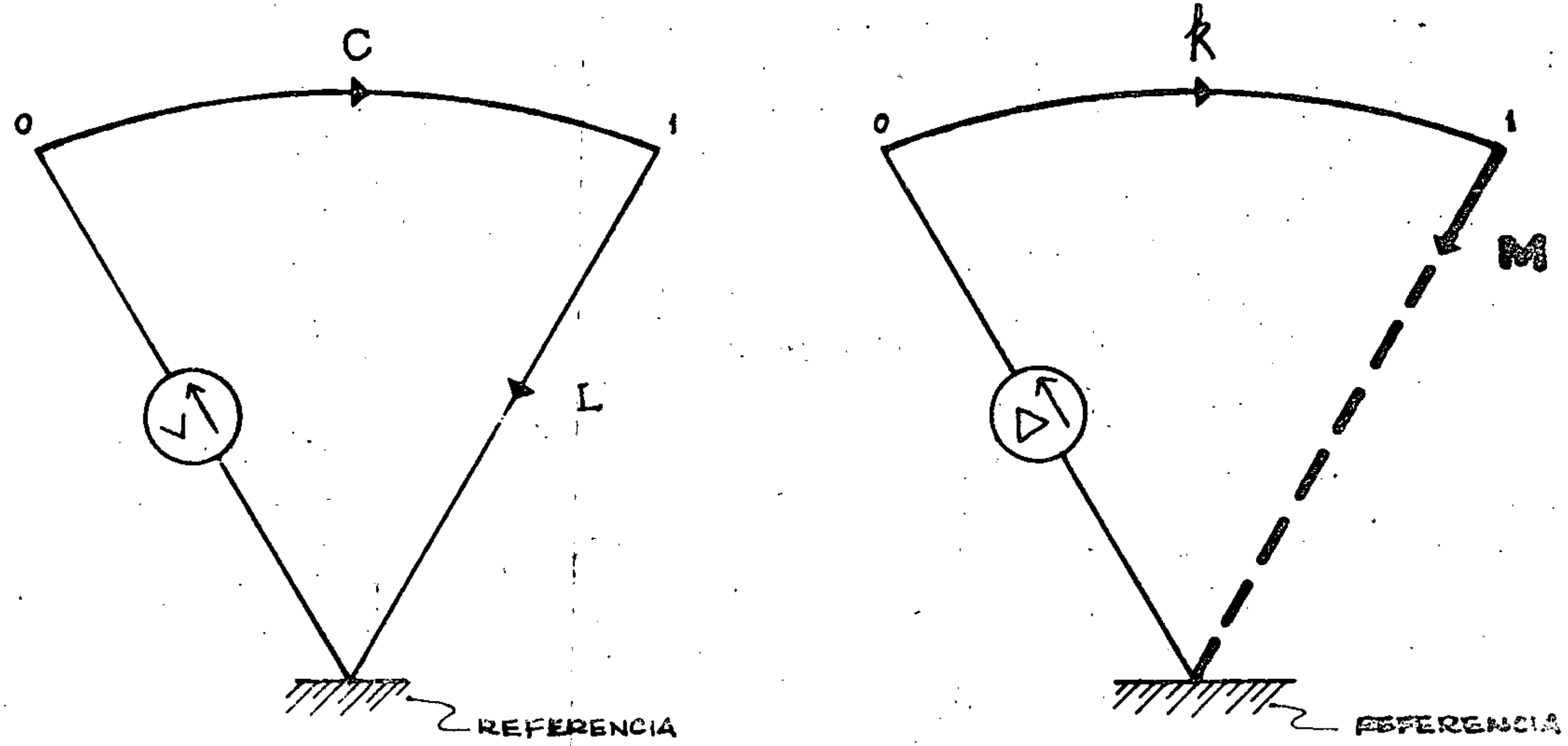
CIRCUITO MECANICO



C.A.D.A. 1976

FIG. 5.A. 13

REDES DE FLUJO CORRESPONDIENTES AL CIRCUITO ELECTRICO Y AL CIRCUITO MECANICO



(LA LÍNEA DISCONTÍNUA ESTABLECE UNA VINCULACIÓN CON LA REFERENCIA FIJA [illegible] LA CUAL, SIN EMBARGO, NO HAY UNA TRANSMISIÓN DE ACCIÓN (FLUJO DE FUERZAS)).

FIG. 5. A . 14

C.A.D.A. 1976

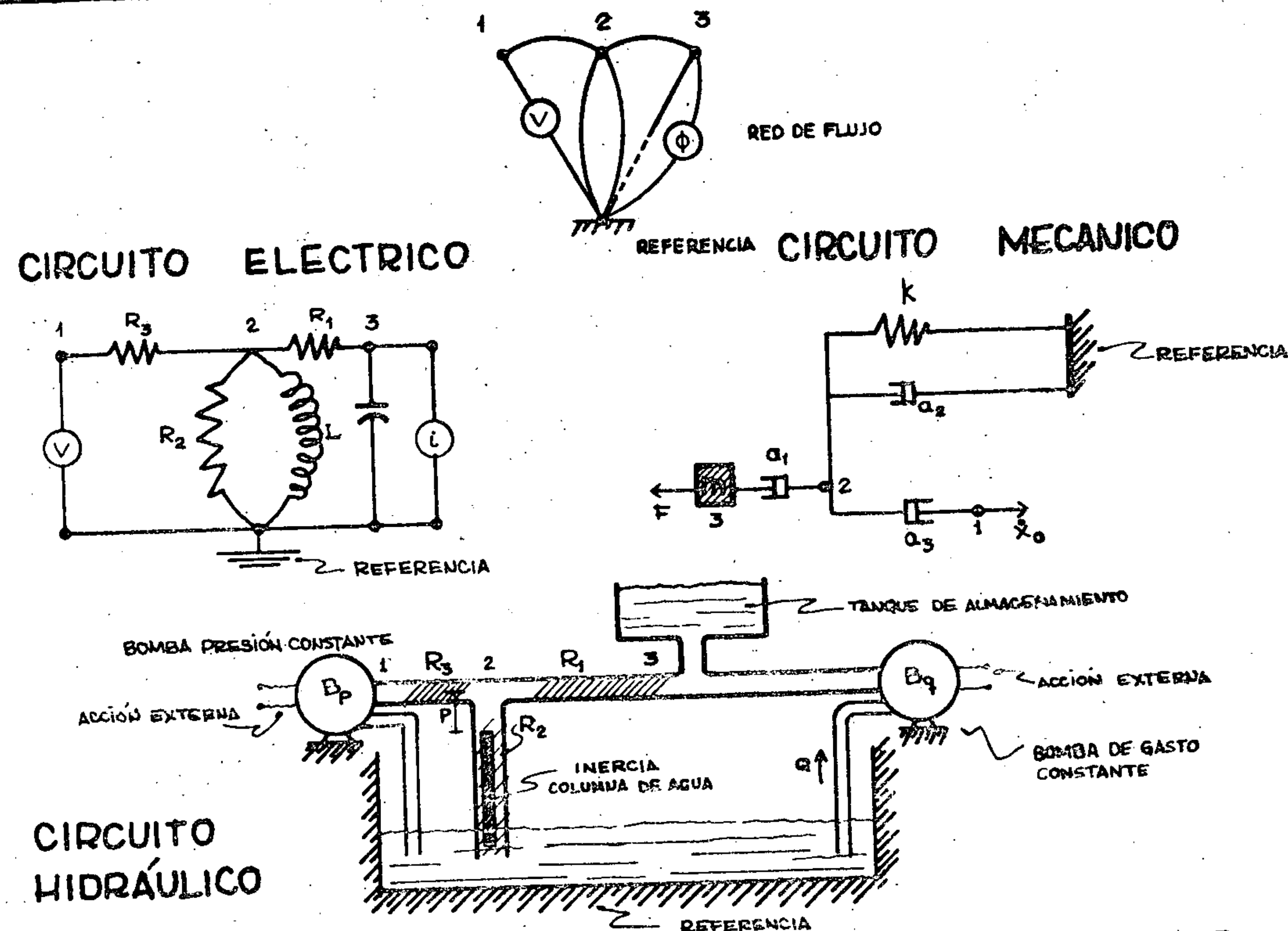


FIG. 5.A.15

C.A.D.A. 1976

• Supongase un sistema algebraico: un sistema en estado estacionario o en equilibrio estático (en reposo) dado por

$$a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1$$

$$a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2$$

$$a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3$$

o bien

$$A\bar{X}=\bar{b}$$

en donde $\bar{b}$ representa las entradas (inputs) del sistema, $\bar{X}$ las respuestas (outputs) y A es la matriz de coeficientes. En particular, en la teoría de redes, a los coeficientes a_{ij} que "operan" o transforman a x_j en x_i

$$x_i=a_{ij}x_j$$

suele denominárseles ganancias o transmitancias. Estos coeficientes se anotarán a lo largo de las ramas, en las cuales habrá algún elemento (componente del sistema) que efectuará esa transformación, pero que por ahora no se especificará.

Despejando en cada una de las ecuaciones las variables asociadas a la diagonal principal de A

$$x_1 = \frac{1}{a_{11}} b_1 - \frac{a_{12}}{a_{11}} x_2 - \frac{a_{13}}{a_{11}} x_3$$

$$x_2 = \frac{1}{a_{22}} b_2 - \frac{a_{21}}{a_{22}} x_1 - \frac{a_{23}}{a_{22}} x_3$$

$$x_3 = \frac{1}{a_{33}} b_3 - \frac{a_{31}}{a_{33}} x_1 - \frac{a_{32}}{a_{33}} x_2$$

Separando las entradas b_1/a_{11}, b_2/a_{22} y b_3/a_{33} de manera de hacerlas explícitas en la gráfica y asignando a las ramas concurrentes en cada nodo correspondiente a x_1, x_2 y x_3 la contribución de las demás variables, se tendrá la figura 5.A.16.

- En los sistemas propiamente dinámicos (con variables dependientes del tiempo), además de establecer las ecuaciones que gobiernan al fenómeno, en las aplicaciones con resolución directa (cálculo analógico), es usual incluir las condiciones iniciales (en particular en el estudio de los transitorios).

  De esta manera no basta especificar, en un sistema mecánico elemental por ejemplo, la ecuación

  $$\ddot{x} + c\dot{x} + kx = f(t)$$

  sino que habrán de incluirse también (en t=o, por ejemplo)

  $$x(o) = x_o$$

  $$\dot{x}(o) = \dot{x}_o$$

  Para plantear todo el "proceso" de construcción de la ecuación diferencial, junto con las condiciones iniciales, introduciremos las siguientes variables

  $$\dot{x} = \frac{dx}{dt}$$

  teniéndose

  $$\ddot{x} = \frac{d\dot{x}}{dt}$$

FLUJO DE SEÑALES APLICADO A ECUACIONES ALGEBRAICAS

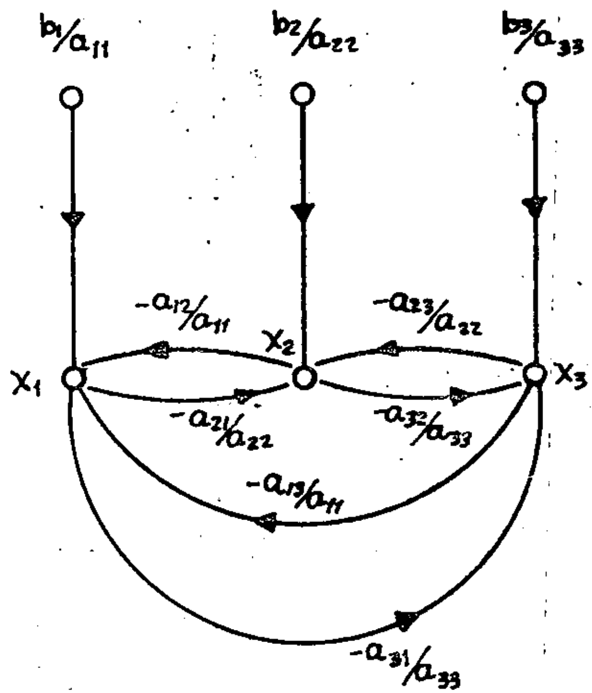
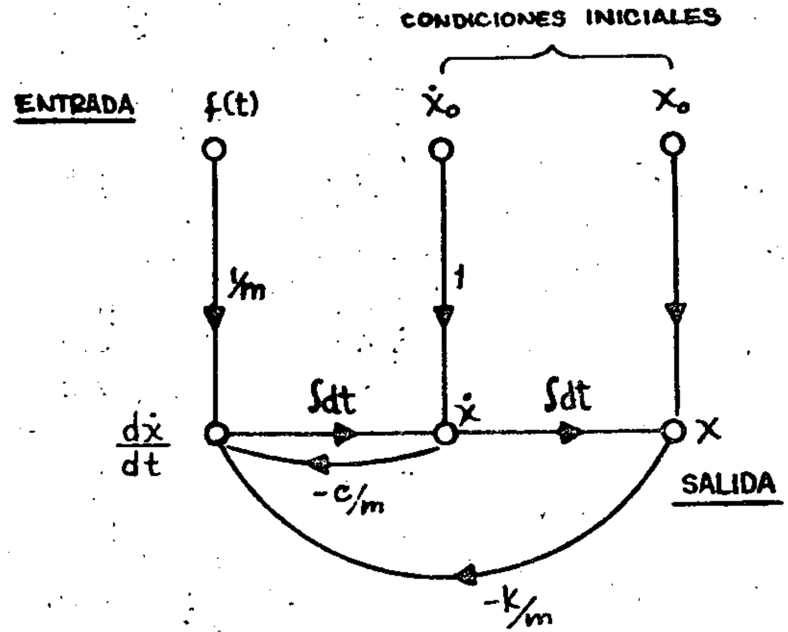


FIG. 5. A. 16

FLUJO DE SEÑALES APLICADO A ECUACIONES DIFERENCIALES



$$\frac{d\dot{x}}{dt} = \frac{1}{m}f(t) - \frac{c}{m}\dot{x} - \frac{k}{m}x$$

FIG. 5. A. 17

entonces la ecuación resulta

$$m\,\frac{d\dot{x}}{dt} + c\dot{x} + kx = f(t) \qquad (A)$$

en el proceso de integración se tendrán

$$x = \int_0^t \frac{dx}{dt}\,dt + x_0 \qquad (B)$$

$$\dot{x} = \int_0^t \frac{d\dot{x}}{dt}\,dt + \dot{x}_0 \qquad (C)$$

o sea que en el proceso al considerar x y $\dot{x}$ habrá que incluir los valores x_0 y $\dot{x}_0$ necesarios para determinar completamente al problema. Esta misma situación se observará en el análisis de sistemas a través del cálculo operacional (transformada de Laplace) y del cálculo analógico, cuando se incluyan los transitorios ya señalados. La red de flujo para (A), (B) y (C) (después de "normalizar" la ecuación (A), dividiéndola entre m, y pasar todos los términos a un solo miembro), se presenta en la figura 5.A.17.

Nota: En las redes de flujo de señales es frecuente sustituir el símbolo $\int$ por $\frac{1}{D}$ (operador inverso de derivada). Esta sustitución simbólica, en el dominio del "tiempo real", resulta mejor establecida mediante el álgebra de operadores introducida con la transformada de Laplace en el campo complejo.

d) Como se ha señalado las representaciones mediante diagramas de flujo de señales resultan de relevante utilidad en el análisis, la analogía e incluso, de manera muy destacada, en la simulación de sistemas. En la simplificación y sistematización de estas representaciones esquemáticas suelen emplearse símbolos denominados diagramas de bloques dentro de los cuales se expresan las operaciones indicadas en las redes de flujo (de señales) anteriores. Los símbolos particulares que se emplean en el cálculo analógico no difieren esencialmente, en general, de los bloques operacionales (Fig. No. 5.A.18), para la ecuación que se había establecido anteriormente

$$\frac{d\dot{x}}{dt} = \frac{1}{m} f(t) - \frac{c}{m} \dot{x} - \frac{k}{m} x$$

el diagrama de bloques, resulta, como se había previsto, muy similar a la red de flujo de señales (figura 5.A.19).

e) Los diagramas de bloques tienen una aplicabilidad que trasciende a las meras operaciones matemáticas o físicas expuestas. Es factible esquematizar algunos procesos: sociales, económicos, de aprendizaje, etc., mediante los cuales pueda regularse o estabilizarse el funcionamiento, comportamiento o la conducta de sistemas. Por ejemplo, supóngase que se desea regular un proceso de enseñanza - aprendizaje tomando en cuenta las siguientes variables

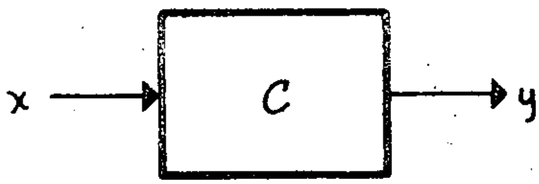
E_0: exposición inicial (contenido y metodología),
e_1: exposición modificada (de acuerdo a la conducta de un individuo o conjunto de individuos)
a: factor de asimilación individual o de grupo (positivo, menor o igual a 1)
C: correcciones a la exposición
f: factor de corrección individual o de grupo (positivo, menor o igual a 1)
R: respuesta o conducta observable

Se tendría la figura 5.A. 20.

En algunos casos es posible asignar valores numéricos a las variables implícitas, en estas situaciones sería factible plantear las siguientes expresiones

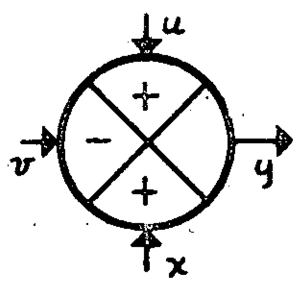
BLOQUES OPERACIONALES

MULTIPLICACIÓN POR UNA CONSTANTE



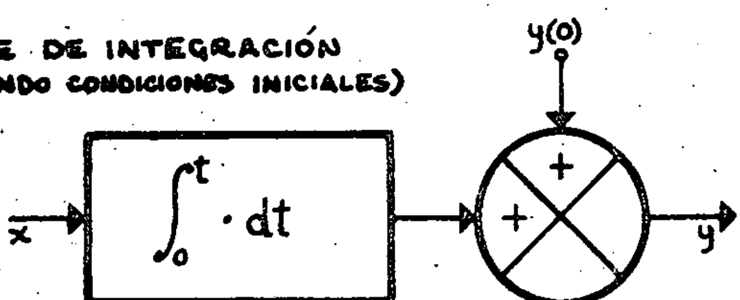
$cx = y$

BLOQUE DE SUMA



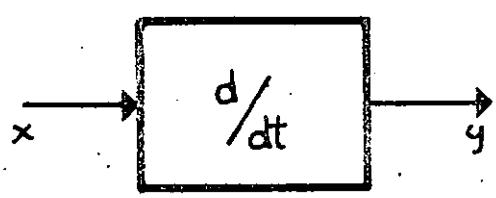
$u - v + x = y$

BLOQUE DE INTEGRACIÓN (INCLUYENDO CONDICIONES INICIALES)



$\int_0^t x\,dt + y(0) = y(t)$

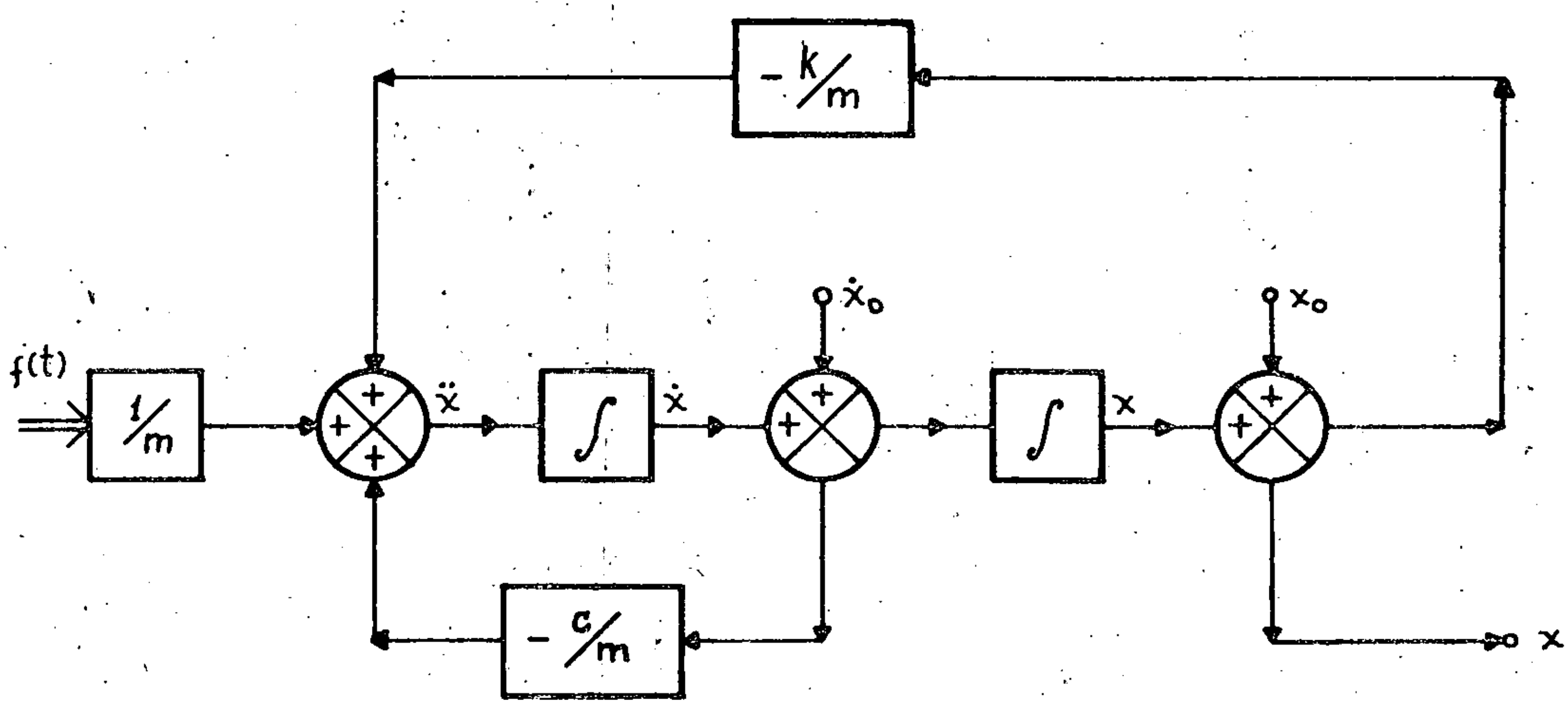
DERIVACIÓN



$\frac{dx}{dt} = y$

FIG. 5.A. 18

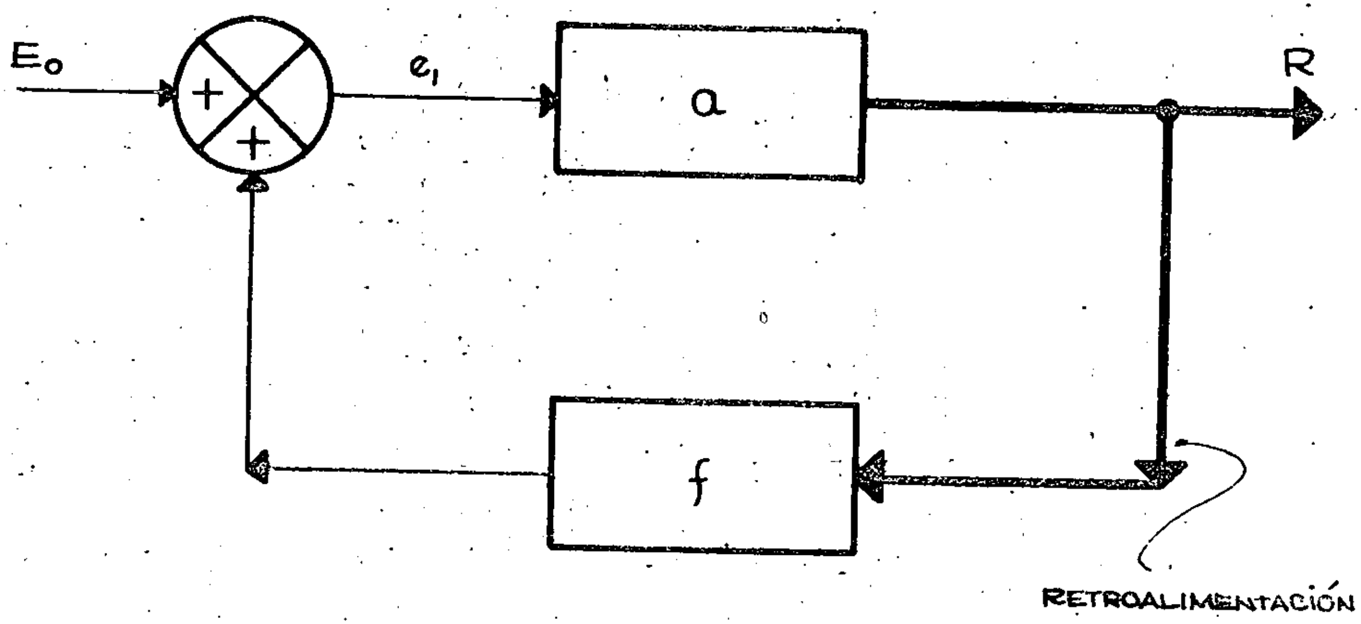
DIAGRAMA DE BLOQUES OPERACIONALES



$$\boxed{\ddot{x} = \frac{1}{m} f(t) - \frac{c}{m}\dot{x} - \frac{k}{m} x}$$

FIG. 5. A. 19

FLUJO CON RETROALIMENTACION



C.A.D.A. 1976

FIG. 5.A.20

$$R = ae_1$$

$$C = fR$$

$$e_1 = C + E_o$$

de las cuales se obtiene, por sustituciones,

$$R = a\,(fR + E_o)$$

despejando a R:

$$R = \frac{a}{1-af}\,E_o$$

o bien

$$\frac{R}{E_o} = \frac{a}{1-af}$$

la cual nos permite establecer algún criterio de "eficacia", no solo en términos de la asimilación (a) del alumno, sino también del factor de corrección (f) en un proceso retroalimentado (bajo control).

Los diagramas de bloques pueden, como se ha visto, aplicarse en la simulación de sistemas elementales, planteados con ecuaciones diferenciales o algebraicas. Desde luego que su aplicabilidad no se restringe a estos niveles de problemas. Es posible esquematizar por este medio sistemas con variable discreta (ecuaciones de diferencias) y mediante el análisis de la interacción de subsistemas representar y analizar sistemas generales de un elevado número de grados de libertad.

Bibliografía

Referencias citadas: 3,5,8,10,11,12,13,14,15;

17. Henley, E.J. y R.A.Williams, "Graph Theory in Modern Engineering". Academic Press. 1973.

18. Gerez,V. y V.Czitrom. "Circuitos y sistemas electro-mecánicos". Vols. 1 y 2. Representaciones y servicios de ingeniería. México. 1975.

19. Padulo, L. y M.A. Arbib "System Theory", Saunders, Co. 1974.

20. Porter, B. "Synthesis of Dynamical Systems". Nelson. 1969.

21. Distefano, J.J., A.R. Stubberud e I.J. Williams, "Retroalimentación y sistemas de control". McGraw-Hill (Schaum). 1972.

22. Parsegian, V.L. "This Cybernetic World". Doubleday and Co. 1972.

5.A.4. Análisis complejo de sistemas dinámicos

Hemos visto como un amplio número de problemas de los sistemas dinámicos requieren de la solución de ecuaciones diferenciales ordinarias. Cuando éstas son modelos matemáticos de sistemas, con parámetros constantes, con un reducido número de grados de libertad, sujetos a funciones de entrada sencillas y por consiguiente correspondientes a configuraciones ya dadas y relativamente simples, son aplicables los procedimientos analíticos (directos) sugeridos en manuales de "matemáticas aplicadas". Estos métodos son útiles como un antecedente conveniente para el análisis y la síntesis de sistemas mucho mas complejos, en cuanto a las ideas elementales que comprehenden, pero resultan demasiado laboriosos, complicados y en ocasiones innecesarios en los sistemas dinámicos que suelen abordarse en la actualidad.

Es fácil convencerse de que los modelos de sistemas reales implican usualmente un elevado número de grados de libertad, de que la interacción entre los subsistemas no está dado en forma simple, si es que está dado, y que las perturbaciones a las que esta sujeto tampoco son triviales (de estas últimas nos ocuparemos en el análisis de señales).

En el estudio y planteamiento de modelos matemáticos de sistemas puede decirse que el problema es mas bien metodológico que de fundamentación teórica: de poco sirve conocer todos los teoremas de existencia y unicidad de las ecuaciones diferenciales si no se dispone de procedimientos "ad hoc" no necesariamente para resolverlas sino cuando menos para analizarlos, y con frecuencia para plantearlas, y obtener de ellas información que en muchos casos sacrifica la "exactitud" de una posible solución cerrada, para obtener datos cualitativos o cifras que expresen en alguna forma el comportamiento global, o al límite, o la estabilidad del sistema, etc.

Una de las mas poderosas herramientas que se ha utilizado con este fin es el de las Transformadas integrales que son expresiones de la forma

$$f(\zeta) = \int F(t)\, K(t, \zeta)\, dt$$

en donde

$f(\zeta)$ es la "transformada integral" de la función $F(t)$ respecto al nucleo (kernel) de la transformación $K(t, \zeta)$. En los sistemas dinámicos destacan dos tipos de transformadas, definidas por el núcleo y los límites de la integral: la transformada de Laplace y la de Fourier (de hecho estas dos no son independientes, una se puede expresar en términos de la otra).

Una propiedad sobresaliente de la transformada de Laplace (y de las otras transformadas, bajo ciertas condiciones) es la de poder reducir a las ecuaciones diferenciales en ecuaciones algebraicas, en el campo complejo.

Si denotamos con $f(s)$ a la transformada de Laplace de una función $F(t)$, definida para $t>0$, lo cual suele expresarse

$$\mathcal{L}\left\{ F(t) \right\} = f(s) = \int_0^{\infty} F(t) e^{-st} dt$$

en donde

$s = \sigma + j\omega$, es una variable compleja

$\sigma = \text{Re}(s)$ (parte real de s)

$\omega = \mathcal{I}m(s)$ (parte imaginaria de s)

y

$j = \sqrt{-1}$

entonces es fácil establecer que

$$\mathcal{L}\left\{\frac{dF(t)}{dt}\right\}= sf(s) - F(o^{+})$$

en donde $F(o^{+})$ es el valor de $F(t)$ cuando $t \to o$, del lado positivo de t. Obsérvese que en la "transformada" ya no aparece el operador de derivación $\frac{d}{dt}$.

Aplicando reiteradamente la transformada a la derivada de $\frac{dF}{dt}$, o sea a la segunda derivada, se obtiene

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^2F(t)}{dt^2}\right\} = s^2f(s) - sF(o) - \dot{F}(o)$$

y así sucesivamente encontraríamos expresiones algebraicas de grado "n" en s, correspondientes a las derivadas de orden "n" sobre F(t). De esta manera la solución de una ecuación diferencial, en t, se reduce a la de una ecuación algebraica, en s.

Por ejemplo, la ecuación del oscilador mecánico

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = p(t) \quad (p(t)\text{: perturbación})$$

se puede transformar en la ecuación algebraica

$$(s^2X(s)-sx(o)-\dot{x}(o))+2\eta\omega(sX(s)-x(o))+\omega^2X(s)=\frac{1}{m}P(s)$$

donde

$$(s^2+2\eta\omega s+\omega^2)X(s)=\frac{1}{m}P(s)+sx(o)+\dot{x}(o)+2\eta\omega x(o)$$

despejando a X(s):

$$X(s)=\frac{\frac{1}{m}P(s)}{s^2+2\eta\omega s+\omega^2}+\frac{(s+2\eta\omega)x(o)+\dot{x}(o)}{s^2+2\eta\omega s+\omega^2}$$

Mediante el desarrollo de estas expresiones en fracciones parciales, el uso de algunas propiedades y de tablas es posible encontrar la "transformada inversa de Laplace", que se indica

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{f(s)\right\} = F(t)$$

en nuestro caso

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{X(s)\right\} = x(t).$$

Si suponemos que

$$Y(s) = \frac{1}{m} P(s)$$

y que las condiciones iniciales son nulas

$$x(o) = \dot{x}(o) = o$$

lo cuál puede indicar o que el sistema empezó a ser impulsado o perturbado por "p(t)" a partir de t = o, o bien que las "condiciones iniciales" han dejado de influir en la respuesta del sistema (representan, en general, un fenómeno transitorio expresado por funciones exponenciales que decrecen con el tiempo).

Este caso, muy frecuente en el análisis de sistemas, expresará las respuestas X(s) debidas exclusivamente a la perturbación Y(s)

$$X(s) = \frac{1}{s^2+2\eta\omega s+\omega^2} \; Y(s)$$

en la cual

ω es la frecuencia natural del sistema y η es el coeficiente de amortiguamiento del mismo.

Podemos también escribir

$$\frac{X(s)}{Y(s)} = \frac{1}{s^2+2\eta\omega s+\omega^2}$$

que suele expresarse* con F(s) y representa, en el campo complejo (transformada de Laplace), la relación entre la respuesta (output) y la entrada (input). Se le denomina función de transferencia del sistema (o simplemente función del sistema)

Examinando el denominador de la función de transferencia se observa que es la misma que se denomina "ecuación característica" de la correspondiente ecuación di

*en la transformada de Fourier suele usarse la expresión H(s).

ferencial*. Sin necesidad de resolver la ecuación totalmente es fácil ver que las raíces de

$$s^2+2\eta\omega s+\omega^2 = o$$

son

$$s=\left(-\eta\pm\sqrt{\eta^2-1}\right)\omega$$

Si $\eta>o$ de la expresión anterior se puede concluir que el sistema es <u>estable</u>. Si $\eta<o$ el sistema es <u>inestable</u>.

En particular si $o<\eta<1$ las raíces son conjugadas complejas, pudiendose escribir

$$s=\left(-\eta\pm j\sqrt{1-\eta^2}\right)\omega$$

Si $Y(s)$ correspondiese solo a un impulso en $t=o^+$ la respuesta (transitoria) sería de la forma oscilatoria amortiguada mostrada en la figura 5.A.21.

Debe hacerse notar que no hubo necesidad de resolver totalmente la ecuación para obtener estas y otras muchas características del comportamiento del sistema.

Es relativamente sencillo mostrar que si en

$$F(s) = \frac{X(s)}{Y(s)}$$

la función de entrada, en el tiempo real t, es de forma senoidal

$$y(t) = A \operatorname{sen} \bar{\omega} t$$

entonces la respuesta estacionaria, sin transitorios, es de la forma

$$x_{est}(t) = A\left|F(j\bar{\omega})\right| \operatorname{sen}(\bar{\omega}t+\psi)$$

*La ecuación característica de la ecuación diferencial, de coeficientes constantes $\frac{d^ny}{dt^n}+a_{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}+\ldots+a_1\frac{dy}{dt}+a_oy=q(t)$ se obtiene sustituyendo e^{rt} en la ecuación para $q(t)=o$; después de sustituir y cancelar e^{rt} se obtiene: $r^n+a_{n-1}r^{n-1}+\ldots+a_1r+a_o=o$

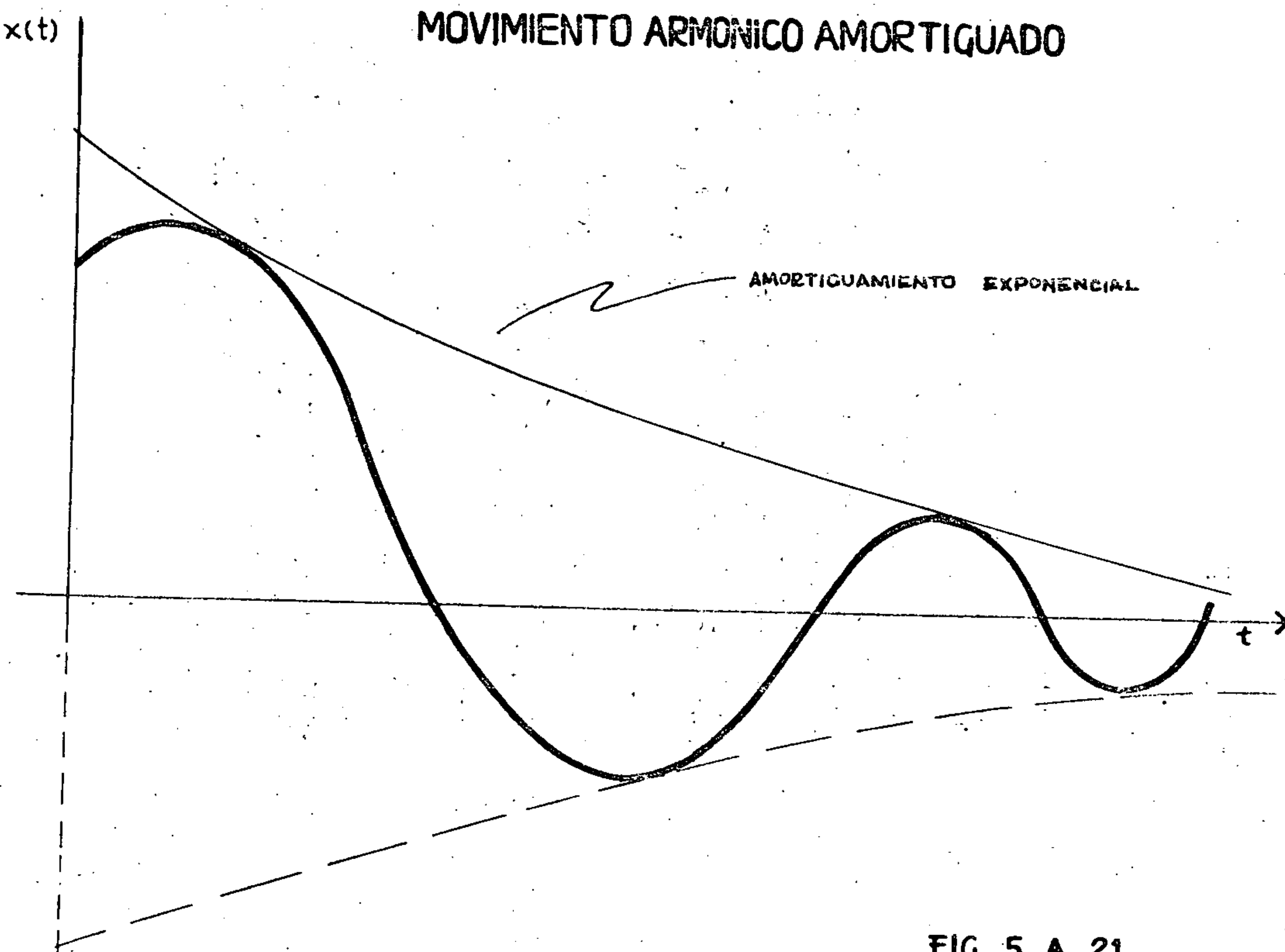

MOVIMIENTO ARMONICO AMORTIGUADO
x(t)
AMORTIGUAMIENTO EXPONENCIAL
t

FIG.5.A.21

en donde ψ es el corrimiento angular o fase (o desfasamiento) debido al sistema y que puede calcularse a partir de $\psi = \arg F(j\bar{\omega})$.

En este caso la función de transferencia resulta

$$F(j\bar{\omega}) = \frac{1}{-\bar{\omega}^2+2j\eta\omega\bar{\omega}+\omega^2}$$

en particular si $\eta=0$

$F(j\bar{\omega}) = \frac{1}{\omega^2-\bar{\omega}^2}$, la cuál tiende a infinito cuando $\bar{\omega}\to\omega$, ésto es cuando la perturbación senoidal de frecuencia $\bar{\omega}$ tiende a la frecuencia natural del sistema. Este fenómeno que da lugar a valores elevados de la respuesta para determinadas frecuencias $\bar{\omega}_r$ se denomina resonancia. El amortiguamiento en estas condiciones tiende a disminuir la respuesta de resonancia, entre mayor es el amortiguamiento menor es esta respuesta.

Para un sistema dado la frecuencia natural ω es constante e igual a $\frac{1}{T}$, siendo T el período de las oscilaciones naturales. Incluyendo la constante T, que resulta de multiplicar por T^2, en la función de entrada se obtiene

$$F(j\omega) = \frac{1}{-\omega^2T^2+2\eta j\omega T+1}$$

en la cuál ω es la frecuencia de excitación. Nos interesa ahora hacer un análisis de la magnitud de la función $F(j\omega)$. A la función de transferencia expresada en términos de "$j\omega$" le suelen denominar "función de respuestas de frecuencia".

Se observa que para $\omega=0$, $|F(j\omega)|=1$ y que si $\omega\to\infty$

$$|F(j\omega)| = \left|\frac{1}{-\omega^2T^2}\right|$$

De estos valores extremos podemos inferir que

cuando $\omega \to o$, $\left| F(j\omega) \right| \to 1$

cuando $\omega \to \infty$, $\left| F(j\omega) \right| \to \left| \frac{1}{-\omega^2 T^2} \right|$

y además cuando $\omega = T^{-1}$, $F(j\omega) = \frac{1}{2\eta j}$, o sea $\left| F(j\omega) \right| = \frac{1}{2\eta}$

Todo esta información, en el campo de las frecuencias puede aproximarnos al comportamiento de la relación entre la respuesta del oscilaaor y la entrada, sin necesidad de haber obtenido la solución total de la ecuación diferencial.

Para ralizar lo anterior es usual emplear los diagramas de Bode, que son representaciones gráficas en un plano cartesiano "semi-logarítmico". En el eje horizontal se indican las frecuencias ω de la excitación y en el eje vertical los valores de $\left| F(j\omega) \right|$, denominados ganancias, en decibeles:

$$\text{decibel} = \text{db} = 20 \log_{10} \frac{\text{magnitud de la respuesta}}{\text{magnitud de la excitación}}$$

Es fácil, concluir que para valores grandes o pequeños de ω, en esta gráfica semi-logarítmica el comportamiento se aproxima al de una línea recta. A estas rectas, que denominaremos asíntotas, tiende el comportamiento de $\left| F(j\omega) \right|$, exceptuando el punto $\omega = 1/T$. Se tienen, en decibeles:

para ω pequeña $\left| F \right|_{db} = 2 \log_{10} 1 = o$

para ω grande $\left| F \right|_{db} = - 20 \log_{10} \omega^2 T^2 = -40 \log_{10} \omega T$

la primera expresión es la de una línea recta horizontal y la segunda tiene una pendiente negativa de 40 decibeles/década (la base de los logarítmos, en este caso, es diez).

Ambas se intersectan en $-40 \log_{10} \omega T = 0$ ó sea cuando $\omega T = 1$, $\omega = \frac{1}{T}$. En este punto habrá que indicar el valor obtenido antes $\left| F \right|_{db} = 20 \log_{10} \frac{1}{2\eta}$ (resonancia

En la figura 5.A.22 se indican las asíntotas, el valor de $|F|_{db}$ en $\omega = 1/T$ y la curva punteada "razonablemente" aproximada a la función $F(j\omega)$.

El proceso de aproximación anterior puede representar en el análisis de sistemas un método relevante. Sin embargo, un aspecto aun más importante proviene del proceso inverso: dadas $X(s)$ y $Y(s)$, en el campo complejo, en el tiempo real o a través de las frecuencias, caracterizar el sistema. Supóngase, por ejemplo, que se desea determinar aquella parte* de un sistema cuya función de transferencia está dada por la curva punteada de la figura 5.A.22. Esto se puede lograr excitando el sistema, considerado como una "caja negra" (figura 5.A.23), trazar las asíntotas del diagrama de Bode, y los puntos particulares (como el de resonancia) y reconstruir el sistema**, ésto es, a través de $|F(j\omega)|$ encontrar el modelo matemático que aproxima a dicho comportamiento. Cabe hacer notar que el término de "caja negra", empleado equivocadamente en algunas áreas del conocimiento, no expresa algo "desconocido" o "misterioso", sino más bien algún sistema complejo, como lo puede ser el sistema nervioso de un animal o un sistema social, al cual podemos asociar un modelo matemático para una interrelación entrada-salida particular.

En la teoría de sistemas dinámicos resulta usualmente deseable combinar los distintos métodos que se han delineado en este apéndice; redes de flujo, diagramas de bloque y análisis complejo, para el estudio de sistemas complejos.

A senωt → $F(j\omega)$ → $x(t)$

FIGURA 5.A.23

* El sistema puede internamente ser mucho más complejo, pero si solo interesa caracterizarlo para establecer la relación $X(s)/Y(s)$ no habrá necesidad de incluir todas las partes o subsistemas que lo integran.

** En este experimento habrá que incluir un diagrama similar para "el corrimiento de fase".

DIAGRAMA DE BODE DE UN OSCILADOR ELEMENTAL

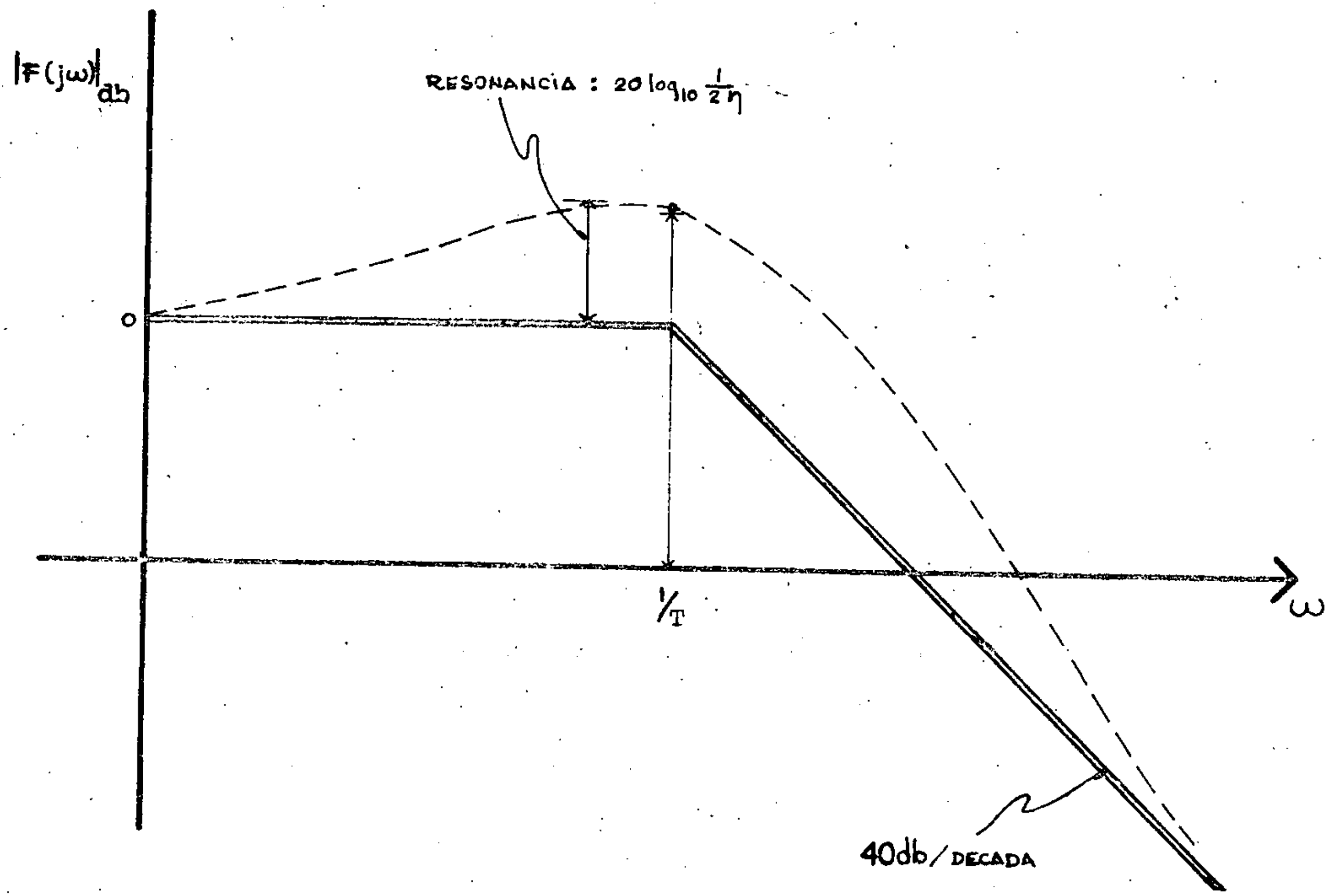


FIG.5.A.22

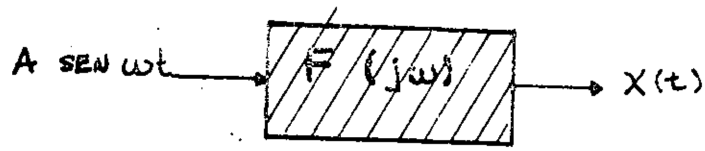


FIG.5.A.23

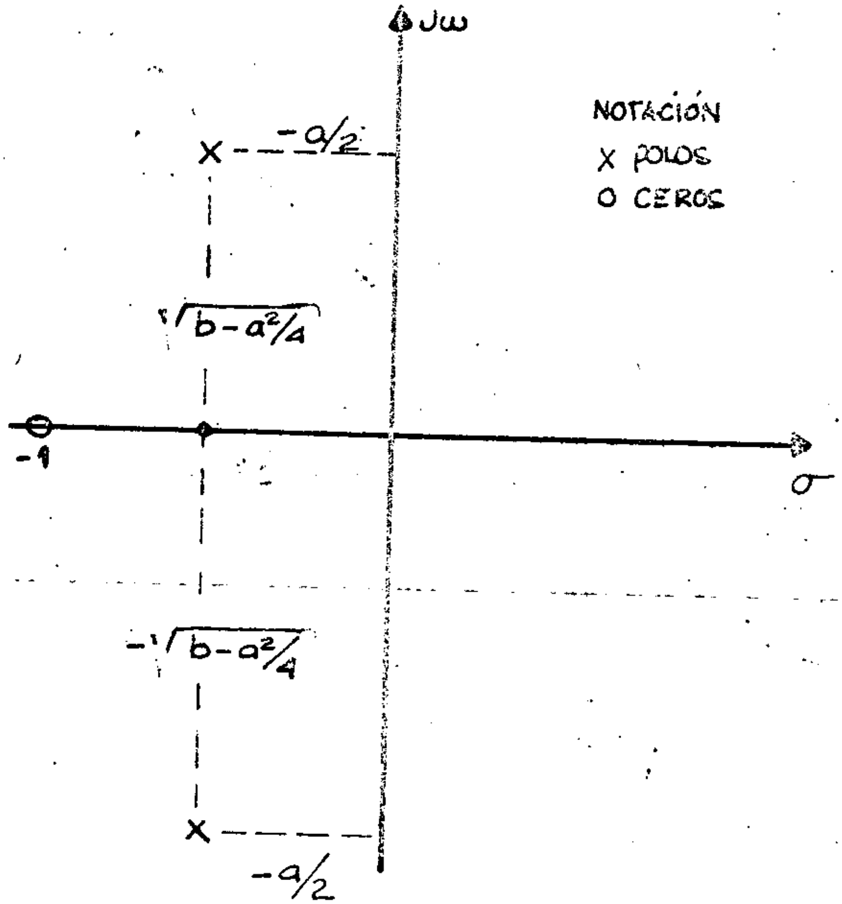


FIG.5.A.24

Supongamos uno, no muy complicado, que ilustre estas posibilidades. Supóngase que un oscilador (mecánico o eléctrico) tiene la ecuación

$$\ddot{x} + a\,\dot{x} + b \cdot x = h(t)$$

y se desea encontrar la respuesta

$$y = x + \dot{x}$$

Se supondrán las condiciones iniciales nulas.

Mediante la transformada de Laplace obtenemos

$$(s^2+as+b)X(s) = H(s)$$

$$Y(s) = (1+s)\,X(s)$$

por lo tanto

$$\frac{s^2+as+b}{1+s}\,Y(s) = H(s)$$

de la cual obtenemos la función de transferencia:

$$F(s) = \frac{Y(s)}{H(s)} = \frac{1+s}{s^2+as+b}$$

que es una expresión algebraica, en el plano complejo $s = \sigma + j\omega$. En general, la función de transferencia se expresa como el cociente propio de dos polinomios en s

$$F(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{p_n s^n + p_{n-1}s^{n-1} + \cdots + p_0}{q_m s^m + q_{m-1}s^{m-1} + \cdots + q_0} \qquad (m>n)$$

De las raíces del numerador y denominador puede obtenerse alguna "información" del comportamiento del sistema.

Para cada raíz del numerador ($P(s) = 0$), $F(s)$ toma el valor cero; por tanto a estas raíces se les denomina ceros de $F(s)$. Para cada raíz del denominador

($Q(s)=0$) el valor de $F(s)$ tiende a infinito, a estos valores se les denomina polos de $F(s)$. Es sencillo localizar los polos y ceros de $F(s)$ en el plano complejo;

considerando

$$F(s) = \frac{1+s}{s^2+as+b}$$

se tiene que para

$$s+1 = 0 \qquad \text{ó sea} \qquad (\sigma+j\omega) + 1 = 0$$

$$\sigma = -1 \qquad y \qquad \omega = 0$$

o sea que $F(s)$ tiene un cero en el eje de los reales (σ) en el punto -1.

$$s^2+as+b = 0$$

tiene las raíces

$$(\sigma+j\omega)_{1,2} = -\frac{a}{2} \pm j\sqrt{\frac{a^2}{4} - b}$$

o bien

$$(\sigma+j\omega)_{1,2} = -\frac{a}{2} \pm j\sqrt{b - \frac{a^2}{4}} \qquad (\text{si } b > \frac{a^2}{4})$$

o bien

$$\sigma_1+j\omega_1 = -\frac{a}{2} + j\sqrt{b - \frac{a^2}{4}} \quad ; \quad \sigma_1 = -\frac{a}{2}, \quad \omega_1 = \sqrt{b - \frac{a^2}{4}}$$

$$\sigma_2+j\omega_2 = -\frac{a}{2} - j\sqrt{b - \frac{a^2}{4}} \quad ; \quad \sigma_2 = -\frac{a}{2}, \quad \omega_2 = -\sqrt{b - \frac{a^2}{4}}$$

que son dos puntos al lado izquierdo del eje $j\omega$ (figura 5.A.24).

Este "mapa" de polos y ceros caracteriza completamente a $F(s)$ pero, además proporciona información global importante. Por ejemplo, el hecho de que los polos (x) tengan una parte real negativa establece que el sistema es estable y amortiguado, la razón de amortiguamiento será precisamente $a/2$. Como los polos tienen una parte imaginaria ($\pm\sqrt{b - \frac{a^2}{4}}$), la respuesta es de carácter <u>oscilatorio</u>.

Por otro lado, mediante construcciones gráficas, por medio de vectores entre polos y ceros, es posible calcular la respuesta en el <u>dominio del tiempo</u>.

Ejemplo. Sea el sistema con un grado de libertad de segundo orden, las ecuaciones originales

$$\ddot{x} + a\dot{x} + bx = h(t)$$

$$y = x + \dot{x}$$

podemos también plantearlas, como ya se había hecho antes, para obtener un sistema de ecuaciones diferenciales lineales, haciendo

$$x = x_1$$

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -bx_1 - ax_2 + h(t) \\ y &= x_1 + x_2 \end{aligned}\right\} \quad (A)$$

las tres últimas ecuaciones se pueden escribir

$$\left.\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} h \\ y &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \end{aligned}\right\} (B)$$

lo cuál nos permitirá visualizar representaciones de sistemas con dos o mas grados de libertad.

Podemos ahora plantear diagramas de bloques en el campo de la transformada de Laplace para las versiones (A) ó (B) de las ecuaciones anteriores (Fig. No. 5.A.25).

DIAGRAMA DE BLOQUES EN EL CAMPO DE LA TRANSFORMADA DE LAPLACE

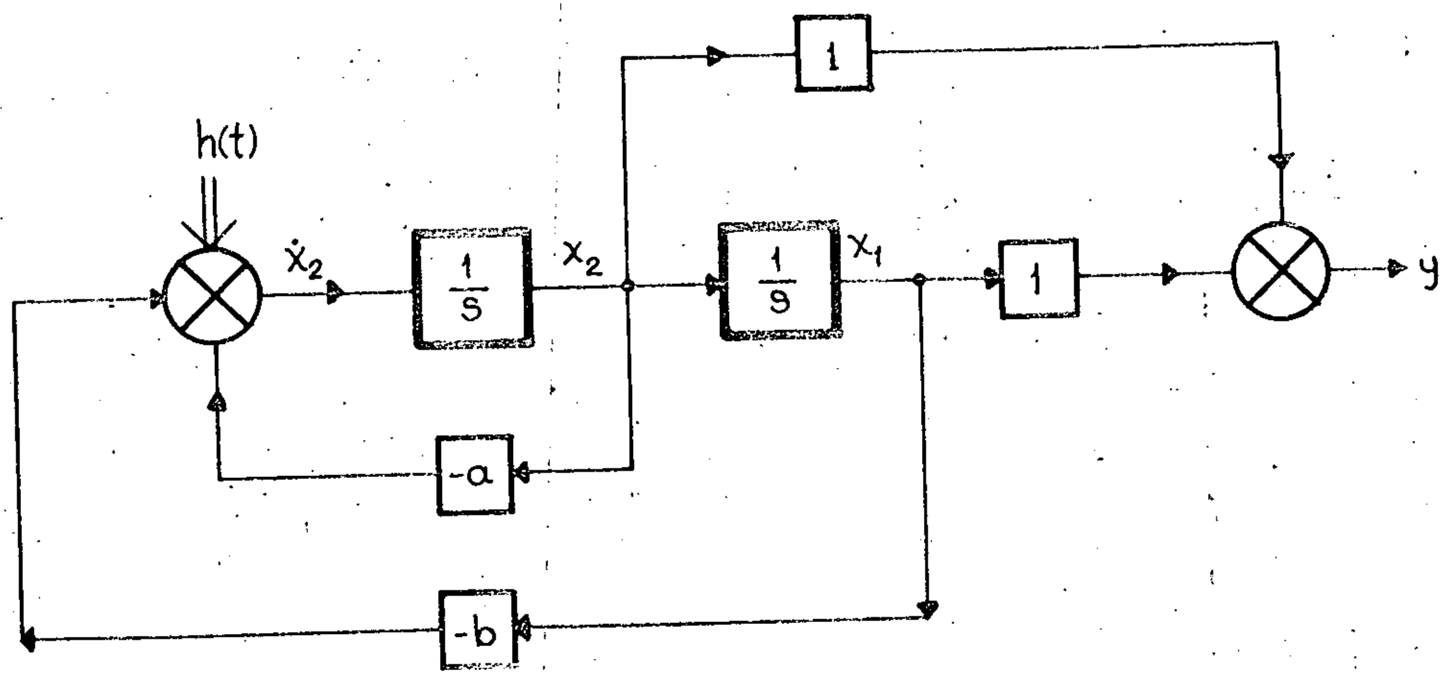
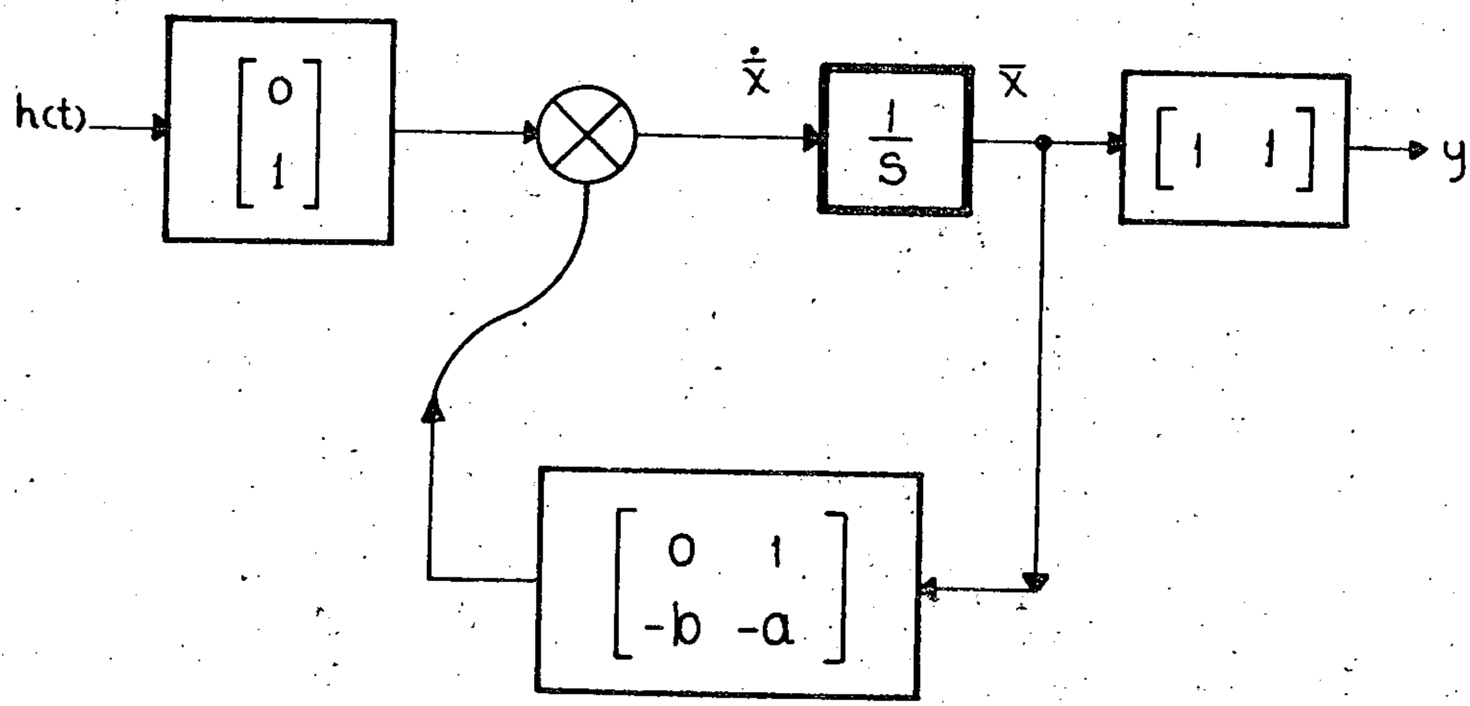


FIG.5.A.25

362

DIAGRAMA DE FLUJO PARA LAS ECUACIONES MATRICIALES



C.A.D.A. 1976

FIG. 5.A.26

En esta representación se toma en cuenta que si s, en el campo de la transformada, sustituye al operador de derivación respecto al tiempo, entonces $\frac{1}{s}$ corresponde al operador de integración. Es usual, como se indica en el diagrama de flujo, mezclar operadores (bloques) del campo complejo (o del campo de las frecuencias), con las variables en el dominio del tiempo real.

El diagrama de flujo para las ecuaciones matriciales da lugar a una representación mas simple en cuanto a los operadores (Fig. No. 5.A.26).

Todos estos diagramas combinan y utilizan en el análisis de sistemas generales los diversos métodos expuestos: Análisis complejo, a través de la transformada de Laplace y la de Fourier, redes de flujo y diagramas de bloque. Esto permite no solo una representación o un planteo mas simple, sino mas que ésto, la posibilidad de analizar un gran número de posibilidades de los sistemas dinámicos: comportamiento, estabilidad, caracterización, modificación de parámetros, sensibilidad, etc. En la bibliografía dada a continuación es posible encontrar aplicaciones muy interesantes a diversos campos del conocimiento.

Bibliografía

Referencias citadas: 3, 5, 8, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 17, 18, 19, 20, 21 y 22.

23. Davis, S.A. "Feedback and Control Systems" Simon and Schuster. 1974.

24. Alsetine, J.A. "Les méthodes de Transformation dans L'Analyse des Systémes Linéaires". Dunod. 1964.

25. Tustin, A. "The Mechanism of Economic Systems" W. Heinemann. 1957.

26. Luce, R.D. (ed.) "Handbook of Mathematical Psychology". Wiley. 1963.

27. Chan, Sh.P. "Introductory Topological Analysis of Electrical Networks Holt. 1969

28. Goldberg, S. "Introduction to Difference Equations". Wiley. 1963.

29. Allen, R.G.D. "Mathematical Economics". 2nd. Ed. St. Marti's. 1963.

30. Blalock, H.M. "Theory Construction". Prentice-Hall: Methods of Social Sciences Series. 1969.

31. Lange, O. "Introduction to Economics Cybernetics". Pergamon. 1970.

32. Macfarlane, A.G.J. "Engineering Systems Analysis". Addison-Wesley. 1964.

33. Pestel, E.C. and F.A. Leckie. "Matrix Methods in Elastomecha_ nics". McGraw-Hill. 1963.

5.A.5. Análisis de señales

Todo el aparato metodológico de la Teoría de Sistemas tendría, cuando menos en lo que a sus aplicaciones respecta, poco valor práctico si no se dispusiera de herramientas con no menor valía en cuanto a la información que se maneja (en la entrada o la salida) de dichos sistemas dinámicos. La complejidad de la información, cifrada o a través de lenguajes naturales, es elevada si se analiza su contenido de acuerdo con fines orientados y bien definidos. Por ejemplo, en el funcionamiento de sistemas de telecomunicaciones, en el diagnóstico del comportamiento de sistemas (máquinas, seres humanos), en la propia caracterización de sistemas, en la correlación y reducción de datos, etc. En todos estos casos, y muchos más, es de primordial importancia efectuar diversas operaciones con la información a fin de poder destacar lo relevante, lo significativo, e incluso reconstruir en ocasiones la información requerida.

Uno de los primeros aspectos es, desde luego, establecer algún medio sistemático de tratar las "señales" que puedan incidir, excitar o salir, de un sistema elemental. Cualquier análisis sistemático se inicia con la representación de funciones, usualmente funciones del tiempo, mediante Series de Fourier. En los problemas de Comunicaciones (incluyendo el estudio de la comunicación humana) la teoría de Fourier es imprescindible, cualquier enfoque que la soslaye "es de una visión estrecha y tiende a degradar a los ingenieros (un fenómeno al cuál no necesitamos contribuir)*".

Una función f(t), periódica**, que satisface ciertas condiciones (usuales en las aplicaciones) de continuidad y acotamiento puede aproximarse mediante una suma infinita del tipo

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \phi_n(t)$$

*Martin S.Roden "Introduction to Communication Theory". Pergamon. 1972. pag. 1.

**Se dice que f(t) es periódica, de periodo T, si: $f(t+T)=f(t)$

en la cuál las funciones $\{\phi_n(t)\}$ satisfacen la ortogonalidad en un intervalo finito $[a,b]$

$$\int_a^b \phi_m(t)\phi_n(t)dt = \begin{cases} o \text{ si } m \neq n \\ N^2 \text{ si } m = n \end{cases}$$

Las funciones $\{\phi_n(t)\}$ suelen estar asociadas a problemas de "auto equilibrio" en el caso de los sistemas dinámicos. Sin embargo, no nos ocuparemos en este apéndice de este asunto.

Un conjunto de funciones $\{\phi_n(t)\}$ muy usual en la teoría de señales esta constituido por funciones trigonométricas, de tal manera que se genera la serie trigonométrica de Fourier

$$f(t) = \frac{1}{2} a_o + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega t + b_n \operatorname{sen} n\omega t)$$

o bien

$$f(t) = A_o + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \operatorname{sen}(n\omega t + \Psi n)$$

Cada término de la serie es una función armónica de período $T_n = 2\pi n\omega$ siendo $n\omega = \omega_n$ la frecuencia de la armónica enésima.

Las funciones trigonométricas del desarrollo en serie satisfacen, desde luego, la ortogonalidad en el intervalo $[-T/2,\ T/2]$

$$\int_{-T/2}^{T/2} \begin{cases} \cos n\omega t \ \ dt = o, \ n \neq o \\ \operatorname{sen} n\omega t \ \ dt = o \\ \cos m\omega t \cos n\omega t \ \ dt = o, m \neq n \ \ (=T/2, m=n) \\ \operatorname{sen} m\omega t \operatorname{sen} n\omega t \ \ dt = o, m \neq n \ \ (=T/2, m=n) \\ \operatorname{sen} m\omega t \cos n\omega t \ dt = o \end{cases}$$

Esta propiedad permite obtener con relativa facilidad, los coeficientes de las expansión, los coeficientes de Cauchy-Fourier:

$$a_o = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)dt \text{ (valor medio de } f(t) \text{ en el intervalo } [-T/2,\ T/2])$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos n\omega t \, dt \qquad n = 1,2,\ldots$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t) \operatorname{sen} n\omega t dt \qquad n = 1,2,\ldots$$

Si la serie no se extiende hasta el infinito, como sucede en la práctica, existe un error de "redondeo" (error medio cuadrático que se puede estimar para la aproximación).

$$f(t) \sim \frac{1}{2} a_o + \sum_{n=1}^{p} (a_n \cos n\omega t + b_n \operatorname{sen} n\omega t)$$

mediante la expresión

$$e_p = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} [f(t)]^2 dt - \frac{a_o^2}{4} - \frac{1}{2}\sum (a_n^2 + b_n^2)$$

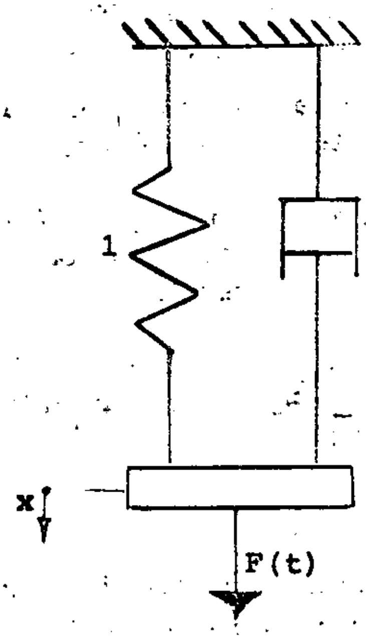
y cuando $e_p \approx 0$

$$\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} [f(t)]^2 \, dt = \frac{a_o^2}{4} + \frac{1}{2}\sum (a_n^2 + b_n^2)$$

lo cuál representa, en el caso de que f(t) sea una señal generada mediante una fuente de energía, una medida de la cantidad de energía contenida en la señal.

Una aplicación sencilla de las series de Fourier sería, por ejemplo, la determinación de la respuesta "x" de un sistema elemental, de primer orden, como el mostrado en la figura No. 5.A.27.

SISTEMA MECANICO ELEMENTAL DE PRIMER ORDEN



$$\boxed{c\,\dot{x} + x = F(t)}$$

FIGURA 5.A.27

C.A.D.A. 1976

sujeto a una perturbación

$$F(t) = A_{p_o} + \sum_{n=1}^{\infty} A_{p_n} \text{ sen } (n\omega t+\psi_n)$$

en donde A_{p_n} son las amplitudes de las "armónicas" de la perturbación (o la "proporción" con la cual cada armónica "contribuye" o "participa" en la perturbación). Por ejemplo, en la siguiente figura #5.A.28.

se muestra una perturbación F(t) formada por tres armónicas A_{p_o}, A_{p_1} sen ω t y A_{p_2} sen $(2\omega t+\psi_2)$. Cada armónica tiene, además, asociada una fase ψ_n usualmente distinta a las demás.

El comportamiento del sistema está dado por la ecuación mostrada antes. Operando sobre ella es fácil encontrar que la respuesta es

$$x(t) = A_{r_o} + \sum_{n=1}^{\infty} A_{r_n} (n\omega t + \psi_n - \theta_n)$$

en donde

A_{r_n} es la amplitud de las "armónicas" de la respuesta y θ_n son los desfasamientos de esas armónicas respecto a las de la entrada. Estos desfasamientos son producidos por el propio sistema, en particular por el retraso en la respuesta debido al amortiguador.

$$\tan \theta_n = c n \omega.$$

La amplitud de la respuesta está relacionada con la de entrada (perturbación), siendo modificada por el sistema

$$A_{r_n} = \frac{1}{\sqrt{1+n^2\omega^2c^2}} A_{r_n}$$

Si no hubiera amortiguador (c=o) la respuesta, en cuanto a amplitud y fase sería, la de la entrada.

EXCITACION CON TRES ARMONICAS

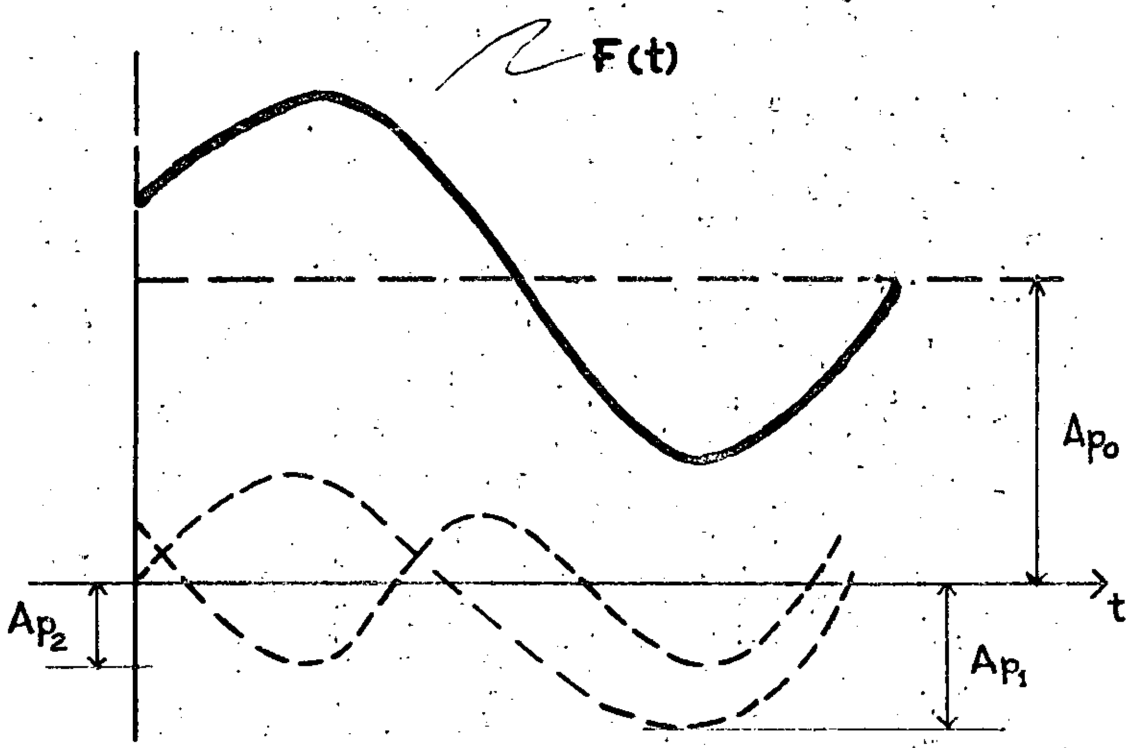


FIG. 5.A.28

C.A.D.A. 1976

Este dispositivo mecánico podría corresponder al sistema de amortiguación de un vehículo. Entre mayor sea c menor es la amplitud de las armónicas de la respuesta. Es, además, un "filtro pasabajos", esto es para frecuencias altas, $n \gg 1$, las amplitudes de la respuesta tienden a anularse.

Uno de los temas centrales del análisis de Fourier lo constituye el análisis de ondas, tanto porque se emplean señales en diversos sistemas (por ejemplo como señales de prueba para determinar la función de transferencia de un sistema) o bien porque a través de la superposición de señales es posible analizar o sintetizar otras mas complejas. Puesto que el análisis complejo ha mostrado su enorme versatilidad en el estudio y caracterización de sistemas, resulta deseable que el análisis de señales pueda también realizarse en el campo complejo. Dado que la transformada de Laplace se establece en el campo complejo y existe una estricta relación entre ésta y las series de Fourier, es de esperarse esa posibilidad. Y resulta no solo que es factible, sino que el análisis de Fourier - mas amplio, al grado de establecer los fundamentos de toda la teoría de las transformadas integrales, se genera precisamente a través de su planteo en el campo complejo y de su subsecuente generalización, al definir la transformada de Fourier, de hecho la integral de Fourier como una extensión de la serie.

Es simple expresar a la serie trigonométrica en forma compleja, partiendo de la fórmula de Euler

$$e^{j\theta} = \cos\theta + j \operatorname{sen}\theta$$

se obtiene, mediante combinaciones sencillas, de la forma: $A_o = \frac{1}{2}a_o$; $A_n = \frac{1}{2}(a_n - jb_n)$, $A_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + jb_n)$ etc.

se obtiene

$$f(t) = A_o + \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} A_n e^{jn\omega t}$$

en donde

$$A_n = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\, e^{-jn\omega t}\, dt$$

Es usual, en el análisis de señales tales como las ondas tomar en cuenta las posibles simetrías, o asimetrías y otras características de las ondas, antes de obtener la representación de Fourier, con el objeto de reducir la labor. En estas descripciones no nos ocuparemos de estos detalles.

En lugar de tratar directamente a las funciones (señales u ondas) o sus representaciones, es usual utilizar representaciones en el campo complejo o en el de las frecuencias, de las "amplitudes" de las armónicas

$$c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$$

o bien

$$c_n = |A_n| + |A_{-n}|$$

graficándolas contra las frecuencias $\omega_n = n\omega$ (ω_n = n veces la frecuencia fundamental) a estas representaciones se les denomina "espectros de frecuencias", algunas de las usuales en Sistemas se tienen en la figura 5.A.29.

Notas

1) En términos generales no basta con el espectro de amplitudes para caracterizar una señal periódica, suele requerirse del "espectro de fases ψ_n". Sin embargo, en el caso de ondas sonoras producidas por instrumentos (uno de ellos constituído por el propio aparato emisor del ser humano), la fase no tiene demasiada importancia en cuanto a la percepción (por ejemplo del timbre que caracteriza a cada uno de ellos).

2) En estudios sobre comunicación humana suele emplearse el análisis espectral de la voz humana e incluso, a través de osciladores, sintetizarse por medios electrónicos mediante la superposición de los armónicos correspondientes a cada emisión sonora requerida para

ONDAS Y ESPECTROS

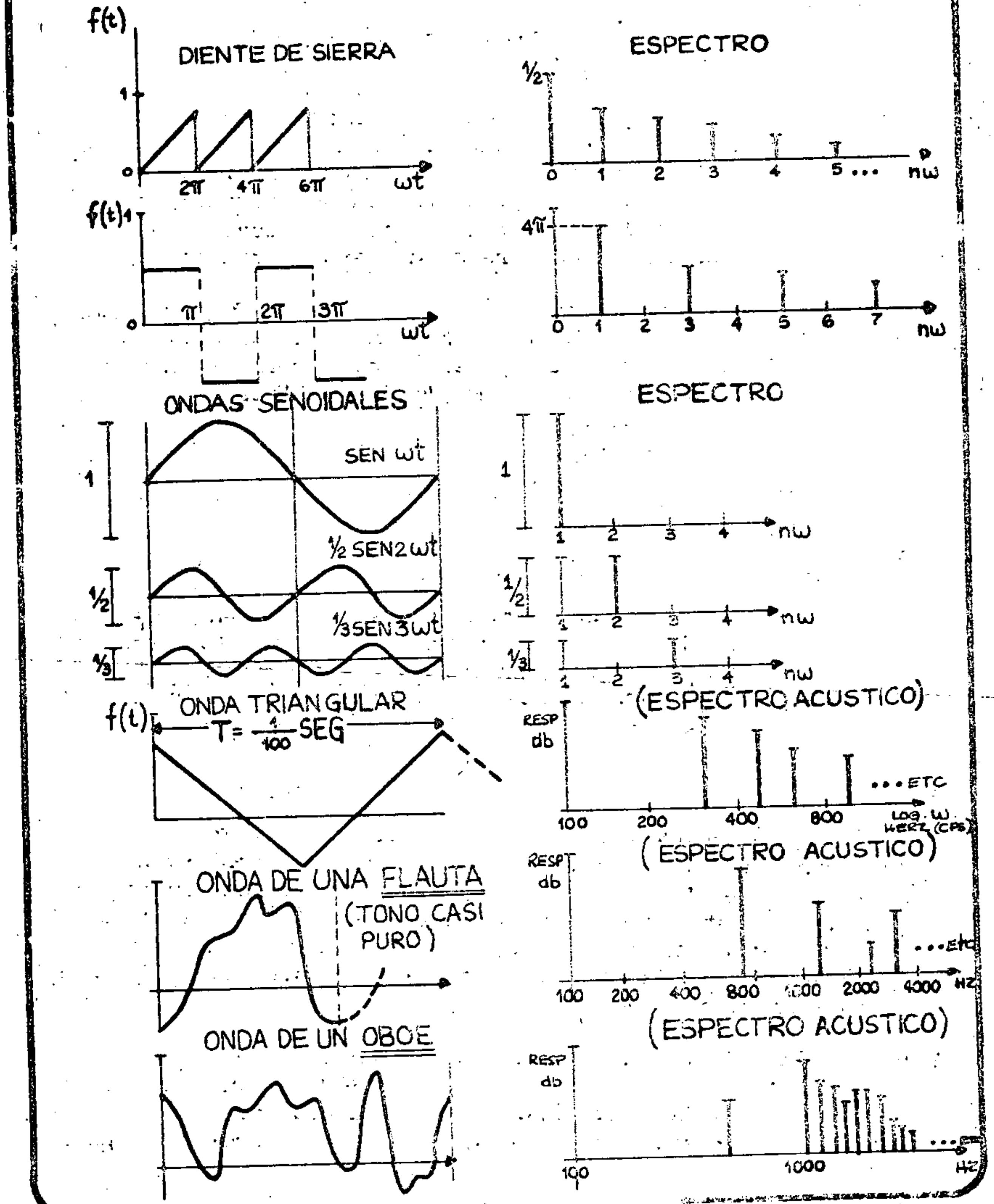


FIG.5.A.29

formar palabras e incluso frases melódicas emitidas por un "ser humano" diseñado con características preestablecidas.

3) Como se había señalado la energía o potencia contenida en una onda, digamos durante un ciclo determinado por el período, puede obtenerse fácilmente del espectro sumando el cuadrado de las armónicas.

4) Una función particularmente relevante en el estudio de sistemas (caracterización de sistemas, resolución por superposición, representación de funciones con singularidades, análisis de sistemas físicos sujetos a acciones impulsoras, etc.) es la "delta de Dirac" o "función de impulso" (o simplemente "impulso") que suele expresarse como aquella función que es cero para toda t, excepto para una t_1 en donde está indefinida (tiende a infinito) y su intensidad vale uno. Para comprender esta definición puede emplearse un proceso al límite, no incluído en el análisis matemático usual, como el ilustrado en la siguiente figura No. 5.A.30.

Puede, desde luego, asumirse un conjunto de funciones impulso: tren de impulsos que satisfagan la condición de periodicidad (T) para su representación mediante series de Fourier. Un tren infinito de impulsos, de periodo T, puede expresarse como la suma

$$\delta(t)_T = \sum_{n=0}^{\infty} \delta(t-nT)$$

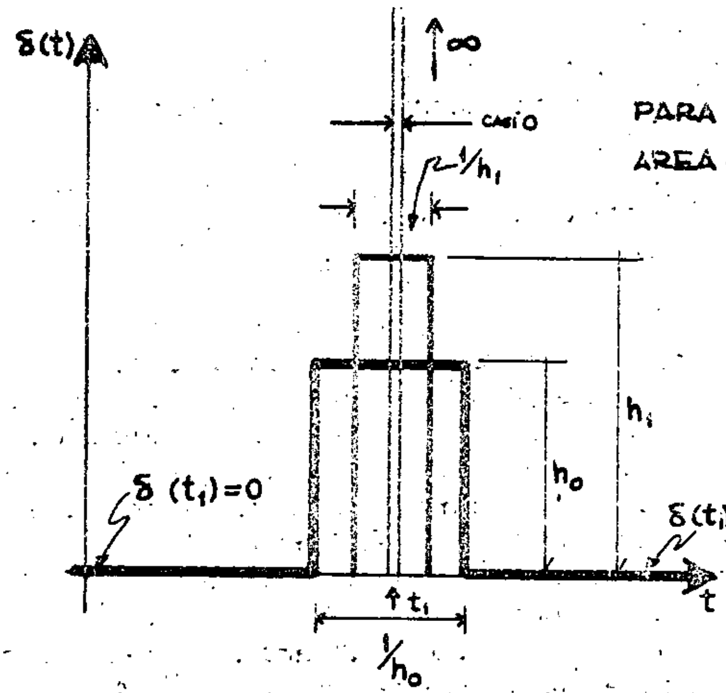
y cuya representación esquemática sería la mostrada en la figura 5.A.31.

La "expansión" mediante la serie compleja de Fourier toma la forma

$$\delta(t)_T = \frac{1}{T} \sum_{n=0}^{\infty} e^{jn\frac{2\Pi}{T}t}$$

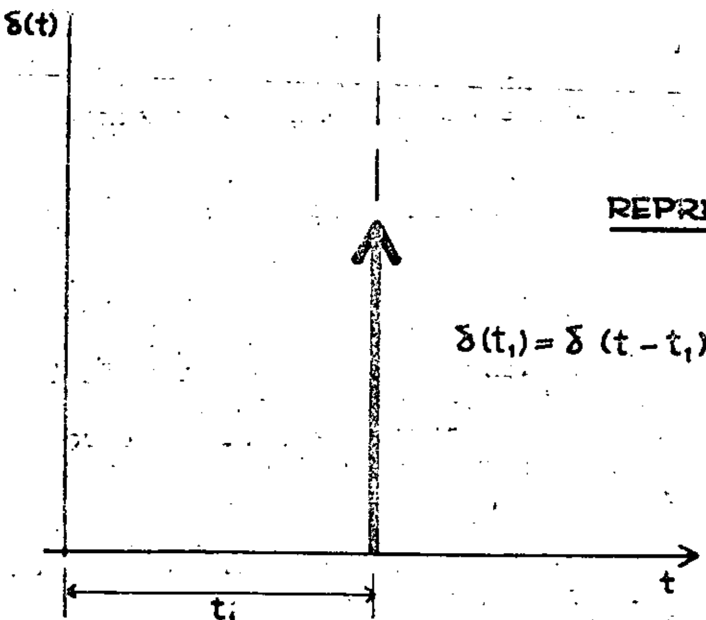
Mediante este tren de impulsos, y su expansión de Fourier, es relativamente simple obtener los coeficientes de Fourier de funciones discontinuas, o con pendiente (derivada) discontinua, tales comp: ondas cuadradas, o trenes de ondas triangulares o dobletes, etc.; ver figura 5.A.32.

5) En el caso de funciones (ondas o señales) periódicas, es interesante hacer notar la transformación de una función definida en todos los puntos del intervalo T, por un conjunto discreto de "líneas espectrales" correspondientes a las armónicas. En acústica suele hablarse del "contenido armónico" de una señal acústica, dependiendo del número de armónicas auralmente significativas. El uso de este término se ha extendido a la descripción de señales no acústicas.



PARA CADA RECTÁNGULO

$$AREA = h_i \frac{1}{h_i} = 1$$



REPRESENTACION

$$\delta(t_1) = \delta(t - t_1) \begin{cases} = 0 & t > t_1 \\ = 0 & t < t_1 \\ = \infty & t = t_1 \end{cases}$$

FIG. 5.A.30

TREN INFINITO DE IMPULSOS

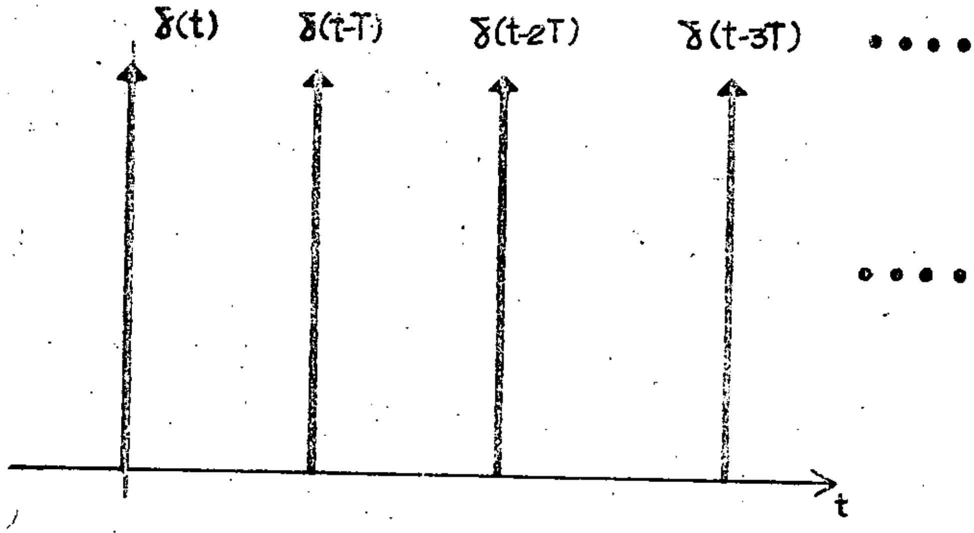


FIG. 5.A.31

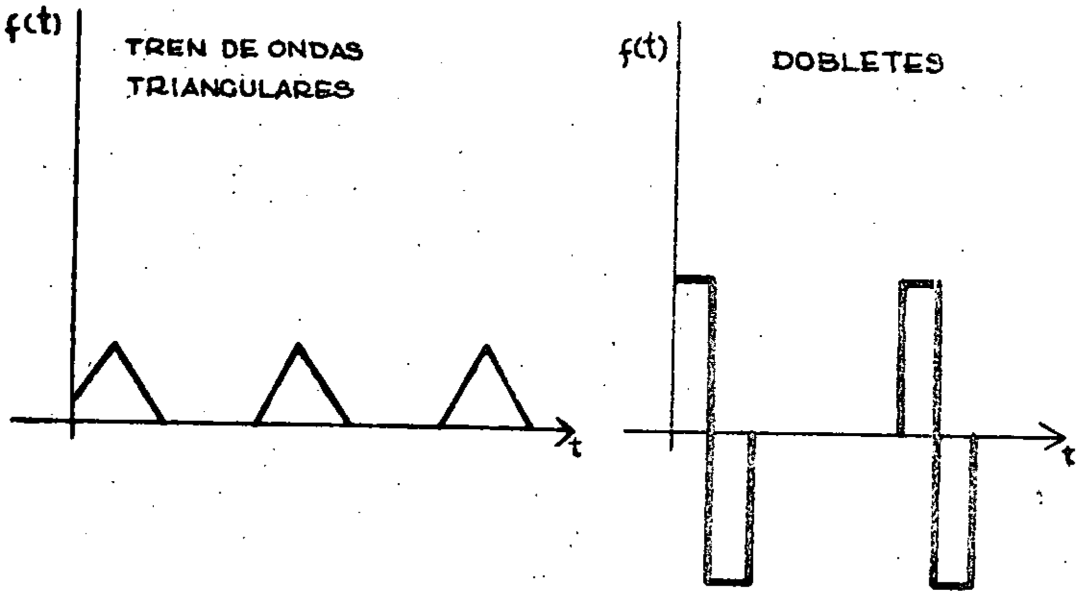


FIG. 5.A.32

6) En la representación de señales no periódicas la expansión de Fourier (a base de funciones periódicas) obviamente no es adecuada. Sin embargo, extendiendo el concepto de la expansión, es factible una representación de esas señales.

Suponiendo que concebimos a la función no periódica como una que sí lo es, con un periodo $T \to \infty$, entonces las frecuencias $n\omega$ tienden a acumularse en la vecindad de cada valor de n, ésto es, en el límite podemos considerar que

$n\omega$ discreta se puede sustituir por ω continua

Sustituyendo en

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n e^{jn\omega t}$$

el valor de A_n y además $\frac{1}{T}$ por $\bar{\omega}/2\Pi$ se tiene

$$f(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{2\Pi}\int_{-T/2}^{T/2} f(\tau)e^{-jn\bar{\omega}\tau}\, d\tau\right]\bar{\omega}e^{jn\bar{\omega}t}$$

en donde $\bar{\omega}$ es la frecuencia fundamental, la cual al hacer $T\to\infty$, tenderá a cero, o bien

$$\bar{\omega} \to \Delta\omega$$

$$f(t) = \frac{1}{2\Pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)e^{-j\omega\tau}\, d\tau\right] e^{j\omega\tau}\, d\omega$$

Si ahora a los "coeficientes" los denominamos con $F(\omega)$

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}\, dt \qquad \text{(A)}$$

la expansión, denominada integral de Fourier, toma la forma

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\, e^{j\omega t} d\omega \qquad (B)$$

En el análisis de Fourier suele denominarse a $F(\omega)$ la transformada integral de Fourier de la función f(t) (no necesariamente periódica) y expresarse

$$\mathcal{F}\left[f(t)\right] = F(\omega)$$

la cuál expresa la correspondencia entre la función f(t) definida en el tiempo real t y en el dominio de las frecuencias ω.

La integral (B) expresa la transformación inversa

$$\mathcal{F}^{-1}\left[F(\omega)\right] = f(t)$$

la cuál corresponde, de hecho, a la expansión de Fourier.

7) La integral de Fourier tiene interés no solo en la tranformada de Fourier sino en todas las transformadas integrales, en las cuales constituye una expresión básica para determinar o definir la transformada inversa.

8) Como en el caso de la transformada de Laplace, uno de las propiedades mas importantes de la transformada de Fourier, cuando menos en lo que al análisis de sistemas respecta, estriba en la posibilidad de expresar algebraicamente, en el campo complejo, a las derivadas de una función y por consiguiente a las ecuaciones diferenciales.

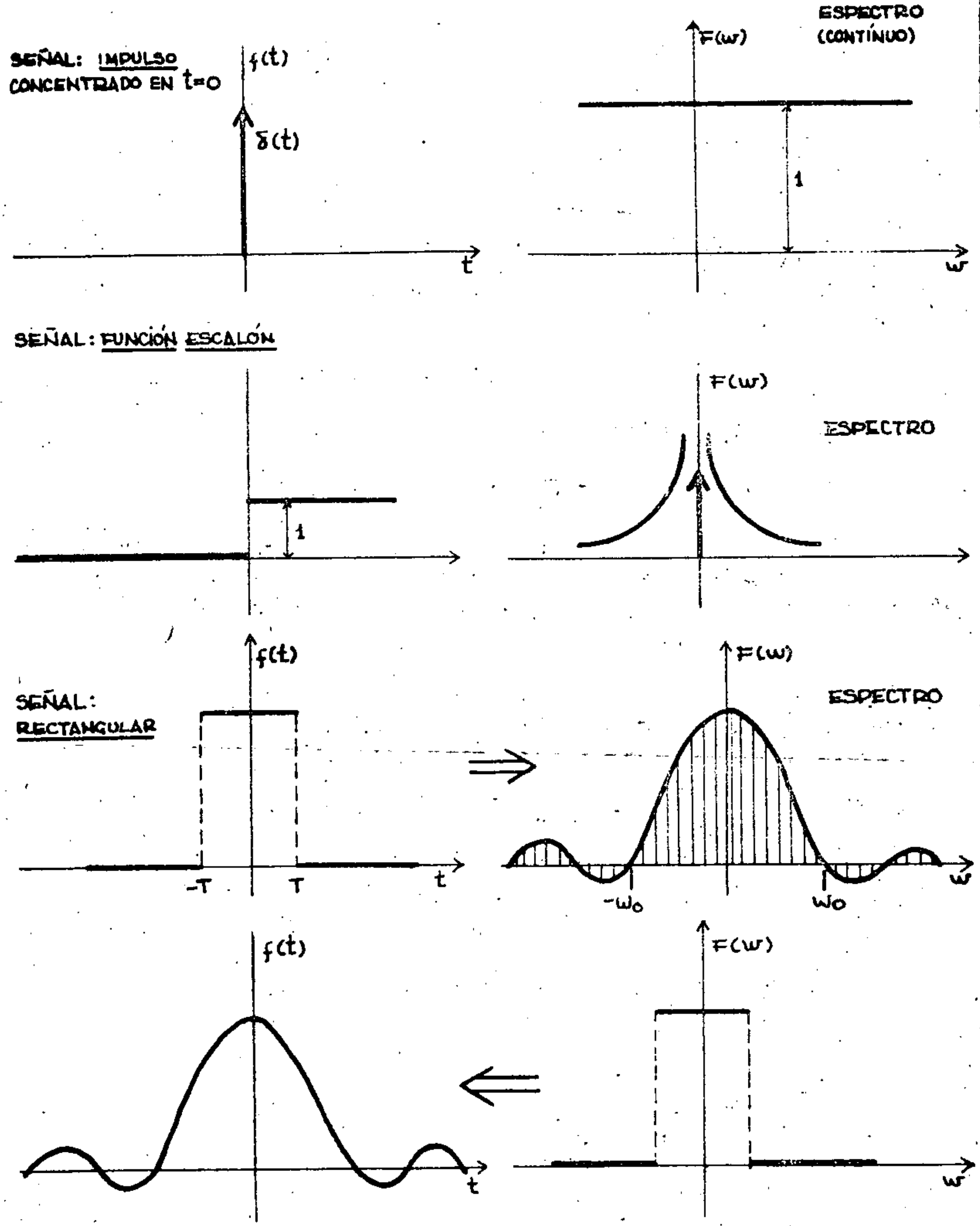
Se puede obtener fácilmente que

$$\mathcal{F}\left[\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right] = (j\omega)^n \mathcal{F}\left[f(t)\right] = (j\omega)^n F(\omega)$$

9) Los espectros de señales no periódicas f(t) se obtienen calculando $F(\omega)$, o sea obteniendo la transformada de Fourier. Se ilustran a continuación algunos casos. Figura No. 5.A.33

Invirtiendo el proceso en la señal, o sea dado un espectro rectangular, ¿cuál es la señal correspondiente?

ESPECTROS DE SEÑALES NO PERIODICAS



SEÑAL CORRESPONDIENTE A UN ESPECTRO RECTANGULAR DADO

FIG.5.A.33

Se observa que el proceso inverso conduce a resultados que, excepto por factores constantes, son prácticamente iguales al proceso original. Esto se debe a la similitud entre las integrales para transformar f(t), es decir para obtener $F(\omega)$, y para calcular f(t). Un "caso límite" del pulso (o señal) rectangular es el del impulso concentrado en t=o, cuyo espectro es constante. Esto puede, dada la reciprocidad entre f(t) y $F(\omega)$, manejarse de la siguiente manera: entre menor sea el intervalo de duración del pulso (-T, T) mas se extiende el espectro $(-\omega_o, \omega_o)$ y viceversa.

Denotando con

ΔI; el intervalo o duración del pulso,

ΔW: el "ancho de banda", intervalo de frecuencias entre valores, convencionalmente significativos, del espectro, se puede obtener la siguiente aproximación

$\Delta I \cdot \Delta W \simeq$ constante

O sea el producto de la duración del pulso por el ancho de banda es aproximadamente constante. Ajustando los valores de ΔW "convenientemente" se puede expresar

$$\Delta I \cdot \Delta W = 1$$

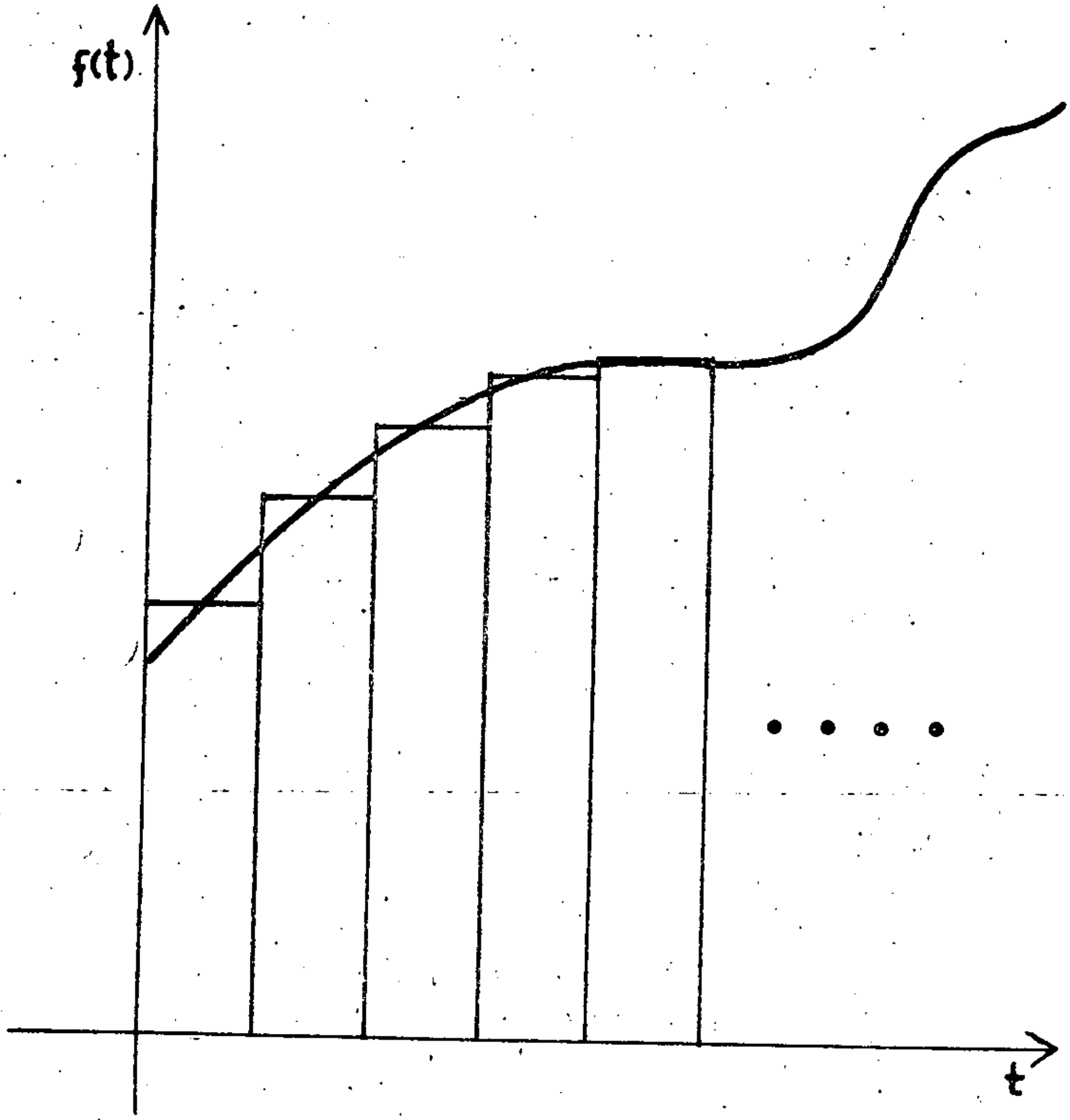
o bien

$$\Delta I = \frac{1}{\Delta W}$$

Lo cuál suele utilizarse para detectar la duración mínima que puede tener una señal para ser transmitida a través de un "canal" (en un sistema de radio comunicaciones, o de televisión, etc.) con un "ancho de banda" determinado (usualmente por la "fidelidad" de recepción o transmisión). Una señal construída por una sucesión de pulsos no puede ser transmitida a través de un canal, con una fidelidad mayor a $\frac{1}{\Delta W}$, entendiendo por "fidelidad" el ancho de los pulsos rectangulares utilizados para la aproximación. Fig. #5.A.34.

10) En la llamada "Teoría del muestreo" de señales se establecen propiedades de suma importancia en procesos de comunicación. Esta teoría, que parte del análisis espectral de Fourier, tiene dos consecuencias relevantes:

CONSTRUCCION DE SEÑALES MEDIANTE PULSOS



C.A.D.A. 1976

FIG.5.A.34

a) Para construir una señal captada en un receptor con ancho de banda W se requieren únicamente los valores (amplitudes) de la señal espaciados uniformemente en intervalos de $\frac{1}{2W}$ segundos. O sea que en la transmisión y recepción de señales no se requieren todos los valores o amplitudes de la señal (conjunto infinito).

b) A través de un canal de un ancho de banda W no es posible transmitir mas de 2W datos por segundo. Lo cuál prescribe la capacidad del canal en términos de la calidad de información relacionada con el ancho de banda.

Estos resultados del análisis de Fourier, y otros similares, son básicos en los problemas de emisión, transmisión y recepción de sistemas de comunicación (incluido en ellos a los seres humanos parlantes).

11) Otro resultado trascendente del análisis de Fourier, especialmente del análisis espectral, se refiere a las relaciones entrada-salida de sistemas.

A través de las propiedades de la derivada, señaladas anteriormente, es posible obtener en el campo complejo definido por la transformada de Fourier la relación

$$F_s(j\omega) = H(j\omega)\, F_e(j\omega)$$

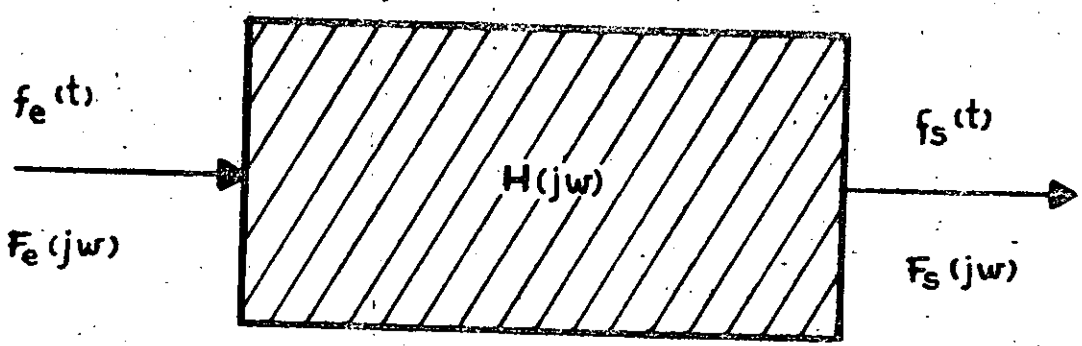
en donde

$F_s(j\omega)$ es la transformada de Fourier de la respuesta de un sistema (lineal), $F_e(j\omega)$ es la T.F. de la entrada y $H(j\omega)$ es la función de transferencia del sistema, obtenida, como en el caso de la Transformada de Laplace, calculando la transformada de Fourier del "modelo matemático" del sistema. Figura 5.A.35.

De esta manera, no obstante la representación de $f_e(t)$ y $f_s(t)$, suele "operarse" la relación entrada-salida de sistemas mediante los espectros y la función de transferencia $H(j\omega)$.

En el estudio de sistemas actual, el análisis de las señales no se restringe a formas de onda preestablecidas. En la teoría de las comunicaciones y de la información las señales no están, en general totalmente establecidas, existe en ellas, a pesar del control

FUNCION DE TRANFERENCIA DE SISTEMAS EN EL CAMPO COMPLEJO



C.A.D.A. 1976

FIG. 5.A.35

que pueda ejercerse sobre la emisión, transmisión y recepción, una fluctuación (ruido) que en muchos casos debe tomarse en cuenta en el análisis, síntesis y operación de los propios sistemas.

Existen una serie de resultados de los campos mencionados que utilizan la estadística y la probabilidad, a través del análisis de Fourier, para caracterizar a las señales, sus valores medios, correlaciones, energía media, etc. que constituyen un aspecto central de la tecnología y ciencia de los sistemas:

1) Un análisis útil en relación a la distorsión que pueden experimentar las señales a través del tiempo, es el de autocorrelación.

La autocorrelación de una señal f(t), después de transcurrido un tiempo τ se establece con la expresión

$$C(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)f(t-\tau)dt$$

En particular, si τ =o la expresión es una medida de la energía contenida en la señal.

En la figura 5.A.36 se ilustra, con un caso, el propósito de la autocorrelación.

Para funciones periódicas (T), la autocorrelación toma la forma

$$C_{T} = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)f(t-\tau)dt$$

La correlación mutua entre dos señales $f_1(t)$ y $f_2(t)$ se expresa

$$C_{12} = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t)f_2(t-\tau)dt = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t)f_2(t+\tau)d\tau$$

Estas expresiones pueden representarse, mediante la transformada de Fourier, de la siguiente manera

$$C(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)f(t-\tau)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} [F(\omega)]^2 \; e^{j\omega t} d\omega$$

o bien, la densidad espectral de energía

$$[F(\omega)]^2 = \int_{-\infty}^{\infty} C(\tau)e^{-j\omega\tau} d\tau$$

A través de las cuales resulta sencillo obtener la siguiente en donde $\frac{n_o}{n}$ es una medida de la probabilidad $p(x)$.

Para un conjunto grande de señales (infinito) el valor medio o expectancia de la señal se expresa

$$\bar{x} = E(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x p(x) dx$$

En particular, para señales eléctricas a este valor medio suele denominársele "componente de corriente continua (o directa)".

iv) Otro promedio importante, que suele referirse a la potencia o a la energía de alguna componente o parte de un sistema (por ejemplo la energía disipada en una resistencia de un circuito eléctrico), es el denominado valor medio cuadrático de una señal aleatoria,

$$\bar{x}^2 = E(x^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p(x) dx$$

v) La fluctuación de una señal, respecto a su valor medio, es usualmente calculado mediante el promedio cuadrático de las diferencias (el promedio de los cuadrados menos el cuadrado de los promedios)

$$\sigma^2 = \overline{(x - \bar{x})^2} = \overline{x^2} - \bar{x}^2$$

y se denomina variancia; la raiz cuadrada se conoce como desviación estándar o normal.

En electricidad esta fluctuación suele relacionarse con los valores medios de la potencia del sistema. A la raíz cuadrada de estos valores medios cuadráticos se le acostumbra asociar las siglas "rms" (root mean square).

vi) Los procesos aleatorios ocurren en la naturaleza de tal manera que su densidad de probabilidad suele variar con el tiempo. Esto se acostumbra describir diciendo que son no estacionarios. Sin embargo, si las probabilidades de que ocurran con una cierta magnitud, o tengan determinados valores medios, representan una variación aceptable se califican como estacionarios.

vii) Si todas las señales de duración T en un muestreo tienen fluctuaciones estadísticas y sucede que los valores medios (o medios cuadráticos, etc.) de una de ellas es sensiblemente igual al promedio de todas, ésto es, que cualquiera es representativa de las demás, el proceso aleatorio se denomina ergódico.

Todos los procesos ergódicos son estacionarios, pero no todos los estacionarios son ergódicos.

viii) Como se indicó antes, muchas señales pueden representarse por medio de la combinación lineal de funciones armónicas (oscilaciones). En especial, si una señal está dada por la combinación lineal de un número elevado (infinito) de oscilaciones armónicas mutuamente independientes, en cuanto a fase y amplitud, y no predomina significativamente alguna de ellas sobre las demás, la distribución (o densidad) de probabilidades de la señal en cuestión puede aproximarse con la función de distribución normal (denominada también "función de error o curva de Gauss") figura No. 5.A.39.

Esta distribución es frecuentemente utilizada en los problemas de interferencia en el campo de la transmisión de señales.

ix) Los conceptos anteriores se han descrito en relación con las señales, energía, etc. definidas directamente como funciones del tiempo. En el análisis de sistemas, con señales aleatorias, suele hacerse lo mismo que se hizo antes con las señales de tipo determinista: expresar estos valores a través de los espectros generados mediante la transformada de Fourier. O sea a través de la función $F(\omega)$ denominada función de densidad espectral, en lugar de operar directamente con $x(t)$. Ya habíamos señalado la importancia de los análisis con $F(\omega)$ en la caracterización y análisis de sistemas. Por ejemplo, si $x(t)$ es una señal aleatoria de duración finita T y $X_T(\omega)$ es su densidad espectral entonces la energía contenida en la señal está dada por

$$E_T = \int_0^T x^2(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left|X_T(\omega)\right|^2 d\omega$$

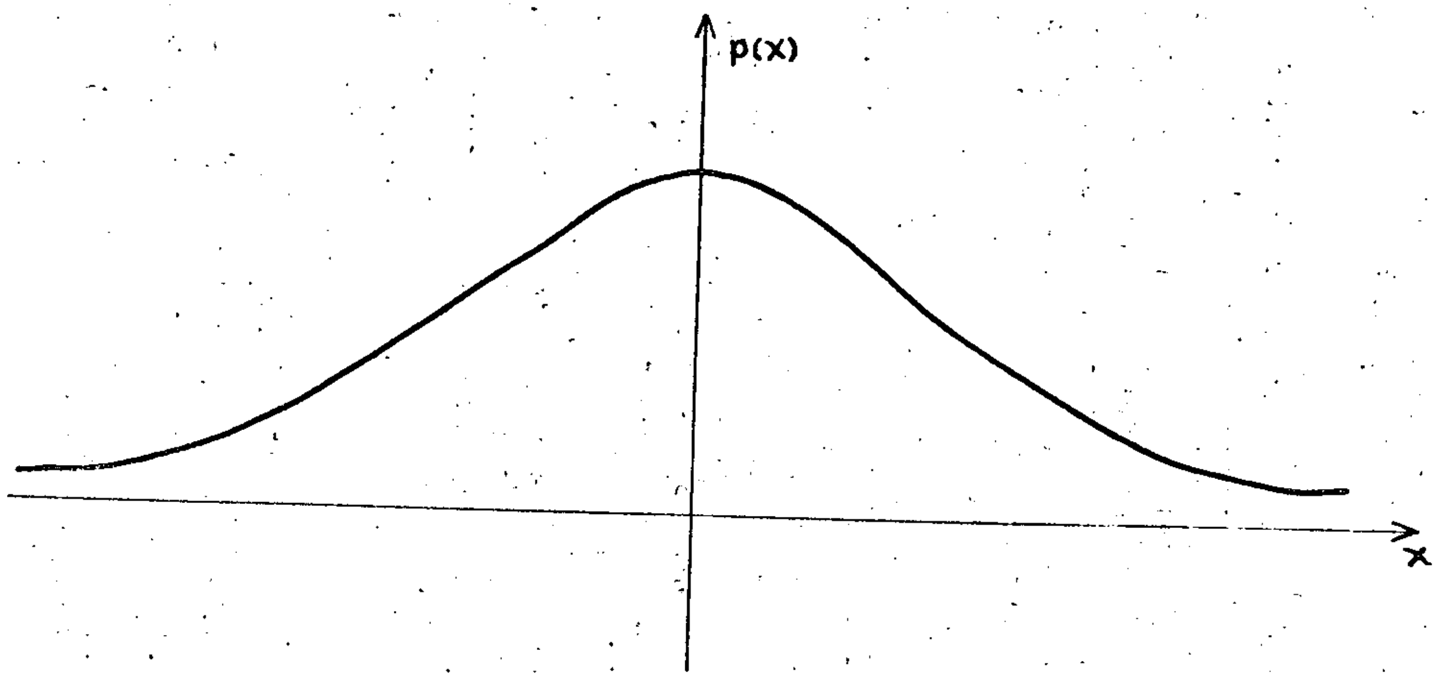
Si T crece indefinidamente, E_T también crecerá sin límite, pero la potencia media de la señal tendrá un valor finito.

$$\overline{x^2(t)} = \lim_{T\to\infty}\frac{E_T}{T} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\lim_{T\to\infty}\left|\frac{X_T(\omega)^2}{T}\right| d\omega$$

en donde a

$$P(\omega) = \lim_{T\to\infty}\frac{|X_T(\omega)|^2}{T}$$

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\, e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2}}$$



DENSIDAD DE PROBABILIDAD NORMAL

C.A.D.A. 1976

FIG.5.A.39

se le denomina densidad espectral de la potencia media de $x(t)$. Si el proceso es ergódico $P(\omega)$ será la misma para todas las señales; para cualquier señal

$$\overline{x^2(t)} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} P(\omega)d\omega$$

A través de estas caracterizaciones energéticas de las señales de procesos ergódicos y de las funciones de correlación es relativamente simple establecer una relación entre el ancho de banda del espectro de señales aleatorias y los intervalos de correlación.

x) Finalmente señalaremos algunas ideas respecto al problema de la capacidad de transmisión de información a través de señales aleatorias discretas (digitales o discontinuas). Este problema es central en los campos de la comunicación y la información, y empieza a ser un terreno esencial en problemas tan relevantes como son los de percepción.

Actualmente es factible, y de hecho usual, transmitir información codificada. El código más empleado es el binario: 0 y 1. La transmisión se reduce a la de impulsos como los de la figura 5.A.40 en la cual se muestra un tren de impulsos (1) e intervalos (0), ambos con igual duración. El tren de pulsos podría corresponder a una señal telegráfica, por ejemplo, codificada de acuerdo con el sistema Morse (los pulsos sencillos podrían corresponder al "punto" y los dobles a la "raya").

Si el tren de impulsos e intervalos es aleatorio, habrá que establecer alguna manera de medir la cantidad de información que pueden contener en términos de la probabilidad de que se reciban dichos pulsos, y por ende pueda "reconstruirse" el mensaje implícito.

La cantidad de información (δ) dependerá entonces de la probabilidad de las diversas alternativas del código (p_c). Sin embargo, la comprensión de esta relación requiere alguna explicación previa para entender la expresión que se propone, figura #5.A.41.

Si establecemos a priori "con toda certeza (p_c=1)" que va a ocurrir un evento E_1 y dicho evento E_1 ocurre, entonces no hemos obtenido (de alguna fuente de información) nada que no hu

TRANSMISION DE INFORMACION CODIFICADA
(PULSOS DE INTENSIDAD UNIFORME)

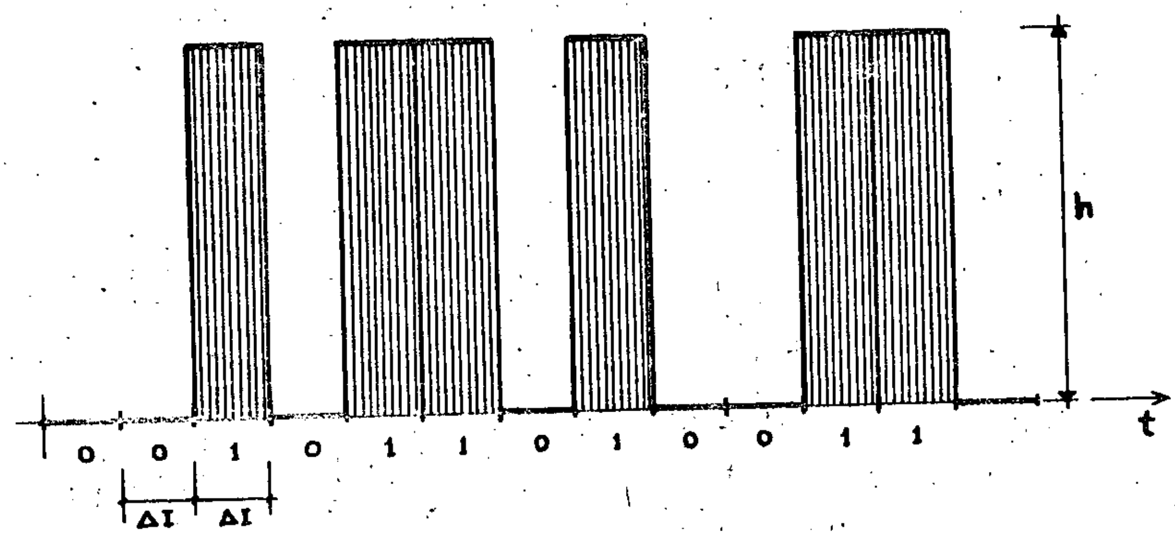


FIG. 5.A.40

C.A.D.A. 1976

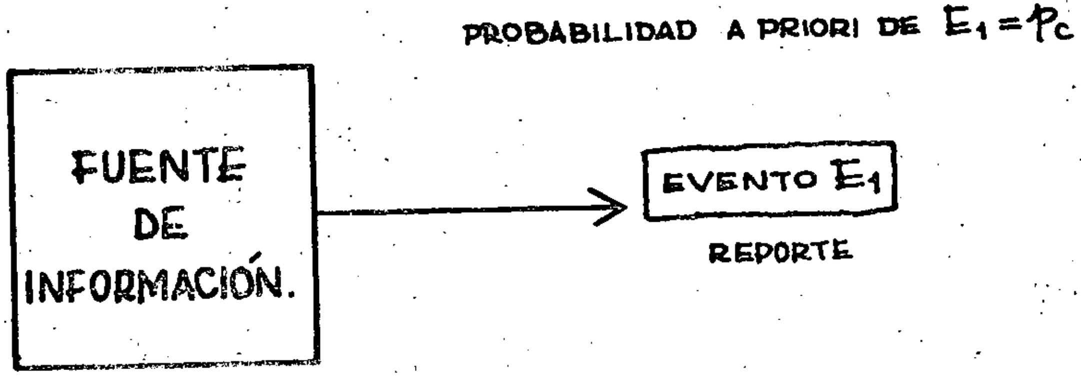


FIG. 5.A_41

C.A.D.A. 1976

biesemos previsto: la medida de la cantidad de información obtenida, podemos convenir, en que es cero.

Entre menos podamos preveer (probabilidad a priori p_c) del resultado de un experimento ("echar un volado", hacer mediciones, etc.), mayor cantidad de información nos proporcionará dicho resultado. Por lo tanto

$$\mathcal{I} = \log 1/p_c$$

Los eventos "o" y "1" son equiprobables (igualmente probables), o sea

$$p_c = \frac{1}{2}$$

por lo tanto

$$\mathcal{I} = \log 2$$

si se toma el logarítmo de base 2, en el caso $p_c = \frac{1}{2}$ se tendría

$$\mathcal{I} = \log_2 2 = 1$$

que se denomina "bit" de información (apócope de las palabras inglesas "binary digit").

O sea que la cantidad de información, en "bits", se expresa

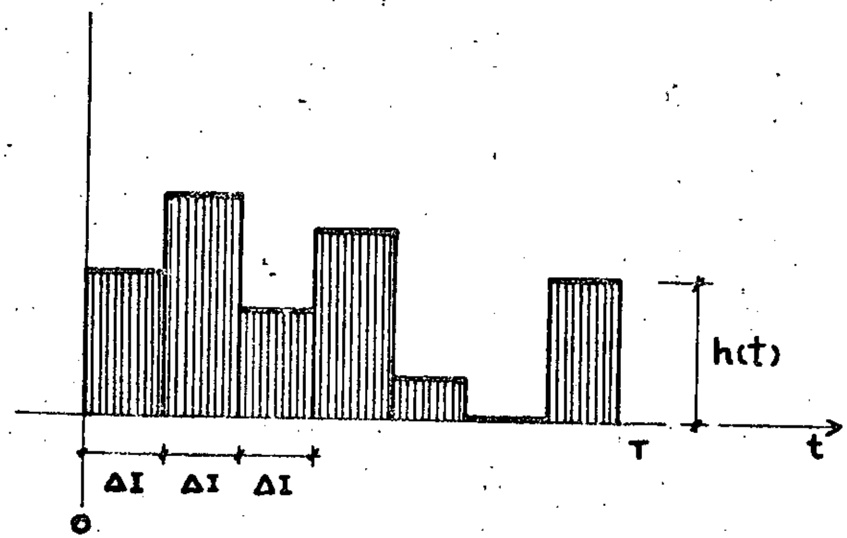
$$\mathcal{I} = \log_2 \frac{1}{p_c}$$

Si la altura "h" de los pulsos es constante, la determinación de la cantidad de información en un mensaje cifrado de duración T en un tren de pulsos, es fácil de obtener. Debe advertirse que en este caso no tendrá relevancia el valor h de los pulsos. Los "bits" de información en este caso (cantidad de información) está dada por

$$\frac{T}{\Delta I}$$

en donde ΔI es la separación uniforme de pulsos o intervalos.

TRANSMISION DE INFORMACION CODIFICADA
(PULSOS DE INTENSIDAD VARIABLE)



C.A.D.A. 1976

FIG. 5 .A .42

Obviamente que entre menor sea Δ , mayor información puede transmitirse. Pero, como se señaló anteriormente, la duración Δ no puede ser menor que el recíproco del "ancho de banda" del canal transmisor:

$$\Delta I \leq \frac{1}{\Delta W}$$

por lo tanto, la cantidad o "capacidad de información (binaria)" está dada por

$$\frac{T}{\Delta I} = T \, \Delta W$$

Si la altura "h" de los pulsos variara, como se indica en la siguiente figura No. 5.A.42.

entonces la probabilidad de que aparezca uno de altura "h" en un intervalo Δ I es

$$\frac{1}{h}$$

y por tanto la capacidad de información del mensaje es

$$\frac{T}{\Delta I} \log_2 \frac{1}{1/h} = \frac{T}{\Delta I} \log_2 h = T \Delta W \log_2 h \qquad \text{(bit)}$$

Estos, y muchos otros aspectos relacionados con la teoría de la información pueden encontrarse en la bibliografía anotada a continuación.

Bibliografía

Referencias anteriores: 5, 10, 15, 24,

34. Hsu, H.P. "Outline of Fourier Analysis". Unitech. 1967.

35. Lighthill, M.J. "Fourier Analysis and Generalized Functions". Cambridge. 1964.

36. Gonorovski, I.S. "Señales y Circuitos Radiotécnicos". Ed. Mir. 1972.

37. Rodin, M.S. "Introduction to Communication Theory". Pergamon Press. 1972.

38. Olson, H.F. "Music, Physics and Engineering". 2nd. Ed. Dover. 1967.

39. Moles, A. "Information Theory and Esthetic Perception". Illinois Press. 1966.

40. Cherry, C. "On Human Communication". 2nd. Ed. MIT Press. 1966.

41. Jennison, R.C. "Fourier Transform, and Convolutions for the -Experimentalist". Pergamon Press. 1961.

42. Granger, C.W.J. and M. Hatanaka. "Spectral Analysis of Econo-mic Time Series". Princeton. 1964.

5.B. APENDICE : VECTORES Y MATRICES.

5.B.1. NOCIONES DE LA TEORIA DE GRUPOS

Algebras especiales

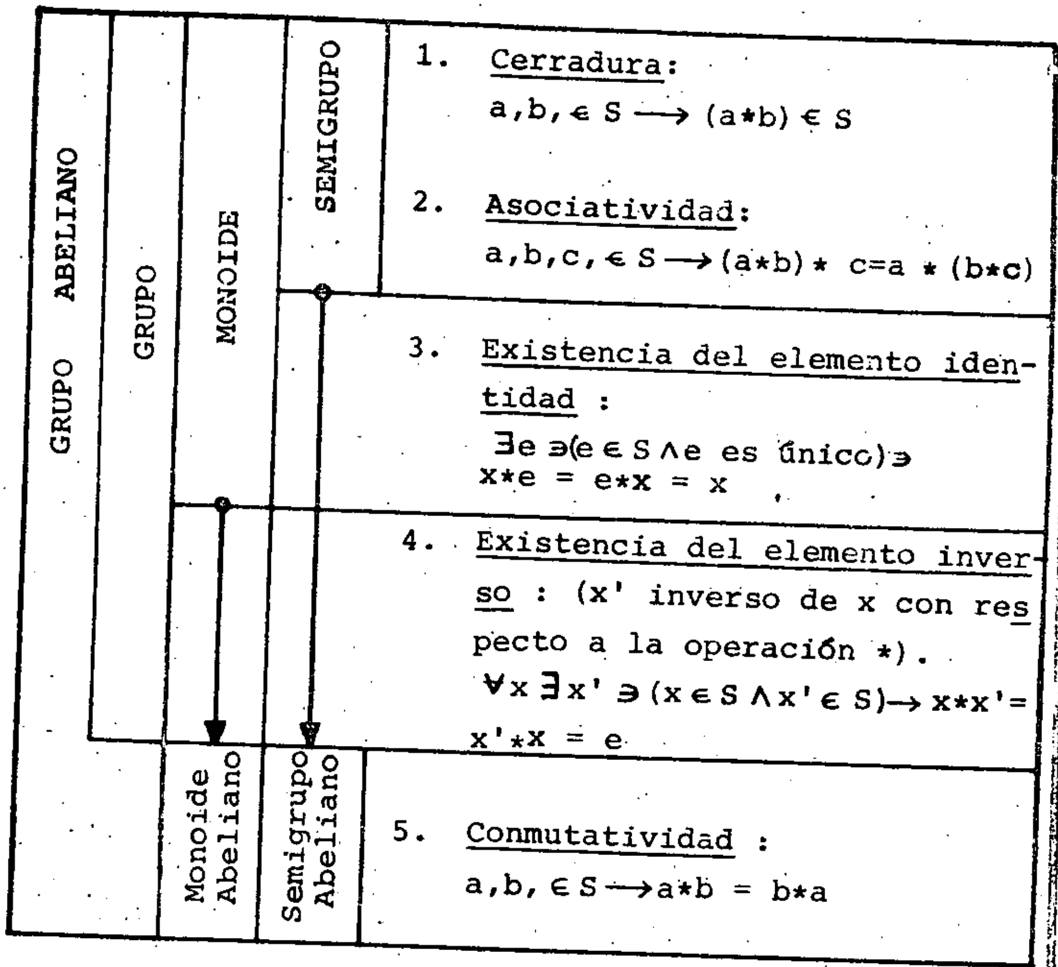
Sean un conjunto

$S = \{a, b, c, d, \ldots\}$

y una operación binaria definida - por el operador " * "

. Si consideramos un conjunto de elementos - que podemos combinar con al menos una operación binaria, bajo la cual se cumplen - ciertas propiedades, surgirán distintos - sistemas a los cuales podremos clasificar de acuerdo a las propiedades que poseen.

Definamos las siguientes propiedades y los sistemas (Algebras) a que da origen el cumplimiento de ellas bajo las operaciones - consideradas. (Cuadro 5.B.1).



Cuadro 5.B.1

Notas :

a) El semigrupo, el monoide y el grupo se denominan abelianos cuando se verifica la propiedad de conmutatividad.

b) Obsérvese que entre mayores restricciones se impongan a los elementos del conjunto S, habrá menos elementos que los sustituyan.

c) No consideramos interesante en nuestro contexto ninguna álgebra que no cumpla cuando menos con la cerradura y la asociatividad.

Otra manera esquemática de representar a estos sistemas algebraicos sería la siguiente,

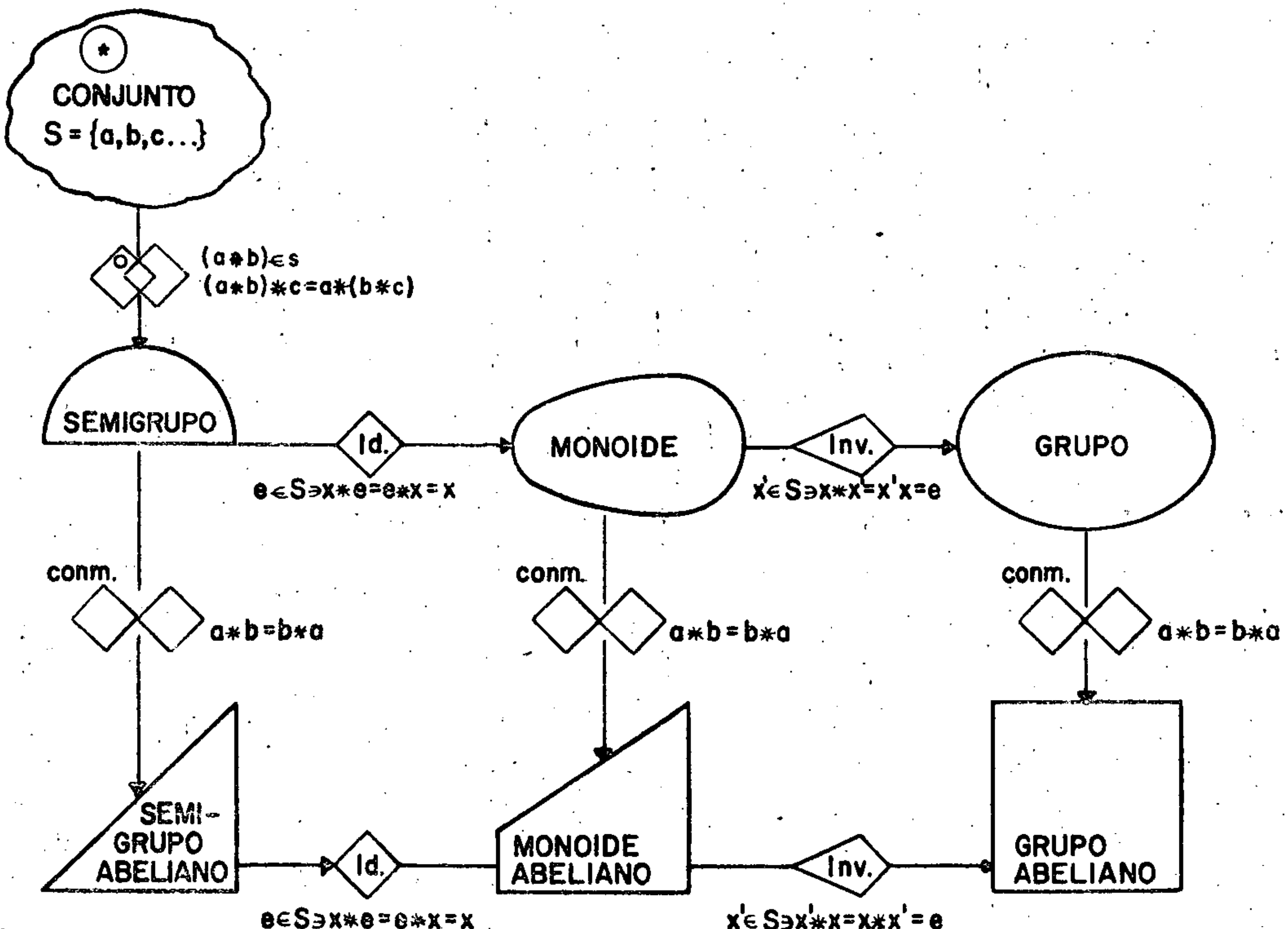


FIGURA 5.B.1

C.A.D.A. 1976

Ejemplos

a) Sea N^* el conjunto de los números naturales excepto el cero y la operación suma :

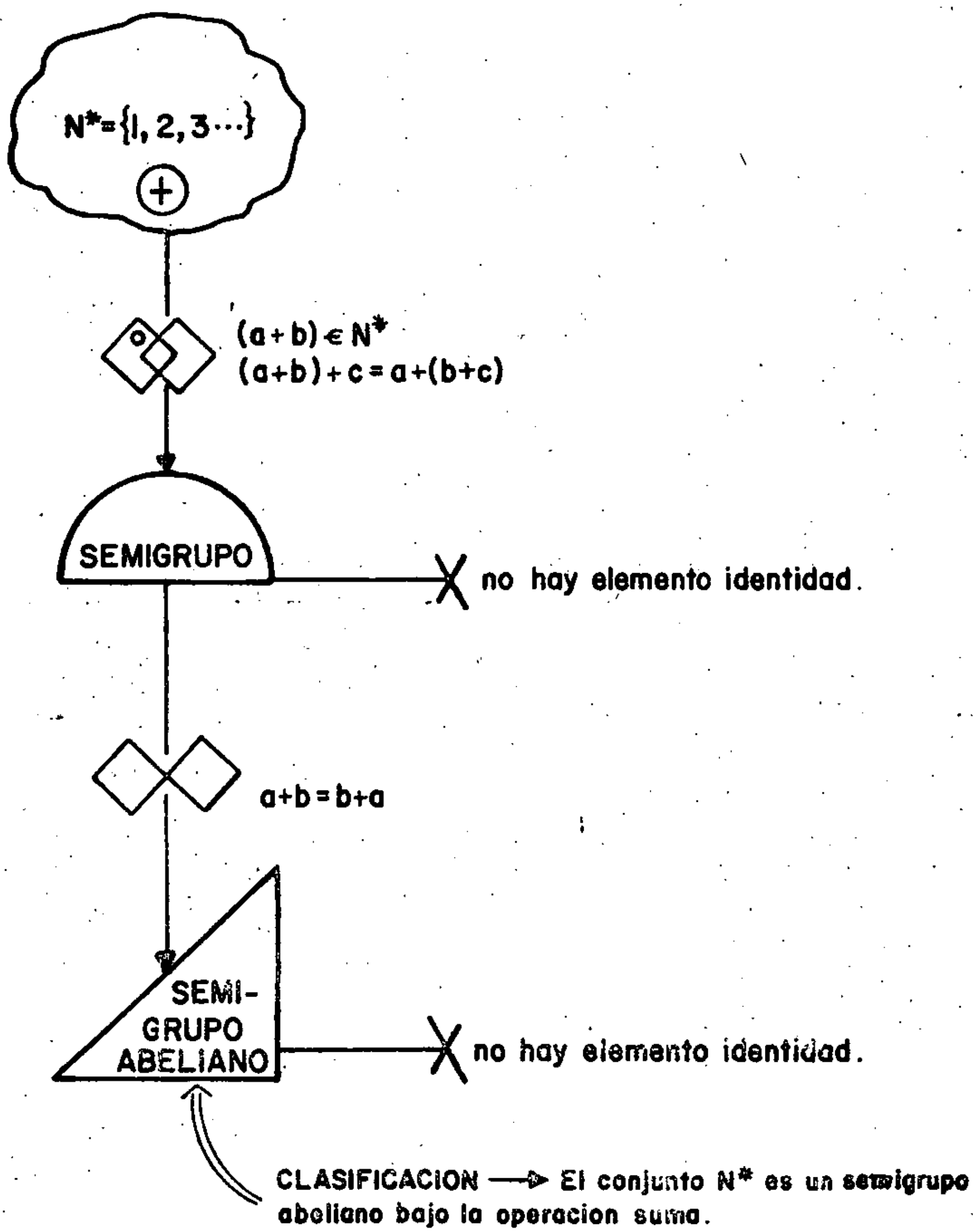


FIGURA 5.B.2

b) Sea el mismo conjunto N* y la operación producto.

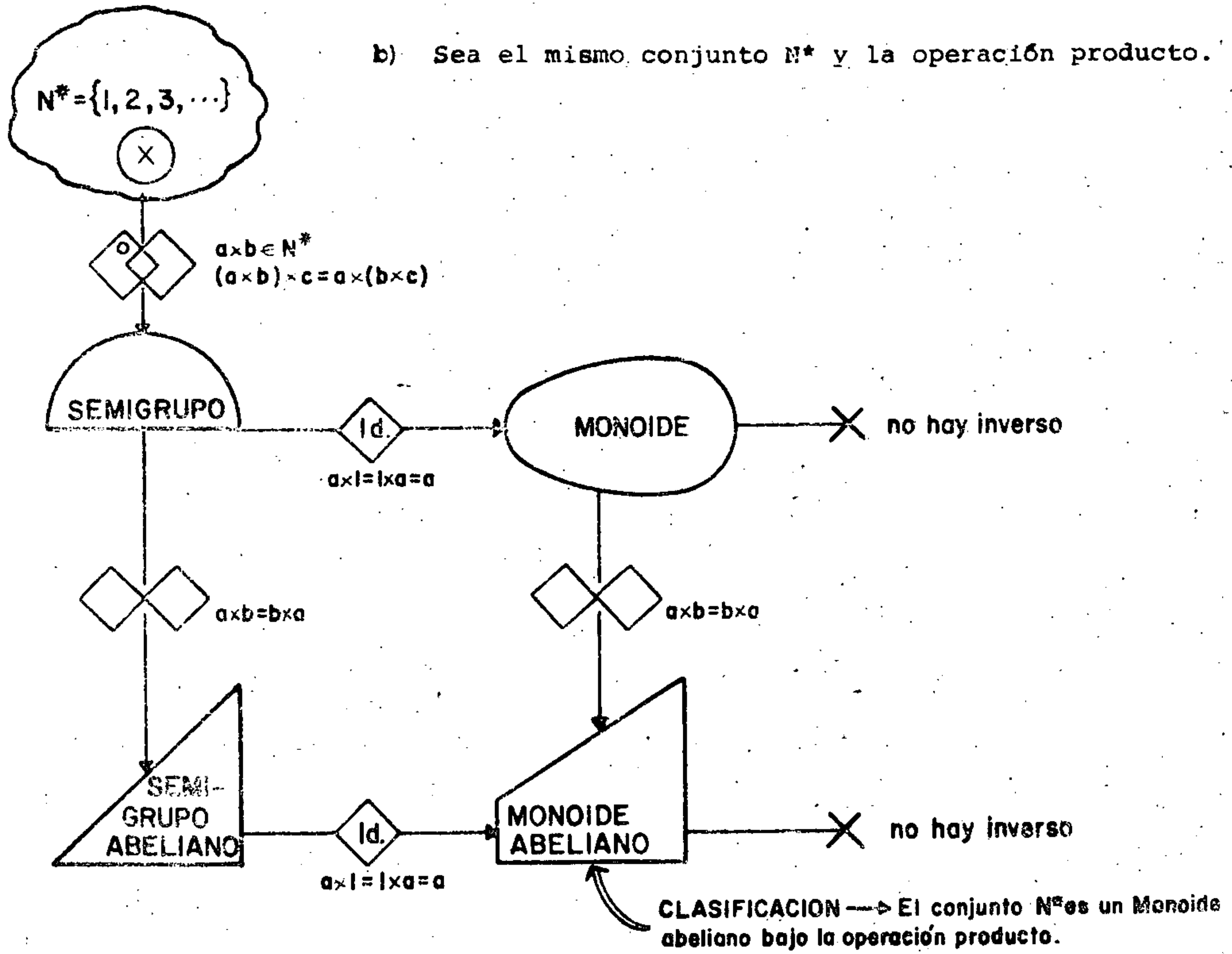
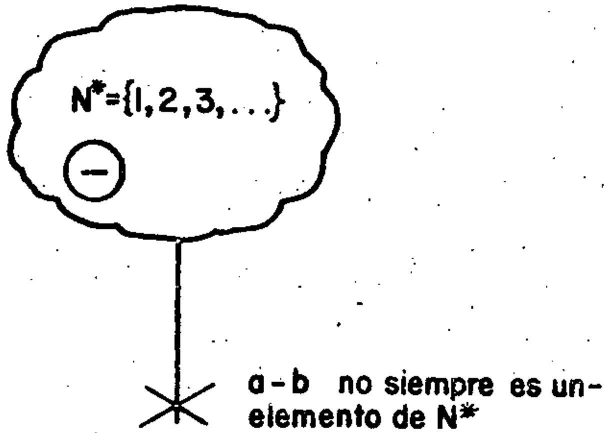


FIGURA 5.B.3

C.A.D.A. 1976

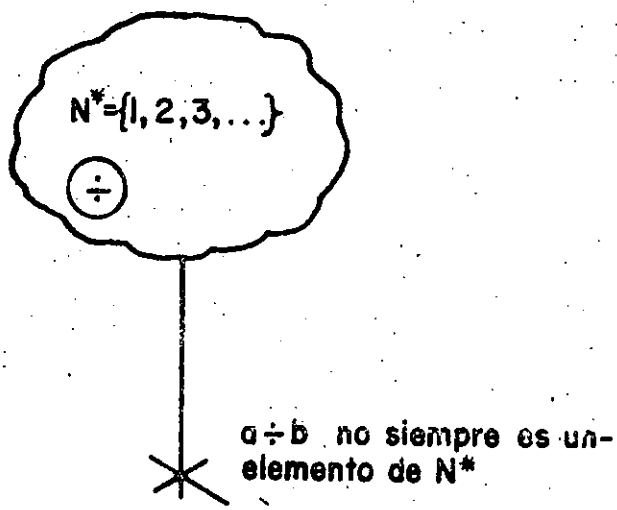
c) Sobre el mismo conjunto N^*, la operación diferencia



no es un semigrupo

FIGURA 5.B.4

d) Considérese ahora la operación división



no es un semigrupo.

FIGURA 5.B.5

e).- Consideremos el conjunto E de los enteros : C.A.D.A. 1976.

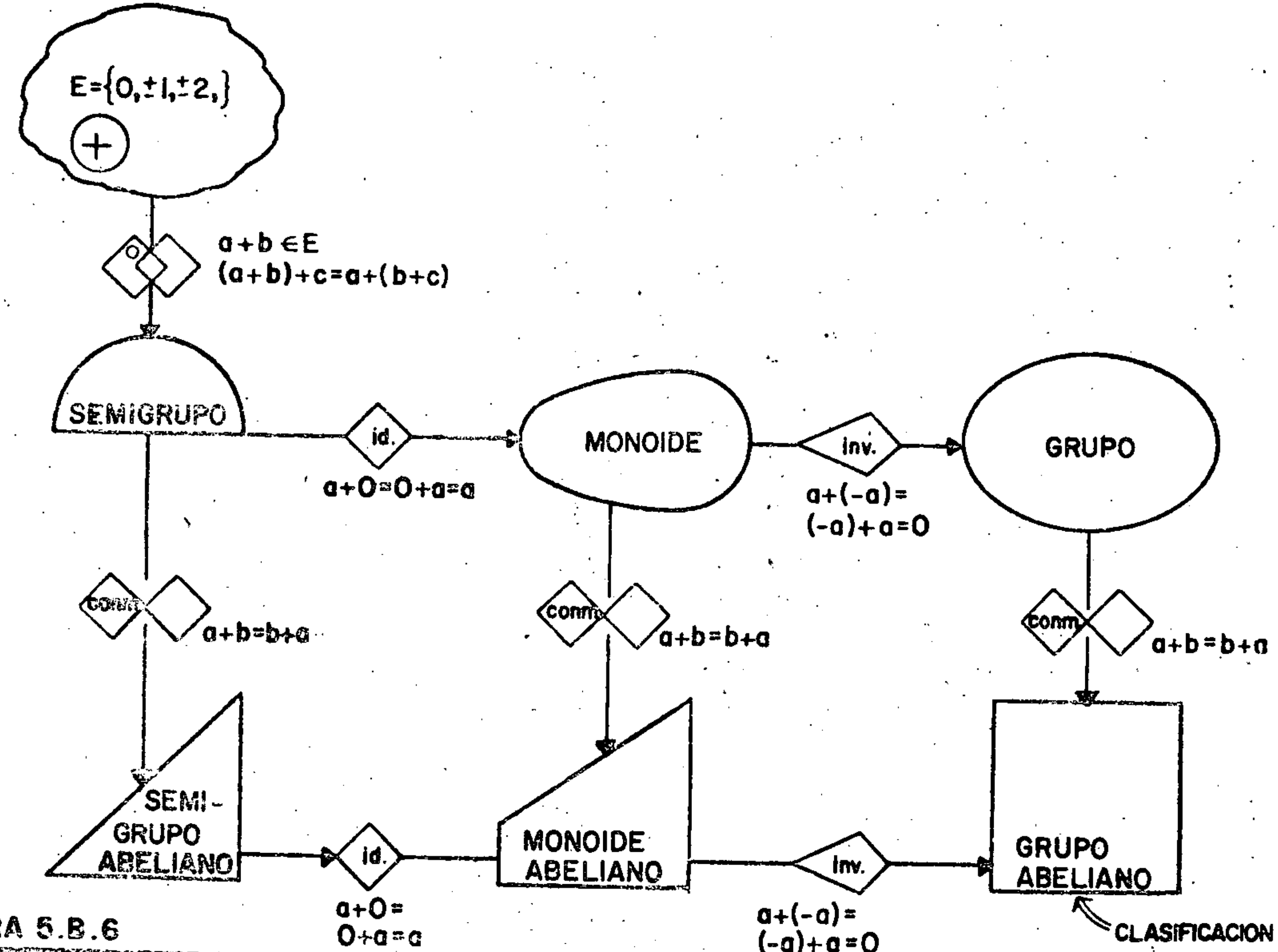


FIGURA 5.B.6

Además del operador binario "$*$" incluiremos el operador "$\odot$"; ambos operando sobre los elementos del conjunto S . Verificaremos ahora cuales de las propiedades asignadas a "$*$" se cumplen bajo el operador "$\odot$" .

1ª. Cerradura:
$a, b \in S \rightarrow a \odot b \in S$

2ª. Asociatividad:
$a, b, c \in S \rightarrow (a \odot b) \odot c = a \odot (b \odot c)$

3ª. Identidad:
$\exists i \in S$ (i único) $\ni \forall x \in S$.
$x \odot i = i \odot x = x$
i:elemento identidad respecto a "$\odot$".

4ª. Inverso:
$\forall x \exists x^{-1} (x, x^{-1} \in S \ni x \odot x^{-1} = x^{-1} \odot x = i)$
(excepción: el elemento "$e \in S$" definido antes para "$*$" no cumple con esta propiedad).

Al elemento x^{-1} se le denomina el inverso de x respecto a $\odot$.

5ª. Conmutatividad.
Si $a, b \in S \rightarrow a \odot b = b \odot a$

Como antes, dependiendo de las propiedades que $\odot$ satisfaga sobre S definira semigrupos, monoides, etc.

Sin embargo, ahora podemos plantear una propiedad que incluya a ambos operadores "$*$" y "$\odot$":

6. Distributividad
Si para $a, b, c \in S$
$a \odot (b * c) = a \odot b * a \odot c$
y $(b * c) \odot a = b \odot a * c \odot a$
entonces se dice que $\odot$ es distributiva respecto a $*$.

Propiedades y definiciones de las operaciones "*" y "⊙" en S.

i) Anillo :

Un grupo abeliano respecto a "*" que además, satisface en relación con un segundo operador "⊙" : la cerradura, la asociatividad y la distributividad, se denomina : Anillo.

Por ejemplo, habíamos concluido que el conjunto de los enteros, $E = \{0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$

bajo la operación + es un grupo abeliano. Introduciendo en el mismo conjunto la operación x :

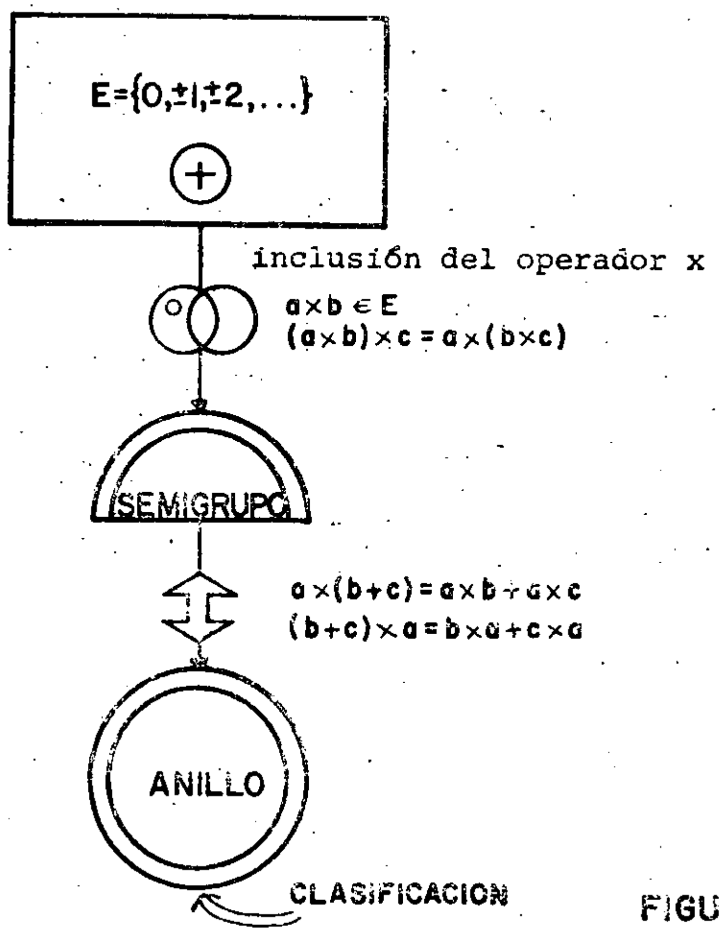


FIGURA 5.B.7

Nota : No se podría definir la distributividad de "+" respecto a "x".

ii) Anillo con unidad

Un anillo que tiene un elemento identidad "i" con respecto a un segundo operador ⊙ se denomina anillo con unidad. En el ejemplo anterior,

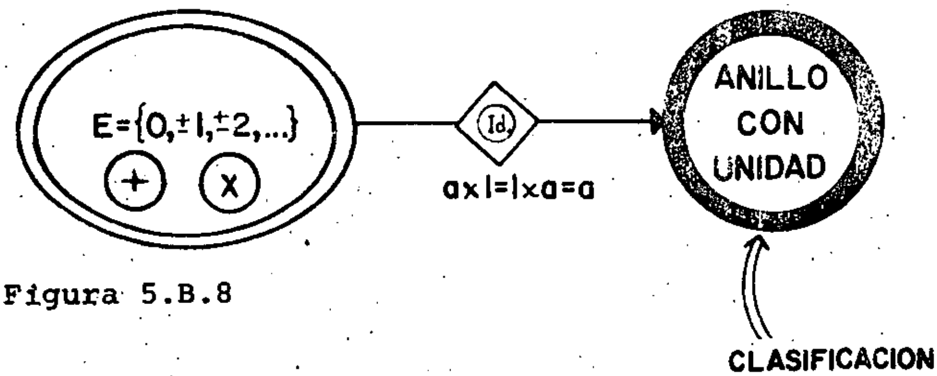


Figura 5.B.8

iii) Anillo conmutativo

Un anillo que satisface la conmutatividad respecto a ⊙, se denomina conmutativo.

Observese que no se impone la necesidad de que sea un anillo con unidad. Del mismo ejemplo,

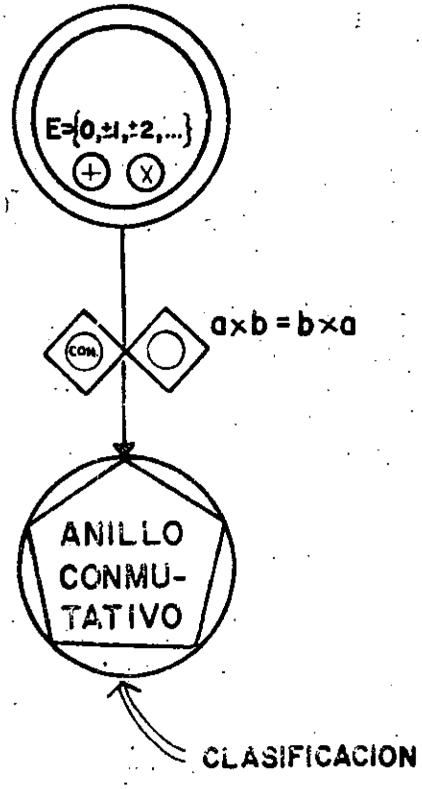


Figura 5.B.9

iv) Anillo conmutativo con unidad

Un anillo conmutativo con un elemento identidad "i" respecto a $\odot$, se denomina anillo conmutativo con unidad.

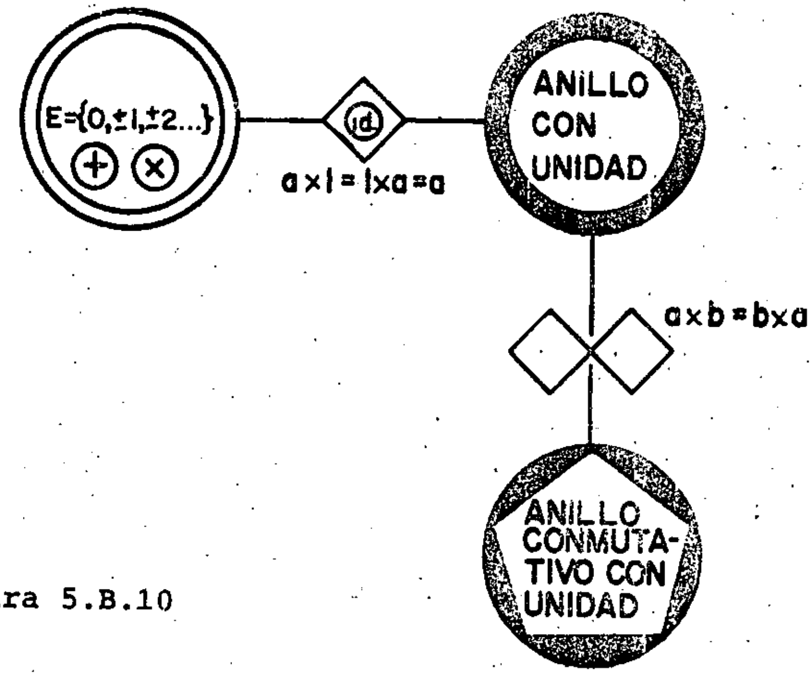


Figura 5.B.10

v) Anillo con división

Un anillo con unidad que también satisface el postulado que asevera la existencia de x^{-1}, el inverso, respecto a $\odot$, se denomina anillo con división.

Recurriendo al ejemplo que nos ha servido para ilustrar los casos anteriores,

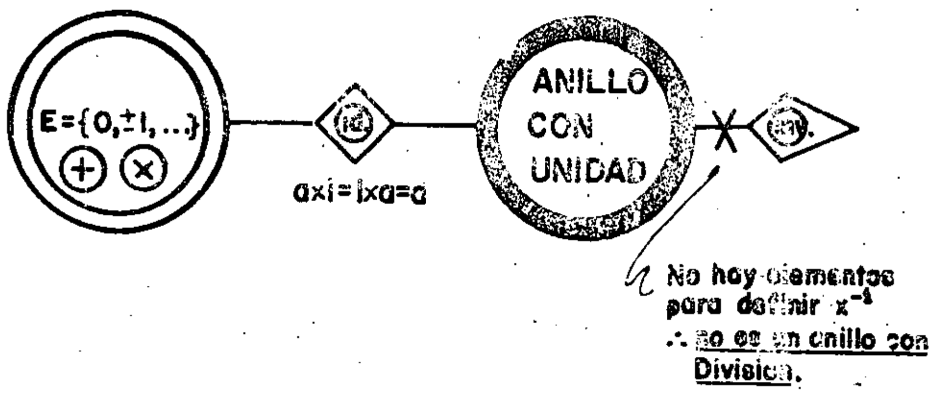


Figura 5.B.11

Consideremos ahora, como ejemplo, al conjunto Q de los racionales.

$$\boxed{Q = \left\{ x/x = \frac{p}{q} \wedge p,q \in E \right\}}$$

Considérese el operador"+" :

a) $\frac{p}{q} + \frac{p_1}{q_1} = \frac{pq_1 + p_1q}{qq_1}$

como $p,q, \in E \longrightarrow p \times q \in E \wedge (p + q) \in E$

entonces

$\frac{p}{q} + \frac{p_1}{q_1} \in Q$: cerradura,

b) $\frac{p}{q} + \left(\frac{p_1}{q_1} + \frac{p_2}{q_2}\right) = \left(\frac{p}{q} + \frac{p_1}{q_1}\right) + \frac{p_2}{q_2}$: Asociatividad,

c) $\frac{p}{q} + \frac{p_1}{q_1} = \frac{p_1}{q_1} + \frac{p}{q}$: Conmutatividad,

d) $\frac{p}{q} + \frac{o}{q_1} = \frac{p}{q}$: Identidad,

e) $\frac{p}{q} + \left(\frac{-p}{q}\right) = o$: Inverso,

$\therefore$ La operación"+"define en Q un grupo abeliano.
Considérese ahora el operador"x";

a') $\frac{p}{q} \times \frac{p_1}{q_1} = \frac{pp_1}{qq_1} \in Q$: Cerradura,

b') $\frac{p}{q} \times \left(\frac{p_1}{q_1} \times \frac{p_2}{q_2}\right) = \left(\frac{p}{q} \times \frac{p_1}{q_1}\right) \times \frac{p_2}{q_2}$: Asociatividad, c') $\frac{p}{q} \times \left(\frac{p_1}{q_1} + \frac{p_2}{q_2}\right) = \frac{p}{q} \times \frac{p_1}{q_1} + \frac{p}{q} \times \frac{p_2}{q_2}$: <u>Distributividad</u>

$$\left(\frac{p_1}{q_1} + \frac{p_2}{q_2}\right) \times \frac{p}{q} = \frac{p_1}{q_1} \times \frac{p}{q} + \frac{p_2}{q_2} \times \frac{p}{q}$$

d') $\frac{p}{q} \times 1 = \frac{p}{q}$: : <u>Identidad</u>

e') $\frac{p}{q} \times \left(\frac{p}{q}\right)^{-1} = 1$ si $p \neq o$ y $q \neq o$: <u>Inverso</u>

∴ La operación "x" define en Q un anillo con división.

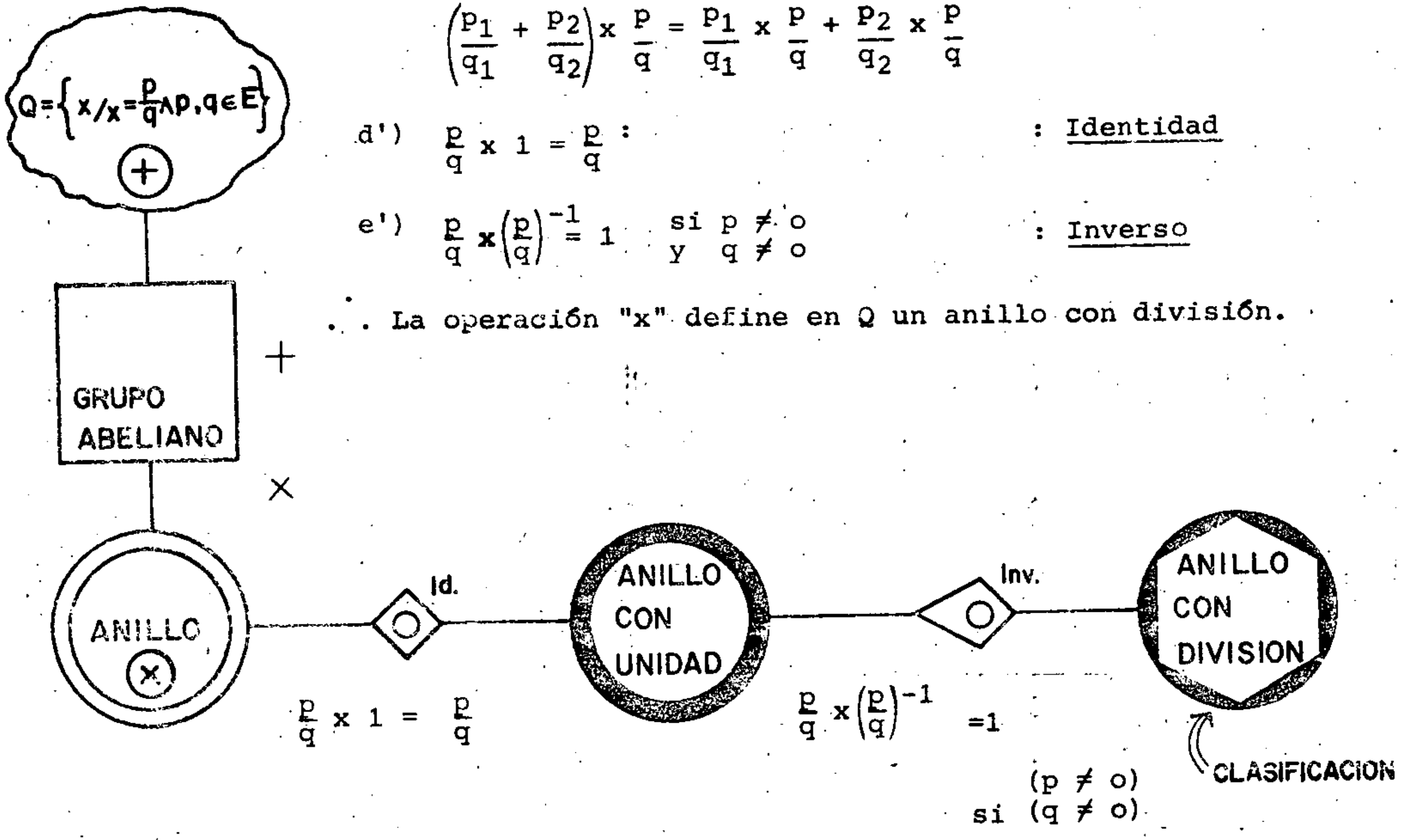


Figura 5.B.12

vi) Campo (ó campo conmutativo)

Un anillo con división, respecto al segundo operador ⊙, que además respecto a ⊙ es conmutativo se dice que constituye un Campo.

Nota : El campo es la estructura, o sistema algebraico más fuerte porque satisface todos los postulados enunciados.

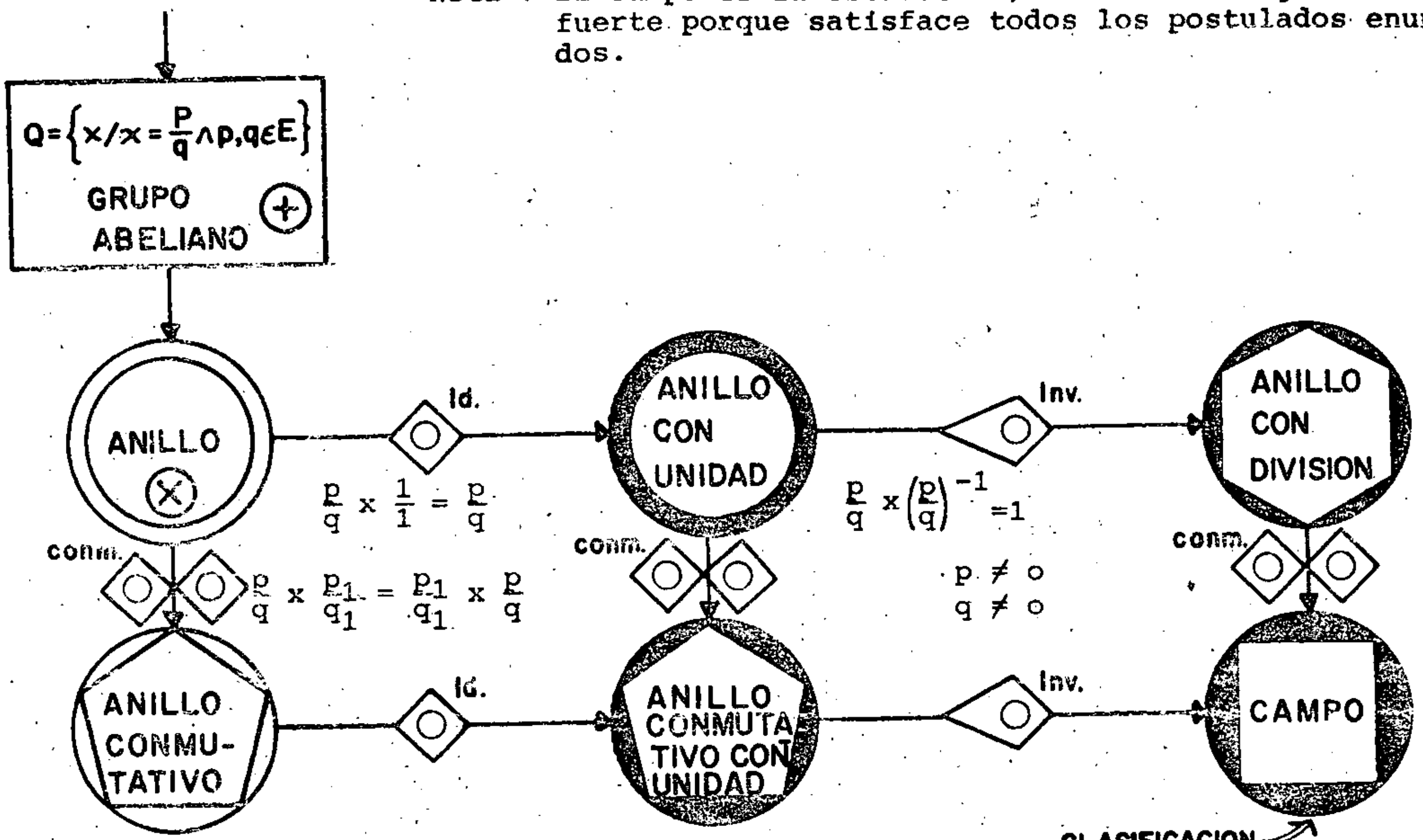


Figura 5.B.13

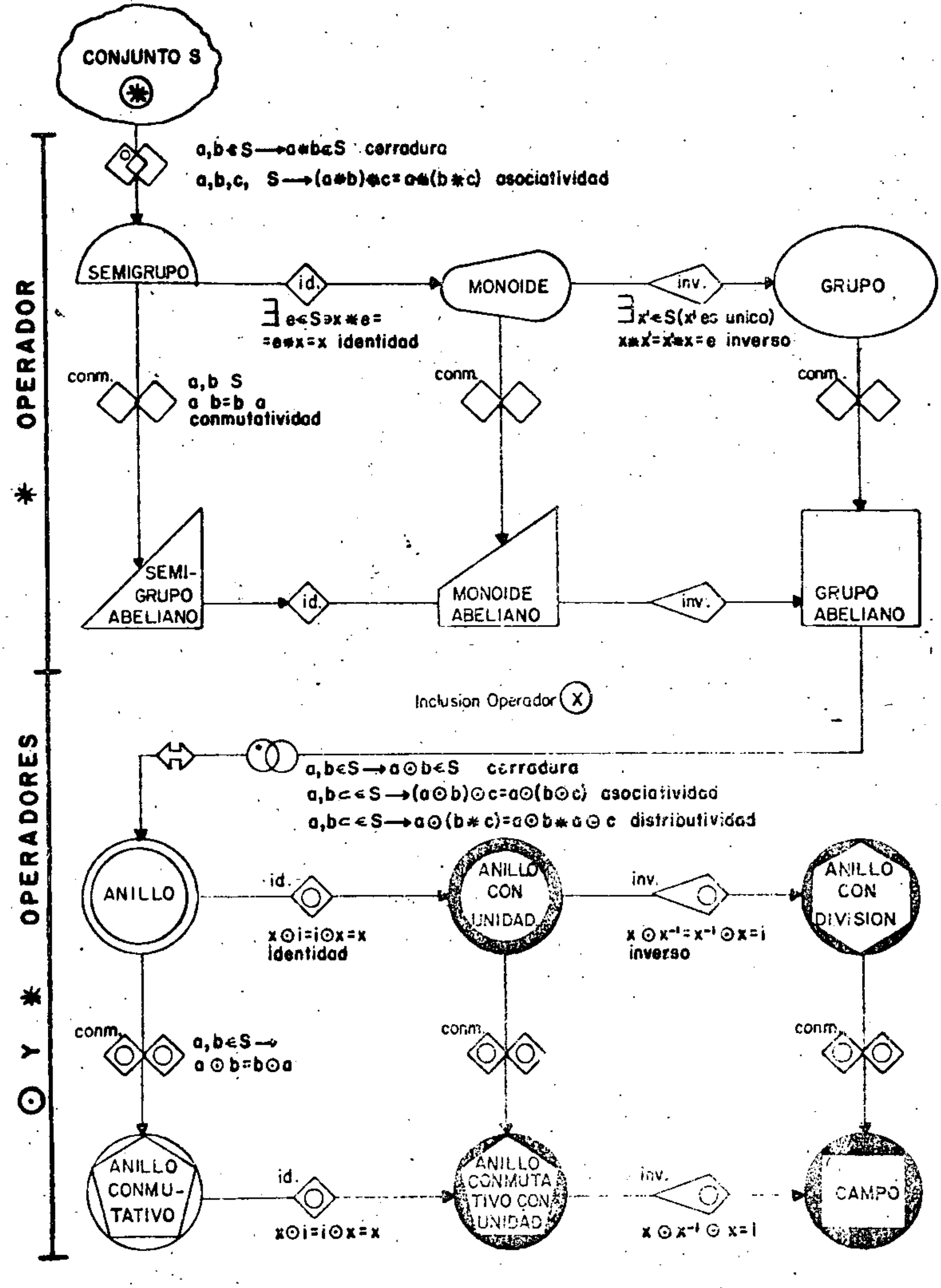

CONJUNTO S
a,b∈S ⟶ a∗b∈S cerradura
a,b,c, S ⟶ (a∗b)∗c = a∗(b∗c) asociatividad
SEMIGRUPO
id.
∃ e∈S∋x∗e= =e∗x=x identidad
MONOIDE
inv.
∃x'∈S(x' es unico) x∗x'=x'∗x=e inverso
GRUPO
conm.
a,b S
a b=b a
conmutatividad
conm.
conm.
SEMI-GRUPO ABELIANO
id.
MONOIDE ABELIANO
inv.
GRUPO ABELIANO
∗ OPERADOR
Inclusion Operador X
a,b∈S ⟶ a⊙b∈S cerradura
a,b,c∈S ⟶ (a⊙b)⊙c=a⊙(b⊙c) asociatividad
a,b,c∈S ⟶ a⊙(b∗c)=a⊙b∗a⊙c distributividad
ANILLO
id.
x⊙i=i⊙x=x
identidad
ANILLO CON UNIDAD
inv.
x⊙x⁻¹=x⁻¹⊙x=i
inverso
ANILLO CON DIVISION
conm.
a,b∈S ⟶
a⊙b=b⊙a
conm.
conm.
ANILLO CONMUTATIVO
id.
x⊙i=i⊙x=x
ANILLO CONMUTATIVO CON UNIDAD
inv.
x⊙x⁻¹⊙x=i
CAMPO
⊙ Y ∗ OPERADORES

FIGURA 5.B.14

CAMPO DE LOS COMPLEJOS

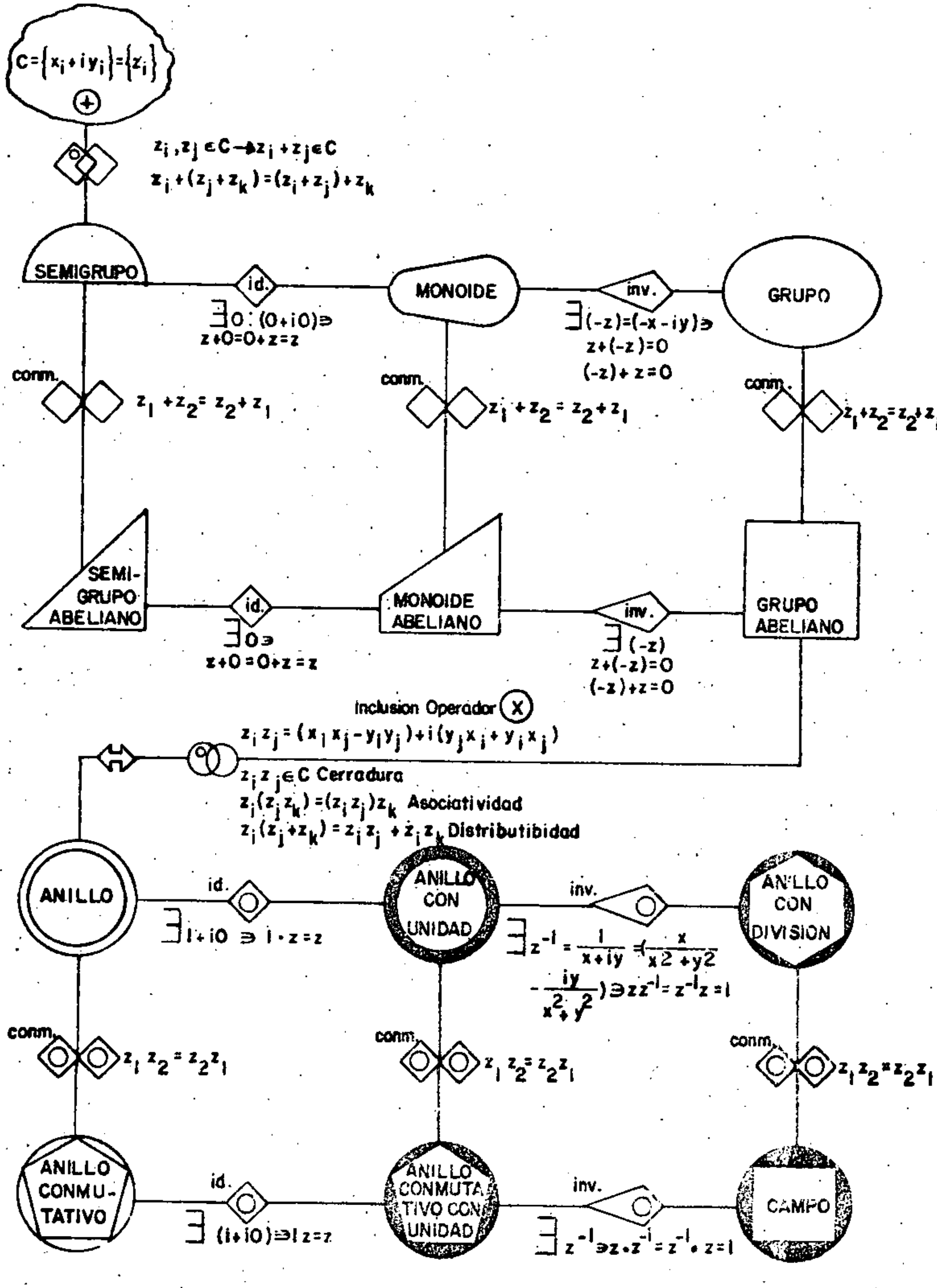


FIGURA 5.B.15

Ejercicio :

Vamos a corroborar,que el conjunto C de los complejos definen un campo bajo las operaciones de suma y producto.

Sea el conjunto de los complejos :

$$C = (x_1 + iy_1, x_2 + iy_2, \ldots, x_k + iy_k) = z_k$$

bajo las operaciones

a) Suma : $z_j + z_n = (x_j + iy_j)+(x_n + iy_n) =$

$$= (x_j + x_n)+i(y_j + y_n)$$

b) Multiplicación : $z_j z_n = (x_j + iy_j)\ (x_n + iy_n) =$

$$= (x_j x_n - y_j y_n)+i(y_n x_j + y_j x_n)$$

En la figura 5.B.15, se comprueba que el conjunto C de los números complejos define un campo bajo las operaciones de suma y producto. (Evidentemente, este caso incluye a los números reales).

Este es solo un ejemplo, pero podrían definirse y analizarse otros conjuntos y otros operadores.

Campo de Galois de módulo 2 (aritmética modular).

Supóngase un conjunto $S=\{0,1\}$ y que sobre él se definen dos operaciones: suma y producto, de tal manera que el resultado sea del mismo conjunto:

$$\boxed{\begin{array}{l} a\cdot b \in S \\ a+b \in S \end{array}}$$

De las operaciones ordinarias de aritmética, se ve que ésto no es posible porque

$$\boxed{1+1 \notin S}$$

Para evitar este inconveniente supóngase que cualquier resultado de una operación que exceda a algún elemento de S es sustituído por el residuo de dividir entre 2 :

$$(1+1)/2 = 1 \quad \text{y el residuo} = 0$$

$$\therefore \; 1+1 \text{ es sustituído por } 0.$$

Se pueden formular ahora las siguientes tablas de operación

suma

⊕	0	1
0	0	1
1	1	0

≡

p	q	$\underline{\vee}$
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	0

;

producto

⊙	0	1
0	0	0
1	0	1

≡

p	q	$\wedge$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Puede observarse que las operaciones indicadas, ⊕ y ⊙ , corresponden a las definiciones, mediante tablas de verdad, de la disyunción exclusiva (no inclusiva) y la conjunción respectivamente.

A la aritmética definida de esta manera la denominaremos: Campo de Galois de módulo 2, y la representaremos con

$$\boxed{GF(2)}$$

Antes que nada verificaremos que se trata de un campo. (Ver figura 5.B.16)

Nota: Los campos de Galois se extienden a más de dos elementos, pero para los fines de esta exposición nos limitaremos al módulo : m=2 .

CAMPO DE GALOIS Módulo 2

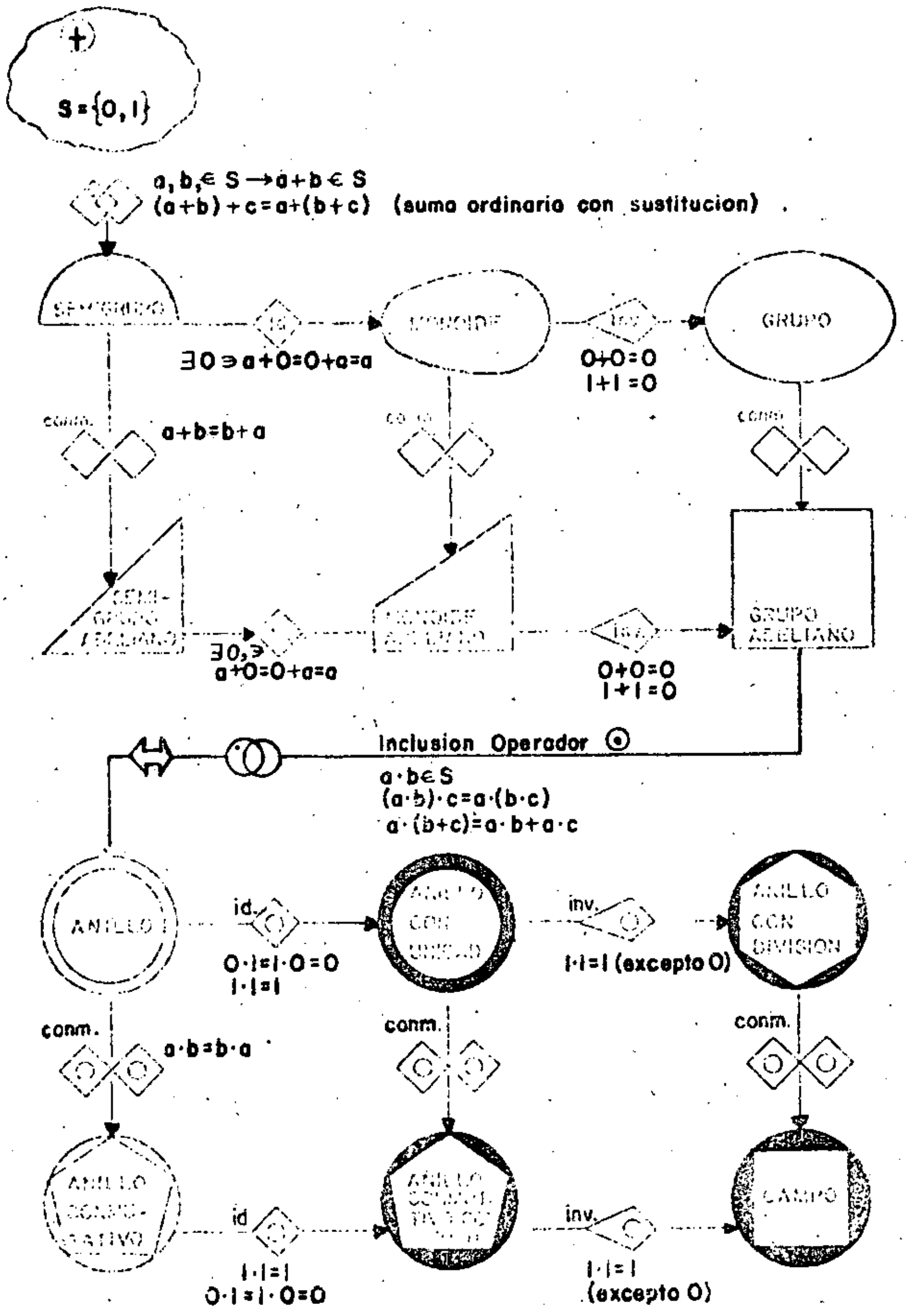


FIGURA 5.B.16

En lo que sigue deberemos tener cuidado de distinguir:

a) Un espacio vectorial lineal, que se establecerá axiomática mente.

b) Un espacio vectorial asociado a una gráfica.*

c) La base, vectorial, de un espacio vectorial y la de una grá fica

d) los espacios vectoriales de circuitos y conjuntos de corte.

De otra manera pueden presentarse confusiones insalvables entre los elementos y/o las operaciones de unos y de otros.

Espacios vectoriales lineales:

(Refs. de la parte axiomática)

- Protter, M.H. y Morrey, Ch. B. "Modern Mathemati cal Analysis" Addison-Wesley. 1964

- Hadley, G., "Algebra Lineal" Fondo Educativo Interamericano. 1969

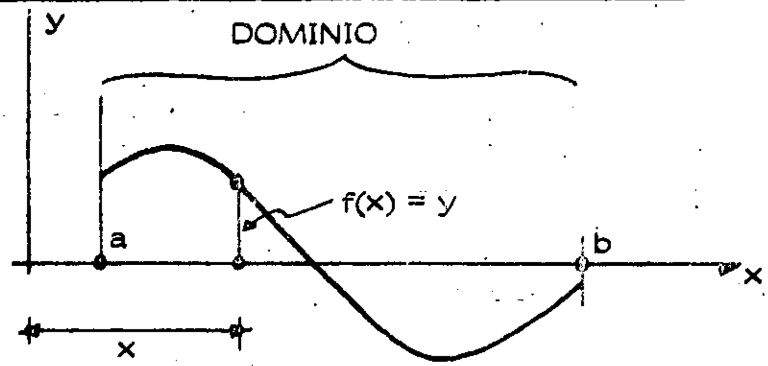
- Ficken, F.A. "Linear Transformations and Matrices", Prentice-Hall. 1967.)

Las conveniencias de introducir conceptos del Algebra Lineal en un curso de Gráficas son muchas; pero quizá valga la pena destacar algunas:

a) El concepto de función de una variable, definida dentro de un intervalo, se puede entender intuitivamente co mo una extensión del concepto de vector dado como un conjunto ordenado de números.

Considérese la figura siguiente:

* Estos conceptos se tratan en el capítulo 5.



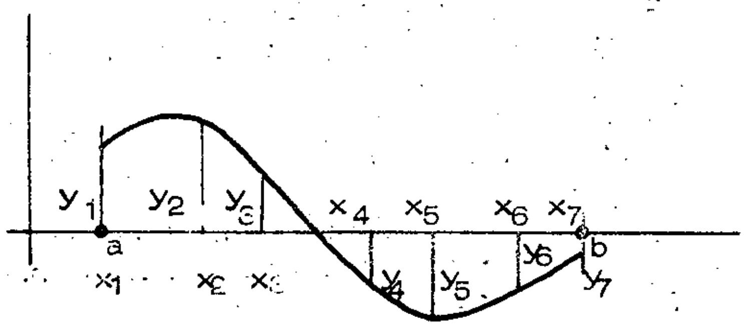
a cada punto de "x" corresponde uno y sólo un punto de "y = f(x)"

La orientación del eje "x" establece un orderamiento de los puntos $x \in [a, b]$, de manera que dados dos puntos x_1 y x siempre podremos saber cual es mayor (está más a la derecha).

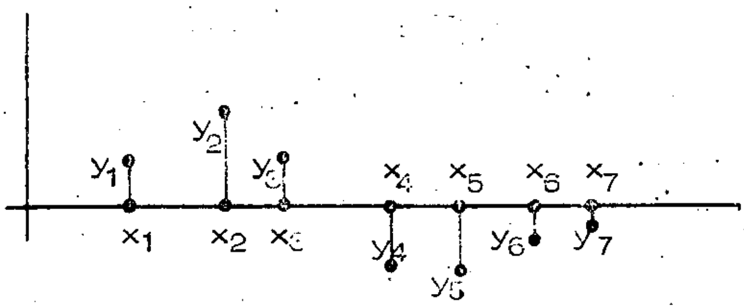
Si del intervalo $[a, b]$ sólo tomáramos algunos puntos

$$x_1, x_2, \ldots, x_k$$

el diagrama tendría la forma



Si la función sólo nos interesara para $x_1, x_2, \ldots, x_k$:



De manera que el conjunto, finito, de valores de $y=f(x)$ asociados a $(x_1, x_2, x_3, .., x_k)$ sería el conjunto ordenado (vector)

$$(y_1, y_2, y_3, \ldots, y_k)$$

Esta sería una función de variable discreta, que difiere de la anterior esencialmente en el número de componentes. En el caso original, función de variable continua, el número de componentes en $[a,b]$ es infinito: es un vector con un número infinito de componentes.

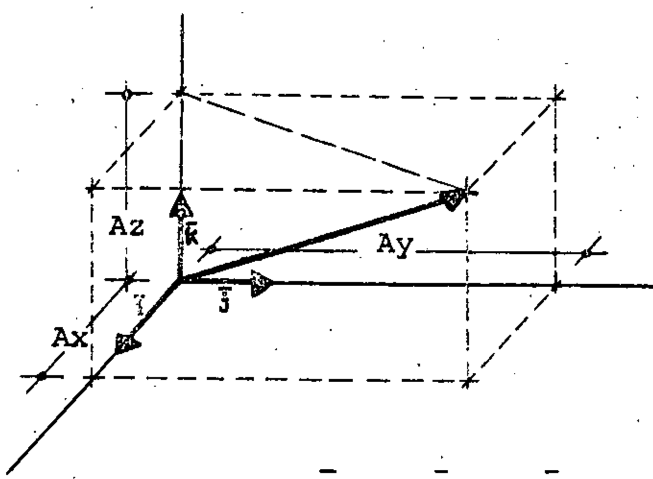
b) En virtud de la similitud anterior entre vectores y funciones continuas, definidas en un intervalo cerrado $[a,b]$, podremos asociar a funciones de este tipo muchas propiedades geométricas de los vectores, que hasta espacios tridimensionales son esquemáticamente perceptibles, por ejemplo:

- longitud y orientación de un vector,
- suma de vectores,
- ortogonalidad, etc.

c) De los conceptos más elementales del algebra vectorial, tenemos el de la representación vectorial a través de sus componentes y los vectores de la base

base $\bar{e}_3 = \{ \bar{i}, \bar{j}, \bar{k} \}$

$\bar{A} = (Ax, Ay, Az)$



$\bar{A} = Ax\,\bar{i} + Ay\,\bar{j} + Az\,\bar{k}$

Extrapolando este concepto a espacios n-dimensionales con una base $\{\bar{e}_i\}$

$$\bar{A}=A_i\ \bar{e}_i \qquad i=1,2,\ldots,n$$

y de manera similar podremos plantear (mediante series deFourier, por ejemplo) la expansión de una función en términos de sus componentes y de una base.

Estas y otras propiedades de los espacios vectoriales, tanto en el análisis de sistemas (físicos, sociales, económicos, etc.), como de temas más avanzados de la propia matemática hacen de los espacios vectoriales un tema de relevancia singular.

Definición de espacio vectorial lineal.

Un espacio vectorial lineal de dimensión n, definido sobre un campo F, es una colección de objetos, a saber:

i) Un campo F (formado por un conjunto S de elementos sobre los que se definen las operaciones $\oplus$ y $\odot$.

Nota: es usual establecer de inmediato que los elementos de S son números reales, o complejos, y las operaciones son las de suma y multiplicación ordinarias. Sin embargo, no es forzoso delimitar los conceptos a estos elementos y operaciones.

ii) Un conjunto (E) de vectores (eneadas de elementos pertenecientes al campo F. El número de elementos de un vector, definen la dimensión del vector y por consiguiente, la dimensión del espacio vectorial.

iii) Una operación binaria $\oplus$

denominada suma vectorial definida entre los elementos de (E)

$\bar{X},\ \bar{Y} \in (E)$; $\bar{X}=(x_1,x_2,\ldots x_n)$, $\bar{Y}=(y_1,y_2,\ldots y_n)$

entonces, la suma vectorial se define:

$\bar{X}+\bar{Y} = (x_1+y_1,x_2+y_2,\ldots x_n+y_n)$

El conjunto de vectores (E) es un grupo abeliano - bajo la operación $\oplus$. (Ver figura 5.B.17)

iv) una operación binaria

$\odot$

denominada multiplicación por un escalar, que cuando se efectúa entre un escalar c

$c \in F$

y un vector $\overline{X}$

$\overline{X} = (x_1, x_2, \ldots, x_k) \in (E)$

da lugar a un vector $\overline{P}$

$\overline{P} \in (E)$

tal que

$$\overline{P} = c \cdot \overline{X} = (c \cdot x_1, \quad c \cdot x_2, \ldots, \quad c \cdot x_k)$$

Propiedades de la multiplicación por un escalar

i) $c_1 \cdot (c_2 \cdot \overline{X}) = (c_1 \cdot c_2) \cdot \overline{X} \qquad c_1, c_2 \quad F$

ii) $c_1 \cdot (\overline{X} + \overline{Y}) = c_1 \cdot \overline{X} + c_1 \cdot \overline{Y}$

iii) $(c_1 + c_2) \cdot \overline{X} = (c_1) \cdot \overline{X} + (c_2) \cdot \overline{X}$

iv) $1 \cdot \overline{X} = \overline{X}$ (en donde 1 es el elemento identidad en F, respecto a la multiplicación).

Facilmente puede derivarse de estos postulados:

$0 \cdot \overline{X} = \mho$ (Vector cero, todos sus componentes son iguales a cero)

$(-1) \cdot \overline{X} = -\overline{X}$

Grupo abeliano Ⓔ.

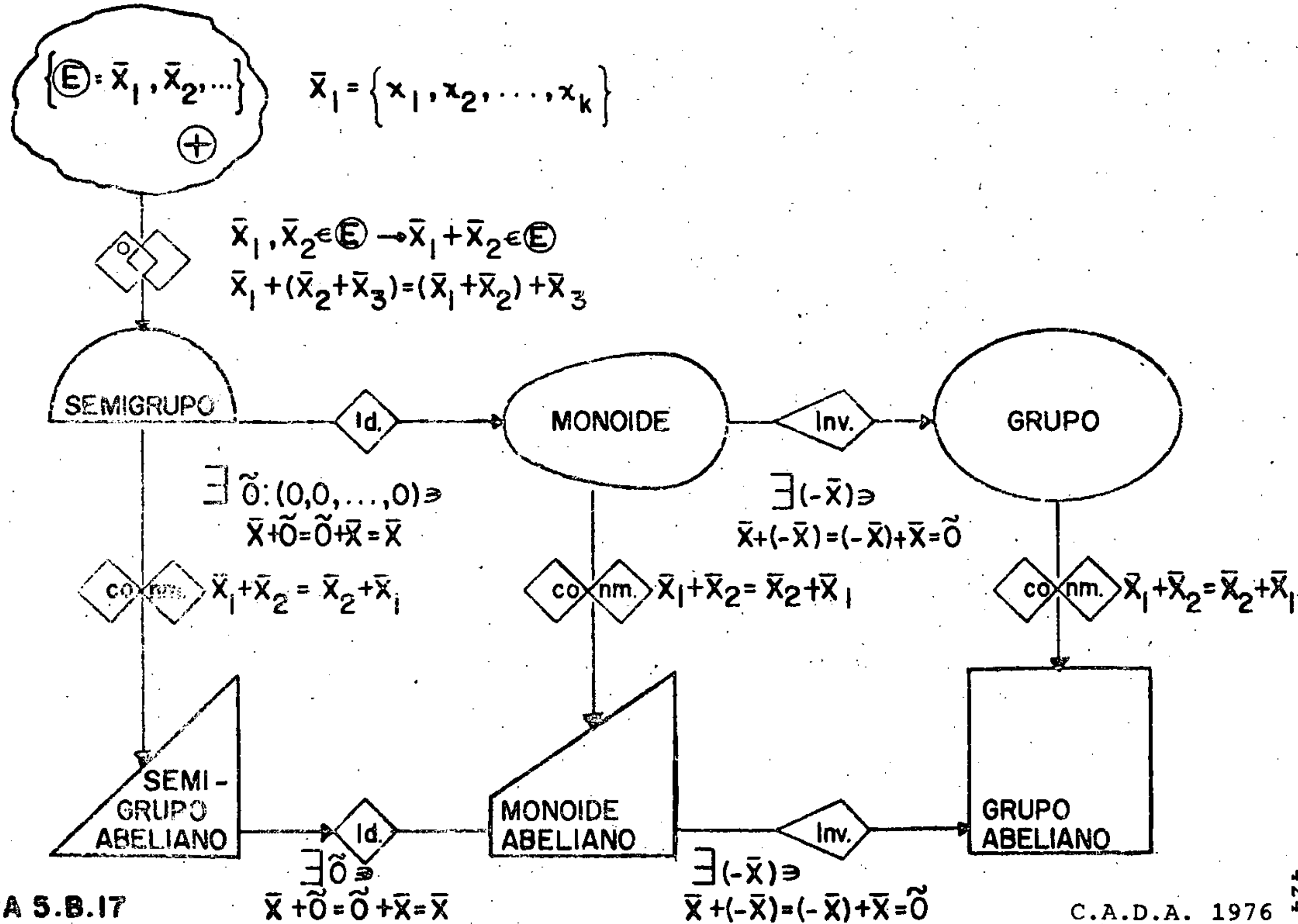


FIGURA 5.B.17

C.A.D.A. 1976

Subespacios.

Un subconjunto V del espacio vectorial E que, bajo las operaciones de suma y multiplicación por un escalar - forma un espacio vectorial, es un subespacio de E.

Supongase que V:

$$V \subset E$$

es un subespacio de E

Se debe entonces verificar que si

a) $\bar{Y}_1$ y $\bar{Y}_2 \in V \rightarrow (\bar{Y}_1 + \bar{Y}_2) \in V$

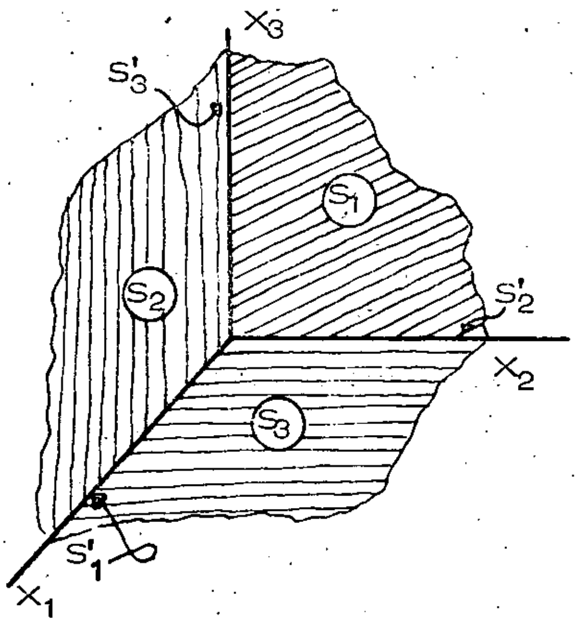
(y por lo tanto pertenecen ambos y la suma a E. Esta es la cerradura del subespacio en - cuanto a la suma de vectores.

b) $\forall \bar{Y} \in V \wedge \forall c \in F \rightarrow c \cdot \bar{Y} \in V$

que es la cerradura bajo la multiplicación escalar.

Ejemplo:

En un espacio V_3 tridimensional (3D) cada uno de los planos coordenados y cada uno de los ejes, es un subespacio.



De hecho cada línea, plano o superficie que pase por el orígen es un subespacio de V_3.

Combinación lineal.

Suponiendo que

$$(\bar{X}_1, \bar{X}_2) \in V$$

entonces $\quad (\bar{X}_1 + \bar{X}_2) \in V$

y $\quad (\alpha \bar{X}) \in V \qquad (\alpha \in F).$

De lo anterior, y suponiendo que F es el campo de los complejos o de los reales, etc. podemos inferir, a través del concepto de linealidad implícito en los propios axiomas que

$$\boxed{\alpha_i \bar{X}_i} \quad i = 1, \ldots, n$$

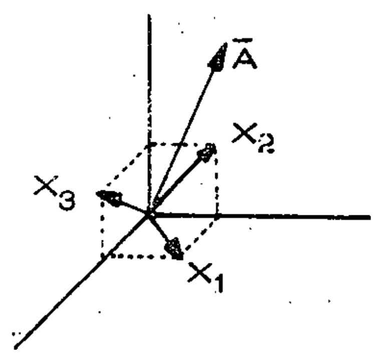
es una combinación lineal de vectores V, y que la totalidad de estas combinaciones generan el propio subespacio V.

Se puede también definir esto diciendo, más abreviadamente, que el conjunto $\{X_i\}$ $i = 1, \ldots, n$ genera el subespacio V, (evidentemente a través de las combinaciones lineales mencionadas).

Ejemplo: Sean

$$\bar{X}_1 = (1, 1, 0), \quad \bar{X}_2 = (0, 1, 1) \quad y$$
$$\bar{X}_3 = (1, 0, 1)$$

tres vectores de un espacio (3D). ¿Pueden, mediante combinaciones lineales, representar cualquier punto* (o vector) de este espacio?



*A cada punto del espacio corresponde uno y sólo un vector que parte del origen y viceversa. Hay una correspondencia biunivoca entre vectores y puntos.

Hagamos la prueba con un vector cualquiera

$$\overline{A} = (a_1, a_2, a_3)$$

Se tendría

$$\overline{A} = c_1X_1 + c_2X_2 + c_3X_3$$

en forma explícita y tomando en cuenta la linealidad.

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

o sea*

$$\left.\begin{aligned} a_1 &= (c_1+0+c_3) \\ a_2 &= (c_1+c_2+0) \\ a_3 &= (0+c_2+c_3) \end{aligned}\right\}$$ Un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas.

La posibilidad de encontrar una solución única depende de que el determinante del sistema :

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

sea o no distinto de cero. Pero el determinante tiene como columnas precisamente los vectores X_1, X_2 y X_3. O sea que la posibilidad de representar un vector $\overline{A}$ cualquiera, o expander el espacio, a través de los vectores $\{X_i\}$ va a depender de los valores de estos vectores. En el caso anterior el determinante es distinto de cero, por lo tanto sí es posible determinar :

$\underline{c_1, c_2 \text{ y } c_3}$

* Dos vectores son iguales si y solo si cada una de sus componentes correspondientes son iguales.

Ejemplo: si $\bar{A} = (1,2,3)$

$1 = c_1 + c_3$

$2 = c_1 + c_2$ Resolviendo el sistema $\longrightarrow$ $c_1 = 0$, $c_2 = 2$, $c_3 = 1$

$3 = c_2 + c_3$

$$\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} = 0 \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$$

En virtud de que $\bar{A}$ se puede expresar a través de una combinación lineal de X_1, X_2 y X_3 decimos que $\bar{A}$ depende linealmente de esos vectores.

Dependencia lineal.

a) Un vector $\bar{Y}$ es linealmente dependiente del conjunto de vectores $\{\bar{X}_1, \bar{X}_2, \ldots, \bar{X}_n\}$ si y sólo si :

$$\bar{Y} = \alpha_i \bar{X}_i \quad i = 1,2,\ldots, n$$

esto es

$$\bar{Y} \in \langle \bar{X}_1, \bar{X}_2, \ldots, \bar{X}_n \rangle$$

b) Definición usual

Un conjunto de vectores $\{\bar{X}_j\}$ $j = 1, \ldots, n+1$ es linealmente dependiente si el vector $\tilde{0}$ (cero) se puede expresar a través de una combinación lineal no trivial (esto es, cuando no todas las $_j$ son cero)

$$\alpha_j \bar{X}_j = \tilde{0} \quad j = 1, \ldots, n+1$$

y cuando menos una $\alpha_j \neq 0$.

Notas:

a) Todo conjunto de vectores $\{\bar{X}_i\}$ que incluya al vector $\tilde{0}$ es linealmente dependiente porque

$$\alpha_1\tilde{0} + \alpha_j\bar{X}_j = \tilde{0}$$

para $\forall \alpha_j = 0$ y $\alpha_1 \neq 0$

b) Si $\{\bar{X}_i\}$ es linealmente dependiente, entonces cuando menos un $\bar{X}_j \in \{\bar{X}_i\}$ es dependiente del resto

$$\bar{X}_j = \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \ldots$$

c) En términos de la expansión de un subespacio, no todos los vectores de un conjunto $\{\bar{X}_i\}$ linealmente dependiente pueden utilizarse con ese objeto, alguno (s) es (son) redundante (s).

Ejemplo:

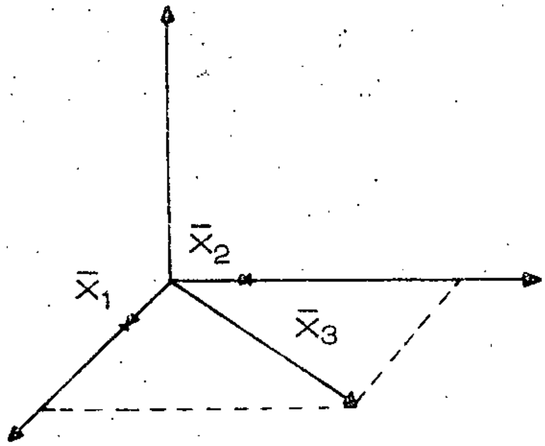
Si se tienen

$$\bar{X}_1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \; : \; \bar{X}_2 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \text{ Y } \bar{X}_3 = \begin{Bmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

indiscutiblemente se trata de un conjunto linealmente dependiente.

$$\bar{X}_3 = 2\bar{X}_1 + 3\bar{X}_2$$

Representándolos en un sistema cartesiano



Con esta terna de vectores:

a) es imposible expander el espacio tridimensional,

b) para la expansión del subespacio bidimensional, sobra o es redundante un vector. En la expansión de espacios vectoriales se buscará eliminar del conjunto de vectores que lo generen, los vectores redundantes.

c) El número mínimo de vectores para expander (o generar) el espacio vectorial tridimensional es tres, pero no linealmente independientes.

Vectores linealmente independientes y bases

Desde luego que un conjunto de vectores $\{\overline{X}_i\}$ es linealmente independiente si no es linealmente dependiente.

Sin embargo, esta definición de carácter negativo nos remitirá siempre a probar primero la dependencia lineal, lo cual complica innecesariamente el proceso.

Definición :

Un conjunto de vectores $\{\overline{X}_i\}$

es linealmente independiente (sobre F) $\Longleftrightarrow$

$$\boxed{\alpha_i \in F \wedge \alpha_i \overline{X}_i = \tilde{0} \Rightarrow \alpha_i = 0}$$

es decir,
la única combinación lineal que genera al vector $\tilde{0}$ es la trivial.

Base de un espacio vectorial

Definición :

Un conjunto de vectores $\{\overline{X}_i\}$

es una base de E si y solo si

a) es un conjunto linealmente independiente

*b) genera o expande al espacio (E).

Propiedades:

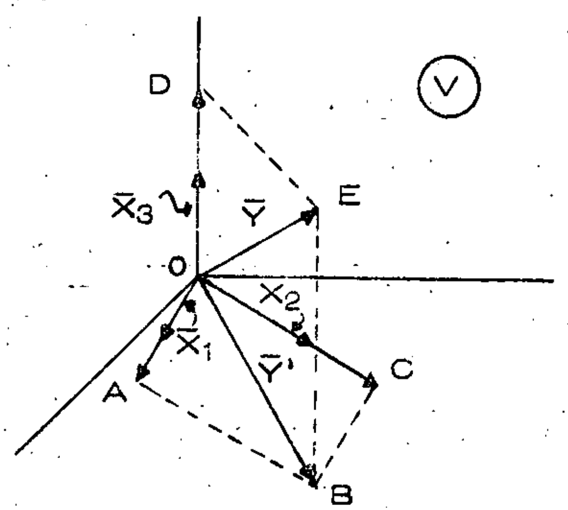
i) Si $\{\bar{X}_i\}$, $i = 1,\ldots,n$ es un conjunto linealmente independiente, entonces $\{\bar{Y},\bar{X}_i\}$ es dependiente dentro del mismo subespacio que genera a $\{\bar{X}_i\}$

$$\bar{Y} = \alpha_i \bar{X}_i \qquad i = 1,\ldots,n$$

(cuando menos una $\alpha_i \neq 0$)

Si $\bar{Y}$ es un vector de V entonces $\{\bar{X}_i\}$ es una base.

En efecto, supongamos que $\bar{X}_1$, $\bar{X}_2$ y $\bar{X}_3$ expanden a V (3D), por medio de combinaciones lineales.



En el espacio V sean,

$\bar{OA} = \alpha_1 \bar{X}_1$,

$\bar{OC} = \alpha_2 \bar{X}_2$ y

$\bar{OD} = \alpha_3 \bar{X}_3$

*Mas adelante se verá que la primera condición es suficiente para definir una base.

tales que

$$\overline{0E} = \overline{Y} = \alpha_1 \overline{X}_1 + \alpha_2 \overline{X}_2 + \alpha_3 \overline{X}_3$$

Por otro lado si suprimimos uno de estos tres vectores linealmente independientes, $\overline{X}_1$, $\overline{X}_2$ o $\overline{X}_3$ no será posible representar a $\overline{Y}$. Supongamos que eliminamos de la terna a $\overline{X}_3$, tendríamos

$$\overline{0B} = \overline{Y}' = \alpha_1 \overline{X}_1 + \alpha_2 \overline{X}_2$$

de lo cual se observa que

$$\overline{Y} \neq \overline{Y}'$$

El vector $\overline{Y}'$ no tiene la componente $\overline{0D}$ definida por $\overline{X}_3$, es un vector del subespacio formado por $\overline{X}_1$ y $\overline{X}_2$. Gráficamente entre $\overline{Y}$ y $\overline{Y}'$ hay una diferencia (o error $\overline{BE}$).

ii) La terna $\{\overline{X}_i\}$, $i = 1,2,$ y 3, es una base del espacio considerado y constituye el mínimo de vectores necesarios para expander V y recíprocamente.

iii) También se ha mostrado que si $\{X_i\}$ es una base entonces es el máximo de vectores linealmente independientes de V. Cualquier vector adicional $\overline{Y}$ hace al conjunto linealmente dependiente o bien $\overline{Y}$ es dependiente de $\{\overline{X}_i\}$.

iv) Si $\{\overline{X}_i\}$ es una base entonces cualquier vector $\overline{Y}$, es expresado de una manera única a través de una combinación lineal

$$\overline{Y} = \alpha_i \overline{X}_i \qquad i = 1,2,\ldots,n$$

si hubiera otra combinación posible

$$\overline{Y} = \alpha_i' \overline{X}_i$$

entonces se podría llegar a una contradicción

$$\overline{Y} - \overline{Y} = (\alpha_i - \alpha_i')\, \overline{X}_i$$
$$\tilde{0} = (\alpha_i - \alpha_i')\, \overline{X}_i$$

Como $\{\bar{X}_i\}$ es linealmente independiente, entonces para evitar la contradicción

$$\alpha_i = \alpha_i' \quad \forall\ i$$

y por tanto la representación es única. Es fácil demostrar la condición recíproca.

v) Para que $\{\bar{X}_i\}$ $i = 1,\ldots,n$ sea una base, sus componentes deben ser todas linealmente independientes, de tal manera que cualquier subconjunto propio $\{\bar{Z}_j\}$ debe ser linealmente independiente.

$$\{\bar{Z}_j\} \subset \{\bar{X}_i\} \qquad j = 1,\ldots,l \quad (l < n)$$

De otra manera no lo sería $\bar{X}_i$, y por lo tanto no constituiría una base de V_n.

Dimensionalidad

De lo visto anteriormente es admisible considerar* que la dimensión de un espacio vectorial V_n y el número de vectores de la base coinciden

$$\{\bar{X}_i\}, \quad i = 1,2,\ldots,n$$

Desde luego que a cada espacio vectorial V_n se pueden asociar una infinidad de bases, una de ellas, por ejemplo

$$\bar{X}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{pmatrix};\ \bar{X}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{pmatrix};\ \bar{X}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 1 \end{pmatrix}$$

cada uno de los cuales tiene un " 1 " y n − 1 ceros. Esta base se denomina natural o normal. Cabe señalar que todas las bases de V tienen el mismo número de vectores linealmente independientes.

*Para la demostración, consulte: Linear Algebra de G. Hadley de Addison-Wesley.

Notas :

a) De lo anterior se puede inferir que cualquier conjunto de

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{n vectores } \bar{X}_i \\ \text{linealmente independientes}\end{array}}$$

constituye

$$\boxed{\text{una base de } V_n}$$

b) Si U_k es un subespacio de V_n

$$\boxed{U_k \subseteq V_n}$$

entonces

$$\underline{\dim. U_k \leq \dim. V_n}$$

y si

$$\boxed{\dim. U_k = \dim. V_n}$$

entonces

$$\boxed{\begin{array}{c} U_k = V_n \\ (k = n) \end{array}}$$

c) Si en V_n se tiene un conjunto de vectores linealmente independientes

$$\bar{Y}_j \qquad j = 1, \ldots, m$$
$$(m < n)$$

que generan un subespacio V_m, entonces

$$\dim. V_m < \dim. V_n$$

d) Supónganse dos subespacios del mismo espacio

$$U \subset V$$

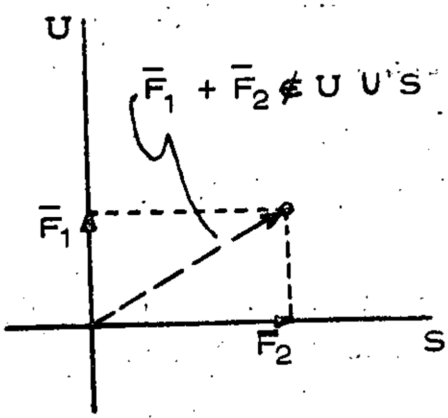
y $$S \subset V$$

entonces, la unión $U \cup S$ no necesariamente es un subespacio de V.

Para ilustrar esto supónganse los subespacios mostrados en la figura de un espacio bidimensional.

Formando la unión

S



tendremos que si

$$\bar{F}_1 \in U \rightarrow \bar{F}_1 \in U \cup S$$

y $$\bar{F}_2 \in S \rightarrow \bar{F}_2 \in U \cup S$$

pero

$$\bar{F}_1 + \bar{F}_2 \notin U \cup S$$

por lo tanto no cumple con la cerradura de los espacios vectoriales.

Sin embargo si

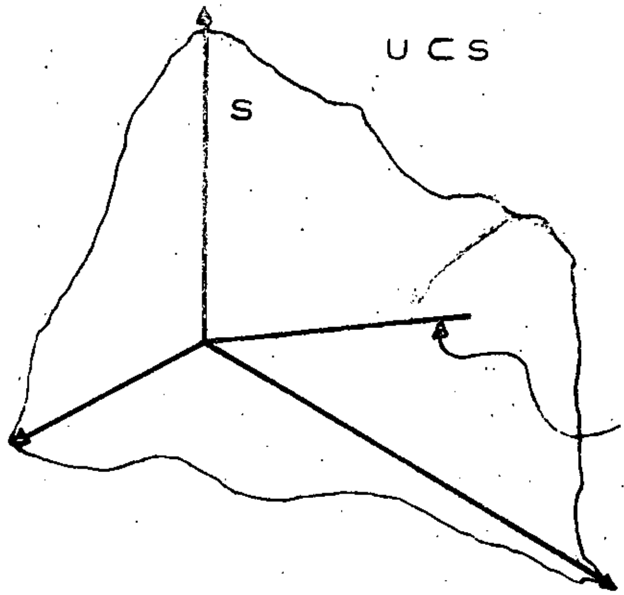
$$U \subset S$$

o $$S \subset U$$

entonces si sucede que

$$(U \cup S) \subset V$$

lo cual puede verificarse del ejemplo de la figura



e) **Si se tienen dos subespacios del mismo espacio**

$$U \subset V \quad y \quad S \subset V$$

entonces la intersección también es un subespacio.

$$\boxed{(U \cap S) \subset V}$$

f) Suponiendo nuevamente que U y S son subespacios de V, se puede considerar el conjunto de todos los vectores que resultan de sumar cada vector de U con cada vector de S y esto considerarlo como la <u>suma</u> de estos subespacios de V.

$$U + S = \left\{ \bar{Y} + \bar{Z} \;\middle|\; \bar{Y} \in U \wedge \bar{Z} \in S \right\}$$

de donde resultaría que

<u>U + S es un subespacio de V</u>

En efecto, si

$$\bar{P}_k = (\bar{Y}_k + \bar{Z}_k) \text{ y } \bar{P}_r = (\bar{Y}_r + \bar{Z}_r)$$

entonces

$$(\bar{P}_k + \bar{P}_r) \in U + S$$

porque

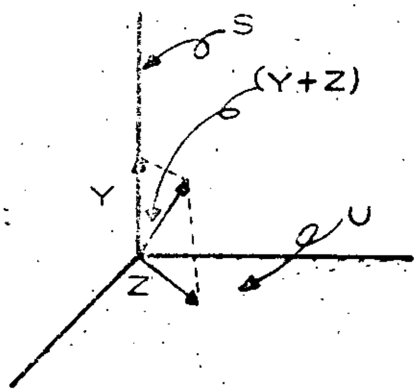
$$y \left.\begin{array}{l}(\bar{Y}_k + \bar{Y}_r) \in U \\ (\bar{Z}_k + \bar{Z}_r) \in S\end{array}\right\} \longrightarrow (\bar{P}_k + \bar{P}_r) \in V$$

y lo mismo

Si $\bar{P} \in (U+S) \rightarrow \alpha \bar{P} \in (U+S)$

$\therefore \alpha \bar{P} \in V$

<u>Ejemplo</u>: Sea V_3



$\bar{Y} \in S$

$\bar{Z} \in U$

$\Rightarrow \bar{Y} + \bar{Z} \in (S + U)$

g) Cabe ahora cuestionar la dimensionalidad de estas operaciones realizadas sobre los subespacios de V.

Si U,S son subespacios de V

entonces

dim (U+S)= dimU+dimS−dim(U∩S)

(Solo se tratan espacios vectoriales de dimensión finita).

Sea

$$U=\left\{\bar{X}_1,\bar{X}_2,\ldots,(\bar{W}_k,\ldots,\bar{W}_p),\ldots,\bar{X}_u\right\}$$
$$S=\left\{\bar{Z}_1,\bar{Z}_2,\ldots,(\bar{W}_k,\ldots,\bar{W}_p),\ldots,\bar{Z}_s\right\}$$

en donde

$(\bar{W}_k,\ldots,\bar{W}_p)$ expanden el espacio vectorial de la intersección (U∩S).

Nota: Si todos y cada uno de los vectores $\bar{W}_k,\ldots,\bar{W}_p$ se pueden expander en términos de $\bar{W}'_k,\ldots,\bar{W}'_p$, y viceversa entonces ambas bases expanden el mismo subespacio.

Si $\bar{Y}\in U$ entonces se expresa como una combinación lineal de las componentes de U .

Si $\bar{T}\in S$ se expresa a través de una combinación lineal de elementos de S .

Por lo tanto

$\bar{Y}+\bar{T}\in(U+S)$

se expande con una combinación lineal de los vectores

$$= \left\{ \bar{X}_1, \bar{X}_2, \ldots, (W_k, \ldots, W_p), \ldots \bar{X}_u, \bar{Z}_1, \bar{Z}_2, \ldots \bar{Z}_s \right\}$$

Esta base incluye solo una vez los vectores $(\bar{W}_k, \ldots, \bar{W}_p)$ de la intersección, en cambio

dim U + dim S

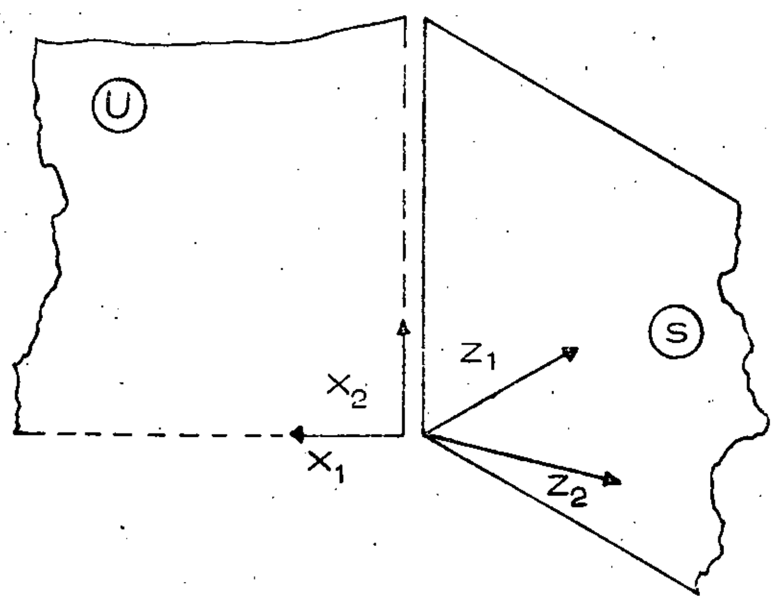
los incluiría dos veces, por lo tanto hay que eliminar de esta suma la repetición para tener el número preciso de vectores de la base de (U+S):

$$\boxed{\dim (U+S) = \dim U + \dim S - \dim (U \cap S)}$$

Ejemplo :

Sean $U = \left\{ \bar{X}_1, \bar{X}_2 \right\}$,

S el plano generado por $\left\{ Z_1, Z_2 \right\}$



Si el vector $\bar{X}_2$ está también en el plano (S) puede expresarse como una combinación lineal de $\bar{Z}_1$ y $\bar{Z}_2$. Por lo tanto

$$\bar{X}_2 \in U \wedge \bar{X}_2 \in S \Longrightarrow \bar{X}_2 \in (U \cap S)$$

Como no hay otro elemento de U que esté en $U \cap S$:
$\dim (U \cap S) = 1$

por lo tanto,

$\dim (U + S) = 2+2 - 1 = 3$

Nota: La dim ($U \cap S$) puede ser = 0, cuando U y S sean ajenos

Producto interior y espacios vectoriales euclideanos.

Hasta ahora los espacios vectoriales se han formulado a partir de un conjunto de postulados que no incluyen, ni la dirección ni el concepto de longitud de vectores, que suelen introducirse desde un principio en el enfoque geométrico de los vectores. Algunos autores incluso introducen previamente conceptos de transformaciones lineales, sistemas de ecuaciones, valores característicos, etc. El "purismo" de estos matemáticos en cuanto al orden de estos temas es muy discutible, no solo desde el punto de vista "didáctico", sino también en el mismo terreno del álgebra lineal en donde la multiplicación de matrices abordada en las transformaciones lineales o en algunos métodos para la resolución de sistemas de ecuaciones algebraicas, resultan de las "reglas o definiciones" que introducen un tanto artificiales al eludir el concepto de producto interno que, por otro lado, es una extensión natural de los conceptos geométricos correspondientes.

Producto interior en V_3

El producto interior (o producto "punto") de dos vectores $\bar{X}$, $\bar{Y} \in V_3$ se define:

Si $\bar{X} = (x_1, x_2, x_3)$ y $\bar{Y} = (y_1, y_2, y_3)$

entonces

$$\bar{X}\cdot\bar{Y} = x_i\, y_i \qquad i = 1,2,3$$

o bien, explicitamente,

$$\boxed{\bar{X}\cdot\bar{Y} = x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3}$$

el cuál suele también representarse como $(\bar{X},\bar{Y})$.

De este concepto se deriva el de longitud de un vector, haciendo $\bar{X} = \bar{Y}$:

$$\bar{X}\cdot\bar{X} = x_1{}^2+x_2{}^2+x_3{}^2 = (\bar{X},\bar{X})$$

A la cantidad

$$\boxed{(\bar{X},\bar{X})^{1/2} = \left|\bar{X}\right| = (x_1{}^2+x_2{}^2+x_3{}^2)^{1/2}}$$

suele denominársele, norma del vector $\bar{X}$*. Un espacio vectorial con esta norma se denomina espacio vectorial euclideano.

---

*En este caso, longitud y norma del vector coinciden, aunque no es esta la única norma que puede establecerse en un espacio vectorial; es posible por ejemplo referirse como norma al valor absoluto de la componente mayor.

En particular, un vector $\overline{X}$ cuya norma es igual a la unidad

$$\left|\overline{X}\right| = 1$$

se dice que está normalizado.

Es posible normalizar un vector

$\overline{X} \neq \tilde{0}$:

$$\boxed{\overline{X}_u = \frac{\overline{X}}{|\overline{X}|}}$$

tal que

$$\left|\overline{X}_u\right| = 1$$

Angulos entre vectores

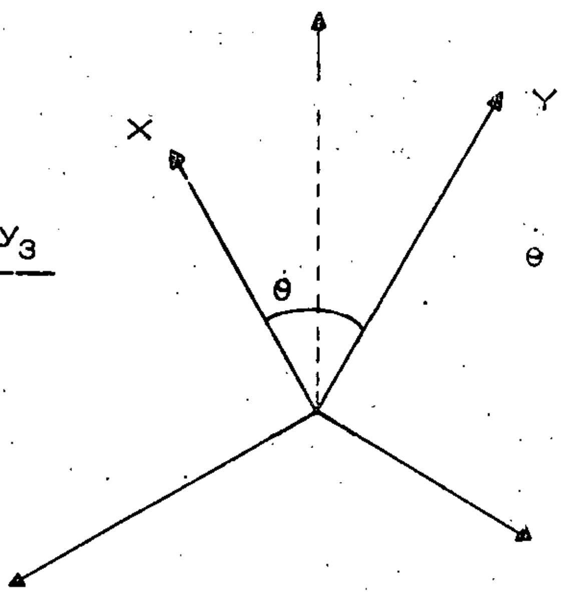
Otra forma de definir en geometría el producto interno de dos vectores

$\overline{X}, \overline{Y}$ de V_3 es

$$(\overline{X}, \overline{Y}) = \left|\overline{X}\right| \left|\overline{Y}\right| \cos\theta$$

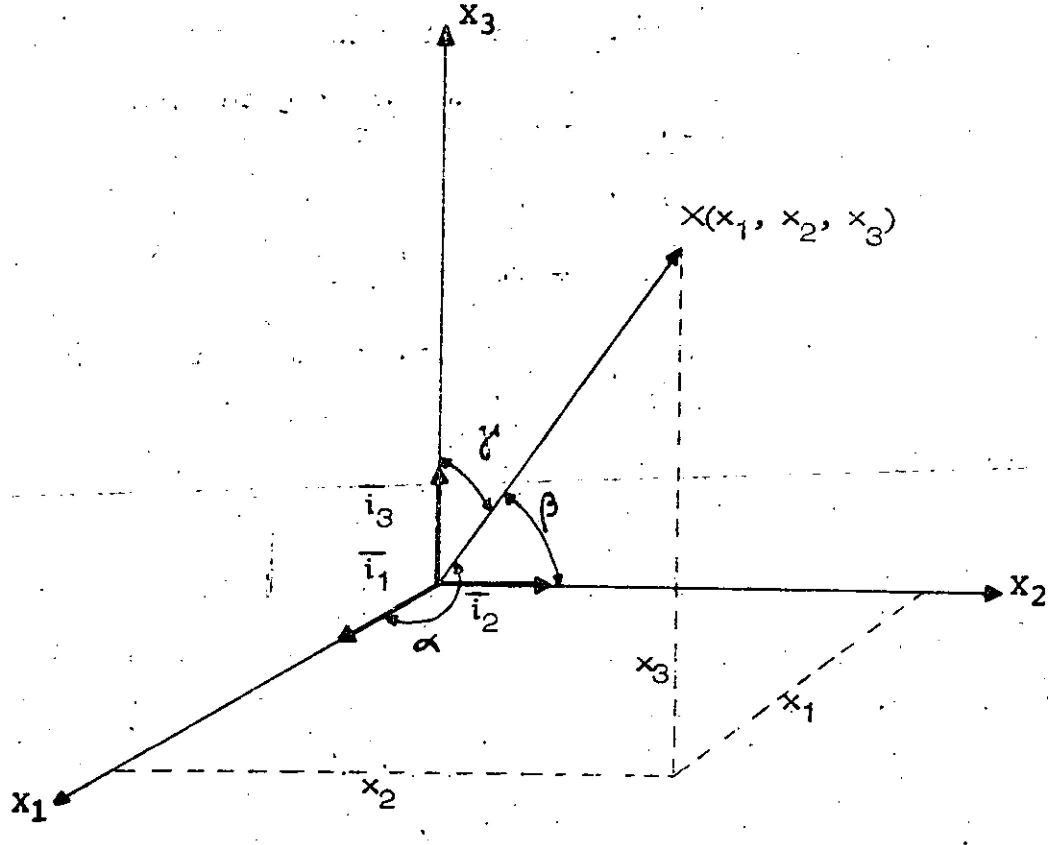
por lo tanto, el ángulo entre dos vectores $\overline{X}, \overline{Y}$ de V_3 está dado por

$$\cos\theta = \frac{(\overline{X}, \overline{Y})}{|\overline{X}||\overline{Y}|} = \frac{x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3}{|\overline{X}||\overline{Y}|} = \frac{x_iy_i}{|\overline{X}||\overline{Y}|}$$



θ : ángulo medido en el plano formado por X y Y.

Evidentemente, respecto a un sistema cartesiano de referencia también podemos encontrar los ángulos de un vector $\overline{X}$



Nota:
Los tres ángulos α, β, γ no son independientes ya que estan ligados por la ecuación:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

De geometría se sabe que, por ejemplo,

$$\cos\alpha = \frac{x_1}{|\overline{X}|}, \quad \cos\beta = \frac{x_2}{|\overline{X}|}, \text{ etc.}$$

Sin embargo, de la definición de producto interior podemos inferir los "cosenos directores", tomando la base natural

$$\overline{i}_1 = \begin{Bmatrix}1\\0\\0\end{Bmatrix}; \quad \overline{i}_2 = \begin{Bmatrix}0\\1\\0\end{Bmatrix}; \quad \overline{i}_3 = \begin{Bmatrix}0\\0\\1\end{Bmatrix}$$

de los cuales evidentemente

$$|\overline{i}_1| = |\overline{i}_2| = |\overline{i}_3| = 1$$

Entonces tendríamos

$$\cos\alpha = \frac{(\overline{X}, \overline{i}_1)}{|\overline{X}||\overline{i}_1|} = \frac{x_1}{|\overline{X}|}$$

analogamente

$$\cos\beta = \frac{x_2}{|\overline{X}|} \qquad \cos\gamma = \frac{x_3}{|\overline{X}|}$$

los cuales especifican la dirección de X.

Notas

i) Dos vectores $\overline{X}, \overline{Y} \in V_3$ son paralelos (o colineales si ambos parten del origen) si y solo si

$$\cos\theta = \frac{(\overline{X}, \overline{Y})}{|\overline{X}||\overline{Y}|} = 1$$

ii) Dos vectores $\overline{X}, \overline{Y}$(diferentes de $\tilde{0}$)$\in V_3$, son ortogonales si y sólo si

$$\cos\theta = \frac{(\overline{X}, \overline{Y})}{|\overline{X}||\overline{Y}|} = 0$$

de hecho basta especificar que X y Y son ortogonales si y sólo si

$$(\overline{X}, \overline{Y}) = 0 \quad \forall \overline{X}, \overline{Y} \in V_3 \wedge \overline{X} \neq \tilde{0}, \overline{Y} \neq \tilde{0}$$

En este caso, respecto al vector $\tilde{0}$ se pueden adoptar dos posiciones

a) o bien en

$(X,Y) = \tilde{0}$

se excluye la posibilidad de que $\overline{X} = \tilde{0}$, ó $\overline{Y} = \tilde{0}$,

b) o bien

$\tilde{0}$ es un vector ortogonal a cualquier vector de V_3.

iii) Otras propiedades

a) El producto interior $(\overline{X},\overline{Y})$ hace corresponder a dos elementos de V_3 un valor de R (campo de los reales).

b) $(\overline{X},\overline{Y}) = (\overline{Y},\overline{X})$

c) $\forall\ r \in R\colon\ (r\overline{X},\overline{Y}) = r(\overline{X},\overline{Y})$

d) $(\overline{X}+\overline{Y},\overline{Z}) = (\overline{X},\overline{Z}) + (\overline{Y},\overline{Z})$

e) $(\overline{X},\overline{X}) > 0$ si $\overline{X} \neq \tilde{0}$

iv) El producto interior de dos vectores $X, Y \in V_3$ se suele expresar en una tercera forma alternativa,

se tenían

$$\overline{X} \cdot \overline{Y} = (\overline{X}, \overline{Y}) = x_i y_i \quad i = 1, 2, 3$$

Ahora bien, si se tiene un vector columna

$$\overline{X} = \left\{ \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{matrix} \right\}$$

Se define su transpuesto como un vector escrito horizontalmente, o vector renglón

$$\overline{X}^t = \langle x_1, x_2, x_3 \rangle$$

entonces el producto interior se efectúa entre un vector renglón y un vector columna,

$$\boxed{\bar{X}^t \bar{Y}}$$

(Esta operación se empleará más adelante en el producto de matrices)

Espacios vectoriales euclidianos V_n.

En la teoría de sistemas es usual representar el "estado" del sistema a través de conjuntos ordenados de números o funciones (reales o complejas).

Por ejemplo: en sistemas físicos el estado de desplazamientos de un cuerpo deformable, o el estado de velocidades de un conjunto de partículas, o el estado de voltajes de un circuito eléctrico o mecánico, etc. En un sistema económico, el estado de (o conjunto de ...) restricciones o variables que definen las condiciones bajo las cuales debe optimizarse alguna operación (de inversión, financiamiento, transacción, decisión, etc.). En Sociología el conjunto de factores sociales (culturales, históricos, ambientales, etc.) que caracterizan un estado o un cambio social, etc.

Es usual denominar al conjunto de números ordenados como configuración y a cada elemento variable del estado como grado de libertad del sistema.

Notas

a) En un espacio V_n se seguirán empleando los conceptos geométricos definidos en V_3: ángulo entre vectores, ortogonalidad, norma, etc.

b) Incluso estas denominaciones se continúan empleando en el caso de polinomios o de funciones continuas definidas en intervalos cerrados.

c) Las ventajas del empleo de estas denominaciones ya se han indicado y se reiterarán en diversos ejemplos posteriores.

Producto interior en V_n

Suponiendo que $\bar{X} \in V_n$ y $\bar{X}$ está definido sobre los reales. *

* El producto interior puede extenderse a vectores (o funciones) definidos en los complejos.

$$\boxed{\overline{X} \cdot \overline{Y}}$$

$(\overline{X}, \overline{Y} \in V_n)$

es una operación que hace corresponder a cada pareja $\overline{X}$, $\overline{Y}$, un escalar $\alpha \in R$

$$\boxed{\overline{X} \cdot \overline{Y} \in R}$$

tal que

a)	$(\overline{X}, \overline{Y}) = (\overline{Y}, \overline{X})$
b)	$(\alpha \overline{X} + \beta \overline{Y}, \overline{Z}) = \alpha (\overline{X}, \overline{Z}) + \beta (\overline{Y}, \overline{Z})$ $\forall\, Z \in V_n$
c)	$(\overline{X}, \overline{X}) > 0$ si $X \neq \tilde{o}$

Nota: La propiedad b) es una síntesis de las propiedades

y	$b_1)$ $(\alpha \overline{X}, \overline{Y}) = \alpha (\overline{X}, \overline{Y})$
	$b_2)$ $(\overline{X} + \overline{Y}, \overline{Z}) = (\overline{X}, \overline{Z}) + (\overline{Y}, \overline{Z})$

A un espacio que satisface las condiciones anteriores se le denomina <u>ESPACIO VECTORIAL EUCLIDEANO</u>

<u>Ejemplos.</u>

i) Eneadas de números reales

Si

$$\overline{X} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

$$\overline{Y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$$

$$y\ \overline{X}, \overline{Y} \in V_n$$

se define el producto interior como:

$$\overline{X} \cdot \overline{Y} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_n y_n$$

$$= x_i y_i \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

ii) Funciones continuas en $[a, b]$

Si $a, b \in R$ y $a \neq b$, se puede definir la clase $C[a, b]$ de funciones continuas $f_i(x)$, tales que

$$(f_i(x), g_i(x)) = \int_a^b f_i g_i \, dx$$

y verificar las condiciones del producto interior (de hecho, intuitivamente, esta suma o integral es una "generalización" del producto interior del caso anterior.)

iii) El conjunto de polinomios (reales) del espacio P^n : $P_i, \widetilde{\Pi}_i$ definido en $[a, b]$

$$(P_i, \widetilde{\Pi}_i) = \int_a^b P_i \widetilde{\Pi}_i \, dx$$

Este caso es importante en las aplicaciones, porque puede surgir de la aproximación de funciones con dificultades particulares en la integración o en la representación y manejo de datos experimentales.

Notas

a) Se podría abundar en otros ejemplos de espacios vectoriales (en los reales) que satisfacen las condiciones o propiedades del producto interno. Sin embargo, los anteriores revisten una importancia fundamental en las Matemáticas y en sus aplicaciones; de manera tal, que no tiene mayor importancia extender los casos.

Uno particularmente útil en el análisis de Fourier, es un caso del ejemplo ii) cuando

$$f_n(x) = \text{sen } nx \quad y \quad f_m(x) = \text{sen } mx$$

o bien

$$g_n(x) = \cos nx \quad y \quad g_m(x) = \cos mx$$

o bien

$$h_n(x) = \text{sen } nx \quad y \quad h_m(x) = \cos mx$$

Todos definidos en el intervalo $[a, b]$

$$a = 0, \quad b = \pi$$

b) Dos vectores X, $Y \in V_n$ se dice que son <u>ortogonales</u>

si $(\overline{X} \neq \tilde{o}, \quad \overline{Y} \neq \tilde{o})$

$$\overline{X} \cdot \overline{Y} = 0$$

De hecho, las funciones del inciso anterior, de acuerdo con la definición ii) de producto interior, resultan ortogonales para $m \neq n$.

c) La <u>longitud</u> (o <u>norma</u>) de un vector $\overline{X} \in V_n$ se define

$$\left| \overline{X} \right| = (\overline{X}, \overline{X})^{1/2}$$

y el ángulo θ entre $\overline{X}, \overline{Y} \in V_n$

$$\cos \theta = \frac{(\overline{X}, \overline{Y})}{|\overline{X}|\,|\overline{Y}|}$$

d) Entre vectores $\overline{X}, \overline{Y}, \overline{Z} \in V_n$ se verifican los siguientes postulados de la <u>distancia</u> (o <u>norma</u>). Se suele indicar que estos axiomas establecen una <u>métrica</u> en V_n.

i) $d(\overline{X}, \overline{Y}) \geq 0; \quad d(\overline{X}, \overline{Y}) = 0 \iff X = Y$

ii) $d(\overline{X}, \overline{Y}) = d(\overline{Y}, \overline{X})$

iii) $d(\overline{X}, \overline{Y}) \leq d(\overline{X}, \overline{Z}) + d(\overline{Z}, \overline{Y})$

éstos se verifican fácilmente en V_3 y puede extenderse la prueba a V_n.

e) Otras <u>normas</u> que satisfacen los postulados anteriores son, por ejemplo:

$$\left\| \overline{X} \right\| = \max_{1 \leq i \leq n} \left\{ |x_i| \right\}$$

$$\left\| \overline{X} \right\| = \sum_{i=1}^{n} |x_i| \qquad \text{etc.}$$

f) <u>Si</u> el campo F sobre el cual se define el espacio vectorial V_n, es el de los <u>números complejos, los axiomas del espacio vectorial no se alteran</u> y los del producto interior toman la forma siguiente :

(esta es la denominación más usual en el caso de los espacios V_n complejos)

i) $(\overline{X},\overline{Y}) = \overline{(\overline{Y},\overline{X})}$ (Simetría hermitiana)
ii) $(\alpha\,\overline{X} + \beta\,\overline{Y}, \overline{Z}) = \alpha(\overline{X},\overline{Z}) + \beta(\overline{Y},\overline{Z})$ $(\overline{Z} \in V_n)$
iii) $(\overline{X},\overline{X}) > 0$ si $X \neq \tilde{0}$

en las cuales

- la raya arriba del producto interior se refiere al conjugado,
- en el caso de números complejos

$$\overline{X} = \begin{Bmatrix} \alpha_1 + i\,\beta_1 \\ \alpha_2 + i\,\beta_2 \\ \cdots \\ \alpha_n + i\,\beta_n \end{Bmatrix} = \overline{\alpha} + i\,\overline{\beta}$$

en donde $\overline{\alpha}$ y $\overline{\beta}$ son vectores definidos en los reales

Este tipo de vectores tiene importancia en el análisis complejo de circuitos electromecánicos (fasores)

g) Si se definen funciones de variable compleja

$$f(x) = u(x) + iv(x)$$

entonces el producto interno es de la forma

$$(f,g) = \int_a^b f\ g\ dx$$

- La norma de una función continua en $[a, b]$ estaría dada por

$$(f,f) = \int_a^b |f(x)|\,dx \geq 0$$

Si $(f,g) = 0$, las funciones f y g son ortogonales

• Si (f,f) ó $(\overline{X},\overline{X})$ valen uno, se dice que están normalizados

h) En particular, si $\forall\, i, j$ de una base

$$(\overline{X}_i, \overline{X}_j) = \delta_{ij}$$

(delta de Kronecker:) $\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}$

se dice que la base es ortonormal

i) La expansión de un vector $\overline{Y} \in V_n$ en términos de la base $\{\overline{X}_i\}$ de V_n es de la forma

$$\overline{Y} = \alpha_i \overline{X}_i$$

en donde los coeficientes α_i de la expansión (combinación lineal) se denominan las coordenadas de $\overline{Y}$ según la base $\{\overline{X}_i\}$.

j) En particular, si la base es de vectores ortonormales $\overline{X}_i \cdot \overline{X}_j = \delta_{ij}$
entonces de la expansión

$$\overline{Y} = \alpha_i \overline{X}_i$$

es relativamente fácil calcular las coordenadas (o coeficientes) α_i. En efecto, haciendo el producto interior con el vector X_j se tendría

$$\overline{Y} \cdot \overline{X}_j = \alpha_i\, \overline{X}_i \cdot \overline{X}_j$$

$$= \alpha_i\, \delta_{ij} = \alpha_j$$

porque los demás términos de la suma son cero.

La coordenada α_j resulta ser, entonces la proyección de $\overline{Y}$ en la dirección del vector $\overline{X}_j$.

Este hecho se utilizará en el proceso de ortonormalización de Schmidt.

k) En los espacios de funciones en $[a, b]$, bajo ciertas condiciones de convergencia, si $(f_i, f_j) = \delta_{ij}$

es una base ortonormal de funciones, entonces una función h(x) se puede expresar (Serie de Fourier)

$$h(x) \sim \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i f_i(x)$$

en donde

$$\alpha_i = \int_a^b h(x)\, f_i(x)\, d_x$$

en la cual a los "α_i"

suele denominárseles

<u>coeficientes de Fourier</u>

En la Teoría de Fourier, las $\underline{\alpha_i}$ se denominan <u>transformadas integrales de Fourier</u>.

<u>Ortogonalización de Schmidt</u>

Hemos visto que cualquier conjunto de n vectores linealmente independientes $\{\bar{X}_i\}$ de V_n son una base de este espacio vectorial.

También se describió la conveniencia de las <u>bases ortonormales</u>

$$X_i \cdot X_j = \delta_{ij}$$

en la expansión de vectores

$$Y = \alpha_i X_i \quad (i=1,2,\ldots,n).$$

En un número apreciable de problemas de aplicación resulta más o menos sencillo definir una base ortonormal, por ejemplo utilizando las series trigonométricas de Fourier. En otros casos dentro del mismo sistema (problemas de valores característicos, en la teoría de Sturm-Liouville) se generan bases de ese tipo. Pero, no siempre sucede así, por ejemplo en la aproximación de soluciones de sistemas,(por ejemplo a través de funcionales) las funciones o vectores para la aproximación no son necesariamente ortogonales, ni normalizados. En ocasiones no tienen mayor interés estas propiedades, pero en el análisis de sistemas,(por ejemplo en sistemas dinámicos) la ortonormalidad llega incluso a tener connotaciones conceptuales importantes, por ejemplo en los fenómenos de resonancia en los cuales es excitada una "configuración" particular del sistema por una perturbación externa suele aislarse esa configuración particular y analizar su influencia en el comportamiento general del sistema. Este tipo de procesos se facilita sustancialmente si las "configuraciones" son ortonormales.

Estas y algunas otras consideraciones dentro de las propias Matemáticas o en las aplicaciones justifican el método de Schmidt que permite construir una base ortonormal $\boxed{\{U_i\}}$ para un espacio V_n a partir de una base $\boxed{\{\bar{X}_i\}}$ de vectores linealmente independientes.

Método

Supóngase que se elije* el vector $\bar{X}_1$.

A continuación normalizamos este vector dividiéndolo entre su longitud

$$\boxed{\bar{U}_1 = \frac{\bar{X}_1}{|\bar{X}_1|}}$$

Este vector "unitario" define sólo una dirección, esto es en algunas aplicaciones los vectores de la base, pueden llegar a tener unidades dentro de un contexto particular. En el proceso de normalización se elimina esta situación y son las coordenadas del vector de estado los que tendrán asignadas esas unidades. Considérese el vector X_2 (no ortogonal a U_1).

Proyectando en U_1

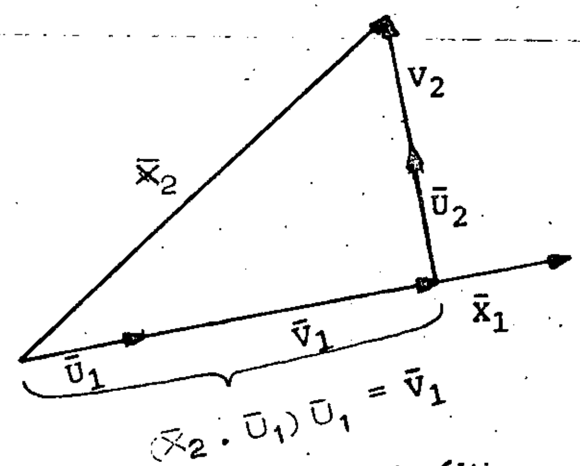
se tiene

$$\boxed{\bar{X}_2 \cdot \bar{U}_1}$$

y se puede formar el vector,

$$\boxed{(\bar{X}_2 \cdot \bar{U}_1)\,\bar{U}_1 = \bar{V}_1}$$

en la dirección de $\bar{X}_1$



Suele decirse, en el análisis de sistemas dinámicos, que este último vector es lo "que tiene $\bar{X}_2$ de $\bar{X}_1$ ".

---
*en la práctica puede iniciarse el proceso con cualquier vector de $\{X_i\}$

Restándole a $\bar{X}_2$, "lo que tiene de $\bar{X}_1$", se forma el vector V_2 (no necesariamente unitario) ortogonal a U_1:

$$\boxed{\bar{V}_2 = \bar{X}_2 - (\bar{X}_2 \cdot \bar{U}_1)\,\bar{U}_1}$$

Verifiquemos la ortogonalidad

$$\bar{V}_2 \cdot \bar{U}_1 = \bar{X}_2 \cdot \bar{U}_1 - (\bar{X}_2 \cdot \bar{U}_1)\,\bar{U}_1 \cdot \bar{U}_1$$

pero

$$\bar{U}_1 \cdot \bar{U}_1 = 1$$

en donde

$$\bar{V}_2 \cdot \bar{U}_1 = 0$$

Enseguida normalizamos $\bar{V}_2$:

$$\bar{U}_2 = \frac{\bar{V}_2}{|\bar{V}_2|}$$

Tomando de $\{\bar{X}_i\}$ otro vector $\bar{X}_3$, el proceso será análogo: "quitarle lo que tiene de $\bar{X}_1$ y de $\bar{X}_2$" (o en las direcciones de $\bar{U}_1$ y $\bar{U}_2$):

$$\boxed{\bar{V}_3 = \bar{X}_3 - (\bar{X}_3 \cdot \bar{U}_1)\,\bar{U}_1 - (\bar{X}_3 \cdot \bar{U}_2)\,\bar{U}_2}$$

y a continuación normalizarlo

$$\boxed{\bar{U}_3 = \frac{\bar{V}_3}{|\bar{V}_3|}}$$

De esta manera se prosigue hasta agotar todos los vectores de V_n y formar una base ortonormal

$$\boxed{\bar{U}_i \cdot \bar{U}_j = \delta_{ij}}$$

Nota

Existen métodos análogos para la ortonormalización de un espacio de funciones.

5.B.3. MATRICES

DEFINICIONES

Matriz como extensión del concepto de vector

Una matriz es un conjunto ordenado de vectores, (un vector cuyos elementos son vectores). Puede considerarse como una columna de i vectores ($1 \leq i \leq m$ de un espacio de dimensión j ($1 \leq j \leq n$)

$$A = \begin{bmatrix} a_{ij} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{a}_1 \\ \cdot \\ \bar{a}_i \\ \cdot \\ \bar{a}_m \end{bmatrix}$$

Es decir,
$$\begin{cases} \bar{a}_1 = (a_{11}, \ldots a_{1j} \ldots a_{1n}) \\ - - - - - - - - - - - \\ \bar{a}_i = (a_{i1}, \ldots a_{ij} \ldots a_{in}) \\ - - - - - - - - - - - \\ \bar{a}_m = (a_{m1}, \ldots a_{mj} \ldots a_{mn} \end{cases}$$

Así

$$A = \begin{bmatrix} a_{ij} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{a}_1 \\ \cdot \\ \bar{a}_i \\ \cdot \\ \bar{a}_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

o bien como un renglón de j vectores ($1 \leq j \leq n$) de un espacio de dimensión i ($1 \leq i \leq m$)

$$A = (\bar{a}_1, \ldots \bar{a}_j, \ldots \bar{a}_n)$$

Es decir: los vectores columna que forman la matriz son:

$$\bar{a}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{i1} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} \qquad \bar{a}_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{ij} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix} \qquad \bar{a}_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{in} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$$

Así

$$A = \left[a_{ij} \right] = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdot\ \cdot & a_{1j} & \cdot\ \cdot & a_{1n} \\ \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot \\ a_{i1} & \cdot\ \cdot & a_{ij} & \cdot\ \cdot & a_{in} \\ \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot \\ a_{m1} & \cdot\ \cdot & a_{mj} & \cdot\ \cdot & a_{mn} \end{bmatrix}$$

A las matrices las denotaremos con letras mayúsculas A, B . . . o bien como $\left[a_{ij}\right]$, $\left[b_{ij}\right]$ etc.

A los elementos de A los denotaremos a_{ij} en donde identificaremos al primer subíndice (i) con el renglón al que pertenece el elemento y al segundo (j) con la columna correspondiente así, a_{34} indica que el elemento está en el 3er. renglón y en la 4a. columna.

Orden de una matriz.-

Se indicó anteriormente que el subíndice que denota los renglones varía de 1 a m y que el subíndice "j" que denota las columnas varía de 1 a n entonces, una matriz A podrá tener m renglones y n columnas, las denotaremos A_{mxn} y diremos que es de orden mxn; ejemplo una matriz A_{5x4} será de orden 5x4 es decir estará compuesta por 5 renglones y 4 columnas.

Podemos hacer una primera clasificación de matrices, en relación a su orden, con las diferentes combinaciones de valores de "m" y "n".

1) Si $m = n$ la matriz tendrá el mismo número de renglones que de columnas y se denomina matriz cuadrada A_{nxn} o bien A_n, en este caso se dice que A es una matriz cuadrada de orden n.

2) Si $m \neq n$, se tratará de una matriz rectangular A_{mxn}

2.1. Casos particulares

a) Si $m = 1$, $n>1$ se tratará de una matriz renglón (Vector renglón)
$A_{1xn} = (a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n})$

b) Si $m>1$ y $n = 1$ se define una matriz columna (Vector columna).

$$A_{mx1} = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}$$

Igualdad de matrices

Dos matrices son iguales si:

a. Son del mismo orden

b. Sus elementos correspondientes son iguales,

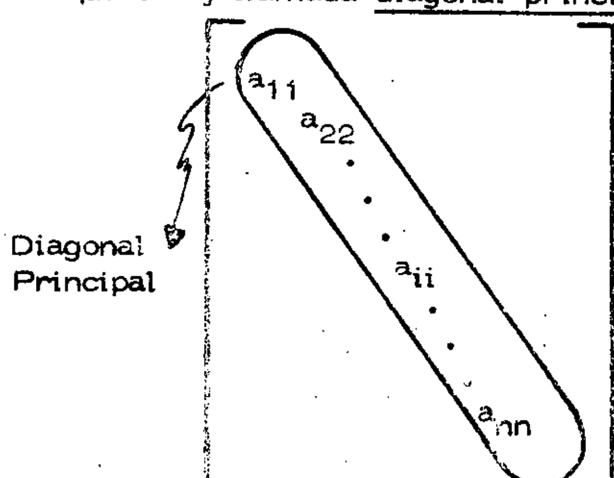
es decir:

$$A = B \quad \text{si} \quad a_{ij} = b_{ij} \quad \forall \, i,j.$$

Matrices cuadradas

Las matrices cuadradas (formadas por n vectores de n componentes) tienen características especiales que las diferencían de las otras matrices; por ahora mencionaremos solo algunas que serán ampliadas en páginas subsecuentes:

1. En las matrices cuadradas podemos identificar una diagonal que contiene a los elementos a_{ij} tal que $i = j$ llamada diagonal principal



2. Solo las matrices cuadradas tienen asociado un escalar $|A|$ llamado determinante*, formado con los mismos elementos de la matriz.

*Para aclaraciones sobre este tema, véase Linear Algebra, G. Hadley.

3. Una matriz cuadrada se denomina regular (no singular), cuando el determinante asociado a ella es distinto de cero. Si el determinante es cero, la matriz se denomina singular. En una matriz singular los vectores que la forman son linealmente dependientes, pero en una matriz regular, son linealmente independientes.

4. Matrices cuadradas especiales.

4.1. Matriz triangular superior:

Una matriz cuadrada es triangular superior,

si en un elemento a_{ij}, $i > j \Longrightarrow a_{ij} = 0$

Una matriz triangular superior de orden 3 tiene la forma

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix}$$

4.2. Matriz triangular inferior:

Una matriz cuadrada es triangular inferior,

si en un elemento a_{ij}, $i < j \Longrightarrow a_{ij} = 0$

Ejemplo: $\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$

4.3. Matriz Diagonal.- Una matriz cuadrada es diagonal

Si $i = j \Rightarrow a_{ij}=0 \ \forall i,j$. Es decir, en una matriz diagonal los únicos elementos que pueden ser distintos de cero son los de la diagonal principal. (una matriz nula cuadrada, también es diagonal.).

Ejemplo $\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix}$ Nótese que una matriz diagonal es a la vez triangular superior e inferior.

4.4. Matriz Escalar.- Una matriz diagonal es escalar si todos los elementos de la diagonal principal son iguales:

$$a_{11} = a_{22} = a_{33} = \ldots a_{nn}$$

$$E = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$ es un ejemplo de matriz escalar.

4.5. Matriz identidad (I) : Una matriz escalar en la que todos los elementos de la diagonal principal son iguales a uno, es decir, ($a_{11} = a_{22} = a_{33} = \ldots a_{nn} = 1$) se denomina matriz identidad y la denotaremos por I_n.

Ejemplo:

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{(orden 3)}$$

Esta matriz (formada por vectores de una base natural o normal), representa el elemento identidad en la multiplicación de matrices, como veremos al definir las operaciones matriciales. Es un arreglo que puede expresarse mediante la delta de Kronecker

$$I = \left[\delta ij\right], \quad \delta ij \quad \begin{cases} = 0 & i \neq j \\ = 1 & i = j \end{cases}$$

Asimismo, podemos representar una matriz escalar E como:

$$E = \left[\alpha\delta_{ij}\right] = \alpha\left[\delta_{ij}\right] = \alpha I$$

en donde α es un escalar cualquiera distinto de cero.

4.6. Matriz Simétrica: Una matriz cuadrada es simétrica si,

$$a_{ij} = a_{ji} \; \forall i, j$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 1 \\ 3 & 5 & 6 & 4 \\ -2 & 6 & 7 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

$a_{12} = a_{21} = 3$
$a_{13} = a_{31} = -2$
$a_{14} = a_{41} = 1$
etc.

Los elementos simetricamente colocados respecto a la diagonal principal son iguales.

4.7. Matriz antisimétrica: Una matriz cuadrada es antisimétrica si $a_{ij} = -a_{ji} \forall i, j$ y todos los elementos de la diagonal principal son todos iguales a cero.

Ejemplo: $\begin{bmatrix} 0 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 5 \\ 3 & -5 & 0 \end{bmatrix}$

Cualquier matriz cuadrada puede representarse como $\frac{A+B}{2}$ en donde A es simétrica y B es antisimétrica.

Otras matrices

1. Matriz nula.- Una matriz en la cual todos sus elementos son iguales a cero se denomina matriz nula y la denotaremos con 0_{mxn}. Esta matriz puede ser rectangular o cuadrada y representa el elemento identidad en la suma de las matrices.

2. Submatriz. Si en una matriz A, se toman únicamente algunos renglones y/o columnas, éstos forman una submatriz de A.

Esto es, en una matriz A_{mxn} se puede efectuar una partición y así obtener submatrices de menor orden;

Por ejemplo,

de la matriz A, algunas submatrices que se podrían obtener son:

$$A = \left[\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ \hline a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{array}\right]$$

$$A_{11} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}, \quad A_{12} = \begin{bmatrix} a_{14} \\ a_{24} \end{bmatrix}, \text{etc.}$$

de manera que una representación simplificada de A sea.

$$A = \left[\begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline A_{21} & A_{22} \end{array}\right]$$

Rango de una matriz.

El rango r de una matriz A_{mxn} esta determinado por el orden de la mayor submatriz no singular que se pueda obtener de esa matriz.

Por ejemplo, se quiere conocer el rango de las siguientes matrices

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}, \quad B \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 2 \\ 5 & 1 & 6 \end{array}\right],$$

$$C = \left[\begin{array}{cc} 3 & 1 \\ \hline 5 & 2 \\ 1 & 5 \end{array}\right], \quad D = \left[\begin{array}{c|cc} 3 & 1 & 2 \\ \hline 6 & 2 & 4 \\ 1 & 5 & 2 \end{array}\right]$$

Como la matriz A es una matriz cuadrada, se busca primero el valor de su determinante, si éste es distinto de cero el rango será 2.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 4-10 = -6 \neq 0 \longrightarrow r(A) = 2$$

En el caso de la matriz B se buscan primero submatrices no singulares de orden 2, eliminando sucesivamente las columnas, hasta encontrar una cuyo determinante sea distinto de cero.

$$|B_{11}| = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = 1-15 = -14 \neq 0 \longrightarrow r(B) = 2$$

Con la matriz C se procede de igual modo solo que eliminando sucesivamente los renglones.

$$|C_{21}| = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 25-2 = 23 \neq 0 \longrightarrow r(C) = 2$$

En la matriz cuadrada D buscamos el valor de $|D|$

$$|D| = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 6 & 2 & 4 \\ 1 & 5 & 2 \end{vmatrix} = (3)(2)(2) + (1)(4)(1) + (6)(5)(2) - (2)(2)(1) - (1)(6)(2) - (4)(5)(3) = 0$$

Como $|D| = 0$ buscaremos submatrices de orden 2.

$$|D_{22}| = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = 4-20 = -16 \neq 0 \longrightarrow r(D) = 2$$

Al comparar en los ejemplos anteriores el rango r de las matrices con el número de renglones y/o columnas linealmente independiente notamos que en:

A_2 ; $r = 2$, Existen dos renglones y dos columnas linealmente independientes.

$B_{2\times3}$; $r = 2$, existen dos renglones y 3 columnas linealmente independientes.

C_{3x2} ; $r = 2$ existen 3 renglones y 2 columnas linealmente independientes.

D_{3x3} ; $r = 2$ existen 2 renglones linealmente independientes (el segundo renglón es múltiplo del primero) y 3 columnas linealmente independientes.

Es decir, el rango indica el número de vectores renglón y/o columna linealmente independientes (el menor de los dos), que tiene la matriz.

Si en una matriz cuadrada A_n, el rango coincide con el orden, $r(A)=n$, los vectores que la forman son linealmente independientes (se trata de una matriz regular). Pero si el rango es menor que el orden, $r(A)<n$, hay dependencia lineal entre los vectores que la forman. (matriz singular).

OPERACIONES ENTRE MATRICES.

En secciones anteriores habíamos visto que las matrices forman un espacio vectorial, por tanto las operaciones definidas para vectores, se extenderán a matrices.

Suma de Matrices:

Sean dos matrices A y B de orden mxn entonces se define como la suma A+B a la matriz C_{mxn} tal que $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, es decir los elementos de C son la suma de los elementos correspondientes de A y de B. (las matrices tienen que ser del mismo orden: mxn. Se dice entonces que son conformables en la suma).

Puede verificarse que las matrices forman un grupo abeliano en la suma, es decir cumplen con la cerradura, la asociatividad, la conmutatividad la existencia de un elemento identidad en la suma: (matriz nula 0) y la de un inverso en la suma (matriz -A, tal que $A+(-A) = 0$, que permite definir la resta de matrices $A-B$ como $A+(-B)$).

Producto de una matriz por un escalar.

El producto de una matriz $\left[a_{ij}\right]$ por un excalar λ da lugar a una matriz $\left[\lambda a_{ij}\right]$, en donde todos los elementos de A se multiplican por el escalar .

Por ejemplo, la matriz escalar es el producto de un escalar λ por I o bien $\left[\lambda \delta_{ij}\right]$.

Obviamente el producto de una matriz por un escalar cumple con las propiedades mencionadas para el producto de un vector por un escalar :

i) $\lambda_1 \cdot (\lambda_2 A) = (\lambda_1 \cdot \lambda_2) A$ — Asociatividad de escalares.

ii) $\lambda_1 (A+B) = \lambda_1 A + \lambda_1 B$ — Distributividad del producto por un escalar sobre la suma de matrices.

iii) $(\lambda_1+\lambda_2) A = \lambda_1 A + \lambda_2 A$ — Distributividad

iv) $1 \cdot A = A$ — 1 es el idéntico aditivo en los números reales.

v) $0 \cdot A = 0$ — el escalar 0, por cualquier matriz, da como resultado la matriz nula.

vi) $-1 \cdot A = -A$ — el escalar (-1) por la matriz A, da como resultado la matriz inversa aditiva.

Trasposición de Matrices.

Esta operación se mencionó al tratar el producto interior de vectores, en donde se definió al traspuesto de un vector columna como

$$\bar{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

el vector renglón $\bar{X}^T = (x_1, x_2, x_3)$, es decir la trasposición es una operación que consiste en intercambiar renglones por columnas o viceversa. Así, la traspuesta de una matriz $A_{mxn} = \left[a_{ij}\right]$ es $A^T{}_{nxm} = \left[a_{ji}\right]$

Notas.-

i) Al trasponer una matriz no cuadrada cambia su orden, así, si A es de orden 3x5, A^T será de orden 5x3.

ii) En las matrices cuadradas, al trasponer una matriz A, su traspuesta A^T conserva el orden de la matriz original. Respecto a la igualdad se pueden presentar los siguientes casos:

a) $A = A^T$, si A es simétrica

b) $A \neq A^T$, si A es no simétrica

c) $A^T = -A$, si A es antisimétrica

Producto de dos matrices.

Considerando que las matrices son un conjunto ordenado de vectores, podemos aplicar el concepto de producto interior entre los vectores de una matriz y definir el producto de matrices.

Se obtendrá así un conjunto ordenado de escalares que constituyen la matriz producto.

Esquemáticamente: $\quad A \cdot B = C$

$$\begin{array}{l} \text{Renglón } 1 \\ \\ \text{Renglón } i \\ \\ \text{Renglón } m \end{array}
\begin{bmatrix} a_{11} & \cdot & a_{1k} & \cdot & a_{1n} \\ \cdots & \cdot & \cdots & \cdot & \cdots \\ a_{i1} & \cdot & a_{ik} & \cdot & a_{in} \\ \cdots & \cdot & \cdots & \cdot & \cdots \\ a_{m1} & \cdot & a_{mk} & \cdot & a_{mn} \end{bmatrix}
\begin{array}{c} \begin{bmatrix} b_{11} & \cdot & b_{1j} & \cdot & b_{1s} \\ \cdots & \cdot & \cdots & \cdot & \cdots \\ b_{k1} & \cdot & b_{kj} & \cdot & b_{ks} \\ \cdots & \cdot & \cdots & \cdot & \cdots \\ b_{n1} & \cdot & b_{nj} & \cdot & b_{ns} \end{bmatrix} \\ \begin{array}{ccccc} \text{col. } 1 & & \text{col. } j & & \text{col. } s \end{array} \end{array}
= \begin{bmatrix} c_{11} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & c_{ij} & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & c_{ms} \end{bmatrix}$$

multiplicando los vectores: renglón 1 de A y columna 1 de B, obtenemos el elemento c_{11}:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} & \cdots & a_{1n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} \\ \cdots \\ b_{k1} \\ \cdots \\ b_{n1} \end{bmatrix} \quad c_{11} = a_{11}b_{11} + \dots a_{1k}b_{k1} + \dots + a_{1n}b_{n1}$$

y así, efectuando el producto interior de todos los vectores renglón de A por cada uno de los vectores columna de B, obtenemos los elementos de la matriz C.

En forma general, un elemento de la matriz resultado se obtiene:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik}b_{kj}$$

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + \dots + a_{ik}b_{kj} + \dots a_{in}b_{nj}$$

Evidentemente, esta operación solo se puede efectuar si los vectores renglón de A y columna de B pertenecen al mismo espacio, es decir tienen el mismo número de elementos (n). Se dice que dos matrices son conformables en el producto si el número de columnas del primer factor es igual al número de renglones del segundo.

$$\underbrace{A_{(mxn)} \cdot B_{(nxs)}}_{n \text{ iguales}} = C_{(mxs)}$$

orden del resultado

Notas y ejemplos:

En el producto A•B se dice que B posmultiplica a A ó está premultiplicada por A o bien que A premultiplica a B ya que en el caso de multiplicación de matrices y por tratarse de un producto de los renglones de la primera por las columnas de la segunda, no se cumple en general la propiedad conmutativa del producto, por tanto es importante especificar el orden en que se efectuará la multiplicación. Esto lo podemos ilustrar mediante los siguientes ejemplos:

1) Sean $\underset{2 \times 3}{A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}}$, $\underset{3 \times 1}{B = \begin{bmatrix} 1 \\ -5 \\ 4 \end{bmatrix}}$

El producto $\underset{2 \times \boxed{3 = 3} \times 1}{A \cdot B}$ puede efectuarse y

dará como resultado a la matriz $C_{2 \times 1} = \begin{bmatrix} c_{11} \\ c_{21} \end{bmatrix}$

en donde : $c_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -5 \\ 4 \end{bmatrix} = 1 \times 1 + 3 \times (-5) + 5 \times 4 = 6$

$$c_{21} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -5 \\ 4 \end{bmatrix} = 2 \times 1 + 1 \times (-5) + 2 \times 4 = 5$$

Así $C = \begin{bmatrix} 6 \\ 5 \end{bmatrix}$

En cambio al tratar de efectuar $\underset{3 \times 1 \quad 2 \times 3}{B \cdot A}$

$$1 \neq 2$$

se nota que no hay conformabilidad para el producto (el número de columnas de B es diferente al número de renglones de A) por lo tanto no es posible efectuar esta operación.

2) Sea ahora el caso de las matrices

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ -8 & 9 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 1 & 12 \end{bmatrix}.$$

Es posible efectuar los productos A•B y B•A

$$\underset{2\times 2}{A} \;\bullet\; \underset{2\times 2}{B} = \underset{2\times 2}{C} \quad y \quad \underset{2\times \boxed{2}}{B} \;\circ\; \underset{\boxed{2}\times 2}{A} = \underset{2\times 2}{D}$$

pero C y D no son iguales como podemos comprobar al efectuar ambas operaciones

$c_{11} = 5\times(-3)+7\times 1 = -8$ $\qquad$ $d_{11} = -3\times 5+2\times -8 = -31$

$c_{12} = 5\times 2 + 7\times 12 = 94$ $\qquad$ $d_{12} = -3\times 7 + 2\times 9 = -3$

$c_{21} = (-8)\times(-3)+9\times 1 = 33$ $\qquad$ $d_{21} = 1\times 5+12\times(-8) = -91$

$c_{22} = (-8)\times 2+9\times 12 = 92$ $\qquad$ $d_{22} = 1\times 7+12\times 9 = 115$

Propiedades del producto de matrices.

1) En general es no conmutativo

2) Es asociativo $(A\bullet B)\bullet C = A\bullet(B\bullet C)$

3) Es distributivo $A\bullet(B+C) = A\bullet B + A\bullet C$

4) Matriz Identidad
   a) Si A es una matriz cuadrada de orden "n" se cumple que $A\bullet I_n = I_n\bullet A = A$
   b) Si A es una matriz de orden mxn se cumple que $A\bullet I_n = A$ pero $I_n\bullet A$ no está definido.

5) Matriz nula
   a) Si A y 0 son cuadradas de orden n
   $$A\bullet 0 = 0\bullet A = 0$$

En general si A y 0 son conformables para el producto, $A \cdot 0 = 0$

b) Sin embargo si el producto de dos matrices es igual a la matriz nula no necesariamente una de ellas es la matriz nula.

Es decir $A \cdot B = 0$ no implica que A y/o B sean iguales a 0 como podemos ver en el siguiente ejemplo.

Sean las matrices no nulas

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad y \quad B = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$$

podemos comprobar que $A \cdot B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

6) Producto y trasposición:

Anteriormente se ha visto que:

$$A_{mxn} \cdot B_{nxr} = C_{mxr}$$

los elementos del producto son:

$c_{ij} = \sum a_{ik} \cdot b_{kj}$; si trasponemos a C_{mxr} obtenemos C^T_{rxm} con elementos c_{ji} donde $1 \leq j \leq r$ es el índice que indica el renglón de la matriz que premultiplica e $1 \leq i \leq m$ la columna de la matriz que postmultiplica.

Al trasponer A y B obtenemos respectivamente

$$A^T_{nxm} = \begin{bmatrix} a_{ki} \end{bmatrix}, \quad B^T_{rxn} = \begin{bmatrix} b_{jk} \end{bmatrix}$$

y en general el producto $A^T B^T$ no podrá efectuarse dado que "n" no necesariamente es igual a r.

Pero el producto $B^T \cdot A^T$ da por resultado una matriz de orden $r \times m$ (mismo orden de C^T) cuyos elementos serán los $c_{ji} = \sum b_{jk} \cdot a_{ki}$ correspondientes a los elementos de $(AB)^T = C^T$.

Por tanto $(AB)^T = B^T \cdot A^T$

Ejemplo, sean $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & -6 \end{bmatrix}$ $\quad A^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 2 \\ 4 & -6 \end{bmatrix}$

$B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 1 & 7 & -6 \\ 3 & 8 & 5 \end{bmatrix}$ $\quad B^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 2 & 7 & 8 \\ 4 & -6 & 5 \end{bmatrix}$

$A \cdot B = C = \begin{bmatrix} 17 & 69 & -6 \\ -16 & -28 & -30 \end{bmatrix}$ $\quad C^T = \begin{bmatrix} 17 & -16 \\ 69 & -28 \\ -6 & -30 \end{bmatrix}$

$$B^T \cdot A^T = \begin{bmatrix} 17 & -16 \\ 69 & -28 \\ -6 & -30 \end{bmatrix}$$

Matriz Inversa

En el campo de los números complejos, al definir la multiplicación, se define a la división como una operación inversa, empleando el inverso multiplicativo de manera que $\forall a \neq 0$ existe un único número $a^{-1} = \frac{1}{a}$ que cumple que $a \cdot a^{-1} = 1$, entonces $\frac{b}{a}$ podemos expresarlo con $b \cdot a^{-1}$.

En el caso de matrices cuadradas regulares (no singulares), se define la inversa de A como A^{-1} que no puede expresarse como $\frac{1}{A}$, dado que no existen reglas para dividir entre matrices.

Propiedades de la matriz inversa:

Si A es una matriz cuadrada no singular, existe su inversa, A^{-1} tal que el producto de ambas es la matriz identidad I

a) $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$

b) La matriz inversa A^{-1} es única,

para demostrarlo supongamos que para la matriz A se verifica

$$A\,B = B\,A = I \qquad y \qquad A\,D = D\,A = I$$

si $A\,B = I$

$$\underbrace{D\,A}_{I}\,B = \underbrace{D\,I}_{D} \qquad \text{(multiplicando por D).}$$

$$\underbrace{I\,B}_{} = D$$

$$B = D$$

entonces B, ó D, es la única matriz que multiplicada por A es igual a I.

c) $(A^{-1})^{-1} = A$

d) $I_n^{-1} = I_n$

e) $(A \cdot B \cdot C \cdot D \ldots X)^{-1} = X^{-1} \ldots D^{-1} \cdot C^{-1} \cdot B^{-1} \cdot A^{-1}$

Transformaciones Lineales.

Definición

Una transformación lineal T es un mapeo de cada uno de los vectores $\bar{X}$ de E^n en vectores $\bar{Y}$ de V^m ($m \leq n$). Esta transformación es lineal si se cumple la propiedad de linealidad (aditividad y homogeneidad), es decir si:

$\bar{Y}_1 = T(\bar{X}_1)$ es la transformación (mapeo) de $\bar{X}_1$

y

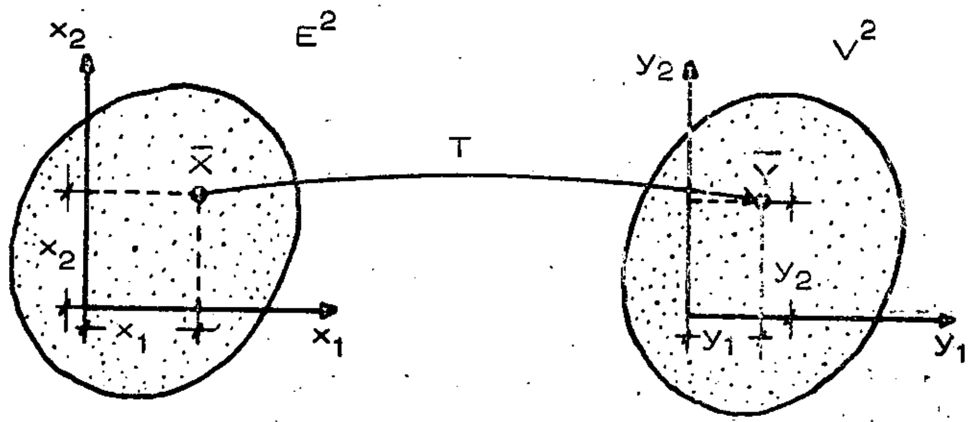
$\bar{Y}_2 = T(\bar{X}_2)$ es la transformación (mapeo) de $\bar{X}_2$

entonces

$$T\,(\lambda_1\bar{X}_1 + \lambda_2\bar{X}_2) = \lambda_1 T(\bar{X}_1) + \lambda_2 T(\bar{X}_2)$$

donde T es el operador de la transformación y λ_1, λ_2 son dos escalares cualesquiera.

Ejemplo de transformación lineal:



En donde:

$$y_1 = a_{11}\, x_1 + a_{12}\, x_2$$

$$y_2 = a_{21}\, x_1 + a_{22}\, x_2$$

lo cual también podemos escribir

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

o sea

$$\overline{Y} = A\overline{X}$$

El vector $\overline{X}$ es un punto del espacio bidimensional E^2, el vector (ó punto) $\overline{Y}$, es su mapeo en el espacio V^2 y la matríz A es el operador de la transformación pues induce el mapeo.

En general se dice que la transformación mapea el plano E^2 al plano V^2 o a parte de él y que los puntos $\overline{Y}$ son las imágenes de los puntos $\overline{X}$.

En base a las propiedades de las operaciones de matrices podemos comprobar que la transformación inducida por la matriz A es una transformación lineal pues

$$A(\lambda_1\overline{X}_1 + \lambda_2\overline{X}_2) = \lambda_1 A\overline{X}_1 + \lambda_2 A\overline{X}_2$$

Dominio y contradominio de las transformaciones

1. Dominio de una transformación es el conjunto de elementos que experimentan una transformación lineal.

2. Contradominio de una transformación es el conjunto de elementos conformados por la transformación que opera sobre los elementos del dominio; es la imágen del dominio bajo la transformación.

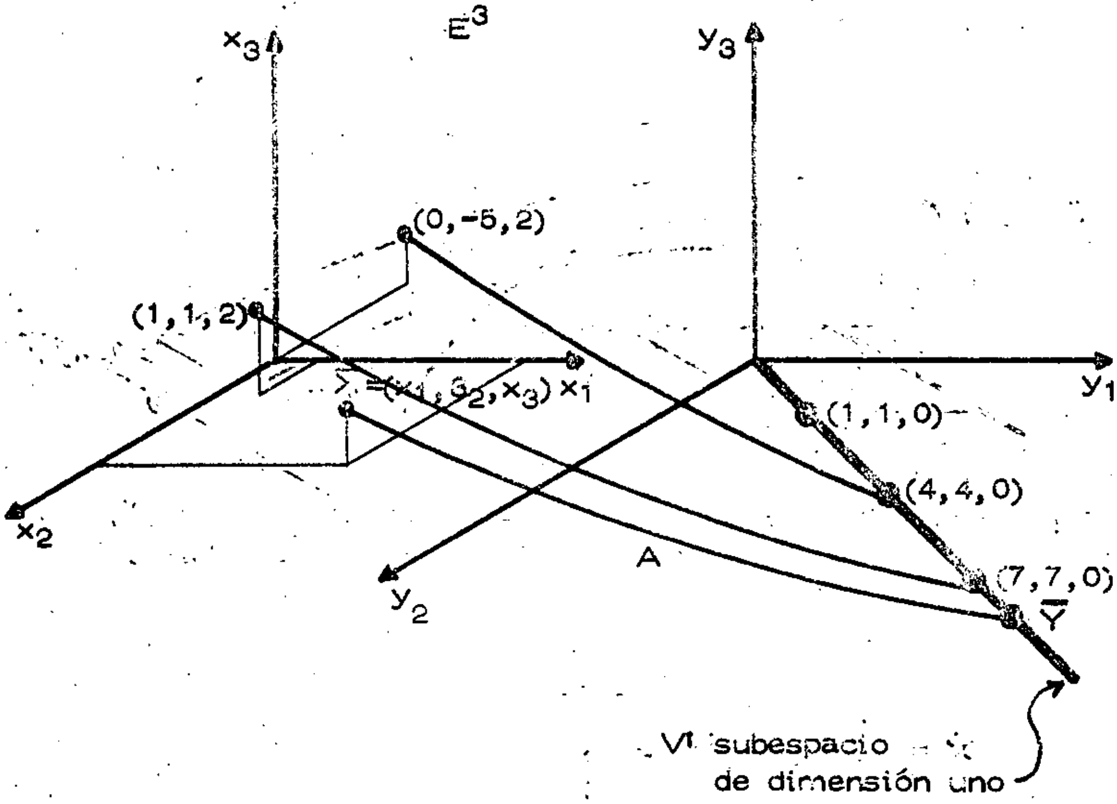
Para establecer el contradomino de la transformación lineal, son decisivos el orden y el rango de la matriz; si A es una matriz de orden mxn el dominio de la transformación es el espacio E^n y el contradominio de la transformación tiene como dimensión el rango de la matriz (número de vectores renglón o columna linealmente independientes de A), es decir, el contradominio es un espacio V^m o un subespacio de éste.

Ejemplos:

a) Sea un vector $\overline{X}$ y una matriz A_3; $r(A) = 3$

$$\overline{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Y_a = A\overline{X} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$



$$\text{si} \quad \bar{X} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad \bar{Y} = \begin{bmatrix} 7 \\ 7 \\ 0 \end{bmatrix} = 7 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{si} \quad \bar{X} = \begin{bmatrix} 0 \\ -5 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad \bar{Y} = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} = 4 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ etc.}$$

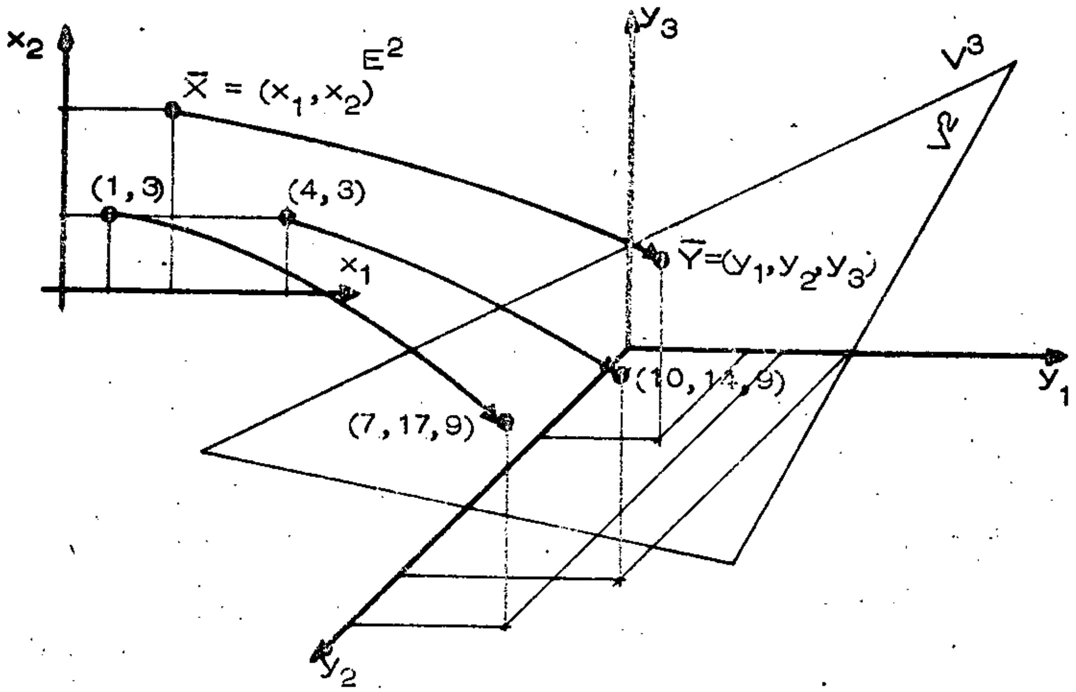
Estos conceptos los podemos aplicar a matrices rectangulares de orden mxn en donde obtenemos transformaciones de E^n a V^m (o a un subespacio de él).

$$\text{Así si} \quad \bar{X} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \quad y \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 6 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \quad (3 \times 2)$$

$$\bar{Y} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 6 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 17 \\ 9 \end{bmatrix}$$

si $\overline{X} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\overline{Y} = \begin{bmatrix} 10 \\ 14 \\ 9 \end{bmatrix}$

aparentemente el vector Y pertenece a un espacio tridimensio nal, pero en una transformación, el contradominio nunca es mayor que el rango de la matriz, por lo que analizando el conjunto de vectores $\overline{Y}$ encontramos que pertenecen a un plano bidimensional ($rA=2$) que es un subespacio de V^3.



generalizando, se puede decir que con una matriz de transformación Amxn:

- si $m = n$, entonces, el dominio y el contradominio de la transformación serán cuando más n (el orden de A).

- si $m > n$, la matriz tendrá rango no mayor que n y la transformación mapeará puntos de E^n a V^p siendo p el orden de la mayor submatriz no singular que se obtenga de A. ($p \leq n$).

si $m < n$, la matriz tendrá rango no mayor que m y la transformación mapeará puntos de E^n a V^m ó a un subespacio de éste, según el rango de A.

Al mapear un vector $\overline{X}$ podemos definir una transformación tal que a éste le corresponda un vector $\overline{Y} = A\overline{X}$ que será su imagen, pero no necesariamente se cumple que a cada vector $\overline{Y}$ le corresponda un único vector $\overline{X}$, es decir la correspondencia es unívoca de $\overline{X}$ a $\overline{Y}$.

Ejemplo: Si $\{\overline{X}_1, \overline{X}_2, \ldots \overline{X}_n\}$ E^n Y $\{\overline{Y}_1, \overline{Y}_2, \ldots \overline{Y}_n\}$ E^n

Y se tiene el vector $\overline{X}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ que operamos con la matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$ para obtener

$$\overline{Y}_1 = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 12 \end{bmatrix}$$

que será la imagen de $\overline{X}_1$.

Pero al transformar, usando la misma matriz, al vector

$$\overline{X}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \end{bmatrix} \text{ obtenemos } \overline{Y}_2 = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 12 \end{bmatrix}$$

$$= \overline{Y}_1$$

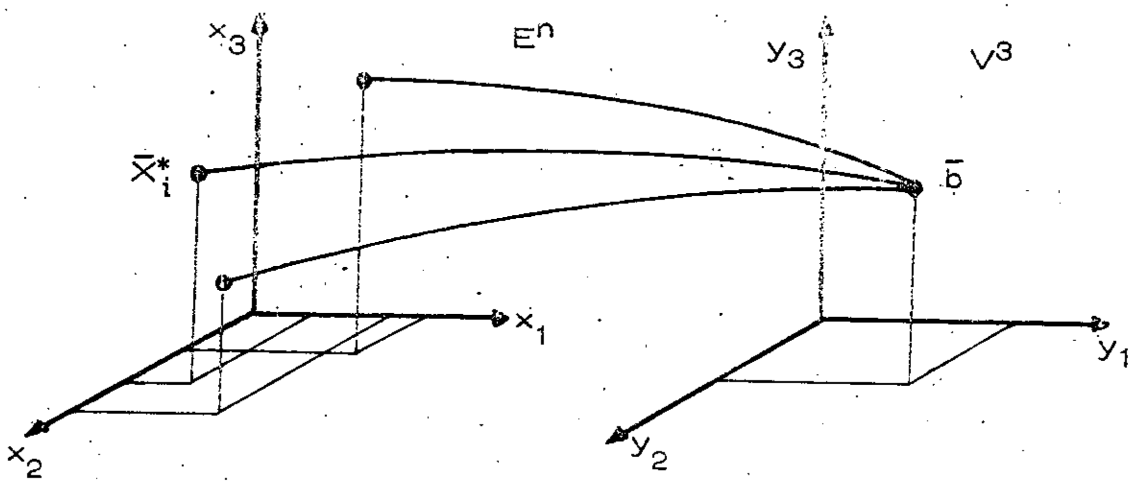
Resulta entonces que $\overline{Y}_1$ podemos obtenerlo al mapear $\overline{X}_1$ ó $\overline{X}_2$ indistintamente usando el mismo operador A y que a dos valores distintos del dominio corresponde uno solo del contradominio, por lo tanto la correspondencia no es biunívoca.

Para que la transformación sea únicamente determinada y exista una correspondencia uno a uno, la matriz A debe ser no singular, ya que en este caso se define A^{-1} que es la inversa de A que cumple que

$$\overline{Y} = A\overline{X} \qquad \overline{X} = A^{-1}\overline{Y}$$

En este caso a cada punto de E^n corresponde uno y solo uno de V^m y recíprocamente.

Un caso especial en las transformaciones lineales se presenta cuando los elementos de $\bar{Y}$ son constantes: $A\bar{X} = \bar{b}$ es un mapeo de elementos de un espacio de dimensión n a un solo punto $\bar{b}$ (espacio de dimensión cero que es un subespacio de V^m). Si la matriz A es de orden mxn, el dominio de la transformación es E^n, pero la dimensión del contradominio esta determinada por el rango r(A).



Es necesario analizar, para este punto $\bar{b}$, cuales son los elementos del dominio que dan lugar al mapeo. En general, a cada punto $\bar{X}_i$ del dominio, corresponde un punto $\bar{Y}_i$ en el contradominio, pero solo algunos puntos $\bar{X}_i^*$ tienen como imagen al punto $\bar{b}$.

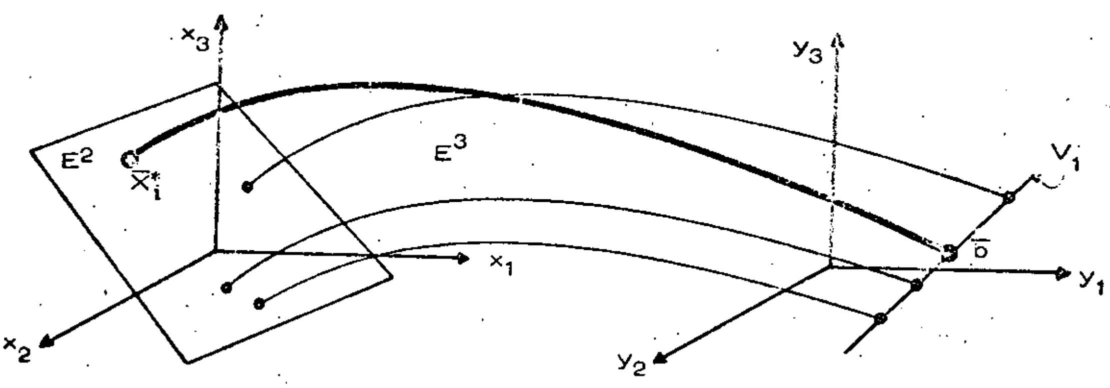
La posibilidad de encontrar esos puntos $\bar{X}_i^*$, depende de la diferencia de dimensión del dominio y del contradominio. Si se fija un punto $\bar{b}$ en el contradominio V^r, los puntos del dominio E^n para los cuales $\bar{b}$ es su imagen, se encuentran en un subespacio de dimensión (n−r).

Note que el rango r(A) de la matriz de la transformación, representa condiciones independientes entre las $\bar{X}_i$ (número de columnas o renglones linealmente independientes de la matriz), que li mitan la posibilidad de elegir puntos de E^n arbitrariamente. Entre más condiciones independientes (combinaciones lineales entre $\overline{X}_i$) en la transformación, habrá menos posibilidades de elegir libremente puntos de E^n.

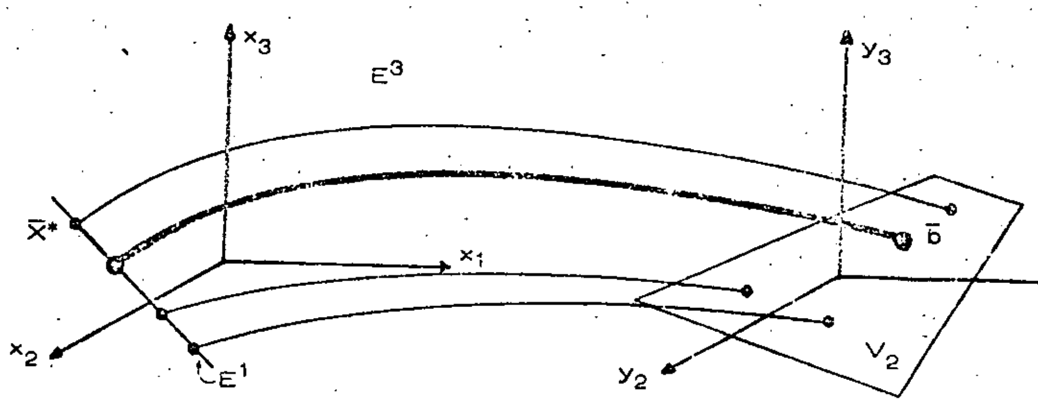
Ejemplo: Sea una transformación de

$$E^3 \text{ a } V^r$$

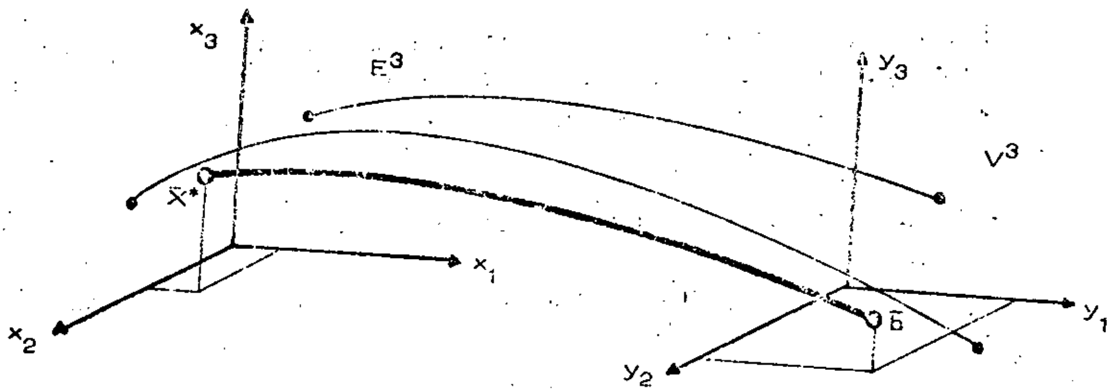
a) Si A(3x3), y r(A) = 1, se tiene una transformación de E^3 a V^1. Al fijar el punto $\overline{b}$, los puntos $\overline{X}_i{}^*$ que lo generan pertenecen a un subespacio de E^3 de dimensión $n-r = 3-1 = 2$, es decir la dimensión 1 de V^1 debida al rango, disminuye o restringe en uno la dimensión de E^3.



b) Si A(3x3) y r(A) = 2; $n-r = 1$ dominio E^3, contradominio V^2; el espacio que genera el punto $\overline{b}$ es de dimensión uno: E^1.



c) Si A(3x3) y r(A) = 3; n−r = 0, dominio E^3, contradominio V^3, es espacio que genera al punto $\bar{b}$ es de dimensión cero por lo que el mapeo es de punto a punto (correspondencia biunívoca).



En particular, cuando $\bar{b}$ es el vector cero, se tiene:

$$A\bar{X} = \tilde{0}$$

y se puede presentar cualquiera de los casos ejemplificados, dependiendo del rango de la matriz de la transformación.

El conjunto de puntos $\bar{X}_i^*$ que se transforman en el vector cero, es un subespacio del dominio que se denomina espacio nulo, con dimensión (n−r) a la cual se le llama nulidad:

$$\mu = n-r$$

Transformación Idéntica

Se había mencionado que una matriz identidad es un conjunto de vectores unitarios, por ejemplo:

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Esta matriz mapea a un punto en sí mismo; así $I\overline{X} = \overline{X}$, es una transformación idéntica de $\overline{X}$.

Transformaciones Elementales

Se llaman transformaciones (operaciones) elementales a las operaciones que se efectúan sobre los renglones y/o columnas de una matriz que no modifican ni el orden, ni el rango de ella.

Estas transformaciones son las siguientes:

1) Intercambiar los elementos de dos renglones (R_{ij}) o columnas (C_{ij}).

   Así, R_{12} corresponde a intercambiar los elementos del primero y el segundo renglón.

2) Multiplicar los elementos de un renglón o columna por un escalar k distinto de cero. ($R_i(k)$ ó $C_i(k)$)

   Así $C_2(3)$ significa que todos los elementos de la columna 2 serán multiplicados por 3.

3) Multiplicar los elementos de un renglón o columna por un escalar y sumar algebraicamente el resultado a otro renglón o columna. ($R_{ij}(k)$ ó $C_{ij}(k)$).

   Así, $R_{34}(k)$ significa que a los elementos del renglón 3 se le sumarán los elementos del renglón 4 multiplicados por k.

Matrices equivalentes

Las matrices que se obtienen al aplicar transformaciones elementales sucesivas sobre una matriz original, se denominan matrices equivalentes y conservan el orden y el rango de aquélla. Esquemáticamente se indica $A \sim B$ (A es equivalente a B).

Como ejemplo efectuaremos dichas transformaciones sobre los elementos de los renglones de la matriz I_2.

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

a) Intercambiar el renglón 1 por el renglón 2: R_{12}

$$I'_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

b) Multiplicar el 2o. renglón por 5: $R_2(5)$

$$I''_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$$

c) Agregar al 1er. renglón los elementos del 2o. renglón multiplicados por (-3): $R_{12}(-3)$.

$$I'''_2 = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A las matrices I', I", I''' obtenidas al aplicar transformaciones elementales sobre los renglones de una matriz identidad se les llama matrices elementales. Nótese que no son singulares ya que no cambió ni su orden ni su rango.

Del mismo modo se podrían obtener otras matrices equivalentes al aplicar transformaciones elementales a las columnas de I_n.

Efectuemos ahora en la matriz F, las mismas transformaciones que se aplican en I_2, pero en forma sucesiva:

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$$

1) R_{12}

$$F' = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

2) $R_2(5)$

$$F'' = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 5 & 15 \end{bmatrix}$$

3) $R_{12}(-3)$

$$F''' = \begin{bmatrix} -10 & -38 \\ 5 & 15 \end{bmatrix}$$

Obsérvese que sucede, al premultiplicar a F por I'_2

$$I'_2 \cdot F = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = F'$$

y F' premultiplicada por $I''_2 = I''_2 F' = I''_2 \cdot I'_2 \cdot F$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 5 & 15 \end{bmatrix} = F''$$

Premultiplicando ahora F" por I'''_2, $= I'''_2 \cdot F'' = I'''_2 \cdot I''_2 \cdot I'_2 \cdot F$

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 5 & 15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 & -38 \\ 5 & 15 \end{bmatrix} = F'''$$

$$\therefore \quad F''' = I''' \cdot I'' \cdot I' \cdot F$$

Es decir, se pueden obtener transformaciones en una matriz A, haciendo la transformación en una matriz identidad y multiplicando esa matriz elemental por la matriz A, teniendo presente lo siguiente:

a) Para efectuar las transformaciones elementales en los renglones se premultiplica a la matriz A por la matriz elemental (R). (Este es el caso del ejemplo presentado).

b) Para efectuar transformaciones elementales en las columnas se postmultiplica a la matriz A por la matriz elemental (C) correspondiente.

Equivalencia de matrices con la aplicación de matrices elementales sucesivas.

Sean R_1, R_2, ... R_k, matrices elementales a las que se les han hecho transformaciones en renglones, donde

$$P = R_k \cdot \ldots \cdot R_2 \cdot R_1$$

y $C_1, C_2, \cdots, C_j$ matrices elementales obtenidas al aplicar transformaciones elementales en columnas, donde

$$Q = C_1 \cdot C_2 \cdot \ldots \cdot C_j$$

Entonces, dos matrices A y B son equivalentes si y solo si existen 2 matrices P y Q no singulares tales que PAQ = B, (donde además se cumple la conformabilidad por el producto).

Casos particulares.

Si para obtener a partir de A a la matriz B, equivalente a ella, se efectuan únicamente operaciones elementales de rengiones ó columnas, entonces

$$B = PA \quad ó \quad B = AQ$$

Inversión de una transformación elemental.

Es la operación que produce el efecto contrario a las transformaciones elementales

Así se definen $R_{ij}^{-1} = R_{ji}$; $C_{ij}^{-1} = C_{ji}$

$$R_i^{-1}(k) = R_i(\tfrac{1}{k}) \;;\; C_i^{-1}(k) = C_i(\tfrac{1}{k})$$

$$R_{ij}^{-1}(k) = R_{ij}(-k) \;;\; C_{ij}^{-1}(k) = C_{ij}(-k)$$

Por ejemplo

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 6 & 8 & 10 \\ 5 & 3 & 7 \end{bmatrix}$$

Transformación elemental $R_{21}(-3)$

$$N = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 6-0 & 8-6 & 10-12 \\ 5 & 3 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 6 & 2 & -2 \\ 5 & 3 & 7 \end{bmatrix}$$

Para volver a obtener M operamos la transformación elemental inversa sobre N; $R_{21}^{-1}(-3) = R_{21}(3)$

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 6+0 & 2+6 & -2+12 \\ 5 & 3 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 6 & 8 & 10 \\ 5 & 3 & 7 \end{bmatrix}$$

Se puede observar que la inversa de una transformación elemental es otra transformación del mismo tipo.

Obtención de la matriz inversa.

Uno de los procedimientos para obtener la matriz inversa es el que se presenta a continuación, por medio de transformaciones elementales aplicadas a los renglones de una matriz A no singular.

Sea una matriz A ($|A| \neq 0$) y R un conjunto de operaciones o transformaciones elementales que aplicadas a los renglones de A la transforman en una matriz identidad:

$$RA = I$$

multiplicando por R^{-1}

$$\underbrace{RR^{-1}}_{I} A = \underbrace{R^{-1} I}_{IR^{-1}}$$

simplificando

$$A = IR^{-1}$$

invirtiendo

$$A^{-1} = \underbrace{(IR^{-1})^{-1}}$$

$$\underbrace{R^{-1})^{-1}}_{R}\underbrace{I^{-1}}_{I}$$

entonces

$$A^{-1} = RI$$

es decir, el conjunto de operaciones R aplicado a la matriz identidad, la transforma en la inversa de A. De aquí, se plantea el procedimiento a seguir:

se tienen las matrices:

$$\left[\begin{array}{c|c} A & I \end{array}\right]$$

a las que simultáneamente se aplican las operaciones R para obtener:

$$\left[\begin{array}{c|c} I & A^{-1} \end{array}\right]$$

Ejemplo:

Sean las matrices $\left[\begin{array}{c|c} A & I \end{array}\right]$, a las que se les aplicarán las operaciones elementales indicadas:

$$\left[\begin{array}{cc|cc} -4 & -2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim$$

$$R_{12(2)}$$

$$\sim \left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{R_1(\frac{1}{2})}{\sim} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1/2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{R_{21}(-3)}{\sim}$$

$$\sim\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1/2 & 1 \\ 0 & 1 & -3/2 & -2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{c|c} I & A^{-1} \end{array}\right]$$

Comprobación: $AA^{-1} = I$

$$\begin{bmatrix} -4 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 & 1 \\ -3/2 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

<u>Forma normal de una matriz.</u>

La forma normal de una matriz A de rango $r > 0$ toma los tipos:

$[I_r]$ Si A es una matriz cuadrada no singular de orden y rango r.

$$\left[\begin{array}{c|c} I_r & 0 \end{array}\right], \quad \left[\begin{array}{c} I_r \\ \hline 0 \end{array}\right], \quad \left[\begin{array}{c|cc} I_r & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Si A es una matriz rectangular o cuadrada de rango r.

Para reducir una matriz a su forma normal, puede procederse por transformaciones elementales entre renglones y/o columnas; por lo tanto cualquier matriz A de rango $r > 0$ es equivalente a su forma normal.

Ilustraremos este procedimiento con la matriz A:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 3 & 6 & 12 \end{bmatrix}$$

el rango de la matriz es 2, porque el 3er. renglón es igual al segundo multiplicado por 3.

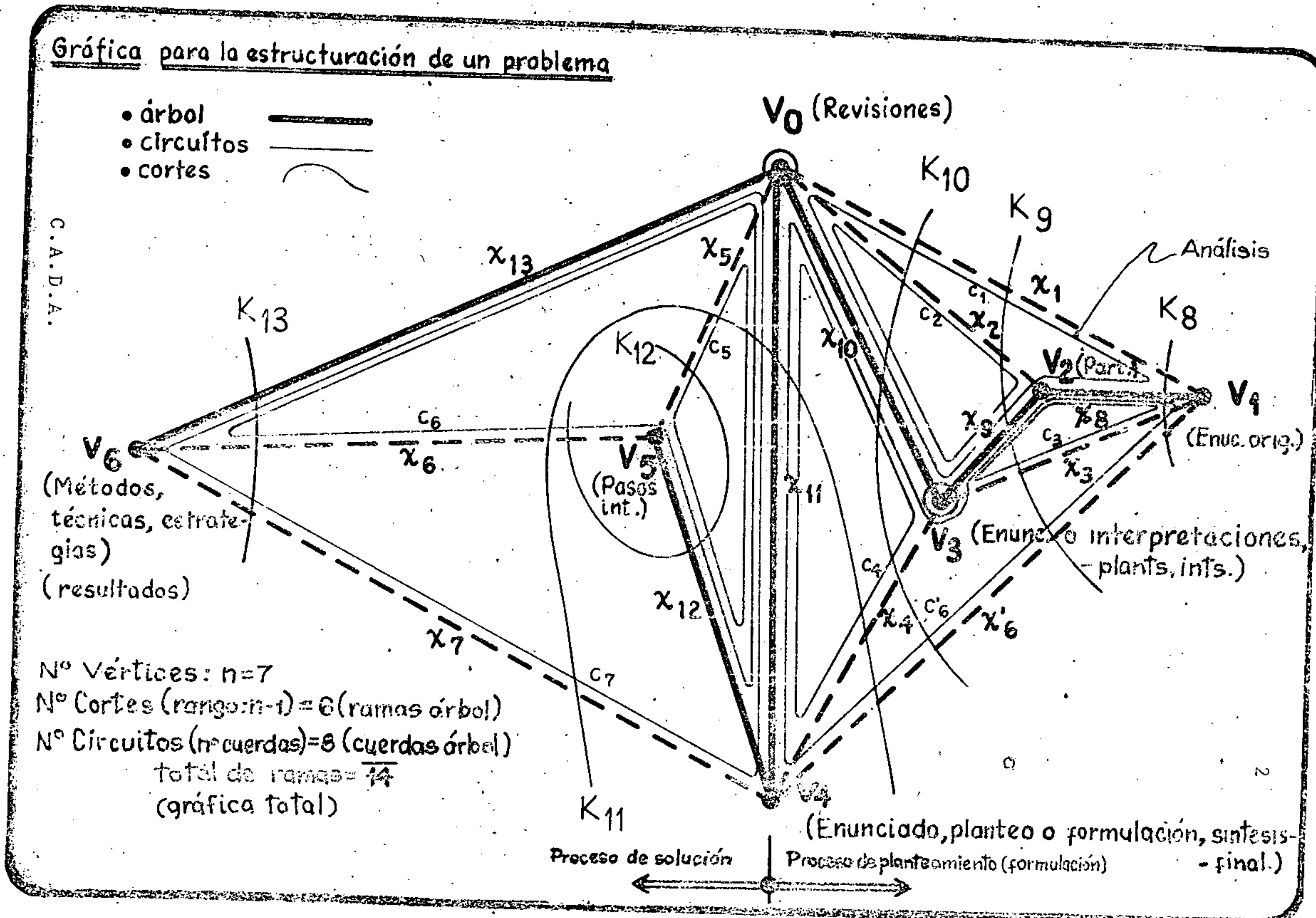
centro de educación continua
división de estudios superiores
facultad de ingeniería, unam

METODO CIENTIFICO ESQUEMAS PARA SU PRACTICA

GRAFICAS PARA LA ESTRUCTURACION DE UN PROBLEMA

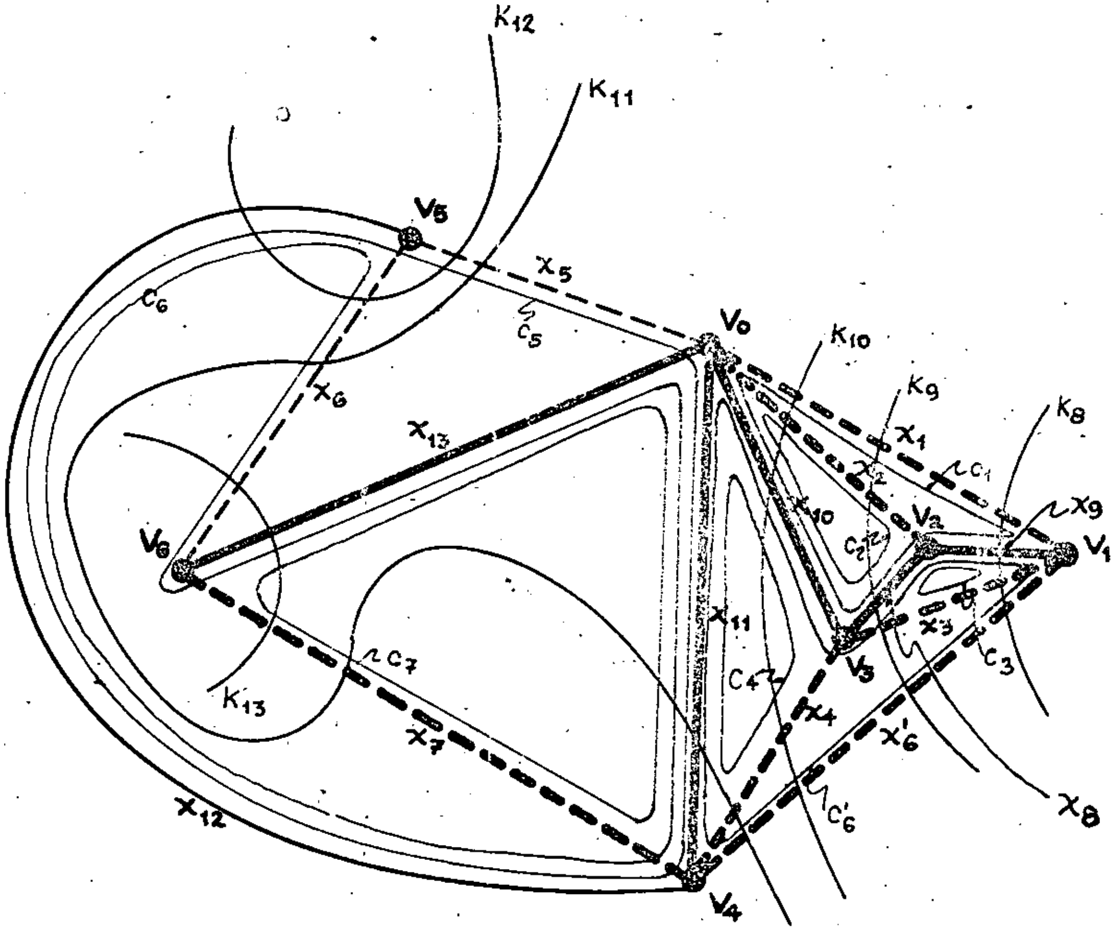
DR. JAVIER SALAZAR RESINES

MARZO, 1979.

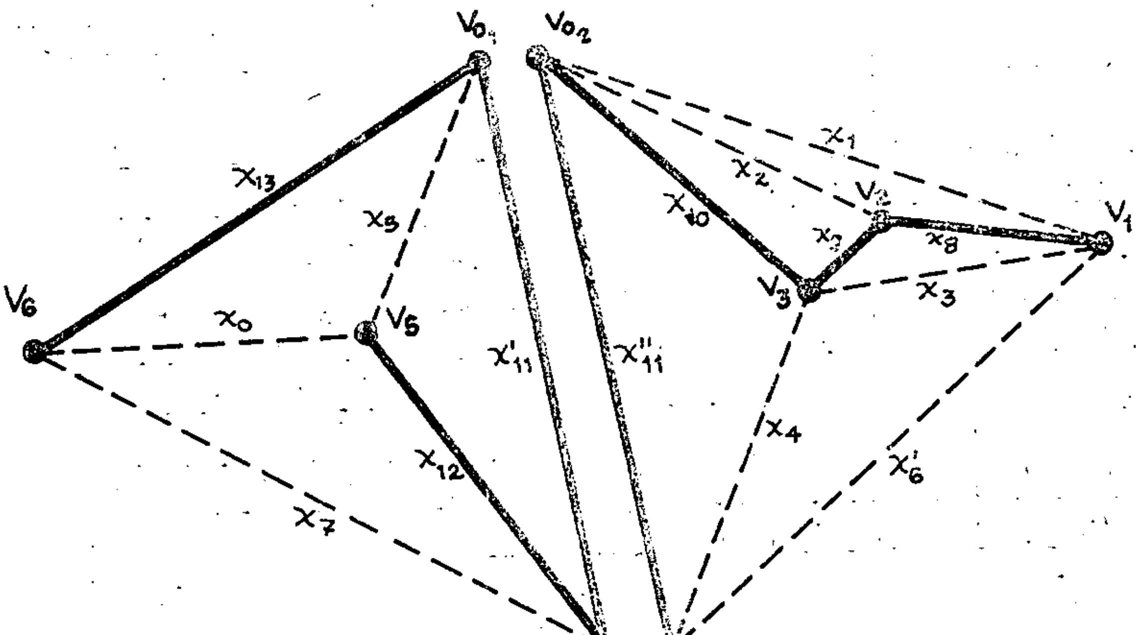


Gráfica para la estructuración de un problema
• árbol
• circuitos
• cortes
C.A.D.A.
V0 (Revisiones)
K10
K9
Análisis
K8
V1
(Enuc. orig.)
V2 (Parc.)
V3 (Enunc. o interpretaciones, - plants, ints.)
V4
(Enunciado, planteo o formulación, síntesis - final.)
V5 (Pasos int.)
V6 (Métodos, técnicas, estrategias) (resultados)
K13
K12
K11
x1
x2
x3
x4
x5
x6
x'6
x7
x8
x9
x10
x11
x12
x13
c1
c2
c3
c4
c5
c6
c'6
c7
Nº Vértices: n=7
Nº Cortes (rango: n-1) = 6 (ramas árbol)
Nº Circuitos (nº cuerdas) = 8 (cuerdas árbol)
total de ramas = 14
(gráfica total)
Proceso de solución
Proceso de planteamiento (formulación)

Isomórfica de la gráfica para la estructuración de un problema.



Ejemplo de Análisis de Subgráficas en Serie



$$\boxed{F_{0_4} = F_{0_1, 4_1} \vee F_{0_2, 4_2}}$$

Matriz de incidencia

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_6'	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}	x_{12}	x_{13}	g_a	g_t	
v_0	1	1			1						1	1		1	3	6	⟸ centro
v_1	1		1				1		1						1	4	
v_2		1							1	1					2	3	
v_3			1	1						1	1				2	4	⟸ centro
v_4				1			1	1				1	1		2	5	
v_5					1	1							1		1	3	
v_6						1		1						1	1	3	

(cuerdas) (ramas)

Matríz de conectividad o adyacencia A (con indicación de las ramas).

$$A = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccccc} V_0 & V_1 & V_2 & V_3 & V_4 & V_5 & V_6 \end{array} \\ \begin{array}{c} V_0 \\ V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \\ V_5 \\ V_6 \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & X_1 & X_2 & X_{10} & X_{11} & X_5 & X_{13} \\ X_1 & 1 & X_8 & X_3 & X_6' & 0 & 0 \\ X_2 & X_8 & 1 & X_9 & 0 & 0 & 0 \\ X_{10} & X_3 & X_9 & 1 & X_4 & 0 & 0 \\ X_{11} & X_6' & 0 & X_4 & 1 & X_{12} & X_7 \\ X_5 & 0 & 0 & 0 & X_{12} & 1 & X_6 \\ X_{13} & 0 & 0 & 0 & X_7 & X_6 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Se determinarán las menores F_{46} y F_{14}, bajo las propiedades:

$$X_\alpha + X_\alpha = X_\alpha \cdot X_\alpha = X_\alpha$$

$$1 + X_\alpha = 1$$

$$0 + X_\alpha = X_\alpha$$

$$1 \cdot X_\alpha = X_\alpha$$

$$0 \cdot X_\alpha = 0$$

$$X_\alpha + X_\alpha X_\beta = X_\alpha \cdot (1 + X_\beta) = X_\alpha$$

<u>Menor asociado a la función de interrupción F_{14}:</u>

$$F_{14} = \begin{array}{c} \\ (V_0) \\ (V_2) \\ (V_3) \\ (V_4) \\ (V_5) \\ (V_6) \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} (V_0) & (V_1) & (V_2) & (V_3) & (V_5) & (V_6) \end{array} \\ \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_2 & x_{10} & x_5 & x_{13} \\ x_2 & x_8 & 1 & x_9 & 0 & 0 \\ x_{10} & x_3 & x_9 & 1 & 0 & 0 \\ x_{11} & x_6' & 0 & x_4 & x_{12} & x_7 \\ x_5 & 0 & 0 & 0 & 1 & x_6 \\ x_{13} & 0 & 0 & 0 & x_6 & 1 \end{vmatrix} \end{array}$$

<u>Función de interrupción F_{14} (trayectorias de 1 a 4):</u>

$$F_{14} = x_3 x_{10} x_{13} x_7 + x_3 x_9 x_2 x_{13} x_7 + x_8 x_9 x_{10} x_{13} x_7 + x_8 x_2 x_{13} x_7 + x_1 x_{13} x_7 + x_3 x_{10} x_{13} x_6 x_{12} + x_3 x_9 x_2 x_{13} x_6 x_{12} + x_8 x_9 x_{10} x_{13} x_6 x_{12} + x_8 x_2 x_{13} x_6 x_{12} + x_1 x_{13} x_6 x_{12} + x_3 x_{10} x_5 x_6 x_7 + x_3 x_9 x_2 x_5 x_6 x_7 + x_8 x_9 x_{10} x_5 x_6 x_7 + x_1 x_5 x_6 x_7 + x_8 x_2 x_5 x_6 x_7 + x_3 x_{10} x_5 x_{12} + x_3 x_9 x_2 x_5 x_{12} + x_8 x_9 x_{10} x_5 x_{12} + x_8 x_2 x_5 x_{12} + x_1 x_5 x_{12} + x_3 x_{10} x_{11} + x_3 x_9 x_2 x_{11} + \boxed{x_8 x_9 x_{10} x_{11}} + x_8 x_2 x_{11} + x_1 x_{11} + x_8 x_2 x_{10} x_4 + x_1 x_{10} x_4 + x_3 x_4 + x_8 x_9 x_4 + x_1 x_2 x_9 x_4 + x_6'$$

trayectoria doble: fundamental

(31 trayectorias)

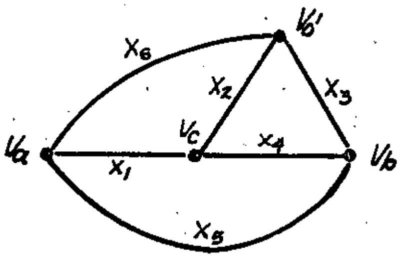
En las siguientes hojas se ilustra el desarrollo del determinante, empleando las operaciones del álgebra de Boole, para determinar las trayectorias y un procedimiento posible con árboles.

La obtención de trayectorias (abiertas) que no constituyan o contengan circuitos entre V_1 y V_4 se puede efectuar expandiendo el determinante en relación a los elementos de un renglón o columna pero, atendiendo al álgebra de Boole (operaciones indicadas en la hoja #7).

Por ejemplo, si el determinante:

$$F_{ab} = \begin{vmatrix} x_1 & 1 & x_2 \\ x_6 & x_2 & 1 \\ x_5 & x_4 & x_3 \end{vmatrix}$$

es la función de transmisión del siguiente circuito entre las terminales V_a y V_b (se indica la matriz de adyacencia):



$$A = \begin{array}{c} \\ \cancel{V_a} \\ V_c \\ V_d \\ V_b \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} V_a & V_c & V_d & V_b \end{array} \\ \begin{bmatrix} \cancel{1} & \cancel{x_1} & \cancel{x_6} & \cancel{x_5} \\ x_1 & 1 & x_2 & \cancel{x_4} \\ x_6 & x_2 & 1 & \cancel{x_3} \\ x_5 & x_4 & x_3 & \cancel{1} \end{bmatrix} \end{array}$$

eliminando el <u>primer renglón</u> y la última columna obtendremos la F_{ab} dada antes.

Desarrollando respecto a los elementos del primer renglón (con notación de la Lógica) tendríamos:

$$F_{ab} = x_1 \wedge \begin{vmatrix} x_2 & 1 \\ x_4 & x_3 \end{vmatrix} \vee \begin{vmatrix} x_6 & 1 \\ x_5 & x_3 \end{vmatrix} \vee x_2 \wedge \begin{vmatrix} x_6 & x_2 \\ x_5 & x_4 \end{vmatrix}$$

o en la notación usual:

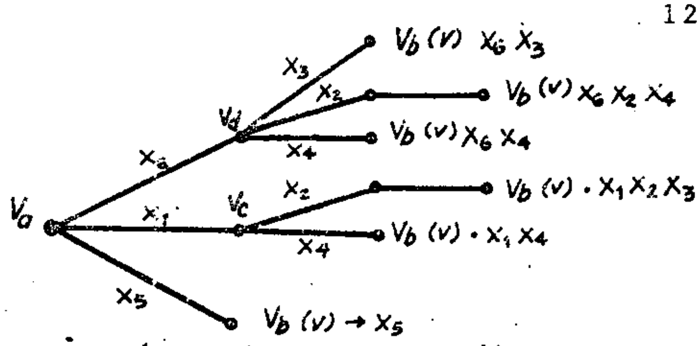
$$F_{ab} = x_1 \begin{vmatrix} x_2 & 1 \\ x_4 & x_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_6 & 1 \\ x_5 & x_3 \end{vmatrix} + x_2 \begin{vmatrix} x_6 & x_2 \\ x_5 & x_4 \end{vmatrix}$$

Prosiguiendo,

$$F_{ab} = x_1 x_2 x_3 + x_1 x_4 + x_6 x_3 + x_5 + x_2 x_6 x_4 + \underbrace{x_1' x_3' x_2}_{x_2 x_5}$$

También podríamos proceder por vértices y árboles: el punto (o vértice) inicial es V_a; el vértice final es V_b.

Empezando con V_a observamos qué trayectorias lo unen a qué vértices. De cada uno de éstos, y <u>sin volver</u> a pasar por el mismo vértice proseguimos, igual que antes, hasta llegar a V_b.



Este último puede ser un método alternativo o un método complementario del anterior

Menor asociado a la <u>función de interrupción* F_{46}</u>

* *o transmisión*

$$
\begin{array}{c}
 \\ (V_0) \\ (V_1) \\ (V_2) \\ (V_3) \\ (V_5) \\ (V_6)
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccc} (V_0) & (V_1) & (V_2) & (V_3) & (V_4) & (V_5) \end{array} \\
\left|\begin{array}{cccccc}
1 & x_1 & x_2 & x_{10} & x_{11} & x_5 \\
x_1 & 1 & x_8 & x_3 & 0 & 0 \\
x_2 & x_8 & 1 & x_9 & 0 & 0 \\
x_{10} & x_3 & x_9 & 1 & x_4 & 0 \\
x_5 & 0 & 0 & 0 & x_{12} & 1 \\
x_{13} & 0 & 0 & 0 & x_7 & x_6
\end{array}\right|
\end{array}
$$

Función de interrupción F_{46}: (trayectorias de 4 a 6):

F_{46}: $x_{12}\,x_5\,x_{13} + \boxed{\underline{x_{11}\,x_{13}}} + x_4\,x_9\,x_8\,x_1\,x_{13} + x_4\,x_{10}\,x_{13} + x_4\,x_9$
$x_2\,x_{13} + x_4\,x_3\,x_8\,x_2\,x_{13} + x_4\,x_3\,x_1\,x_{13} + x_{12}\,x_6 + x_{11}\,x_5\,x_6 + x_4$
$x_{10}\,x_5\,x_6 + x_4\,x_9\,x_8\,x_1\,x_5\,x_6 + x_4\,x_9\,x_2\,x_5\,x_6 + x_4\,x_3\,x_8\,x_2\,x_5\,x_6 +$
$+\ x_7 + x_4\,x_3\,x_1\,x_5\,x_6 + x_6'\,x_1\,x_5\,x_6 + x_6'\,x_1\,x_{13} + x_6'\,x_8\,x_2\,x_{13} + x_6'\,x_8$
$x_2\,x_9\,x_6 + x_6'\,x_8\,x_9\,x_{10}\,x_5\,x_6 + x_6'\,x_5\,x_9\,x_{10}\,x_{13} + x_6'\,x_3\,x_9\,x_2\,x_5\,x_6 + x_6'$
$x_3\,x_9\,x_2\,x_{13} + x_6'\,x_3\,x_{10}\,x_5\,x_6 + x_6'\,x_3\,x_{10}\,x_{13}$

(15 trayectorias)

$\boxed{}$: *trayectoria fundamental.*

centro de educación continua
división de estudios superiores
facultad de ingeniería, unam

METODO CIENTIFICO: ESQUEMAS PARA SU PRACTICA

Introducción a Gráficas en el Campo de la Educación

Maestra Donna Jackson Oliver

Arq. María Dolores González Martínez

Marzo, 1979.

A Javier Salazar Resines,
fuente y sumidero de este
cuaderno.

AGRADECIMIENTO

El borrador de este cuaderno fue sometido a una prueba piloto en la cual participaron profesores de la Universidad Autónoma Metropolitana, de la Universidad Nacional Autónoma de México y personal de la propia Asociación Nacional de Universidades e Institutos de Enseñanza Superior. A todos les agradecemos su paciencia y sus buenas críticas, mediante las cuales se ha mejorado el cuaderno.

Agradecemos también a Lucrecia Tello y a Elizabeth Clerc por la realización del trabajo de mecanografía y a Antonio Pichardo por la elaboración de los dibujos.

C O N T E N I D O

I. INTRODUCCION, OBJETIVOS Y ALCANCES

Este cuaderno pretende proporcionar a las personas que trabajan y están interesadas en la educación, y en especial a las de niveles superiores, una introducción a la teoría de gráficas, con el deseo de que esta metodología, que forma parte del enfoque de sistemas, sea comprendida y utilizada por un público amplio. Puesto que la teoría de gráficas fue iniciada por matemáticos y desarrollada en los campos de matemáticas e ingeniería, el acceso a ella ha llevado el supuesto de una preparación previa en estas disciplinas. Al respecto, este cuaderno es novedoso porque supone que el lector no ha tenido dicha preparación y por lo tanto se explican descriptivamente conceptos y procedimientos básicos, en lugar de atenerse a fórmulas matemáticas. Este propósito fundamental conlleva una limitación, pues el tratamiento de procedimientos asociados a gráficas es restringido.

Nuestra fuente principal ha sido Teoría de Gráficas de Javier Salazar Resines (México: Ed. Limusa, en prensa), suplementada por Graph theory with applications to engineering and computer science de Narsingh Deo (New York: Prentice-Hall, 1974), entre otras. Para mayor información le invitamos a consultar éstas, en especial la primera, cuyas aplicaciones son fundamenta~~les~~mente en el campo de la educación. El modelo didáctico ha sido tomado de "Modelos esquemáticos para la elaboración de planes en la educación superior" de Javier Salazar Resines, que próximamente será publicado por la ANUIES.

El propósito principal se subdivide en tres objetivos generales; al estudiar el cuaderno y hacer los ejercicios de aplicación y transferencia, el lector podrá:

1) entender los modelos desarrollados, conceptual y técnicamente;
2) desarrollar tres modelos de su propia creación y deslindar sus implicaciones conceptuales;
3) percibir la utilidad de esta metodología para sus actividades profesionales, académicas o de investigación.

Limitándose a gráficas simples de cuatro vértices, el texto y los ejercicios hacen hincapié en el desarrollo conceptual de los modelos considerados, lo cual, en nuestra opinión, no ha recibido atención suficiente hasta la fecha. Esto implica otro alcance. Las limitaciones respecto a la teoría de gráficas son muchas cuando se compara este cuaderno introductorio con los tratados sobre el tema; sin embargo, creemos que tenga valor pese a sus restricciones. Le toca al lector opinar.

II. TEORIA DE GRAFICAS - UN MARCO INTRODUCTORIO

Presentamos este breve marco de referencia para darle al lector una idea de las aplicaciones y posibilidades de esta teoría, haciéndole notar que seguramente algunas de ellas le puedan ser desconocidas. No se preocupe; puede continuar con los siguientes capítulos, y si lo cree conveniente, regrese a éste al terminar su lectura.

Propiamente dicho, la teoría de gráficas forma un área de las matemáticas aplicadas que se relaciona íntimamente con otras áreas de esta ciencia, tales como las estructuras algebraicas, topología, teoría de matrices, probabilidad y análisis numérico y combinatorio. Puesto que esta teoría sirve como modelo matemático para cualquier sistema que implica relaciones binarias, sus aplicaciones han sido numerosas. Sin pretender ser exhaustivos, podemos mencionar campos como: física teórica, química, arquitectura, investigación de operaciones, genética, sicología, sociología, economía, antropología, lingüística, ciencias de la comunicación, ciencias de la computación, ciencias de la gestión, inteligencia artificial y muchos campos de la ingeniería.

Esta teoría "nació" en 1736 cuando Leonhard Euler, al tratar un problema topológico (encontrar un camino para cruzar cada uno de los siete puentes de Königsberg exactamente una vez y regresar al punto inicial), desarrolló las condiciones en que se pueden recorrer todos los segmentos de una gráfica dada, una sola vez cada uno. puesto que estas condiciones no estuvieron presentes en el problema de los puentes, el originador de la teoría de gráficas demostró mediante ésas que una solución al problema no era posible y así estableció bases para el desarrollo de la teoría. Aproximadamente un siglo después, G.R. Kirchhoff, un físico alemán, desarrolló la teoría de los "árboles"* en su estudio del sistema de ecuaciones de circuitos de redes eléctricas. Con árboles, demostró que es necesario considerar solamente los circuitos fundamentales (y no todos) para resolver el sistema de ecuaciones, lo cual originó los principios de la teoría de redes eléctricas que sirvió de base más adelante a la teoría del control. Una década después, A. Cayley, un inglés, descubrió los árboles al considerar los cambios de variables en el cálculo diferencial y los utilizó más tarde en la enumeración de los isómeros de los hidrocarburos saturados. Hubo otras pautas teóricamente importantes durante ese siglo. Sin embargo, es en la segunda mitad del siglo actual que el campo de la teoría de gráficas ha experimentado intensa actividad, tanto teórica como aplicada, y es dentro de las últimas décadas que matemáticos tales como Frank Harary y C. Berge han desarrollado procedimientos sistemáticos.

Se puede ilustrar el enorme crecimiento en las aplicaciones de la teoría de gráficas, mediante ejemplos de sistemas que utilizan redes de flujo. En el diseño de análisis de sistema físicos de redes de flujo hay ejemplos tales como: sistemas de transporte terrestre, oceánico o aeronáutico, de alcantarillado, de abastecimiento y distribución de agua y electricidad, de comunicación telefónica, por emisiones, etc.; y en la modelación de sistemas que no necesariamente implican objetos físicos concretos ni su representación funcional di-

* Este término, que significa una gráfica conexa sin circuitos, será tratado con algún detalle en la Sección III.

recta, los ejemplos incluyen: modelos de redes de flujo en la gestión científica y en la investigación, utilizando las técnicas de PERT --Program Evaluation and Review Technique--, CPM --Critical Path Method--, árboles de decisión, flujos de redes, gráficas de flujo y GERT --Graphical Evaluation and Review Technique--, redes de comunicación para estudiar relaciones humanas y la compleja área de resolución de problemas.

Como se observa en los ejemplos arriba mencionados, se puede utilizar la teoría de gráficas en muchas actividades y extenderse a las que pertenecen a la educación, tales como investigación, administración, planeación, y en las áreas disciplinarias que se imparten en instituciones educativas. La teoría de gráficas se aplica, en este trabajo, en el diseño y evaluación de actividades de tipo pedagógico. Tratándose de asignaturas, planes de estudio, carreras, programas o proyectos, cada uno concebido como un sistema, en la representación gráfica de éstos se ve claramente si han o van a lograr un conocimiento integrado al examinar qué está relacionado con qué, cuáles conceptos están relacionados más fuertemente con otros, cuáles son los más importantes, cuál es la dirección de las relaciones, cómo se integran los conceptos, etc.

El análisis gráfico es igualmente útil en la planeación de cambios e innovaciones pedagógicas o administrativas. Al determinar el estado deseado y el estado actual, puede planearse la ruta más corta y eficaz para llegar de ~~"A"~~ uno a ~~"B"~~ a otro mediante gráficas de búsqueda. Y la creación, simulación y prueba de modelos dinámicos de la educación o de sus componentes, constituye un área todavía no bien explorada en este campo.

Lo que presentamos en las secciones posteriores es sólo una introducción conceptual a estas posibilidades y, además, a una escala reducida. Empero, esperamos con ello fomentar una mejor comprensión de las posibilidades de la teoría de gráficas.

III. PRESENTACION GRADUAL DE UN MODELO

El ejemplo que hemos escogido para presentar gradualmente una gráfica, es un modelo conceptual de un proceso de enseñanza-aprendizaje. Este fue seleccionado en vez de otros posibles, porque la gran mayoría de personas que trabajan en la educación superior ha tenido o tiene experiencia directa con un proceso parecido y así aportan sus propios conocimientos, intereses y actitudes al tema.

1. DEFINICIONES

Antes de iniciar el trazo de una gráfica, o sea, de representar gráficamente la estructura de un sistema, es necesario delinear el contexto donde se ubica y definir, lo más precisamente posible, cada uno de los conceptos o elementos que lo componen por separado, haciendo la aclaración que las relaciones entre ellos se formularán y analizarán posteriormente.— A continuación vamos a considerar un proceso de enseñanza-aprendizaje dentro del contexto de la educación superior en México, contexto con el cual suponemos que están familiarizados. Dentro de esto, hay cuatro conceptos que nos parecen esenciales: objetivos, contenidos, métodos y evaluación. De ellos presentamos "nuestras" definiciones.

Objetivos (propósitos, metas):

a) lo que se pretende lograr, directa o indirectamente, mediante un proceso de enseñanza-aprendizaje;
b) se distribuyen en objetivos globales, intermedios y específicos;

c) pueden ser formulados, fijados o adaptados por maestros, alumnos, la dirección de la institución, padres de familia, representantes de la sociedad, etc., utilizando paralelamente 1) reglamentos de carácter jurídico y normativo; 2) normas deseadas por la sociedad; 3) análisis de necesidades globales, intermedias y específicas; 4) los acervos de conocimiento especializado disponibles y accesibles que incidan en su formulación. Los objetivos formulados tienen que ser ajustados a evaluaciones pertienentes de los recursos humanos, materiales y financieros disponibles y factibles, mediante la redistribución de los actuales recursos y su incremento cuando esto sea justificado; las evaluaciones deben considerar la institución como un sistema;

d) las funciones de este concepto incluyen:

1. la detección e inclusión de nueva información requerida;
2. el planteamiento y sugerencias de modelos;
3. la modificación del marco motivacional;
4. la introducción de nuevos criterios;
5. la identificación de diferencias individuales;
6. el desarrollo de habilidades y conciencia crítica;
7. la promoción de la participación dinámica de grupos en la toma de decisiones.

<u>Contenidos:</u>

Los conocimientos de diversa índole, arreglados de maner sistemática, que se imparten, detectan, cuestionan y utilizan en un proceso de enseñanza-aprendizaje.

Se derivan de la compilación y evaluación de:

1) un determinado cuerpo de conocimientos de un campo o área dada;
2) los resultados pertinentes de estudios relativos a la utilización de estos conocimientos y a las actividades que desempeñan los egresados en éstos;
3) los resultados pertinentes de diagnósitcos y pronósticos de necesidades regionales y nacionales;
4) nuevos hallazgos en esta área de conocimiento cuando sea conveniente (actualización del conocimiento impartido);
5) los resultados de proyectos innovativos respecto a la integración de esta área de conocimiento con otras;
6) los resultados de programas establecidos o de tipo experimental, respecto a la estructuración de estos conocimientos;
7) los niveles iniciales de los estudiantes en cuanto a conocimientos, habilidades e intereses relevantes para el aprendizaje de este campo o área.

La recopilación y evaluación de la información en los siete apartados arriba mencionados, pueden constituír los fundamentos del contenido (curriculum). Con base en ellos, se seleccionan los temas y se estructuran los contenidos, lo que equivale a decidir qué debe ser enseñado y en qué orden, decisiones siempre sujetas a revisiones períodicas.

Los resultados de las investigaciones mencionadas previamente, apoyan y fundamentan los temas seleccionados. La estructuración y secuenciación de los contenidos deben tomar en cuenta: la ordenación lógica de los temas y subtemas, la inclusión de conocimientos y habilidades que se utilizan en este campo y la exclusión, o al menos la reducción, de los no utilizados, un balance adecuado entre la cantidad de tiempo que debe dedicar al estudio independiente, la que debe pasar en el aula y, respecto a esta última consideración, la proporción de tiempo que debe dedicarse a prácticas, laboratorios, etc.

Métodos:

Son diversos procedimientos sistemáticos, utilizados en la organización e instrumentación de la transmisión (no unidireccional) de conocimientos, habilidades y valores de diversa índole en un proceso de enseñanza-aprendizaje.

a) Se basan en un cuerpo de conocimientos sico- y socio-pedagógicos y epistemológicos aunados a la preparación en uno o más campos de especialización. Se debe adquirir destreza en la determinación, utilización y evaluación de los métodos de enseñanza-aprendizaje mediante la práctica sistemática, supervisada y "en vivo" de éstos, antes de poder asumir responsabilidades profesionales.

b) El repertorio de métodos empleados debe ser amplio, abarcando: diversas técnicas de instruc ción (individualizadas, para grupos pequeños y numerosos); la enseñanza impartida por un profesor, hasta llegar a trabajar en equipos docentes; los procedimientos que promuevan el estudio e investigación (ya sea independiente o en equipo), utilizando una amplia variedad de fuentes. Además, los métodos utilizados deben tomar en cuenta diferentes estilos de aprendizaje y maneras de plantear y resolver problemas al planear la enseñanza de los procesos de adquirir, analizar, utilizar y evaluar informaciones, conocimientos y habilidades.

Evaluación:

Trata de los diversos procedimientos sistemáticos utilizados para determinar el grado de efectividad logrado en un proceso de enseñanza-aprendizaje, considerado como una totalidad.

Sus funciones principales son:

1) obtener, explicar y difundir información respecto a la satisfacción de necesidades internas del sistema, empleando como marco de referencia las del medio circundante;
2) contrastar las soluciones obtenidas con los objetivos enunciados;
3) revisar la estructura y funcionamiento del sistema;
4) hacer perfiles de necesidades, repertorios, habilidades, intereses y motivaciones individuales y proponer e implementar estrategias para optimizar esta infor-

mación;

5) establecer de común acuerdo criterios y procedimientos tocante a controles internos y obtener y difundir información respecto a éstos;

6) obtener y difundir información pertinente de tipo académico, profesional, de interés estudiantil, organizacional y de proyectos que permitan proponer estrategias para la implantación experimental o sistemática cuando parezca viable.

Hemos identificado, definido y esbozado brevemente cuatro conceptos considerados "claves" en un proceso conceptual de enseñanza-aprendizaje. El lector puede detectar deficiencias y carencias en lo arriba expuesto, pero, para fines de ilustración, supondremos que este primer esbozo preste alguna utilidad.

2. RELACIONES

Cuando los elementos de un contexto concurren para la acción o formación de un concepto, es seguro que se relacionan entre sí. Es entonces importante averiguar el grado de las relaciones según un criterio bien definido, incluyendo la no-relación. Cuando se trata de relacionar muchos elementos, es conveniente, para simplificar el análisis, descartar aquellas relaciones cuya intensidad es débil, tomando en consideración que aquel elemento está relacionado con otros, y a través de ésos, con los demás.

Los cuatro conceptos identificados constituyen un conjunto de elementos entre los cuales consideramos que sus relaciones son suficientes para formar un sistema. Para mostrar y estudiar la estructura de este sistema por medio de gráficas, se considerará cada elemento como un punto o vértice; y como segmentos lineales entre los vértices, las relaciones posibles entre los elementos.

En nuestro ejemplo, hay cuatro vértices que denominaremos (en orden arbitrario):

vértice 1 ó v_1, objetivos (O)
vértice 2 ó v_2, contenidos (C)
vértice 3 ó v_3, métodos (M)
vértice 4 ó v_4, evaluación (E)

En muchos casos, para facilitar el establecimiento de relaciones entre los temas, se puede utilizar una matriz, donde se va anotando, para cada elemento, su relación con los demás en una forma ordenada. (En otros casos puede pasarse directamente a una representación esquemática).

A continuación se muestra este proceso, tomando en cuenta que con un número reducido de elementos, el ejemplo es quizá un poco artificial porque es casi obligado a relacionar directamente a todos los elementos entre sí.

En la matriz 1, consideramos las relaciones entre los elementos desde un punto de vista conceptual, como si fuera un proceso que se desarrolla según un orden determinado, empezando con objetivos y terminando con evaluación. Este ordenamiento secuencial no es indispensable en la estructuración de un concepto mediante teoría de gráficas, pero influye en los pesos asignados a cada relación. Nuestra simbología en este ejemplo será:

0 = relación débil (o no relación)

1 = relación fuerte

2 = relación directa o muy fuerte

Las "X" indican la intersección de un elemento en un renglón con el mismo elemento en una columna, relaciones que en este cuaderno no se van a considerar*.

La parte inferior izquierda de la matriz se deja en blanco puesto que estas relaciones ya están consideradas en la parte superior derecha, por ejemplo (v_3, v_2) es la misma relación** que (v_2, v_3).

MATRIZ I

	(O) V_1	(C) V_2	(M) V_3	(E) V_4
(O) V_1	X	2	1	1
(C) V_2		X	2	1
(M) V_3			X	2
(E) V_4				X

En la matriz 1, según la manera en que está llevada, se observa que

v_1, objetivos, tiene relación directa con v_2, contenidos;

v_2, contenidos, tiene relación directa con v_3, métodos;

v_3, métodos, tiene relación directa con v_4, evaluación;

---

* Relaciones reflexivas.
** Relación simétrica.

que

v_1 (O), tiene relación fuerte con v_3 (M) y con v_4 (E)

v_2 (C), tiene relación fuerte con v_4 (E)

v_3 (M), tiene relación fuerte con v_1 (O)

v_4 (E), tiene relación fuerte con v_1 (O) y con v_2 (C)

y que en este caso, no aparecen relaciones débiles entre los elementos. Es preciso notar que la información en la matriz 1 no indica las direcciones de las relaciones, sólo sus pesos.

Atendiendo al criterio arriba mencionado, podemos postular con más confianza una relación ordenada entre los elementos, que es suplementada por relaciones menos fuertes.

A este punto, el lector puede sentir que el terreno está demasiado preparado. Con un número reducido de vértices y conceptos tan interrelacioados, tendría razón hasta cierto punto.

Para ilustrar "resultados" según otro criterio, presentamos el siguiente ejemplo. En éste, suponemos una situación "real" en una institución a nivel superior ubicada en Nosedondelandia. Se aplica la misma simbología.

MATRIZ 2

		(O) V_1	(C) V_2	(M) V_3	(E) V_4
(O)	V_1	X	0	0	0
(C)	V_2		X	1	1
(M)	V_3			X	2
(E)	V_4				X

En la matriz 2, se observa que

v_3, métodos, tiene relación directa con v_4 (evaluación);

v_2, contenidos, tiene relaciones fuertes con v_3 (métodos) y v_4 (evaluación);

v_1, objetivos, se relaciona débilmente con los demás vértices.

Se puede interpretar esta información de varias maneras, y un análisis riguroso requiere de mucha más información. Empero, se notan tendencias que indican un proceso inadecuado de enseñanza-aprendizaje, debido a la falta de relaciones de los objetivos con los demás elementos. Implica que en este sistema no se sabe qué fines deben lograr ni para qué; parece andar sin cabeza. Quizá la relación métodos-evaluación sea la correcta cuando se considere independientemente, pero su desequilibrio respecto a los demás elementos podría indicar que éstos están supeditados a preocupaciones de carácter metodológico. Son posibles otras interpretaciones.

3. PRIMERA REPRESENTACION ESQUEMATICA DEL MODELO

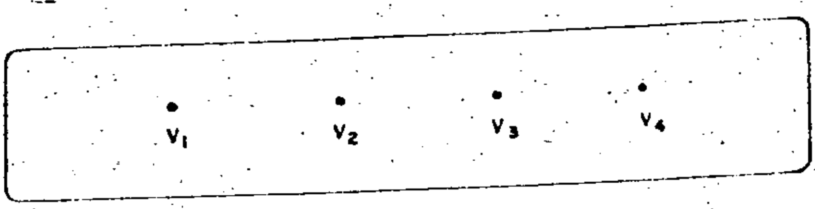
Consideremos ahora la representación de los conceptos identificados y definidos en la primera parte de esta sección, y las relaciones entre ellos que la matriz 1 nos facilitó determinar.

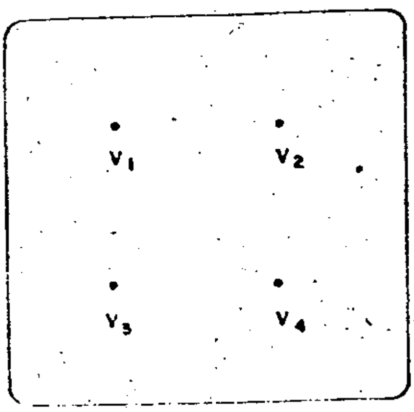
Esquemáticamente se representan los cuatro conceptos con cuatro puntos (vértices) y las seis relaciones indicadas en la matriz 1 con seis segmentos lineales entre los vértices. Además, si cada vértice se relaciona con algún otro vértice y éste con uno o más vértices, esas relaciones de interacción deben unirse en un solo concepto que sea la síntesis o integración de esos conceptos y de las relaciones entre ellos. En el esquema, esto está representado por las áreas o espacios encerrados entre varias líneas. Así, el esquema de una gráfica representa algo mucho más complejo que un mero dibujo.

Sabiendo de antemano los parámetros de nuestra gráfica ejemplificadora (cuatro vértices y seis segmentos lineales que se conectan entre los vértices), ¿cómo se hace, cómo se empieza a hacer una representación esquemática? Hay varias maneras; aquí ilustraremos una, aprovechando la oportunidad para introducir algunas propiedades de gráficas y algunas reglas a seguir en su construcción.

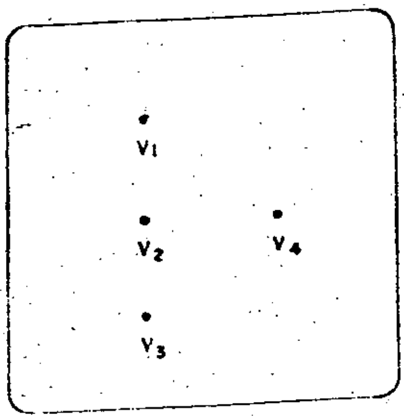
Dibujemos cuatro puntos (vértices) en arreglos arbitrarios e identifiquémoslos, por ejemplo:

a.



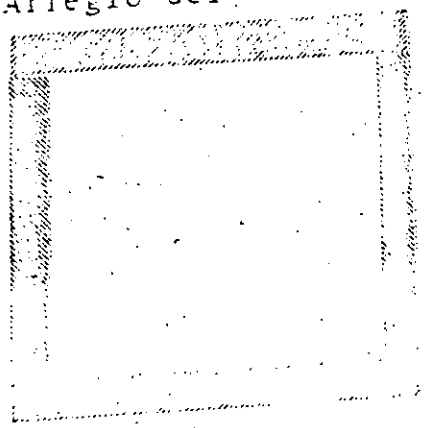


c.



Arreglo del lector

d.



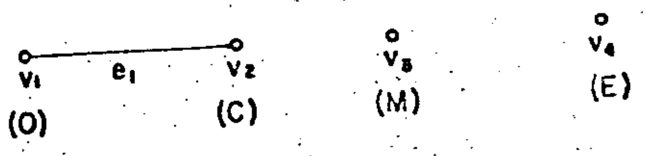
MATRIZ 1

		(O) v_1	(C) v_2	(M) v_3	(E) v_4
(O)	v_1	x	e_1	e_2	e_3
(C)	v_2		x	e_4	e_5
(M)	v_3			x	e_6
(E)	v_4				x

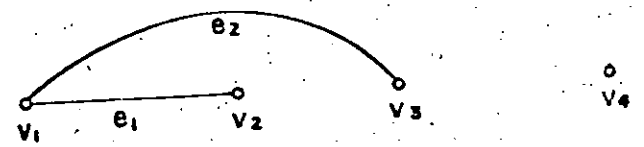
Atendiendo en este momento sólo a la existencia o no de una relación, identificamos cada segmento lineal con una "e" y conectamos los vértices con segmentos lineales, según las relaciones determinadas en la matriz 1.

Construcción de una primera posibilidad

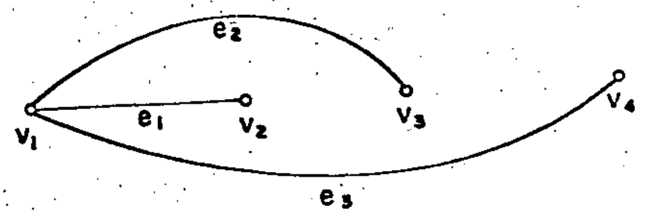
1) En el primer renglón de la matriz, la e_1 indica la relación entre v_1 y v_2.



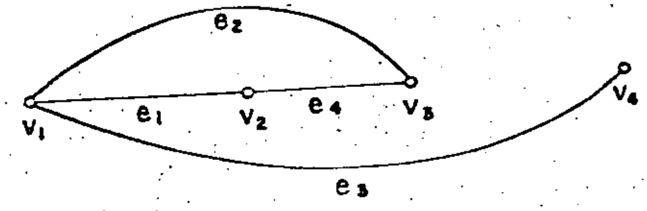
2) En el mismo renglón, e_2 indica la relación entre v_1 y v_3.



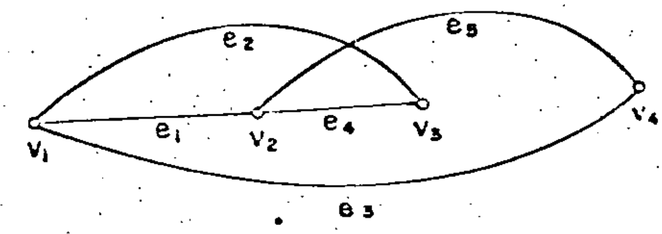
3) Trazamos ahora el segmento de v_1 a v_4, indicado por e_3.



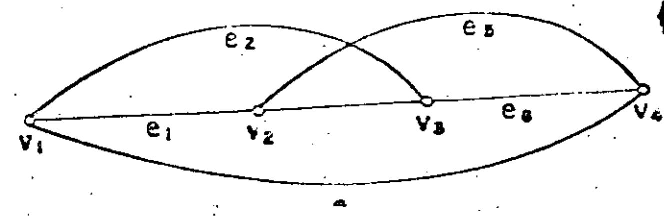
4) Pasando al siguiente renglón tenemos e_4, que relaciona v_2 con v_3.



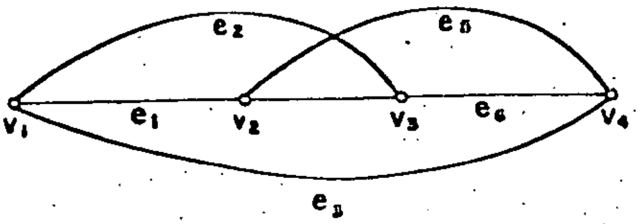
5) La siguiente relación, e_5 entre los vértices v_2 y v_4.



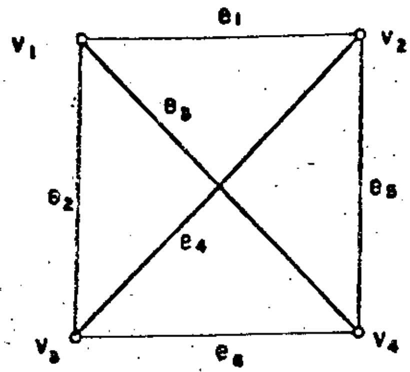
6) Por último, del tercer renglón tenemos e_6, que relaciona v_3 con v_4.



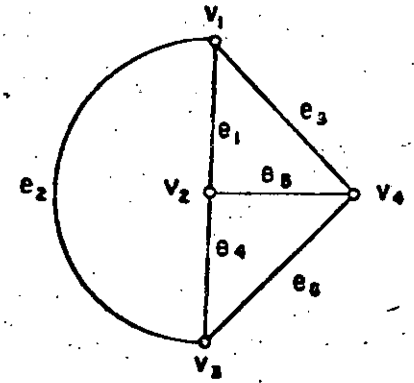
Posibilidad a



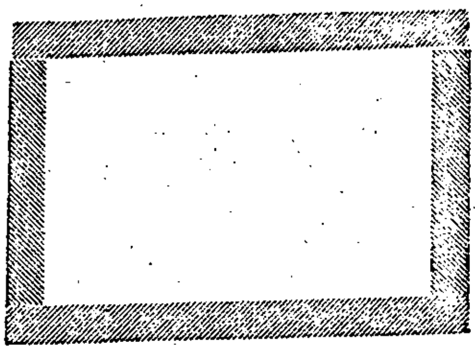
Posibilidad b



Posibilidad c



Posibilidad d:
arreglo del lector.



Observando las posibilidades esquemáticas, notamos algunos factores comunes a todas. Primero, se nota que el número de segmentos lineales que concurren a cada vértice es tres en cada caso. Este valor numérico se denomina grado de un vértice y se simboliza con una "g" y el vértice considerado en paréntesis. En este caso:

$$g(v_1) = 3, \quad g(v_2) = 3, \quad \text{etc.}$$

Si entre dos gráficas existe una correspondencia uno a uno entre los vértices, los segmentos lineales y los grados de cada vértice, éstas son *isomórficos* o equivalentes. Refiriéndose a los esquemas en las posibilidades a, b, c y d, ¿son de gráficas isomórficas?

También estas gráficas son *conexos* o sea, se puede ir de un vértice a cualquier otro a través de los segmentos lineales. Conviene aquí mencionar dos tipos de paseo o camino que se recorre de un vértice a otro:

Un paseo abierto o *trayectoria* es el que se inicia y termina en distintos vértices.

Un paseo cerrado o *circuito* es el que inicia y termina en el mismo vértice.

En la "posibilidad c", por ejemplo, del v_1 al v_3, se tienen las siguientes trayectorias:

a) v_1, v_3
b) v_1, v_2, v_3
c) v_1, v_2, v_4, v_3
entre otras,

y en el mismo esquema, algunos circuitos son:

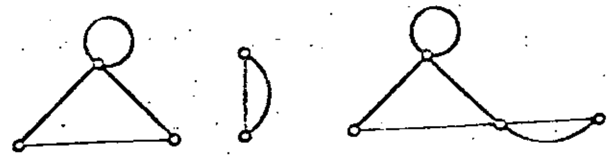
a) v_1, v_2, v_4, v_1
b) v_1, v_3, v_4, v_1
c) v_3, v_4, v_2, v_3
etc.

Además, estas gráficas son:

- *simples*

no tienen lazos (rizos) ni segmentos paralelos*, como se encuentran en la ilustración;

Gráficas no simples



* que no sean necesariamente rectos, pero que unen los mismos dos vértices

- *completas*

son gráficas simples en las que existe un segmento lineal entre cada par de vértices.

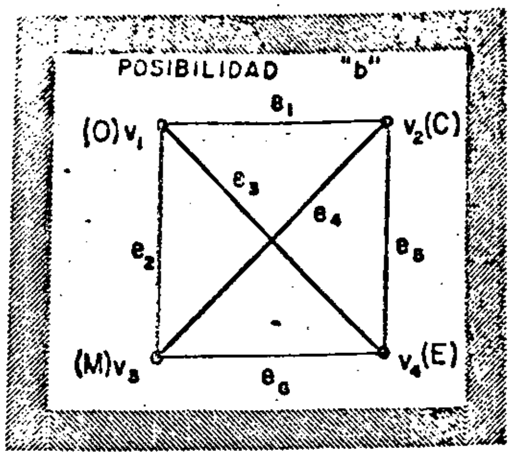
Consideraciones sobre la planaridad

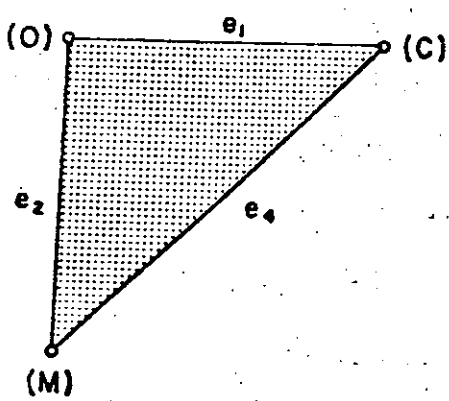
Examinemos ahora otro aspecto, no común a las posibilidades a, b, c y d: la planaridad. Una representación esquemática pretende poner en claro la estructura del concepto o fenómeno estudiado. Hacer esto supone que los elementos que componen el concepto están en un solo plano esquemático que corresponde conceptualmente a un solo contexto. No interesa la forma en que se arreglen los vértices ni la forma geométrica que tome la gráfica; lo importante es la relación entre los conceptos y la manera en que se integran*.

Este es un aspecto que debe considerarse ya que influye en la elección de la representación: las "áreas de síntesis" que se formen deben estar suficientemente claras y además, conceptualmente, deben tener sentido o estar justificadas.

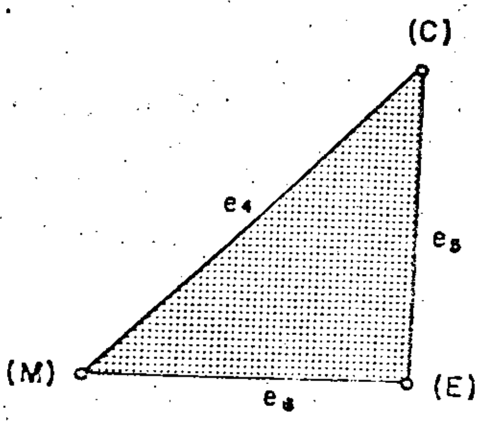
Por ejemplo, la representación esquemática denominada "posibilidad b", que aparentemente no es plana. Considerando las áreas de síntesis, sin especificar todavía un proceso de determinarlas, es necesario precisar en qué contexto se ubicarán.

* Una gráfica existe como un objeto abstracto, libre de cualquier conotación geométrica que pueda adquirir al ser dibujada.



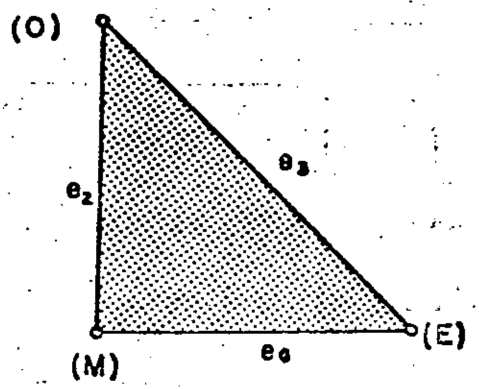


Se contempla un área de síntesis entre objetivos, contenidos y métodos y las relaciones que las unen, por una parte,

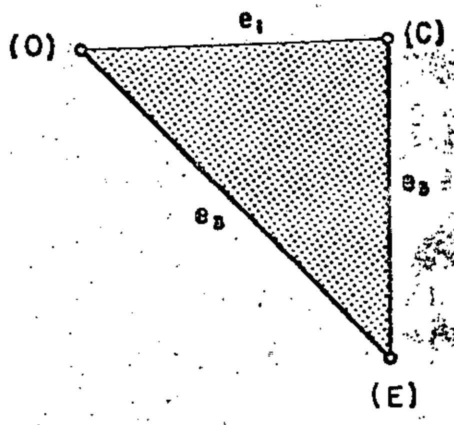


y, entre contenidos, métodos y evaluación y sus consiguientes relaciones, por otra parte.

Pero, por otro lado, podría pensarse en un área de síntesis entre objetivos, métodos y evaluación,



y la formada por objetivos, contenidos y evaluación.



Para evitar las confusiones que surgen cuando en una representación gráfica no se pueden definir áreas de síntesis, impondremos una restricción para esta primera fase de aprendizaje de elementos de la teoría de gráficas:

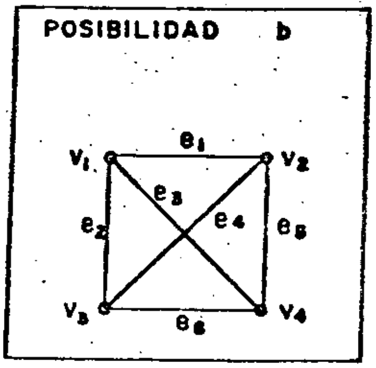
"LAS LINEAS SE CRUZAN SOLO A TRAVES DE LOS VERTICES"

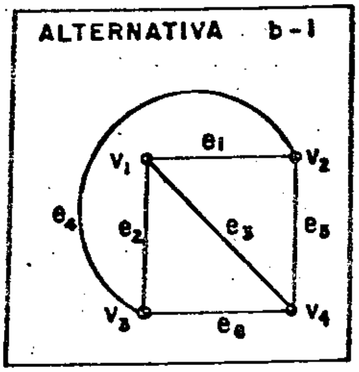
lo cual nos restringe a construír gráficas planas.

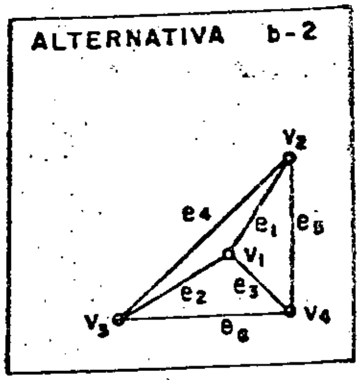
A propósito: ¿son planas las otras representaciones esquemáticas de la página 19?

	Sí	No
posibilidad a	___	___
posibilidad c	___	___
posibilidad d	___	___

En ocasiones, analizando el esquema, es posible mostrar que la gráfica (objeto abstracto) es plana si se cambia de posición alguno de los vértices en relación con los demás, o bien, simplemente cambiando alguno(s) de los segmentos que los unen. En nuestro caso, el esquema de la "posibilidad b" fácilmente podría hacerse plano. Veamos algunas alternativas:

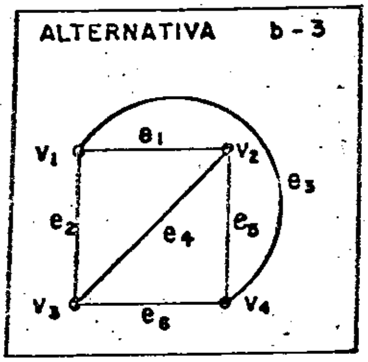


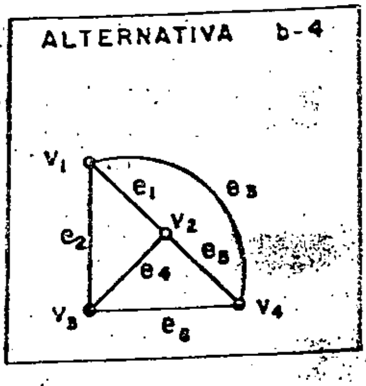




MATRIZ 1

	V_1	V_2	V_3	V_4
V_1	X	e_1	e_2	e_3
V_2		X	e_4	e_5
V_3			X	e_6
V_4				X

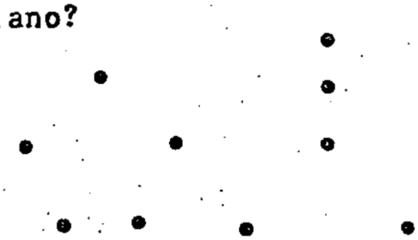




Y aún habría más, sin embargo, lo importante sería interpretar y justificar las áreas de síntesis. Obsérvese que todas las alternativas anteriores corresponden a una sola matriz.

Ahora bien, hay ciertas gráficas cuyas representaciones esquemáticas no son planas, no importa cuál esquema geométrico se ensaya. Por ejemplo, ¿puede construír un esquema cualquiera de cinco vértices en el cual exista un segmento lineal entre cada par de vértices que sea plano?

Sí ☐ No ☐



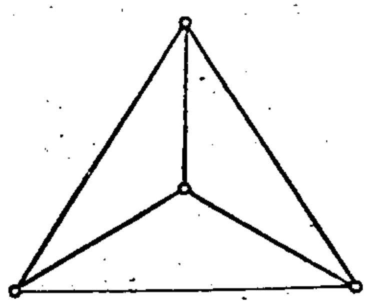
Debe quedar claro que esta pregunta trata de una representación geométrica y no implica ningún tipo de contenido.

Cuando hay muchos estados que se relacionan entre sí y se justifica conceptualmente el empleo de la técnica, se recurre a la convención, anteriormente mencionada, de suprimir de la representación gráfica las relaciones débiles y considerar que aquel o aquellos elementos se relacionan con otros mediante la propiedad de transitividad. Lo anterior implica un examen cuidadoso y riguroso de los criterios utilizados en la obtención de la representación esquemática.

En muchos casos, los esquemas geométricos de una gráfica cumplen con las condiciones de planaridad; sin embargo, los criterios que existen al respecto, establecen condiciones necesarias pero no suficientes para determinar su ocurrencia. Lo práctico, en gráficas con un número razonable de vértices, es ensayar suficientes esquemas para decidir su planaridad.

Otro esquema gráfico del modelo

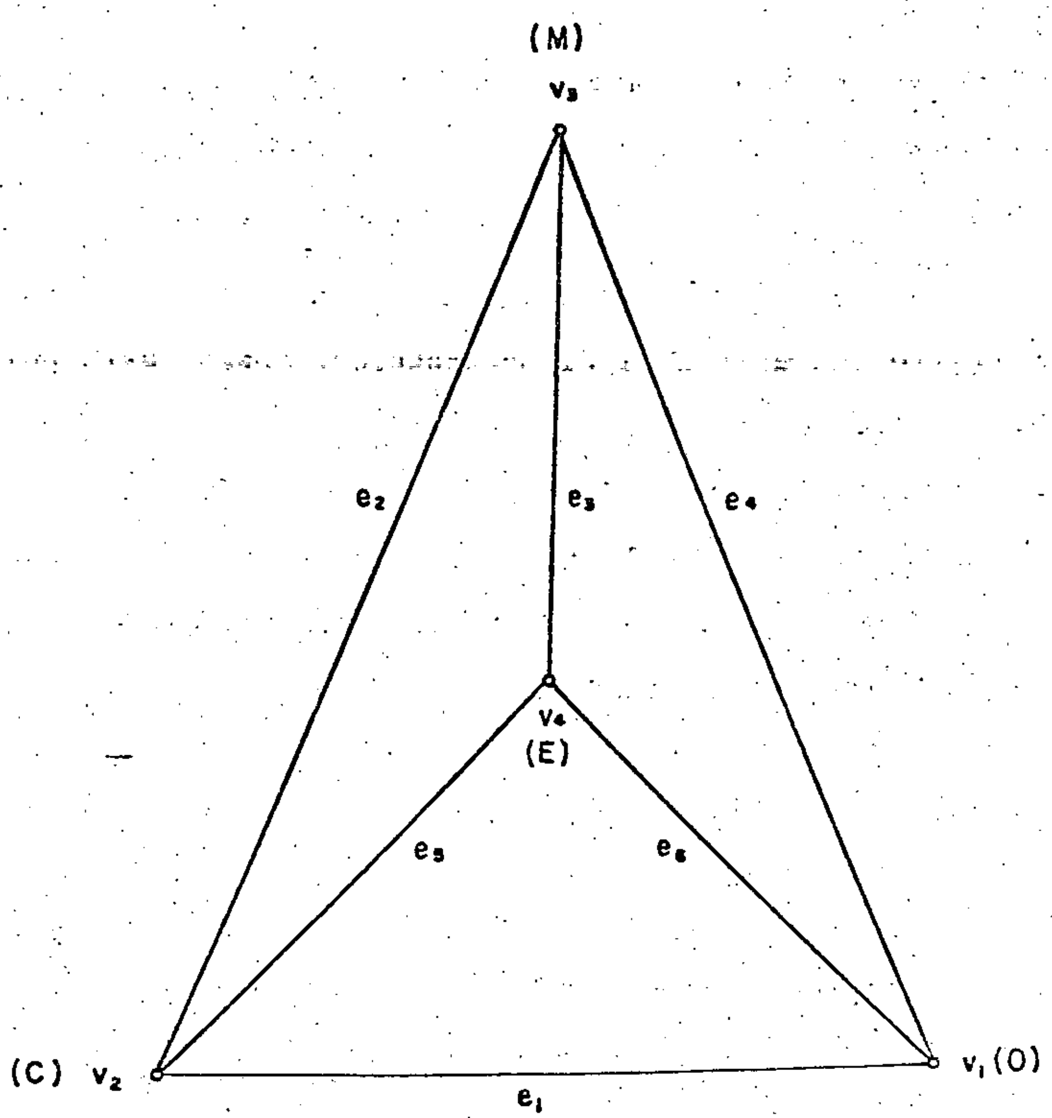
Regresando a la búsqueda de una representación gráfica adecuada, hay otro arreglo que toma en cuenta problemas arriba mencionados y, a la vez, demuestra los aspectos del modelo conceptual estimados importantes:



Se observa que la gráfica en este esquema es isomórfica con las otras, conexa, simple, completa y plana. Además, parece dar una "imagen más clara" de los conceptos y relaciones, que es un criterio subjetivo, estético y no indispensable.

Esta representación gráfica no es la única posible, el lector puede encontrar otras que sean adecuadas. Empero, para los intentos de este cuaderno, servirá como la representación básica, pues reúne una serie de ventajas que el lector puede apreciar adelante.

Designaremos los vértices (conceptos) y los segmentos lineales (relaciones entre los conceptos), de la siguiente manera:


(M)
v_3
e_2
e_3
e_4
v_4
(E)
e_5
e_6
(C) v_2
v_1 (O)
e_1

4. DESTACANDO ALGUNAS RELACIONES EN EL MODELO

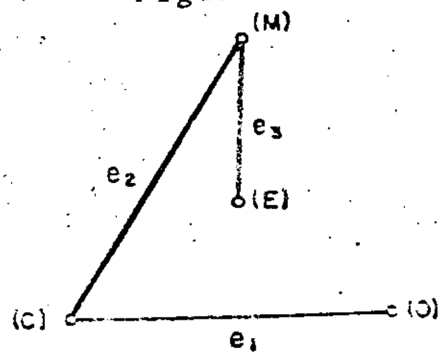
Ahora consideremos las relaciones que existen entre los conceptos que se habían indicado en la matriz 1. Globalmente, desde la perspectiva del desenvolvimiento de un proceso de enseñanza-aprendizaje, puede postularse una relación indispensable entre la fijación de objetivos y la selección y secuenciación de contenidos, entre contenidos y la elección de métodos, y entre ésta y la evaluación del proceso, la cual se había enfatizado en la matriz 1 con los números "2".

Estas relaciones constituyen los pasos principales en el desarrollo conceptual de dicho proceso*. Desde esta perspectiva, las relaciones entre objetivos y contenidos (e_1), contenidos y métodos (e_2) y métodos y evaluación (e_3), se destacan en la gráfica (figura 1) con líneas gruesas (denominadas ***ramas***); según el criterio, representan las relaciones principales del proceso considerado.

MATRIZ 1

		(O) v_1	(C) v_2	(M) v_3	(E) v_4
(O)	v_1	x	2	1	1
(C)	v_2		x	2	1
(M)	v_3			x	2
(E)	v_4				x

Figura 1.

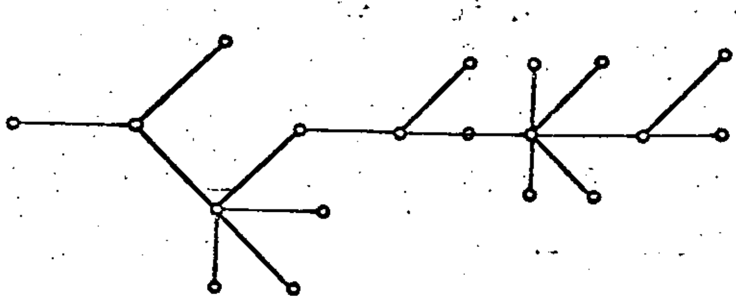


* Nótese, por favor, que no se ha especificado la interpretación de dichas relaciones; la idea queda todavía muy vaga e imprecisa.

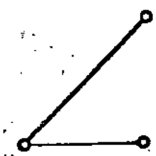
El nombre "ramas" puede sonar raro al lector. De hecho, la representación gráfica en la figura 1 es un ejemplo de un "árbol" y, más aún, en el contexto de la gráfica, es un "árbol de expansión". Por la importancia del concepto de *árboles* y *árboles de expansión* en la teoría de gráficas, debido a sus múltiples aplicaciones prácticas en muchos campos, haremos una pequeña digresión para mencionar algunas de sus características.

Arboles

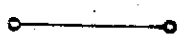
Las siguientes figuras son "árboles":



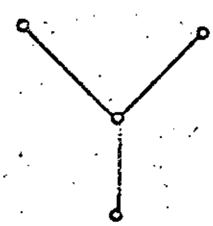
(a)



(b)



(c)



(d)

Primero, se observa que todos los ejemplos son gráficas conexas, simples, finitas y planas;

Segundo, que el grado de sus vértices varía ampliamante;

Tercero, que tomando un vértice cualquiera no hay trayectoria alguna que regrese al mismo vértice: se dice que son gráficas "abiertas".

Ahora consideramos otras propiedades* de árboles. Puede observarse que,

> entre cualquier pareja de vértices de un árbol, existe una y sólo una trayectoria,

e inversamente,

> si en una gráfica existe una y sólo una trayectoria entre cualquier pareja de vértices, entonces la gráfica es un árbol.

Al conocer el número de vértices en un árbol, puede determinarse el número de ramas. Un árbol de n vértices tiene n-1 ramas. Se verifica esa afirmación en las figuras anteriores. El ejemplo (b) tiene 3 vértices (n) y 2 ramas (n-1); el ejemplo (c) tiene 2 vértices (n) y una rama (n-1); el ejemplo (a) tiene 19 vértices (n) y 18 ramas (n-1).

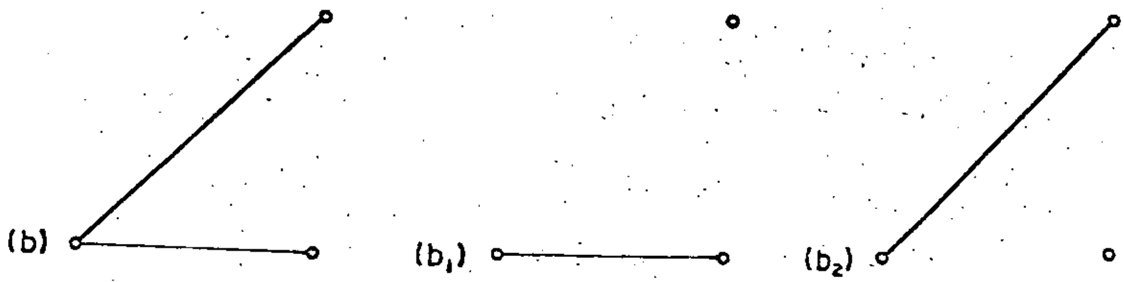
Un vértice con grado** uno ($g_{(v_i)}=1$) es un vértice "suspenso". Eliminando los árboles de un solo vértice, un árbol cualquiera tiene, cuando menos, dos vértices suspensos.

---

* Del libro Teoría de Gráficas de Javier Salazar Resines, Cap. 3, Limusa (en prensa).
**Véase página 19.

El ejemplo (c) tiene exactamente dos; el ejemplo (a) tiene 12.

También se nota en el siguiente esquema, que un árbol es una gráfica mínimamente <u>conexa</u>, pues al eliminar una cualquiera de sus ramas, la hace <u>desconexa</u>.



Los árboles son gráficas muy útiles para resolver gran cantidad de problemas, entre ellos, de decisión y los que involucran la búsqueda de alternativas.

<u>Arboles de expansión</u>

En un contexto dado, un árbol A se convierte en un árbol de expansión de una gráfica conexa G, cuando el árbol A contenga todos los vértices de G. A continuación, las figuras 2 y 3 muestran, respectivamente, un árbol y un árbol de expansión en la gráfica que sirve de modelo principal de este cuaderno.

Figura 2

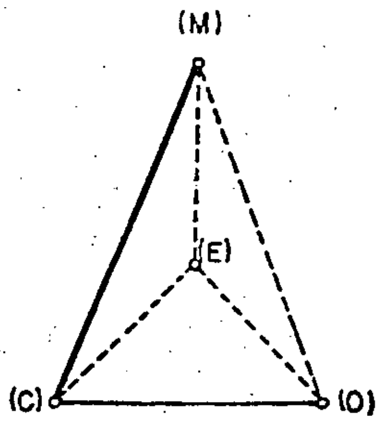
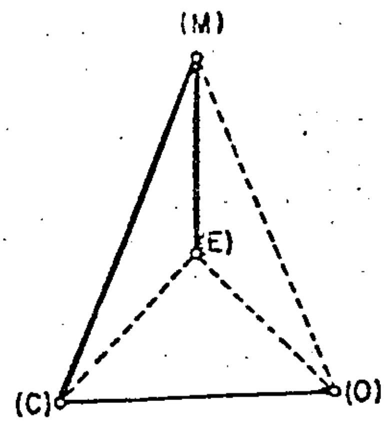


Figura 3

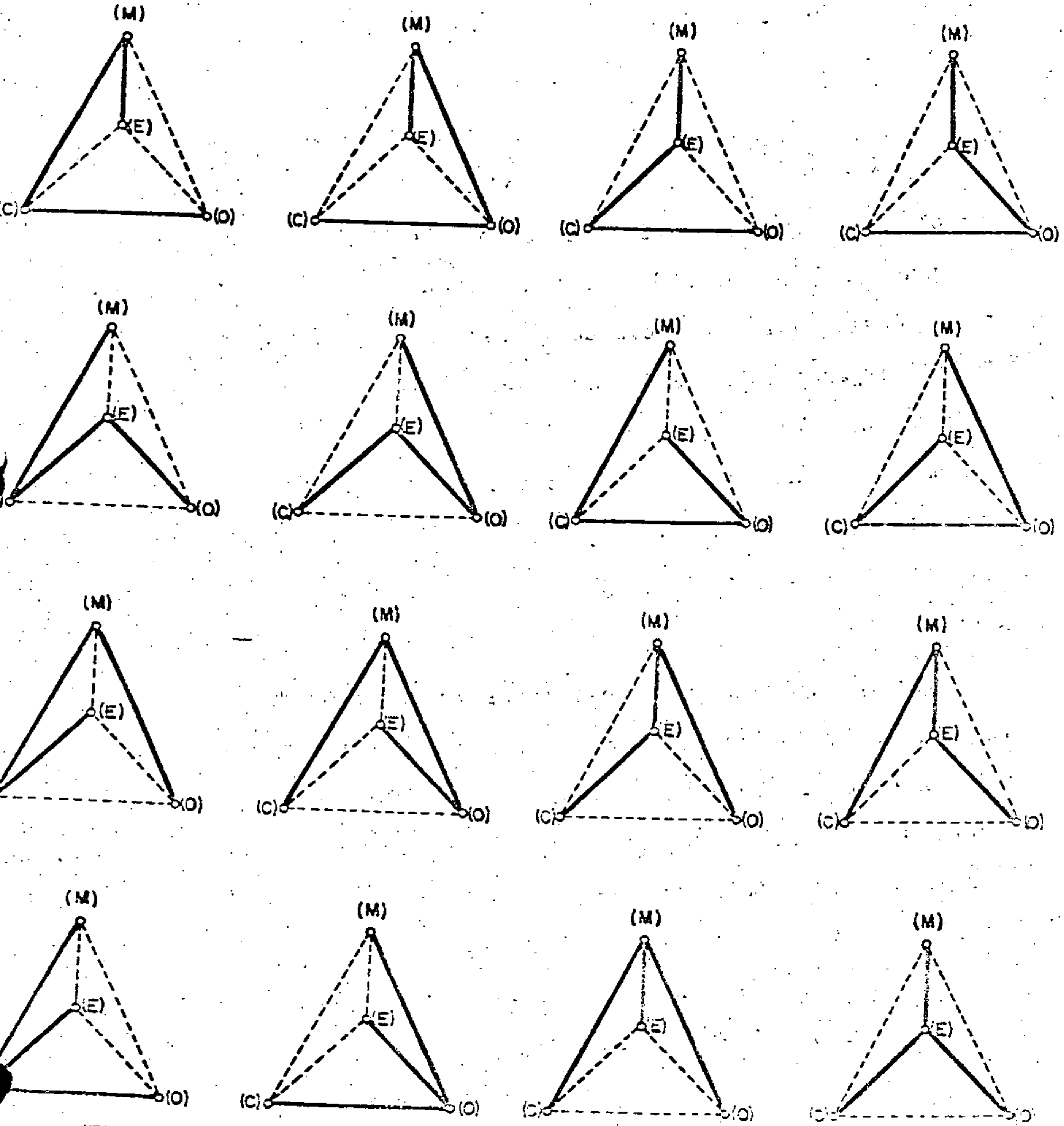


La figura 3 es un árbol de expansión porque la trayectoria mediante las ramas en la gráfica comprende todos los vértices. Las líneas interrumpidas en esta gráfica representan relaciones secundarias o "débiles"; en la representación gráfica éstas se llaman ***cuerdas***. En la integración de conceptos, las ramas representan las relaciones explícitas entre éstos y las cuerdas representan las relaciones inferidas.

La combinación de ramas y cuerdas forma circuitos. Un circuito con ramas y solamente una cuerda se denomina ***circuito fundamental*** .. De un circuito fundamental debe formarse un nuevo concepto que es la síntesis de los conceptos y relaciones previamente considerados. En un modelo conceptual, los circuitos fundamentales representan ***áreas de síntesis*** las cuales examinaremos con más detalle en el apartado 7 de esta sección.

Ahora bien, ¿es el árbol de expansión de la gráfica en la figura 3 el único posible? No. De hecho, el número de árboles posibles para n vértices distintos* es n^{n-2}. Con cuatro vértices (4^{4-2}), hay 16 posibilidades.

Arboles de expansión posibles en nuestra gráfica :



* Cuando n es igual o mayor que 2 ($n \geq 2$).

Obsérvese que cada posibilidad tiene el mismo número de vértices, ramas y cuerdas. Empero, el <u>significado conceptual</u> es distinto para cada representación. Al definir el contexto y criterio, se podrán descartar algunas posibilidades de inmediato. Otras requieren una inspección más detenida, lo que lleva consigo una refinación y precisión del criterio empleado.

Antes de terminar esta introducción a ramas y cuerdas en árboles de expansión, es preciso notar que el significado asignado a éstas depende del contexto utilizado. Por ejemplo, si se desarrolla un modelo de la estructura y funcionamiento de una organización relativo a los proyectos que deben desempeñarse en ella, las ramas pueden representar las relaciones y comunicaciones laterales al proceso y las áreas de síntesis (circuitos) pueden representar áreas de coordinación y apoyo necesarias para que los proyectos se cumplan de manera integrada.

Otro ejemplo se refiere a la estructuración de una asignatura: los vértices representan los conceptos o temas que se quieren enseñar, las ramas pueden indicar los conocimientos y habilidades que el profesor imparte explícitamente, las cuerdas pueden representar las relaciones que el alumno debe lograr en forma inferencial, y las áreas de síntesis podrán representar áreas de conocimiento donde se integran los conceptos de los vértices que lo forman.

5. ORIENTANDO UNA GRAFICA

En el apartado anterior se establecieron relaciones directas y fuertes entre los conceptos cuyas representaciones gráficas se han designado, respectivamente, ramas y cuerdas. Ahora le vamos a dar orientación a éstas al ordenar las relaciones entre cada par de vértices. Al hacer esto se crea una ***gráfica dirigida*** o ***digráfica*** . En nuestro ejemplo, la gráfica muestra sólo un árbol de expansión; en una digráfica, éste se convierte en un ***árbol dirigido*** . Esto sugiere algunas preguntas:

¿Cómo se construye una gráfica dirigida partiendo de una gráfica simple?

¿Qué características tienen éstas?

Estructura básica

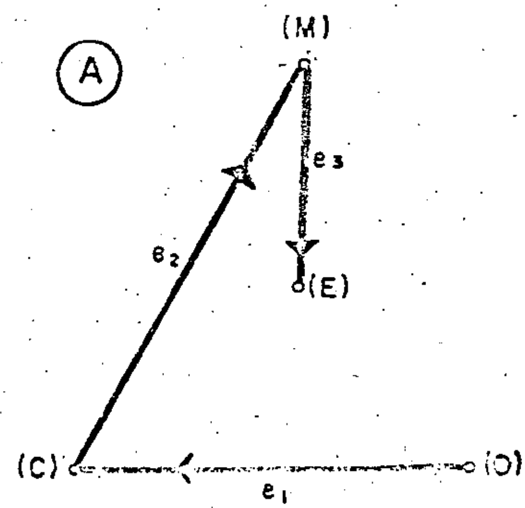
El proceso de dar sentido a las relaciones establecidas en la sección anterior, exige un esfuerzo mental riguroso porque es menester justificar cada dirección asignada, según un criterio

- preciso,
- lógicamente consistente,
- de acuerdo con el contexto de aquel modelo,
- comunicable a otros,

porque las inconsistencias y contradicciones en el razonamiento, si las hay, saltan a la vista en la representación gráfica. A este punto es necesario haber determinado claramente el tipo de relaciones que debe existir entre los elementos, lo cual implica, a la vez, claridad respecto a la definición de cada concepto y a la estructura y contexto del sistema o proceso considerado. Si hay vaguedad tocante a lo anterior, generalmente aparece en esta etapa, pues decir que dos elementos se relacionan, es distinto de aseverar cómo se relacionan. Además, dada la naturaleza estructural de representaciones gráficas, es menester mostrar coherencia entre las relaciones en toda la estructura representada.

Pasemos ahora a nuestro modelo conceptual que supone que se desarrolla un ciclo de aprendizaje, desde los objetivos hasta la evaluación del proceso.

Consideramos primero las relaciones en el árbol de expansión. Un proceso de enseñanza-aprendizaje debe considerar el establecimiento de objetivos que conduce a la determinación y estructuración de contenidos. Entonces, la relación OC a través de la rama e_1 procede de O hacia C, que puede simbolizar $O \longrightarrow C$.



Se relacionan los métodos con base en los contenidos que ya deben estar en concordancia con los objetivos; así, la rama e_2 procede de C hacia M, o, $C \longrightarrow M$.

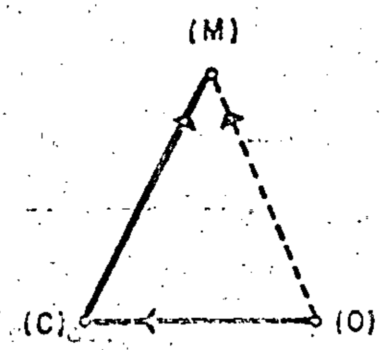
La evaluación del proceso es un consecuente de todo ello, pero específicamente de las operaciones llevadas a cabo en el empleo de métodos adecuados al impartir los contenidos, de acuerdo con los objetivos; por lo tanto, la rama e_3 muestra la forma $M \longrightarrow E$.

En el árbol dirigido de expansión (A) queda implícito el uso de la propiedad de *transitividad* * para definir las relaciones entre los vértices, representadas por ramas orientadas, o sea, O se relaciona con E, a través de C y M.

Continuamos utilizando esta misma propiedad al decidir las direcciones de las cuerdas dirigidas; se observa que:

O ⟶ C y C ⟶ M; por lo tanto, O ⟶ M

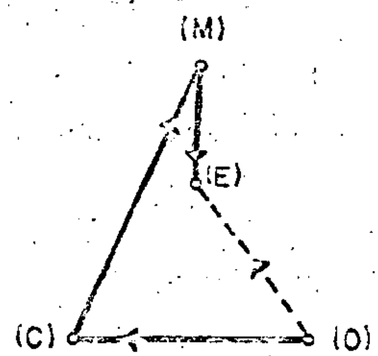
Estas proposiciones significan que los objetivos están contemplados en los métodos y que se puede verificar esto mediante la cuerda dirigida de O a M.



También se observa que:

O ⟶ C, C ⟶ M y M ⟶ E; por lo tanto, O ⟶ E

Estas proposiciones significan que los objetivos están contemplados en la evaluación mediante los contenidos y los métodos, y que la verificación se logra a través de la cuerda dirigida de O a E.



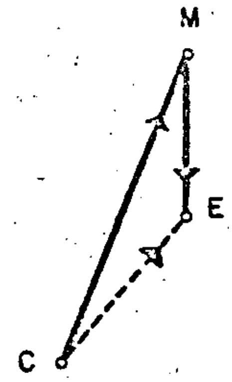
---

* Tres o más elementos tienen una relación transitiva cuando el elemento "a" se relaciona con "b", y "b" guarda la misma relación con "c", entonces "a" se relaciona con "c". Ejemplos de relaciones transitivas son: "es mayor que", "es menor que", "es descendiente de", "es anterior a", "determina a". El último caso se asume en la definición de las relaciones en (A).

Igualmente se observa que:

C ⟶ M y M ⟶ E; por lo tanto, C ⟶ E

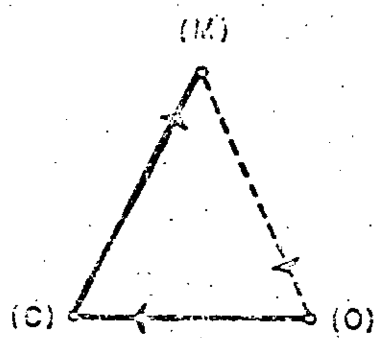
Estas proposiciones significan que los contenidos se reflejan en la evaluación a través de los métodos, y que se verifica esto mediante la cuerda dirigida C a E.



Nótese que en estas gráficas, se trata de circuitos fundamentales, formados por ramas y cerrados con una sola cuerda, donde las ramas establecen los conceptos básicos que se dan explícitamente; y las cuerdas, los conceptos inferidos. Las cuerdas toman la dirección correspondiente a un proceso de razonamiento deductivo.

En estas representaciones gráficas se observa que las trayectorias fundamentales no regresan al vértice inicial. En el caso de que la trayectoria empezara y terminara en el mismo vértice, se estaría realizando un razonamiento circular (círculo vicioso que consiste en tomar simultáneamente dos términos como antecedente y como consecuente).

Por ejemplo, en la siguiente figura se presenta un razonamiento circular

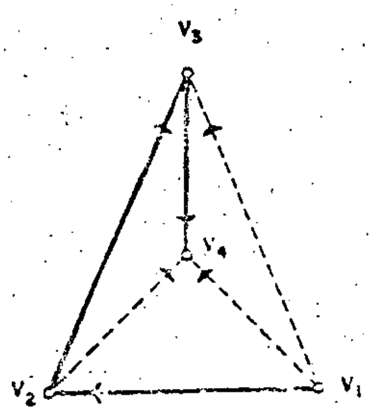


donde los objetivos son el antecedente de la trayectoria fundamental, y por lo tanto, determinan contenidos y métodos, pero la dirección de la cuerda indica que los objetivos son determinados a su vez por métodos y por contenidos. Entonces, ¿cuál es el principio y cuál es el fin?

En gráficas dirigidas, el grado de un vértice tiene dos valores; uno indica el número de segmentos lineales (ramas o cuerdas) que salen del vértice $(g^+ v_i)$, y el otro, el número de segmentos lineales que van hacia este vértice $(g^- v_i)$. En una digráfica, conexa, completa y simple, cuyas relaciones tienen la propiedad de transitividad, al calcular ambos valores de los grados de los vértices, es posible averiguar la existencia o no de un vértice fuente y de un vértice sumidero, que empiezan y concluyen, respectivamente, un proceso dado o un ciclo de él.

En nuestro ejemplo:

$g^+(v_i)$	$g^-(v_i)$
$g^+(v_1) = 3$	$g^-(v_1) = 0$
$g^+(v_2) = 2$	$g^-(v_2) = 1$
$g^+(v_3) = 1$	$g^-(v_3) = 2$
$g^+(v_4) = 0$	$g^-(v_4) = 3$
6	6



se observa que la suma $g^+(v_i)$ y $g^-(v_i)$ es igual, indicando una gráfica "balanceada"*; en v_1 los segmentos lineales sólo salen de éste, ninguna entra, lo cual indica que es el vérti

---

* Lo cual no tiene que ver ni con la propiedad de simetría ni con la estética. Tampoco se consideran los posibles pesos de cuerdas o ramas, sólo su cantidad.

ce "fuente" de esta gráfica, es decir, es el concepto sobre el cual se apoyan o del que emanan todos los demás; en v_4, los segmentos lineales sólo entran en éste, ninguno sale de él, lo cual indica que es un vértice "sumidero" de esta gráfica, este concepto es con el que concluye el proceso.

Atendiendo al significado de la representación gráfica, ¿es válido que "objetivos" constituyan el vértice fuente; y "evaluación", el vértice sumidero? Según el criterio presentado a lo largo de esta sección, opinamos que sí; sin embargo, el lector debe evaluar esta decisión por sí mismo.

Una vez convencidos que el propósito es válido, o al menos aceptable, podemos pasar a considerar con algún detalle, el contexto y la dinámica de nuestro modelo conceptual.

6. REPRESENTANDO LA INFLUENCIA DEL MEDIO

Consideraciones preliminares

Un sistema de enseñanza-aprendizaje a nivel de educación superior, que puede ser un sistema diversificado, forma un subsistema de las funciones sustantivas (investigación, docencia, extensión, planeación) y de apoyo administrativo del sistema de universidades e instituciones de educación superior. Estas, a su vez, forman subsistemas de los múltiples sistemas (económicos, sociales, políticos, culturales, etc.) de la sociedad en que se ubican. Por otro lado, puede concebirse que un sistema de enseñanza-aprendizaje tenga subsistemas, tales como la metodología sistemática de la enseñanza, los campos o áreas disciplinarios estructurados (contenidos), sistemas de evaluación, etc. Bajo esta perspectiva, al analizar un sistema en sí, queda claro que se ubica en un medio con el cual interactúa.

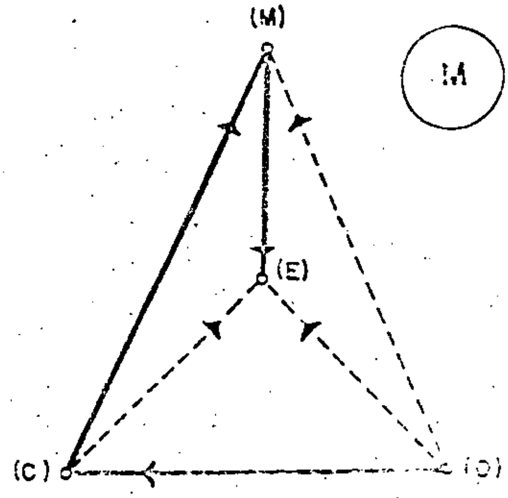
Denominaremos influencia del medio al conjunto de factores que rodean y afectan nuestro proceso. De la interacción con él, se origina la dinámica de un sistema vinculado con <u>necesidades</u> (derivadas de situaciones y aunadas a perspectivas de desarrollo de la sociedad) y con los <u>recursos</u> (humanos, materiales y financieros) requeridos para atenderlos o satisfacerlos. De este modo, preguntas tales como ¿un sistema en función de qué?, ¿para qué?, tendrán respuestas que habría que detectar en el medio que circunda al sistema.

De los recursos y necesidades se derivan los objetivos, prioridades, satisfactores, deterioros, conflictos, carencias, restricciones e incongruencias que deberán influír con el sistema de enseñanza-aprendizaje en los propósitos y metas. Los consecuentes evaluados de la transformación efectuada en este sistema, atienden a necesidades del medio que son evaluadas a su vez, según otro criterio que conduce a la reformulación y ajuste de las metas y propósitos anteriores. Este proceso general de interacción con el medio, se aplica a todos los subsistemas de la educación, y por supuesto, al sistema considerado en su totalidad, aunque se diferencian respecto al contenido específico de insumos, productos, procesos de transformación, recursos, etc.

Volvamos ahora a nuestro modelo conceptual de un proceso de enseñanza-aprendizaje, relacionado con el medio, tratando de tomar en cuenta estas consideraciones preliminares.

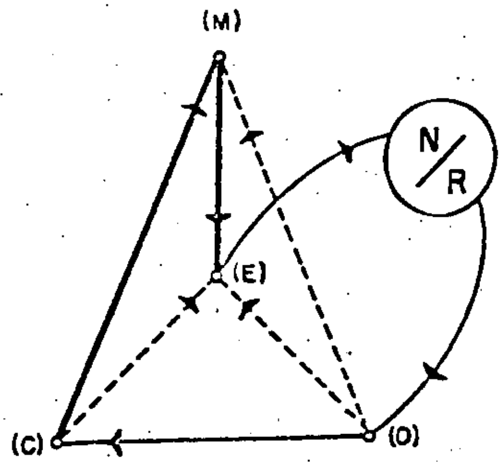
Hacia una representación más adecuada

Puesto que la influencia del medio no forma parte directa de nuestro proceso, lo ubicaremos fuera de la gráfica y, para indicar que está en otro contexto, lo señalaremos con un círculo más o menos grande, que es una configuración distinta de la de la gráfica y que lleva la sugerencia subjetiva de que es el "motor" de este proceso (lo que lo hará funcionar).



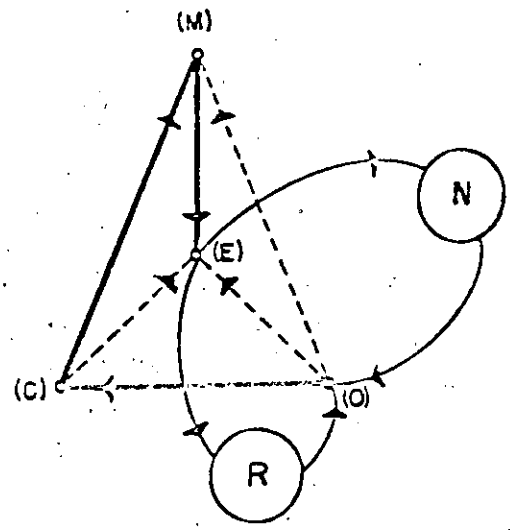
Hemos establecido que v_1 (objetivos), es el vértice fuente de nuestra diagráfica y v_4 (evaluación), es el vértice sumidero. Ahora podemos preguntarnos ¿qué necesidades o carencias vamos a tratar de satisfacer? y ¿con qué recursos, humanos, materiales, etc., lo podemos lograr? Esta información la tomamos como entrada al sistema en el vértice fuente y estamos "iniciando" el proceso dinámico. Esto quiere decir, que para poder establecer claramente los objetivos es necesario tener definidos los factores externos que inciden en este proceso (necesidades y recursos).

Después de seguir todo el proceso, llegamos al vértice sumidero que es la salida del sistema. Ahora la información regresa al medio y a través de evaluaciones efectuadas, se determina el grado en que se han satisfecho aquellas necesidades, analizando además los logros. Las [illegible]



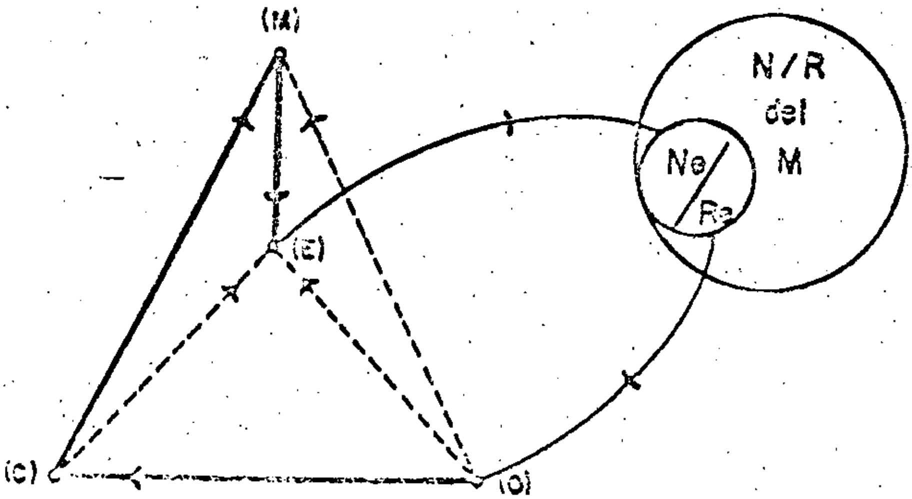
Quizá algunos lectores tendrán objeciones al mezclar necesidades con recursos, pues en muchos casos, la detección de necesidades es un procedimiento distinto de la asignación de recursos.

Podrían analizarse por separado, y la manera de representar esta distinción sería separar explícitamente necesidades de recursos.



Otros podrían tener objeciones a la mezcla, sin distinción, entre necesidades y recursos globales y los que pertenecen directamente a un proceso de enseñanza-aprendizaje. Por ejemplo, necesidades y recursos aplicables a dicho proceso que incluyan perfiles individuales de conocimientos, habilidades, aptitudes e intereses de estudiantes y profesores; perfiles curriculares y ocupacionales; información actualizada de nuevos conocimientos y procedimientos respecto al muntenido impartido y evaluaciones de programas experimentales, ya en marcha en aquella y otras instituciones; principios, lineamientos, teoría y prácticas didáctico-pedagógicas; tecnologías educativas; material didáctico; libros de texto cuyas orientaciones respondan al desarrollo del país, etc. Lo anterior implica no sólo recursos financieros, materiales y humanos, sino también recursos de información y comunicación.

Una manera de distinguir entre necesidades y recursos generales y los específicos al proceso, en la representación gráfica, es la siguiente en que N_e y R_e indican necesidades y recursos específicos al proceso considerado.



Esta representación constituye sólo una de varias posibilidades; empero, es suficiente para dar la idea de que N_e y R_e se ubiquen en un contexto más grande, lo cual guía las acciones tomadas dentro del sistema y retroalimenta a éstas para orientar el proceso.

Hemos establecido los parámetros generales del modelo en su contexto. Ahora es necesario examinarlo internamente, buscando conceptualmente y a través de la representación gráfica, el significado de las relaciones y áreas de síntesis que nos ayudarán a hacer integral un proceso de enseñanza-aprendizaje.

7. INTERPRETANDO LA INTEGRACION DEL MODELO

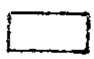
A continuación, establecemos el desarrollo secuencial del proceso, desde el vértice fuente hasta el sumidero, de acuerdo a la siguiente simbología:

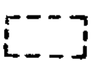
e_1 criterios con que se relacionan los conceptos;

c_1 circuitos o áreas de síntesis:

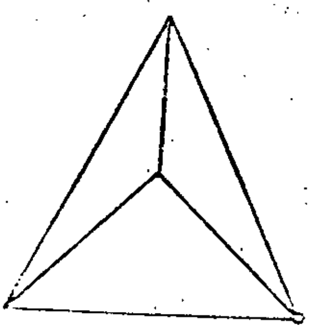
 Fundamentales

 no fundamentales

 relaciones establecidas

 relaciones inferidas

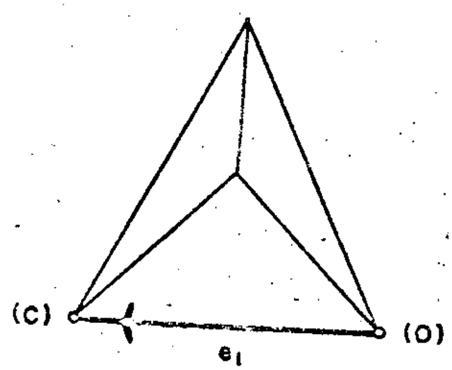
O : Objetivos.



(O)

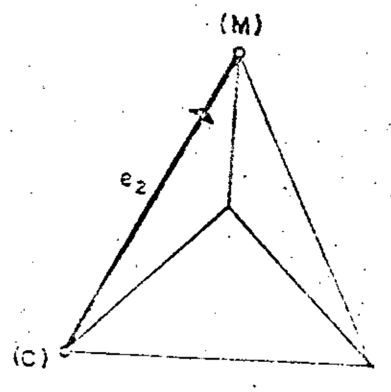
Se inicia un proceso de enseñanza-aprendizaje, con el establecimiento de objetivos globales, a partir de un conjunto de necesidades detectadas.

$\boxed{OC}$: Estructuración de objetivos y contenidos.

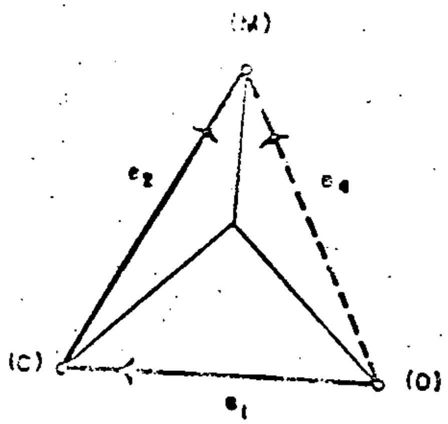


En función de los objetivos globales, se determinan los contenidos temáticos y las áreas de conocimiento correspondientes. Aún se deben establecer objetivos específicos; y en seguida de un análisis más particular de la materia, se define una estructura o vinculación temática de los contenidos que es, en última instancia, la que le da a los contenidos un carácter sintético en relación estrecha con el conjunto de objevivos específicos, congruentes, asociados a cada configuración estructural (gestáltica).

$\boxed{CM}$: Selección de métodos de enseñanza a partir de los contenidos.



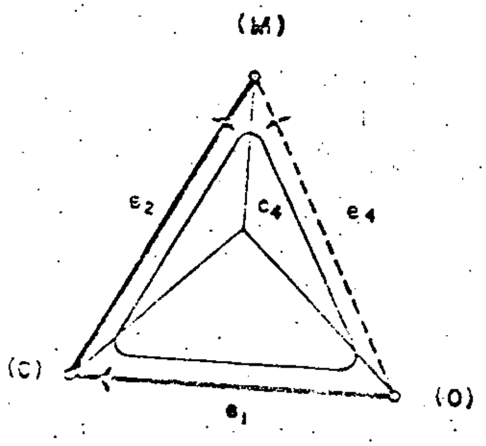
Considerando la estructuración de los temas, se seleccionan o diseñan métodos, medios o técnicas de enseñanza adecuados a cada estado, vínculo, análisis o síntesis, derivados de dichos temas.



OM : Los métodos en función de los objetivos.

Esta es una relación de tipo inferencial (es una cuerda). Una vez que se ha realizado la estructuración de objetivos y contenidos (OC) y que los métodos se han seleccionado de acuerdo a la estructura de las áreas de conocimiento (CM), se puede o debe verificar que la relación de objetivos a métodos esté ya determinada, en cuyo caso, se trata de un proceso de revisión para conseguir que los métodos o técnicas elegidos estén sustancialmente apoyados en los objetivos establecidos.

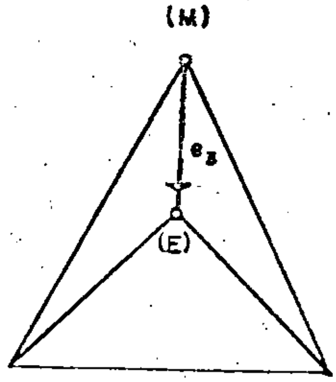
OCM : Metodología para la implementación de la estructura de objetivos y contenidos.



Este es el primer circuito fundamental o área de síntesis (c_4, asociada a la cuerda e_4), donde se integran tres estados definidos e interrelacionados: O, C y M (vértices externos de la gráfica), lo cual confirma justificadamente nuestros criterios iniciales.

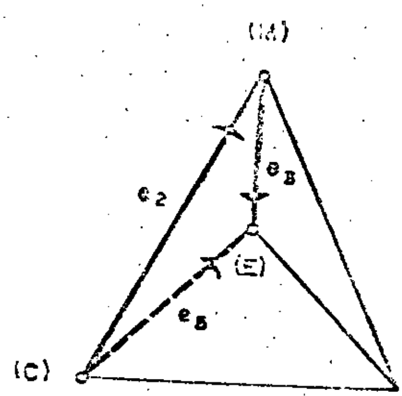
Obsérvese que aunque aparentemente este circuito es la síntesis de toda la gráfica, no es tal, pues el vértice E (evaluación) queda dentro del área, pero no se está considerando ninguna relación directa con él, por lo que no está integrado a los otros; se consideran solamente los vértices que forman el circuito.

$\boxed{ME}$: Los procesos de evaluación con base en los métodos.



Ahora, al agregar el concepto evaluación, de acuerdo a nuestra secuencia hemos acordado definirlo según una metodología ya establecida, comprometida (o supeditada) a los contenidos y objetivos.

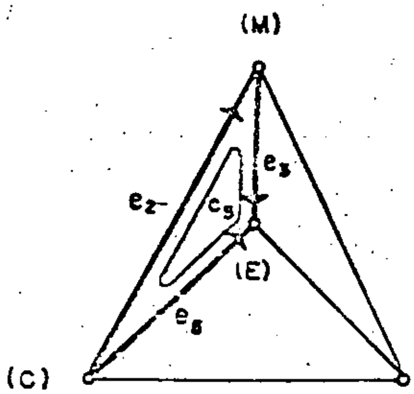
$\boxed{CE}$: Evaluación de acuerdo a la temática (contenidos) estructurada.



De las relaciones establecidas explícitamente, CM y ME, es factible, al menos en teoría, la inferencia CE. Es decir, tenemos una confrontación de los procesos de evaluación con el conocimiento estructurado.

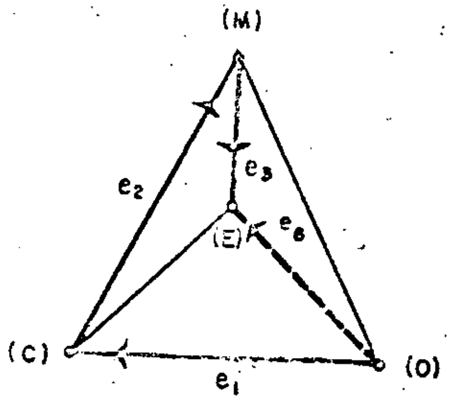
Por ejemplo, consideremos que se está estructurando un curso de bioquímica. Se establecen los objetivos y contenidos con un enfoque fundamentalmente experimental. Se diseñan los métodos de enseñanza (CM) y de allí se establecen los procesos de evaluación adecuados (ME). Después de haber establecido explícitamente esas relaciones, queda implícito en ellas y se podría verificar que las evaluaciones están de acuerdo a los contenidos, o sea, que éstas contemplan adecuadamente el enfoque experimental empleado en los contenidos.

CME : La influencia de los contenidos en la metodología y evaluación de un proceso de enseñanza-aprendizaje.



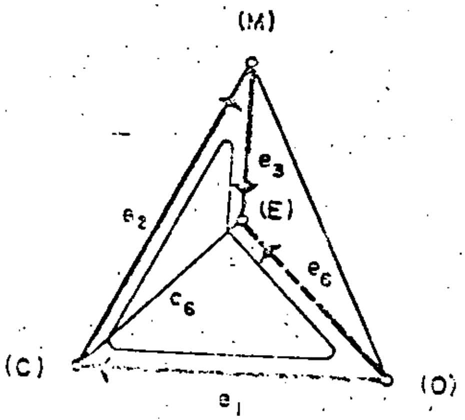
Otra área de síntesis relevante es ésta, que integra los conceptos C, M y E. Aquí se pone de manifiesto, de una manera integral, que la evaluación en un proceso debe atender simultáneamente a la metodología y a los contenidos y sus procesos de estructuración, síntesis, análisis, etc.

OE : los procesos de evaluación de acuerdo a los objetivos.



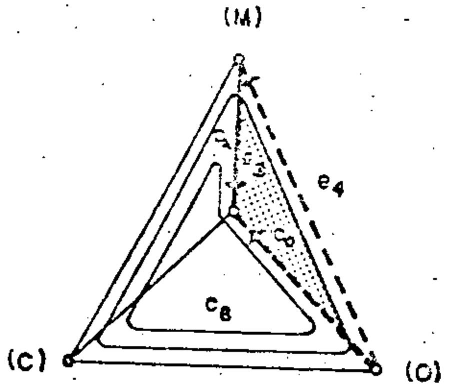
Para justificar esta relación, debemos preguntarnos: del conjunto de objetivos, globales y específicos, ¿qué procesos de evaluación se podrían plantear? Después de contestar nuestra pregunta, constatar que ésta es la misma que ya se ha determinado a través de la trayectoria fundamental: OC, CM y ME.

OCME : El proceso de enseñanza-aprendizaje.

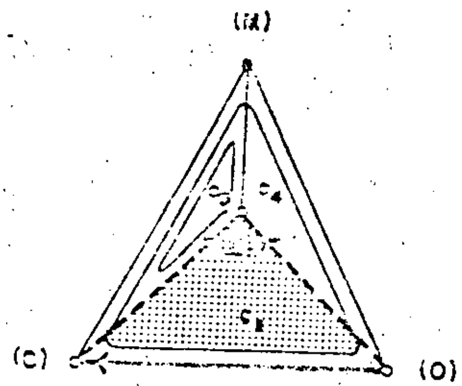


En esta área de síntesis se integran todos los elementos del proceso: O, C, M y E. Aquí queda claro que si partimos de los objetivos, los contenidos deben estar de acuerdo con ellos, que los métodos deben supeditarse a ambos, y que las evaluaciones deben estar diseñadas de tal manera que al alumno se le pida algo que realmente pueda inferir de lo que se le ha dado.

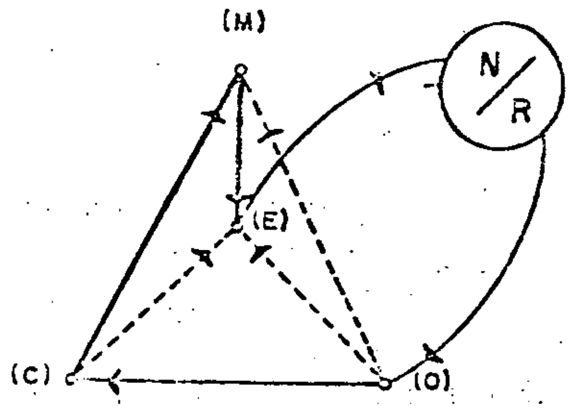
(OME) : Esta es una de las etapas de verificación dentro de una gráfica, pues es un área de síntesis de carácter inferencial; si ya se han considerado c_4 y c_6 como áreas de síntesis fundamentales, por diferencia de ellas, se logra ésta (c_a). Es decir, considerando la metodología para la implementación de la estructura de objetivos y contenidos (c_4) y el proceso completo de enseñanza-aprendizaje, por diferencia, logramos la integración de (OME), o sea la justificación de los procesos metodológicos y de evaluación, atendiendo a los objetivos planteados.



(OCE) : Esta es otra área de síntesis de carácter inferencial, que considera la diferencia de c_4 y c_5 . Esto es, los procesos de evaluación atendiendo a la estructura de objetivos y contenidos, independientemente de los métodos seleccionados.



De la misma forma, se podrían encontrar y justificar algunas más.

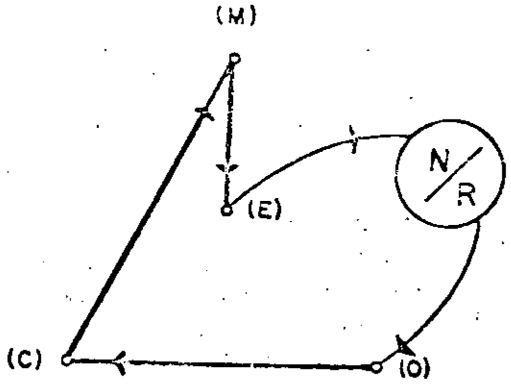


Asociando el modelo con el medio

Después de haber analizado y verificado la estructura interna del proceso de enseñanza-aprendizaje, procederemos ahora a la consideración de los enlaces de retroalimentación y control que se forman al vincular el modelo con los factores del medio.

Obsérvese que la gráfica ya no es plana y ahora no se puede aplicar la integración mediante la formación de áreas de síntesis.

Se podría hacer un análisis operativo dinámico, considerando N/R como el elemento que hace mover al sistema. Esto implica la construcción de un diagrama de tipo red de flujo, cuya base es el modelo conceptual que estamos analizando. En ese diagrama se estudiarían operaciones que se realizan siguiendo las diversas trayectorias del proceso completo, pero esto constituiría un tema fuera del propósito de este cuaderno. Dadas estas consideraciones, a continuación tomaremos como ejemplo solamente una trayectoria conceptual que ubica al modelo en su medio.



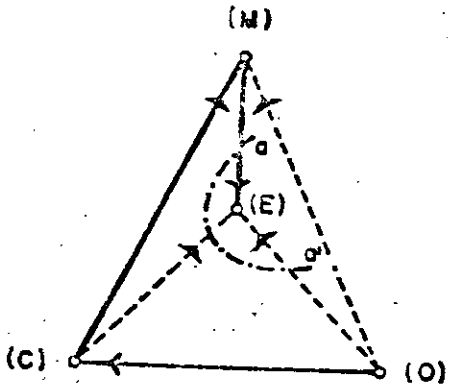
Consideremos la vinculación, que incluye todas las relaciones fundamentales (y por lo tanto, a todos los elementos). Es la descripción dinámica de una parte del proceso: de un conjunto de carencias y problemas detectados, tomando en cuenta los recursos existentes y los necesarios, se formulan los objetivos, se establecen y estructuran los contenidos, se seleccionan o diseñan los métodos y finalmente se llega a la evaluación (vértice sumidero), donde se plantea la salida al medio (retroalimentación). Esto es, del desarrollo del proceso y los datos recabados se cuestiona si hubo satisfacción de necesidades, aprovechamiento de recursos, solución adecuada de los problemas, etc.

8. HACIENDO ANALISIS

En la estructura del conocimiento o de conceptos interrelacionados es importante estudiar algunas de sus partes, en términos de las relaciones que permiten la separación. Por ejemplo, en nuestro proceso de enseñanza-aprendizaje, resultaría interesante analizar el concepto de evaluación, separándolo del conjunto, en términos de las relaciones que tiene con los demás conceptos.

Este análisis, en teoría de gráficas, se logra haciendo *cortes*.

Veamos:



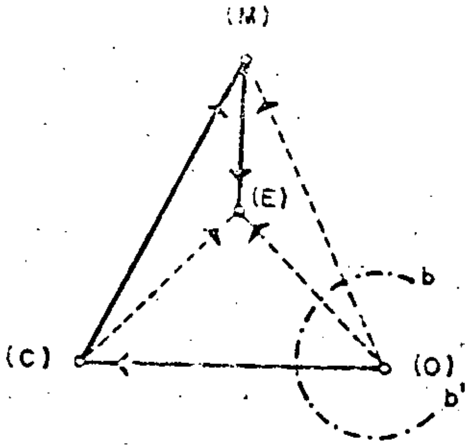
tomando el vértice E, para separarlo de la gráfica sería necesario cortar las ramas indicadas. El tamaño o la forma de la línea del corte en la representación gráfica no tiene importancia, pero se debe tener cuidado de no cortar más que una rama y las cuerdas estrictamente necesarias para lograr la separación. A estos cortes se les denomina fundamentales, pues analizan una por una las relaciones fundamentales de la gráfica (árbol de expansión), contrastándolas con las demás. Cada corte fundamental de una gráfica está asociado a cada rama del árbol de expansión. En este ejemplo, solamente se tienen tres cortes fundamentales.

En la figura anterior, el corte fundamental a-a', asociado a la rama ME, se puede expresar como:

$$a\text{-}a' = \left\{\underline{ME}\ ,\ \underline{CE}\ ,\ \underline{OE}\right\}$$

Conceptualmente, este corte pone énfasis en la relación ME, o sea, los procesos de evaluación supeditados a la metodología, pero contemplando al mismo tiempo los contenidos y los objetivos.

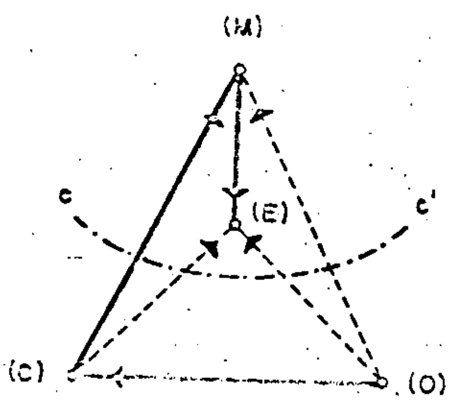
Otro corte fundamental es:



$$b\text{-}b' = \left\{ \underline{OC} \; , \; \underline{OE} \; , \; \underline{OM} \right\}$$

Este corte pone de relieve la importancia de los objetivos como factor básico (vértice fuente) en la formulación de los demás conceptos, pero fundamentalmente en la estructuración de contenidos.

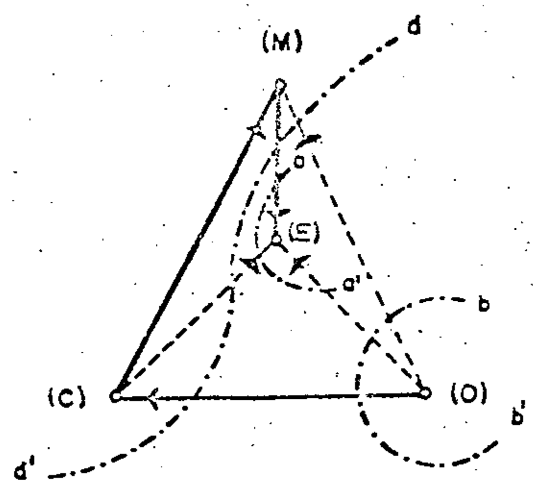
El último de los cortes fundamentales es:



$$c\text{-}c' = \left\{ \underline{CM} \; , \; \underline{CE} \; , \; \underline{OM}, \; \underline{OE} \right\}$$

Este corte es de carácter muy amplio. En él, la relación fundamental es la selección de métodos de enseñanza derivada de la estructuración de contenidos que atiendan a los objetivos generales y específicos planteados (rama C-M). Contempla dos posibles verificaciones: dados OC y CE, verificar que explícitamente esté dada la relación OE; y por otro lado, dados OC y CM, verificar que se dé explícitamente el vínculo de O con M (OM). Esto implica un análisis de la parte inferior de la representación gráfica, hacia abajo de c-c'. Análogamente podría juzgarse la parte superior: dados CM y ME - verificar CE: dados OM y ME verificar OE, etc.

Así como en el caso de los circuitos, en los cortes también se pueden analizar otros cortes no fundamentales, obtenidos por superposición de aquéllos, mediante una operación que consiste en tomar todas las ramas y cuerdas de los cortes fundamentales que se van a superponer y eliminar las que son comunes. Por ejemplo, sean los cortes fundamentales a-a' y b-b':



si tomamos todas las ramas y cuerdas de ambos y eliminamos las comunes, obtenemos:

$$d\text{-}d' = \left\{ \underline{OC}\ ,\ \underline{CE}\ ,\ \underline{ME}\ ,\ \underline{OM} \right\}$$

entonces, d-d' es un nuevo corte obtenido de la superposición de a-a' y b-b'.

Conceptualmente, este corte pone énfasis en las relaciones OC y ME, o sea, los procesos de evaluación supeditados a los métodos utilizados y la adecuación de los contenidos a los objetivos, tomando en cuenta, a la vez, los procesos de evaluación que pertenecen a la temática y estructuración de los contenidos y los métodos empleados en función de los objetivos.

Muchos de los análisis propuestos, o no son independientes unos de otros o ya están contenidos en los análisis de circuitos (síntesis). O sea, que el estudio de los cortes representa sólo un enfoque alternativo y verificativo, en donde el énfasis de una <u>relación fundamental</u> determina los criterios para examinar algunas síntesis antes examinadas y relaciones que deben ser analizadas en conjunto con la fundamental. La reflexión de algunos casos hará sobresalir su trascendencia.

IV. EJERCICIOS DE APLICACION

Esta sección pretende proporcionar al lector ejercicios de práctica en la comprensión e interpretación de diferentes modelos asociados con enseñanza-aprendizaje. El entendimiento del significado de una representación gráfica, ubicada en un contexto dado, constituye un paso básico en su interpretación y subsecuente valorización. Los modelos presentados a conitnuación no representan necesariamente los mejores ejemplos del proceso considerado. Esto es intencional, pues se espera que el lector pueda enriquecer su entendimiento de un modelo, al analizar, aunque sea brevemente, otros que comparten algunas características semejantes.

Ejercicio 1

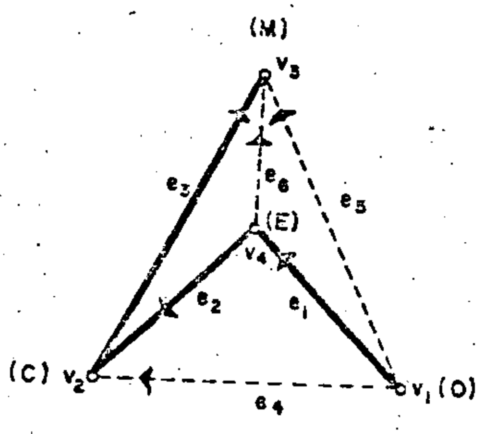


Figura 1

En la figura 1, se observa que la trayectoria del árbol dirigido de expansión es diferente de aquella en el modelo anteriormente desarrollado. De v_1 (objetivos), se pasa a __ (__________), luego a __ (__________) y finalmente a __ (__________).

En esta digráfica, los objetivos determinan las evaluaciones u, otra manera de expresar la relación, ____________ (las/los evaluaciones, objetivos) ____________ están subordinadas a los ____________.

Continuando la trayectoria dirigida, las ____________ determinan los ____________ y éstos, a su vez, los métodos.

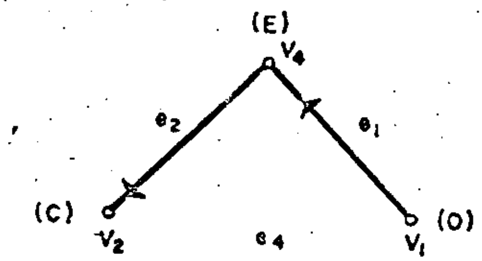


Figura 2

Atendiendo a los procesos de inferencia, en la figura 2 se observa que $O \rightarrow E$ y $E \rightarrow C$. Estas son relaciones establecidas explícitamente y de ellas se puede deducir que ___ $\rightarrow$ ___ (e_4).

Ahora dibuje la cuerda e_4. Recurriendo al contexto de la relación OC, ¿qué debe subordinarse a qué?, ¿los objetivos a los contenidos o los contenidos a los objetivos? Creemos que los contenidos deben subordinarse a los objetivos, conclusión que está de acuerdo con la obtenida por transitividad. En la gráfica, indique usted la dirección de e_4, la cual debe estar de acuerdo con ambas conclusiones. Con esta relación inferida ___ se puede verificar que los ____________ estructurados estarán de acuerdo con los objetivos.

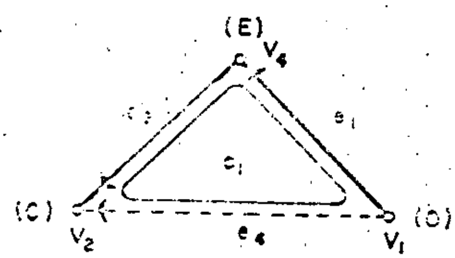


Figura 3

En este modelo, OEC forma el primer __________ fundamental. Se considera que el circuito c_1 es fundamental porque cierra una trayectoria con las ramas del árbol en expansión al añadir una y sólo una cuerda.

En la figura 3, una interpretación del area de síntesis OEC, podría ser: la selección y estructuración de los contenidos en función de las evaluaciones individuales, con base en los objetivos globales.

Observe que el proceso secuencial es muy diferente de lo que habíamos desarrollado en el modelo anterior. Al establecer los objetivos, se pasa directamente a procesos de evaluación con la participación activa de los alumnos y de allí se seleccionan y estructuran los contenidos, lo cual implica más flexibilidad que se asocia normalmente con la enseñanza de conocimiento formales y estructurados, según criterios previamente determinados. Veremos otras diferencias a continuación.

Se deriva otro circuito fundamental de las ramas EC y CM. Dibuje la cuerda e_6.

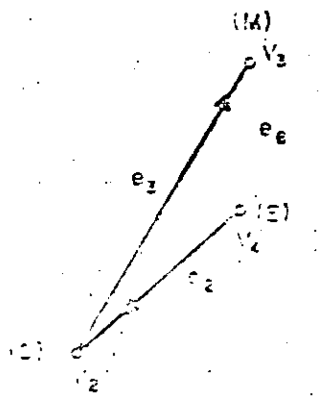


Figura 4

Empleando la propiedad de transitividad, deduzca la conclusión de las siguientes proposiciones.

E → C y C → M; por lo tanto, _____ → _____.

Interprete esta conclusión con su propio razonamiento. Suponiendo que esté de acuerdo (no olvide que esto es sólo un ejercicio), indique su dirección.

¿Qué tipo de razonamiento implicaría el siguiente esquema?.

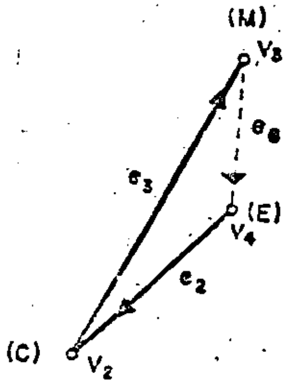
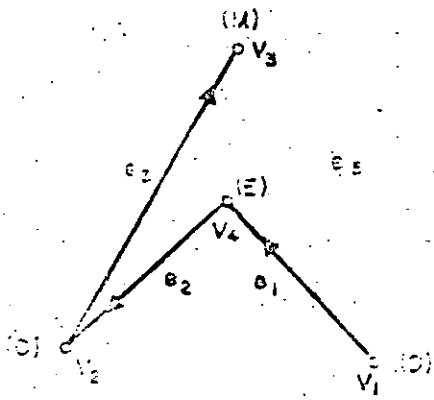


Figura 4'

Compárelo con su respuesta

Del árbol de expansión completo, se deriva el último circuito fundamental que consta de _________ ramas y una cuerda y abarca _______ los vértices.
¿Cuantas?

Figura 5



Utilizando la propiedad de __________, tenemos las proposiciones

$O \rightarrow E$, $E \rightarrow C$ y $C \rightarrow M$, por lo tanto, ____ $\rightarrow$ ____.

Dibuje la cuerda e_5, e indique su dirección.

La relación inferida OM implica la verificación de la influencia de los ____________ en los __________.

En el modelo de la figura 6, ¿en que vértice entran las informaciones respecto a necesidades y recursos? __________. Este vértice que inicia el proceso, se denomina entonces, el vértice____________.

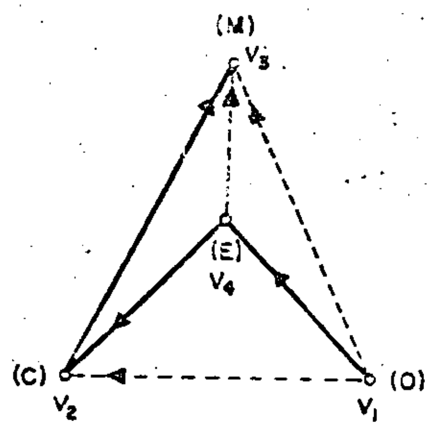


Figura 6

En el modelo de la misma figura 6, se observa que el proceso termina en el vértice_____. Es allí donde salen las informaciones para atender las necesidades y los recursos. Se denomina, entonces, el vértice_________.

En este modelo notamos que, después de establecer los objetivos, se utilizan los procesos de evaluación como un medio para determinar las demás actividades. Los procesos de evaluación ya no constituyen, como antes, el vértice sumidero que vincula el modelo con su medio circundante; los ______________ (objetivos, métodos) en esta gráfica, forman el vértice sumidero. Es decir, es a través de los métodos de aprendizaje, que son practicados por los estudiantes, que el proceso se vincula otra vez con su medio.

Ahora bien, el modelo en la figura 6 trata de enseñanza individualizada, pero es ambiguo porque <u>no</u> hemos especificado la fuente de los objetivos. Para aclarar esta ambiguedad, es necesario recurrir al contexto.

Si la institución escoge los objetivos, el estudiante juega un papel pasivo en el proceso, porque las evaluaciones individuales, por escrito, y los contenidos y métodos que van a utilizar son <u>preestablecidos</u>. La instrucción programada, pero administrada individualmente, corresponde al modelo en este contexto.

Otro modelo resulta si los estudiantes mismos escogen sus propios objetivos personales y luego son evaluados de diversas maneras en función de éstos. En el modelo en este contexto, se ajustan los contenidos y los métodos a los estudiantes y no al revés, como suele ocurrir en la educación institucionalizada.

Este ejemplo de un modelo con dos interpretaciones posibles recalca la necesidad de ubicar un modelo en un contexto definido, sin el cual pueden resultar muchas confusiones. Nos referimos al contexto de objetivos individualmente seleccionados a continuación.

En la figura 7 se observa un __________ fundamental (a-a') que interseca la rama ______ y las cuerdas OM, EM y ______, lo cual separa la gráfica en dos partes.

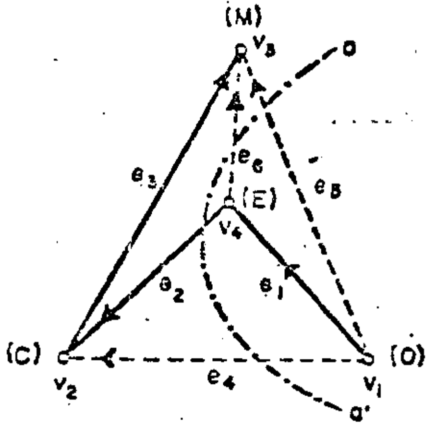


Figura 7

Este corte hace énfasis, a la derecha, en el análisis de la concordancia entre los procesos de evaluación y los __________, tomando en cuenta en el análisis las otras relaciones: OM, EM, EC, y OE. En el caso de los objetivos escogidos individualmente, el análisis de la relación EC, que es la base de este corte, es importante para el funcionamiento del modelo en su conjunto, pues los procesos de evaluación derivados de los objetivos tienen que ser amplios y operativos para que puedan determinar a los contenidos y a su estructura.

Al lado izquierdo, se analiza la concordancia lograda entre los contenidos y métodos con las evaluaciones hechas en función de los objetivos individuales, entre otras relaciones, lo cual implica que los primeros deben abarcar un repertorio amplio.

El modelo de la enseñanza verdaderamente abierta refleja lo seguido en Summerhill con niños de edad primaria hasta la adolescencia*.

Aunque muchos expertos opinan que es la manera idónea de aprender cómo aprender, este modelo tomado con todo rigor no se presta a condiciones de escolaridad masiva e institucionalizada con todas sus preocupaciones de uniformidad, ni a la utilización de maestros y coordinadores que no estén altamente preparados en todos los aspectos del proceso de enseñanza-aprendizaje, y no sólo en el aspecto de impartición de conocimientos. El modelo ha sido adaptado de diversas maneras al nivel de enseñanza primaria y, de manera más restringida, en los primeros años de secundaria. En estos niveles, un maestro o un grupo de ellos puede tener acceso inmediato a todos los recursos de apoyo y así reunir una gran parte de los conocimientos requeridos. Al tratar de conceptos formales y conocimientos especializados, este modelo se vuelve casi inoperante, aunque quizá las dificultades encontradas se deban también a fallas humanas. De todas formas, las adaptaciones de este modelo a nivel superior son muy escasas en la actualidad. Quizá valdría la pena considerarlo en forma experimental.

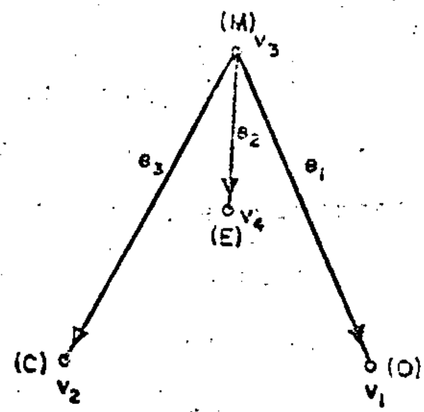
Ahora pasamos a otro modelo que sí se utiliza en aspectos de la educación superior.

---

* Un antecedente de este modelo es la Laboratory School, desarrollada por John Dewey en la Universidad de Chicago, en la primera década de este siglo.

Ejercicio 2.

Figura 8



Se observa que el árbol dirigido de expansión en la figura 8, es diferente de los considerados anteriormente. En éste no hay una trayectoria continua; al contrario, v_3 (métodos) determina a v_1 (______________), luego es necesario regresar a ______ para determinar a v_4 (______________) y regresar otra vez a v_3 para llegar a (______________)*.

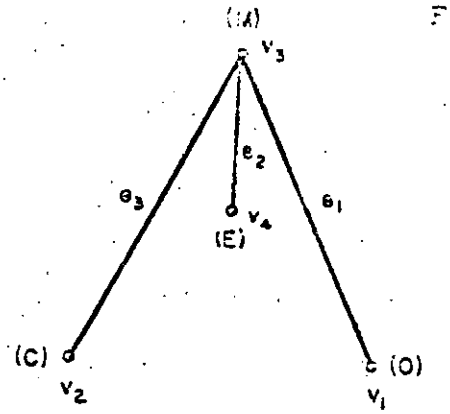
Esto indica que v_3 (____________________) es el vértice ____________________ en este modelo.

Además, las relaciones representadas en las ramas dirigidas no se prestan al uso de la propiedad de________________.

---

* Esta gráfica, con todas las ramas emanando de un sólo vértice, se denomina arborescencia.

Figura 9

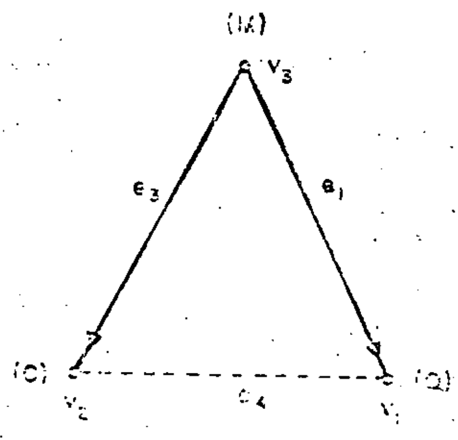


Suponga que el árbol en la figura 8 no fuese dirigido. ¿Dónde podría ubicar las cuerdas para formar circuitos fundamentales? De las ramas e_1 y e_3 se puede formar un circuito fundamental al poner una cuerda entre los vértices ___ y ___ se forma otro mediante las ramas e_1 y e_2 al conectar los vértices _____ y ____; y otro a través de las ramas e_2 y e_3 al añadir una cuerda entre los vértices ____ y ___.

Dibújelas en la figura 9.

Ahora consideremos por separado cada una de las cuerdas que forman un circuito fundamental.

Figura 10

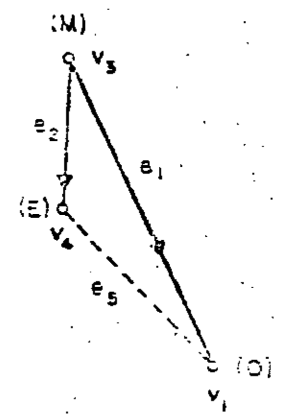


En la figura 10, está indicado que los métodos determinan a los ________ y a los ________. Si es necesario ajustar los objetivos a los métodos escogidos, y seleccionar, estructurar y secuenciar los contenidos en función de los métodos utilizados, ¿cómo se explica esta area de síntesis? ¿los objetivos deben ser subordinados a los contenidos o al reves?. Recurriendo al contexto didáctico del proceso de enseñanza-aprendizaje, opinamos y podemos justificar que los contenidos deben subordinarse a los objetivos. Indique esta subordinación en la cuerda e_4 en la figura 10.

Cabe hacer notar que esta cuerda, e_4, como parte de un proceso de inferencia,no es la conclusión sino una de las premisas, es decir, dada una premisa (MO) y la conclusión (MC), se obtiene la otra premisa (OC); de aquí la importancia del contexto y el criterio con que se están considerando.

En el circuito fundamental de la figura 11, está dado que los ________ determinan a los ________ y a los procesos de ________.

Figura 11



Es decir, que los procesos de evaluación tienen que ajustarse a los métodos de enseñanza empleados. ¿Cómo debe verificarse esta área de síntesis?. Recurriendo otra vez al contexto del proceso mencionado, opinamos que los procesos de evaluación deben subordinarse a los objetivos, pues de otra manera los objetivos no juegan ningún papel real en esta area de síntesis. Indique esta relación (cuerda e_5) en la figura 11.

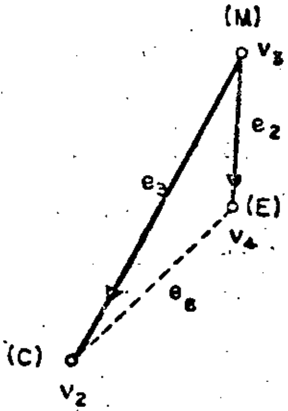


Figura 12

En el circuito ____________ representado en la figura 12, está indicado que los métodos __________ a los procesos de evaluación, que también ____________ a los ____________, y que la cuerda e_6 (CE) cierra esta area de ________ fundamental. ¿Qué dirección debe darse a esta cuerda?. Una posiblidad es subordinar la selección y estructuración de los contenidos a los procesos de evaluación, lo cual quiere decir que si no se puede evaluar un contenido dado, no va a ser incluido. Pero esto no debe ocurrir; al contrario, en el contexto de un proceso de enseñanza-aprendizaje, los procesos de evaluación deben subordinarse a los contenidos. Indique esta condición (cuerda e_6) en la figura 12.

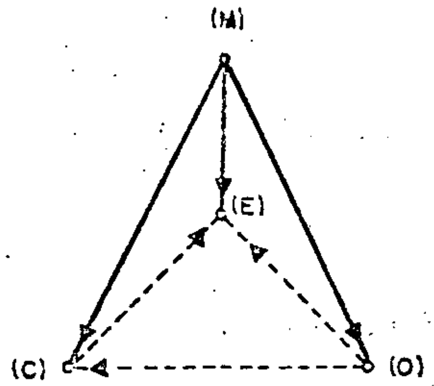


Figura 13

En el modelo que hemos desarrollado parcialmente, se observa que el vértice fuente corresponde a los __________ y que el vértice ________ corresponde a los procesos de______.

Este modelo es muy similar al de la enseñanza programada. El lector debe notar que el significado de este modelo difiere sustancialmente de aquél desarrollado en la sección III y del primer ejercicio.

Ahora queremos indicar algunas diferencias en las representaciones gráficas de los modelos considerados. En los primeros dos modelos, de acuerdo al contexto y a los criterios, se obtuvieron árboles de expansión cuyas ramas formaron una trayectoria continua y se pudo utilizar la propiedad de transitividad para realizar las inferencias. En el modelo del segundo ejercicio, cambiaron las condiciones y se obtuvo un árbol de expansión de tipo arborescencia, en donde no se puede establecer un proceso secuencial simple, y las decisiones respecto a qué determina a qué, no se pueden tomar directamente en la gráfica; hay que revisar el contexto y los criterios y considerar los conceptos implícitos.

Los modelos considerados hasta este punto pueden servir como base de referencia para diagnosticar situaciones reales, en las que al conocer las deficiencias que se definen en función de un modelo dado, se pueden planear racionalmente los pasos necesarios para ir de la situación actual a la deseada, cuya definición puede y debe experimentar alteraciones a través del tiempo. La idea de representar los resultados de un diagnóstico en una forma gráfica sugiere el siguiente ejercicio.

Ejercicio 3

Suponga que se ha hecho un diagnóstico del proceso de enseñanza-aprendizaje, cuyos resultados indicaron que los enlaces entre los elementos del proceso no fueron óptimos. Suponga, además, que estos resultados fueron los mismos de la matriz 2. Siguiendo la misma simbología, es decir,

2 indica una relación directa (una rama),

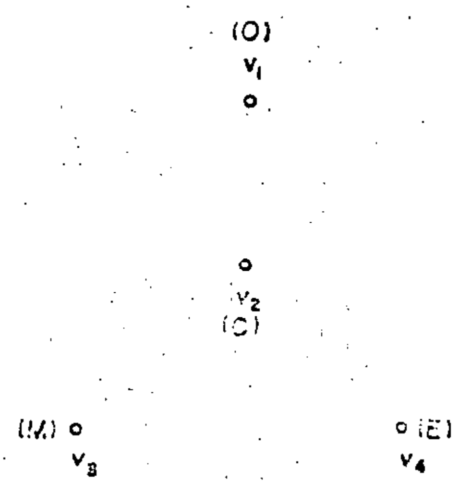
1 indica una relación fuerte (una cuerda),

0 indica una relación débil que no aparecerá en el esquema correspondiente.

Tomando los datos de la matriz 2, trate de hacer una representación esquemática.

Matriz 2*

	(O) v_1	(C) v_2	(M) v_3	(E) v_4
(O) v_1	X	0	0	0
(C) v_2		X	1	1
(M) v_3			X	2
(E) v_4				X



* De la página 15.

En su representación esquemática del diagnóstico, las deficiencias en cuanto a enlaces entre los elementos se destacan inmediatamente. De hecho, se observa que los objetivos no se vinculan con los otros elementos, de lo cual resulta una gráfica ______________ formada por dos componentes, un vertice aislado* y tres __________ conectados por cuerdas y una rama.

(conexa, desconexa)

Normalmente, si una gráfica representa la estructura de un proceso, o de un sistema, no debe ser desconexa, pues la idea fundamental en ellos es que todos los elementos están relacionados. Sin embargo, una representación que presente las deficiencias de un sistema puede resultar desconexa y es interesante analizar cómo podría conectarse, o sea, cómo hacer que el sistema funcione como tal.

---

* Vértice aislado es aquel que no está conectado con los demás.

V. EJERCICIOS DE TRANSFERENCIA

Después de haber seguido el desarrollo y algunas alternativas de un modelo de enseñanza-aprendizaje, ahora le invitamos a construir sus propias gráficas que pertenezcan al contexto en que usted trabaja. Dado que se utilizarán diferentex contextos y contenidos específicos de cada elemento (vértice), el esquema diferirá de los anteriores. Esto implica, necesariamente, definiciones y áreas de síntesis, etc., y claro está que habrá diferencias en la definición de necesidades y recursos del medio que retroalimentan y ejercen controles sobre el sistema descrito.

Los ejercicios que se presentan a continuación lo guiarán en aplicaciones que usted podrá hacer; los asteriscos indican el grado de dificultad, y confiamos que despúes de realizar el más difícil (****), quedará en usted cierta inquietud por analizar con gráficas sus propios proyectos.

En el primer grupo de ejercicios, por cuestiones simplificación, consideramos que una institución de educación superior realiza tres funciones -investigación, docencia y difusión- y una de apoyo y coordinación administrativa. Suponga que cada una de estas funciones constituye un elemento en una gráfica.

v_1 docencia

v_2 investigación

v_3 difusión

v_4 administración

La tarea principal es la de construir un modelo, según su criterio personal, de cómo una institución de educación debe funcionar. Para hacer esto:

1. * Defina sucintamente lo que usted entiende por cada una de las actividades anteriores.

   v_1 ______________________________

   ____

   v_2 ______________________________

   ____

   v_3 ______________________________

   ____

   v_4 ______________________________

   ____

2. * Construya una matriz de relaciones entre los elementos, utilizando los "pesos" que usted considere adecuados.

	v_1	v_2	v_3	v_4
v_1	X			
v_2		X		
v_3			X	
v_4				X

3a. * Dibuje la primera representación esquemática de estos elementos y sus relaciones, utilizando la información de su matriz.

3b. * Indique las relaciones fuertes y las débiles.

3c. * Convierta su árbol de expansión en un árbol dirigido de expansión.

3d. ** Indique las direcciones de las cuerdas, justificándolas conceptual u operativamente.

4a. * Indique cada uno de los circuitos fundamentales.

4b. ** Describa brevemente el proceso conceptual seguido para formar cada uno de estos circuitos (síntesis).

4c. ***Justifique conceptualmente las áreas de síntesis formadas.

5a. * Trace un corte fundamental en su digráfica.

5b. ** ¿Que relaciones inciden en este análisis?.

5c. ***Esboce el significado verificativo de este corte en términos del proceso considerado.

6a. * Si su digráfica tiene un vértice fuente y un vértice sumidero, vincúlela con su medio circundante (algún - factor externo).

6b. ** Anote lo que podría tomar en cuenta respecto a necesi dades y recursos para su modelo.

6c. ***Justifique la elección de sus vértices fuente y sumi- dero en vez de otros.

En el segundo grupo de ejercicios, se trata de hacer un modelo ideal de algún proceso en el cual se encuentre usted trabajando. Para lograrlo, puede seguir los siguientes pasos:

7a. * Escoja cuatro conceptos "claves" de su area de trabajo que formen la estructura básica de su modelo y defínalos.

Definiciones:

7b. * Luego, asigne cada concepto a un vértice y denomínelo en forma breve.

v_1 (   )

v_2 (   )

v_3 (   )

v_4 (   )

8. * Intente hacer una matriz de relaciones entre los elementos utilizando la simbología que usted considere conveniente. Suponemos que hay algunos criterios que ha seguido para definir los conceptos y las relaciones entre ellos. Si no los tiene claros, trate de fijarlos y haga una pequeña lista de ellos.

x			
	x		
		x	
			x

9a. * Dibuje la primera representación gráfica con base en la matriz de relaciones.

9b. * Elija el árbol de expansión de acuerdo a sus criterios e indique las cuerdas y las ramas en la gráfica.

9c. ** Justificando conceptualmente el proceso o procesos utilizado(s), convierta su gráfica en digráfica.

10a. * Si su digráfica tiene un vértice fuente y un vértice sumidero, vincúlela con su medio.

10b. ** Esboce lo que usted considera importante tomar en cuenta, tocante a necesidades y recursos para su modelo.

11a. * Indique cada uno de los circuitos fundamentales.

11b. ***Describa el proceso conceptual para formar cada uno de estos circuitos.

11c. ***Justifique las áreas de síntesis formadas.

12a. * Trace un corte fundamental en su digráfica.

12b. ** Determine la relación principal que se analiza mediante este corte y todas las otras relaciones que tiene que considerar en el análisis.

12c. *** Describa el significado de este corte en términos del proceso considerado.

El <u>tercer grupo de ejercicios</u> utiliza lo que usted ya ha hecho y le sugerimos que construya un modelo del funcionamiento real de su institución, el cual idealizó en su primer modelo (lo deseable).

13a. ** Conserve el mismo arreglo de vértices que utilizó en el modelo, representando la situación deseada y dibuje una representación del funcionamiento real del proceso considerado.

13b. * Luego compare el modelo deseado con el de la representación real.

13c. *** Determine las diferencias entre ambos.

14. **** Suponga que usted tuviera la oportunidad de implantar su modelo deseado en la institución donde trabaja, lo que podría iniciar con un proceso de persuasión, pues los que pudieran efectuar los cambios necesarios tienen que comprender claramente las diferencias entre lo que es y lo que debe ser, antes de tomar decisiones para el cambio. Suponga, además, que le han invitado a explicar su modelo y que usted tendrá como objetivo convencerlos que es mejor que el del funcionamiento actual. Para hacer esto, hay que justificar el nuevo arreglo, considerando las diferencias entre ambas representaciones, explicar los significados de los circuitos y áreas de síntesis y mostrar, quizá mediante uno o varios cortes, las diferencias en funcionamiento entre ambos modelos.

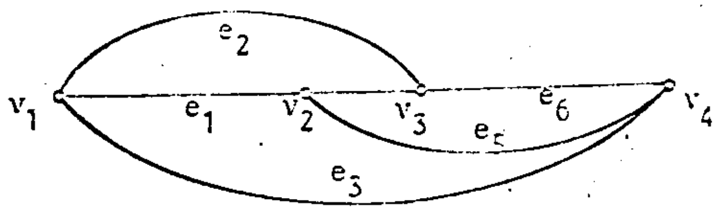
¡Adelante!

R E S P U E S T A S

Pág. 23

		Sí	No	
posibilidad	a		X	
	c	X		
	d			(depende de su diagrama)

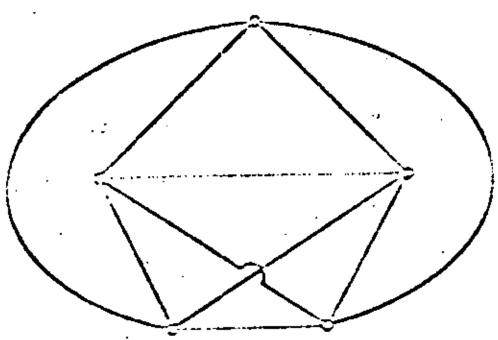
Nota: el esquema de la posibilidad "a" aparentemente no es plano, pero podría hacerse plano cambiando únicamente una rama, por ejemplo, la e_5, aunque habrá más alternativas.

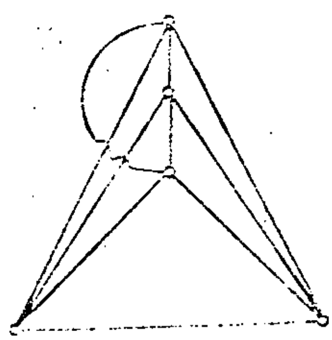


Pág. 25

Sí ☐ No ☒

Por ejemplo,





IV Ejercicios de aplicación

Ejercicio 1

Pag. 58

v_4 evaluación v_2

contenidos v_3 métodos

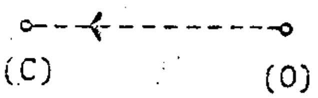
Pag. 59

evaluaciones

objetivos

evaluaciones contenidos

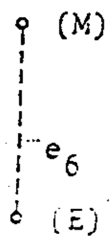
$O \dashrightarrow C$



e_4 contenidos

Pag. 60

circuito



Pag. 61

$E \longrightarrow M$

El razonamiento que implica la figura [illegible] es circular. pues las evaluaciones determinan a los métodos a través de los contenidos, pero la cuerda nos indica que los métodos determinan a los contenidos, ¿[illegible]?

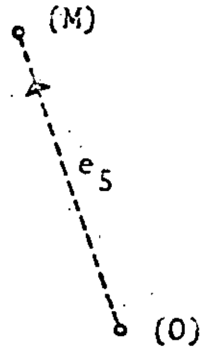
3

todos

Pag. 62

transitividad

$0 \longrightarrow M$



objetivos contenidos
objetivos
fuente

v_5 (M)
sumidero

Pag. 63

métodos

Pag. 64

corte
EC_ OC
objetivos

Ejercicio 2

Pag. 66

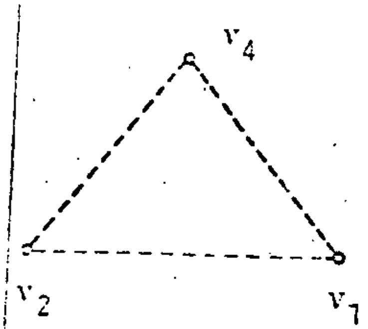
objetivos
v_3 evaluación
contenidos
métodos
fuente
transitividad

Pag. 67

$v_2 \quad v_1$

$v_4 \quad v_1$

$v_2 \quad v_4$



Pag. 68

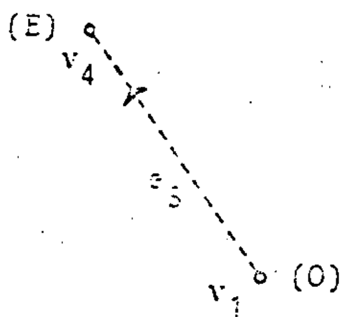
contenidos objetivos

(C) $v_2 \xleftarrow{e_4} v_1$ (O)

métodos objetivos

evaluación

Pag. 69

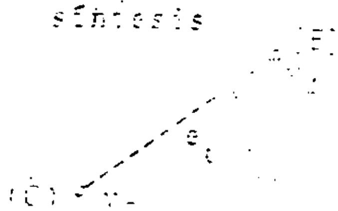


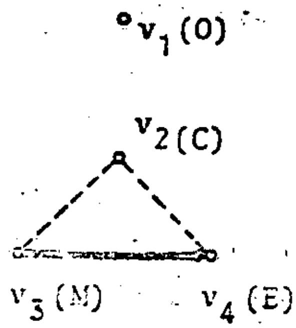
fundamental

determinan

determinan contenidos

síntesis



Pag. 70	métodos sumidero evaluación
	Ejercicio 3
Pag. 71	
Pag. 72	desconexa vértices --

GLOSARIO

ABIERTA (gráfica)

Al seleccionar un vértice cualquiera en una gráfica dada no hay trayectoria alguna que regrese al mismo vértice.

AISLADO (vértice)

Es un vértice no conectado con ningún otro mediante un segmento lineal. La presencia de un vértice aislado divide una gráfica dada en dos componentes; dos vértices aislados la dividen en tres componentes.

ARBOL

Es una gráfica finita, simple y abierta, en la cual, entre cualquier par de vértices sólo hay una trayectoria. Es una gráfica mínimamente conexa, pues al eliminar una rama se vuelve desconexa.

ARBOL DE EXPANSION

En una gráfica conexa, es un árbol que toca todos los vértices.

(árbol de expansión asociado a la gráfica)

Es posible encontrar un número grande de árboles de expansión distintos asociados a una misma gráfica.

ARBOL DIRIGIDO

Es un árbol donde ya se ha determinado la dirección de cada una de las relaciones. En el diagrama se indica con una cabeza de flecha.

ARBORESCENCIA

Gráfica donde todas las ramas concurren a un solo vértice.

AREA DE SINTESIS

Conceptualmente, al relacionar tres o más conceptos, se forma un nuevo estado o área de conocimiento que en la representación gráfica es un área formada por ramas y una sola cuerda. Véase CIRCUITO FUNDAMENTAL.

BALANCEADA (gráfica)

Es aquella gráfica dirigida, en la que la suma de los grados $g^{(+)}$ y $g^{(-)}$ de cada vértice (número de ramas que inciden al vértice y número de ramas que salen), son iguales.

CIRCUITO

Es un conjunto de segmentos lineales que forman una trayectoria cerrada; saliendo de un vértice y recorriendo esos segmentos, se vuelve al mismo vértice.

CIRCUITO FUNDAMENTAL

Es un paseo cerrado que consta de dos o más ramas y solamente una cuerda.

COMPLETA (gráfica)

Es una gráfica simple en la que existe un segmento lineal entre cada par de vértices.

CONEXA (gráfica)

Es aquella gráfica donde todos los vértices están relacionados por lo menos con otro; entonces, entre cualesquiera dos vértices, existe una trayectoria.

CONTEXTO

Es el conjunto de referencias donde se ubica un modelo.

CORTE

Es un conjunto de relaciones (segmentos lineales) que se romperían para separar una parte de una gráfica.

CORTE FUNDAMENTAL

Asociado a un árbol de expansión de una gráfica, es el conjunto de cuerdas y una rama que deben cortarse para separar una parte de la gráfica.

CUERDA

Es un segmento lineal que cierra circuitos fundamentales considerando el árbol de expansión de una gráfica. En la integración de conceptos representa las relaciones inferidas o implícitas.

DESCONEXA (gráfica)

Gráfica en la que no se puede ir de un vértice a cualquier otro a través de los segmentos lineales, pues algunos vértices no están conectados con otros. Una gráfica desconexa tiene dos o más componentes. Véase gráfica CONEXA.

DIGRAFICA

También llamada gráfica dirigida. Es aquella gráfica donde ya se ha determinado la dirección de cada una de las relaciones, indicándose en el diagrama con una cabeza de flecha.

DIRIGIDA (gráfica)

Véase DIGRAFICA.

FINITA (gráfica)

Gráfica con un número finito de vértices.

FLUJO (red de)

Véase RED DE FLUJO.

FUENTE (vértice)

En una digráfica, es el vértice de donde solamente salen segmentos dirigidos.

GRADO DE UN VERTICE

Número de segmentos lineales que concurren en un vértice.

GRAFICA

Conjunto de puntos y segmentos lineales. Conceptualmente, es un conjunto de elementos y las relaciones entre ellos.

ISOMORFICAS (gráficas)

Se dice de dos gráficas en las que existe una correspondencia, uno a uno, entre los vértices, los segmentos lineales y los grados de cada vértice. También se les denomina gráficas equivalentes.

LAZO

Véase RIZO.

MATRIZ

Es un arreglo en forma de cuadro, con renglones y columnas que establecen los distintos elementos que se van a relacionar.

PARALELOS (segmentos o ramas)

Dos segmentos lineales que en un diagrama relacionan exactamente los mismos dos vértices (es independiente de la forma geométrica de los segmentos lineales).

PLANA (gráfica)

Una gráfica es plana si puede trazarse de manera que sus segmentos lineales no se intersecten más que en los vértices.

RAMA

Es un segmento lineal que une dos vértices. Representa una relación directa y fuerte entre la pareja de vértices (conceptos, elementos). En la integración de conceptos, representa relaciones dadas explícitamente.

RAZONAMIENTO CIRCULAR

En una proposición condicional --si p (antecedente), entonces q (consecuente)-- se utiliza la primera parte como antecedente y como consecuente, por ejemplo, si p,..., entonces p.

RAZONAMIENTO DEDUCTIVO.

Un proceso formal de razonamiento en el que las premisas de un argumento proveen la evidencia concluyente de la validez de la conclusión. Se emplean reglas de la lógica para demostrar que si las premisas son verdaderas, la conclusión es también verdadera.

REFLEXIVIDAD

Propiedad de las relaciones. Una relación es reflexiva cuando cualquier elemento de ella está relacionado consigo mismo. Véase RIZO .

RED DE FLUJO

Trata de la modelación dinámica que toma en cuenta la retroalimentación y regulación de un proceso al calcular algebráicamente los procesos operativos de transformación, con base en información de variables endógenas y exógenas al sistema considerado.

RELACION

Una conexión o correspondencia entre dos o más cosas.

RIZO

Es la representación gráfica de la relación de un elemento consigo mismo. En un diagrama, es un segmento que sale de un vértice y regresa al mismo.

SIMETRIA

Propiedad de las relaciones. Una relación es simétrica cuando (a) se relaciona con (b) de la misma manera que (b) se relaciona con (a). Simbólicamente, si aRb, entonces, bRa.

SIMPLE (gráfica)

Es una gráfica que no tiene rizos ni segmentos lineales paralelos.

SINTESIS (área de)

Véase AREA DE SINTESIS.

SUMIDERO (vértice)

En una digráfica, es el vértice a donde solamente concurren segmentos dirigidos.

SUSPENSO (vértice)

Es un vértice ligado a los demás por solamente un segmento lineal.

TRANSITIVIDAD

Es una propiedad de las relaciones que dice: si un concepto (a) se relaciona con un segundo concepto (b) y si el segundo se relaciona con un tercero (c), entonces hay relación del primero con el tercero. Simbólicamente $aRb \wedge bRc \rightarrow aRc$.

TRAYECTORIA

Es un conjunto de segmentos lineales por donde se puede ir de un vértice a otro. Generalmente el término se refiere a trayectoria abierta, o sea, que el vértice inicial y el terminal son distintos.

VERTICE

Es un punto o círculo pequeño en un diagrama, al cual se le asocia un concepto, un tema, una asignatura, etc. Al referirse a un vértice, generalmente se trata de los conceptos y no del punto físico en el esquema.

BIBLIOGRAFIA ESCOGIDA

Berge, C. *The theory of graphs and its applications*. Wiley. 1962.

Deo, N. *Graph theory with applications to engineering and computer science*. Prentice-Hall. 1974.

Harary, F. *Graph theory*. Addison-Wesley. 1969.

Salazar Resines, J. *Teoría de gráficas*. Limusa (en prensa).

Whitehouse, G.E. *Systems analysis and design using network techniques*. Prentice-Hall. 1973.

centro de educación continua
división de estudios superiores
facultad de ingeniería, unam

METODO CIENTIFICO : ESQUEMAS PARA SU PRACTICA

FOUNDATIONS OF THE THEORY OF SIGNS

ABRIL, 1979.

Palacio de Minería Calle de Tacuba 5, primer piso. México 1, D. F.

INTERNATIONAL ENCYCLOPEDIA of UNIFIED SCIENCE

Foundations of the Theory of Signs

By

Charles W. Morris

VOLUMES I AND II · FOUNDATIONS OF THE UNITY OF SCIENCE ·
VOLUME I · NUMBER 2

THE UNIVERSITY OF CHICAGO PRESS

vant signs and principles for carrying on this study. Semiotic supplies a general language applicable to any special language or sign, and so applicable to the language of science and specific signs which are used in science.

The interest in presenting semiotic as a science and as part of the unification of science must here be restricted by the practical motive of carrying the analysis only so far and in such directions as to supply a tool for the work of the *Encyclopedia*, i.e., to supply a language in which to talk about, and in so doing to improve, the language of science. Other studies would be necessary to show concretely the results of sign analysis applied to special sciences and the general significance for the unification of science of this type of analysis. But even without detailed documentation it has become clear to many persons today that man—including scientific man—must free himself from the web of words which he has spun and that language—including scientific language—is greatly in need of purification, simplification, and systematization. The theory of signs is a useful instrument for such debabelization.

II. Semiosis and Semiotic

2. The Nature of a Sign

The process in which something functions as a sign may be called *semiosis*. This process, in a tradition which goes back to the Greeks, has commonly been regarded as involving three (or four) factors: that which acts as a sign, that which the sign refers to, and that effect on some interpreter in virtue of which the thing in question is a sign to that interpreter. These three components in semiosis may be called, respectively, the *sign vehicle*, the *designatum*, and the *interpretant*; the *interpreter* may be included as a fourth factor. These terms make explicit the factors left undesignated in the common statement that a sign refers to something for someone.

A dog responds by the type of behavior (I) involved in the hunting of chipmunks (D) to a certain sound (S); a traveler prepares himself to deal appropriately (I) with the geographical region (D) in virtue of the letter (S) received from a friend. In

such cases S is the sign vehicle (and a sign in virtue of its functioning), D the designatum, and I the interpretant of the interpreter. The most effective characterization of a sign is the following: S is a sign of D for I to the degree that I takes account of D in virtue of the presence of S. Thus in semiosis something takes account of something else mediately, i.e., by means of a third something. Semiosis is accordingly a mediated-taking-account-of. The mediators are *sign vehicles;* the takings-account-of are *interpretants;* the agents of the process are *interpreters;* what is taken account of are *designata*. There are several comments to be made about this formulation.

It should be clear that the terms 'sign,' 'designatum,' 'interpretant,' and 'interpreter' involve one another, since they are simply ways of referring to aspects of the process of semiosis. Objects need not be referred to by signs, but there are no designata unless there is such reference; something is a sign only because it is interpreted as a sign of something by some interpreter; a taking-account-of-something is an interpretant only in so far as it is evoked by something functioning as a sign; an object is an interpreter only as it mediately takes account of something. The properties of being a sign, a designatum, an interpreter, or an interpretant are relational properties which things take on by participating in the functional process of semiosis. Semiotic, then, is not concerned with the study of a particular kind of object, but with ordinary objects in so far (and only in so far) as they participate in semiosis. The importance of this point will become progressively clearer.

Signs which refer to the same object need not have the same designata, since that which is taken account of in the object may differ for various interpreters. A sign of an object may, at one theoretical extreme, simply turn the interpreter of the sign upon the object, while at the other extreme it would allow the interpreter to take account of all the characteristics of the object in question in the absence of the object itself. There is thus a potential sign continuum in which with respect to every object or situation all degrees of semiosis may be expressed, and the question as to what the designatum of a sign is in any given situation is the question of what characteristics of the object or situation are actually taken account of in virtue of the presence of the sign vehicle alone.

A sign must have a designatum; yet obviously every sign does not, in fact, refer to an actual existent object. The difficulties which these statements may occasion are only apparent difficulties and need no introduction of a metaphysical realm of "subsistence" for their solution. Since 'designatum' is a semiotical term, there cannot be designata without semiosis—but there can be objects without there being semiosis. The designatum of a sign is the kind of object which the sign applies to, i.e., the objects with the properties which the interpreter takes account of through the presence of the sign vehicle. And the taking-account-of may occur without there actually being objects or situations with the characteristics taken account of. This is true even in the case of pointing: one can for certain purposes point without pointing to anything. No contradiction arises in saying that every sign has a designatum but not every sign refers to an actual existent. Where what is referred to actually exists as referred to the object of reference is a *denotatum*. It thus becomes clear that, while every sign has a designatum, not every sign has a denotatum. A designatum is not a thing, but a kind of object or class of objects—and a class may have many members, or one member, or no members. The denotata are the members of the class. This distinction makes explicable the fact that one may reach in the icebox for an apple that is not there and make preparations for living on an island that may never have existed or has long since disappeared beneath the sea.

As a last comment on the definition of sign, it should be noted that the general theory of signs need not commit itself to any specific theory of what is involved in taking account of something through the use of a sign. Indeed, it may be possible to take 'mediated-taking-account-of' as the single primitive term for the axiomatic development of semiotic. Nevertheless, the account which has been given lends itself to treatment from the point of view of behavioristics, and this point of view

will be adopted in what follows. This interpretation of the definition of sign is not, however, necessary. It is adopted here because such a point of view has in some form or other (though not in the form of Watsonian behaviorism) become widespread among psychologists, and because many of the difficulties which the history of semiotic reveals seem to be due to the fact that through most of its history semiotic linked itself with the faculty and introspective psychologies. From the point of view of behavioristics, to take account of D by the presence of S involves responding to D in virtue of a response to S. As will be made clear later, it is not necessary to deny "private experiences" of the process of semiosis or of other processes, but it is necessary from the standpoint of behavioristics to deny that such experiences are of central importance or that the fact of their existence makes the objective study of semiosis (and hence of sign, designatum, and interpretant) impossible or even incomplete.

3. Dimensions and Levels of Semiosis

In terms of the three correlates (sign vehicle, designatum, interpreter) of the triadic relation of semiosis, a number of other dyadic relations may be abstracted for study. One may study the relations of signs to the objects to which the signs are applicable. This relation will be called the *semantical dimension of semiosis*, symbolized by the sign 'D_{sem}'; the study of this dimension will be called *semantics*. Or the subject of study may be the relation of signs to interpreters. This relation will be called the *pragmatical dimension of semiosis*, symbolized by 'D_p,' and the study of this dimension will be named *pragmatics*.

One important relation of signs has not yet been introduced: the formal relation of signs to one another. This relationship was not, in the preceding account, explicitly incorporated in the definition of 'sign,' since current usage would not seem to eliminate the possibility of applying the term 'sign' to something which was not a member of a system of signs—such possibilities are suggested by the sign aspects of perception and by various apparently isolated mnemonic and signaling devices.

4
La teoría del lenguaje

En este capítulo, presentamos una teoría del lenguaje que combina la teoría de los empíricos lógicos de una teoría formalizada de la estructura lingüística en general, con la pretensión de los filósofos del lenguaje ordinario de que la descripción lingüística está relacionada con y regida por los hechos de los lenguajes naturales. Esta teoría tiene las virtudes que hicieron de cada uno de esos movimientos prometedoras aproximaciones a la filosofía del lenguaje, a la vez que supera los vicios que impidieron a ambos alcanzar las metas de la filosofía del lenguaje.

Panorámicas

Los lenguajes naturales son vehículos de comunicación, mediante los cuales, objetos sintácticamente estructurados y acústicamente realizados transmiten mensajes significantes de un hablante a otro. No son los únicos vehículos de comunicación de que los hombres disponen, pero son, sin duda, los más flexibles e importantes. La pregunta fundamental que puede formularse acerca de los lenguajes naturales es: ¿cuáles son los principios de relación entre objetos acústicos y mensajes significantes, que hacen de un lenguaje natural una forma de comunicación tan importante y flexible?

En líneas generales, la comunicación lingüística consiste en la producción de cierto fenómeno acústico externo, públicamente observable, cuya estructura fonética y sintáctica codifica las ideas o pensamientos interiores, privados, de un hablante, y en la descodificación de la estructura fonética y sintáctica presentada en tal fenómeno físico, por parte de otros hablantes, en forma de una experiencia interior, privada, de los mismos pensamientos o ideas. Las investigaciones de la comunicación lingüística orientadas sobre una base conductista se centran exclusivamente en los aspectos públicamente observables de las situaciones de la comunicación: sonidos de palabras, comportamiento no verbal de los participantes en la situación, y propiedades físicas de los estímulos válidos. Así, tales investigaciones descuidan los aspectos esenciales de una adecuada comunicación lingüística, la congruencia de pensamientos e ideas entre los hablantes y los oyentes, que resulta de los intercambios verbales.

En realidad, éste es el único aspecto que hace de los intercambios verbales una auténtica comunicación lingüística. Podemos imaginar muy bien dos computadores gigantes sin capacidad alguna para formular pensamientos e ideas, o para comprenderlos, pero con la facultad de producir sonidos de palabras alternadamente, de tal modo que los intercambios verbales entre los computadores repitan los fenómenos públicamente observables que se presentan cuando los hablantes humanos se comunican en un lenguaje natural. Como no tenemos la menor inclinación a considerar tales intercambios entre computadores como una auténtica comunicación lingüística —como de naturaleza igual a la que se produce entre seres humanos—, tampoco debemos sentirnos inclinados a aceptar la pretensión de los conductistas de que están investigando una comunicación lingüística real.

Pero así como debemos apreciar la dimensión cognoscitiva de la comunicación lingüística, es igualmente importante apreciar la dimensión física y su conexión con la cognoscitiva. Podemos imaginar también una armonía preestablecida que haga innecesaria la presencia de todos los fenómenos acústicos intermedios. Supongamos que siempre que un hablante quiere expresar uno de sus pensamientos o ideas a una audiencia, el mismo pensamiento o idea se presenta casi instantáneamente en las mentes de los miembros de su audiencia, con una señal adecuada para indicar de quién es el pensamiento, cuando tal indicación es importante, y que, al margen de qué pensamientos o ideas se le presenten a un hablante, cuando no desea expresarlos a otros, a éstos no se les presentan ideas o pensamientos congruentes (o, si tales ideas y pensamientos se les presentan, no están señalados como del hablante). Evidentemente, tal armonía preestablecida de hechos mentales, aunque tiene ciertas decisivas ventajas sobre la comunicación lingüística, no es una comunicación lingüística, más auténtica que el adulterado proceso abordado por los conductistas.

Para comprender la facultad de los lenguajes naturales de servir como instrumentos para la comunicación de pensamientos e ideas, debemos comprender qué es lo que permite a quienes los hablan relacionar coherentemente los sonidos correctos con los significados correctos.

Es perfectamente claro que, en algún sentido, quien conoce un lenguaje natural, conoce, tácitamente, un sistema de reglas. Este es el único supuesto gracias al cual podemos explicar la grandiosa facultad de un hablante, de utilizar el lenguaje creadoramente. Los hablantes fluentes producen o comprenden oraciones que nunca antes había encontrado, y pueden hacerlo indefinidamente, tantas veces como nuevas oraciones lo requieran. En el uso normal del lenguaje, la producción y comprensión de nuevas oraciones, creadas en el momento, es la regla más que la excepción. Las excepciones son los saludos habituales, las exclamaciones estereotipadas, los clisés, las citas directas, etc. Normalmente, lo que nosotros decimos y lo que oímos decir a otros no es inteligible porque sea una repetición de determinadas emisiones con las que ya estamos familiarizados por haberlas oído otras veces, sino porque poseemos los medios de crear nuevas oraciones e interpretaciones de nuevas oraciones. La creatividad que se demuestra en la producción y comprensión de oraciones nuevas es algo así como la creatividad puesta de manifiesto cuando alguien multiplica correctamente dos números que nunca había multiplicado ni visto multiplicar antes. Ambos tipos de creatividad son casos de comportamientos sometidos a unas reglas, en los que las reglas que abstractamente representan un número infinito de construcciones posibles son utilizadas para producir una u otra construcción real comprendida en ellas. No consideramos que tenga un dominio de la aritmética quien sólo sea

capaz de desenvolverse bien con problemas en cuyas soluciones se haya ejercido mucho. Siguiendo el criterio del dominio de la aritmética, el criterio de la fluencia lingüística de una persona será, más bien, el de saber si puede desenvolverse satisfactoriamente en la producción y comprensión de oraciones que no le hayan sido enseñadas previamente, de oraciones que encuentre por primera vez. De un modo análogo, ninguna prueba que contenga sólo preguntas acerca de oraciones con las que un sujeto se haya familiarizado por sus lecciones puede informarnos acerca de su fluencia; una alta puntuación significaría sólo que había recordado las oraciones que figuraban como ejemplos en sus lecciones. En cambio, si le proponemos una prueba acerca de oraciones que sean enteramente nuevas para él, se verá obligado a demostrar su dominio de las reglas del lenguaje, y no el aprovechamiento de su memoria.

Así, el carácter fundamental de la fluencia lingüística es su creatividad. En virtud de la conquista de esa fluencia, un hablante obtiene la facultad de producir y comprender un número infinito de oraciones, incluso aunque no haya tenido ninguna orientación previa acerca de ellas. Este aspecto creador de la fluencia es tan habitual en nuestro uso cotidiano del lenguaje, que rara vez es realmente reconocido, ni se le concede su verdadera importancia teorética. Pero si consideramos lo que significa el aprendizaje de un lenguaje extraño, debemos evitar el darlo por supuesto, y concederle su auténtica importancia. Supongamos que estamos examinando a alguien para determinar si ha conseguido fluencia en un lenguaje extraño, o no. Desde luego, no le consideramos con dominio del lenguaje extraño, si sólo es capaz de comprender o producir aquellas oraciones cuyo significado le ha sido enseñado previamente. De un modo análogo, no consideramos que los animales tengan fluencia en el lenguaje, cuando se limitan a responder correctamente a unas órdenes verbales en las que han sido ampliamente ejercitados. Más bien, el criterio para determinar si alguien ha conseguido fluencia consiste en que pueda o no pueda comprender cualquiera oración en el lenguaje extraño, que no haya encontrado antes (y que un hablante del lenguaje extraño podría comprender). La importancia teorética de la facultad de producir y comprender nuevas oraciones es, por lo tanto, la demostración real de la fluencia.

Dado que los hablantes fluentes son fluentes a causa de su conocimiento de las reglas del lenguaje y que la comunicación lingüística es un proceso en el que el significado que un hablante relaciona con los sonidos que él emite es el mismo significado que el oyente relaciona con esos mismos sonidos, parece necesario llegar a la conclusión de que los hablantes de un lenguaje natural se comunican entre sí en su lenguaje, porque todos ellos poseen esencialmente el mismo sistema de reglas. La comunicación puede establecerse porque un hablante codifica un mensaje utilizando las mismas reglas lingüísticas que su oyente utiliza para descodificarlo. Esto resulta más claro, si recordamos cómo aprendemos un lenguaje extraño en la escuela. Nuestro profesor y el libro de texto nos dan una más o menos exacta aproximación a las reglas que todo hablante del lenguaje extraño conoce tácitamente. Nuestra tarea consiste en aprenderlas lo suficientemente bien para que nosotros produzcamos emisiones que puedan ser descifradas por los hablantes de ese lenguaje extraño, y para que comprendamos las emisiones de aquellos mismos hablantes. Esta especie de ejemplo pone de manifiesto el hecho de que nuestra competencia en un lenguaje extraño depende de que las reglas que a nosotros se nos han enseñado sean equivalentes, y en qué medida, a las que los hablantes del lenguaje extraño adquirieron naturalmente. Pero demuestra también que todos los hablantes del lenguaje extraño tienen que usar esencialmente el mismo sistema de reglas, es decir, que los sistemas usados por distintos hablantes no pueden diferir profundamente unos de otros, porque ésta es una precondición de nuestra facultad de comunicarnos con un posible hablante del lenguaje extraño sobre la base de las reglas que hemos aprendido en la escuela.

Así, contrariamente a la concepción de los conductistas de la comunicación lingüística en la que los hablantes son considerados como autómatas y a la concepción de la armonía preestablecida según la cual no puede haber ninguna explicación causal de la comunicación lingüística, nosotros ofrecemos una concepción más realista. En líneas generales, y un tanto metafóricamente, podemos decir que, cuando se establece una comunicación lingüística correcta, se produce algo parecido a lo siguiente. El hablante, por razones que lingüísticamente son insignificantes, elige algún mensaje que desea transmitir a sus oyentes: algún pensamiento que quiere hacerles recibir o alguna orden que necesita darles o alguna pregunta que quiere formularles. Este mensaje está codificado en la forma de una representación fonética de una emisión, mediante el sistema de reglas lingüísticas de que el hablante está provisto. Esta codificación se convierte en una señal para los órganos de articulación del hablante, y éste vocaliza una emisión de la misma fonética, la cual es, a su vez, recogida por los órganos de audición de los oyentes. Los sonidos verbales que estimulan estos órganos se convierten entonces en una señal nerviosa, de la cual se obtiene una representación fonética equivalente a aquella en la que el hablante codificó su mensaje. Esta representación es descodificada en una representación del mismo mensaje que el hablante eligió originalmente para transmitir mediante el sistema equivalente de reglas lingüísticas del oyente. Por lo tanto, como el oyente emplea el mismo sistema de reglas para descodificar que el hablante emplea para codificar, se produce un ejemplo de comunicación lingüística correcta.

Esta descripción de la comunicación lingüística apenas es algo más que una esbozada exposición de nuestro tema. Trataremos de distinguir varios aspectos de la investigación de la comunicación lingüística y de formular una teoría acerca de algunos de estos aspectos. Pero, mientras no hayamos avanzado considerablemente más en el desarrollo de tal teoría, no será posible dar una exposición de nuestro tema más precisa que la que acabamos de facilitar. Después de todo, es tal teoría la que nos provee de una exposición precisa de esta concepción del tema, más vaga y más intuitivamente comprendida. El intento de explicar los conceptos en que descansa nuestra esbozada exposición inicial del tema orienta el desarrollo de la teoría y conduce también a nuevos conceptos que señalan nuevas demarcaciones del tema, que no podrían ser previstas al principio.

La comunicación lingüística adopta tantas formas como distantes son los lenguajes naturales en que los seres humanos se comunican entre sí. Para describir la comunicación lingüística en todas sus formas, el linguista escribe *descripciones lingüísticas* por lenguajes naturales. Una descripción lingüística es una teoría científica en un sentido totalmente correcto. La materia de que trata es uno determinado de los lenguajes naturales que se han hablado o se hablan en el mundo, o, más concretamente, las reglas internas, comunes a los hablantes que se comunican en ese lenguaje. Así, describe el conocimiento cuya posesión permite a un hablante fluente comunicarse con otros hablantes de su lenguaje *L* y cuya ausencia impide a los que sólo hablan otro lenguaje comunicarse en ese lenguaje con los hablantes monolinguales de *L*. La formulación de tales reglas internas relaciona entre sí hechos de lenguaje observables, a través de los complejos modelos deductivos formalizados en la descripción lingüística. Las reglas de una descripción lingüística, que son análogas a las leyes de una teoría física, relacionan tales hechos porque son generalizaciones que expresan conexiones invariantes entre las distintas clases de hechos-tipo lingüísticos. Así, la descripción lingüística completa es un sistema, del cual pueden derivarse, como consecuencia de sus reglas, los hechos fonológicos, sintácticos y semánticos de un lenguaje.

En este sentido, las descripciones lingüísticas tratan los mismos hechos fonológicos, sintácticos y semánticos que hemos encontrado en los tradicionales libros de gramática. Pero su tratamiento se expresa en una teoría deductiva, formalizada, cuyo objetivo es el de dar cuenta exhaustiva y sistemática del lenguaje, mientras que los tradicionales libros de gramática expresan sus observaciones de un modo informal, incompleto, y sin gran deseo de alcanzar una sistematización. La diferencia es muy similar a la que existe entre la mecánica después de haber sido sistematizada sobre una base newtoniana y antes, en épocas en que los fenómenos mecánicos eran descritos independientemente de toda ley unificadora. Los tradicionales libros de gramática son catálogos de tipos de fenómenos: en el plano fonológico, vocales, consonantes, diptongos, acentos tónicos, sílabas, etc.; en el plano sintáctico, partes de la oración, orden de las palabras, concordancia, frases-tipo, tiempos del verbo, cláusulas, etc.; en el plano semántico, significado de las palabras, sinonimia, autonimia, referencia, connotación, etc. Exponen sus observaciones acerca de tales fenómenos en forma de paradigmas con comentarios informales sobre la naturaleza de los fenómenos mostrados por el paradigma, dejando al juicio del lector el determinar la extensión a casos similares y la relación de tales casos con otros. Tal tratamiento está lejos de ser exhaustivo, ni existe concepción alguna que pueda explicar en qué consistiría un tratamiento exhaustivo, porque no hay ninguna noción de regla que pudiera usarse como un medio de expresar hechos generales del

lenguaje. Las gramáticas tradicionales también carecían de una noción de un sistema de reglas lingüísticas. Como consecuencia de ello, e independientemente de su gran difusión, no pudieron pasar de ser simples catálogos de tipos de fenómenos lingüísticos, sin sistematización alguna en términos de estructura subyacente que alcance a los tipos y sin generalizaciones capaces de establecer lo que es verdadero en cuanto a cada caso de un tipo.

Lo que hace a una descripción lingüística diferente de una gramática tradicional no es la materia de que trata, sino su forma de aproximación a esa materia. En especial, el rasgo diferenciador es que una descripción lingüística facilita una organización formal comprensiva de la materia, en términos de una concepción general de la regla y del sistema lingüísticos que ella hereda de la teoría del lenguaje, que es también una teoría acerca de la naturaleza de las descripciones lingüísticas.

La teoría del lenguaje es una formulación de los universales del lenguaje, aquellos principios de organización e interpretación que dan a los lenguajes naturales particulares la forma sistemática de un lenguaje natural. Los lingüistas estudian los detalles de los lenguajes naturales particulares, formulando sus hechos en descripciones lingüísticas, a fin de descubrir la extensión de la diversidad en las formas de comunicación lingüística. Los lingüistas estudian los rasgos comunes a todos los lenguajes naturales, formulando ciertos métodos para la teoría del lenguaje, a fin de descubrir los límites de dicha diversidad.

Hay dos modos de considerar la teoría del lenguaje. En uno, hay una especificación de aquellos rasgos de los lenguajes naturales que son invariantes de un lenguaje a otro, y que forman la base sobre la cual los hablantes de los lenguajes naturales enlazan sonidos y significados. En el otro, la teoría del lenguaje es un modelo del que cada descripción lingüística empíricamente correcta es un ejemplo, que ejemplifica cada rasgo del modelo. El modelo incorpora una concepción definida en cuanto a qué forma de sistema de comunicación es un lenguaje natural. Las descripciones lingüísticas particulares diseñadas en este modelo se refieren a los diversos modos en que lenguajes diferentes verifican esta concepción en la forma de sistemas de comunicación real para uso humano. El primer modo de considerar la teoría del lenguaje lo hace desde el punto de vista de lo que es una teoría de él, mientras que el segundo la considera desde el punto de vista de cómo se formula la teoría. Es decir, las exposiciones en la teoría del lenguaje se formulan como presiones sobre la forma de toda descripción lingüística, mientras que estas presiones son interpretadas como la expresión de principios generales incorporados a las reglas que cada hablante de un lenguaje natural ha interiorizado.

La construcción de una teoría del lenguaje y la construcción de descripciones lingüísticas para lenguajes particulares son estrechamente interdependientes. Dado un conjunto de descripciones lingüísticas empíricamente correctas, el lingüista puede abstraer sus rasgos comunes y generalizar así, a partir de ellos, una teoría de la estructura lingüística en general. De este modo, establece unas generalizaciones expresivas de universales lingüísticos que son inductivamente extrapoladas de los métodos conocidos representados en el conjunto dado de descripciones lingüísticas ya construidas. A su vez, dada una teoría del lenguaje, un lingüista puede facilitar la construcción de descripciones lingüísticas, utilizando ese modelo como patrón para organizar según él los hechos del lenguaje descubiertos en su área de trabajo. De un modo semejante, la justificación de la teoría del lenguaje y las descripciones lingüísticas particulares son interdependientes. La teoría del lenguaje se prueba empíricamente determinando si sus generalizaciones, que extrapolan una propiedad invariante de todos los lenguajes previamente descritos, atribuyen a cada lenguaje sucesivamente investigando propiedades que esos lenguajes realmente tienen. Una descripción lingüística particular, aunque es principalmente responsable de los hechos de un lenguaje, queda mejor probada si su fundamento empírico procede de verdades generales del lenguaje, fundadas, a su vez, en un caudal de evidencias derivadas de muchos lenguajes naturales, que si la evidencia de la descripción lingüística se limita al lenguaje en cuestión.

De modo que la evidencia en cuanto a las generalizaciones del lenguaje que se presentan en la teoría del lenguaje procede del mismo conjunto de hechos que confirma las descripciones lingüísticas particulares. Tales generalizaciones son verdaderas sólo en el caso de que los rasgos que atribuyen a las descripciones lingüísticas sean realmente los

que deben atribuirse a las descripciones lingüísticas para que éstas sean empíricamente correctas. Esto es muy claro. Pero lo que no es claro es que la teoría del lenguaje sea, en cierto sentido, una parte de la exposición de cada descripción lingüística particular. Esto es, todas las descripciones lingüísticas tienen una parte común, consistente en el conjunto de universales lingüísticos, y una parte variable, consistente en las generalizaciones que sólo son válidas para el lenguaje dado. Una remota analogía, pero sólo remota, sería ésta: así como en algunos juegos de naipes colocamos sobre la mesa una carta boca arriba, que sirve como carta libre en la mano de cada jugador, de modo que cada mano consta realmente de las cartas que se tienen más esa carta libre, nosotros consideramos que la teoría del lenguaje forma parte de toda descripción lingüística, de modo que cada una de tales descripciones consta de una suma de los hechos idiosincrásicos de un lenguaje, más una suma de los hechos generales del lenguaje. Por lo tanto, las propiedades de un lenguaje natural que se encuentran también en todos los otros lenguajes no se representan en forma de generalizaciones de ese lenguaje natural. Más bien, tales hechos son tratados precisamente en la teoría del lenguaje como hechos del lenguaje, haciendo así innecesarias muchas exposiciones particulares de ellos. De este modo, la lingüística pone en práctica un excelente método de economía teorética, evitando la redundancia que se produciría si cada verdad acerca de todos los lenguajes se estableciese independientemente para cada lenguaje, es decir, si todas esas verdades se redactasen tantas veces como redactamos descripciones lingüísticas con el fin de agotar el conjunto de lenguajes naturales. Además, desde el punto de vista de la teoría del lenguaje, donde lo que nos interesa no es la posible diversidad entre los lenguajes, sino los límites necesarios de esa diversidad, tales desarrollos en la economía conceptual aumentan la fuerza de la teoría. Cuantos más hechos de los lenguajes particulares se encuentren como ejemplos de verdades generales del lenguaje y sean formulados como tales, más estrechas serán las precisiones impuestas a los sistemas que calificamos como descripciones lingüísticas. Así, cuanto más apuremos empíricamente los límites de la diversidad lógicamente posible en los lenguajes naturales, más rica será la teoría de la estructura universal dada en la teoría del lenguaje.

La teoría del lenguaje consta de tres subteorías, cada una de las cuales corresponde a uno de los tres componentes de una descripción lingüística y nos provee de una exposición de la organización de ese componente dentro de una descripción lingüística.[1] Nosotros usamos los términos *teoría fonológica, teoría sintáctica* (las cuales, juntamente, comprenden la *teoría gramatical*), y *teoría semántica* para referirnos a esas subteorías. Usamos los términos *componente fonológico, componente sintáctico*, y *componente semántico* para referirnos, respectivamente, a las tres partes correspondientes de una descripción lingüística. El componente fonológico es una exposición de las reglas mediante las cuales un hablante actúa respecto a los sonidos verbales de su lenguaje; el componente sintáctico es una exposición de las reglas mediante las cuales organiza esos sonidos en estructuras oracionales, y el componente semántico es una exposición de las reglas mediante las cuales interpreta las oraciones como mensajes significantes.

El componente sintáctico de una descripción lingüística es un conjunto de reglas que da origen a una clase infinita de estructuras formales abstractas, cada una de las cuales describe la organización sintáctica de una oración. Es la fuente de las inserciones en los componentes fonológico y semántico. El componente fonológico opera sobre tales objetos formales para determinar su forma fonética, mientras que el componente semántico opera sobre ellos para determinar su significado. Los componentes fonológico y semántico son, por ello, puramente interpretativos: relacionan las estructuras formales abstractas en que se apoyan las oraciones con un esquema de pronunciación, por una parte, y con una representación de conceptualización, por otra. La ausencia de una conexión entre el componente fonológico y el sintáctico explica el hecho, generalmente conocido, respecto a los lenguajes naturales, de que los sonidos y los significados se relacionan arbitrariamente. Pero el hecho de que la función de cada uno de ellos se desempeña sobre la misma estructura formal, o se relacionan sintácticamente con estructuras formales, facilita una base sobre la cual una descripción lingüística puede hermanar correctamente interpretaciones semánticas y representaciones fonéticas, explicando así lo que significa que los hablantes suelan hermanar significados y sonidos.

1. J. J. Katz y P. Postal, *An Integrated Theory of Linguistic Descriptions*, M. I. T. Press, 1964.

Por lo tanto, la misión de las descripciones lingüísticas particulares es la de decir cómo las interpretaciones semánticas y las representaciones fonéticas se corresponden en cada uno de los lenguajes que se hablan en el mundo. Si esta misión ha de llevarse a cabo, es evidentemente necesario disponer de algunos medios generales para representar secuencias de sonidos, significados, y las estructuras sintácticas intermedias. Tales medios deben proveer definiciones de los conceptos *interpretación semántica, representación fonética* y *descripción sintáctica* que basten para identificar formalmente ejemplos de interpretaciones semánticas, representaciones fonéticas y descripciones sintácticas que aparezcan en las descripciones lingüísticas particulares. Estas definiciones deben especificar qué es lo que ciertos objetos formales de las descripciones lingüísticas tienen en común por el hecho de que todos son interpretaciones semánticas, representaciones fonéticas, o descripciones sintácticas. Por consiguiente, tales definiciones deben ser universales lingüísticos, y la tarea de construirlas se convierte en el objetivo central, respectivamente, de la teoría semántica, de la fonológica y de la sintáctica.

Cada una de estas teorías, por lo tanto, se halla relacionada con tres problemas. Primero, una especificación de la forma de las reglas que aparecen en el componente de una descripción lingüística, de la que es teoría general. Segundo, una especificación del sistema dentro del cual aparecerán las reglas de la forma prescrita. Tercero, una especificación de las frases gramaticales universales que suministran un vocabulario teorético para redactar las reglas particulares de la forma prescrita.

Según hemos dicho antes, la teoría del lenguaje contiene una exposición de la forma de las conexiones entre los componentes fonológico, sintáctico y semántico de una descripción lingüística. Esto los une en un sistema integrado, coherente, que es la descripción lingüística. Nosotros hemos dado una versión en líneas generales de esta exposición, al decir que los componentes semántico y fonológico actúan para asignar interpretaciones a las estructuras formales producidas por el componente sintáctico, pero esta versión tendrá que ser estudiada con más detalle y con una precisión considerablemente mayor para establecerla como la teoría de la exposición de estas conexiones dentro del lenguaje.

Además de esta exposición y de las teorías de los componentes de una descripción lingüística, la teoría del lenguaje debe contener un procedimiento explícito para valorar las posibles descripciones lingüísticas de un lenguaje, a fin de discernir cuál de ellas es la que mejor se ajusta a los datos utilizables. Este procedimiento será una especificación de principios de metodología científica, en una forma que los haga directamente aplicables a la tarea de valorar las descripciones lingüísticas enfrentadas, respecto a un lenguaje dado. La elección de una hipótesis en lingüística, como en cualquier otra ciencia, siempre está predeterminada por los datos utilizables. Independientemente de la cantidad o de la clase de datos que se hayan obtenido, los datos serán un verdadero y muy pequeño subconjunto del conjunto indefinidamente extenso de observaciones posibles, acerca de las cuales, en muchos casos, las teorías enfrentadas hacen predicciones opuestas. Sin algún medio de elección que supere la predicción afortunada de las observaciones válidas, serán igualmente sustentables hipótesis incompatibles. Tal predeterminación indica que la elección debe adoptarse por consideraciones atinentes a la simplicidad y generalidad de las hipótesis que predicen igualmente bien los hechos conocidos. La metodología científica, en relación con el caso de la lingüística, nos dice algo acerca de la simplicidad de la forma en que deben ser organizados los datos, exactamente como, en otros casos, la metodología científica nos dice que la forma en que los valores que expresan una relación entre dos variables debe ser la curva más simple que relacione los valores observados. Pero, a fin de utilizar estas consideraciones científicas generales en lingüística, debemos disponer de una exposición precisa de la forma que adoptan en lingüística —cómo han de ser aplicadas para decidir elecciones en casos lingüísticos—. Se ha propuesto que los lingüistas expliquen estas consideraciones científicas generales como una métrica que determine cuál de los dos sistemas propuestos es la más simple y más general información de los hechos, sobre la base del número de reglas y símbolos que se presentan en cada uno. Yo no comentaré esta propuesta, limitándome a señalar que presupone que contamos con adecuadas teorías de los componentes fonológico, sintáctico y semántico que fijan el tipo de

reglas y el conjunto de símbolos respecto a los cuales ha de ser utilizada esa información.

Por último, la teoría del lenguaje debe contener algún principio general mediante el cual las derivaciones producidas por las reglas del componente sintáctico puedan ser mecánicamente convertidas en la descripción sintáctica de la oración generada en la derivación. Sobre esto volveremos más adelante.

Una descripción lingüística es una idealización, exactamente en el mismo sentido en que lo es toda teoría científica: por ejemplo, la teoría dinámica de los gases, o la teoría newtoniana de la mecánica. De igual modo que estas teorías físicas no establecen sus leyes según el comportamiento de los objetos físicos reales, sino que, por el contrario, las formulan en términos de objetos ideales en condiciones ideales, así las reglas de una descripción lingüística no se establecen como una representación de lo que todos los hablantes reales conocen tácitamente acerca de sus lenguajes, sino que se formulan como una representación del conocimiento tácito de un hablante ideal. Por lo tanto, que el idioma de algunos hablantes ingleses no muestre una distinción representada en las reglas de una descripción lingüística del inglés no tiene mayor importancia de la que tiene, para la mecánica newtoniana, el hecho de que los objetos de ciertas proporciones caigan realmente más de prisa que los objetos de otras proporciones.

Pero la idealización va incluso más allá. Hace también abstracción de la heterogeneidad del idioma natural, con sus irregularidades producidas por lapsus de la memoria, descuidos de la atención, cambios de interés, distracciones, comienzos equivocados, errores extraños. Para formular esta idealización, nosotros podemos decir que una descripción lingüística es una explicación de la *competencia lingüística* de un hablante fluente, es decir, lo que él tácitamente conoce acerca de la estructura de las oraciones de su lenguaje, que le diferencia de aquellos que no pueden hablar su lenguaje, como opuestos a su *ejecución lingüística*, es decir, lo que él hace con ese conocimiento en las situaciones reales del idioma. Las descripciones lingüísticas tratan de reconstruir la contribución de la competencia lingüística de un habitante ideal a su ejecución lingüística, independientemente de otros factores psicológicos que influyen en el carácter de la ejecución lingüística, ideal o no. Sólo en el seno de una idealización semejante constituyen los hechos del idioma real un verdadero reflejo de la competencia de los hablantes reales.

Esta distinción entre competencia lingüística y ejecución lingüística es paralela a la distinción entre lenguaje y habla, en la que por habla nosotros entendemos un fenómeno observable, con aspectos fisiológicos, de comportamiento y acústicos, y por lenguaje entendemos una cierta realidad mental en la que se basan los fenómenos observables del habla. Pueden ser conceptuados como si indicasen diferentes modos de considerar la misma diferencia. Desde el punto de vista del científico empírico, esta dual distinción se da entre el sujeto de una investigación científica y la evidencia de las construcciones teoréticas desarrolladas en el curso de la investigación. Los hechos del habla adecuadamente tamizados para eliminar la influencia de factores lingüísticamente insignificantes, son los datos sobre los cuales un lingüista construye y ensaya una teoría de un lenguaje natural. Desde el punto de vista del que se sirve del lenguaje, hay una distinción entre la representación interior que el hablante tiene de las reglas de su lenguaje, adquiridas en su transición desde infante (*infans*, el que no habla) a hablante fluente, y su uso de esas reglas para comunicarse en situaciones reales. Así nos encontramos, una vez más, con que la construcción de una descripción lingüística está relacionada con el descubrimiento de una realidad mental en la que se basa el comportamiento lingüístico real.

Por consiguiente, una descripción lingüística puede no estar más relacionada *per se* con la ejecución en el habla de los miembros de una comunidad de lenguaje, de lo que un físico está relacionado *per se* con las lectura de un contador, o un biólogo con los ejemplares individuales de distintas especies. Al igual que otros científicos, el lingüista idealiza más allá de los fenómenos heterogéneos que directamente se le presentan en la naturaleza. Así, el lingüista no hace esfuerzo alguno por describir el habla real, el comportamiento lingüístico resultante de la ejecución del hablante, sino que se concentra sobre el lenguaje, la estructura mental que constituye la competencia del hablante en el lenguaje.

Resumiendo, la lingüística estudia la competencia de unos hablantes idealmente fluentes, comunicándose con otros hablantes igualmente ideales, donde por «ideal» se entiende

que su ejecución está considerada como totalmente inafectada por factores lingüísticamente tan insignificantes como aquellos 1) que se refieren a variaciones en la ejecución de una situación del habla a otra —por ejemplo, distracciones, errores debidos a descuidos de atención e interés, intentos de bromas o burlas, comienzos equivocados, nerviosidad, etc.—, 2) que se refieren a variaciones de un hablante a otro —por ejemplo, formación, motivaciones, inteligencia, latiguillos característicos, etc.—, y 3) que se refieren a las limitaciones psicológicas generales —por ejemplo, la magnitud del número de temas que pueden conservarse en la memoria inmediata, limitaciones en el campo de la percepción, y mortalidad humana—. Esta es, precisamente, otra forma de decir que el habla real es un complejo producto de la intervención de una variedad de factores, de los cuales solamente es uno el sistema interno de reglas lingüísticas que constituye el conocimiento tácito que el hablante tiene de su lenguaje. El lingüista mantiene constantes los factores de los tipos 1), 2) y 3), y trata de determinar la contribución de la competencia del hablante a su ejecución. Así construye una teoría de qué estructura mental, precisamente, hace esta contribución.

Por consiguiente, la idealización del lingüista se halla sometida a la necesidad empírica de que, según las condiciones reales del habla se acercan más estrechamente al ideal, las predicciones que se derivan, única y directamente, de una teoría de la competencia deben aproximarse más estrechamente a la estructura de los hechos del habla real. Además, se dará el caso de que, como llegamos a comprender no sólo la contribución de la competencia lingüística del hablante, sino también la contribución de factores como 1), 2) y 3), nos hallamos en mejor situación para explicar el comportamiento del habla real en términos de la inter-relación de la competencia y de factores psicológicos lingüísticamente extraños, ajustado cada elemento a su propia función en la producción del comportamiento lingüístico. Por ello, en fin, aunque no ciertamente en un futuro próximo, la teoría de la competencia lingüística deberá convertirse en un componente de una teoría psicológica más amplia que describa cómo la ejecución verbal se produce causalmente.

Las descripciones lingüísticas y la teoría del lenguaje están, a mi modo de ver, legítimamente consideradas como pertenecientes al campo de la epistemología, mejor que al de la psicología propiamente dicha. Generalmente, están concebidas como descripciones de capacidades y habilidades mentales, pero esto no es, en ningún sentido, psicologismo ni una falacia psicológica. Las críticas en el sentido de que una determinada exposición de conocimiento es sólo psicologismo o comete la falacia psicológica son correctas si la exposición criticada ha ofrecido análisis psicológicos del origen o desarrollo de una cierta forma de conocimiento, cuando, en su lugar, tendría que haber ofrecido un análisis de su estructura conceptual, de los límites de su aplicabilidad, y de la clase de fundamentos en que descansa su validez. Pero las teorías de los lenguajes naturales y del lenguaje ofrecen análisis epistemológicos de una cierta clase de conocimiento, la que de su lenguaje tienen los hablantes. Tales teorías tratan de mostrar la estructura de ese conocimiento, sus límites y fundamentos. Porque son teorías de competencia, no teorías de ejecución. Por otra parte, una teoría de la ejecución, es decir, una teoría que trate de cómo el conocimiento lingüístico es utilizado en la producción y comprensión del habla real, sería una teoría abiertamente psicológica. Pero las teorías del lenguaje son diferentes de las teorías psicológicas, en el mismo sentido en que difieren la epistemología y la psicología. Las primeras nos proveen de reconstrucciones formales de los conceptos y principios en el seno de una de las esferas cognoscitivas de interés para la epistemología, mientras que las segundas determinan la contribución de todos los factores que influyen en el comportamiento lingüístico, al tratar de su origen, de su desarrollo y de sus consecuencias.

Teoría gramatical

La teoría gramatical es aquella rama de la teoría del lenguaje que trata de la naturaleza de los componentes fonológico y sintáctico de una descripción lingüística, o, dicho de otro modo aquella rama en que se establecen los universales fonológicos y sintácticos del lenguaje. La teoría fonológica exigirá algún tratamiento en esta sección, pero, debido a consideraciones de fundamental importancia filosófica, esta sección se centrará en la teoría sintáctica.

DIRECTORIO DE ALUMNOS DEL CURSO METODO CIENTIFICO: ESQUEMAS PARA SU PRACTICA 1979.

1.- ARTURO E. ACEVEDO GOMEZ
UAM IZTAPALAPA
MICHOACANA Y PURISIMA
MEXICO 13, D.F.
TEL.581.50.55 EXT.4480

CERRO GORDO 369
MEXICO 21, D.F.
TEL. 549.86.30

2.- PEDRO ALCANTARA AGUILAR
IIMAS
UNAM
MEXICO 20, D.F.

EZEQUIEL ORDOÑEZ 149
MEXICO 20, D.F.
TEL.550.87.34

3.- CLARA ALVARADO ZAMORANO
CENTRO DE INSTRUMENTOS
UNAM
TEL.550.04.16

PSEO ESPAÑA 47
LOMAS VERDES
NAUCALPAN, EDO. DE MEX.
TEL.562.98.34

4.- HUMBERTO BERLANGA
S. A.R.H.
REFORMA 35-11°
MEXICO 1, D.F.
TEL.591.03.83

EDIF. A-9 DEPTO.401
TORRES DE MIXCOAC
MEXICO 19, D.F.

5.- JOSE L. BOLAÑOS GONZALEZ
CIA. DE LUZ Y FUERZA DEL CENTRO
MELCHOR OCAMPO 171
MEXICO, D.F.
TEL. 566.46.79

HABANA 413
TEPEYAC-INSURGENTES
MEXICO 14, D.F.
Tel.577.34.45

6.- ROBERTO JAVIER CONTRERAS MARTINEZ
S.A.R.H.
AV. SN. BERNABE 549
SAN JERONIMO LIDICE
MEXICO, D.F.

Ote. 67 A No. 2817
COL. ASTURIAS
MEXICO 8, D.F.
TEL.538.20.56

7.- RAUL CUELLAR CHAVEZ
DEPFI
JEFE DE LA SECCION DE INGENIERIA AMBIENTAL
UNAM
MEXICO 20, D.F.
TEL.550.52.15 EXT.4472

8.- MIGUEL GONZALEZ MENDEZ
INST. TEC. REGIONAL DE CAMPECHE
APODO.POSTAL 347
CAMPECHE, CAMPECHE
TEL.6.45.42

Calle 43 # 30 "B"
CAMPECHE, CAMPECHE
TEL. 6.19.63

9.- ROBERTO MACIAS PEREZ
FAC. DE ING.
UNAM
MEXICO 20, D.F.

CALLE 71 No. 19-4
MEXICO 9, D.F.
TEL.558.53.40

10.- GILDO MEDINA VIDAURRI
DIR. GRAL. DE OBRAS MARITIMAS
S. C.T.
INSURGENTES SUR 465-7°
MEXICO, D.F.
TEL.564.77.58

TENAYUCA 221-4
MEXICO 13, D.F.
TEL.559.09.28

11.- ANASTASIO MONTIEL MAYORGA
FAC. DE ING.
UNAM
TEL.550.52.15 EXT. 3755

LOMAS DE BECERRA 16-203
MEXICO 18, D.F.

12.- ING. HECTOR H. NORIEGA ROMERO
AUGUSTO RODIN 169-112
MEXICO, D.F.

13.- IGNACIO PALOMARES PEÑA
ENEP ACATLAN
JEFE DE LA SECC. DE SISTEMAS
ELECTROMECANICOS
SAN JUAN TOTOLTEPEC SAN MATEO
ESTADO DE MEXICO
TEL.373.23.99 EXT.152

NOGAL 36
STA. URSULA COAPA
MEXICO 22, D.F.
TEL.677.80.63

14.- EDUARDO RAMIREZ SANCHEZ
FAC. DE ING.
UNAM
MEXICO 20, D.F.
TEL.550.52.15 EXT. 3755

CRUZ AZUL 161
COL. INDUSTRIAL
MEXICO 14, D.F.

15.- ROBERTO ROSA BORGES DE HOLANDA
UNAM
MEXICO 20, D.F.
TEL.550.52.15 EXT.3740

MORAS 640-1
MEXICO 12, D.F.

16.- JORGE SILVA MIDENCES
S.A.H.O.P.
XOLA Y AVE. UNIVERSIDAD
MEXICO 12, D.F.
TEL.590.31.25

BOLIVAR 745-104
COL. ALAMOS
MEXICO 13, D.F.
TEL.579.77.90

17.- LUZ MARIA O. TAMAYO P.
INSTITUTO DE GEOGRAFIA
UNAM
MEXICO 20, D.F.
TEL.550.52.15 EXT. 4294

SUCHIL 142
SN. PABLO TEPETLAPA
MEXICO 21, D.F.
TEL.544.63.79