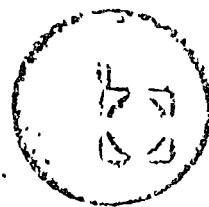




centro de educación continua  
división de estudios superiores  
facultad de Ingeniería, unam.



## A LOS ASISTENTES A LOS CURSOS DEL CENTRO DE EDUCACION CONTINUA

Las autoridades de la Facultad de Ingeniería, por conducto del Jefe del Centro de Educación Continua, Dr. Pedro Martínez Pereda, otorgan una constancia de asistencia a quienes cumplan con los requisitos establecidos para cada curso. Las personas que deseen que aparezca su título profesional precediendo a su nombre en el diploma, deberán entregar copia del mismo o de su cédula profesional a más tardar el SEGUNDO DIA de clases, en las oficinas del Centro, - con la señorita Barraza, encargada de inscripciones, de lo contrario NO será posible.

El control de asistencia se efectuará a través de la persona encargada de entregar notas, en la mesa de entrega de material mediante listas especiales. Las ausencias serán computadas por las autoridades del Centro.

Se recomienda a los asistentes participar activamente con sus ideas y experiencias, pues los cursos que ofrece el Centro están planeados para que los profesores expongan una tesis, pero sobre todo, para que coordinen las opiniones de todos los interesados constituyendo verdaderos seminarios.

Es muy importante que todos los asistentes llenen y entreguen su hoja de inscripción al inicio del curso. Las personas comisionadas por alguna institución deberán pasar a inscribirse en las oficinas del Centro en la misma forma que los demás asistentes.

Con objeto de mejorar los servicios que el Centro de Educación Continua ofrece, se hará una evaluación del mismo a través de un cuestionario diseñado para emitir juicios anónimos por parte de los asistentes; esto se hará al finalizar el curso.

ATENTAMENTE

ING. SALVADOR MEDINA RIVERO  
COORDINADOR DE CURSOS ABIERTOS

)

o

o







DIRECTORIO DE PROFESORES DEL CURSO DINAMICA ESTRUCTURAL 1977

DR. PORFIRIO BALLESTEROS BAROCIO  
DIVISION DE ESTUDIOS SUPERIORES,  
FACULTAD DE INGENIERIA, UNAM  
TEL.: 548.09.50

DR. LUIS ESTEVA MARABOTO  
INVESTIGADOR  
INSTITUTO DE INGENIERIA  
UNAM  
TEL.: 548.97.94

M. EN C. JORGE PRINCE ALFARO  
SUBDIRECTOR  
INSTITUTO DE INGENIERIA, UNAM  
TEL.: 548.11.35

DR. OCTAVIO A. RASCON CHAVEZ  
JEFE DE LA DIVISION DE ESTUDIOS SUPERIORES  
FACULTAD DE INGENIERIA, UNAM  
TEL.: 548.09.50

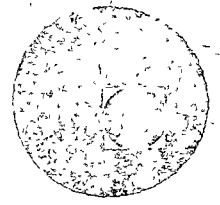
Q

Q

Q



centro de educación continua  
división de estudios superiores  
facultad de ingeniería, unam



### III CURSO INTERNACIONAL DE INGENIERIA SISMICA

#### DINAMICA ESTRUCTURAL

- INTRODUCCION
- VIBRACION DE SISTEMAS DE UN GRADO DE LIBERTAD

DR. OCTAVIO A. RASCON CHAVEZ

Julio de 1977.

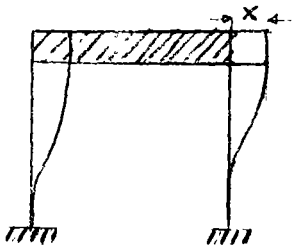


# DINAMICA ESTRUCTURAL

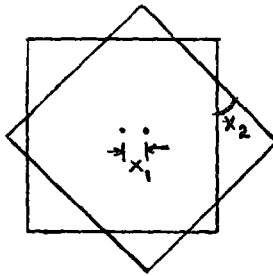
## DEFINICION.

GRADOS DE LIBERTAD = NUMERO DE COORDENADAS GENERALIZADAS (DESPLAZAMIENTOS O GIROS) QUE SE REQUIEREN PARA DEFINIR LA POSICION DEL SISTEMA EN CUALQUIER INSTANTE.

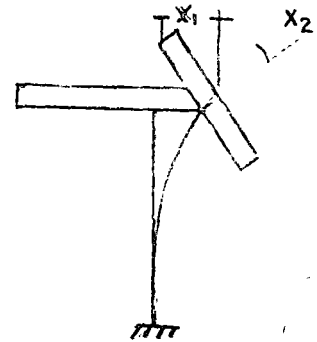
## EJEMPLOS



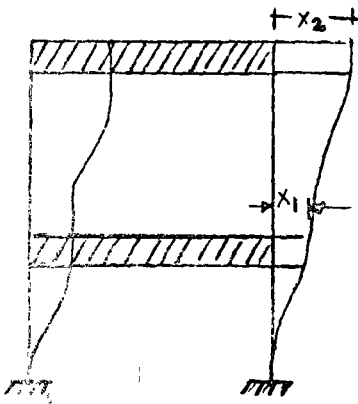
UN GRADO DE LIBERTAD



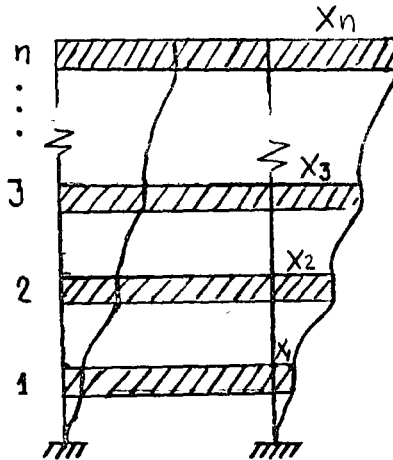
DOS GRADOS DE LIBERTAD



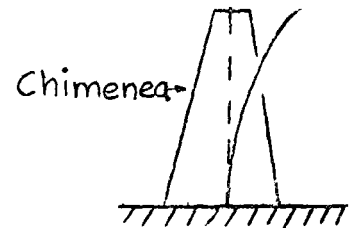
DOS GRADOS DE LIBERTAD



DOS GRADOS DE LIBERTAD



n GRADOS DE LIBERTAD

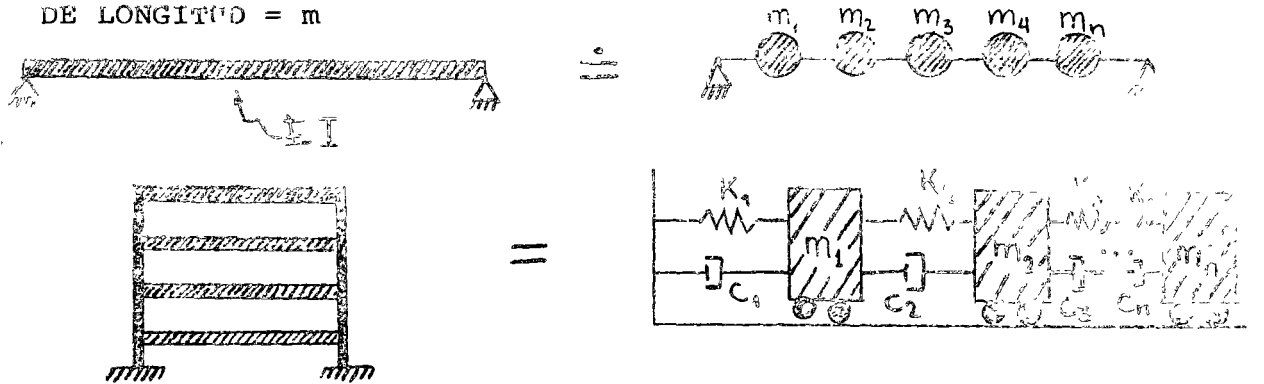


INFINITO NUMERO DE GRADOS DE LIBERTAD

# MÉTODOS DE DISCRETIZACIÓN DE SISTEMAS CONTINUOS

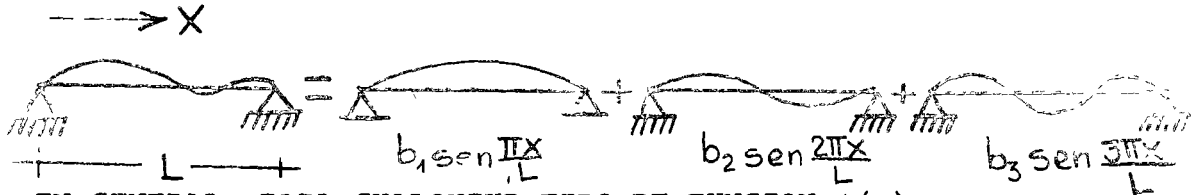
## 1. POR CONCENTRACION DE MASAS

MASA POR UNIDAD DE LONGITUD =  $m$



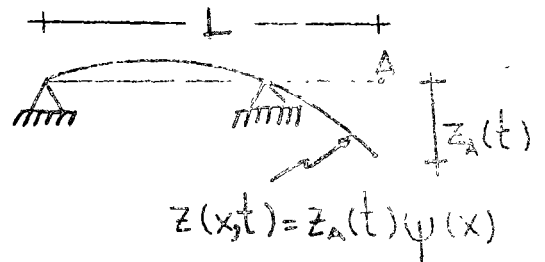
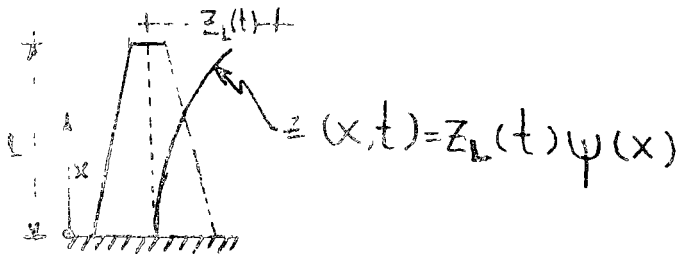
2. EXPRESANDO LA CONFIGURACION DE VIBRACION DE LA ESTRUCTURA COMO UNA SERIE DE FUNCIONES ESPECIFICADAS. POR EJEMPLO, SI ESTAS FUNCIONES SON ARMONICAS:

$$z(x, t) = \sum_{i=1}^N b_i \operatorname{sen} \frac{i\pi x}{L}$$



EN GENERAL, PARA CUALQUIER TIPO DE FUNCION  $\psi(x)$ :

$$z(x, t) = \sum_{i=1}^N z_i(t) \psi_i(x)$$



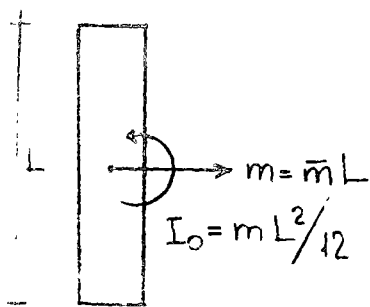
## 3. MEDIANTE ELEMENTOS FINITOS



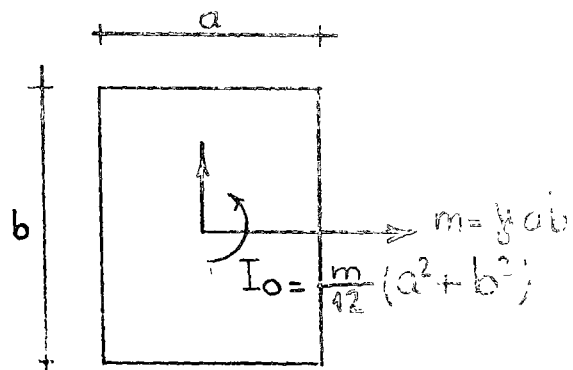
AL PLANTEAR LAS ECUACIONES DE EQUILIBRIO DE CUERPOS RIGIDOS ES A MENUDO NECESARIO CONOCER LOS MOMENTOS DE INERCIA DE MASA. A CONTINUACION SE PRESENTAN ALGUNOS CASOS:

$\bar{m}$  = MASA POR UNIDAD DE LONGITUD

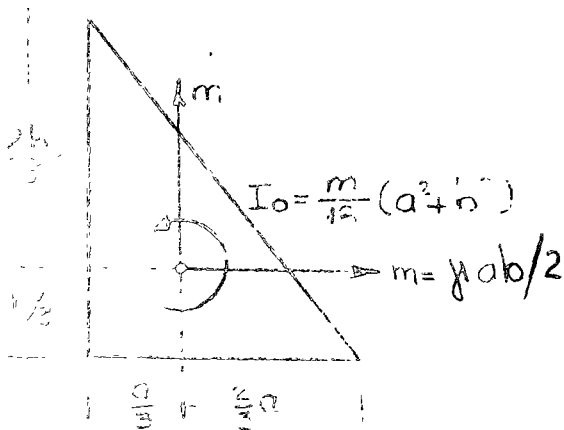
$\gamma$  = MASA POR UNIDAD DE AREA



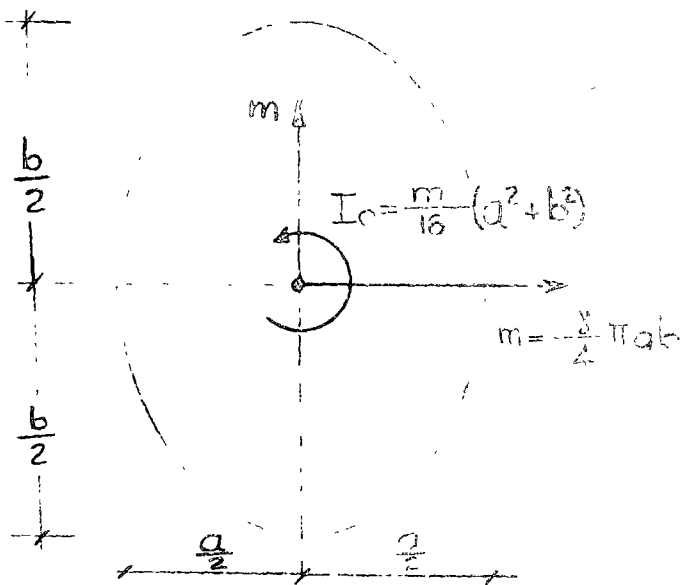
BARRA UNIFORME



PLACA UNIFORME RECTANGULAR

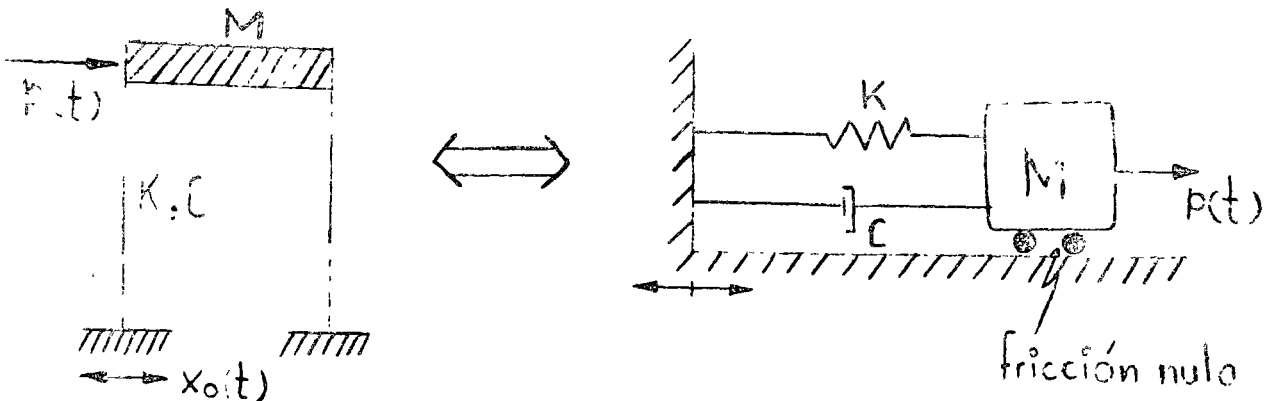


PLACA UNIFORME TRIANGULAR



PLACA UNIFORME ELIPTICA

RESPUESTA DINAMICA DE SISTEMAS ELASTICOS LINEALES DE UN GRADO DE LIBERTAD  
CON AMORTIGUAMIENTO VISCOSO



$t =$  TIEMPO

$M =$  MASA

$K =$  RIGIDEZ

$C =$  AMORTIGUAMIENTO

$f(t) =$  FUERZA EXTERNA

$x_0(t) =$  DESPLAZAMIENTO DEL SUELO

EL AMORTIGUAMIENTO VISCOSO ES TAL QUE PRODUCE UNA FUERZA DE RESTAURACION PROPORCIONAL A LA VELOCIDAD RELATIVA DE LA MASA RESPECTO AL SUELO.

EL AMORTIGUAMIENTO SE DEBE PRINCIPALMENTE A LA FRICCION INTERNA ENTRE LOS GRANOS O PARTICULAR DEL MATERIAL DE LA ESTRUCTURA, Y A LA FRICCION EN LAS JUNTAS Y CONEXIONES DE LA MISMA. ES EL ELEMENTO DEL SISTEMA QUE DISCIPA ENERGIA.

2a. LEY DE NEWTON:

"LA RAPIDEZ DE CAMBIO DEL MOMENTUM DE CUALQUIER MASA,  $m$ , ES IGUAL A LA FUERZA QUE ACTUA SOBRE ELLA"



$$p(t) = \frac{d}{dt} \left( m \frac{dx}{dt} \right) = \frac{d}{dt} (m\dot{x})$$

$p(t)$  = FUERZA ACTUANTE

$x$  = DESPLAZAMIENTO

$t$  = TIEMPO

Si  $m$  ES CONSTANTE:  $p(t) = m\ddot{x}$

### PRINCIPIO DE D'ALAMBERT

SI LA 2a. LEY DE NEWTON LA ESCRIBIMOS COMO

$$p(t) - m\ddot{x} = 0$$

AL SEGUNDO TERMINO DE LA ECUACION SE LE CONOCE COMO FUERZA DE INERCIA; EL CONCEPTO DE QUE UNA MASA DESARROLLA UNA FUERZA DE INERCIA PROPORCIONAL A SU ACELERACION Y QUE SE OPONE A ELLA SE CONOCE COMO PRINCIPIO DE D'ALAMBERT, Y PERMITE QUE LAS ECUACIONES DE MOVIMIENTO SE EXPRESEN COMO ECUACIONES DE EQUILIBRIO DINAMICO.

### ECUACION DE EQUILIBRIO

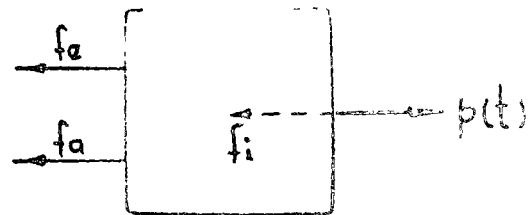
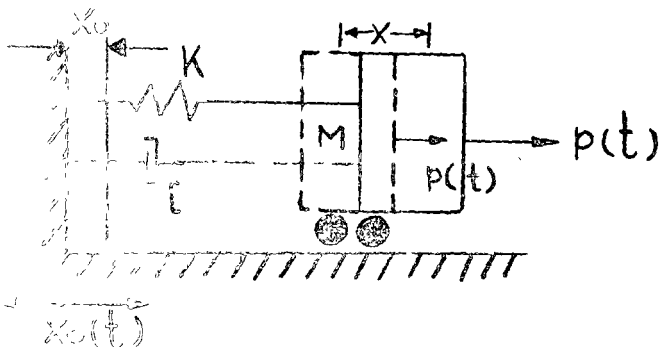


DIAGRAMA DE CUERPO LIBRE

$$\text{EQUILIBRIO: } f_e + f_a + f_i = p(t) \quad (1)$$

$$\text{PARA UN SISTEMA ELASTICO: } f_e = K(x - x_0) = ky$$

$$\text{PARA AMORTIGUAMIENTO VISCOSO: } f_a = c(\dot{x} - \dot{x}_0) = c\dot{y}$$

$$\text{POR EL PRINCIPIO DE D'ALAMBERT: } f_i = m\ddot{x} = m(\ddot{y} + \ddot{x}_0)$$

(2)

SUSTITUYENDO LAS ECS. 2 EN LA EC. 1 SE OBTIENE:

$$m(\ddot{y} + \ddot{x}_0) + c\dot{y} + ky = p(t)$$

DE DONDE

$$\boxed{\ddot{M}y + c\dot{y} + ky = p(t) - M\ddot{x}_0} \quad (3)$$

DIVIDIENDO ENTRE M AMBOS MIEMBROS DE LA EC. 3:

$$\ddot{y} + \frac{c}{M}\dot{y} + \frac{K}{M}y = \frac{p(t)}{M} - \ddot{x}_0$$

SI  $\frac{c}{M} = 2h$ , Y  $\frac{K}{M} = \omega^2$ , DONDE  $\omega =$  FRECUENCIA CIRCULAR NATURAL, EN RAD/SEG:

$$\boxed{\ddot{y} + 2h\dot{y} + \omega^2y = \frac{p(t)}{M} - \ddot{x}_0} \quad (4)$$

CUANDO SE TIENEN EXCITACIONES EN EL SISTEMA SE TRATA DE UN PROBLEMA DE VIBRACIONES FORZADAS; EN CASO CONTRARIO EL PROBLEMA ES DE VIBRACIONES LIBRES.

VIBRACIONES LIBRES

EN ESTE CASO LA ECUACION DIFERENCIAL DE EQUILIBRIO RESULTA SER

$$\ddot{y} + 2h\dot{y} + \omega^2y = 0$$

CUYA SOLUCION ES

$$y(t) = e^{-ht} (C_1 \text{ sen } \omega't + C_2 \text{ cos } \omega't) \quad (5)$$

DONDE  $\omega' = \sqrt{\omega^2 - h^2}$  = FRECUENCIA CIRCULAR NATURAL AMORTIGUADA

Y  $C_1$  Y  $C_2$  SON CONSTANTES QUE DEPENDEN DE LAS CONDICIONES INICIALES

(EN  $t=0$ ) DE DESPLAZAMIENTO Y VELOCIDAD QUE TENGA LA MASA DEL SISTEMA.

ESTAS RESULTAN SER

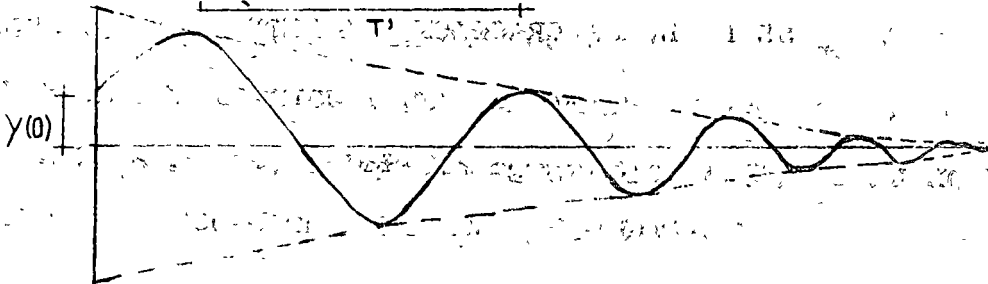
$$C_1 = \frac{\dot{y}(0) + hy(0)}{\omega'} \quad \text{Y} \quad C_2 = -y(0) \quad (6)$$

LA EC (5) SE PUEDE ESCRIBIR TAMBIEN COMO:

$$y(t) = Ae^{-ht} \cos(\omega't - \theta) \quad (7)$$

DONDE  $A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}$     Y     $\theta = \tan^{-1} \frac{C_1}{C_2} = \text{ANGULO DE FASE}$

LA GRAFICA DE LA EC (7) ES



$$T' = \frac{2\pi}{\omega'} = \text{PERIODO NATURAL AMORTIGUADO, SEG}$$

$$f' = \frac{1}{T'} = \text{FRECUENCIA NATURAL AMORTIGUADA, cps}$$

VEAMOS EL CASO ESPECIAL DE LA EC. (5) EN QUE  $h \rightarrow \omega$ . EN TAL CASO,

$\omega' = \sqrt{\omega^2 - h^2} \rightarrow 0$ ,  $\cos \omega't \rightarrow 1$  Y  $\sin \omega't \rightarrow \omega't$ , CON LO CUAL LA EC. (5) SE

REDUCE A

$$y(t) = e^{-\omega t} \{ [(\dot{y}(0) + hy(0))/\omega'] (\omega't) + y(0) \}$$

$$= e^{-\omega t} [\dot{y}(0)t + (1 + \omega t)y(0)]$$

LA GRAFICA DE ESTA ECUACION ES



Y OBTIENE UN MOVIMIENTO OSCILATORIO. POR LO CUAL  
 SI  $h < \omega$  SE DICE QUE SE TIENE AMORTIGUAMIENTO CRITICO. EN TAL CASO:

$$h_{cr} = \omega = \frac{C_{cr}}{2M} = \sqrt{\frac{K}{M}}$$

DE DONDE  $C_{cr} = 2\sqrt{KM}$  (8)

A LA RELACION  $\zeta = C/C_{cr}$  SE LE LLAMA FRACCION DEL AMORTIGUAMIENTO CRITICO.

DESPEJANDO A M DE LA EC. (8) Y SUSTITUYENDOLA EN LA EC.  $h = C/(2M)$  SE OBTIENE:

$$h = \frac{C}{2 \frac{C_{cr}}{4K}} = \frac{C}{C_{cr}} \frac{2K}{2\sqrt{KM}} = \zeta \sqrt{\frac{K}{M}} = \zeta \omega$$

ADMAS:

$$\omega' = \sqrt{\omega^2 - h^2} = \sqrt{\omega^2 - \omega^2 \zeta^2} = \omega \sqrt{1 - \zeta^2}$$

$$\omega' = \omega \sqrt{1 - \zeta^2} \quad (9)$$

LOS VALORES USUALES EN ESTRUCTURAS QUE ASUME  $\zeta$  VARIAN ENTRE 2 Y 5%.  
 EN ESTE INTERVALO  $\omega'$  Y  $\omega$  SON CASI IGUALES; VEAMOS, POR EJEMPLO,  
 EL CASO EN QUE  $\zeta = 0.1$

$$\omega' = \omega \sqrt{1 - 0.01} = 0.995\omega$$

OTRA FORMA DE MEDIR EL GRADO DE AMORTIGUAMIENTO QUE TIENE UNA ESTRUCTURA ES MEDIANTE EL DECREMENTO LOGARITMICO, EL CUAL SE DEFINE COMO EL LOGARITMO DEL COCIENTE DE DOS AMPLITUDES CONSECUTIVAS

$$L = \ln \frac{y(t)}{y(t+T')} = \ln \frac{Ae^{-ht} \cos(\omega't - \theta)}{Ae^{-h(t+T')} \cos[\omega'(t+T') - \theta]}$$

$$= \ln \left\{ \frac{e^{-ht}}{e^{-h(t+T')}} \frac{\cos(\omega't - \theta)}{\cos(\omega'(t+T') - \theta)} \right\}$$

$$= \ln \left\{ \frac{e^{-ht}}{e^{-ht} e^{-hT'}} \frac{\cos(\omega't - \theta)}{\cos(\omega't - \theta + 2\pi)} \right\}$$

$$= \ln e^{+hT'} = hT' = \zeta \omega T' = \zeta \omega \frac{2\pi}{\omega \sqrt{1-\zeta^2}}$$

$$L = \frac{2\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}$$

(10)

SI  $\zeta$  ES PEQUEÑO,

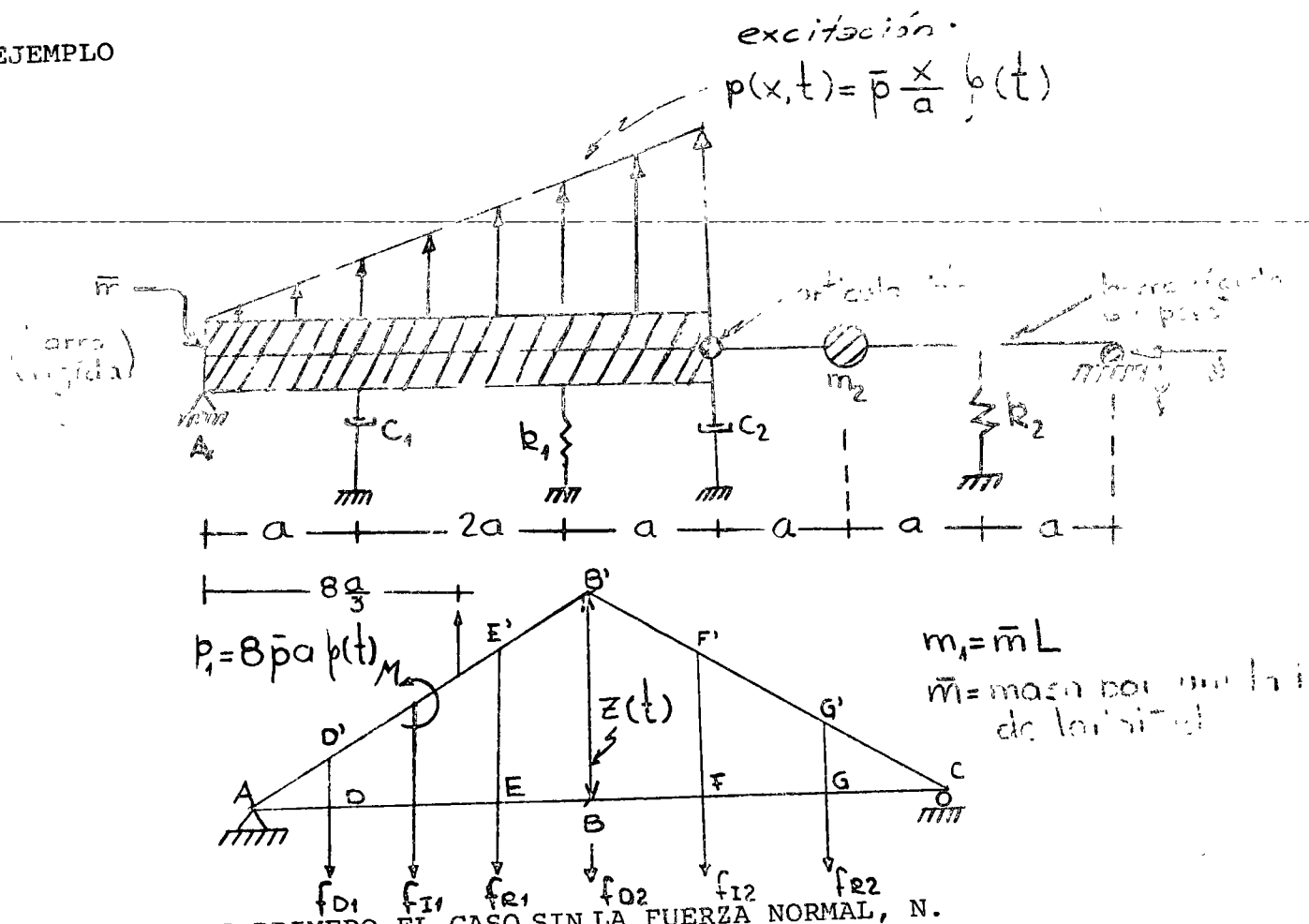
$$L \approx 2\pi\zeta$$

(11)

ECUACION DE MOVIMIENTO GENERALIZADA.

HAY PROBLEMAS QUE APARENTEMENTE CORRESPONDE A VIBRACIONES DE SISTEMAS DE VARIOS GRADOS DE LIBERTAD PERO QUE EN REALIDAD SON DE UN GRADO SOLAMENTE.

EJEMPLO



CONSIDEREMOS PRIMERO EL CASO SIN LA FUERZA NORMAL, N.

TOMANDO COMO COORDENADA GENERALIZADA A  $Z(t)$ .

$$f_{R1} = k_1(EE') = k_1 \frac{3}{14} Z(t) ; f_{R2} = k_2(GG') = K_2 \frac{1}{3} Z(t)$$

$$f_{D1} = C_1 \left( \frac{d}{dt} DD' \right) = C_1 \frac{1}{4} \dot{Z}(t) ; f_{D2} = C_2 \dot{Z}(t)$$

$$f_{I1} = m_1 \frac{1}{2} \ddot{Z}(t) = \bar{m}L \frac{1}{2} \ddot{Z}(t) = 2a\bar{m}\ddot{Z}(t)$$

$$f_{I2} = m_2 \frac{2}{3} \ddot{Z}(t)$$

$$M = I_0 \frac{1}{4a} \ddot{z}(t) = \frac{\bar{m}L}{4a} \frac{L^2}{3} \ddot{z}(t) = \frac{4}{3} a^2 \bar{m} \ddot{z}(t)$$

$$p_1 = 8\bar{p}a\zeta(t)$$

LA ECUACION DE MOVIMIENTO DEL SISTEMA SE PUEDE ESTABLECER IGUALANDO A CERO EL TRABAJO VIRTUAL REALIZADO POR TODAS LAS FUERZAS AL REALIZAR AL SISTEMA UN DESPLAZAMIENTO VIRTUAL EN EL PUNTO B IGUAL A  $\delta Z$ . EN EL CASO

$$\begin{aligned} \delta W = & -k_1 \frac{3}{4} z(t) \left( \frac{3}{4} \delta Z \right) - k_2 \frac{1}{3} z(t) \left( \frac{1}{3} \delta Z \right) - c_1 \frac{\dot{z}(t)}{4} \left( \frac{\delta Z}{4} \right) - \\ & - c_2 \dot{z}(t) (\delta Z) - 2a\bar{m} \ddot{z}(t) \left( \frac{\delta Z}{2} \right) - m_2 \frac{2\ddot{z}(t)}{3} \left( \frac{2}{3} \delta Z \right) - \\ & - \frac{4}{3} a^2 \bar{m} \ddot{z}(t) \left( \frac{\delta Z}{4a} \right) + 8\bar{p}a\zeta(t) \left( \frac{2}{3} \delta Z \right) = 0 \end{aligned}$$

SIMPLIFICANDO SE OBTIENE

$$\left[ \left( a\bar{m} + \frac{a\bar{m}}{3} + \frac{4m_2}{9} \right) \ddot{z}(t) + \left( \frac{c_1}{16} + c_2 \right) \dot{z}(t) + \left( \frac{9}{16} k_1 + \frac{k_2}{9} \right) z(t) - \frac{16}{3} \bar{p}a\zeta(t) \right] \delta Z = 0 \quad (A)$$

COMO EL DESPLAZAMIENTO VIRTUAL  $\delta Z$  NO ES CERO, SE DEBE CUMPLIR QUE EL TERMINO ENTRE PARENTESIS ES CERO. EN TAL CASO:

$$\boxed{\ddot{z}(t) + \tilde{c} \dot{z}(t) + \tilde{k} z(t) = \tilde{p}(t)}$$

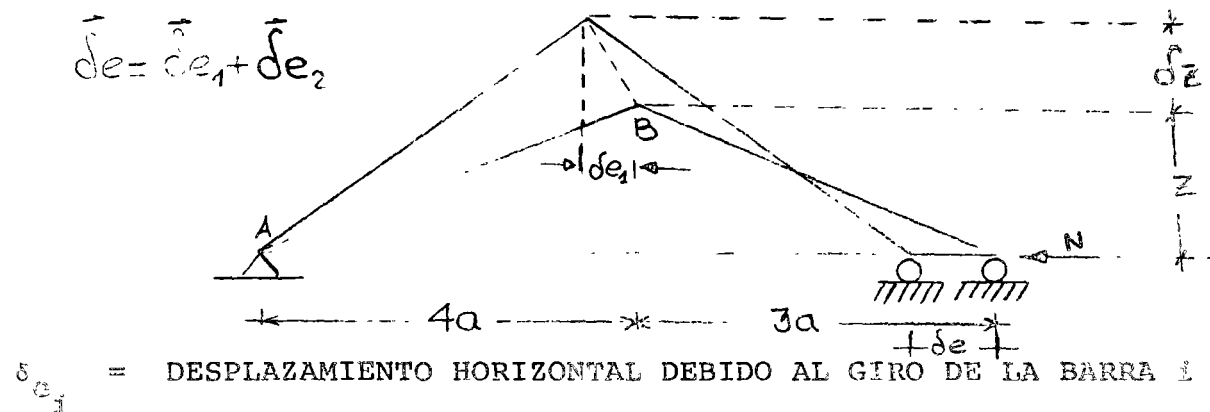
EN DONDE

$$\tilde{m} = \frac{4}{3} \bar{m}_a + \frac{4}{9} m_2 \quad ; \quad \tilde{c} = \frac{c_1}{16} + c_2$$

$$\tilde{k} = \frac{9}{16} k_1 + \frac{k_2}{9} \quad ; \quad \tilde{p}(t) = \frac{16}{3} \bar{p}_a c(t)$$

ESTOS PARAMETROS SE DENOMINAN MASA, AMORTIGUAMIENTO, RIGIDEZ Y FUERZA GENERALIZADAS, RESPECTIVAMENTE.

CONSIDEREMOS AHORA EL CASO DE LA FUERZA NORMAL N SOLAMENTE:



$$\delta e_1 = \frac{Z}{4a} \delta Z \quad ; \quad \delta e_2 = \frac{Z}{3a} \delta Z$$

$$\therefore \delta e = \frac{7}{12} \frac{Z}{a} \delta Z$$

EL TRABAJO VIRTUAL ES:

$$\delta W = N \delta e = \frac{7}{12} \frac{NZ}{a} (\delta Z)$$

COMO EL SISTEMA ES LINEAL SE PUEDE SUMAR ESTE TRABAJO VIRTUAL AL DE LA REACCION (A), CON LO CUAL LA RIGIDEZ GENERALIZADA SE MODIFICA, QUEDANDO EN LA FORMA:



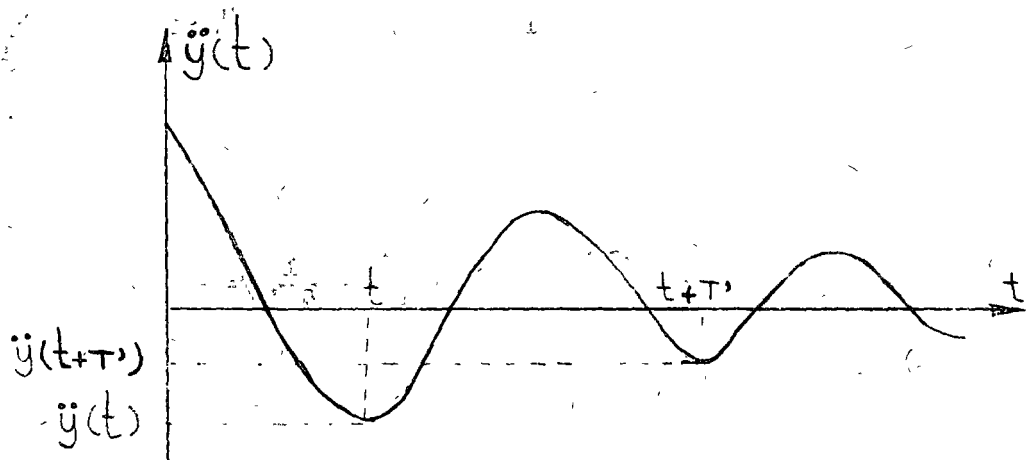
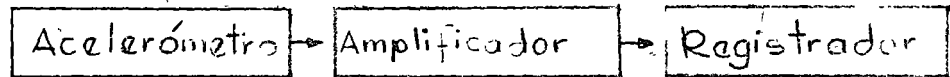
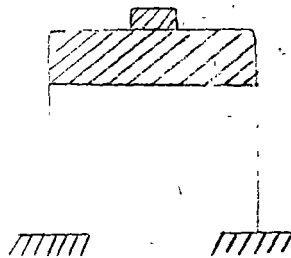
$$\bar{k} = \frac{9}{16} k_1 + \frac{1}{9} k_2 \quad \boxed{\frac{7}{12} \frac{N}{a}}$$

DE ESTA RIGIDEZ SE PUEDE SACAR, DE PÁSO, LA CARGA CRITICA DE PANDEO HACIENDO  $k = 0$ :

$$N_{cr} = \left( \frac{27}{28} k_1 + \frac{4}{21} k_2 \right) a$$

#### DETERMINACIÓN EXPERIMENTAL DE $\zeta$ EN ESTRUCTURAS REALES O EN MODELOS

SI SE REALIZA UN EXPERIMENTO EN EL CUAL SE SACA A LA ESTRUCTURA DE SU POSICION SE SACA A LA ESTRUCTURA DE SU POSICION DE EQUILIBRIO ESTÁTICO Y SE DEJA VIBRANDO LIBREMENTE, EL REGISTRO DE LAS ACELERACIONES QUE SE REGISTREN EN LA MASA TENDRA LA MISMA FORMA QUE LA GRÁFICA DE LA EC. 7.

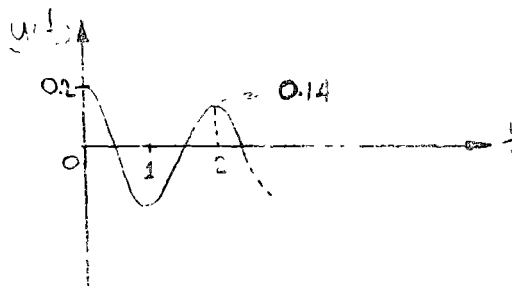
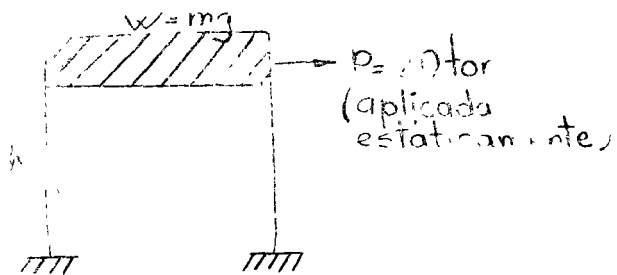


SI DE DICHO REGISTRO SE MIDEN  $\ddot{y}(t + T)$  y  $\ddot{y}(t)$  SE PUEDE OBTENER  $L$  Y, DE LA EC. (11), DESPEJAR A  $\zeta$

$$\zeta = \frac{L}{2\pi}$$

EJEMPLO

A UNA ESTRUCTURA DE UN PISO SE LE APLICA UNA CARGA HORIZONTAL DE 20 TON EN SU MASA, OBSERVANDOSE UN DESPLAZAMIENTO ESTÁTICO DE 0.2 CM. AL SOLTAR SUBITAMENTE LA FUERZA SE REGISTRA UN PERIODO DE OSCILACION DE 0.2 SEG, Y QUE LA AMPLITUD EN EL SEGUNDO CICLO ES DE 0.14 CM.



CALCULAR  $\omega$ ,  $\omega'$ ,  $f'$ ,  $L$  Y  $\zeta$

1. DE  $T' \doteq \frac{2\pi}{\omega} = \frac{\pi^2}{\sqrt{\frac{K}{M}}} = \frac{2\pi\sqrt{W}}{\sqrt{Kg}} = 0.2$  Y  $K = \frac{2.0}{0.2} = 100 \frac{\text{TON}}{\text{CM}}$

SE OBTIENE

$$W \doteq T'^2 \text{ Kg}/4\pi^2 = (0.2)^2 \times 100 \times 981/4\pi^2 = \frac{0.04 \times 100 \times 981}{4 \times 9.87}$$

$$W \doteq 99.4 \text{ TON}$$

2.  $\omega' = \frac{2\pi}{T'} = \frac{2\pi}{0.2} = 10\pi \frac{\text{RAD}}{\text{SEG}}$  ;  $f' = \frac{1}{T'} = \frac{1}{0.2} = 5 \text{ cps}$

3.  $L = \ln \frac{0.2}{0.14} = \ln 1.43 = 0.357$

$$\zeta \doteq \frac{L}{2\pi} = \frac{0.357}{2\pi} = 0.0568 \quad \text{O} \quad \zeta = 5.68 \%$$

$$C_{cr} = \zeta \sqrt{KM} = 0.1132 \sqrt{100 \times 99.4/981}$$

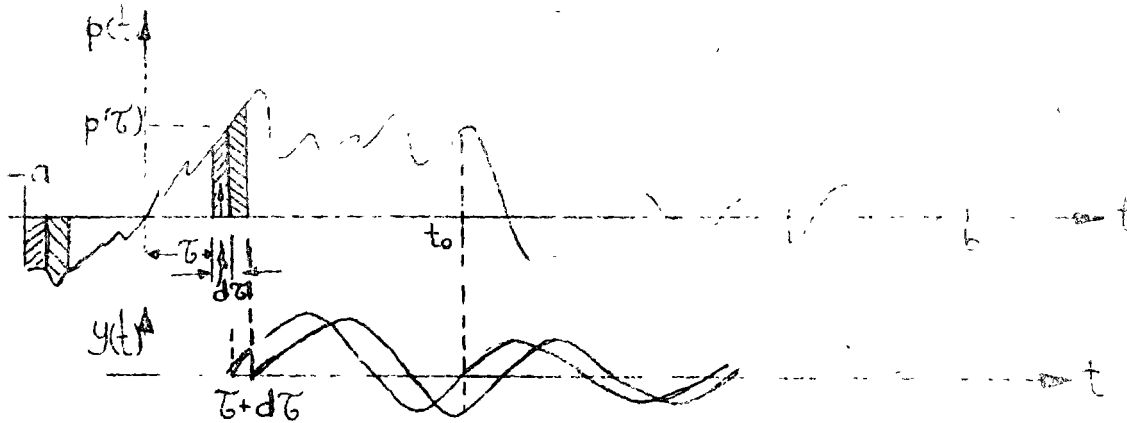
$$= 0.1132 \times 0.318 = 0.36 \text{ TON SEG/CM}$$

SOLUCION AL PROBLEMA DE VIBRACIONES FORZADAS

A. FUERZA EXTERNA

VEAMOS PRIMERO EL CASO EN QUE EXISTE  $p(t)$  Y QUE  $\ddot{x}_0(t) = 0$ ,

SIENDO  $p(t)$  ARBITRARIA



PUESTO QUE  $d\tau \ll T$ , LA FUERZA APLICADA EN  $t = \tau$  PRODUCIRA UN INCREMENTO INSTANTANEO EN LA VELOCIDAD DE LA MASA IGUAL A

$$\dot{y} = \frac{p(\tau)d\tau}{M}$$

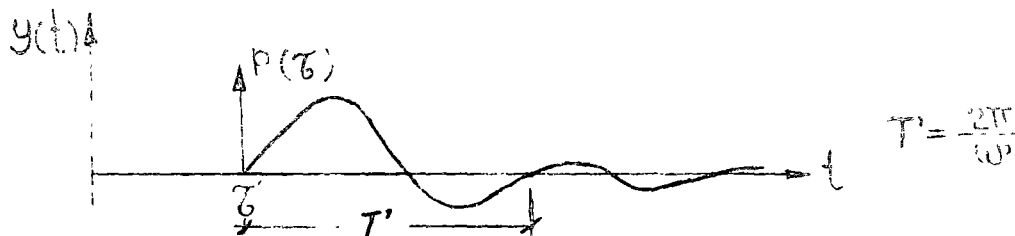
Y UN INCREMENTO INSTANTANEO NULO EN EL DESPLAZAMIENTO, ES DECIR,  $y=0$ . TOMANDO ESTOS INCREMENTOS COMO CONDICIONES INICIALES EN  $t = \tau$ , LA EC. 5 DA COMO RESULTADO

$$y(t) = \frac{p(\tau)d\tau}{M\omega'} \text{ sen } \omega'(t-\tau) e^{-h(t-\tau)} ; t \geq \tau$$

PUESTO QUE EL SISTEMA ES LINEAL ES POSIBLE SUPERPONER LOS EFECTOS OCASIONADOS POR LOS IMPULSOS APLICADOS EN CADA  $\tau$  QUE HAYAN OCURRIDO ANTES DEL INSTANTE  $t$  DE INTERES; ES DECIR,

$$y(t) = \frac{1}{M\omega'} \int_{-\infty}^t p(\tau) e^{-h(t-\tau)} \text{sen}\omega'(t-\tau) d\tau \quad (12)$$

LA FUNCION  $\frac{1}{M\omega'} e^{-h(t-\tau)} \text{sen}\omega'(t-\tau)$ , QUE ES LA RESPUESTA A UN IMPULSO INSTANTANEO DE FUERZA, SE LE CONOCE COMO FUNCION DE TRANSFERENCIA DEL SISTEMA.



LA SOLUCION DADA EN LA EC. (12) SE DENOMINA INTEGRAL DE DUHAMEL. ESTA CONSTITUYE LA SOLUCION PARTICULAR DE LA ECUACION DIFERENCIAL DE EQUILIBRIO; LA SOLUCION GENERAL ES:

$$y(t) = Ae^{-ht} \cos(\omega't - \theta) + \frac{1}{M\omega'} \int_{-\infty}^t p(\tau) e^{-h(t-\tau)} \text{sen}\omega'(t-\tau) d\tau$$

EN DONDE A Y  $\theta$  DEPENDEN DE LAS CONDICIONES INICIALES DE DESPLAZAMIENTO Y VELOCIDAD,  $y(0)$  Y  $\dot{y}(0)$ , RESPECTIVAMENTE. EN GENERAL LA PARTE DE LA RESPUESTA DADA POR LA SOLUCION PARTICULAR ES LA MAS IMPORTANTE, YA QUE LA OTRA PARTE SE AMORTIGUA RAPIDAMENTE.

### 2. MOVIMIENTO DEL SUELO

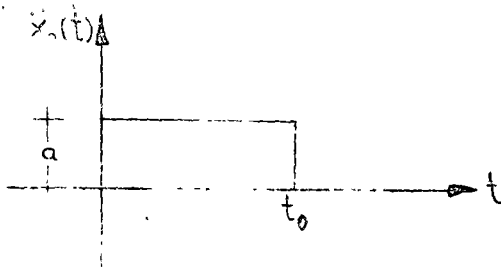
PARA ESCRIBIR LA SOLUCION PARTICULAR DE LA ECUACION DIFERENCIAL DE EQUILIBRIO PARA EL CASO DE VIBRACION FORZADA POR MOVIMIENTO DE LA BASE DE LA ESTRUCTURA, BASTA CAMBIAR  $p(\tau)/M$  DE LA EC. (12) POR  $-\ddot{x}_0$ , YA QUE EN DICHA ECUACION APARECE EN EL MIEMBRO DERECHO  $p(t)/M$  CUANDO LA EXCITACION ES  $p(t)$  Y APARECE  $\ddot{x}_0$  CUANDO LA EXCITACION ES POR MOVIMIENTO DEL SUELO. EN ESTE CASO

LA SOLUCION ES, ENTONCES:

$$y(t) = \frac{-1}{\omega} \int_{-\infty}^t \ddot{x}_0(\tau) e^{-h(t-\tau)} \text{sen} \omega'(t-\tau) d\tau \quad (14)$$

EJEMPLO

CALCULAR LA RESPUESTA DE UN SISTEMA DE UN GRADO DE LIBERTAD CON AMORTIGUAMIENTO NULO, CUANDO LA EXCITACION ES LA SIGUIENTE:



$$\zeta = 0$$

$$\ddot{x}_0(t) = a, \text{ SI } 0 \leq t \leq t_0$$

$$\ddot{x}_0(t) = 0, \text{ SI } t < 0 \text{ Ó } t > t_0$$

CONSIDERESE QUE  $y(0)=0$  Y  $\dot{y}(0)=0$ . PUESTO QUE LAS CONDICIONES INICIALES SON NULAS SE TIENE QUE  $A=0$  (UTILIZANDO LA EC. (13) Y LA SOLUCION PARTICULAR QUE SIGUE, EC. (A)):

$$y(t) = \frac{-1}{\omega} \int_{-\infty}^t a \text{sen} \omega(t-\tau) d\tau = \frac{-a}{\omega} \int_0^t \text{sen} \omega(t-\tau) d\tau$$

$$= \frac{-a}{\omega^2} = (1 - \cos \omega t) \quad \text{SI } 0 \leq t \leq t_0 \quad (A)$$

PARA FINES DE DISEÑO ESTRUCTURAL ES IMPORTANTE CONOCER LA RESPUESTA MAXIMA; ESTA OCURRE CUANDO  $\cos \omega t = -1$ , O SEA, CUANDO

$$\omega t = \pi \quad \text{O} \quad t = \frac{\pi}{\omega} = \frac{\pi}{\frac{2\pi}{T}} = \frac{T}{2}$$

Y VALE

$$\text{MAX} \{ |y(t)| \} = \frac{2a}{\omega^2} = \frac{a}{2\pi^2} T^2, \text{ SI } 0 \leq \frac{T}{2} \leq t_0 \text{ O } 0 \leq T \leq 2t_0$$

PARA  $t > t_0$ , O SEA PARA  $T/2 > t_0$  ES NECESARIO OBTENER LA RESPUESTA EN VIBRACION LIBRE CON LAS CONDICIONES INICIALES DE VELOCIDAD Y DESPLAZAMIENTO CORRESPONDIENTES A  $t = t_0$ :

$$y(t_0) = \frac{-a}{\omega^2} (1 - \cos \omega t_0); \quad \dot{y}(t_0) = \frac{-a}{\omega} \sin \omega t_0$$

APLICANDO LAS ECS. (5) Y (6) OBTENEMOS:

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{-a}{\omega^2} | \sin \omega t_0 \sin \omega t' - (1 - \cos \omega t_0) \cos \omega t' | \\ &= \frac{-a}{\omega^2} \sqrt{\sin^2 \omega t_0 + (1 - \cos \omega t_0)^2} \sin(\omega t' - \vartheta) \end{aligned}$$

$$y(t) = \frac{-2a}{\omega^2} \frac{\sin \omega t_0}{2} \sin(\omega t' - \vartheta)$$

$$\text{DONDE } t' = t - t_0 \text{ Y } \vartheta = \tan^{-1} \left( \frac{1 - \cos \omega t_0}{\sin \omega t_0} \right)$$

EL VALOR MAXIMO DE LA RESPUESTA EN ESTE INTERVALO ES

$$\text{MAX} \{ |y(t)| \} = \frac{2a}{\omega^2} \left| \sin \frac{\omega t_0}{2} \right|, \text{ SI } t > t_0 \text{ O } T > 2t_0$$

CASO DE EXCITACION ARMONICA.

CONSIDEREMOS AHORA EL CASO EN QUE LA ESTRUCTURA ES EXCITADA POR LA FUERZA ARMONICA

$$p(t) = p_0 \operatorname{sen} \omega t$$

DE DURACION INDEFINIDA.

LA SOLUCION DE ESTE PROBLEMA SE PUEDE ENCONTRAR SUSTITUYENDO A  $p(t) = p_0 \operatorname{sen} \omega t$  EN LA INTEGRAL DE DUHAMEL Y OBTENIENDO SU SOLUCION. SIN EMBARGO, EL RESULTADO LO OBTENDREMOS DE LA CONSIDERACION DE QUE PARA QUE EL MIEMBRO DERECHO DE LA ECUACION DIFERENCIAL DE EQUILIBRIO APAREZCA UN TERMINO ARMONICO ES NECESARIO QUE EN EL IZQUIERDO SE TENGAN COMBINACIONES DE TERMINOS TAMBIEN ARMONICOS. CONSIDEREMOS, POR LO TANTO, LA SOLUCION

$$y(t) = A \operatorname{sen} \omega t + B \operatorname{cos} \omega t \quad (14)$$

Y DETERMINEMOS LOS VALORES QUE DEBEN TENER A Y B PARA SATISFACER LA ECUACION DIFERENCIAL DE EQUILIBRIO, PARA LO CUAL HAY QUE SUSTITUIR A  $y(t)$ ,  $\dot{y}(t)$  Y  $\ddot{y}(t)$  EN LA ECUACION DIFERENCIAL. HACIENDO ESTO Y FACTORIZANDO:

$$\begin{aligned} (-A\omega^2 - 2h\omega B + \omega^2 A) \operatorname{sen} \omega t + \\ (-B\omega^2 + 2h\omega A + \omega^2 B) \operatorname{cos} \omega t = \frac{p_0}{M} \operatorname{sen} \omega t + 0 \times \operatorname{cos} \omega t \end{aligned}$$

PARA QUE ESTA IGUALDAD SE CUMPLA SE REQUIERE QUE

$$\begin{aligned} -A\omega^2 - 2h\omega B + \omega^2 A &= \frac{p_0}{M} \\ -B\omega^2 + 2h\omega A + \omega^2 B &= 0 \end{aligned}$$

RESOLVIENDO ESTE SISTEMA DE ECUACIONES SE OBTIENE:

$$A = \frac{\frac{P_0}{M} (\Omega^2 - \omega^2)}{(\omega^2 - \Omega^2)^2 + 4h^2 \Omega^2}$$

$$B = \frac{-2h\Omega \frac{P_0}{M}}{(\omega^2 - \Omega^2)^2 + 4h^2 \Omega^2}$$

SUSTITUYENDO A Y B EN LA EC. (14):

$$y(t) = \frac{\frac{P_0}{M}}{(\omega^2 - \Omega^2)^2 + 4h^2 \Omega^2} \{ (\Omega - \omega^2) \text{sen}\Omega t - 2h\Omega \text{cos}\Omega t \} \quad (15)$$

O, TAMBIEN

$$y(t) = \frac{\frac{P_0}{M}}{\sqrt{(\omega^2 - \Omega^2)^2 + 4h^2 \Omega^2}} \text{sen}(\Omega t - \varnothing) \quad (16)$$

$$\text{EN DONDE } \varnothing = \text{ANG TAN} \left( \frac{-B}{A} \right) = \text{TAN}^{-1} \frac{2h\Omega}{\omega^2 - \Omega^2} = \text{ANGULO DE FASE} \quad (17)$$

DIVIDIENDO NUMERADOR Y DENOMINADOR DE LAS ECS. (16) Y (17) ENTRE  $\omega^2$  SE OBTIENE:

$$y(t) = \frac{\frac{p_0}{k}}{\sqrt{\left(1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2}\right)^2 + (2\zeta -)^2}} \text{sen}(\Omega t - \varnothing) \quad (18)$$

$$\varnothing = \text{TAN}^{-1} \frac{2\zeta \frac{\Omega}{\omega}}{1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2}} \quad (19)$$

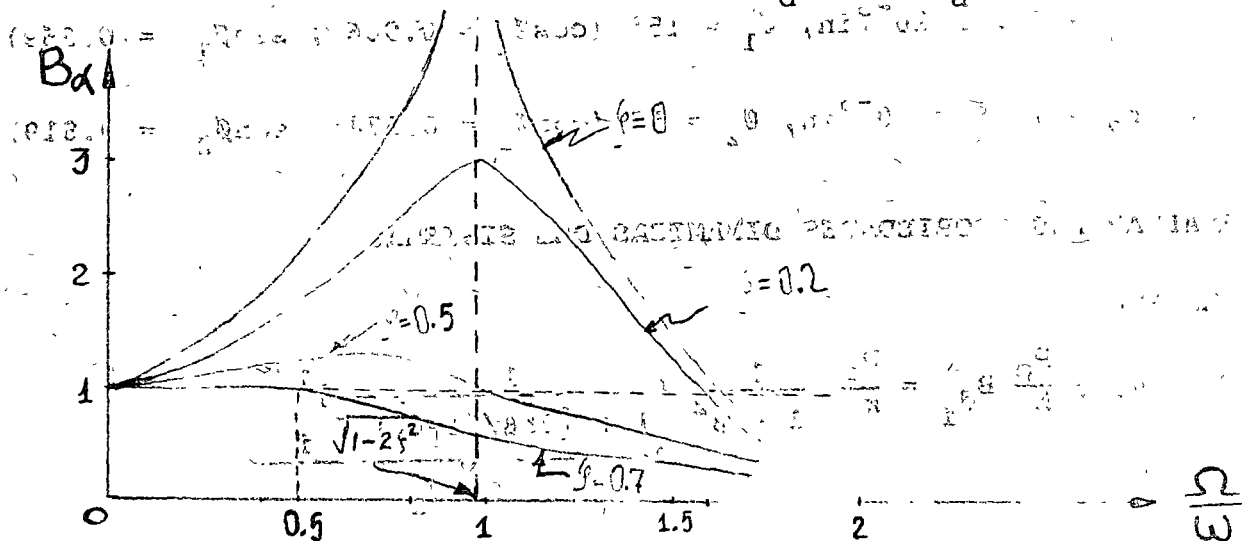


SI SE TIENE EXCITACION ARMONICA EN LA BASE DE LA ESTRUCTURA

$x_o(t) = a \sin \Omega t$ , O SEA,  $\ddot{x}_o = a \Omega^2 \sin \Omega t$ , BASTA CAMBIAR A  $p/M$  EN LA EC. (16) POR  $-a \Omega^2$ ; HACIENDO ESTO SE OBTIENE

$$y(t) = \frac{(\Omega/\omega)^2}{\sqrt{(1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2})^2 + (2\zeta \frac{\Omega}{\omega})^2}} a \sin(\Omega t - \phi) \quad (20)$$

FACTOR DE AMPLIFICACION DINAMICA DE DESPL. =  $B_d = \text{MAX} \left| \frac{y(t)}{a} \right|$



CURVAS DE AMPLIFICACION DINAMICA PARA EL CASO DE FUERZA EXTERNA

$$B_d = \frac{1}{\sqrt{(1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2})^2 + (2\zeta \frac{\Omega}{\omega})^2}} \quad (21)$$

LOS FACTORES DE AMPLIFICACION DINAMICA DE VELOCIDAD Y ACELERACION SE SE PUEDEN OBTENER DERIVANDO RESPECTO A  $t$  LA EC. (16) O LA (20), SEGUN SEA EL CASO. LOS RESULTADOS SON, RESPECTIVAMENTE,

$$\text{MAX} \left| \frac{\dot{y}(t)}{a\omega} \right| = B_v = \frac{\Omega}{\omega} B_d \quad \text{Y} \quad B_a = \left( \frac{\Omega}{\omega} \right)^2 B_d = \text{MAX} \left| \frac{\ddot{y}(t)}{a\omega^2} \right| \quad (22)$$

## EJEMPLO

CON UNA MAQUINA VIBRATORIA PORTATIL QUE PRODUCE FUERZAS ARMONICAS

SE PROBO UNA ESTRUCTURA, AJUSTANDO LA MAQUINA EN LAS FRECUENCIAS

$\Omega_1 = 16 \frac{\text{RAD}}{\text{SEG}}$  Y  $\Omega_2 = 25 \frac{\text{RAD}}{\text{SEG}}$ , CON UNA FUERZA MAXIMA DE 500 LB EN CADA

CASO. LAS AMPLITUDES Y ANGULOS DE FASE DE LA RESPUESTA QUE SE MIDIERON FUERON:

$$\rho_1 = 7.2 \times 10^{-3} \text{ in, } \theta_1 = 15^\circ (\cos\theta_1 = 0.966 ; \text{ sen}\theta_1 = 0.259)$$

$$\rho_2 = 14.5 \times 10^{-3} \text{ in, } \theta_2 = 55^\circ (\cos\theta_2 = 0.574; \text{ sen}\theta_2 = 0.819)$$

EVALUAR LAS PROPIEDADES DINAMICAS DEL SISTEMA.

HACIENDO:

$$\rho_i = \frac{p_o}{k} B_{d_i} = \frac{p_o}{k} \frac{1}{1 - \beta^2} \left\{ \frac{1}{1 + [2\zeta\beta/(1-\beta^2)]^2} \right\}^{1/2}$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\cos\theta_i}$

$$\rho_i = \frac{p_o}{k} \frac{\cos\theta_i}{1 - \beta^2} ; \beta = \Omega/\omega$$

O

$$k - k_{\beta^2} = \frac{p_o \cos\theta_i}{\rho_i} = k - \Omega^2 m \quad (23)$$

SUSTITUYENDO LOS VALORES EXPERIMENTALES DE LAS DOS PRUEBAS:

$$\left. \begin{aligned} k - (16)^2 m &= \frac{500 (0.966)}{7.2 \times 10^{-3}} \\ k - (25)^2 m &= \frac{500 (0.574)}{14.5 \times 10^{-3}} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &\rightarrow k = 100\,000 \frac{\text{LB}}{\text{IN}} \\ &\rightarrow m = 128.5 \frac{\text{LB} \cdot \text{SEG}^2}{\text{IN}} \\ &\Downarrow \\ &\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = 27.9 \frac{\text{RAD}}{\text{SEG}} \end{aligned}$$

USANDO LAS ECS. (17) Y (23) SE OBTIENE:

$$\zeta = \frac{p_o \operatorname{sen} \theta_i}{2\beta_i k\rho_i} ; \text{ DE DONDE } \zeta = \frac{500 (0.259)}{2 \frac{16}{27.9} 100\,000 (7.2 \times 10^{-3})} = 15.7\%$$

CUANDO LA EXCITACION TIENE FRECUENCIA IGUAL A LA NATURAL DEL SISTEMA, SE DICE QUE SE PRESENTA EL CASO DE RESONANCIA. DE LA EC. (20) ES EVIDENTE QUE SI  $\beta = \Omega/\omega = 1$  SE TIENE

$$y(t) = \frac{1}{2\zeta} \left(\frac{\Omega}{\omega}\right)^2 \operatorname{a} \operatorname{sen}(\Omega t - \theta) = \underbrace{\frac{1}{2\zeta}}_{B_d} \operatorname{a} \operatorname{sen}(\Omega t - \theta)$$

O  $(B_d)_{\text{res}} = \frac{(\Omega/\omega)^2}{2\zeta} = \frac{1}{2\zeta}$  : EN CASO DE MOVIMIENTO DEL SUELO,

Y  $(B_d)_{\text{res}} = \frac{1}{2\zeta}$  , EN CASO DE FUERZA EXTERNA.

SIN EMBARGO, AUNQUE ESTA RESPUESTA ES CASI IGUAL A LA MAXIMA, ESTA OCURRE CUANDO  $\Omega = \omega \sqrt{1-2\zeta^2}$ . EN EL CASO DE  $\dot{y}(t)$  Y  $\ddot{y}(t)$  EL MAXIMO OCURRE, RESPECTIVAMENTE, CUANDO

$$\Omega = \omega \quad \text{Y} \quad \Omega = \frac{\omega}{\sqrt{1-2\zeta^2}} \quad \text{SI} \quad \zeta \leq 20\%, \text{ LOS VALORES DE ESTAS } \Omega \text{ NO}$$

DIFIEREN EN MAS DE 2%.

EL MAXIMO VALOR DE  $B_d$  (PARA  $\Omega = \omega \sqrt{1-2\zeta^2}$ ) ES

$$(B_d)_{\text{MAX}} = \frac{1}{2\zeta \sqrt{1-\zeta^2}} \quad \text{O} \quad (B_d)_{\text{MAX}} = \frac{(\Omega/\omega)^2}{2\zeta \sqrt{1-\zeta^2}}$$

SI SE TIENE FUERZA EXTERNA O MOVIMIENTO DEL SUELO, RESPECTIVAMENTE. SE OBSERVA DE ESTAS ECUACIONES QUE SI  $\zeta=0$ ,  $(B_d)_{\text{MAX}} = \infty$ .

SI SE ANALIZA LA SOLUCION GENERAL DE LA ECUACION DIFERENCIAL DE MOVIMIENTO PARA EL CASO DE CONDICIONES INICIALES NULAS Y  $\beta=1$  TIENE QUE:

$$y(t) = e^{-ht} (A \text{ sen } \omega't + B \text{ cos } \omega't) - \frac{P_0}{k} \frac{\text{cos } \omega t}{2\zeta}$$

$$y(0) = B - P_0/(2\zeta k) = 0$$

DE DONDE, HACIENDO  $y(0)=0$  Y  $\dot{y}(0)=0$ , SE OBTIENEN:

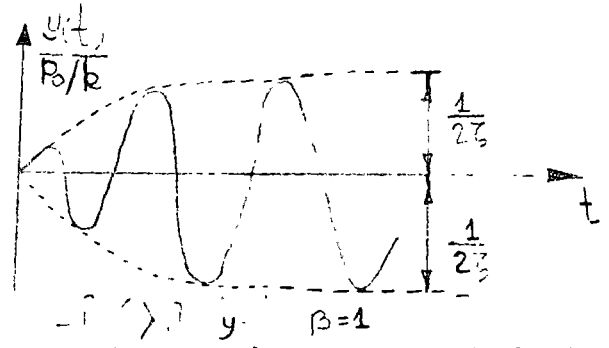
$$A = \frac{P_0}{k} \frac{\omega}{2\omega'} = \frac{P_0}{k} \frac{1}{2\sqrt{1-\zeta^2}} ; B = \frac{P_0}{k} \frac{1}{2\zeta}$$

POR LO QUE

$$y(t) = \frac{1}{2\zeta} \frac{P_0}{k} [e^{-ht} (\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \text{ sen } \omega't + \text{ cos } \omega't) - \text{ cos } \omega t]$$

PARA AMORTIGUAMIENTOS PEQUEÑOS:

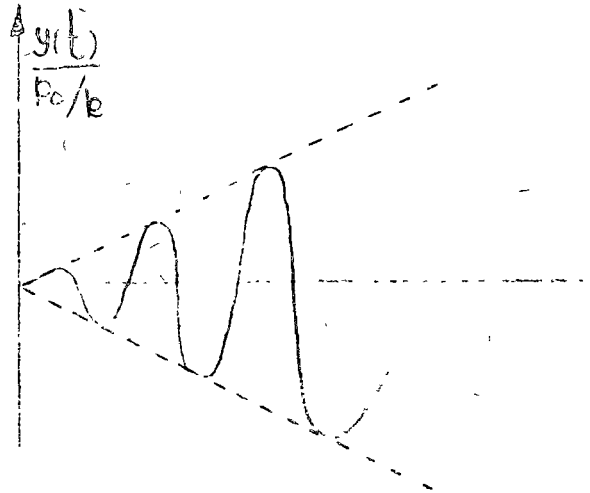
$$\frac{y(t)}{P_0/k} \doteq \frac{1}{2\zeta} (e^{-ht} - 1) \text{ cos } \omega t$$



SI  $\zeta=0$ , APLICANDO LA REGLA DE L'HOSPITAL, SE OBTIENE:

$$\frac{y(t)}{P_0/k} = \frac{1}{2} (\text{sen } \omega t - \omega t \text{ cos } \omega t)$$

PERO, EL MAXIMÓ DE LA RESPUESTA TIENDE A INFINITO GRADUALMENTE.



### CARACTERISTICAS DINAMICAS DE LOS REGISTRADORES DE SISMOS.

SI LA ACELERACION DE LA BASE DE UN INSTRUMENTO ES ARMONICA, DADA POR LA ECUACION

$$\ddot{x}_0(t) = a \operatorname{sen} \Omega t$$

EL FACTOR DE AMPLIFICACION RESULTA SER

$$\bar{B}_d = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2}\right)^2 + \left(2\zeta \frac{\Omega}{\omega}\right)^2}} \cdot \frac{1}{\omega^2} = \frac{B'_d}{\omega^2}$$

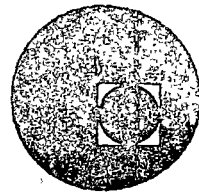
PUESTO QUE LA FIG I CORRESPONDE A  $B_d$ , Y EN ELLA SE OBSERVA QUE PARA  $\zeta = 0.7$  SE TIENE  $B_d \approx 1$  PARA  $0 \leq \Omega/\omega \leq 0.6$ , SE CONCLUYE QUE EL DESPLAZAMIENTO DE LA MASA DE UN SISTEMA ES PROPORCIONAL A LA ACELERACION DE SU BASE, SI ESTE TIENE AMORTIGUAMIENTO DEL 70% Y SI LAS EXCITACIONES QUE SE TRATAN DE REGISTRAR TIENEN FRECUENCIAS INFERIORES AL 60% DE LA FRECUENCIA NATURAL DEL SISTEMA. SI ESTO SE CUMPLE, EL APARATO RESULTA SER UN ACELEROMETRO.

EN INGENIERIA SISMICA LA MAXIMA FRECUENCIA DE INTERES ES DEL ORDEN DE 10 CPS ( $T = 0.1$  SEG). POR LO QUE LOS ACELEROMETROS TIENEN FRECUENCIA NATURAL DE 16 A 20 CPS.





centro de educación continua  
división de estudios superiores  
facultad de ingeniería, unam

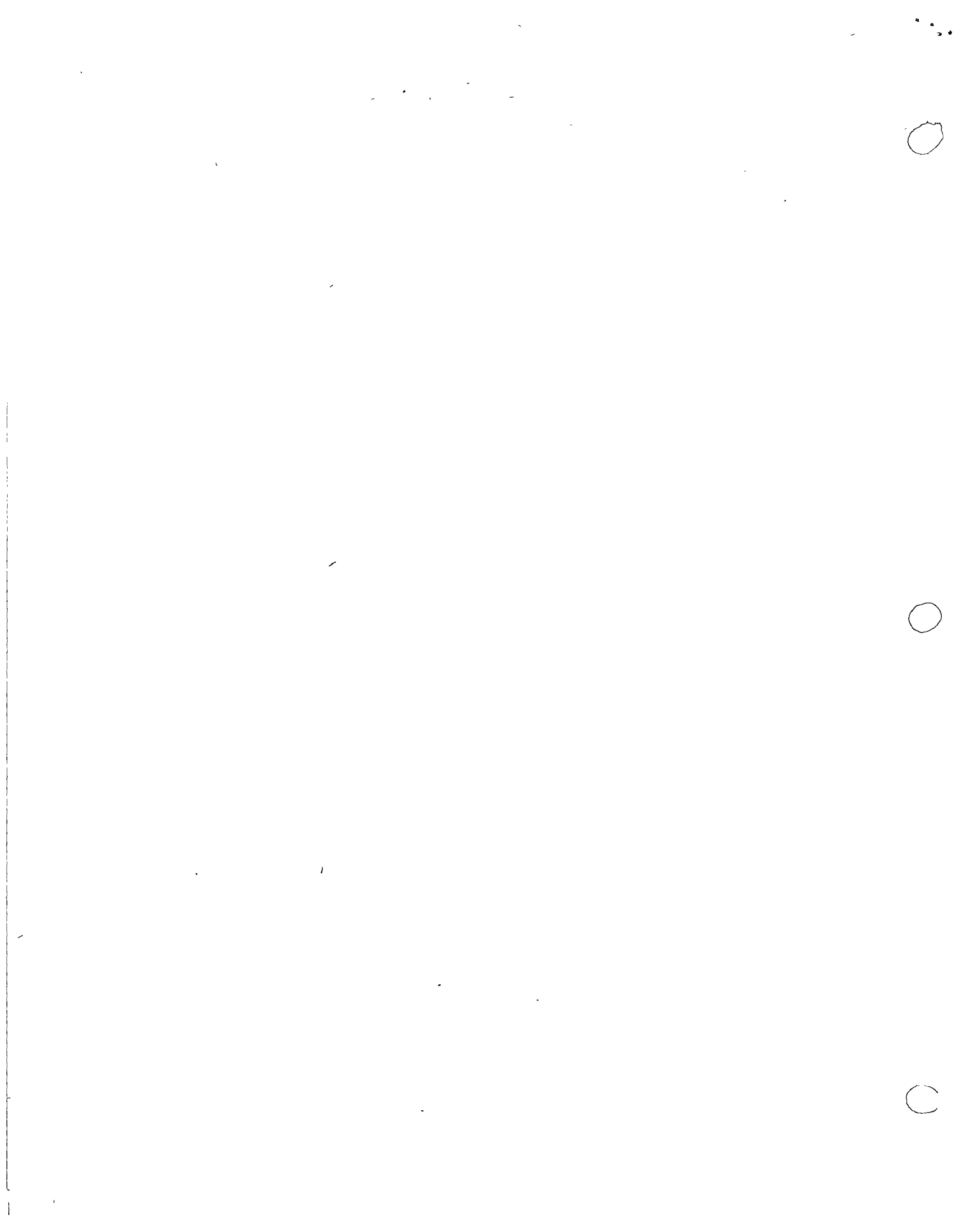


III CURSO INTERNACIONAL DE INGENIERIA SISMICA

DINAMICA ESTRUCTURAL

(CONTINUACION)

DR. OCTAVIO A. RASCON CHAVEZ.

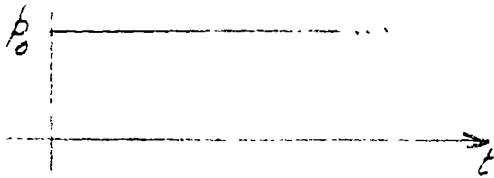




## EJEMPLO

CALCULAR LA RESPUESTA DE UN SISTEMA DE UN GRADO DE LIBERTAD SUJETO A LA SIGUIENTE EXCITACION:

$P(t)$   $\uparrow$



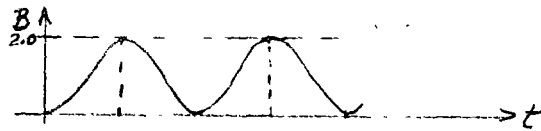
CON  $C = 0$

$$m\ddot{x} + kx = p_0$$

$$x = C_1 \operatorname{sen}\omega t + C_2 \operatorname{cos}\omega t + p_0/k$$

SI EN  $t = 0$ ,  $x = 0$  Y  $\dot{x} = 0$ :

$$C_2 = -F_0/k \quad \text{Y} \quad C_1 = 0$$



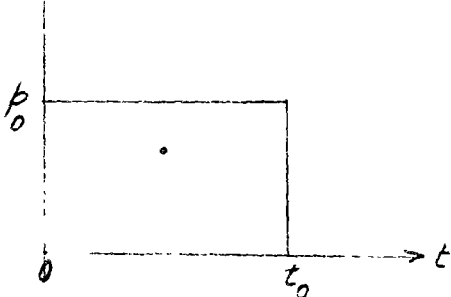
$$\therefore x = \frac{p_0}{k} (1 - \operatorname{cos}\omega t);$$

$B = \text{FACTOR DE AMPLIFICACION DINAMICA} = \frac{k}{\left(\frac{p_0}{k}\right)} = (1 - \operatorname{cos}\omega t)$

$B_{\text{MAX}} = 2$ , EN  $t = T/2, 3T/2 \dots$

AHORA, SI LA EXCITACION ES DE DURACION  $t_0$ :

$P(t)$   $\uparrow$



SI  $t < t_0$  :

$$x = \frac{p_0}{k} (1 - \operatorname{cos}\omega t)$$

$$\dot{x}(t) = \frac{p_0}{k} \operatorname{sen}\omega t$$

EN  $t = t_0$  :

$$x(t_0) = \frac{p_0}{k} (1 - \operatorname{cos}\omega t_0)$$

$$\dot{x}(t_0) = \frac{p_0}{k} \operatorname{sen}\omega t_0$$

CONDICIONES INICIALES PARA  $t > t_0$

SI  $t > t_0$ ,  $x = A \cos \omega t' + B \sin \omega t'$ , CON  $t' = t - t_0$

EN  $t' = 0$  ( $t = t_0$ ), SE DEBEN CUMPLIR LAS CONDICIONES INICIALES ANTERIORES, LO CUAL CONDUCE A

$$A = \frac{p_0}{k} (1 - \cos \omega t_0) \quad Y \quad B = \frac{p_0}{k} \sin \omega t_0$$

POR LO QUE  $x = \frac{p_0}{k} (1 - \cos \omega t_0) \cos \omega t' + \frac{p_0}{k} \sin \omega t_0 \sin \omega t'$

$$= \frac{p_0}{k} \sqrt{(1 - \cos \omega t_0)^2 + \sin^2 \omega t_0} \sin(\omega t' - \theta)$$

0

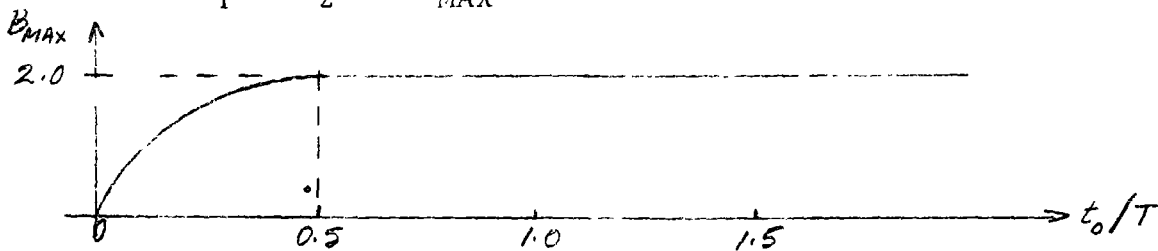
$$x = \frac{p_0}{k} \sqrt{2(1 - \cos \omega t_0)} \sin(\omega t' - \theta)$$

$$= \frac{p_0}{k} \underbrace{\left( 2 \sin \frac{\omega t_0}{2} \right)}_{B} \sin(\omega t' - \theta)$$

B = FACTOR DE AMPLIFICACION

$$B_{MAX} = 2 \sin \frac{\omega t_0}{2} = 2 \sin \left( \pi \frac{t_0}{T} \right)$$

CUANDO  $\frac{\pi t_0}{T} = \frac{\pi}{2}$ ,  $B_{MAX} = 2$



EL MAXIMO  
OCURRE DES-  
PUES DE LA  
EXCITACION

EL MAXIMO OCURRE DURANTE LA EXCITACION

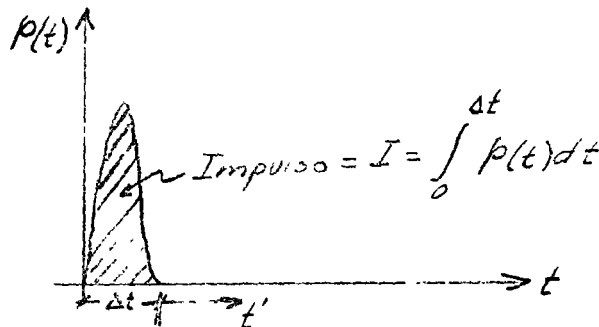
SI  $t_0/T$  ES MUY PEQUEÑO,  $\sin \frac{\pi t_0}{T} = \pi t_0/T$

$$Y \ x_{\text{MAX}} = \frac{2p_0}{k} \frac{\pi t_0}{T} \frac{2p_0}{mk} \frac{\omega t_0}{2} = \frac{p_0 t_0}{m\omega} = \frac{I}{m\omega}$$

EN DONDE  $I = p_0 t_0 = \text{AREA}$  BAJO LA EXCITACION

EJEMPLO

SEA UN IMPULSO APLICADO DURANTE UN INTERVALO DE TIEMPO  $\Delta t$  MUY PEQUEÑO, TAL QUE  $\Delta t/T \ll 1$ :



POR EL PRINCIPIO IMPULSO - MOMENTO SE TIENE QUE

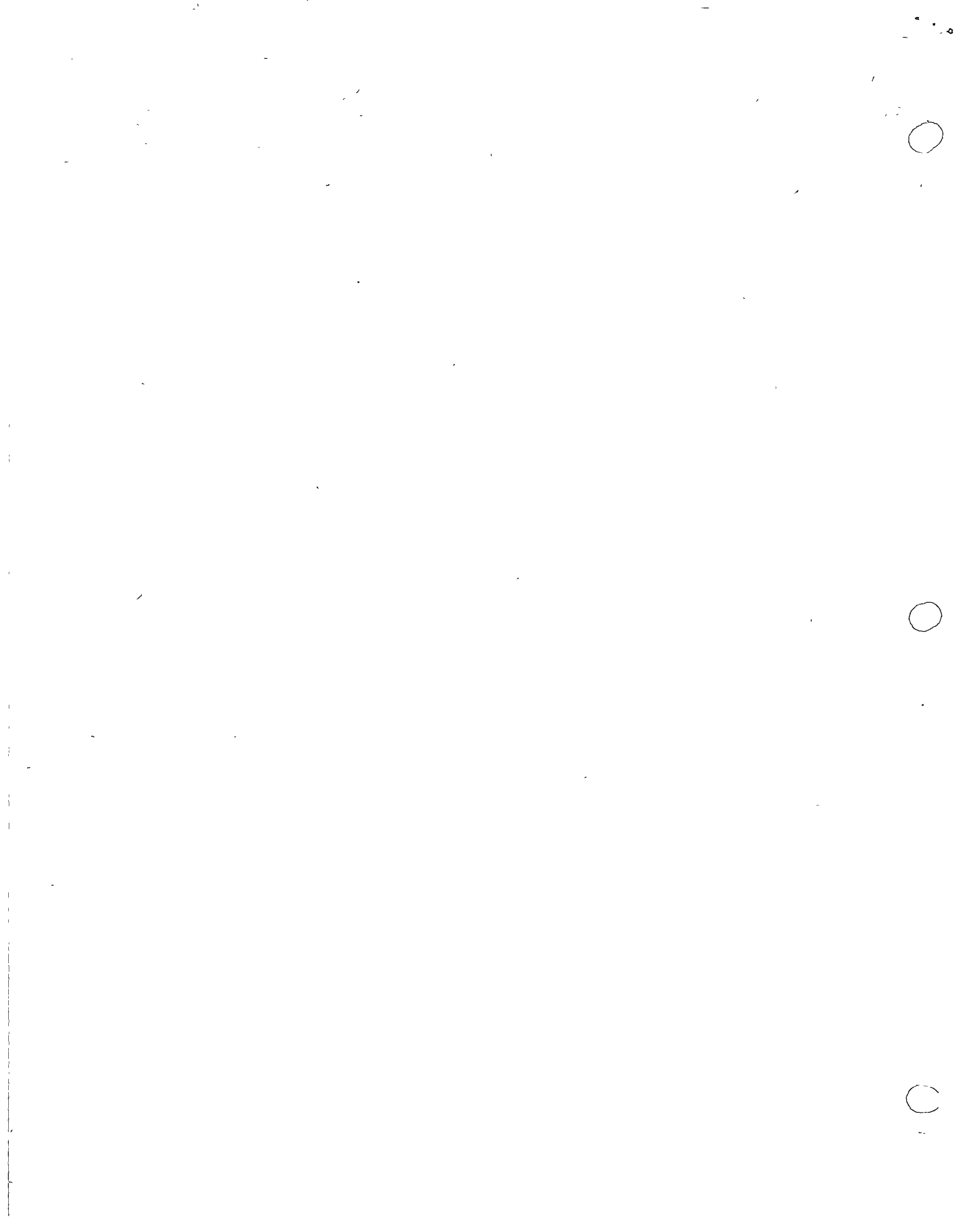
$$I = \int_0^{\Delta t} p(t) dt = m \dot{x}$$

EN DONDE  $\dot{x}$  ES LA VELOCIDAD QUE EL IMPULSO LE IMPRIME A LA MASA DEL SISTEMA. DESPUES DE  $\Delta t$  EL SISTEMA QUEDA VIBRANDO LIBREMENTE CON VELOCIDAD INICIAL  $\dot{x}(0) = \frac{I}{m}$ , MIDIENDO EL TIEMPO EN LA ESCALA DE  $t'$ , Y CON DESPLAZAMIENTO INICIAL NULO, DEBIDO A QUE EN EL CORTO INTERVALO DE TIEMPO  $\Delta t$  LA MASA ADQUIERE UN DESPLAZAMIENTO DE MAGNITUD DESPRECIABLE. EN TAL CASO LA RESPUESTA RESULTA SER

$$x(t') = \frac{\dot{x}(0)}{\omega} \text{sen} \omega t = \frac{I}{m\omega} \text{sen} \omega t'$$

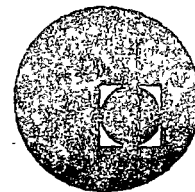
SI EL SISTEMA TIENE AMORTIGUAMIENTO,

$$x(t') = \frac{I}{m\omega} e^{-\zeta \omega t} \text{sen} \omega' t'$$





centro de educación continua  
división de estudios superiores  
facultad de ingeniería, unam



III CURSO INTERNACIONAL DE INGENIERIA SISMICA

DINAMICA ESTRUCTURAL

(CONTINUACION)

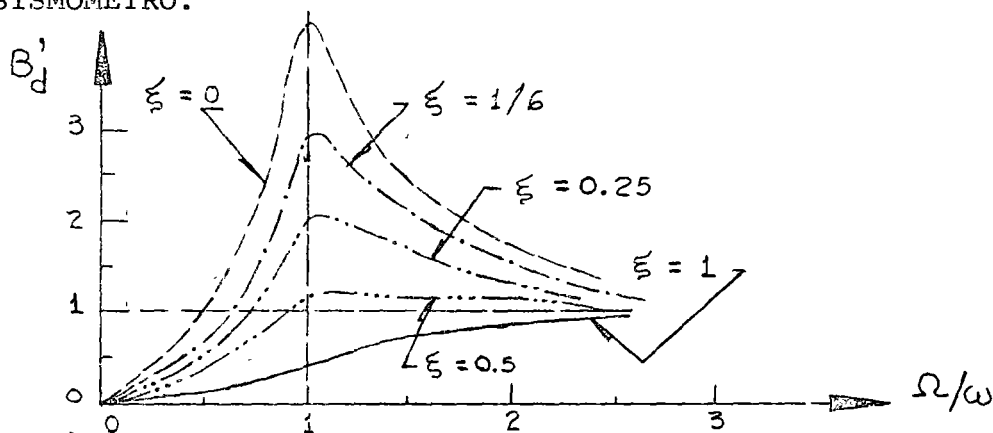
DR. OCTAVIO A. RASCON CHAVEZ.



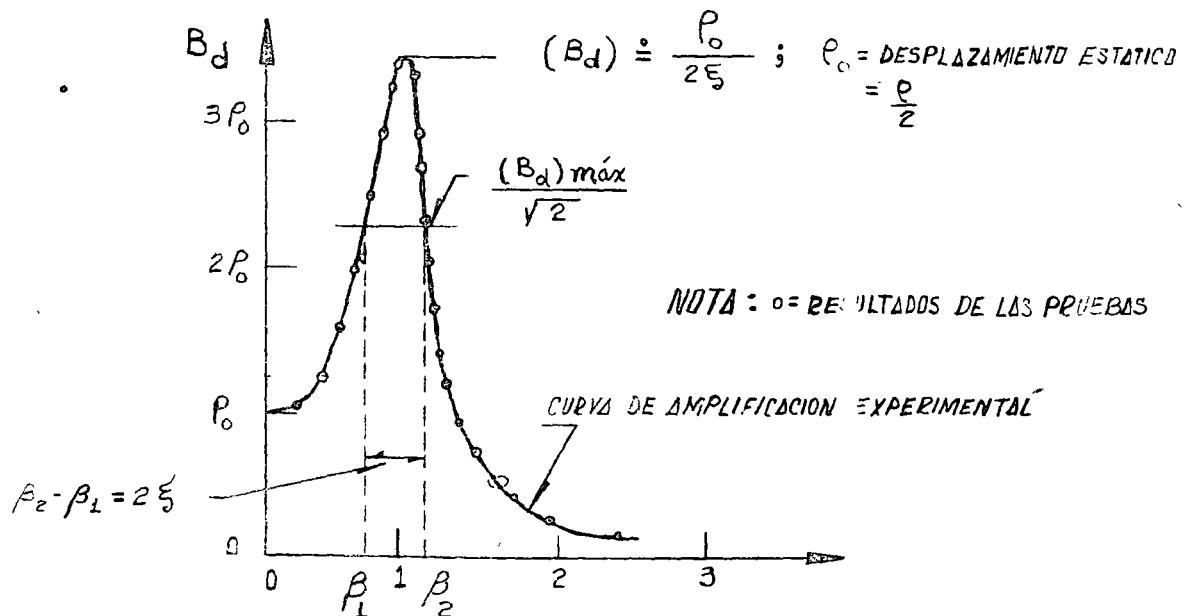
POR OTRA PARTE SI LA EXCITACION DEL SUELO ES  $x_0 = a \sin \omega t$ , O SEA,  $\ddot{x} = -a \omega^2 \sin \omega t$ , ENTONCES EL FACTOR DE AMPLIFICACION RESULTA SER EL SEÑALADO EN LA ECUACION (20), ES DECIR,

$$B'_d = \frac{(\Omega/\omega)^2}{\sqrt{(1 - (\Omega/\omega)^2)^2 + (2\zeta\Omega/\omega)^2}}$$

EN LA GRAFICA CORRESPONDIENTE SE OBSERVA QUE SI  $\zeta=0.5$  Y  $\Omega > \omega$  EL DESPLAZAMIENTO DE LA MASA ES PROPORCIONAL AL DEL SUELO; SI ESTO SE CUMPLE, EL APARATO, CONSTITUYE UN DESPLAZOMETRO, CONOCIDO TAMBIEN COMO SISMOMETRO.



DETERMINACION EXPERIMENTAL DEL AMORTIGUAMIENTO DE UNA ESTRUCTURA MEDIANTE VIBRACIONES FORZADAS ARMONICAS





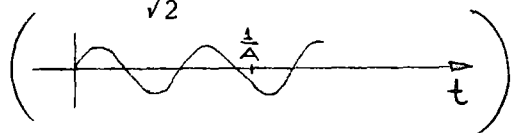


SI SE DETERMINA  $B_d$  EXPERIMENTALMENTE MEDIANTE UNA SERIE DE PRUEBAS DE VIBRACION FORZADA CON FUERZAS ARMONICAS, Y ADEMAS SE DETERMINA  $\rho_o$ , ENTONCES

$$\zeta \doteq \frac{\rho_o}{2(B_d)_{MAX}} \quad (24)$$

OTRO METODO PARA DETERMINAR  $\zeta$  CON BASE EN LA CURVA EXPERIMENTAL DE  $B_d$  SE CONOCE CON EL NOMBRE DE "METODO DEL ANCHO DE BANDA DE LA MITAD DE POTENCIA". ESTE SE BASA EN DETERMINAR LAS FRECUENCIAS QUE CORRESPONDEN AL VALOR rms DE LA AMPLITUD EN RESONANCIA, EL CUAL VALE

$(B_d)_{MAX}/\sqrt{2}$ ; SEAN  $\beta_2$  Y  $\beta_1$  ESTAS FRECUENCIAS. DE LA ECUACION DE  $B_d$  SE OBTIENE:

$$rms = \frac{A}{\sqrt{2}} = \text{RAIZ CUADRADA DEL VALOR MEDIO CUADRATICO}$$


$$\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\rho_o}{2\zeta} = \rho_o / \sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\zeta\beta)^2}$$

ELEVANDO AL CUADRADO AMBOS MIEMBROS:

$$\frac{1}{8\zeta^2} = \frac{1}{(1-\beta^2)^2 + (2\zeta\beta)^2}$$

$$\text{DE DONDE } \beta^2 = 1 - 2\zeta^2 \pm 2\zeta\sqrt{1+\zeta^2}$$

DE AQUI, DESPRECIANDO EL TERMINO  $\zeta^2$  DEL RADICAL, SE OBTIENE

$$\begin{aligned} \beta_1^2 &\doteq 1 - 2\zeta - 2\zeta^2 & ; & & \beta_1 &\doteq 1 - \zeta - \zeta^2 \\ \beta_2^2 &\doteq 1 + 2\zeta - 2\zeta^2 & ; & & \beta_2 &\doteq 1 + \zeta - \zeta^2 \end{aligned}$$

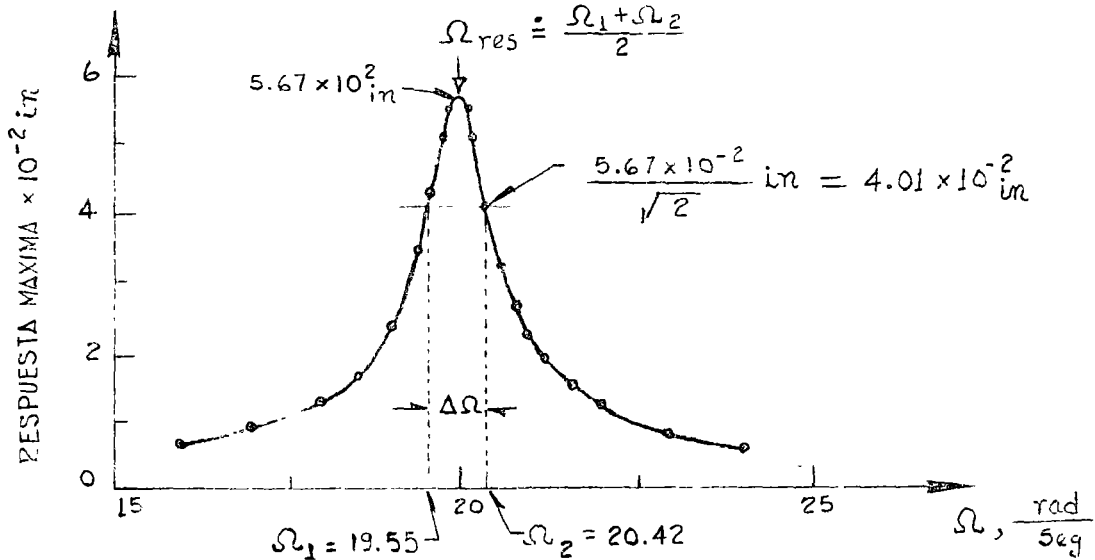
$$\beta_2 - \beta_1 \doteq 2\zeta$$

DE DONDE

$$\zeta = \frac{\beta_2 - \beta_1}{2}$$

(25)

EJEMPLO



DE LA EC (25)

$$A\Omega = \Omega_2 - \Omega_1 = 0.87 \frac{\text{RAD}}{\text{SEG}}$$

$$\zeta = \frac{\beta_2 - \beta_1}{2} = \frac{\frac{\Omega_2}{\Omega_{\text{res}}} - \frac{\Omega_1}{\Omega_{\text{res}}}}{2} = \frac{\Omega_2 - \Omega_1}{\Omega_2 + \Omega_1} = \frac{0.87}{39.97} = 2.18\%$$

METODO NUMERICO  $\beta$  DE NEWMARK PARA RESOLVER EL PROBLEMA DE VIBRACIONES FORZADAS.

EL METODO QUE A CONTINUACION SE DESCRIBE ES ADAPTABLE A SISTEMAS NO LINEALES CON VARIOS GRADOS DE LIBERTAD.

PROCEDIMIENTO:

1. SEAN  $y_i, \dot{y}_i, \ddot{y}_i$ , CONOCIDOS EN EL INSTANTE  $t_i$ , Y  $t_{i+1} = t_i + \Delta t$ . SUPONGAMOS EL VALOR DE  $\ddot{y}_{i+1}$
2. CALCULEMOS  $\dot{y}_{i+1} = \dot{y}_i + (\ddot{y}_i + \ddot{y}_{i+1})\Delta t/2$  (26)

3. CALCULEMOS  $y_{i+1} \doteq y_1 + \dot{y}_i \Delta t + \left(\frac{1}{2} - \beta\right) \ddot{y}_i (\Delta t)^2 + \beta \ddot{y}_{i+1} (\Delta t)$  (27)

4. CALCULEMOS UNA NUEVA APROXIMACION PARA  $\ddot{y}_{i+1}$  A PARTIR DE LA ECUACION DIFERENCIAL DE EQUILIBRIO:

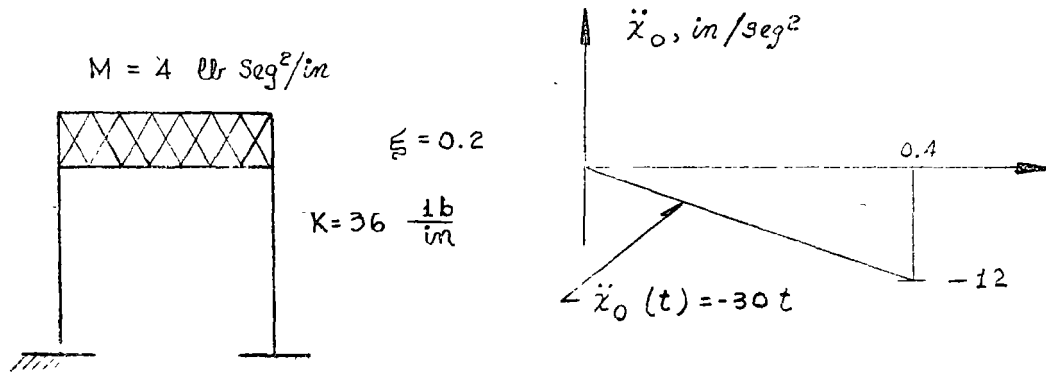
$$\ddot{y}_{i+1} \doteq -2\zeta\omega\dot{y}_{i+1} - \omega^2(y_{i+1} - y_{est}) - (\ddot{x}_o)_{i+1} \quad (28)$$

DONDE  $y_{est} = p(t_{i+1})/k$

5. REPITAMOS LAS ETAPAS 2 A 4 EMPEZANDO CON EL NUEVO VALOR  $\ddot{y}_{i+1}$  HASTA QUE EN DOS CICLOS CONSECUTIVOS SE TENGAN VALORES DE  $\ddot{y}_{i+1}$  CASI IGUALES.

SE RECOMIENDAN VALORES DE  $\beta$  DE  $1/6$  A  $1/4$  Y  $\Delta t \doteq 0.1T$  PARA ASEGURAR CONVERGENCIA Y ESTABILIDAD.

EJEMPLO



CALCULAR LA RESPUESTA DE LA ESTRUCTURA APLICANDO EL METODO  $\beta$  DE NEWMARK

$$\omega = \sqrt{K/M} = \sqrt{36/4} = 3 \frac{\text{RAD}}{\text{SEG}}$$

$$h = \zeta \omega = 0.2 \times 3 = 0.6 \quad ; \quad T = \frac{2\pi}{3} = 2.09 \text{ SEG}$$

TOMAREMOS  $\beta=0.2$  Y  $\Delta t = 0.2$  ( $\doteq 0.1T$ ) SUSTITUYENDO EN LAS ECS. (26),

(27) y (28):

$$\dot{Y}_{i+1} \doteq Y_i + 0.1 (\ddot{Y}_i + \ddot{Y}_{i+1})$$

$$Y_{i+1} \doteq Y_i + 0.2 \dot{Y}_i + 0.012 \ddot{Y}_i + 0.008 \ddot{Y}_{i+1}$$

$$\ddot{Y}_{i+1} = -1.2 \dot{Y}_{i+1} - g Y_{i+1} - (\ddot{x}_0)_{i+1}$$

EN  $t=0$  SABEMOS QUE SE TIENE  $y=0$ ,  $\dot{y}=0$  Y  $\ddot{y}=0$

EN  $t=0 + \Delta t = 0.2$  SEG; SUPONGAMOS  $\ddot{Y}_{i+1} = 5.0 \text{ IN/SEG}^2$ ;  $\ddot{x}_0 = -6$

$$Y_i = 0$$

$$\dot{Y}_i = 0$$

$$Y_i = 0$$

$$\begin{array}{l}
 \text{1º CICLO} \\
 \left\{ \begin{array}{l}
 \dot{y}_{i+1} = 0 + 0.1 (0 + 5) = 0.5 \quad ; \quad y_{i+1} = 0 + 0 + 0 + 0.008 \times 5 = 0.04 \\
 \ddot{y}_{i+1} = -1.2 \times 0.5 - 9 \times 0.04 - (-30 \times 0.2) = 5.04
 \end{array} \right. \\
 \\
 \text{2º CICLO} \\
 \left\{ \begin{array}{l}
 \dot{y}_{i+1} = 0 + 0.1 (0 + 5.04) = 0.504 \quad ; \quad y_{i+1} = 0 + 0 + 0 + 0.008 \times 5.04 = \\
 \quad = 0.04032 \\
 \ddot{y}_{i+1} = -1.2 \times 0.504 - 9 \times 0.04032 - (-6) = 5.033 \text{ IN/SEG}^2
 \end{array} \right.
 \end{array}$$

ESTOS CALCULOS SE PUEDEN ORGANIZAR MEDIANTE UNA TABLA COMO LA SIGUIENTE:

t SEG	$\ddot{x}_0$ IN/SEG <sup>2</sup>	$\dot{y}$ ING/SEG <sup>2</sup>	$\dot{y}$ ING/SEG	$y$ IN
0	0	0	0	0
0.2	-6	5.0000	0.5000	0.04000
		5.040	0.5040	0.04032
		5.033	0.5033	0.04026
		5.034	0.5034	0.04027
0.4 <sup>-</sup>	-12	8.0000	1.8078	0.26536
		7.442	1.7510	0.26079
		7.534	1.7602	0.26163
		7.533	1.7601	0.26162
0.4 <sup>+</sup>	0	-4.467	1.7601	0.26162
0.6	0	-6.000	0.7134	0.51204
		-5.464	0.7670	0.51633
		-5.550	0.7584	0.51564
		.	.	.
		.	.	.

EN  $t = 0.2 + \Delta t = 0.4$  SEG:  $\ddot{x}_0 = -30 \times 0.4 = -12$

$\ddot{y}_i = 5.034, \quad \dot{y}_i = 0.5034, \quad y_i = 0.04027$

SUPONIENDO  $\ddot{y}_{i+1} = 8.000$  SE OBTIENE:

$$1^{\text{er}} \text{ CICLO } \left\{ \begin{array}{l} \dot{y}_{i+1} = 0.5034 + 0.1(5.034 + 8.000) = 1.8068 \\ y_{i+1} = 0.04027 + 0.2 \times 0.5034 + 0.012 \times 5.034 + 0.008 \times 8 = 0.26536 \\ \ddot{y}_{i+1} = -1.2 \times 1,8068 - 9 \times 0.26536 - (-12) = 7.442 \text{ IN/SEG}^2 \end{array} \right.$$

EN  $t = 0.4^+$  SOLO CAMBIA  $\ddot{y}$  :  $\ddot{y}_{0.4+} = \ddot{y}_{0.4-} + \ddot{x}_0 = 7.533 - 12 = -4.467$

EN  $t = 0.6$ ,  $\ddot{y}_i = -4.467$ )  $\dot{y}_i = 1.7601$ ;  $y = 0.26162$

## ESPECTROS DE RESPUESTA ESTRUCTURAL

RECORDEMOS QUE LA SOLUCION DEL PROBLEMA DE VIBRACIONES FORZADAS CON EXCITACION SISMICA ES

$$Y(t) = \frac{-1}{\omega'} \int_{-\infty}^t \ddot{x}_0(t-\tau) e^{-\zeta\omega(t-\tau)} \text{sen } \omega'(t-\tau) d\tau$$

DE LA OBSERVACION DE ESTA ECUACION SE CONCLUYE QUE EL DESPLAZAMIENTO RELATIVO,  $Y(t)$ , ES FUNCION DEL TIEMPO,  $t$ , EL AMORTIGUAMIENTO,  $\zeta$ , Y LA FRECUENCIA CIRCULAR NATURAL,  $\omega'$  (O DEL PERIODO NATURAL)

$$y(t) = f(t, \omega, \zeta)$$

FIJEMOS UN VALOR DE  $\zeta$ , POR EJEMPLO  $\zeta=0$ , Y LUEGO ASIGNEMOS VALORES A  $\omega$ , POR EJEMPLO 0.1, 0.2, 0.3, ETC, HASTA CUBRIR UN INTERVALO DE INTERES, Y PARA CADA CASO CALCULEMOS LA FUNCION RESULTANTE DE APLICAR LA ECUACION ANTERIOR. CON ESTA OBTENEMOS

$$y_1(t) = f_1(t, 0.1, 0) = f_1(t)$$

$$y_2(t) = f_2(t, 0.2, 0) = f_2(t)$$

$$y_3(t) = f_3(t, 0.2, 0) = f_3(t)$$

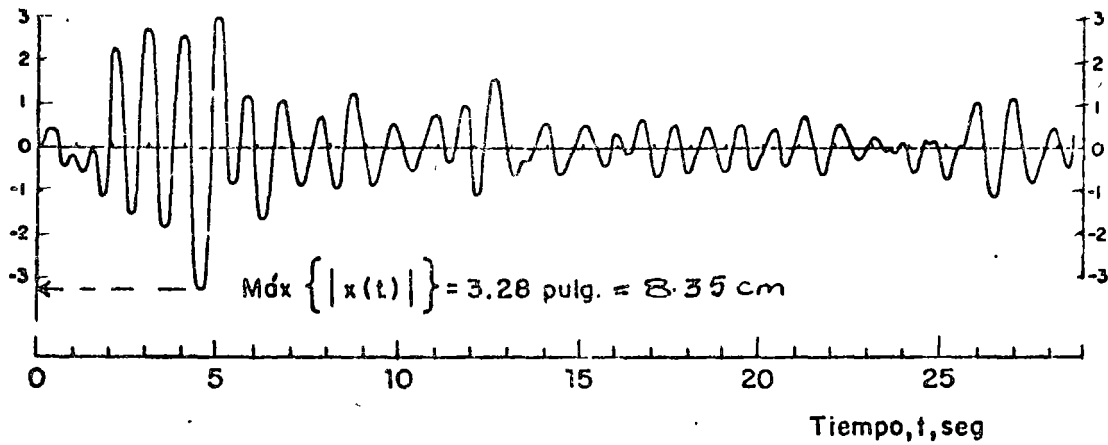
$$\text{SEAN } D_1 = \text{MAX} |y_1(t)| = D(\omega_1, \zeta)$$

$$D_2 = \text{MAX} |y_2(t)| = D(\omega_2, \zeta)$$

$$D_3 = \text{MAX} |y_3(t)| = D(\omega_3, \zeta)$$

⋮  
⋮  
⋮

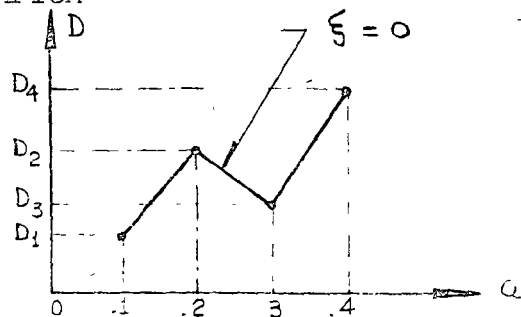
Desplazamiento relativo,  
 $X(t)$ , pulg



Respuesta de un sistema amortiguado simple  
con  $T_1 = 1.0$  seg y  $\zeta = 0.10$ , al sismo de  
El Centro, Cal., 1940, componente N-S



EN TAL CASO, LA GRAFICA



ES EL ESPECTRO DE RESPUESTA DE DESPLAZAMIENTOS PARA  $\zeta = 0$ . SI ESTE PROCESO DE REPITE FIJANDO OTROS VALORES DE  $\zeta$ . POR EJEMPLO,  $\zeta = 0.02, 0.05, 0.1, 0.2$ , ETC, SE OBTENDRAN LOS ESPECTROS DE DESPLAZAMIENTOS CORRESPONDIENTES.

DE MANERA ANALOGA SE PUEDEN OBTENER LOS ESPECTROS PARA OTROS TIPOS DE RESPUESTA, TALES COMO VELOCIDAD RELATIVA, ACELERACION ABSOLUTA, ETC, QUE SON, RESPECTIVAMENTE

$$V = \text{MAX} |\dot{y}(t)|_{\zeta, \omega} ; A = \text{MAX} |\ddot{x}(t)|_{\zeta, \omega} \quad (29)$$

#### PSEUDO - ESPECTROS

ESTADISTICAMENTE SE HA ENCONTRADO QUE

$$S_V = \omega D \stackrel{\circ}{=} V \quad (30)$$

$$S_A = \omega^2 D \stackrel{\circ}{=} A \stackrel{\circ}{=} \omega V \quad (31)$$

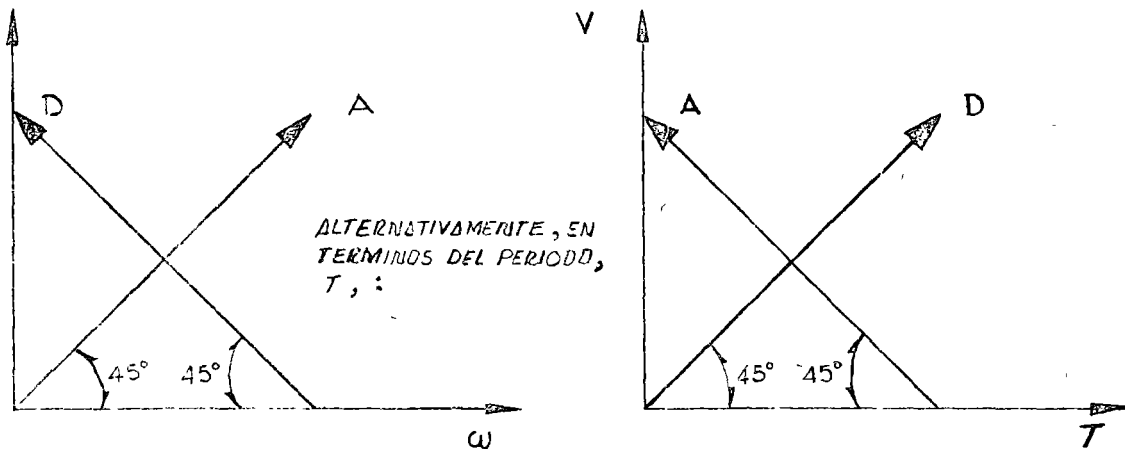
A  $S_V$  Y  $S_A$  SE LES LLAMA PSEUDOESPECTROS.

DE LA EC. (30):  $\log D = \log V - \log \omega = \log V + \log T - \log 2\pi$

DE LA EC. (31):  $\log A = \log V + \log \omega = \log V - \log T + \log 2\pi$

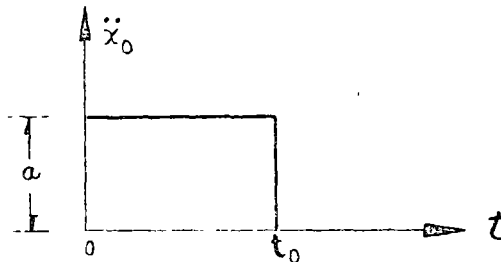
ESTAS ECUACIONES CORRESPONDEN A LINEAS RECTAS EN PAPEL LOGARITMICO;

LA PRIMERA CON PENDIENTE -1 Y LA SEGUNDA CON PENDIENTE +1



## EJEMPLO

CALCULAR EL ESPECTRO CORRESPONDIENTE A LA EXCITACION (CONSIDERESE  $\zeta=0$ )



EN UN EJEMPLO ANTERIOR SE OBTUVO

$$y(t) = \frac{-a}{\omega^2} (1 - \cos \omega t), \text{ SI } 0 \leq t \leq t_0$$

$$D = \text{MAX} |y(t)| = \frac{2a}{\omega^2} ; 0 \leq \frac{T}{2} \leq t_0, (0 \leq T \leq 2t_0)$$

$$S_V = \omega D = \frac{2a}{\omega}, \quad S_A = \omega V = 2a$$

$$Y \quad D = \text{MAX} |y(t)| = \frac{2a}{\omega^2} \text{sen} \frac{\omega t_0}{2}, \quad \text{SI } T > 2t_0$$

$$S_V = \omega D = \frac{2a}{\omega} \left| \text{sen} \frac{\omega t_0}{2} \right| ; \quad S_A = \omega V = 2a \left| \text{sen} \frac{\omega t_0}{2} \right|$$

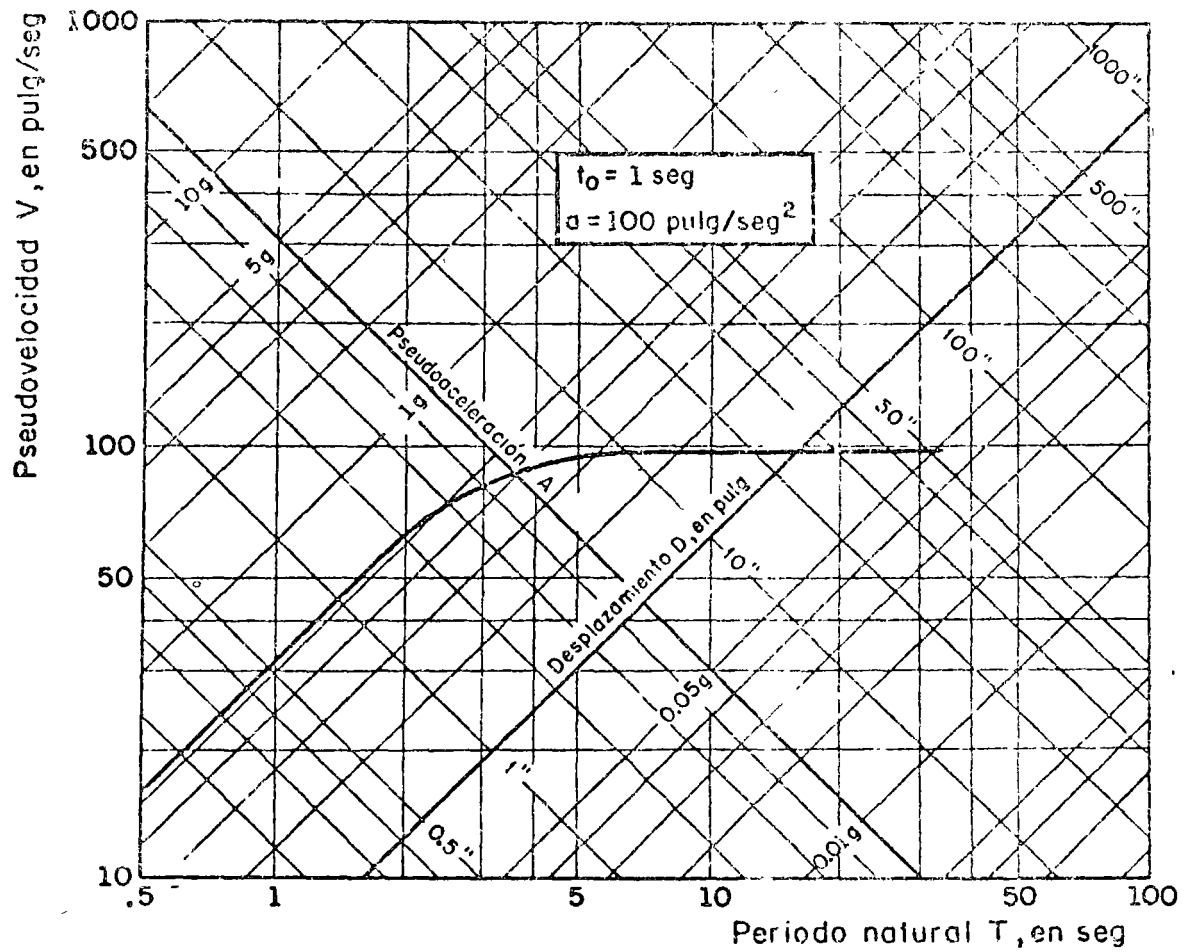
$$\text{LIM}_{\omega \rightarrow 0} S_V = \text{LIM}_{\omega \rightarrow 0} \left\{ at_0 \frac{\text{sen} \frac{\omega t_0}{2}}{\frac{\omega t_0}{2}} \right\} = at_0$$

CASO PARTICULAR: SI  $t_0 = 1$  SEG y  $a = 100$  IN/SEG<sup>2</sup>

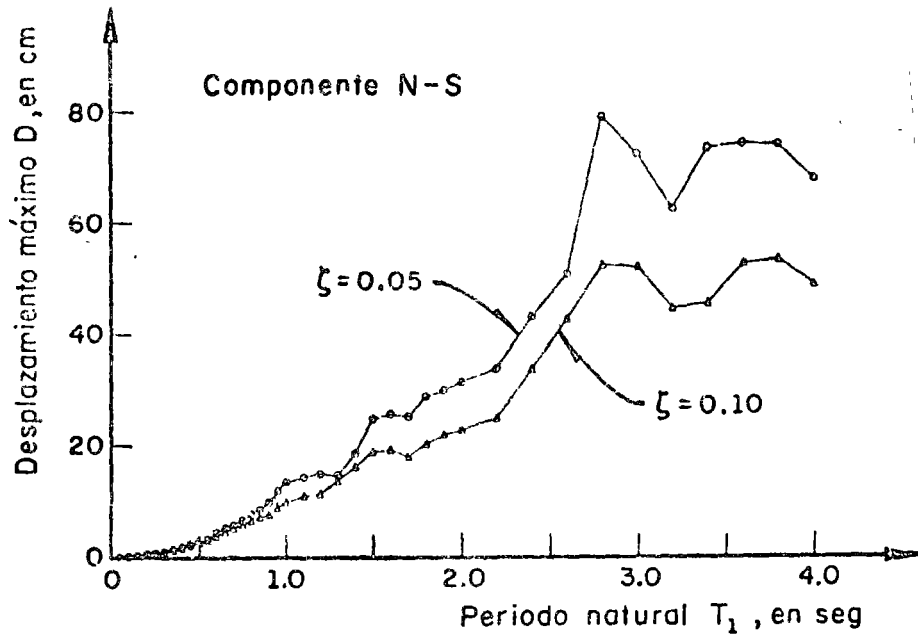
$$S_V = \frac{2 \times 100}{2\pi} = \frac{100}{\pi} T, \quad \text{SI } 0 \leq T \leq 2 \text{ SEG}$$

$$S_V = \frac{100T}{\pi} \left| \text{sen} \frac{\frac{2\pi}{T} x 1}{2} \right| =$$
$$= \frac{100T}{\pi} \left| \text{sen} \frac{\pi}{T} \right| \quad \text{SI } T > 2 \text{ SEG}$$

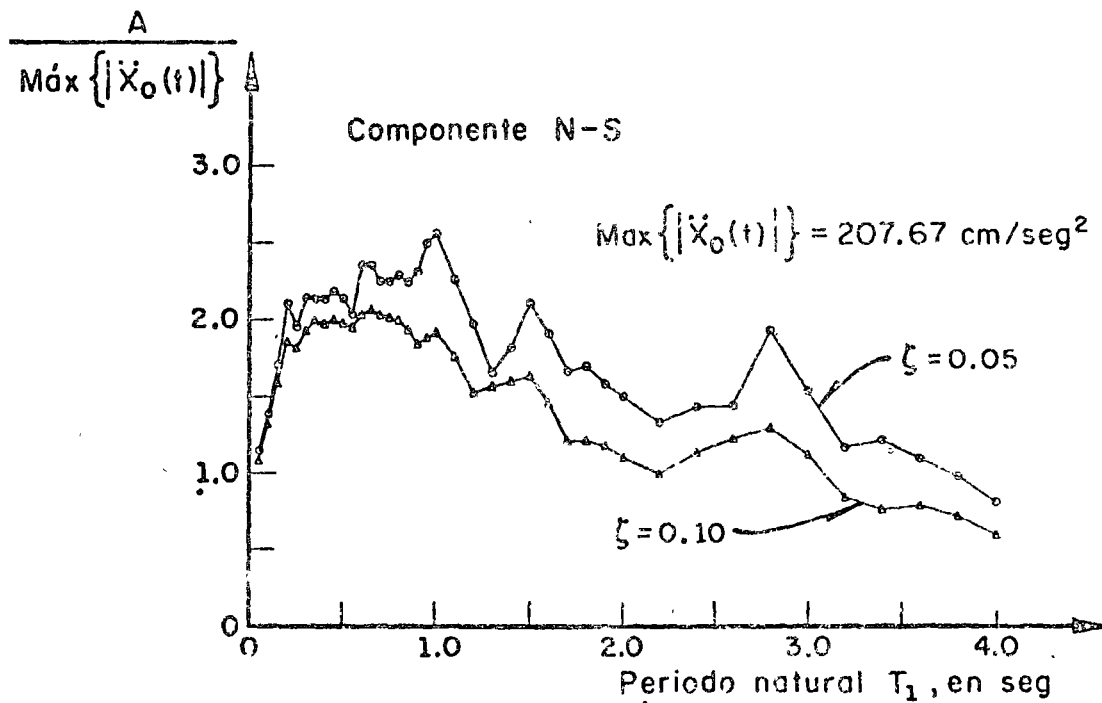
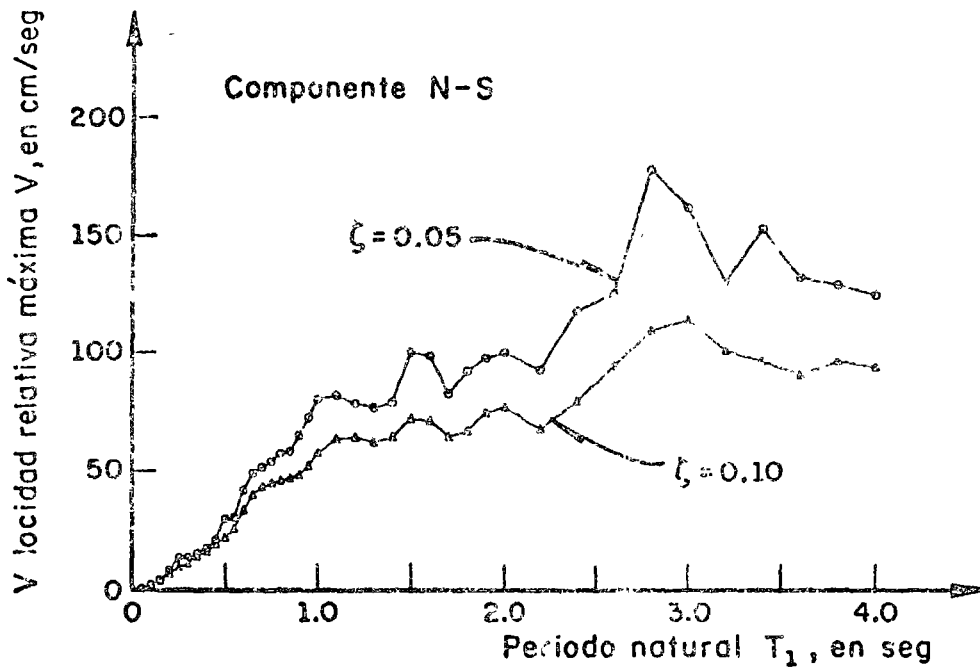
$$\lim_{T \rightarrow \infty} S_V = 100 \text{ IN/SEG}$$



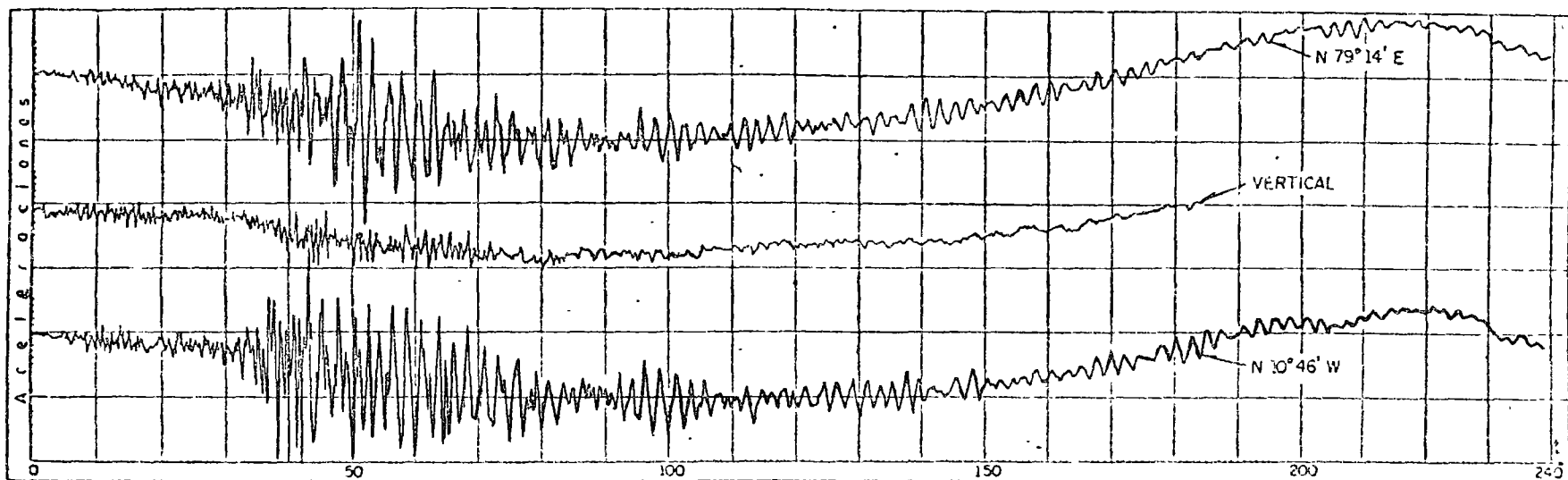
Espectro no amortiguado correspondiente a un pulso rectangular de aceleraciones. Según N. Newmark y E. Rosenblueth, ref 1



Espectro de desplazamientos. Sismo de Tokachi-Oki, Japón (1968). Según H. Tsuchida, E. Kurata y K. Sudo, ref 4

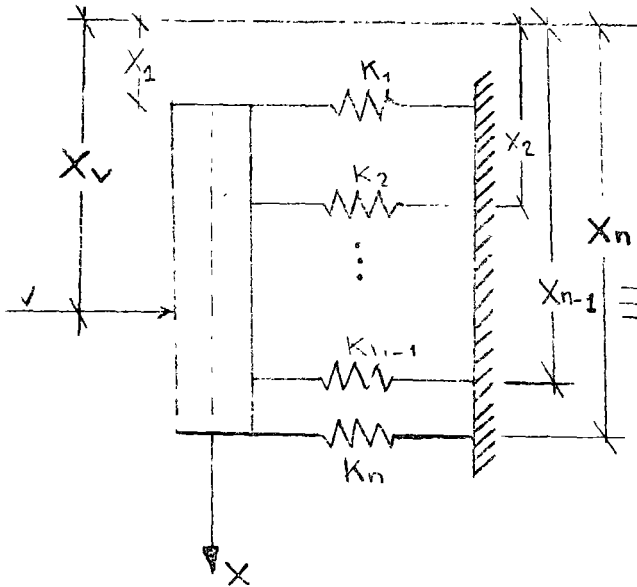


Espectros de velocidades y de aceleraciones. Sismo de Tokachi-Oki, Japón (1968). Según H. Tsuchida, E. Kurata y K. Sudo, ref 4



Acelerogramas originales del sismo registrado el  
11-V-1962 , en la ALAMEDA CENTRAL, Mex. D. F.

DISTRIBUCION DE LAS FUERZAS CORTANTES EN UN ENTREPISO



$$\sum F_i = K_1 \delta + K_2 \delta + \dots + K_n \delta = V = K_{eq} \delta$$

$$\delta \sum K_i = \delta K_{eq}$$



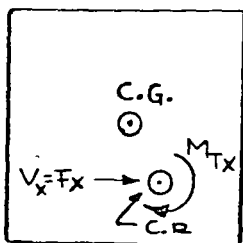
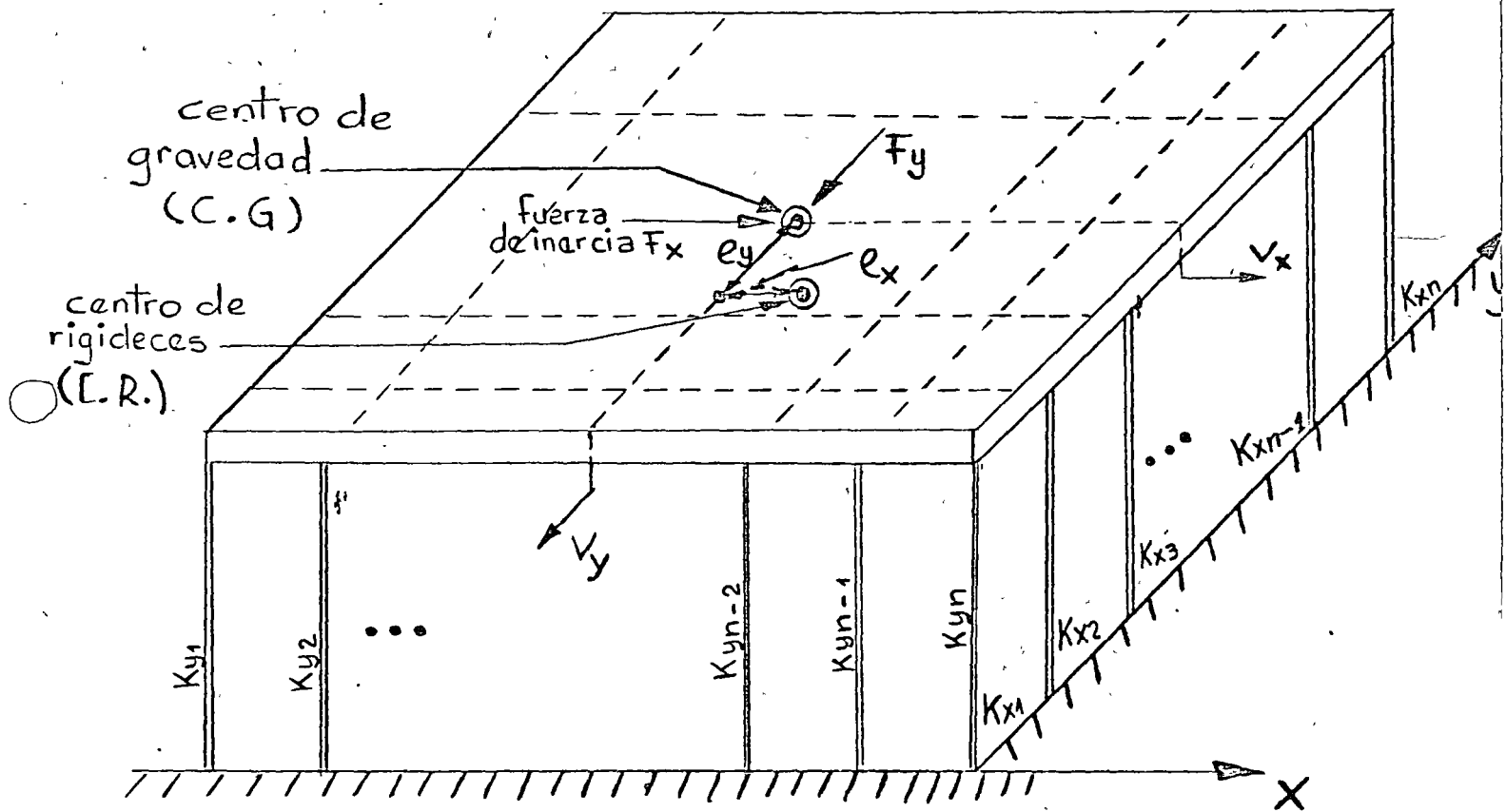
$$K_{eq} = \sum_{i=1}^n K_i$$

$$\sum M_i = \sum F_i X_i = \sum K_i \delta X_i = \delta \sum K_i X_i = V X_v = K_{eq} \delta X_v$$

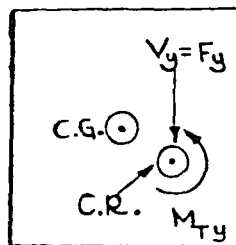
$$X_v = \frac{\sum_{i=1}^n K_i X_i}{\sum_{i=1}^n K_i}$$

← POSICION DEL CENTRO DE RIGIDECES



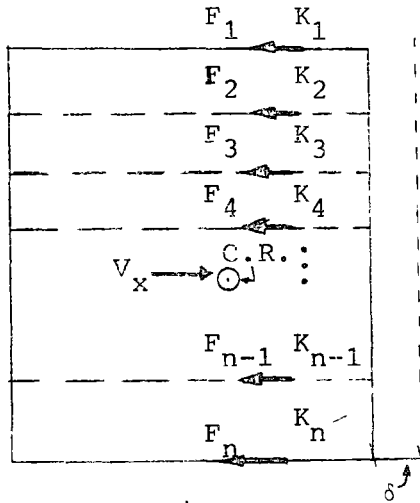


+





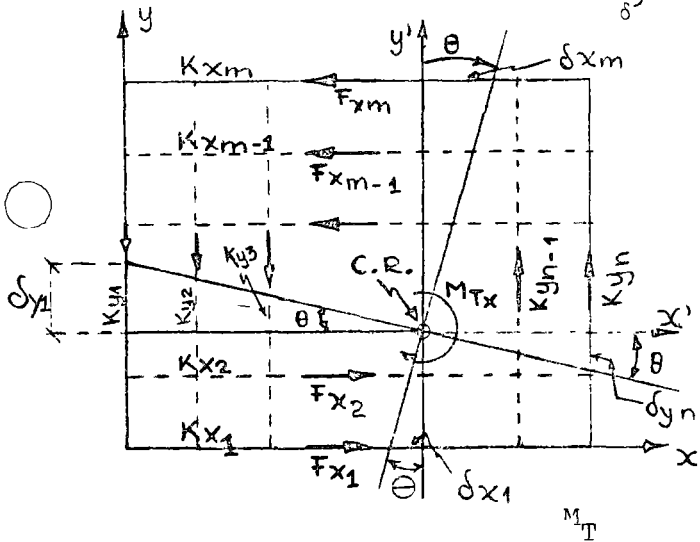
VEAMOS COMO SE DISTRIBUYEN LAS FUERZAS CORTANTES EN LOS MARCOS



$$F_i = K_i \delta$$

$$\sum F_i = \sum K_i \delta = V_x \therefore \delta = \frac{V_x}{\sum K_i}$$

$$F_i = V_x \frac{K_i}{\sum_{i=1}^n K_i}$$



$$F_{x_i} = K_{x_i} \delta_{x_i} = K_{x_i} X'_i \theta$$

$$F_{y_i} = K_{y_i} \delta_{y_i} = K_{y_i} Y'_i \theta$$

$$\sum M_{C.R.} = \sum F_{x_i} X'_i + \sum F_{y_i} Y'_i$$

$$= \theta (\sum K_{x_i} X_i'^2 + \sum K_{y_i} Y_i'^2)$$

$$= M_{TX}$$

DE DONDE  $\theta = \frac{M_{TX}}{\sum K_{x_i} X_i'^2 + \sum K_{y_i} Y_i'^2}$

POR LO QUE

$$F_{x_i} = M_{TX} \frac{K_{x_i} X'_i}{\sum K_{x_i} X_i'^2 + \sum K_{y_i} Y_i'^2} ;$$

$$F_{y_i} = M_{TX} \frac{K_{y_i} Y'_i}{\sum K_{x_i} X_i'^2 + \sum K_{y_i} Y_i'^2}$$

## SISTEMAS NO LINEALES DE UN GRADO DE LIBERTAD

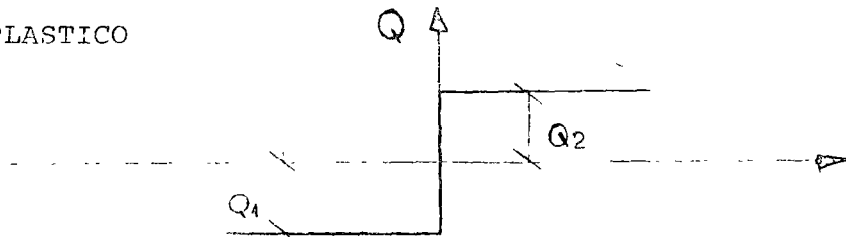
ECUACION DE MOVIMIENTO:

$$M\ddot{x} + Q(y, \dot{y}) = P(t) \quad ; \quad y = x - x_0 = \text{DESPLAZAMIENTO RELATIVO}$$

SI  $Q(y, \dot{y}) = KY + C\dot{y}$  SE TIENE EL SISTEMA ELASTICO LINEAL

MODELOS PARTICULARES

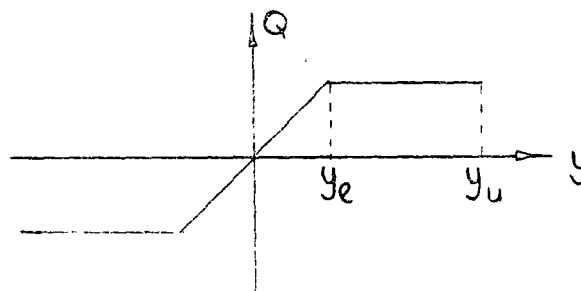
### 1. RIGIDO-PLASTICO



$$Q = -Q_1 + C\dot{y}, \text{ SI } \dot{y} < 0$$

$Q = Q_2 + C\dot{y}, \text{ SI } \dot{y} > 0$  EN DONDE C = CONSTANTE. SE HA EMPLEADO COMO MODELO EN EL ANALISIS DE TALUDES Y CORTINAS DE PRESAS DE TIERRA Y ENROCAMIENTO

### 2. ELASTO-PLASTICO



$$Q = Q_1(y) + C\dot{y}$$

SE EMPLEA COMO MODELO EN EL ANALISIS DE ESTRUCTURAS DUCTILES.

FACTOR DE DUCTIBILIDAD =  $u = y_u / y_e$

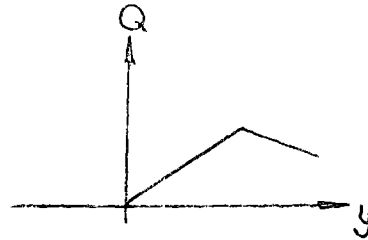
$y_u$  = DESPLAZAMIENTO MAXIMO QUE PUEDE SOPORTAR EL SISTEMA SIN FALLAR.

## 3. SISTEMA BILINEAL



CON ENDURECIMIENTO

SE USA COMO MODELO PARA ANALISIS  
DE PUENTES COLGANTES

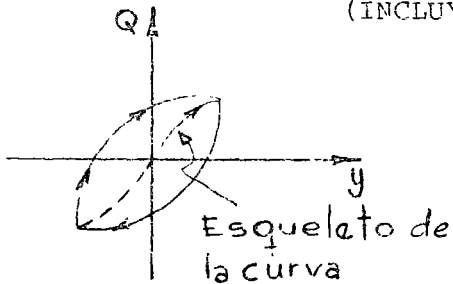


CON ABLANDAMIENTO

SE USA COMO MODELO DE SISTEMAS  
QUE SE DEGRADAN POR AGRIETA-  
MIENTO (MUROS DE MAMPOSTERIA,  
POR EJEM).

## 4. TIPO MASING

(INCLUYE A LOS ANTERIORES COMO CASOS ESPECIALES)



$Q_0$  = FUERZA EN  $y = y_0$

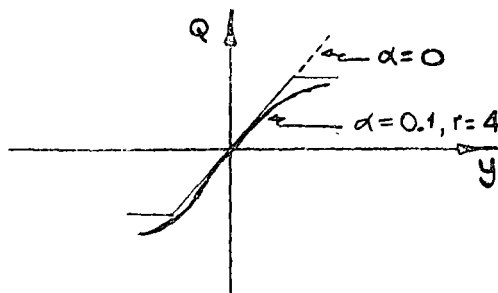
$y_0$  = DESPLAZAMIENTO EN EL CUAL EL PROCESO SE INVIRTIÓ (Y CAMBIO  
DE SIGNO) POR ÚLTIMA VEZ

$$\frac{Q - Q_0}{2} = Q_1 \left( \frac{y - y_0}{2} \right)$$

CASO PARTICULAR DEL ESQUELETO

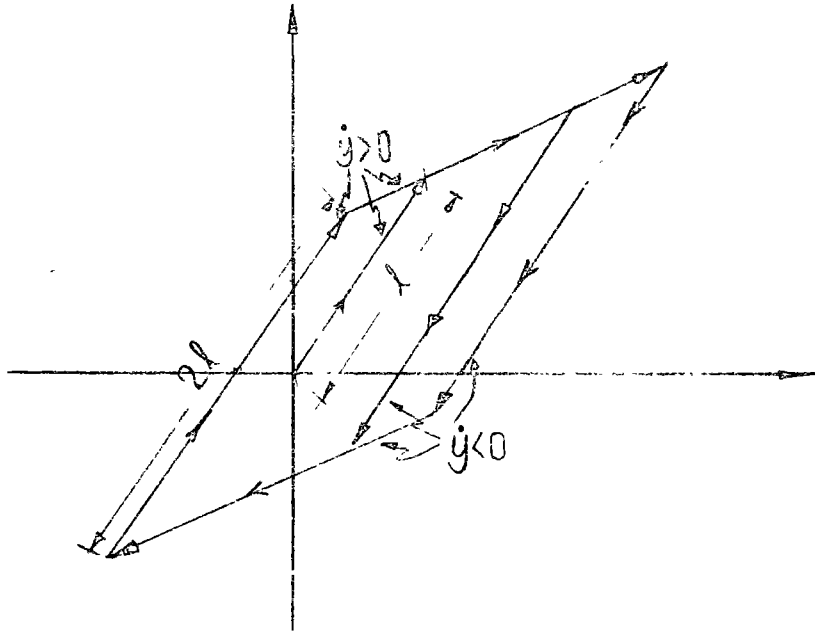
$$\frac{y}{y_1} = \frac{Q}{Q_1} + \alpha \left( \frac{Q}{Q_1} \right)^r \quad (\text{MODELO RAMBER - OSGOOD})$$

DONDE  $y_1$ ,  $Q_1$ ,  $\alpha$  y  $r$  SON CONSTANTES POSITIVAS



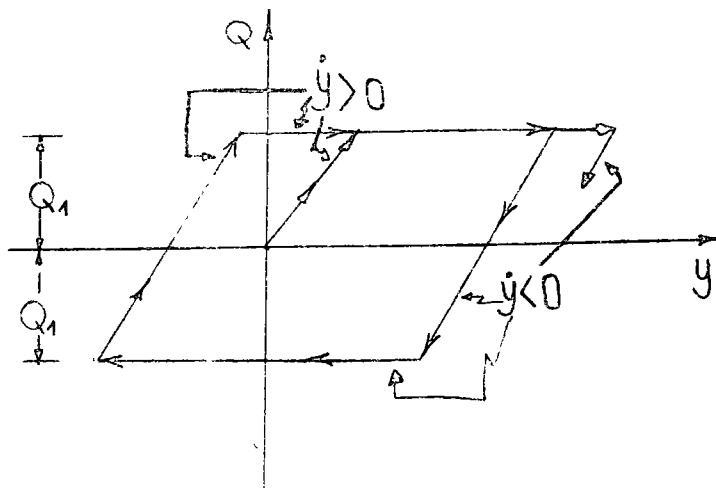
EJEMPLO:

CASO BILINEAL



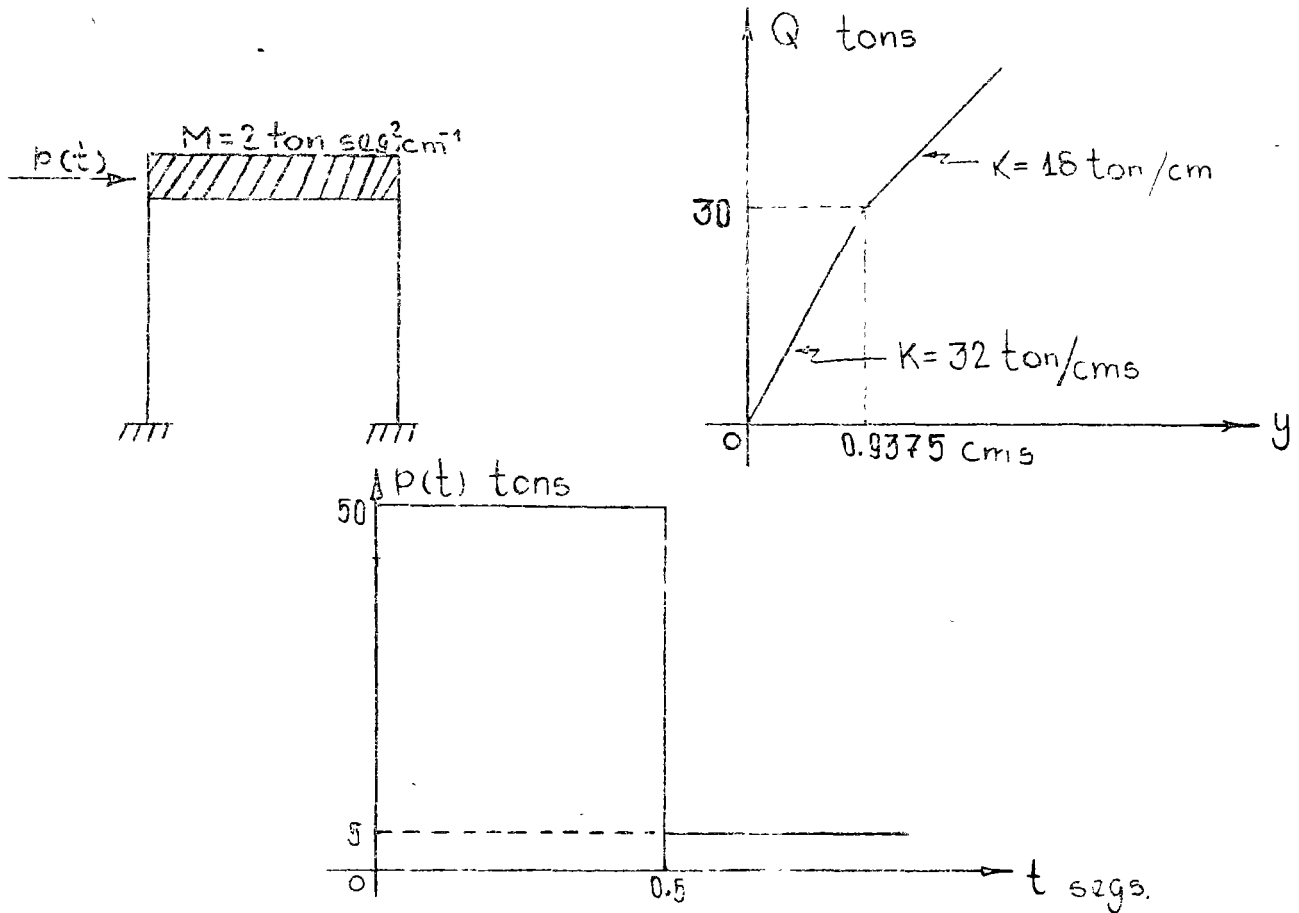
EJEMPLO

CASO ELASTOPLASTICO



PARA EL ANALISIS DE SISTEMAS NO LINEALES SE PUEDE USAR EL METODO  $\beta$  DE NEWMARK DESCRITO ANTERIORMENTE.

EJEMPLO -



ECUACION DE EQUILIBRIO DINAMICO ,  $M\ddot{Y} + Q(Y) = P(t)$

$$\ddot{Y} = \frac{P(t) - Q(Y)}{M} = \frac{P(t) - 2(Y)}{2} \quad (I)$$

PARA LA APLICACION DEL METODO DE NEWMARK SE TIENEN LAS SIGUIENTES EXPRESIONES:

$$t_{i+1} = t_i + \Delta t$$

$$\dot{Y}_{i+1} = \dot{Y}_i + (\ddot{Y}_i + \ddot{Y}_{i+1}) \Delta t / 2$$

$$Y_{i+1} = Y_i + \dot{Y}_i \Delta t + (0.5 - \beta) \ddot{Y}_i (\Delta t)^2 + \beta \ddot{Y}_{i+1} (\Delta t)^2$$

CONSIDERANDO  $\Delta t = 0.10$  SEG.  $\gamma = \beta = 1/6$  SE PUEDE ESCRIBIR;

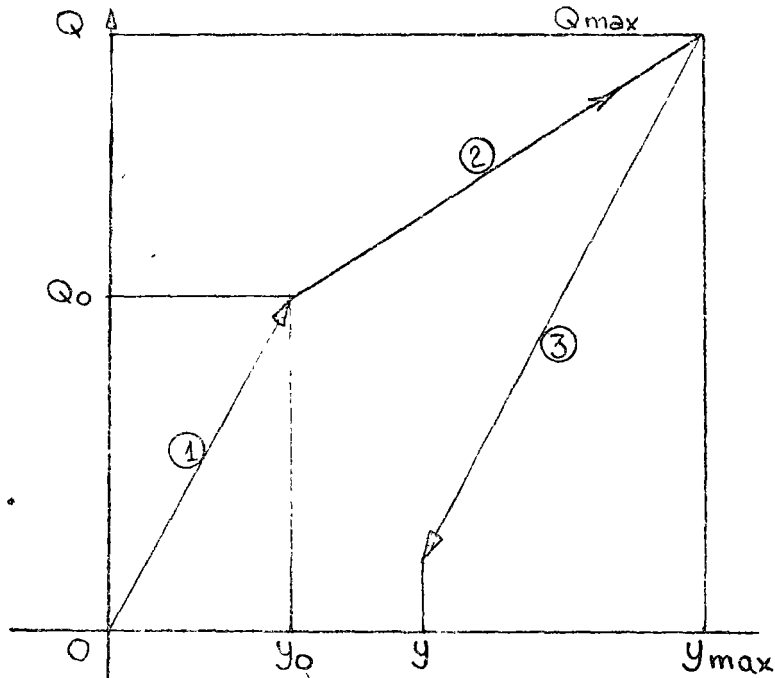
$$\dot{Y}_{i+1} = \dot{Y}_i + \frac{1}{20} (\ddot{Y}_i + \ddot{Y}_{i+1}) \quad (\text{II})$$

$$Y_{i+1} = Y_i + \dot{Y}_i (0.10) + \frac{1}{600} (2\ddot{Y}_i + \ddot{Y}_{i+1}) \quad (\text{III})$$

EL PROCEDIMIENTO DE CALCULO ES COMO SIGUE:

- { SE ASUME  $\ddot{Y}_{i+1}$   
 SE CALCULA  $\dot{Y}_{i+1}$  CON LA ECUACION (II)  
 SE CALCULA  $Y_{i+1}$  CON LA ECUACION (III)  
 SE CALCULA UN MEJOR VALOR DE  $\ddot{Y}_{i+1}$  CON LA ECUACION (I),  
 ETC.

PARA LA FUNCION DE RESISTENCIA Q SE TIENEN LOS SIGUIENTES CASOS:



1. COMPORTAMIENTO ELASTICO ,  $Q = 32 Y$  TONS
2. CAMBIO DE RIGIDEZ ,  $Q = 30 + 18 (Y - Y_0)$  TON
3. DESCARGA ,  $Q = Q_{mdx} - 32 (Y_{MAX} - Y)$  TONS

ESTA ULTIMA EXPRESION MANTIENE SU VALIDEZ HASTA QUE,  $(Y_{MAX} - Y) \leq 2Y_0$



$$Y_0 = 0.9375 \text{ CMS} \quad ; \quad Q_0 = 30.0 \text{ TON}$$

$$\text{PARA } t=0, \quad \ddot{Y} = \frac{P}{M} = \frac{50}{2} = 25 \quad ; \quad Y = 0; \quad \dot{Y} = 0$$

$$\text{PARA } t = 0.10, \quad Y_i = \dot{Y}_i = 0 \quad ; \quad \ddot{Y}_i = 25$$

1er. CICLO

SEA  $\ddot{Y}_{i+1} = 20$  COMO PRIMER TANTEO. EN TAL CASO

$$\dot{Y}_{i+1} = 0 + \frac{1}{20} (0 + 25) = 2.25$$

$$Y_{i+1} = 0 + 0.10 \times 0 + \frac{1}{600} (2 \times 25 + 20) = 0.1167$$

$$Q = 32 \times 0.1167 = 3.7330$$

$$\ddot{Y}_{i+1} = \frac{50 - 3.733}{2} = 23.134$$

2o. CICLO

$$\dot{Y}_{i+1} = 23.134/2 = 16.567$$

$$Y_{i+1} = 73.134/600 = 0.1219$$

$$Q = 32 \times 0.1219 = 3.9000$$

$$\ddot{Y}_{i+1} = (50 - 3.9)/2 = 23.050$$

3er. CICLO

4o. CICLO

$$\ddot{Y}_{i+1} = 23.052$$

$$\dot{Y}_{i+1} = 23.052/2 = 2.4026$$

$$Y_{i+1} = 73.052/600 = 0.12175$$

$$Q = 32 \times 0.12175 = 3.8960$$

$$\ddot{Y} = (50 - 3.8960)/2 = 23.052 \quad \dots \text{ETC.}$$

LOS CALCULOS BASICOS SE MUESTRAN EN LA TABLA SIGUIENTE:

t SEGS	p TONS	$\ddot{Y}$ CM SEG <sup>-2</sup>	$\dot{Y}$ CM SEG <sup>-1</sup>	Y CMS	Q TONS
0.0	50.00	25.000	0.00	0.00	0.00
0.10	50.00	20.000	2.2500	0.1167	3.7330
		23.134	2.4070	0.1219	3.9000
		23.050	2.4025	0.12175	3.3960
		23.052	2.4026	0.12175	3.8960
0.20	50.00	20.000	4.5552	0.4722	15.110
		17.445	4.4270	0.46793	14.970
		17.513	4.4310	0.46804	14.977
		17.511	4.43075	0.46204	14.977
0.30	50.00	10.000	5.8060	0.98610	30.8750
		9.560	5.7840	0.98540	30.8620
		9.569	5.7848	0.98543	30.8630
0.40	50.00	0.00	6.2630	1.5958	41.849
		4.0750	6.4670	1.6026	41.972
		4.0141	6.4640	1.6025	41.970
		4.0150	6.4640	1.60250	41.970
0.50 <sup>-</sup>	50.00	0.00	6.6650	2.2623	53.846
		-1.9230			
		-1.9000	6.56975	2.2591	53.789
		-1.8944			
		-1.8946	6.5700	2.25912	53.789
0.50+	5.00	-24.3946	6.5700	2.25912	53.789
0.60	5.00	-30.000	3.8503	2.7848	63.251
		-29.126	3.8940	2.78626	63.278
		-29.136	3.89347	2.78624	63.277
		-29.138	3.89347	2.78624	63.277
0.70	5.00	-32.000	0.83657	3.025127	67.577
		-31.289			
		-31.320	0.87057	3.02626	67.598
		-31.299			
		-31.301	0.87147	3.02641	67.600
0.7278	5.00	-31.620	-0.00313	3.03850	67.818
		-31.409			
		-31.420	-0.000352	3.03853	67.818
		-31.4093	-0.000205	3.03853	67.818

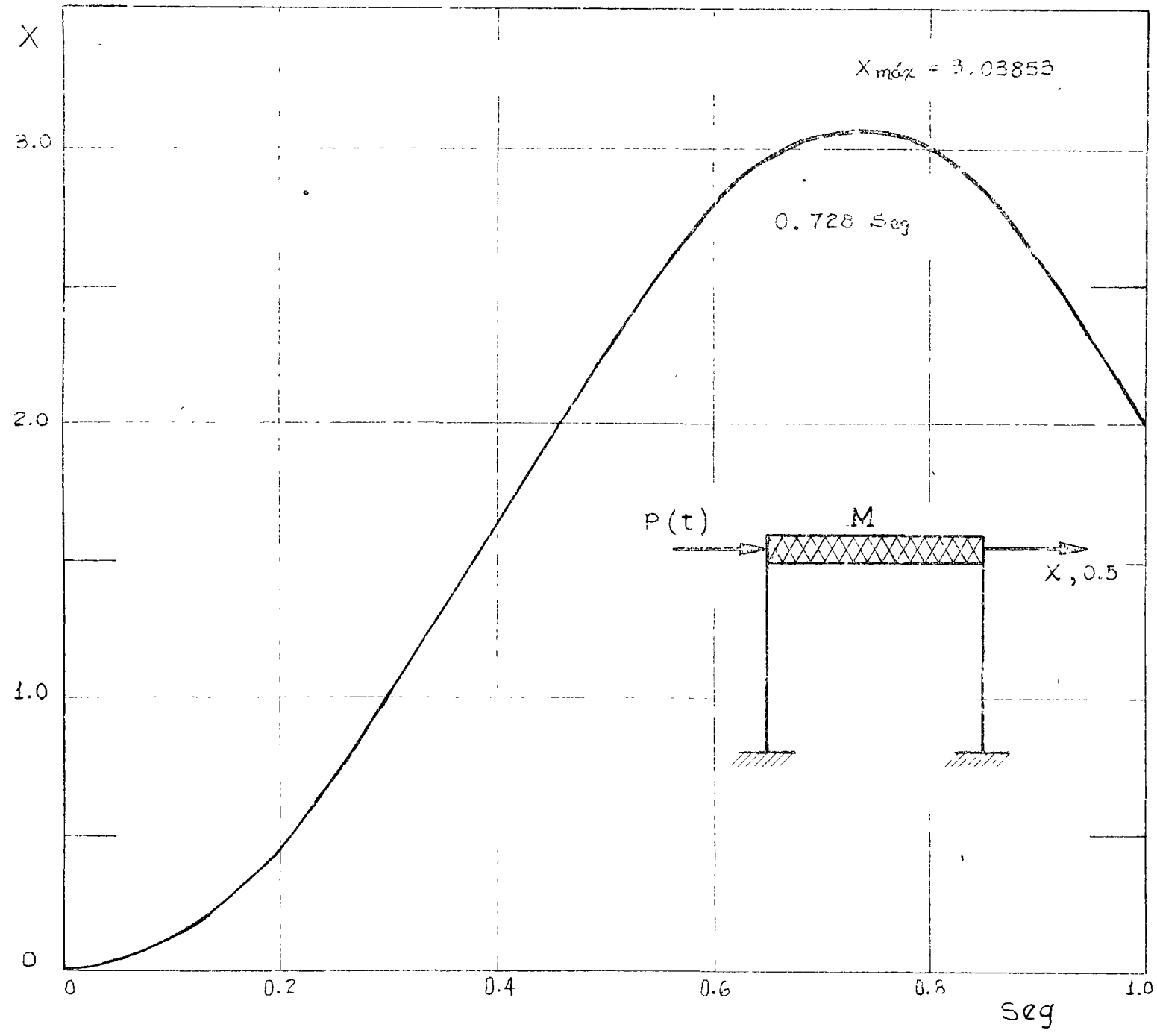
En  $t=0.5 + \text{SEG}$ ,  $\ddot{Y} = -45/2 = -22.5 \therefore -22.5 - 1.8946 = -24.3946$

## CONTINUACION DEL CUADRO ANTERIOR

t	p	$\ddot{Y}$	$\dot{Y}$	Y	Q
0.80	5.0	-28.000	-2.1449	2.959611	65.293
		-30.146			
		-30.000	-2.21708	2.957874	65.237
		-30.118			
		-30.117	-2.22127	2.95777	65.234
0.90	5.0	-27.00	-5.07712	2.59025	53.473
		-24.236			
		-25.00	-4.97712	2.59358	53.580
		-24.290			
		-24.294	-4.94182	2.59476	53.617
		-4.94242	2.59474	53.617	
1.00	5.0	-14.00	-6.85782	1.99614	34.461
		-14.7305			
		-14.7200	-6.89382	1.99494	34.423
		-14.7120	-6.89342	1.99495	34.423

EN ESTOS CALCULOS SE INTRODUIJO  $t = 0.50^-$  Y  $0.50^+$  PORQUE PARA ESTE INSTANTE SE PRODUCE UN CAMBIO BRUSCO EN LA CARGA  $P(t)$  DE 50.00 TONS A 5.00 TONS, CON LO CUAL SE PRODUCE UN CAMBIO BRUSCO EN LA ACELERACION DEL SISTEMA  $\ddot{Y}$ . EN ESTE INSTANTE NO SE PRODUCEN CAMBIOS EN  $\dot{Y}$  Y Y. EL TIEMPO  $t = 0.7273$  SEC. SE INTRODUIJO POR LA NECESIDAD DE CALCULAR LOS VALORES DE Y Y DE Q, PUES A PARTIR DE DICHO INSTANTE SE INICIA LA DESCARGA DEL SISTEMA. ESTA CONDICION SE ENCONTRO SOBRE LA BASE DE APROXIMAR  $\dot{Y}$  A CERO, OBTENIENDOSE  $Y_{MAX}=3.03853$  CMS y  $Q_{MAX} = 67.818$  TON.

EN EL CUADRO SIGUIENTE SE PRESENTA UN RESUMEN DE LOS RESULTADOS.



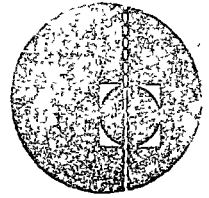
t Seg.	$\ddot{Y}$ (supuesta) Cm Seg <sup>-2</sup>	P Ton	Y Cm.	Q Ton	$\ddot{Y}$ (calculado) Cm Seg <sup>-2</sup>	$\dot{Y}$ Cm Seg <sup>-1</sup>	NOTAS
0.0	- -	50.00	0.00	0.00	25.00	0.00	
0.10	23.0520	50.00	0.12175	3.896	23.0520	2.40260	
0.20	17.5110	50.00	0.46804	14.977	17.5110	4.43075	
0.30	9.5690	50.00	0.98543	30.863	9.5690	5.78480	CAMBIO DE RIGIDEZ
0.40	4.0150	50.00	1.60250	41.970	4.0150	6.4640	
0.50 <sup>-</sup>	-1.8946	50.00	2.25912	53.789	-1.8946	6.5700	
0.50 <sup>+</sup>	- -	5.00	2.25912	53.789	-24.3945	6.5700	CAMBIO DE CARGA
0.60	-29.1380	5.00	2.78624	63.277	-29.1380	3.89347	
0.70	-31.3010	5.00	3.02641	67.600	-31.3010	0.87147	
0.7278	-31.4093	5.00	3.03853	67.818	-31.4093	-0.000205	Q <sub>máx</sub> , Y <sub>máx</sub> .
0.800	-30.1170	5.00	2.95777	65.234	-30.1170	-2.22127	
0.90	-24.3080	5.00	2.59474	53.617	-24.3080	-4.94242	
1.00	-14.7120	5.00	1.99495	34.423	-14.7120	-6.89342	

RESPUESTA MAXIMA

Y máx = 3.03853 cms  
Q máx = 67.818 tons



centro de educación continua  
división de estudios superiores  
facultad de ingeniería, unam

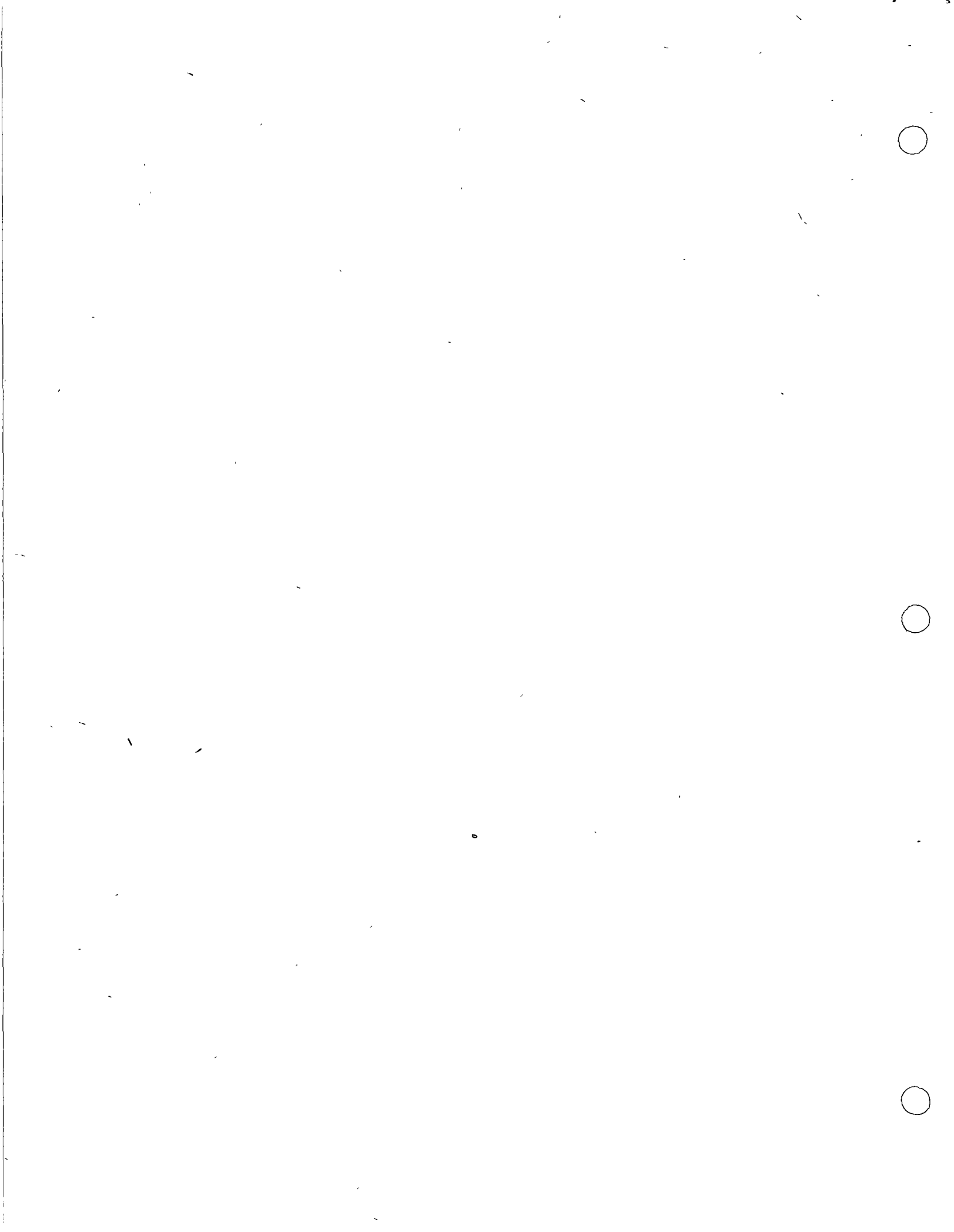


III CURSO INTERNACIONAL DE INGENIERIA SISMICA

DINAMICA ESTRUCTURAL  
(CONTINUACION II)

DR. OCTAVIO A. RASCON CHAVEZ.

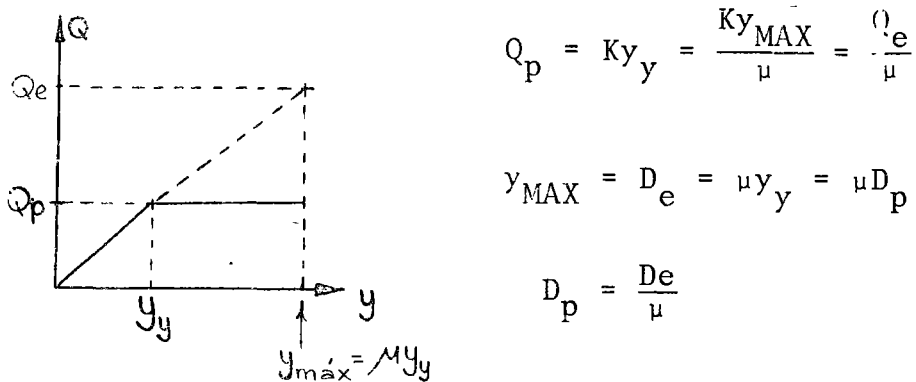
Jul. - Agos. 1977



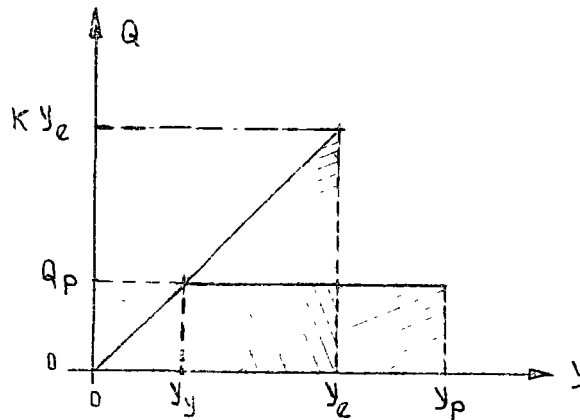


## CRITERIOS PARA TRAZAR ESPECTROS DE DISEÑO ELASTOPLASTICOS A PARTIR DEL ELASTICO

1. CRITERIO DE IGUAL DESPLAZAMIENTO MAXIMO DEL SISTEMA ELASTICO Y EL ELASTOPLASTICO DE IGUAL PERIODO:



2. CRITERIO DE IGUAL ENERGIA ABSORVIDA POR LA ESTRUCTURA:



$$\frac{K y_e y_e}{2} = \frac{K y_y y_y}{2} + K y_y (y_p - y_y)$$

$$y_e^2 = y_y^2 + y_y y_p - y_y^2 = y_y y_p - \frac{y_y^2}{2}$$

$$\frac{1}{2} \left( \frac{y_e}{y_y} \right)^2 = \frac{y_p}{y_y} - \frac{1}{2} = \mu - \frac{1}{2}$$

$$\frac{y_e}{y_y} = \sqrt{2\mu - 1}$$

$$y_y = \frac{y_e}{\sqrt{2\mu - 1}}$$

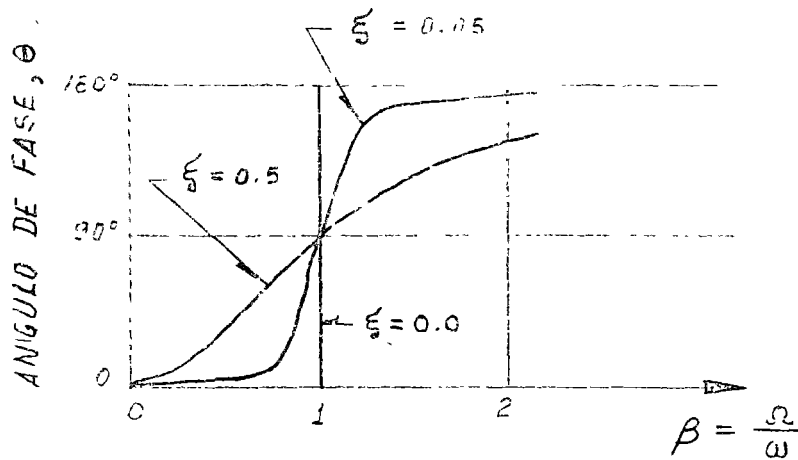
$$y_y \text{ ] MAX} = D_p = \frac{y_e \text{ ] MAX}}{\sqrt{2\mu - 1}} = \frac{D_e}{\sqrt{2 - 1}}$$

POR LO TANTO

$$D_p = D_e / \sqrt{2\mu - 1} \quad \text{Y} \quad Q_p = Q_e / \sqrt{2\mu - 1}$$

#### AMORTIGUAMIENTO HISTERETICO

SI SE CUENTA CON EQUIPO PARA MEDIR EL ANGULO DE FASE ENTRE LA FUERZA DE EXCITACION Y EL DESPLAZAMIENTO RESULTANTE, SE PUEDE EVALUAR EXPERIMENTALMENTE EL AMORTIGUAMIENTO DEL SISTEMA CON UNA SOLA PRUEBA DE VIBRACION ARMONICA EN RESONANCIA. ESTA SE LOGRA CUANDO SE AJUSTA LA FRECUENCIA DEL EXCITADOR DE TAL MANERA QUE EL ANGULO DE FASE SEA 90°, YA QUE:



EN ESTAS CONDICIONES LA FUERZA DE EXCITACION QUEDA EN FASE CON LA VELOCIDAD DE LA MASA YA QUE

$$y = A \operatorname{sen}(\omega t - \theta) = -A \operatorname{cos} \omega t, \text{ SI } \theta = 90^\circ$$

$$Y \quad \dot{y} = A\omega \operatorname{sen} \omega t \quad ; \quad \ddot{y} = A\omega^2 \operatorname{cos} \omega t$$

Y DE LA ECUACION DIFERENCIAL DE EQUILIBRIO:

$$M A \omega^2 \operatorname{cos} \omega t + C A \omega \operatorname{sen} \omega t + K(-A \operatorname{cos} \omega t) = p_0 \operatorname{sen} \omega t$$

SE VE QUE SE DEBE CUMPLIR QUE:

$$C A \omega = p_0, \text{ DE DONDE } \boxed{C = \frac{p_0}{A \omega}} \quad (I)$$

DE LAS ECUACIONES ANTERIORES SE DEDUCE QUE:

$$y^2 = A^2 \operatorname{cos}^2 \omega t \quad ; \quad \frac{y^2}{A^2} = \operatorname{cos}^2 \omega t$$

Y

$$p^2 = p_0^2 \operatorname{sen}^2 \omega t \quad ; \quad \frac{p^2}{p_0^2} = \operatorname{sen}^2 \omega t$$

$$\text{SUMANDO: } \frac{y^2}{A^2} + \frac{p^2}{p_0^2} = \operatorname{sen}^2 \omega t + \operatorname{cos}^2 \omega t$$

QUE ES LA ECUACION DE UNA ELIPSE CON LOS EJES COORDENADOS  $y$  y  $p$ ,

ASI (fig 1):

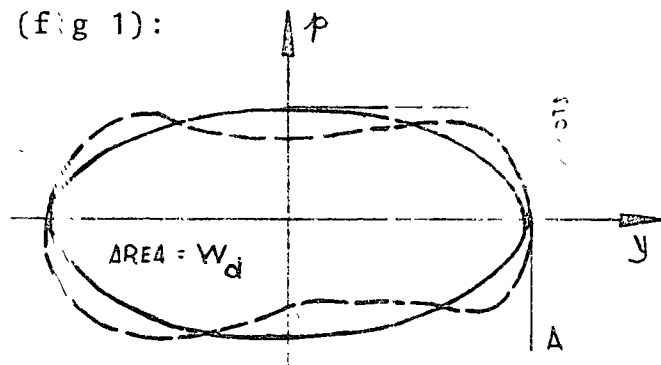


FIG 1

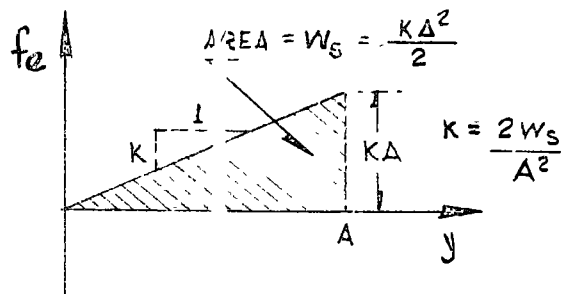


FIG 2

SI EL AMORTIGUAMIENTO NO ES EXACTAMENTE VISCOSO, LA GRAFICA QUE SE OBTENDRIA DE  $p$  CONTRA  $y$  NO SERIA EXACTAMENTE ELIPTICA, SINO ALGO COMO LA LINEA PUNTEADA AHI MOSTRADA. EN ESTE CASO SE PUEDE UTILIZAR UN AMORTIGUAMIENTO *VISCOSO EQUIVALENTE*, DE TAL MANERA QUE EL AREA  $W_d$ , DE ESTA CURVA SEA IGUAL A LA DE LA ELIPSE EQUIVALENTE,  $W_{eq} = \pi A p_o$ , ES DECIR

$$W_d = \pi A p_o, \text{ DE DONDE } p_o = \frac{W_d}{\pi A}$$

POR LO QUE, DE LA EC. (I)

$$\boxed{C_{eq} = \frac{W_d}{\pi \omega A^2}} \quad (II)$$

ADEMAS,  $C_{cr} = 2\sqrt{KM'} = 2K/\omega$ ; DE FIG. 2 :  $C_{cr} = 2\left(\frac{2\omega S}{A^2}\right)/\omega$ , DE DONDE

$$\zeta_{eq} = \frac{C_{eq}}{C_{cr}}$$

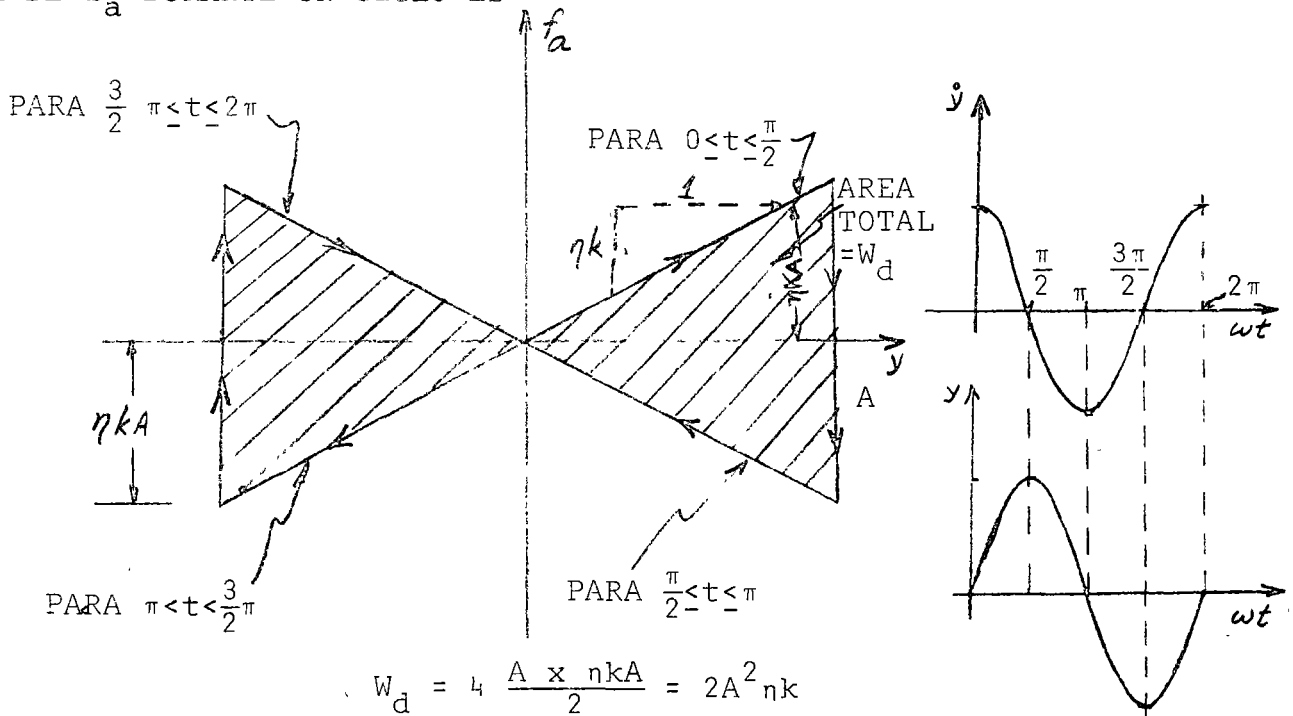
$$\boxed{\zeta_{eq} = \omega_d / (4\pi \omega S)} \quad (II')$$

DE LAS E.CS. (I) Y (II) SE CONCLUYE QUE EL FACTOR DE AMORTIGUAMIENTO VISCOSO ES FUNCION DE LA FRECUENCIA,  $\zeta$ .

EXISTE OTRO TIPO DE AMORTIGUAMIENTO QUE ES INDEPENDIENTE DE LA FRECUENCIA, QUE SE CONOCE COMO AMORTIGUAMIENTO HISTERETICO, EL CUAL PRODUCE UNA FUERZA EN FASE CON LA VELOCIDAD RELATIVA DE LA MASA, PERO PROPORCIONAL AL DESPLAZAMIENTO, ES DECIR

$$f_a = \eta k |y(t)| \frac{\dot{y}(t)}{|\dot{y}(t)|} \quad (III)$$

DONDE  $\eta$  ES EL COEFICIENTE DE AMORTIGUAMIENTO HISTERETICO. EL DIAGRAMA DE  $f_a$  DURANTE UN CICLO ES



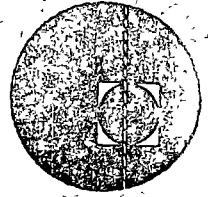
SI SE CONSIDERA QUE LA ENERGIA PERDIDA POR HISTERESIS SE PUEDE REPRESENTAR MEDIANTE UN AMORTIGUADOR VISCOSO, ENTONCES, DE LA EC. (II') Y FIG 2:

$$\zeta = \frac{2A^2 \eta k}{A \pi \frac{KA}{2}} = \frac{\eta}{\pi} \quad C \quad \boxed{\eta = \pi \zeta} \quad (IV)$$





centro de educación continua  
división de estudios superiores  
facultad de ingeniería, unam



III CURSO INTERNACIONAL DE

INGENIERIA SISMICA

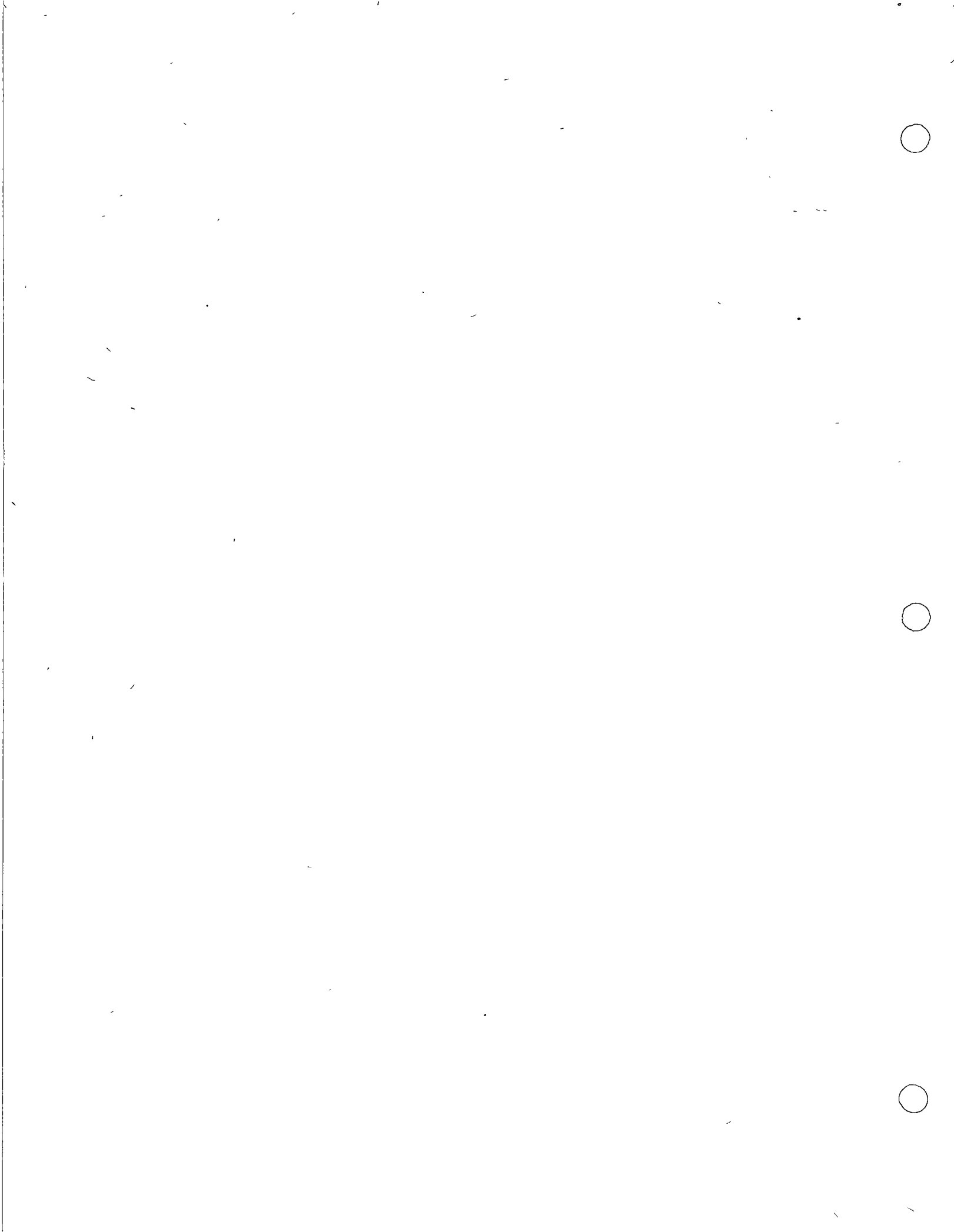
DINAMICA ESTRUCTURAL

VIBRACION DE SISTEMAS DISCRETOS DE VARIOS

GRADOS DE LIBERTAD

Julio 1977

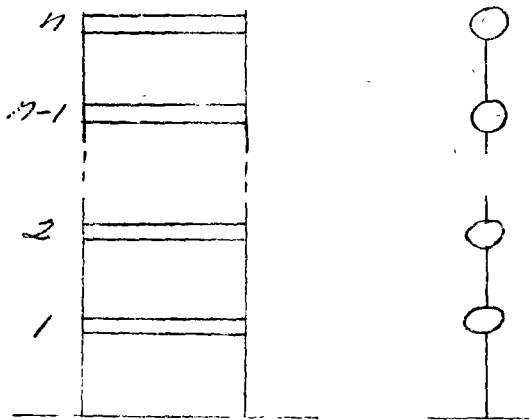
JORGE PRINCE





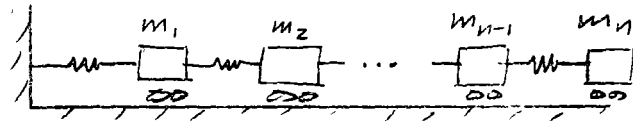
VIBRACION DE SISTEMAS DISCRETOS DE VARIOS GRADOS DE LIBERTAD

Ejemplos de sistemas de n.GL

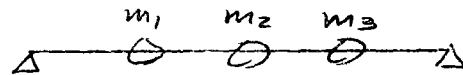
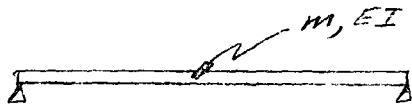


Características:

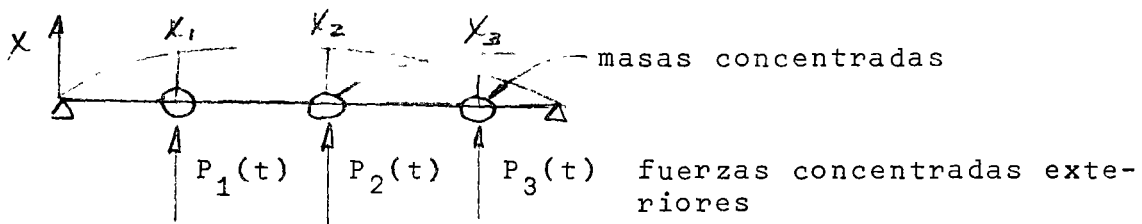
- masas concentradas rígidas
- columnas solo se deforman lateralmente
- con una coordenada por masa queda definida la configuración del sistema
- equivale a:



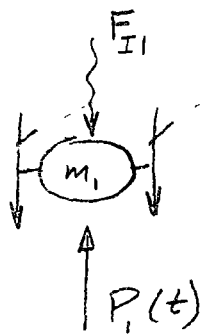
Además, la consideramos elástica, lineal



Supongamos:



aislemos una masa:



$$F_{r1} = \sum \text{fuerzas resistencia elástica a la deformación}$$

Las ecuaciones condensadas de movimiento serán:

$$F_{I1} + F_{r1} = P_1(t)$$

$$F_{I2} + F_{r2} = P_2(t)$$

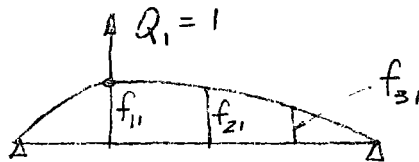
$$F_{I3} + F_{r3} = P_3(t)$$

Fuerzas asociadas al desplazamiento,  
NO al movimiento

∴ la determinación de estas fuerzas es un problema estático.

Coefficientes de influencia

1. De flexibilidad



$f_{ij}$  = despl. de la coord. i debido a una carga unitaria en coord. j (desplazamiento y fuerza en = dirección)

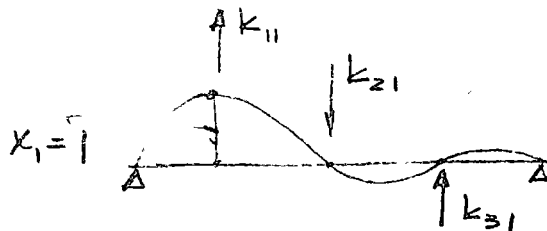
Por superposición

$$X_1 = f_{11} Q_1 + f_{12} Q_2 + f_{13} Q_3$$

$$X_2 = f_{21} Q_1 + f_{22} Q_2 + f_{23} Q_3 \quad \text{inv. (1)}$$

$$X_3 = f_{31} Q_1 + f_{32} Q_2 + f_{33} Q_3$$

2. De rigidez:



$K_{ij}$  = fuerza en coordenada i por un desplazamiento unitario en coordenada j.

Por superposición

$$\begin{aligned} Q_1 &= K_{11} X_1 + K_{12} X_2 + K_{13} X_3 \\ Q_2 &= K_{21} X_1 + K_{22} X_2 + K_{23} X_3 \\ Q_3 &= K_{31} X_1 + K_{32} X_2 + K_{33} X_3 \end{aligned} \quad (2)$$

Desde luego  $K_{ij} = K_{ji}$  (y  $f_{ij} = f_{ji}$ ) (Maxwell-Mohr)

La ecuación 2 también puede escribirse:

$$Q_i = \sum_{j=1}^3 K_{ij} X_j$$

o bien, en notación matricial

$$\begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{Bmatrix}$$

matriz de rigideces

Ponemos:

$$\{Q\} = [K] \{X\}$$

$$\text{Claro que } [K]^{-1} = [F] = [f_{ij}]$$

Sustituyendo (2) o (3) en ecuaciones de movimiento:

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{X}_1 + K_{11} X_1 + K_{12} X_2 + K_{13} X_3 &= P_1(t) \\ m_2 \ddot{X}_2 + K_{21} X_1 + K_{22} X_2 + K_{23} X_3 &= P_2(t) \\ m_3 \ddot{X}_3 + K_{31} X_1 + K_{32} X_2 + K_{33} X_3 &= P_3(t) \end{aligned}$$

o bien:

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{X}_1 \\ \ddot{X}_2 \\ \ddot{X}_3 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_1(t) \\ P_2(t) \\ P_3(t) \end{Bmatrix}$$

o también:

$$\begin{aligned} [M] \{\ddot{X}\} + [K] \{X\} &= \{P(t)\} \text{ (vibración forzada)} \\ &= \{0\} \text{ (vibración libre)} \end{aligned}$$

### 1. VIBRACION LIBRE

$$[M] \{\ddot{X}\} + [K] \{X\} = \{0\} \quad (1.1)$$

Supongamos la solución

$$\begin{aligned} \{X\} &= \underbrace{\{r\}}_{\text{constante con } t} (A \text{ sen } pt + B \text{ sen } pt) = \underbrace{\{r\}}_{\text{define:}} Y(t) \\ &\quad \text{escalar} \quad \rightarrow \begin{array}{l} \text{define:} \\ - \text{variación armónica} \\ - \text{amplitud} \end{array} \end{aligned}$$

tenemos:

$$\begin{aligned} \{X\} &= \{r\} (A \text{ sen } pt + B \text{ cos } pt) = r Y(t) \\ \{\dot{X}\} &= \{r\} (Ap \text{ cos } pt - B p \text{ sen } pt) \quad (1.2) \\ \{\ddot{X}\} &= \{\dot{r}\} (-Ap^2 \text{ sen } pt - B p^2 \text{ cos } pt) = -p^2 \{r\} Y(t) \end{aligned}$$

Sustituyendo 1.2 en 1.1 y dividiendo entre  $Y(t)$  nos queda:

$$-p^2 [M] \{r\} + [K] \{r\} = \{0\}$$

o sea:

$$\underbrace{[K] - p^2 [M]}_{[E]} \{r\} = \{0\} \quad (1.3)$$

$$[K] \{r\} = p^2 [M] \{r\}$$

pre x  $[M]^{-1}$

$$[M]^{-1} [K] \{r\} = p^2 \{r\}$$

$$[K] \{r\} = p^2 [M] \{r\}$$

pre x  $[K]^{-1} \cdot \frac{1}{p^2}$

$$\frac{1}{p^2} \{r\} = [K]^{-1} [M] \{r\}$$

¶

En las dos formas llegamos a un problema de VAC

$$[L] \{u\} = \lambda \{u\}$$

Problema de valores característicos:

- Dada una matriz cuadrada de orden (n x n)  $[L]$ , que representa una transformación lineal de vectores n-dimensionales, debe encontrarse un vector  $\{u\}$  que transformado por  $[L]$  resulte en otro vector  $\lambda \{u\}$  en la misma "dirección". O sea,  $[L]$  solo cambia la magnitud de  $\{u\}$  sin cambiar la dirección.

El vector es un vector característico (o eigenvector) de  $[L]$ .  $\lambda$  (escalar) representa la relación entre las "longitudes" antes y después de la transformación y para llegar a los VEC debe tomar valores de un conjunto de valores característicos (VAC) (o eigenvalores).

El problema de encontrar frecuencias y modos naturales puede considerarse un problema de VAC. - (STD)

Tenemos

$$[K] - p^2 [M] \{r\} = \{0\} \quad (1.3)$$

Si en el sistema de ecuaciones

$$[A] \{x\} = \{0\}$$

[A] es no singular, la solución única es la trivial

$\{x\} = \{0\}$ , de donde nos interesa el caso en que [A] es singular. En este caso la adjunta\*  $[A^*]$  existe y puede pre X por ella, con el resultado

$$|A| \{x\} = \{0\}$$

porque  $[A^*] [A] = |A| [I] \neq [A] \quad (n \times n)$

Puesto que  $|A| = 0$ ,  $\{x\}$  no necesariamente es nulo, pero si se asigna un valor dado a uno de sus elementos los demás quedan determinados en forma única.

También notamos que si  $\{x\}$  es solución de  $[A] \{x\} = \{0\}$  y  $\alpha$  es una constante, entonces  $\alpha \{x\}$  es también solución.

Por lo tanto, hay un número infinito de soluciones. Todos estos se considerarán juntas y hablaremos de una "solución" como un conjunto de relaciones entre los elementos de  $\{x\}$ .

$$\text{Volvemos a } \begin{bmatrix} [K] & -p^2 [M] \\ [E] \end{bmatrix} \{p\} = \{0\} \quad (1.3)$$

Al desarrollar  $|E| = 0$  llegamos a una ecuación de grado n en  $p^2$ , cuyas raíces son los VAC.

- Como  $[K]$  y  $[M]$  son simétricas y positivas definidas\*,

\*Transpuesta de la matriz de cofactores.

\*\*  $[A]$  es POS. DEF. si  $\{q\} [A] \{q\} > 0$  para todo  $\{q\}$  no nulo

puede demostrarse que las raíces de la ecuación característica son reales y positivas. Las llamamos  $p_1^2, p_2^2, \dots, p_n^2$ .

Las  $n$  frecuencias naturales son los términos positivos de las raíces y la más baja es llamada frecuencia fundamental.

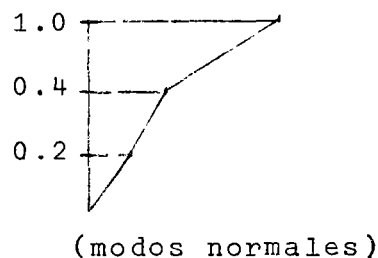
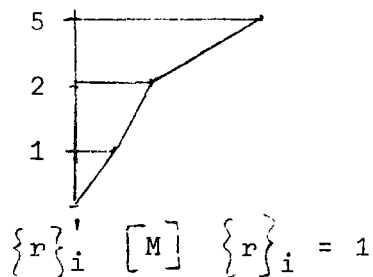
- Para la gran mayoría de los casos de interés las frecuencias son diferentes entre sí.
- Para cada frecuencia  $p_i$  existe una VEC asociado:

$$[K] \{r\}_i = p_i^2 [M] \{r\}_i \quad i = 1, \dots, n$$

o sea para cada  $p_i$  existe una solución  $\{r\}$  no trivial

- Normalización (solo conveniencia, sin significado físico)

Varias formas:



- Los modos y frecuencias naturales del sistema son propiedades características derivadas de las propiedades de inercia y rigidez expresadas por los elementos de  $[M]$  y  $[K]$ .
- Llamaremos matriz modal  $[R]$  a la que tiene los VEC, o vectores modales, como columnas.

ORTOGONALIDAD DE MODOS DE VIBRACION

Se dice que dos vectores  $\{a\}$  y  $\{b\}$  son ortogonales con respecto a la matriz simétrica  $[J]$  si

$$\{a\}' [J] \{b\} = \{b\}' [J] \{a\} = 0$$

Demostremos que dos vectores modales  $\{r\}_i$  y  $\{r\}_j$ , asociados a frecuencias diferentes ( $p_i \neq p_j$ ) son ortogonales con respecto a las matrices de inercia y elástica.

- Cada uno de estos vectores satisface la ecuación 1.3

$$p^2 [M] \{r\} = [K] \{r\} \quad [M] \{r\} = \frac{1}{p^2} [K] \{r\}$$

es decir:

$$p_i^2 [M] \{r\}_i = [K] \{r\}_i \quad [M] \{r\}_i = \frac{1}{p_i^2} [K] \{r\}_i$$

$$p_j [M] \{r\}_j = [K] \{r\}_j \quad [M] \{r\}_j = \frac{1}{p_j^2} [K] \{r\}_j$$

pre X i y j por  $\{r\}'_j$  y  $\{r\}'_i$  respectivamente

$$\left. \begin{aligned} p_i^2 \{r\}'_j [M] \{r\}_i &= \{r\}'_j [K] \{r\}_i & \{r\}'_j [M] \{r\}_i &= \frac{1}{p_i^2} \{r\}'_j [K] \{r\}_i \\ p_j^2 \{r\}'_i [M] \{r\}_j &= \{r\}'_i [K] \{r\}_j & \{r\}'_i [M] \{r\}_j &= \frac{1}{p_j^2} \{r\}'_i [K] \{r\}_j \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

pero como  $[M]$  y  $[K]$  son simétricas:

$$\begin{aligned} \{r\}'_j [K] \{r\}_i &= \{r\}'_i [K] \{r\}_j \\ \{r\}'_j [M] \{r\}_i &= \{r\}'_i [M] \{r\}_j \end{aligned}$$

∴, restando miembro a miembro en ecuaciones (a):



$$(p_i^2 - p_j^2) \left( \{r\}'_i [M] \{r\}_j \right) = 0 \quad 0 = \left( \frac{1}{p_i^2} - \frac{1}{p_j^2} \right) \{r\}'_i [K] \{r\}_j$$

y como  $p_i^2 \neq p_j^2$

---


$$\{r\}'_i [M] \{r\}_j = 0 \quad \{r\}'_i [K] \{r\}_j = 0$$


---

Tenemos ecuaciones de ortogonalidad:

$$\begin{aligned} \{r\}'_i [M] \{r\}_j &= 0 \\ \{r\}'_i [K] \{r\}_j &= 0 \quad \text{si } i \neq j \end{aligned}$$

La ec

$$[M] \{\ddot{x}\} + [K] \{x\} = \{0\} \tag{a}$$

y la matriz modal  $[R]$

Hagamos:

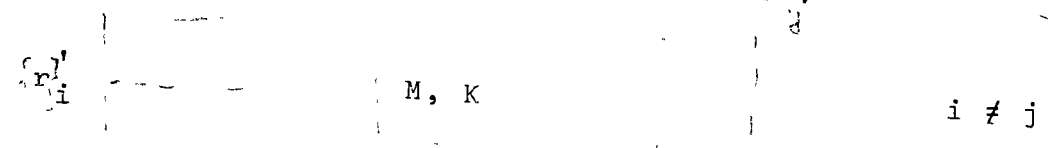
$$\{x\} = [R] \{y\}$$

y sustituyendo en (a):

$$[M] [R] \{\ddot{y}\} + [K] [R] \{y\} = \{0\}$$

premultiplicando por  $[R]'$ :

$$\underbrace{[R]' [M] [R]}_{\text{diagonales}} \{\ddot{y}\} + [R]' [K] [R] \{y\} = \{0\} \tag{B}$$



Llamemos

$$\begin{aligned} [R]' [M] [R] &= [M^*] \\ [R]' [K] [R] &= [K^*] \end{aligned}$$

∴ la ec (b) (p. 14) puede ponerse:

$$[M^*] \{\ddot{y}\} + [K^*] \{y\} = \{0\}$$

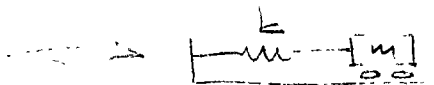
que equivale a:

$$\begin{aligned} m_{11}^* \ddot{y}_1 + k_{11}^* y_1 &= 0 \\ m_{22}^* \ddot{y}_2 + k_{22}^* y_2 &= 0 \\ \vdots & \\ m_{nn}^* \ddot{y}_n + k_{nn}^* y_n &= 0 \end{aligned}$$

de las que

$$p_1^2 = \frac{k_{11}^*}{m_{11}^*}, \dots, p_n^2 = \frac{k_{nn}^*}{m_{nn}^*}$$

Recordar que para



$$m\ddot{x} + kx = 0$$

$$\ddot{x} + p^2 x = 0 \quad y \quad p^2 = \frac{k}{m}$$

O sea, con la transformación

$$\{x\} = [R] \{y\}$$

aplicada a la ecuación

$$[M] \{\ddot{x}\} + [K] \{x\} = \{0\}$$

hemos descompuesto un sistema de 1GL en n sistemas de 1GL independientes.

Consideremos el producto

$$\begin{aligned} [M^*]^{-1} [K^*] &= ([R]' [M] [R])^{-1} [R]' [K] [R] = [K^*] [M^*]^{-1} \\ &= [R]^{-1} [M]^{-1} [R]^{-1} [R]' [K] [R] \\ &= [R]^{-1} [M]^{-1} [K] [R] = [P] \end{aligned}$$

$[P]$  contiene las frecuencias naturales en la diagonal principal

∴ El problema de encontrar frecuencias y modos naturales equivale al de encontrar la matriz  $[R]$  que diagonalice  $[M]$  y  $[K]$  de acuerdo con

$$\begin{aligned} [R]' [M] [R] &= [M^*] \\ [R]' [K] [R] &= [K^*] \end{aligned}$$

Las frecuencias naturales se obtendrán de

$$[M^*]^{-1} [K^*] = [K^*] [M^*]^{-1} = [P]$$

Veámoslo en otra forma

$$[M] \{x\} + [K] \{x\} = \{P(t)\}$$

$$\text{Sustituyendo } \{x\} = [R] \{y\}$$

$$[M] [R] \{y\} + [K] [R] \{y\} = \{P(t)\}$$

premultiplicando por  $\{r\}'_j$

$$\underbrace{\{r\}'_j}_{(a)} [M] [R] \{\ddot{y}\} + \underbrace{\{r\}'_j [K] [R]}_{(b)} \{y\} = \underbrace{\{r\}'_j \{P(t)\}}_{\text{escalar}}$$

En los productos (a) y (b) solo queda (por ortogonalidad):

$$\underbrace{\{r\}'_j}_{M_j^*} [M] \underbrace{\{r\}_j}_{\ddot{y}_j} + \underbrace{\{r\}'_j}_{K_j^*} [K] \underbrace{\{r\}_j}_{y_j} = \underbrace{\{r\}'_j}_{P_j^*} \{P(t)\}$$

$K_j^* = p_j^2 \quad M_j^* \quad P_j^* = \sum_i P_i r_{ij}$

y para el modo  $j$  tenemos:

$$M_j^* \ddot{y}_j + p_j^2 M_j^* y_j = P_j^*(t)$$

o bien

$$M_j^* \ddot{y}_j + K_j^* y_j = P_j^*(t)$$

(1.5)

análoga a la ecuación de movimiento para 1 GL:

$$m \ddot{x} + k x = P(t)$$

En (1.5) tenemos:

$n$  ecuaciones independientes para  $nGL$

1 ecuación independiente para cada modo

Para vibración libre (1GL)

$$\ddot{x} + p^2 x = 0 \quad p^2 = \frac{k}{m}$$

la solución es:

$$x_j = A \cos pt + B \text{ sen } pt \quad (c)$$

y para el modo j tendremos  $(P_j(t) = 0)$

$$y_j = A_j \cos p_j t + B_j \text{ sen } p_j t \quad (d)$$

Si en (c) hacemos

$$\left. \begin{matrix} x \\ \dot{x} \end{matrix} \right|_{t=0} = \begin{matrix} X_0 \\ \dot{X}_0 \end{matrix}$$

llegamos a

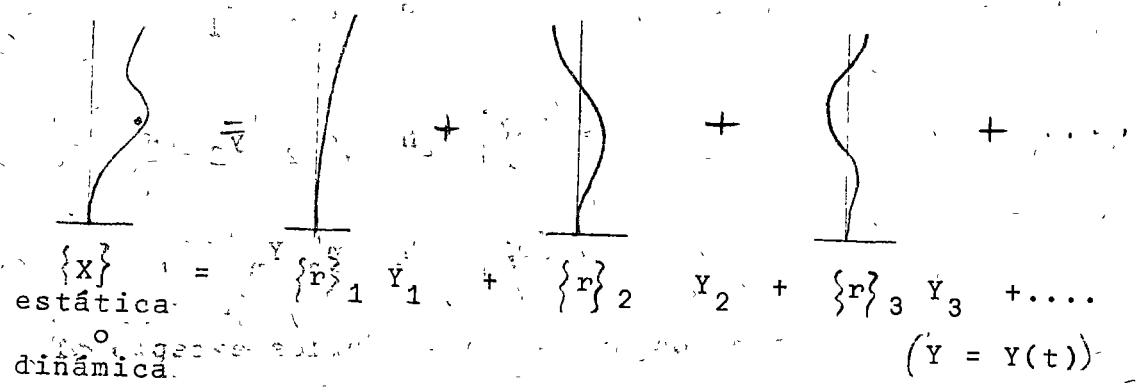
$$x(t) = X_0 \cos pt + \frac{\dot{X}_0}{p} \text{ sen } pt$$

y ... en (d):

$$y_j = y_{0j} \cos p_j t + \frac{\dot{y}_{0j}}{p_j} \text{ sen } p_j t$$

Cualquier configuración del sistema puede expresarse como una suma de formas modales multiplicadas por ciertos coeficientes.

Esquemáticamente:

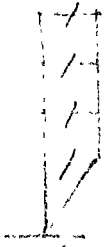


$$\left( \{X\} = \{X(t)\} \right)$$

En nuestra expresión

$$\{x\} = [R] \{y\} \quad 1.4$$

$\{x\}$  puede no ser función de  $t$ , por ejemplo:



$$\{1\} = [R] \{c\} \quad (e)$$

donde  $\{c\}$  es el vector de constantes que prex  $[R]$  nos da la configuración  $\{1\}$

De la ec. (e):

$$\{c\} = [R]^{-1} \{1\} \quad ([R] \text{ NOSING})$$

En 1.4 también podríamos hacer

$$\{y\} = [R]^{-1} \{x\}$$

pero sigamos otro camino, premultiplicando por  $\{r\}'_j [M]$   
o por  $\{r\}'_j [K]$

$$\begin{aligned} \{r\}'_j [M] \{x\} &= \{r\}'_j [M] [R] \{y\} = \{r\}'_j [M] \{r\}_1 y_1 + \\ &+ \{r\}'_j [M] \{r\}_2 y_2 + \dots \\ &+ \{r\}'_j [M] \{r\}_n y_n \end{aligned}$$

Por ortogonalidad todos estos productos son nulos excepto el término

$$\{r\}'_j [M] \{r\}_j y_j$$

de donde tenemos

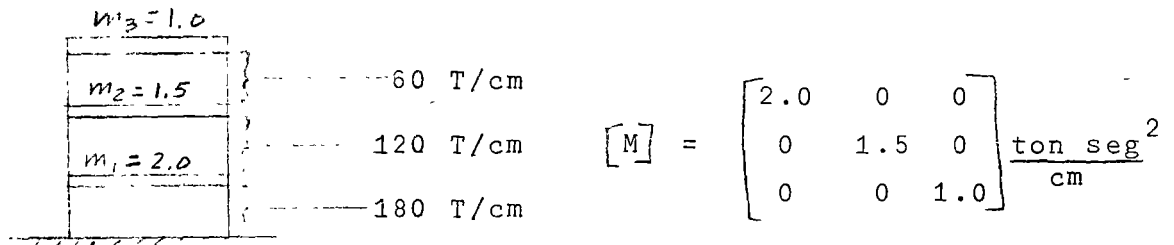
$$\{r\}'_j \cdot [M] \{x\} = \{r\}'_j [M] \{r\}_j y_j$$

de donde:

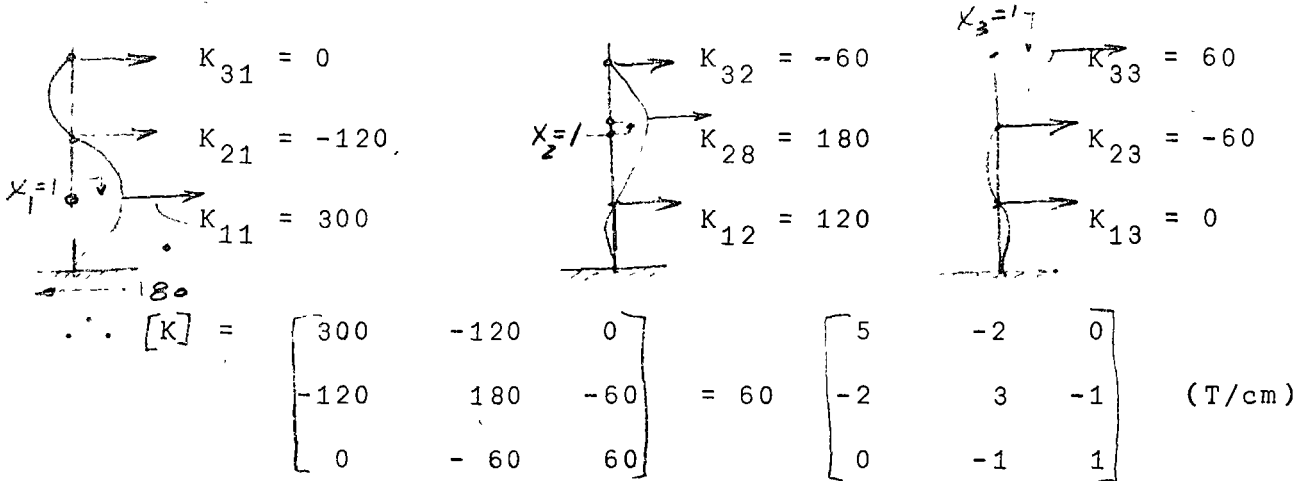
$$y_j = \frac{\{r\}'_j [M] \{x\}}{\{r\}'_j [M] \{r\}_j} = \frac{\{r\}'_j [M] \{x\}}{M_j^*} = \frac{\{r\}'_j [K] \{x\}}{K_j^*} = \frac{\{r\}'_j [K] \{x\}}{P_j^2 M_j^*}$$

(coeficiente de participación)

Ejemplo (vigas rígidas)



Matriz de rigideces



$$[E] = [K] - p^2 [M] \quad M = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1.5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= 60 \begin{bmatrix} (5 - \frac{2}{60} p^2) & -2 & 0 \\ -2 & (3 - \frac{1.5}{60} p^2) & -1 \\ 0 & -1 & (1 - \frac{1}{60} p^2) \end{bmatrix}$$

si  $d = p^2/60$  :

$$[E] = 60 \begin{bmatrix} (5-2d) & -2 & 0 \\ -2 & (3-1.5d) & -1 \\ 0 & -1 & (1-d) \end{bmatrix}$$

$$|E| = 0 = 60 (d^3 - 5.5 d^2 + 7.5 d - 2) = 0$$

$$d_1 = 0.35$$

$$d_2 = 1.61$$

$$d_3 = 3.54$$

$$p^2 = 60 d:$$

$$p_1^2 = 21.0$$

$$p_1 = 4.58$$

$$p_2^2 = 96.5$$

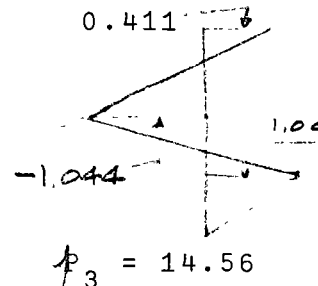
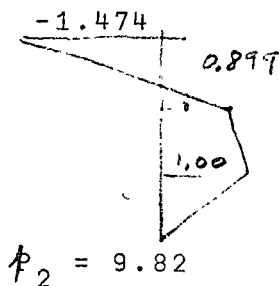
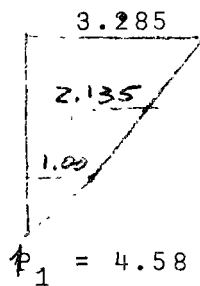
$$p_3 = 9.82$$

$$p_3^2 = 212.4$$

$$p_3 = 14.56$$

frecuencias naturales

Modos:





$$[R] = \begin{bmatrix} 1.000 & 1.000 & 1.000 \\ 2.135 & 0.899 & -1.044 \\ 3.285 & -1.474 & 0.411 \end{bmatrix}$$

$$[M^*] = [R]' [M] [R] = \begin{bmatrix} 19.629 & 0.038 & 0.007 \\ 0.037 & 5.386 & -0.014 \\ 0.006 & -0.014 & 3.804 \end{bmatrix}$$

Ej:

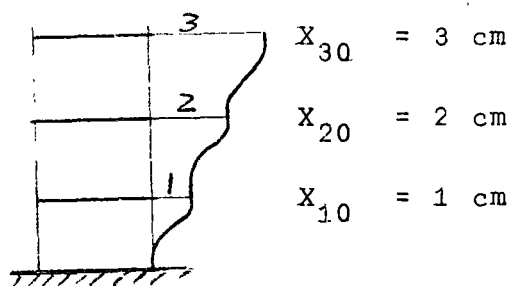
$$19.6296 = \{r\}'_1 [M] \{r\}_1 = M_1^* = \sum_i r_{i1}^2 m_i$$

$$[K^*] = [R]' [K] [R] = 60 \begin{bmatrix} 6.899 & 0.042 & 0.034 \\ 0.042 & 8.651 & -0.040 \\ 0.034 & -0.040 & 13.473 \end{bmatrix}$$

$$\text{Comprobación con } [K^*] = [p^2 M^*] =$$

$$= \begin{bmatrix} 412.209 & 0 & 0 \\ 0 & 519.749 & 0 \\ 0 & 0 & 807.970 \end{bmatrix} = [p^2 M^*]$$

$$[K^*] = \begin{bmatrix} 413.940 & 0 \dots & 0 \dots \\ 0 \dots & 519.060 & 0 \dots \\ 0 \dots & 0 \dots & 808.380 \end{bmatrix}$$



$$X_{30} = 3 \text{ cm}$$

$$X_{20} = 2 \text{ cm}$$

$$X_{10} = 1 \text{ cm}$$

$$\{X_0\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{Bmatrix}$$

$$Y_{01} = \frac{\{r\}_1^T [M] \{x_0\}}{M_1^*} = \frac{2.0 + 6.405 + 9.855}{19.629} = 0.9303 \text{ cm}$$

$$Y_{02} = \frac{\{r\}_2^T [M] \{x_0\}}{M_2^*} = \frac{2.0 + 2.697 - 4.422}{5.386} = 0.0511$$

$$Y_{03} = \frac{\{r\}_3^T [M] \{x_0\}}{M_3^*} = \frac{2.0 - 3.132 + 1.233}{3.804} = 0.0266$$

Modo  $Y_1(t)$

$$P_1 = 4.58$$

$$P_2 = 9.82$$

$$P_3 = 14.56$$

En p.

0.930 cm

0.051 cm

0.026 cm

son amplitudes de los  
modos

Para obtener los desplazamientos de las masas debemos multiplicar por las configuraciones modales:

$$x_{i1} = \{r\}_1 \quad Y_1(t) = \begin{Bmatrix} 1.0 \\ 2.135 \\ 3.285 \end{Bmatrix} \quad 0.93 \cos 4.58 t$$

$$x_{i2} = \{r\}_2 \quad Y_2(t) = \begin{Bmatrix} 1.0 \\ 0.899 \\ -1.474 \end{Bmatrix} \quad 0.051 \cos 9.82 t$$

$$x_{i3} = \{r\}_3 \quad Y_3(t) = \begin{Bmatrix} 1.00 \\ -1.044 \\ 0.411 \end{Bmatrix} \quad 0.0266 \cos 14.56 t$$

y sumar. O sea los desplazamientos  $x_i(t)$  de las masas serán

$$\{x(t)\} = [R] \{y(t)\}$$

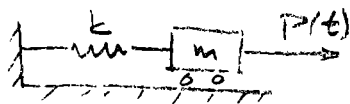
$$x_1(t) = r_{11} Y_1(t) + r_{12} Y_2(t) + r_{13} Y_3(t)$$

$$x_2(t) = r_{21} Y_1(t) + r_{22} Y_2(t) + r_{23} Y_3(t)$$

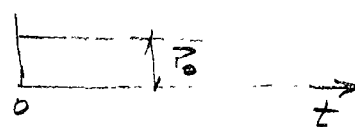
$$x_3(t) = r_{31} Y_1(t) + r_{32} Y_2(t) + r_{33} Y_3(t)$$

Otro ejemplo

Para 1GL teníamos



$P(t)$



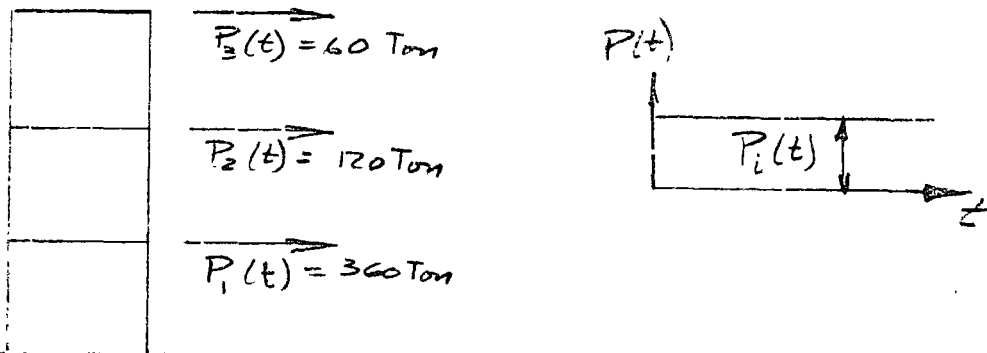
La ec:

$$x + P^2 x = \frac{P(t)}{m} = \frac{P_0}{m}$$

y para  $CI = 0$  la solución

$$x = \frac{P_0}{K} (1 - \cos pt)$$

Tenemos ahora el problema de encontrar la respuesta de



Para el modo  $j$ :

$$\ddot{Y}_j + p_j^2 Y_j = \frac{P_j^*(t)}{M_j} = \frac{P_{j0}^*}{M_j} \quad \text{cuya solución es:}$$

$$Y_j = \frac{P_{j0}^*}{K_j} (1 - \cos p_j t) = \frac{P_{j0}^*}{p_j^2 M_j} (1 - \cos p_j t)$$

Cálculo de  $P_j^*$

$$P_j^* = \{r\}_j' \{P(t)\} = \{r\}_j' \begin{pmatrix} 360 \\ 120 \\ 60 \end{pmatrix}$$

modo

$$1) \quad P_1^* = P_1 r_{11} + P_2 r_{21} + P_3 r_{31} = 360 + 256.2 + 197.1 = 813.3$$

$$2) \quad P_2^* = P_1 r_{12} + P_2 r_{22} + P_3 r_{32} = 360 + 107.88 - 88.4 = 379.48$$

$$3) \quad P_3^* = P_1 r_{13} + P_2 r_{23} + P_3 r_{33} = 360 - 125.28 + 24.66 = 259.98$$

Ahora bien,

$$Y_j(st) = \frac{P_j^*}{p_j^2 M_j} = \frac{P_j^*}{K_j}$$

$$Y_1(st) = \frac{813.30}{21 \times 19.629} = 1.973 \text{ cm}$$

$$Y_2(st) = \frac{379.48}{965 \times 5.386} = 0.730 \text{ cm}$$

$$Y_3(st) = \frac{259.38}{212.4 \times 3.804} = 0.321 \text{ cm}$$

de donde

$$Y_j = \frac{P_j^*}{P_j^2 M_j^*} (1 - \cos P_j t), \text{ y tenemos:}$$

$$Y_1(t) = Y_1(st) (1 - \cos p_1 t)$$

$$Y_2(t) = Y_2(st) (1 - \cos p_2 t)$$

$$Y_3(t) = Y_3(st) (1 - \cos p_3 t)$$

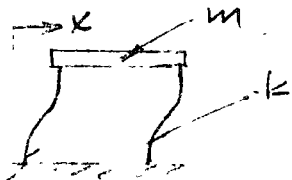
y, finalmente:

$$\{x(t)\} = \{r_1\} Y_1(t) + \{r_2\} Y_2(t) + \{r_3\} Y_3(t) = [R] \{Y\}$$

$$\begin{Bmatrix} X_1(t) \\ X_2(t) \\ X_3(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1.000 \\ 2.135 \\ 3.285 \end{Bmatrix} 1.973 (1 - \cos p_1 t) + \dots + \begin{Bmatrix} 1.000 \\ -1.044 \\ 0.411 \end{Bmatrix} 0.321 (1 - \cos p_3 t)$$

EXCITACION SISMICA

## A. Sistemas 1GL

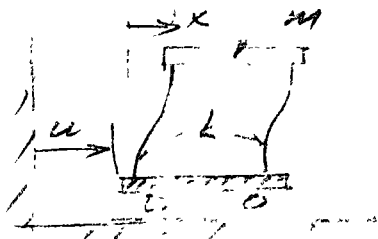


$$m \ddot{x} + kx + P(t) \quad (a)$$

Para  $P(t)$  cualquiera y para  $CI \neq 0$  la solución de (a) es:

$$x(t) = x_0 \cos pt + \frac{\dot{x}_0}{p} \sin pt + \frac{1}{mp} \int_0^t P(\tau) \sin p(t-\tau) d\tau$$

Para excitación sísmica:



$$m(\ddot{x} + \ddot{u}) + kx = 0$$

o sea,

$$m \ddot{x} + kx = -m\ddot{u} \quad (b)$$

De la comparación de (a) y (b), la solución completa de ésta es:

$$x(t) = x_0 \cos pt + \frac{\dot{x}_0}{p} \sin pt - \frac{1}{p} \int_0^t \ddot{u}(\tau) \sin p(t-\tau) d\tau$$

## B. Sistemas de nGL:

$$[M] \{\ddot{x}\} + [k] \{x\} = \{P(t)\} = \begin{Bmatrix} P_1(t) \\ P_2(t) \\ \vdots \\ P_n(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -m_1 \ddot{u} \\ -m_2 \ddot{u} \\ \vdots \\ -m_n \ddot{u} \end{Bmatrix}$$

$$= - \begin{Bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ m_n \end{Bmatrix} \ddot{u} \quad \ddot{u} = -\{m\} \ddot{u}$$

Es decir, tenemos:

$$[M] \{\ddot{x}\} + [K] \{x\} = \{P(t)\} = - \{m\} \ddot{u}$$

sust.  $\{x\} = [R] \{y\}$

$$[M] [R] \{\ddot{y}\} + [K] [R] \{y\} = \{P(t)\} = - \{m\} \ddot{u}(t)$$

pre x  $\{r\}'_j$

$$\{r\}'_j [M] [R] \{\ddot{y}\} + \{r\}'_j [K] [R] \{y\} = \underbrace{\{r\}'_j \{P\}}_{P_j^*} = - \underbrace{\{r\}'_j \{m\}}_{m_j^*} \ddot{u}$$

$U_j^*$

por ortogonalidad:

$$\{r\}'_j [M] \{r\} \ddot{y}_j + \{r\}'_j [K] \{r\} y_j = P_j^* = U_j^*$$

y queda:

$$M_j^* \ddot{y}_j + K_j^* y_j = P_j^* = U_j^* = - m_j^* \ddot{u}$$

∴ la solución (CI = 0) de esta ecuación es:

Para  $P_j^*$ :

$$y_j(t) = \frac{1}{\phi_j M_j^*} \int_0^t P_j^*(z) \sin \phi_j(t-z) dz$$

Para  $U_j^*$ :

$$y_j(t) = \frac{1}{\phi_j M_j^*} \int_0^t U_j^*(z) \sin \phi_j(t-z) dz$$

que puede escribirse:

$$y_j(t) = - \frac{m_j^*}{\phi_j M_j^*} \int_0^t \ddot{u}(z) \sin \phi_j(t-z) dz$$

$$+ y_{0j} \cos \phi_j t + \frac{\dot{y}_{0j}}{\phi_j} \sin \phi_j t \quad \begin{array}{l} \text{término a} \\ \text{para} \\ \text{CI} \neq 0 \end{array}$$

Una vez obtenidos los elementos de  $\{y\}$  solo falta premultiplicar por  $[R]$  para obtener  $\{x\}$  :

$$\{x(t)\} = [R] \{y(t)\}$$

#### GENERALIZACION DE LAS CONDICIONES DE ORTOGONALIDAD

Tenemos la ecuación:

$$[K] - p^2 [M] \{x\} = \{0\}$$

que convenimos en escribir en la forma:

$$(K - p^2 M) x = 0$$

como los vectores modales la satisfacen:

$$K r_j = \phi_j^2 M r_j \quad (a)$$

y premultiplicando por:  $r_i' M M^{-1}$  tenemos:

$$r_i' M M^{-1} K r_j = \phi_j^2 M M^{-1} M r_j = \phi_j^2 M M^{-1} K r_j = 0$$



que puede escribirse

$$r_i' M (M^{-1} K)^2 r_j = 0$$

y así podría seguirse para llegar a:

$$r_i' M (M^{-1} K)^l r_j = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} l \text{ entero} \\ -\infty < l < \infty \end{array} \right.$$

$$r_i' M (M^{-1} K)^l r_j = 0 \quad (b)$$

en forma análoga podemos obtener

$$r_i' (M F)^l M r_j = 0 \quad (c)$$

o

$$r_i' (K M^{-1})^l K r_j = 0$$

En (b):

$$l = -2 \quad M (M^{-1} K)^{-2} = M (M^{-1} K)^{-1} (M^{-1} K)^{-1}$$

$$(\text{en (c), con } l=2) \quad = M K^{-1} M K^{-1} M = \underline{M F M F M}$$

$$l = -1 \quad M (M^{-1} K)^{-1} = M K^{-1} M = \underline{M F M}$$

$$l = 0 \quad M (M^{-1} K)^0 = \underline{M}$$

$$l = 1 \quad M (M^{-1} K)^1 = M M^{-1} K = \underline{K}$$

$$l = 2 \quad M (M^{-1} K)^2 = M M^{-1} K M^{-1} K = \underline{K M^{-1} K}$$

$$l = 3 \quad M (M^{-1} K)^3 = M M^{-1} K M^{-1} K M^{-1} K = \underline{K M^{-1} K M^{-1} K}$$

VIBRACION LIBRE Y FORZADA DE SISTEMAS DE N GL CON AMORTIGUAMIENTO

Las ecuaciones de equilibrio dinámico son:

$$\{F_I\} + \{F_a\} + \{F_r\} = \{P(t)\}$$

Ya tenemos:

$$\{F_I\} = [M] \{\ddot{x}\}$$

$$\{F_r\} = [K] \{x\}$$

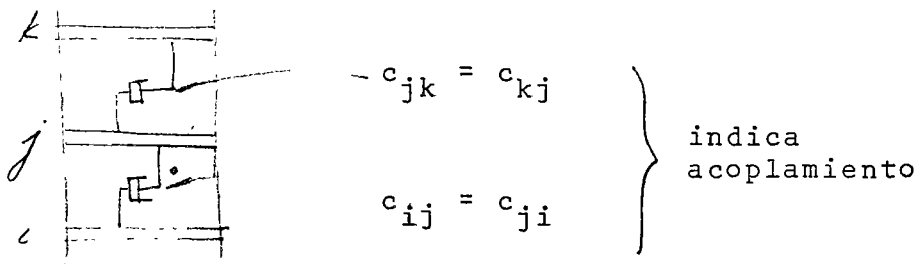
y ahora hacemos

$$\{F_a\} = [c] \{\dot{x}\}$$

donde

$$[c] = [c_{ij}]$$

y  $c_{ij}$  = fuerza de amortiguamiento en la coordenada  $i$  debido a una velocidad unitaria en la coordenada  $j$ .



La ecuación de movimiento es

$$[M] \{\ddot{x}\} + [c] \{\dot{x}\} + [K] \{x\} = \{P(t)\}$$

Hagamos:  $\{x\} = [R] \{y\}$  premultiplicando por  $\{r\}'_j$

$$\{r\}'_j [M] [R] \{\ddot{y}\} + \{r\}'_j [C] [R] \{\dot{y}\} + \{r\}'_j [K] [R] \{y\} = \{r\}'_j \{P(t)\}$$

Para desacoplar estas ecuaciones debemos tener

$$\left. \begin{aligned} \{r\}'_j [M] \{r\}_i &= 0 & i \neq j \\ \{r\}'_j [K] \{r\}_i &= 0 & i \neq j \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{cierto por} \\ \text{ortogonalidad} \end{array}$$

$$\{r\}'_j [C] \{r\}_i = 0 \quad i \neq j \quad \text{¿pero ésta? (a)}$$

1° admitamos que se cumple:

Ya definimos

$$\begin{aligned} \{r\}'_j [M] \{r\}_j &= M_j^* \\ \{r\}'_j [K] \{r\}_j &= K_j^* \\ \{r\}'_j \{P(t)\} &= P_j^* \end{aligned}$$

y ahora

$$\{r\}'_j [C] \{r\}_j = C_j^* = 2\beta_j \phi_j M_j^*$$

y nuestra ecuación para el modo  $j$  queda:

$$M_j^* \ddot{y}_j + 2\beta_j \phi_j M_j^* \dot{y}_j + \phi_j^2 M_j^* y_j = P_j^*$$

o bien:

$$\ddot{y}_j + 2\beta_j \phi_j \dot{y}_j + \phi_j^2 y_j = \frac{P_j^*}{M_j^*}$$

Como las soluciones para un sistema de 1GL (cuya ec. es  $\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + p^2x = \frac{P(t)}{m}$ ) ya las conocemos, solo nos falta saber cómo debe ser  $[C]$  para que se cumpla

$$\{r\}'_i [C] \{r\}_j = 0 \quad i \neq j \quad (a)$$

además, claro, de

$$y \quad \left. \begin{array}{l} \{r\}'_i [M] \{r\}_j = 0 \\ \{r\}'_i [K] \{r\}_j = 0 \end{array} \right\} i \neq j$$

La ec. (a) se satisface si

i)  $[C]$  es proporcional a  $[M]$  o a  $[K]$

ii)  $[C]$  es una combinación lineal de  $[M]$  y  $[K]$ , o

sea:

$$[C] = a_0 [M] + a_1 [K]$$

esto es muy restringido.

iii) En forma más general:

$$[C] = [M] \sum_1^l a_l [M^{-1}K]^l = \sum_1^l [C_l] \quad (38.1)$$

pues ya sabemos que todas las posibles formas

$$[M] [M^{-1}K]^l \text{ son satisfactorias y (38.1) es}$$

una C. L. de matrices de este tipo.

La selección adecuada de  $a_1$  dará a  $[C]$  las propiedades deseadas, o sea, podremos dar valores específicos a los elementos de  $[C]$ . ¿Cuáles le damos?

Asignamos un cierto valor de  $\beta$  a cada modo.

$$c_{j1}^* = \underbrace{\{r\}_j^T}_{A} [C] \{r\}_j = 2\beta_j \underbrace{\phi_j^2 M_j^*}_{A} = \sum_1 \{r\}_j^T [C_1] \{r\}_j = \sum_1 c_{j1}^* \quad (38.2)$$

De 38.1 y A

$$c_{j1}^* = \{r\}_j^T [M] [M^{-1}K]^{-1} \{r\}_j a_1 \quad (38.3)$$

Por otra parte, para vibración libre:

$$(K - \phi_j^2 M) r_j = 0$$

$$K r_j = \phi_j^2 M r_j \Leftrightarrow \frac{1}{\phi_j^2} r_j = F M r_j$$

premultiplicando por  $r_j^T M$ :

$$\frac{1}{\phi_j^2} r_j^T M r_j = r_j^T M F M r_j$$

es decir

$$(\phi_j^2)^{-1} M_j^* = r_j^T M (M^{-1} K)^{-1} r_j$$

y así podríamos llegar a que, para cualquier  $l$ :

$$(\phi_j^z)^1 M_j^* = r_j^1 M (M^{-1} K)^1 r_j = \frac{C_{j1}^*}{a_1} \quad 39.1$$

por 38.3

De 39.1:

$$C_{j1}^* = (\phi_j^2)^1 M_j^* a_1$$

$$C_{j1}^* = (\phi_j^2)^1 M_j^* a_1$$

y sumando sobre 1:

$$\sum_1 C_{j1}^* = \sum_1 (\phi_j^2)^1 M_j^* a_1$$

pero ya teníamos que

$$\sum_1 C_{j1}^* = 2\beta_j \phi_j^1 M_j^*$$

$$\therefore 2\beta_j \phi_j^1 M_j^* = \sum_1 (\phi_j^2)^1 M_j^* a_1$$

de donde:

$$\beta_j = \frac{1}{2\phi_j^1} \sum_1 (\phi_j^2)^1 a_1$$

Con los  $n$  valores de  $\beta_j$  para los  $n$  modos podemos resolver para los  $n$  valores de  $a_1$  y formar nuestra  $[C]$  con la ecuación

$$[C] = [M] \sum_1 a_1 [M^{-1}K]^{-1}$$

Por ejemplo para nuestra estructura de 3GL asignemos:

$$\beta_1 = 0.10, \quad \beta_2 = 0.05, \quad \beta_3 = 0.02$$

$$\beta_1 = 0.10 = \frac{1}{2\phi_1} [a_1(\phi_1^2)^{-1} + a_0(\phi_1^2)^0 + a_1(\phi_1^2)^1]$$

$$\beta_2 = 0.05 = \frac{1}{2\phi_2} [a_{-1}(\phi_2^2)^{-1} + a_0(\phi_2^2)^0 + a_1(\phi_2^2)^1]$$

$$\beta_3 = 0.02 = \frac{1}{2\phi_3} [a_{-1}(\phi_3^2)^{-1} + a_0(\phi_3^2)^0 + a_1(\phi_3^2)^1]$$

o, en forma matricial:

$$\begin{Bmatrix} 0.10 \\ 0.05 \\ 0.02 \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1/\phi_1^3 & 1/\phi_1 & \phi_1 \\ 1/\phi_2^3 & 1/\phi_2 & \phi_2 \\ 1/\phi_3^3 & 1/\phi_3 & \phi_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_{-1} \\ a_0 \\ a_1 \end{Bmatrix}$$

al resolver para  $a_1$  resulta

$$[C] = a_{-1} [MFM] + a_0 [M] + a_1 [K]$$

En p. tenemos que para  $CI = 0$  y  $\beta = 0$ , para excitación sísmica

$$y_j(t) = - \frac{m_j^*}{P_j M_j^*} \int_0^t \ddot{u}(\tau) \text{sen } P_j(t-\tau) d\tau$$

coeficiente de participación

$$C_j = \frac{m_j^*}{M_j^*} = \frac{\{r\}_j' \{m\}}{\{r\}_j' [M] \{r\}_j} = \frac{\sum_{i=1}^m m_i r_{ij}}{\sum_{i=1}^m m_i r_{ij}^2}$$

y  $\therefore$  podemos poner:

$$y_j(t) = C_j z_j(t)$$

en la que  $C_j$  está definida arriba y

$$z_j(t) = -\frac{1}{p_j} \int_0^t \ddot{u}(z) \operatorname{sen} p_j(t-z) dz$$

(y semejante si  $\beta \neq 0$ )

$$y_j(t) = C_j z_j(t)$$

Además, tenemos

$$\{X\} = [R] \{y\}$$

o sea

$$\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_i \\ \vdots \\ X_n \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1j} & \cdots & r_{1n} \\ r_{21} & r_{22} & \cdots & r_{2j} & \cdots & r_{2n} \\ \cdot & \cdot & & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & & \cdot \\ r_{n1} & r_{n2} & \cdots & r_{nj} & \cdots & r_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ Y_n \end{Bmatrix}$$



++  
∴

$$x_i = \sum_{j=1}^n r_{ij} y_j = \sum_{j=1}^n r_{ij} C_j z_j(t)$$

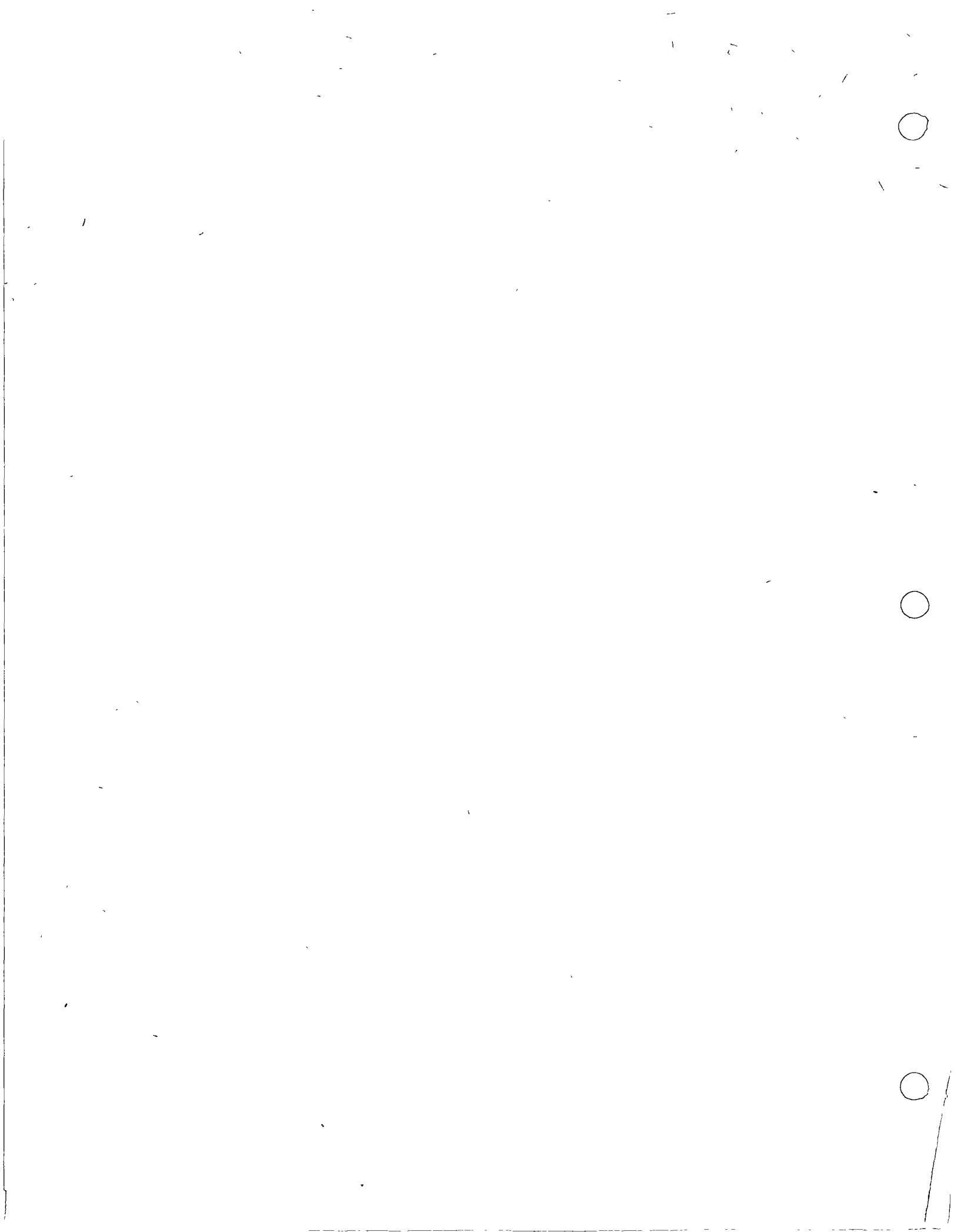
De aquí (sin sumar para todos los modos)

$$\left. \begin{aligned} |x_{ij}|_{\max} &= r_{ij} C_j |z_j(t)|_{\max} = r_{ij} C_j S_d \\ &= r_{ij} C_j \frac{S_a}{f_j} \end{aligned} \right\} S_a = p S_v = p^2 S_d$$

De esta ec. pasamos a:

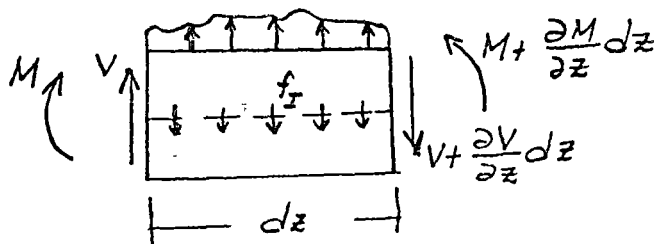
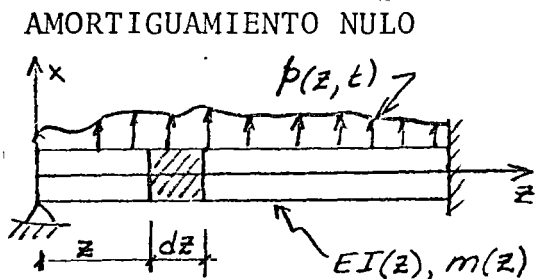
$$|x_i|_{\max}^{\text{ABS}} = \sum_{j=1}^n r_{ij} C_j S_d = \sum_{j=1}^n r_{ij} C_j \frac{S_a}{f_j}$$

$$|x_i|_{\max}^{\text{PROB}} = \sqrt{\sum (|x_{ij}|_{\max})^2}$$



## VIBRACION DE VIGAS EN FLEXION

a.



$$V + pdz - (V + \frac{\partial V}{\partial z} dz) - f_I dz = 0 \quad (1)$$

$$\text{EN DONDE } f_I dz = mdx \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} \quad (2)$$

SUSTITUYENDO (2) EN (1) Y SIMPLIFICANDO:

$$\frac{\partial V}{\partial z} = p - m \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} \quad (3)$$

$$M + Vdz - (M + \frac{\partial M}{\partial z} dz) = 0 \quad \frac{\partial M}{\partial z} = V \quad (4)$$

(DESPRECIANDO LOS TERMINOS DE SEGUNDO ORDEN DE LOS MOMENTOS DE \$p\$ Y \$f\_I\$)

SUSTITUYENDO (4) EN (3) SE OBTIENE

$$\frac{\partial^2 M}{\partial z^2} + m \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = p \quad (4')$$

TOMANDO EN CUENTA QUE \$M = \frac{\partial^2 x}{\partial z^2}\$ SE OBTIENE FINALMENTE

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} (EI \frac{\partial^2 x}{\partial z^2}) + m \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = p \quad (5)$$

[Faint, illegible text scattered across the page, possibly bleed-through from the reverse side or extremely faded print. Some words like "and" and "the" are barely discernible.]

b. AMORTIGUAMIENTO VISCOSO

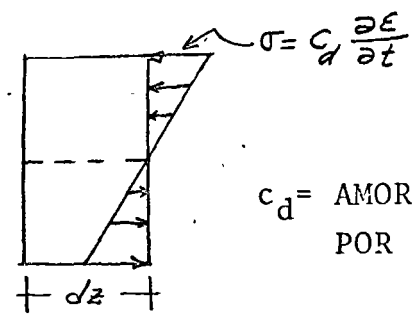
- FUERZA DE AMORTIGUAMIENTO POR

VELOCIDAD TRANSVERSAL =  $c(z) \frac{\partial x}{\partial t}$

$\frac{\partial V}{\partial z} = p - m \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} - c \frac{\partial x}{\partial t}$  (6)

- FUERZA DE AMORTIGUAMIENTO POR DEFORMACION DE LA VIGA.

ACEPTANDO LA HIPOTESIS DE NAVIER DE DEFORMACION PLANA



$M_{amort} = \int \sigma y da = c_d I(z) \frac{\partial^3 x}{\partial z^2 \partial t}$

$c_d =$  AMORTIGUAMIENTO POR DEFORMACION

INCORPORANDO EL MOMENTO DEBIDO AL AMORTIGUAMIENTO EN LA EC. (5)

$\frac{\partial^2}{\partial z^2} (EI \frac{\partial^2 x}{\partial z^2} + C_d I \frac{\partial^3 x}{\partial z^2 \partial t}) + m \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + c \frac{\partial x}{\partial t} = p$  (6)

SI LA EXCITACION ES POR MOVIMIENTO DE LOS APOYOS, SE PUEDE DEMOSTRAR (CLOUGH Y PENZIEN, PAG 303) QUE:

$\frac{\partial^2}{\partial z^2} (EI \frac{\partial^2 x}{\partial z^2} + C_d I \frac{\partial^3 x}{\partial z^2 \partial t}) + m \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + c \frac{\partial x}{\partial t} = p_{efect.}$

EN DONDE

$p_{efect} = -\frac{\partial^2}{\partial z^2} (EI \frac{\partial^2 x_s}{\partial z^2} + C_d I \frac{\partial^3 x_s}{\partial z^2 \partial t}) - m \frac{\partial^2 x_s}{\partial t^2} - c \frac{\partial x_s}{\partial t}$  (7)

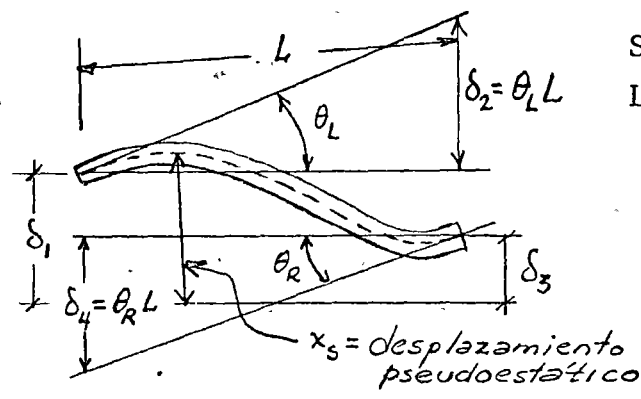
$x(z,t) = x_{est}(z,t) + x_t(z,t)$

$x_t(z,t) = x_s(z,t)$



$x_s$  = DESPLAZAMIENTO PSEUDOESTATICO OCASIONADO POR EL MOV. DE  
 LOS APOYOS DE MANERA ESTATICA

$x$  = DESPLAZAMIENTO DINAMICO



SI SE TIENE UNA ROTACION Y UNA TRASLACION POR APOYO:

$$x_s = \sum_{i=1}^4 \phi_i \delta_i(t) \quad (8)$$

$\phi_i(z)$  = CONFIGURACION DE LA VIGA DEBIDA A  $\delta_i=1$

INCORPORANDO (8) EN (7):

$$P_{\text{efect}} = -\sum_{i=1}^4 \{ m \phi_i \ddot{\delta}_i(t) + c \phi_i \dot{\delta}_i(t) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} [c_d I(z) \frac{\partial^2 \phi_i(z)}{\partial z^2} \delta_i(t)] \} \quad (9)$$

EN LA MAYORIA DE LOS CASOS EL AMORTIGUAMIENTO INFLUYE POCO EN LA FUERZA EFECTIVA Y LA EC. (9) SE SIMPLIFICA A

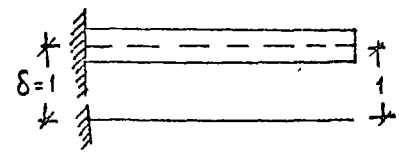
$$P_{\text{efect}} = -\sum_{i=1}^4 m \phi_i(z) \ddot{\delta}_i(t)$$

EN EL CASO DE UN VOLADIZO

$$\phi_1(z) = 1$$

Y

$$P_{\text{efect}} = -m(z) \ddot{\delta}_1(t)$$







## ANALISIS DE VIBRACIONES LIBRES

CONSIDEREMOS UNA VIGA DE SECCION CONSTANTE ( $EI = \text{CONSTANTE}$  ;  $\bar{m} = \text{MASA}$  POR UNIDAD DE LONGITUD).

$$\text{DE LA EC. (5): } EI \frac{\partial^4 x}{\partial z^4} + \bar{m} \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = 0$$

$$\frac{\partial^4 x}{\partial z^4} = -\frac{\bar{m}}{EI} \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = 0 \quad (10)$$

RESOLVIENDO LA EC. (10) POR SEPARACION DE VARIABLES:

$$x(z, t) = \theta(z) Y(t)$$

$$\theta^{IV}(z) Y(t) + \frac{\bar{m}}{EI} \theta(z) \ddot{Y}(t) = 0 ; \frac{\theta^{IV}(z)}{\theta(z)} + \frac{\bar{m}}{EI} \frac{\ddot{Y}(t)}{Y(t)} = 0$$

POR LO QUE

$$\frac{\theta^{IV}(z)}{\theta(z)} = -\frac{\bar{m}}{EI} \frac{\ddot{Y}(t)}{Y(t)} = C = a^4 \quad (C = \text{CONSTANTE})$$

POR LO TANTO OBTENEMOS DOS ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS:

$$\theta^{IV}(z) - a^4 \theta(z) = 0$$

$$\ddot{Y}(t) + \omega^2 Y(t) = 0 \quad \text{DONDE} \quad \omega^2 = \frac{a^4 EI}{\bar{m}}$$

$$0 \quad a^4 = \frac{\omega^2 \bar{m}}{EI}$$

LA SOLUCION DE LA SEGUNDA DE ESTAS ES:

$$Y(t) = \frac{\dot{Y}(0)}{\omega} \text{sen} \omega t + Y(0) \text{cos} \omega t \quad (11)$$



LA SOLUCION DE LA PRIMERA ES:

$$\theta(z) = A_1 \operatorname{sen} az + A_2 \cos az + A_3 \operatorname{senh} az + A_4 \operatorname{cosh} az \quad (12)$$

EN DONDE LAS  $A_i$  SE CALCULAN EN FUNCION DE LAS CONDICIONES DE FRONTERA DE LA VIGA EN AMBOS EXTREMOS.

### EJEMPLO

VIGA SIMPLEMENTE APOYADA

LAS CUATRO CONDICIONES DE FRONTERA SON:

en  $z=0$ :  $\theta(0)=0$ ,  $M(0)=EI \theta''(0) = 0$

en  $z=L$ :  $\theta(L)=0$ ,  $M(L)=EI \theta''(L) = 0$

SUSTITUYENDO  $\theta(0)=0$  Y  $\theta''(0)=0$  EN LA EC. (12) Y SU SEGUNDA DERIVADA:

$$\left. \begin{aligned} \theta(0) &= A_2 + A_4 \operatorname{cosh} 0 = 0 \\ \theta''(0) &= a^2(-A_2 + A_4 \operatorname{cosh} 0) = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow A_2 = A_4 = 0$$

HACIENDO LO MISMO CON  $\theta(L) = 0$  y  $\theta''(L) = 0$ :

$$\left. \begin{aligned} \theta(L) &= A_1 \operatorname{sen} aL + A_3 \operatorname{senh} aL = 0 \\ \theta''(L) &= a^2(-A_1 \operatorname{sen} aL + A_3 \operatorname{senh} aL) = 0 \end{aligned} \right\} \rightarrow A_3 = 0$$

POR LO TANTO,  $\theta(L) = A_1 \operatorname{sen} aL = 0$

PUESTO QUE  $A_1=0$  ES LA SOLUCION TRIVIAL, SE DEBE TENER QUE  $A_1$  SEA ARBITRARIA Y QUE

$$\operatorname{sen} aL = 0 \rightarrow aL = n\pi; \quad n = 0, 1, 2, \dots, \infty$$

POR LO TANTO,  $a = n\pi/L$ . RECORDANDO QUE

$$a^4 = \omega^2 \bar{m}/EI, \text{ SE TIENE QUE}$$

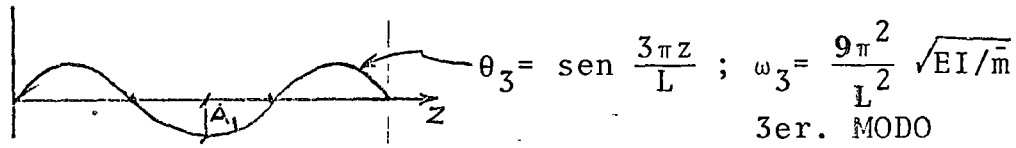
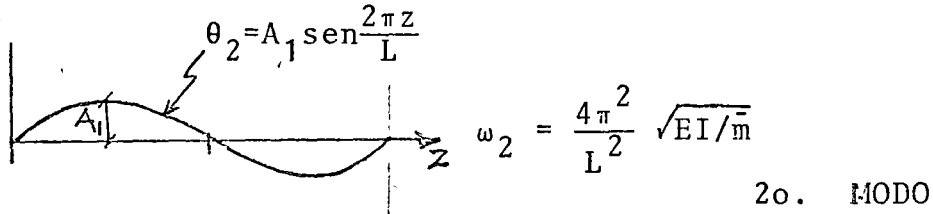
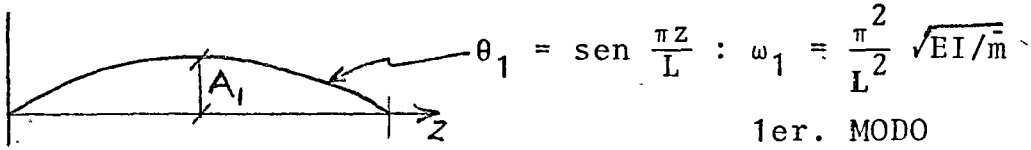


$$\omega_n^2 = (n\pi/L)^4 EI/\bar{m} \quad 0 \quad \omega_n = \frac{n^2 \pi^2}{L^2} \sqrt{EI/\bar{m}}$$

SON LAS FRECUENCIAS CIRCULARES NATURALES DE VIBRACION DE LA VIGA.

LAS CONFIGURACIONES MODALES SON

$$\theta_n(z) = A_1 \text{ sen } \frac{n\pi}{L} z$$



⋮

$$\omega_1 : \omega_2 : \omega_3 :: 1 : 4 : 9$$

$$\omega_i = n^2 \omega_1$$



Tomado de: "Folleto Complementario. Dientes Sismicos de Edificios", por E. Roembuech y L. Esteve (1962) Ediciones INGENIERIA, Fac. de Ingenieria, UNAM.

#### 4. Elementos de dinámica estructural

##### 4.0. Definiciones

4.01. *Grados de libertad.* Considérese una estructura constituida por masas concentradas ligadas entre sí por elementos elásticos (fig 4.1).

Se entiende por número de grados de libertad del sistema el número de datos que es necesario

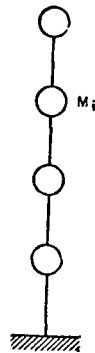


FIG. 4.1

fijar para definir una configuración cualquiera del mismo.

Cuando sólo se permiten desplazamientos en una dirección, el número de grados de libertad es igual al número de masas de la estructura.

4.02. *Matriz de rigideces.* Se entiende por matriz de rigideces el conjunto ordenado de los valores de las fuerzas que se ejercen estáticamente sobre cada masa, en la dirección del grado de libertad correspondiente, cuando se producen sucesivamente desplazamientos unitarios según cada grado de libertad, impidiendo el desplazamiento según los demás. Las rigideces se designarán con el símbolo  $K_{ij}$ , que representa la fuerza exterior que actúa sobre la masa  $i$  cuando se produce un desplazamiento unitario de la masa  $j$ .

4.03. *Matriz de flexibilidades.* Se entiende por matriz de flexibilidades el conjunto ordenado de los valores de los desplazamientos de todas las masas debidos a la acción de una fuerza unitaria aplicada sucesivamente a cada una de ellas. Las flexibilidades se designarán con el símbolo  $\delta_{ij}$ , siendo  $\delta_{ij}$  el desplazamiento de la masa  $i$  debido a una fuerza unitaria aplicada en  $j$ .

4.04. *Vibraciones libres.* Se llaman vibraciones libres de una estructura las que ésta experimenta cuando actúe sobre ella ninguna fuerza exterior.

4.05. *Periodos y modos naturales.* Toda estructura elástica no amortiguada con varios grados de libertad puede vibrar libremente en tal forma que el desplazamiento de cada una de sus masas con respecto a su posición de equilibrio estático es igual al producto de una función de la masa considerada por una función del tiempo. Interesa el caso en que esta función es la misma para todas las masas, es decir <sup>16, 17, 18,</sup>

$$x_i(t) = X_i \theta(t), \quad (4.1)$$

donde

$x_i$  = desplazamiento de la masa  $i$  con respecto a su posición de equilibrio, en el instante  $t$ ,

$X_i$  = función que depende únicamente del punto considerado,

$\theta$  = función del tiempo, independiente de  $i$ .

A estas maneras de vibrar se les llama *modos naturales*. Al conjunto ordenado de valores  $X_i$ , se llama *forma del modo*, y el periodo de  $\theta$ , en caso de que exista, se llama *periodo natural*.

Por el teorema de d'Alembert, designando con  $Q_i$  a la fuerza que la estructura ejerce sobre la masa  $i$ , puede escribirse

$$M_i \ddot{x}_i = Q_i, \quad (4.2)$$

Por la definición de matriz de rigideces,

$$Q_i = \sum_{j=1}^n K_{ij} x_j, \quad (4.3)$$

Sustituyendo las ecs. 4.1 y 4.3 en la 4.2,

$$M_i X_i \ddot{\theta} = \theta \sum_{j=1}^n K_{ij} X_j, \quad (4.4)$$

separando,

$$\frac{\ddot{\theta}}{\theta} = \frac{\sum K_{ij} X_j}{M_i X_i}. \quad (4.5)$$

El primer miembro de (4.5) es independiente de  $i$  y el segundo de  $t$ ; por tanto ambos deben ser constantes para que la igualdad subsista. Si este valor constante se llama  $-p^2$ , se obtiene

$$\ddot{\theta} + p^2 \theta = 0,$$

cuya solución es

$$\theta = a \sin p(t - \tau). \quad (4.6)$$

De acuerdo con lo anterior existen modos de vibración que satisfacen las condiciones de la ec.

Handwritten notes at the top of the page, including the word "PROFIT" and other illegible scribbles.

Handwritten notes in the middle section, appearing as a list or series of short paragraphs.

Handwritten notes in the lower middle section, continuing the list or series of paragraphs.

Handwritten notes in the lower section, including some more legible words and phrases.

Handwritten notes at the bottom of the page, including some numbers and short sentences.

Faint handwritten notes on the right side of the page, mostly illegible.

Faint handwritten notes on the right side of the page, continuing the illegible text.

Faint handwritten notes on the right side of the page, including some recognizable words.

Faint handwritten notes on the right side of the page, appearing as a list or series of paragraphs.

Faint handwritten notes at the bottom of the right side of the page.





4.1. Estos son tales que el movimiento de cada masa es armónico simple de periodo  $T = 2\pi/p$ ;  $p$  se llamará *frecuencia natural circular*.

4.06. *Cálculo de los modos naturales de vibración.* Sustituyendo las ecs. 4.1 y 4.6 en la 4.4. y simplificando se llega a la siguiente expresión.

$$M_i p^2 X_i = \sum_{j=1}^n K_{ij} X_j. \quad (4.7)$$

Si se plantea una ecuación semejante a la 4.7 para cada una de las  $n$  masas, se establece un sistema de  $n$  ecuaciones homogéneas con  $n$  incógnitas. (Las incógnitas son  $X_i$ , siempre que se conozca  $p^2$ .) Para que existan soluciones de  $X_i$ , diferentes de cero,  $p^2$  tiene que ser tal que se anule el determinante de los coeficientes de las  $X_i$ . Esto da lugar a una ecuación de grado  $n$  en  $p^2$ , con  $n$  raíces reales, que corresponden a otros tantos periodos naturales de vibración. Por otra parte, el sistema no tiene solución única para los valores absolutos de las  $X_i$ , sino únicamente para sus valores relativos; es decir, en un modo de vibración no están definidas las amplitudes de los desplazamientos de las masas, sino la relación entre todas ellas.

Otra alternativa para obtener los periodos y formas de los modos naturales es establecer las ecuaciones de desplazamiento de cada masa en términos de los elementos de la matriz de flexibilidad, lo que da lugar a lo siguiente,

$$\frac{1}{p^2} X_i = \sum_{j=1}^n M_{ij} \delta_{ij} X_j. \quad (4.8)$$

4.07. *Principales propiedades de los modos naturales*

1. Ortogonalidad de los modos con respecto a las masas. Se demuestra fácilmente que

$$\sum_{i=1}^n M_{ij} X_{i,r} X_{i,s} = 0 \text{ si } r \neq s$$

donde  $X_{i,r}$ ,  $X_{i,s}$  representan las amplitudes de la masa  $i$  correspondientes a los modos naturales  $r$  y  $s$ .

2.  $\sum_{i=1}^n M_{ij} X_{i,r}^2$  es igual a una constante arbitraria, cuyo valor depende de la escala a la que se tome cada modo. Si dicha constante es obligada a tomar el valor de la unidad modificando la escala del modo, se dice que éste se ha normalizado con respecto a las masas.

En todo lo que antecede se han supuesto para la estructura condiciones de frontera que implican que el terreno sobre el que se apoya es fijo e indeformable. Tratándose de estructuras reales los modos naturales se ven afectados por la deformabilidad del terreno y por la masa de éste que está

sujeta a aceleraciones. En tales casos el problema se complica por la existencia de amortiguamiento de cierta importancia. El tomar en cuenta la contribución del terreno en los modos de vibración puede ser fundamental en algunas estructuras.<sup>19</sup>

4.1. *Métodos iterativos para el cálculo de los periodos naturales*

Los métodos directos que se han descrito en el Art. 4.06 son en general laboriosos e imprácticos. Por ello se han desarrollado métodos de aproximaciones sucesivas que se presentan a continuación.

4.11. *Método de Stodola-Vianello*<sup>20</sup>

Considérese el sistema de ecuaciones (4.7) del cual se tratan de determinar:

- a) Los valores característicos de  $p^2$  que hacen que exista solución no trivial para las  $X_i$ ,
- b) Los valores de las  $X_i$  correspondientes a cada  $p^2$ .

Pueden obtenerse ambos resultados simultáneamente por aproximaciones sucesivas si se procede en la forma siguiente:

1. Supóngase arbitrariamente un conjunto de valores para las  $X_i$ , sustitúyanse los valores en el sistema descrito y calcúlese en cada ecuación el valor de  $p^2$ . Si la forma supuesta es correcta, los valores de  $p^2$  así calculados serán iguales entre sí.
2. Si lo anterior no sucede es necesario mejorar la hipótesis inicial mediante ciclos sucesivos de iteración. Para ello obténgase una nueva aproximación a la forma de los modos. Esto se logra calculando los valores de los segundos miembros de las ecs. 4.7 o 4.8 y dividiendo entre un mismo valor arbitrario de  $\phi^2$  en todas las ecuaciones.
3. Con la nueva aproximación a la forma del modo obténgase el valor de  $p^2$  en cada ecuación. El proceso se repite hasta lograr la igualdad con el grado de aproximación que se desee, entre los valores de  $p^2$  determinados en cada una de las ecuaciones.

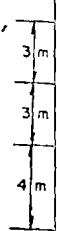
El mismo método puede aplicarse partiendo del sistema 4.8, en función de la matriz de flexibilidades. En el primer caso el método converge al modo de vibración de máxima frecuencia, mientras que en este último la convergencia es hacia el modo de mínima frecuencia, es decir el modo fundamental. Dados los periodos dominantes de los temblores y los valores usuales de periodos naturales de estructuras, generalmente son de interés los modos inferiores, o de frecuencias menores.

El procedimiento puede continuarse para el cálculo de otros modos diferentes del primero o el último reduciendo el número de ecuaciones original. El número de incógnitas puede reducirse

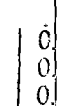
si se ap...  
modo ca...  
expresar  
siguiente  
mismo.  
ecuacione

En el  
iterativo  
ciendo su  
ta llegar  
que todos

Como  
dos de v  
fig. 4.2.



La matr  
a continua



Supóngase  
sus modos  
del modo y  
masas 1, 2  
miento de  
( $pt + \alpha$ ),  
como  $-p^2 x$   
cia como  $p^2$   
tivamente.  
námico son

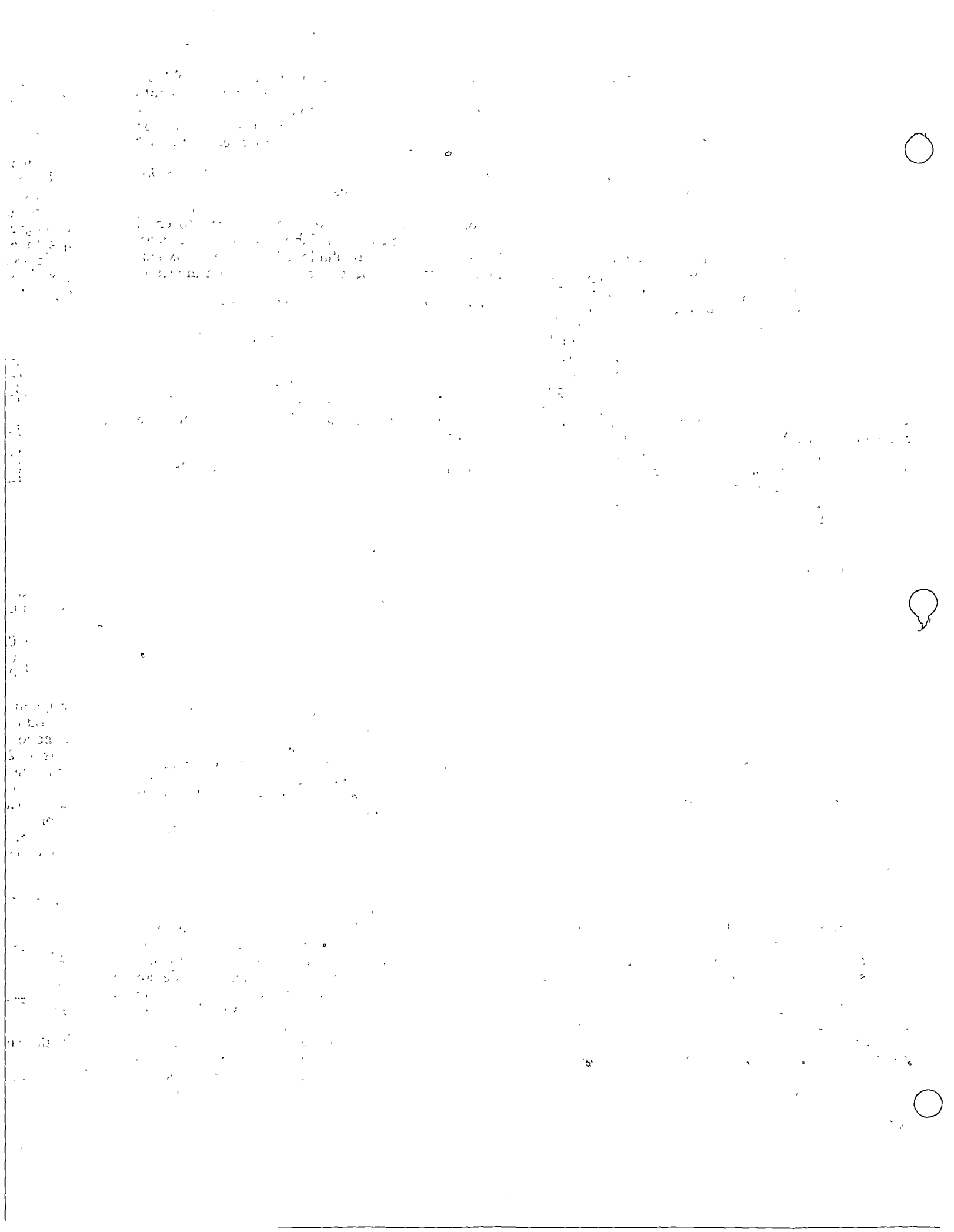
$$\frac{1}{p^2} x_1 =$$

$$\frac{1}{p^2} x_2 =$$

$$\frac{1}{p^2} x_3 =$$

Sustitúyas

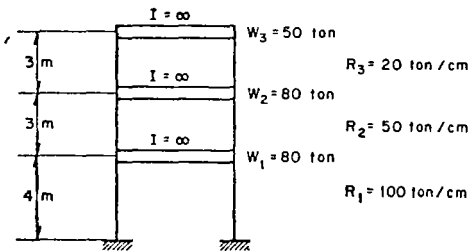
$$\frac{g}{p^2} x_1 = 80 \times$$



si se aplica la condición de ortogonalidad entre el modo calculado y otro cualquiera. Esto permite expresar una cualquiera de las amplitudes del siguiente modo en función de todas las demás del mismo. Queda por tanto, un sistema de  $n - 1$  ecuaciones homogéneas con  $n - 1$  incógnitas.

En el nuevo sistema se repite el procedimiento iterativo descrito. El proceso se continúa, reduciendo sucesivamente el número de ecuaciones hasta llegar al cálculo del último modo, en caso de que todos sean de interés.

Como ejemplo de aplicación obténganse los modos de vibración de la estructura descrita en la fig. 4.2.



EDIFICIO CON TRES GRADOS DE LIBERTAD

FIG. 4.2

La matriz de flexibilidades es la que se indica a continuación.

$$\begin{vmatrix} 0.01 & 0.01 & 0.01 \\ 0.01 & 0.03 & 0.03 \\ 0.01 & 0.03 & 0.08 \end{vmatrix}$$

Supóngase la estructura vibrando en uno de sus modos naturales. Sean  $p$  la frecuencia circular del modo y  $x_1, x_2, x_3$  los desplazamientos de las masas 1, 2 y 3 respectivamente. Siendo el movimiento de las partículas de la forma  $x_i = a_i \cos(pt + \alpha)$ , las aceleraciones pueden expresarse como  $-p^2 x_1, -p^2 x_2, -p^2 x_3$  y las fuerzas de inercia como  $p^2 W_1 x_1/g, p^2 W_2 x_2/g, p^2 W_3 x_3/g$  respectivamente. Las ecuaciones de desplazamiento dinámico son entonces:

$$\frac{1}{p^2} x_1 = \frac{W_1}{g} \delta_{11} x_1 + \frac{W_2}{g} \delta_{12} x_2 + \frac{W_3}{g} \delta_{13} x_3,$$

$$\frac{1}{p^2} x_2 = \frac{W_1}{g} \delta_{21} x_1 + \frac{W_2}{g} \delta_{22} x_2 + \frac{W_3}{g} \delta_{23} x_3,$$

$$\frac{1}{p^2} x_3 = \frac{W_1}{g} \delta_{31} x_1 + \frac{W_2}{g} \delta_{32} x_2 + \frac{W_3}{g} \delta_{33} x_3.$$

Sustitúyase y multiplíquese por  $g$ . Resulta:

$$\frac{g}{p^2} x_1 = 80 \times 0.01 x_1 + 80 \times 0.01 x_2 + 50 \times 0.01 x_3,$$

$$\frac{g}{p^2} x_2 = 80 \times 0.01 x_1 + 80 \times 0.03 x_2 + 50 \times 0.03 x_3,$$

$$\frac{g}{p^2} x_3 = 80 \times 0.01 x_1 + 80 \times 0.03 x_2 + 50 \times 0.08 x_3.$$

Efectuando operaciones,

$$\frac{g}{p^2} x_1 = 0.8 x_1 + 0.8 x_2 + 0.5 x_3,$$

$$\frac{g}{p^2} x_2 = 0.8 x_1 + 2.4 x_2 + 1.5 x_3,$$

$$\frac{g}{p^2} x_3 = 0.8 x_1 + 2.4 x_2 + 4.0 x_3.$$

En forma matricial

$$\begin{bmatrix} 0.8 & 0.8 & 0.5 \\ 0.8 & 2.4 & 1.5 \\ 0.8 & 2.4 & 4.0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \frac{g}{p^2} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix}$$

El procedimiento iterativo para determinar la forma y el período del modo fundamental se presenta en las columnas (1) a (11) de la siguiente tabla de operaciones.

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
1	3.9	0.2216	1.1364	0.2046	1.1036
2	10.1	0.5739	3.0546	0.5499	2.9834
3	17.6	1.0000	5.5546	1.0000	5.4834

$$\frac{g}{p^2} = 5.5546, \quad \frac{g}{p^2} = 5.4834,$$

(7)	(8)	(9)	(10)	(11)
0.2013	1.0963	0.2005	1.0946	0.2404
0.5441	2.9669	0.5427	2.9627	2.9629
1.0000	5.4669	1.0000	5.4629	1.0000

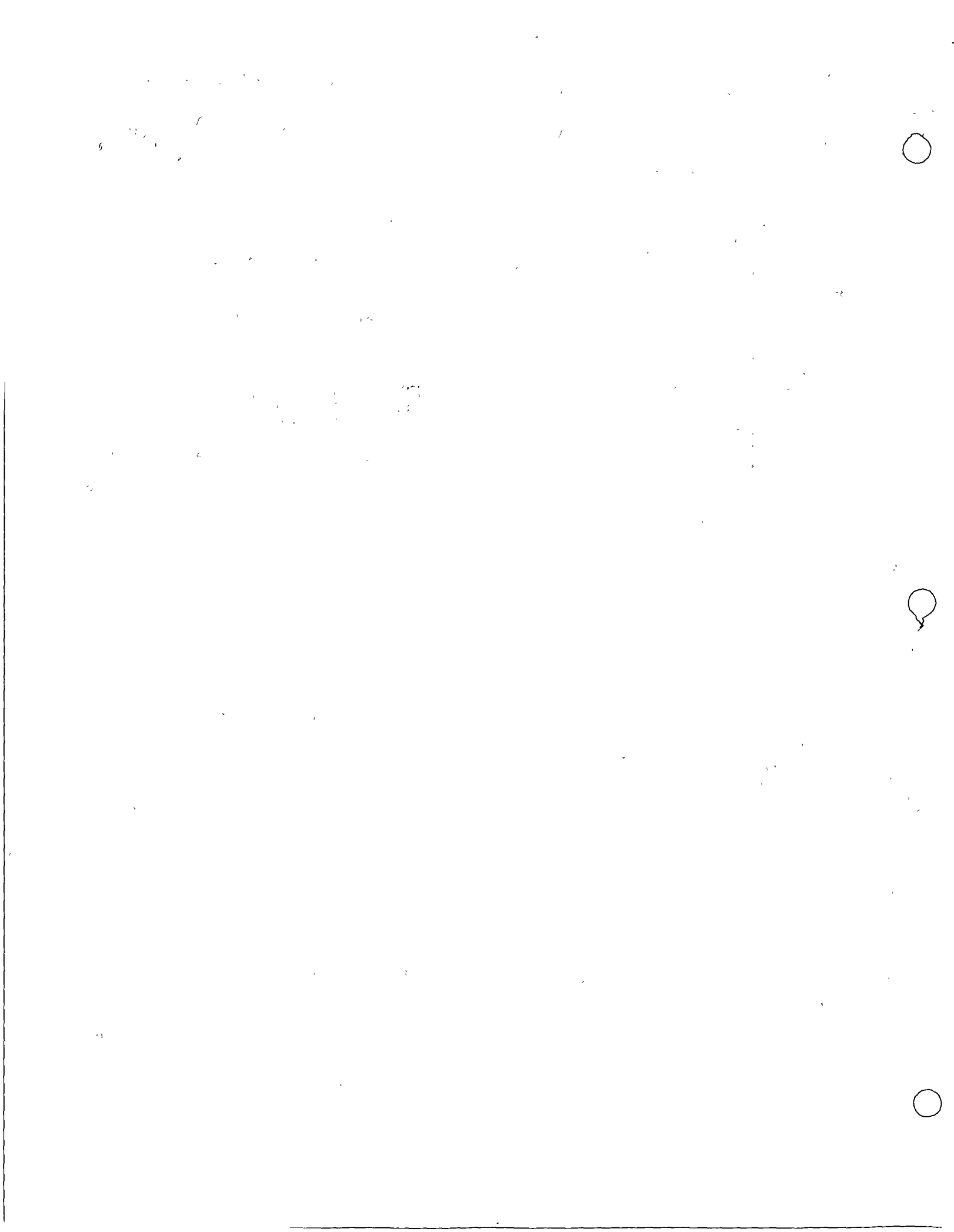
$$\frac{g}{p^2} = 5.4669, \quad \frac{g}{p^2} = 5.4629.$$

La columna (1) es una primera hipótesis sobre la forma del modo. La columna (2) es el cálculo de los primeros miembros a partir de esta primera estimación. La columna (3) es igual a la (2) dividida entre 17.6. La (4) es una nueva aproximación a los primeros miembros. Dividiendo cada término de la columna (4) entre el correspondiente de la (3) se obtiene el valor  $g/p^2$ .

En este caso se consigna el valor de  $g/p^2$  obtenido a partir de los valores del tercer renglón. El procedimiento termina cuándo los valores de  $g/p^2$  en dos ciclos consecutivos son iguales, y cuándo la forma del modo obtenida en dos ciclos consecutivos es la misma.

De la columna (11) se obtiene la forma del modo fundamental y el parámetro  $g/p^2$ .

Aprovechando la ortogonalidad entre el primer modo y otro cualquiera,



$$0.2004 \times 8 x_1 + 0.5424 \times 8 x_2 + 1.000 \times 5 x_3 = 0,$$

$$\text{de donde, } -x_1 = 2.7066 x_2 + 3.1188 x_3,$$

$$\frac{g}{p^2} x_1 = 0.8 (-2.7066 x_2 - 3.1188 x_3) + 0.8 x_2 + 0.5 x_3,$$

$$\frac{g}{p^2} x_2 = 0.8 (-2.7066 x_2 - 3.1188 x_3) + 2.4 x_2 + 1.5 x_3,$$

$$\frac{g}{p^2} x_3 = 0.8 (-2.7066 x_2 - 3.1188 x_3) + 2.4 x_2 + 4.0 x_3;$$

de la segunda y tercera ecuaciones,

$$\frac{g}{p^2} x_2 = 0.2347 x_2 - 0.9950 x_3,$$

$$\frac{g}{p^2} x_3 = 0.2347 x_2 + 1.5050 x_3.$$

Repetiendo el proceso de iteración,

	(1)	(2)	(3)	
0.2347	-0.9950	-1	-1.2297	-0.9680
0.2347	1.5050	+1	1.2703	1.0000
			1.2703	

	(4)	(5)	(6)	(7)
-1.2223	-0.9566	-1.2195	-0.9524	
1.2778	1.0000	1.2805	1.0000	
1.2778		1.2805		

$$1.2805 x_1 = 0.8(2.5778 - 3.118) - 0.7619 + 0.5 x_1 = -0.5425;$$

por la primera condición de ortogonalidad,

$$-x_1 = 2.7066 x_2 + 3.1188 x_3, \quad (1)$$

la segunda condición de ortogonalidad será

$$-0.5425 \times 8 x_1 - 0.9524 \times 8 x_2 + 5 x_3 = 0$$

$$-4.34 x_1 - 7.6192 x_2 + 5 x_3 = 0$$

$$-x_1 = 1.7556 x_2 - 1.1521 x_3; \quad (2)$$

de (1) y (2)

$$2.7066 x_2 + 3.1188 x_3 = 1.7556 x_2 - 1.1521 x_3,$$

$$0.9510 x_2 = -4.2709 x_3;$$

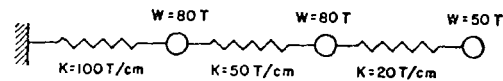
si  $x_3 = 1$

$$x_2 = -4.491,$$

$$x_1 = 12.1553 - 3.1188 = 9.0365,$$

$$-0.2347 \times 4.491 - 0.995 = -4.491 \frac{g}{p^2}.$$

4.12. Método de Newmark.<sup>21</sup> Tanto este método como el de Holzer se aplican en los ejemplos que siguen a casos en que puede expresarse la rigidez de un piso como independiente de la forma del modo. Sin embargo, en su forma más general, el método de Newmark puede aplicarse a cualquier estructura lineal con acoplamiento entre las diferentes masas. Al primer caso corresponde la estructura que se usó para el ejemplo anterior, la cual se puede idealizar como se indica en la fig. 4.3.



METODO DE NEWMARK

FIG. 4.3

El método propuesto por N. M. Newmark para obtener el modo fundamental se ilustra en la tabla 4.1 y es el que se describe a continuación.

1. Supóngase una forma para el modo. Esta forma es la que aparece en el renglón  $y_0$  de la tabla.

RENGLON		METODO DE NEWMARK			TABLA N° 4.1
		80T	80T	50T	
		100T/cm	50T/cm	20T/cm	
1	$y_0$				
2	$\frac{W}{g} y_0$	0.0318	0.536	0.1529	
3	$\frac{Q}{p^2}$	← 0.3983	← 0.3165	← 0.1529	
4	$\frac{\Delta}{p^2}$	0.003983	0.006330	0.007645	
5	$\frac{y_1}{p^2}$	0.003983	0.010313	0.017958	
6	$p_1^2$	250	198	157	
1'	$y_1$	3.98	10.31	17.96	
2'	$\frac{W}{g} y_1$	0.325	0.840	0.513	
3'	$\frac{Q}{p^2}$	← 2.078	← 1.753	← 0.913	
4'	$\frac{\Delta}{p^2}$	0.02078	0.03506	0.04565	
5'	$\frac{y_2}{p^2}$	0.02078	0.05584	0.0149	
6'	$p_2^2$	191	185	177	
1''	$y_2$	2.078	5.584	10.149	
2''	$\frac{W}{g} y_2$	0.170	0.455	0.518	
3''	$\frac{Q}{p^2}$	← 1.143	← 0.973	← 0.518	
4''	$\frac{\Delta}{p^2}$	0.01143	0.01946	0.02590	
5''	$\frac{y_3}{p^2}$	0.01143	0.03089	0.0569	
6''	$p_3^2$	182	180	179	
1'''	$y_3$	0.201	0.541	1.000	

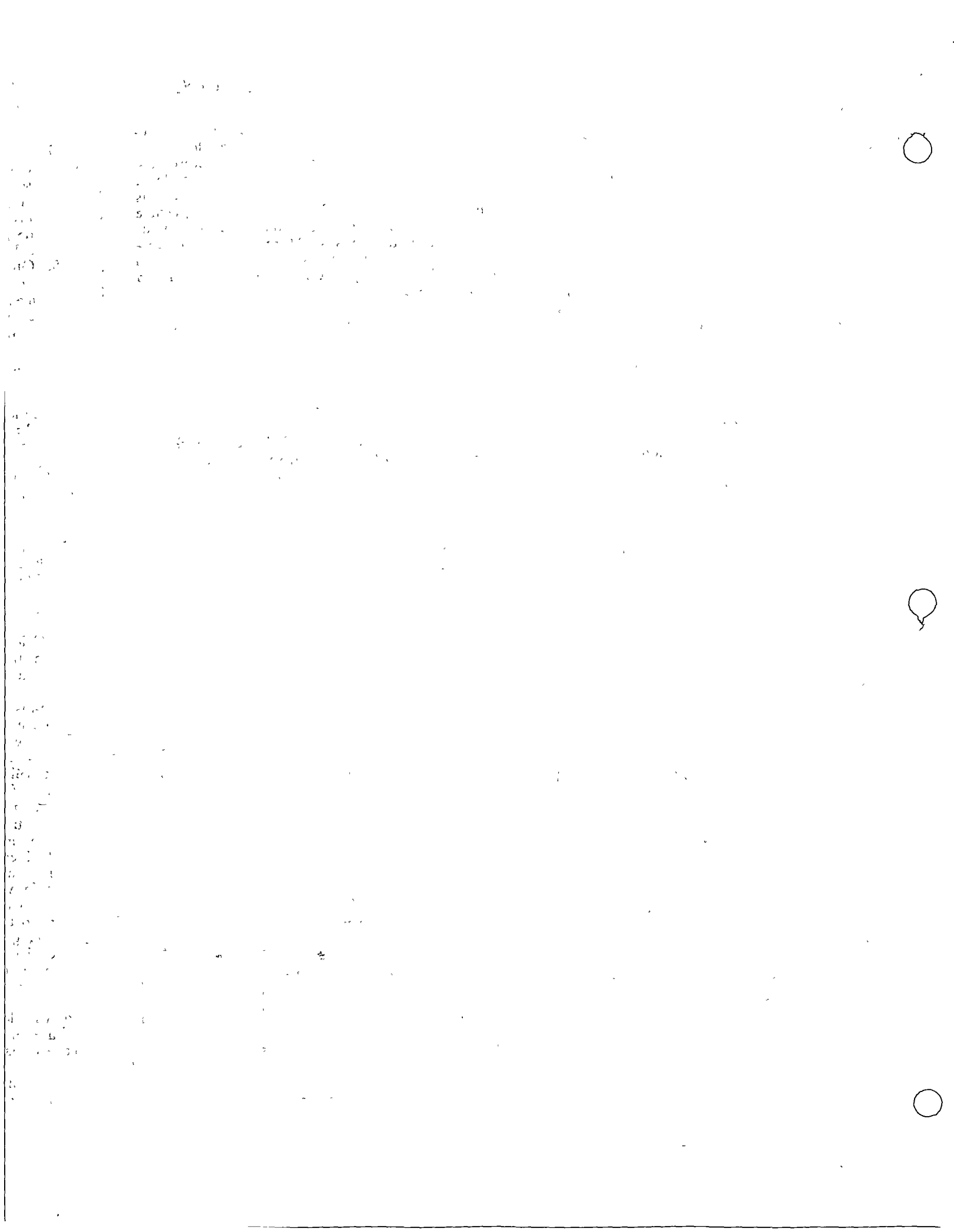
2. Ob  
W  
noc  
fue  
3. Cor  
dina  
sora  
4. A p  
los  
de l  
a la  
5. Obt  
(y/  
ment  
el m  
caso  
ciclo  
lada  
6. 6"  
ciclo  
sufici  
p<sup>2</sup> =  
5.584

4.13. M  
tener vario  
car el sigu

1. Supón  
mayor
2. Supón  
nido
3. Calcú  
movim  
del ar
4. Satisf  
la fuer
5. Obtém  
(amb  
puesta
6. Satisf  
y la an  
cálcul
7. Contin  
tima m  
la fuer

Los cálcul  
4.2. La repr  
se hace en la

La utilidad  
mente increm



$$91 \frac{g}{p^2}$$

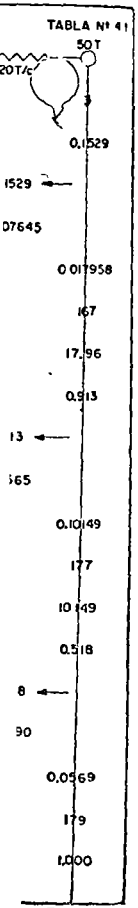
to este m...  
n lo deje...  
e e...  
cliente de...  
forma má...  
de aplic...  
amiento en...  
caso corre...  
el ejemplo  
no se indica

$$W = 50 T$$

m

wmark para  
en la tabla  
ción.

modo. Esta  
renglón y,



- Obtégase la fuerza de inercia,  $F = p^2 y_0$ ,  $W/g$ , para cada masa. Como  $p^2$  se desconoce, se tabula  $y_0 W/g$ , que es igual a la fuerza de inercia dividida entre  $p^2$ .
- Con estas fuerzas de inercia, por equilibrio dinámico, calcúlense las fuerzas en los resortes divididas entre  $p^2$ :  $Q/p^2$ .
- A partir de las rigideces y de las fuerzas en los resortes obténganse las deformaciones de los mismos y una primera aproximación a la forma del modo  $y_1 p^2$ .
- Obtégase  $p^2$  para cada masa, dividiendo  $(y_0/y_1)/p^2$ . Si la configuración arbitrariamente supuesta es la correcta, se obtendrá el mismo valor para todas las masas. En caso contrario es necesario efectuar nuevos ciclos partiendo de la configuración calculada en primera aproximación. Los renglones 6, 6', 6'' muestran el cálculo de  $p^2$  en varios ciclos sucesivos. Se consideró el último suficientemente aproximado, adoptándose  $p^2 = 180$ , y la forma del modo (2.078, 5.584, 10.149) o (0.201, 0.541, 1.000).

4.13. Método de Holzer. Cuando interesa obtener varios modos superiores es conveniente aplicar el siguiente procedimiento debido a Holzer.<sup>20</sup>

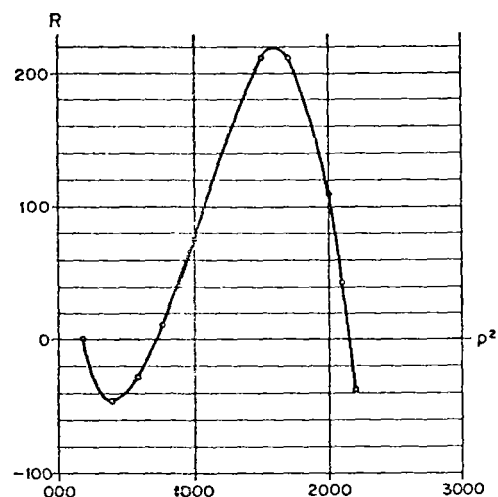
- Supóngase arbitrariamente un valor de  $p^2$ , mayor que el del modo fundamental obtenido por cualquier método.
- Supóngase arbitrariamente la amplitud del movimiento de la primera masa a partir del apoyo.
- Calcúlense la fuerza en el primer resorte y la fuerza de inercia de la primera masa (ambas son función de la amplitud supuesta).
- Satisfaciendo el equilibrio calcúlense la fuerza en el siguiente resorte.
- Obténganse la deformación de este último y la amplitud de la siguiente masa. Con ésta calcúlense su fuerza de inercia.
- Satisfaciendo el equilibrio obténgase la fuerza en el siguiente resorte.
- Continúese el proceso hasta llegar a la última masa. Si se satisface el equilibrio entre la fuerza del último resorte y la fuerza de inercia de la última masa, la frecuencia elegida y la forma calculada corresponden a un modo natural de vibración. Por lo general se obtendrá un residuo. Representétese en una gráfica estos residuos contra el valor de las  $p^2$  supuestas. Se obtendrá una curva cuyos ceros corresponden a las frecuencias naturales.

Los cálculos descritos se presentan en la tabla 4.2. La representación gráfica de los resultados se hace en la fig. 4.4.

La utilidad del método de Holzer se ve grandemente incrementada si se le combina con un mé-

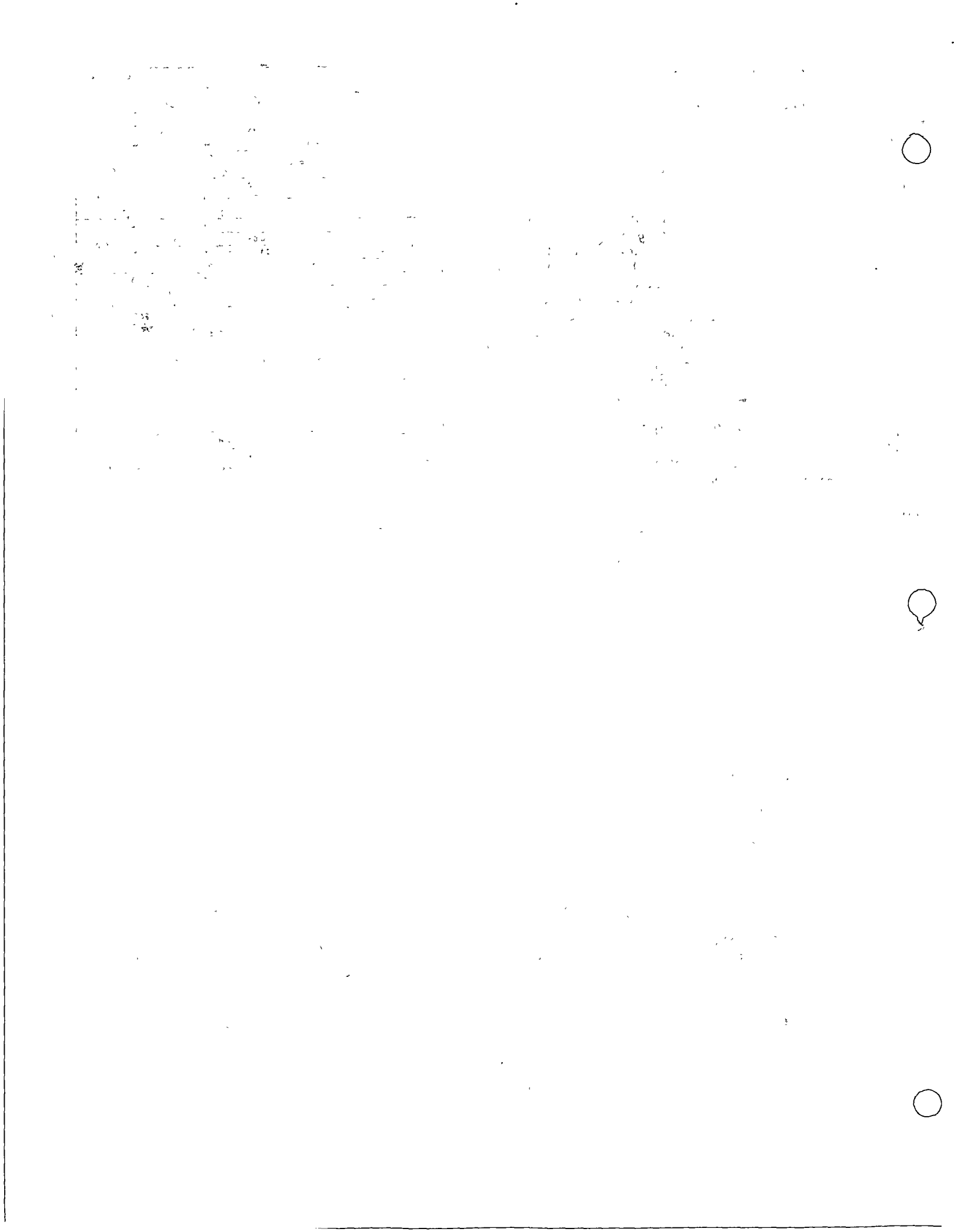
		MÉTODO DE HÖLZER			TABLA N° 4.2
$p^2$ supuesta		60T	80T	50T	Residuo
	$y$	100	2.35	1.87	
	$\Delta$		+1.35	-0.48	+47.7
	$F$	100	67.4	9.5	
	$F = \frac{W}{g} p^2 y$	32.6	76.9	38.2	
	$q$		+2.02	-0.37	
400	$I$		+1.02	-2.39	+36.6
	$\Delta$	100	51.0	47.9	
	$F$	49.0	98.9	11.3	
	$q$		1.69	-2.10	
600	$I$		0.69	-3.79	-9.8
	$\Delta$	100	34.7	75.8	
	$F$	65.3	110.5	85.6	
	$q$		1.37	-3.29	
800	$I$		0.37	-4.66	-74.8
	$\Delta$	100	18.3	93.2	
	$F$	82.7	111.5	168	
	$q$		0.55	-3.93	
1000	$I$		-0.45	-4.48	-211.3
	$\Delta$	100	22.5	89.7	
	$F$	122.5	67.2	301	
	$q$		+0.22	-3.75	
1500	$I$		-0.78	-3.47	-211.5
	$\Delta$	100	39	69.5	
	$F$	139	305	281	
	$q$		-0.26	-1.29	
2000	$I$		-1.26	-1.03	-111.4
	$\Delta$	100	63.0	20.6	
	$F$	163	42.4	132	
	$q$		-0.42	-0.48	
2100	$I$		-1.42	-0.06	-52.4
	$\Delta$	100	71.0	1.1	
	$F$	171.0	72.1	51.3	
	$q$		-0.60	0.80	
2200	$I$		-1.60	+1.40	+58.9
	$\Delta$	100	80	28	
	$F$	160	108	86.9	

todo de aproximaciones sucesivas, como el consistente en igualar las energías máximas cinética y potencial del sistema.<sup>20</sup> Sea  $p$  una frecuencia circular natural supuesta para llevar a cabo un ciclo del método de Holzer. Se encuentra que, si  $p$  se halla suficientemente cerca de una de las frecuencias circulares naturales,  $p_1$  constituye una



MÉTODO DE HÖLZER

FIG. 4.4





aproximación más precisa a dicha frecuencia si se toma

$$p_1^2 = p^2 \frac{\sum Q_1 y}{\sum F y} \quad (4.9)$$

donde  $F$  son las fuerzas de inercia y  $Q$  las fuerzas en los resortes, ambas calculadas en el ciclo de que se trata.

En el ejemplo de la tabla 4.2 se consignan los valores empleados para calcular las sumas que intervienen en la ec. 4.9. La tabla 4.3 presenta el proceso de aproximaciones sucesivas para refinar el valor de la segunda frecuencia circular natural a partir del valor aproximado  $p^2 = 800$ . Se han aumentado dos renglones en cada ciclo para

TABLA N° 4.3

$p^2$ supuesto	100 T/cm	80 T	50 T/cm	80 T	50 T/cm	Residuo
$y_0$	1		1.69		-2.10	
$\Delta$	1		0.69		-3.79	
800	100	← 34.9	← 75.8			
$F = \frac{W}{g} p^2 y$		65.3	110.5	85.6	-9.8	
$F \Delta$	100	23.9	287.0		$\Sigma = 410.9$	
$Qy$		65.3	186.8	179.9	$\Sigma = 432.0$	$p_1^2 = 761$
	1		1.76		-1.80	
	1		0.76		-3.56	
761	100	← 37.9	← 71.3			
		62.1	109.2	63.5	1.8	
	100	28.8	254		$\Sigma = 382.8$	
		62.1	192.1	125.0	$\Sigma = 379.2$	$p_1^2 = 767$
	1		1.75		-1.85	
	1		0.75		-3.60	
767	100	← 37.4	← 72.0			
		62.6	109.4	72.2	-0.2	
	100	28.1	259		$\Sigma = 387.1$	
		62.6	191.4	133.3	$\Sigma = 387.3$	$p_1^2 = 766.8$

efectuar las sumas. En el extremo derecho se anota el valor mejorado,  $p_1^2$ .

La convergencia del proceso requiere que el valor de que se parta no difiera en exceso de la frecuencia natural a la que se desea aproximarse.

## 4.2. Amortiguamiento

**4.20. Generalidades.** Los conceptos que se han presentado se basan en la hipótesis de que la energía mecánica de un sistema vibratorio no se altera mientras no actúen en él fuerzas exteriores

o sufra desplazamiento de sus apoyos. En la realidad, fricciones interiores, fricciones en los apoyos, comportamiento inelástico y otros fenómenos dan lugar a pérdidas de energía. Su efecto es oponer resistencia al movimiento y reducir la amplitud de las oscilaciones.

Varios de los fenómenos enumerados no pueden incluirse dentro del concepto usual de amortiguamiento. No obstante, todos ellos tienen efectos semejantes en cuanto a la limitación a la respuesta máxima de una estructura.

**4.21. Tipos de amortiguamiento.** Para fines de análisis, el efecto del amortiguamiento puede representarse por medio de una fuerza que se opone al movimiento. Si dicha fuerza varía proporcionalmente a la velocidad de la masa en movimiento se tiene *amortiguamiento lineal* o *viscoso*. Si es independiente de la velocidad, como es el caso de una masa vibratoria sujeta a una fuerza de fricción paralela al movimiento se tiene *amortiguamiento constante*, también llamado del tipo de *fricción seca* o de *Coulomb*. Y han recibido atención otros varios tipos de amortiguamiento.

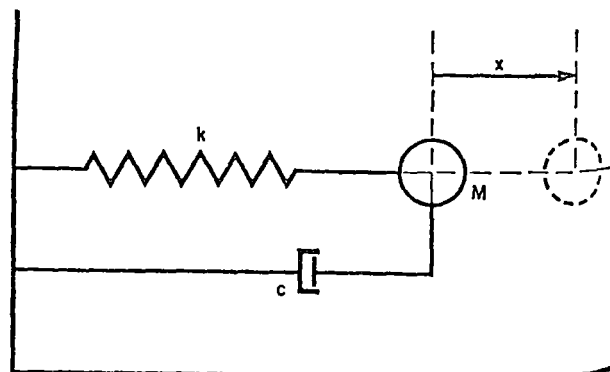
Matemáticamente es más fácil de analizar el efecto de amortiguamiento lineal. Cuando el amortiguamiento de una estructura sigue otra ley pueden estudiarse sus efectos mediante la introducción de uno viscoso equivalente, tal que la pérdida de energía por ciclo sea igual a la producida por el amortiguamiento real.<sup>18</sup>

**4.22. Vibración libre de estructuras de un grado de libertad amortiguadas linealmente.** Considérese una estructura de un grado de libertad como la descrita en la fig. 4.5. Sea  $k$  la constante del resorte y  $-c\dot{x}$  la fuerza proveniente del amortiguamiento. Si no actúan fuerzas exteriores y la base permanece fija, la ecuación de movimiento tiene la forma

$$M\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0 \quad (4.10)$$

Si se hace

$$p^2 = k/M \quad \text{y} \quad 2n = c/M,$$



SISTEMA SIMPLE CON AMORTIGUAMIENTO

FIG. 4.5

se llega a

ecuación qu

r satisfice

es decir,

$\dot{y} = n^2 \dots$

siendo  $y$

en la forma

y la expresio

$x =$

es decir,

$x = A_1 e^{-nt} + A_2 e^{-nt}$

$= e^{-nt} (A_1 + A_2 e^{-nt})$

haciendo  $A_1$  obtiene

$x =$

o bien

La ec. 4.12 es periódica. La amplitud decrece

**4.23. Amortiguamiento crítico**  $n^2 - p^2 = 0$  entonces de la t

La cual no coincide con la ecuación de equilibrio. Al valor de  $c$  que satisface estas condiciones se le llama  $c_c$ . Para estructuras por marcos es usual el valor del  $c$  aproximado



1. The first part of the document  
 discusses the general principles  
 of the project and the  
 objectives that have been  
 set for the study.

2. The second part of the document  
 describes the methodology used  
 in the study, including the  
 data collection methods and  
 the analysis techniques.

3. The third part of the document  
 presents the results of the study,  
 which show that the project  
 has been successful in achieving  
 its objectives.

4. The fourth part of the document  
 discusses the conclusions of the  
 study and the implications of  
 the findings for future research.

5. The final part of the document  
 provides a summary of the key  
 findings and a list of references.



The first part of the document  
 discusses the general principles  
 of the project and the  
 objectives that have been  
 set for the study.

The second part of the document  
 describes the methodology used  
 in the study, including the  
 data collection methods and  
 the analysis techniques.

The third part of the document  
 presents the results of the study,  
 which show that the project  
 has been successful in achieving  
 its objectives.

The fourth part of the document  
 discusses the conclusions of the  
 study and the implications of  
 the findings for future research.

The final part of the document  
 provides a summary of the key  
 findings and a list of references.

1. The first part of the document  
 discusses the general principles  
 of the project and the  
 objectives that have been  
 set for the study.

2. The second part of the document  
 describes the methodology used  
 in the study, including the  
 data collection methods and  
 the analysis techniques.

3. The third part of the document  
 presents the results of the study,  
 which show that the project  
 has been successful in achieving  
 its objectives.

4. The fourth part of the document  
 discusses the conclusions of the  
 study and the implications of  
 the findings for future research.

5. The final part of the document  
 provides a summary of the key  
 findings and a list of references.



En la realidad se llega a

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + p^2x = 0,$$

ecuación que tiene soluciones de la forma

$$x = Ae^{rt};$$

satisface la ecuación característica

$$r^2 + 2nr + p^2 = 0$$

es decir,

$$r = -n \pm \sqrt{n^2 - p^2}. \quad (4.11)$$

Si  $n^2 - p^2 < 0$ ,  $r = -n \pm i\sqrt{p^2 - n^2}$ ,

haciendo  $\sqrt{p^2 - n^2} = p_1$ , las raíces de  $r$  quedan

en la forma

$$r_1 = -n + p_1i,$$

$$r_2 = -n - p_1i.$$

la expresión para  $x$  será

$$x = A_1e^{(-n+p_1i)t} + A_2e^{(-n-p_1i)t}$$

es decir,

$$= A_1e^{-nt}(\cos p_1t + i \operatorname{sen} p_1t) +$$

$$+ A_2e^{-nt}(\cos p_1t - i \operatorname{sen} p_1t) =$$

$$= e^{-nt}(A_1 + A_2)\cos p_1t + (A_1 - A_2)i \operatorname{sen} p_1t;$$

haciendo  $A_1 + A_2 = A$  y  $(A_1 - A_2)i = B$ , se tiene

$$x = e^{-nt}(A \cos p_1t + B \operatorname{sen} p_1t) \quad (4.12)$$

bien

$$x = e^{-nt} C \cos p_1(t - \tau) \quad (4.12)$$

La ec. 4.12 implica que el movimiento de la masa es periódico, de frecuencia circular  $p_1$  y de amplitud decreciente, según el factor  $e^{-nt}$ .

4.23. Amortiguamiento crítico. Si en la ec. 4.11,  $p^2 = 0$  resulta  $r = -n$ . La solución es en raíces de la forma

$$x = Ae^{-nt}$$

cuál no corresponde a un movimiento periódico. En este caso la masa vuelve sin oscilar a su posición de equilibrio después de un tiempo infinito.

El valor del amortiguamiento que da lugar a estas condiciones se denomina *amortiguamiento crítico*.

Para estructuras usuales de edificios formados por marcos con muros estructurales y de relleno, el valor del amortiguamiento puede suponerse de aproximadamente 10 por ciento del crítico

( $n/p = 0.10$ ). Los espectros de diseño propuestos para el reglamento incluyen de por sí el efecto de este valor del amortiguamiento. Por este motivo no debe considerarse explícitamente el amortiguamiento al efectuar el análisis dinámico de un edificio.

## 5. Análisis sísmico dinámico

### 5.0. Características de los temblores

5.00. Generalidades. Siendo los fenómenos sísmicos complicados e irregulares, para el ingeniero resulta de interés la presentación de sus características en forma de permitir la aplicación inmediata al análisis.

Durante un temblor el movimiento del terreno tiene componentes de rotación y traslación en tres direcciones perpendiculares, y la trayectoria de un punto es una curva en el espacio. Conviniendo en que se puede idealizar un sismo como un movimiento horizontal del terreno en una sola dirección, y que este movimiento está descrito por el acelerograma registrado para la dirección en estudio, es posible, si se conocen las características de una estructura, calcular la respuesta de la misma al movimiento de la base.<sup>22,23</sup> Es decir, es posible tener la historia de cualquier elemento mecánico desde la iniciación del movimiento.

Este cálculo es laborioso e impráctico: Al diseñar una estructura interesa conocer la forma en que se comportara ante temblores futuros, cuyos acelerogramas indudablemente diferirán de los registrados. Debido a ello los métodos que usan el concepto de *espectro* han tenido aceptación universal. Poseen ese enfoque los métodos que trata el presente capítulo.

5.01. Espectros de un temblor. Considérese una estructura elástica con amortiguamiento lineal, de un grado de libertad, cuya base describe el movimiento definido por el acelerograma de un temblor en una dirección dada. Sea  $a(\tau)$  la aceleración de la base en función del tiempo  $\tau$ ; la ecuación diferencial del movimiento es

$$\ddot{u} + 2n\dot{u} + p^2u = -a(\tau) \quad (5.1)$$

en la cual

$u$  = desplazamiento de la masa relativa a la base;

$p$  = frecuencia natural circular de la estructura no amortiguada;

$n$  = fracción del amortiguamiento crítico.

La solución de la ec. 5.1 está dada por la siguiente expresión, que proporciona el valor de  $u$  en el instante  $t$ .<sup>24</sup>

$$u = \frac{1}{\sqrt{p^2 - n^2}} \int_0^t a(\tau) e^{-n(t-\tau)} \times \operatorname{sen} \sqrt{p^2 - n^2}(t - \tau) d\tau. \quad (5.2)$$

1945  
1946  
1947  
1948  
1949

1950  
1951  
1952  
1953  
1954

1955  
1956  
1957  
1958  
1959

1960  
1961  
1962  
1963  
1964

1965  
1966  
1967  
1968  
1969

1970  
1971  
1972  
1973  
1974

1975  
1976  
1977  
1978  
1979

1980  
1981  
1982  
1983  
1984

1985  
1986  
1987  
1988  
1989

1990  
1991  
1992  
1993  
1994

1995  
1996  
1997  
1998  
1999

2000  
2001  
2002  
2003  
2004

2005  
2006  
2007  
2008  
2009

2010  
2011  
2012  
2013  
2014

2015  
2016  
2017  
2018  
2019

2020  
2021  
2022  
2023  
2024

2025  
2026  
2027  
2028  
2029

2030  
2031  
2032  
2033  
2034

2035  
2036  
2037  
2038  
2039

2040  
2041  
2042  
2043  
2044

Llamado  $S_v$  al máximo valor absoluto que adquiere la integral del segundo miembro de la 5.2 durante el temblor, pueden escribirse las siguientes expresiones

$$u_{\text{máx}} = \frac{1}{\sqrt{p^2 - n^2}} S_v, \quad (5.3)$$

$$\dot{u}_{\text{máx}} = S_v, \quad (5.4)$$

$$\ddot{u}_{\text{máx}} = \sqrt{p^2 - n^2} S_v.$$

$u_{\text{máx}}$ ,  $\dot{u}_{\text{máx}}$ ,  $\ddot{u}_{\text{máx}}$ , son, respectivamente, los máximos valores absolutos del desplazamiento relativo, de la velocidad relativa y de la aceleración absoluta de la masa.

El valor  $S_v$  es función de las características del temblor, y de la frecuencia natural y amortiguamiento de la estructura. Si para un valor constante del amortiguamiento se trazan gráficas que tengan como abscisas el período natural de la estructura y como ordenadas  $u_{\text{máx}}$ ,  $\dot{u}_{\text{máx}}$ ,  $\ddot{u}_{\text{máx}}$ , se obtienen los llamados *espectros* de desplazamientos, de velocidades y de aceleraciones, respectivamente, para el temblor considerado.

Para un temblor registrado (el de Helena, Oct. 31, 1935), en estructuras sin amortiguamiento, estos espectros tienen la forma indicada en la fig. 5.1.<sup>25</sup>

De acuerdo con las ecs. 5.3-5.5 es posible trazar los tres espectros en una gráfica única con rayado logarítmico en cuatro direcciones, según se hace en la fig. 5.2. Este tipo de gráfica se debe a F. Neumann<sup>26</sup> y ha sido usada en varias publicaciones recientes.<sup>27,31</sup>

Cualquiera de los espectros de un temblor proporciona los datos necesarios para el diseño de estructuras con un grado de libertad, con sólo conocer el período natural y el amortiguamiento de la misma.

**5.02. Espectros de diseño.** Dada la irregularidad en la forma de los espectros, que presenta variaciones bruscas en la magnitud de la respuesta máxima en función del período natural, es posible que dos estructuras que tengan prácticamente las mismas características respondan de manera totalmente distinta a un sismo.

En el aspecto práctico este hecho tiene menor importancia de la que se le podría dar a primera vista, gracias a la influencia del amortiguamiento y a fenómenos tales como la variación del período natural por trabajo en el intervalo inelástico.

Para fines de diseño, por tanto, no se emplean espectros de forma tan irregular como los de las figs. 5.1 y 5.2. Si se desea proyectar una estructura para un temblor particular, puede adoptarse un espectro obtenido como la curva media o envolvente del teórico. Si en una región son frecuentes temblores cuyas curvas medias tienen diferentes características, es razonable trazar la curva media

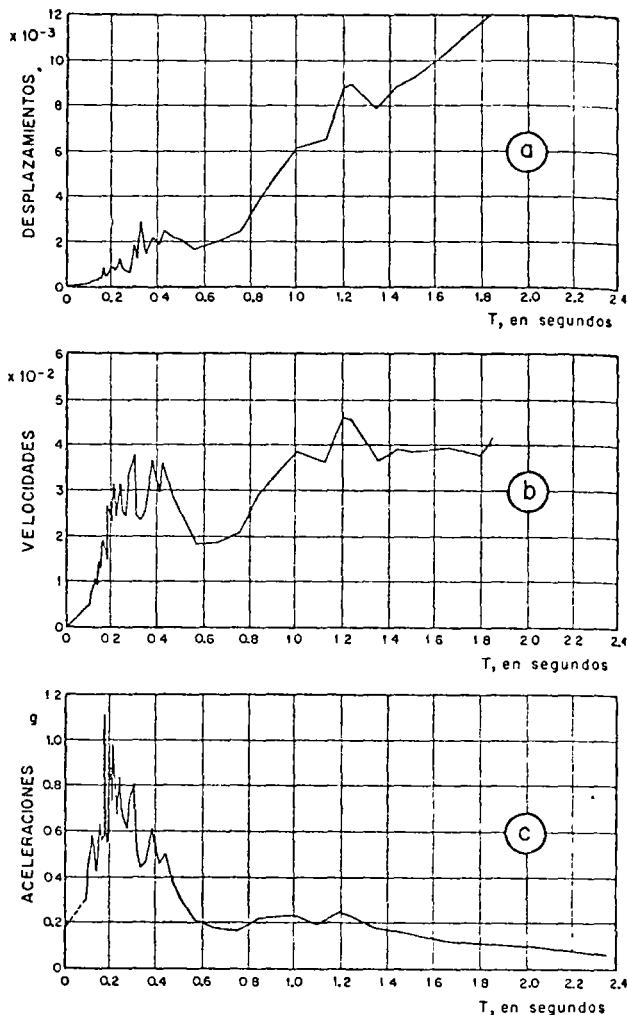


FIG. 5.1. ESPECTROS DE LA COMPONENTE ESTE-OESTE DEL TEMBLOR DE HELENA, MONT., OCT. 31 DE 1935

de cada uno de ellos, reducir todas a una intensidad común (por ejemplo haciendo que el área bajo la curva del espectro medio de velocidades sea la misma) y adoptar para diseño la envolvente de todos los espectros medios reducidos, multiplicada por un factor que tome en cuenta la intensidad esperada, las consecuencias de la falla de la estructura, su importancia, etc.

El criterio anterior es el que se siguió en la adopción del espectro de diseño propuesto para estructuras sobre terreno firme en el capítulo sobre análisis dinámico del reglamento. Dicho espectro se modificó con base en observaciones de campo para establecer el correspondiente a terreno blando.

### 5.1. Análisis sísmico de estructuras con varios grados de libertad

**5.11. Estructuras no amortiguadas de varios grados de libertad, sin torsión.** Si una estructura de varios grados de libertad como la que se muestra en las figs. 4.1 y 4.2 está sujeta al movimiento

de su base. Estos serán de la base. En un instante cualquiera de la suma de los a la participacionales en el n

En esta ex

$u_i(t)$  = de ma

Velocidad espectral, pulg./seg

FIG. 5.2.

$\phi_j(t)$  = fun  
rest  
del  
par  
esp  
ord  
tura  
per  
dad  
 $c_j$  = coe  
en



de su base, sus masas sufrirán desplazamientos. Estos serán función del tiempo y de la aceleración de la base.

En un instante dado el desplazamiento de una cualquiera de las masas puede expresarse como la suma de los desplazamientos de la misma debidos a la participación de cada uno de los modos naturales en el movimiento:

$$u_i(t) = \sum_{j=1}^n \phi_j(t) c_j x_{ij} \quad (5.6)$$

En esta expresión,

$u_i(t)$  = desplazamiento relativo a la base de la masa  $i$  en el instante  $t$ ;

$x_{ij}$  = amplitud del desplazamiento de la masa  $i$  en el modo  $j$ .

Para determinar el valor del coeficiente de participación de un modo cualquiera,  $m$ , considérese que la base sufre una variación en su velocidad igual a  $\dot{x}_b$ . Todas las masas tendrán entonces una velocidad relativa a la base

$$\dot{u}_i = -\dot{x}_b$$

que puede expresarse como

$$\sum_{j=1}^n \dot{\phi}_j(0) c_j x_{ij} = -\dot{x}_b$$

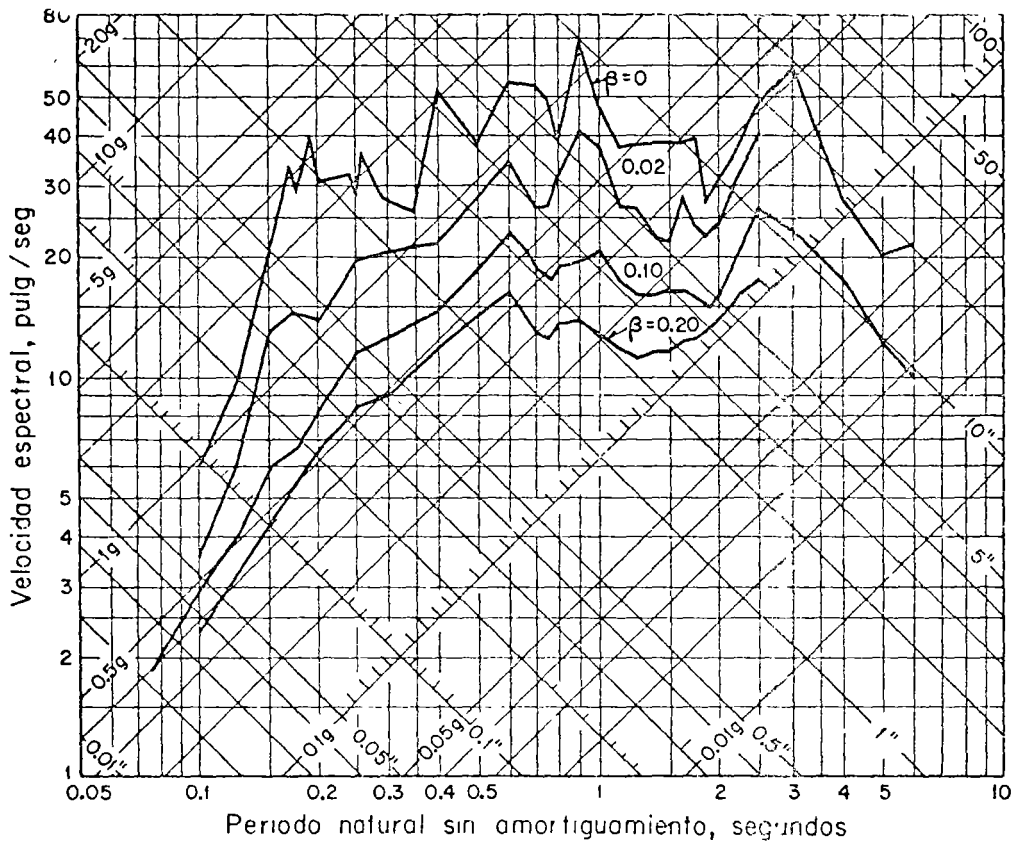


FIG. 5.2. ESPECTROS PARA SISTEMAS ELASTICOS. EL CENTRO, CALIFORNIA 1940

$\phi_j(t)$  = función que expresa la variación con respecto al tiempo de la participación del modo  $j$ . El valor máximo de  $\phi_j(t)$  para cada modo puede obtenerse del espectro de desplazamientos como la ordenada que corresponde a una estructura de un grado de libertad y de igual período que el modo  $j$ ;  $\phi_j(t)$  tiene unidades de longitud;

$c_j$  = coeficiente de participación que define la escala a la que interviene el modo  $j$  en el movimiento;

Teniendo en cuenta que  $\dot{\phi}_j(0) = -\dot{x}_b$ ,

$$\sum_{j=1}^n c_j x_{ij} = 1;$$

multiplicando por  $M_i x_{im}$  resulta

$$\sum_{j=1}^n c_j M_i x_{ij} x_{im} = M_i x_{im}.$$

Formando términos análogos al anterior para los diversos valores de  $i$  y sumando, se obtiene

100  
100  
100  
100



100  
100  
100  
100

100  
100  
100  
100



100  
100  
100  
100





$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_j M_i x_{ij} x_{im} = \sum_{i=1}^n \bar{M}_i x_{im}$$

Invirtiéndolo el orden de las sumas y aprovechando la propiedad de ortogonalidad

$$\sum_{i=1}^n M_i x_{ij} x_{im} = 0 \text{ para } j \neq m,$$

queda finalmente

$$c_m \sum_{i=1}^n M_i x_{im}^2 = \sum_{i=1}^n \bar{M}_i x_{im}$$

de donde,

$$c_m = \frac{\sum_{i=1}^n M_i x_{im}}{\sum_{i=1}^n M_i x_{im}^2} \quad (5.7)$$

Sustituyendo en la ec. 5.6 y escribiendo  $j$  en vez de  $m$ :

$$u_i(t) = \sum_{j=1}^n \phi_j(t) \frac{\sum_{i=1}^n M_i x_{ij}}{\sum_{i=1}^n M_i x_{ij}^2} x_{ij} \quad (5.8)$$

La ec. 5.8 indica que el desplazamiento relativo en un instante  $t$  de la masa  $i$  debido a la contribución del modo  $j$  se obtiene como el producto de la amplitud de dicha masa en el modo  $j$ , a una escala arbitraria, por un coeficiente de participación,  $c_j$ , y por una función del tiempo,  $\phi_j(t)$  que es la misma que proporciona el desplazamiento relativo de la masa de una estructura de un grado de libertad y de igual periodo que el modo en cuestión.

**5.12. Estructuras no amortiguadas de varios grados de libertad, sujetas a torsión dinámica.** En ciertas estructuras no es admisible la hipótesis de que el movimiento de todas las masas está contenido en un plano vertical. En tales casos se tienen tres grados de libertad por planta (dos de traslación y uno de rotación) y  $3n$  modos de vibración acoplados.

Los modos están definidos por los valores  $x_{ij}$ ,  $y_{ij}$ ,  $\theta_{ij}$ , que son respectivamente los desplazamientos del centro de gravedad paralelos a las disposiciones  $x$ ,  $y$ , y la rotación horizontal de cada nivel. El coeficiente de participación del modo  $m$  debido a la acción de un movimiento paralelo a la dirección  $x$  es entonces:

$$c_m = \frac{\sum_{i=1}^n M_i x_{im}}{\sum_{i=1}^n (M_i x_{im}^2 + M_i y_{im}^2 + I_i \theta_{im}^2)} \quad (5.9)$$

En esta ecuación  $I_i$  es el momento polar de inercia de la masa total del nivel  $i$  con respecto al centro de masa.

**5.13. Estructuras amortiguadas.** Tratándose de estructuras con un grado de libertad el concepto de espectro es aplicable según expresa la ec. 5.2 y los párrafos subsecuentes. De acuerdo con ello están trazados los espectros amortiguados de la fig. 5.2.

En general, en estructuras amortiguadas con varios grados de libertad no existen modos naturales. Por tanto no pueden utilizarse con rigor los conceptos expresados en los párrafos 5.11 y 5.12.

En algunos casos, y para ciertas relaciones entre los valores del amortiguamiento en los diferentes niveles es posible encontrar modos de vibración en que las masas se muevan satisfaciendo la ec. 4.1. Estos movimientos constituyen modos naturales y puede aplicarse lo hasta aquí dicho. Como ejemplo de estructuras que tienen estas características están aquellas en que el coeficiente de amortiguamiento en función de la velocidad relativa entre dos niveles consecutivos es proporcional a la rigidez del entrepiso correspondiente.<sup>22</sup> En el caso más general las relaciones planteadas son suficientemente aproximadas siempre que se trate de amortiguamientos pequeños.

**5.14. Consideraciones para el diseño.** Teóricamente las ecs. 5.8 y 5.9 resuelven el problema del análisis sísmico dinámico de estructuras con varios grados de libertad. Ellas permiten obtener su configuración deformada en cualquier instante y por lo tanto los máximos elementos mecánicos en las secciones críticas. Por razones semejantes a las expresadas en el Art. 502, el valor máximo de  $\phi_j(t)$  se obtendrá a partir de un espectro de desplazamientos adoptado para el diseño. Esto permite conocer la respuesta máxima de la estructura por efecto del modo  $j$ .

Una cota superior a la respuesta de la estructura por la participación de todos los modos puede obtenerse como la suma de las respuestas máximas de todos los modos:

$$R = \sum_{i=1}^n R_i$$

Este valor es siempre conservador, ya que las respuestas máximas de todos los modos no son simultáneas. Con base en estudios probabilísticos se demuestra que en estructuras elásticas de varios grados de libertad es más realista estimar la respuesta total de acuerdo con la siguiente expresión.

$$R = \sqrt{\sum_{i=1}^n R_i^2}$$

En la práctica se parte en general de espectros de aceleraciones, por lo que, utilizando la ec. 5.8,

$$u_{i,j\text{máx}} = A_j \frac{c_j}{\rho_j^2} x_{ij} \quad (5.10)$$

donde

$A_j$  :

$u_{i,j\text{máx}} =$

1.

2.

3.

4.

1947  
1948  
1949  
1950  
1951  
1952  
1953  
1954  
1955  
1956  
1957  
1958  
1959  
1960  
1961  
1962  
1963  
1964  
1965  
1966  
1967  
1968  
1969  
1970  
1971  
1972  
1973  
1974  
1975  
1976  
1977  
1978  
1979  
1980  
1981  
1982  
1983  
1984  
1985  
1986  
1987  
1988  
1989  
1990  
1991  
1992  
1993  
1994  
1995  
1996  
1997  
1998  
1999  
2000  
2001  
2002  
2003  
2004  
2005  
2006  
2007  
2008  
2009  
2010  
2011  
2012  
2013  
2014  
2015  
2016  
2017  
2018  
2019  
2020  
2021  
2022  
2023  
2024  
2025

1947



o polar de iner-  
on respecto al

Tratándose de  
ad el concepto  
esa ec. 5.2 y  
uerdo con ello  
iguados de la

ortiguadas con  
n modos natu-  
e con rigor los  
os 5.11 y 5.12  
elaciones entre  
los diferentes  
s de vibración  
aciendo la ec  
modos natu-  
í dicho. Como  
tas caracteris-  
nte de amorti-  
l relativa entre  
onal a la rigi-  
En el caso más  
on suficiente-  
ate de amorti-

ño. Teórica-  
el problema  
estructuras con  
miten obtener  
quier instante  
os cáncicos  
señalantes a  
valor máximo  
espectro de  
diseño. Esto  
de la estruc-

la estructura  
os puede ob-  
tas máximas

ya que las  
dos no son  
obabilísticos  
s de varios  
mar la res-  
expresión

espectros  
la ec. 5.8.

(5.10)

donde

$A_j$  = ordenada del espectro de aceleraciones para el modo  $j$ ;

$u_{i,máx}$  = desplazamiento máximo de la masa  $i$  en el modo  $j$ .

5.15. *Ejemplo de análisis dinámico.* Considérese la estructura de la fig. 4.2 cuyos modos y periodos naturales se determinaron en el capítulo 4 y supóngase que representa una construcción del grupo B con estructuración tipo 1 y que se localizará en la zona compresible. Se trata de obtener los elementos mecánicos de diseño sísmico de acuerdo con el criterio dinámico.

1. A continuación se resumen las características de los modos.

*modo fundamental*

0.2004  
0.5424 ;  $\frac{g}{p^2} = 5.4629 \text{ cm}; p^2 = 195.575 \text{ seg}^{-2}; T = 0.4689 \text{ seg};$   
1.0000

*segundo modo*

-0.5425  
-0.9524 ;  $\frac{g}{p^2} = 1.2805 \text{ cm}; p^2 = 766.107 \text{ seg}^{-2}; T = 0.2270 \text{ seg};$   
1.000

*tercer modo*

9.0365  
-4.4910 ;  $\frac{g}{p^2} = 0.4563 \text{ cm}; p^2 = 2149.901 \text{ seg}^{-2}; T = 0.1355 \text{ seg}.$   
1.0000

2. Haciendo  $c = 0.06$ , de acuerdo con la tabla del Art. 5 del capítulo de diseño sísmico del reglamento propuesto, las ordenadas del espectro para cada modo son

$$A_1 = 981 \times 0.5 \times 0.06(1 + 0.4689) = 43.233 \text{ cm/seg}^2$$

$$A_2 = 981 \times 0.5 \times 0.06(1 + 0.2270) = 36.111 \text{ cm/seg}^2$$

$$A_3 = 981 \times 0.5 \times 0.06(1 + 0.136) = 33.432 \text{ cm/seg}^2$$

3. Los coeficientes de participación, divididos entre  $p_j^2$ , de los modos son

$$c_1 = \frac{80 \times 0.2004 + 80 \times 0.5424 + 50 \times 1.0000}{179.575(80 \times 0.2004^2 + 80 \times 0.5424^2 + 50 \times 1.0000^2)} = 0.007939$$

$$c_2 = \frac{80(-0.5425) + 80(-0.9524) + 50 \times 1.0000}{766.107(80 \times 0.5425^2 + 80 \times 0.9524^2 + 50 \times 1.0000^2)} = -0.0006217$$

$$c_3 = \frac{80 \times 9.0365 + 80(-4.4910) + 50 \times 1.0000}{2149.901(80 \times 9.0365^2 + 80 \times 4.4910^2 + 50 \times 1.0000^2)} = 0.00002347$$

4. Los desplazamientos de cada masa en cada modo serán, por tanto,

$$u_{11} = 0.2004 \times 43.233 \times 0.007939 = 0.0688$$

$$u_{21} = 0.5424 \times 43.233 \times 0.007939 = 0.1862$$

$$u_{31} = 1.0000 \times 43.233 \times 0.007939 = 0.3432$$

$$u_{12} = (-0.5425) \times 36.111 \times (-0.0006217) = 0.0122$$

$$u_{22} = (-0.9524) \times 36.111 \times (-0.0006217) = 0.0214$$

$$u_{32} = 1.0000 \times 36.111 \times (-0.0006217) = -0.0225$$

$$u_{13} = 9.0365 \times 33.432 \times 0.00002347 = 0.0071$$

$$u_{23} = (-4.491) \times 33.432 \times 0.00002347 = -0.0035$$

$$u_{33} = 1.0000 \times 33.432 \times 0.00002347 = 0.00078$$

Handwritten notes at the top left of the page, including the word "Introduction" and several lines of illegible text.

Handwritten text in the middle of the page, possibly a title or a section header.

Handwritten text in the lower middle section of the page.

Handwritten text in the lower middle section of the page.

A large block of handwritten text in the lower half of the page, appearing to be a list or a detailed set of notes.



5. Las fuerzas cortantes sismicas en cada entrepiso pueden obtenerse como el producto de su rigidez por el desplazamiento relativo de los dos niveles que lo limitan:

Modo	Entrepiso	Cortante
1	3	$(0.3422 - 0.1862) 20 = 3.14$
	2	$(0.1862 - 0.0688) 50 = 5.87$
	1	$0.0688 \times 100 = 6.88$
2	3	$(0.0225 + 0.0214) 20 = 0.87$
	2	$(0.0214 - 0.0122) 50 = 0.46$
	1	$0.0122 \times 100 = 1.22$
3	3	$(0.00078 + 0.0035) 20 = 0.086$
	2	$(0.0035 + 0.0071) 50 = 0.53$
	1	$0.0071 \times 100 = 0.71$

6. Las fuerzas cortantes de diseño debidas a la superposición de los modos se obtienen en la tabla siguiente de acuerdo con el criterio de la suma de los máximos absolutos y con el de la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de los máximos.

Entrepiso	$R = \sum R_i$
3	$3.14 + 0.87 + 0.086 = 4.10$
2	$5.87 + 0.46 + 0.53 = 6.86$
1	$6.88 + 1.22 + 0.71 = 8.81$

$$R = \sqrt{\sum R_i^2}$$

3	$\sqrt{3.14^2 + 0.87^2 + 0.086^2} = 3.26$
2	$\sqrt{5.87^2 + 0.46^2 + 0.53^2} = 5.91$
1	$\sqrt{6.88^2 + 1.22^2 + 0.71^2} = 7.07$

7. En la tabla que sigue se calculan las cortantes estáticas y el 60 por ciento de las mismas.

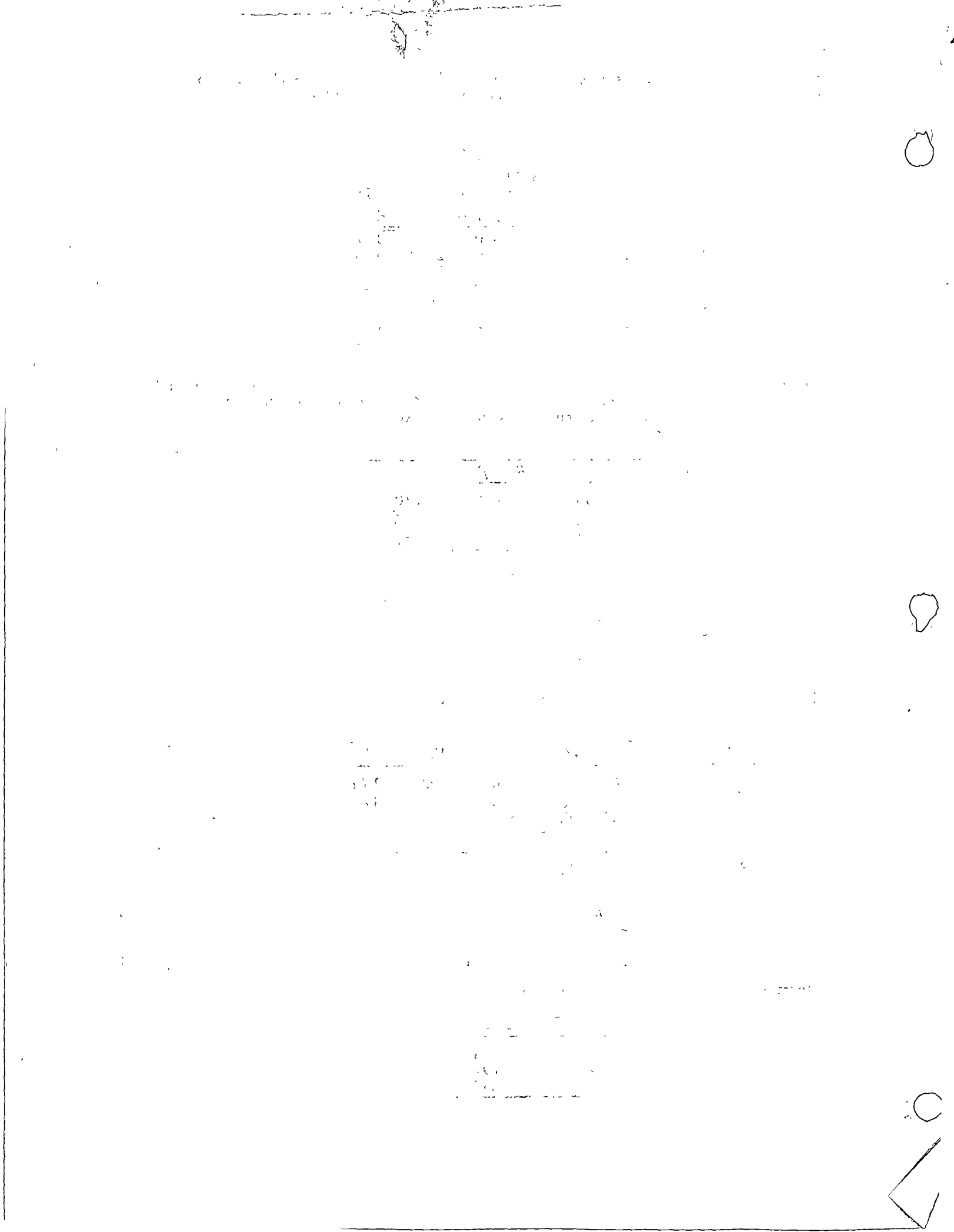
Nivel	$W_i$	$h_i$	$W_i h_i$	$F_i$	$V_i$	$0.6V_i$
3	50	10	500	4.57	4.57	2.74
2	80	7	560	5.12	9.69	5.81
1	80	4	320	2.92	12.61	7.57
0						
Sumas	210		1380			

$$F_i = \frac{W_i h_i}{\sum W_i h_i} c \sum W_i$$

$$F_i = 0.00913 W_i h_i$$

8. Las fuerzas cortantes de diseño serán, por tanto,

Entrepiso	Cortante
3	3.26
2	5.91
1	7.57



CENTRO DE EDUCACION CONTINUA  
DIVISION DE ESTUDIOS SUPERIORES  
FACULTAD DE INGENIERIA

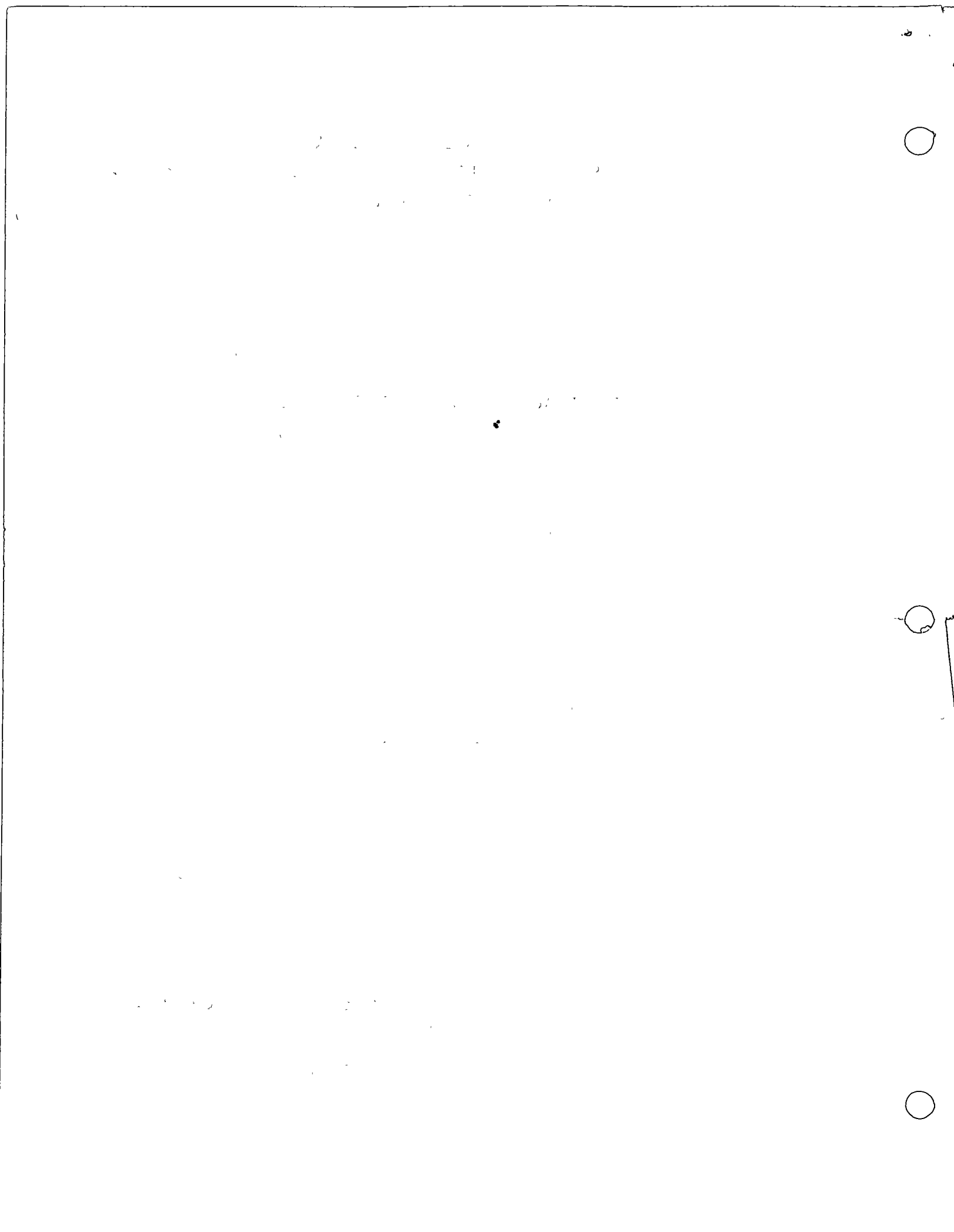
III CURSO INTERNACIONAL DE INGENIERIA SISMICA

DINAMICA ESTRUCTURAL

METODO  $\beta$  DE NEWMARK PARA SISTEMAS DE VARIOS GRADOS  
DE LIBERTAD ELASTICOS E INESLASTICOS

Dr. Octavio A. Rascón Ch.

Julio 1977





METODO  $\beta$  DE NEWMARK PARA SISTEMAS LINEALES DE VARIOS  
GRADOS DE LIBERTAD

EJEMPLO

$$\underline{K} = \begin{bmatrix} 10 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \quad \underline{M} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} ; \quad C_i = 0 \quad \text{para todo } i$$

$$\left. \begin{aligned} \dot{X}_{i+1} &= \dot{X}_i + (\ddot{X}_i + \ddot{X}_{i+1}) \frac{\Delta t}{2} \\ X_{i+1} &= X_i + \dot{X}_i \Delta t + \left(\frac{1}{2} - \beta\right) \ddot{X}_i (\Delta t)^2 + \beta \ddot{X}_{i+1} (\Delta t)^2 \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{PARA CADA} \\ \text{MASA O GRADO} \\ \text{DE LIBERTAD} \end{array}$$

$$\Delta t = 0.2 ; \quad \beta = 1/6$$

MOVIMIENTO DEL SUELO:  $X_0 = 1.2t$  ( $X_0$  EN CM Y  $t$  EN SEGUNDOS)

SI  $0 \leq t \leq 2$  SEG, Y  $X_0 = 4.8 - 1.2t$  SI  $0 \leq 2 \leq 4$  SEG

Y  $X_0 = 0$  SI  $t < 0$  O  $t > 4$  SEG

SI  $Y_1 = X_1 - X_0$  Y  $Y_2 = X_2 - X_0$

$$\underline{M} \ddot{\underline{Y}} + \underline{K} \underline{Y} = \underline{0} \rightarrow \underline{M} \ddot{\underline{Y}} + \underline{Q} = \underline{0} ; \quad \underline{Q} = \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix}$$

(PUESTO QUE  $\ddot{X}_0 = 0$ )

$$m_1 \ddot{Y}_1 + Q_1 = 0 \quad \rightarrow \quad \ddot{Y}_1 = -Q_1/m_1$$

$$m_2 \ddot{Y}_2 + Q_2 = 0 \quad \rightarrow \quad \ddot{Y}_2 = -Q_2/m_2$$

EN  $t=0$ ,  $Y_i=0$ ,  $\dot{Y}_i=0$ ,  $\ddot{Y}_i=0$

EN  $t=0.2$ , SUPONGAMOS  $\ddot{X}_1=1.35$  Y  $\ddot{X}_2=1.50 \frac{\text{CM}}{\text{SEG}^2}$

$$X_0 = 1.2 \times 0.2 = 0.24$$

1950

1951

1952

1953



PARA LA MASA 1:

$$\dot{X}_1 = 0 + (1.35 + 0) \frac{0.2}{2} = 0.135$$

$$X_1 = 0 + 0 + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6}\right)(0.2)^2 \times 0 + \frac{1}{6} \times 1.35 (0.2)^2 = 0.009 \text{ CM}$$

$$Y_1 = 0.009 - 0.24 = -0.231$$

PARA LA MASA 2:

$$\dot{X}_2 = 0 + (1.5 + 0) \frac{0.2}{2} = 0.15$$

$$X_2 = 0 + 0 + 0 + \frac{1}{6} \times 1.5 (0.2)^2 = 0.01$$

$$Y_2 = 0.01 - 0.24 = -0.23$$

$$\begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix} = Q = \begin{bmatrix} 10 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.231 \\ -0.23 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2.54 \\ -1.381 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{matrix} \ddot{X}_1 = -2.54/2 = 1.27 \ddot{Y}_1 \\ \ddot{X}_2 = -1.381/1 = 1.381 = \ddot{Y}_2 \end{matrix} \dots \rightarrow \text{ETC.}$$



TABLE 2.1, EXAMPLE ~~2.70~~

$t$ sec	$Q_1$ ton	$X_1$ cm/sec <sup>2</sup>	$X_1$ cm/sec	$X_1$ cm	$X_1 - X_{01}$ cm	$Q_2$ ton	$X_2$ cm/sec <sup>2</sup>	$X_2$ cm/sec	$X_2$ cm	$X_2 - X_{02}$ cm	$X_0$ cm
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0.2	2.540	1.350	0.135	0.0670	-0.2310	1.380	1.500	0.150	0.0100	-0.2300	0.24
0.2	2.546	1.270	0.127	0.0685	-0.2315	1.386	1.380	0.138	0.0092	-0.2308	0.24
0.2	2.546	1.273	0.127	0.0685	-0.2315	1.386	1.386	0.138	0.0092	-0.2308	0.24
0.4	4.548	+2.300	0.484	+0.0662	-0.4138	2.468	2.100	0.486	+0.0693	-0.4107	0.48
0.4	4.548	2.274	0.481	0.0660	-0.4140	2.455	2.468	0.523	0.0718	-0.4082	0.48
0.4	4.548	2.274	0.481	0.0660	-0.4140	2.455	2.455	0.522	0.0717	-0.4083	0.48
0.4	4.548	2.274	0.481	0.0660	-0.4140	2.455	2.455	0.522	0.0717	-0.4083	0.48
0.6	5.585	2.700	0.978	0.2105	-0.5095	2.960	3.200	1.088	0.2301	-0.4899	0.72
0.6	5.581	2.793	0.987	0.2111	-0.5089	2.967	2.960	1.064	0.2285	-0.4915	0.72
0.6	5.580	2.790	0.987	0.2111	-0.5089	2.966	2.967	1.065	0.2286	-0.4914	0.72
0.6	5.580	2.790	0.987	0.2111	-0.5089	2.966	2.966	1.065	0.2286	-0.4914	0.72
0.8	5.409	2.900	1.556	0.4650	-0.4950	2.790	2.980	1.660	0.5010	-0.4590	0.96
0.8	5.423	2.704	1.536	0.4637	-0.4963	2.798	2.790	1.641	0.4997	-0.4603	0.96
0.8	5.422	2.711	1.537	0.4638	-0.4962	2.797	2.798	1.642	0.4998	-0.4602	0.96
0.8	5.422	2.711	1.537	0.4638	-0.4962	2.797	2.797	1.642	0.4998	-0.4602	0.96
1.0	4.104	2.150	2.023	0.8216	-0.3784	1.977	2.200	2.142	0.8802	-0.3198	1.20
1.0	4.111	2.052	2.013	0.8210	-0.3790	1.985	1.977	2.120	0.8787	-0.3213	1.20
1.0	4.111	2.055	2.014	0.8210	-0.3790	1.985	1.985	2.121	0.8787	-0.3213	1.20
1.0	4.111	2.055	2.014	0.8210	-0.3790	1.985	1.985	2.121	0.8787	-0.3213	1.20
1.2	1.931	0.950	2.315	1.2575	-0.1825	0.712	0.700	2.390	1.3341	-0.1059	1.44
1.2	1.930	0.965	2.316	1.2576	-0.1824	0.712	0.712	2.391	1.3341	-0.1059	1.44
1.2	1.930	0.965	2.316	1.2576	-0.1824	0.712	0.712	2.391	1.3341	-0.1059	1.44
1.4	-0.653	-0.320	2.381	1.7316	0.0516	-0.735	-0.800	2.382	1.8165	0.1365	1.68
1.4	-0.652	-0.326	2.380	1.7315	0.0515	-0.735	-0.735	2.388	1.8169	0.1369	1.68
1.4	-0.652	-0.326	2.380	1.7315	0.0515	-0.735	-0.735	2.388	1.8169	0.1369	1.68
1.6	-3.083	-1.500	2.197	2.1932	0.2732	-2.026	-2.100	2.104	2.2707	0.3507	1.92
1.6	-3.080	-1.541	2.193	2.1929	0.2729	-2.029	-2.026	2.111	2.2712	0.3512	1.92
1.6	-3.080	-1.540	2.193	2.1929	0.2729	-2.029	-2.029	2.111	2.2712	0.3512	1.92
1.8	-4.830	-2.500	1.789	2.5943	0.4343	-2.869	-2.900	1.618	2.6471	0.4871	2.16
1.8	-4.836	-2.415	1.797	2.5949	0.4349	-2.871	-2.869	1.621	2.6473	0.4873	2.16
1.8	-4.836	-2.418	1.797	2.5949	0.4349	-2.871	-2.871	1.621	2.6473	0.4873	2.16
2.0	-5.547	-2.800	1.275	2.9034	0.5034	-3.069	-3.000	1.034	2.9132	0.5132	2.40
2.0	-5.549	-2.773	1.278	2.9036	0.5036	-3.068	-3.069	1.027	2.9127	0.5127	2.40
2.0	-5.549	-2.774	1.278	2.9036	0.5036	-3.068	-3.068	1.027	2.9127	0.5127	2.40



TABLE 2.1, EXAMPLE 2.70

(Continued)

sec	$Q_1$ ton	$\ddot{x}$ cm/sec <sup>2</sup>	$\dot{x}$ cm/sec	$x_1$ cm	$x_1 - x_0$ cm	$Q_2$ ton	$\ddot{x}$ cm/sec <sup>2</sup>	$\dot{x}$ cm/sec	$x_2$ cm	$x_2 - x_0$ cm	$x_0$ cm
2.2	-10.156	-5.200	0.481	3.0875	0.9275	-5.332	-5.460	0.174	3.0408	0.8508	2.16
2.2	-10.167	-5.078	0.493	3.0883	0.9283	-5.337	-5.332	0.187	3.0417	0.8817	2.16
2.2	-10.165	-5.083	0.493	3.0883	0.9283	-5.337	-5.337	0.186	3.0417	0.8817	2.16
2.4	-12.578	-6.900	-0.705	3.0731	1.1531	-6.386	-6.200	-0.968	2.9665	1.0465	1.92
2.4	-12.617	-6.289	-0.644	3.0772	1.1572	-6.383	-6.386	-0.987	2.9652	1.0452	1.92
2.4	-12.615	-6.309	-0.646	3.0770	1.1570	-6.383	-6.383	-0.986	2.9652	1.0452	1.92
2.4	-12.615	-6.308	-0.646	3.0770	1.1570	-6.383	-6.383	-0.986	2.9652	1.0452	1.92
2.6	-12.388	-6.200	-1.897	2.8225	1.1425	-5.958	-6.000	-2.224	2.6429	0.9629	1.68
2.6	-12.388	-6.194	-1.896	2.8225	1.1425	-5.959	-5.958	-2.220	2.6432	0.9632	1.68
2.6	-12.388	-6.194	-1.896	2.8225	1.1425	-5.959	-5.959	-2.220	2.6432	0.9632	1.68
2.8	-9.573	-4.300	-2.945	2.3320	0.8920	-4.155	-4.100	-3.206	2.0925	0.6525	1.44
2.8	-9.540	-4.787	-2.994	2.3288	0.8888	-4.150	-4.155	-3.212	2.0921	0.6521	1.44
2.8	-9.541	-4.770	-2.992	2.3289	0.8889	-4.150	-4.150	-3.211	2.0921	0.6521	1.44
2.8	-9.541	-4.770	-2.992	2.3289	0.8889	-4.150	-4.150	-3.211	2.0921	0.6521	1.44
3.0	-4.687	-2.500	-3.719	1.6502	0.4502	-1.376	-1.400	-3.766	1.3853	0.1853	1.20
3.0	-4.698	-2.343	-3.703	1.6513	0.4513	-1.378	-1.376	-3.764	1.3854	0.1854	1.20
3.0	-4.698	-2.349	-3.704	1.6513	0.4513	-1.378	-1.378	-3.764	1.3854	0.1854	1.20
3.2	1.090	0.800	-3.859	0.8845	-0.0755	1.748	1.700	-3.732	0.6255	-0.3345	0.96
3.2	1.106	0.545	-3.884	0.8828	-0.0772	1.748	1.748	-3.727	0.6259	-0.3341	0.96
3.2	1.105	0.553	-3.883	0.8829	-0.0771	1.748	1.748	-3.727	0.6259	-0.3341	0.96
3.2	1.105	0.553	-3.883	0.8829	-0.0771	1.748	1.748	-3.727	0.6259	-0.3341	0.96
3.4	6.608	3.600	-3.468	0.1377	-0.5823	4.506	4.700	-3.082	-0.0649	-0.7849	0.72
3.4	6.629	3.304	-3.438	0.1357	-0.5843	4.515	4.506	-3.101	-0.0662	-0.7862	0.72
3.4	6.628	3.314	-3.439	0.1358	-0.5842	4.515	4.515	-3.100	-0.0661	-0.7861	0.72
3.4	6.628	3.314	-3.439	0.1358	-0.5842	4.515	4.515	-3.100	-0.0661	-0.7861	0.72
3.6	10.578	5.400	-2.568	-0.4718	-0.9518	6.251	6.900	-1.958	-0.5799	-1.0599	0.48
3.6	10.589	5.289	-2.579	-0.4725	-0.9525	6.277	6.251	-2.023	-0.5842	-1.0642	0.48
3.6	10.589	5.299	-2.577	-0.4725	-0.9525	6.277	6.277	-2.020	-0.5841	-1.0641	0.48
3.6	10.589	5.299	-2.577	-0.4725	-0.9525	6.277	6.277	-2.020	-0.5841	-1.0641	0.48
3.8	12.257	6.200	-1.427	-0.8760	-1.1160	6.612	6.800	-0.712	-0.8591	-1.0991	0.24
3.8	12.264	6.130	-1.434	-0.8764	-1.1164	6.618	6.612	-0.731	-0.8603	-1.1003	0.24
3.8	12.264	6.132	-1.434	-0.8764	-1.1164	6.618	6.618	-0.730	-0.8603	-1.1003	0.24
4.0	11.323	5.600	-0.260	-1.0441	-1.0441	5.454	5.400	0.472	-0.8821	-0.8821	0
4.0	11.319	5.66	-0.255	-1.0437	-1.0437	5.453	5.454	0.477	-0.8817	-0.8817	0
4.0	11.319	5.660	0.255	-1.0437	-1.0437	5.453	5.453	0.477	-0.8817	-0.8817	0
4.2	10.705	5.350	0.846	-0.9836	-0.9836	5.330	5.300	1.549	-0.8691	-0.8691	0
4.2	10.705	5.352	0.846	-0.9836	-0.9836	5.329	5.330	1.552	-0.8692	-0.8692	0



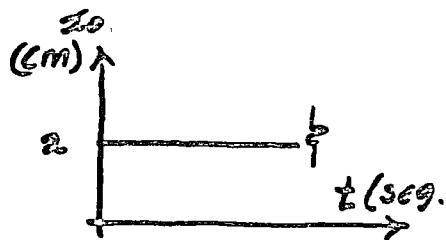
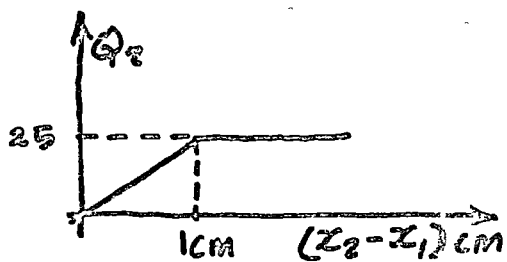
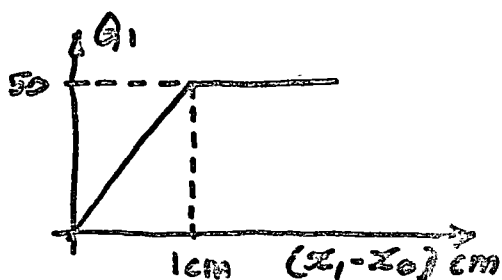
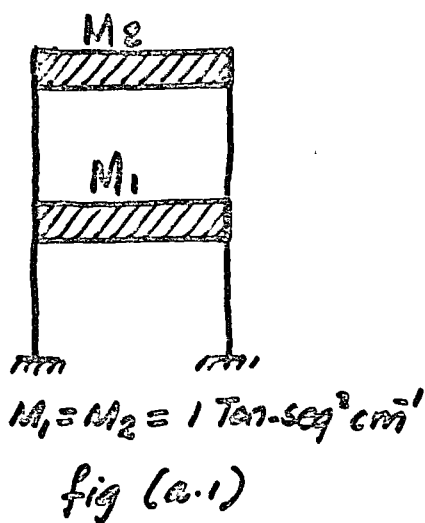


# Método $\beta$ de Newmark

Comportamiento inelástico

## Ejemplo

Cada masa rígida del sistema de la fig. (a.1) pesa 9.81 Ton (métricas). Ambos resortes son elasto plásticos con rigideces iniciales de 50 y 25 Ton/cm. para el primero y segundo entrepiso respectivamente. Calcúlese numéricamente el desplazamiento máximo absoluto, en valor numérico, del primer piso como respuesta a un desplazamiento brusco de 2 cm. del apoyo ( $z_0 = 0$  para  $t \leq 0$ ,  $z_0 = 2$  cm para  $t > 0$ ).



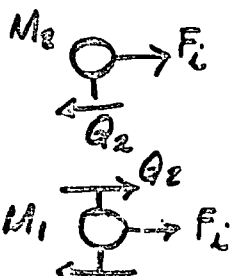
Ecuaciones del movimiento

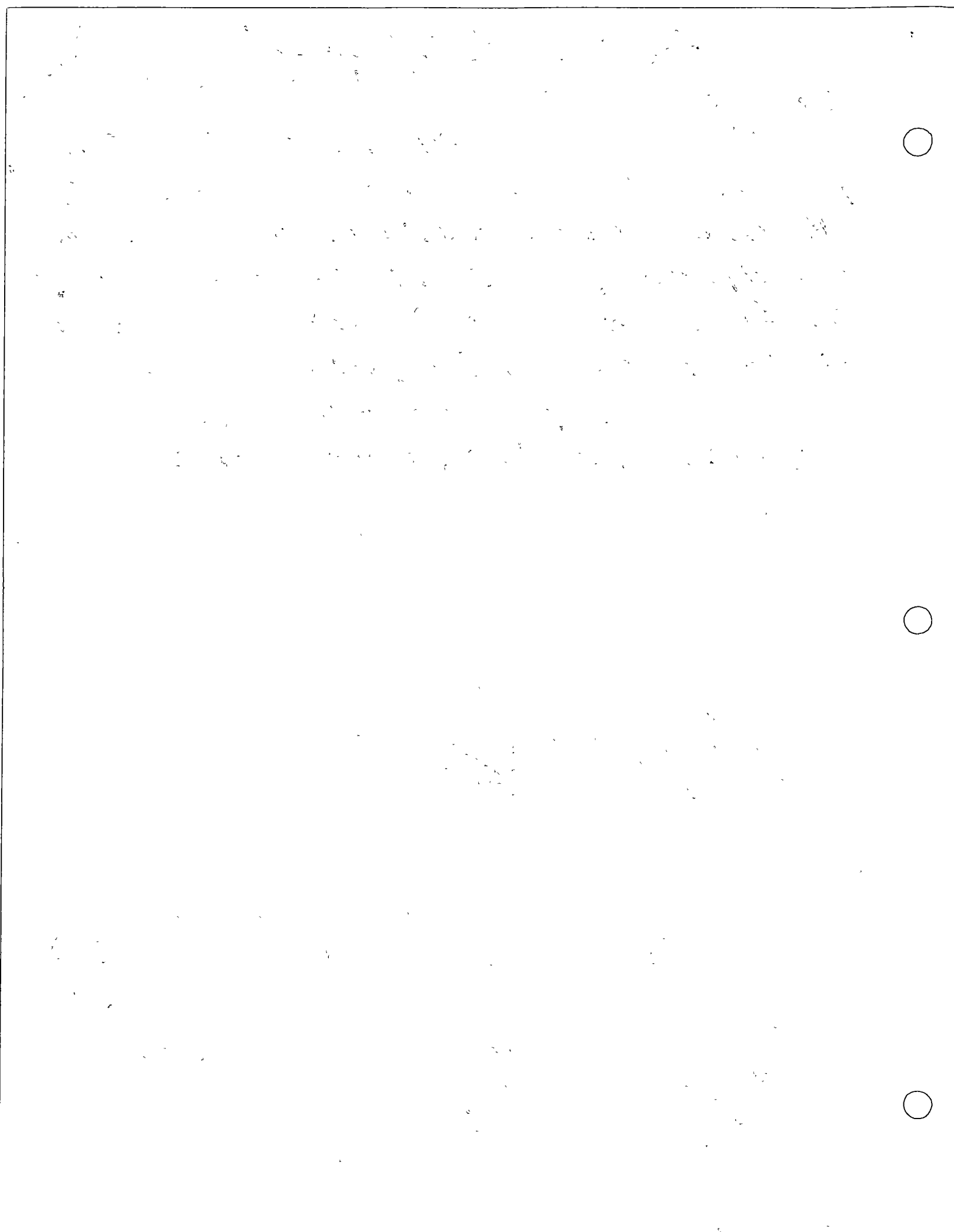
$$M_1 \ddot{z}_1 + Q_1 - Q_2 = 0 \quad (a.1)$$

$$M_2 \ddot{z}_2 + Q_2 = 0 \quad (a.2)$$

como se puede concluir de la figura a.4.

$$\underline{M} \underline{\ddot{z}} + \underline{Q} = \underline{0}$$





Procedimiento iterativo :

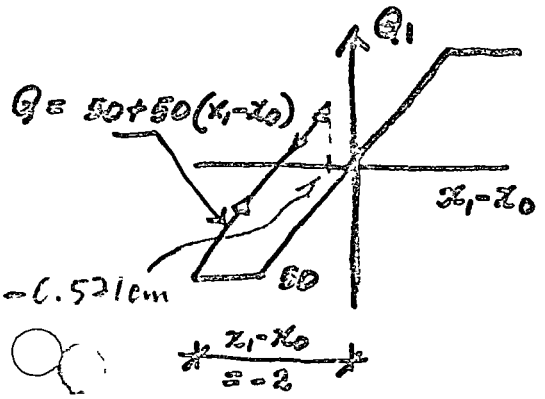
1. Supondremos los valores de  $Q_1$  y  $Q_2$
  2. Calculamos  $\ddot{x}_1$  y  $\ddot{x}_2$  de (a.1) y (a.2).
  3. Obtenemos  $\dot{x}_1$  y  $x_1$  ;  $\dot{x}_2$  y  $x_2$  con las expresiones del  $\beta$ -Newmark.
  4. Obtenemos  $Q_1$  y  $Q_2$  en función de  $(x_1 - x_0)$  y  $(x_2 - x_1)$  respectivamente.
- Si las  $Q$  calculadas difieren de las supuestas se repite el ciclo.

Expresiones del  $\beta$ -Newmark para  $\beta = \frac{1}{6}$  y  $\Delta t = 0.1 \text{ seg.}$

$$\begin{aligned} \ddot{x}_{i+1} &= \ddot{x}_i + \frac{0.1}{2} (\ddot{x}_i + \ddot{x}_{i+1}) \\ &= \ddot{x}_i + 0.05(\ddot{x}_i + \ddot{x}_{i+1}) \dots \dots \dots (a.3) \end{aligned}$$

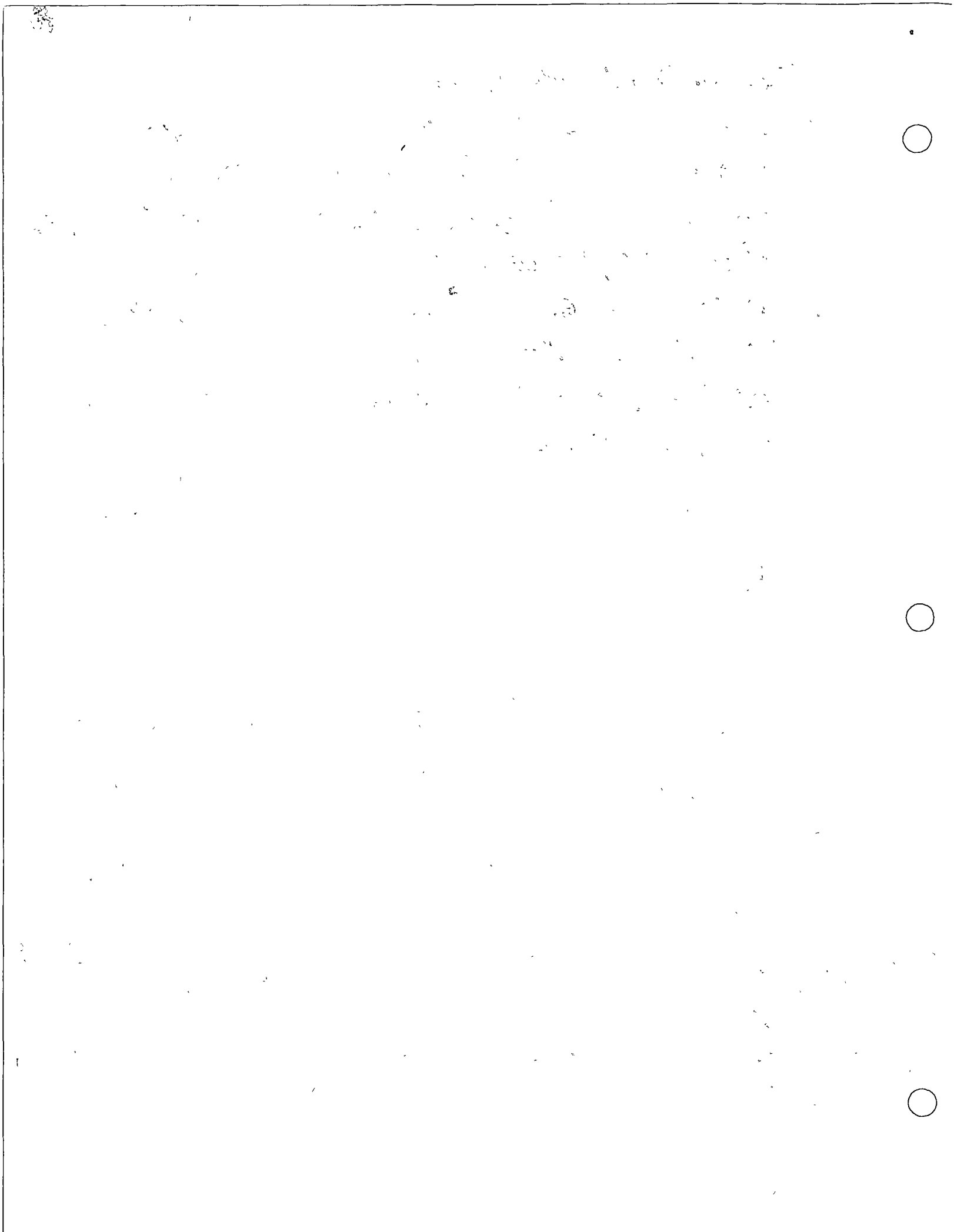
$$\begin{aligned} x_{i+1} &= x_i + 0.1 \dot{x}_i + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6}\right) (0.1)^2 \ddot{x}_i + (0.1)^2 \left(\frac{1}{6}\right) \ddot{x}_{i+1} \\ &= x_i + 0.1 \dot{x}_i + \frac{10^{-2}}{3} \ddot{x}_i + \frac{10^{-2}}{6} \ddot{x}_{i+1} \dots \dots \dots (a.4) \end{aligned}$$

Expresiones para la determinación de  $Q_1$  y  $Q_2$ .



$$Q_1 = \begin{cases} -50 \text{ Ton} & \text{en } t = 0^+ \dots \dots (a.5) \\ -50 + 50x_1 & \text{en } t \geq 0 \text{ (descarga)} \end{cases}$$

$$Q_2 = 25 (x_2 - x_1) \dots \dots \dots (a.6)$$



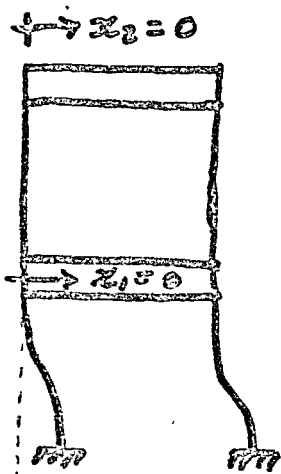
Para  $t = 0^+$ ,  $x_0 = 2.0$ ,  $q_1 = -50$ ,  $q_2 = 0.0$   
 aplicando las ec a.1 y a.2 obtenemos

$$\ddot{x}_1 = \frac{q_2 - q_1}{M} = 50 \quad ; \quad \ddot{x}_2 = -\frac{q_1}{M} = 0.0$$

$$\dot{x}_1 = 0 \quad ; \quad \dot{x}_2 = 0 \quad ; \quad \Rightarrow x_1 - x_0 = -2$$

$$\dot{x}_2 = 0 \quad ; \quad \dot{x}_2 = 0 \quad ; \quad \Rightarrow x_2 - x_1 = 0$$

como se muestra en la siguiente figura



Para  $t = 0.1$  seg.

1<sup>er</sup> c.

$$q_1 = -50, \quad q_2 = 0.0$$

$$\ddot{x}_1 = 50, \quad \ddot{x}_2 = 0.0$$

$$\dot{x}_1 = 0 + 0.05(50 + 50) = 5$$

$$x_1 = 0 + 0.1(0) + \frac{10^{-2}}{3}(50) + \frac{10^{-2}}{6}(50)$$

$$= 0.25$$

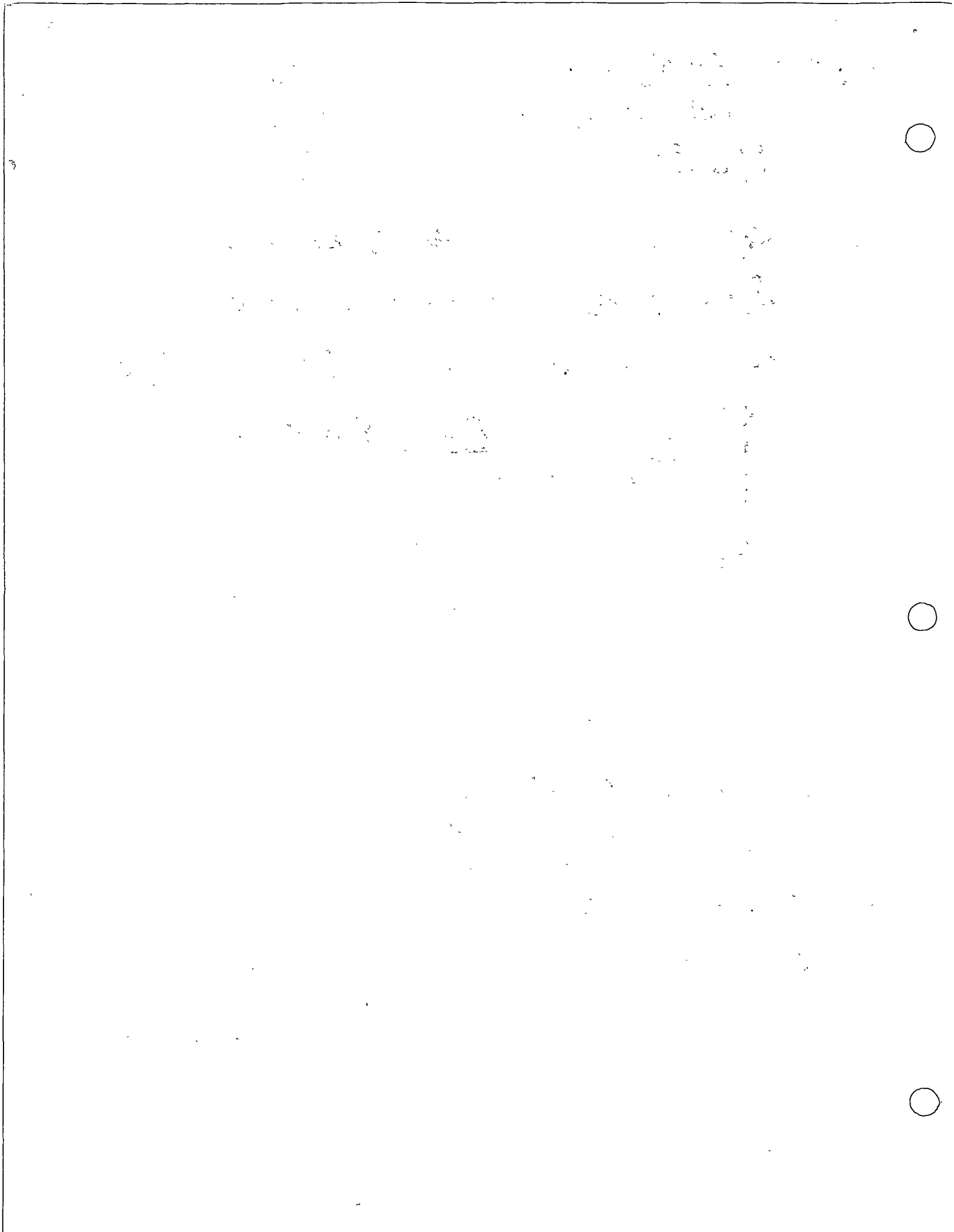
$$\dot{x}_2 = 0 + 0.05(0 + 0) = 0.0$$

$$x_2 = 0 + 0.1(0) + \frac{10^{-2}}{3}(0) + \frac{10^{-2}}{6}(0) = 0.0$$

$$q_1 = -50 + 50x_1 = -37.50$$

$$q_2 = 25(x_2 - x_1) = 25(0 - 0.25) = -6.25$$

en esta forma se contruye la siguiente tabla



t	2	$Q_1$	$Q_2$	$x_1^0$	$x_2^0$	$x_1^1$	$x_1$	$x_2$	$x_2$
0.0	2.0	-50.00	0.000	50.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.1	2.0	-50.00	0.000	50.000	0.000	5.000	0.250	0.000	0.000
		-37.500	-6.25	37.500	0.313	4.375	0.229	0.313	0.010
		-33.542	-5.465	33.392	0.273	4.115	0.220	0.273	0.009
		-32.976	-5.272	33.511	0.264	4.176	0.223	0.264	0.009
		-32.874	-5.355	33.602	0.268	4.180	0.223	0.269	0.009
		-32.867	-5.352	33.512	0.269	4.176	0.223	0.268	0.009
0.2	2.0	-20.00	-10.000	10.000	1.036	6.352	0.769	1.036	0.070
		-11.552	-12.467	1.552	1.409	5.429	0.755	1.409	0.083
		-12.256	-16.806	-5.211	1.376	5.591	0.744	1.376	0.082
		-12.820	-16.559	-3.986	1.364	5.652	0.746	1.364	0.081
		-10.717	-16.619	-3.842	1.367	5.660	0.746	1.367	0.081
		-12.705	-16.616	-3.914	1.366	5.656	0.746	1.366	0.081
0.3	2.0	10.000	-25.000	-25.000	3.447	3.710	1.240	3.447	0.315
		12.010	-23.134	-27.010	3.354	3.610	1.237	3.354	0.312
		11.843	-23.136	-24.977	3.354	3.711	1.240	3.354	0.312
		12.012	-23.211	-25.148	3.357	3.703	1.240	3.357	0.312
		11.998	-23.208	-25.209	3.357	3.700	1.240	3.357	0.312
0.4	2.0	25.000	-25.000	-50.000	5.767	-0.56	1.409	5.767	0.767
		21.993	-16.057	-33.993	5.350	0.090	1.431	5.320	0.752
		21.649	-16.980	-37.606	5.366	0.059	1.430	5.366	0.753
		21.498	-16.916	-38.478	5.363	0.016	1.429	5.363	0.753
		21.425	-16.894	-39.341	5.362	0.022	1.429	5.362	0.753
		21.437	-16.895	-39.331	5.362	0.023	1.429	5.362	0.753

La velocidad se hizo casi nula  
por lo cual el desplazamiento  
máximo será de:

$$(x_1)_{\text{máx}} = 1.43 \text{ cm.}$$

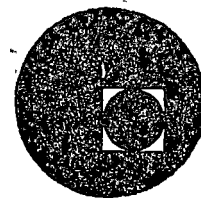
$$\text{Desplazamiento Relativo} = x_1 - x_0 = -0.571 \text{ cm}$$







centro de educación continua  
división de estudios superiores  
facultad de ingeniería, unam



111 CURSO INTERNACIONAL DE INGENIERIA SISMICA

DINAMICA ESTRUCTURAL



PROF. DR. PORFIRIO BALLESTEROS

JULIO, 1977.

centro de educação profissional  
divisão de educação de jovens e adultos  
de Brasília

SECRETARIA DE EDUCAÇÃO PROFISSIONAL

DEPARTAMENTO DE EDUCAÇÃO DE Jovens e ADULTOS

SECRETARIA DE EDUCAÇÃO PROFISSIONAL

SECRETARIA DE EDUCAÇÃO PROFISSIONAL

DEPARTAMENTO DE EDUCAÇÃO DE Jovens e ADULTOS

## METODO DE ANALISIS POR ELEMENTOS FINITOS.

INTRODUCCION.

El ingeniero en la busca de los valores numéricos adecuados para describir su proceso de diseño, se encontraba generalmente con formulaciones matemáticas difíciles. Por ejemplo, considerando el simple caso de teoría de flexión de placas, bajo las hipótesis de pequeñas deformaciones y que las secciones planas permanecen planas después de la deformación, la ecuación diferencial que gobierna el análisis para un material elástico lineal homogéneo e isotrópico es

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{q}{D} \quad (1)$$

donde  $w$  es la deflexión en el punto  $(x, y)$ ,  $q$  es la intensidad de la carga en el punto  $(x, y)$ , y  $D = \frac{E h^3}{12 (1 - \nu^2)}$  es la rigidez flexionante de la placa la cual depende del modulo de elasticidad  $E$ , el espesor de la placa  $h$  y la relación de Poisson  $\nu$ . En la Fig. 1 se presenta un elemento diferencial de la placa y las acciones y reacciones sobre él. Combinando la flexión simple en dos direcciones se obtiene para los momentos y cortantes por unidad de longitud de placa lo siguiente:

1. Introduction

The first part of the report deals with the general situation of the country.

The second part is devoted to the analysis of the economic situation.

The third part contains the results of the survey.

The fourth part discusses the conclusions and recommendations.

The fifth part contains the statistical data.

The sixth part is the conclusion.

### CONCLUSION

The results of the survey show that the country is in a state of economic crisis.

The main reasons for this are the high inflation rate and the unemployment rate.

The government should take measures to reduce inflation and create jobs.

It is recommended that the government should increase the minimum wage.

The government should also improve the social security system.

The government should also improve the education system.

### REFERENCES

1. World Bank, 1998. *World Development Report*. Washington, DC: World Bank.

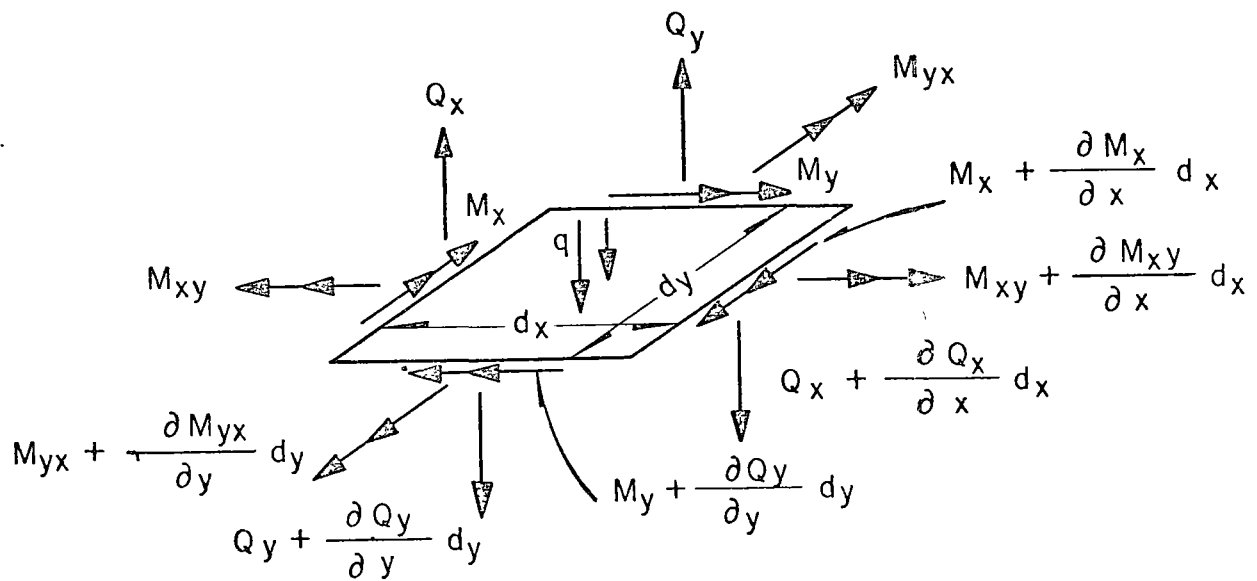
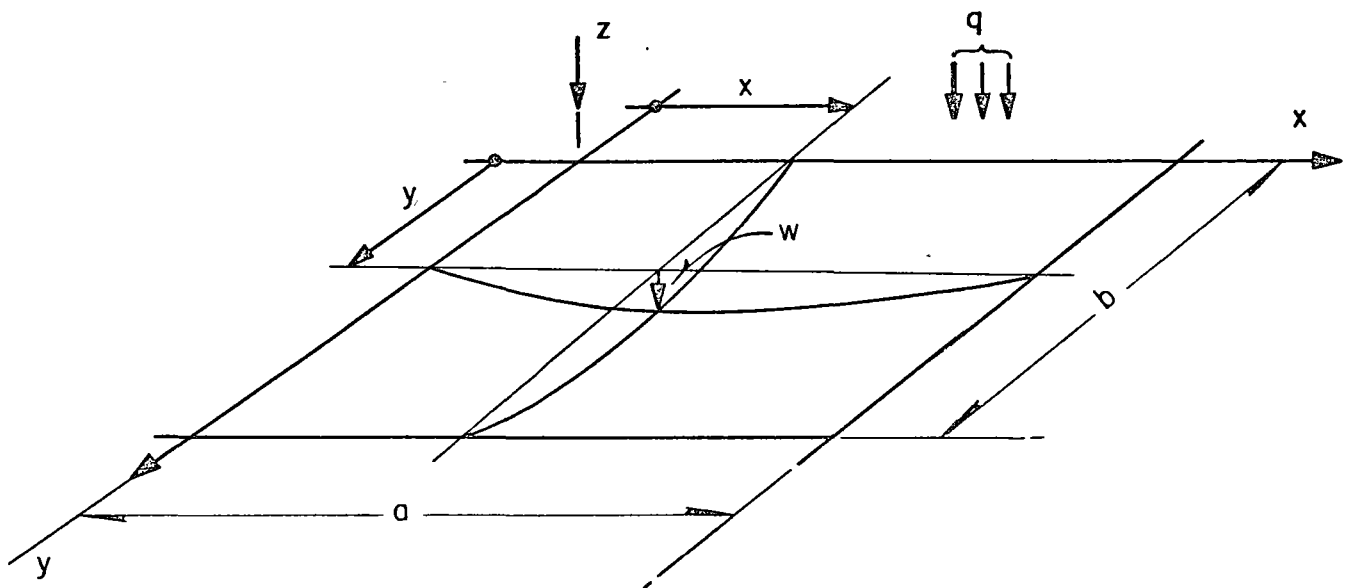
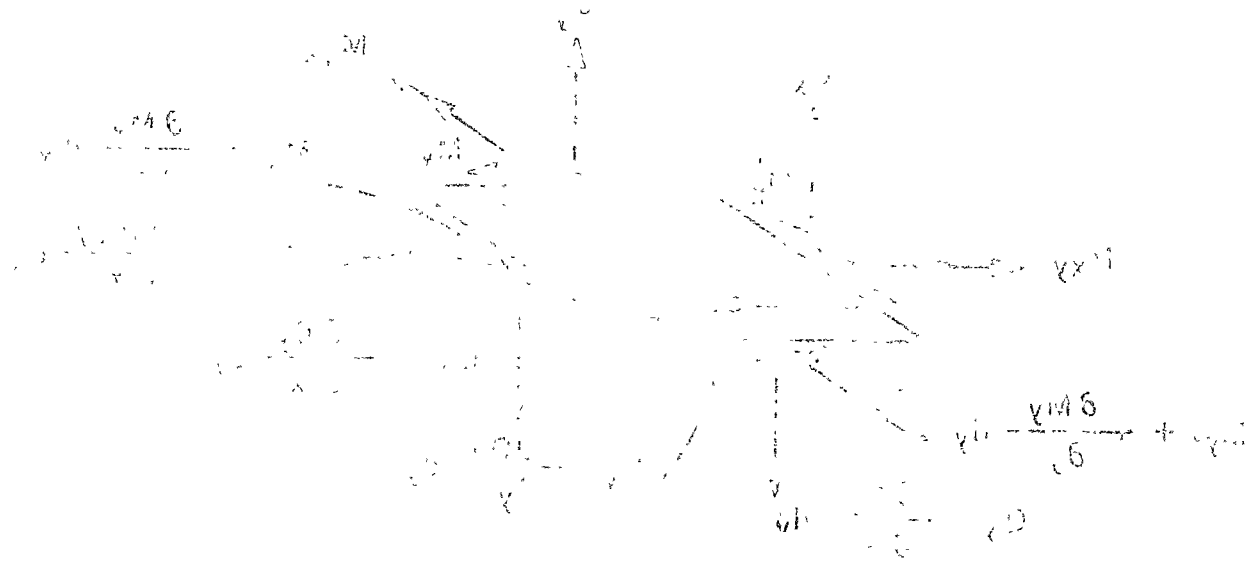
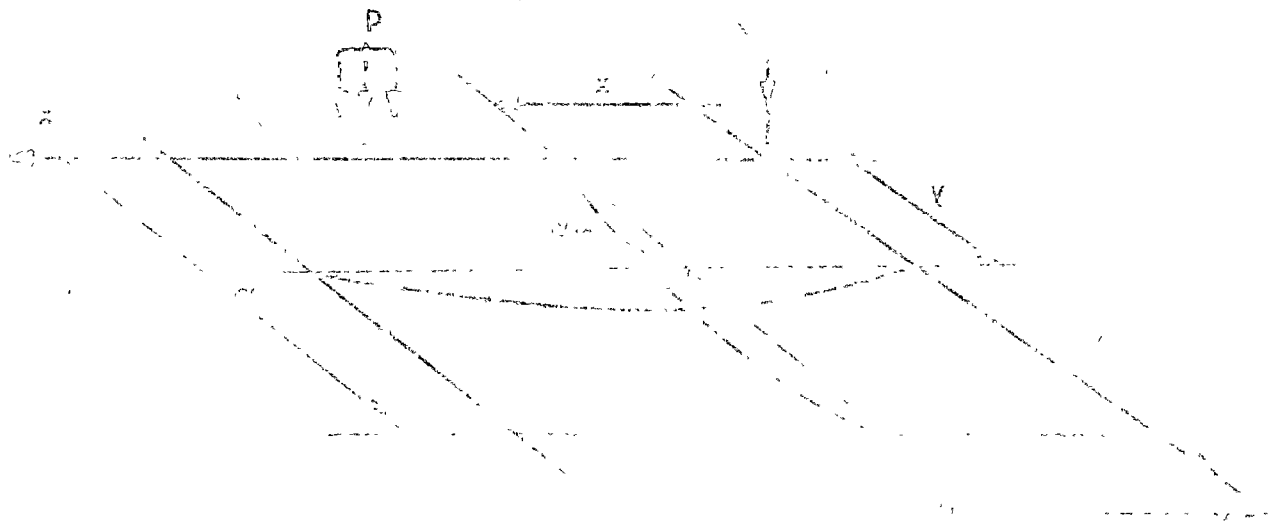


Fig 1 Placa rectangular  $a b$  . Fuerzas y momentos unitarios sobre elemento  $d_x d_y$



01701 100 1100 e of 2000T 11 11 11

11 11 11 11 11 11 11 11 11 11

$$\begin{aligned}
 M_x &= -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \\
 M_y &= -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \\
 M_{xy} &= -D (1 - \nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \\
 Q_x &= -D \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \\
 Q_y &= -D \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)
 \end{aligned} \tag{2}$$

Para el caso particular de la placa libremente apoyada, y rectangular, -  
cuyas condiciones en la frontera ( Fig. 2 ) son:

$$(w)_{x=a} = \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)_{x=a} = 0 \tag{3}$$

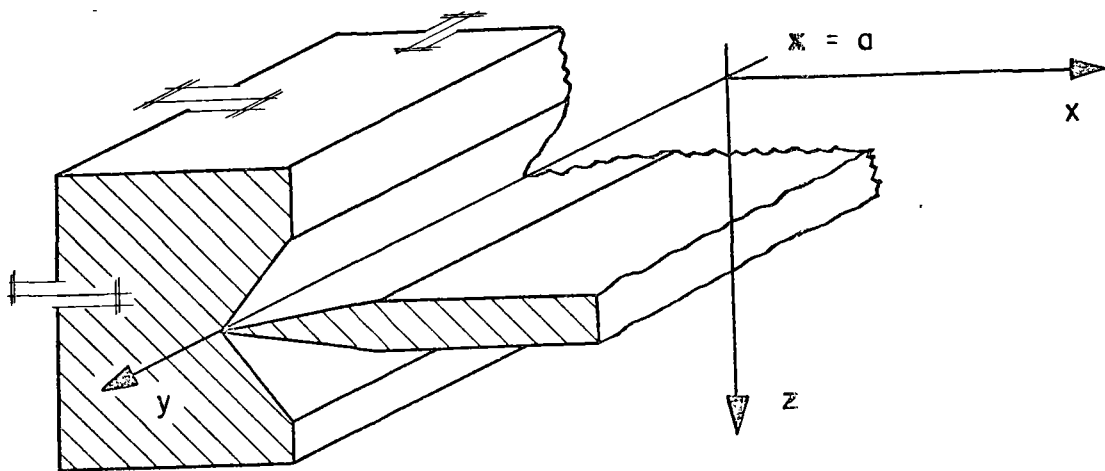


Fig 2 Condiciones en la frontera  $x = a$  de una placa libremente apoyada

(S)



Navier en 1820 presentó a la Academia Francesa de Ciencias, la solución representando la carga  $q(x, y)$ , por medio de una serie trigonométrica doble

$$q(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} \operatorname{Sen} \frac{m\pi}{a} x \operatorname{Sen} \frac{n\pi}{b} y \quad (4)$$

substituyete (4) en (1) y considerando las propiedades de ortogonalidad de las series trigonométricas obtiene la solución de la ecuación diferencial bi-armónica (1) como

$$w(x, y) = \frac{1}{\pi^4 D} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{mn}}{\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)^2} \operatorname{Sen} \frac{m\pi}{a} x \operatorname{Sen} \frac{n\pi}{b} y \quad (5)$$

en donde el coeficiente  $a_{mn}$  viene expresado por

$$a_{mn} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b q(x, y) \operatorname{Sen} \frac{m\pi}{a} x \operatorname{Sen} \frac{n\pi}{b} y \, dx \, dy \quad (6)$$

El procedimiento de Navier consiste en lo siguiente: Conocida la función de carga  $q(x, y)$ , se substituye en (6) y se obtiene el coeficiente  $a_{mn}$  el cual nuevamente se substituye en (5) y se obtiene la deflexión  $w(x, y)$ , y por medio las ecuaciones (2) se obtienen los momentos y cortantes .

Es importante observar que las limitaciones de Navier se refieren a una placa rectangular libremente apoyada y con una función de carga  $q(x, y)$  impar con respecto a  $x$ , y con respecto a  $y$ , es decir,  $q(x, y) = -q(-x, y)$  y

$q(x, y) = -q(x, -y)$  , Si la función fuese par, la representación de

$q(x, y)$  sería mediante una serie de cosenos, y si  $q(x, y)$  fuese una función cual

100-100000-100

100-100000-100

100-100000-100

100-100000-100

100-100000-100

100-100000-100

100-100000-100

100-100000-100

100-100000-100

100-100000-100

100-100000-100

100-100000-100

100-100000-100

100-100000-100

quiera, se representaría mediante una serie trigonométrica doble completa de senos y cosenos, y se tendrían problemas en satisfacer las condiciones en la frontera. Generalmente la convergencia de la serie (5) es lenta, y en algunos casos es necesario considerar más de 500 términos para asegurar la solución correcta.

Posteriormente en 1900 M. Levy cambia de posición los ejes coordenados ( Fig. 3 ) y utiliza una serie trigonométrica simple de la forma

$$w(x,y) = \sum_{m=1}^{\infty} f_m(y) \text{ Sen } \frac{m\pi}{a} x \quad (7)$$

El procedimiento de Levy consiste en substituir (7) en (1) obteniendo una ecuación diferencial lineal de cuarto orden en  $f_m(y)$  con coeficientes constantes no homogénea con la cual ya es posible satisfacer diferentes condiciones en la frontera  $y = \pm \frac{b}{2}$ , pero continua limitado a una placa rectangular libremente apoyada en las fronteras  $x = 0$  y  $x = a$ .

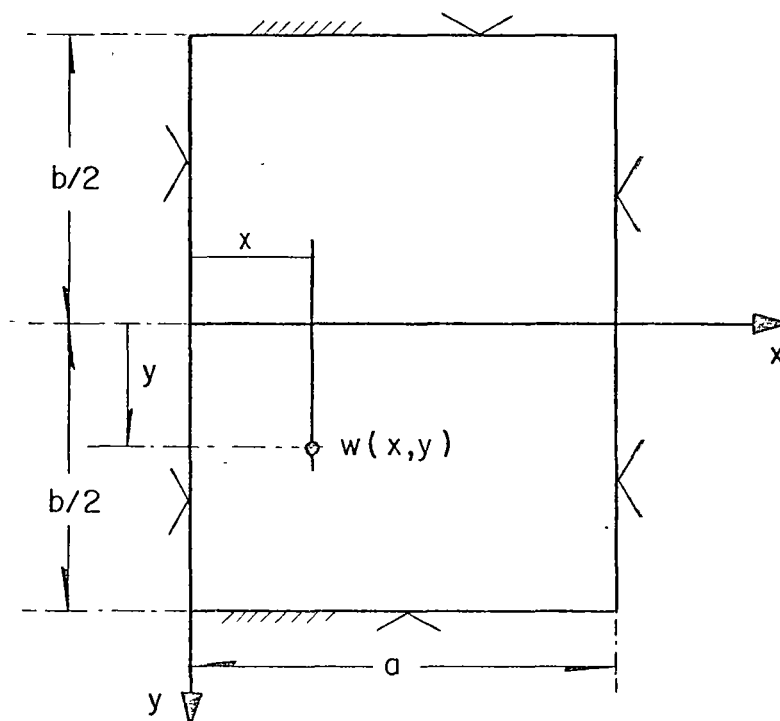


Fig. 3. Posición de ejes en la solución de M. Levy (1900)



Se considera un sistema de vigas y columnas... (text is mirrored and difficult to read)

$$w(x,y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \quad (1)$$

(1) y (2) se sustituyen en la ecuación (3) para obtener... (text is mirrored and difficult to read)

Las limitaciones de análisis tan restringidas, como los ejemplos anteriores, aparecían en innumerables problemas de ingeniería, lo cual originó el principio de los métodos numéricos, el cual presenta dos etapas de desarrollo. Antes de la época de las computadoras, donde representa un importante papel el Prof. Southwell del Colegio Imperial de Inglaterra, desarrollando y aplicando los métodos numéricos de relajación y diferencias finitas, superando las limitaciones restringidas de los métodos analíticos de solución.

Durante la era de las computadoras digitales, el método de análisis por elementos finitos ha obtenido gran popularidad, puesto que en este procedimiento como resultado de la discretización del medio por analizar, se obtienen sistemas grandes de ecuaciones algebraicas lineales simultáneas, lo cual actualmente su solución no representa ningún problema. Por ejemplo, en el caso de análisis elástico lineal de placas, podemos tener cualquier condición de apoyo, de geometría y de cargas, prácticamente se eliminan la mayoría de las restricciones de las soluciones analíticas mencionadas, el problema más importante es verificar adecuadamente su convergencia.

El primer trabajo referente al método se debe a Hrenikoff Ref. 1 publicado en 1941, y el segundo a McHenry publicado en 1943 en ambos trabajos ( Fig. 4 ) se verifican soluciones de problemas de elasticidad bidimensional en estado plano de esfuerzos, discretizando el medio y buscando la analogía con la solución estructural.

Posteriormente en 1949 Newmark, en su libro de Métodos Numéricos - - Ref. 3 , presenta los métodos de Hrenikoff y McHenry. Sin embargo, el

...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

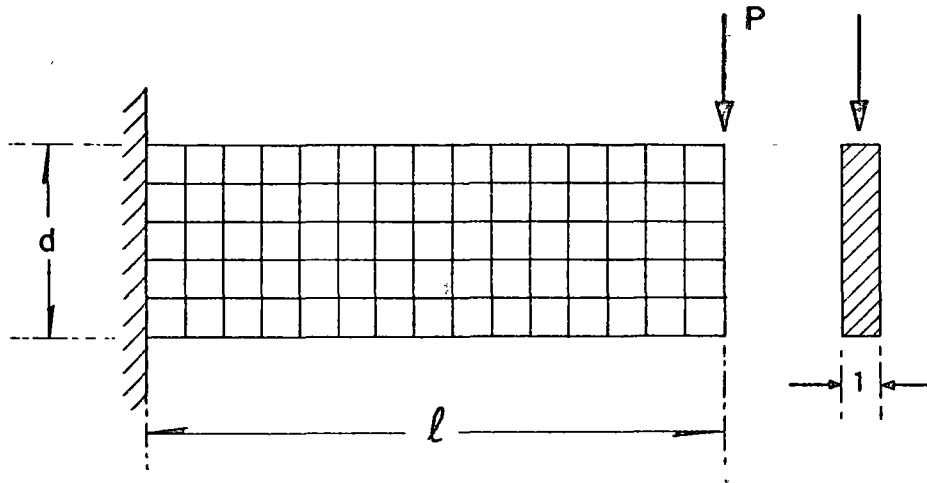


Fig. 4 Primera solución presentada por Hrenikoff en 1941.

crédito de aplicarlo a medios continuos es de Turner, Clough, Martin y Topp Ref. 5 , y no es, sino hasta 1960 con Clough, Ref. 6 nace por primera vez el nombre mágico de "Elemento Finito" , derivando más correctamente las propiedades básicas del elemento triangular y el rectangular, y el hecho de que en el mismo tiempo la computadora comienza a ser una herramienta muy efectiva, conduce rápidamente a la solución numérica de problemas elástico lineales complejos, en los cuales una solución analítica no era posible.

Se inician la derivación de las propiedades de rigidez de los elementos finitos, el campo de desplazamientos en el medio se expresa en función de los desplazamientos nodales del elemento, satisfaciendo continuidad, las fuerzas internas se definen aplicando el principio del trabajo virtual, la identidad de este proceso con el de minimizar la energía potencial total , o sea, el proceso de Rayleigh-Ritz

Ref. 7 es obvia. El desarrollo anterior se acentúa en el campo de la Mecánica de Sólidos y posteriormente Zienkiewicz Ref. 13 y Wilson Ref. 14 lo aplican en Mecánica de fluidos y en problemas de análisis de conducción de calor.



Fig. 4. Reinforcement solution for wall 10 on 10/11.

The reinforcement solution for wall 10 on 10/11 is shown in Fig. 4. The wall is 10 m high and 11 m wide. The reinforcement consists of a grid of horizontal and vertical bars. The horizontal bars are spaced at 200 mm and the vertical bars are spaced at 200 mm. The wall is supported by a foundation. The reinforcement is shown in a cross-section and a plan view. The cross-section shows the wall and the reinforcement bars. The plan view shows the grid of reinforcement bars. The dimensions 'a' and 'b' are indicated in the diagram.

The reinforcement solution for wall 10 on 10/11 is shown in Fig. 4. The wall is 10 m high and 11 m wide. The reinforcement consists of a grid of horizontal and vertical bars. The horizontal bars are spaced at 200 mm and the vertical bars are spaced at 200 mm. The wall is supported by a foundation. The reinforcement is shown in a cross-section and a plan view. The cross-section shows the wall and the reinforcement bars. The plan view shows the grid of reinforcement bars. The dimensions 'a' and 'b' are indicated in the diagram.

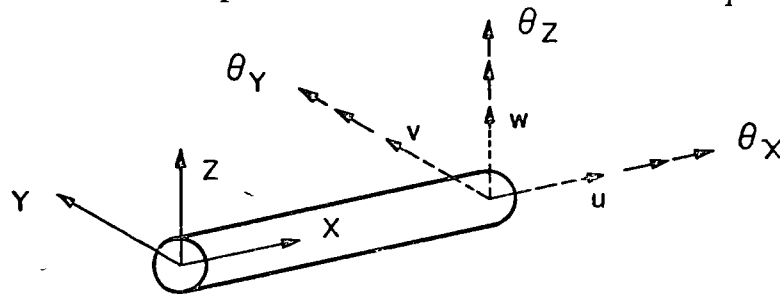
The reinforcement solution for wall 10 on 10/11 is shown in Fig. 4. The wall is 10 m high and 11 m wide. The reinforcement consists of a grid of horizontal and vertical bars. The horizontal bars are spaced at 200 mm and the vertical bars are spaced at 200 mm. The wall is supported by a foundation. The reinforcement is shown in a cross-section and a plan view. The cross-section shows the wall and the reinforcement bars. The plan view shows the grid of reinforcement bars. The dimensions 'a' and 'b' are indicated in the diagram.



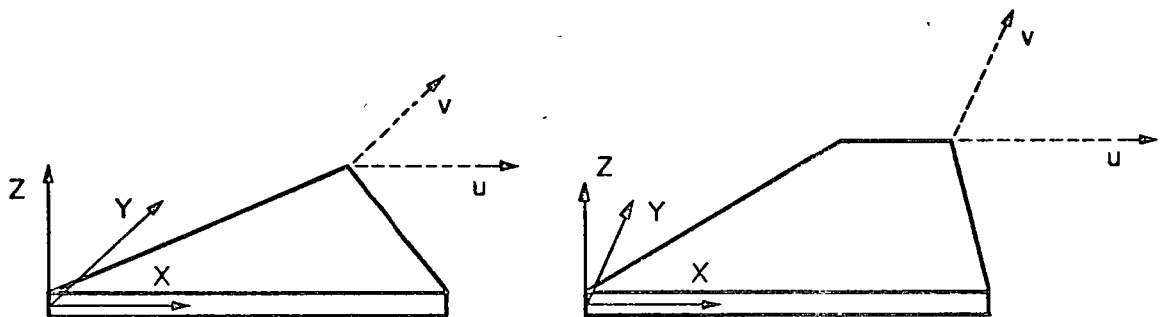
Se presenta al final una lista de referencias de importancia del método del elemento finito.

Al iniciar la determinación de esfuerzos y desplazamientos en cierto problema de diseño, las ecuaciones que gobiernan el problema en cualquier forma deben satisfacer equilibrio y continuidad.

El Método del Elemento Finito es un procedimiento analítico, y cuando se aplica a un medio continuo, éste se modela analíticamente subdividiéndolo en sub-regiones ( los elementos finitos ) en los que el comportamiento de cada uno es definido por grupos separados de funciones que supuestamente definen esfuerzos y desplazamientos en esa región, las funciones se seleccionan en forma tal que se satisfaga la condición de continuidad a través de todo el medio, por lo tanto, el método del elemento finito en común con las soluciones por series y diferencias finitas representa una aproximación a la solución del problema



a ) Elemento estructural



$$\gamma_{XY} = \frac{\partial u}{\partial Y} + \frac{\partial v}{\partial X}$$

b ) Esfuerzos planos

100-100000-100

100-100000-100

100-100000-100

100-100000-100

100-100000-100

100-100000-100

100-100000-100

100-100000-100

100-100000-100

100-100000-100

100-100000-100

100-100000-100

100-100000-100

100-100000-100

100-100000-100

100-100000-100

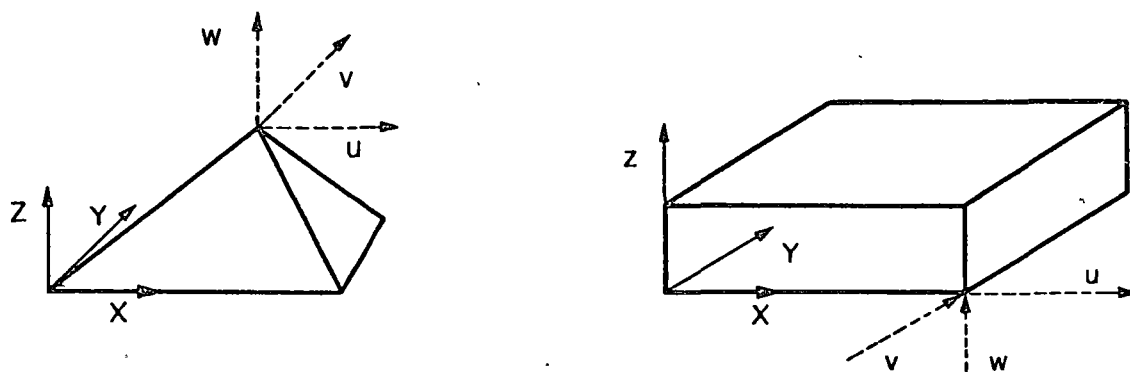
100-100000-100

100-100000-100

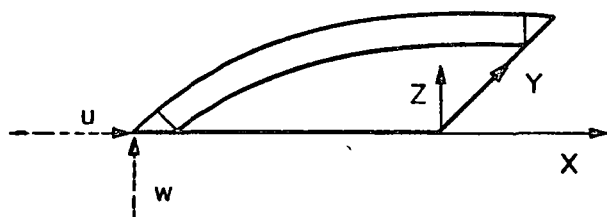
100-100000-100

100-100000-100

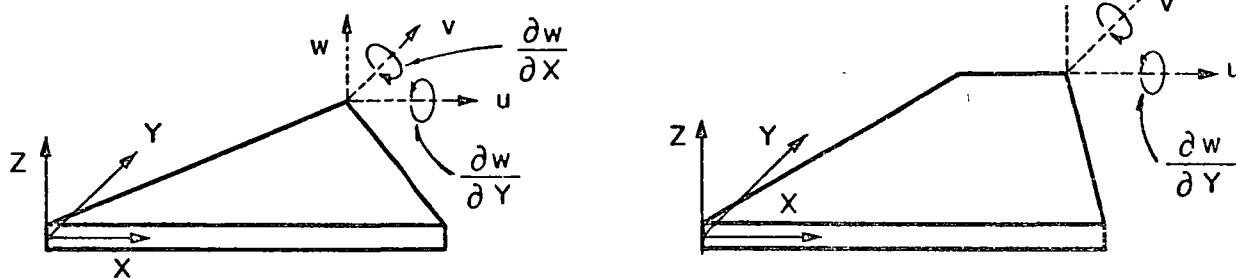
100-100000-100



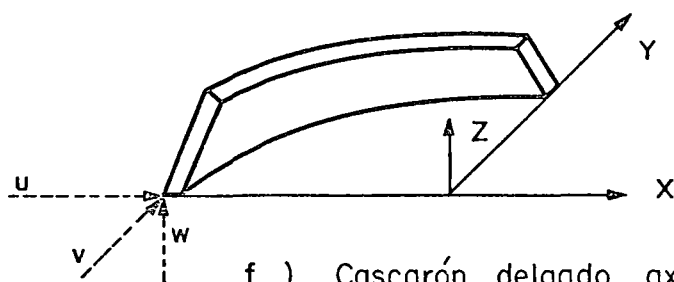
c) Elementos sólidos



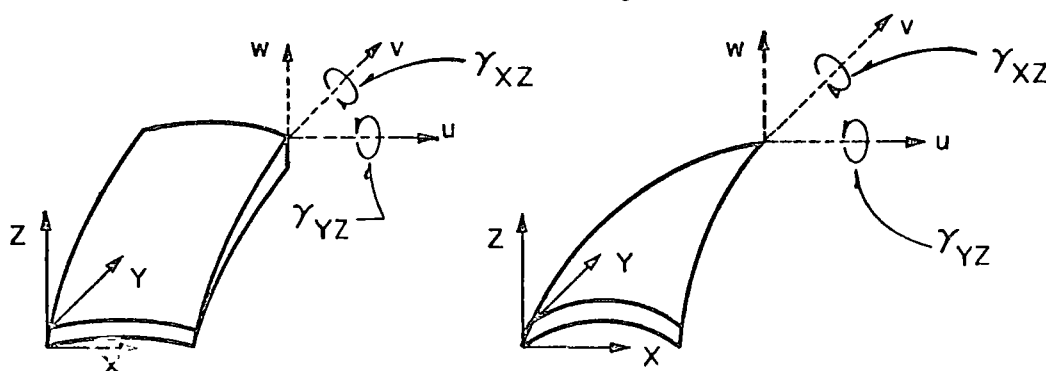
d) Sólidos axisimetrico



e) Flexión de placas

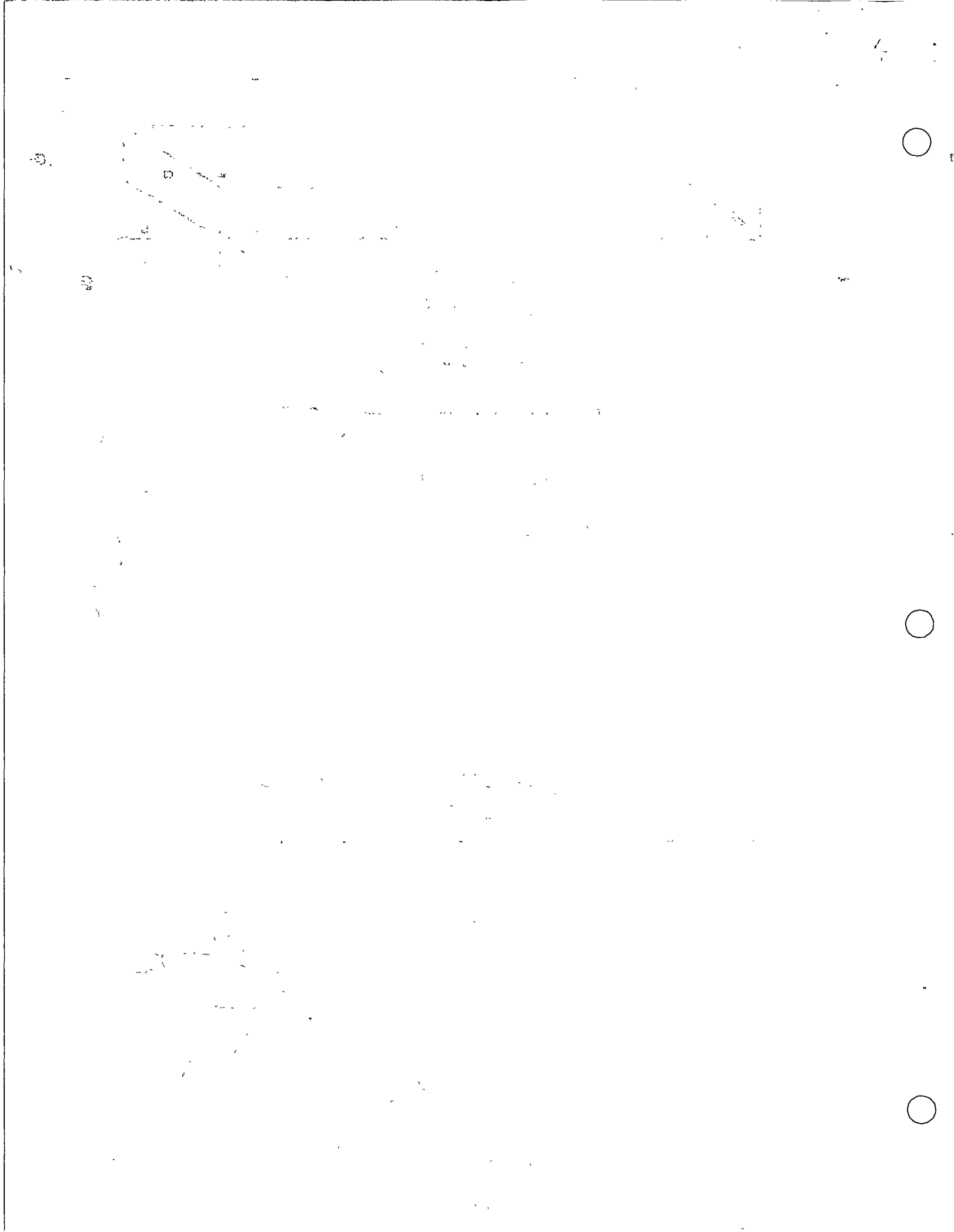


f) Cascarón delgado axisimétrico



g) Cascarones delgados curvos

Fig 5 Tipos de elementos finitos



## TIPOS DE ELEMENTOS.

Elementos que son usados comunmente en la práctica son ilustrados en la Fig. 5.

El elemento estructural simple, Fig. 5 (a), es un miembro de la familia total de elementos finitos. Cuando se usa con elementos del mismo tipo describe armaduras y estructuras espaciales. Cuando se combina con elementos de tipo diferente, especialmente con elementos de placa generalmente se describen miembros de rigidez.

Los elementos básicos en análisis por elementos finitos son placas delgadas con cargas contenidas en su plano ( condición de esfuerzos planos ), triangulares y cuadriláteros se ilustran en la Fig 5b. Se denominan básicos porque, los primeros desarrollos concernientes con el método se refieren a ellos.

Los elementos sólidos, Fig. 5 (c), son la generalización tridimensional de los elementos de esfuerzos planos. El tetrahedro y el hexaedro son las formas más comunes y son esenciales para modelar analíticamente problemas de mecánica de suelos, rocas y estructuras nucleares. Es conveniente mencionar que la única forma práctica de resolver problemas tridimensionales prácticos, es el método de elementos finitos.

Uno de los campos más importantes de aplicación del método de elementos finitos es en el análisis de "sólidos axisimétricos", Fig. 5 (d). Una gran variedad de problemas de ingeniería caen en esta categoría, incluyendo concreto, tanques, recipientes nucleares, rotores, pistones, flechas de motores, y la cabeza de los roquets. Generalmente son medios de carga y geometría axisimétrica.



En la Fig. 5 (d) se muestra el elemento triangular, también se usan secciones cuadriláteras.

Elemento de placa plana en flexión es empleado no solo en conexión con el comportamiento de placas planas, sino también en cascarones y miembros de pared delgada. Fig. 5 (e).

Estructuras de cascarón delgado axisimétricas, Fig. 5 (f), tienen el mismo rango de significado en la aplicación práctica que los sólidos axisimétricos. Sin embargo, las relaciones gobernantes se derivan de la teoría de cascarones delgados.

Cuando una estructura de cascarón delgado que de hecho es curva, es preferible emplear elementos de cascarón curvos delgados para el modelo analítico, tienen la ventaja de describir más aproximadamente la superficie curva del cascarón, y la apropiada representación del acoplamiento de deformación y equilibrio entre cada elemento. Elementos típicos de cascarones de doble curvatura se muestran en Fig. 5 (g). Gran número de formulaciones para este elemento existen.

### ALGUNAS APLICACIONES DE ELEMENTOS FINITOS.

Examinaremos algunas aplicaciones del método de elementos finitos en diseño estructural con el objeto de ilustrar la forma en la cual se usan los elementos de la Fig. 5, y la escala y complejidad de los problemas.

El desarrollo del método del elemento finito se debe a los investigadores relacionados con la industria aeronáutica. La Figura 6 muestra la forma en que

The following information was obtained from a review of the files of the
 Department of State, Bureau of Intelligence and Research, and the
 Office of Special Operations, regarding the activities of the
 Soviet intelligence network in the United States during the period
 from 1945 to 1953.

It is noted that the Soviet intelligence network in the United States
 was organized and operated in a highly systematic and efficient
 manner. The network was headed by a central office in Moscow,
 which was in contact with a number of field offices in the
 United States.

The field offices were organized into a number of groups, each
 headed by a Soviet agent. These groups were responsible for the
 collection and dissemination of intelligence information in their
 respective areas.

The Soviet intelligence network in the United States was
 particularly active in the field of atomic energy. It is noted
 that the network was successful in obtaining a large amount of
 information regarding the development of the atomic bomb in the
 United States.

This information was then passed on to the Soviet Union, where it
 was used for the development of the Soviet atomic bomb. It is
 noted that the Soviet intelligence network in the United States
 was instrumental in the development of the Soviet atomic bomb.

The following is a list of the names of the Soviet agents who
 were active in the United States during the period from 1945 to
 1953.

The names of the Soviet agents are listed in alphabetical order.
 The names are listed in the following order:

1. Names of the Soviet agents who were active in the field of
 atomic energy.

2. Names of the Soviet agents who were active in the field of
 general intelligence.

3. Names of the Soviet agents who were active in the field of
 counterintelligence.

4. Names of the Soviet agents who were active in the field of
 propaganda.

5. Names of the Soviet agents who were active in the field of
 economic intelligence.

6. Names of the Soviet agents who were active in the field of
 scientific intelligence.

7. Names of the Soviet agents who were active in the field of
 cultural intelligence.

8. Names of the Soviet agents who were active in the field of
 political intelligence.

9. Names of the Soviet agents who were active in the field of
 military intelligence.

10. Names of the Soviet agents who were active in the field of
 diplomatic intelligence.

The following is a list of the names of the Soviet agents who
 were active in the United States during the period from 1945 to
 1953.

The names of the Soviet agents are listed in alphabetical order.
 The names are listed in the following order:

1. Names of the Soviet agents who were active in the field of
 atomic energy.

2. Names of the Soviet agents who were active in the field of
 general intelligence.

3. Names of the Soviet agents who were active in the field of
 counterintelligence.

4. Names of the Soviet agents who were active in the field of
 propaganda.

5. Names of the Soviet agents who were active in the field of
 economic intelligence.

6. Names of the Soviet agents who were active in the field of
 scientific intelligence.

7. Names of the Soviet agents who were active in the field of
 cultural intelligence.

8. Names of the Soviet agents who were active in the field of
 political intelligence.

9. Names of the Soviet agents who were active in the field of
 military intelligence.

10. Names of the Soviet agents who were active in the field of
 diplomatic intelligence.



se aplicó el análisis por elementos finitos de una porción del avión Boeing 747. La estructura del fuselaje de un avión consiste de laminas de aluminio ligadas a una estructura interna formada por armaduras y atezadores. La experiencia ha mostrado que los efectos locales de flexión en el cascarón son despreciables, por lo tanto, se supone que consiste de elementos en condición plana de esfuerzos Fig. 5(b). El análisis de elementos finitos del Boeing 747, de la parte achurada, región que conecta el cuerpo o Cascarón Monocoque con las alas, área achurada en Fig. 6, consiste de 7000 incógnitas. Por lo tanto, es común en la práctica dividir la estructura en regiones, o subestructuras, y analizar cada una por elementos finitos con el objeto de producir un superelemento. Los superelementos se ligan entre sí por medio de un procedimiento convencional que determina la fase final del análisis.

El esquema de subestructuración del Boeing 747 es mostrado en la Fig. 6 y los detalles son listados en la Tabla 1.

Sub-Estructura	Descripción	Nodos	Condición Carga	Elemento Viga	Elemento Placa	Grados libertad interacción elementos.	Grado de libertad total.
1	Ala	262	14	355	363	104	796
2	Centro ala	267	8	414	295	198	880
3	Cascarón Monocoque	291	7	502	223	91	1,026
4	Cascarón M	213	5	377	185	145	820
5	Cascarón M	292	7	415	241	200	936
6	Caja Tren Aterrizaje	170	10	221	103	126	686
7	Cascarón M	285	6	392	249	233	909
8	Caja Tren Aterrizaje	129	10	201	93	148	503
9	Cascarón M	286	7	497	227	92	1,038
TOTAL		2,195	63	3,374	1,979	555	7,594

Tabla 1 Esquema de subestructuración del Boeing 747

1. The first part of the document discusses the importance of maintaining accurate records of all transactions. It emphasizes that this is crucial for the company's financial health and for providing reliable information to stakeholders.

2. The second part of the document outlines the specific procedures for recording transactions. It details the steps from identifying a transaction to entering it into the accounting system, ensuring that all necessary details are captured.

3. The third part of the document addresses the role of the accounting department in monitoring and controlling the company's resources. It discusses how accurate records enable the company to identify areas of inefficiency and to take corrective action.

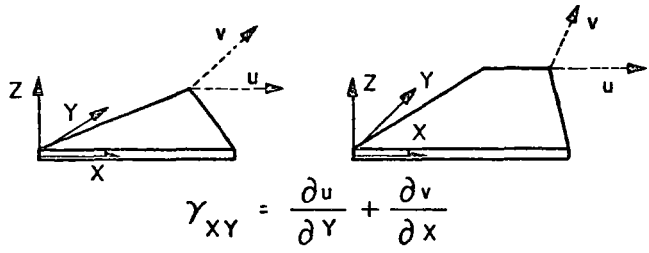
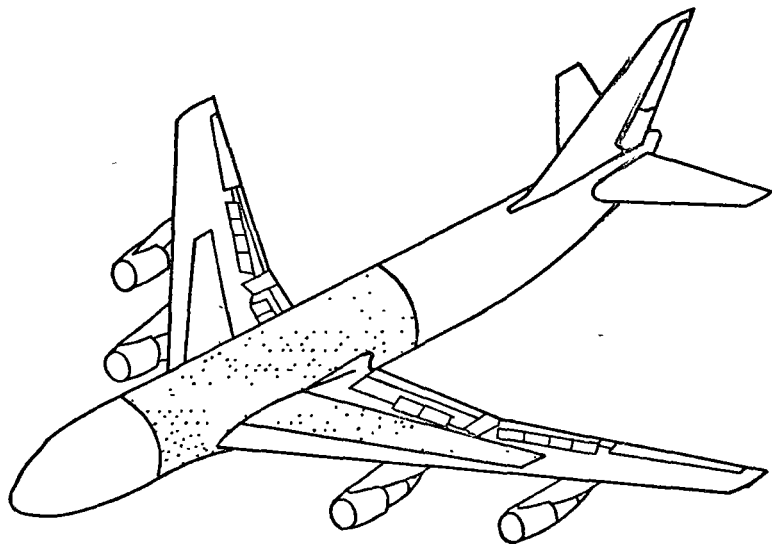
4. The fourth part of the document discusses the importance of internal controls in preventing fraud and errors. It highlights the need for a strong system of checks and balances to ensure the integrity of the financial data.

5. The fifth part of the document discusses the role of the accounting department in providing financial information to management. It explains how this information is used to make strategic decisions and to evaluate the company's performance.

6. The sixth part of the document discusses the importance of transparency and communication in the financial reporting process. It emphasizes the need for clear and concise reporting to build trust with investors and other stakeholders.

7. The seventh part of the document discusses the role of the accounting department in ensuring compliance with applicable laws and regulations. It highlights the importance of staying up-to-date on changes in the regulatory environment.

8. The eighth part of the document discusses the importance of continuous improvement in the accounting process. It emphasizes the need for regular reviews and updates to the accounting system to ensure it remains effective and efficient.



Esfuerzos planos

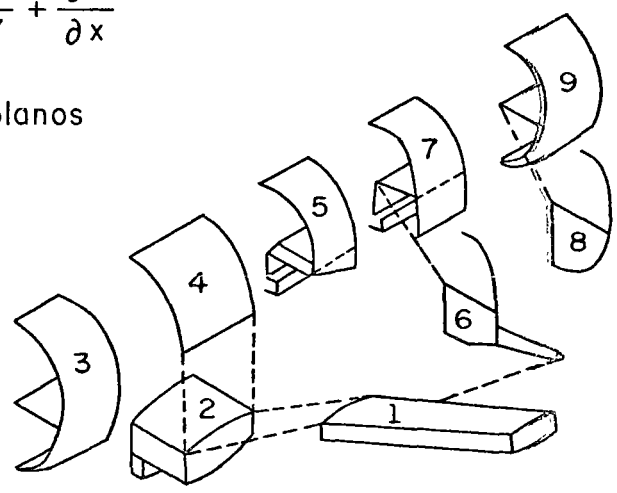
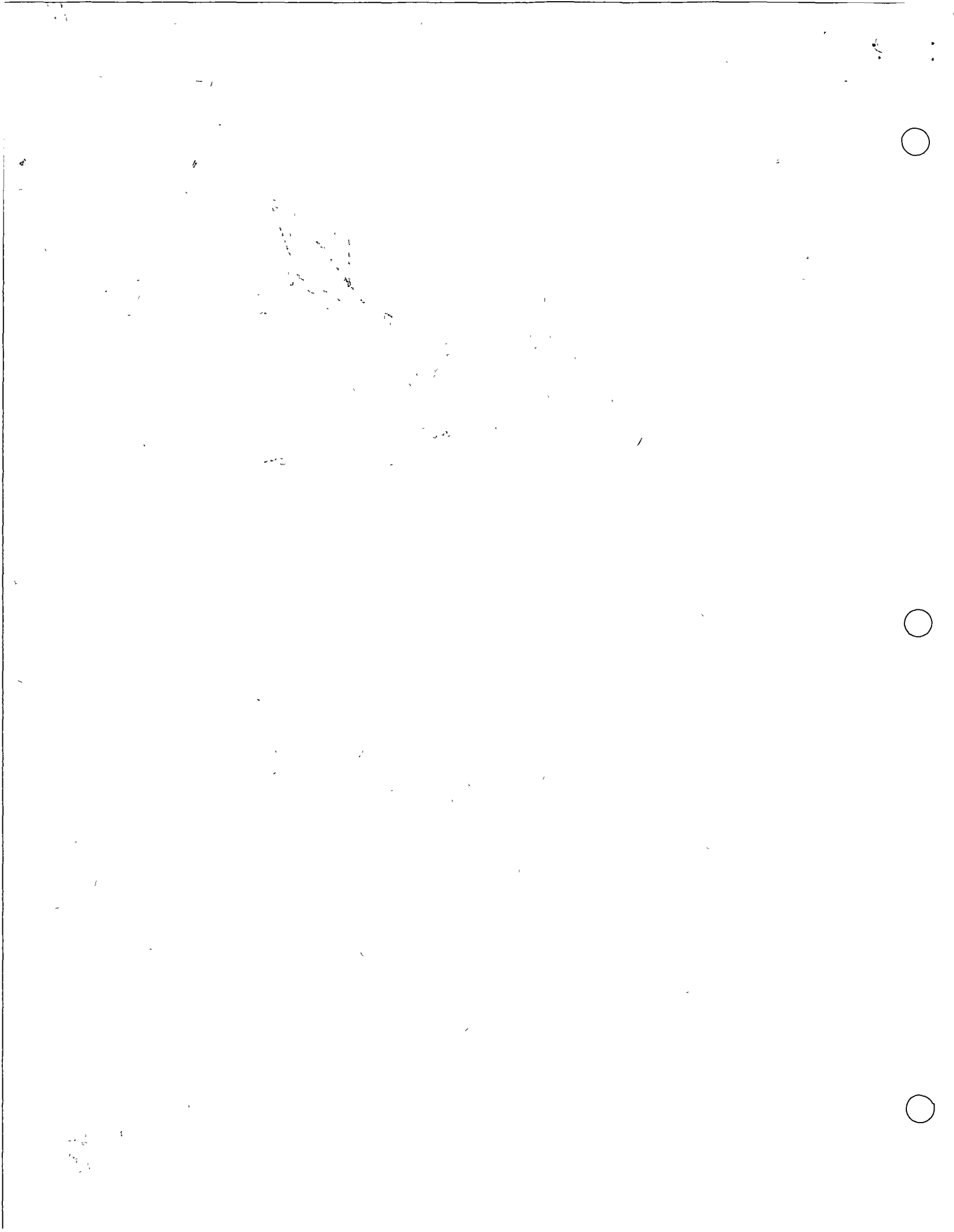


Fig 6 Boeing 747



Como es usual en el diseño de aviones, se hicieron pruebas en el prototipo y los resultados se compararon con la solución por elementos finitos, coincidiendo como se muestra en la Fig. 7

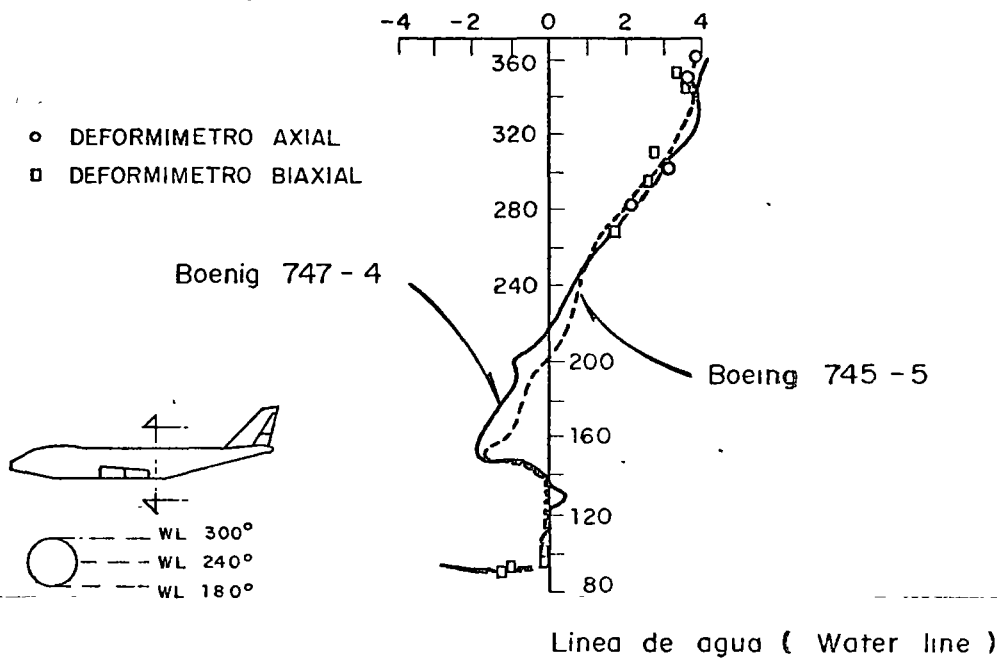


Fig. 7 Comparación entre análisis y experimentación del Boing 747

Es importante agregar que la respuesta dinámica de un avión es muy importante, así como su inestabilidad elástica es una forma importante de falla. Ninguno de estos fenómenos puede tratarse por los métodos simplificados, pero su análisis usando el método de elementos finitos ha probado ser muy aceptable.

Problemas similares se encuentran en Arquitectura Naval. Figura 8 una porción de una estructura de un transbordador. La parte plana es representada por elementos en estado plano de esfuerzos, Fig. 5 (b). Elementos estructurales, Fig. 5 (a), son empleados en la representación de la estructura interna.



The first part of the document discusses the importance of maintaining accurate records of all transactions. It emphasizes that every entry should be supported by a valid receipt or invoice. This ensures transparency and allows for easy auditing of the accounts.

Furthermore, it is noted that regular reconciliation of the books is essential to identify any discrepancies early on. This process involves comparing the internal records with bank statements and other external sources to ensure they match.

In addition, the document highlights the need for clear communication between all parties involved in the business. This includes providing timely updates to stakeholders and addressing any concerns promptly.

The second part of the document provides a detailed breakdown of the financial performance over the last quarter. It shows a steady increase in revenue, which is attributed to the successful launch of new products and the expansion of the customer base.

However, there has been a corresponding increase in operating expenses, primarily due to higher marketing costs and increased salaries. Despite this, the overall profit margin remains healthy, indicating that the business is on a growth trajectory.

Looking ahead, the management team is optimistic about the future prospects of the company. They plan to continue investing in research and development to create innovative solutions that meet the needs of the market.

The document concludes with a reaffirmation of the company's commitment to excellence and its goal of becoming a leader in the industry.

El número total de incógnitas para definir las partes importantes de un barco es del orden de 50,000, y de nuevo se subdivide el problema en subestructuras obteniendo menos incógnitas.

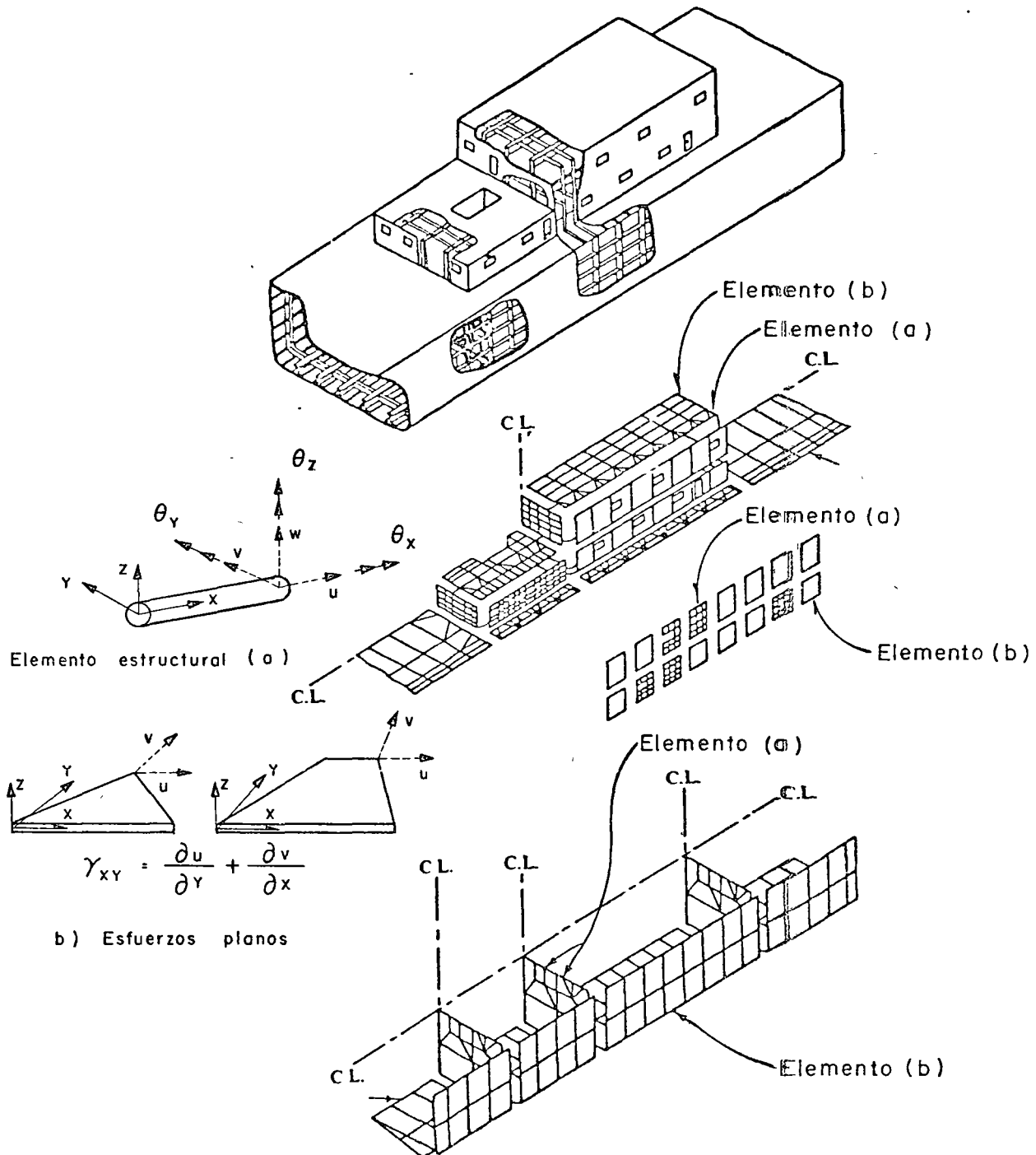
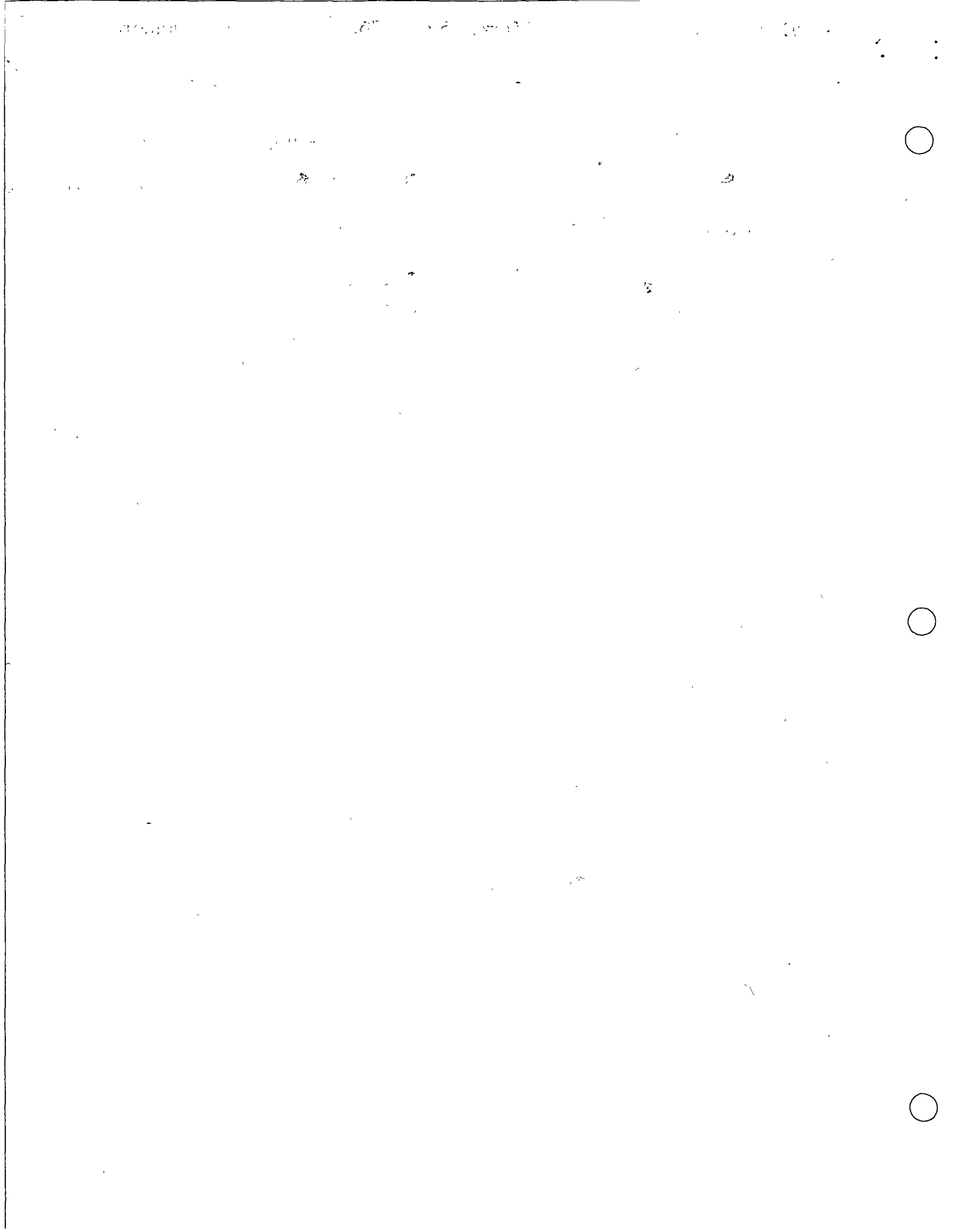


Fig. 8 Análisis por elemento finito de estructura de un transbordador





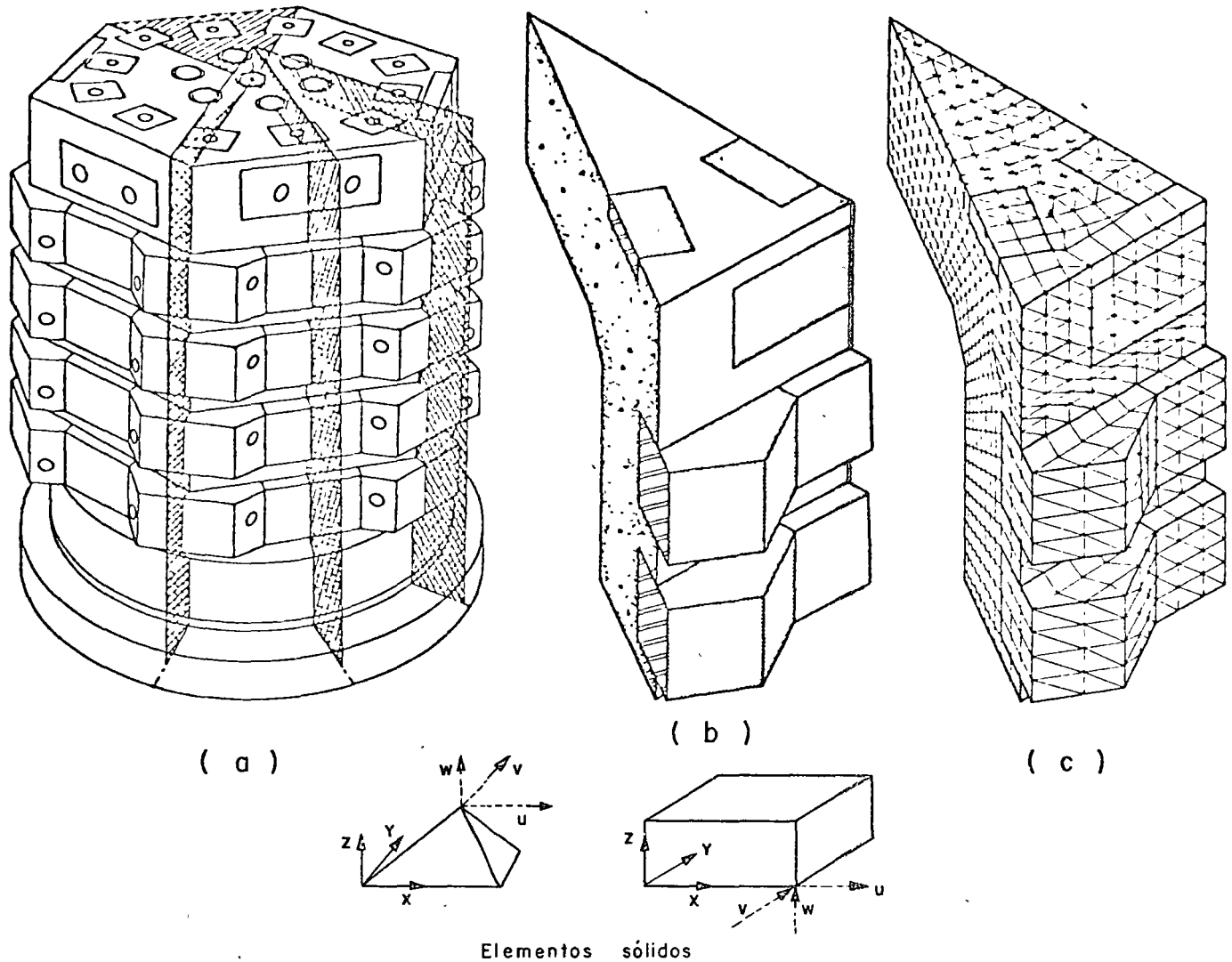


Fig 9 Analisis por elementos finitos de un recipiente reactor de concreto presforzado

Requerimientos de seguridad en el diseño estructural de los reactores nucleares han causado que la industria use ampliamente el análisis por elementos finitos. Figura 9 (a) un recipiente reactor de concreto presforzado. Debido a la simetría es posible analizar solamente un doceavo de la estructura total, - - Fig. 9 (b). Su volumen se modela analíticamente en un ensamble de elementos tetraedrales y hexaedrales, Fig. 5 (c). En problemas de este tipo, el número de incógnitas es del orden de 20,000, y muy común hacer el análisis en condiciones no lineales en material y geometría.

Faint, illegible text or markings, possibly bleed-through from the reverse side of the page.



No todos los problemas de aplicación del método de elementos finitos son de proporciones monumentales. Las figuras 10 y 11 muestran aplicaciones básicas a ciertos problemas de ingeniería civil. Una forma de incrementar la eficiencia de diseño en secciones roladas de acero estructural es cortando el alma en la forma dentada mostrada en la Fig. 10 (a), colocando una sección sobre la otra y soldándolas, Fig. 10 (b). Y se obtiene una viga más aperaltada reduciendo el acero en el alma, y por supuesto que en este problema rutinario de diseño, no es necesario el uso del método de elementos finitos.

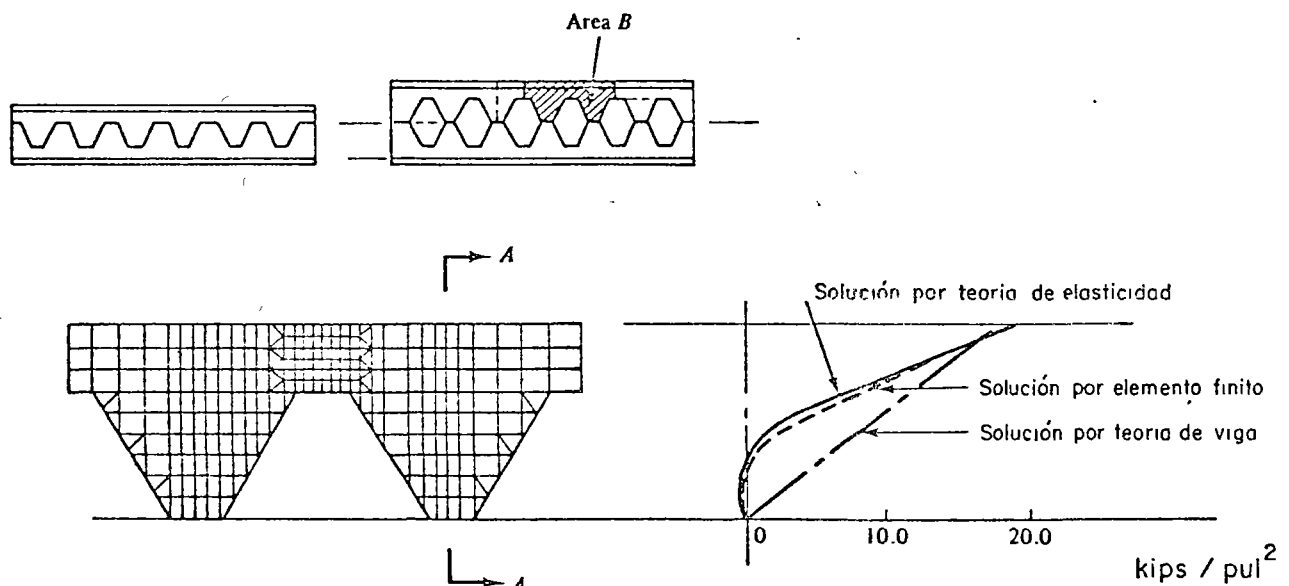


Fig. 10 Análisis de elementos finitos de una viga aperaltada en celosía.

Un problema todavía más común es el de una viga de concreto reforzado, Fig. 11, para el cual se conoce muy poco respecto a la adherencia entre el acero de refuerzo y el concreto, y la formación y crecimiento de las grietas al aumentar la carga. La Figura 11 (a) muestra el modelo analítico de ele-

1000



mentos finitos y la descripción de las trayectorias de grietas y las gráficas de esfuerzos se muestran en la Fig. 11 (b).

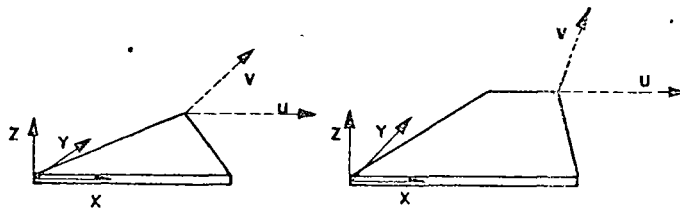
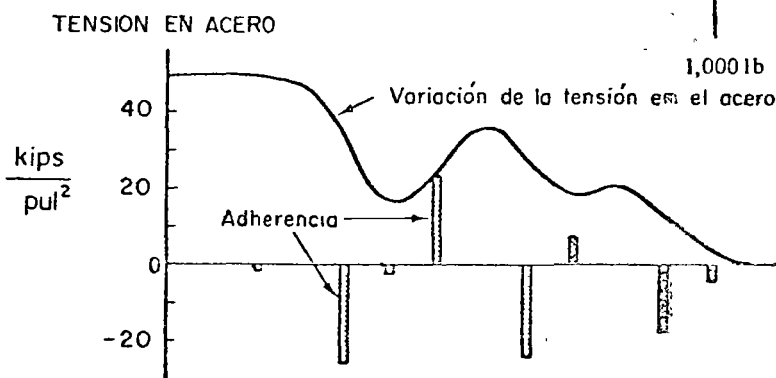
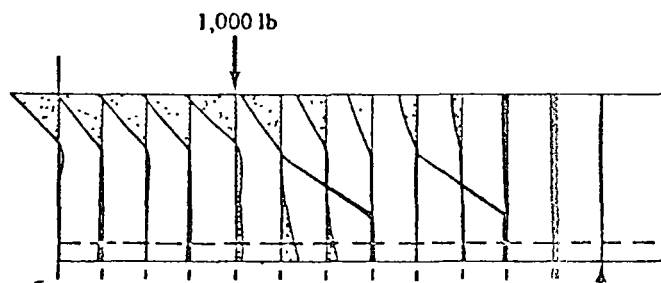
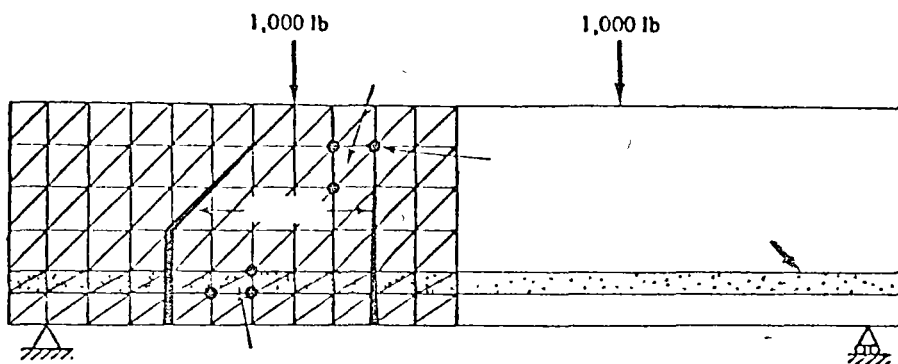
Los pocos ejemplos mostrados muestran que el método de elementos finitos puede ser usado ventajosamente en cualquier situación que se requiera la predicción de esfuerzos y deformaciones internas, desplazamientos, vibraciones, inestabilidad elástica, mecánica de fluidos, transferencia de calor. Situaciones que se levantan de diversos campos que tradicionalmente han sido considerados como disciplinas ingenieriles separadas. Ejem., Ingeniería Civil, Mecánica, - Aeroespacial, Arquitectura Naval. El método del elemento finito proporciona una tecnología unificada de análisis en casi todos los campos.

Es nuestro intento en este curso desarrollar los conceptos teóricos básicos y estudiar problemas específicos de carácter práctico. Un compendio de tales problemas llenaría muchos volúmenes, por lo tanto es recomendable consultar las memorias de congresos y publicaciones periódicas correspondientes.

#### PROGRAMAS DE PROPOSITOS GENERALES.

Se ha indicado que las ecuaciones del método de elementos finitos son de una forma tal que su carácter general permite teóricamente escribir un solo programa de computadora que resuelva la mayoría de los problemas que se presentan en la Mecánica de Medio Continuos. Programas de computadora con este objetivo, aún en escala restringida, son llamados programas "de propósitos generales". La ventaja de programas de propósitos generales no es sólo su capacidad,

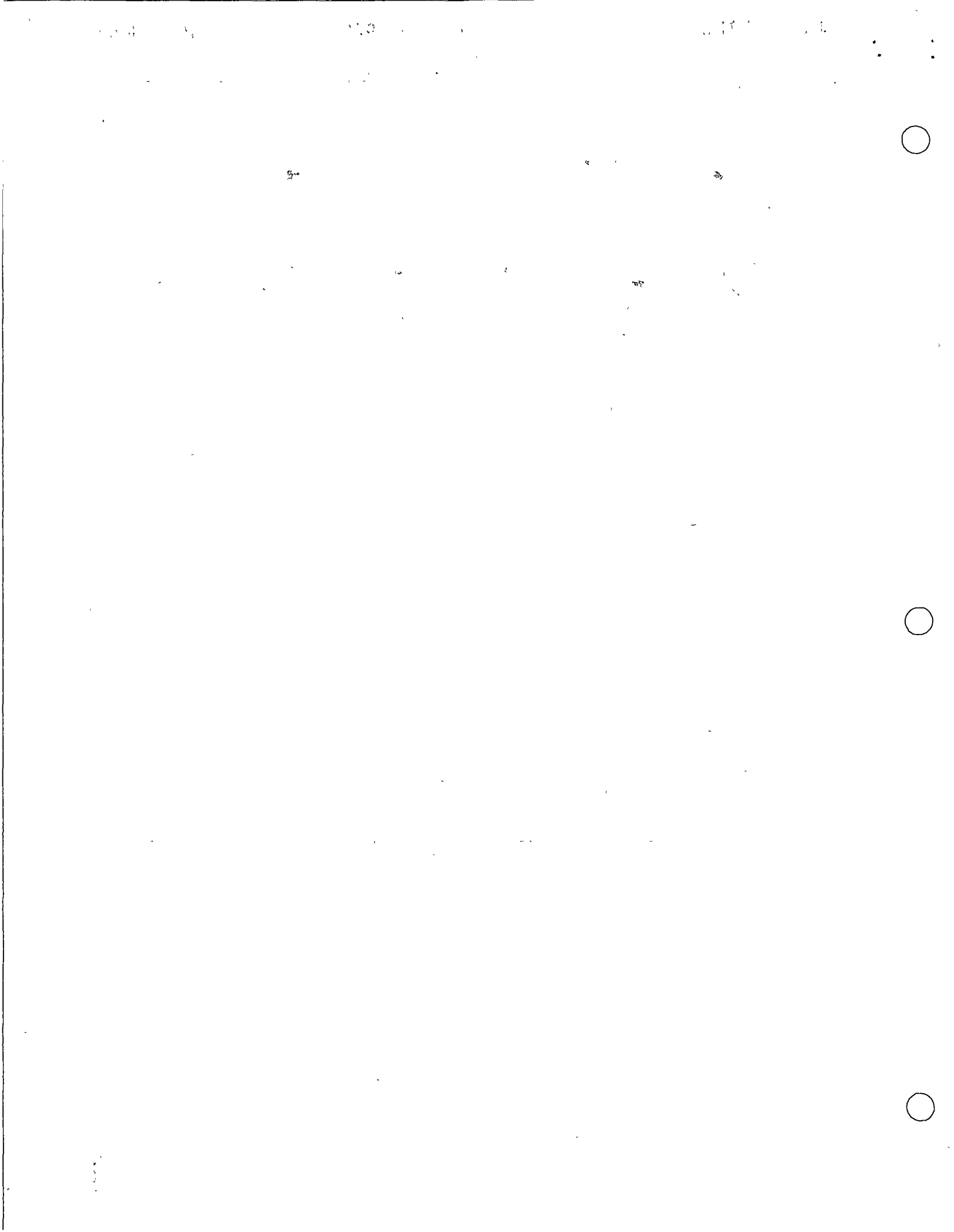




$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$

ESFUERZOS PLANOS

Fig. 11 Análisis por elementos finitos de una viga de concreto reforzado.





sino también en la instrucción de los probables usuarios respecto a la interpretación de la documentación, los datos y procedimientos de entrada y salida de resultados.

El costo de desarrollo de un programa de propósitos generales es usualmente muy alto por lo que la amortización de la inversión es esencial. Ciertos programas de propósitos generales son codificados en un lenguaje computacional que permite operar el programa a muchas organizaciones diferentes localizadas en grandes separaciones geográficas. Otros programas de propósitos especiales de limitada capacidad se usan en organizaciones industriales y gubernamentales con un costo menor en su desarrollo y operación.

Las cuatro componentes mostradas en el diagrama de flujo de la Fig. 12, son comunes en el desarrollo de programas de propósitos generales, fase de datos de entrada, requiere del usuario información del medio o material, descripción geométrica de la representación por elementos finitos y las condiciones de carga y de frontera. Los programas de propósitos generales más sofisticados facilitan el proceso de entrada como propiedades constitutivas del material, almacenados previamente, esquemas de modelar analíticamente el medio, trazar estereográficamente la idealización por elementos finitos en forma tal que los errores pueden detectarse antes de efectuar los cálculos.

La fase de biblioteca de elementos finitos es de interés primordial en el curso. En ella se tienen los procesos de codificación formulativos para los elementos individualmente. La mayoría de los programas de propósitos generales contienen todos los elementos de la Fig. 5, así como ciertas otras alternativas de formulación para un tipo dado de elemento, por ejemplo el trián-

1942 - 1943

1942 - 1943

1942 - 1943

1942 - 1943

1942 - 1943

1942 - 1943

1942 - 1943

1942 - 1943

1942 - 1943

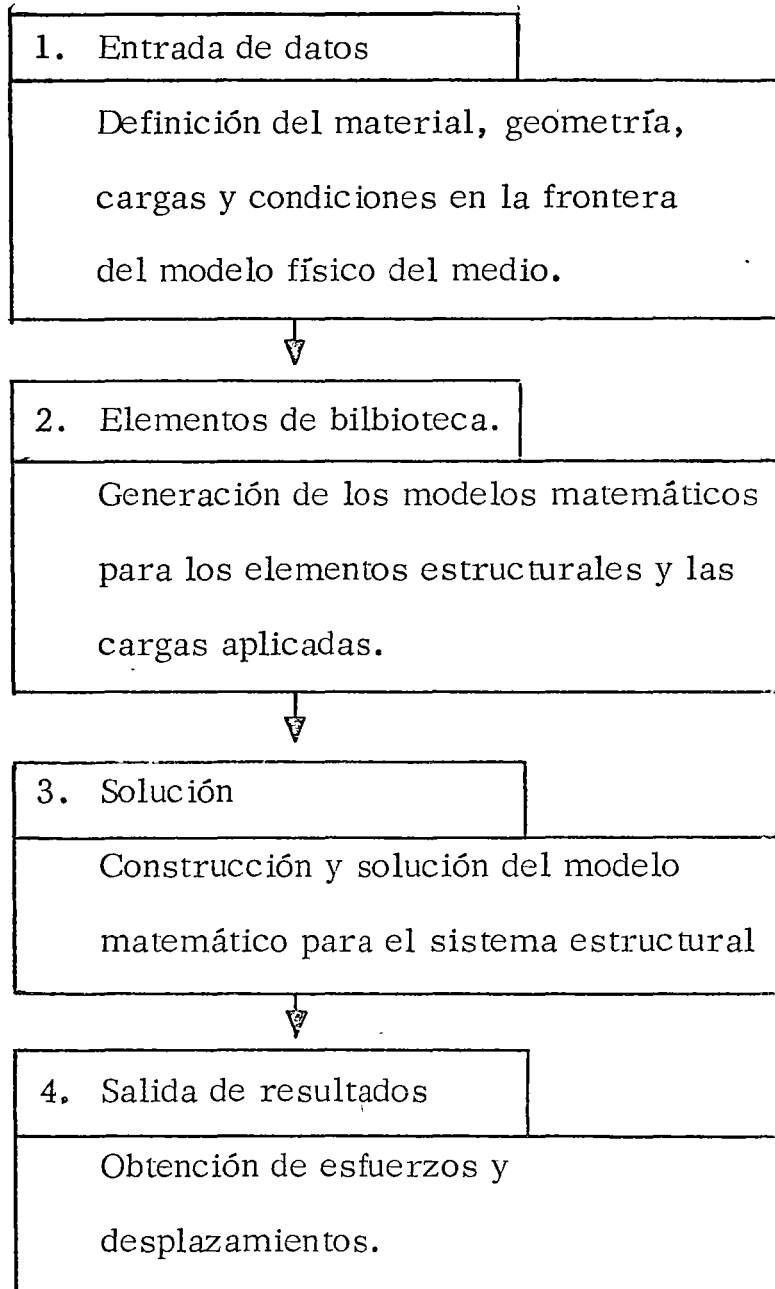
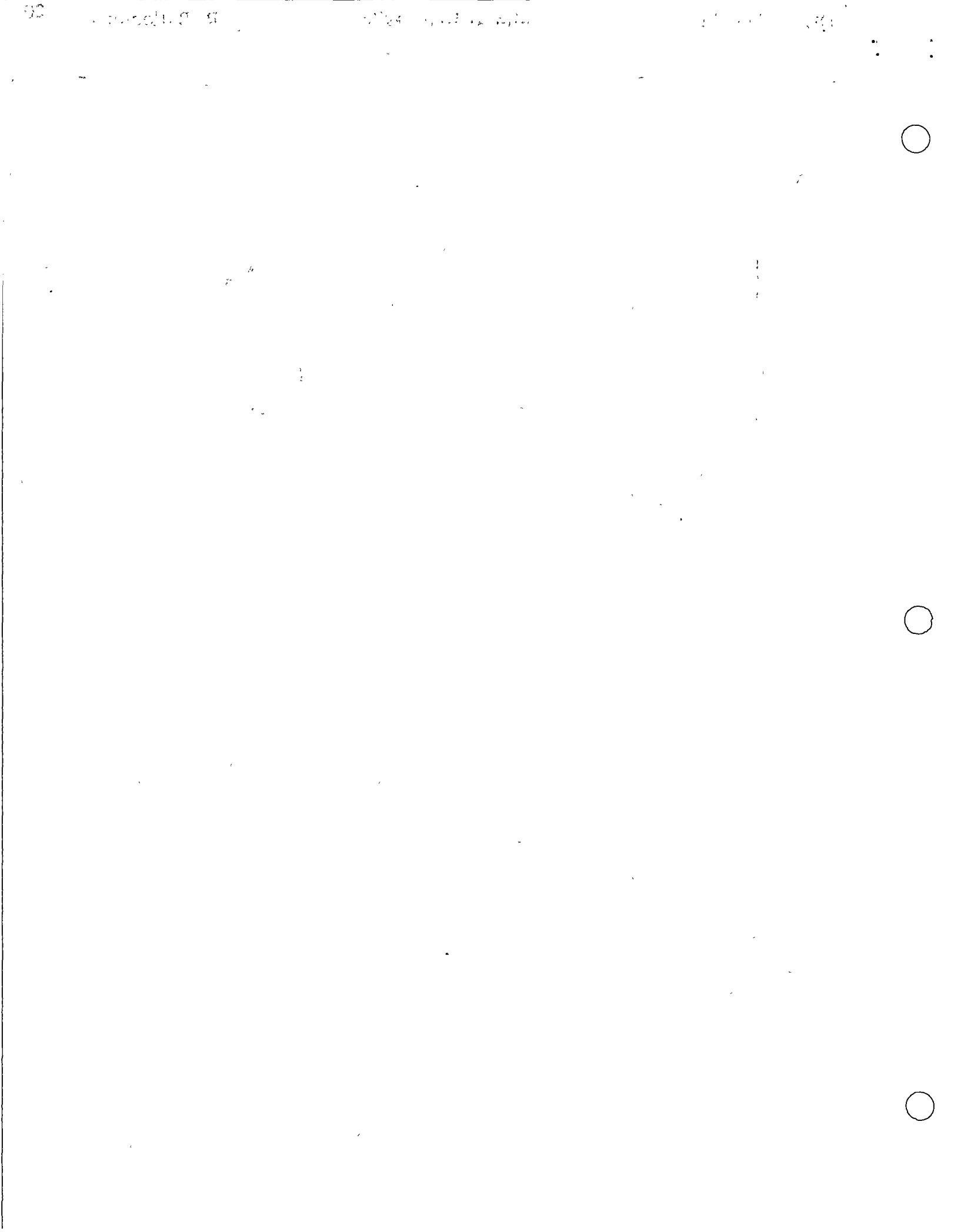


Fig. 12 Diagrama de flujo computacional en Análisis Estructural.



gulo en flexión. Teóricamente el elemento biblioteca es de extremos abiertos y capaz de acomodar cualquier nuevo elemento de cualquier grado de complejidad.

La fase elemento de biblioteca recibe los datos almacenados y establece las relaciones algebraicas del elemento por medio de la aplicación de los procesos formulativos relevantes de codificación. Esta fase del programa de propósitos generales también incluye todas las relaciones algebraicas para interconectar los elementos vecinos y la conexión del proceso en sí. Las operaciones posteriores producen un conjunto de ecuaciones algebraicas lineales simultáneas para representar la estructura completa por elementos finitos.

La fase solución del programa de propósitos generales opera sobre las ecuaciones del problema formadas en la fase anterior. En el caso de un problema de análisis estructural solo significa la solución de un conjunto de ecuaciones lineales algebraicas. Soluciones para respuesta dinámica requerirán computaciones más extensas sobre la historia-tiempo de las cargas aplicadas. En algunos casos hay que operar en regiones subdivididas como en el caso del análisis del Boeing 747, o efectuar operaciones especiales en las ecuaciones construídas originalmente. Incluídas en esta fase están las operaciones necesarias de sustitución para obtener todos los aspectos deseados de la solución.

La fase salida de resultados presenta el análisis con un registro de la solución sobre la cual se pueden tomar decisiones respecto al dimensionamiento estructural o diseño. El registro comunmente es presentado mediante una lista impresa de esfuerzos y desplazamientos de los respectivos elementos. Así como en la fase de entrada existe una fuerte tendencia a la representación gráfica de datos,

1945

1945



1945

1945

1945

1945

1945

1945

1945

1945

1945

1945

1945



1945

1945

1945

1945

1945

1945

1945

1945

1945

1945



1945

1945

tales como gráficas de trayectorias principales de esfuerzos o modos de pandeo y vibración.

### ALGUNOS PROGRAMAS DE PROPOSITOS GENERALES.

ICES-STRUDL II, Integrated Civil Engineering System, (ICES), MIT, Maneja problemas de deformación y esfuerzos planos, cascarones rebajados, sólidos tri dimensionales, flexión de placas con y sin deformación axial. Su uso en problemas muy especializados resulta caro. ASKA, Automatic System for Kinematic Analysis. Desarrollado por J. H. Argyris, H. A. Kamel y otros en la Universidad de Stuttgart. Sistema general muy potente el cual incluye una biblioteca de 42 elementos diferentes. Puede ser costoso para un usuario especializado. SAP, A General Structural Analysis Program, elaborado por E. L. Wilson de la Universidad de California. Incluye análisis lineal estático y dinámico de estructuras elás ticas, estructuras tridimensionales, sólidos axisimétricos, sólidos tridimensionales, esfuerzos y deformación plana, placas y cascarones.

Zienkiewicz, O.C., programa desarrollando en la Universidad de Wales, - Swansea. Incluye lo de los programas anteriores y problemas de Mecánica de Fluidos y transferencia de calor.

NASTRAN, NAsa STRuctural ANalysis. Desarrollado por U. S. National - Aeronautical and Space Administration para análisis elástico de varias estructuras incluye, análisis de expansión térmica, respuesta dinámica a cargas transitorias - y excitaciones random, cálculo de valores característicos reales y complejos, esta bilidad dinámica. Ofrece capacidad limitada para análisis no lineal.

1952

1952

1952





SAMIS, Structural Analysis and Matrix Interpretative System. Desarrollado por Jet Propulsion Laboratory, y Manned Spacecraft Center. Contiene un elemento unidimensional general y elementos triangulares para deformaciones por flexión y membrana.

ELAS y ELAS 8, Equilibrium Problems of Linear Structures. Desarrollado por el Jet Propulsion Laboratory. Incluye una biblioteca de elementos unidimensionales, triangulares, cuadriláteros, tetraedros, hexaedros, cónicos, sólidos axisimétricos de secciones cuadriláteros y triangulares.

MARC, elaborado por P. V. Marcal, incluye análisis lineal y no lineal de problemas de Mecánica de Medios Continuos.

10-2-1951



## LISTA DE REFERENCIAS EN ORDEN CRONOLOGICO DEL METODO DE ELEMENTOS FINITOS

- (1) Hrenikoff, A., "Solution of problems in elasticity by the framework method," J. Appl. Mech. 8, A 169-175, 1941.
- (2) McHenry, D., "A lattice analogy for the solution of plane stress problems," J. Inst. Civ. Eng 21, 59-82, 1943.
- (3) Newmark, N. M., "Numerical methods of analysis in bars plates and elastic bodies," "Numerical Methods of Analysis in Engineering," edited by L. E. Grinter, MacMillan (1949).
- (4) Turner, M. J., Clough, R. W., Martin, H. C., and Topp, L. J., "Stiffness and deflection analysis of complex structures," J. Aero Sci. 23, 805-823, 1956; AMR 10 (1957), Rev. 1776.
- (5) Clough, R. W., "The finite element in plane stress analysis," Proc. 2nd. ASCE Conf. on Electronic Computation, Pittsburgh, Pa., Sept. 1960.
- (6) Argyris, J. H., "Energy Theorems and structural analysis," Butterworth, London (1960). (Reprinted from Aircraft Eng. 1954-55); AMR 15 (1962), Rev. 2705.
- (7) Clough, R. W., "The finite element method in structural mechanics," (Ch. 7 "Stress Analysis", O. C. Zienkiewicz and G. S. Holister, edited by, J. Wiley & Son (1965); chapter in AMR 20 (1967), Rev. 3942.
- (8) Courant, R., "Variational methods for the solution of problems of equilibrium and vibration," Bull. Am. Math. Soc. 49, 1-23, 1943.
- (9) Prager, W., and Synge, J. L., "Approximation in elasticity based on the concept of function space," Quart. Appl. Math. 5, 241-69, 1947.
- (10) Synge, J. L., "The hypercircle in mathematical physics, Cambridge Univ. Press (1957); AMR 11 (1958), Rev. 733.
- (11) Schmelter, J., "The energy method of networks of arbitrary shape in problems of theory of elasticity," Proc. IUTAM Symp. on Non-homogeneity in Elasticity and Plasticity, W. Olszak, edited by, Pergamon Press (1959).
- (12) Zienkiewicz, O. C., and Cheung, Y. K., "Finite elements in the solution of field problems," Engineer, 200, 507-510, Sept. 1965.
- (13) Wilson, E. L., and Nickell, R. E., "Application of finite element method to heat conduction analysis," Nuclear Eng. and Design 3, 1-11, 1966.

1000 1000 1000

- (14) Herrman, L., "Elastic and torsional analysis of irregular shapes," J. of Engnr. Mech. Div., Proc. ASCE 91, EM6, 11-19, 1965; AMR 19 (1966), Rev. 3444.
- (15) Zienkiewicz, O. C., Arlett, P. L., and Bahram<sup>ni</sup>, A. K., "Solution of three-dimensional field problems by the finite element method," Engineer, 224, 547-550, Oct. 1967; AMR 21 (1968), Rev. 7898.
- (16) Winslow, A. M., "Numerical solution of the quasi-linear Poisson equation in a non-uniform triangle mesh," J. Comp. Physics 1, 149-172, 1967.
- (17) Pian, T. H. H., "Derivation of element stiffness matrices," J. AIAA 2, 576-577, 1964; AMR 17 (1964), Rev. 5128.
- (18) Fraeijs de Veubeke, B., "Displacement and equilibrium models in the finite element method," (Ch. 9 "Stress analysis"), O. C. Zienkiewicz and G. Holister, edited by, J. Wiley & Son (1965); Chapter in AMR 20 (1967), Rev. 3942.
- (19) Fraeijs de Veubeke, B., "Bending and stretching of plates," Proc. Conf. Matrix Meth. in Struct. Mech. Wright-Patterson AFB, Ohio, 1965.
- (20) Fraeijs de Veubeke, B., and Zienkiewicz, O. C., "Strain energy bounds in finite element analysis by slab analogy," J. Strain Analysis 2, 265-271, 1967.
- (21) Herrmann, L. R., "A bending analysis of plates," Proc. Conf. Matrix Methods in Struct. Mech. Wright-Patterson AFB, Ohio, 1965.
- (22) Pian, T. H. H. and Tong, P., "Basis of finite element methods for solid continua," Int. J. Num. Meth. in Eng. 1, 3-28, 1969.
- (23) Pian, T. H. H., "Derivation of element stiffness matrices by assumed stress distribution," J. AIAA 2, 1232-1336, 1964.
- (24) Severn, R. T., and Taylor, D. R., "The finite element method for flexure of slabs when stress distributions are assumed," Proc. Inst. Civ. Eng. 34, 153, 170, 1966; AMR 20 (1967), Rev. 3213.
- (25) Zienkiewicz, O. C., "The finite element method," McGraw-Hill (1967).
- (26) Bazeley, G. P., Cheung, Y. K., Irons, B. M., and Zienkiewicz, O. C., "Triangular elements in bending-conforming and non-conforming solutions," Proc. Conf. Matrix Meth. Struct. Mech. Wright-Patterson AFB, Ohio, 1965.
- (27) Mikhlin, S. G., "The problem of the minimum of a quadratic functional," Holden Day, San Francisco (1966).

Dear Sir,

I am writing to you regarding the matter of the...

I have received your letter of the 10th...

I am sorry to hear that you are having...

I will be happy to discuss this further...

I am sure that you will find this...

I am sure that you will find this...

I am sure that you will find this...

I am sure that you will find this...

I am sure that you will find this...

I am sure that you will find this...

I am sure that you will find this...

I am sure that you will find this...

I am sure that you will find this...

I am sure that you will find this...

- (28) Pian, T. H. H., and Tong, Ping. "The convergence of finite element method in solving linear elastic problems," *Int. J. Solids Struct.* 3, 865-880, 1967.
- (29) Key, S. W., "A convergence investigation of the direct stiffness method," Ph. D. thesis, Univ. of Washington, Seattle, 1966.
- (30) de Arrantes e Oliveira, E. R., "Theoretical foundation of the finite element method," *Int. J. Solids Struct.* 4, 929-952, 1968; AMR 22 (1969), Rev. 7609.
- (31) Adini, A., and Clough, R. W., "Analysis of plate bending by the finite element method," *Nat. Sci. Found Rep. G. 7337*, Univ. of Calif., Berkeley, 1961.
- (32) Zienkiewicz, O. C., and Cheung, Y. K., "The finite element method for analysis of elastic isotropic and orthotropic slabs," *Proc. Inst. Civ. Eng.* 28, 471-488, 1964.
- (33) Walz, J. E., Fulton, R. E., and Cyrus, N. J., "Accuracy and convergence of finite element approximation," *Proc. 2nd Conf. Matrix Meth. in Struct. Mech.*, Wright-Patterson AFB, Ohio, 1968.
- (34) Melosh, R. J., "A stiffness matrix for the analysis of thin plates in bending," *J. Aero Sci.* 28, 34-42, 1961; AMR 14 (1961), Rev. 3489.
- (35) Crandall, S. H., "Engineering analysis," McGraw-Hill, NY (1956); AMR 12 (1959), Rev. 1122.
- (36) Szabo, B. A., and Lee, G. C., "Derivation of stiffness matrices for problems on plane elasticity by Galerkin method," *Int. J. Num. Meth. Eng.* 1, 301-310, 1969.
- (37) Zienkiewicz, O. C., and Parekh C. J., "Transient field problems--two- and three-dimensional analysis by iso-parametric finite elements," *Int. J. Num. Meth. in Engr.* 2-61-71, 1970.
- (38) Oden, J. T., "A general theory of finite elements: I-Topological considerations II-Application," *Int. J. Num. Meth. Eng.* 1, 205-221; 247-260, 1969.
- (39) Gallagher, R. H., "A correlation study of methods of matrix structural analysis," AGARDograph 69, pergamon Press (1962).
- (40) Argyris, J. H., "Matrix methods of structural analysis," *Proc. 14th meeting of AGARD*, AGARDograph 72, 1962.
- (41) Martin, H. C., "Introduction to matrix methods of structural analysis," McGraw-Hill, NY (1966).





- (42) Southwell, R. V., "Relaxation methods in theoretical physics," Clarendon Press, Oxford (1946).
- (43) Varga, R. S., "Matrix iterative analysis" Prentice-Hall, (1962).
- (44) Griffin, D. S., and Kellog, R. B., "A numerical solution of axially symmetrical and plane elasticity problems," In. J. Solids and structures 3, 781-794, 1967; AMR 21, (1968), Rev. 3185.
- (45) Gallagher, R. H., Padlog, J., and Bijlard, P. P., "Stress analysis in heated, complex shapes." J. Aero-Space Science 29, 700-707, 1962.
- (46) Argyris, J. H., "Matrix analysis of three-dimensional elastic media. Small and large displacements," J. AIAA 3, 45-51, 1965; AMR 18 (1965), Rev. 3951.
- (47) Zienkiewicz, O. C., Irons, B. M., Ergatoudis, J., Ahmad, S. and Scott, F. C., "Iso-parametric and associated element families for two- and three-dimensional analysis," (Ch. 13 of "Finite element method in stress analysis"), I. Holand and K. Bell, edited by, Tapir, Trondheim, Norway (1969).
- (48) Irons, B. M., "Engineering application of numerical integration in stiffness method," J. AIAA 4, 2035-2037, 1966.
- (49) Ergatoudis, J., Irons, B. M., and Zienkiewicz, O. C., "Curved, isoparametric quadrilateral elements in finite element analysis," Int. J. Solids & Struct. 4, 31-42, 1968; AMR 21 (1968), Rev. 6347.
- (50) Ergatoudis, J., Irons, B. M., and Zienkiewicz, O. C., "Three-dimensional analysis of arch dams and their foundations," Proc. Sym. on Arch Dams, Inst. Civ. Eng. London, 1968.
- (51) Atkinson, B., Brocklebank, M. P., Card, C. C. M., and Smith, J. M., "Low Reynolds number developing flows," A. I. Chem. Eng. Journ. 15-548-553, 1969.
- (52) Clough, R. W., and Tocher, J. L., "Finite element stiffness matrices for analysis of plates in bending," Proc. Conf. Matrix Meth. in Struct. Mech., Wright-Patterson AFB, Ohio, 1965.
- (53) Clough R. W., and Fellipa, C. A., "A refined quadrilateral element for analysis of plate bending," Proc. 2nd Conf. Matrix Meth. in Struct. Mech., Wright-Patterson AFB, Ohio, 1968.
- (54) Bogner, F. K., Fox, R. L., and Schmit, A. L., "The generation of interelement compatible stiffness and mass matrices by use of interpolation formulas," Proc. Conf. Matrix Meth. in Struct. Mech., Wright-Patterson AFB, Ohio, 1965.



The first part of the document  
 discusses the general principles  
 of the system. It is important  
 to understand the basic concepts  
 before proceeding to the more  
 detailed sections. The following  
 sections will describe the  
 various components and their  
 interactions.



The second part of the document  
 describes the hardware and  
 software requirements. It  
 provides a detailed list of the  
 necessary resources and the  
 configuration parameters. This  
 information is essential for  
 the successful implementation  
 of the system.

The third part of the document  
 describes the installation and  
 maintenance procedures. It  
 provides step-by-step instructions  
 for setting up the system and  
 performing routine maintenance  
 tasks.

The fourth part of the document  
 describes the performance and  
 reliability of the system. It  
 provides a detailed analysis of  
 the system's capabilities and  
 limitations.

The fifth part of the document  
 describes the future work and  
 conclusions. It provides a  
 summary of the findings and  
 suggests areas for further  
 research.



- (55) Bell, K., "A refined triangular plate bending element," *Int. J. Num. Method. in Eng.* 1, 101-122, 1969.
- (56) Irons, B. M., "A conforming quartic triangular element for plate bending," *Int. J. Num. Meth. in Eng.* 1, 29-46, 1969.
- (57) Argyris, J. H., Fried, I., and Schapf, D. W., "The TUBA family of plate elements for matrix displacement method," *Aeronautical Journal R. Ae. Soc.* 72, 701-709, 1968; AMR 22 (1969), Rev. 5921.
- (58) Bosshard, W., "Ein neues volltraglicher endliches Element for Plattenbiegung," *Int. Ass. Bridge Struct. Eng. Bull.* 28, 27-40, 1968.
- (59) Cowper, G. R., Kosko, E., Lindberg, C. M., and Olson, M. D., "Formulation of a new triangular plate bending element," *Trans. Canadian Aero Space Inst.* 1, 86-90, 1968; AMR 22 (1969) Rev. 4068.
- (60) Crafton, P. E., and Strome, D. R., "Analysis of axisymmetric shells by the direct stiffness method," *J. AIAA* 1, 2342-2347, 1963.
- (61) Zienkiewicz, O. C., and Cheung, Y. K., "Finite element method of analysis for arch dam shells and comparison with finite difference procedures," *Proc. Symp. on Theory of Arch Dams Pergamon Press* (1965).
- (62) Connor, J. I., and Brebbia, C., "Stiffness matrix for shallow rectangular shell element," *J. of Engr. Mech. Div. Proc. ASCE* 93, 13-63, 1967; AMR 21 (1968), Rev. 7391.
- (63) Stricklin, J. A., Navaratna, D. R., and Pian, T. H. H., "Improvements in the analysis of shells of revolution by matrix displacement method (curved elements)." *J. AIAA* 4, 2069-2072, 1966; AMR 20 (1967), Rev. 9219.
- (64) Ahmad, S., Irons, B. M., and Zienkiewicz, O. C., "Curved thick shell and membrane elements with particular reference to axisymmetric problems," *Proc. 2nd Conf. on Matrix Meth. in Struct. Mech.*, Wright-Patterson AFB, Ohio, 1968.
- (65) Ahmad, S., Irons, B. M., and Zienkiewicz, O. C., "Analysis of thick and thin shell structures by general curved elements," to be published in *Int. J. Num. Meth. in Engr.*
- (66) Argyris, J. H., "Elasto-plastic matrix displacement analysis of three-dimensional continua," *J. Roy Aero Soc.* 69, 633-635, 1965; AMR 19 (1966), Rev. 3470.
- (67) Marcal, P. V., and King, I. P., "Elastic-plastic analysis of two-dimensional stress systems by the finite element method," *Int. J. Mech. Sci.* 9, 143-155, 1967; AMR 20 (1967), Rev. 7686.



- (68) Popov, E. P., Khojastch-Bakht, M., and Yaghmai, S., "Bending of circular plates of hardening material," *Int. J. Solids and Struct.* 3, 975-988, 1967; AMR 21 (1968), Rev. 3240.
- (69) Zienkiewicz, O. C., Valliappan, S., and King, I. P., "Elasto-plastic solutions of engineering problems, Initial stress, finite element approach," *Int. J. Num. Meth. in Eng.* 1, 75-100, 1969.
- (70) Zienkiewicz, O. C., Valliappan, S., and King, I. P., "Stress analysis of rock as a no-tension material," *Geotechnique* 18, 56-66, 1968; AMR 22 (1969), Rev. 3296.
- (71) Yamada, Y., Yashimura, N., and Sakurai, T., "Stress-strain matrix and its application for the solution of elastic-plastic problems by the finite element method," *In. J. Mech. Sci.* 10, 343, 354, 1968; AMR 22 (1969), Rev. 2330.
- (72) Reyes, S. F., and Deere, D. U., "Elasto-plastic analysis of underground openings by the finite element method," *Proc. 1st Int. Congr. Rock Mech II*, 477-486, 1966.
- (73) Zienkiewicz O. C., Watson, M., and King. I. P., "A numerical method of visco-elastic stress analysis," *Int. Journ. Mech. Sci.* 10, 807-827, 1968; AMR 22 (1969), Rev. 8419.
- (74) Greenbaum, G. A., and Rubinstein, M. F., "Creep analysis of axisymmetric bodies using finite elements," *Nucl. Eng. and Design* 7, 379-397, 1968,
- (75) Goodman, R. E., Taylor, R. L., and Brekke, T., "A model for the mechanics of jointed rock," *J. of Soil Mech. and Found. Div., Proc. ASCE* 94, 637-659, 1968; AMR 21 (1968), Rev. 8177.
- (76) Zienkiewicz, O. C., and Valliappan, S., "Analysis of real structures for creep, plasticity and other complex constitutive laws," *Conf. on Materials in Civ. Eng. Univ. of Southampton*, 1969, J. Wiley (1970).
- (77) Martin, H. C., "On the derivation of stiffness matrices for the analysis of large deflection and stability problems," *Proc. Conf. Matrix Meth. in Struct. Mech.*, Wright-Patterson AFB, Ohio, 1965.
- (78) Gallagher, R. H., and Padlog, J., "Discrete element approach to structural instability analysis" *J. AIAA* 1, 1437-1439, 1963.
- (79) Kapur, K. K., and Hartz, B. J., "Stability of thin plates using the finite element method," *J. of Engr. Mech. Div., Proc. ASCE* 92, 177-195, 1966; AMR 20 (1967), Rev. 4676.
- (80) Anderson, R. G., Irons, B. M., and Zienkiewicz, O. C., "Vibration and stability of plates using finite elements," *int. J. Solids and Struct.* 4, 1031-1055, 1968; AMR 22 (1969), Rev. 6815.

[The following text is extremely faint and largely illegible. It appears to be a series of lines or paragraphs of text, possibly a list or a set of instructions, but the specific words and numbers are difficult to discern. Some faint words like "ITEM", "NO.", and "DESCRIPTION" might be visible in the first few lines.]



- (81) Gallagher, R. H., and Yang, H. T. Y., "Elastic instability predictions for doubly curved shells," Proc. 2nd Conf. Matrix Meth. in Struct. Mech., Wright-Patterson AFB, Ohio, 1968.
- (82) Carson, W. G., and Newton, R. E., "Plate buckling analysis using a fully compatible finite element," J. AIAA 8, 527-529k 1969.
- (83) Turner, M. J., Dill, E. H., Martin, H. C., and Melosh, R. J., "Large deflection of structures subject to heating and external loads," J. Aero. Sci. 27, 97-106, 1960.
- (84) Marcal, P. V., "Finite element analysis of combined problems of material and geometric behavior," Techn. Rep. 1 ONY, Brown University, March 1969.
- (85) Brebbia, C., and Connor, J., "Geometrically non-linear finite element analysis," J. of Engr. Mech. Div., Proc. ASCE 95, 463-483, 1969.
- (86) Marcal, P. V., "Effect of initial displacement on problem of large deflection and stability," Techn. Report ARPA E54, Brown University, Nov. 1967.
- (87) Oden, J. T., "Finite element large deflection analysis of plates," J. Engr. Mech. Div., Proc. ASCE 95, 143, 1969.
- (88) Murray, D. W., and Wilson, E. L., "Finite element postbuckling analysis of thin elastic plates," J. AIAA 7, 1915, 1969.
- (89) Schmit, L. A., Boyner, F. K., and Fox, R. L., "Finite deflection structural analysis, using plane and cylindrical shell discrete elements," J. AIAA 5, 1525-7, 1968.
- (90) Oden, J. T., and Sato, T., "Finite strains and deformations of elastic membranes by the finite element method," Int. J. Solids and Struct. 3, 471-478, 1967; AMR 22 (1969), Rev. 7672.
- (91) Oden, J. T., "Finite plane strain of incompressible elastic solids by the finite element method," The Aeronautical Quarterly, 18, 254-264, 1967.
- (92) Zienkiewicz, O. C., Mayer, P., and Cheung, Y. K., "Solution of anisotropic seepage problems by finite elements," J. of Engr. Mech. Div., Proc. ASCE 92, 111-120, 1966.
- (93) Taylor, R. L., and Brown, C. B., "Darcy flow solution with a free surface," J. of the Hydr. Div., Proc. ASCE 92, 25-33, 1967; AMR 32 (1969), Rev. 702.
- (94) Martin, H. G., "Finite element analysis of fluid flows," Proc. 2nd Conf. Matrix Meth. in Struct. Mech., Wright-Patterson AFB, Ohio, 1968.

CONFIDENTIAL

CONFIDENTIAL

CONFIDENTIAL

CONFIDENTIAL

CONFIDENTIAL

CONFIDENTIAL

CONFIDENTIAL

CONFIDENTIAL

CONFIDENTIAL

CONFIDENTIAL

CONFIDENTIAL

CONFIDENTIAL

CONFIDENTIAL

CONFIDENTIAL

CONFIDENTIAL

CONFIDENTIAL

CONFIDENTIAL



- (95) Ariett, P. L., Bahrani, A. K., and Zienkiewicz, O. C., "Application of finite elements to the solution of Helmholtz's equation (wave guides)," Proc. Inst. El. Eng. 115, 1762-1964, 1968.
- (96) Zienkiewicz, O. C., and Newton, R. E., "Coupled vibrations of a structure submerged in a compressible fluid," Int. Symp. on finite element techniques in shipbuilding, Stuttgart, 1969.
- (97) Taylor, C., Patil, B. S., and Zienkiewicz, O. C., "Harbour oscillation in a numerical treatment for undamped modes," Proc. Inst. Civ. Eng. 43, 1941-155, 1969.
- (98) Archer, J. S., and Rubin, C. P., "Improved linear axisymmetric-shell - fluid model for launch vehicle longitudinal response analysis," Proc. Conf. Mat. Meth. in Struct. Mech., Wright-Patterson AFB, Ohio, 1965.
- (99) Zienkiewicz, O. C., Irons, B., and Nath P., "Natural frequencies of complex free or submerged structures by the finite element method," Symp. on Vibration in Civ. Eng., Inst. Civ. Eng., (Butterworth), London, 1965.
- (100) Sandhu, R. S., and Wilson, E. L., "Finite element analysis of seepage in elastic media," J. of Engr. Mech. Div., Proc. ASCE 95, 641-651, 1969.
- (101) Rashid, Y. R., "Three-dimensional analysis of elastic solids," Int. J. Solids Struct., " Part I: Analysis procedure," 5, 1311-33, 1969; Part II: " The computational problem," 6, 195-207, 1970.
- (102) Irons, B. M., "A frontal solution program for finite element analysis," Int. J. Num. Meth. in Eng. 2, 5-32, 1970.
- (103) Johnson, W. M., and McIay, R. W., "Convergence of the finite element method in the theory of elasticity," J. Appl. Mech. Trans. ASME, 274-278, June 1968.
- (104) Przemieniecki, J. S., "Theory of matrix structural analysis," McGraw-Hill, 1968.
- (105) Jenkins, W. M., "Matrix and digital computer methods in structural analysis," McGraw-Hill, 1969.
- (106) Pope, G. G., " The application of the matrix displacement method in plane elastoplastic stress problems," Proc. Conf. Matrix Meth. in Struct. Mech., Wright-Patterson AFB, Ohio, 1965.
- (107) Miller, R. E. and S. D. Hansen, "Large Scale Analysis of Current Aircraft," On General Purpose Finite Element Computer Programs, P. V. Marcal (ed), ASME Special Publication, New York, N. Y., 1970.



(108) Smith, C. S. and G. Mitchell, "Practical Considerations in the Application of Finite Element Techniques to Ship Structures," Proc. of Symposium on Finite Element Techniques, U. of Stuttgart, Stuttgart, Germany, June, 1969.

(109) Corum, J. M. and J. E. Smith, "Use of Small Models in Design and Analysis of Prestressed-Concrete Reactor Vessels," Report ORNL-4346, Oak Ridge Nat. Lab., Oak Ridge, Tenn., May, 1970.

(110) Cheng, W. K., M. U. Hosain, and V. V. Neis, "Analysis of Castellated Beams by the Finite Element Method," Proc. of Conf. on Finite Element Method in Civil Eng., McGill U., Montreal, Canada, 1972, pp. 1105-1140.

(111) Gallagher, R. H., "Large -Scale Computer Programs for Structural Analysis" in On General Purpose Finite Element Computer Programs, P. V. Marcal (ed.), ASME Special Publication, 1970, pp. 3-34.

(112) Marcal, P. V., "Survey of General Purpose Programs for Finite Element Analysis," in Advances in Computational Methods in Structural Mechanics and Design, J. T. Oden, et al. (ed.), U. of Alabama Press, University, Ala., 1972.

(113) Gallagher, R. H. and O. C. Zienkiewicz, Optimum Structural Design, John Wiley & Sons, Inc., New York, N. Y., 1973.

SECRET

CONFIDENTIAL

SECRET

CONFIDENTIAL

SECRET

CONFIDENTIAL

SECRET

CONFIDENTIAL



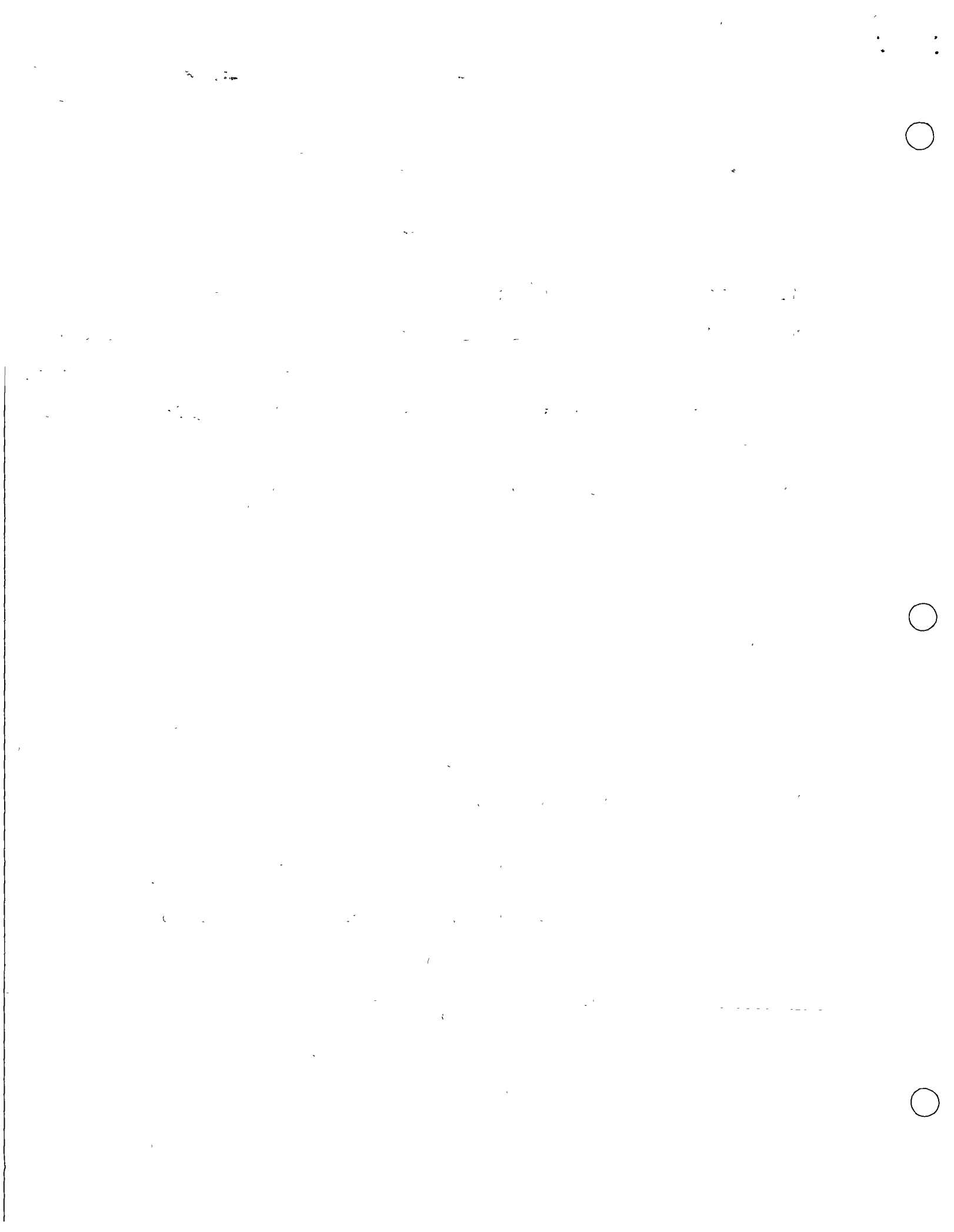
# FINITE ELEMENT METHOD THEORY AND APPLICATION

## 1. INTRODUCTION

### 1.1 HISTORICAL BACKGROUND

The finite element method (FEM) has become a powerful numerical technique for solving complex problems in science and engineering, mainly due to the advances made earlier in the numerical methods particularly in matrix methods as well as due to the rapid introduction of high speed computers in the market. However, the introduction of concepts and applications of FEM dates back to the era of mathematicians who tried to calculate the perimeter and area of a circle by idealizing it as a regular polygon. It is also interesting to note that the bound solutions which are often discussed in FEM can be traced back to the solution of the area of a circle. If the circle is modelled with an inscribed polygon, a lower bound solution is obtained whereas an upper bound solution is obtained by replacing the circle by a circumscribed polygon. Even though the basic concepts of FEM existed for over two thousand years, for all practical purposes, one can only say that these concepts were actually used for solving physical problems in 1950s by the aeronautical engineers.

In 1956, Turner et al (Ref 1) presented the stiffness analysis for the complex structures, which is the starting point in the rediscovery of FEM. Nevertheless, Clough (Ref 2) was the one who actually used the term FEM in 1960. Since then, a tremendous amount of research has been done in this field and



quite a large number of papers have been published in almost all the journals related to all fields of engineering as well as some in the fields of mathematics and science. In addition, several conferences have been held all over the world and hundreds of papers have been presented in each. The theory and application of FEM have also been presented in numerous text books (Ref 3-22). In order to help the research workers in tracing the references required for their particular work several bibliographies have either been published or under preparation, among them notably Ref (23) is a good source of information.

## 1.2 APPLICATIONS OF FEM

The FEM is applicable to a variety of boundary value and initial value problems in engineering as well as applied science. Some of these applications are:

1. Stress Analysis of Structures, Stability of Structures, Dynamic response of structures, Thermal Stress Analysis, Torsion of prismatic members
2. Stress Analysis of Geomechanics problems, Soil-Structure Interaction, Slope Stability problems, Soil Dynamics and Earthquake Engineering, Seepage in soils and rocks, Consolidation settlement
3. Solutions in Fluid Mechanics, Harbour oscillations, Pollution Studies, Sedimentation
4. Analysis of Nuclear Reactor Structures
5. Stress Analysis and Flow Problems in Biomechanics
6. Characteristic Study of Composites in Fibre Technology
7. Wave Propagation in Geophysics
8. Field Problems in Electrical Engineering

The first part of the document  
 discusses the importance of  
 maintaining accurate records  
 and the role of the  
 committee in this regard.  
 It also mentions the  
 need for regular  
 communication and  
 collaboration between  
 all members of the  
 organization.





Apart from the above mentioned areas, the FEM is also applicable to any other problem as long as the analyst makes certain that the problem is amenable to solution based on the assumptions introduced in the formulation of FEM and appropriate material properties can be provided in a realistic manner.

### 1.3 METHODS OF ANALYSIS

In general, there are four basic methods of analysis in FEM- displacement method, equilibrium method, mixed method and hybrid method. The field variables or unknown quantities in each of these methods are as follows.

Displacement method - displacements and their derivatives

Equilibrium method - stress components

Mixed method - some displacements and some stress components

Hybrid method - displacements or boundary forces

In the displacement method, smooth displacement distribution is assumed within an element, interelement compatibility of displacement is generally assured and minimum potential energy criterion is used in the formulation.

In the equilibrium method, the interior stress distribution is assumed to be smooth, the equilibrium of boundary tractions is maintained and the minimum complementary energy is the basis for the formulation.

In the mixed method which is generally used for plate and shell problems, both displacements and stresses are assumed smooth

100

100  
100  
100  
100



in the interior, the displacement components and the equivalent stress components are considered to be continuous at the interelement boundaries and the formulation is based on Reissner's principle.

In the hybrid method, depending on whether the model is displacement type or equilibrium type, the distribution of displacements or stresses within the element is considered to be smooth and along the interelement boundary either assumed compatible displacements or assumed equilibrating boundary tractions are ensured and either modified complementary energy or modified potential energy principle is adopted for the formulation.

Among these four methods, the displacement method is the most widely used approach. However, for plate bending problems either the equilibrium or mixed method is preferred and for some field problems hybrid method is more suitable.

#### 1.4 DESCRIPTION OF FEM

A structure, continuum or a domain is divided into a number of arbitrary shaped parts or regions known as elements. These elements are interconnected at joints known as nodes. The principal unknown is termed as the field variable. This field variable can be displacement, temperature, pore-pressure or stress. The distribution of the field variable within an element is approximated by the use of certain polynomial functions. Variational methods or residual methods are employed

... me ditte E... ..  
... ..  
... ..

... ..  
... ..  
... ..  
... ..  
... ..  
... ..

... ..  
... ..  
... ..  
... ..  
... ..  
... ..

... ..  
... ..

to develop the finite element equations which relate the field variables at the nodes to the corresponding action vector at the nodes of the element. This relationship is provided by the so called property matrix which is based on the material and the geometric properties of the element. Finally these finite element equations are assembled to form a system of algebraic equations for the entire domain. The unknown field variable is obtained by solving this system of algebraic equations.

#### 1.5 BASIC STEPS IN FE ANALYSIS

The basic steps in the finite element analysis of general problems are as follows.

1. The continuum is divided into finite elements of any arbitrary shape.
2. A suitable polynomial is chosen to represent the distribution of the field variable within an element in terms of its nodal values. Thus, the field variables at the nodes become the primary unknowns.
3. Using variational methods or residual methods, the finite element equations are formulated.
4. The individual finite element equations obtained in step 3 are assembled to form a set of algebraic equations for the overall continuum.
5. The solution of the algebraic equations obtained in step 4 yields the values of the field variables at the nodes.
6. From the field variables at the nodes, the secondary variables such as stress, strain for an element can be obtained.

The first part of the report is devoted to a description of the  
 experimental apparatus and the method of measurement. The  
 results of the measurements are given in the following table.  
 The values of the constants  $k_1$  and  $k_2$  are determined from  
 the slope of the straight lines obtained in the plots of  
 $\log \frac{1}{1-x}$  versus  $t$  and  $\log \frac{1}{1-x}$  versus  $t^2$ .  
 The values of  $k_1$  and  $k_2$  are found to be  $0.0012$  and  
 $0.0008$  respectively. The values of  $k_1$  and  $k_2$  are  
 independent of the concentration of the solution.

The second part of the report is devoted to a discussion of the  
 results. It is shown that the values of  $k_1$  and  $k_2$  are  
 independent of the concentration of the solution. This  
 indicates that the reaction is first order with respect to  
 the concentration of the solution.

The third part of the report is devoted to a comparison of the  
 results with those obtained by other workers. It is shown  
 that the values of  $k_1$  and  $k_2$  are in good agreement  
 with those obtained by other workers. This indicates that  
 the reaction is first order with respect to the concentration  
 of the solution.

## REFERENCES

1. TURNER, M. J., CLOUGH, R. W., MARTIN, H. C., and TOPP, L. J., "Stiffness and deflection analysis of complex structures", J. Aero, Sci., Vol. 23, No. 9, 1956, pp 805-823
2. CLOUGH, R. W., "The finite element method in plane stress analysis", Proc. 2nd ASCE Conf. on Electronic Computation, Pittsburgh, 1960, pp 345-378
3. ZIENKIEWICZ, O. C. and CHEUNG, Y. K., The Finite Element Method in Structural and Continuum Mechanics, McGraw-Hill, London, 1967
4. ZIENKIEWICZ, O. C., The Finite Element Method in Engineering Science, McGraw-Hill, London, 1971
5. SMITH, G. N., An Introduction to Matrix and Finite Element Methods in Civil Engineering, Applied Science, London, 1971
6. DESAI, C. S. and ABEL, J. F., Introduction to the Finite Element Method, Van Nostrand and Reinhold, New York, 1972
7. ODEN, J. T., Finite Elements of Nonlinear Continua, McGraw-Hill, New York, 1972
8. URAL OKTAY, Finite Element Method, Intext Educational Publishers, New York, 1973
9. MARTIN, H. C. and CAREY, G. F., Introduction to Finite Element Analysis, McGraw-Hill, New York, 1973
10. STRANG, G. and FIX, G. J., An Analysis of the Finite Element Method, Prentice Hall, N. J., 1973
11. BREBBIA, C. A. and CONNOR, J. J., Fundamentals of Finite Element Technique, Butterworths, London, 1973
12. NORRIS, D. H. and de VRIES, G., The Finite Element Method-Fundamentals and Applications, Academic Press, New York, 1973
13. COOK, R. D., Concepts and Applications of Finite Element Analysis, John Wiley, New York, 1974
14. WACHPRESS, E. L., A Rational Finite Element Basis, Academic Press, New York, 1975
15. FENNER, R. T., Finite Element Method for Engineers, MacMillan Press, London, 1975
16. GALLAGHER, R. H., Finite Element Analysis-Fundamentals, Prentice-Hall, N. J., 1975





17. HUEBNER, K. H., The Finite Element Method For Engineers; John Wiley, New York, 1975
18. ROCKEY, K. C., et al, The Finite Element Method, Crosby, Lockwood, Staples, London, 1975
19. CONNOR, J. J. and BREBBIA, C. A., Finite Element Techniques for Fluid Flow, Butterworths, London, 1976
20. ODEN, J. J. and REDDY, J. N., An Introduction to Mathematical Theory of Finite Elements, John Wiley, New York, 1976
21. SEGERLIND, L. J., Applied Finite Element Analysis, John Wiley, New York, 1976
22. BATHE, K. J. and WILSON, E. L., Numerical Methods in Finite Element Analysis, Prentice-Hall, N. J., 1976
23. NORRIE, D. H. and de VRIES, G., "A Finite Element Bibliography (3 Parts), Report No. 57, Mechanical Engineering Department, The University of Calgary, Canada, 1974



# METODO DE LAS RIGIDECES PARA ANALIZAR ESTRUCTURAS ORTOGONALES PLANAS

## 1.1 Convención de signos.

La siguiente convención de signos será utilizada en el desarrollo del método de las rigideces y sus aplicaciones en marcos ortogonales planos.

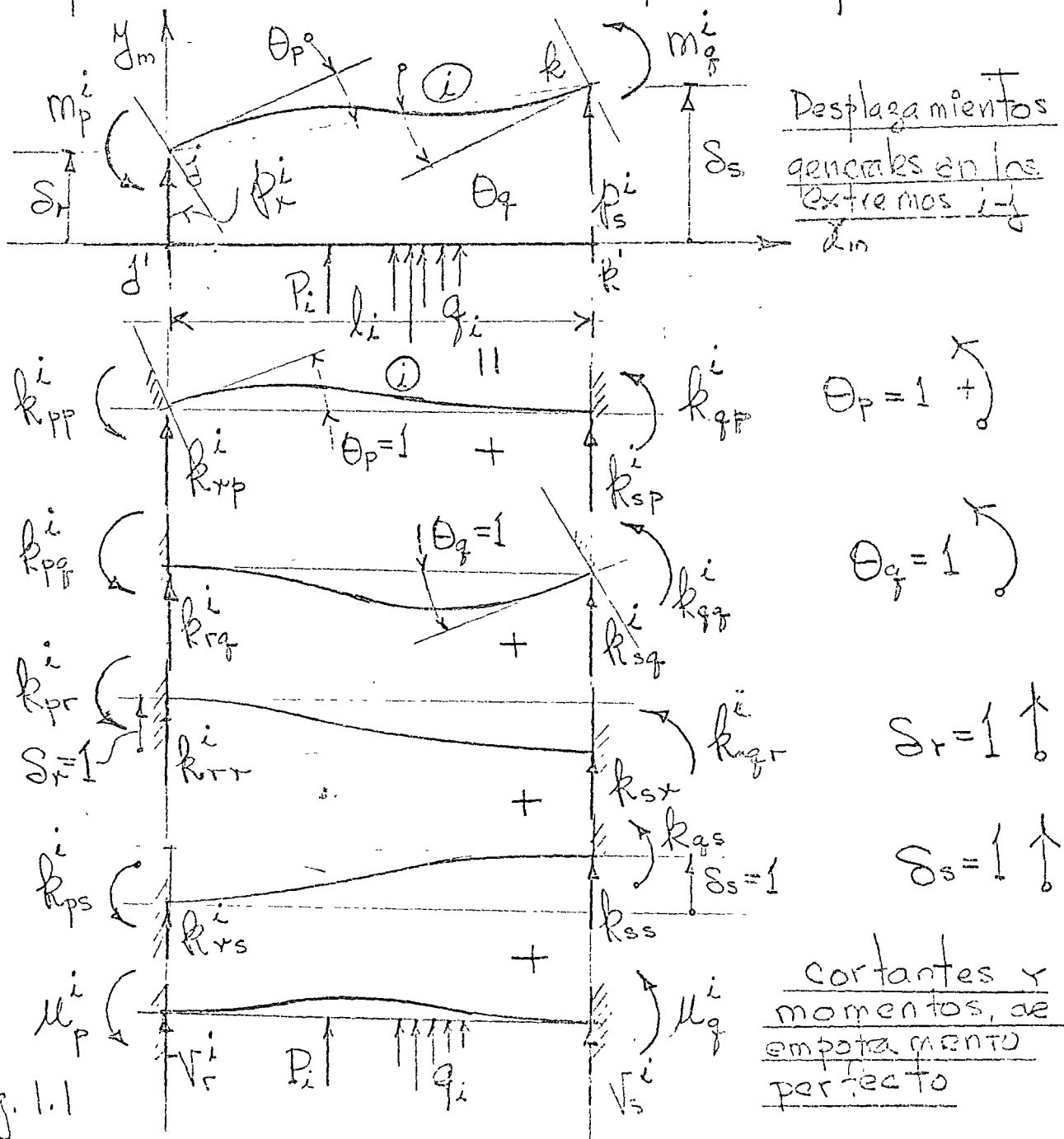


Fig. 1.1



De la Fig. 11 aceptando el principio de superposición se tiene:

$$\begin{aligned}
 m_p^i &= k_{pp}^i \theta_p + k_{pq}^i \theta_q + k_{pr}^i \delta_r + k_{ps}^i \delta_s + \mu_p^i \\
 m_q^i &= k_{qp}^i \theta_p + k_{qq}^i \theta_q + k_{qr}^i \delta_r + k_{qs}^i \delta_s + \mu_q^i \\
 p_r^i &= k_{rp}^i \theta_p + k_{rq}^i \theta_q + k_{rr}^i \delta_r + k_{rs}^i \delta_s + V_r^i \\
 p_s^i &= k_{sp}^i \theta_p + k_{sq}^i \theta_q + k_{sr}^i \delta_r + k_{ss}^i \delta_s + V_s^i
 \end{aligned} \quad (1.1)$$

en (1.1) se desprecia el efecto de la carga normal expresando (1.1) matricialmente se tiene

$$\{m\}_i = [k]_i \{\delta\}_i + \{\mu\}_i \quad (1.2)$$

donde:

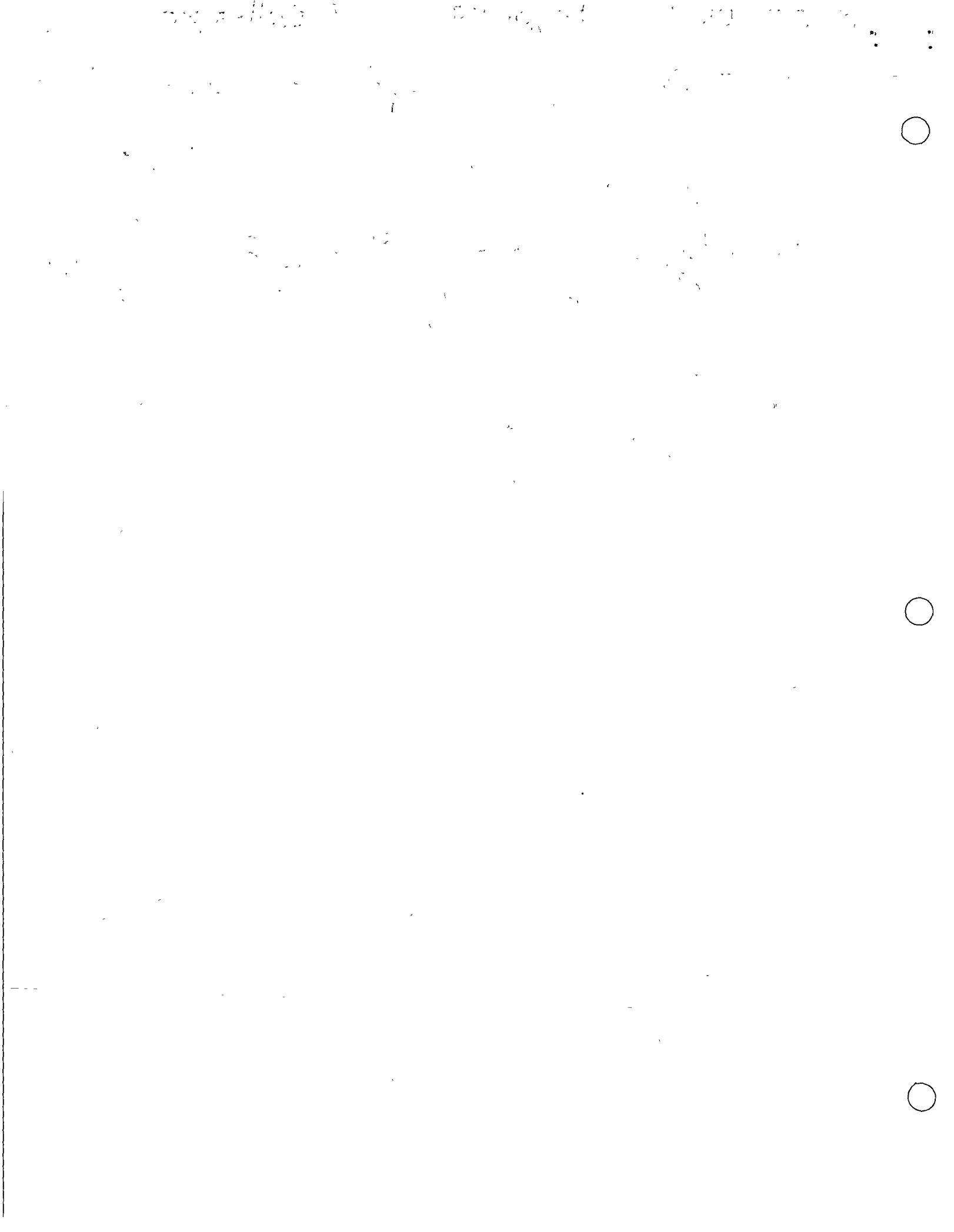
$$\{m\}_i = \begin{Bmatrix} m_p \\ m_q \\ p_r \\ p_s \end{Bmatrix}_i ; \quad \{\delta\}_i = \begin{Bmatrix} \theta_p \\ \theta_q \\ \delta_r \\ \delta_s \end{Bmatrix}_i ; \quad \{\mu\}_i = \begin{Bmatrix} \mu_p \\ \mu_q \\ V_r \\ V_s \end{Bmatrix}_i \quad (1.3)$$

$\{m\}_i$ ; componentes de acciones sobre barra para mantener equil.

$\{\delta\}_i$ ; Desplazamientos en los extremos del miembro (i)

$\{\mu\}_i$ ; Momentos y cortantes de empotramiento perfecto en (i)

$[k]_i$ ; Matriz de rigidez del miembro (i), la cual despreciando el efecto de cortante y carga normal, para un miembro de sección constante es:



$$[R]_i = \begin{bmatrix} \frac{4EI}{l} & \frac{2EI}{l} & \frac{6EI}{l^2} & -\frac{6EI}{l^2} \\ \frac{2EI}{l} & \frac{4EI}{l} & \frac{6EI}{l^2} & -\frac{6EI}{l^2} \\ \frac{6EI}{l^2} & \frac{6EI}{l^2} & \frac{12EI}{l^3} & -\frac{12EI}{l^3} \\ -\frac{6EI}{l^2} & -\frac{6EI}{l^2} & -\frac{12EI}{l^3} & -\frac{12EI}{l^3} \end{bmatrix} \begin{matrix} \phi \\ \psi \\ \gamma \\ \delta \end{matrix} \quad (1.4)$$

La filosofía básica del método de las rigideces ha sido presentada, antes de aplicarlo a diversos sistemas estructurales su procedimiento conviene organizarlo en un programa sistemático y las ecuaciones básicas del análisis presentarlas en términos generales. Como ejemplo consideraremos el marco siguiente.

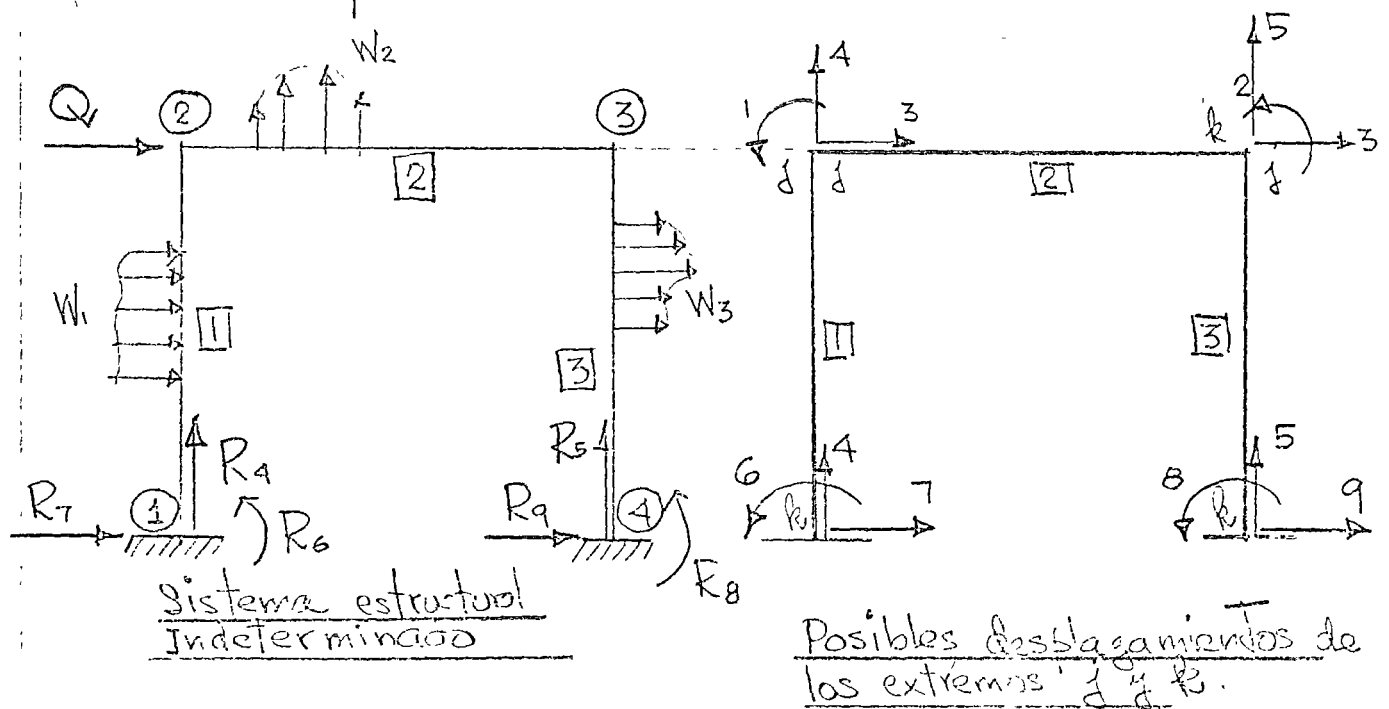
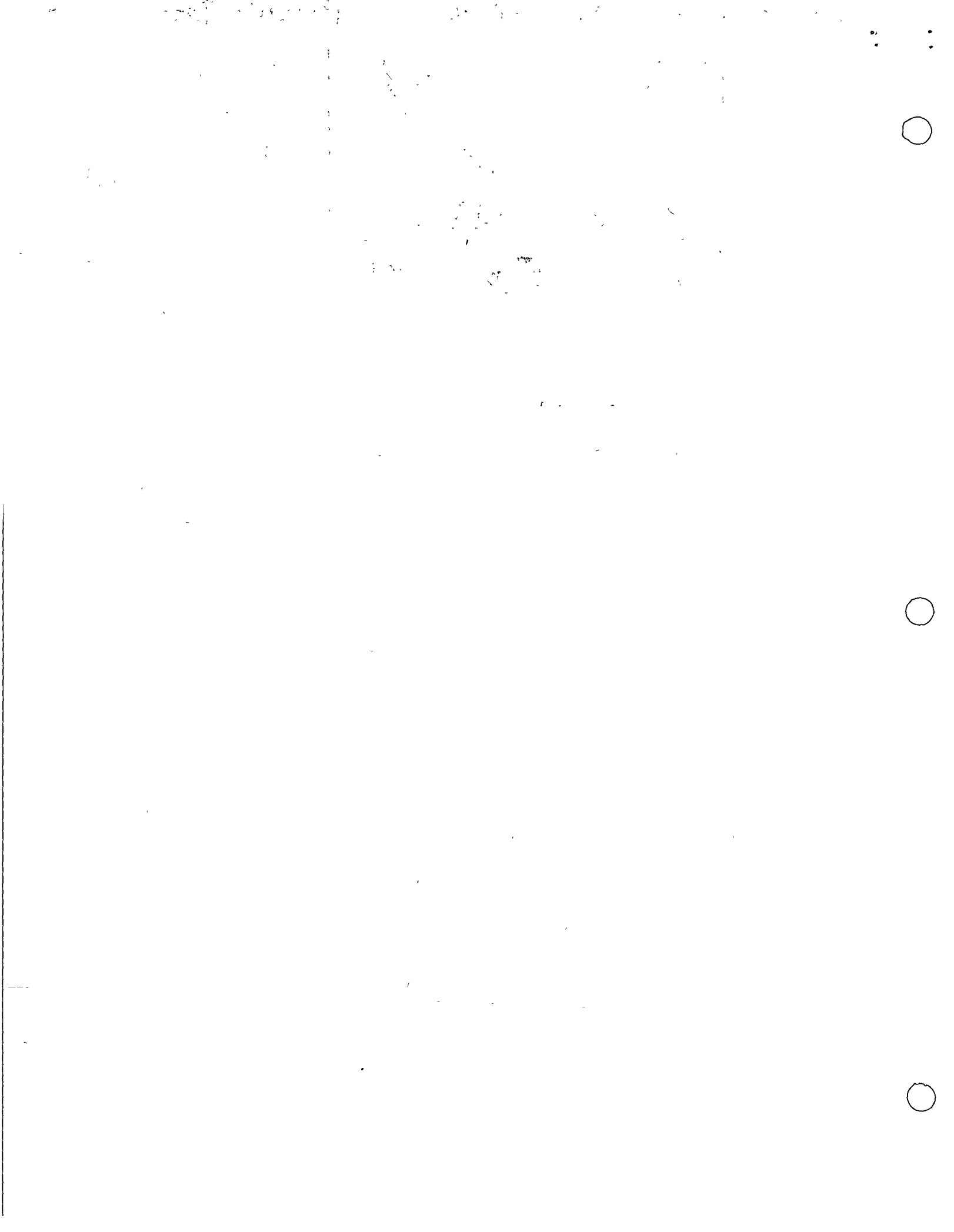


Fig. 1.2





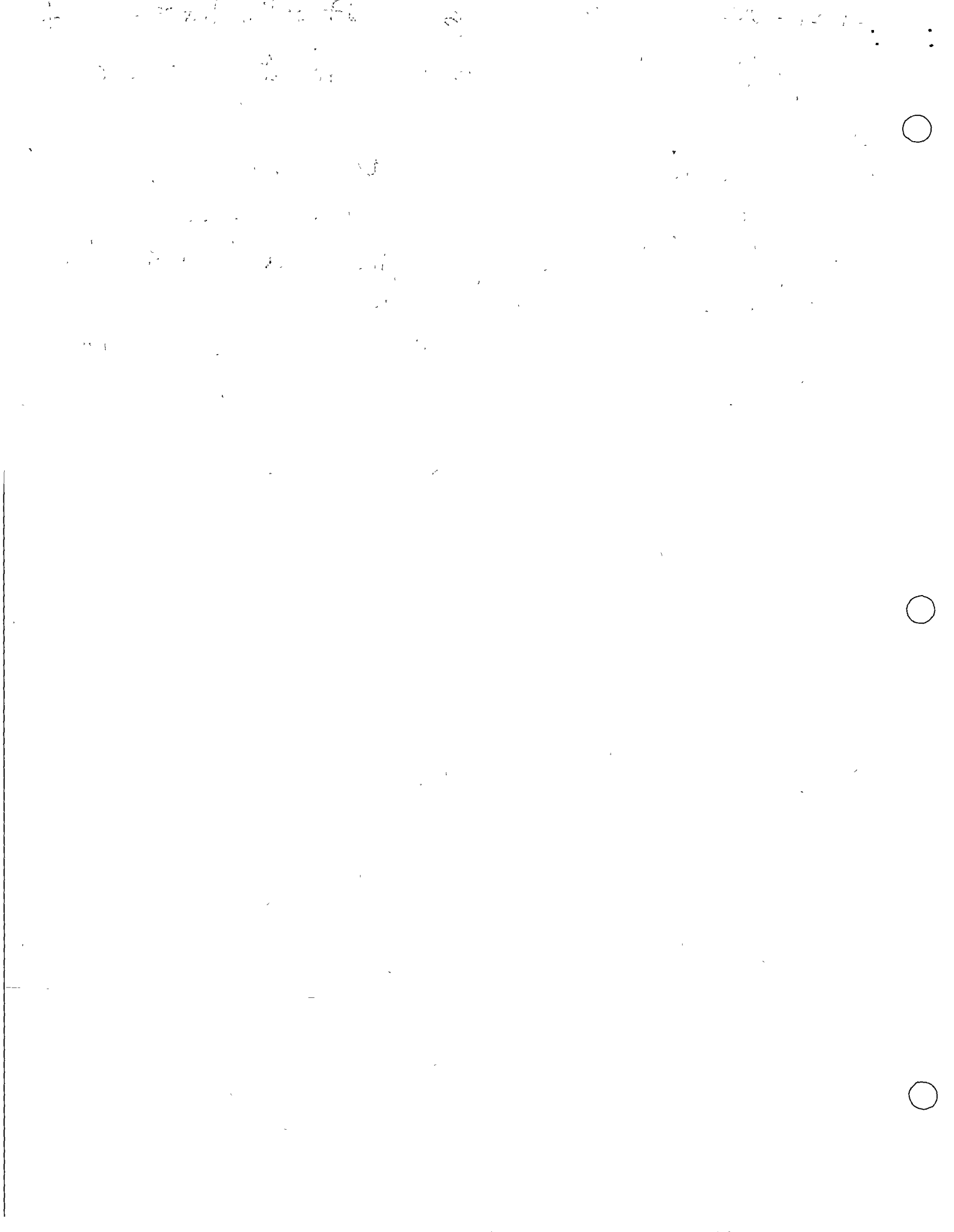
El pórtico de la Fig. 1.2 es indeterminado de tercer grado con  $\theta_1, \theta_2$  y  $\delta_3$ , porque las condiciones de apoyo anulan a  $\delta_4, \delta_5, \theta_6, \delta_7, \theta_8, \delta_9$ . Como primera etapa consideramos la estructura con los nudos fijos determinando la suma de momentos y cortantes correspondientes  $S_{mo}$ .

Aplicando las ecuaciones (1.1) al marco de la Fig. 1.2

$$\text{Miembro 1} \left\{ \begin{array}{l} m_1' = k_{11}' \theta_1 + k_{16}'(0) + k_{13}' \delta_3 + k_{17}'(0) + \mu_1' \\ m_6' = k_{61}' \theta_1 + k_{66}'(0) + k_{63}' \delta_3 + k_{67}'(0) + \mu_6' \\ \phi_3' = k_{31}' \theta_1 + k_{36}'(0) + k_{33}' \delta_3 + k_{37}'(0) + V_3' \\ \phi_7' = k_{71}' \theta_1 + k_{76}'(0) + k_{73}' \delta_3 + k_{77}'(0) + V_7' \end{array} \right. \quad (1.5)$$

$$\text{Miembro 2} \left\{ \begin{array}{l} m_1^2 = k_{11}^2 \theta_1 + k_{12}^2 \theta_2 + k_{14}^2(0) + k_{15}^2(0) + \mu_1^2 \\ m_2^2 = k_{21}^2 \theta_1 + k_{22}^2 \theta_2 + k_{24}^2(0) + k_{25}^2(0) + \mu_2^2 \\ \phi_4^2 = k_{41}^2 \theta_1 + k_{42}^2 \theta_2 + k_{44}^2(0) + k_{45}^2(0) + V_4^2 \\ \phi_5^2 = k_{51}^2 \theta_1 + k_{52}^2 \theta_2 + k_{54}^2(0) + k_{55}^2(0) + V_5^2 \end{array} \right. \quad (1.6)$$

$$\text{Miembro 3} \left\{ \begin{array}{l} m_2^3 = k_{22}^3 \theta_2 + k_{28}^3(0) + k_{23}^3 \delta_3 + k_{29}^3(0) + \mu_2^3 \\ m_8^3 = k_{82}^3 \theta_2 + k_{88}^3(0) + k_{83}^3 \delta_3 + k_{89}^3(0) + \mu_8^3 \\ \phi_3^3 = k_{32}^3 \theta_2 + k_{38}^3(0) + k_{33}^3 \delta_3 + k_{39}^3(0) + V_3^3 \\ \phi_9^3 = k_{92}^3 \theta_2 + k_{98}^3(0) + k_{93}^3 \delta_3 + k_{99}^3(0) + V_9^3 \end{array} \right. \quad (1.7)$$



Como se demostró previamente el análisis de la estructura indeterminada de la Fig. 1.2 puede ser evaluado de

$$[S_{ij}] \{ \delta_i \} = \{ Q_i \} \quad (1.8)$$

en el caso de la Fig 1.2, (1.8) es igual a

$$\begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} \\ S_{31} & S_{41} & S_{51} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \delta_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} M'_{21} + M^2_{23} \\ M^2_{32} + M^3_{34} \\ V'_{21} + V^3_{21} - Q \end{Bmatrix} \quad (1.9)$$

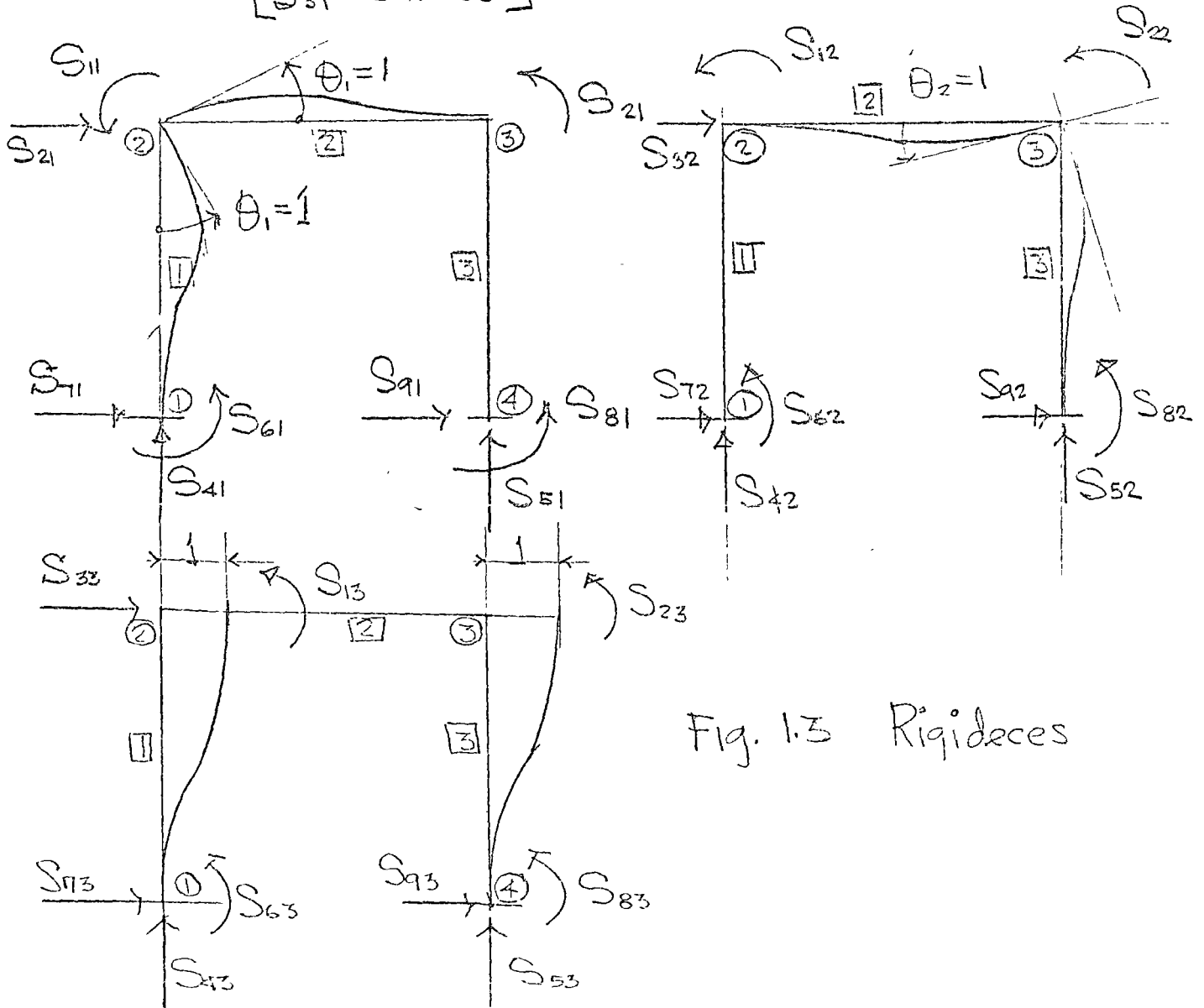
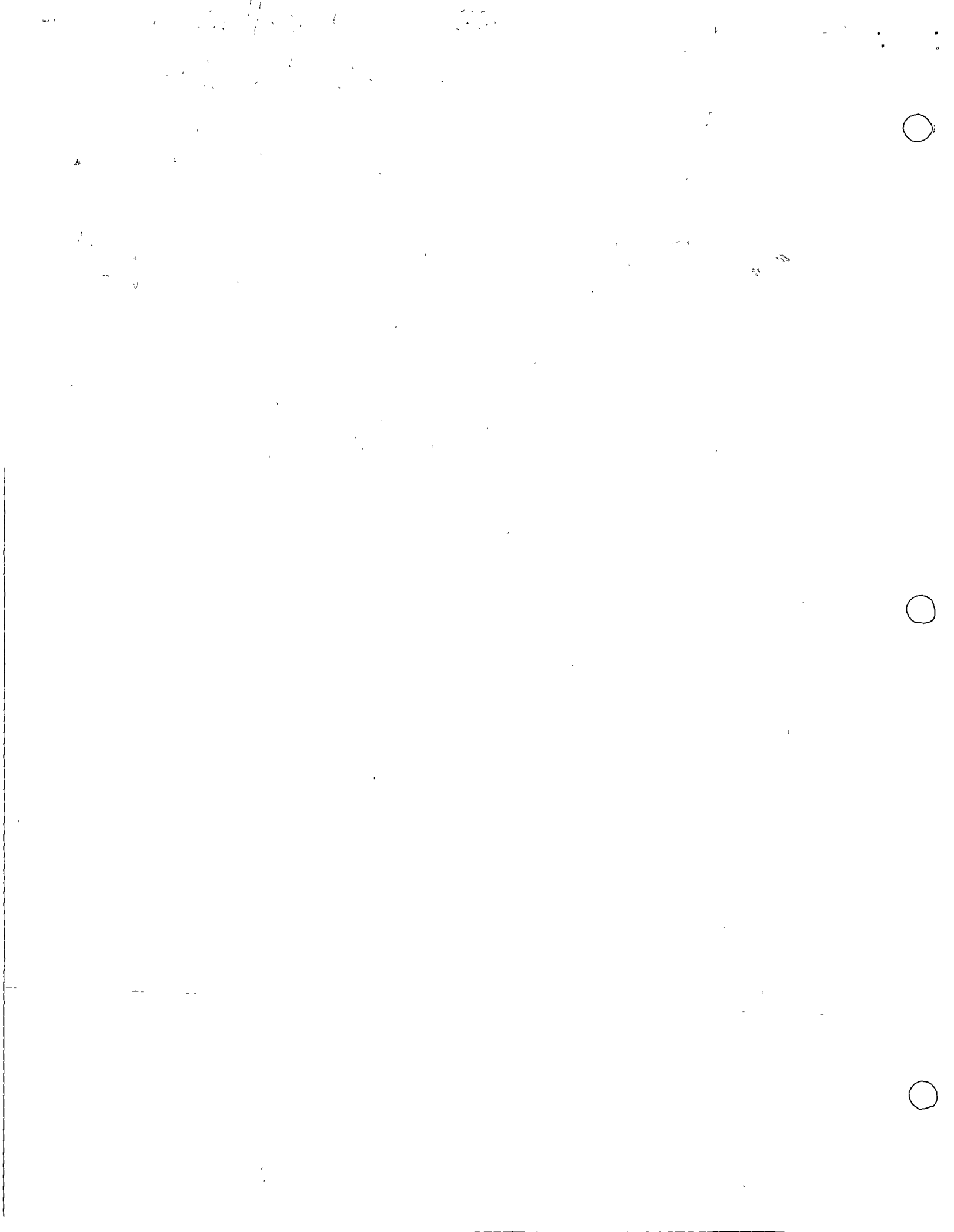


Fig. 1.3 Rigideces



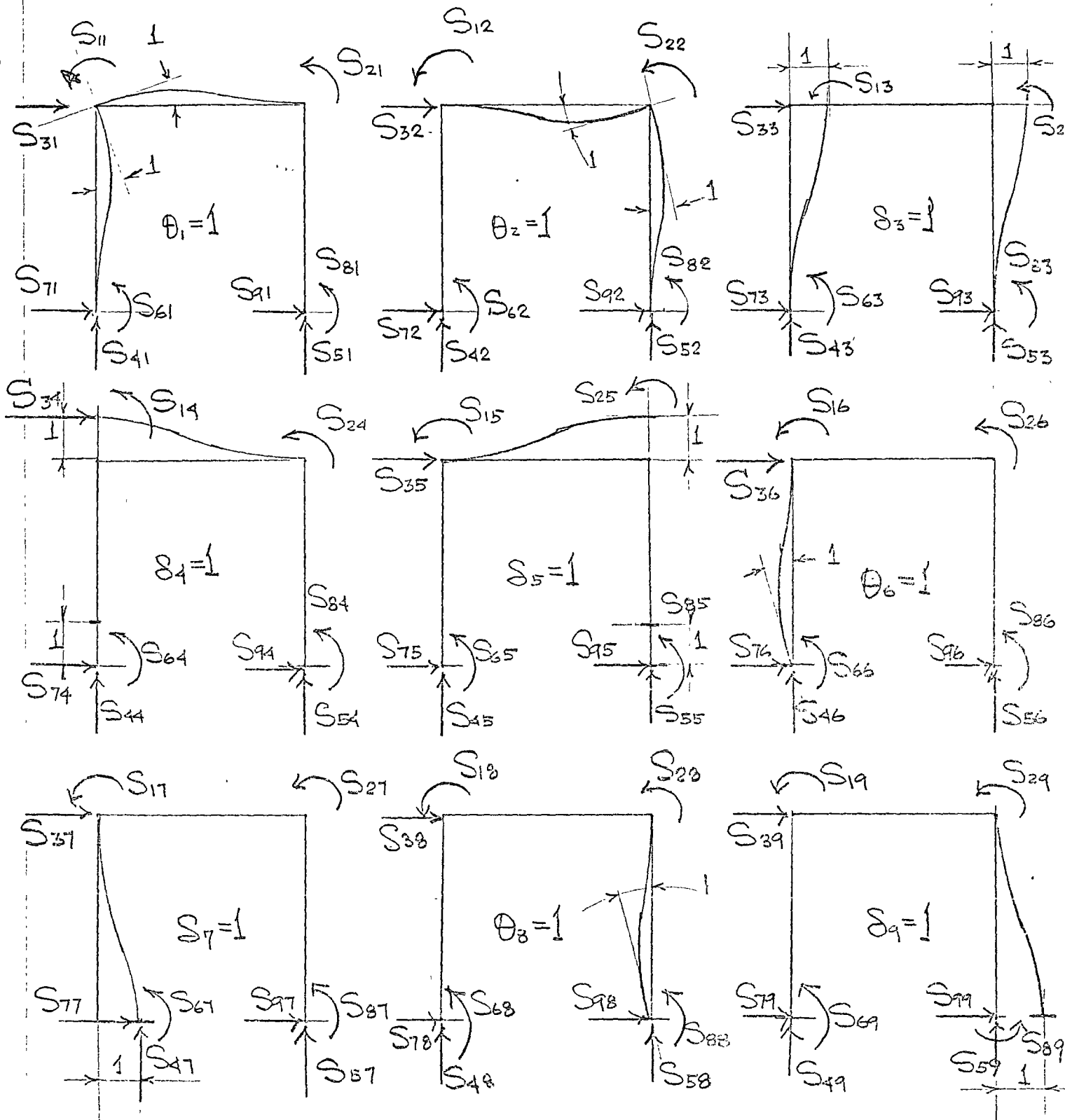


Fig. 1.4 Rigideces considerando todos los posibles grados de libertad despreciando deformaciones axiales (se suponen direcciones positivas)



De la Fig. 1A el desarrollo completo de las ecuaciones de superposición incluyendo reacciones es

$$S_{11}\theta_1 + S_{12}\theta_2 + S_{13}\delta_3 + S_{14}\delta_4 + S_{15}\delta_5 + S_{16}\theta_6 + S_{17}\delta_7 + S_{18}\theta_8 \\ + S_{19}\delta_9 + \mu_{21}^1 + \mu_{23}^2 = 0$$

$$S_{21}\theta_1 + S_{22}\theta_2 + S_{23}\delta_3 + S_{24}\delta_4 + S_{25}\delta_5 + S_{26}\theta_6 + S_{27}\delta_7 + S_{28}\theta_8 \\ + S_{29}\delta_9 + \mu_{32}^2 + \mu_{34}^3 = 0$$

$$S_{31}\theta_1 + S_{32}\theta_2 + S_{33}\delta_3 + S_{34}\delta_4 + S_{35}\delta_5 + S_{36}\theta_6 + S_{37}\delta_7 + S_{38}\theta_8 \\ + S_{39}\delta_9 + V_{21}^1 + V_{21}^3 = Q$$

$$S_{41}\theta_1 + S_{42}\theta_2 + S_{43}\delta_3 + S_{44}\delta_4 + S_{45}\delta_5 + S_{46}\theta_6 + S_{47}\delta_7 + S_{48}\theta_8 \\ + S_{49}\delta_9 + V_{23}^2 = R_4 \quad (1.10)$$

$$S_{51}\theta_1 + S_{52}\theta_2 + S_{53}\delta_3 + S_{54}\delta_4 + S_{55}\delta_5 + S_{56}\theta_6 + S_{57}\delta_7 + S_{58}\theta_8 \\ + S_{59}\delta_9 + V_{32}^2 = R_5$$

$$S_{61}\theta_1 + S_{62}\theta_2 + S_{63}\delta_3 + S_{64}\delta_4 + S_{65}\delta_5 + S_{66}\theta_6 + S_{67}\delta_7 + S_{68}\theta_8 \\ + S_{69}\delta_9 + \mu_{12}^1 = R_6$$

$$S_{71}\theta_1 + S_{72}\theta_2 + S_{73}\delta_3 + S_{74}\delta_4 + S_{75}\delta_5 + S_{76}\theta_6 + S_{77}\delta_7 + S_{78}\theta_8 \\ + S_{79}\delta_9 + V_{12}^1 = R_7$$

$$S_{81}\theta_1 + S_{82}\theta_2 + S_{83}\delta_3 + S_{84}\delta_4 + S_{85}\delta_5 + S_{86}\theta_6 + S_{87}\delta_7 + S_{88}\theta_8 \\ + S_{89}\delta_9 + \mu_{43}^3 = R_8$$

$$S_{91}\theta_1 + S_{92}\theta_2 + S_{93}\delta_3 + S_{94}\delta_4 + S_{95}\delta_5 + S_{96}\theta_6 + S_{97}\delta_7 + S_{98}\theta_8 \\ + S_{99}\delta_9 + V_{43}^3 = R_9$$

expresando (1.10) matricialmente se obtiene:

Handwritten text at the top of the page, mostly illegible due to fading.

Handwritten text in the upper middle section of the page.

Handwritten text in the upper middle section of the page.

Handwritten text in the upper middle section of the page.

Handwritten text in the upper middle section of the page.

Handwritten text in the upper middle section of the page.

Handwritten text in the upper middle section of the page.

Handwritten text in the upper middle section of the page.

Handwritten text in the upper middle section of the page.

Handwritten text in the upper middle section of the page.

Handwritten text in the upper middle section of the page.

Handwritten text in the upper middle section of the page.

Handwritten text in the upper middle section of the page.

Handwritten text in the upper middle section of the page.

Handwritten text in the upper middle section of the page.

Handwritten text in the upper middle section of the page.

Handwritten text in the upper middle section of the page.

Handwritten text in the upper middle section of the page.

Handwritten text in the upper middle section of the page.

Handwritten text in the upper middle section of the page.





$$\begin{array}{c}
 \left[ \begin{array}{cccccccccc}
 S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} & S_{15} & S_{16} & S_{17} & S_{18} & S_{19} \\
 S_{21} & S_{22} & S_{23} & S_{24} & S_{25} & S_{26} & S_{27} & S_{28} & S_{29} \\
 S_{31} & S_{32} & S_{33} & S_{34} & S_{35} & S_{36} & S_{37} & S_{38} & S_{39} \\
 S_{41} & S_{42} & S_{43} & S_{44} & S_{45} & S_{46} & S_{47} & S_{48} & S_{49} \\
 S_{51} & S_{52} & S_{53} & S_{54} & S_{55} & S_{56} & S_{57} & S_{58} & S_{59} \\
 S_{61} & S_{62} & S_{63} & S_{64} & S_{65} & S_{66} & S_{67} & S_{68} & S_{69} \\
 S_{71} & S_{72} & S_{73} & S_{74} & S_{75} & S_{76} & S_{77} & S_{78} & S_{79} \\
 S_{81} & S_{82} & S_{83} & S_{84} & S_{85} & S_{86} & S_{87} & S_{88} & S_{89} \\
 S_{91} & S_{92} & S_{93} & S_{94} & S_{95} & S_{96} & S_{97} & S_{98} & S_{99}
 \end{array} \right]
 \begin{array}{c}
 \left\{ \begin{array}{c}
 \theta_1 \\
 \theta_2 \\
 \theta_3 \\
 \delta_4 \\
 \delta_5 \\
 \theta_6 \\
 \delta_7 \\
 \theta_8 \\
 \delta_9
 \end{array} \right\}
 +
 \left\{ \begin{array}{c}
 \mu_{21}^1 + \mu_{23}^2 \\
 \mu_{32}^2 + \mu_{34}^3 \\
 \nu_{21}^1 + \nu_{21}^3 \\
 \nu_{23}^2 \\
 \nu_{32}^2 \\
 \mu_{12}^1 \\
 \nu_{12}^1 \\
 \mu_{43}^3 \\
 \nu_{43}^3
 \end{array} \right\}
 =
 \left\{ \begin{array}{c}
 0 \\
 0 \\
 Q \\
 R_4 \\
 R_5 \\
 R_6 \\
 R_7 \\
 R_8 \\
 R_9
 \end{array} \right\}
 \quad (1.11)
 \end{array}
 \end{array}$$

 $[S_{ki}]$ 
 $\{\delta_i\}$ 
 $\{\mu\}$ 
 $\{R\}$ 

Expresando (1.11) matricialmente con la notación indicada

$$[S_{ki}]\{\delta_i\} + \{\mu\}_k = \{R\}_k \quad (1.12)$$

El análisis por el método de las rigideces se reduce a evaluar de (1.8)  $\{\delta_i\}$  o sea

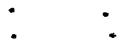
$$\{\delta_i\} = [S_{ij}]^{-1} \{Q_i\} \quad (1.13)$$

y substituyendo (1.13) en (1.2) se obtiene para cada barra

$$\{m_i\} = [k]_i [S_{ij}]^{-1} \{Q_i\} + \{\mu\}_i \quad (1.14)$$

y las reacciones se obtienen substituyendo (1.13) en (1.12)

$$\{R\} = [S_{ki}] [S_{ij}]^{-1} \{Q_i\} + \{\mu\}_k \quad (1.15)$$



## 2 METODO DE LAS RIGIDECES DE ANALISIS DE ESTRUCTURAS TRIDIMENSIONALES

### 2.1 ELEMENTO VIGA.

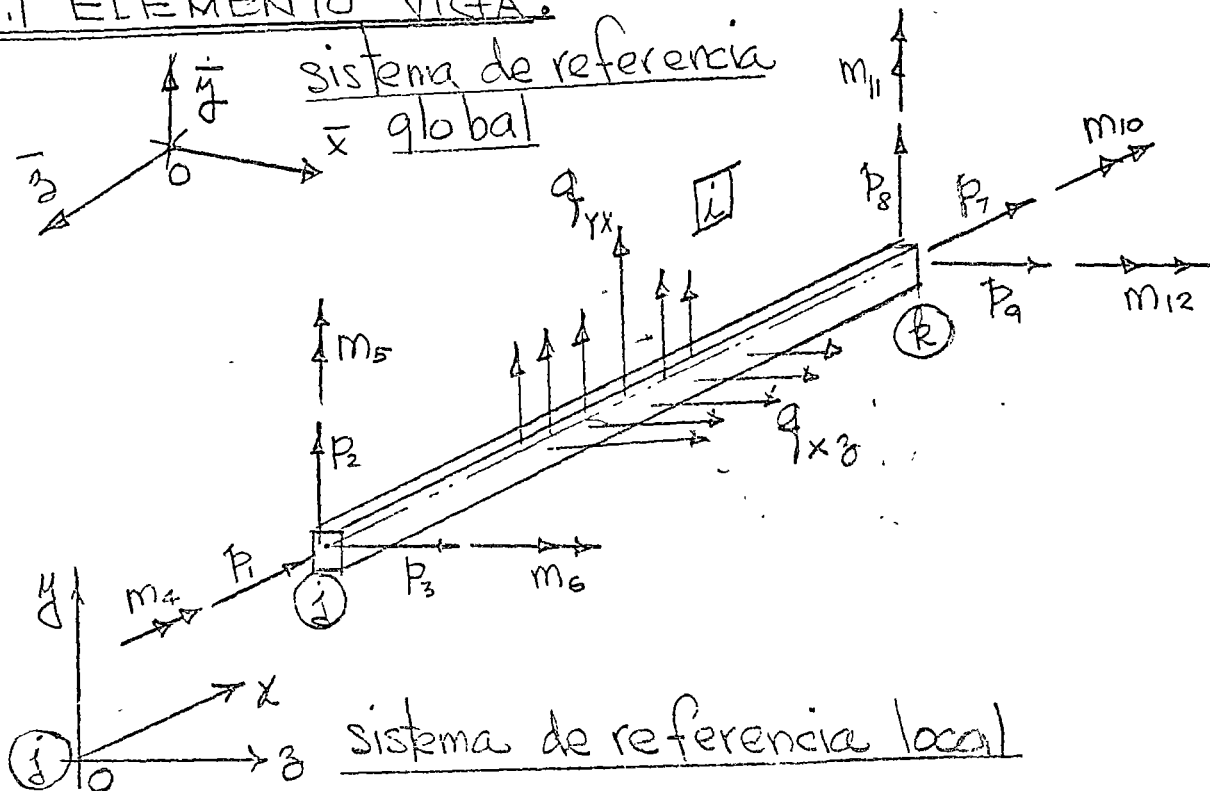


Fig. 2.1 Elemento viga; ejes  $y, z$  son centroidales y principales ( $Q_x = Q_y = I_{yz} = 0$ )

El elemento estructural  $j-k$ , se supone una barra capaz de resistir fuerzas axiales, momentos flectores respecto a dos ejes principales en el plano de la sección transversal, y momentos de torsión respecto a su eje centroidal. Las siguientes fuerzas actúan en la viga  $j-k$ : Fuerzas axiales  $P_1$  y  $P_7$ ; Fuerzas cortantes  $P_2$ ,  $P_3$ ,  $P_8$  y  $P_9$ ; Momentos flectores  $M_5$ ,  $M_6$ ,  $M_{11}$  y  $M_{12}$ ; y Momentos de torsión  $m_4$  y  $m_{10}$ . La localización y dirección positiva se muestra en Fig. 2.1

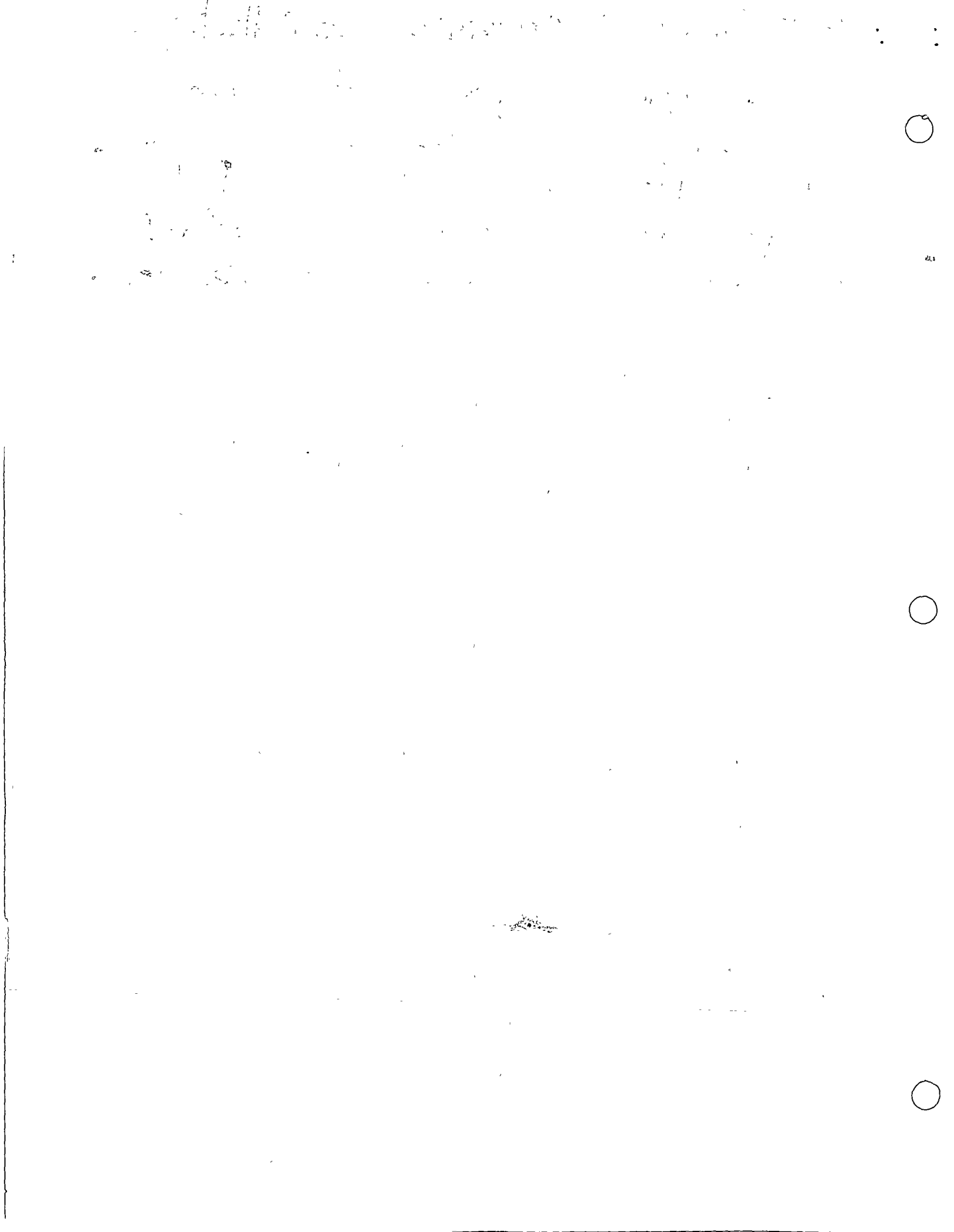


10

1000 1000 1000 1000 1000 1000 1000 1000 1000 1000

Los desplazamientos correspondientes serán  $u_1, u_2, u_3, \dots, u_{12}$  serán positivos en la dirección positiva de las fuerzas. La posición del elemento viga  $j-k$  será especificado por las coordenadas del extremo  $j$  y los cosenos directores del eje  $x$  (dirección  $j-k$ ) y del eje  $y$  con respecto al sistema global  $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ .

La matriz de rigidez del elemento viga será de  $12 \times 12$  pero siempre es posible integrarla con submatrices de  $2 \times 2$  y  $4 \times 4$ . De la teoría de flexión y torsión de vigas las fuerzas  $P_1$  y  $P_2$  dependen solo de sus desplazamientos correspondientes; lo mismo es cierto para los momentos torsionantes  $M_4$  y  $M_{10}$ . Sin embargo, para una selección arbitraria de los planos de flexión, los momentos flectores y fuerza de corte en el plano  $xy$  dependerán no solo de sus desplazamientos correspondientes pero también en los desplazamientos correspondientes a las fuerzas en los planos  $xy$ . Soloamente si los  $xy$  y  $xz$  coinciden con los ejes principales de la sección transversal puede considerarse la flexión y corte sobre dichos planos independiente una de la otra.



$\left. \begin{matrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \\ p_5 \\ p_6 \\ p_7 \\ p_8 \\ p_9 \\ m_{10} \\ m_{11} \\ m_{12} \end{matrix} \right\} = \{p\}_i$

$k_{11}$	$k_{12}$	$k_{13}$	$k_{14}$	$k_{15}$	$k_{16}$	$k_{17}$	$k_{18}$	$k_{19}$	$k_{1,10}$	$k_{1,11}$	$k_{1,12}$
$k_{21}$	$k_{22}$	$k_{23}$	$k_{24}$	$k_{25}$	$k_{26}$	$k_{27}$	$k_{28}$	$k_{29}$	$k_{2,10}$	$k_{2,11}$	$k_{2,12}$
$k_{31}$	.	$k_{33}$	.	.	.	.	.	.	.	.	$k_{3,12}$
$k_{41}$	.	.	$k_{44}$	.	.	.	.	.	.	.	$k_{4,12}$
$k_{51}$	.	.	.	$k_{55}$	.	.	.	.	.	.	$k_{5,12}$
$k_{61}$	.	.	.	.	$k_{66}$	.	.	.	.	.	$k_{6,12}$
$k_{71}$	.	.	.	.	.	$k_{77}$	.	.	.	.	$k_{7,12}$
$k_{81}$	.	.	(simétrica)		.	.	$k_{88}$	.	.	.	$k_{8,12}$
$k_{91}$	.	.	.	.	.	.	.	$k_{99}$	.	.	$k_{9,12}$
$k_{10,1}$	.	.	.	.	.	.	.	.	$k_{10,10}$	.	$k_{10,12}$
$k_{11,1}$	.	.	.	.	.	.	.	.	.	$k_{11,11}$	$k_{11,12}$
$k_{12,1}$	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	$k_{12,12}$

$[k_{ij}]$

$\left. \begin{matrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \delta_4 \\ \delta_5 \\ \delta_6 \\ \delta_7 \\ \delta_8 \\ \delta_9 \\ \delta_{10} \\ \delta_{11} \\ \delta_{12} \end{matrix} \right\} = \{\delta\}_i$

+

$\left. \begin{matrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ \mu_4 \\ \mu_5 \\ \mu_6 \\ p_7 \\ p_8 \\ p_9 \\ \mu_{10} \\ \mu_{11} \\ \mu_{12} \end{matrix} \right\} = \{\mu\}_i$

(2.1)

1875

1876

1877

1878

1879

1880

1881

1882

1883

1884

1885

1886

1887

1888

1889

1890

1891

1892

1893

1894

1895

1896

1897

1898

1899

1900

1901

1902

1903

1904

1905

1906

1907

1908

1909

1910

1911





Donde:

$\{F\}$ ; vector de cargas actuando sobre  $j$   $k$

$[k_{ij}]$ ; matriz de rigidez de la barra  $j$   $k$

$\{S\}$ ; vector de desplazamientos nodales

$\{U\}$ ; vector de reacciones de empotramiento perfecto

## 2.2 Elementos de la matriz de rigidez $[k_{ij}]$ .

En el cálculo de las rigideces  $k_{ij}$  se utilizan los principios energéticos expuestos considerando la energía elástica de deformación por flexión, corte y carga normal.

### 2.2.1 Fuerzas axiales $P_1$ y $P_7$ .

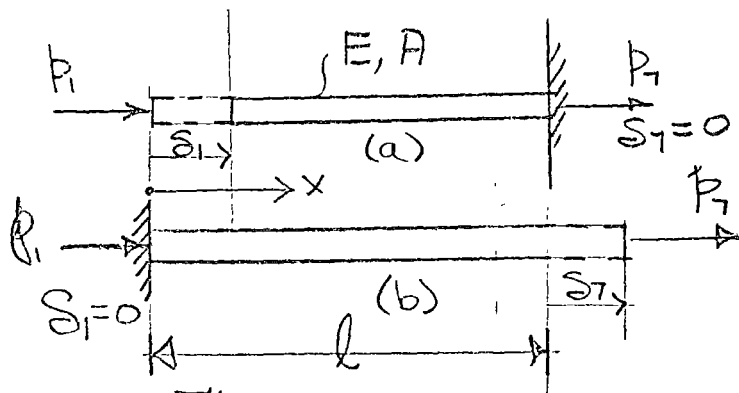


Fig. 2.2.1.1

De la ley de Hooke y la Fig. 2.2.1.2 se obtiene

$$k_{11} = \frac{P_1}{\delta_1} = \frac{EA}{l} ; \quad k_{71} = -\frac{EA}{l} \quad (a)$$

$$k_{77} = \frac{P_7}{\delta_7} = \frac{EA}{l} ; \quad k_{17} = -\frac{EA}{l} \quad (b)$$

Handwritten text at the top of the page, possibly a title or header.



2.2.2 Momentos de torsión  $m_4$  y  $m_{10}$ .

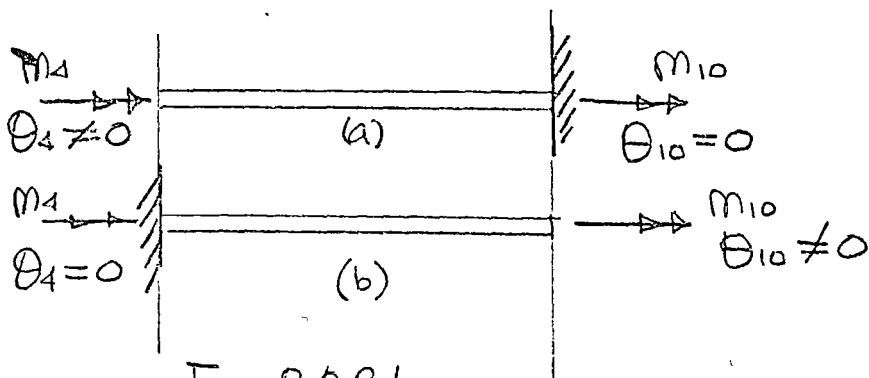


Fig. 2.2.2.1

De la teoría de torsión de barras y la fig. 2.2.2.1 se obtiene

$$k_{44} = \frac{m_4}{\theta_4} = \frac{GJ}{l} \quad ; \quad k_{10,4} = -\frac{GJ}{l} \quad (a)$$

$$k_{10,10} = \frac{m_{10}}{\theta_{10}} = \frac{GJ}{l} \quad ; \quad k_{4,10} = -\frac{GJ}{l} \quad (b)$$

2.2.3 Fuerzas de corte  $P_2$  y  $P_8$ .

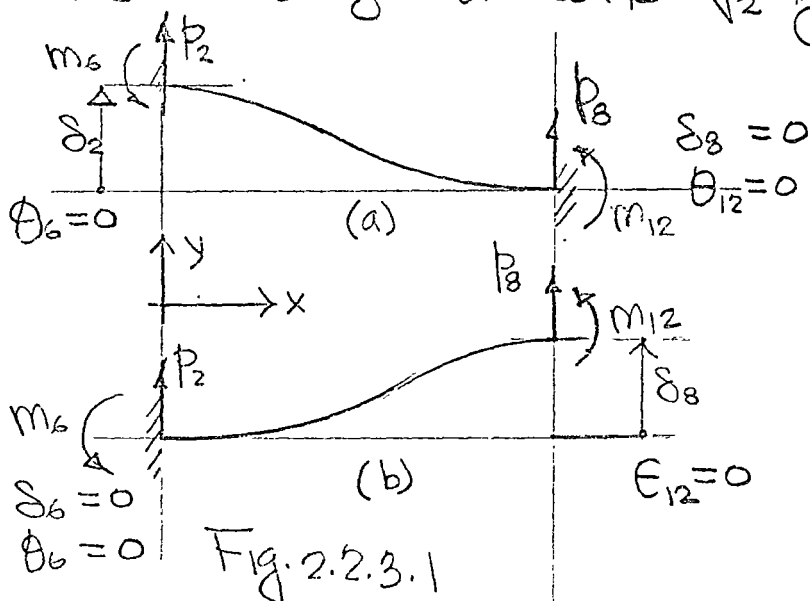
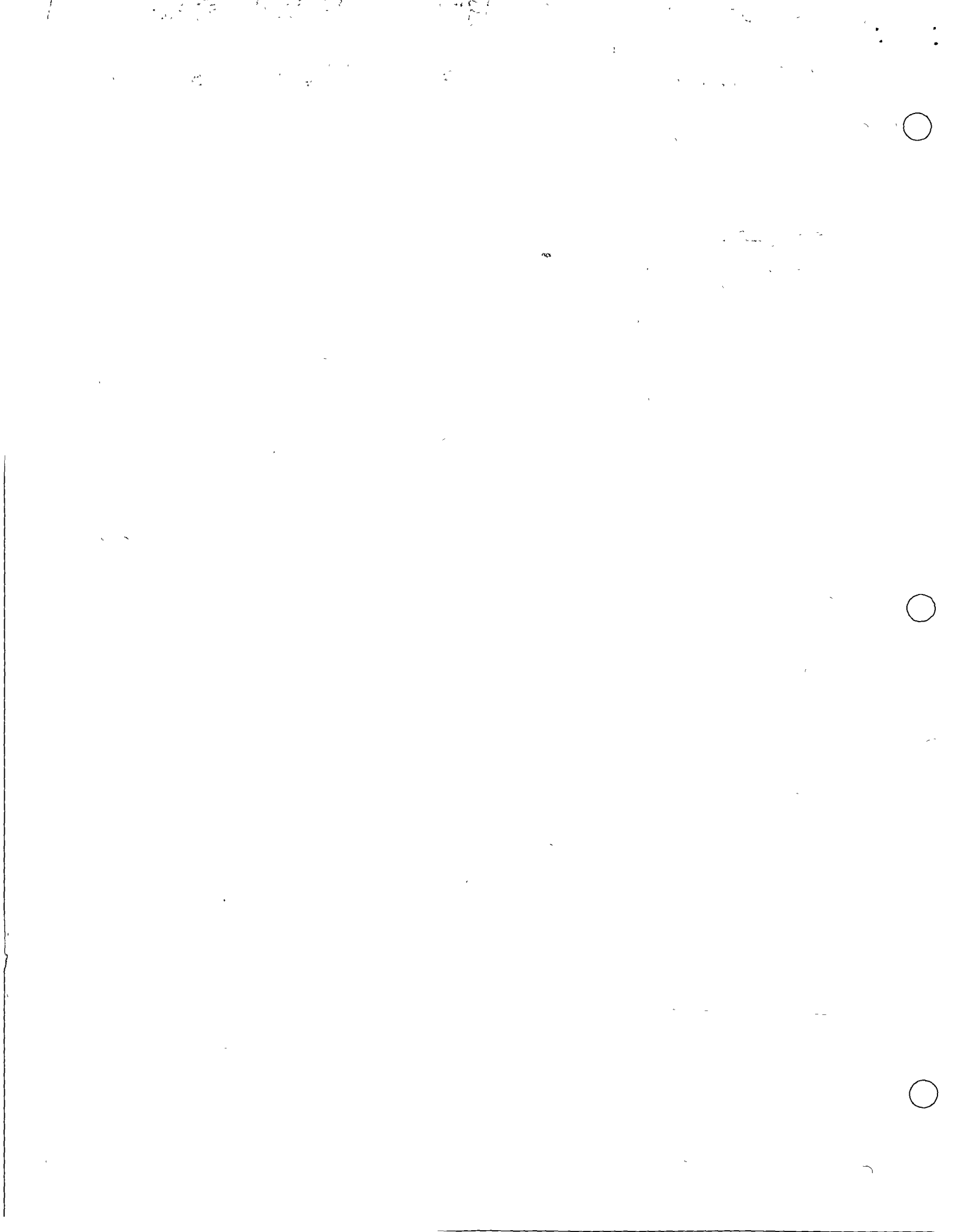


Fig. 2.2.3.1

De la Fig. 2.2.3.1 y los principios energéticos previamente expuestos, considerando la energía de deformación por flexión y cortante se obtiene



$$k_{22} = \frac{P_2}{\delta_2} = \frac{12EI_3}{(1+\phi_Y)l^3} \quad a$$

$$k_{62} = \frac{M_6}{\delta_2} = \frac{6EI_3}{(1+\phi_Y)l^2} ; k_{26} = \frac{P_2}{\theta_6} = \frac{6EI_3}{(1+\phi_Y)l^2} \quad b$$

$$k_{82} = \frac{P_8}{\delta_2} = \frac{-12EI_3}{(1+\phi_Y)l^3} ; k_{28} = \frac{P_2}{\delta_8} = \frac{-12EI_3}{(1+\phi_Y)l^3} \quad c$$

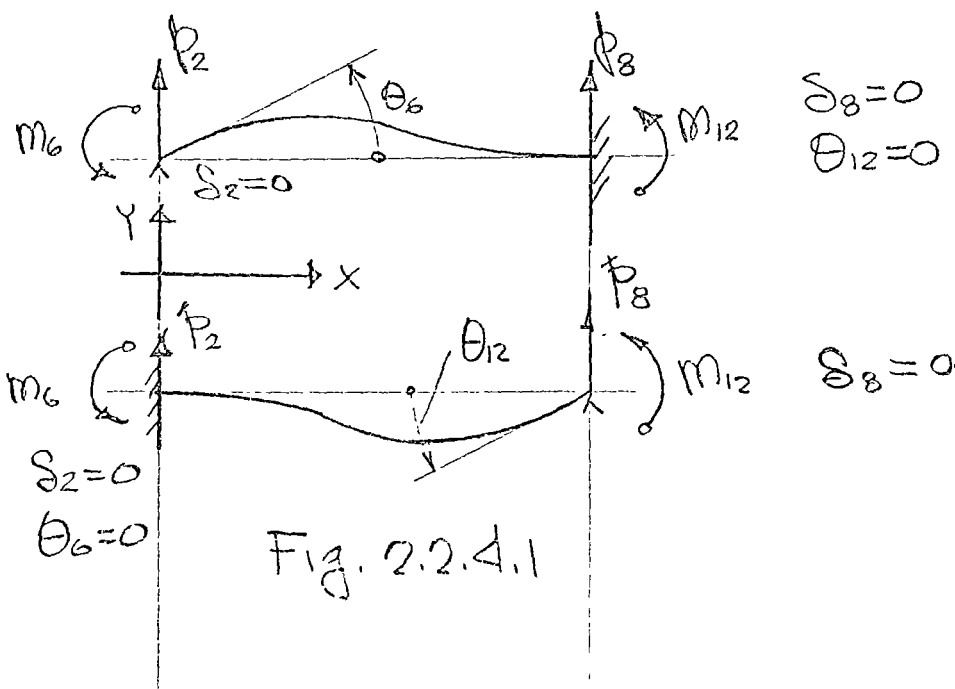
$$k_{12,2} = \frac{M_{12}}{\delta_2} = \frac{6EI_3}{(1+\phi_Y)l^2} ; k_{3,12} = \frac{P_2}{\theta_{12}} = \frac{6EI_3}{(1+\phi_Y)l^2} \quad d$$

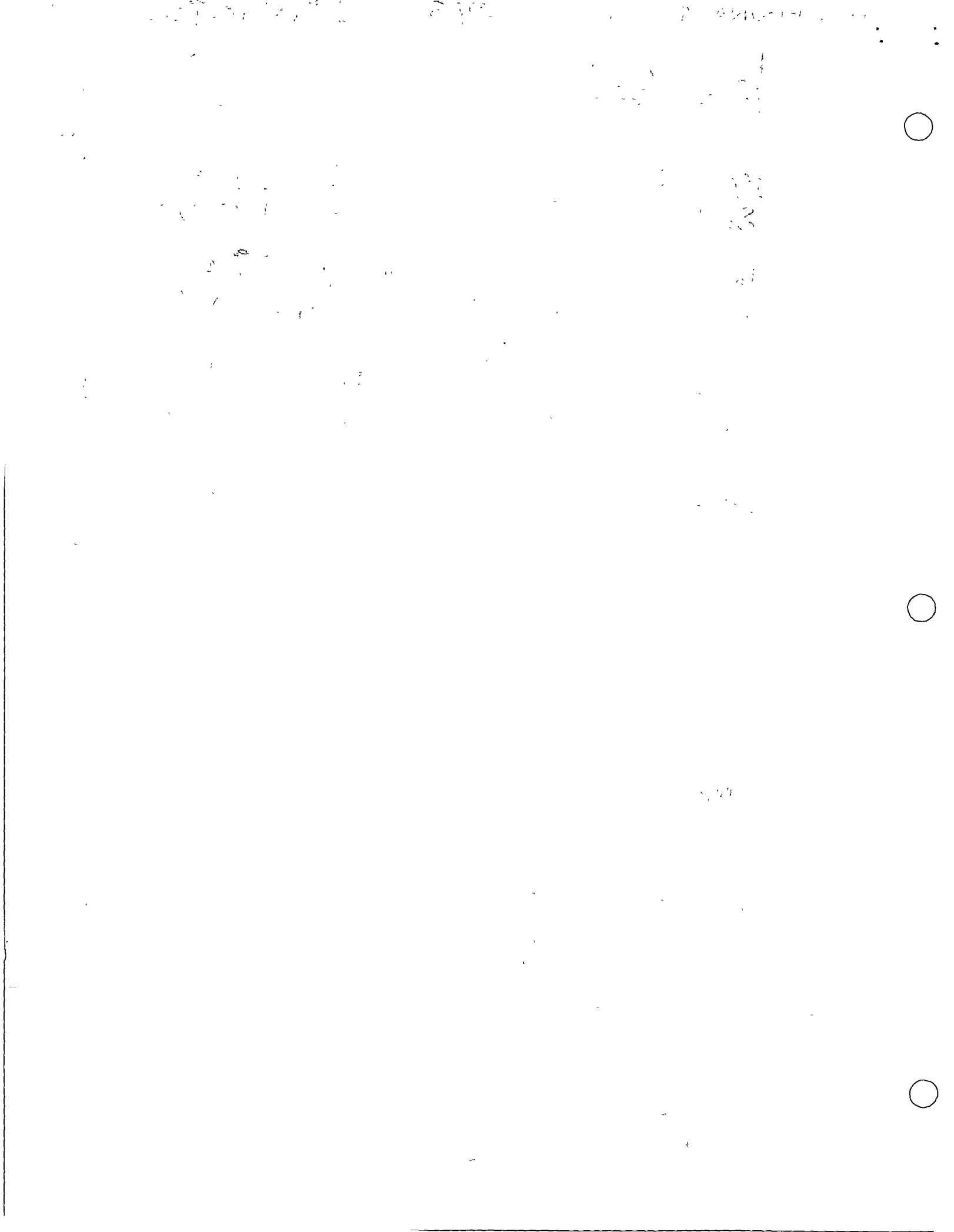
$$k_{88} = \frac{P_8}{\delta_8} = \frac{P_2}{\delta_2} = \frac{12EI_3}{(1+\phi_Y)l^3} \quad (\text{si } EI \text{ es constante}) \quad e$$

$$k_{12,8} = \frac{M_{12}}{\delta_8} = \frac{-6EI_3}{(1+\phi_Y)l^2} = -\frac{P_2}{\theta_6} = -k_{62} \quad (f)$$

$$k_{8,12} = \frac{P_8}{\theta_{12}} = \frac{-6EI}{(1+\phi_Y)l^2} \quad (g)$$

### 2.2.4 Momentos Flectores





De la Fig. 2.2.4.1 y los principios energéticos previamente expuestos, considerando la energía de deformación por flexión y corte se obtiene

$$k_{66} = \frac{M_6}{\Theta_6} = \frac{(4 + \phi_r) EI_3}{(1 + \phi_r) l} \quad a$$

$$k_{86} = \frac{P_8}{\Theta_6} = -\frac{6 EI_3}{(1 + \phi_r) l^2} ; k_{68} = \frac{M_6}{\delta_8} = -\frac{6 EI_3}{(1 + \phi_r) l^2} \quad b$$

$$k_{12,6} = \frac{M_{12}}{\Theta_6} = \frac{(2 - \phi_r) EI_3}{(1 + \phi_r) l} ; k_{6,12} = \frac{M_6}{\Theta_{12}} = \frac{(2 - \phi_r) EI_3}{(1 + \phi_r) l} \quad c$$

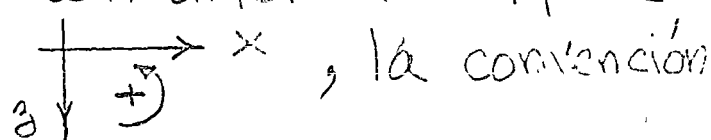
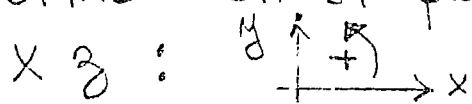
$$k_{12,12} = \frac{M_{12}}{\Theta_{12}} = \frac{(4 + \phi_r) EI_3}{(1 + \phi_r) l} \quad d$$

$$k_{8,12} = \frac{P_8}{\Theta_{12}} = -\frac{6 EI_3}{(1 + \phi_r) l^2} ; k_{12,8} = \frac{M_{12}}{\delta_8} = k_{8,12} \quad e$$

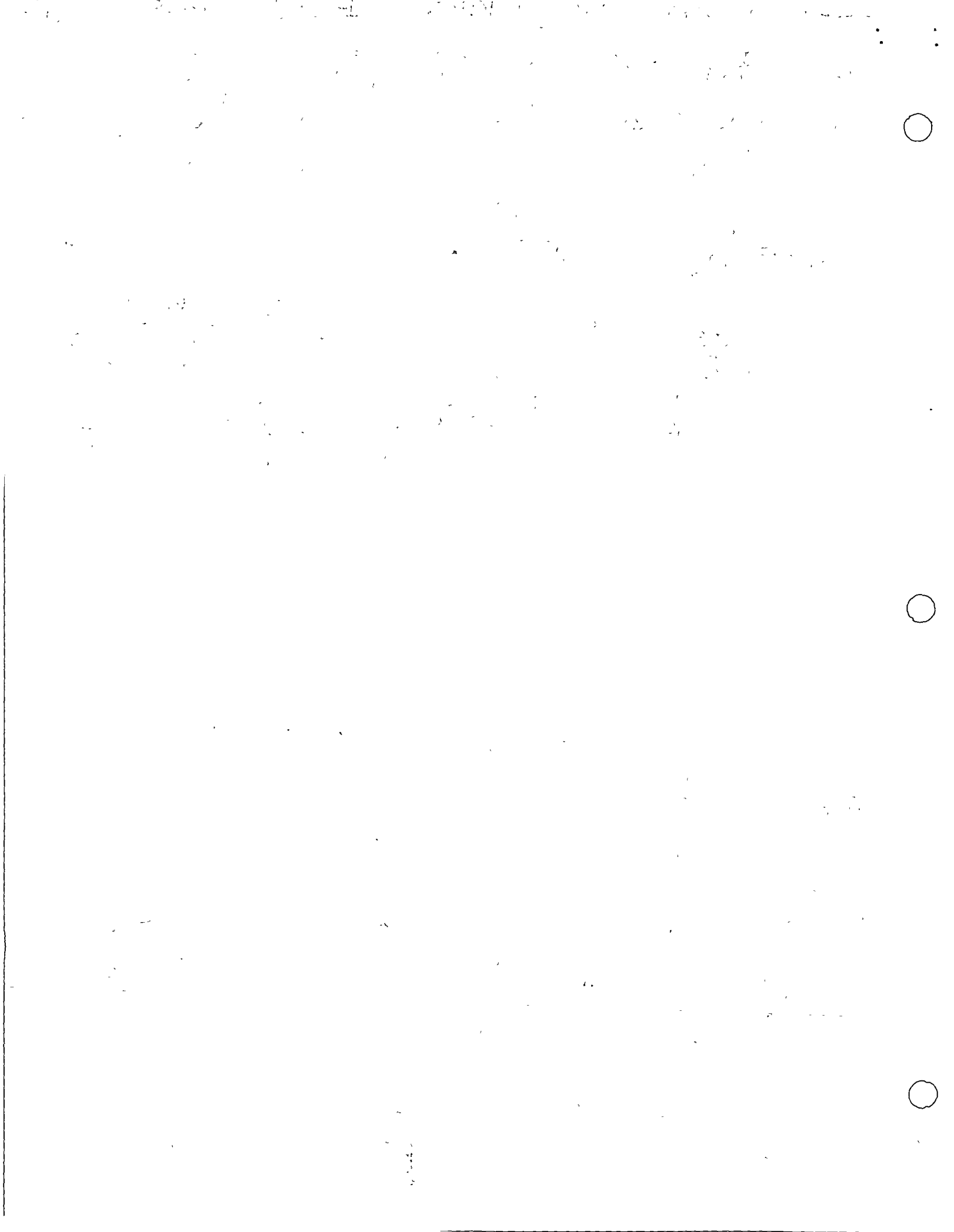
$$k_{6,12} = \frac{M_6}{\Theta_{12}} = \frac{(2 - \phi_r) EI_3}{(1 + \phi_r) l} ; k_{12,6} = \frac{M_{12}}{\Theta_6} = k_{6,12} \quad f$$

### 2.2.5 Fuerzas de corte $P_3$ y $P_9$ .

Los coeficientes de rigidez relacionados con los desplazamientos  $\delta_3$  y  $\delta_9$  se obtienen de los resultados previos. Debe observarse, que con la convención de signos adoptada en la Fig 2.1 las direcciones de los momentos flectores positivos en el plano  $x y$  son diferentes al plano  $x z$ :



, la convención





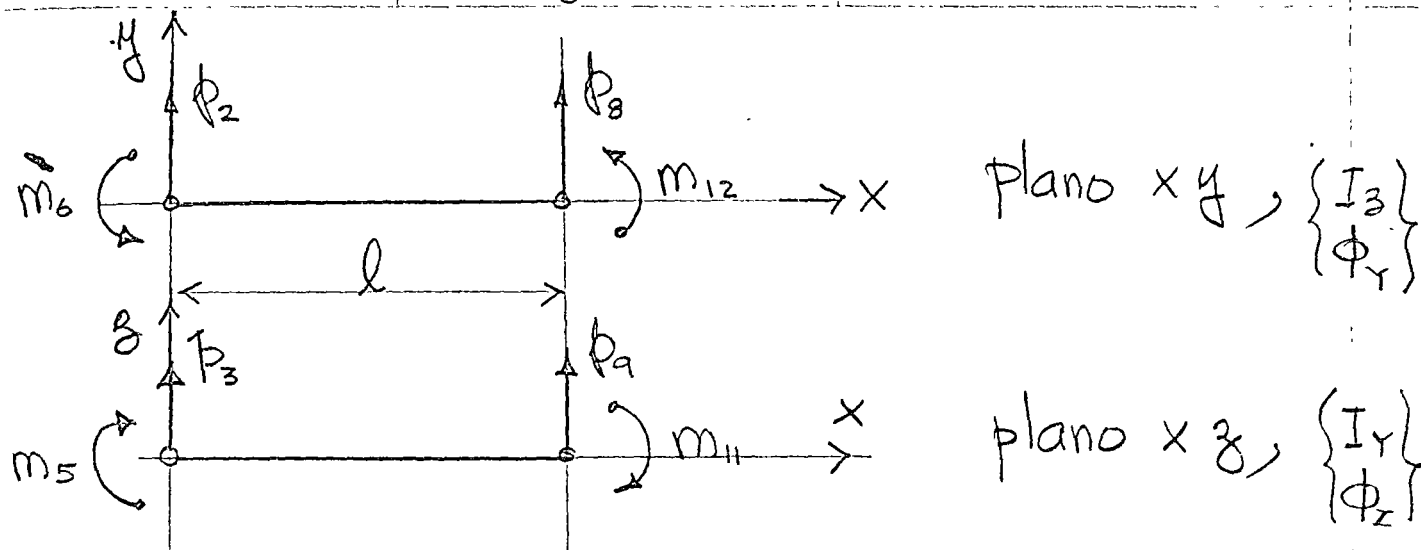


Fig. 2.2.5 Convención de signos para fuerzas de corte y momentos flectores;

de signos se muestra en la Fig. 2.2.5, basado en lo anterior es evidente que

$$k_{33} = \frac{P_3}{\delta_3} \equiv -k_{22} = -\frac{P_2}{\delta_2} \quad a$$

$$k_{53} = \frac{m_5}{\delta_3} \equiv -k_{62} = -\frac{m_6}{\delta_2} \quad b$$

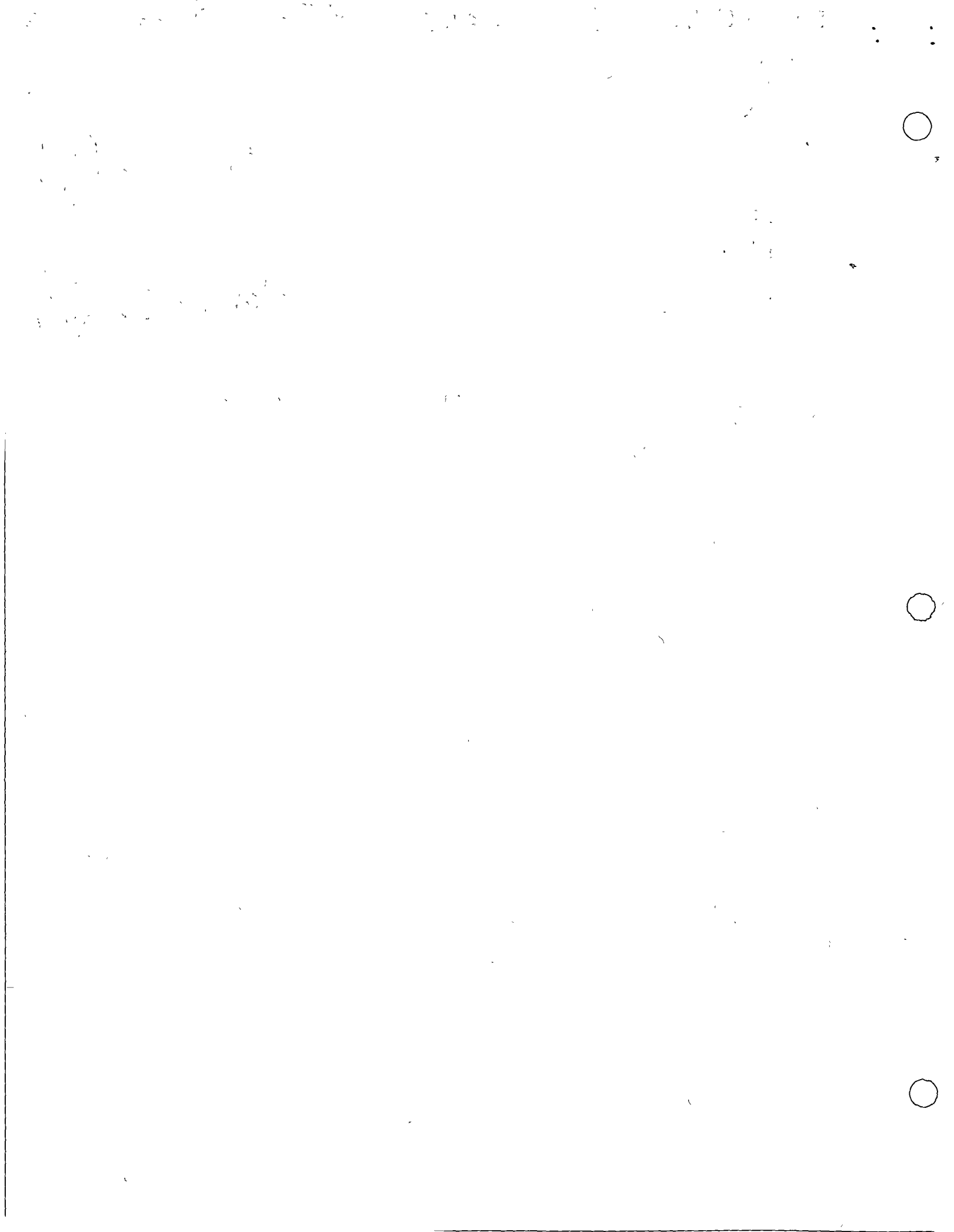
$$k_{93} = \frac{P_9}{\delta_3} \equiv -k_{82} = -\frac{P_8}{\delta_2} \quad c$$

$$k_{11,3} = \frac{m_{11}}{\delta_3} \equiv -k_{12,2} = -\frac{m_{12}}{\delta_2} \quad d$$

$$k_{99} = \frac{P_9}{\delta_9} \equiv -k_{88} = -\frac{P_8}{\delta_8} \quad e$$

$$k_{11,9} = \frac{m_{11}}{\delta_9} \equiv -k_{12,8} = -\frac{m_{12}}{\delta_8} \quad f$$

Debe considerarse en el plano  $xz$  a  $I_Y$  y  $\phi_Z$  como momento de inercia y parámetro de cortante.



2.2.6 Momentos Flectores  $m_5$  y  $m_{11}$ 

17

Aplicando las mismas observaciones de la sección anterior, se obtiene

$$k_{55} = \frac{m_5}{\theta_5} \equiv k_{66} = \frac{m_6}{\theta_6} = \frac{(4 + \phi_3) EI_Y}{(1 + \phi_3) l} \quad a$$

$$k_{95} = \frac{P_9}{\theta_5} \equiv -k_{86} = -\frac{P_8}{\theta_6} = +\frac{6EI_Y}{(1 + \phi_3) l} = k_{59} \quad b$$

$$k_{11,5} = \frac{m_{11}}{\theta_5} \equiv k_{12,6} = \frac{m_{12}}{\theta_6} = \frac{(2 - \phi_3) EI_Y}{(1 + \phi_3) l} = k_{5,11} \quad c$$

substituyendo los valores  $k_{ij}$  obtenidos en las subsecciones anteriores se obtiene la matriz de rigidez de la barra  $jk$  de la Fig. 2.1 ecuación 2.5. en donde

$$\phi_Y = \frac{12EI_Z}{GA_{sY}l^2} = 24(1+\nu) \frac{A}{A_{sY}} \left(\frac{\Gamma_Z}{l}\right)^2 = \frac{12f_Y EI_Z}{GA l^2} \quad (2.3)$$

$$\phi_Z = \frac{12EI_Y}{GA_{sZ}l^2} = 24(1+\nu) \frac{A}{A_{sZ}} \left(\frac{\Gamma_Y}{l}\right)^2 = \frac{12f_Z EI_Y}{GA l^2}$$

$\nu$  = relación de Poisson,  $A$  = área total de la sección,  $A_{sY}$  y  $A_{sZ}$  = áreas efectivas en cortante en direcciones  $y$  y  $z$  resp.

$\Gamma_Y$  y  $\Gamma_Z$  = radios de giro respecto a  $y$  y  $z$  resp. a  $x$ .

$\phi_Y$  y  $\phi_Z$  = Parámetros de deformación de corte. Si

$\Gamma_Z/l$  y  $\Gamma_Y/l$  son pequeños comparados con la unidad, como son en elementos flexibles, ambos  $\phi_Y$  y  $\phi_Z$

se pueden considerar cero. Los factores de forma son

$$f_Y = \frac{A}{I_Z^2} \int_A \left(\frac{Q_Z}{b_Z}\right)^2 dA, \quad f_Z = \frac{A}{I_Y^2} \int_A \left(\frac{Q_Y}{b_Y}\right)^2 dA \quad (2.4)$$



[Faint, illegible text scattered across the page, possibly bleed-through from the reverse side.]

[Faint text at the bottom of the page, including what appears to be a date: "2014/11/25" and some other illegible markings.]

$[R_{ij}] =$

$S_1$	$S_2$	$S_3$	$\Theta_4$	$\Theta_5$	$\Theta_6$	$S_7$	$S_8$	$S_9$	$\Theta_{10}$	$\Theta_{11}$	$\Theta_{12}$	
$\frac{EA}{l}$												$S_1$
0	$\frac{12EI_z}{l^3(1+\phi_y)}$											$S_2$
0	0	$\frac{12EI_y}{l^3(1+\phi_z)}$										$S_3$
0	0	0	$\frac{GJ}{l}$									$\Theta_4$
0	0	$\frac{-6EI_y}{l^2(1+\phi_z)}$	0	$\frac{(4+\phi_z)EI_y}{l(1+\phi_z)}$								$\Theta_5$
0	$\frac{6EI_z}{l^2(1+\phi_y)}$	0	0	0	$\frac{(4+\phi_y)EI_z}{l(1+\phi_y)}$							$\Theta_6$
$\frac{-EA}{l}$	0	0	0	0	0	$\frac{AE}{l}$						$S_7$
0	$\frac{-12EI_z}{l^3(1+\phi_y)}$	0	0	0	$\frac{-6EI_z}{l^2(1+\phi_y)}$	0	$\frac{12EI_z}{l^3(1+\phi_y)}$					$S_8$
0	0	$\frac{-12EI_y}{l^3(1+\phi_z)}$	0	$\frac{6EI_y}{l^2(1+\phi_z)}$	0	0	0	$\frac{-12EI_y}{l^3(1+\phi_z)}$				$S_9$
0	0	0	$\frac{-GJ}{l}$	0	0	0	0	0	$\frac{GJ}{l}$			$\Theta_{10}$
0	0	$\frac{-6EI_y}{l^2(1+\phi_z)}$	0	$\frac{(2-\phi_z)EI_y}{l(1+\phi_z)}$	0	0	0	$\frac{6EI_y}{l^2(1+\phi_z)}$	0	$\frac{(4+\phi_z)EI_y}{l(1+\phi_z)}$		$\Theta_{11}$
0	$\frac{6EI_z}{l^2(1+\phi_y)}$	0	0	0	$\frac{(2-\phi_y)EI_z}{l(1+\phi_y)}$	0	$\frac{-6EI_z}{l^2(1+\phi_y)}$	0	0	0	$\frac{(4+\phi_y)EI_z}{l(1+\phi_y)}$	$\Theta_{12}$

(simétrica)



Small text at the bottom center, possibly a library or archival stamp.



Para problemas Bi-dimensionales, el elemento viga  $i-k$  se reduce a seis fuerzas y momentos nodales y seis desplazamientos y rotaciones nodales. Utilizando

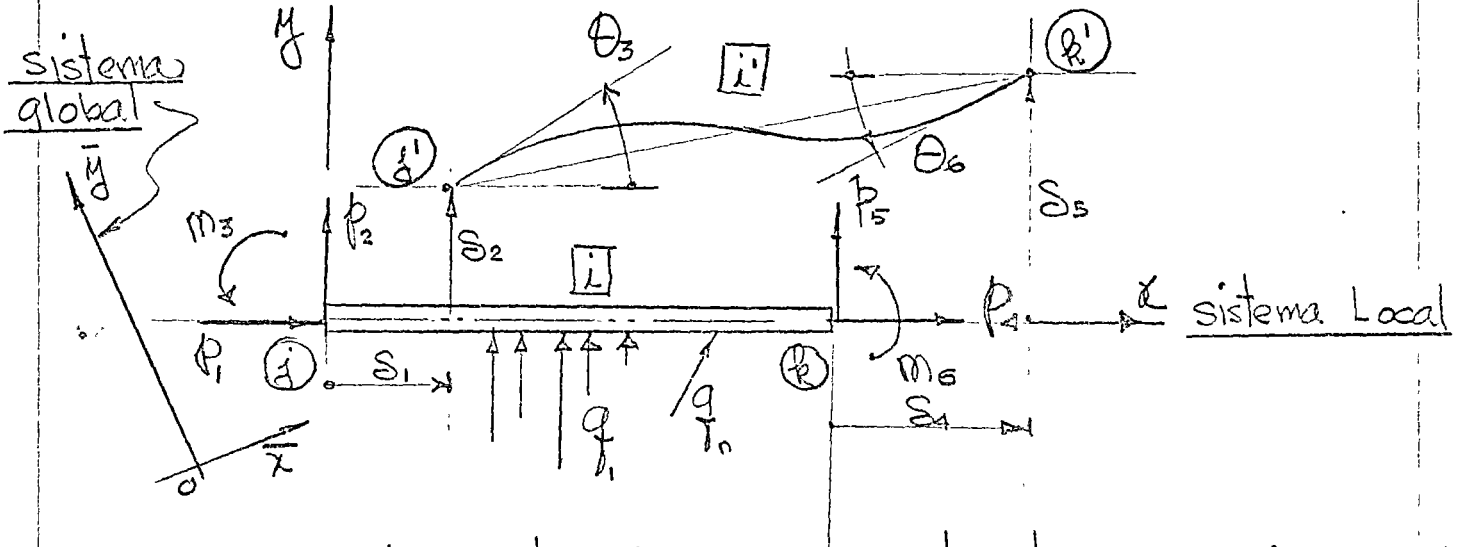


Fig. 2.2 Elemento viga para estructuras bidimensionales

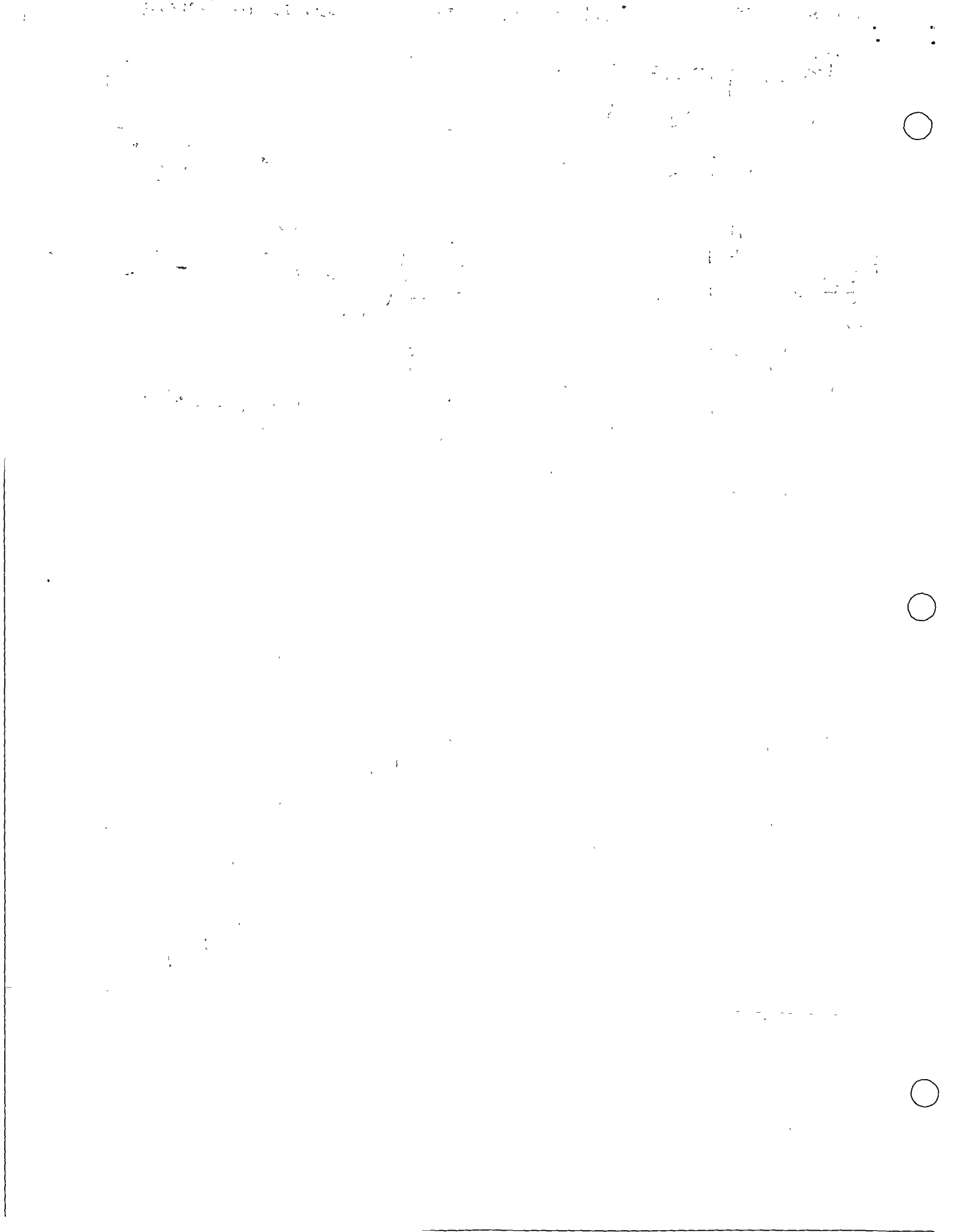
la nomenclatura de la Fig. 2.2 (2.1) queda en

$$\begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ M_3 \\ P_4 \\ P_5 \\ M_6 \end{Bmatrix}_i = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} & k_{15} & k_{16} \\ k_{21} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & k_{26} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ k_{61} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & k_{66} \end{bmatrix}_i \begin{Bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ \Theta_3 \\ S_4 \\ S_5 \\ \Theta_6 \end{Bmatrix}_i + \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ M_3 \\ P_4 \\ P_5 \\ M_6 \end{Bmatrix}_i \quad (2.6)$$

o sea:

$$\{P\}_i = [k_{ij}]_i \{S\}_i + \{\mu\}_i \quad (2.7)$$

De los resultados discutidos previamente la matriz de rigidez de la barra  $i$  figura 2.2 queda

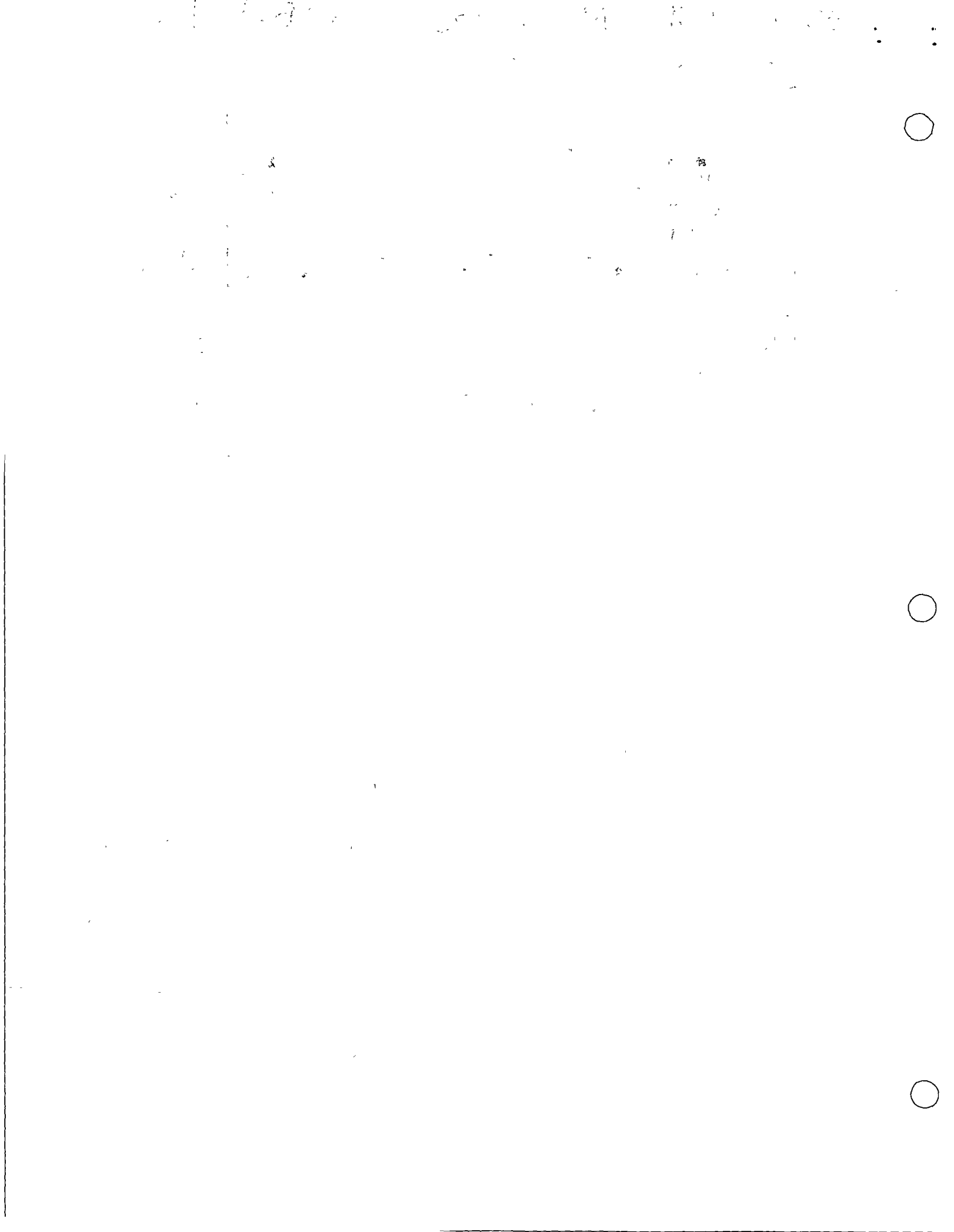




$$[K_{ij}]_i = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI_z}{l^3(1+\phi_r)} & \frac{6EI_z}{l^2(1+\phi_r)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{6EI_z}{l^2(1+\phi_r)} & \frac{(4+\phi_r)EI_z}{l(1+\phi_r)} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-12EI_z}{l^3(1+\phi_r)} & \frac{-6EI_z}{l^2(1+\phi_r)} & 0 & \frac{12EI_z}{l^3(1+\phi_r)} & 0 \\ 0 & \frac{6EI_z}{l^2(1+\phi_r)} & \frac{(2-\phi_r)EI_z}{l(1+\phi_r)} & 0 & \frac{-6EI_z}{l^2(1+\phi_r)} & \frac{(4+\phi_r)EI_z}{l(1+\phi_r)} \end{bmatrix} \begin{matrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \theta_3 \\ \delta_4 \\ \delta_5 \\ \theta_6 \end{matrix} \quad (2.8)$$

Si las deformaciones por cortante son despreciables esto es,  $\phi_r = 0$ , la matriz de rigidez (2.8) se simplificará

$$[K_{ij}]_i = \frac{EI_z}{l^3} \begin{bmatrix} \frac{Al^2}{I_z} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 6l & 4l^2 & 0 & 0 \\ 0 & 6l & 4l^2 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{Al^2}{I_z} & 0 & 0 & \frac{Al^2}{I_z} & 0 & 0 \\ 0 & -12 & -6l & 0 & 12 & 0 \\ 0 & 6l & 2l^2 & 0 & -6l & 4l^2 \end{bmatrix} \quad (2.9)$$



La ecuación matricial relacionando los desplazamientos entre el sistema coordinado local y el global. Puede fácilmente demostrarse para el elemento viga mostrado en Fig. 2.1 es de la forma

$$\begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \theta_4 \\ \theta_5 \\ \theta_6 \\ \delta_7 \\ \delta_8 \\ \delta_9 \\ \theta_{10} \\ \theta_{11} \\ \theta_{12} \end{Bmatrix} = [ \lambda ] \begin{Bmatrix} \bar{\delta}_1 \\ \bar{\delta}_2 \\ \bar{\delta}_3 \\ \bar{\theta}_4 \\ \bar{\theta}_5 \\ \bar{\theta}_6 \\ \bar{\delta}_7 \\ \bar{\delta}_8 \\ \bar{\delta}_9 \\ \bar{\theta}_{10} \\ \bar{\theta}_{11} \\ \bar{\theta}_{12} \end{Bmatrix} \quad (2.10)$$

o sea  $\{ \delta \} = [ \lambda ] \{ \bar{\delta} \}$  (2.11)

donde  $\bar{\lambda}_{ox} = [ \lambda_{ox} \ m_{ox} \ n_{ox} ]$

$\bar{\lambda}_{oy} = [ \lambda_{oy} \ m_{oy} \ n_{oy} ]$  (2.12)

$\bar{\lambda}_{oz} = [ \lambda_{oz} \ m_{oz} \ n_{oz} ]$

representa las matrices de los cosenos directores

11 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31 32 33 34 35 36 37 38 39 40 41 42 43 44 45 46 47 48 49 50 51 52 53 54 55 56 57 58 59 60 61 62 63 64 65 66 67 68 69 70 71 72 73 74 75 76 77 78 79 80 81 82 83 84 85 86 87 88 89 90 91 92 93 94 95 96 97 98 99 100

11 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31 32 33 34 35 36 37 38 39 40 41 42 43 44 45 46 47 48 49 50 51 52 53 54 55 56 57 58 59 60 61 62 63 64 65 66 67 68 69 70 71 72 73 74 75 76 77 78 79 80 81 82 83 84 85 86 87 88 89 90 91 92 93 94 95 96 97 98 99 100

para las direcciones  $ox$ ,  $oy$  y  $oz$ , respectivamente, referidas al sistema global  $\bar{x}$ ,  $\bar{y}$  y  $\bar{z}$ , y  $\{\bar{S}\}$  representa los desplazamientos de la barra  $[i]$  respecto al sistema global.

Para problemas bidimensionales la matriz de transformación  $[\lambda]$  se reduce a

$$[\lambda] = \begin{bmatrix} l_{ox} & m_{ox} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ l_{oy} & m_{oy} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & l_{ox} & m_{ox} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & l_{oy} & m_{oy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

El análisis de marcos tridimensionales se puede describir por las mismas ecuaciones básicas usadas en la descripción del análisis de estructuras planas. Considerando el sistema total, el equilibrio estático nodal es definido por la ecuación matricial

$$[S_c] \{S_c\} + \{U_c\} = \{R_c\} \quad (2.14)$$

donde:

$[S_c]$  = Matriz de rigidez completa de la estructura.

$\{S_c\}$  = vector de desplazamientos nodales completo.

$\{U_c\}$  = vector de cargas nodales completo.

1. *Chrysothrix* sp. *Chrysothrix* sp. *Chrysothrix* sp.

*Chrysothrix* sp. *Chrysothrix* sp. *Chrysothrix* sp.

*Chrysothrix* sp. *Chrysothrix* sp. *Chrysothrix* sp.

*Chrysothrix* sp.

*Chrysothrix* sp.

*Chrysothrix* sp.

*Chrysothrix* sp.

*Chrysothrix* sp.

$\{R\}$  vector de reacciones de la estructura y de (2.14) se obtiene la ecuación

$$[S_{uu}]\{S_u\} + \{\mu_u\} = 0 \quad (2.15)$$

de donde se obtiene  $\{S_i\}$  y  $\{S_c\}$ , el que substituyéndolo en (2.14) y (2.1) se obtiene  $\{R_c\}$  y  $\{\phi\}_i$  como

$$\{R_c\} = -[S_c][S_{uu}]^{-1}\{\mu_u\} \quad (2.16)$$

$$\{\phi\}_i = [k_{ij}]_i [S_{uu}]^{-1}\{\mu_u\} + \{\mu\}_i \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (2.17)$$

Ejemplo: En el sistema estructural de la Fig. 2.3, determine las reacciones nodales  $\{\phi\}_i$  en los extremos de cada miembro y las reacciones originadas por las cargas indicadas.

La estructura tiene miembros prismáticos con las siguientes propiedades:

$$EI_y = EI_z = EI$$

$$GI_x = \frac{EI}{4} \quad (2.18)$$

$$EA_x = \frac{EI}{4}$$

la estructura es flexible y se puede considerar la ( $\phi_y = \phi_z$ ) deformación por cortante despreciable



11

11/11/11

11/11/11

11



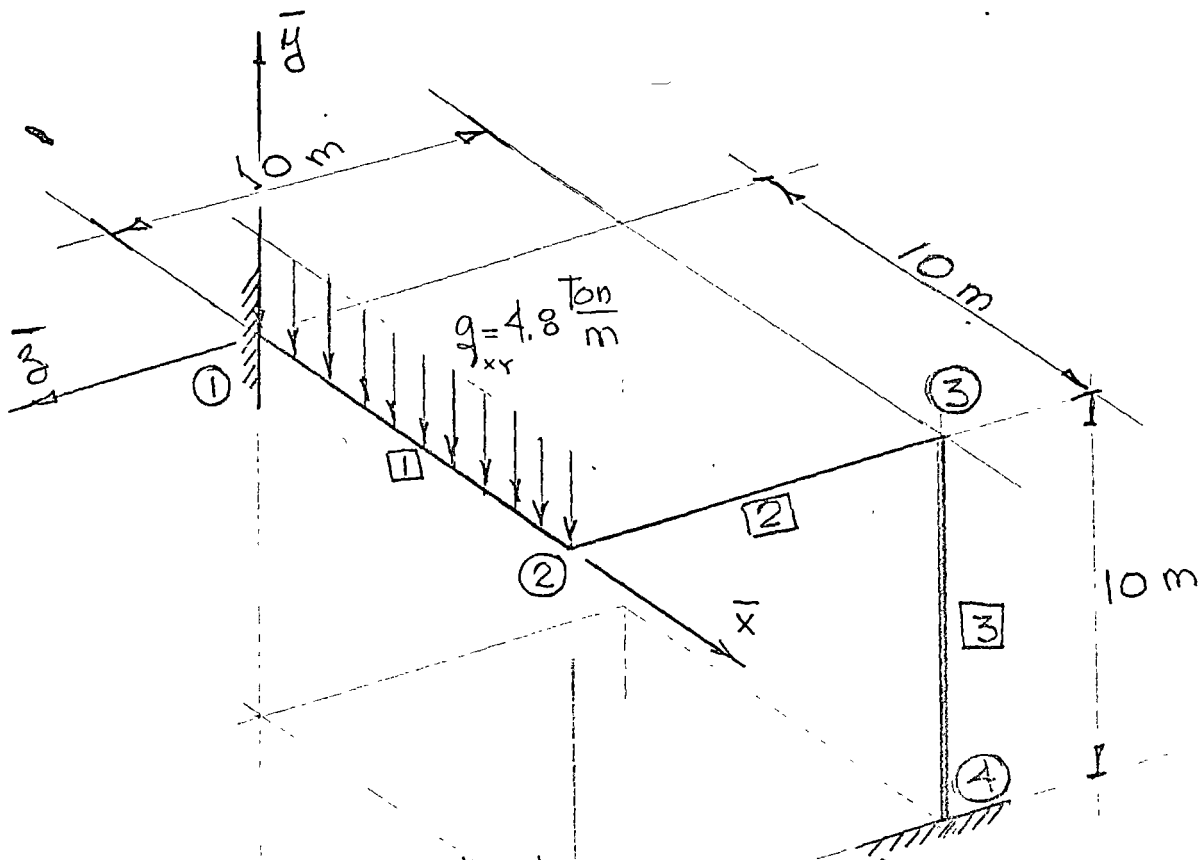
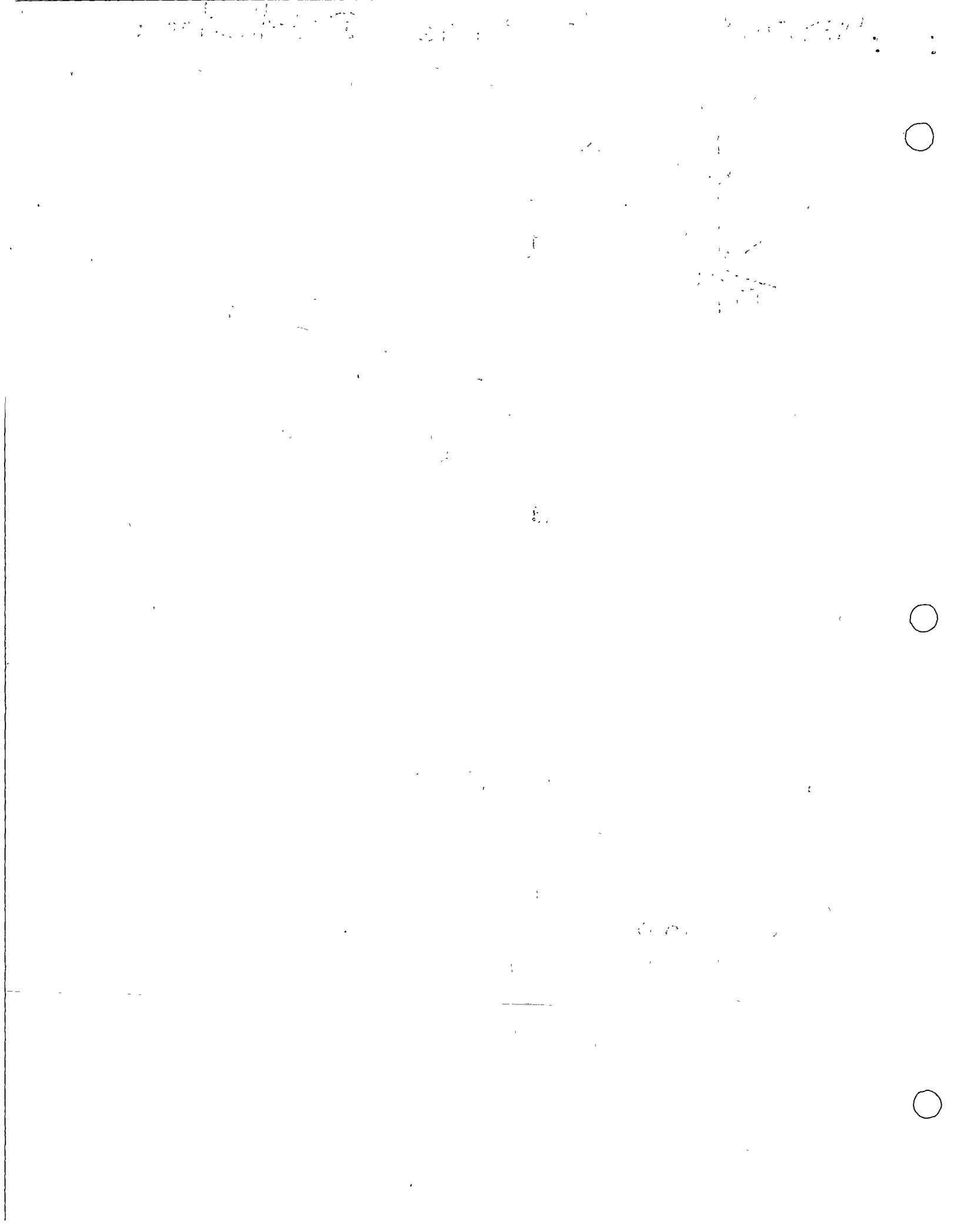


Fig. 2.3 Estructura espacial rígida

Las tablas 2.1 y 2.2 dan la información requerida para cada nodo y miembro

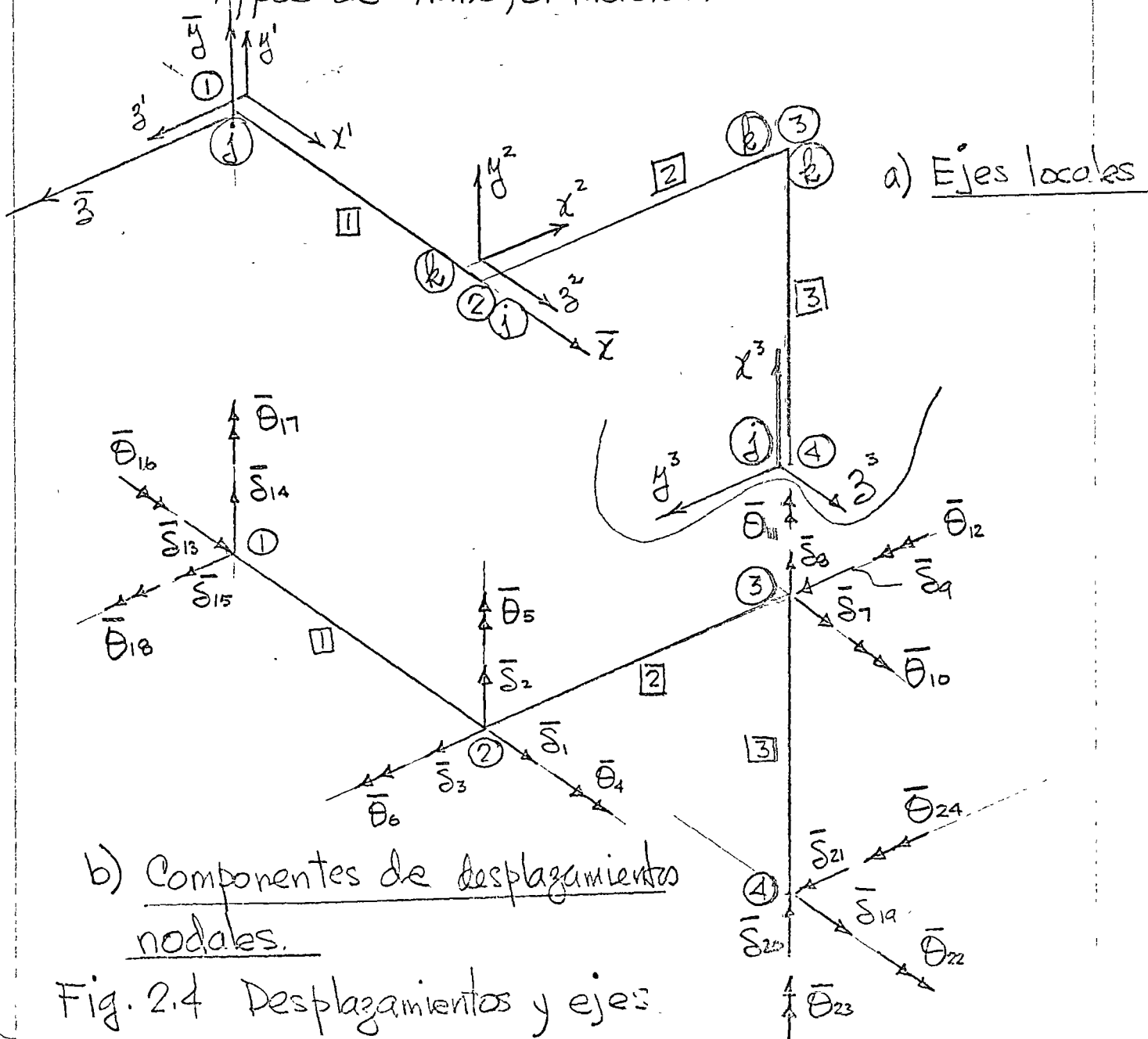
Nodo	$\bar{x}$	$\bar{y}$	$\bar{z}$
1	0	0	0
2	10.0	0	0
3	10.0	0	-10.00
4	10.0	-10.00	-10.00

Tabla 2.1 coordenadas nodales en metros.



Barra	Longitud (m)	Nodo		Cosenos directores			TIPO DE TRANSFORMACION	Angulo $\psi$
		j	k	$\lambda_{0j}$	$\lambda_{0k}$	$\lambda_{0l}$		
1	10.0	1	2	+1	0	0	y-z-x	0
2	10.0	2	3	0	0	-1	y-z-x	0
3	10.0	4	3	0	+1	0	z-y-x	90°

Tabla 2.2 longitudes, Cosenos directores y Tipos de Transformación.



12 SHEETS 5 SQUARE  
 42 SHEETS 5 SQUARE  
 42 SHEETS 5 SQUARE  
 NATIONAL

Handwritten text at the top of the page, possibly a title or header.

Main body of handwritten text, appearing to be a list or series of entries, though the characters are very faint and difficult to decipher.



vector columna de desplazamientos nodales  $\{\delta_c\}$

$$\{\delta_c\} = \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \theta_4 \\ \theta_5 \\ \theta_6 \\ \delta_7 \\ \delta_8 \\ \delta_9 \\ \theta_{10} \\ \theta_{11} \\ \theta_{12} \\ \delta_{13} \\ \delta_{14} \\ \delta_{15} \\ \theta_{16} \\ \theta_{17} \\ \theta_{18} \\ \delta_{19} \\ \delta_{20} \\ \delta_{21} \\ \theta_{22} \\ \theta_{23} \\ \theta_{24} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{\delta_u\} \\ \{\delta_r\} \end{Bmatrix}$$

(2.19)



1  
 2  
 3  
 4  
 5  
 6  
 7  
 8  
 9  
 10  
 11  
 12  
 13  
 14  
 15  
 16  
 17  
 18  
 19  
 20  
 21  
 22  
 23  
 24  
 25  
 26  
 27  
 28  
 29  
 30  
 31  
 32  
 33  
 34  
 35  
 36  
 37  
 38  
 39  
 40  
 41  
 42  
 43  
 44  
 45  
 46  
 47  
 48  
 49  
 50  
 51  
 52  
 53  
 54  
 55  
 56  
 57  
 58  
 59  
 60  
 61  
 62  
 63  
 64  
 65  
 66  
 67  
 68  
 69  
 70  
 71  
 72  
 73  
 74  
 75  
 76  
 77  
 78  
 79  
 80  
 81  
 82  
 83  
 84  
 85  
 86  
 87  
 88  
 89  
 90  
 91  
 92  
 93  
 94  
 95  
 96  
 97  
 98  
 99  
 100

DISTRICT OF COLUMBIA  
 DEPARTMENT OF THE DISTRICT OF COLUMBIA  
 OFFICE OF THE DISTRICT CLERK

Matriz de rigidez de cada miembro

Para cada elemento fija la matriz de rigidez se establece por medio de (2.1) con respecto a los ejes locales; la matriz de transformación se puede establecer por medio de la expresión (2.10); y la matriz de rigidez de miembro transformada,  $[k_{ij}]_i$  respecto a l sistema global se obtiene de

$$[k_{ij}]_i = [\lambda]_i^T [k_{ij}]_i [\lambda]_i \tag{2.20}$$

Miembro II

$$[\lambda]_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [I] ; [k_{ij}]_i = [I]^T [k_{ij}]_i [I] = [k_{ij}]_i \tag{2.21}$$



$$EI [k_{ij}]_i = \begin{matrix} & \begin{matrix} 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 13 \\ 14 \\ 15 \\ 16 \\ 17 \\ 18 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix} & \begin{bmatrix} .025 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -.025 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & .012 & 0 & 0 & 0 & .060 & 0 & -.012 & 0 & 0 & 0 & .060 \\ 0 & 0 & .012 & 0 & -.060 & 0 & 0 & 0 & -.012 & 0 & -.060 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & .025 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -.025 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -.06 & 0 & 0.4 & 0 & 0 & 0 & .06 & 0 & 0.2 & 0 \\ 0 & .06 & 0 & 0 & 0 & 0.4 & 0 & -.06 & 0 & 0 & 0 & 0.2 \\ -.025 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & .025 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -.012 & 0 & 0 & 0 & -.06 & 0 & .012 & 0 & 0 & 0 & -.06 \\ 0 & 0 & -.012 & 0 & .06 & 0 & 0 & 0 & .012 & 0 & .06 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & .025 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & .025 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -.06 & 0 & 0.2 & 0 & 0 & 0 & .06 & 0 & .4 & 0 \\ 0 & .06 & 0 & 0 & 0 & 0.2 & 0 & -.06 & 0 & 0 & 0 & .4 \end{bmatrix} \end{matrix} \tag{2.22}$$



The following information was obtained from the records of the  
 State Department of Health, Division of Vital Statistics, for the  
 period from January 1, 1950, to December 31, 1950:  
 The total number of live births registered in the State of  
 California during the year 1950 was 482,100. The total  
 number of deaths registered during the same period was 48,200.  
 The crude death rate per 1,000 live births was 9.99.  
 The infant mortality rate per 1,000 live births was 27.5.  
 The maternal mortality rate per 1,000 live births was 1.5.  
 The fetal mortality rate per 1,000 live births was 1.5.  
 The stillbirth rate per 1,000 live births was 1.5.  
 The neonatal mortality rate per 1,000 live births was 1.5.  
 The post-neonatal mortality rate per 1,000 live births was 1.5.  
 The total mortality rate per 1,000 live births was 11.5.  
 The infant mortality rate per 1,000 live births was 27.5.  
 The maternal mortality rate per 1,000 live births was 1.5.  
 The fetal mortality rate per 1,000 live births was 1.5.  
 The stillbirth rate per 1,000 live births was 1.5.  
 The neonatal mortality rate per 1,000 live births was 1.5.  
 The post-neonatal mortality rate per 1,000 live births was 1.5.  
 The total mortality rate per 1,000 live births was 11.5.



Miembro  $\boxed{2}$  De (2.5) se obtiene:

$$[k_{ij}]_2 = EI \begin{bmatrix} .025 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -.025 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & .012 & 0 & 0 & 0 & .06 & 0 & -.012 & 0 & 0 & 0 & .06 \\ 0 & 0 & .012 & 0 & -.06 & 0 & 0 & 0 & -.012 & 0 & -.06 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & .025 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -.025 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -.06 & 0 & 0.4 & 0 & 0 & 0 & .06 & 0 & 0.2 & 0 \\ 0 & .06 & 0 & 0 & 0 & 0.4 & 0 & -.06 & 0 & 0 & 0 & 0.2 \\ -.025 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & .025 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -.012 & 0 & 0 & 0 & -.06 & 0 & .012 & 0 & 0 & 0 & -.06 \\ 0 & 0 & -.012 & 0 & .06 & 0 & 0 & 0 & .012 & 0 & .06 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -.025 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & .025 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -.06 & 0 & 0.2 & 0 & 0 & 0 & .06 & 0 & .4 & 0 \\ 0 & .06 & 0 & 0 & 0 & 0.2 & 0 & -.06 & 0 & 0 & 0 & .4 \end{bmatrix} \quad (2.23)$$

De (2.12);  $\bar{\lambda}_{0y_2} = [0 \ 0 \ -1]_2$ ,  $\bar{\lambda}_{0y_2} = [0 \ 1 \ 0]_2$ ,  $\bar{\lambda}_{0z_2} = [1 \ 0 \ 0]_2$  (2.12)<sub>a</sub>

Subst. (2.12)<sub>a</sub> en (2.10) se obtiene

$$[\lambda]_2 = \begin{bmatrix} \begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & -1 & & & \\ 0 & 1 & 0 & & & \\ 1 & 0 & 0 & & & \\ \hline & & & \begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & -1 & & & \\ 0 & 1 & 0 & & & \\ 1 & 0 & 0 & & & \\ \hline & & & \begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & -1 & & & \\ 0 & 1 & 0 & & & \\ 1 & 0 & 0 & & & \\ \hline & & & \begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & -1 & & & \\ 0 & 1 & 0 & & & \\ 1 & 0 & 0 & & & \end{array} & & & & & \end{array} \end{array} \end{bmatrix} \quad (2.24)$$

Subst (2.24) y (2.23) en (2.20) se obtiene

$$[K_{ij}]_2 = EI \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ .012 & 0 & 0 & 0 & -.06 & 0 & -.012 & 0 & 0 & 0 & -.06 & 0 \\ 0 & .012 & 0 & .06 & 0 & 0 & 0 & -.012 & 0 & .06 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & .025 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -.025 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & .06 & 0 & .4 & 0 & 0 & 0 & -.06 & 0 & 0.2 & 0 & 0 \\ -.06 & 0 & 0 & 0 & 0.4 & 0 & .06 & 0 & 0 & 0 & .2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & .025 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -.025 \\ -.012 & 0 & 0 & 0 & .06 & 0 & .012 & 0 & 0 & 0 & .06 & 0 \\ 0 & -.012 & 0 & -.06 & 0 & 0 & 0 & .012 & 0 & -.06 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -.025 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & .025 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & .06 & 0 & 0.2 & 0 & 0 & 0 & -.06 & 0 & .4 & 0 & 0 \\ -.06 & 0 & 0 & 0 & 0.2 & 0 & .06 & 0 & 0 & 0 & .4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -.025 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & .025 \end{bmatrix} \quad (2.25)$$

101 10/27/75 12:15 2100 10/27/75 12:15

102 10/27/75 12:15 2100 10/27/75 12:15

103 10/27/75 12:15 2100 10/27/75 12:15

104 10/27/75 12:15 2100 10/27/75 12:15

105 10/27/75 12:15 2100 10/27/75 12:15

106 10/27/75 12:15 2100 10/27/75 12:15

107 10/27/75 12:15 2100 10/27/75 12:15

108 10/27/75 12:15 2100 10/27/75 12:15

109 10/27/75 12:15 2100 10/27/75 12:15

110 10/27/75 12:15 2100 10/27/75 12:15

111 10/27/75 12:15 2100 10/27/75 12:15

112 10/27/75 12:15 2100 10/27/75 12:15

113 10/27/75 12:15 2100 10/27/75 12:15

114 10/27/75 12:15 2100 10/27/75 12:15

115 10/27/75 12:15 2100 10/27/75 12:15

116 10/27/75 12:15 2100 10/27/75 12:15

117 10/27/75 12:15 2100 10/27/75 12:15

118 10/27/75 12:15 2100 10/27/75 12:15

119 10/27/75 12:15 2100 10/27/75 12:15

120 10/27/75 12:15 2100 10/27/75 12:15

Miembro  $\boxed{3}$ , De (2.5) se obtiene la matriz de rigidez, la cual resulta igual a la de los miembros.

III y  $\boxed{2}$

$$[k_{ij}]_3 = [k_{ij}]_2 = [k_{ij}]_1 \quad (2.26)$$

De (2.12) se obtiene

$$\bar{\lambda}_{0x_3} = [0 \ 1 \ 0]_3, \quad \bar{\lambda}_{0y_3} = [0 \ 0 \ 1]_3, \quad \bar{\lambda}_{0z_3} = [1 \ 0 \ 0]_3 \quad (2.27)$$

De (2.27) y (2.10) se obtiene

$$[W]_3 = \begin{bmatrix} \begin{matrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{matrix} & & & & & \\ & \begin{matrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{matrix} & & & & \\ & & \begin{matrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{matrix} & & & \\ & & & \begin{matrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{matrix} & & \\ & & & & \begin{matrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{matrix} & \\ & & & & & 0 \end{bmatrix} \quad (2.28)$$

De (2.20) (2.26) y (2.28) se obtiene

$$[k_{ij}]_3 = EI \begin{array}{c|cccccccccccc} 19 & 20 & 21 & 22 & 23 & 24 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ \hline .012 & 0 & 0 & 0 & 0 & -.06 & -.012 & 0 & 0 & 0 & 0 & -.06 \\ 0 & .025 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -.025 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & .012 & .06 & 0 & 0 & 0 & 0 & -.012 & .06 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & .06 & .4 & 0 & 0 & 0 & 0 & -.06 & .2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & .025 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -.025 & 0 \\ -.06 & 0 & 0 & 0 & 0 & .4 & .06 & 0 & 0 & 0 & 0 & .2 \\ -.012 & 0 & 0 & 0 & 0 & .06 & .012 & 0 & 0 & 0 & 0 & .06 \\ 0 & -.025 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & .025 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -.012 & -.06 & 0 & 0 & 0 & 0 & .012 & -.06 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & .06 & .2 & 0 & 0 & 0 & 0 & -.06 & .4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -.025 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & .025 & 0 \\ -.06 & 0 & 0 & 0 & 0 & .2 & .06 & 0 & 0 & 0 & 0 & .4 \end{array} \quad (2.29)$$

Handwritten text at the top of the page, possibly a header or title.

Handwritten text in the upper middle section of the page.

Handwritten text in the middle section of the page.

Handwritten text in the lower middle section of the page.

Handwritten text in the lower section of the page.

Handwritten text in the lower section of the page.

Handwritten text in the lower section of the page.

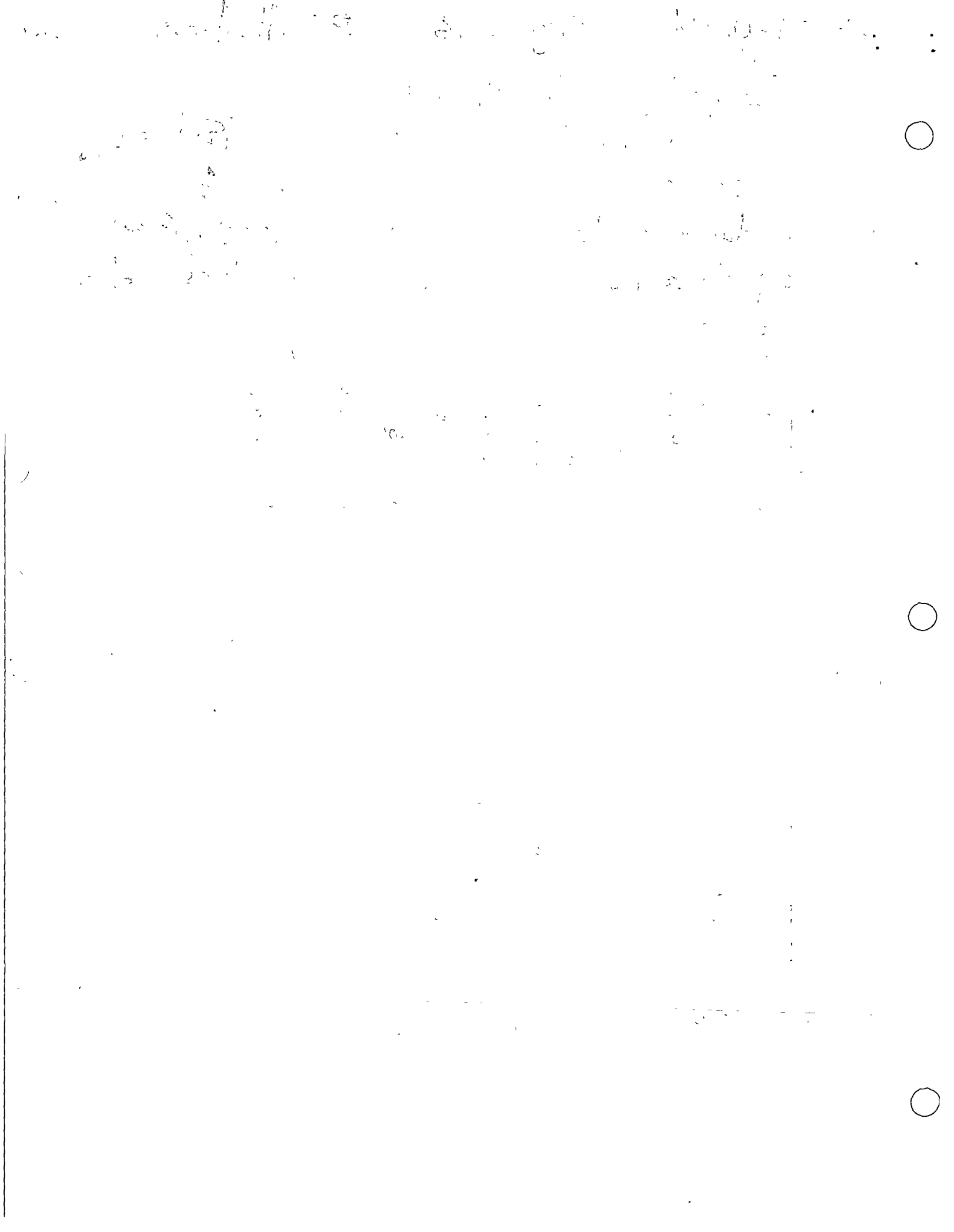
Handwritten text at the bottom of the page.

Matriz de rigidez de la estructura.

La matriz completa de la estructura  $[S_c]$  se obtiene sumando los coeficientes de rigidez de miembro dados en las expresiones (2.22), (2.25) y (2.29) con respecto a la identificación de subíndices de los elementos se obtiene

$$[S_c] = EI \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \\ 11 \\ 12 \\ 13 \\ 14 \\ 15 \\ 16 \\ 17 \\ 18 \\ 19 \\ 20 \\ 21 \\ 22 \\ 23 \\ 24 \end{matrix} & \begin{bmatrix} .037 & 0 & 0 & 0 & -.06 & 0 & -.012 & 0 & 0 & 0 & -.06 & 0 \\ 0 & .024 & 0 & .06 & 0 & -.06 & 0 & -.012 & 0 & .06 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & .037 & 0 & .06 & 0 & 0 & 0 & -.025 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & .06 & 0 & .425 & 0 & 0 & 0 & -.06 & 0 & 0.2 & 0 & 0 \\ -.06 & 0 & .06 & 0 & 0.8 & 0 & .06 & 0 & 0 & 0 & 0.2 & 0 \\ 0 & -.06 & 0 & 0 & 0 & .425 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -.025 \\ -.012 & 0 & 0 & 0 & .06 & 0 & .024 & 0 & 0 & 0 & .06 & .06 \\ 0 & -.012 & 0 & -.06 & 0 & 0 & 0 & .037 & 0 & -.06 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -.025 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & .037 & -.06 & 0 & 0 \\ 0 & .06 & 0 & 0.2 & 0 & 0 & 0 & -.06 & -.06 & .8 & 0 & 0 \\ -.06 & 0 & 0 & 0 & 0.2 & 0 & .06 & 0 & 0 & 0 & .425 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -.025 & .06 & 0 & 0 & 0 & 0 & .425 \end{bmatrix} \\ \hline \begin{bmatrix} -.025 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -.012 & 0 & 0 & 0 & .06 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -.012 & 0 & -.06 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -.025 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & .06 & 0 & 0.2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -.06 & 0 & 0 & 0 & 0.2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -.012 & 0 & 0 & 0 & 0 & -.06 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -.025 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -.012 & .06 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -.06 & .2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -.025 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & .06 & 0 & 0 & 0 & 0 & .2 \end{bmatrix} \end{matrix} = \begin{matrix} [S_{uu}] \\ [S_{vu}] \end{matrix} \quad (2.30)$$

De (2.30) se obtiene  $[S_{uu}]^{-1}$



DESFI-UNAM

Marzo - 1976

P. Ballesteros

31

31

(2.31)

$$[S_{min}] = \frac{1}{EI}$$

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
38.396	1.266	-6.236	0.001	1.750	0.085	11.279	-0.403	-5.028	-0.503	3.005	-1.578
1.266	210.745	-43.160	-21.908	5.487	30.182	-39.151	11.279	-50.707	-13.286	3.124	7.303
-6.236	-43.160	102.028	2.421	-11.235	-6.537	50.707	5.028	84.038	9.312	-2.752	-7.543
0.001	-21.908	2.421	5.546	-0.346	-3.130	3.124	3.005	2.752	0.688	-0.278	-0.625
1.750	5.487	-11.235	-0.346	3.048	0.888	-13.286	-0.503	-9.312	-1.061	0.688	1.928
0.085	30.182	-6.537	-3.130	0.888	6.698	-7.303	1.587	-7.543	-1.928	0.625	1.425
11.279	-39.151	50.707	3.124	-13.286	-7.303	210.745	1.266	43.160	5.487	-21.908	-30.182
-0.403	11.279	5.028	3.005	-0.503	1.587	1.266	38.396	6.236	1.757	0.001	-0.085
-5.028	-50.707	84.038	2.752	-9.312	-7.543	43.160	6.236	102.028	11.235	-2.421	-6.537
-0.503	-13.286	9.312	0.688	-1.061	-1.928	5.487	1.750	11.235	3.048	-0.346	-0.888
3.005	3.124	-2.752	-0.278	0.688	0.625	-21.908	0.001	-2.421	-0.346	5.546	3.130
-1.587	7.303	-7.543	-0.625	1.928	1.425	-30.182	-0.085	-6.537	-0.888	3.130	6.698



The first part of the document discusses the importance of maintaining accurate records of all transactions. It emphasizes that every entry should be supported by a valid receipt or invoice. This ensures transparency and allows for easy verification of the data.

In the second section, the author details the various methods used to collect and analyze the data. This includes both manual and automated processes. The goal is to ensure that the information is both reliable and up-to-date.

The third part of the report focuses on the results of the analysis. It shows a clear trend of growth over the period studied. This is supported by several key indicators and statistical data points.

Finally, the document concludes with a series of recommendations for future actions. These are based on the findings of the analysis and aim to optimize the current processes and improve overall efficiency.





Vector de momentos y reacciones fijas miembro  $\square$

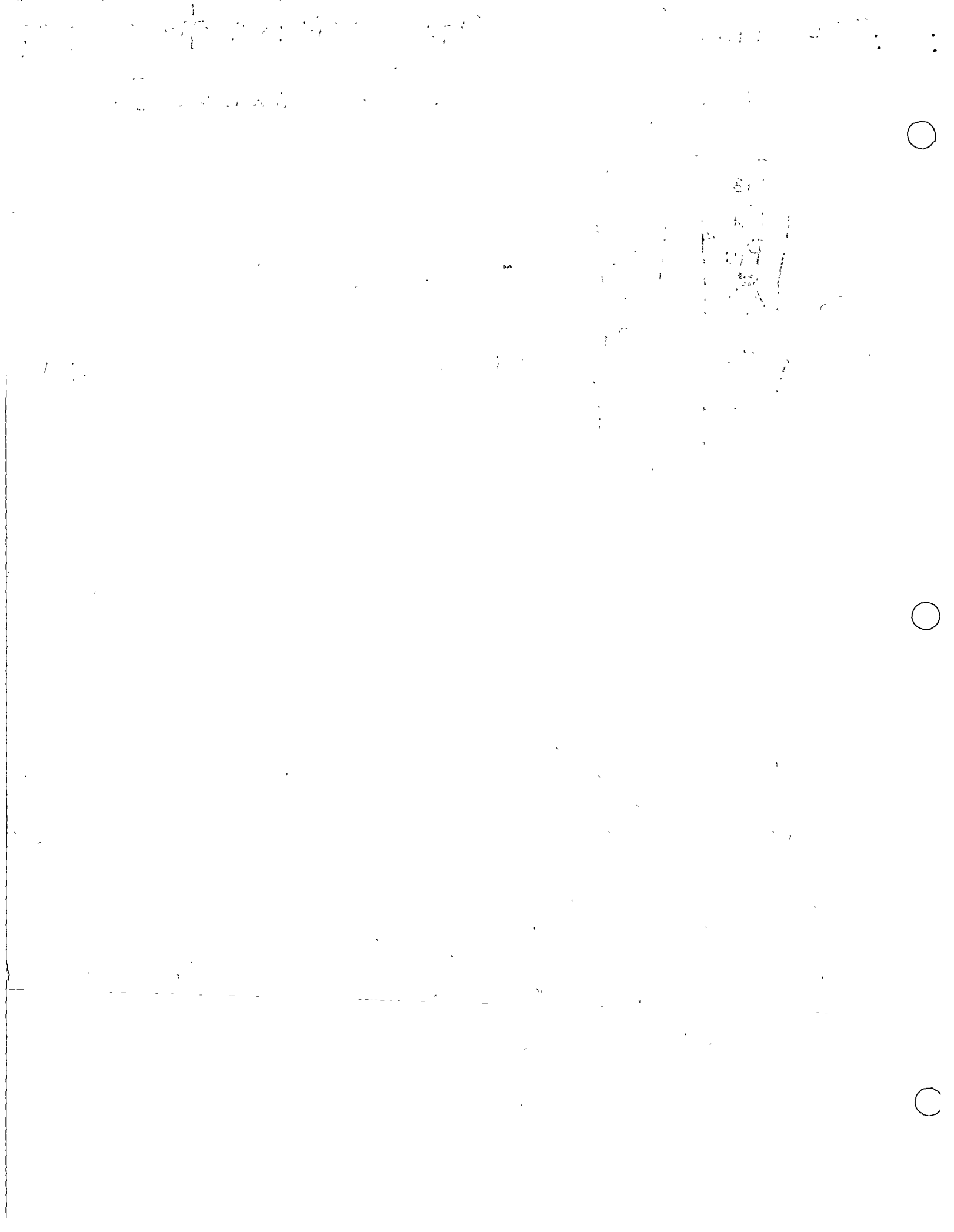
$$\{\mu\}_1 = \begin{Bmatrix} P_{13} \\ P_{14} \\ P_{15} \\ \mu_{16} \\ \mu_{17} \\ \mu_{18} \\ P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ \mu_4 \\ \mu_5 \\ \mu_6 \end{Bmatrix}_1 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 24 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 40 \\ 0 \\ 24 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -40 \end{Bmatrix}_1 = \{\bar{\mu}\}_1 \quad (2.32)$$

$$\{\bar{\mu}\}_1 = [\lambda]_1^T \{\mu\}_1 \quad (2.33)$$

$$\{\mu\}_2 = 0 \quad ; \quad \{\bar{\mu}\}_2 = 0$$

$$\{\mu\}_3 = 0 \quad ; \quad \{\bar{\mu}\}_3 = 0$$

Habiendo definido las cargas nodales en términos de las acciones fijas en los extremos con respecto a los ejes de referencia, se deduce el vector de cargas nodales completo  $\{\mu\}_1$ , como.



42 391 11 SHEETS 5 SQUARE  
12 362 100 SHEETS 5 SQUARE  
42 390 200 SHEETS 5 SQUARE

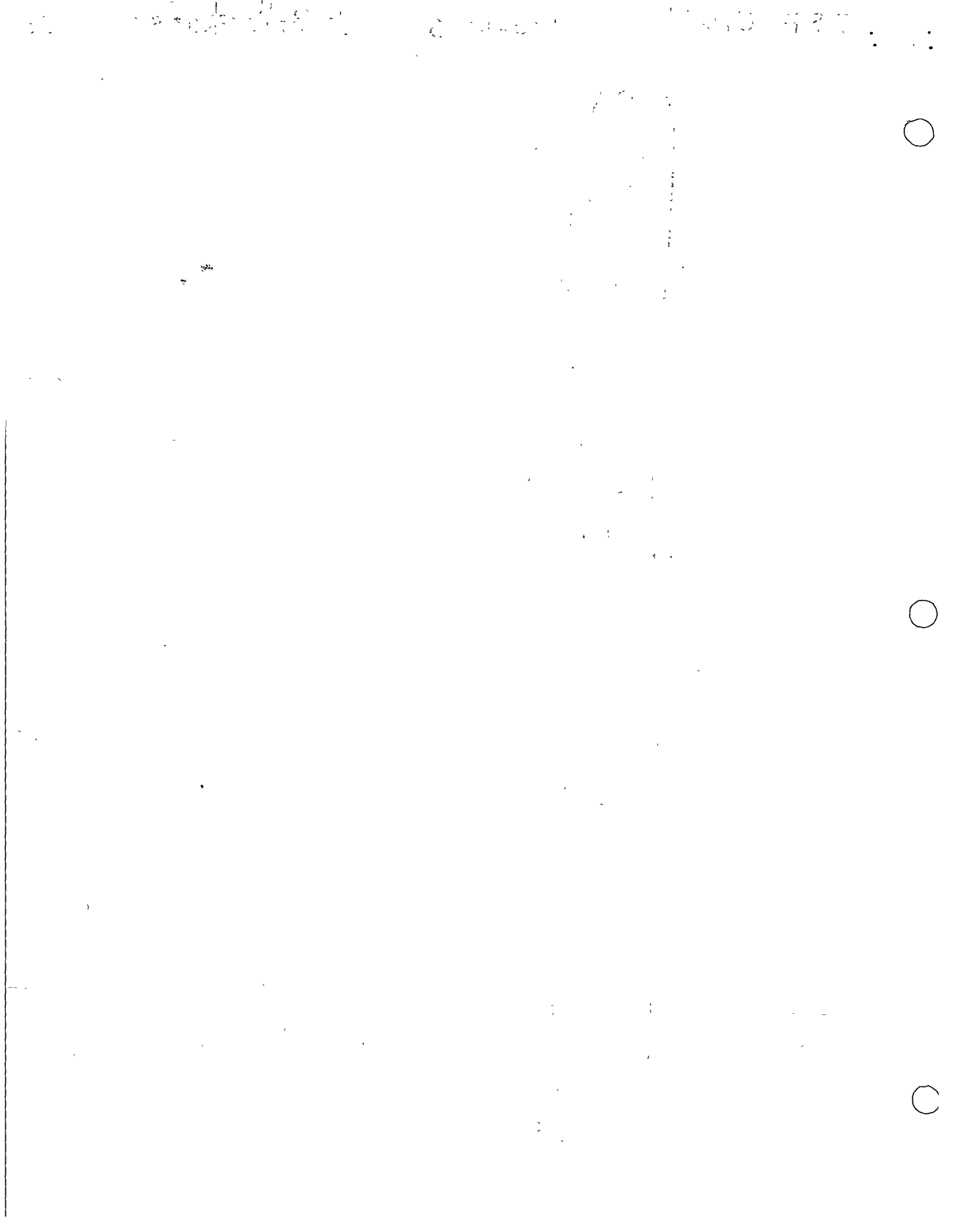
0	1
-24	2
0	3
0	4
0	5
40.0	6
0	7
0	8
0	9
0	10
0	11
0	12
0	13
-24	14
0	15
0	16
0	17
-40.0	18
0	19
0	20
0	21
0	22
0	23
0	24

$$\{\mu_c\} = \frac{\{\mu_{ij}\}}{\{\mu_{ij}\}}$$

(2.34)

Etiqueta de grados de libertad

↑



Substituyendo (2.31) y (2.34) en (2.15) se obtiene

$$\{\bar{S}_u\} = [S_{uu}]^{-1} \{k_u\} \quad (2.35)$$

$$\{\bar{S}_u\} = \begin{Bmatrix} \bar{S}_1 \\ \bar{S}_2 \\ \bar{S}_3 \\ \bar{\theta}_4 \\ \bar{\theta}_5 \\ \bar{\theta}_6 \\ \bar{S}_7 \\ \bar{S}_8 \\ \bar{S}_9 \\ \bar{\theta}_{10} \\ \bar{\theta}_{11} \\ \bar{\theta}_{12} \end{Bmatrix} = \frac{1}{EI} \begin{Bmatrix} -26.984 \\ -3850.6 \\ 774.36 \\ 400.592 \\ -96.168 \\ -456.448 \\ 647.504 \\ -207.216 \\ 915.248 \\ 241.744 \\ -49.976 \\ -118.272 \end{Bmatrix} \quad (2.36)$$

Los valores de los desplazamientos dados por (2.36) con respecto al sistema global son valores relativos, para obtener los valores se substituye  $E$  en  $\text{ton}/\text{m}^2$  e  $I$  en  $\text{m}^4$  en (2.36) y se obtiene  $S_i$  en metros y  $\theta$  en radianes.

Acciones Finales en los extremos.

Habiendo evaluado las componentes de los desplazamientos nodales con respecto al sistema global de referencia por medio de (2.10) se evalúan con respecto a las coordenadas locales de cada barra y las acciones

Handwritten text at the top of the page, including the number "13" on the left and "1914" on the right. The text is mostly illegible due to fading.

13  
14  
15



finales para cada miembro de la estructura se calculan de (2.1)

$$\{p\}_i = [k_{ij}] [\lambda]_i \{\bar{S}\}_i + \{u\}_i \quad (2.37)$$

De la Fig. 2.4 se tiene para el miembro III

$$\{\bar{S}\}_1 = \begin{pmatrix} S_3 \\ S_4 \\ S_5 \\ \theta_{16} \\ \theta_{11} \\ \theta_{18} \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ \theta_4 \\ \theta_5 \\ \theta_6 \end{pmatrix} = \frac{1}{EI} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -26.984 \\ -3850.6 \\ 774.36 \\ 400.592 \\ -96.168 \\ -456.448 \end{pmatrix} \quad (2.38)$$

De (2.21), (2.38), (2.1) y (2.5) se obtiene

Handwritten text at the top of the page, possibly a title or header, including the word "Introduction".

Main body of handwritten text, appearing to be the beginning of a document or report.

Small handwritten mark or number on the left margin.





$$\{P\}_1 = \begin{Bmatrix} F_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ M_4 \\ M_5 \\ M_6 \\ F_7 \\ P_8 \\ F_9 \\ M_{10} \\ M_{11} \\ M_{12} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.7 \text{ Ton} \\ 42.8 \text{ Ton} \\ -3.5 \text{ Ton} \\ -10.0 \text{ Ton-m} \\ 27.2 \text{ Ton-m} \\ 179.7 \text{ Ton-m} \\ -0.7 \text{ Ton} \\ 5.2 \text{ Ton} \\ 3.5 \text{ Ton} \\ 10.0 \text{ Ton-m} \\ 8.0 \text{ Ton-m} \\ 8.5 \text{ Ton-m} \end{Bmatrix}$$

(Índices según  
convención Fig. 2.4)

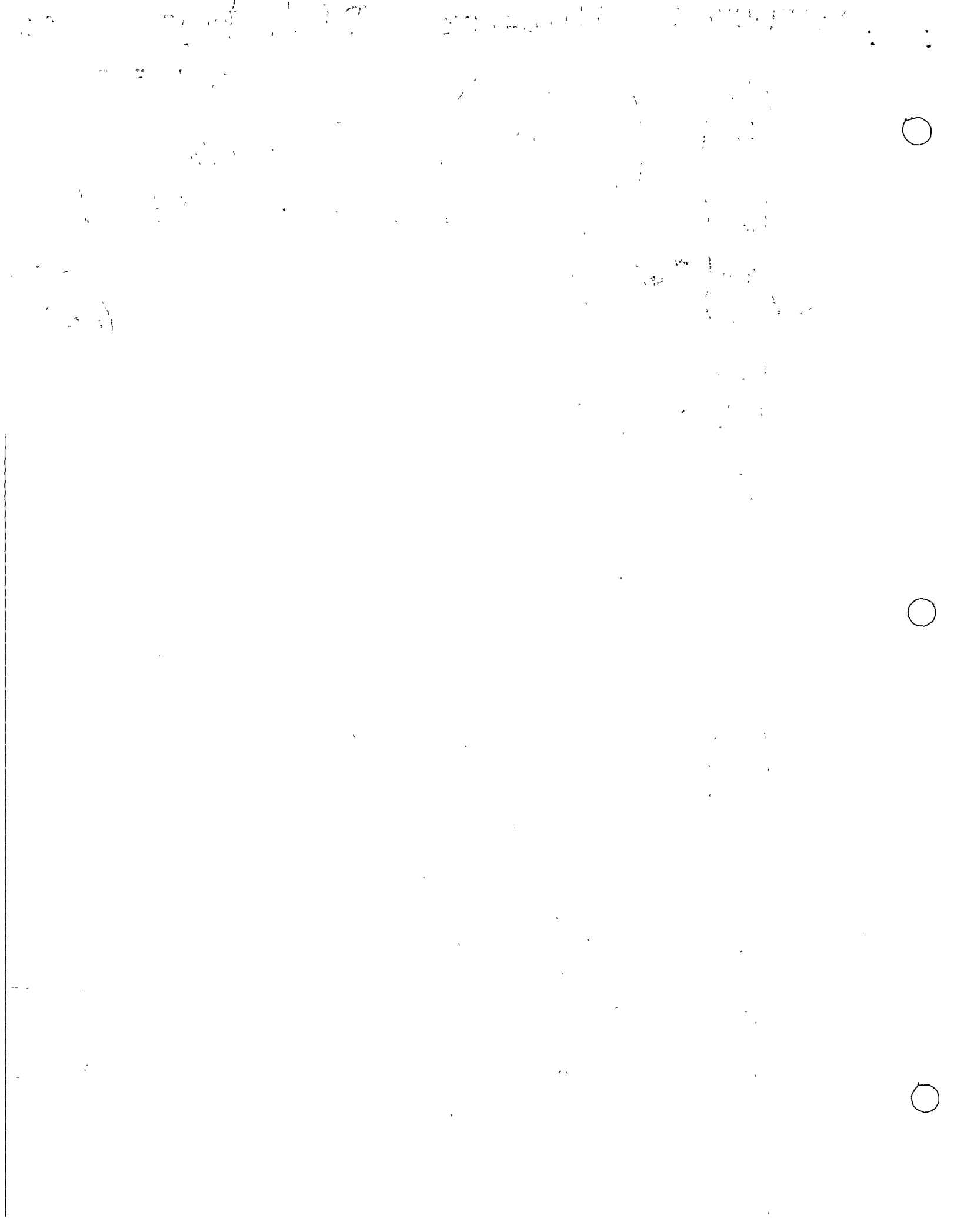
(2.39)

Miembro 2.  $\{\bar{S}\}_2 = \{\delta_u\} = [\lambda]_2 \{\bar{\delta}_u\}$  y  $\{u\}_2 = \{0\}$   
De (2.24), (2.25), (2.1) y (2.5) se obtiene

$$\{P\}_2 = \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ M_4 \\ M_5 \\ M_6 \\ P_7 \\ P_8 \\ P_9 \\ M_{10} \\ M_{11} \\ M_{12} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 3.5 \text{ Ton} \\ -5.2 \text{ " } \\ 0.7 \text{ " } \\ 8.5 \text{ Ton-m} \\ -8.0 \text{ " } \\ -10.0 \text{ " } \\ -3.5 \text{ Ton} \\ 5.2 \text{ " } \\ -0.7 \text{ " } \\ -8.5 \text{ Ton-m} \\ 11.2 \text{ " } \\ -41.8 \text{ " } \end{Bmatrix}$$

(Índices según  
convención Fig. 2.4)

(2.40)



Miembro [3]

$$\{S\}_3 = \begin{Bmatrix} S_{10} \\ S_{20} \\ S_{21} \\ \theta_{22} \\ \theta_{23} \\ \theta_{24} \\ S_{11} \\ S_{18} \\ S_{19} \\ \theta_{10} \\ \theta_{11} \\ \theta_{12} \end{Bmatrix}_3 = \frac{1}{EI} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 647.504 \\ -207.216 \\ 915.248 \\ 241.744 \\ -49.976 \\ -118.272 \end{Bmatrix}_3 \quad (2.41)$$

en [3] también  $\{U\}_3 = 0$ , De (2.28), (2.29), (2.1) y (2.5) se obtiene

$$\{P\}_3 = \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ M_4 \\ M_5 \\ M_6 \\ P_7 \\ P_8 \\ P_9 \\ M_{10} \\ M_{11} \\ M_{12} \end{Bmatrix}_3 = \begin{Bmatrix} 5.2 \text{ Ton} \\ 3.5 \text{ ''} \\ -0.7 \text{ ''} \\ 1.2 \text{ Ton-m} \\ 15.2 \text{ ''} \\ -6.6 \text{ ''} \\ -5.2 \text{ Ton} \\ -3.5 \text{ ''} \\ 0.7 \text{ ''} \\ -1.2 \text{ Ton-m} \\ -8.5 \text{ ''} \\ 41.8 \text{ ''} \end{Bmatrix}_3 \quad (2.42)$$

ST. PAUL, MINN.

AT 9/10/18

RECEIVED

1898

RECEIVED  
 THE  
 OFFICE OF THE  
 SECRETARY OF THE  
 STATE  
 ST. PAUL, MINN.  
 SEP 10 1898



## Reacciones.

Substituyendo las matrices apropiadas en

$$\{R\} = [S_{ru}] \{S_u\} - \{U_r\}$$

se obtiene

$$\{R\} = \begin{pmatrix} R_{13} \\ R_{14} \\ R_{15} \\ R_{16} \\ R_{17} \\ R_{18} \\ R_{19} \\ R_{20} \\ R_{21} \\ R_{22} \\ R_{23} \\ R_{24} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.7 \text{ Ton} \\ 42.8 \text{ ''} \\ -3.5 \text{ ''} \\ -10.0 \text{ Ton-m} \\ 27.2 \text{ Ton-m} \\ 179.7 \text{ ''} \\ -0.7 \text{ Ton} \\ 5.2 \text{ ''} \\ 3.5 \text{ ''} \\ -6.6 \text{ Ton-m} \\ 1.2 \text{ ''} \\ 15.2 \text{ ''} \end{pmatrix}$$

2.43

1  
10/1/1968

10/1/1968

10/1/1968

10/1/1968

10/1/1968

10/1/1968

10/1/1968

10/1/1968

10/1/1968

10/1/1968

10/1/1968

10/1/1968

10/1/1968

10/1/1968

10/1/1968

10/1/1968

10/1/1968

10/1/1968

10/1/1968

10/1/1968

10/1/1968









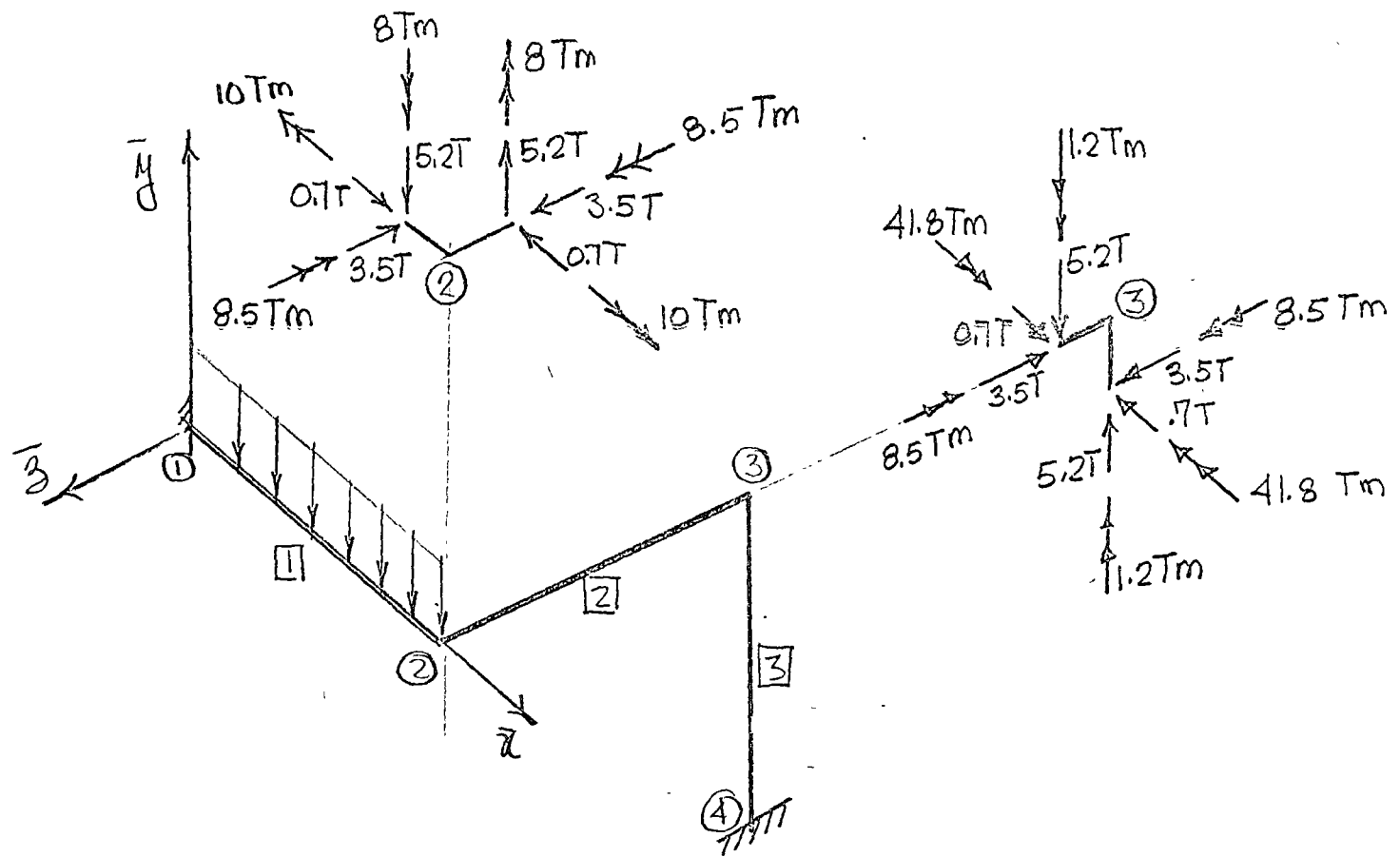


Fig. 2.6 Diagrama de cuerpo libre de los nodos 2 y 3



Handwritten text on the right edge, possibly a page number or date.

Handwritten text on the right edge, possibly a page number or date.

Handwritten text on the right edge, possibly a page number or date.

Handwritten text on the right edge, possibly a page number or date.

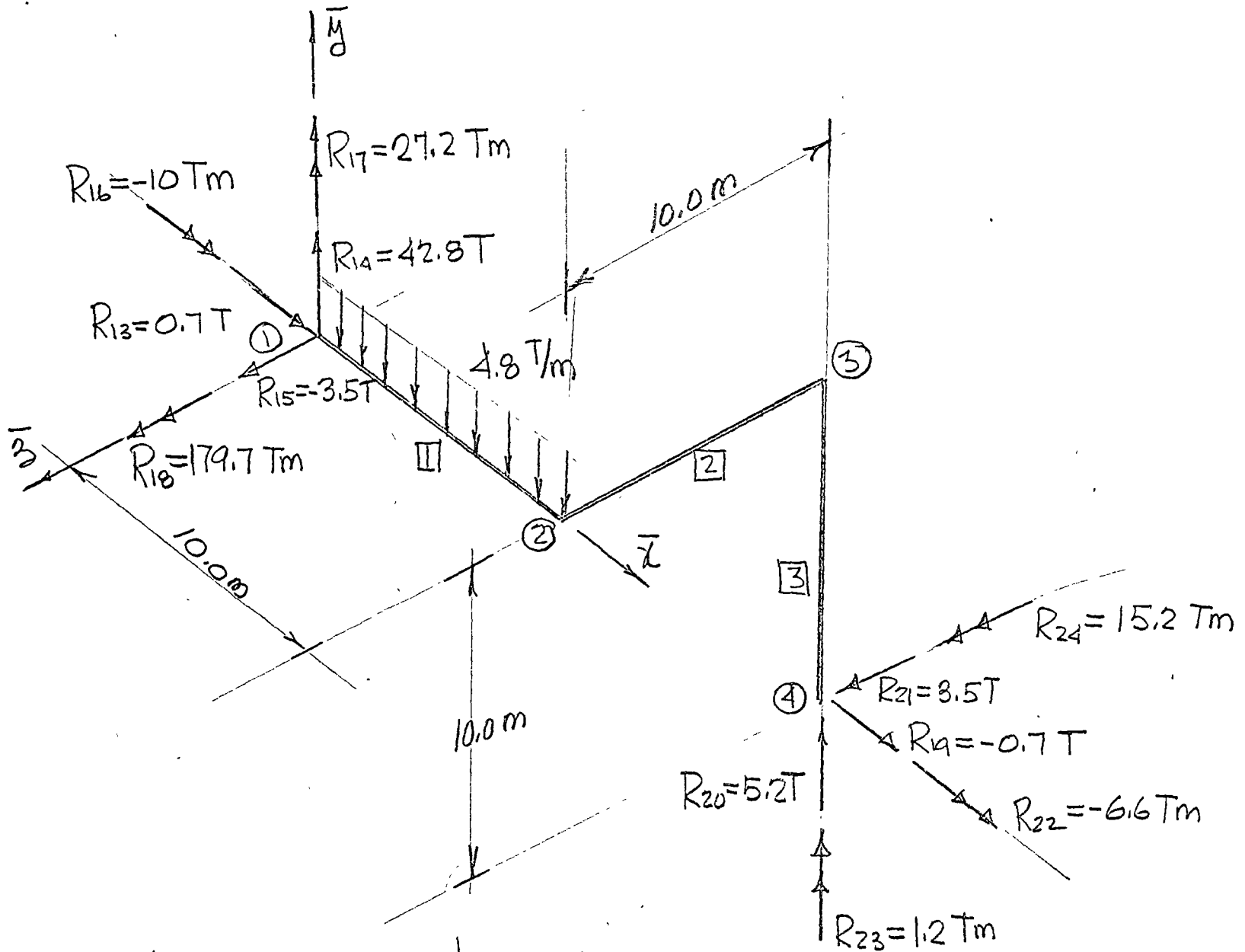


Fig. 2.7 Componentes de las reacciones en los apoyos 1 y 4



1.- Introducción. - La naturaleza de las fuerzas que actúan dentro de un cuerpo para equilibrar el efecto de las fuerzas de cuerpo y externas o de superficie, es una de las partes principales del estudio de la mecánica de sólidos. Se aplicará el método de secciones para aislar un elemento diferencial y definir el concepto de esfuerzo.

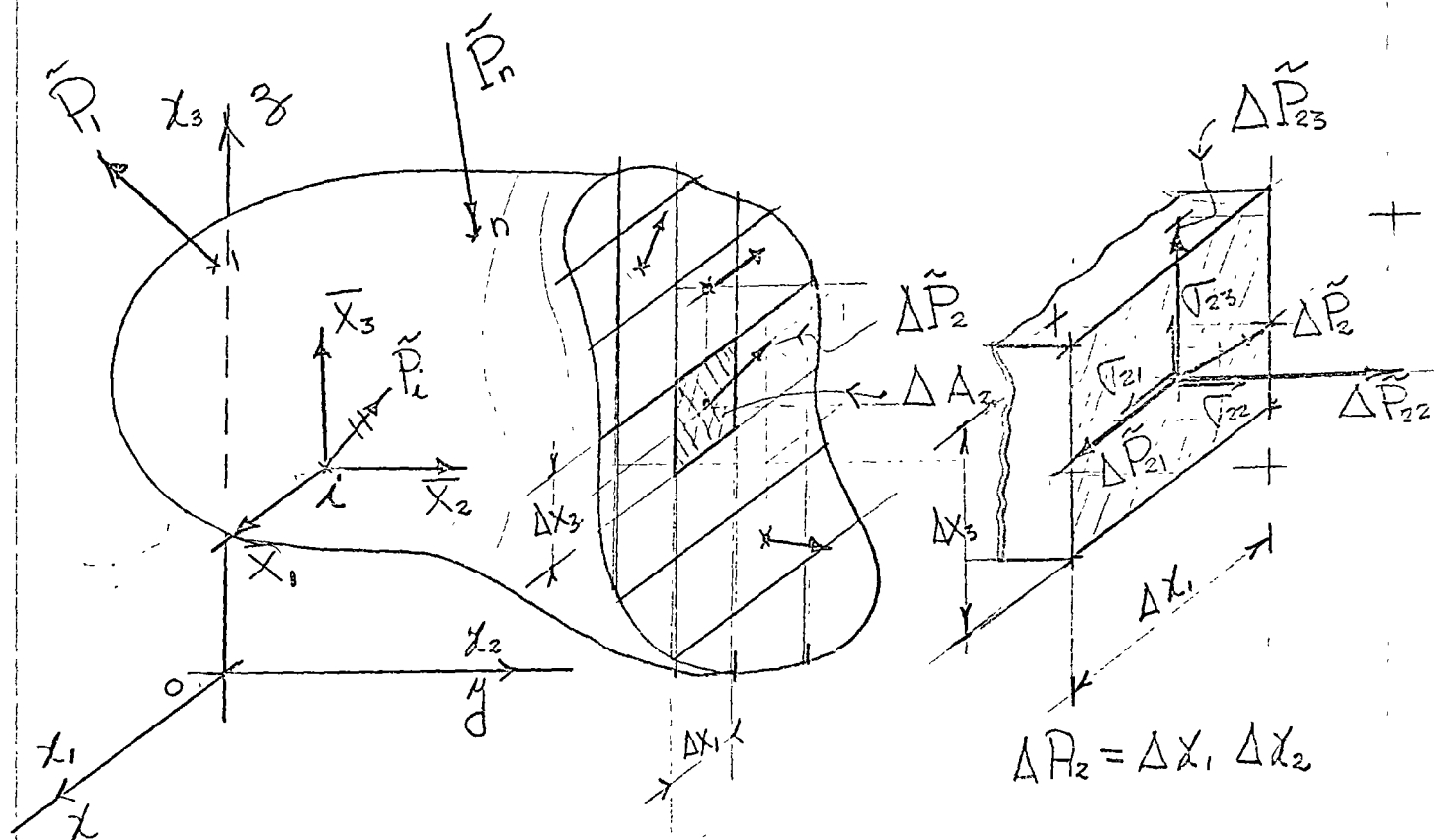


Fig. 1 Cuerpo seccionado paralelo al plano  $x_1, x_3$

2.- Definición de esfuerzo.

En general, las fuerzas internas actuando sobre las áreas infinitesimales  $\Delta x_i \Delta x_j$  del corte, son de

Dear Sir,  
I am writing to you regarding the matter of the  
contract for the supply of goods to the  
Government of India. I am sorry to hear that  
the contract has not been awarded to our  
company. I would like to know the reasons  
for this and if there is any possibility of  
re-bidding for the contract.

I have enclosed herewith a copy of the  
contract documents for your reference. I  
trust that you will find them of interest.  
I am sure that our company is well qualified  
to supply the goods required for the  
Government of India. I would be glad to  
discuss the matter further with you.

I am sure that you will find our  
company's offer to be the most competitive  
and reliable. I am sure that you will  
be satisfied with our service. I am sure  
that you will find our company to be a  
reliable and efficient supplier of goods  
to the Government of India.

I am sure that you will find our  
company to be a reliable and efficient  
supplier of goods to the Government of  
India. I am sure that you will find our  
company to be a reliable and efficient  
supplier of goods to the Government of  
India.



magnitudes y direcciones variables. Fuerzas de naturaleza vectorial y mantienen el equilibrio. En mecánica de sólidos es particularmente significativo determinar la intensidad y dirección en distintos puntos a través del corte. En general varían de punto a punto en intensidad y dirección. Es usual resolver sus intensidades perpendicular y paralelas a la sección en consideración. En particular el corte de la Fig. 1 es perpendicular al eje  $x_1$ ,  $\Delta \vec{P}_2$  es la fuerza resultante que actúa sobre  $\Delta A_2 = \Delta x_1 \Delta x_2$ , cuyas componentes son:  $[\Delta \vec{P}_{21} \Delta \vec{P}_{22} \Delta \vec{P}_{23}]$ , el primer subíndice significa que el plano en que actúan es perpendicular al eje  $x_2$  y el segundo respecto al eje que son paralelos. Puesto que las componentes de fuerza por unidad de área, son correctas solo en el punto, la definición matemática de esfuerzo es \*

$$\sigma_{21} = \lim_{\Delta A_2 \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{P}_{21}}{\Delta A_2}, \quad \sigma_{22} = \lim_{\Delta A_2 \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{P}_{22}}{\Delta A_2}, \quad \sigma_{23} = \lim_{\Delta A_2 \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{P}_{23}}{\Delta A_2}$$

similarmente los esfuerzos actuando en un plano perpendicular a  $x_1$  son

$$\sigma_{11} = \lim_{\Delta A_1 \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{P}_{11}}{\Delta A_1}, \quad \sigma_{12} = \lim_{\Delta A_1 \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{P}_{12}}{\Delta A_1}, \quad \sigma_{13} = \lim_{\Delta A_1 \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{P}_{13}}{\Delta A_1}$$

y los esfuerzos actuando sobre un plano perpendicular a  $x_3$  son

$$\sigma_{31} = \lim_{\Delta A_3 \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{P}_{31}}{\Delta A_3}, \quad \sigma_{32} = \lim_{\Delta A_3 \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{P}_{32}}{\Delta A_3}, \quad \sigma_{33} = \lim_{\Delta A_3 \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{P}_{33}}{\Delta A_3}$$

\* Cuando  $\Delta A_i \rightarrow 0$ , existen preguntas desde el punto de vista atómico en definir esfuerzo en esta forma. Sin embargo, un modelo homogéneo para materia molecular no homogénea trabaja bien en problemas de Ingeniería.

Main body of handwritten text, appearing as several lines of cursive script.





Se observa que las definiciones de esfuerzo normal y cortante representan la intensidad de una fuerza sobre una area, y sus unidades son de  $\left[\frac{F}{L^2}\right]$ ; en el sistema métrico  $\text{kg/cm}^2$  o  $\text{ton/cm}^2$  y en el Ingles  $\text{lbs/pul}^2$  o  $\text{KIPS/pul}^2$ .

Debe notarse que los esfuerzos multiplicados por las areas sobre las cuales actúan nos dan fuerzas, y es la suma de estas fuerzas, y es la suma de estas fuerzas sobre cualquier corte imaginario lo que conserva el equilibrio de un cuerpo.

### 3. Tensor de esfuerzos.

Si, además del diagrama de cuerpo libre de la Fig. 1.1 se hacen pasar tres pares de planos paralelos y separados por distancias infinitesimales, un cubo de dimensiones infinitesimales será aislado del cuerpo con el origen del sistema local coordenado en el punto de coordenadas  $x_i (x_1, x_2, x_3)$ . Tal cubo se muestra en la Fig. 3.1

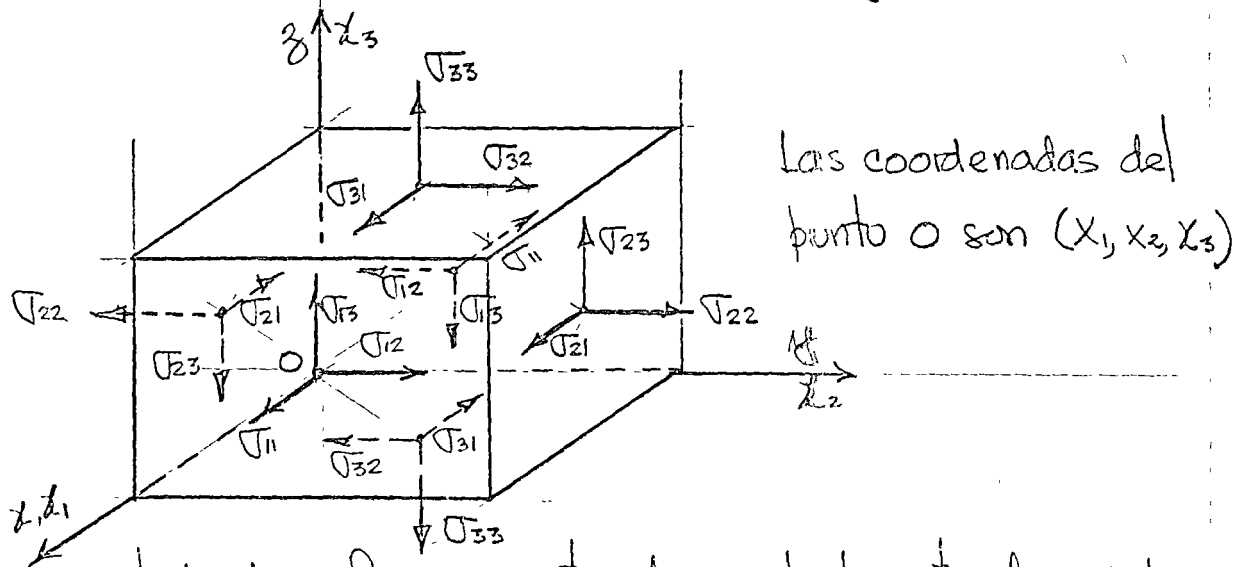


Fig. 3.1 Estado de esfuerzos actuando en el elemento  $dx_i$ . El sentido indicado es convencionalmente el positivo.

1947

1947

1947

1947

1947

1947

1947

1947

1947

1947

1947

1947

1947

1947

1947

1947

1947

1947

1947

1947

1947

1947

1947

1947

1947

1947



Examinando la Fig. 3.1, se observa que hay tres esfuerzos normales  $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}$ , y seis esfuerzos cortantes  $\sigma_{12}, \sigma_{21}, \sigma_{23}, \sigma_{32}, \sigma_{31}, \sigma_{13}$ . El arreglo matricial

$$\underline{\sigma} = [\sigma_{ij}] = [\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

es la representación del tensor de esfuerzos. Es un tensor de segundo orden referido al espacio Euclidiano tridimensional. Un vector es un tensor de primer orden y un escalar es un tensor de cero orden

#### 4.- Fuerzas de cuerpo y fuerzas de superficie

En el mismo elemento diferencial consideremos el vector de fuerzas de cuerpo por unidad de volumen  $\{X_i\}^T = [X_1, X_2, X_3]$ , y en consideraciones no polares el vector de momentos de cuerpo por unidad de volumen  $\{m_i\}^T = [m_1, m_2, m_3]$  actuando en el centroide del elemento diferencial como se indica en la Fig. 4.1

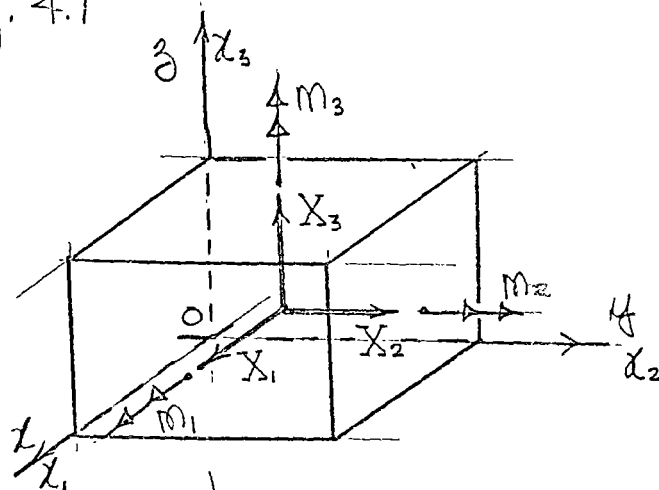


Fig. 4.1 Fuerzas y momentos de cuerpo por unidad de volumen  $\{X_i\}$  y  $\{m_i\}$  actuando en el centro de gravedad de  $dx_i$ .

2015/03/11

2015-03-11

2015/03/11 2015-03-11

2015/03/11 2015-03-11

2015/03/11 2015-03-11

2015/03/11 2015-03-11

1.2

2015/03/11 2015-03-11

2015/03/11 2015-03-11

2015/03/11 2015-03-11

2015/03/11

2015/03/11

2015/03/11

2015/03/11

2015/03/11

2015/03/11

2015/03/11

en donde  $X_i = \rho (f_i - a_i)$  (4.1)

donde  $\rho$  es la densidad o masa específica,  $f_i$  es la fuerza por unidad de masa en la dirección  $x_i$  y  $a_i$  es la aceleración del elemento  $dx_i$  en la dirección de  $x_i$

Las fuerzas de superficie actúan en la frontera del cuerpo y las tres componentes de  $\vec{P}_i$  Fig. 1.1 las designaremos por  $\{\bar{X}_i\}^T = [\bar{X}_1 \bar{X}_2 \bar{X}_3]$ ; sus unidades son fuerza por unidad de área  $[\frac{F}{L^2}]$ ,  $\text{kg/cm}^2$  en el sistema métrico y  $\text{lbs/pul}^2$  en el inglés, y en el internacional  $\text{Newtons/cm}^2$ . Las unidades de las fuerzas de cuerpo serán  $[\frac{F}{L^3}]$ . Las fuerzas de superficie deben satisfacer las condiciones en la frontera [Fig. 5.1] que para el punto  $i$  [Fig. 1.1] son

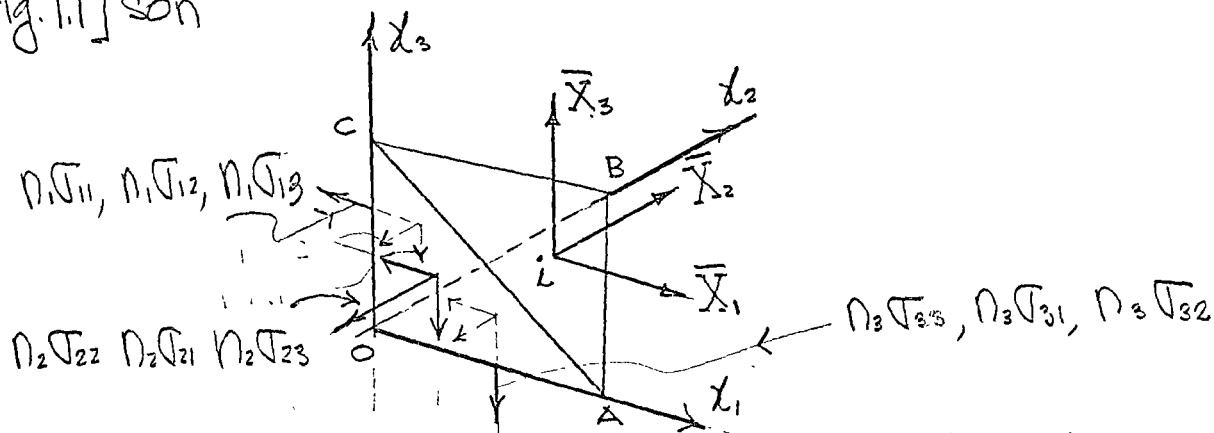


Fig. 5.1 Equilibrio del punto  $i$  [Fig. 1.1] en la superficie.

Si  $ABC = \text{unidad}$ ,  $OBC = \cos \alpha = n_1$ ,  $OAC = \cos \beta = n_2$ , y  $OAB = \cos \gamma = n_3$ , donde  $\{n_i\}^T = [n_1 \ n_2 \ n_3]$  son los cosenos directores de la normal al plano  $ABC$ , y del equilibrio de  $OABC$  se obtiene

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{21} & \sigma_{31} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{32} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{X}_1 \\ \bar{X}_2 \\ \bar{X}_3 \end{Bmatrix} \quad \text{o} \quad [\sigma_{ij}]^T \{n_i\} = \{\bar{X}_i\} \quad (4.1)$$



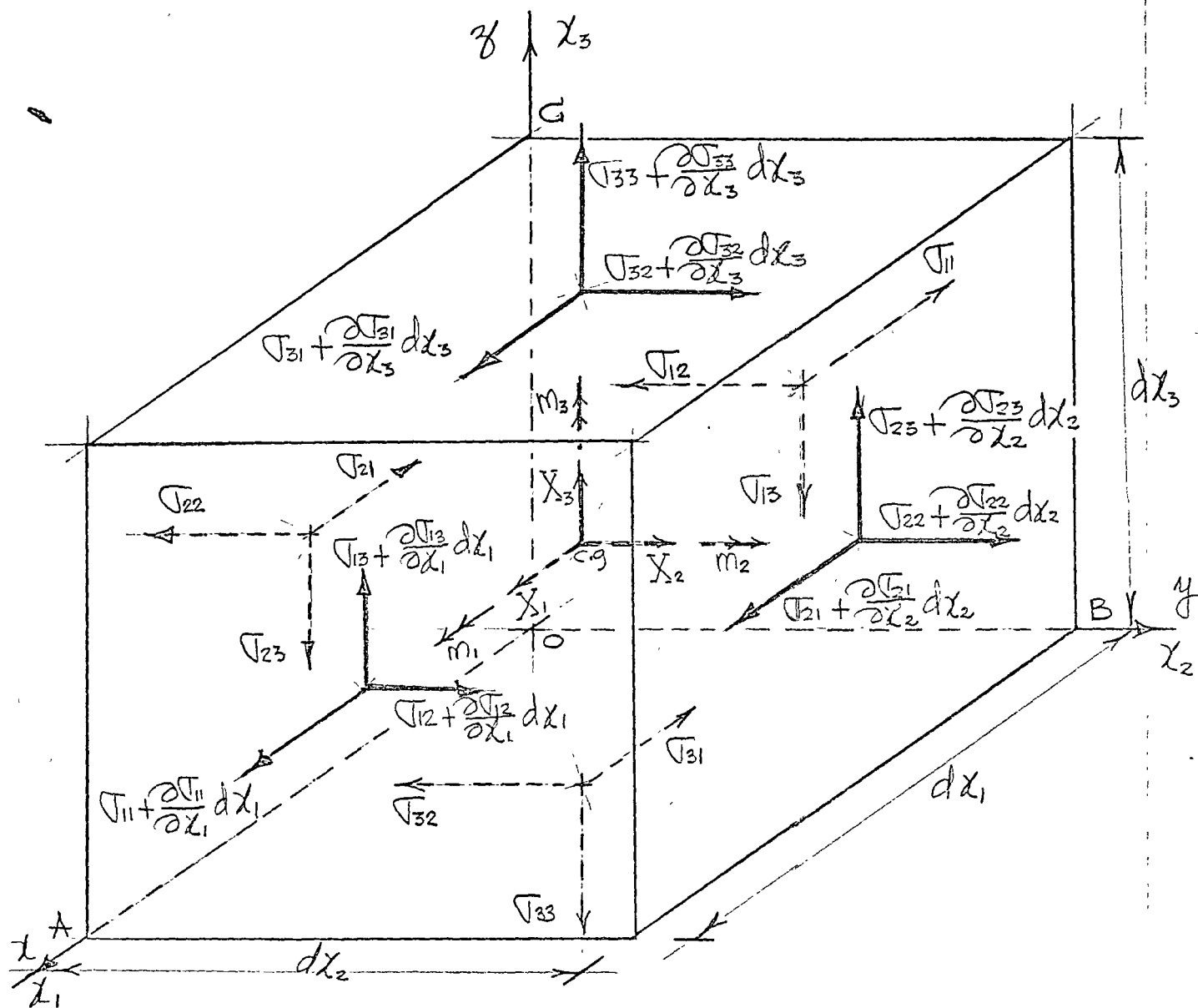


Fig. 5.1. Equilibrio de esfuerzos  $[\sigma]$ , fuerzas de cuerpo  $\{X\}$  y momentos de cuerpo  $\{m\}$ , en el elemento  $dx_i$ .

(4.1) es la representación matricial de las condiciones de equilibrio del punto  $i$  en la frontera  $x_i$ ...

5- Equilibrio del elemento  $dx_i$ .

Las seis ecuaciones de equilibrio del elemento de la Fig. 5.1 son

$$\sum F_{x_1} = \sum F_{x_2} = \sum F_{x_3} = \sum M_{x_1} = \sum M_{x_2} = \sum M_{x_3} = 0 \quad (5.1)$$

Y:

1.1





de  $\sum F_{x_i} = 0$ , en el límite cuando  $dx_i \rightarrow 0$  se obtiene

$$\left(\tau_{11} + \frac{\partial \tau_{11}}{\partial x_1} dx_1\right) dx_2 dx_3 - \tau_{11} dx_2 dx_3 + \left(\tau_{21} + \frac{\partial \tau_{21}}{\partial x_2} dx_2\right) dx_1 dx_3 - \tau_{21} dx_1 dx_3 + \left(\tau_{31} + \frac{\partial \tau_{31}}{\partial x_3} dx_3\right) dx_1 dx_2 - \tau_{31} dx_1 dx_2 + X_1 dx_1 dx_2 dx_3 = 0$$

efectuando operaciones algebraicas se obtiene

$$\begin{aligned} \text{Similarmente} \quad & \frac{\partial \tau_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \tau_{21}}{\partial x_2} + \frac{\partial \tau_{31}}{\partial x_3} + X_1 = 0 \\ \text{de } \sum F_{x_2} = 0, \quad & \frac{\partial \tau_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \tau_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \tau_{32}}{\partial x_3} + X_2 = 0 \\ \text{de } \sum F_{x_3} = 0, \quad & \frac{\partial \tau_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial \tau_{23}}{\partial x_2} + \frac{\partial \tau_{33}}{\partial x_3} + X_3 = 0 \end{aligned} \quad (5.2)$$

De  $\sum M_{x_i} = 0$ , en el límite cuando  $dx_i \rightarrow 0$ , y considerando el eje de momentos paralelo a  $ox_1$  y a través del centroide del elemento  $dx_i$ , y despreciando los diferenciales de segundo orden  $dx_i^2$ , se obtiene bajo la convención de signos de la Fig. 5.1 lo siguiente

$$\left(\tau_{23} + \frac{\partial \tau_{23}}{\partial x_2} dx_2\right) dx_1 dx_3 \frac{dx_2}{2} + \tau_{23} dx_1 dx_3 \frac{dx_2}{2} - \left(\tau_{32} + \frac{\partial \tau_{32}}{\partial x_3} dx_3\right) dx_1 dx_2 \frac{dx_3}{2} - \tau_{32} dx_1 dx_2 \frac{dx_3}{2} + m_1 dx_1 dx_2 dx_3 = 0$$

efectuando operaciones algebraicas se obtiene

$$\begin{aligned} & \tau_{23} - \tau_{32} + m_1 = 0 \\ \text{Similbrmente de } \sum M_{x_2} = 0, \quad & \tau_{31} - \tau_{13} + m_2 = 0 \\ \text{y de } \sum M_{x_3} = 0, \quad & \tau_{12} - \tau_{21} + m_3 = 0 \end{aligned} \quad (5.3)$$

Las ecuaciones (5.2) y (5.3) son las seis ecuaciones de equilibrio en coordenadas rectangulares y en su forma polar, generalmente los momentos de cuerpo  $m_i = 0$

1. The first part of the document is a list of names and addresses.

2. The second part of the document is a list of names and addresses.

3. The third part of the document is a list of names and addresses.

4. The fourth part of the document is a list of names and addresses.

5. The fifth part of the document is a list of names and addresses.

6. The sixth part of the document is a list of names and addresses.

7. The seventh part of the document is a list of names and addresses.

8. The eighth part of the document is a list of names and addresses.

Expresando (5.2) matricialmente se tiene

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} + \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{Bmatrix} = 0 \quad (5.4)$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_i} \end{bmatrix} [\sigma_{ij}] + \{X_i\} = 0 \quad (5.5)$$

Con notación índice (5.2) se representa

$$\sigma_{ij,j} + X_i = 0 \quad (5.6)$$

en donde  $\sigma_{ij,j} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}$ . Y las ecuaciones (5.3)

$$\sigma_{ij} - \sigma_{ji} + m_k = 0 \quad (5.7)$$

## 6. Diferentes notaciones del tensor de esfuerzos.

A continuación gráficamente mostraremos las diferentes notaciones que han sido utilizadas para representar las componentes del tensor de esfuerzos.

### 6.1 Cauchy inicialmente.

$$\begin{bmatrix} A & F & E \\ F & B & D \\ E & D & C \end{bmatrix}$$

$$(m_k = 0)$$

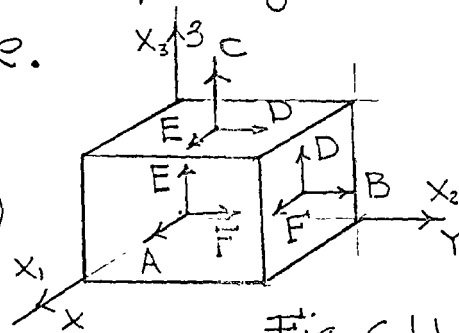


Fig. 6.1.1

### 6.2 Kelvin.

$$\begin{bmatrix} P & V & T \\ V & Q & S \\ T & S & R \end{bmatrix}$$

$$(m_k = 0)$$

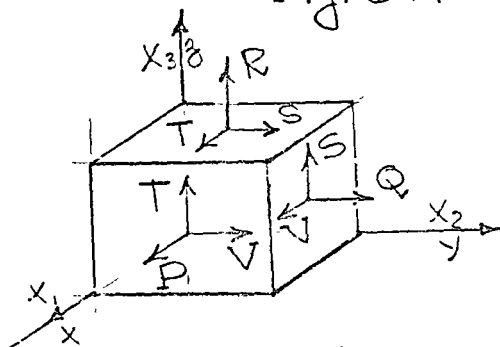


Fig. 6.1.2

1950-1951

1952-1953

1954-1955

1956-1957

1958-1959

1960-1961

1962-1963

1964-1965

1966-1967

1968-1969

1970-1971

1972-1973

1974-1975

1976-1977

1978-1979

1980-1981

1982-1983

1984-1985

1986-1987

1988-1989



6.2 Cauchy posteriormente, Saint-Venant ó Maxwell, introducen por primera vez la notación cartesiana, y

$$\begin{bmatrix} P_{xx} & P_{xy} & P_{xz} \\ P_{yx} & P_{yy} & P_{yz} \\ P_{zx} & P_{zy} & P_{zz} \end{bmatrix}$$

( $m_k \neq 0$ )

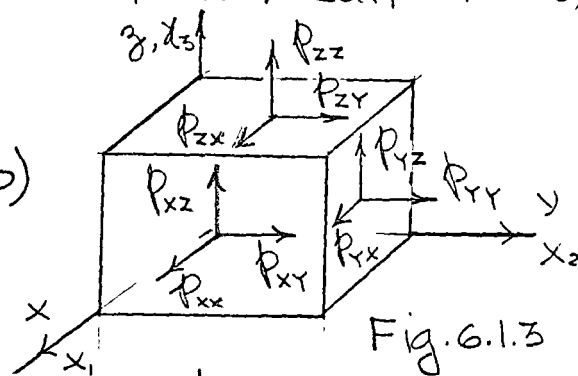


Fig. 6.1.3

condiciones polares.

6.3 Newman, Kirchhof y Love.

$$\begin{bmatrix} X_x & X_y & X_z \\ Y_x & Y_y & Y_z \\ Z_x & Z_y & Z_z \end{bmatrix}$$

( $m_k \neq 0$ )

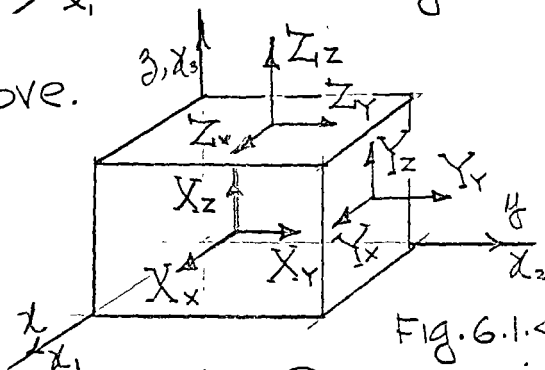


Fig. 6.1.4

6.4 K. Pearson.

$$\begin{bmatrix} \bar{x}_x & \bar{x}_y & \bar{x}_z \\ \bar{y}_x & \bar{y}_y & \bar{y}_z \\ \bar{z}_x & \bar{z}_y & \bar{z}_z \end{bmatrix}$$

( $m_k \neq 0$ )

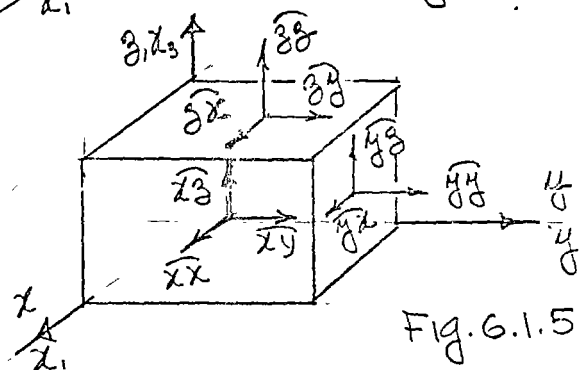


Fig. 6.1.5

6.5 S. Timoshenko y T. Von Karmán introducen la notación de Ingeniería, simplificando la notación cartesiana utilizando solo un subíndice en los esfuerzos normales denominándolos por  $\sigma$ , y los tangenciales por  $\tau$ .

$$\begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

( $m_k \neq 0$ )

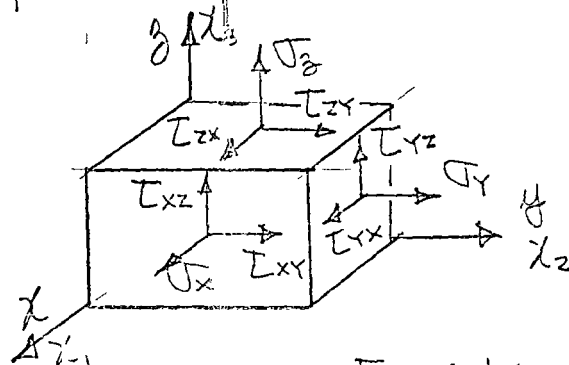


Fig. 6.1.6

1950-1951

1952-1953

1954-1955

1956-1957

1958-1959

1960-1961

1962-1963

1964-1965

1966-1967

1968-1969

1970-1971

1972-1973

1974-1975

1976-1977

1978-1979

1980-1981

1982-1983

1984-1985

1986-1987

1988-1989

1990-1991

1992-1993

1994-1995

1996-1997

1998-1999



6.6 Green, Ierna y autores Rusos introducen la notación índice similar a la utilizada previamente

$$[T_{ij}] = [t_{ij}]$$

6.7 Clebsch, G. Truesdell y A.C. Eringen, también utilizan la notación índice representando el tensor de esfuerzos

$$[t_{ij}]$$

6.8 D.C. Leigh, y L. Malvern, también utilizan notación índice representando el tensor de esfuerzos como

$$[T_{ij}]$$

Es importante observar que en la derivación de las ecuaciones de equilibrio (5.6) y (5.7) las propiedades mecánicas del material no han sido usadas. Lo cual significa que son aplicables a materiales elásticos, plásticos, o viscoelásticos. También es muy importante observar que no hay suficientes ecuaciones de equilibrio para determinar las incógnitas esfuerzo, el problema es estáticamente indeterminado.

## 7. Desplazamiento, deformación.

El análisis de la deformación de un sólido es de importancia paralela al análisis de esfuerzos. Requiere la definición precisa de deformación, la cual significa la intensidad del desplazamiento. Un cuerpo sólido sujeto a un cambio de temperatura o a cargas externas.

C

O

O

Handwritten text, possibly a title or header, including the word "MEMORANDUM" and other illegible words.

Handwritten text, possibly a date and subject line, including "JAN 19 1952" and "MEMORANDUM FOR THE DIRECTOR".

Handwritten text at the bottom of the page, possibly a signature or reference number.



Por ejemplo, si una muestra es sujeta a una fuerza  $P$  como se muestra en la Fig. 7.1, un cambio de longitud ocurre entre los dos puntos de calibración A y B. Si  $l_0$  es la longitud inicial y  $l$  la longitud observada bajo la carga  $P$ , y el alargamiento  $\Delta l = l - l_0$ . El

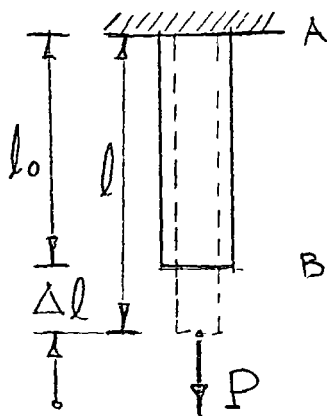


Fig. 7.1 Muestra a tensión.

alargamiento por unidad de longitud  $\epsilon$  (epsilon) es

$$\epsilon = \int_{l_0}^l \frac{dl}{l_0} = \frac{l - l_0}{l_0} = \frac{\Delta l}{l_0} \quad (7.1)$$

el cual es llamado deformación lineal. Es una cantidad adimensional, pero generalmente se mide o se refiere en  $\frac{\text{cm}}{\text{cm}}$  o  $\frac{\text{pulg}}{\text{pulg}}$ . Algunas veces se expresa en por ciento. La cantidad  $\epsilon$  es generalmente muy pequeño. En la mayoría de las aplicaciones de ingeniería tiene un orden máximo de magnitud de 0.001. Cuando las deformaciones son grandes, por ejemplo, en formado de metales, se introduce el la deformación natural que implica una  $l_0$  variable, dada por

$$\bar{\epsilon} = \int_{l_0}^l \frac{dl}{l} = \ln \frac{l}{l_0} = \ln(1 + \epsilon) \quad (7.2)$$

*[Faint, illegible handwritten text, possibly bleed-through from the reverse side of the page]*



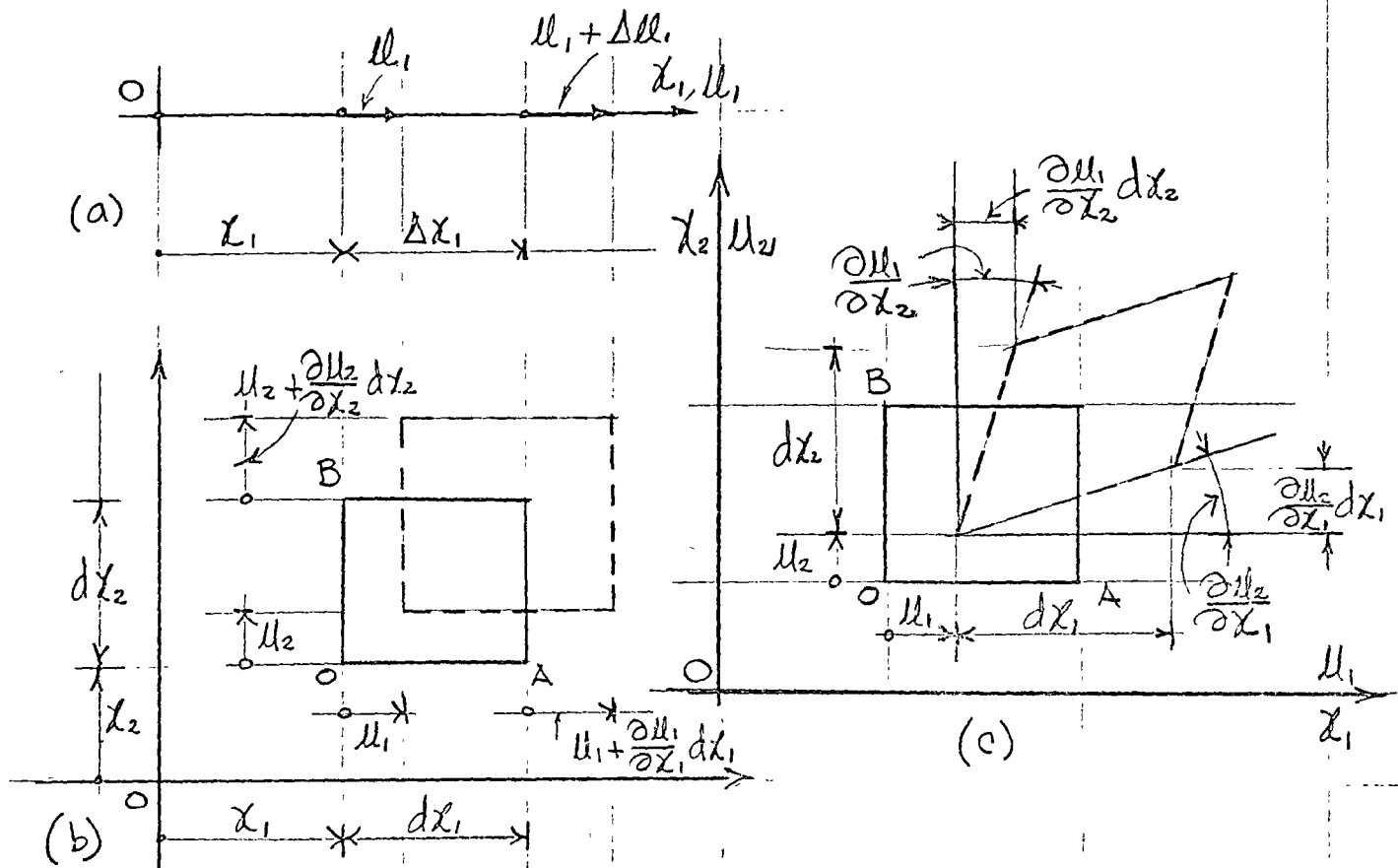


Fig. 7.2 Elementos deformados en posiciones inicial y final

Sea el vector de desplazamientos  $\{u_i\}^T = [u_1 \ u_2 \ u_3]$  en las direcciones  $x_1$ ,  $x_2$  y  $x_3$  respectivamente, en base a los desplazamientos mostrados en la Fig. 7.2a, la definición de deformación lineal es

$$\epsilon_{11} = \lim_{\Delta x_1 \rightarrow 0} \frac{u_1 + \Delta u_1 - u_1}{\Delta x_1} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \equiv u_{1,1} \quad (7.2)$$

Similarmente

$$\epsilon_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \equiv u_{2,2}, \quad \epsilon_{33} = \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \equiv u_{3,3} \quad (7.3)$$

el signo positivo significa alargamientos. El elemento también experimenta deformaciones de cortante como

10/10/10

10/10/10

10/10/10

10/10/10

10/10/10

10/10/10

10/10/10

se muestra en la Fig. 7.2c el ángulo recto AOB es reducido por la cantidad  $\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1}$ . Por lo tanto, para pequeños cambios del ángulo, la definición de deformación de cortante asociada con el plano  $x_1, x_2$  es

$$\begin{aligned} \gamma_{12} = \gamma_{21} &= \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \equiv \mu_{1,2} + \mu_{2,1}, \text{ análogamente con} \\ \text{los otros planos, } \gamma_{23} = \gamma_{32} &= \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \equiv \mu_{2,3} + \mu_{3,2} \\ \gamma_{31} = \gamma_{13} &= \frac{\partial u_3}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \equiv \mu_{3,1} + \mu_{1,3} \end{aligned} \quad (7.4)$$

en el caso que las deformaciones no sean pequeñas, se muestra fácilmente que

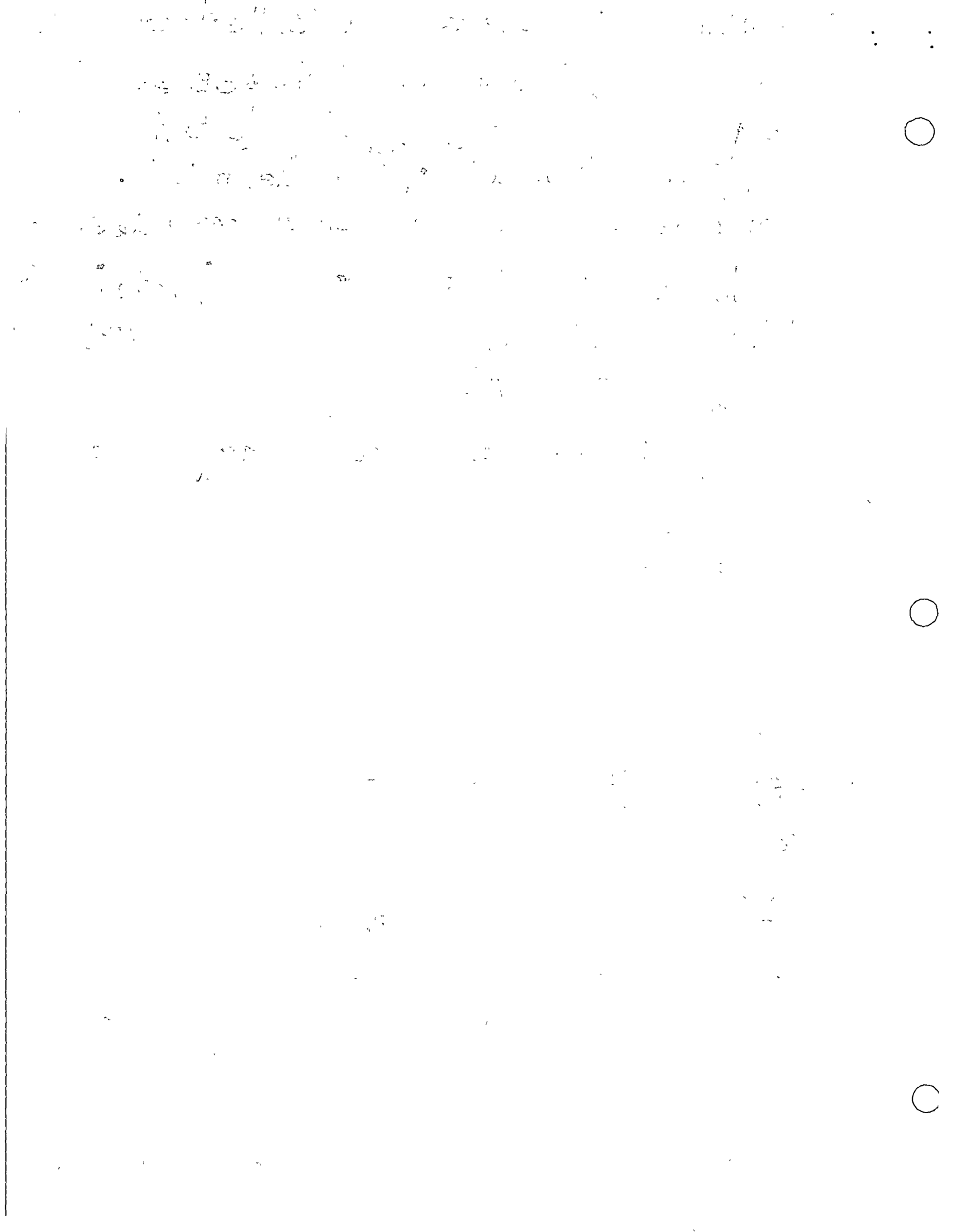
$$\begin{aligned} \epsilon_{11} &= \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right)^2 \right] \\ \epsilon_{22} &= \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right)^2 \right] \\ \epsilon_{33} &= \frac{\partial u_3}{\partial x_3} + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right)^2 \right] \end{aligned} \quad (7.5)$$

$$\gamma_{12} = \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \frac{\partial u_3}{\partial x_2}$$

$$\gamma_{23} = \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \frac{\partial u_3}{\partial x_3}$$

$$\gamma_{31} = \frac{\partial u_3}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \frac{\partial u_3}{\partial x_3}$$

En las ecuaciones (7.5) aplicables a deformaciones grandes ya se observa la no linealidad en geometría. (7.4) es un caso particular de (7.5) cuando los términos de segundo grado son despreciables respecto a los de primer grado o sea pequeñas deformaciones. (7.5) en



notación compacta queda

$$E_{11} = u_{1,1} + \frac{1}{2}(u_{1,1}^2 + u_{3,1}^2 + u_{3,1}^2)$$

$$E_{22} = u_{2,2} + \frac{1}{2}(u_{1,2}^2 + u_{2,2}^2 + u_{3,2}^2)$$

$$E_{33} = u_{3,3} + \frac{1}{2}(u_{1,3}^2 + u_{2,3}^2 + u_{3,3}^2)$$

(7.6)

$$\gamma_{12} = \gamma_{21} = u_{1,2} + u_{3,1} + u_{1,1}u_{1,2} + u_{3,1}u_{3,2} + u_{3,1}u_{3,2}$$

$$\gamma_{23} = \gamma_{32} = u_{2,3} + u_{3,2} + u_{1,2}u_{1,3} + u_{2,2}u_{2,3} + u_{3,2}u_{3,3}$$

$$\gamma_{31} = \gamma_{13} = u_{3,1} + u_{1,3} + u_{1,1}u_{1,3} + u_{3,1}u_{2,3} + u_{3,1}u_{3,3}$$

Examinando las ecuaciones de deformación-desplazamiento para pequeñas deformaciones (7.2), (7.3) y (7.4), se observa que son seis ecuaciones que dependen solamente de tres desplazamientos  $u_1, u_2$  y  $u_3$ . Por lo tanto las ecuaciones no pueden ser independientes. Por lo tanto seis ecuaciones independientes pueden desarrollarse relacionando a  $E_{11}, E_{22}, E_{33}, \gamma_{12}, \gamma_{23}$  y  $\gamma_{31}$ , ecuaciones conocidas como ecuaciones de compatibilidad.

$$\frac{\partial^2 E_{11}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 E_{22}}{\partial x_1^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} ; 2 \frac{\partial^2 E_{11}}{\partial x_2 \partial x_3} = \frac{\partial}{\partial x_1} \left( -\frac{\partial \gamma_{23}}{\partial x_1} + \frac{\partial \gamma_{13}}{\partial x_2} + \frac{\partial \gamma_{12}}{\partial x_3} \right)$$

$$\frac{\partial^2 E_{11}}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 E_{33}}{\partial x_1^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{13}}{\partial x_1 \partial x_3} ; 2 \frac{\partial^2 E_{22}}{\partial x_1 \partial x_3} = \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \frac{\partial \gamma_{23}}{\partial x_1} - \frac{\partial \gamma_{13}}{\partial x_2} + \frac{\partial \gamma_{12}}{\partial x_3} \right) \quad (7.7)$$

$$\frac{\partial^2 E_{22}}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 E_{33}}{\partial x_2^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{23}}{\partial x_2 \partial x_3} ; 2 \frac{\partial^2 E_{33}}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial}{\partial x_3} \left( \frac{\partial \gamma_{23}}{\partial x_1} + \frac{\partial \gamma_{13}}{\partial x_2} - \frac{\partial \gamma_{12}}{\partial x_3} \right)$$

substituyendo (7.2), (7.3) y (7.4) en (7.7) se verifican las ecuaciones de compatibilidad de pequeñas deformaciones.

Similarmente a las componentes del Tensor de esfuerzos en las notaciones índice, cartesiana y de ingeniería, se representan las componentes del tensor de deformaciones como

000000000000

000000000000

000000000000

000000000000

000000000000

000000000000

000000000000

000000000000

000000000000

000000000000

000000000000

000000000000

000000000000

000000000000

000000000000

000000000000

000000000000

000000000000

000000000000

000000000000





$$[e_{ij}] \equiv \underline{\underline{e}} = \begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} \\ e_{21} & e_{22} & e_{23} \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} & \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{yx} & \epsilon_{yy} & \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{zx} & \epsilon_{zy} & \epsilon_{zz} \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \epsilon_x & \frac{\gamma_{xy}}{2} & \frac{\gamma_{xz}}{2} \\ \frac{\gamma_{yx}}{2} & \epsilon_y & \frac{\gamma_{yz}}{2} \\ \frac{\gamma_{zx}}{2} & \frac{\gamma_{zy}}{2} & \epsilon_z \end{bmatrix} \quad (7.8)$$

(índice)                      (cartesiana)                      (ingeniería)

en (7.8) fué necesario fué necesario modificar las relaciones de deformación por cortante con el objeto de someter al tensor  $\underline{\underline{e}}$  enteramente obedecer ciertas leyes de transformación, por lo que  $e_{ij} = \frac{1}{2} \gamma_{ij}$  para toda  $i \neq j$ . Análogamente al tensor de esfuerzos  $[e_{ij}]$  puede diagonalizarse quedando

$$\begin{bmatrix} e_1 & 0 & 0 \\ 0 & e_2 & 0 \\ 0 & 0 & e_3 \end{bmatrix} \quad (7.9)$$

8. Ley de Hooke en un estado uniaxial de esfuerzos,

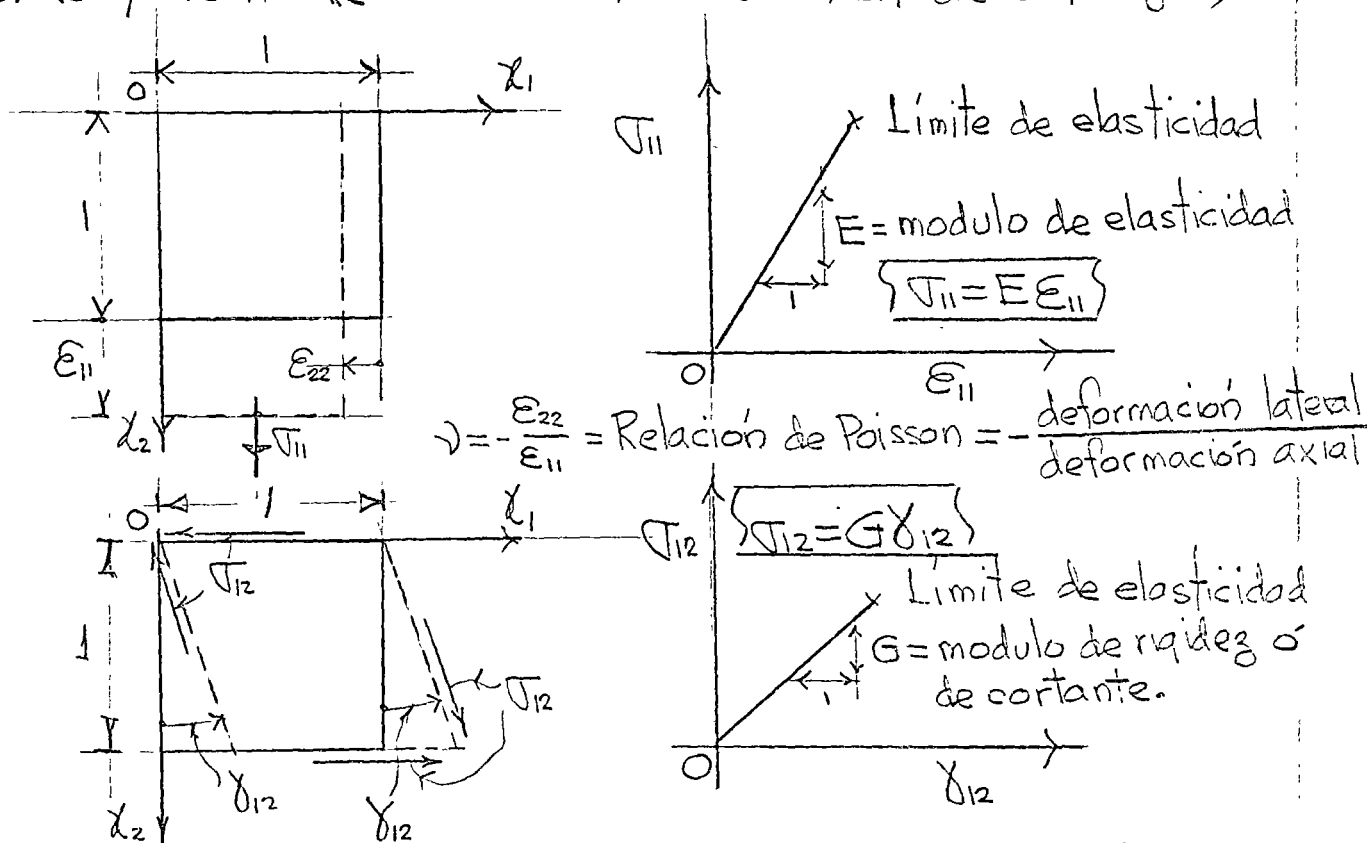


Fig. 8.1 Ley de Hooke en tensión uniaxial  $\sigma_{11}$  y corte  $\sigma_{12}$ .

Handwritten notes, possibly bleed-through from the reverse side of the page, including some illegible words and symbols.



puesto que el sistema es elástico lineal rige el principio de superposición de causas y efectos, por lo tanto en la Fig. 8.2 se considera un estado triaxial llegando a él en tres etapas de carga, etapa 1: actuando  $\sigma_{11}$ , etapa 2: actuando  $\sigma_{11}$  y  $\sigma_{22}$  y etapa 3: actuando  $\sigma_{11}$ ,  $\sigma_{22}$  y  $\sigma_{33}$ . Se llega a las siguientes ecuaciones constitutivas

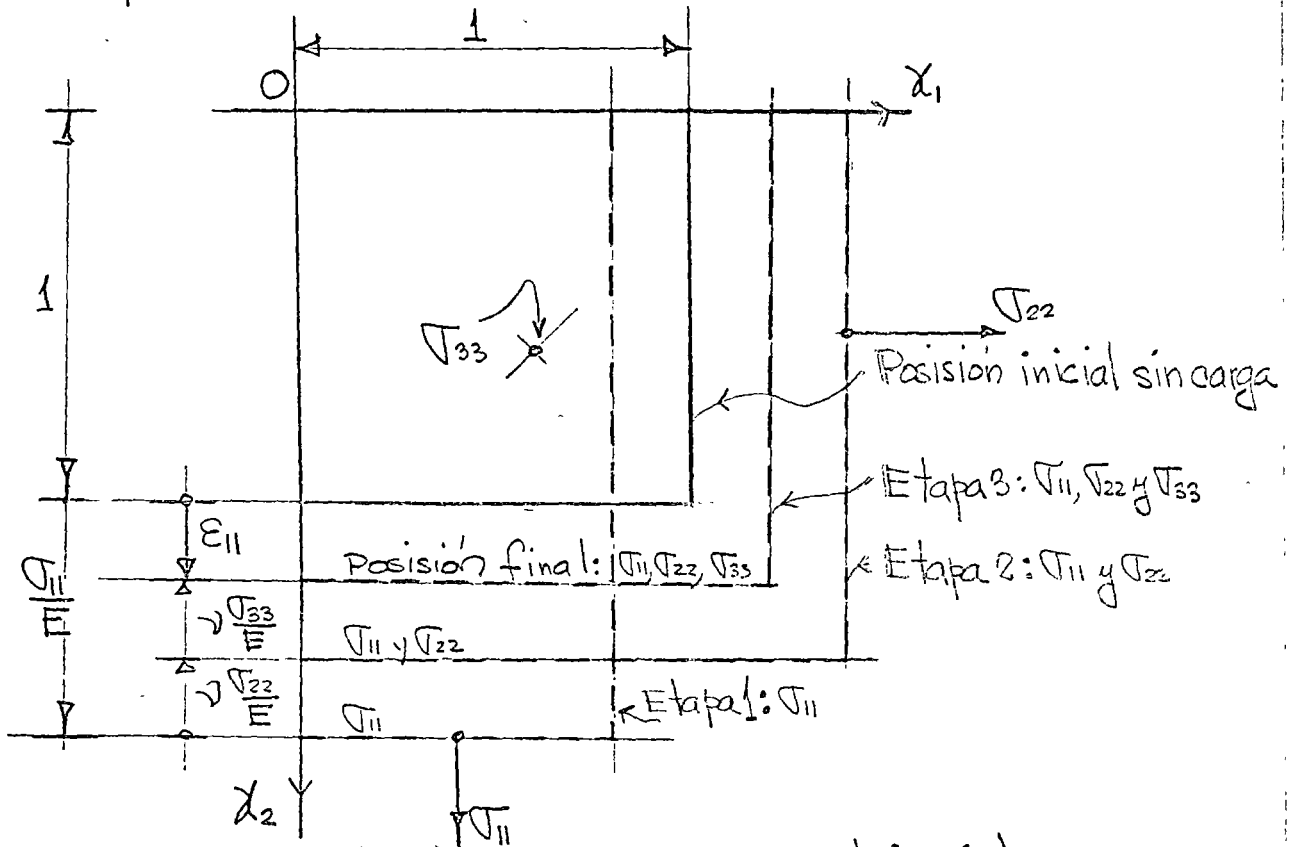


Fig. 8.2 Ley de Hooke en condiciones triaxiales

$$\epsilon_{11} = \frac{1}{E} \sigma_{11} - \frac{\nu}{E} \sigma_{22} - \frac{\nu}{E} \sigma_{33}$$

$$\epsilon_{22} = -\frac{\nu}{E} \sigma_{11} + \frac{1}{E} \sigma_{22} - \frac{\nu}{E} \sigma_{33}$$

$$\epsilon_{33} = -\frac{\nu}{E} \sigma_{11} - \frac{\nu}{E} \sigma_{22} + \frac{1}{E} \sigma_{33}$$

(8.1)

$$\gamma_{12} =$$

$$\frac{1}{G} \sigma_{12}$$

$$\gamma_{23} =$$

$$\frac{1}{G} \sigma_{23}$$

$$\gamma_{31} =$$

$$\frac{1}{G} \sigma_{31}$$



*[Faint, illegible handwritten text covering most of the page]*

(8.1) representa la ley de Hooke en condiciones triaxiales ó más correctamente las ecuaciones constitutivas para un sólido elástico homogéneo e isotrópico. Las constantes  $E$ ,  $G$  y  $\nu$  son experimentales y están relacionadas por

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (8.2)$$

substituyendo (8.2) en (8.1) y expresando el resultado matricialmente se obtiene (considerando  $\epsilon_{ij} = \frac{\gamma_{ij}}{2}$  para  $i \neq j$ )

$$\begin{pmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ \epsilon_{12} \\ \epsilon_{23} \\ \epsilon_{31} \end{pmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & 1 & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & -\nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \end{pmatrix} \quad (8.3)$$

$$\{\epsilon\} = [C]\{\sigma\} \quad (8.4)$$

despejando  $\{\sigma\}$  de (8.4) se obtiene

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \end{pmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ \epsilon_{12} \\ \epsilon_{23} \\ \epsilon_{31} \end{pmatrix} \quad (8.5)$$

$$\text{o sea } \{\sigma\} = [C]^{-1}\{\epsilon\} \quad (8.6)$$

Se observa en las ecuaciones anteriores que solo interviene  $E$  y  $\nu$ .

11-15-1954

11-15-1954

11-15-1954

(28)

11-15-1954

11-15-1954

1

11-15-1954

11-15-1954

11-15-1954

11-15-1954

En un medio elástico lineal anisotrópico en las ecuaciones (8.3), aceptando el principio de superposición se expresan

$$\begin{pmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ \epsilon_{12} \\ \epsilon_{23} \\ \epsilon_{31} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{51} & C_{52} & C_{53} & C_{54} & C_{55} & C_{56} \\ C_{61} & C_{62} & C_{63} & C_{64} & C_{65} & C_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \end{pmatrix} \quad (8.7)$$

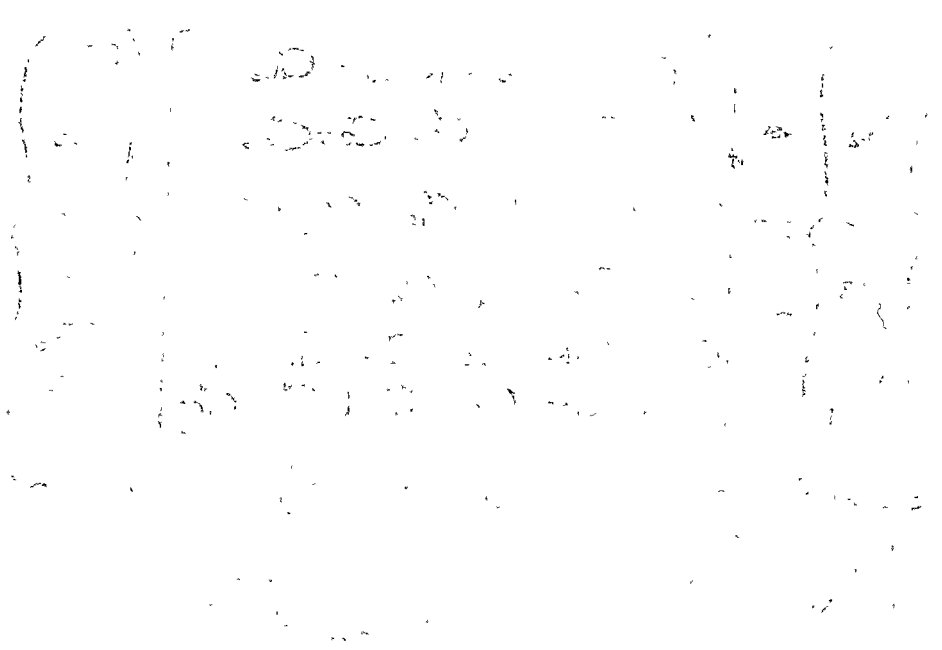
Las ecuaciones constitutivas (8.7) tienen 36 constantes. Sin embargo a través de consideraciones energéticas\* se demuestra que el número de constantes es 21 y que  $C_{ij} = C_{ji}$  para  $i \neq j$ , son simétricas respecto a la diagonal principal de (8.7). Todas las constantes  $C_{ij}$  deben determinarse experimentalmente. Se supone el material homogéneo, Ejemplos de estos materiales son: concreto, concreto reforzado, madera, plástico reforzado con filamentos, fierro fundido, etc. Cuando se tienen tres direcciones ortogonales anisotrópicas el material se dice que es ortotrópico, y para estos materiales el número de constantes se reduce solo a nueve constantes independientes.

Haciendo  $\lambda = \frac{\partial E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$  y considerando (8.2) las

\* Sokolnikoff, I.S., "Mathematical Theory of Elasticity", McGraw-Hill, 1956, p.61.

2021/12/15

Handwritten notes at the top of the page, possibly including a date and some illegible text.



Handwritten notes in the lower middle section of the page, appearing as several lines of text.

Handwritten notes at the bottom of the page, including what appears to be a signature or a final line of text.



ecuaciones constitutivas (8.3) con notación índice se escriben\*

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} \epsilon_{kk} + 2G \epsilon_{ij} \quad (i, j, k = 1, 2, 3) \quad (8.8)$$

donde,  $\delta_{ij} = 1$  para  $i=j$ , y  $\delta_{ij} = 0$  para  $i \neq j$ , y  $\epsilon_{kk} = \epsilon_{11} + \epsilon_{22} + \epsilon_{33} \equiv e$ . Desarrollando (8.8) se tiene

$$\begin{aligned} \text{para } i=1, j=1, \quad \sigma_{11} &= \lambda e + 2G \epsilon_{11} = \lambda e + 2G \epsilon_x = \sigma_x \\ i=2, j=2, \quad \sigma_{22} &= \lambda e + 2G \epsilon_{22} = \lambda e + 2G \epsilon_y = \sigma_y \\ i=3, j=3, \quad \sigma_{33} &= \lambda e + 2G \epsilon_{33} = \lambda e + 2G \epsilon_z = \sigma_z \\ i=1, j=2, \quad \sigma_{12} &= 2G \epsilon_{12} = 2G \epsilon_{xy} = G \gamma_{xy} = \tau_{xy} \\ i=2, j=3, \quad \sigma_{23} &= 2G \epsilon_{23} = 2G \epsilon_{yz} = G \gamma_{yz} = \tau_{yz} \\ i=3, j=1, \quad \sigma_{31} &= 2G \epsilon_{31} = 2G \epsilon_{zx} = G \gamma_{zx} = \tau_{zx} \end{aligned} \quad (8.9)$$

Si en el sólido existe un incremento de temperatura  $\Delta T$ , siendo  $\alpha$  el coeficiente de expansión térmica las ecuaciones (8.3) quedan

$$\begin{pmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ \epsilon_{12} \\ \epsilon_{23} \\ \epsilon_{31} \end{pmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & 1 & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & -\nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \end{pmatrix} + \alpha \Delta T \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (8.10)$$

\* Green, A.E., and W. Zerna: "Theoretical Elasticity", Oxford University Press, Fair Lawn, N.J. . 1970.

2

0

0

# 9. Elasticidad bidimensional.

Utilizando la notación de Timoshenko y Von Karman o la notación de ingeniería las ecuaciones de equilibrio en un elemento  $dx dy$  se reducen a

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + X = 0 \quad (9.1)$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + Y = 0$$

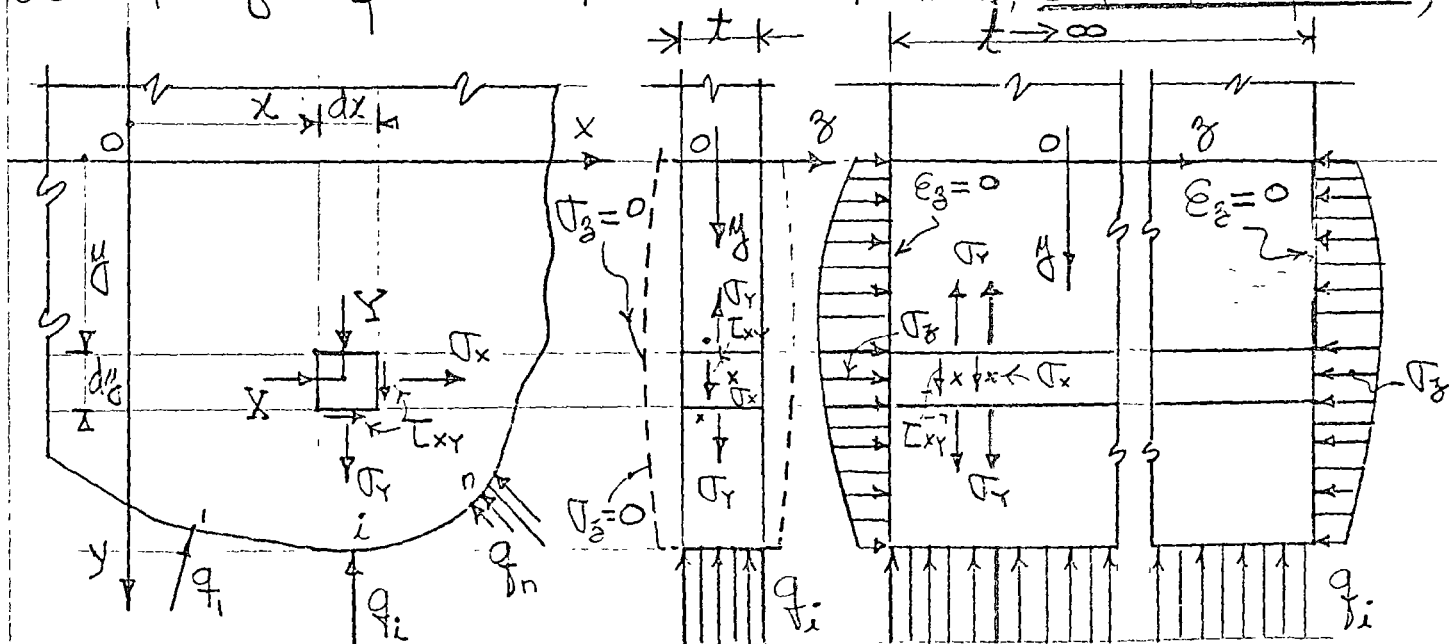
(9.1) matricialmente queda

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{bmatrix} + \begin{Bmatrix} X \\ Y \end{Bmatrix} = 0 \quad (9.2)$$

Y las ecuaciones de compatibilidad (7.7) se reducen a

$$\frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} \quad (9.3)$$

En la Fig. 6.1 se muestran los dos estados o condiciones de esfuerzos que en este caso se tienen, esfuerzos planos;



a) Esfuerzos  $\{\sigma\}$ , fuerzas de cuerpo  $\{X\}$  y de superficie  $\{q_i\}$

b) Esfuerzos Planos

$$\sigma_z = 0, \epsilon_z \neq 0$$

c) Deformación Plana

$$\sigma_z \neq 0, \epsilon_z = 0$$

Fig. 6.1. Estados o condiciones de esfuerzos bidimensionales.



Handwritten text, possibly a date or reference number, located in the lower-left quadrant of the page.

Handwritten text, possibly a name or title, located in the lower-middle section of the page.

Handwritten text, possibly a name or title, located in the lower-right section of the page.

# 9. Elasticidad bidimensional.

Utilizando la notación de Timoshenko y Von Karmán ó la notación de ingeniería las ecuaciones de equilibrio en un elemento  $dx dy$  se reducen a

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + X = 0 \quad (9.1)$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + Y = 0$$

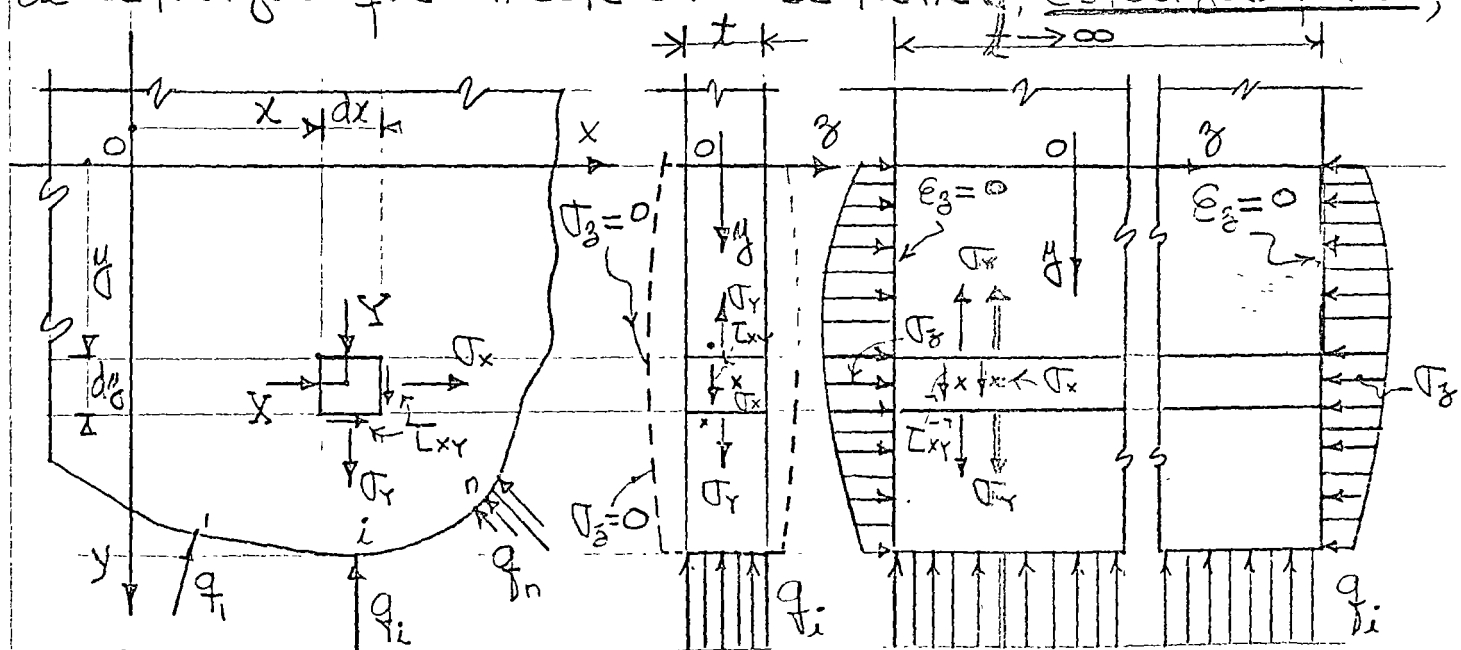
(9.1) matricialmente queda

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_y \end{bmatrix} + \begin{Bmatrix} X \\ Y \end{Bmatrix} = 0 \quad (9.2)$$

Y las ecuaciones de compatibilidad (7.7) se reducen a

$$\frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} \quad (9.3)$$

En la Fig. 6.1 se muestran los dos estados o condiciones de esfuerzos que en este caso se tienen, esfuerzos planos;



- a) Esfuerzos  $\{\sigma\}$ , fuerzas de cuerpo  $\{X\}$  y de superficie  $\{q_i\}$
- b) Esfuerzos Planos  
 $\sigma_z = 0, \epsilon_z \neq 0$
- c) Deformación Plana  
 $\sigma_z \neq 0, \epsilon_z = 0$

Fig. 6.1. Estados o condiciones de esfuerzos bidimensionales.

Handwritten notes and diagrams at the top of the page, including a large 'X' shape and various lines and arrows.

Main body of handwritten notes and diagrams, featuring several large 'X' shapes and various lines and arrows.

Handwritten notes and diagrams at the bottom of the page, including a large 'X' shape and various lines and arrows.



### 9. Elasticidad bidimensional.

Utilizando la notación de Timoshenko y Von Kármán o la notación de ingeniería las ecuaciones de equilibrio en un elemento  $dx dy$  se reducen a

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + X = 0 \tag{9.1}$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + Y = 0$$

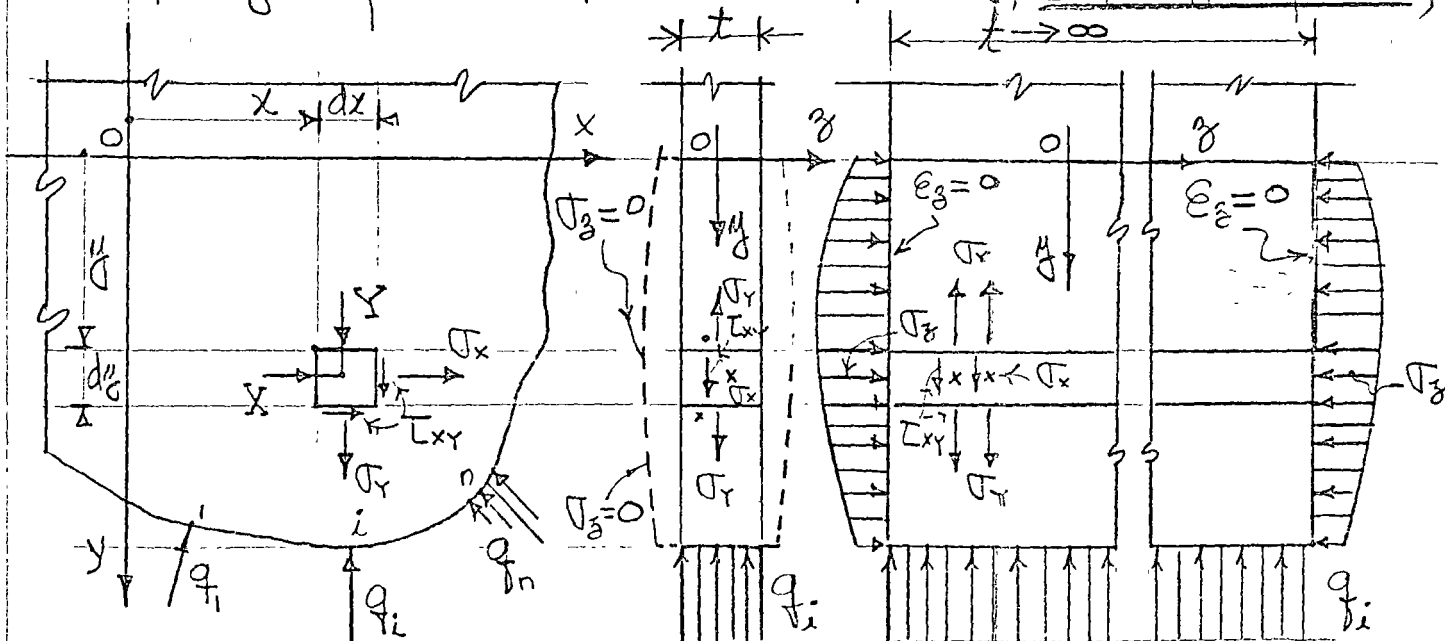
(9.1) matricialmente queda

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_y \end{bmatrix} + \begin{Bmatrix} X \\ Y \end{Bmatrix} = 0 \tag{9.2}$$

Y las ecuaciones de compatibilidad (7.17) se reducen a

$$\frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} \tag{9.3}$$

En la Fig. 6.1 se muestran los dos estados o condiciones de esfuerzos que en este caso se tienen, esfuerzos planos;



a) Esfuerzos  $\{\sigma\}$ , fuerzas de cuerpo  $\{X\}$  y de superficie  $\{q_i\}$

b) Esfuerzos Planos

c) Deformación Plana

$$\sigma_z = 0, \epsilon_z \neq 0$$

$$\sigma_z \neq 0, \epsilon_z = 0$$

Fig. 6.1. Estados o condiciones de esfuerzos bidimensionales.

C

○

○



caso de una placa de espesor finito  $t$ , sin problemas de pandeo que se deforma bajo la acción de  $\{X\}$  y  $\{q\}$  según la línea punteada indicada en la Fig. 6.1 b, las ecuaciones (8.3), bajo la condición de  $\tau_{33} \equiv \tau_3 = 0$  se reducen a

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (9.4)$$

$\sigma_x, \sigma_y$  y  $\tau_{xy}$  son el promedio sobre el espesor pequeño  $t$  y son independientes de  $y$ . Las componentes  $\gamma_{yz}$  y  $\gamma_{zx}$  se anulan en las superficies, mientras que la componente  $\epsilon_z$  es dada por

$$\epsilon_z = -\frac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y) = -\frac{\nu}{1-\nu}(\epsilon_x + \epsilon_y) \quad (9.5)$$

Problemas de cuerpos largos en la dirección longitudinal  $y$  cuya geometría y cargas no varían en  $y$  se consideran problemas de deformación plana en la Fig. 6.2 se muestran como ejemplos un muro de presa, y una zapata corrida larga,

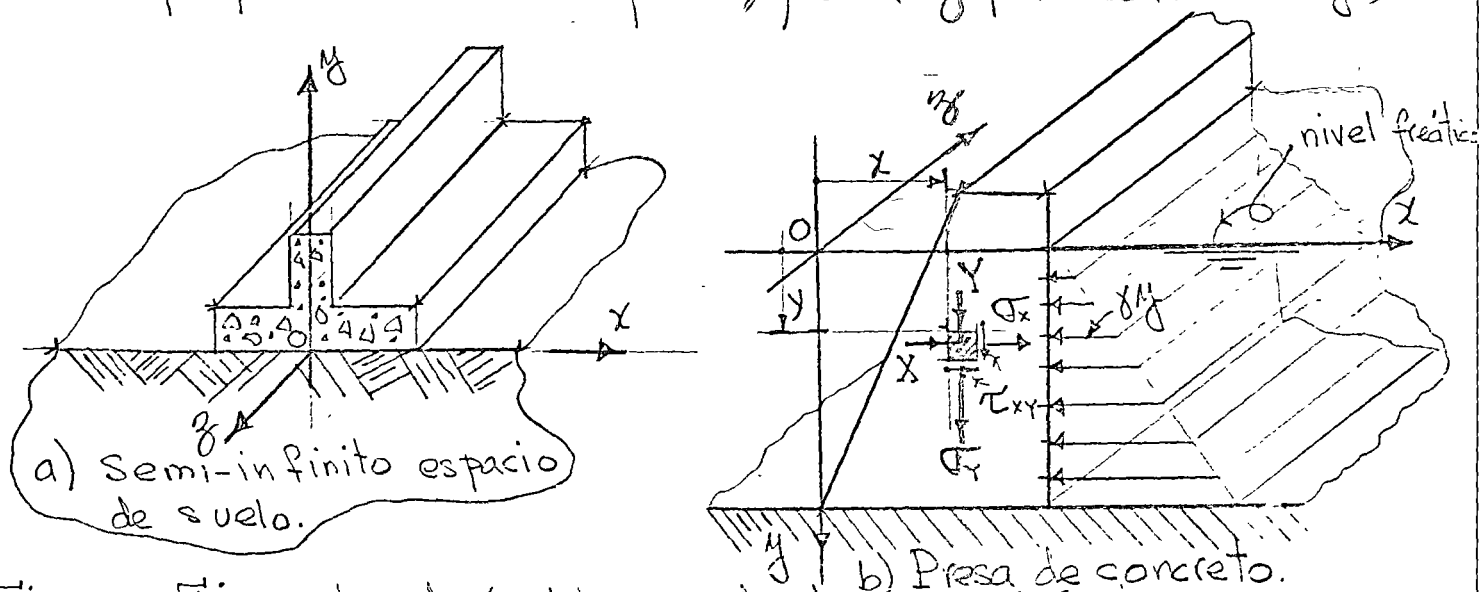


Fig. 6.2. Ejemplos de problemas de deformación plana.

...  
 ...  
 ...  
 ...

...  
 ...

...  
 ...

...  
 ...

...  
 ...

...  
 ...

...  
 ...

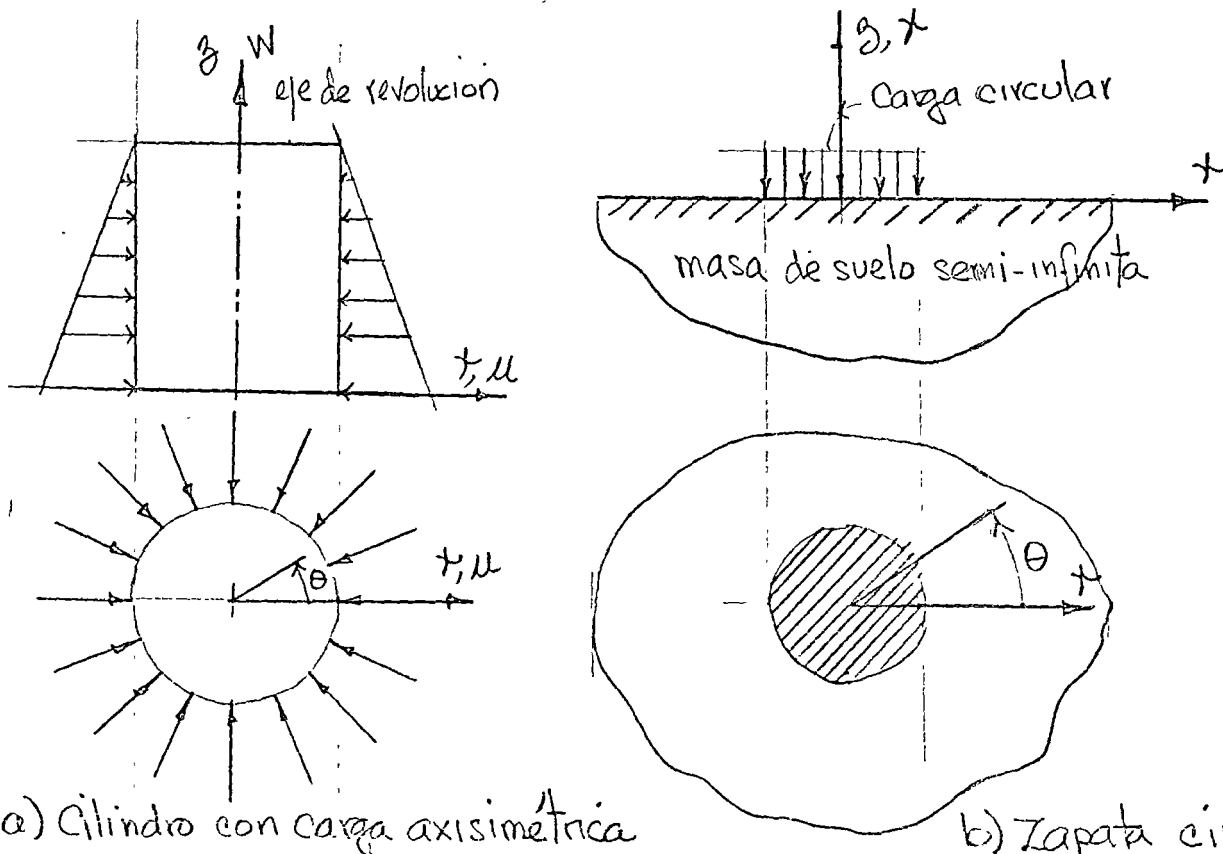
en estos casos el desplazamiento  $u_3 \equiv W = 0$  por lo tanto  $\epsilon_{33} \equiv \epsilon_3 = 0$ ,  $\gamma_{r3} = 2\epsilon_{23} = 0$ , y  $\gamma_{zx} = 2\epsilon_{31} = 0$ . Las ecuaciones (8.3) se reducen a

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (9.6)$$

y el esfuerzo  $\sigma_z$  se expresa en términos de  $\sigma_x$  y  $\sigma_y$  como

$$\sigma_z = -\nu(\sigma_x + \sigma_y) \quad (9.7)$$

Muchos problemas de ingeniería involucran sólidos de revolución (sólidos axisimétricos) sujetos a carga de revolución o axialmente simétrica, por ejemplo un cilindro circular bajo presión externa uniforme, zapata circular en una masa de suelo semi-infinita como se muestran en la fig. 6.3



a) Cilindro con carga axisimétrica

b) Zapata circular

Fig. 6.3 Problemas axisimétricos.

10/20/2011

10/20/2011

I have been thinking about you a lot lately.  
 How are you doing? I hope you are well.  
 I miss our conversations and the time we spent together.  
 Please write back when you have a chance.  
 I would love to hear from you.

I hope you are happy and healthy.  
 I am still here, still waiting for your reply.  
 I hope you are doing great.  
 I love you and miss you very much.  
 Please get back to me soon.

I hope you are all well.  
 I am still thinking about you.  
 I hope you are having a good time.  
 I miss you and your family.  
 Please write back soon.

I hope you are well.  
 I am still here, still waiting.  
 I hope you are happy.  
 I miss you and your family.  
 Please write back soon.

I hope you are well.  
 I am still here, still waiting.  
 I hope you are happy.  
 I miss you and your family.  
 Please write back soon.

Debido al eje axisimétrico respecto a geometría y cargas, las componentes del esfuerzo son independiente del ángulo  $\theta$ ; por lo tanto todas las derivadas respecto a  $\theta$  se anulan y las componentes  $\nu$ ,  $\gamma_{r\theta}$ ,  $\gamma_{\theta z}$ ,  $\tau_{r\theta}$ , y  $\tau_{\theta z}$  son cero. Las componentes de esfuerzo diferente de cero son  $\sigma_r$ ,  $\sigma_\theta$ ,  $\sigma_z$  y  $\tau_{rz}$ . Las relaciones de formación de desplazamiento son, para las deformaciones diferente de cero

$$\epsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r}, \quad \epsilon_\theta = \frac{u}{r}, \quad \epsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}, \quad \gamma_{rz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} \quad (9.8)$$

y la relación constitutiva es

$$\begin{Bmatrix} \sigma_r \\ \sigma_\theta \\ \sigma_z \\ \tau_{rz} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 \\ & 1-\nu & \nu & 0 \\ & & 1-\nu & 0 \\ & & & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_r \\ \epsilon_\theta \\ \epsilon_z \\ \gamma_{rz} \end{Bmatrix} \quad (9.9)$$

despejando de (9.4)  $\{\epsilon\}$ , substituyéndolo en la ecuación de compatibilidad (9.3), y eliminando por medio de (9.1) a  $\frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y}$  se obtiene

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) (\sigma_x + \sigma_y) = -(1+\nu) \left( \frac{\partial \chi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) \quad (9.10)$$

La ecuación (9.10) junto con las de equilibrio (9.1) son suficientes para la solución del problema de esfuerzos planos  $\sigma_z = 0$ , de ellas se obtiene  $\{\sigma\} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \sigma_y & \tau_{xy} \end{bmatrix}$ .

Similarmente despejando  $\{\epsilon\}$  de (9.6) y substituyéndolo en la ecuación de compatibilidad (9.3), y eliminando por medio de las ecuaciones de equilibrio (9.1) a  $\frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y}$  se

Main body of handwritten text, consisting of several lines of cursive script.

Lower section of handwritten text, continuing the cursive script from the upper section.



obtiene

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)(\sigma_x + \sigma_y) = -\frac{1}{1-\nu} \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y}\right) \quad (9.11)$$

La ecuación (9.11) junto con las de equilibrio (9.1) son suficientes para la solución del problema de deformación plana ( $e_y = 0$ ), con fuerzas de cuerpo diferente de cero, de ellas se obtiene  $\{\sigma\}^T = [\sigma_x \ \sigma_y \ \tau_{xy}]$ .

Cuando las fuerzas de cuerpo  $X$  es solo función de  $y$ , constante o cero, y cuando la fuerza de cuerpo  $Y$  es solo función de  $x$ , constante o cero, las ecuaciones (9.10) y (9.11) para esfuerzos y deformación plana respectivamente, se reducen a una sola que es

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)(\sigma_x + \sigma_y) = 0 \quad (9.12)$$

Es importante observar que en este caso, en las ecuaciones de equilibrio (9.1), y la de compatibilidad (9.12), modificada por las ecuaciones constitutivas, no intervienen las constantes elásticas del sólido  $E$  y  $\nu$ . Conclusión de fundamental importancia para el uso de modelos transparentes en Fotoelasticidad. También se concluye en este caso que en ambos estados; de esfuerzos y deformación plano los esfuerzos  $\{\sigma\}$  son iguales, solamente las deformaciones  $\{e\}$  y los desplazamientos  $\{u\}$  son diferentes.  $\square$

Para la solución del problema anterior cuando  $\{X\} = 0$  Airy, G. B. (Brit. Assoc. Advan. Sci. Rept., 1862) introduce

(1) (2) (3) (4) (5) (6) (7) (8) (9) (10) (11) (12) (13) (14) (15) (16) (17) (18) (19) (20) (21) (22) (23) (24) (25) (26) (27) (28) (29) (30) (31) (32) (33) (34) (35) (36) (37) (38) (39) (40) (41) (42) (43) (44) (45) (46) (47) (48) (49) (50) (51) (52) (53) (54) (55) (56) (57) (58) (59) (60) (61) (62) (63) (64) (65) (66) (67) (68) (69) (70) (71) (72) (73) (74) (75) (76) (77) (78) (79) (80) (81) (82) (83) (84) (85) (86) (87) (88) (89) (90) (91) (92) (93) (94) (95) (96) (97) (98) (99) (100)





una función  $\phi(x,y)$ , llamada función de esfuerzos, en forma tal que

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \quad (9.13)$$

(9.13) satisface las ecuaciones de equilibrio (9.1) cuando las fuerzas de cuerpo  $\{X\}$  son cero, y substituyéndolas en (9.12) se obtiene

$$\nabla^2 \nabla^2 \phi = \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right) = 0 \quad (9.14)$$

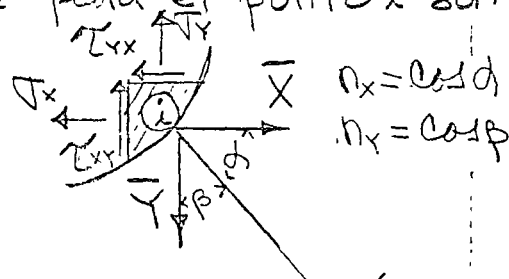
desarrollando el operador bi-laplaciano se obtiene

$$\nabla^4 \phi = \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \phi}{\partial y^4} = 0 \quad (9.15)$$

La ecuación (9.14) se llama bi-armónica o bi-laplaciana y la forma (9.15) gradiente cuarto de  $\phi$ .

Por lo demostrado anteriormente el problema de solución de esfuerzos en medios elásticos lineales homogéneos e isotrópicos bidimensionales se reduce a una solución de (9.15) que satisfaga las condiciones en la frontera bidimensional que para el punto  $i$  son

$$\begin{aligned} \bar{X}_i &= \sigma_x n_x + \tau_{xy} n_y \\ \bar{Y}_i &= \tau_{yx} n_x + \sigma_y n_y \end{aligned}$$



matricialmente:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_y \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{X} \\ \bar{Y} \end{Bmatrix} \quad (9.10)$$

Del Teorema de la unicidad\* la solución mencionada es única.

\* Timoshenko, S. and J.N. Goodier, "Theory of Elasticity", McGraw-Hill, 1966.

Handwritten notes at the top of the page, possibly a title or header.

(1)

Handwritten text, possibly a date or identifier.

(2)

Handwritten text, possibly a date or identifier.

Handwritten text, possibly a date or identifier.

Handwritten text, possibly a date or identifier.

Handwritten text, possibly a date or identifier.

Handwritten text, possibly a date or identifier.

Handwritten text, possibly a date or identifier.

Handwritten text, possibly a date or identifier.

Handwritten text, possibly a date or identifier.

Handwritten text, possibly a date or identifier.

Handwritten text, possibly a date or identifier.



Si las fuerzas de cuerpo existen, generalmente es posible relacionarlas mediante una función potencial  $V(x, y)$  en forma tal que

$$X = \frac{\partial V}{\partial x}, \quad Y = \frac{\partial V}{\partial y} \quad (9.11)$$

substituyendo (9.11) en las ecuaciones de equilibrio (9.1) se obtiene

$$\frac{\partial}{\partial x} (\sigma_x - V) + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0 \quad (9.12)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} (\sigma_y - V) + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} = 0$$

en este caso la función de esfuerzos es

$$\sigma_x - V = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}, \quad \sigma_y - V = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \quad (9.13)$$

por supuesto (9.13) satisface las ecuaciones de equilibrio (9.1), y substituyéndola en la ecuación (9.10) la reduce a

$$\nabla^4 \phi = -(1+\nu) \left( \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \right) \equiv -(1+\nu) \nabla^2 V \quad (9.14)$$

(9.14) nos resuelve el problema de esfuerzos planos con fuerzas de cuerpo relacionadas por (9.11).

Substituyéndolo (9.13) en (9.11) se obtiene

$$\nabla^4 \phi = -\frac{1}{1+\nu} \left( \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \right) \equiv -\frac{1}{1+\nu} \nabla^2 V \quad (9.15)$$

10. Ecuaciones de equilibrio en términos de los desplazamientos  $\{u\}^T = [u_1, u_2, u_3] \equiv [u, v, w]$ .

Uno de los métodos de solución en problemas de elasticidad lineal, homogénea e isotrópica consiste

1950

1951

1952

1953

1954

1955

1956

1957

1958

1959

1960

1961

1962

1963

1964

1965

1966

1967

1968

1969

1970

1971

1972

1973

1974

1975

1976

1977

1978

1979

1980

1981

1982

1983

1984

1985

1986

1987

1988

1989

1990

1991

1992

1993

1994

1995

1996

1997

1998

1999

2000

2001

2002

2003

2004

2005

2006

2007

2008

2009

2010

2011

2012

2013

2014

2015

2016

2017

2018

2019

2020

2021

2022

2023

2024

2025

en eliminar las componentes de esfuerzos  $\{\sigma\}$  de las ecuaciones de equilibrio (5.2) expresando las ecuaciones constitutivas (8.5) en términos de los desplazamientos (7.2), (7.3) y (7.4). Por lo tanto substituyendo (7.2), (7.3) y (7.4) en (8.9) se obtiene

$$\begin{aligned}\sigma_x &\equiv \sigma_{11} = \lambda e + 2G \frac{\partial u}{\partial x} \\ \sigma_y &\equiv \sigma_{22} = \lambda e + 2G \frac{\partial v}{\partial y} \\ \sigma_z &\equiv \sigma_{33} = \lambda e + 2G \frac{\partial w}{\partial z} \\ \tau_{xy} &\equiv \tau_{12} = G \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\ \tau_{yz} &\equiv \tau_{23} = G \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ \tau_{zx} &\equiv \tau_{31} = G \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right)\end{aligned}\quad (10.1)$$

donde  $e = \epsilon_{11} + \epsilon_{22} + \epsilon_{33} \equiv \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$  (10.2)  
Substituyendo (10.1) en las ecuaciones de equilibrio (5.2) se obtiene

$$(\lambda + G) \begin{Bmatrix} \frac{\partial e}{\partial x} \\ \frac{\partial e}{\partial y} \\ \frac{\partial e}{\partial z} \end{Bmatrix} + G \nabla^2 \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{Bmatrix} = 0 \quad (10.3)$$

donde en este caso el operador diferencial  $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ .  
En (10.3) cuando las fuerzas de cuerpo  $\{X\}$  son cero (10.3) queda

$$(\lambda + G) \begin{Bmatrix} \frac{\partial e}{\partial x} \\ \frac{\partial e}{\partial y} \\ \frac{\partial e}{\partial z} \end{Bmatrix} + G \nabla^2 \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = 0 \quad (10.4)$$



117



En las ecuaciones (10.4), diferenciando la primera respecto a  $x$ , la segunda respecto a  $y$ , y la tercera respecto a  $z$ , y después sumándolas se obtiene

$$(\lambda + 2G)\nabla^2 e = 0 \quad (10.5)$$

(10.5) significa que la expansión volumétrica unitaria  $e = e_x + e_y + e_z$  satisface la ecuación diferencial

$$\nabla^2 e = \frac{\partial^2 e}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 e}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 e}{\partial z^2} = 0 \quad (10.6)$$

En la ecuación (10.3) las fuerzas de cuerpo son

$$\begin{aligned} X &= \rho(f_x - a_x) \\ Y &= \rho(f_y - a_y) \\ Z &= \rho(f_z - a_z) \end{aligned} \quad (10.7)$$

donde  $f_x, f_y$  y  $f_z$  son las fuerzas por unidad de masa,  $a_x, a_y$  y  $a_z$  las componentes de la aceleración, y  $\rho$  es la densidad ó masa específica. Si en las ecuaciones (10.3) la primera la multiplicamos por el vector unitario  $\bar{i}$ , la segunda por el vector unitario  $\bar{j}$ , y la tercera por el vector unitario  $\bar{k}$ , y las sumamos entre si se obtiene la expresión vectorial de las ecuaciones (10.3) como

$$(\lambda + G)\text{grad div } \bar{s} + G\nabla^2 \bar{s} + \rho(\bar{f} - \bar{a}) = 0 \quad (10.8)$$

en donde

$$\begin{aligned} \bar{a} &= \bar{i}a_x + \bar{j}a_y + \bar{k}a_z \\ \bar{f} &= \bar{i}f_x + \bar{j}f_y + \bar{k}f_z \\ \bar{s} &= \bar{i}u + \bar{j}v + \bar{k}w \end{aligned} \quad (10.9)$$

$$\text{div } \bar{s} = e = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$$

$$\text{grad div } \bar{s} = \bar{i} \frac{\partial e}{\partial x} + \bar{j} \frac{\partial e}{\partial y} + \bar{k} \frac{\partial e}{\partial z}$$

... ..

...

... ..

... ..

... ..

... ..





## TRABAJO VIRTUAL

Principio del trabajo virtual: Si una partícula se encuentra en equilibrio, el trabajo total efectuado por todas las fuerzas actuando sobre la partícula, bajo cualquier desplazamiento virtual es cero. Sean

$\delta u, \delta v, \delta w$ : Componentes del desplazamiento virtual en las direcciones  $x, y, z$ .

$\sum F_x, \sum F_y, \sum F_z$ : Sumas de fuerzas en las direcciones  $x, y, z$  que actúan sobre la partícula o cuerpo rígido.

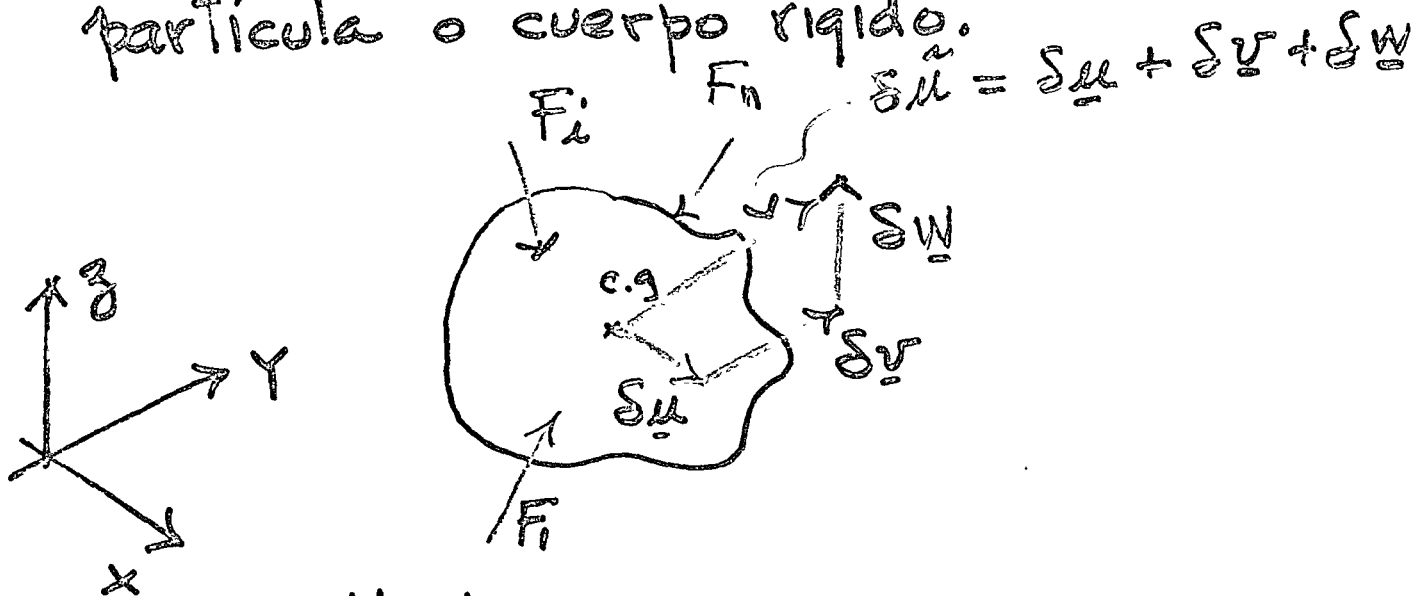
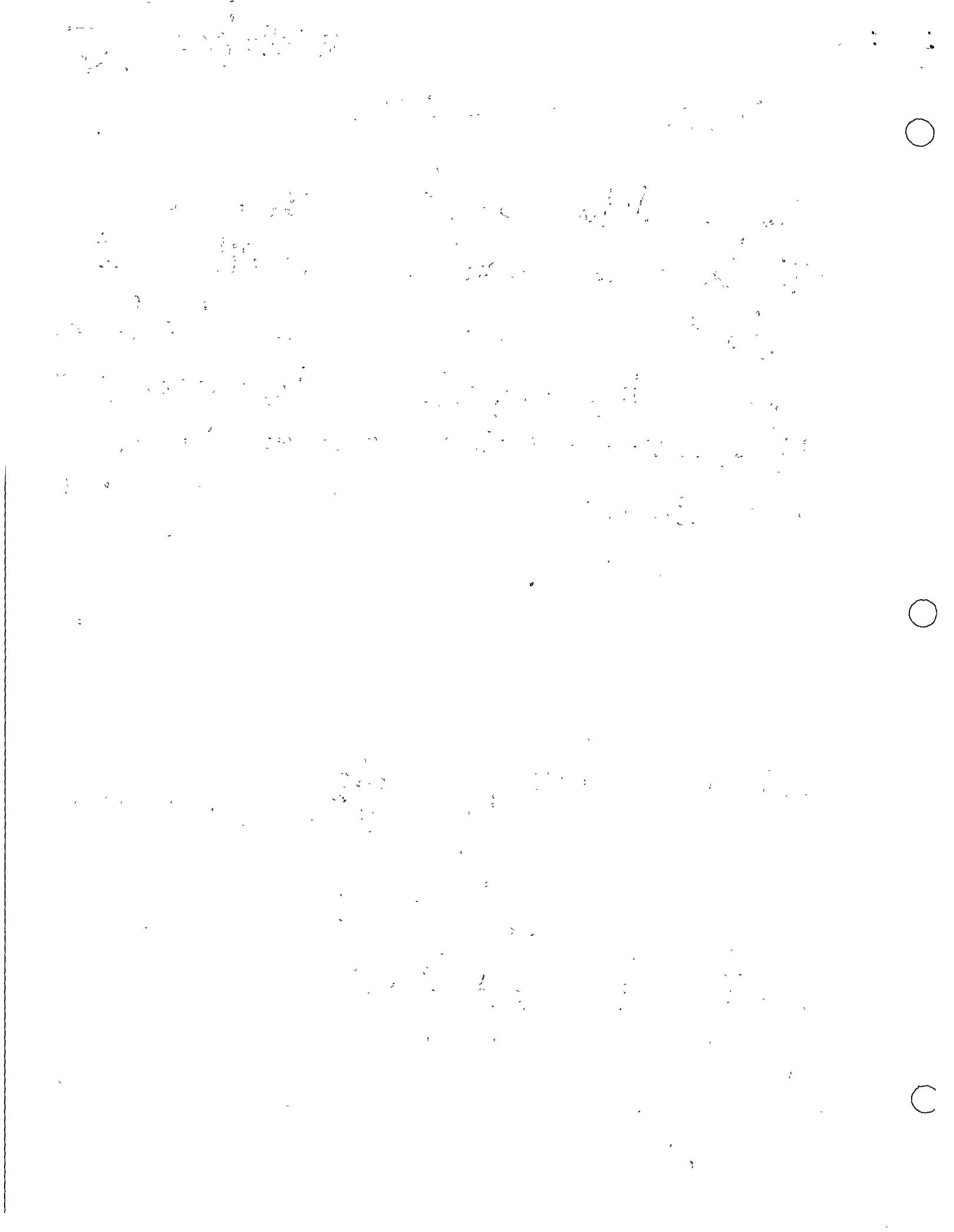


Fig. 1



El principio del desplazamiento virtual establece que

$$\delta u \sum_{i=1}^n F_{xi} = 0$$

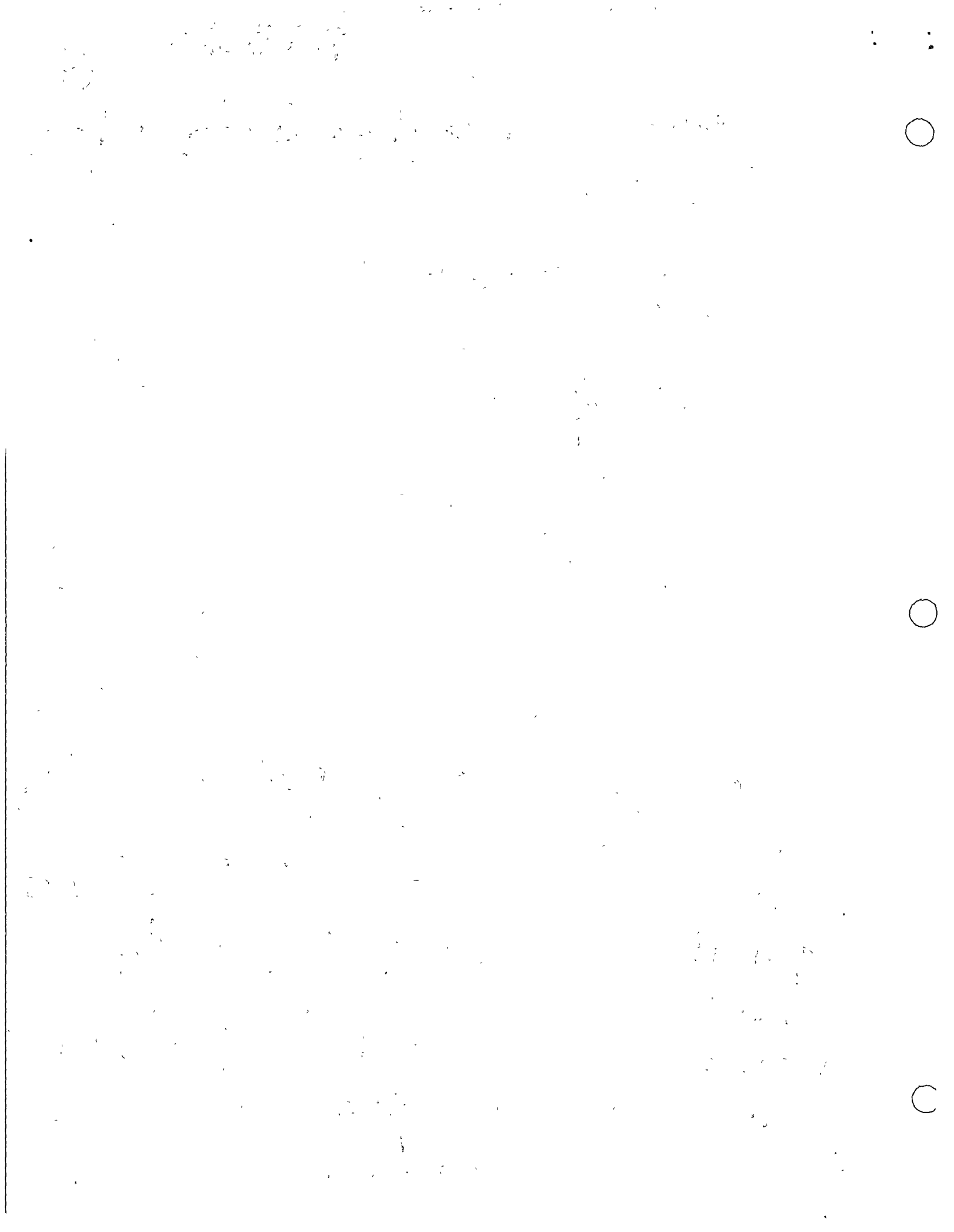
$$\delta v \sum_{i=1}^n F_{yi} = 0$$

(1)

$$\delta w \sum_{i=1}^n F_{zi} = 0$$

Si el sistema está en equilibrio y permanece en equilibrio después del desplazamiento virtual se satisface (1).

Un cuerpo elástico en reposo constituye un conjunto de partículas sobre las que en cada elemento actúa un subconjunto de fuerzas en equilibrio. En cualquier desplazamiento virtual, el trabajo virtual sobre cada partícula es cero, por lo tanto el Trabajo virtual total también debe ser cero. Es conveniente que  $\delta u, \delta v, \delta w$  sean consistentes con las condiciones de apoyo.



Sean:

$\{u, v, w\}$  componentes de los desplazamientos debido a las cargas en  $\mathcal{L}_i$ .

$\{\delta u, \delta v, \delta w\}$  componentes del desplazamiento virtual en  $\mathcal{L}_i$ . (funciones arbitrarias de  $\mathcal{L}_i$ )

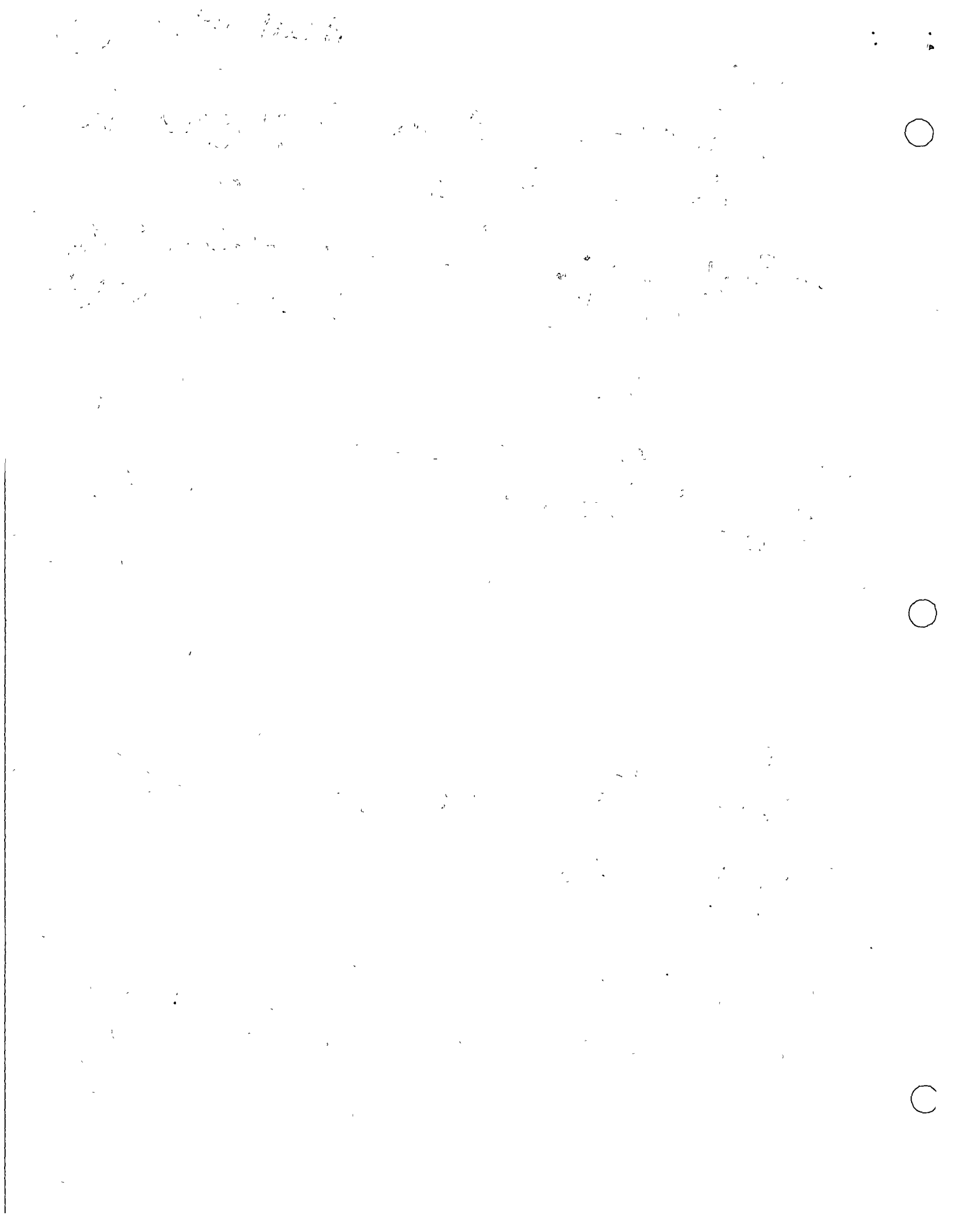
Para deformaciones lineales pequeñas, los desplazamientos virtuales correspondientes a las seis componentes de deformación son

$$\begin{aligned} \delta \epsilon_x &= \frac{\partial}{\partial x} (\delta u), & \delta \gamma_{xy} &= \frac{\partial}{\partial x} (\delta v) + \frac{\partial}{\partial y} (\delta u) \\ \delta \epsilon_y &= \frac{\partial}{\partial y} (\delta v), & \delta \gamma_{yz} &= \frac{\partial}{\partial y} (\delta w) + \frac{\partial}{\partial z} (\delta v) \\ \delta \epsilon_z &= \frac{\partial}{\partial z} (\delta w), & \delta \gamma_{zx} &= \frac{\partial}{\partial z} (\delta u) + \frac{\partial}{\partial x} (\delta w) \end{aligned} \quad (2)$$

y el trabajo virtual en un elemento  $dx dy dz$  es

$$\delta U_0 dV = \left[ \sigma_x (\delta \epsilon_x) + \sigma_y (\delta \epsilon_y) + \sigma_z (\delta \epsilon_z) + \tau_{xy} (\delta \gamma_{xy}) + \tau_{yz} (\delta \gamma_{yz}) + \tau_{zx} (\delta \gamma_{zx}) \right] dV \quad (3)$$

Sean:



○  $\bar{X}dA, \bar{Y}dA, \bar{Z}dA$ , Fuerzas de superficie en el elemento  $dV = dx dy dz$ .

$XdV, YdV, ZdV$ , Fuerzas de cuerpo en el elemento  $dV = dx dy dz$ .

La afirmación de que el Trabajo virtual es cero es

○ 
$$\int_A (\bar{X} \delta u + \bar{Y} \delta v + \bar{Z} \delta w) dA + \int_V (X \delta u + Y \delta v + Z \delta w) dV - \int_V \delta U_0 dV = 0 \quad (4)$$

Puesto que las fuerzas de superficie  $\bar{X}$ , las de cuerpo  $X$  y los esfuerzos  $\{\sigma\}$ , no varían durante un desplazamiento virtual pequeño, el símbolo variacional  $\delta$  se puede sacar fuera del signo integral quedando

U

O

O

A



15

$$\delta \left[ \int_V u_0 dV - \int_V (Xu + Yv + Zw) dV - \int_A (\bar{X}u + \bar{Y}v + \bar{Z}w) dA \right] = 0 \quad (a)$$

Matricialmente:

$$\delta \left[ \int_V \{L\sigma\} \{e\} - \int_V \{X\} \{u\} dV - \int_A \{\bar{X}\} \{u\} dA \right] = 0 \quad (a)$$

- (a) = Energía potencial de deformación
- (b) = " " " fuerzas de cuerpo
- (c) = " " " " superficie

en (c)

$$\{L\sigma\} = [\sigma_x \sigma_y \sigma_z \tau_{xy} \tau_{yz} \tau_{zx}]$$

$$\{e\}^T = \{e_x \ e_y \ e_z \ \gamma_{xy} \ \gamma_{yz} \ \gamma_{zx}\}^T$$

$$\{X\} = [X \ Y \ Z]$$

$$\{u\}^T = [u \ v \ w]$$

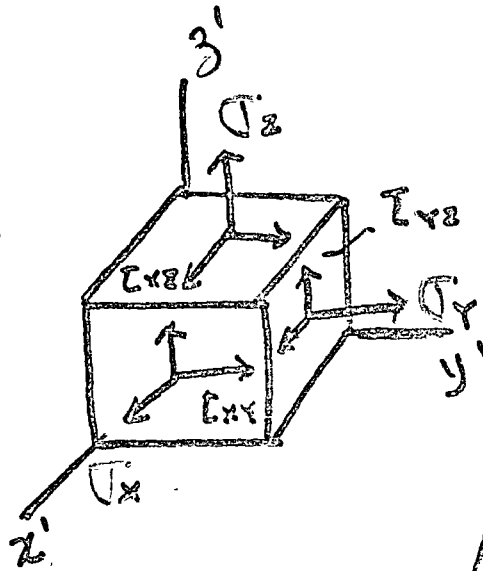
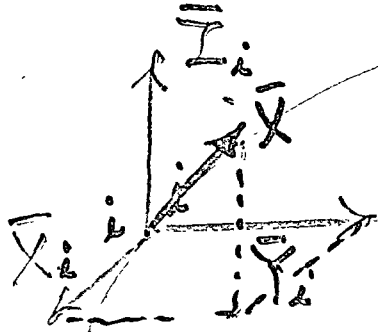
$$\{\bar{X}\} = [\bar{X} \ \bar{Y} \ \bar{Z}]$$



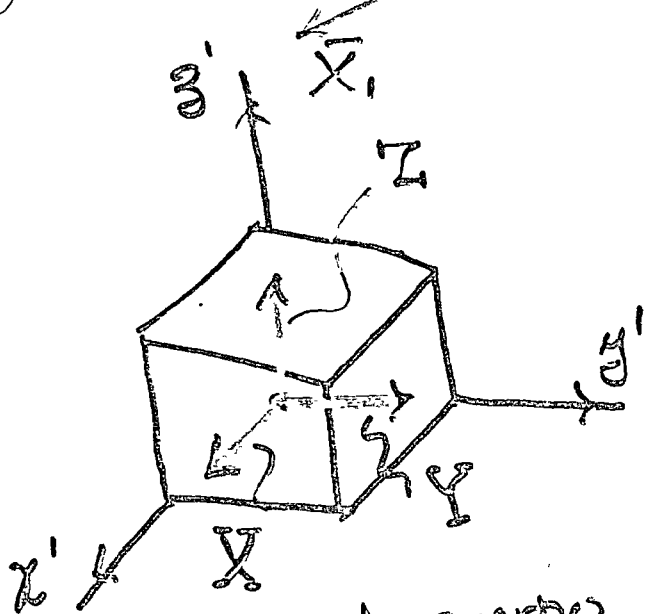
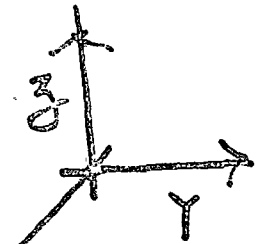
P. Ballesteros

6

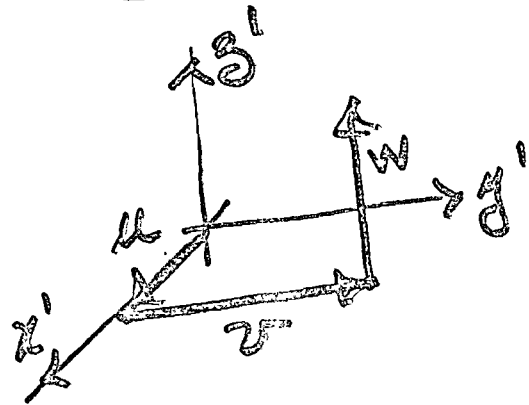
Fuerzas de superficie



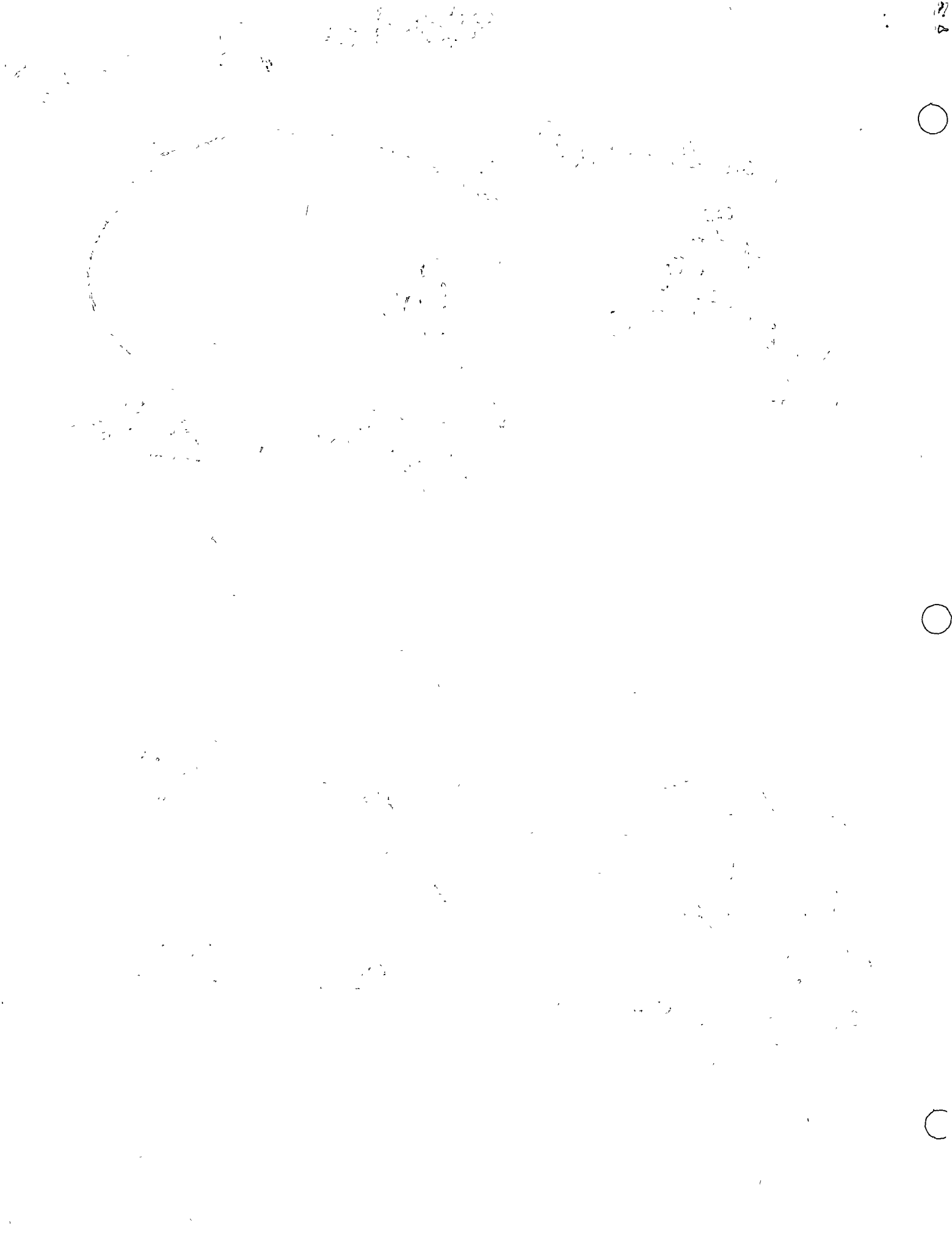
Esfuerzos



Fuerzas de cuerpo



desplazamientos



(a) Establece que los desplazamientos  $\delta u, \delta v, \delta w$  bajo ciertas fuerzas de superficie y de cuerpo dadas, son tal que la variación de primer orden de la energía potencial total ES CERO para cualquier desplazamiento virtual, o brevemente La energía potencial total es estacionaria.

El término desplazamiento o trabajo virtual implican multiplicadores arbitrarios  $\delta u, \delta v, \delta w$  con las ecuaciones de equilibrio, es conveniente referirse a ellos como variaciones de  $u, v, w$ .

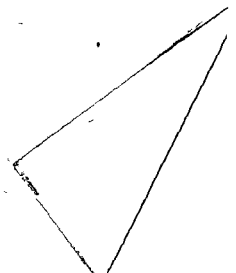
C

O

O

5

*[Faint, illegible handwritten text covering the majority of the page]*



ANÁLISIS DE UNA ESTRUCTURA TIPO MARCO

1

20	NO. DE ELEMENTOS
890	NO. DE ECUACIONES
1	NO. DE TIPOS DE MATERIAL
230	NO. DE PUNTOS DE LA ESTRUCTURA
165	NO. DE CUADRIÁTEPOS
2	NO. DE TIPOS DE SECCIÓN
0	NO. DEL PRIMER PUNTO FRONTERA

CONSTANTES ELÁSTICAS DE LOS MATERIALES

MODULO DE ELASTICIDAD	COEFICIENTE DE POISSON	PESO VOLUMÉTRICO
(TON/M**2)		(TON/M**3)
1500000.00	0.15	2.400

PARÁMETROS QUE DEFINEN LAS SECCIONES

TIPO*	SECCIÓN*	PARÁMETROS**
0	ESPECIAL	(A, IZ, FY)
1	RECTANGULAR	(B, H)
2	T	(B, H, V, T)
3	I	(B, H, V, T)
4	CANAL	(B, H, V, T)
5	ANGULO	(B, H, V, T)
6	CIRCULAR	(R)
7	CANAL	(B, H, V, T)
8	CIRCULAR HUECA	(R, T, C)
9	CRUZ	(B, H, V, T, C)
10	ZETA	(C, I, K, V, T, C, P)
11	H	(B, H, V, T)

ABREVIATURA\*\* (VER FIGURAS DEL CATALOGO DE SECCIONES)

B	ANCHO DE LA SECCIÓN TIPO 1, 2, 3, 4, 5, 7, 9, 10 Y 11
BI	ANCHO INFERIOR DE LA SECCIÓN TIPO 10
D	DIÁMETRO DE LAS SECCIONES TIPO 6 Y 8
H	ALTEZA DE LAS SECCIONES TIPO 1, 2, 3, 4, 5, 7, 9, 10 Y 11
TC	ESPESOR DE LA SECCIÓN CIRCULAR HUECA
V	ANCHO DEL ALMA DE LAS SECCIONES TIPO 2, 3, 4, 7, 9, 10 Y 11
T	ESPESOR DEL PATÍN DE LAS SECCIONES TIPO 2, 3, 4, 5, 7, 9 Y 11
TI	ESPESOR DEL PATÍN INFERIOR DE LA SECCIÓN TIPO 10
P	ESPESOR DEL PATÍN SUPERIOR DE LA SECCIÓN TIPO 10
BS	ANCHO SUPERIOR DE LA SECCIÓN TIPO 10
C	DISTANCIA ENTRE LAS FIBRAS SUPERIORES DEL ALMA Y PATÍN RESPECTIVAMENTE RESPECTIVAMENTE DE LAS SECCIONES 9 Y 10

(CM)	CENTÍMETROS
(M**2)	METROS A LA SEGUNDA POTENCIA
(M**4)	METROS A LA CUARTA POTENCIA
A	ÁREA
I7	MOMENTO DE INERCIA RESPECTO AL EJE Z
FY	FACTOR DE FORMA PARA LA DIRECCIÓN Y

3

8

8



TIPO	D-BI-D-A (CH)	I-Z-TC (CH)	V-FY (CH)
1	70.000	15.000	0.000
2	100.000	20.000	0.000

TIPO	A (**2)	IZ (**4)	FY
1	0.105000000	0.000106875	1.200000000
2	0.200000000	0.000666667	1.200000000

ARSCISA --- ORDENADA  
(M) (N)

1	0.000	0.000
2	0.000	0.867
3	0.000	1.733
4	0.000	2.600
5	0.000	3.467
6	0.000	4.333
7	0.000	5.200
8	0.000	6.067
9	0.000	6.933
0	0.000	7.800
1	0.000	8.667
2	0.000	9.533
3	0.000	10.400
4	0.000	11.267
5	0.000	12.133
6	0.000	13.000
7	0.500	0.000
8	0.500	0.867
9	0.500	1.733
0	0.500	2.600
1	0.500	3.467
2	0.500	4.333
3	0.500	5.200
4	0.500	6.067
5	0.500	6.933
6	0.500	7.800
7	0.500	8.667
8	0.500	9.533
9	0.500	10.400
0	0.500	11.267
1	0.500	12.133
2	0.500	13.000
3	1.000	0.000
4	1.000	0.867
5	1.000	1.733
6	1.000	2.600
7	1.000	3.467
8	1.000	4.333
9	1.000	5.200
0	1.000	6.067
1	1.000	6.933

} sigue igual

3

8

8

9.600	6.067
9.600	6.933
9.600	7.800
9.600	8.667
9.600	9.533
9.600	10.400
9.600	11.267
9.600	12.133
9.600	13.000

NO. MURO I MURO J MAT. NO. SEC. NO. Apoy I Apoy J LONGITUD

1	52	68	1	1	0	0	2.000
2	55	71	1	1	0	0	2.000
3	58	74	1	1	0	0	2.000
4	61	77	1	1	0	0	2.000
5	64	80	1	1	0	0	2.000
6	137	146	1	1	0	0	1.000
7	135	147	1	1	0	0	1.000
8	138	148	1	1	0	0	1.000
9	141	149	1	1	0	0	1.000
10	144	150	1	1	0	0	1.000
11	146	154	1	1	0	0	1.000
12	147	157	1	1	0	0	1.000
13	148	160	1	1	0	0	1.000
14	149	163	1	1	0	0	1.000
15	150	166	1	1	0	0	1.000
16	145	146	1	2	0	0	2.600
17	146	147	1	2	0	0	2.600
18	147	148	1	2	0	0	2.600
19	148	149	1	2	0	0	2.600
20	149	150	1	2	0	0	2.600

270.00 GRADOS, ANGULO ENTRE GRAVEDAD Y EJE X GLOBAL  
 0.20 METROS, ESPESOR DOMINANTE EN EL MURO

NO. TIPO DE ELEMENTO

1	2
2	2
3	2
4	2
5	2
6	2
7	2
8	2
9	2
10	2
11	2
12	2
13	2
14	2
15	2
16	2
17	2
18	2
19	2
20	2

} sigue igual

3

8

8

142	1
143	1
144	1
145	1
146	1
147	1
148	1
149	1
150	1
151	1
152	1
153	1
154	1
155	1
156	1
157	1
158	1
159	1
160	1
161	1
162	1
163	1
164	1
165	1

ELEI NO=NOOD I=NOOD J=NOOD K=NOOD L=PAT.NO.=ESPESUR(M) INGEN

1	2	1	17	18	1	0.20	0
2	4	3	19	20	1	0.20	1
3	6	5	21	22	1	0.20	1
4	8	7	23	24	1	0.20	1
5	10	9	25	26	1	0.20	1
6	12	11	27	28	1	0.20	1
7	14	13	29	30	1	0.20	1
8	16	15	31	32	1	0.20	1
9	19	18	34	35	1	0.20	0
10	21	20	36	37	1	0.20	1
11	23	22	38	39	1	0.20	1
12	25	24	40	41	1	0.20	1
13	27	26	42	43	1	0.20	1
14	29	28	44	45	1	0.20	1
15	31	30	46	47	1	0.20	1
16	34	33	49	50	1	0.20	0
17	36	35	51	52	1	0.20	1
18	38	37	53	54	1	0.20	1
19	40	39	55	56	1	0.20	1
20	42	41	57	58	1	0.20	1
21	44	43	59	60	1	0.20	1
22	46	45	61	62	1	0.20	1
23	48	47	63	64	1	0.20	1
24	67	66	82	83	1	0.20	0
25	69	68	84	85	1	0.20	1
26	71	70	86	87	1	0.20	1
27	73	72	88	89	1	0.20	1
28	75	74	90	91	1	0.20	1
29	77	76	92	93	1	0.20	1
30	79	78	94	95	1	0.20	1
31	82	81	97	98	1	0.20	0

} sign equal

3

8

8

152	186	185	201	202	1	0.20	1
153	188	187	203	204	1	0.20	1
154	190	189	205	206	1	0.20	1
155	192	191	207	208	1	0.20	1
156	194	193	209	210	1	0.20	1
157	196	195	211	212	1	0.20	1
158	198	197	213	214	1	0.20	1
159	201	200	216	217	1	0.20	0
160	203	202	218	219	1	0.20	1
161	205	204	220	221	1	0.20	1
162	207	206	222	223	1	0.20	1
163	209	208	224	225	1	0.20	1
164	211	210	226	227	1	0.20	1
165	213	212	228	229	1	0.20	1

54 ANCHO DE SELIBANDA DE LA MATRIZ DE RIGIDEZES

- 15 NO. DE NUJOS FRONTERA
- 1 NO. DE CONDICIONES DE CARGA
- 0 INDICADOR DE RIGIDEZES DE ENTREPISO

NUJOS RESTRICCION TIPO 0=LIBRE, 1=FIJO

RESTRICCION D-Y D-Y R-Z

1	1	1	1
17	1	1	1
33	1	1	1
49	1	1	1
65	1	1	1
81	1	1	1
97	1	1	1
113	1	1	1
129	1	1	1
145	1	1	1
161	1	1	1
167	1	1	1
183	1	1	1
199	1	1	1
215	1	1	1

NO. DE RESTRICCIONES DE LA ESTRUCTURA 45

0. RESTRICCION 0.1. RESTRINGIDO

1	1
2	2
3	3
4	49
5	50
6	51
7	97
8	98
9	99
10	145
11	146

3

8

8



12	147
13	193
14	194
15	195
16	241
17	242
18	243
19	289
20	290
21	291
22	337
23	338
24	339
25	385
26	386
27	387
28	433
29	434
30	435
31	451
32	452
33	453
34	499
35	500
36	501
37	547
38	548
39	549
40	595
41	596
42	597
43	643
44	644
45	645

~~CALCULO DE LAS RIGIDEZES DE ENTREPISO~~

PIUNTOS NODALES EN CADA NIVEL

NIVEL	NO. DE NUDOS
1	15
2	15
3	15
4	15
5	15

NUMERACION DE LOS NUDOS CONTENIDOS EN EL NIVEL NO. 1

4	20	36	52	68	84	100	116	132	148	164	170	186	202	218
---	----	----	----	----	----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----

NUMERACION DE LOS NUDOS CONTENIDOS EN EL NIVEL NO. 2

7	23	39	55	71	87	103	119	135	147	157	173	189	205	221
---	----	----	----	----	----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----

NUMERACION DE LOS NUDOS CONTENIDOS EN EL NIVEL NO. 3

10	26	42	58	74	90	106	122	138	148	160	176	192	208	224
----	----	----	----	----	----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----

3

8

8

NUMERACION DE LOS NUDOS CONTENIDOS EN EL NIVEL NO. 4

20 45 61 77 93 109 125 141 147 163 179 195 211 227

NUMERACION DE LOS NUDOS CONTENIDOS EN EL NIVEL NO. 5

16 32 48 64 80 96 112 128 144 150 166 182 198 214 230

ALTURAS DE LOS ENTREPIEDOS

ENTREPIEDO NO. ALTURA (M)

1	2.60
2	2.60
3	2.60
4	2.60
5	2.60

PESOS DE LOS NIVELES

NIVEL NO. PESO (TON)

1	33.230
2	33.230
3	33.230
4	33.230
5	33.230

COEFICIENTE SISMICO = 0.080

NIVEL \* ALTURA (M) \* FZA. RIGIDEZ (TON)

1	2.60	0.886
2	5.20	1.772
3	7.80	2.658
4	10.40	3.545
5	13.00	4.431

RIGIDEZES DE ENTREPIEDO, EN TON/M

2.9836E+04 1.2200E+04 8.2321E+03 5.8534E+03 3.3549E+03



Faint, illegible text at the top of the page, possibly a header or title.

Second line of faint, illegible text.

Small handwritten mark or symbol on the right side of the page.



Third line of faint, illegible text.



ANALISIS DEL MURO MARCO A CONSIDERANDO CARGA ESTADICA Y TRF

1 NO. DE CONDICION DE CARGA  
 20 NO. DE BARRAS CARGADAS  
 20 NO. DE NUDOS CARGADOS

DATOS PARA EL CASO DE BARRAS CON CARGAS INTERMEDIAS DISTINTAS A PESO PROPIA

BARRA NO	IND. GRAFI
1	1
2	1
3	1
4	1
5	1
6	1
7	1
8	1
9	1
10	1
11	1
12	1
13	1
14	1
15	1
16	1
17	1
18	1
19	1
20	1

- BARRA 1 CARGA DIST UNIFOR CONTIN(TON/M) = 0.5000
- BARRA 2 CARGA DIST UNIFOR CONTIN(TON/M) = A LA BARRA ANTERIOR
- ~~BARRA 3 CARGA DIST UNIFOR CONTIN(TON/M) = A LA BARRA ANTERIOR~~
- BARRA 4 CARGA DIST UNIFOR CONTIN(TON/M) = A LA BARRA ANTERIOR
- BARRA 5 CARGA DIST UNIFOR CONTIN(TON/M) = A LA BARRA ANTERIOR
- ~~BARRA 6 CARGA DIST UNIFOR CONTIN(TON/M) = 0.2500~~
- BARRA 7 CARGA DIST UNIFOR CONTIN(TON/M) = A LA BARRA ANTERIOR
- BARRA 8 CARGA DIST UNIFOR CONTIN(TON/M) = A LA BARRA ANTERIOR
- ~~BARRA 9 CARGA DIST UNIFOR CONTIN(TON/M) = A LA BARRA ANTERIOR~~
- BARRA 10 CARGA DIST UNIFOR CONTIN(TON/M) = A LA BARRA ANTERIOR
- BARRA 11 CARGA DIST UNIFOR CONTIN(TON/M) = A LA BARRA ANTERIOR
- ~~BARRA 12 CARGA DIST UNIFOR CONTIN(TON/M) = A LA BARRA ANTERIOR~~
- BARRA 13 CARGA DIST UNIFOR CONTIN(TON/M) = A LA BARRA ANTERIOR

3

8

8

BARRA 14 CARGA DIST UNIFOR CONTIN(TON/M)=A LA BARRA ANTERIOR  
~~BARRA 15 CARGA DIST UNIFOR CONTIN(TON/M)=A LA BARRA ANTERIOR~~  
 BARRA 16 CARGA DIST UNIFOR CONTIN(TON/M)= 0.0000  
~~BARRA 17 CARGA DIST UNIFOR CONTIN(TON/M)=A LA BARRA ANTERIOR~~  
~~BARRA 18 CARGA DIST UNIFOR CONTIN(TON/M)=A LA BARRA ANTERIOR~~  
 BARRA 19 CARGA DIST UNIFOR CONTIN(TON/M)=A LA BARRA ANTERIOR  
~~BARRA 20 CARGA DIST UNIFOR CONTIN(TON/M)=A LA BARRA ANTERIOR~~

ACIONES CONCENTRADAS EN LOS NUDOS (EN TON Y TON-M)  
 NUDO NO. FZA. HORIZONTAL FZA. VERTICAL MOMENTO

1	0.000	-1.491	0.00000
17	0.000	-2.982	0.00000
33	0.000	-2.982	0.00000
49	0.000	-2.982	0.00000
65	0.000	-2.982	0.00000
81	0.000	-2.982	0.00000
97	0.000	-2.982	0.00000
113	0.000	-2.982	0.00000
129	0.000	-2.982	0.00000
145	0.000	-2.982	0.00000
161	0.000	-2.982	0.00000
177	0.000	-2.982	0.00000
183	0.000	-2.982	0.00000
199	0.000	-2.982	0.00000
215	0.000	-1.491	0.00000
4	0.056	-1.491	0.00000
20	0.056	-2.982	0.00000
36	0.056	-2.982	0.00000
52	0.056	-2.982	0.00000
68	0.056	-2.982	0.00000
84	0.056	-2.982	0.00000
100	0.056	-2.982	0.00000
116	0.056	-2.982	0.00000
132	0.056	-2.982	0.00000
148	0.056	-2.982	0.00000
164	0.056	-2.982	0.00000
180	0.056	-2.982	0.00000
196	0.056	-2.982	0.00000
212	0.056	-1.491	0.00000
7	0.112	-1.491	0.00000
23	0.112	-2.982	0.00000
39	0.112	-2.982	0.00000
55	0.112	-2.982	0.00000
71	0.112	-2.982	0.00000
87	0.112	-2.982	0.00000
103	0.112	-2.982	0.00000
119	0.112	-2.982	0.00000
135	0.112	-2.982	0.00000
151	0.112	-2.982	0.00000
167	0.112	-2.982	0.00000
183	0.112	-2.982	0.00000
199	0.112	-2.982	0.00000
215	0.112	-2.982	0.00000





173	0.112	-2.982	0.00000
185	0.112	-2.982	0.00000
205	0.112	-2.982	0.00000
221	0.112	-1.491	0.00000
10	0.168	-1.491	0.00000
36	0.168	-2.982	0.00000
52	0.168	-2.982	0.00000
58	0.168	-2.982	0.00000
74	0.168	-2.982	0.00000
90	0.168	-2.982	0.00000
106	0.168	-2.982	0.00000
122	0.168	-2.982	0.00000
138	0.168	-2.932	0.00000
148	0.168	-2.982	0.00000
160	0.168	-2.982	0.00000
176	0.168	-2.982	0.00000
192	0.168	-2.982	0.00000
208	0.168	-2.982	0.00000
224	0.168	-1.491	0.00000
13	0.220	-1.491	0.00000
29	0.220	-2.982	0.00000
45	0.220	-2.982	0.00000
61	0.220	-2.982	0.00000
77	0.220	-2.982	0.00000
93	0.220	-2.982	0.00000
109	0.220	-2.982	0.00000
125	0.220	-2.982	0.00000
141	0.220	-2.982	0.00000
149	0.220	-2.932	0.00000
163	0.220	-2.982	0.00000
179	0.220	-2.982	0.00000
195	0.220	-2.982	0.00000
211	0.220	-2.982	0.00000
227	0.220	-1.491	0.00000
16	0.280	-1.491	0.00000
32	0.280	-2.982	0.00000
48	0.280	-2.982	0.00000
64	0.280	-2.982	0.00000
80	0.280	-2.982	0.00000
96	0.280	-2.982	0.00000
112	0.280	-2.982	0.00000
128	0.280	-2.982	0.00000
144	0.280	-2.982	0.00000
150	0.280	-2.982	0.00000
166	0.280	-2.982	0.00000
182	0.280	-2.982	0.00000
198	0.280	-2.982	0.00000
214	0.280	-2.982	0.00000
230	0.280	-1.491	0.00000

DESPLAZAMIENTOS MODALES DE LA ESTRUCTURA (CM)

MOD.	H C R I Z O N T A L	V E R T I C A L	G I R O S (RAD)
1	0.	0.	0.
2	-3.4578361E-05	-4.3730483E-05	-9.6072576E-05
3	1.6176531E-04	-6.8345851E-05	-1.9723313E-04
4	3.6482475E-04	-1.4563486E-04	-2.7230434E-04
5	6.2696880E-04	-1.9214011E-04	-3.4305638E-04
6	9.3653634E-04	-2.4714974E-04	-3.8158451E-04
7	1.2833062E-03	-3.1083084E-04	-4.0188536E-04

} sigue igual

3

8

8

[Faint, illegible text, possibly bleed-through from the reverse side of the page. The text is scattered across the page and is mostly illegible due to low contrast and blurriness.]

ELEMENTO	PUERTO	FX	FY	M
1	2	0.06401	-3.01552	0.00000
1	1	0.85426	7.38013	0.00000
1	17	-0.71632	4.28767	0.00000
1	18	-0.20195	-8.65228	0.00000
16	34	2.78918	-9.61457	0.00000
16	33	-2.02773	18.02470	2.00000
16	49	-4.46482	10.93294	0.00000
16	50	-0.35209	-19.34308	2.00000
31	82	1.77110	-5.20475	0.00000
31	81	0.96367	0.96433	1.00000
31	97	-2.70536	6.30227	0.00000
31	98	-0.02942	-10.06185	1.00000
46	114	3.98698	-11.91785	0.00000
46	113	2.21670	20.62108	2.00000
46	129	-5.91376	-13.06553	1.00000
46	130	-0.28993	-21.76875	2.00000
61	168	1.92696	-5.62451	0.00000
61	167	0.90414	9.31794	1.00000
61	183	-2.95614	6.82760	0.00000
61	184	0.12503	-10.52102	1.00000
76	200	4.38672	-13.14723	0.00000
76	199	2.24360	22.61114	3.00000
76	215	-6.35623	14.42406	1.00000
76	216	-0.27409	-23.88797	3.00000
91	18	0.93066	-12.98592	-1.00000
91	17	2.83964	5.00690	0.00000
91	33	-1.70014	14.11524	-1.00000
91	34	-2.07016	-7.03622	0.00000
106	66	-0.32843	-3.99070	0.00000
106	65	-0.98254	1.42865	0.00000
106	81	-0.63325	5.15606	0.00000
106	82	-0.67772	-2.59401	0.00000
121	98	-1.89759	-16.60583	-2.00000
121	97	-2.47282	6.44242	0.00000
121	113	-2.30616	17.43689	-1.00000
121	114	-2.06425	-7.27354	0.00000
136	152	0.34806	-3.76478	0.00000
136	151	0.77590	1.12480	0.00000
136	167	-4.61772	5.07868	0.00000
136	168	-0.50624	-2.43869	0.00000
151	184	2.14604	-18.15582	-2.00000
151	183	-2.30852	6.84765	0.00000
151	199	-2.48606	19.04229	-2.00000
151	200	-1.96850	-7.73411	0.00000

MPO DE EJECUCION = 118.5833 SEG  
 MPO DE ENTRADA Y SALIDA = -27.2667 SEG

MPO DE EJECUCION = 119.0167 SEG  
 MPO DE ENTRADA Y SALIDA = 27.6333 SEG



ESFUERZOS PRINCIPALES REFXY (TON/M\*\*2) \*\*\* BTO. PPAI \*\*\*

T11 T22 TAIIMAX (GRADOS) T

NO.	X	Y	TXX	U TSS	TTY	O TTT	TXY	O TST	T11	T22	TAIIMAX	(GRADOS)	T
1	0.250	0.433	-2.7130E+00	-1.1632E+02	-3.2908E+00	-2.6178E+00	-1.4660E+00	-1.2982E+02	5.6900E+01	-16.578			
2	0.250	2.167	-1.6729E+00	-1.2962E+02	5.1504E+00	-1.4660E+00	1.7720E+01	-1.1670E+02	6.4179E+01	23.015			
3	0.250	3.900	1.1331E+01	-1.1664E+02	2.7319E+00	1.7720E+01	-1.1670E+02	5.8440E+01	13.307				
4	0.250	5.633	1.3500E+00	-1.0003E+02	1.3674E+00	1.3650E+00	-1.0007E+02	5.0726E+01	10.548				
5	0.250	7.367	-1.8471E+00	-1.0671E+02	3.3696E+00	-1.7390E+00	-1.0681E+02	5.2538E+01	18.386				
6	0.250	9.100	-9.4658E+02	-7.8668E+01	3.7745E+01	9.6467E+00	-7.8670E+01	3.9383E+01	2.746				
7	0.250	10.833	1.1813E+00	-4.5407E+01	-1.7295E+00	1.2507E+00	-4.5476E+01	2.3363E+01	22.087				
8	0.250	12.567	-3.4803E+00	-3.0926E+01	2.1333E+00	-3.3159E+00	-3.1161E+01	1.3022E+01	44.070				
9	0.750	1.300	2.2908E+00	-2.0299E+02	6.8115E+00	2.5245E+00	-2.0322E+02	1.0287E+02	18.983				
10	0.750	3.033	1.9747E+00	-1.6211E+02	4.5920E+00	2.1031E+00	-1.6224E+02	8.2169E+01	16.018				
11	0.750	4.767	-8.6727E+01	-1.5610E+02	6.2326E+00	-6.1744E+00	-1.5635E+02	7.7868E+01	22.954				
12	0.750	6.500	2.2665E+01	-1.1867E+02	4.3487E+00	3.8549E+00	-1.1883E+02	5.9608E+01	20.919				
13	0.750	8.233	9.9559E+01	-8.1042E+01	-5.8073E+01	9.9970E+00	-8.1046E+01	4.1023E+01	4.056				
14	0.750	9.967	-5.4520E+01	-7.5519E+01	1.2030E+00	-5.2590E+00	-7.5538E+01	3.7506E+01	9.191				
15	0.750	11.700	4.9256E+01	-3.8914E+01	-1.5742E+00	5.5535E+00	-3.8976E+01	1.9766E+01	-22.841				
16	1.250	0.433	-3.1459E+01	-2.8913E+02	7.2605E+00	-3.1255E+00	-2.8934E+02	1.2904E+02	16.127				
17	1.250	2.167	-1.9015E+00	-2.7637E+02	1.9460E+00	-1.8972E+00	-2.7639E+02	2.6639E+02	1.3225E+02	4.216			
18	1.250	3.900	-3.7152E+01	-2.0097E+02	3.0142E+00	-3.2617E+00	-2.0101E+02	1.0034E+02	4.613				
19	1.250	5.633	-4.4169E+00	-1.4239E+02	-1.2720E+00	-4.4043E+00	-1.4240E+02	6.8997E+01	-5.282				
20	1.250	7.367	1.9265E+00	-1.2741E+02	2.6868E+00	1.9823E+00	-1.2746E+02	8.4722E+01	11.896				
21	1.250	9.100	3.0246E+01	-7.7599E+01	2.2454E+01	3.0311E+00	-7.7599E+01	3.8951E+01	1.651				
22	1.250	10.833	-5.3077E+00	-3.6086E+01	-4.4242E+00	-4.6844E+00	-3.6710E+01	-1.6013E+01	-80.106				
23	1.250	12.567	1.7134E+00	-4.2566E+01	-2.1240E+00	1.8151E+00	-4.2658E+01	2.2241E+01	-27.400				
24	3.750	1.300	-2.2063E+00	-8.4175E+01	7.7766E+00	2.9009E+00	-8.4869E+01	4.3885E+01	51.035				
25	3.750	3.033	9.3962E+00	-7.6809E+01	1.3024E+01	1.1321E+00	-7.6833E+01	4.5027E+01	84.063				
26	3.750	4.767	-1.0298E+01	-1.1618E+02	1.2253E+01	-1.6787E+00	-1.1769E+02	5.0450E+01	70.281				
27	3.750	6.500	1.0979E+00	-9.2124E+01	4.5565E+00	1.3201E+00	-9.2346E+01	4.6833E+01	27.917				
28	3.750	8.233	1.2549E+01	-6.8625E+01	1.1860E+01	-1.4266E+00	-7.0393E+01	4.2285E+01	41.445				
29	3.750	9.967	-1.9853E+01	-9.1638E+01	9.2401E+00	-1.8502E+00	-9.2989E+01	3.7243E+01	77.398				
30	3.750	11.700	5.3633E+00	-4.8286E+01	1.3925E+00	5.3094E+00	-4.8322E+01	2.6861E+01	14.859				
31	4.250	0.433	-1.6448E+01	-1.5290E+02	7.9152E+00	-1.5096E+00	-1.5336E+02	6.8684E+01	33.087				
32	4.250	2.167	-5.8700E+00	-1.6255E+02	1.5659E+01	-4.3205E+00	-1.6410E+02	7.9891E+01	56.516				
33	4.250	3.900	4.8725E+01	-1.3557E+02	1.9736E+01	3.2025E+00	-1.3837E+02	7.0831E+01	80.895				
34	4.250	5.633	6.4613E+00	-1.0599E+02	7.1942E+00	6.9197E+00	-1.0645E+02	5.6684E+01	36.458				
35	4.250	7.367	-6.1507E+00	-1.0847E+02	1.9155E+01	-5.1574E+00	-1.0996E+02	5.2402E+01	55.867				
36	4.250	9.100	2.1116E+01	-7.7235E+01	1.5605E+01	3.2272E+00	-8.0261E+01	4.1749E+01	100.743				
37	4.250	10.833	6.3101E+00	-4.2527E+01	-4.9079E+01	6.3150E+00	-4.2532E+01	2.4423E+01	-5.757				
38	4.250	12.567	-8.9754E+00	-3.3925E+01	2.8655E+00	-8.6505E+00	-3.4250E+01	1.2800E+01	64.683				
39	4.750	1.300	1.1622E+01	-2.3719E+02	1.8896E+01	1.6114E+00	-2.3869E+02	1.2015E+02	45.242				
40	4.750	3.033	-1.4806E+00	-1.8485E+02	1.1051E+01	-8.1702E+00	-1.8551E+02	0.2380E+01	38.363				
41	4.750	4.767	-4.9239E+00	-1.6749E+02	1.0149E+01	5.5193E+00	-1.6809E+02	8.6803E+01	33.573				
42	4.750	6.500	4.3703E+01	-1.2396E+02	1.8857E+01	3.2327E+00	-1.2675E+02	6.4093E+01	84.332				
43	4.750	8.233	-4.1312E+00	-5.1678E+01	4.2541E+00	-3.8983E+00	-5.1011E+01	3.9006E+01	31.321				
44	4.750	9.967	7.1900E+00	-7.2909E+01	4.1159E+00	7.4033E+00	-7.2922E+01	3.0813E+01	20.670				
45	4.750	11.700	-6.8367E+02	-3.7668E+01	1.4248E+01	4.7208E+00	-4.2457E+01	2.3589E+01	185.789				
46	5.250	0.433	-4.1364E+01	-3.3618E+02	-1.4708E+01	-4.0633E+00	-3.3691E+02	1.4814E+02	28.475				
47	5.250	2.167	5.6458E+00	-2.8689E+02	9.2066E+00	5.9353E+00	-2.8718E+02	1.4656E+02	18.008				
48	5.250	3.900	-2.8978E+01	-2.1472E+02	5.4979E+00	-1.4891E+00	-2.1486E+02	1.0736E+02	14.678				
49	5.250	5.633	-2.3122E+01	-1.6247E+02	6.4186E+00	-2.2827E+00	-1.6277E+02	6.9970E+01	26.317				
50	5.250	7.367	1.5496E+01	-1.2399E+02	1.5407E+01	1.7170E+00	-1.2567E+02	7.1023E+01	62.287				
51	5.250	9.100	1.2946E+00	-7.5618E+01	2.5983E+00	1.823E+00	-7.5706E+01	3.8544E+01	10.326				

Signe  
igual

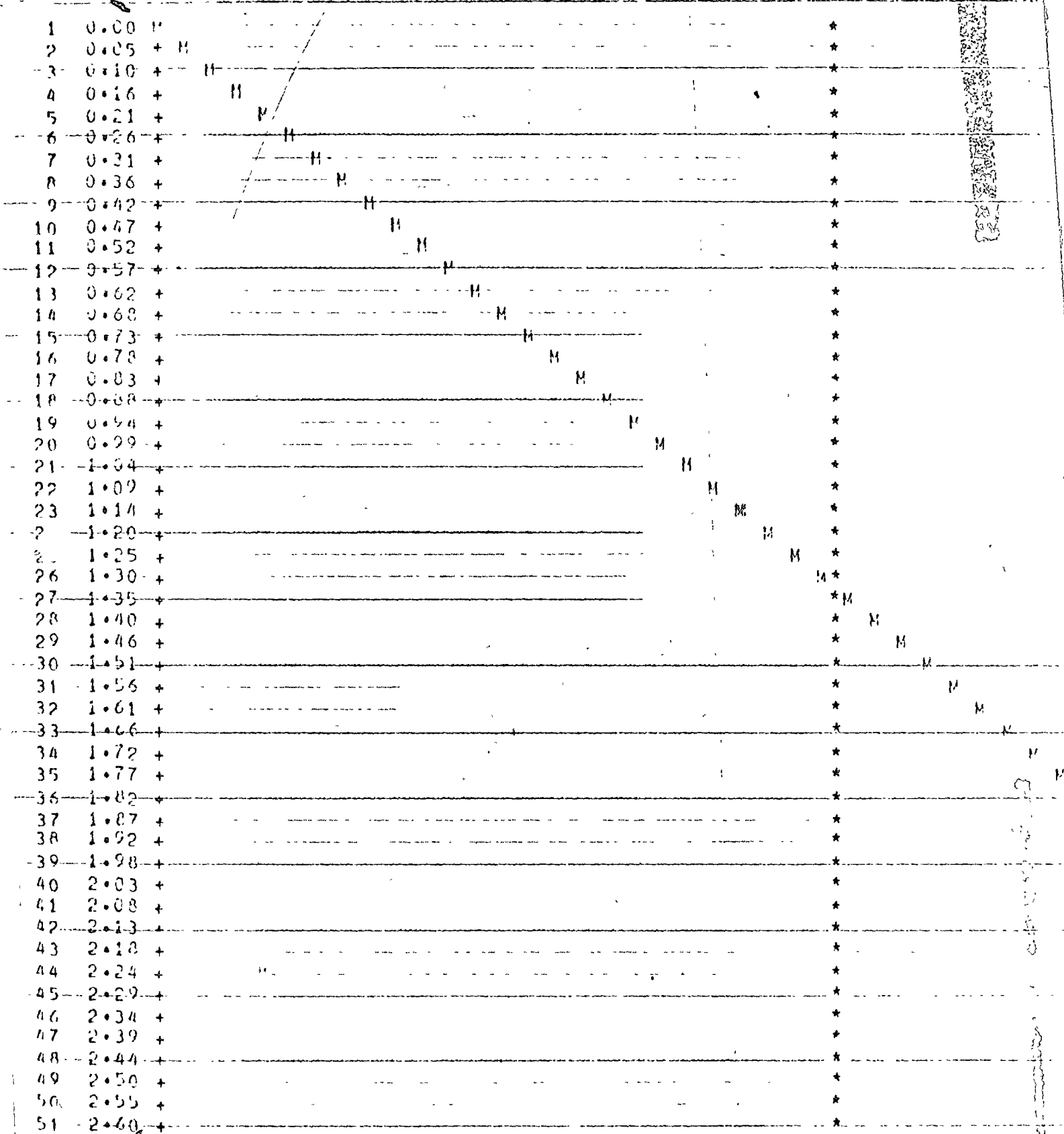
ESCALA DE LA GRAFICA = 7.12272E-03 UNIDADES/COLUMNA  
 ORDENADA MENOR = -3.59960E-01  
 ORDENADA MAYOR = 3.52300E-01

UNIDADES/COLUMNA 12

VAL = 145, NUDO FINAL = 146

BARRA NO. 16, NUDO INICIAL = 145, NUDO FINAL = 146

V M



Nudo	V	M
1	+	2.74E-01
2	+	3.60E-01
3	+	3.46E-01
4	+	3.31E-01
5	+	3.17E-01
6	+	3.03E-01
7	+	2.89E-01
8	+	2.74E-01
9	+	2.60E-01
10	+	2.46E-01
11	+	2.32E-01
12	+	2.18E-01
13	+	2.03E-01
14	+	1.89E-01
15	+	1.75E-01
16	+	1.61E-01
17	+	1.46E-01
18	+	1.32E-01
19	+	1.18E-01
20	+	1.04E-01
21	+	8.93E-02
22	+	7.51E-02
23	+	6.08E-02
24	+	4.66E-02
25	+	3.23E-02
26	+	1.81E-02
27	+	3.83E-03
28	+	1.04E-02
29	+	2.47E-02
30	+	3.89E-02
31	+	5.32E-02
32	+	6.74E-02
33	+	8.16E-02
34	+	9.59E-02
35	+	1.10E-01
36	+	1.24E-01
37	+	1.39E-01
38	+	1.53E-01
39	+	1.67E-01
40	+	1.81E-01
41	+	1.96E-01
42	+	2.10E-01
43	+	2.24E-01
44	+	2.38E-01
45	+	2.53E-01
46	+	2.67E-01
47	+	2.81E-01
48	+	2.95E-01
49	+	3.10E-01
50	+	3.24E-01
51	+	3.38E-01

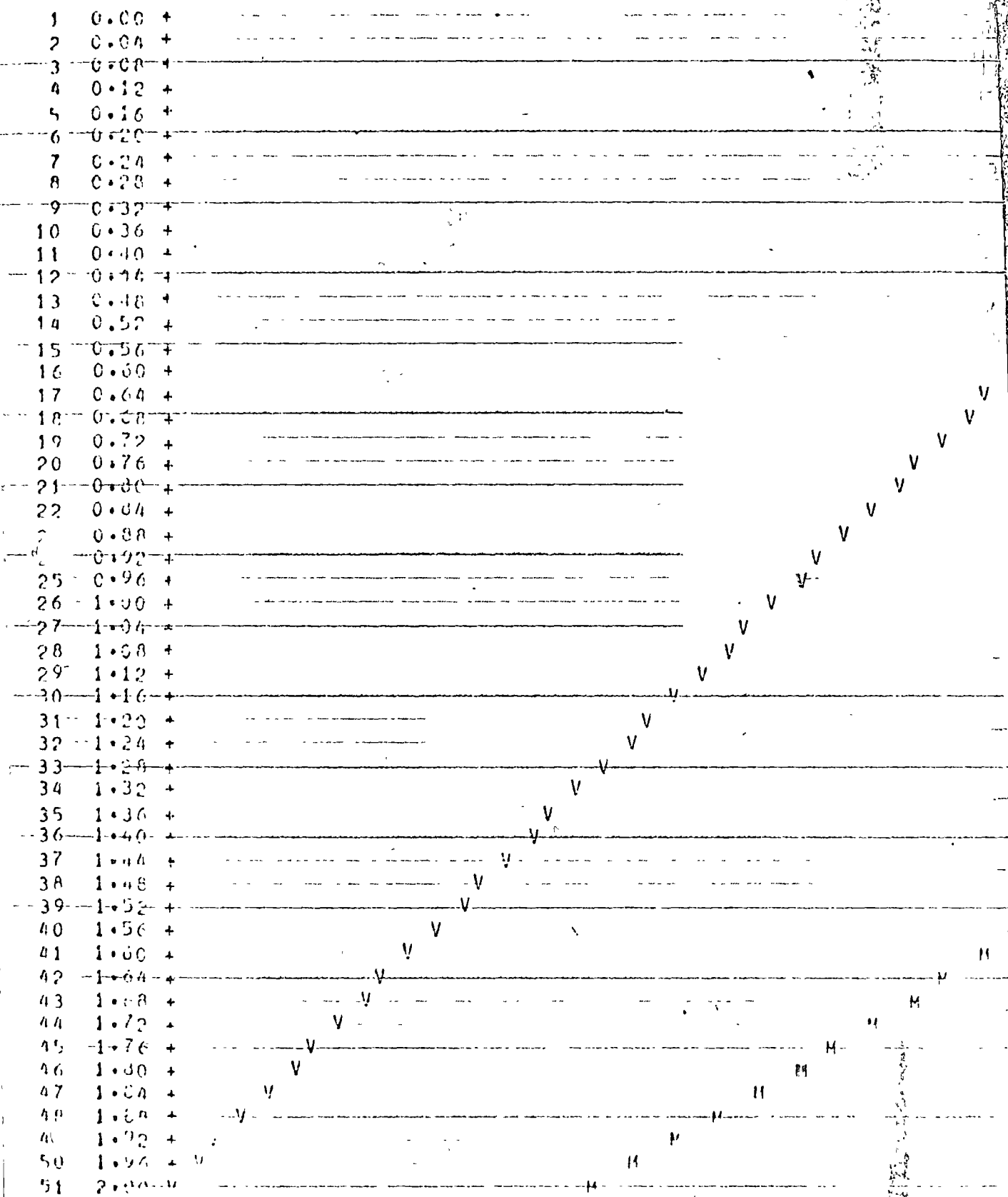
CORTANTES EN TON. Y MOMENTOS EN TON-M

ESCALA DE LA GRAFICA= 1.16380E-02 UNIDADES/COLUMA  
 ORDENADA MENOR = -9.02614E-01  
 ORDENADA MAYOR = 2.61189E-01

UNIDADES/COLUMA 11

INICIAL= 52, NUDDO FINAL= 68

BARRA NO. 1, NUDDO INICIAL= 52, NUDDO



Node	Displacement	Moment
52	0.74E-02	2.52E-01
53	7.74E-02	2.55E-01
54	5.74E-02	2.58E-01
55	3.74E-02	2.60E-01
56	1.74E-02	2.61E-01
57	-2.61E-03	2.61E-01
58	-2.26E-02	2.61E-01
59	-4.26E-02	2.59E-01
60	-6.26E-02	2.57E-01
61	-8.26E-02	2.54E-01
62	-1.03E-01	2.51E-01
63	-1.23E-01	2.46E-01
64	-1.43E-01	2.41E-01
65	-1.63E-01	2.35E-01
66	-1.83E-01	2.28E-01
67	-2.03E-01	2.20E-01
68	-2.23E-01	2.12E-01
69	-2.43E-01	2.02E-01
70	-2.63E-01	1.92E-01
71	-2.83E-01	1.81E-01
72	-3.03E-01	1.70E-01
73	-3.23E-01	1.57E-01
74	-3.43E-01	1.44E-01
75	-3.63E-01	1.30E-01
76	-3.83E-01	1.15E-01
77	-4.03E-01	9.91E-02
78	-4.23E-01	8.26E-02
79	-4.43E-01	6.53E-02
80	-4.63E-01	4.72E-02
81	-4.83E-01	2.83E-02
82	-5.03E-01	8.58E-03
83	-5.23E-01	-1.19E-02
84	-5.43E-01	-3.32E-02
85	-5.63E-01	-5.53E-02
86	-5.83E-01	-7.82E-02
87	-6.03E-01	-1.02E-01
88	-6.23E-01	-1.26E-01
89	-6.43E-01	-1.52E-01
90	-6.63E-01	-1.78E-01
91	-6.83E-01	-2.05E-01
92	-7.03E-01	-2.32E-01
93	-7.23E-01	-2.61E-01
94	-7.43E-01	-2.90E-01
95	-7.63E-01	-3.20E-01
96	-7.83E-01	-3.51E-01
97	-8.03E-01	-3.83E-01
98	-8.23E-01	-4.15E-01
99	-8.43E-01	-4.49E-01
100	-8.63E-01	-4.83E-01
101	-8.83E-01	-5.18E-01
102	-9.03E-01	-5.54E-01

CONTANTOS EN TOR. Y MOMENTOS EN TOR-M



Handwritten notes or labels in the bottom left corner, including the number '10' and some illegible text.

Handwritten text or a label located in the lower middle section of the drawing.

Handwritten text or a label located in the lower right section of the drawing.





U. N. A. M.  
INSTITUTO DE INGENIERIA

FORMA PARA CODIFICACION

FECHA MARZO 1976

PAGINA 10 DE 10

PROGRAMA MURO - MARCO

CODIFICADO POR Ballesteros

REVISADO POR Sedinas

1	5	7	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65	70	72	73	80
149			0.220		-2.982													
163			0.220		-2.982													
179			0.220		-2.982													
195			0.220		-2.982													
211			0.220		-2.982													
227			0.220		-1.491													
16			0.280		-1.491													
32			0.280		-2.982													
48			0.280		-2.982													
64			0.280		-2.982													
80			0.280		-2.982													
96			0.280		-2.982													
112			0.280		-2.982													
128			0.280		-2.982													
144			0.280		-2.982													
150			0.280		-2.982													
166			0.280		-2.982													
182			0.280		-2.982													
198			0.280		-2.982													
214			0.280		-2.982													
230			0.280		-1.491													
END JOB																		



-----

*[Faint, illegible text, possibly bleed-through from the reverse side of the page.]*

U. N. A. M.  
INSTITUTO DE INGENIERIA

FORMA PARA CODIFICACION

CODIFICADO POR Ballesteros

REVISADO POR Salinas

FECHA MARZO 1976

PAGINA 9 DE 10

PROGRAMA MURO-MARCO

1	5	7	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65	70	72	75	80
221			0.112		-1.491													
10			0.168		-1.491													
26			0.168		-2.982													
42			0.168		-2.982													
58			0.168		-2.982													
74			0.168		-2.982													
90			0.168		-2.982													
106			0.168		-2.982													
122			0.168		-2.982													
138			0.168		-2.982													
148			0.168		-2.982													
140			0.168		-2.982													
176			0.168		-2.982													
192			0.168		-2.982													
208			0.168		-2.982													
224			0.168		-1.491													
13			0.220		-1.491													
29			0.220		-2.982													
45			0.220		-2.982													
61			0.220		-2.982													
77			0.220		-2.982													
93			0.220		-2.982													
109			0.220		-2.982													
125			0.220		-2.982													
141			0.220		-2.982													



1. The first part of the document  
 discusses the general principles  
 of the system and its objectives.  
 It outlines the scope of the  
 project and the roles of the  
 various participants involved.  
 The second part of the document  
 provides a detailed description  
 of the system's architecture  
 and its components. This  
 includes a discussion of the  
 hardware and software  
 requirements, as well as the  
 data flow and the control  
 logic of the system.  
 The third part of the document  
 describes the implementation  
 of the system and the results  
 of the testing. It includes  
 a comparison of the system's  
 performance with the  
 requirements and a discussion  
 of the limitations of the  
 system.  
 Finally, the fourth part of  
 the document discusses the  
 future work and the  
 conclusions of the project.

The system is designed to  
 provide a reliable and  
 efficient means of data  
 processing and storage. It  
 is capable of handling large  
 volumes of data and is  
 designed to be easy to use  
 and maintain. The system  
 is based on a modular  
 architecture, which allows  
 for easy expansion and  
 modification. The system  
 is designed to be highly  
 available and reliable, with  
 built-in redundancy and  
 fail-over capabilities.  
 The system is designed to  
 be easy to use and maintain,  
 with a simple and intuitive  
 user interface. The system  
 is designed to be highly  
 secure, with built-in  
 security features and  
 access controls. The system  
 is designed to be highly  
 flexible, allowing for easy  
 integration with other  
 systems and applications.  
 The system is designed to  
 be highly scalable, allowing  
 for easy expansion to  
 handle larger volumes of  
 data. The system is  
 designed to be highly  
 reliable, with built-in  
 redundancy and fail-over  
 capabilities. The system  
 is designed to be highly  
 available, with built-in  
 redundancy and fail-over  
 capabilities. The system  
 is designed to be highly  
 secure, with built-in  
 security features and  
 access controls. The system  
 is designed to be highly  
 flexible, allowing for easy  
 integration with other  
 systems and applications.

The system is designed to  
 provide a reliable and  
 efficient means of data  
 processing and storage. It  
 is capable of handling large  
 volumes of data and is  
 designed to be easy to use  
 and maintain. The system  
 is based on a modular  
 architecture, which allows  
 for easy expansion and  
 modification. The system  
 is designed to be highly  
 available and reliable, with  
 built-in redundancy and  
 fail-over capabilities.  
 The system is designed to  
 be easy to use and maintain,  
 with a simple and intuitive  
 user interface. The system  
 is designed to be highly  
 secure, with built-in  
 security features and  
 access controls. The system  
 is designed to be highly  
 flexible, allowing for easy  
 integration with other  
 systems and applications.  
 The system is designed to  
 be highly scalable, allowing  
 for easy expansion to  
 handle larger volumes of  
 data. The system is  
 designed to be highly  
 reliable, with built-in  
 redundancy and fail-over  
 capabilities. The system  
 is designed to be highly  
 available, with built-in  
 redundancy and fail-over  
 capabilities. The system  
 is designed to be highly  
 secure, with built-in  
 security features and  
 access controls. The system  
 is designed to be highly  
 flexible, allowing for easy  
 integration with other  
 systems and applications.

U. N. A. M.  
INSTITUTO DE INGENIERIA  
FORMA PARA CODIFICACION

PROGRAMA MURO-MARCO

CODIFICADO POR Ballesteros

REVISADO POR Salinas

FECHA MARZO 1976

PAGINA 8 DE 10

1	5	7	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65	70	72	75	80
	68			0.056		-2.982												
	84			0.056		-2.982												
	100			0.056		-2.982												
	116			0.056		-2.982												
	132			0.056		-2.982												
	146			0.056		-2.982												
	154			0.056		-2.982												
	170			0.056		-2.982												
	186			0.056		-2.982												
	202			0.056		-2.982												
	218			0.056		-1.491												
	7			0.112		-1.491												
	23			0.112		-2.982												
	39			0.112		-2.982												
	55			0.112		-2.982												
	71			0.112		-2.982												
	87			0.112		-2.982												
	103			0.112		-2.982												
	119			0.112		-2.982												
	135			0.112		-2.982												
	147			0.112		-2.982												
	157			0.112		-2.982												
	173			0.112		-2.982												
	189			0.112		-2.982												
	205			0.112		-2.982												



*[The page contains extremely faint, illegible text, likely bleed-through from the reverse side. The text is arranged in several horizontal lines across the page.]*

FORMA PARA CODIFICACION

PROGRAMA MURO-MARCO

CODIFICADO POR P. Villalobos

REVISADO POR S. Salinas

FECHA MARZO 1976

PAGINA 7 DE 10

1	5	7	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65	70	72	75	80
	1		-0.50															
	1																	
	1		-0.25															
	1																	
	1		0.00															
A1418			CARGAS EN LOS NUDOS															
	1		0.0															
	17		0.0															
	33		0.0															
	49		0.0															
	65		0.0															
	81		0.0															
	97		0.0															
	113		0.0															
	129		0.0															
	145		0.0															
	151		0.0															
	167		0.0															
	183		0.0															
	199		0.0															
	215		0.0															
	4		0.056															
	20		0.056															
	36		0.056															
	52		0.056															

Handwritten text in the top right corner, possibly a title or header, including the characters "第 四 章" (Chapter 4).

Main body of handwritten text, appearing to be a list or series of entries, possibly related to a technical or scientific study.





FORMA PARA CODIFICACION

CODIFICADO POR Ballesteros

REVISADO POR Salinas

FECHA MARZO 1976

PAGINA 6 DE 10

PROGRAMA MURO-MARCO

1	5	7	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65	70	72	75	80
CALCULO DE LAS RIGIDECES DE ENTREPISO																		
A14143 CANTIDAD DE NUDOS EN CADA NIVEL																		
15	15	15	15	15														
A14144 NUMERACION DE LOS NUDOS POR NIVEL																		
4	20	36	52	68	84	100	116	132	146	154	170	186	202	218				
7	23	39	55	71	87	103	119	135	147	157	173	189	205	221				
10	26	42	58	74	90	106	122	138	148	160	176	192	208	224				
13	29	45	61	77	93	109	125	141	149	163	179	195	211	227				
16	32	48	64	80	96	112	128	144	150	166	182	198	214	230				
A14145 ALTURAS DE ENTREPISO																		
2.60		2.60		2.60		2.60		2.60		2.60				8.10.0				
A14146 PESOS POR NIVEL																		
33.23		33.23		33.23		33.23		33.23		33.23				8.10.0				
A14147 COEFICIENTE SISMICO																		
0.08														1.10.0				
A1415 INDICACION DEL TIPO DE CONDICION DE CARGA																		
ANALISIS DEL MURO MARCO A CONSIDERANDO CARGA ESTATICA Y EFECTO SISMICO																		
A1416 CANTIDAD DE BARRAS Y NUDOS CARGADOS																		
20	90																	
A14171 NUMERO DE BARRAS CON INDICE DE GRAFICACION																		
1	1	2	1	3	1	4	1	5	1	6	1	7	1	8	1			
9	1	10	1	11	1	12	1	13	1	14	1	15	1	16	1			
17	1	18	1	19	1	20	1											
A14172 CARGAS EN LAS BARRAS																		
1	4																	
= una carga intermedia, 4 barras restantes con la misma carga																		



187

The following is a list of the names of the persons who were present at the meeting held on the 18th day of August 1871. The names are given in the order in which they were called.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100
---	---	---	---	---	---	---	---	---	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	-----

FORMA PARA CODIFICACION

PROGRAMA MURO-MARCO

CODIFICADO POR Prado-Lagos

REVISADO POR Silinas

FECHA MARZO 1976

PAGINA 5 DE 10

1	5	7	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65	70	72	75	80
105		47		46	62	68				1								
106		66		65	81	82					1							
113		80		79	95	96				1								
114		83		82	98	99												
120		95		94	110	111				1								
121		98		97	113	114					1							
128		112		111	127	128				1								
129		115		114	130	131												
135		127		126	142	143				1								
136		152		151	167	168					1							
143		146		145	181	182				1								
144		149		148	184	185												
150		181		180	196	197				1								
151		184		183	199	200					1							
158		198		197	213	214				1								
159		201		200	216	217												
165		213		212	228	229				1								
A1412		CANTIDAD DE NUDOS RESTRINGIDOS, CONDICIONES DE CARGA Y RIGIDEZ REQUERIDA																
	15	1	0															
A1413		TIPO DE RESTRICCIÓN DE NUDOS (nudo, rest. en U, rest. en V, rest. en D) (10 IBS: 10 - 14, 15 - 20)																
	11111	17111	33111	49111	65111	81111	97111	113111	129111	145111								
	151111	167111	183111	199111	215111													
A14141		CANTIDAD DE NIVELES Y NUDOS POR NIVEL																
	5	15																
A14142		INDICACION DEL CALCULO DE RIGIDEZ DE ENTREPISO																

DATE	DESCRIPTION	AMOUNT	BALANCE
1/1/17	Opening Balance		100.00
1/15/17	Deposit	50.00	150.00
1/20/17	Withdrawal	(20.00)	130.00
1/25/17	Deposit	30.00	160.00
1/30/17	Withdrawal	(10.00)	150.00
2/5/17	Deposit	40.00	190.00
2/10/17	Withdrawal	(30.00)	160.00
2/15/17	Deposit	20.00	180.00
2/20/17	Withdrawal	(15.00)	165.00
2/25/17	Deposit	35.00	200.00
2/28/17	Withdrawal	(25.00)	175.00
3/1/17	Deposit	15.00	190.00
3/5/17	Withdrawal	(10.00)	180.00
3/10/17	Deposit	25.00	205.00
3/15/17	Withdrawal	(15.00)	190.00
3/20/17	Deposit	30.00	220.00
3/25/17	Withdrawal	(20.00)	200.00
3/30/17	Deposit	10.00	210.00
3/31/17	Closing Balance		210.00



U. N. A. M.  
INSTITUTO DE INGENIERIA

FORMA PARA CODIFICACION

PROGRAMA MURO-MARCO

CODIFICADO POR Ballesteros

REVISADO POR Salinas

FECHA Marzo 1976

PAGINA 4 DE 10

1	5	7	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65	70	72	75	80
	9		19	18	34	35												
	15		31	30	46	47				1								
	16		34	33	49	50					1							
	23		48	47	63	64				1								
	24		67	66	82	83												
	30		79	78	94	95				1								
	31		82	81	97	98					1							
	38		96	95	111	112				1								
	39		99	98	114	115												
	45		111	110	126	127				1								
	46		114	113	129	130					1							
	53		128	127	143	144				1								
	54		153	152	168	169												
	60		165	164	180	181				1								
	61		168	167	183	184					1							
	68		182	181	197	198				1								
	69		185	184	200	201												
	75		197	196	212	213				1								
	76		200	199	215	216					1							
	83		214	213	229	230				1								
	84		3	2	18	19												
	90		15	14	30	31				1								
	91		18	17	33	34					1							
	98		32	31	47	48				1								
	99		35	34	50	51												



1. The first part of the document discusses the importance of maintaining accurate records of all transactions. It emphasizes that every entry should be supported by proper documentation and that the books should be kept up-to-date at all times.

2. The second part of the document outlines the various methods used to collect and analyze data. It describes the process of gathering information from different sources and how it is then processed to identify trends and patterns.

3. The third part of the document focuses on the application of statistical techniques to the collected data. It explains how these methods are used to test hypotheses and draw conclusions about the underlying phenomena being studied.

4. The fourth part of the document discusses the challenges associated with data collection and analysis. It highlights the need for careful planning and execution to ensure the reliability and validity of the results.

5. The fifth part of the document provides a summary of the key findings and conclusions of the study. It reiterates the importance of rigorous data collection and analysis in understanding complex systems and processes.

6. The sixth part of the document offers recommendations for future research and practice. It suggests areas where further investigation is needed and provides guidance on how to improve the quality of data collection and analysis.

7. The seventh part of the document concludes the report and expresses the author's appreciation for the support and assistance provided throughout the project.



Handwritten text on a grid background, possibly a ledger or account book. The text is extremely faint and illegible due to low contrast and scan quality. It appears to be organized into columns and rows, with some larger numbers or headings visible in the upper left quadrant.





U. N. A. M.  
INSTITUTO DE INGENIERIA  
FORMA PARA CODIFICACION

PROGRAMA MURO-MARCO

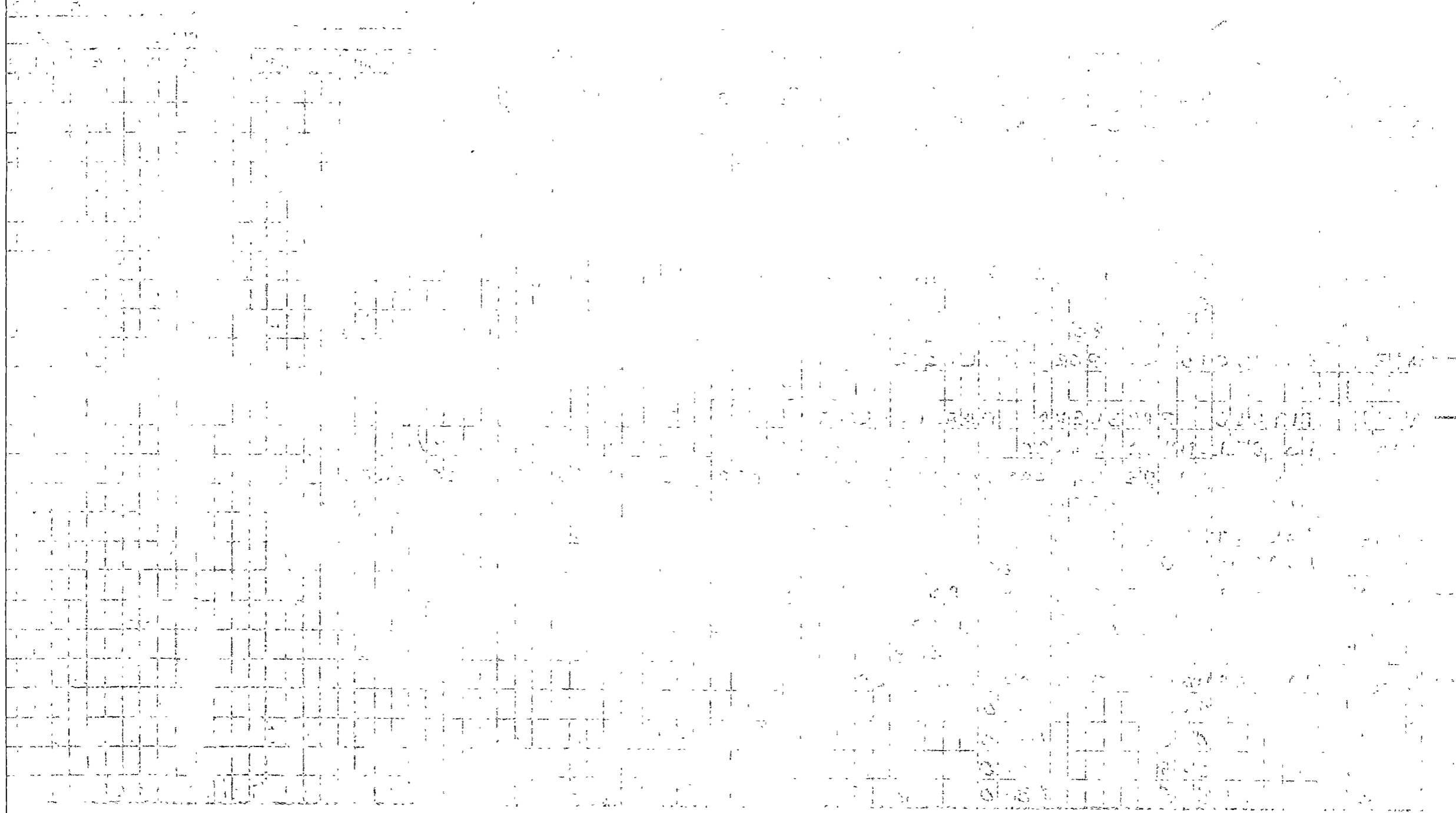
CODIFICADO POR Ballesteros

REVISADO POR Salinas

FECHA MARZO 1976

PAGINA 2 DE 10

1	5	7	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65	70	72	75	80
	33			1.0		0.0												
	48			1.0		13.0	1											
	49			1.5		0.0												
	64			1.5		13.0	1											
	65			3.5		0.0												
	80			3.5		13.0	1											
	81			4.0		0.0												
	96			4.0		13.0	1											
	97			4.5		0.0												
	112			4.5		13.0	1											
	113			5.0		0.0												
	128			5.0		13.0	1											
	129			5.5		0.0												
	144			5.5		13.0	1											
	145			6.5		0.0												
	150			6.5		13.0	1											
	151			7.5		0.0												
	166			7.5		13.0	1											
	167		8.025			0.0												
	182		8.025			13.0	1											
	183		8.550			0.0												
	198		8.550			13.0	1											
	199		9.075			0.0												
	214		9.075			13.0	1											
	215		9.600			0.0												



Handwritten text at the bottom of the page, possibly a title or description of the data shown in the grid above. The text is very faint and difficult to read.

FORMA PARA CODIFICACION

PROGRAMA MURO-MARCO

CODIFICADO POR Reillos Larios

REVISADO POR Salinas

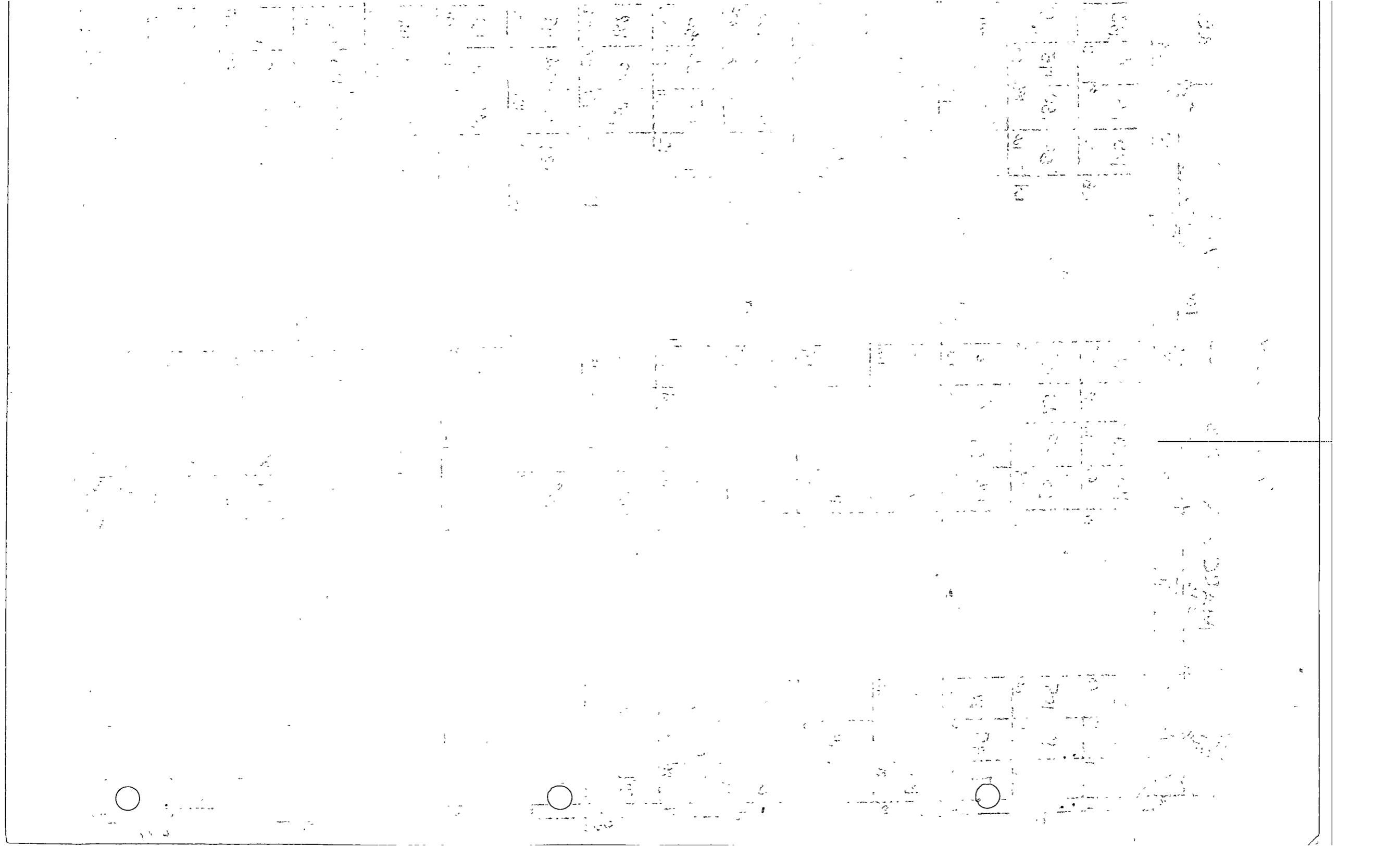
FECHA 12/23/70 197

PAGINA 1 DE 10

TARJETAS DE CONTROL

1	5	7	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65	70	72	75	8
?	JOB	MURØ	/	MARCOØ	;	USER	XYTZ	/	AB	;	CLASS=3	;	BEGIN	;				
	EXECUTE	(VP80)	DESFI	/	SMTA	/	P7405	;										
	PROCESS	180	;	IØ	180	;												
	BCL	TQUE																
—	A11	TITULO	PROBLEMA	GENERAL														(Pag)
		ANALISIS	DE	UNA	ESTRUCTURA	TIPO	MURO	MARCO										
—	A12	ARCHIVOS																
		10	15	20	25													
—	A13	ESTRUCTURAS	POR	ANALIZAR														
		1																
—	A141	TITULO	PROBLEMA	PARTICULAR														
		ANALISIS	DEL	MURO	MARCO	A												
—	A142	CANTIDAD	DE	BARRAS,	CUADRADOS,	MATERIAL,	NUDOS	Y	SECCIONES									
		20	165	1	230	2												
—	A143	CARACTERISTICAS	DEL	MATERIAL	(Identificación de material, E, $\nu$ , X)													
		1	1500000.0	0.15	2.4													
—	A144	CARACTERISTICAS	DE	LAS	SECCIONES	(Tipo, forma rectangular, b, h)												
		1	2	70.	15.													
		2	2	100.	20.													
—	A145	COORDENADAS	PUNTOS	NODALES														
		1	0.0	0.0														
		16	0.0	13.0	1													(1 indica posición verticalmente de nodo 1 a nodo 16)
		17	0.5	0.0														
		32	0.5	13.0	1													(1 indica posición verticalmente del nodo 17 al nodo 32)

IDENTIFICACION DE LA TARJETA POR PERFORAR (NO SE PERFORA)



# APLICACION

MARCO A E. Ballesteros  
200 200

15

			150	200	200	100	100	210	230							
			5	80	96	112	128	144	10	150	15	166	182	198	214	230
15	8	98	23		113	38	128	53					145	68	158	83
	31	49	65		79	95	111	127	143			165	181	197	213	229
260	90	15	105		30	120	45	135		20			60	150	75	165
	30	46	62		78	94	110	126	142			164	180	196	212	228
15	7	97	22		112	37	127	52		9		14	142	67	157	82
	29	45	61		77	93	109	125	141		149	163	179	195	211	227
12	89	14	104		29	119	44	134					59	149	74	164
	28	44	60		76	92	108	124	140			162	178	194	210	226
260	6	96	21		111	36	126	51		5			141	66	156	81
	27	43	59		75	91	107	123	139			161	177	193	209	225
10	88	13	103		28	118	43	133					58	148	73	163
	26	42	58		74	90	106	122	138		8	148	164	176	192	208
9	5	95	20		110	35	125	50					140	65	155	80
	25	41	57		73	89	105	121	137			159	175	191	207	223
260	87	12	102		27	117	42	132					57	147	72	162
	24	40	56		72	88	104	120	136			158	174	190	206	222
7	4	94	19		109	34	124	49					139	64	154	79
	23	39	55		71	87	103	119	135		7	147	163	179	195	211
6	86	11	101		26	116	41	131					56	146	71	161
	22	38	54		70	86	102	118	134			156	172	188	204	220
260	3	93	18		108	33	123	48					138	63	153	78
	21	37	53		69	85	101	117	133			155	171	187	203	219
4	85	10	100		25	115	40	130					55	145	70	160
	20	36	52		68	84	100	116	132		6	146	162	178	194	210
3	2	92	17		107	32	122	47					137	62	152	77
	19	35	51		67	83	99	115	131			153	169	185	201	217
2	84	9	99		24	114	39	129					54	144	69	159
	18	34	50		66	82	98	114	130			152	168	184	200	216
260	91	16			106	31	121	46					136	61	151	76
	17	33	49		65	81	97	113	129		145	161	177	193	209	225