



UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTÓNOMA DE
MÉXICO

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

**PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN
INGENIERÍA**

ESTUDIO DE CICLOS ECONÓMICOS
UTILIZANDO ANÁLISIS EN TIEMPO Y
FRECUENCIA DE SERIES DE TIEMPO
EN EL CASO DE MÉXICO

T E S I S

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:

MAESTRO EN INGENIERÍA

INGENIERÍA DE SISTEMAS – OPTIMACIÓN FINANCIERA

P R E S E N T A :

FÍS. ENRIQUE KIYOSHI GARCÍA GARCÍA

TUTOR:

DR. FEDERICO HERNÁNDEZ ÁLVAREZ

CO-TUTOR:

DR. PATRICK M. CROWLEY

2012

JURADO ASIGNADO:

Presidente: Dr. Aceves García Ricardo

Secretario: Dr. Gelman Muravchik Ovsei

Vocal: Hernández Álvarez Federico

1^{er} Suplente: Dr. Morales Arrollo Miguel Ángel

2^{do} Suplente: Dr. Ordorica Mellado Manuel

Lugares donde se realizó la tesis:

Universidad Nacional Autónoma de México
Posgrado de Ingeniería
México, D.F.

Texas A&M University - Corpus Christi
College of Business
Corpus Christi, Texas, Estados Unidos

TUTOR DE TESIS:

Hernández Álvarez Federico

CO-TUTOR DE TESIS:

Patrick M. Crowley

A handwritten signature in black ink, appearing to read 'Federico Hernández Álvarez', is written over two horizontal lines.

FIRMA

Tanto la pasión por las ciencias como la pasión por las artes nacen de un mismo impulso: captar la belleza del mundo en una visión propia.

Patricio T. Díaz Pazos

Agradecimientos:

*Agradezco a Dios.
Por ponerme en el camino
que él ha dispuesto para mí.*

*Agradezco a mi Madre.
Por el apoyo que me ha brindado
durante toda mi vida.*

*Al posgrado de ingeniería.
Mi más profundo agradecimiento
por mostrarme nuevos caminos y
horizontes en mi desarrollo profesional.*

*De manera especial agradezco al
CONACyT, sin cuyo apoyo
este proyecto no hubiera sido posible*

*A la universidad
Texas A&M University Corpus Christi.
Mi más sincera gratitud por todas las facilidades
brindadas para realizar esta investigación.*

*Le doy gracias a mis asesores:
Dr. Federico Hernández Álvarez y Dr. Patrick M. Crowley,
por su constante esfuerzo para mi desarrollo
académico, y por su apoyo para hacer
que este trabajo saliera adelante*

*Agradezco también a mis sinodales:
Dr. Aceves García Ricardo, Dr. Gelman Muravchik Ovsei,
Dr. Morales Arrollo Miguel Ángel, Dr. Ordorica Mellado Manuel
por formar parte de este proyecto
con sus apreciados comentarios*

Índice



Índice de tablas y figuras

- I. Introducción
 - 1.1. Resumen
 - 1.2. Propósito de la investigación
 - 1.3. Antecedentes
 - II. Ciclos Económicos
 - 2.1. ¿Qué son los Ciclos Económicos?
 - 2.2. Historia de los Ciclos Económicos
 - 2.3. Contextos Históricos y Ciclos Económicos
 - 2.4. El Análisis Cuantitativo de los Ciclos Económicos
 - III. Metodología
 - 3.1. Series de Fourier
 - 3.1.1. Transformada de Fourier
 - 3.1.2. Espectro de Potencias
 - 3.2. El Fenómeno de Gibbs
 - 3.3. El Teorema de Wiener–Khinchin
 - 3.4. Coherencia Espectral
 - 3.4.1. El Análisis de Fase
 - 3.5. Análisis Espectral Mediante Wavelets
 - 3.5.1. La Transformada Continua por Wavelets
 - 3.5.2. La Transformada Continua Inversa por Wavelets
 - 3.5.3. Espectro de Potencias y Análisis de Fase Mediante Wavelets
 - 3.5.4. La Wavelet de Morlet
 - 3.5.5. La Wavelet Generalizada de Morse
 - 3.5.6. Conversión de Escalas a Frecuencias
 - 3.6. Análisis de Coherencia Mediante Wavelets
 - 3.6.1. Transformada Cruzada, Coherencia y Fase Mediante Wavelets
 - 3.7. Teorema de Muestreo de Nyquist-Shannon
 - IV. Resultados
 - 4.1. Datos Utilizados
 - 4.2. Resultados del Análisis Espectral
 - 4.3. Resultados del Análisis de Coherencia
 - 4.4. Resultados del Análisis Espectral por Wavelets
 - 4.5. Resultados del Análisis de Coherencia por Wavelets

Apartado. Comparación de Resultados con los Obtenidos Mediante el Algoritmo de Bry-Boschan
 - V. Conclusiones y Recomendaciones
- Referencias
- Apéndice. La Transformada Rápida de Fourier

Índice de tablas y figuras

Tabla 1. Fechas inicial y final para cada una de las series históricas consideradas.

Tabla 2. Resultados del análisis espectral.

Tabla 3. Resultados del análisis de coherencia.

Figura 1. Incrementos Porcentuales Trimestrales del PIB

Figura 2. Ilustración del Ciclo Económico

Figura 3. Indicador de empleo en Estados Unidos

Figura 4. Ciclos cortos calculados con técnicas empíricas para el índice Standard and Poor's

Figura 5. Ejemplo de media móvil de una serie

Figura 6. Ejemplo del fenómeno de Gibbs. Aproximación de la función escalón

Figura 7. Ilustración de la fase de una onda senoidal

Figura 8. Diagrama de la diferencia de fase.

Figura 9. Partes real e imaginaria para la Wavelet de Morlet

Figura 10. Aliasing

Figura 11. Resultados para el análisis espectral por wavelets para el índice IPyC de México.

Figura 12. Resultados para el análisis espectral por wavelets para el índice All Ordinaries de Australia.

Figura 13. Resultados para el análisis espectral por wavelets para el índice Bovespa de Brasil.

Figura 14. Resultados para el análisis espectral por wavelets para el índice CAC 40 de Francia.

Figura 15. Resultados para el análisis espectral por wavelets para el índice DAX de Alemania.

Figura 16. Resultados para el análisis espectral por wavelets para el índice Dow Jones de Estados Unidos.

Figura 17. Resultados para el análisis espectral por wavelets para el índice FTSE 100 de Reino Unido.

Figura 18. Resultados para el análisis espectral por wavelets para el índice FTSE-ITA de Italia.

Figura 19. Resultados para el análisis espectral por wavelets para el índice Hang Seng de Hong Kong, China.

Figura 20. Resultados para el análisis espectral por wavelets para el índice IPSA 40 de Chile.

Figura 21. Resultados para el análisis espectral por wavelets para el índice Nasdaq de Estados Unidos.

Figura 22. Resultados para el análisis espectral por wavelets para el índice Nikkei de Japón.

Figura 23. Resultados para el análisis espectral por wavelets para el índice NSE 50 de India.

Figura 24. Resultados para el análisis espectral por wavelets para el índice Shanghai de China.

Figura 25. Resultados para el análisis espectral por wavelets para el índice SICA de México.

Figura 26. Resultados para el análisis espectral por wavelets para el índice SICC de México.

Figura 27. Resultados para el análisis espectral por wavelets para el índice Standard and Poor's de Estados Unidos

Figura 28. Resultados para el análisis espectral por wavelets para el índice TSX de Canadá.

Figura 29. Resultados para el análisis de coherencia por wavelets para los índices IPyC y All Ordinaries.

Figura 30. Resultados para el análisis de coherencia por wavelets para los índices IPyC y Bovespa.

Figura 31. Resultados para el análisis de coherencia por wavelets para los índices IPyC y CAC 40.

Figura 32. Resultados para el análisis de coherencia por wavelets para los índices IPyC y DAX.

Figura 33. Resultados para el análisis de coherencia por wavelets para los índices IPyC y Dow Jones.

Figura 34. Resultados para el análisis de coherencia por wavelets para los índices IPyC y FTSE 100.

Figura 35. Resultados para el análisis de coherencia por wavelets para los índices IPyC y FTSE ITA.

Figura 36. Resultados para el análisis de coherencia por wavelets para los índices IPyC y Hang Seng.

Figura 37. Resultados para el análisis de coherencia por wavelets para los índices IPyC e IPSA 40.

Figura 38. Resultados para el análisis de coherencia por wavelets para los índices IPyC y Nasdaq.

Figura 39. Resultados para el análisis de coherencia por wavelets para los índices IPyC y Nikkei.

Figura 40. Resultados para el análisis de coherencia por wavelets para los índices IPyC y NSE 50.

Figura 41. Resultados para el análisis de coherencia por wavelets para los índices IPyC y Shanghai.

Figura 42. Resultados para el análisis de coherencia por wavelets para los índices IPyC y SICA.

Figura 43. Resultados para el análisis de coherencia por wavelets para los índices IPyC y SICC.

Figura 44. Resultados para el análisis de coherencia por wavelets para los índices IPyC y Standard and Poor's.

Figura 45. Resultados para el análisis de coherencia por wavelets para los índices IPyC y TSX.

Figura 46. Resultados para el análisis de Bry-Boschan para los índices IPyC y SICC.

Figura 47. Resultados para el análisis por wavelets para los índices IPyC y SICC.

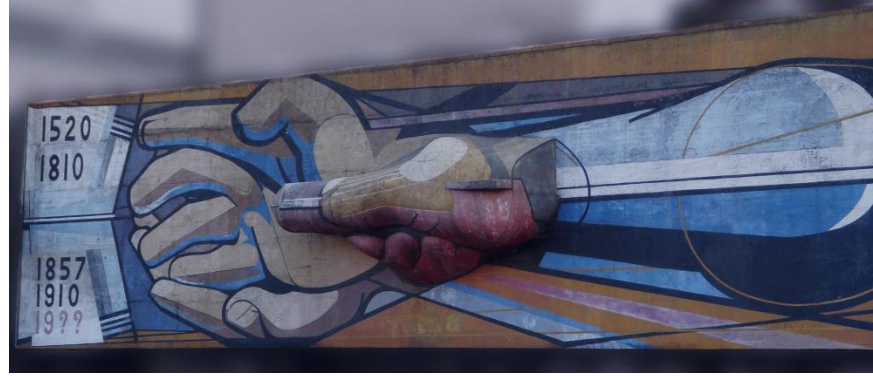
Figura 48. Resultados para el análisis de Bry-Boschan para los índices SICA y SICC.

Figura 49. Resultados para el análisis por wavelets para los índices SICA y SICC.

Figura 50. Resultados para el análisis de Bry-Boschan para los índices S&P500 y SICC.

Figura 51. Resultados para el análisis por wavelets para los índices S&P500 y SICC.

Capítulo I: Introducción



1.1. Resumen

En la economía se experimentan diferentes periodos de oscilación, los cuales se ven representados en una crisis, auge o una estabilidad económica. A estos periodos de contracción recuperación y auge se les llama ciclos económicos.

De acuerdo con Burns y Mitchell¹;

“Un ciclo económico consiste en expansiones que ocurren aproximadamente al mismo tiempo en muchas actividades económicas, seguidas de recesiones, contracciones y recuperaciones generales similares que se consolidan en la fase de expansión del ciclo siguiente.”

El presente estudio se centra en el análisis cuantitativo de los ciclos económicos. Particularmente se utilizan las herramientas que brindan las técnicas de análisis en los dominios del tiempo y la frecuencia.

1.2. Propósito de la Investigación

El propósito de la investigación es, a partir de información histórica, determinar la duración de los ciclos a corto y largo plazo, así como realizar un análisis del nivel de sincronización entre índices a diferentes intervalos de tiempo, utilizando la coherencia espectral.

Es bien sabido que una función puede representarse en términos de series de funciones base, es decir, de una suma infinita de un conjunto de funciones base con sus respectivos coeficientes.

Particularmente, las series de Fourier nos dan una expresión para la función en términos de una suma de funciones seno y coseno. Sabemos que estas funciones son periódicas y que la frecuencia, amplitud y fase que los elementos de la serie tengan reflejarán el comportamiento de la serie original. En nuestro caso, la función estará dada por la serie histórica como función del tiempo.

Son estas frecuencias fundamentales de la serie histórica las que nosotros identificaremos con las frecuencias de los ciclos económicos presentes en ella y de las mismas obtendremos la duración de sus ciclos.

¹ Burns Arthur y Wesley Mitchell: *Measuring Business Cycles*, 1946, NBER, ISBN: 0-870-14085-X.

Por otro lado, el estudio de la coherencia dirá qué tanta relación existe entre dos series, dadas sus frecuencias fundamentales, a cierto intervalo de tiempo. Dicho de otro modo, se tendrá una medida de la similitud que guardan dos series a un intervalo de tiempo para cada ciclo identificado.

El estudio va aún más allá, tratando de identificar no sólo la longitud sino también la duración de los ciclos. Esto es, cuales fueron los periodos de tiempo en los que el ciclo estuvo presente. En el estudio de la coherencia, también se identifican los periodos de tiempo en los que las series presentan la sincronización mencionada.

Esto último es posible gracias al análisis mediante el uso de Wavelets. Técnica que lleva muy poco tiempo en práctica, pero que ha dado interesantes y muy útiles resultados.

1.3. Antecedentes

Bowden y Martin (Ref. [1]) estudiaron ciclos económicos nacionales e internacionales, con base en la coherencia entre estos ciclos, y cómo se comportan bajo tasas fijas o variables de cambio. Concluyeron que existen ciclos económicos para todos los países de estudio. Por otro lado, consideran que el ciclo asociado a cada país está relacionado con la estructura económica del mismo por lo que consideran que no parece haber una gran similitud en la estructura de estas economías. Así mismo, la evidencia de un ciclo económico internacional no fue tan fuerte y por último, existe o se observa una tendencia general para la coherencia de ser más fuerte en el periodo de tasa de cambio flexible. Lo último indica que cuando exista una tasa de cambio variable los ciclos económicos asociados tenderán a llevar una mayor sincronía respecto al que tendrían en un periodo de tasa de cambio fija.

Por otro lado, Sayan y Sayan (Ref. [2]) analizaron series históricas en el dominio del tiempo y de la frecuencia, utilizando la teoría de Fourier. Reconstruyeron las series utilizadas mediante componentes principales de la representación en el espacio de frecuencias con una buena aproximación. Concluyeron que estas técnicas ayudan en la identificación de ciclos subyacentes y que hacen falta más estudios en esta área.

En el trabajo realizado por Dulce Contreras Bayarri y Julio Escolano Amat (Ref. [3]) se estudió la componente estacional de series históricas utilizando análisis espectral. Aplicaron filtros de frecuencia para “eliminar” tendencias en la series. Concluyeron que si el filtro utilizado para desestacionalizar una serie no es lineal y simétrico, provocará desfases en el comportamiento cíclico de la serie, que deben ser tenidos en cuenta si se desea obtener conclusiones fiables de la serie desestacionalizada.

En el documento publicado por David Stephen Pollock (Ref. [4]) se analizaron algunas de las técnicas de filtrado lineal, que pueden ser utilizadas para extraer la duración del ciclo económico de series finitas de datos económicos. Se argumenta que no puede haber una definición definitiva de ciclo económico. Tanto la definición de ciclo económico y los métodos que se utilizan para extraerlo deben ser adaptadas a los propósitos del análisis y las diferentes definiciones pueden ser apropiadas para diferentes épocas.

Por otro lado, Michio Hatanaka (Ref. [5]) realizó un estudio para la Universidad de Princeton, en el cual compara los resultados obtenidos del análisis espectral sencillo y cruzado con los resultados obtenidos mediante las técnicas clásicas del *National Bureau of Economic Research*. Encuentra que existen series para las cuales coinciden los métodos para determinar la duración de los ciclos,

mientras que en otros casos, existen discrepancias en los resultados. Para un estudio futuro recomienda pensar que las series no se adelantan o atrasan de manera lineal, ya que esta suposición implica relaciones económicas que no necesariamente se cumplen.

Lisa Sella Et. al. (Ref. [6]) Aplicaron varios métodos espectrales avanzados para el análisis de las fluctuaciones del PIB en Italia, los Países Bajos y el Reino Unido. Establecen con ello una descripción cuantitativa precisa de los principales componentes oscilantes de las series. El resultado de su análisis de series de tiempo sugiere que los sistemas económicos de Italia, los Países Bajos y el Reino Unido se caracterizan por un comportamiento cíclico muy similar. La similitud en las longitudes de ciclo sin embargo, no necesariamente se tradujo en la sincronización entre los agregados respectivos. En particular, los dos países del continente muestran fluctuaciones muy sincronizadas, mientras que el Reino Unido parece estar completamente en oposición de fase. Por lo tanto, el análisis espectral parece indicar un alto grado de integración económica en la zona euro. El documento concluye con algunas observaciones acerca de la sincronización de las fluctuaciones económicas en la zona euro y fuera de ella.

En el trabajo realizado por María Joana Soares y Luis Aguiar-Conraria (Ref. [7]) realizaron estudios de señales pseudoaleatorias con características similares a la mayoría de las series históricas económicas, conociendo las frecuencias y duración en tiempo de las mismas, mediante el uso de wavelets. Llegaron a la conclusión de que es posible mediante esta teoría el descomponer una serie económica o financiera utilizando estas técnicas en sus componentes en tiempo y frecuencia, con una alta precisión, pero que sin embargo, es necesaria más investigación en el área.

En la investigación realizada por Crowley, Maraun y Mayes (Ref. [11]) compararon los ciclos de crecimiento económico entre los países de Francia, Alemania e Italia. Utilizaron análisis mediante wavelets continuas y discretas. Llegaron a la conclusión de que ambas técnicas arrojan resultados consistentes y que estos confirman la certeza del análisis. Encontraron también que para longitudes de ciclo menores a 4 años, la coherencia entre los países mencionados no es uniformemente alta en el tiempo, lo cual sugiere que existen patrones de crecimiento diferentes entre los ciclos.

Capítulo II: Ciclos Económicos



2.1. ¿Qué son los Ciclos Económicos?

Existen diversos fenómenos en la economía que, para el ojo común, podrían no tener una explicación simple, por ejemplo, el por qué en algunos meses o años la economía experimenta fenómenos como el aumento del empleo y de los salarios, así como de la cantidad de bienes disponibles y que las personas y las empresas tienen la capacidad de comprar. Por el contrario, existen otros momentos en los cuales el empleo, los ingresos y la producción disminuyen y con ello cae también la capacidad de compra.

Este tipo de interrogantes nos lleva a cuestionarnos sobre estos problemas, por qué existen las llamadas crisis económicas, ¿no sería posible que la economía se comporte de tal manera que el bienestar de la población aumente de forma constante y no se vea interrumpida por descensos después de cierto número de años? Por ejemplo, en la figura 1 podemos ver la variabilidad en el cambio porcentual del PIB de cada periodo respecto al anterior en México.

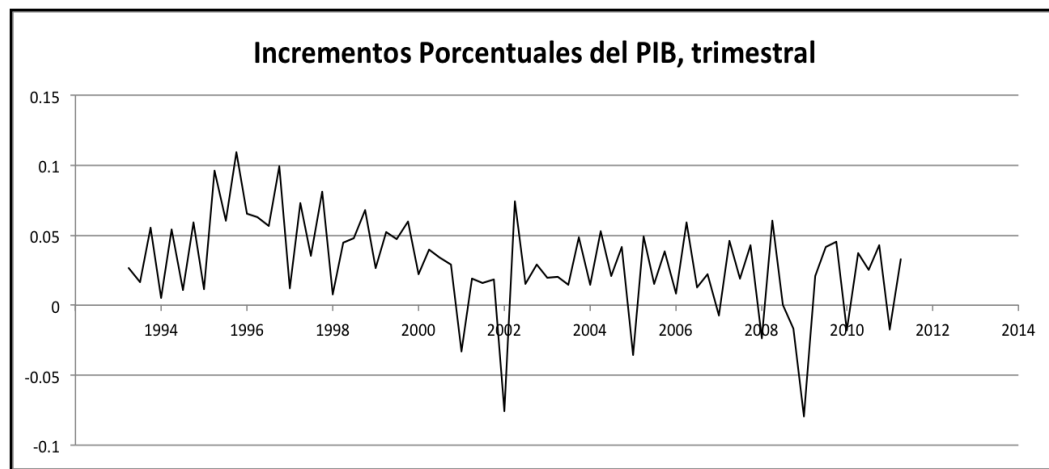


Figura 1. Incrementos Porcentuales Trimestrales del PIB. Fuente: INEGI

Un primer intento para responder a estas interrogantes nos lleva a considerar que las economías experimentan en espacios prolongados del tiempo dos fenómenos conocidos como *crecimiento* y *fluctuaciones económicas* también denominado *ciclos económicos*.

Se denomina *ciclo económico* a los periodos de expansión y contracción que experimenta el nivel general de actividad económica de un país y se considera que esto ocurre en horizontes temporales de mediano plazo. Por nivel general de actividad económica se entienden las magnitudes de la producción, el empleo, los ingresos, la inversión y el crédito, que en determinados momentos existen en el conjunto de la economía.

La fase de expansión económica, también conocida como recuperación o auge, está constituida por el periodo de crecimiento, es decir, donde las empresas producen y venden en cantidades progresivamente mayores sus bienes y servicios, mientras que las familias obtienen los ingresos por participar en las actividades económicas también, bajo un comportamiento progresivamente mayor. Es decir, se trata de un espacio temporal en el que el bienestar general de la población mejora.

Dicho periodo de mejora del bienestar no se mantiene invariante, ya que la curva que representa el nivel general de actividad empieza a declinar en su ritmo de expansión, hasta alcanzar un punto máximo o cima, tras el cual su movimiento decae. Este descenso se manifiesta, en general, cuando ocurre aquello que denominamos crisis económica y que en la curva se señala como depresión o contracción del nivel general de actividad que, transcurriendo en el tiempo, llega a un punto mínimo o fondo de la depresión, después el movimiento se revertirá para dar lugar a una nueva fase de expansión o auge.

Un ciclo económico se conforma por la unión en el tiempo de dos de dichos periodos de expansión y contracción, tal como se ilustra en la figura 2, donde aparece una curva ficticia del comportamiento del nivel general de actividad.

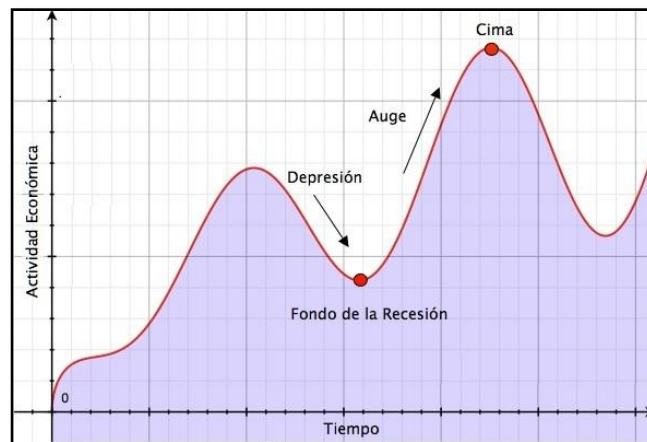


Figura 2. Ilustración del Ciclo Económico.

2.2. Historia de los Ciclos Económicos

Los ciclos económicos han sido siempre un tema controvertido. En los años cuarenta la Asociación Económica Norteamericana decidió publicar un compendio de ensayos sobre ciclos económicos. Creó un comité para que asumiera la tarea que comprendía, además del análisis técnico de las fluctuaciones cíclicas, la interpretación de las diferencias profundas y a veces violentas de la economía.

En diferentes momentos durante los últimos cien años, coincidiendo con épocas de prosperidad en los países industrializados, se llegó a hablar de la extinción de los ciclos económicos. Así ocurrió en los años 20's, en los 60's y según algunos especialistas en la primera mitad de los 90's. Quienes no llegaban al extremo de proclamar la muerte de los ciclos, argumentaban que el desarrollo de las instituciones capitalistas había llegado a tal capacidad de control de la economía, especialmente después de la segunda guerra mundial, que para el futuro sólo podrían esperarse fluctuaciones económicas muy moderadas. En cada caso, el desarrollo posterior de la economía y el

cuestionamiento de los economistas, terminaron con aquellas expresiones de optimismo. En la figura 3 podemos ver cómo al término de la década de los 90's, a lo largo de la primera mitad de 2001, ocurrió un grave descenso del empleo en los Estados Unidos.

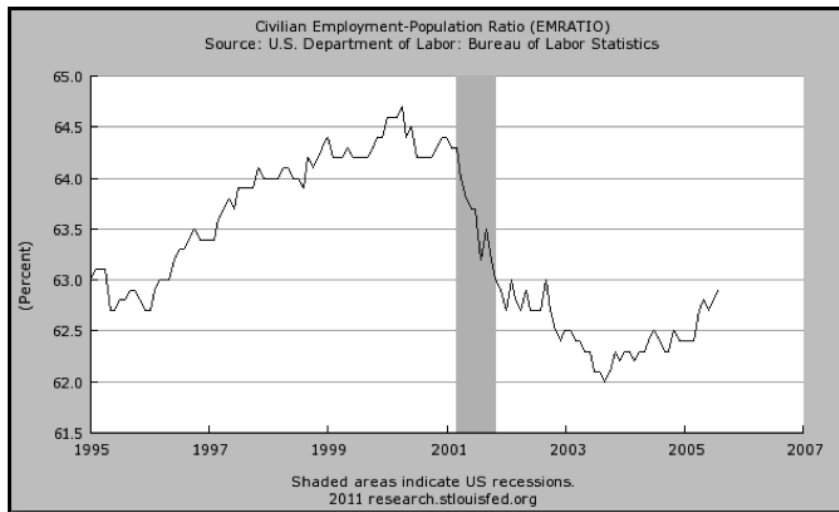


Figura 3. Indicador de empleo en Estados Unidos. El área sombreada indica la recesión determinada por el NBER en 2001. Fuente: U.S. Department of Labor: Bureau of Labor Statistics.

El debate sobre los ciclos en el siglo XX no siguió un proceso lineal, tanto en el terreno de la teoría como en el de los métodos de medición. Diferentes enfoques alentaron la discusión, la cual se vio enriquecida por los avances en la capacidad analítica en ésta área.

Independientemente de sus diferencias, las distintas aproximaciones teóricas coinciden en que usualmente los ciclos pueden durar varios años, que es lo suficientemente persistente como para que se presenten movimientos correlacionados en las series de tiempo, así como interacciones entre las variables macroeconómicas relevantes. En las explicaciones de los ciclos de la primera mitad del siglo XX es común encontrar afirmaciones que dicen que los movimientos tienden a acumularse antes de llegar a un punto en el cual todo el proceso acumulativo se invierte.

La tradición en las técnicas de análisis de los ciclos asociada a la Oficina Nacional de Investigación Económica de los Estados Unidos (*National Bureau of Economic Research*, NBER) sostiene que en perspectiva histórica la fase expansiva de los ciclos se ha venido haciendo más larga, y la fase recesiva más corta y menos severa. Dicha aseveración ha sido cuestionada en el terreno estadístico y el tema sigue siendo objeto de discusión.

La bibliografía alrededor de los ciclos revela su consistencia tanto en la dinámica económica como en la historia. La complejidad de los fenómenos asociados a los ciclos va más allá de los procesos económicos, integrando también procesos políticos y sociales. Las exposiciones clásicas citan experiencias de economías nacionales, incorporando una variedad de sectores y regiones dentro de un mismo país. Pero los ciclos adquieren mayor alcance al transmitirse entre economías nacionales a través de canales como el comercio y las finanzas. Las relaciones económicas internacionales posibilitan la interdependencia regional y propician eventuales simetrías entre los ciclos de negocios de los socios comerciales.

2.3. Contextos históricos y ciclos económicos

El interés de los macroeconomistas por el pasado se basa usualmente en dos razones; una de ellas es la posibilidad de extender las series estadísticas de variables relevantes para el análisis, la otra razón consiste en que el pasado puede ser fuente de episodios cuyo estudio sirva de referencia para el presente. En el caso de los ciclos económicos, los estudiosos han puesto a prueba diversos enfoques teóricos acudiendo a la investigación de las propiedades cíclicas de las series pertinentes como el producto, el cambio tecnológico y los salarios. Algunos analistas consideran que esta visión de la historia económica es limitada. Además de la investigación relacionada con series de tiempo, conceden importancia a los contextos institucionales, destacando sus orígenes, sus cambios y sus consecuencias. Estiman que las innovaciones institucionales cambian las restricciones con las cuales cuentan los agentes económicos.

Los países industrializados han constituido el principal objeto de estudio de los analistas de ciclos económicos. Así aconteció con los primeros análisis de “ciclos largos” como el realizado por Kondratieff (alrededor de 50 años), el de Kuznets (de 15 a 25 años), y de ciclos menores como el de Juglar (de 7 a 10 años) y el de Khinchin (de 3 a 4 años). De la misma forma ha ocurrido también desde los estudios patrocinados por la *Liga de las Naciones* con anterioridad a la segunda guerra mundial, cuya atención se volcó principalmente sobre los ciclos de los Estados Unidos, Gran Bretaña, Francia, Alemania y Holanda. Se destaca el caso de los Estados Unidos por la investigación histórica de sus ciclos por el NBER desde los 20's. El trabajo de Burns y Mitchell, *Measuring Business Cycles* publicado en 1946, se convirtió desde entonces en “uno de los libros más respetados en la macroeconomía de los Estados Unidos”. En la figura 4 podemos ver algunos ciclos cortos para el índice *Standard and Poor's*.



Figura 4. Ciclos cortos calculados con técnicas empíricas para el índice Standard and Poor's. La duración de los ciclos se muestra con líneas punteadas.

Fuente: <http://stockcharts.com/>

Burns y Mitchell diferenciaron entre ciclos *específicos* y ciclos *de referencia*. Los primeros aludían a los picos más altos (cimas) y a los más bajos (simas) de una serie en particular como la producción

agrícola o la oferta monetaria. Los segundos, a las cimas y simas del conjunto de la economía. Las fechas de los ciclos de referencia se citan en la literatura como las correspondientes a los puntos de retorno (*turning points*) de los ciclos económicos. Basados en las extensas recopilaciones estadísticas del NBER, Zarnowitz y Moore concluyeron a mediados de los 80's, que el comportamiento de los ciclos económicos en los Estados Unidos había cambiado con posterioridad a la segunda guerra mundial. Según los autores, las expansiones serían ahora más prolongadas y las recesiones más breves. Además, de acuerdo con el comportamiento del empleo, la producción, y el ingreso real, las recesiones ocurridas después de la segunda guerra, habrían sido mucho menos severas que las precedentes. Una variedad de cambios estructurales, institucionales y de política económica habrían contribuido a explicar el nuevo comportamiento de los ciclos.

De Long y Summers (1986) encuentran que el producto de los Estados Unidos fue más volátil con anterioridad a la segunda guerra mundial que posteriormente. Los autores discuten argumentos ofrecidos para explicar la mayor estabilidad desde 1950, concediéndole apenas menor importancia a los cambios estructurales en la economía, a las políticas estabilizadoras discrecionales y a la prevención de pánicos financieros. Le otorgan mayor significancia a factores como los esfuerzos públicos y privados para suavizar el consumo y a la creciente rigidez de los precios. Esta última causa se derivaría de la creciente institucionalización de la economía norteamericana en la segunda mitad del siglo XX.

El optimismo reinante en la literatura en relación con la estabilización de la economía de los Estados Unidos y otras economías industrializadas, fue puesto en tela de juicio desde mediados de los 80's. Por ejemplo, en una evaluación de la consistencia de las fechas de los ciclos de referencia, Romer (1994) encontró que antes de 1927 el NBER trabajaba con datos que excluían la tendencia, y después de dicho año, con datos que incluían la tendencia. Así, dicho tratamiento pudo llevar a la identificación de más ciclos con anterioridad a 1927. Dejando de lado esta inconsistencia, también deja sin fundamento la afirmación de que las recesiones de hoy son más breves que las anteriores a la segunda guerra mundial. Watson (1994) también encontró sesgos sistemáticos en la información empleada por el NBER. Según el autor, en el pasado los investigadores se vieron reducidos a un mínimo número de series económicas de tiempo, las cuales eran más volátiles que la actividad agregada. Dicha volatilidad se habría reflejado en contracciones más amplias y en expansiones más cortas antes de la segunda guerra mundial. En conjunto, los dos trabajos citados sugieren que la duración de las fases de expansión y contracción no se ha modificado históricamente, salvo durante el período de entreguerras.

El interés de los estudiosos de los ciclos en perspectiva histórica también ha incluido análisis comparados entre economías y seguimientos de los vínculos de economías individuales con el exterior. Según Morgenstern (1959), con anterioridad a la primera guerra mundial (1879- 1914), los ciclos económicos de Gran Bretaña, los Estados Unidos, Alemania y Francia estuvieron en la misma fase el 54% del tiempo y en el período de entreguerras (1919- 1932), sólo el 36% del tiempo. Dornbusch y Fischer repitieron el mismo ejercicio para el período 1953-1980 encontrando que las fases coincidían el 35% del tiempo. Parecería entonces que los ciclos habrían estado más coordinados, durante la vigencia del patrón oro, pero los autores advierten que los datos deben interpretarse con cautela.

En su análisis clásico *Crecimiento y Fluctuaciones, 1870-1913*, W. Arthur Lewis discute el proceso de crecimiento continuo iniciado en Gran Bretaña y difundido durante la primera mitad del siglo XIX a los Estados Unidos, más tarde a Francia, luego a Bélgica y finalmente a Alemania, antes de difundirse al resto del mundo. Ubicándose en una amplia perspectiva histórica Lewis anota que:

“Para quienes creen en la difusión cultural, una metáfora más adecuada es la de un elevador que transporta a los países a niveles de producción per cápita cada vez más altos. Los países se suben al elevador en fechas diferentes: sólo media docena antes de 1870, quizá otros quince antes de la primera guerra mundial, otros quince entre las dos guerras mundiales, y poco más de veinte entre 1950 y 1970. La lista incluye a pueblos de todos los credos, razas y continentes, y sigue creciendo”.

No a todos los países les va igual. Podríamos decir que pueden bajarse del ascensor, e inclusive caerse de él. Mantenerse en él, según Lewis, significa *“haber alcanzado las condiciones necesarias para el crecimiento sostenido”*. Según el mismo autor, la teoría clásica del comercio internacional se interesaba precisamente por *“la transmisión del crecimiento sostenido de un país a otro”*. Claro está que la mayoría de los países desarrollados están lejos de tener una estructura industrial que permita un crecimiento sostenido, en el sentido que hoy en día le damos a este término.

Lewis se refiere a los orígenes de la relación de *dependencia* entre países en la literatura económica, acudiendo a fuentes canadienses, australianas y británicas, cada una de las cuales le daba un significado de acuerdo a sus circunstancias en relación con la economía internacional. La relación de ‘dependencia’ fue introducida en la ciencia económica durante el período de entreguerras por los canadienses interesados en el ‘producto básico’ (es decir, en el ‘crecimiento encabezado por la exportación’), por los australianos interesados en los efectos multiplicadores de una balanza de pagos adversa y por los ingleses que imputaban la gran depresión de los años treinta a la “incapacidad de los Estados Unidos para mantener su propia prosperidad”.

A pesar de los grandes logros en el avance de las teorías económicas, actualmente pueden explicar y encontrar respuestas a innumerables fenómenos económicos, todavía no se pueden evitar los ciclos económicos, en los cuales después de períodos de prosperidad se presentan otros de recesión, que en algunos casos se convierten en depresión. Desde hace centenares de años las economías funcionan en base a ondulaciones donde hay alzas y bajas en la actividad económica. Incluso hay quienes aseveran que los ciclos económicos son intrínsecos a todas las economías y que los intentos por desaparecer este fenómeno son una pérdida de tiempo. Por supuesto no existen bases suficientes aún para asegurar lo último.

En muchas ocasiones se compara a los ciclos económicos con los ciclos naturales, esta comparación, en cierto sentido, es muy acertada ya que las actividades económicas están basadas en la extracción, transformación y distribución de los recursos naturales o prestación de servicios. Es claro que estas actividades dependen de fluctuaciones inherentes a cada sector, por lo que es lógico que la economía se vea afectada de igual manera por estas fluctuaciones.

La tendencia filosófica que se ha venido siguiendo en cuanto a los ciclos económicos indica que las crisis forman parte de la propia naturaleza de los mismos, por lo que no se pueden evitar pero sí se pueden desarrollar mecanismos de control. De ahí la importancia del estudio de los ciclos económicos, no sólo a través de un enfoque económico cualitativo, sino también de uno econométrico cuantitativo, que permita la medición, prevención y, hasta cierto punto, predicción de los mismos. Lo cual permita al sistema financiero internacional fortalecerse, mitigar sus efectos y propagación. Por supuesto, estos mecanismos también pueden servir al grande o pequeño inversionista para optimizar sus recursos e inversiones.

2.4. El Análisis Cuantitativo de los Ciclos Económicos

En el estudio de las fluctuaciones cíclicas tradicionalmente se han empleado dos enfoques complementarios, uno eminentemente empírico o descriptivo, en el que se atiende principalmente al estudio de las características cíclicas: número de ciclos, duración total, duración de las fases, correlaciones entre variables, relaciones de adelanto-retraso, etc. y la otra que parte un enfoque teórico, en el que se hacen estudios a partir de un conjunto de principios teóricos, plasmados en relaciones y modelos matemáticos, en la replicación de fluctuaciones cíclicas y movimientos observados.

Desde el inicio del estudio cuantitativo de los ciclos económicos, éste se ha realizado en base a su

información histórica, es decir, en base al análisis de series de tiempo.

El estudio de los ciclos económicos, entendidos como las fluctuaciones de corto plazo de la economía en torno a su crecimiento de largo plazo, recobra importancia antes de los setenta. Hasta entonces, la teoría tradicional explicaba estas fluctuaciones a partir de cambios en la demanda agregada que generan desequilibrios temporales en la economía, usando modelos estáticos de corto plazo complementados con mecanismos adecuados de ajuste.

En la investigación cuantitativa de los ciclos económicos, una de las cuestiones cruciales a la que inevitablemente habría de enfrentarse el investigador, es la separación de la serie histórica en tendencia y ciclo:

“...El punto crucial era y es la eliminación de la tendencia. El concepto de tendencia no está claro lo que dificulta su estimación y eliminación... de manera que no es sorprendente que la forma de eliminar la tendencia determine en muchos casos los resultados en este sentido”

[Metz, 1992]

El análisis clásico de series temporales asumía que la serie histórica era la suma de tendencia, ciclo regular, estacional y perturbación aleatoria, movimientos que pueden reducirse a tendencia y ciclo. La descomposición en tendencia y ciclo permitía un análisis separado de ambos tipos de movimientos. Esta aproximación suponía que los ciclos era una desviación respecto de la tendencia (determinista) a largo plazo, a la cual alteraban aquellos ciclos. Cualquier variación aleatoria tenía sólo un efecto transitorio que se agotaba en uno o unos pocos periodos. En la figura 5 podemos ver uno de los métodos más comunes para suavizar una serie, la media o promedio móvil. Algunos utilizan este método para obtener la tendencia determinista de una serie, sin embargo las interpretaciones deben hacerse con cautela.

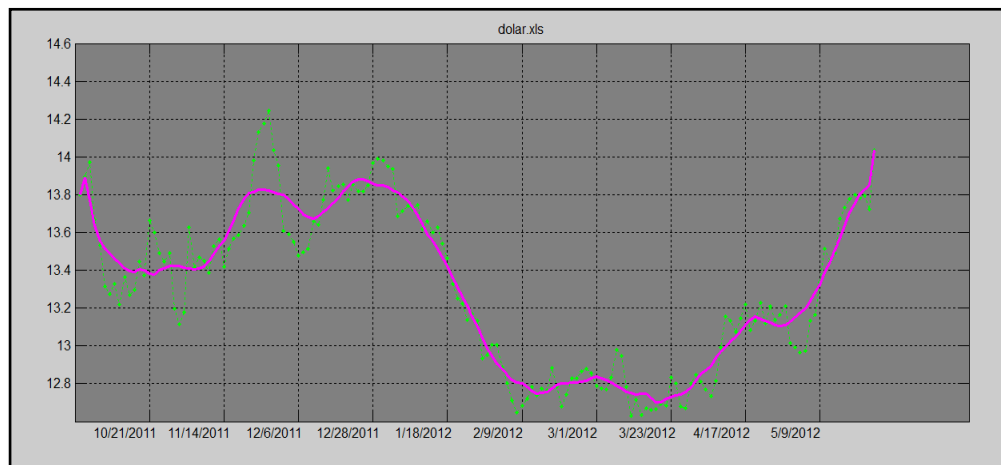


Figura 5. Ejemplo de media móvil de una serie. En verde, serie de tiempo correspondiente al tipo de cambio peso-dólar, en rosa, media móvil de la serie. Fuente de los datos: base de datos del diario oficial de la federación.

Algunos investigadores han abandonado este enfoque. En particular el artículo de Nelson y Plosser (1982) objeta la validez de esta aproximación, ya cuestionada anteriormente. En este trabajo, los autores contrastaron la hipótesis de raíz unitaria para diversas series macroeconómicas norteamericanas, encontrando que era imposible rechazarla. Mientras que en la visión clásica, las fluctuaciones se contemplaban como desviaciones respecto a la tendencia determinista, la existencia de raíz unitaria significa que todas las fluctuaciones representan cambios permanentes en la tendencia a largo plazo, dado que el efecto de cualquier variación permanece indefinidamente

en lugar de atenuarse con el paso del tiempo.

En esta cuestión como en tantas otras, es perceptible la evolución metodológica experimentada por la econometría, que se ha desplazado desde un enfoque determinista, donde lo que importaban eran cuestiones como la obtención de la cronología adecuada de los ciclos o los valores de los parámetros de interés económico (elasticidades), a otro probabilístico, en el que lo fundamental son las propiedades estocásticas de las series. Hasta el momento este cambio parece no haber aportado resultados significativos, es decir, no ha supuesto una mejora significativa en cuanto al diagnóstico adecuado de los ciclos económicos¹, por lo que puede considerarse poco fructífera.

Debido a lo anterior y a la importancia de este tema, muchas otras alternativas metodológicas se han desarrollado para la medición de ciclos económicos. Entre las que han mostrado mejores resultados se encuentra el análisis en los espacios de frecuencia y tiempo. Este trabajo utiliza precisamente la principal herramienta de éste análisis, el *análisis espectral*. Nos enfocaremos esencialmente en el análisis de Fourier, el análisis mediante el teorema de Wiener–Khinchin, el análisis de coherencia espectral, el análisis espectral mediante wavelets y la coherencia mediante wavelets. Temas que serán desarrollados a continuación.

¹ Véase referencia [9]

Capítulo III: Metodología



3.1. Series de Fourier

El análisis de Fourier surgió a partir del intento de éste matemático francés por hallar la solución a un problema práctico, la conducción del calor en un anillo de hierro. Demostró que se puede obtener una función discontinua a partir de la suma de funciones continuas. Esta tesis fue defendida por Fourier ante la Academia Francesa, lo que causó severas objeciones de los matemáticos más importantes de su época como Lagrange y Laplace.

El problema central que intentaba resolver Jean Baptiste Joseph Fourier consistía en la representación de funciones periódicas en términos de una serie de funciones trigonométricas. Una serie de este tipo recibe el nombre de serie trigonométrica o serie de Fourier.

El seno y el coseno son las funciones cíclicas más utilizadas en el análisis de una gran cantidad de sistemas, no es de sorprender que esto sea debido a que tienen la capacidad de descomponer una serie en términos de elementos más simples.

El problema de la representación de una función periódica mediante una serie trigonométrica surge de la resolución de ecuaciones en derivadas parciales de la modelación de la transferencia de calor. Tiempo después se demostró que no sólo las funciones periódicas pueden representarse como una serie de Fourier, sino cualquier función arbitraria.

La serie de Fourier se define de la siguiente manera:

Dada una función $f(t)$, esta puede ser descompuesta como una serie de funciones seno y coseno dada por la siguiente expresión:

$$f(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)) \quad (1)$$

Donde t es el tiempo, ω la frecuencia y a_0 y b_0 son los coeficientes para cada uno de los términos de la serie, dados por:

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos(n\omega t) dt \quad (2)$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin(n\omega t) dt \quad (3)$$

En la última expresión T es el periodo de la función $f(x)$. Las integrales para los coeficientes a_0 y b_0 también suelen hacerse sobre el intervalo $[-T/2, T/2]$, sin embargo pueden hacerse sobre cualquier

intervalo de longitud T .

En muchas aplicaciones, en particular en el análisis de series de tiempo, es más útil la expresión llamada *forma compleja de la serie de Fourier*, que consiste en usar exponenciales complejas $e^{in\omega t}$ en vez de $\cos(n\omega t)$ y $\sin(n\omega t)$. Para construirla, consideramos las expresiones:

$$\cos(n\omega t) = \frac{e^{in\omega t} + e^{-in\omega t}}{2}; \quad \sin(n\omega t) = \frac{e^{in\omega t} - e^{-in\omega t}}{2} \quad (4)$$

Si sustituimos las últimas expresiones en la ecuación (1) obtendremos:

$$f(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left((a_n - ib_n)e^{in\omega t} + (a_n + ib_n)e^{-in\omega t} \right) \quad (5)$$

Si definimos las siguientes igualdades:

$$c_0 = c_0 e^0 = \frac{1}{2}a_0, \quad c_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n) \quad \text{y} \quad c_{-n} = \bar{c}_n = \frac{1}{2}(a_n + ib_n) \quad (6)$$

Tendremos que la expresión para la serie de Fourier está dada por:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega t} \quad (7)$$

La expresión para los coeficientes c_n queda de la siguiente manera:

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-in\omega t} \quad (8)$$

Dados los coeficientes c_n obtendremos los anteriores mediante las relaciones a continuación:

$$\underline{a_n} = 2 \cdot \text{Re}(c_n), \quad \underline{b_n} = -2 \cdot \text{Im}(c_n), \quad \alpha_n = 2 \cdot |c_n|, \quad \phi_n = \arg(c_n) \quad (9)$$

Donde α_n y ϕ_n son la amplitud y la fase respectivamente, para cada elemento de la serie.

3.1.1. La Transformada de Fourier

Si nuestra señal no es periódica, no podemos esperar que sea posible representarla mediante una serie de Fourier. Una de las contribuciones decisivas de Fourier fue tratar una función no periódica como si fuera una función con periodo infinito, lo que le llevó a la posibilidad de representarla como una integral cuya variable de integración fuera una frecuencia que se mueve de manera continua.

El procedimiento es básicamente suponer que cada una de las frecuencias fundamentales ω_n tienen cambios infinitesimales, con lo cual llegamos a la siguiente expresión:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (10)$$

Donde $F(\omega)$ está dada por:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-2\pi i \omega t} dt \quad (11)$$

A la función $F(\omega)$ de la ecuación 11 se le llama transformada de Fourier de la función $f(t)$. Ésta función proporciona la representación en el dominio continuo de frecuencias de la función $f(t)$. A la ecuación 10 se le llama usualmente la *transformada inversa de Fourier*.

La transformada de Fourier debe ser adaptada para poderla utilizar con los datos de que se dispone. Lo que tradicionalmente se hace es proponer una versión discreta de la transformada original, llamada DFT (“Discrete Fourier Transform”). Sin embargo, en la práctica no se utiliza la DFT, sino que se opta por otro algoritmo que es más eficiente en cuanto al tiempo de cómputo, este algoritmo se conoce como la Transformada Rápida de Fourier¹ (FFT, “Fast Fourier Transform”).

3.1.2. El Espectro de Potencias

El espectro de potencias (también llamado simplemente espectro) puede ser interpretado como *la cantidad de la señal contenida en la frecuencia ω* .

Otra manera de interpretar lo anterior es que los valores que el espectro toma están asociados al “peso” o “contribución” que cada una de las frecuencias aporta para construir la serie original. Estas magnitudes serán asociadas a los ciclos económicos intrínsecos a cada serie.

El espectro de potencias está dado por una expresión muy similar a la relación para la amplitud α_n en la ecuación (9);

$$P(\omega) = \left| \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-2\pi i \omega t} dt \right|^2 = |F(\omega)|^2 \quad (12)$$

Una vez que uno cuenta con el espectro de una función, uno puede describir prácticamente todo su comportamiento, predecirla y conocer su estructura cíclica.

Para este momento uno habrá notado que la transformada de Fourier difícilmente podría aplicarse a una serie de datos económica. Primero vemos que los límites de integración cubren todo el rango de frecuencias posibles, es decir un rango infinito, lo cual no puede ser llevado a la

¹ Véase apéndice

práctica. Segundo, vemos que la función es continua en el tiempo y se extiende sobre todo el dominio, sin embargo nuestros datos son discretos y finitos.

Estas y otras cuestiones nos alejan del resultado que la teoría nos asegura es cierto. En el área del procesamiento de señales, se dice que esto conlleva a una pérdida de resolución en el espectro. Lo cual quiere decir que perdemos precisión en nuestro cálculo. Por supuesto, la economía y las finanzas no son las únicas áreas que tienen este problema, por lo que muchas aproximaciones se han hecho y hoy en día se cuenta con algoritmos altamente eficientes, capaces de dar una buena aproximación al cálculo de las frecuencias fundamentales.

Los problemas mencionados no son los únicos que nos alejan del cálculo del espectro, existen otros que adquieren una gran relevancia cuando se tratan series del tipo económico, las cuales se mencionarán más adelante. Sin embargo el análisis de Fourier clásico es un buen punto de partida y una útil referencia para los métodos que se desarrollarán posteriormente.

3.2. El Fenómeno de Gibbs

El fenómeno de Gibbs involucra dos hechos que ocurren al aproximar una función mediante la transformada de Fourier (FFT, en nuestro caso). El primero, que la aproximación tiene oscilaciones excesivas cuando se presenta una discontinuidad en la función original, y el segundo, que las oscilaciones no disminuyen en amplitud al aumentar el número de frecuencias de la serie.

Lo anterior podemos entender de manera más intuitiva mediante las figuras 6A a 6C¹.

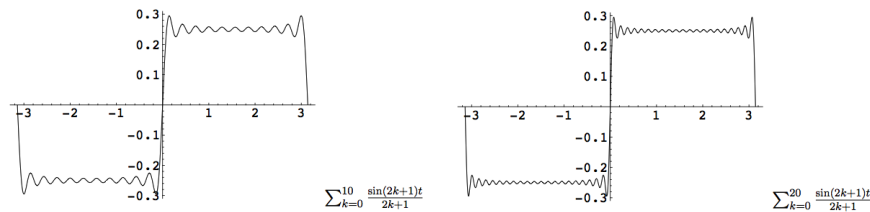


Figura 6A

Figura 6C

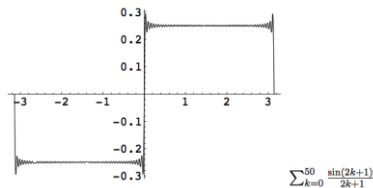


Figura 6B

Figura 6. Ejemplo del fenómeno de Gibbs. Aproximación de la función escalón en el intervalo $[-3, 3]$ mediante la transformada de Fourier. a) utilizando 10 frecuencias. b) utilizando 20 frecuencias. c) utilizando 50 frecuencias.

¹ Para una demostración matemática de éste fenómeno véase la referencia [10].

Por supuesto, una serie discreta es por demás discontinua, a pesar de ello, la mayoría de las señales digitales son “bien comportadas”, es decir, siguen un patrón de cambio relativamente monótono, por lo que el fenómeno de Gibbs no se considera relevante en la mayoría de los casos.

Sin embargo, lo anterior adquiere una importancia relevante cuando hablamos de series económicas. Estas son consideradas por muchos como series aleatorias, y como tales, tienen cambios abruptos en prácticamente todos los puntos de la serie. Esto conlleva a una pérdida considerable en la precisión del cálculo del espectro de potencias, y por ende, a errores en la medición de los ciclos.

Muchos métodos se han desarrollado para evitar que este fenómeno afecte los cálculos realizados y las predicciones al respecto.

Dentro de estos métodos podemos destacar el uso del teorema de Wiener–Khinchin. Este método reduce significativamente el fenómeno mencionado y será desarrollado en el apartado siguiente.

3.3. El Teorema de Wiener–Khinchin

Antes de entrar en detalle, definiremos el concepto de serie de tiempo estacionaria en el sentido amplio;

Se considera que una serie de tiempo es estacionaria en el sentido amplio cuando la media es independiente de la elección del origen que se tome en el tiempo, esto es:

$$E[X(t)] = E[X(t+\tau)], \quad \forall \tau \quad (13)$$

El teorema de Wiener–Khinchin (también conocido como el teorema de Wiener–Khinchine, teorema de Wiener–Khinchin–Einstein o teorema de Khinchin–Kolmogorov) establece que la densidad espectral de una serie de tiempo estacionaria en el sentido amplio es la transformada de Fourier de la correspondiente función de autocorrelación.

Para el caso continuo tendremos:

$$S_{xx}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} r_{xx}(\tau) e^{-2\pi i \omega \tau} d\tau \quad (14)$$

Donde:

$$r_{xx}(\tau) = \frac{1}{N-|\tau|} \sum_{t=1}^{N-|\tau|} x(t)x^*(t-\tau) = E[x(t)x^*(t-\tau)] \quad (15)$$

Para $m = 0, 1, 2, \dots, M$, con M igual al número de rezagos. Ésta es la función de autocorrelación, definida en términos del valor esperado. El asterisco representa el complejo conjugado. En ocasiones se le conoce a esta función como la función de autocovarianza, dejando el término función de autocorrelación para la función de autocovarianza normalizada.

Se ha demostrado que el teorema de Wiener-Khinchin es aplicable a series de tiempo que no son estrictamente estacionarias en el sentido amplio, sino que es suficiente que cumplan con que la serie pueda ser representada por un proceso Gaussiano¹. Incluso hay quienes han demostrado que este teorema puede ser aplicado a conjuntos de datos con incluso menores restricciones².

El teorema de Wiener-Khinchin no sólo posibilita la obtención de la transformada de Fourier para series de datos no estacionarios, sino que reduce en gran medida el fenómeno de Gibbs. Si bien los resultados en ciertas ocasiones son similares, existen casos en los que éstos difieren considerablemente debido al fenómeno mencionado.

3.4. Coherencia Espectral

El teorema de Wiener-Khinchin puede ser considerado un caso particular del espectro cruzado entre dos señales o series de tiempo. Un análisis similar al del espectro de potencias, brinda la posibilidad de conocer las frecuencias en común que dos series de tiempo tienen. El análisis de coherencia espectral (también conocido como análisis de coherencia de espectro cruzado o simplemente análisis de coherencia), puede ser utilizado para identificar variaciones que tengan propiedades espectrales similares, es decir, que tengan una potencia similar en la misma banda de frecuencias.

Para explicar lo anterior de otra manera, pensemos que dos series de tiempo, x_t e y_t , pueden descomponerse en la suma de dos componentes, una para las frecuencias altas (h) y otra para las frecuencias bajas (l);

$$x_t = x_t(h) + x_t(l), \quad y_t = y_t(h) + y_t(l)$$

Lo que buscamos es si estas componentes tienen variaciones similares en alguna frecuencia dada. Podemos interpretar esto como la búsqueda de ciclos comunes a un periodo de tiempo dado para dos series tratadas.

Comenzamos la introducción del modelo definiendo la correlación cruzada;

$$r_{xy}(\tau) = \frac{1}{N-|\tau|} \sum_{t=1}^{N-|\tau|} (x(t) - \mu_x)(y^*(t-\tau) - \mu_y) = E[(x(t) - \mu_x)(y^*(t-\tau) - \mu_y)] \quad (16)$$

De manera análoga al teorema de Wiener-Khinchin, podemos definir la transformada cruzada de las series;

$$S_{xy}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} r_{xy}(\tau) e^{-2\pi i \omega \tau} d\tau \quad (17)$$

Una vez que tenemos el espectro cruzado, la función de coherencia se define de la siguiente manera:

¹ Véase referencia [11]

² Véase referencia [12]

$$\kappa_{xy}(\omega) = \frac{|S_{xy}(\omega)|^2}{\sqrt{S_{xx}(\omega) \cdot S_{yy}(\omega)}} \quad (18)$$

Esta función es también llamada el coeficiente de coherencia y varía entre cero y uno. Podemos entender este coeficiente como el grado de sincronización que tienen los ciclos intrínsecos de dos series de tiempo. Mientras más cercano a uno sea, mayor será la sincronización de las series en cada lapso de tiempo correspondiente a la frecuencia considerada. De esta manera es posible identificar los ciclos económicos que los instrumentos financieros o índices tienen en común.

3.4.1. El Análisis de Fase

Al hacer el análisis de coherencia obtenemos información sobre si existe o no relación entre las series, pero no sabemos de qué manera se relacionan.

Una manera de conocer el tipo de relación que existe entre ellas es el estudio de la fase que presentan sus ciclos, es decir, estudiar qué característica presentan, si son ciclos coincidentes, si alguno está adelantado o atrasado.

La fase de una onda o serie de tiempo tiene poco o ningún uso, ya que nos dice simplemente la traslación de dicha onda respecto a la función trigonométrica correspondiente, esto es, respecto del origen. Lo cual puede ser modificado cambiando el sistema de referencia. Lo que nos es útil es la diferencia de fase entre las series.

Este dato es muy importante al momento de tomar decisiones financieras, ya que si sabemos que una serie es adelantada a otra podemos prever lo que sucederá con la primera serie.

De las identidades mostradas en (9), se define la diferencia de fase como:

$$\phi_{xy} = \arctan\left(\frac{\text{Im}(\Gamma_{xy})}{\text{Re}(\Gamma_{xy})}\right) \quad (19)$$

Donde Γ_{xy} es la transformada cruzada. Sin embargo, algunos autores utilizan una definición diferente para la fase, dada por la diferencia de fases de cada una de las series, esto es:

$$\Delta\phi(\omega) = \phi_1(\omega) - \phi_2(\omega) \quad (20)$$

Donde ϕ_i es la fase de cada una de las series, dada por la identidad (9).

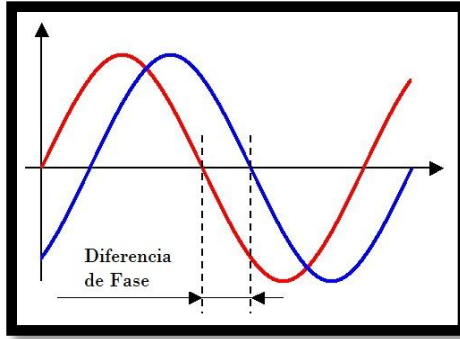


Figura 7. Ilustración de la fase de una onda senoidal atrasada (en azul) respecto a otra estándar (en rojo).

Podemos comparar las fases correspondientes a cada una de las series para determinar la relación entre ellas.

Las ecuaciones 19 o 20 arrojarán resultados en radianes, con valores en el intervalo $[-\pi, \pi]^1$. El intervalo completo representará un ciclo completo, por lo que si deseamos tener la fase en unidades de tiempo, bastará con utilizar la siguiente expresión:

$$\phi_t = \frac{\Delta\phi}{\pi} \cdot T \quad (21)$$

Donde T es el periodo o duración del ciclo.

Es importante la interpretación que se le debe dar a la información obtenida. Un resumen simple de lo que obtendremos, lo podemos ver en la figura 8.

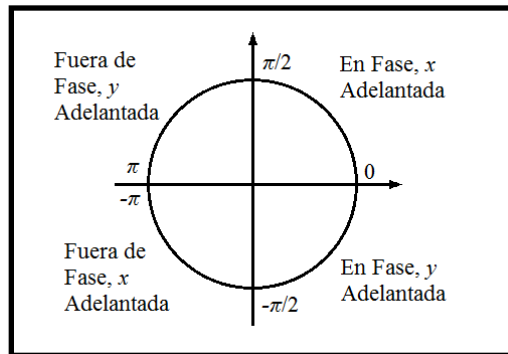


Figura 8. Diagrama de la diferencia de fase.

¹ La ecuación arco-tangente tiene como contra-dominio el intervalo $[-\pi/2, \pi/2]$. Sin embargo, para el análisis de fase se toma por convención la siguiente función:

$$\arctan\left(\frac{b}{a}\right) = \begin{cases} \arctan\left(\frac{b}{a}\right) & a > 0 \\ \arctan\left(\frac{b}{a}\right) + \pi & a < 0, b \geq 0 \\ \arctan\left(\frac{b}{a}\right) - \pi & a < 0, b < 0 \\ \frac{\pi}{2} & a < 0, b < 0 \\ -\frac{\pi}{2} & a < 0, b < 0 \end{cases}$$

Vemos que el orden en que se analizan las series tiene una repercusión en la correlación cruzada, y por ende, en la fase.

Si obtenemos un resultado entre $(0, \pi/2)$ la serie x será adelantada y tendremos una relación en fase, para el intervalo $(\pi/2, \pi)$ la serie y será adelantada y tendremos una relación fuera de fase, para el intervalo $(-\pi/2, -\pi)$ la serie x será adelantada y tendremos una relación fuera de fase, para el intervalo $(0, -\pi/2)$ la serie y será adelantada y tendremos una relación en fase.

3.5. Análisis Espectral Mediante Wavelets

El análisis mediante el uso de wavelets (comúnmente traducido como *onduletas*) es relativamente nuevo, desarrollado de manera formal en la década de los 80's, a pesar de ello, hoy en día es ampliamente utilizado en diferentes ramas de la ciencia, tales como el procesamiento de señales, ciencias médicas, física y astronomía. Sin embargo, en el área de la economía y las finanzas su uso apenas comienza y son muy pocos los trabajos hasta ahora desarrollados mediante estas técnicas. Suele suceder que la falta de aprovechamiento de una técnica se deba al desconocimiento de la misma, por lo que a continuación se dará una breve introducción a la teoría del análisis mediante el uso de wavelets.

Una wavelet es por definición una onda pequeña. Esto es, comienzan en un punto en el tiempo y desaparecen después en otro punto. Esta definición es la que intuitivamente tenemos de un *pulso*, pero debemos tener cuidado ya que en diversas ramas de la ingeniería, estos dos conceptos tienen definiciones muy diferentes.

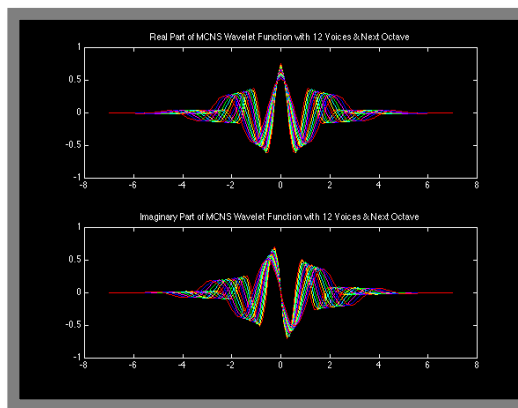


Figura 9. Partes real e imaginaria para la Wavelet de Morlet (utilizada en el presente trabajo).

La definición anterior obliga a que tengan un número finito de oscilaciones, cualquiera que sea la forma de la onda. Esta propiedad brinda la capacidad de extraer información de series de datos con variaciones locales.

El análisis mediante wavelets tiene mucho en común con el análisis de Fourier. Como ya hemos mencionado, la transformada de Fourier brinda la posibilidad de descomponer la serie en sus componentes en el espacio de frecuencia.

Imaginemos que nuestra serie de tiempo es una pieza interpretada por una orquesta sinfónica, con la transformada de Fourier estaríamos descomponiendo la pieza en los sonidos que produce cada instrumento. Sin embargo, las series obtenidas mediante éste análisis tienen energía infinita, es decir, tienen una duración infinita en el tiempo, y tienen una amplitud fija, es decir, no cambian en el tiempo. Debido a lo anterior, cada nota de cada uno de los instrumentos estaría tocando de manera monótona e indefinida. Cabe añadir que dentro de esta teoría, una perturbación afecta a todas las frecuencias presentes.

Por otro lado, en el análisis con wavelets los componentes no son homogéneos en el tiempo y tienen una duración finita. En el ejemplo de la orquesta, esto brinda la posibilidad de tener variaciones en tiempo, periodos en los que algunos instrumentos dejan de tocar y otros comienzan, y amplitud, periodos en los que los instrumentos cambian su intensidad, para cada una de las notas presentes en la pieza. Esto claramente brinda la posibilidad de obtener una descomposición más precisa de la serie, teniendo información en los espacios del tiempo y la frecuencia simultáneamente.

Existen varios tipos de wavelets que tienen diferentes formas y propiedades, las hay simétricas, asimétricas, discretas, continuas, etc.

Todas ellas se dividen en dos “géneros”, wavelets padre y wavelets madre. Las wavelets padre $\phi(t)$ integran 1, y las wavelets madre $\psi(t)$ integran 0;

$$\int \phi(t)dt = 1 \quad \int \psi(t)dt = 0 \quad (22)$$

3.5.1. La Transformada Continua por Wavelets

Comenzando por una wavelet madre $\psi(t)$, una familia de wavelets hijas puede ser obtenida simplemente trasladando y escalando $\psi(t)$;

$$\psi_{\tau,s}(t) \equiv \frac{1}{\sqrt{|s|}} \psi\left(\frac{t-\tau}{s}\right), \quad s, t \in \mathfrak{R}, s \neq 0 \quad (23)$$

Donde s es el factor de escalamiento o dilatación, que controla la extensión, y τ es la traslación, que controla la localización en el tiempo, de la wavelet hija.

Dada una serie de tiempo $x(t)$, su *transformada continua por wavelets* (CWT, de sus siglas en inglés) con respecto a la wavelet $\psi(t)$, es una función de dos variables, $W_{x,\psi}(s, \tau)$, dada por:

$$W_{x,\psi}(\tau, s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \frac{1}{\sqrt{|s|}} \psi^*\left(\frac{t-\tau}{s}\right) dt \quad (24)$$

La posición de la wavelet en el dominio del tiempo está dada por τ , mientras que su posición en el dominio de la frecuencia está dada por s . Es por ello que esta transformada nos brinda información en el tiempo y la frecuencia simultáneamente.

Utilizando las propiedades de la transformada de Fourier podemos llegar a la siguiente expresión¹:

$$W_{x,\psi}(\tau, s) = \frac{\sqrt{|s|}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Psi^*(s\omega) X(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega \quad (25)$$

3.5.2. La Transformada Continua Inversa por Wavelets

Para reconstruir $x(t)$ a partir de su transformada se puede simplemente integrar sobre s y τ , esto es:

$$x(t) = \frac{2}{C_\psi} \int_0^\infty \left[\int_{-\infty}^{\infty} W_{x,\psi}(\tau, s) \psi_{\tau,s}(t) d\tau \right] \frac{ds}{s^2} \quad (26)$$

Donde $C_\psi = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\Psi(\omega)|}{|\omega|} d\omega$

3.5.3. Espectro de Potencias y Fase Mediante Wavelets

En analogía con el análisis de Fourier, el espectro de potencias mediante wavelets (WPS), también conocido como periodograma mediante wavelets, se define como:

$$WPS_x(\tau, s) = |W_x(\tau, s)|^2 \quad (27)$$

A modo de comparación, uno puede obtener el promedio sobre el tiempo del WPS, a esta función se le conoce como espectro global de potencias mediante wavelets (GWPS);

$$GWPS_x(\tau, s) = \int_{-\infty}^{\infty} |W_x(\tau, s)|^2 d\tau \quad (28)$$

Para encontrar la fase podemos utilizar la fórmula (19);

$$\phi_x(\tau, s) = \tan^{-1} \left(\frac{\text{Im}(W_x(\tau, s))}{\text{Re}(W_x(\tau, s))} \right) \quad (29)$$

¹ Véase referencia [x] tutorial

3.5.4. La Wavelet de Morlet

La wavelet de Morlet es una función dependiente del tiempo, dada por:

$$\psi_{\omega_0}(t) = Ke^{i\omega_0 t} e^{-\frac{t^2}{2}} \quad (30)$$

Esta wavelet se ha convertido en la más popular de las wavelets complejas, debido a sus propiedades, de las que destaca que la frecuencia de la onda madre y la energía están centradas en el tiempo, lo cual facilita la conversión de escalas a frecuencias. La wavelet de Morlet, en este sentido, tiene el mejor balance entre frecuencia y tiempo.

3.5.5. La Wavelet Generalizada de Morse

A pesar de su utilidad, la wavelet de Morlet no es muy versátil, ya que depende de sólo un parámetro. Esto significa que si uno desea tener una mejor localización en el tiempo o la frecuencia, no se puede ajustar esta wavelet.

Por otro lado, es común realizar el análisis mediante diferentes métodos, o en este caso, mediante diferentes wavelets. Esto brinda resultados más sólidos y muestran qué tanto depende nuestro resultado de la selección de la wavelet para el análisis.

La wavelet de Morse es una función en el dominio de la frecuencia, caracterizada por dos parámetros, β y γ , y definida por la siguiente expresión:

$$\Psi_{\beta,\gamma}(\omega) = K_{\beta,\gamma} H(\omega) \omega^\beta e^{-\omega^\gamma} \quad (31)$$

Donde $K_{\beta,\gamma}$ es una constante de normalización, dependiente de β y γ , y $H(\omega)$ es la función escalón unitaria.

Variando los parámetros uno puede obtener una gran variedad de características, mientras que la wavelet mantiene sus propiedades.

3.5.6. Conversión de Escalas a Frecuencias

Dado que la transformada mediante wavelets nos da una matriz en términos del tiempo y de escalas, uno querrá realizar el cambio de variable a frecuencias. En el caso de las wavelets de Morlet y de Morse el cambio de variable lo obtenemos mediante:

$$F(s) = \frac{\omega_\psi}{2\pi s} \quad (32)$$

Donde ω_ψ es la frecuencia de la wavelet madre. Esta expresión es utilizada en el presente trabajo y en el sistema desarrollado para convertir escalas en frecuencias.

3.6. Análisis de Coherencia Mediante Wavelets

Como ya se mencionó, en muchas aplicaciones, y en particular en el área de las finanzas, es de gran interés el detectar y cuantificar relaciones entre dos series temporales.

Anteriormente se habló del análisis de coherencia mediante el uso de técnicas en el dominio de la frecuencia y sus ventajas. Con el uso de wavelets podremos añadir a nuestro estudio de coherencia información simultánea en el dominio del tiempo.

3.6.1. Transformada Cruzada, Coherencia y Fase Mediante Wavelets

Sean dos series de tiempo $x(t)$ e $y(t)$, si denotamos sus transformadas continuas mediante wavelets como W_x y W_y , respectivamente, se define su transformada cruzada mediante wavelets de la siguiente manera:

$$W_{xy} = W_x W_y^* \quad (33)$$

Donde el asterisco representa la matriz compleja conjugada.

A partir de aquí podemos generalizar los conceptos utilizados en el análisis de Fourier. Dada la definición anterior, tendremos que la coherencia está dada por:

$$R_{xy}(\tau, s) = \frac{|W_{xy}(\tau, s)|}{\sqrt{W_x^2(\tau, s) \cdot W_y^2(\tau, s)}} \quad (34)$$

Por otro lado, la fase (adelanto de x sobre y) está dada por:

$$\phi_{xy}(\tau, s) = \arctan\left(\frac{\text{Im}(W_{xy}(\tau, s))}{\text{Re}(W_{xy}(\tau, s))}\right) \quad (35)$$

Así mismo, tenemos también la definición mediante la diferencia de fases de cada una de las series, como se planteó en la sección 3.5.1, esto es:

$$\varphi_{xy}(\tau, s) = \varphi_x(\tau, s) - \varphi_y(\tau, s) \quad (36)$$

3.7. Teorema de Muestreo de Nyquist-Shannon

Para este momento quizás uno se haya preguntado ¿cómo afecta a estas metodologías la manera en que la información está disponible? Las técnicas anteriores tienen un límite que depende del mínimo muestreo de nuestras series históricas.

El muestreo es el proceso de convertir una señal (por ejemplo, una función continua en el tiempo o en el espacio) en una secuencia numérica (una función discreta en el tiempo o en el espacio).

El teorema de muestreo señala que la reconstrucción (aproximadamente) exacta de una señal continua en el tiempo, a partir de sus muestras, es posible si la señal es finita y la frecuencia de muestreo es mayor que dos veces el ancho de banda de la señal.

Si las condiciones de muestreo no se satisfacen, entonces las frecuencias se pueden llegar a traslapar; es decir, las frecuencias superiores a la mitad de la frecuencia de muestreo serán reconstruidas y aparentarán ser frecuencias por debajo de la frecuencia de muestreo. El resultado sería una distorsión llamada *aliasing* (figura 10).

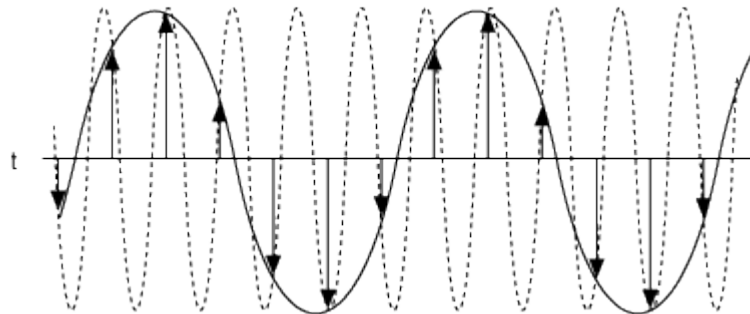


Figura 10. Aliasing

Es por ello que en nuestro caso, la confiabilidad de los resultados obtenidos del análisis espectral dependerá del muestreo de la serie analizada. Esto es, no podemos establecer que una serie tiene una frecuencia fundamental cuyo periodo es menor a cuatro veces el tiempo de muestreo.

Las series históricas analizadas tienen un muestreo mensual, por lo que el ciclo mínimo considerado es de 4 meses.

Capítulo IV: Resultados



4.1. Datos Utilizados

Mediante las técnicas detalladas anteriormente se analizaron varios índices internacionales. Estos fueron seleccionados respecto a su importancia a nivel económico global y respecto a las economías más fuertes en las diferentes regiones del mundo.

A continuación se enlistan y comentan cada uno de los índices considerados, de acuerdo a la región y país al que pertenecen.

- AMERICA

- Estados Unidos

- *S&P 500*

- El índice *Standard and Poor's 500* es uno de los más importantes de Estados Unidos. Se le considera el más representativo de la situación real del mercado.

- *DOW JONES*

- Es el índice más antiguo de Estados Unidos. Mide el desempeño de las 30 mayores empresas comercializadas en la bolsa de Estados Unidos. En la actualidad no todos sus componentes tienen relación con la industria, debido al auge de las compañías financieras y de informática.

- *NASDAQ (COMPOSITE)*

- Incluye todos los valores (tanto nacionales como extranjeros) que cotizan en el mercado Nasdaq, un total de más de 5000 empresas. La alta ponderación de valores tecnológicos dentro del mercado Nasdaq ha hecho este índice muy popular y representativo de esta área.

- Canadá

- *TSX (COMPOSITE)*

- Es un índice compuesto por las compañías más grandes de la bolsa de valores de Toronto Canadá. Este índice comprende alrededor del 70% de la capitalización de las compañías canadienses.

- Brasil

- *IBOVESPA*

El índice BOVESPA está compuesto por acciones que representan el 80% del volumen de las transacciones realizadas en la bolsa de valores de Sao Paulo en los últimos 12 meses. Representa aproximadamente el 70% del valor de todas las acciones que se comercian en esta bolsa.

- México

- *IPyC*

El Índice de Precios y Cotizaciones es el principal índice bursátil de la Bolsa Mexicana de Valores, aglutina las 35 empresas con mayor liquidez en este mercado.

- SICC y SICA (SICCA)

El Sistema de Indicadores Compuestos, Coincidente y Adelantado, realizado por el INEGI, incorpora información de diversos mercados del país que permiten anticipar la posible trayectoria de la economía mexicana. Estas series fueron seleccionadas de acuerdo a varios criterios estadísticos y económicos, tales como la consistencia de sus puntos de giro, su adelanto o atraso con los ciclos económicos históricos y su disponibilidad, entre otros.

- Chile

- *IPSA 40*

El Índice de Precio Selectivo de Acciones es el principal índice bursátil de la Bolsa de Comercio de Santiago. Corresponde a un indicador de rentabilidad de las 40 acciones con mayor presencia bursátil.

- EUROPA

- Inglaterra

- *FTSE 100*

El Financial Times Stock Exchange está compuesto de los 100 principales valores de la Bolsa de Londres (London Stock Exchange). La capitalización de las empresas que componen el índice supone el 70% del valor total del mercado de valores de Londres.

- Alemania

- *DAX*

El índice *Deutscher Aktienindex* es el índice bursátil de referencia de la Bolsa de Fráncfort. Es el índice más conocido de la Bolsa alemana. Su cálculo consiste en una media aritmética ponderada por capitalización.

- Francia

- *CAC 40*

El *Cotation Assistée en Continu* toma su nombre del primer sistema de automatización de la Bolsa de París. El índice es una medida ponderada según la capitalización de los 40 valores más significativos de entre las 100 mayores empresas negociadas en la Bolsa de París.

- Italia

- *FTSE ITALIA*

Es el punto de referencia para la bolsa de valores italiana. El índice consiste de las 40 acciones más comercializadas en esta bolsa.

- ASIA

- Japón

- *NIKKEI*

Es el índice bursátil más popular del mercado japonés, lo componen los 225 valores más líquidos que cotizan en la Bolsa de Tokio. Desde 1971, lo calcula el periódico *Nihon Keizai Shinbun* (Diario Japonés de los Negocios), de cuyas iniciales proviene el nombre del índice.

- China

- *SHANGHAI COMPOSITE*

El *Shanghai Composite Index* es un índice bursátil con todos los valores (acciones clase A y clase B) que se negocian en la bolsa de Shanghái - *Shanghai Stock Exchange*.

- Hong Kong - *HANG SENG*

Es el principal índice bursátil chino de Hong Kong en el *Hong Kong Stock Exchange*. Es usado para grabar y monitorizar diariamente los cambios de las más grandes compañías de Hong Kong en el mercado de acciones. Consiste en 33 compañías representando el 65% del Hong Kong Stock Exchange.

Sus valores ponderan por el criterio de capitalización. Para formar parte del índice el valor debe estar dentro del 90% de empresas con mayor capitalización y volumen, y haber cotizado en la Bolsa de Hong Kong durante más de 24 meses.

- India

- *NSE 50*

Éste es el índice guía para las grandes compañías de la bolsa de valores de la India. Está diversificado en 50 acciones que toman en cuenta 23 sectores de la economía hindú.

- AUSTRALIA

- Australia

- *ALL ORDINARIES*

Es el más antiguo índice de acciones australiano, llamado así por contener prácticamente a todas las acciones ordinarias listadas en la bolsa australiana. Contiene aproximadamente el 95% del valor total de las acciones listadas en esta bolsa.

El muestreo de las series históricas fue mensual, mientras que la longitud fue determinada de acuerdo a la disponibilidad de los datos. Las fechas inicial y final de cada una de las series se muestra en la siguiente tabla;

Índice	Fecha inicial	Fecha final
S&P 500	Enero 3 1950	Agosto 1 2012
DOW JONES	Octubre 1° 1928	Agosto 1 2012
NASDAQ (COMPOSITE)	Febrero 5 1971	Agosto 1 2012
TSX (COMPOSITE)	Enero 3 2000	Agosto 2 2012
IBOVESPA	Mayo 1 1993	Agosto 1 2012
IPyC	Noviembre 8 1991	Agosto 1 2012
IPSA 40	Enero 10 2003	Agosto 1 2012
FTSE 100	Abril 2 1984	Agosto 1 2012
DAX	Diciembre 1 1990	Agosto 1 2012
CAC 40	Marzo 1 1990	Agosto 1 2012
FTSE ITALIA	Junio 2 2003	Agosto 1 2012
NIKKEI	Enero 4 1984	Agosto 1 2012
HANG SENG	Enero 1 1987	Agosto 1 2012
SHANGHAI	Enero 4 2000	Agosto 1 2012
NSE 50	Agosto 12 2002	Agosto 1 2012
ALL ORDINARIES	Agosto 3 1984	Agosto 1 2012
SICA	Enero 1 1990	Abril 1 2012
SICC	Enero 1 1990	Mayo 1 2012

Tabla 1. Fechas inicial y final para cada una de las series históricas consideradas.

En el caso del análisis de coherencia, tanto espectral como por wavelets, el modelo necesita que las series tengan la misma longitud, por lo que éste se realizó utilizando las fechas inicial y final de la serie de menor longitud.

En ambos análisis de coherencia, se compararon con los índices mencionados con el *IPyC*, que se considera como el más representativo de México.

4.2. Resultados del Análisis Espectral

En las siguientes tablas podemos ver los principales resultados obtenidos para cada uno de los índices mencionados anteriormente. Se muestran sólo los diez ciclos más relevantes en cada caso¹.

Índice	Tipo de análisis	Ciclos en meses									
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
ALL ORDINARIES – AUS	FFT	5.89	8.62	4	8.4	7.15	24	14	16	112	42
	WK	5.89	8.62	4	7.15	16	8.4	17.68	16.8	14	5.79
IBOVESPA – BRA	FFT	38.67	116	33.14	23.2	58	11.05	77.33	46.4	29	21.09
	WK	38.67	23.2	11.05	25.78	116	33.14	58	17.85	8.59	4.83
CAC 40 – FRA	FFT	4.2	89.67	5.85	7.91	12.23	8.68	67.25	24.45	10.35	5.38
	WK	4.2	7.91	10.35	4.72	4.64	8.68	4.41	10.76	4.8	9.96
DAX – ALE	FFT	5.93	23.73	87	37.29	7.91	10.88	4.28	10.44	11.86	4.21
	WK	4.28	10.44	5.93	10.88	4.21	37.29	4.75	11.86	4.5	14.5
Dow Jones – US	FFT	24.14	5.93	42.25	5.37	92.18	84.5	7.86	5.86	5.9	507
	WK	5.93	42.25	84.5	7.86	92.18	24.14	7.92	5.9	101.4	78
FTSE 100 – GB	FFT	4.86	24.29	6.94	4	4.66	5.67	14.78	10.97	4.3	4.47
	WK	4.86	4.66	6.94	14.78	4.72	14.17	4	4.47	4.93	24.29
FTSE – ITA	FFT	36.67	4.07	13.75	11	22	5.79	5	6.47	6.88	12.22
	WK	4.78	5.79	7.86	6.47	4.23	5	4.4	7.33	36.67	11
HANG SENG – CHI	FFT	8.32	7.16	4.74	11	20.53	9.33	5.05	44	8.56	6.42
	WK	7.16	8.32	11	4.74	4.81	8.8	6.42	20.53	8.56	7
IPyC – MEX	FFT	8.03	10.38	4.22	10.83	4.7	22.64	31.13	41.5	24.9	13.83
	WK	4.22	10.38	8.03	10.83	24.9	4.02	4.7	31.13	22.64	13.83

Tabla 2. Resultados del análisis espectral.

¹ Los resultados obtenidos constan de demasiados ciclos, por lo que no es posible incluirlos en el presente reporte. Para ver los resultados completos vea los archivos en formato Excel en el CD incluido en este trabajo, dentro de la carpeta *spectral_analysis*.

Índice	Tipo de análisis	Ciclos en meses									
IPSA 40 – CHILE	FFT	9	36	5.4	13.5	5.68	10.8	4.15	7.71	4.5	4.91
	WK	9	5.4	4.15	36	4.91	10.8	15.43	18	4.32	21.6
NASDAQ (COMPOSITE) – US	FFT	41.5	24.9	5.35	8.74	7.22	5.03	83	8.59	9.22	5.86
	WK	41.5	9.22	8.74	4.18	8.59	7.22	16.06	83	4.22	5.86
NIKKEI – JAP	FFT	114.33	14.91	4.83	11.06	4.18	24.5	10.09	4.45	42.88	68.6
	WK	4.7	14.91	4.18	11.06	8.57	114.33	10.09	4.64	8.37	4.45
NSE 50 – IN	FFT	17.14	24	4.8	4.14	40	10.91	13.33	4	9.23	4.62
	WK	17.14	4.8	4.14	5.22	10.91	24	40	4.29	9.23	5.71
Shanghai – CHI	FFT	37.75	8.88	5.03	21.57	25.17	75.5	50.33	30.2	4.31	11.62
	WK	37.75	5.03	8.88	21.57	25.17	50.33	11.62	4.31	18.88	5.21
SICA	FFT	38.7	8.6	48.38	35.18	14.88	9.68	11.06	6.56	21.5	32.25
	WK	38.7	43	8.6	35.18	55.29	32.25	20.37	9.68	14.88	11.06
SICC	FFT	38.8	97	48.5	35.27	20.42	129.33	16.87	77.6	32.33	22.82
	WK	38.8	43.11	97	55.43	35.27	64.67	20.42	32.33	48.5	77.6
S&P 500 – US	FFT	41.72	24.23	4.2	15.98	5.91	8.73	4.06	46.94	5.87	17.88
	WK	4.2	41.72	24.23	4.75	5.91	17.88	4.22	5.87	8.73	46.94
TSX (COMPOSITE) – CAN	FFT	10.71	18.75	5	15	75	21.43	5.56	37.5	13.64	5.36
	WK	10.71	5	18.75	5.56	4.84	15	5.77	37.5	21.43	5.36

Tabla 2. Continuación.

La tabla 2 muestra los principales ciclos en meses para los índices analizados. Los ciclos están ordenados de izquierda a derecha de acuerdo a la mayor “energía” o el de mayor peso del ciclo en la serie. Las siglas FFT indican que los resultados fueron obtenidos mediante el análisis espectral clásico o de Fourier, mientras que las siglas WK indican que fueron obtenidos mediante el análisis espectral de Wiener-Khinchin.

Éste primer análisis muestra a simple vista que los resultados mediante ambas aproximaciones coinciden en algunos casos, mientras que en otros difieren. Sin embargo los resultados son mucho más similares de lo que aparentan, lo que sucede es que cada una de las aproximaciones “asigna” un peso diferente a cada uno de los ciclos. Esto lo podemos ver en algunos los resultados de la tabla 2, por ejemplo para el índice *IPyC*, vemos que el tercer resultado para el análisis de Fourier indica que existe un ciclo de 4.22 meses, mientras que el primer resultado para el análisis WK indica el mismo ciclo. Otra característica que notamos es que la mayoría de los ciclos con alta energía son cortos. Lo cual concuerda con otros estudios realizados.

Para el estudio se utilizaron los retornos logarítmicos¹ de las series en vez de las series originales. Esto se hace debido a que la técnica de análisis de Fourier está basada en la suposición de que estamos tratando con series estacionarias, el uso de retornos logarítmicos es una técnica utilizada para “retirar” la tendencia de la serie.

Podemos decir que la longitud de los ciclos obtenida en ambas técnicas será la misma, pero cuando obtenemos ciclos con energías similares o iguales en ambos casos, podemos tener certeza de que dicho ciclo tiene la energía considerada y está presente en la serie. El dato de la energía, o el espectro del ciclo, sólo es útil usualmente como una referencia respecto a los otros ciclos, en caso

¹ Sea $x(t)$ una serie de tiempo, se define la serie de retornos logarítmicos como:

$$x'(t) = \ln\left(\frac{x(t)}{x(t-1)}\right) = \ln(x(t)) - \ln(x(t-1))$$

de que se requiera, debe darse preferencia al arrojado por el análisis WK ya que, como se mencionó anteriormente, reduce el efecto del fenómeno de Gibbs.

Dicho lo anterior, vemos que el ciclo de mayor energía del índice *Bovespa* es de 38.67 meses, el del índice *CAC 40* de 4.2, el de *Dow Jones* de 5.93, el de *FTSE 100* de aproximadamente 5, el del *IPyC* de 10.38, *Nasdaq* de 41.5, *NSE 50* de 17.14, *Shanghái* de 37.75 y el de *Nikkei* de 14.91.

Existen también ciclos de alta energía para el resto de los índices, el *DAX* muestra un ciclo importante de aproximadamente 5 meses, para el *Hang-Seng* el segundo mayor ciclo es de 7.16 meses, para *FTSE Italia* vemos uno de 4 meses, *IPSA 40* muestra un ciclo significativo de 9 meses, *S&P 500* uno de 41.72 y *TSX* uno de aproximadamente 10 meses.

Hay otros ciclos coincidentes en energía, la cual no necesariamente debe ser la misma exactamente para considerar que tenemos evidencia suficiente de un ciclo de dicha longitud. Por ejemplo, en el caso de *All Ordinaries* se presentan como ciclos de mayor energía, en el cuarto lugar, 8.4 y 7.15, esto nos indica que para el este índice existe un ciclo importante que ronda entre los 7 y los 8 meses.

4.3. Resultados del Análisis de Coherencia

En la tabla 3 podemos ver los principales resultados obtenidos para cada uno de los índices mencionados anteriormente. Nuevamente se muestran sólo los diez ciclos más relevantes en cada caso.

Índice

Ciclos en meses de ALL ORDINARIES - AUS	Ciclos en meses	10	4.6	9.6	4.5	7.3	7.8	4.7	4.3	10.8	35.6
	Característica de la serie IPyC	Adelantada	Atrasada	Atrasada	Atrasada	Atrasada	Atrasada	Adelantada	Atrasada	Atrasada	Adelantada
	Coherencia	0.9980	0.9404	0.8114	0.6748	0.3367	0.3215	0.2656	0.1901	0.1633	0.1340
	Fase en meses	2	0.5	7.7	0.5	5.1	7	3.8	1.3	2.2	21.3
	Característica de las series	En Fase	En Fase	Fuera de Fase	En Fase	Fuera de Fase	Fuera de Fase	Fuera de Fase	En Fase	En Fase	Fuera de Fase
Ciclos en meses de IBOVESPA - BRA	Ciclos en meses	4.1	5.7	4.4	8.3	10.5	8.6	4.2	8.9	4.6	12.2
	Característica de la serie IPyC	Adelantada	Adelantada	Adelantada	Atrasada	Atrasada	Atrasada	Adelantada	Adelantada	Atrasada	Adelantada
	Coherencia	0.9891	0.7240	0.4746	0.2829	0.2703	0.2586	0.2526	0.2439	0.2422	0.2258
	Fase en meses	1.2	3.4	2.2	2.5	8.4	1.7	2.1	6.2	2.3	3.7
	Característica de las series	En Fase	Fuera de Fase	En Fase	En Fase	Fuera de Fase	En Fase	En Fase	Fuera de Fase	En Fase	En Fase
Ciclos en meses de CAC 40 - FRA	Ciclos en meses	7.8	4.5	10	7.3	9.6	4.4	8.3	7.5	4.6	6.7
	Característica de la serie IPyC	Atrasada	Atrasada	Adelantada	Adelantada	Coincidente	Atrasada	Coincidente	Atrasada	Atrasada	Atrasada
	Coherencia	0.9910	0.5140	0.4263	0.2436	0.2125	0.2083	0.1747	0.1511	0.1336	0.0886
	Fase en meses	3.9	0.9	3	5.1	0	1.3	0	3.8	0.9	0.7
	Característica de las series	En Fase	En Fase	En Fase	Fuera de Fase	En Fase	En Fase	En Fase	En Fase	En Fase	En Fase
Ciclos en meses de DAX - ALE	Ciclos en meses	10	4.5	7.8	7.3	8.3	9.6	4.6	7.5	4.7	7.1
	Característica de la serie IPyC	Adelantada	Atrasada	Adelantada	Atrasada	Adelantada	Adelantada	Atrasada	Atrasada	Adelantada	Adelantada
	Coherencia	0.9825	0.7932	0.7112	0.5898	0.5394	0.3987	0.2479	0.2391	0.1847	0.1691
	Fase en meses	3	0.5	3.9	3.7	0.8	1	0.5	4.5	4.2	5.7
	Característica de las series	En Fase	En Fase	En Fase	En Fase	En Fase	En Fase	En Fase	Fuera de Fase	Fuera de Fase	Fuera de Fase
Ciclos en meses de Dow Jones	Ciclos en meses	7.8	4.8	10	8.3	9.6	7.3	7.5	6.7	4.2	4.6
	Característica de la serie IPyC	Atrasada	Adelantada	Adelantada	Adelantada	Adelantada	Atrasada	Atrasada	Adelantada	Adelantada	Adelantada
	Fase en meses	33	53	26	31	27	35	34	38	60	55
	Coherencia	0.9915	0.1736	0.1511	0.0627	0.0584	0.0566	0.0558	0.0520	0.0243	0.0211
	Característica de las series	7	1	5	2.5	2.9	5.9	6.8	4	4.2	2.8

Tabla 3. Resultados del análisis de coherencia.

Índice

Ciclos en meses de FTSE 100 - GB	Ciclos en meses	7.8	14.6	7.3	10	8.3	9.6	7.5	13.8	13.1	35.6
	Característica de la serie IPyC	Atrasada	Adelantada	Adelantada	Adelantada	Coincidente	Atrasada	Atrasada	Adelantada	Atrasada	Adelantada
	Coherencia	0.9700	0.2807	0.2705	0.2480	0.2229	0.1504	0.1269	0.0900	0.0892	0.0889
	Fase en meses	4.7	10.3	4.4	3	0	9.6	4.5	13.8	1.3	24.9
	Característica de las series	Fuera de Fase	Fuera de Fase	Fuera de Fase	En Fase	En Fase	Fuera de Fase	Fuera de Fase	Fuera de Fase	En Fase	Fuera de Fase
Ciclos en meses de FTSE - ITA	Ciclos en meses	8.5	55	10	9.2	15.7	11	4.2	13.8	36.7	12.2
	Característica de la serie IPyC	Atrasada	Adelantada	Adelantada	Adelantada	Atrasada	Adelantada	Adelantada	Atrasada	Atrasada	Atrasada
	Coherencia	0.9201	0.5646	0.4101	0.3902	0.3354	0.3000	0.2949	0.2401	0.1898	0.1741
	Fase en meses	0.8	22	7	8.3	6.3	2.2	0.8	1.4	11	3.7
	Característica de las series	En Fase	En Fase	Fuera de Fase	Fuera de Fase	En Fase	En Fase	En Fase	En Fase	En Fase	En Fase
Ciclos en meses de HANG SENG - CHI	Ciclos en meses	7.8	10	7.3	7.5	8.3	4.6	10.8	5.1	4.5	9.2
	Característica de la serie IPyC	Atrasada	Adelantada	Atrasada	Atrasada	Adelantada	Atrasada	Atrasada	Atrasada	Adelantada	Adelantada
	Coherencia	0.3205	0.1648	0.0805	0.0785	0.0590	0.0584	0.0413	0.0407	0.0345	0.0345
	Fase en meses	7	3	4.4	4.5	0.8	1.4	1.1	0.5	1.8	3.7
	Característica de las series	Fuera de Fase	En Fase	Fuera de Fase	Fuera de Fase	En Fase	En Fase	En Fase	En Fase	En Fase	En Fase
Ciclos en meses de IPSA 40 - CHILE	Ciclos en meses	6.8	8.3	13.5	54	4.2	10.8	12	9	4.7	7.7
	Característica de la serie IPyC	Atrasada	Adelantada	Atrasada	Adelantada	Atrasada	Atrasada	Adelantada	Coincidente	Atrasada	Atrasada
	Coherencia	0.3844	0.3682	0.3176	0.3033	0.2910	0.2732	0.2659	0.2207	0.1861	0.1048
	Fase en meses	2	4.2	1.4	10.8	0.8	4.3	12	0	1.4	2.3
	Característica de las series	En Fase	En Fase	En Fase	En Fase	En Fase	En Fase	Fuera de Fase	En Fase	En Fase	En Fase
Ciclos en meses de NASDAQ (COMPOSITE)	Ciclos en meses	4.5	10	5.3	4.8	4.4	4.6	11.3	4.2	9.6	13.1
	Característica de la serie IPyC	Atrasada	Adelantada	Atrasada	Atrasada	Atrasada	Atrasada	Adelantada	Adelantada	Atrasada	Adelantada
	Coherencia	0.9458	0.9160	0.6354	0.5451	0.5229	0.3580	0.3479	0.3093	0.2598	0.2563
	Fase en meses	0.9	2	2.6	2.9	1.3	0.9	7.9	1.7	5.7	10.5
	Característica de las series	En Fase	En Fase	En Fase	Fuera de Fase	En Fase	En Fase	Fuera de Fase	En Fase	Fuera de Fase	Fuera de Fase

Tabla 3. Continuación

Índice

Ciclos en meses de NIKKEI – JAP	Ciclos en meses	7.8	4.5	10.4	10.8	7.3	13.1	4.2	11.9	4.3	83
	Característica de la serie IPyC	Adelantada	Atrasada	Atrasada	Atrasada	Atrasada	Adelantada	Adelantada	Adelantada	Adelantada	Adelantada
	Coherencia	0.9103	0.6667	0.5825	0.3845	0.2669	0.2540	0.2405	0.2279	0.2098	0.1768
	Fase en meses	0.8	0.9	5.2	2.2	5.9	11.8	1.3	10.7	2.1	41.5
	Característica de las series	En Fase	En Fase	En Fase	En Fase	Fuera de Fase	Fuera de Fase	En Fase	Fuera de Fase	En Fase	En Fase
Ciclos en meses de NSE 50 – IN	Ciclos en meses	30	5	8.6	5.2	4.6	20	10.9	15	4.3	8
	Característica de la serie IPyC	Adelantada	Atrasada	Atrasada	Atrasada	Adelantada	Adelantada	Adelantada	Adelantada	Adelantada	Adelantada
	Coherencia	0.6727	0.0455	0.0359	0.0271	0.0245	0.0216	0.0167	0.0154	0.0147	0.0134
	Fase en meses	30	2.5	1.7	1	2.3	18	5.5	4.5	0.9	1.6
	Característica de las series	Fuera de Fase	En Fase	En Fase	En Fase	En Fase	Fuera de Fase	En Fase	En Fase	En Fase	En Fase
Ciclos en meses de Shanghai – CHI	Ciclos en meses	5.2	5.8	30.2	10.1	6	9.4	8.4	5	5.4	6.3
	Característica de la serie IPyC	Adelantada	Atrasada	Atrasada	Adelantada	Atrasada	Atrasada	Coincidente	Atrasada	Adelantada	Atrasada
	Coherencia	0.2378	0.1738	0.1699	0.1629	0.1546	0.1514	0.1447	0.1253	0.1061	0.0987
	Fase en meses	4.2	1.2	6	9.1	1.2	0.9	0	2.5	1.6	0.6
	Característica de las series	Fuera de Fase	En Fase	En Fase	Fuera de Fase	En Fase	En Fase	En Fase	En Fase	En Fase	En Fase
Ciclos en meses de SICA – MEX	Ciclos en meses	10	7.8	9.6	8.3	10.4	10.8	9.2	13.1	4.5	7.3
	Característica de la serie IPyC	Adelantada	Adelantada	Adelantada	Adelantada	Adelantada	Atrasada	Atrasada	Atrasada	Adelantada	Atrasada
	Coherencia	0.5236	0.2890	0.1136	0.1123	0.0992	0.0961	0.0957	0.0765	0.0647	0.0640
	Fase en meses	9	0.8	4.8	5.8	7.3	5.4	5.5	7.9	0.5	2.9
	Característica de las series	Fuera de Fase	En Fase	En Fase	Fuera de Fase	Fuera de Fase	En Fase	Fuera de Fase	Fuera de Fase	En Fase	En Fase

Tabla 3. Continuación.

Índice

Ciclos en meses de SICC – MEX	Ciclos en meses	7.8	4.5	4.6	4.2	4.2	10.4	6.1	9.6	11.3	8.3
	Característica de la serie IPyC	Atrasada	Adelantada	Atrasada	Atrasada	Adelantada	Adelantada	Atrasada	Adelantada	Adelantada	Adelantada
	Coherencia	0.1900	0.1465	0.1141	0.0791	0.0710	0.0687	0.0646	0.0421	0.0407	0.0401
	Fase en meses	3.1	0.5	1.8	1.3	0.4	10.4	2.4	3.8	11.3	6.6
	Característica de las series	En Fase	En Fase	En Fase	En Fase	En Fase	Fuera de Fase	En Fase	En Fase	Fuera de Fase	Fuera de Fase
Ciclos en meses de S&P 500	Ciclos en meses	10	12.5	7.8	4.6	14.6	11.3	13.1	4.4	4.3	4.5
	Característica de la serie IPyC	Adelantada	Adelantada	Adelantada	Atrasada	Adelantada	Adelantada	Adelantada	Atrasada	Atrasada	Atrasada
	Coherencia	0.9805	0.6301	0.5206	0.5050	0.3463	0.3435	0.3366	0.3353	0.2938	0.2459
	Fase en meses	2	10	3.9	0.5	8.8	9.1	10.5	0.9	1.7	0.5
	Característica de las series	En Fase	Fuera de Fase	En Fase	En Fase	Fuera de Fase	Fuera de Fase	Fuera de Fase	En Fase	En Fase	En Fase
Ciclos en meses de TSX (COMPOSITE) - CAN	Ciclos en meses	8.8	4.4	5.8	8.3	5.6	4.2	4.3	4.5	5.4	7.5
	Característica de la serie IPyC	Coincidente	Atrasada	Coincidente	Adelantada	Atrasada	Adelantada	Atrasada	Atrasada	Atrasada	Adelantada
	Coherencia	0.3060	0.1745	0.1656	0.1255	0.1179	0.1145	0.1135	0.1096	0.1025	0.1008
	Fase en meses	0	1.3	0	5.8	1.1	1.3	2.1	2.3	2.1	7.5
	Característica de las series	En Fase	En Fase	En Fase	Fuera de Fase	En Fase	En Fase	En Fase	En Fase	En Fase	Fuera de Fase

Tabla 3. Continuación.

De la misma manera que en el caso del análisis espectral, los principales ciclos están ordenados de izquierda a derecha de acuerdo a la mayor coherencia o la mayor sincronización del ciclo en la serie. El renglón “Fase” nos indica la traslación del ciclo en la serie *IPyC* respecto a la serie indicada. El renglón “Característica de la serie *IPyC*” nos indica el adelanto, atraso o coincidencia del ciclo de la serie. El renglón “Característica de las series” nos indica si el ciclo indicado se mueve de manera positiva o negativa, esto es, si el ciclo en una de las series es creciente cuando el otro lo es también o inversamente.

Viendo los resultados obtenidos, el primer impulso que uno podría tener es, en analogía con el análisis de correlación simple, buscar los índices que tengan una mayor coherencia con el *IPyC* y suponer que son los que tienen una relación más estrecha con el índice. Sin embargo, debemos tener en cuenta que la coherencia es una función que depende de la frecuencia, o bien, de la duración del ciclo, por lo que este dato nos dice que existe una alta o baja sincronización en el intervalo de frecuencias considerado. Esto es, el hecho de que exista una alta coherencia para alguno de los resultados no indica que las series tengan una relación sumamente estrecha, sino que indica que existe una alta relación en su comportamiento cíclico a ese intervalo de frecuencias. Nuevamente notamos que la mayoría de los ciclos con alta energía son cortos.

4.4. Resultados del Análisis Espectral por Wavelets

En la figuras 11 a 27 vemos los resultados del análisis por wavelets.

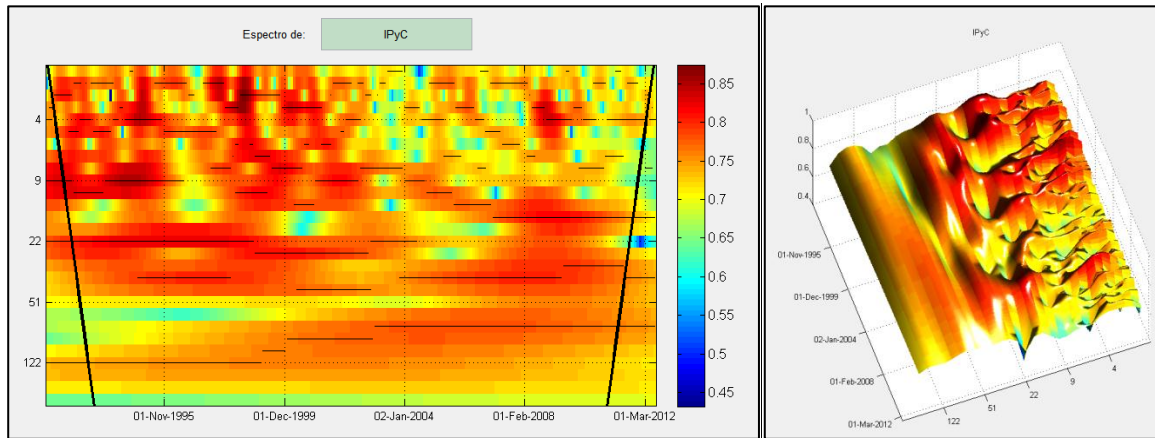


Figura 11. Resultados para el análisis espectral por wavelets para el índice *IPyC* de México.

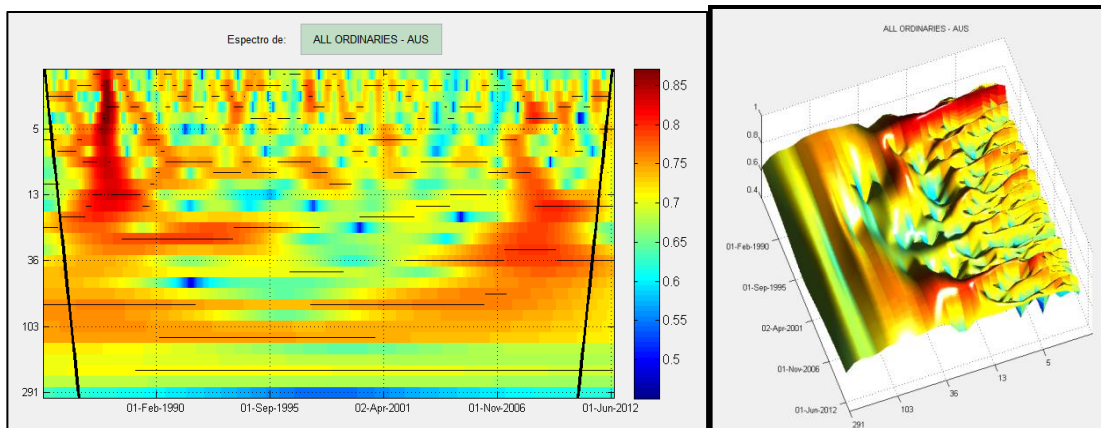


Figura 12. Resultados para el análisis espectral por wavelets para el índice *all ordinaries* de Australia.

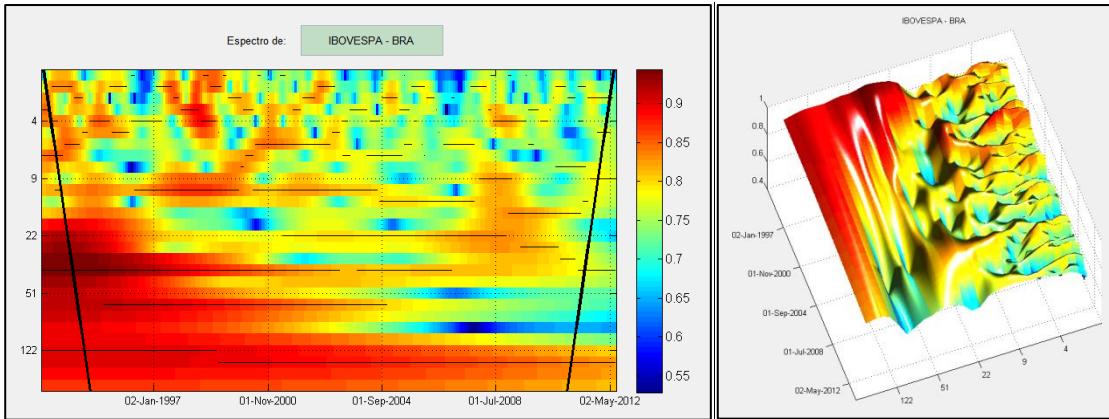


Figura 13. Resultados para el análisis espectral por wavelets para el índice Bovespa de Brasil.

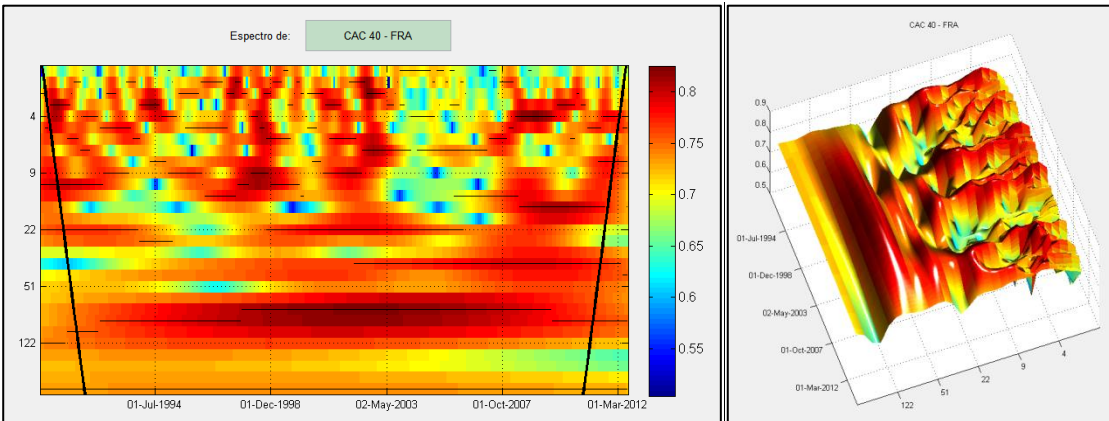


Figura 14. Resultados para el análisis espectral por wavelets para el índice CAC 40 de Francia.

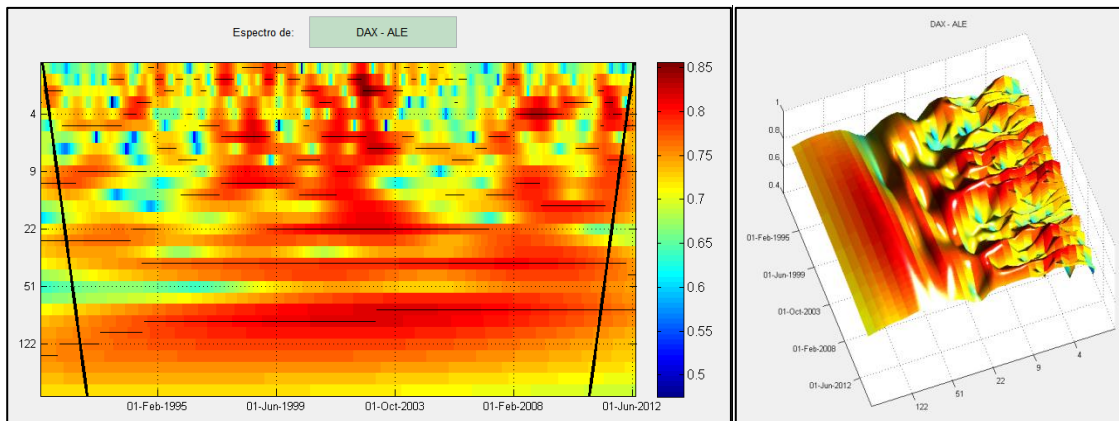


Figura 15. Resultados para el análisis espectral por wavelets para el índice DAX de Alemania.

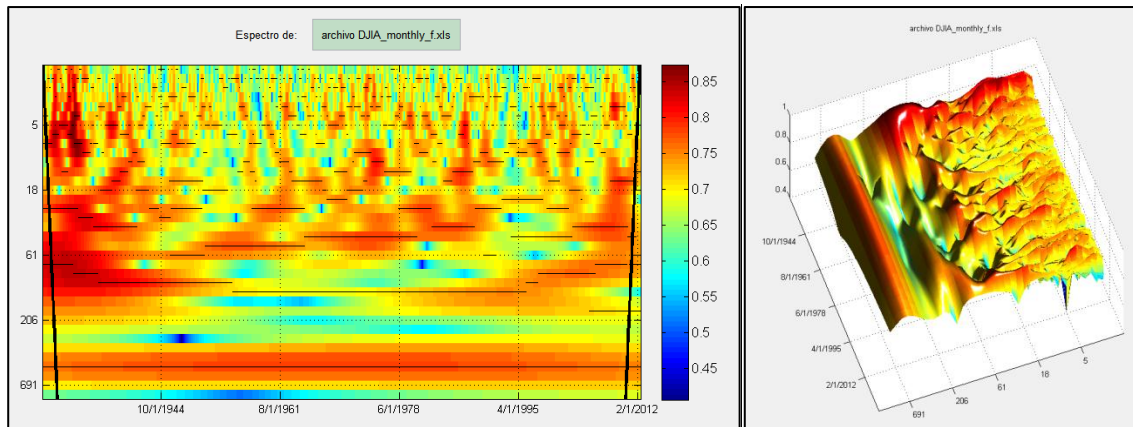


Figura 16. Resultados para el análisis espectral por wavelets para el índice Dow Jones de Estados Unidos.

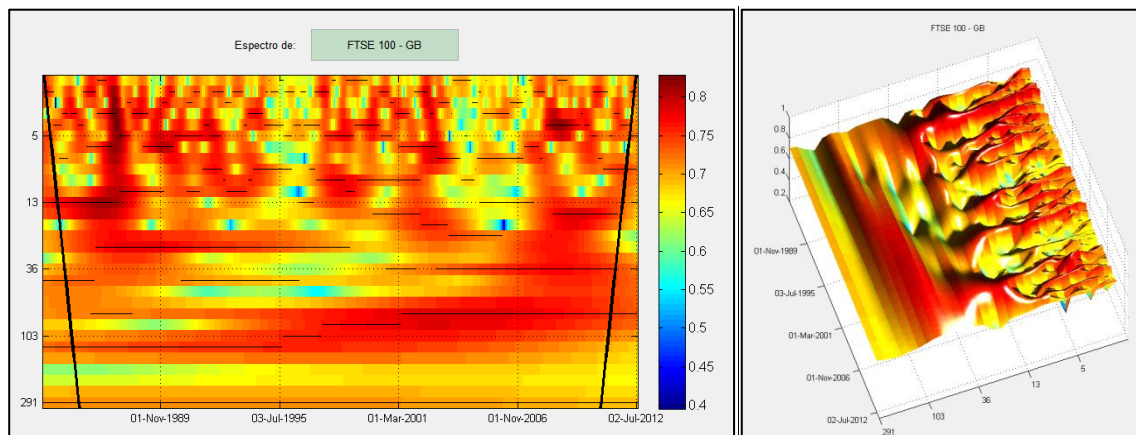


Figura 17. Resultados para el análisis espectral por wavelets para el índice FTSE 100 de Reino Unido.

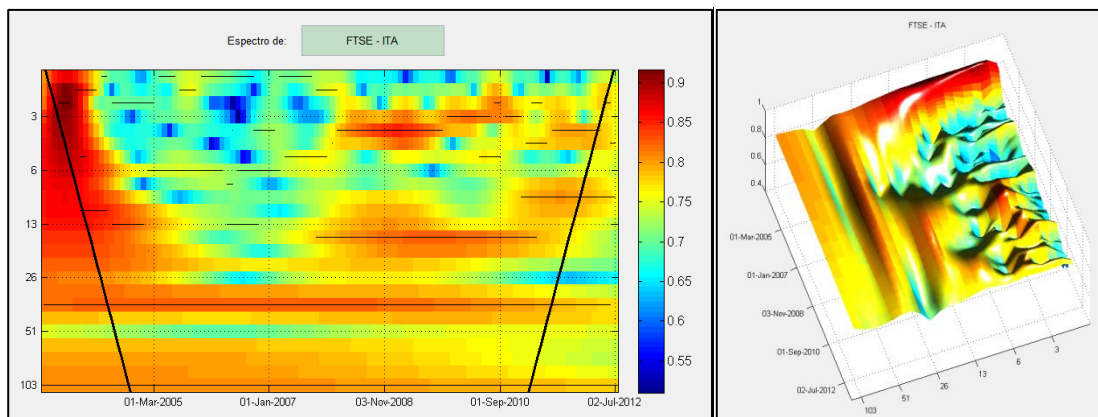


Figura 18. Resultados para el análisis espectral por wavelets para el índice FTSE-ITA de Italia.

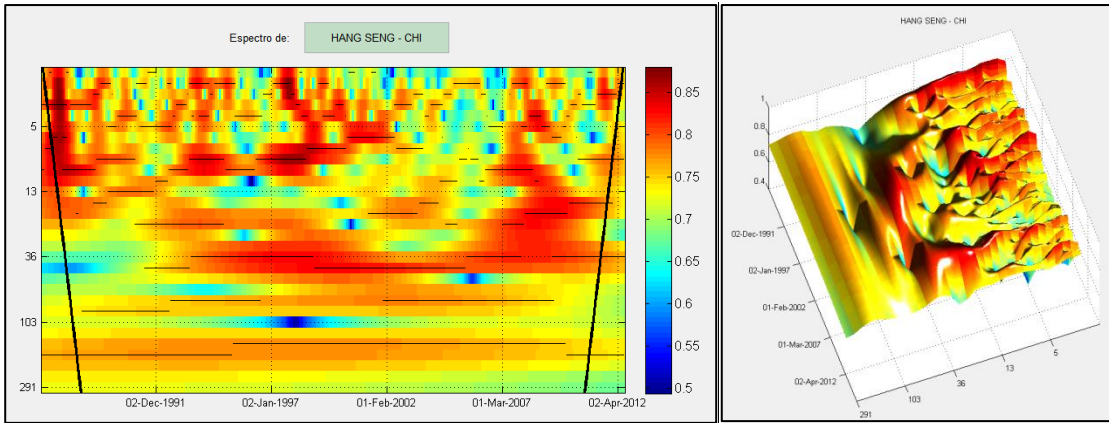


Figura 19. Resultados para el análisis espectral por wavelets para el índice Hang Seng de Hong Kong, China.

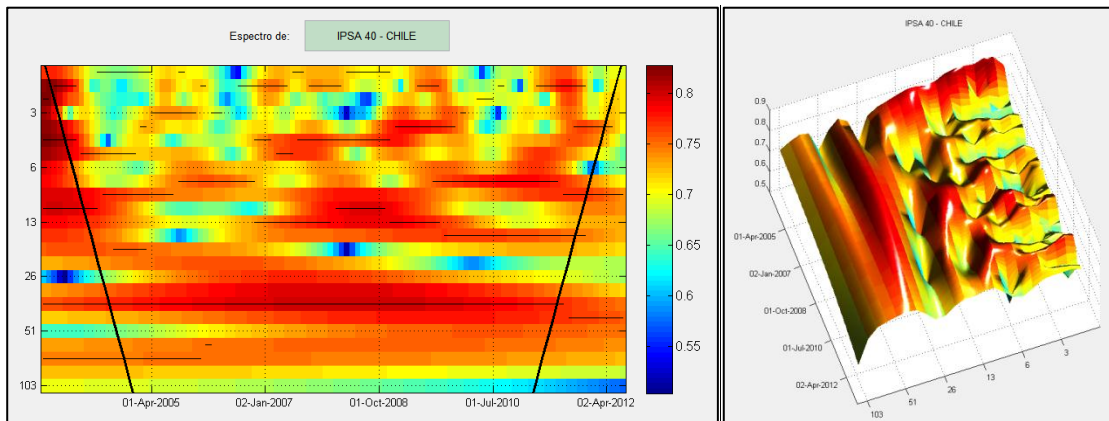


Figura 20. Resultados para el análisis espectral por wavelets para el índice IPSA 40 de Chile.

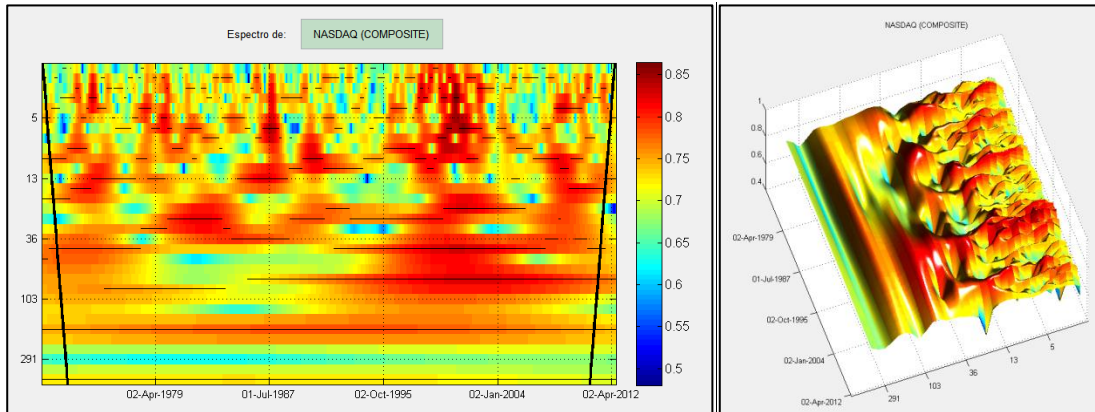


Figura 21. Resultados para el análisis espectral por wavelets para el índice Nasdaq de Estados Unidos.

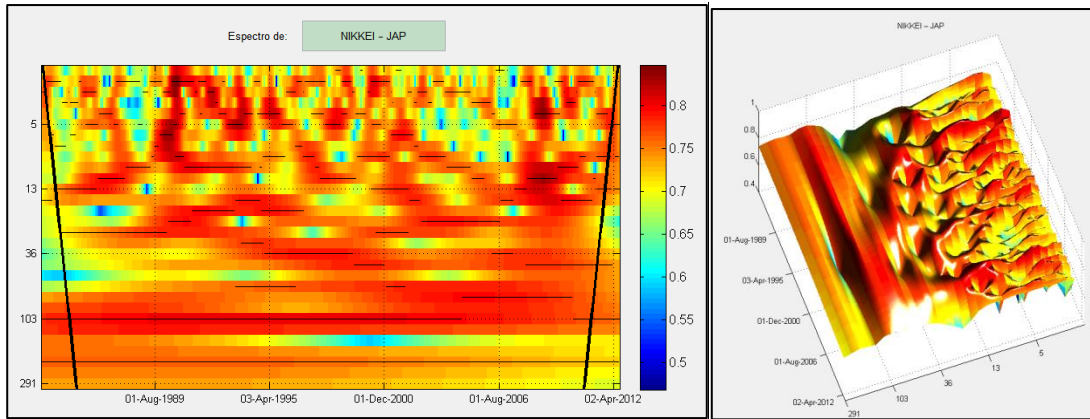


Figura 22. Resultados para el análisis espectral por wavelets para el índice Nikkei de Japón.

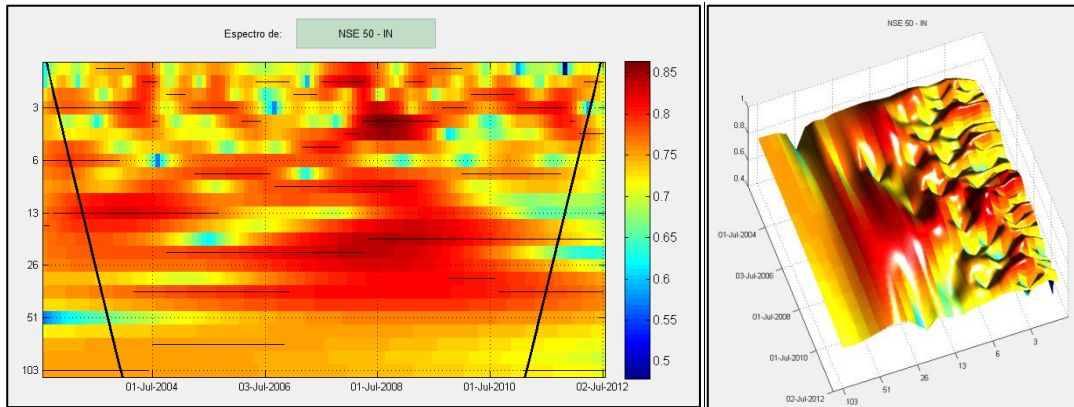


Figura 23. Resultados para el análisis espectral por wavelets para el índice NSE 50 de India.

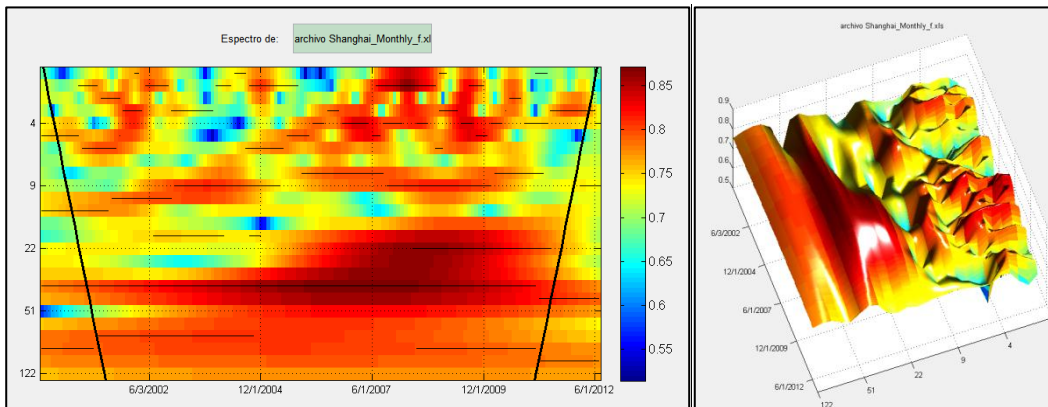


Figura 24. Resultados para el análisis espectral por wavelets para el índice Shanghai de China.

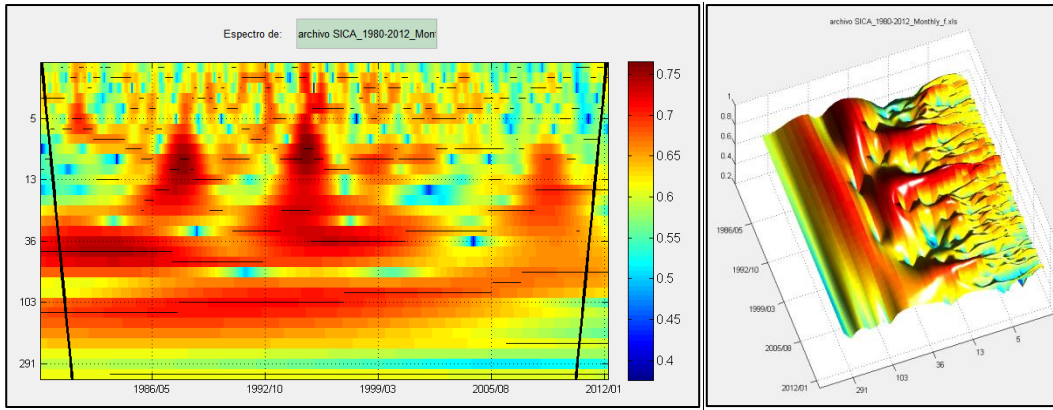


Figura 25. Resultados para el análisis espectral por wavelets para el índice SICA de México.

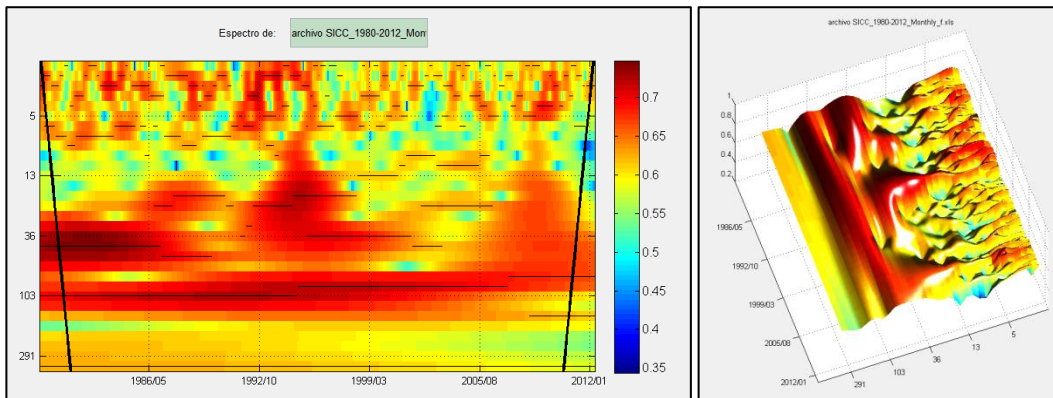


Figura 26. Resultados para el análisis espectral por wavelets para el índice SICC de México.

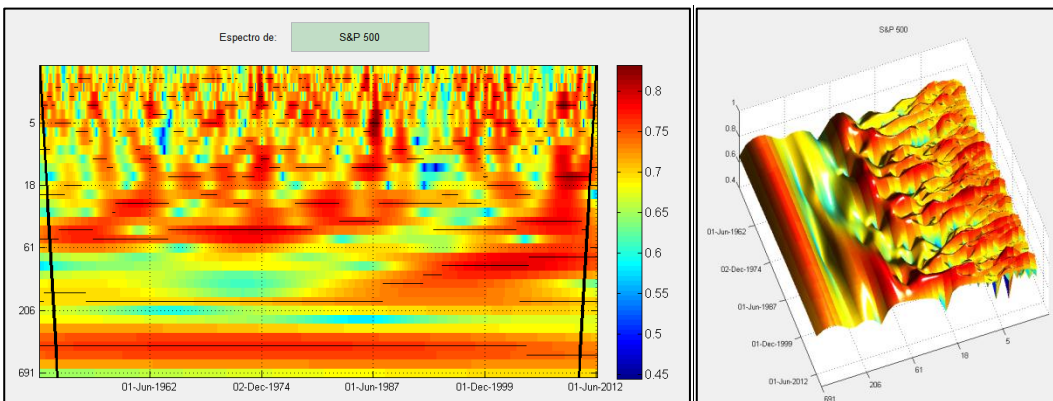


Figura 27. Resultados para el análisis espectral por wavelets para el índice Standard and Poor's de Estados Unidos

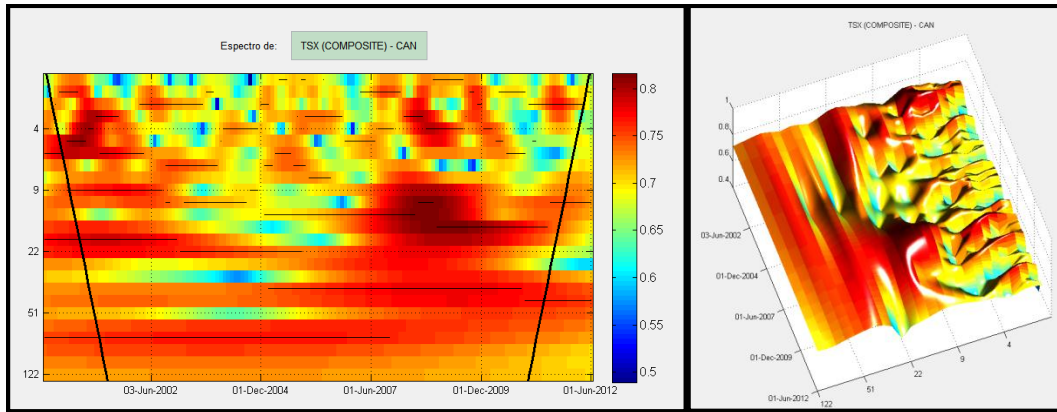


Figura 28. Resultados para el análisis espectral por wavelets para el índice TSX de Canadá.

Los resultados obtenidos mediante el análisis por wavelets distan, en cuanto su simplicidad, de los obtenidos mediante el análisis espectral. En este caso los resultados son una serie de gráficas en 3 dimensiones.

Como se mencionó anteriormente, el análisis por wavelets nos brinda información tanto en el dominio del tiempo como de la frecuencia. En las gráficas el eje X el tiempo, el eje Y representa la duración del ciclo en meses y el color en cada punto de la gráfica representa la energía del ciclo con dicha frecuencia y en ese momento.

Vemos también que la grafica en dos dimensiones tiene varias líneas negras horizontales superpuestas. Éstas representan los máximos locales en la gráfica.

Existen también dos líneas negras inclinadas a los lados de ésta gráfica, éstas representan el *cono de influencia*, el cual no es más que la longitud respectiva de cada wavelet en cada escala. Esta área delimita la región en donde el espectro no es afectado por la longitud de la serie, fenómeno conocido como *efectos de frontera*.

En los resultados del *IPyC* vemos que existe un comportamiento cíclico para el corto plazo más que en el largo en los últimos años. El ciclo de 51 meses se presenta de manera relativamente consistente a lo largo de todo el periodo, con algunas variaciones en longitud, la cual decrece. Existe también un ciclo largo de aproximadamente 10 años (120 meses) que se ha ido reduciendo en longitud a lo largo del tiempo.

El índice *All Ordinaries* presenta un comportamiento cíclico intenso entre los años 1985 y 1990 en lapsos desde 4 y hasta 13 meses. Este comportamiento reaparece a finales del 2008 y vuelve a desvanecerse a mediados del 2012, pero con longitudes mayores.

En el índice brasileño *Bovespa* existe un ciclo intenso de 40 meses al inicio del periodo y desaparece al inicio de 1999, mismo que re aparece alrededor del 2008 de manera menos intensa y de menor longitud. También vemos que estos periodos son acompañados de un ciclo largo que se mantiene en todo el periodo.

En el caso de *CAC 40* vemos un ciclo largo de aproximadamente 10.1 años (122 meses) que permanece a lo largo de prácticamente todo el periodo. Existen también una serie de ciclos cortos, en diversas longitudes de ciclo, entre el inicio del periodo y 2003 que parecen reaparecer desde 2007 y hasta la fecha final de análisis.

Para el *DAX* vemos que se conduce de una manera poco cíclica al inicio, con un incremento en los ciclos cortos en dos periodos, entre 1997 y 2003, y nuevamente entre 2008 y hasta la fecha final. Existe también un ciclo largo de 10 años, aunque no tan marcado como en el índice francés. Se nota un espectro similar entre Alemania y Francia, el cual no es de sorprender, dado que son de las potencias económicamente más importantes en la zona euro.

En el caso del *Dow Jones* existe un ciclo largo, de 6 años (70 meses) desde el inicio del periodo y hasta mediados de 1955. También muestra un ciclo sumamente largo, de casi 37 años, pero no tiene tanta presencia como los ciclos cortos, por ejemplo el de 50 meses es recurrente durante todo el tiempo considerado.

El índice *FTSE 100* muestra tres segmentos de series de ciclos cortos; el primero entre 1986 y 1988, el segundo entre 1998 y 2002 y el tercero entre 2007 y 2012. Existe también un ciclo largo de aproximadamente 4 años que inició a inicios de los 90's y parece desvanecerse para mediados de 2012, al mismo tiempo que decrece en longitud.

Para *FTSE Italia* vemos un intenso comportamiento cíclico a finales de 2003 y hasta 2005, el cual se presenta en casi todas las frecuencias o longitudes de ciclo. A finales de 2008 parece repetirse este comportamiento con muy poca intensidad. También presenta un ciclo largo de baja intensidad de aproximadamente 3 años (35 meses).

El índice *Hang-Seng* presenta tres cúmulos de ciclos cortos de alta intensidad. Éstos se encuentran entre 1987 y 1990, 1997 y 2002, 2007 y 2010, respectivamente. Existe también uno más de mediana intensidad entre 1992 y 1995. Además de los ciclos cortos, podemos ver un ciclo de tres años de mediana intensidad, entre 1992 y 2007.

IPSA 40 muestra tres series de ciclos cortos al principio y fin del periodo. Muestra también un cúmulo de ciclos a la mitad de éste, entre 2007 y 2009, que se extienden desde 4 meses y hasta 4 años.

El índice *Nasdaq* muestra un enorme comportamiento cíclico, durante todos los periodos y prácticamente durante todas las frecuencias. Quizás uno esperaría que tuviera un comportamiento similar con al índice *Dow Jones* y en efecto así es aunque no lo parezca. Si analizamos ambas gráficas, vemos que las dos tienen similitudes en cuanto a los patrones que presentan, la diferencia esencial radica en la intensidad de los ciclos.

En Japón, el índice *Nikkei* tiene ciclos en casi todas las frecuencias, vemos que este comportamiento inició en 1990 pero que tuvo un antecesor de baja intensidad entre 1986 y 1987. Cabe señalar que en general los ciclos asociados a éste índice tienen gran intensidad.

Los resultados para *NSE 50* muestran varios ciclos cortos a lo largo de todo el periodo, destaca sin embargo un conjunto de ciclos largos de entre 3 y 8 meses, los cuales inician en 2007 y terminan en 2009. Existe otro de mayor duración, de aproximadamente 20 meses, entre 2006 y 2009

Shanghái composite muestra también un conjunto de ciclos largos, desde 2002 y hasta 2010 prácticamente, desde 20 meses y hasta 45.

SICA muestra tres periodos de alta coherencia para el mediano plazo, entre 5 y 18 meses, para los periodos de 1985 a 1988, 1993 a 1997 y 2006 a 2010. Estos periodos cíclicos decrecen en intensidad con el tiempo.

SICC muestra un comportamiento similar al de *SICA* en cuanto al mediano plazo. La diferencia notable entre estos dos índices, es que *SICC* presenta un ciclo largo de aproximadamente 8.5 años (100 meses), mismo que permanece con alta intensidad durante casi todo el periodo, pero parece desaparecer hacia el final.

Para *Standard and Poor's* tenemos patrones similares al de *Dow Jones* y *Nasdaq*, con mediana intensidad en casi todos los ciclos y alto comportamiento cíclico para las bajas frecuencias.

TSX composite tiene ciclos muy localizados en el tiempo, pero dispersos en la frecuencia. Tenemos dos cúmulos principales; uno de ciclos cortos, entre 2000 y 2001, y el otro de ciclos cortos y medianos, entre 2008 y 2009.

4.5. Resultados del Análisis de Coherencia por Wavelets

En la figuras 29 a 42 vemos los resultados del análisis de coherencia por wavelets.

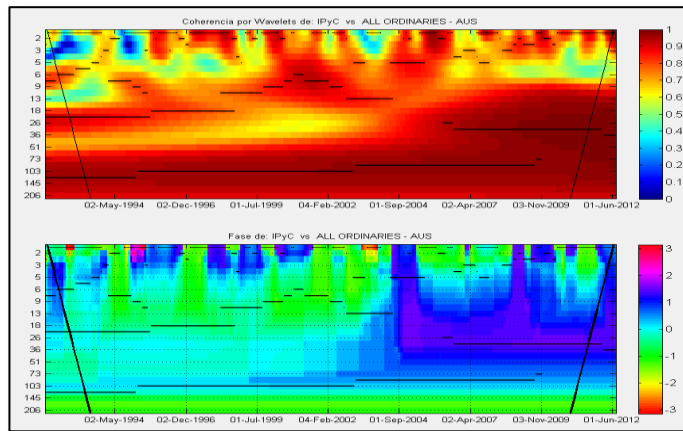


Figura 29. Resultados para el análisis de coherencia por wavelets para los índices IPyC y All Ordinaries.

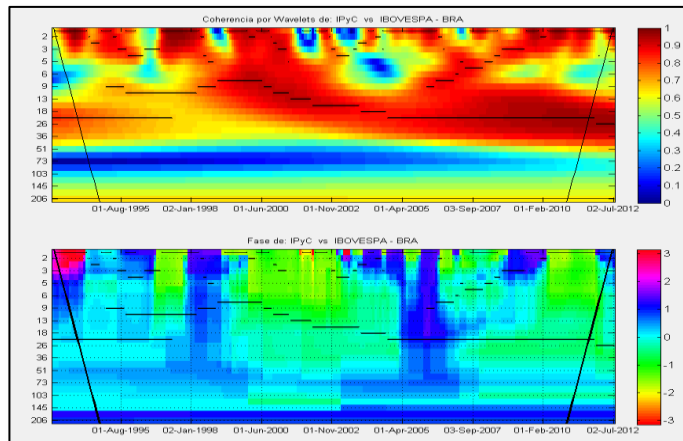


Figura 30. Resultados para el análisis de coherencia por wavelets para los índices IPyC y Bovespa.

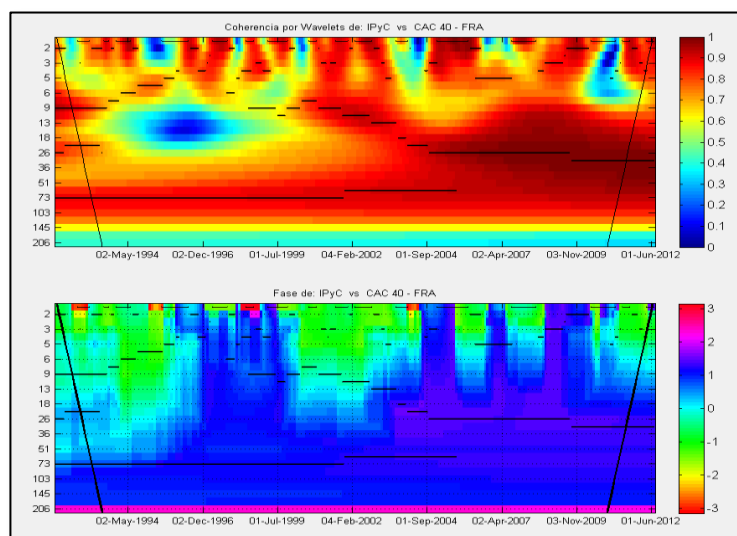


Figura 31. Resultados para el análisis de coherencia por wavelets para los índices IPyC y CAC 40.

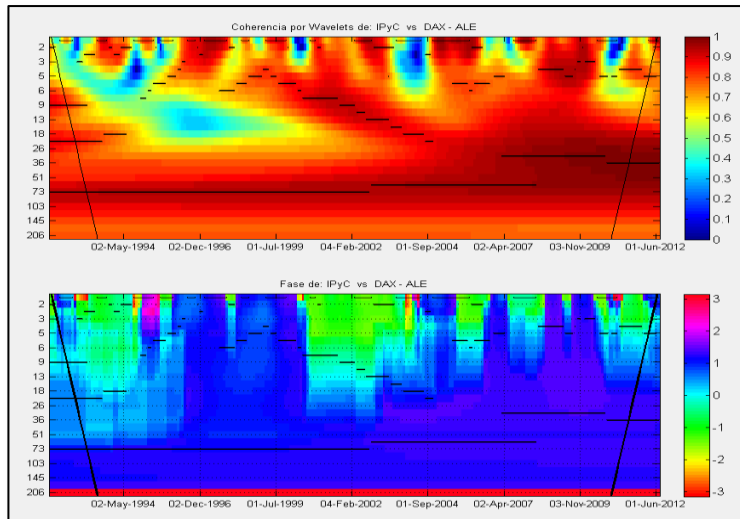


Figura 32. Resultados para el análisis de coherencia por wavelets para los índices IPyC y DAX.

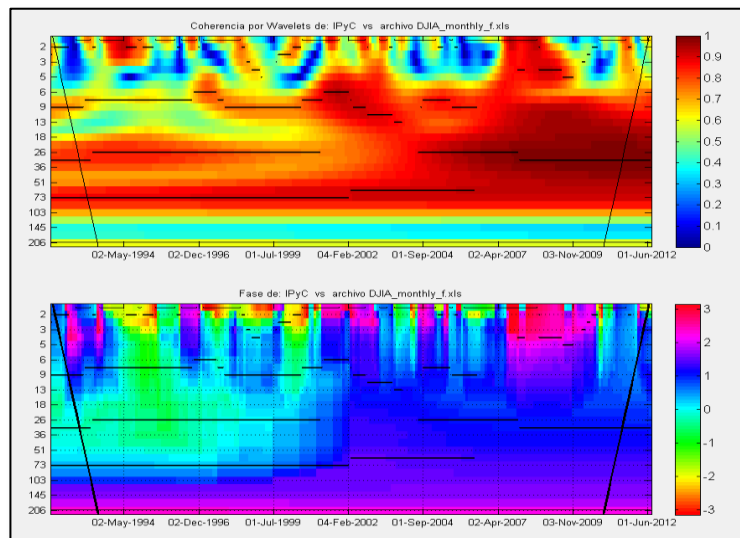


Figura 33. Resultados para el análisis de coherencia por wavelets para los índices IPyC y Dow Jones.

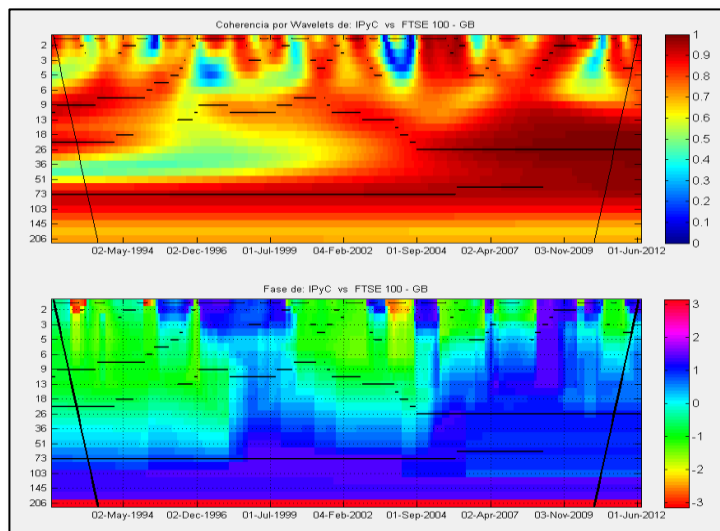


Figura 34. Resultados para el análisis de coherencia por wavelets para los índices IPyC y FTSE 100.

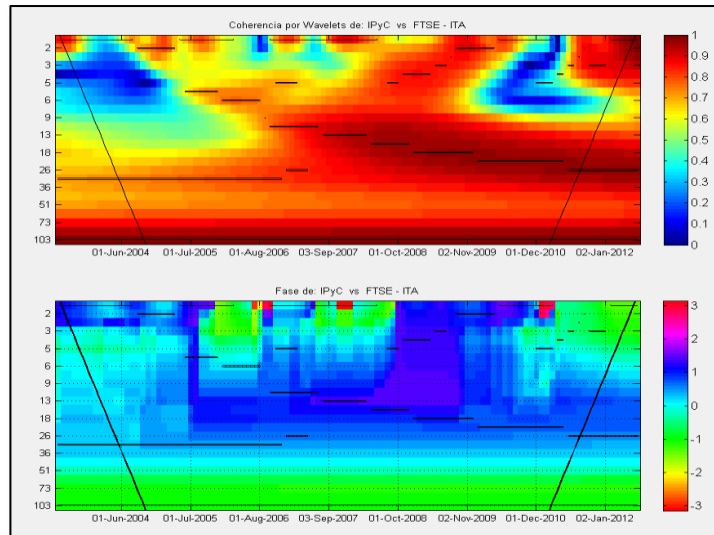


Figura 35. Resultados para el análisis de coherencia por wavelets para los índices IPyC y FTSE ITA.

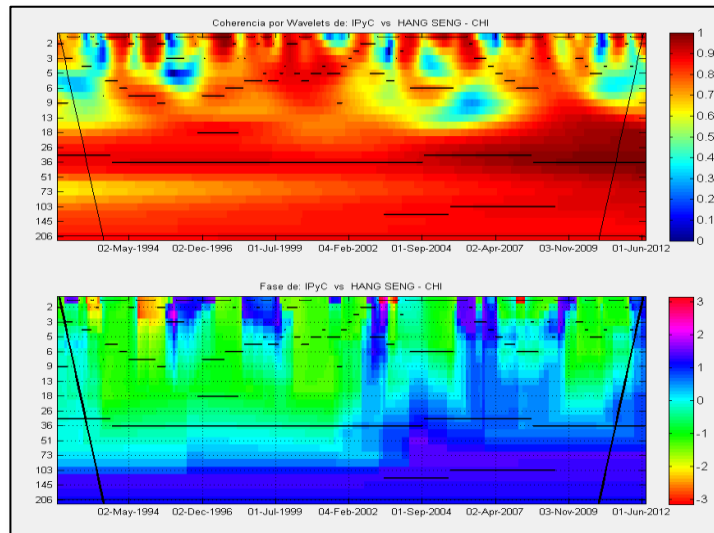


Figura 36. Resultados para el análisis de coherencia por wavelets para los índices IPyC y Hang Seng.

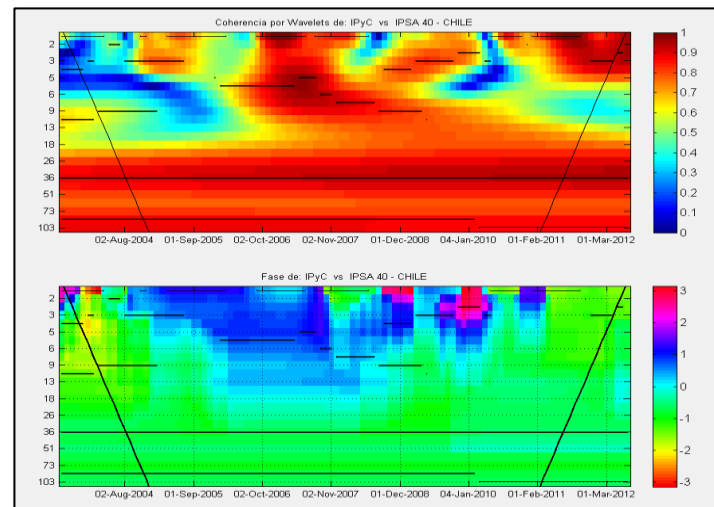


Figura 37. Resultados para el análisis de coherencia por wavelets para los índices IPyC e IPSA 40.

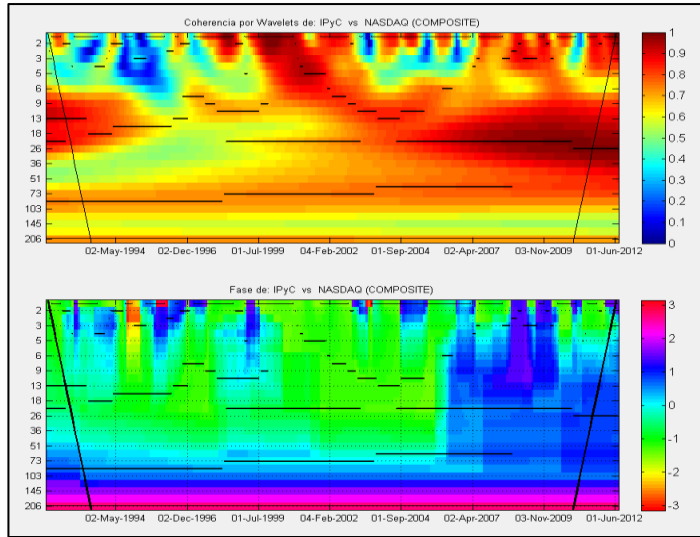


Figura 38. Resultados para el análisis de coherencia por wavelets para los índices IPyC y Nasdaq.

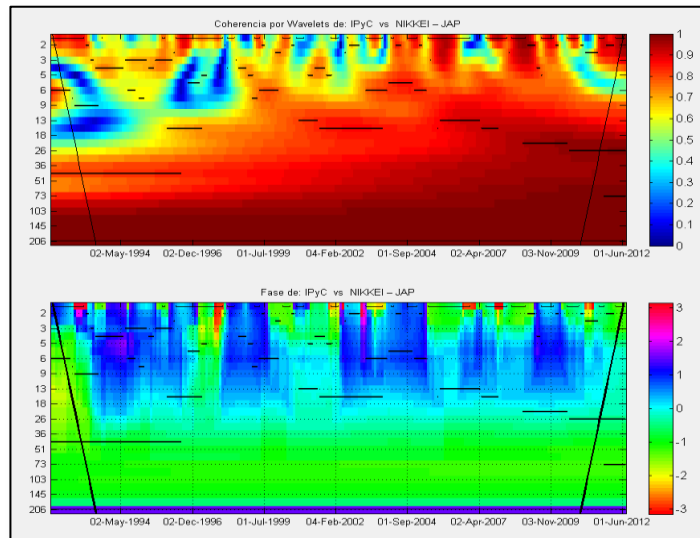


Figura 39. Resultados para el análisis de coherencia por wavelets para los índices IPyC y Nikkei.

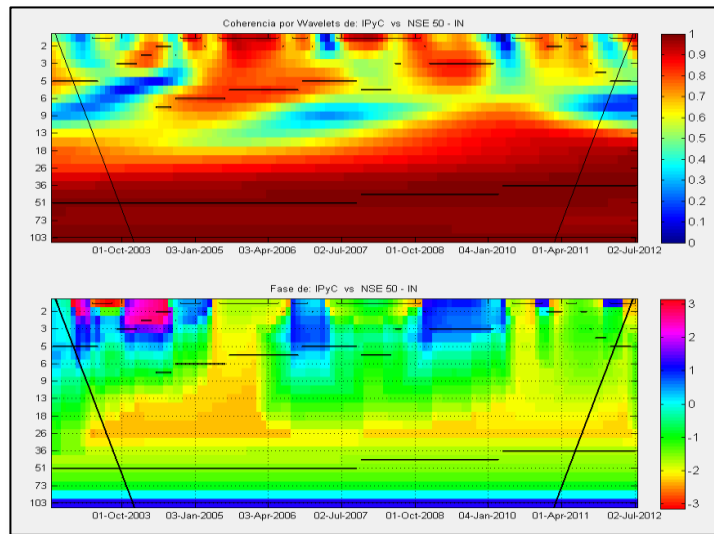


Figura 40. Resultados para el análisis de coherencia por wavelets para los índices IPyC y NSE 50.

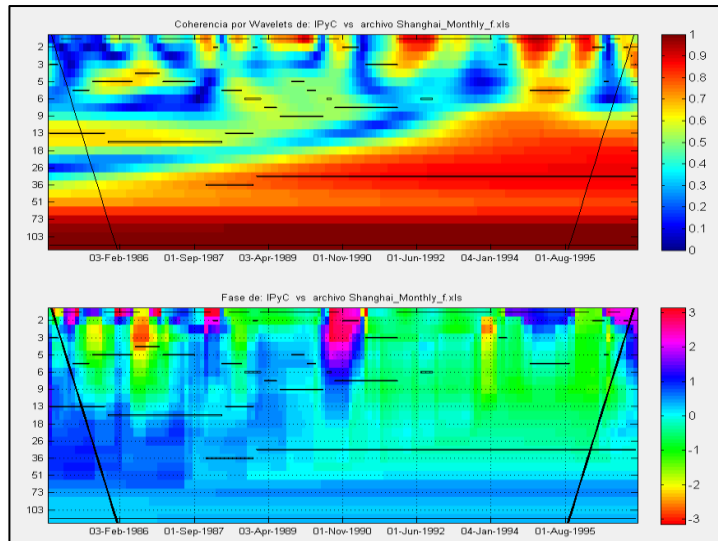


Figura 41. Resultados para el análisis de coherencia por wavelets para los índices IPyC y Shanghai.

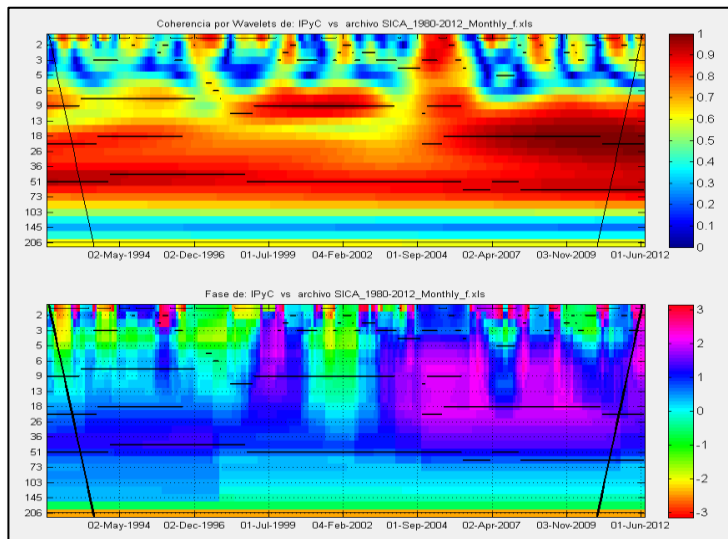


Figura 42. Resultados para el análisis de coherencia por wavelets para los índices IPyC y SICA.

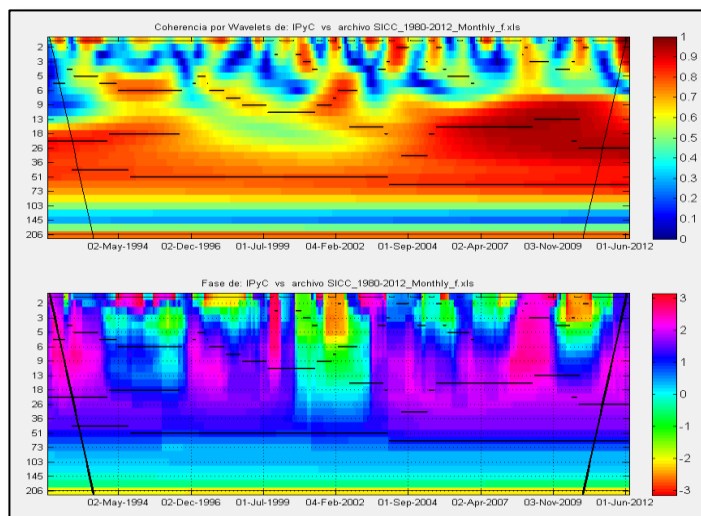


Figura 43. Resultados para el análisis de coherencia por wavelets para los índices IPyC y SICC.

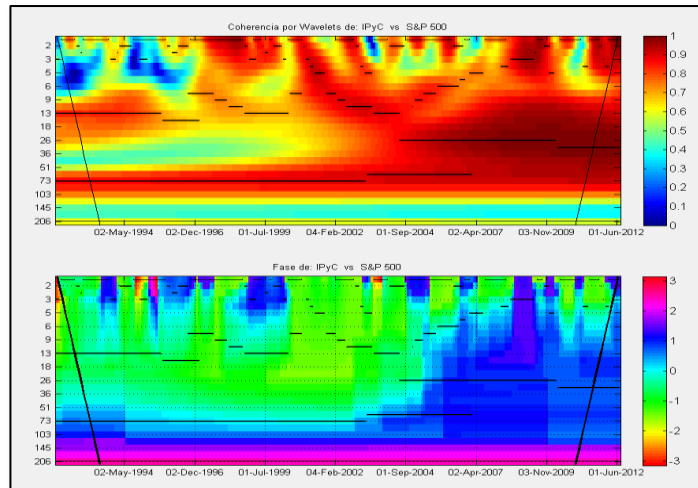


Figura 44. Resultados para el análisis de coherencia por wavelets para los índices IPyC y Standard and Poor's.

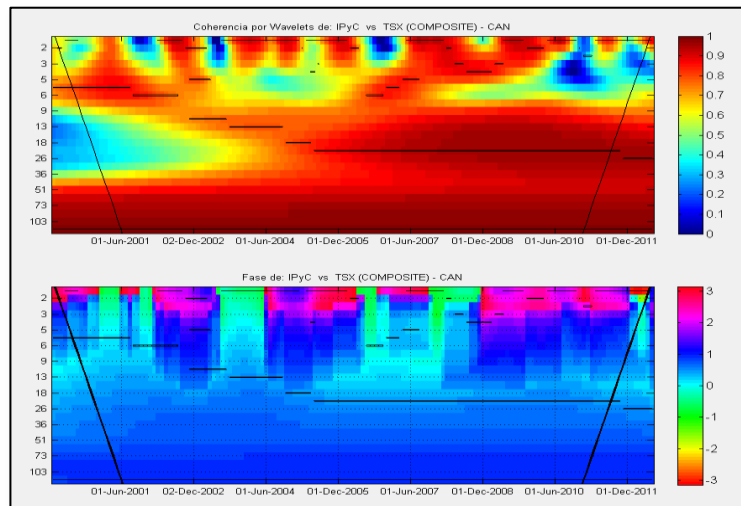


Figura 45. Resultados para el análisis de coherencia por wavelets para los índices IPyC y TSX.

Los resultados de coherencia mediante wavelets son similares en ciertos aspectos a los del análisis espectral por wavelets, observamos también las gráficas en tres dimensiones en donde el eje X representa el tiempo, el eje Y representa la longitud del ciclo o frecuencia, y el color representa la coherencia respectiva a cada punto en tiempo y frecuencia. La principal diferencia es que en este caso tenemos valores normalizados.

Aparte de la gráfica de coherencia, tenemos también la gráfica de fase, la cual nos indica el desfaseamiento entre los ciclos comunes. Es importante señalar que el desfaseamiento corresponde a la serie IPyC, es decir, representa el adelanto o atraso del índice mexicano con respecto a la serie comparada. El dominio de ésta gráfica es el intervalo $[-\pi, \pi]$, para obtener el desfaseamiento en meses basta con utilizar la ecuación 25.

Cabe mencionar que sobre la gráfica de desfaseamiento se agregaron las líneas de máximos locales para una mejor referencia del ciclo al que corresponden. También se debe puntualizar que el color en este caso va del rojo al rojo, pasando por el resto de la escala cromática, esto se debe a que en los puntos $-\pi$ y π , el valor de la fase es exactamente el mismo.

En la figura 28 vemos los resultados para la coherencia entre el IPyC y All Ordinaries, podemos notar que mantienen una alta coherencia en el largo plazo, la cual decrece en

cuanto a la longitud del ciclo. Al final del periodo, y desde 2010, parece que empieza a haber cierta coherencia en el mediano y corto plazo. La fase se mantiene cero y negativa en algunos casos, hasta poco después de la mitad del periodo, aproximadamente desde 2004, en donde cambia de signo a positiva y continúa de esa manera hasta el final, inclusive para el mediano y corto plazo.

La coherencia con el índice *Bovespa* muestra una banda de alta intensidad muy localizada en el mediano plazo, entre 10 y 20 meses. Mientras que en el corto plazo, parece que inicia un periodo de mayor sincronización. La fase se mantiene positiva y cercana a 1 en el área del corto plazo, sin embargo podemos notar que comienza a decrecer y a ser negativa desde 2010. En el mediano plazo se muestra claramente negativa.

En el caso de *CAC 40*, vemos también una muy intensa coherencia en el largo plazo que se acentúa desde la mitad del periodo y parece continuar. Ésta se presenta en ciclos desde 9 y hasta 100 meses. La fase en el área de mayor coherencia es positiva y cercana a uno, mayoritariamente.

Para *DAX* tenemos también una alta coherencia en el largo plazo, similar al caso de Francia, pero un poco más acentuada al inicio del periodo. Esto no es de sorprender, ya que ambas potencias pertenecen a la zona euro. Por otro lado, la fase en este caso también es positiva, ligeramente arriba de 1, en algunos casos negativa y cercana a -1.

El índice *Dow Jones* presenta una alta coherencia con el *IPyC* en el largo y mediano plazo en casi todo el periodo, con varias zonas de alta intensidad en el corto plazo que se acentúan al final del mismo y de hecho aumenta en intensidad y longitud. La fase en este caso es ligeramente negativa al inicio y a partir del 2000 aproximadamente se vuelve positiva y cercana a uno.

En el caso del índice *FTSE 100*, vemos una zona de muy alta coherencia para ciclos cercanos a los 6 años (73 meses), que se extiende desde el inicio y hasta el fin del periodo. La coherencia parece aumentar desde 2002 para las longitudes de ciclo menores, e incluso en 2009 parece aumentar en el corto plazo. La fase es mayoritariamente positiva y cercana a uno para el mediano y largo plazo, aunque al inicio del periodo parece a la inversa. En el largo plazo tenemos fase positiva, cercana a uno.

Para el índice *FTSE Italia* vemos una coherencia similar a la de los índices de Francia y Alemania, con la diferencia de que la coherencia para el corto y mediano plazo se presenta entre 2006 y 2010. Vemos también que la fase difiere de la obtenida en los otros índices europeos, en este caso se mantiene positiva y cercana a 1, pero con cambios de signo en algunas zonas.

Hang-Seng presenta una alta coherencia desde 1.6 y hasta 17 años. En el mediano plazo tiene zonas de alta coherencia que parecen enfatizarse con el tiempo, vemos tres zonas de coherencia que crecen tanto en duración como en el número de frecuencias que representan. La fase de los ciclos en el largo plazo se mantiene positiva o cero, mientras que en el corto plazo tiene una alternancia entre fase positiva y negativa.

El índice chileno *IPSA 40* muestra una alta coherencia en el plazo de poco menos de 3 años que permanece invariante entre 2006 y 2009. En el mediano plazo muestra una zona de alta intensidad, de 3 años, en todo el periodo y aumenta en intensidad. La fase se mantiene negativa e invariante, mientras que en el corto plazo se alterna en signo.

Con el índice *Nasdaq* tenemos una coherencia que prácticamente inicia en 2006 para periodos de mediano plazo y que se extiende hacia todas las longitudes de ciclo, a excepción del muy largo plazo, y aumenta en intensidad para finales del periodo. La fase se mantiene entre -1 y 1, sin embargo, a partir de 2005, para ciclos de aproximadamente 3 años, comienza a tornarse positiva.

Nikkei muestra una muy alta coherencia en el mediano y largo plazo, que se mantiene hasta el final del periodo. En 2006 parece surgir una sincronización en el corto plazo, pero desaparece en 2009. La fase se mantiene negativa en todas las zonas de alta coherencia, la mayoría con valores de -1 y en algunas zonas cercanas a cero.

El índice hindú *NSE 50* muestra también una coherencia realmente alta en el largo plazo, con una pequeña zona de alta intensidad en 2005 en el corto plazo. El valor de la fase nuevamente se mantiene con valores cercanos a -1 en casi todas las zonas relevantes y en algunos casos, cercana a -2.

Continuando con el mismo comportamiento de los países asiáticos, el índice *Shanghái* muestra una coherencia con el índice mexicano en el largo plazo, 8 años aproximadamente. En el mediano y corto plazo prácticamente se mantiene con baja sincronización. La fase difiere un poco de la de los países asiáticos anteriores, en este caso es positiva pero varía más a lo largo del tiempo y la frecuencia, y se acerca más a cero.

El índice *SICA* presenta una alta coherencia en el mediano y largo plazo, no así en el muy largo plazo. Como era de esperarse, la fase es positiva en las regiones de alta coherencia. Incluso llega al valor de 2 en algunas zonas.

El índice *SICC* presenta también una alta coherencia en el mediano y largo plazo, pero no tan acentuada como en el caso anterior. En este caso la fase también es positiva en las regiones de alta coherencia, pero se acerca más al valor de 2 en varias zonas.

En los resultados para el índice *Standard and Poor's 500* vemos un comportamiento un tanto similar al obtenido para el índice Nasdaq. En este caso, la coherencia en el largo plazo se mantiene constante para todo el periodo y aumenta para casi todas las longitudes de ciclo a partir del año 2000. La fase se mantiene negativa o cercana a cero en casi todos los puntos, al inicio del periodo. En las zonas comprendidas entre 2004 y hasta el final del periodo, cambia de signo para casi todas las longitudes de ciclo.

El índice *TSX* muestra una alta coherencia en ciclos con duración desde 9 meses y hasta casi 9 años, la cual se mantiene prácticamente constante en todo el periodo analizado. Para las zonas menores a 9 meses, vemos que aparecen zonas de coherencia en algunos momentos. La fase es cercana a uno y constante en las zonas con alta frecuencia.

Apartado. Comparación de Resultados con los Obtenidos Mediante el Algoritmo de Bry-Boschan



En este apartado comparamos los resultados obtenidos mediante el análisis por wavelets realizado en el presente trabajo y los resultados obtenidos mediante la técnica de identificación de puntos de giro desarrollada por Bry-Boschan (BB)¹. La comparación con el análisis espectral no se realizó debido a que éste no brinda información en el dominio del tiempo.

Esta comparación se realizó comparando los siguientes índices:

- *IPyC – SICC*
- *SICA – SICC*
- *S&P500 – SICC*

La selección anterior tiene la motivación de estudiar cuál de los índices mostrados predice de mejor manera el comportamiento del índice *SICC*.

La técnica de identificación de puntos de giro busca cambios en la estructura de las series de tiempo y señala los puntos en la serie en los que cambia la tendencia. Cada par de puntos de giro, o de cambio de tendencia, indican un pico y valle de un ciclo presente. Éstos son utilizados para estudiar el atraso o adelanto de indicadores económicos.

En la figuras 46 y 47 podemos ver ambos análisis para las series *IPyC* y *SICC*.

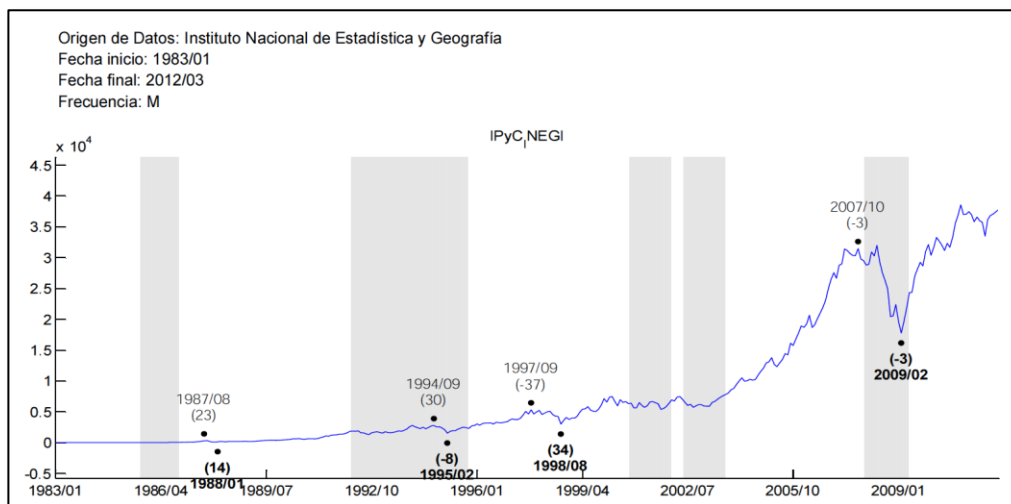


Figura 46. Resultados para el análisis de Bry-Boschan para los índices *IPyC* y *SICC*. La línea azul indica la serie histórica del *IPyC*, los puntos de ésta serie están indicados en negro. La serie histórica del *SICC* se omite y se muestran únicamente sus puntos de giro con el asurado violeta, donde el inicio de la sombra indica el pico y el fin indica el valle.

¹ Véase referencia [30]

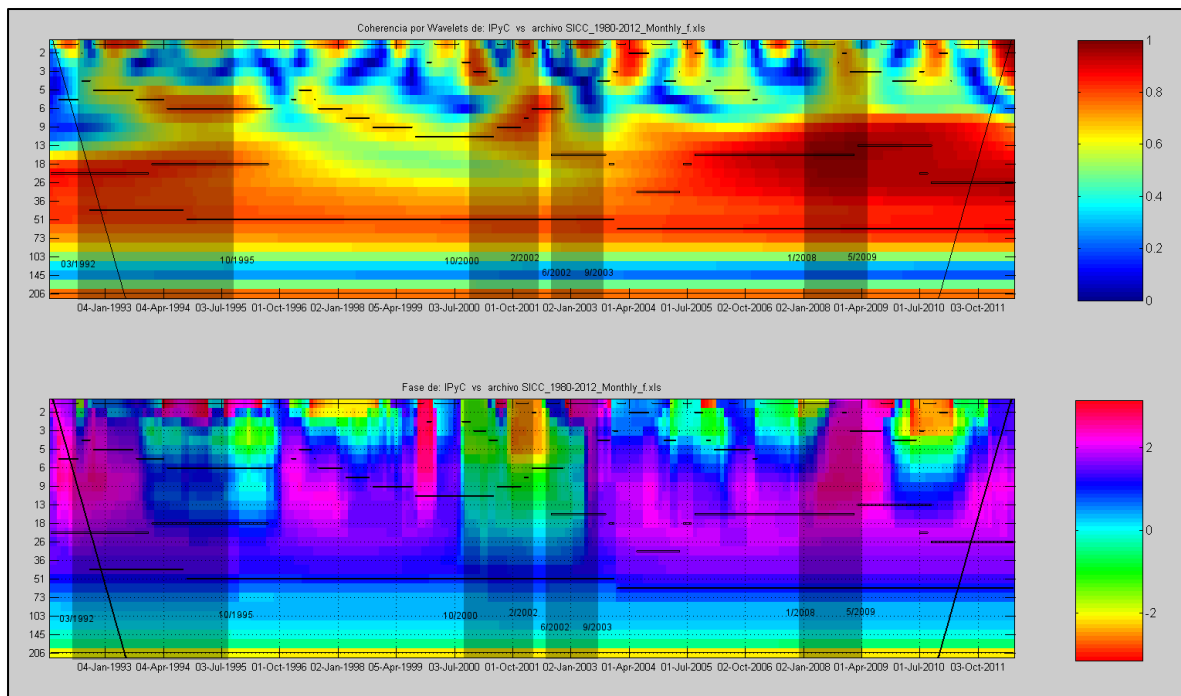


Figura 47. Resultados para el análisis por wavelets para los índices IPyC y SICC.

En el análisis por Bry-Boschan vemos poca coincidencia entre los ciclos del IPyC y de SICC, sólo hasta el final del periodo se muestra una sincronización entre estos índices. De la misma manera, en el análisis por wavelets la coherencia tiene un comportamiento completamente análogo, la coherencia es muy baja para todo el periodo previo a 2005 y posterior a este año vemos una sincronización en la mayoría de las frecuencias. Lo anterior refuerza la validez de ambas técnicas, ya que las dos obtienen resultados similares.

En el análisis de fase vemos un adelanto por parte del IPyC en el inicio de 1988, mientras que en el de BB se ve un atraso. Por otro lado, para 1955 ambos análisis coinciden, el de BB indica un traslape de los puntos de giro, mientras que por wavelets tenemos una coincidencia en los ciclos menores a 18 meses. Entre 1999 y 2002 los resultados vuelven a coincidir, mostrando un adelanto del IPyC. Al final del periodo, que es donde realmente tenemos resultados de interés, existe concordancia en los resultados, con una ligera discrepancia en la duración nuevamente, BB indica un pequeño adelanto del IPyC, mientras que wavelets indica un adelanto más contundente.

En la figuras 48 y 49 podemos ver ambos análisis para las series SICA y SICC.

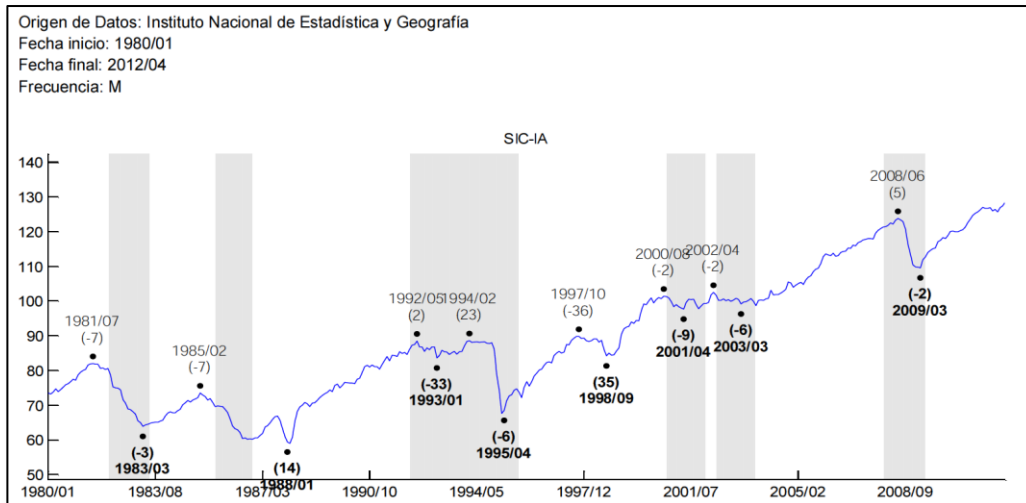


Figura 48. Resultados para el análisis de Bry-Boschan para los índices SICA y SICC.

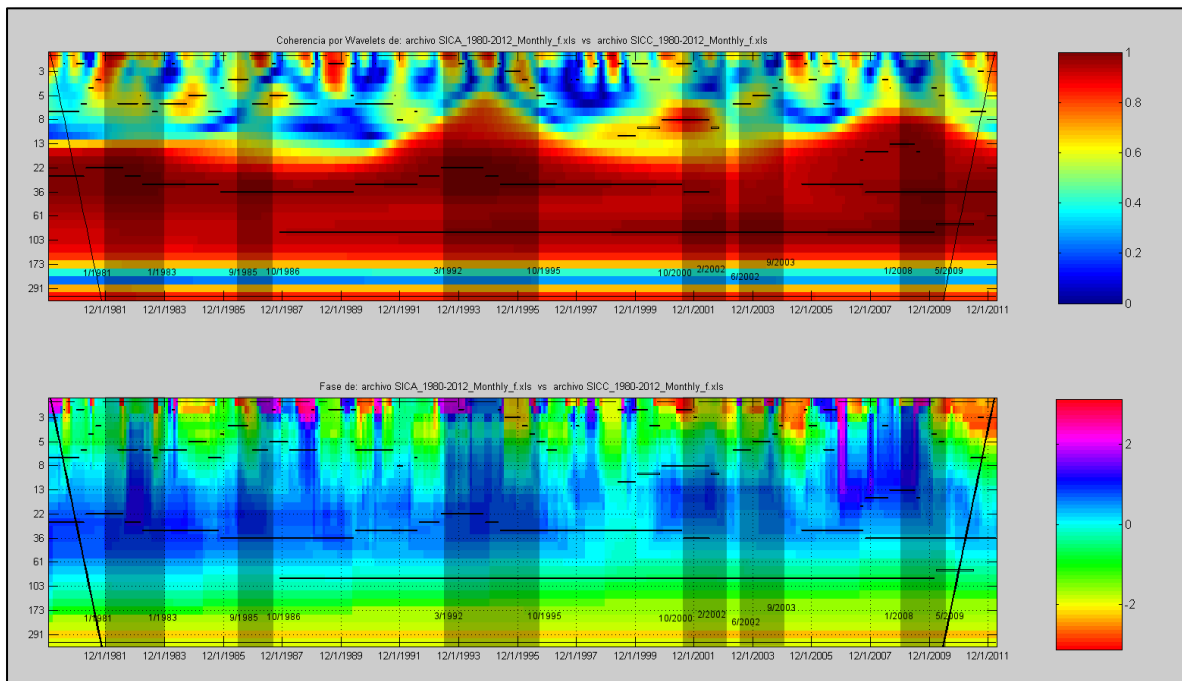


Figura 49. Resultados para el análisis por wavelets para los índices SICA y SICC.

En este caso vemos concordancia entre casi todos los puntos de giro y las zonas de alta coherencia. Desde el inicio y hasta el final del periodo, tenemos coincidencia entre el fechado para ambas series, usando BB, mientras que en el caso del análisis por wavelets se muestra una muy alta coherencia en todo el periodo. Lo cual nuevamente refuerza los resultados.

La única diferencia apreciable la podemos ver en la fase. Para el año de 1995, el análisis BB indica una coincidencia en los puntos de giro, mientras que el análisis por wavelets indica un adelanto. Cabe añadir que el análisis por wavelets muestra una coincidencia pero no en el mismo año, sino hasta 1999. A pesar de esta discrepancia, los resultados en general muestran el mismo comportamiento. Nuevamente vemos que el adelanto dado por BB es menor al mostrado para wavelets.

En la figuras 50 y 51 podemos ver ambos análisis para las series S&P500 y SICC.

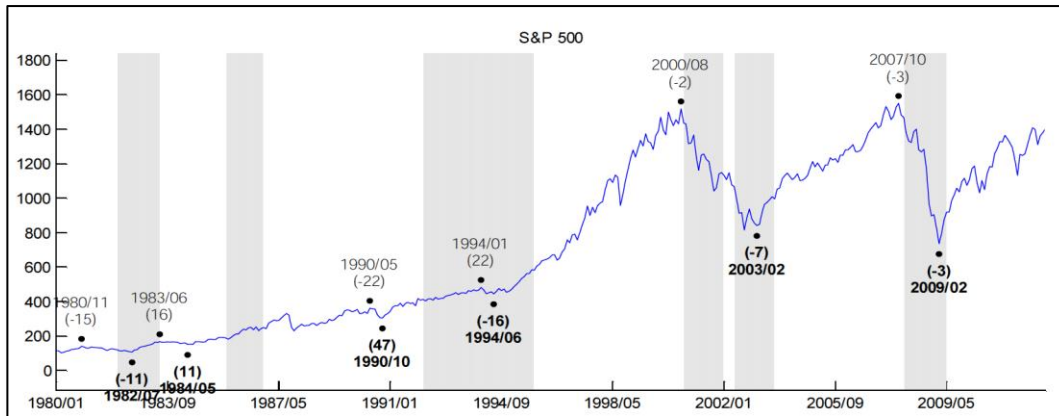


Figura 50. Resultados para el análisis de Bry-Boschan para los índices S&P500 y SICC.

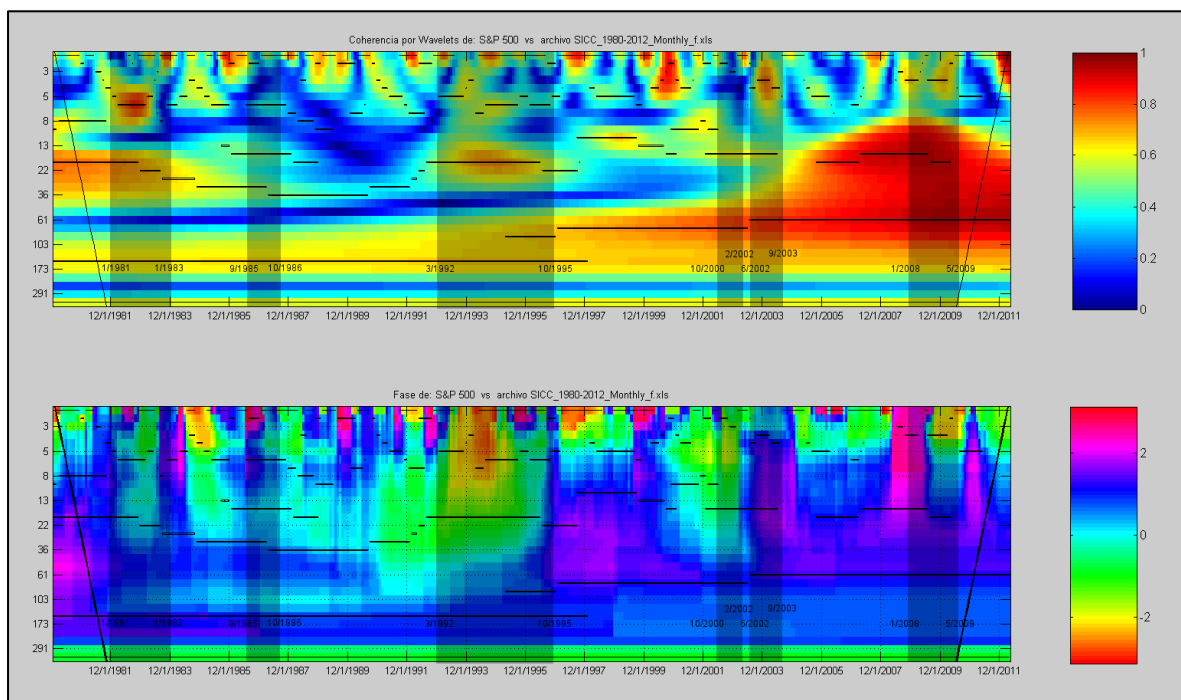


Figura 51. Resultados para el análisis por wavelets para los índices S&P500 y SICC.

En este caso tenemos poca concordancia entre el fechado BB pero no de manera tan discordante como en el primer análisis. Desde el año 2000 vemos que el fechado muestra un aumento significativo en la sincronización de los ciclos. Estos mismos resultados los vemos en el caso del análisis por wavelets, en donde la coherencia aumenta desde el año 2000 para casi todas las frecuencias. Como en los casos anteriores, se corroboran los resultados en ambas metodologías. La discrepancia en este caso radica al inicio del periodo, en donde el análisis BB indica una mínima sincronización, mientras que el análisis por wavelets prácticamente la descarta.

Para el análisis de fase, entre los índices S&P500 y SICC, ambos análisis muestran las mismas características en cuanto al adelanto del S&P500 sobre el SICC. Vemos que entre 1991 y 1995 el análisis por wavelets muestra una coincidencia entre los ciclos, que incluso incurre en un atraso por parte del S&P500. BB muestra en esos mismos años un atraso también, pero sólo en el primer punto de giro. El resto de los puntos coinciden, esto en su característica de adelanto, ya que en la fase, claramente se ve que el análisis por wavelets nos muestra un adelanto mayor al dado por BB.

Capítulo V: Conclusiones y Recomendaciones



En este estudio ratificamos que el análisis en los dominios del tiempo y la frecuencia pueden ser una herramienta sumamente útil para el análisis de ciclos económicos. Los principales objetivos fueron:

- Presentar un resumen de los puntos más importantes de la teoría.
- Llevar a la práctica estas herramientas mediante el desarrollo de un paquete de cómputo accesible incluso para quienes no conocen a fondo la matemática detrás de estas técnicas.
- Aplicar la metodología a un conjunto de índices de los países con mayor relevancia económica y ver las relaciones que existen con el *IPyC* a diferentes intervalos de tiempo.

En los resultados obtenidos para el análisis de Fourier y de Wiener-Khinchin, obtuvimos los ciclos dominantes en el corto plazo, los ciclos largos fueron segregados a la zona de baja energía. En este análisis debe utilizarse la técnica del uso de retornos logarítmicos, ya que se supone que se está tratando con series estacionarias. Por otro lado, la tendencia en los mercados de valores es muy intensa, por lo que el analizar las series originales resulta en una energía casi absoluta para el ciclo de mayor duración.

En el análisis de coherencia entre los índices con el *IPyC* obtuvimos también ciclos cortos. Lo anterior no implica que estas técnicas no puedan detectar la presencia de ciclos en el mediano o largo plazo, sino que se les asigna un peso menor. La fase en este caso nos indica adelantos, coincidencias y atrasos variados, no hay un patrón predominante.

Existen varios estudios en donde se reporta la existencia de ciclos largos, obtenidos mediante esta metodología, pero analizando las series originales. Esto debe de ser tratado con cuidado, ya que si las series no cumplen con la característica de ser estacionarias, como en el caso de las utilizadas en el presente trabajo, estaríamos incurriendo en un error.

En el caso del análisis por wavelets, obtuvimos variedad en la importancia de los ciclos, con una cierta mayoría en el caso de ciclos de mediano y largo plazo. Cabe señalar que estos últimos tuvieron una duración en el tiempo de prácticamente todo el periodo analizado, es decir, en la mayoría de los casos son ciclos que permanecen presentes, a diferencia de los más cortos, que aparecen y desaparecen en el tiempo.

En este caso, la estacionalidad no es un principio de la teoría, sin embargo pueden utilizarse los retornos logarítmicos para resaltar comportamientos cíclicos de menor longitud.

El análisis de fase mostró una tendencia a permanecer entre el intervalo de -1 a 1 , en algunos casos llegó a los extremos del dominio, pero fue en ciclos de corto plazo y duración, con excepción de los índices *SICC* y *SICA*, como era de esperarse.

La wavelet madre utilizada para el presente estudio fue la de Morse. Invariablemente uno se pregunta si la elección de la wavelet alteraría el resultado. Al respecto, se realizaron varias

pruebas con la wavelet de Morlet y se obtuvieron prácticamente los mismos resultados, por lo que podemos asegurar que no es el caso¹.

El análisis por wavelets muestra ventajas por demás sobresalientes respecto al análisis de Fourier. Estas metodologías abren un nuevo panorama en el análisis económico y financiero sobre una base cuantitativa además de cualitativa.

En la comparación entre los métodos de Bry-Boschan y de wavelets, vemos que existe una alta similitud entre los resultados obtenidos. La principal diferencia, como se señaló, radica en que el análisis por wavelets estima una fase mayor a la obtenida en el análisis Bry Boschan. Esta comparación brinda validez al trabajo realizado, a la metodología utilizada e incluso a las herramientas de software desarrolladas. Es importante recordar aquí que una técnica no sustituye a las otras, sino que son herramientas de soporte que inclusive se complementan para apoyar la toma de decisiones.

Por supuesto, mayor investigación en el área es requerida. Otras preguntas, fuera del alcance de este documento, que pueden surgir son; ¿Podemos predecir el valor futuro de una serie con estas técnicas? ¿Cuáles son los factores económicos que influyen en este comportamiento cíclico? ¿Qué pruebas estadísticas de significancia podemos aplicar a un estudio de este tipo? ¿Qué tipo de filtros podríamos aplicar a un espectro por wavelets para aumentar la precisión del estudio en ciertos periodos o frecuencias?

Para resolver éstas y otras cuestiones debe tomarse en cuenta que no sólo es necesario un estudio práctico y teórico del tema, sino también del desarrollo de las herramientas computacionales para realizar dichos estudios, las cuales debemos añadir, son escasas, por lo que consideramos un aporte, en ese sentido, el desarrollo del software utilizado en este estudio.

¹ Véase referencia [11]

Referencias



- [1] Roger J. Bowden y Vance L. Martin: *International Business Cycles and Financial Integration*. The Review of Economics and Statistics, Vol. 77, No. 2, 1995, pp. 305-320.
- [2] Gonul Turhan-Sayan y Serdar Sayan: *Use of Time-Frequency Representations in the Analysis of Stock Market Data*. Computational Methods in Decision-making, Economics and Finance, 2001.
- [3] Dulce Contreras Bayarri y Julio Escolano Amat: *El análisis espectral como instrumento para detectar la estacionalidad*. Estadística Española, No. 104, 1984, pp. 101-144.
- [4] David Stephen Pollock: *Filters for non-Stationary Sequences: the Analysis of the Business Cycle*. Statistical Journal, Vol. 7, No. 1, 2009, pp. 87-104.
- [5] Michio Hatanaka: *A Spectral Analysis of Business Cycle Indicators: Lead-Lag in Terms of All Time Points*. Memorandum No. 53 del Econometric Research Program de la Universidad de Princeton, 1963.
- [6] Lisa Sella, Gianna Vivaldo, Michael Ghil y Stéphane Hallegattee: *Economic cycles and their synchronization: spectral analysis of GDP time series from Italy, the Netherlands, and the UK*. Geophysical Research Abstracts Vol. 12, 2010.
- [7] María Joana Soares y Luis Aguiar-Conraria: *The Continuous Wavelet Transform: A Primer*. Artículo desarrollado para el proyecto "Oil Shocks and the Macroeconomy" de la Fundação para a Ciência e a Tecnologia. Portugal, 2006.
- [8] Patrick M Crowley: *Decomposing the Co-Movement of the Business Cycle: a Time-Frequency Analysis of Growth Cycles in the Euro Area*. Bank of Finland Research, Discussion Papers, 2005.
- [9] Patrick M Crowley: *An Intuitive Guide to Wavelets for Economists*. Bank of Finland Research, Discussion Papers, 2005.
- [10] Patrick M Crowley y Jim Lee: *Decomposing the Co-Movement of the Business Cycle: a Time-Frequency Analysis of Growth Cycles in the Eurozone*. Research Department of the College of Business, Texas A&M University Corpus-Christi, 2005.
- [11] Patrick M Crowley, Douglas Maraun y David Mayes: *How Hard is the Euro Area Core? An Evaluation of Growth Cycles Using Wavelet Analysis*. Bank of Finland Research, Discussion Papers, 2006.
- [12] Mauricio Avella y Leopoldo Fergusson: *El ciclo económico Enfoques e ilustraciones. Los ciclos económicos de Estados Unidos y Colombia*. Trabajo desarrollado entre el Banco de la República y la Universidad de los Andes, 2003.
- [13] Gustavo Vargas Sánchez: *Introducción a la Teoría Económica: Un enfoque latinoamericano*. Ed. Pearson Prentice Hall, 2006.
- [14] Pedro A. Pérez, Basilio Sanz, Nelson J. Álvarez: *Análisis Cuantitativo de los Ciclos Económicos*. Publicado por ASEPUMA. Asociación Española de Profesores Universitarios de Matemáticas Aplicadas a la Economía y la Empresa, 2003.

- [15] C. Gasquet y P. Witomski: *Fourier Analysis and Applications. Filtering, Numerical Computation, Wavelets*. Texts in Applied Mathematics. Ed. Springer, 1999.
- [16] *STATISTICS Methods and Applications*. Apartado: *Time Series Analysis*. Libro en línea, parte de los tutoriales del software *StatSoft*. <http://www.statsoft.com/textbook/time-series-analysis/#squared>
- [17] Przemyslaw Wozniak y Wojciech Paczynski: *Business Cycle Coherence Between the Euro Area and the EU New Member States: a Time-Frequency Analysis*. Publicaciones de CASE-Center for Social and Economic Research. 2007.
- [18] Maria Joana Soares y Luis Aguiar-Conraria: *Business Cycle Synchronization Across the Euro Area: a Wavelet Analysis*. Artículo desarrollado para el proyecto "Oil Shocks and the Macroeconomy" de la *Fundação para a Ciência e a Tecnologia*. Portugal, 2006.
- [19] *La transformada de Fourier*. Departamento de Teoría de la Señal y Comunicaciones. Escuela Técnica Superior de Ingeniería en Telecomunicación. Universidad de Vigo.
- [20] Gonul Turhan-Sayan y Serdar Sayan: *Use of Time-Frequency Representations in the Analysis of Stock Market Data*. Department of Electrical and Electronics Engineering, Middle East Technical University, Ankara Turquía. Enero 2001.
- [21] Adam Niesłony y Ewald Macha: *Spectral Method in Multiaxial Random Fatigue*. Lecture Notes in Applied and Computational Mechanics, Volúmen 33, 2007, pp. 39-40.
- [22] Gonzalo Camba-Mendez y George Kapetanios: *Estimating the Rank of the Spectral Density Matrix*. European Central Bank, Working Paper Series, NO. 349, 2004.
- [23] Yasumasa Matsudai, Yoshihiro Yajima y Howell Tong: *Selecting models with different spectral density matrix structures by the cross-validated log likelihood criterion*. *Bernoulli* 12(2), 2006, pp. 221–249.
- [24] Yasumasa Matsudai: *On Characterizations of Spectral Density Matrices by Cross Validated Log Likelihood Criterion*. Faculty of Economics, Niigata University, 2-8050 Ikarahi, Niigata 950-2181, Japón.
- [25] Luis M. Molinero: *Análisis de series temporales*. Asociación de la Sociedad Española de Hipertensión, Enero 2004.
- [26] Ta-Hsin Li: *Laplace Periodogram for Time Series Analysis*. Department of Mathematical Sciences IBM, T. J. Watson Research Center Yorktown Heights, Noviembre 2007.
- [27] *Periodogram*: DATAPLOT Reference Manual, Marzo 1997, pp. 2-161.
- [28] Kamil Kládívko: *The General Method of Moments (GMM) using MATLAB: The practical guide based on the CKLS interest rate model*. Department of Statistics and Probability Calculus, University of Economics, Prague.
- [29] T. Cliff y Krannert: *GMM and MINZ Program Libraries for Matlab Michael*. Graduate School of Management, Purdue University, Marzo 2003.
- [30] Gerhard Bry and Charlotte Boschan: *Cyclical Analysis of Time Series: Selected Procedures and Computer Programs*. The National Bureau of Economic Research, 1971. Disponible en línea en: http://www.nber.org/books/bry_71-1

Apéndice. La Transformada Rápida de Fourier

Como se mencionó en la sección 3.1.1, la transformada de Fourier debe ser adaptada para poderla utilizar con los datos de que se dispone. Lo que tradicionalmente se hace es proponer una versión discreta de la transformada original. En nuestro caso se define la transformada discreta de Fourier (DFT, de sus siglas en inglés) de la siguiente manera:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \gg F(n) = \sum_{k=0}^{N-1} f_k \cdot e^{-j2\pi \frac{kn}{N}} \quad (37)$$

En la expresión anterior se escribe f_k para hacer énfasis en que se trata de una función que toma valores discretos. La transformada inversa tiene una expresión análoga.

Con la función anterior ya es posible analizar nuestras series de tiempo. Sin embargo, en la práctica no se utiliza la DFT, sino que se opta por otro algoritmo que es más eficiente en cuanto al tiempo de cómputo, este algoritmo se conoce como la Transformada Rápida de Fourier (FFT, de sus siglas en inglés). El nombre de este método podría sugerir que es una aproximación al primero, pero en realidad arroja los mismos resultados utilizando un algoritmo mucho más eficaz.

La implementación de la ecuación (37) involucra un número de sumas y multiplicaciones complejas que es proporcional a N^2 . Esto se puede apreciar fácilmente ya que para cada uno de los N valores de ω , la expansión de la sumatoria requiere N multiplicaciones complejas de $f(t)$ por $e^{-j\omega t}$ y $N-1$ sumas de resultados.

Sin un algoritmo eficiente que calcule la DFT, no sería viable usar la transformada de Fourier en el tratamiento de series y mucho menos en el análisis de patrones mixtos como en la coherencia espectral (tema que será tratado más adelante). A modo de ejemplo, si tuviéramos alrededor de 500 series de 500 datos y tratásemos de contrastarlas una con otra, un ordenador común tardaría aproximadamente dos meses. Incluso contando con un superordenador capaz de realizar 1000 MFLOPS (millones de operaciones en coma flotante por segundo) tardaría unos tres minutos. Estas cifras hacen imprescindible la minimización del número de operaciones que se necesitan en el tratamiento de series mediante la elección de un algoritmo adecuado. Para conseguir esto, debemos estudiar la estructura interna de una tarea dada, su complejidad operacional y tratar de averiguar cómo puede resolverse con el mínimo número de operaciones.

El método utilizado para reducir las operaciones necesarias es el método de "búsqueda dicotómica".

Para explicar éste método utilicemos como ejemplo el siguiente problema de búsqueda:

Un amigo vive en un rascacielos de N plantas. Queremos averiguar en qué planta está su departamento. Nuestras preguntas sólo serán contestadas de manera binaria, es decir como *sí* o *no*. ¿Cuántas preguntas debemos formular para averiguar dónde vive?

Con la pregunta "¿Vives en la mitad superior del edificio?", podemos excluir la mitad de las posibilidades de una sola vez. Con esta respuesta sabremos si él vive en la mitad superior o inferior del edificio y podemos seguir haciendo nuestras preguntas de la misma manera, mediante la partición de las restantes posibilidades en dos mitades. Con esta estrategia, necesitamos un menor número de preguntas.

Este tipo de soluciones se conocen como el principio de "divide y vencerás".

Si el número de preguntas es una potencia de dos, digamos p , necesitaremos exactamente p preguntas. De esta manera para N plantas necesitaremos $\log_2 N$ preguntas.

De la misma manera en que se trató el ejemplo anterior, puede dividirse el problema de calcular la DFT mediante el mismo procedimiento. Comenzamos rescribiendo la ecuación (37) sustituyendo la igualdad $W_N = e^{-i2\pi/N}$, lo cual facilita el análisis.

Podemos rescribir al total de elementos de la serie como $N = 2M$, donde M es un número entero positivo, ya que N es una potencia de dos.

Sustituyendo la expresión para N en la ecuación (37) obtenemos:

$$F(\mu) = \frac{1}{2M} \sum_{x=0}^{2M-1} f(x) W_{2M}^{\mu x} = \frac{1}{2} \sum_{x=0}^{M-1} f(x) W_{2M}^{\mu(2x)} + \frac{1}{2} \sum_{x=0}^{M-1} f(2x+1) W_{2M}^{\mu(2x+1)}$$

Ya que $W_N = e^{-i2\pi/N}$, deducimos que $W_{2M}^{2\mu x} = W_M^{\mu x}$, por lo que la igualdad anterior puede rescribirse como:

$$F(\mu) = \frac{1}{2} \sum_{x=0}^{M-1} f(2x) W_{2M}^{\mu x} + \frac{1}{2} \sum_{x=0}^{M-1} f(2x+1) W_{2M}^{\mu x} W_{2M}^{\mu} \quad (38)$$

Definiendo las siguientes igualdades:

$$F_{par}(\mu) = \sum_{x=0}^{M-1} f(2x) W_{2M}^{\mu x}, \quad F_{impar}(\mu) = \sum_{x=0}^{M-1} f(2x+1) W_{2M}^{\mu x} \quad (39)$$

Se rescribe la ecuación (38) como:

$$F(\mu) = \frac{1}{2} F_{par}(\mu) + F_{impar}(\mu) W_{2M}^{\mu} \quad (40)$$

Si analizamos la ecuación (40) podemos notar que el cálculo de la transformada de N puntos puede ser calculada dividiendo la expresión original en dos partes, obteniendo la transformada de dos conjuntos de $N/2$ puntos. Dado que N se consideró como una potencia de dos, esta división del número de intervalos puede continuar hasta tener solamente $N/2$ conjuntos dos puntos. Se puede demostrar que con esto obtenemos la transformada de la serie original en un número de operaciones menor o igual a $N \log_2 n$.

El tratamiento de la transformada rápida inversa (IFFT) tiene un desarrollo análogo.